Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Θεώρημα Suslin

Διπλωματική Εργασία

Τσούρμα Μαρία-Ελένη

Επιβλέπων Καθηγητής:
Αρβανιτάκης Αλέξανδρος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2017

Περίληψη

Το κεντρικό αποτέλεσμα της εργασίας αποτελεί το θεώρημα Suslin (θεώρημα τέλειων συνόλων), το οποίο παρατίθεται στο κεφάλαιο 3.3. Το αποτέλεσμα του θεωρήματος αφορά τα κ-Suslin σημειοσύνολα και αποδεικνύεται ότι κάθε τέτοιο σημειοσύνολο περιέχει μη κενό, τέλειο σημειοσύνολο.

Το πρώτο μέρος της απόδειξης πραγματοποιήθηκε με την βοήθεια του θεωρήματος 2.22, ενώ το υπόλοιπο της απόδειξης στηρίχθηκε στο θεώρημα 3.7. Η εργασία χωρίστηκε σε τρία κεφάλαια τα οποία εξυπηρετούν την κατανόηση του θεωρήματος Suslin.

Στο πρώτο κεφάλαιο παραθέτονται οι βασικές έννοιες για τους τοπολογικούς και μετρικούς χώρους, δέντρα και πληθαρίθμους. Επίσης ασχολούμαστε με τους τέλειους πολωνικούς χώρους και κυρίως με τον χώρο του Baire, ο οποίος αποτελεί τον βασικό χώρο μελέτης της εργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τις σημειοκλάσεις Borel, τις παράγωγές τους Lusin και τις Borel συναρτήσεις, οι οποίες φαίνονται ιδιαίτερα χρήσιμες στο επόμενο κεφάλαιο. Μελετάμε επίσης τις βασικές ιδιότητες κλειστότητας αυτών των σημειοκλάσεων, ώστε να μπορούμε να μεταφερόμαστε από μία κλάση σε μία άλλη, γεγονός που φαίνεται πολύ χρήσιμο στις περισσότερες αποδείξεις της παρούσας εργασίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε κυρίως με τα κ-Suslin σημειοσύνολα, αλλά και τις ιδιότητες των δέντρων ζευγών. Με βάση αυτά έχουμε χτίσει την δομή για την παρουσίαση του κεντρικού θεωρήματος και περνάμε στην απόδειξή του στο τέλος του κεφαλαίου.

Abstrack

The main result of this thesis consists of Susli theorme(perfect set theorem), which is cited in chapter 3.3. The theorem result refers to κ-Suslin pointsets and it is proven that every such pointset contains non-empty, perfect subset.
The proof's first part is accomplished according to theorem 2.3, while the rest according the theorem 3.7. The thesis contains three chapters, each one of which serve the theorem comprehension.
At chapter (1), we give the main concept about topological and metric spaces, trees and cardinal numbers. In fact we give a perscription of perfect polish spaces and specifically Baire space, the main space we study.
At chapter (2) we refer to Borel pointclasses, the projective sets Lusin and Borel functions, which appear to be very useful, in relation to the next chapter. Also we establish the basic closure peoperties of those pointclasses, so that we can be transferred from one pointclass to another, which is considered very useful in most of the proof of the thesis.
At chapter (3), we mainly deal with κ-Suslin pointsets, also with basic properties of pairs of trees. Using those as a basis, we have built a sctructure for the presentation of the main theorem, and we complete the proof at the end of the chapter.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η περιγραφική θεωρία συνόλων αποτελεί έναν κλάδο των μαθηματικών που αφορά την περιγραφή και μελέτη προσδιορίσιμων συνόλων. Έχει τις ρίζες του στις αρχές του 20ού αιώνα, μέσα από το έργο των μαθηματικών Borel, Baire και Lebesgue, οι οποίοι προσπάθησαν να προσεγγίσουν αναλυτικά μία συνάρτηση την οποία εισήγαγαν οι μαθηματικοί Dirichlet και Riemann. Η συνάρτηση αυτή αποτελούσε μία αμφίσημη αντιστοιχία μεταξύ αντικειμένων, η οποία αντιστοιχία όμως δεν βασιζόταν σε κάποια λογική δομή ή διαδικασία. Οι συγκεκριμένοι μαθηματικοί προσπάθησαν να προσεγγίσουν τέτοιου τύπου συναρτήσεις μέσω αναλυτικών εκφράσεων και αναζητώντας τις χαρκτηριστικές τους ιδιότητες.

Ο Baire ήταν ο πρώτος ο οποίος εισήγαγε τις συναρτήσεις οι οποίες καλούνται συναρτήσεις Baire, στο έργο του Thesis[1899]. Οι συναρτήσεις Baire αποτελούν το μικρότερο σύνολο που περιέχει όλες τις συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες είναι κλειστές υπό την λήψη ορίων. Η πρώτη συστηματική μελέτη όμως προσδιορίσιμων συναρτησεων, ανήκει στον Lebesgue, η οποία έθεσε και την βάση της περιγραφικής θεωρίας συνόλων, σε δημοσίευσή του το 1905. Συγκεκρίμενα εισήγαγε καινούργιες έννοιες και εμπλούτισε την θεωρία σχετικά με τις συναρτήσεις Baire. Στον Lebesgue οφείλουμε και τις δομές καθώς και την ιεραρχία των συνόλων Borel καθώς και τον ορισμό των Borel-μετρήσιμων συναρτήσεων.

Το επόμενο βήμα στην περιγραφική θεωρία συνόλων έγινε με την εισαγωγή των αναλυτικών συνόλων, τα οποία αποτελούν συνεχείς εικόνες συνόλων Borel, από τους Suslin και Lusin. Αφορμή για για αυτή την θεωρία αποτέλεσε μία παράλειψη σε μία εργασία του Lebesgue, ο οποίος χρησιμοποίησε ένα λήμμα χωρίς να το αποδείξει. Το λήμμα υποστήριζε ότι συνεχής εικόνα συνόλου Borel στο $\mathbb{R}^2$, αποτελεί σύνολο Borel στο $\mathbb{R}$.Αυτήν την παράλειψη ανακάλυψε ο μαθητής τότε Suslin και μαζί με τον καθηγητή του Lusin, εισήγαγαν την νέα θεωρία. Στον Lusin επίσης και στον μαθηματικό Sierpinski οφείλουμε την κατασκευή των παράγωγων συνόλων τα οποία προκύπτουν κατασκευαστικά μέσω των Borel.

Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα γίνει μία αναφορά και παρουσίαση όλων αυτών των αποτελεσμάτων, καθώς ξεκινώντας από βασικές έννοιες για τους τοπολογικούς χώρους, μετρικούς, δέντρα καθώς και διατακτικούς αριθμούς και πληθαρίθμους που φαίνονται πολύ χρήσιμοι στα τελευταία κεφάλαια, θα δούμε σταδιακά πως κατασκευάζονται όλα τα σύνολα που προαναφέραμε και θα δώσουμε χαρακτηριστικές ιδιότητές τους. Αξίζει να σημειωθεί πως δουλέυουμε κυρίως στους χώρους των φυσικών αριθμών, στον χώρο Baire και στον χώρο Cantor, οι οποίοι αποτελούν παραδείγματα πολωνικών χώρων, στους οποίους θα κάνουμε επίσης μία εισαγωγή. Στα τελεύταια κεφάλαια θα ασχοληθούμε με κ-Suslin σύνολα και το θεώρημα τέλειων συνόλων (Suslin-Mansfield). Το τελευταίο θεώρημα αφορά τα αναλυτικά σύνολα και αποτελεί πολύ σημαντικό θώρημα για την συνολοθεωρία, καθώς έχει άμεση σύνδεση με ένα από τα βασικά ερωτήματα της θεωρίας συνόλων, την υπόθεση του συνεχούς.

2 Βασικές Έννοιες

2.1 Τοπολογικοί χώροι

Ορισμός 2.1. ***Τοπολογικός χώρος*** *είναι ένα ζεύγος $(X, \mathcal{T})$, όπου X σύνολο και $\mathcal{T}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του X, τέτοιο ώστε $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ και η $\mathcal{T}$ κλειστή στις αυθαίρετες ενώσεις και τις πεπερασμένες τομές.*
Η $\mathcal{T}$ καλείται τοπολογία στο X και τα σύνολα που περιέχονται σε αυτήν ***ανοικτά****.*

Το συμπλήρωμα ενός ανοικτού συνόλου, καλείται κλειστό σύνολο. Το $\emptyset$ και ο χώρος X θεωρούνται και κλειστά σύνολα, ενώ οι αυθαίρετες τομές και οι πεπερασμένες ενώσεις κλειστών είναι κλειστά σύνολα.
Ένα σύνολο της μορφής $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, όπου U_n ανοικτά σύνολα, καλείται G_δ σύνολο και ένα σύνολο της μορφής $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, με F_n κλειστά σύνολα, καλείται F_σ σύνολο.
Ένας υπόχωρος τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$, αποτελείται από ένα υποσύνολο $Y \subseteq X$, με την σχετική τοπολογία που ορίζεται ως:

$$\mathcal{T}|\mathcal{Y} = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{Y} : \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$$

Ορισμός 2.2. ***Βάση*** *$\mathcal{B}$ για μία τοπολογία $\mathcal{T}$, είναι μία οικογένεια $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, τέτοια ώστε, κάθε στοιχείο της τοπολογίας μπορεί να γραφεί ως ένωση στοιχείων του $\mathcal{B}$.*

Πρόταση 2.3. *Μία οικογένεια $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του X, είναι βάση για μία τοπολογία $\mathcal{T}$, αν και μόνο αν, η τομή οποιονδήποτε δύο στοιχείων του $\mathcal{B}$ μπορεί να γραφεί ως ένωση στοιχείων του $\mathcal{B}$ και ισχύει ότι:*

$$\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\} = \mathcal{X}$$

Ορισμός 2.4. *Μία υποβάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$, είναι μία οικογένεια $S \subseteq \mathcal{T}$, τέτοια ώστε, το σύνολο των πεπερασμένων τομών από σύνολα του S, να είναι βάση για την $\mathcal{T}$.*

Για κάθε οικογένεια S υποσυνόλων του X, υπάρχει η μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ που περιέχει το S, και καλείται η **παραγόμενη τοπολογία** του S. Αποτελείται από όλες τις ενώσεις από πεπερασμένες τομές στοιχείων του S. Τότε η S υποβάση για την $\mathcal{T}$.
Ένας τοπολογικός χώρος καλείται δεύτερος αριθμήσιμος, αν έχει αριθμήσιμη βάση.

Ορισμός 2.5. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $x \in X$.* ***Ανοικτή περιοχή*** *του x ονομάζεται ένα ανοικτό σύνολο, που περιέχει το x.* ***Σύστημα περιοχών*** *του x, ονομάζουμε το σύνολο όλων των ανοικτών περιοχών του x. Τέλος, μία* ***βάση περιοχών***

του x, ονομάζουμε μία οικογένεια $\mathcal{U}$ από ανοικτές περιοχές του X, τέτοια ώστε για κάθε ανοικτή περιοχή V του X, να υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ με $U \subseteq V$.

Πρόταση 2.6. *Για δύο τοπολογικούς χώρους X, Y, μία απεικόνιση $f : X \to Y$, είναι συνεχής αν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού, είναι ανοικτό σύνολο. Η f καλείται* ***ανοικτή*** *αν η εικόνα κάθε ανοικτού είναι ανοικτό.*

Ορισμός 2.7. *Η f καλείται* ***ομοιομορφισμός*** *αν είναι 1-1, επί και αμφισυνεχής (συνεχής και ανοικτή).Επίσης η f καλείται* ***εμφύτευση*** *αν είναι ομοιομορφισμός από το X στο $f[X]$, όπου $f[X]$ η σχετική τοπολογία.*

Πρόταση 2.8. *Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής σε ένα $x \in X$, αν η αντίστροφη εικόνα μίας ανοικτής περιοχής του $f[X]$, περιέχει μία ανοικτή περιοχή του x. Τότε το x καλείται σημείο συνέχειας.*
Η f θα ονομάζεται συνεχής, αν και μόνο αν, είναι συνεχής $\forall x \in X$.

Πρόταση 2.9. *Έστω $(Y_i)_{i \in I}$ οικογένεια από τοπολογικούς χώρους και $f_i : X \to Y_i$ μία οικογένεια συναρτήσεων.Τότε υπάρχει η μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στο X, για την οποία όλες οι f_i συνεχείς. Καλείται* ***παραγόμενη*** *τοπολογία από την οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ και έχει ως υποβάση την οικογένεια:*

$$S = \{f_i^{-1}(U) : U \subseteq Y_i, U \text{ ανοικτό }, i \in I\}$$

.

Πρόταση 2.10. *Το γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$ μίας οικογένειας τοπολογικών χώρων $(X_i)_{i \in I}$, είναι ο τοπολογικός χώρος που αποτελείται από το καρτεσιανό γινόμενο των X_i, με την τοπολογία που παράγεται από τις προβολές $(x_i)_{i \in I} \to x_j,\ j \in I$. Τα σύνολα $\prod_i U_i$ με U_i ανοικτά στο X, $\forall i \in I$, με $U_i = X_i$, εκτός από πεπερασμένες i συντεταγμένες, για τις οποίες θα ισχύει $U_i \in \mathcal{B}_i$, απότελούν μία βάση για την τοπολογία του χώρου γινόμενο.*

Από την τελευταία πρόταση παρατηρούμε ότι οι προβολές είναι ανοικτές συναρτήσεις.

2.2 Μετρικοί χώροι

Ορισμός 2.11. *Ως* ***μετρικό χώρο*** *ορίζουμε ένα ζεύγος (X,ρ), όπου X μη κενό σύνολο και $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ απεικόνιση, η οποία πληρεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\rho(x, y) < 0$, $\forall\, x, y \in X$
2. $\rho(x, y) = 0$, *αν και μόνο αν* $x = y$
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$
4. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall\, x, y, z \in X$

Μία τέτοια απεικόνιση ρ, καλείται **μετρικ**ή και ο αριθμός ρ(x,y) ορίζει την απόσταση του x από το το y.
Μία από τις συνηθέστερες μετρικές, η οποία θα μας φανεί χρήσιμη στα επόμενα κεφάλαια είναι η διακριτή μετρική με:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

Ορισμός 2.12. *Για ένα μετρικό χώρο (X, ρ), ορίζουμε ως ανοικτή μπάλα, με κέντρο x και ακτίνα $\epsilon > 0$ το σύνολο:*

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \epsilon\}$$

Το σύνολο των ανοικτών μπαλών αποτελεί βάση για μία τοπολογία, και ονομάζεται τοπολογία μετρικού χώρου.

Ορισμός 2.13. *Ένας τοπολογικός χώρος $X, \mathcal{T}$ καλείται* ***μετρικοποιήσιμος****, αν υπάρχει μετρική d στο X, τέτοια ώστε η $\mathcal{T}$ να είναι τοπολογία για το μετρικό χώρο (X, d).*

Ορισμός 2.14. *Ένα υποσύνολο D, ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$, ονομάζεται* ***πυκνό****, αν τέμνει κάθε μη κενό, ανοικτό σύνολο του X.*

Ένας χώρος X που περιέχει αριθμήσιμο και πυκνό, ονομάζεται **διαχωρίσιμος**.

Ορισμός 2.15. *Υπόχωρος ενός μετρικού χώρου (X, d), ονομάζουμε ένα υποσύνολο $Y \subseteq X$, εφοδιασμένο με την μετρική d, περιορισμένη στο Y. Δηλαδή ισχύει $d|Y(x, y) = d(x, y)$, $\forall x, y \in Y$. Η τοπολογία του $(Y, d|Y)$ είναι η σχετική τοπολογία του Y.*

Πρόταση 2.16. *Ένας υπόχωρος ενός διαχωρίσιμου, μετρικοποιήσιμου χώρου, είναι διαχωρίσιμος χώρος.*

Πρόταση 2.17. *Το γινόμενο μίας ακολουθίας μετρικών χώρων* $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$*, είναι ο μετρικός χώρος* $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, d)$*, όπου:*

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

Η τοπολογία αυτού του μετρικού χώρου είναι το γινόμενο των τοπολογιών της ακολουθίας $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

2.3 Δέντρα

Έστω A μη κενό σύνολο και $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε A^n το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του A, μήκους n. Για n=0 έχουμε $A^0 = \emptyset$ η κενή ακολουθία με $lenght(\emptyset) = 0$. Για $s \in A^n$ και $m \leq n$, θεωρούμε $s|m = (s_0, \ldots, s_{m-1})$. Αν $s, t \in A_n$ τότε s αρχικό τμήμα του t, ή t επέκταση του s, αν $s = t|m$, για $m \leq lenght(t)$. Τότε συμβολίζουμε $s \sqsubseteq t$, και ισχύει $\emptyset \sqsubseteq s, \forall s$. Αν μία ακολουθία είναι αρχικό τμήμα της αλλής, θα ονομάζονται **συμβατές** μεταξύ τους, **ασύμβατες** αν καμία δεν αποτελεί αρχικό τμήμα της άλλης.

Ορισμός 2.18. *Ορίζουμε με $A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του A. Ως παράθεση του $s = (s_i)_{i<n}$, $t = (t_j)_{j<m}$, ορίζουμε την ακολουθία $s \frown t = (s_0, \ldots, s_{n-1}, t_0, \ldots, t_{m-1})$.*
Ορίζουμε με $A^{\mathbb{N}}$ το σύνολο όλων των άπειρων ακολουθιών $x = (x(n)) = (x_n)$ από στοιχεία του A. Αν $x \in A^{\mathbb{N}}$, τότε $x|n = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in A^n$. Η ακολουθία $s \in A^n$ ονομάζεται αρχικό τμήμα μίας άπειρης ακολουθίας x αν $s = x|n$.Συμβολίζουμε $s \sqsubseteq x$ αν s αρχικό τμήμα του x.

Επίσης για $s \in A^{<\mathbb{N}}$ και $x \in A^{\mathbb{N}}$ ορίζουμε ως **παράθεση** του s,x την άπειρη ακολουθία $s \frown x = y$ με $y(i) = s(i)$ αν $i < length(s)$ και $y(length(s) + i) = x(i)$.
Η άπειρη παράθεση $s_0 \frown s_1 \frown s_2, \ldots$ στοιχείων $s_i \in A^{<\mathbb{N}}$ είναι μοναδικό στοιχείο $x \in A^{\mathbb{N}} \cup A^{<\mathbb{N}}$, τέτοιο ώστε $x(i) = s_0(i)$, αν $i < length(s_0)$ και $x(length(s_0) + 1) = s_1(i)$, για $i < length(s_1)$.

Ορισμός 2.19. *Ένα **δέντρο** σε ένα σύνολο A είναι ένα υποσύνολο $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$, το οποίο είναι κλειστό για τα αρχικά τμήματα, δηλαδή αν $t \in T$ και $s \sqsubseteq t$, να ισχύει ότι $s \in T$.*

Προφανώς άν T μη κενό δέντρο, θα ισχύει ότι $\emptyset \in T$.

Ορισμός 2.20. *Τα στοιχεία του T καλούνται **κόμβοι** του δέντρου. **Άπειρο κλαδί** του T ονομάζουμε μία ακολουθία $x \in A^{\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $x|n \in T, \forall n \in \mathbb{N}$. Ως **σώμα** του T, ορίζουμε το σύνολο όλων των άπειρων κλαδιών του και γράφουμε:*

$$[T] = \{x \in A^{\mathbb{N}} : x|n \in T, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Καλούμε ένα δέντρο T, δέντρο με **μη τερματικούς** κόμβους, άν κάθε $s \in T$ έχει κατάλληλη επέκταση, $t \supsetneq s$, τέτοια ώστε $t \in T$.

