



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

**Ελαστικός λογισμός ορθογωνίων ελασμάτων υπό σύνθετη
καταπόνηση με έμφαση στη μετάβαση από την προ στη μετα-
λογισμική περιοχή**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Του

ΡΕΠΠΑ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Επιβλέπων: Πέτρος Α. Καρύδης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, Ιούλιος 2017

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

**Ελαστικός λογισμός ορθογωνίων ελασμάτων υπό σύνθετη
καταπόνηση με έμφαση στη μετάβαση από την προ στη μετα-
λογισμική περιοχή**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Του

ΡΕΠΠΑ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Επιβλέπων: Πέτρος Α. Καρύδης

Αναπληρωτής Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 25 Ιουλίου 2017

(Υπογραφή)

.....
Ιωάννης Κ. Χατζηγεωργίου
Καθηγητής

(Υπογραφή)

.....
Μανόλης Σ. Σαμουηλίδης
Καθηγητής

(Υπογραφή)

.....
Δημήτρης Ευταξιοπούλος
Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Ιούλιος 2017

(Υπογραφή)

.....

ΡΕΠΠΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Διπλωματούχος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός Ε.Μ.Π

© 2017 – All rights reserved

Abstract

In the present thesis, the behavior of clamped rectangular plates under uniaxial compression and lateral pressure is analyzed before and after elastic buckling occurs. This phenomenon is common in marine structures, and it is a crucial part of research, because a wrong approach or prediction can lead to a complete failure of the structure. This happens due to the sudden change of how the structure behaves when the external force becomes equal to the critical buckling load. This thesis aims to study the effect of hydrostatic pressure on the critical buckling load of plates under uniaxial compression. Appropriate basic parameters of this study were selected in order to represent the response of long naval plates placed on the outer bottom of ships. The behavior of plates is examined from the large deflections' perspective. Specifically, the Von Karman equations are solved using an arithmetic code, in FORTRAN programming language. The differential equations ruling the behavior of plates under compressive and lateral loads, are converted to a system of algebraic equations using finite differences. The system of algebraic equations is then solved with the dynamic relaxation method

Key Words: «elastic buckling, rectangular plate, aspect ratio, critical buckling load, uniformly distributed load, hydrostatic pressure, large deflections, Von Karman equations, dynamic relaxation, initial imperfections, postbuckling behavior»

Σύνοψη

Στη παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η συμπεριφορά πακτωμένων ελασμάτων υπό μονοαξονική θλίψη παρουσία πλευρικής πίεσης, πριν και μετά το λυγισμό στην ελαστική περιοχή. Το φαινόμενο αυτό συναντάται συχνά στις ναυπηγικές κατασκευές και αποτελεί κρίσιμο στοιχείο μιας έρευνας, καθώς η μη σωστή προσέγγιση και πρόβλεψη του δύναται να οδηγήσει σε καταστρεπτικά αποτελέσματα της κατασκευής. Αυτό οφείλεται στην απότομη αλλαγή της συμπεριφοράς της κατασκευής όταν το εξωτερικό αξονικό φορτίο γίνει ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Σκοπός της διπλωματικής είναι η μελέτη της επίδρασης της επιβολής υδροστατικής πίεσης στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού ελασμάτων που βρίσκονται υπό καθεστώδες μονοαξονικής θλίψης. Οι βασικές παράμετροι της μελέτης επιλέχθηκαν έτσι ώστε να προσεγγιστεί η απόκριση μακριών ναυπηγικών ελασμάτων που βρίσκονται στον εξωτερικό πυθμένα πλοίων επιφάνειας. Η συμπεριφορά των ελασμάτων εξετάζεται στη περιοχή μεγάλων μετατοπίσεων. Συγκεκριμένα επιλύονται οι διαφορικές εξισώσεις Von Karman με τη χρήση αριθμητικού κώδικα γραμμένου σε γλώσσα FORTRAN. Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά των ελασμάτων υπό θλιπτικά και πλευρικά φορτία, μετατρέπονται σε σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με χρήση πεπερασμένων διαφορών. Το αλγεβρικό σύστημα επιλύεται με τη μέθοδο της δυναμικής χαλάρωσης.

Λέξεις κλειδιά: «ελαστικός λυγισμός, ορθογώνιο έλασμα, λόγος πλευρών, κρίσιμο φορτίο λυγισμού, ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο, υδροστατική πίεση, μεγάλες μετατοπίσεις, εξισώσεις Von Karman, δυναμική χαλάρωση, αρχικές ατέλειες, μετα-λυγισμική συμπεριφορά»

Περιεχόμενα

<i>Abstract</i>	5
<i>Σύνοψη</i>	6
<i>Περιεχόμενα</i>	7
<i>Λίστα Σχημάτων</i>	9
<i>Λίστα Πινάκων</i>	11
1 <i>ΝΑΥΠΗΓΙΚΑ ΕΛΑΣΜΑΤΑ</i>	12
1.1 <i>Γενικά Στοιχεία Ελασμάτων</i>	12
1.2 <i>Κατηγορίες Ελασμάτων</i>	13
1.3 <i>Ναυπηγικά Υλικά</i>	14
1.3.1 <i>Ναυπηγικός Χάλυβας</i>	14
1.3.2 <i>Αλουμίνιο</i>	15
1.4 <i>Φορτίσεις Πλοίου. Συνθήκες Λειτουργίας Ελασμάτων</i>	15
1.4.1 <i>Στατικές Φορτίσεις</i>	15
1.4.2 <i>Δυναμικές Φορτίσεις</i>	16
1.5 <i>Ιστορική Αναδρομή</i>	17
2 <i>ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΕΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΒΑΣΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ</i>	19
2.1 <i>Εισαγωγή</i>	19
2.2 <i>Κάμψη ελασμάτων</i>	19
2.2.1 <i>Θεωρία μικρών μετατοπίσεων</i>	22
2.2.1.1 <i>Κυλινδρική κάμψη</i>	22
2.2.1.2 <i>Κάμψη ελασμάτων πεπερασμένων διαστάσεων</i>	24
2.2.1.3 <i>Οριακές Συνθήκες</i>	29
2.2.1.4 <i>Μέθοδοι επίλυσης</i>	30
2.2.2 <i>Θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων</i>	32
2.2.3 <i>Στοιχεία που επηρεάζουν την απόκριση στις μεγάλες μετατοπίσεις</i>	34
2.2.3.1 <i>Επίδραση των μεμβρανικών τάσεων</i>	34
2.2.3.2 <i>Επίδραση του αρχικού βέλους κάμψης</i>	34
2.3 <i>Λυγισμός ορθογωνίων ελασμάτων</i>	36
2.3.1 <i>Ελαστικός λυγισμός υπό μονοαξονική θλίψη</i>	37
2.3.2 <i>Μεταλυγισμική αντοχή μακριών ορθογώνιων ελασμάτων</i>	40
2.3.3 <i>Επίδραση της πλευρικής πίεσης στον λυγισμό</i>	42
2.4 <i>Απόκριση ορθογωνίων ελασμάτων υπό συνδυασμό ομοεπίπεδων και πλευρικών φορτίων</i>	43
3 <i>ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΧΑΛΑΡΩΣΗ</i>	46
3.1 <i>Εισαγωγή</i>	46

3.2	Γενικά στοιχεία της μεθόδου.....	46
3.3	Περιγραφή της μεθόδου	47
3.4	Μαθηματική διατύπωση της μεθόδου	48
3.5	Ευστάθεια και σύγκλιση.....	49
3.6	Επιλογή κατάλληλου πλέγματος	52
3.7	Αξιολόγηση της μεθόδου δυναμικής χαλάρωσης	52
4	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	54
4.1	Περιγραφή Περιπτώσεων.....	54
4.2	Τετράγωνα ελάσματα. Λόγος πλευρών $a/b=1.0$	55
4.2.1	Κατανομές βέλους κάμψης.....	55
4.2.2	Κατανομές θλιπτικών τάσεων.....	61
4.2.3	Κατανομές καμπτικών τάσεων.....	66
4.2.4	Κατανομές συνολικών τάσεων.....	71
4.3	Μακριά ελάσματα. Λόγος πλευρών $a/b=2.5$	73
4.3.1	Κατανομές βέλους κάμψης.....	73
4.3.2	Κατανομές θλιπτικών τάσεων.....	78
4.3.3	Κατανομές καμπτικών τάσεων.....	83
4.3.4	Κατανομές συνολικών τάσεων.....	89
4.4	Μακριά ελάσματα. Λόγος πλευρών $a/b=4.0$	92
4.4.1	Κατανομές βέλους κάμψης.....	92
4.4.2	Κατανομές θλιπτικών τάσεων.....	96
4.4.3	Κατανομές καμπτικών τάσεων.....	98
4.4.4	Κατανομές συνολικών τάσεων.....	101
4.5	Ισοϋψείς καμπύλες.....	102
4.6	Σύνοψη αποτελεσμάτων και προτάσεις για μελλοντική έρευνα	127
5	Βιβλιογραφία	129

Λίστα Σχημάτων

Σχήμα 1: Βασικά μεγέθη ελάσματος.....	13
Σχήμα 2: Στατικές φορτίσεις σε εγκάρσια διατομή πλοίου	16
Σχήμα 3: Απόκριση σε σφυρόκρουση	16
Σχήμα 4: Απεικόνιση της καθετότητας μετά τη παραμόρφωση.....	20
Σχήμα 5: Μετάδοση πλαστικότητας σε μακρύ έλασμα	21
Σχήμα 6: Καμπύλες φορτίου μετατόπισης για μακριά πακτωμένα ελάσματα υπό ομοιόμορφη φόρτιση ..	22
Σχήμα 7: (α) Κυλινδρική κάμψη ελάσματος (β) εγκάρσια διατομή.....	23
Σχήμα 8: Στοιχείο ελάσματος $dx dy$	25
Σχήμα 9: Ροπές και δυνάμεις σε στοιχείο του ελάσματος.....	26
Σχήμα 10: Διαμητική παραμόρφωση (α) και μετατόπιση (β) ελάσματος.....	27
Σχήμα 11: Μέγιστη μετατόπιση ορθογώνιων ελασμάτων υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο	31
Σχήμα 12: Μέγιστες τάσεις σε ορθογώνια ελάσματα υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο	31
Σχήμα 13: Μεμβρανικές τάσεις σε στοιχείο ελάσματος.....	33
Σχήμα 14: Επίδραση μεμβρανικών τάσεων σε απλά εδρασμένο μακρύ έλασμα.....	35
Σχήμα 15: Ευσταθής (α), ουδέτερη (β) και ασταθής (c) ισορροπία	37
Σχήμα 16: Παραμόρφωση μακριού ελάσματος υπό μονοαξονική θλίψη	38
Σχήμα 17: Σχέση του συντελεστή λυγισμού με τις ιδιομορφές.....	39
Σχήμα 18: Συντελεστής λυγισμού για διάφορες οριακές συνθήκες.....	40
Σχήμα 19: Διάχυση του παραλαμβανόμενου φορτίου στη μονοαξονική θλίψη	41
Σχήμα 20: Επίδραση της πλευρικής φόρτισης στο ισοδύναμο πλάτος.....	42
Σχήμα 21: Σχηματική απεικόνιση της μορφής λυγισμού με και χωρίς πλευρικό φορτίο.....	43
Σχήμα 22: Ισορροπία στοιχείου ελάσματος	44
Σχήμα 23: Διακριτό Συνεχές.....	47
Σχήμα 24: Ταλάντωση της μετατόπισης στη μέθοδο δυναμικής χαλάρωσης.....	48
Σχήμα 25: Πλέγμα πεπερασμένων Διαφορών.....	49
Σχήμα 26: Διάγραμμα ροής υπολογισμών δυναμικής χαλάρωσης	51
Σχήμα 27: Χρήση σύνθετου πλέγματος.....	52
Σχήμα 28: Βέλος κάμψης τετράγωνου ελάσματος σε μονοαξονική θλίψη	55
Σχήμα 29: Επίδραση της υδροστατικής πίεσης στο φορτίο λυγισμού	55
Σχήμα 30: Περιγραφή καμπυλών υδροστατικής πίεσης με πολυονιμικές.....	56
Σχήμα 31: Απόκριση βέλους κάμψης σε έλασμα με μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις	57
Σχήμα 32: Θεωρητική απόκριση ελασμάτων.....	58
Σχήμα 33: Σύγκριση βέλους κάμψης για επιβολή πλευρικού φορτίου αντίθετης φοράς	58
Σχήμα 34: Θέση εξεταζόμενων σημείων στο έλασμα	59
Σχήμα 35: Απόκριση 3 σημείων (μικρές αρχικές μετατοπίσεις).....	60
Σχήμα 36: Απόκριση 3 σημείων (μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις).....	60
Σχήμα 37: Προοπτική και κάτοψη μετατοπισμένου ελάσματος	61
Σχήμα 38: Εγκάρσια κεντρική τομή υπό θλιπτικό φορτίο.....	61
Σχήμα 39: Θλιπτικές τάσεις στη προλυγισμική περιοχή.....	62
Σχήμα 40: Θλιπτικές τάσεις στη μεταλυγισμική περιοχή.....	62
Σχήμα 41: Εγκάρσια κεντρική τομή υπό θλιπτικό φορτίο ελάσματος με αρχικές μετατοπίσεις	63
Σχήμα 42: Θλιπτικές τάσεις στη προλυγισμική περιοχή (μεγάλες μετατοπίσεις)	64
Σχήμα 43: Θλιπτικές τάσεις στη μεταλυγισμική περιοχή (μεγάλες μετατοπίσεις)	65
Σχήμα 44: Κατανομή καμπτικών τάσεων σε εγκάρσια κεντρική τομή (μικρές μετατοπίσεις)	66
Σχήμα 45: Επίδραση υδροστατικής πίεσης στις καμπτικές τάσεις στη προλυγισμική περιοχή.....	67
Σχήμα 46: Οι καμπτικές τάσεις υπό σύνθετη φόρτιση σε σύγκριση με τη μονοαξονική θλίψη	68
Σχήμα 47: Επίδραση της υδροστατικής πίεσης στις καμπτικές τάσεις μεταλυγισμικά	68

Σχήμα 48: Καμπτικές τάσεις προλυγισμικά σε έλασμα με αρχικές ατέλειες	69
Σχήμα 49: Καμπτικές τάσεις μεταλυγισμικά σε έλασμα με αρχικές ατέλειες	70
Σχήμα 50: Συνολική τάση σε εγκάρσια κεντρική τομή.....	71
Σχήμα 51: Συνολική τάση στο κεντρικό σημείο του ελάσματος	72
Σχήμα 52: Συνολική τάση στο ακραίο σημείο της εγκάρσιας κεντρικής τομής του ελάσματος.....	72
Σχήμα 53: Θέση σημείων στο μακρύ έλασμα	73
Σχήμα 54: Βέλος κάμψης των σημείων A και C.....	74
Σχήμα 55: Βέλος κάμψης της κεντρικής διαμήκουσ τομής προλυγισμικά.....	74
Σχήμα 56: Βέλος κάμψης κεντρικής διαμήκουσ τομής στη μεταλυγισμική περιοχή.....	76
Σχήμα 57: Βέλος κάμψης σημείων A και C ελάσματος με αρχικές μετατοπίσεις	76
Σχήμα 58: Βέλος κάμψης κεντρικής διαμήκουσ τομής για διάφορα αξονικά φορτία	77
Σχήμα 59: Θλιπτικές τάσεις εγκάρσιας τομής σε μακρύ έλασμα.....	79
Σχήμα 60: Επίδραση πλευρικής φόρτισης στις θλιπτικές τάσεις	79
Σχήμα 61: Θλιπτικές τάσεις εγκάρσιας τομής τη στιγμή αλλαγής της μορφής βέλους κάμψης	80
Σχήμα 62: Θλιπτικές τάσεις εγκάρσιας τομής που βρίσκεται σε κορυφή.....	80
Σχήμα 63: Θλιπτικές τάσεις εγκάρσιας τομής που βρίσκεται σε κοιλάδα.....	81
Σχήμα 64: Θλιπτικές τάσεις σε μακρύ έλασμα με μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις	81
Σχήμα 65: Εγκάρσιες τομές σε κορυφή και κοιλάδα ελάσματος με αρχικές ατέλειες (προλυγισμικά)	82
Σχήμα 66: Εγκάρσιες τομές σε κορυφή και κοιλάδα ελάσματος με αρχικές ατέλειες (προλυγισμικά)	83
Σχήμα 67: Καμπτικές τάσεις σε εγκάρσια τομή κορυφής.....	84
Σχήμα 68: Καμπτικές τάσεις σε εγκάρσια τομή κορυφής.....	84
Σχήμα 69: Καμπτικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές μακριού ελάσματος προλυγισμικά παρουσία πλευρικού φορτίου	85
Σχήμα 70: Καμπτικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές μακριού ελάσματος μεταλυγισμικά παρουσία πλευρικού φορτίου	87
Σχήμα 71: Καμπτικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές κορυφής και κοιλάδας (Μεγάλες μετατοπίσεις)	88
Σχήμα 72: Εγκάρσιες τομές κορυφής και κοιλάδας προλυγισμικά, παρουσία πλευρικού φορτίου.....	88
Σχήμα 73: Εγκάρσιες τομές κορυφής και κοιλάδας μεταλυγισμικά, παρουσία πλευρικού φορτίου	89
Σχήμα 74: Συνολικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές προλυγισμικά(μικρές μετατοπίσεις)	90
Σχήμα 75: Συνολικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές μεταλυγισμικά(μικρές μετατοπίσεις).....	90
Σχήμα 76: Συνολικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές (μεγάλες μετατοπίσεις)	91
Σχήμα 77: Βέλος κάμψης κεντρικού σημείου μακριού ελάσματος με μικρές (α) και μεγάλες (β) αρχικές μετατοπίσεις.....	92
Σχήμα 78: Τρισδιάστατη μορφή βέλους κάμψης μακριού ελάσματος για διάφορα αξονικά φορτία.....	93
Σχήμα 79: Απόκριση της κεντρικής διαμήκουσ τομής προλυγισμικά, ελάσματος με λόγο πλευρών 4	95
Σχήμα 80: Απόκριση της κεντρικής διαμήκουσ τομής μεταλυγισμικά, ελάσματος με λόγο πλευρών 4.....	96
Σχήμα 81: Κατανομές θλιπτικών τάσεων σε εγκάρσια τομή ελάσματος με $a/b=4$	97
Σχήμα 82: Επίδραση πλευρικού φορτίου στις θλιπτικές τάσεις προλυγισμικά	97
Σχήμα 83: Επίδραση πλευρικού φορτίου στις θλιπτικές τάσεις μεταλυγισμικά	98
Σχήμα 84: Κατανομές καμπτικών τάσεων σε εγκάρσια τομή ελάσματος με $a/b=4$	99
Σχήμα 85: Επίδραση πλευρικού φορτίου στις καμπτικές τάσεις προλυγισμικά	99
Σχήμα 86: Επίδραση πλευρικού φορτίου στις καμπτικές τάσεις κατά το λυγισμό	100
Σχήμα 87: Επίδραση πλευρικού φορτίου στις καμπτικές μεταλυγισμικά.....	101
Σχήμα 88: Κατανομές συνολικών τάσεων πριν και μετά το λυγισμό	102

Λίστα Πινάκων

Πίνακας 1: Μαθηματική διατύπωση οριακών συνθηκών.....	29
Πίνακας 2: Επίδραση αρχικών ατελειών στην ελαστική αντοχή λεπτού ελάσματος.....	36
Πίνακας 3: Μείωση του κρίσιμου φορτίου για τις τιμές πλευρικής φόρτισης.....	57
Πίνακας 4: Σύγκριση μέσης θλιπτικής τάσης ελασμάτων με και χωρίς αρχικές μετατοπίσεις.....	64
Πίνακας 5: Σύγκριση θλιπτικής τάσης στο άκρο και το κέντρο της τομής.....	65
Πίνακας 6: Καμπτική τάση στο κέντρο ελάσματος στη προλυγισμική περιοχή.....	67
Πίνακας 7: Καμπτική τάση στο κέντρο ελάσματος στη μεταλυγισμική περιοχή.....	68
Πίνακας 8: Καμπτική τάση στο κέντρο ελάσματος στη προλυγισμική περιοχή (μεγάλες μετατοπίσεις)	69
Πίνακας 9: Καμπτική τάση στο κέντρο ελάσματος στη μεταλυγισμική περιοχή (μεγάλες μετατοπίσεις) ..	70
Πίνακας 10: Θέση σημείων που παρουσιάζουν ακρότατα στη κάθετη μετατόπιση	78
Πίνακας 11: Μέση θλιπτική τάση σε μακρύ έλασμα για μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις.....	82
Πίνακας 12: Σημείο αλλαγής κατανομής βέλους κάμψης και καμπτικών τάσεων	86
Πίνακας 13: Κρίσιμες τάσεις, ροπές και ομοεπίπεδες δυνάμεις λυγισμού	102
Πίνακας 14: Ισοΰψεις μεταβλητής w/t , λόγος πλευρών $a/b=1$, μικρές μετατοπίσεις.....	103
Πίνακας 15: Ισοΰψεις μεταβλητής w/t , λόγος πλευρών $a/b=1$, μεγάλες μετατοπίσεις.....	104
Πίνακας 16: Ισοΰψεις μεταβλητής $M_x/M_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=1$, μικρές μετατοπίσεις.....	105
Πίνακας 17: Ισοΰψεις μεταβλητής $M_x/M_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=1$, μεγάλες μετατοπίσεις.....	106
Πίνακας 18: Ισοΰψεις μεταβλητής $N_x/N_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=1$, μικρές μετατοπίσεις	107
Πίνακας 19: Ισοΰψεις μεταβλητής $N_x/N_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=1$, μεγάλες μετατοπίσεις	108
Πίνακας 20: Ισοΰψεις μεταβλητής σ_{mises}/σ_0 , λόγος πλευρών $a/b=1$, μικρές μετατοπίσεις.....	109
Πίνακας 21: Ισοΰψεις μεταβλητής σ_{mises}/σ_0 , λόγος πλευρών $a/b=1$, μεγάλες μετατοπίσεις.....	110
Πίνακας 22: Ισοΰψεις μεταβλητής w/t , λόγος πλευρών $a/b=2.5$, μικρές μετατοπίσεις.....	103
Πίνακας 23: Ισοΰψεις μεταβλητής w/t , λόγος πλευρών $a/b=2.5$, μεγάλες μετατοπίσεις.....	104
Πίνακας 24: Ισοΰψεις μεταβλητής $M_x/M_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=2.5$, μικρές μετατοπίσεις.....	105
Πίνακας 25: Ισοΰψεις μεταβλητής $M_x/M_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=2.5$, μεγάλες μετατοπίσεις.....	106
Πίνακας 26: Ισοΰψεις μεταβλητής $N_x/N_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=2.5$, μικρές μετατοπίσεις	107
Πίνακας 27: Ισοΰψεις μεταβλητής $N_x/N_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=2.5$, μεγάλες μετατοπίσεις	108
Πίνακας 28: Ισοΰψεις μεταβλητής σ_{mises}/σ_0 , λόγος πλευρών $a/b=2.5$, μικρές μετατοπίσεις.....	109
Πίνακας 29: Ισοΰψεις μεταβλητής σ_{mises}/σ_0 , λόγος πλευρών $a/b=2.5$, μεγάλες μετατοπίσεις.....	110
Πίνακας 30: Ισοΰψεις μεταβλητής w/t , λόγος πλευρών $a/b=4.0$, μικρές μετατοπίσεις.....	103
Πίνακας 31: Ισοΰψεις μεταβλητής w/t , λόγος πλευρών $a/b=4.0$, (μεγάλες μετατοπίσεις	104
Πίνακας 32: Ισοΰψεις μεταβλητής $M_x/M_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=4.0$, μικρές μετατοπίσεις.....	105
Πίνακας 33: Ισοΰψεις μεταβλητής $M_x/M_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=4.0$, μεγάλες μετατοπίσεις.....	106
Πίνακας 34: Ισοΰψεις μεταβλητής $N_x/N_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=4.0$, μικρές μετατοπίσεις	107
Πίνακας 35: Ισοΰψεις μεταβλητής $N_x/N_{x,cr}$, λόγος πλευρών $a/b=4.0$, μεγάλες μετατοπίσεις	108
Πίνακας 36: Ισοΰψεις μεταβλητής σ_{mises}/σ_0 , λόγος πλευρών $a/b=4.0$, μικρές μετατοπίσεις.....	109
Πίνακας 37: Ισοΰψεις μεταβλητής σ_{mises}/σ_0 , λόγος πλευρών $a/b=4.0$, μεγάλες μετατοπίσεις.....	110

ΝΑΥΠΗΓΙΚΑ ΕΛΑΣΜΑΤΑ

1.1 Γενικά Στοιχεία Ελασμάτων

Στη διαθέσιμη βιβλιογραφία ως λεπτό έλασμα (thin plate) ορίζεται το αρχικά επίπεδο κατασκευαστικό μέρος που ορίζεται από δύο παράλληλα επίπεδα, που καλούνται όψεις (faces), και μια κυλινδρική επιφάνεια η οποία καλείται άκρο (edge) ή όριο (boundary). Η δημιουργία της κυλινδρικής επιφάνειας έχει γίνει κάθετα στις επίπεδες όψεις. Η απόσταση δε των όψεων μεταξύ τους καλείται πάχος (thickness) του ελάσματος. Όσο αναφορά τα ελάσματα, θεωρείται πάντα ότι το πάχος τους είναι μικρό σε σχέση με τις άλλες χαρακτηριστικές διαστάσεις του, το μήκος (length) και το πλάτος (width) [1].

Τα ελάσματα παραλαμβάνουν στατικά ή δυναμικά φορτία κατά κύριο λόγο κάθετα στις όψεις τους. Η παραλαβή του φορτίου στα ελάσματα, από μηχανικής άποψης, είναι παρόμοια έως ένα βαθμό με την παραλαβή φορτίου από κολώνες ή δοκούς. Έτσι ένα έλασμα μπορεί να προσεγγιστεί μηχανικά από ένα πλέγμα άπειρων δοκών. Καθώς όμως το έλασμα εκτείνεται σε δύο διαστάσεις σε σύγκριση με μία δοκό (στη δοκό το μήκος είναι πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες διαστάσεις της διατομής της), μεταλλικές κατασκευές που αποτελούνται από ελάσματα είναι σαφώς ελαφρύτερες. Αυτό αποτελεί και ένα σημαντικό οικονομικό πλεονέκτημα των ελασμάτων έναντι των δοκών. Επιπλέον το έλασμα εξισορροπεί τα εγκάρσια φορτία που δέχεται αναπτύσσοντας διατμητικές δυνάμεις, καμπτικές και στρεπτικές ροπές, καθώς είναι αρχικά επίπεδο. Λαμβάνοντας υπόψη την ιδιαίτερα μεγάλη στρεπτική ακαμψία των ελασμάτων, σε συνδυασμό με την δυνατότητά τους να παραλαμβάνουν φορτία σε δύο διευθύνσεις, τα ελάσματα είναι σαφώς πιο άκαμπτα από δοκούς συγκρίσιμων διαστάσεων. Συνεπώς τα λεπτά ελάσματα (και άρα οι μεταλλικές κατασκευές τις οποίες συνθέτουν), συνδυάζουν χαμηλό βάρος και υψηλή ικανότητα παραλαβής φορτίων, έχουν δηλαδή υψηλή απόδοση τόσο οικονομικά, όσο και μηχανικά.

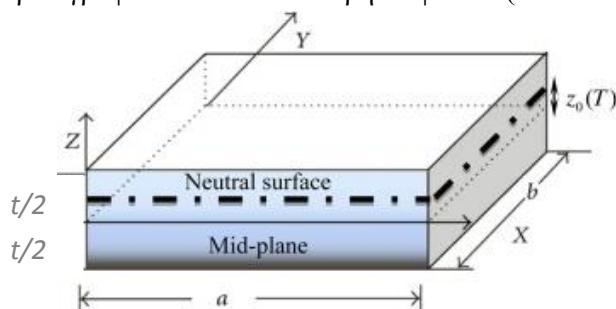
Η χρήση των ελασμάτων είναι εκτενέστατη στον τομέα των κατασκευών. Ελάσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σχετικά απλές κατασκευές όπως containers ή μηχανικά μέρη, μέχρι πολύ πιο πολύπλοκες όπως γέφυρες, πλοία και πύραυλοι. Στο πλαίσιο της εργασίας αυτής, δίνεται βάση στα ελάσματα που χρησιμοποιούνται στην ανέγερση των πλοίων, εν συντομία στα ναυπηγικά ελάσματα.

Τα σύγχρονα πλοία αποτελούν τις μεγαλύτερες μεταλλικές κατασκευές που έχουν κατασκευαστεί μέχρι σήμερα, μετά τις κατασκευές εξόρυξης πετρελαίου. Είναι αντιληπτό ότι είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες κατασκευές, τόσο δομικά, όσο και λειτουργικά. Από κατασκευαστικής άποψης, κάθε πλοίο είναι στην ουσία μια κατασκευή που αποτελείται από επίπεδα ορθογώνια λεπτότοιχα ελάσματα. Τα ελάσματα αυτά χρησιμοποιούνται για τη κατασκευή του εξωτερικού περιβλήματος, των καταστροφμάτων και των φρακτών, και είναι κατά κύριο λόγο ισοτροπικά (έχουν δηλαδή ίδιες μηχανικές ιδιότητες κατά τη διεύθυνση των δύο κύριων διαστάσεων τους). Επιπλέον, τα ελάσματα φέρουν στις επιφάνειες τους

ενισχύσεις, που συμβάλλουν σε μεγάλο βαθμό στην αντοχή του πλοίου. Για να έχει κανείς μια αξιόπιστη εικόνα της απόκρισης του πλοίου σε κάθε είδους πιθανή φόρτιση, πρέπει να έχει μια βασική κατανόηση της απόκρισης του πιο απλού δομικού στοιχείου του, το μεταλλικό έλασμα.

1.2 Κατηγορίες Ελασμάτων

Στη μελέτη των ελασμάτων συνηθίζεται αρχικά να διαιρείται το πάχος τους σε δύο ίσα μέρη από ένα επίπεδο που είναι παράλληλο στις δύο όψεις. Το επίπεδο αυτό καλείται μέσο επίπεδο (middle plane). Επιβάλλοντας εγκάρσια φορτία, ένα αρχικά επίπεδο έλασμα θα παραμορφωθεί, και το μέσο επίπεδό του πλέον θα είναι μια καμπυλόγραμμη επιφάνεια η οποία στη διεθνή βιβλιογραφία καλείται ουδέτερη επιφάνεια (middle surface).



Σχήμα 1: Βασικά μεγέθη ελάσματος

Είναι προφανές ότι το σχήμα του ελάσματος περιγράφεται επαρκώς από τη γεωμετρία του μέσου επιπέδου του. Έτσι τα ελάσματα μπορούν να διαχωριστούν σε ορθογώνια, ελλειπτικά ή κυκλικά. Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η απόκριση των ορθογώνιων ελασμάτων, που αποτελούν και τη πλειοψηφία των ελασμάτων που χρησιμοποιούνται για τη κατασκευή του εξωτερικού περιβλήματος του πλοίου.

Η επιβολή εγκάρσιων φορτίων έχει ως αποτέλεσμα την κάμψη του ελάσματος. Το πάχος του σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις, διαμορφώνει της καμπτικές ιδιότητες του ελάσματος. Για τους σκοπούς της εργασίας θεωρούνται μόνο ελάσματα με σταθερό πάχος στην έκτασή τους. Θεωρώντας τον λόγο του πλάτους (b) του ελάσματος προς το πάχος του (t) τα ελάσματα κατηγοριοποιούνται σε παχιά (thick), σε ελάσματα μεμβράνες (membranes) και σε λεπτά ελάσματα (thin). Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι ως πλάτος ελάσματος λαμβάνεται το μήκος της μικρότερης πλευράς.

Τα παχιά ελάσματα έχουν λόγο $b/t \leq 10$. Σε αυτά τα ελάσματα μεγάλου πάχους δεν ισχύουν οι παραδοχές της επίπεδης εντατικής κατάστασης. Η απόκριση τους διαφέρει από αυτή των λεπτών ελασμάτων καθώς στα παχιά ελάσματα αναπτύσσονται μη αμελητέα εγκάρσια εντατικά επίπεδα. Για την μελέτη της απόκρισης των ελασμάτων αυτών θεωρείται το αντίστοιχο τρισδιάστατο εντατικό πρόβλημα.

Τα ελάσματα μεμβράνες χαρακτηρίζονται από λόγο $b/t \geq 80$. Τα ελάσματα αυτά έχουν πολύ χαμηλή τιμή καμπτικής ακαμψίας, και η παραλαβή των πλευρικών φορτίων γίνεται από αξονικές (και διατμητικές) δυνάμεις που δρουν στην ουδέτερη επιφάνεια τους. Οι μεμβρανικές αυτές δυνάμεις (membrane forces) έχουν προβολή στον κάθετο άξονα έτσι ώστε να εξισορροπούν το πλευρικό φορτίο που επιβάλλεται.

Η μεγαλύτερη κατηγορία των ελασμάτων όμως είναι τα λεπτά ελάσματα, που έχουν ενδιάμεσους λόγους σε σχέση με τις τιμές των άλλων δύο κατηγοριών, χαρακτηρίζονται δηλαδή από $10 \leq b/t \leq 80$. Στη κατηγορία αυτή ανήκουν και τα συνήθη ναυπηγικά ελάσματα, με λίγο μικρότερο εύρος του λόγου πλάτους προς πάχους, και συγκεκριμένα $30 \leq b/t \leq 80$. Θεωρώντας την μετατόπιση του ελάσματος κατά τη διεύθυνση του πάχους ως w , οι

καμπτικές και οι μεμβρανικές δυνάμεις μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με το λόγο w/t . Αν ο λόγος της μέγιστης μετατόπισης w προς το πάχος του ελάσματος είναι μικρότερος της τιμής 0.2 το έλασμα θεωρείται δύσκαμπτο (stiff). Τα ελάσματα αυτά παραλαμβάνουν φορτία σε δύο διαστάσεις εμφανίζοντας καμπτικές και στρεπτικές ροπές καθώς και διατμητικές δυνάμεις. Στην περίπτωση των ελασμάτων αυτών οι παραμορφώσεις στο μέσο επίπεδο και οι μεμβρανικές δυνάμεις μπορούν να αμεληθούν καθώς έχουν πολύ χαμηλές τιμές. Για λόγο w/t μεγαλύτερο του 0.3 τα ελάσματα θεωρούνται εύκαμπτα (flexible) και μαζί με τις πλευρικές παραμορφώσεις διαπιστώνεται και παραμόρφωση της ουδέτερης επιφάνειας. Η παραλαβή εξωτερικών φορτίων εδώ γίνεται από τον συνδυασμό καμπτικών ροπών, διατμητικών και μεμβρανικών (αξονικών) δυνάμεων.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, το πάχος των ελασμάτων σε συνδυασμό με τον λόγο των πλευρών του, έχουν μεγάλη επιρροή στην αντοχή τους. Χαλύβδινα ελάσματα λοιπόν, ανάλογα με τη θέση τους στη μεταλλική κατασκευή του πλοίου, έχουν διαφορετικές διαστάσεις. Το πάχος των συνηθισμένων ναυπηγικών ελασμάτων κυμαίνεται από 4 mm για ελάσματα που τοποθετούνται στις υπερκατασκευές, ενώ φτάνει τα 40 mm για τα ελάσματα του καταστρώματος μέσης τομής, που υπάρχουν και αυξημένες απαιτήσεις αντοχής. Ο λόγος πλευρών αντίστοιχα εξαρτάται από το τύπο του πλοίου, και κυμαίνεται από 2 έως 4. [2]

1.3 Ναυπηγικά Υλικά

Η βιομηχανική επανάσταση κατέστησε δυνατή τη χρήση νέων υλικών στον τομέα της ναυπηγικής και άλλαξε ριζικά τη φιλοσοφία της κατασκευής των μέχρι τότε ξύλινων πλοίων. Σταδιακά ο σίδηρος εισήρθε στην ανέγερση των πλοίων, αρχικά σε διακριτές περιοχές της ξύλινης γάστρας που ήταν αναγκαία μεγαλύτερη αντοχή. Στη συνέχεια, και με την αύξηση της τεχνολογίας σε θέματα κατεργασίας του σιδήρου, η γάστρα αποτελούταν αποκλειστικά από ελάσματα που ήταν καρφωμένα μεταξύ τους. Η εξέλιξη της τεχνολογίας επέτρεψε τέλος τη συγκόλληση ελασμάτων μεταξύ τους, που αποτελεί τη βασική κατεργασία ένωσης μεταλλικών στοιχείων στην κατασκευή των πλοίων μέχρι σήμερα. Η αντικατάσταση του ξύλου ως συμβατικό υλικό κατασκευής από μεταλλικά υλικά, επέτρεψε την αύξηση της αντοχής της κατασκευής, και επέφερε ραγδαία αύξηση του όγκου των αγαθών που μεταφέρονται διεθνώς μέσω της θάλασσας.

1.3.1 Ναυπηγικός Χάλυβας

Το υλικό που χρησιμοποιείται ευρύτατα στην ναυπήγηση των σύγχρονων πλοίων είναι ο χάλυβας (ατσάλι). Οι νηογώμονες σήμερα έχουν συντάξει πολύ συγκεκριμένες προδιαγραφές για τις διάφορες κατηγορίες χάλυβα, για τις οποίες η πυκνότητα ρ είναι ίση με 7800kg/m^3 , και το μέτρο ελαστικότητας με 207 GPa . Η συμπεριφορά των ναυπηγικών χάλυβων σε θέματα αντοχής προσδιορίζεται από την ακαμψία τους (επιμήκυνση ανά μονάδα φορτίου), τη τάση διαρροής και τη μέγιστη τάση εφελκυσμού. Η πρώτη είναι το χαρακτηριστικό όριο μετάβασης του υλικού από την ελαστική στη πλαστική περιοχή, ενώ η δεύτερη ορίζει το μέγιστο φορτίο που μπορεί να φέρει η κατασκευή.

Με βάση τη τάση διαρροής (σ_0), οι ναυπηγικοί χάλυβες κατατάσσονται σε κοινούς χάλυβες (mild steel) με $200\text{ MPa} \leq \sigma_0 \leq 300\text{ MPa}$, και σε χάλυβες υψηλής αντοχής (Higher Tensile Strength, HTS) για τους οποίους ισχύει $\sigma_0 \geq 300\text{ MPa}$. Οι χάλυβες υψηλής αντοχής οφείλουν τις βελτιωμένες μηχανικές τους ιδιότητες σε προσθήκες άνθρακα σε ποσοστό 0.16-0.23% και άλλων στοιχείων σε μικρότερες ποσότητες. Οι χάλυβες αυτοί χρησιμοποιούνται τοπικά σε εμπορικά πλοία με ιδιαίτερες απαιτήσεις αντοχής όπως στο κατάστρωμα και στο πυθμένα μεγάλων δεξαμενόπλοιων. Η χρήση χάλυβα υψηλής αντοχής στα σημεία αυτά, έχει υπολογιστεί ότι μπορεί να μειώσει το βάρος της μεταλλικής κατασκευής κατά 5-7%.

Περεταίρω βελτιώσεις στις ιδιότητες του χάλυβα και στις διαδικασίες ναυπήγησης είχαν ως αποτέλεσμα την κατασκευή πλοίων με τάξεις μεγέθους ανώτερη μεταφορική ικανότητα. Είναι χαρακτηριστικό ότι τα σύγχρονα εμπορικά πλοία διακινούν το 80% του συνολικού όγκου των μεταφερόμενων αγαθών.

Τα όρια χρήσης των χαλύβων υψηλής αντοχής περιορίζονται ωστόσο, λόγω κάποιων αρνητικών στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, λόγω του πολύ κοντινού μέτρου ελαστικότητάς τους με τους κοινούς χάλυβες, δεν είναι δυνατή η μείωση του πάχους των ελασμάτων, εφόσον η καταπόνηση σε θλίψη παραμένει περίπου ίδια και θα οδηγούσε σε προβλήματα αντοχής. Τα προβλήματα λυγισμού απαιτούν πρόσθετα πάχη με αποτέλεσμα τη μειωμένη εξοικονόμηση βάρους. Ακόμα η διάβρωση που θα υποστούν τα ελάσματα κατά τη διάρκεια ζωής τους δε μεταβάλλεται, με αποτέλεσμα η απώλεια πάχους στα ήδη λεπτότερα ελάσματα να έχει δραστικές συνέπειες στις μηχανικές ιδιότητές τους. Τέλος πρέπει να ληφθεί υπόψη το αυξημένο κόστος του υλικού σε σχέση με τους κοινούς χάλυβες, όπως επίσης και της απαιτούμενης πρόσθετης προσπάθειας για τις συγκολλήσεις [3].

1.3.2 Αλουμίνιο

Ένα ακόμα υλικό που χρησιμοποιείται στη ναυπηγική και κατ' επέκταση στη κατασκευή ναυπηγικών ελασμάτων είναι το αλουμίνιο. Κράματα αλουμινίου-μαγνησίου ενδείκνυται για τη κατασκευή υπερστεγασμάτων και άλλων μεμονωμένων στοιχείων. Το αλουμίνιο μπορεί να είναι κύριο υλικό κατασκευής για μικρά και για ταχύπλοα σκάφη. Το αλουμίνιο χαρακτηρίζεται από χαμηλό μέτρο ελαστικότητας και μειωμένο ειδικό βάρος, περίπου ίσα με το 1/3 των αντίστοιχων τιμών του χάλυβα. Μπορεί να θεωρηθεί ότι με χρήση αλουμινίου για υπερστεγασματα το αντίστοιχο βάρος της κατασκευής μπορεί να μειωθεί κατά το ήμισυ περίπου [3]. Ωστόσο έχει υψηλό κόστος αγοράς και αυξημένο κόστος σε εργατώρες λόγω ειδικής συγκόλλησης. Τέλος οι εδράσεις της αλουμινοκατασκευής στο υπόλοιπο χαλύβδινο μέρος του πλοίου απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή για να μην υπάρξουν μηχανικές αστοχίες.

1.4 Φορτίσεις Πλοίου. Συνθήκες Λειτουργίας Ελασμάτων

Οι συνθήκες λειτουργίας των ναυπηγικών ελασμάτων προσδιορίζονται σε μεγάλο βαθμό από τις φορτίσεις που δέχεται το πλοίο. Σε αντίθεση με τις συνήθεις δομοστατικές κατασκευές, το πλοίο καταπονείται από σύνθετες φορτίσεις, οι οποίες μεταβάλλονται συνεχώς. Οι φορτίσεις αυτές μπορούν κατηγοριοποιηθούν είτε ανάλογα με τη διάρκεια και τη μεταβλητότητά στο χρόνο, είτε ανάλογα με την απόκριση της κατασκευής που τις παραλαμβάνει.

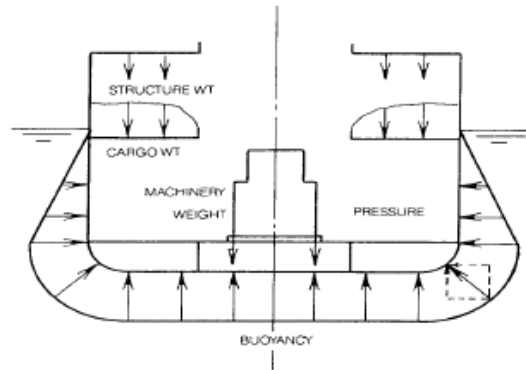
Στην πρώτη περίπτωση έχουμε φορτίσεις σταθερές στη διάρκεια ενός ταξιδιού, όπως για παράδειγμα το βάρος της μεταλλικής κατασκευής και του μεταφερόμενου φορτίου. Υπάρχουν όμως και φορτίσεις που μεταβάλλονται δραστικά στο χρόνο όπως η σφυρόκρουση (bottom slamming), οι υδροδυναμικές φορτίσεις, και οι ταλαντώσεις της έλικας.

Εξετάζοντας τώρα την απόκριση της κατασκευής, οι δύο βασικές κατηγορίες φορτίσεων είναι οι στατικές (static loading) και οι δυναμικές (dynamic loading).

1.4.1 Στατικές Φορτίσεις

Στατικές είναι οι υδροστατικές φορτίσεις που ασκούνται στο εξωτερικό περίβλημα του πλοίου καθώς και στις εσωτερικές του επιφάνειες όπως ο εσωτερικός πυθμένας ή οι εγκάρσιες φρακτές. Οι φορτίσεις αυτές δημιουργούνται από το θαλάσσιο περιβάλλον και από μεταφερόμενα ρευστά ή στερεά, ωστόσο δεν αναπτύσσουν αξιόλογες αδρανειακές επιταχύνσεις στα στοιχεία της μεταλλικής κατασκευής. Οι στατικές φορτίσεις υποδιαιρούνται

επιπλέον σε κάθετες ή πλάγιες (καμπτικές), οι οποίες προκαλούν κατά κύριο λόγο κάμψη των δομικών στοιχείων, και σε ομοεπίπεδες ή συνεπίπεδες, που προκαλούν θλίψη ή εφελκυσμό.



Σχήμα 2: Στατικές φορτίσεις σε εγκάρσια διατομή πλοίου

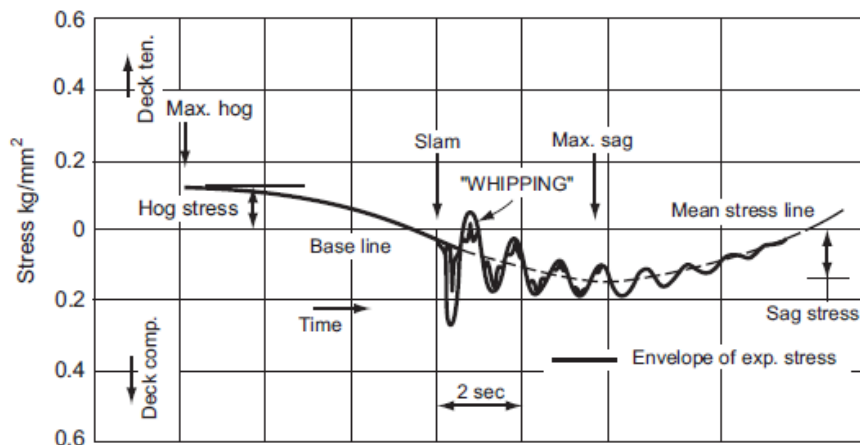
1.4.2 Δυναμικές Φορτίσεις

Οι δυναμικές φορτίσεις που ασκούνται στο πλοίο μπορούν να υποδιαιρεθούν σε δυο κατηγορίες, σε αυτές που δεν προκαλούν δυναμική απόκριση (dynamic response) της κατασκευής και καλούνται φορτίσεις χαμηλών συχνοτήτων, και σε αυτές που προκαλούν. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πρώτες οι οποίες μπορούν να προκαλέσουν διάφορες μορφές διεγέρσεων όπως:

- Υψηλόσυχνες διαμήκεις ταλαντώσεις της κατασκευής (springing)
- Σφυρόκρουση (slamming)
- Φορτίσεις αδράνειας σε διάφορα τμήματα της κατασκευής
- Τοπικές ταλαντώσεις που οφείλονται στη λειτουργία μηχανολογικών συστημάτων της έλικας

Οι υψηλόσυχνες διαμήκεις ταλαντώσεις οφείλονται στη κρούση των κυμάτων στη περιοχή της πλώρης και διαρκούν πολύ χρόνο. Προκύπτουν όταν η περίοδος της βασικής κατακόρυφης ταλάντωσης του πλοίου (heave), έχει σχετικά μεγάλη διάρκεια, άνω των 2 δευτερολέπτων. Όταν κατά τη πλεύση το πλοίο συναντήσει κυματισμούς αντίστοιχης συχνότητας, η διεγερση της γάστρας παύει να είναι αμελητέα και παρατηρούνται συνεχείς ταλαντώσεις.

Η σφυρόκρουση οφείλεται στη κρούση της προωρίας περιοχής του πυθμένα με την επιφάνεια της θάλασσας και συμβαίνει όταν η σχετική ταχύτητα μεταξύ πλώρης και θάλασσας υπερβαίνει ένα κατώτατο όριο.



Σχήμα 3: Απόκριση σε σφυρόκρουση [4]

Αδρανειακές φορτίσεις δημιουργούνται σε διάφορα σημεία του πλοίου κατά τη μετακίνηση μεγάλων μαζών λόγω της κίνησης του πλοίου στη θάλασσα. Όταν η κίνηση του πλοίου περί κάποιο άξονα αναφοράς (διαμήκης ταλάντωση – προνευστασμός (pitch), εγκάρσια ταλάντωση – διατοιχισμός (roll)) είναι έντονη, αδρανειακές φορτίσεις καθίστανται κρίσιμες. Οι επιταχύνσεις που δημιουργούνται μπορούν να δημιουργήσουν βλάβη σε περιοχές που βρίσκονται σε κάποια απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Αδρανειακές φορτίσεις προκύπτουν επιπλέον στη περιοχή της πρύμνης, λόγω της λειτουργίας του μηχανολογικού εξοπλισμού και της περιστροφής της έλικας.

Από τα παραπάνω, είναι προφανές ότι το θαλάσσιο περιβάλλον αλληλεπιδρά με το πλοίο με πολύπλοκους τρόπους, δημιουργώντας έτσι δυσκολία στον προσδιορισμό της τελικής απόκρισης της μεταλλικής κατασκευής. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται σχετικά απλά μοντέλα που μπορούν να δώσουν ενδεικτικά αποτελέσματα για τις καταπονήσεις της μεταλλικής κατασκευής. Τα τελευταία χρόνια ωστόσο, η μελέτη της μεταλλικής κατασκευής έχει εμπλουτιστεί με πληθώρα τεχνικών που βασίζονται στη μαθηματική ανάλυση της συμπεριφοράς των διάφορων δομικών στοιχείων του πλοίου.

Σε αρχικό επίπεδο λοιπόν, η επίλυση του κύριου προβλήματος που είναι η απόκριση της μεταλλικής κατασκευής, απαιτεί τη μελέτη της απόκρισης των ελασμάτων σε βασικές καταπονήσεις.

1.5 Ιστορική Αναδρομή

Ιστορικά, οι πρώτες προσπάθειες που έγιναν για την εξαγωγή μαθηματικών σχέσεων που σχετίζονται με προβλήματα στο τομέα των ελασμάτων, ανήκουν μάλλον στον Euler, ο οποίος το 1776 παρουσίασε μια ανάλυση πάνω στην ελεύθερη ταλάντωση ελασμάτων. Ο ίδιος μάλιστα πρότεινε μια σχέση για το φορτίο λυγισμού πρισματικών διατομών. Χρειάστηκε να περάσει ωστόσο περίπου ένας αιώνας ερευνών και προσπαθειών για να καταλήξουμε στην σύγχρονη μορφή των εξισώσεων που συνιστούν την θεωρία ελασμάτων (plate theory), κατά τη διάρκεια του οποίου πολλά γνωστά ονόματα από το χώρο των μαθηματικών είχαν τη συμβολή τους. Η Γαλλίδα μαθηματικός Germain ανέπτυξε μια διαφορετική εξίσωση για τα ελάσματα χωρίς να λάβει όμως υπόψη της τον σχετικό όρο για τη στρέψη των ελασμάτων. Την σχέση αυτή διόρθωσε αργότερα ο Lagrange που εξέτασε την δουλειά της Germain, και έτσι παρουσιάστηκε η πρώτη γενική εξίσωση στην θεωρία ελασμάτων. Λίγα χρόνια μετά, ο Poisson επέκτεινε την εξίσωση των Germain-Lagrange ώστε να αποκτήσει λύση στην περίπτωση ελάσματος υπό στατική φόρτιση. Η λύση αυτή ωστόσο, αποκτήθηκε θεωρώντας ότι η καμπτική ακαμψία των ελασμάτων είναι ίση σταθερό όρο.

Ειδική αναφορά αξίζει να γίνει στον Navier, του οποίου η συμβολή υπήρξε καθοριστική. Ο Navier ήταν ο πρώτος που παρουσίασε μια ικανοποιητική θεωρία στη κάμψη των ελασμάτων, συσχετίζοντας την καμπτική ακαμψία με το πάχος τους. Το 1821 μάλιστα διατύπωσε μέσω μιας εργασίας του τις εξισώσεις της μαθηματικής θεωρίας της ελαστικότητας. Επιπλέον εξήγαγε την εξίσωση που δίνει την απόκριση λεπτών ορθογώνιων ελασμάτων υπό θλιπτικές φορτίσεις, που είχε ιδιαίτερη σημασία στη ναυπηγική από τη στιγμή που βελτιώθηκε η ποιότητα των ναυπηγικών χαλύβων (μέσω του εμπλουτισμού τους με άνθρακα). Η χρήση του χάλυβα στη ναυπηγική πλέον ήταν εκτενέστατη, δημιουργώντας έτσι επιτακτικές απαιτήσεις για υπολογισμούς ευστάθειας των μεταλλικών κατασκευών υπό θλιπτικές φορτίσεις. Το 1891 ο Bryan χρησιμοποίησε την ενεργειακή μέθοδο για να υπολογίσει το φορτίο λυγισμού ελάσματος που καταπονείται από θλιπτικές φορτίσεις σε μία ή και στις διευθύνσεις σε συνθήκες απλής έδρασης. Η διαδικασία αυτή ακολουθείται μέχρι σήμερα από τη πλειονότητα των λύσεων προβλημάτων ευστάθειας λεπτότοιχων ελασμάτων που βασίζονται στην απευθείας ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης [1].

Με την έναρξη και περίπου μέχρι τα μισά του 20^{ου} αιώνα, η θεωρία των ελασμάτων εμπλουτίστηκε από τις μελέτες του Timoshenko, που γεννήθηκε και σπούδασε στη Ρωσία, ενώ έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην Αμερική. Ο Timoshenko συνέβαλε στην εξέλιξη της επιστήμης της στατικής πλοίου, συγγράφοντας μία σειρά βιβλίων που θεωρούνται κλασσικά στο αντικείμενό τους. Η επιτυχής εφαρμογή των ενεργειακών μεθόδων στη μελέτη των μεταλλικών κατασκευών αποτελεί τη σημαντικότερη συμβολή του στον ερευνητικό τομέα.

Οι σύγχρονες τάσεις στην εξέλιξη της θεωρίας ελασμάτων χαρακτηρίζονται από μία εξάρτηση σε μεγάλο βαθμό σε υπολογιστές υψηλής ταχύτητας, και στην ανάπτυξη πιο ολοκληρωμένων αριθμητικών μεθόδων. Στην μελέτη μεταλλικών κατασκευών συγκεκριμένα, οι αριθμητικές μέθοδοι έχουν αποφέρει σημαντικά αποτελέσματα ειδικά σε προβλήματα που δεν έχουν λύσεις κλειστής μορφής. Επομένως, προκειμένου να μελετηθεί σε βάθος ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, απαραίτητες για τον ερευνητή είναι οι μέθοδοι κλασσικής θεωρίας, παράλληλα με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων [2].

2

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΕΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΒΑΣΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ

2.1 Εισαγωγή

Στο πλαίσιο της εργασίας, παρουσιάζεται η απόκριση ορθογώνιων ελασμάτων υπό σύνθετη καταπόνηση. Πιο συγκεκριμένα τα ελάσματα εξετάζονται υπό συνθήκες μονοαξονικής θλίψης με ταυτόχρονη επιβολή ομοιόμορφα κατανεμημένου πλευρικού φορτίου. Για το σκοπό αυτό, με την βοήθεια κώδικα, επιλύονται βασικές εξισώσεις που είναι αποτέλεσμα πολλών χρόνων ερευνών και πειραμάτων, και αποτελούν σημαντικό μέρος της θεωρίας ελασμάτων (plate theory).

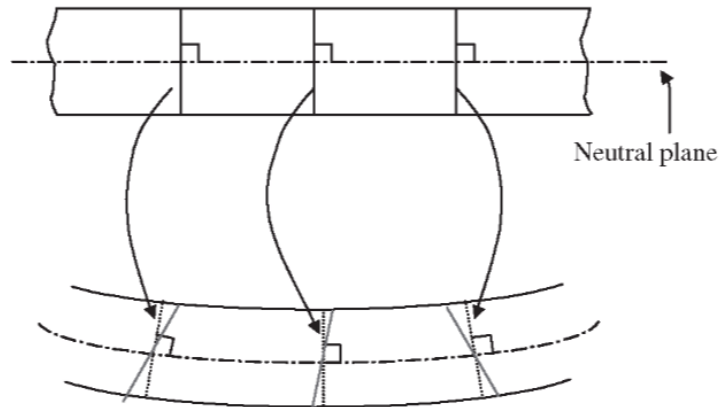
Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι βασικές σχέσεις που διέπουν την απόκριση των ελασμάτων σε κάμψη υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο, το φαινόμενο του λυγισμού των ελασμάτων υπό καθεστώς μονοαξονικής θλίψης, καθώς και οι εξισώσεις που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία και περιγράφουν την απόκρισή τους υπό ταυτόχρονη επιβολή των δύο φορτίσεων

2.2 Κάμψη ελασμάτων

Όπως προαναφέρθηκε, κατά κανόνα το υλικό κατασκευής των ναυπηγικών ελασμάτων είναι κάποιο κράμα χάλυβα. Τα υλικά αυτά επιδεικνύουν μια χαρακτηριστική συμπεριφορά, που έχει ένα σαφώς καθορισμένο σημείο μετάβασης από το ελαστικό στο πλαστικό πεδίο. Σε περίπτωση σημαντικής αύξησης της φόρτισης, θα προκύψει πλαστικοποίηση σε κάποια περιοχή του ελάσματος. Τα απλά ελάσματα έχουν τη δυνατότητα να παραλαμβάνουν φορτία αρκετά υψηλότερα από το φορτίο που προκαλεί πρώτη διαρροή, όπως θα παρουσιαστεί στη πορεία του κεφαλαίου.

Αρχικά θα γίνει αναφορά στην απόκριση απλών ελασμάτων που επιβάλλονται σε στατική, ομοιόμορφα κατανεμημένη πίεση. Οι καμπτικές ιδιότητες ενός ελάσματος εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από το πάχος του σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις. Για χαμηλές τιμές φορτίου, αναπτύσσονται αποκλειστικά καμπτικές τάσεις και υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ της πίεσης και του επαγόμενου βέλους κάμψης, το οποίο έχει χαμηλές τιμές σε σύγκριση με το πάχος του ελάσματος. Η συμπεριφορά αυτή καλείται γραμμική ελαστική, καθώς με την αφαίρεση του φορτίου το έλασμα θα επανέρθει στην αρχική του μορφή. Κατά τη μελέτη στο γραμμικό ελαστικό πεδίο γίνονται οι παρακάτω παραδοχές [2]:

- Δεν υπάρχει παραμόρφωση του μέσου (ουδέτερου) επιπέδου το ελάσματος.
- Τα σημεία του ελάσματος που αρχικά βρίσκονται σε επίπεδα κάθετα προς το μέσο επίπεδο, παραμένουν σε επίπεδα κάθετα προς το μέσο επίπεδο και μετά τη κάμψη
- Οι ορθές τάσεις που είναι κάθετες προς την ουδέτερη επιφάνεια του ελάσματος αμελούνται.



Σχήμα 4: Απεικόνιση της καθετότητας μετά τη παραμόρφωση

Κάνοντας χρήση των παραπάνω παραδοχών, οι τάσεις σε όλους τους άξονες εκφράζονται μέσω του βέλους κάμψης (w), το οποίο είναι συνάρτηση των δύο συντεταγμένων του επίπεδου του ελάσματος. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση, που σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες ορίζουν πλήρως τη μετατόπιση w . Έτσι η λύση της εξίσωσης δίνει τις απαραίτητες πληροφορίες για τον υπολογισμό των τάσεων σε οποιοδήποτε σημείο του ελάσματος. Η επίδραση των διατμητικών δυνάμεων αμελείται κατά τον υπολογισμό του βέλους κάμψης, λόγω της δεύτερης παραδοχής. Η απλοποίηση αυτή δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, εκτός των περιπτώσεων που υπάρχουν ανοίγματα στα ελάσματα. Οι διατμητικές δυνάμεις τότε έχουν σημαντική επίδραση και πρέπει να ληφθούν υπόψη στη μελέτη του προβλήματος.

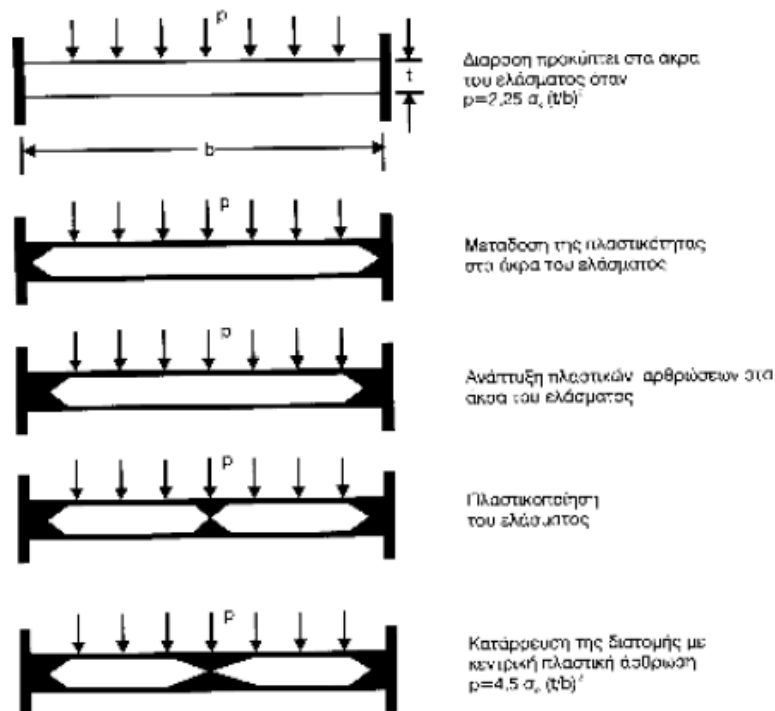
Μελέτες έχουν δείξει ότι κάμψη ελασμάτων που οδηγεί σε παραμόρφωση του μέσου επιπέδου, μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά με τη παραπάνω μέθοδο, μόνο εφόσον η μετατόπιση του ελάσματος είναι μικρή σε σχέση με το πάχος του, και άρα οι τάσεις που αντιστοιχούν στο μέσο επίπεδο μπορούν να αμεληθούν. Στη περίπτωση ωστόσο σημαντικής αύξησης του φορτίου, το μέσο επίπεδο αρχίζει να παραμορφώνεται και η μετατόπιση παύει να είναι μικρή, σχετικά πάντα με το πάχος. Η παραμόρφωση του μέσου επιπέδου πλέον συνοδεύεται από την παρουσία ομοεπίπεδων (μεμβρανικών) τάσεων και συνεπώς η απόκριση ενώ είναι ελαστική, παύει να είναι γραμμική. Εφόσον δεν ισχύει πλέον η γραμμικότητα μεταξύ πίεσης και βέλους κάμψης, η απόκριση πλέον χαρακτηρίζεται ως μη-γραμμική ελαστική.

