



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας
και Τεχνολογίας Υλικών

“Περί της εφαρμογής των αριθμητικών
μεθόδων σε νανοκεραίες άνθρακα”

Αναστάσιος Παπαθανασόπουλος

Επιβλέπων καθηγητής: Γεώργιος Φικιώρης

Αθήνα - Μάιος 2017

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την

Ηλίας Γλύτσας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Γεώργιος Φικιώρης
Αναπληρωτής Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

Ιωάννης Τσαλαμέγκας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....

Στη μητέρα μου Κατερίνα...

Δήλωση Πνευματικών Δικαιωμάτων

Copyright ©Αναστάσιος Παπαθανασόπουλος, 2017
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Από την ανακάλυψη των νανοδομών άνθρακα (CNTs) το 1991, οι CNTs βρίσκονται στο προσκήνιο της επιστημονικής έρευνας. Δομικά μπορούν να περιγραφούν ως ένα φύλλο γραφίνης διπλωμένο σε μορφή κυλίνδρου. Λόγω της ποικιλίας των διαφορετικών προσανατολισμών του άξονα της κεραίας σε σχέση με το εξατομικό μόριο του άνθρακα, πολλοί διαφορετικοί τύποι νανοκεραίων άνθρακα μπορούν να προκύψουν, ορίζοντας έτσι την ιδιότητα γνωστή ως *chirality*. Οι τύποι αυτοί διαφέρουν ως προς τους ακεραίους m και n που καθορίζουν το *chiral* διάνυσμα.

Οι νανοκεραίες άνθρακα μπορούν να είναι είτε μεταλλικές είτε ημιαγώγιμες. Οι *armchair* ($m = n$) και οι *zigzag* ($n = 0$) με $m = 3q$, όπου q είναι ακέραιος, παρουσιάζουν μεταλλική συμπεριφορά ενώ οι *zigzag* ($n = 0$) με $m \neq 3q$ και οι *chiral* ($m \neq n$) μπορεί να είναι και ημιαγώγιμες. Επιπλέον, ποικίλλουν ως προς τον αριθμό των στρωμάτων άνθρακα στα τοιχώματά τους και μπορούν να είναι μονού, διπλού ή πολλαπλού στρώματος. Ακόμη, μπορούν να συνδυαστούν δημιουργώντας στοιχειοκεραίες.

Λόγω των ελκυστικών τους ηλεκτρικών και φυσικών χαρακτηριστικών, όπως η αντοχή και το χαμηλό βάρος τους, οι νανοδομές άνθρακα έχουν χρησιμοποιηθεί σε αρκετές εφαρμογές που περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων τρανζίστορ και αισθητήρες. Στην παρούσα διπλωματική εργασία αποδεικνύεται η ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hallén από την οποία προκύπτει το ρεύμα για τη συγκεκριμένη κεραία. Η εξίσωση αυτή παίρνει δύο μορφές ανάλογα με την επιλογή του πυρήνα. Με τον προσεγγιστικό πυρήνα, δεν έχει λύση. Ωστόσο οι αριθμητικές μέθοδοι εφαρμόζονται συχνά σε αυτή. Εδώ η αριθμητική μέθοδος που εφαρμόζεται είναι η μέθοδος Galerkin με παλμικές συναρτήσεις. Αποδεικνύεται ότι η χρησιμοποίηση του προσεγγιστικού πυρήνα οδηγεί σε ταλαντώσεις στη λύση. Οι ταλαντώσεις αυτές μπορεί να οφείλονται είτε στη μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης είτε στο γεγονός ότι υπό ορισμένες προϋποθέσεις το ρεύμα συγκεντρώνεται στο κέντρο της κεραίας προσεγγίζοντας την χρουστική συνάρτηση. Για το σκοπό αυτό μελετάται ασυμπτωτικά η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση για την άπειρη κεραία όταν ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης είναι αρκετά μεγάλος. Τα αποτελέσματα στη συνέχεια χρησιμοποιούνται επιτυχώς ως οδηγός για την πρακτική περίπτωση της πεπερασμένης κεραίας.

Λέξεις κλειδιά: Νανοκεραίες άνθρακα, Νανοτεχνολογία, Ηλεκτρομαγνητισμός, Αριθμητικές μέθοδοι, Μέθοδος Galerkin, ολοκληρωτική εξίσωση Hallén.

Abstract

Since the discovery of carbon nanotubes (CNTs) in 1991, CNTs have leapt to the forefront of material research interest. Structurally, CNTs can be described as a sheet of graphene rolled into a cylinder that has a radius of a few centimeters and a length up to centimeters. Because of the variety of possible orientations of the tube axis relative to the six-membered carbon ring, different types of CNTs can be obtained, demonstrating a property called chirality. These types differ in the integers m and n that determine the chiral vector.

CNTs can be either metallic or semiconducting. Armchair ($m = n$) and zigzag ($n = 0$) with $m = 3q$, where q is an integer, CNTs show metallic conductivity while zigzag ($n = 0$) with $m \neq 3q$ and chiral ($m \neq n$) nanotubes can be semiconducting. Additionally, CNTs vary in the number of carbon layers in their side walls and can be single-wall (SWNTs), double-walled (DWNTs) or multiwalled (MWNTs), forming the corresponding antennas, and can also be combined to form antenna arrays.

Due to their attractive electrical and physical characteristics, such as high strength and light weight, CNTs have been used in many applications which include transistors and sensors among other uses. In this diploma thesis, we will focus on their use as antennas. The Hallén's type integral equation for the current is derived. It takes two forms depending on the choice of kernel, which are usually referred to as the exact and the approximate equation. With the approximate kernel, the integral equation has no solution. Nevertheless, the same numerical method is often applied to both forms of the integral equation. Here we use Galerkin's method with pulse functions. It is shown that the application of the method leads to the unavoidable appearance of oscillations. These oscillations may appear either due to the use of the approximate kernel and the unsolvability of the equation, or because of the fact that under some conditions the current is strongly damped. We first apply Galerkin's method to the integral equation for the current on a linear antenna of infinite length. The exact solution is developed asymptotically for the case where the pulse width is small. Then the results are successfully used as a guide for the solution of the finite antenna.

Index terms: Carbon nanotubes, Nanotechnology, Electromagnetics, Numerical Methods, Galerkin's method, Hallén's integral equation.

Ευχαριστίες

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή Γιώργο Φικιώρη για την πολύτιμη καθοδήγησή του και την άψογη συνεργασία καθόλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Ακόμη είμαι ευγνώμων στους καθηγητές μου και ιδιαίτερα στους Γιώργο Φικιώρη, Ηλία Γλύτση και Παναγιώτη Κωττή για τις γνώσεις που μου μετέδωσαν και γιατί η στήριξη και η εμπιστοσύνη που μου έδειξαν συνεισέφεραν σημαντικά στην πραγματοποίηση του στόχου μου για διδακτορικές σπουδές στο εξωτερικό. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους στενούς μου φίλους για την ηθική υποστήριξη που μου παρείχαν σε όλες μου τις προσπάθειες.

Περιεχόμενα

1	Εξισώσεις Maxwell	17
1.1	Εξισώσεις Maxwell	17
1.2	Οριακές συνθήκες	18
1.3	Τα Ηλεκτρομαγνητικά Δυναμικά	18
1.4	Χρήση Φασιδετών	19
2	Το σωληνοειδές δίπολο	25
2.1	Το σωληνοειδές δίπολο	25
2.2	Έκφραση του Ηλεκτρικού πεδίου	25
2.3	Ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση τύπου Pocklington	26
2.4	Ολοκληρωτική Εξίσωση τύπου Hallén	27
2.5	Εναλλακτική ολοκληρωτική εξίσωση	29
3	Αριθμητικές μέθοδοι	33
3.1	Μέθοδος Ροπών Galerkin - Method of Moments (MoM)	33
3.2	Εναλλακτικές αριθμητικές μέθοδοι	36
4	Αγωγιμότητα	41
4.1	Αγωγιμότητα λεπτού μεταλλικού σωλήνα	41
4.2	Αγωγιμότητα νανοκεραίας άνθρακα	41
5	Τέλειος αγωγός	47
5.1	Τέλεια αγώγιμος σωλήνας	47
5.2	Προσομοίωση μέσω Matlab	49
5.3	Αποτελέσματα προσομοίωσης	50
6	Νανοκεραίες άνθρακα - μεγάλος παράγοντας $q(z - z')$	57
6.1	Νανοκεραίες άνθρακα - Περίπτωση μεγάλου παράγοντα $q(z - z')$	57
6.2	Αριθμητική επίλυση κεραίας απείρου μήκους	58
6.3	Προσεγγιστική λύση άπειρης κεραίας	60
6.4	Προσομοίωση μέσω Matlab	63
6.5	Αποτελέσματα προσομοίωσης	64
7	Αριθμητική επίλυση - Νανοκεραίες άνθρακα	69
7.1	Εισαγωγή	69
7.2	Οριακές περιπτώσεις	69
7.3	Ενδιάμεση περίπτωση	71
7.4	Προσεγγιστική λύση για την άπειρη κεραία	73

7.5	Αποτελέσματα προσομοίωσης	76
8	Συμπεράσματα - Προεκτάσεις - Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	83
8.1	Συμπεράσματα	83
8.2	Προεκτάσεις - Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	84
8.2.1	Χρήση προσεγγιστικού πυρήνα	84
8.2.2	Επιλογή μοντέλου και μεθόδου	84
8.2.3	Πειραματική επαλήθευση	84
A'	Μερική λύση της εξίσωσης $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) f(z) = -j\frac{4\pi k}{Z_0} V\delta(z)$	89
B'	Συνάρτηση Green για τον τελεστή $\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2$	91
Γ'	Κώδικας Matlab	93
Δ'	Πρώτος όρος διορθωτικού παράγοντα της σχέσης (7.4.9)	95

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Οριακές συνθήκες	18
1.2	Διανύσματα που χρησιμοποιούνται σε προβλήματα ακτινοβολίας	21
2.1	Το σωληνοειδές δίπολο	25
3.1	Οι συνημιτονικές συναρτήσεις	37
4.1	Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας σ για ακτίνα $\alpha = 0.678nm$ ($m = n = 10$).	43
5.1	Το πραγματικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 80$, $f = 100GHz$, $\alpha = 3.12nm$, $h = 25\alpha$	51
5.2	Το φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 80$, $f = 100GHz$, $\alpha = 3.12nm$, $h = 25\alpha$	52
5.3	Το πραγματικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 200$, $f = 100GHz$, $\alpha = 3.12nm$, $h = 75\alpha$	53
5.4	Το φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 200$, $f = 100GHz$, $\alpha = 3.12nm$, $h = 75\alpha$	53
6.1	Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης της άπειρης κεραίας	62
6.2	Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $\xi \rightarrow +\infty$, $N = 100$, $f = 1GHz$, $\alpha = 3.12nm$, $h = 25\alpha$	65
6.3	Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 200$, $f = 250THz$, $\alpha = 0.678nm$, $h = 20\alpha nm$	66
7.1	Το πραγματικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $Re\{\xi\alpha\} \simeq 5 \times 10^{-4}$, $Im\{\xi\alpha\} \simeq -9.42 \times 10^{-6}$, $N = 85$, $f = 1GHz$, $\alpha = 0.34nm$, $h = 30\alpha$	72
7.2	Το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος της ολοκληρωταίας ποσότητας για $\nu=1$	74
7.3	Το πραγματικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 80$, $f = 10GHz$, $\alpha = 3.05nm$, ($m = n = 45$), $h = 20\alpha$	77
7.4	Το φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 80$, $f = 10GHz$, $\alpha = 3.05nm$, ($m = n = 45$), $h = 20\alpha$	78

Κατάλογος Πινάκων

5.1	Σύγκριση $I_{ap,n}^{(\infty)}/jV, Im \{I_{ap,n}/V\}$	54
6.1	Οι κανονικοποιημένες τιμές της προσεγγιστικής λύσης ($\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V} \xi z_0(Siemens)$)	62
6.2	Σύγκριση $\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V} \xi z_0(Siemens), \frac{I_{ap,n}}{V} \xi z_0(Siemens)$	65
6.3	Σύγκριση $\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V} \xi z_0(Siemens), \frac{I_{ap,n}}{V} \xi z_0(Siemens)$	66
7.1	Σύγκριση $Re \{I_{ap,n}/V\}, Re \{I_{ap,n}^{(\infty)}/V\}$ και $Im \{I_{ap,n}/V\}, Im \{I_{ap,n}^{(\infty)}/V\}$	79

Κεφάλαιο 1

Εξισώσεις Maxwell

1.1 Εξισώσεις Maxwell

Η θεωρία των κεραιών στηρίζεται στις εξισώσεις του Maxwell [1]. Για χρονομεταβλητά πεδία, θεωρώντας γραμμικό, ιστροπικό, ομογενές μέσο χωρίς απώλειες οι εξισώσεις του Maxwell είναι:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.1.4)$$

όπου \vec{E} είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε Volts/meter, \vec{D} η διηλεκτρική μετατόπιση σε Coulombs/meter², \vec{B} το μαγνητικό πεδίο (διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής ή πυκνότητα μαγνητικής ροής) σε Webers/meter², \vec{H} η ένταση του μαγνητικού πεδίου σε Amperes/meter, \vec{J} η πυκνότητα ρεύματος σε Amperes/meter² και ρ η πυκνότητα φορτίου σε Coulombs/meter³.

Λαμβάνοντας την απόκλιση της εξίσωσης (1.1.2) και με χρήση της (1.1.4) καταλήγουμε στην εξίσωση της συνέχειας:

$$0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \stackrel{(1.1.2)}{=} \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \stackrel{(1.1.4)}{=} \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.1.5)$$

Από την εξίσωση του Lorentz για την ηλεκτρομαγνητική δύναμη, η δύναμη που δέχεται ένα κινούμενο φορτίο q με ταχύτητα \vec{u} είναι ίση με $\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right)$. Για το λόγο αυτό τα μεγέθη \vec{E} και \vec{B} θεωρούνται θεμελιώδη πεδιακά μεγέθη, ενώ οι δευτερεύουσες ποσότητες \vec{D} , \vec{H} συνδέονται με αυτά μέσω των συντακτικών σχέσεων (θεωρώντας γραμμικό, ιστροπικό, ομογενές μέσο) [2]:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{και} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.1.6)$$

όπου $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ η επιτρεπτότητα (διηλεκτρική σταθερά) του μέσου, $\varepsilon_r \geq 1$ η σχετική διηλεκτρική σταθερά του μέσου, $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{Farad/m}$ η επιτρεπτότητα του κενού και $\mu = \mu_0 \mu_r$ η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου, μ_r η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του μέσου, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Henry/m}$ η μαγνητική διαπερατότητα του κενού .