Ορισμός 2.21. *Καλούμε ένα δέντρο T **πεπερασμένης διακλάδωσης**, αν το πλήθος των αμέσως επόμενων κάθε κόμβου είναι πεπερασμένο.*

2.4 Πληθάριθμοι και Διατακτικοί αριθμοί

Στην θεωρία συνόλων ορίζουμε κάθε **διατακτικό** αριθμό ως το σύνολο των προηγούμενων από αυτόν αριθμών. Δηλαδή, αν a διατακτικός αριθμός, ισχύει:

$$a = \{b : b < a\}$$

Κατά αυτόν τον τρόπο ορίζουμε την κλάση των διατακτικών αριθμών, και με την πράξη "$<$", ορίζουμε την διάταξη μεταξύ τους. Επίσης ταυτοποιούμε τους πεπερασμένους διατακτικούς, μέσω των φυσικών αριθμών $0, 1, 2, \ldots$, έτσι ώστε ο πρώτος άπειρος διατακτικός ω να είναι ίσος με το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$. Ο επόμενος ενός διατακτικού αριθμού a, είναι ο ελάχιστος διατακτικός, έστω c, τέτοιος ώστε $c > a$. Ένας διατακτικός ονομάζεται **successor**, αν είναι ο επόμενος κάποιου διατακτικού, και ονομάζεται **όριο** αν δεν είναι 0 ή επόμενος.
Τέλος, κάθε σύνολο διατακτικών έχει ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο φράγμα. Αν $(a_\xi)_{\xi<\lambda}$ είναι μία άυξουσα, άπειρη ακολουθία ακεραίων με όριο λ, ισχύει ότι:

$$lim_{\xi<\lambda} a_\xi = sup\{a_\xi : \xi < \lambda\}$$

Ένας διατακτικός a, είναι **πρώτος** αν δεν μπορεί να τεθεί σε 1-1 αντιστοιχία, με έναν μικρότερο διατακτικό. Για παράδειγμα οι διατακτικοί $1, 2, \ldots, \omega$ είναι πρώτοι διατακτικοί.
Για a διατακτικό, συμβολίζουμε με a^+, τον μικρότερο πρώτο διατακτικό, ώστε $a^+ > a$. Ορίζουμε $(\omega_a)_{a \in ORD}$ επαγωγικά ως εξής:

$$\omega_0 = \omega, \;\; \omega_{a+1} = (\omega_a)^+$$

Τότε,

$$\omega_1 = \text{ο πρώτος μη αριθμήσιμος διατακτικός}$$

,

$$\omega_2 = \text{ο πρώτος διατακτικός με πληθικότητα μεγαλύτερη του } \omega_1, \ldots$$

Θεώρημα 2.22. *Έστω σύνολο X. Από αξίωμα επιλογής, θα υπάρχει απεικόνιση 1-1 και επί, από το X σε μοναδικό πρώτο διατακτικό a, οπότε και η πληθικότητα του X, ταυτίζεται με τον διατακτικό a.*

Θεωρώντας τον πρώτο διατακτικό ω_a ως πληθάριθμο, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\aleph_a$. Έτσι προκύπτει ότι:

$$\aleph_0 = \omega, \; \aleph_1 = \omega_1, \ldots$$

Συμβολίζουμε με $2^{\aleph_0}$, την πληθικότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

2.5 Πολωνικοί Χώροι

Ορισμός 2.23. *Ένας τοπολογικός χώρος X, είναι* ***πλήρως μετρικοποιήσιμος****, αν δέχεται συμβατή μετρική d, τέτοια ώστε ο μετρικός χώρος (X, d), να είναι πλήρης.*

Πρόταση 2.24.

1. *Οι χώροι $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ είναι πολωνικοί χώροι.*

2. *Κάθε σύνολο A, με την διακριτή τοπολογία, είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος.*

3. *Ο χώρος $A^{\mathbb{N}}$, ως χώρος γινόμενο με την διακριτή τοπολογία, είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, και αν A αριθμήσιμο, είναι* ***πολωνικός*** *χώρος. Ειδικά για $A = \{0, 1\}$ και $A = \mathbb{N}$, έχουμε αντίστοιχα τον χώρο* ***Cantor****:*

$$\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$$

και τον χώρο ***Baire****:*

$$\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

2.6 Τέλειοι Πολωνικοί Χώροι

Θεώρημα 2.25. *Ένας μετρικός χώρος, ο οποίος είναι πλήρης και διαχωρίσιμος ονομάζεται πολωνικός χώρος. Αν επιπλέον δεν έχει μεμονωμένα σημεία, ονομάζεται* ***τέλειος πολωνικός*** *χώρος.*

Για παράδειγμα το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ αποτελεί με την συνήθη μετρική τέλειο πολωνικό χώρο, όπως και ο $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδια μετρική, $\forall n \geqslant 2$. Άλλο ένα τέτοιο παράδειγμα τέτοιου χώρου αποτελεί ο χώρος Baire.

Ορισμός 2.26 (Χώρος Baire). *Ως χώρος του Baire, ορίζουμε το σύνολο όλων των άπειρων ακολουθιών από φυσικούς αριθμούς, εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο, και συμβολίζουμε $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Οι βασικές περιοχές του χώρου Baire είναι της μορφής:

$$N(k_0, \ldots, k_n) = \{a \in \mathcal{N} : a(0) = k_0, \ldots, a(n) = k_n\}$$

Η τοπολογία του $\mathcal{N}$ επάγεται από την μετρική

$$d(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{αν } a = b \\ \frac{1}{min\{n : a(n) \neq b(n)\} + 1}, & \text{αν } a \neq b \end{cases}$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι η d είναι μετρική.

1. $d(a,b) \geq 0$, $\forall a\ , b \in \mathcal{N}$ από τον ορισμό της.

2. $d(a,b) = \frac{1}{min\{n:a(n)\neq b(n)\}+1} = \frac{1}{min\{n:b(n)\neq a(n)\}+1} = d(b,a),\ \forall a\ , b \in \mathcal{N}$

3. Για να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα θεωρούμε έστω $n_0 = min\{n : a(n) \neq b(n)\}$ και $c \in \mathcal{N}$. Τότε θα ισχύει είτε $min\{n : a(n) \neq b(n)\} \leq n_0$ ή $min\{n : c(n) \neq b(n)\} \leq n_0$. Πράγματι, αν $n_1 = min\{n : a(n) \neq b(n)\} > n_0$, τότε $\forall n < n_1$ θα ισχύει $a(n) = b(n)$ και επειδή $a(n_0) \neq c(n_0)$, με $n_0 < n_1$, έχουμε $a(n_0) = b(n_0)$. Τότε $b(n_0) \neq c(n_0)$ και επομένως $min\{n : b(n) \neq c(n)\} \leq n_0$. Άρα $d(c,b) = \frac{1}{min\{n:c(n)\neq b(n)\}+1} \geq \frac{1}{n_0+1} = \frac{1}{min\{n:a(n)\neq c(n)\}+1} = d(a,c)$. Από τα παράπανω προκύπτει ότι $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ και μάλιστα $d(a,c) \leq max\{d(a,b), d(b,c)\}$.

Στην συνέχεια αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. Θεωρούμε $t_0 \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, με $t_0 \neq \emptyset$ και $\forall a \in \mathcal{N}$, $t_0 \sqsubseteq a$. Επίσης θεωρούμε την ανοικτή μπάλα, με την μετρική d, $B_d(a, \frac{1}{length(t_0)+1}) = N_{t_0}$.
Έστω $b \in B_d(a, \frac{1}{length(t_0)+1})$. Αν $a = b$, προφανώς $b \in N_{t_0}$. Διαφορετικά, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
d(a,b) &= \frac{1}{min\{n : a(n) \neq b(n)\} + 1} < \frac{1}{length(t_0) + 1} \\
&\Leftrightarrow min\{n : a(n) \neq b(n)\} + 1 > length(t_0) + 1 \\
&\Leftrightarrow min\{n : a(n) \neq b(n)\} > length(t_0)
\end{aligned}
$$

Άρα $\forall n \leq length(t_0)$, θα ισχύει $a(n) = b(n)$. Όμως $t_0 \sqsubseteq a \Leftrightarrow t_0 \sqsubseteq b \Leftrightarrow b \in N_{t_0}$.
Αντίστροφα, έστω $b \in N_{t_0}$. Τότε $t_0 \sqsubseteq b$ και συνεπάγεται ότι $\forall n < length(t_0)$, ισχύει $a(n) \neq b(n)$. Άρα :

$$
\begin{aligned}
min\{n : a(n) \neq b(n)\} &\geq length(t_0) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{min\{n : a(n) \neq b(n)\}} &\leq \frac{1}{length(t_0) + 1}
\end{aligned}
$$

Τότε $b \in B_d(a, \frac{1}{length(t_0)+1})$ □

Πρόταση 2.27. *Ο χώρος Baire $\mathcal{N}$ είναι πλήρης με την μετρική d και το σύνολο των τελικά σταθερών ακολουθιών, πυκνό και αριθμήσιμο στον $\mathcal{N}$, άρα ο χώρος Baire είναι τέλειος πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία Cauchy

<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u>

$\forall k \in \mathbb{N}$, η $(a_n(k))_n$ είναι ακολουθία φυσικών αριθμών συγκλίνουσα (τελικά σταθερή).

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Επειδή $(a_n)_n$ Cauchy, για $\varepsilon = \frac{1}{k+1} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, m, n \geq n_0$, ώστε $d(a_m, a_n) < \frac{1}{k+1}$.

1η Περίπτωση

Έστω $a_n \neq a_m$. Τότε για $n > n_0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{min\{s : a_n(s) \neq a_{n_0}(s)\} + 1} &\leq \frac{1}{k+1} \\ \Leftrightarrow min\{s : a_n(s) \neq a_{n_0}(s)\} &\leq k \end{aligned}$$

Άρα $\forall s \leq k$ ισχύει $a_n(s) = a_{n_0}(s)$.

Ορίζουμε $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ και $a(k) = lim_n a_n(k)$ και μένει να δείξουμε ότι $lim_n a_n = a$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{k_0+1} < \varepsilon$. Τότε $\forall m_0 \leq k_0$, ισχύει $a(m_0) = lim_n a_n(m_0)$. Άρα υπάρχει n_m, $\forall n \geq n_{m_0}$, ώστε $a_n(m) = a(m)$.

Έστω τώρα, $N = max\{n_0, n_1, \ldots, n_{k_0}\} \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι αν $n \geq N$ και $m_s \leq k_0$ ισχύει $a_n(m_0) = a(m_0)$. Τότε αν $min\{s : a_n(s) \neq a(s)\} > k_0$, θα ισχύει είτε $a_n = a$ και τότε $d(a_n, a) = 0$, ή $\frac{1}{min\{s : a_n(s) = a(s)\}} < \frac{1}{k_0+1} < \varepsilon$. Σε κάθε περίπτωση, θα ισχύει $d(a_n, a) < \varepsilon$.

Έστω M το σύνολο των τελικά σταθερών ακολουθιών. Στην συνέχεια θα δείξουμρε ότι το M είναι πυκνό στον χώρο Baire.

Έστω V_t τυχαία περιοχή στον χώρο $\mathcal{N}$, $t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Ορίζουμε $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, τέτοια ώστε:

$$a(n) = \begin{cases} 1, \text{αν } n \geq length(t_0) \\ \\ t(n), \text{αν } n \leq length(t_0) \end{cases}$$

Επειδή $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει $n < length(t)$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} a(n) &= t(n) \\ \Leftrightarrow a &\in V_t \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι το σύνολο M είναι αριθμήσιμο, παραθέτουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.28 (Cantor). *Το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι ισοπληθικό με τον χώρο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Συμβολίζουμε $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα, θα βρούμε απεικονίσεις 1-1 από τον χώρο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ στο χώρο $\mathbb{N}$ και αντίστοιχα από τον χώρο $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα Schroeder-Bernstein, θα υπάρχει απεικόνιση 1-1 και επί, από τον έναν χώρο στον άλλο, γεγονός που δείχνει ότι ο χώρος $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι ισοπληθικός με τον χώρο $\mathbb{N}$.
Θεωρούμε απεικόνιση $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, τέτοια ώστε:

$$\phi(m) = (m, 1)$$

Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι 1-1.
Έστω $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, με $m_1 \neq m_2$. Τότε για:

$$\begin{aligned} \phi(m_1) &= \phi(m_2) \\ \Leftrightarrow (m_1, 1) &= (m_2, 1) \\ \Leftrightarrow m_1 &= m_2 \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι άτοπο, άρα ϕ 1-1 συνάρτηση.
Άρκει τώρα να βρούμε απεικόνιση 1-1 από τον χώρο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ στον χώρο $\mathbb{N}$. Από Θεμελιώδες Θεώρημα Αριθμητικής, γνωρίζουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας, μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, κατά μοναδικό τρόπο. Μπορούμε τότε να θεωρήσουμε $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, τέτοια ώστε:

$$h(m, n) = p_1^m \cdot p_2^n$$

όπου p_1, p_2 πρώτοι αριθμοί και $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$.
Έστω τώρα $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Τότε για:

$$\begin{aligned} h(m_1, n_1) = h(m_2, n_2) &\Leftrightarrow p_1^{m_1} \cdot p_2^{n_1} = p_1^{m_2} \cdot p_2^{n_2} \\ &\Leftrightarrow p_1^{m_1 - m_2} \cdot p_2^{n_1 - n_2} = 1 \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για $m_1 = m_2$ και $n_1 = n_2$. Δηλαδή για $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$. Άρα h 1-1 συνάρτηση. □

Με βάση το θεώρημα Cantor, ισχύει ότι:

$$\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$$

Τότε επαγωγικά, $\forall k \in \mathbb{N}$, θα ισχύει:

$$\mathbb{N}^k \sim \mathbb{N}$$

Έστω τώρα το σύνολο M_k, όπου:

$$M_k = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ : a(m) = a(n), \forall m, n > k\} \sim \mathbb{N}^{k+1}$$

Τότε $M_k \sim \mathbb{N}$, άρα αριθμήσιμο.Άρα το σύνολο των τελικά σταθερών ακολουθιών, το οποίο ορίζεται ως $M = \bigcap_k M_k$, ως ένωση αριθμήσιμων συνόλων, είναι αριθμήσιμο.

□

Στον χώρο Baire, η βάση περιοχών αποτελείται από ανοικτά-κλειστά σύνολα.

Θεώρημα 2.29. *Για κάθε πολωνικό χώρο $\mathcal{M}$, υπάρχει συνεχής απεικόνιση*

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$$

η οποία είναι επί του $\mathcal{M}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{M}$ Πολωνικός Χώρος και $\mathcal{B}$ αριθμήσιμη βάση περιοχών, όπου $\mathcal{B} = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall B \in B_n$, με $diam(B) < \frac{1}{n}$. Επίσης θεωρούμε $B_n = \{B_n^0, B_n^1, \dots\}$ και $N \subseteq \mathcal{N}$, όπου $N = \{a \in \mathcal{N}\colon \cap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_n^{a(n)} \neq \emptyset\}$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1.
Το N είναι κλειστό στο $\mathcal{N}$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2.
Η απεικόνιση $\phi : N \to \mathcal{M}$ είναι επί και συνεχής, όπου:

$$\phi(a) = \text{το μοναδικό στοιχείο της τόμης } \overline{B}_n^{a(n)}$$

Λήμμα 2.30. *Κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι συνεχής εικόνα του χώρου Baire.*

Από Ισχυρισμό 1. και το παραπάνω Λήμμα προκύπτει ότι υπάρχει $\psi : \mathcal{N} \to N$ συνεχής και επί, ενώ από Ισχυρισμό 2. υπάρχει $\phi : N \to \mathcal{M}$ επίσης συνεχής και επί. Τότε η σύνθεση $\phi \circ \psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, θα είναι συνεχής και επί.

Απόδειξη. (Ισχυρισμός 1.)
Έστω $a \in \mathcal{N} \setminus N$. Τότε αρκεί να βρούμε περιοχή , ώστε $a \in B$, με $B \subseteq \mathcal{N} \setminus N$.
Θα ισχύει ότι για $a \notin N \Leftrightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n^{a(n)} = \emptyset$.

<u>Ισχυρισμός</u>

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\cap_{k=0}^{n_0} \overline{B}_k^{a(k)} = \emptyset$. Έστω σε απαγωγή εις άτοπο, επιλέγουμε $x_n \in \cap_{k=0}^{n} \overline{B}_k^{a(k)}$. Η ακολουθία $(x_n)_n$ θα είναι Cauchy, αφού για $m \in \mathbb{N}$ και $k_1, k_2 \geq m$, ισχύει $x_{k_1} \in \cap_{k=0}^{k_1} \overline{B}_k^{a(k)} \subseteq \cap_{k=0}^{m} \overline{B}_k^{a(k)}$ και αντίστοιχα $x_{k_2} \in \cap_{k=0}^{k_2} \overline{B}_k^{a(k)} \subseteq \cap_{k=0}^{m} \overline{B}_k^{a(k)}$. Άρα $d(x_{k_1}, x_{k_2}) \leq diam(\cap_{k=0}^{m} \overline{B}_k^{a(k)}) \leq diam(\overline{B}_m^{a(m)}) < \frac{1}{m}$.
Έστω τώρα $m \in \mathbb{N}$. Τότε $\forall n \geq m$, $x_n \in \cap_{k=0}^{n} \overline{B}_k^{a(k)} \subseteq \cap_{k=0}^{m} \overline{B}_k^{a(k)} \subseteq \overline{B}_m^{a(m)}$. Τότε $x_0 \in \overline{B}_m^{a(m)} \Rightarrow x_0 \in \cap_{m\in\mathbb{N}} B_m^{a(m)} \Rightarrow \cap_{m\in\mathbb{N}} B_m^{a(m)} \neq \emptyset$. Άτοπο

□

Απόδειξη. (Ισχυρισμός 2.)
<u>επί</u> :
Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\cup_{k\in\mathbb{N}} B_n^k = \mathcal{M} \Rightarrow \cup \overline{B}_n^k = \mathcal{M}$. Έστω τώρα $x \in \mathcal{M}$. Για $n \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε $a(n) \in \mathbb{N}$, $x \in \overline{B}_n^{a(n)}$. Τότε $x \in \cup \overline{B}_n^{a(n)} \Rightarrow a \in \mathcal{N} \Rightarrow \phi(a) = x$.
<u>συνεχής</u> :
Έστω $a_0 \in N \subseteq \mathcal{N}$. Τότε $x_0 = \phi(a_0)$. Αν θεωρήσουμε U ανοικτό, θα ισχύει $x_0 \in U$. Θα βρούμε ανοικτή περιοχή V_s, ώστε $a_0 \in V_s \cap N$ και $\phi(V_s \cap N) \subseteq N_n^k$. Για $\phi(a_0) = x_0 \Rightarrow x_0 \in \cap_{n=0}^{\infty} \overline{B}_n^{a_0(n)}$ και $\forall k$, έχουμε ότι $diam(\cap_{n=0}^{k} \overline{B}_n^{a_0(n)} < \frac{1}{k}$. Τότε θα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_0 \in \cap_{n=0}^{k_0} \overline{B}_n^{a_0(n)} \subseteq U$. Τότε $s = a_0 \restriction x_0 + 1$ και για $b \in V_s \cap N \Rightarrow \phi(b) \in U \Rightarrow \phi(V_s \cap N) \subseteq U$. Τότε $a_0 \in V_s \cap N$ και $\phi(b) \in \cap_{n=0}^{\infty} \overline{B}_n^{b_n} \subseteq \cap_{n=0}^{k_0} \overline{B}_n^{b(n)} = \cap_{n=0}^{k_0} \overline{B}_n^{a(n)} \subseteq U$. □

Απόδειξη. (Λήμμα)
Επειδή N κλειστό, θα ισχύει $N = [T]$. Ορίζουμε $\phi : \mathcal{N} \to N$. Για $a \in \mathcal{N}$, ορίζουμε $\phi(a) \in \mathcal{N}$ αναδρομικά, έτσι ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$, να ισχύει $\phi(a) \restriction n \in T$. Τότε $\phi(a) \in N$.
Έστω ότι έχουμε ορίσει το $(\phi(a))_n$. Αν η παράθεση $\phi(a) \restriction n \frown a(n) \in succ(\phi(a) \restriction n)$, θέτουμε $\phi(a)(n) = a(n)$, οπότε και ισχύει $\phi(a) \restriction n + 1 \in T$.
Διαφορετικά, θέτουμε :

$$\phi(a)(n) = min\{k : \phi(a) \restriction n \frown k \in succ(\phi(a))\}$$

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι ϕ συνεχής και επί.
συνεχής :
Έστω $a \in \mathcal{N}$ και V_s ανοιχτή περιοχή της $\phi(a)$. Θα βρούμε ανοιχτή περιοχή του a, τέτοια ώστε $\phi(U) \subseteq V_s$.
Θεωρούμε $V_{\phi(a)\upharpoonright n} = \{b \in [T] : \phi \upharpoonright n \sqsubseteq b\}$, μια τυχαία περιοχή του $\phi(a)$. Τότε θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\phi(V_{a\upharpoonright n}) \subseteq V_{\phi(a)\upharpoonright n}$.

$$\begin{aligned} \text{Αν } \ b \in V_{\phi(a)\upharpoonright n} &\Leftrightarrow \phi(b) \in V_{\phi(a)\upharpoonright n} \\ &\Leftrightarrow \phi(b) \upharpoonright n = \phi(a) \upharpoonright n, \ 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Προφανώς $\phi(b) \upharpoonright 0 = \phi(a) \upharpoonright 0$. Έστω ότι $\phi(b) \upharpoonright k = \phi(a) \upharpoonright k$ για κάποιο $0 \leq k \leq n$. Θα δείξουμε ότι $\phi(b) \upharpoonright k+1 = \phi(a) \upharpoonright k+1$.

