Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Διπλωματικη Εργασια

Τομεας Μαθηματικων

Σύγκλιση του Διωνυμικού Υποδείγματος στο υπόδειγμα *Black* &*Scholes*

Φοιτητής:
Σωτήρης Ζαμπελης

Επιβλέπων:
καθ.Μιχάλης Λουλακης

10 Νοεμβρίου 2015

Ευχαριστιες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέπων καθηγητή μου Μιχάλη Λουλάκη για την βοήθεια και καθοδήγηση του κατα την διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Οι γνώσεις που αποκόμισα απο αυτόν την περίοδο αυτήν ξεπεράσαν τις προσδοκείες μου και με βοήθησαν να αποφασίσω την κατεύθυνση μου μετά την σχολή. Επίσης θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την εμπιστοσύνη του την υπομονή του και τον χρόνο που μου αφιέρωσε.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Δ. Φουσκάκη και Β.Παπανικολάου για την παρουσία τους στην τριμελή επιτροπή και την βοήθεια τους κατα την διάρκεια της φοίτησης μου στην ΣΕΜΦΕ.Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Ι.Σπηλιώτη, Ι.Σαραντόπουλο, Σ.Αργυρό, Δ Τζανετή για το ενδιαφέρον που μου προκάλεσαν τα μαθηματά τους καθώς και όλους τους καθηγητές του μαθηματικού τμήματος της ΣΕΜΦΕ, αφού φεύγω απο αυτήν με ιδιαίτερα καλές αναμνήσεις απο το διδακτικό προσωπικό.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον πατέρα μου για την υπομονή και την στήριξη του όλα αυτά τα χρόνια αλλα καί την μητέρα μου και τα αδέλφια μου. Τέλος θα ήθελα να αφιερώσω την διπλωματική μου στα ανίψια μου και στο προσωπικό μου ήρωα $RandyMarsh$.

"Prediction is really difficult, especially about the future."
Niels Bohr

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 0

Εισαγωγή

Η χρήση μαθηματικών αντιλήψεων και μαθηματικής γλώσσας και λογικής για την αναπαράσταση των φαινομένων γύρω μας είναι μια πρακτική που συντροφεύει την ανθρωπότητα για πολλούς αιώνες. Με την τεράστια ανάπτυξη της τεχνολογίας και των υπολογιστικών μεθόδων η θεμελίωση μαθηματικών υποδειγμάτων για κάθε μορφής διαδικασία έγινε τόσο διαδεδομένη που πλέον αποτελεί χαρακτηριστικό της εποχής μας.

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την συσχέτιση δύο μοντέλων που είναι ιδιαίτερα σημαντικά για τον κλαδο τους, την χρηματοοικονομία η οποία είναι απο αυτούς τους κλάδους που ευνοήθηκαν μέγιστα απο τα μαθηματικά. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με την οριακή συμπεριφορά του διακριτού υποδείγματος που είναι γνωστο ώς το διωνυμικό υπόδειγμα, το οποίο εφευρέθηκε απο τους $Cox, Ross, Rubinstein$ το 1979 και θα δείξουμε ότι όριο αυτό με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων συμπίπτει στο διάσημο συνεχές υπόδειγμα που προτείνουν οι $Black, Scholes$ και $Metron$. Και τα δύο αυτά μοντέλα αποτελούν μέγιστης σημασίας εργαλείο στην προσπάθεια αποτίμησης παραγώγων.
Στην προσπάθεια να πραγματοποιήσουμε την απόδειξη, θα ασχοληθούμε με αντιλήψεις και θεωρήσεις της Μετροθεώρητικής Θεωρίας Πιθανοτήτων και θα αναλύσουμε στην πορεία έννοιες όπως την σφιχτότητα, την ασθενή σύγκλιση, το μέτρο $Weiner$ και άλλα.
Σε αυτήν την διπλωματική περιέχονται πολλές διαφορετικές μεταξύ τους πληροφορίες. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά αφού μάζι με το διωνυμικό μοντέλο αναλύονται έννοιες όπως τα μέτρα άνευ κινδύνου, η αρχή της μη επιτηδειότητας αλλα και η αστάθεια και η αναμενόμενη απόδοση ενος προϊόντος σε κίνδυνο. Επίσης στην διπλωματική αυτήν περιέχονται διάφορες τεχνικές για την παρατήρηση της κατανομής του ορίου οικογενειών τυχαίων μεταβλητών αλλα και διάφορα χαρακτηριστικά μέτρων πιθανότητας που ορίζονται στον χώρο C. Τέλος υπάρχουν διαφορες εφαρμογές για τον τρόπο που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την σύγκλιση των δύο μοντέλων για να τιμολογήσουμε παράγωγα.

Κεφάλαιο 1

Αποτίμηση Παραγώγων-Το διωνυμικό υπόδειγμα

1.1 Εισαγωγικά στοιχεία Μαθηματικής Χρηματοοικονομικής Θεωρίας

1.1.1 Εισαγωγή,Ιστορική αναδρομή

Στα χρηματοοικονομικά ένα παράγωγο είναι ένα συμβόλαιο που καθοριζει μία συμφωνία που πρόκειται να συμβεί στο μέλλον και η αξία της οποίας εξαρτάται απο την τιμή κάποιου άλλου πρωτογενούς προϊόντος. Ένα βασικό είδος παραγώγου ειναι το δικαίωμα προαίρεσης το οποίο δινει στον αγοραστή (ιδιοκτήτη) το δικαίωμα, αλλα όχι την υποχρεώση, να πουλήσει ή να αγοράσει ενα περιουσιακό του στοιχείο ή μέσο σε μία καθορισμένη τιμή ($StrikePrice$) πριν ή την μέρα μιας συγκεκριμένης ημερομηνίας.Ο πωλητής έχει την αναλογούσα υποχρέωση να ολοκληρώσει την συναλλαγή προχωρώντας σε αγορά η πώληση αντίστοιχα σε περίπτωση που ο αγοραστής αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμα του. Ένα τέτοιο παράγωγο που δίνει στον αγοραστή του το δικαίωμα να πουλήσει ενα στοιχείο λέγεται put ενώ αντίστοιχα να αγοράσει λέγεται $call$.

Η ιστορία των παραγώγων τέτοιου τύπου ξεκίνησε στην Ολλανδία τον 17 αιώνα με το εμπόριο τουλίπας, το οποίο ήταν ακμάζων λόγω της κοινωνικής σημασίας που είχαν οι τουλίπες ώς σύμβολο αριστοκρατείας. Εκεί χρησιμοποιήθηκαν αφενώς απο τους χρονδρέμπορους ως αντιστάθμιση του κινδύνου μιας κακής σοδειάς και αφετέρου απο τους καλλιεργητές για να προστατέψουν τα κέρδη τούς. Η οικονομική κρίση όμως του 1638 σε συνδυασμό με την έλλειψη επίβλεψης και νομικής κάλυψης των διαδικασιών έφερε την υποτίμηση των συμβολαίων από τους πωλητές οι οποίοι δεν προχωρούσαν σε εκπλήρωση των ανταλλαγών δινόντας έτσι ένα πρώτο στίγμα στην διαδικασία ανταλλαγής παραγώγων. Στις αρχές του 1800 όμως η ανταλλαγή παραγώγων ξανάρχισε στην Αμερική όπου οργανώθηκε και εξελίχθηκε στην σημερινή του μορφή οπου τεράστιοι αριθμοί παραγώγων ανταλλάσσονται καθημερινώς.

1.1.2 Είδη παραγώγων

Ας παραθέσουμε μερικά είδη παραγώγων που θα μας φανούν χρήσιμα.

Ένα **προθεσμιακό συμβόλαιο** (*forward contract*) με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή παράδοσης K είναι μία συμφωνία για την αγορά ενος πρωτογενούς προϊόντος στο χρόνο T έναντι ενος τιμήματος K.O αγοραστής θα λέμε οτι έχει θετική θέση (*long position*) και ο πωλητής αρνητική θέση (*short position*). Η αξία της συμφωνίας στην ωρίμανση εξαρτάται απο την αξία S_T που θα έχει τότε το πρωτογενές προϊόν. Η απόδοση του προθεσμιακού συμβολαίου στην ωρίμανση για τον κάτοχο της θετικής θέσης ειναι $S_T - K$ και μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

Ένα **ευρωπαϊκό συμβόλαιο αγοράς** (*european call option*) με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K είναι το δικαίωμα προαίρεσης, συγκεκριμένα αγοράς, ειδικευμένο για συμφωνίες των οποίων η εκπλήρωση είναι προσυμφωνημένο να συμβεί ακριβώς στον χώρο ωρίμανσης T , δεδομένου οτι ο αγοραστής ενδιαφέρεται να την εκπληρώσει. Σε μία τέτοια περίπτωση στον χρόνο ωρίμανσης T ο αγοραστής θα παραλάβει απο τον αντισυμβαλλόμενο το πρωτογενές προϊόν έναντι τιμήματος K.O λογικός επενδυτής με θετική θέση θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς μόνο οταν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση (S_T) είναι μεγαλύτερη του K. Επομένως η απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στην ωρίμανση για τον κάτοχο του είναι $(S_T - K)^+ = max\{S_T - K, 0\}$ και άρα είναι πάντα μή αρνητική.

Ένα **αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς**(*american call option*) διαφέρει απο το αντίστοιχο ευρωπαϊκό στο ότι μπορει να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ωρίμανση του.

Ένα **ευρωπαϊκό συμβόλαιο πώλησης** (*european put option*) με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K δίνει στον κάτοχο του (θετική θέση) το δικαίωμα να πουλήσει στον αντισυμβαλλόμενο (αρνητική θέση) το πρωτογενές προϊόν στον χρόνο T έναντι τιμήματος K. Ο λογικός επενδυτής με θετική θέση θα ασκήσει το δικαίωμα πώλησης μονο όταν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση είναι μικρότερη του K. Δεδομένου αυτού η απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πωλησης είναι $(K - S_T)^+$ και ως αποτέλεσμα είναι πάντα μή αρνητική.

Ένα **αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης**(*american put option*) διαφέρει απο το αντίστοιχο ευρωπαϊκό στο ότι μπορει να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ωρίμανση του, παρόμοια δηλαδή με το δικαίωμα αγοράς.

Αρχή της μη επιτηδειότητας(A.M.E)
Η αρχή της μή επιτηδειότητας(*no arbitrage principle*) αξιώνει ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρξει δυνατότητα κέρδους χωρίς την ανάληψη ρίσκου και ειναι το βασικό αξίωμα της μαθηματικής χρηματοοικονομικής θεωρίας. Δυνατότητα επιτηδειότη-

τας παρουσιάζεται όταν μια μηδενική αρχική επένδυση παρουσιάζεται να εγγυάται μη αρνητικό κέρδος στο μέλλον με μη μηδενική πιθανότητα.
Παρότι είναι δυνατό σε πραγματικές αγορές να υπάρξουν ευκαιρίες επιτηδειότητας, υπάρχει ισχυρή επιχειρηματολογία κατά της ύπαρξης τέτοιων ευκαιριών σε αγορές που βρίσκονται σε ισορροπία.

Στην μαθηματική χρηματοοικονομική θεωρία ισχυρή είναι η πεποίθηση οτι η αγορά δεν αποτυπώνεται εύκολα απο ντετερμινιστικές μεθόδους. Ως αποτέλεσμα η μοντελοποίηση μιας αγοράς συνηθίζεται να γίνεται μέσω ενός χώρου πιθανότητας, τα σημεία του οποίου αντιπροσωπεύουν τα δυνατά σενάρια εξέλιξης της αγοράς. Σε αυτόν το χωρο πιθανότητας βρίσκονται και οι τιμές των διαφόρων προϊόντων που απαρτίζουν την αγορά υπο την μορφή στοχαστικών ανελίξεων. Ενα τετοίο υπόδειγμα, θεμελιωμένο σε χώρο πιθανότητας, είναι και το Διωνυμικό μοντέλο για αποτίμηση παραγώγων του οποίου την οριακή συμπεριφορά θα μελετήσουμε. Το μοντέλο αυτό, όπως και πολλά αλλα, υπόκειται σε περιορισμούς τους οποίους επιβάλλει η συνθήκη επιτηδειότητας.
Η παρακάτω πρόταση είναι μία απο αυτούς.

Πρόταση 1 α) Αν την στιγμή $T \geq 0$ ένα χαρτοφυλάκιο A έχει σε κάθε *πιθανό ενδεχόμενο* μή αρνητική αξία τότε και η αρχική του είναι μή αρνητική:

$$V_T(A) \geq 0 \iff V_0(A) \geq 0.$$

β) Αν τη στιγμή $T \geq 0$ η αξία ενός χαρτοφυλακίου A είναι σε κάθε *πιθανό ενδεχόμενο* τουλάχιστον όση η αξία ενός χαρτοφυλακίου B τότε η αρχική αξία του A θα είναι τουλάχιστον όση η αρχική αξία του B:

$$V_T(A) \geq V_T(B) \iff V_0(A) \geq V_0(B).$$

γ) Αν την στιγμή $T \geq 0$ η αξία ενός χαρτοφυλακίου A είναι σε κάθε *πιθανό ενδεχόμενο* ακριβώς ίση με την αξία ενός χαρτοφυλακίου B τότε η αρχική αξία του A θα ταυτίζεται με την αρχική αξία του B:

$$V_T(A) = V_T(B) \iff V_0(A) = V_0(B).$$

Τύποι επιτοκίων
Τα επιτόκια είναι ένας σημαντικός παράγοντας στην αποτίμηση της αξίας όλων των παραγώγων. Ένα επιτόκιο για μία συγκεκριμένη κατάσταση ορίζει το ποσό των χρημάτων ένας δανειζόμενος υπόσχεται να πληρώσει στον δανειστή. Το επιτόκιο το οποίο εφαρμόζουμε σε κάθε περίπτωση είναι ανάλογο του κινδύνου της συναλλαγής. Ο κίνδυνος αυτός μπορεί να είναι πχ. να μην μπορεί ο δανειζόμενος να αντεπεξέλθει στις υποχρεώσεις του ή γενικότερα μία επένδυση να χάσει την αξία της.

Οταν αναφερόμαστε σε προϊόντα όπως καταθέσεις μετρητών και ομόλογα τότε δεχόμαστε την πεποίθηση οτι ο κίνδυνος να χάσουν βίαια την αξία τους είναι ασήμαντος και για αυτό τα λέμε *προϊόντα άνευ κινδύνου.* Κάτω απο αυτήν τη υπόθεση η αξία τέτοιων προϊόντων αλλάζει σταθερά συνάρτηση του χρόνου και δεν επηρεάζεται απο την εξέλιξη της αγοράς μας.
Για να να εξυπηρετήσουμε τους σκοπούς μας απο εδώ και πέρα θα θεωρούμε ότι η αγορά μας, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να στηρίξουμε την θεώρία μας, έχει ένα προϊόν άνευ κινδύνου του οποίου η αξία σε χρόνο T, ο οποίος θα είναι ο χρονος ωρίμασης για τα παράγωγα μας, θα είναι 1(\$).Η σημερινή του αξία θα ειναι προφανώς διαφορετική και θα την συμβολίζουμε $B(0,T)$. Ο τρόπος με τον οποίο μοντελοποιούμε τέτοια προϊόντα είναι μέσω ενος σταθερού επιτοκίου r. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι σε χρονική περίοδο T η αξία του προϊόντος έχει πολλαπλασιαστεί κατα παράγοντα e^{rT}. Ευκολα παρατηρούμε πλέον ότι η αρχική αξία του άνευ κινδύνου προϊόντος το οποίο θα μας χρησιμεύσει ώς εργαλείο είναι $B(0,T) = e^{-rT}$. Μια πληρωμή Κ που πρόκειται να γίνει σε χρόνο T έχει σημερινή αξία ίση με $K \cdot B(0,T)$ ενω μετρητά συνολικής αξίας A μετά απο χρόνο T σε ένα καταθετικό λογαριασμό με επιτόκιο r με συνεχή ανατοκισμό θα έχουν αξία Ae^{rT}.
Σε αντίθεση με τα ομόλογα και τις καταθέσεις, προϊόντα όπως μετοχές και αγαθά και άλλα πρωτογενή προϊόντα έχουν αξία η οποία δεν είναι ντετερμινιστικά προβλέψιμη σε βάθος χρόνου και λέγονται *προϊόντα σε κίνδυνο.*

1.2 Το διωνυμικό υπόδειγμα

Απο τα προηγούμενα μας γίνεται φανερό ότι οποιαδήποτε προσπάθεια να εξηγήσουμε μαθηματικά την εξέλιξη της αξίας κάποιου προϊόντος πρέπει να λαμβάνει υπόψιν δύο σημαντικούς παράγοντες: το γεγονός οτι η εξέλιξη της αξίας του προιόντος ειναι στοχαστική και την μεταβολή της αξίας του χρήματος στον χρόνο. Το απλούστερο δυνατό μοντέλο που περιέχει αυτά τα χαρακτηριστικά είναι το διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου το οποίο λειτουργεί ώς εξής :

Έστώ μια αγορά που αποτελείται μόνο απο ένα πρωτογενές προϊόν και ένα ομόλογο. Μας είναι γνωστή η τρέχουσα τιμή του πρωτογενούς προϊόντος η οποία είναι $S_0 = s_0$ και μας ενδιαφέρει η μεταγενέστερη τιμή του σε ένα χρόνο T. Σύμφωνα με το διωνυμικό υπόδειγμα η S_T είναι μία τυχαία μεταβλητή που μπορεί να λάβει 2 τιμές : την τιμή s_1 με πιθανότητα $p_1 = p$ και την s_2 με πιθανότητα $p_2 = 1 - p$. Χώρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s_1 > s_2$. Δηλαδή θεωρούμε οτι η αξία του προϊόντος είτε θα κάνει μία κίνηση προς τα 'πάνω' είτε μία προς τα 'κάτω' σε χρόνο T.Θα μπορούσαμε δηλαδή να πούμε οτι η μεταβολή της αξίας καθορίζεται απο την ρίψη ενός νομίσματος(συμφωνα με το διωνυμικό υπόδειγμα πάντα), το οποίο μας επιτρέπεται να είναι μεροληπτικό, όπου για 'γράμματα' αυξάνεται απο s_0 σε s_1 ενώ για 'κεφαλή' πέφτει σε s_2.
Επόμενος στόχος μας θα πρέπει να είναι να εκφράσουμε τους περιορισμούς που επιβάλλει η αρχή της επιτηδειότητας στο μοντέλο μας. Έστω ένα χαρτοφυλάκιο που

αποτελείται απο καταθέσεις μετρητών συνολικής αξίας s_0. Τότε απο την Πρόταση 1 καταλαβαίνουμε οτι ένα δεύτερο χαρτοφυλάκιο που περιέχει μόνο το πρωτογενές προϊόν, δεδομένου οτι έχει ίση αξία με το πρώτο χαρτοφυλάκιο αρχικά πρέπει να έχει την ίδια αξία σε χρονο T. Απο αυτό είναι εύκολο να καταλήξουμε στην ανισότητα

$$s_2 < s_0 e^{rT} < s_1.$$

όπου $s_0 e^{rT}$ θα είναι προφανώς η αξία των μετρητών συνολικής αρχικής αξίας s_0 μετά απο χρονο T.

Οπως καταλαβαίνουμε για έναν επενδυτή είναι πιθανό μόνο ένα απο τα σενάρια να τον ικανοποιεί. Το μέγεθος το οποίο εκφράζει πιο άμεσα το ενδιαφέρον του επενδυτή είναι προφανώς η απόδοση του παραγώγου. Σύμφωνα με το μοντέλο που μολις κατασκευάσαμε μπορούμε να αποφανθούμε οτι η απόδοση ενός παραγώγου θα είναι και αυτή τυχαία μεταβλητή. Πράγματι για ένα προθεσμιακό συμβόλαιο το οποίο πραγματοποιείται έναντι τιμήματος k η απόδοση του ειναι μία τυχαία μεταβλητή με τιμές $f_1 = s_1 - k$ με πιθανότητα $p_1 = p$ και $f_2 = s_2 - k$ με πιθανότητα $p_2 = 1 - p$. Για ένα ευρωπαικό συμβόλαιο πάλι με μηδενικό τίμημα η απόδοση θα παίρνει τιμές $f_1 = s_1$ με πιθανότητα $p_1 = p$ και $f_2 = s_2$ με πιθανότητα $p_2 = 1 - p$. Θα ήταν λογικό να πούμε οτι η απόδοση του παραγώγου είναι αυτή που πρέπει να καθορίζει την τιμή στην οποία τιμολογείται σε περίπτωση που κάποιος θέλει να αγοράσει το δικαιωμα. Δεδομένης της ύπαρξης της αναμενόμενης τιμής της απόδοσης του παραγώγου, λογική θα ήταν η προσπάθεία τιμολόγησης αυτού με βάση την σημερινή αξία της αναμενόμενης απόδοσης. Όμως κάτι τέτοιο αφήνει χώρο σε στρατηγικές επιτηδειότητας όπως θα δούμε σε λίγο. Οπότε δεν έχουμε άλλη επιλογή απο το να ακολουθήσουμε μια άλλη στρατηγική. Συγκεκριμένα:

Θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο που εξαρτάται απο ένα πρωτογενές προϊόν S με αρχική αξία s_0 και απόδοση f μετά απο χρόνο T. Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από φ μέρη του προιόντος S (με αρχική αξία φs_0) και ψ ομόλογα, τα οποία έχουν αρχική αξία e^{-rt} και τελική αξία σε χρόνο T ίση με 1, ετσι ώστε ώστε η απόδοση του χαρτοφυλακίου σε χρόνο T να συμπίπτει με του παραγώγου. Οπότε αν s_1, s_2 οι δύο πιθανές τιμές του S σε χρόνο T παρατηρούμε οτι πρέπει να ισχύει ότι

$$\varphi s_1 + \psi = f_1$$

αν η τιμή της αξιας του S κάνει μια κίνηση προς τα πάνω

$$\varphi s_2 + \psi = f_2$$

αν η τιμή της αξιας του S κάνει μια κίνηση προς τα κάτω.

Αν δεν λάβουμε υπόψιν την περιπτωση που $s_1 = s_2$ (πράγμα λογικό αφου σε αυτή την περίπτωση θα μιλούσαμε για ομόλογα) τότε μπορούμε να αποφανθούμε οτι το άνω είναι ένα επιλύσιμο 2×2 σύστημα με αγνώστους τα ϕ, ψ. Πράγματι :

$$\phi = \frac{f_1 - f_2}{s_1 - s_2} \tag{1.1}$$

$$\psi = \frac{s_1 f_2 - s_2 f_1}{s1 - s2} \tag{1.2}$$

Αυτές λοιπόν είναι οι ποσότητες του πρωτογενούς προϊόντος και των ομολόγων αντίστοιχα που πρέπει να συμπεριλάβουμε στο χαρτοφυλάκιο μας ωστε να αναπαράγουμε την απόδοση ενός παραγώγου απόδοσης f που εξαρτάται απο το ποιόν S. Με αυτόν τον απλό τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο για κάθε παράγωγο ώστε να αναπαράγουμε την απόδοση του μετα απο χρόνο T.Απο την αρχή της μη επιτηδειότητας προκύπτει οτι και οι αρχικές αποδώσεις πρέπει να συμπίπτουν οπότε

$$f_0 = \phi s_0 + \psi e^{-rt}$$

η οποία έιναι και η θεωρητικά δίκαιη τιμή του παραγώγου καθώς, οπως θα δειξουμε σε λίγο, με αυτήν απαγορεύουμε την ύπαρξη στρατηγικών επιτηδειότητας. Αν τώρα στην θέση των ϕ, ψ βάλουμε τις τιμές των (1.2) (1.1) βρίσκουμε

$$f_0 = e^{-rT}(qf_1 + (1-q)f_2) = e^{-rT}\mathbb{E}^q[F(S_T)]. \tag{1.3}$$

οπου

$$q = \frac{e^{rT}s_0 - s_2}{s_1 - s_2} \tag{1.4}$$

Ας δούμε κάποιες ιδιότητες του q. Πρώτον αν το $q \leq 0$ τότε θα είχαμε $s_0 e^{rT} \leq s_2 < s_1$ το οποίο απαγορεύεται απο την Α.Ε. οπότε είναι αναγκαστικό να ισχύει $q \geq 0$. Όμοια πρέπει να ισχύει $q \leq 1$ αφού αλλιώς $s_2 < s_1 \leq s_0 e^{rT}$ που απορρίπτεται για τους ίδιους λόγους. Οπότε βλέπουμε οτι για να έχουμε μια λογική αγορά το q αναγκάζεται να ανήκει στο (0,1), οπως και ένα μέτρο πιθανότητας το οποίο δικαιολογεί και την χρήση του τελεστή της αναμενόμενης τιμής.
Καταλαβαίνουμε λοιπόν οτι η δίκαιη τιμή του παραγώγου είναι η σημερινή αξία της αναμενόμενης τιμής της απόδοσης αλλα ως προς το νέο μέτρο q και όχι το αρχικό p. Μάλιστα το q είναι ανεξάρτητο του p και καλείται *ελεύθερο κινδύνου*.
Δεδομένου ότι το ίδιο το πρωτογενές προιόν μπορεί να θεωρηθεί ως παράγωγο με συνάρτηση απόδοσης $f(S_T) = S_T$ μπορούμε να αποφανθούμε ότι

$$S_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^q[S_T].$$

Τέλος θα αποδείξουμε οτι αν τιμολογούσαμε το παράγωγο μας με τιμή ίση με την σημερινή αξία της αναμενόμενης τιμής της απόδοσης του παραγώγου ως προς p, η οποιαδήποτε αλλη της δίκαιης, τότε θα επιτρέπουμε στρατηγικές επιτηδειότητας.
Πράγματι έστω πρωτογενές προιόν S που ανήκει σε μία τυχαία αγορά σε ισορροπία. Σύμφωνα με το διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου, αν S_0 η αρχική αξία ένός παραγώγου με βάση το S τοτε μετα απο χρονο T η αξία του S_T θα είναι μία τυχαία μεταβλητή που πέρνει τιμές $s_1, s_2 : s_2 < s_1$ με πιθανότητες p_1, p_2 αντίστοιχα. Βάση των δεδομένων αυτών κατασκευάζουμε την δίκαιη τιμή f_0 αλλα το τιμολογούμε σε τιμή F_0 διαφορετική της δίκαιης η οποία θα μπορούσε να είναι η

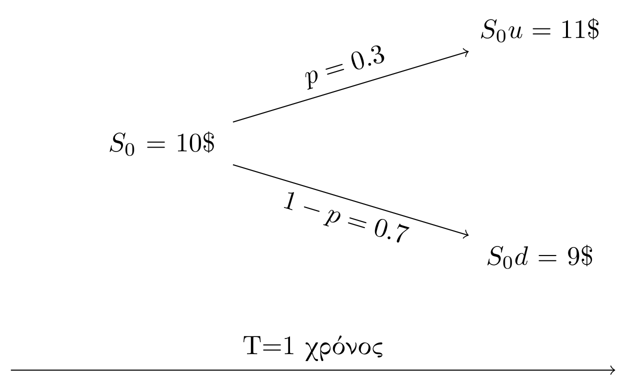
$$F_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^p[F(S_T)]$$

δηλαδή η σημερινή αξία της αναμενόμενης απόδοσης(υποθέτουμε οτι διαφέρει απο την δίκαιη, δηλαδή $q \neq p$). Ύστερα κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να περιέχει απο το παράγωγο, αρνητική θέση στο παράλληλο χαρτοφυλάκιο που το αναπαράγει και μετρητά $f_0 - F_0$. Η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου είναι μηδενική ενώ σε χρόνο T θα είναι

$$V_T = f(S_T) - f(S_T) + (f_0 - F_0)e^{rT}$$

οπότε έτσι έχουμε κατασκευάσει μία στρατιγική οπου μια μηδενική αρχική επένδυση αποφέρει θετικό κέρδος με μη μηδενική πιθανότητα το οποίο δεν είναι επιθυμητό.

Ενα Παράδειγμα Έστω ένα παράγωγο που εξαρτάται απο πρωτογενές προϊόν με αρχική αξία $S_0 = 10\$$ το οποίο έχει τιμή άσκησης K και χρόνο ωρίμανσης $T = 1$ χρόνο. Ισχύει επίσης ότι $r = 0.05$. Έχουμε την πεποίθηση ότι η αξία του προϊόντας είτε θα ανέβει κατα 10% με πιθανότητα $p = 0.3$ είτε θα πέσει κάτα 10% με πιθανότητα $1 - q = 0.7$. Αρα το διωνυμικό μοντέλο εκφράζεται ώς εξής :



Για να το τιμολογήσουμε πρώτα ας βρούμε το μέτρο q.

$$q = \frac{e^{0.05} - 0.9}{1.1 - 0.9} = \frac{1.05 - 0.9}{0.2} = 0.75$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}^q(S_T)e^{-rT} = 10.5 \times 0.95 = 10 = S_0$. Η απόδοση μπορεί να πάρει τις τιμές $f_1 = (11 - 10)^+ = 1, f_2(9 - 10)^+ = 0$. Οπότε η δίκαιη τιμή την στιγμή 0 είναι

$$f_0 = \mathbb{E}^q[f(S_T)] = 0.75 \times 0.95 = 0.71\$$$

1.2.1 Το διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων

Έχοντας ολοκληρώσει πλέον το υπόδειγμα μίας περιόδου παρατηρούμε οτι μία τόσο απλή κατασκευή δεν φαίνεται να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Επιπλέον δεν μας δίνει καμία πληροφορία για κάποια χρονική στιγμή πρίν της ωρίμανσης T το οποίο θα ήταν επιθυμητό ιδιαίτερα στα παράγωγα αμερικάνικου τύπου.

Ο τρόπος για να βελτιώσουμε το μοντέλο μας είναι να επεκτείνουμε την διαμέριση για χρονους πριν της ωρίμανσης δηλαδή να φτιάξουμε ένα ολόκληρο 'δέντρο' αντί για μόνο δύο 'κλαδιά'. Τα εργαλεία μας θα παραμείνουν όπως και πρίν ένα πρωτογενές προιόν S (με κινδυνο) και ένα ομόλογο(χωρίς κινδυνο) τα οποία θα απαρτίζουν την αγορά μας. Όμοια με πριν ο στόχος μας είναι να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο του πρωτογενούς προϊόντος με χρονο ωρίμανσης T. Στην προσπάθεια να αποφύγουμε την απλοϊκότητα του μοντέλου μιας περιόδου κάνουμε την εξής κίνηση : Διαιρούμε το χρονικό διάστημα [0,T] σε N μικρότερα διαστήματα, ίσα μεταξύ τους, στις χρονικές στιγμές $0 = t_0, t_1, t_2, \dots t_N = T$. Τα διαστήματα αυτά για απλότητα θα τα θεωρήσουμε ίσα και ώς αποτέλεσμα θα έχουν έυρος $h = T/N$ και οι χρόνοι θα ειναι $t_k = kh, k = 0, 1, 2, \dots, N$. Στόχος μας είναι τωρά να εκφράσουμε την εξέλιξη των δύο προϊόντων (άνευ κινδύνου , με κίνδυνο) στα νέα δεδομένα.

Έστω οτι η σημερινή αξία του άνευ κινδύνου προϊόντος το οποίο θα συμβολίζουμε ως B είναι $B_0 = 1$. Θα υποθέσουμε ότι η αξία του μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό ως προς τον χρονο και μάλιστα ότι $B_{t_{k+1}}/B_{t_k} = \Lambda$. Συνδέοντας την υπόθεση μας με τα προηγούμενα θα ακολουθήσουμε την σύμβαση ότι το προϊόν χωρίς κίνδυνο ειναι ένας λογαριασμός με σταθερό επιτόκιο (συνεχούς ανατοκισμού) r, δηλαδή $\Lambda = e^{rh}$.