Η συμπεριφορά των συνηθισμένων ναυπηγικών ελασμάτων ($30 \leq b/t \leq 80$) χαρακτηρίζεται σε μεγάλο βαθμό από την παραπάνω περιγραφή. Για πολύ παχιά ελάσματα ωστόσο ($b/t \leq 30$), δεν ισχύουν οι παραδοχές της επίπεδης εντατικής κατάστασης καθώς αναπτύσσονται μη αμελητέα εγκάρσια εντατικά πεδία. Για να βρεθεί ικανοποιητική λύση στο πρόβλημα απόκρισης τέτοιων ελασμάτων, απαιτείται η θεώρησή του ως τρισδιάστατο εντατικό πρόβλημα.

Τα ναυπηγικά ελάσματα, με την επιβολή φορτίου παρουσιάζουν ελαστική συμπεριφορά. Η συμπεριφορά αυτή με την αύξηση του φορτίου θα αλλάξει, και σε κάποιο στάδιο θα αρχίσει η πλαστικοποίηση τους. Στη περίπτωση που το έλασμα είναι παχύ, οι μεμβρανικές τάσεις που θα έχουν αναπτυχθεί στο έλασμα δεν θα είναι μεγάλες κατά το στάδιο της πλαστικοποίησης. Εάν ωστόσο το έλασμα είναι ιδιαίτερα λεπτό, συμπεριφέρεται ως πλαστική μεμβράνη πριν τη τελική κατάρρευση. Κατά κανόνα τα ναυπηγικά ελάσματα πλαστικοποιούνται αφού έχουν ήδη αναπτυχθεί μεγάλες μεμβρανικές τάσεις.

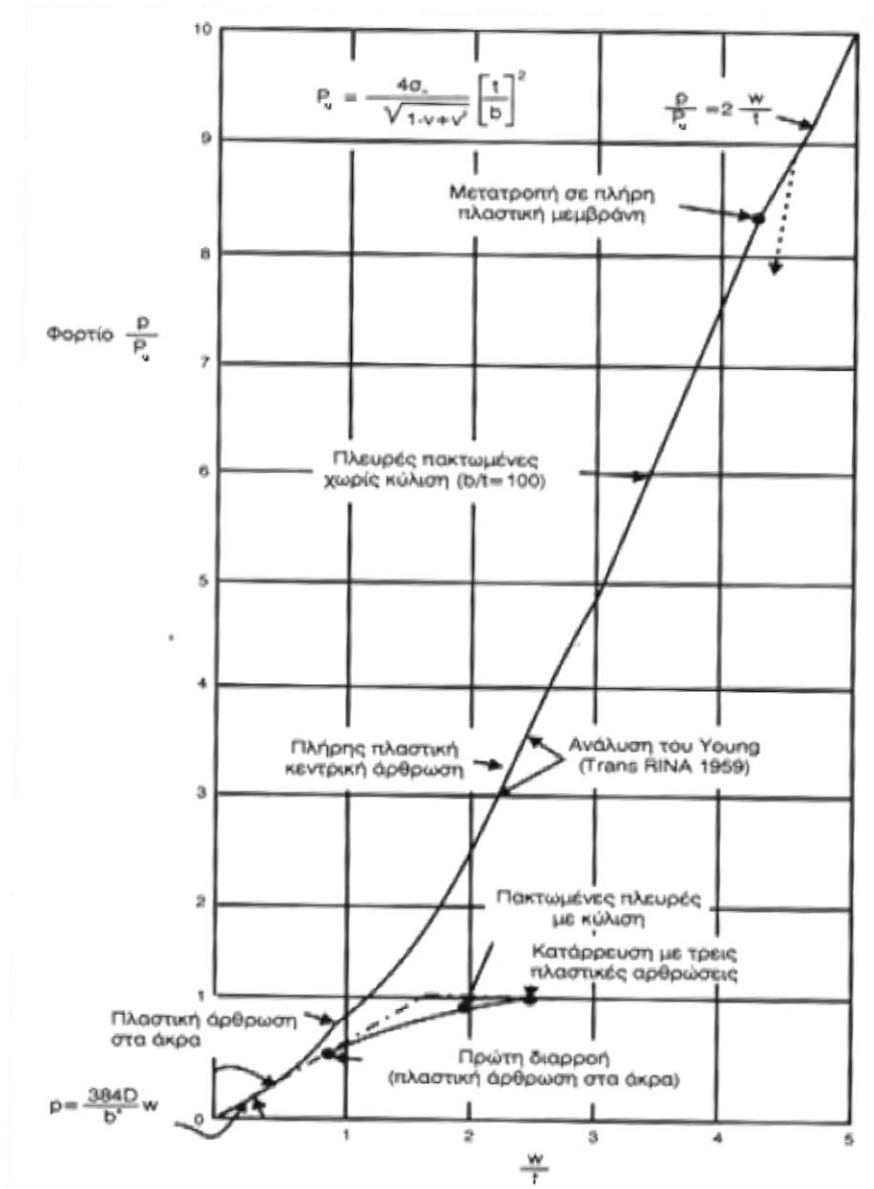
Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί πως η απόκριση των ελασμάτων σε υψηλές εξωτερικές φορτίσεις εξαρτάται και από τις οριακές τους συνθήκες, δηλαδή τους

περιορισμούς που ισχύουν στο επίπεδο του ελάσματος. Στην περίπτωση ομοεπίπεδων φορτίων, όπως συμβαίνει στα ελάσματα των καταστρωμάτων, θεωρείται ότι υπάρχει απλή στήριξη κατά το μήκος των πλευρών. Για μεγάλα και ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία που ασκούνται στον επίπεδο των ελασμάτων, όπως στον πυθμένα του πλοίου, θεωρείται ότι τα ελάσματα είναι πακτωμένα λόγω της συμμετρίας της φόρτισης. Οι παραδοχές αυτές αρκούν για τη περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων ($w/t \leq 0.5$). Στις μεγάλες μετατοπίσεις απαιτούνται συμπληρωματικές συνθήκες για τη περιγραφή των περιορισμών στο επίπεδο του ελάσματος. Διακρίνονται τότε δυο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν επιτρέπεται ή όχι η ομοεπίπεδη μετατόπιση των πλευρών (κύλιση). Κατά την κύλιση των πλευρών δεν αναπτύσσονται μεμβρανικές τάσεις και η πλευρά φορτίζεται μόνο με καμπτικές τάσεις. Στο σχήμα παρουσιάζεται η κατανομή των πλαστικών ζωνών σε εγκάρσια τομή ελάσματος υπό κατανεμημένο φορτίο.



Σχήμα 5: Μετάδοση πλαστικότητας σε μακρύ έλασμα [2]

Σε πρώτο στάδιο, η πλαστικοποίηση ξεκινάει στα πακτωμένα άκρα, μέχρι να δημιουργηθούν πλαστικές αρθρώσεις. Με περαιτέρω αύξηση του φορτίου, δημιουργείται πλαστική άρθρωση στο κέντρο του, που στη περίπτωση κυλιόμενων πλευρών οδηγεί στη τελική κατάρρευση του ελάσματος. Περιορίζοντας τη κύλιση, η ανάπτυξη των μεμβρανικών τάσεων περιορίζει το βέλος κάμψης σε σχέση με τη προηγούμενη περίπτωση. Το έλασμα αποκτά τη δυνατότητα να φέρει φορτίο και μετά την ανάπτυξη κεντρικής πλαστικής άρθρωσης, λόγω των μεμβρανικών τάσεων που εμφανίζονται στα άκρα και επιτρέπουν την μετάδοση πλαστικότητας σε όλο το έλασμα. Η αύξηση του φορτίου αστοχίας είναι ορατή στο σχήμα. Τα δύο είδη στηρίξεων συναντώνται συχνά στις ναυπηγικές κατασκευές.



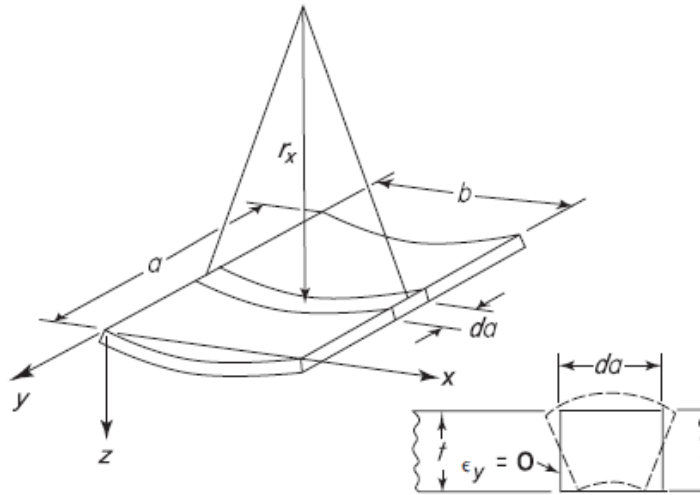
Σχήμα 6: Καμπύλες φορτίου μετατόπισης για μακριά πακτωμένα ελάσματα υπό ομοιόμορφη φόρτιση [2]

2.2.1 Θεωρία μικρών μετατοπίσεων

Σε αντίθεση με τις δοκούς, οι οποίες κάμπτονται μόνο κατά τη διεύθυνση του μήκους τους, η κάμψη στα ελάσματα παρατηρείται στις δυο ορθογώνιες κατευθύνσεις. Η εξίσωση που συσχετίζει τις μετατοπίσεις στα ελάσματα με το φορτίο ωστόσο, μπορεί να εκφραστεί μέσω παρόμοιας ανάλυσης με αυτήν των δοκών.

2.2.1.1 Κυλινδρική κάμψη

Η κυλινδρική κάμψη μπορεί να παρουσιαστεί σε ελάσματα μήκους πολύ μεγαλύτερου σε σχέση με το πλάτος του ($a \gg b$). Η κάμψη στη περίπτωση αυτή λαμβάνει χώρα σε μία διεύθυνση όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 7: (α) Κυλινδρική κάμψη ελάσματος (β) εγκάρσια διατομή

Η ανάλυση [4] ξεκινάει απομονώνοντας ένα στοιχείο του ελάσματος πλάτους da . Στη περίπτωση των δοκών, η εγκάρσια τομή θα παραμορφωθεί όπως δείχνουν οι διακεκομμένες γραμμές στη τομή του σχήματος, λόγω του φαινομένου Poisson. Εφόσον τα ελάσματα δεν κάμπτονται σε αυτή τη κατεύθυνση, η παραμόρφωση αυτή δε προκύπτει ($\epsilon_y = 0$). Επομένως ισχύουν οι εξισώσεις που ορίζουν την επίπεδη εντατική κατάσταση:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \quad (1)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = 0 \quad (2)$$

Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει $\sigma_y = \nu \sigma_x$, και επομένως η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x(1 - \nu^2)}{E} \quad (3)$$

Και επιλύοντας ως προς σ_x :

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \epsilon_x \quad (4)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με την αντίστοιχη εξίσωση των δοκών ($\sigma_x = E\epsilon_x$) μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερά $E' = E/(1 - \nu^2)$ σαν μέτρο ελαστικότητας των ελασμάτων. Ακόμα επειδή ισχύει πάντα $(1 - \nu^2) < 1$, είναι αντιληπτό ότι ένα έλασμα είναι πάντα πιο άκαμπτο από μια σειρά δοκών. Έτσι, αντικαθιστώντας τον όρο E' στις εξισώσεις κάμψης των δοκών, λαμβάνονται οι αντίστοιχες εξισώσεις την κάμψη των ελασμάτων μεγάλου μήκους (μοναδιαίου πλάτους). Οι επόμενες δύο εξισώσεις αντιστοιχούν στο μέγιστο βέλος κάμψης μακριού ελάσματος με απλή στήριξη και με πάκτωση αντίστοιχα, λόγω πλευρικού φορτίου p :

$$w_{\max} = \frac{5pb^4}{384E'I} = \frac{5pb^4(1 - \nu^2)}{32Et^3} \quad (5)$$

$$w_{\max} = \frac{pb^4}{384E'I} = \frac{pb^4(1 - \nu^2)}{32Et^3} \quad (6)$$

Όπως με τις δοκούς, η σχέση της ροπής κάμψης με το βέλος κάμψης λαμβάνεται εξισώνοντας την εξωτερική επιβαλλόμενη ροπή κάμψης, με την εσωτερική ροπή των καμπτικών τάσεων ως προς το ουδέτερο επίπεδο του ελάσματος:

$$M = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_x z dz \quad (7)$$

Όπου z είναι η απόσταση από το ουδέτερο επίπεδο. Η θεωρία της κάμψης των δοκών μας δίνει επίσης $\epsilon_x = z/r_x$, όπου r_x είναι η ακτίνα καμπυλότητας της ελαστικής γραμμής. Επομένως:

$$M = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{z^2}{r_x} \right) dz = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{r_x} \right) \quad (8)$$

ή γράφοντας

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9)$$

$$M = D/r_x \quad (10)$$

Ο όρος D καλείται καμπτική ακαμψία του ελάσματος και είναι ανάλογος με τη ποσότητα EI των δοκών. Η σχέση ακτίνας καμπυλότητας και βέλους κάμψης δίνεται από τη σχέση:

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cong \frac{1}{r_x} \quad (11)$$

Η οποία βάσει της (10) γίνεται:

$$-D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M \quad (12)$$

Η μέγιστη τάση σε αναλογία με τις δοκούς είναι :

$$\sigma_{max} = \frac{Mz_{max}}{I} = \frac{Mt/2}{I} = \frac{6M}{t^2} \quad (13)$$

Τέλος, για ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο, η μέγιστη ροπή κάμψης στοιχείου μοναδιαίου πλάτους είναι ανάλογη του pb^2 , και επομένως η μέγιστη τάση είναι ανάλογη του $pb^2/(t^2/6)$. Η τάση αυτή εκφράζεται με τη μορφή της εξίσωσης (14) και η τιμή του συντελεστή k εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες. Για απλή στήριξη ισχύει $k=3/4$ ενώ για πάκτωση $k=1/2$.

$$\sigma_{max} = kp \left(\frac{b}{t} \right)^2 \quad (14)$$

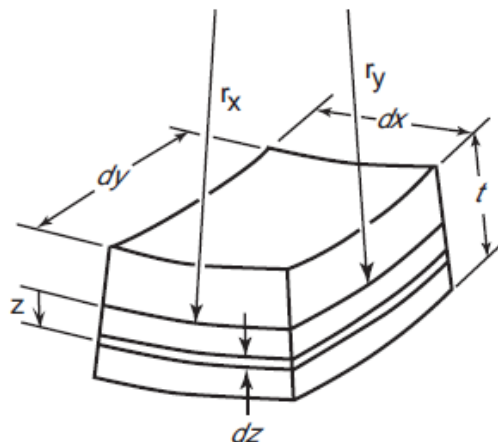
2.2.1.2 Κάμψη ελασμάτων πεπερασμένων διαστάσεων

Σε αυτό το εδάφιο θα εξαχθεί η εξίσωση που διέπει την κάμψη των ελασμάτων με πεπερασμένες διαστάσεις. Η εξίσωση αυτή παρουσιάστηκε το 1811 από τον Lagrange, και προσαρμόστηκε περεταίρω από τους Timoshenko (1959) και Jaeger (1964). Η παρακάτω θεωρία ισχύει εφόσον [4]:

- Οι επίπεδες τομές παραμένουν επίπεδες μετά την κάμψη.
- Οι εγκάρσιες μετατοπίσεις είναι μικρές (το μέγιστο βέλος κάμψης είναι μικρότερο του πάχους)
- Σε κανένα σημείο του ελάσματος η μέγιστη τάση δεν είναι μεγαλύτερη της τάσης διαρροής του υλικού.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα ελάσματα πεπερασμένων διαστάσεων κάμπτονται σε 2 διευθύνσεις. Θεωρώντας τις ακτίνες καμπυλότητας για τις δύο διευθύνσεις r_x και r_y ,

αντίστοιχα, του στοιχείου ελάσματος μήκους dx και πλάτους dy που φαίνεται στο σχήμα, δημιουργούνται ροπές (ανά μονάδα μήκους) m_x και m_y , οι τιμές των οποίων μπορούν να υπολογιστούν με τη παρακάτω διαδικασία.



Σχήμα 8: Στοιχείο ελάσματος $dx dy$

Από τις εξισώσεις επίπεδης εντατικής κατάστασης έχουμε:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E}$$

Αν στη δεύτερη εξίσωση πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους με ν και την προσθέσουμε στην πρώτη έχουμε:

$$\frac{\sigma_x}{E}(1 - \nu^2) = \varepsilon_x + \nu\varepsilon_y \quad (15)$$

Λόγω των παραδοχών 1 και 2, οι σχέσεις μεταξύ παραμορφώσεων και καμπυλότητας δίνονται από:

$$\varepsilon_x = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (16)$$

$$\varepsilon_y = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (17)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εξισώσεις στην (15) έχουμε:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (-z) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (18)$$

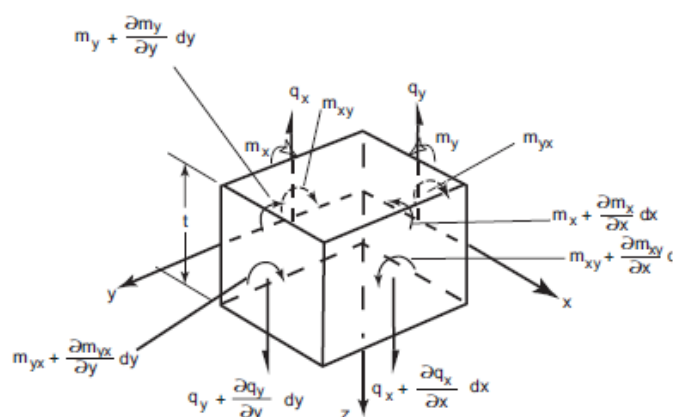
Από την ισορροπία εσωτερικών και εξωτερικών ροπών λαμβάνεται:

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = - \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z^2 dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

Και ομοίως για την m_y :

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (20)$$

Θεωρώντας τώρα ότι η τιμή του πλευρικού κατανεμημένου φορτίου ανά μονάδα επιφάνειας είναι p , τότε στο στοιχείο του ελάσματος θα είναι $p dx dy$. Το φορτίο αυτό εξισορροπείται από τις διατμητικές δυνάμεις q , που ασκούνται στις τέσσερις ακμές του στοιχείου, όπως φαίνεται στο σχήμα 9. Στη γενική περίπτωση της κάμψης, δημιουργούνται και στρεπτικές ροπές στις τέσσερις πλευρές, λόγω των m_{xy} και m_{yx} . Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται ολόκληρο το σύστημα δυνάμεων και ροπών στους τρεις άξονες για το στοιχείο του ελάσματος. Σημειώνεται ότι όλες οι δυνάμεις και ροπές δίνονται ανά μονάδα πάχους στις ακμές του στοιχείου.



Σχήμα 9: Ροπές και δυνάμεις σε στοιχείο του ελάσματος

Από την ισορροπία των δυνάμεων κάθετα στην επιφάνεια του ελάσματος ($\Sigma F_z = 0$) έχουμε:

$$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy - q_x dy + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx - q_y dx + p dx dy = 0$$

η οποία γράφεται διαιρώντας με το εμβαδόν του στοιχείου $dx dy$ γίνεται:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (21)$$

Θα εφαρμοστεί τώρα η ισορροπία περί τους άξονες αναφοράς Ox και Oy , $\Sigma M_x = 0$ και $\Sigma M_y = 0$ αντίστοιχα. Για τις ροπές παράλληλα στον x άξονα έχουμε:

$$\left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - m_{xy} dy + m_y dx - \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right) dx + q_y dx dy = 0$$

και απλοποιώντας:

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y} + q_y = 0 \quad (22)$$

Ανάλογα για τις ροπές στο y άξονα λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial m_x}{\partial x} + q_x = 0 \quad (23)$$

Από την αρχή της συμπληρωματικής διάτμησης έχουμε $m_{yx} = -m_{xy}$, και επομένως η (23) γίνεται:

$$-\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} + q_x = 0 \quad (24)$$

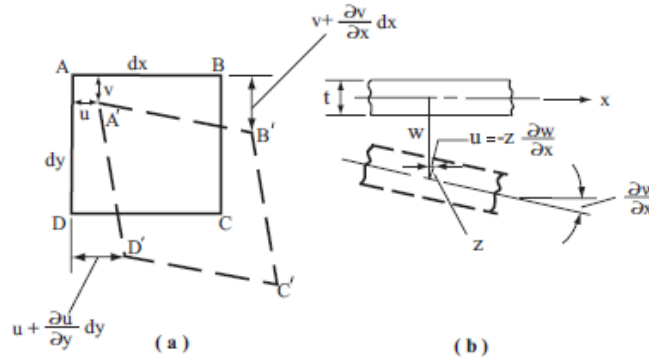
Αντικαθιστώντας τώρα τις εκφράσεις των q_x και q_y των εξισώσεων (22) και (24) στην εξίσωση (21):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) + p = 0$$

ή πιο απλά:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (25)$$

Θα προσδιοριστεί στη συνέχεια η στρεπτική ροπή m_{xy} συναρτήσει της μετατόπισης.



Σχήμα 10: Διατμητική παραμόρφωση (α) και μετατόπιση (β) ελάσματος

Όπως δείχνει η εικόνα 10, εάν ένα σημείο A σε απόσταση z από την ουδέτερη επιφάνεια μετατοπιστεί κατά απόσταση v στη διεύθυνση του y άξονα, η μετατόπιση του στοιχείου που βρίσκεται $x+dx$ κοντά στο A θα είναι $v + (\partial v / \partial x)dx$, έτσι ώστε η κλίση της γραμμής AB θα είναι:

$$\frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

και ομοίως η αλλαγή της κλίσης της γραμμής AD ισούται με $\partial u / \partial y$. Το στοιχείο του ελάσματος σχήματος παραλληλογράμμου ABCD παίρνει τη μορφή A'B'C'D' και η παραμόρφωση λόγω διάτμησης ισούται με:

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

ενώ η αντίστοιχη διατμητική τάση είναι ίση με:

$$\tau = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (26)$$

Από το σχήμα τώρα 10b, φαίνεται ότι για τις μετατοπίσεις u και v ισχύουν οι σχέσεις:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{και} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (26) η διαμητική τάση γίνεται:

$$\tau = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Η στρεπτική ροπή ανά μονάδα πάχους λαμβάνεται πλέον από την ισορροπία:

$$m_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z^2 dz = \frac{Gt^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

όπου $G=E/(1-\nu)$. Επομένως:

$$m_{xy} = \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{Et^3(1-\nu)}{12(1+\nu)(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (27)$$

Απομένει πλέον να αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις των m_x , m_y και m_{yx} που αποκτήθηκαν παραπάνω στην (25):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = -p$$

Από πού εκτελώντας τις σχετικές πράξεις έχουμε:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (28)$$

Η εξίσωση (28) αποτελεί την εξίσωση ισορροπίας του ελάσματος στη γραμμική ελαστική περιοχή. Για την εξίσωση αυτή, θεωρείται ότι η μετατόπιση είναι μικρή και δεν υπάρχουν παραμορφώσεις στο μέσο επίπεδο, καθώς απουσιάζουν οι μεμβρανικές τάσεις. Όπως ήδη αναφέρθηκε, η απουσία μεμβρανικών τάσεων οφείλεται στο γεγονός ότι επιτρέπεται η κύλιση των πλευρών. Παρόλα αυτά, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να ισχύει και στη περίπτωση που δεν επιτρέπεται να πλησιάσουν οι πλευρές του ελάσματος, εφόσον το βέλος κάμψης είναι αρκετά μικρό (μικρότερο του πάχους) και οδηγεί σε αμελητέες μεμβρανικές τάσεις. Η εξίσωση αυτή συναντάται στη βιβλιογραφία και με τη μορφή της (29):

$$\nabla^4 w = p/D \quad (29)$$

κάνοντας χρήση δηλαδή του τελεστή Laplace στις 4 διαστάσεις. Η εξίσωση είναι μια γραμμική, μη ομογενής, ελλειπτική μερική διαφορική εξίσωση τετάρτου βαθμού με σταθερούς συντελεστές. Στη βιβλιογραφία καλείται συνήθως διαρμονική εξίσωση και είναι γραμμική διότι οι παράγωγοι της εξαρτημένης μεταβλητής w δεν έχουν εκθέτες μεγαλύτερους της μονάδας.

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό αξίζει να γίνει αναφορά στις σχέσεις που υπολογίζουν τις μέγιστες τάσεις κάμψης και στρέψης στο έλασμα. Πιο συγκεκριμένα αν στην εξίσωση ορθής τάσης-βέλους κάμψης κατά τον άξονα x (18) αντικαταστήσουμε την εξίσωση (19) που εκφράζει τη ροπή κάμψης συναρτήσει του βέλους κάμψης, και θεωρώντας $z=t/2$ έχουμε την εξίσωση της μέγιστης τάσης λόγω κάμψης στον άξονα αυτό $(\sigma_x)_{max}$. Κατά αντίστοιχο τρόπο εκφράζεται και η $(\sigma_y)_{max}$ καθώς και η $(\tau_{xy})_{max}$. Οι σχέσεις φαίνονται παρακάτω:

$$(\sigma_x)_{max} = \frac{6m_x}{t^2} \quad (\sigma_y)_{max} = \frac{6m_y}{t^2} \quad (\tau_{xy})_{max} = \frac{6m_{xy}}{t^2} \quad (30)$$

Η ανάλυση του εδαφίου βασίστηκε στο [4].

2.2.1.3 Οριακές Συνθήκες

Οριακές συνθήκες είναι οι γνωστές συνθήκες στην επιφάνεια του ελάσματος, οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν, προκειμένου να αποκτηθεί η λύση που ικανοποιεί την διαμορφωτική εξίσωση. Οι συνθήκες αυτές περιλαμβάνουν το φορτίο που ασκείται κάθετα στο επίπεδο του ελάσματος, ωστόσο το φορτίο αυτό λήφθηκε υπόψη στη διαδικασία εξαγωγής της γενικής εξίσωσης που διέπει τη κάμψη των ελασμάτων, και βρίσκεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης (29). Απομένει να προσδιοριστούν οι συνθήκες στα σύνορα του ελάσματος. Η εξίσωση είναι τετάρτης τάξεως, και επομένως απαιτούνται δύο συνθήκες οι οποίες μπορεί να είναι ή γεωμετρικές, ή δυνάμεις. Η θεωρία κάμψης των λεπτών ελασμάτων προβλέπει ότι οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι η καμπτική και στρεπτική ροπή και η εγκάρσια διάτμηση, ενώ οι εφικτές μετατοπίσεις είναι το βέλος κάμψης (κάθετα στην επιφάνεια του ελάσματος) και οι αντίστοιχες κλίσεις. Οι οριακές συνθήκες λοιπόν σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούν να καταχτούν σε [2]:

- *Γεωμετρικές:* Η μαθηματική τους διατύπωση βασίζεται στα μεγέθη των μετατοπίσεων και των περιστροφών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το μηδενικό βέλος κάμψης και η μηδενική κλίση σε πακτωμένα άκρα.
- *Στατικές:* Οι οριακές συνθήκες καθορίζονται από τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά των αντίστοιχων πλευρών του ελάσματος. Η τέμνουσα δύναμη, όπως και η καμπτική και στρεπτική ροπή ελεύθερων άκρων είναι μηδενικές.

Είδος στήριξης	Μαθηματική διατύπωση
Απλή στήριξη (έδραση)	$(w)_{x=a} = 0$ $(M_x)_{x=a} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$
Πακτωμένο άκρο	$(w)_{x=a} = 0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0$
Ελεύθερο άκρο	$(M_x)_{x=a} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$ $(V_x)_{x=a} = \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0$
Μερική πάκτωση	$(w)_{x=a} = 0$ $(M_x)_{x=a} = k_r \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$
Ελαστική στήριξη	$(M_x)_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$ $k_t (w)_{x=a} = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a}$
Ελαστική στήριξη και μερική πάκτωση	$k_t (w)_{x=a} = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a}$ $k_r \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$

Πίνακας 1: Μαθηματική διατύπωση οριακών συνθηκών [2]

- *Μικτές οριακές συνθήκες*: Μικτή οριακή συνθήκη θεωρείται η απλή στήριξη, κατά την οποία το βέλος κάμψης και η καμπτική ροπή ισούνται με μηδέν.
- *Ελαστική στήριξη και μερική πάκτωση*: Είναι η περίπτωση που προκύπτει όταν υποχωρεί η στήριξη του ελάσματος. Τέτοια περίπτωση είναι της πρισματικής διατομής με πεπερασμένη (ή μηδενική) στρεπτική ακαμψία.

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται οι μαθηματικές διατυπώσεις των οριακών συνθηκών που αναφέρθηκαν παραπάνω. Στη μαθηματική διατύπωση των ελεύθερων άκρων όπως αναφέρθηκε βρίσκεται η τέμνουσα δύναμη (V_x) η οποία και αποτελείται από δύο όρους. Οι όροι αυτοί αναφέρονται στην εγκάρσια διάτμηση και στη συνιστώσα της στρεπτικής ροπής αντίστοιχα. Επιπλέον στην περίπτωση της ελαστικής στήριξης και μερικής πάκτωσης εισάγονται οι στρεπτικές ακαμψίες k_1 και k_2 , ελάσματος και δοκού αντίστοιχα.

2.2.1.4 Μέθοδοι επίλυσης

Οι παραπάνω εκφράσεις λοιπόν είναι απαραίτητες κατά την διεργασία επίλυσης της διαρμονικής εξίσωσης, η οποία και αποτελεί ένα από τα κλασσικά προβλήματα μαθηματικής φύσης. Λόγω της σημασίας της έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για την επίλυσή της, αρχικά με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων και πιο σύγχρονα με τη διατύπωση αριθμητικών διαδικασιών. Το 1821 ο Γάλλος μαθηματικός Navier έδωσε τη πρώτη λύση, βασισμένη στη χρήση τριγωνομετρικών σειρών Fourier. Οι σειρές αυτές χρησιμοποιήθηκαν για να εκφραστούν το φορτίο που επιβάλλεται στο έλασμα καθώς και το επαγόμενο βέλος κάμψης. Αργότερα ο Lèvy εφάρμοσε παρόμοια τεχνική αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα των δύο σειρών με μία σειρά Fourier.

Κάνοντας χρήση τριγωνομετρικών μορφών προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια η μορφή του ελάσματος και ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες. Η λύση που αποκτήθηκε από τον Navier αφορά σε έλασμα του οποίου οι πλευρές είναι απλά εδρασμένες. Αναφορικά παρουσιάζονται οι τριγωνομετρικές σχέσεις που εκφράζουν το φορτίο και το επαγόμενο βέλος κάμψης όπως υπολογίστηκαν στη περίπτωση αυτή. Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετά συγγράμματα όπως τα [1], [4], [5], με τη λεπτομερή διαδικασία που ακολουθείται για την εξαγωγή της σχέσης (32).

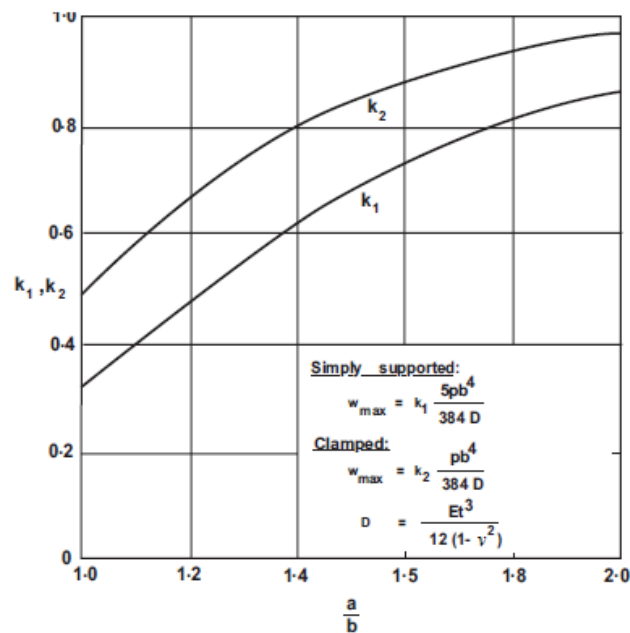
$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi x}{b} \quad (31)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16p_0}{\pi^6 Dmn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi x}{b} \quad (32)$$

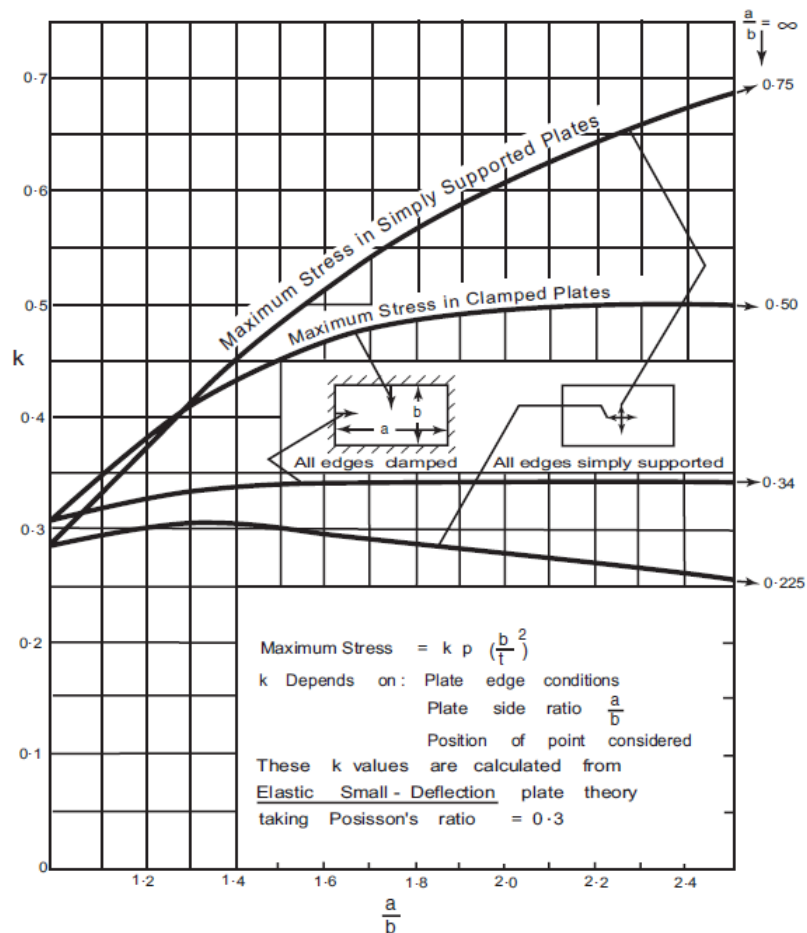
Στις παραπάνω εξισώσεις m, n είναι περιττοί αριθμοί αλλιώς $p_{mn}=0$. Οι σειρές αυτές συγκλίνουν γρήγορα με λίγους όρους, αλλά λιγότερο μετά τη παραγωγή τους για τον υπολογισμό ροπών και άλλων ποσοτήτων. Στα σχήματα που ακολουθούν δίνονται τιμές του μέγιστου βέλους κάμψης και των μέγιστων τάσεων για διάφορους λόγους πλευρών, όπως υπολογίζονται από τη θεωρία μικρών μετατοπίσεων. Στο σχήμα 12 φαίνεται ότι η επίδραση του λόγου πλευρών του ελάσματος είναι μικρότερη για οριακές συνθήκες πάκτωσης στα άκρα, και για περίπου $a/b=2$, το έλασμα συμπεριφέρεται σαν πακτωμένη λωρίδα, με αμελητέα επίδραση της αύξησης του λόγου πλευρών.

Όσο αναφορά τις αριθμητικές λύσεις, εμφανίστηκαν στις πρώτες δεκαετίες του 20^{ου} αιώνα με πρώτη αυτή των πεπερασμένων διαφορών. Έκτοτε έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με σχετική ευκολία και ταχύτητα. Οι αριθμητικές λύσεις όμως χαρακτηρίζονται από μία απώλεια ακρίβειας, καθώς το συνεχές μέσο

αντικαθίσταται από ένα διακριτό, στους κόμβους του οποίου επιλύονται οι εξισώσεις. Εφόσον γίνει σωστή χρήση των μεθόδων, η απώλεια ακρίβειας περιορίζεται σε αποδεκτά πλαίσια.



Σχήμα 11: Μέγιστη μετατόπιση ορθογώνιων ελασμάτων υπό ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο [4]



Σχήμα 12: Μέγιστες τάσεις σε ορθογώνια ελάσματα υπό ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο [4]

2.2.2 Θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων

Σε πολλές περιπτώσεις, η χρήση της θεωρίας των μικρών μετατοπίσεων για ελάσματα με επιβαλλόμενο φορτίο κάθετα στο επίπεδό τους, μπορεί να οδηγήσει σε πάχος σχεδιασμού τους μεγαλύτερο από το ελάχιστο απαιτούμενο. Αυτό συμβαίνει γιατί στη θεωρία μικρών μετατοπίσεων δε λαμβάνονται υπόψη οι μεμβρανικές τάσεις που αναπτύσσονται στο μέσο επίπεδο του ελάσματος. Μεμβρανικές τάσεις εμφανίζονται όταν [2]:

- Δεν επιτρέπεται η κύλιση των πλευρών (οι πλευρές δεν είναι ελεύθερες να πλησιάσουν μεταξύ τους).
- Το έλασμα παραμορφώνεται κατά μία μη αναπτυκτική-επιφάνεια.
- Υπάρχει θερμικό πεδίο στο περιβάλλον λειτουργίας του ελάσματος.

Όταν δεν επιτρέπεται η κύλιση των πλευρών, η επίδραση των μεμβρανικών τάσεων γίνεται σημαντική όταν το βέλος κάμψης που έχει το έλασμα, είτε λόγω επιβολής φορτίου είτε λόγω αρχικών μετατοπίσεων, ξεπερνάει περίπου το μισό της τιμής του πάχους. Στη περίπτωση που οι πλευρές είναι ελεύθερες να πλησιάσουν μεταξύ τους (που συναντάται συνήθως στα ναυπηγικά ελάσματα), οι μεμβρανικές τάσεις γίνονται σημαντικές όταν η κάθετη μετατόπιση ξεπερνάει τη τιμή του πάχους ($w > t$). Μάλιστα όσο αυξάνεται η μετατόπιση, τόσο αυξάνεται και το ποσοστό του φορτίου που παραλαμβάνεται από τις μεμβρανικές τάσεις. Στη περίπτωση αυτή, κατά την οποία το πλευρικό φορτίο παραλαμβάνεται τόσο από καμπτικές όσο και από μεμβρανικές τάσεις στο έλασμα, εφαρμόζεται η *θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων*. Η θεωρία αυτή χρησιμοποιείται συνήθως όταν η κάθετη μετατόπιση ξεπερνάει το 75% του πάχους του ελάσματος. Η θεωρία των μικρών μετατοπίσεων δίνει σωστά αποτελέσματα όταν το βέλος κάμψης δεν ξεπερνάει το 20% του πάχους, ωστόσο για υπολογισμούς μελέτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί μέχρι και μετατόπιση ίση με $w = 0.75t$.

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την θεωρία των μεγάλων μετατοπίσεων διαμορφώθηκαν από τον Von Karman. Πιο συγκεκριμένα, η εξίσωση που συνδέει το φορτίο με τη κάθετη μετατόπιση, είναι μια γενίκευση της διαρμονικής εξίσωσης (28), και για ένα στοιχείο $dx dy$, λαμβάνεται από την εξίσωση ισορροπίας στον άξονα κάθετα στο επίπεδο του ελάσματος, όμοια με τη περίπτωση της (21).

Εκτός από τις δυνάμεις που συμπεριλήφθηκαν στην εξίσωση ισορροπίας προηγουμένως, πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι μοναδιαίες δυνάμεις N_x , N_y , και $N_{xy} = N_{yx}$ που είναι παράλληλες προς το μέσο επίπεδο του ελάσματος. Οι επαυξήσεις αυτών των εσωτερικών δυνάμεων που δρουν στις πλευρές (2) και (3) στο στοιχείο ελάσματος που φαίνεται στο σχήμα 13, εκφράζονται μέσω των πρώτων όρων των αναπτυγμάτων Taylor. Η ισορροπία παράλληλα στον x άξονα, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν αδρανειακές δυνάμεις εκφράζεται:

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy - N_x dy + \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - N_{yx} dx = 0 \quad (33)$$

που απλοποιείται στη μορφή:

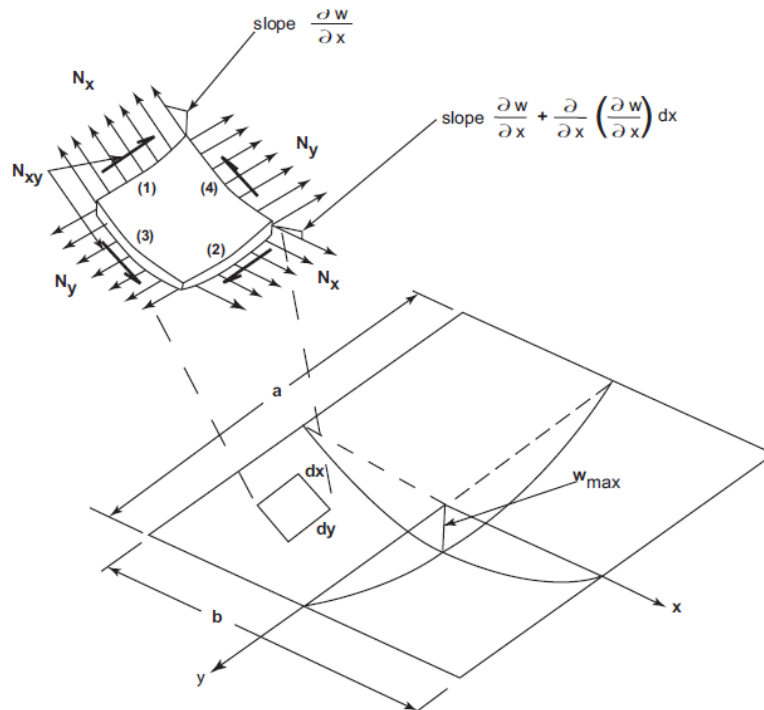
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (34)$$

Αντίστοιχα, από την ισορροπία στον y άξονα προκύπτει και η:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (35)$$

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις απαιτούνται για να εξασφαλιστεί η ισορροπία στο επίπεδο του ελάσματος και είναι ανεξάρτητες της εξίσωσης (28). Κατά τη προβολή των ομοεπίπεδων

δυνάμεων στον κάθετο άξονα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι γωνίες που σχηματίζουν κατά τη κάμψη οι δυνάμεις που ασκούνται στις δύο αντίθετες πλευρές του ελάσματος.



Σχήμα 13: Μεμβρανικές τάσεις σε στοιχείο ελάσματος [4]

Η προβολή λοιπόν των δυνάμεων στον κάθετο άξονα δίνει:

$$\begin{aligned} \sum F_x = & \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \\ & + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx + \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \end{aligned} \quad (36)$$

Αμελώντας τους όρους υψηλότερης τάξης:

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p(x, y) \quad (37)$$

Προσθέτοντας πλέον την (37) στη διαρμονική εξίσωση καθώς και τις διατμητικές δυνάμεις στο φορτίο $p dx dy$ που ασκείται έχουμε:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = p(x, y) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (38)$$

Η παραπάνω εξίσωση αντικαθιστά την (28) όταν οι πλευρικές μετατοπίσεις ξεπερνούν το 75% του πάχους του ελάσματος, ή/και όταν, πέρα από πλευρικές φορτίσεις, ασκούνται στο έλασμα και φορτία παράλληλα με το μέσο επίπεδό της. Για ελάσματα με αρχικές ατέλειες w_0 η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = p(x, y) + N_x \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \quad (39)$$

Προκειμένου να λυθούν οι εξισώσεις (34),(35) και (38) θα πρέπει να είναι γνωστά τα ομοεπίπεδα φορτία N_x , N_y , και N_{xy} . Σε αντίθετη περίπτωση θα πρέπει να επιλυθεί το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων, που αποτελείται από τις εξισώσεις αυτές. Λύσεις κλειστής μορφής για αυτή τη κατηγορία προβλημάτων αποκτώνται δύσκολα αποκτώνται, γι

αυτό είναι συνηθισμένη η χρήση αριθμητικών μεθόδων (δυναμική χαλάρωση, πεπερασμένα στοιχεία).

Στις ναυπηγικές κατασκευές, η κύρια εφαρμογή της (38), αφορά ελάσματα που υπόκεινται σε ομοεπίπεδα θλιπτικά φορτία, από τα οποία δύναται να προκύψει λυγισμός. Στη περίπτωση αυτή, εφόσον το N_x αντιπροσωπεύει το επιβαλλόμενο φορτίο έχει γνωστή τιμή. Το ίδιο μπορεί να ισχύει και για τα N_y , και N_{xy} , ή μπορεί αυτές οι μεταβλητές να συνεχίσουν να αντιπροσωπεύουν τις επιδράσεις της μεμβρανικής απόκρισης λόγω των μεγάλων μετατοπίσεων [2].

2.2.3 Στοιχεία που επηρεάζουν την απόκριση στις μεγάλες μετατοπίσεις

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, οι μεμβρανικές τάσεις έχουν ιδιαίτερη σημασία όταν γίνεται λόγος για μεγάλες μετατοπίσεις, και πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τον υπολογισμό της απόκρισης του ελάσματος. Αυτό γίνεται κάνοντας χρήση της εξίσωσης (38) αντί της (28). Πέρα όμως των μεμβρανικών τάσεων, αξίζει να γίνει αναφορά και σε ελάσματα που παρουσιάζουν υπολογίσιμες αρχικές μετατοπίσεις (εξίσωση (39)).

2.2.3.1 Επίδραση των μεμβρανικών τάσεων

Οι βασικοί παράγοντες που καθορίζουν το μέγεθος (και επομένως την επίδραση) των μεμβρανικών τάσεων είναι:

- Το μέγεθος των εγκάρσιων μετατοπίσεων του ελάσματος, είτε αυτές υπάρχουν ως αρχικές μετατοπίσεις, είτε λόγω επιβολής φορτίου.
- Το βαθμό κύλισης των πλευρών.

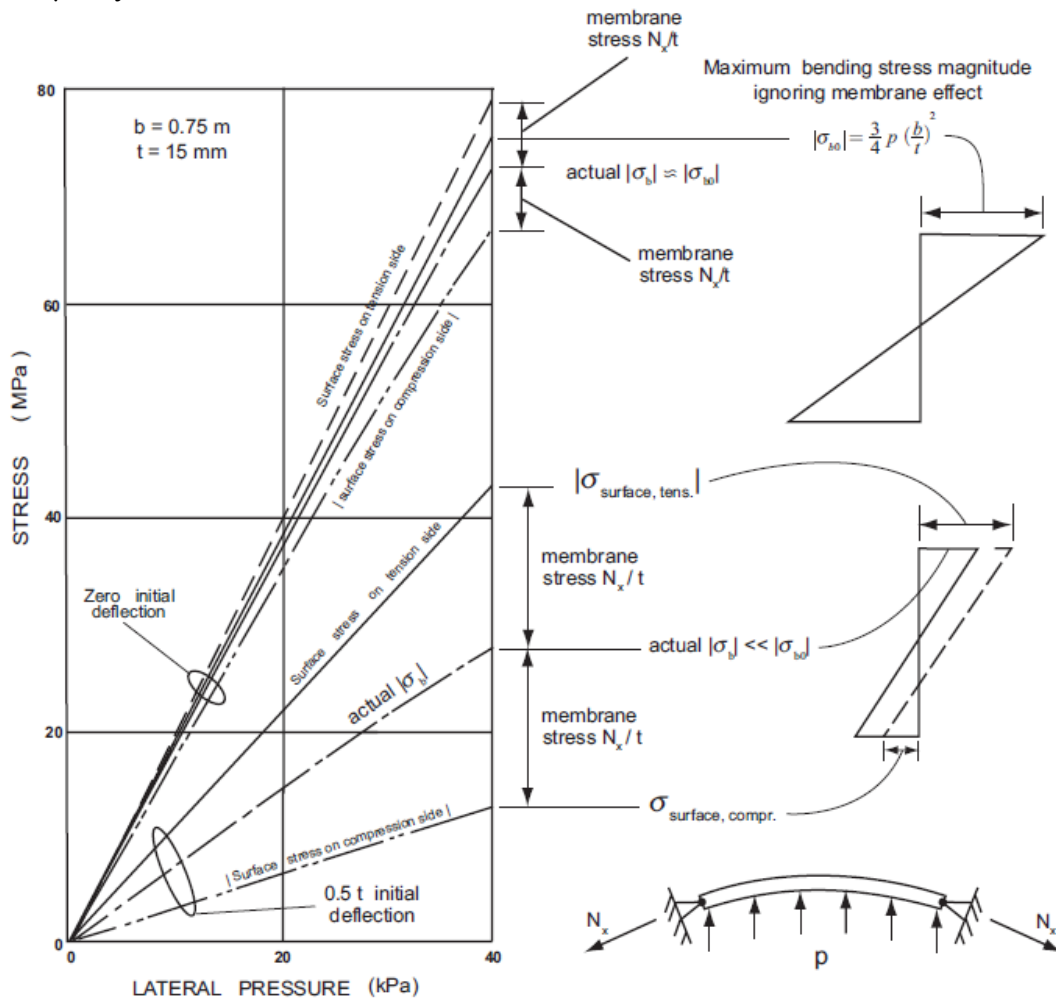
Όταν το βέλος κάμψης του ελάσματος είναι πολύ μεγάλο, λόγω της μεγάλης κλίσης του ελάσματος σε σχέση με το αρχικό του επίπεδο, προκύπτει μια κατακόρυφη συνιστώσα της μεμβρανικής τάσης, η οποία παραλαμβάνει μέρος του φορτίου. Η αύξηση της εγκάρσιας μετατόπισης λοιπόν συνεπάγεται και αύξηση της κατακόρυφης συνιστώσας της μεμβρανικής τάσης, και επομένως συμβάλει σε μεγαλύτερο βαθμό στην παραλαβή φορτίου. Αυτός είναι και ο λόγος που παρατηρείται σταδιακή απόκλιση από τη γραμμική απόκριση σε μη γραμμική στις μεγάλες μετατοπίσεις.

Η απόκλιση από τη γραμμική συμπεριφορά αυξάνεται συνεπώς λόγω των σημαντικών μεμβρανικών τάσεων που προκύπτουν από μεγάλα επαγόμενα βέλη κάμψης. Οι μεμβρανικές τάσεις όμως εξαρτώνται και από το βαθμό κύλισης των πλευρών. Η κύλιση των πλευρών με τη σειρά της εξαρτάται από τους περιορισμούς που επιβάλλονται στα σημεία στήριξης, εάν δηλαδή το έλασμα βρίσκεται κοντά σε ελεύθερο άκρο (ή όχι) της κατασκευής. Όταν δεν επιτρέπεται η κύλιση και το έλασμα έχει μεγάλο αρχικό ή επαγόμενο βέλος κάμψης, οι μεμβρανικές τάσεις γίνονται ιδιαίτερα σημαντικές και η απόκλιση από την γραμμική συμπεριφορά αυξάνεται περεταίρω. Στη μεταλλική κατασκευή του πλοίου επιτρέπεται η κύλιση εφόσον το βέλος κάμψης είναι μικρό, κυρίως κοντά σε ελεύθερα άκρα. Ο βαθμός της κύλισης μπορεί να ελαττωθεί όσο αυξάνεται η φόρτιση και άρα η ομοεπίπεδη ακαμψία. Γενικά η επίδραση των μεμβρανικών τάσεων γίνεται αισθητή όταν $w/t > 0.75$ και σημαντική όταν $w/t > 1.5$.

2.2.3.2 Επίδραση του αρχικού βέλους κάμψης

Στα ελάσματα χωρίς αρχικές μετατοπίσεις, το μέγεθος της πλευρικής μετατόπισης εξαρτάται κυρίως από το λόγο του πλάτους προς το πάχος b/t . Στις ναυπηγικές κατασκευές ο λόγος αυτός είναι συνήθως περίπου ίσος με 50, με αποτέλεσμα οι μεμβρανικές τάσεις να γίνονται σημαντικές όταν έχουν αρχίσει ήδη να παρουσιάζονται φαινόμενα ανελαστικότητας.

Στο σχήμα 14 φαίνεται η επίδραση του αρχικού βέλους κάμψης στην απόκριση του ελάσματος.



Σχήμα 14: Επίδραση μεμβρικών τάσεων σε απλά εδρασμένο μακρύ έλασμα

Αρχικά παρουσιάζονται οι τάσεις που αναπτύσσονται σε αρχικά επίπεδο έλασμα ($w_0=0$) πλάτους $0.75m$ και πάχους $15mm$. Όπως φαίνεται, με την αύξηση του πλευρικού φορτίου, η καμπτική τάση που προκύπτει διαφέρει από την τιμή που θα υπολογιζόταν αμελώντας τις μεμβρικές τάσεις. Η μικρότερη κάθετη μετατόπιση οδηγεί σε μικρότερου μεγέθους κάμψη, και επομένως η τιμή της καμπτικής τάσης είναι πάντα μικρότερη στη θλιβόμενη πλευρά (*compression side*). Στην εφελκυστική πλευρά (*tension side*), οι μεμβρικές τάσεις προστίθενται στις καμπτικές, και επομένως η μέγιστη εφελκυστική τάση είναι λίγο μεγαλύτερη. Η συνολική διαφορά ωστόσο όπως φαίνεται είναι μικρή, περίπου 4% για τάση ίση με $80MPa$ [4].

Εξετάζεται τώρα το πρόβλημα για το ίδιο έλασμα, το οποίο όμως τώρα χαρακτηρίζεται από αρχική μετατόπιση ίση με το μισό του πάχους του. Όπως δείχνει το σχήμα 14, οι τάσεις μειώνονται αρκετά. Η αρχική μετατόπιση επιτρέπει στις μεμβρικές τάσεις να αναπτυχθούν νωρίτερα, κατά τα πρώτα στάδια της φόρτισης, και να παραλάβουν μεγαλύτερο μέρος του φορτίου. Τέτοιες αρχικές μετατοπίσεις πολλές φορές δημιουργούνται συνήθως από προηγούμενες πλαστικές παραμένουσες παραμορφώσεις λόγω συγκολλήσεων. Παρά το πιθανώς αντιαισθητικό αποτέλεσμα, έχουν ευνοϊκή επίδραση στην αντοχή των ελασμάτων. Στον παρακάτω πίνακα που συνέταξε ο Clarkson, φαίνεται η επίδραση της αρχικής μετατόπισης στην αντοχή, στη περίπτωση πολύ λεπτού ελάσματος χάλυβα ($b/t=152$).

Ιδιότητες κατασκευής	Κρίσιμη πίεση $P = \frac{p}{D} \left(\frac{b}{t}\right)^4$	Αύξηση αντοχής λόγω
Επίπεδο έλασμα	1590	-
Αρχικό βέλος κάμψης ίσο με το πάχος	2580	Μεμβρανικών τάσεων
Αρχικά επίπεδο έλασμα με επιβεβλημένη παραμένουσα μετατόπιση ίση με το πάχος	4500	Μεμβρανικών, παραμενουσών τάσεων
Αρχικά επίπεδο έλασμα με επιβεβλημένη παραμένουσα μετατόπιση ίση με $w_0=1.1t$	5850	Μεμβρανικών και παραμενουσών τάσεων

Πίνακας 2: Επίδραση αρχικών ατελειών στην ελαστική αντοχή λεπτού ελάσματος

Τέλος τονίζεται πως το αρχικό βέλος κάμψης είναι επιθυμητό μόνο στις περιπτώσεις που οι πλευρές του ελάσματος εμποδίζονται να πλησιάσουν μεταξύ τους, δεν επιτρέπεται δηλαδή η κύλιση. Αν στο επίπεδο του ελάσματος ασκούνται θλιπτικές δυνάμεις, η αρχική μετατόπιση αυξάνει τις καμπτικές δυνάμεις, και το έλασμα μπορεί να υποστεί λυγισμό. Αυτό ισχύει για τα ελάσματα που συμμετέχουν στη διαμήκη αντοχή του πλοίου. Για ελάσματα όμως εγκάρσιων φρακτών και ενδιάμεσων καταστρωμάτων η αρχική μετατόπιση είναι επιθυμητή [2].

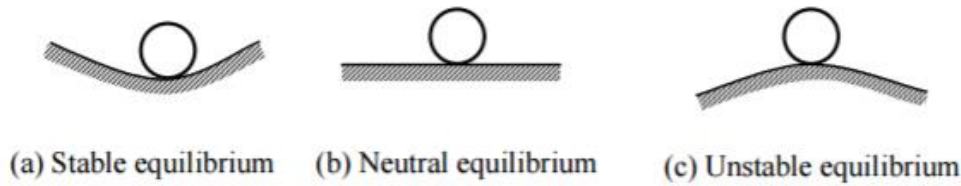
2.3 Λυγισμός ορθογωνίων ελασμάτων

Τα ελάσματα δομικά στοιχεία των ναυπηγικών κατασκευών, συχνά υπόκεινται σε ομοεπίπεδα θλιπτικά και διατμητικά φορτία, που δρουν στο μέσο επίπεδό τους. Υπό συγκεκριμένες συνθήκες τέτοια φορτία μπορούν να προκαλέσουν στο έλασμα λυγισμό. Το πρώτο στάδιο της περιγραφής της απόκρισης των ναυπηγικών ελασμάτων υπό την επίδραση φορτίσεων που μπορούν να οδηγήσουν σε αστάθεια, είναι η πρόβλεψη του φορτίου ελαστικού λυγισμού. Το φορτίο λυγισμού εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το πάχος του ελάσματος. Όσο πιο λεπτό είναι ένα έλασμα, τόσο μικρότερη τιμή έχει το φορτίο λυγισμού. Υπάρχουν περιπτώσεις που η αστοχία ενός ελάσματος οφείλεται στην ελαστική αστάθεια και όχι στην έλλειψη αντοχής.

Έστω ένα ιδανικά λεπτό, ελαστικό έλασμα, που είναι αρχικά είναι απόλυτα επίπεδο (απουσία αρχικών μετατοπίσεων), και το οποίο υποβάλλεται σε ομοεπίπεδα θλιπτικά και διατμητικά φορτία. Τα φορτία αυτά θεωρείται ότι επιδρούν αυστηρά στο μέσο επίπεδο του ελάσματος. Οι παραμορφώσεις που προκύπτουν χαρακτηρίζονται από την απουσία μετατοπίσεων ($u \neq 0$, $v \neq 0$, $w = 0$) και επομένως από την απουσία στρεπτικών και καμπτικών ροπών, καθώς και εγκάρσιων διατμητικών δυνάμεων. Η κατάσταση αυτή καλείται επίπεδη διαμόρφωση ισορροπίας (*flat configuration of equilibrium*).

Η κατάσταση αυτή μπορεί να είσαι σταθερή ή ασταθής, ανάλογα με τη τιμή των ομοεπίπεδων φορτίων. Έστω ότι το έλασμα μετατοπίζεται από αυτή τη θέση ισορροπίας από μια απειροελάχιστη διαταραχή (για παράδειγμα μια μικρή πλευρική δύναμη). Αν με την αφαίρεση της διαταραχής το έλασμα έχει τη τάση να επανέρθει στην αρχική θέση ισορροπίας του, η επίπεδη διαμόρφωση ισορροπίας θεωρείται σταθερή (*Stable equilibrium*). Στη περίπτωση της ασταθούς ισορροπίας (*unstable equilibrium*) ωστόσο, με την αφαίρεση της διαταραχής, το έλασμα διακρίνεται από τη τάση να μετατοπιστεί περισσότερο, μέχρις ότου να βρεθεί σε μια καινούργια θέση ισορροπίας, η οποία μπορεί να είναι κοντά στην αρχική, ή πολύ μακριά της. Τέλος, αν το έλασμα διατηρήσει τη μετατοπισμένη θέση του μετά το πέρας

της διαταραχής, τότε βρίσκεται σε ουδέτερη ισορροπία (*neutral equilibrium*). Αν προσομοιάσουμε τη κατάσταση ισορροπίας του ελάσματος με τη θέση ισορροπίας της σφαίρας του σχήματος 15, τότε οι κατηγορίες ευστάθειας απεικονίζονται ως εξής:



Σχήμα 15: Ευσταθής (a), ουδέτερη (b) και ασταθής (c) ισορροπία

Η μετάβαση αυτή, από την σταθερή κατάσταση ισορροπίας σε μία ασταθή καλείται λυγισμός (*buckling*). Το ελάχιστο επιβαλλόμενο φορτίο που δημιουργεί λυγισμό, καλείται φορτίο λυγισμού (*buckling load*).

2.3.1 Ελαστικός λυγισμός υπό μονοαξονική θλίψη

Το πρόβλημα του λυγισμού διαφέρει σε θεμελιώδες επίπεδο από αυτό της κάμψης. Βάσει των προηγούμενων, το βέλος κάμψης στην περίπτωση που επιβάλλονται καμπτικές φορτίσεις, χαρακτηρίζεται από σταδιακή αύξηση, ανάλογη της του μεγέθους καταπόνησης, για όλο το πεδίο της φόρτισης. Πρόκειται δηλαδή για *πεδιακό* πρόβλημα. Αντίθετα, όταν στο έλασμα δρουν θλιπτικές φορτίσεις, το επαγόμενο βέλος κάμψης παραμένει μηδενικό στη προλυγισμική περιοχή. Όταν το έλασμα φέρει φορτίο που ισούται με το φορτίο λυγισμού, τότε παρατηρείται σημαντική αύξηση του βέλους κάμψης. Στις περιπτώσεις λοιπόν που δρουν θλιπτικά φορτία τα οποία μπορεί να προκαλέσουν αστάθεια, το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως *προσδιορισμού ιδιοτιμών*. Ο χαρακτηρισμός αυτό οφείλεται προφανώς στην ανάγκη προσδιορισμού των ιδιοτιμών της σχετικής διαφορικής εξίσωσης, προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα. Μάλιστα, εφόσον γίνεται αναφορά σε πρακτικές εφαρμογές, μας ενδιαφέρει η μικρότερη ιδιοτιμή, καθώς η κατασκευή θα αστοχήσει σε αυτή.

Θα παρουσιαστεί παρακάτω συνοπτικά η λύση του προβλήματος απόκρισης μακριού ελάσματος με απλή στήριξη, υπό την επίδραση μονοαξονικής θλιπτικής φόρτισης. Η εξίσωση που περιγράφει την απόκριση των ορθογωνίων ελασμάτων υπό αυτές τις συνθήκες φόρτισης θα εξαχθεί από την (38), που για λόγους πρακτικότητας παραθέεται πάλι εδώ:

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x, y) = p(x, y) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο προηγούμενο εδάφιο, ο αριστερός όρος της εξίσωσης περιλαμβάνει την εξαρτημένη μεταβλητή $w(x, y)$ που εκφράζει την απόκριση της κατασκευής, ενώ στο δεξιό μέρος της εξίσωσης περιλαμβάνονται η κατανεμημένη πίεση p και οι ομοεπίπεδες δυνάμεις, που είναι αποτέλεσμα της μη γραμμικής συμπεριφοράς, οφειλόμενες στη κατανεμημένη φόρτιση ή στις εξωτερικές φορτίσεις.