Αν $\phi(b) \upharpoonright k \frown b(k) \in succ(\phi(b) \upharpoonright k)$, τότε:

$$\begin{aligned} \phi(b) \upharpoonright k+1 &= \phi(b) \upharpoonright k \frown b(k) \Leftrightarrow \\ \phi(b) \upharpoonright k \frown b(k) &= \phi(a) \upharpoonright k \frown a(k) \in succ(\phi(a) \upharpoonright k) \Leftrightarrow \\ \phi(a) \upharpoonright k+1 &= \phi(a) \upharpoonright k \frown a(k) = \phi(b) \upharpoonright k+1 \end{aligned}$$

Διαφορετικά, αν $\phi(b)(n) = min\{k : \phi(b) \upharpoonright n \frown k \in succ(\phi(b) \upharpoonright n)\}$, έχουμε ότι $\phi(a) \upharpoonright n \frown k = \phi(b) \upharpoonright n \frown k$ και $succ(\phi(a) \upharpoonright n) = succ(\phi(b) \upharpoonright n)$. Άρα $\phi(b)(n) = \phi(a)(n)$.

επί :
Έστω $a \in [T]$. Θα δείξουμε ότι $\phi(a) = a$.
Προφανώς $\phi(a) \upharpoonright 0 = a \upharpoonright 0 = \emptyset$. Έστω ότι $\phi(a) \upharpoonright n = a \upharpoonright n$. Θα δείξουμε ότι $\phi(a) \upharpoonright n+1 = a \upharpoonright n+1$. Επειδή $\phi(a) \upharpoonright n \frown a(n) = a \upharpoonright n \frown a(n) = a \upharpoonright n+1 \in T$. Τότε $\phi(a)(n) = a(n) \Leftrightarrow \phi(a) \upharpoonright n+1 = a \upharpoonright n+1$. Άρα έχουμε $\phi(a) \upharpoonright n = a \upharpoonright n, \forall n \in \mathbb{N}$. Αρα $\phi(a) = a$. □

□

Για κάθε τέλειο πολωνικό χώρο $\mathcal{M}$, μπορούμε να θεωρήσουμε τις βασικές περιοχές $N(\mathcal{M},0), N(\mathcal{M},1), \ldots$ ως αριθμήσιμο σύνολο, και συμβολίζουμε $N_0, N_1, \ldots$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να θεωρησουμε ότι η βασικές περιοχές είναι

ανοικτές μπάλες. Υπάρχουν περιπτώσεις όμως, όπου αυτή η υπόθεση δεν ισχύει, όπως π.χ. αν $\mathcal{M}$ χώρος γινόμενο της μορφής $\mathcal{M} = X_1 \times X_2$, με X_1, X_2, οποιουσδήποτε χώρους. Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε βασικές περιοχές της μορφής $B_1 \times B_2$, με B_1, B_2 βάσεις των X_1, X_2 αντίστοιχα.
Θεωρόντας ότι κάθε βασική περιοχή N_i είναι ανοικτή μπάλα, μπορούμε να θεωρήσουμε αντίστοιχα ένα κέντρο x_i και μία ακτίνα ρ_i, τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $x_i \in N_i$, αν $N_i \neq \emptyset$

2. Αν $x_i \in N_i$, τότε $d(x, x_i) < \rho_i$

3. Αν x οποιοδήποτε σήμειο, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε περιοχή N_i, τέτοια ώστε $x \in N_i$ και $\rho_i < 2^{-n}$

Για κάθε $P \subseteq \mathcal{M}$ ορίζουμε με $\overline{P}$ την κλειστότητα του P. Αντίστοιχα ορίζεται η κλειστότητα της s-ιοστής περιοχής $N(\mathcal{M},\ \mathrm{s})$, ως $\overline{N_s} = \overline{N}(\mathcal{M}, \mathrm{s})$.

Θεώρημα 2.31. *Έστω $\mathcal{M}$ τέλειος πολωνικός χώρος. Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε πεπερασμένη δυαδική ακολουθία $u = (t_0, \ldots, t_{n-1})$ με $t_i = 0, 1$ μία ανοικτή περιοχή $N_{\sigma(u)} \neq \emptyset$ στο $\mathcal{M}$, τέτοια ώστε:*

1. *Αν u αρχικό τμήμα μίας ακολουθίας v, να ισχύει $\overline{N}_{\sigma(v)} \subseteq N_{\sigma(u)}$*

2. *Αν u,v ασύμβατες μεταξύ τους ακολουθίες, να ισχύει $\overline{N}_{\sigma(u)} \cap \overline{N}_{\sigma(v)} = \emptyset$*

3. *Αν $u = (t_0, \ldots, t_{n-1})$ έχει μήκος n, να ισχύει ότι $radius(N_{\sigma(u)}) \leq 2^{-n}$*

Απόδειξη. Ορίζουμε την περιοχή $N_{\sigma(u)}$ από επαγωγή στο μήκος n της δυαδικής ακολουθίας $u = (t_0, \ldots, t_{n-1})$ με $t_i = 0, 1$, ξεκινόντας με την περιοχή $N_{\sigma(\emptyset)}$, με $\rho_{\sigma(\emptyset)} \leq 1 = 2^0$. Γνωρίζουμε ότι στο $N_{\sigma(u)}$ υπάρχουν άπειρα σημεία, διαφορετικά το κέντρο της περιοχής θα ήταν απομονωμένο σήμειο, το οποίο είναι άτοπο εφόσον βρισκόμαστε σε τέλειο χώρο. Έστω τώρα $x, y \in N_{\sigma(u)}$, με $x \neq y$. Τότε μπορούμε να βρούμε ανοικτές μπάλες B_x, B_y, με κέντρο x, y αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $\overline{B}_x \subseteq N_{\sigma(u)}$, $\overline{B}_y \subseteq N_{\sigma(u)}$ και $\overline{B}_x \cap \overline{B}_y = \emptyset$. Αρκεί τώρα να επιλέξουμε κατάλληλα i, j, ώστε $N_i \subseteq B_x$, $N_j \subseteq B_y$, με $N_i,\ N_j$ να έχουν $\rho_i,\ \rho_j \leq 2^{-n-1}$ αντίστοιχα και θεωρούμε $\sigma(t_0, \ldots, t_{n-1}, 0) = i,\ \sigma(t_0, \ldots, t_{n-1}, 1) = j$

1. Θεωρούμε $a = (t_0, \ldots, t_{n-1}, 0)$ και $b = (t_0, \ldots, t_{n-1}, 1)$. Τότε a αρχικό τμήμα της b, και έχουμε ότι $\overline{N_i} \subseteq \overline{B_x} \subseteq N_{\sigma(u)}$

2. Γνωρίζουμε ότι $\overline{B_x} \cap \overline{B_y} = \emptyset$. Όμως $N_i \subseteq B_x \Leftrightarrow \overline{N_i} \subseteq \overline{B_x}$. Αντίστοιχα $N_j \subseteq B_y \Leftrightarrow \overline{N_j} \subseteq \overline{B_y}$. Τότε:

3. Ισχύει από ορισμό των περιοχών.

□

Πόρισμα 2.31.1. *Για κάθε τέλειο πολωνικό χώρο $\mathcal{M}$ υπάρχει συνεχής απεικόνιση 1-1:*

$$\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$$

από το σύνολο Cantor στο χώρο $\mathcal{M}$.

Παρατήρηση : Η π σε αυτήν την περίπτωση είναι εμφύτευση, δηλαδή η αντίστροφη:

$$\pi^{-1} : \pi(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

είναι επίσης συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $(y_n)_n \subseteq \pi(\mathcal{C})$ και $y \in \mathcal{C}$, τέτοια ώστε $y_n \to y$. Τότε θα υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n \subseteq \mathcal{C}$ και $x \in \mathcal{C}$, ώστε $\pi(x_n) = y_n$ και $\pi(x) = y$. Για να δείξουμε ότι π^{-1} συνεχής, από αρχή μεταφοράς αρκεί να δείξουμε ότι $x_n \to x$.
Είς απαγωγήν σε άτοπο, υποθέτουμε ότι $x_n \nrightarrow x$. Τότε θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $(x_{k_n})_n$ υπακολουθία της $(x_n)_n$, ώστε για ρ την μετρική στο Cantor:

$$\rho(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Επειδή $\mathcal{C}$ συμπαγής μετρικός χώρος θα υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_{l_n}})_n$ και x_0 στο $\mathcal{C}$, ώστε:

$$x_{k_{l_n}} \to x_0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Επειδή π συνεχής, έχουμε:

$$\pi(x_{k_{l_n}}) \to \pi(x_0)$$

Όμως $(\pi(x_{k_{l_n}}))_n \subseteq (\pi(x_{k_n}))_n$, άρα

$$\pi(x_{k_{l_n}}) \to \pi(x)$$

Από μοναδικότητα ορίου έχουμε ότι $\pi(x_0) = \pi(x)$ και επειδή π 1-1, συνεπάγεται ότι $x_0 = x$. Άρα:

$$x_{k_{l_n}} \ \to \ x \Rightarrow$$

$$\rho(x_{k_{l_n}}, x) \ \to \ 0$$

Άτοπο □

Απόδειξη. (Πόρισμα)
Για $s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, ορίζουμε αναδρομικά ως προς το μήκος του s, $M_s \neq \emptyset$, με $M_s \subseteq \mathcal{M}$ κλειστό με τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $diam(M_s) < \frac{1}{2^{length(s)}}$
2. $M_{s^\frown 0} \cap M_{s^\frown 1} = \emptyset, \forall s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$
3. $M_{s^\frown 0}, M_{s^\frown 1} \subseteq M_s$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ:
Αν $b \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, η τομή $\cap_n M_{b\restriction n}$ είναι μονοσύνολο.
Επειδή $M_{b\restriction n} \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in M_{b\restriction n}$. Τότε η $(x_n)_n$ είναι Cauchy, αφού για $\varepsilon_0 > 0$, $\exists n_0$, ώστε $\frac{1}{2}n_0 < \varepsilon_0$ και αν $n, m \geq n_0$, να ισχύει $x_n \in M_{b\restriction n} \subseteq M_{b\restriction n_0}$ και $x_n \in M_{b\restriction m} \subseteq M_{b\restriction n_0}$.
Τότε :

$$d(x_n, x_m) \leq diam M_{b\restriction n_0} \quad <$$

$$\frac{1}{2^{length(b\restriction n_0)}} = \frac{1}{2^{n_0}} \quad < \quad \varepsilon_0$$

Αν $x^0 = lim_{\to n} x_n$, για $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, θα ισχύει $x_n \in M_{b\restriction n} \subseteq M_{b\restriction n_0}$. Άρα $(x_n)_{n\geq n_0} \subseteq M_{b\restriction n_0} \Leftarrow x^0 \in M_{b\restriction n_0}$. Προφανώς $x^0 \in \cap_n M_{b\restriction n}$.
Έστω τώρα $y^0 \in \cap_n M_{b\restriction n}$, με $x^0 \neq y^0$. Τότε $d(x^0, y^0) = \varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$.
Τότε $x^0, y^0 \in M_{b\restriction n_0}$, άρα:

$$d(x^0, y^0) \leq diam(M_{b\restriction n}) \quad <$$

$$\frac{1}{2^{length(b\restriction n_0)}} = \frac{1}{2^{n_0}} \quad <$$

$$\varepsilon_0 = d(x^0, y^0)$$

Ορίζουμε για $b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\pi(b) \in \cap_n M_{b\restriction n}$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Η π είναι συνεχής συνάρτηση.
Έστω $\pi(b_0) = y_0$ και $y_0 \in U$, όπου U ανοικτό. Τότε $\exists \varepsilon_0 > 0$, τέτοιο ώστε

$B(y_0, \varepsilon_0) \subseteq U$. Θα βρούμε n_0 για το οποίο $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon_0$ και θα δείξουμε ότι $\pi(V_{b_0 \restriction n_0}) \subseteq B(y_0, \varepsilon_0) \subseteq U$. Άν $b \in V_{b_0 \restriction n_0}$, τότε $b \restriction n_0 = b_0 \restriction n_0$. Άρα:

$$\begin{aligned} \pi(b) &= \cap_n M_{b \restriction n} \\ \subseteq M_{b \restriction n_0} &= M_{b_0 \restriction n_0} \end{aligned}$$

Επίσης $diam(M_{b_0 \restriction n_0}) < \frac{1}{2^{n_0}}$. Συνεπάγεται ότι:

$$\pi(b) \in B(\pi(b_0), \frac{1}{2^{n_0}}) \subseteq B(\pi(b_0), \varepsilon_0) \subseteq U$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η π είναι και 1-1 συνάρτηση.
Έστω $b_1 \neq b_2$. Θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $b_1 \restriction n_0 \neq b_2 \restriction n_0$.
Ισχύει ότι :

$$\pi(b_1) \in \cap_n M_{b_1 \restriction n} \subseteq M_{b_1 \restriction n_0},$$

$$\pi(b_2) \in \cap_n M_{b_2 \restriction n} \subseteq M_{b_2 \restriction n_0},$$

$$M_{b_1 \restriction n_0} \cap M_{b_2 \restriction n_0} = \emptyset$$

Άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε.
Τέλος θα δείξουμε πως ορίζονται αναδρομικά τα σύνολα $M_{s^\frown 0},\ M_{s^\frown 1}$.
Έστω ότι έχουμε θεωρήσει το M_s κλειστό, τέλειο και μη κενό. Επειδή M_s τέλειο, θα υπάρχουν $x^0, x^1 \in M_s$, με $x^0 \neq x^1$ και θέτουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= d(x^0, x^1) \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{2}\{\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{1}{2^{length(s)+1}}\} \end{aligned}$$

με $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$. Τότε:

$$\overline{B}(x^0, \varepsilon_1) \cap \overline{B}(x^1, \varepsilon_1) = \emptyset$$

εφόσον:

$$\overline{B}(x^0, \varepsilon_1) \subseteq B(x^0, 2\varepsilon_1) \subseteq B(x^0, \frac{\varepsilon_0}{2}) \text{ και}$$

$$\overline{B}(x^1, \varepsilon_1) \subseteq B(x^1, 2\varepsilon_1) \subseteq B(x^1, \frac{\varepsilon_0}{2})$$

$\square$

3 Σύνολα Borel

3.1 Κλάσεις Borel πεπερασμένης τάξης

Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{F}$ μετρικών χώρων με τις ιδιότητες:

1. Οι χώροι $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$ ανήκουν στο $\mathcal{F}$.

2. Κάθε χώρος στο $\mathcal{F}$, εκτός του $\mathbb{N}$, είναι τέλειος πολωνικός χώρος.

Καλούμε τα στοιχεία του $\mathcal{F}$ **βασικούς** χώρους.
Θεωρούμε ως χώρο γινόμενο ένα καρτεσιανό γινόμενο $X = X_1 \times \cdots \times X_k$ με X_i βασικούς χώρους , $\forall i \in I$, με X εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο και βασικές περιοχές της μορφής $N = B_1 \times \cdots \times B_n$, με B_i περιοχή για κάθε X_i , $\forall i \in I$. Η τοπολογία του χώρου επάγεται από τη μετρική $d((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) = max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_k(x_k, y_k)\}$ με d_i η δοθείσα μετρική για κάθε χώρο X_i.
Έστω δύο χώροι γινόμενο $X = X_1 \times \cdots \times X_k$ και $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_l$. Ο X και ο Y θα λέγονται ίσοι αν $k = l$ και $X_i = Y_i, \forall i \in I$.
Ο χώρος γινόμενο των χώρων X, Y ορίζεται ως

$$X \times Y = X_1 \times \cdots \times X_k \times Y_1 \times \cdots \times Y_l$$

Ισχύει επίσης η ιδιότητα

$$X \times (Y \times Z) = (X \times Y) \times Z = X \times Y \times Z$$

Καλούμε τα στοιχεία των χώρων γινόμενο **σημεία** και τα υποσύνολά τους **σημειοσύνολα**. Μπορούμε να δούμε τα σημειοσύνολα ως σύνολα ή ως σχέσεις. Για παράδειγμα:

$$x \in P \iff P(x)$$

Οι οικογένειες σημειοσυνόλων θα ονομάζονται **σημειοκλάσεις**. Μια σημειοκλάση Λ, είναι μία οικογένεια Λ, τέτοια ώστε κάθε $P \in \Lambda$ να είναι ένα υποσύνολο κάποιου χώρου γινόμενο X. Για παράδειγμα:
Έστω

$$\begin{aligned} \Lambda &= \text{όλα τα ανοικτά σύνολα} \\ &= \{P : P \subseteq X, \text{με X οποιοδήποτε χώρο γινόμενο και P ανοικτό}\} \end{aligned}$$

Από οποιαδήποτε σημειοκλάση Λ, μπορούμε να δημιουργήσουμε καινούργιες κλάσεις συνόλων, εφαρμόζοντας ορισμένες πράξεις. Κατ' αυτόν τον τρόπο παράγονται οι κλάσεις Borel πεπέρασμένης τάξης, χρησιμοποιώντας τις πράξεις του συμπληρώματος και του υπαρξιακού ποσοδείκτη επαναληπτικά κατά μήκος του $\mathbb{N}$, και ξεκινώντας από την σημειοκλάση των ανοικτών συνόλων.
Εν συνεχεία θα αναλύσουμε την λειτουργικότητα των προαναφερθέντων πράξεων. Συγκεκριμένα αν $P \subseteq X$ έχουμε:

$$\neg P = X \setminus P$$

και για Λ σημειοκλάση

$$\neg\Lambda = \{\neg P : P \in \Lambda\}$$

. Η σημειοκλάση $\neg\Lambda$ ονομάζεται διττή σημειοκλάση. Επίσης αν $P \subseteq X \times \mathbb{N}$ για κάποιο χώρο X, τότε:

$$\exists^{\mathbb{N}} P = \{x \in X : (\exists n) P(x, n)\}$$

ενώ για μία σημειοκλάση Λ:

$$\exists^{\mathbb{N}} \Lambda = \{\exists^{\mathbb{N}} P : P \in \Lambda, P \subseteq X \times \mathbb{N}\}$$

Οι **Borel σημειοκλάσεις πεπερασμένης τάξης** συμβολίζονται με Σ_n^0, $n \geq 1$, και ορίζονται ως:

$$\Sigma_1^0 = \text{όλα τα ανοικτά σύνολα}$$

$$\Sigma_{n+1}^0 = \exists^{\mathbb{N}} \neg \Sigma_n^0$$

Οι **διττές** Borel σημειοκλάσεις συμβολίζονται με Π_n^0 και ορίζονται ως:

$$\Pi_n^0 = \neg \Sigma_n^0$$

Τέλος, ορίζουμε τις **αμφίσημες** Borel σημειοκλάσεις Δ_n^0 ως:

$$\Delta_n^0 = \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$$

Η κλάση Π_1^0 αποτελείται από όλα τα κλειστά σύνολα, η Σ_2^0 αποτελεί την κλάση όλων των προβολών στα κλειστά σύνολα κατά μήκος του $\mathbb{N}$ κ.τ.λ.
Για παράδειγμα ένα σύνολο P είναι Σ_2^0 αν υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq X \times \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall x \in X$, να ισχύει:

$$P(x) \iff (\exists t) F(x, t)$$

Αντίστοιχα ένα σύνολο P είναι Σ^0_3, αν υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq X \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} P(x) &\iff (\exists t)\neg(\exists s)F(x,t,s) \\ &\iff (\exists t)(\forall s)\neg F(x,t,s) \end{aligned}$$

Ένα P σημειοσύνολο, μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως Σ^0_3 σύνολο, αν υπάρχει ανοικτό G, τέτοιο ώστε:

$$P(x) \iff (\exists t_1)(\forall t_2)G(x,t_1,t_2)$$

Με παρόμοιο τρόπο, επαγωγικά μπορούν να εκφραστούν και οι Π^0_n σημειοκλάσεις.