Αντίθετα με τα προϊόντα άνευ κινδύνου η αξία του πρωτογενούς προϊόντος ειναι αρχικά S_0 και εξελίσσεται στοχαστικά. Δηλαδη αν την στιγμή t_k η αξία του ειναι S_{t_k} τότε

$$S_{t_{k+1}} = S_{t_k}\xi_{k+1} \tag{1.5}$$

οπού η $\{\xi_k\}_{k\in\{1,2,\dots,N\}}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών($i.i.d$) με κατανομή

$$\xi_k = \begin{cases} u & \text{με πιθανότητα}\, p \\ d & \text{με πιθανότητα}\ \ 1-p \end{cases} \tag{1.6}$$

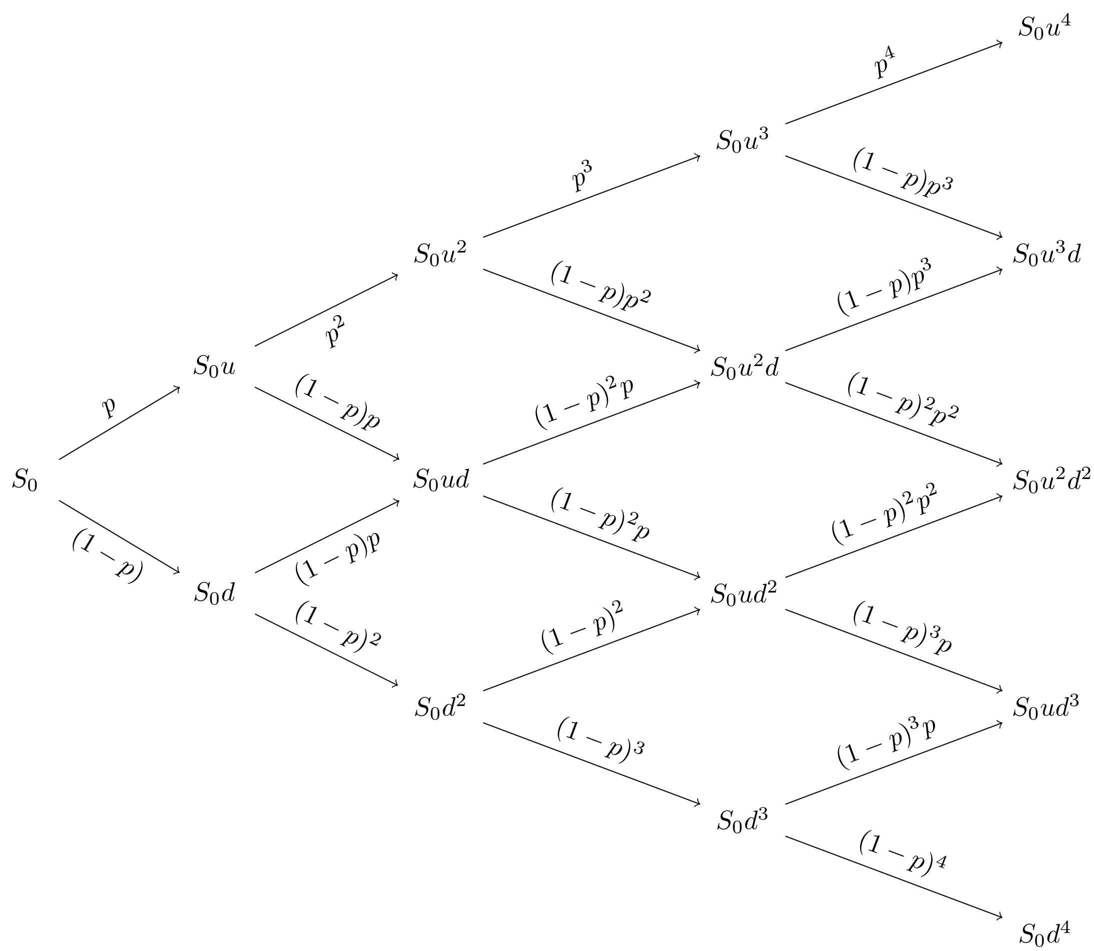
και έτσι η εξέλιξη της αξίας μπορεί να περιγραφεί σχηματικά ως
Δηλαδή αν έχουμε λόγο να πιστεύουμε ότι σε κάθε διάστημα η τιμή της μετοχής είτε θα ανέβει 3% με πιθανότητα $p = 0.25$ είτε θα κατέβει 5% με τριπλάσια πιθανότητα τότε στο μοντέλο μας θα αντιστοιχούν $u = 1.03$, $d = 0.95$, $p = 0.25$.
Για να αποφύγουμε την ύπαρξη ευκαιριών επιτηδειότητας θα επεκτείνουμε τον περιορίσμο που ορίσαμε στον υπόδειγμα μίας περιόδου. Συγκεκριμένα

$$d < e^{rh} < u \tag{1.7}$$

καθώς και επιπλέον ζητούμε $d > 0$ για να είμαστε σίγουροι οτι η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος θα ειναι πάντα θετική. Ένας τρόπος πλέον να δούμε την τιμή του S την χρονική στιγμή t_k είναι ο ακόλουθος :

$$S_{t_k} = S_0 \prod_{j=1}^{k} \xi_j \tag{1.8}$$

και απο αυτό εύκολα συμπεραίνουμε ότι οι πιθανές τροχιές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος στο δίαστημα [0,T] είναι 2^N. Πράγματι παρατηρούμε ότι οι τροχιες

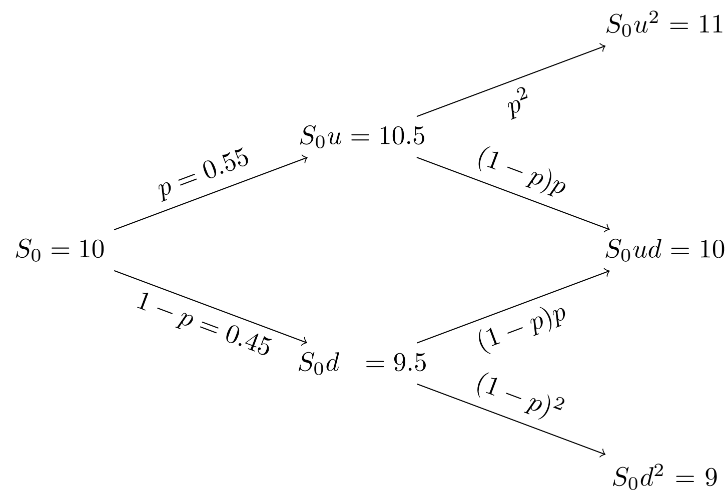


Σχήμα 1.1: Γενικό διωνυμικό υπόδειγμα για N=4.

του Σχήματος (1.1) είναι $(2^4)16$ σε πλήθος.

Η αφετηρία της σύγχρονης θεωρίας της χρηματοοικονομίας ειναι να θεωρήσουμε το μοντέλο μας σαν ένα χώρο πιθανότητας Ω, κάθε σημείο του οποίου αντιστοιχεί σε ένα απο τα πιθανά σενάρια εξέλιξης της αγοράς. Θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα ώστε να γίνει καλύτερη αποτύπωση των εργαλείων μας.

Έστω S μία μετοχή με αρχική τιμή $S_0 = 10\$$. Οι πληροφορίες μας λένε ότι η τιμή της σε εύρος χρόνου $h = 1/2$(N=2) χρόνου είτε θα ανέβει 0.05% ($u = 1.05$) με πιθανότητα $p = 0.55$ είτε θα κατέβει 0.05% ($d = 0.95$) με πιθανότητα $p' = 1 - p = 0.45$. Ενδιαφερόμαστε να υπογράψουμε ένα παράγωγο της μετοχής αυτής με περίοδο ωρίμανσης T=1 χρόνος και για αυτό θέλουμε να παράγουμε ένα πιθανό σύνολο τιμών της με την βοήθεια του διωνυμικού μοντέλου τότε έχουμε



Ετσι λοιπόν, εδώ, έχουμε ένα χώρο πιθανότητας $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_4\}$ όπου:

$$\omega_1 \to (\xi_1, \xi_2) = (u, u)$$

$$\omega_2 \to (\xi_1, \xi_2) = (u, d)$$

$$\omega_3 \to (\xi_1, \xi_2) = (d, u)$$

$$\omega_4 \to (\xi_1, \xi_2) = (d, d)$$

Τα $\{\xi_k\}$ είναι απεικονισεις απο τον Ω (δηλαδή τυχαίες μεταβλητές) στο σύνολο $\{u, d\}$. Έχωντας αυτό στο μυαλό συμπεραίνουμε οτι για παράδειγμα $\xi_1(\omega_1) = u$ ενώ $\xi_1(\omega_3) = d$.
Εύκολα απο τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η αξία του προϊόντος σε κίνδυνο ως προς κάθε χρονική στιγμή t_k είναι μία τυχαία μεταβλητη ή αλλιώς η αξία του είναι μία στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου ορισμένη στον χώρο πιθανότητας μας. Σε κάθε τροχιά της στοχαστικής ανέλιξης αυτής, μέσω του μοντέλου, αντιστοιχούμε και μία πεποίθηση για το ποιά είναι η πιθανότητα εμφάνισης της. Εφοδιάζουμε δηλαδη τον χώρο μας με ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ έτσι ώστε για παράδειγμα $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{S_T = 11\}) = p^2 = 0.3$
Υπάρχουν πολλά συμπεράσματα τα οποία μπορούμε να αποκομίσουμε απο το μοντέλο αυτό. Παραδείγματος χάρη έστω οτι κατέχουμε θετική θέση σε ένα παράγωγο αμερικάνικου τύπου για το προϊόν για το οποίο κατασκευάσαμε μολις το διωνυμικό μοντέλο με τιμή άσκησης K. Άν ισχύει για αυτό το παράγωγο ότι $K = 9.5$ και βρισκόμαστε για $t = 1/2$ με την πραγματική τιμή να έχει πλησιάσει την τιμή του S_0u τότε η πεποίθηση μας λέει οτι σίγουρα θα εξασκήσουμε το δικαίωμα μας οπότε θα μπορούσαμε να το κάνουμε και πίο νωρις απο την ωρίμανση,

ενώ αν είχαμε θετική θέση πωλησης η πεποίθηση μας θα ήταν εναντίον στο σενάριο εξάσκησης του δικαιώματος. Βλεπουμε δηλαδή οτι έχουμε πληροφορία για εξέλιξη της αξίας του προϊόντος και πριν το χρόνο της ωρίμανσης (σε αντίθεση με το υπόδειγμα μίας περιόδου) και έτσι μας δίνεται οι δυνατότητα για παραπάνω στρατηγικές. Επιπλέον βλέπουμε οτι για μεγαλύτερη διαμέριση το υπόδειγμα γίνεται πίο αληθοφανές και μας δίνει μεγαλύτερη λεπτομέρεια.
Απο τις προηγούμενες παρατηρήσεις μας βλεπουμε ο χρόνος παίζει μεγαλύτερο ρόλο σε αυτό το μοντέλο απότι πρίν και χρήσιμη θα ήταν μία εννοια που να μας προσανατολίζει ως προς την κατεύθηνση του χρόνου. Για να το πετύχουμε αυτό πρεπει πρώτα να δώσουμε δύο ορισμούς

Ορισμός 1.2.1 (σ-Άλγεβρα)**.** Έστω χώρος Ω. Μία οικογένια συνόλων $\mathscr{A}$: $\mathscr{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ λέγεται **σ-άλγεβρα** όταν :

$$\Omega \in \mathscr{A}$$

$$A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$$

$$\{A_i\}_{i\in\mathscr{N}} : A_i \in \mathscr{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$$

Ορισμός 1.2.2. Έστω χώρος $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$. Λέμε ότι ο χωρος αυτός είναι εφοδιασμένος με μία διήθηση $\mathscr{F}_t$ όταν για κάθε χρονική στιγμή t, η $\mathscr{F}_t$ είναι σ-άλγεβρα των υποσυνόλων του Ω με $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{T}$ και επιπλέον $t_1 < t_2 \implies \mathscr{F}_{t_1} \subset \mathscr{F}_{t_2}$. Ο όρος αυτός, που είναι γνωστός ώς $filtration$, αποδίδει την αύξηση της πληροφορίας προϊόντος του χρόνου με όλο και λεπτότερη διαμέριση του Ω.

Για το συγκεκριμένο υπόδειγμα τα πράγματα θα φαίνονται πίο απλά αν ακολουθήσουμε μία ποιό πρακτική προσέγγιση την οποία αργότερα θα συνδέσουμε με τους ορισμούς που αναφέραμε. Οπώς ειδαμε πρακτικά στο παράδειγμα που κάναμε όσο περνάει ο χρόνος μας δίνεται η δυνατότητα να αποκλείουμε σενάρια. Πράγματι στον χρονο $t_0 = 0$ όλα τα ενδεχόμενα είναι δυνατά αλλα σιγά σιγά 'ξεκαθαρίζει το τοπίο' μέχρι που φτάνουμε να καταλήγουμε σε ένα μόνο ενδεχόμενο . Συγκεκριμένα, στην αρχή κάθε ενδεχόμενο του χώρου $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ έχει θετική πιθανότητα να συμβεί. Στην επόμενη χρονική στιγμη t_1 άνάλογα με το άν το $\xi_1 = u$ ή $\xi_1 = d$ καταλαβαίνουμε οτι το ενδεχόμενο στο οποίο θα καταλήξουμε θα ανήκει σε ένα εκ των δύο συνόλων :

$$K_u\{\omega_1, \omega_2\} \quad , \quad K_d\{\omega_3, \omega_4\}$$

και τέλος μπορούμε να δούμε στην επόμενη χρονική στιγμή $t_2 = T$ οτι το ενδεχόμενο που πραγματοποείται θα ανήκει σε ένα εκ των μονοσυνόλων

$$K_{uu}\{\omega_1\} \quad , K_{ud}\{\omega_2\} \quad , K_{du}\{\omega_3\} \quad , K_{dd}\{\omega_4\}$$

Άρα παρατηρούμε οτι για κάθε βήμα του διωνυμικού δείγματος μας δίνεται ολο και περισσότερη λεπτομέρεια και ακρίβεια για το ενδεχόμενο που θα πραγματοποιηθεί, αποτέλεσμα της προοδευτικά λεπτότερης διαμέρισης που εφαρμόζουμε. Την πληροφορία που συλλέγουμε απο τις διαδοχικές διαμερίσεις του Ω μέχρι την στιγμή

t_k θα την συμβολίζουμε $\mathscr{F}_k$ και είναι μία πίο απλοποιημένη μορφή της διήθησης. Έχουμε λοιπόν διαδοχικά:

$$\mathscr{F}_0 = \{\Omega\}$$
$$\mathscr{F}_1 = \{K_u, K_d\}$$
$$\mathscr{F}_2 = \{K_{uu}, K_{ud}, K_{du}, K_{dd}\}$$

Κάθε στοιχειο της $\mathscr{F}_k$ αντιστοιχεί σε ένα κόμβο του διωνυμικού 'δέντρου' στον χρόνο t_k και παριστάνει μια δυνατή εξέλιξη της αγοράς μέχρι την στιγμή αυτή. Τέλος παρατηρούμε ότι για κάθε στιγμή t_k η πληροφορία κάθε προηγούμενης στιγμής περιέχεται στην πληροφορία της στιγμής αυτής.
Ολοκληρώνοντας την παράγραφο θα δώσουμε δύο ορισμούς που θα μας χρειαστούν και στην επόμενη ενότητα και θα δούμε συνοπτικά και ένα τρόπο να τιμολογούμε παράγωγα μέσω του διωνυμικού υποδείγματος πολλών περιόδων.

Ορισμός 1.2.3. Μια μεταβλητή X θα λέγεται $\mathscr{F}_k$ μετρήσιμη όταν η τιμή της εξαρτάται μόνο απο τις τιμές του πρωτογενούς προϊόντος μέχρι την στιγμή t_k, δηλαδή:

$$X(\omega) = \Phi(S_{t_0}(\omega), \Phi(S_{t_1}(\omega), \ldots, \Phi(S_{t_k}(\omega)).$$

Ορισμός 1.2.4. Μία αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική είναι μία ακολουθία χαρτοφυλακίων (φ_k, ψ_k), τέτοια ώστε για κάθε $k = 0, 1, \ldots, N-1$ έχουμε:

- οι φ_k, ψ_k είναι $\mathscr{F}_k$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές και
- $\phi_k S_{t_{k+1}} + \psi_k B_{t_{k+1}} = \phi_{k+1} S_{t_{k+1}} + \psi_{k+1} B_{t_{k+1}}$

Η πρώτη απο τις δύο παραπάνω συνθήκες υποχρεώνει την θέση που λαμβάνουμε την στιγμή t_k στα προϊόντα της αγοράς να εξαρτάται μόνο απο την γνώση που έχουμε για την εξέλιξη της αγοράς μέχρι τότε. Η δεύτερη δηλώνει ότι η αλλαγή θέσης που κάνουμε την στιγμή t_{k+1} είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. Το αριστερό μέρος δηλώνει την αξία του χαρτοφυλακίου πρίν την αλλαγή θέσης ενώ το δεξί είναι η αξία του χαρτοφυλακίου που θέλουμε να συνθέσουμε.
Στην συνέχεια θα αναφέρουμε εν τάχει μια μέθοδο αποτίμησης παραγώγων με χρήση αυτού του υποδείγματος η οποία είναι γνωστη ως ο Αναδρομικός Αλγόριθμος Τιμολόγησης και Αντιστάθμισης.

Αναδρομικός Αλγόριθμος Τιμολόγησης και Αντιστάθμισης Έστω οτι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο με δεδομένη απόδοση την στιγμή T :

$$V_T = U_{t_N}(S_{t_0}), S_{t_1}, \ldots, S_{t_n})$$

Θα κατασκευάσουμε μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που να αναπαράγει την απόδοση του παραγώγου στην ωρίμανση δηλαδή:

$$\phi_{N-1} S_T + \psi_{N-1} B_T = V_T.$$

Ομοια με το μοντέλο μίας περιόδου για να μπορούμε να ισχύουν τα ενδεχόμενα $\{\xi_N = u\}, \{\xi_N = d\}$ πρέπει να ικανοποιείται το σύστημα

$$\phi_{N-1} S_{t_{N-1}} u + \psi_{N-1} B_{t_N} = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} u)$$

$$\phi_{N-1}S_{t_{N-1}}d + \psi_{N-1}B_{t_N} = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}}d)$$

απο τις οποίες προκύπτουν οι (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) όπως το διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου. Συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$\phi_{N-1} = \frac{V_N^{\uparrow} - V_N^{\downarrow}}{S_{t_{N-1}}(u-d)}, \quad \psi_{N-1} = \frac{V_N^{\downarrow} \times u - V_N^{\uparrow} \times d}{S_{t_{N-1}}(u-d)} \tag{1.9}$$

Οπου

$$V_N^{\uparrow} = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}}u), \quad V_N^{\downarrow} = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}}d)$$

Έτσι καταφέραμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο(ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) του οποίου η αξία να ταυτίζεται με αυτήν του παραγώγου σε χρόνο t_n και για το οποίο ισχύει ότι οι (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) είναι $\mathscr{F}_{N-1}$ μετρήσιμες μεταβλητές αφού ειναι συναρτήσεις των $S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}$. Κινούμενοι παρόμοια με το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου μπορούμε να ορίσουμε την αξία του παραγώγου την στιγμή t_{N-1} ως την αξία του χαρτοφυλακίου (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) την στιγμή εκείνη και να ισχύει ότι

$$V_{t_{N-1}} = e^{-rh}(qV_N^{\uparrow} + (1-q)V_N^{\downarrow}),$$

όπου

$$q = \frac{e^{rh} - d}{u - d}$$

Πλεόν για να τιμολογήσουμε οποιαδήποτε στιγμή t_{k-1} το μόνο που χρειάζεται είναι ακολουθώντας αυτήν την φόρμουλα να οπισθοδρομήσουμε μέχρι την στιγμή αυτήν. Αυτη η τιμή οπως θα περιμένουμε ειναι και η δίκαιη.

Ένα Παράδειγμα

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι τα αμερικάνικου τύπου παράγωγα διαφέρουν απο τα ευρωπαϊκά στο γεγονός ότι μπορούν να ασκηθούν σε οποιαδήποτε στιγμή πρίν την ωρίμανση. Για τον λόγο αυτό όταν θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα τέτοιο παράγωγο εκτός απο το να υπολογίζουμε την απόδοση του στο μέλλον πρέπει να ελέγχουμε μήπως η πρόωρη εξάσκηση είναι πιο προσοδοφόρα. Η τιμή στην ώριμανση δεν παρουσιάζει κάποια διαφορά απο τα ευρωπαϊκα : είναι $(S_T - K)^+$ για αγορά $(K - S_T)^+$ για πώληση. Για τις υπόλοιπες στιγμές η απόδοση,αφού δημιουργήσουμε το δέντρο είναι το μέγιστο μεταξύ της τωρινής αξίας της αναμενόμενης απόδοσης της επόμενης στιγμής του παραγώγου και της αξίας της πρόωρης άσκησης. Δηλαδη για $t < T$ στα δικαιώματα αγοράς ισχύει

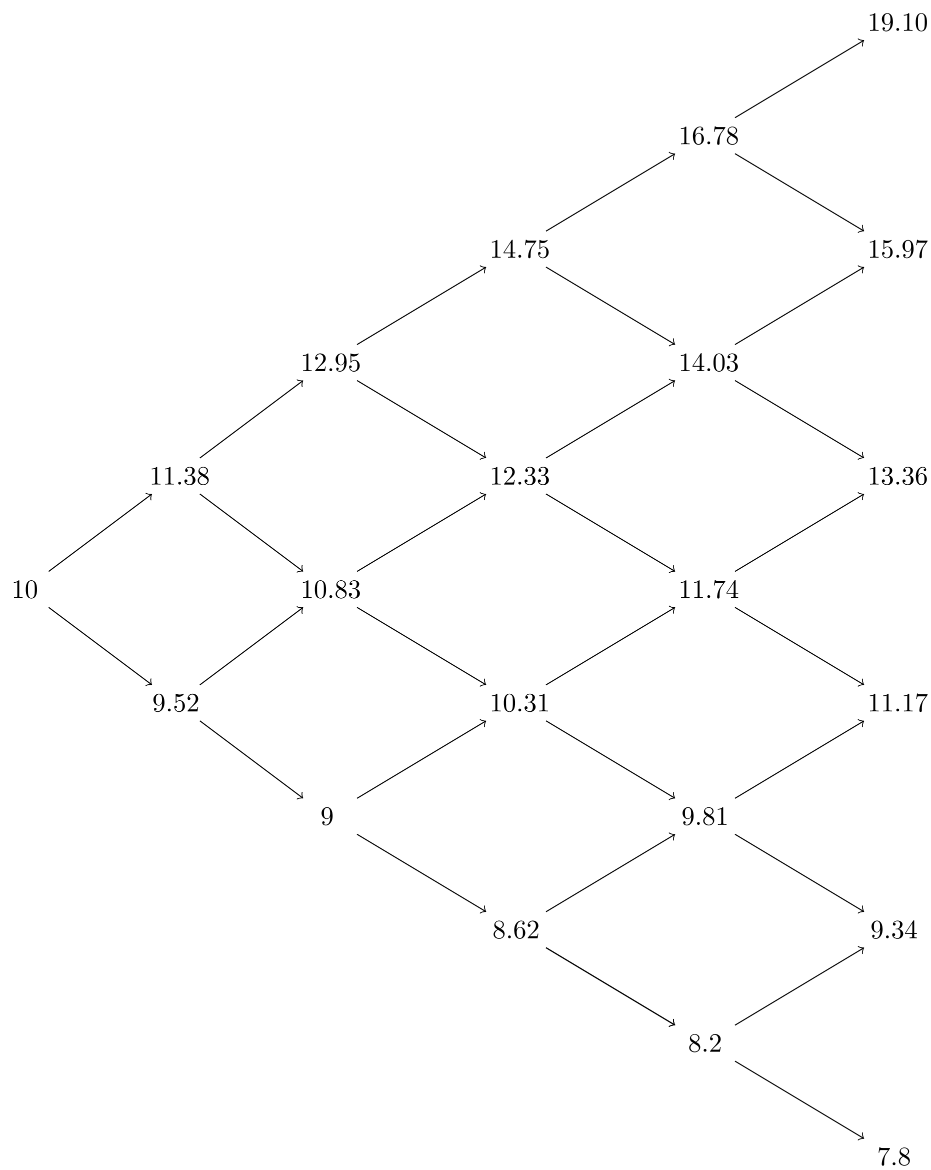
$$V_t = \max\{e^{-r\delta t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}[V_{t+1}], (S_t - K)^+\}$$

δηλαδή για ένα τέτοιο χρόνο σε ένα παράγωγο με τιμή άσκησης K ισχύει

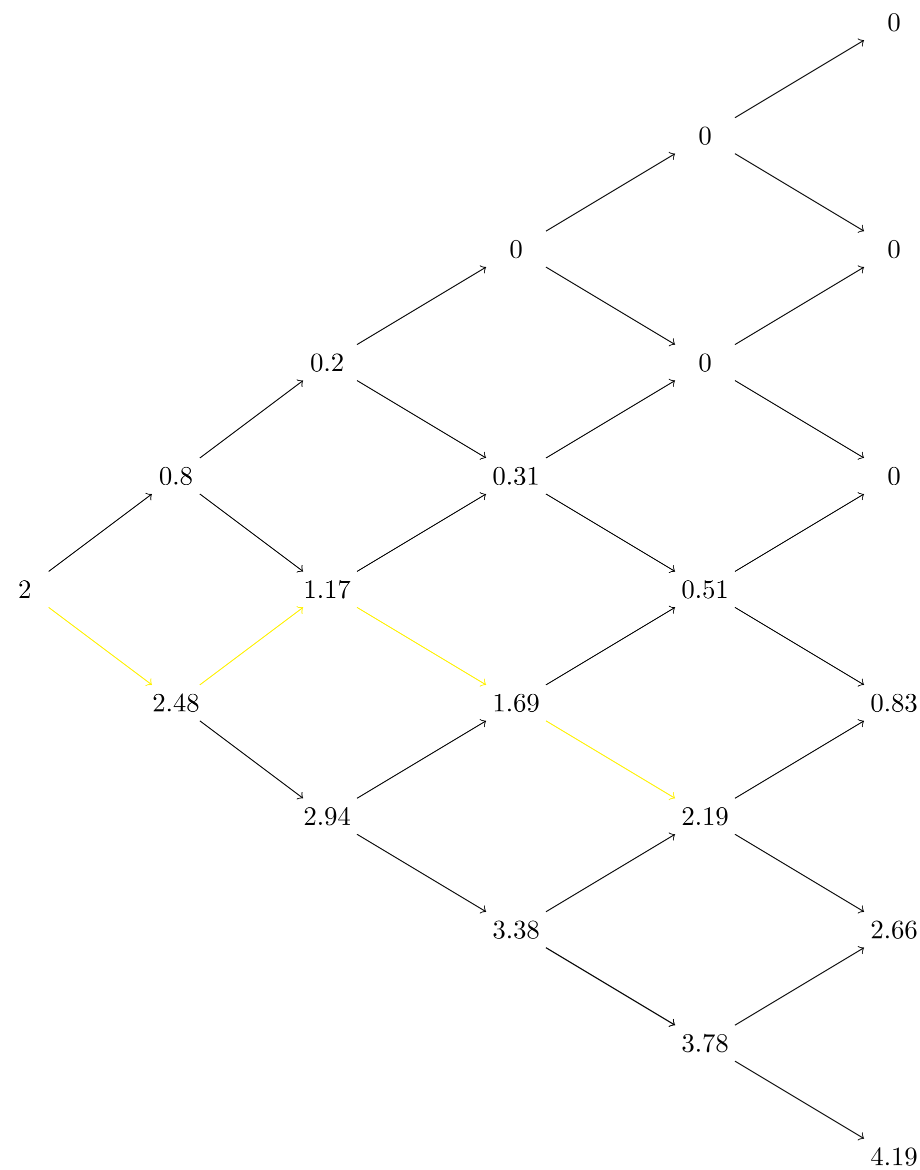
$$\begin{tikzcd} & V_{t+1}^- \\ V_t = \max\{qV_{t+1}^+ + (1-q)V_{t+1}^-, (S_t - K)^+\} \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\ & V_{t+1}^+ \end{tikzcd}$$

Πραγματοποιούμε αυτήν την διαδικασία οπισθοδρομώντας απο την ωρίμανση μέχρι την αρχική τιμή και έτσι τιμολογούμε κάθε χρονική στιγμή του δέντρου. Στο παράρτημα υπάρχει ένας αλγόριθμος που πραγματοποιεί την διαδικασία με χρήση της στατιστικής γλώσσας προγραμματισμού R.

Ας πάρουμε για να παράδειγμα το εξής παράγωγο. Έστω ένα παράγωγο πώλησης αμερικάνικου τύπου με τιμή άσκησης 12 \$ ωρίμανση σε ένα χρόνο και εξαρτάται απο ένα προϊόν για το οποίο ισχυει ότι $S_0 = 10, \sigma = 0.2, \mu = 0.2$ και ισχύει επίσης ότι $r = 0.1$. Το διωνυμικό μοντέλο 5 περιόδων που προκύπτει για την μετοχή είναι το εξής:



Η αναμενόμενη απόδοση μέσω του διωνυμικού μοντέλου είναι :



Η κίτρινη γραμμή αναπαριστά τους κομβους απο τους οποίους απο εκεί και κάτω μας συμφέρει να εξασκήσουμε νωρίς το δικαίωμα πώλησης.

1.3 Μέτρα Martingale

Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίσαμε ένα μέτρο πιθανότητας Q το οποίο το ονομάσαμε *αδιάφορο κινδύνου*. Το μέτρο αυτό είχε την ιδιότητα να τιμολογεί ένα παράγωγο μέσω της αναμενόμενης τιμής της απόδοσης του παραγώγου ικανοποιώντας παράλληλα την αρχή τις μή επιτηδειότητας. Ανάλογα θα κινηθούμε και στο υπόδειγμα πολλών περιόδων όπου αφού ορίσουμε αντίστοιχα αδιάφορα κινδύνου μέτρα πιθανότητας για υποδειγματα αγορών πολλων περιόδων θα καταλήξουμε σε ένα τύπο που θα μας δίνει την σημερινή αξία ενός παραγώγου μέσω του διωνυμικού υποδείγματος πολλών περιόδων.

1.3.1 Δεσμευμένες αναμενόμενες τιμές και martingales

Πρωτόυ μπορέσουμε να προχωρήσουμε πρέπει να υπενθυμίσουμε κάποια στοιχεία των Πιθανοτήτων και των Στοχαστικών Ανελίξεων.
Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές στο σύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ και η Y είναι ένα διακριτό τυχαίο διάνυσμα που παίρνει τιμές στο σύνολο $\{y_n, \ldots, y_n\} \subset \mathbb{R}^d$. Υποθέτουμε ότι η απο κοινού κατανομή των X και Y μας είναι γνωστή, δηλαδή γνωρίζουμε για κάθε ζευγάρι (x_i, y_j), την πιθανότητα

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Οι περιθώριες κατανομές των X, Y μπορούν εύκολα να υπολογιστούν απο την απο κοινού κατανομή ως εξής :

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\mathbb{P}(X = x_j) = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X = x_i\}$ δεδομένου του ενδεχομένου $\{Y = y_j\}$ ορίζεται ως :

$$\mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X = x_i\}$ δεδομένου του τυχαίου ενδεχομένου $\{Y = y_j\}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή που είναι συνάρτηση του Y και η τιμή της όταν $Y = y_j$ είναι $\mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j)$:

$$\mathbb{P}(X = x_i | Y) = g(Y) \;\; : \;\; g(y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$$

Η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της Q δεδομένου του Y ορίζεται ώς εξής:

$$\mathbb{E}^p[X|Y] = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i | Y).$$

Όπως παρατηρούμε η $\mathbb{E}^p[X|Y]$ είναι μία τυχαία μεταβλητή που είναι συνάρτηση του Y. Ένας διαφορετικός τρόπος να αντιλαμβανόμαστε το γεγονός είναι ο εξής

: Ο χώρος πιθανότητας διαμερίζεται ανάλογα με την τιμή του Y σε ενδεχόμενα :

$$\Omega = \bigcup_j \{Y = y_j\}$$

και η $g(Y) = \mathbb{E}^p[X|Y]$ έχει μια σταθερή τιμή $g(y_j) = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j)$ σε καθένα απο αυτά τα ενδεχόμενα.

Πρόταση 1 Η $g(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$ είναι η μοναδική συνάρτηση του Y για την οποία ισχύει:

$$\mathbb{E}[Xh(Y)] = \mathbb{E}[g(Y)h(Y)],$$

για οποιαδήποτε φραγμένη συνάρτηση h του τυχαίου διανύσματος Y

.

Απόδειξη. Θα δειξουμε πρώτα ότι η $g(Y) = \mathbb{E}^p[X|Y]$ έχει την παραπάνω ιδιότητα :

$$\mathbb{E}[Xh(Y)] = \sum_{i,j} x_i h(y_j)\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$= \sum_{i,j} x_i h(y_j)\mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j)\mathbb{P}(Y = y_j) =$$

$$= \sum_j h(y_j)\Big(\sum_i x_i(\mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j)\Big)\mathbb{P}(Y = y_j) =$$

$$= \sum jh(y_j)g(y_j)\mathbb{P}(y = y_j) = \mathbb{E}[g(Y)h(Y)]$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η g είναι η μοναδική συνάρτηση του Y που έχει την ιδιότητα αυτήν. Πράγματι έστω $\phi(Y)$ μία συνάρτηση του Y για την οποία ισχύει $\mathbb{E}[Xh(Y)] = \mathbb{E}[\phi(Y)h(Y)]$ για οποιαδήποτε φραγμένη συνάρτηση h του τυχαίου διανύσματος Y. Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα για την συνάρτηση

$$h_k(Y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } Y = y_k \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{1.10}$$

παίρνουμε:

$$\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_k) = \phi(y_k)\mathbb{P}(Y = y_k)$$

Επομένως, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε :

$$\phi(y_k) = \sum_i x_i \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_k)}{\mathbb{P}(Y = y_k)} = g(y_k).$$

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός της δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής είναι πολύ σημαντικός για δύο λόγους. Αφενώς μπορεί κανείς να θεωρήσει την παραπάνω πρόταση σαν τον ορισμό της δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής χωρίς να κάνει αναφορά στο είδος της κατανομής (διακριτή,συνεχής) των (X, Y). Μία παραπάνω απαίτηση που έχουμε για να ορίσουμε την δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή σε ένα χώρο πιθανότητας, αν αυτός δεν είναι πεπερασμένος ειναι να ισχύει $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ το οποίο θα μας διευκολύνει πολύ αργότερα.