1.2 Οριακές συνθήκες

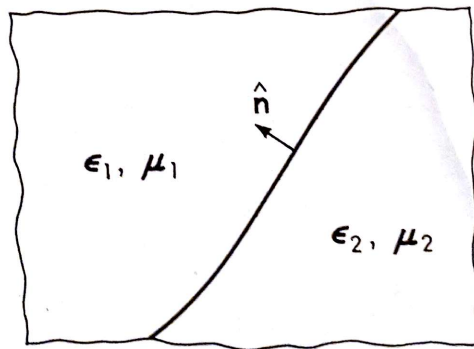
Τα πεδία \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} και \vec{H} είναι, εν γένει, ασυνεχή στο χώρο δύο διαφορετικών μέσων ή σε μια επιφάνεια με πυκνότητα φορτίου σ ή επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος \vec{K} . Η ακριβής φύση των ασυνεχειών αυτών μπορεί να εξαχθεί από τις εξισώσεις του Maxwell στην ολοκληρωτική τους μορφή [3]. Αν \hat{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια των μέσων 1 και 2 που χαρακτηρίζονται από τις παραμέτρους (ε_1, μ_1) και (ε_2, μ_2) τότε οι συνοριακές συνθήκες είναι (σχήμα (1.1)):

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \quad (1.2.1)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (1.2.3)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \quad (1.2.4)$$



Σχήμα 1.1: Οριακές συνθήκες μεταξύ δυο διαφορετικών μέσων 1 και 2

1.3 Τα Ηλεκτρομαγνητικά Δυναμικά

Η μορφή των εξισώσεων του Maxwell καθιστά δυνατή την αναπαράσταση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου κατά ισοδύναμο τρόπο με συνδυασμένη χρήση του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} και του βαθμωτού δυναμικού Φ [4]. Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της διανυσματικής ανάλυσης, η σχέση (1.1.3) συνεπάγεται την ύπαρξη μια διανυσματικής συνάρτησης \vec{A} , ώστε

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.3.1)$$

Με αντικατάσταση στην (1.1.1) προκύπτει ότι:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Η τελευταία σχέση, σύμφωνα με άλλο γνωστό θεώρημα της διανυσματικής ανάλυσης συνεπάγεται την ύπαρξη βαθμωτής συνάρτησης Φ τέτοιας ώστε:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.3.2)$$

Αντικαθιστώντας τις (1.3.2) και (1.3.1) στην (1.1.2) και χρησιμοποιώντας τις συντακτικές σχέσεις και την ταυτότητα $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \stackrel{(1.3.1)}{\stackrel{(1.3.2)}}{\Rightarrow} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \vec{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Για ευκολία επιλέγουμε την αυθαίρετη τιμή της $\nabla \cdot \vec{A}$ έτσι ώστε:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{συνθήκη Lorentz}) \quad (1.3.4)$$

Προκύπτει τότε για το \vec{A} η μη ομογενής κυματική εξίσωση:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (1.3.5)$$

Από την (1.1.4) χρησιμοποιώντας τις συντακτικές σχέσεις προκύπτει η μη ομογενής κυματική εξίσωση για το Φ

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \stackrel{(1.3.2)}{\Rightarrow} \nabla \cdot \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \\ &\stackrel{(1.3.4)}{\Rightarrow} \nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

1.4 Χρήση Φασιδετών

Η ανάλυση γραμμικών ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων μπορεί να υλοποιηθεί με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier [2]. Αν $G(\vec{r}, t)$ ένα ηλεκτρομαγνητικό μέγεθος στο πεδίο του χρόνου, τότε ο ευθύς μετασχηματισμός Fourier ως προς t και ο αντίστροφός του ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \dot{G}(\vec{r}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt \\ G(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση της ημιτονικής μόνιμης κατάστασης (ΗΜΚ) ισχύουν:

$$G(\vec{r}, t) = M \cos[\omega t + \varphi(\vec{r})]$$

$$G(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ M e^{j[\omega t + \varphi(\vec{r})]} \right\} = \text{Re} \left\{ \left[M e^{j\varphi(\vec{r})} \right] e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \dot{G}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} \right\} \quad (1.4.1)$$

όπου

$$\dot{G}(\vec{r}, \omega) = M e^{j\varphi(\vec{r})}$$

ο παραστατικός μιγαδικός ή φασιθέτης (phasor) του μεγέθους $G(\vec{r}, t)$ Με χρήση παραστατικών μιγαδικών οι εξισώσεις του Maxwell και οι οριακές συνθήκες γράφονται:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (1.4.2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} \quad (1.4.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.4.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + j\omega \rho = 0 \quad (1.4.6)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \quad (1.4.7)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (1.4.8)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (1.4.9)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \quad (1.4.10)$$

Ακόμη, η συνθήκη Lorentz (1.3.4), οι σχέσεις για τα δυναμικά \vec{A} (1.3.1) και Φ (1.3.2) και οι κυματικές εξισώσεις (1.3.5), (1.3.6) γράφονται:

$$\nabla \cdot \vec{A} + j\omega \mu \epsilon \Phi = 0 \quad (1.4.11)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.4.12)$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - j\omega \vec{A} = -\frac{j\omega}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - j\omega \vec{A} \quad (1.4.13)$$

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.4.14)$$

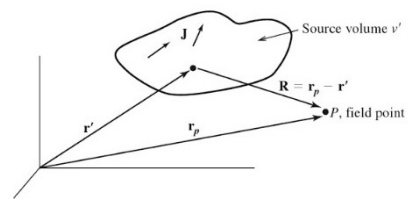
$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (1.4.15)$$

όπου $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ ο κυματριθμός. Από εδώ και στο εξής δε θα χρησιμοποιείται το σύμβολο \dot{G} για το φασιθέτη, αλλά απλώς το G και θα υπονοείται ο φασιθέτης του μεγέθους.

Αποδεικνύεται ότι οι λύσεις των εξισώσεων (1.4.14) και (1.4.15) στον ελεύθερο χώρο έχουν τη μορφή [5]:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV \quad (1.4.16)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV \quad (1.4.17)$$



Σχήμα 1.2: Διανύσματα που χρησιμοποιούνται σε προβλήματα ακτινοβολίας

Βιβλιογραφία

- [1] R. E. Collin and F. J. Zucker, “Antenna Theory Part 1”, in. McGraw-Hill, 1969, ch. 1.
- [2] Ι. Τσαλαμέγκας και Ι. Ρουμελιώτης, *Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία, Τόμος Α΄, Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία και Κύματα*. Τζιόλα, 2011.
- [3] D. J. Griffiths, *Εισαγωγή στην ηλεκτροδυναμική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012.
- [4] Ι. Τσαλαμέγκας, *Τα Ηλεκτρομαγνητικά Δυναμικά*, Διαθέσιμο στη διεύθυνση: http://mycourses.ntua.gr/courses/ECE1165/document/ch_1a.pdf.
- [5] R. King and S. Prasad, *Fundamental Electromagnetic Theory and Applications*. Prentice-Hall, 1986.

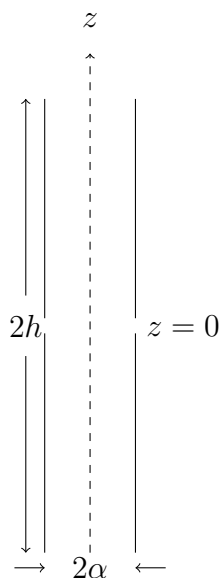
Κεφάλαιο 2

Το σωληνοειδές δίπολο

2.1 Το σωληνοειδές δίπολο

Ένα απλό θεωρητικό μοντέλο που χρησιμεύει για τη μοντελοποίηση και άλλων κεραιών είναι το σωληνοειδές δίπολο (*cylindrical dipole*) που φαίνεται στο σχήμα (2.1) [1]. Πρόκειται για έναν αγωγίμο σωλήνα αγωγιμότητας σ με απείρως λεπτά τοιχώματα. Στο κέντρο $z = 0$ του σωλήνα υπάρχει ένα απειροστό μικρό διάκενο (*infinitesimal gap*) στο οποίο βρίσκεται η γεννήτρια δ-συνάρτησης (*delta-function generator*) [2]. Αυτή διατηρεί ένα δυναμικό V στο διάκενο, έτσι ώστε το βαθμωτό δυναμικό $\Phi(\rho, z)$ να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\Phi(\alpha, 0^+) - \Phi(\alpha, 0^-) = V \quad (2.1.1)$$



Σχήμα 2.1: Το σωληνοειδές δίπολο

Η κεραιά μας είναι λεπτή με την έννοια ότι $\alpha \ll h$, $k\alpha \ll 1 \Leftrightarrow \alpha \ll \lambda$.

2.2 Έκφραση του Ηλεκτρικού πεδίου

Θα εκφράσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου ως συνάρτηση του ρεύματος μέσω του διανυσματικού δυναμικού. Λόγω συμμετρίας η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος για

$r = \alpha$ θα είναι

$$\vec{K} = \hat{z}K(z), \quad -h < z < h$$

ενώ το ολικό ρεύμα στη θέση z θα είναι:

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} K(z) dl_{\varphi} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} K(z) \alpha d\varphi = K(z) 2\pi\alpha \\ \Rightarrow K(z) &= \frac{I(z)}{2\pi\alpha}, \quad -h < z < h \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Από τη σχέση (1.4.17) προκύπτει ότι:

$$\vec{A} = \hat{z}A_z(z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S'} \vec{K}(z') \frac{e^{-jkR}}{R} dS'_r \stackrel{(2.2.1)}{=} \hat{z} \frac{\mu}{4\pi} \int_{z=-h}^h \int_{\varphi'=-\pi}^{\pi} \frac{I(z')}{2\pi\alpha} \frac{e^{-jkR}}{R} \alpha d\varphi' dz' \quad (2.2.2)$$

άρα μέσω της (1.4.13) έχουμε $\vec{E} = \hat{z}E_z$, όπου

$$\begin{aligned} E_z(r, z) &= -j\omega A_z(z) - \frac{\omega}{k^2} \frac{\partial^2 A_z(z)}{\partial z^2} \\ \stackrel{(2.2.2)}{\Rightarrow} E_z(r, z) &= \frac{-j\omega}{k^2} \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{z=-h}^h \int_{\varphi'=-\pi}^{\pi} \frac{I(z')}{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} d\varphi' dz' \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

όπου $R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}$ με $r' = \alpha$, σε κυλινδρικές συντεταγμένες [3].

2.3 Ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση τύπου Pocklington

Το πεδίο στην επιφάνεια $r = \alpha$ θα είναι $E_S(\alpha, z) = z^i I(z) - E_S^e$, $-h < z < h$ όπου $z^i = \frac{1}{2\pi\alpha\sigma}$ η αντίσταση ανά μονάδα μήκους και E_S^e το πεδίο που δημιουργείται από τη γεννήτρια δ-συνάρτησης και είναι ανεξάρτητο από την κατανομή του ρεύματος και την πυκνότητα φορτίου και ρεύματος [4]. Λόγω της (1.4.13) και των ιδιοτήτων της συνάρτησης δ προκύπτει ότι στην επιφάνεια $r = \alpha$ θα ισχύει $E_S^e = -V\delta(z)$, $-h < z < h$, άρα:

$$E_S(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi\alpha\sigma} I(z) - V\delta(z), \quad -h < z < h \quad (2.3.1)$$

Θα εκφράσουμε το πεδίο στην επιφάνεια $r = \alpha$ μέσω της σχέσης (2.2.3). Αν και η γωνία φ εμφανίζεται στη σχέση, λόγω συμμετρίας το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι ανεξάρτητο από τη γωνία φ . Έτσι θέτοντας $\varphi = 0$ και $r = \alpha$ έχουμε:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2} \\ &= \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha^2 \cos \varphi' + (z - z')^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{4\alpha^2 \frac{1 - \cos \varphi'}{2} + (z - z')^2} \\
 &= \sqrt{4\alpha^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi'}{2} \right) + (z - z')^2}
 \end{aligned}$$

Εξισώνοντας την (2.3.1) με την (2.2.3) για $r = a$ έχουμε:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{z'=-h}^h K_{ex}^{(i)}(z - z') I_{ex}(z') dz' = j \frac{2k}{Z_0 \alpha \sigma} I_{ex}(z) - j \frac{4\pi k}{Z_0} V \delta(z) \quad (2.3.2)$$

όπου

$$K_{ex}^{(i)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi'=-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{z^2 + 4\alpha^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi'}{2} \right)}}}{\sqrt{z^2 + 4\alpha^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi'}{2} \right)}} d\varphi' \quad (2.3.3)$$

ο ακριβής πυρήνας (*exact kernel*) της ολοκληρωτικής εξίσωσης και $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ η κυματική αντίσταση. Η παραπάνω εξίσωση αναφέρεται ως ακριβής ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση τύπου *Pocklington* [5].

Ένα πρόβλημα της (2.3.2) είναι η πολυπλοκότητα του λεγόμενου ακριβή πυρήνα ο οποίος δίνεται από τη σχέση (2.3.3). Επειδή στον πυρήνα η απόσταση $2\alpha \left| \sin \left(\frac{\varphi'}{2} \right) \right|$ μεταβάλλεται με μέγιστη τιμή 2α και ελάχιστη τιμή 0 συχνά στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται η προσέγγιση $2\alpha \left| \sin \left(\frac{\varphi'}{2} \right) \right| \simeq \alpha$, δηλαδή προσεγγίζουμε όλες τις δυνατές αποστάσεις με την ακτίνα α [6]. Η ολοκλήρωση στην (2.3.3) γίνεται τότε αμέσως και έχουμε το λεγόμενο “προσεγγιστικό πυρήνα” (*approximate kernel*) [7]:

$$K_{ap}^{(i)}(z) = \frac{e^{-jk\sqrt{z^2 + a^2}}}{\sqrt{z^2 + a^2}}, \quad -h < z < h \quad (2.3.4)$$

και η αντίστοιχη εξίσωση ονομάζεται προσεγγιστική εξίσωση τύπου *Pocklington*. Η αντίστοιχη λύση για το ρεύμα προκύπτει από την επίλυση χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό πυρήνα να συμβολίζεται με $I_{ap}(z)$. Η εξίσωση αυτή χαρακτηρίζει τις νανοκεραίες άνθρακα (*carbon nanotubes*) και χρησιμοποιείται ευρύτατα στη βιβλιογραφία [8], [9], [10], [11].

2.4 Ολοκληρωτική Εξίσωση τύπου Hallén

Η σχέση (2.3.2) μπορεί να ειπωθεί ως μια διαφορική εξίσωση για την ποσότητα $\int_{z'=-h}^h K_{ex}^{(i)}(z - z') I_{ex}(z') dz'$. Το αριστερό μέλος, εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθερά, είναι το διανυσματικό δυναμικό. Άρα είναι άρτια συνάρτηση του z λόγω συμμετρίας. Επομένως η γενική λύση είναι η άρτια λύση της ομογενούς η οποία είναι η $C^{(i)} \cos kz$. Αναζητούμε μια μερική λύση του προ-

βλήματος. Για το σκοπό αυτό διασπάμε το αρχικό πρόβλημα σε δυο απλούστερα υποπροβλήματα:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \int_{z'=-h}^h K_{ex}^{(i)}(z-z') I_{ex}^a(z') dz' = j \frac{2k}{Z_0 \alpha \sigma} I_{ex}(z) \quad (2.4.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \int_{z'=-h}^h K_{ex}^{(i)}(z-z') I_{ex}^b(z') dz' = -j \frac{4\pi k}{Z_0} V \delta(z) \quad (2.4.2)$$

Για το πρόβλημα (2.4.1) μια μερική λύση εύκολα επαληθεύεται στο Παράρτημα (Α') ότι είναι η $-j \frac{2\pi V}{Z_0} \sin k|z|$ [12]. Ακόμη για το δεύτερο πρόβλημα σύμφωνα με το Παράρτημα (Β') λαμβάνοντας

ως συνάρτηση Green την $G(z-z') = \frac{j}{2k} e^{-jk|z-z'|}$ έχουμε ότι μια μερική λύση γράφεται $\int_{-h}^h G(z-z') j \frac{2k}{Z_0 \alpha \sigma} I_{ex}(z') dz' = - \int_{-h}^h \frac{e^{-jk|z-z'|}}{Z_0 \alpha \sigma} I_{ex}(z') dz'$. Από την αρχή της επαλληλίας, μια μερική λύση

του αρχικού προβλήματος (2.3.2) ως προς την ποσότητα $\int_{z'=-h}^h K_{ex}^{(i)}(z-z') I_{ex}(z') dz'$, θα είναι το άθροισμα των δύο παραπάνω μερικών λύσεων. Άρα η λύση του προβλήματος (2.3.2) γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_{z'=-h}^h K_{ex}^{(i)}(z-z') I_{ex}(z') dz' &= C^{(i)} \cos kz - j \frac{2\pi V}{Z_0} \sin k|z| - \int_{-h}^h \frac{e^{-jk|z-z'|}}{Z_0 \alpha \sigma} I_{ex}(z') dz' \\ &\Rightarrow \int_{z'=-h}^h \left[K_{ex}^{(i)}(z-z') + \frac{1}{Z_0 \alpha \sigma} e^{-jk|z-z'|} \right] I_{ex}(z') dz' = C^{(i)} \cos kz - j \frac{2\pi V}{Z_0} \sin k|z| \\ &\Rightarrow \int_{z'=-h}^h \left[K_{ex}^{(i)}(z-z') + q^{(i)}(z-z') \right] I_{ex}(z') dz' = C^{(i)} \cos kz - j \frac{2\pi V}{Z_0} \sin k|z| \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

όπου έχουμε εισάγει το συμβολισμό

$$q^{(i)}(z-z') = \frac{e^{-jk|z-z'|}}{Z_0 \alpha \sigma} \quad (2.4.4)$$

Αν και η (2.4.3) είναι η πιο διαδεδομένη στη βιβλιογραφία, βρίσκονται συχνά και εναλλακτικές μορφές. Για παράδειγμα, λαμβάνοντας ως συνάρτηση Green την $G_2(z-z') = \frac{1}{2k} \sin k|z-z'|$ έχουμε ότι η λύση γράφεται $\int_{-h}^h G_2(z-z') j \frac{2k}{Z_0 \alpha \sigma} I_{ex}(z') dz' = - \int_{-h}^h \frac{\sin k|z-z'|}{Z_0 \alpha \sigma} I_{ex}(z') dz'$. Άρα η εξίσωση με όμοιο τρόπο μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \int_{z'=-h}^h K_{ex}^{(i)}(z-z') I_{ex}(z') dz' &= C^{(i)} \cos kz - j \frac{2\pi V}{Z_0} \sin k|z| - \int_{-h}^h \frac{\sin k|z-z'|}{Z_0 \alpha \sigma} I_{ex}(z') dz' \\ &\Rightarrow \int_{z'=-h}^h \left[K_{ex}^{(i)}(z-z') + \frac{1}{Z_0 \alpha \sigma} \sin k|z-z'| \right] I_{ex}(z') dz' = C^{(i)} \cos kz - j \frac{2\pi V}{Z_0} \sin k|z| \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