Θεώρημα 3.1. *Για τις Borel σημειοκλάσεις πεπερασμένης τάξης,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*

- $\Delta^0_n \subseteq \Sigma^0_n$
- $\Delta^0_n \subseteq \Pi^0_n$
- $\Sigma^0_n \subseteq \Delta^0_{n+1}$
- $\Pi^0_n \subseteq \Delta^0_{n+1}$

Απόδειξη. Οι σχέσεις $\Delta^0_n \subseteq \Sigma^0_n$ και $\Delta^0_n \subseteq \Pi^0_n$ προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό των Δ^0_n κλάσεων.
Για να αποδείξουμε την σχέση $\Sigma^0_n \subseteq \Delta^0_{n+1}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\Sigma^0_n \subseteq \Sigma^0_{n+1}$ και $\Sigma^0_n \subseteq \Pi^0_{n+1}$. Αρχικά δείχνουμε ότι $\Sigma^0_n \subseteq \Sigma^0_{n+1}$.
Έστω $n = 3$ και έστω $P \in \Sigma^0_3$. Τότε θα υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \subseteq X \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$P(x) \Leftrightarrow (\exists t_1)(\forall t_2)G(x,t_1,t_2)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$P(x) \Leftrightarrow (\forall s)(\exists t_1)(\forall t_2)G(x,t_1,t_2)$$

εφόσον ο ποσοδείκτης $\forall s$ δεν επηρρεάζει τη σχέση. Ορίζουμε τώρα σύνολο G' τέτοιο ώστε:

$$G'(x,s,t_1,t_2) \Leftrightarrow G(x,t_1,t_2)$$

Τότε G' θα είναι ανοικτό, οπότε:

$$P(x) \Leftrightarrow (\forall s)(\exists t_1)(\forall t_2)G'(x, s, t_1, t_2)$$

Τότε $P \in \Pi^0_4$.
Στη συνέχεια, για να δείξουμε ότι $\Sigma^0_n \subseteq \Sigma^0_{n+1}$, θεωρούμε $G \subseteq X$ ανοικτό. Εφόσον X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, κάθε ανοικτό μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών. Τότε γράφουμε $G = \cup_t F_t$, με κάθε F_t κλειστό, και ορίζουμε $F \subseteq X \times \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε:

$$F(x, t) \Leftrightarrow F_t(x)$$

Τότε F κλειστό και ισχύει:

$$G(x) \Leftrightarrow F(x, t)$$

Άρα $G \in \Sigma^0_2$ και εφόσον το θεωρήσαμε ανοικτό, $G \in \Sigma^0_1$. Άρα $\Sigma^0_1 \subseteq \Sigma^0_2$, και έτσι προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\Sigma^0_2 = \exists^{\mathbb{N}} \neg \Sigma^0_1 \subseteq \exists^{\mathbb{N}} \neg \Sigma^0_2 = \Sigma^0_3$$

Άρα, επαγωγικά $\Sigma^0_n \subseteq \Sigma^0_{n+1}$.
Μένει να δείξουμε ότι $\Pi^0_n \subseteq \Delta^0_{n+1}$, και αντίστοιχα, όπως και προηγουμένως θα δείξουμε ότι $\Pi^0_n \subseteq \Sigma^0_{n+1}$ και $\Pi^0_n \subseteq \Pi^0_{n+1}$. Παίρνοντας τα συμπληρώματα των σχέσεων $\Sigma^0_n \subseteq \Sigma^0_{n+1}$, $\Sigma^0_n \subseteq \Pi^0_{n+1}$ προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\neg \Sigma^0_n \subseteq \neg \Sigma^0_{n+1},$$

$$\neg \Sigma^0_n \subseteq \neg \Pi^0_{n+1}$$

Τότε:

$$\Pi^0_n \subseteq \Pi^0_{n+1}$$

$$\Pi^0_n \subseteq \Sigma^0_{n+1}$$

$\square$

3.2 Ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων Borel

Πριν δώσουμε τις βασικές ιδιότητες κλειστότητας, θα κάνουμε επεξήγηση των κυριότερων συμβολισμών που θα χρησιμοποιηθούν. Έχουμε ότι για P, Q υποσύνολα του ίδιου χώρου X,

$$x \in (P \& Q) \Leftrightarrow P(x) \& Q(x)$$

όπου $P\&Q = P \cap Q$.
Αντίστοιχα η πράξη $P \vee Q$, ορίζεται για P, Q υποσύνολα του ίδιου χώρου X, ως εξής:

$$P \vee Q = P \cup Q = \{x \in X : P(x) \vee Q(x)\}$$

Επίσης ορίζουμε τις **προβολές** ή υπαρξιακούς ποσοδείκτες. Για $P \subseteq X \times Y$ έχουμε:

$$\exists^{Y} P = \{x \in X : (\exists y) P(x, y)\}$$

Για κάθε χώρο γινόμενο Y καλούμε την διαδικασία $\exists^{Y}$ προβολή κατά μήκος του Y ή υπαρξιακό ποσοδείκτη στο Y. Η πράξη $\exists^{Y} P$ ορίζεται όταν $P \subseteq X \times Y$, για κάποιο χώρο χκαι τότε $\exists^{Y} P \subseteq X$. Μόνο οι προβολές σε θεμελιώδεις χώρους είναι θεμελιώδεις, ενώ όλες οι υπόλοιπες μπορούν να προσδιοριστούν σε σχέση με αυτές. Για παράδειγμα αν $Y = \mathbb{N} \times \mathcal{N}$ και $P \subseteq X \times Y$, έχουμε ότι :

$$\exists^{Y} P = \exists^{\mathbb{N}} \exists^{\mathcal{N}} P$$

Δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$x \in \exists^{Y} P \Leftrightarrow (\exists n)(\exists a) P(x, n, a)$$

Ακολούθως, θα ορίσουμε τις διττές προβολές ή καθολικούς ποσοδείκτες. Για $P \subseteq X \times Y$, ορίζουμε

$$\forall^{Y} P = \neg \exists^{Y} \neg P$$

Τότε:

$$x \in \forall^{Y} P \Leftrightarrow \neg(\exists y \in Y) \neg P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y \in Y) P(x, y)$$

Η πράξη $\forall^{Y} P$ ορίζεται για $P \subseteq X \times Y$ για κάποιο χώρο X και $\forall^{Y} P \subseteq X$.
Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με τους δεσμευμένους ποσοδείκτες $\exists^{\leq}, \forall^{\leq}$. Έχουμε ότι:

$$(x, n) \in \exists^{\leq} P \Leftrightarrow (\exists m \leq n) P(x, m)$$

$$(x, n) \in \forall^{\leq} P \Leftrightarrow (\forall m \leq n) P(x, m)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ορίζονται για $P \subseteq X \times \mathbb{N}$ για κάποιο χώρο X, με $\exists^{Y} P$ και $\forall^{Y} P$,να είναι υποσύνολα του χώρου $X \times \mathbb{N}$
Μία σημειοκλάση Λ θα είναι κλειστή για μία διαδικασία Φ, για κ στον αριθμό σημειοσύνολα P_i, αν για $P_1, \ldots, P_k$ στο Λ και $\Phi(P_1, \ldots, P_k)$ ορισμένο, τότε $\Phi(P_1, \ldots, P_k) \in \Lambda$.
Αντίστοιχα μία κλάση Λ είναι κλειστή υπό την πράξη του συμπληρώματος, αν $\neg\Lambda \subseteq \Lambda$. Δηλαδή $\forall P \in \Lambda, P \subseteq X$, να ισχύει $X \setminus P \in \Lambda$.

Θα λέμε ότι μία κλάση Λ είναι κλειστή υπό **συνεχή αντικατάσταση**, αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$ και $\forall P \in \Lambda$, $P \subseteq Y$, να ισχύει $f^{-1}[P] \in \Lambda$. Ισχύει για $x \in f^{-1}[P] \Leftrightarrow f(x) \in P \Leftrightarrow P(f(x))$.

Λήμμα 3.2. *Έστω Λ σημειοκλάση κλειστή υπό συνεχή αντικατάσταση και έστω* $f_1 : X \to Y_1, f_2 : X \to Y_2, \ldots, f_m : X \to Y_m$ *συνεχείς συναρτήσεις, και θεωρούμε* $Q \subseteq Y_1 \times \cdots \times Y_m$ *ένα σημειοσύνολο στο Λ. Αν* $P(x) \Leftrightarrow Q(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ *τότε* $P \in \Lambda$

Απόδειξη. Ορίζουμε συνάρτηση $g : X \to Y_1 \times \cdots \times Y_m$, τέτοια ώστε

$$g(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

. Τότε g συνεχής συνάρτηση. Αν

$$P(x) \Leftrightarrow Q(g(x))$$

τότε $\forall x \in P$, θα ισχύει ότι $x \in g^{-1}[Q]$. Όμως $g^{-1}[Q] \in \Lambda$ αφού g συνεχής και εφόσον $\forall x \in P \Leftrightarrow x \in g^{-1}[Q]$

$$\Leftrightarrow P \in \Lambda$$

□

Με βάση όσα αναφέρθηκαν μπορούμε τώρα να ορίσουμε τις βασικές ιδιότητες κλειστότητας των Borel κλάσεων. Για την απόδειξη τους, θα ορίσουμε συναρτήσεις που κωδικοποιούν πεπερασμένες συναρτήσεις ακεραίων.
Έστω $p(i) = p_i =$ ο i-οστος πρώτος αριθμός με $p_0 = 2$ και $\forall n$ έχουμε:

$$< t_0, \ldots, t_{n-1} >= p_0^{t_0+1}, \ldots, p_{n-1}^{t_{n-1}+1}$$

και $< \emptyset >= 1$, με την μονάδα να κωδικοποιεί την κενή ακολουθία.
Ορίζουμε τώρα τις παρακάτω σχέσεις για κάποια $t_0, \ldots, t_{n-1}$.
Έστω $Seq(u) \Leftrightarrow u = 1$ ή $u =< t_0, \ldots, t_{n-1} >$

$$lh(u) = \begin{cases} n, & \text{αν } u =< t_0, \ldots, t_{n-1} > \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

με την τελευταία συνάρτηση να μας δίνει μήκος ακολουθίας. Τέλος ορίζουμε

$$(u)_i = \begin{cases} t_i, & \text{αν } u =< t_0, \ldots, t_{n-1} > \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

την συνάρτηση που μας δίνει τον i-οστό όρο μίας ακολουθίας.

Θεώρημα 3.3. *Κάθε Borel σημειοκλάση* $\Sigma^0_n, \forall n \geq 1$*, είναι κλειστή για τις πράξεις* $\vee, \&, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}, \exists^{\mathbb{N}}$*, και την συνεχή αντικατάσταση.*
Κάθε διττή Borel σημειοκλάση Π^0_n*, είναι κλειστή για τις πράξεις* $\vee, \&, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}, \forall^{\mathbb{N}}$*, και την συνεχή αντικατάσταση.*
Τέλος κάθε αμφίσημη Borel σημειοκλάση Δ^0_n *, είναι κλειστή για τις πράξεις* $\neg, \vee, \&, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}$*, και την συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε τις ιδιότητες κλειστότητας για τις κλάσεις Σ^0_n, θεωρούμε ότι τις πληρούν και δεδομένου αυτού θα κάνουμε την απόδειξη για τις Σ^0_{n+1} κλάσεις. Αρχικά θα δείξουμε ότι κάθε Σ^0_{n+1} κλάση διατηρείται υπό τη συνεχή αντικατάσταση.
Έστω $Q \in \Sigma^0_{n+1}$, $Q \subseteq Y$. Τότε υπάρχει $P \in \Sigma^0_n$, με $P \subseteq Y \times \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε:

$$Q(n) \Leftrightarrow (\exists m)\neg P(y, m)$$

Θεωρούμε $f : X \to Y$ συνεχή. Τότε :

$$\begin{aligned} Q(f(x)) &\Leftrightarrow (\exists m)\neg P(f(x), m) \\ &\Leftrightarrow (\exists m)\neg P'(x, m) \end{aligned}$$

με $P'(x, m) \Leftrightarrow P(f(x), m)$.
Τότε $P' \in \Sigma^0_n$, άρα $f^{-1}[Q] \in \Sigma^0_{n+1}$ και Σ^0_{n+1} κλειστή υπό την συνεχή αντικατάσταση.
Για την απόδειξη της κλειστότητας υπό την πράξη $\vee$ θεωρούμε ένα σύνολο R και $P \in \Sigma^0_n$, $Q \in \Sigma^0_n$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} R(x) &\Leftrightarrow (\exists s)\neg P(x, s) \vee (\exists t)\neg Q(x, t) \\ &\Leftrightarrow (\exists u)[\neg P(x, (u)_0) \vee \neg Q(x, (u)_1)] \\ &\Leftrightarrow (\exists u)\neg[P(x, (u)_0) \& Q(x, (u)_1)] \end{aligned}$$

και εφόσον $P, Q \in \Sigma^0_n$ με τις κλάσεις Σ^0_n κλειστές για την πράξη & και την συνεχή αντικατάσταση, έχουμε ότι $R \in \Sigma^0_{n+1}$ Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται και η κλειστότητα για την πράξη &, όπου θεωρούμε όπως πριν σύνολο R και $P \in \Sigma^0_n$,

$Q \in \Sigma_n^0$, με:

$$\begin{aligned} R(x) &\Leftrightarrow (\exists s)\neg P(x,s) \& (\exists t)\neg Q(x,t) \\ &\Leftrightarrow (\exists u)[\neg P(x,(u)_0) \& \neg Q(x,(u)_1)] \\ &\Leftrightarrow (\exists u)\neg[P(x,(u)_0) \vee Q(x,(u)_1)] \end{aligned}$$

Εφόσον έχουμε θεωρήσει ότι Σ_n^0 κλειστή για την πράξη $\vee$, προκύπτει $R \in \Sigma_{n+1}^0$.
Για την απόδειξη της κλειστότητας υπό τον ποσοδείκτη $\exists^{\mathbb{N}}$ θεωρούμε σύνολο Q και $P \in \Sigma_n^0$ με:

$$\begin{aligned} Q(x) &\Leftrightarrow (\exists t)(\exists s)\neg P(x,t,s) \\ &\Leftrightarrow (\exists u)\neg P(x,(u)_0,(u)_1) \end{aligned}$$

με $P'(x,(u)_0,(u)_1) \Leftrightarrow P(x,t,s)$. Τότε από κλειστότητα υπό συνεχή αντικατάσταση $P' \in \Sigma_n^0$, άρα $Q \in \Sigma_{n+1}^0$.
Για τον δεσμευμένο ποσοδείκτη $\exists^{\leq}$, θεωρούμε σύνολο R και $P \in \Sigma_n^0$, τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} R(x,n) &\Leftrightarrow (\exists m \leq n)(\exists s)\neg P(x,m,s_) \\ &\Leftrightarrow (\exists u)(\exists m \leq n)\neg P(x,m,(u)_m) \\ &\Leftrightarrow (\exists u)\neg(\forall m \leq n)P(x,m,(u)_m) \end{aligned}$$

Από κλειστότητα για τον ποσοδείκτη $\forall^{\leq}$ και την συνεχή αντικατάσταση, προκύπτει $R \in \Sigma_{n+1}^0$
Παρομοίως, για τον δεσμευμένο ποσοδείκτη $\forall^{\leq}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} R(x,n) &\Leftrightarrow (\forall m \leq n)(\exists s)\neg P(x,m,s_) \\ &\Leftrightarrow (\exists u)(\forall m \leq n)\neg P(x,m,(u)_m) \\ &\Leftrightarrow (\exists u)\neg(\exists m \leq n)P(x,m,(u)_m) \end{aligned}$$

και $R \in \Sigma_{n+1}^0$, με αντίστοιχο τρόπο.
Οι ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων Π_n^0 και Δ_n^0 προκύπτουν άμεσα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των κλάσεων Σ_n^0. $\square$

3.3 Παραμετρικοποίηση και Θεωρήματα Ιεραρχίας

Ορισμός 3.4. *Ορίζουμε ως **παραμετρικοποίηση** από ένα σύνολο S σε ένα σύνολο I, μία απεικόνιση*

$$\pi : I \to S$$

από το I επί του S.

Αν η π είναι ορισμένη ή απεικονίζει την δοθείσα δομή του S, ονομάζεται ''καλή'' παραμετρικοποίηση.
Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο μελετάμε την περίπτωση που το σύνολο S αποτελεί τον περιορισμό μίας σημειοκλάσης Γ, σε κάποιο χώρο γινόμενο X, με:

$$\Gamma \upharpoonright X = \{P \subseteq X : P \in \Gamma\}$$

Θα ασχοληθούμε με παραμετρικοποιήσεις από σύνολα $\Gamma \upharpoonright X$ σε χώρους γινόμενο. Για $P \subseteq Y \times X$ ορίζουμε με P_y τον y-τομέα του P, με:

$$P_y = \{x \in X : P(y, x)\}$$

Ορισμός 3.5. *Ένα σημειοσύνολο $G \subseteq Y \times X$ καλείται **καθολικό** για το $\Gamma \upharpoonright X$, αν $G \in \Gamma$ και η απεικόνιση*

$$\phi : Y \to G_y$$

είναι παραμετρικοποίηση από το $\Gamma \upharpoonright X$ στο Y.

Ορισμός 3.6. *Μία σημειοκλάση ονομάζεται **Y-παραμετρικοποιήσιμη** αν για κάθε χώρο γινόμενο X υπάρχει $G \subseteq Y \times X$, καθολικό για το $\Gamma \upharpoonright X$.*

Έστω τώρα $N_0, N_1, \dots$ αρίθμηση για μία βάση της τοπολογίας ενός χώρου γινόμενο X. Ορίζουμε $O \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ ως εξής :

$$O(\epsilon, x) \Leftrightarrow (\exists n)[x \in N_{\epsilon(n)}]$$

Τότε O ανοικτό, και $\exists \epsilon \in \mathcal{N}$, ώστε κάθε ανοικτό σύνολο $P \subseteq X$, μπορεί να γραφεί ως :

$$P = O_\epsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{\epsilon(n)}$$

Τότε O καθολικό για το $\Sigma^0_1 \upharpoonright \mathcal{N}$. Άρα Σ^0_1 είναι $\mathcal{N}$-παραμετρικοποιήσιμο. Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι οι κλάσεις Σ^0_n και οι διττές Π^0_n, είναι $\mathcal{N}$-παραμετροκοποιήσιμες.

