ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Θεωρία Μεγάλων Αποκλίσεων

Νικηφόρος Μιμίκος-Σταματόπουλος
Επιβλέπων Καθηγητής:**Μιχάλης Λουλάκης**

Περίληψη

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία κάνουμε μία εισαγωγή στη Θεωρία Μεγάλων Αποκλίσεων. Η Θεωρία Μεγάλων Αποκλίσεων είναι ένας κλάδος της Θεωρίας πιθανοτήτων, ο οποίος ασχολείται με τις αποκλίσεις από μία τυπική συμπεριφορά, όπως την καταλαβαίνουμε από θεωρήματα: ΝΜΑ,Εργοδικό κ.α.. Στη μελέτη αυτών θα εστιάσουμε σε δύο ερωτήσεις. Πρώτον, ποια είναι η ταχύτητα σύγκλισης στο μηδέν ενός άτυπου ενδεχόμενου. Αυτό μας δίνει πολύ σημαντικές πληροφορίες για τη διαδικασία. Μπορεί για παράδειγμα να έχουμε δύο άτυπα ενδεχόμενα και η πιθανότητα του ενός να φθίνει εκθετικά γρήγορα στο μηδέν ενώ του άλλου όχι. Το πρώτο βασικό Θεώρημα που θα δείξουμε σε αυτή την κατεύθυνση είναι του *Cramer* το οποίο εισάγει την κεντρική ιδέα αλλαγής μέτρου.
Ένα δεύτερο πρόβλημα στο οποίο θα κάνουμε αναφορά, είναι η κατανομή μίας διαδικασίας στο όριο, αν έχουμε δεσμεύσει σε ένα άτυπο ενδεχόμενο. Τέτοια προβλήματα θα δούμε στην ενότητα Gibbs Conditioning Principle.

Ευχαριστίες

Δεν υπάρχει τρόπος να ευχαριστήσω αρκετά τον Καθηγητή κ.Μιχάλη Λουλάκη για όλη την καθοδήγηση, υποστήριξη και τα όσα είχα την ευκαιρία να εισπράξω κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών. Έπαιξε κεντρικό ρόλο σε αυτό το πολύ σημαντικό στάδιο για τη μετέπειτα πορεία μου. Με το μοναδικό του τρόπο διδασκαλίας, με εισήγαγε στην Στοχαστική Ανάλυση και στη Θεωρία Μεγάλων Αποκλίσεων, έναν πανέμορφο κλάδο τον οποίο δεν νομίζω ότι θα είχα διαφορετικά την ευκαιρία να εξερευνήσω. Κύριε Λουλάκη, σας ευχαριστώ που σε αυτό το μικρό χρονικό διάστημα μου δώσατε τόσα πολλά.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές κ.Σπυρίδων Αργυρό και κ.Βασίλειο Παπανικολάου για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή. Είχα την τύχη να βρεθώ στις διαλέξεις τους και οι γνώσεις που αποκόμισα από τη διδασκαλία του κυρίου Αργυρού στη Συναρτησιακή και Πραγματική Ανάλυση και τον κύριο Παπανικολάου στη Θεωρία Πιθανοτήτων ήταν καθοριστικής σημασίας για εμένα.

Επιπλέον, οφείλω πολλά στον Καθηγητή κ.Νικόλαο Σ. Παπαγεωργίου. Είναι ο άνθρωπος που με εισήγαγε στην Μη-Γραμμική ανάλυση και μου έδωσε πάρα πολλά, είτε αυτά ήταν στο πλαίσιο μαθηματικής παιδείας είτε στο πλαίσιο βοήθειας για τη μετέπειτα πορεία μου, πραγματικά τον ευχαριστώ.

Περιεχόμενα

Μέρος I

Θεωρία

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Κεντρική Ιδέα

Η θεωρία Μεγάλων Αποκλίσεων είναι ένας κλάδος της Θεωρίας πιθανοτήτων, ο οποίος ασχολείται με τις αποκλίσεις από μία τυπική συμπεριφορά.
Για να καταλάβουμε τι εννοούμε με αυτό, θα παρουσιάσουμε μία σύνοψη της μελέτης των στοχαστικών συστημάτων.

Έστω ένα στοχαστικό σύστημα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας. Υπό κατάλληλες υποθέσεις αυτό αποκτά μία ντετερμινιστική συμπεριφορά, όταν το μέγεθος του πηγαίνει στο άπειρο, π.χ. ΝΜΑ, Εργοδικό Θεώρημα. Τότε λέμε ότι το σύστημα έχει μία τυπική συμπεριφορά.

- Τυπική Συμπεριφορά

$$\mu_n \to \delta_x, \text{ ΝΜΑ, Εργοδικό ...}$$

- Τυπικές Αποκλίσεις

$$\sqrt{N}\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i - \mu\Big) \to^{(d)} \mathcal{N}(0,\sigma^2), \text{ ΚΟΘ}$$

δηλαδή, παρότι από το ΝΜΑ

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \to \mu, \text{ σ.β.}$$

μπορούμε να πάρουμε κάτι μη τετριμμένο για την απόκλιση πολλαπλασιάζοντας με $\sqrt{N}$.

- Μεγάλες Αποκλίσεις

  1. Πόσο γρήγορα πάει στο 0 η πιθανότητα μίας μεγάλης απόκλισης από την τυπική συμπεριφορά;
     Δηλαδή
     $$\mathbb{P}_n[A] \to 0$$
     για $\mu \notin \overline{A}$;
  2. Πώς πραγματοποιείται τυπικά μία μεγάλη απόκλιση;
     Δηλαδή
     $$\mathbb{P}_n[X \in \cdot|A] \to ?$$

Ας δούμε ένα γενικό παράδειγμα για το πως προσεγγίζουμε τις μεγάλες αποκλίσεις.
Έστω πως έχουμε ένα πολωνικό χώρο Σ και $\{\mu_\epsilon\}$ μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας σε αυτόν, τέτοια ώστε $\mu_\epsilon \to \delta_x$ για κάποιο $x \in \Sigma$. Παρατηρούμε ότι για κάθε κλειστό σύνολο $A : x \notin A$, έχουμε

$$\mu_\epsilon(A) \to 0.$$

Τέτοια ενδεχόμενα λέγονται άτυπα (πάντα σε αναφορά με την ακολουθία μέτρων).
Αυτό που μας ενδιαφέρει για το πρώτο ερώτημα στην Θεωρία Μεγάλων Αποκλίσεων είναι η ερώτηση: «Ακριβώς πόσο άτυπα είναι αυτά τα γεγονότα»;
Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση συνδέεται με το ρυθμό που συγκλίνει στο μηδέν η παραπάνω πιθανότητα. Αν δεχτούμε για λίγο ότι τα ενδεχόμενα αυτά είναι αρκετά άτυπα, τόσο ώστε να φθίνουν εκθετικά γρήγορα στο μηδέν και ακόμα ότι όλα τα μέτρα $\{\mu_\epsilon\}$ είναι απολύτως συνεχή ως προς κάποιο μέτρο μ στον Σ, τότε δεν θα ήταν παράλογο να υποθέσουμε ότι

$$\frac{d\mu_\epsilon}{d\mu} = e^{-\frac{I}{\epsilon}+o(\frac{1}{\epsilon})},\ I(x) = 0.$$

Το μόνο που θα μας έλειπε σε αυτή την περίπτωση είναι να κατασκευάσουμε μία διαδικασία που μας δίνει την I. Ο προφανής τρόπος είναι να κοιτάξουμε τα όρια

$$\epsilon \log \mu_\epsilon(A)$$

για $A : \mu_\epsilon(A) > 0$.
Θα έχουμε λοιπόν ότι

$$\epsilon \log \mu_\epsilon(A) = \epsilon \log \int_A e^{-\frac{I}{\epsilon} + o(\frac{1}{\epsilon})} d\mu = \Big(\log \int_A e^{-\frac{I}{\epsilon} + o(\frac{1}{\epsilon})} d\mu \Big)^\epsilon$$
$$\Longrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(A) = -\inf_A I,$$

αφού για κάθε $\epsilon > 0, \delta > 0$

$$\begin{cases} \|I\|_\infty = essup_{x\in\Sigma}|I(x)| & \geq \epsilon \log \int e^{I/\epsilon} d\mu \\ & \geq \epsilon \log \int\limits_{I > \|I\|_\infty - \delta} e^{I/\epsilon} d\mu \\ & \geq \epsilon \log \mu(I > \|I\|_\infty - \delta) + \|I\|_\infty - \delta. \end{cases} \tag{1.1}$$

(όπου το παραπάνω inf είναι το $ess - inf$ ως προς το μ).
Παρατηρούμε ότι η παραπάνω διαδικασία δεν είναι και τόσο προβληματική. Δηλαδή θα μπορούσαμε να ορίσουμε αυστηρά τα παραπάνω βήματα. Παρόλα αυτά κάναμε μία ισχυρή υπόθεση, που δεν μας επιτρέπει να φτιάξουμε μία γενική θεωρία και συγκεκριμένα, την ύπαρξη του μέτρου μ. Συνεπώς αν κρατήσουμε την πίστη μας στον εκθετικό ρυθμό αλλά όχι την υπόθεση για το μ, πρέπει να βρούμε μία διαφορετική διαδικασία για το παραπάνω που δεν περιέχει το μ. Η λύση δίνεται στον ορισμό 1.2.0.1 ο οποίος δόθηκε από τον $Varadhan$.

Πριν μπούμε στην αυστηρή θεωρία, θα προσπαθήσουμε να συνδέσουμε τις παραπάνω σκέψεις με ένα απλό παράδειγμα. Ας κοιτάξουμε μία ακολουθία ανεξάρτητων $Bernoulli$ τυχαίων μεταβλητών. Στη μελέτη σύγκλισης του δειγματικού μέσου όρου αυτών, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, έχουμε Θεωρήματα όπως το Κεντρικό Οριακό, Νόμος Μεγάλων Αριθμών κ.α.. Η σπουδαιότητα αυτών των Θεωρημάτων είναι μεγάλη για πολλούς λόγους. Ένας από αυτούς είναι το γεγονός ότι έχουν σχετικά ασθενείς υποθέσεις. Αυτό από την άλλη εγείρει και ένα ερώτημα: Πόση πληροφορία χάνουμε σε μία διαδικασία με την εφαρμογή αυτών των Θεωρημάτων, αν αυτή έχει ουσιαστικά καλύτερη συμπεριφορά από αυτή των υποθέσεων;
Εύκολα παρατηρούμε ότι αν έχουμε ροπές μεγαλύτερης τάξης παίρνουμε και καλύτερες εκτιμήσεις για την τάξη σύγκλισης στο μηδέν άτυπων ενδεχομένων. Για γενική $Bernoulli$ με πιθανότητα επιτυχίας p και $q = 1 - p$ έχουμε $\mathbb{E}[S_n] = np$ συνεπώς, για $x > p$

$$\mathbb{P}[S_n > nx] = \mathbb{P}[|S_n - np|^2 > n^2(x-p)^2] \leq \frac{1}{n^2(x-p)^2} Var(S_n) = \frac{npq}{(x-p)^2 n^2}$$

$$\frac{pq}{(x-p)^2 n}$$

όμως αν χρησιμοποιήσουμε ροπές 4ης τάξης(πρέπει να είναι ζυγός ο αριθμός για να είναι ισοδύναμες οι ανισότητες στην πιθανότητα), παίρνουμε

$$\mathbb{P}[S_n \geq nx] = \mathbb{P}[|S_n - np|^4 \geq n^4|x-p|^4]$$
$$\leq \frac{c_1 n + c_2(n)(n-1)}{n^4(x-p)^4} \leq \frac{c}{n^2}.$$

Τι θα γινόταν λοιπόν αν είχαμε ροπές κάθε τάξης;
ή ακόμα καλύτερα αν είχαμε εκθετικές ροπές;
Τότε, όπως θα δούμε μπορούμε να πάρουμε τον ακριβή ρυθμό. Για να δούμε ότι αυτή η διαδικασία πράγματι μπορεί να μας δώσει κάτι, ας δοκιμάσουμε να βρούμε τον ακριβή ρυθμό σύγκλισης σε αυτή την απλή περίπτωση:

Παράδειγμα 1.1.0.1. *Έστω $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή Bernoulli. Δηλαδή ακολουθούν τον νόμο $B_p := p\delta_1 + (1-p)\delta_0$.*
Παρότι η πιθανότητα ο δειγματικός μέσος όρος να πάρει μία τιμή $s \in (0,1)$ έχει μη τετριμμένη απάντηση μόνο για $s \in \mathbb{Q}$, μπορούμε να παρακάμψουμε αυτή την δυσκολία θεωρώντας την πιθανότητα

$$\mathbb{P}[S_n = [ns]], s \in (0,1), n \in \mathbb{N}$$

όπου παρατηρούμε πως

$$\frac{ns-1}{n} \leq \frac{[ns]}{n} \leq \frac{ns}{n} = s \implies \frac{[ns]}{n} \to s, n \to \infty$$

Έχουμε λοιπόν

$$\mathbb{P}[S_n = [ns]] = \frac{n!}{[ns]!(n-[ns]!)} p^{[ns]}(1-p)^{n-[ns]}$$

χρησιμοποιώντας Stirling, δηλαδή

$$n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$$

(όπου με $a_n \sim b_n$, εννοούμε πως $\frac{a_n}{b_n} \to 1, n \to \infty$). Έχουμε

$$\mathbb{P}[S_n = [ns]] \sim \frac{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}\cdot p^{[ns]}(1-p)^{n-[ns]}}{e^{-[ns]}[ns]^{[ns]}\sqrt{2\pi[ns]}e^{n-[ns]}(n-[ns])^{n-[ns]}\sqrt{2\pi(n-[ns])}}$$

$$= \frac{n^n}{[ns]^{ns}}\frac{(n-[ns])^{[ns]}}{(n-[ns])^n}\sqrt{\frac{n}{2\pi(n-[ns])[ns]}}(p^{[ns]}(1-p)^{n-[ns]})$$

$$= \Big(\frac{n}{[ns]}\Big)^n\Big(\frac{(n-[ns])}{[ns]}\Big)^{[ns]-n}\sqrt{\frac{n}{2\pi(n-[ns])[ns]}}(p^{[ns]}(1-p)^{n-[ns]})$$

$$\frac{1}{n}\log\mathbb{P}[S_n = [ns]] \sim \frac{n}{n}\log(\frac{n}{[ns]}) + \frac{[ns]-n}{n}\log(\frac{n-[ns]}{[ns]}) + \frac{1}{n}\log(\sqrt{\frac{n}{2\pi(n-[ns])[ns]}})$$

$$+\frac{[ns]}{n}\log p + \frac{n-[ns]}{n}\log(1-p)$$

επειδή $\frac{[ns]}{n} \to s$ ο όρος με τη ρίζα συμπεριφέρεται σαν $\frac{1}{n}\log(n) \to 0$ άρα έχουμε

$$\lim\frac{1}{n}\log(\mathbb{P}[S_n = [ns]]) = -\log s + (s-1)\log(\frac{1-s}{s}) + s\log p + (1-s)\log(1-p)$$

$$= -\log s + s\log(1-s) - \log(1-s) - s\log s + \log s + s\log p + \log(1-p) - s\log(1-p)$$

$$= -(s\log\frac{s}{p} + (1-s)\log\frac{1-s}{1-p}) =: -I_p(s)$$

$$\iff I_p(s) = s\log\frac{s}{p} + (1-s)\log\frac{1-s}{1-p}$$

συνεπώς βρήκαμε τον ακριβή ρυθμό σύγκλισης.
Θεωρώντας ότι $0\log(0) = 0$ έχουμε

$$I_p(s) = \begin{cases} s\log\frac{s}{p} + (1-s)\log\frac{1-s}{1-p}, & s \in [0,1] \\ +\infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{1.2}$$

το οποίο θα συμφωνούσε αν παίρναμε όρια για $s \notin [0,1]$ αφού τότε η πιθανότητα θα ήταν ταυτοτικά μηδέν. Τέλος,

$$I_p(s) = 0 \iff s = p$$

το οποίο είναι αναμενόμενο αφού όσο μεγαλύτερος ο ρυθμός πτώσης, τόσο πιο "απίθανο" το ενδεχόμενο και άρα η λιγότερο απίθανη τιμή θα έχει και τη μικρότερη ταχύτητα σύγκλισης. Κλείνοντας αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι *ενώ οποιαδήποτε τιμή $s \neq p$ θα είναι άτυπη και στο όριο, η πιθανότητα ο δειγματικός μέσος όρος να έχει αυτή την τιμή, είναι μηδέν, καταφέραμε να δώσουμε νόημα στο ότι μία τιμή κοντά στο p είναι λιγότερο απίθανη από μία τιμή μακριά του(αναφερόμενοι στο συγκεκριμένο παράδειγμα).*

1.2 Βασικοί Ορισμοί και Παραδείγματα

Μία κεντρική σχέση την οποία θα χρησιμοποιήσουμε συχνά στην εργασία και πολλές φορές θα μας προϊδεάζει για την συμπεριφορά κάποιον ποσοτήτων είναι η εξής:

Λήμμα 1.2.0.1.

Έστω $\alpha_n^m, n \in \{1,\dots,N\}, m \in \mathbb{N}, \alpha_n^m \geq 0$. *Τότε* :

$$\limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m}\log(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^m) = \max_{1\leq n\leq N}\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\log(\alpha_n^m).$$

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{1}{m}\log\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^m\right) - \max_{1\leq n\leq N}\frac{1}{m}\log(a_n^m) = \frac{1}{m}\log\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n^m}{\max\limits_{1\leq n\leq N} a_n^m}\right) \leq \frac{1}{m}\log(N).$$

$\square$

Ορισμός 1.2.0.1. *Έστω X, πολωνικός χώρος και $\mathcal{B}$ η Borel σ-άλγεβρα του. Έστω $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας. Έστω μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $I : X \to [0,\infty]$. Τότε, λέμε ότι ικανοποιείται η $LDP(\mu_\epsilon, \epsilon, I)$ με συνάρτηση ρυθμού I, αν για κάθε $A \in \mathcal{B}$,*

$$-\inf_{A^\circ} I \leq \liminf_{\epsilon\downarrow 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(A^\circ) \leq \limsup_{\epsilon\downarrow 0}\epsilon\log\mu_\epsilon(\overline{A}) \leq -\inf_{\overline{A}} I.$$

Ο ορισμός μπορεί να μην είναι άμεσα ξεκάθαρος και γίνεται αντιληπτός όταν αρχίζει κάποιος να αποδεικνύει τα βασικά Θεωρήματα.
Παρόλα αυτά μπορούμε να κάνουμε ένα μικρό σχόλιο για την σχέση του ορισμού και του Λήμματος 1.2.0.1 που μπορεί να βοηθήσει. Μία ιδέα που κρύβεται

πίσω από τον ορισμό και φαίνεται από το Λήμμα είναι, πως όταν αναφερόμαστε σε ένα άτυπο γεγονός η ταχύτητα που συγκλίνει στο μηδέν καθορίζεται από το λιγότερο άτυπο ενδεχόμενό του. Αυτό θα το δούμε να εκφράζεται και με αυστηρό τρόπο στην συνέχεια.

Μία ειδική περίπτωση για ακολουθίες:

Ορισμός 1.2.0.2. *Έστω (X, S) ένας πολωνικός χώρος, έστω $I : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ κάτω ημισυνεχής και έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας ορισμένα σε αυτόν. Θα λέμε ότι η ακολουθία $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με συνάρτηση ρυθμού I αν:*

- $-\inf\limits_{x\in A} I(x) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log(\mu_n(A))$, *για κάθε $A \subseteq X$ ανοικτό.*
- $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log(\mu_n(A)) \leq -\inf\limits_{x\in C} I(x)$, *για κάθε $C \subseteq X$ κλειστό,*

και θα γράφουμε ότι ικανοποιείται η $LDP(\mu_n, I, n)$

Στο υπόλοιπο του κειμένου όταν γράφουμε ότι ικανοποιείται η $LDP(\mu_n, n, I)$ θα υπονοούμε ότι κάθε όρος είναι όπως στον παραπάνω ορισμό.

Παρότι ζητάμε ο X να είναι πολωνικός, μπορεί να θεωρηθεί απλά τοπολογικός χώρος και όταν η απόδειξη δεν παρεκκλίνει πολύ από το ζητούμενο θα δίνεται στην γενική μορφή. Επίσης στο υπόλοιπο του κειμένου, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, οι χώροι θεωρούνται πολωνικοί.

Όταν αναφερόμαστε σε ένα τοπολογικό χώρο εφοδιασμένο με την $Borel$ σ-άλγεβρα και ένα μέτρο πιθανότητας σε αυτόν, θα θεωρούμε ότι έχουμε κάνει πλήρωση της σ-άλγεβρας.
Τέλος, πριν συνεχίσουμε, αναφέρουμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι πράγματι ειδική περίπτωση με την επιλογή $\epsilon = \frac{1}{[\frac{1}{\epsilon}]}$

Η κάτω ημισυνέχεια της συνάρτησης που απαιτείται στον ορισμό είναι μία μορφή ομαλότητας που έρχεται χωρίς κόστος στις υποθέσεις. Δηλαδή:

Πρόταση 1.2.0.1. *Αν $\tilde{I} : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ είναι μία συνάρτηση ώστε να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ορισμού 1.2.0.2, εκτός από αυτή της κάτω ημισυνέχειας, τότε η κάτω ημισυνεχής κανονικοποίηση*

$$I(x) := \sup_{G \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in G} \tilde{I}(y)$$

της $\tilde{I}$ ικανοποιεί τον ορισμό.

Απόδειξη. Άνω φράγμα:
Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $I \leq \tilde{I}$.

Κάτω φράγμα:
Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $G \subseteq X$ ανοικτό $\inf_{x \in G} I(x) = \inf_{x \in G} \tilde{I}(x)$. Πράγματι, έστω $G \subseteq X$ ανοικτό και $x \in G$. Τότε, $I(x) \geq \inf_{y \in G} \tilde{I}(y) \implies \inf_{x \in G} I(x) \geq \inf_{x \in G} \tilde{I}(x)$ και επειδή $I \leq \tilde{I}$, έχουμε το ζητούμενο. □

Το πρώτο ερώτημα που πρέπει να εξετάσουμε για τον παραπάνω ορισμό είναι κατά πόσο υπάρχει μοναδική (κάτω ημισυνεχής) συνάρτηση ρυθμού.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω X regular τοπολογικός χώρος και $\mu_n, n \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας. Τότε, υπάρχει το πολύ μία(κάτω ημισυνεχής) συνάρτηση ρυθμού ώστε να ικανοποιείται η $LDP(\mu_n, n, I)$.*

Απόδειξη. Έστω I, J δύο κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ώστε να ικανοποιείται η αρχή μεγάλων αποκλίσεων. Αρκεί να δείξουμε $I \geq J$.
Έστω $x \in X$, και $V \in \mathcal{N}(x)$. Επειδή ο χώρος είναι *regular* υπάρχει $U \in \mathcal{N}(x) : \overline{U} \subset V$. Τότε,

$$-I(x) \leq -\inf_U I \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(U) \leq$$

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(\overline{U}) \leq -\inf_{\overline{U}} J \leq -\inf_V J$$

$$\implies \inf_V J \leq I(x), \forall V \in \mathcal{N}(x)$$

αφού $\overline{U} \subset V$. Όμως I, J είναι κάτω ημισυνεχείς συνεπώς $J(x) = \sup_{G \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in G} J(y)$ και άρα από την παραπάνω ανισότητα $J \leq I$. □

Ένα ερώτημα που μπορούμε να θέσουμε είναι το κατά πόσο έχοντας το κάτω φράγμα για βασικά ανοιχτά μπορούμε να ισχυριστούμε το κάτω φράγμα για όλα τα ανοιχτά. Η απάντηση είναι θετική.

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω (X, S), μ_n, I όπως στον ορισμό 1.2.0.2 και έστω $\mathcal{B} \subset S$ μία βάση της τοπολογίας στον X. Τότε, αν*

$$-\inf_{x \in B} I(x) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(B)),$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}$ έπεται πως

$$-\inf_{x \in U} I(x) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(U)),$$

για κάθε $U \in S$

Απόδειξη. Έστω U ανοικτό. Παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε πως

$$-I(x) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(U)), \forall x \in U$$

αφού αν ισχύει η παραπάνω σχέση έπεται πως

$$\sup_{x \in U} -I(x) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(U))$$

$$\implies -\inf_{x \in U} I(x) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(U))$$

Έστω $x \in U$, τότε υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ με $B_x \subset U$, και άρα από την σχέση

$$I(x) \geq \inf_{x \in U} I$$

έχουμε

$$-I(x) \leq -\inf_{B_x} I \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(B_x)) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(U))$$

από όπου έχουμε το ζητούμενο. □

Το παραπάνω Θεώρημα φανερώνει τον τοπικό χαρακτήρα της συνάρτησης ρυθμού. Δηλαδή $I(x)$ είναι ο τοπικός ρυθμός μείωσης γύρω από το x.

Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, πολλές φορές μπορούμε να δείξουμε το άνω φράγμα για βασικές περιοχές και με το Λήμμα 1.2.0.1 να περάσουμε το άνω φράγμα σε συμπαγή. Συνεπώς μία ερώτηση που πρέπει να απαντήσουμε είναι: Με ποιες υποθέσεις αν γνωρίζουμε το άνω φράγμα για συμπαγή μπορούμε να συμπεράνουμε το άνω φράγμα για κλειστά;
Έχοντας κατά νου το $\mathbb{R}$ θα πρέπει το ουσιαστικό "βάρος" του μέτρου να βρίσκεται σε κάποια συμπαγή και να φθίνει γρήγορα στο υπόλοιπο. Με αυτή την σκέψη σε συνδυασμό με το ότι μελετάμε ποσότητες σε εκθετική κλίμακα διαμορφώνονται οι παρακάτω ορισμοί.

Ορισμός 1.2.2.1. *Έστω μ_n μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας σε ένα πολωνικό χώρο X και I μία συνάρτηση ρυθμού. Λέμε ότι ικανοποιείται η ασθενής $LDP(\mu_n, n, I)$ αν το άνω φράγμα της LDP ισχύει για συμπαγή σύνολα.*

Ορισμός 1.2.2.2. *Έστω X ένας πολωνικός χώρος και μ_n μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας. Η μ_n καλείται εκθετικά σφιχτή(με κανονικοποίηση n) αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $K_M \subset X$ συμπαγές τέτοιο ώστε*

$$\mu_n(K_M^c) \leq e^{-nM}.$$

Ορισμός 1.2.2.3. *Μία συνάρτηση ρυθμού I καλείται σφιχτή (tight) αν $\{I \leq a\}$ είναι συμπαγές για κάθε $a \in \mathbb{R}$(πολλές φορές στην βιβλιογραφία αναφέρεται και ως καλή (good rate function)).*

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω X πολωνικός χώρος και μ_n ακολουθία εκθετικά σφιχτών μέτρων και I μία συνάρτηση ρυθμού. Τότε, αν ικανοποιείται η ασθενής LDP θα ικανοποιείται και η LDP. Τέλος, η συνάρτηση ρυθμού θα είναι σφιχτή.*

Απόδειξη. Έστω $F \subset X$ κλειστό και $M > 0$, θεωρούμε K_M συμπαγές όπως στον ορισμό 1.2.2.2. Έχουμε,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(F) = \limsup_{n\to\infty} \{ \frac{1}{n} [\log(\mu_n(F \cap K_M) + \mu_n(F \cap K_M^c)]\}$$

$$=_{1.2.0.1} \max\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(F \cap K_M), \frac{1}{n} \log e^{-nM}\}$$

$$\leq \max\{-\inf_{K_M \cap F} I, -M\} \leq \max\{-\inf_F I, -M\}$$

Για $M \uparrow \infty$ έχουμε το ζητούμενο.
Για το ότι η συνάρτηση ρυθμού είναι σφιχτή αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για $M > 0$ και K_M συμπαγές όπως στον ορισμό 1.2.2.2

$$\inf_{K_{M+1}^c} I \geq -\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(K_{M+1}^c) \geq M+1$$

και άρα σύνολο $\{I \leq M\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του K_{M+1} συνεπώς συμπαγές. □

Τώρα θα δούμε ποια είναι η σχέση μεταξύ εκθετικής σφιχτότητας των μέτρων και σφιχτότητας της συνάρτησης ρυθμού. Πρώτα όμως θα χρειαστούμε ένα Λήμμα.

Λήμμα 1.2.3.1. *Έστω I σφιχτή συνάρτηση ρυθμού.*
Έστω $\{F_\delta\}_{\delta>0}$ μία nested οικογένεια κλειστών συνόλων και $F_0 := \bigcap_{\delta>0} F_\delta$. Τότε,

$$\inf_{y\in F_0} I(y) = \lim_{\delta>0} \inf_{y\in F_\delta} I(y).$$

Απόδειξη. Εφόσον η I είναι κάτω ημισυνεχής σφιχτή και κάτω φραγμένη(μη αρνητική), για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in F_\delta : I(x_\delta) = \inf_{F_\delta} I$. Θεωρούμε την ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_n = x_{\frac{1}{n}}$, τότε,

$$I(x_\delta) \leq \inf_{y\in F_0} I(y) = I(y_0)$$

$$\implies \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0 := \{I \leq I(y_0)\}$$

όπου C_0 είναι συμπαγές. Άρα υπάρχει υπακολουθία $x_{n_k}, k \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$x_{n_k} \to x_0, k \to \infty,$$

όπου $x_0 \in F_0$: Πράγματι, για $\delta > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$ άρα

$$\forall n \geq n_0 \implies x_n \in F_\delta$$

συνεπώς

$$x_0 \in \overline{\{x_{n_k}\}}_{n_k \geq n_0} \subset \overline{F}_\delta = F_\delta$$

$$\implies x_0 \in \bigcap_{\delta>0} F_\delta = F_0.$$

Έχουμε λοιπόν

$$I(x_0) \geq I(y_0)$$

όμως από την κάτω ημισυνέχεια έχουμε

$$I(y_0) \leq I(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} I(x_{n_k}) \leq I(y_0).$$

□

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω X, πολωνικός χώρος και έστω ότι ικανοποιείται η $LDP(\mu_n, n, I)$*

1. *Αν τα μ_n είναι εκθετικά σφιχτά. Τότε, η συνάρτηση ρυθμού είναι σφιχτή.*

2. *Έστω ότι η συνάρτηση ρυθμού είναι σφιχτή και πως X είναι τοπικά συμπαγής, τότε η ακολουθία μέτρων είναι εκθετικά σφιχτή.(Παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε μία τοπολογική απαίτηση που δεν σχετίζεται άμεσα με την απαίτηση να έχουμε πολωνικό χώρο, αφού αρκεί να σκεφτούμε ένα οποιοδήποτε διαχωρίσιμο απειροδιάστατο χώρο Banach και ένα οποιοδήποτε υπεραριθμήσιμο σύνολο με την τοπολογια του δυναμοσυνόλου του και το $(0,1)$ με την συνήθη τοπολογία για να δούμε ότι κανένας από τους δύο ορισμούς δεν συνεπάγεται τον άλλο).*

Απόδειξη.
1)Το αποδείξαμε προηγουμένως.
2)Έστω $l \geq 0$ τότε το σύνολο $C_l := \{I \leq l\}$ είναι συμπαγές. Για κάθε $x \in C_l$ θεωρούμε K_x μία συμπαγή περιοχή του, τότε υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος

$$x_1, \cdots, x_n \in C_l : C_l \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_{x_i}.$$

Έστω $c_l = \inf_{C_l} I, c_x := \inf_{K_x} I$ και $K = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} K_{x_i}\Big) \cap C_l$, τότε το K είναι συμπαγές και

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(K^c) \leq \min\{-\inf_{K_{x_i}\cap C_l} I, i \in \{1,\cdots,n\}\} \leq -\max\{c_{x_i} \wedge l, i \in \{1,\cdots,n\}\}$$

$$\leq -l$$

$\square$

Πολλές φορές θέλουμε να δούμε την συμπεριφορά μίας LDP όταν μεταφερόμαστε σε άλλο χώρο. Για παράδειγμα όταν έχουμε μία LDP σε ένα "μεγάλο" χώρο και θέλουμε να πάρουμε μία LDP σε ένα υποσύνολό του.

Θεώρημα 1.2.5. (*Contraction Principle*) *Έστω ότι ικανοποιείται η $LDP(\mu_n, n, I)$ στον X. Έστω $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση όπου Υ,Χ πολωνικοί χώροι. Έστω $Q_n := \mu_n f^{-1}$. Τότε, ικανοποιείται η $LDP(Q_n, n, J)$ όπου J είναι η κάτω ημισυνεχής κανονικοποίηση της*

$$\tilde{J}(y) := \inf_{x:f(x)=y} I(x)$$

(με την σύμβαση ότι το inf στο κενό είναι το άπειρο). Τέλος αν η I είναι σφιχτή, τότε $J = \tilde{J}$ και η J είναι επίσης σφιχτή.