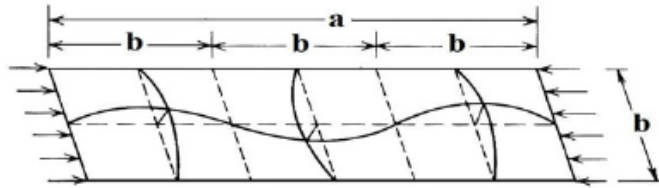
Για την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης που εξετάζεται, είναι φανερό ότι η κατανεμημένη πίεση καθώς και οι ομοεπίπεδες δυνάμεις πέραν της N_x είναι μηδενικές, και η εξίσωση έχει τη μορφή:

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x, y) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (40)$$

και εφόσον $N_x = -\sigma_x t$, (το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει θλιπτική φόρτιση) έχουμε:

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x, y) = -\frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (41)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής απαιτεί αρχικά την υπόθεση μιας δεκτής μορφής του βέλους κάμψης. Η λύση του προβλήματος πρέπει γενικά να ικανοποιεί και το πεδιακό πρόβλημα και τις οριακές συνθήκες. Όπως και πριν, θα γίνει χρήση τριγωνομετρικών σειρών. Για απλά εδρασμένο έλασμα, η πιο πιθανή παραμόρφωση φαίνεται στο σχήμα 16.



Σχήμα 16: Παραμόρφωση μακριού ελάσματος υπό μονοαξονική θλίψη

και η αντίστοιχη λύση θα έχει τη παρακάτω γενική μορφή:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (42)$$

Αντικαθιστώντας τη λύση αυτή στην εξίσωση (41) λαμβάνεται:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - q_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} \right] w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (43)$$

Μια πιθανή λύση της (43) είναι η $w_{mn}=0$, ωστόσο αυτή αντιστοιχεί στην κατάσταση του επίπεδου ελάσματος που βρίσκεται σε ισορροπία χωρίς να έχει υποστεί λυγισμό, και δεν μας ενδιαφέρει στη περίπτωση αυτή. Μια άλλη πιθανή λύση αποκτάται αν θέσουμε τους όρους μέσα στη παρένθεση ίσους με το μηδέν, δηλαδή:

$$D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - q_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} = 0$$

ή:

$$q_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \quad (44)$$

Πρέπει τώρα να προσδιοριστεί η σταθερά w_{mn} . Η παραπάνω έκφραση ισχύει για $m=1,2,3..; n=1,2,3...$, όπου m και n αποτελούν τον αριθμό διάμηκων και εγκάρσιων ημικυμάτων σε όλες τις πιθανές μορφές της μετατοπισμένης επιφάνειας που περιγράφει η (42). Η κρίσιμη όμως τιμή θα είναι η μικρότερη, και επομένως θέλουμε την μικρότερη τιμή του q_x , άρα θέτουμε $n=1$. Άρα έχουμε:

$$q_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$$

ή ισοδύναμα:

$$q_x = k \frac{D\pi^2}{b^2} \quad (45)$$

όπου:

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (46)$$

Η εξίσωση (46) δίνει τον συντελεστή λυγισμού ο οποίος εξαρτάται άμεσα από τον λόγο πλευρών του ελάσματος. Όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (45) και (46), η μικρότερη τιμή του q_x και συνεπώς η τιμή του κρίσιμου φορτίου $q_{x,c}$, εξαρτάται από τη τιμή των ημικυμάτων στη διαμήκη κατεύθυνση, m . Για δεδομένο λόγο πλευρών, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού

αποκτάται θέτοντας στην (45) την τιμή του m που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση. Εφόσον ο συντελεστής λυγισμού εξαρτάται μόνο από το m έχουμε:

$$\frac{dk}{dm} = 2 \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right) \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{m^2 b} \right) = 0$$

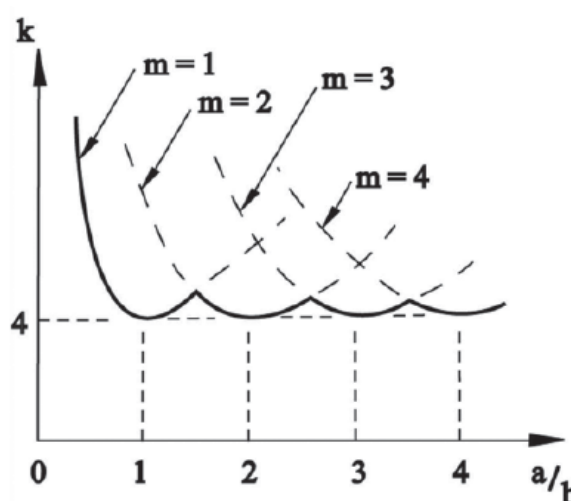
Οι όροι στην πρώτη παρένθεση είναι μη μηδενικοί, άρα για τη λύση της εξίσωσης πρέπει να βρεθεί η τιμή του m που μηδενίζει τη δεύτερη. Αυτή είναι $m=a/b$. Επομένως:

$$\min q_x = q_{x.cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2}$$

Η έκφραση για τη τάση λυγισμού είναι:

$$\sigma_{x.cr} = \frac{N_{x.cr}}{t} = \frac{q_{x.cr}}{t} = k \frac{D\pi^2}{b^2 t} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (47)$$

Η σχέση (47) αποδείχθηκε το 1891 από τον Bryan. Αν για κάποια τιμή του λόγου πλευρών φέρουμε ευθεία κάθετη στον οριζόντιο άξονα, αυτή τέμνει τις καμπύλες στις λύσεις για τις διάφορες τιμές του αριθμού ημικυμάτων. Η γραφική απεικόνιση του συντελεστή λυγισμού (σχήμα 17) δείχνει ότι αποκτά την ελάχιστη τιμή όταν $a/b=1$, δηλαδή για τετράγωνα ελάσματα. Για άλλες τιμές του αριθμού ημικυμάτων m , αποκτάμε μια σειρά καμπυλών που φαίνονται στο σχήμα 18.

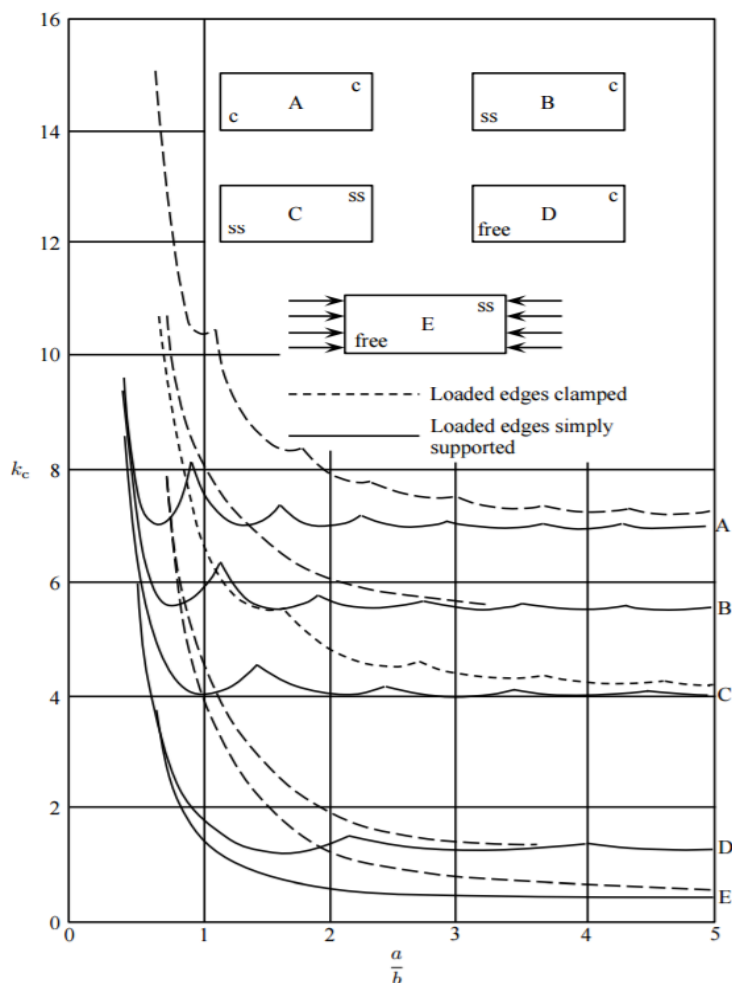


Σχήμα 17: Σχέση του συντελεστή λυγισμού με τις ιδιομορφές

Παρατηρείται επιπλέον ότι σε κάθε περίπτωση, ο συντελεστής λυγισμού λαμβάνει ελάχιστη τιμή ίση με το 4, για απλά εδρασμένο έλασμα.

Η λύση που έχει πρακτικό ενδιαφέρον όπως αναφέρθηκε αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή, η οποία για απλά εδρασμένο έλασμα αντιστοιχεί στη τιμή $m=a/b$. Παρατηρείται επίσης ότι για ακέραιες τιμές του λόγου πλευρών, ο αριθμός ημικυμάτων ισούται με το συντελεστή λυγισμού. Συνεπώς, το έλασμα υποδιαιρείται σε ένα αριθμό κοιλοτήτων ίσο με το λόγο πλευρών του, με τις κοιλοότητες αυτές να τείνουν προς το τετράγωνο σχήμα.

Πέρα από το λόγο πλευρών, η τιμή του συντελεστή λυγισμού εξαρτάται και από τις οριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα. Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές εργασίες που έχουν προσδιορίσει διάφορες τιμές του k για διαφορετικές οριακές συνθήκες. Στο σχήμα 18 φαίνεται η επίδραση των οριακών συνθηκών στο συντελεστή λυγισμού. Μια γενική παρατήρηση είναι το γεγονός ότι ο συντελεστής λυγισμού είναι μικρότερος στις περιπτώσεις που το έλασμα έχει μεγαλύτερο περιθώριο μετατοπίσεων στα άκρα του. Γεγονός που σημαίνει ότι, το φορτίο λυγισμού στις αντίστοιχες περιπτώσεις θα είναι μικρότερο.



Σχήμα 18: Συντελεστής λυγισμού για διάφορες οριακές συνθήκες

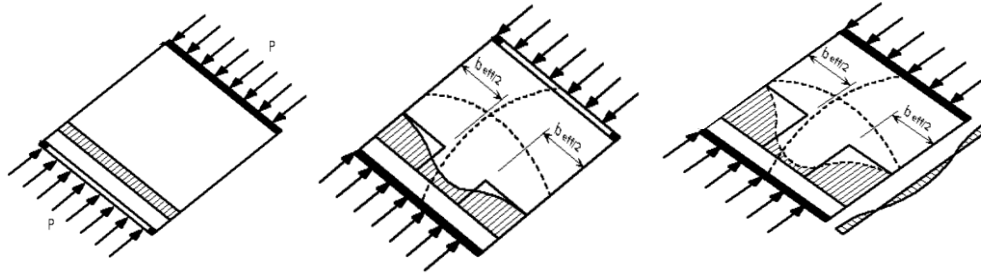
2.3.2 Μεταλυστική αντοχή μακρίων ορθογώνιων ελασμάτων

Στο προηγούμενο εδάφιο περιγράφηκε η ανάλυση που ισχύει στη περίπτωση των λεπτών ελασμάτων, για τα οποία όπως έχει αναφερθεί ισχύει $b/t > 80$. Η γεωμετρία αυτή ωστόσο δεν αντιπροσωπεύει τις ναυπηγικές κατασκευές. Για τα συνήθη ναυπηγικά ελάσματα, αντικαθιστώντας στη σχέση (47) τις κατάλληλες τιμές λόγω της γεωμετρίας τους ($30 < b/t < 80$), υπολογίζεται ότι για τους κοινούς ναυπηγικούς χάλυβες, η τάση ελαστικού λυγισμού υπερβαίνει τη τάση διαρροής. Συνεπώς δε θα προκύψει ελαστικός λυγισμός, αφού σε ορισμένες τουλάχιστον περιοχές του ελάσματος θα έχει προηγηθεί πλαστικοποίηση του υλικού. Στις περιοχές αυτές, η ισοδύναμη τάση ή τάση Von Mises που δίνεται από τη παρακάτω σχέση, ισούται με τη τάση διαρροής [2].

$$\sigma_o^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 \quad (48)$$

Τα ελάσματα εξακολουθούν να παραλαμβάνουν φορτίο και μετά το λυγισμό, διακρίνονται δηλαδή από μεταλυστική αντοχή. Βασική προϋπόθεση είναι οι μακριές πλευρές που παραμένουν αφόρτιστες στο έλασμα, διατηρούν την αρχική μορφή τους, παραμένουν δηλαδή ευθείες. Σε σχέση με τη προλυγισμική περιοχή, η διαφορά της απόκρισης εντοπίζεται στις σημαντικά μεγαλύτερες μετατοπίσεις που παρουσιάζονται τώρα. Με συνεχή αύξηση του επιβαλλόμενου φορτίου, κάποια στιγμή θα παρουσιαστεί πλαστικοποίηση του υλικού σε κρίσιμες περιοχές του ελάσματος. Οι περιοχές αυτές εμφανίζονται κυρίως κατά μήκος των αφόρτιστων πλευρών και εξαρτώνται από το μέγεθος

της ισοδύναμης τάσης von Mises. Πειράματα που έχουν γίνει σε απλά ναυπηγικά ελάσματα έχουν δείξει πως την πλαστικοποίηση ακολουθεί άμεσα η κατάρρευση του ελάσματος, γεγονός που προσδίδει μεγάλη σημασία στον προσδιορισμό του φορτίου κατάρρευσης.



Σχήμα 19: Διάχυση του παραλαμβανόμενου φορτίου στη μονοαξονική θλίψη

Όπως φαίνεται στο σχήμα 19, όταν ένα έλασμα εισέρχεται στην μεταλυστική περιοχή λόγω αύξησης των εξωτερικών επιβαλλόμενων φορτίων, προκύπτει ανακατανομή των ορθών τάσεων με διάχυση του φορτίου από το κέντρο προς τις στηριζόμενες αφόρτιστες πλευρές. Εισάγοντας τώρα το ισοδύναμο πλάτος σε θλίψη b_e , έχουμε μια έκφραση της ικανότητας παραλαβής φορτίου του ελάσματος στη μεταλυστική περιοχή. Το ισοδύναμο πλάτος ορίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_e b_e = \sigma_a b \leftrightarrow \frac{b_e}{b} = \frac{\sigma_a}{\sigma_e} \quad (49)$$

όπου σ_e είναι η τάση κατά μήκος των αφόρτιστων πλευρών και σ_a είναι η μέση τάση στο έλασμα. Όταν η τάση σ_e λόγω αύξησης του φορτίου γίνει ίση με τη τάση διαρροής του υλικού, τότε θεωρούμε ότι επέρχεται κατάρρευση του ελάσματος. Το σημείο αυτό αντιστοιχεί στη τιμή του μειωμένου ισοδύναμου πλάτους ελάσματος σε θλίψη, b_{em} , που αποτελεί το μέτρο μέγιστης αντοχής του ελάσματος. Το 1932, ο von Karman προσδιόρισε το ελάχιστο ισοδύναμο πλάτος σε θλίψη υποθέτοντας ότι ο λυγισμός προκύπτει όταν η μέση επιβαλλόμενη τάση γίνει ίση με τη τάση διαρροής. Θεωρείται δηλαδή:

$$\sigma_a = \sigma_0 = 3.62E \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (50)$$

Με επίλυση ως προς το πλάτος:

$$b_{em} = 1.9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}}$$

ή

$$\frac{b_{em}}{b} = \frac{1.9}{\beta} \quad (51)$$

όπου $\beta = b/t \sqrt{\sigma_0/E}$ είναι ο συντελεστής που εκφράζει τη λυγηρότητα του ελάσματος. Για κοινό ναυπηγικό χάλυβα ισχύει $\sqrt{E/\sigma_0} \cong 30$ και άρα υπολογίζεται $b_{em}=57t$, τιμή που βρίσκεται σε συμφωνία με το πεδίο τιμών του συνεργαζόμενου πλάτους ελάσματος στις ναυπηγικές κατασκευές.

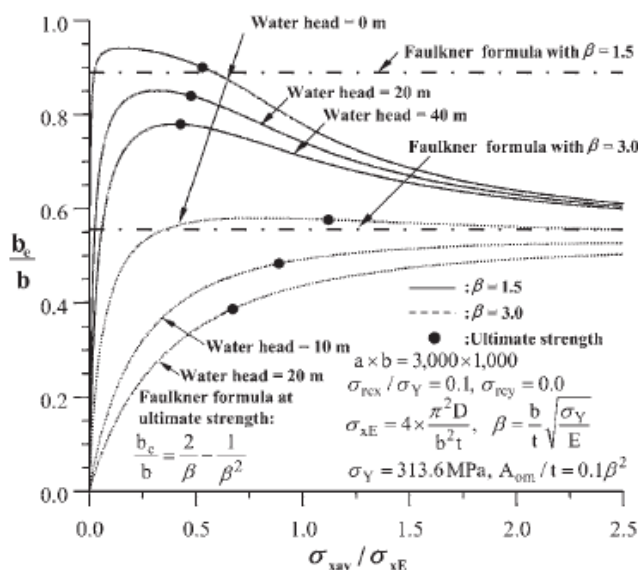
Η σχέση (49) ωστόσο υπερεκτιμά την αντοχή των συμπαγών ελασμάτων ($\beta < 3$), έτσι ο Faulkner μετά από μια σειρά πειραμάτων πρότεινε τη σχέση:

$$\frac{b_{em}}{b} = \begin{cases} 1.0 & \text{for } \beta < C_3 \\ \frac{C_1}{\beta} - \frac{C_2}{\beta^2} & \text{for } \beta \geq C_3 \end{cases} \quad (52)$$

Για απλά εδρασμένα ελάσματα οι τιμές των συντελεστών είναι $C_1=2, C_2=1, C_3=1$ ενώ για πακτωμένα ελάσματα $C_1=2.25, C_2=1.25, C_3=1.2$. Ακόμα στην περίπτωση του ανελαστικού λυγισμού όπου $\sigma_e < \sigma_0$:

$$\frac{b_e}{b} = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_e}} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\sigma_0}{\sigma_e} \quad \text{για} \quad 0.7 \leq \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \leq 1.0 \quad (53)$$

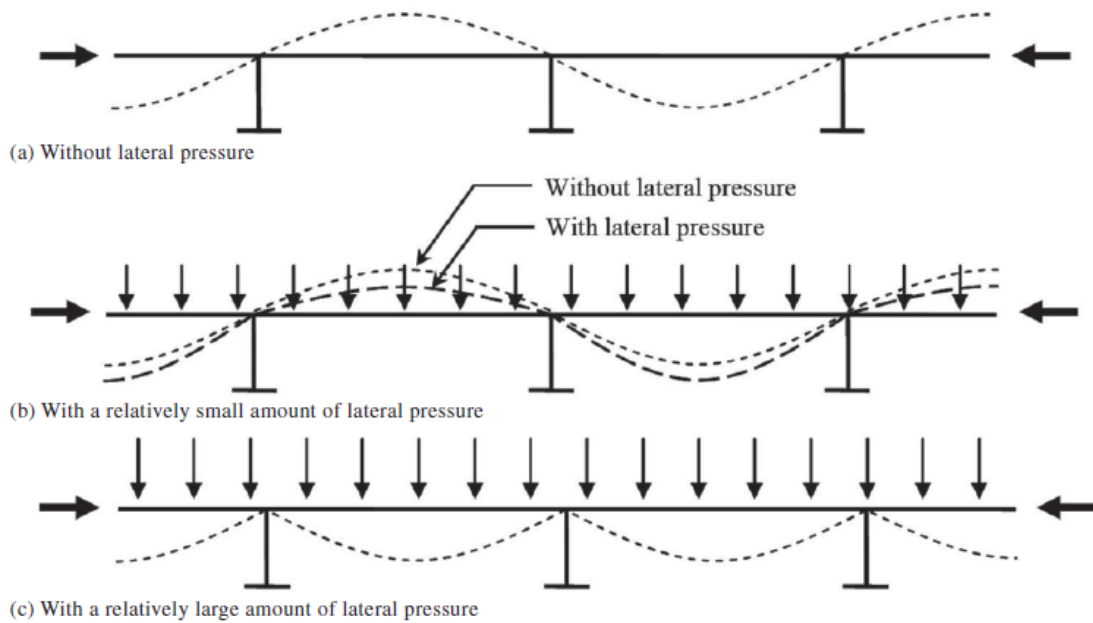
Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει το ισοδύναμο πλάτος ενός απλά εδρασμένου ελάσματος υπό μονοαξονική θλίψη, με ή χωρίς τη παρουσία πλευρικής φόρτισης. Με παρουσία της πλευρικής φόρτισης, φαίνεται πως το ισοδύναμο πλάτος αυξάνεται όσο αυξάνονται τα θλιπτικά φορτία, μέχρις ότου οι μεμβρανικές τάσεις που είναι αποτέλεσμα των φορτίων αυτών λάβουν σημαντική τιμή.



Σχήμα 20: Επίδραση της πλευρικής φόρτισης στο ισοδύναμο πλάτος [6]

2.3.3 Επίδραση της πλευρικής πίεσης στον λυγισμό

Στα πλοία και γενικότερα στις ναυπηγικές κατασκευές, οι πλευρικές φορτίσεις λόγω υδροστατικής πίεσης ή/και μετακίνησης φορτίου, συνήθως εφαρμόζονται πριν επιβληθούν εξωτερικά φορτία στο επίπεδο των ελασμάτων. Έτσι προκύπτει ένα αρχικό βέλος κάμψης λόγω των πλευρικών φορτίων. Συνεπώς, το φαινόμενο του λυγισμού σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να μην εμφανιστεί ξεκάθαρα, μέχρι το έλασμα να φτάσει τη μέγιστη αντοχή του λόγω μεγάλου πλευρικού φορτίου. Όσο αναφορά όμως τον ελαστικό λυγισμό, το έλασμα θα υποστεί λυγισμό ακόμα και με σχετικά μικρές τιμές του φορτίου αυτού. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι στα τετράγωνα ελάσματα δεν είναι εμφανής ο λυγισμός όταν ασκείται πλευρική φόρτιση, καθώς το έλασμα έχει ήδη μετατοπιστεί προτού ασκηθούν φορτία στο επίπεδό του. Η πλευρική φόρτιση γενικά οδηγεί σε αύξηση της αντοχής σε ελαστικό λυγισμό, καθώς απαιτείται περισσότερο έργο από τα εξωτερικά ομοεπίπεδα φορτία για να προσδιοριστεί η αρχική μετατοπισμένη μορφή του ελάσματος. Η αυξημένη αυτή αντοχή οφείλεται μερικώς και στους περιορισμούς περιστροφής στα όρια του ελάσματος, οι οποίοι περιορισμοί μάλιστα ενισχύονται με την αύξηση του πλευρικού φορτίου. Το σχήμα 21 παρουσιάζει το πώς η πλευρική φόρτιση επιδρά στην μορφή του ελάσματος, για μεγάλη τιμή της οποίας το έλασμα τείνει να μετατοπιστεί προς την ίδια κατεύθυνση, και συνεπώς να δημιουργηθούν μεγάλου βαθμού περιορισμοί περιστροφής στα άκρα.



Σχήμα 21: Σχηματική απεικόνιση της μορφής λυγισμού με και χωρίς πλευρικό φορτίο

Μια έκφραση για την αύξηση της αντοχής στη διαμήκη κατεύθυνση λόγω της πλευρικής φόρτισης δίνεται από τις σχέσεις [4]:

$$\sigma_{xE,1} = C_{px} k_x \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (54)$$

όπου:

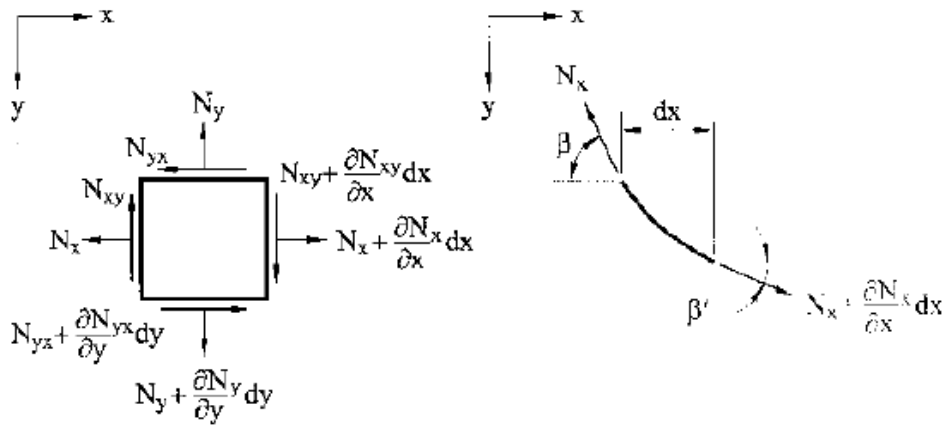
$$C_{px} = 1 + \frac{1}{576} \left(\frac{pb^4}{Et^4}\right)^{1.6} \quad \text{για } a/b \geq 2 \quad (55)$$

2.4 Απόκριση ορθογωνίων ελασμάτων υπό συνδυασμό ομοεπίπεδων και πλευρικών φορτίων

Μέχρι εδώ έχει παρουσιαστεί η θεωρία και οι βασικές εξισώσεις που προσδιορίζουν την απόκριση των μακρών ελασμάτων σε ομοεπίπεδα (θλιπτικά) φορτία και σε ομοιόμορφα καταναμημένα πλευρικά φορτία. Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιαστεί η μετατροπή της διαρμονικής εξίσωσης για την περίπτωση που στο έλασμα ασκούνται ταυτόχρονα ομοεπίπεδα θλιπτικά φορτία και ομοιόμορφα καταναμημένο πλευρικό φορτίο [1]. Διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

- Οι τάσεις στη μέση επιφάνεια είναι μικρές, και επομένως η επίδρασή τους στη κάμψη του ελάσματος είναι αμελητέα. Έτσι, η συνολική τάση μπορεί να αποκτηθεί προσθέτοντας τις τάσεις που προκύπτουν από την ομοεπίπεδη μετατόπιση και τη κάμψη.
- Οι τάσεις στη μέση επιφάνεια είναι σημαντικές και η επίδρασή τους πρέπει να υπολογιστεί στην απόκριση του ελάσματος.

Θα εξεταστεί παρακάτω η δεύτερη περίπτωση. Έστω ένα στοιχείο ελάσματος με διαστάσεις dx και dy στο οποίο δρουν οι ομοεπίπεδες δυνάμεις N_x , N_y και $N_{xy} = N_{yx}$. Στο σχήμα 22 εικονίζονται η κάτοψη και η πρόσοψη του στοιχείου. Η πλευρική φόρτιση $p(x,y)$ και οι ροπές που προκαλούνται φαίνονται στο σχήμα 9 που παρουσιάστηκε στο εδάφιο 2.2.1.



Σχήμα 22: Ισορροπία στοιχείου ελάσματος

Θεωρούμε τη ισορροπία του στοιχείου που βρίσκεται υπό την επίδραση των N_x , N_y και N_{xy} και $p(x,y)$. Εφαρμόζοντας $\Sigma F_x=0$ και από την ισορροπία των $N_x dy$ δυνάμεων στον άξονα x , έχουμε:

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy \cos \beta' - N_x dy \cos \beta$$

όπου $\beta' = \beta + d\beta = \beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx$. Εφόσον οι μετατοπίσεις είναι πολύ μικρές μπορεί να θεωρηθεί ότι για μικρή γωνία β ισχύει $\cos \beta \approx 1$ και όμοια $\cos \beta' \approx 1$. Η παραπάνω παράσταση επομένως γίνεται $\frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy$. Αν για το άθροισμα των $N_{xy} dx$, εκτελέσουμε την ίδια διεργασία η συνολική άθροιση των δυνάμεων στον άξονα x είναι:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

Η οποία είναι η εξίσωση (34) από τα προηγούμενα. Με όμοιο τρόπο στην ισορροπία του άξονα y αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (35) ισχύει και για αυτή τη περίπτωση:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

Για να αναλογιστούμε τις προβολές των δυνάμεων στον κάθετο άξονα z , πρέπει να λάβουμε υπόψη την πλευρική μετατόπιση του στοιχείου. Λόγω της κάμψης του στο επίπεδο xz , η συνιστώσες της N_x στον άξονα z ισούνται με:

$$-N_x dy \sin \beta + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy \sin \beta'$$

όπου όπως πριν, επειδή η γωνία β είναι μικρή ισχύει $\sin \beta \approx \beta \approx \frac{\partial w}{\partial x}$ και $\sin \beta' = \beta'$ με $\beta' \approx \beta + d\beta = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$. Άρα η ανώτερη παράσταση μετατρέπεται στην :

$$-N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) dy$$

Αγνοώντας τους όρους ανώτερης τάξης:

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (a)$$

Ομοίως οι προβολές των δυνάμεων N_y στον άξονα z :

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (b)$$

Θα υπολογιστούν τώρα οι z συνιστώσες των ομοεπίπεδων διατμητικών δυνάμεων N_{xy} στις πλευρές του στοιχείου που είναι παράλληλες στον άξονα x . Οι κλίσεις της μετατοπισμένης

επιφάνειας στη κατεύθυνση y των πλευρών αυτών, είναι ίσες με $\partial w/\partial y$ και $\partial w/\partial y + (\partial^2 w/\partial x \partial y) dx$ αντίστοιχα. Επομένως οι κάθετες συνιστώσες των N_{xy} είναι:

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy$$

Οι αντίστοιχες κάθετες συνιστώσες των N_{yx} , στις πλευρές παράλληλες στον y άξονα είναι:

$$N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy$$

Και προσθέτοντας τις δυο τελευταίες έχουμε:

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (c)$$

Προσθέτοντας τώρα τις παραστάσεις (a), (b) και (c) στο φορτίο $p dx dy$ λαμβάνεται η εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left(p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (56)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις εκφράσεις των ροπών όπως δόθηκαν στις εξισώσεις (19), (20) και (27) στη κάμψη των ελασμάτων, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (57)$$

η οποία παραπέμπει στη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων.

Θα παρουσιαστεί συνοπτικά η λύση της εξίσωσης για τη περίπτωση απλά εδρασμένου ελάσματος υπό ταυτόχρονη επίδραση ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου και θλιπτικών φορτίων. Με τη βοήθεια διπλών τριγωνομετρικών σειρών εκφράζουμε τη ομοιόμορφη πλευρική φόρτιση:

$$p = \frac{16p_0}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (a)$$

Εισάγοντας την έκφραση αυτή στην (57):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{16p_0}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (b)$$

Οι οριακές συνθήκες ικανοποιούνται με τη παρακάτω μορφή του βέλους κάμψης:

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (γ)$$

και αντικαθιστώντας τη στην (β) λαμβάνονται οι εκφράσεις του συντελεστή w_{mn} :

$$w_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^6 D mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + \frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2} \right]}, \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \quad (δ)$$

Επομένως η απόκριση του ελάσματος δίνεται από την εξίσωση:

$$w = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + \frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2} \right]} \quad (58)$$

Συγκρίνοντας με την σχέση (32) που δίνει την απόκριση του ελάσματος σε επιβολή μόνο πλευρικού φορτίου για οριακές συνθήκες απλής έδρασης, συμπεραίνεται ότι η μετατόπιση του ελάσματος έχει μια μικρή μείωση λόγω του όρου $N_x m^2 / \pi^2 D a^2$ που οφείλεται στο θλιπτικό φορτίο.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΧΑΛΑΡΩΣΗ

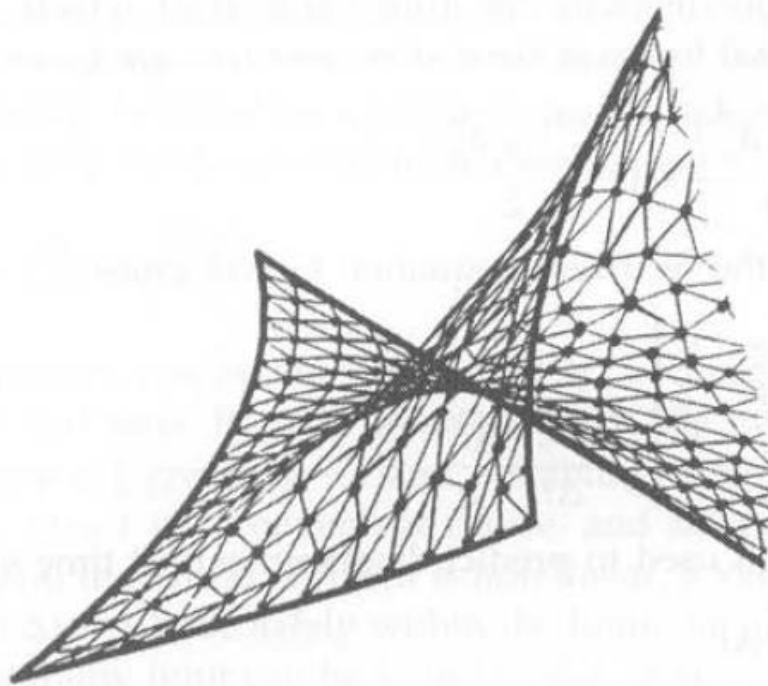
3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν οι βασικές μαθηματικές εξισώσεις που διέπουν την απόκριση των μακριών ελασμάτων που υποβάλλονται σε φορτία αυτής της φύσης. Για αυτή τη κατηγορία προβλημάτων όπως σημειώθηκε, δύσκολα αποκτώνται λύσεις κλειστής μορφής και έτσι γίνεται χρήση αριθμητικών μεθόδων. Στο πλαίσιο της εργασίας χρησιμοποιήθηκε για το σκοπό αυτό ο κώδικας *STATEL*, ο οποίος κάνοντας χρήση επαναληπτικής διαδικασίας επιλύει τις εξισώσεις von Karman για λεπτά ελαστικά ελάσματα. Η στατική ανάλυση που διεξάγεται πραγματοποιείται με την βοήθεια της μεθόδου της δυναμικής χαλάρωσης. Ο κώδικας αυτός έχει τη δυνατότητα να υπολογίσει την απόκριση ορθογωνίων ελασμάτων σε ομοεπίπεδα θλιπτικά φορτία, με ή χωρίς την ταυτόχρονη παρουσία πλευρικής φόρτισης, για διάφορες οριακές συνθήκες. Θα ακολουθήσει μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου της δυναμικής χαλάρωσης, και στη συνέχεια θα γίνει αναλυτική παρουσίαση των περιπτώσεων που εξετάστηκαν.

Η μέθοδος της δυναμικής χαλάρωσης στα αρχικά στάδια της ανάπτυξής της εκλήφθηκε ως μια αριθμητική μέθοδος πεπερασμένων διαφορών. Αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία που χρησιμοποιείται για επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε την περίοδο 1965-75, και έκτοτε χρησιμοποιείται για της ανάγκες μελέτης της μη-γραμμικής συμπεριφοράς των κατασκευών.

3.2 Γενικά στοιχεία της μεθόδου [7]

Η μέθοδος της δυναμικής χαλάρωσης κάνει χρήση των εξισώσεων ισορροπίας και συμβιβαστού, οι οποίες διατυπώνονται σε πεπερασμένη μορφή. Οι οριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος διατυπώνονται ως διαφορές, και εκφράζονται είτε ως σχέσεις μετατοπίσεων, είτε ως σχέσεις φορτίων κατά μήκος των άκρων της κατασκευής. Η μέθοδος βασίζεται σε ένα διακριτοποιημένο συνεχές (*discretized continuum*), στο οποίο η μάζα της κατασκευής θεωρείται ότι βρίσκεται συμπυκνωμένη σε συγκεκριμένα σημεία της επιφάνειας της (κόμβοι). Το σύστημα των συγκεντρωμένων μαζών ταλαντεύεται γύρω από μία θέση ισορροπίας, υπό την επίρεια εξωτερικών δυνάμεων. Με τη πάροδο του χρόνου, η ταλάντωση μειώνεται και τελικά μηδενίζεται λόγω της απόσβεσης. Η τελική μορφή του συστήματος των μαζών με το πέρας της ταλάντωσης, αντιπροσωπεύει τη λύση του εκάστοτε προβλήματος.



Σχήμα 23: Διακριτό Συνεχές

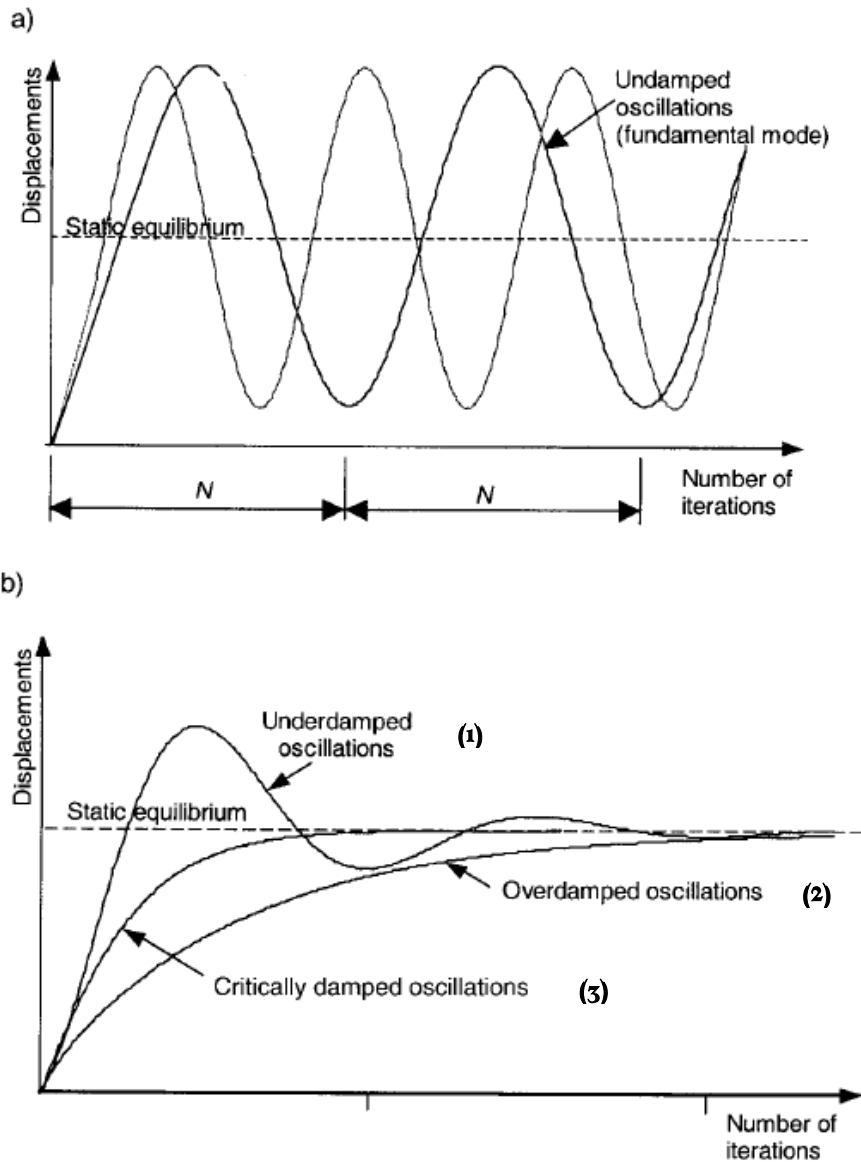
Για να γίνει χρήση της δυναμικής χαλάρωσης, δεν απαιτούνται αρχικές παραδοχές για το πεδίο των μετατοπίσεων, γεγονός που αποτελεί το βασικότερο πλεονέκτημα της μεθόδου. Λόγω της επαναληπτικής φύσης της μεθόδου, δε απαιτείται αντιστροφή του μητρώου ακαμψίας, που αποτελεί μια χρονοβόρα υπολογιστική διαδικασία όταν επιλέγονται άλλες μέθοδοι, όπως των πεπερασμένων στοιχείων. Εκεί όμως που υστερεί σε σημαντικό βαθμό η μέθοδος της δυναμικής χαλάρωσης έναντι αυτής των πεπερασμένων στοιχείων, είναι η έλλειψη γενικότητας του κώδικα, ενώ πολλές φορές είναι δύσκολο να γίνει χρήση καννάβου με μεταβαλλόμενες διαστάσεις. Το γεγονός αυτό καθιστά αδύνατο να αποκτηθεί λύση σε πεδία όπου η μεταβλητή αλλάζει ραγδαία. Αυτά τα δύο μειονεκτήματα συναντώνται γενικότερα σε όλες τις μεθόδους που βασίζονται σε πεπερασμένες διαφορές.

Η δυναμική χαλάρωση αρχικά χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των εξισώσεων παλιρροιακής κίνησης των θαλάσσιων κυμάτων. Η λύση αυτή έχει τη μορφή αρμονικής ταλάντωσης. Αν στη λύση αυτή ωστόσο προστεθεί ένας όρος απόσβεσης στην εξίσωση της κίνησης, αποδείχτηκε ότι οι λύσεις που αποκτώνται για τα αντίστοιχα στατικά προβλήματα είναι αριθμητικά ευσταθείς. Έτσι κατέστη δυνατό να αποκτηθούν λύσεις για ένα πολύ πιο ευρύ φάσμα προβλημάτων, με σχετική ευκολία. Μέχρι σήμερα έχουν αποκτηθεί λύσεις για εξισώσεις δοκών, πλακών, κελυφών και άλλων παρόμοιων κατασκευών, για διάφορες οριακές συνθήκες και φορτίσεις, στη γραμμική ελαστική και στην ελαστοπλαστική περιοχή.

3.3 Περιγραφή της μεθόδου

Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται η δυναμική απόκριση γραμμικού συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας. Στο 24a, η καμπύλες αντιστοιχούν σε ελεύθερη ταλάντωση και αποτελεί τη βάση των λύσεων σε δυναμικά προβλήματα. Στο 24b, οι καμπύλες αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις με απόσβεση. Πιο συγκεκριμένα η καμπύλη (1) αντιστοιχεί σε ταλάντωση με απόσβεση μικρότερη της κρίσιμης (*underdamped oscillations*) και η καμπύλη (2) αντιστοιχεί σε ταλάντωση με απόσβεση μεγαλύτερη της κρίσιμης (*overdamped oscillations*) και επομένως απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις (*iterations*). Η δυναμική χαλάρωση επιζητά την σταθερή λύση (*static equilibrium*) και γι αυτό γίνεται προσπάθεια επιλογής

κατάλληλου συντελεστή, ο οποίος θα οδηγήσει σε απόσβεση πολύ κοντά στη κρίσιμη. Η κρίσιμη αυτή απόσβεση αντιπροσωπεύεται στο σχήμα από τη καμπύλη (3).



Σχήμα 24: Ταλάντωση της μετατόπισης στη μέθοδο δυναμικής χαλάρωσης

Για τη λύση του προβλήματος απαιτείται η τιμή του συντελεστή απόσβεσης να είναι λίγο μικρότερη της κρίσιμης. Ο έλεγχος της διαφοράς του συντελεστή απόσβεσης που επιλέγεται από τον κρίσιμο, γίνεται μέσω των αποτελεσμάτων.

3.4 Μαθηματική διατύπωση της μεθόδου [8]

Θα παρουσιαστεί εδώ συνοπτικά ένα παράδειγμα διατύπωσης της λύσης κάνοντας χρήση της μεθόδου δυναμικής χαλάρωσης, για την εξίσωση των πλακών με μικρές μετατοπίσεις. Για το σκοπό αυτό κάνουμε χρήση της εξίσωσης (25) από το δεύτερο κεφάλαιο:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0$$

Θεωρούμε ότι η πλάκα φέρει δυναμικό φορτίο. Το δεξιό σκέλος της εξίσωσης στη περίπτωση αυτή δεν είναι μηδενικό, αλλά ισούται με $p(t)$, που είναι το φορτίο ως συνάρτηση του χρόνου. Σε κάθε κόμβο της πλάκας ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης:

$$\rho \ddot{w} + c \dot{w} = p \quad \text{ή} \quad \rho \frac{d\dot{w}}{dt} + c \dot{w} = p(t) \quad (59)$$

Θα γίνει χρήση πεπερασμένων διαφορών στο χρόνο και εισαγωγή του συντελεστή απόσβεσης k σε αδιάστατη μορφή, δηλαδή $k=c\Delta t/\rho$. Επομένως:

$$\rho \left[\frac{\Delta \dot{w}}{\Delta t} + \frac{k \dot{w}}{\Delta t} \right] = p \quad (60)$$

Οι μετατοπίσεις ορίζονται σε χρόνους $t, t+\Delta t, t+2\Delta t$ σε αντίθεση με τις ταχύτητες που ορίζονται σε χρόνους $t+\Delta t/2, t+3\Delta t/2, t+5\Delta t/2$. Άρα:

$$\Delta \dot{w} = \dot{w}_{r+1} - \dot{w}_r \quad (61)$$

$$\dot{w} = (\dot{w}_{r+1} + \dot{w}_r)/2 \quad (62)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις εξισώσεις αυτές με την εξίσωση ισορροπίας λαμβάνεται:

$$\dot{w}_{r+1} = \frac{1-k/2}{1+k/2} \dot{w}_r + \frac{\Delta t}{\rho(1+k/2)} p \quad (63)$$

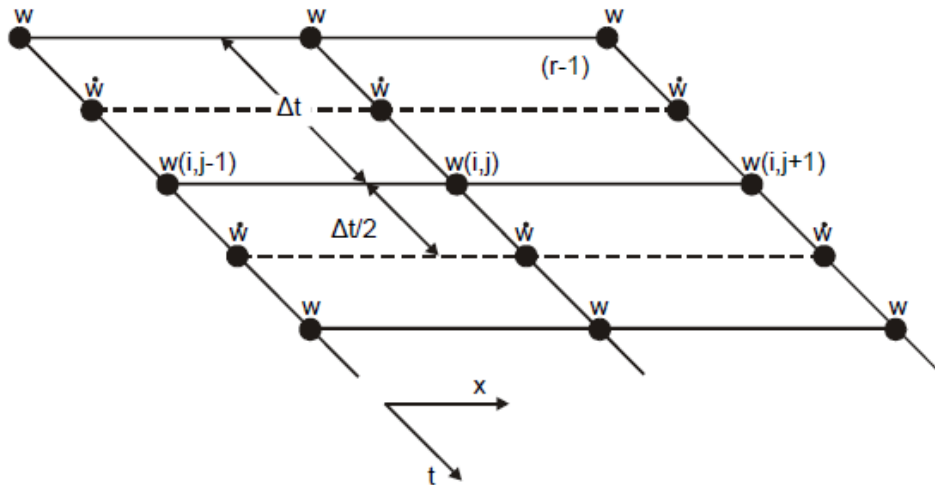
Όπου το φορτίο υπολογίζονται κάνοντας χρήση των μετατοπίσεων στο χρόνο. Ολοκληρώνοντας τώρα τις ταχύτητες αποκτώνται οι μετατοπίσεις σε χρόνο $t+\Delta t$:

$$w_{r+1} = \dot{w}_r + \dot{w}_{r+1} \Delta t \quad (64)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την (63) επί Δt λαμβάνεται:

$$\Delta w_{r+1} = \frac{1-k/2}{1+k/2} \Delta w_r + \frac{(\Delta t)^2}{\rho(1+k/2)} p \quad (65)$$

Η σχέση (64) εκφράζει τον αλγόριθμο της δυναμικής χαλάρωσης με απόσβεση.



Σχήμα 25: Πλέγμα πεπερασμένων Διαφορών

3.5 Ευστάθεια και σύγκλιση

Οι σχέσεις που εκφράζουν τις ταχύτητες και τις μετατοπίσεις στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι ταυτόσημες. Υπάρχει επομένως η δυνατότητα να αποκτηθούν τιμές για τις σταθερές ευστάθειας και σύγκλισης ($\Delta t, \rho$ και k), εξισώνοντας τους συντελεστές των δύο σχέσεων. Για το σκοπό αυτό θα γίνει χρήση της δευτεροτάξιας διαδικασίας του Richardson που εκφράζεται από τη σχέση:

$$\Delta w_{r+1} = \left[\frac{\sqrt{\lambda_{min}} - \sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}} + \sqrt{\lambda_{max}}} \right]^2 \Delta w_r + \left[\frac{2}{\sqrt{\lambda_{min}} + \sqrt{\lambda_{max}}} \right]^2 P \quad (66)$$

όπου λ_{max} και λ_{min} είναι οι μέγιστες και ελάχιστες ιδιοτιμές του μητρώου ακαμψίας της κατασκευής. Εξισώνοντας λοιπόν τους συντελεστές των (63) και (64):

$$\frac{(\Delta t)^2}{\rho} = \frac{4}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \quad \text{και} \quad k = \frac{4\sqrt{\lambda_{min}\lambda_{max}}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \quad (67)$$

Επειδή στα περισσότερα προβλήματα ισχύει $\lambda_{max} \gg \lambda_{min}$ έχουμε:

$$\frac{(\Delta t)^2}{\rho} = \frac{4}{b_G} \quad (68)$$

όπου b_G είναι το άνω όριο για τη τιμή της μεγαλύτερης ιδιοτιμής όπως υπολογίζεται από το θεώρημα του Gershgorin. Η λύση παρουσιάζεται αναφορικά στην παρακάτω εξίσωση, καθώς η ανάλυση της ξεφεύγει από το σκοπό της εργασίας:

$$|b| \leq b_G = \max \sum_{j=1}^n |S_{ij}| = 16D \left[\frac{1}{\Delta x^4} + \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta y^4} \right] \quad (69)$$

Το παραπάνω όριο b_G μεταβάλλεται στο χώρο και στο χρόνο, και για να προσδιοριστεί η τιμή του λόγου $\Delta t^2/\rho$, υπάρχουν δύο τρόποι.

- Χρησιμοποιείται η πραγματική τιμή μάζας ανά μονάδα επιφάνειας και το διάστημα του χρόνου εκφράζεται ως συνάρτηση του ορίου b_G .
- Χρησιμοποιείται νοητό διάστημα χρόνου, για παράδειγμα ίσο με τη μονάδα, και το μέγεθος πλασματικής πυκνότητας (μάζα ανά μονάδα επιφάνειας) θεωρείται ως κριτήριο ευστάθειας.

Η τελευταία μέθοδος απαιτεί μικρότερο αριθμό επαναλήψεων και επομένως χρησιμοποιείται κυρίως σε στατικά προβλήματα. Τα όρια ευστάθειας με τον τρόπο αυτό (εάν $\Delta t=1$) δίνονται:

$$\rho = \frac{4}{b_G} \quad \text{και} \quad \Delta t = \sqrt{\frac{4\rho}{b_G}} \quad (70)$$

Η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται από τη τιμή του συντελεστή απόσβεσης. Στις περιπτώσεις που χρησιμοποιείται πλασματική πυκνότητα, ο συντελεστής απόσβεσης παίρνει τιμές θετικές τιμές μικρότερες της μονάδος. Η ακριβή τιμή του εξαρτάται κυρίως από το αν η εξίσωση εκφράζει ομοεπίπεδη ή όχι μετατόπιση, αλλά και από τα χαρακτηριστικά της κατασκευής, όπως η γεωμετρία οι οριακές συνθήκες και η διακριτοποίηση. Στις εξισώσεις ελασμάτων οι υπάρχουν οι ομοεπίπεδες μετατοπίσεις u , v και η κάθετη μετατόπιση w . Οι αντίστοιχοι συντελεστές απόσβεσης k_u , k_v , είναι κυμαίνονται μεταξύ 0.15-0.25, ενώ ο k_w δε συνηθίζεται να υπερβαίνει τη τιμή 0.10.

Όσο αναφορά τώρα τον τρόπο επιβολής φορτίου, για έλασμα που υποβάλλεται σε θλιπτικό φορτίο, ορίζονται οι μετατοπίσεις των πλευρών σε κάθε στάδιο φόρτισης. Η μέθοδος αυτή ακολουθείται καθώς η ανάλυση που διεξάγεται στη περίπτωση αυτή είναι μη γραμμική, που σημαίνει ότι η κατανομή των τάσεων στις θλιβόμενες πλευρές είναι άγνωστη. Ορίζοντας τις επιβαλλόμενες μετατοπίσεις, η μέθοδος δυναμικής χαλάρωσης αποδίδει τις αντίστοιχες κατανομές των τάσεων.

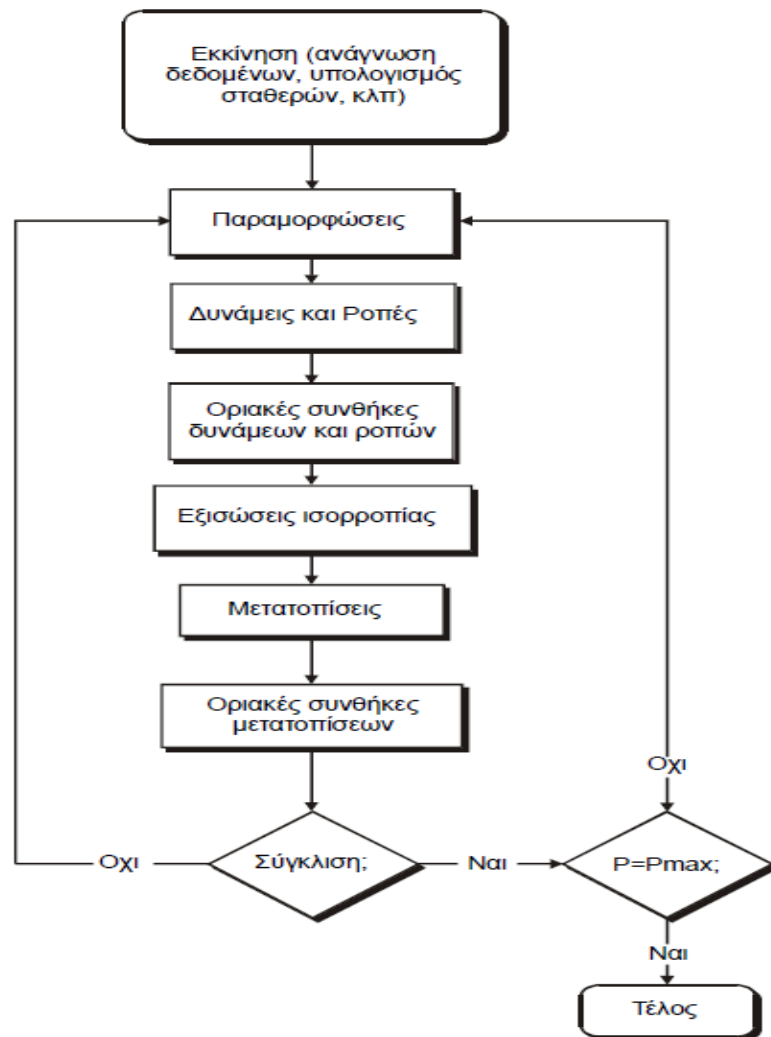
Η εντατική κατάσταση του ελάσματος αντιστοιχεί αρχικά σε ένα συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης φόρτισης. Με την αύξηση των μετατοπίσεων των πλευρών που βρίσκονται σε θλίψη, το έλασμα υπόκειται σε ταλαντώσεις που θα αποσβεστούν, προσδιορίζοντας έτσι μια νέα εντατική κατάσταση. Έτσι η ανάλυση επεκτείνεται σε όλο το πεδίο συμπεριφοράς, μέχρι και τη κατάρρευση του ελάσματος. Για τις περιπτώσεις που το φορτίο είναι πλευρικό και ομοιόμορφα κατανεμημένο, αυτό εισάγεται απευθείας στη διαδικασία από τις εξισώσεις ισορροπίας. Με την επιβολή μιας μετατόπισης σε ένα κόμβο της κατασκευής, σε κάθε επανάληψη επιλύονται οι εξισώσεις ισορροπίας και συμβιβαστού, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα, σε όλους τους κόμβους. Ισχύει επομένως μια

δεδομένη εντατική δυναμική κατάσταση και στον συγκεκριμένο κόμβο δεν επικρατεί στατική ισορροπία.

Στο σχήμα 26 παρατίθεται το διάγραμμα ροής των υπολογισμών που γίνονται κατά τη διαδικασία της δυναμικής χαλάρωσης. Εφόσον έχουν υπολογιστεί οι μετατοπίσεις, υπολογίζονται στη συνέχεια οι παραμορφώσεις. Οι παραμορφώσεις στους κόμβους που αρχικά είχαν μηδενικές μετατοπίσεις γίνονται τώρα διάφορες του μηδενός. Για ελάσματα με μικρές μετατοπίσεις, η σχέση που δίνει τη παραμόρφωση γίνεται σε πεπερασμένη μορφή:

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x \rightarrow \varepsilon_{x(i,j)} = (u_{(i+1,j)} - u_{(i-1,j)}) / 2\Delta x$$

Αντίστοιχες εξισώσεις υπάρχουν και για τις παραμορφώσεις ε_y και γ_{xy} .



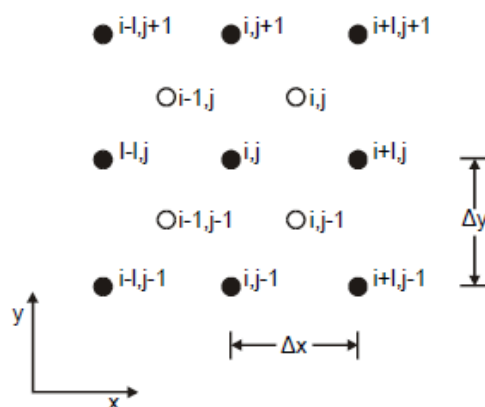
Σχήμα 26: Διάγραμμα ροής υπολογισμών δυναμικής χαλάρωσης

Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα ροής, μετά τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι δυνάμεις και οι ροπές ανά μονάδα μήκους από τις εξισώσεις συμβιβαστού και επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες. Στη συνέχεια η εξίσωση ισορροπίας διαμορφώνεται σε πεπερασμένη μορφή και επιλύεται με βάση τις σχέσεις (63) και (64). Μέσω της τελευταίας δίνονται οι μετατοπίσεις των κόμβων και τέλος εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες των μετατοπίσεων. Όπως έχει αναφερθεί, απαιτείται ένας αριθμός επαναλήψεων μέχρι να αποκτηθεί η λύση της εξίσωσης ισορροπίας. Η ίδια διαδικασία χαλάρωσης ακολουθείται για κάθε στάδιο της προσάυξης του φορτίου.

3.6 Επιλογή κατάλληλου πλέγματος

Για την περίπτωση προβλημάτων που αφορούν λεπτότοιχα ελάσματα, έχει βρεθεί ότι η χρήση γραμμικών σχέσεων για τις πεπερασμένες διαφορές αποδίδει επαρκή ακρίβεια εφόσον συνδυαστεί με ικανό αριθμό κόμβων. Η πυκνότητα των κόμβων γενικά εξαρτάται από τον τρόπο αστοχίας του ελάσματος. Αν για παράδειγμα το έλασμα αστοχεί με δύο ημικύματα κατά το μήκος του, και θεωρώντας ότι χρειάζονται 4 κόμβοι για να περιγραφεί επαρκώς ένα ημικύμα, ο συνολικός αριθμός κόμβων θα είναι 8. Αύξηση της πυκνότητας των κόμβων συνεπάγεται και αύξηση της ακρίβειας της λύσης. Η αναπαράσταση προβλημάτων σε δύο διαστάσεις γίνεται εύκολα με τη βοήθεια πεπερασμένων διαφορών και υπάρχουν πολλές τεχνικές στη διεθνή βιβλιογραφία για κατάλληλη επιλογή πλέγματος.

Εξετάζοντας τη διαρμονική εξίσωση ορθογωνίων ελασμάτων, παρατηρείται ότι αν χρησιμοποιηθούν μέσες διαφορές (μέθοδος που χαρακτηρίζεται από χρήση συμμετρικά διατεταγμένων σημείων), η διαφορική μορφή του πρώτου και του τρίτου όρου της εξίσωσης έχει σφάλμα τάξης Δx^2 . Το αντίστοιχο σφάλμα του δεύτερου όρου όμως είναι τάξης $(2\Delta x)(2\Delta y)$. Οι όροι αυτοί υπολογίζονται στους μαύρους κόμβους που απεικονίζει το σχήμα 27. Κάνοντας τώρα χρήση πρόσθετων κόμβων σε ενδιάμεσα σημεία για τη διαφοροποίηση του δεύτερου όρου, το σφάλμα γίνεται ίδιας τάξης με αυτό του πρώτου και του τρίτου όρου. Τα ενδιάμεσα αυτά σημεία αντιπροσωπεύονται από τους λευκούς κόμβους του ίδιου σχήματος.



Σχήμα 27: Χρήση σύνθετου πλέγματος

Για να υπολογιστεί λοιπόν η διαφοροποιημένη μορφή του όρου $\partial^2 M_{xy} / \partial x \partial y$ στους κόμβους του πρώτου πλέγματος, πρέπει να γίνει χρήση των στρεπτικών ροπών M_{xy} στους κόμβους του δεύτερου πλέγματος. Οι τιμές αυτές λαμβάνονται από τις αντίστοιχες τιμές της παρακάτω σχέσης στους λευκούς κόμβους.

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (71)$$

3.7 Αξιολόγηση της μεθόδου δυναμικής χαλάρωσης [7]

Η μέθοδος της δυναμικής χαλάρωσης κάνει χρήση της αποκαλούμενης συγκεντρωμένης ακαμψίας (*lumped stiffness*), δηλαδή της ακαμψίας που επιμερίζεται σε κάθε κόμβο της κατασκευής. Το αριθμητικό μοντέλο της, έχει διαμορφωθεί με την υπόθεση ότι η κατάσταση στατικής ισορροπίας είναι αποτέλεσμα μιας ψευδο-δυναμικής κατάστασης. Μάλιστα μερικές

φορές, λόγω αυτού του γεγονότος, υπάρχει σύγχυση με την αρχή του D' Alembert. Η μόνη ωστόσο ομοιότητα που μοιράζεται η μέθοδος με αυτήν, είναι η στατική μορφή που φαίνεται να έχουν οι δυναμικές εξισώσεις κίνησης. Η βασική διαφορά τους όμως έγκειται στο γεγονός ότι ο αλγόριθμος δεν χρησιμοποιεί δυνάμεις αδράνειας ως εξωτερικά φορτία που ασκούνται στη κατασκευή.

Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου αποτελεί ο μικρός αριθμός των αριθμητικών διαδικασιών που απαιτούνται σε κάθε δεδομένη στιγμή, καθώς οι μαθηματικοί υπολογισμοί αφορούν έναν κόμβο τη φορά και όχι όλους τους κόμβους ταυτόχρονα. Αυτού του είδους η προσέγγιση συνεισφέρει στην ευστάθεια και στην ακρίβεια της αριθμητικής λύσης, καθώς ελαχιστοποιεί ταυτόχρονα τα σφάλματα που προκύπτουν από συνεχείς στρογγυλοποιήσεις. Επιπλέον η δυναμική χαλάρωση διακρίνεται από υψηλή απόδοση, όσο αναφορά το συνολικό χρόνο που απαιτείται για σύγκλιση από έναν επεξεργαστή.