Θεώρημα 3.7. *Για κάθε τέλειο χώρο γινόμενο Y, τα σύνολα Σ^0_1 είναι Y-παραμετρικοποιήσιμα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $N(Y,0), N(Y,1), \ldots$ και $N(X,0), N(X,1), \ldots$ αριθμήσιμες βάσεις για την τοπολογία του Y και ενός χώρου γινόμενο X, αντίστοιχα. Από Θεώρημα 4.5 γνωρίζουμε ότι υπάρχει συνάρτηση σ, που αντιστοιχίζει κάθε πεπερασμένη δυαδική ακολουθία u, σε μία περιοχή N(Y, σ(u)) στο Y τέτοια ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος.
Ορίζουμε $G \subseteq Y \times X$ τέτοιο ώστε:

$$G(y,x) \Leftrightarrow \text{υπάρχει πεπερασμένη δυαδική ακολουθία } u = (t_0, \ldots, t_n)$$

$$, \text{ώστε } t_n = 0, y \in N(Y,\sigma(u)) \text{και } x \in N(X,n)$$

Τότε G ανοικτό σύνολο, και άρα κάθε τομέας $G_y \subseteq X$ ανοικτό. Μένει να δείξουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του X, είναι τομέας του G. Τότε θα έχουμε αποδείξει ότι G καθολικό για το Σ^0_1, και X οποιοδήποτε χώρο γινόμενο. Έστω $P \subseteq X$ ανοικτό. Τότε θα υπάρχει $A \subseteq \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε :

$$x \in P \Leftrightarrow (\exists n)[(n \in A)\&(x \in N(X,n))]$$

Ορίζουμε

$$t_n = \begin{cases} 0, \text{ αν } n \in \\ 1, \text{ αν } n \notin A \end{cases}$$

και $\{y_n\}$ ακολουθία στο Y, τέτοια ώστε $y_n =$ το κέντρο της περιοχής

$$N(Y, \sigma(t_0, \ldots, t_n))$$

Από τον ορισμό της σ, γνωρίζουμε ότι y_n Cauchy, και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\exists y$, τέτοιο ώστε:

$$y = lim_{n\to\infty} y_n$$

Τότε για αυτό το y, αρκεί να δείξουμε ότι

$$G(y,x) \Leftrightarrow x \in P$$

Έστω $x \in P$. Τότε $\exists n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $t_n = 0 \;\; x \in N(X,n)$. Από ιδιότητες της σ, $y \in N(Y, \sigma(t_0, \ldots, t_n))$. Από ορισμό του G, έχουμε τότε G(y,x).
Αντίστροφα, αν ισχύει G(y,x), θα υπάρχει $u = (t'_0, \ldots, t'_n)$, τέτοια ώστε $y \in N(y, \sigma(u))$, με $t'_n = 0$ και $x \in N(X,n)$. Αφού $y \in N(Y, \sigma(t_0, \ldots, t_n))$, οι ακολουθίες $(t'_0, \ldots, t'_n)$ και $(t_0, \ldots, t_n)$ είναι συμβατές από ιδιότητες της σ, αλλιώς $\overline{N}_{\sigma(t_0,\ldots,t_n)} \cap \overline{N}_{\sigma(t'_0,\ldots,t'_n)} = \emptyset$. Άτοπο αφού $y \in N(y, \sigma(u))$ και $y \in N(Y, \sigma(t_0, \ldots, t_n))$. Γνωρίζουμε ότι οι δυαδικές ακολουθίες είναι συμβατές, αν και μόνο αν είναι ταυτόσημες. Τότε $t_0 = t'_0, \ldots, t_n = t'_n$, άρα $t_n = 0$ και τότε $x \in N(x,n)$. Άρα $x \in P$. □

Θεώρημα 3.8. *Αν μία σημειοκλάση Γ είναι Y-παραμετρικοποιήσιμη, τότε οι σημειοκλάσεις $\neg\Gamma$ και $\exists^Z\Gamma$, με Z χώρο γινόμενο, είναι Y-παραμετρικοποιήσιμες. Συγκεκριμένα όλες οι Borel σημειοκλάσεις Σ^0_n και οι διττές Π^0_n είναι Y-παραμετρικοποιήσιμες, όπου Y οποιοσδήποτε τέλειος χώρος γινόμενο.*

Απόδειξη. Έστω $G \subseteq Y \times X$ καθολικό για το $\Gamma \upharpoonright X$. Τότε το σύνολο $\neg G = Y \times X \setminus G$ θα είναι καθολικό για το σύνολο $\neg\Gamma \upharpoonright X$. Αντίστοιχα αν $G \subseteq Y \times (X \times Z)$ είναι καθολικό για το $\Gamma \upharpoonright (X \times Z)$. Ορίζουμε $H \subseteq Y \times X$ τέτοιο ώστε $H(y,x) \Leftrightarrow (\exists z)G(y,x,z)$. Τότε H καθολικό για το $\exists^Z\Gamma \upharpoonright X$, αφού για

$$G \in \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\exists^Z G \in \exists^Z\Gamma \Leftrightarrow$$

$$H \in \exists^Z\Gamma$$

□

Λήμμα 3.9 (Λήμμα Ιεραρχίας)**.** *Έστω Γ σημειοκλάση, τέτοια ώστε για κάθε χώρο γινόμενο X, και κάθε σημειοσύνολο $P \subseteq X \times X$ στο Γ, η διαγώνιος*

$$P' = \{x : P(x,x)\}$$

είναι επίσης στο Γ. Αν Γ είναι Y-παραμετρικοποιήσιμο τότε υπάρχει $P \subseteq Y$ στο Γ, αλλά όχι στο $\neg\Gamma$.

Απόδειξη. Έστω $G \subseteq Y \times Y$ καθολικό για το $\Gamma \upharpoonright Y$.Θεωρούμε το

$$P = \{y : G(y,y)\}$$

. Από υπόθεση $P \in \Gamma$. Τότε για ορισμενο $y^* \in Y$ θα ισχύει :

$$G(y,y^*) \Leftrightarrow \neg P(y) \Leftrightarrow \neg G(y,y)$$

Άτοπο για $y = y^*$. □

Θεώρημα 3.10 (Θεώρημα Ιεραρχίας των κλάσεων Borel)**.** *Αν X τέλειος χώρος γινόμενο,$\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*

- $\Delta^0_n \upharpoonright X \subsetneq \Sigma^0_n \upharpoonright X$
- $\Delta^0_n \upharpoonright X \subsetneq \Pi^0_n \upharpoonright X$

- $\Sigma^0_n \restriction X \subsetneq \Delta^0_{n+1} \restriction X$
- $\Pi^0_n \restriction X \subsetneq \Delta^0_{n+1} \restriction X$

Απόδειξη. Από προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ότι Σ^0_n, Π^0_n είναι X-παραμετρικοποιήσιμες, και ότι υπάρχει σύνολο $P \subseteq X$, τέτοιο ώστε $P \in \Sigma^0_n$, $P \notin \neg\Sigma^0_n \Leftrightarrow P \notin \Pi^0_n$. Άρα $\Sigma^0_n \cup \Pi^0_n \restriction X \subsetneq \Sigma^0_n \restriction X \Leftrightarrow \Delta^0_n \subsetneq \Sigma^0_n \restriction X$. Αντίστοιχα $\Delta^0_n \restriction X \subsetneq \Pi^0_n \restriction X$.
Παρομοίως αν $\Sigma^0_n \restriction X \subseteq \Delta^0_{n+1} \restriction X$, τότε $\Sigma^0_n \restriction X$ θα ήταν κλειστό υπό την πράξη της άρνησης και τότε θα ίσχυε :

$$\Pi^0_n \restriction X \subseteq \Sigma^0_n \restriction X$$

Άτοπο γιατί $P \in \Sigma^0_n \setminus \Pi^0_n$. $\square$

3.4 Παράγωγα σύνολα των κλάσεων Borel

Για κάθε σημειοκλάση Λ έστω:

$$\exists^{\mathcal{N}} \Lambda = \{\exists^{\mathcal{N}} P : P \in \Lambda\} =$$

$$\{\exists^{\mathcal{N}} P : P \in \Lambda \upharpoonright (X \times \mathcal{N}), \text{για κάποιο χώρο X}\}$$

Ορίζουμε τις **Lusin** σημειοκλάσεις Σ^1_n, για $n \geq 1$, ως εξής:

$$\Sigma^1_1 = \exists^{\mathcal{N}} \Pi^0_1$$

$$\Sigma^1_{n+1} = \exists^{\mathcal{N}} \neg \Sigma^1_n$$

Επίσης ορίζουμε τις διττές και τις αμφίσημες Lusin κλάσεις :

$$\Pi^1_n = \neg \Sigma^1_n$$

$$\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$$

Για παράδειγμα ένα σύνολο $P \subseteq X$, θα είναι Σ^1_1 σύνολο, αν υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq X \times \mathcal{N}$, τέτοιο ώστε, $\forall x \in X$:

$$P(x) \Leftrightarrow (\exists a) F(x, a)$$

Παρομοίως, ένα σύνολο P θα είναι Π^1_1, αν υπάρχει ανοικτό σύνολο G, ώστε:

$$P(x) \Leftrightarrow (\forall a) G(x, a)$$

εφόσον ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\Pi^1_1 = \neg \Sigma^1_1 = \neg(\exists^{\mathcal{N}} \Pi^0_1) = \forall^{\mathcal{N}}(\neg \Pi^0_1) = \forall^{\mathcal{N}} \Sigma^0_1$$

Τα σημειοσύνολα των κλάσεων Lusin, έτσι όπως ορίστηκαν παραπάνω, ονομάζονται παράγωγα σύνολα.

Θεώρημα 3.11. *Για τις σημειοκλάσεις Lusin και $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*

- $\Delta^1_n \subseteq \Sigma^1_n$
- $\Delta^1_n \subseteq \Pi^1_n$
- $\Sigma^1_n \subseteq \Delta^1_{n+1}$

- $\Pi^1_n \subseteq \Delta^1_{n+1}$

Απόδειξη. Οι σχέσεις $\Delta^1_n \subseteq \Sigma^1_n$ και $\Delta^1_n \subseteq \Pi^1_n$ προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό των Δ^1_n κλάσεων.
Για να αποδείξουμε την σχέση $\Sigma^1_n \subseteq \Delta^1_{n+1}$, αρκεί να δειχτεί ότι $\Sigma^1_n \subseteq \Sigma^1_{n+1}$ και $\Sigma^1_n \subseteq \Pi^1_{n+1}$. Η δεύτερη από τις σύο σχέσεις προκύπτει ακριβώς όπως προέκυψε η απόδειξη της σχέσεης $\Sigma^0_n \subseteq \Pi^0_{n+1}$ του Θεωρήματος 6.1 και γι' αυτό παραλείπεται.
Έστω F κλειστό, τότε $F \in \Pi^0_1$ και άρα $F \in \Pi^0_2$. Θα υπάρχει ανοικτό σύνολο G, τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} F(x) &\Leftrightarrow (\forall t)G(x,t) \\ &\Leftrightarrow (\forall a)G(x,(a)_0) \end{aligned}$$

Ορίζουμε σύνολο $G' \subseteq X \times \mathcal{N}$, ώστε να ισχύει:

$$G'(x,a) \Leftrightarrow G(x,(a)_0)$$

Η απεικόνιση $(x,a) \mapsto (x,(a)_0)$ είναι συνεχής, και αφού G ανοικτό, άμεσα προκύπτει ότι G' επίσης ανοικτό σύνολο. Τότε $F \in \Pi^1_1$, άρα κάθε κλειστό είναι Π^1_1 σύνολο. Τότε $\Pi^0_1 \subseteq \Pi^1_1$, και από την σχέση:

$$\Sigma^1_1 = \exists^{\mathcal{N}}\Pi^0_1 \subseteq \exists^{\mathcal{N}}\Pi^1_1 = \exists^{\mathcal{N}}\neg\Sigma^1_1 = \Sigma^1_2$$

προκύπτει $\Sigma^1_1 \subseteq \Sigma^1_2$ και επαγωγικά $\Sigma^1_n \subseteq \Sigma^1_{n+1}$.
Το υπόλοιπο μέρος της απόδειξης προκύπτει όπως και στο Θεώρημα 6.1

□

Θεώρημα 3.12. *Κάθε Lusin σημειοκλάση Σ^1_n είναι κλειστή υπό συνεχή αντικατάσταση, και για τις πράξεις $\vee, \&, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}, \forall^{\mathbb{N}}$, και $\exists^Y$, για κάποιο χώρο γινόμενο Y.*
Κάθε διττή Lusin σημειοκλάση Π^1_n είναι κλειστή υπό συνεχή αντικατάσταση, και για τις πράξεις $\vee, \&, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}, \exists^{\mathbb{N}}$, και $\forall^Y$, για κάποιο χώρο γινόμενο Y.
Κάθε αμφίσημη Lusin σημειοκλάση Δ^1_n είναι κλειστή για τις πράξεις $\neg, \vee, \&, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}, \exists^{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη από την κλάση Σ^1_1. Έστω $P \in \Sigma^1_1$, G κλειστό και f συνεχής. Τότε:

$$P(f(x)) \Leftrightarrow (\exists a)G(f(x),a)$$

Από ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης Π^0_1, έχουμε ότι $x \in f^{-1}[G]$.
Έστω τώρα G' τέτοιο ώστε:

$$G'(x,a) \Leftrightarrow G(f(x),a)$$

Τότε G' κλειστό, και άρα $P \in \Sigma^1_1$.
Για να δείξουμε την κλειστότητα υπό την πράξη $\vee$, θεωρούμε $P, G \in \Pi^0_1$ και σύνολο R τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} R(x) &\Leftrightarrow (\exists a)P(x,a) \vee (\exists b)G(x,b) \\ &\Leftrightarrow (\exists u)[P(x,(u)_0) \vee G(x,(u)_1)] \end{aligned}$$

Αφού Π^1_1 κλειστή υπό την πράξη $\vee$ και την συνεχή αντικατάσταση, προκύπτει ότι $R \in \Sigma^1_1$.
Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται η κλειστότητα υπό την πράξη &.
Για να δείξουμε την κλειστότητα για τον δεσμευμένο ποσοδείκτη $\exists^{\leq}$, θεωρούμε σύνολο P, και G κλειστό, τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} P(x,n) &\Leftrightarrow (\exists m \leq n)(\exists k)G(x,m,k) \\ &\Leftrightarrow (\exists \gamma)(\exists m \leq n)G(x,m,\gamma_m) \end{aligned}$$

Από ιδιότητες της Π^0_1 προκύπτει ότι $P \in \Sigma^1_1$.
Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για να δείξουμε την κλειστότητα για τον ποσοδείκτη $\forall^{\leq}$.
Για την απόδειξη της κλειστότητας υπό τον ποσοδείκτη $\forall^{\mathbb{N}}$, θεωρούμε σύνολο P και F κλειστό με:

$$\begin{aligned} P(x) &\Leftrightarrow (\forall t)(\exists b)F(x,t,b) \\ &\Leftrightarrow (\exists \gamma)(\exists t)F(x,t,(\gamma)_t) \end{aligned}$$

Από την κλειστότητα της κλάσης Π^0_1, υπό την συνεχή αντικατάσταση και τον ποσοδείκτη $\forall^{\mathbb{N}}$, προκύπτει ότι $P \in \Sigma^1_1$.
Για να δείξουμε ότι η κλάση Σ^1_1 είναι κλειστή για τον ποσοδείκτη $\exists^Y$, με Y χώρο γινόμενο, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι είναι κλειστή υπό τον ποσοδείκτη

$\exists^{\mathcal{N}}$, το οποίο και θα αποδείξουμε:
Έστω P σύνολο και F κλειστό, τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} P(x,a) &\Leftrightarrow (\exists b)F(x,a,b) \Rightarrow \\ (\exists a)P(x,a) &\Leftrightarrow (\exists a)(\exists b)F(x,a,b) \\ &\Leftrightarrow (\exists \gamma)F(x,(\gamma)_0,(\gamma)_1) \end{aligned}$$

Τότε από την κλειστότητα της κλάσης Π^0_1 υπό την συνεχή αντικατάσταση, $\exists^{\mathcal{N}} P \in \Sigma^1_1$.
Στην συνέχεια θα δείξουμε την κλειστότητα για τον ποσοδείκτη $\exists^Y$.
Για κάθε χώρο γινόμενο Y, υπάρχει συνεχής απεικόνιση, 1-1 και επί:

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{Y}$$

Τότε για $P \subseteq X \times Y$, θα ισχύει :

$$(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists a)P(x,\pi(a))$$

Τότε $\exists^Y P \in \Sigma^1_1$, από την κλειστότητα της κλάσης Σ^1_1 υπό την συνεχή αντικατάσταση και τον ποσοδείκτη $\exists^{\mathcal{N}}$. $\square$

Θεώρημα 3.13 (Παραμετρικοποίηση και Ιδιότητες Ιεραρχίας των Lusin Σημειοκλάσεων)**.** *Έστω $n \geq 1$, και έστω Y τέλειος χώρος γινόμενο. Τότε οι σημειοκλάσεις Σ^1_n, Π^1_n, είναι Y-παραμετρικοποιήσιμες, και ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις, για X οποιοδήποτε τέλειο χώρο γινόμενο:*

- $\Delta^1_n \restriction X \subsetneq \Sigma^1_n \restriction X$
- $\Delta^1_n \restriction X \subsetneq \Pi^1_n \restriction X$
- $\Sigma^1_n \restriction X \subsetneq \Delta^1_{n+1} \restriction X$
- $\Pi^1_n \restriction X \subsetneq \Delta^1_{n+1} \restriction X$

Τα Σ^1_1 σύνολα ονομάζονται **αναλυτικά** ή **Α-σύνολα**.

3.5 Αριθμήσιμες Διαδικάσίες στις Borel σημειοκλάσεις

Αριθμήσιμη διαδικασία για τα σημειοσύνολα, ονομάζουμε οποιοαδήποτε συνάρτηση Φ, η οποία λαμβάνει ως τιμές σύνολα άπειρων ακολουθιών, τα οποία ανήκουν σε σημειοσύνολα, ή και σημειοσύνολα. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$\Phi_i P_i = \Phi(P_0, P_1, \dots)$$

Τις συνηθέστερες αριθμήσιμες δαδικασίες αποτελούν οι αριθμήσιμες ενώσεις και αριθμήσιμες τομές. Οι πράξεις $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$ και $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_i$, ορίζονται όταν κάθε $P_i, \forall i \in \mathbb{N}$ είναι υποσύνολο ενός χώρου X, και για:

$$x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_i \Leftrightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_i(x) \Leftrightarrow P_i(x), \forall i \in \mathbb{N}$$

$$x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i \Leftrightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i(x) \Leftrightarrow P_i(x), \forall i \in \mathbb{N}$$

Μία σημειοκλάση Λ είναι κλειστή υπό μία αριθμήσιμη διαδικασία Φ, αν για κάθε $P_0, P_1, \dots \in \Lambda$, και $\Phi_i P_i$ ορισμένο, το σύνολο $\Phi_i P_i \in \Lambda$.