Θα παραθέσουμε τώρα κάποιες ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής. Συγκεκριμένα:

1. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$
2. Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τότε η $\mathbb{E}[X|Y]$ είναι σταθερή και έχει τιμή ίση με $\mathbb{E}[X]$. Ειδικότερα αν η Y είναι σταθερή τοτε $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$
3. Αν η f είναι μία φραγμένη συνάρτηση του Y τότε: $\mathbb{E}[Xf(Y)|Y] = f(Y)\mathbb{E}[X|Y]$.
4. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Y] = \mathbb{E}[X|Y]$

Θυμίζουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή λέγεται $\mathscr{F}_k$-μετρήσιμη αν εξαρτάται μόνο απο τις τιμές των $S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_k}$. Ενας τρόπος για να κατασκευάσουμε μια τέτοια τυχαία μεταβλητή είναι να δεσμεύσουμε μια τυχαία μεταβλητή ως προς τις $S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_k}$. Έστω λοιπόν μ ένα μέτρο πιθανότητας στον Ω. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό

$$\mathbb{E}^{\mu}[\cdot|\mathscr{F}_k] = \mathbb{E}^{\mu}[\cdot|S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_k}]$$

παρατηρούμε ότι αν η X είναι μια τυχαία μεταβλητή τότε η $\mathbb{E}^{\mu}[Q|\mathbb{F}_k$ είναι μια $\mathscr{F}_k$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 1.3.1. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_{t_k}\}_{k=0,1,\ldots,N}$ στον χώρο Ω θα ονομάζεται $(\mu, \mathscr{F}_k)$-*martingale* αν για κάθε $k = 0, 1, \ldots, N-1$ έχουμε ότι $\mathbb{E}^{\mu}[X_{t_{k+1}}|\mathscr{F}_k] = X_{t_k}$

Απο τον ορισμό προκύπτει ότι αν η $\{X_{t_k}\}$ είναι μια $(\mu, \mathscr{F}_k)$-*martingale* τότε η X_{t_k} είναι μια $\mathscr{F}_k$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Είναι επίσης εύκολο να δούμε με επάλληλες εφαρμογές τις ιδιότητας (4) ότι για κάθε $j \geq k$:

$$\mathbb{E}^{\mu}[X_{t_j}|\mathscr{F}_k] = X_{t_k} \tag{1.11}$$

Μια σημαντική ιδιότητα των ανελίξεων *martingale* είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 1.3.1. *Αν η ανέλιξη $\{X_{t_k}\}_{k=0,1,\ldots,N}$ είναι $(\mu, \mathscr{F}_k)$-martingale τότε για κάθε$k, j \in \{0, 1, \ldots, N\}$:*

$$\mathbb{E}^{\mu}[X_{t_j}] = \mathbb{E}^{\mu}[X_{t_k}].$$

Δηλαδή η αναμενόμενη τιμή των όρων μιας ανέλιξης-martingale είναι σταθερή.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $j \geq k$. Παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή ως προς το μ στα δύο μέλη της (1.11)και απο την πρώτη ιδιότητα των δεσμευμένων κατανομών έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}^{\mu}[X_{t_k}] = \mathbb{E}^{\mu}[\mathbb{E}^{\mu}[X|\mathscr{F}_k]] = \mathbb{E}[X_{t_j}].$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι $\{X_{t_k}\}_{k=0,1,\ldots,N}$ και $\{U_{t_k}\}_{k=0,1,\ldots,N-1}$ είναι στοχαστικές ανελίξεις τέτοιες ώστε οι X_{t_k}, Y_{t_k} να είναι $\mathscr{F}_k$-μετρήσιμες για κάθε $k \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, και ας σχηματίσουμε μια νέα ανέλιξη $\{(Y \cdot X)_{t_k}\}_{k=0,1,\ldots,N}$ η οποία οριζεται ώς εξής:

$$(Y \cdot X)_{t_0} = 0 \ , \ (Y \cdot X)_{t_k} := \sum_{j=0}^{k-1} Y_{t_j}(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}), \ k = 1, 2, \ldots, N.$$

Η ανέλιξη $(Y \cdot X)$ ονομάζεται μετασχηματισμός *martingale* της Y ως προς X. Εύκολα παρατηρούμε ότι η $(Y \cdot X)_{t_k}$ είναι επίσης $\mathscr{F}_k$-μετρήσιμη.

Θεώρημα 1.3.2. *Αν η ανέλιξη X είναι martingale και οι Y_k είναι φραγμένες τότε η$(Y \cdot X)$ είναι martingale.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$(Y \cdot X)_{t_{k+1}} - (Y \cdot X)_{t_k} = Y_{t_{k+1}}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}).$$

Επομένως, απο την ιδιότητα 3 των δεσμευμένων αναμενόμενων τιμών

$$\mathbb{E}^{\mu}[(Y \cdot X)_{t_{k+1}} - (Y \cdot X)_{t_k} | \mathscr{F}_k] = Y_{t_k}(\mathbb{E}^{\mu}[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathscr{F}_k]) = Y_{t_k}(\mathbb{E}^{\mu}[(X_{t_{k+1}} | \mathscr{F}_k] - X_{t_k}) = 0$$

και άρα η $(Y \cdot X)$ είναι *martingale*

1.3.2 Μέτρα martingale

Μετα απο αυτήν την εισαγωγή μπορούμε πλέον να δούμε τον τρόπο με τον οποίο τα αδιάφορα κινδύνου μέτρα πιθανότητας γενικεύονται στα διωνυμικά υποδείγματα πολλών περιόδων και πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην τιμολόγηση παραγώγων.

Θεωρούμε πρώτα ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο $(\varphi_k, \psi_k)_{k=0,1,\ldots,N}$ με αξία στους χρόνους $t_k, k = 0, 1, \ldots, N$

$$V_{t_k} = \varphi_k S_{t_k} + \psi B_{t_k}$$

Έχουμε λοιπόν για $k \leq N - 1$

$$\frac{V_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{V_{t_k}}{B_{t_k}} = \varphi_{k+1}\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \varphi_k \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}} + \psi k + 1 - \psi k. \tag{1.12}$$

Απο την συνθήκη αυτοχρηματοδότησης έχουμε ότι

$$\varphi_k S_{t_{k+1}} + \psi_k B_{t_{k+1}} = \varphi_{k+1} S_{t_{k+1}} + \psi_{k+1} B_{t_{k+1}}$$

οπότε

$$\varphi_k \frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \varphi_{k+1}\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} = \psi_{k+1} - \psi_k$$

Οπότε μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την σχέση (1.12) ως εξής:

$$\frac{V_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{V_{t_k}}{B_{t_k}} = \varphi_k(\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}}).$$

Για $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ αθροίζουμε τις παραπάνω σχέσεις για $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ και καταλήγουμε στο

$$\frac{V_{t_n}}{B_{t_n}} = V_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}}) \tag{1.13}$$

Απο τα πάνω καταλήγουμε στο γεγονός ότι η $e^{rt_k}V_{t_k} - V_0$ είναι μετασχηματισμός *martingale*.

Ορισμός 1.3.2. Ένα μέτρο πιθανότητας στον χώρο των τροχιών του πρωτογενούς προϊόντος ως προς το οποίο η προεξοφήμένη αξία του προϊόντος $e^{-rt}S_t$ είναι $martigale$ ονομάζεται αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας η μέτρο $martingale$ ($martingale\, measure$). Από το θεώρημα (1.3.2) και την σχέση που μόλις δείξαμε πάνω προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 1.3.3. *Αν το $\mathbb{Q}$ είναι ένα μέτρο martingale στον Ω τότε η προεξοφλημένη αξία κάθε αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου $e^{-rt_k}V_{t_k}$ είναι ένα $(\mathbb{Q}, \mathscr{F}_k)$-martingale.*

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα παράγωγο με απόδοση στην ωρίμανση

$$U_T = U_T(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_N}).$$

Εχουμε αναφέρει ότι ένας τρόπος να αναπαράγουμε την απόδοση του παραγώγου είναι μέσω μίας αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής $(\phi_k, \psi_k)_{k=0,1\ldots,N-1}$ δηλαδή:

$$U_T = \phi_{N-1}S_{t_N} + \psi_{N-1}B_{t_N}.$$

Θεώρημα 1.3.4. *Αν το $\mathbb{Q}$ είναι ένα μέτρο martingale στον Ω , τότε η σημερινή αξία ενός παραγώγου με απόδοση στην ωρίμανση U_T δίνεται απο την σχεση*

$$U_0 = e^{-rT}\mathbb{E}[U_T]. \tag{1.14}$$

Απόδειξη. Έστω $(\phi_k, \psi_k)_{k=0,1\ldots,N-1}$ η αυτοχρηματοδοτούμενη στρατιγική που αναπαράγει την απόδοση του παραγώγου. Αν ορίσουμε $\phi_N = \phi_{N-1}$ και $\psi_N = \psi_{N-1}$ το χαρτοφυλάκιο $(\phi_k, \psi_k)_{k=1\ldots,N}$ είναι και αυτό χρηματοδοτούμενο. Απο το θεώρημα που μόλις πριν αποδείξαμε η $e^{-rt_k}V_{t_k}$ είναι ένα $(\mathbb{Q}, \mathscr{F}_k)$-$martingale$ και άρα απο το Θ. (1.3.1) έχουμε:

$$U_0 = e^{-rt_0}V_{t_0} = e^{rt_N}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t_N}] = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U_T].$$

Παρατηρούμε ότι η απόδειξη των δύο θεωρημάτων κάνει ελάχιστη χρήση των ειδικών χαρακτηριστικών του διωνυμικού υποδείγματος. Για το θεώρημα (1.3.3) το μόνο που χρησιμοποιήσαμε είναι ότι στην αγορά υπάρχουν δύο προϊόντα και οτι μπορούμε να συναλλασσόμαστε στους χρόνους t_k. Για το θεώρημα (1.14) χρησιμοποιήσουμε μόνο ότι μπορούμε να αναπαράγουμε την απόδοση του παραγώγου με μία αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική. Συνέπεια του παραπάνω ειναι ότι αν μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο $martingale\mathbb{Q}$ στον Ω, τότε δεν είναι απαραίτητο να πάμε σε μία μέθοδο όπως τον αναδρομικό αλγόριθμο για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο. Η σημερινή αξία κάθε παραγώγου ειναι η προεξοφλημένη αναμενόμενη (ως προς το $\mathbb{Q}$) απόδοση στην ωρίμανση. Αν μάλιστα έχουμε να τιμολογήσουμε περισσότερα παράγωγα του ίδιου πρωτογενούς προϊόντος, αντι να ακολουθήσουμε τον αλγοριθμο για κάθε ένα απο αυτά χωριστά μπορούμε να κατασκευάσουμε το $\mathbb{Q}$ και κατόπιν να υπολογίσουμε την προεξοφλημένη αναμενόμενη αξία καθενός παραγώγου ως προς αυτό. Ας δούμε πως μπορεί να βρεθεί ένα τέτοιο μέτρο $martingale$ στον Ω.

Για ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ στον Ω :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(S_{t_{k+1}}|\mathscr{F}_k) = S_{t_k}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\xi_{k+1}|\mathscr{F}_k) &= S_{t_k}(u\mathbb{Q}(\xi_{k+1}=u|\mathscr{F}_k)+d\mathbb{Q}(\xi_{k+1}=d|\mathscr{F}_k)) \\ &= S_{t_k}(d-(u-d)\mathbb{Q}(\xi_{k+1}=u|\mathscr{F}_k)),\end{aligned}$$

και άρα

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-rt_{k+1}}S_{t_{k+1}}|\mathscr{F}_k) = e^{-rt_k}S_{t_k}\cdot(d+(u-d)\mathbb{Q}(\xi_{k+1}=u|\mathscr{F}_k))$$

Απο την παραπάνω σχέση είναι άμεσο το γεγονός ότι για να είναι το $\mathbb{Q}$ μέτρο $martingale$ τότε πρέπει να ισχύει ότι :

$$\mathbb{Q}(\xi_{k+1}=u|\mathscr{F}_k) = \frac{e^{rh}-d}{u-d} = q, \quad \forall k=0,1,\ldots,N-1 \tag{1.15}$$

Υπενθυμίζουμε ότι απο την υπόθεση $d < e^{rh} < u$ που επιβάλλει η αρχή μη-επιτηδειότητας προκύπτει ότι $0 < q < 1$. Για $k = 0$ η (1.15) δίνει την κατανομή της ξ_1 κάτω απο το $\mathbb{Q}$: η ξ_1 παίρνει την τιμή u με $\mathbb{Q}$-πιθανότητα q και την τιμή d με $\mathbb{Q}$-πιθανότητα $1-q$. Για $k=1$ η συνθήκη(1.15) δίνει την κατανομή κατω απο το $\mathbb{Q}$ της ξ_2 δεδομένης της ξ_1 : η ξ_2 είναι ανεξάρτητη της ξ_1 και έχει την ίδια κατανομή Επαγωγικά συμπεραίνει κανένας εύκολα ότι αν ο Ω εφοδιαστεί με ένα μέτρο πιθανότητας που να ικανοποιεί την συνθήκη τότε οι $\{\xi_k\}_{j=1,\ldots,N}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή.

Επομένως η συνθήκη (1.15), η οποία είναι αναγκαία και ικανή ώστε ένα μέτρο $\mathbb{Q}$ στον Ω να είναι μέτρο $martingale$, καθορίζει την απο κοινού κατανομή των $\{\xi_k\}_{j=1,\ldots,N}$ και άρα την $\mathbb{Q}$ -πιθανότητα κάθε τροχιάς στον Ω. Π.χ

$$\mathbb{Q}(\{S_{t_0}=S_0, S_{t_1}=S_0u,\ldots,S_{t_{N-1}}=S_0u^{N-2}d^2\}) = q^{N-2}(1-q)^2.$$

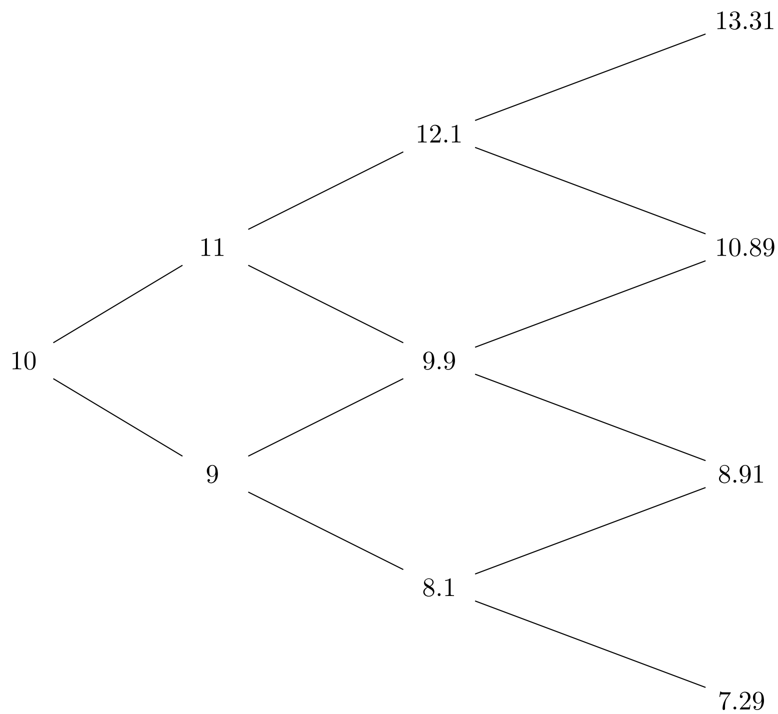
Βλέπουμε ότι για κάθε τροχία $\omega\in\Omega$ η $\mathbb{Q}(\omega)$ υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και η $\mathbb{P}(\omega)$, αποδίδοντας σε κάθε κόμβο πιθανότητα q να ανέβουμε προς τα πάνω και $1-q$ προς τα κάτω. Επειδή $0<q<1$ κάθε τροχιά που έχει θετική $\mathbb{P}$-πιθανότητα έχει επίσης θετική $\mathbb{Q}$-πιθανότητα και το αντίστροφο. Δηλαδή τα μέτρα $\mathbb{Q},\mathbb{P}$ είναι ισοδύναμα. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι επειδή η ιδιότητα (1.15) επιβάλλει $\mathbb{Q}$ πιθανότητα σε κάθε τροχιά, το μέτρο $\mathbb{Q}$ που κατασκευάσαμε είναι το μοναδικό μέτρο $martingale$ στον Ω. Οπώς εχουμε ήδη παρατηρήσει για μέτρα που κατασκευάζουμε με τέτοιον τροπο έτσι και το μέτρο $\mathbb{Q}$ δεν εξαρτάται απο την παράμετρο p του μοντέλου. Ενας τρόπος για να επαληθεύσουμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι μέτρο $martingale$ είναι ο εξης.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{t_{k+1}}|\mathscr{F}_k] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{t_k}\xi_{k+1}|\mathscr{F}_k] \\ &= S_{t_k}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi_{k+1}|\mathscr{F}_k] \\ &= S_{t_k}(qu+(1-q)d) \\ &= S_{t_k}(u\frac{e^{rh}-d}{u-d}+d\frac{u-e^{rh}}{u-d}) \\ &= S_{t_k}e^{rh}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη με $e^{rt_{k+1}}$ και καταλήγουμε σε:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{rt_{k+1}}S_{t_{k+1}}|\mathscr{F}_k] = e^{rt_{k+1}}S_{t_k}e^{rh} = e^{rt_k}S_{t_k}, \forall k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

Η σχέση (1.14) είναι ένας κλειστός τύπος για την σημερινή τιμή που επιβάλλεται σε ένα παραγωγο απο την αρχή της μη επιτηδειότητας. Η εφαρμογή του είναι απλή όπως θα παρατηρήσουμε στα επόμενα παραδείγματα.
Παράδειγμα 1
Έστω ότι έχουμε θετική θέση σε ευρωπαϊκό παράγωγο προϊόντος με αρχική αξία $S_0 = 10\$$ με τιμή άσκησης $K = 9\$$. Θα κατασκευάσουμε το διωνυμικό μοντέλο για $N = 3$. Υποθέτουμε ότι $u = 1.1, d = 0.9, e^{rh} = 1.05$. Έχουμε λοιπον ότι:



ισχύει επίσης ότι

$$q = \frac{e^{rh} - d}{u - d} = 0.75$$

Υπολογίζουμε την πιθανότητα $\mathbb{Q}$ κάθε τροχιάς

- $\mathbb{Q}(\omega_1) = \mathbb{Q}(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (u, u, u)\}) = q^3 = 0.42$
- $\mathbb{Q}(\omega_2) = \mathbb{Q}(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (u, u, d)\}) =$
- $\mathbb{Q}(\omega_3) = \mathbb{Q}(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (u.d.u)\}) =$
- $\mathbb{Q}(\omega_4) = \mathbb{Q}(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (d, u, u)\}) = q^2(1 - q) = 0.14$

- $\mathbb{Q}(\omega_5) = \mathbb{Q}(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (u, d, d)\}) =$
- $\mathbb{Q}(\omega_6) = \mathbb{Q}(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (d, u, d)\}) =$
- $\mathbb{Q}(\omega_7) = \mathbb{Q}(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (d, d, u)\}) = q(1-q)^2 = 0.05$
- $\mathbb{Q}(\omega_8) = \mathbb{Q}(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (d, d, d)\}) = (1-q)^3 = 0.02$

Ας χρησιμοποιήσουμε τωρα το μέτρο *martingale* για να για να υπολογίσουμε την αρχική αξία του δικαιώματος αν ο χρόνος ωρίμανσης είναι $3h$.

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T] = e^{-3rh}\sum_{j=1}^{8} V_T(\omega_i)\mathbb{Q}(\omega_i) = (1.05)^{-3}((13.31-9)^+ \times 0.42 +$$

$$3 \times (10.89-9)^+ \times 0.14 + 3 \times (9-8.91)^+ \times 0.05 + 0.02 \times (7.29-9)^+ =$$
$$= 2.23$$

Αν εξετάσουμε την γενική περίπτωση για N βήματα τότε παρατηρούμε ότι υπάρχουν

1 τροχιά για την οποία $S_T = S_0 u^N$ στην οποία το μέτρο $\mathbb{Q}$ αποδίδει πιθανότητα q^N,

N τροχιές για τις οποίες $S_T = S_0 u^{N-1} d$ με πιθανότητα $q^{N-1}(1-q)$,

$\binom{N}{2}$ τροχιές για τις οποίες $S_T = S_0 u^{N-2} d^2$ με πιθανότητα $q^{N-2}(1-q)^2$,

$\vdots$

1 τροχιά για την οποία $S_T = S_0 d^N$ στην οποία το $\mathbb{Q}$ αποδίδει πιθανότητα $(1-q)^N$

και άρα για την αρχική του αξία ισχύει

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)] = e^{-rT}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} q^{N-k}(1-q)^k f(S_0 u^{N-k} d^k). \tag{1.17}$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο διακριτός τύπος *Black Scholes*.

1.4 Ορισμός των u,d με την βοήθεια του λογαριθμοκανονικού μοντέλου για μετοχές.

Ενω έχουμε μιλήσει εκτενώς για το πως εκφράζεται η αξία ενος παραγώγου μέσω του διωνυμικού υποδείγματος δεν έχουμε μιλήσει για το πως βρίσκουμε τις παραμέτρους του μοντέλου αυτού συγκεκριμένα τις u, d. Στην πραγματικότητα ο

τρόπος δεν είναι μοναδικός και οι παράμετροι μπορούν να οριστούν μέσω και εμπειρικων και θεωρητικών τρόπων. Εμείς θα ορίσουμε τις παραμέτρους μέσω ενός άλλου μοντέλου, του λογαριθμοκανονικού μοντέλου.
Το λογαριθμοκανονικό μοντέλο εκφράζει την πεποίθηση ότι η αξία ενός προϊόντος σε κίνδυνο είναι μία στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου και ότι σε κάθε χρονική στιγμή ακολουθεί την ομώνυμη κατανομή. Για μία μεταβλητή X που ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή ισχυει ότι η $Y = logX$ ακολουθεί κανονική κατανομή δηλαδή $X = e^Y$ οπου $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Το μοντέλο αυτό εγινε ευρέως διαδεδομένο στις αρχές του 70 απο τους $FischerBlack$, $MytonScholes$ και $RobertMerton$ των οποίων η εκδοχη του μοντέλου αποτέλεσε καθοριστικό εργαλείο για την χρηματοοικονομία και μάλιστα απέφερε και το $Nobel$ οικονομικών στους $Merton, Scholes$ δύο χρόνια μετα τον θάνατο του $Black$, ο οποίος αν ζούσε λογικά θα βραβευόταν και ο ίδιος. Απο το μοντέλο αυτό, το οποίο είναι συνεχές σε αντίθεση με το διωνυμικό, θα δανειστούμε κάποιες παραμέτρους οι οποίες θα μας χρειαστούν στην προσπάθεια να ορίσουμε το συνεχές όριο του διωνυμικού μοντέλου. Συγκεκριμένα ορίζουμε τις

1. μ : Η αναμενόμενη απόδοση του προϊόντος σε κίνδυνο ανα χρόνο
2. σ : $(Volatility)$ Η αστάθεια του προϊόντος ανα χρόνο

Το μοντέλο των $Black, Scholes$, οπως έχει επικρατήσει να λέγεται, θεωρεί ότι η μέση τιμή της απόδοσης σε χρόνο Δt είναι $\mu\Delta t$ και η τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{\Delta t}$ έτσι ώστε

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t).$$

Την Αστάθεια θα την συμβολίζουμε απο δώ και πέρα με σ και για να μην την μπερδέψουμε με την τυπική απόκλιση των μεταβλητών του διωνυμικου την τελευταία θα την συμβολίζουμε με το αγγλικο s. Ας αναλύσουμε λίγο την κάθε μία απο αυτές τις παραμέτρους στις οποίες προστίθεται και το επιτόκιο ελευθέρου κινδύνου r το οποίο είχαμε ορίσει στην αρχή.

Η Αναμενόμενη απόδοση

Η αναμενόμενη απόδοση μ εξαρτάται άμεσα απο τον κίνδυνο της μετοχής. Δηλαδή όσο μεγαλύτερο ρίσκο αποτελεί η επενδύση σε μία μετοχή τόσο μεγαλύτερη είναι η αναμενόμενη απόδοση. Η παράμετρος αυτή, που διαφερει προφανώς απο προϊόν σε προϊόν έχει ένα μεγάλο ελάττωμα. Για τον υπολογισμό της χρειάζεται πληροφορία μεγάλης χρονικής περιόδου για να μπορούμε να έχουμε ένα αποδεκτά μικρό αναμενόμενο σφαλμα. Πχ αν το σ μιας μετοχής είναι στο 25% και έχουμε πληροφορία 25 χρόνων η τυπική απόκλιση απο την εκτίμηση του μ είναι της τάξης του $\sigma/\sqrt{T} = 5\%$ το οποίο δεν είναι ιδιαίτερα μικρό μέγεθος. Αυτο συμβαίνει γιατι αν θεωρήσουμε κατα τα γνωστά τα S_T, S_0 τότε σύμφωνα με το λογαριθμοκανονικό μοντέλο ισχύει

$$S_T = S_0 e^{XT}$$

οπου $X \sim N(\mu - \sigma^2/2, \sigma^2/T)$ και έτσι για να είναι κοντά η ιστορία της μεταβλητής X, την οποία είχαμε την δυνατότητα να παρατηρήσουμε, με το μ πρέπει η τυπική αποκλιση $\sigma/\sqrt{T}$ να φθίνει το οποίο συμβαίνει μόνο για μεγάλα T. Αυτό καθιστά την μ μια όχι ιδιαίτερα εύχρηστη παράμετρο. Τα καλά νέα σε αυτό είναι ότι, όπως θα δούμε, το συνεχές όριο του διωνυμικού μοντέλου δεν επηρεάζεται απο την παράμετρο αυτή.

Η Αστάθεια(Volatility)

Η αστάθεια σ ενός προϊόντος σε κίνδυνο είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας μας για την απόδοση του προϊόντος. Συνηθίζεται αυτό το μέγεθος να κυμαίνεται ανάμεσα στα ποσοστά 15% και 60%.
Πιο πάνω για το λογαριθμικό μοντέλο ορίσαμε την συνεχή τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή. Απο της παραμέτρους της κατανομής της παρατηρούμε ότι η αστάθεια του προϊόντος εκφράζεται ώς την τυπική απόκλιση της απόδοσης του προϊόντος σε ένα χρόνο όταν η απόδοση εκφράζεται με συνεχείς τρόπους. Για ένα μικρό Δt παρατηρούμε ότι το μέγεθος $\sigma^2\Delta t$ είναι κατα προσέγγιση ίσο με την διασπορά του ποσοστού αλλαγής της αξίας του προϊόντος σε χρόνο Δt. Αυτό σημαίνει ότι το μέγεθος $\sigma\sqrt{\Delta t}$ είναι κατα προσέγγιση ίσο με την τυπική απόκλιση σε χρόνο Δt. Υποθέτουμε ότι για ένα προϊόν ισχυει $\sigma = 0.3$ και $S_0 = 100\$$. Η τυπική απόκλιση του ποσοστού της αξίας του σε ένα μήνα είναι κατα προσέγγιση είναι

$$30 \times \sqrt{\frac{1}{12}} = 8.66\%$$

Αν η αξία ανέβει σε ποσοστό κατα μία τυπική απόκλιση σε ένα μήνα τότε θα είναι ίση με $8,6\$$.
Η αβεβαιότητα για μία μελλοντική τιμή, έτσι όπως μετριέται απο την τυπική απόκλιση, αυξάνεται (έστω και προσεγγιστικά) ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα της χρονικής απόστασης της στιγμής που θέλουμε να δούμε. Δηλαδή αν για μία χρονική περίοδο έχουμε μια τυπική απόκλιση έστω s τότε για τετραπλάσια χρονική περίοδο έχουμε διπλάσια τυπική απόκλιση.

Αλλα πώς υπολογίζουμε το σ; Ένας τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι χρησιμοποιώντας το ιστορικό του προϊόντος. Για να εκτιμήσουμε το σ εμπειρικά, η αξία του προϊόντος συνήθως παρατηρείται σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα. Ορίζουμε:

- $n + 1$: Ο αριθμός των παρατηρήσεων
- S_i : Η αξία του προϊόντος στο τέλος του διαστήματος $i-$οστού διαστήματος για $i = 0, 1, \ldots, n$
- τ : Το χρονικό διάστημα σε χρόνους

και έστω

$$u_i = ln(\frac{S_i}{S_{i-1}}) \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης u_i έστω s δίνεται απο τον τύπο

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2}$$

Οπώς έχουμε πεί η τυπική απόκλιση των u_i είναι $\sigma\sqrt{\tau}$ και άρα αυτή ειναι η ποσότητα την οποία εκτιμάει το s. Επόμενο είναι ότι η εκτίμηση $\tilde{\sigma}$ του σ είναι ίση με

$$\tilde{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}.$$

Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης είναι $\tilde{\sigma}/\sqrt{2n}$.
Το να διαλέξουμε το βέλτιστο πλήθος παρατηρήσεων είναι ιδιαίτερη διαδικασία καθώς ενώ μεγαλύτερο πλήθος δίνει μεγαλύτερη ακρίβεια αλλα το σ αλλάζει ανάλογα με τον χρόνο και έτσι είναι πιθανό παλιότερες παρατηρήσεις να μην είναι χρήσιμες για μελλοντικές προβλέψεις. Ένας συμβιβασμός που φαίνεται να λειτουργεί είναι να χρησιμοποιήσουμε πληροφορία απο τις τελευταίες $90 - 180$ μέρες.

Εφαρμογή στο διωνυμικό μοντέλο

Όπως αναφέραμε προηγουμένως σε ένα βήμα απο το 0 στο δt η αναμενόμενη τιμή ενός προϊόντος αρχικής αξίας S_0 είναι

$$pS_0u + (1-p)S_0d$$

οπού p η πιθανότητα-παράμετρος του μέτρου $\mathbb{P}$.
Απο το λογαριθμοκανονικό μοντέλο θεωρούμε όμως ότι η αναμενόμενη αξία είναι $S_0e^{\mu\delta t}$. Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις καταλήγουμε στην συνθήκη

$$p = \frac{e^{\mu\delta t} - d}{u - d}$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε πριν η αστάθεια μιας μετοχής έχει οριστεί έτσι ώστε η τυπική απόκλιση της απόδοσης της μετοχής σε ένα μικρό διάστημα δt να ειναι $\sigma\sqrt{\delta t}$ και έτσι η αντίστοιχη διασπορά να είναι $\sigma^2\delta t$. Στο διωνυμικό υπόδειγμα σε ένα βήμα του δέντρου η διασπορά υπολογίζεται να είναι ίση με

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2$$

Εξισώνοντας πάλι τις δύο διαφορετικές εκφράσεις καταλήγουμε ότι

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = \sigma^2\delta t$$

εφαρμόζοντας τωρα την πρώτη συνθήκη

$$e^{\mu\delta t}(u+d) - ud - e^{2\mu\delta t} = \sigma^2\delta t$$

Τέλος εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα $Taylor$ του e^x γύρω απο το 0 και αγνοόντας τους όρους τάξης 2 και πάνω τότε μία λύση είναι η εξής:

- $u = e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}}$
- $d = e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}$

Σε προηγούμενη ενότητα ορίσαμε το διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων όπου η αξία ενος προϊόντος σε κίνδυνο είναι μία στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου της μορφής

$$S_{t_k} = S_0 \prod_{j=1}^{k} \xi_j \tag{1.18}$$

οπου τα ξ_j είναι ισότιμες ανεξάρτητες μεταβλητές με κατανομή

$$\xi_k = \begin{cases} u & \text{με πιθανότητα}\, p \\ d & \text{με πιθανότητα}\ 1-p \end{cases} \tag{1.19}$$

Οπώς είπαμε θα αντικαταστήσουμε τα u, d ώς εξής

- $u = e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}}$
- $d = e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}$

οπου $\delta t = T/n$ οπου T ο χρόνος ωρίμανσης και n ο αριθμός των περιόδων του διωνυμικού μοντέλου.
Προηγουμένως είδαμε οτι αν μπορέσουμε να ορίσουμε ένα μέτρο $martingale$ για να χρησιμοποιήσουμε στο διωνυμικό μοντέλο τότε μπορούμε να τιμολογήσουμε παράγωγα μέσω της προ εξοφλημένης αναμενόμενης απόδοσης τους στην ωρίμανση. Κατι ανάλογο θα κάνουμε για τα καινούργια u, d. Οπώς έχουμε πεί για να είναι ένα μέτρο $martingale$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$q = \frac{e^{rT/n} - d}{u - d} = \frac{e^{rT/n} - e^{\mu T/n - \sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\mu T/n + \sigma\sqrt{T/n}} - e^{\mu T/n - \sigma\sqrt{T/n}}}$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του e^x σε σειρά $Taylor$ γύρω απο το 0 μπορούμε να μετασχηματίσουμε το μέτρο ως εξής

$$q = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\delta t}\frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}) + O(\delta t^2)$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\delta t = T/n, \quad n = 1, 2, \ldots$

Πλέον μπορούμε να ορίσουμε το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε:

Θέλουμε να παρατηρήσουμε την οριακή συμπεριφορά για $n \to \infty$ των $\xi_n(t)$ οπου

$$\xi_n = \begin{cases} e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}} & \text{με πιθανότητα}\, q \\ e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}} & \text{με πιθανότητα}\ 1-q \end{cases} \tag{1.20}$$

Παρατηρούμε ότι η κατανομή των ξ_n αλλάζει για κάθε n ως προς τις πιθανές τιμές των ξ και ώς προς το μέτρο q. Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με θέματα Θεωρίας Πιθανοτήτων με στόχο να πάρουμε αρκετά εργαλεία για να μπορέσουμε να περιγράψουμε την οριακή συμπεριφορά των μεταβλητών μας.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Πιθανοτήτων

Εισαγωγή Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε το ερώτημα το οποίο θέλουμε να απαντήσουμε. Συγκεκριμένα αυτό ήταν τι συμβαίνει στο διωνυμικό μοντέλο όταν $N \to \infty$. Ενας άλλος τρόπος για να θέσουμε αυτήν τη ερώτηση θα ήταν να ζητήσουμε να μάθουμε το συνεχές όριο του διακριτού αυτού μοντέλου. Για να απαντήσουμε η μαθηματική χρηματοοικονομική θεωρία δεν μπορεί πλέον να μας βοηθήσει. Ο ρόλος της σταματάει στο να μας ορίσει το πρόβλημα. Αντίθετα ο κλάδος ο οποίος κατέχει την απάντηση είναι η Θεωρία Πιθανοτήτων. Για τον λόγο αυτό θα ασχοληθούμε με την μελέτη κάποιων πτυχών αυτού του κλάδου και κυρίως με την έννοια της ασθενής σύγκλισης μέτρων πιθανότητας. Θα ορίσουμε τι σημαίνει η σύγκλιση για μία κατανομή θα δούμε διαφορετικές εκφράσεις της και επίσης θα δούμε έννοιες συνδεδεμένες με αυτήν όπως η σφιχτότητα και η σχετική συμπάγεια. Τέλος θα μελετήσουμε τον χώρο $C[0,1]$ ο οποίος θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος, θα δούμε πως μεταφράζεται η ασθενής σύγκλιση σε αυτόν και θα παρούσιάσουμε τον ρόλο που μπορει να παίξει στην αναζήτηση σύγκλισης διακριτών μοντέλων.
Σε αυτό το κεφάλαιο ακολουθούμε την συλλογιστική πορεία του βιβλίου του *Patrick Billingsley* με τίτλο *Convergence of Probability Measures* και παρεκκλίνουμε όσο χρειάζεται για να εξυπηρετήσουμε τους σκοπούς μας.