2.5 Εναλλακτική ολοκληρωτική εξίσωση

Λαμβάνοντας το συζυγή και των δύο μελών της (2.4.3) και διαιρώντας με 4π αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (2.4.3) και η εξίσωση

$$\int_{z'=-h}^h \left(K(z-z') + q(z-z') \right) I(z') dz' = C \cos kz + j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z|$$

$$\Rightarrow \int_{z'=-h}^h \left(K(z-z') + \xi e^{jk|z-z'|} \right) I(z') dz' = C \cos kz + j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \quad (2.5.1)$$

όπου

$$\xi = \frac{z^i}{2Z_0} = \frac{1}{4\pi\alpha\sigma Z_0} \quad (2.5.2)$$

και $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ η κυματική αντίσταση, $K_{ex}(z) = K_{ex}^{(i)}/4\pi$, $K_{ap}(z) = K_{ap}^{(i)}/4\pi$, $C = C^{(i)}/4\pi$, $q(z) = q^{(i)}(z)/4\pi$, $I_{ex}(z)$ και $I_{ap}(z)$ το ρεύμα που προκύπτει από τη χρήση του ακριβή ή προσεγγιστικού πυρήνα αντίστοιχα οι οποίοι δίνονται από τη σχέση:

$$K(z) = \begin{cases} K_{ex}(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\varphi'=-\pi}^{\pi} \frac{e^{jk\sqrt{z^2+4\alpha^2\sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}}}{\sqrt{z^2+4\alpha^2\sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}} d\varphi' \\ K_{ap}(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}} \end{cases} \quad (2.5.3)$$

και

$$q(z) = \frac{1}{4\pi Z_0 \alpha \sigma} e^{jk|z|} = \xi e^{jk|z|} \quad (2.5.4)$$

έχουν λύσεις συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς. Για δυο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $I(z)$ και $I^*(z)$ αποδεικνύεται εύκολα ότι $Re \{I(z)e^{j\omega t}\} = Re \{I^*(z)e^{-j\omega t}\}$. Άρα η (2.5.1) με τις συναρτήσεις (2.5.3) και (2.5.4) καταλήγουν στο ίδιο μέγεθος του ρεύματος αν αντί για τη σύμβαση των φασιθετών (1.4.1) χρησιμοποιηθεί η $G(\vec{r}, t) = Re \left\{ \dot{G}(\vec{r}, \omega) e^{-j\omega t} \right\}$. Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με την αριθμητική επίλυση της (2.5.1) και ο εκθέτης (i) θα δηλώνει την εξάρτηση $e^{-j\omega t}$ ενώ η απουσία του τη σύμβαση $e^{j\omega t}$ και τα μεγέθη θα λαμβάνονται ως τα συζυγή της πρώτης. Η εξίσωση και με την τελευταία μορφή της χρησιμοποιείται και μελετάται ευρύτατα όπως στο [13] και μπορεί να προκύψει επίσης από την πρώτη αντικαθιστώντας όπου j το $-j$ και διαιρώντας με 4π .

Παρατηρήσεις:

- Η σταθερά C βρίσκεται από τη συνθήκη $I(\pm h) = 0$. Πιο συγκεκριμένα, αν $I^{(1)}(z), I^{(2)}(z)$ ικανοποιούν τις ολοκληρωτικές εξισώσεις:

$$\int_{z'=-h}^h \left(K(z-z') + q(z-z') \right) I^{(1)}(z') dz' = \cos kz \quad (2.5.5)$$

$$\int_{z'=-h}^h \left(K(z-z') + q(z-z') \right) I^{(2)}(z') dz' = j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \quad (2.5.6)$$

τότε $I(z) = CI^{(1)}(z) + I^{(2)}(z)$, όπου από τη συνθήκη $I(h) = 0$ έχουμε:

$$C = -\frac{I^{(2)}(h)}{I^{(1)}(h)}$$

- Η ποσότητα $\int_{z'=-h}^h q(z-z')I(z')dz'$ είναι άρτια συνάρτηση του z . Πράγματι λαμβάνοντας υπόψη ότι το ρεύμα είναι άρτια συνάρτηση του z λόγω συμμετρίας, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{z'=-h}^h q(-z-z')I(z')dz' &= \int_{z'=-h}^h \frac{e^{jk|-z-z'|}}{4\pi Z_0 \alpha \sigma} I(z') dz' \\ &\stackrel{u=-z'}{=} \int_{u=h}^{-h} \frac{e^{jk|-z+u|}}{4\pi Z_0 \alpha \sigma} I(-u)(-du) \\ &\stackrel{I(-u)=I(u)}{=} \int_{u=-h}^h \frac{e^{jk|z-u|}}{4\pi Z_0 \alpha \sigma} I(u) du \\ &= \int_{z'=-h}^h q(z-z')I(z')dz' \end{aligned}$$

Άρα τόσο το αριστερό μέρος της σχέσης (2.5.1) όσο και το δεξί μέλος είναι άρτιες συναρτήσεις του z .

Βιβλιογραφία

- [1] Γ. Φικιώρης, *Προσδιορισμός ρεύματος σε γραμμική κεραία μέσω ολοκληρωτικών εξισώσεων*, Διαθέσιμο στη διεύθυνση: <http://mycourses.ntua.gr/courses/ECE1116/document>.
- [2] R. E. Collin and F. J. Zucker, “Antenna Theory Part 1”, in. McGraw-Hill, 1969, ch. 8.
- [3] Ι. Τσαλαμέγκας και Ι. Ρουμελιώτης, *Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία, Τόμος Β', Στατικά και Μόνιμα Πεδία*. Τζιόλα, 2014.
- [4] R. King and S. Prasad, *Fundamental Electromagnetic Theory and Applications*. Prentice-Hall, 1986.
- [5] G. W. Hanson, “Current on an infinitely-long carbon nanotube antenna excited by a gap generator”, *IEEE transactions on antennas and propagation*, volume 54, number 1, pages 76–81, 2006.
- [6] R. King and C. Harrison, “Half-wave cylindrical antenna in a dissipative medium: Current and impedance”, *Journal of Research of the Notional Bureau of Standards - D. Radio Propagation*, volume 64, number 4, pages 365–380, 1960.
- [7] W.-X. Wang, “The exact kernel for cylindrical antenna”, *IEEE Transactions on Antenna and Propagation*, volume 39, number 4, pages 434–435, April 1991.
- [8] R. E. Collin and F. J. Zucker, “Antenna Theory Part 1”, in. McGraw-Hill, 1969, ch. 9.
- [9] Y. Huang, W.-Y. Yin, and Q. H. Liu, “Performance prediction of carbon nanotube bundle dipole antennas”, *IEEE Transactions on Nanotechnology*, volume 7, number 3, pages 331–337, May 2008.
- [10] G. Hanson, “Fundamental transmitting properties of carbon nanotube antennas”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 53, number 11, pages 3426–3435, 2005.
- [11] J. Hao and G. Hanson, “Infrared and optical properties of carbon nanotube dipole antennas”, *IEEE Transactions on Nanotechnology*, volume 5, pages 766–775, November 2006.
- [12] W. Boyce and R. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*. Wiley, 2001.
- [13] E. Forati, A. D. Mueller, P. G. Yarandi, and G. W. Hanson, “A new formulation of Pocklington’s equation for thin wires using the exact kernel”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 59, number 11, pages 4355–4360, 2011.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικές μέθοδοι

3.1 Μέθοδος Ροπών Galerkin - Method of Moments (MoM)

Με τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου - σχέση (2.5.1) - και ιδιαίτερα με τις σχέσεις (2.5.5) και (2.5.6) έχουμε αναγάγει το πρόβλημά μας στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Fredholm

$$\int_{z'=-h}^h g(z-z')I(z')dz' = f(z), -h < z < h$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Galerkin με παλμικές συναρτήσεις (pulse functions) όπως αρχικά περιγράφηκε στο [1] θα επιλύσουμε αριθμητικά τις εξισώσεις όπως στα [2], [3], [4]:

$$\int_{z'=-h}^h \left(K_{ap}(z-z') + q(z-z') \right) I_{ap}^{(1)}(z') dz' = \cos kz \quad (3.1.1)$$

$$\int_{z'=-h}^h \left(K_{ap}(z-z') + q(z-z') \right) I_{ap}^{(2)}(z') dz' = j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \quad (3.1.2)$$

με αγνώστους τις συναρτήσεις $I_{ap}^{(1)}(z)$ και $I_{ap}^{(2)}(z)$, $-h < z < h$, όπου $g(z-z') = K_{ap}(z-z') + q(z-z')$ χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό πυρήνα. Αναπτύσσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις σε πεπερασμένο άθροισμα συναρτήσεων βάσης με άγνωστους συντελεστές $I_{ap,n}^{(1)}$, $I_{ap,n}^{(2)}$:

$$I_{ap}^{(1)}(z) \simeq \sum_{n=-N}^N I_{ap,n}^{(1)} u_n(z) \quad (3.1.3)$$

$$I_{ap}^{(2)}(z) \simeq \sum_{n=-N}^N I_{ap,n}^{(2)} u_n(z) \quad (3.1.4)$$

όπου οι παλμικές συναρτήσεις είναι:

$$u_n(z) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } (n - \frac{1}{2}) z_0 < z < (n + \frac{1}{2}) z_0 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.1.5)$$

και για το πλάτος των $2N + 1$ παλμών ισχύει

$$z_0 = \frac{2h}{2N + 1} \quad (3.1.6)$$

Αντικαθιστώντας τις προσεγγίσεις (3.1.3), (3.1.4) στις (3.1.1) και (3.1.2) λαμβάνουμε:

$$\sum_{n=-N}^N I_{ap,n}^{(1)} \int_{z'=-h}^h \left(K_{ap}(z - z') + q(z - z') \right) u_n(z') dz' \simeq \cos kz \quad (3.1.7)$$

$$\sum_{n=-N}^N I_{ap,n}^{(2)} \int_{z'=-h}^h \left(K_{ap}(z - z') + q(z - z') \right) u_n(z') dz' \simeq j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \quad (3.1.8)$$

Πολλαπλασιάζοντας με τις $2N + 1$ συναρτήσεις δοκιμής $u_l(z)$ (που εδώ είναι ίδιες με τις συναρτήσεις βάσης) και ολοκληρώνοντας από $z = -h$ έως h , παίρνουμε

$$\sum_{n=-N}^N I_{ap,n}^{(1)} \int_{z=-h}^h u_l(z) \int_{z'=-h}^h \left(K_{ap}(z - z') + q(z - z') \right) u_n(z') dz' = \int_{z=-h}^h u_l(z) \cos kz dz \quad (3.1.9)$$

$$\sum_{n=-N}^N I_{ap,n}^{(2)} \int_{z=-h}^h u_l(z) \int_{z'=-h}^h \left(K_{ap}(z - z') + q(z - z') \right) u_n(z') dz' = \int_{z=-h}^h u_l(z) \left(j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \right) dz \quad (3.1.10)$$

Προκύπτουν έτσι δυο συστήματα εξισώσεων

$$\sum_{n=-N}^N A_{ln} I_{ap,n}^{(1)} = B_l^{(1)} \quad (3.1.11)$$

$$\sum_{n=-N}^N A_{ln} I_{ap,n}^{(2)} = B_l^{(2)} \quad (3.1.12)$$

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

όπου οι συντελεστές $B_l^{(1)}$ και $B_l^{(2)}$ υπολογίζονται αναλυτικά

$$\begin{aligned}
 B_l^{(1)} &= \int_{z=-h}^h u_l(z) \cos kz dz \\
 &= \int_{z=(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} \cos kz dz \\
 &= \frac{\sin [(l+\frac{1}{2})kz_0] - \sin [(l-\frac{1}{2})kz_0]}{k} \\
 &= \frac{2}{k} \sin\left(\frac{kz_0}{2}\right) \cos(kz_0 l) \\
 B_l^{(2)} &= \int_{z=-h}^h u_l(z) \left(j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \right) dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Αν } l = 0 \text{ τότε } B_0^{(2)} &= \int_{z=-\frac{z_0}{2}}^{\frac{z_0}{2}} \left(j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \right) dz \\
 &= \int_{z=0}^{\frac{z_0}{2}} \left(j \frac{2V}{2Z_0 k} \sin kz \right) dz \\
 &= j \frac{V}{Z_0 k} \left(1 - \cos \frac{kz_0}{2} \right) \\
 &= \left(j \frac{2V}{Z_0 k} \right) \sin^2 \left(\frac{kz_0}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Αν $l \neq 0$, $l + \frac{1}{2}$ και $l - \frac{1}{2}$ έχουν το ίδιο πρόσημο, ώστε $|z| = z \cdot \text{sign}(l)$, άρα

$$\begin{aligned}
 \text{Αν } l \neq 0 \text{ τότε } B_l^{(2)} &= \int_{z=(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} \left(j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \right) dz \\
 &= j \frac{V}{2Z_0} \text{sign}(l) \int_{z=(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} \sin kz dz \\
 &= j \frac{V}{2Z_0 k} \text{sign}(l) \left[\cos \left((l-\frac{1}{2})kz_0 \right) - \cos \left((l+\frac{1}{2})kz_0 \right) \right] \\
 &= j \frac{2V}{2Z_0 k} \text{sign}(l) \sin(lkz_0) \sin \left(\frac{kz_0}{2} \right) \\
 &= j \frac{V}{Z_0 k} \sin(|l|kz_0) \sin \left(\frac{kz_0}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Οι συντελεστές A_{ln} εξαρτώνται μόνο από τη διαφορά $d = |l - n|$ και όχι ξεχωριστά από τα l και n . Αποδεικνύεται ότι [4] το διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να μειωθεί σε μονό και να υπολογιστεί αριθμητικά, ώστε

$$A_d = A_{-d} = \int_{z=0}^{z_0} (z_0 - z) [g(z + lz_0) + g(z - lz_0)] dz \quad (3.1.13)$$

$$d = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2N$$

Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση ενός συμμετρικού συστήματος Toeplitz με αγνώστους τα $I_{ap,n}^{(1)}$ και $I_{ap,n}^{(2)}$. Ισχύει ότι $I_{ap,-n}^{(1)} = I_{ap,n}^{(1)}$ και $I_{ap,-n}^{(2)} = I_{ap,n}^{(2)}$. Μετά την επίλυση του συστήματος, προσδιορίζεται η σταθερά C από τη σχέση

$$C \simeq -\frac{I_{ap,N}^{(2)}}{I_{ap,N}^{(1)}} \quad (3.1.14)$$

Η τελική λύση της αριθμητικής μεθόδου είναι τότε:

$$I_{ap}(z) \simeq \sum_{n=-N}^N I_{ap,n} u_n(z) = \sum_{n=-N}^N [CI_{ap,n}^{(1)} + I_{ap,n}^{(2)}] u_n(z) \quad (3.1.15)$$

3.2 Εναλλακτικές αριθμητικές μέθοδοι

Συχνά στη βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται άλλες αριθμητικές μέθοδοι πέραν της μεθόδου Galerkin με παλμικές συναρτήσεις, δηλαδή της ειδικής περίπτωσης της μεθόδου των ροπών κατά την οποία οι συναρτήσεις βάσης και οι συναρτήσεις δοκιμής είναι οι παλμικές συναρτήσεις της σχέσης (3.1.5). Ενδεικτικά αναφέρουμε τα παρακάτω παραδείγματα [5]:

- Τεχνική της σημειακής ισότητας.

Σε αυτή την περίπτωση ικανοποιούμε τις (3.1.7) και (3.1.8) σε $2N + 1$ σημεία $z_{-N}, z_{-(N-1)}, \dots, z_N$, όπου $|z_i| \leq h$. Καταλήγουμε στα αντίστοιχα συστήματα (3.1.11) και (3.1.12) όπου

$$A_{ln} = \int_{z=-h}^h g(z_l - z') u_n(z') dz' \quad (3.2.1)$$

$$B_i^{(1)} = \cos(z_i), B_i^{(2)} = j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z_i| \quad (3.2.2)$$

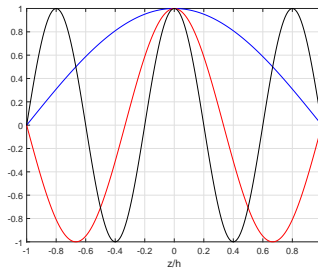
$$(3.2.3)$$

όπου $-N \leq l, n \leq N$. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται στο [6] και μπορεί να ειπωθεί ως η ειδική περίπτωση μεθόδου ροπών όπου οι συναρτήσεις δοκιμής είναι συναρτήσεις δέλτα $\delta(z - z_l)$, $l = -N, \dots, N$.

- Επιλογή συναρτήσεων βάσης.