Συνολικά, η δυναμική χαλάρωση είναι μια σταθερή μέθοδος, ικανή να δώσει λύσεις σε μη γραμμικά προβλήματα, ακόμα και αν αυτά τα προβλήματα δε διέπονται από σταθερή μάζα ή ακαμψία. Ωστόσο, για να υπάρχει γρήγορη σύγκλιση και σταθερότητα στις επαναλήψεις, συνίσταται η διαφορά της ακαμψίας από κόμβο σε κόμβο στην επιφάνεια της κατασκευής να έχει μικρή τιμή.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Περιγραφή Περιπτώσεων

Αρχικά θα γίνει μια περιγραφή της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας. Όπως έχει αναφερθεί και στην αρχή του παρόντος κειμένου, κύριος σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι να διερευνηθεί η επίδραση της υδροστατικής πίεσης στη συμπεριφορά ορθογωνίων ελασμάτων, στα οποία ασκείται ταυτόχρονα ομοεπίπεδο θλιπτικό φορτίο. Η συνθήκες αυτές ανταποκρίνονται σε μεγάλο βαθμό στις συνθήκες λειτουργίας των ναυπηγικών ελασμάτων που βρίσκονται στον εξωτερικό πυθμένα ενός πλοίου. Έτσι η υδροστατική πίεση που εξετάζεται, κυμαίνεται στα μεγέθη που συναντώνται στα πλοία επιφάνειας, μέχρι δηλαδή τη τιμή που ανταποκρίνεται σε βάθος 20 μέτρων.

Αποκτώντας πρόσβαση στο κείμενο (script) του κώδικα STATEL που είναι γραμμένος στη γλώσσα προγραμματισμού Fortran, αρχική προτεραιότητα αποτελούσε η δημιουργία ενός εκτελέσιμου αρχείου του κώδικα, προκειμένου να ξεκινήσει η μελέτη των περιπτώσεων. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν δυο προγράμματα, το *Microsoft Visual Studio 2010* και το *Intel Parallel Studio XE 2015*. Το πρώτο αποτελεί ένα εύχρηστο περιβάλλον προγραμματισμού για πολλές σύγχρονες γλώσσες. Για να αναγνωρισθεί η συγκεκριμένη έκδοση της γλώσσας του κώδικα χρειάστηκε η συνεργασία των δύο προγραμμάτων κατά την εισαγωγή του κειμένου στο χώρο εργασίας. Από τη στιγμή εκείνη και ύστερη, στη διαδικασία εξαγωγής του εκτελέσιμου αρχείου δεν αντιμετωπίστηκαν σοβαρά προβλήματα, καθώς ο κώδικας δεν περιείχε σφάλματα.

Οι περιπτώσεις που θα εξεταστούν επιλέχθηκαν με κριτήριο να είναι κοντά στα πραγματικά ελάσματα που χρησιμοποιούνται, κυρίως στον εξωτερικό πυθμένα ενός πλοίου. Η δύο από τις τρεις βασικές διαστάσεις, το πλάτος και το πάχος, επιλέχθηκαν $b=0.8m$ και $t=0.012m$ έτσι ώστε να ισχύει $30 \leq b/t \leq 80$ όπως έχει αναφερθεί στη θεωρία για τα ναυπηγικά ελάσματα. Εφόσον εξετάζονται 3 διαφορετικοί λόγοι πλευρών, όπου $a/b=1, 2.5, 4$ το μήκος του ελάσματος θα είναι αντίστοιχο του κάθε λόγου πλευρών για σταθερό πλάτος b .

Τα ελάσματα που θα εξεταστούν θα έχουν αρχικές μετατοπίσεις αντίστοιχες των ναυπηγικών, για τις οποίες ισχύει από τον εμπειρικό τύπο $w_0=b/100$ στο κέντρο του ελάσματος. Για λόγους σύγκρισης θα εξεταστεί και η περίπτωση του αρχικά επίπεδου ελάσματος, για το οποίο επιλέχθηκε συμβατικά μια πολύ μικρή τιμή αρχικής μετατόπισης $w_0=0.0002m$. Η μορφή των αρχικών ατελειών υπολογίζεται για κάθε έλασμα από τον τύπο που βρίσκεται στη θεωρία: $a/b = \sqrt{m(m+1)}$, όπου m ο αριθμός ημικυμάτων κατά το διάμηκες. Κατά το εγκάρσιο υπάρχει 1 ημικύμα σε κάθε περίπτωση.

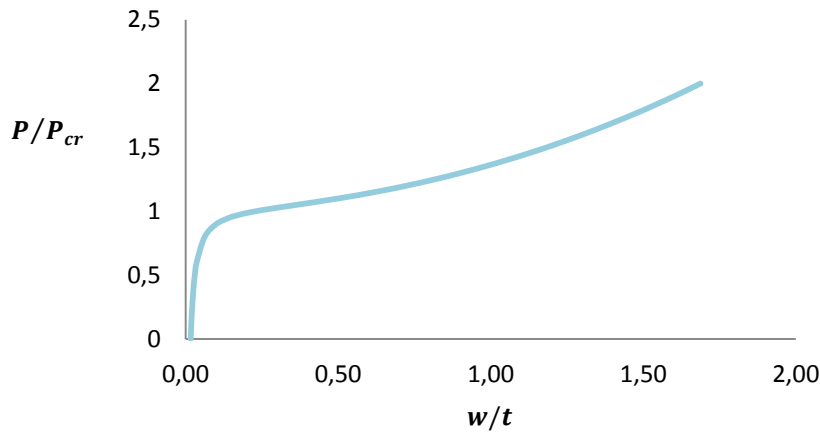
Το εκάστοτε έλασμα θα βρίσκεται υπό μονοαξονική θλίψη, στην οποία θα προστίθεται ανά περίπτωση πλευρικό φορτίο ίσο με την υδροστατική πίεση σε βάθος 10, 15 και 20 μέτρων, δηλαδή 0.10, 0.15 και 0.20 MPa. Σε μερικές περιπτώσεις θα εξεταστεί και η επιβολή αντίθετου πλευρικού φορτίου τιμής -0.20 MPa.

Τέλος οι οριακές συνθήκες σε όλες τις περιπτώσεις επιλέχθηκαν να είναι πάκτωση και στις τέσσερις πλευρές του ελάσματος.

4.2 Τετράγωνα ελάσματα. Λόγος πλευρών $a/b=1.0$

4.2.1 Κατανομές βέλους κάμψης

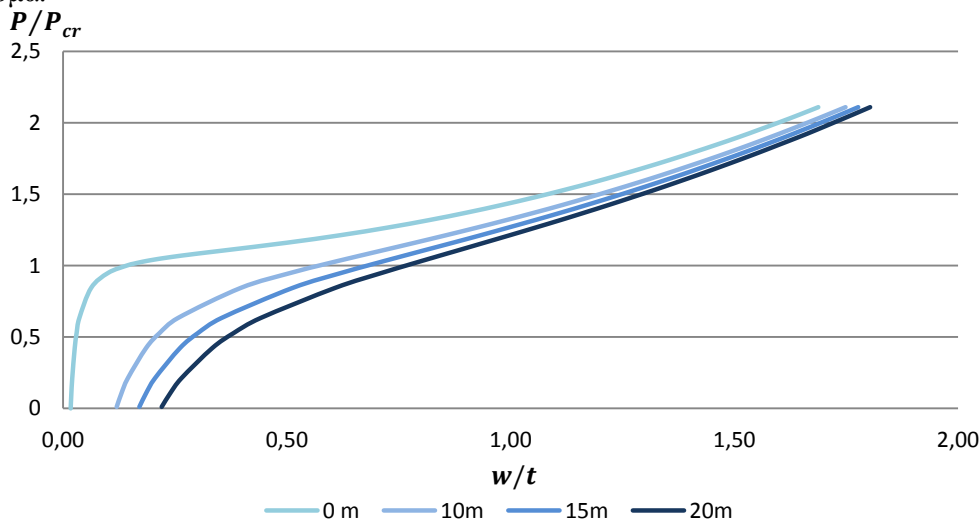
Εξετάζεται αρχικά η συμπεριφορά αρχικά επίπεδου τετράγωνου ελάσματος (χωρίς αρχικές ατέλειες) υπό θλιπτικό μόνο φορτίο. Το αποτέλεσμα που έδωσε ο κώδικας για το βέλος κάμψης του κεντρικού σημείου του ελάσματος παρατίθεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 28: Βέλος κάμψης τετράγωνου ελάσματος σε μονοαξονική θλίψη

Φαίνεται ότι για φορτία μικρότερα του κρίσιμου, η μετατόπιση κάθετα στην επιφάνεια του ελάσματος παραμένει σταθερή. Όταν η εξωτερική τάση φτάνει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού παρατηρείται ραγδαία αύξηση του βέλους κάμψης για πολύ μικρές προσαυξήσεις στην εξωτερική τάση. Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως, η ανάλυση που εκτελεί ο κώδικας είναι μη γραμμική ελαστική, και επομένως δεν υπολογίζεται το σημείο κατάρρευσης. Για το λόγο αυτό η καμπύλη του βέλους κάμψης στη μεταλυγισμική περιοχή, δεν αλλάζει πρόσημο, όπως θα ήταν αναμενόμενο βάσει αντίστοιχων διαγραμμάτων που έχουν εξαχθεί πειραματικά.

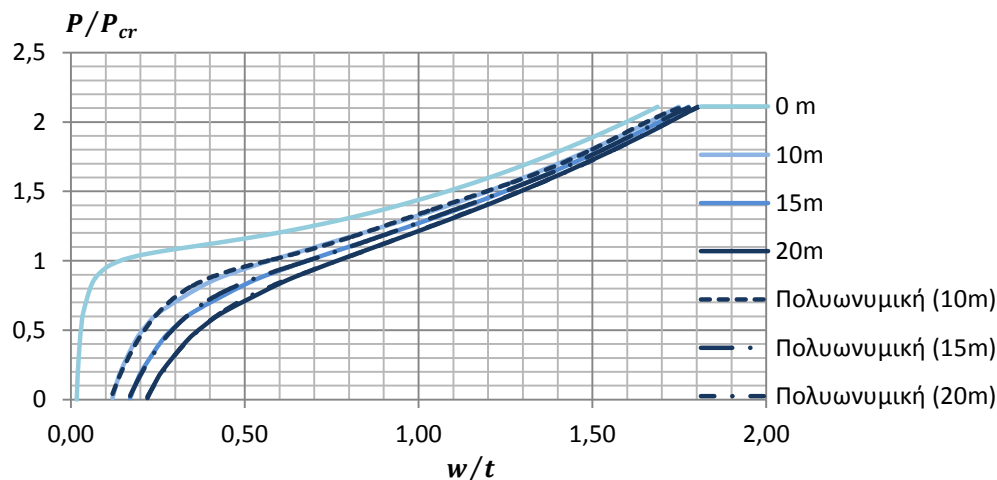
Το διάγραμμα λοιπόν, είναι πολύ κοντά στο αντίστοιχο διάγραμμα που προβλέπει η θεωρία για τέλεια ελάσματα υπό θλιπτικά φορτία στην ελαστική περιοχή. Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η επίδραση της υδροστατικής πίεσης, για το ίδιο επίπεδο τετράγωνο έλασμα.



Σχήμα 29: Επίδραση της υδροστατικής πίεσης στο φορτίο λυγισμού

Παρατηρείται πλέον αλλαγή στην απόκριση του ελάσματος λόγω της επίδρασης της υδροστατικής πίεσης. Συγκεκριμένα, η εφαρμογή του κατανεμημένου φορτίου στα πρώτα στάδια της φόρτισης, έχει επιφέρει ένα σημαντικότερο αρχικό βέλος κάμψης. Από τα αποτελέσματα του κώδικα φαίνεται ότι το βέλος κάμψης στα πρώτα στάδια της φόρτισης είναι 7 φορές μεγαλύτερο για υδροστατική πίεση που αντιστοιχεί σε βάθος 10 μέτρων, 10 φορές μεγαλύτερο σε βάθος 15m και 13 φορές μεγαλύτερο για βάθος 20m. Με την προσαύξηση του θλιπτικού φορτίου παρατηρείται ότι η ραγδαία αύξηση του βέλους κάμψης που αναμένεται κατά το φαινόμενο του λυγισμού συμβαίνει σε φορτίο μικρότερο του κρίσιμου που είχε υπολογιστεί νωρίτερα για μηδενικό πλευρικό φορτίο. Επιπλέον, η μείωση της ακαμψίας του ελάσματος είναι ομαλότερη προλυγισμικά, όσο μεγαλώνει η τιμή της υδροστατικής πίεσης, καθιστώντας πιο δυσδιάκριτο το σημείο λυγισμού, σε σχέση με την περίπτωση του ελάσματος που υποβάλλεται μόνο σε θλιπτικό φορτίο.

Μελετώντας το διάγραμμα αυτό, από την απόκριση του βέλους κάμψης για τις διάφορες τιμές της πλευρικής πίεσης, φαίνεται ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μειώνεται με την αύξηση της πίεσης αυτής. Εφόσον στη διεθνή βιβλιογραφία δεν υπάρχει κάποιος αποδεδειγμένος τύπος αριθμητικού υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού υπό παρόμοιες συνθήκες φόρτισης, για να εκτιμηθεί αυτή τη μείωση αυτή γίνεται η μια σύμβαση. Καθώς από τη θεωρία, γραφικά, στο φορτίο λυγισμού παρατηρείται μεγάλη μείωση της ακαμψίας, η προσέγγιση θα γίνει υπολογίζοντας την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης προλυγισμικά. Για να επιτευχθεί αυτό με καλή ακρίβεια απαιτούνται σημεία της καμπύλης που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Η χρήση του κώδικα εδώ δε θεωρείται αποδοτική για αυτό το σκοπό. Αντίθετα με τη χρήση μαθηματικών εργαλείων και του excel, οι καμπύλες βέλους κάμψης για τις διάφορες τιμές της υδροστατικής πίεσης προσεγγίστηκαν ικανοποιητικά από πολυωνμικές παραστάσεις 6^{ου} βαθμού, όπως φαίνεται στο σχήμα 30.



Σχήμα 30: Περιγραφή καμπυλών υδροστατικής πίεσης με πολυωνμικές

Για λόγους πληρότητας δίνονται και οι αριθμητικές παραστάσεις όπως υπολογίστηκαν:

$$F(x) = \begin{cases} -2.584x^6 + 16.348x^5 - 41.305x^4 + 53.192x^3 - 36.537x^2 + 13.335x - 1.113, & 10m \\ -1.673x^6 + 11.134x^5 - 29.894x^4 + 41.486x^3 - 31.289x^2 + 12.964x - 1.454, & 15m \\ -1.181x^6 + 8.221x^5 - 23.25x^4 + 34.337x^3 - 27.92x^2 + 12.761x - 1.751, & 20m \end{cases}$$

Οι αποκλίσεις από τις καμπύλες του κώδικα είναι αμελητέες. Υπολογίζουμε τώρα την κλίση της εφαπτομένης της κάθε καμπύλης στη προλυγισμική περιοχή. Το όριο που συμβατικά θεωρείται ως σημείο λυγισμού είναι οι 45° για την καμπύλη των 10 μέτρων, 50° για των 15 μέτρων και 55° για των 20 μέτρων. Η διαφορά στα όρια για κάθε τιμή της

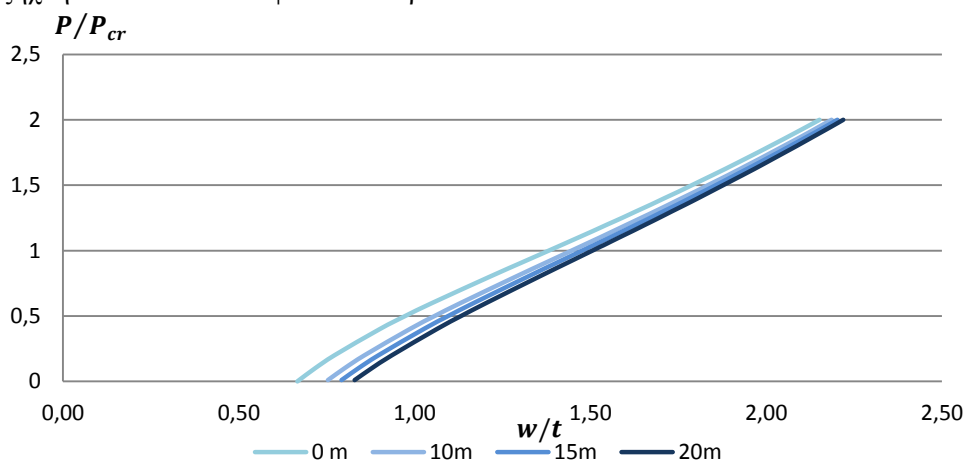
υδροστατικής πίεσης, έγινε στη προσπάθεια να ληφθεί υπόψη ότι στα μεγαλύτερα βάθη οι η ακαμψία μειώνεται όλο και πιο ομαλά. Για παράδειγμα στη καμπύλη των 20 μέτρων κλίση εφαπτομένης ίση με 45 μοίρες υπολογίζεται για $P/P_{cr}=0.8$, σημείο που γραφικά φαίνεται να βρίσκεται πολύ μετά της σχετικά ραγδαίας αύξησης του βέλους κάμψης. Με τα συμβατικά όρια λοιπόν υπολογίστηκαν τα νέα κρίσιμα φορτία:

Πίνακας 3: Μείωση του κρίσιμου φορτίου για τις τιμές πλευρικής φόρτισης

Υδροστατική Πίεση (MPa)	Μείωση (% P/P_{cr})	Μείωση (MPa)	Νέα τάση λυγισμού $\sigma_{x,cr}$ (MPa)
0	-	-	374.64
0.10	12.21	45.75	328.88
0.15	26.39	98.88	275.76
0.20	38.46	144.09	230.55

Σε αντίθεση τώρα με τη προλυγισμική περιοχή, που παρουσιάζει σημαντικές διαφορές ανάλογα με την ύπαρξη και το μέγεθος της υδροστατικής πίεσης, η απόκριση του βέλους κάμψης στη μεταλυγισμική περιοχή φαίνεται να μην επηρεάζεται ιδιαίτερα από τις συνθήκες πλευρικής φόρτισης. Με εξαίρεση τις αυξημένες τιμές του αδιάστατου βέλους κάμψης (w/t) που είναι αναμενόμενες λόγω της αυξημένης υδροστατικής πίεσης, οι καμπύλες για τα διάφορα βάθη νερού συγκλίνουν μεταλυγισμικά για μεγάλες τιμές του P/P_{cr} . Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της σύγκλισης είναι ότι η αύξηση του τελικού βέλους κάμψης για μεγάλες τιμές του P/P_{cr} κυμαίνεται πλέον στα 3-6% για τις διάφορες τιμές της υδροστατικής πίεσης.

Θα εξεταστεί η συμπεριφορά του βέλους κάμψης υπό τις ίδιες συνθήκες φόρτισης, στη περιοχή όμως των μεγάλων μετατοπίσεων. Συγκεκριμένα, αυτή τη φορά το τετράγωνο έλασμα έχει μια αρχική μετατόπιση ίση με $w_0=b/100=0.008m$. Το αντίστοιχο διάγραμμα που εξήχθη από τον κώδικα φαίνεται παρακάτω:

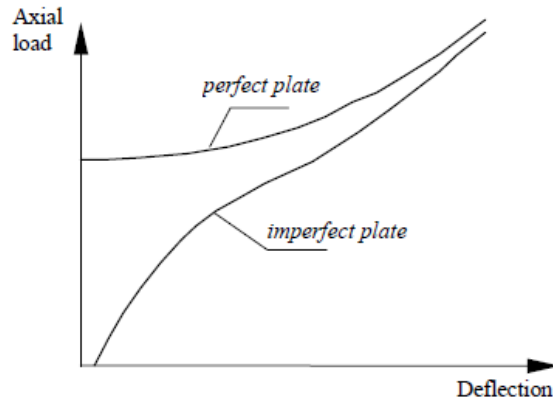


Σχήμα 31: Απόκριση βέλους κάμψης σε έλασμα με μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις

Εδώ πλέον δε διακρίνονται σαφείς διαφορές στη συμπεριφορά του βέλους κάμψης, καθώς η μείωση της ακαμψίας είναι αρκετά πιο ομαλή σε σχέση με την περίπτωση του επίπεδου ελάσματος. Η απόκριση του βέλους κάμψης προσεγγίζει την θεωρητική συμπεριφορά σε θλίψη ενός ελάσματος με αρχικές ατέλειες όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα 32.

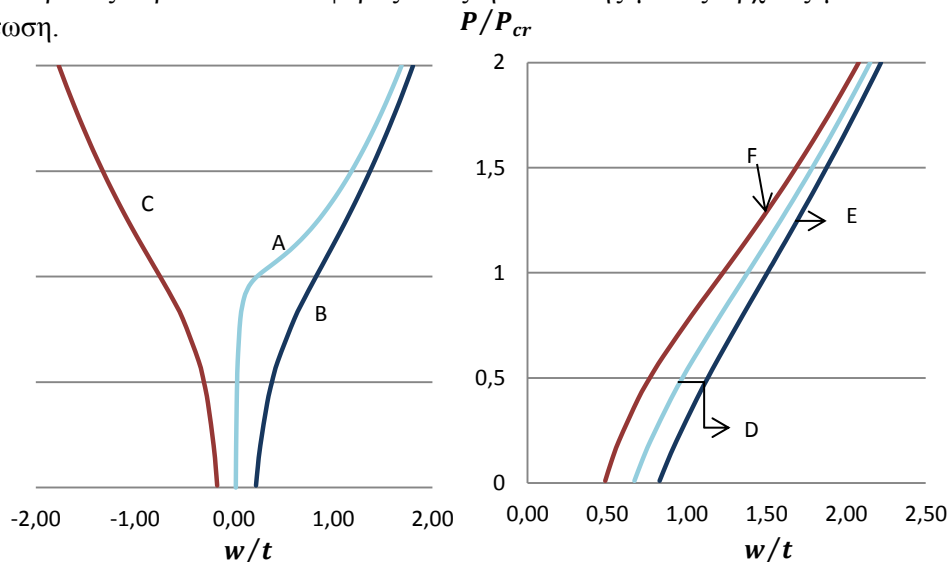
Η διάκριση της προλυγισμικής από τη μεταλυγισμική περιοχή δεν είναι δυνατή εξετάζοντας μόνο το σχήμα 31. Προκειμένου να διακριθούν οι δύο περιοχές, θεωρούμε ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για κάθε περίπτωση φόρτισης κυμαίνεται προσεγγιστικά στα ίδια επίπεδα με τη περίπτωση του αρχικά επίπεδου ελάσματος. Λαμβάνοντας αυτή τη θεώρηση υπόψη, η απόκριση του βέλους κάμψης τετράγωνου ελάσματος με αρχικές ατέλειες φαίνεται να μην επηρεάζεται ιδιαίτερα από την επιβολή πλευρικής φόρτισης τόσο προλυγισμικά, όσο

και μεταλυγισμικά. Λόγω των ήδη μεγάλων αρχικών μετατοπίσεων, ήταν αναμενόμενο η επιβολή της υδροστατικής πίεσης να έχει σημαντικά μικρότερη επιρροή στη προσαύξηση του βέλους κάμψης στα πρώτα στάδια της φόρτισης, σε σχέση με το αρχικά επίπεδο έλασμα. Η προσαύξηση αυτή υπολογίστηκε σε 12%, 17% και 23% του w/t για τα 3 βάθη νερού. Αντίστοιχα, για μεγάλες τιμές του P/P_{cr} , η υδροστατική πίεση συνεισφέρει στη προσαύξηση του βέλους κάμψης σε ποσοστά μικρότερα του 4% του λόγου w/t .



Σχήμα 32: Θεωρητική απόκριση ελασμάτων

Στο επόμενο διάγραμμα συγκρίνεται η επίδραση της πλευρικής πίεσης, όταν αυτή ασκείται αντίρροπα από τη μορφή των αρχικών μετατοπίσεων. Για τη συγκεκριμένη μελέτη εξετάστηκαν 4 περιπτώσεις. Οι καμπύλες A και D περιγράφουν τη συμπεριφορά του κεντρικού σημείου τετράγωνου ελάσματος υπό καθαρά θλιπτική φόρτιση. Στις υπόλοιπες καμπύλες έχει υπολογιστεί η επίδραση της πλευρικής πίεσης τιμής ίσης με την υδροστατική πίεση σε βάθος νερού 20m και φοράς ίδιας ή αντίθετης με τις αρχικές μετατοπίσεις ανά περίπτωση.



Σχήμα 33: Σύγκριση βέλους κάμψης για επιβολή πλευρικού φορτίου αντίθετης φοράς

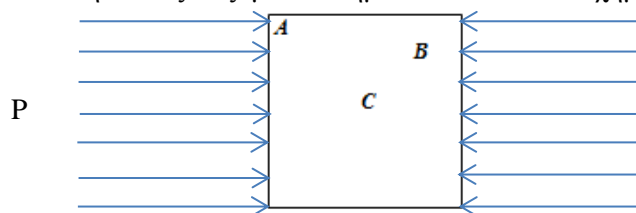
Οι καμπύλες B και C αντιπροσωπεύουν την κάθετη μετατόπιση του κεντρικού σημείου αρχικά επίπεδου τετράγωνου ελάσματος, όταν ασκείται πλευρική πίεση στη κοιλότητα των αρχικών μετατοπίσεων (θετική όψη) (B) και στην κυρτότητά τους (C). Η φορά του βέλους κάμψης σε ένα αρχικά επίπεδο έλασμα εξαρτάται απόλυτα από τη φορά που ασκείται η υδροστατική πίεση. Παρατηρείται ότι για το αρχικά επίπεδο έλασμα, η συμπεριφορά του βέλους κάμψης για πλευρική πίεση ίση με την υδροστατική πίεση που αντιστοιχεί σε βάθος

20m, είναι σχεδόν συμμετρική ως προς τον άξονα y . Υπάρχουν ωστόσο ορατές διαφορές στο ρυθμό μείωσης της ακαμψίας στη περιοχή του λυγισμού.

Οι καμπύλες F και E περιγράφουν τις αντίστοιχες συνθήκες φόρτισης για τις μεγάλες μετατοπίσεις ($w_0=b/100$). Συγκεκριμένα η E αντιστοιχεί σε πλευρική φόρτιση στην κοιλότητα του αρχικού βέλους κάμψης και η F σε πλευρική φόρτιση αντίθετης φοράς. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα, η φορά με την οποία ασκείται η πλευρική φόρτιση δεν επηρεάζει τη φορά του τελικού βέλους κάμψης στις μεγάλες μετατοπίσεις, σε αντίθεση με τη περίπτωση του αρχικά επίπεδου ελάσματος. Οι δύο περιπτώσεις έχουν όμοια συμπεριφορά, με βασική διαφοροποίηση τις μικρότερες τιμές του λόγου w/t και τον ελάχιστο μικρότερο ρυθμό μείωσης της ακαμψίας προλυγισμικά. Τα δύο αυτά φαινόμενα οφείλονται στο γεγονός ότι η πλευρική πίεση πλέον αντιτίθεται στη φορά του βέλους κάμψης, όπως αυτό εμφανίζεται λόγω της θλιπτικής φόρτισης.

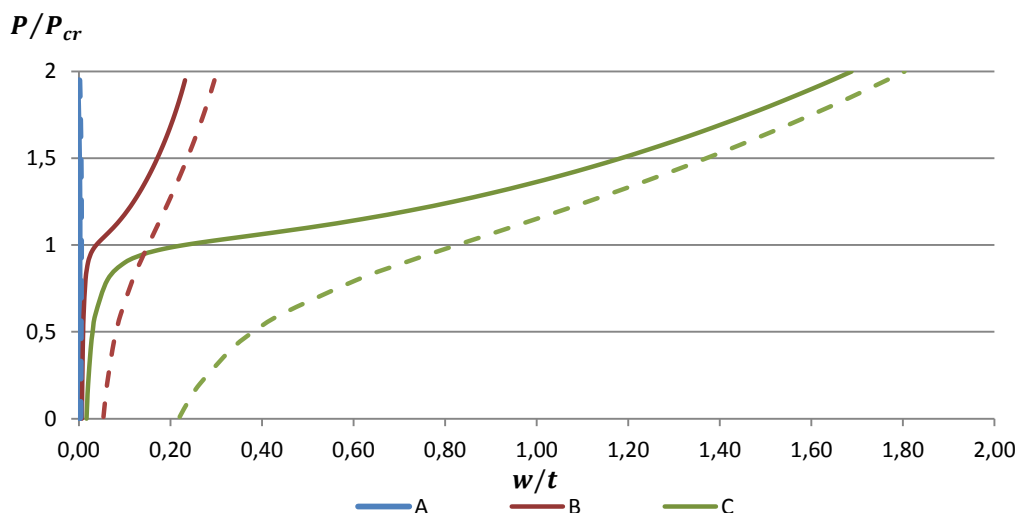
Η διαφορά στο ρυθμό μείωσης της ακαμψίας μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η πλευρική πίεση αντίθετης φοράς, οδηγεί σε ένα οριακά μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Η πλευρική πίεση εδώ φαίνεται να λειτουργεί σαν μια επιπλέον στήριξη ενάντια στη λυγισμό του ελάσματος. Ο λόγος w/t για αρχικές ατέλειες αντίθετης φοράς με τη πλευρική πίεση έχει μειωθεί κατά 40% συγκριτικά με τη φόρτιση ίδιας φοράς. Με την αύξηση των θλιπτικών φορτίων η διαφορά αυτή μειώνεται δραστικά σε 18% για $P/P_{cr}=1$, ενώ για υψηλότερες τιμές του λόγου αυτού η διαφορά πέφτει κάτω από 10%.

Τα διαγράμματα που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα αφορούν τη συμπεριφορά ενός σημείου του ελάσματος, και συγκεκριμένα του σημείου που βρίσκεται στο γεωμετρικό του κέντρο. Το σημείο αυτό προτιμήθηκε καθώς σε ένα τετράγωνο έλασμα υπό τις συνθήκες φόρτισης που εξετάζονται είναι αναμενόμενο όπως προβλέπει και η θεωρία να έχει τη μέγιστη μετατόπιση. Η συμπεριφορά των υπόλοιπων σημείων του ελάσματος βρέθηκε ότι εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη θέση τους. Τα κοντινότερα στο κέντρο σημεία έχουν την συμπεριφορά που περιγράφηκε μέχρι τώρα με αναλογικά μικρότερες τιμές του βέλους κάμψης. Όσο προχωράμε προς τα όρια του ελάσματος, το βέλος κάμψης μειώνεται δραστικά. Η συμπεριφορά αυτή βρέθηκε ότι επαληθεύεται σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, ανεξαρτήτως αν το έλασμα είναι αρχικά επίπεδο ή αν του ασκείται πλευρική πίεση. Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η συμπεριφορά των σημείων A, B σε σχέση με τη συμπεριφορά του κεντρικού σημείου C . Για κάθε σημείο δίνονται δύο καμπύλες που αντιστοιχούν σε καθαρά θλιπτική φόρτιση (συνεχής) και επιπλέον επιβολή υδροστατικής πίεσης (διακεκομμένη). Η θέση των εξεταζόμενων σημείων δίνεται στο σχήμα 34.



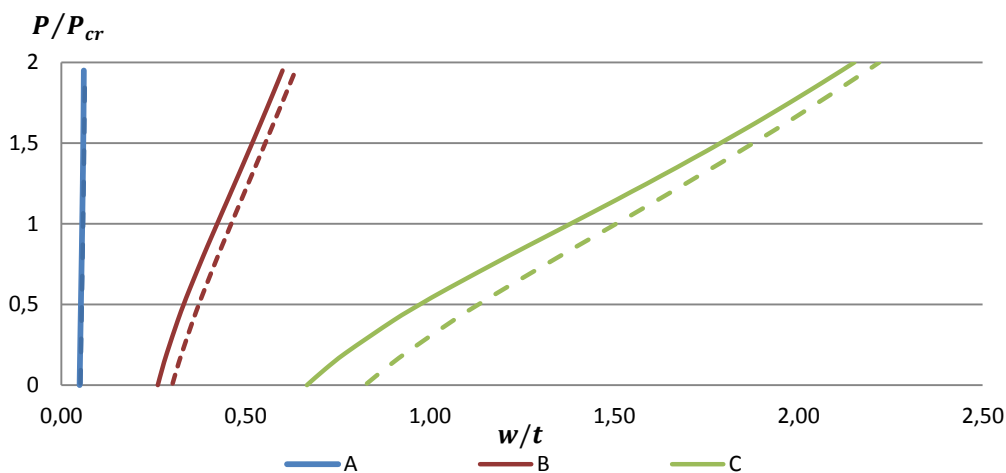
Σχήμα 34: Θέση εξεταζόμενων σημείων στο έλασμα

Στο διάγραμμα του σχήματος 35 φαίνεται πως ένα τυχαίο σημείο στο έλασμα ακολουθεί τη γενική συμπεριφορά του κεντρικού σημείου, με κοντινές τιμές του λόγου w/t προλυγισμικά. Αφού συμβεί ο λυγισμός, το βέλος κάμψης του τυχαίου σημείου B έχει σαφώς μικρότερη αύξηση από αυτό του C , όπως περιγράφεται και από τη θεωρία. Το σημείο A που βρίσκεται πολύ κοντά στα όρια του ελάσματος, και επομένως πολύ κοντά στη πάκτωση, φαίνεται ότι διατηρεί ένα σταθερό, σχεδόν μηδενικό βέλος κάμψης, σε όλη τη διάρκεια της φόρτισης, χωρίς να έχει εμφανείς διαφορές υπό την επίδραση της πλευρικής πίεσης.



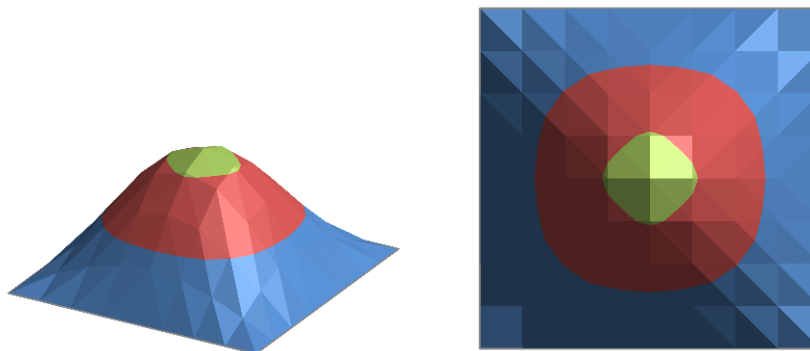
Σχήμα 35: Απόκριση 3 σημείων (μικρές αρχικές μετατοπίσεις)

Η μελέτη και άλλων τυχαίων σημείων στην επιφάνεια του ελάσματος από τα αποτελέσματα του κώδικα, έδειξε ότι οι καμπύλες των σημείων A και C αποτελούν τις δύο ακραίες μορφές συμπεριφοράς. Τα υπόλοιπα σημεία έχουν ενδιάμεση συμπεριφορά, όπως αυτή του σημείου B, που εξαρτάται από τη θέση τους. Όμοια συμπεριφορά παρατηρείται και στις μεγάλες μετατοπίσεις, όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 36.



Σχήμα 36: Απόκριση 3 σημείων (μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις)

Η συμπεριφορά του κάθε σημείου λοιπόν εξαρτάται από την απόσταση του από τα άκρα ή αντίστοιχα από το κέντρο. Το γεγονός αυτό είναι λογικό, δεδομένης της απόλυτης συμμετρίας του προβλήματος, όσο αναφορά τις οριακές συνθήκες (πάκτωση σε όλα τα σύνορα), τον μοναδιαίο λόγο πλευρών, τις συνθήκες φόρτισης και την μορφή των αρχικών ατελειών (1 ημικόμα). Έτσι το βέλος κάμψης του τετράγωνου ελάσματος έχει την γενική μορφή του σχήματος 37. Το βέλος κάμψης είναι μηδενικό στα σύνορα του ελάσματος λόγω της πάκτωσης, και η μέγιστη μετατόπιση παρατηρείται πάντα στο κέντρο, για όλες τις εξεταζόμενες συνθήκες φόρτισης, καθώς δεν παρατηρήθηκε αύξηση του αριθμού ημικυμάτων σε καμία περίπτωση. Ο αριθμός, το μέγεθος και το εύρος τιμών των περιοχών που απεικονίζονται εξαρτώνται προφανώς από την διακριτοποίηση που θα κάνει ο μελετητής, και την ακρίβεια που θέλει να πετύχει.



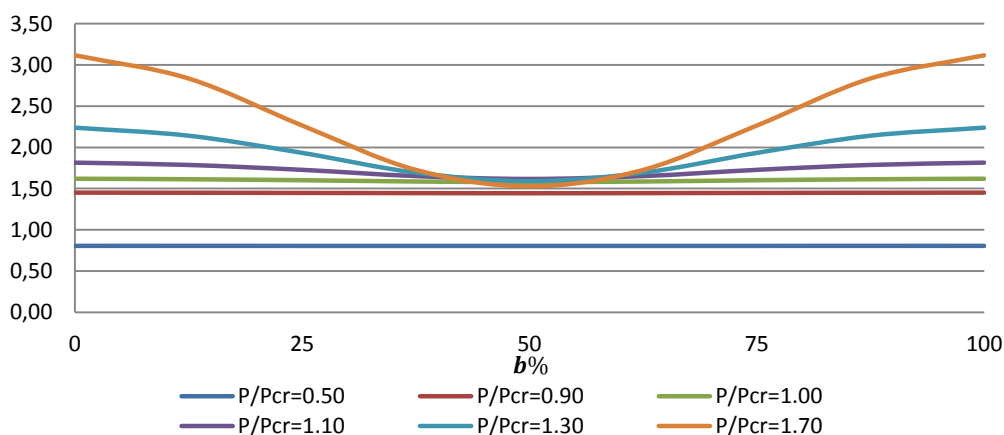
Σχήμα 37: Προοπτική και κάτοψη μετατοπισμένου ελάσματος

4.2.2 Κατανομές θλιπτικών τάσεων

Η μελέτη πάνω στα τετράγωνα ελάσματα συνεχίζεται με τα διαγράμματα που αποκτήθηκαν από τον κώδικα *STATEL* για τις θλιπτικές και καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται στο έλασμα κατά τη διάρκεια της φόρτισης. Η θεωρία ελασμάτων που αναπτύχθηκε στο 2^ο κεφάλαιο, προβλέπει ότι οι αξονικές τάσεις που εμφανίζονται σε ένα έλασμα το οποίο υπόκειται σε θλιπτική φόρτιση, έχουν σταθερή τιμή σε μια εγκάρσια τομή του ελάσματος προλυγισμικά, ενώ το φορτίο διαχέεται προς τα άκρα μεταλυγισμικά. Η αριθμητική προσομοίωση του κώδικα βρέθηκε ότι επαληθεύει το φαινόμενο αυτό στις μικρές μετατοπίσεις των τετράγωνων ελασμάτων. Για τη παρουσίαση των αποτελεσμάτων επιλέχθηκε η κεντρική εγκάρσια τομή του εξεταζόμενου ελάσματος.

Το διάγραμμα του σχήματος 38 παρουσιάζει αυτή ακριβώς τη συμπεριφορά. Οι αξονικές τάσεις (που υπολογίζονται από το τύπο $\sigma_{x,comp} = N_x/t$) που εμφανίζονται στην εγκάρσια τομή λόγω της θλίψης του ελάσματος έχουν σταθερή τιμή κατά το μήκος της τομής σε όλη τη προλυγισμική περιοχή. Όταν η θλιπτική φόρτιση P ξεπεράσει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr} , οι αξονικές τάσεις ελαχιστοποιούνται στο κέντρο της τομής και μεγιστοποιούνται στα άκρα της. Παρατηρείται δηλαδή διάχυση του φορτίου που παραλαμβάνει το έλασμα από το κέντρο προς τα διαμήκη σύνορά του.

$$\sigma_{x,comp}/\sigma_0$$

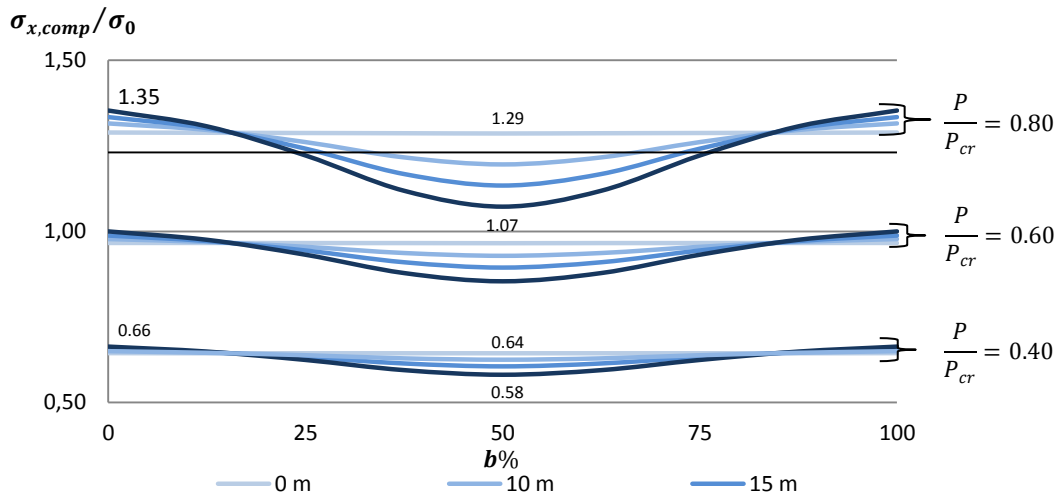


Σχήμα 38: Εγκάρσια κεντρική τομή υπό θλιπτικό φορτίο

Το κέντρο του ελάσματος παραλαμβάνει μια μέγιστη τιμή φορτίου για εξωτερική φόρτιση ίση με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, και για μεγαλύτερες τιμές του λόγου P/P_{cr} το επιπλέον φορτίο παραλαμβάνεται από τα άκρα του ελάσματος.

Τα διαγράμματα βέλους κάμψης έδειξαν ότι η επιβολή πλευρικής πίεσης θα μειώσει αισθητά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Η πρόταση αυτή επαληθεύεται και στα αποτελέσματα

που εξάχθηκαν από τον κώδικα για τις θλιπτικές τάσεις. Συγκεκριμένα όταν στη θλιπτική φόρτιση του ελάσματος προστεθεί υδροστατική πίεση, ανάλογα με τη τιμή της, το φορτίο που παραλαμβάνεται από το έλασμα ξεκινάει να διαχέεται προς τα άκρα για λόγο $P/P_{cr} < 1$.

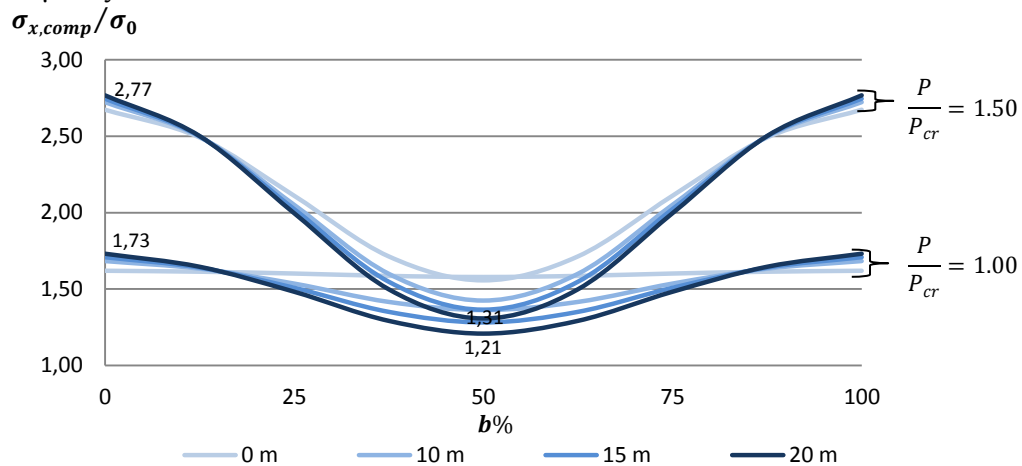


Σχήμα 39: Θλιπτικές τάσεις στη προλυγισμική περιοχή

Στο παραπάνω διάγραμμα φαίνεται πως η διάχυση του παραλαμβανόμενου φορτίου από το κέντρο του ελάσματος προς τα σύνορά του ξεκινάει ήδη από αρκετά χαμηλές τιμές του λόγου για τις υψηλότερες τιμές υδροστατικής πίεσης. Όπως φαίνεται και από τα επιλεγμένα σημεία στο διάγραμμα, σε βάθος νερού 20 μέτρων, η διαφορά του φορτίου που παραλαμβάνεται στα άκρα σε σχέση με το κέντρο για $P/P_{cr}=0.40$ είναι 8% του λόγου $\sigma_{x,comp}/\sigma_0$, ενώ για διπλάσιο φορτίο εξωτερικής αξονικής φόρτισης, η διαφορά αυτή ανέρχεται σε 28%. Για μικρότερα βάθη νερού η διαφορά αυτή μειώνεται. Για παράδειγμα εξετάζοντας τη κατάσταση φόρτισης για την οποία ισχύει $P/P_{cr}=0.80$ σε βάθος 10m, η αντίστοιχη διαφορά του φορτίου λόγω διάχυσης είναι μόλις 12%, υποδιπλάσια δηλαδή από αυτήν για βάθος 20m.

Επαληθεύεται συνεπώς ότι η πλευρική πίεση οδηγεί σε ένα νέο μειωμένο κρίσιμο φορτίο λυγισμού, το οποίο εξαρτάται από την τιμή της. Η προλυγισμική περιοχή του τετράγωνου ελάσματος επομένως είναι μικρότερη για αυξημένες τιμές της υδροστατικής πίεσης.

Για μεγαλύτερες τιμές της εξωτερικής αξονικής δύναμης, το έλασμα εισέρχεται πλέον στην μεταλυγισμική περιοχή. Εδώ η κατανομή των θλιπτικών τάσεων κατά το εγκάρσιο διακρίνεται από ακόμα πιο έντονη διάχυση του παραλαμβανόμενου φορτίου προς τα σύνορα του ελάσματος.

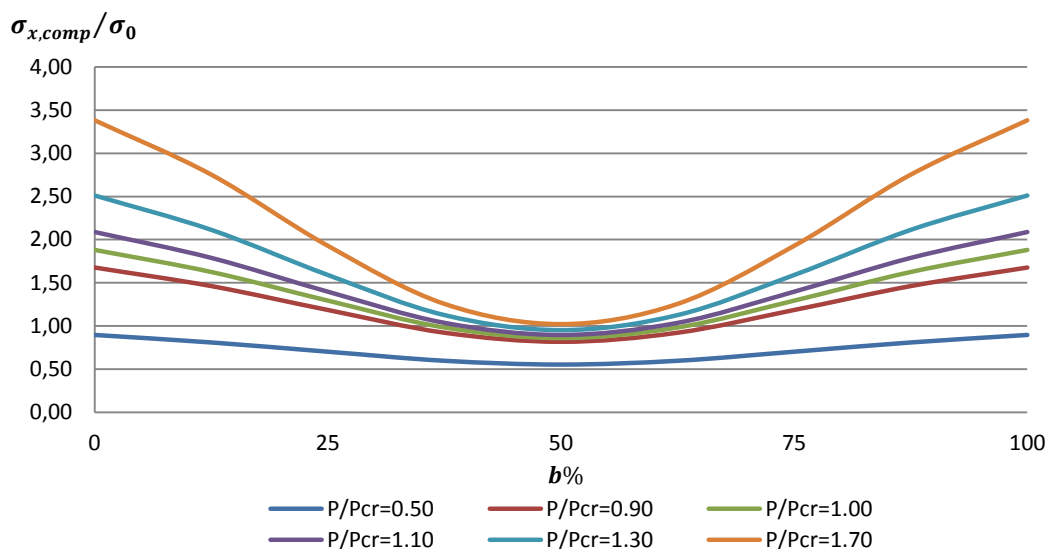


Σχήμα 40: Θλιπτικές τάσεις στη μεταλυγισμική περιοχή

Η τάση στο κέντρο της τομής για μεγάλες τιμές πλευρικής πίεσης και αξονικής θλίψης παρουσιάζει μια πολύ οριακή αύξηση. Συγκεκριμένα, οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε καθαρά αξονικό φορτίο (0 m), έχουν αμελητέα διαφορά στη τιμή της τάσης και τέμνονται στο κέντρο της τομής του ελάσματος για αξονική φόρτιση ίση με P_{cr} και $1.5P_{cr}$. Αυτό δεν ισχύει όταν ασκείται ταυτόχρονα πλευρική πίεση, με τη μεγαλύτερη διαφορά να εμφανίζεται όπως αναμένεται από τα μέχρι τώρα αποτελέσματα σε βάθος 20 μέτρων, η οποία αγγίζει το 10% του λόγου της αναπτυσσόμενης θλιπτικής τάσης προς το όριο διαρροής του υλικού. Αντίθετα το φορτίο που παραλαμβάνεται από τα άκρα του ελάσματος είναι πλέον πολύ μεγαλύτερο στη μεταλυγισμική περιοχή όπως φαίνεται γραφικά, ανεξαρτήτως της πλευρικής πίεσης. Οι καμπύλες για τις διάφορες τιμές πλευρικής πίεσης συνεχίζουν να συγκλίνουν στα άκρα. Καθώς όμως οι τάσεις στο κέντρο παραμένουν οριακά σταθερές, η διαφορά των τάσεων στα σημεία της τομής είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Σε σύγκριση με τη προλυγισμική περιοχή, φαίνεται πως μεταλυγισμικά υπάρχει ραγδαία αύξηση του φορτίου που παραλαμβάνεται από τα σύνορα του ελάσματος, ενώ μικρή προσαύξηση παρατηρείται στη περιοχή του κέντρου, κυρίως για μεγάλες τιμές της υδροστατικής πίεσης. Χαρακτηριστικά υπολογίστηκε πως σε βάθος 20 μέτρων, διπλασιασμός του αξονικού εξωτερικού φορτίου προλυγισμικά επιφέρει έως 50% αύξηση των θλιπτικών τάσεων σ_x κατά το εγκάρσιο, ενώ μεταλυγισμικά αρκεί μια προσαύξηση της τάξης του μισού του ήδη επιβαλλόμενου εξωτερικού αξονικού φορτίου, ώστε να προκύψει αύξηση των τάσεων κατά ίδιο ποσοστό.

Προχωρώντας στη περιοχή των μεγάλων αρχικών μετατοπίσεων, αρχικά δίνεται αντίστοιχο διάγραμμα για την εγκάρσια κεντρική τομή υπό μονοαξονική θλίψη.



Σχήμα 41: Εγκάρσια κεντρική τομή υπό θλιπτικό φορτίο ελάσματος με αρχικές μετατοπίσεις

Στη περίπτωση αυτή το τετράγωνο έλασμα έχει ένα αρχικό βέλος κάμψης. Όπως παρουσιάζεται και στο διάγραμμα, ήδη από σχετικά μικρές τιμές της αξονικής φόρτισης, υπάρχει ορατή διαφορά τάσης στα άκρα σε σχέση με το μέσο της τομής. Στη περίπτωση αυτή η διάχυση του φορτίου προς τα άκρα της εγκάρσιας τομής δε σηματοδοτεί απαραίτητα την μετάβαση στη μεταλυγισμική περιοχή. Όπως αποδείχθηκε και από τα διαγράμματα βέλους κάμψης, στα ελάσματα με αρχικές ατέλειες τα όρια που διαχωρίζουν τη περιοχή πριν και μετά το λυγισμό είναι αρκετά πιο συγκεχυμένα σε σχέση με τα τέλεια ελάσματα. Επομένως ήταν αναμενόμενο και στη περίπτωση των θλιπτικών τάσεων να βρεθεί μια ανάλογη διαφορά σε σχέση με τα τέλεια ελάσματα. Εξάλλου οι θλιπτικές τάσεις που εμφανίζονται στο έλασμα

αποτελούν μεγάλο μέρος της κατάστασης ισορροπίας στην οποία βρίσκεται ένα έλασμα. Η ισορροπία αυτή εκφράζεται οπτικά όπως αναφέρεται και στην θεωρία μέσω του βέλους κάμψης, κάνοντας τα δύο αυτά μεγέθη αλληλένδετα.

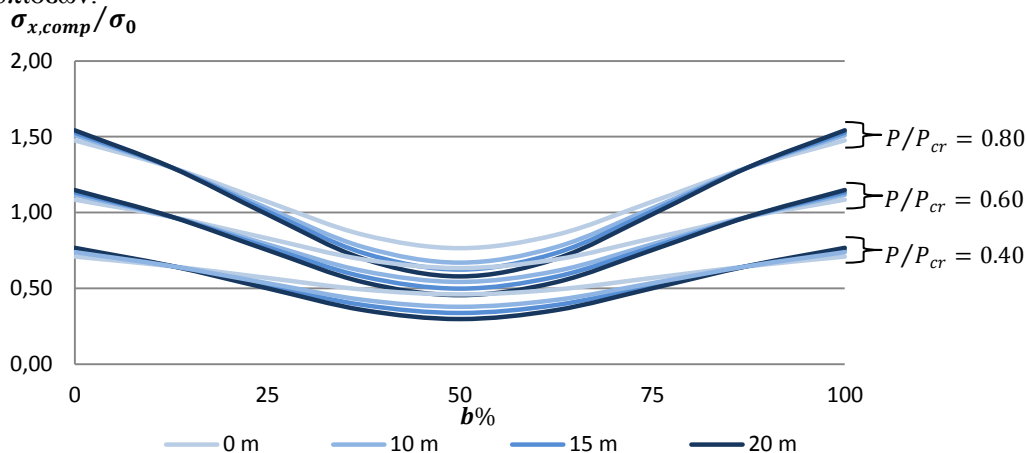
Μια παρατήρηση που προκύπτει συγκρίνοντας τα σχήματα 38 και 41, φαίνεται πως στα ελάσματα με αρχικές ατέλειες η μέση τάση που υπολογίζεται για κάθε καμπύλη φορτίου είναι μικρότερη όπως δείχνει ο πίνακας:

Πίνακας 4: Σύγκριση μέσης θλιπτικής τάσης ελασμάτων με και χωρίς αρχικές μετατοπίσεις

Μέση θλιπτική τάση στην κεντρική εγκάρσια τομή ($\sigma_{x,comp}/\sigma_0$)							
Προλυγισμική περιοχή				Μεταλυγισμική περιοχή			
P/P_{cr}	$W_0=0$	$W_0=0.008m$	Διαφορά	P/P_{cr}	$W_0=0$	$W_0=0.008m$	Διαφορά
0.10	0.16	0.15	0.01	1.00	1.60	1.38	0.22
0.20	0.32	0.30	0.02	1.05	1.67	1.44	0.23
0.40	0.64	0.59	0.06	1.10	1.73	1.50	0.23
0.50	0.81	0.73	0.08	1.20	1.85	1.62	0.22
0.60	0.97	0.87	0.10	1.30	1.96	1.74	0.22
0.80	1.29	1.13	0.16	1.50	2.17	1.96	0.21
0.90	1.45	1.26	0.19	1.70	2.38	2.18	0.19
0.95	1.53	1.32	0.21	1.90	2.58	2.40	0.18

Φαίνεται δηλαδή πως παρά την πιο έντονη διάχυση του φορτίου στη περίπτωση του μεγάλου αρχικού βέλους κάμψης, συγκριτικά με το επίπεδο έλασμα, η μέση θλιπτική τάση κατά τον οριζόντιο άξονα σε εγκάρσια τομή του ελάσματος έχει μικρότερη τιμή. Η διαφορά αυτή είναι αμελητέα για μικρά αξονικά φορτία και μεγιστοποιείται στη περιοχή του λυγισμού, ενώ αν εκφραστεί ως ποσοστό των τιμών της στήλης του ελάσματος με αρχικές ατέλειες, κυμαίνεται γύρω στο 7% για πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές του αξονικού φορτίου και στο 16% κοντά στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Αυτό συμβαίνει γιατί όπως προαναφέρθηκε, η διάχυση του φορτίου προς τα άκρα έχει ξεκινήσει νωρίτερα στα ελάσματα με αρχικό βέλος κάμψης, και έχει σημαντικά μικρότερη τιμή στο κέντρο της τομής, ενώ παρουσιάζει κοντινές τιμές στα άκρα της.

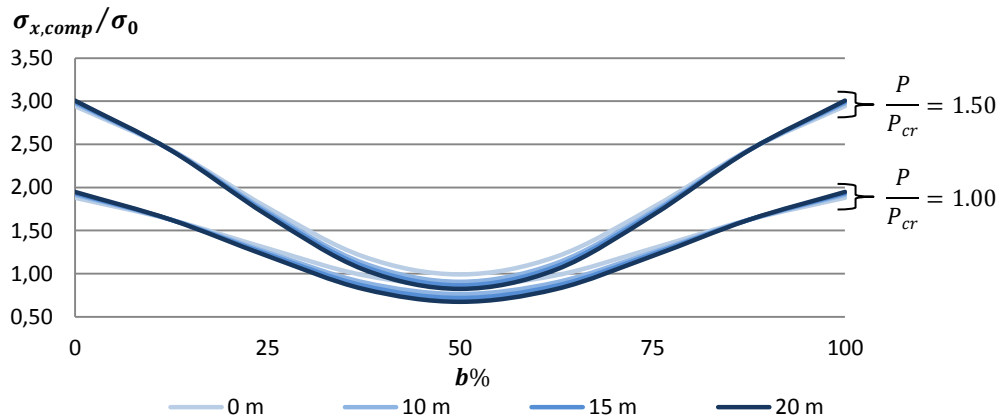
Σε αντιστοιχία με τα σχήματα 39,40 η υδροστατική πίεση έχει την εξής επίδραση στη κατανομή των τάσεων στις εγκάρσιες τομές για ελάσματα στην περιοχή των μεγάλων μετατοπίσεων.



Σχήμα 42: Θλιπτικές τάσεις στη προλυγισμική περιοχή (μεγάλες μετατοπίσεις)

Όπως δείχνουν τα σχήματα 42-43, η επιβολή της υδροστατικής πίεσης εντίνει τα ακρότατα που παρουσιάζονται στην κατανομή των τάσεων στην εγκάρσια κεντρική τομή. Τόσο στη προλυγισμική περιοχή, όσο και στη μεταλυγισμική, όσο αυξάνεται η πλευρική πίεση, παρατηρείται μια ανάλογη αύξηση της διάχυσης του παραλαμβανόμενου φορτίου από το κέντρο προς τα άκρα του ελάσματος. Η συμπεριφορά αυτή συνάδει απόλυτα με τα μέχρι

τώρα αποτελέσματα που έχουν παρουσιαστεί για την επίδραση της πλευρικής πίεσης στη μονοαξονική θλίψη τετράγωνων ελασμάτων.



Σχήμα 43: Θλιπτικές τάσεις στη μεταλυγισμική περιοχή (μεγάλες μετατοπίσεις)

Η βασική διαφορά εντοπίζεται στις αριθμητικές τιμές, συγκριτικά με τα τέλεια ελάσματα, η οποία παρουσιάζεται με τη βοήθεια του πίνακα 5 στον οποίο γίνεται σύγκριση της τιμής του λόγου $\sigma_{x,comp}/\sigma_0$ στο άκρο σε σχέση με κέντρο της εγκάρσιας τομής. Η σύγκριση αυτή περιλαμβάνει τις περιπτώσεις αρχικά επίπεδων ελασμάτων ($W_0=0$) και ελασμάτων με αρχικές ατέλειες ($W_0=0.008m$) για τις αντίστοιχες τιμές της υδροστατικής πίεσης.

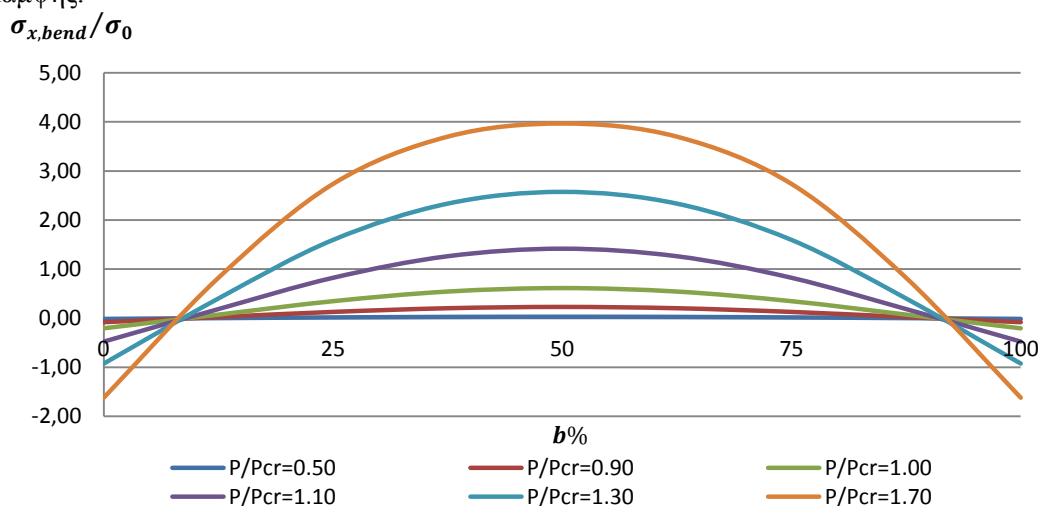
Πίνακας 5: Σύγκριση θλιπτικής τάσης στο άκρο και το κέντρο της τομής

Βάθος	P/P _{cr}	Αρχικά επίπεδο έλασμα			Έλασμα με αρχικό θέλος κάμψης		
		Άκρο (1)	Κέντρο (2)	(1)/(2)	Άκρο (3)	Κέντρο (4)	(3)/(4)
0 m	0.4	0.64	0.64	1.00	0.71	0.46	1.54
	0.6	0.97	0.97	1.00	1.08	0.63	1.71
	0.8	1.29	1.29	1.00	1.48	0.76	1.93
	1.0	1.62	1.58	1.03	1.88	0.86	2.19
	1.5	2.67	1.56	1.72	2.94	0.99	2.97
10 m	0.4	0.65	0.63	1.04	0.74	0.38	1.95
	0.6	0.98	0.93	1.05	1.12	0.54	2.06
	0.8	1.32	1.20	1.10	1.51	0.67	2.25
	1.0	1.68	1.36	1.24	1.92	0.76	2.51
	1.5	2.72	1.42	1.91	2.98	0.91	3.28
20 m	0.4	0.66	0.58	1.14	0.77	0.30	2.58
	0.6	1.00	0.85	1.17	1.15	0.45	2.52
	0.8	1.35	1.07	1.26	1.54	0.58	2.66
	1.0	1.73	1.21	1.43	1.95	0.67	2.89
	1.5	2.77	1.31	2.12	3.01	0.82	3.65

Εδώ φαίνεται συνοπτικά η επίδραση της υδροστατικής πίεσης στις τιμές της θλιπτικής τάσης σ_x , για αξονικά φορτία εκατέρωθεν του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ($P/P_{cr}=1$ για μηδενικό βάθος), στη περιοχή των μικρών και μεγάλων μετατοπίσεων. Η αύξηση της υδροστατικής πίεσης, εφόσον όπως προαναφέρθηκε μειώνει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, έχει ως αποτέλεσμα τη διάχυση του φορτίου προς τα σύνορα του ελάσματος σε μικρότερη τιμή αξονικών φορτίων. Η ελάχιστη τιμή του παραλαμβανόμενου φορτίου παρατηρείται πάντα στο κέντρο της εγκάρσιας τομής. Για σταθερό αξονικό φορτίο, η τιμή αυτή μειώνεται περαιτέρω για κάθε 10 m βάθους, δυσανάλογα με την αντίστοιχη αύξηση του φορτίου στα άκρα. Το γεγονός αυτό εξηγεί και την προηγούμενη παρατήρηση, σχετικά με τη μείωση της μέσης τάσης στην εγκάρσια τομή στη περιοχή των μεγάλων μετατοπίσεων, η οποία φαίνεται να μην επηρεάζεται από την επίδραση πλευρικής πίεσης. Χαρακτηριστικά αναφέρεται ότι η μεγαλύτερη απόκλιση στη μείωση της μέσης τάσης που υπολογίστηκε δε ξεπερνάει το 4%.