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι η J είναι κάτω ημισυνεχής Έστω $C \subset Y$ κλειστό, τότε και το $f^{-1}(C) \subset X$ είναι κλειστό λόγω συνέχειας και έχουμε:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(C) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n[f^{-1}(C)] \leq - \inf_{x\in f^{-1}(C)} I(x) = - \inf_{y\in C} \tilde{J}(y).$$

Άν $A \subset Y$ ανοικτό,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n[f^{-1}(A)] \geq - \inf_{x\in f^{-1}(A)} I(x) = - \inf_{y\in A} \tilde{J}(y).$$

Άρα από 1.2.0.1 ικανοποιείται η LDP.
Έστω ότι η I σφιχτή, τότε η σχέση $\tilde{J}(y) < \infty$ συνεπάγεται ότι $f^{-1}(y)$ είναι μη κενό κλειστό και άρα, εφόσον η Ι είναι κάτω ημισυνεχής υπάρχει $x \in f^{-1}(y)$ τέτοιο ώστε $I(x) := \tilde{J}(y)$. Συνεπώς έχουμε $\{\tilde{J} \leq c\} = f\{I \leq c\}$ για κάθε c όμως η συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές και άρα κλειστό αφού είμαστε σε μετρικοποιήσιμο χώρο(αρκεί $Hausdorff$). Τέλος αφού η ίδια η $\tilde{J}$ είναι κάτω ημισυνεχής έπεται ότι $\tilde{J} = J$. $\square$

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω απόδειξη το ότι τα σύνολα $\{\tilde{J} \leq c\}$ είναι κλειστά ήταν απόρροια της συμπάγειας των επιπέδων της Ι. Για την ακρίβεια αν η Ι δεν είναι σφιχτή, τότε η $\tilde{J}$ μπορεί να μην είναι κάτω ημισυνεχής και άρα $J \neq \tilde{J}$.

Παράδειγμα 1.2.5.1. *Έστω* $X = \mathbb{R}$ *και* $\mu_n : \frac{d\mu_n}{dx}(x) = \phi_n(x)$, *όπου*

$$\phi_n(x) = nx^{-2}e^{1-\frac{n}{x}}\mathbb{1}_{(0,n)}(x).$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι δεν είναι εκθετικά σφιχτή.
Έστω ότι υπάρχει συμπαγές K *τέτοιο ώστε* $\mu_n(K^c) \leq e^{-n}$ *τότε, υπάρχει* $a > 0$ *τέτοιο ώστε* $K \subseteq [0, a]$ *άρα για* n *αρκετά μεγάλο*

$$\mu_n(K) \leq \mu_n([0, a]) \implies$$

$$e^{-n} \geq \mu_n(K^c) \geq \mu_n([a, \infty)) = \mu_n([a, n]) = \int_a^n \frac{1}{n}\left(\frac{n}{x}\right)^2 e^{1-\frac{n}{x}} dx =^{y=\frac{n}{x}}$$

$$= \int_1^{\frac{n}{a}} e^{1-y} dy = 1 - e^{1-\frac{n}{a}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

άτοπο.
Τέλος, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση κύμανσης είναι η $I(x) = \frac{1}{x}$ *η οποία δεν είναι είναι σφιχτή.*
Κάτω φράγμα
Έστω $t > 0$ *και* $r > 0 : t - r > 0$ *έχουμε*

$$\mu_n(B(t, r)) = \int_{\frac{n}{t+r}}^{\frac{n}{t-r}} e^{1-y} dy = e^{\frac{n}{t+r}}[e^{\frac{t+r}{t-r}} - 1] \implies$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(\mu_n(B(t, r))) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{n}{t + r} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[e^{\frac{t+r}{t-r}} - 1] = \frac{1}{t + r} = \inf_{(t-r,t+r)} I$$

αντίστοιχα για $t = 0$.
Άνω Φράγμα Για το κάτω φράγμα μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε έχουμε το ζητούμενο κοιτώντας το Θεώρημα Cramer μαζί με το ότι κάθε κλειστό στο $\mathbb{R}$ *με την συνήθη τοπολογία είναι* G_δ *και άρα μπορεί να γραφεί στην μορφή* $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^m$ *όπου* B_k^m *βασικές, ξένες μεταξύ τους ανοιχτές περιοχές.*

Κλείνουμε αυτό το Κεφάλαιο με μία γενίκευση του παραπάνω.

Θεώρημα 1.2.6. *Με τις υποθέσεις του παραπάνω Θεωρήματος για τους* X, Υ *και επιπλέον* I *σφιχτή. Έστω* f_n *μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με* $f_n : X \to Y$ *τέτοιες ώστε* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα πάνω στα συμπαγή και* $Q_n := \mu_n f_n^{-1}$. *Τότε, ικανοποιείται η* $LDP(Q_n, n, J)$ *με*

$$J(y) := \inf_{x : f(x) = y} I(x).$$

Κεφάλαιο 2

Βασικά Θεωρήματα

2.1 Το Θεώρημα του Cramer

2.1.1 Στο $\mathbb{R}$

Το Θεώρημα του $Cramer$ είναι από τα πιο σημαντικά και ευρέως χρησιμοποιούμενα Θεωρήματα στη περιοχή των Μεγάλων Αποκλίσεων. Οι τεχνικές και οι ιδέες που χρησιμοποιεί είναι κεντρικές σε πολλές αποδείξεις. Παρόλα αυτά το Θεώρημα στον $\mathbb{R}$ όπως θα δούμε βασίζεται αρκετά στην διάταξη του, συνεπώς δεν είναι ξεκάθαρα τα ουσιαστικά σημεία της απόδειξης που θα μπορούσαν να γενικευτούν. Βέβαια η απόδειξη είναι μία αρκετά καλή εισαγωγή στη φιλοσοφία του Θέματος και θα δοθεί.
Κάποιοι αρχικοί ορισμοί:

Ορισμός 2.1.0.1. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε την γεννήτρια συνάρτηση $M_\mu : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ με*

$$M_\mu(\lambda) := \mathbb{E}[e^{\lambda x}],$$

όπου η M ορίζεται. Με D_M συμβολίζουμε το πεδίο ορισμού της, δηλαδή $D_M := \{\lambda \in \mathbb{R} : M(\lambda) < \infty\}$. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα γράφουμε απλά M αντί για M_μ.

Ορισμός 2.1.0.2. *Έστω X μία τυχαία μεταβλητή όπως παραπάνω. Ορίζουμε $\Lambda : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$*

$$\Lambda(\lambda) := \log(\mathbb{E}[e^{\lambda x}])$$

και

$$\Lambda^*(x) := \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\langle\lambda, x\rangle - \Lambda(\lambda)\}$$

Στο υπόλοιπο του Κεφαλαίου $X_i, i \in \mathbb{N}$ θα είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν νόμο μ.

Λήμμα 2.1.0.1. *1)Η Λ είναι κυρτή και κάτω ημισυνεχής στο D_M. Επίσης η Λ^* είναι κυρτή και εάν $D_\Lambda = \{0\}$, τότε η Λ^* είναι ταυτοτικά μηδέν.*
2) Αν

$$\exists\lambda > 0 : \Lambda(\lambda) < \infty$$

τότε

$$\overline{x} := \mathbb{E}^\mu[x] < \infty.$$

(μπορεί $\overline{x} = -\infty$), και για κάθε $x \geq \overline{x}$, η

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\lambda\geq 0}[\lambda x - \Lambda(\lambda)] \tag{2.1}$$

είναι μη φθίνουσα. Όμοια αν $\Lambda(\lambda) < \infty$ για κάποιο $\lambda < 0$, τότε $\overline{x} > -\infty$(μπορεί $\overline{x} = \infty$), και για κάθε $x \leq \overline{x}$, η

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\lambda\leq 0}[\lambda x - \Lambda(\lambda)] \tag{2.2}$$

είναι για $x < \overline{x}$ μη αύξουσα συνάρτηση.
Αν $\overline{x}$ είναι πεπερασμένο, έχουμε πως

$$\Lambda^*(\overline{x}) = 0$$

και

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}\Lambda^*(x) = 0 \tag{2.3}$$

3) Η $\Lambda(\cdot)$ είναι διαφορίσιμη στο D_Λ° με

$$\Lambda'(\eta) = \frac{1}{M(\eta)}\mathbb{E}[X_1 e^{\eta X_1}] \tag{2.4}$$

και

$$\Lambda'(\eta) = y \implies \Lambda^*(y) = \eta y - \Lambda(\eta). \tag{2.5}$$

Απόδειξη. 1)Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in (0,1)$. Προφανώς ικανοποιείται η σχέση $\frac{1}{\lambda^{-1}} + \frac{1}{(1-\lambda)^{-1}} = 1$ και άρα από ανισότητα Hölder

$$\log(\mathbb{E}[e^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}]) \leq \log(\mathbb{E}[e^{\frac{\lambda x_1}{\lambda}}]^{\lambda}\mathbb{E}[e^{\frac{(1-\lambda)x_2}{(1-\lambda)}}]^{(1-\lambda)}) = \lambda\log(\mathbb{E}[e^{x_1}])+(1-\lambda)\log\mathbb{E}[e^{x_2}].$$

Η κάτω ημισυνέχεια είναι άμεση από $Fatou$. Η κυρτότητα της Λ^* είναι άμεση από τον ορισμό της. Τέλος, αν $D_\Lambda = \{0\}$ τότε

$$\Lambda^*(x) = \Lambda(0) = 0.$$

2)Έστω πως

$$\Lambda(\lambda) = \log M(\lambda) < \infty, \text{ για κάποιο } \lambda > 0,$$

τότε,

$$\int_0^{+\infty} x d\mu < \frac{M(\lambda)}{\lambda} < \infty$$

συνεπώς $\overline{x} < \infty$.
Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ από την ανισότητα του $Jensen$ έχουμε

$$\Lambda(\lambda) = \log(\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]) \geq \mathbb{E}[\log e^{\lambda X_1}] = \lambda\overline{x}$$

συνεπώς ισχύει η 2.1 αφού για $\lambda < 0, x \geq \overline{x}$ έπεται πως

$$\lambda\overline{x} > \lambda x \implies \lambda x - \Lambda(\lambda) < \lambda\overline{x} - \Lambda(\lambda).$$

Αν $\overline{x} = -\infty$, τότε,

$$\Lambda(\lambda) = \infty, \text{ για κάθε } \lambda < 0$$

συνεπώς και πάλι ισχύει η 2.1.
Έστω λοιπόν πως $\overline{x} \in \mathbb{R}$ και άρα από την παραπάνω ανισότητα($Jensen$) έπεται πως $\Lambda^*(\overline{x}) = 0$ και άρα ισχύει η 2.1, η μονοτονία επίσης είναι άμεση.

Η περίπτωση $\Lambda(\lambda) < \infty$ για κάποιο $\lambda < 0$ έπεται από τα προηγούμενα θεωρώντας την τ.μ. $-X$.

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \Lambda^*(x) = 0.$$

Στην περίπτωση όπου $D_\Lambda = \{0\}$, έχουμε δείξει ότι $\Lambda^* \equiv 0$ συνεπώς ισχύει. Επίσης αν $\overline{x} \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\Lambda^*(\overline{x}) = 0 \text{ και } \Lambda^* \geq 0.$$

Η μόνη περίπτωση λοιπόν που πρέπει να μελετήσουμε είναι για $\overline{x} = -\infty$ και $\Lambda(\lambda) < \infty$ για κάποιο $\lambda > 0$(διότι $D_\Lambda \neq \{0\}$ και η περίπτωση $\Lambda(\lambda) < \infty$ για κάποιο $\lambda < 0$ προκύπτει όπως πρίν θεωρώντας την $-X$).
Από την ανισότητα *Chebyshev* και την 2.1

$$\log \mu([x,\infty)) \leq \inf_{\lambda \geq 0} \log \mathbb{E}[e^{\lambda(X_1 - x)}] = -\sup_{\lambda\geq 0}\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\} = -\Lambda^*(x).$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to-\infty} \Lambda^*(x) \leq \lim_{x\to-\infty} \{-\log\mu([x,\infty))\} = 0,$$

και άρα ισχύει η 2.3.
3) Για να αποδείξουμε την 2.4 θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του *Lebesque*.

$$f_\epsilon(x) = \frac{e^{(\eta+\epsilon)x} - e^{\eta x}}{\epsilon}$$

$$g_\eta(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(\eta+\epsilon)x} - e^{\eta x}}{\epsilon} \mu(dx) = \mathbb{E}[f_\epsilon]$$

Όπου

$$f_\epsilon(x) \to x e^{\eta x}, \text{ καθώς } \epsilon \downarrow 0$$

και

$$|f_\epsilon(x)| = e^{\eta x} |\frac{e^{\epsilon x} - 1}{\epsilon}|$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big(\frac{e^{\epsilon x} - 1}{\epsilon}\Big) = e^{\epsilon x}\frac{(x\epsilon - 1 + e^{-\epsilon x})}{\epsilon^2} \geq 0,$$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, |\epsilon| < \delta, \delta \text{ αρκετά μικρό.}$$

άρα για $\epsilon \in (-\delta, \delta)$

$$|f_\epsilon| \leq e^{\eta x} |\frac{e^{\delta x} - 1}{\delta}| =: h(x)$$

Τέλος,

$$\mathbb{E}[|h(X_1)|] < \infty$$

συνεπώς από Θ.Κ.Σ.

$$\Lambda'(\eta) = \frac{\mathbb{E}[X_1 e^{\eta X_1}]}{M(\eta)}$$

Έστω πως

$$\Lambda'(\eta) = y$$

θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(\lambda) = \lambda y - \Lambda(\lambda)$$

η συνάρτηση g είναι κοίλη και

$$g'(\eta) = 0 \implies g(\eta) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} g(\lambda).$$

□

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα του $Cramer$.

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω $X_i, i \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με $X_i \sim \mu$. Έστω ακόμα $\mu_n, n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία του δειγματικού μέσου όρου, δηλαδή*

$$\mu_n(\cdot) = \mu^{\otimes}(\frac{S_n}{n} \in \cdot).$$

Τότε, ικανοποιείται η $LDP(\mu_n, I, n)$ με $I = \Lambda^*$.
Συγκεκριμένα για κάθε $F \subset \mathbb{R}$ κλειστό

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(F) \leq - \inf_{x \in F} \Lambda^*(x). \tag{2.6}$$

και για κάθε $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(G)) \geq - \inf_{x \in G} \Lambda^*(x). \tag{2.7}$$

Απόδειξη. Άνω φράγμα:

Η ιδέα είναι η εξής: θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $Chebyshev$ η οποία παρόλα αυτά μπορεί να είναι αρκετά "χαλαρή" και όπως φανταζόμαστε αυτό δεν θα μπορέσει να μας δώσει τα βέλτιστα άνω φράγματα. Παρόλα αυτά, η μέθοδος αυτή φαίνεται ο μόνος προφανής τρόπος να εμφανίσουμε την γεννήτρια

συνάρτηση και να βγάλουμε στην επιφάνεια το εκθετικό ρυθμό που θέλουμε. Συνεπώς θα πρέπει να κάνουμε μία βελτιστοποίηση στην ανισότητα $Chebyshev$, πάνω στα γραμμικά συναρτησιακά. Αναφέρουμε απλά ότι είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι με την ίδια σκέψη που κάνουμε βελτιστοποίηση πάνω στα γραμμικά συναρτησιακά θα μπορούσαμε να κάνουμε και σε πολύ μεγαλύτερους χώρους(οι οποίοι βέβαια θα ήταν ενδεχομένως δυσκολότερο να χειριστούμε), παρόλα αυτά αυτή η φαινομενικά "μικρή" συλλογή αρκεί.
Έστω $F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό, μη κενό. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

$$(1) I_F = \inf_{x \in F} \Lambda^*(x) = 0$$

$$(2) I_F > 0$$

Στην περίπτωση (1) παρατηρούμε ότι η σχέση ισχύει τετριμμένα.
Μένει λοιπόν να μελετήσουμε την (2). Από το Λήμμα 2.1.0.1 η σχέση $I_F > 0$ μας δίνει ότι $\overline{x}$ υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \geq 0$, από την ανισότητα $Chebyshev$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n([x \in \infty)) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\frac{S_n}{n} - x \geq 0\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{e^{\lambda \frac{S_n}{n} - \lambda x} \geq 1\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{e^{\lambda S_n - nx\lambda} \geq 1\}}] \\ &\leq \mathbb{E}[e^{\lambda S_n - n\lambda x}] = e^{-n\lambda x} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{\lambda X_i}] = e^{-n[\lambda x - \Lambda(\lambda)]}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Συνεπώς, αν $\overline{x} < \infty$, τότε, από την 2.1, για κάθε $x > \overline{x}$,

$$\mu_n([x, \infty)) \leq e^{-n\Lambda^*(x)}. \tag{2.9}$$

Αντίστοιχα αν $\overline{x} > -\infty$ και $x < \overline{x}$ επιλέγοντας στην παραπάνω διαδικασία $\lambda < 0$ από την 2.2 έχουμε

$$\mu_n((-\infty, x]) \leq e^{-n\Lambda^*(x)}. \tag{2.10}$$

Στην συνέχεια αντιμετωπίζουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις

$$\overline{x} \in \mathbb{R}, \text{ ή } \overline{x} \pm \infty$$

Πρώτα υποθέτουμε ότι $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Τότε, από 2.1.0.1 έχουμε $\Lambda^*(\overline{x}) = 0$, όμως $I_F > 0$ και άρα λόγω της 2.3 έπεται πως

$$\overline{x} \in F^c$$

όμως F^c : ανοιχτό συνεπώς αν ορίσουμε

$$(x_-, x_+) = \bigcup_{(a,b)\subset F^c : \overline{x}\in(a,b)} (a,b)$$

έπεται πως $x_- < x_+$ και αφού $\overline{x} \notin F \implies F^c \neq \emptyset$ και εφόσον F είναι μη κενό έχουμε πως τουλάχιστον ένα από τα x_-, x_+ είναι πεπερασμένο.
Έστω πως x_- πεπερασμένο, τότε

$$\forall \epsilon > 0, (x_- - \epsilon, x_-) \cap F \neq \emptyset$$

αφού διαφορετικά από τον ορισμό των x_-, x_+ θα είχαμε

$$(x_- - \epsilon, x_+) \subseteq (x_-, x_+)$$

άρα

$$x_- \in \overline{F} = F.$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\Lambda^*(x_-) \geq I_F.$$

Αντίστοιχα

$$\Lambda^*(x_+) \geq I_F$$

αν x_+ πεπερασμένο. Συνεπώς από την 2.9 για $x = x_+$ και την 2.10 για $x = x_-$, έχουμε πως

$$\mu_n(F) \leq \mu_n((-\infty, x_-]) + \mu_n([x, \infty)) \leq 2e^{-nI_F} \qquad (*)$$

$$\implies \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(\mu_n(F)) \leq -I_F.$$

Έστω τώρα πως $\overline{x} = -\infty$. Τότε, επειδή η Λ^* είναι αύξουσα, από την 2.3 έπεται πως

$$\lim_{x\to-\infty} \Lambda^*(x) = 0,$$

και άρα

$$(x_-, x_+ = (-\infty, x_+) \subset F^c$$

με

$$(x_+, x_+\epsilon) \cap F \neq \emptyset, \forall \epsilon > 0$$

συνεπώς

$$x_+ = \inf\{x : x \in F\}$$

το οποίο είναι πεπερασμένο αφού F μη κενό. Μάλιστα έχουμε πως $x_+ \in F$ αφού είναι κλειστό και άρα

$$\Lambda^*(x_+) \geq I_F$$

Τέλος,

$$F \subseteq [x, \infty)$$

και άρα από την 2.9

$$\begin{aligned} \mu_n(F) \leq \mu_n([x_+, \infty)) \leq e^{-n\Lambda^*(x_+)} \\ \implies \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(F)) \leq -\Lambda^*(x_+) \leq -I_F \end{aligned} \tag{**}$$

Η περίπτωση $\overline{x} = -\infty$ προκύπτει ανάλογα.

<u>Κάτω φράγμα:</u>

Από το Θεώρημα 1.2.2, έχουμε πως αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$, και κάθε $x \in \mathbb{R}, \mu \in M_1(\mathbb{R})$ έχουμε

$$-\Lambda^*(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n((x-\delta, x+\delta))) \tag{2.11}$$

Όμως παρατηρούμε πως αν $X \sim \mu$ τότε για την $Y = X - x$ έχουμε

$$\Lambda_Y(\lambda) = \log(\mathbb{E}[e^{\lambda(X-x)}]) = \Lambda(\lambda) - \lambda x,$$

όπου $\Lambda = \Lambda_X$. Άρα

$$\lambda y - \Lambda_Y(\lambda) = \lambda(x+y) - \Lambda(\lambda) =$$

συνεπώς

$$\Lambda_Y^*(\cdot) = \Lambda^*(\cdot + x).$$

Τώρα κάνουμε την εξής παρατήρηση

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} = -\Lambda^*(0)$$

και άρα αν δείξουμε ότι

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \Lambda(\lambda) = -\Lambda^*(0) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n((-\delta, \delta))) \tag{2.12}$$

για κάθε μέτρο $\mu, \delta > 0$ με τον παραπάνω μετασχηματισμό έχουμε το ζητούμενο.

Πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε την 2.12. Μία πρώτη απλή παρατήρηση είναι πως αν η ακολουθία X_i είναι σ.β.(υπό το μ) φραγμένη ισοδύναμα δηλαδή το στήριγμα του μ είναι συμπαγές, τότε η Λ ορίζεται παντού στο $\mathbb{R}$. Επίσης αν $\mu((-\infty, 0)) > 0, \mu((0, \infty)) > 0$, τότε, $\Lambda(\lambda) \uparrow \infty$, καθώς $|\lambda| \uparrow \infty$, γεγονός που μας επιτρέπει όταν μελετήσουμε το $\inf_{\mathbb{R}} \Lambda$ να περιοριστούμε σε συμπαγείς περιοχές του μηδενός. Μελετάμε λοιπόν αρχικά το πρόβλημα υπό τις δύο παραπάνω υποθέσεις και θα δούμε στην συνέχεια πως μπορούμε να τις αφαιρέσουμε.
Υπενθυμίζουμε ότι από το Λήμμα 2.1.0.1 η Λ είναι συνεχής και διαφορίσιμη με

$$\Lambda(\eta) = \inf_{\mathbb{R}} \Lambda \implies \Lambda'(\eta) = 0.$$

Όμως λόγω της πιεστικότητας σε συνδυασμό με την κάτω συνέχεια(αφού είναι συνεχής) έπεται ότι υπάρχει τέτοιο $\eta \in \mathbb{R}$.
Σε αυτό το σημείο έρχεται η κεντρική ιδέα αλλαγής μέτρου, δηλαδή μέσω $Radon-Nikodym$ θα αλλάξουμε το μέτρο μας έτσι ώστε το νέο άτυπο ενδεχόμενο ($\frac{S_n}{n} \in (-\delta, \delta)$) να γίνει τυπικό. Ορίζουμε λοιπόν

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu}(x) = e^{\eta x - \Lambda(\eta)},$$

το οποίο πράγματι είναι μέτρο πιθανότητας αφού

$$\int_{\mathbb{R}} d\tilde{\mu} = \frac{1}{M(\eta)} \int_{\mathbb{R}} e^{\eta x} d\mu = 1.$$

Έστω, $\tilde{\mu}_n$ η κατανομή του $\frac{S_n}{n}$, όπου $\frac{S_n}{n}$ ο δειγματικός μέσος όρος μίας ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν νόμο $\tilde{\mu}$. Έστω $\epsilon > 0$ τότε

$$\begin{aligned}
\mu_n((-\epsilon, \epsilon)) &= \int_{|\sum_{i=1}^n x_i| < n\epsilon} \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_n) \\
&\geq e^{-n\epsilon|\eta|} \int_{|\sum_{i=1}^n x_i| < n\epsilon} \exp(\eta \sum_{i=1}^n x_i) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_n) \\
&= e^{-n\epsilon|\eta|} e^{\eta\Lambda(\eta)} \tilde{\mu}_n((-\epsilon, \epsilon)).
\end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την απλή ανισότητα

$$1 = \exp(\eta \sum_{i=1}^{n} x_i) \exp(-\eta \sum_{i=1}^{n} x_i) \geq \exp(\eta \sum_{i=1}^{n} x_i) e^{-n\epsilon|\eta|} \text{ στο } |\sum_{i=1}^{n} x_i| < n\epsilon$$

Από την 2.4 και τον ορισμό του η έπεται πως

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mu}}[X_1] = \frac{1}{M(\eta)} \int_{\mathbb{R}} x e^{\eta x} d\mu = \Lambda'(\eta) = 0.$$

Συνεπώς από τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}_n((-\epsilon, \epsilon)) = 1. \tag{2.13}$$

Από την 2.1.1, για $0 < \epsilon < \delta$ έχουμε πως

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((-\delta, \delta)) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((-\epsilon, \epsilon)) \geq \Lambda(\eta) - \epsilon|\eta|,$$

παίρνοντας το όριο για $\epsilon \downarrow 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα θα δούμε πως μπορούμε να αφαιρέσουμε την υπόθεση για συμπαγές στήριγμα υποθέτοντας ακόμα όμως ότι

$$\mu((-\infty, 0)) > 0, \mu((0, \infty)) > 0.$$

Η ιδέα είναι απλή. Θα περιορίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές σε συμπαγή διαστήματα και θα προσεγγίσουμε το μέτρο. Συγκεκριμένα, για $M > 0$, αρκετά μεγάλο ώστε $\mu([-M, 0)) \cdot \mu((0, M]) > 0$, ορίζουμε

$$\Lambda_M(\lambda) = \log \int_{-M}^{M} e^{\lambda x} d\mu.$$

Έστω $\mu_M \sim X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq M\}}$, και ν_n ο νόμος του δειγματικού μέσου όρου των *truncated* X_i. Έχουμε πως για κάθε $\delta > 0$,

$$\mu_n((-\delta, \delta)) \geq \nu_n((-\delta, \delta)) \mu([-M, M])^n.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι το ν έχει συμπαγή φορέα και εφαρμόζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα(με συνάρτηση ρυθμού $\Lambda_M(\lambda) - \log \mu([-M, M])$) έχουμε

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mu_n((-\delta, \delta)) \geq$$

$$\log \mu([-M,M]) + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \nu_n((-\delta,\delta)) \geq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \Lambda_M(\lambda).$$

Με $I_M = -\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \Lambda_M(\lambda)$ και $I^* = \limsup_{M\to\infty} I_M$, έχουμε πως

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((-\delta,\delta)) \geq -I^*. \tag{2.14}$$

Όμως η Λ_M είναι αύξουσα ως προς M, και άρα και το $-I_M$. Επίσης,

$$-I_M \leq \Lambda_M(0) \leq \Lambda(0) = 0 \implies -I^* \leq 0.$$

Εφόσον, τα I_M είναι πεπερασμένα για κάθε M αρκετά μεγάλο, έχουμε $-I^* > -\infty$. Άρα, τα επίπεδα $\{\lambda : \Lambda_M(\lambda) \leq -I^*\}$ είναι μη κενά συμπαγή και *nested*, συνεπώς έχουν μη κενή τομή. Έστω

$$\lambda_0 \in \bigcup_{M\geq M_0} \{\lambda : \Lambda_M(\lambda) \leq -I^*\}$$

όπου M_0 αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύουν οι παραπάνω υποθέσεις. Τέλος, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του *Lebesque*,

$$\Lambda(\lambda_0) = \lim_{M\uparrow\infty} \Lambda_M(\lambda_0) \leq -I^*,$$

συνεπώς το κάτω φράγμα στη 2.14 μας δίνει την 2.12.

Μένει να μελετήσουμε την περίπτωση όπου είτε $\mu((-\infty,0)) = 0$, είτε $\mu((0,\infty)) = 0$, σε κάθε περίπτωση όμως η συνάρτηση $\Lambda(\cdot)$ είναι μονότονη με

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \Lambda(\lambda) = \log \mu(\{0\}).$$

Συνεπώς η 2.12 έπεται από την παρατήρηση

$$\mu_n((-\delta,\delta)) \geq \mu_n(\{0\}) = \mu(\{0\})^n.$$

$\square$

Αξίζει να σημειώσουμε πως έχουμε αποδείξει κάτι ποιο ισχυρό από το ζητούμενο, δηλαδή έχουμε ένα άνω φράγμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$(*,**).

Αναφέρουμε ότι το Θεώρημα του *Cramer* παρότι μας δίνει την συνάρτηση ρυθμού και επομένως μας επιλύει το πρόβλημα με βάση τον τυπικό ορισμό που δώσαμε, μπορεί να αποτύχει να μας δώσει λύση στο πρόβλημα εύρεσης του ακριβή ρυθμού σύγκλισης όπως συζητήθηκε στην εισαγωγή. Συγκεκριμένα εκτός αν οι ουρές των μέτρων φθίνουν εκθετικά η συνάρτηση κύμανσης που βρίσκουμε δεν μας λέει τίποτα παραπάνω εκτός από το ότι οι ουρές δεν φθίνουν εκθετικά όπως φαίνεται από την παρακάτω περίπτωση.

Παράδειγμα 2.1.1.1. *Έστω $X_i, i \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στους πραγματικούς. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ και πως για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $b = b(\epsilon)) > 0$, τέτοιο ώστε*

$$\mathbb{P}[X_1 > b] \geq e^{-\epsilon b}.$$

Τότε, η συνάρτηση κύμανσης είναι ταυτοτικά μηδέν στο $[\mathbb{E}[X_1], \infty)$.

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$1 \geq \mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \geq \mathbb{E}[X_1] + \delta] \geq \mathbb{P}[\frac{S_{n-1}}{n-1} \geq \mathbb{E}[X_1]] \cdot \mathbb{P}[X_1 \geq n\delta + \mathbb{E}[X_1]]$$

συνεπώς

$$0 \geq \frac{1}{n}\log\Big(\mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \geq \mathbb{E}[X_1]+\delta]\Big) \geq \frac{1}{n}\log\Big(\mathbb{P}[\frac{S_{n-1}}{n-1} \geq \mathbb{E}[X_1]]\Big)+\frac{1}{n}\log\Big(\mathbb{P}[X_1 \geq n\delta+\mathbb{E}[X_1]]\Big).$$

Έστω $\epsilon > 0$ τότε για $b > 0$ όπως και στην εκφώνηση υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ να έχουμε

$$\frac{1}{n}\log\Big(\mathbb{P}[X_1 \geq n\delta + \mathbb{E}[X_1]]\Big) \geq -\epsilon\delta - \epsilon\frac{\mathbb{E}[X_1]}{n}$$

και ο όρος

$$\mathbb{P}[\frac{S_{n-1}}{n-1} \geq \mathbb{E}[X_1]] = \mathbb{P}[\frac{S_{n-1}}{n-1} - \mathbb{E}[X_1] \geq 0] = \mathbb{P}[\sqrt{n}\Big(\frac{S_{n-1}}{n-1} - \mathbb{E}[X_1]\Big) \geq 0]$$

τείνει στο $\frac{1}{2}$ από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, άρα παίρνοντας το όριο $n \uparrow \infty$ έπεται

$$0 \geq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\Big(\mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \geq \mathbb{E}[X_1] + \delta]\Big) \geq -\epsilon\delta, \forall\epsilon > 0$$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\Big(\mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \geq \mathbb{E}[X_1] + \delta]\Big) = 0$$

Συνεπώς

$$I(x) = 0, \forall x > \mathbb{E}[X_1]$$

όμως από την κάτω ημισυνέχεια της I και το ότι είναι μη αρνητική έχουμε

$$I(\mathbb{E}[X_1]) = 0$$

□

2.1.2 Στον $\mathbb{R}^N$

Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα *Minimax* Θεώρημα το οποίο θα μας δώσει την ασθενή *LDP* και με κατάλληλες υποθέσεις για τις εκθετικές ροπές θα πάρουμε εκθετική σφιχτότητα.

Θεώρημα 2.1.2. *Minimax Θεώρημα στον* $\mathbb{R}^N$. *Έστω* $C \subset \mathbb{R}^N$ *συμπαγές και κυρτό. Έστω* $D \subset \mathbb{R}^N$ *κυρτό και* $f : C \times D \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $\forall\, y \in C,\ f(y,\cdot)$ *κοίλη και συνεχής και* $\forall \theta \in D,\ f(\cdot,\theta)$ *κυρτή. Τότε,*

$$\sup_{\theta\in D}\inf_{y\in C} f(y,\theta) = \inf_{y\in C}\sup_{\theta\in D} f(y,\theta)$$

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στον* $\mathbb{R}^N$. *Έστω* μ_n *ο νόμος του δειγματικού μέσου όρου* $\frac{S_n}{n}$. *Τότε, ικανοποιείται η ασθενής* $LDP(\mu_n, n, I)$ *με*

$$I(x) := \sup_{\theta\in\mathbb{R}^N}\{\langle\theta, x\rangle - \Lambda(\theta)\} \qquad (*)$$

Αν επιπλέον $M(\theta) < \infty, \forall\,\theta \in \mathbb{R}^N$ *και* $|\theta|^{-1}\log(M(\theta)) \to \infty, |\theta| \to \infty$. *Τότε, ικανοποιείται η* $LDP(\mu_n, n, I)$ *και η* I *είναι σφιχτή.*

Απόδειξη.
Θα δείξουμε το Θεώρημα μόνο με την υπόθεση ότι $|\theta|^{-1}\log(M(\theta)) \to \infty$.