2.1 Ασθενής σύγκλιση

2.1.1 Ασθενής σύγκλιση και ιδιότητες

Πρωτού αρχίσουμε να παραθέτουμε τα θεωρήματα που θα χρειαστούμε και να κατασκευάζουμε την λύση, ας μιλήσουμε λίγο για τον χώρο στον οποίο θα εργαστούμε. Έστω S μετρικός και έστω $\mathscr{T}$ να ειναι η κλάση των *Borel* συνόλων στο S. Η $\mathscr{T}$ είναι μία σ-άλγεβρα (βλ.προήγουμενο κεφάλαιο για ορίσμο σ-αλγεβρας) που παράγεται απο τα άνοικτα σύνολα και άρα είναι η μικρότερη σ-αλγεβρα που τα περιέχει. Στην κλάση αυτή θα οριζουμε μέτρα πιθανότητας τις ιδιότητες των οποίων θα μελετούμε. Για τα μέτρα πιθανοτήτων ορισμένα στην κλάση αυτή ισχυει ότι

είναι μη αρνητικά και ότι αποτελούν αριθμήσιμα προσθετικές συνολοσυναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $P(S) = 1$.
Έστω μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}_n, \mathbb{P}$, ορισμένα ως άνωθεν, τα οποία ικανοποιούν την συνθήκη

$$\int_S f dP_n \to \int_s f dP$$

για κάθε φραγμένη, συνεχή και πραγματική συνάρτηση f στον S. Τότε λέμε ότι το $\mathbb{P}_n$ **συγκλίνει ασθενώς** στο $\mathbb{P}$ και θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbb{P}_n \implies \mathbb{P}$. Αυτή ειναι λοιπόν η έννοια την οποία θέλουμε να αναπτύξουμε και για τον λόγο αυτό αρχικά θα παραθέσουμε μερικά θεωρήματα τα οποία θα μας επιτρέψουν να το πετύχουμε.

Θεώρημα 2.1.1. *Κάθε μέτρο πιθανότητας στον $(S,\mathscr{T})$ είναι κανονικό. Δηλαδή αν $A \in \mathscr{T}$ και $\epsilon > 0$, τοτε υπάρχει ένα κλειστό F και ένα ανοικτό G τέτοια ώστε $F \subset A \subset G$ και $\mathbb{P}(G - f) < \epsilon$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την μετρική στον S ως $\rho(x, y)$ και την απόσταση απο το x στο A ως $\rho(x, A)$. Εάν το A είναι κλειστό, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $F = A$ και $G = \{x : \rho(x, A) < \delta\}$ για κάποιο δ, δεδομένο οτι τα σύνολα G_δ καταλήγουν στο A για $\delta \to 0$. Οπότε το μόνο που πρέπει να δειχθεί είναι οτι η κλάση $\mathscr{G}$ των $Borel$ συνόλων με την δοσμένη ιδιότητα αποτελούν σ-άλγεβρα.
Έστω σύνολα $A_n \in \mathscr{G}$, διαλέγουμε κλειστά σύνολα F_n και ανοικτά σύνολα G_n τέτοια ώστε $F_n \subset A_n \subset G_n$ και $\mathbb{P}(G_n - F_n) < \epsilon/2^{n+1}$. Εάν $G = \bigcup_n G_n$ και εάν $F = \bigcup_{n \leq n_0} F_n$ με το n_0 να έχει επιλεχθεί ώστε $\mathbb{P}(\bigcup_n F_n - F) < \epsilon/2$,τότε $F \subset \bigcup_n A_n \subset G$ και $\mathbb{P}(G - F) < \epsilon$. Οπότε η $\mathscr{G}$ είναι κλειστή σε αριθμήσιμες ενώσεις. Επίσης είναι κλειστή στην συμπληρωματικότητα καθώς έυκολα παρατηρείται οτι αν $A \in \mathscr{G}$ τότε $A^c \in \mathscr{G}$ με την βοήθεια των συμπληρωματικών των F, G. Οπότε η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω F κλειστό και ένα ϵ θετικό. Τότε υπάρχει $f \in C(S)$ τέτοιο ώστε $f(x) = 1$ άν $x \in F$, $f(x) = 0$ αν $\rho(x, F) \geq \varepsilon$, και $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε x. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να διαλεχθεί ώστε να είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Ορίζουμε συνεχή συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής φ τέτοια ώστε

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν}\, t \leq 0 \\ 1 - t & \text{αν}\ 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{αν}\, 1 \geq t \end{cases} \tag{2.1}$$

Αν

$$f(x) = \varphi(\frac{1}{\varepsilon}\rho(x, F)), \tag{2.2}$$

τότε η f έχει τις ιδιότητες που θέλουμε και είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

Ορισμός 2.1.1. Ενα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ στον $(S, \mathscr{T})$ θα λέγεται σφιχτό αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο K τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(K) > 1 - \varepsilon$.

Ένα μέτρο $\mathbb{P}$ είναι σφιχτό αν και μόνο αν έχει σ-συμπαγές στήριγμα δηλαδή αν η κλειστότητα των δυνατών τιμών των τυχαίων μεταβλητών είναι συμπαγης και ανήκει στην σ-άλγεβρα.Απο το πρώτο θεώρημα που διατυπώσαμε φαίνεται ότι το μέτρο είναι σφιχτό αν και μόνο αν για κάθε $A \in \mathscr{T}$ το $\mathbb{P}(A)$ είναι το *supremum* των $\mathbb{P}(K)$ πανώ στα συμπαγή υποσύνολα K του A.

Θεώρημα 2.1.3. *Εάν ο S έιναι διαχωρίσιμος και πλήρης τότε κάθε μέτρο πιθανότητας στον $(S, \mathscr{T})$ είναι σφιχτό.*

Απόδειξη. Δεδομένου οτι ο S είναι διαχωρίσιμος υπάρχει για κάθε n μια ακολουθία $A_{n1}, A_{n2}, ...$ απο ανοικτές $1/n$-σφαίρες που τον καλύπτουν. Διαλέγουμε i_n, τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(\bigcup_{i \leq i_n} A_{ni}) > 1 - \varepsilon/2^n$. Απο την υπόθεση της πληρότητας, το πλήρως φραγμένο σύνολο $\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{i \leq i_n} A_{ni}$ έχει συμπαγή κλειστότητα K.Το θεώρημα ολοκληρώνεται αφού άμεσα προκύπτει ότι $\mathbb{P}(K) > 1 - \varepsilon$.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει χρήσιμες συνθήκες οι οποίες είναι ισάξιες της ασθενής σύγκλισης. Μάλιστα κάθε μία απο αυτές θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν ορισμός της. Πρώτα όμως δίνεται ενας ορισμός που θα μας φανεί χρήσιμος για την διατύπωση του.

Ορισμός 2.1.2 (Σύνολα $\mathbb{P}$ - Συνέχειας ($\mathbb{P}$ - *Continuity Sets*))**.** Ένα σύνολο $A \in \mathscr{T}$ του οποίου το σύνορο ∂A ικανοποιεί $\mathbb{P}(\partial A) = 0$ λέγεται $\mathbb{P}$ - συνεχές. (Το σύνορο ∂A είναι κλειστό και ανήκει στην $\mathscr{T}$)

Θεώρημα 2.1.4 (Θεώρημα *Portmanteau*)**.** *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

1. $\mathbb{P}_n \implies \mathbb{P}$.
2. $\lim_n \int f dP_n = \int f dP$ *για κάθε φραγμένη , ομοιόμορφα συνεχής και πραγματική f.*
3. $\lim\ \sup_n \mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}(F)$ *για κάθε F κλειστό.*
4. $\lim\ \inf_n \mathbb{P}_n(G) \geq \mathbb{P}(G)$ *για κάθε G ανοικτό.*
5. $\lim_n \mathbb{P}_n(A) = \mathbb{P}(A)$ *για κάθε A $\mathbb{P}$ - συνεχές σύνολο.*

Απόδειξη. Το $(i) \rightarrow (ii)$ είναι άμεσο.
$(ii) \rightarrow (iii)$:Υποθέτουμε ότι το (ii) ισχύει και έστω ένα F είναι κλειστό. Έστω $\delta > 0$. Για αρκετά μικρό ε, το $G = \{x : \rho(x, F) < \varepsilon\}$ ικανοποιεί την ανισότητα $\mathbb{P}(G) < \mathbb{P}(F) + \delta$, δεδομένου ότι τα σύνολα της μορφής του G καταλήγουν στο F για $\varepsilon \to 0$. Αν η $f(x)$ ορίζεται με τον τρόπο της (2.2) , τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο S, με $f(x) = 1$ στο F, $f(x) = 0$ στο G^c και $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε x. Απο υπόθεση ξέρουμε οτι η δεύτερη ιδιότητα ισχύει και έτσι έχουμε $\lim_n \in f dP_n = \int f dP$ το οποίο σε συνδυασμό με τις σχέσεις

$$P_n(F) = \int_F f dP_n \leq \int f dP_n$$

και
$$\int f dP = \int_G f dP \leq P(G) < P(F) + \delta,$$
μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι
$$\limsup_n P_n(F) \leq lim_n \int f dP_n = \int f dP < P(F) = \delta$$
Επειδή το παραπάνω ισχύει για κάθε δ καταλήγουμε στο (iii)
$(iii) \to (i)$: Υποθέτουμε οτι η (iii) ισχύει και οτι $f \in C(S)$.Θα δείξουμε πρώτα ότι
$$\limsup_n \int f dP_n \leq \int f dP. \tag{2.3}$$
Μετατρέποντας την f γραμμικά (με έναν θετικό συντελεστή για τον πρωτοβάθμιο όρο), θα ελατώσσουμε το πρόβλημα στην περίπτωση την οποία $0 < f(x) < 1$ για κάθε x. Για έναν ακέραιο k, θέτουμε F_i το κλειστό σύνολο $F_i = \{x : i/k \leq f(x)\}, i = 0, 1, \ldots, k$. Αφού $0 < f(x) < 1$, έχουμε
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k} \mathbb{P}(x : \frac{i-1}{k}) \leq f(x) < \frac{i}{k} \leq \inf f dP < \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} \mathbb{P}(x : \frac{i-1}{k}) \leq f(x).$$
Το δεξί άθροισμα είναι :
$$\sum_{i}^{k} [\mathbb{P}(F_{i-1} - \mathbb{P}(F_i)] = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(F_i).$$
Κανόντας μια αντίστοιχη μετατροπή για το άθροισμα στα αριστερά καταληγουμε ότι
$$\frac{1}{k} \sum i - 1^k [\mathbb{P}(F_i) \leq \int f dP < \frac{1}{k} (1 + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(F_i).$$
Δεδομένου ότι ισχύει η (iii), τοτε $\limsup_n \int f dP \leq \frac{1}{k} + \int f dP$. για κάθε i και έτσι
$$\limsup_n \int f dP_n \leq \frac{1}{k} + \int f dP.$$
Για $k \to \infty$ καταλήγουμε πάλι στο
$$\limsup_n \int f dP_n \leq \int f dP. \tag{2.4}$$
Εφαρμόζοντας το απο πάνω στο $-f$ καταλήγουμε στο $\liminf_n \int f dP_n \geq \int f dP$, και απο τα δύο μαζί αποδεικνύουμε την ασθενή σύγκλιση.
$(iii) \to (iv)$: Άμεσο. $(iii) \to (v)$:Έστω A^o το εσωτερικό του A, και $\overline{A}$ η κλειστότητα του. Αν ισχύει (iii) τότε ισχύει (iv), και έτσι
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{A}) \geq \limsup_n \mathbb{P}_n(\overline{A}) \geq \limsup_n \mathbb{P}_n(A) = \\ \geq \liminf_n \mathbb{P}_n(A) \geq\geq \liminf_n \mathbb{P}_n(A^o) \geq \mathbb{P}(A^o). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Αν $\mathbb{P}(\partial A) = 0$, τότε έχουμε $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(A^o)$ και έτσι προκύπτει το ζητούμενο.
$(v) \to (iii)$: Δεδομένου ότι $\partial\{x : \rho(x, F) \leq \delta\}$ περιέχεται στο $\{x : \rho(x, F) = \delta\}$, αυτα τα σύνορα είναι διάχωρα για συγκεκριμένο δ , και έτσι μονό αριθμήσιμο πλήθος απο αυτά μπορούν να έχουν θετικό μέτρο $\mathbb{P}$. Επομένως ,για κάποια ακολουθία θετικών δ_k που συγκλίνει στο 0, τα σύνολα $F_k = \{x : \rho(x, F) \leq \delta_k\}$ έιναι σύνολα $\mathbb{P}-$συνέχειας. Αν ισχύει η (v) , τοτε $\limsup_n \mathbb{P}_n(F) \leq \lim_n \mathbb{P}_n(F_k) = \mathbb{P}(F_k)$ για κάθε k. Αν το F είναι κλειστό τοτε $F_k \to F$ και έτσι πρκύπτει το ζητούμενο ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Μερικές φορές για να αποδείξουμε την ασθενή σύγκλιση ενός μέτρου αρκετό είναι να δειξουμε ότι ισχύει $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$ για κάποια ιδιαίτερη κλάση συνόλων A.

Θεώρημα 2.1.5. *Έστω $\mathscr{U}$ μια υποκλάση του $\mathscr{T}$ τέτοια ώστε (1) η $\mathscr{U}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και (2) κάθε ανοικτό σύνολο του S είναι είτε πεπερασμένη είτε αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathscr{U}$. Αν $\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}(A)\ \forall A \in \mathscr{U}$, τότε $\mathbb{P}_n \implies \mathbb{P}$.*

Απόδειξη. Έστω $A_1, \ldots, A_m$ σύνολα που ανήκουν στην $\mathscr{U}$. Απο υπόθεση οι τομές τους τοτε θα ανήκουν και αυτες στην $\mathscr{U}$. Τότε απο γνωστή φόρμουλα έχουμε

$$P_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_i \mathbb{P}_n(A_i) - \sum_{ij} \mathbb{P}_n(A_i A_j) + \sum_{ijk} \mathbb{P}_n(A_i A_j A_k) - \ldots$$

$$\to \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{ij} \mathbb{P}(A_i A_j) + \sum_{ijk} \mathbb{P}_(A_i A_j A_k) - \cdots =$$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)$$

Έστω G ανοικτό. Απο υπόθεση $G = \bigcup_i A_i$ για μία ακολουθία $\{A_i\}$ στοιχείων της $\mathscr{U}$. Για ε̈0, διαλέγουμε m τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(\bigcup_{i<m} A_i > \mathbb{P}(G) - \varepsilon$. Απο την άνω σχέση έχουμε ότι $\mathbb{P}(G) - \varepsilon < \mathbb{P}(\bigcup_i \leq A_i) = \lim_n \mathbb{P}_n(\bigcup A_i) \leq \liminf_n \mathbb{P}_n(G)$. Επειδή ισχύει για κάθε ε έχουμε το αποτέλεσμα.

Πόρισμα του θεωρήματος (2.1.5) Έστω $\mathscr{U}$ μια κλάση συνόλων τέτοια ώστε (1) η $\mathscr{U}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και (2) για κάθε x στο S και για κάθε θετικο ε υπάρχει ένα A στη $\mathscr{U}$ με $x \in A^o \subset A \subset S(x, \varepsilon)$ οπου $S(x, \varepsilon)$ η σφαίρα με κεντρο x και ακτινα ε. Αν ο χώρος S είναι διαχωρίσιμος και άν $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$ για κάθε A στη $\mathscr{U}$ τότε $\mathbb{P}_n \implies \mathbb{P}$.

Απόδειξη. Η δεύτερη συνθήκη δηλώνει ότι για κάθε x ενός ανοικτού συνόλου G, ισχύει $x \in A^o \subset A \subset G$ για κάποιο A στη $\mathscr{U}$. Αφου ο S είναι διαχωρίσιμος υπαρχει στην $\mathscr{U}$ μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία $\{A_i\}$ τέτοια ώστε $G \subset \bigcup_i A_i^o$ και $A_i \subset G$ απο το οποίο προκύπτει $G = \bigcup_i A_i$ και άρα η $\mathscr{U}$ ικανοποιει τις υποθέσεις του θεωρήματος (2.1.5).

Θεώρημα 2.1.6. *Ισχύει $\mathbb{P}_n \implies \mathbb{P}$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ περιέχει περαιτέρω υπακολουθία $\{\mathbb{P}_{n''}\}$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}_{n''} \implies \mathbb{P}$.*

Συχνά θα συναντούμε το φαινόμενο της ασθενής σύγκλισης του $\mathbb{P}_t$ στο $\mathbb{P}$ οταν το $t \to \infty$ με συνεχή τρόπο.Αυτό εχει ορισθεί να σημαίνει

$$\lim_{t\to\infty} \int f dP_t = \int f dP \tag{2.6}$$

για κάθε f στο $C(S)$.Για σταθερό f, η άνω σχέση ισχύει αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty} \int f dP_{t_n} = \int f dP \tag{2.7}$$

για κάθε ακολουθία $\{t_n\}$ που τίνει στο άπειρο. Οπότε $\mathbb{P}_t \to \mathbb{P}$ όταν $t \to \infty$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}_{t_n} \to \mathbb{P}$ για κάθε ακολουθία $\{t_n\}$ που τίνει στο άπειρο. Δυνατό είναι επίσης να αφήσουμε το t να προσεγγίσει με συνεχή τρόπο κάποια πεπερασμένη τιμή t_0.

2.1.2 Ο Χώρος C

Ο χώρος $C = C[0,1]$, δηλαδη ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο [0,1], θα μας φανεί χρήσιμος στην συνέχεια και για αυτό θα δούμε πως η έννοια της ασθενής σύγκλισης μεταφράζεται σε αυτόν. Εφοδιάζουμε τον χώρο με την μετρική $\rho(x,y) = \sup_t |x(t) - y(t)|$. Για τα σημεία $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$, θέτουμε $\pi_{t_1\ldots t_k}$ την απεικόνιση του σημείου x του C στο σημείο $(x(t_1), \ldots, x(t_k))$ του χώρου $\mathscr{R}^k$. Τα σύνολα της μορφής $\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k} H$ για $H \in \mathscr{R}^k$. ονομάζονται σύνολα πεπερασμένης διάστασης. Αφού η $\pi_{t_1\ldots t_k}$ είναι συνεχής, αυτα τα σύνολα ανήκουν στην κλάση $\mathscr{T}$ των συνόλων $Borel$ του C. Απο την άλλη μεριά η κλειστή σφαίρα $\{y : \rho(x,y) \leq \varepsilon\}$ είναι το όριο των συνόλων πεπερασμένης διάστασης $\{y : |x(i/n) - y(i/n)| \leq \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$ Δεδομένου ότι ο C είναι διαχωρίσιμος κάθε ανοικτό σύνολο ειναι αριθμήσιμη ένωση απο ανοικτές σφαίρες και άρα και απο κλειστές, έτσι ώστε τα σύνολα πεπερασμένων συνόλων παράγουν την $\mathscr{T}$ και για αυτό την κλάση τους την **καθοριστική κλάση** (*determining class*). Μια τέτοια κλάση με την πρόσθετη ιδιότητα οτι η ασθενής σύγκλιση σε αυτά ειναι ικανή συνθήκη για να ισχύει η ασθενής σύγκλιση σε όλων τον χώρο λέγεται *convergence determining class*. Δυστηχώς τα πεπερασμένης διάστασης σύνολα δεν αποτελούν τέτοια κλάση. Ενα παράδειγμα που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας είναι το επόμενο:
Έστω ένα $\mathbb{P}$ μέτρο μάζας στο 0 και $\mathbb{P}_n$ μέτρο μάζας της συνάρτησης x_n όπου

$$x_n(t) = \begin{cases} nt & \text{αν } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nt & \text{αν } \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{αν } \frac{2}{n} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

Δεδομένου ότι η x_n δεν συγκλίνει στο 0 ομοιόμορφα (σύμφωνα με την τοπολογία του C), η $\mathbb{P}_n$ δεν μπορεί να συγκλίνει ασθενώς στο P. Αλλα για τα πεπερασμένης δίαστασης σύνολα $\mathbb{P}$-συνέχειας έστω A ισχύει $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$. Μάλιστα άν $A = \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} H$ και το $2/n$ είναι μικρότερο απο το ελάχιστο μή μηδενικό t_i, τότε $\mathbb{P}_n(A) = \mathbb{P}(A)$.
Απο αυτο επιβεβαιώνουμε ότι όντως η κλάση των συνόλων πεπερασμένης δίαστασης δεν είναι μια $convergence\, determining\, class$. Παρόλα αυτά σύντομα θα δούμε ότι για μία ακολουθία μέτρων πιθανότητας $\{\mathbb{P}_n\}$ η ασθένης σύγκλιση στην κλάση αυτή σε συνδυασμό με την σφιχτότητα είναι ικανά για να μας δώσουν το αποτέλεσμα που θέλουμε.

2.1.3 Χώροι Γινόμενο

Το ενδιαφέρον μας για τα σύνολα πεπερασμένης διάστασης μας οδηγεί να μελετήσουμε τους χώρους γινόμενο και την ασθενή σύγκλιση σε αυτούς.

Έστω $S = S' \times S''$ ο χώρος γινόμενο δύο μετρικών χώρων S' και S''. Αν ο S είναι διαχωρίσμος (το οποίο ασφαλώς προυποθέτει και τους S', S'' να είναι διαχωρίσιμοι), τότε οι σ-άλγεβρες $\mathscr{T}, \mathscr{T}', \mathscr{T}''$ των συνόλων $Borel$ έχουν την ιδιότητα $\mathscr{T} = \mathscr{T}' \times \mathscr{T}''$.
Οι περιθώριες κατανομές ενός μέτρου πιθανότητας $\mathbb{P}$ στον χώρο $(S, \mathscr{T})$ ορίζονται ώς $\mathbb{P}'(A') = P(A' \times S'')$, $A' \in \mathscr{T}'$και $\mathbb{P}''(A'') = P(A'' \times S')$, $A'' \in \mathscr{T}''$.

Θεώρημα 2.1.7. *Αν ο S είναι διαχωρίσιμος, τότε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει $\mathbb{P}_n \implies \mathbb{P}$ είναι η $\mathbb{P}_n(A' \times A'') \to \mathbb{P}(A'xA'')$ για κάθε σύνολο $\mathbb{P}'$ -συνέχειας A' και κάθε σύνολο $\mathbb{P}''$ -συνέχειας A'' όπου $\mathbb{P}', \mathbb{P}''$ οι περιθώριες κατανομές του $\mathbb{P}$.*

Απόδειξη. Έστω $\partial, \partial', \partial''$ ο συμβολισμός για τους τελεστές των συνόρων των S, S', S'' αντίστοιχα. Είναι άμεσο ότι

$$\partial(A' \times A'') \subset ((\partial' A' \times S'') \bigcup (S' \times ((\partial'' \times A'')), \tag{2.9}$$

και έτσι η συνθήκη είναι αναγκαία.
Για να αποδείξουμε οτι ειναι και ικανή θα εφαρμόσουμε το πόρισμα του θεωρήματος (2.1.5) στην κλάση $\mathscr{U}$ των συνόλων $A' \times A''$ οπου A' ένα σύνολο $\mathbb{P}'$-συνέχειας και A'' ένα σύνολο $\mathbb{P}''$-συνέχειας. Η κλάση $\mathscr{U}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και , απο υπόθεση $P_n \to P(A)$ για κάθε A στην $\mathscr{U}$.
Έστω $(x', x'') \in S$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_\delta = \{y' : \rho'(x', y') < \delta\} \times \{y'' : \rho''(x'', y'') < \delta\}.$$

Για συγκεκριμένο δ τα σύνολα $\partial'\{y' : (x', y') < \delta\}$ είναι ξένα και τα σύνολα $\partial''\{y'' : (x'', y'') < \delta\}$ επίσης έτσι ώστε η A_δ να είναι μέσα στην $\mathscr{U}$ για κάποιο δ με $0 < \delta < \varepsilon$. Εφοδιάζοντας τον S με την μετρική

$$\rho((x', x''), (y', y'')) = \max\{\rho'(x', y'), \rho''(x'', y'')\},$$

τότε η A_δ είναι μία σφαίρα με κέντρο (x', x'') και ακτίνα δ. Οπότε η $\mathscr{U}$ ικανοποιεί το προαναφερθέν πόρισμα και η συνθήκη είναι ικανή.

Το γεγονός ότι η συνθήκη του θεωρήματος (2.1.7) είναι ικανή και αναγκαία μας δηλώνει ότι τα μετρήσιμα ορθογώνια αποτελούν μία $convergencedeterminingclass$. Για δύο μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}', \mathbb{P}''$ στους χώρους $(S', \mathscr{T}')$, $(S'', \mathscr{T}'')$, το μέτρο γινόμενο $\mathbb{P}' \times \mathbb{P}''$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathscr{T}' \times \mathscr{T}''$ και οπότε, αν ο S είναι διαχωρίσιμος, στο $\mathscr{T}$. Στην συνέχεια θα παραθέσουμε ένα θεώρημα που είναι άμεσο επακόλουθο του επομένου και που θα μας χρειαστεί οταν θα προσπαθούμε να αποδειξουμε οτι οι πεπερασμένες κατανομές μιας τυχαιας μεταβλητής συγκλίνουν.

Θεώρημα 2.1.8. *Επεκτείνοντας στα δεδομένα του θεωρήματος* (2.1.7) *αν ο* S *είναι διαχωρίσμος τοτε* $\mathbb{P}'_n \times \mathbb{P}''_n \implies \mathbb{P}' \times \mathbb{P}''$ *αν και μόνο αν* $\mathbb{P}'_n \implies \mathbb{P}'$ *και* $\mathbb{P}''_n \implies \mathbb{P}''$.

2.1.4 Σύγκλιση κατα κατανομή

Η θεωρία της ασθενής σύγκλισης μπορεί να παραφραστεί ως η θεωρία της σύγκλισης κατα κατανομή. Οταν αναφερόμαστε με όρους της δεύτερης παρότι δεν εκφράζουμε καμία νέα ιδέα μερικές φορές τα αποτελέσματα διατυπώνονται με πιό κομψό και εύχρηστο τροπο.
Έστω X μια απεικόνιση απο ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ σε ένα μετρικό χώρο S. Θα ορίσουμε 2 νέες έννοιες.

Ορισμός 2.1.3. Αν για την απεικόνιση X ισχύει ότι $X^{-1}\mathscr{T} \subset \mathscr{B}$ όπου $\mathscr{T}$ η σ-άλγεβρα με την οποία εφοδιάζεται ο S τότε η X λέγεται μετρήσιμη.

Ορισμός 2.1.4. Μία μετρήσιμη απεικόνιση X λέγεται *τυχαίο στοιχείο.*

Η κατανομή ενός τυχαίου στοιχείου X είναι το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P} = \mathbb{P}X^{-1}$ στον $(S, \mathscr{T})$ τέτοιο ώστε :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X^{-1}A) = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \in A\} = \mathbb{P}\{x \in A\}, \quad A \in \mathscr{T}. \tag{2.10}$$

Ας ορίσουμε τώρα την σύγκλιση κατα κατανομή.
Μια ακολουθία τυχαίων στοιχείων $\{X_n\}$ λέγεται ότι συγκλίνει κατα κατανομή στο τυχαίο στοιχειο X και γράφουμε

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X, \tag{2.11}$$

αν οι κατανομές $\mathbb{P}_n$ των X_n συγκλίνουν ασθενώς στην κατανομή $\mathbb{P}$ του X :

$$\mathbb{P}_n \implies \mathbb{P}. \tag{2.12}$$

Αυτός ο ορισμός προϋποθέτει ο χωρος S καθώς και η τοπολογία του να συμπίπτει για κάθε τυχαίο σημείο της ακολουθίας αλλα επιτρέπει ο αντίστοιχος χώρος πιθανότητας να είναι διαφορετικός. Συνήθως δεν αναφέρουμε τους χώρους αυτούς καθώς η δομή τους επηρεάζει μόνο μέσω των κατανομών που ορίζουν στον S. Στην συνέχεια θα μετατρέψουμε το θ $Portmanteau$ ώστε να εξυπηρετεί την σύγκλιση κατα κατανομή.

Θεώρημα 2.1.9. *Έστω X_n, X τυχαία στοιχεία. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

1. $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$.
2. $\lim_n \mathbb{E}\{f(X_n)\} = \mathbb{E}\{f(X)\}$ *για κάθε φραγμένη , ομοιόμορφα συνεχής και πραγματική f.*
3. $\lim\ \sup_n \mathbb{P}\{X_n \in F\} \leq \mathbb{P}\{X \in F\}$ *για κάθε F κλειστό.*
4. $\lim\ \inf_n \mathbb{P}\{X_n \in G\} \geq \mathbb{P}\{X \in G\}$ *για κάθε G ανοικτό.*
5. $\lim_n \mathbb{P}\{X_n \in A\} = \mathbb{P}\{X \in A\}$ *για κάθε A $\mathbb{P}$ - συνεχές σύνολο.*

Στην συνέχεια θα αναφέρουμε και εναν ακόμα τροπο σύγκλισης την *συγκλιση κατα πιθανότητα.*

Ορισμός 2.1.5. Έστω $\{X_n\}$ ακολουθία τυχαίων στοιχείων του S και ένα X το οποίο ανήκει στον S επίσης. Αν ισχύει

$$\mathbb{P}\{\rho(X_n, X) \geq \varepsilon\} \to 0 \tag{2.13}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει κατα πιθανότητα στο X και γράφουμε

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X. \tag{2.14}$$

Ευκολα παρατηρούμε ότι αν το X είναι σταθερής τιμής τυχαίο στοιχείο τοτε οι δύο έννοιες συμπίπτουν. Διαφορετικά η συνθήκη ισχυει $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ αν και μόνο αν η κατανομή της X_n συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο πιθανότητας το οποίο στο σημείο X αντιστοιχεί σε μέτρο 1. Ομοια με πριν για κάθε n επιτρέπεται να ορίζεται διαφορετικός χώρος πιθανότητας αλλα είναι αναγκαίο το εύρος του S να μένει σταθερό. Το επόμενο θεώρημα θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στην συνέχεια

Θεώρημα 2.1.10. *Έστω X_n ,Y_n ορισμένες σε χωρο S διαχωρίσιμο έτσι ώστε να ισχύει ότι για κάθε n οι X_n ,Y_n έχουν την ίδια διάσταση. Αν $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ και $\rho(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, τότε $Y_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$.*

Απόδειξη. Έστω $F_\varepsilon = \{x : \rho(x, F) \leq \varepsilon\}$, τότε

$$\mathbb{P}\{Y_n \in F\} \leq \mathbb{P}\{\rho(X_n, Y_n) \geq \varepsilon\} + \mathbb{P}\{X_n \in F_\varepsilon\}.$$

Δεδομένου ότι τα F_ε είναι κλειστό, απο την υπόθεση συνεπάγεται ότι

$$\limsup_n \mathbb{P}\{Y_n \in F\} \leq \limsup_n \mathbb{P}\{X_n \in F_\varepsilon\} \leq \mathbb{P}\{X \in F_\varepsilon\}.$$

Αν το F είναι κλειστό τοτε ισχυει ότι $F_\varepsilon \to F$ για $\varepsilon \to 0$ και έτσι μέσω του θεωρήματος $Portmanteau$ έχουμε το αποτέλεσμα.

2.1.5 Σχετική Συμπάγεια

Έστω Π μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας στον $(S, \mathscr{T})$.