4.2.3 Κατανομές καμπτικών τάσεων

Θα παρουσιαστούν στη συνέχεια τα διαγράμματα που αφορούν την κατανομή των καμπτικών τάσεων ως προς τον οριζόντιο άξονα στην εγκάρσια κεντρική τομή του ελάσματος. Όπως και προηγουμένως θα παρουσιαστεί πρώτα η συμπεριφορά του αρχικά επίπεδου ελάσματος σε μονοαξονική θλίψη, και θα εξεταστεί συγκριτικά με την περίπτωση επιβολής πλευρικής πίεσης. Η ίδια πορεία μελέτης θα γίνει και για έλασμα με αρχικό βέλος κάμψης.

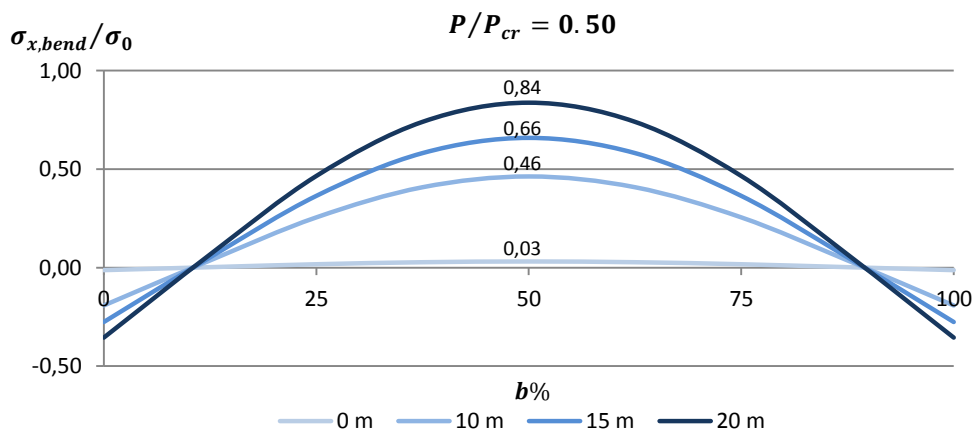


Σχήμα 44: Κατανομή καμπτικών τάσεων σε εγκάρσια κεντρική τομή (μικρές μετατοπίσεις)

Η περίπτωση του αρχικά επίπεδου ελάσματος σε μονοαξονική θλίψη παρουσιάζεται γραφικά στο παραπάνω διάγραμμα. Οι καμπτικές τάσεις έχουν αμελητέα τιμή προλυγισμικά. Όταν το εξωτερικό αξονικό φορτίο αγγίζει τη τιμή του κρίσιμου φορτίου οι μέγιστες καμπτικές τάσεις -που εμφανίζονται όπως είναι αναμενόμενο λόγω συμμετρίας στο κέντρο της τομής- έχουν μόλις ξεπεράσει το $0.5\sigma_x/\sigma_0$. Στη μεταλυσισμική περιοχή η αύξηση των καμπτικών τάσεων είναι ραγδαία όπως φαίνεται και από τις αντίστοιχες καμπύλες. Αξίζει να σημειωθεί πως τα σημεία της τομής στα οποία οι καμπτικές τάσεις αλλάζουν πρόσημο (μηδενίζονται) παραμένουν σταθερά με την αύξηση του φορτίου. Αυτό είναι αναμενόμενο λόγω της συμμετρίας της φόρτισης άλλα και της μορφής του βέλους κάμψης, καθώς ο αριθμός των ημικυμάτων παραμένει σταθερός.

Παρακάτω παρουσιάζεται η κατανομή των καμπτικών τάσεων στην ίδια τομή, υπό την παράλληλη δράση βαθμιαία αυξανόμενης πλευρικής πίεσης, για συγκεκριμένες τιμές του αξονικού φορτίου. Όπως φαίνεται στο σχήμα 45, όταν ασκείται πλευρική πίεση στο έλασμα ταυτόχρονα με το αξονικό φορτίο, οι καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται στο έλασμα αποκτούν σημαντικές τιμές για φορτία πολύ μικρότερα του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία, ένα έλασμα αντιτίθεται στην επιβολή πλευρικού φορτίου με την κάμψη που εμφανίζει στις δυο κατευθύνσεις του. Είναι λογικό επομένως η επιβολή υδροστατικού φορτίου να έχει επιφέρει σημαντικές αυξήσεις στις καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται στο έλασμα. Οι καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται στα όρια της τομής έχουν αντίθετη φορά λόγω της πάκτωσης που δεν επιτρέπει στο έλασμα να μετατοπιστεί. Παρατηρείται ακόμα ότι τα σημεία μηδενισμού των καμπτικών τάσεων είναι κοντά στο 10% του πλάτους από κάθε διαμήκες όριο.

Η κατανομή των καμπτικών τάσεων έχει τη μορφή του σχήματος 45 σε όλη τη προλυγισμική περιοχή με διαφορετικές τιμές. Ο πίνακας 6 συντάσσεται για να γίνει μια αριθμητική σύγκριση των καμπτικών τάσεων στο κέντρο του ελάσματος λόγω της αύξησης της υδροστατικής πίεσης, στη προλυγισμική περιοχή.



Σχήμα 45: Επίδραση υδροστατικής πίεσης στις καμπτικές τάσεις στη προλυγισμική περιοχή

Πίνακας 6: Καμπτική τάση στο κέντρο ελάσματος στη προλυγισμική περιοχή

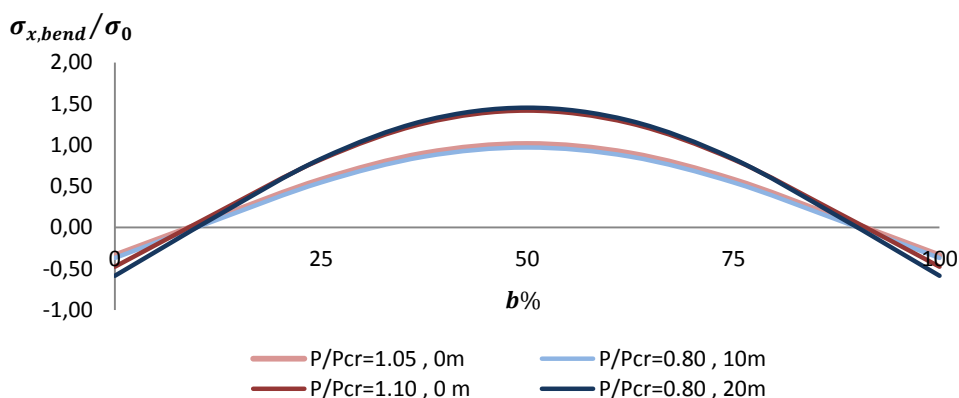
Ποσοστό αύξησης της καμπτικής τάσης στο κέντρο του ελάσματος επί του τελικού βάρους, στη προλυγισμική περιοχή.						
P/P_{cr}	0 m (1)	10 m (2)	20 m (3)	$\frac{0 \rightarrow 10m}{(2) - (1)} \%$	$\frac{0 \rightarrow 20m}{(3) - (1)} \%$	$\frac{10m \rightarrow 20m}{(3) - (2)} \%$
0.20	0.01	0.28	0.53	97.26	98.58	48.11
0.40	0.02	0.38	0.71	94.60	97.09	46.23
0.50	0.03	0.46	0.84	93.26	96.27	44.72
0.60	0.05	0.58	1.00	91.83	95.30	42.41
0.80	0.12	0.97	1.45	87.61	91.73	33.22
0.90	0.23	1.29	1.74	82.05	86.70	25.90
0.95	0.36	1.47	1.89	75.64	80.99	21.98

Τα ποσοστά που υπολογίζονται στις τρεις τελευταίες στήλες του παραπάνω πίνακα, εκφράζουν την προσάυξηση των καμπτικών τάσεων που οφείλεται καθαρά στην επιβολή της πλευρικής φόρτισης σε ποσοστό επί της τιμής της καμπτικής τάσης στο αντίστοιχο βάθος. Τα ποσοστά αυτά είναι ιδιαίτερα ψηλά στη προλυγισμική περιοχή, επαληθεύοντας τον ισχυρισμό ότι στη περίπτωση της σύνθετης καταπόνησης (μονοαξονική θλίψη και πλευρική φόρτιση) οι καμπτικές τάσεις έχουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο ακόμα και για πολύ μικρά αξονικά φορτία, σε σύγκριση με τη περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης. Αυτός είναι πιθανότατα και ο λόγος που ο λυγισμός επέρχεται σε αξονικά φορτία μικρότερα του κρίσιμου που υπολογίζεται με τον τύπο του *Bryan*. Στη περίπτωση αυτής της σύνθετης φόρτισης, στο έλασμα εμφανίζονται από πολύ νωρίς σημαντικές καμπτικές τάσεις, επομένως το περιθώριο που έχουν για να αυξηθούν οι αξονικές τάσεις μέχρι οι συνολικές τάσεις να γίνουν κρίσιμες για την αντοχή σε λυγισμό, είναι σαφώς μικρότερο.

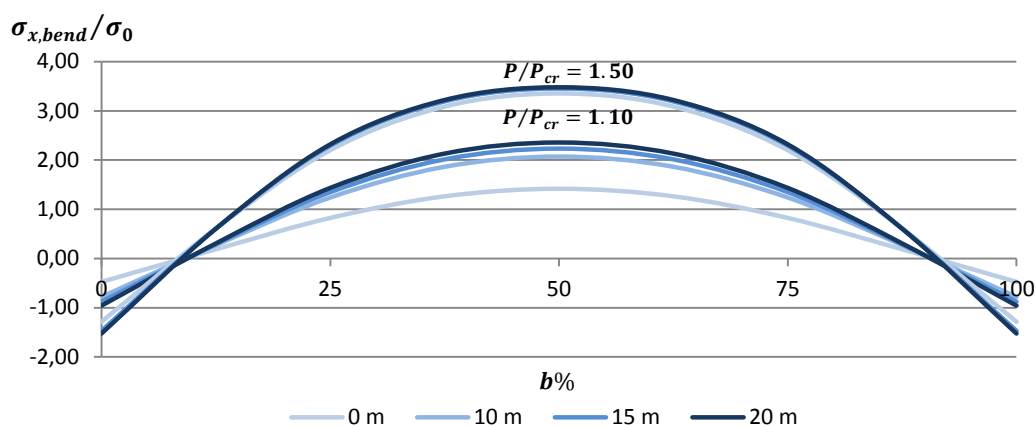
Όπως φαίνεται και στο σχήμα 46, οι καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται στο έλασμα λόγω της υδροστατικής πίεσης προλυγισμικά, μπορούν προσεγγιστικά να εξισωθούν με τις καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται στο έλασμα μεταλυγισμικά, για την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης. Συγκεκριμένα οι τιμές των καμπτικών τάσεων που εμφανίζονται για αξονικό φορτίο στο 80% του κρίσιμου (*Bryan*) με επιβολή υδροστατικής πίεσης 0.1 ή 0.2 MPa, είναι ίσες με αυτές που εμφανίζονται στο ίδιο έλασμα, για αξονικό φορτίο που ανέρχεται στο 105% ή 110% του κρίσιμου αντίστοιχα χωρίς τη παρουσία πλευρικού φορτίου.

Προχωρώντας στη μεταλυγισμική περιοχή, για μικρά ακόμα αξονικά φορτία παρατηρούνται διαφορές λόγω της παρουσίας της υδροστατικής πίεσης, ενώ για πολύ μεγάλα

αξονικά φορτία η πλευρική φόρτιση παύει να δημιουργεί προσαυξήσεις στις καμπτικές τάσεις. Το φαινόμενο αυτό περιγράφεται στο σχήμα 47 και στον πίνακα 7



Σχήμα 46: Οι καμπτικές τάσεις υπό σύνθετη φόρτιση σε σύγκριση με τη μονοαξονική θλίψη



Σχήμα 47: Επίδραση της υδροστατικής πίεσης στις καμπτικές τάσεις μεταλυσιμικά

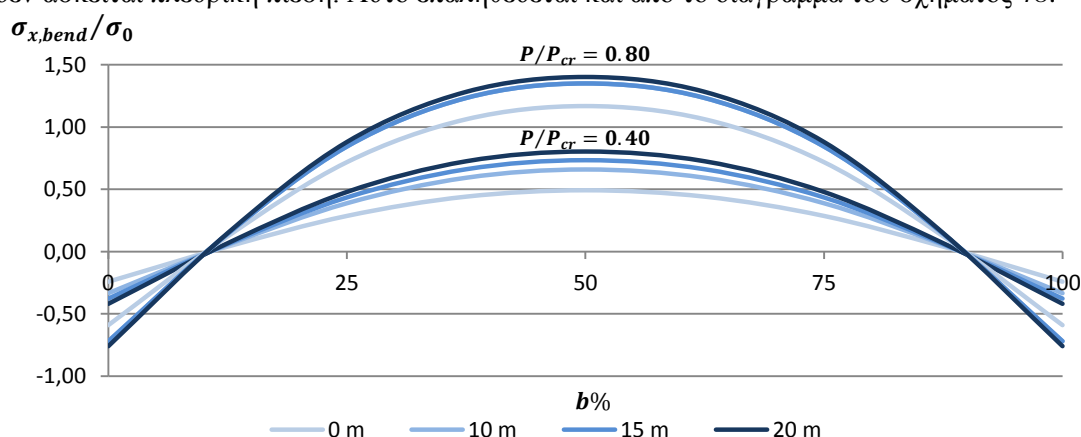
Πίνακας 7: Καμπτική τάση στο κέντρο ελάσματος στη μεταλυσιμική περιοχή

Ποσοστό αύξησης της καμπτικής τάσης στο κέντρο του ελάσματος επί του τελικού βάθους, στη μεταλυσιμική περιοχή.						
P/P_{cr}	0 m (1)	10 m (2)	20 m (3)	$\frac{0 \rightarrow 10m}{(2) - (1)} \%$	$\frac{0 \rightarrow 20m}{(3) - (1)} \%$	$\frac{10m \rightarrow 20m}{(3) - (2)} \%$
1.00	0.61	1.67	2.05	63.22	69.96	18.31
1.05	1.01	1.87	2.20	45.89	53.99	14.98
1.10	1.42	2.07	2.36	31.57	39.86	12.11
1.20	2.07	2.45	2.66	15.68	22.20	7.73
1.30	2.57	2.81	2.95	8.28	12.69	4.81
1.50	3.35	3.43	3.48	2.17	3.62	1.48
1.70	3.97	3.96	3.95	-0.18	-0.36	-0.18
1.90	4.49	4.43	4.38	-1.36	-2.55	-1.17

Στη μεταλυσιμική περιοχή η πλευρική φόρτιση προσδίδει πλέον ελάχιστη προσαύξηση στις καμπτικές τάσεις που δημιουργούνται στο έλασμα. Από τον πίνακα φαίνεται ότι μεγάλες διαφορές συνεχίζουν να υπάρχουν μέχρι το αξονικό φορτίο να γίνει ίσο με $1.10P_{cr}$ ενώ για πολύ υψηλά αξονικά φορτία, παρατηρείται μέχρι και οριακή μείωση των καμπτικών τάσεων που θα δημιουργηθούν στο έλασμα λόγω της πλευρικής φόρτισης, σε σύγκριση με αυτές που θα δημιουργούνταν από καθαρά αξονικό φορτίο. Το φαινόμενο αυτό προφανώς οφείλεται

στην αύξηση του θλιπτικού φορτίου. Το αξονικό φορτίο στις μεγάλες τιμές του, φαίνεται να δημιουργεί από μόνο του κάμψη πολύ μεγάλου βαθμού στο έλασμα, σε σημείο που καθιστά συγκριτικά ασήμαντη τη κάμψη που προέρχεται από την υδροστατική πίεση, ανεξαρτήτως του βάθους νερού.

Η παραπάνω μελέτη των καμπτικών τάσεων αφορά στην περίπτωση του ελάσματος χωρίς αρχικές μετατοπίσεις. Τα ναυπηγικά ελάσματα ωστόσο όπως έχει προαναφερθεί, έχουν πάντα μια αρχική μετατόπιση. Οπότε κρίνεται σκόπιμο να εξεταστεί και η κατανομή των καμπτικών τάσεων όταν στο έλασμα υπάρχει ένα αρχικό βέλος κάμψης. Στη περίπτωση αυτή το έλασμα έχει ήδη υποστεί κάμψη στις δύο κατευθύνσεις του, επομένως αναμένεται οι καμπτικές τάσεις που δημιουργούνται να είναι ήδη σημαντικές ακόμα και στη περίπτωση που δεν ασκείται πλευρική πίεση. Αυτό επαληθεύεται και από το διάγραμμα του σχήματος 48.



Σχήμα 48: Καμπτικές τάσεις προλυγισμικά σε έλασμα με αρχικές ατέλειες

Είναι φανερό από το διάγραμμα της κεντρικής εγκάρσιας τομής, ότι οι καμπτικές τάσεις που δημιουργούνται έχουν μεγάλες τιμές προλυγισμικά ακόμα και χωρίς την παρουσία πλευρικής πίεσης. Η μορφή της κατανομής είναι επίσης αναμενόμενη, όπως και στα προηγούμενα, με τις μέγιστες τάσεις να ασκούνται στο κέντρο της τομής και τις ελάχιστες (αλγεβρικά) στα άκρα όπου το έλασμα είναι πακτωμένο. Παρατηρείται επίσης ότι η συνεισφορά της υδροστατικής πίεσης είναι πλέον αρκετά μικρότερη στην τιμή των καμπτικών τάσεων, σε σχέση με τη περίπτωση του αρχικά επίπεδου ελάσματος. Αυτό θα φανεί και στον πίνακα 8.

Πίνακας 8: Καμπτική τάση στο κέντρο ελάσματος στη προλυγισμική περιοχή (μεγάλες μετατοπίσεις)

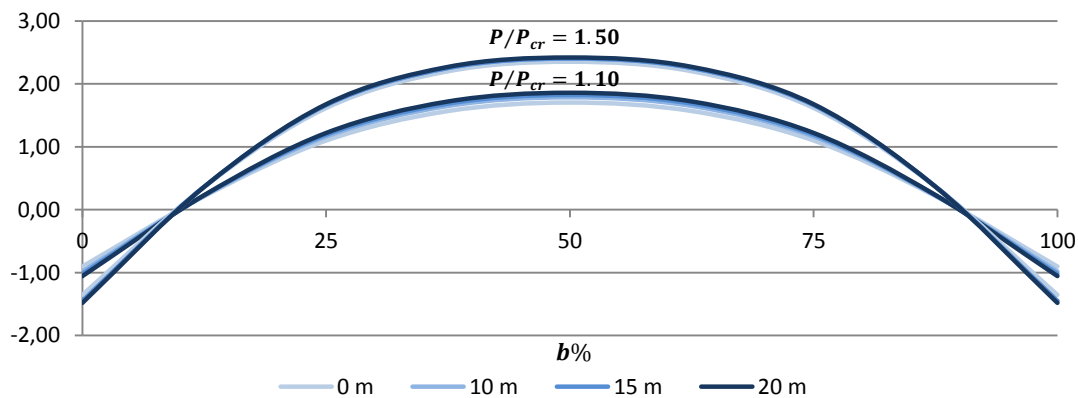
Ποσοστό αύξησης της καμπτικής τάσης στο κέντρο του ελάσματος επί του τελικού βάθους, για μικρά αξονικά φορτία						
P/P_{cr}	0 m (1)	10 m (2)	20 m (3)	$\frac{0 \rightarrow 10m}{(2) - (1)} \%$	$\frac{0 \rightarrow 20m}{(3) - (1)} \%$	$\frac{10m \rightarrow 20m}{(3) - (2)} \%$
0.20	0.22	0.39	0.54	43.82	59.52	27.95
0.40	0.49	0.66	0.80	25.32	38.74	17.97
0.50	0.65	0.81	0.95	19.84	31.51	14.56
0.60	0.82	0.97	1.10	15.64	25.58	11.79
0.80	1.17	1.29	1.40	9.73	16.67	7.69
0.90	1.35	1.46	1.56	7.64	13.34	6.18
0.95	1.44	1.54	1.63	6.77	11.91	5.52

Σε σύγκριση με τον πίνακα 7 που αναφέρεται στη μεταλυγισμική περιοχή του αρχικά επίπεδου ελάσματος, αποδεικνύεται ότι η προσαύξηση των καμπτικών τάσεων λόγω της επιβολής της υδροστατικής πίεσης είναι περίπου ίδια στη περίπτωση του αρχικά επίπεδου ελάσματος που φορτίζεται με αξονικό φορτίο ίσο με το $1.2P_{cr}$ και στη περίπτωση του αρχικά

μετατοπισμένου ελάσματος που φορτίζεται αξονικά με $0.6P_{cr}$ (το μισό) για τις διάφορες τιμές της υδροστατικής πίεσης. Ο λόγος που οι καμπτικές τάσεις σε χαμηλά αξονικά φορτία εδώ, επηρεάζονται κατά όμοια ποσοστά με μεγαλύτερα αξονικά φορτία που ασκούνται σε έλασμα χωρίς αρχική μετατόπιση, είναι ότι εδώ υπάρχουν καμπτικές τάσεις στην αρχική ισορροπία του ελάσματος, πριν δηλαδή την επιβολή αξονικού φορτίου. Αυτές οφείλονται προφανώς στην κάμψη που έχει ήδη υποστεί το έλασμα

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι πλέον η επίδραση της υδροστατικής πίεσης στις καμπτικές τάσεις θα είναι πολύ μικρή για μεγάλα αξονικά φορτία, καθώς η αρχική κάμψη του ελάσματος και η αύξηση του αξονικού φορτίου θα έχουν πλέον πρωτεύοντα ρόλο στις συνολικές καμπτικές τάσεις του ελάσματος όπως φαίνεται και παρακάτω.

$$\sigma_{x,bend}/\sigma_0$$



Σχήμα 49: Καμπτικές τάσεις μεταλυγισμικά σε έλασμα με αρχικές ατέλειες

Πίνακας 9: Καμπτική τάση στο κέντρο ελάσματος στη μεταλυγισμική περιοχή (μεγάλες μετατοπίσεις)

Ποσοστό αύξησης της καμπτικής τάσης στο κέντρο του ελάσματος επί του τελικού βάθους, σε μεγάλα αξονικά φορτία.						
P/P_{cr}	0 m (1)	10 m (2)	20 m (3)	$\frac{0 \rightarrow 10m}{(2) - (1)}$ %	$\frac{0 \rightarrow 20m}{(3) - (1)}$ %	$\frac{10m \rightarrow 20m}{(3) - (2)}$ %
1.00	1.53	1.62	1.67	5.98	10.62	4.93
1.05	1.62	1.71	1.75	5.28	9.43	4.38
1.10	1.70	1.79	1.82	4.64	8.37	3.91
1.20	1.87	1.94	1.98	3.56	6.54	3.09
1.30	2.04	2.10	2.12	2.71	5.04	2.39
1.50	2.35	2.39	2.40	1.49	2.79	1.32
1.70	2.64	2.65	2.66	0.67	1.26	0.60
1.90	2.90	2.90	2.90	0.06	0.12	0.06

Στη περίπτωση των θλιπτικών τάσεων παρατηρήθηκε μια μείωση της μέσης τάσης στη περίπτωση του ελάσματος με αρχικό βέλος κάμψης με το έλασμα χωρίς αρχικές ατέλειες για ίδιες συνθήκες φόρτισης. Αντίστοιχα εδώ, συγκρίνοντας τους πίνακες 6-9 φαίνεται ότι και στις καμπτικές τάσεις υπάρχουν ορατές διαφορές. Με εξαίρεση τη περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης (0m), οι καμπτικές τάσεις για χαμηλά αξονικά φορτία έχουν κοντινές τιμές. Συγκεκριμένα, οι μεγαλύτερες αποκλίσεις εντοπίζονται για $P/P_{cr}=0.5$ σε ένα ποσοστό περίπου 40% για 10 μέτρα βάθος νερού, το οποίο μειώνεται σε 12% στα 20 μέτρα βάθος νερού. Προλυγισμικά επομένως η υδροστατική πίεση επιφέρει μεγαλύτερες καμπτικές τάσεις σε ένα έλασμα με αρχικές μετατοπίσεις. Στη μεταλυγισμική περιοχή ωστόσο οι καμπτικές τάσεις είναι σημαντικά μικρότερες στο ίδιο έλασμα για μεγάλα αξονικά φορτία.

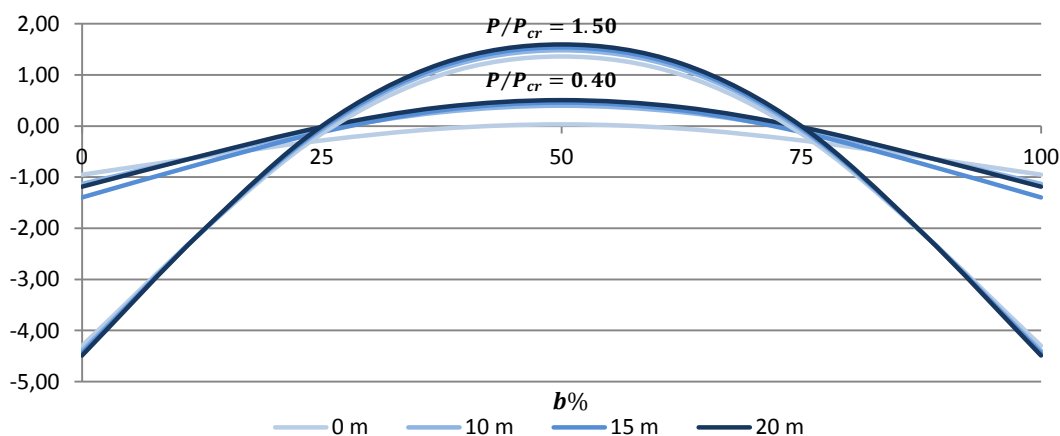
Χαρακτηριστικά υπολογίζεται ότι οι καμπτικές τάσεις για αξονικό φορτίο ίσο με $1.5P_{cr}$ στο αρχικά μετατοπισμένο έλασμα είναι κοντά στο 44% μικρότερες σε σχέση με το αρχικά επίπεδο έλασμα (σχήματα 47 και 49)

4.2.4 Κατανομές συνολικών τάσεων

Κλείνοντας το εδάφιο με την απόκριση των τετράγωνων ελασμάτων, θα γίνει μια συνοπτική παρουσίαση των συνολικών τάσεων που ασκούνται στη διεύθυνση του άξονα x . Αυτό επιτυγχάνεται με το αλγεβρικό άθροισμα των θλιπτικών και των καμπτικών τάσεων. Προσοχή πρέπει να δοθεί στη φορά των τάσεων αυτών. Μέχρι τώρα οι θλιπτικές τάσεις απεικονίζονταν γραφικά σε θετικούς άξονες για λόγους απλούστευσης των διαγραμμάτων. Οι τάσεις αυτές ωστόσο από τη φύση τους έχουν αντίθετη φορά στο επιβαλλόμενο αξονικό φορτίο και επομένως στον υπολογισμό των συνολικών τάσεων θεωρούνται αρνητικοί αριθμοί. Όσο αναφορά τις καμπτικές τάσεις, το θετικό πρόσημο βάσει θεωρίας σημαίνει ότι η τάση αυτή προκαλεί εφελκυσμό στο σώμα που ασκείται, ενώ το αρνητικό αντιστοιχεί σε θλίψη. Όπως φάνηκε από τα αντίστοιχα διαγράμματα οι καμπτικές τάσεις έχουν διαφορετικό πρόσημο στο κέντρο και στα άκρα της εγκάρσιας τομής.

Ο κώδικας STATEL υπολογίζει τις καμπτική ροπή ανά μονάδα μήκους πλευράς του ελάσματος M_x στη μέση επιφάνεια του ελάσματος, οι μέγιστες καμπτικές τάσεις υπολογίζονται αριθμητικά σε δεύτερο χρόνο από τον τύπο (13) του δεύτερου κεφαλαίου. Η καμπτική τάση αυτή ασκείται στη όψη που εφελκύεται, δηλαδή στην όψη που αντιστοιχεί στη κυρτότητα του βέλους κάμψης. Η άλλη όψη θλίβεται με ακριβώς αντίθετη καμπτική τάση. Η μελέτη των συνολικών τάσεων θα γίνει στην όψη που βρίσκεται σε εφελκυσμό, και επομένως θλιπτικές και καμπτικές τάσεις έχουν αντίθετο πρόσημο (αρνητικές και θετικές αντίστοιχα), για την περίπτωση που το έλασμα έχει αρχικό βέλος κάμψης.

$\sigma_{x,total}/\sigma_0$



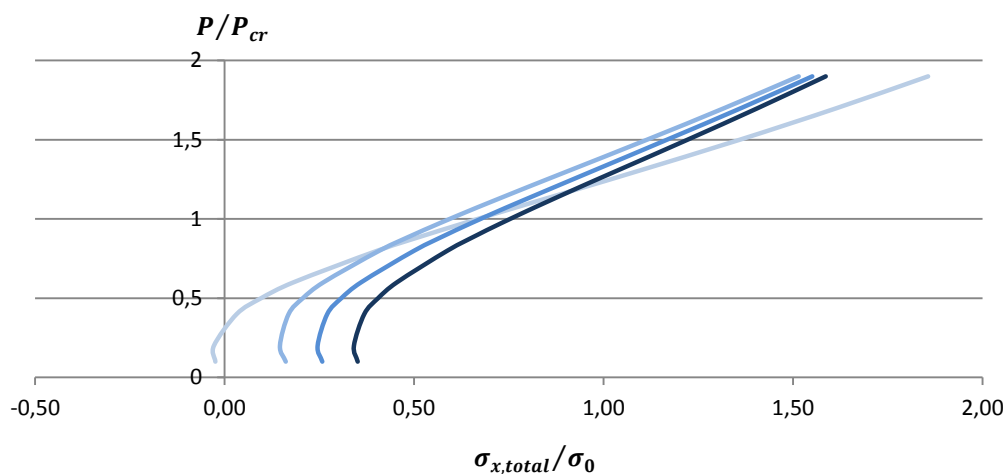
Σχήμα 50: Συνολική τάση σε εγκάρσια κεντρική τομή

Στο διάγραμμα του σχήματος 50 φαίνεται η κατανομή των τάσεων κατά τη διεύθυνση του άξονα x στην κεντρική εγκάρσια τομή του τετράγωνου ελάσματος με αρχικές ατέλειες. Το αξονικό φορτίο επιλέγεται σκόπιμα μικρό για να εξεταστεί η συμπεριφορά στη προελαστική περιοχή, για κάθε τιμή της υδροστατικής περιοχής. Όταν δεν ασκείται υδροστατική πίεση, οι τάσεις στα άκρα της τομής προσεγγίζουν το όριο διαρροής του χάλυβα, ενώ στο κέντρο της τομής οριακά μηδενίζονται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι καμπτικές τάσεις που υπάρχουν ήδη λόγω της αρχικής μετατόπισης έχουν περίπου ίδια τιμή στο κέντρο της τομής με τις θλιπτικές και αλληλοαναιρούνται, ενώ στα άκρα οι θλιπτικές

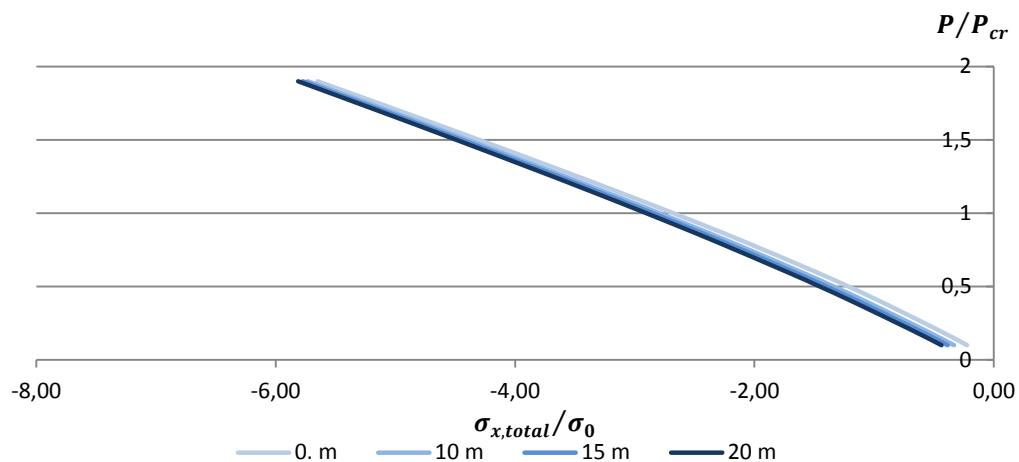
τάσεις έχουν την μεγαλύτερή τους τιμή και οι καμπτικές έχουν αλλάξει πρόσημο, επομένως έχουν ίδια φορά με τις πρώτες.

Όταν επιβάλλεται και πλευρική φόρτιση, διακρίνεται παρόμοια κατανομή με πιο έντονη καμπυλότητα. Έχει ήδη αναφερθεί ότι για μικρά αξονικά φορτία υπάρχει σημαντική διαφορά στην αύξηση των καμπτικών τάσεων λόγω της υδροστατικής πίεσης και αυτό φαίνεται και στο διάγραμμα όπου οι συνολικές τάσεις στο κέντρο της τομής κυμαίνονται στο $0.4-0.5\sigma_x/\sigma_0$, ενώ στα άκρα ασκούνται λίγο μεγαλύτερες (κατά απόλυτη τιμή) τάσεις. Στη μεταλυσισμική περιοχή οι διαφορές στις τάσεις που ασκούνται είναι πολύ μεγάλες καθώς οι καμπυλότητες είναι ακόμα πιο έντονη. Αξίζει να σημειωθεί ωστόσο ότι τα σημεία αλλαγής προσήμου πάνω στη τομή παραμένουν σχεδόν ανεπηρέαστα από το μέγεθος του αξονικού φορτίου ή/και της πλευρικής φόρτισης.

Τέλος παραθέτεται το διάγραμμα των συνολικών τάσεων κατά των άξονα x για το κεντρικό και ακραίο σημείο της τομής.



Σχήμα 51: Συνολική τάση στο κεντρικό σημείο του ελάσματος



Σχήμα 52: Συνολική τάση στο ακραίο σημείο της εγκάρσιας κεντρικής τομής του ελάσματος

Το πρώτο διάγραμμα που αντιστοιχεί στο κεντρικό σημείο του ελάσματος θυμίζει σε γενικές γραμμές το αντίστοιχο διάγραμμα με την απόκριση του βέλους κάμψης. Η επιβολή της υδροστατικής πίεσης αυξάνει τις τάσεις που ασκούνται στο χώρο του κέντρου προλυσισμικά, ενώ μετά το λυγισμό και για μεγάλα αξονικά φορτία έχει μικρότερη επιρροή στην αύξηση των τάσεων. Εδώ φαίνεται επίσης γραφικά το γεγονός ότι σε σχέση με την καμπύλη της μονοαξονικής φόρτισης, πριν επιτευχθεί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, οι συνολικές αξονικές

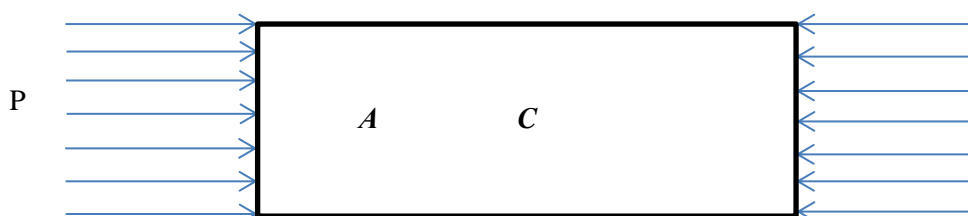
τάσεις που εμφανίζονται στο έλασμα είναι πολύ μεγαλύτερες και επομένως είναι λογικό το φαινόμενο του λυγισμού να συμβεί σε μικρότερη τιμή του λόγου P/P_{cr} . Το δεύτερο διάγραμμα αντιστοιχεί στο πακτωμένο άκρο της κεντρικής εγκάρσιας τομής, όπου φαίνεται ότι οι συνολικές τάσεις έχουν ιδιαίτερα υψηλή τιμή και προλυγισμικά, που δεν επηρεάζεται σημαντικά από την υδροστατική πίεση.

4.3 Μακριά ελάσματα. Λόγος πλευρών $a/b=2.5$

4.3.1 Κατανομές βέλους κάμψης

Στα εδάφια που ακολουθούν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μελέτης που έγινε πάνω σε ελάσματα που έχουν μήκος μεγαλύτερο του πλάτους τους. Τα ελάσματα που χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο στις ναυπηγικές κατασκευές είναι μακριά, επομένως κρίθηκε σκόπιμο στο πλαίσιο της εργασίας να εξεταστεί και η συμπεριφορά τους.

Αρχικά εξετάζεται ο λόγος πλευρών ίσος με 2.5. Καθώς διατηρήθηκε σταθερό το πλάτος σε σχέση με τα τετράγωνα ελάσματα (0.8m), το νέο μήκος των ελασμάτων είναι 2 μέτρα. Το πάχος παραμένει 12 mm. Επειδή έχουμε πλέον διαφορετικό λόγο πλευρών, ο κώδικας τροφοδοτείται με τον αντίστοιχο συντελεστή λυγισμού που βρίσκεται από το σχήμα 18 της θεωρίας. Η νέα κρίσιμη τάση λυγισμού υπολογίζεται πάλι από τον τύπο του *Bryan* ίσο με $\sigma_{x,cr}=292.98MPa$. Θα εξεταστεί η συμπεριφορά ελασμάτων με πολύ μικρές αρχικές ατέλειες και αρχικές ατέλειες ίσες με $b/100$. Η μορφή των αρχικών ατελειών επιλέγεται να είναι 3 ημικύματα, βάσει του τύπου $a/b = \sqrt{m(m+1)}$ που βρίσκεται στη διεθνή βιβλιογραφία. Οι συνθήκες φόρτισης θα είναι ίδιες με αυτές που εξετάστηκαν στα τετράγωνα ελάσματα, δηλαδή αρχικά μονοαξονική θλίψη, και στη συνέχεια σύνθετη φόρτιση καθώς στη μονοαξονική θλίψη θα προστεθεί πλευρικό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο. Οι τιμές του πλευρικού φορτίου επιλέγονται ίσες με την υδροστατική πίεση σε βάθος 10, 15 και 20 μέτρων, δηλαδή 0.1, 0.15 και 0.20 MPa. Επιπλέον θα εξεταστεί πλευρικό φορτίο που θα ασκηθεί στην άλλη όψη του ελάσματος, θα έχει δηλαδή τιμή -0.2 MPa.



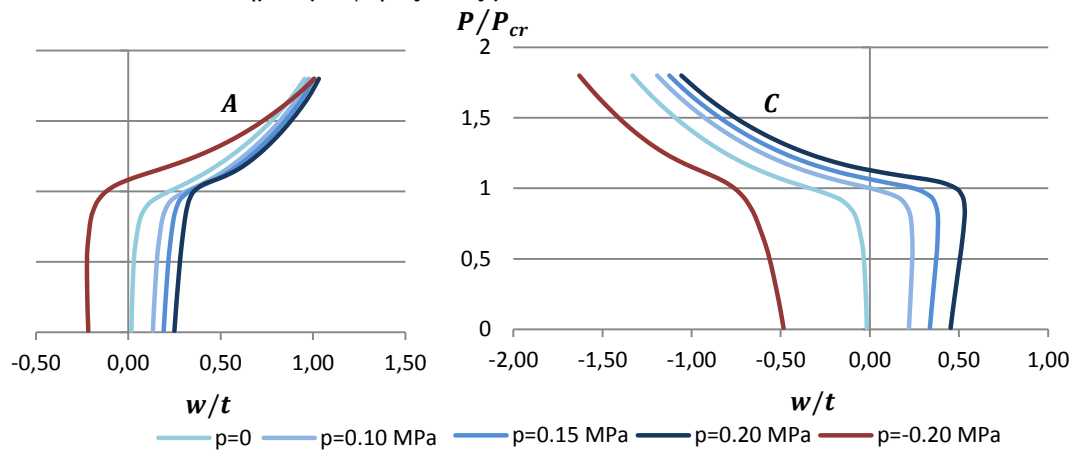
Σχήμα 53: Θέση σημείων στο μακρύ έλασμα

Καθώς αναμένονται 3 ημικύματα στη μορφή των ατελειών, τα σημεία που επιλέγονται για να εξεταστεί η απόκριση του ελάσματος βρίσκονται πάνω στην κεντρική διαμήκη τομή ($y=b/2$), το ένα στην πρώτη κορυφή ($x=a/3$) και το άλλο στη κοιλάδα που παρουσιάζεται στη μέση του ελάσματος ($x=a/2$). Η θέση των σημείων φαίνεται και στο σχήμα 53. Ακολουθούν τα διαγράμματα που αφορούν στην απόκριση του βέλους κάμψης στα σημεία αυτά, και η κατανομή του στη κεντρική διαμήκη τομή ελάσματος με πολύ μικρές αρχικές μετατοπίσεις σε συνθήκες φόρτισης πριν και μετά το λυγισμό.

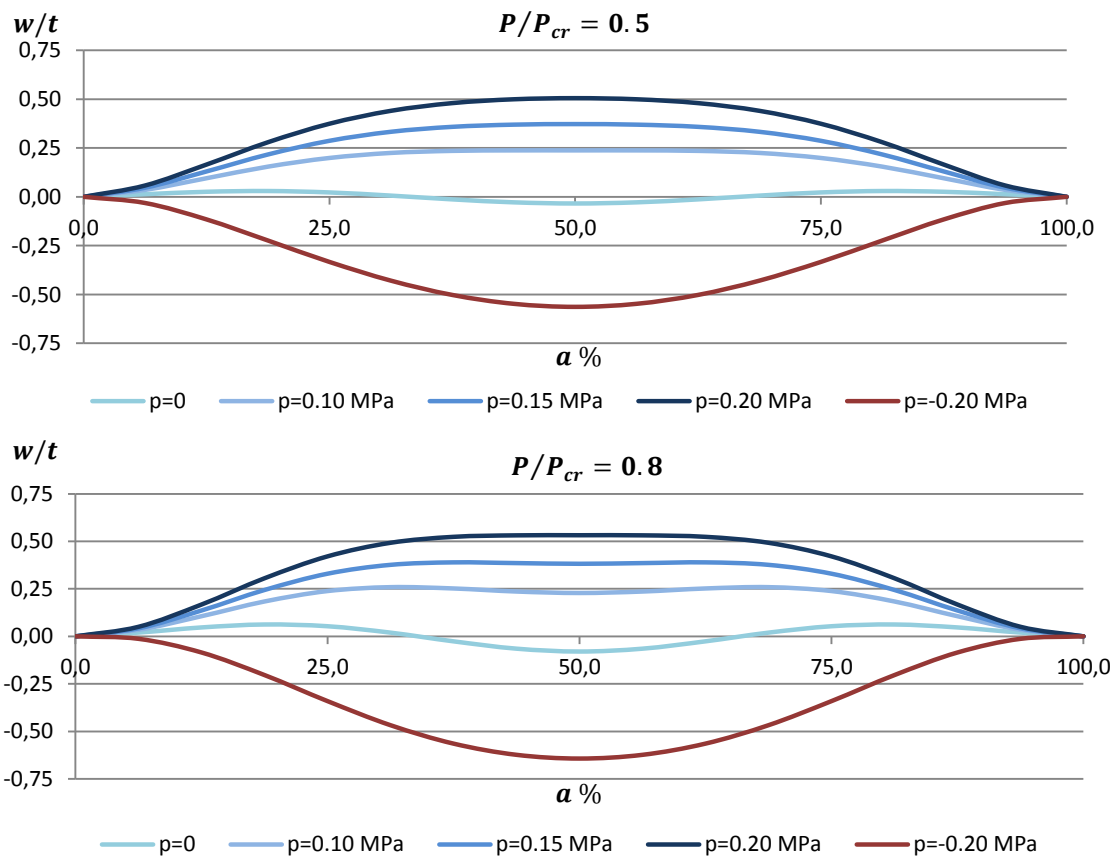
Πρώτη παρατήρηση που προκύπτει είναι ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού δε φαίνεται να μειώνεται από την εφαρμογή υδροστατικής πίεσης όπως συνέβη στα τετράγωνα ελάσματα. Αντίθετα φαίνεται να υπάρχει μια οριακή αύξηση του για κάθε μεγαλύτερη τιμή της πλευρικής φόρτισης κοντά στο 5% για $p=0.20 MPa$. Τόσο στην απόκριση του σημείου A, όσο και του C, η ραγδαία αύξηση της κάθετης μετατόπισης γίνεται κοντά στο λόγο $P/P_{cr}=1$

για όλες τις τιμές της υδροστατικής πίεσης. Από εκεί και πέρα η απόκριση του κάθε σημείου εξαρτάται από τη θέση του.

Οι θετικές τιμές πλευρικού φορτίου, αντιπροσωπεύουν φόρτιση που ασκείται υπό τη φορά της κοιλότητας των δύο κορυφών που υπάρχουν στη διαμήκη τομή ελάσματος, όταν σε αυτό ασκούνται μόνο αξονικές δυνάμεις ($p=0$). Με πιο απλά λόγια η θετική πλευρική φόρτιση έχει φορά προς τον θετικό ημιάξονα y στα διαγράμματα των διαμήκων τομών. Προλυγισμικά, η παρουσία πλευρικού φορτίου επηρεάζει τη μορφή των μετατοπίσεων, καθώς όπως φαίνεται από το σχήμα 55 το βέλος κάμψης παρουσία πλευρικού φορτίου αποτελείται από ένα ημικύκμα φοράς ίδιας με αυτό.



Σχήμα 54: Βέλος κάμψης των σημείων A και C



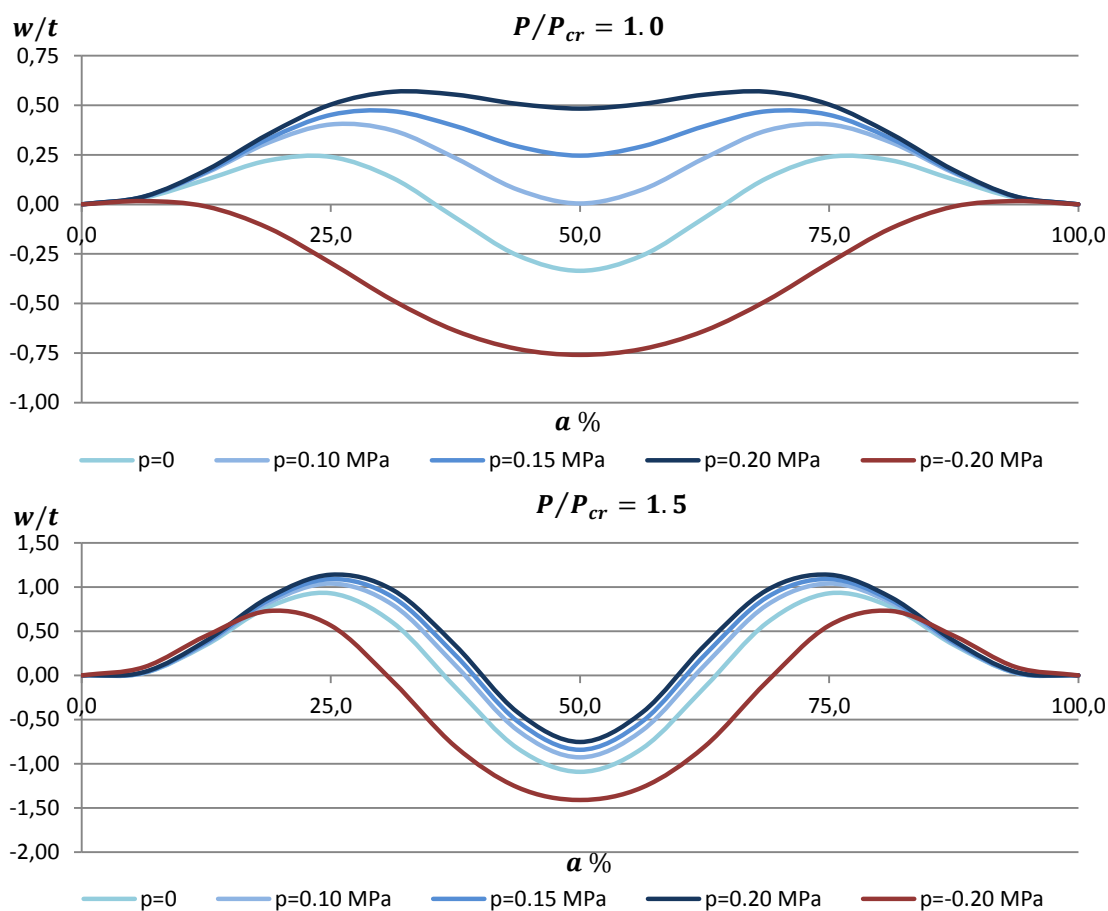
Σχήμα 55: Βέλος κάμψης της κεντρικής διαμήκου τομής προλυγισμικά

Αντίθετα, απουσία του οδηγεί σε 3 (έστω μικρά) ημικύματα. Ο λόγος είναι ότι τα αξονικά φορτία είναι ακόμα μικρά (προλυγισμική περιοχή) και όπως φάνηκε από τα τετράγωνα ελάσματα, η υδροστατική πίεση επιφέρει μεγαλύτερη κάμψη του ελάσματος προς τη φορά που ασκείται. Ο λόγος είναι ότι τα αξονικά φορτία είναι ακόμα μικρά (προλυγισμική περιοχή) και όπως φάνηκε από τα τετράγωνα ελάσματα, η υδροστατική πίεση επιφέρει μεγαλύτερη κάμψη του ελάσματος προς τη φορά που ασκείται.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί πως προλυγισμικά, αρνητική πλευρική πίεση $p=-0.2 \text{ MPa}$ οδηγεί σε περίπου 12% μεγαλύτερο βέλος κάμψης στη περιοχή του κέντρου της τομής σε σχέση με την αντίστοιχη θετική. Από φυσικής πλευράς αυτό εξηγείται ως εξής: Η εφαρμογή θετικής πίεσης τείνει να αυξήσει το βέλος κάμψης των δύο κορυφών. Λόγω του αξονικού φορτίου που ασκείται ταυτόχρονα, η κοιλάδα που υπάρχει τείνει να γίνει μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή, δηλαδή τείνει να μετατοπιστεί αντίθετα από τη φορά του πλευρικού φορτίου. Επομένως στο κέντρο του ελάσματος η πλευρική και η αξονική φόρτιση τείνουν να έχουν αντίθετη μετατόπιση. Στη περίπτωση της αρνητικής πλευρικής φόρτισης, οι δύο κορυφές τείνουν να μετατοπιστούν προς τα κάτω, όπως και η κοιλάδα λόγω του αξονικού φορτίου. Στα χαμηλά αξονικά φορτία, η πλευρική πίεση υπερνικά και «αναιρεί» τη μία κοιλάδα ή τις δύο κορυφές (ανάλογα τη φορά της), δημιουργώντας μία κορυφή ή μία κοιλάδα αντίστοιχα. Για σταθερό αξονικό φορτίο η δεύτερη περίπτωση απαιτεί λιγότερο έργο της πλευρικής πίεσης όπως εξηγήθηκε, και επομένως οδηγεί σε μεγαλύτερες μετατοπίσεις.

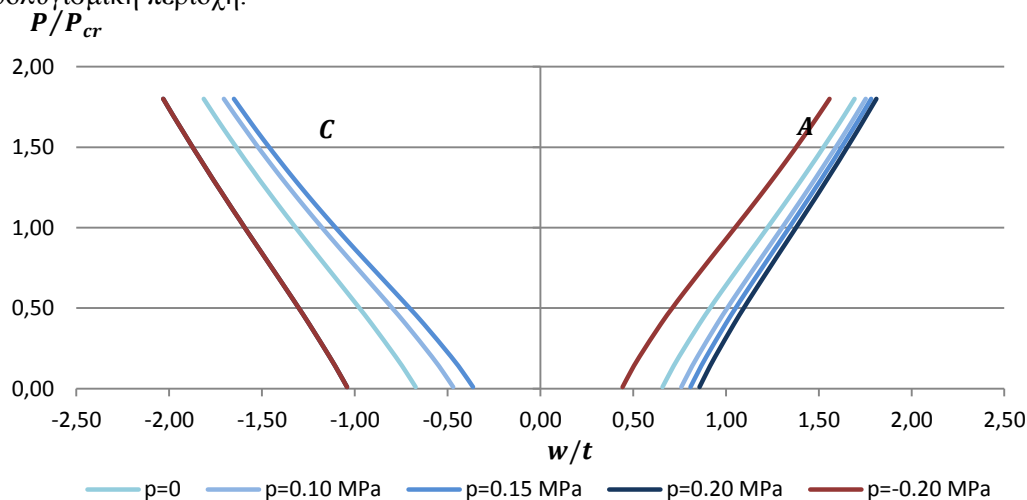
Για $P/P_{cr}=0.8$ το βέλος κάμψης διακρίνεται ακόμα από ένα ημικύμα για τις μεγάλες τιμές της πλευρικής πίεσης, ενώ για $p=0.10 \text{ MPa}$, είναι οριακά ορατός ο σχηματισμός των 3 ημικυμάτων. Ακόμα, μια σημαντική διαφορά είναι η μορφή του βέλους κάμψης για τις τιμές $p=\pm 0.20 \text{ MPa}$, όπου για τη θετική τιμή το βέλος κάμψης διατηρεί σταθερή περίπου τιμή στο 40-60% του μήκους της τομής, ενώ για την αρνητική τιμή σχηματίζεται ένα ακριβώς ακρότατο. Ο λόγος είναι η «προδιάθεση» που έχει το έλασμα που συμπιέζεται αξονικά, να δημιουργήσει μια κοιλάδα στο κέντρο του. Η θετική πλευρική πίεση αντιτίθεται σε αυτό το φαινόμενο, ενώ η αρνητική το ενισχύει. Όταν το αξονικό φορτίο γίνει ίσο με το κρίσιμο, για μηδενική αλλά και για τις ενδιάμεσες τιμές πλευρικής φόρτισης, στο έλασμα διακρίνονται πλέον ξεκάθαρα τα 3 ημικύματα. Η θέση της ελάχιστης τιμής της κοιλάδας είναι σταθερή, και μάλιστα για $p=0.10 \text{ MPa}$ έχει σχεδόν μηδενικό βέλος κάμψης. Αντίθετα οι θέσεις των κορυφών μετατοπίζονται προς το κέντρο της τομής. Για τη μέγιστη θετική πλευρική φόρτιση το κέντρο της τομής να μετατοπίζεται προς τα κάτω, σηματοδοτώντας και σε αυτή τη τιμή της πίεσης τη δημιουργία μιας κοιλάδας μεταξύ δύο κορυφών. Για τη μέγιστη αρνητική πίεση η συμπεριφορά είναι διαφορετική, καθώς διατηρείται το 1 ημικύμα. Στα άκρα της τομής υπάρχει μια σχεδόν μηδενική κάθετη μετατόπιση η οποία μεγιστοποιείται σε απόλυτη τιμή στο κέντρο της. Για αυτή τη τιμή της πίεσης τα 3 ημικύματα είναι ευδιάκριτα για $P/P_{cr}>1.10$.

Για ακόμα μεγαλύτερα αξονικά φορτία η συμπεριφορά της αρνητική p αρχίζει να προσεγγίζει τη συμπεριφορά της θετικής, με βασική διαφορά την όχι τόσο οξεία καμπύλη στα ακρότατα της κάθετης μετατόπισης. Η μεταλυγισμική συμπεριφορά δε παρουσιάζει ιδιαίτερες διαφορές με και χωρίς τη παρουσία υδροστατικής πίεσης, με εξαίρεση πάντα τις διαφορετικές τιμές στη κάθετη μετατόπιση. Τέλος αξίζει να αναφερθεί ότι για έλασμα με πολύ μικρές αρχικές μετατοπίσεις που εξετάστηκε, περαιτέρω αλλαγή του αριθμού ημικυμάτων παρατηρήθηκε σε πολύ μεγάλα αξονικά φορτία της τάξης του $P/P_{cr}>1.85$.



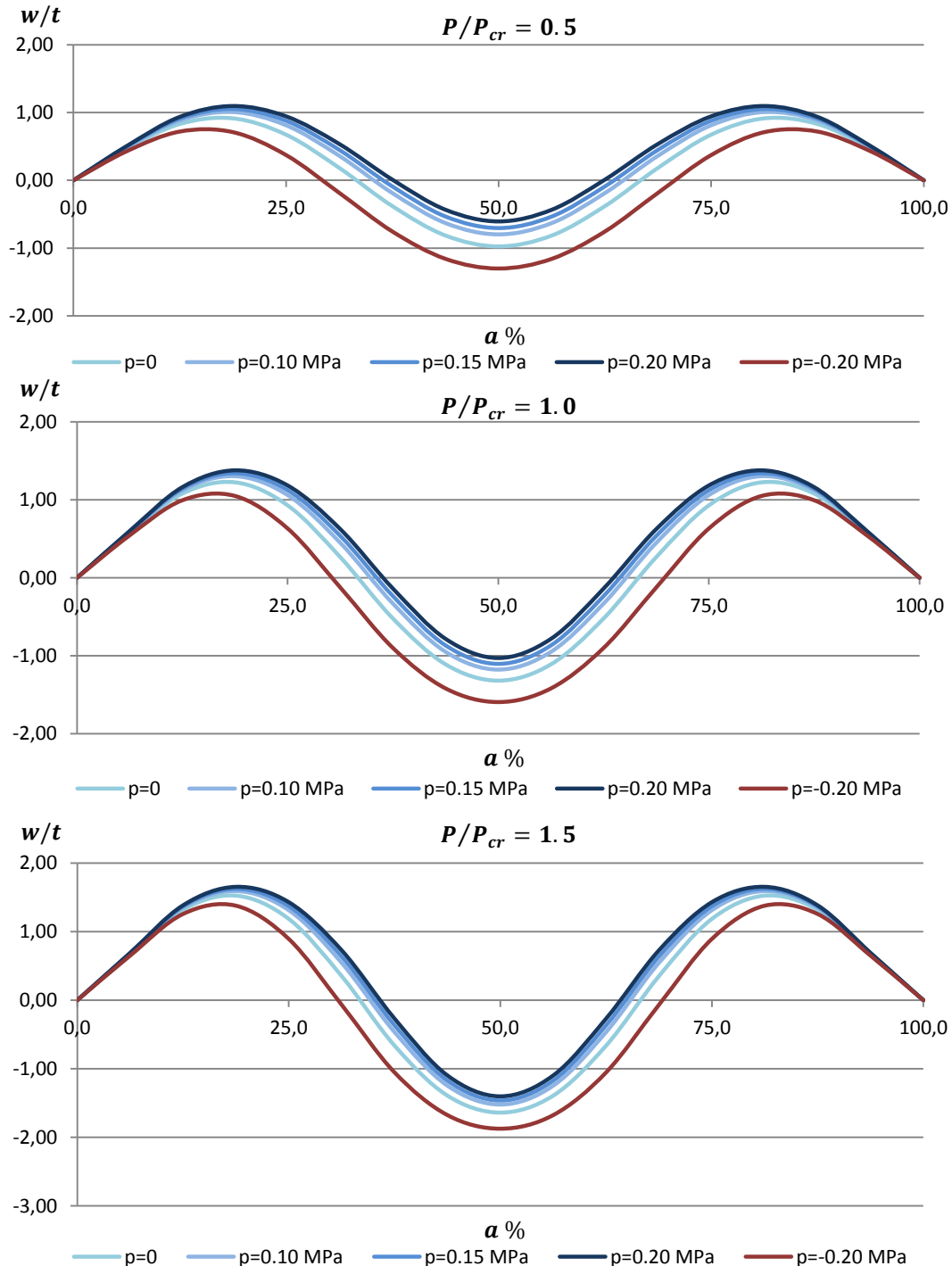
Σχήμα 56: Βέλος κάμψης κεντρικής διαμήκουσ τομής στη μεταλυσισμική περιοχή

Όμοια με τα τετράγωνα ελάσματα, στα μακριά ελάσματα με μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις δεν υπάρχει διακριτή μετάβαση γραφικά από τη προλυσισμική περιοχή στη προλυσισμική, όπως φαίνεται από το διάγραμμα της απόκρισης των σημείων *A,C* που θυμίζουμε πως βρίσκονται στην πρώτη κορυφή και κοιλάδα των αρχικών ατελειών του ελάσματος αντίστοιχα. Στη περίπτωση αυτή, οι αρχικές μετατοπίσεις είναι ιδιαίτερα μεγάλες, και η πλευρική πίεσης δε δύναται να δημιουργήσει ένα ημικύμα στο βέλος κάμψης ακόμα και στη προλυσισμική περιοχή.



Σχήμα 57: Βέλος κάμψης σημείων *A* και *C* ελάσματος με αρχικές μετατοπίσεις

Μάλιστα με επιμέρους τρέξιμο του κώδικα, φαίνεται πως για αυτή τη τιμή των αρχικών μετατοπίσεων ($b/100$) με τη μορφή των 3 ημικυμάτων, ακόμα και σε σχεδόν μηδενικά αξονικά φορτία, ακόμα και η μέγιστη πλευρική πίεση που εξετάζεται, αδυνατεί να αλλάξει τη μορφή αυτή. Επομένως συμπεραίνεται πως αυτή η μορφή ισορροπίας είναι σταθερή για το συγκεκριμένο έλασμα.



Σχήμα 58: Βέλος κάμψης κεντρικής διαμήκουσ τομής για διάφορα αξονικά φορτία

Τα παραπάνω διαγράμματα αποδεικνύουν ότι δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά στη μεταλλογισμική περιοχή που να οφείλεται στην υδροστατική πίεση. Σε αναλογία με τα τετράγωνα ελάσματα, φαίνεται πως ελάσματα με μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις όταν εξετάζονται στη προλυγισμική περιοχή, προσεγγίζουν τη συμπεριφορά των ελασμάτων με

πολύ μικρές μετατοπίσεις που φορτίζονται πέραν του σημείου λυγισμού. Με άλλα λόγια, φαινόμενα που παρατηρούνται στην απόκριση των αρχικά επίπεδων ελασμάτων μεταλυγισμικά, εμφανίζονται στη προλυγισμική περιοχή ελασμάτων με μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις, χωρίς απαραίτητα αυτό να σημαίνει ότι έχουν αστοχήσει. Τέλος, μέχρι το μεγαλύτερο αξονικό φορτίο που εξετάστηκε (διπλάσιο του κρίσιμου φορτίου λυγισμού), δεν παρουσιάστηκε αλλαγή στα ημικύματα του βέλους κάμψης, όπως συνέβη στο έλασμα με μικρές αρχικές μετατοπίσεις.