Άνω φράγμα:
Για την ασθενή *LDP* αρκεί να αποδείξουμε το άνω φράγμα για συμπαγή υποσύνολα. Η βασική παρατήρηση είναι εξής. Έστω $C \subset \mathbb{R}^N$ φραγμένο. Τότε $\{\frac{S_n}{n} \in C\} \subseteq \{\langle\frac{S_n}{n}, \theta\rangle \geq \inf_{y\in C}\langle y, \theta\rangle, \forall\theta \in \mathbb{R}^N\}$. Αυτό μπορούμε να το εκμεταλλευτούμε ως εξής για $\theta \in \mathbb{R}^N$

$$\mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \in C] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\langle\frac{S_n}{n},\theta\rangle\geq\inf_{y\in C}\langle y,\theta\rangle\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\langle S_n,\theta\rangle\geq n\inf_{y\in C}\langle y,\theta\rangle\}}] =$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\langle \frac{S_n}{n},\theta\rangle - \inf_{y\in C}\langle y,\theta\rangle \geq 0\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\exp(\langle \frac{S_n}{n},\theta\rangle - \inf_{y\in C}\langle y,\theta\rangle)\geq 1\}}] \leq$$

$$e^{-n \inf\limits_{y\in C}\langle y,\theta\rangle}\mathbb{E}[e^{\langle \theta, S_n\rangle}] = e^{-n \inf\limits_{y\in C}\langle \theta,y\rangle} M(\theta)^n.$$

Άρα,

$$\frac{1}{n}\log \mathbb{P}[\frac{S_n}{n}\in C] \leq -\sup_{\theta\in\mathbb{R}^N}\inf_{y\in C}\{\langle \theta, y, \rangle - \log M(\theta)\}$$

(Παρατηρούμε ότι έχουμε πάρει ένα άνω φράγμα για κάθε $n\in\mathbb{N}$).
Για να εφαρμόσουμε τώρα το 2.1.2 αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $f(y,\theta) := \langle \theta, y\rangle - \log M(\theta)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις και αν $D = \{\theta : M(\theta) < \infty\}$ το D είναι κυρτό. Συνεπώς έχουμε ότι για $K \subset \mathbb{R}^N$ κυρτό και συμπαγές

$$\frac{1}{n}\log \mathbb{P}[\frac{S_n}{n}\in K] \leq -\inf_{y\in K}\sup_{\theta\in\mathbb{R}^N}\{\langle \theta, y, \rangle - \log M(\theta)\} = -\inf_{y\in K} I(y)$$

Έστω τώρα $K \subset \mathbb{R}^N$ συμπαγές(δεν υποθέτουμε κυρτότητα) $\alpha \leq \inf\limits_K I$ και $\epsilon > 0$. Τότε, λόγω κάτω ημισυνέχειας $L_\epsilon := \{I \leq \alpha - \epsilon\}$ είναι κλειστό με $K \supset L_\epsilon^c$. Για κάθε $x\in K$ υπάρχει $C_x \in \mathcal{N}(x)$ κυρτή και φραγμένη περιοχή(και άρα $\overline{C_x}$ κυρτό και συμπαγές) με $C_x \subset L_\epsilon^c$. Λόγω της συμπάγειας υπάρχουν $x_1, \cdots x_n \in K : K \subset \cup_{i=1}^n C_{x_i}$ συνεπώς

$$\frac{1}{n}\log \mathbb{P}[\frac{S_n}{n}\in K] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[\frac{S_n}{n}\in C_{x_i}]$$

$$\implies \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \mathbb{P}[\frac{S_n}{n}\in K] \leq_{1.2.0.1} \max_{1\leq i\leq n}\frac{1}{n}\log \mathbb{P}[\frac{S_n}{n}\in C_{x_i}] \leq$$

$$\max_{1\leq i\leq n}\{-\inf_{C_{x_i}} I\} \leq -\alpha + \epsilon$$

και η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\alpha \leq \inf\limits_K, \epsilon > 0$ παίρνοντας $\alpha \uparrow \inf\limits_K, \epsilon \downarrow 0$ έχουμε το ζητούμενο. Για να δείξουμε την πλήρη LDP πρέπει να δείξουμε ότι έχουμε εκθετική σφιχτότητα.
Θα συμβολίζουμε με $S_n^{(i)}$ την $i-$οστή συντεταγμένη. Έστω $a, \theta > 0$ τότε,

$$\mathbb{P}[\frac{S_n^{(i)}}{n} \geq a] \leq e^{-n\theta a} M(\theta e_i)^n$$

(προκύπτει με την ίδια τεχνική που χρησιμοποιήσαμε στο άνω φράγμα) όπου e_i το σύνηθες στοιχείο της βάσης του $\mathbb{R}^N$. Συνεπώς αν $M > 0$ από την παραπάνω ανισότητα υπάρχει $a(M) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}[|S_n^{(i)}| \geq na] \leq \frac{e^{-Mn}}{N}, \forall i \in \{1, \cdots N\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

και άρα ο ορισμός της εκθετικής σφιχτότητας ικανοποιείται για $K = \{y : |y^{(i)}| \leq a(M), i \in \{1, \cdots, N\}\}$.

Κάτω Φράγμα:

Για το κάτω φράγμα δεν αρκούν απλές εκτιμήσεις όπως οι παραπάνω. Σαν ιδέα και μόνο θα πρέπει να εκμεταλλευτούμε πιο ουσιαστικές ιδιότητες της διαδικασίας. Η νέα αυτή ιδέα είναι πως αν δεσμεύσουμε την διαδικασία σε ένα άτυπο ενδεχόμενο τότε αλλάζοντας κατάλληλα το μέτρο πιθανότητας αυτό το ενδεχόμενο θα είναι πλέον το τυπικό. Η ιδέα αλλαγής μέτρου είναι κεντρική στα κάτω φράγματα όπως θα δούμε και σε επόμενα κεφάλαια.

Έστω $G \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό, $x \in G$ και $\epsilon_x > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \epsilon_x) \subset G$. Εφαρμόζοντας και πάλι το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης όπως στην απόδειξη στο $\mathbb{R}$ έπεται πως η M είναι παντού διαφορίσιμη. Η συνάρτηση

$$\theta \cdot x - \log M(\theta)$$

είναι κοίλη ως προς θ επίσης από την συνθήκη $|\theta|^{-1} \log(M(\theta)) \to \infty, |\theta| \to \infty$ έχουμε πως

$$|\theta|^{-1}(\theta \cdot x - \log M(\theta)) \to -\infty$$

συνεπώς για να βρούμε το μέγιστο αρκεί να περιοριστούμε σε ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και άρα λόγω συνέχειας υπάρχει θ_x τέτοιο ώστε

$$\theta_x \cdot x - \log M(\theta_x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^N} \{\theta \cdot x - \log M(\theta)\}.$$

Όπου $\theta_x \cdot x - \log M(\theta_x) = I(x)$. Επίσης πρέπει(αφού είναι διαφορίσιμη οποίο προκύπτει με την ίδια διαδικασία όπως αυτή στο $\mathbb{R}$)

$$\nabla M(\theta_x) = x \cdot M(\theta_x).$$

Ορίζουμε λοιπόν το νέο μέτρο πιθανότητας ν_x στον $\mathbb{R}^N$ ως

$$\nu_x(A) = \frac{1}{M(\theta_x)} \mathbb{E}^{\mu}[e^{\theta_x \cdot X} \mathbb{1}_{\{X \in A\}}] \implies \frac{d\nu_x}{d\mu} = \frac{e^{\theta_x \cdot X}}{M(\theta_x)}.$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένη Σύγκλισης έχουμε πως

$$\mathbb{E}^{\mu}[e^{\theta_x X}|X|] < \infty$$

άρα

$$\mathbb{E}^{\nu_x}[X] = x$$

(το οποίο είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε, δηλαδή υπό αυτό το μέτρο είναι τυπικό). Αν λοιπόν Q_x είναι ο νόμος της ακολουθίας X_n υπό το νέο μέτρο ν_x έχουμε για G :ανοικτό

$$\mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \in G] \geq \mathbb{P}[|S_n - nx| < \epsilon n] = \int\limits_{|S_n - nx| < \epsilon n} d\mu^n$$

$$\geq \int \exp[-n\theta_x x - n\epsilon|\theta_x| + \theta_x S_n] \mathbb{1}_{|S_n - nx| < \epsilon n} d\mu^n$$

$$= \exp[-n\theta_x x - n\epsilon|\theta_x|] M(\theta_x)^n Q_x(|S_n - nx| < \epsilon n).$$

Από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών με το νέο μέτρο έχουμε πως

$$Q_x(|S_n - nx| < \epsilon n) \to 1.$$

Συνεπώς,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \in G] \geq -I(x) - \epsilon|\theta_x|$$

και το ζητούμενο έπεται άμεσα παίρνοντας $\epsilon \downarrow 0$ και στην συνέχεια sup ως προς $x \in G$.

$\square$

Η παραπάνω τεχνική, δεν μας δίνει την πιο γενική περίπτωση η οποία χρησιμοποιεί την υποαθροιστικότητα. Παρόλα αυτά η ιδέα είναι πολύ σημαντική αφού, με μία προσεκτική μελέτη της, παρατηρούμε ότι για το άνω φράγμα αυτό που μας χρειάστηκε είναι να κάνουμε μία βελτιστοποίηση στον δυϊκό. Όπως θα δούμε παρακάτω αυτή η απόδειξη σχεδόν αυτούσια μπορεί να μας δώσει ένα γενικό άνω φράγμα σε γενικούς γραμμικούς χώρους.

2.2 Τα Θεωρήματα των Varadhan και Bryc

Το Θεώρημα του $Varadhan$ είναι από τα πιο σημαντικά Θεωρήματα στην Θεωρία των Μεγάλων αποκλίσεων. Μας λέει ποια είναι η συμπεριφορά ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int e^{nf}d\mu_n.$$

Σκεπτόμενοι για λίγο χωρίς αυστηρότητα αν τα μέτρα $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιούν την $LDP(\mu_n, n, I)$ για κάποια κάτω ημισυνεχή I και

$$d\mu_n = e^{-nI(\cdot)+o(n)}d\mu$$

για κάποιο μέτρο μ, αναμένεται

$$\frac{1}{n}\log\int e^{nf}d\mu_n = \frac{1}{n}\log\int e^{n(f-I)+o(n)}d\mu \to \sup(f-I),$$

από το 1.2.0.1. Πράγματι έστω f μία μετρήσιμη φραγμένη συνάρτηση, μ μέτρο πιθανότητας και $\epsilon > 0$ τότε

$$\|f\|_\infty \geq \frac{1}{n}\log\int e^{nf}d\mu \geq \frac{1}{n}\log\int\limits_{f>\|f\|_\infty-\epsilon} e^{nf}d\mu$$

$$\geq \frac{1}{n}\log\mu(f>\|f\|_\infty-\epsilon)+\|f\|_\infty-\epsilon$$

παίρνοντας το όριο $n\to\infty$ και στην συνέχεια $\epsilon\downarrow 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Το Θεώρημα μας δίνει τις ακριβείς συνθήκες για τα παραπάνω.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω X πολωνικός χώρος. Έστω $\mu_n, n\in\mathbb{N}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο X και έστω $I : X \to \overline{\mathbb{R}}_+\cup\{+\infty\}$ κάτω ημισυνεχής συνάρτηση ώστε να ισχύει η $LDP(\mu_n, n, I)$. Έστω $f : X\to[-\infty,\infty)$ συνεχής συνάρτηση με*

$$\lim_{b\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int_{\{f\geq b\}}e^{nf}d\mu_n = -\infty$$

(π.χ. f φραγμένη) Τότε:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int e^{nf}d\mu_n = \sup(f-I) \tag{2.15}$$

Το Θεώρημα είναι πιο ισχυρό από την παραπάνω διατύπωση διότι προκύπτει από το συνδυασμό ενός άνω και ενός κάτω φράγματος.

Λήμμα 2.2.1.1. *Έστω $f : X \to [-\infty, \infty)$ κάτω ημισυνεχής συνάρτηση. Έστω ότι η ακολουθία $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί τη κάτω ανισότητα από τον ορισμό των μεγάλων αποκλίσεων με συνάρτηση ρυθμού I. Τότε,*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{nf} d\mu_n \geq \sup_{f\wedge I<\infty} (f - I) \tag{2.16}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in X : f(x) \wedge I(x) < \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) > -\infty$ διαφορετικά ο ισχυρισμός είναι τετριμμένος. Επιλέγουμε $c < f(x), c \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε $G := \{f > c\} \ni x$ και είναι ανοικτό αφού f κάτω ημισυνεχής. Ακόμα, παρατηρούμε ότι $\inf_F f \geq c$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{nf} d\mu_n &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_G e^{nf} d\mu_n \\ &\geq c + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \\ &\geq c - \inf_G \geq c - I(x).\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα έπεται παίρνοντας $c \uparrow f(x)$ και στην συνέχεια sup ως προς x. □

Λήμμα 2.2.1.2. *Έστω $f : X \to [-\infty, \infty]$ άνω ημισυνεχής. Έστω ότι η ακολουθία $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί την άνω ανισότητα από τον ορισμό των μεγάλων αποκλίσεων με συνάρτηση ρυθμού I και*

$$\lim_{b\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{f\geq b} e^{nf} d\mu_n = -\infty.$$

Τότε,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{nf} d\mu_n \leq \sup_{f\wedge I<\infty} (f - I) \tag{2.17}$$

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $f(x) < b, \forall x \in X$. Έστω, $n, M \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $B_{k,m} := \{x : b - \frac{k}{m} \leq f(x) \leq b - \frac{(k-1)}{m}\}$. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε το 1.2.0.1 πάνω στα διαφορετικά επίπεδα τιμών της f. Έχουμε,

$$\int e^{nf} d\mu_n = \sum_{k=1}^{M} \int_{B_{k,m}} e^{nf} d\mu_n + \int_{f<b-\frac{M}{m}} e^{nf} d\mu_n.$$

Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int e^{nf}d\mu_n \\
&\leq \max_{1\leq k\leq M}\{\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int_{B_{k,m}}e^{nf}d\mu_n\}\vee\{\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int_{f<b-\frac{M}{m}}e^{nf}d\mu_n\} \\
&\leq \max_{1\leq k\leq M}\{b-\frac{k-1}{m}-\inf_{f\geq b-\frac{k}{m}}I\}\vee\{b-\frac{M}{m}\} \\
&\leq \max_{1\leq k\leq M}\{\sup_{f\geq b-\frac{k}{m}}(f-I)+\frac{1}{m}\}\vee(b-\frac{M}{m}).
\end{aligned}
$$

Στη δεύτερη ανισότητα, χρησιμοποιήσαμε την άνω ημισυνέχεια από την οποία έπεται ότι $\{f\geq b-\frac{k}{m}\}$ είναι κλειστό και άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το άνω φράγμα από την LDP και στην τελευταία την απλή σχέση $f-I\geq b-\frac{k}{m}-I$ στο $\{f\geq b-\frac{k}{m}\}$.
Παίρνοντας το όριο $M\uparrow\infty$ έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int e^{nf}d\mu_n\leq\max_{k\geq 1}\{\sup_{f\geq b-\frac{k}{m}}(f-I)+\frac{1}{m}\}=\sup(f-I)+\frac{1}{m},\forall m\in\mathbb{N}.$$

Για την γενική περίπτωση αρκεί να θεωρήσουμε

$$g_b(x):=\begin{cases} f(x), & \text{για } f(x)<b \\ -\infty, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

οι συναρτήσεις g_b είναι κάτω ημισυνεχείς αφού τα σύνολα $\{f<b\}$ είναι ανοικτά από την συνέχεια της f και $g_b\leq f$. Για $b>0$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int e^{nf}d\mu_n &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\Big(\int e^{ng_b}d\mu_n+\int_{f\geq b}e^{nf}d\mu_n\Big) \\
&\leq \sup(g_b-I)\vee\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int_{f\geq b}e^{nf}d\mu_n \qquad \leq \sup(f-I)\vee\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int_{f\geq b}e^{nf}
\end{aligned}
$$

Παίρνοντας το όριο $b\uparrow\infty$ έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 1. *Η παρακάτω διαδικασία παρουσιάζει ένα τρόπο που παρουσιάζεται η ποσότητα στο Θεώρημα του Varadhan παραλλάσοντας την απόδειξη* *για το άνω φράγμα του Cramer. Έστω X, μ_n, I όπως και στις υποθέσεις του Θεωρήματος. Έστω $C(X,\mathbb{R})$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων από τον X στο $\mathbb{R}$. Τότε, για $C \subset X$ έχουμε $\{\frac{S_n}{n} \in C\} \subset \{nf(\frac{S_n}{n}) \geq n \inf_{x \in C} f(x)\}$ για κάθε $f \in C(X,\mathbb{R})$ άρα*

$$\frac{1}{n}\log(\mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \in C]) \leq \frac{1}{n}\log\mathbb{E}[e^{-n\inf_C f + nf(\frac{S_n}{n})}] = -\inf_C f + \frac{1}{n}\log\int e^{nf(x)}d\mu_n,$$

$$\forall f \in C(X,\mathbb{R})$$

για την ακρίβεια η συνέχεια όπως παρατηρούμε δεν χρειάζεται. Εδώ μπορεί να γίνει το σχόλιο πως αν στο Θεώρημα του Cramer χρησιμοποιούσαμε αυτή την πιο μεγάλη κλάση και γνωρίζαμε πως το όριο στο δεξί μέρος υπάρχει θα μπορούσαμε ενδεχομένως να ισχυριστούμε πως έχουμε μία LDP. Αυτό είναι ουσιαστικά το θεώρημα του Bryc.

Ας δούμε μία σημαντική εφαρμογή.

Παράδειγμα 2.2.1.1. *Έστω πως ισχύει η $LDP(\mu_n, n, I)$ και f συνεχής και φραγμένη. Ορίζουμε τα μέτρα πιθανότητας*

$$\frac{d\nu_n}{d\mu_n} = \frac{e^{nf}}{\mathbb{E}^{\mu_n}[e^{nf}}]$$

δηλαδή

$$\nu_n(A) = \frac{\mathbb{E}^{\mu_n}[e^{nf}\mathbb{1}_A]}{\mathbb{E}^{\mu_n}[e^{nf}]}$$

Τότε, η $LDP(\nu_n, n, J)$ ισχύει με

$$J(x) = I(x) - f(x) - \inf(I - f)$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο όρος

$$-\inf(I - f)$$

οφείλεται στο όριο

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\mathbb{E}^{\mu_n}[e^{nf}])$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο από το όριο πάνω σε κλειστά ή ανοικτά. Συνεπώς αρκεί να μελετήσουμε την συμπεριφορά του όρου $\mathbb{E}^{\mu_n}[e^{nf}\mathbb{1}_A]$.
Έστω A ένα μετρήσιμο σύνολο. Με g_A θα εννοούμε την συνάρτηση

$$g_A(x)\begin{cases} f(x), & \text{για } x \in A \\ -\infty, & \text{για } x \notin A. \end{cases}$$

Για C κλειστό, έχουμε ότι η g_C είναι άνω ημισυνεχής και η υπόθεση στο Λήμμα 2.2.1.1 ικανοποιείται από την f αφού είναι φραγμένη και άρα και από την g_C. Άρα

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\mathbb{E}^{\mu_n}[e^{nf}\mathbb{1}_C]) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{ng} d\mu_n \\ &\leq \sup(g_C - I) = \sup_F(f-I) = -\inf_F(I-f). \end{aligned}$$

Το κάτω φράγμα προκύπτει με την ίδια διαδικασία αφού τότε η g_A για A ανοικτό θα είναι κάτω ημισυνεχής και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 2.2.1.2 □

Τώρα θα αποδείξουμε το Θεώρημα του $Bryc$ το οποίο είναι ουσιαστικά το αντίστροφο του $Varadhan$. Δηλαδή ενώ το δεύτερο μας λέει ότι άν έχουμε μία LDP γνωρίζουμε την συμπεριφορά των παραπάνω ποσοτήτων, το Θεώρημα του $Bryc$ απαντά στο ερώτημα: Αν γνωρίζουμε τις παραπάνω ποσότητες για κάθε συνεχή συνάρτηση τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ικανοποιείται μία αρχή μεγάλων αποκλίσεων και για ποια συνάρτηση ρυθμού;

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας σε ένα μετρικό χώρο X. Υποθέτουμε ότι τα μ_n είναι εκθετικά σφιχτά. Αν το όριο*

$$\Gamma(f) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_X e^{nf} d\mu_n \tag{2.18}$$

υπάρχει για κάθε $f \in C_b(X,\mathbb{R})$. Τότε, ικανοποείται η $LDP(\mu_n, n, I)$ με συνάρτηση ρυθμού

$$I(x) := \sup_{f\in C_b(X)} \{f(x) - \Gamma(f)\}. \tag{2.19}$$

Παρατήρηση 2.

1. *Αν ικανοποιείται η* $LDP(\mu_n, n, I)$ *τότε* $\Gamma(f) = \sup(f - I)$

2. *Από το παραπάνω Θεώρημα βλέπουμε το πρώτο παράδειγμα στο οποίο η συνάρτηση ρυθμού δεν είναι αναγκαστικά κυρτή.*

Απόδειξη.

Ισχυρισμός 2.2.2.1. *Η συνάρτηση I είναι κάτω ημισυνεχής και μη αρνητική.*

Άμμεσο, αφού είναι το *supremum* σταθερών και άρα κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων. Όσο για το πρόσημο αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\Gamma(0) = 0$.
Κάτω Φράγμα:
Έστω $G \subset X$ ανοικτό, και έστω $x \in G$. Αφού ο X είναι μετρικός χώρος είναι και *normal*, συνεπώς υπάρχει $f \in C(X, [0,1])$ ώστε $f(x) = 1, f_{G^c} \equiv 0$. Έστω $c > 0$, ορίζουμε $f_c = c(f - 1)$. Έχουμε

$$\int_X e^{nf_c} d\mu_n = \int_G e^{nf_c} d\mu_n + \int_{G^c} e^{nf_c} d\mu_n \leq_{f_c|_{G^c} = -c, f_c|_G \leq 0} \mu_n(G) + \mu_n(G^c) e^{-nc}$$
$$\leq \mu_n(G) + e^{-nc}.$$

Και άρα από 1.2.0.1

$$\max\{\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G), -c\} \geq \liminf \frac{1}{n} \log \int_X e^{nf_c} d\mu_n = \Gamma(f_c)$$
$$=_{f_c(x)=0} -\{f_c(x) - \Gamma(f_c)\} \geq -I(x)$$

Παίρνοντας $a \uparrow \infty$ έχουμε

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geq I(x), \forall x \in G.$$

και άρα

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geq \sup_G -I = -\inf_G I.$$

Άνω φράγμα:
Λόγω της εκθετικής σφιχτότητας αρκεί να αποδείξουμε το άνω φράγμα για συμπαγή σύνολα.
Έστω $K \subset X$ συμπαγές. Όπως έχουμε κάνει και στις παραπάνω αποδείξεις θα δείξουμε το άνω φράγμα πρώτα για μπάλες. Έστω $x \in K$ και $c < \inf_K I$. Από

τον ορισμό της I υπάρχει $f \in C_b(X,\mathbb{R})$ ώστε $f_x(x) - \Gamma(f_x) > c$ και άρα το σύνολο $B_x = \{f_x > c + \Gamma(f_x)\}$ είναι ανοικτό και μή κενό με $x \in B_x$ συνεπώς για κάθε $y \in B_x : f_x(y) - \Gamma(f_x) > c$. Λόγω συμπάγειας υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $x_1, \cdots, x_N \in K$ ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{x_i}$. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{1}{n}\log\mu_n(B_x) = \frac{1}{n}\log\int_{B_x} e^{nf_x}e^{-nf_x}d\mu_n \leq \frac{1}{n}\log e^{-n\inf\limits_{B_x} f_x}\int_X e^{nf_x}$$

$$\implies \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(B_x) \leq -\inf_{B_x} f_x + \Gamma(f_x) \leq -c.$$

Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(K) \leq \max_{1\leq i\leq N}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(B_{x_i}) \leq$$

$$-\min_{1\leq i\leq N}\{\inf_{B_{x_i}} f_{x_i} - \Gamma(f_{x_i})\} \leq -c$$

Για $c \uparrow \inf_K I$ έπεται το ζητούμενο. □

2.3 Το Θεώρημα του Sanov

Το Θεώρημα του *Sanov* μας δίνει μία *LDP*, όχι στον χώρο τιμών τις διαδικασίας αλλά στον χώρο μέτρων. Μία απλή σκιαγράφηση αυτής της ενότητας είναι η εξής: θα γενικεύσουμε την ιδέα του άνω φράγματος από το *Cramer* ώστε να πάρουμε ένα γενικό άνω φράγμα σε γενικούς γραμμικούς χώρους. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική με του *Cramer* θα βρούμε την υποψήφια συνάρτηση ρυθμού (την οποία θα καλούμε εντροπία) η οποία θα έχει ως πεδίο ορισμού τον χώρο μέτρων του χώρου τιμών. Τέλος υπό κατάλληλες υποθέσεις θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η *LDP*.
Σε όλο το υπόλοιπο κείμενο θα δουλεύουμε με Σ : *Polish Space* εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

2.3.1 Ένα Γενικό Άνω Φράγμα για Συμπαγή Υποσύνολα Γραμμικών Χώρων

Έστω X, Y δύο γραμμικοί χώροι και $\alpha : X \times Y \to \mathbb{R}$ μία διγραμμική απεικόνιση. Εφοδιάζουμε τον X με την ασθενή τοπολογία $\sigma(X,Y)$. Έστω $E \subset X$ κλειστό κυρτό. Έστω $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_1(E)$. Ορίζουμε,

$$\overline{p}(y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_E e^{n\langle x,y\rangle} \mu_n(dx) \in \overline{\mathbb{R}}, y \in Y \tag{2.20}$$

και

$$\overline{p}^*(x) = \sup_{y\in Y}\{\langle x,y\rangle - \overline{p}(y)\} \in [0,\infty], x \in X. \tag{2.21}$$

Παρατήρηση 3. *Για να δούμε την ιδέα πίσω από αυτούς τους ορισμούς αρκεί να παρατηρήσουμε το εξής:*

$$\mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \in C] \leq \mathbb{P}[\langle \frac{S_n}{n}, y\rangle \geq \inf_{x\in C}\langle x,y\rangle], \forall y \in Y$$

$$\implies \mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \in C] \leq e^{-n \inf\limits_{x\in C}\langle x,y\rangle} \int_X e^{n\langle x,y\rangle} \mu_n(dx)$$

$$\implies \frac{1}{n}\log(\mathbb{P}[\frac{S_n}{n} \in C]) \leq -\sup_{y\in Y}\inf_{x\in C}\{\langle x,y\rangle - \frac{1}{n}\log(\int_X e^{n\langle x,y\rangle})\mu_n(dx)\}$$

αν $\mu_n(\cdot) = \mu^{\circ n}(\frac{S_n}{n} \in \cdot)$.

Θεώρημα 2.3.1. *Η συνάρτηση $\overline{p}$ είναι κυρτή και $\overline{p}^* : X \to [0,\infty]$ είναι κυρτή και κάτω ημισυνεχής. Τέλος, για κάθε κλειστό συμπαγές(δεν υποθέτουμε ότι το α διαχωρίζει σημεία και άρα ότι η τοπολογία είναι Hausdorff) $F \subset E$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(\mu_n(F)) \leq -\inf_F \overline{p}^*$$

.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder έπεται η κυρτότητα της $\overline{p}$. Η $\overline{p}^*$ είναι η *convex − conjugate* της $\overline{p}$ και άρα είναι κυρτή, κάτω ημισυνεχής, τέλος η σχέση $\overline{p}(0) = 0 \implies \overline{p}^*(y) \geq \langle 0,y\rangle - \overline{p}(0) = 0$.
Έστω $F \subset E$ συμπαγές και κλειστό. Τότε, έχουμε $\inf_F \overline{p}^* \in \mathbb{R}$, έστω $c < \inf_F \overline{p}^*$ και $\epsilon > 0$. Για κάθε $x \in F$ υπάρχει $y_x \in Y$ τέτοιο ώστε $\langle x,y\rangle - \overline{p}(y) > c$(από τον ορισμό). Η ιδέα τώρα είναι ίδια με αυτή που έχουμε εφαρμόσει σε αποδείξεις παραπάνω, δηλαδή αποδεικνύουμε το άνω φράγμα για περιοχές και καλύπτουμε στην συνέχεια με πεπερασμένες μπάλες το συμπαγές σύνολο από όπου και έχουμε το φράγμα.

Έστω $B_x := \{z \in X : |\langle z - x, y_x\rangle| < \epsilon\}$ μία βασική περιοχή του $x \in F$.

$$\mu_n(B_x) = \int_{B_x} \mu_n(dz) = \int_{B_x} e^{-n\langle z,y_x\rangle} e^{n\langle z,y_x\rangle} \mu_n(dz) \leq$$
$$e^{n(-\langle x,y_x\rangle+\epsilon)} \int_{B_x} e^{n\langle z,y_x\rangle} \mu_n(dz)$$
$$\implies \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(B_x)) \leq -\langle x, y_x\rangle + \epsilon + \overline{p}(y_x) \leq -c + \epsilon.$$

Λόγω συμπάγειας υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $\{x_1, \cdots, x_N\} \subset F$ ώστε $F \subset \cup_{i=1}^N B_{x_i}$. Συνεπώς

$$\frac{1}{n} \log(\mu_n(F)) \leq \frac{1}{n} \log(\mu_n(\cup_{i=1}^N B_{x_i}))$$

$$\implies \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\mu_n(F)) \leq_{1.2.0.1} -c + \epsilon$$

Το ζητούμενο έπεται για $\epsilon \downarrow 0, c \uparrow \inf_F \overline{p}^*$. □

Το παραπάνω Θεώρημα μας δίνει απλά ένα άνω φράγμα και όχι το βέλτιστο δηλαδή την συνάρτηση ρυθμού. Συνεπώς το επόμενο ερώτημα είναι πότε η συνάρτηση ρυθμού δίνεται από τον παραπάνω τύπο.

2.3.2 Απόδειξη Θεωρήματος

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή θα προσπαθήσουμε να βρούμε μία LDP στον χώρο των μέτρων.
Αρχικά ποιά θα είναι η ακολουθία μέτρων των οποίων την συμπεριφορά θέλουμε να μελετήσουμε;
Η απάντηση σε αυτό είναι απλή, αν $Y_i, i \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές σε κάποιον πολωνικό χώρο X, ορίζοντας

$$L_Y^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{Y_i}$$

δηλαδή την ακολουθία εμπειρικών μέτρων τότε μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία μέτρων που αντιστοιχεί στην κατανομή αυτών.
Πριν πούμε κάτι για αυτά τα μέτρα θα πρέπει να ορίσουμε μία σ-άλγεβρα στον

$M(X)$.
Αρχικά θα πρέπει να ορίσουμε μία τοπολογία. Υπάρχουν άμεσα δύο υποψήφιες

$$(1)\mathcal{T}^w : \text{η οποία παράγεται από τις απεικονίσεις}$$

$$\langle \nu, g\rangle := \int g d\nu, \text{για } g \in b\mathcal{B}, \nu \in M(X)$$

$$(2)\mathcal{T}^\tau : \text{η οποία παράγεται από τις απεικονίσεις}$$

$$\langle \nu, g\rangle := \int g d\nu, \text{για } g \in \mathcal{C}_b, \nu \in M(X).$$

Θα δούμε ότι και στις δύο τοπολογίες μπορούμε να βρούμε μία μορφή του Θεωρήματος παρόλα αυτά η $Borel$ σ-άλγεβρα της $\mathcal{T}^w$ είναι πολύ μεγάλη ώστε να έχουμε μετρήσιμότητα των $\delta : X \to M_1(X) : \delta(y) = \delta_y$ συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις η σ-άλγεβρα θα είναι η $Borel$ σ-άλγεβρα της $\mathcal{T}^\tau$.
Ας δοκιμάσουμε για λίγο χωρίς πολύ αυστηρότητα να βρούμε μία υποψήφια συνάρτηση ρυθμού.
Η πρώτη βασική παρατήρηση είναι ότι η συνάρτηση ρυθμού θα πρέπει να παίρνει υπόψιν το αρχικό μέτρο και αυτό διότι η συνάρτηση κύμανσης θα μας λέει υπό μία έννοια πόσο πιθανό είναι να δούμε άλλο μέτρο αν ακολουθούμε το αρχικό μας μέτρο. Με αυτή την παρατήρηση αναμένουμε η συνάρτηση ρυθμού να δίνει πεπερασμένες τιμές μόνο σε μέτρα που είναι απόλυτα συνεχή ως προς το αρχικό μας μέτρο.
Θα δοκιμάσουμε την ίδια τεχνική με του $Cramer$.
Έστω $\mu \in M_1(X)$, ορίζουμε

$$p(g) := \log \int e^g d\mu \tag{2.22}$$

(η αντίστοιχη $M(\lambda)$). Κοιτάμε την ποσότητα

$$\sup_{g\in b\mathcal{B}}\{\langle \nu, g\rangle - p(g)\}$$

για $\nu \in M_1(X)$.
Λειτουργώντας λίγο ακόμα εκτός αυστηρού πλαισίου και μεγιστοποιώντας την παραπάνω ποσότητα καταλήγουμε στην υποψήφια

$$H(\nu|\mu) := \begin{cases} \int f \log(f) d\mu, \ \text{αν } \nu \ll \mu, \frac{d\nu}{d\mu} = f \\ \infty, \ \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{2.23}$$

Η παραπάνω συνάρτηση καλείται **Εντροπία**.