Ορισμός 2.1.6. Μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας Π ονομάζεται σχετικά συμπαγής αν κάθε ακολουθία στοιχείων της περιέχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

Δηλαδή για κάθε ακολουθία $\{P_n\} \in \Pi$ υπάρχει υπακολουθία $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ και ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ (ορισμένο στον $(S, \mathscr{T})$ αλλα όχι απαραίτητα να ανήκει στην Π) τέτοια ώστε $\mathbb{P}_{n'} \implies \mathbb{Q}$. Αν και η $\mathbb{P}_{n'} \implies \mathbb{Q}$ δεν βγάζει νόημα αν $\mathbb{Q}(S) < 1$, θα ζητήσουμε παρόλα αυτα το $\mathbb{Q}(S) = 1$ δηλαδή δεν επιτρέπουμε απώλεια μάζας. Προηγουμένως είδαμε την σημαντικότητα των συνόλων πεπερασμένης διάστασης για τον C αλλα είδαμε και ότι τα σύνολα αυτά δεν είναι αρκετά για να καθορίσουν την ασθενή σύγκλιση μιας ακολουθίας μέτρων πιθανότητας απο μόνα τους. Αυτο όμως θα αλλάξει με την εισαγωγή της σχετικής συμπάγειας. Ας παρατηρήσουμε το πρόβλημα το οποίο αντιμετωπίζουμε στον C.

Έστω $\{\mathbb{P}_n\}$ μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον χωρο $(C, \mathscr{T})$ τέτοια ώστε οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές των στοιχείων της συγκλίνουν ασθενώς σε ένα μέτρο $\mathbb{P}$ το οποίο και αυτό είναι ορισμένο στον C δηλαδή $\forall\{t_1, \ldots, t_n\}$ ισχύει:

$$\mathbb{P}_n \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_n} \implies \mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_n}$$

Έχουμε δεί ότι η σχέση που μόλις παρουσιάσαμε δεν συνεπάγεται ότι $\mathbb{P}_n \implies \mathbb{P}$ απαραίτητα. Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ είναι σχετικά συμπαγής. Τότε εξ ορισμού κάθε υπακολουθία $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ περιέχει μια περαιτέρω υπακολουθία $\{\mathbb{P}_{n''}\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο $\mathbb{Q}$. Ομώς τώρα ισχύει οτι αν μια υπακολουθία συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο, το ίδιο θα ισχύει και για τις πεπερασμένης διάστασης κατανομές που αντιστοιχούν σε κάθε στοιχείο του (δηλαδή το αντίστροφο στο πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε ισχύει). Απο την μοναδικότητα του ορίου παρατηρούμε ότι θα αφου οι πεπερασμένες κατανομές της $\{P_{n''}$ απο υπόθεση συγκλίνουν σε αυτές του $\mathbb{P}$ και απο τον ορισμό της σχετικής συμπάγειας σε αυτές του $\mathbb{Q}$ τότε ειναι αναγκαστικό να ισχύει

$$\mathbb{Q}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_n} = \mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Παρατηρήσαμε όμως περισσότερα ότι τα σύνολα πεπερασμένης διάστασης παράγουν τον χώρο $(C, \mathscr{T})$ και για αυτό αποτελούν μια καθοριστική κλάση. Λόγω αυτού κάθε μέτρο στον χώρο αυτό καθορίζεται πλήρως απο τις πεπερασμένες κατανομές του και δεδομένου της ισότητας που αποδείξαμε μόλις ώς αποτέλεσμα τα μέτρα $\mathbb{Q}, \mathbb{P}$ θα πρέπει να συμπίπτουν. Οπότε κάθε υπακολουθία $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ της $\{\mathbb{P}_n\}$ περιέχει μια περαιτέρω υπακολουθία $\{\mathbb{P}_{n''}\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς στο μέτρο $\mathbb{P}$ και δεδομένου του θεώρήματος (2.1.6) είναι επόμενο ότι ολόκληρη η ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ θα συγκλίνει ασθενώς στο $\mathbb{P}$. Ας σημειώσουμε και ότι μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ με όριο $\mathbb{P}$ ειναι η ίδια σχετικά συμπαγής οπότε η σχετική συμπάγεια δεν είναι μια εξηζητημένη ιδιότητα.

Πλέον δηλαδη έχουμε καταφέρει να κατασκευάσουμε μια ικανή στρατηγική για την απόδειξη της ασθενής σύγκλισης μίας οικογένειας μέτρων πιθανότητας στον χωρο $C, \mathscr{T}$ η οποία είναι να ελένχουμε την συμπεριφορά των πεπερασμένων κατανομών, δεδομένου ότι έχουμε εξασφαλίσει την σχετική συμπάγεια της οικογένειας. Ένα καινούργιο ερώτημα που έρχεται στην επιφάνεια είναι με ποιόν τρόπο μπορούμε να αποφανθούμε για το αν μία ακολουθία η μία οικογένεια είναι σχετικά συμπαγής. Ένας απο τους τρόπους για να απαντήσουμε είναι, με την βοήθεια του επόμενου θεωρήματος, μέσω της σφιχτότητα το οποίο είναι αρκετό για να αποδειξει την σχετική συμπάγεια μιας οικογένειας μετρων πιθανότητας.

Θεώρημα 2.1.11 (Θεώρημα του Prokhorov)**.**

1. *Εάν η οικογένεια* Π *είναι σφιχτή, τότε είναι και σχετικά συμπαγής.*
2. *Έστω* S *διαχωρίσιμος και πλήρης. Εάν η οικογένεια* Π *είναι σχετικά συμπαγής, τότε είναι και σφιχτή.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το πρώτο μέρος του θεωρήματος, το οποίο ειναι και αυτό που θα μας φανεί χρήσιμο με ποιό άμεσο τρόπο θα το αποδείξουμε πρώτα για τον χώρο R^k στην συνέχεια για τον R^∞ και για ένα S $\sigma-$ συμπαγή (αριθμήσιμη ένωση συμπαγών συνόλων) και τέλος για έναν γενικό S. Κάθε φορά θα αποδεικνύουμε την κάθε περίπτωση με αναγωγή της στην προηγούμενη.

Για την περίπτωση του $\mathbb{R}^k$.
Για μία ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\} \in \Pi$ το θεώρημα του $Haley$ μας δηλώνει ότι η ακολουθία των αντίστοιχων τους συναρτήσεων κατανομών $\{F_n\}$ περιέχει μια υπακολουθία $\{F_{n'}\}$ τέτοια ώστε

$$F_{n'}(x) \to F(x) \tag{2.15}$$

στα σημεία συνέχειας του F, οπου F μία συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει στον $\mathbb{R}^k, \mathscr{R}^k$ ένα μέτρο μ τέτοιο ώστε το $\mu(a, b]$ ειναι η F διαφοροποιημένη στις κορυφές ενός ορθογωνίου k διαστάσεων $(a, b]$. Τώρα θα έχουμε $\mathbb{P} \implies \mu$ αν αποδείξουμε $\mu(\mathbb{R}^k) = 1$.
Για δεδομένο ε, διαλέγουμε ένα συμπαγές σύνολο K στον $\mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_{n'}(K) > 1 - \varepsilon$ για κάθε n' το οποίο είναι δυνατό γιατί η Π είναι σφιχτή. Διαλέγουμε a και b τέτοια ώστε $K \subset (a, b]$ και τέτοια ώστε όλες οι 2^k κορυφές των $(a, b]$ είναι σημεία συνέχειας της F (αυτό είναι δυνατό γιατι μόνο αριθμήσιμα παράλληλα υπερεπίπεδα δίαστασης $(k-1)$ μπορούν να έχουν θετικό μέτρο μ). Δεδομένο οτι το $\mathbb{P}_{n'}(a, b]$ είναι η F_n διαφοροποιημένο στις κορυφές των (a, b), η σχέση (2.15) μεταφράζεται ως $\mathbb{P}_{n'}(a, b] \to \mu(a, b]$. Δεδομένου ότι $\mathbb{P}_{n'}(a, b] \geq \mathbb{P}_{n'}(K) > 1 - \varepsilon$, ακολουθεί τότε το $\mu(a, b] \geq 1 - \varepsilon$. Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε ε καταλήγουμε ότι $\mu(\mathbb{R}^k) = 1$ και άρα η οικογένεια Π είναι σχετικά συμπαγής.

Για να προχωρήσουμε στον $\mathbb{R}^\infty$ θα παραθέσουμε ένα λήμμα το οποίο ειναι απαραίτητο για την συνέχεια.

Λημμα 1 ϑ. (2.1.11) Εάν η οικογένεια Π είναι σφιχτή στον $S, \mathscr{T}$ και άν h είναι μια συνεχής απεικόνιση απο τον S σε ένα χώρο S' τοτε η $\{Ph^{-1} : P \in \Pi\}$ είναι μια σφιχτή οικογένεια στον $(S', \mathscr{T}')$.

Απόδειξη. Για δοσμένο ε, διαλέγουμε ένα συμπαγές σύνολο έστω K του S τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(K) > 1 - \varepsilon$ για κάθε $\mathbb{P} \in \Pi$. Αν $K' = hk$ τότε είναι γνωστό ότι το K' ϑα είναι συμπαγές και ότι $h^{-1}K' \supset K$, έστι ώστε $\mathbb{P}(h^{-1}(K') > 1 - \varepsilon$ για κάθε $\mathbb{P} \in \Pi$.

Για την περίπτωση του $\mathbb{R}^\infty$
Έστω $\{\Pi\}$ μια σφιχτή οικογένεια στον $(\mathbb{R}^\infty, \mathscr{R}^\infty)$, τότε ακολουθώντας το λήμμα 1 η $\{\mathbb{P}\pi_k^{-1} : \mathbb{P} \in \Pi\}$ είναι για κάθε k μια σφιχτή οικογένεια στον $(\mathbb{R}^k, \mathscr{R}^k)$. Χρησιμοποιώντας αυτό που μόλις αποδείξαμε μπορούμε για κάθε μέτρο $\{\mathbb{P}_n\}$ ακολουθία στο Π μια υπακολουθία $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ τέτοια ώστε $P_{n'}\pi_k^{-1}$ να συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο πιθανότητας μ_k στον $(\mathbb{R}^k, \mathscr{R}^k)$. εφαρμόζοντας μία μέθοδο γνωστή ώς η διαγώνια μέθοδος, μπορούμε να διαλέξουμε ακολουθία $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ τέτοια ώστε για κάθε k να ισχύει ταυτόχρονα $\mathbb{P}_{k'}\pi_k^{-1} \implies \mu_k$.
Δεδομένου ότι τα μέτρα μ_k προφανώς ικανοποιούν τις συνθήκες συνέπειας του θεωρήματος ύπαρξης του $Kolmogorov$ τοτε υπάρχει στον $(\mathbb{R}^\infty, \mathscr{R}^\infty)$ ένα μέτρο $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $\mathbb{Q}\pi_k^{-1} = \mu_k$ για κάθε k. (Ομοια με τον C η σ-άλγεβρα $\mathscr{R}^\infty$ των $Borel$ συνόλων του $\mathbb{R}^\infty$ συμπίπτει με αυτην που παράγεται απο τα σύνολα πεπερασμένης διάστασης η οποία ειναι αυτή που εμπλέκεται στο θεώρημα του $Kolmogorov$.) Αλλα τότε ισχυει $\mathbb{P}_{n'}\pi_k^{-1} \implies \mathbb{Q}\pi_k^{-1}$ για κάθε k έτσι ώστε οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές της $\mathbb{P}_{n'}$ συγκλίνουν ασθενώς σε αυτές του $\mathbb{Q}$ το οποίο χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματά που αναπτύξαμε για την χρήση του θεωρήματος μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\mathbb{P}_{n'} \implies \mathbb{Q}$. Αρα λοιπόν η σφιχτότητα στον $\mathbb{R}^k$ μας οδηγεί σε σχετική συμπάγεια.

Για την περίπτωση του S σ-συμπαγή.
Για να προχωρήσουμε παραπέρα και να καταλήξουμε την γενική περίπτωση θα χρειαστούμε 2 ακόμα λήμματα. Πρώτα θεωρούμε ένα S_0 το οποίο είναι ένα υποσύνολο $Borel$ του S :

$$S_0 \in \mathscr{T} \tag{2.16}$$

Το S_0 μπορεί απο μόνο του να αποτελέσει μετρικό χώρο εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία του. Έστω $\mathscr{T}_0$ η κλάση των συνόλων $Borel$ του S_0. Απο την απο πάνω σχέση είναι άμεσο ότι

$$\mathscr{T}_0 = \{A : A \subset S_0, A \in \mathscr{T}\} \tag{2.17}$$

και επίσης

$$\mathscr{T}_0 \subset \mathscr{T} \tag{2.18}$$

Αν $\mathbb{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας στον $S, \mathscr{T}$ με $\mathbb{P}(S_0) = 1$, θέτουμε $\mathbb{P}_r$(το r απο το αγγλικό $restriction$) να είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(S_0, \mathscr{T}_0)$ το οποίο έχει προέλθει περιορίζοντας το πρώτο μέτρο από την $\mathscr{T}$ στην $\mathscr{T}_0$. Αν $\mathbb{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας στον $S_0, \mathscr{T}_0$, θέτουμε $\mathbb{P}_e$(το e απο το αγγλικό $extension$) να είναι ένα

μέτρο πιθανότητας στον $(S,\mathscr{T})$ με $\mathbb{P}^e(A)=\mathbb{P}(A\cap S_0)$ για $A\in\mathscr{T}$. Παρατητούμε ότι $\mathbb{P}^e(S_0)=1$.
Αν $\mathbb{P}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(S,\mathscr{T})$ με $\mathbb{P}(S_0)=1$, τοτε

$$(\mathbb{P}^r)^e=\mathbb{P} \tag{2.19}$$

αν $\mathbb{P}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(S_0,\mathscr{T}_0)$ τοτε

$$(\mathbb{P}^e)^r=\mathbb{P}. \tag{2.20}$$

Διατυπώνουμε τώρα τα 2 λήμματα:
Λήμμα 2 ϑ. (2.1.11)Έστω Π μια σφιχτή οικογένεια στον $(S_0,\mathscr{T}_0)$, τότε η $\Pi^e=\{\mathbb{P}^e:\mathbb{P}\in\Pi\}$ είναι μια σφιχτή οικογένεια στον $(S,\mathscr{T})$.Αν $\mathbb{P}_n\implies\mathbb{P}$ στον $S_0,\mathscr{T}_0$, τότε $\mathbb{P}^e_n\implies\mathbb{P}^e$ στον $(S_0,\mathscr{T}_0)$.
Λήμμα 3 ϑ. (2.1.11) Αν $\mathbb{P}_n\implies\mathbb{P}$ στον $(S,\mathscr{T})$ και $\mathbb{P}_n(S_0)=\mathbb{P}(S_0)=1$, τότε $\mathbb{P}^r_n\implies\mathbb{P}^r$ στον $(S_0,\mathscr{T}_0)$.

Έστω λοιπόν ένας S σ-συμπαγής. Τότε προφανώς είναι και διαχωρίσιμος και έτσι μπορεί να εμφυτευτεί ομοιομορφικά στον $\mathbb{R}^\infty$. Δεδομένου οτι ο S είναι σ-συμπαγής τοτε το ίδιο ισχύει για την εικόνα του μέσω του ομοιομορφισμού και συγκεκριμένα η εικόνα του είναι ένα υποσύνολο $Borel$ του $\mathbb{R}^\infty$. Δεδομένου ότι η ασθενής σύγκλιση διατηρείται μέσω ομοιομορφισμού το ίδιο ισχύει για την σχετική συμπάγεια του Π. Δεδομένου ότι η συμπάγεια συνόλων διατηρείται μέσω ενος ομοιομορφισμού, το ίδιο ισχύει για την σφιχτότητα. Ετσι θα αντικαταστήσουμε τον S την είκονα του μέσω ομοιομορφισμού.
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο S είναι ένα $Borel$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^\infty$. Αν η οικογένεια Π είναι σφιχτή στον χώρο $(S,\mathscr{T})$ τοτε εφαρμόζοντας το λήμμα 2 στον $\mathbb{R}^\infty$ και στο υποσύνολο του S, η Π^e είναι σφιχτή στον $(\mathbb{R}^\infty,\mathscr{R}^\infty)$. Αφού έχουμε ήδη δείξει ότι το θεώρημα του $Prokhorov$ ισχύει σε αυτον τον μεγαλύτερο χώρο η Π^e ειναι σχετικά συμπαγής έχουμε ότι για καθε ακολουθία έστω $\{P_n\}$ της Π η αντίστοιχη ακολουθία $\{P^e_n\}$ έχει υπακολουθία $\{P^e_{n'}\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς στον $(\mathbb{R}^\infty,\mathscr{R}^\infty)$ σε κάποιο μέτρο $\mathbb{Q}$. Απο την σφιχτότητα του Π, υπάρχει για κάθε ε ένα συμπαγές υποσύνολο K του S τέτοιο ώστε $\mathbb{P}^e_{n'}(K)=\mathbb{P}_{n'}(K)>1-\varepsilon$ για κάθε n', ετσι ώστε $\mathbb{Q}(S)\geq\mathbb{Q}(K)\geq\limsup_{n'}\mathbb{P}^e_{n'}\geq 1-\varepsilon$. Ετσί ο S στηρίζει το $\mathbb{Q}$ καθως και το $\mathbb{P}^e_{n'}$ και έτσι απο το λήμμα 3 και ότι $(\mathbb{P}^e)^r=\mathbb{P}$, η $\mathbb{P}_{n'}$ συγκλίνει ασθενώς μέσα στον $(S,\mathscr{T})$ στο $\mathbb{Q}^r$. Αρα η σφιχτότητα συνεπάγεται την σχετική συμπάγεια σε χώρους σ-συμπαγείς.

Για την γενική περίπτωση
Για οποιονδήποτε S, αν $S_0=\cup_i K_i$, όπου K_i είναι ένα συμπαγές σύνολο στον S τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(K_i)>1-1/i$ για κάθε $\mathbb{P}$ στον Π, τοτε ο S_0 στηρίζει κάθε στοιχείο της Π και η $\Pi^r=\{\mathbb{P}^r:\mathbb{P}\in\Pi\}$ ειναι μία σφιχτή οικογένεια στον $(S_0,\mathscr{T}_0)$. Απο την προηγούμενη περίπτωση η οικογένεια Π^r είναι σχετικά συμπαγής. Για κάθε ακολουθία $\{\mathbb{P}^r_n\}$ στην Π η αντίστοιχη υπακολουθία $\{\mathbb{P}^r_n\}$ υπάρχει υπακολουθία $\{\mathbb{P}^r_{n'}\}$ η οποία συγκλίνει στον $(S_0,\mathscr{T}_0)$ σε ένα μέτρο $\mathbb{Q}$. Απο το λήμμα 2 και το γεγονός ότι $(\mathbb{P}^r)^e=\mathbb{P}$, η $\mathbb{P}_{n'}$ συγκλίνει ασθενώς στον $(S,\mathscr{T}_0)$ στο μέτρο $\mathbb{Q}^e$. Αρα η οικογένεια π είναι σχετικά συμπαγής το οποίο αποδεικνύει το πρώτο μέρος

του θεωρήματος *Prokhorov* για πλήρη γενικότητα.

Το δευτερο μέρος
Καταρχήν παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που το Π αποτελείται απο ένα μόνο μέτρο τότε έχουμε το θεώρημα (2.1.3).
Υποθέτουμε ότι για κάθε θετικό ε και δ υπάρχει μια πεπερασμένη συλλογή από $\delta-$ σφαίρες τέτοιες ώστε $\mathbb{P}(\bigcup_{i\leq n} A_i) > 1-\varepsilon$ για κάθε $\mathbb{P}$ στο Π. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το Π είναι σφιχτό. Για δοσμένο ε διαλέγουμε για κάθε ακέραιο k, πεπερασμένες σε πλήθος $1/k-$ σφαίρες $A_{k_1}, \dots A_{k_{n_k}}$ τέτοιες ώστε $\mathbb{P}(\bigcup_{i\leq n_k} > 1-\varepsilon/2^k$ για κάθε $\mathbb{P}\in\Pi$. Εάν το K είναι η κλειστότητα του πλήρως φραγμένου συνόλου $\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{i\leq n_k} A_{ki}$ τοτε $\mathbb{P}(K) > 1-\varepsilon$ και δεδομένης της πληρότητας του χώρου S το K είναι συμπαγές.
Αποδεικνύουμε το θεώρημα δείχνοντας ότι, άν η συνθήκη που ορίσαμε μολις δεν ικανοποιείται τότε το Π δεν είναι σχετικά συμπαγές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει ένα ζευγάρι ε και δ τέτοιο ώστε κάθε πεπερασμένη συλλογή από $\delta-$ σφαίρες $A_1,\dots,A_n$ να ικανοποιούν $\mathbb{P}(\bigcup_{i\leq n} A_i) \leq 1-\varepsilon$ για κάποιο $\mathbb{P}$ στο Π. Δεδομένο ότι απο υπόθεση ο S είναι διαχωρίσμος τοτε αυτός είναι η ένωση μιας ακολουθίας $A_1, A_2, \dots$ απο ανοικτές σφαίρες ακτίνας δ. Έστω$B_n = \bigcup_{i\leq n} A_i$ και διαλέγω $\mathbb{P}_n$ στο Π τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_n(B_n) \leq 1-\varepsilon$. Υποθέτουμε ότι μία υπακολουθία $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο Q. Αφου το B_m είναι ανοικτό, θα έχουμε $\mathbb{P}(B_m) \leq \liminf_{n'} \mathbb{P}_{n'}(B_m)$ για κάθε δοσμένο m. Αλλα τότε δεδομένο ότι $B_m \subset B_{n'}$ για ένα μεγαλύτερο n', προκύπτει ότι $\mathbb{P}(B_m) \leq \liminf_{n'} \mathbb{P}_{n'}(B_{n'}) \leq 1-\varepsilon$ και δεδομένου ότι τα B_m αυξάνονται στο S καταλήγουμε σε άτοπο το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.
Αν η ακολουθία $\{X_n\}$ αποτελείται απο τυχαία στοχεία του S, λεμε ότι η $\{X_n\}$ είναι σφιχτή οταν $\{P_n\}$, όπου P_n είναι η κατανομή του X_n. Αν ο S είναι ο $\mathbb{R}^\infty$ ή ο C τότε καθοριζουμε τις πεπερασμένης διάστασης κατανομές του X_n μέσω αυτών της P_n. Ανακεφαλαιώνοντας με τα προηγούμενα εν τέλει καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για τον χώρο C ότι αν η πεπερασμένης δίαστασης κατανομές μίας X_n συγκλίνουν ασθενώς σε αυτές ενός X (οπου X_n, X τυχαία στοιχεία του C) και άν η $\{X_n\}$ είναι σφιχτή, τότε $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$.

2.1.6 Κεντρικό οριακό θεώρημα για τριγωνιαίες διατάξεις

Θεώρημα 2.1.12. *Έστω $\mathbb{P}_n, \mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^1, \mathscr{R}^1)$. Αν $\int f dP_n \to \int f dP$ για κάθε φραγμένη, συνεχή συνάρτηση f με συνεχείς συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης, τότε $\mathbb{P} \implies \mathbb{P}$.*

Απόδειξη. Έστω F_n και F οι συναρτήσεις κατανομής που αντιστοιχούν στις $\mathbb{P}_n$ και $\mathbb{P}$ αντίστοιχα. Αν $\phi_u(t) = \phi(ut)$, οπου ορίζεται ώς
$\phi = 1$ για $t<0$, $\phi = 0$ για $t>1$ και για $0 \leq t \leq 1$

$$\phi(t) = \alpha^{-1}\int_t^1 e^{-1/s(1-s)}ds, \tag{2.21}$$

οπου

$$\alpha = \int_0^1 e^{-1/s(1-s)} ds.$$

Τότε για κάθε u,

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \lim \int \phi_u(y-x)\mathbb{P}_n(dy) = \int \phi_u(y-x)\mathbb{P}(dy) \leq F(x+\frac{1}{u}).$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση $\phi_u(y-x+1/u)$ αντί για $\phi_u(y-x)$, βλέπουμε ότι $\liminf_n F_n(x) \geq F(x-1/u)$ για κάθε u. Οπότε $F_n(x) \to F(x)$ αν η F είναι συνεχής στο x και έτσι έχουμε $\mathbb{P}_n \implies \mathbb{P}$.

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα για τριγωνικές διατάξεις ($CLT\, for\, triangular\, arrays$), μια γενικότερη εκδοχή του κλασσικού κεντρικού οριακού θεωρήματος των $Lindeberg-Levy$. Έστω για κάθε n τα

$$\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk_n} \tag{2.22}$$

να είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και πεπερασμένη διασπορά σ_{nk}^2.(Ο χώρος πιθανότητας στον οποίο η μεταβλητές αυτές ορίζονται μπορεί να αλλάζει για κάθε n.) Έστω η μεταβλητή $S_n = \xi_{n1} + \cdots + \xi_{nk_n}$ και υποθέτουμε ότι η διασπορά της $s_n^2 = \sigma_{n1} + \cdots + \sigma_{nk_n}$ είναι θετική. Αν N είναι μία τυχαία μεταβλητή, κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 0 και διασπορά 1 τότε έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.13 (Κεντρικό οριακό θεώρημα για τριγωνικές διατάξεις).
Αν

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\{|\xi_{nk}| \geq \varepsilon s_n\}} \xi_{nk}^2 dP \to 0 \tag{2.23}$$

για $(n \to \infty)$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$, *τότε* $S_n/s_n \xrightarrow{\mathscr{D}} N$.
Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό και ώς συνθήκη του Lindeberg.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι

$$\mathbb{E}\{f(\frac{S_n}{s_n})\} \to \mathbb{E}\{f(N)\} \tag{2.24}$$

για κάθε φραγμένη, συνεχή f που έχει συνεχείς και φραγμένες παραγώγους κάθε τάξης. Έστω μία τέτοια f. Ορίζουμε

$$g(h) = \sup_x |f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{1}{2}f''(x)h^2| \tag{2.25}$$

(η g ειναι $Borel$ μετρήσιμη). Απο τα θεωρήματα μέσης τιμής δεύτερης και τρίτης τάξης υπάρχει μία σταθερά K που εξαρτάται μόνο απο την f τέτοια ώστε

$$g(h) \leq K \min\{h^2, |h|^3\}. \tag{2.26}$$

Έχουμε ότι $g(h) \leq Kh^2$ και $g(h) \leq K|h|^3$. Η πρώτη ανισότητα είναι καλή για h μεγάλο ενώ η δεύτερη για h κοντά στο 0. Δεδομένου έχουμε διαλέξει μία συγκεκριμένη f το ίδιο ισχύει και για το K. Απο τον ορισμό της g που δώσαμε παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}|[f(x+h_1) - f(x+h_2)] - [f'(x)(h_1-h_2) + \frac{1}{2}f''(x)(h_1^2 - h_2^2)]| \\ \leq g(h_1) + g(h_2).\end{aligned} \tag{2.27}$$

Εάν τα ξ_{nk} ήταν κανονικά κατανεμημένα τότε, η $\mathbb{E}\{f(S_n/s_n\})$ θα συνέπιπτε με την $\mathbb{E}\{f(N)\}$. Αν αντικαταστήσουμε προοδευτικά τα ξ_{nk} με κανονικές μεταβλητές η_{nk} με μέση τιμή 0 και διασπορά σ_{nk}^2, τότε προκύπτει μία ακολουθία

$$\mathbb{E}\{f(s_n^{-1}\}(\xi_{n1} + \cdots + \xi_{nk_n}))\},$$

$$\mathbb{E}\{f(s_n^{-1}\}(\xi_{n1} + \cdots + \xi_{nk_n-1} + \eta_{nk_n}))\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbb{E}\{f(s_n^{-1}\}(\xi_{n1} + \cdots + \eta_{n2} + \eta_{nk_n}))\},$$

$$\mathbb{E}\{f(s_n^{-1}\}(\eta_{n1} + \cdots + \eta_{nk_n}))\}.$$

Το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας είναι η $\mathbb{E}\{f(S_n/s_n\})$ και το τελευταίο η $\mathbb{E}\{f(N)\}$. Η ιδέα είναι να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο για μεγάλο n είναι τόσο κοντα που μέχρι και τα ακραία είναι κοντά. Δεδομένου ότι η (2.24) εμπλέκει τις κατανομές των μεταβλητών της υπόθεσης αλλα όχι κάποια ιδιότητα του χώρου πιθανότητας στον οποίο ορίζονται, μπορούμε, πηγαίνοντας σε έναν νέο χώρο (πχ$(\mathbb{R}^{2k_n}, \mathscr{R}^{2k_n})$), να ορίσουμε νέες τυχαίες μεταβλητές $\eta_{n1}, \ldots, \eta_{nk_n}$ τέτοιες ώστε κάθε η_{nk} να είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 0 και διασπορά σ_{nk}^2 και τέτοιες ώστε οι $2k_n$ τυχαίες μεταβλητές

$$\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk_n}, \eta_{n1} \cdot \ldots, \eta_{nk_n} \tag{2.28}$$

είναι ανεξάρτητες. Αν

$$\zeta_{nk} = \sum_{1 \leq i < k} \xi_{ni} + \sum_{k < i \leq k_n} \eta_{ni}, \qquad 1 \leq k \leq k_n$$

τότε δεδομένου $\zeta_{nk_n} + \xi_{nk_n} = S_n$ και δεδομένου ότι $\zeta_{n1} + \eta_{n1}$ έχει την κατανομή της $s_n N$,

$$|\mathbb{E}\{f(\frac{S_n}{s_n})\} - \mathbb{E}\{f(N)\}| \leq \sum_{k=1}^{k_n} |\mathbb{E}\{f(\frac{\zeta_{nk} + \xi_{nk}}{s_n}) - f(\frac{\zeta_{nk} + \eta_{nk}}{s_n})\}|.$$

Λόγω της ανεξαρτησίας της ακολουθίας (2.28), οι 3 μεταβλητές ζ_{nk}, ξ_{nk} και η_{nk} είναι ανεξάρτητες για κάθε τιμή του k και για αυτό

$$\mathbb{E}\{f'(\frac{\zeta_{nk}}{s_n})(\xi_{nk} - \eta_{nk})\} = \mathbb{E}\{f''(\frac{\zeta_{nk}}{s_n})(\xi_{nk}^2 - \eta_{nk}^2)\} = 0$$

Απο την (2.27) είναι επόμενο ότι

$$|\mathbb{E}\{f(\frac{S_n}{s_n})\} - \mathbb{E}\{f(N)\}| \leq \sum_{k=1}^{k_n} |\mathbb{E}\{f(\frac{\xi_{nk}}{s_n}) + f(\frac{\eta_{nk}}{s_n})\}|.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{k_n} |\mathbb{E}\{f(\frac{\xi_{nk}}{s_n})\} \tag{2.29}$$

και

$$\sum_{k=1}^{k_n} |\mathbb{E}\{f(\frac{\eta_{nk}}{s_n})\} \tag{2.30}$$

Για $\varepsilon > 0$, χωρίζουμε την αναμενόμενη τιμή (2.29) σε ένα ολοκλήρωμα στο διάστημα $\{|\xi_{nk} \leq \varepsilon s_n\}$ και ένα ολοκλήρωμα στο συμπληρωματικό διάστημα. Χρησιμοποιώντας την (2.26) για να φράξουμε τα ολοκληρώματα απο την $K|\xi_{nk}/s_n|^3$ για το πρώτο και απο την $K|\xi_{nk}/s_n|^2$ για τον δεύτερο:

$$\mathbb{E}\{g(\frac{\xi_{nk}}{s_n}\} \leq K\varepsilon\frac{\sigma_{nk}^2}{s_n^2} + K\frac{1}{s_n^2}\int_{\{|\xi_{nk}|\geq\varepsilon s_n\}} \xi_{nk}^2 dP.$$

και έτσι

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}\{g(\frac{\xi_{nk}}{s_n}\} \leq K\varepsilon + K\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{\{|\xi_{nk}|\geq\varepsilon s_n\}} \xi_{nk}^2 dP. \tag{2.31}$$

και μετά η (2.29) προκύπτει απο την υπόθεση.
Δεδομένου ότι η (2.31) ισχύει και για την η_{nk} στην θέση της ξ_{nk}, για να αποδείξουμε την (2.30) το μόνο που χρειάζεται να δείξουμε είναι το

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{\{|\eta_{nk}|\geq\varepsilon s_n\}} \eta_{nk}^2 dP \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \tag{2.32}$$

Αλλα το απο πάνω είναι το πολύ

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}\frac{1}{\varepsilon s_n}\mathbb{E}\{|\eta_{nk}|^3\} = \frac{1}{\varepsilon s_n^3}\sum_{k=1}^{k_n}\sigma_{nk}^3\mathbb{E}\{|N|^3\}.$$

Δεδομένου ότι

$$\frac{\sigma_{nk}^2}{s_n^2} \leq \varepsilon^2 + \frac{1}{s_n^2}\int_{\{|\xi_{nk}|\geq\varepsilon s_n\}} \xi_{nk}^2 dP,$$

απο υπόθεση έχουμε ότι $\max_{k\leq k_n}\sigma_{nk}/s_n \to 0$ το οποίο με την σειρά του συνεπάγεται ότι $\sum_{k=1}^{k_n}\sigma_{nk}^3/s_n^3 \to 0$ και έτσι η (2.32) τείνει στο 0 το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

2.2 Ασθενής σύγκλιση στον χωρο C

2.2.1 Ο χώρος C

Ο χώρος $C = C[0,1]$ είναι ο χώρος των συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων στο διάστημα [0,1] με την ομοιόμορφη μετρική. Η απόσταση δύο στοιχείων $x = x(t)$ και $y = y(t)$ του C ορίζουμε να είναι

$$\rho(x,y) = \sup_t |x(t) - y(t)| \tag{2.33}$$

η οποία ικανοποιει της ιδιότητες μετρικής.
Ο χώρος C είναι διαχωρίσιμος.Ένα αριθμήσιμο και πυκνό σύνολο αποτελείται από τις (πολυγωνικές) συναρτήσεις που είναι γραμμικές σε κάθε υποδιάστημα της μορφής $[(i-1)/k, i/k)], i = 1,..,k$ για κάποιον ακέραιο k και υποθέτοντας οτι οι τιμές στα σημεία i/k είναι ρητές.
Εάν$\{x_n\}$ είναι μια Βασική ($Cauchy$) ακολουθία στον C,τότε, για κάθε τιμή του t η $\{x_n(t)\}$ είναι Βασική ακολουθία στην πραγματική γραμμή και οπότε έχει όριο $x(t)$.Είναι άμεσο ότι η σύγκλιση $x_n(t) \to x(t)$ είναι ομοιόμορφη ως προς t, οπότε το x ανήκει μέσα στον C ώς το όριο της $\{x_n\}$. Επομένως ο C είναι πλήρης.
Ορίζουμε το μέτρο συνέχειας ($modulus\, of\, continuity$) ενός στοιχείου x στον C ώς

$$w_x(\delta) = w(x,\delta) = \sup_{|s-t|<\delta} |x(s) - x(t)|, 0 < \delta < 1 \tag{2.34}$$

Επειδή

$$|w_x(\delta) - w_y(\delta)| \leq 2\rho(x,y), \tag{2.35}$$

το $w_x(\delta)$ για δ σταθερό, θετικό είναι συνεχής ως προς το x.Παρατηρώ επίσης ότι επειδή τα στοιχεία του C είναι ομοιόμορφα συνεχή ισχύει οτι

$$\lim_{\delta\to 0} w_x(\delta) = 0, \quad x \in C \tag{2.36}$$

Το επόμενο θεώρημα θα είναι το πρώτο μας βήμα στην προσπάθεια να εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο η ασθενής σύγκλιση παρατηρείται στον χώρο C.