Πίνακας 10: Θέση σημείων που παρουσιάζουν ακρότητα στη κάθετη μετατόπιση

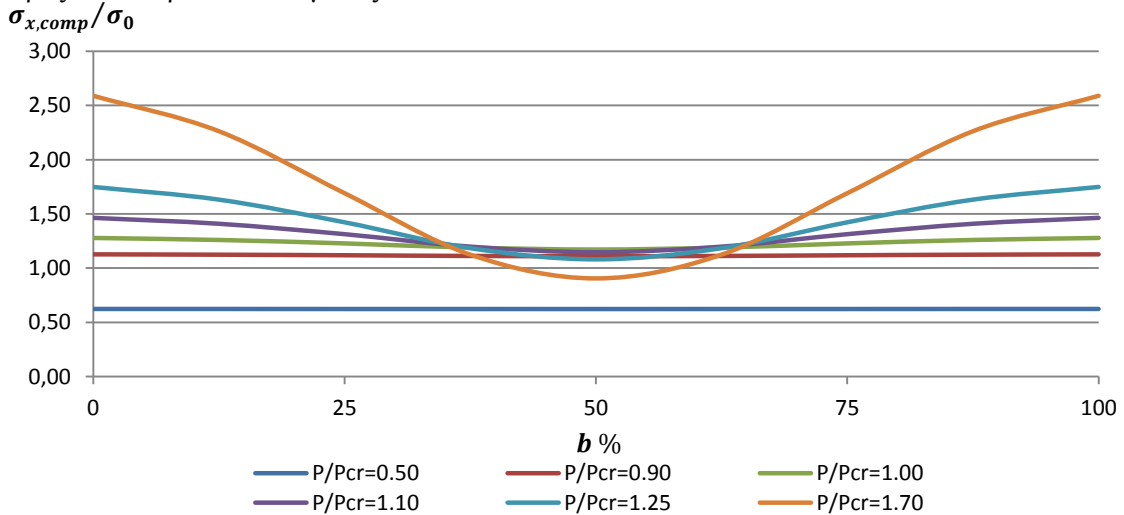
	P/Pcr=	Πλευρικό φορτίο	Κάθετη μετατόπιση μακριού ελάσματος (w/t)				
			0 (MPa)	0.10 (MPa)	0.15 (MPa)	0.20 (MPa)	-0.20 (MPa)
μικρές αρχικές μετατοπίσεις	0.5	Κοιλιάδα	-0.03	-	-	-	-0.56
		Θέση (α%)	50.0	-	-	-	50.0
		Κορυφή	0.03	0.24	0.37	0.51	-
		Θέση (α%)	18.75	50.00	50.00	50.00	-
	1.0	Κοιλιάδα	-0.34	0.004	0.25	0.48	-0.76
		Θέση (α%)	50.0	50.0	50.0	50.00	50.0
		Κορυφή	0.22	0.4	0.47	0.57	0.02
		Θέση (α%)	18.25	25.00	31.25	31.25	6.25
	1.5	Κοιλιάδα	-1.09	-0.93	-0.84	-0.75	-1.41
		Θέση (α%)	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0
		Κορυφή	0.93	1.04	1.09	1.14	0.73
		Θέση (α%)	25.00	25.00	25.00	25.00	18.75
Μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις	P/Pcr=	Πλευρικό φορτίο	0 (MPa)	0.10 (MPa)	0.15 (MPa)	0.20 (MPa)	-0.20 (MPa)
		Κοιλιάδα	-0.97	-0.80	-0.70	-0.61	-1.30
	0.5	Θέση (α%)	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
		Κορυφή	0.91	1.01	1.05	1.10	0.72
		Θέση (α%)	18.75	18.75	18.75	18.75	12.50
		Κοιλιάδα	-1.32	-1.18	-1.10	-1.03	-1.59
	1.0	Θέση (α%)	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
		Κορυφή	1.22	1.30	1.34	1.38	1.05
		Θέση (α%)	18.75	18.75	18.75	18.75	18.75
		Κοιλιάδα	-1.64	-1.52	-1.46	-1.40	-1.87
	1.5	Θέση (α%)	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
		Κορυφή	1.53	1.59	1.62	1.65	1.38
Θέση (α%)		18.75	18.75	18.75	18.75	18.75	

Ο πίνακας 10 παρουσιάζει τα αριθμητικά στοιχεία των κοιλάδων και των κορυφών για τις συνθήκες φόρτισης. Σε αντίθεση με την κοιλάδα (όταν υπάρχει) που βρίσκεται πάντα στο μέσο της τομής, βλέπουμε ότι η θέση των κορυφών εξαρτάται από το είδος της φόρτισης. Σημειώνεται πώς στον πίνακα αναγράφεται η διαμήκης θέση της πρώτης μόνο κορυφής, με την δεύτερη να βρίσκεται πάντα σε συμμετρική ως προς το κέντρο θέση. Εξαιρέση αποτελούν τα μικρά αξονικά φορτία ελασμάτων με μικρές αρχικές ατέλειες που παρουσιάζουν μοναδική κορυφή. Όπως και στα τετράγωνα ελάσματα, είναι φανερό ότι δεν υπάρχει γραμμικότητα στην αλλαγή του βέλους κάμψης με την επιβολή υδροστατικής πίεσης, ιδιαίτερα στη μεταλυγισμική περιοχή. Επιπλέον στις μεγάλες μετατοπίσεις η επιβολή υδροστατικής πίεσης δεν έχει σημαντικές διαφορές στις τιμές της απόκρισης.

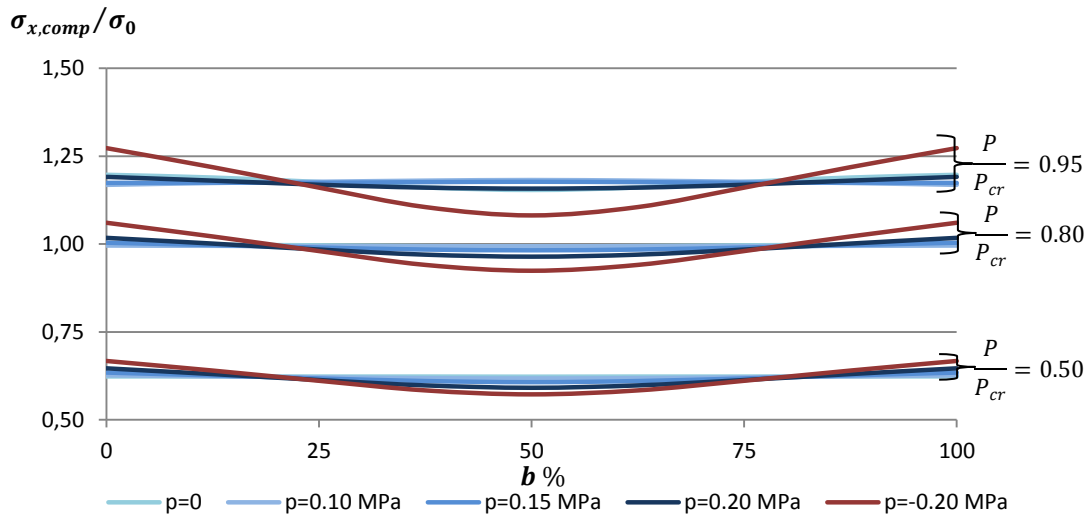
4.3.2 Κατανομές θλιπτικών τάσεων

Θα εξεταστούν στη συνέχεια οι θλιπτικές και οι καμπτικές τάσεις που προκύπτουν στον έλασμα σε εγκάρσιες τομές. Όπως και στη μελέτη των τετράγωνων ελασμάτων, επιλέγεται για ανάλυση της κατανομής αρχικά η εγκάρσια κεντρική τομή του ελάσματος.

Η κατανομή των θλιπτικών τάσεων κατά τη διεύθυνση του άξονα x φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 59. Οι συνθήκες φόρτισης περιλαμβάνουν μόνο την επιβολή εξωτερικού αξονικού φορτίου σε έλασμα με πολύ μικρές αρχικές ατέλειες. Σύμφωνα και με τον πίνακα 10 η κεντρική εγκάρσια τομή υπό αυτές τις συνθήκες φόρτισης έχει αρνητική μετατόπιση, καθώς είναι γνωστό ότι στο κέντρο του ελάσματος παρουσιάζεται κοιλιάδα, και κατά τη διεύθυνση του πλάτους δεν υπάρχει πάντα ένα ημικόμμα. Η κατανομή έχει την χαρακτηριστική και αναμενόμενη μορφή, δηλαδή οι θλιπτικές τάσεις εμφανίζονται ομοιόμορφα κατά το εγκάρσιο προλυγισμικά, ενώ από την εμφάνιση του λυγισμού και όσο προχωράμε περισσότερο στη μεταλυγισμική περιοχή, το παραλαμβανόμενο φορτίο διαχέεται προς τα σύνορα του ελάσματος



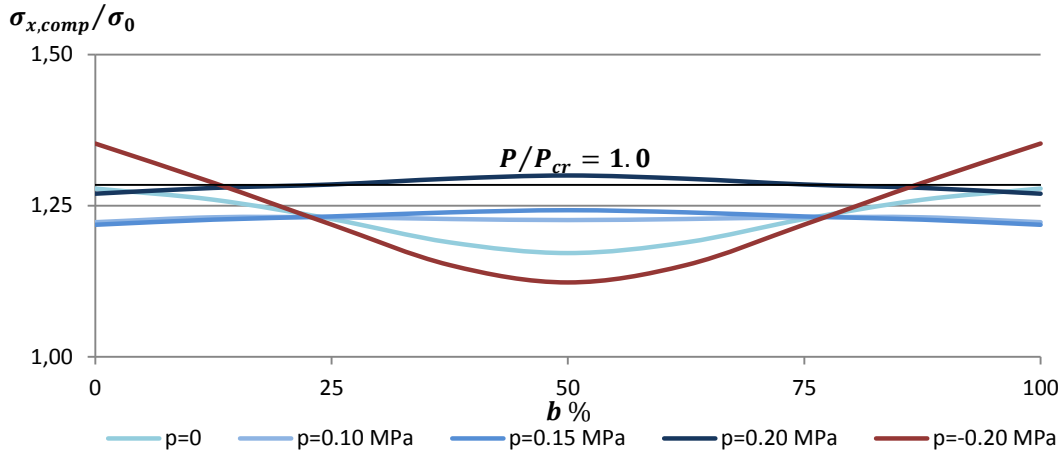
Σχήμα 59: Θλιπτικές τάσεις εγκάρσιας τομής σε μακρύ έλασμα



Σχήμα 60: Επίδραση πλευρικής φόρτισης στις θλιπτικές τάσεις

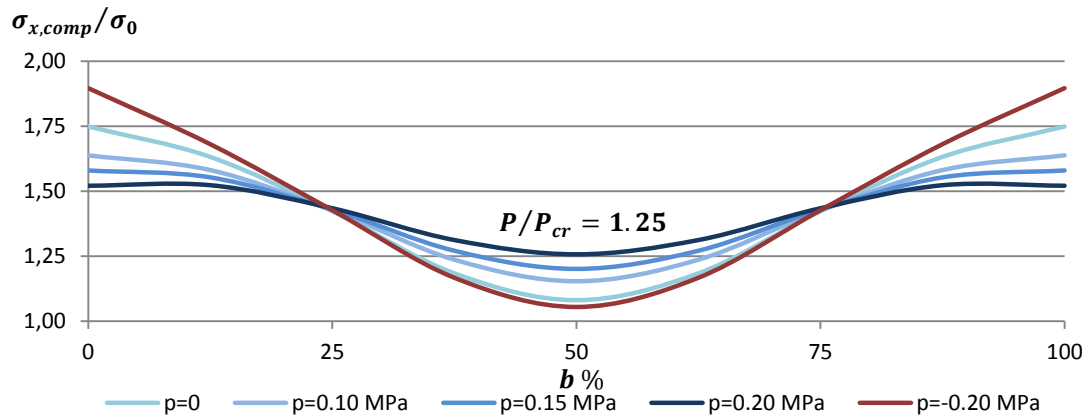
Από το παραπάνω διάγραμμα φαίνεται πως η υδροστατική πίεση δεν επιφέρει ιδιαίτερες μεταβολές στις θλιπτικές τάσεις που εμφανίζονται στην εγκάρσια τομή, τόσο στη κατανομή όσο και στις αλγεβρικές τιμές τους, στη προλυγισμική περιοχή. Η περίπτωση που φαίνεται να διαφέρει οριακά στη συμπεριφορά της είναι η επιβολή αρνητικής πλευρικής πίεσης, κατά την οποία ο ρυθμός διάχυσης τους φορτίου δείχνει να αυξάνεται με την αύξηση της αξονικής φόρτισης. Στη περίπτωση αυτή, επειδή αφορά έλασμα με μικρές αρχικές μετατοπίσεις θυμίζουμε ότι το βέλος κάμψης στην κεντρική εγκάρσια τομή διακρίνεται από αντίθετη καμπυλότητα. Ανατρέχοντας στα διαγράμματα βέλους κάμψης αυτής της περίπτωσης,

σημειώνεται ότι στο εύρος 0.8 έως 1.10 του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, στο κέντρο του ελάσματος για τις θετικές τιμές πλευρικής πίεσης, δημιουργείται ένα ημικόμμα αντίθετης φοράς στο έλασμα. Το γεγονός αυτό φαίνεται να έχει αντίκτυπο και στη κατανομή των θλιπτικών τάσεων, το οποίο παρουσιάζεται με τη βοήθεια του διαγράμματος 61. Για μηδενική και για αρνητική πλευρική πίεση η κατανομή είναι η αναμενόμενη, ενώ για τις υπόλοιπες περιπτώσεις το φορτίο που παραλαμβάνεται στο κέντρο είναι οριακά μεγαλύτερο από αυτό των άκρων του ελάσματος.



Σχήμα 61: Θλιπτικές τάσεις εγκάρσιας τομής τη στιγμή αλλαγής της μορφής βέλους κάμψης

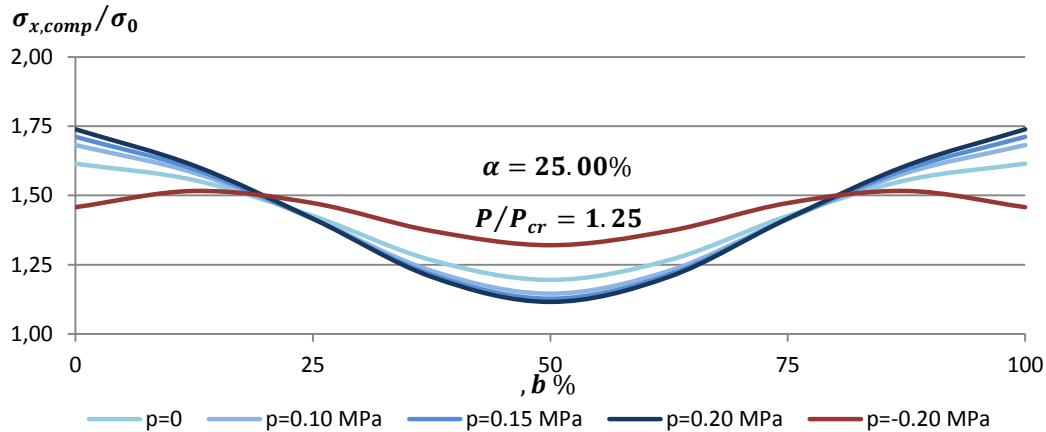
Αυτό φαίνεται να οφείλεται στην αλλαγή της μορφής του βέλους κάμψης από ένα σε τρία ημικόμματα. Παρακολουθώντας τη συμπεριφορά των τριών περιπτώσεων στο εύρος που γίνεται η αλλαγή αυτή, αποδείχθηκε ότι μέχρι να «σταθεροποιηθεί» η μορφή του ελάσματος, δηλαδή μέχρι η κοιλάδα που δημιουργείται να έχει βάθος ίσο με περίπου το 80% του ύψους των δύο κορυφών, η κατανομή των θλιπτικών τάσεων εκφράζεται από τη συμπεριφορά που παρουσιάζει το παραπάνω διάγραμμα και παρατηρείται ουσιαστικά στο τέλος της προλυγισμικής περιοχής, κατά το λυγισμό και στα πρώτα στάδια της μεταλυγισμικής περιοχής. Μετά την σταθεροποίηση της μορφής τους βέλους κάμψης η κατανομή των θλιπτικών τάσεων διακρίνεται και πάλι από τη γνωστή διάχυση του φορτίου προς τα άκρα του ελάσματος όπως φαίνεται και στο διάγραμμα του σχήματος 62.



Σχήμα 62: Θλιπτικές τάσεις εγκάρσιας τομής που βρίσκεται σε κορυφή

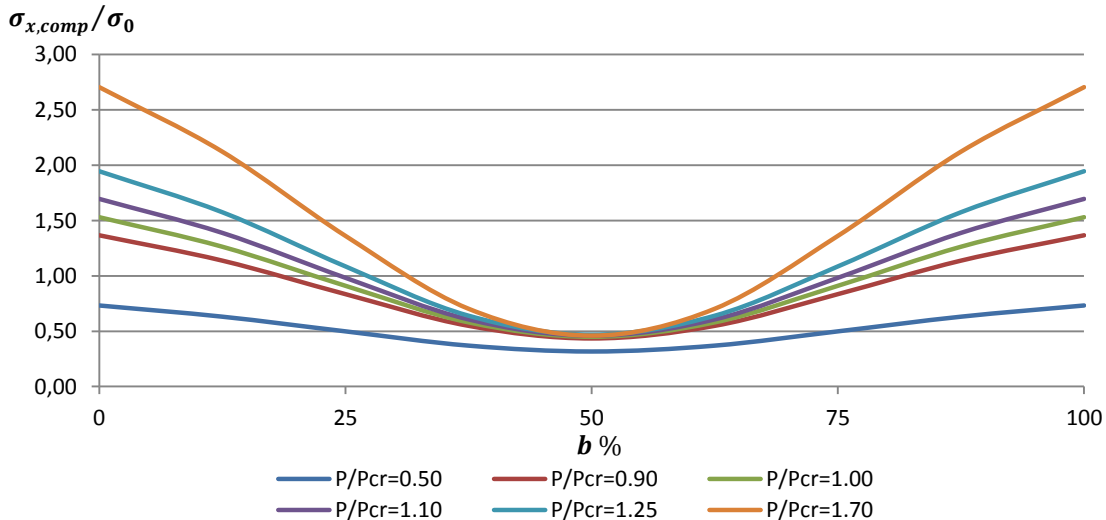
Εδώ παρατηρείται πως μεγαλύτερες τιμές της θετικής πλευρικής πίεσης έχουν ως αποτέλεσμα μεγαλύτερες τιμές των $\sigma_{x,comp}$ στο κέντρο της τομής και μικρότερες στα άκρα της τομής, αντίθετα δηλαδή από την μεταλυγισμική συμπεριφορά της κεντρικής εγκάρσιας τομής των τετράγωνων ελασμάτων. Αυτό είναι λογικό αν αναλογιστεί κανείς στην εγκάρσια τομή

που εξετάζεται έχει δημιουργηθεί κοιλάδα και επομένως η θετική πλευρική πίεση έχει αντίθετη φορά στη φορά του βέλους κάμψης, συνεισφέροντας στη θλίψη της τομής. Πράγματι το αντίστοιχο διάγραμμα εγκάρσιας τομής στο $\frac{1}{4}$ του μήκους όπου υπάρχει κορυφή, έχει αντίστοιχη συμπεριφορά που παρουσιάζεται στο σχήμα 63. Για μεγαλύτερα αξονικά φορτία η συμπεριφορά των κατανομών βρέθηκε όμοια αυτής των τετράγωνων ελασμάτων, ακόμα μεγαλύτερη σύγκλιση δηλαδή των καμπύλων για τις διάφορες τιμές της υδροστατικής πίεσης.



Σχήμα 63: Θλιπτικές τάσεις εγκάρσιας τομής που βρίσκεται σε κοιλάδα

Εξετάζονται τώρα οι θλιπτικές δυνάμεις που εμφανίζονται σε εγκάρσια τομή ελάσματος με μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις. Όμοια με τα τετράγωνα ελάσματα, η διάχυση του φορτίου από το κέντρο προς τα άκρα ξεκινάει από την προλυγισμική περιοχή, ακόμα και στη περίπτωση που δεν ασκείται πλευρική πίεση, όπως δείχνει το σχήμα 64. Ακόμα, η μέση θλιπτική τάση παραμένει μικρότερη στο έλασμα με μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις για λόγο πλευρών $a/b=2.5$.



Σχήμα 64: Θλιπτικές τάσεις σε μακρύ έλασμα με μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις

Ο πίνακας 11 παρουσιάζει τη μείωση της μέσης θλιπτικής τάσης για ίδιο αξονικό φορτίο, για αρχικά μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις. Η μεγαλύτερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού και αγγίζει το 23%.

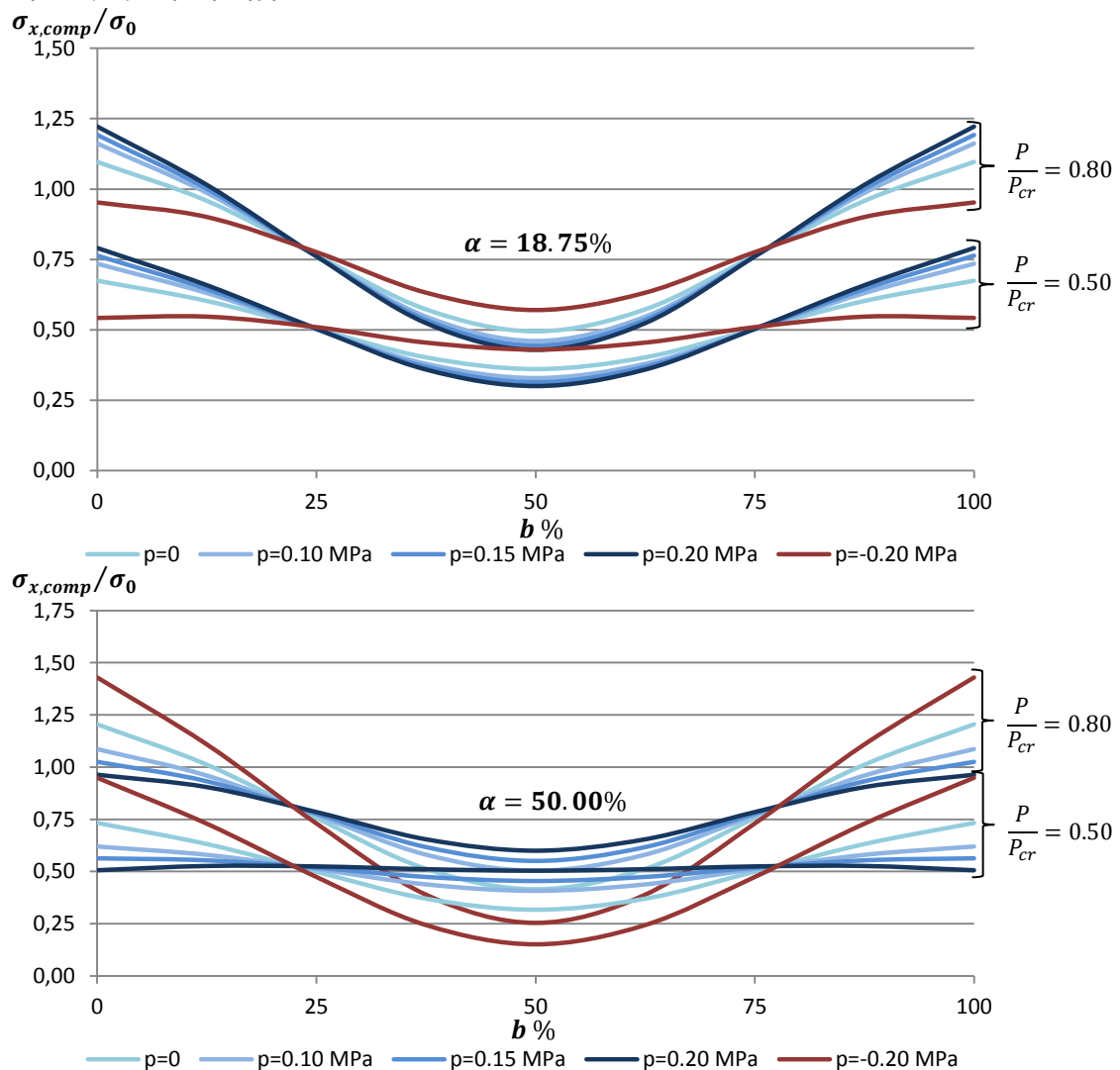
Εξετάζοντας τώρα την επίδραση της υδροστατικής πίεσης, βρέθηκε ότι η κατανομή των θλιπτικών τάσεων εξαρτάται όχι μόνο από τη φορά της, αλλά και από τη φορά του βέλους κάμψης στην διατομή που εξετάζεται, όπως και στο έλασμα με αρχικά μικρές μετατοπίσεις.

Θυμίζουμε ότι στο έλασμα με μεγάλες αρχικές ατέλειες η μορφή του βέλους κάμψης είχε αρχικά 3 ημικόματα και δεν υπήρξε μεταβολή τους στα στάδια κάθε φόρτισης.

Πίνακας 11: Μέση θλιπτική τάση σε μακρύ έλασμα για μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις

Μέση θλιπτική τάση στην κεντρική εγκάρσια τομή ($\sigma_{x,comp}/\sigma_0$)							
Προλογισμική περιοχή				Μεταλογισμική περιοχή			
P/P_{cr}	$W_0=0$	$W_0=0.008m$	Διαφορά	P/P_{cr}	$W_0=0$	$W_0=0.008m$	Διαφορά
0.20	0.25	0.22	0.03	1.00	1.23	1.00	0.23
0.40	0.50	0.43	0.07	1.05	1.28	1.05	0.23
0.50	0.62	0.53	0.09	1.10	1.32	1.09	0.23
0.60	0.75	0.63	0.12	1.25	1.45	1.22	0.23
0.80	1.00	0.82	0.18	1.50	1.65	1.42	0.23
0.90	1.12	0.91	0.21	1.70	1.80	1.58	0.22

Ακολουθούν τα διαγράμματα κατανομής θλιπτικών τάσεων σε εγκάρσιες τομές στις οποίες παρουσιάζονται κορυφή (18.75% του μήκους) και κοιλάδα (50% του μήκους), στη προλογισμική περιοχή.

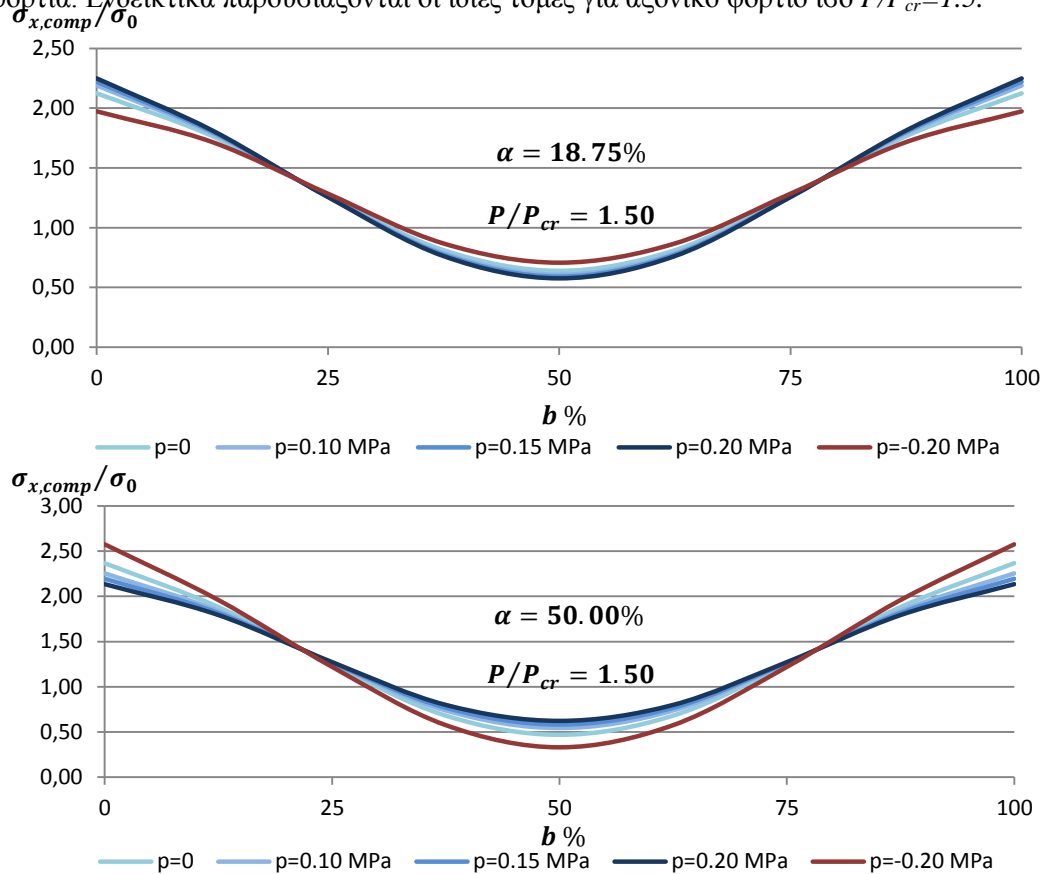


Σχήμα 65: Εγκάρσιες τομές σε κορυφή και κοιλάδα ελάσματος με αρχικές ατέλειες (προλογισμικά)

Η χαρακτηριστική συμπεριφορά της διάχυσης του φορτίου είναι εμφανής για κάθε περίπτωση. Αυτό που διαφοροποιείται για τις δύο τομές, είναι ότι όταν βέλος κάμψης και

πλευρική πίεση έχουν ίδια φορά, οι θλιπτικές τάσεις που εμφανίζονται στο κέντρο μειώνονται με την αύξηση της τιμής της πλευρικής πίεσης, ενώ στα άκρα αυξάνονται. Όταν όμως βέλος κάμψης και πλευρικό φορτίο έχουν αντίθετες κατευθύνσεις, με την αύξηση του δεύτερου εμφανίζονται μεγαλύτερες θλιπτικές τάσεις στο κέντρο και μικρότερες στα άκρα. Όπως προαναφέρθηκε, στη δεύτερη περίπτωση το πλευρικό φορτίο συνεισφέρει στη θλίψη του κέντρου του ελάσματος, λόγω της αντίθετης φοράς που αυτό τείνει να μετατοπιστεί με την αύξηση του αξονικού φορτίου.

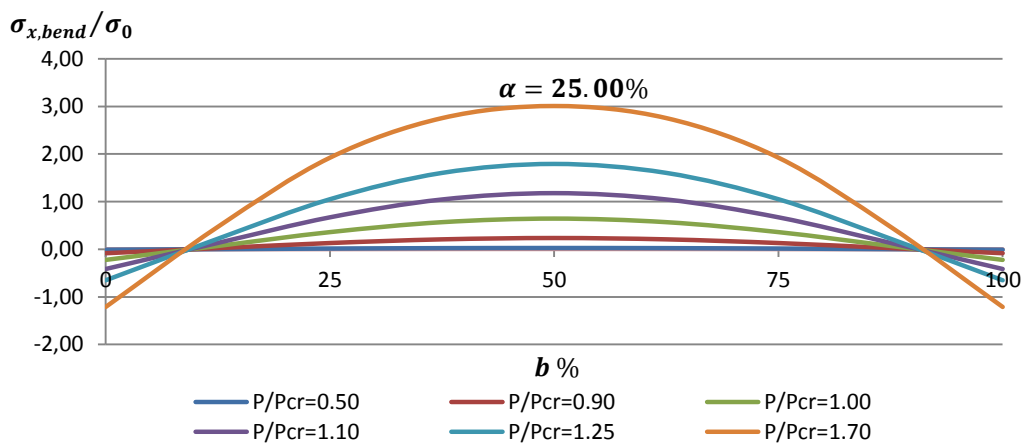
Αντίστοιχη συμπεριφορά παρατηρήθηκε και στη μεταλυγισμική συμπεριφορά με τις τιμές των υδροστατικών καμπυλών να συγκλίνουν όλο και περισσότερο για μεγάλα αξονικά φορτία. Εγδεικτικά παρουσιάζονται οι ίδιες τομές για αξονικό φορτίο ίσο $P/P_{cr}=1.5$.



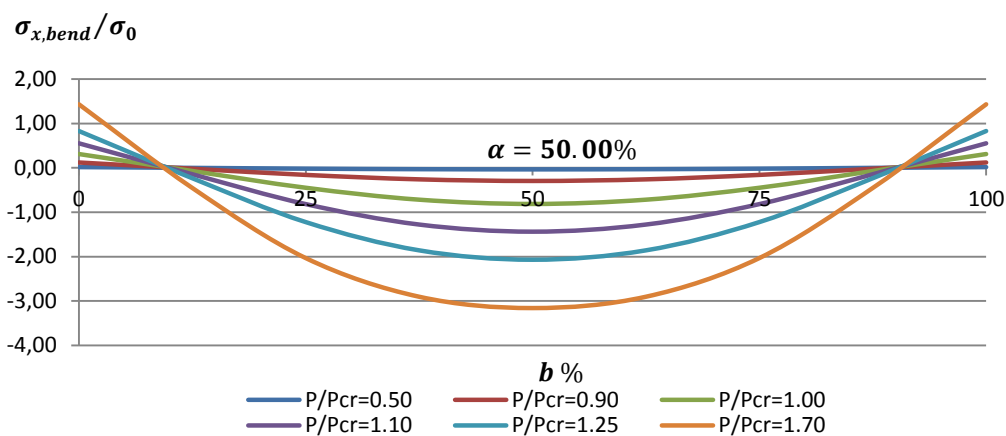
Σχήμα 66: Εγκάρσιες τομές σε κορυφή και κοιλάδα ελάσματος με αρχικές ατέλειες (προλυγισμικά)

4.3.3 Κατανομές καμπτικών τάσεων

Εξετάζονται τώρα οι καμπτικές τάσεις στις εγκάρσιες τομές του ελάσματος για μικρές και μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις. Όπως είναι αναμενόμενο, οι καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται στη θετική όψη του ελάσματος, έχουν το πρόσημο της διεύθυνσης της κάθετης μετατόπισης. Για την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης ελάσματος χωρίς αρχικές ατέλειες, οι καμπτικές τάσεις κατά τη διεύθυνση του άξονα x , έχουν την ομαλή συμπεριφορά που παρουσιάζουν τα παραπάνω διαγράμματα, μέγιστης απόλυτης τιμής στο κέντρο και μηδενισμού περίπου στο 10% από τα άκρα της τομής, όπως συνέβαινε και με την αντίστοιχη περίπτωση των τετράγωνων ελασμάτων. Η τομή που βρίσκεται σε κορυφή εμφανίζει θετικές καμπτικές τάσεις ενώ η τομή που βρίσκεται σε κοιλάδα εμφανίζει αρνητικές.



Σχήμα 67: Καμπτικές τάσεις σε εγκάρσια τομή κορυφής



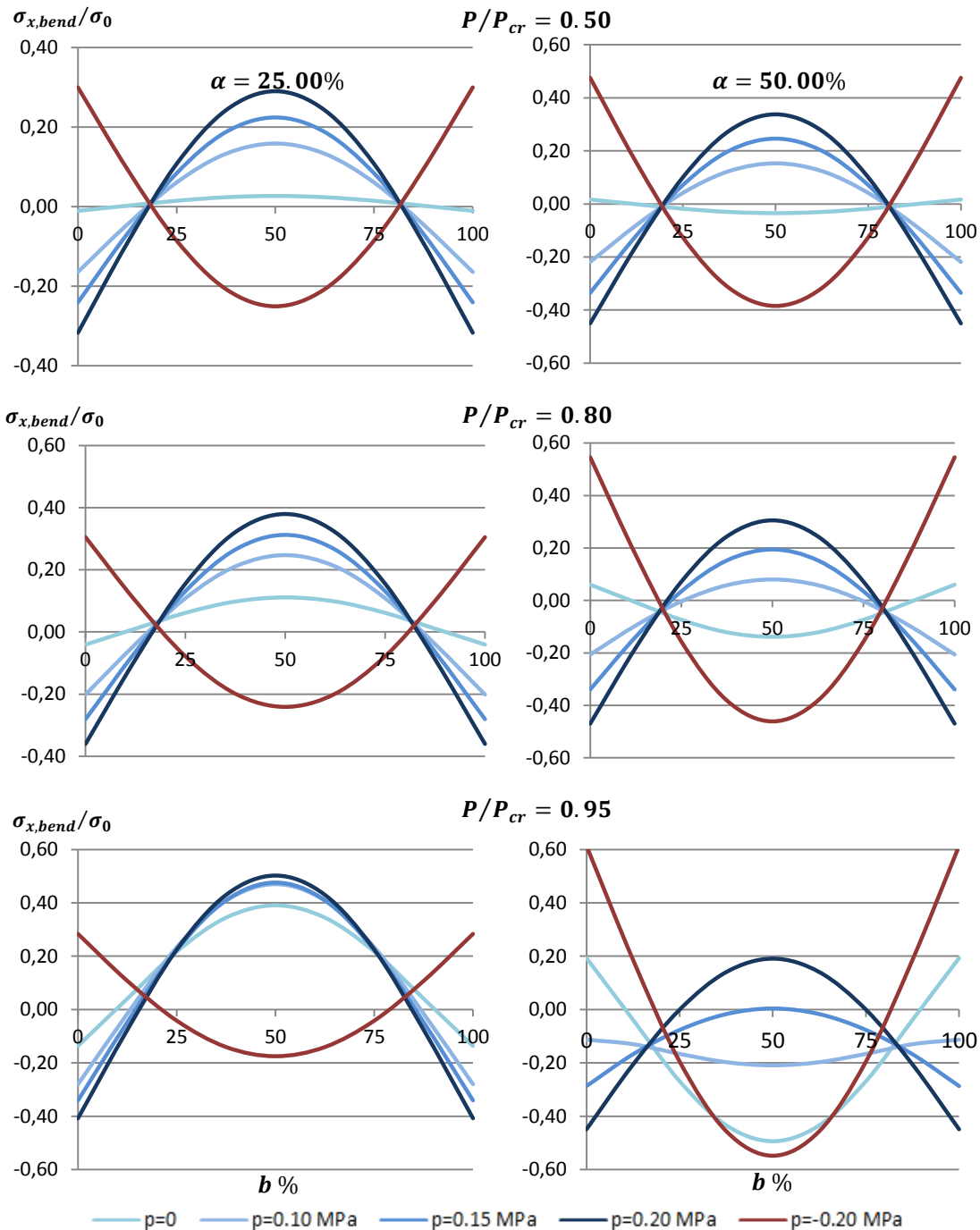
Σχήμα 68: Καμπτικές τάσεις σε εγκάρσια τομή κορυφής

Επειδή όπως δείξαμε η μορφή του βέλους κάμψης σε έλασμα με μικρές αρχικές ατέλειες αλλάζει προλυγισμικά με την επιβολή πλευρικού φορτίου, αναμένονται αλλαγές στα πρόσημα των κατανομών στη συνέχεια της μελέτης. Για το σκοπό αυτό παραθέεται η παρακάτω σειρά διαγραμμάτων του σχήματος 69.

Τα διαγράμματα αυτά παρουσιάζουν συνοπτικά την κατανομή των καμπτικών τάσεων αρχικά επίπεδου ελάσματος στη μεταλυγισμική περιοχή. Η αριστερή στήλη διαγραμμάτων αφορά σε εγκάρσια τομή στο ένα $\frac{1}{4}$ το μήκους του ελάσματος που παρουσιάζεται η πρώτη κορυφή, και η δεύτερη στήλη αφορά την εγκάρσια κεντρική τομή όπου παρουσιάζεται κοιλάδα με επιβολή θετικής πλευρικής πίεσης. Στην αριστερή στήλη οι κατανομές έρχονται σε συμφωνία με τα μέχρι τώρα αποτελέσματα. Η επιβολή υδροστατικής πίεσης προλυγισμικά επιφέρει μεγάλη αύξηση των καμπτικών τάσεων που ασκούνται στο έλασμα, και οι καμπύλες της πλευρικής φόρτισης συγκλίνουν στο κέντρο και αποκλίνουν στα άκρα της τομής με την αύξηση του αξονικού φορτίου, όπως έδειξε και η μελέτη των τετράγωνων ελασμάτων. Ωστόσο, οι κατανομές κυμαίνονται στο ίδιο πεδίο τιμών για αξονικά φορτία από 0.5 έως 0.95 του P_{cr} , σε αντίθεση με τα τετράγωνα ελάσματα.

Στην κεντρική τομή που με την αύξηση του αξονικού φορτίου θα αλλάξει η φορά της κάθετης μετατόπισης, παρουσιάζεται διαφορετική συμπεριφορά. Συγκεκριμένα φαίνεται ότι οι καμπτικές τάσεις διατηρούν την κυρτή στο κέντρο κατανομή τους παρόλο που εμφανισιακά μπορεί να είναι ήδη ορατή η δημιουργία της κοιλάδας. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται στο έλασμα λειτουργούν ενάντια στην

αλλαγή της φοράς της κάθετης μετατόπισης αρχικά. Από ένα σημείο και μετά ωστόσο η μετατόπιση ξεπερνάει μια κρίσιμη τιμή και οι καμπτικές τάσεις αποκτούν κοίλη κατανομή στο κέντρο, και πλέον συνεισφέρουν στη φορά της μετατόπισης, καθώς αλλάζουν πρόσημο. Για πλευρική πίεση ίση με 0.10 MPa αυτό υπολογίστηκε ότι συμβαίνει για αξονικό φορτίο μεταξύ $0.9-0.95$ του P_{cr} . Η αύξηση του αριθμού ημικυμάτων από τη θεωρία σημαίνει ότι έχει επέλθει λυγισμός και εδώ μπορούμε γραφικά να προσδιορίσουμε από το αξονικό φορτίο στο οποίο οι καμπτικές τάσεις αλλάζουν τη φορά της κατανομής τους στην εγκάρσια κεντρική τομή. Ο πίνακας 12 προσδιορίζει τα φορτία στα οποία η δημιουργία της κοιλιάδα είναι πλέον ορατή γραφικά, καθώς επίσης και τα φορτία που οι καμπτικές τάσεις αλλάζουν φορά.



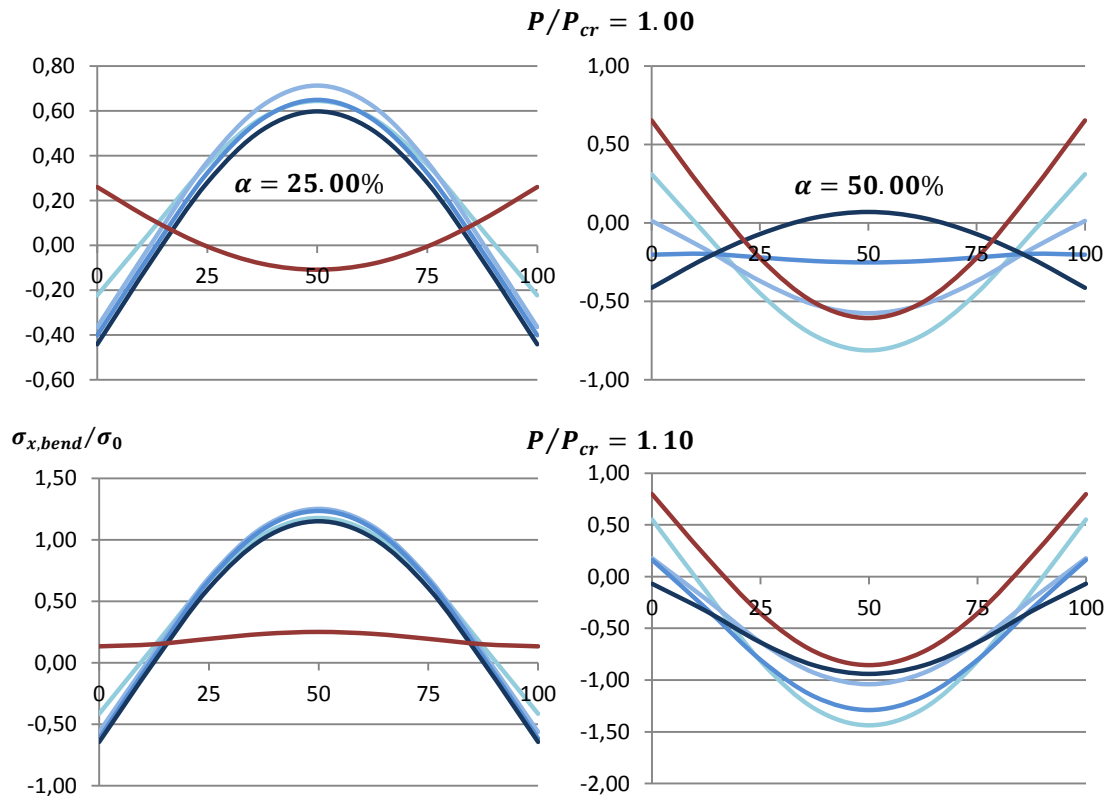
Σχήμα 69: Καμπτικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές μακρού ελάσματος προλυγισμικά παρουσία πλευρικού φορτίου

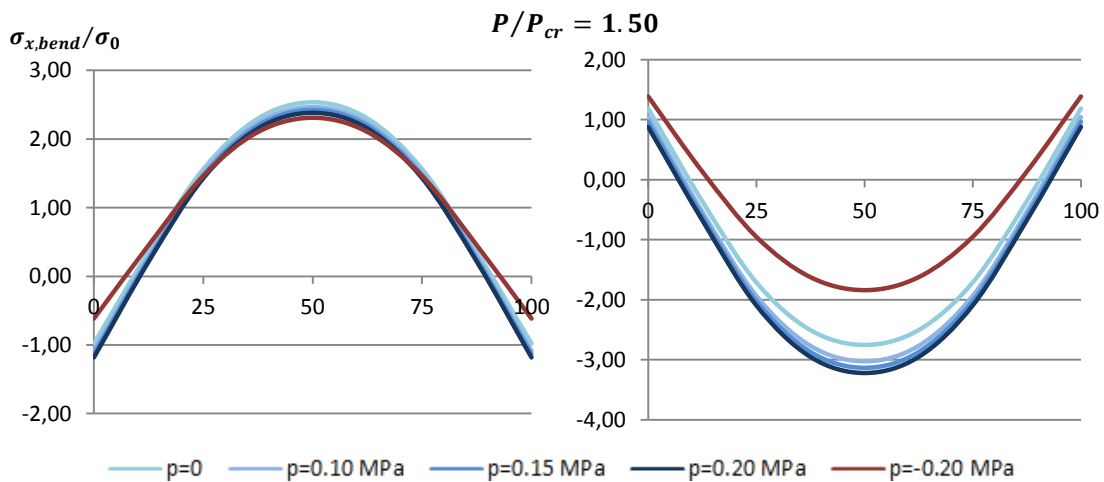
Πρέπει εδώ να σημειωθεί πως για την αρνητική πλευρική φόρτιση δεν εξετάστηκε η κεντρική εγκάρσια τομή καθώς η αλλαγή της μορφής των ημικυμάτων δε προκύπτει στο κέντρο αλλά στα σύνορα του ελάσματος. Η μελέτη έγινε πάνω στη εγκάρσια τομή κοντά στο 18% του μήκους όπου εμφανίζεται κορυφή. Αν θεωρήσουμε πως η τρίτη στήλη του πίνακα προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, βλέπουμε ότι τα νούμερα αυτά είναι κοντά με τα γραφικά αποτελέσματα του βέλους κάμψης των σημείων του ελάσματος που δίνονται στα διαγράμματα του σχήματος 69.

Πίνακας 12: Σημείο αλλαγής κατανομής βέλους κάμψης και καμπτικών τάσεων

Πλευρική πίεση (MPa)	Φορτίο έναρξης αλλαγής αριθμού ημικυμάτων (P/P_{cr})	Φορτίο αλλαγής της κατανομής των $\sigma_{x,bend}$ (P/P_{cr})
0.10	0.70	0.95
0.15	0.80	0.97
0.20	0.90	1.07
-0.20	0.93	1.08

Για τα ελάσματα με λόγο πλευρών 2.5 φαίνεται πως ο τύπος του *Bryan* κάνει μια υπερεκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού της τάξης του 5%, όπως φαίνεται γραφικά. Με βάση αυτό συμπεραίνεται πως στα ελάσματα αυτά η πλευρική πίεση αυξάνει ελάχιστα την αντοχή σε λυγισμό, σε αντίθεση με τα τετράγωνα ελάσματα που τη μειώνει σημαντικά. Η διαφορά αυτή οφείλεται στο ότι λόγω του μεγαλύτερου μήκους τους, τα μακριά ελάσματα είναι πιο εύκολο να αλλάξουν τον αριθμό ημικυμάτων, γεγονός που απαιτεί μεγαλύτερο εξωτερικό έργο. Μάλιστα φάνηκε πως για πάνω από ένα ημικύματα, η πλευρική πίεση παίζει το ρόλο της στήριξης του ελάσματος έναντι του λυγισμού για ένα σημαντικό εύρος αξονικού φορτίου, αυξάνοντας έτσι το κρίσιμο φορτίο αστοχίας. Τα διαγράμματα των καμπτικών τάσεων στη μεταλυγισμική περιοχή φαίνονται παρακάτω.



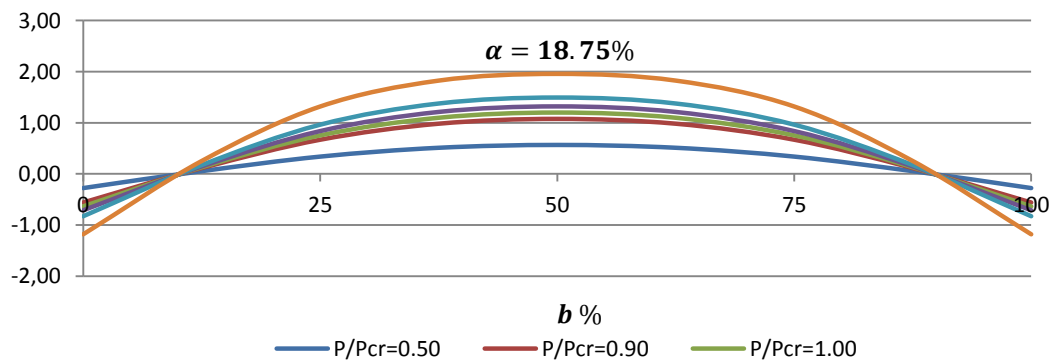


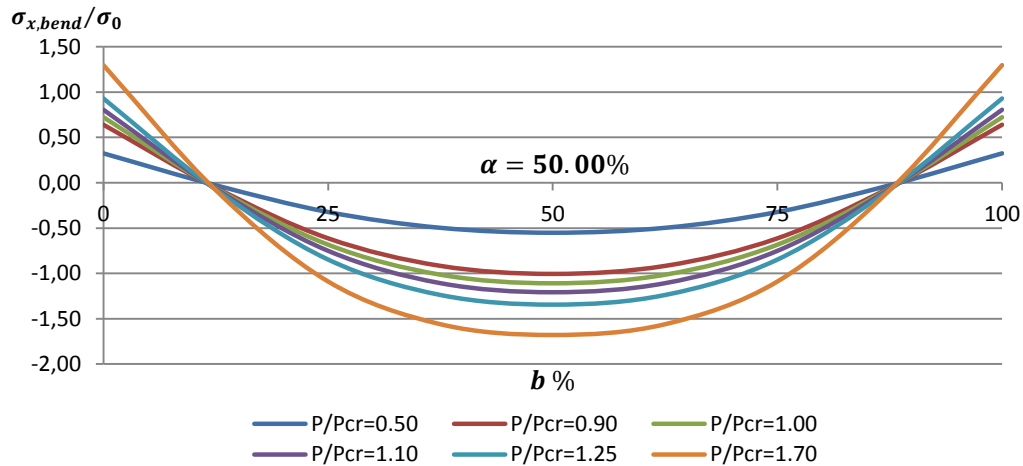
Σχήμα 70: Καμπτικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές μακρού ελάσματος μεταλυσιμικά παρουσία πλευρικού φορτίου

Στη σειρά διαγραμμάτων του σχήματος 70 που περιγράφει τη μεταλυσιμική συμπεριφορά των ελασμάτων με πολύ μικρές αρχικές μετατοπίσεις, στην αριστερή στήλη ενδιαφέρον έχει η περίπτωση της αρνητικής πλευρικής φόρτισης. Όπως προαναφέρθηκε η εγκάρσια αυτή τομή είναι κοντά στο σημείο αλλαγής αριθμού ημικυμάτων για αυτές τις συνθήκες φόρτισης, και γίνεται η εγκάρσια τομή που βρίσκεται σε κορυφή για μεγάλα αξονικά φορτία. Όπως φάνηκε και στον πίνακα 12, η κατανομή αλλάζει φορά λίγο πριν το 1.10 του P_{cr} . Στη συνέχεια συγκλίνει με τις υπόλοιπες τιμές υδροστατικής πίεσης καθώς η μορφή του βέλους κάμψης είναι πλέον παρόμοια με αυτές.

Αντίστοιχα στην δεξιά στήλη διαγραμμάτων που την αφορούν την εγκάρσια κεντρική τομή, το ενδιαφέρον συγκεντρώνουν οι καμπύλες των 0.15 και 0.20 MPa, οι οποίες αλλάζουν την κυρτότητά τους στο 1.00 και λίγο πριν το 1.10 του θεωρητικού κρίσιμου φορτίου αντίστοιχα. Για όλες τις περιπτώσεις φόρτισης γενικά παρατηρείται ότι όταν η πλευρική φόρτιση και η φορά μετατόπισης έχουν αντίθετη διεύθυνση, οι καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται είναι αυξημένες για μεγαλύτερες τιμές της υδροστατικής πίεσης. Όταν τα δύο μεγέθη έχουν ίδια διεύθυνση, οι καμπτικές τάσεις μειώνονται για μεγαλύτερες τιμές της πλευρικής φόρτισης.

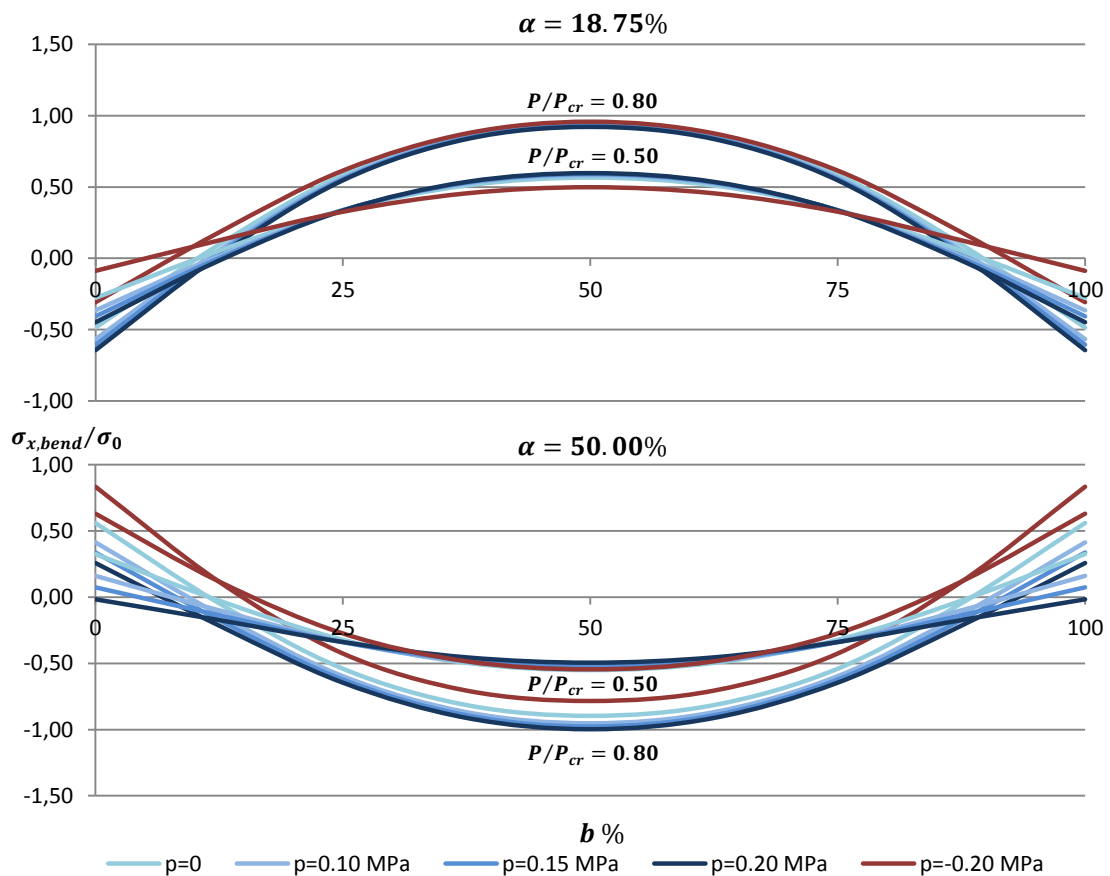
Έχοντας παρουσιάσει τη συμπεριφορά των καμπτικών τάσεων που εμφανίζονται στο έλασμα σε εγκάρσιες τομές, θα διεξαχθεί η ίδια πορεία εξέτασης για την περίπτωση του ελάσματος με μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις. Σε αναλογία με τις εγκάρσιες τομές που εμφανίζονται κορυφές και κοιλάδες για αρχικά επίπεδο έλασμα, οι κατανομές έχουν μεγαλύτερες τιμές προλυσιμικά, και μικρότερες μεταλυσιμικά.





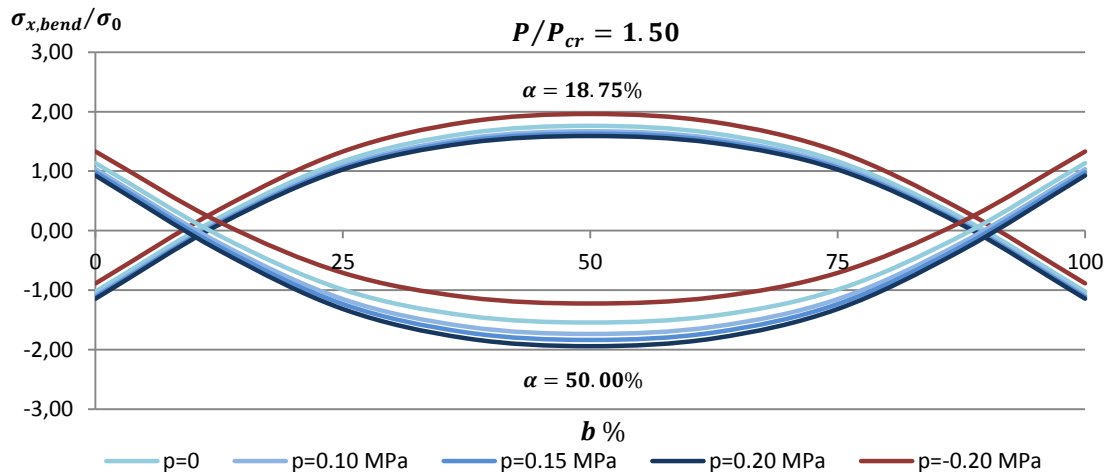
Σχήμα 71: Καμπτικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές κορυφής και κοιλάδας (Μεγάλες μετατοπίσεις)

Τα διαγράμματα βέλους κάμψης έδειξαν ότι δεν υπάρχει αλλαγή του αριθμού ημικυμάτων σε καμία περίπτωση φόρτισης για έλασμα με μεγάλες αρχικές ατέλειες. Επομένως θα παρουσιαστούν οι εγκάρσιες τομές για λιγότερα αξονικά φορτία, αντιπροσωπευτικά για την προλυγισμική και τη μεταλυσισμική συμπεριφορά.



Σχήμα 72: Εγκάρσιες τομές κορυφής και κοιλάδας προλυγισμικά, παρουσία πλευρικού φορτίου

Λόγω των μεγάλων αρχικών μετατοπίσεων, η επιβολή της υδροστατικής πίεσης πλέον δεν έχει σημαντική επίδραση στις καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται στο έλασμα προλυγισμικά, σε καμία από τις δύο τομές.



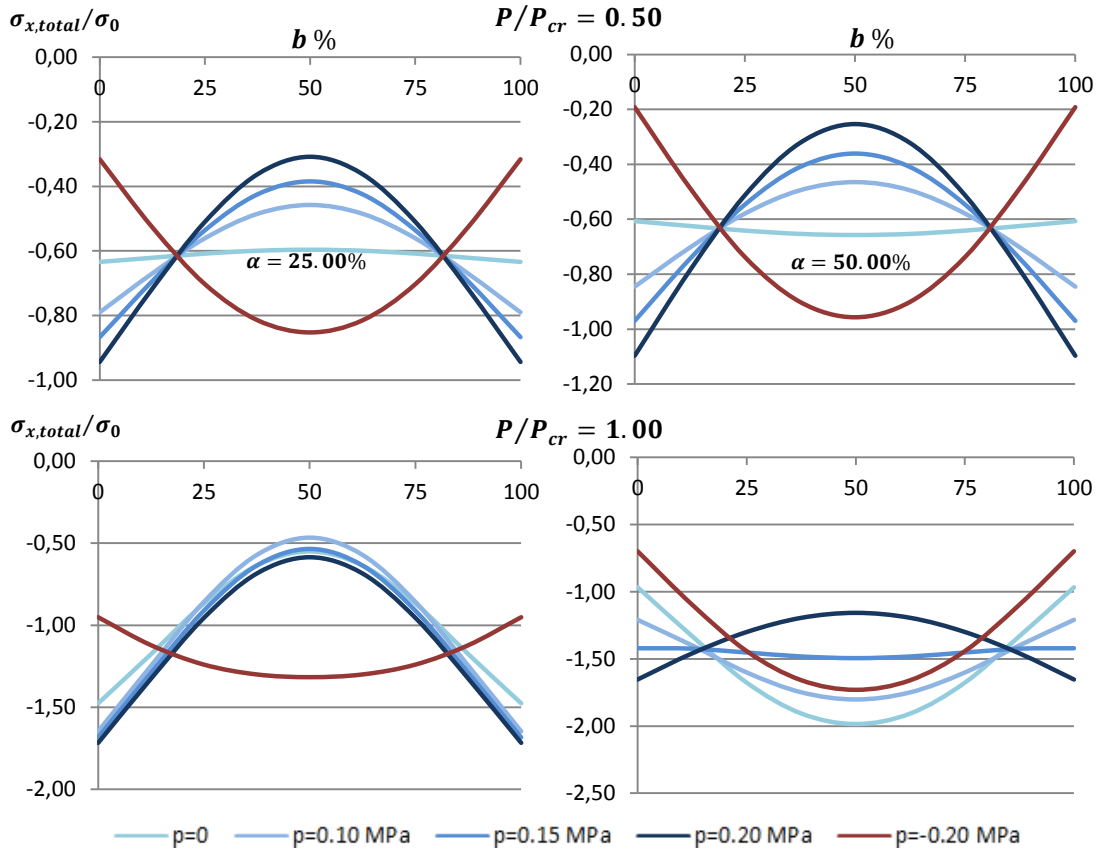
Σχήμα 73: Εγκάρσιες τομές κορυφής και κοιλάδας μεταλυσιμικά, παρουσία πλευρικού φορτίου

Η υδροστατική πίεση φαίνεται να έχει ορατές διαφορές στη μεταλυσιμική μόνο περιοχή, και συγκεκριμένα για μεγάλα αξονικά φορτία. Όπως φαίνεται και από το σχήμα 73 οι μεγαλύτερες διαφορές εντοπίζεται στο κέντρο της εγκάρσιας τομής που βρίσκεται σε κοιλάδα. Η μέγιστη προσαύξηση που υπολογίστηκε είναι προφανώς από την μεγαλύτερη θετική πλευρική φόρτιση, η οποία για $P/P_{cr}=1.00$ προσδίδει στις καμπτικές τάσεις ένα επιπλέον 18% του $\sigma_{x,bend}/\sigma_0$, το οποίο φτάνει μέχρι το 28% για το διπλάσιο αξονικό φορτίο.