Οι απλούστερες συναρτήσεις βάσης είναι οι παλμικές συναρτήσεις (3.1.5). Άλλες συναρτήσεις είναι οι τριγωνικές συναρτήσεις (triangular functions)[1]. Τόσο οι παλμικές όσο και οι τριγωνικές συναρτήσεις είναι μη μηδενικές μόνο σε ένα τμήμα του διαστήματος $(-h, h)$ γι' αυτό ονομάζονται συναρτήσεις βάσης υποπεδίου (subdomain basis functions) και λέμε ότι κάνουμε διακριτοποίηση (discretization) της εξίσωσης [7], [8]. Μπορούμε όμως να διαλέξουμε συναρτήσεις όπως οι συνημιτονικές του σχήματος (3.1)

$$u_n(z) = \cos \frac{[2(n + N) + 1] \pi z}{2h}, \quad -N, \dots, N, \quad |z| < h \quad (3.2.4)$$



Σχήμα 3.1: Οι τρεις πρώτες συνημιτονικές συναρτήσεις $u_{-N}(z), u_{-(N-1)}(z), u_{-(N-2)}(z)$. Όλες είναι άρτιες και μηδενίζονται στα άκρα $z = \pm h$.

οι οποίες είναι μη μηδενικές σε όλο το το διάστημα. Σε αυτή την περίπτωση οι συναρτήσεις ονομάζονται συναρτήσεις ολικού πεδίου.

Βιβλιογραφία

- [1] R. Harrington, *Field computation by moment methods*, series Macmillan series in electrical science. Macmillan, 1968.
- [2] Γ. Φικιώρης, *Προσδιορισμός ρεύματος σε γραμμική κεραία μέσω ολοκληρωτικών εξισώσεων*, Διαθέσιμο στη διεύθυνση: <http://mycourses.ntua.gr/courses/ECE1116/document>.
- [3] G. Fikioris, “The use of the frill generator in thin-wire integral equations”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 51, pages 1847–1854, 2003.
- [4] G. Fikioris and T. T. Wu, “On the application of numerical methods to Hallén’s equation”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 49, number 3, pages 383–392, March 2001.
- [5] W. Gibson, *The method of moments in electromagnetics*. CRC Press, 2007.
- [6] G. Hanson, “Fundamental transmitting properties of carbon nanotube antennas”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 53, number 11, pages 3426–3435, 2005.
- [7] G. Fikioris and A. Michalopoulou, “On the use of entire-domain basis functions in galerkin methods applied to certain integral equations for wire antennas with the approximate kernel”, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, volume 51, number 2, pages 409–412, May 2009.
- [8] A. Saadatmandi, M. Razzaghi, and M. Dehghan, “Sinc-collocation methods for the solution of Hallén’s integral equation”, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, volume 19, number 2, pages 245–256, 2005.

Κεφάλαιο 4

Αγωγιμότητα

4.1 Αγωγιμότητα λεπτού μεταλλικού σωλήνα

Έχει αποδειχθεί [1] ότι η αγωγιμότητα για ένα λεπτό μεταλλικό σωλήνα δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{metal} = +j \frac{e^2 N_e}{m_e (\omega + j\nu)} \quad (4.1.1)$$

όπου e το στοιχειώδες φορτίο του ηλεκτρονίου ($1.602 \times 10^{-19} C$), m_e η μάζα του ηλεκτρονίου ($9.11 \times 10^{-31} kg$), N_e η πυκνότητα ηλεκτρονίων και ν η συχνότητα χαλάρωσης (relaxation frequency). Για το χαλκό $\nu \simeq (2.47 \times 10^{-14})^{-1} sec^{-1}$. Αν πρόκειται για χάλκινο σωλήνα με ρεαλιστικές διαστάσεις χρησιμοποιείται $N_e^{3d} \simeq 8.46 \times 10^{28} electrons/m^3$ ενώ για απειροστά λεπτό αγωγίμο σωλήνα χρησιμοποιείται $N_e^{2d} = (N_e^{3d})^{2/3}$.

4.2 Αγωγιμότητα νανοκεραίας άνθρακα

Από την ανακάλυψη των νανοδομών άνθρακα (CNTs) το 1991 [2], οι CNTs βρίσκονται στο προσκήνιο της επιστημονικής έρευνας. Δομικά μπορούν να περιγραφούν ως ένα φύλλο μορίων άνθρακα διπλωμένο σε ένα κύλινδρο με ακτίνα μερικών nm έως κάποιων εκατοστών [3]. Λόγω της ποικιλίας των τρόπων προσανατολισμού του άξονα του κυλίνδρου σε σχέση με το εξατομικό μόριο του άνθρακα μπορούν να προκύψουν πολλοί διαφορετικοί τύποι. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως *chirality*. Οι τύποι αυτοί διαφέρουν ως προς τους ακεραίους m και n που καθορίζουν το chiral διάλυμα. Για μια νανοκεραία άνθρακα (carbon nanotube) η ακτίνα α δίνεται από τη σχέση

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} b \sqrt{m^2 + mn + n^2} \quad (4.2.1)$$

όπου $b = 0.142nm$ (interatomic distance in graphene) [4], [5], [6].

Οι CNTs μπορούν να είναι είτε ημιαγωγικές είτε μεταλλικές. Οι armchair ($m = n$) και οι zigzag ($n = 0$) με $m = 3q$, όπου q είναι ακέραιος, εμφανίζουν μεταλλική συμπεριφορά ενώ οι zigzag με ($n = 0$) και $m \neq 3q$ και οι chiral ($m \neq n$) είναι κατά κανόνα ημιαγωγικές. Επιπλέον, οι CNTs ποικίλλουν και ως προς τον αριθμό των στρωμάτων άνθρακα στα τοιχώματά τους και μπορούν να είναι μονού στρώματος-single-wall (SWNTs), διπλού στρώματος-double-walled (DWNTs) ή πολλαπλού στρώματος-multiwalled (MWNTs) [7], σχηματίζοντας τις αντίστοιχες κεραίες [5], [8], και μπορούν να συνδυαστούν για το σχηματισμό στοιχειοκεραίων (antenna arrays) [9]. Λόγω των

ελκυστικών τους ηλεκτρικών και φυσικών τους χαρακτηριστικών, όπως η αντοχή και το χαμηλό βάρος τους, οι CNTs έχουν χρησιμοποιηθεί σε μεγάλο εύρος εφαρμογών που περιλαμβάνουν transistors [10] και αισθητήρες - sensors [11], μεταξύ άλλων [12].

Η αγωγιμότητα (quantum contactunce) για μια νανοκεραία άνθρακα έχει υπολογιστεί αναλυτικά στα [13], [14]. Εξαρτάται δραστικά τόσο από την ακτίνα όσο και από τη συχνότητα. Πιο συγκεκριμένα, η αγωγιμότητα για armchair ($m = n$), οι οποίες όπως είπαμε εμφανίζουν μεταλλική αγωγιμότητα, δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) = & \frac{-je^2\omega}{\pi^2\hbar\alpha} \left\{ \frac{1}{\omega(\omega + j\nu)} \sum_{s=1}^m \int_{-\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}b}}^{\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}b}} \frac{\partial F_c}{\partial p_z} \frac{\partial E_c}{\partial p_z} dp_z \right. \\ & \left. + 2 \sum_{s=1}^m \int_{-\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}b}}^{\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}b}} E_c |R_{vc}|^2 \frac{F_c - F_v}{\hbar^2\omega(\omega + j\nu) - 4E_c^2} dp_z \right\} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

όπου $e = 1.602 \times 10^{-19}\text{C}$ είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου, $\gamma_0 = 3.03\text{eV}$ είναι το overlap ολοκλήρωμα, $\nu = \frac{1}{\tau} = (3 \times 10^{-12})^{-1} = 10^{14} \text{ Hz}$ είναι η συχνότητα χαλάρωσης, $b = 0.142 \times 10^{-9}\text{m}$ (interatomic distance in graphene) και $\hbar = 1.0546 \times 10^{-34}\text{m}^2\text{kg/s}$ η σταθερά του Plank. (Έχουμε υιοθετήσει τη σύμβαση $e^{j\omega t}$. Για τη σύμβαση $e^{-j\omega t}$ μπορούμε να θέσουμε όπου j το $-j$ στην παραπάνω σχέση.) Ακόμη

$$E_c = +\gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos\left(\frac{\pi s}{m}\right) \cos\left(\frac{d}{\sqrt{3}}p_z\right) + 4 \cos^2\left(\frac{d}{\sqrt{3}}p_z\right)} \quad (4.2.3)$$

$$E_v = -\gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos\left(\frac{\pi s}{m}\right) \cos\left(\frac{d}{\sqrt{3}}p_z\right) + 4 \cos^2\left(\frac{d}{\sqrt{3}}p_z\right)} \quad (4.2.4)$$

$$F_c = \frac{1}{1 + e^{E_c/k_B T}} \quad (4.2.5)$$

$$F_v = \frac{1}{1 + e^{E_v/k_B T}} \quad (4.2.6)$$

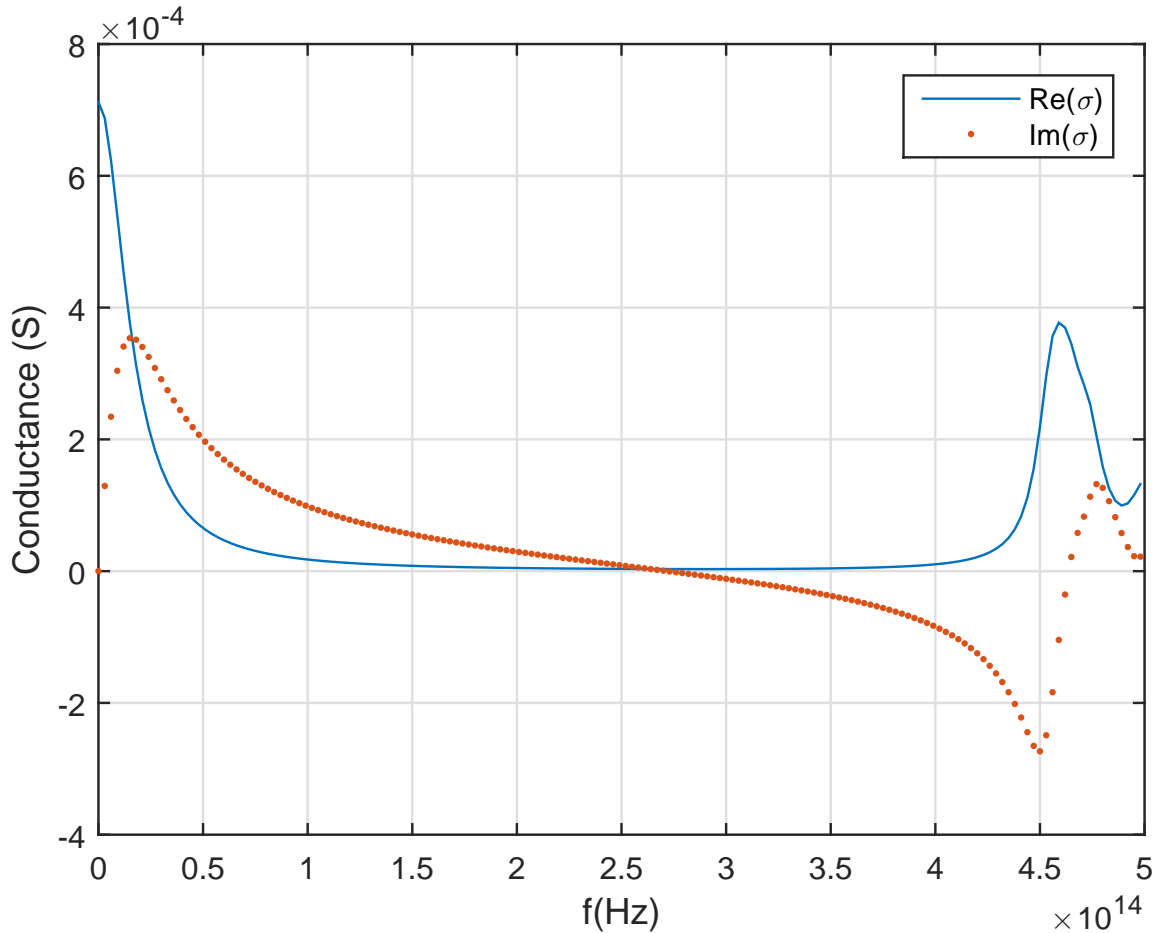
$$R_{vc} = -\frac{\sqrt{3}b\gamma_0^2}{2E_c^2(p_z, s)} \sin\left(\frac{d}{\sqrt{3}}p_z\right) \sin\left(\frac{\pi s}{m}\right) \quad (4.2.7)$$

όπου $k_B = 1.38064852 \times 10^{-23}\text{m}^2\text{kg/s}^2\text{K}$ η σταθερά Boltzmann, $d = 3b/2\hbar$, p_z (quasi-momentum στην κατεύθυνση z), $E_{c,v}$ (electron dispersion relation για τις armchair CNTs), $F_{c,v}$ (equilibrium Fermi distribution function), R_{vc} (matrix element για τις armchair CNTs), T η θερμοκρασία σε Kelvin και οι δείκτες c, v αναφέρονται στη ζώνη αγωγιμότητας και σθένους αντίστοιχα.

Για $m < 50$ και για συχνότητες κάτω από μια ορισμένη τιμή ($\omega < u_F/\alpha$) η σχέση (4.2.2) απλοποιείται σημαντικά και η αγωγιμότητα για μια νανοκεραία άνθρακα (Single Wall Carbon Nanotube-SWNT) δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση [15]

$$\boxed{\sigma_{SWNT} = +j \frac{2e^2 u_F}{\pi^2 \hbar \alpha (\omega + j\nu)}} \quad (4.2.8)$$

όπου u_F η ταχύτητα Fermi για μια νανοκεραία άνθρακα (carbon nanotube-CNT)-($9.71 \times 10^5 m/s$). Η προσέγγιση αυτή ισχύει μέχρι τις μικροκυματικές και υπέρυφρες συχνότητες, δηλαδή μέχρι και συχνότητες της τάξης εκατοντάδων THz . (Έχουμε υιοθετήσει τη σύμβαση $e^{j\omega t}$. Για τη σύμβαση $e^{-j\omega t}$ μπορούμε να θέσουμε όπου j το $-j$ στην παραπάνω σχέση.)



Σχήμα 4.1: Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας σ για ακτίνα $a = 0.678nm$ ($m = n = 10$).

Παρατηρούμε από το σχήμα (4.1) ότι τόσο το πραγματικό μέρος όσο και το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας έχει μεγάλες τιμές για μικρές συχνότητες και μέχρι μια ορισμένη συχνότητα ελαττώνονται κατά απόλυτη τιμή όπου και εμφανίζονται ελάχιστο, όπως φαίνεται και από την προσεγγιστική σχέση (4.2.8). Έπειτα από εκείνη τη συχνότητα δεν ισχύει η προσέγγιση $\omega < u_F/a$ και η συμπεριφορά δεν μπορεί εύκολα να προβλεφθεί και διαφέρει ανάλογα με τα m, n . Αντίθετα, η συμπεριφορά μέχρι περίπου τη συχνότητα u_F/a είναι όμοια για κάθε m, n όπως προβλέπει η σχέση (4.2.8). Το γεγονός αυτό επηρεάζει άμεσα τη φύση της εξίσωσης (2.5.1)

$$\int_{z'=-h}^h \left(K(z-z') + \xi e^{jk|z-z'|} \right) I(z') dz' = C \cos kz + j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z|$$

καθώς ο όρος

$$\xi = \frac{z^i}{2Z_0} = \frac{1}{4\pi\alpha\sigma Z_0}$$

εξαρτάται αντιστρόφως ανάλογα από την αγωγιμότητα. Έτσι, στα επόμενα κεφάλαια θα διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

1. Περίπτωση τέλει αγωγού ή περίπτωση κατά την οποία βρισκόμαστε σε χαμηλές συχνότητες με αποτέλεσμα η αγωγιμότητα να είναι εξαιρετικά υψηλή. Τότε ο όρος ξ τείνει στο μηδέν και αμελείται.
2. Περίπτωση που βρισκόμαστε σε υψηλότερες συχνότητες. Εκεί η αγωγιμότητα λαμβάνει εξαιρετικά χαμηλές τιμές με αποτέλεσμα ο όρος ξ να μεγαλώνει αρκετά ώστε να είναι εκείνος που κυριαρχεί.
3. Ενδιάμεση περίπτωση των 1. και 2.