Θεώρημα 2.3.2. *Οι συναρτήσεις p, H είναι συζυγείς κυρτές μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, H κυρτή και χαρακτηρίζεται από*

$$H(\nu|\mu) := \sup_{g\in b\mathcal{B}}\{\langle \nu, g\rangle - p(g)\}. \tag{2.24}$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι $p^* = H$.
Θεωρούμε το μέτρο

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{e^g}{\langle \mu, e^g\rangle}$$

Έχουμε

$$\langle \nu, g\rangle - H(\nu|\mu) = \int g\frac{e^g}{\mathbb{E}^\mu[e^g]}d\mu - \int \frac{e^g}{\mathbb{E}^\mu[e^g]}\log(\frac{e^g}{\mathbb{E}^\mu[e^g]})d\mu =$$

$$\log(\mathbb{E}^\mu[e^g]) = p(g)$$

$$\Longrightarrow p(g) \leq \sup_{\nu\in M_1(X)}\{\langle \nu, g\rangle - H(\nu|\mu)\} = H^*(g)$$

(αρκεί να πάρουμε sup στο M_1 αφού $H = \infty$ διαφορετικά). Άρα $H^* \geq p$.
Έστω $\nu \in M_1(X)$ με $\nu \ll \mu$ και $\frac{d\nu}{d\mu} = f$ ώστε $\mathbb{E}^\nu[|\log(f)|] < \infty$ αφού διαφορετικά $H = \infty$. Έχουμε,

$$\langle \nu, g\rangle - H(\nu|\mu) = \mathbb{E}^\nu[g - \log(f)] = \mathbb{E}^\nu[\log\frac{e^g}{f}] \leq_{(Jensen)} \log\mathbb{E}^\nu[\frac{e^g}{f}]$$

$$= \log(\mathbb{E}^\mu[e^g\mathbb{1}_{\{f>0\}}]) \leq \log\mathbb{E}^\mu[e^g] = p(g)$$

$$\Longrightarrow \sup_{\nu\in M_1}\{\langle \nu, g\rangle - H(\nu|\mu)\} \leq p(g),$$

συνεπώς $H^*(g) \leq p(g)$.
Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι $H \leq p^*$ αφού τότε, λόγω του ότι η p είναι κυρτή και κάτω ημισυνεχής έχουμε $H \leq p^* = H^{**} \leq H$.
Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι το πεδίο ορισμού της p^* πράγματι ταυτίζεται με αυτό της H.

1. Έστω ότι έχουμε $\nu \in M(X) : \nu(A) < 0$ για κάποιο μετρήσιμο υποσύνολο A. Η συνάρτηση $g^c_A = c\mathbb{1}_A \in b\mathcal{B}, \forall c \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$p^*(\nu) \geq \mathbb{E}^\nu[g^c_A] - \log\mathbb{E}^\mu[e^{g^c_A}] \geq c\mathbb{E}^\nu[\mathbb{1}_A]$$

Άρα παίρνοντας το $c \downarrow -\infty$ έχουμε ότι $p^*(\nu) = \infty$.

2. Έστω ότι έχουμε $\nu \in M_+(X) : \nu(X) > 1$ ή $\nu(X) < 1$. Τότε, για την συνάρτηση $g \equiv c \in b\mathcal{B}, c \in \mathbb{R}$ έχουμε
$$p^*(\nu) \geq \mathbb{E}^\nu[c] - \log(\mathbb{E}^\mu[e^c]) = c(\nu(X) - 1)$$
παίρνοντας $c \uparrow \infty, c \downarrow -\infty$ αντίστοιχα για τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε ότι
$$p^*(\nu) = \infty.$$

Συνεπώς αρκεί να μελετήσουμε την περίπτωση
$$\nu \in M_1(X).$$

Θα δείξουμε ότι $p^*(\nu) = \infty$ αν $\nu \not\ll \mu$.
Έστω $A \subset X$ μετρήσιμο με $\mu(A) = 0 < \nu(A)$. Τότε,
$$p^*(\nu) \geq \mathbb{E}^\nu[c\mathbb{1}_A] - \log \mathbb{E}^\mu[e^{c\mathbb{1}_A}] = c\nu(A)$$
παίρνοντας $c \uparrow \infty$ έχουμε $p^*(\nu) = \infty$.
Έστω λοιπόν $\nu \in M_1(X)$ με $\nu \ll \mu$ και $\frac{d\nu}{d\mu} = f$.
Ορίζουμε για $0 < a < 1 < b < \infty$
$$f_a^b = a \vee (f \wedge b)$$

Τότε,
$$p^*(\nu) \geq \mathbb{E}^\nu[\log f_a^b] - \log \mathbb{E}^\mu[f_a^b] \geq \mathbb{E}^\nu[\log f_a^b] - \log \mathbb{E}^\mu[f \vee a].$$
Εφόσον $\log f_a^b \geq \log a$, το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης μας δίνει ότι
$$\mathbb{E}^\nu[\log f_a^b] \to_{b\to\infty} \mathbb{E}^\nu[\log(f \vee a)] \geq \mathbb{E}^\nu[\log f] = H(\nu|\mu).$$

Συνεπώς
$$p^*(\nu) \geq H(\nu|\mu) - \log \mathbb{E}^\mu[f \vee a].$$
Τέλος, από την σχέση $0 \leq f \vee a \leq f + 1$ και από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι
$$\log \mathbb{E}^\mu[f \vee a] \to_{a\to\infty} \log \mathbb{E}^\nu[f] = 0.$$

Άρα
$$p^* \geq H.$$

□

Μέχρι στιγμής έχουμε δείξει ότι η εντροπία είναι κυρτή και κάτω ημισυνεχής. Θα δείξουμε ότι είναι μάλιστα αυστηρά κυρτή.

Πρόταση 2.3.2.1. *Η εντροπία είναι αυστηρά κυρτή.*

Απόδειξη. Άμμεσο αφού η συνάρτηση $x\log x$ είναι αυστηρά κυρτή □

Τώρα θα δούμε αν μπορούμε να πάρουμε το sup στην 2.24 σε πιο μικρή κλάση συναρτήσεων. Η απάντηση είναι θετική για την απόδειξη όμως χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.3.2.1. *Έστω X μετρικός χώρος και έστω $\mathcal{H}$ μία κλάση φραγμένων συναρτήσεων που περιέχει τον χώρο*

$$\mathcal{U}_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | \textit{φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχείς}\}$$

και είναι κλειστό υπό την ομοιόμορφη φραγμένη σημειακή σύγκλιση.
Δηλαδή αν

$$[\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H} : \max_n \sup_x |f_n(x)| < \infty, f_n(x) \to f(x), \forall x \in X]$$

$$\implies f \in \mathcal{H}$$

Τότε,

$$b\mathcal{B} \subset \mathcal{H}.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι για αυθαίρετη συνάρτηση g αν $g + f \in \mathcal{H}, \forall f \in \mathcal{U}_b(X)$. Τότε,

$$g + a\mathbb{1}_A + f \in \mathcal{H}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{U}_b(X), \forall A \in \mathcal{B}(X).$$

Έστω

$$S = \{A \subset X : g + a\mathbb{1}_A + f \in \mathcal{H}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{U}_b(X)\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $A \subset X : \exists f_n \in \mathcal{U}_b(X)$ ώστε $\mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} f_n$ όπου το όριο είναι με την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Τότε,

$$g + a\mathbb{1}_A + f = \lim_{n\to\infty}(g + af_n + f) \in \mathcal{H}$$

Άρα αν ορίσουμε

$$\mathcal{A} := \{A \subset X : \exists f_n \in \mathcal{U}_b(X) \text{ ώστε } \mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} f_n \text{ ομοιόμορφα}\}$$

Τότε, η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα με $\mathcal{A} \subset S$. Όμως η S είναι μονότονη κλάση αφού αν $A_k \in S, \mathbb{1}_{A_k} \to \mathbb{1}_A$ έχουμε

$$g + a\mathbb{1}_A + f = \lim_{k\to\infty}(g + a\mathbb{1}_{A_k} + f) \in \mathcal{H}$$

Άρα

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset S$$

Όμως εύκολα βλέπουμε ότι τα κλειστά υποσύνολα ανήκουν στην $\mathcal{A}$ άρα

$$\mathcal{B} \subset S$$

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το λήμμα.
Η υπόθεση ικανοποιείται τετριμμένα για $g = 0$. Συνεπώς

$$a\mathbb{1}_A + f \in \mathcal{H}, \forall f \in \mathcal{U}_b(X), a \in \mathbb{R}, A \text{ μετρήσιμο.}$$

Τώρα το Θεώρημα έπεται από την παρατήρηση ότι, αν έχουμε ότι το $\mathcal{H}$ περιέχει κάθε συνάρτηση της μορφής $h + f$, όπου h είναι απλή συνάρτηση με n όρους, τότε περιέχει και τις συναρτήσεις $\tilde{h} + f$, όπου η $\tilde{h}$ περιέχει $n+1$ όρους. Όμως έχουμε δείξει ότι για h χαρακτηριστική οι παραπάνω μορφές ανήκουν στο $\mathcal{H}$. Συνεπώς από επαγωγή και $f = 0$ έχουμε ότι όλες οι απλές συναρτήσεις ανήκουν στο $\mathcal{H}$. Όμως οι φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις μπορούν να προσεγγιστούν ομοιόμορφα από απλές συναρτήσεις, συνεπώς η συλλογή $\mathcal{H}$, περιέχει όλες τις μετρήσιμες φραγμένες συναρτήσεις.

$\square$

Θεώρημα 2.3.3. *Στο Θεώρημα 2.3.2 μπορούμε να πάρουμε το* sup *στις συνεχείς και φραγμένες. Δηλαδή*

$$H(\nu|\mu) = \sup_{f\in C_b(X)} \{\mathbb{E}^\nu[f] - \log \mathbb{E}^\mu[e^f]\}.$$

Συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις H, p είναι κυρτές συζυγείς και ως προς τον δυισμό των $M(X), C_b(X)$. Στον χώρο $M_1(X)$ η H είναι κάτω ημισυνεχής ως προς την ασθενή τοπολογία που παράγει η $C_b(X)$.

Απόδειξη. Έστω
$$C = \sup_{f \in C_b(X)} \{\mathbb{E}^{\nu}[f] - \log \mathbb{E}^{\mu}[e^f]\}$$
και έστω πως $C < H(\nu|\mu)$. Ορίζουμε $\mathcal{H} = \{f \in b\mathcal{B} | \mathbb{E}^{\nu}[f] - p(f) \leq C\}$. Αυτή η κλάση φραγμένων συναρτήσεων είναι κλειστή υπό την σύγκλιση ως προς το ομοιόμορφο όριο και περιέχει την κλάση $C_b(X)$. Συνεπώς από το 2.3.2.1 περιέχει την $b\mathcal{B}$ και άρα $H(\nu|\mu) \leq C$, άτοπο. Συνεπώς έχουμε ότι $H = p^*$ στην $\sigma(M(X), C_b(X))-$τοπολογία. □

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω X πολωνικός χώρος. Έστω $X_n, n \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο X και νόμο μ. Ορίζουμε*
$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k} \in M_1(X)$$
δηλαδή L_n είναι τα εμπειρικά μέτρα. Έστω $Q_n \in M_1(X)$ οι νόμοι των L_n. Τότε, η ακολουθία Q_n είναι εκθετικά σφιχτή και ικανοποιείται η $LDP(Q_n, n, H)$ με σφιχτή κυρτή συνάρτηση ρυθμού $H(\nu) = H(\nu|\mu)$(όπου στον $M_1(X)$ θεωρούμε την επαγόμενη τοπολογία $\mathcal{T}^{\tau}$ (C_b) από τον $M(X)$)

Απόδειξη. Έστω $P = \mu^{\otimes \mathbb{N}}$.
Αρχικά θα δείξουμε αναλυτικά πως προκύπτουν τα μέτρα Q_n ώστε να μην δημιουργείται σύγχυση στην συνέχεια.
Ορίζουμε $T_n : X^n \to M_1(X)$,
$$T_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}$$
Επειδή η απεικόνιση $x \to \delta_x$ είναι μετρήσιμη έπεται ότι και οι T_n είναι μετρήσιμες για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε τα μέτρα
$$Q_n = \mu^{\otimes \mathbb{N}} \circ T_n^{-1}$$
Ένα παράδειγμα:
Έστω $\nu \in M_1(X), f \in C_b(X), \epsilon > 0$ και
$$U(\nu, f, \epsilon) = \{\lambda \in M_1(X) || \langle \nu, f \rangle - \langle \lambda, f \rangle| < \epsilon\}$$
μία υποβασική περιοχή του ν. Τότε,
$$Q_n(U(\nu, f, \epsilon)) = \mathbb{P}[|\langle \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k}, f \rangle - \langle \nu, f \rangle| < \epsilon]$$

$$= \mathbb{P}[|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \mathbb{E}^{\nu}[f]| < \epsilon]$$

- Άνω φράγμα:
  Θα χρησιμοποιήσουμε το γενικό άνω φράγμα 2.3.1. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να δείξουμε ότι το όριο

  $$\overline{p}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{n\langle \nu, f\rangle} Q_n(d\nu)$$

  υπάρχει αφού τότε γνωρίζουμε ότι $p^* = H$.
  Όμως έχουμε για $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη, ότι

  $$\overline{p}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{n\langle \nu, f\rangle} Q_n(d\nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}^{P}[e^{\sum\limits_{k=1}^{n} f(X_k)}]$$

  $$= \lim_{n\to\infty} \log \int e^{f} d\mu = p(f).$$

  Συνεπώς έχουμε το άνω φράγμα για τα συμπαγή υποσύνολα. Μένει να δείξουμε ότι έχουμε εκθετική σφιχτότητα και τότε έχουμε το άνω φράγμα για κάθε κλειστό υποσύνολο.
  Έχουμε μέτρα πιθανότητας $Borel$ σε πολωνικό χώρος συνεπώς για $l > 0$ υπάρχει συμπαγές υποσύνολο του $G_l \subset X$ τέτοιο ώστε

  $$\mu(G_l^c) < e^{-2l^2}$$

  (δηλαδή είναι σφιχτά). Ορίζουμε

  $$A_l = \{\lambda | \lambda(G_l) \geq 1 - \frac{1}{l}\}$$

  Ισχυρισμός 2.3.4.1. *Τα A_l είναι κλειστά για κάθε $l > 0$.*
  Απόδειξη:
  Έστω $\lambda_n \to \lambda$. Τότε, από το Θεώρημα Portmanteau έχουμε ότι

  $$\lambda(G_l) \geq \limsup_{n\to\infty} \lambda_n(G_l) \geq 1 - \frac{1}{l}$$

  Αφού G_l είναι συμπαγή και άρα κλειστά.

Ορίζουμε το σύνολο $K_L = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{l_n}$ όπου $l_n \uparrow \infty, l_1 = L$. Τότε, το σύνολο K_L είναι κλειστό. Όμως για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq n_0 \implies \frac{1}{l_n} < \epsilon$. Συνεπώς

$$\lambda(G_{l_n}^c) < \epsilon, \forall \lambda \in K_L$$

Όπου G_l συμπαγές, άρα από το Θεώρημα $Prohorov$ έχουμε ότι το K_L είναι σφιχτό και άρα συμπαγές.
Τέλος,

$$\begin{aligned}
&Q_n(A_l^c) = P[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{X_k}(G_l^c) > \frac{1}{l}] = P[\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{G_l^c}(X_k) > \frac{n}{l}] \\
&= P[\sum_{k=1}^{n} 2l^2\mathbb{1}_{G_l^c}(X_k) - 2nl > 0] = P[e^{\sum\limits_{k=1}^{n} 2l^2\mathbb{1}_{G_l^c}(X_k) - 2nl} > 1] \\
&= \mathbb{E}^P[\mathbb{1}\{\{e^{\sum\limits_{k=1}^{n} 2l^2\mathbb{1}_{G_l^c}(X_k) - 2nl} > 1\}\}] \leq_{(Chebyshev)} e^{-2nl}\mathbb{E}^P[e^{\sum\limits_{k=1}^{n} 2l^2\mathbb{1}_{G_l^c}(X_k)}] \\
&=_{(X_k)_{k\in\mathbb{N}-i.i.d.}} e^{-2nl}\mathbb{E}^{\mu}[e^{2l^2\mathbb{1}_{G_l^c}(X_1)}]^n \leq e^{-2nl}(e^{2l^2}e^{-2l^2}+1)^n \leq e^{-nl}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$Q_n(K_L^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nl_n} \leq 2e^{-nL}$$

Δηλαδή τα μέτρα είναι εκθετικά σφιχτά.

- Κάτω Φράγμα:
  Για το κάτω φράγμα θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική αλλαγής μέτρου όπως έχουμε δεί και στην απόδειξη του $Cramer$.
  Η αλλαγή όπως αναφέραμε και πάλι γίνεται από την $Radon - Nikodym$ παράγωγο και διαισθητικά μας δίνει το κόστος του να υποχρεώσουμε την διαδικασία να συμπεριφέρεται με ένα άτυπο τρόπο.

  Έστω λοιπόν $G \subset M_1(X)$ ανοικτό και $\lambda \in G$. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $H(\lambda|\mu) < \infty$ αφού διαφορετικά το λ δεν παίζει ρόλο στον υπολογισμό του $\inf_G H$. Συνεπώς $\lambda \ll \mu$ έστω $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$ και $Q = \lambda^{\otimes\mathbb{N}}$ ο νόμος ανεξάρτητης ακολουθίας με κατανομή λ. Έστω

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$. Τότε,

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k) =: F_n(\mathbf{x}), \text{ όπου } \mathbf{x} = (x_k)_{1 \le k \le n}$$

Έχουμε

$\frac{1}{n}\log P[L_n^X \in G] \geq \frac{1}{n}\log \mathbb{E}^P[\mathbb{1}_G(L_n^X)\mathbb{1}\{F_n > 0\}]$(περιοριζόμαστε στο σύνολο που είναι απόλυτα συνεχή μεταξύ τους)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\log \mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_G(L_n^X)F_n^{-1}] \\
&= \frac{1}{n}\log \Big[\frac{1}{Q[L_n^X \in G]}\mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_G(L_n^X)F_n^{-1}]\Big] + \frac{1}{n}\log Q[L_n^X \in G] \\
&\geq \frac{-1}{nQ[L_n^X \in G]}\mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_G(L_n^X)\log F_n] + \frac{1}{n}\log Q[L_n^X \in G]
\end{aligned}
$$

όπου στην τελευταία ανισότητα εφαρμόσαμε την ανισότητα *Jensen* στο μέτρο πιθανότητας

$$\lambda(\cdot) = \frac{\mathbb{E}^Q[\mathbb{1}\{L_n^X \in G \cap \cdot\}]}{Q[L_n^X \in G]}$$

με την κυρτή συνάρτηση $-\log x$, $(-\log x)'' = \frac{1}{x^2}$.
Από την ανισότητα $x \log x \geq -\frac{1}{e}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_G(L_n^X)\log F_n] &= \mathbb{E}^Q[\log F_n] - \mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_{G^c}(L_n^X)\log F_n] \\
&= n\mathbb{E}^\nu[\log f] - \mathbb{E}^P[\mathbb{1}_{G^c}(L_n^X)F_n\log F_n] \\
&\leq nH(\nu|\mu) + \frac{1}{e}.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{n}\log P[L_n^X \in G] \geq \frac{1}{Q[L_n^X \in G]}\Big[-H(\nu|\mu) - \frac{1}{ne}\Big] + \frac{1}{n}\log Q[L_n^X \in G].$$

Τώρα μπορούμε να πάρουμε μία ασθενή βασική περιοχή του ν που περιέχεται στο G.
Δηλαδή υπάρχουν $f_1, \cdots, f_m \in C_b(X), \epsilon > 0$:

$$U = U(\nu, f_1, \cdots, f_m, \epsilon) = \{\lambda | |\langle \nu, f_i\rangle - \langle \lambda, f_i\rangle| < \epsilon\}$$

Όμως από τον νόμο των μεγάλων αριθμών

$$Q[|\mathbb{E}^{L_n^X}[f] - \mathbb{E}^{\nu}[f]| < \epsilon] \to 1, \forall f \in C_b(X), \epsilon > 0.$$

Συνεπώς $Q[L_n^X \in G] \to 1$. Άρα

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(G) \geq -H(\nu|\mu).$$

Παίρνοντας το sup για $\nu \in G$ έπεται το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 4. *Μία ερμηνεία του παραπάνω Θεωρήματος είναι η εξής: Έστω ότι $X = \mathbb{R}$ και μ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue συνεπώς υπάρχει f συνάρτηση πυκνότητας ώστε*

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx.$$

Αν σχεδιάσουμε το κανονικοποιημένο ιστόγραμμα των $(X_k)_{k=1}^n$, περιμένουμε να έχουμε μία εικόνα που παρομοιάζει την f. Το Θεώρημα του Sanov μας λέει ότι αν η διαδικασία είναι i.i.d. με νόμο μ η πιθανότητα ότι θα έχουμε την εικόνα της συνάρτησης πυκνότητας ενός άλλου μέτρου ν φθίνει εκθετικά με ρυθμό e^{-cn}, όπου c είναι η εντροπία του ν ως προς το μ.

2.4 Η αρχή Μέγιστης Εντροπίας

Στις υποθέσεις του Θεωρήματος του *Sanov*,

$$L_n^X \to \mu, \text{σ.β. καθώς } n \to \infty.$$

Τώρα θα προσπαθήσουμε να ερευνήσουμε την συμπεριφορά του μέτρου αν δεσμεύσουμε το μέτρο να συμπεριφέρεται άτυπα.
Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα κλειστό υποσύνολο A του χώρου των μέτρων πιθανότητας του οποίου το κλείσιμο δεν περιέχει το νόμο της διαδικασίας έχουμε

$$P[L_n^X \in A] \to 0$$

παρόλα αυτά μπορούμε να πούμε κάτι ουσιώδες για την διαδικασία αν δεσμεύσουμε $L_n^X \in A$;

Μία επιλογή για το παραπάνω σύνολο θα μπορούσε να είναι το σύνολο μέτρων πιθανότητας υπό τα οποία ο μέσος όρος της διαδικασίας είναι περιοχή ξένη της κανονικής μέσης τιμής.
Υπό κατάλληλες υποθέσεις θα δούμε ότι υπάρχει ακριβής απάντηση. Συγκεκριμένα τα εμπειρικά μέτρα συγκλίνουν σε στοιχεία του A που ελαχιστοποιούν την $H(\cdot|\mu)$.

Θεώρημα 2.4.1. *Αρχή Μέγιστης Εντροπίας. Υποθέτουμε ότι* $C \subset Y = M_1(X)$ *κλειστό, κυρτό που ικανοποιεί*

$$\inf_{\nu \in C} H(\nu|\mu) = \inf_{\nu \in C^\circ} H(\nu|\mu) < \infty$$

Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο του C *που ελαχιστοποιεί την εντροπία στο* C. *Οι δεσμευμένοι νόμοι της* L_n^X *συγκλίνουν ασθενώς ένα μέτρο dirac με βάρος στο* $\tilde{\nu}$, *δηλαδή*

$$\lim_{n\to\infty} P[L_n^X \in \cdot | L_n^X \in C] = \delta_{\tilde{\nu}}$$

στην ασθενή τοπολογία του $M_1(X)$ *που παράγεται από την* $C_b(X)$. *Συγκεκριμένα, η σύγκλιση αυτή είναι εκθετική υπό την έννοια ότι αν* U *είναι μία ασθενής περιοχή του* $\tilde{\nu}$, *τότε υπάρχουν* $a, b > 0$ *ώστε*

$$P[L_n^X \in U^c | L_n^X \in C] \le e^{-nb}$$

για κάθε n *αρκετά μεγάλο. Τέλος, για κάθε σταθερό* k, *ο δεσμευμένος νόμος των* X_k *συγκλίνει ασθενώς στο* $\tilde{\nu}$, *δηλαδή*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_k)|L_n^X \in C] = \mathbb{E}^{\tilde{\nu}}[f], \forall f \in C_b(X).$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα του $\tilde{\nu}$.
Η ύπαρξη προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι έχουμε μία κάτω ημισυνεχή συνάρτηση με συμπαγή επίπεδα τιμών πάνω σε κάποιο κλειστό σύνολο και άρα έχουμε στοιχείο που πιάνει το ελάχιστο.
Δηλαδή, η εντροπία είναι κάτω φραγμένη στο C και $\{H \le \inf_C H + 1\} \cap C$ είναι συμπαγές άρα κάθε ακολουθία που τείνει στο ελάχιστο έχει υπακολουθία που συγκλίνει. Το ζητούμενο έπεται από το ότι

$$H(\tilde{\nu}|\mu) \le \liminf_{n\to\infty} H(\nu_n|\mu).$$

Η μοναδικότητα έπεται άμεσα από το γεγονός ότι η εντροπία είναι αυστηρά κυρτή και το C είναι κυρτό. Δηλαδή αν $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2$ είναι δύο διαφορετικά στοιχεία που ελαχιστοποιούν την εντροπία στο C έπεται ότι $\lambda\tilde{\nu}_1 + (1-\lambda)\tilde{\nu}_2 \in C$ και άρα

$$\inf_C H \leq H(\lambda\tilde{\nu}_1 + (1-\lambda)\tilde{\nu}_2) < \lambda H(\tilde{\nu}_1|\mu) + (1-\lambda)H(\tilde{\nu}_2|\mu) = \inf_C H$$

άτοπο.
Έστω τώρα U μία περιοχή του $\tilde{\nu}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P[L_n^X \in U^c | L_n^X \in C] \\ = \limsup_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n} \log P[L_n^X \in U^c \cap C] - \frac{1}{n} \log P[L_n^X \in C]\Big).\end{aligned}$$

Από τις υποθέσεις του Θεωρήματος(το σύνολο C είναι σύνολο συνέχειας) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}-\inf_{C^\circ} H \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P[L_n \in C^\circ] \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P[L_n \in C] \\ \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P[L_n \in C] \leq \inf_C H\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P[L_n^X \in C] = -H(\tilde{\nu}|\mu).$$

Αφού $\tilde{\nu} \notin U^c$ και το U^c είναι κλειστό έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P[L_n^X \in U^c | L_n^X \in C] \leq -\inf_{\nu \in U^c \cap C} H(\nu|\mu) + H(\tilde{\nu}|\mu) < 0$$

Άρα όχι μόνο συγκλίνει στο μηδέν αλλά έχουμε εκθετική τάξη σύγκλισης.
Έστω $k \leq n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_k)|L_n^X \in C] = \frac{\mathbb{E}[f(X_k)\mathbb{1}\{L_n^X \in C\}]}{P[L_n^X \in C]} \\ = \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)|L_n^X \in C] = \mathbb{E}[E^{L_n^X}[f]|L_n^x \in C].\end{aligned}$$

Εφόσον η f είναι φραγμένη και συνεχής στον X, η

$$F(\nu) = \int f d\nu$$

είναι φραγμένη και συνεχής στο $Y = M_1(X)$. Συνεπώς από την ασθενή σύκλιση της δεσμευμένης κατανομής των L_n^X, $\mathbb{E}[F(L_n^X)|L_n^X \in C]$ συγκλίνει στο

$$\int F\delta_{\tilde{\nu}} = F(\tilde{\nu}) = \mathbb{E}^{\tilde{\nu}}[f].$$

□

Όπως θα δούμε στην συνέχεια το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί και για την τοπολογία που παράγεται από τις $b\mathcal{B}$.

2.5 Gibbs Conditioning Principle

Σε αυτή την ενότητα θα γενικεύσουμε και θα δώσουμε μία πολύ σημαντική εφαρμογή του Θεωρήματος του *Sanov*.
Η ερώτηση που θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε είναι η εξής.
Έστω X πολωνικός χώρος και $X_i, i \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στον X που ακολουθούν την κατανομή $\mu \in M_1(X)$.
Έστω πως έχουμε μία συνάρτηση

$$\Phi : M_1(X) \to \mathbb{R}$$

η οποία μας δίνει κατά μία έννοια την ενέργεια.
Θέλουμε να βρούμε το νόμο που ακολουθεί η X_1 δεδομένου πως $\{\Phi(L_n^X) \in D\}$ όπου $D \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο και το παραπάνω ενδεχόμενο έχει θετική πιθανότητα.
Σε όλη την υπόλοιπη ενότητα θα υποθέτουμε ότι έχουμε εφοδιάσει τον $M_1(X)$ με την $\mathcal{T}^w$ τοπολογία.
Έστω $A_\delta \in \mathcal{B}^{cy}, \delta > 0$ μία οικογένεια *nested* μετρήσιμων συνόλων. Έστω F_δ μία *nested* οικογένεια κλειστών συνόλων τέτοια ώστε $A_\delta \subseteq F_\delta$. Ορίζουμε

$$F_0 = \bigcap_{\delta>0} F_\delta \text{ και } A_0 = \bigcap_{\delta>0} A_\delta$$

Υποθέσεις

1. Υπάρχει $\nu_0 \in A_0$ τέτοιο ώστε

$$H(\nu_0|\mu) = \inf_{\nu \in F_0} H(\nu|\mu) =: I_F < \infty \tag{2.25}$$

2. για κάθε $\delta > 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \nu_0^n(\{L_n^X \in A_\delta\}) = 1. \tag{2.26}$$

Ο λόγος που δίνουμε τον ορισμό των A_δ και των F_δ φαίνεται άμεσα από την ακόλουθη περίπτωση.
Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για τον περιορισμό $\Phi = 0$, τότε μπορούμε να ορίσουμε $A_\delta := \{|\Phi| \leq \delta\}$. Το πρόβλημα είναι πως, ακόμα και όταν το $energy - functional$ είναι κάτω ημισυνεχές, τα A_δ δεν είναι εν γένει κλειστά. Συνεπώς έχοντας κατά νου πως θα χρειαστεί να ελαχιστοποιήσουμε την εντροπία σε κάποιο σημείο ορίζουμε τα F_δ.
Για το Θεώρημα θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.5.0.1. *Υπό την παραπάνω υπόθεση. Για κάθε $\delta > 0$ έχουμε*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(A_\delta) \geq -I_F.$$

(όπου Q_n είναι οι νόμοι της L_n^X στον $M_1(X)$)

Απόδειξη. Το πρόβλημα είναι πως τα A_δ εν γένει δεν περιέχουν περιοχή κάποιου σημείου του $\mathcal{M}$ ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κάτω φράγμα από το Θεώρημα του $Sanov$. Για αυτό πρέπει να επαναλάβουμε την τεχνική αλλαγής μέτρου στην απόδειξη του κάτω φράγματος.
Έστω $f = \frac{d\nu_0}{d\mu}$ (υπάρχει αφού $\infty > I_F = H(\nu_0|\mu)$). Έστω $\delta > 0$, ορίζουμε

$$C_n := \left\{\mathbf{y} \in X^n : f_n(\mathbf{y}) := \prod_{i=1}^{n} f(y_i) > 0, L_n^X \in A_\delta\right\}$$

δηλαδή το σύνολο όπου τα μέτρα είναι και τα δύο απόλυτα συνεχή μεταξύ τους. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\nu_0^n(C_n) \to_{n\to\infty} 1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(A_\delta) &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int\limits_{C_n} \frac{1}{f_n(\mathbf{y})} \nu_0^n(d\mathbf{y}) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\frac{1}{\nu_0^n(C_n)} \int\limits_{C_n} \frac{1}{n} f_n(\mathbf{y}) \nu_0^n(d\mathbf{y})\right).\end{aligned}$$

Συνεπώς, από την ανισότητα *Jensen*,

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(A_\delta) \geq -\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n\nu_0^n(C_n)}\int\limits_{C_n}\log(f_n(\mathbf{y}))\nu_0^n(d\mathbf{y})$$
$$= -H(\nu_0|\mu) + \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_{C_n^c}\log(f_n(\mathbf{y}))\nu_0^n(d\mathbf{y}).$$

Όπου

$$\int\limits_{C_n^c}\log(f_n(\mathbf{y}))\nu_0^n(d\mathbf{y}) = \int\limits_{C_n^c} f_n(\mathbf{y})\log(f_n(\mathbf{y}))\mu^n(d\mathbf{y}) \geq -\frac{1}{e},$$

Αφού

$$x\log(x) \geq -\frac{1}{e}$$

Όμως $H(\nu_0|\mu) = I_F$ και άρα

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(A_\delta) \geq -I_F + \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{ne} = -I_F$$

□

Θεώρημα 2.5.1. *Υπό την παραπάνω υπόθεση. Αν*

$$\mathcal{M} = \{\nu \in F_0 : H(\nu|\mu) = I_F\}.$$

Τότε, το $\mathcal{M}$ είναι μη κενό, συμπαγές σύνολο και για κάθε $C \in \mathcal{B}^{cy}$ με $\mathcal{M} \subset C^\circ$, έχουμε

$$\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu^n(L_n^X \notin C | L_n^Y \in A_\delta) < 0.$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι $A_0 \subseteq F_0$ συνεπώς $\nu_0 \in \mathcal{M}$ και άρα δεν είναι κενό. Επίσης από την υπόθεση $I_F < \infty$ έχουμε ότι

$$\mathcal{M} = F_0 \cap \{H \leq I_F\}$$

όπου το $\{H \leq I_F\}$ είναι συμπαγές και το $F_)$ κλειστό συνεπώς το $\mathcal{M}$ είναι συμπαγές.
Ως προς το δεύτερο μέρος

$$\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu^n(L_n^X \notin C | L_n^X \in A_\delta)$$
$$\leq \lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(C^c \cap A_\delta) - \lim_{\delta\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(A_\delta)$$

όπου Q_n είναι ο νόμος των L_n^X. Έστω $G = C^\circ$. Τότε, έχουμε $C^c \cap A_\delta \subseteq G^c \cap F_\delta$, όπου $G^c \cap F_\delta$ είναι κλειστό υποσύνολο, από το άνω φράγμα στο Θεώρημα 2.3.4 έχουμε

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log Q_n(C^c \cap A_\delta)$$
$$\leq \lim_{\delta \to 0} \Big[- \inf_{\nu \in G^c \cap F_\delta} H(\nu|\mu) \Big] = - \inf_{\nu \in G^c \cap F_0} H(\nu|\mu) < -I_F,$$

Όπου η αυστηρή ανισότητα ισχύει αφού το $G^c \cap F_0$ είναι κλειστό και ξένο από το $\mathcal{M}$.
Η απόδειξη είναι πλήρης από το παραπάνω λήμμα. □

Στο επόμενο πόρισμα ερευνούμε την συμπεριφορά του μέτρου $\mu^n_{X^k|A_\delta}$ αν το ν_0 στις υποθέσεις είναι το μοναδικό στοιχείο που ελαχιστοποιεί την εντροπία.