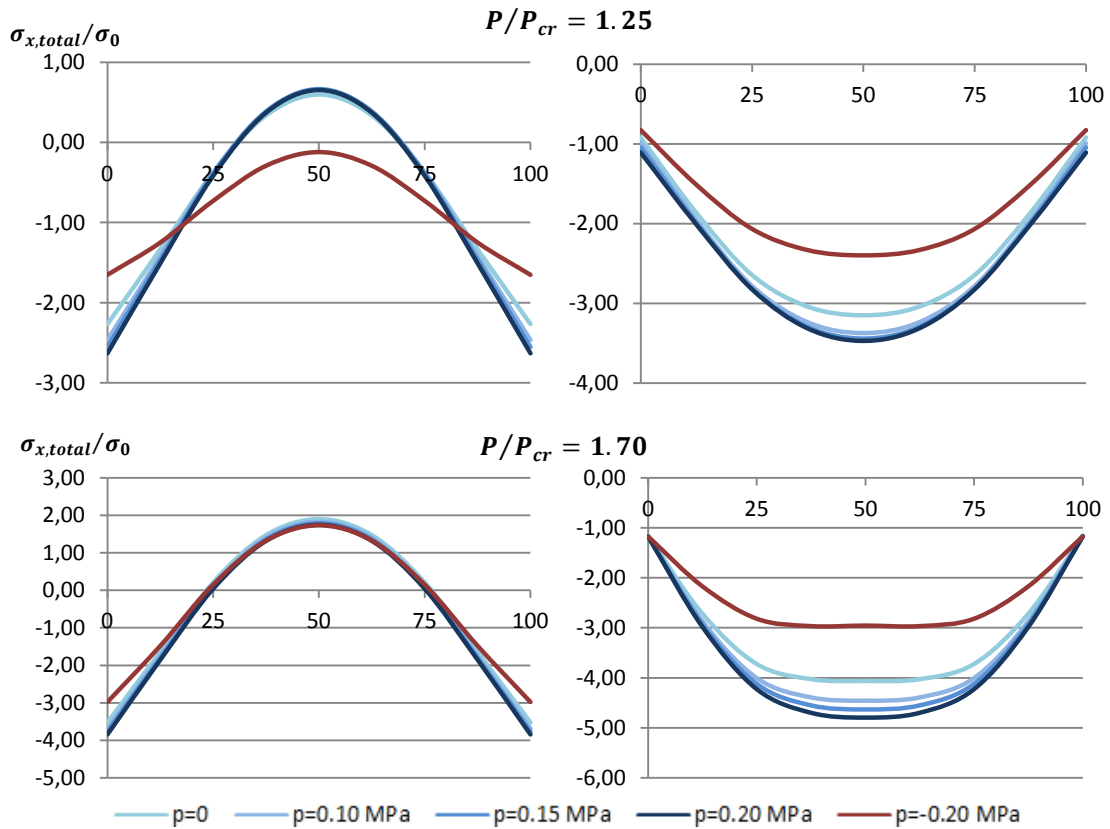
4.3.4 Κατανομές συνολικών τάσεων

Κλείνοντας το εδάφιο των ελασμάτων με λόγο πλευρών 2.5, θα παρουσιαστούν οι κατανομές των συνολικών τάσεων παράλληλων στο άξονα x . Σε αντιστοιχία με την μελέτη των τετράγωνων ελασμάτων οι συνολικές τάσεις υπολογίζονται στην θετική όψη του ελάσματος, στη προλυσιμική και στη μεταλυσιμική περιοχή.

Η παραπάνω σειρά διαγραμμάτων παρουσιάζει τις κατανομές των συνολικών τάσεων στη διεύθυνση του άξονα x , στις δύο εγκάρσιες τομές που εμφανίζουν κορυφή και κοιλάδα, για όλο το εύρος της αξονικής φόρτισης. Αρχικά εξετάζεται έλασμα με πολύ μικρές αρχικές ατέλειες. Η αριστερή στήλη διαγραμμάτων δείχνει ότι οι θλιπτικές τάσεις υπερτερούν των καμπτικών σε όλο το μήκος της τομής μέχρι το αξονικό φορτίο να ξεπεράσει το θεωρητικό κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Στη συνέχεια στο κέντρο της τομής οι καμπτικές τάσεις είναι μεγαλύτερες. Αντίθετα όπως έδειξε και η μέχρι τώρα ανάλυση, οι συνολικές τάσεις στην κεντρική τομή είναι μόνιμα αρνητικές, καθώς καμπτικές και θλιπτικές τάσεις έχουν το ίδιο πρόσημο στο μεγαλύτερο πεδίο της φόρτισης. Στα διαγράμματα αυτά, πέραν των αξονικών φορτίων στα οποία συμβαίνει η αλλαγή του αριθμού των ημικυμάτων, φαίνεται πως η επιβολή υδροστατικής πίεσης μεγάλο ρόλο παίζει στην κεντρική εγκάρσια τομή, για μεγάλα αξονικά φορτία.

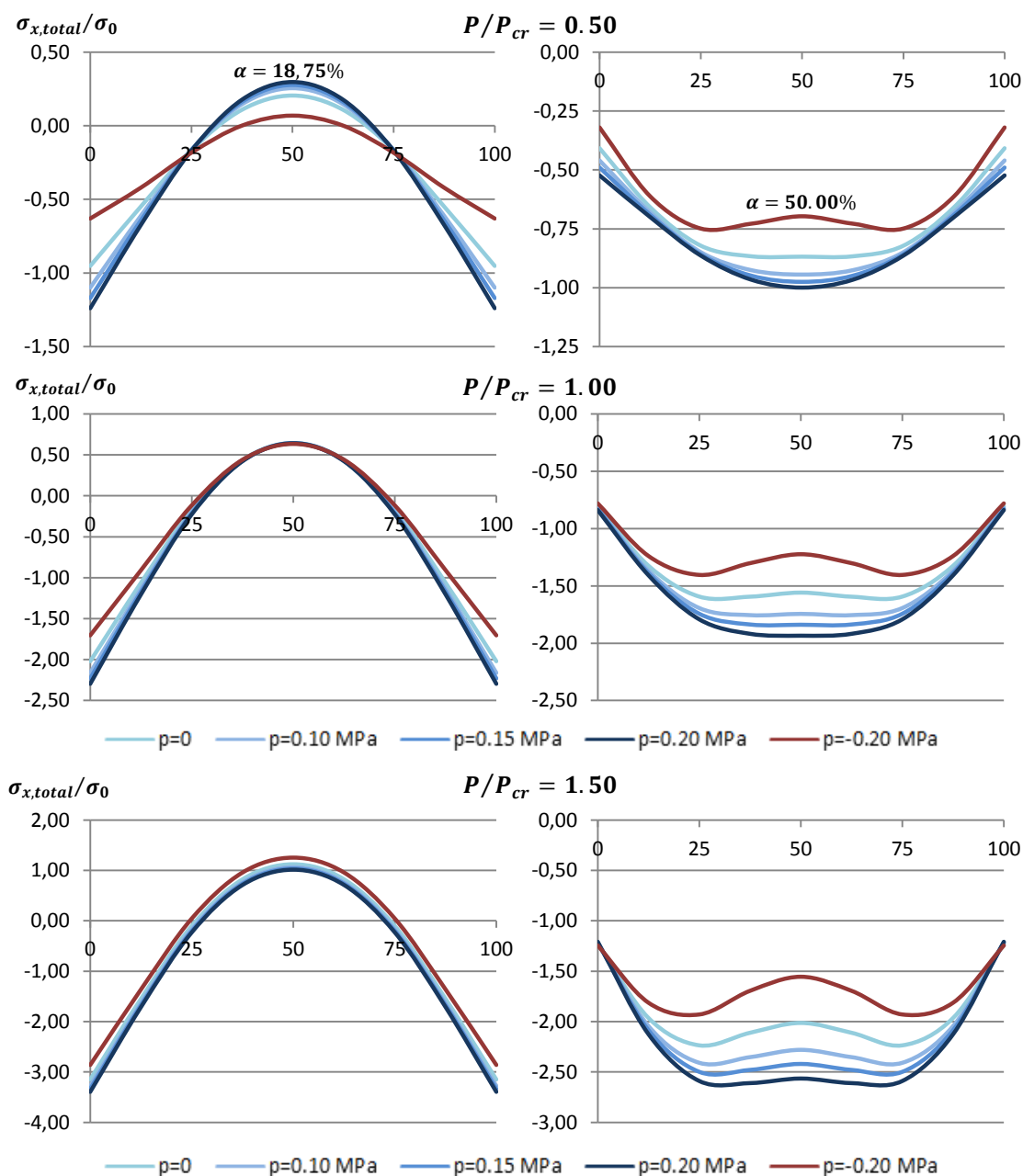


Σχήμα 74: Συνολικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές προλυγισμικά (μικρές μετατοπίσεις)



Σχήμα 75: Συνολικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές μεταλυγισμικά (μικρές μετατοπίσεις)

Αντίστοιχα παρουσιάζεται και η σειρά διαγραμμάτων για την περίπτωση του ελάσματος με μεγάλες αρχικές ατέλειες.



Σχήμα 76: Συνολικές τάσεις σε εγκάρσιες τομές (μεγάλες μετατοπίσεις)

Όπως και στη περίπτωση των αρχικά μικρών μετατοπίσεων, στη εγκάρσια τομή όπου υπάρχει κορυφή, οι καμπύλες των διάφορων τιμών υδροστατικής πίεσης συγκλίνουν. Μάλιστα η σύγκλιση είναι μεγαλύτερη και στη προλυγισμική περιοχή, γεγονός που δικαιολογείται από τη σταθερή μορφή του βέλους κάμψης στη προλυγισμική περιοχή για όλες τις τιμές της πλευρικής φόρτισης. Στην εγκάρσια κεντρική τομή, η χαρακτηριστική κατανομή είναι της αρνητικής πλευρικής πίεσης. Οι καμπτικές ροπές που εμφανίζονται στο κέντρο της τομής είναι αρνητικές, καθώς τα θετικά πλευρικά φορτία ασκούν σε εκείνο το σημείο τάσεις αντίθετης φοράς με τη διεύθυνση της κάθετης μετατόπισης. Παράλληλα η διάχυση του φορτίου που ξεκινάει από τη προλυγισμική περιοχή στις μεγάλες μετατοπίσεις,

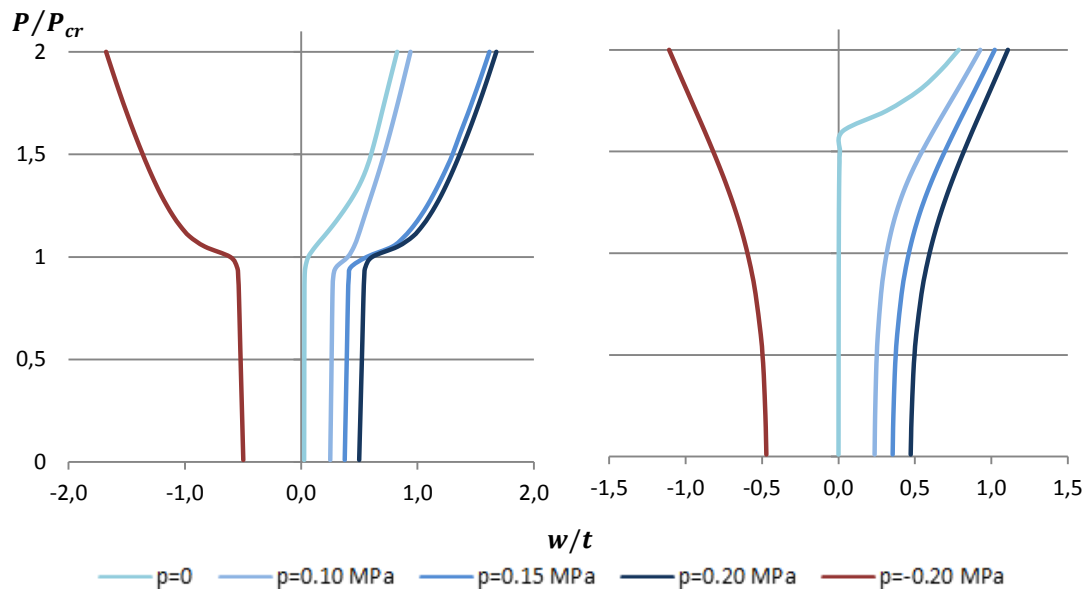
έχει ως αποτέλεσμα μικρότερες θλιπτικές τάσεις στο χώρο του κέντρου, οι οποίες έχουν προφανώς αρνητικό πρόσημο. Το φαινόμενο είναι πιο έντονο στα μεγαλύτερα αξονικά φορτία, και έτσι προκύπτει η κατανομή των συνολικών τάσεων στον άξονα x , η οποία και φαίνεται στα διαγράμματα της δεξιάς στήλης.

4.4 Μακριά ελάσματα. Λόγος πλευρών $a/b=4.0$

4.4.1 Κατανομές βέλους κάμψης

Για τελευταία περίπτωση ελασμάτων επιλέχθηκε ο λόγος πλευρών $a/b=4$ ώστε να προσεγγιστεί η απόκριση των πιο μακριών που χρησιμοποιούνται στη ναυπηγική. Από τον τύπο $a/b = \sqrt{m(m+1)}$ υπολογίζεται ότι για το συγκεκριμένο λόγο πλευρών η μορφή των αρχικών μετατοπίσεων διακρίνεται από 4 ημικύματα κατά το διάμηκες. Δεδομένου ότι το πλάτος παραμένει σταθερό, το νέο μήκος των ελασμάτων είναι $3.2 m$.

Στη θεωρητική περίπτωση των πολύ μακριών ελασμάτων με πολύ μικρές αρχικές μετατοπίσεις, ειδικά χωρίς την επιβολή πλευρικής πίεσης τα αποτελέσματα στην απόκριση της κάθετης μετατόπισης συγκεκριμένων σημείων βρέθηκαν ιδιαίτερα περίπλοκα. Λόγο του μεγάλου μήκους αναπτύσσονται πολλά ημικύματα τα οποία μετακινούνται κατά το διάμηκες όσο αυξάνεται το αξονικό φορτίο. Επιπλέον η αλλαγή του αριθμού ημικυμάτων παρατηρήθηκε σε πολλές περιπτώσεις φόρτισης στη μεταλυγισμική περιοχή. Επομένως δεν κατέστη δυνατό να εντοπιστεί ένα συγκριμένο σημείο που θα βρίσκεται ακριβώς ή πολύ κοντά σε κορυφή ή κοιλάδα ημικύματος για όλο το πεδίο της φόρτισης, όπως έγινε στην μελέτη των ελασμάτων με $a/b=2.5$. Για να εξεταστεί γραφικά το βέλος κάμψης ενός σημείου στο πεδίο της φόρτισης, επιλέγεται βάσει των αποτελεσμάτων ως αντιπροσωπευτικό, το κεντρικό σημείο του ελάσματος.

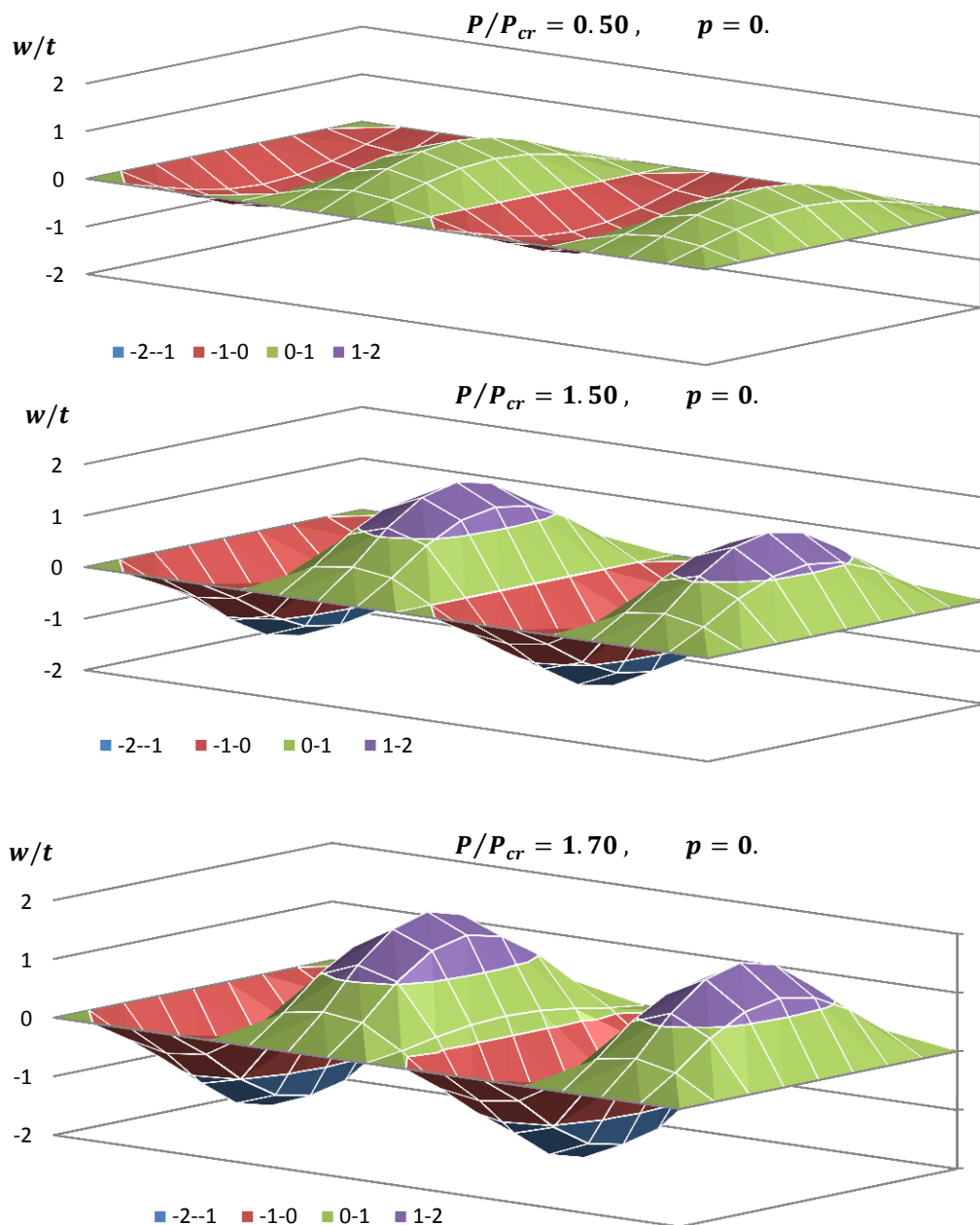


Σχήμα 77: Βέλος κάμψης κεντρικού σημείου μακριού ελάσματος με μικρές (α) και μεγάλες (β) αρχικές μετατοπίσεις

Τα διαγράμματα δείχνουν την απόκριση τους βέλους κάμψης του κεντρικού σημείου πολύ μακριού ελάσματος στις περιπτώσεις της σύνθετης καταπόνησης που εξετάζονται. Το διάγραμμα 77α αφορά τη περίπτωση πολύ μικρών αρχικών μετατοπίσεων, όπου και όπως έχει προαναφερθεί, προσδιορίζει γραφικά το φορτίο λυγισμού, βάσει της ραγδαίας αύξησης

του βέλους κάμψης. Η επιβολή της υδροστατικής πίεσης βλέπουμε ότι δε μεταβάλει πολύ το κρίσιμο φορτίο. Υπολογίστηκε ότι η μεταβολή αυτή δε ξεπερνάει το 6%.

Το διάγραμμα 77β που αφορά τη περίπτωση του ελάσματος με μεγάλες αρχικές ατέλειες, παρουσιάζει μια ιδιομορφία. Συγκεκριμένα η ραγδαία αύξηση του βέλους κάμψης φαίνεται να συμβαίνει στο 1.6 του κρίσιμου φορτίου. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι σε εκείνο το σημείο συμβαίνει ο λυγισμός. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στη συνολική μορφή του βέλους κάμψης στην επιφάνεια του ελάσματος. Η θέση του κεντρικού σημείου παραμένει σταθερή και μάλιστα μηδενική για τη περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης. Εξετάζοντας τη μορφή του βέλους κάμψης σε όλο το πεδίο της φόρτισης, βρέθηκε ότι λόγω των αρχικά 4 ημικυμάτων με ίσο μήκος, το κεντρικό σημείο βρίσκεται πάντα στη μέση μεταξύ της 2 κοιλάδας και της 2 δεύτερης κορυφής. Αυτό φαίνεται στα επόμενα τρισδιάστατα διαγράμματα.

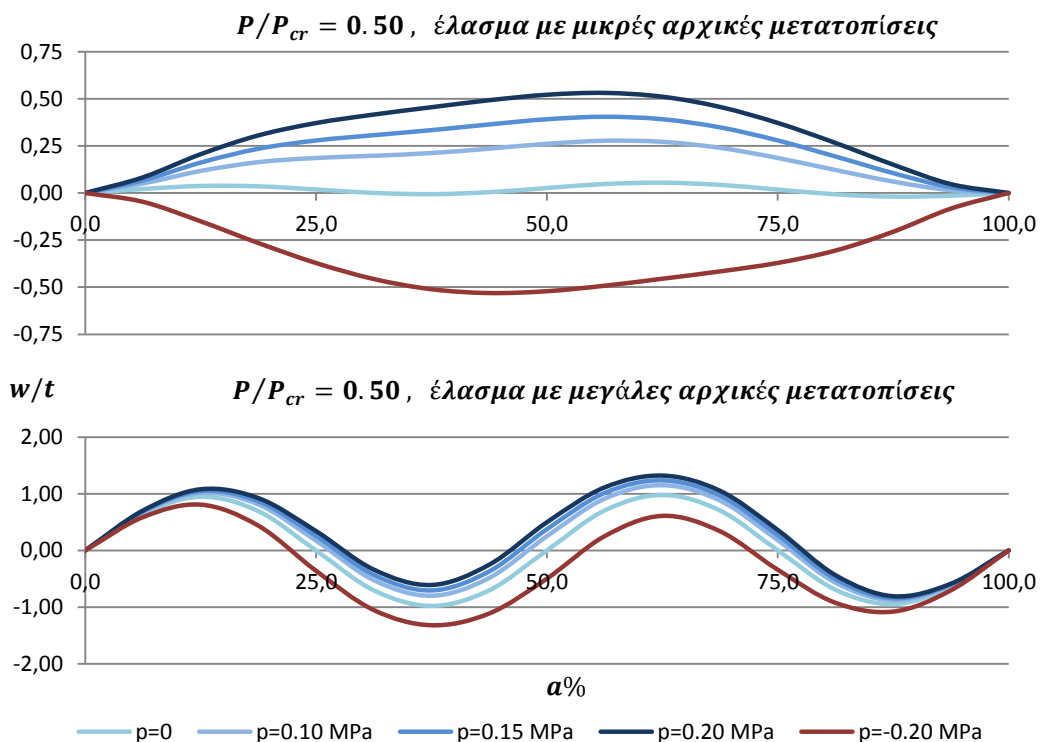


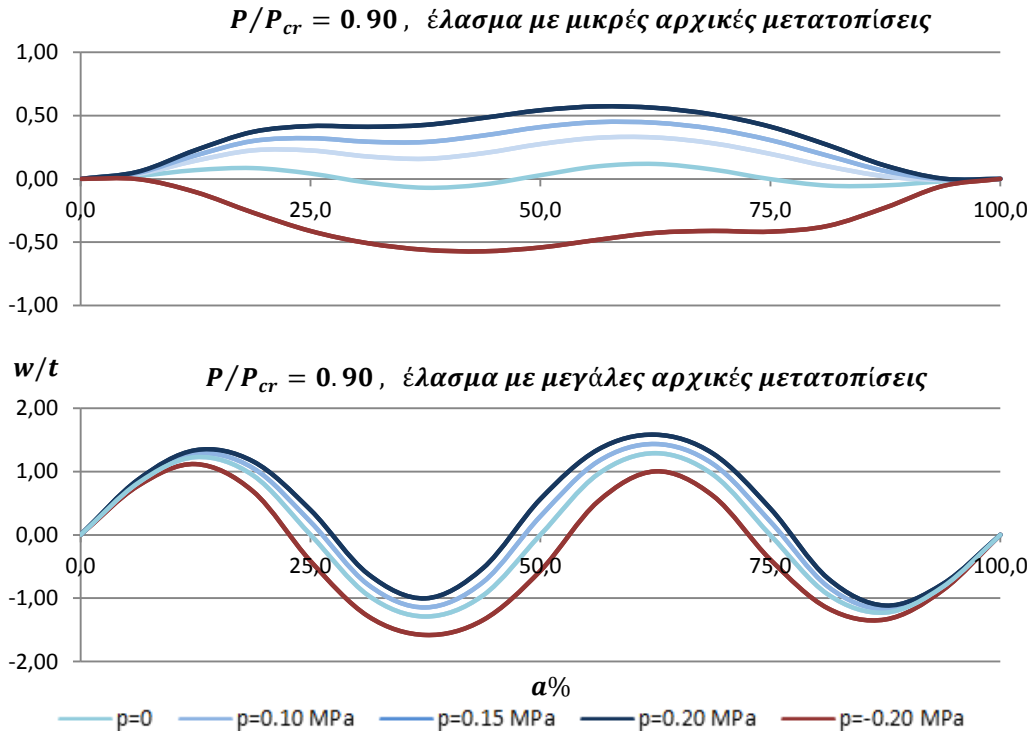
Σχήμα 78: Τρισδιάστατη μορφή βέλους κάμψης μακριού ελάσματος για διάφορα αξονικά φορτία

Παρατηρώντας την κάθετη μετατόπιση της κεντρικής εγκάρσιας διατομής, είναι φανερό ότι και για σημαντικό εύρος αξονικών φορτίων μετά το λυγισμό, παραμένει μηδενική. Αυτό οφείλεται προφανώς στη μορφή των αρχικών ατελειών και στη γενική συμμετρία του προβλήματος. Η κεντρική εγκάρσια τομή φαίνεται να αποκτά απότομα σημαντικό βέλος κάμψης στο 1.7 περίπου το αξονικού φορτίου, γεγονός που εξηγεί τη συμπεριφορά που περιγράφεται στο διάγραμμα 77β παρότι ο λυγισμός έχει συμβεί πολύ νωρίτερα. Να σημειωθεί εδώ ότι τα τρισδιάστατα διαγράμματα του σχήματος 78 έχουν υποστεί περιστροφή στο επίπεδο xy κατά 220° προκειμένου να είναι ορατή η κάθετη μετατόπιση της κεντρικής εγκάρσιας τομής προς τον αναγνώστη. Διαφορετικά θα την έκρυβε η πολύ μεγαλύτερη μετατόπιση της δευτέρας κορυφής.

Στη συνέχεια θα παρατεθούν συγκριτικά διαγράμματα για το βέλος κάμψης της κεντρικής διαμήκουσ τομής για τις διάφορες συνθήκες φόρτισης στις μικρές και μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις. Στα ελάσματα με μήκους 2.5 το πλάτος τους, η έρευνα έδειξε ότι το βέλος κάμψης αλλάζει τον αριθμό ημικυμάτων μετά το λυγισμό όταν το έλασμα έχει μικρές αρχικές μετατοπίσεις. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρήθηκε και για $a/b=4$ με κάποιες βασικές διαφορές.

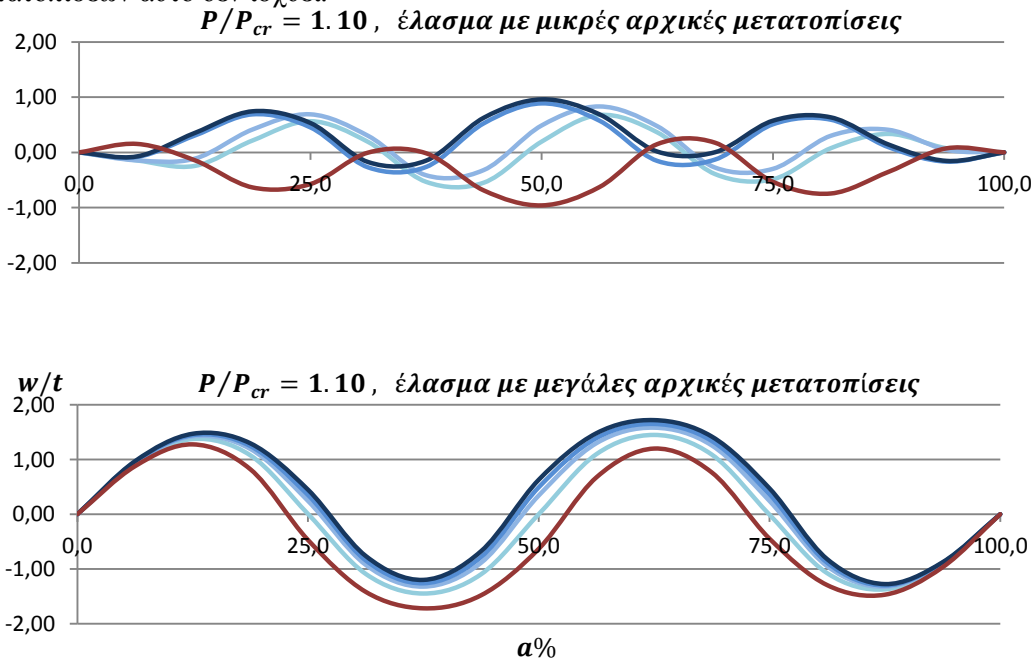
Παρατηρείται αρχικά ότι λόγω της μορφής των αρχικών ατελειών, δεν υπάρχει πλέον συμμετρία του βέλους κάμψης ως προς την κεντρική εγκάρσια τομή. Αυτό δεν αλλάζει ούτε με την επιβολή της μέγιστης υδροστατικής πίεσης. Λόγω του ζυγού αριθμού των αρχικών ημικυμάτων έχει δημιουργηθεί ωστόσο συμμετρία μεταξύ των καμπυλών για 0.20 και -0.20 MPa όπως ήταν και διαισθητικά αναμενόμενο. Όταν οι αρχικές ατέλειες διακρίνονται από ζυγό αριθμό ημικυμάτων, τα αποτελέσματα αντίθετων πλευρικών φορτίσεων ίδιας τιμής παρουσιάζουν κατοπτρική συμμετρία στο βέλος κάμψης ως προς το επίπεδο xy . Αυτό συμβαίνει ωστόσο μόνο στο έλασμα με πολύ μικρές αρχικές μετατοπίσεις. Σε έλασμα με μεγάλες αρχικές ατέλειες η επιβολή πλευρικής φόρτισης σε οποιαδήποτε όψη του ελάσματος θα έχει αντίκτυπο μόνο στις τιμές και όχι στη μορφή του βέλους κάμψης. Η απόκριση του ελάσματος στη προλυγισμική περιοχή όσο αναφορά τις κάθετες μετατοπίσεις περιγράφεται λοιπόν από τα παραπάνω διαγράμματα.

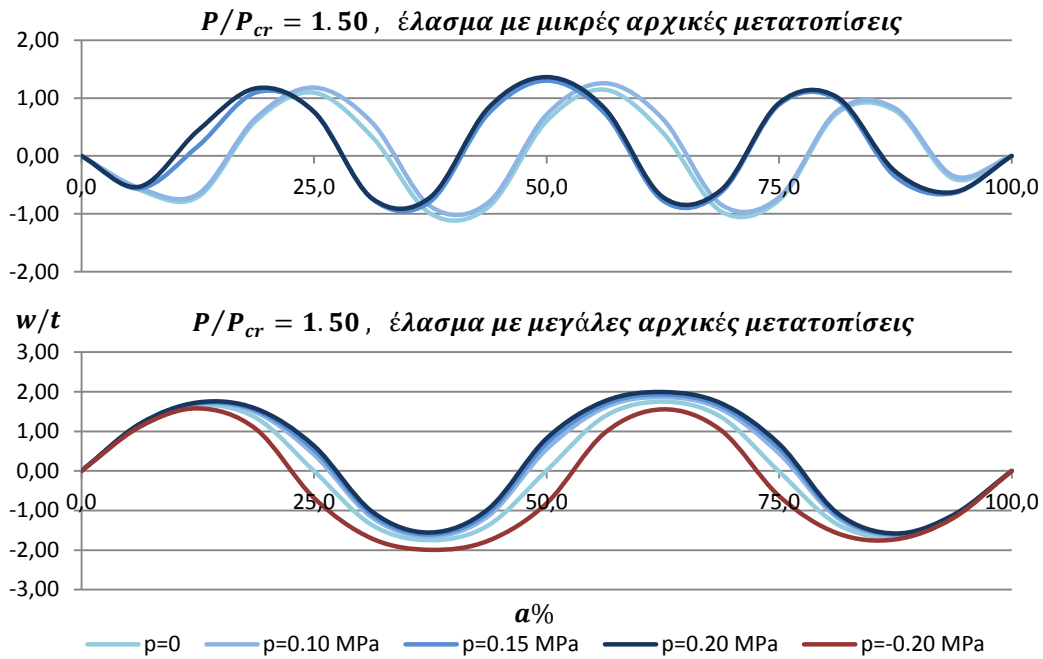




Σχήμα 79: Απόκριση της κεντρικής διαμήκουσ τομής προλυγισμικά, ελάσματος με λόγο πλευρών 4

Η μεταλυγισμική συμπεριφορά παρουσιάζεται στη σειρά διαγραμμάτων του σχήματος 80. Ο αριθμός ημικυμάτων έχει αυξηθεί για το έλασμα με μικρές αρχικές ατέλειες, ενώ παραμένει σταθερός στην άλλη περίπτωση όπως και στα ελάσματα με $a/b=2.5$. Η βασική διαφορά πλέον είναι ότι η συμπεριφορά των καμπύλων πλευρικού φορτίου δεν είναι πλέον όμοια για όλες τις τιμές τους. Συγκεκριμένα οι καμπύλες για 0.15 και 0.20 MPa έχουν όμοια συμπεριφορά, ενώ η καμπύλη για 0.10 MPa προσεγγίζει περισσότερο τη κατανομή της μονοαξονικής θλίψης, όσο αναφορά τη θέση των ημικυμάτων. Αυτό βρέθηκε να ισχύει και για ακόμη μεγαλύτερα φορτία της τάξης του 1.8 του P_{cr} . Για τη περίπτωση των μεγάλων μετατοπίσεων αυτό δεν ισχύει.



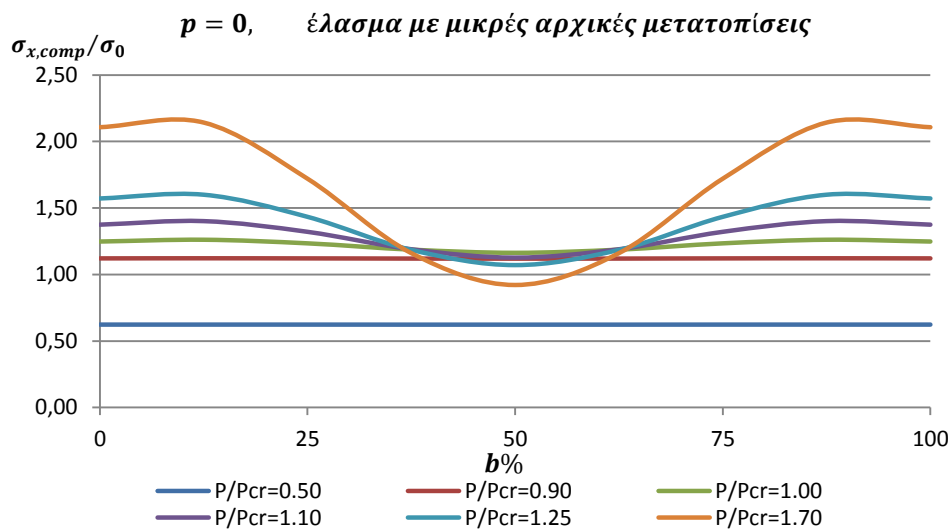


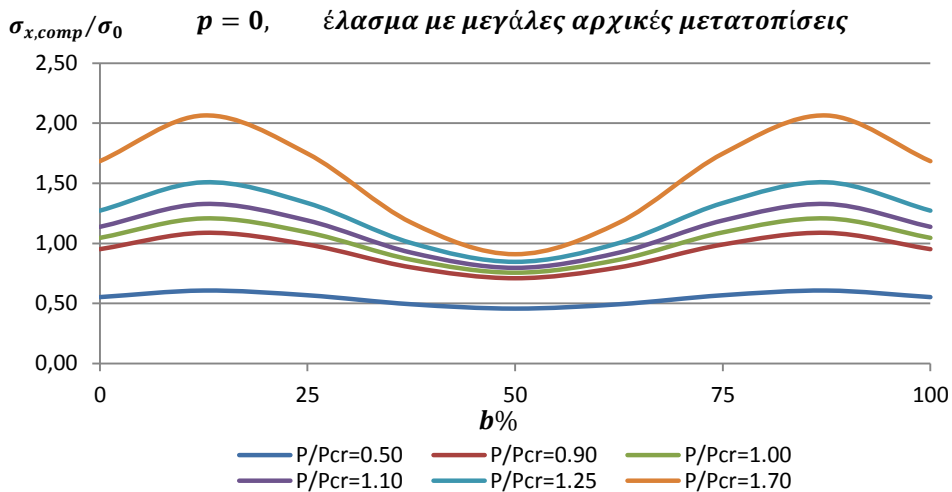
Σχήμα 80: Απόκριση της κεντρικής διαμήκουσ τομής μεταλυγισμικά, ελάσματος με λόγο πλευρών 4

4.4.2 Κατανομές θλιπτικών τάσεων

Οι κατανομές των θλιπτικών και των καμπτικών τάσεων σε διάφορες εγκάρσιες τομές έχουν παρουσιαστεί αναλυτικά μέχρι τώρα για τους υπόλοιπους λόγους πλευρών. Δεδομένου ότι η φύση του προβλήματος παραμένει ίδια κατά το εγκάρσιο, όπως είναι αναμενόμενο οι κατανομές αυτές δε διαφέρουν σε συμπεριφορά από τα ελάσματα με λόγο πλευρών $a/b=2.5$. Για το λόγο αυτό θα παρουσιαστούν συνοπτικά τα αποτελέσματα αυτών των μεγεθών, μόνο για την εγκάρσια κεντρική τομή, για ένα αντιπροσωπευτικό αξονικό φορτίο πριν και μετά το λυγισμό.

Η συμπεριφορά της εγκάρσιας κεντρικής τομής σε μονοαξονική θλίψη διακρίνεται από την διάχυση του φορτίου από το κέντρο στα άκρα, σε συμφωνία με τη θεωρία και τα μέχρι τώρα αποτελέσματα. Το νέο στοιχείο που παρουσιάζεται είναι μια μικρή ιδιομορφία στη περίπτωση των μεγάλων αρχικών μετατοπίσεων.

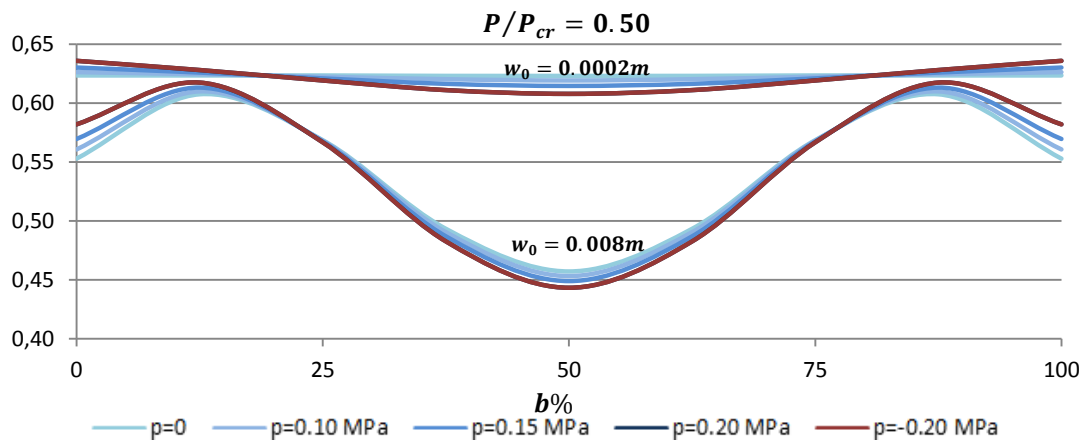




Σχήμα 81: Κατανομές θλιπτικών τάσεων σε εγκάρσια τομή ελάσματος με $a/b=4$

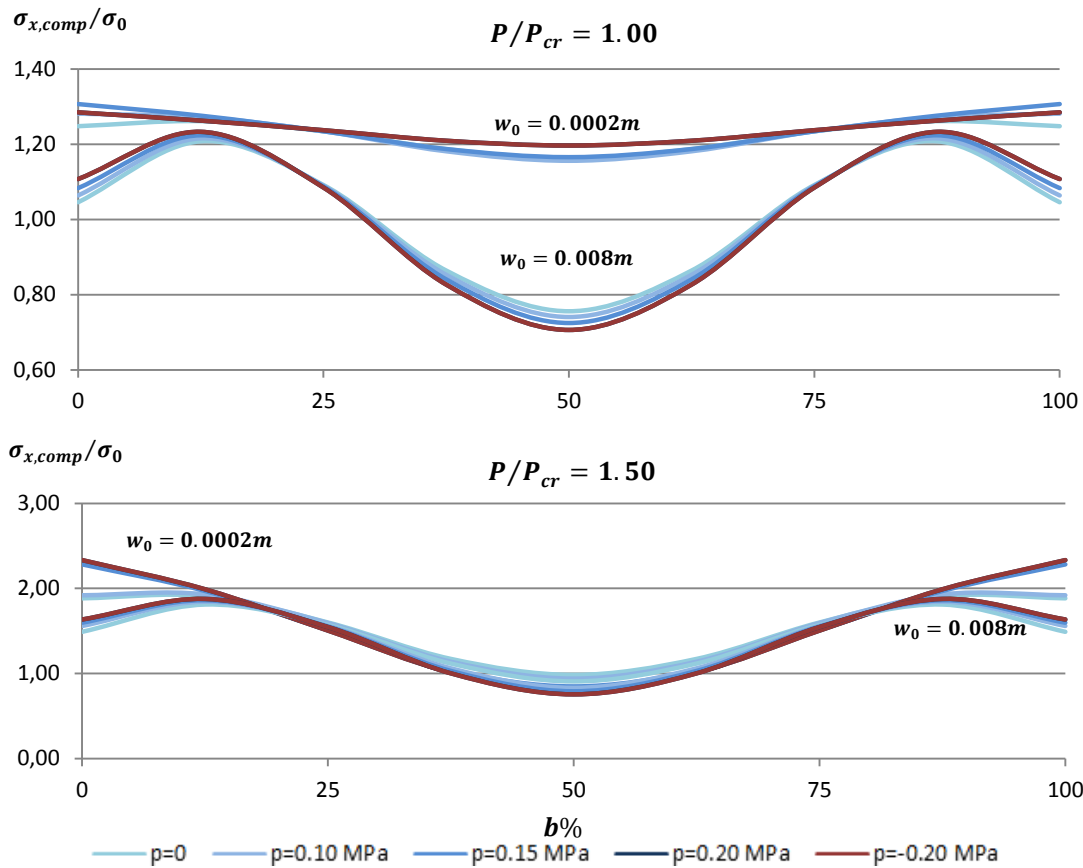
Το φορτίο διαχέεται προς τα άκρα, ωστόσο περίπου στο 12.5% εκατέρωθεν του πλάτους της τομής φαίνεται να μεγιστοποιείται. Το φαινόμενο είναι πολύ πιο έντονο στη μεταλυσισμική περιοχή. Όπως έδειξαν τα διαγράμματα 79, η συγκεκριμένη τομή αποκτά βέλος κάμψης για πολύ μεγάλα αξονικά φορτία. Η κατανομή αυτή εμφανίζεται και σε άλλες εγκάρσιες τομές όπως θα φανεί παρακάτω.

Το σχήμα 83 συγκρίνει άμεσα τις θλιπτικές τάσεις που εμφανίζονται στην εγκάρσια κεντρική τομή ελάσματος με και χωρίς αρχικές ατέλειες, λαμβάνοντας υπόψη και την επίδραση της υδροστατικής πίεσης. Η επιβολή της υδροστατικής πίεσης όπως αναμενόταν δεν έχει σημαντική διαφορά στη κατανομή των θλιπτικών τάσεων προλυσισμικά. Επιπλέον φαίνεται για ακόμα μια φορά το αποτέλεσμα της συμμετρίας λόγω των συνθηκών μεταξύ των καμπυλών για $\pm 0.20 \text{ MPa}$, οι οποίες ταυτίζονται.



Σχήμα 82: Επίδραση πλευρικού φορτίο στις θλιπτικές τάσεις προλυσισμικά

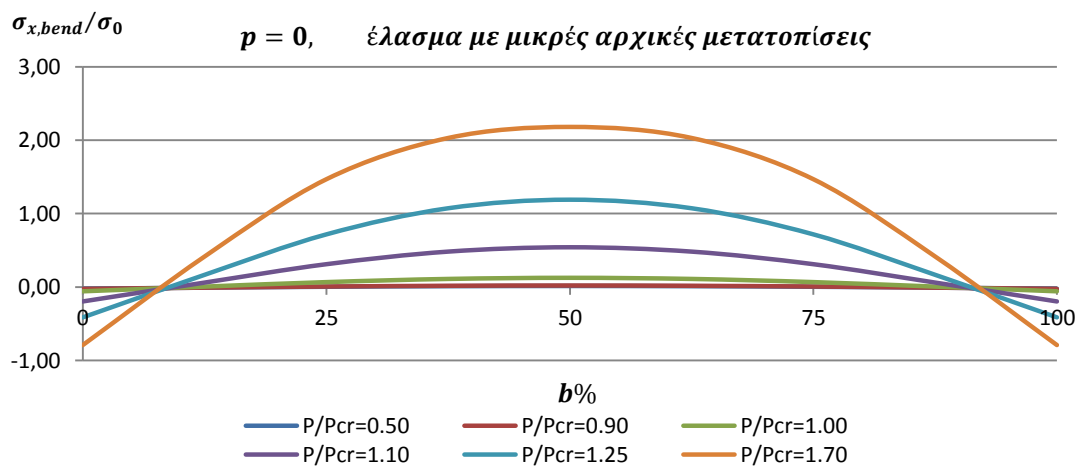
Η κατανομές για μικρές και μεγάλες αρχικές ατέλειες διατηρούν την απόσταση που έχουν στις αλγεβρικές τιμές τους μέχρι και τα πρώτα στάδια της μεταλυσισμικής περιοχής. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 84 όμως, οι κατανομές σχεδόν ταυτίζονται για $P/P_{cr}=1.50$, με μόνες ορατές διαφορές να υπάρχουν στα άκρα της τομής. Έχει ήδη αναφερθεί ότι παρόλο που μιλάμε για την ίδια τομή, η τιμή των αρχικών ατελειών σε συνδυασμό με τις συνθήκες φόρτισης οδηγούν σε τελείως διαφορετική μορφή του βέλους κάμψης. Για το συγκεκριμένο αξονικό φορτίο, η μορφή των βελών κάμψης των δύο περιπτώσεων έχουν πλησιάσει αρκετά, επομένως είναι λογικό οι θλιπτικές τάσεις να έχουν συγκλίνει αρκετά.

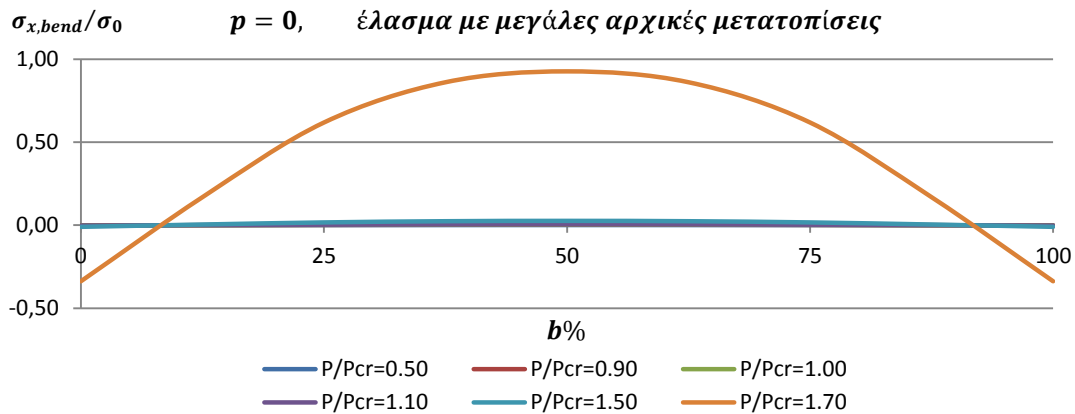


Σχήμα 83: Επίδραση πλευρικού φορτίου στις θλιπτικές τάσεις μεταλυσισμικά

4.4.3 Κατανομές καμπτικών τάσεων

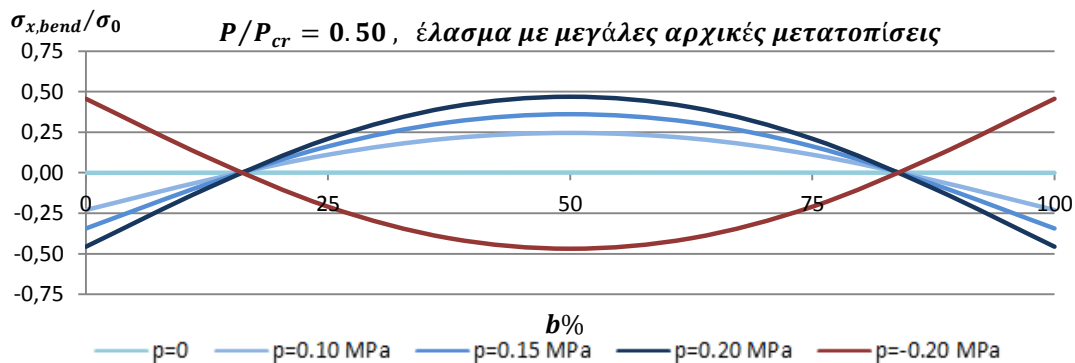
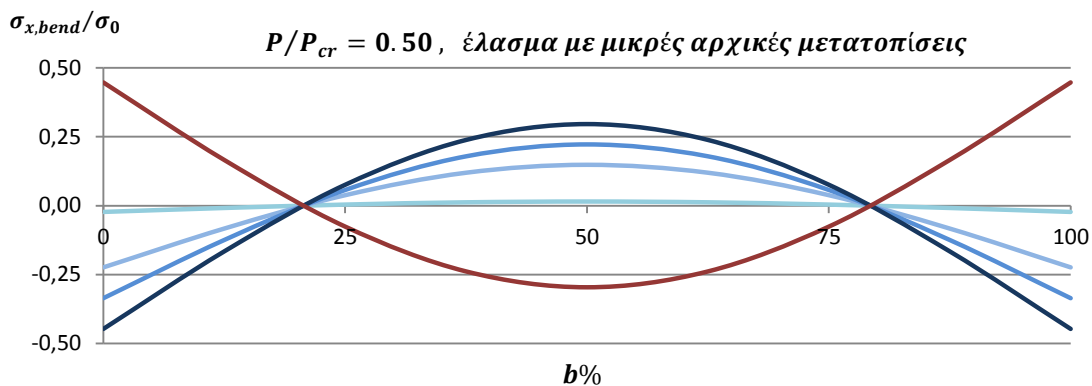
Όσο αναφορά τις καμπτικές τάσεις που εμφανίζονται στην εγκάρσια κεντρική τομή, για τις αρχικά μικρές μετατοπίσεις αναμένεται η γνωστή κατανομή, ενώ για τις μεγάλες αρχικές μετατοπίσεις αναμένονται μηδενικές καμπτικές τάσεις μέχρι περίπου το 1.6 του κρίσιμου αξονικού φορτίου, για την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης. Θυμίζουμε ότι όταν δεν ασκείται πλευρική πίεση, το έλασμα με μεγάλες αρχικές ατέλειες έχει μηδενικό βέλος κάμψης στη κεντρική εγκάρσια τομή. Πράγματι τα διαγράμματα που εξάχθηκαν επαληθεύουν τη πρόταση αυτή.





Σχήμα 84: Κατανομές καμπτικών τάσεων σε εγκάρσια τομή ελάσματος με $a/b=4$

Το φαινόμενο αυτό έχει ήδη εξηγηθεί αναλυτικά κάτω από τα διαγράμματα 79.

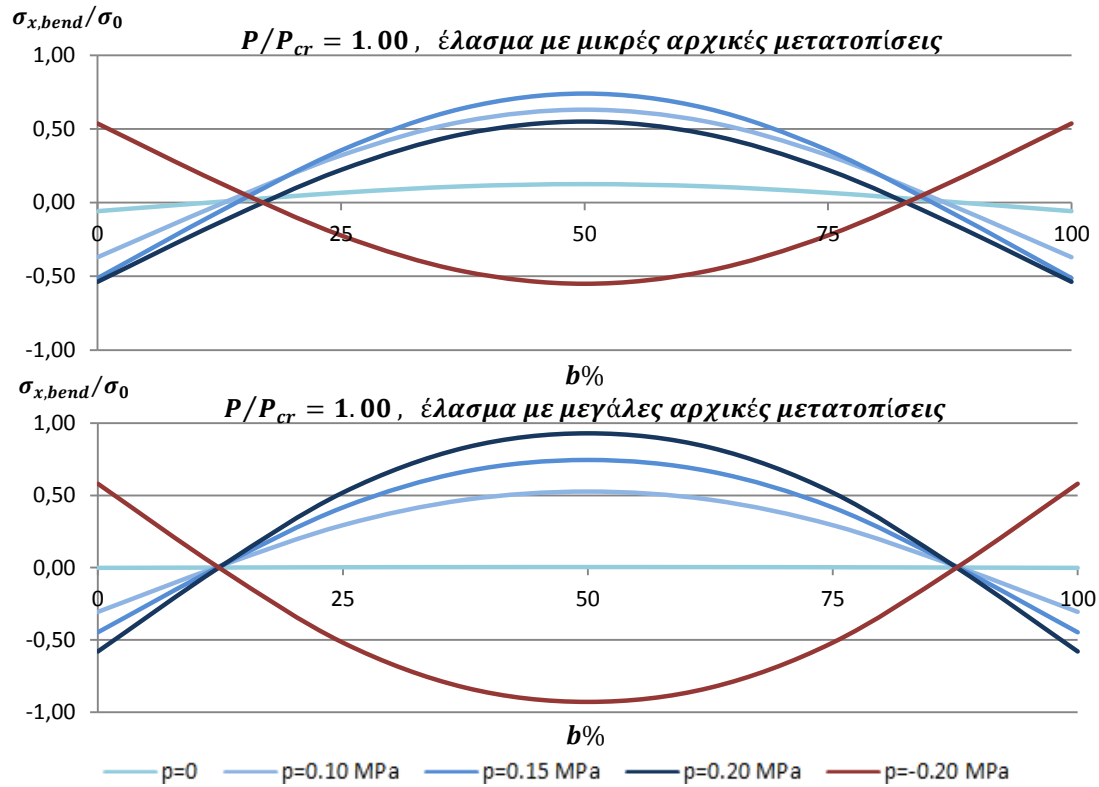


Σχήμα 85: Επίδραση πλευρικού φορτίο στις καμπτικές τάσεις προλυγισμικά

Τα σχήματα 85-87 παρουσιάζουν την επίδραση της υδροστατικής πίεσης στις καμπτικές τάσεις που αναπτύσσονται στο έλασμα κατά τη διεύθυνση του άξονα x . Όπως και με τις θλιπτικές τάσεις επιλέχθηκαν αντιπροσωπευτικά αξονικά φορτία για πριν και μετά το λυγισμό.

Σε απόλυτη συμφωνία και με τις υπόλοιπες γεωμετρίες ελασμάτων που εξετάστηκαν μέχρι τώρα, η υδροστατική πίεση αυξάνει σε μεγάλο βαθμό τις καμπτικές τάσεις στην εγκάρσια κεντρική τομή ελάσματος, ανεξάρτητα από τη τιμή των αρχικών ατελειών του. Κατά το φορτίο λυγισμού, που όπως αποδείχθηκε είναι πολύ κοντά με τα φορτία λυγισμού για κάθε τιμή της υδροστατικής πίεσης, στο διάγραμμα για μικρές αρχικές ατέλειες παρατηρείται για ακόμα μια φορά η μεγαλύτερη τιμή της υδροστατικής πίεσης να έχει ως αποτέλεσμα μειωμένες καμπτικές τάσεις σε σχέση με τις άλλες τιμές. Όπως και στις άλλες περιπτώσεις που παρουσιάστηκε αυτό το φαινόμενο, η εξήγησή του έχει να κάνει με τη

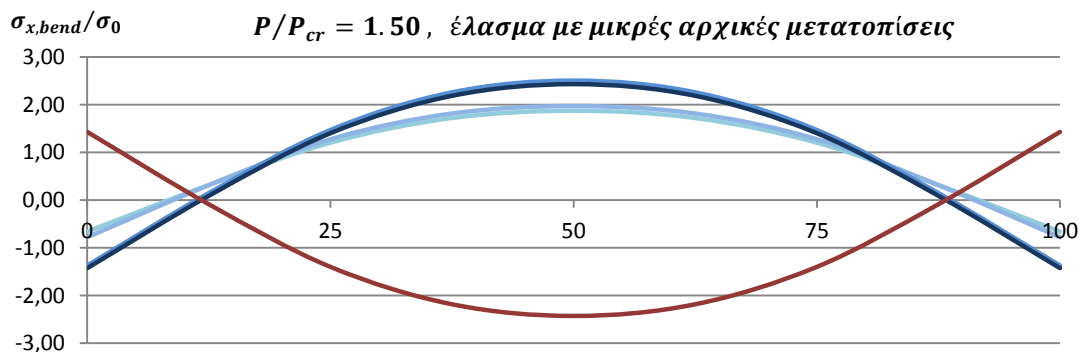
μορφή του βέλους κάμψης και την διεύθυνση που αυτό θα μετατοπιστεί με αύξηση του αξονικού φορτίου.

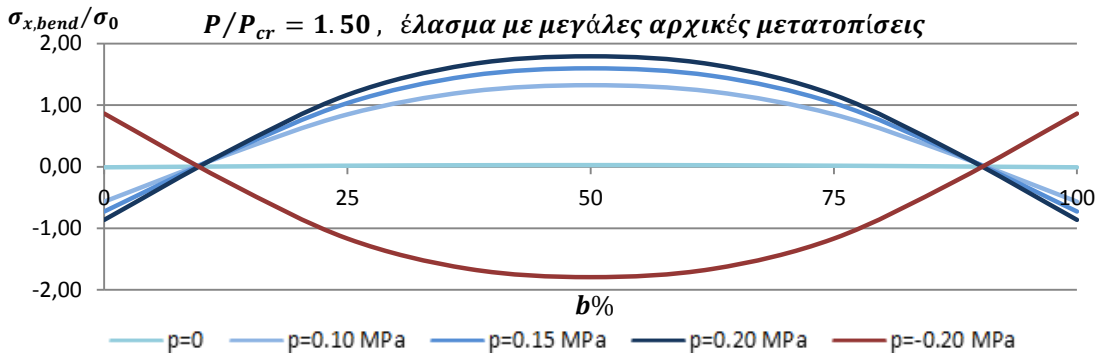


Σχήμα 86: Επίδραση πλευρικού φορτίου στις καμπτικές τάσεις κατά το λυγισμό

Για $p=0.20$ MPa τα σημεία της εγκάρσιας τομής τείνουν να κινηθούν προς το θετικό ημιάξονα, κατά την ίδια δηλαδή φορά που ασκείται η πλευρική πίεση. Αντίθετα για $p=0.10$ ή 0.15 MPa, το βέλος κάμψης έχει τέτοια μορφή που με αύξηση του αξονικού φορτίου τείνει να μετατοπίσει τα σημεία αυτά αντίθετα με τη φορά του πλευρικού φορτίου. Αυτή η αντίσταση του πλευρικού φορτίου στη κάθετη μετατόπιση οδηγεί σε μεγαλύτερες καμπτικές τάσεις.

Στη μεταλυστική περιοχή, το ενδιαφέρον συγκεντρώνεται για ακόμα μια φορά στο έλασμα με μικρές αρχικές μετατοπίσεις. Οι καμπτικές τάσεις δεν παρουσιάζουν μια αναλογική συμπεριφορά για τις τέσσερις τιμές του πλευρικού φορτίου. Η κατανομή είναι παρόμοια, αλλά οι τιμές των καμπυλών είναι πολύ κοντινές ανά δύο καμπύλες. Αν ανατρέξουμε στο διάγραμμα 80 που παρουσιάζει το βέλος κάμψης για την αντίστοιχη φόρτιση, θα δούμε ότι το κεντρικό σημείο (και επομένως όλη η εγκάρσια τομή) έχει διαφορετική μετατόπιση, παρόμοια για τα ζευγάρια των υδροστατικών καμπυλών που είναι κοντά και στο διάγραμμα 80.