Βιβλιογραφία

- [1] G. Hanson, “Radiation efficiency of nano-radius dipole antennas in the microwave and far-infrared regimes”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, volume 50, number 3, pages 66–77, June 2008.
- [2] S. Iijima, “Helical microtubules of graphitic carbon,”, *Nature*, volume 354, pages 56–58, 1991.
- [3] S. Li, Z. Yu, C. Rutherglan, and P. J. Burke, “Electrical properties of 0.4 cm lon single-walled carbon nanotubes,”, *Nano Lett.*, volume 4, pages 2003–2007, 2004.
- [4] R. Saito, G. Dresselhaus, and M. Dresselhaus, *Physical Properties of Carbon Nanotubes*. London, U.K.: Imperial College Press, 1998.
- [5] S. D. Keller, A. I. Zaghoul, and V. Shanov, “Electromagnetic Simulation and Measurement of Carbon Nanotube Thread Dipole Antennas”, *IEEE Transactions on Nanotechnology*, volume 13, pages 394–403, March 2014.
- [6] G. Hanson, “Fundamental transmitting properties of carbon nanotube antennas”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 53, number 11, pages 3426–3435, 2005.
- [7] T. A. Elwi, H. M. Al-Rizzo, D. G. Rucker, E. Dervishi, Z. Li, and A. S. Biris, “Multi-walled carbon nanotube-based RF antennas”, *Nanotechnology*, volume 21, number 4, page 045 301, 2010.
- [8] J. A. Berres and G. W. Hanson, “Multiwall carbon nanotubes at RF-THz frequencies: Scattering, shielding, effective conductivity, and power dissipation”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 59, number 8, pages 3098–3103, 2011.
- [9] Y. Lan, B. Zeng, H. Zhang, B. Chen, and Z. Yang, “Simulation of carbon nanotube thz antenna arrays”, *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, volume 27, number 6, pages 871–877, 2006.
- [10] S. Li, Z. Yu, S.-F. Yen, W. C. Tang, and P. J. Burke, “Carbon nanotube transistor operation at 2.6 ghz”, *Nano Letters*, volume 4, number 4, pages 753–756, 2004.
- [11] J. M. Schnorr and T. M. Swager, “Emerging applications of carbon nanotubes”, *Chemistry of Materials*, volume 23, number 3, pages 646–657, 2010.
- [12] M. De Volder, S. Tawfick, R. Baughman, and A. Hart, “Carbon nanotubes: Present and future commercial applications,”, *Science*, volume 339, number 6119, pages 535–539, 2013.
- [13] S. A. Maksimenko, G. Y. Slepian, A. Lakhtakia, O. Yevtushenko, and A. V. Gusakov, “Electrodynamics of carbon nanotubes: Dynamic conductivity, impedance boundary conditions, and surface wave propagation,”, *Phys. Rev. B*, volume 60, number 3, pages 17 136–17 149, Dec. 1999.

- [14] S. A. Maksimenko and G. Y. Slepyan, *Electrodynamic properties of carbon nanotubes*, in *Electromagnetic Fields in Unconventional Materials, Structures*, O. N. Singh, and A. Lakhtakia, Eds. New York: Wiley, 2000.
- [15] J. Hao and G. Hanson, “Infrared and optical properties of carbon nanotube dipole antennas”, *IEEE Transactions on Nanotechnology*, volume 5, pages 766–775, November 2006.

Κεφάλαιο 5

Τέλειος αγωγός

5.1 Τέλεια αγωγή σωλήνας

Για την περίπτωση ενός αγωγίμου μεταλλικού σωλήνα έχουμε $\sigma \rightarrow +\infty$, οπότε $\xi = \frac{z^i}{2Z_0} = \frac{1}{4\pi\alpha\sigma Z_0} \rightarrow 0$ και η ποσότητα $q(z - z') = \xi e^{jk|z-z'|}$ τείνει στο μηδέν και αμελείται. Η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hallén, χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό πυρήνα είναι

$$\int_{z'=-h}^h K_{ap}(z - z') I_{ap}(z') dz' = C \cos kz + j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \quad (5.1.1)$$

όπου ο πυρήνας δίνεται από τη σχέση

$$K_{ap}(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}} \quad (5.1.2)$$

Η εξίσωση (5.1.1), παρά το γεγονός ότι οι αριθμητικές μέθοδοι εφαρμόζονται ευρύτατα σε αυτή λόγω της απλότητας του προσεγγιστικού πυρήνα, δεν έχει λύση [1]. Η φυσική ερμηνεία της εξίσωσης (5.1.1) είναι ότι απαιτεί την ύπαρξη ενός γραμμικού ρεύματος στον άξονα z για να διατηρεί ένα πεδίο που υπαγορεύεται από τη σχέση $E_z^e = -V\delta(z)$, το οποίο είναι αδύνατο. Αντίθετα με τον ακριβή πυρήνα το πεδίο οφείλεται σε επιφανειακή κατανομή ρεύματος στην επιφάνεια $r = a$ και έτσι δεν υπάρχει η προαναφερθείσα δυσκολία που εμφανίζεται με τον προσεγγιστικό πυρήνα.

Οι δυσκολίες της χρησιμοποίησης του προσεγγιστικού πυρήνα για την αριθμητική επίλυση της (5.1.1) εξετάζονται διεξοδικά στα [2], [3], [4] και [5]. Το εργαλείο για την ερμηνεία αυτών των ταλαντώσεων είναι η κεραία απείρου μήκους ($h = \infty$), για την οποία η αντίστοιχη εξίσωση είναι [1]

$$\int_{z'=-\infty}^{\infty} K_{ap}(z - z') I_{ap}^{(\infty)}(z') dz' = \frac{V}{2Z_0} e^{jk|z|} \quad (5.1.3)$$

Η λύση του απείρου συστήματος Toeplitz

$$\sum_{n=-N}^N A_{l-n} I_{ap,n}^{(\infty)} = B_l^{(\infty)}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.1.4)$$

που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο που περιγράφηκε στο κεφάλαιο (3) για την κεραία απείρου μήκους, δηλαδή αν γράψουμε

$$I_{ap}^{(\infty)}(z) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{ap,n}^{(\infty)} u_n(z), \quad -\infty < z < \infty \quad (5.1.5)$$

όπου οι $u_n(z)$ δίνονται από την (3.1.5), μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή με τον ακόλουθο τρόπο. Πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος της (5.1.4) με $e^{jl\theta}$, όπου $-\pi < \theta \leq \pi$ και αθροίζουμε ως προς l . Με την αλλαγή της σειράς άθροισης και εισαγωγή των σειρών Fourier

$$\bar{A}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{jl\theta} \quad (5.1.6)$$

$$\bar{B}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_l^{(\infty)} e^{jl\theta} \quad (5.1.7)$$

$$\bar{I}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l^{(\infty)} e^{jl\theta} \quad (5.1.8)$$

λαμβάνουμε $\bar{A}(\theta)\bar{I}(\theta) = \bar{B}(\theta)$ κι έτσι λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του $\bar{I}(\theta)$ λαμβάνουμε τελικά όπως στο [2]

$$I_{ap,n}^{(\infty)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}(\theta)} e^{-jn\theta} d\theta, \quad -\infty < n < \infty \quad (5.1.9)$$

ή

$$I_{ap,n}^{(\infty)} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}(\theta)} \cos n\theta d\theta, \quad -\infty < n < \infty \quad (5.1.10)$$

όπου

$$\bar{B}(\theta) = -\frac{jV}{Z_0} \frac{2}{k} \sin^2 \frac{kz_0}{2} \frac{\cos \frac{kz_0}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta+kz_0}{2} \sin \frac{\theta-kz_0}{2}} \quad (5.1.11)$$

$$\bar{A}(\theta) = z_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{K} \left(\frac{2m\pi - \theta}{z_0} \right) \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{(m\pi - \frac{\theta}{2})^2} \quad (5.1.12)$$

όπου \bar{K} ο μετασχηματισμός Fourier του πυρήνα. Για $N \gg h/\alpha$ ή ισοδύναμα $z_0 \rightarrow 0$ κρατώντας τους δυο πρώτους όρους της (5.1.12), μπορούμε να πάρουμε την προσέγγιση [2]

$$\bar{A}(\theta) \simeq 4z_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\bar{K}_{ap} \left(\frac{\theta}{z_0} \right) \frac{1}{\theta^2} + \bar{K}_{ap} \left(\frac{2\pi - \theta}{z_0} \right) \frac{1}{(2\pi - \theta)^2} \right] \quad (5.1.13)$$

$$\bar{K} = \bar{K}_{ap}(\zeta) \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha|\zeta|}} e^{-\alpha|\zeta|} \quad \text{για } \alpha|\zeta| \gg 1 \quad (5.1.14)$$

Έτσι η αριθμητική λύση για $N \gg h/\alpha$ ή ισοδύναμα $z_0 \rightarrow 0$ [2] βρίσκεται ότι είναι [2]

$$\boxed{I_{ap,n}^{(\infty)} \simeq -j \frac{V}{Z_0} \frac{\pi^3}{32\sqrt{2}} k z_0 \sqrt{\frac{z_0}{\alpha}} (-1)^n e^{\frac{\alpha\pi}{z_0}} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \frac{z_0}{\alpha} n\right)} \times \left[1 - \frac{5z_0}{2\pi\alpha} + \frac{5}{4} n \left(\frac{z_0}{\alpha} \right)^2 \tanh\left(\frac{\pi}{2} \frac{z_0}{\alpha} n\right) \right]} \quad (5.1.15)$$

Το κύριο συμπέρασμα είναι ότι εμφανίζονται “*άφύσικες*” ταλαντώσεις στο φανταστικό μέρος της λύσης $I_{ap,n}^{(\infty)}$ όταν ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης είναι αρκετά μεγάλος και ικανοποιεί τη σχέση $N \gg h/\alpha$. Έτσι η αριθμητική επίλυση της άπειρης κεραίας προβλέπει το πραγματικό μέρος της λύσης $I_{ap,n}^{(\infty)}$ ίσο με μηδέν, ενώ οδηγεί σε ταλαντώσεις στο φανταστικό μέρος της λύσης $I_{ap,n}^{(\infty)}$ όταν $N \gg h/\alpha$ ή ισοδύναμα $z_0 \rightarrow 0$. Οι ταλαντώσεις αυτές δεν εμφανίζονται όταν χρησιμοποιείται ο ακριβής πυρήνας $K_{ex}(z)$ (σχέση (2.5.3)). Στη συνέχεια τα αποτελέσματα γενικεύονται στην κεραία πεπερασμένου μήκους όπου οι προβλεπόμενες τιμές από τη σχέση (5.1.15) απέχουν ελάχιστα από τις τιμές που προκύπτουν από την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου και ειδικά κοντά στο κέντρο της κεραίας. Οι ταλαντώσεις δεν οφείλονται σε σφάλματα αριθμητικής προσέγγισης ή ιδιοτήτων του πίνακα κατά την επίλυση (matrix ill-conditioning). Αντίθετα, αιτία είναι το γεγονός ότι η εξίσωση (5.1.1) δεν έχει λύση. Αυτό σημαίνει ότι η απλούστευση λόγω του προσεγγιστικού πυρήνα είναι εφικτή, αλλά για να επιτευχθεί θα πρέπει να γίνει σωστή επιλογή του αριθμού των συναρτήσεων βάσης η οποία δύσκολα μπορεί να γίνει εκ των προτέρων.

5.2 Προσομοίωση μέσω Matlab

Η αριθμητική μέθοδος Galerkin (μέθοδος ροπών με παλμικές συναρτήσεις ως συναρτήσεις βάσης και συναρτήσεις δοκιμής) που περιγράφηκε στο κεφάλαιο (3) για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης τύπου Hallén

$$\int_{z'=-h}^h K_{ap}(z-z')I_{ap}(z')dz' = C \cos kz + j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \quad (5.2.1)$$

που προκύπτει χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό πυρήνα της σχέσης (2.5.3) υλοποιήθηκε με τον ακόλουθο κώδικα Matlab.

```

1 V=1;
2 N=input('Enter the N: ');
3 f=input('Enter the frequency f: ');
4 c=3*10^8;
5 Mhkoskumatos=c/f;
6 wmega=2*pi*f;
7 Zo=376.73;
8 k=2*pi/Mhkoskumatos;
9 a=3/2/pi*0.142*10^(-9)*46;
10 h=input('Enter the length h, where 2h is the dipole length: ');
11 z0=2*h/(2*N+1);
12
13 Kap_Hallen=@(z) 1/(4*pi)*exp(1i*k*sqrt(z.^2+a^2))./sqrt(z.^2+a^2);
14 B1Hallen=zeros(2*N+1,1);
15 B2Hallen=zeros(2*N+1,1);
16 for n=0:N;
17     m=n+N+1;
18     syms z
19     B1Hallen(m,1)=2/k*sin(k*z0/2)*cos(k*z0*n);
20     B2Hallen(m,1)=int(1i*V/(2*Zo)*sin(k*abs(z)),(n-1/2)*z0,(n+1/2)*
    z0);

```

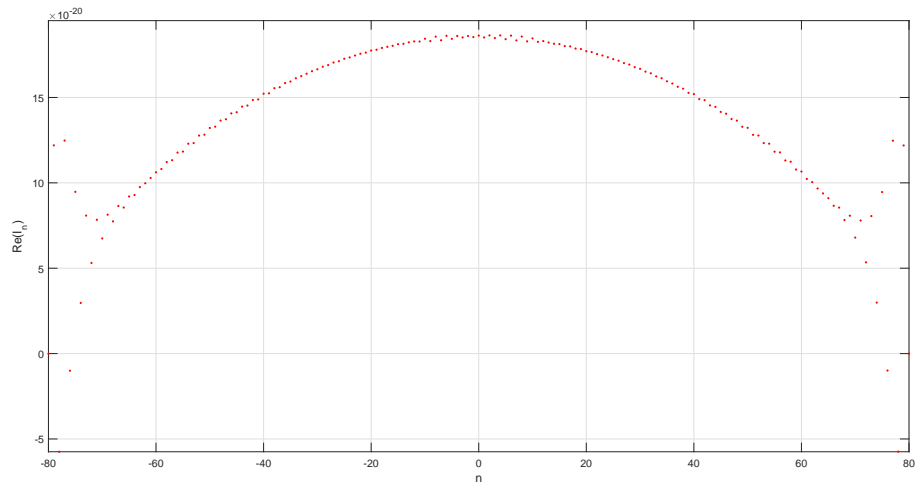
```

21 end
22 for n=-N:-1;
23     m=n+N+1;
24     B1Hallen(m,1)=B1Hallen(2*N+2-m,1);
25     B2Hallen(m,1)=B2Hallen(2*N+2-m,1);
26 end
27
28 A1Hallen=zeros(2*N+1);
29 for n1=-N:N;
30     m1=n1+N+1;
31     for n2=n1:N;
32         m2=n2+N+1;
33         l=n1-n2;
34         A1Hallen(m1,m2)=integral(@(z)(z0-z).*(Kap_Hallen(z+l*z0)+
35                                     Kap_Hallen(z-l*z0)),0,z0);
36     end
37 end
38 for n1=-N+1:N;
39     m1=n1+N+1;
40     for n2=-N:n1;
41         m2=n2+N+1;
42         A1Hallen(m1,m2)=A1Hallen(m2,m1);
43     end
44 end
45 I1Hallen=linsolve(A1Hallen,B1Hallen);
46 I2Hallen=linsolve(A1Hallen,B2Hallen);
47 CHallen=-I2Hallen(2*N+1,1)/I1Hallen(2*N+1,1);
48 IHallen=I2Hallen+CHallen*I1Hallen;

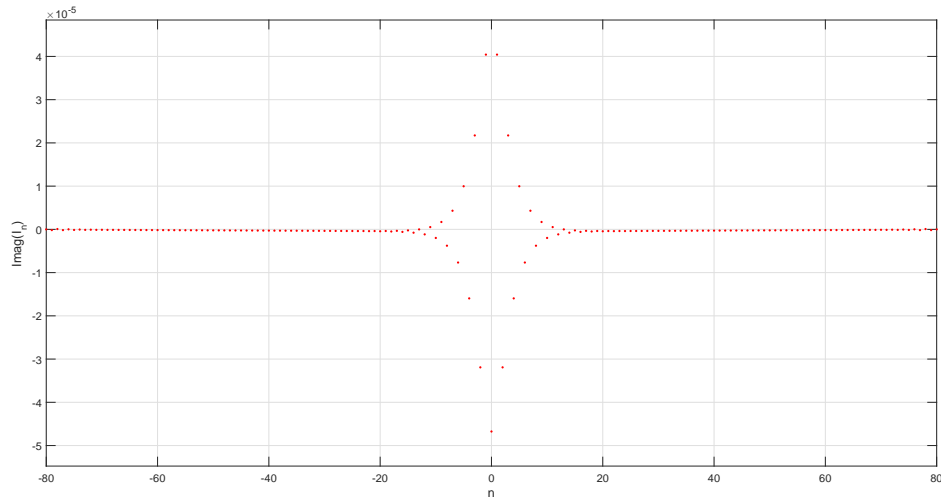
```

5.3 Αποτελέσματα προσομοίωσης

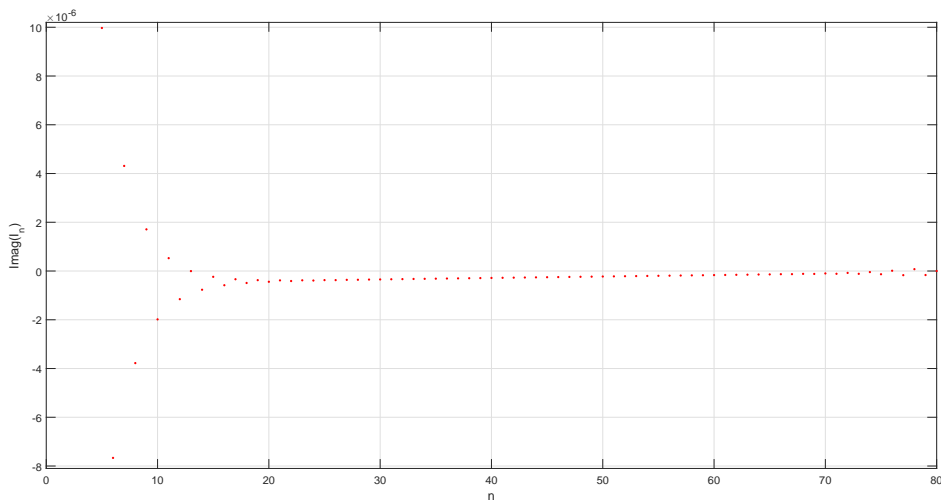
Μετά την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου, τα αποτελέσματά μας επιβεβαιώνουν ότι ισχύουν όσα περιγράφηκαν στο [2] και στην ενότητα (5.1), δηλαδή αναμένουμε να έχουμε ταλαντώσεις στο φανταστικό μέρος της λύσης $I_{ap,n}$ όταν $N \gg h/\alpha$ ή ισοδύναμα όταν $z_0 \rightarrow 0$. Πράγματι αυτό υποδεικνύεται και από τα σχήματα (5.1) και (5.2), αλλά και (5.3) και (5.4). Αν και παρατηρούνται ταλαντώσεις και στα άκρα της κεραίας, εμείς ασχολούμαστε με το κέντρο της κεραίας. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό καθώς το εργαλείο μας είναι η κεραία απείρου μήκους. Τα αποτελέσματα της άπειρης κεραίας χρησιμοποιούνται ως οδηγός για την ερμηνεία της συμπεριφοράς της αριθμητικής λύσης του ρεύματος της πεπερασμένης κεραίας κοντά στο κέντρο της.