Θεώρημα 2.2.1 (Arzela - Ascoli)**.** *Έστω A υποσύνολο του C.Το A έχει συμπαγή κλειστότητα αν και μόνο αν*

$$\sup_{x\in A} |x(0)| < \infty \tag{2.37}$$

και

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in A} w_x(\delta) = 0 \tag{2.38}$$

Απόδειξη. Εάν το $\overline{A}$ είναι συμπαγές η (2.37) είναι άμεση. Δεδομένου ότι $w_x(1/n)$ ειναι συνεχές ως προς x και μή αυξανόμενο ως προς n, η (2.36) ισχύει ομοιόμορφα στο A εάν το $\overline{A}$ είναι συμπαγές και έτσι προκύπτει η (2.38).

Για το αντίστροφο τώρα υποθέτουμε ότι οι (2.38) (2.37) ισχύουν.Διαλέγουμε k αρκετά μεγάλο ώστε $\sup_{x\in A} w_x(1/k)$ να είναι πεπερασμένο.Δεδομένου ότι

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \sum_{i=1}^{k} |x\Big(\frac{i}{k}t\Big) - x\Big(\frac{i-1}{k}t\Big)| \tag{2.39}$$

Ευκολα παρατηρείτε ότι

$$\sup_t \sup_{x\in A} |x(t)| < \infty \tag{2.40}$$

Απο τις (2.38) και (2.40) καταλαβαίνουμε ότι το A είναι τελείως φραγμένο.Για δοσμένο ε, πρέπει να δημιουργήσουμε ένα πεπερασμένο ε-net.Εστω α η τιμή του (2.40) και έστω H το πεπερασμένο σύνολο των στοιχείων

$$\frac{u}{v}a, \quad u = 0, \pm 1, ..., \pm u, \tag{2.41}$$

οπου v ακέραιος τέτοιος ώστε $\alpha/v < \varepsilon$ (Το Η είναι ένα $\varepsilon - net$ για το γραμμικό διάστημα $[-\alpha, \alpha]$). Διαλέηουμε k αρκετά μεγάλο ώστε $w_x(1/k) < \varepsilon \forall x \in A$, και διαλέγουμε ένα B τέτοιο ώστε να αποτελείται απο στοιχεία του C τέτοια ώστε να είναι γραμμικά σε κάθε υποδίαστημα $[(i-1)/k, i/k]$, $i = 1, \ldots, k$, και θεωρούμε τιμές στο H στα σημεία $i/k, i = 0, 1, \ldots, k$ Τα σύνολα B είναι πεπερασμένα (περιέχουν $(2v+1)^{k+1}$ σημεία). Θα δείξουμε ότι αυτο είναι ένα $2\varepsilon - net$ για το A. Αν $x \in A$ τοτε $|x(i/k)| \leq \alpha$. Έτσι υπάρχει ένα σημείο y του B τέτοιο ώστε

$$|x(\frac{i}{k} - y\frac{i}{k}| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots k.$$

Αφού $w_x(i/k) \leq \alpha$, και επειδή το y είναι γραμμικό σε κάθε υποδιάστημα ειναι άμεσο ότι $\rho(x, y) < 2\varepsilon$ το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα.

Οπως ειδαμε προηγουμένως για χώρους διαχωρίσιμους και πλήρεις όπως ο C η έννοια της σχετικής συμπάγειας και της σφιχτότητας μιας ακολουθίας μέτρων πιθανότητας συνεπάγονται η μία της άλλης μέσω του θεωρήματος του $Prokhorov$. Οπότε συνοψίζοντας τα προηγούμενα μπορούμε πλέον να εκφράσουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω $\mathbb{P}_n, \mathbb{P}$ μέτρα πιθανότητας στον $(C, \mathscr{T})$.Εάν οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές του $\mathbb{P}_n$ συγκλίνουν ασθενώς σε αυτές τις $\mathbb{P}$ και αν η ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ έιναι σφιχτή, τοτε $\mathbb{P}_n \implies \mathbb{P}$.*

Με το θεώρημα αυτό, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα στα οποία είχαμε καταλήξει στην προηγούμενη ενότητα, συγκεκριμενοποιούμε την σημαντικότητα της σφιχτότητας ως προς την ασθενή σύγκλιση, συμπέρασμα το οποίο ήδη είχαμε σκιαγραφήσει. Επομένως απο εδώ και πέρα η σφιχτότητα θα είναι η απαραίτητη ιδιότητα που θα ζητάμε να έχουν οι ακολουθίες μας για να μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλισή τους.
Επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε συνθήκες οι οποίες θα είναι ικανές για να μας εξασφαλίσουν την σφιχτότητα. Το θεώρημα $Arzela - Ascoli$ μας έδωσε δύο συνθήκες για την σχετική συμπάγεια ενός συνόλου και εμείς θα χρησιμοποιήσουμε

το θεώρημα αυτό για να καταλήξουμε σε κομψότερες και πιο εύχρηστες συνθήκες για την σφιχτότητα οικογενιών μέτρων πιθανότητας. Συγκεκριμένα παραθέτουμε τα επόμενα θεωρήματα:

Θεώρημα 2.2.3. *Η ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ είναι σφιχτή αν και μόνο άν οι επόμενες συνθήκες ισχύουν:*

1. *Για κάθε θετικό η υπάρχει α τέτοιο ώστε*

$$\mathbb{P}_n\{x : |x(0)| > \alpha\} \leq \eta,\ \ n \geq 1. \tag{2.42}$$

2. *Για κάθε θετικό ε και η υπάρχει ένα δ με $0 < \delta < 1$, και ένας ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε*

$$\mathbb{P}_n\{x : w_x(\delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0. \tag{2.43}$$

Η πρώτη συνθήκη υπαγορεύει το $\{\mathbb{P}_n\pi_0^{-1}\}$ να είναι σφιχτό. Σε σύνδεση με την δεύτερη καταλήγουμε ότι η $w_x(\delta)$ είναι συνεχής και άρα μετρήσιμη.

Απόδειξη. Έστω ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ να είναι σφιχτή.Για δοσμένα ε, η επιλέγουμε ένα συμπαγές σύνολο K τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(K) > 1 - \eta$ για κάθε n.Απο το θεώρημα $Arzela - Ascoli$ προκύπτει ότι έχουμε $K \subset \{x : |x(0)| \leq \alpha\}$ για α αρκετά μεγάλο και $K \subset \{x : w_x(\delta) \leq \epsilon\}$ για δ αρκετά μικρό και άρα οι συνθήκες μας ακολουθούν.Αυτο δείχνει την αναγκαιότητα των συνθηκών
Δεδομένο ότι ένα μόνο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ στον $(C, \mathscr{T})$ είναι σφιχτό απο το θεώρημα (2.1.3) ,ισχύει απο την αναγκαιότητα της δεύτερης συνθήκης οτι για κάθε ε,η υπάρχει ένα δ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}\{x : w_x(\delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta$. Εάν η ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ ικανοποιεί την δεύτερη συνθήκη πρέπει να δειχθεί οτι η ανισότητα 2.43 ισχύει για περπερασμένα n πριν το n_0 για ελάσσων δ, αν αυτό χρειαστεί.
Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ ικανοποιεί τις συνθήκες για $n_0 = 1$πάντα στην 2.43 .Για δοσμένο η, διαλέγουμε α τέτοιο ώστε , αν

$$A = \{x : |x(0)| > \alpha\},$$

τότε $\mathbb{P}_n(A) \geq 1 - \frac{1}{2}\eta$ για κάθε n και διαλέγουμε δ_k τέτοιο ώστε άν

$$\{x : w_x(\delta) < \frac{1}{k}\},$$

τότε $\mathbb{P}_n(A_k) \geq 1 - \frac{\eta}{2^{k+1}}$ για κάθε n. Εάν K είναι η κλειστότητα του $A \bigcap \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ τότε $\mathbb{P}_n(K) \geq 1 - \eta$ για κάθε n και απο το θεώρημα $Arzela - Ascoli$ το K είναι συμπαγές. Άρα η ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ είναι σφιχτή.

Θεώρημα 2.2.4. *Η ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ είναι σφιχτή αν και μόνο άν οι επόμενες συνθήκες ικανοποιούνται:*

1. *Για κάθε θετικό η υπάρχει α τέτοιο ώστε*

$$\mathbb{P}_n\{x : |x(0)| > \alpha\} \leq \eta,\ \ n \geq 1. \tag{2.44}$$

2. *Για κάθε θετικό ε και η υπάρχει ένα δ με $0 < \delta < 1$, και ένας ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε*

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{P}_n\{x : \sup_{t\leq s\leq t+\delta} |x(s) - x(t)| \geq \varepsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0. \tag{2.45}$$

για κάθε t.

Ασφαλώς περιορίζουμε το t στην (2.45) ώστε $0 \leq t \leq 1$. Εάν $t > 1 - \delta$ περιορίζουμε το s στο supremum ετσι ώστε $t \leq s \leq 1$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η (2.45) ικανοποιείται για $\delta < 1/\eta$ αλλά εμείς απαιτούμε δ<1.

Απόδειξη. Εστω δ σταθερό και έστω

$$A_t = \{x : \sup_{t\leq s\leq t+\delta} |x(s) - x(t)| \geq \epsilon\}$$

Τα s,t βρίσκονται μέσα σε διαστήματα της μορφής $[i\delta, (i+1)\delta]$. Εάν $|s-t| < \delta$,τότε τα διαστήματα αυτά είτε θα συμπίπτουν ειτε θα συνορεύουν.Αρα είναι άμεσο ότι

$$\mathbb{P}\{x : w_x(\delta) \geq 3\epsilon\} \leq \mathbb{P}(\bigcup_{i<\delta^{-1}} A_{i\delta}) \tag{2.46}$$

Δεδομένου ότι

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i<\delta^{-1}} A_{i\delta}) \leq \sum_{1<\delta^{-1}} \mathbb{P}_n(A_{i\delta}), \tag{2.47}$$

η (2.45) δηλώνει ότι $\mathbb{P}_n\{x : w_x(\delta) \geq 3\varepsilon\} \leq (1 + [1/\delta])\delta\eta < 2\eta \ \ (\delta < 1)$.
Οπότε η δεύτερη συνθήκη αναπαράγει την αντίστοιχη συνθήκη στο θεώρημα (2.2.3).Η πρώτη συνθήκη παραμένει ίδια οπότε το αποτέλεσμα ειναι άμεσο.

2.2.2 Τυχαίες Συναρτήσεις

Έστω X μία απεικόνιση απο τον $(\Omega,\mathscr{B},\mathbb{P})$ στον C. Προς το παρόν δεν μας απασχολεί η μετρησιμότητα του X δηλαδή άν $(X^{-1}\mathscr{T} \subset \mathscr{B})$. Για κάθε ω στο Ω ,το $X(\omega)$ είναι ένα στοιχείο του C δηλαδή μία συνεχή συνάρτηση στο [0,1] του οποίας η τιμή για t την ορίζουμε ως $X(t, \omega)$. Για δεδομένο t το $X(t)$ δηλώνει πραγματική συνάρτηση στον Ω με τιμή $X(t, \omega)$ στο ω.Το $X(t)$ είναι η σύνθεση $\pi_t X$. Όμοια τα $X(t_1), ..., X(t_k)$ δηλώνουν απεικόνιση απο των Ω στον $\mathbb{R}^k$ με τιμή $X(t_1, \omega), ..., X(t_k, \omega)$ στο ω.
Έστω $A = \{x \in C : x(t) \leq \alpha\}$, τότε $A \in \mathscr{T}$ και $\{\omega : X(t, \omega) \leq \alpha\} = X^{-1}A$.Είναι επόμενο ότι αν X είναι ένα τυχαίο στοιχείο του C -το οποίο ισχύει αν $X^{-1}\mathscr{T} \subset \mathscr{B}$ - τότε κάθε $X(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή (δηλ.$X^{-1}(t)\mathbb{R}^1 \subset \mathscr{B}$) και οπότε κάθε $(X(t_1), ..., X(t_k))$ ειναι τυχαίο διάνυσμα.
Υποθέτουμε τώρα, παρόμοια, ότι κάθε $X(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή. Εάν B είναι τυχαία σφαίρα στον C με κέντρο x και ακτίνα δ τότε $X^{-1}B = \{\omega : X(\omega) \in B\} = \bigcap_r\{\omega : x(r) - \delta \leq X(r, \omega) \leq x(r) + \delta\}$, οπου η τομή επεκτείνεται στους Ρητούς

έτσι ώστε $X^{-1}B \in \mathscr{B}$. Δεδομένου ότι ο C είναι διαχωρίσιμος, το $X^{-1}\mathscr{T} \subset \mathscr{B}$ είναι επόμενο : Το X ειναι τυχαίο στοιχείο του C. Επομένως το X ειναι μία τυχαία συνάρτηση αν και μόνο άν κάθε $X(t)$ είναι τυχαία μεταβλητη. (Αυτο αποδεικνύει οτι τα πεπερασμένης διάστασης σύνολα παράγουν την$\mathscr{T}$ όπως δείχθηκε και προηγουμένως).

Υποθέτουμε τώρα ότι $\{X_n\}$ είναι μία ακολουθία απο τυχαίες συναρτήσεις. Η ακολουθία είναι εξ' ορισμού σφιχτή όταν η ακολουθία των αντίστοιχων κατανομών ειναι σφιχτή. Σύμφωνα με το θεώρημα (2.2.3), η $\{X_n\}$ είναι σφιχτή αν και μόνο αν η ακολουθία $\{X_n(0)\}$ είναι σφιχτή και αν για κάθε θετικό ε και η υπάρχει ένα δ, 0<δ<1, και ένας ακέραιος n_0, τέτοιος ώστε

$$\mathbb{P}\{w(X_n,\delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0 \tag{2.48}$$

Η τελευταία συνθήκη ορίζει ότι η τυχαίες συναρτήσεις X_n δεν θα ταλαντώνονται πολύ βίαια.

Το θεώρημα (2.2.4) μπορεί να αναδιατυπωθεί με τον ίδιο τρόπο : Η $\{X_n\}$ είναι σφιχτή εάν η $\{X_n(0)\}$ είναι σφιχτή και άν για κάθε θετικό ε και η υπάρχει δ, 0<δ<1 και ένας ακέραιος n_0 τέτοια ώστε

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{P}_n\{\sup_{t\leq s\leq t+\delta}|X_n(s)-X_n(t)| \geq \varepsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0,\, 0 \leq t \leq 1 \tag{2.49}$$

(με το s στο *supremum* να περιορίζεται σε $t \leq s \leq 1$ σε περίπτωση που $1-\delta < t \leq 1$).

Το ενδιαφέρον μας στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι η συμπεριφορά συναρτήσεων που παράγονται με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω $\xi_1, \xi_2, ...$, τυχαίες μεταβλητές σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$. Προς το παρόν τα ξ_n δεν χρειάζεται να έχουν κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα όπως στασιμότητα και ανεξαρτησία. Ορίζουμε $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, με $S_0 = 0$, και κατασκευάζουμε X_n απο τα μερικά αθροίσματα $S_0, S_1, ..., S_n$. Για τα σημεία i/n στο [0,1], ορίζουμε

$$X_n(\frac{i}{n},\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_i(\omega) \tag{2.50}$$

(Σημείωση: Ο παράγοντας κανονικοποίησης που διαλέχτηκε εδώ είναι ο $\sigma\sqrt{n}$ αλλα υπάρχουν και άλλοι που θα μπορούσαμε να διαλέξουμε)

Για τα υπόλοιπα σημεία t στο [0,1], ορίζουμε την $X_n(t,\omega)$ με γραμμική παρεμβολή: Εστω $t \in [(i-1)/n, i/n]$, τότε

$$\begin{aligned} X_n(t,\omega) &= \frac{(i/n)-t}{1/n}X_n(\frac{i-1}{n}) + \frac{t-(i-1)/n}{1/n}X_n(\frac{i}{n}) = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{i-1}(\omega) + n(t-\frac{i-1}{n})\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_i(\omega) \end{aligned} \tag{2.51}$$

Δεδομένου ότι $i-1=[nt]$ εάν $t \in [(i-1)/n, i/n]$, μια ποίο κομψή έκφραση της συνάρτησης είναι η

$$X_n(t,\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}(\omega) + (nt-[nt])\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{[nt]+1}(\omega) \tag{2.52}$$

Δεδομένου ότι τα ξ_i , και ως αποτέλεσμα τα S_i, είναι τυχαίες μεταβλητές, απο την (2.52) προκύπτει ότι η $X_n(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή για κάθε t. Ακολουθώντας την λογική που αναπτύξαμε σε αυτή την παράγραφο η X_n είναι τυχαία μεταβλητή. Το ερώτημα το οποίο μας ενδιαφέρει να απαντήσουμε είναι το πότε αυτές οι συναρτήσεις αποτελούν μια σφιχτή ακολουθία. Δεδομένου ότι $X_n(0) = 0$, είναι σίγουρο ότι η ακολουθία $\{X_n(0)\}$ είναι σφιχτή. Απο τον ορισμό της X_n (2.52) μπορούμε να μετατρέψουμε την (2.49) σε έναν περιορισμό της διακύμανσης των μερικών αθροισμάτων S_i. Εάν $t = k/n$ και $t+\delta = j/n$, όπου k ,j ακέραιοι τότε η ανισότητα (2.49) μετατρέπεται στην

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{P}\{\max_{i\leq n\delta}\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}|S_{k+i}-S_k|\geq\varepsilon\}\leq\eta. \tag{2.53}$$

Παρότι οι (2.49), (2.53) γενικά διαφέρουν στην περίπτωση που τα t ,δ δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια του $1/n$ θα δείξουμε ότι η διαφορά αυτή δεν επιδρά στους στόχους μας. Διαλέγουμε ακεραίους j, k που προκύπτουν απο τις ανισότητες

$$\frac{k}{n}\leq t<\frac{k+1}{n},\quad \frac{j-1}{n}\leq t+\frac{\delta}{2}<\frac{j}{n}.$$

Δεδομένου του πολυγωνικού χαρακτήρα της X_n έχουμε ότι

$$\sup_{t\leq s\leq t+\delta/2}|X_n(s)-X_n(t)|\leq\max_{0\leq i\leq j-k}\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}|S_{k+i}-S_k|.$$

Εάν $n\geq 4/\delta$, τότε $j-k<n\delta$, ώστε το $maximum$ στο δεξί μέλος της ανίσωσης δεν μειώνεται εάν ο περιορισμός $i\leq j-k$ γίνει $i\leq n\delta$.Οπότε εάν η (2.53) ικανοποιειται για κάθε k και κάθε $n\geq n_0$ τοτε η (2.49) ικαινοποιείται για κάθε t και κάθε $n\geq max\{n_0, 4/\delta\}$, δεδομένου ότι τα ε,η και δ της (2.49) μετατρέπονται σε 2ε,2η και $\frac{1}{2}$δ αντίστοιχα , το οποίο βέβαια δεν είναι τίποτα περισσότερο απο μια μετονομασία των ποσοτήτων αυτών.

Επομένως η $\{X_n\}$ είναι σφιχτή αν , για κάθε θετικό ε,η υπάρχει ένα δ, με 0<δ<1 , και ένας ακέραιος n_0, τέτοιος ώστε η (2.53) ικανοποιείται για κάθε k και για κάθε $n\geq n_0$. Το $maximum$ στην (2.53) το οποίο επεκτείνετε σε $i\leq n\delta$, θα ήταν πιο εύκολο στην εφαρμογή του εάν το $n\delta$ αντικατασταθεί απο έαν ακέραιο.Εάν το $n\delta$ είναι ένας ακέραιος έστω m- χωρίς να είναι αναγκαστικό να είναι -τότε η ανισότητα (2.53) μετατρέπεται σε

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leq m}|S_{k+i}-S_k|\geq\frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}}\sigma\sqrt{m}\}\leq\eta\delta.$$

Θέτοντας $\lambda=\varepsilon/\sqrt{\delta}$ (εάν το δ είναι μικρό τοτε το λ είναι μεγάλο) η ανισότητα μετατρέπεται ως

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leq m}|S_{k+i}-S_k|\geq\lambda\sigma\sqrt{m}\}\leq\frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}.$$

Δεδομένου ότι το $\eta\varepsilon^2$ είναι θετικό (αφού ε και η θετικά) οδηγούμαστε στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω ακολουθία $\{X_n\}$ ορισμένη ετσι ωστε να ακολουθεί την μορφή της (2.52). Η ακολουθία $\{X_n\}$ είναι σφιχτή αν για κάθε ε θετικό υπάρχει ένα λ , με λ >1 , και ένας ακέραιος n_0 έτσι ώστε άν $n \geq n_0$ τοτε η*

$$\mathbb{P}\{\max_{i \leq n} |S_{k+i} - S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}\} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \tag{2.54}$$

ικανοποιείται για κάθε k.
Απαιτούμε ότι $\lambda > 1$ (καθώς η ανίσωση είναι τετριμμένη για $\lambda \leq \sqrt{\varepsilon}$), η οποία απαίτηση αντιστοιχεί στην απαίτηση δ<1 στο θεώρημα (2.2.4).

Απόδειξη. Για δοσμένα ε και η , μπορούμε να βρούμε ένα δ $(0 < \delta < 1)$ και ένα n_0 τέτοιο ώστε η (2.53) ικανοποιείται για κάθε k άν $n \geq n_0$. Δεδομένου ότι η (2.53) γίνεται πιο περιοριστική όσο τα ε ,η μειώνονται , υποθέτουμε ότι $0 < \varepsilon, \eta < 1$.
Απο υπόθεση, αντικαθιστώντας το ε με $\eta\varepsilon^2$, υπάρχει ένα $\lambda(\lambda > 1)$ και n_1 τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}\{\max_{i \leq n} |S_{k+1} - S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}\} \leq \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2} \tag{2.55}$$

για $n \geq n_1$ και $k \geq 1$. Θέτουμε $\delta = \varepsilon^2/\lambda^2$ και δεδομένου ότι $\lambda > 1 > \varepsilon$, έχουμε ότι $0 < \delta < 1$.
Έστω n_0 ακέραιος μεγαλύτερος του n_0/δ.
Αν $n \geq n_0$τότε $[n\delta] \geq n_1$, και απο την (2.53) καταλήγουμε ότι

$$\mathbb{P}\{\max_{i \leq [n\delta]} |S_{k+i} - S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{[n\delta]}\} \leq \frac{\eta\varepsilon^2}{\lambda^2}$$

Δεδομένου ότι $\lambda\sqrt{[n\delta]} \leq \varepsilon\sqrt{n}$, η (2.53) ικανοποιείται για όλα τα k αν $n \geq n_0$ και έτσι αποδεικνύουμε το ζητούμενο.

Εάν τα $\{\xi_n\}$ είναι στάσιμα, τότε η (2.55) γίνεται

$$\mathbb{P}\{\max_{i \leq n} |S_i| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}\} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \tag{2.56}$$

Τέλος μπορούμε να απορροφήσουμε το σ στο λ και να έχουμε

$$\mathbb{P}\{\max_{i \leq n} |S_i| \geq \lambda\sqrt{n}\} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \tag{2.57}$$

Με το θεώρημα αυτό ολοκληρώνουμε ένα σημαντικό κομμάτι του στόχου μας. Η συνθήκη που παρουσιάζει ειναι κατάλληλα ορισμένη ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί σε ακολουθίες που έχουν τα χαρακτηριστικά που έχουν και οι ακολουθίες που παράγονται απο το διωνυμικό υπόδειγμα. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας το οποίο πιστεύουμε ότι εμπλέκεται στο όριο των κατανομών των ακολουθιών μας: το μέτρο $Wiener$.

ΜέτροWeiner

Το μέτρο $Weiner$, το οποίο θα το συμβολίζουμε απο δώ και πέρα ως W, είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(C, \mathscr{T})$ με τις εξής δύο ιδιότητες. Πρώτον, για κάθε t, η τυχαία μεταβλητή x_t είναι κανονικά κατανεμημένη ώς προς το μέτρο W με μέση τιμή 0 και διασπορά t :

$$W\{x_t \leq \alpha\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2t} du. \tag{2.58}$$

(δηλ $x_t \sim N(0,t)$)

Για $t = 0$ προκύπτει απο τον ορισμό ότι $W\{x_0 = 0\} = 1$. Η δεύτερη ιδιότητα του μέτρου είναι ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{x_t : 0 \leq t \leq 1\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το W :. Δηλαδή έστω

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k \leq 1, \tag{2.59}$$

τότε οι τυχαίες μεταβλητές

$$x_{t_1} - x_{t_0}, x_{t_2} - x_{t_1}, ..., x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \tag{2.60}$$

είναι ανεξάρτητες ως προς το μέτρο W. Προφανώς η ύπαρξη ενος μέτρου με τέτοιες ιδιότητες πρέπει να αποδειχθεί το οποίο συμβαίνει παρακάτω.
Εάν το W έχει αυτές τις δύο ιδιότητες και αν $s \leq t$, τότε η x_t $(x_t \sim N(0,t))$

είναι το άθροισμα των ανεξάρτητων μεταβλητών x_s $(x_s \sim N(0,s))$

και $x_t - x_s$,έτσι ώστε η $x_t - x_s$ να ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $t - s$, το οποίο προκύπτει διαιρώντας τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις των μεταβλητών. Οπότε όταν η (3.9) ικανοποιείται,

$$W\{x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \leq \alpha_i, i = 1, ..., k\} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \int_{-\infty}^{\alpha_i} e^{-u^2/2(t_i - t_{i-1})} du \tag{2.61}$$

Συγκεκριμένα, οι προσαυξήσεις είναι στάσιμες (δηλαδή η κατανομή της $x_t = x_s$ ως προς το W εξαρτάται μόνο απο την διαφορά $t - s$) καθώς καί ανεξάρτητα.

Αν δούμε την $x(t)$ σαν την θέση ενός κινούμενου σωματιδίου στον χρόνο t, τότε η ίδια η x δίνει πληροφορίες για τις προηγούμενες θέσεις του σωματιδίου(ως προς αυτήν την συντεταγμένη) απο τον χρόνο $t = 0$ στον χρόνο $t = 1$. Το μέτρο $Weiner$ δίνει στις τροχίες x μία κατανομή ικανή για την περιγραφή της κίνησης $Brown$- της κίνησης ενος κόκκου γύρης μέσα σε ένα δοχείο με νερό.
Στην προσπάθεία να αποδείξουμε την ύπαρξη του μέτρου W, αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της απόδειξης της ύπαρξης στον $C, \mathscr{T}$ ενός μέτρου πιθανότητας με συγκεκριμένες πεπερασμένης -διάστασης κατανομές. Κάτω απο συγκεκριμένες παραδοχές μπορει να υπάρξει το πολύ ένα τέτοιο μέτρο και υπάρχουν παραδοχές που υπαγορεύουν την ολική έλλειψη υπαρξης του.

Θεώρημα 2.2.6 (Ύπαρξη μέτρου Weiner). *Έστω ο χώρος* $(C, \mathscr{T})$. *Υπάρχει σε αυτόν ένα μέτρο πιθανότητας* W *τέτοιο ώστε να ισχύει η* (2.58) *και τέτοιο ώστε οι τυχαίες μεταβλητές που ορίζονται απο την* (3.9)*να είναι ανεξάρτητες ως προς το* W *όταν ισχυει η* (2.59).

Απόδειξη. Έστω $\xi_1, \xi_2, ...$ ανεξάρτητες και κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές σε ένα χώρο $\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P}$ με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Έστω X_n η τυχαία μεταβλητή που κατασκευάζεται με τρόπο που υποδεικνύεται απο την (2.52) για $\sigma = 1$ δηλαδή :

$$X_n(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{[nt]+1}(\omega). \tag{2.62}$$

Έστω $\mathbb{P}_n$ η κατανομή της X_n στον C. Το μέτρο είναι καλώς ορισμένο καθώς, όπως δείξαμε πριν, η X_n είναι μετρήσιμη ($X_n^{-1}\mathscr{T} \subset \mathscr{B}$).
Πρώτα πρέπει να αποδείξουμε οτι οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές της $\{\mathbb{P}_n\}$ συγκλίνουν ασθενώς σε αυτές που θέλουμε να έχει η W.Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ είναι σφιχτή. Μετά θα είναι άμεσο μέσω εφαρμογής του θεωρήματος του *Prokhorov* ότι το όριο κάθε ασθενώς συγκλίνουσας υπακολουθίας $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ θα ικανοποιεί τις απαιτήσεις που έχουμε επιβάλλει στο W.
Η πεπερασμένης διάστασης κατανομή $\mathbb{P}_n \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$ είναι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $(X_n(t_1), ..., X_n(t_k))$. Θεωρούμε ένα μεμονωμένο χρόνο t. Απο την (2.62) και την υπόθεση κανονικότητας των ξ_n, η$X_n(t)$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά

$$\frac{[nt]}{n} + \frac{(nt - [nt]^2)}{n}$$

η οποία διαφέρει για κάθε t κατα (το πολύ) $2/n$. Οπότε $X_n(t) \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0,t)$
Όμοια μπορούμε να διαχειριστούμε δύο ή παραπάνω χρόνους t. Οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές δηλαδή συγκλίνουν ασθενώς σε αυτές του W.
Για να αποδείξουμε οτι η $\{\mathbb{P}_n\}$ ειναι σφιχτή, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα (2.2.5). Για να αποδείξουμε την (2.57) ορίζουμε τα

$$E_i = \{\max_{j<i} |S_j| < 2\lambda\sqrt{n} \le |S_i|\} \tag{2.63}$$

Απο την στασιμότητα και ανεξαρτησία των ξ_n, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\max_{i \le n} |S_i| \ge 2\lambda\sqrt{n}\} &\le \mathbb{P}\{|S_n| \ge \lambda\sqrt{n}\} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(E_i \bigcap \{|S_n - S_i| \ge \lambda\sqrt{n}\}) \\ &= \mathbb{P}\{|S_n| \ge \lambda\sqrt{n}\} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}\{|S_{n-i}| \ge \lambda\sqrt{n}\}) \\ &\le \mathbb{P}\{|S_n| \ge \lambda\sqrt{n}\} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}\{|S_{n-i}| \ge \lambda\sqrt{n-i}\}) \end{aligned} \tag{2.64}$$

Δεδομένου ότι η $S_j/\sqrt{j}$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 0 και διασπορά 1 και έτσι ώστε αποτέλεσμα έχει ένα ένα απόλυτο στιγμιότυπο α ανεξάρτητο του

$j(\alpha = 2\sqrt{2/\pi})$, είναι επόμενο απο την (2.64) και την ανισότητα του *Chebysev* ότι

$$\mathbb{P}\{\max_{i \leq n} |S_i| \geq 2\lambda\sqrt{n}\} \leq \frac{\alpha}{\lambda^3} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(E_i)\frac{\alpha}{\lambda^3}$$

Δεδομένου ότι τα E_i είναι ασύνδετα, μπορούμε να αποφανθούμε ότι

$$\mathbb{P}\{\max_{i \leq n} |S_i| \geq 2\lambda\sqrt{n}\} \leq \frac{2\alpha}{\lambda^3} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.65}$$

Για δοσμένο ε , διαλέγουμε λ τέτοιο ώστε $2\alpha/\lambda < \varepsilon$ και $\lambda > 1$. Η άνω ανίσωση υποδηλώνει

$$\mathbb{P}\{\max_{i \leq n} |S_i| \geq 2\lambda\sqrt{n}\} \leq \frac{2\varepsilon}{\lambda^3},$$

η οποία είναι (2.57) με έναν συντελεστή 2 ο οποίος δεν μας επηρεάζει. Απο το θεώρημα (2.2.5) επομένως η ακολουθία $\{\mathbb{P}_n\}$ είναι σφιχτή, γεγονός το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

Η απόδειξη της ύπαρξης του μέτρου αυτού εκτός απο τις άμεσα ωφέλειες που παρουσιάζει μας δίνει και κάτι ακόμα : Είναι η πρώτη φορά στην μελέτη που κάνουμε, που χρησιμοποιούμε με επιτυχία τις μεθόδους που παρουσιάζουμε. Χρησιμοποιήσαμε δηλαδή επιτυχώς την σύγκλιση των πεπερασμένης διάστασης κατανομών και την σφιχτότητα για να αποδείξουμε την ασθενή σύγκλιση στοχαστικών ανελίξεων διακριτού χρόνου σε μία συνεχή. Οπότε πλέον έχουμε όλα τα εργαλεία που θα χρειαστούμε για να προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση του στόχου μας.