Θεώρημα 3.14. *Έστω Γ μια $\mathcal{N}$ − παραμετρικοποιήσιμη σημειοκλάση, η οποία είναι κλειστή υπό συνεχή αντικατάσταση. Αν Γ κλειστή για τον ποσοδείκτη $\exists^{\mathbb{N}}$, τότε θα είναι κλειστή και για την αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}$, ενώ αν είναι κλειστή για τον ποσοδείκτη $\forall^{\mathbb{N}}$, τότε θα είναι κλειστή και την αριθμήσιμη τομή $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Έστω $P_i \subseteq X,\ P_i \in \Gamma$, και έστω $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ καθολικό. Επιλέγουμε άρρητους ε_i, τέτοιους ώστε

$$P_i = G_{\varepsilon_i} = \{x \in X : G(\varepsilon_i, x)\}$$

Επιλέγουμε επίσης ε, τέτοιο ώστε $\forall i \in \mathbb{N}$, να ισχύει $(\varepsilon)_i = \varepsilon_i$ και ορίζουμε:

$$x \in P \Leftrightarrow (\exists i) G(\varepsilon_i, x)$$

Τότε $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$ και δεδομένου ότι Γ κλειστή υπό συνεχή αντικατάσταση και τον ποσοδείκτη $\exists^{\mathbb{N}}$, έχουμε ότι

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i \in \Gamma \Leftrightarrow P \in \Gamma$$

. Αντίστοιχα αποδεικνύεται η κλειστοτητα της Γ για την αριθμήσιμη τομή. □

Πόρισμα 3.14.1. *Κάθε Σ^0_n είναι κλειστό για την αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$, κάθε Π^0_n είναι κλειστό για την αριθμήσιμη τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$, και κάθε $\Sigma^1_n,\ \Pi^1_n,\ \Delta^1_n$, κλειστά υπό την αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ και την αριθμήσιμη τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$.*

Έστω τώρα Φ αριθμήσιμη διαδικασία συνόλων και Λ σημειοκλάση. Ορίζουμε

$$\Phi\Lambda = \{\Phi(P_0, P_1, \dots) : P_0, P_1, \dots \in \Lambda \text{και} \Phi(P_0, P_1, \dots) \text{ορισμένο}\}$$

Πρόταση 3.15. *Έστω Λ σημειοκλάση κλειστή υπό συνεχή αντικατάσταση. Τότε κάθε προβολή κατά μήκος του $\mathbb{N}$ ενός συνόλου στο Λ, μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση στοιχείων του Λ. Δηλαδή ισχύει:*

$$\exists^{\mathbb{N}}\Lambda \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda$$

Απόδειξη. Έστω $P \in \exists^{\mathbb{N}}\Lambda$. Τότε υπάρχει $P' \in \Lambda$, τέτοιο ώστε:

$$P(x) \Leftrightarrow (\exists k)P'(x, k)$$

Τότε θα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $P \in \Lambda_k$, για κάποιο Λ_k. Άρα από αυτό συμπεραίνουμε ότι $P \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda$. □

Από την παραπάνω πρόταση και το προηγούμενο πόρισμα, μπορούμε να δώσουμε έναν εναλλακτικό ορισμό των κλάσεων Borel πεπερασμένης τάξης.

Ορισμός 3.16. *Για τις κλάσεις Borel πεπερασμένης τάξης έχουμε ότι :*

$$\Sigma^0_1 = \{G : G \textit{ ανοικτό}\}$$

$$\Sigma^0_{n+1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \neg\Sigma^0_n$$

Πρόταση 3.17. *Η κλάση των Borel σημειοσυνόλων είναι κλειστή για τον ποσοδείκτη $\exists^{\mathbb{N}}$, αλλά όχι για την αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$*

Απόδειξη. Έστω $G_n \subseteq \mathcal{N}$ με $G_n \in \Sigma^0_n \setminus \Pi^0_n$. Τότε για $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(n, a) : a \in G_n\}$, έχουμε $G \notin \Sigma^0_n$. Διαφορετικά αν ίσχυε $G \in \Sigma^0_n$, θα είχαμε ότι $G \in \Sigma^0_{n+1}$. Όμως

$$\Sigma_{n+1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \neg\Sigma^0_n$$

Άρα $G \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \neg\Sigma^0_n$. Άτοπο, διότι θεωρήσαμε ότι $G \in \Sigma^0_n$. □

Από την τελευταία πρόταση, συνίσταται μία επέκταση της ιεραρχίας των πεπερασμένων Borel κλάσεων στις μη πεπερασμένες κλάσεις.
Έστω $\Sigma_1^0 = \{G : G$ ανοικτό$\}$ και έστω για κάθε διατακτικό αριθμό ξ>1, ορίζουμε:

$$\Sigma_\xi^0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \neg(\cup_{\eta<\xi}\Sigma_\eta^0)$$

Για παράδειγμα θα έχουμε $P \in \Sigma_\xi^0$, αν υπάρχουν $P_0, P_1, \ldots$ με $P_i \in \Sigma_\eta^0, \forall i \in \mathbb{N}$ και $\eta < \xi$, τέτοιο ώστε:

$$P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus P_i)$$

Καλούμε τα Σ_ξ^0, Borel σημειοκλάσεις τάξης ξ. Οι σημειοκλάσεις $\Pi_\xi^0,\ \Delta_\xi^0$, ορίζονται όπως οι αντίστοιχες πεπερασμένες:

$$\Pi_\xi^0 = \neg\Sigma_\xi^0$$

$$\Delta_\xi^0 = \Sigma_\xi^0 \cap \Pi_\xi^0$$

Για ξ πεπερασμένο ισχύουν οι ιδιότητες των πεπερασμένων Borel κλάσεων.

Ορισμός 3.18. *Ορίζουμε την σημειοκλάση $\mathcal{B}$ των συνόλων Borel ως $\mathcal{B} = \bigcup_\xi \Sigma_\xi^0$*

Θεώρημα 3.19. *Για κάθε χώρο γινόμενο X η κλάση $\mathcal{B} \restriction \mathcal{X}$ των Borel υποσυνόλων, είναι η μικρότερη οικογένεια υποσυνόλων του X, που περιέχει τα ανοικτά του χώρου και είναι κλειστή για τις αριθμήσιμες ενώσεις, τις αριθμήσιμες τομές και το συμπλήρωμα.*

Απόδειξη. Έστω $P \in \mathcal{B}$. Τότε $\exists\xi$ τέτοιο ώστε $P \in \Sigma_\xi^0$ για κάποιο Σ_ξ^0 και άρα $\neg P = X \setminus P \in \Sigma_{\xi+1}^0$.
Αντίστοιχα αν $P_i \in \mathcal{B}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, με $P_i \subseteq X$, τότε υπάρχουν ξ_i , τέτοια ώστε $P_i \subseteq \Sigma_{\xi_i}^0$. Άρα $\neg P_i \in \Sigma_{\xi_i}^0$ και παίρνοντας

$$\xi = sup\{\xi_i + 2 : i = 0, 1, 2, \ldots\}$$

Τότε $P \in \Sigma_\xi^0$, αφού:

$$P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus (X \setminus P_i))$$

Άρα δείξαμε ότι η κλάση των Borel συνόλων είναι κλειστή για το συμπλήρωμα και τις αριθμήσιμες ενώσεις. Για να δείξουμε ότι είναι κλειστή και για τις αριθμήσιμες τομές, έστω $P_i \in \mathcal{B}, \forall i \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_i = X \setminus (\cup_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus P_i))$$

$$\Leftrightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_i \in \mathcal{B}$$

Αντίστροφα, έστω S οικογένεια που περιέχει όλα τα ανοικτα υποσύνολα του X, και είναι κλειστή για το συμπλήρωμα, τις αριθμήσιμες τομές και τις αριθμήσιμες ενώσεις. Τότε για κάθε P, με $P \subseteq X$ και $P \in \Sigma^0_\xi$ ή $P \in \Pi^0_\xi$, θα ισχύει ότι $P \in S$, με επαγωγή στο ξ, εφόσον τα κλειστά σύνολα είναι αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων και πιο συγκεκριμένα:

$$P \in \Sigma^0_\xi \Rightarrow P = \cup_{i\in\mathbb{N}} P_i, \text{ με κάθε } P_i \in \Pi^0_{\eta_i}, \eta_i < \xi$$

$$P \in \Pi^0_\xi \Rightarrow P = \cap_{i\in\mathbb{N}} P_i, \text{ με κάθε } P_i \in \Sigma^0_{\eta_i}, \eta_i < \xi$$

□

Πόρισμα 3.19.1. *Είναι άμεσο από τον ορισμό των Borel συνόλων και τις ιδιότητες κλειστότητας των Δ^1_1 συνόλων ότι, $\mathcal{B} \subseteq \Delta^1_1$.*

3.6 Συναρτήσεις Borel και Ισομορφισμοί

Έστω Λ σημειοκλάση και συνάρτηση :

$$f : X \to Y$$

Η f θα ονομάζεται **Λ-μετρήσιμη**, αν για κάθε βασική περιοχή $N_s \subseteq Y$, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[N_s] \in \Lambda$.
Με αντίστοιχο τρόπο ορίζονται οι Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις, ή πιο απλά Borel συναρτήσεις.

Ορισμός 3.20. *Ορίζουμε ως **ισομορφισμό Borel** μεταξύ δύο χώρων, μία απεικόνιση 1-1 και επί:*

$$f : X \to Y$$

τέτοια ώστε η f και η f^{-1}, να είναι Borel μετρήσιμες.

Θεώρημα 3.21. *Έστω $f : X \to Y$, μία Borel συνάρτηση και $P \subseteq Y$, με P να ανήκει σε οποιαδήποτε από τις κλάσεις $\mathcal{B},\ \Sigma^1_n, \Pi^1_n, \Delta^1_n$.*
Τότε $f^{-1}[P]$, θα ανήκει στην ίδια κλάση. Πιο συγκεκριμένα η οικογένεια των Borel συναρτήσεων είναι κλειστή για την σύνθεση, δηλαδή η σύνθεση δύο Borel συναρτήσεων παράγει Borel συνάρτηση.

Απόδειξη. Έστω f Borel συνάρτηση και $P \in \Sigma^0_\xi$. Τότε $f^{-1}[P] \in \Sigma^0_\xi$. Άρα $\mathcal{B}$ κλειστό υπό Borel αντικατάσταση.
Αν $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Borel συνάρτηση και $h : X \to Z$, η σύνθεσή τους:

$$h = g(f(x))$$

Τότε για κάθε ανοικτό σύνολο $P \subseteq Z$,έχουμε

$$h^{-1}[P] = f^{-1}[g^{-1}[P]]$$

Αφού $g^{-1}[P] \in \mathcal{B}$ και αντίστοιχα $f^{-1}[g^{-1}[P]] \in \mathcal{B}$, προκύπτει άμεσα ότι$h^{-1}[P] \in \mathcal{B}$. Άρα h συνάρτηση Borel.
Στην συνέχεια θα αποδείξουμε το θεώρημα για τις κλάσεις Lusin. Έστω:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \bigcap_{s \in \mathbb{N}} [y \in N_s \Rightarrow f(x) \in N_s]$$

Τότε το γράφημα της f ορίζεται ως εξής :

$$Graph(F) = \{(x, y) : f(x) = y\}$$

Τότε $Graph(f) \in \mathcal{B}$
Έστω τώρα για κάθε $P \subseteq Y$,

$$P(f(x)) \Leftrightarrow (\exists y)[P(y) \& f(x) = y]$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)[P(y) \vee f(x) \neq y]$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, το γεγονός ότι $\mathcal{B} \subseteq \Delta_1^1$ και τις ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων $\Sigma_n^1, \Pi_n^1, \Delta_n^1$, προκύπτει ότι αν P ανήκει σε κάποια από αυτές τις κλάσεις, για f Borel συνάρτηση, ισχύει ότι $f^{-1}[P]$ ανήκει στην ίδια κλάση. $\square$

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί το πρώτο από τα θεωρήματα μεταφοράς και επιτρέπει την μελέτη υποσυνόλων του χώρου Baire.

Θεώρημα 3.22. *Για κάθε άπειρο χώρο γινόμενο X, υπάρχει συνεχής απεικόνιση από τον χώρο Baire επί του χώρου X:*

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$$

και κλειστό σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$, τέτοιο ώστε η π να είναι 1-1 στο A, με $\pi[A] = X$. Επιπλέον υπάρχει Borel απεικόνιση 1-1:

$$f : X \to \mathcal{N}$$

τέτοια ώστε, $\forall a \in A$, $f(\pi(a)) = a$ και $\forall x \in X$, να ισχύει $f(x) \in A$ και $\pi(f(x)) = x$.

Απόδειξη. Έστω $D = \{r_0, r_1, \dots\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X και $\forall a \in \mathcal{N}$, θεωρούμε την ακολουθία $\{x_n^a\} = \{x_n\}$, την οποία ορίζουμε αναδρομικά ως εξής:

$$x_0 = r_{a(0)}$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} r_{a(n+1)}, & \text{αν } d(x_n, r_{a(n+1)}) < 2^{-n} \\ x_n, & \text{αν } d(x_n, r_{a(n+1)}) \geq 2^{-n} \end{cases}$$

Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$ και άρα $\{x_n^a\}$ Cauchy. Θεωρούμε $\rho : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ επί συνάρτηση, με

$$\rho(a) = lim_{n\to\infty} x_n^a$$

Τότε ρ συνεχής και για $x \in X$ θεωρούμε $g(x) = a$, με

$$a(n) = min\{k : d(x, r_k) \leq 2^{-n-2}\}$$

Τότε $\forall x \in X$, θα ισχύει $\rho(g(x)) = x$, άρα η g 1-1 συνάρτηση. Θεωρούμε τώρα $B = g[X] \subseteq \mathcal{N}$. Τότε η g είναι ακριβώς η αντίστροφη της ρ περιορισμένη στο B, αφού για $a \in B$, $\exists x \in X$, τέτοιο ώστε:

$$a = g(x) \Rightarrow g(\rho(a)) = g(\rho(g(x)) = g(x) = a$$

Αν $g(x) = a$ τότε για

$$a(n) = k \Leftrightarrow d(x, r_k) \leq 2^{-n-2} \& (\forall s < k)[d(x, r_s) > 2^{-n-2}]$$

Αν θεωρήσουμε $B_{n,k} = \{a : a(n) = k\}$, κάθε $g^{-1}[B_{n,k}]$ είναι Borel υποσύνολο του X. Συνεπάγεται ότι για κάθε βασική περιοχή $N = \{a : a(0) = k_0, \dots, a(n-1) = k_{n-1}\}$ στο $\mathcal{N}$, το σύνολο

$$g^{-1}[N] = g^{-1}[B_{0,k_0}] \cap \dots \cap g^{-1}[B_{n-1,k_{n-1}}]$$

είναι Borel και άρα η g συνάρτηση Borel. Τότε για:

$$a \in B \Leftrightarrow (\forall n)[d(\rho(a), r_{a(n)}) \leq 2^{-n-2} \& (\forall k < a(n))[d(\rho(a), r_k) > 2^{-n-2}]$$

Άρα to B είναι Π^0_2 υποσύνολο του $\mathcal{N}$.
Αρκεί τώρα να λειτουργήσουμε κατασκευαστικά ώστε να ”χτίσουμε” την συνάρτηση π και A κλειστό σύνολο. Αν γράψουμε το B σε κανονική μορφή έχουμε:

$$a \in B \Leftrightarrow (\forall n)(\exists s) R(a, n, s)$$

με R ανοικτό-κλειστό, και ορίζουμε $\subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ ώστε για:

$$(a, b) \in A \Leftrightarrow (\forall n)[R(a, n, b(n)) \& (\forall k < b(n)) \neg R(a, n, k)]$$

Τότε A θα είναι κλειστό. Επιπλέον για την προβολή $\sigma : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, με $\sigma(a, b) = a$, ισχύει ότι $\sigma[A] = B$ και σ 1-1 στο A, αφού $(a, b) \in A \Rightarrow b(n) = min\{k : R(a, n, k)\}$. Άρα για την σύνθεση $\pi = \rho \circ \sigma$ έχουμε $\pi[A] = X$ και είναι συνεχής και 1-1. Τότε η αντίστροφη της π, $f(x), n \mapsto min : R(g(x), n, k))$ είναι Borel. Η απόδειξη ολοκληρώνεται αποδεικνύοντας ότι $\subseteq \mathcal{N}$ μέσω κάποιου ομοιομορφισμού μεταξύ του $\mathcal{N}$ και του $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Ο πλέον προφανής είναι η απεικόνιση $n_0, n_1, n_2 \dots \mapsto ((n_0, n_2, n_4, \dots), (n_1, n_3, n_5, \dots))$.

$\square$

Ορισμός 3.23. *Θα καλούμε μία συνάρτηση $f : X \to Y$ ”καλή” Borel απεικόνιση 1-1 αν:*

1. *Η f είναι Borel και 1-1 απεικόνιση*

2. *Υπάρχει απεικόνιση Borel, η οποία είναι επί του X:*

$$g : Y \to X$$

   τέτοια ώστε $g \circ f$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο X, δηλαδή $g(f(x)) = x$.

Οποιαδήποτε συνάρτηση με τις ιδιότητες της g θα ονομάζεται Borel αντίστροφη της f.

Παρατηρούμε ότι, αν $f : X \to Y$ ”καλή” Borel απεικόνιση 1-1 , τότε για

$$y \in f[X] \Leftrightarrow f(g(y)) = y$$

με g, οπώς ορίστηκε παραπάνω, άρα η εικόνα $f[X]$ είναι Borel σύνολο.
Αν P είναι ένα Borel υποσύνολο του X, τότε για :

$$y \in f[P] \Leftrightarrow y \in (f[X] \& g(y) \in P)$$

άρα $f[P]$ Borel.
Συμπεραίνουμε ότι η εικόνα ενός Borel συνόλου, μέσω μίας ”καλής” Borel 1-1 απεικόνισης, είναι επίσης Borel.
Είναι άμεσο από τα παραπάνω ότι η κλάση των ”καλών” Borel 1-1 συναρτήσεων, είναι κλειστή για την σύνθεση συναρτήσεων.

Λήμμα 3.24. *Για κάθε τέλειο χώρο γινόμενο X, υπάρχουν ”καλές”, Borel 1-1 απεικονίσεις:*

$$f : X \to \mathcal{N}$$

$$g : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$$

Απόδειξη. Η κατασκευή της συνάρτησης f δόθηκε στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος.
Για την κατασκευή της h, ορίζουμε αρχικά συνάρτηση $h_1 : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, όπου:

$$h_1(a) = b$$

με

$$b(n) = \begin{cases} 0, \text{αν } \ a((n)_0) = (n)_1 \\ 1, \text{αν } \ a((n)_0) \neq (n)_1 \end{cases}$$

Τότε η h_1 θα είναι συνάρτηση Borel και για $b \in h_1[\mathcal{N}] \Leftrightarrow$

$(\forall n)(\forall k)[[b(n) = 0\&b(k) = 0\&(n)_0 = (k)_0] \Rightarrow (n)_1 = (k)_1]\&(\forall n)(\exists k)[b(< n, k >) = 0]$

Άρα $h_1[\mathcal{N}]$ Borel.
Ορίζουμε τώρα $g_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$, τέτοια ώστε:

$$g_1(b) = \begin{cases} 0, \text{αν } \ b \notin h_1[\mathcal{N}] \\ a, \text{αν } \ b \in h_1[\mathcal{N}] \end{cases}$$

όπου $a(n) = \{$το μοναδικό m: $b(< n, m >) = 0\}$.
Τότε η g_1 θα είναι η αντίστροφη τη; h_1 και θα είναι Borel, άρα h_1 θα είναι ''καλή'' Borel απεικόνιση 1-1.
Έστω τώρα $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ συνεχής, 1-1 απεικόνιση, με X τέλειο πολωνικό χώρο.
Αφού το σύνολο Cantor είναι συμπαγής μετρικός χώρος και η π συνεχής, η εικόνα $\pi[\mathcal{C}]$ θα είναι συμπαγής. Τότε για $x \in \phi[\mathcal{C}] \Rightarrow$

$$\cap_n \cup_u [u = (t_0, \ldots, t_{n-1})]$$

για κάποια $t_0, \ldots, t_{n-1}$ και $x \in N_{\sigma(u)}$.
Ως αντίστροφη της π ορίζουμε την ρ ως εξής:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, \text{αν } \ x \notin \pi[\mathcal{C}] \\ a : \pi(a) = x, \text{αν } \ x \in [\mathcal{C}] \end{cases}$$

Αν $B = \{a : a(0) = k_0, \ldots, a(n) = k_n\}$ αποτελεί περιοχή στο Cantor, τότε:

$$\rho(x) \in B \Rightarrow \rho(x)(0) = k_0 \ldots \& \ldots \rho(x)(n) = k_n$$

Άρα για να δείξουμε ότι ρ Borel, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε n, η σχέση $P_n(x) \Leftrightarrow \rho(x)(n) = 0$, είναι Borel.
Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει αφού:

$$P_n(x) \Leftrightarrow x \notin \pi[\mathcal{C}] \bigcup \cup_u [u = (t_0, \ldots, t_{n-1})]$$

για κάποια $t_0, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1} = 0$ και $x \in N_{\sigma(u)}$

Τότε η σύνθεση $h = \pi \circ h_1$ είναι ''καλή'' Borel απεικόνιση από τον χώρο Baire στο X.