Πόρισμα 2.5.1.1. *Αν $\mathcal{M} = \{\nu_0\}$, τότε,*

$$\mu^n_{X^k|A_\delta} \to \nu_0^k \text{ ασθενώς στον } M_1(X^k) \text{ για } n \to \infty \text{ και στην συνέχεια } \delta \to 0$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το ακόλουθό Λήμμα.

Λήμμα 2.5.1.1. *Έστω X Polish − Space και έστω $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \mu \in M_1(X^k)$. Αν*

$$\langle \mu_n, f_1 \cdots f_k \rangle \to \langle \mu, f_1 \cdots f_k \rangle, \forall (f_1, \cdots, f_k) \in C_b(X)^k.$$

Τότε,

$$\mu_n \to \mu, \text{ ασθενώς στον } M_1(X^k)$$

Απόδειξη. Έστω $f_j \in C_b(X), j \in \{1, \cdots, k\}$. Το μέτρο $\mu^n_{X^k|A_\delta}$ είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταθέσεις του $\{X_1, \cdots, X_n\}$, άρα

$$\langle \prod_{j=1}^k f_j, \mu^n_{X^k|A_\delta} \rangle = \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i_1 \neq \cdots \neq i_k} \int_{X^n} \prod_{j=1}^k f(y_{i_j}) \mu^n_{X^k|A_\delta}(d\mathbf{y}).$$

Έχουμε ακόμα

$$\mathbb{E}(\prod_{j=1}^k \langle f_j, L_n^X \rangle | L_n^x \in A_\delta) = \frac{1}{n^k} \sum_{i_1, \cdots, i_k} \int_{X^n} \prod_{j=1}^k f_j(y_{i_j}) \mu^n_{X^k|A_\delta}(d\mathbf{y}),$$

όπου οι f_j είναι φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις και άρα για $C = \max\limits_{1\leq i\leq k} \|f_i\|_\infty$ έχουμε

$$|\langle \prod_{j=1}^{k} f_j, \mu^n_{X^k|A_\delta}\rangle - \mathbb{E}[\prod_{j=1}^{k}\langle f_j, L_n^X\rangle | L_n^X \in A_\delta]| \leq C(1 - \frac{n!}{n^k(n-k)!}) \to_{n\to\infty} (*)0$$

(*) το ότι το όριο είναι μηδέν φαίνεται άμεσα από μία εφαρμογή *Stirling*. Αφού $\mathcal{M} = \{\nu_0\}$ το Θεώρημα 2.5.1 μας λέει ότι για κάθε $\eta > 0$,

$$\mu^n(|\langle f_j, L_n^X\rangle - \langle f_j, \nu_0\rangle| > \eta | L_n^X \in A_\delta) \to 0$$

για $n \to \infty$ και ύστερα $\delta \to 0$. Αφού οι $< f_j, L_n^x >$ είναι φραγμένες από Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

$$\mathbb{E}[\prod_{j=1}^{k}\langle f_j, L_n^X\rangle | L_n^X \in A_\delta] \to \langle \prod_{j=1}^{k} f_j, (\nu_0)^k\rangle,$$

συνεπώς

$$\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\langle \prod_{j=1}^{k} f_j, \mu^n_{X^k|A_\delta} - (\nu_0)^k\rangle = 0.$$

Το ζητούμενο έπεται από το 2.5.1.1. □

Τώρα θα δούμε δύο περιπτώσεις όπου ικανοποιούνται οι υποθέσεις. Η πρώτη είναι η περίπτωση όπου δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών και η δεύτερη είναι η περίπτωση όπου υπάρχει. Στη πρώτη μελετάμε την συμπεριφορά μίας ποσότητας της μορφής

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U(X_i)$$

ενώ στην δεύτερη έχουμε την μορφή

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} U(X_i, X_j).$$

2.5.1 Μη-Αλληλεπίδραση

Έστω $U : X \to [0, \infty)$ μία *Borel* μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το συναρτησιακό $\Phi : M_a(X) \to [-1, \infty]$ με

$$\Phi(\nu) = \langle U, \nu \rangle - 1,$$

και θεωρούμε τον περιορισμό

$$\{L_n^X \in A_\delta\} := \{|\Phi(L_n^X)| \leq \delta\} = \{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U(X_i) - 1| \leq \delta\}.$$

Λύνοντας μέσω $Euler - Lagrange$ χωρίς αυστηρότητα το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\inf_{\{\nu : \langle U, \nu \rangle = 1\}} H(\nu|\mu),$$

αναμένουμε ότι το ν_0 της υπόθεσης πρέπει να είναι ένα μέτρο *Gibbs*, δηλαδή ένα από τα μέτρα γ_β, όπου

$$\frac{d\gamma_\beta}{d\mu} = \frac{e^{-\beta U(x)}}{Z_\beta},$$

Όπου, Z_β η συνάρτηση κανονικοποίησης δηλαδή

$$Z_\beta = \int_X e^{-\beta U(x)} \mu(dx).$$

Στην υπόλοιπη υποενότητα, $\beta \in (\beta_\infty, \infty)$, όπου $\beta_\infty := \inf\{\beta : Z_\beta < \infty\}$.

Λήμμα 2.5.1.2. *Υποθέτουμε ότι*

$$\mu(\{x : U(x) > 1\}) > 0, \mu(\{x : U(x) < 1\}) > 0,$$

και είτε $\beta_\infty = -\infty$ *είτε*

$$\lim_{\beta \downarrow \beta_\infty} \langle U, \gamma_\beta \rangle > 1. \tag{2.27}$$

Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό $\beta^* \in (\beta_\infty, \infty)$ *τέτοιο ώστε*

$$\langle U, \gamma_{\beta^*} \rangle = 1.$$

Απόδειξη. Ουσιαστικά οι παραπάνω υποθέσεις μας δίνουν τα απαραίτητα για να χρησιμοποιήσουμε Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών.
Η συνάρτηση $\log(Z_\beta)$ είναι C^∞.

Άρα από τον παραπάνω ισχυρισμό,

$$\langle U, \gamma_\beta \rangle = -\frac{d \log Z_\beta}{d\beta}$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο για κάθε $\beta \in (\beta_\infty, \infty)$. Παραγωγίζοντας και πάλι έχουμε

$$\frac{d\langle U, \gamma_\beta \rangle}{d\beta} = -\frac{d^2 \log(Z_\beta)}{d\beta^2}$$

όπου

$$\frac{e^{\beta U(x)(e^{hU(x)}-1)}}{h} \to U(x)e^{\beta U(x)}, \text{ καθώς } h \to 0$$

ενώ η συνάρτηση

$$f_x(h) := \begin{cases} \frac{e^{\beta U(x)(e^{hU(x)}-1)}}{h}, h \neq 0 \\ U(x)e^{\beta U(x)}, h = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

είναι συνεχής και άρα φραγμένη σε κάθε συμπαγή περιοχή του μηδενός και ομοιόμορφα ως προς $x \in X$ αφού η U είναι φραγμένη. Συνεπώς από Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\langle U, \gamma_\beta \rangle = -\frac{\int U(x)e^{-\beta U(x)} d\mu}{Z_\beta}$$

Όπου

$$\frac{U(x)e^{-\beta U(x)}(e^{-hU(x)} - 1)}{h} \to -U^2(x)e^{-\beta U(x)}, h \to 0.$$

και άρα

$$\frac{d\langle U, \gamma_\beta \rangle}{d\beta} = -\frac{\int U^2(x)e^{-\beta U(x)} Z_\beta - U(x)e^{-\beta U(x)} \langle U, \gamma_\beta \rangle d\mu}{Z_\beta^2}$$

$$= -\int (U - \langle U, \gamma_\beta \rangle)^2 d\gamma_\beta < 0$$

αφού η U δεν μπορεί να είναι σταθερά από τις υποθέσεις. Συνεπώς η συνάρτηση $\langle U, \gamma_\beta \rangle$ είναι φθίνουσα και συνεχής στο (β_∞, ∞). Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{\beta \to \infty} \langle U, \gamma_\beta \rangle < 1,$$

και

$$\lim_{\beta \to -\infty} \langle U, \gamma_\beta \rangle > 1 \text{ στην περίπτωση όπου } \beta_\infty = -\infty.$$

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι υπάρχει $0 < u_0 < 1$ τέτοιο ώστε

$$\mu(\{U < u_0\}) > 0$$

συνεπώς για $\beta > 0$,

$$\int e^{-\beta U(x)} \mu(dx) \geq e^{-\beta u_0} \mu(\{0 \leq U < u_0\})$$

και

$$\begin{aligned} \int (U(x) - u_0) e^{-\beta U(x)} \mu(dx) \\ &\leq e^{\beta u_0} \int (U(x) - u_0) \mathbb{1}_{\{U > u_0\}} e^{-\beta (U(x) - u_0)} \mu(dx) \\ &\frac{e^{-\beta u_0}}{\beta} \sup_{y \geq 0} \{ y e^{-y} \}. \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $f(y) = ye^{-y}$

$$f'(y) = e^{-y} - ye^{-y}, f' = 0 \iff y = 1$$

και εύκολα βλέπουμε ότι το $y = 1$ είναι σημείο μεγίστου και άρα υπάρχει $C \in \mathbb{R}_+$ ώστε

$$C = \sup_{y \geq 0} f$$

συνεπώς,

$$\langle U, \gamma_\beta \rangle = u_0 + \frac{\int (U(x) - u_0) e^{-\beta U(x)} \mu(dx)}{\int e^{-\beta U(x)} \mu(dx)} \leq u_0 + \frac{C}{\beta}$$

για $\beta \to \infty$ έχουμε το ζητούμενο.
Για το δεύτερο άκρο υποθέτουμε ότι $\beta_\infty = -\infty$ και επιλέγουμε $1 < u_1 < u_2$ τέτοια ώστε

$$\mu(\{U \geq u_2\}) > 0.$$

Όμως για $\beta \leq 0$,

$$\int \mathbb{1}_{\{0\leq U<u_1\}} e^{-\beta U(x)} \mu(dx) \leq e^{-\beta u_1}$$

και

$$\int \mathbb{1}_{\{u_1\leq U\}} e^{-\beta U(x)} \mu(dx) \geq e^{-\beta u_2} \mu(\{u_2 \leq U\}).$$

Άρα, για κάθε $\beta \leq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma_\beta(\{u_1 \leq U\})} &= 1 + \frac{\int \mathbb{1}_{\{0\leq U<u_1\}} e^{-\beta U(x)} \mu(dx)}{\int \mathbb{1}_{\{u_1\leq U\}} e^{-\beta U(x)} \mu(dx)} \\ &\leq 1 + \frac{e^{\beta(u_2-u_1)}}{\mu(\{u_2 \leq U\})},\end{aligned}$$

από όπου έπεται ότι

$$\liminf_{\beta\to-\infty} \langle U, \gamma_\beta \rangle \geq u_1 \liminf_{\beta\to-\infty} \gamma_\beta(\{u_1 \leq U\}) \geq u_1 > 1$$

□

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.2. *Έστω U, μ, β^* όπως στο παραπάνω λήμμα. Αν U είναι φραγμένη ή $\beta^* \geq 0$, τότε οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.5.1 ικανοποιούνται και το $\mathcal{M}$ είναι μονοσύνολο με μοναδικό στοιχείο το μέτρο Gibbs, γ_{β^*}.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε πως

$$\langle U, \cdot \rangle = \sup_{n\in\mathbb{N}} \langle U \wedge n, \cdot \rangle$$

Όμως $U \wedge n \in B(X)$, συνεπώς η συνάρτηση

$$\Phi(\cdot) = \langle U, \cdot \rangle - 1$$

είναι $\mathcal{T}^w$- κάτω ημισυνεχής. Ορίζουμε

$$F_\delta := \{\nu : \langle U, \nu \rangle \leq 1 + \delta\}, \delta > 0.$$

Η $\{F_\delta\}$ είναι μία οικογένεια *nested* κλειστών υποσυνόλων και

$$F_0 = \{\nu : \langle U, \nu \rangle \leq 1\}$$

είναι κυρτό, κλειστό. Από το προηγούμενο Λήμμα, $\gamma_{\beta^*} \in F_0$, και

$$H(\gamma_{\beta^*}|\mu) = \int \frac{e^{-\beta^* U(x)}}{Z_{\beta^*}} \log \frac{e^{-\beta^* U(x)}}{Z_{\beta^*}} d\mu = \int \log \frac{e^{-\beta^* U(x)}}{Z_{\beta^*}} d\gamma_{\beta^*}$$

$$= -\beta^* \langle U, \gamma_{\beta^*} \rangle - \log Z_{\beta^*} < \infty,$$

συνεπώς $I_F < \infty$. Εφόσον η εντροπία $H(\cdot|\mu)$ είναι αυστηρά κυρτή συνεπώς αφού το $\mathcal{M}$ είναι κυρτό έπεται ότι το $\mathcal{M}$ είναι μονοσύνολο, έστω

$$\mathcal{M} = \{\nu_0\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\nu_0 = \gamma_{\beta^*}$.

$$-H(\nu_0|\gamma_{\beta^*}) \geq -H(\nu_0|\gamma_{\beta^*}) + [H(\nu_0|\mu) - H(\gamma_{\beta^*})]$$

$$= \beta^*(\langle U, \gamma_{\beta^*} \rangle - \langle U, \nu_0 \rangle) = \beta^*(1 - \langle U, \nu_0 \rangle)$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το ν_0 είναι ελάχιστο.
Αν $\beta^* \geq 0$ έχουμε

$$H(\nu_0|\gamma_{\beta^*}) \leq 0, \text{ αφού } \langle U, \nu_0 \rangle \leq 1.$$

Συνεπώς, $\nu_0 = \gamma_{\beta^*}$ και $\mathcal{M} = \{\gamma_{\beta^*}\}$. Τέλος, η αρχική υπόθεση ικανοποιείται με το μέτρο γ_{β^*} και το όριο 2.26 έπεται άμεσα από τον Ασθενή Νόμο των Μεγάλων Αριθμών. Συνεπώς το Θεώρημα 2.5.1 εφαρμόζεται.
Για την περίπτωση όπου η U είναι φραγμένη, τα σύνολα A_δ είναι κλειστά, συνεπώς δεν χρειαζόμαστε τα F_δ και $\langle U, \nu_0 \rangle = 1$. Συνεπώς, αν η U είναι φραγμένη έχουμε

$$\nu_0 = \gamma_{\beta^*}$$

και για $\beta^* < 0$. □

2.6 Αλληλεπίδραση

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε την περίπτωση όπου υπάρχει επίδραση μεταξύ των $X_1, \cdots, X_n$.
Έστω $M > 1$ δεδομένο και

$$U : X^2 \to [0, M]$$

συνεχής, συμμετρική και φραγμένη. Ορίζουμε

$$\Phi(\nu) =< U\nu, \nu > -1$$

και

$$A_\delta = \{\nu : |\Phi(\nu)| \leq \delta\}, \delta \geq 0.$$

Όπου με $U\nu$ συμβολίζουμε την συνάρτηση

$$U\nu(x) = \int U(x,y)\nu(dy)$$

η οποία είναι συνεχής και φραγμένη.

Παρατήρηση 5. *Το ότι η U είναι φραγμένη μας δίνει ότι η Φ είναι συνεχής και όχι μόνο κάτω ημισυνεχής και άρα τα A_δ είναι κλειστά.*

Λήμμα 2.6.0.1. *Το συναρτησιακό $\nu \to \langle U\nu, \nu\rangle$ είναι συνεχές ως προς την $\mathcal{T}^w$ στο $M_1(X)$.*

Απόδειξη. Εφόσον η U είναι φραγμένη αρκεί να δείξουμε ότι το συναρτησιακό είναι φραγμένο ως προς την $\mathcal{T}^\tau$. Για συναρτήσεις της μορφής $U(x,y) = f(x)g(y)$ όπου $f, g \in C_b(X)$ έχουμε άμεσα την συνέχεια. Όμως για πολωνικούς χώρους η κλάση αυτή αρκεί να για να έχουμε ασθενή σύγκλιση στον $M_1(\Sigma)$. □

Κάνοντας ελαχιστοποίηση με $Euler - Lagrandge$ παίρνουμε ότι το υποψήφιο μέτρο πρέπει να είναι της μορφής

$$\frac{d\gamma_\beta}{d\mu} = \frac{e^{-\beta U\gamma_\beta(x)}}{Z_\beta} \tag{2.29}$$

όπου η συνάρτηση Z_β είναι η συνάρτηση κανονικοποίησης δηλαδή

$$Z_\beta = \int e^{-\beta U\gamma_\beta(x)}\mu(dx).$$

Σε αυτή την υποενότητα χρειαζόμαστε επιπλέον τις παρακάτω υποθέσεις

- Για κάθε ν_i τέτοιο ώστε $H(\nu_i|\mu) < \infty, i = 1, 2$ έχουμε

$$\langle U\nu_1, \nu_2\rangle \leq \frac{1}{2}(\langle U\nu_1, \nu_1\rangle + \langle U\nu_2, \nu_2\rangle). \tag{2.30}$$

Η υπόθεση αυτή μας λέει ότι το συναρτησιακό Φ είναι κυρτό.

- $$\int U(x,y)\mu(dx)\mu(dy) \geq 1 \tag{2.31}$$

  Η υπόθεση αυτή μας χρειάζεται για την ύπαρξη του μέτρου *Gibbs*.

- Υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν με

$$H(\nu|\mu) < \infty, \text{ και } \langle U\nu, \nu\rangle < 1 \tag{2.32}$$

Σημειώνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η ύπαρξη του μέτρου *Gibbs* δεν είναι εξασφαλισμένη και πρέπει να αποδειχθεί. Ορίζουμε την *Hamiltonian*

$$H_\beta(\nu) = H(\nu|\mu) + \frac{\beta}{2}\langle U\nu, \nu\rangle,$$

όπου $\beta \in [0,\infty)$. Ο ορισμός αυτός προκύπτει άμεσα αν πάει κανείς να λύσει το πρόβλημα

$$\inf H(\nu|\mu) = \inf \int f \log f d\mu$$

υπό τους περιορισμούς(πέρα από τους αναγκαίους για την f ώστε το ν να είναι μέτρο πιθανότητας)

$$\langle U\nu, \nu\rangle = 1 \iff \int U f^2 d\mu = 1.$$

Το επόμενο λήμμα μας δίνει τις βασικές ιδιότητες του μέτρου.

Λήμμα 2.6.0.2. *Υποθέτουμε την 2.30. Τότε,*

1. *Για κάθε $\beta \geq 0$, υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο που ελαχιστοποιεί το $H_\beta(\cdot)$ και το συμβολίζουμε με γ_β για το οποίο ισχύει η 2.29.*

2. *Η συνάρτηση $g(\beta) := \langle U\gamma_\beta, \beta\rangle$ είναι συνεχής στο $[0,\infty)$.*

3. *Υποθέτοντας τις 2.30,2.31,2.32 έχουμε,*

$$\beta^* := \inf\{\beta \geq 0 : g(\beta) \leq 1\}. \tag{2.33}$$

Τότε, $\beta^* < \infty$ και $g(\beta^*) = 1$.

Απόδειξη. 1)Έστω $\beta \geq 0$. Σημειώνουμε ότι $H(\nu|\mu) \leq H_\beta(\nu), \forall \nu \in M_1(X)$. Επίσης, η εντροπία έχει συμπαγή επίπεδα και άρα από το λήμμα 2.6.0.1 έχουμε ότι τα επίπεδα της H_β είναι κλειστά υποσύνολα συμπαγούς και είναι συμπαγή. Συνεπώς η συνάρτηση H_β είναι κάτω ημισυνεχής με συμπαγή επίπεδα. Αφού η U είναι φραγμένη, $H_\beta < \infty$, και άρα υπάρχει ένα $\tilde{\nu} \in M_1$ έτσι ώστε

$$H_\beta(\tilde{\nu}) = \inf_{\nu \in M_1(X)} H_\beta(\nu) < \infty.$$

Η υπόθεση 2.30 και η κυρτότητα της εντροπίας μας δίνουν ότι $H_\beta(\nu_i) < \infty$ για $i = 1, 2$, τότε

$$\begin{aligned}
H_\beta\Big(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\Big) &= H\Big(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}|\mu\Big) + \frac{\beta}{2}\langle U(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}), \frac{\nu_1+\nu_2}{2}\rangle \\
&\leq \frac{1}{2}H(\nu_1|\mu) + \frac{1}{2}H(\nu_2|\mu) + \frac{\beta}{4}(\langle U\nu_1, \nu_1\rangle) + \frac{\beta}{4}(\langle U\nu_2, \nu_2\rangle) \\
&\quad + \frac{\beta}{4}\langle U\nu_1, \nu_2\rangle + \frac{\beta}{4}\langle U\nu_2, \nu_1\rangle \\
&\leq \frac{1}{2}(H(\nu_1|\mu) + \frac{\beta}{2}\langle U\nu_1, \nu_1\rangle) + \frac{1}{2}(H(\nu_1|\mu) + \frac{\beta}{2}\langle U\nu_2, \nu_2\rangle) \\
&= \frac{1}{2}H_\beta(\nu_1) + \frac{1}{2}H_\beta(\nu_2).
\end{aligned}$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την παραπάνω ανισότητα για όλους τους δυικούς αριθμούς δηλαδή της μορφής $\frac{k}{2^n}, 1 \leq k \leq 2^n$ και να έχουμε

$$H_\beta\Big(\frac{k}{2^n}\nu_1 + (1 - \frac{k}{2^n})\nu_2\Big) \leq \frac{k}{2^n}H_\beta\Big(\nu_1) + (1 - \frac{k}{2^n}H_\beta(\nu_2)\Big)$$

όμως ως γνωστόν το παραπάνω σύνολο είναι πυκνό στο $[0, 1]$. Έστω λοιπόν $\lambda \in (0, 1)$ τότε έστω ακολουθία $s_n \to \lambda$ δυικών αριθμών

$$\begin{aligned}
H_\beta(\lambda\nu_1+(1-\lambda)\nu_2) &\leq \liminf_{n\to\infty}\Big[H_\beta(s_n\nu_1+(1-s_n)\nu_2)\Big] \leq \Big[\liminf_{n\to\infty} s_n H_\beta(\nu_1)+(1-s_n)H_\beta(\nu_2)\Big] \\
&= \lambda H_\beta(\nu_1) + (1-\lambda)H_\beta(\nu_2)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την κάτω ημισυνέχεια. Με τα παραπάνω δείξαμε την κάτω ημισυνέχεια στα επίπεδα της H_β όμως στα υπόλοιπα σημεία είναι προφανές ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει. Ακόμα στα επίπεδα της είναι αυστηρά κυρτή(αφού ουσιαστικά δείξαμε πως $\langle U\nu, \nu\rangle$ είναι κυρτή και η εντροπία είναι αυστηρά κυρτή). Συνεπώς υπάρχει μοναδικό ελάχιστο. Έστω γ_β το μοναδικό ελάχιστο της H_β. Ορίζουμε $f := \frac{d\gamma_\beta}{d\mu}$.

Ισχυρισμός 2.6.0.1.

$$\mu(\{f = 0\}) = 0$$

Δηλαδή τα μέτρα είναι απόλυτα συνεχή μεταξύ τους.

Έστω πως ο ισχυρισμός δεν ισχύει. Τότε, $z := \mu(\{f = 0\}) > 0$ *ορίζουμε το μέτρο* ν *ως*

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{\mathbb{1}_{\{x:f(x)=0\}}}{z}.$$

Παρατηρούμε ότι αν για $t \in [0,1]$ *ορίσουμε* $\nu_t := t\nu + (1-t)\gamma_\beta$ *τότε για κάθε* $t \in [0,1]$ ν_t *είναι μέτρο πιθανότητας. Ακόμα, τα στηρήγματα των* ν, γ_β *είναι ξένα, όπου αν έχουμε γενικά δύο μέτρα πιθανότητας* λ_1, λ_2 *με ξένα στηρίγματα έχουμε ότι*

$$H(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2|\mu) = \int (t\frac{d\lambda_1}{d\mu} + (1-t)\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}) \log((t\frac{d\lambda_1}{d\mu} + (1-t)\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}))d\mu$$

$$= t \int\limits_{spt(\lambda_1)} \frac{d\lambda_1}{d\mu} \log(t\frac{d\lambda_1}{d\mu})d\mu + (1-t) \int\limits_{spt(\lambda_2)} \frac{d\lambda_2}{d\mu} \log((1-t)\frac{d\lambda_2}{d\mu})d\mu$$

$$= t\log(t) + tH(\lambda_1|\mu) + (1-t)\log(1-t) + (1-t)H(\lambda_2|\mu)$$

συνεπώς για τα ν_t *έχουμε*

$$0 \le \frac{1}{t}\Big[H_\beta(\nu_t) - H_\beta(\gamma_\beta)\Big] = \frac{1}{t}\Big[t\log t + (1-t)\log(1-t) + tH(\nu|\mu) +$$
$$(1-t)H(\gamma_\beta|\mu) + \langle U(t\nu + (1-t)\gamma_\beta), t\nu + (1-t)\gamma_\beta\rangle - H(\gamma_\beta) - \langle U\gamma_\beta, \gamma_\beta\rangle\Big]$$
$$= H_\beta(\nu) - H_\beta(\gamma_\beta) + \log t + \frac{1-t}{t}\log(1-t) - \frac{\beta}{2}(1-t)\langle U(\gamma_\beta - \nu), \gamma_\beta - \nu\rangle. \tag{2.34}$$

Όπου

$$H(\nu|\mu) = \int_{\{x:f(x)=0\}} \frac{1}{z}\log(\frac{1}{z})d\mu = -\log(z) < \infty \implies H_\beta(\nu) < \infty.$$

Συνεπώς από την 2.34 για, έχουμε

$$0 \leq M + \log(t) + \frac{1-t}{t}\log(1-t)$$

για κάποιο $M > 0$ όπου παίρνοντας το όριο $t \downarrow 0$ έχουμε άτοπο.

Τώρα, θα δείξουμε την 2.29. Έστω, $\phi \in B(X), \phi \neq 0$ και $\delta = \frac{2}{\|\phi\|} > 0$. Για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$, ορίζουμε $\nu_t \in M_1(X)$

$$\frac{d\nu_t}{d\gamma_\beta} = 1 + t(\phi - \langle \phi, \gamma_\beta \rangle).$$

Η συνάρτηση $H_\beta(\nu_t) : [0,1] \to M_1(X)$ είναι διαφορίσιμη και έχει ελάχιστο στο $t = 0$, όπου

$$H(\nu_t|\mu) = \int \frac{d\nu_t}{d\gamma_\beta}\frac{d\gamma_\beta}{d\mu}\log(\frac{d\nu_t}{d\gamma_\beta}\frac{d\gamma_\beta}{d\mu})d\mu$$

(πρίν αποδείξαμε ότι γ_β, μ είναι απόλυτα συνεχή μεταξύ τους)

$$= \int (1 + t(\phi - \langle \phi, \gamma_\beta \rangle)) \log\Big((1 + t(\phi - \langle \phi, \gamma_\beta \rangle))f\Big)d\gamma_\beta$$

και

$$\langle U\nu_t, \nu_t \rangle = \int\int U(x,y)(1 + t(\phi - \langle \phi, \gamma_\beta \rangle)^2)d\gamma_\beta^2$$

συνεπώς

$$0 = \frac{dH_\beta(\nu_t)}{dt}\Big|_{t=0} = \int (\phi - \langle \phi, \gamma_\beta \rangle)\log(f)d\gamma_\beta + \int \frac{(\phi - \langle \phi, \gamma_\beta \rangle)f}{f}d\gamma_\beta$$
$$+ \int \beta U\gamma_\beta(\phi - \langle \phi, \gamma_\beta \rangle)d\gamma_\beta = \int (\phi - \langle \phi, \gamma_\beta \rangle)(\log(f) + \beta U\gamma_\beta)d\gamma_\beta$$

αφού $\int \frac{(\phi - \langle \phi, \gamma_\beta \rangle)f}{f}d\gamma_\beta = 0$.
συνεπώς

$$0 = \int \phi f(\log(f) + \beta U\gamma_\beta - H(\gamma_\beta|\mu) - \beta\langle U\gamma_\beta, \gamma_\beta \rangle)d\mu.$$

όπου ϕ ήταν αυθαίρετη, $f > 0$ $\mu-$σ.β. και

$$H(\gamma_\beta|\mu), \beta\langle U\gamma_\beta, \gamma_\beta\rangle < \infty.$$

συνεπώς δείξαμε την 2.29.

2) Έστω $b_n \to b \in [0, \infty)$. Τότε, ως συγκλίνουσα είναι φραγμένη, η απεικόνιση γ_β είναι συνεχής και άρα

$$\exists L > 0 : \{\gamma_{\beta_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{H(\cdot|\mu) \leq L\}$$

όμως τα επίπεδα της εντροπίας είναι συμπαγή και άρα παίρνοντας υπακολουθία αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η παραπάνω ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο μέτρο ν. Οπότε έχουμε από την κάτω ημισυνέχεια της H και το γεγονός ότι το μέτρο γ_β ελαχιστοποιεί το H_β

$$H_\beta(\nu) \leq \liminf_{n\to\infty} H_{\beta_n}(\gamma_{\beta_n}) \leq \liminf_{\beta_n}(\gamma_\beta) = H_\beta(\gamma_\beta).$$

Συνεπώς από το (α) και την αυστηρή κυρτότητα

$$\gamma_\beta = \nu$$

άρα από το κριτήριο του $Urysohn$ και το Λήμμα 2.6.0.1 έπεται η συνέχεια.

3) Αρχικά λόγω της υπόθεσης έχουμε πως

$$g(0) = \int U(x, y)\nu(dx)\nu(dy) \geq 1$$

άρα λόγω της συνέχειας αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{\beta\to\infty} g(\beta) < 1.$$

Όμως έχουμε πως

$$g(\beta) \leq \frac{2}{\beta}(\frac{\beta}{2}g(\beta) + H(\nu|\mu)) = \frac{2}{\beta}H_\beta(\gamma_\beta) \leq \frac{2}{\beta}H_\beta(\nu) = \frac{2}{\beta}H(\nu|\mu) + \langle U\nu, \nu\rangle$$

όπου ν όπως στην υπόθεση, άρα για $\beta \to \infty$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 2.6.1. *Υπό τις παραπάνω υποθέσεις το θεώρημα 2.5.1 εφαρμόζεται, με το σύνολο $\mathcal{M}$ να είναι μονοσύνολο με μοναδικό στοιχείο το γ_{β^*} όπως στο παραπάνω Λήμμα.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι δεν χρειαζόμαστε και τα δύο σύνολα F_δ, A_δ αφού η συνάρτηση Φ είναι συνεχής και άρα τα $A_\delta := \{|\Phi| \leq \delta\}$ είναι κλειστά. Έχουμε ακόμα πως $F_0 = \{\Phi = 0\} = \{\nu | \langle U\nu, \nu\rangle = 1\}$. Έστω $\nu \in \mathcal{M}$, τότε, για $f = \frac{d\nu}{d\mu}, f_{\beta^*} = \frac{d\gamma_{\beta^*}}{d\mu}$

$$H(\nu|\mu) - H(\nu|\gamma_{\beta^*}) - H(\gamma_{\beta^*}|\mu) =$$

$$\int f \log f d\mu - \int f f_{\beta^*}^{-1} \log(f f_{\beta^*}^{-1}) f_{\beta^*} d\mu - \int f_{\beta^*} \log f_{\beta^*} d\mu$$

$$= \Big(\int f \log f d\mu - \int f \log f d\mu \Big) + \int \log f_{\beta^*} d\nu - \int \log f_{\beta^*} d\gamma_{\beta^*}$$

$$= \beta^*(\langle U\gamma_{\beta^*}, \gamma_{\beta^*}\rangle - \langle U\gamma_{\beta^*}, \nu\rangle) \geq \frac{\beta^* 2}{2}(\langle U\gamma_{\beta^*}, \gamma_{\beta^*}\rangle - \langle U\nu, \nu\rangle) = 0$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την δεύτερη υπόθεση. Συνεπώς για κάθε $\nu \in M$,

$$-H(\nu|\gamma_{\beta^*}) \geq -H(\nu|\gamma_{\beta^*}) + H(\nu|\mu) - H(\gamma_{\beta^*}|\mu) \geq 0,$$

συνεπώς $\nu = \gamma_{\beta^*}$. Άρα $M = \{\gamma_{\beta^*}\}$. Τέλος, για να μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.5.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\gamma_{\beta^*}^n(\{L_n^Y \in A_\delta\}) \to 1$$

όμως

$$\{L_n^Y \in A_\delta\} = \Big\{ \Big| \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} (U(Y_i, Y_j)) - E_{\gamma_{\beta^*}^2}[U(X,Y)] \Big| \leq \delta \Big\}$$

και άρα από *Chebyshev* έχουμε

$$\gamma_{\beta^*}^n(\{L_n^Y \notin A_\delta\})$$

$$\leq \frac{1}{n^4 \delta^2} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E_{\gamma_{\beta^*}^n}[U(Y_i, Y_j) - E_{\gamma_{\beta^*}^2}[U(X,Y)]](U(Y_k, Y_l) - E_{\gamma_{\beta^*}^2}[U(X,Y)])$$

$$\leq \frac{6M^2}{n\delta}.$$

□

2.7 Θεώρημα Schilder

Σε αυτή την υποενότητα θα αποδείξουμε μία Αρχή Μεγάλων Αποκλίσεων για το μέτρο $Wiener$. Από τις βασικές ιδιότητες την κίνησης $Brown$ γνωρίζουμε ότι μπορούμε να δουλεύουμε αντί στο χώρο συνεχών συναρτήσεων στο χώρο Θ, όπου

$$\Theta := \{\theta \in C([0,\infty)|\theta(0) = 0, \lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t)}{t} = 0\}.$$

Τον οποίο εφοδιάζουμε με την νόρμα

$$\|\theta\|_\Theta := \sup_{t\geq 0} \frac{|\theta(t)|}{1+t}.$$

Η παραπάνω ποσότητα ορίζει πραγματικά μία νόρμα, αφού από την σχέση $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\theta(t)}{t} = 0$ έχουμε ότι έξω από ένα συμπαγές η παραπάνω ποσότητα φράζεται από το 1. Ο δυικός του παραπάνω χώρου είναι

$$\Theta^* := \{\nu \in M([0,\infty)|\nu(\{0\}) = 0 \text{ είναι φραγμένης κύμανσης και } \int\limits_{[0,\infty)} (1+t)|\nu|(dt) < \infty\}.$$

Φυσικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι η κίνηση $Brown$ έχει και άλλες ιδιότητες και θα μπορούσαμε να περιορίσουμε περαιτέρω τον χώρο μας. Όμως το μόνο που μας ενδιαφέρει σε αυτό το σημείο είναι να πάρουμε αρκετή πληροφορία ώστε να έχουμε ένα χώρο $Banach$ του οποίου έχουμε μία καλή περιγραφή του δυίκού του.