Κεφάλαιο 3

Σύγκλιση του Διωνυμικού μοντέλου πολλών περιόδων

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίσαμε το διωνυμικό μοντέλο. Στο δεύτερο μελετήσαμε την έννοια της ασθενής σύγκλισης μέτρων πιθανότητας. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εκπληρώσουμε τον στόχο μας ο οποίος έχει δύο μέρη: Πρώτα θέλουμε να μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά του διωνυμικού μοντέλου N περιόδων για $N \to \infty$ και να δείξουμε ότι σύμφωνα με αυτό για κατάλληλη επιλογή παραμέτρων θα ισχύει

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \delta t, \sigma^2 \delta t)$$

οπου ΔS η αλλαγή τιμή του προϊόντος S σε χρόνο δt και μ, σ η αναμενόμενη απόδοση και η αστάθεια αντίστοιχα. Στην συνέχεια θέλουμε να δείξουμε ότι η τιμολογούμενη αξία ενός παραγώγου που εξαρτάται απο το S συγκλίνει ασθενώς στην αξία που μας δίνεται απο το μοντέλο $Black\&Scholes$. Πριν αρχίσουμε την απόδειξη ας ανακεφαλαιώσουμε ορίζοντας το πρώτο απο τα ερωτήματα που θέλουμε να απαντήσουμε.

3.1 Σύγκλισή της κατανομής της αξίας S_T.

Έστω ένα παράγωγο με χρόνο ωρίμανσης T που εξαρτάται απο ένα προϊόν S με αρχική αξία S_0. Σύμφωνα με τις αρχές της μοντέρνας χρηματοοικονομικής θεωρίας αν το πρωτογενές προϊόν απο το οποίο εξαρτάται το παράγωγο είναι ένα προϊόν σε κίνδυνο τότε η αξία του κάθε χρονική στιγμή είναι μια τυχαία μεταβλητή, το οποίο σημαίνει ότι η αξία του αποτελεί μία στοχαστική ανέλιξη ως προς το χρόνο. Το διωνυμικό υπόδειγμα μας υποδεικνύει ένα τρόπο για να μοντελοποιήσουμε την αξία ως μια στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου. Έστω Ω ένας χρόνος πιθανότητας. Για να αναπαράγουμε το διωνυμικό υπόδειγμα N περιόδων χωρίζουμε τον χρόνο μέχρι την ωρίμανση σε N ίσα διαστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται απο τους χρόνους $\{t_1, \ldots, t_N\}$=$\{T/N, 2T/N, \ldots, NT/T = T\}$. Σε κάθε ένα απο αυτούς τους χρόνους η τότε αξία S_{t_k} $k = 0, 1 \ldots, N$ είναι μία μεταβλητή η οποία μπορεί να κινηθεί στον επόμενο χρόνο (για $t_k < T$) κατα τον εξής τρόπο: Για κάποιες τιμές u, d που ορίζουμε εμεις, για τις οποίες ισχυει $u > d$, για την αξία στον χρόνο t_{k+1} ισχύει $S_{t_{k+1}} = S_{t_k}\xi_k$ οπού ξ_k μία τυχαία μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει τις τιμές u, d με πιθανότητα $p, 1-p$ αντίστοιχα όπου p μία παράμετρος του μοντέλου. Είδαμε οτι αν επεκτείνουμε το σκεπτικό αυτό για κάθε χρόνο τότε η αξία για κάθε χρόνο t_k αντιπροσωπεύεται απο την μορφή:

$$S_{t_k} = S_0 \prod_{j=1}^{k} \xi_j \tag{3.1}$$

Το επόμενο μας βήμα ήταν να ορίσουμε τα u, d με την βοήθεια των μ, σ δηλαδή της αναμενόμενης τιμής και της αστάθειας του προϊόντος σε κίνδυνο, το οποίο μας οδήγησε σε αυτήν την μορφή:

$$\xi_k = \begin{cases} e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}} & \text{με πιθανότητα}\, p \\ e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}} & \text{με πιθανότητα}\ \ 1-p \end{cases} \tag{3.2}$$

Ενας τρόπος να παραφράσουμε κομψότερα το μοντέλο είναι ο εξης:

$$S_{t_k} = S_0 \exp\{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\sum_{j=1}^{k}\xi_j\}, \tag{3.3}$$

οπου πλέον

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα}\, p \\ -1 & \text{με πιθανότητα}\ \ 1-p \end{cases} \tag{3.4}$$

Αυτος είναι ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί απο εδώ και πέρα. Παρατηρούμε ότι για $p = \frac{1}{2}$ ισχύει $\mathbb{E}[\xi_k] = 0, \mathbb{V}[\xi_k] = 1 = s^2$. Απο εδώ και πέρα η τιμή της παραμέτρου p θα έχει επιλεγεί να ειναι $\frac{1}{2}$ μόνιμα.

Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο θα προκύψει άμεσα αν για $t \leq T$ ισχύει στο όριο $N \to \infty$

$$\{\ln S_t\}_t \sim N(\ln S_0 + (\mu t), \sigma^2 t) \tag{3.5}$$

Πως μπορούμε όμως να δείξουμε την ασθενή σύγκλιση των κατανομών μιας ακολουθίας διακριτών στοχαστικών ανελίξεων στην κατανομή μίας συνεχούς; Ας επαναλάβουμε έν τάχει καποια σημαντικά αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου.

Για να μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά των κατανομών απο οικογένειες τυχαιων τυχαίων$\{\xi_k\}_{k=0,1,\ldots}$, μία στρατηγική είναι να ορίσουμε μια νέα τυχαία συνάρτηση του χρόνου η οποία θα προκύπτει απο γραμμική παρεμβολή της οικογένειας για κάθε k. Η τυχαία συνάρτηση αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι ανήκει στον χώρο C ο οποίος είναι πλήρης και διαχωρίσιμος. Για τον λόγο αυτό αν μία οικογένεια κατανομών που είναι σφιχτή είναι και σχετικά συμπαγής και αντίστροφα. Αρα για μία σφιχτή οικογένεια στον C η ασθενής σύγκλιση στις κατανομές πεπερασμένης διάστασης είναι αρκετή για να απόδειξη την ασθενή σύγκλιση για την ίδια την οικογένεια. Ας δούμε πώς αυτό μεταφράζεται στην περίπτωσή μας.

Για κάθε n έχουμε μία οικογένεια μεταβλητών $\{\xi_k\}_{k=0,1,\ldots,n}$ με κατανομή $\mathbb{P}_n$ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{T})$. Αν $S_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$ ορίζουμε για κάθε σημείο $t = k/n \in [0,1]$

$$X_n(\frac{k}{n}, \omega) = \frac{1}{s\sqrt{n}} S_k(\omega)$$

Εύκολα προκύπτει ότι $S_0 = 0$. Για τα υπόλοιπα σημεία $t \in [0,1]$ ορίζουμε, οπως είπαμε και προηγουμένως, την $X_n(t,\omega)$ με γραμμική παρεμβολή δηλαδή

$$X_n(t,\omega) = \frac{1}{s\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \frac{1}{s\sqrt{n}} \xi_{[nt]+1}(\omega) \tag{3.6}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει η απο πάνω μορφή υπάρχει αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο.
Άμεσο είναι ότι ώς πολυγωνική συνάρτηση η X_n θα είναι συνεχής για κάθε n. Η οικογένεια κατανομών $\{\mathbb{P}_n\}$ η οποία αντιστοιχεί στην ακολουθία $\{X_n\}$ θα κάνουμε μία πρόβλεψη και θα πούμε ότι συγκλίνει ασθενώς στο μέτρο $Weiner$. Υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες του μέτρου αυτού.

Το μέτρο **Weiner**, το οποίο συμβολίζεται ως W, είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(C, \mathscr{T})$ με τις εξής δύο ιδιότητες. Πρώτον, για κάθε t, η τυχαία μεταβλητή x_t είναι κανονικά κατανεμημένη ώς προς το μέτρο W με μέση τιμή 0 και διασπορά t :

$$W\{x_t \leq \alpha\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2t} du. \tag{3.7}$$

(δηλ $x_t \sim N(0,t)$)

Για $t = 0$ προκύπτει απο τον ορισμό ότι $W\{x_0 = 0\} = 1$. Η δεύτερη ιδιότητα του μέτρου είναι ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{x_t : 0 \leq t \leq 1\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το W :. Δηλαδή έστω

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq 1, \tag{3.8}$$

τότε οι τυχαίες μεταβλητές

$$x_{t_1} - x_{t_0}, x_{t_2} - x_{t_1}, \ldots, x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \tag{3.9}$$

είναι ανεξάρτητες ως προς το μέτρο W. Αν υποθέσουμε προς στιγμήν ότι η ακολουθία των μέτρων πιθανότητας είναι σφιχτή τότε για να ισχύει ότι

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W$$

θα πρέπει για κάθε $t_1, \ldots, t_n$ να ισχύει

$$(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W(t_1), \ldots, W(t_n)) \tag{3.10}$$

δηλαδή οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές της X_n να συγκλίνει σε αυτές του μέτρου $Weiner$.
Ας δούμε πως μπορούμε να το δείξουμε αυτό. Ας θυμίσουμε λίγο την ανισότητα $Chebyshev$.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω μία τυχαία μεταβλητή X και μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

1. $\phi(-X) = \phi(X)\ \forall\ X \in \mathbb{R}$
2. $\phi(X) \geq 0\ \forall\ X \in [0, +\infty)$
3. $\phi \nearrow$ *στο* $[0, +\infty)$

τότε για $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι $\mathbb{P}[|X| > \varepsilon] \leq \mathbb{E}[\phi(X)]/\phi(\varepsilon)$

Παρατηρούμε ότι ισχύει για ένα μεμωνομένο χρόνο t ισχύει ότι

$$|X_n(s) - \frac{1}{s\sqrt{n}} S_{[nt]}| \leq \frac{1}{s\sqrt{n}} \xi_{[nt]+1} \tag{3.11}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα $Chebyshev$ στο δεύτερο μέλος έχουμε ότι:

$$\mathbb{P}[\frac{|\xi_{[nt]+1}|}{s\sqrt{n}} > \varepsilon] \leq \frac{1}{s\sqrt{n}} \frac{\mathbb{E}[|\xi_{[nt]+1}|]}{|\varepsilon|} = 0 \tag{3.12}$$

Οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\frac{|\xi_{[nt]+1}|}{s\sqrt{n}} > \varepsilon] \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s\sqrt{n}} \frac{\mathbb{E}[|\xi_{[nt]+1}|]}{|\varepsilon|} = 0\ \forall \varepsilon > 0 \tag{3.13}$$

και άρα ισχύει ότι $\xi_{[nt]+1} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ απο το οποίο συνεπάγεται ότι:

$$|X_n(s) - \frac{1}{s\sqrt{n}} S_{[nt]}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{3.14}$$

Υπενθυμίζουμε το θεώρημα (2.1.10) το οποίο για την περίπτωσή μας μεταφράζεται ώς εξής:

Δεδομένης της (3.14) αν ισχύει ότι $S_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W$ τότε $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W$.

Αρα πλέον για να δείξουμε την (3.10) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_1]},\ldots,\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_n]}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W(t_1),\ldots,W(t_n)) \tag{3.15}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι για 2 χρόνους $t_1, t_2 : t_2 > t_1$ ισχύει

$$\left(\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_1]},\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_2]}-\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_1]}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W(t_1),W(t_2)-W(t_1)) \tag{3.16}$$

Θα εργαστούμε για κάθε χρόνο ξεχωριστά. Υπενθυμίζουμε το κλασσικό κεντρικό οριακό θεώρημα το οποίο είναι μια ιδιαίτερα διαδεδομένη ειδική περίπτωση του κεντρικού οριακού για τριγωνικές διατάξεις που αποδείξαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $\{X_1, X_2, \ldots\}$ μια ακολουθία απο ισόνομες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μ και πεπερασμένη διασπορά σ^2. Ισχύει*

$$\sqrt{n}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-\mu\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} N(0,\sigma^2) \tag{3.17}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό και δεδομένου ότι $[nt_1]/n \to t_1$ καταλήγουμε εύκολα

$$\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_1]} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} W_{t_1} \sim N(0,t_1). \tag{3.18}$$

Με το ίδιο σκεπτικό καταλήγουμε ότι για t_1, t_2 :

$$\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_1]} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} W_{t_1},\quad \frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_2]} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} W_{t_2}$$

Κάνοντας χρήση των χαρακτηριστικών συναρτήσεων καταλήγουμε στην σχέση.

$$\frac{1}{s\sqrt{n}}(S_{[nt_2]}-S_{[nt_1]}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} W_t - W_s.$$

Παρατηρούμε ότι τα $(\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_1]}, \frac{1}{s\sqrt{n}}(S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]}))$ είναι ανεξάρτητα το οποίο προκύπτει απο την ανεξαρτησία των ξ_k. Εφαρμόζοντας το θεώρημα (2.1.8) έχουμε ότι

$$\left(\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_1]},\frac{1}{s\sqrt{n}}(S_{[nt_2]}-S_{[nt_1]})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W_{t_1},W_{t_2}-W_{t_1}).$$

και επομένως

$$(X_n(t_1),X_n(t_2)-X_n(t_1)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W_{t_1},W_{t_2}-W_{t_1})$$

Με χρήση είτε χαρακτηριστικών συναρτήσεων εύκολα καταλήγουμε στο:

$$(X_n(t_1),X_n(t_2)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W_{t_1},W_{t_2}) \tag{3.19}$$

Εύκολα πλέον μπορούμε να διαχειριστούμε παραπάνω χρόνους με τον ίδιο τρόπο και άρα η σύγκλιση των πεπερασμένης διάστασης κατανομών αποδείχθηκε.

Για να αποδείξουμε τώρα και την σφιχτότητα της ακολουθίας των τυχαίων συναρτήσεων υπενθυμίζουμε ενα θεώρημα της προηγούμενης ενότητας.

Θεώρημα 3.1.3. *Έστω ακολουθία* $\{X_n\}$ *ορισμένη ετσι ωστε να ακολουθεί την μορφή της* (2.52). *Η ακολουθία* $\{X_n\}$ *είναι σφιχτή αν για κάθε* ε *θετικό υπάρχει ένα* λ *, με* λ *>1 , και ένας ακέραιος* n_0 *έτσι ώστε άν* $n \geq n_0$ *τοτε η*

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leq n} |S_{k+i} - S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}\} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \tag{3.20}$$

ικανοποιείται για κάθε k.
Απαιτούμε ότι $\lambda > 1$ *(καθώς η ανίσωση είναι τετριμμένη για* $\lambda \leq \sqrt{\varepsilon}$*), η οποία απαίτηση αντιστοιχεί στην απαίτηση* δ*<1 στο θεώρημα* (2.2.4).

Μπορούμε να εκφράσουμε το $S_{k+i} - S_k$ ως $S_{k+i} - S_k = S_i$ γιατι η κατανομη των μεταβλητών της κάθε οικογένειας είναι στάσιμη αρα, οπως ηδη αναφέραμε στο κεφάλαιο 2, για να είναι σφιχτή η οικογένεια αρκεί να ισχύει

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leq n} |S_i| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}\} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$$

Για να δείξουμε ότι ικανοποιείται η σχέση αυτή θα αποδείξουμε πρώτα ένα λήμμα που μας ειναι απαραίτητο.

Λήμμα Έστω $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και πεπερασμένες διασπορες σ_i^2. Αν $S_i = \xi_1 + \cdots + \xi_i$ και $s_i^2 = \sigma_1 + \cdots + \sigma_i$ τότε

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leq m} |S_i| \geq \lambda s_m\} \leq 2\mathbb{P}\{|S_m| \geq (\lambda - \sqrt{2})s_m\}. \tag{3.21}$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την (3.21), η οποία είναι τετριμμένη για $\lambda \leq \sqrt{2}$, θεωρούμε σύνολα της μορφής

$$E_i = \{\max_{j<i} |S_j| < \lambda s_m \leq |S_i|\}.$$

Είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\max_{i\leq m} |S_i| \geq \lambda s_m\} &\leq \mathbb{P}\{|S_m| \geq (\lambda - \sqrt{2})s_m\} \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} \mathbb{P}(E_i \cap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})s_m\}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Δεδομένου ότι $|S_i| \geq \lambda s_m$ και $|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})s_m$ συνεπάγεται ότο $|S_m - S_i| \geq \sqrt{2}s_m$. Απο την ανισότητα *Chebyshev* και την ανεξαρτησία των ξ_i που έχουμε απο την υπόθεση το άθροισμα της (3.22) είναι το πολύ

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m-1}\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}\{|S_m - S_i| \leq \sqrt{2}\} &\leq \sum_{i=1}^{m-1}\mathbb{P}(E_i)\frac{1}{2s_m^2}\sum_{k=i+1}^{m}\sigma_k^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\mathbb{P}(E_i) \leq \frac{1}{2}\mathbb{P}\{\max|S_i| \geq \lambda s_m\}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την (3.22) μας δίνουν την (3.21).

Εφαρμόζοντας το λήμμα στην περίπτωσή μας έχουμε ότι, για $\lambda > 2\sqrt{2}$,

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leq n}|S_i| \leq \lambda s\sqrt{n}\} \leq 2\mathbb{P}\{|S_n| \leq \frac{1}{2}\lambda s\sqrt{n}\}.$$

Απο το κεντρικό οριακό θεώρημα,

$$\mathbb{P}\{|S_n| \geq \frac{1}{2}\lambda s\sqrt{n}\} \to \mathbb{P}\{|N| \geq \frac{1}{2}\lambda\} < \frac{8}{\lambda^3}\mathbb{E}\{|N|^3\}.$$

Τότε για $\varepsilon > 0$, έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\max_{i\leq n}|S_i| \leq \lambda s\sqrt{n}\} < \varepsilon/\lambda^2$$

για λ αρκετά μεγάλο. Έτσι πλέον ικανοποιούνται πλήρως οι προϋποθέσεις του θεωρήματος.

Δεδομένης της σύγκλισης των πεπερασμένης δίαστασης κατανομών και της σφιχτότητας μπορούμε πλέον να πούμε ότι

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W. \tag{3.24}$$

οπότε

$$\{\ln S_t\} \xrightarrow{\mathscr{D}} \ln S_0 + \mu t + \sigma\sqrt{t}W_t \sim N(\ln S_0 + \mu t, \sigma^2 t) \tag{3.25}$$

Για κάθε $t \in (0, 1]$. Το αποτέλεσμα μας είναι κανονικοποιημένο στο διάστημα αυτό αλλα χωρίς βλάβη ισχύει και για το $(0, T]$.

Απο την διαδικασία που μόλις ολοκληρώσαμε παρατηρούμε το εξής: Τα χαρακτηριστικα των ξ_k που παίξαν σημαντικό ρόλο ήταν η ανεξαρτησία η ισονομία (για κάθε n) και το γεγονός ότι ειχαν μηδενική μέση τιμή και πεπερασμένη διασπορά.Για οποιαδήποτε τέτοια οικογένεια μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Στην πραγματικότητα μόλις αναπαράξαμε το θεώρημα του *Donsker* γνωστό και ώς κεντρικό οριακό θεώρημα για συναρτήσεις.

3.2 Συγκλισή της αναμενόμενης απόδοσης παραγώγων

Ας ασχοληθούμε τώρα με την τιμολόγηση παραγώγων. Πρώτα θα ασχοληθούμε με την κατανομή της αξίας του προϊόντος σε κίνδυνο κάτω απο το μέτρο $\mathbb{Q}$ και μετά με την αναμενόμενη απόδοση ενός παραγώγου που εξαρτάται απο αυτό.

Είδαμε στην πρώτη ενότητα οτι άν ορίσουμε μέσω του διωνυμικού υποδείγματος τα γνωστά ξ_k έτσι ώστε:

$$S_{t_k} = S_0 \prod_{j=1}^{k} \xi_j$$

τοτε μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο *martingale* $\mathbb{Q}$ για την μεταβλητη ξ_k για το οποίο ισχυει

$$\mathbb{Q}\{S_{t_{k+1}} = uS_{t_k}\} = q = \frac{e^{rh} - d}{u - d} \tag{3.26}$$

$$\mathbb{Q}\{S_{t_{k+1}} = dS_{t_k}\} = 1 - q = 1 - \frac{e^{rh} - d}{u - d} \tag{3.27}$$

και τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-rt_{k+1}} S_{t_{k+1}} | \mathscr{F}_k) = \frac{e^{rh} - d}{u - d} = q, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{3.28}$$

οπου r είναι το επιτόκιο των προϊόντων άνευ κινδύνου. Το σημαντικό του μέτρου αυτού είναι ότι η αναμενόμενη απόδοση ενός παραγώγου κάτω απο αυτό το μέτρο αποτελεί την δίκαιη τιμή δηλαδή την τιμή που δεν επιτρέπει στρατηγικές επιτηδειότητας.

Το ερώτημα το οποίο καλούμαστε να απαντήσουμε αφορά την κατανομή των ξ_k για $N \to \infty$ κατω απο το $\mathbb{Q}$ δηλαδή αναζητούμε το συνεχές όριο των διακριτών στοχαστικών ανελίξεων που ορίζει το διωνυμικό υπόδειγμα πάλι αλλά για ένα διαφορετικό μέτρο.
Για να το απαντήσουμε θα μετατρέψουμε ελαφρώς τις μεταβλητές μας. Συγκεκριμένα θα θέσουμε μία νέα με όνομα Z_k για την οποία ισχύει

$$\xi_k = e^{Z_k}$$

Εύκολα προκύπτει ότι

$$Z_k = \begin{cases} a = \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} & \text{με πιθανότητα } q \\ b = \mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t} & \text{με πιθανότητα } 1 - q \end{cases} \tag{3.29}$$

όπου το q με την σειρά του έγινε ίσο με

$$q = \frac{e^{rh} - d}{u - d} = \frac{e^{rh} - e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}} - e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}} \tag{3.30}$$

ώστε να ικανοποιεί την συνθήκη για να είναι το μέτρο $\mathbb{Q}$ *martingale*.

Ας παρατηρήσουμε κάποια χαρακτηριστικά της καινουργίας μας μεταβλητής. Καταρχήν η αναμενόμενη τιμή της είναι :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_k] = (\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t})q + (\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})(1-q) = \\ \mu\delta tq - \mu\delta tq + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}q + \sigma\sqrt{\delta t}q - \sigma\sqrt{\delta t} \\ = \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}(2q-1) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Η διασπορά της είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^{\mathbb{Q}}[Z_k] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_k^2] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_k]^2 = a^2q + b^2(1-q) - [aq - b(1-q)]^2 = \\ q(1-q)(a-b)^2 = q(1-q)(2\sigma\sqrt{\delta t})^2 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το ποσό $\delta t = \frac{T}{N}$.

Μια άλλη εύκολη παρατήρηση που θα μπορούσε να κάνει κάποιος είναι ότι τα a, b, q έχουν το κοινό ότι αλλάζουν κάθε φορά που αλλάζουμε την διαμέριση N δηλαδή $a, b, q = a(N), b(N), q(N)$ και για αυτό θα τα συμβολίζουμε απο εδώ και πέρα a_n, b_n, q_n για $n = 0, 1, \ldots$. Ποιο σημαντικό ομως είναι οτι μαζί με αυτά αλλάζει το πλήθος και η κατανομή των Z_i καθώς για τον λόγο αυτόν δεν μπορούμε να επαναλάβουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία με πριν. Μετα απο αυτήν την παρατήρηση και δεδομένου του στόχου μας επόμενο φαίνεται να αναλύσουμε την συμπεριφορά των μεγεθών αυτών για $n \to \infty$. Για την επίτευξη αυτού του στόχου θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα $Taylor$ για να απλοποιήσουμε το q το οποίο θεωρούμε οπως αναφέραμε μόλις οτι είναι συνάρτηση του n. Υπενθυμίζουμε ότι:

Θεώρημα 3.2.1 (Θεώρημα του $Taylor$)**.** *: Εστω ακέραιος $k \geq 1$ και έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία έχει παραγώγους k-ιοστης τάξης στο σημείο α του $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $h_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$f(x) = f(\alpha) + f(\alpha)(x-\alpha) + \cdots + \frac{f^(k)(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + h_k(x)(x-\alpha)^k,$$

οπου $\lim_{x\to\alpha} h_k(x) = 0$.

Το q τηρεί της προϋποθέσεις του θεωρήματος και ώς αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί ώς

$$q = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\delta t}\frac{\mu - r\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}) + O(\delta t^2) \tag{3.33}$$

το οποίο προκύπτει χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $Taylor$ του e^x κοντά στο 0. Δεδομένου ότι $\lim_{n\to\infty} \delta t = \lim_{n\to\infty} T/n = 0$ είναι άμεσο ότι το $q \to \frac{1}{2}$. Ας επιστρέψουμε στην μέση τιμή της μεταβλητής. Το όριο αυτής παρατηρούμε ότι είναι το

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_k] = \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}(2q-1) = \\
\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}(2\frac{1}{2}(1 - \sqrt{\delta t}\frac{\mu - r\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}) + O(\delta t^2) - 1) = \\
\mu\delta t - \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} - \sigma\sqrt{\delta t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t + O(\delta t^2) = \\
(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t + O(\delta t^2)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Ο όρος $O(\delta t^2)$ συγκλίνει στο 0.
Είναι γνωστό ότι για ισόνομες μεταβλητές ισχύει

$$
\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} Z_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Z_i] = n\mathbb{E}[Z_i]
$$

Απο αυτό καταλαβαίνουμε εύκολα ότι το όριο της αναμενόμενης τιμής του αθροίσματος $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ είναι

$$
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sum_{i=1}^{n} Z_i] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_i] = \lim_{n\to\infty} n(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T \tag{3.35}
$$

αποτέλεσμα το οποίο θα μας χρειαστεί στην πορεία. Με ανάλογα βήματα θα βρούμε την διασπορά του αθροίσματος αφού είναι γνωστό οτι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι και ασυσχέτιστες και άρα

$$
\mathbb{V}[\sum_{i=1}^{n} Z_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[Z_i] = n\mathbb{V}[Z_i]
$$

Οπότε έχουμε ότι

$$
\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}[\sum_{i=1}^{n} Z_i] = \lim_{n\to\infty} nq(1-q)(2\sigma\sqrt{\delta t})^2 = T\frac{1}{4}4\sigma^2 = \sigma^2 T \tag{3.36}
$$

Ευκολα παρατηρούμε οτι η μέση τιμή και η διασπορά μεμονωμένων Z_i είναι μηδενικές στο συνεχές όριο, πράγμα που είναι αναμενόμενο.
Μια τελευταία αλλαγή που πρέπει να κάνουμε στην μεταβλητή πριν ασχοληθούμε με την σύγκλιση του μοντέλου είναι να την 'κεντράρουμε', δηλαδή να της δώσουμε μέση τιμή μηδέν. Αυτο εύκολα συμβαίνει ορίζοντας μία νέα μεταβλητή

$$
Y_i' = Z_i - \mathbb{E}[Z_i] = Z_i - (\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}(2q-1)) \tag{3.37}
$$

Σε αυτό το σημείο ας επιστρέψουμε λίγο για να αναφέρουμε τι έχουμε δείξει ως τώρα. Για την αξία ενός παραγώγου το διωνυμικό υπόδειγμα μας υποδεικνύει ότι

$$S_{t_k} = S_0 \prod_{j=1}^{k} e^{Y_i' + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_i]} = S_0 e^{\sum_{j=1}^{k}(Y_i' + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z_i])} = S_0 e^{\sum_{j=1}^{k} Y_i' + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sum_{i=1}^{k} Z_i]} \quad (3.38)$$

Οπου τα Y_k' είναι ισόνομες ανεξάρτητες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_k'] = 0, \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_k'^2] = q(1-q)(2\sigma\sqrt{\delta t})^2$$

Τέλος θα επαναπροσδιορίσουμε ελαφρώς την μεταβλητή μας είς τρόπο

$$Y_k = \frac{Y_k'}{\sigma}$$

Εφαρμόζοντας την αλλαγή στα αποτελέσματα μας έχουμε:

$$S_{t_k} = S_0 \exp\{\sigma \sum_{j=1}^{k} Y_i + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\sum_{i=1}^{k} Z_i]\} \quad (3.39)$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_k] = 0, \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_k^2] = q(1-q)(2\sqrt{\delta t})^2$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\mu\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t} - \mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}(2q-1) = \sigma(1-2q\pm 1)\sqrt{\delta t}$$

Άρα η κατανομή της μεταβλητής αυτής είναι

$$Y_{nk} = \begin{cases} a1 = 2\sigma(1-q)\sqrt{\delta t} & \text{με πιθανότητα } q \\ a2 = \sigma(-2q)\sqrt{\delta t} & \text{με πιθανότητα } 1-q \end{cases} \quad (3.40)$$

Είμαστε πλέον έτοιμοι να ελέγξουμε την οριακή συμπεριφορά του υποδείγματος. Το μόνο μέγεθος για το οποίο η οριακή συμπεριφορά μας διαφεύγει είναι η τυχαία μεταβλητή. Τα όρια των υπολοίπων μεγεθών είναι γνωστά. Ας επαναλάβουμε την διαδικασία που κάναμε προηγουμένως.
Για κάθε n έχουμε μία οικογένεια μεταβλητών $\{Y_k\}_{k=0,1,\dots,n}$ με κατανομή $\mathbb{P}_n$ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{T})$. Αν $S_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i$ ορίζουμε για κάθε σημείο $t = k/n \in [0,1]$

$$X_n(\frac{k}{n}, \omega) = \frac{1}{s\sqrt{n}} S_k(\omega)$$

Εύκολα προκύπτει ότι $S_0 = 0$. Για τα υπόλοιπα σημεία $t \in [0,1]$ ορίζουμε, οπως είπαμε και προηγουμένως, την $X_n(t,\omega)$ με γραμμική παρεμβολή δηλαδή

$$X_n(t,\omega) = \frac{1}{s\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \frac{1}{s\sqrt{n}} Y_{[nt]+1}(\omega) \quad (3.41)$$

Όμοια με πριν παρατηρούμε ότι ισχύει για ένα μεμονωμένο χρόνο t ισχύει ότι

$$|X_n(t) - \frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt]}| \leq \frac{1}{s\sqrt{n}}Y_{[nt]+1} \tag{3.42}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα $Chebyshev$ στο δεύτερο μέλος έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[\frac{|Y_{[nt]+1}|}{s\sqrt{n}} > \varepsilon] \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s\sqrt{n}}\frac{\mathbb{E}[|Y_{[nt]+1}|]}{|\varepsilon|} \tag{3.43}$$

Αλλα η $\mathbb{E}[|Y_{[nt]}|] = 2q(1-q)\sigma\sqrt{\delta t}$ και άρα είναι πάντα πεπερασμένη και μάλιστα συγκλίνει στο 0. Οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}[\frac{|Y_{[nt]+1}|}{s\sqrt{n}} > \varepsilon] \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s\sqrt{n}}\frac{\mathbb{E}[|Y_{[nt]+1}|]}{|\varepsilon|} = 0\ \forall\varepsilon > 0 \tag{3.44}$$

και άρα ισχύει ότι $Y_{[nt]+1} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ απο το οποίο συνεπάγεται ότι:

$$|X_n(t) - \frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt]}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{3.45}$$

Οπως και πριν το θεώρημα (2.1.10) για την περίπτωσή μας μεταφράζεται ώς εξής:

Δεδομένης της (3.45) αν ισχύει ότι $S_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W$ τότε $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W$.