Σχήμα 5.1: Το πραγματικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 80$, $f = 100GHz$, $\alpha = 3.12nm$, $h = 25\alpha$. Δεν παρατηρούνται ταλαντώσεις κοντά στο κέντρο.

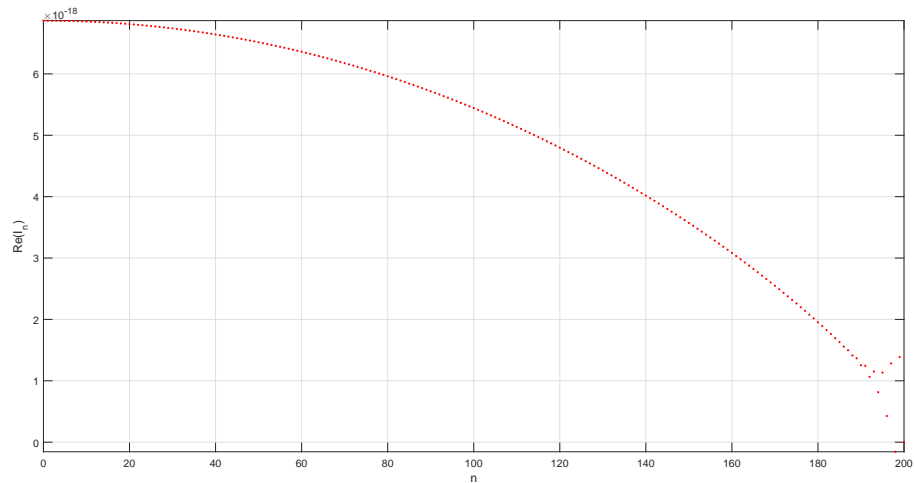


(α')

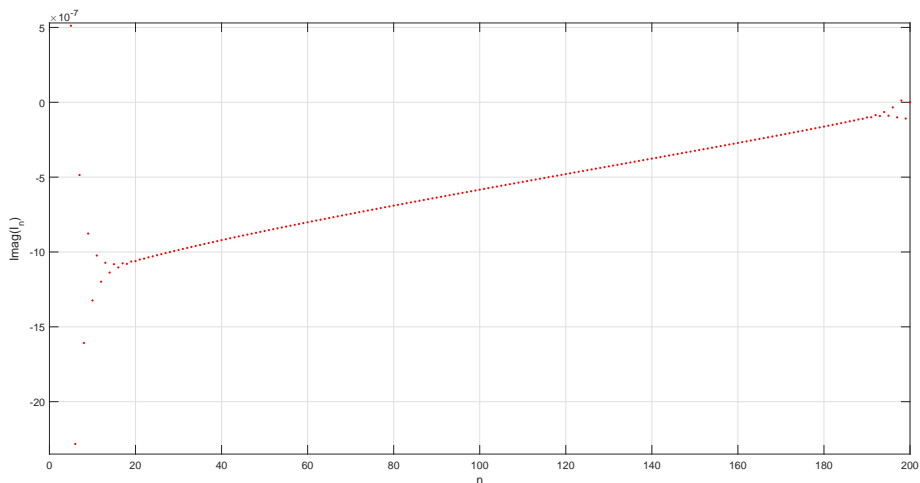


(β')

Σχήμα 5.2: Το φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 80$, $f = 100GHz$, $\alpha = 3.12nm$, $h = 25\alpha$. Παρατηρούνται ταλαντώσεις κοντά στο κέντρο. Στο (β') (zoom in) μερικές τιμές κοντά στο κέντρο είναι εκτός κλίμακας και δε φαίνονται.



Σχήμα 5.3: Το πραγματικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 200$, $f = 100GHz$, $\alpha = 3.12nm$, $h = 75\alpha$. Δεν παρατηρούνται ταλαντώσεις κοντά στο κέντρο.



Σχήμα 5.4: Το φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 200$, $f = 100GHz$, $\alpha = 3.12nm$, $h = 75\alpha$. Παρατηρούνται ταλαντώσεις κοντά στο κέντρο.

Αξίζει να σημειωθεί πως οι προβλεπόμενες τιμές από τη σχέση (5.1.15) απέχουν ελάχιστα από τις τιμές που προκύπτουν από την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου και ειδικά κοντά στο κέντρο της κεραίας, όπως τονίζεται στο [2] και φαίνεται στον πίνακα (5.1). Αυτό καθιστά την κεραία απείρου μήκους ένα εξαιρετικό εργαλείο για την κατανόηση της συμπεριφοράς της κεραίας πεπερασμένου μήκους. Μελετώντας δηλαδή την αριθμητική λύση της κεραίας απείρου μήκους, η οποία μπορεί να προκύψει και στον κλειστό τύπο της σχέσης (5.1.15), μπορούμε να γενικεύσουμε τα συμπεράσματά μας με ελάχιστη απόκλιση στο πρακτικό πρόβλημα του προσδιορισμού ρεύματος της κεραίας πεπερασμένου μήκους, και μάλιστα με άριστη ακρίβεια για μικρά n κοντά στο κέντρο της κεραίας.

n	$Im \{I_{ap,n}/V\}$	$I_{ap,n}^{(\infty)}/jV$
0	-2.66×10^2	-2.49×10^2
1	$+2.57 \times 10^2$	$+2.43 \times 10^2$
2	-2.33×10^2	-2.25×10^2
3	$+2.01 \times 10^2$	$+1.99 \times 10^2$
4	-1.68×10^2	-1.69×10^2
5	$+1.36 \times 10^2$	$+1.40 \times 10^2$
6	-1.09×10^2	-1.13×10^2
7	$+8.70 \times 10^1$	$+9.06 \times 10^1$
8	-6.87×10^1	-7.18×10^1
9	$+5.41 \times 10^1$	$+5.66 \times 10^1$
10	-4.25×10^1	-4.44×10^1
11	$+3.34 \times 10^1$	$+3.47 \times 10^1$
12	-2.62×10^1	-2.71×10^1
13	$+2.05 \times 10^1$	$+2.11 \times 10^1$
14	-1.61×10^1	-1.65×10^1
15	$+1.26 \times 10^1$	$+1.28 \times 10^1$

Πίνακας 5.1: Σύγκριση των κανονικοποιημένων τιμών της λύσης $I_{ap,n}^{(\infty)}/jV$ όπως υπολογίστηκαν από τη σχέση (5.1.15) με τις $Im \{I_{ap,n}/V\}$ όπως υπολογίστηκαν με την εφαρμογή αριθμητικής μεθόδου για $N = 200$, $h/\lambda = 0.25$, $a/\lambda = 0.007022$.

Βιβλιογραφία

- [1] R. E. Collin and F. J. Zucker, “Antenna Theory Part 1”, in. McGraw-Hill, 1969, ch. 8.
- [2] G. Fikioris and T. T. Wu, “On the application of numerical methods to Hallén’s equation”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 49, number 3, pages 383–392, March 2001.
- [3] G. Fikioris and I. Tastsoglou, “Fundamenatals of thin-wire integral equations with the finite-gap generator—part I”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 61, number 11, pages 5517–5526, November 2013.
- [4] —, “Fundamenatals of thin-wire integral equations with the finite-gap generator—part II”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 61, number 11, pages 5527–5532, November 2013.
- [5] P. Papakanellos, G. Fikioris, and A. Michalopoulou, “On the oscillations appearing in numerical solutions of solvable and nonsolvable integral equations for thin-wire antennas”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 58, number 5, pages 1635–1644, May 2010.

Κεφάλαιο 6

Νανοκεραίες άνθρακα - μεγάλος παράγοντας $q(z - z')$

6.1 Νανοκεραίες άνθρακα - Περίπτωση μεγάλου παράγοντα $q(z - z')$

Η αντίστοιχη εξίσωση για τις νανοκεραίες άνθρακα όπου δεν μπορεί να αμεληθεί ο όρος $q(z) = \frac{1}{4\pi Z_0 \alpha \sigma} e^{jk|z|} = \xi e^{jk|z|}$ είναι

$$\int_{z'=-h}^h \left(K_{ap}(z - z') + q(z - z') \right) I(z') dz' = C \cos kz + j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \quad (6.1.1)$$

Σκοπός είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης αυτής της εξίσωσης σε σχέση με την (5.1.1) ως προς την εμφάνιση ταλαντώσεων. Δηλαδή, επιδιώκουμε να βρούμε τι επίδραση θα έχει στην εμφάνιση ταλαντώσεων η ύπαρξη του νέου όρου $q(z - z') = \xi e^{jk|z-z'|}$. Εδώ ο νέος πυρήνας θα είναι

$$K_{ap}(z) + \xi e^{jk|z|} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}} + \frac{1}{4\pi Z_0 \alpha \sigma} e^{jk|z|} \quad (6.1.2)$$

$$\text{όπου } \xi = \frac{1}{4\pi Z_0 \alpha \sigma}$$

Για το σκοπό αυτό θα μελετήσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση για την κεραία απείρου μήκους και στη συνέχεια τα αποτελέσματα θα γενικευτούν στην κεραία πεπερασμένου μήκους $2h$. Όταν $|\xi| \rightarrow +\infty$ ή, ακριβέστερα, όταν

$$|\xi| \gg \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow |\xi \alpha| \gg 1 \quad (6.1.3)$$

μπορούμε να αμελήσουμε τον προσεγγιστικό πυρήνα οπότε η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση θα είναι

$$\int_{z'=-h}^h \xi e^{jk|z-z'|} I_{ap}(z') dz' = C \cos kz + j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z|, \quad -h < z < h \quad (6.1.4)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση για την κεραία απείρου μήκους, όπως στην (5.1.1), είναι

$$\int_{z'=-\infty}^{\infty} \xi e^{jk|z-z'|} I_{ap}^{(\infty)}(z') dz' = \frac{V}{2Z_0} e^{jk|z|}, \quad -\infty < z < \infty \quad (6.1.5)$$

της οποίας η λύση εύκολα επαληθεύεται ότι είναι

$$I_{ap}^{(\infty)}(z) = \frac{V}{2Z_0\xi} \delta(z) \quad (6.1.6)$$

Μια παρόμοια λύση της (6.1.4) για την κεραία πεπερασμένου μήκους είναι

$$I_{ap}(z) = \frac{V}{2Z_0\xi} \delta(z), \text{ όπου } C = \frac{V}{2Z_0\xi} \quad (6.1.7)$$

6.2 Αριθμητική επίλυση κεραίας απείρου μήκους

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο που περιγράφηκε στο κεφάλαιο (3) για την κεραία απείρου μήκους. Πιο συγκεκριμένα, γράφουμε

$$I_{ap}^{(\infty)}(z) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{ap,n}^{(\infty)} u_n(z), \quad -\infty < z < \infty \quad (6.2.1)$$

όπου οι $u_n(z)$ δίνονται από την (3.1.5). Υποθέτοντας αρχικά ότι $\epsilon = \text{Im}\{k\} > 0$ η διαδικασία που περιγράφηκε στο κεφάλαιο (3) οδηγεί στο σύστημα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{l-n} I_{ap,n}^{(\infty)} = B_l^{(\infty)} \quad (6.2.2)$$

όπου τα στοιχεία $B_l^{(\infty)}$ δίνονται από τη σχέση [1]

$$B_l^{(\infty)} = \frac{V}{2Z_0} \int_{z=(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} e^{jk|z|} dz$$

$$B_l^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{j2V}{Z_0k} \sin^2\left(\frac{kz_0}{4}\right) + \frac{V}{Z_0k} \sin\left(\frac{kz_0}{2}\right) & , \text{αν } l = 0 \\ \frac{V}{Z_0k} \sin\left(\frac{kz_0}{2}\right) e^{j|l|kz_0} & , \text{αν } l = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (6.2.3)$$

Ακόμη για τους συντελεστές $A_{l-n} = A_d$ ισχύει από τη σχέση (6.2.6) λαμβάνοντας υπόψιν ότι για $0 < z < z_0$ ισχύει

$$|z \pm dz_0| = \begin{cases} z & , \text{αν } d = 0 \\ dz_0 \pm z & , \text{αν } d = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (6.2.4)$$

έχουμε

$$A_0 = 2\xi \int_{z=0}^{z_0} (z_0 - z) e^{jkz} dz = \frac{2\xi}{k^2} (1 - e^{jkz_0} + jkz_0), \text{αν } d = 0 \quad (6.2.5)$$

$$A_d = \xi \int_{z=0}^{z_0} (z_0 - z) [e^{ik(|d|z_0+z)} + e^{ik(|d|z_0-z)}] dz = \frac{2\xi e^{j|d|kz_0} (1 - \cos kz_0)}{k^2}, \text{αν } d = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.2.6)$$

Η λύση του απείρου συστήματος Toeplitz μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή με τον ακόλουθο τρόπο. Πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος με $e^{jl\theta}$, όπου $-\pi < \theta \leq \pi$ και αθροίζουμε ως προς l . Με την αλλαγή της σειράς άθροισης και εισαγωγή των σειρών Fourier

$$\bar{A}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{jl\theta} \quad (6.2.7)$$

$$\bar{B}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_l^{(\infty)} e^{jl\theta} \quad (6.2.8)$$

$$\bar{I}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l^{(\infty)} e^{jl\theta} \quad (6.2.9)$$

λαμβάνουμε $\bar{A}(\theta)\bar{I}(\theta) = \bar{B}(\theta)$ και έτσι λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του $\bar{I}(\theta)$ λαμβάνουμε τελικά όπως στο [1]

$$I_{ap,n}^{(\infty)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}(\theta)} e^{-jn\theta} d\theta, \quad -\infty < n < \infty \quad (6.2.10)$$

ή

$$I_{ap,n}^{(\infty)} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}(\theta)} \cos n\theta d\theta, \quad -\infty < n < \infty \quad (6.2.11)$$

όπου

$$\bar{B}(\theta) = -\frac{jV}{Z_0} \frac{2}{k} \sin^2 \frac{kz_0}{4} \frac{\cos \frac{kz_0}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta+kz_0}{2} \sin \frac{\theta-kz_0}{2}} \quad (6.2.12)$$

Για το άθροισμα $\bar{A}(\theta)$ από τις (6.2.5) και (3.1.13) προκύπτει ότι

$$\bar{A}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{jl\theta} = A_0 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} A_l \cos(l\theta) \quad (6.2.13)$$

Όπως ακριβώς στο [1] το άθροισμα συγκλίνει μόνο όταν $\epsilon = \text{Im}\{k\} > 0$. Τότε αν $S_\epsilon = \sum_{l=1}^{\infty} e^{jl(k+j\epsilon)z_0} \cos(l\theta)$ έχουμε

$$\begin{aligned} S_\epsilon &= \sum_{l=1}^{\infty} e^{jl(k+j\epsilon)z_0} \cos(l\theta) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-l\epsilon} e^{jl(kz_0+\theta)} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-l\epsilon} e^{jl(kz_0-\theta)} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν το άθροισμα $\sum_{l=1}^{\infty} x^l = \sum_{l=0}^{\infty} x^l - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$ έχουμε

$$S_\epsilon = \frac{1}{2} \frac{e^{-\epsilon} e^{j(kz_0+\theta)}}{1 - e^{-\epsilon} e^{j(kz_0+\theta)}} + \frac{1}{2} \frac{e^{-\epsilon} e^{j(kz_0-\theta)}}{1 - e^{-\epsilon} e^{j(kz_0-\theta)}} \quad (6.2.14)$$