Θα δώσουμε χωρίς απόδειξη ένα Θεώρημα του $Wiener$.

Θεώρημα 2.7.1. *Στο χώρο Θ ορίζεται μοναδικό μέτρο πιθανότητας W που ικανοποιεί*

$$\int\limits_{\Theta} \exp[i\langle\lambda,\theta\rangle]\mathcal{W}(d\theta) = \exp[-\Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda)], \text{ για κάθε } \lambda \in \Theta^* \tag{2.35}$$

όπου

$$\Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda) = \frac{1}{2} \int\limits_{[0,\infty)^2)} s \wedge t\lambda(ds)\lambda(dt).$$

Τέλος, οποιοδήποτε άλλο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ ταυτίζεται με το $\mathcal{W}$ ανν ικανοποιείται μία από τις παρακάτω υποθέσεις,

- *Για κάθε* $0 \leq s < t$, *η τυχαία μεταβλητή* $\theta \to \theta(t) - \theta(s)$ *είναι ανεξάρτητη της* $\mathcal{B}_s$*(ως προς το μέτρο* $\mathbb{P}$*) και είναι Gaussian διαδικασία με μέσο όρο 0 και συνδιακύμανση* $(t-s)\mathbb{I}_{\mathbb{R}^d}$.

- *Για κάθε* $0 \leq s < t$ *και* $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$,

$$\mathbb{P}[\{\theta : \theta(t) \in \Gamma\}|\mathcal{B}_s](\psi) = \gamma_{t-s}(\psi(s) + \Gamma) \tag{2.36}$$

για $\mathbb{P}-$*σχεδόν κάθε* $\psi \in \Theta$, *όπου το μέτρο* γ_ϵ *είναι το μέτρο στον* $\mathbb{R}^d$ *με Radon − Nikodym παράγωγο ως προς το μέτρο Lebesque*

$$\gamma_\epsilon(dq) = (2\pi\epsilon)^{-\frac{d}{2}} \exp[-\frac{|q|^2}{2\epsilon}]\lambda_{\mathbb{R}^d}(dq). \tag{2.37}$$

Τέλος το $\mathcal{W}$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*

- *Για κάθε* $n \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, *και* $\xi, \cdots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$,

$$\int\limits_{\Theta} \exp[i\sum_{m=1}^{n} \xi_m \cdot \theta(t_m)]\mathcal{W}(d\theta) = \exp[-\frac{1}{2}\sum_{m,i=1}^{n} t_m \wedge t_i \xi_m \cdot \xi_i].$$

- *Το* $\mathcal{W}$ *είναι αναλλοίωτο ως προς την χρονική μεταφορά δηλαδή* $\theta \to \theta(\cdot + a) - \theta(a), \forall a > 0$ *και ως προς την αλλαγή κλίμακας* $\theta \to \sqrt{a}\theta(\frac{\cdot}{a})$.

- $\mathcal{W}$ *είναι αναλλοίωτο ως προς την χρονική αντιστροφή*

$$\theta \to t\theta(\frac{1}{t}), (\equiv 0, t = 0).$$

- $\mathcal{W}[\{\theta \in \Theta| \sup\limits_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|\theta(t)-\theta(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty\}] = 1$ *για κάθε* $T > 0, \alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

Ένα μικρό σχόλιο για τη συνάρτηση $\Lambda_{\mathcal{W}}$. Για $\lambda \in \Theta^*$ μπορούμε να θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή

$$\langle \lambda, W \rangle = \int_{[0,\infty)} W_t \lambda(dt)$$

η οποία μπορούμε να δούμε ότι ακολουθεί $normal - distribution$ με μέση τιμή μηδέν και

$$\mathbb{E}[\langle \lambda, W \rangle^2] = \int_{[0,\infty)^2} \mathbb{E}[W_s W_t] \lambda(ds)\lambda(dt) = 2\Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda)$$

Άρα στο παραπάνω μετασχηματισμό το δεξί μέλος περιέχει την διασπορά και μπορούμε να πάρουμε μία άμεση συσχέτιση με τις πεπερασμένες διαστάσεις.

Τώρα θα κατασκευάσουμε μία στρατηγική για να δείξουμε μία LDP ως προς τη κατανομή του

$$\sqrt{\epsilon}\theta \sim \mathcal{W}_\epsilon$$

Τα παραπάνω μέτρα πηγαίνουν στο μέτρο $dirac$ της μηδενική συνάρτησης στον Θ συνεπώς έχουμε ένα πρόβλημα στην περιοχή των μεγάλων αποκλίσεων. Για το άνω φράγμα θα επιχειρήσουμε τα εξής:

- Με βάση την ιδιότητα του $Wiener$ μέτρου ότι οι συναρτήσεις $\alpha - Holder, \alpha < \frac{1}{2}$ είναι μέτρου 1, θα δείξουμε το άνω φράγμα για τα συμπαγή.

- Θα δείξουμε ότι τα μέτρα είναι εκθετικά σφιχτά.

Πρώτα όμως ένα βασικό Λήμμα το οποίο χαρακτηρίζει με ικανοποιητικό τρόπο όλες τις βασικές ποσότητες που θα χρησιμοποιήσουμε.

Λήμμα 2.7.1.1. *Για $\lambda \in \Theta^*$ ορίζουμε*

$$\psi_\lambda(t) := \int_0^t \lambda(s,\infty) ds \tag{2.38}$$

Επίσης για $\eta, \lambda \in \Theta^*$ *έχουμε*

$$\int_{[0,\infty)^2} s \wedge t\, \eta(ds)\lambda(dt) = \int_{[0,\infty)} \lambda((s,\infty))\eta((s,\infty))ds = \langle \eta, \psi_\lambda \rangle. \tag{2.39}$$

Συνεπώς

$$\Lambda_W(\lambda) = \frac{1}{2}\langle \lambda, \psi_\lambda \rangle.$$

Τέλος, η συζυγής κυρτή της Λ_W

$$\Lambda_W^* = \begin{cases} +\infty, \psi \notin H^1 \\ \frac{1}{2}\|\psi\|_{H^1}^2, \psi \in H^1 \end{cases} \tag{2.40}$$

όπου $H^1 := \{\psi \in L^2([0,\infty)) : \exists \dot{\psi} \in L^2, \psi(t) = \int_0^t \dot{\psi}(s)ds, \sigma.\pi.\}$ *και*

$$\|\psi\|_{H^1} = \|\dot{\psi}\|_2$$

η οποία επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$(\psi, \phi)_{H^1} = \int_{[0,\infty)} \dot{\psi}(s)\dot{\phi}(s)ds$$

άρα αν για $\psi \in H^1$ *ορίσουμε* $\lambda_\psi(s,\infty) = \psi(s), s \in [0,\infty)$ *τότε το* $\lambda \in \Theta^*$ *και*

$$\Lambda_W^*(\psi) = \Lambda_W(\lambda_\psi). \tag{2.41}$$

Πριν δώσουμε την απόδειξη, μία παρατήρηση που μπορεί να βοηθήσει στην μελέτη του δυικού του Θ, είναι πως $C_c^\infty \hookrightarrow H_0^1 \hookrightarrow \Theta$ και C_c^∞ είναι πυκνός στον Θ και άρα και ο H_0^1.

Απόδειξη. (Από το γεγονός ότι τα μη ατομικά μέτρα με συμπαγή φορέα είναι πυκνά στον χώρο Θ^* μπορούμε να παίρνουμε μία πρώτη εκτίμηση για τις παραπάνω ποσότητες με βάση αυτά).
Αρχικά παρατηρούμε ότι για την σχέση 2.39 την πρώτη ισότητα αρκεί να τη δείξουμε για την περίπτωση $\lambda = \eta$. Πράγματι τότε για τα μέτρα $\lambda - \eta, \lambda + \eta$ έχουμε

$$\langle \eta, \psi_\lambda \rangle = \frac{1}{2}(\langle \eta + \lambda, \psi_\lambda + \langle \eta - \lambda, \psi_\lambda \rangle)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\int\limits_{[0,\infty)^2} s \wedge t(\eta - \lambda)(ds)(\eta - \lambda)(dt) + \int\limits_{[0,\infty)^2} s \wedge t(\eta + \lambda)(ds)(\eta + \lambda)(dt)\Big]$$

$$= \frac{2}{2}\int\limits_{[0,\infty)^2} s \wedge t\eta(ds)\lambda(dt)$$

ενώ η δεύτερη ισότητα παρατηρούμε ότι είναι μία απλή ολοκλήρωση κατά μέλη αφού

$$\int\limits_{[0,\infty)} \lambda((s,\infty))\eta((s,\infty))ds = \int\limits_{[0,\infty)} \dot{\psi}_\lambda(s)\eta((s,\infty))ds$$

$$= -\int\limits_{[0,\infty)} \psi_\lambda(s) - \eta(ds) = \langle \eta, \psi_\lambda \rangle.$$

Θα δείξουμε αρχικά την πρώτη ισότητα για λ μη ατομικό με συμπαγή φορέα. Έχουμε

$$\int\limits_{[0,\infty)^2} s \wedge t\, \lambda(ds)\lambda(dt) = 2\int\limits_{[0,\infty)}\int\limits_{[0,t)} s\lambda(ds)\lambda(dt)$$

$$= 2\int\limits_{[0,\infty)} s \int\limits_{[s,\infty)} \lambda(dt)\lambda(ds) = \int\limits_{[0,\infty)} 2s\lambda((s,\infty))\lambda(ds)$$

$$= -\int\limits_{[0,\infty)} sd|\lambda((s,\infty))|^2 = \int\limits_{[0,\infty)} |\lambda((s,\infty))|^2 ds\Big(= \|\psi_\lambda\|^2_{H^1}\Big).$$

Για την γενική περίπτωση, έστω $\lambda \in \Theta^*$, έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$ μη ατομικών μέτρων με συμπαγή φορέα που προσεγγίζουν το λ. Έχουμε

$$\int\limits_{[0,\infty)^2} s \wedge t\, \lambda(ds)\lambda(dt) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,\infty)^2} s \wedge t\lambda_n(ds)\lambda_n(dt) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,\infty)} |\lambda_n(s,\infty)|^2 ds$$

$$= \int\limits_{[0,\infty)} |\lambda((s,\infty))|^2 ds.$$

Τώρα θα αποδείξουμε τον χαρακτηρισμό της Λ^*_W. Έστω $\psi \in H^1$, τότε έχουμε

$$\Lambda^*_W(\psi) = \sup_{\lambda\in\Theta^*}\{\langle \lambda, \psi \rangle - \Lambda_W(\lambda)\}$$

όπου

$$\langle \lambda, \psi \rangle = \int_{[0,\infty)} \psi(s)\lambda(ds) = \int_{[0,\infty)} \int_{[0,t)} \dot{\psi}(s) ds \lambda(dt) = \int_{[0,\infty)} \dot{\psi}(s) \int_{(s,\infty)} \lambda(dt) ds$$

$$= \int_{[0,\infty)} \dot{\psi}(s)\dot{\psi}_\lambda(s) ds = (\psi, \psi_\lambda)_{H^1},$$

συνεπώς έχουμε

$$\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) = \sup_{\lambda \in \Theta^*} \{(\psi, \psi_\lambda)_{H^1} - \frac{1}{2}\|\psi_\lambda\|^2_{H^1}\}$$

όμως μπορούμε από τις απεικονίσεις $\lambda \to \psi_\lambda, \psi \to \lambda_\psi$ να πάρουμε sup στον L^2 και άρα

$$\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) = \sup_{\phi \in L^2} \{(\dot{\psi}, \phi)_{L^2} - \frac{1}{2}\|\phi\|^2_{H^1}\} = \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{H^1}$$

ένας άμεσος τρόπος να το δει κάποιος αυτό είναι από τις σχέσεις

$$(\dot{\psi}, \phi) - \frac{1}{2}\|\phi\|^2_2 \leq \|\dot{\psi}\|_2\|\phi\|_2 - \frac{1}{2}\|\phi\|^2_2 = \frac{1}{2}\|\phi\|_2(2\|\dot{\psi}\|_2 - \|\phi\|_2) \leq \frac{1}{2}\|\dot{\psi}\|_2$$

και για $\phi = \dot{\psi}$ έχουμε το ζητούμενο.
Μένει να δείξουμε ότι

$$\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\phi) < \infty \implies \phi \in H^1.$$

Έστω $\psi \in C^\infty_c([0,\infty))$, ορίζουμε το γραμμικό συναρτησιακό

$$T : C^\infty_c([0,\infty)) \to \mathbb{R}$$

με

$$T(\psi) := -\int_{[0,\infty)} \dot{\psi}\phi(ds) = \langle \lambda_\psi, \phi \rangle$$

και έχουμε ότι

$$T(\psi) - \frac{1}{2}\|\psi\|^2_2 \leq \Lambda_{\mathcal{W}^*}(\phi) < \infty, \forall \psi \in C^\infty_c([0,\infty))$$

συνεπώς είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Άρα υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση στον L^2 λόγω πυκνότητας και άρα από Θεώρημα αναπαράστασης $Riesz$ υπάρχει μοναδικό ϕ τέτοιο ώστε

$$-\int_{[0,\infty)} \dot{\psi}\phi(ds) = \int_{[0,\infty)} \psi\dot{\phi}ds, \forall\psi \in C_c^\infty([0,\infty))$$

δηλαδή $\phi \in H^1$. □

Τώρα θα δώσουμε το εντυπωσιακό αποτέλεσμα γνωστό ως Θεώρημα $Fernique$.

Θεώρημα 2.7.2. *Έστω X χώρος $Frechet$(δηλαδή τοπικά κυρτός, πλήρης μετρικός χώρος με μετρική αναλλοίωτη ως προς τις γραμμικές μεταθέσεις) και*

$$\Phi : X \to [0,\infty]$$

μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\Phi(x_1 + x_2) \leq \Phi(x_1) + \Phi(x_2), \forall x_1, x_2 \in X \text{ (υποαθροιστική)}$$

$$\Phi(ax) = |a|\Phi(x), \forall x \in X, a \in \mathbb{R}.$$

Τότε, αν μ είναι ένα $Borel$ μέτρο πιθανότητας στο X τέτοιο ώστε το μ^2 στον $(X^2, \mathcal{B}_{X^2})$ είναι αναλλοίωτο στον μετασχηματισμό

$$(x_1, x_2) \to (\frac{x_1 - x_2}{2^{\frac{1}{2}}}, \frac{x_1 + x_2}{2^{\frac{1}{2}}}), \forall(x_1, x_2) \in X$$

και

$$\mu(\{x \in X|\Phi(x) < \infty\}) < \infty$$

έπεται ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_X \exp[\alpha\Phi^2(x)]\mu(dx) < \infty.$$

Το παραπάνω Θεώρημα φαίνεται να έχει πραγματικά ασθενείς υποθέσεις για τόσο ισχυρό αποτέλεσμα. Την ισχύ του θα τη δούμε και σε αποδείξεις παρακάτω αλλά μία γενική περίπτωση που εφαρμόζεται είναι σε χώρο $Banach$

με κάποιο *Gaussian* μέτρο μ που ικανοποιεί την τελευταία συνθήκη, τότε για $\Phi(x) = \|x\|^2$ (ή πιο γενικά μία *seminorm*) έχουμε πως

$$\int_X \exp[\alpha\|x\|^2]\mu(dx) < \infty$$

για κάποιο $\alpha > 0$. Τέλος, σε ένα χώρο *Banach* θα έχουμε πως για κάθε γραμμικό συναρτησιακό $f \in X^*$

$$\int_X \exp[\alpha\langle f, y\rangle]\mu(dy) < \infty$$

Απόδειξη. Έστω $0 < s < t < \infty$ τότε,

$$\mu(\Phi \leq s)\mu(\Phi \geq t) = \mu^2((x_1, x_2) \in X|\Phi(x_1) \leq s \text{ και } \Phi(x_2) \geq t)$$

$$= \mu^2((\frac{x_1 - x_2}{2^{\frac{1}{2}}}, \frac{x_1 + x_2}{2^{\frac{1}{2}}})|\Phi(x_1) \leq s \text{ και } \Phi(x_2) \geq t)$$

$$\mu^2((x_1, x_2)|\Phi(\frac{x_1 - x_2}{2^{\frac{1}{2}}}) \text{ και } \Phi(\frac{x_1 + x_2}{2^{\frac{1}{2}}}) \geq t)$$

$$= \mu^2((x_1, x_2)|\Phi(x_1 - x_2) \geq s2^{\frac{1}{2}} \text{ και } \Phi(x_1 + x_2) \geq 2^{\frac{1}{2}t})$$

όπου παρατηρούμε ότι

$$\Phi(x_1) - \Phi(x_2) = \Phi(x_1 - x_2 + x_2) - \Phi(x_2) \leq \Phi(x_1 - x_2) \leq s2^{\frac{1}{2}}$$

αντίστοιχα

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) \leq s2^{\frac{1}{2}}$$

συνεπώς

$$\Phi(x_1 - x_2) \leq s2^{\frac{1}{2}} \implies |\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq s2^{\frac{1}{2}}$$

και

$$\Phi(x_1 + x_2) \geq t2^{\frac{1}{2}} \implies \Phi(x_1) + \Phi(x_2) \geq t2^{\frac{1}{2}}.$$

Άρα,

$$\mu(\Phi \leq s)\mu(\Phi \geq t) = \mu^2((x_1, x_2) \in X|\Phi(x_1) \leq s \text{ και } \Phi(x_2) \geq t)$$

$$\leq \mu^2((x_1, x_2)||\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq s2^{\frac{1}{2}} \text{ και } \Phi(x_1) + \Phi(x_2) \geq t2^{\frac{1}{2}})$$

$$\le \mu^2((x_1,x_2)|\frac{1}{2}\Big[-|\Phi(x_1)-\Phi(x_2)|+(\Phi(x_1)+\Phi(x_2))\Big]\ge (t-s)2^{-\frac{1}{2}})$$
$$=\mu^2((x_1,x_2)|\Phi(x_1)\wedge\Phi(x_2)\ge (t-s)2^{-\frac{1}{2}})$$
$$=\mu(x|\Phi(x)\ge (t-s)2^{-\frac{1}{2}})^2.$$

Αν αναλύσουμε λίγο τα παραπάνω βήματα, σκεπτόμενοι το $\mathbb{R}$, κάναμε το εξής. Πήραμε ένα ορθογώνιο με ένα σταθερό πεπερασμένο τμήμα ($\Phi(x)\le s$) και την ουρά του Φ ($\Phi(x)\ge t$) το στρέψαμε κατά $-45°$ το νέο σύνολο δεν είναι ορθογώνιο της μορφής $A\times B$ είναι παρόλα αυτά ένα "πλάγιο" ορθογώνιο το οποίο το καλύψαμε με το μικρότερο ορθογώνιο που μπορούμε και έτσι φράξαμε το μέτρο.
Έστω
$$s>0:\mu(\Phi<s)>\frac{1}{2}$$
(υπάρχει από υπόθεση). Κατασκευάζουμε μία ακολουθία $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής
$$t_0=s, t_n=s+t_{n-1}2^{\frac{1}{2}}, n\ge 1$$
για την οποία ισχύει(σε γενική μορφή)
$$\begin{aligned}
&t_n=s+ct_{n-1}\\
&t_{n-1}=s+ct_{n-2}\\
&\vdots\\
&t_1=s+ct_1\\
&t_0=s\\
\Longrightarrow\\
&t_n=s+ct_{n-1}\\
&ct_{n-1}=cs+c^2t_{n-2}\\
&\vdots\\
&c^{n-1}t_1=c^{n-1}s+c^nt_0\\
&c^nt_0=c^ns\\
\Longrightarrow \text{ (αθροίζοντας)}\\
&t_n=s\sum_{k=0}^{n}c^k=s\frac{c^{n+1}-1}{c-1}
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\mu(\Phi \le s)\mu(\Phi \ge t_n) \le \mu(\Phi \ge t_{n-1})^2$$

$$\Longrightarrow \frac{\mu(\Phi \ge t_n)}{\mu(\Phi \le s)} \le \Big(\frac{\mu(\Phi \ge t_{n-1})}{\mu(\Phi \le s)}\Big)^2$$

$$\frac{\mu(\Phi \ge t_n)}{\mu(\Phi \le s)} \le \Big(\frac{\mu(\Phi \ge t_0)}{\mu(\Phi \le s)}\Big)^{2^n} = \Big(\frac{\mu(\Phi \ge s)}{\mu(\Phi \le s)}\Big)^{2^n}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{\mu\Big(\Phi \ge s\frac{2^{\frac{n+1}{2}}-1}{2^{\frac{1}{2}}-1}\Big)}{\mu(\Phi \le s)} \le \Big(\frac{\mu(\Phi \ge s)}{\mu(\Phi \le s)}\Big)^{2^n}$$

όπου

$$\mu(\Phi \ge s\frac{2^{\frac{n+1}{2}}-1}{2^{\frac{1}{2}}-1}) \ge \mu(\Phi \ge 2^{\frac{n}{2}}\frac{2s}{2^{\frac{1}{2}}-1})$$

για $b = \Big(\frac{2s}{2^{\frac{1}{2}}-1}\Big)^2$ έχουμε

$$\mu(\Phi \ge s\frac{2^{\frac{n+1}{2}}-1}{2^{\frac{1}{2}}-1}) \ge \mu(\Phi^2 \ge 2^n b), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς για

$$\sigma \equiv -\log\Big[\frac{\mu(\{x : \Phi(x) \ge s\})}{\mu(\{x : \Phi(x) \le s\})}\Big] > 0, \text{ λόγω της επιλογής του } s$$

έχουμε

$$\mu(\{x : \Phi^2(x) \ge 2^n b\}) \le \exp[-2^n\sigma]$$

συνεπώς αν $a < \frac{\sigma}{2b}$, έχουμε

$$\int\limits_{\{x:\Phi(x)^2 \ge b\}} \exp[a\Phi(x)^2]\mu(dx) \le \sum_{n=0}^{\infty} \exp[2^{n+1}ab]\mu(\{x : \Phi^2(x) \ge 2^n b\})$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-2^n(\sigma - 2ab)] < \infty.$$

□

Με βάση το Θεώρημα 2.7.2 θα κατασκευάσουμε μία συνάρτηση με συμπαγή επίπεδα τέτοια ώστε

$$\mathcal{W}_\epsilon(\{\Phi > L\}) \leq ce^{-\frac{L}{\epsilon}}$$

και άρα η ακολουθία μέτρων θα είναι εκθετικά σφιχτή.

Πρόταση 2.7.2.1. *Έστω*

$$\Phi : \Theta \to [0, \infty]$$

$$\Phi(\theta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{0 \leq s < t \leq n} \frac{|\theta(t) - \theta(s)|}{|t-s|^{\frac{1}{4}}} + \sup_{t \geq 1} \frac{|\theta(t)|}{t^{\frac{3}{4}}}$$

Τότε υπάρχει $\alpha > 0$ *τέτοιο ώστε*

$$\int_{\Theta} \exp[\alpha \Phi^2(\theta)] \mathcal{W}(d\theta) < \infty.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.7.2.
Παρατηρούμε ότι

$$\Phi(a\theta) = |a|\Phi(\theta), \forall \theta \in \Theta, a \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(\theta_1 + \theta_2) \leq \Phi(\theta_1) + \Phi(\theta_2), \forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta.$$

Επίσης το μέτρο $\mathcal{W}$ είναι αναλλοίωτο στον μετασχηματισμό

$$(x_1, x_2) \to \Big(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\Big)$$

αφού είναι μέτρο $Gauss$.
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\mathcal{W}(\Phi < \infty) = 1$$

Εδώ θα δούμε πόσο χρήσιμο είναι το Θεώρημα 2.7.2. Παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε πως

$$\int_{\Theta} (\Phi(\theta))^k \mathcal{W}(d\theta) < \infty$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.
Συνεπώς, αν θεωρήσουμε

$$\Phi_0(\theta) = \sup_{t \geq 1} \frac{|\theta(t)|}{t^{\frac{3}{4}}}$$

$$\Phi_n(\theta) = \sup_{0 \leq s < t \leq n} \frac{|\theta(t) - \theta(s)|}{|t-s|^{\frac{1}{4}}}$$

τότε, λόγω του 2.7.1 έπεται ότι η κάθε Φ_n ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος $Fernique$. Άρα έχουμε συγκεκριμένα πως

$$\int_{\Theta} (\Phi_n(\theta))^8 \mathcal{W}(d\theta) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ειδικά υπάρχει $A > 0$:

$$\int_{\Theta} (\Phi_1(\theta))^8 \mathcal{W}(d\theta) = A.$$

Όμως από τις ιδιότητες του μέτρου $Wiener(2.7.1)$ έπεται πως

$$\sup_{0 \leq s < t \leq n} \frac{|\theta(t) - \theta(s)|}{|t-s|^{\frac{1}{4}}} =^{(d)} \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}} \frac{|\theta(t) - \theta(s)|}{|t-s|^{\frac{1}{4}}} = n^{\frac{1}{4}} \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|\theta(t) - \theta(s)|}{|t-s|^{\frac{1}{4}}}$$

(η απόδειξη δεν είναι δύσκολη, απλά αναφέρουμε πως δεν είναι τετριμμένο και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η κίνηση $Brown$ έχει συνεχή μονοπάτια με πιθανότητα 1).

Δηλαδή

$$\mathbb{E}^{\mathcal{W}}[(\Phi_n)^8] = n^{\frac{8}{4}} \mathbb{E}^{\mathcal{W}}[(\Phi_1)^8] = n^2 A$$

Παρατηρούμε ότι όσο αφορά το άθροισμα στον τύπο της Φ έχουμε καταφέρει να πάρουμε επαρκεί φράγματα αφού

$$A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty.$$

Μένει λοιπόν να βρούμε ένα φράγμα για τον όρο Φ_0. Αυτό θα έρθει άμεσα από τις εξής παρατηρήσεις για

$$\Phi'_n(\theta) := \sup_{n \leq t \leq n+1} \frac{|\theta(t)|}{|t|^{\frac{3}{4}}}$$

- $\Phi'_n(\theta - \theta(n)) = \sup\limits_{n \le t \le n+1} \frac{|\theta(t)-\theta(n)|}{|t-n|^{\frac{3}{4}}} =^{(d)} \sup\limits_{n \le t \le n+1} \frac{|\theta(t-n)|}{t^{\frac{3}{4}}} \le \sup\limits_{0 \le t \le 1} \frac{|\theta(t)|}{n^{\frac{3}{4}}}$
- $|\theta(n)| =^d |\sqrt{n}\theta(1)|$
- $\Phi'_n(\theta) = \Phi'_n(\theta - \theta(n) + \theta(n)) \le \Phi'_n(\theta - \theta(n)) + \Phi'_n(\theta(n))$
- $\Phi_0^k \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\Phi'_n)^k, \forall k \in \mathbb{N}.$

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις υπολογίζουμε

$$\mathbb{E}^{\mathcal{W}}[\Phi'(\theta - \theta(n))^8] \le \mathbb{E}^{\mathcal{W}}[(\sup_{0 \le t \le 1} \frac{|\theta(t)|}{n^{\frac{3}{4}}})^8]$$

όμως η απεικόνιση

$$\theta \to \sup_{0 \le t \le 1} |\theta(t)|$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος $Fernique$ και άρα έχουμε ειδικά πως

$$\mathbb{E}^{\mathcal{W}}[(\sup_{0 \le t \le 1} |\theta(t)|)^8] = B < \infty$$

συνεπώς

$$\mathbb{E}^{\mathcal{W}}[\sup_{0 \le t \le 1} \frac{|\theta(t)|}{n^{\frac{3}{4}}}] = \frac{B}{n^6}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Τέλος,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{W}}[(\frac{|\theta(n)|}{n^{\frac{3}{4}}})^8] = \mathbb{E}^{(\mathcal{W}}[\frac{|\theta(1)|}{n^{\frac{2}{4}}})^8] = \frac{C}{n^2}$$

αφού και πάλι η

$$\theta \to |\theta(n)|$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του $Fernique$.
Εφόσον

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

έπεται το ζητούμενο. □

Τώρα θα δείξουμε το άνω φράγμα πρώτα για συμπαγή και στην συνέχεια, με το παραπάνω Θεώρημα, θα δείξουμε ότι έχουμε εκθετική σφιχτότητα.

Θεώρημα 2.7.3. *Έστω $\psi \in \Theta$. Τότε, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\mathcal{W}_\epsilon(\overline{B}(\psi, r)) \le \begin{cases} \exp[-\frac{1}{\epsilon\delta}], \text{ αν } \Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) = \infty \\ \exp[-\frac{\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi)-\delta}{\epsilon}], \text{ αν } \Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) < \infty. \end{cases} \tag{2.42}$$

Συγκεκριμένα, αν $K \subset\subset \Theta$,, τότε

$$\limsup_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon \log(\mathcal{W}_\epsilon(K)) \le -\inf_K \Lambda^*_{\mathcal{W}}. \tag{2.43}$$

Απόδειξη. Για την 2.42 έχουμε

$$\mathcal{W}_\epsilon(\overline{B}(\psi, r)) = \mathcal{W}(\overline{B}(\frac{\psi}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}), \frac{r}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}) = \int\limits_{\overline{B}(\psi/\epsilon^{\frac{1}{2}}, r/\epsilon^{\frac{1}{2}})} \exp\Big[-\langle\frac{\lambda}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}, \theta\rangle\Big]\Big[\langle\frac{\lambda}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}, \theta\rangle\Big]\mathcal{W}(d\theta)$$

$$\le \sup_{\phi \in \overline{B}(\psi, r)} \exp\Big[-\frac{\langle\lambda, \phi\rangle}{\epsilon}\Big] \times \int\limits_{\overline{B}(\psi/\epsilon^{\frac{1}{2}}, r/\epsilon^{\frac{1}{2}})} \exp\Big[\langle\frac{\lambda}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}, \theta\rangle\Big]\mathcal{W}(d\theta)$$

όπου

$$\sup_{\phi \in \overline{B}(\psi, r)} \exp\Big[-\frac{\langle\lambda, \phi\rangle}{\epsilon}\Big] = \exp\Big[-\inf_{\phi \in \overline{B}(\psi, r)} \frac{\langle\lambda, \phi\rangle}{\epsilon}\Big]$$

και άρα

$$\le \exp\Big[-\frac{1}{\epsilon}(\inf_{\phi \in \overline{B}(\psi, r)} \langle\lambda, \phi - \psi\rangle + \langle\lambda, \psi\rangle\Big] \int\limits_{\Theta} \exp[-\langle\lambda/\epsilon, \phi\rangle]\mathcal{W}(d\theta)$$

$$\exp[-\frac{1}{\epsilon}(-\|\lambda\| r + \langle\lambda, \psi\rangle - \Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda))]$$

για κάθε $\lambda \in \Theta^*$. Αν $\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) = \infty$, διαλέγουμε $\lambda \in \Theta^*$ τέτοιο ώστε

$$\langle\lambda, \psi\rangle - \Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda) \ge 1 + \frac{1}{\delta}$$

και

$$r = \frac{1}{1 + \|\lambda\|_{\Theta^*}}.$$

Αν $\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) < \infty$, διαλέγουμε $\lambda \in \Theta^*$ τέτοιο ώστε

$$\langle\lambda, \psi\rangle - \Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda) \ge \Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) - \frac{\delta}{2}$$

και

$$r = \frac{\delta}{2(1 + \|\lambda\|_{\Theta^*})}$$

έχουμε

$$\mathcal{W}_\epsilon(\overline{B}(\psi, r)) \leq \exp[-\frac{1}{\epsilon\delta}].$$

Ενώ αν $\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) < \infty$, επιλέγωντας $\lambda \in \Theta^*$ τέτοιο ώστε $\langle \lambda, \psi \rangle - \Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda) \geq \Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) - \frac{\delta}{2}$ και $r = \frac{\delta}{2(1+\|\lambda\|)}$ έχουμε

$$\mathcal{W}_\epsilon(\overline{B}(\psi, r)) \leq \exp[-\frac{\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) - \delta}{\epsilon}].$$

Για να αποδείξουμε την 2.43, έστω

$$l = \inf_K \Lambda^*_{\mathcal{W}}$$

και, για $\delta > 0$ μπορούμε μέσω της 2.42 να καλύψουμε το K με πεπερασμένα $\psi_i, r_i : i \in \{1, \cdots, n\}$. Άρα έχουμε

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(\psi_i, r_i)$$

συνεπώς

$$\mathcal{W}_\epsilon(K) \leq n \max\{\mathcal{W}_\epsilon(B(\psi_i, r_i)), i \in \{1, \cdots, n\}\}$$

όμως από την 2.42 έχουμε ότι

$$\mathcal{W}_\epsilon(B(\psi_i, r_i)) \leq \exp[-\frac{1}{\epsilon\delta}] \vee \exp[-\frac{l - \delta}{\epsilon}]$$

αφού

$$l \leq \Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi_i) \implies -l \geq -\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi_i)$$

άρα από την μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης έπεται

$$\mathcal{W}_\epsilon(B(\psi_i, r_i)) \leq \exp[-\frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{\delta} \wedge (l - \delta))],$$

συνεπώς

$$\limsup_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon \log \mathcal{W}_\epsilon(K) \leq -[\frac{1}{\delta} \wedge (l - \delta)]$$

παίρνοντας το όριο για $\delta \downarrow 0$ έχουμε το ζητούμενο.