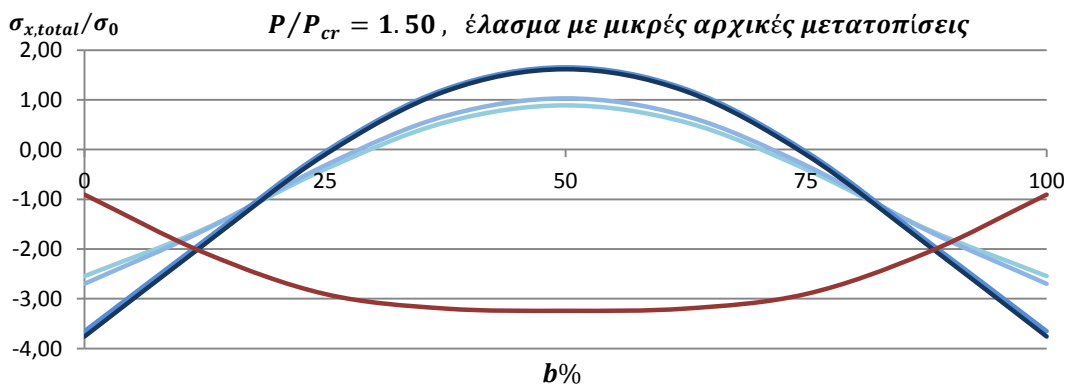
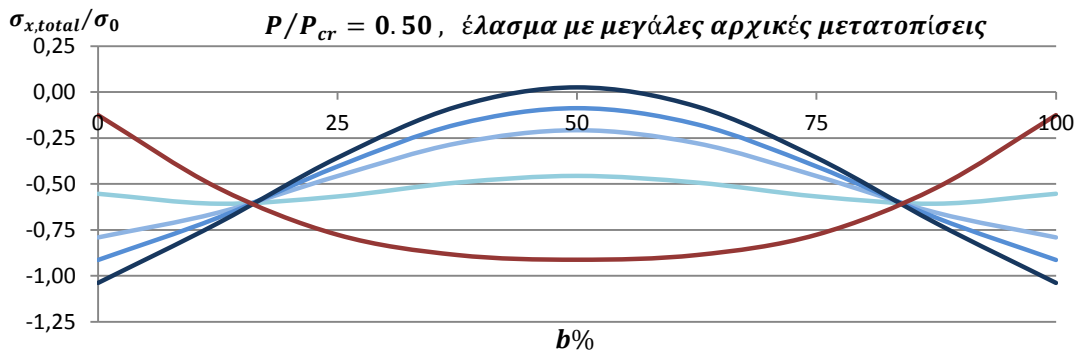
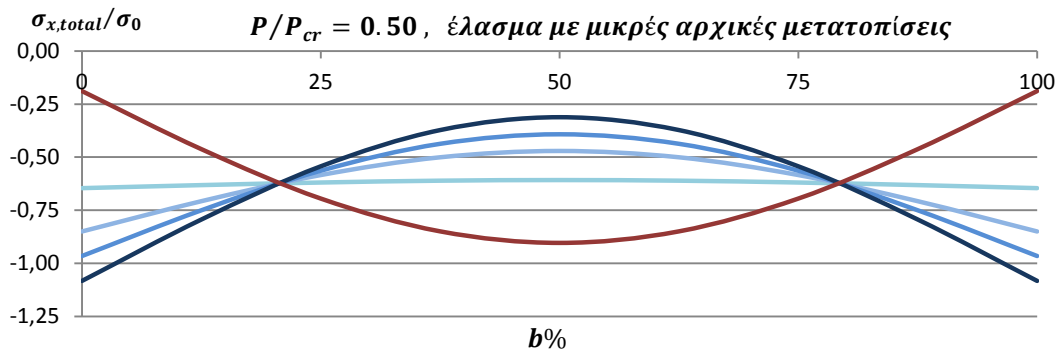


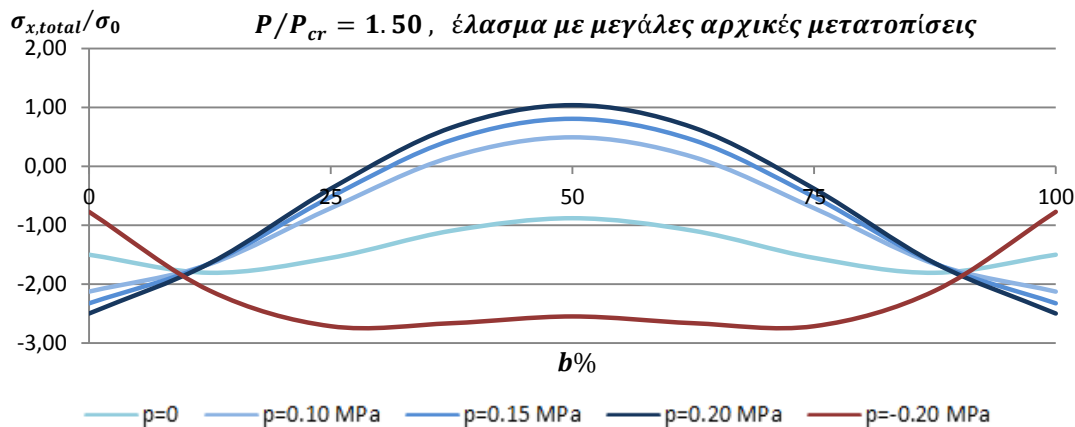


Σχήμα 87: Επίδραση πλευρικού φορτίου στις καμπτικές μεταλυγισμικά

4.4.4 Κατανομές συνολικών τάσεων

Συνοπλογίζοντας αυτά τα δύο μεγέθη στην θετική όψη ελάσματος προκύπτουν οι συνολικές τάσεις κατά τη διεύθυνση του άξονα x. Υπενθυμίζεται ότι οι θλιπτικές τάσεις βάσει θεωρίας έχουν αρνητικό πρόσημο, ωστόσο στα παραπάνω διαγράμματα παρουσιάζονται θετικές. Κατά τον υπολογισμό των συνολικών τάσεων λαμβάνονται κανονικά υπόψη με αρνητικό πρόσημο.





Σχήμα 88: Κατανομές συνολικών τάσεων πριν και μετά το λυγισμό

Το σχήμα 88 απεικονίζει γραφικά της προλυγισμική και τη μεταλυγισμική περιοχή για τις δύο περιπτώσεις ελασμάτων. Συνολικά, φαίνεται πως η υδροστατική πίεση έχει μεγαλύτερη επίδραση στις συνολικές τάσεις στη προλυγισμική περιοχή, και όχι τόσο σημαντικές διαφορές στη μεταλυγισμική περιοχή. Εξαιρέση αποτελεί το τελευταίο διάγραμμα, το οποίο όπως προαναφέρθηκε οφείλεται στη μορφή του βέλους κάμψης της εγκάρσιας κεντρικής τομής στα στάδια της φόρτισης.

4.5 Ισοϋψείς καμπύλες

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιαστούν οι ισοϋψείς καμπύλες του βέλους κάμψης, ομοεπίπεδων δυνάμεων N_x , των καμπτικών ροπών M_x καθώς και της ισοδύναμης τάσης *Von Mises*. Δυνάμεις και ροπές θα αδιαστατοποιηθούν σύμφωνα με τις αντίστοιχες κρίσιμες τιμές τους, οι οποίες προκύπτουν από τις παρακάτω εξισώσεις:

Πίνακας 13: Κρίσιμες τάσεις, ροπές και ομοεπίπεδες δυνάμεις λυγισμού

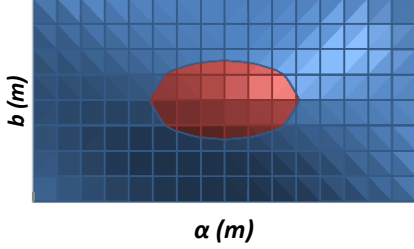
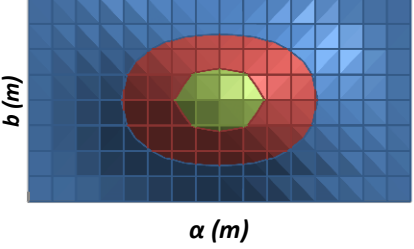
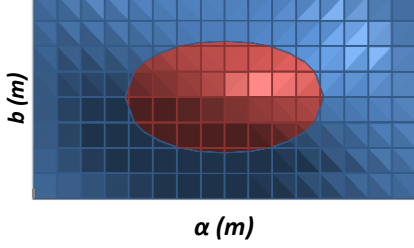
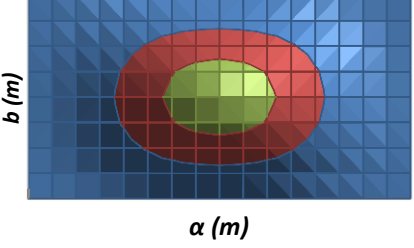
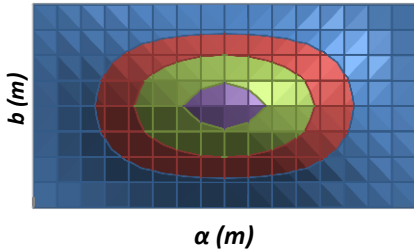
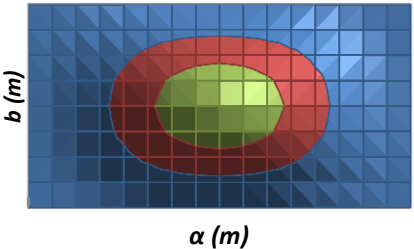
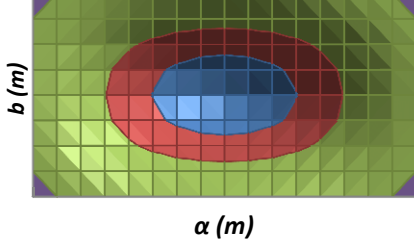
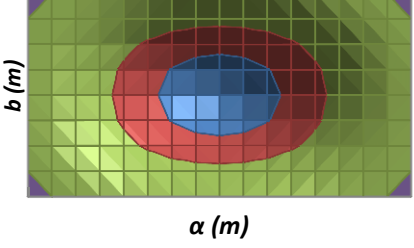
Λόγος πλευρών a/b	1	2.5 ή 4
Συντελεστής λυγισμού k	8.90	6.96
Τάση λυγισμού σ_{cr} [MPa]	374.64	292.98
Ομοεπίπεδες δυνάμεις $N_{x,cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2}$ [MN/m]	4.50	3.52
Καμπτικές ροπές $M_{x,cr} = \frac{\sigma_{cr} t^2}{6}$ [Nm/m]	8991	7031

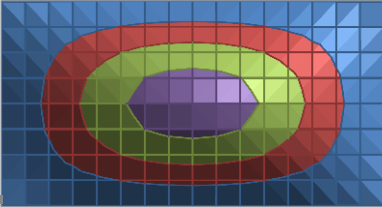
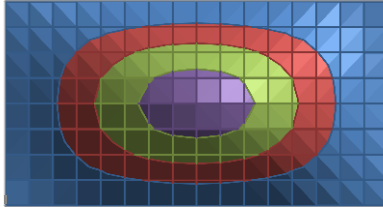
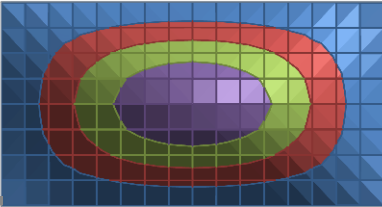
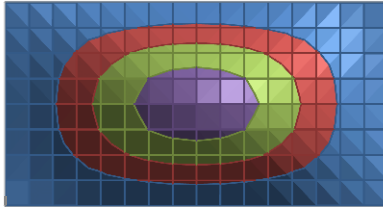
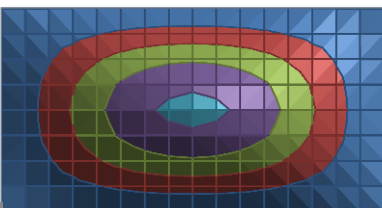
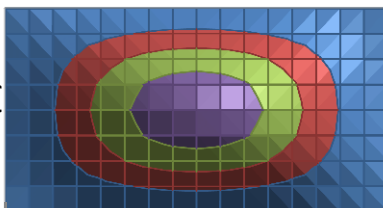
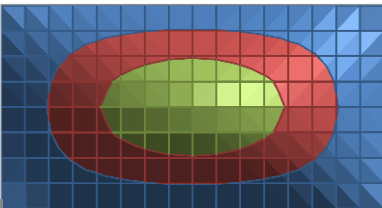
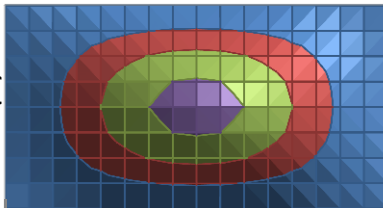
Όπου σ_{cr} η κρίσιμη τάση λυγισμού που υπολογίζεται από τον γνωστό τύπο του *Bryan* (47).

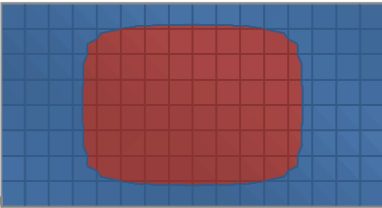
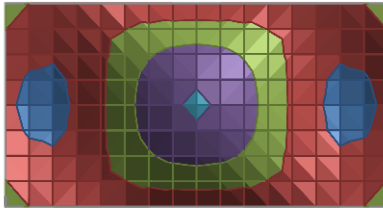
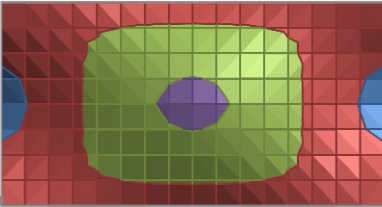
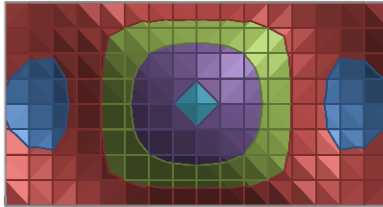
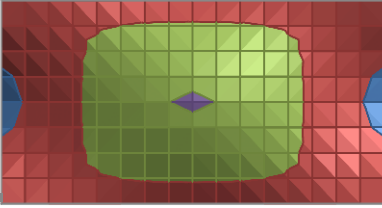
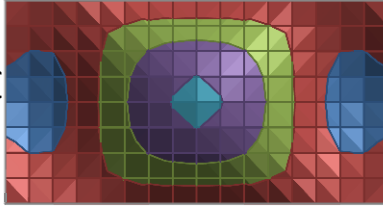
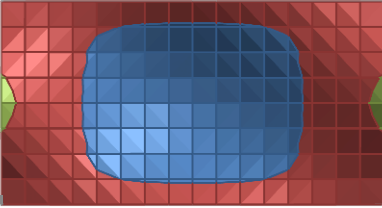
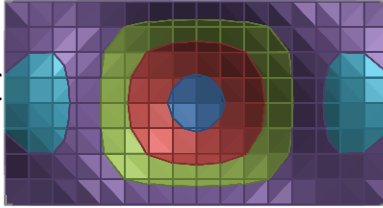
Οι καμπύλες όλων των μεγεθών θα δοθούν για όλες τις περιπτώσεις λόγου πλευρών, αρχικών μετατοπίσεων και πλευρικής φόρτισης που εξετάστηκαν. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η τιμή πλευρικής πίεσης 0.15 MPa η οποία παραλείπεται, ως ενδιάμεση των 0.10 και 0.20 MPa, με αντίστοιχα ενδιάμεσα αποτελέσματα.

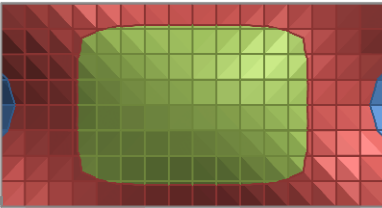
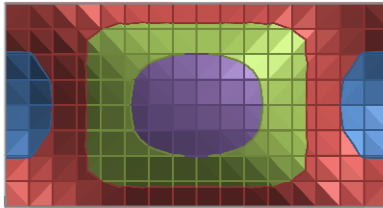
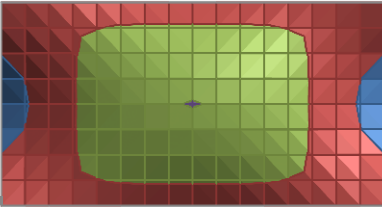
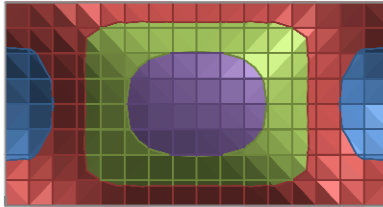
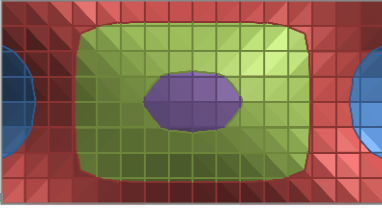
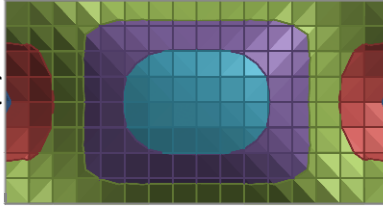
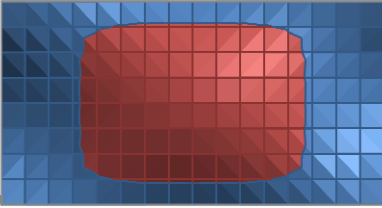
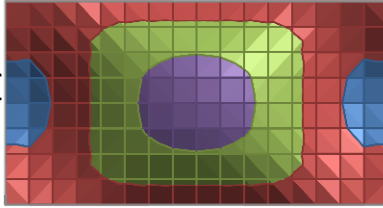
Προσοχή πρέπει να δοθεί στη κλίμακα του άξονα x . Όπως έχει αναφερθεί, ο κώδικας αντικαθιστά το συνεχές μέσο με ένα πλέγμα διακριτών κόμβων, σταθερών για τους λόγους πλευρών που εξετάστηκαν. Αυτό που αλλάζει είναι η ισαπόσταση da μεταξύ των κόμβων στον διαμήκη άξονα. Η ισαπόσταση db στον εγκάρσιο άξονα παραμένει σταθερή για όλους τους λόγους πλευρών, καθώς δεν υπήρξε αλλαγή του πλάτους σε καμία από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν.

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στους πίνακες 14-37.

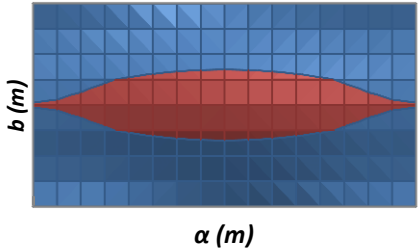
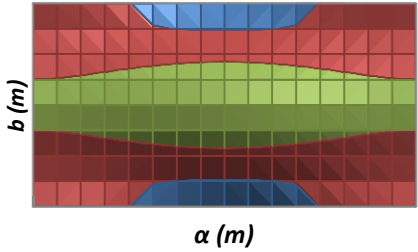
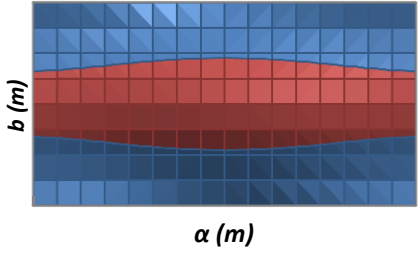
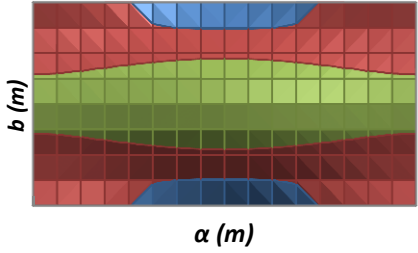
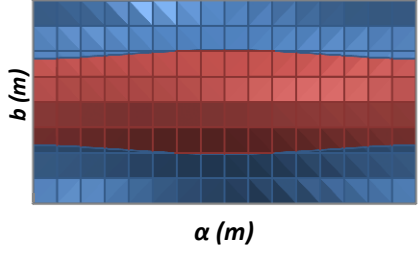
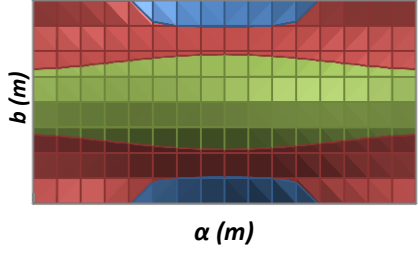
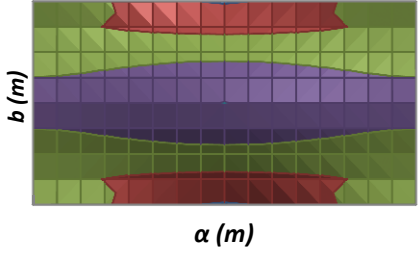
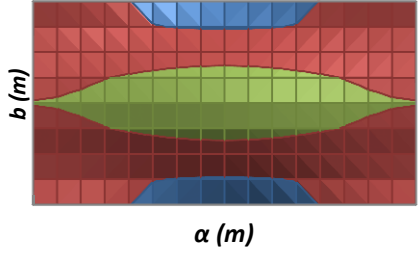
<p style="text-align: center;">Πίνακας 14 Λόγος Πλευρών $a/b=1.0$, $da=0.05m$, $db=0.10m$ Βέλος κάμψης (w/t) , Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$</p>		
	<p style="text-align: center;">Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)</p>	<p style="text-align: center;">Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)</p>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Πλευρική Πίεση $p=0$</p>	<p style="text-align: center;"> ■ 0,00-0,02 ■ 0,02-0,04  </p>	<p style="text-align: center;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50  </p>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa</p>	<p style="text-align: center;"> ■ 0,00-0,10 ■ 0,10-0,20  </p>	<p style="text-align: center;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50  </p>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa</p>	<p style="text-align: center;"> ■ 0,00-0,10 ■ 0,10-0,20 ■ 0,20-0,30 ■ 0,30-0,40  </p>	<p style="text-align: center;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50  </p>
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa</p>	<p style="text-align: center;"> ■ -0,30--0,20 ■ -0,20--0,10 ■ -0,10-0,00  </p>	<p style="text-align: center;"> ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00  </p>

Πίνακας 15 Λόγος Πλευρών $a/b=1.0$, $da=0.05m$, $db=0.10m$ Βέλος κάμψης (w/t) , Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-0,75 ■ 0,75-1,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-0,75 ■ 0,75-1,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50 ■ 0,50-0,75</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,75-1,00 ■ 1,00-1,25 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50 ■ 0,50-0,75 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>

Πίνακας 16 Λόγος Πλευρών $a/b=1.0$, $da=0.05m$, $db=0.10m$		
Καμπτικές Ροπές ($M_x/M_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,25-0,00 ■ 0,00-0,25 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 ■ 0,00-1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,50--0,25 ■ -0,25-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 ■ 0,00-1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 ■ 0,00-1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -3,00--2,00 ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>

Πίνακας 17 Λόγος Πλευρών $a/b=1.0$, $da=0.05m$, $db=0.10m$ Καμπτικές Ροπές ($M_x/M_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -3,00--2,00 ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,25-0,00 ■ 0,00-0,25 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>

Πίνακας 18 Λόγος Πλευρών $a/b=1.0$, $da=0.05m$, $db=0.10m$		
Ομοεπίπεδες δυνάμεις ($N_x/N_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,51--0,50 ■ -0,50--0,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,55--0,50 ■ -0,50--0,45 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,55--0,50 ■ -0,50--0,45 ■ -0,45--0,40 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,52--0,50 ■ -0,50--0,48 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,48--0,46 ■ -0,46--0,44 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>

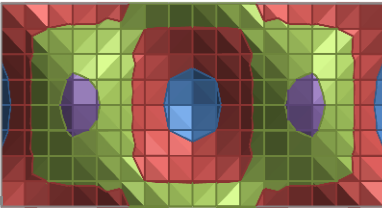
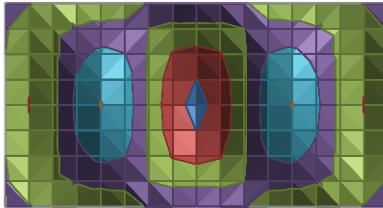
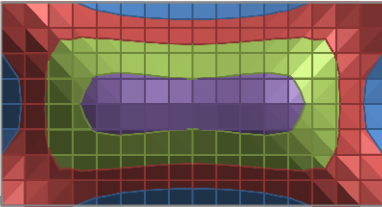
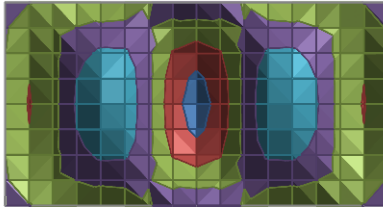
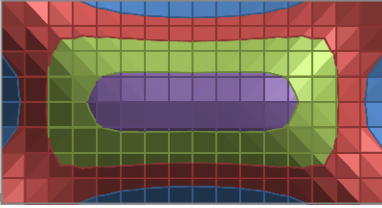
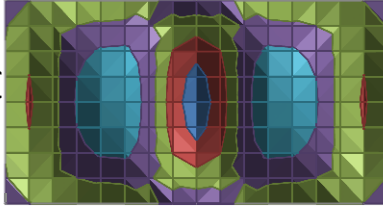
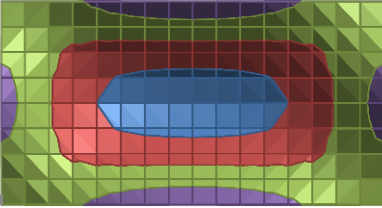
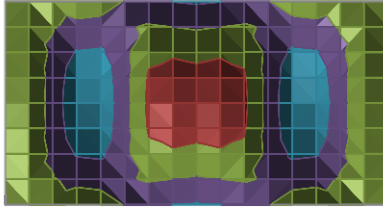
Πίνακας 19 Λόγος Πλευρών $a/b=1.0$, $da=0.05m$, $db=0.10m$		
Ομοεπίπεδες δυνάμεις ($N_x/N_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,60--0,40 ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> 
Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,60--0,40 ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> 
Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,60--0,40 ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> 
Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,54--0,52 ■ -0,52--0,50 ■ -0,50--0,48 ■ -0,48--0,46 ■ -0,46--0,44 ■ -0,44--0,42 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> 

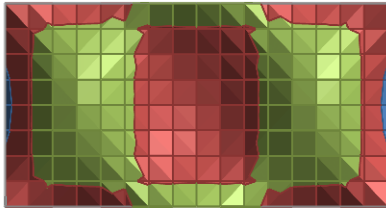
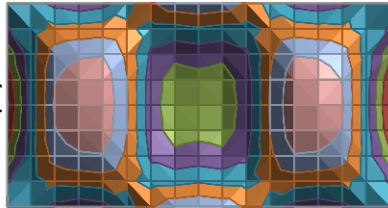
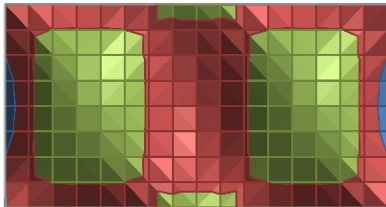
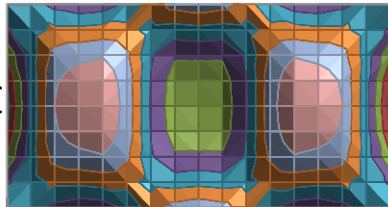
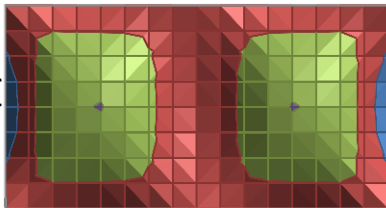
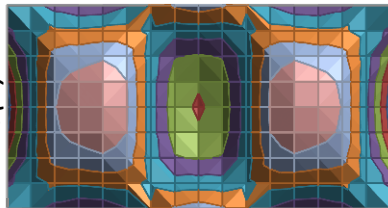
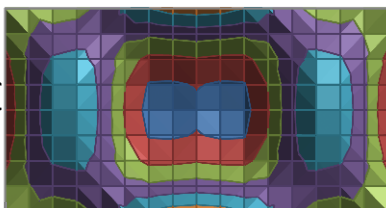
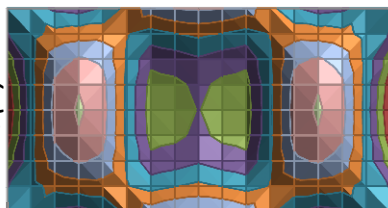
Πίνακας 20 Λόγος Πλευρών $a/b=1.0$, $da=0.05m$, $db=0.10m$		
Ισοδύναμη Τάση Von Mises (σ_{mises}/σ_0), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,74-0,76 ■ 0,76-0,78 ■ 0,78-0,80 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,80-0,82 ■ 0,82-0,84 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 ■ 5,00-6,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 ■ 5,00-6,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 ■ 5,00-6,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>

Πίνακας 21 Λόγος Πλευρών $a/b=1.0$, $da=0.05m$, $db=0.10m$		
Ισοδύναμη Τάση Von Mises (σ_{mises}/σ_0), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div> <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 ■ 5,00-6,00 </div> <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 ■ 5,00-6,00 </div> <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 ■ 5,00-6,00 </div> <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,20 ■ 0,20-0,40 ■ 0,40-0,60 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,60-0,80 ■ 0,80-1,00 </div> <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 ■ 5,00-6,00 </div> <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>

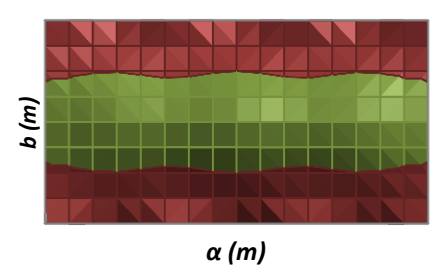
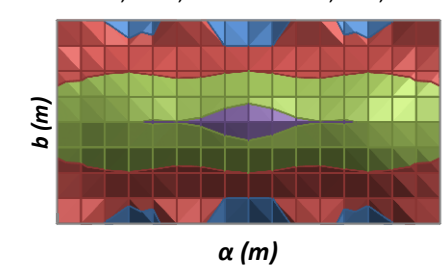
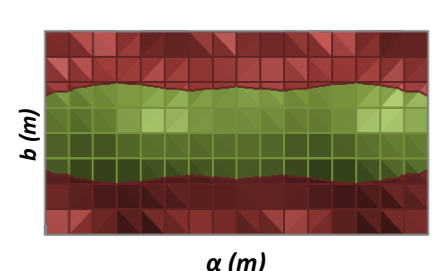
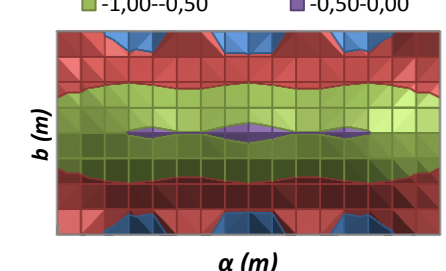
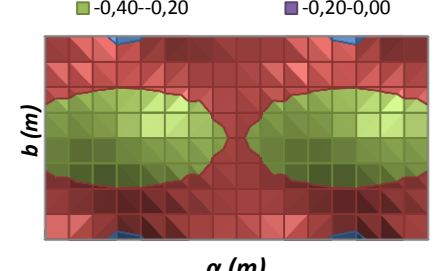
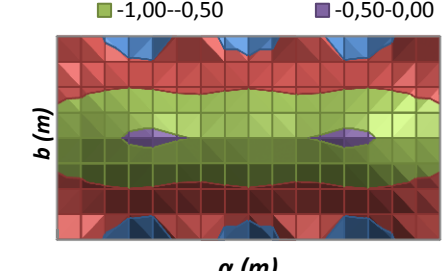
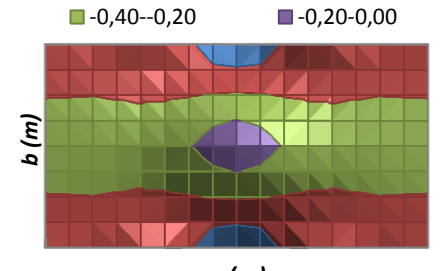
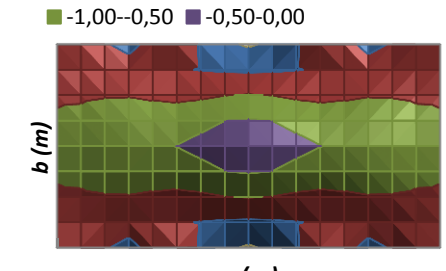
Πίνακας 22 Λόγος Πλευρών $a/b=2.5$, $da=0.125m$, $db=0.10m$ Βέλος κάμψης (w/t), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,04--0,02 ■ -0,02-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,02 ■ 0,02-0,04 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,10 ■ 0,10-0,20 ■ 0,20-0,30 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,10 ■ 0,10-0,20 ■ 0,20-0,30 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,30-0,40 ■ 0,40-0,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,60--0,50 ■ -0,50--0,40 ■ -0,40--0,30 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,30--0,20 ■ -0,20--0,10 ■ -0,10-0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>

Πίνακας 23 Λόγος Πλευρών $a/b=2.5$, $da=0.125m$, $db=0.10m$ Βέλος κάμψης (w/t) , Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>

Πίνακας 24 Λόγος Πλευρών $a/b=2.5$, $da=0.125m$, $db=0.10m$		
Καμπτικές Ροπές ($M_x/M_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,04--0,02 ■ -0,02-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,02 ■ 0,02-0,04 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -3,00--2,00 ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,20--0,10 ■ -0,10-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,10 ■ 0,10-0,20 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -3,00--2,00 ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,20 ■ 0,20-0,40 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -3,00--2,00 ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,20 ■ 0,20-0,40 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>

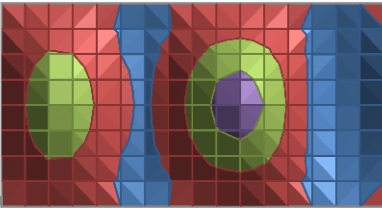
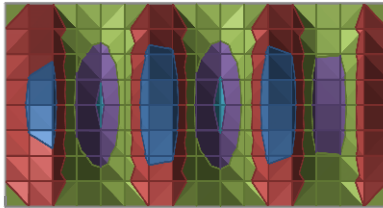
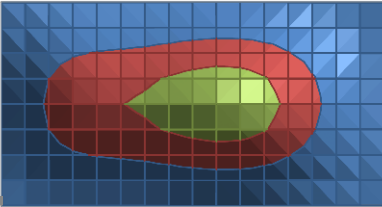
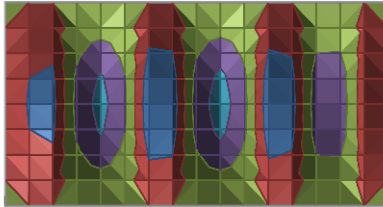
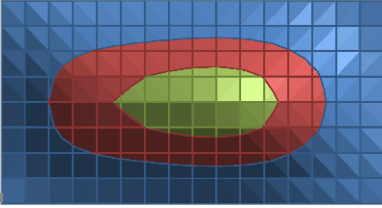
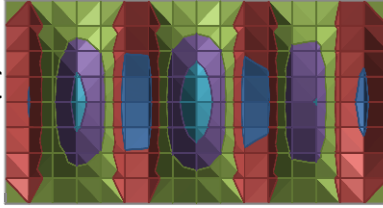
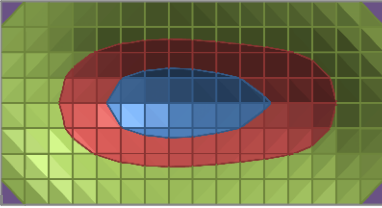
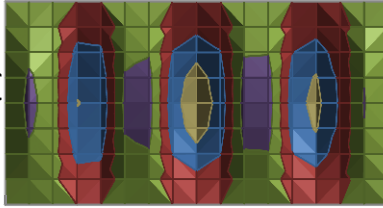
Πίνακας 25 Λόγος Πλευρών $a/b=2.5$, $da=0.125m$, $db=0.10m$ Καμπτικές Ροπές ($M_x/M_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,50--2,00 ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,50--2,00 ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,50--2,00 ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,60--0,40 ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,20 ■ 0,20-0,40 ■ 0,40-0,60 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,50--2,00 ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>

<p style="text-align: center;">Πίνακας 26 Λόγος Πλευρών $a/b=2.5$, $da=0.125m$, $db=0.10m$ Ομοεπίπεδες δυνάμεις ($N_x/N_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$</p>		
	<p style="text-align: center;">Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)</p>	<p style="text-align: center;">Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)</p>
<p style="text-align: center;">Πλευρική Πίεση $p=0$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,51--0,50 ■ -0,50--0,49 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50--0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
<p style="text-align: center;">Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,51--0,50 ■ -0,50--0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,50--0,49 ■ -0,49--0,49 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50--0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
<p style="text-align: center;">Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,52--0,50 ■ -0,50--0,48 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,48--0,46 ■ -0,46--0,44 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50--0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
<p style="text-align: center;">Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,54--0,52 ■ -0,52--0,50 ■ -0,50--0,48 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,48--0,46 ■ -0,46--0,44 ■ -0,44--0,42 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50--0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>

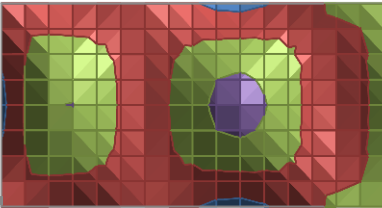
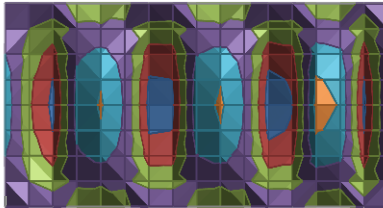
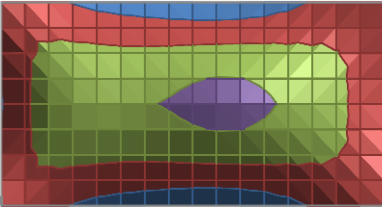
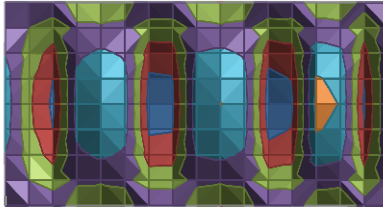
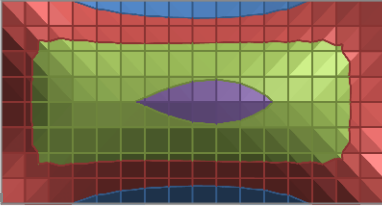
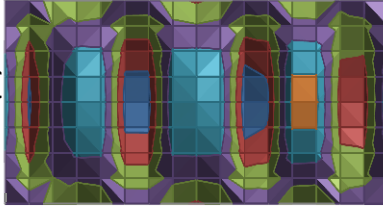
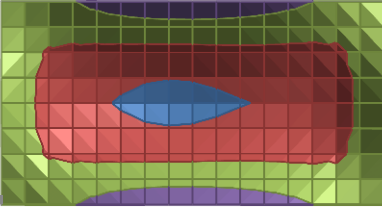
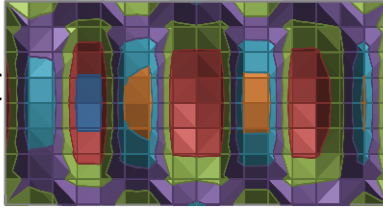
Πίνακας 27 Λόγος Πλευρών $a/b=2.5$, $da=0.125m$, $db=0.10m$ Ομοεπίπεδες δυνάμεις ($N_x/N_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	<i>Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)</i>	<i>Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)</i>
<i>Πλευρική Πίεση $p=0$</i>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,60--0,40 ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> 
<i>Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$</i>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,60--0,40 ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> 
<i>Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$</i>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,80--0,60 ■ -0,60--0,40 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> 
<i>Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$</i>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,80--0,60 ■ -0,60--0,40 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,50--2,00 ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> 

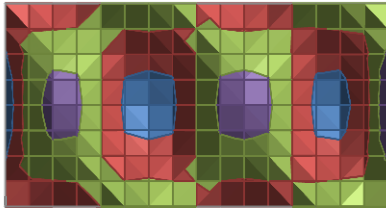
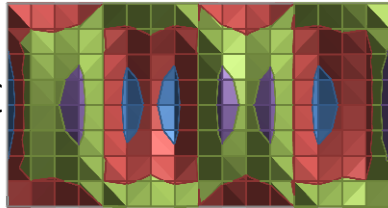
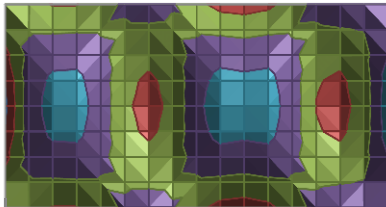
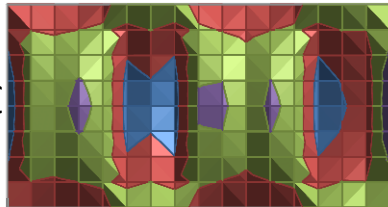
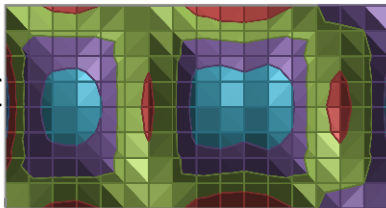
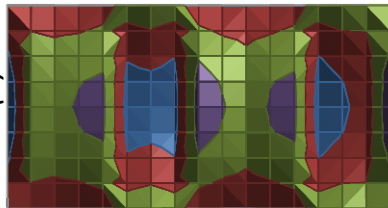
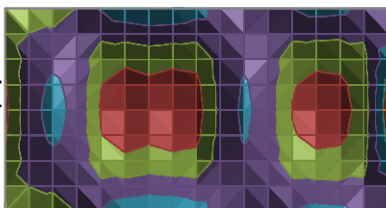
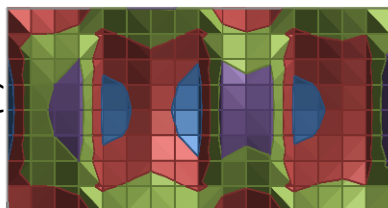
<p style="text-align: center;">Πίνακας 28 Λόγος Πλευρών $a/b=2.5$, $da=0.125m$, $db=0.10m$</p>		
<p style="text-align: center;">Ισοδύναμη Τάση Von Mises (σ_{mises}/σ_0), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$</p>		
	<p style="text-align: center;">Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)</p>	<p style="text-align: center;">Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)</p>
<p style="text-align: center;">Πλευρική Πίεση $p=0$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,56-0,58 ■ 0,58-0,60 ■ 0,60-0,62 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,62-0,64 ■ 0,64-0,66 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 2,00-3,00 ■ 3,00-4,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
<p style="text-align: center;">Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
<p style="text-align: center;">Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
<p style="text-align: center;">Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>

Πίνακας 29 Λόγος Πλευρών $a/b=2.5$, $da=0.125m$, $db=0.10m$		
Ισοδύναμη Τάση Von Mises (σ_{mises}/σ_0), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<p> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<p> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<p> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<p> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<p> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<p> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<p> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<p> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>

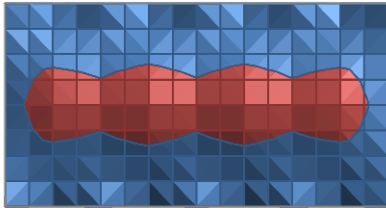
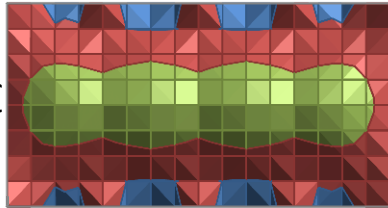
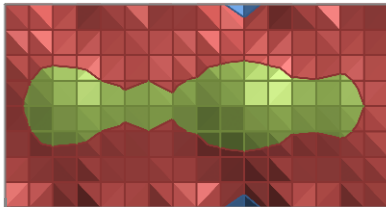
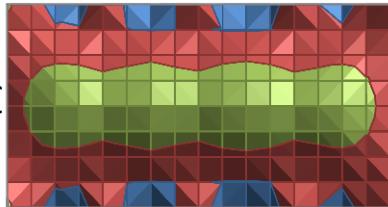
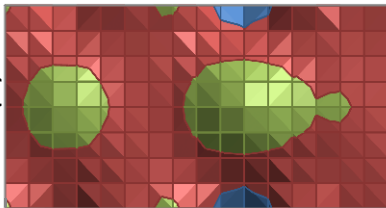
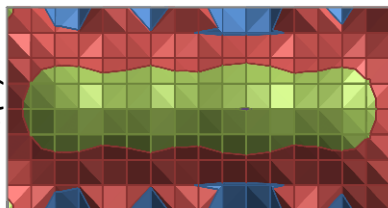
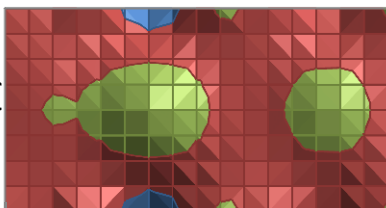
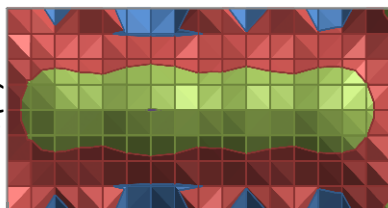
Πίνακας 30 Λόγος Πλευρών $a/b=4.0$, $da=0.25m$, $db=0.10m$ Βέλος κάμψης (w/t) , Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,02-0,00 ■ 0,00-0,02 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,02-0,04 ■ 0,04-0,06 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,10 ■ 0,10-0,20 ■ 0,20-0,30 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,20 ■ 0,20-0,40 ■ 0,40-0,60 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,60--0,40 ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p>

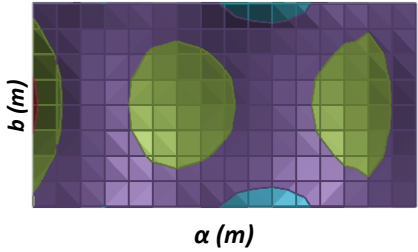
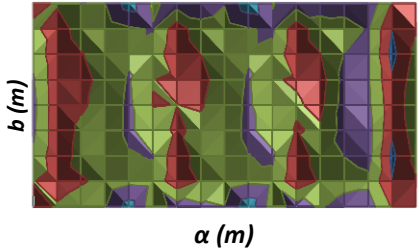
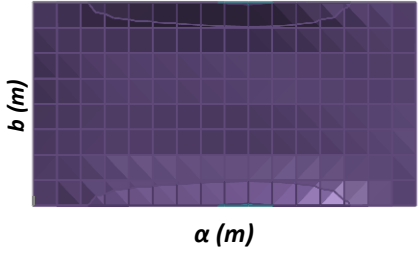
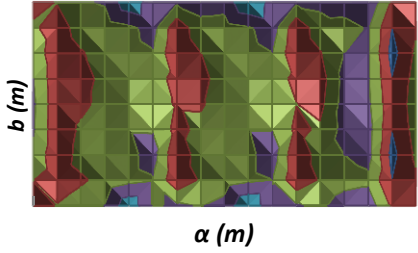
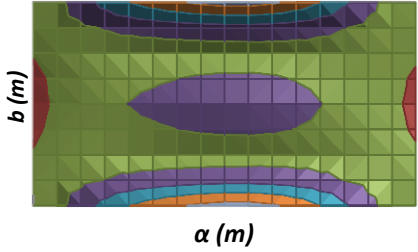
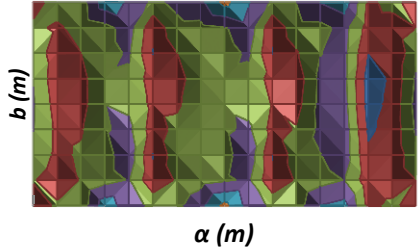
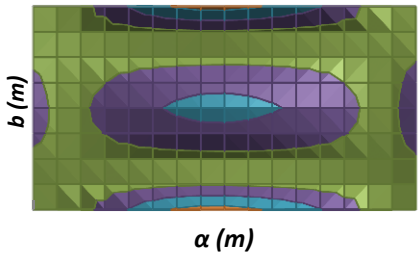
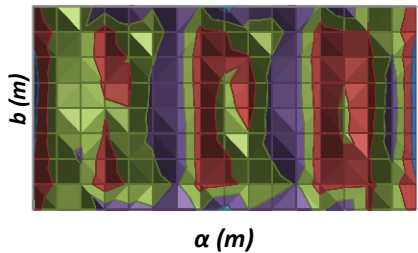
Πίνακας 31 Λόγος Πλευρών $a/b=4.0$, $da=0.25m$, $db=0.10m$ Βέλος κάμψης (w/t) , Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 ■ 0,00-0,50 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>

Πίνακας 32 Λόγος Πλευρών $a/b=4.0$, $da=0.25m$, $db=0.10m$ Καμπτικές Ροπές ($M_x/M_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>■ -0,04--0,02</p> <p>■ 0,00-0,02</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -0,02-0,00</p> <p>■ 0,02-0,04</p> </div> </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>■ -3,00--2,00</p> <p>■ 0,00-1,00</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -2,00--1,00</p> <p>■ 1,00-2,00</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -1,00-0,00</p> <p>■ 2,00-3,00</p> </div> </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>■ -0,20--0,10</p> <p>■ 0,00-0,10</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -0,10-0,00</p> <p>■ 0,10-0,20</p> </div> </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>■ -3,00--2,00</p> <p>■ 0,00-1,00</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -2,00--1,00</p> <p>■ 1,00-2,00</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -1,00-0,00</p> <p>■ 2,00-3,00</p> </div> </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>■ -0,40--0,20</p> <p>■ 0,00-0,20</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -0,20-0,00</p> <p>■ 0,20-0,40</p> </div> </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>■ -3,00--2,00</p> <p>■ 0,00-1,00</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -2,00--1,00</p> <p>■ 1,00-2,00</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -1,00-0,00</p> <p>■ 2,00-3,00</p> </div> </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>■ -0,40--0,20</p> <p>■ 0,00-0,20</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -0,20-0,00</p> <p>■ 0,20-0,40</p> </div> </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>■ -3,00--2,00</p> <p>■ 0,00-1,00</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -2,00--1,00</p> <p>■ 1,00-2,00</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>■ -1,00-0,00</p> <p>■ 2,00-3,00</p> </div> </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>

Πίνακας 33 Λόγος Πλευρών $a/b=4.0$, $da=0.25m$, $db=0.10m$		
Καμπτικές Ροπές ($M_x/M_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ -0,50--0,25 ■ -0,25-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50 </div> </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p> </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div> </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p> </div>
Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ -0,75--0,50 ■ -0,50--0,25 ■ -0,25-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50 </div> </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p> </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div> </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p> </div>
Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ -0,75--0,50 ■ -0,50--0,25 ■ -0,25-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50 </div> </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p> </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ -3,00--2,00 ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 </div> </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p> </div>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ -0,50--0,25 ■ -0,25-0,00 ■ 0,00-0,25 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ 0,25-0,50 ■ 0,50-0,75 </div> </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p> </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ -2,00--1,00 ■ -1,00-0,00 ■ 0,00-1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> </div>  <p style="text-align: center;">$\alpha (m)$</p> </div>

Πίνακας 34 Λόγος Πλευρών $a/b=4.0$, $da=0.25m$, $db=0.10m$		
Ομοεπίπεδες δυνάμεις ($N_x/N_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,51--0,50 ■ -0,50--0,49 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50--0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,51--0,50 ■ -0,50--0,49 ■ -0,49--0,48 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50--0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,52--0,51 ■ -0,51--0,50 ■ -0,50--0,49 ■ -0,49--0,48 ■ -0,48--0,47 ■ -0,47--0,46 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50--0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -0,52--0,51 ■ -0,51--0,50 ■ -0,50--0,49 ■ -0,49--0,48 ■ -0,48--0,47 ■ -0,47--0,46 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 ■ -1,00--0,50 ■ -0,50--0,00 </div> <p style="text-align: center;">α (m)</p>

Πίνακας 35 Λόγος Πλευρών $a/b=4.0$, $da=0.25m$, $db=0.10m$ Ομοεπίπεδες δυνάμεις ($N_x/N_{x,cr}$), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,60--0,40 ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,80--0,60 ■ -0,60--0,40 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,80--0,60 ■ -0,60--0,40 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,80--0,60 ■ -0,60--0,40 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -0,40--0,20 ■ -0,20-0,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -2,00--1,50 ■ -1,50--1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ -1,00--0,50 ■ -0,50-0,00 </div>  <p style="text-align: center;">α (m)</p>

Πίνακας 36 Λόγος Πλευρών $a/b=4.0$, $da=0.25m$, $db=0.10m$		
Ισοδύναμη Τάση Von Mises (σ_{mises}/σ_0), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.0002m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,56-0,58 ■ 0,58-0,60 ■ 0,60-0,62 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,62-0,64 ■ 0,64-0,66 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </div> 
Πλευρική Πίεση $p=0.10 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50 ■ 0,50-0,75 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,75-1,00 ■ 1,00-1,25 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </div> 
Πλευρική Πίεση $p=0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50 ■ 0,50-0,75 ■ 0,75-1,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 1,00-1,25 ■ 1,25-1,50 ■ 1,50-1,75 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 ■ 5,00-6,00 </div> 
Πλευρική Πίεση $p=-0.20 MPa$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-0,25 ■ 0,25-0,50 ■ 0,50-0,75 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,75-1,00 ■ 1,00-1,25 ■ 1,25-1,50 </div> 	<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small;"> ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </div> 

Πίνακας 37 Λόγος Πλευρών $a/b=4.0$, $da=0.25m$, $db=0.10m$ Ισοδύναμη Τάση Von Mises (σ_{mises}/σ_0), Αρχικές ατέλειες $w_0=0.008m$		
	Προλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=0.50$)	Μεταλογισμική περιοχή ($P/P_{cr}=1.50$)
Πλευρική Πίεση $p=0$	<p> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<p> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.10$ MPa	<p> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<p> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=0.20$ MPa	<p> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 ■ 2,00-2,50 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<p> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>
Πλευρική Πίεση $p=-0.20$ MPa	<p> ■ 0,00-0,50 ■ 0,50-1,00 ■ 1,00-1,50 ■ 1,50-2,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>	<p> ■ 0,00-1,00 ■ 1,00-2,00 ■ 2,00-3,00 ■ 3,00-4,00 ■ 4,00-5,00 </p> <p style="text-align: center;">α (m)</p>

Εξετάζοντας τους παραπάνω πίνακες, είναι φανερό ότι οι κατανομές των καμπτικών ροπών και των ομοεπίπεδων δυνάμεων κατά το εγκάρσιο, για όλο το μήκος του εκάστοτε ελάσματος, ακολουθούν τη γενική συμπεριφορά που περιγράφηκε στα προηγούμενα εδάφια. Η πιο αντιπροσωπευτική ανάλυση που έγινε είναι στα ελάσματα με λόγο πλευρών ίσο με 2.5 καθώς εκεί εξετάστηκαν εγκάρσιες τομές, στις οποίες η κάθετη μετατόπιση έχει μορφή κοιλάδας ή κορυφής.

Ενδιαφέρον στη μεταβολή του βέλους κάμψης παρουσιάζεται στο λόγο πλευρών ίσο με 4. Η μορφή του βέλους κάμψης προλυγισμικά για έλασμα με αρχικά μικρές μετατοπίσεις δεν παρουσιάζει απόλυτη συμμετρία ως προς το κέντρο όπως φαίνεται στον πίνακα 30. Αυτό ξεκινάει από το γεγονός ότι οι δύο κορυφές που δημιουργούνται στα 4 ημικύματα, δεν έχουν ακριβώς το ίδιο ύψος. Επιπλέον, επιβολή αξονικού φορτίου μεγαλώνει τη διαφορά αυτή. Το φαινόμενο εξομαλύνεται με την επιβολή πλευρικού φορτίου. Μάλιστα για τη μέγιστη πλευρική πίεση η εκκεντρότητα που παρατηρείται στο βέλος κάμψης είναι μικρότερη από 0.5 μέτρα.

Τέλος εξετάζοντας τη μορφή της κατανομής της ισοδύναμης τάσης *Von Mises*, γενικά φαίνεται ότι δεν επηρεάζεται σημαντικά από την αύξηση της πλευρικής πίεσης. Τόσο προλυγισμικά όσο και μεταλυγισμικά, οι διαφορές για την επιβολή και αύξηση της πλευρικής πίεσης είναι ελάχιστες κυρίως μεταλυγισμικά. Αυτό που φαίνεται να την επηρεάζει είναι ο λόγος πλευρών, καθώς στα μακρύτερα ελάσματα φαίνεται να έχει μια πιο ομοιόμορφη κατανομή λόγω της παρουσίας ημικυμάτων περισσότερων της μονάδας. Συγκρίνοντας τα αντίστοιχα διαγράμματα, είναι φανερό ότι όσο πιο μακρύ είναι το έλασμα, η ισοδύναμη τάση κατανέμεται πιο ομοιόμορφα και μάλιστα με μικρότερο μέσο όρο τιμών στη συνολική επιφάνεια του ελάσματος. Σημειώνεται εδώ ότι η ισοδύναμη τάση δε περιλαμβάνει μόνο τις καμπτικές και θλιπτικές τάσεις στον άξονα x που αναλύθηκαν στη παρούσα εργασία, αλλά και τις αντίστοιχες στον άξονα y καθώς και τις διατμητικές τάσεις που εμφανίζονται στο έλασμα.

4.6 Σύνοψη αποτελεσμάτων και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώθηκε κυρίως στην επίδραση που έχει η επιβολή πλευρικού φορτίου στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού ελάσματος που βρίσκεται υπό καθεστώς μονοαξονικής θλίψης. Για το σκοπό αυτό εξετάστηκαν διάφορες περιπτώσεις, με λόγους πλευρών ελασμάτων, τιμές πλευρικής πίεσης και μέγεθος αρχικών ατελειών κατάλληλων για να προσομοιαστεί κατά δύναμη η λειτουργία ναυπηγικών ελασμάτων που τοποθετούνται στον εξωτερικό πυθμένα των πλοίων. Από την έρευνα αυτή διαπιστώθηκε:

- Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού των τετράγωνων ελασμάτων μπορεί να μειωθεί έως και 38% λόγω της επίδρασης πλευρικής πίεσης ισοδύναμης με την υδροστατική πίεση σε βάθος 20 μέτρων.
- Για μακριά ελάσματα (που χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο) αντίστοιχη φόρτιση δεν μειώνει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Πιθανόν μάλιστα να του προσδώσει μια αύξηση έως 5%. Αυτό φαίνεται να οφείλεται και στην ύπαρξη περισσότερων ημικυμάτων κατά το διάμηκες που σε συνδυασμό με τη φορά της επιβολής του πλευρικού φορτίου δρουν εν μέρει ως επιπλέον στήριξη στο έλασμα έναντι του λυγισμού.
- Δεδομένου ότι για λόγο πλευρών ίσο με 1 ο συντελεστής λυγισμού για τις οριακές συνθήκες είναι μεγαλύτερος από αυτόν για τους άλλους δύο λόγους πλευρών, η σημαντική μείωση του κρίσιμου φορτίου έχει ως αποτέλεσμα να πλησιάζει (σε απόλυτη τιμή) το επίπεδο του κρίσιμου φορτίου στα μακριά ελάσματα. Χαρακτηριστικά βρέθηκε ότι στα τετράγωνα ελάσματα το φορτίο λυγισμού για υδροστατική πίεση βάθους 20

μέτρων μειώνεται από 374 MPa στα 231 MPa, ενώ για λόγο πλευρών $a/b \geq 2.5$ παραμένει οριακά στα 292 MPa για τις ίδιες συνθήκες.

Για τη συνέχεια της ακαδημαϊκής έρευνας στον τομέα αυτό προτείνεται:

1. Η αναλυτική μελέτη και άλλων μεγεθών για τις ίδιες καταστάσεις φόρτισης, όπως οι συνολικές τάσεις στον x άξονα, καθώς και οι διατμητικές τάσεις.
2. Η εξέταση ανάλογων συνθηκών φόρτισης στην ελαστοπλαστική περιοχή όπου εισέρχεται η διαρροή του υλικού ως φαινόμενο και προσεγγίζει περισσότερο την πραγματικότητα.
3. Η εξέταση της επίδρασης της υδροστατικής πίεσης στο φορτίο λυγισμού σε ελάσματα που βρίσκονται υπό άλλες συνθήκες φόρτισης, όπως για παράδειγμα η διαξονική θλίψη.

Βιβλιογραφία

- [1] E. Ventsel and T. Krauthammer, Thin Plates and Shells. Theory, Analysis and Applications, New York-Basel: MARCEL DEKKER, INC, 2001.
- [2] Π. Α. Καρύδης, Η μεταλλική κατασκευή του πλοίου, Αθήνα, 2000.
- [3] Α. Δ. Παπανικολάου, Μελέτη Πλοίου. Μεθοδολογίες Προμελέτης, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμεών, 2009.
- [4] O. F. Hughes and J. K. Paik, Ship Structural analysis and design, New Jersey: The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 2010.
- [5] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, New York: Mcgraw-Hill, 1959.
- [6] M. Shama, Buckling of Ship Structures, Alexandria, Egypt: Faculty of Engineering, Naval Architecture & Marine Engineering.
- [7] W. J. Lewis, Tension structures, London: Thomas Telford, 2003.
- [8] Π. Α. Καρύδης, Υπολογιστικές μέθοδοι και εφαρμογές σε λεπτότοιχες κατασκευές, Αθήνα, 2001.
- [9] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, New York: Dover Publications, Inc, 1961.
- [10] F. Bloom and D. Coffin, Handbook of Thin Plate Buckling and Postbuckling, New York: CRC Press, 2000.
- [11] M. Rodrigues, «Probabilistic characterization of the ultimate strength of plates with initial geometrical imperfections,» Centre for Marine Technology and Engineering, Lisbon.
- [12] J. Singer, J. Arbocz and T. Weller, "Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures: Basic Concepts, Columns, Beams and Plates-Volume 1," John Wiley & Sons, Inc, 1998.
- [13] J. K. Paik, A. K. Thayamballi and B. J. Kim, "Advanced Ultimate Strength Formulations for Ship Plating Under Combined Biaxial Compression/Tension, Edge Shear, and Lateral Pressure Loads," Marine Technology, 2001.
- [14] R. M. Woolley, J. N. Corrick and S. Levy, "Clamped Long Rectangular Plate Under Combined Axial Load and Normal Pressure," National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1946.
- [15] S. Levy, D. Goldenberg and G. Zibritsky, "Simply Supported Long Rectangular Plate Under Combined Axial Load and Normal Pressure," National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1944.
- [16] C. Guedes Soares και J. Romanoff, Analysis and Design of Marine Structures, New York: CRC Press, 2013.
- [17] E. H. Mansfield, The bending and stretching of plates, Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

- [18] M. Rezaiee-Pajand and H. Estiri, "Computing the structural buckling limit load by using dynamic relaxation method," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, no. 81, pp. 245-260, 2016.
- [19] H. Shen, «Postbuckling of rectangular plates under uniaxial compression combined with lateral pressure,» *Applied Mathematics and Mechanics*, January 1989.
- [20] Y. Ueda and T. Yao, "The Influence of Complex Initial Deflection Modes on the Behavior and Ultimate Strength of Rectangular Plates in Compression," *J. Construct. Steel Research*, no. 5, pp. 265-302, 1985.
- [21] A. P. Teixeira and C. Guedes Soares, "Strength of compressed rectangular plates subjected to lateral pressure," *Journal of Constructional Steel Research*, no. 57, pp. 491-516, 2001.
- [22] W. Cui, Y. Wang and P. T. Pedersen, "Strength of ship plates under combined loading," *Marine Structures*, no. 15, pp. 75-97, 2002.
- [23] H. W. Bengston, "Ship Plating Under Compression and Hydrostatic Pressure".
- [24] K. R. Rushton, "Dynamic-relaxation solution for large deflection of plates with specified boundary stresses," *Journal of Strain Analysis*, no. 4, pp. 75-80, 1969.
- [25] K. R. Rushton, "Dynamic-relaxation solutions of elastic plate problems," *Journal of Strain Analysis*, no. 3, pp. 23-32, 1968.