Έτσι από τις (6.2.5),(6.2.6) και (6.2.13) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\bar{A}(\theta) &= A_0 + \frac{4\xi(1 - \cos kz_0)}{k^2} S_0 \\ &= \frac{-j\xi \cos \theta (kz_0 - \sin kz_0) + (\sin kz_0 - kz_0 \cos kz_0)}{k^2 \sin \frac{\theta+kz_0}{2} \sin \frac{\theta-kz_0}{2}} \\ &= \frac{-j\xi}{k^2} (kz_0 - \sin kz_0) \frac{\cos \theta + f(kz_0)}{\sin \frac{\theta+kz_0}{2} \sin \frac{\theta-kz_0}{2}}\end{aligned}\quad (6.2.15)$$

$$(6.2.16)$$

όπου $f(kz_0) = \frac{\sin kz_0 - kz_0 \cos kz_0}{kz_0 - \sin kz_0}$ Με αντικατάσταση των σχέσεων (6.2.12), (6.2.15) στη (6.2.11) έχουμε την ακριβή αριθμητική λύση για την άπειρη κεραία

$$\begin{aligned}I_{ap,n}^{(\infty)} &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos n\theta \frac{-\frac{jV}{Z_0} \frac{2}{k} \sin^2 \frac{kz_0}{4} (\cos \frac{kz_0}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2})}{-\frac{j\xi}{k^2} (kz_0 - \sin kz_0) [\cos \theta + f(kz_0)]} d\theta \\ &= \frac{2kV}{\pi Z_0 \xi} \frac{\sin^2 \frac{kz_0}{4}}{kz_0 - \sin kz_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos n\theta \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos \frac{kz_0}{2}}{\cos \theta + f(kz_0)} d\theta \\ \Rightarrow I_{ap,n}^{(\infty)} &= \frac{kV}{\pi Z_0 \xi} \frac{\sin^2 \frac{kz_0}{4}}{kz_0 - \sin kz_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos n\theta \frac{\cos \theta + (1 + 2 \cos \frac{kz_0}{2})}{\cos \theta + f(kz_0)} d\theta\end{aligned}\quad (6.2.17)$$

Παρατήρηση: Αφού η ακριβής λύση δίνεται από τη σχέση (6.1.6) περιμένει κανείς το εμπαιδόν κάτω από τους παλμούς να είναι $\frac{V}{2Z_0\xi}$. Πράγματι, από την (6.2.10) χρησιμοποιώντας ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2m\pi) \text{ και ότι } f(kz_0) = \frac{\sin kz_0 - kz_0 \cos kz_0}{kz_0 - \sin kz_0} \text{ έχουμε:}$$

$$Total \text{ area} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0 I_{ap,n}^{(\infty)} = z_0 \frac{kV}{\pi Z_0 \xi} \frac{\sin^2 \frac{kz_0}{4}}{kz_0 - \sin kz_0} \frac{1}{2} 2\pi \frac{1 + (1 + 2 \cos \frac{kz_0}{2})}{1 + f(kz_0)} = \frac{V}{2Z_0 \xi} \quad (6.2.18)$$

6.3 Προσεγγιστική λύση άπειρης κεραίας

Όταν ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης είναι πολύ μεγάλος ($N \rightarrow \infty$) ή ισοδύναμα όταν το εύρος z_0 των παλμών είναι πολύ μικρό έχουμε $kz_0 \rightarrow 0$. Τότε έχουμε

$$\lim_{kz_0 \rightarrow 0} f(kz_0) = 2, \quad 1 + \cos \frac{kz_0}{2} = 3, \quad \frac{\sin^2 \frac{kz_0}{4}}{kz_0 - \sin kz_0} \simeq \frac{3}{8kz_0} \quad (6.3.1)$$

Έτσι η (6.2.17) γράφεται

$$I_{ap,n}^{(\infty)} \simeq \frac{3V}{8\pi Z_0 \xi z_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos n\theta \frac{\cos \theta + 3}{\cos \theta + 2} d\theta \quad (6.3.2)$$

Το ολοκλήρωμα για $n = 0$ είναι

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\cos \theta + 3}{\cos \theta + 2} d\theta = \pi \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad (6.3.3)$$

Για $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ έχουμε αρχικά για $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \int_{\theta=0}^{\pi} \cos n\theta \frac{\cos \theta + 3}{\cos \theta + 2} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{jn\theta} \frac{\cos \theta + 3}{\cos \theta + 2} d\theta + \int_{\theta=0}^{\pi} e^{-jn\theta} \frac{\cos \theta + 3}{\cos \theta + 2} d\theta \\
 &\stackrel{\theta' = -\theta}{=} \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{jn\theta} \frac{\cos \theta + 3}{\cos \theta + 2} d\theta - \int_{\theta=0}^{-\pi} e^{jn\theta'} \frac{\cos \theta' + 3}{\cos \theta' + 2} d\theta' \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} e^{jn\theta} \frac{\cos \theta + 3}{\cos \theta + 2} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} e^{jn\theta} \frac{\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} + 3}{\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} + 2} d\theta \\
 &\stackrel{e^{j\theta} = z}{=} \frac{1}{2j} \oint_{|z|=1} z^n \frac{z + z^{-1} + 6}{z + z^{-1} + 4} \frac{dz}{z} \\
 &= \frac{1}{2j} \oint_{|z|=1} z^{n-1} \frac{z^2 + 6z + 1}{z^2 + 4z + 1} dz \\
 &= \frac{1}{2j} \oint_{|z|=1} z^{n-1} \frac{z^2 + 6z + 1}{(z + 2 + \sqrt{3})(z + 2 - \sqrt{3})} dz \tag{6.3.4}
 \end{aligned}$$

Επειδή $n \geq 1$, υπάρχει μόνο ένας πόλος εντός του μοναδιαίου κύκλου στο $z = -(2 - \sqrt{3})$. Έτσι [2]

$$\begin{aligned}
 \int_{\theta=0}^{\pi} \cos n\theta \frac{\cos \theta + 3}{\cos \theta + 2} d\theta &= \frac{1}{2j} 2\pi j z^{n-1} \frac{z^2 + 6z + 1}{z + 2 + \sqrt{3}} \Big|_{z=-(2-\sqrt{3})} \\
 &= \pi \frac{(-1)^n (2 + \sqrt{3})^{-n}}{\sqrt{3}} \tag{6.3.5}
 \end{aligned}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα αυτό είναι άρτια συνάρτηση του n τελικά

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \cos n\theta \frac{\cos \theta + 3}{\cos \theta + 2} d\theta = \pi \frac{(-1)^n (2 + \sqrt{3})^{-|n|}}{\sqrt{3}}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \tag{6.3.6}$$

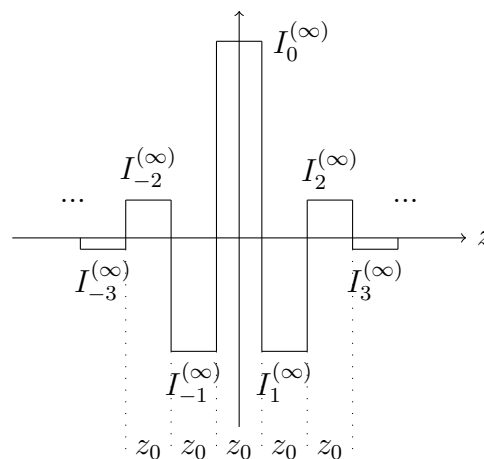
Επομένως η τελική προσεγγιστική λύση για $kz_0 \rightarrow 0$ είναι

$$I_{ap,n}^{(\infty)} \simeq \frac{\sqrt{3}V}{8Z_0\xi z_0} (-1)^n \begin{cases} 1 + \sqrt{3} & , \text{αν } n = 0 \\ (2 + \sqrt{3})^{-|n|} & , \text{αν } n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \tag{6.3.7}$$

n	$\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V} \xi z_0 (Siemens)$
0	$+1.570 \times 10^{-3}$
1	-1.540×10^{-4}
2	$+4.126 \times 10^{-5}$
3	-1.106×10^{-5}
4	$+2.962 \times 10^{-6}$
5	-7.939×10^{-7}

Πίνακας 6.1: Οι κανονικοποιημένες τιμές της προσεγγιστικής λύσης ($\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V} \xi z_0 (Siemens)$) για τιμές κοντά στο κέντρο της κεραίας

Στον πίνακα (6.1) φαίνονται οι κανονικοποιημένες τιμές της προσεγγιστικής λύσης ($\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V} \xi z_0 (Siemens)$) για τιμές κοντά στο κέντρο της κεραίας. Η εξίσωση (6.3.7) δίνει σε κλειστό τύπο την προσεγγιστική αριθμητική λύση για την άπειρη κεραία. Σύμφωνα με αυτή, η λύση ταλαντώνεται με μια εκθετική μείωση από το κέντρο $z = 0$. Επειδή το ξ είναι γενικά μιγαδικός αριθμός, τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος της λύσης $I_{ap,n}^{(\infty)}$ θα ταλαντώνονται. Αφού οι συναρτήσεις βάσεις είναι οι παλμοί της (3.1.5) με εύρος z_0 η λύση γραφικά θα είναι όπως στο σχήμα (6.1).



Σχήμα 6.1: Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης της άπειρης κεραίας

Παρατήρηση: Όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο σχετικά με το εμβαδόν κάτω από τους παλμούς ισχύει ακόμη και αν χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική λύση για την άπειρη

κεραία. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την (6.3.7) και ότι $\sum_{l=1}^{\infty} x^l = \frac{x}{1-x}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 \text{Total area} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0 I_{ap,n}^{(\infty)} \\
 &= \frac{\sqrt{3}V}{8Z_0\xi} [1 + \sqrt{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2 + \sqrt{3})^{-n}] \\
 &= \frac{\sqrt{3}V}{8Z_0\xi} \frac{4}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{V}{2Z_0\xi}
 \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

6.4 Προσομοίωση μέσω Matlab

Η αριθμητική μέθοδος που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα για τον προσδιορισμό του ρεύματος $I_{ap}(z)$ υλοποιήθηκε με τον ακόλουθο κώδικα Matlab.

```

1  clc ;
2  %% Parameters input
3
4  N=input('Enter the N: ');
5  f=input('Enter the frequency f: ');
6  V=1;
7  c=3*10^8;
8  Mhkoskumatos=c/f;
9  k=2*pi/Mhkoskumatos;
10 wmega=2*pi*f;
11 Zo=376.73;
12 e=1.602*10^(-19);
13 u=1/3*10^12;
14 uF=9.71*10^5; hbar=1.0546*10^(-34);
15 epsilon=8.854*10^(-12);
16 m_radius=input('Enter the m=n<50 for the radius: ');
17 a=3/2/pi*0.142*10^(-9)*m_radius;
18 h=input('Enter the length h, where 2h is the dipole length: ');
19 z0=2*h/(2*N+1);
20 sSWNT=+1i*2*e^2*uF/(pi^2*hbar*a*(wmega+1i*u));
21
22 %% Carbon Nanotube simulation
23 Kap_Carbon=@(z) 1/4/pi/Zo/a/sSWNT.*exp(1i*k*abs(z));
24 B1Carbon=zeros(2*N+1,1);
25 B2Carbon=zeros(2*N+1,1);
26 for n=0:N;
27     m=n+N+1;
28     syms z
29     B1Carbon(m,1)=2/k*sin(k*z0/2)*cos(k*z0*n);
    
```

```

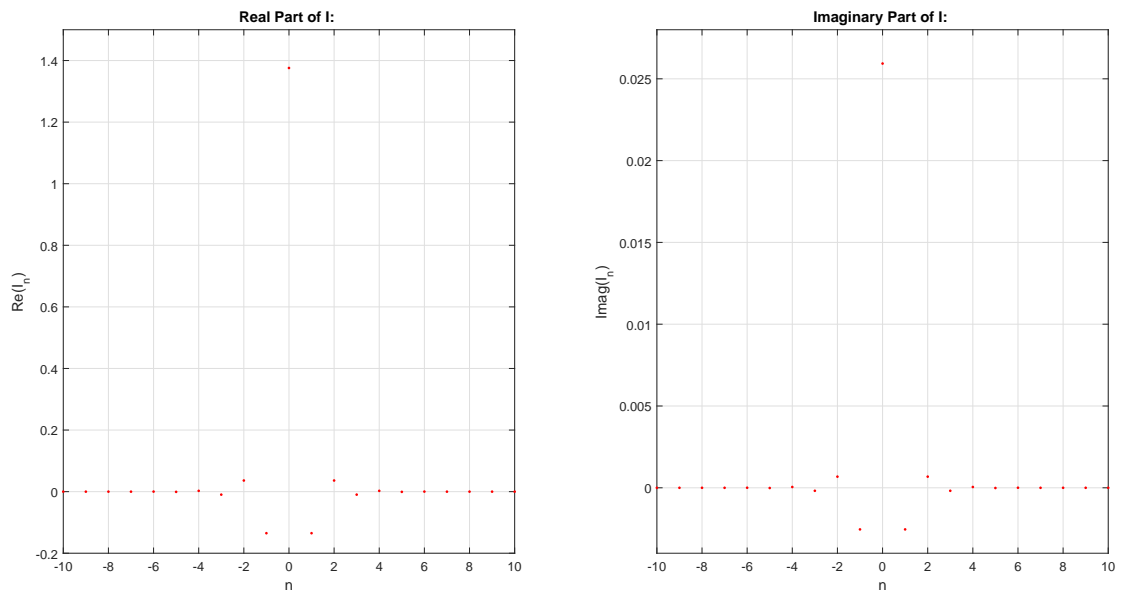
30     B2Carbon(m,1)=int(1i*V/(2*Zo)*sin(k*abs(z)),(n-1/2)*z0,(n+1/2)*
        z0);
31 end
32 for n=-N:-1;
33     m=n+N+1;
34     B1Carbon(m,1)=B1Carbon(2*N+2-m,1);
35     B2Carbon(m,1)=B2Carbon(2*N+2-m,1);
36 end
37
38 A1Carbon=zeros(2*N+1);
39 for n1=-N:N;
40     m1=n1+N+1;
41     for n2=n1:N;
42         m2=n2+N+1;
43         l=n1-n2;
44         A1Carbon(m1,m2)=integral(@(z)(z0-z).*(Kap_Carbon(z+l*z0)+
            Kap_Carbon(z-l*z0)),0,z0);
45     end
46 end
47 for n1=-N+1:N;
48     m1=n1+N+1;
49     for n2=-N:n1;
50         m2=n2+N+1;
51         A1Carbon(m1,m2)=A1Carbon(m2,m1);
52     end
53 end
54
55 I1Carbon=linsolve(A1Carbon,B1Carbon);
56 I2Carbon=linsolve(A1Carbon,B2Carbon);
57 CCarbon=-I2Carbon(2*N+1,1)/I1Carbon(2*N+1,1);
58 ICarbon=I2Carbon+CCarbon*I1Carbon;
    
```

6.5 Αποτελέσματα προσομοίωσης

Όπως και στο [1], έτσι κι εδώ η κεραία απείρου μήκους που μελετήθηκε διεξοδικά ως προς τη λύση της, οδηγεί σε χρήσιμα συμπεράσματα για την κεραία πεπερασμένου μήκους. Πράγματι, η αξιοπιστία των συμπερασμάτων υποδεικνύεται και από τον πίνακα (6.2), όπου οι κανονικοποιημένες τιμές της λύσης $\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V}\xi z_0$ (Siemens) όπως υπολογίστηκαν από τη σχέση (6.3.7) απέχουν ελάχιστα από τις $\frac{I_{ap,n}}{V}\xi z_0$ (Siemens) όπως υπολογίστηκαν με την εφαρμογή αριθμητικής μεθόδου στην πεπερασμένη κεραία. Ισχύουν όσα περιγράφηκαν για τις εκθετικά μειούμενες ταλαντώσεις γύρω από το κέντρο $z = 0$, όπως υποδεικνύεται και από το σχήμα (6.2). Μάλιστα, ενώ θα περιμέναμε οι τιμές να είναι σχετικά κοντά μόνο για σημεία κοντά στο κέντρο, φαίνεται ότι είναι πολύ κοντά ακόμη και για τιμές στα άκρα της κεραίας. Επομένως τα συμπεράσματα σχετικά με την άπειρη κεραία μπορούν πρακτικά να γενικευθούν και στην κεραία πεπερασμένου μήκους.

n	$\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V} \xi z_0 (Siemens)$	$\frac{I_{ap,n}}{V} \xi z_0 (Siemens)$
0	$+1.5701 \times 10^{-3}$	$+1.5701 \times 10^{-3}$
1	-1.5399×10^{-4}	-1.5399×10^{-4}
2	$+4.1261 \times 10^{-5}$	$+4.1262 \times 10^{-5}$
3	-1.1056×10^{-5}	-1.1056×10^{-5}
4	$+2.9624 \times 10^{-6}$	$+2.9624 \times 10^{-6}$
5	-7.9378×10^{-7}	-7.9378×10^{-7}
6	$+2.1269 \times 10^{-7}$	$+2.1269 \times 10^{-7}$
7	-5.6991×10^{-8}	-5.6991×10^{-8}
8	$+1.5270 \times 10^{-8}$	$+1.5271 \times 10^{-8}$
9	-4.0917×10^{-9}	-4.0917×10^{-9}
10	$+1.0963 \times 10^{-9}$	$+1.0963 \times 10^{-9}$