$\square$

Θεώρημα 3.25 (Schroder-Bernstein)**.** *Έστω A, B σύνολα τέτοια ώστε να υπάρχει 1-1 συνάρτηση που να απεικονίζει το A στο B, και αντίστοιχα 1-1 που να απεικονίζει το B στο A. Τότε A, B ισοπληθικά.*

Θεώρημα 3.26. *Κάθε τέλειος χώρος γινόμενο είναι Borel ισομορφικός με τον χώρο Baire $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Έστω $h : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ και $f : X \to \mathcal{N}$ 1-1 απεικονίσεις. Θα δείξουμε ότι αν h, f είναι "καλές" Borel 1-1 απεικονίσεις, τότε υπάρχει απεικόνιση $g : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ 1-1 και επί, τέτοια ώστε να είναι ισομορφισμός Borel.
Ορίζουμε επαγωγικά τις ακολουθίες από σύνολα $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \ldots$,$X_0$,$X_1$,$\ldots$ αντίστοιχα, μέσω των παρακάτω σχέσεων:

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \quad X_0 = X$$

$$\mathcal{N}_{n+1} = fh[\mathcal{N}_n] \quad X_{n+1} = hf[X_n]$$

Προφανώς από ορισμό, $\forall n \in \mathbb{N}$ θα ισχύει:

$$\mathcal{N}_n \supseteq f[X_n] \supseteq \mathcal{N}_{n+1}$$

$$X_n \supseteq h[\mathcal{N}_n] \supseteq X_{n+1}$$

Τότε έχουμε:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \supseteq f[X_0] \supseteq \mathcal{N}_1 \supseteq \ldots$$

$$X = X_0 \supseteq h[\mathcal{N}_0] \supseteq X_1 \supseteq \ldots$$

Θέτουμε επίσης $\mathcal{N}^* = \cap_n \mathcal{N}_n$ και $X^* = \cap_n X_n$ και παρατηρούμε ότι:

$$X^* = \cap_n X_n \supseteq \cap_n h[\mathcal{N}_n] \supseteq \cap_n X_{n+1} = X^*$$

και αφού η h 1-1:

$$h[\mathcal{N}^*] = h[\cap_n \mathcal{N}_n] = \cap_n h[\mathcal{N}_n] = X^*$$

Τότε η h θα είναι 1-1 και επί από το χώρο του Baire στο X.
Μπορούμε τώρα να γράψουμε το $\mathcal{N}$ και το X ως εξής:

$$\mathcal{N} = (\mathcal{N}_0 - f[X_0]) \cup (f[X_0] - \mathcal{N}_1)] \cup (\mathcal{N}_1 - f[X_1]) \cup \cdots \cup \mathcal{N}^*$$

$$X = (X_0 - h[\mathcal{N}_0]) \cup (h[\mathcal{N}_0] - X_1) \cup (X_1 - h[\mathcal{N}_1]) \cup \cdots \cup X^*$$

όπου τα σύνολα ανάμεσα στις ενώσεις είναι μεταξύ τους ξένα.
Έχουμε επίσης ότι η h είναι 1-1 από το $\mathcal{N}_n \setminus f[X_n]$ στο $h[\mathcal{N}_n] \setminus X_{n+1}$, εφόσον h 1-1 και $f[X_n] \subseteq \mathcal{N}_n$. Τότε:

$$h[\mathcal{N}_n \setminus f[X_n]] = h[\mathcal{N}_n] \setminus hf[X_n] = h[\mathcal{N}_n] \setminus X_{n+1}$$

Αντίστοιχα f 1-1 και επί από το $X_n \setminus h[\mathcal{N}_n]$ στο $f[X_n] \setminus \mathcal{N}_{n+1}$.
Τελικά θα υπάρχει απεικόνιση 1-1 και επί από τον χώρο Baire στον χώρο X:

$$g(a) = \begin{cases} h(a), \text{ αν } a \in \mathcal{N}^* \text{ ή } a \in \mathcal{N}_n \setminus f[X_n], \text{ για κάποιο } n \\ f^{-1}(a), \text{ αν } a \notin \mathcal{N}^* \text{ και } a \in f[X_n] \setminus \mathcal{N}_{n+1}, \text{ για κάποιο } n \end{cases}$$

Μένει να δειχτεί ότι g είναι Borel συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι οι ''καλές'' Borel 1-1 απεικονίσεις, στέλνουν σύνολα Borel σε Borel. Αφού $\mathcal{N}^*$, X^* και όλες οι διαφορές $\mathcal{N}_n \setminus f[X_n]$, $f[X_n] \setminus \mathcal{N}_{n+1}$ είναι Borel, προκύπτει ότι όλα τα σύνολα $\mathcal{N}_n, X_n$ είναι Borel. Άρα g Borel. □

4 κ-Suslin και Θεώρημα Τέλειων Συνόλων

4.1 Θεώρημα Cantor-Bendixson

Έστω σύνολο Α. Θα συμβολίζουμε με $card(A)$, τον πληθάριθμο του Α. Γνωρίζουμε ότι κάθε τέλειος πολωνικός χώρος $\mathcal{M}$, είναι ισοδύναμος με τον χώρο Baire.
Άρα $card(\mathcal{M})$ =$card(\mathcal{N})$ =$2^{\aleph_0}$.
Ένα σημειοσύνολο $P \subseteq \mathcal{M}$, ονομάζεται τέλειο αν είναι κλειστό και δεν έχει απομονωμένα σημεία, άρα αν $P \neq \emptyset$, το σύνολο P είναι τέλειος πολωνικός υπόχωρος του $\mathcal{M}$, με $card(P) = 2^{\aleph_0}$

Θεώρημα 4.1 (Cantor-Bendixson)**.** *Αν A κλειστό σημειοσύνολο, τότε μπορεί να γραφεί ως $A = P \cup S$, με P τέλειο, S αριθμήσιμο και $P \cap S = \emptyset$. Συγκεκριμένα το A μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως σύνθεση δύο συνόλων ξένων μεταξύ τους, το ένα τέλειο και το άλλο αριθμήσιμο.*

Ένα σημείο x θα ονομάζεται **σημείο συμπύκνωσης** για το A, αν κάθε περιοχή του x, τέμνει το A σε ένα μη αριθμήσιμο σύνολο.

Απόδειξη. Έστω

$$P = \{x : x \text{ σημείο συμπύκνωσης για το A}\},$$

$$S = A \setminus P$$

Αφου, από τον ορισμό τους τα σημεία συμπύκνωσης, είναι και οριακά σημεία, και αφού A κλειστό, έχουμε ότι $P \subseteq A$. Επίσης από υπόθεση ισχύει ότι $P \cap S = \emptyset$. Άρα $A = P \cup S$.
Μένει να δείξουμε ότι P τέλειο, S αριθμήσιμο, και ότι αν $A = P' \cup S'$, για κάποια $P',\ S'$, με $P' \cap S' = \emptyset$, θα ισχύει $P = P'$, $S = S'$. Μπορούμε να θεωρήσουμε, $\forall y \in S$, βασική περιοχή N^y, τέτοια ώστε η τομή $N^y \cap A$ να είναι αριθμήσιμο σύνολο. Εφόσον το πλήθος των βασικών περιοχών είναι αριθμήσιμο, θα υπάρχει αριθμήσιμη ακολουθία $N^0, N^1, \ldots$. τέτοια ώστε

$$S \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (N^i \cap A)$$

με κάθε $N^i \cap A$ αριθμήσιμο. Άρα S αριθμήσιμο σύνολο.
Για να δείξουμε ότι P κλειστό, έστω x οριακό σημείο για το P και N οποιαδήποτε περιοχή του x. Τότε υπάρχει $x' \in N \cap P$, άρα N είναι περιοχή και για το x' και

περιέχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων του A. Τότε $x \in P$, άρα P κλειστό.
Για να δείξουμε ότι P τέλειο, θεωρούμε $x \in P$. Τότε κάθε περιοχή του x περιέχει υπεραριθμήσιμα στοιχεία του A, από τα οποία μόνο αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων θα ανήκει στο S. Άρα το P περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, άρα μη κενό. Συνεπώς P τέλειο σύνολο.
Έστω τώρα $A = P' \cup S'$, με τα σύνολα P' και S' να πληρούν τις ιδιότητες του θεωρήματος. Έστω $x \in P'$ και N οποιαδήποτε περιοχή του x. Επιλέγουμε περιοχή $_1$ του x, με $\overline{N_1} \subseteq N$. Τότε $\overline{N_1 \cap P'}$ τέλειο υποσύνολο του $\overline{N_1} \cap P' \subseteq N \cap P'$. Αφού P' κλειστό και $N_1 \cap P \neq \emptyset$, θα ισχύει ότι $N \cap P'$ υπεραριθμήσιμο, άρα $x \in P$. Τότε $P' \subseteq P$.
Αντίστοιχα έστω $y \in S'$. Τότε υπάρχει περιοχή N του y, τέτοια ώστε $N \cap P' = \emptyset$, αφού P' κλειστό. Άρα $N \cap A = N \cap S'$, δηλαδή $N \cap A$ αριθμήσιμο. Συνεπώς $y \in S \Leftrightarrow S' \subseteq S$.
Από τις σχέσεις $P' \cap S' = \emptyset$, $P \cap S = \emptyset$, και τα παραπάνω. είναι επακόλουθο ότι $P = P', S = S'$. □

Γενικά καλούμε το σύνολο P τον **πυρήνα** (kernel) του συνόλου A, και το S σύνολο **διασπαρμένο μέρος** (scattered part) του A.

Πόρισμα 4.1.1. *Κάθε υπεραριθμήσιμο κλειστό σημειοσύνολο περιέχει μη κενό τέλειο υποσύνολο και άρα έχει πληθικότητα* $2^{\aleph_0}$.

4.2 κ-Suslin σύνολα

Έστω κ ένας άπειρος πληθάριθμος. Ονομάζουμε ένα σημειοσύνολο $P \subseteq X$ κ-**Suslin**, αν υπάρχει κλειστό σύνολο $C \subseteq X \times \kappa^{\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε:

$$P = proj_{\kappa^{\mathbb{N}}}(C), \text{ η προβολή του } C \text{ κατά μήκος του } \kappa^{\mathbb{N}}$$

Δηλαδή για $x \in P \iff$

$$(\exists f \in \kappa^{\mathbb{N}})(x, f) \in C$$

Εφοδιάζουμε το $\kappa^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο, παίρνοντας κ διακριτό, ενώ οι βασικές περιοχές καθορίζονται μέσω πεπερασμένων ακολουθιών του κ. Δηλαδή έχουμε ότι:

$$N(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \{f \in \kappa^{\mathbb{N}} : f(0) = \xi_0, f(1) = \xi_1, \ldots, f(n) = \xi_n\}$$

Τότε ο χώρος $\kappa^{\mathbb{N}}$ είναι μετρικός χώρος, τέλειος αλλά όχι διαχωρίσιμος για $\kappa > \aleph_0$. Το σύνολο των τελικά σταθερών ακολουθιών $f \in \kappa^{\mathbb{N}}$ είναι πυκνό και έχει

πληθάριθμο κ.
Από τον ορισμό τους, τα Σ^1_1 σημειοσύνολα είναι ακριβώς τα $\aleph_0$- Suslin σύνολα, ή πιο απλά Suslin σύνολα.

Ορισμός 4.2. *Ως κ-**Suslin σύστημα** ορίζουμε μία απεικόνιση:*

$$u \mapsto P_u$$

η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε πεπερασμένη ακολουθία $u = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ στοιχείων του κ, ένα υποσύνολο P_u ενός ορισμένου χώρου γινόμενο X.

Συμβολίζουμε την ένωση :

$$\mathcal{A}^{\kappa}_u P_u = \cup_f \cap_n P_{f \restriction n}$$

Ονομάζουμε **νόρμα** σε ένα σημειοσύνολο P οποιαδήποτε συνάρτηση ϕ , από το P στο σύνολο των διατακτικών αριθμών. Αν $\forall x \in P$, ισχύει $\phi(x) < \lambda$, η ϕ ονομάζεται λ-νόρμα.

Ορισμός 4.3. *Ως **ημικλίμακα** στο P ορίζουμε μία ακολοθία $\overline{\phi} = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, από νόρμες στο P, τέτοα ώστε να ισχύει για $x_0, x_1, \ldots$ στο P , $lim_{i \to \infty} x_i = x$, και η ακολουθία των διατακτικών*

$$\phi_n(x_0), \phi_n(x_1), \ldots , \forall n \in \mathbb{N}$$

είναι τελικά σταθερή, να ισχύει $x \in P$.

Θα καλούμε την ακολουθία $\overline{\phi} = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, λ-ημικλίμακα, αν κάθε νόρμα ϕ_n είναι μία λ-νόρμα.

Ορισμός 4.4. *Ένα κ-Suslin σύστημα ονομάζεται **κανονικό** αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Κάθε P_u είναι η κλειστότητα $\overline{N_s}$ κάποιας βασικής περιοχής. Μπορεί να ισχύει $\overline{N_s} = \emptyset$.*

2. *Αν η ακολουθία u είναι αρχικό τμήμα μίας ακολουθίας v, θα ισχύει $P_v \subseteq P_u$.*

3. *Έστω $u = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ ακολουθία μήκους n και $P_u = \overline{N_s}$. Τότε $radius(\overline{N_s}) \leq 2^{-n+1}$.*

Θεώρημα 4.5. *Για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ και κάθε σημειοσύνολο $P \subseteq X$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

1. *Το P είναι κ-Suslin.*

2. *Το P επιδέχεται κ-ημικλίμακα.*

3. *Ισχύει $P = \mathcal{A}_u^\kappa P_u$, με το κ-Suslin σύστημα $u \mapsto P_u$, να είναι κανονικό.*

4. *Ισχύει $P = \mathcal{A}_u^\kappa P_u$, με ένα κ-Suslin σύστημα $u \mapsto P_u$, όπου κάθε P_u κλειστό.*

Απόδειξη. $1. \Rightarrow 2.$
Για κάθε $x \in P$, επιλέγουμε $f_x \in \kappa^{\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $(x, f_x) \in C$ και θέτουμε $\phi_n(x) = f_x(n)$. Για να αποδείξουμε οτι η ακολουθία $\overline{\phi} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κ-ημικλίμακα, υποθετουμε ότι υπάρχουν $x_0, x_1, \dots$ στο P, τέτοια ώστε $lim_{i\to\inf} x_i = x$ και $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in I$, να ισχύει:

$$\phi_n(x_i) = f_{x_i}(n) = \xi_n$$

Έστω $f(n) = \xi_n$. Προφανώς $lim_{i\to\infty})x_i, f_i) = (x, f)$, και αφού $(x_i, f_{x_i}) \in C, \forall i \in I$, συνεπάγεται ότι, για C κλειστό, $(x, f) \in C$. Άρα $x \in P$.
$2. \Rightarrow 3.$
Έστω $\overline{\phi} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία κ-ημικλίμακα στο P. Επιλέγουμε απεικόνιση 1-1 και επί:

$$\pi : \kappa \to \mathbb{N} \times \kappa$$

τέτοια ώστε $\pi(\xi) = (\pi_1(\xi), \pi_2(\xi))$. Θεωρούμε με $N(s) = N_s$ την s-ιοστή βασική περιοχή του x, στην οποία βρίσκεται το P.
Ορίζουμε τώρα:

$$\begin{gathered}
P(\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) = \{x : \overline{N}(\pi_1(\xi_0)) \supseteq \overline{N}(\pi_1(\xi_1)) \supseteq \cdots \supseteq \overline{N}(\pi_1(\xi_{n-1})) \\
\&\ radius(N(\pi_1(\xi_i))) \le 2^{-i}, \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \\
\&\ \exists y : y \in N(\pi_1(\xi_{n-1})), y \in P \\
\&\ \phi_0(y) = \pi_2(\xi_0), \phi_1(y) = \pi_2(\xi_1), \dots, \phi_{n-1}(y) = \pi_2(\xi_{n-1}) \\
\& x \in \overline{N}(\pi_1(\xi_{n-1}))\}
\end{gathered}$$

Τότε $P(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ θα ισούται είτε με το κενό, είτε με την κλειστότητα της βασικής περιοχής $\overline{N}(\pi_1(\xi_{n-1}))$, και το σύστημα $u \mapsto P_u$, θα είναι κανονικό εξ'ορισμού.
Αρκεί τώρα να δειχτεί ότι $P = \mathcal{A}^\kappa_u P_u$.
Έστω $x \in P$. Επιλέγουμε τις κλειστότητες των περιοχών $\overline{N}(s_0) \supseteq \overline{N}(s_1) \supseteq \ldots$ του x, τέτοιες ώστε $radius(N(s_i))) \leq 2^{-i}$, και $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, θεωρούμε ξ_i διατακτικούς μικρότερους του κ, ώστε :

$$\pi_1(\xi_i) = s_i, \ \pi_2(\xi_i) = \phi_i(x)$$

Τότε $x \in P(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $x \in \mathcal{A}^\kappa_u P_u$.
Αντίστροφα έστω $x \in \mathcal{A}^\kappa_u P_u$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$, διατακτικών ώστε $x \in P(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}$.
Τότε από τον ορισμό αυτού του συνόλου $\overline{N}(\pi_1(\xi_0)) \supseteq \overline{N}(\pi_1(\xi_1)) \supseteq \cdots \supseteq \overline{N}(\pi_1(\xi_{n-1})), \forall n \in \mathbb{N}$ και $radius(N(\pi_1(\xi_{n-1})) \to 0$, για $n \to \infty, \forall n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\exists y_n \in N(\pi_1(\xi_{n-1}))$, τέτοιο ώστε $\phi_0(y_n), \ldots, \phi_{n-1}(y_n) = \xi_{n-1}$. Από τον ορισμο του $P(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$, και τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι $lim_{n\to\infty} y_n = x$, και για $n > i$, $\phi_i(y_n) = \xi_i$. Από τις ιδιότητες της ημικλίμακας, $x \in P$.
3. $\Rightarrow$ 4.
Προφανές από τον ορισμό του κανονικού συστήματος.
4. $\Rightarrow$ 1.
Έστω $P = \mathcal{A}^\kappa_u P_u$, με κάθε P_u κλειστό. Θεωρούμε:

$$C(f, x) \Leftrightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x : x \in P_{f \restriction n}]$$

Τότε το σύνολο C είναι κλειστό και για:

$$\begin{aligned} x \in proj_{\kappa^{\mathbb{N}}}(C) & \\ & \Longleftrightarrow (\exists f) C(f, x) \\ & \Longleftrightarrow (\exists f)(\forall n)[x \in f \restriction n] \\ & \Longleftrightarrow x \in P \end{aligned}$$

$\square$

Θεωρούμε τώρα $S(\kappa) = S_\kappa$, την σημειοκλάση όλων των κ-Suslin συνόλων. Προφανώς ισχύει $S(\aleph_0) = \Sigma^1_1$.