□

Τώρα θα δείξουμε το κάτω φράγμα για ανοικτά υποσύνολα. Πρώτα όμως, για λόγους που θα φανούν στην απόδειξη, πρέπει να δούμε την συμπεριφορά του μέτρου ως προς τις μεταθέσεις. Αυτό διότι σε κανονικές κατανομές αν δεσμέυσουμε σε μέτρα με διαφορετική μέση τιμή η κατανομή που ελαχιστοποιεί την εντροπία είναι κανονική με τη νέα μέση τιμή. Συνεπώς υποπτευόμαστε ότι και σε αυτή την περίπτωση η απλή μετάθεση θα είναι η καλύτερη αλλαγή μέτρου.

Λήμμα 2.7.3.1. $(CAMERON - MARTIN)$: *Έστω* $\lambda \in \Theta^*$, *έστω* $\mathcal{W}^\lambda$ *η κατανομή του μετασχηματισμού*

$$\theta \to \theta + \psi_\lambda$$

$$\text{όπου, } \psi_\lambda(s) = \lambda((s, \infty))$$

υπό το $\mathcal{W}$. *Τότε,* $\mathcal{W}_\lambda \ll \mathcal{W}$ *και*

$$\frac{d\mathcal{W}^\lambda}{d\mathcal{W}}(\theta) = R_\lambda(\theta) := \exp\Big[\langle \lambda, \theta \rangle - \Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda)\Big], \ \theta \in \Theta. \tag{2.44}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του Λήμματος είναι ισοδύναμη με το να δείξουμε ότι το μέτρο P στο Θ με

$$\frac{dP}{d\mathcal{W}^\lambda} = \frac{1}{R_\lambda}$$

είναι ίσο με το μέτρο $Wiener$: $\mathcal{W}$. Έστω $\eta \in \Theta^*$,

$$\int_\Theta \exp\Big[\langle \eta, \theta \rangle\Big] P(d\theta)$$

$$= \int_\Theta \frac{1}{R_\lambda(\theta)} \exp\Big[\langle \eta, \theta \rangle\Big] \mathcal{W}^\lambda(d\theta)$$

$$= \int_\Theta \frac{1}{R_\lambda(\theta + \psi_\lambda)} \exp\Big[\langle \eta, \theta + \psi_\lambda \rangle\Big] \mathcal{W}(d\theta)$$

$$= \exp\Big[\langle \eta - \lambda, \psi_\lambda \rangle + \Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda)\Big] \int_\Theta \exp\Big[\langle \eta - \lambda, \theta \rangle\Big] \mathcal{W}(d\theta)$$

όπου

$$\Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda) = 2\langle \lambda, \psi_\lambda \rangle \text{ και } \exp[-\Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda)] = \int_\Theta \exp[\langle \lambda, \theta \rangle] \mathcal{W}(d\theta), \text{ άρα συνεχίζοντας}$$

$$= \exp[\langle \eta, \psi_\lambda - \Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda) + \Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda) + \Lambda_{\mathcal{W}}(\eta - \lambda)] = \exp[-\Lambda_{\mathcal{W}}(\eta)].$$

$\square$

Τώρα είμαστε σε θέση να δείξουμε το κάτω φράγμα για τα ανοικτά.

Λήμμα 2.7.3.2. *Για κάθε ανοικτό $G \subset \Theta$,*

$$\liminf_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon \mathcal{W}_\epsilon(G) \geq -\inf_G \Lambda^*_{\mathcal{W}}$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι

$$\liminf_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon \mathcal{W}_\epsilon(G) \geq -\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi), \forall \psi \in \Theta.$$

Άρα από αυτή την μορφή γίνεται εμφανές ότι αρκεί να μελετήσουμε την περίπτωση όπου $\psi \in H^1 \cap G$, αφού διαφορετικά η ποσότητα στα δεξιά είναι άπειρο. Έστω λοιπόν $\psi \in H^1 \cap G$, έχοντας κατά νου το λήμμα 2.7.1.1 θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda) = \Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi_\lambda)$. Αυτό, δεν είναι δύσκολο αρκεί να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε

$$\psi \in C_c^\infty([0, \infty))$$

αφού το σύνολο αυτό είναι πυκνό στον H^1 και για κάθε $\psi \in H^1$ υπάρχει $\psi_n \in C_c^\infty : \psi_n \to \psi, \Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi_n) \to \Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi)$. Συνεπώς για τέτοια ψ θεωρούμε το μέτρο $\lambda((t, \infty)) = \dot{\psi}$. Για $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(\psi, r) \subset G$ και $0 < \delta < r$(υπενθυμίζουμε ότι $\psi_\lambda = \psi$) έχουμε

$$\mathcal{W}_\epsilon(G) \geq \mathcal{W}_\epsilon(B(\psi, \delta)) = \mathcal{W}^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}}}(0, \frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}})$$

$$= \int_{B(0, \frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}})} \exp[-\langle \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}}, \theta \rangle - \frac{1}{\epsilon}\Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda)]\mathcal{W}(d\theta)$$

$$\geq \exp[-\frac{1}{\epsilon}(\Lambda_{\mathcal{W}}(\lambda) + \delta\|\lambda\|)] = \exp[-\frac{1}{\epsilon}(\Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) + \delta\|\lambda\|)]$$

συνεπώς

$$\liminf_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon \log \mathcal{W}_\epsilon(G) \geq \Lambda^*_{\mathcal{W}}(\psi) - \delta\|\lambda\|, \forall r > \delta > 0$$

παίρνοντας το όριο για $\delta \downarrow 0$ έχουμε το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 6. *Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι και σε αυτό το Θεώρημα όπως και στου Cramer αποδείξαμε κάτι πιο ισχυρό αφού ουσιαστικά πήραμε εκτιμήσεις για κάθε $\epsilon > 0$ και όχι μόνο για το όριο.*

Μέρος II

Εφαρμογές

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές

3.1 Εφαρμογές του Θ.Schilder

3.1.1 Θεώρημα του Strassen

Θα δείξουμε το Θεώρημα του $Strassen$. Έστω

$$\Theta := \{\theta \in C([0,\infty);\mathbb{R} : \theta(0) = 0, \lim_{t\uparrow\infty} \frac{\theta(t)}{t} = 0\} \text{ με } \|\theta\|_\Theta = \sup_{t\geq 0} \frac{|\theta(t)|}{1+t}$$

το οποίο εφοδιάζουμε με την $Borel$ σ-άλγεβρα του και το μέτρο $Wiener$. Το θεώρημα του $Strassen$ μας δίνει ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα για την συμπεριφορά των ποσοτήτων

$$\xi_n(\theta,t) = \frac{\theta(nt)}{\beta(n)}, \text{ όπου } \beta(n) = \sqrt{2n\log(\log(n))}, n \geq 3$$

καθώς $n \uparrow \infty$. Όπως θα δούμε οι παραπάνω ακολουθίες δεν συγκλίνουν σ.β.(πάντα ως προς το μέτρο $Wiener$), παρόλα αυτά είναι σ.β. σχετικά συμπαγή σύνολα και τα σημεία συσσώρευσης είναι όλη η μοναδιαία μπάλα του χώρου $Sobolev$ H^1. Η ακριβής διατύπωση είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω Θ, ξ_n όπως παραπάνω και $K = \{\psi \in H^1 | \|\psi\|_{H^1} \leq 1\}$. Τότε,*

i

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\|\xi_n - K\| = 0, \sigma.\beta. \iff \mathcal{W}\Big(\{\theta : \overline{\lim}_{n\to\infty}\|\xi_n - K\| = 0\}\Big) = 1 \tag{3.1}$$

και κάθε οριακό σημείο της ακολουθίας είναι στοιχείο του K.

ii Για κάθε $\psi \in K$ υπάρχει υπακολουθία της $\xi_n(\theta)$ τέτοια ώστε $\xi_{n'}(\theta) \to \psi$ για σχεδόν κάθε $\theta \in \Theta$ δηλαδή

$$\mathcal{W}\Big(\{\theta : \underline{\lim}_{n\to\infty}\|\xi_n - \psi\| = 0\}\Big) = 1 \tag{3.2}$$

iii Για κάθε $\Phi \in C(\Theta, \mathbb{R})$ έχουμε

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\Phi(\xi_n(\theta)) = \sup_K \Phi, \ \ \sigma.\beta. \tag{3.3}$$

(Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\overline{\lim}$ ακόμα και όταν το όριο υπάρχει για να επισημάνουμε ότι θέλουμε σύγκλιση όλης της ακολουθίας και όχι μίας υπακολουθίας όπως στο μέρος *ii* του Θεωρήματος).

Πριν αρχίσουμε με την απόδειξη, παρατηρούμε ότι η μεταβολή του όρου

$$\frac{1}{\sqrt{\log\log n}}$$

είναι πολύ αργή, για την ακρίβεια έχουμε πως

$$\frac{1}{\sqrt{\log\log r^{n-1}}} = \frac{1}{\sqrt{\log[(n-1)\log r]}} \sim \frac{1}{\sqrt{\log[\log r^n]}}$$

συνεπώς σκεφτόμαστε μήπως αρκεί να κοιτάξουμε την σύγκλιση σε υπακολουθίες της μορφής $s^m, s > 1, m \in \mathbb{N}$, $s^m \geq 3$(χρειαζόμαστε την τελευταία συνθήκη ώστε να ορίζεται η $\beta(s^m)$).

Λήμμα 3.1.1.1. *Έστω $S \subset (1,2) : 1 \in \overline{S}$, τέτοιο ώστε*

$$\overline{\lim}_m\|\xi_{[s^m]}(\theta) - K\| = 0, \forall s \in S.$$

Τότε,

$$\overline{\lim}_n\|\xi_n(\theta) - K\| = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Έστω $s \in S$ σταθερό, τότε υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $s^m \geq 3$ και $\|\xi_{s^m} - K\| < \delta$ για κάθε $m \geq m_0$. Ορίζουμε

$$\psi_n = \xi_n \text{ και } \psi_{s,m} := \xi_{[s^m]}.$$

Έστω $n_0 = [s^{m_0+1}]$, τότε για $n \geq n_0$ υπάρχει $m \geq m_0 + 1$ τέτοιο ώστε

$$s^{m-1} \leq n \leq s^m. \tag{3.4}$$

Έχουμε

$$\|\psi_n - K\| \leq \|\psi_{s,m} - K\| + \|\psi_n - \psi_{s,m}\| < \delta + \|\psi_{s,m} - \psi_n\|.$$

Συνεπώς αρκεί να φράξουμε το $\|\psi_{s,m} - \psi_n\|$. Παρατηρούμε ότι

$$\psi_n(t) = \frac{\theta(nt)}{\beta(n)} = \frac{\theta([s^m]t\Big(\frac{n}{[s^m]}\Big))}{\beta([s^m])}\frac{\beta([s^m])}{\beta(n)} = \psi_{s,m}\Big(\frac{n}{[s^m]}\cdot\Big)\frac{\beta([s^m])}{\beta(n)},$$

και άρα

$$\|\psi_{s,m} - \psi_n\| = \|(\psi_{s,m} - \frac{\beta([s^m])}{\beta(n)}\psi_{s,m}) + \frac{\beta([s^m])}{\beta(n)}\Big(\psi_{s,m} - \psi_{s,m}(\frac{n}{[s^m]}\cdot)\Big)\|$$

$$\leq \Big(\frac{\beta([s^m])}{\beta(n)} - 1\Big)\|\psi_{s,m}\| + \frac{\beta([s^m])}{\beta(n)}\|\psi_{s,m} - \psi_{s,m}(\frac{n}{[s^m]}\cdot)\|$$

αφού $\frac{\beta([s^m])}{\beta(n)} \geq 1$.

Έχουμε πως υπάρχει $\phi \in K : \|\phi - \psi_{s,m}\| < \delta$ άρα για αυτό το ϕ έπεται

$$\|\psi_{s,m}\| \leq \|\psi_{s,m} - \phi\| + \|\phi\| < \delta + \|\phi\|$$

όπου

$$|\phi(t)| = |\int_0^t \dot{\phi}(s)ds| \leq \int_0^t |\dot{\phi}(s)|ds \leq_{Holder} \|\phi\|_{H^1}\sqrt{t} \leq \sqrt{t}, \forall t \geq 0$$

συνεπώς

$$\|\phi\| = \sup_{t\geq 0}\frac{|\phi(t)|}{1+t} \leq \sup_{t\geq 0}\frac{\sqrt{t}}{1+t} \leq 1$$

και άρα

$$\|\psi_{s,m}\| \leq \delta + 1$$

από την ανισότητα
$$\frac{\log(\log(sr))}{\log(\log(r))} < s$$
για αρκετά μεγάλα s, r, έπεται
$$\frac{\beta([s^m])}{\beta(n)} = \Big(\frac{[s^m]}{n}\frac{\log(\log([s^m]))}{\log(\log(n))}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(s\frac{\log(\log(ns))}{\log(\log(n))}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq (s^2)^{\frac{1}{2}} = s$$
όπου χρησιμοποιήσαμε την $\frac{[s^m]}{n} \leq 1 < s$. Συνεπώς επιβάλουμε τον περιορισμό
$$(s-1) < \frac{\delta}{1+\delta}$$
και έχουμε
$$\Big(\frac{\beta([s^m])}{\beta(n)} - 1\Big)\|\psi_{s,m}\| < \delta.$$
Μένει λοιπόν να βρούμε ένα φράγμα για την ποσότητα
$$\frac{\beta([s^m])}{\beta(n)}\|\psi_{s,m} - \psi_{s,m}\Big(\frac{n}{[s^m]}\cdot\Big)\|.$$
Για $\phi \in K$ όπως παραπάνω έχουμε
$$\|\psi_{s,m}-\psi_{s,m}\Big(\frac{n}{[s^m]}\cdot\Big)\| \leq \|\psi_{s,m}-\phi\|+\|\phi-\phi\Big(\frac{n}{[s^m]}\cdot\Big)\|+\|\phi\Big(\frac{n}{[s^m]}\cdot\Big)-\psi_{s,m}\Big(\frac{n}{[s^m]}\cdot\Big)\|$$
Ο πρώτος όρος ικανοποιεί
$$\|\psi_{s,m} - \phi\| < \delta$$
ο δεύτερος ικανοποιεί
$$|\frac{\phi(t) - \phi(\frac{nt}{[s^m]})}{1+t}| = |\int_{\frac{n}{[s^m]}}^{1} \frac{t}{1+t}\dot{\phi}(ts)ds| \leq \int_{\frac{n}{[s^m]}}^{1} |\phi(\dot{t}s)|ds \leq_{Holder} \|\phi\|_{H^1}\Big(1-\frac{n}{[s^m]}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \Big(1-\frac{n}{[s^m]}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(1-\frac{1}{s}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
συνεπώς
$$\|\phi - \phi(\frac{n}{[s^m]}\cdot)\| \leq \Big(1-\frac{1}{s}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

αν επιβάλουμε λοιπόν τον περιορισμό

$$1 - \frac{1}{s} < \delta^2$$

έχουμε

$$\|\phi - \phi(\frac{n}{[s^m]}\cdot)\| < \delta.$$

(Παρατηρούμε ότι οι 2 παραπάνω περιορισμοί είναι συμβατοί).
Τέλος, για τον τελευταίο όρο έχουμε

$$|\frac{\phi\Big(\frac{n}{[s^m]}t\Big) - \psi_{s,m}\Big(\frac{n}{[s^m]}t\Big)}{1+t}| = |\frac{1 + \frac{n}{[s^m]}t}{1+t}||\frac{\phi\Big(\frac{n}{[s^m]}t\Big) - \psi_{s,m}\Big(\frac{n}{[s^m]}t\Big)}{1 + \frac{n}{[s^m]}t}|$$

$$\leq \frac{n}{[s^m]}|\frac{\phi\Big(\frac{n}{[s^m]}t\Big) - \psi_{s,m}\Big(\frac{n}{[s^m]}t\Big)}{1 + \frac{n}{[s^m]}t}| \leq |\frac{\phi\Big(\frac{n}{[s^m]}t\Big) - \psi_{s,m}\Big(\frac{n}{[s^m]}t\Big)}{1 + \frac{n}{[s^m]}t}|$$

$$\Longrightarrow \|\phi(\frac{n}{[s^m]}\cdot) - \psi_{s,m}(\frac{n}{[s^m]}\cdot)\| \leq \|\phi - \psi_{s,m}\| < \delta$$

άρα

$$\|\psi_n - K\| \leq \delta + \Big(\frac{\beta([s^m])}{\beta(n)} - 1\Big)\|\psi_{s,m}\| + \frac{\beta([s^m])}{\beta(n)}\|\psi_{s,m} - \psi_{s,m}\Big(\frac{n}{[s^m]}\cdot\Big)\| < \delta + \delta + s(\delta + \delta + \delta)$$

$$\leq 8\delta, \text{ αφού } s < 2$$

□

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα.

Απόδειξη. (i)

Αρχικά από το παραπάνω λήμμα παρατηρούμε πως για να δείξουμε το (i) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $s > 1$ έχουμε πως

$$\|\xi_{[s^m]} - K\| \to 0, m \uparrow \infty$$

και το ότι κάθε οριακό σημείο είναι στοιχείο του K προκύπτει άμμεσα αφού το K είναι συμπαγές υποσύνολο του Θ. Πράγματι, έστω $\phi \in K$ τότε,

$$|\phi(t) - \phi(s)| = |\int_s^t \dot{\phi}(r)dr| \leq \|\phi\|_{H^1}|t-s|^{\frac{1}{2}} \leq |t-s|^{\frac{1}{2}}$$

δηλαδή τα στοιχεία του K είναι ισοσυνεχή και άρα άν $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στο K τότε, υπάρχει μία υπακολουθία $\{\phi_{n_{1,k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο $[0,1]$ Ορίζουμε για $s > 1$

$$A_n^{(\delta)} := \{\theta \in \Theta : \|\xi_{[s^n]} - K\| \geq \delta\}, \text{ για } \delta > 0$$

$$K^{(\delta)} = \{\theta \in \Theta : \|\theta - K\| < \delta\}, \text{ για } \delta > 0.$$

Τότε, έχουμε πως

$$\mathcal{W}(\{\theta \in \Theta : \overline{\lim}_n \|\xi_{[s^n]} - K\| > 0\}) = \mathcal{W}(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\overline{\lim}_n \|\xi_{[s^n]} - K\| > \frac{1}{m}\})$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathcal{W}(\{\overline{\lim}_n \|\xi_{[s^n]} - K\| > \frac{1}{m}\}) = 0$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Όμως

$$\mathcal{W}(\{\overline{\lim}_n \|\xi_{[s^n]} - K\| > \frac{1}{m}\}) = \mathcal{W}(\limsup_n A_n^{\frac{1}{m}})$$

αφού αν κάτι ανήκει στο πρώτο σύνολο τότε υπάρχει μία υπακολουθία τέτοια ώστε το όριο είναι μεγαλύτερο του $\frac{1}{m}$ άρα κάθε τέτοιο στοιχεία ανήκει σε άπειρα $A_n^{\frac{1}{m}}$ δηλαδή στο $\limsup_n A_n^{\frac{1}{m}}$. Για να δείξουμε ότι το παραπάνω ενδεχόμενο έχει πιθανότητα μηδέν, θα χρησιμοποιήσουμε το 1ο Λήμμα $Borel - Cantelli$ και για να φράξουμε την σειρά θα χρησιμοποιήσουμε το άνω φράγμα από το Θεώρημα του $Schilder$.

Έχουμε

$$\gamma := \inf\{\|\phi\|_{H^1} : \phi \in H^1 \cap (K^{(\delta)})^c\} = \inf\{\|\phi\|_{H^1} : \phi \in B(0, 1+\delta)\} > 1$$

$$\mathcal{W}(\{\theta : \|\xi_{[s^n]}(\theta) - K\| \geq \delta\}) = \mathcal{W}(\{\theta : \|\frac{\theta([s^n]\cdot)}{\beta([s^m])} - K\| \geq \delta\})$$

$$= \mathcal{W}(\{\theta : \|\frac{\sqrt{[s^n]}\theta(\cdot)}{\beta([s^n])} - K\| \geq \delta\}) = \mathcal{W}(\{\theta : \|\frac{\theta}{\sqrt{\log(\log([s^n]))}} - K\| \geq \delta\})$$

$$\text{για } \epsilon_n(s) = \frac{1}{\log(\log([s^n]))}$$

$$= \mathcal{W}(\{\theta : \sqrt{\epsilon_n(s)}\theta \in K^\delta\}) = \mathcal{W}_{\epsilon_n(s)}(K^\delta) \leq \exp\Big[- \frac{\gamma}{\epsilon_n(s)}\Big] =$$

$$\exp[\log(\log([s^n])^{-\gamma})] = \frac{1}{\log([s^n])^\gamma}$$

όπου $\gamma > 1$ συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}(A_n^{\frac{1}{m}}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log([s^n])^\gamma} < \infty$$

$$\implies \mathcal{W}(\limsup_n A_n^{\frac{1}{m}}) = 0$$

(ii) Έστω $\psi \in K$, παρατηρούμε πως για να δείξουμε την σύγκλιση κάποιας υπακολουθίας αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία της μορφής $[k^m], n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πρίν θα έχουμε το ζητούμενο αν δείξουμε ότι για

$$B_n^\delta = \{\theta : \|\xi_{[s^n]} - K\| < \delta\}$$

έχουμε

$$\mathcal{W}(\limsup_n B_n^\delta) = 1$$

αφού σε αυτή την περίπτωση μας ενδιαφέρουν οι υπακολουθίες. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε το 2ο Λήμμα $Borel - Cantelli$ σε συνδυασμό με το κάτω φράγμα του Θεωρήματος του $Schilder$. Πρέπει όμως να κατασκευάσουμε μία ισοδύναμη έκφραση για τα παραπάνω χρησιμοποιώντας ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Η πρώτη σκέψη είναι να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η κίνηση $Brown$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Από την παραπάνω επιλογή παρατηρούμε ότι άμεσα έχουμε πως η ακολουθία

$$\frac{\theta(k^m t) - \theta(k^{m-1})}{\beta(k^m)}, t \in [\frac{1}{k}, k]$$

ορίζει μία ανεξάρτητη ακολουθία ως προς $m \in \mathbb{N}$, αν όμως θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω πρέπει να ορίσουμε με τέτοιο τρόπο την επέκταση ώστε να ανήκει στο Θ η προφανής επέκταση είναι

$$\eta_{k,m} := \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{k}] \\ \frac{\theta(k^m t) - \theta(k^{m-1})}{\beta(k^m)}, & t \in [\frac{1}{k}, k] \\ \frac{\theta(k^{m+1}) - \theta(k^{m-1})}{\beta(k^m)}, & t \in (k, \infty) \end{cases} \tag{3.5}$$

για να δουλέψουμε με αυτή την ακολουθία όμως πρέπει να δείξουμε ότι αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$\underline{\lim}_m \|\eta_{k,m} - \psi\| = 0, \text{ σ.β.}$$

έπεται πως

$$\underline{\lim}_m \|\xi_{k^m} - \psi\| = 0, \text{ σ.β.}$$

Παρατηρούμε το εξής αν $\Theta' \subset \Theta : \xi_n(\theta) \to K$ τότε για $\theta \in \Theta'$ έχουμε πως κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}, \exists \psi_n \in K : \|\xi_n(\theta) - \psi_n\| < \epsilon$ και άρα

$$\sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \frac{|\xi_n(t,\theta)|}{1+t} \leq \sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \frac{|\xi_n(t,\theta) - \psi_n(t)|}{1+t} + \sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \frac{|\psi_n(t)|}{1+t}$$

$$\leq \|\xi_n(\theta) - \psi_n\| + \sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \frac{\sqrt{t}}{1+t} < \epsilon + \frac{\sqrt{\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}} = \epsilon + \frac{\sqrt{k}}{1+k}$$

αφού η συνάρτηση $\frac{\sqrt{t}}{1+t}$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$. Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$ συνεπώς

$$\sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \frac{|\xi_n(t,\theta)|}{1+t} \leq \frac{\sqrt{k}}{1+k}.$$

άρα

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{n \geq 3} \sup_{t \in [0, \frac{1}{k}]} \frac{|\xi_n(t,\theta)|}{1+t} = 0$$

ενώ στο $[k, \infty)$ έχουμε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας το ότι η συνάρτηση $\frac{\sqrt{t}}{1+t}$ είναι φθίνουσα στο $[1, \infty)$

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{n \geq 3} \sup_{t \in [k, \infty)} \frac{|\xi_n(t,\theta)|}{1+t} = 0.$$

Άρα έχουμε πως

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq 3}\sup_{t\vee\frac{1}{t}\geq k}\frac{1}{1+t}(|\xi_n(t,\theta)|+|\psi(t)|)=0.$$

αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty}\sup_{\frac{1}{k}\leq t\leq k}\frac{1}{1+t}|\xi_n(t,\theta)-\psi(t)|=0$$

$\mathcal{W}-$σ.β.. Για την ακρίβεια ακολουθώντας παρόμοιες τεχνικές με τις παραπάνω αρκεί να δείξουμμε ότι

$$\mathcal{W}(\liminf_{m\to\infty}\|\eta_{k,m}(\theta)-\psi_k\|=0)=1$$

όπου

$$\psi_k(t):=\begin{cases}0, & t\in[0,\frac{1}{k})\\ \psi(t+\frac{1}{k})-\psi(\frac{1}{k}), & t\in[\frac{1}{k},k]\\ \psi(k)-\psi(\frac{1}{k}), & t\in[k,\infty)\end{cases}\tag{3.6}$$

και άρα από το δεύτερο Λήμμα $Borel-Canteli$ αρκεί να δείξουμε πως

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{W}(\|\eta_{k,m}(\theta)-\psi_k\|<\delta)=\infty$$

για κάθε $\delta>0$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{W}(\|\eta_{k,m}(\theta)-\psi_k\|<\delta)\geq\mathcal{W}_{\epsilon_k(m)}(B(\psi_k(\cdot+\frac{1}{k}),\delta)).$$

Πράγματι για το διάστημα $[\frac{1}{k},k]$ έχουμε

$$\sup_{(\frac{1}{k},k)}|\frac{\frac{\theta(k^m t)-\theta(k^{m-1})}{\beta(k^m)}-(\psi(t)-\psi(\frac{1}{k}))}{1+t}|<\delta$$

(παρατηρώντας τον όρο k^{m-1} και το γεγονός ότι η κίνηση $Brown$ είναι αναλλοίωτη στις μεταθέσεις τις μορφής $\theta\to\theta(\cdot+a)-\theta(a)$ κάνουμε τον παρακάτω υπολογισμό)

$$\iff (d)(t\to t+\frac{1}{k})\sup_{(0,k-\frac{1}{k})}|\frac{\frac{\theta(k^m t+k^{m-1})-\theta(k^{m-1})}{\beta(k^m)}-(\psi(t+\frac{1}{k})-\psi(\frac{1}{k}))}{1+t+\frac{1}{k}}|<\delta$$

$$\Longleftrightarrow (d) \sup_{(0,k-\frac{1}{k})} |\frac{\frac{\theta(k^m t)}{\beta(k^m)} - (\psi(t+\frac{1}{k}) - \psi(\frac{1}{k}))}{1+t+\frac{1}{k}}| < \delta$$

$$\Longleftrightarrow (d) \sup_{(0,k-\frac{1}{k})} |\frac{\sqrt{\epsilon_k(m)}\theta(t) - (\psi(t+\frac{1}{k}) - \psi(\frac{1}{k}))}{1+t+\frac{1}{k}}| < \delta$$

$$\Longleftarrow \sqrt{\epsilon_k(m)}\theta \in B(\psi_k(\cdot + \frac{1}{k}))$$

το οποίο δείχνει το ζητούμενο.

Έχουμε ακόμα πως

$$\|\psi_k(\cdot + \frac{1}{k})\|_{H^1} \leq \|\psi\| \leq 1$$

και άρα υπάρχει $\phi \in B(\psi_k(\cdot + \frac{1}{k}), \delta) \cap H^1 \|\phi\| < 1$ συνεπώς

$$\inf_{B(\psi_k(\cdot + \frac{1}{k}), \delta)} \| \cdot \|_{H^1} < 1$$

για κάθε $\delta > 0$ άρα από το Θεώρημα του *Schilder* υπάρχει $\gamma < 1$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{W}_{\epsilon_k(m)}(B(\psi_k(\cdot + \frac{1}{k}), \delta)) \geq \exp[-\frac{\gamma}{2\epsilon_s(m)}]$$

για κάθε m αρκετά μεγάλο. Άρα έχουμε το ζητούμενο.

$\square$

3.1.2 Θεωρία Ventcel-Freidlin-Γενικές Διδιακασίες Διάχυσης

Έστω πως μας δίνεται το παρακάτω δυναμικό σύστημα

$$\dot{x}(t) = b(x(t)), t \in [0, T]$$

$$x(0) = x_0$$

όπου b συνάρτηση *Lipschitz*. Θα μελετήσουμε την διαδικασία $x_{\epsilon, x_0}(t)$ που προκύπτει όταν στο παραπάνω δυναμικό σύστημα προσθέσουμε ένα θόρυβο της

μορφής $\sqrt{\epsilon}\sigma(x(t))dB_t$.
Όπου υποθέτουμε $\sigma = a^{1/2}$ και

$$\frac{1}{M}I \leq a \leq MI, |b| \leq M$$

Πρίν αρχίσουμε θα αναφερθούμε σε κάποια τεχνικά σημεία. Πρώτον θα ήταν βολικό αν μπορούσαμε να δούμε την απεικόνιση της λύσης της παραπάνω Σ.Δ.Ε. ως μία απεικόνιση

$$\Theta \ni \theta \rightarrow x$$

όμως έχουμε ένα μικρό πρόβλημα. Έστω πως έχουμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ έτσι ώστε πάνω σε αυτό το χώρο να έχουμε μία υλοποίηση την κίνησης $Brown$ δηλαδή υπάρχει μία στοχαστική ανέλιξη

$$B : \Omega \rightarrow \Theta$$

τέτοια ώστε

$$\mathcal{W} = \mathbb{P} \circ B^{-1}$$

όπου ακολουθούμε τον ίδιο συμβολισμό με αυτό του Θεωρήματος $Schilder$. Το πρόβλημα είναι πως το ολοκλήρωμα $It\hat{o}$ έχει οριστεί για προσαρμοσμένες διαδικασίες που ανήκουν στον $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathbb{P} \times \lambda)$. Δηλαδή για γενικό Ω και $X \in L^2$ έχουμε ορίσει την ποσότητα

$$\omega \rightarrow \int_0^t X(s,\omega)dB(\omega, s) \text{ για σχεδόν κάθε } \omega \in \Omega$$

όχι όμως για $\theta \in \Theta$. Μία λύση σε αυτό είναι απλά να θεωρήσουμε πως

$$(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) = (\Theta, \sigma(\pi_s, s \in [0,t]), \mathcal{W})$$

και

$$B : \Theta \rightarrow \Theta, B = id$$

ή ως την συλλογή

$$B = \{\pi_t\}_{t \geq 0}.$$

Τώρα λοιπόν η αρχική απεικόνιση που θέλαμε είναι καλά ορισμένη.

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε στο υπόλοιπο κεφαλαίου θα είναι η εξής.

- Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του *Schilder* και το 1.2.5(Contraction Principle) θα πάρουμε μία LDP στον χώρο $C_0([0,T])$ για την $\theta \to \sqrt{\epsilon}\theta$ με συνάρτηση ρυθμού
$$I_T(\psi) = \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{H^1([0,T])}$$
- Μέσω κατάλληλης εφαρμογής και πάλι του 1.2.5 θα πάρουμε την ζητούμενη LDP.

Το πρώτο μέρος είναι απλό. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$K : \Theta \to C_0([0,T])$$

με

$$K(\theta)(s) := \theta(s), \forall s \in [0,T]$$

και έχουμε πως

$$|K(\theta)(s)| \leq \frac{1+T}{1+s}|K(\theta(s))|, \forall s \in [0,T]$$
$$\implies \|K(\theta)\|_\infty \leq (1+T)\|\theta\|_\Theta$$

η συνάρτηση K είναι προφανώς γραμμική και άρα έχουμε πως είναι συνεχής. Άρα από 1.2.5 έχουμε πως ικανοποιείται η LDP με συνάρτηση κύμανσης

$$I_T(\tilde{\theta}) := \inf_{\theta:\theta|_{[0,T]}=\tilde{\theta}} I(\theta)$$

Αν $\tilde{\theta} \notin H^1_0([0,T])$ τότε, πρωφανώς δεν υπάρχει $\theta \in H^1 : K(\theta) = \tilde{\theta}$(αρκεί να σκεφτούμε τον ορισμό). Άρα

$$I_T = \infty, \text{ στο } (H^1)^c$$

Ενώ αν $\tilde{\theta} \in H^1([0,T])$ τότε υπάρχει ακολουθία $\phi_n \in C^\infty([0,T]) : \phi_n \to \tilde{\theta}$ στον $H^1_0([0,T])$ και αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τα Θεωρήματα Επέκτασης για χώρους *Sobolev* για να έχουμε πως

$$I_T(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\|\tilde{\theta}\|^2_{H^1([0,T])}.$$

Θα θέλαμε να συνεχίσουμε εφαρμόζοντας το 1.2.5 στην αρχική απεικόνιση. Όμως υπάρχει ένα πρόβλημα για γενικές *Lipschitz* συναρτήσεις b, σ η απεικόνιση δεν είναι αναγκαστικά συνεχής. Παρόλα αυτά σκεφτόμαστε ότι η σωστή απάντηση δεν μπορεί να είναι μακριά από αυτή που θα περιμέναμε αν αφελώς εφαρμόζαμε το 1.2.5. Πρέπει λοιπόν να σκεφτούμε μία μέθοδο που θα ξεπεράσει αυτή την τεχνική δυσκολία.

Η ιδέα είναι να προσεγγίσουμε την απεικόνιση με συνεχείς απεικονίσεις πάνω στις οποίες μπορούμε να εφαρμόσουμε το Contraction Principle και αν έχουμε μία κατάλληλη προσέγγιση, να περάσουμε την LDP στο όριο με κατάλληλη συνάρτηση ρυθμού. Ας γράψουμε αναλυτικά ποια θα είναι η προσέγγιση.

Θεωρούμε μία διακριτοποίηση του χρόνου στο $[0, T]$ θεωρώντας την συνάρτηση

$$\pi_N(s) = \frac{[Ns]}{N}, N \in \mathbb{N}, s \in [0, T]$$

και θεωρούμε τις $x^x_{N,\epsilon}(\cdot)$ οι οποίες είναι οι λύσεις της

$$x^x_{N,\epsilon}(t) = x + \int_0^t b(x^x_{N,\epsilon}(\pi_N(s)))ds + \int_0^t \sigma(x^x_{N,\epsilon}(\pi_N(s)))d\theta(s).$$

Δηλαδή

- $x^x_{N,\epsilon}(t) = x + b(x)t + \sigma(x)\theta(t)$ στο $[0, \frac{1}{N}]$

- $x^x_{N,\epsilon}(t) = x^x_{N,\epsilon}(\pi_N(t)) + b(x^x_{N,\epsilon}(\pi_N(t)))(t - \pi_N(t)) + \sigma(x^x_{N,\epsilon}(\pi_N(t)))(\theta(t) - \theta(\pi_N(t))), t \in [0, T]$

Πριν σκεφτούμε τι πρέπει να δείξουμε για την προσέγγιση πρέπει να δείξουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι πράγματι συνεχής.
Έστω $T_N : \Theta \to C(\mathbb{R}_+)$ με

$$T_N(\theta)(0) = x$$

$$T_N(\theta)(t) = T_N(\pi_N(t)) + b(T_N(\pi_N(t)))(t - \pi_N(t)) + \sigma(T_N(\pi_N(t)))(\theta(t) - \theta(\pi_N(t)))$$

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι υπάρχει $C > 0 : |b|, |\sigma| \leq C$ και μάλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτή η σταθερά είναι η σταθερά *Lipschitz* και για τις δύο συναρτήσεις. Άρα,

$$|T_N(\theta_1)(t) - T_N(\theta_2)(t)| \leq |\sigma(x)||\theta_1(t) - \theta_2(t)| \leq C\|\theta_1 - \theta_2\|_\infty, \text{ στο } [0, \frac{1}{N}]$$

$$|T_N(\theta_1)(t) - T_N(\theta_2)(t)| \leq |T_N(\theta_1)(\frac{1}{N}) - T_N(\theta_2)(\frac{1}{N})|$$

$$+|t-\frac{1}{N}||b(\theta_1(\pi_N(t)))-b(\theta_1(\pi_N(t)))|+C|\theta_1(t)-\theta_2(t)|+C|\theta_1(\pi_N(t))-\theta_2(\pi_N(t))|$$

$$\leq C\|\theta_1 - \theta_2\|_\infty + \frac{C}{N}\|\theta_1 - \theta_2\|_\infty + 2C\|\theta_1 - \theta_2\|_\infty \text{ στο } [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$$

συνεπώς παρατηρούμε ότι με την παραπάνω τεχνική μπορούμε να πάρουμε τις εκτιμήσεις ότι αν στο n-οστό υποδιάστημα έχουμε

$$|T_N(\theta_1)(t) - T_N(\theta_2)(t)| \leq a_n C\|\theta_1 - \theta_2\|_\infty$$

τότε στο επόμενο υποδιάστημα θα έχουμε

$$|T_N(\theta_1)(t) - T_N(\theta_2)(t)| \leq (a_n C + \frac{C}{N} + 2C)\|\theta_1 - \theta_2\|_\infty$$

Άρα έχουμε την συνέχεια και συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την 1.2.5 και άρα πέρνουμε μία LDP για την κατανομή των λύσεων με συνάρτηση κύμανσης $I_{T,N}$

$$I_{T,N}(f) := \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_0^T |\dot{f}(s) - b(f(\pi_N(s)))|^2|\sigma^{-1}(f(\pi_N(s)))|^2 ds, & f \in H^1 \\ \infty, & f \notin H^1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Πρέπει να βρούμε ένα τρόπο να περάσουμε την LDP. Ας σκεφτούμε το πιο γενικό πλαίσιο στο οποίο ανήκει το παραπάνω πρόβλημα. Ουσιαστικά έχουμε μία ακολουθία $X_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}$ και μία $X_n, n \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε για σταθερό $k_0 \in \mathbb{N}$ X_{n,k_0} ικανοποιεί μία LDP με συνάρτηση ρυθμού I_{k_0} και έχουμε πως $X_{n,k} \to_{k\to\infty} X_n$ υπο μία έννοια και θέλουμε να δούμε αν ικανοποιείται μία LDP για την X_n.

Τελικά μία μορφή συνθηκών που μας δίνουν το ζητούμενο δίνεται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $X_{n,k}, X_n$ όπως παραπάνω με τιμές σε ένα πλήρη μετρικό χώρο (Y, d) με I_k καλές συναρτήσεις κύμανσης. Άν για κάθε $\delta > 0$*

$$\limsup_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[d(X_{n,k}, X_n) \geq \delta] = -\infty$$

τότε ικανοποιείται η $LDP(\mathbb{P} \circ X_n^{-1}, n, I)$ *με*

$$I(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{k \to \infty} \inf_{B(x,\delta)} I_k = \lim_{\delta \downarrow 0} \liminf_{k \to \infty} \inf_{B(x,\delta)} I_k$$

και η I *είναι καλή συνάρτηση ρυθμού.*

Απόδειξη. Αρχικά ορίζουμε τις παρακάτω δύο συναρτήσεις

$$I^-(x) := \lim_{\delta \downarrow 0} \liminf_{k \to \infty} \inf_{B(x,\delta)} I_k$$

$$I^+(x) := \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{k \to \infty} \inf_{B(x,\delta)} I_k$$

προφανώς $I^- \leq I^+$. Θα δείξουμε ότι $I^+ \leq I^-$.
Γνωρίζουμε ουσιαστικά ότι έχουμε πολύ "γρήγορη" σύγκλιση στην X_n. Για να μπορέσουμε όμως να το εκμεταλευτούμε αυτό πρέπει να βρούμε έναν ικανοποιητικό εγκλεισμό για το σύνολο $X_n \in B(x, \delta)$ σε μία έκφραση που περιλαμβάνει τις $X_{n,k}$.
Παρατηρούμε το εξής:

$$d(X_{n,k}, X_n) \leq \delta, d(X_n, X_{n,k'}) \leq \delta, d(X_{n,k'}, x) \leq \delta \implies d(X_{n,k}, x) \leq 3\delta$$

για κάθε $\delta > 0, k, k', n \in \mathbb{N}$.
Έστω λοιπόν, $l > 0, \epsilon > 0$ τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \implies$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[d(X_{n,k}, X_n) \geq \delta] \leq -2l, \forall k \geq k_0 \tag{3.8}$$

άρα,

$$\mathbb{P}[d(X_{n,k_0}, x) \leq 3\delta] \geq \mathbb{P}[\{d(X_{n,k_0}, X_n) \leq \delta\} \cap \{d(X_n, X_{n,k}) \leq \delta\} \cap \{d(X_{n,k}, x) \leq \delta\}].$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο απλό αποτέλεσμα

Ισχυρισμός 3.1.2.1. *Έστω* $\mathbb{P}$ *ένα μέτρο πιθανότητας σε κάποιο χώρο* Q *και έστω* $A_i, i \in \{1, \cdots, n\}$ *μετρήσιμα σύνολα τότε*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - (n-1) \leq \mathbb{P}[\bigcap_{i=1}^{n} A_i]$$

Απόδειξη:
Επαγωγικά.

Για $n=1$ είναι τετριμένη ισότητα.
Για $n=2$ έχουμε πως

$$\mathbb{P}[A_1]+\mathbb{P}[A_2]-1 \leq \mathbb{P}[A_1 \cap A_2]$$

$$\iff \mathbb{P}[A_1]+\mathbb{P}[A_2]-\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] \leq 1 \iff \mathbb{P}[A_1 \cup A_2] \leq 1$$

το οποίο προφανώς ισχύει.
Έστω πως έχουμε το αποτέλεσμα για $n=k$, τότε,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}[A_i]-(k+1-1)=\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[A_i]-(k-1)+(\mathbb{P}[A_{k+1}]-1)$$

$$\leq \mathbb{P}[\bigcap_{i=1}^{k} A_i]+\mathbb{P}[A_{k+1}]-(2-1) \leq \mathbb{P}[\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i]$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε αποτέλεσμα για $k=2$.

Συνεπώς από το παραπάνω αποτέλεσμα έχουμε

$$\mathbb{P}[\{d(X_{n,k},X_n) \leq \delta\} \cap \{d(X_n,X_{n,k_0}) \leq \delta\} \cap \{d(X_{n,k_0},x) \leq \delta\}]$$

$$\geq \mathbb{P}[d(X_{n,k},X_n) \leq \delta]+\mathbb{P}[d(X_n,X_{n,k_0}) \leq \delta]+\mathbb{P}[d(X_{n,k_0},x) \leq \delta]-2$$

$$=\mathbb{P}[d(X_{n,k},X_n) \leq \delta]-(1-\mathbb{P}[d(X_n,X_{n,k_0}) \leq \delta])-(1-\mathbb{P}[d(X_{n,k_0},x) \leq \delta])$$

$$\geq \mathbb{P}[d(X_{n,k},X_n) \leq \delta]-\mathbb{P}[d(X_n,X_{n,k_0}) \geq \delta]-\mathbb{P}[d(X_{n,k_0},x) \geq \delta].$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{P}[d(X_{n,k},x) \leq \delta] \leq \mathbb{P}[d(X_{n,k_0},x) \leq 3\delta]+\mathbb{P}[d(X_{n,k_0},X_n) \geq \delta]+\mathbb{P}[d(X_{n,k_0},X_n) \geq \delta]$$

και άρα από την σχέση (3.8) και το Λήμμα 1.2.0.1 έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[d(X_{n,k},x) \leq \delta] \leq \max\{-2l,-2l,\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[d(X_{n,k_0},x) \leq 3\delta]\}$$

$$\leq -\inf_{B(x,3\delta)} I_{k_0}$$

και

$$-\inf_{B(x,\delta)} I_k \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[d(X_{n,k}, x) \leq \delta] \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[d(X_{n,k}) \leq \delta]$$

για $l > 0$ αρκετά μεγάλο.
Θα δείξουμε ότι η I^- είναι κάτω ημισυνεχής με συμπαγή επίπεδα. Το πρώτο βήμα θα είναι να δείξουμε ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{I_k \leq l\} : \text{ είναι συμπαγή.}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι αν $x_k : I(x_k) \leq l, \forall k \in \mathbb{N}$ τότε, υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Έστω λοιπόν μία ακολουθία x_k όπως αυτή που περιγράψαμε παραπάνω. Τότε, από τον τελευταίο ισχυρισμό έχουμε για $x = q_k$

$$\inf_{\overline{B(x_k,3\delta)}} I_{k_0} \leq \inf_{B(x_k,\delta)} I_k \leq l, \forall k \geq k_0.$$

Συνεπώς για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $y_{\delta,k} \in \overline{B(x_k, 3\delta)}$ τέτοιο ώστε $I_{k_0}(y_{\delta,k}) \leq l$.
Ορίζουμε $C_k^l := \{I_k \leq l\}$ τα οποία είναι συμπαγή και από τα παραπάνω έχουμε πως

$$y_{\delta,k} \in C_{k_0}^l$$

άρα υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Μπορούμε λοιπόν να διαλέξουμε υπακολουθία x_{k_r} τέτοια ώστε υπάρχει y_{r,k_r} :

$$d(x_{k_r}, y_{r,k_r}) \leq 2^{-r}$$

δηλαδή για $\delta_r = \frac{2^{-r}}{3}$ υπάρχει $y_{r,k} \in B(x_k, \delta_r)$ για την οποία μπορούμε να εξάγουμε μία συγκλίνουσα υπακολουθία. Διαλέγοντας λοιπόν με ένα διαγώνιο επιχείρημα μία συγκλίνουσα υπακολουθία y_{r,k_r} έχουμε το ζητούμενο. Όμως

$$\sum_{r=1}^{\infty} d(x_r, y_{r,k_r}) < \infty$$

και άρα από την πληρότητα του χώρου η x_{k_r} συγκλίνει. Ορίζοντας

$$\{I^- \leq l\} = C_l := \bigcap_{l'>l} \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{k\geq 1} \overline{[\bigcup_{k\geq k'} C_k^{l'}]^{\delta}}, \text{ όπου } A^{\delta} = \{d(x, A) \leq \delta\}$$

το οποίο είναι πρωφανώς κλειστό όμως

$$C_l = \bigcap_{l'>l} \bigcap_{\delta>0} \overline{\limsup (C_k^{l'})^{\delta}}$$

όπου δείξαμε ότι τα $\bigcup\limits_{k' \geq k} C_k^l$ είναι σχετικά συμπαγή άρα έχουμε ότι τα επίπεδα της I^- είνα συμπαγή.

Έστω τώρα $C \subset X$ κλειστό. Τότε, είτε $X_{n,k} \in \overline{C^\delta}, X_n \in C$ είτε $X_n \in C, X_{n,k} \notin C$. Άρα,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_n[C] = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[X_n \in C]$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[\{\{X_n \in C\} \cap \{X_{n,k} \in \overline{C^\delta}\}\} \cup \{\{X_n \in C\} \cap \{X_{n,k} \notin \overline{C^\delta}\}\}]$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[\{\{X_n \in C\} \cap \{X_{n,k} \in \overline{C^\delta}\}\} \cup \{d(X_{n,k}, X_n) \geq \delta\}]$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \Big(\mathbb{P}[X_{n,k} \in \overline{C^\delta}] + \mathbb{P}[d(X_{n,k}, X_n) \geq \delta] \Big)$$

$$\leq_{1.2.0.1} \max\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[X_{n,k} \in \overline{C^\delta}], \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[d(X_{n,k}, X_n) \geq \delta]\}$$

$$\leq \max\{-\inf_{\overline{C^\delta}} I_k, c_k\}, \forall k \in \mathbb{N}$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε την (3.8)) για $c_k \downarrow -\infty$. Έπεται λοιπόν ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_n[C] \leq -\limsup_{k\to\infty} \inf_{x\in\overline{C^\delta}} I_k$$

$$\implies \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_n[C] \leq -\limsup_{\delta\downarrow 0} \limsup_{k} \inf_{\overline{C^\delta}} I_k$$

άρα για $C := \overline{B}(x,\delta)$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_{n} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_n[B(x,\delta)] \leq -I^+(x).$$

Θα είχαμε λοιπόν ότι $I^+ = I^-$ αν μπορούσαμε να δείξουμε το αναμενόμενο κάτω φράγμα για την παραπάνω ποσότητα.
Έστω $I(x) = l < \infty$. Τότε, πάρχει $x_k \in B(x,\delta)$ με $I_k(x_k) \leq l + \epsilon$ και

$$\mathbb{P}_n[B(x,2\delta)] \geq \mathbb{P}_{n,k}[B(x_k,\delta)] - \mathbb{P}[d(X_{n,k},X_n) \geq \delta].$$

Τώρα, επιλέγουμε k αρκετά μεγάλο και έχουμε ότι ο δεύτερος όρος είναι αμελητέος ως προς τον πρώτο και άρα

$$\lim_{\delta\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}_n[B(x,2\delta)] \geq -I^-$$

άρα έχουμε πως

$$I^+ \leq I^- \implies I^- = I^+.$$

□

Η παραπάνω συνθήκη λέγεται $superexponential - estimate.$

Τώρα για να δείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του παραπάνω Θεωρήματος.

Έστω

$$Z_{N,\epsilon}(t) := x_{N,\epsilon}(t) - x_\epsilon(t) = \sqrt{\epsilon}\int_0^t e_N(s)d\theta(s) + \int_0^t g_N(s)ds$$

και

$$e_N(s) = \sigma(x_{N,\epsilon}(t)) - \sigma(x_\epsilon(t)).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\|e_N(s)\| &\leq A\|x_{N,\epsilon}(s) - X_{N,\epsilon}(\pi_N(s))\| + A\|x_{N,\epsilon}(\pi_N(s)) - x_\epsilon(s)\| \\ &= A\|Z_{N,\epsilon}(s)\| + A\|x_{N,\epsilon}(\pi_N(s)) - x_\epsilon(s)\|.\end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\tau := \inf\{s \geq 0 : \|x_{N,\epsilon}(\pi_N(s)) - x_{\epsilon(s)}\| \geq \eta\} \wedge T$$

όπου $\eta > 0$. Άρα

$$\mathbb{P}[\sup_{0\leq t\leq T}\|x_{N,\epsilon}(\pi_N(s)) - x_\epsilon(s)\| \geq \delta] \leq \mathbb{P}[\sup_{0\leq t\leq \tau}\|x_{N,\epsilon}(\pi_N(s)) - x_\epsilon(s)\| \geq \eta] + \mathbb{P}[\tau < T] = C_1 + C_2$$

θα μελετήσουμε τους όρους C_1, C_2 χωριστά.
Για τον όρο C_1 θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 3.1.2.1. *Έστω μία διαδικασία $z(t)$ τέτοια ώστε*

$$z(t) = \int_0^t e(s)d\beta(s) + \int_0^t g(s)ds$$

με $\|e(s)\| \leq A(x^2 + \|z(s)\|^2)^{\frac{1}{2}}$,$\|g(s)\| \leq B(x^2 + \|z(s)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ σε κάποιο διάστημα $[0, \tau]$ όπου τ είναι χρόνος διακοπής. Τότε, για κάθε $l \geq 0$ έχουμε,

$$\mathbb{P}[\sup_{0 \leq t \leq \tau} \|x(s)\| \geq \delta] \leq \left[\frac{\delta^2}{\delta^2 + x^2}\right]^l e^{T(2Al + 4B^2l^2)}.$$

Απόδειξη. Η Ιδέα της απόδειξης είναι αρκετά κομψή παρότι μπορεί με μία πρώτη ματιά να φανεί τεχνική. Στην βάση ότι θέλουμε φράγμα για το sup σε ένα διάστημα μίας στοχαστικής διαδικασίας, η πρώτη σκέψη είναι να χρησιμοποιήσουμε κάποια ανισότητα για *Martingales* π.χ. *Doob*. Όμως δεν έχουμε καμία υπόθεση για το αν η ανέλιξη είναι $sub - MG$. Εδώ έρχεται η όμορφη τεχνική της άσκησης η οποία μας δείχνει πως μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα φράγματα που μας δίνονται και θεωρώντας ένα κατάλληλο μετασχηματισμό $f(z(t))$ να πάρουμε ένα $super - MG$. Η συνάρτηση που μας δίνει το ζητούμενο είναι η

$$f(x) = (\eta^2 + \|x^2\|)^l.$$

Από την φόρμουλα του *Itô*, έχουμε

$$df(z(t)) = (\nabla f)(z(t))dz(t) + \frac{1}{2}Tr[(D^2 f)(z(t))e(t)e^*(t)]dt$$

$$= [\nabla f(z(t))g(t) + \frac{1}{2}Tr[D^2 f(z(t))e^*(t)e(t)]]dt + [\nabla f(z(t))e(t)]dB_t.$$
$$= a(t)dt + m(t)dB_t = (a_1 + a_2)(t)dt + m(t)dB_t$$

όπου ο όρος $m(t)dB_t$ μας δίνει ένα $local - MG$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \|x\|}\frac{\partial \|x\|}{\partial x_i} = 2\|x\|l(\eta^2 + \|x\|^2)^{l-1}$$

$$\implies \nabla f(z(t)) = 2l(\eta^2 + \|z(t)\|^2)^{l-1}z(t)$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i} = 2l(\eta^2 + \|x\|^2)^{l-1} + 4l(l-1)(\eta^2 + \|x\|^2)^{l-2}x_i^2$$

άρα
$$|a_1(t)| \leq 2\|g(t)\|l(\eta^2+\|z(t)\|^2)^{l-1}\|z(t)\|$$

$$\leq 2(\eta^2+\|z(t)\|^2)^{\frac{1}{2}}Bl(\eta^2+\|z(t)\|^2)^{l-1} \leq 2Bl(\eta^2+\|z(t)\|^2)^l$$
όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $\|z(t)\| \leq (\|z(t)\|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}$
$$|a_2(t)| \leq \frac{1}{2}(2l(\eta^2+\|z(t)\|^2)^{l-1}A(\eta^2+\|z(t)\|^2)$$
$$+4l(l-1)(\eta^2+\|z(t)\|^2)^{l-2}\|z(t)\|^2A(\eta^2+\|z(t)\|^2))$$
$$\leq 4l^2A^2(\eta^2+\|z(t)\|^2)^l.$$
Συνεπώς αν
$$Y_t := f(z(t))e^{-t(2Bl+4l^2A^2)}$$
παίρνουμε πως
$$\begin{aligned} dY_t =&(a(t)+m(t)dB_t)e^{-t(2Bl+4l^2A^2)} \\ &-2(2Bl+4l^2A^2)e^{-t(2Bl+4l^2A^2)}f(z(t))dt \\ &= e^{-t(2Bl+4l^2A^2)}(a(t)-(2Bl+4l^2A^2)(\eta^2+\|z(t)\|^2)^l)dt+\circ dB_t \end{aligned} \tag{3.9}$$
όπου
$$N(t) = a(t)-(2Bl+4A^2l^2)(\eta^2+\|z(t)\|^2)^l \leq 0.$$
Αφού $\circ dB_t$ είναι MG έχουμε πως
$$\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] = Y_s^{MG} + \int_0^t N(t)dr, N(t) \leq 0$$
$$\implies \int_0^t N(t)dr \leq \int_0^s N(t)dr \implies \mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] \leq Y_s$$
δηλαδή η Y_t είναι $Super-MG$. Αν
$$\tilde{\tau} := \inf\{s \geq 0 : \sup_{[0,\tilde{\tau}]}\|Y_s\| \geq k\} \wedge T$$
έχουμε πως
$$(Y_t \geq 0) : \mathbb{E}[Y_{t\wedge\tilde{\tau}}] = \mathbb{E}[Y_{t\wedge\tilde{\tau}}\mathbb{1}_{\tilde{\tau}<t}] + \mathbb{E}[Y_{t\wedge\tilde{\tau}}\mathbb{1}_{t<\tilde{\tau}}]$$

όπου

$$\mathbb{E}[Y_{t\tilde{\tau}}\mathbb{1}_{t<\tilde{\tau}}] \geq 0.$$

όμως

$$\mathbb{E}[Y_{t\wedge\tilde{\tau}}] \leq Y_0 = (\eta^2)^l \text{ και άρα } \mathbb{E}[Y_{t\wedge\tilde{\tau}}\mathbb{1}_{\tilde{\tau}}] \leq \eta^{2l}$$

συνεπώς από ανισότητα $Chebyshev$ έχουμε

$$\mathbb{P}[Y_{t\wedge\tilde{\tau}}\mathbb{1}_{\tilde{\tau}} \geq k] \leq \frac{1}{k}\eta^{2l}$$

λόγω της μονοτονίας της Y έχουμε

$$\mathbb{P}[\|z^*(s)\| \geq k] = \mathbb{P}[\|Y_s^*\| \leq e^{-T(2Al+4B^2l^2)}(\eta^2+k^2)]$$

και άρα για

$$k = e^{-T(2Al+4B^2l^2)}(\eta^2+k^2)$$

έχουμε

$$\mathbb{P}[\sup_{[0,\tau]}\|z^*(s)\| \geq k] \leq e^{T(2Al+4B^2l^2)}\Big[\frac{\eta^2}{\delta^2+\eta^2}\Big]^l.$$

□

Παρατηρούμε ότι στο $[0,\tau]$ έχουμε

$$\|e_n\| \leq 2A[\|Z_{N,\epsilon}\|^2+\eta^2]^{\frac{1}{2}}; \|g_n\| \leq 2A[\|Z_{N,\epsilon}\|^2+\eta^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα με $A \sim 2A$ και $B \sim 2\sqrt{\epsilon}A$ και $l = \frac{1}{\epsilon}$ έχουμε

$$\epsilon\log(C_1)\log(\frac{\eta^2}{\delta^2+\eta^2}) + T[2A+4A^2].$$

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με το φράγμα του C_2.
θα δώσουμε χωρίς απόδειξη ένα λήμμα

Λήμμα 3.1.2.2. *Εστω $n \in \mathbb{N}$, τότε, για κάθε $T, \epsilon, \delta > 0$ έχουμε*

$$\mathbb{P}[\sup_{0\leq t\leq T}|\sqrt{\epsilon}B_t| \geq \delta] \leq 4ne^{-\frac{\delta^2}{2nT\epsilon}}$$

Λήμμα 3.1.2.3. *Έστω*

$$Z(t) = x + \sqrt{\epsilon}\int_0^t e(s)dB_s + \int_0^t g(s)ds,$$

και $\|e\| \vee \|g\| \leq C$.

Τότε, για κάθε $\eta > 0$*:*

$$\limsup_n \limsup_\epsilon \epsilon \log \mathbb{P}[\sup_{0\leq s\leq T} \|z(\pi_N(s)) - z(s)\| \geq \eta] = -\infty.$$

Απόδειξη. Έστω N αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{C}{N} < \frac{\eta}{2}$. Τότε,

$$\|z(\pi_N(s)) - z(s)\| = \|\sqrt{\epsilon}\int_{\pi_N(s)}^s e(r)dB_r + \int_{\pi_N(s)}^s g(r)dt\| \leq \sqrt{\epsilon}\|\int_{\pi_N(s)}^s e(r)dB_r\| + \frac{C}{N}$$

$$\leq \sqrt{\epsilon}\|\int_{\pi_N(s)}^s e(r)dB_r\| + \frac{\eta}{2}$$

άρα αν,

$$\eta \leq \|z(\pi_N(s)) - z(s)\| \implies \sqrt{\epsilon}\|\int_{\pi_N(s)}^s e(r)dB_r\| \geq \frac{\eta}{2}$$

ενώ

$$\|\int_{\pi_N(s)}^s e(r)dB_r\| \leq \max_{0\leq k\leq N-1} C \sup_{0\leq s\leq \frac{1}{N}} |B_{s+\frac{k}{N}} - B_{\frac{k}{N}}|$$

όμως είναι εύκολο να δεί κανείς χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της κίνησης *Brown* ότι για κάθε $k \in \{0, \cdots, N-1\}$

$$\sup_{0\leq s\leq \frac{1}{N}} |B_s| =^{(d)} \sup_{\frac{k}{N}\leq s\leq \frac{k+1}{N}} |B_{s+\frac{k}{N}} - B_{\frac{k}{N}}|$$

άρα από αυτή την σχέση και το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι

$$\mathbb{P}[\sup_{0\leq t\leq T} \|z(\pi_N(s)) - z(s)\|] \leq N\mathbb{P}[\sup_{0\leq s\leq \frac{1}{N}} \sqrt{\epsilon}|B_s| \geq \frac{\eta}{2}] \leq 4dNe^{-\frac{\eta^2}{8dT\epsilon}}$$

όπου d =διάσταση του χώρου. Άρα έχουμε το ζητούμενο.

$\square$

Το τελευταίο που μένει να δείξουμε είναι ότι

$$I_N \to I.$$

Θεώρημα 3.1.3. *$\{X : I(X) \leq L\} \subset\subset C([0,T]) =: \Theta_T$ για κάθε $L > 0$ και*

$$\inf_A I_N \to \inf_A I$$

για κάθε $A \subset \Theta_T$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι $\{I \leq L\}$ είναι φραγμένο στον H_T^1, άρα οι συναρτήσεις στο παραπάνω σύνολο είναι ισοσυνεχείς. Για την συμπάγεια λοιπόν αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό. Έστω $X_n \in \Theta_T, \forall n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$X_n \to X, \text{ στον } \Theta_T$$

και $\sup\limits_n I(X_n) \leq L$. Τότε, $X \in H_T^1$ αφού υπάρχει υπακολουθία του που συγκλίνει ασθενώς και $X_n \to X$ ασθενώς στον H_T^1. Συνεπώς

$$\sigma^{-1}(X_n)(\dot{X}_n - b(X_n)) \to \sigma^{-1}(X)(\dot{X} - b(X))$$

ασθενώς στον $L^2([0,T])$ έχουμε

$$I(X) \leq \liminf_{n\to\infty} I(X_n) \leq L.$$

Για το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος παρατηρούμε ότι $I_n(X) = \infty \iff I(X) = \infty$.
Για B φραγμένο υποσύνολο του H_T^1 έχουμε

$$\lim_{n\to 0} \sup_{X\in B} |I_n(X) - I(X)| = 0.$$

Συνεπώς $\inf\limits_A I \geq \limsup \inf\limits_A I_n$. Τέλος, αν $l = \inf\limits_A I < \infty$, τότε υπάρχει φραγμένο υποσύνολο A του H_T^1 τέτοιο ώστε $I(X) \wedge \inf\limits_{n\geq 1} I_n(X) \geq l + 1$ για $X \notin A$. Άρα από την σχέση $\inf\limits_A I_n \leq l + 1$ για κάθε n αρκετά μεγάλο έχουμε

$$\inf_A = \inf_{A\cap B} I = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \inf_A I_n.$$

$\square$

Βιβλιογραφία

[1] Amir Dembo-Ofer Zeitouni *Large Deviations Techniques and Applications*. Second ed., Applications of Mathematics, vol.38, Springer-VerlagNew-York, 1998

[2] Frank den Hollander *Large Deviations*. Fields Institute Monographs 14, AMS

[3] Firas Rassoul-Agha-Timo Seppalaminen *A Course on Large Deviations with an Introduction to Gibbs Measures*.

[4] Patrick Billingsley *Convergence of Probability Measures*. Second Edition, Wiley Series in Probability and Statistics

[5] Papageorgiou-Denkowski-Migorski *An Introduction to Nonlinear Analysis Theory*. Kluwer Academic/ Plenum Publishers

[6] Rockafellar *Convex Analysis* . Princeton Landmarks in Mathematics

[7] Kallenberg *Foundations of Modern Probability*. Springer, Second Edition

[8] Γ.Κουμουλλής, Σ.Νεγρεπόντης *Θεωρία Μέτρου*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2005

[9] S.R.S. Varadhan *Large Deviations and Applications*. CBMS-NSF, Regional Conference Series In Applied Mathematics

[10] S.R.S. Varadhan *Large Deviations*. Lecture Notes, AMS 27

[11] Daniel W.Stroock *Probability Theory An Analytic Point of View*. Cambridge, Second Edition

[12] JEAN-DOMINIQUE DEUSCHEL-DANIEL W.STROOCK *Large Deviations*. Academic Press INC.