Αρα πλέον για να δείξουμε την αντίστοιχη συνθήκη της (3.10) για το πρόβλημα αυτό αρκεί και πάλι να δείξουμε ότι

$$(\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_1]}, \ldots, \frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_n]}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W(t_1), \ldots, W(t_n)) \tag{3.46}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι για 2 χρόνους $t_1, t_2 : t_2 > t_1$ ισχύει

$$(\frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_1]}, \frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_2]} - \frac{1}{s\sqrt{n}}S_{[nt_1]}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W(t_1), W(t_2) - W(t_1)) \tag{3.47}$$

Για να αποδείξουμε την απο πάνω πρόταση πρέπει να φανταστούμε τα εξής: Το $S_{[nt_1]} = \sum_{k=0}^{[nt_1]} Y_{nk}$ είναι 0 για $n = 0$. Οσο αυξάνεται η διαμέριση τα $Y_{nk}, k \leq [nt_1]$ $n = 1, 2, \ldots$ αποτελούν μια ακολουθία απο ακολουθίες ανεξάρτητων μεταβλητών, οι οποίες για κάθε ακολουθία είναι $i.i.d$ δηλαδή εκτός απο ανεξάρτητες είναι και ισόνομες με κατανομή $\alpha_1(n)$ με πιθανότητα q_n και $\alpha_2(n)$ με πιθανότητα $1 - q_n$. Στην πραγματικότητα αποτελούν μία τριγωνική δίαταξη απο τυχαίες μεταβλητές η οποία διαισθητικά παρουσιάζεται ώς εξής:

$Y_{11} \leftarrow$ ανεξάρτητη, παράμετρος q_1

$Y_{21}\ Y_{22} \leftarrow$ ανεξάρτητες, παράμετρος q_2

$\vdots$

Απο το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για Τριγωνικές Διατάξεις έχουμε ότι

$$\frac{S_{[nt]}}{s_{[nt]}} \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0,1)$$

όπου

$$s_{[nt]}^2 = V[S_{[nt]}]$$

αν ικανοποιείται η συνθήκη του *Lindeberg* δηλαδή αν ισχύει ότι

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{1}{s_{[nt]}^2} \sum_{i=1}^{[nt]} \mathbb{E}[Y_{ni}^2 I\{|Y_{ni}| \geq \varepsilon s_{[nt]}\}] \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{3.48}$$

Για να ισχύει αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \ |Y_{ni}| \leq \varepsilon s_{[nt]}$ έτσι ώστε $I\{|Y_{ni}| \geq \varepsilon s_{[nt]}\} = 0$
Αυτο προκύπτει εύκολα αφου $s_{[nt]}^2 = [nt]q(1-q)4T/n$ και

$$\frac{|Y_{ni}|}{s_{[nt]}} \leq \frac{2\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[nt]q(1-q)4T}} = \frac{\sigma}{\sqrt{[nt]q(1-q)}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

και άρα η συνθήκη του *Lindeberg* ικανοποιείται και το Κεντρικό Οριακό για Τριγωνικές διατάξεις ισχυει.
Δεδομένου ότι $[nt]/n \to t$ καταλήγουμε εύκολα

$$\frac{1}{s\sqrt{n}} S_{[nt_1]} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} W_{t_1} \sim N(0,t_1). \tag{3.49}$$

Με το ίδιο σκεπτικό καταλήγουμε ότι

$$\frac{1}{s\sqrt{n}}(S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} W_{t_2} - W_{t_1}.$$

Παρατηρούμε ότι τα $(\frac{1}{s\sqrt{n}} S_{[nt_1]}, \frac{1}{s\sqrt{n}}(S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]}))$ είναι ανεξάρτητα το οποίο προκύπτει απο την ανεξαρτησία των Y_{nk}. Εφαρμόζοντας το θεώρημα (2.1.8) έχουμε ότι

$$(\frac{1}{s\sqrt{n}} S_{[nt_1]}, \frac{1}{s\sqrt{n}}(S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]})) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}).$$

και επομένως

$$(X_n(t_1), X_n(t_2) - X_n(t_1)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1})$$

Με χρήση είτε χαρακτηριστικών συναρτήσεων ή με χρήση του γεγονότος ότι η ασθενής σύγκλιση διατηρείται μέσα απο συνεχείς απεικονίσεις εύκολα καταλήγουμε στο:

$$(X_n(t_1), X_n(t_2)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} (W_{t_1}, W_{t_2}) \tag{3.50}$$

Εύκολα πλέον μπορούμε να διαχειριστούμε παραπάνω χρόνους με τον ίδιο τρόπο και άρα η σύγκλιση των πεπερασμένης διάστασης κατανομών αποδείχθηκε.
Έχοντας ολοκληρώσει το πρώτο κομματι της απόδειξης ας ασχοληθούμε με την σφιχτότητα. Προηγουμένως ορίσαμε τα Y_{nk} έτσι ώστε να ισχύει

$$Y_{nk} = \frac{Z_{nk} - \mathbb{E}[Z_{nk}]}{\sigma} \tag{3.51}$$

Αν παρομοιάσουμε την μεταβλητή Y_{nk} με ένα κέρμα τότε σε N ρίψεις έρχεται m φορές το $a1$ και $N-m$ το $a2$ και άρα το άθροισμα είναι

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} [m(2\sigma(1-q)\sqrt{\delta t}) + (N-m)(\sigma(-2q)\sqrt{\delta t})]$$

Ευκολα παρατηρείται ότι

$$|S_N| \leq 2N\sigma\sqrt{\delta t} \tag{3.52}$$

απο την τριγωνική ανισότητα και $2(1-q) \leq 2$ και $2q < 2$.
Υπενθυμίζουμε την ικανή συνθήκη της σφιχτότητας.

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leq n} |S_i| \geq \lambda s\sqrt{n}\} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$$

Μέσω της (3.52) παρατηρούμε ότι η συνθήκη θα ικανοποιείται αν για κάθε ε υπάρχει λ :

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leq n} 2i\sigma\sqrt{\delta t} \geq \lambda s\sqrt{n}\} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$$

Δεδομένου ότι $\delta t = T/n$ παρατηρούμε και ότι το δεξί μελος της ανισότητας μεγιστοποιείται για $i = n$ η ανισότητα μετατρέπεται ώς

$$2n\sigma T \geq \lambda sn \iff \lambda \leq 2T\sigma/s \tag{3.53}$$

Επειδή η ακολουθία των τυπικών αποκλίσεων s_n είναι συγκλίνουσα, όπως έχουμε δειξει, θα είναι και φραγμένη άρα υπάρχει $M : M \geq 2T\sigma/s_n \ \forall\ n$. Πλέον είναι άμεσο ότι για κάθε ε υπάρχει $\lambda \geq M$ δηλαδή

$$\mathbb{P}\{\lambda \leq 2T\sigma/s_n\} = 0 \leq \varepsilon/\lambda^2 \ \forall\varepsilon > 0 \tag{3.54}$$

και άρα

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leq n} |S_i| \geq \lambda s\sqrt{n}\} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$$

οπότε η οικογένεια X_n είναι σφιχτή.
Αφου λοιπόν η ακολουθία μας είναι σφιχτή και επιπλέον

$$(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_k)) \xrightarrow{\mathscr{D}} (W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \tag{3.55}$$

για κάθε πεπερασμένο συνολο $t_1, \ldots, t_k \in (0,1)$ έχουμε το τελικό αποτέλεσμα ότι αν $\mathbb{P}_n$ η κατανομή του X_n τότε

$$\mathbb{P}_n \implies W.$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα αυτό στην (3.39) σε συνδυασμό με την (3.35) παρατηρούμε ότι για $t \in [0,1]$ ισχύει

$$\{S_t\}_t \xrightarrow{\mathscr{D}} S_0 e^{\sigma W_t + (r - 1/2\sigma^2)t} \tag{3.56}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι κανονικοποιημένο στο [0,1] αλλα χωρίς διαφορά εκφράζεται και για χρόνους $t \in [0,T]$. Το όριο της κατανομής είναι η κατανομή που χρησιμοποιείται στο μοντέλο *Black&Scholes* για την τιμολόγηση παραγώγων.
Μια ακόμα παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι το όριο μας είναι ανεξάρτητο του μ το οποίο μας επιβεβαιώνει ότι η επιλογή της παραμέτρου αυτής δεν επηρεάζει σημαντικά όσο αυξάνονται οι περίοδοι.

Η σύγκλιση κατα κατανομή είναι αρκετή όμως για να μας υποδειξει σύγκλιση της τιμής που ορίζει το ένα μοντέλο στην τιμή που ορίζει το άλλο; Για να το απαντήσουμε αυτό πρέπει να χωρίσουμε κάποιες περιπτώσεις.

Σύγκλιση της αναμενόμενης απόδοσης ενός παραγώγου.

Η αναμενόμενη απόδοση ενός παραγώγου έστω V κάτω απο το $\mathbb{Q}$ έχουμε δείξει ότι ειναι μια συνάρτηση της αξίας του προϊόντος σε κίνδυνο δηλαδή $V_t = V(S_t)\ \ t \in (0,T)$. Έχουμε δείξει ότι αν $\mathbb{Q}_n$ το μέτρο *martingale* που ορίζει την κατανομή της τιμής μέσω του διωνυμικού μοντέλου για n περιόδους και $\mathbb{Q}$ είναι το μέτρο ελευθέρο κινδύνου που ορίζεται απο την *Black&Scholes* τότε ισχυει

$$\mathbb{Q}_n \implies \mathbb{Q}.$$

Απο τον ορισμό της ασθενής σύγκλισης για κάθε συνάρτηση f φραγμένη και συνεχή ισχύει ότι

$$\int f dQ_n \to \int f dQ.$$

Οπότε αν η απόδοση του παραγώγου είναι μία φραγμένη συνάρτηση της αξίας του προϊόντος τότε ισχύει ότι η αναμενόμενη απόδοση σε χρόνο t μέσω του διωνυμικού μοντέλου συγκλίνει στην αναμενόμενη απόδοση που ορίζει η *Black&Scholes* δηλαδή

$$e^{-rt}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}[V(S_t)] \to e^{-rt}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V(S_t)].$$

Είναι όμως η σύγκλιση της απόδοσης περιορισμένη μόνο σε περιπτώσεις όπου η απόδοση είναι φραγμένη; Η απάντηση είναι όχι.
Έστω ένα παράγωγο ευρωπαϊκού τύπου που εξαρτάται από ένα προϊόν S με τιμή άσκησης $K = 0$. Εύκολα παρατηρούμε ότι η απόδοση του είναι $V(S_T) = S_T$ δηλαδή ειναι μια ταυτοτική απεικόνιση και άρα μή φραγμένη. Παρόλα αυτά ισχυει ότι

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}[S_T] = S_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T].$$

Αρα βλέπουμε ότι η ασθενής σύγκλιση επεκτείνεται και σε κάποιες μη φραγμένες περιπτώσεις.
Γενικά για ένα ευρωπαϊκό παράγωγο πώλησης με τιμή άσκησης K η απόδοση είναι

$$V(S_T) = (K - S_T)^+$$

άρα είναι φραγμένη και η σύγκλιση πραγματοποιείται. Για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς ισχύει

$$V(S_T) = (S_T - K)^+.$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $x = x^+ - x^-$ καταλήγουμε ότι $(S_T - K) = (S_T - K)^+ - (S_T - K)^- = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+$ και άρα

$$(S_T - K)^+ = (S_T - K) + (K - S_T)^+$$

Οπου το $(K - S_T)^+$ είναι φραγμένο και για το $(S_T - K)$ έχουμε δεί ότι η σύγκλιση πραγματοποιείται(Το K είναι σταθερά άρα $\mathbb{E}[(S_T - k)] = \mathbb{E}[S_T] - k$). Οπότε αυτή είναι μία περίπτωση ακόμα που ενώ η απόδοση δεν είναι φραγμένη συνάρτηση της S_T η σύγκλιση πραγματοποιείται.
Θα συνεχίσουμε και σε μία πιό γενική περίπτωση

Ορισμός 3.2.1 (Ομοιόμορφη Ολοκληρώσιμότητα)**.** Μια κλάση τυχαίων στοιχείων C είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αν $\forall\, \varepsilon\ \exists K \in [0, +\infty)\ : \mathbb{E}(|X|I_{|X|\geq K}) \leq \varepsilon\ \forall\ X \in C$.

Ένας τρόπος για δείξουμε ότι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη είναι δείχνοντας ότι

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_n \int_{\{|X_n|\geq\alpha\}} |X_n| dP = 0$$

Αλλιώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του $de\ la\ Vallee\ Poussin$ οπου μια οικογένεια μεταβλητών$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (η οποία απο τον ορισμό των τυχαίων μεταβλητών ανήκει $L^1(\mu)$) ειναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη άν και μόνο αν υπάρχει μη αρνητική αύξουσα κυρτή συνάρτηση $G(t)$ τέτοια ώστε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty \quad \& \quad \sup_\alpha \mathbb{E}[G(|X_a|)] < \infty.$$

Μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος ειναι η e^x.
Θα παραθέσουμε ένα θεώρημα τώρα που χρησιμοποιεί τον παραπάνω ορισμό με ένα ιδιαίτερα χρήσιμο ώς προς εμάς τρόπο.

Θεώρημα 3.2.2. *Υποθέτουμε ότι* $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$. *Αν η* X_n *είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη τότε*

$$\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X].$$

Δεδομένου ότι

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X \implies X_n^r \xrightarrow{\mathscr{D}} X^r$$

το θεώρημα γενικεύεται για στιγμές μεγαλύτερες της πρώτης.

Έστω τώρα ότι η απόδοση είναι της μορφής

$$V(S_T) = S_T^K$$

για κάποιο K στο $\mathbb{N}$ και έστω ότι ισχυει

$$\sup_{\alpha} \mathbb{E}[exp\{S_T^K\}] < \infty$$

ώστε η ακολουθία να είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Τότε απο τα παραπάνω καταλήγουμε ότι

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}[S_T^K] \to \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^K]$$

για όλα τα $K \in \mathbb{N}$. Έτσι δείχνουμε ότι η σύγκλιση επιτυγχάνεται για άλλη μία περίπτωση όπου η απόδοση είναι μη φραγμένη.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογες

Για να ολοκληρώσουμε την μελέτη μας θα παρουσιάσουμε μερικές περιπτώσεις όπου θα τιμολογήσουμε κάποια παράγωγα διαφόρων τυπων και θα δείξουμε την πραγματοποίηση της σύγκλισης της τιμής του διωνυμικού μοντέλου σε αυτήν που μας υποδεικνύει το υπόδειγμα $Black\&Scholes$. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την στατιστική γλώσσα προγραμματισμού R στην οποία θα δημιουργήσουμε αλγορίθμους που θα προσομοιώνουν τα μοντέλα μας.

4.1 Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης

Έχουμε δει ότι για ευρωπαϊκού τύπου παράγωγα ισχύει ότι η απόδοση τους στην ωρίμανση ειναι $(S_T - K)^+$ για δικαιώματα αγοράς και $(K - S_T)^+$ για πώλησης. Μέσω του διωνυμικού υποδείγματος μπορούμε να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη απόδοση του παραγώγου, η οποία ειναι και η δίκαιη τιμή του μέσω του τύπου

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}\mathbb{Q}[f(S_T)] = e^{-rT}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}q^{N-k}(1-q)^k f(S_0 u^{N-k} d^k). \qquad (4.1)$$

ο οποίος είναι γνωστός ως ο διακριτός τύπος $Black\ Scholes$.
Παρακάτω προτείνουμε έναν αλγόριθμο για την υλοποίηση της διαδικασίας. Ο τύπος δέχεται κάποια ορίσματα. Συγκεκριμένα τα

άνευ κινδύνου επιτόκιο r

την αστάθεια $sigma$,

την αναμενόμενη απόδοση mu,

την αρχική τιμή $S0$,

την περίοδο ωρίμανσης T,

τις περιόδους του μοντέλου,

την τιμή άσκησης K,

και τέλος την επιλογή ανάμεσα σε δικαίωμα αγοράς ή πώλησης με προεπιλεγμένη την αγορά $call = T$.

Ο αλγόριθμος μας επιστρέφει την σημερινή αξία του παραγώγου δηλαδή την σημερινή αξία της αναμενόμενης απόδοσης στην ωρίμανση.

```
EUbinomial<-function(r,sigma,mu,S0,T,N,K,call=T){
deltat<-T/N
u<-exp(mu*deltat+sigma*sqrt(deltat))
d<-exp(mu*deltat-sigma*sqrt(deltat))
q<-(exp(deltat*r)-d)/(u-d)
#calculate the model parameters
V<-0
if(call==T){# call options
for(i in 0:N){
ST<-S0*u^(N-i)*d^i #Stock price in maturity
V<-V+(choose(N,i)*q^(N-i)*(1-q)^i*(max(ST-K,0)))#applying the formula
}
}
else{#put options
for(i in 0:N){
ST<-S0*u^(N-i)*d^i
V<-V+(choose(N,i)*q^(N-i)*(1-q)^i*(max(K-ST,0)))
}
}
V0<-V*exp(-r*T)
return(V0)#return value
}
```

Για να τιμολογήσουμε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς μέσω του μοντέλου $Black\&Scholes$ πρέπει να υπολογίσουμε το $C(S,t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+|\mathscr{F}_t]$ οπου $\mathbb{Q}$ το μέτρο $martingale$. Ισχύει ότι

$$C(S(t),t) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S(t)/K) + (T-t)(r+\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S(t)/K) + (T-t)(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Οπού $\Phi(\cdot)$ η σ.κ.π. της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Η απόδειξη για $t = 0$ βρίσκεται στο Παράρτημα. Για τα δικαιώματα πώλησης ισχύει

$$P(S(t), t) = -S(t)\Phi(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)$$

Ένας απλός αλγόριθμος που να υπολογίζει την αρχική τιμή μέσω του μοντέλου αυτού για ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς είναι ο επόμενος :

```
BSpric<- function(T=1,sigma=1,r=0.1,S=1,K=1){

d1<-1/(sigma*sqrt(T))*(log(S/K)+(r+(sigma^2/2))*T)
d2<-1/(sigma*sqrt(T))*(log(S/K)+(r-sigma^2/2)*T)
BL<-pnorm(d1)*S-pnorm(d2)*K*exp(-r*T)

return(BL)
}
```

Θα τρέξουμε και τις δύο μεθόδους για ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς για το οποίο ισχύει $S0 = 10, r = 0.1, sigma = 0.3, mu = 0.2, T = 1, N = 5, K = 8$. Αυτό που προκύπτει είναι ότι:

```
> Binomialvalue<-EUbinomial(0.1,0.3,0.2,10,1,5,7,T)
> Binomialvalue
[1] 3.72247
> BSvalue<-BSpric(1,0.3,0.1,10,7)
> BSvalue
[1] 3.732096
>
```

το οποίο επιβεβαιώνει ότι οι τιμές είναι πολυ κοντά, ήδη για $N = 5$. Αν τρέξουμε τον αλγόριθμο του διωνυμικού υποδείγματος για διαφορετικές τιμες μ τότε παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται πολύ. Πράγματι:

```
> S<-numeric(7)
> for(i in 1:7){
+ mu<-10^(-1)*i
+ S[i]<-Binomialvalue<-EUbinomial(0.1,0.3,mu,10,1,5,7,T)
+ }
> S
[1] 3.718902 3.722470 3.678995 3.666138 3.666138 3.666138 3.666138
>
```

Μάλιστα για $N = 50$ οι διαφορές γίνονται ακόμα μικρότερες το οποίο επιβεβαιώνει ότι η επιλογή του μ δεν επηρεάζει την δίκαιη τιμή του παραγώγου όσο το $N \to \infty$, όπως δηλαδή προτείνει το μοντέλο $Black - Scholes$.

```
> S<-numeric(7)
> for(i in 1:7){
+ mu<-10^(-1)*i
+ S[i]<-Binomialvalue<-EUbinomial(0.1,0.3,mu,10,1,50,7,T)
+ }
> S
[1] 3.732156 3.731086 3.728577 3.724530 3.721214 3.718694 3.715044
```

Επίσης με την αύξηση των βημάτων η τιμή πήγε ακόμα ποιο κοντά σε αυτήν που προτείνει το μοντέλο $Black - Scholes$ όπως και περιμέναμε. Αυτος ο αλγόριθμος είναι φτιαγμένος για να μπορεί να λειτουργεί για βήματα κοντά στο $N = 1000$. Αν θέλουμε περισσότερα βήματα απο αυτά για να μην απειρίζονται οι τιμές μας πρέπει να κάνουμε χρήση του νεπέριου λογαρίθμου στον υπολογισμό του S.

4.2 *Barrier Options*

Μια ακόμα κατηγορία παραγώγων για τα οποία θα μιλήσουμε είναι τα *Barrier Options* τα οποία είναι ένα είδος εξωτικών παραγώγων. Τα παράγωγα αυτά έχουν την ιδιότητα ότι αν κάποια στιγμή πριν την ωρίμανση περάσει κάποιο φράγμα τιμής τότε το παράγωγο ακυρώνεται. Στο Παράρτημα θα δείξουμε ότι αν $V(t, S)$ η αναμενόμενη απόδοση μέσω του μοντέλου *Black&Scholes* τότε για τα παράγωγα αυτού του τυπου και συγκεκριμένα για τα *down and out* στα οποία αν η τιμή της μετοχής περάσει ένα κάτω φραγμα τότε το συμβόλαιο ακυρώνεται η απόδοση V_B είναι

$$V_B(t, S) = V(t, S) - (\frac{x}{\alpha})^{1-k} V(t, \frac{\alpha^2}{x})$$

για $k = 2r/\sigma^2$.
Ένας αλγόριθμος ικανός να αναπαράγει την διαδικασία είναι ο επόμενος :

```
BSbarrierpric<-function(T=1,sigma=1,r=0.1,S=1,K=1,a){

d1<-1/(sigma*sqrt(T))*(log(S/K)+(r+(sigma^2/2))*T)
d2<-1/(sigma*sqrt(T))*(log(S/K)+(r-sigma^2/2)*T)
BL<-pnorm(d1)*S-pnorm(d2)*K*exp(-r*T)
S1<-a^2/S
k<-2*r/sigma^2
d11<-1/(sigma*sqrt(T))*(log(S1/K)+(r+(sigma^2/2))*T)
d21<-1/(sigma*sqrt(T))*(log(S1/K)+(r-sigma^2/2)*T)
BL1<-(S/a)^(1-k)*(pnorm(d11)*S1-pnorm(d21)*K*exp(-r*T))
```

```
realprice<-BL-BL1
return(realprice)
}
```

Αν θελήσουμε να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο που να χρησιμοποιεί τον διακριτό τύπο *Black and Scholes* τότε θα πρέπει να αναπαράγουμε 2^n τροχιές για να ελένξουμε μία μία αν περάσαν το φράγμα. Επομένως είναι άμεσο ότι καλύτερο είναι να προσσεγγίσουμε το πρόβλημα μέσω του Αναδρομικού Αλγορίθμου. Ενας αλγοριθμος ικανός να αναπαράγει την διαδικασία είναι ο εξής:

```
Barrierbinom<-function(r,sigma,mu,S0,T,N,K,call=T,bu=10000000000,bd=0){
deltat<-T/N#defining the parameters
u<-exp(mu*deltat+sigma*sqrt(deltat))
d<-exp(mu*deltat-sigma*sqrt(deltat))
q<-(exp(deltat*r)-d)/(u-d)
S<-numeric(N+1)
V<-matrix(0,N+1,N+1)
for (i in 0:N+1){
temp<-S0*u^(N+1-i)*d^(i-1)
if(temp<bd){
S[i]<-0}
else if(temp>bu){
S[i]<-0}
else
{S[i]<-temp}
}
if(call==T){
for(i in 0:N+1){

V[i,N+1]<-max(S[i]-K,0)
}


for(i in N:0){
for(j in 0:i){
V[j,i]<-(q*V[j,i+1]+(1-q)*V[j+1,i+1])*exp(-r*deltat)

}
}
}
else{
for(i in 0:N+1){

V[i,N+1]<-max(K-S[i],0)
```

```
}


for(i in N:0){
for(j in 0:i){
V[j,i]<-(q*V[j,i+1]+(1-q)*V[j+1,i+1])*exp(-r*deltat)

}
}
}
return(V)
}
```

Οπου *bu* το άνω φράγμα και *bd* το κάτω φράγμα. Οι τιμές που έχει ο αλγόριθμος προεπιλεγμένες για τα μεγέθη αυτά έχουν επιλεχθεί ώστε να μην επηρεάζουν το αποτέλεσμα. Ο αλγόριθμος μας επιστρέφει ένα πίνακα ο οποίος περιέχει σε κάθε θέση την δίκαιη τιμή του παραγώγου. Για ευρωπαϊκού τύπου *barrier options* η δίκαιη αρχική τιμή βρίσκεται στην πρώτη σειρά πρώτη γραμμη.
Προφανώς η σύγκλιση πρέπει να επιβεβαιώνεται και σε αυτήν την περίπτωση. Πράγματι αν ισχύει $S_0 = 10\$, r = 0.1, \sigma = 0.2, \mu = 0.2, T = 1, K = 9$ και έχουμε ένα *down and out* παράγωγο με κάτω φράγμα στο 7$ και συγκρίνουμε την τιμή που μας δίνει η *Black and Scholes* με το διωνυμικό μοντέλο για $n = 50$ και για $n = 500$ τότε βλέπουμε έτσι

```
> dan<-BSbarrierpric(1,0.2,0.1,10,9,7)
> dan
[1] 1.998323
> den<-Barrierbinom(0.1,0.2,0.2,10,1,50,9,T,100,7)
> den[1,1]
[1] 1.997458
> den<-Barrierbinom(0.1,0.2,0.2,10,1,500,9,T,100,7)
> den[1,1]
[1] 1.998428
```

Παρατηρούμε οτι για ένα μικρό σχετικά αριθμό βημάτων (50) έχουμε ήδη συμφωνία μέχρι και το δευτερο δεκαδικό ένω για 500 έχουμε και στο τρίτο δεκαδικό το οποίο επιβεβαιώνει την σύγκλιση.
Το γεγονός αυτό μπορούμε να το εκμεταλευτούμε για να πάμε ένα βήμα πιο πέρα. Αν είχαμε και άνω και κάτω όριο τότε η *Black and Scholes* σε αντίθεση με το διωνυμικό μοντέλο είναι ιδιαίτερα δύσκολη στην μεταχείρηση της. Έτσι το διωνυμικό μοντέλο μπορει να αποτελέσει μια προσέγγιση της *Black and Scholes* σε

αυτήν την περίπτωση αφού κατασκευάζεται πιό εύκολα και γνωρίζουμε ότι η τιμή που θα μας δώσει θα συγκλίνει σε αυτήν της $B-S$.
Δηλαδή αν στο προηγούμενο παράδειγμα είχαμε ένα άνω όριο ίσο με 15$ τότε η δίκαιη τιμή θα είναι

```
> den<-Barrierbinom(0.1,0.2,0.2,10,1,500,9,T,15,7)
> den[1,1]
[1] 1.653914
```

Ας επιστρέψουμε στην περίπτωση χρήσης των μέτρων $Martingale$ για να τιμολογησουμε το παράγωγο πηγαίνοντας μπροστά στον χρόνο και όχι προς τα πίσω. Η εφαρμογη του διωνυμικού μοντέλου στην συγκεκριμένη περίπτωση όπως είπαμε δεν είναι τόσο απλή. Για να κατασκευάσουμε την αναμενόμενη απόδοση πρέπει να ελέγξουμε αν κάθε μια απο τις τροχιές του μοντέλου περνάει το όριο το οποίο σημαίνει ότι πρέπει να υπολογίσουμε 2^N τροχιές το οποίο αυξάνει την πολυπλοκότητα σημαντικά. Για να το αποφύγουμε αυτό μπορούμε να κάνουμε κάτι άλλο:

Έστω ότι προσομοιώνουμε τροχιές του διωνυμικού μοντέλου για n περιόδους. Οι τελικές τιμές των τροχιών είναι ισόνομες και ανεξάρτητες και το ίδιο οι αποδόσεις τους άρα θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} V(S_T^i) \to \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}[V(S_T)]$$

οπου R ο αριθμός των τροχίων που προσομοιώσαμε. Άρα αντί να ελένξουμε κάθε τροχιά προσομοιώνουμε κάποιες τροχίες και ελένχουμε μόνο αυτές και θα έχουμε προσεγγιστικά το ίδιο αποτέλεσμα. Ένας αλγόριθμος ικανός να αναπαράγει την διαδικασία είναι ο επόμενος:

```
EUbarrier<-function(r,sigma,mu,S0,T,N,K,barrier,REP){
deltat<-T/N
u<-exp(mu*deltat+sigma*sqrt(deltat))
d<-exp(mu*deltat-sigma*sqrt(deltat))
q<-(exp(deltat*r)-d)/(u-d)
V<-0
coin<-0
MC<-0
for(j in 1:REP){
S<-S0

for(i in 1:N){
coin<-rbinom(1,1,q)
S<-S*(u*coin+d*(1-coin))
```

```
if(S<=barrier){
S<-0
break
}

}
MC<-MC+max(S-K,0)*exp(-r*T)/REP
}
return(MC)
}
```

Κεφάλαιο 5

Παράρτημα

5.1 Απόδοση Ευρωπαϊκών Παραγώγων

Έστω $\mathbb{Q}$ το μέτρο *martingale* που ορίζεται απο το μοντέλο *Black and Scholes*. Για να υπολογίσουμε την δίκαιη τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με *Strike Price* K για $t = 0$ πρεπει να υπολογίσουμε το

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+]$$

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+] &= e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_0 \exp\{(r - \sigma^2/2)T + \sigma W - K)^+] \\ &= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{y^*}^{\infty} (S_0 \exp\{(r - \sigma^2/2)T + \sigma x\} - K)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y^*}^{\infty} (S_0 \exp\{-2(\sigma - x)^2\}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y^*}^{\infty} e^{-rT} K dx \end{aligned}$$

οπου $y^* = \sigma^{-1} \ln(\frac{K}{S_0}) - (r - \sigma^2/2)T$ το σημείο μηδενισμού του $S_T - K$ κατω απο το οποίο γίνεται αρνητικό. Απο το ολοκλήρωμα καταλήγουμε ότι

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+] = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T)}\Phi(d_2)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S(t)/K) + (T)(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{(T)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S(t)/K) + (T)(r - \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{(T)}}$$

και όμοια προκύπτουν οι υπόλοιπες περιπτώσεις, δηλαδή για άλλες χρονικές στιγμές ή για τα δικαιώματα πώλησης.

5.2 Τιμολόγηση σε *barrier options*

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε την διαφορική εξίσωση $Black\&Scholes$ η οποία ήταν η

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV. \tag{5.1}$$

Θα δείξουμε ότι αν $u(t.S)$ μια λύση της ΔΕ τοτε η

$$u_\alpha(t,S) = (\frac{S}{\alpha})^{1-k}\ u(t, \frac{\alpha^2}{S} = h(S), u(t, g(S)) \tag{5.2}$$

είναι ακόμα μια λύση της. Πράγματι αν βάλουμε την u_α στην εξίσωση έχουμε :

$$\begin{aligned} h(S)u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(h''(S)u + h(S)u_g g' + h(S)u_g g' \\ +u_{gg}(g')^2 h(S) + u_g g'' h(S)) + rS(h'(x)u + u_g h(S)g') - ruh(S) \\ = h(S)(u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 u_{gg}(g')^2 - u_g g' - ru) \\ +\frac{1}{2}\sigma^2 S^2(h''(S)u + 2h(S)u_g g' + u_g g'' h(S)) + rS(h'(S)u + 2h(S)u_g g') \end{aligned} \tag{5.3}$$

αλλα παρατηρούμε ότι

$$h(S)(u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 u_{gg}(g')^2 - u_g g' - ru) = 0 \tag{5.4}$$

αφου η u ικανοποιεί την $B-S$ και είναι άμεσο οτι η άνω εξίσωση είναι η $B-S$.
Για να ικανοποιείται η εξίσωση πρέπει να ισχυει

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2(h''(S)u + 2h(S)u_g g' + u_g g'' h(S)) + rS(h'(S)u + 2h(S)u_g g') = 0 \tag{5.5}$$

Εξισώνουμε τους όρους μηδενικής τάξης και παρατηρούμε ότι

$$\sigma^2 S^2 h''(S)u + rSh'(S)u = 0 \implies -\sigma^2 S^2 k(1-k)S^{-k-1} + rS(1-k)S^{-k} \implies k = 2r/\sigma^2$$

και παρατηρούμε ότι για την ίδια επιλογή k ικανοποιειται και η αντίστοιχη εξίσωση των πρωτοβάθμιων όρων.
Επειδή η Δ.Ε είναι γραμμική η $u_b = u - u_\alpha$ την ικανοποιεί επίσης και ισχυει ότι $u_b(t,a) = 0 \forall t$ και για αυτό συνάρτηση αυτή ειναι κατάλληλη για να τιμολογήσει *barrier options* τύπου *down and out*.

5.3 Αλγόριθμος αποτίμησης Αμερικάνικων δικαιωμάτων

```
USAbinom<-function(r,sigma,mu,S0,T,N,K,call=T){
deltat<-T/N#defining the parameters
u<-exp(mu*deltat+sigma*sqrt(deltat))
d<-exp(mu*deltat-sigma*sqrt(deltat))
q<-(exp(deltat*r)-d)/(u-d)
S<-matrix(0,N+1,N+1)#creating empty matrixes for the stock prices and the option pric
V<-matrix(0,N+1,N+1)
S[1,1]<-S0 #create the binomial tree
for(i in 1:N+1){
for(j in 1:i){
S[j,i]<-S0*u^(i-j)*d^(j-1)
}

}
if(call==T)# call option
{
for(i in 0:N+1){#maturity payoff
ST<-S0*u^(N+1-i)*d^(i-1)
V[i,N+1]<-max(ST-K,0)
}
for(i in N:0){#early payoff
for(j in 0:i){
temp<-(q*V[j,i+1]+(1-q)*V[j+1,i+1])*exp(-r*deltat)
temp1<-max(S[j,i]-K,0)
V[j,i]<-max(temp,temp1)
}
}
}
else{#put option
for(i in 0:N+1){
ST<-S0*u^(N+1-i)*d^(i-1)
V[i,N+1]<-max(K-ST,0)
}
for(i in N:0){
for(j in 0:i){
temp<-(q*V[j,i+1]+(1-q)*V[j+1,i+1])*exp(-r*deltat)
temp1<-max(K-S[j,i],0)
V[j,i]<-max(temp,temp1)
}
}
}
```

```
return (V)
}
```

Βιβλιογραφία

[1] Μιχάλης Λουλάκης*Σημειώσεις Μαθηματικής Χρηματοοικονομίας.*

[2] *Patrick Billingsley Convergence Of Probability Measures* 1968

[3] *John Hull Options Futures and other Derivatives*

[4] *Robert V.Kohn Notes by Robert V.Kohn* 2004 *Courant Institute of Mathematical Sciences*

[5] *John C.Cox, Stephen Ross, Mark Rubinstein Option Pricing : A Simplified Approach.* 1978.

[6] *Martin Baxter, Andrew Rennie Financial Calculus: An introduction to derivative pricing* 1973:

[7] Ιωάννης Σπηλιώτης *Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά* 2004 Εκδόσεις Συμεών

[8] Ιωάννης Σπηλιώτης *Σημειώσεις Θεωρίας Πιθανοτήτων* ΕΜΠ.