Θεώρημα 4.6. *Για κάθε πληθάριθμο κ με $\kappa \geq \aleph_0$, η σημειοκλάση S_κ, είναι κλειστή για την αντικατάσταση Borel, τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists^Y$, με Y οποιοδήποτε χώρο γινόμενο, την αριθμήσιμη τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$, την ένωση $\bigcup_\kappa$, και την διαδικασία $\mathcal{A}^\kappa$. Επιπλέον για $\lambda \leq \kappa$, ισχύει $S_\lambda \subseteq S_\kappa$. Ειδικά κάθε Σ^1_1 σύνολο είναι κ-Suslin.*

Απόδειξη. Η κλειστότητα του S_κ υπό την συνεχή αντικατάσταση είναι προφανής από τον ορισμό των κ-Suslin συνόλων.Δεδομένου ότι $P \in S_\kappa$ γνωρίζουμε από ορισμό ότι:

$$x \in P \Leftrightarrow (\exists f \in \kappa^{\mathbb{N}})(x, f) \in C$$

με C κλειστό υποσύνολο του $X \times \kappa^{\mathbb{N}}$, όπου X χώρος γινόμενο. Άρα για g συνεχή απεικόνιση θα ισχύει $g^{-1}[P] \in S_\kappa$.
Για να δείξουμε την κλειστότητα για τον ποσοδείκτη $\exists^Y$, όπου Y χώρος γινόμενο θα την δείξουμε πρώτα για τον ποσοδείκτη $\exists^\mathcal{N}$. Έστω $C \subseteq X \times \mathcal{N} \times \kappa^{\mathbb{N}}$, κλειστό. Τότε:

$$(\exists a)P(x, a) \Leftrightarrow (\exists a)(\exists f)C(x, a, f)$$

Έστω τώρα απεικόνιση 1-1 και επί $\pi : \kappa \to \mathbb{N} \times \kappa$, τέτοια ώστε:

$$\pi(\xi) = (\pi_1(\xi), \pi_2(\xi))$$

όπως θεωρήθηκε στην προηγούμενη απόδειξη. Τότε η απεικόνιση $\rho(g) = (g_1, g_2)$ με :

$$g_1(n) = \pi_1(g(n))$$
$$g_2(n) = \pi_2(g(n))$$

θα είναι ισομορφισμός από το σύνολο $\kappa^{\mathbb{N}}$ στο $(\mathbb{N} \times \kappa)^{\mathbb{N}} = \mathcal{N} \times \kappa^{\mathbb{N}}$.
Άρα αν ορίσουμε

$$C^*(x, g) \Leftrightarrow C(x, g_1, g_2)$$

το σύνολο C^* θα είναι κλειστό στο $X \times \kappa^{\mathbb{N}}$ και θα ισχύει:

$$(\exists a)P(x, a) \Leftrightarrow (\exists g)C^*(x, g)$$

Άρα το σύνολο $\exists^\mathcal{N} P$ είναι κ-Suslin.
Έστω τώρα Y χώρος γινόμενο. Η κλειστότητα του S_κ, υπό τον ποσοδείκτη $\exists^Y$ προκύπτει άμεσα, αφού S_k κλειστό για τον ποσοδείκτη $\exists^\mathcal{N}$ και κάθε χώρος γινόμενο Y, είναι συνεχής εικόνα του χώρου Baire $\mathcal{N}$.
Αν $P_\xi = proj_{\kappa^{\mathbb{N}}}(C)_\xi$ για $\xi < \kappa$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι :

$$C(f, x) \Leftrightarrow C_{f(0)}(x, f^*)$$

με $f^*(n) = f(n+1)$
Τότε C κλειστό και ισχύει:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\xi \to \kappa} P_\xi(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \bigcup_{\xi<\kappa} (\exists f) C_\xi(x, f) \\
&\Longleftrightarrow \quad \bigcup_{f \in \kappa^{\mathbb{N}}} C_{f(0)}(x, f^*) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\exists f) C(f, x)
\end{aligned}$$

Άρα το σύνολο $\bigcup_{\xi \to \kappa} P_\xi$ είναι κ-Suslin.
Αντίστοιχα για την αριθμήσιμη τομή έστω $P_m = proj_{\kappa^{\mathbb{N}}}(C)_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, θεωρούμε:

$$C(f, x) \Leftrightarrow \cap_{m \in \mathbb{N}} C_m(x, f_m)$$

με $f_m(n) = f(< m, n >)$. Τότε C είναι κλειστό σύνολο, ως αριθμήσιμη τομή κλειστών συνόλων. Τότε:

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{m \in \mathbb{N}} P_m(x) \\
&\qquad \Longleftrightarrow \quad \bigcap_{m \in \mathbb{N}} [(\exists f) C_m(x, f)] \\
&\qquad \Longleftrightarrow \quad (\exists f) \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m(x, f_m) \\
&\qquad \Longleftrightarrow \quad C(f, x)
\end{aligned}$$

Άρα $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} P_m(x)$ είναι κ-Suslin.
Για να δείξουμε την κλειστότητα για την διαδικασία $\mathcal{A}^\kappa$ θεωρούμε ένα κ-Suslin σύστημα $u \mapsto P_u$, τέτοιο ώστε $\forall u \in \kappa$:

$$P_u(x) \Leftrightarrow (\exists g) C_u(x, g)$$

με κάθε C_u κλειστό. Τότε για :

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{A}^\kappa_u P_u & \\
& \Leftrightarrow \bigcup_{f\in\kappa^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_{f\upharpoonright n(x)} \\
& \Leftrightarrow \bigcup_{f\in\kappa^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [(\exists g) C_{f\upharpoonright n}(x,g)] \\
& \Leftrightarrow \bigcup_{f\in\kappa^{\mathbb{N}}} [(\exists g) \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{f\upharpoonright n}(x,g_n)]
\end{aligned}
$$

με $g_n(m) = g(< n, m >)$.
Τότε το σύνολο $C(x,f,g) \Leftrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{f\upharpoonright n}(x,g_n)$ είναι κλειστό στο $X \times \kappa^{\mathbb{N}} \times \kappa^{\mathbb{N}}$ και για:

$$x \in \mathcal{A}^\kappa_u P_u \Leftrightarrow (\exists f)(\exists g) C(x,f,g)$$

Άρα $\mathcal{A}^\kappa_u P_u$ είναι κ-Suslin.
Για το τελευταίο σκέλος του θεωρήματος έστω ότι θεωρούμε $\lambda \leq \kappa$. Τότε κάθε λ- Suslin επιδέχεται λ-ημικλίμακα, και από τον ορισμό της ημικλίμακας κάθε λ-Suslin είναι κ-Suslin σύνολο. Συνεπώς $S_\lambda \subseteq S_\kappa$.
Για να αποδείξουμε την κλειστότητα για την αντικατάσταση Borel, θεωρούμε Borel συνάρτηση $f : X \to Y$ και $P = \mathcal{A}^\kappa_u P_u$, με κάθε P_u κλειστό. Τότε:

$$f^{-1}[P] = \mathcal{A}^\kappa_u f^{-1}[P_u]$$

Έχουμε ότι κάθε αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[P_u]$ είναι Borel, άρα κ-Suslin. Εφόσον η διαδικασία $\mathcal{A}^\kappa$ διατηρεί τα κ-Suslin σύνολα, έχουμε ότι $f^{-1}[P]$ είναι κ-Suslin. $\square$

4.3 Θεώρημα Τέλειων Συνόλων

Για το συγκεκριμένο κεφάλαιο θα χρειαστεί να μελετήσουμε καποιες βασικές ιδιότητες των δέντρων, και πιο συγκεκριμένα των δέντρων ζευγών.
'Εστω X, χώρος γινόμενο με $X = \mathbb{N} \times \kappa$, με κ κάποιο άπειρο πληθάριθμο.
Έστω T δέντρο στον χώρο X. Τότε το σώμα του δέντρου προκύπτει ως υποσύνολο του χώρου $\mathcal{N} \times \kappa^{\mathbb{N}}$, εφόσον υπάρχει προφανής απεικόνιση 1-1 και επί από τον χώρο $(\mathbb{N} \times \kappa)^{\mathbb{N}}$. Τότε:

$$[T] = \{(a, f) : ((a(0), f(0)), \ldots, (a(n-1), f(n-1))) \in T, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Για απλοποίηση του συμβολισμού θεωρούμε ότι αν έχουμε μία δυαδική ακολουθία στον χώρο $\mathbb{N} \times \kappa$, θα γράφουμε:

$$((\tau(0), \xi(0)), \ldots, (\tau(n-1), \xi(n-1))) = (\tau(0), \xi(0), \ldots, \tau(n-1), \xi(n-1))$$

Θεώρημα 4.7. *Για κάθε μη κενό σύνολο X, εφοδιάζουμε τον χώρο $X^{\mathbb{N}}$, με την τοπολογία γινόμενο και παίρνουμε το X διακριτό. Τότε ένα σύνολο $C \subseteq X^{\mathbb{N}}$ θα είναι κλειστό, αν και μόνο αν, υπάρχει δέντρο T στο X τέτοιο ώστε, το C να είναιι το σώμα του δέντρου T. Δηλαδή αν ισχύει $C = [T]$.*
Αντίστοιχα για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geq \aleph_0$, ένα σύνολο $C \subseteq \mathcal{N} \times \kappa^{\mathbb{N}}$ είναι κλειστό, αν και μόνο αν, υπάρχει δέντρο ζευγών στο $\mathbb{N} \times \kappa$, τέτοιο ώστε:

$$C = [T] = \{(a, f) : (a(0), f(0), \ldots, a(n-1), f(n-1)) \in T, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Άρα ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{N}$ είναι κ-Suslin, αν και μόνο αν, υπάρχει δέντρο T στο $\mathbb{N} \times \kappa$ τέτοιο ώστε:

$$P = proj_{\kappa^{\mathbb{N}}}([T]) = \{a : (\exists f)(\forall n)(a(0), f(0), \ldots, a(n-1), f(n-1)) \in T\}$$

Απόδειξη. Έστω $[T]$ δέντρο στο X και $f \notin [T]$. Τότε $\exists n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$(f(0), \ldots, f(n-1)) \notin T$$

Τότε η βασική περιοχή $\{g : g(0) = f(0), \ldots, g(n-1) = f(n-1)\}$ του $X^{\mathbb{N}}$ θα είναι εκτός του σώματος του T. Τότε το συμπλήρωμα του $[T]$ θα είναι ανοικτό, άρα $[T]$ κλειστό.
Αντίστροφα, έστω $C \subseteq X^{\mathbb{N}}$ κλειστό, θεωρούμε το δέντρο:

$$T = \{(f(0), \ldots, f(n-1)) : f \in C\}$$

Τότε $C \subseteq [T]$ και το C πυκνό στο $[T]$, αφού $[T]$ διαχωρίσιμος χώρος, εφόσον είναι αριθμήσιμος, ως υποσύνολο διακριτού χώρου. Άρα για $\overline{C} = [T] \Leftrightarrow$, αφού C κλειστό.
Η απόδειξη της συνέχειας του θεωρήματος προκύπτει με παρόμοιο τρόπο και για αυτό παραλείπεται. $\square$

Πρόταση 4.8. *Ονομάζουμε δύο ακολουθίες u, v συμβατές, αν έχουν κοινή επέκταση, δηλαδή αν υπάρχει τρίτη ακολουθία ω, ώστε u, v να είναι αρχικά τμήματα της ακολουθίας ω. Δηλαδή είτε θα ισχύει $u = v$, είτε η μία είναι αρχικό τμήμα της άλλης.*

Ορισμός 4.9. *Για κάθε δέντρο T στο X και κάθε πεπερασμένη ακολουθία u στο X, ορίζουμε:*

$$T_u = \{v \in T : v \text{ συμβατή με τη } u\}$$

Παρατηρούμε ότι T_u είναι επίσης δέντρο και αν $u = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ ακολουθία μήκους n, τότε:

$$\begin{aligned} [T_u] &= [T] \cap \{f \in X^{\mathbb{N}} : f \restriction n = u\} \\ &= \bigcup_{x \in X} [T_{u \frown (x)}], \ \ \forall x \in X \end{aligned}$$

όπου $u \frown (x) = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \frown (x) = (x_0, \ldots, x_{n-1}, x)$.
Έστω $u = (t_0, \xi_0, \ldots, t_{n-1}, \xi_{n-1})$ πεπερασμένη ακολουθία του χώρου $X \times \kappa$ και το σώμα του T_u:

$$[T_u] = \bigcup_{t,\xi} [T_{u \frown (t,\xi)}]$$

Τότε ορίζεται η προβολή του $[T_u]$ κατά μήκος του $\kappa^{\mathbb{N}}$:

$$proj_{\kappa^{\mathbb{N}}}([T_u]) = \bigcup_{t,\xi} proj_{\kappa^{\mathbb{N}}}([T_{u \frown (t,\xi)}])$$

Ορισμός 4.10. *Έστω $K \subseteq \mathcal{N}$. Το K είναι συμπαγές σημειοσύνολο αν $K = [T]$, όπου T δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης.Άρα κάθε συμπαγές είναι κλειστό και $\mathcal{C}$ συμπαγές.*

Θεώρημα 4.11 (Suslin-Mansfield)**.** *Έστω κ ένας άπειρος πληθάριθμος και υποθέτουμε ότι P ένα κ-Suslin σημειοσύνολο, με περισσότερα από κ στοιχεία. Τότε το P περιέχει ένα μη κενό, τέλειο υποσύνολο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το αποτέλεσμα για κάθε υποσύνολο του χώρου Baire $\mathcal{N}$ είναι γνωστό, και έστω P, κ-Suslin υποσύνολο ενός τέλειου χώρου γινόμενο, με περισσότερα από κ στοιχεία. Θεωρούμε συνεχή απεικόνιση επί του X από τον χώρο $\mathcal{N}$:

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$$

η ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζεται από προηγούμενο θεώρημα.
Θεωρούμε επίσης ότι υπάρχει Π_1^0 σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$, τέτοιο ώστε η π 1-1 στο A και $\pi[A] = X$.
Θέτουμε $P' = \pi^{-1}[P] \cap A$. Τότε P' είναι κ-Suslin υποσύνολο του $\mathcal{N}$, με περισσότερα από κ στοιχεία. Άρα περιέχει τέλειο υποσύνολο Q, το οποίο θα πρέπει να περιέχει μη κενό τέλειο συμπαγές σύνολο Q_0. Άρα το $\pi[Q_0]$ θα είναι τέλειο υποσύνολο του P, αφού συνεχής 1-1 εικόνα τέλειου συμπαγούς συνόλου, έιναι τέλειο σύνολο.
Για να αποδείξουμε την αρχική υπόθεση, ότι δηλαδή το θεώρημα ισχύει για υποσύνολα του $\mathcal{N}$, έστω $P \subseteq \mathcal{N}$ κ-Suslin, και επιλέγουμε δέντρο T στο χώρο $\mathbb{N} \times \kappa$, τέτοιο ώστε:

$$P = proj_{\kappa^{\mathbb{N}}}([T]) = \{a : (\exists f)(a, f) \in [T]\}$$

Ορίζουμε επαγωγικά τα σύνολα $T^\xi \subseteq T$ τέτοια ώστε:

$$T^0 = T$$

$$T^{\xi+1} = \{u \in T^\xi : proj_{\kappa^{\mathbb{N}}}([T_u^\xi]) \text{ να περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία}\}$$

$$T^\lambda = \bigcap_{\xi<\lambda} T^\xi, \text{ όπου λ οριακός διατακτικός}$$

Είναι άμεσο ότι κάθε T^ξ αποτελεί δέντρο και για $\eta < \xi \Leftrightarrow T^\eta \supseteq T^\xi$.
Θα υπάρχουν το πολύ κ κόμβοι στο T, άρα θα πρέπει να υπάρχει διατακτικός λ, με πληθικότητα κ ($\lambda < \kappa^+$), τέτοιος ώστε:

$$T^{\lambda+1} = T^\lambda$$

Επιλέγουμε το ελάχιστο τέτοιο λ και θέτουμε $S = T^\lambda$
Για την ολοκλήρωση της απόδειξης παραθέτουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.12. $S \neq \emptyset$

Απόδειξη. Έστω $S = \emptyset$. Τότε, $\forall a \in P = proj_{\kappa^{\mathbb{N}}}([T])$, επιλέγουμε $f \in \kappa^{\mathbb{N}}$, τέτοιο ώστε $(a, f) \in [T]$. Τότε θα υπάρχει $\xi < \lambda$, τέτοιο ώστε:

$$(a, f) \in [T^\xi] \setminus [T^{\xi+1}]$$

αφού $(a, f) \notin [T^\lambda]$, και για όριο ζ:

$$(a, f) \in [T^\eta], \forall \eta < \zeta \Leftrightarrow (a, f) \in [T^\zeta]$$

Τότε θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$u = (a(0), f(0), \ldots, a(n-1), f(n-1)) \notin T^{\xi+1}$$

Από ορισμό, το σύνολο $proj_{\kappa^\mathbb{N}}([T^\xi_u])$ θα περιέχει το πολύ ένα στοιχείο.
Τελικά έχουμε δείξει ότι:

$$P \subseteq \bigcup \{proj_{\kappa^\mathbb{N}}([T^\xi_u]) : \xi \leq \lambda, u \in T^\xi \setminus T^{\xi+1}\}$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η ένωση περιέχει το πολύ κ στοιχεία, ενώ έχουμε υποθέσει ότι το P έχει πληθικότητα μεγαλύτερη του κ. $\square$

Έστω τώρα ακολουθίες $u = (t_0, \xi_0, \ldots, t_{n-1}, \xi_{n-1})$ και
$v = (s_0, \zeta_0, \ldots, s_{n-1}, \zeta_{n-1})$. Οι u, v καλούνται ασύμβατες στην πρώτη συντεταγμένη, αν $t_i \neq s_i$ για κάποιο $i < n,\ i < m$. Είναι άμεσο ότι κάθε $u \in S$ έχει προεκτάσεις $u',\ u''$ οι οποίες είναι ασύμβατες στην πρώτη συντεταγμένη. Διαφορετικά $proj_{\kappa^\mathbb{N}}([S_u])$ θα περιέχει το πολύ ένα στοιχείο και $u \notin T^{\lambda+1} = T^\lambda = S$.
Έστω τώρα, $\forall u \in S$, θεωρούμε $l(u),\ r(u)$ προεκτάσεις του u στο S, ασύμβατες στην πρώτη συντεταγμένη, και $\forall f \in 2^\mathbb{N}$ ορίζουμε την ακολουθία $u^f_0, u^f_1, \ldots$ από κόμβους στο S, επαγωγικά ως εξής:

$$u^f_0 = \emptyset$$

$$u^f_{n+1} = \begin{cases} l(u^f_n), \text{ αν } f(n) = 0 \\ r(u^f_n), \text{ αν } f(n) = 1 \end{cases}$$

Έστω J το σύνολο όλων των αρχικών τμημάτων όλων των ακολουθιών $u^f_n,\ f \in 2^\mathbb{N}$. Τότε J θα είναι δέντρο με $J \subseteq S$ και κάθε δύο διαφορετικά άπειρα κλαδιά στο J, θα είναι ασύμβατα στην πρώτη συντεταγμένη. Το σώμα $[J]$ θα είναι τέλειο και συμπαγές σύνολο στο $\mathcal{N} \times \kappa^\mathbb{N}$ και αφού η προβολή $proj_{\kappa^\mathbb{N}}$ είναι συνεχής και 1-1 στο J, το $proj_{\kappa^\mathbb{N}}([J])$ είναι τέλειο σύνολο, που αποτελεί και το ζητούμενο σύνολο της απόδειξης. $\square$

Αναφορές

[1] Moschovakis Y.N. (2009), *”Descriptive Set Theory”*, American Mathematical Society.

[2] Kechris A.S. (1995), *”Classical Descriptive Set Theory”*, Springer-Verlang.