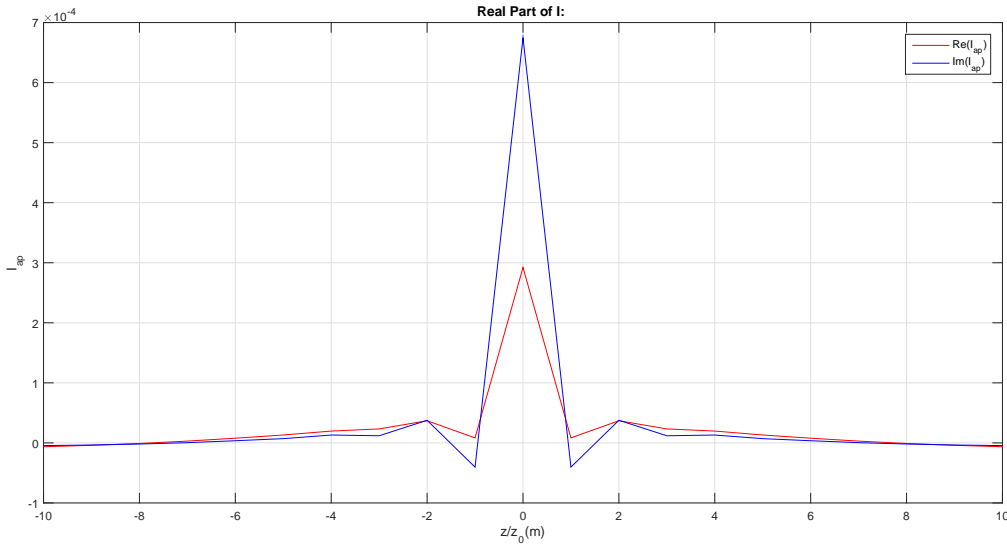
Πίνακας 6.2: Σύγκριση των κανονικοποιημένων τιμών της λύσης ($\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V} \xi z_0$ (Siemens)) όπως υπολογίστηκαν από τη σχέση (6.3.7) με τις $\frac{I_{ap,n}}{V} \xi z_0$ (Siemens) όπως υπολογίστηκαν με την εφαρμογή αριθμητικής μεθόδου για $N = 250$ στην πεπερασμένη κεραία. Το φανταστικό μέρος της $\frac{I_{ap,n}}{V} \xi z_0$ (Siemens) είναι μικρότερης τάξης από 10^{-12} και δεν καταγράφεται. Η μέγιστη διαφορά στο πραγματικό μέρος υπολογίστηκε 8.4879×10^{-15} και στο φανταστικό μέρος 6.0966×10^{-16} .



Σχήμα 6.2: Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $\xi \rightarrow +\infty$, $N = 100$, $f = 1GHz$, $\alpha = 3.12nm$, $h = 25\alpha$.

Η περίπτωση κατά την οποία $\xi \rightarrow +\infty$ αναφέρεται σε προβλήματα κατά τα οποία αυξάνεται αρκετά σημαντικά η συχνότητα (για παράδειγμα στο οπτικό φάσμα- εκατοντάδες THz και πάνω). Το ρεύμα προσεγγίζει την κρουστική συνάρτηση και είναι συγκεντρωμένο γύρω από μια πολύ μικρή περιοχή κοντά στο κέντρο της κεραίας. Αποδείχθηκε προηγουμένως ότι αφενός η πραγματική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι η κρουστική συνάρτηση και αφετέρου ότι και η αριθμητική λύση

της οδηγεί σε εκθετικά μειούμενες ταλαντώσεις γύρω από το κέντρο, δηλαδή σε ένα ρεύμα πάλι συγκεντρωμένο γύρω από μια πολύ μικρή περιοχή κοντά στο κέντρο της κεραίας. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτό ισχυριζόμενοι ότι η αριθμητική λύση θα πρέπει να πλησιάζει την πραγματική η οποία σε αυτή την ειδική περίπτωση είναι η κρουστική συνάρτηση. Αξίζει να τονισθεί ότι τα αποτελέσματα αυτά δεν εξαρτώνται από το αν χρησιμοποιείται ο ακριβής ή ο προσεγγιστικός πυρήνας, αφού αμελείται για $\xi \rightarrow +\infty$ και επομένως οι ταλαντώσεις δεν οφείλονται στη μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης αλλά στο γεγονός ότι η αριθμητική λύση τείνει στην κρουστική συνάρτηση. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα (6.3) και στον πίνακα (6.3).



Σχήμα 6.3: Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 200$, $f = 250THz$, $\alpha = 0.678nm$, $h = 20\alpha$.

n	$\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V} \xi z_0 (Siemens)$	$\frac{I_{ap,n}}{V} \xi z_0 (Siemens)$
0	$+1.57 \times 10^{-3}$	$+1.65 \times 10^{-3}$

Πίνακας 6.3: Σύγκριση των κανονικοποιημένων τιμών της λύσης ($\frac{I_{ap,n}^{(\infty)}}{V} \xi z_0 (Siemens)$) όπως υπολογίστηκαν από τη σχέση (6.3.7) με τις $\frac{I_{ap,n}}{V} \xi z_0 (Siemens)$ όπως υπολογίστηκαν με την εφαρμογή αριθμητικής μεθόδου για $N = 200$, $f = 250THz$, $\alpha = 0.678nm$, $h = 20\alpha$, $\xi = 1.2 \times 10^{10} - j3.1 \times 10^{10}$, $\xi\alpha = 8.3 - j21$.

Βιβλιογραφία

- [1] G. Fikioris and T. T. Wu, “On the application of numerical methods to Hallén’s equation”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 49, number 3, pages 383–392, March 2001.
- [2] J. Brown and R. Churchill, *Complex variables and applications*, series Brown and Churchill series. McGraw-Hill Higher Education, 2009.

Κεφάλαιο 7

Αριθμητική επίλυση - Νανοκεραίες άνθρακα

7.1 Εισαγωγή

Στη βιβλιογραφία συναντάται αρκετά συχνά η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_{z'=-h}^h \left(K(z-z') + q(z-z') \right) I(z') dz' = C \cos kz + j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \quad (7.1.1)$$

για τον προσδιορισμό του ρεύματος σε μια νανοκεραία άνθρακα, όπου

$$K(z) = \begin{cases} K_{ex}(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\varphi'=-\pi}^{\pi} \frac{e^{jk\sqrt{z^2+4a^2\sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}}}{\sqrt{z^2+4a^2\sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}} d\varphi' \\ K_{ap}(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}} \end{cases} \quad (7.1.2)$$

$$q(z) = \frac{1}{4\pi Z_0 a \sigma} e^{jk|z|} = \xi e^{jk|z|} \quad (7.1.3)$$

Η χρησιμοποίηση του προσεγγιστικού πυρήνα $K_{ap}(z)$ είναι συχνότερη λόγω της απλότητας του, χωρίς ωστόσο να αναφέρεται η μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης που εξηγείται αναλυτικά στα [1], [2] και [3]. Ακόμη και όταν αυτή οδηγεί σε "άφυσικες" ταλαντώσεις κατά την αριθμητική επίλυση όταν ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης είναι αρκετά μεγάλος, το γεγονός αυτό αποδίδεται σε σφάλματα κατά τους υπολογισμούς λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας και των στρογγυλοποιήσεων. Παρακάτω θα δείξουμε ότι οι ταλαντώσεις αυτές οφείλονται στη χρησιμοποίηση του προσεγγιστικού πυρήνα που οδηγεί στη μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης, και πως θα συνέβαιναν ακόμη και με την ύπαρξη ενός ιδανικού υπολογιστή με άπειρο wordlength .

7.2 Οριακές περιπτώσεις

Συνοψίζοντας τις περιπτώσεις των κεφαλαίων (5) και (6) μπορούμε να πούμε τα εξής:

Μέθοδος: Για την αριθμητική λύση με τη μέθοδο Galerkin της εξίσωσης

$$\int_{z'=-h}^h (K_{ap}(z-z') + q(z-z'))I(z')dz' = C \cos kz + j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \quad (7.2.1)$$

μελετάται η αντίστοιχη εξίσωση για την άπειρη κεραία, η οποία είναι

$$\int_{z'=-\infty}^{\infty} (K_{ap}(z-z') + q(z-z'))I(z')dz' = \frac{V}{2Z_0} e^{jk|z|} \quad (7.2.2)$$

Η αριθμητική λύση της άπειρης κεραίας είναι

$$I_{ap,n}^{(\infty)} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}(\theta)} \cos n\theta d\theta, \quad -\infty < n < \infty$$

όπου

$$\bar{B}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_l^{(\infty)} e^{jl\theta} = -\frac{jV}{Z_0} \frac{2}{k} \sin^2 \frac{kz_0}{4} \frac{\cos \frac{kz_0}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta+kz_0}{2} \sin \frac{\theta-kz_0}{2}} \quad (7.2.3)$$

$$\bar{A}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{jl\theta}$$

Στη συνέχεια μελετώντας ασυμπτωτικά την περίπτωση $N \gg h/\alpha$ ή ισοδύναμα όταν $z_0 \rightarrow 0$ βρίσκουμε τη λύση $I_{ap,n}^{(\infty)}$. Αυτή η λύση προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό την αριθμητική λύση της πεπερασμένης κεραίας, τουλάχιστον για μικρά n κοντά στο κέντρο της.

• Στην περίπτωση τέλει αγωγού έχουμε $\sigma \rightarrow +\infty$, οπότε η ποσότητα $q(z-z') = \frac{\omega \epsilon}{\alpha \sigma} \frac{e^{jk|z-z'|}}{4\pi k}$ τείνει στο μηδέν και αμελείται. Η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hallén για την άπειρη κεραία είναι

$$\int_{z'=-h}^h K_{ap}(z-z')I_{ap}(z')dz' = \frac{V}{2Z_0} e^{jk|z|} \quad (7.2.4)$$

Τότε για $N \gg h/\alpha$

$$\bar{A}_1(\theta) \simeq 4z_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\bar{K}_{ap}\left(\frac{\theta}{z_0}\right) \frac{1}{\theta^2} + \bar{K}_{ap}\left(\frac{2\pi-\theta}{z_0}\right) \frac{1}{(2\pi-\theta)^2} \right] \quad (7.2.5)$$

$$\bar{K} = \bar{K}_{ap}(\zeta) \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha|\zeta|}} e^{-\alpha|\zeta|} \quad \text{για } \alpha|\zeta| \gg 1 \quad (7.2.6)$$

Η αριθμητική λύση είναι

$$\boxed{I_{ap,n}^{(\infty)} \simeq -j \frac{V}{Z_0} \frac{\pi^3}{32\sqrt{2}} k z_0 \sqrt{\frac{z_0}{\alpha}} (-1)^n e^{\frac{\alpha\pi}{z_0}} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \frac{z_0}{\alpha} n\right)} \times \left[1 - \frac{5z_0}{2\pi\alpha} + \frac{5}{4} n \left(\frac{z_0}{\alpha}\right)^2 \tanh\left(\frac{\pi}{2} \frac{z_0}{\alpha} n\right) \right]} \quad (7.2.7)$$

η οποία προβλέπει ταλαντώσεις στο φανταστικό μέρος.

- Στην περίπτωση που $\xi = \frac{1}{4\pi Z_0 \alpha \sigma} \rightarrow +\infty$ η αντίστοιχη εξίσωση για την άπειρη κεραία είναι

$$\int_{z'=-\infty}^{\infty} \xi e^{jk|z-z'|} I_{ap}^{(\infty)}(z') dz' = \frac{V}{2Z_0} e^{jk|z|}, \quad -\infty < z < \infty \quad (7.2.8)$$

Τότε

$$\bar{A}_2(\theta) = \frac{-j\xi}{k^2} (kz_0 - \sin kz_0) \frac{\cos \theta + f(kz_0)}{\sin \frac{\theta+kz_0}{2} \sin \frac{\theta-kz_0}{2}} \quad (7.2.9)$$

$$\text{όπου } f(kz_0) = \frac{\sin kz_0 - kz_0 \cos kz_0}{kz_0 - \sin kz_0} \quad (7.2.10)$$

και για $N \gg h/\alpha$ η αριθμητική λύση είναι

$$I_{2,ap,n}^{(\infty)} \simeq \frac{\sqrt{3}V}{8Z_0\xi z_0} (-1)^n \begin{cases} 1 + \sqrt{3} & , \text{αν } n = 0 \\ (2 + \sqrt{3})^{-|n|} & , \text{αν } n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (7.2.11)$$

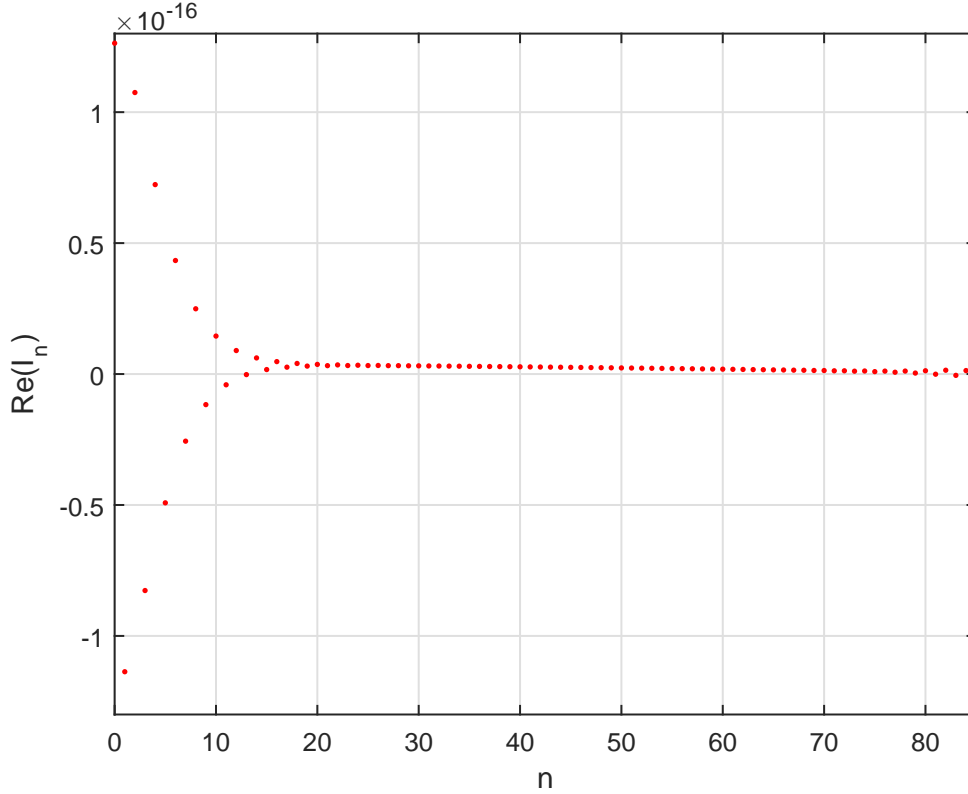
η οποία, για μιγαδικό ξ προβλέπει εκθετικά μειούμενες ταλαντώσεις τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος (επειδή η αριθμητική λύση προσεγγίζει την πραγματική λύση η οποία είναι χροστική συνάρτηση).

7.3 Ενδιάμεση περίπτωση

Στην πρακτική περίπτωση νανοκεραίας άνθρακα έχουμε από τη σχέση (4.2.8) ότι

$$\begin{aligned} \xi \alpha &= \frac{1}{4\pi Z_0 \alpha \sigma} \alpha \\ &= \frac{1}{4\pi Z_0 (j \frac{2e^2 u_F}{\pi^2 \hbar \alpha (\omega + j\nu)})} \\ &= \frac{\pi \hbar \alpha}{8Z_0 e^2 u_F} (\nu - j\omega) \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

και οι τιμές των $Re\{\xi\alpha\}$ και $Im\{\xi\alpha\}$ εξαρτώνται από τις τιμές της ακτίνας και της συχνότητας μπορεί να προσεγγίσουν ή και να ξεπεράσουν τη μονάδα ανάλογα με την τιμή της συχνότητας f και της ακτίνας α . Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για $f = 1GHz$ και $\alpha = 0.34nm$ ($m = n = 5$ στη σχέση (4.2.1)) ισχύει $Re\{\xi\alpha\} \simeq 5 \times 10^{-4}$ και $Im\{\xi\alpha\} \simeq -9.42 \times 10^{-6}$, ενώ για $f = 10THz$ και $\alpha = 3.12nm$ ($m = n = 46$ στη σχέση (4.2.1)) ισχύει $Re\{\xi\alpha\} \simeq 0.0005$ και $Im\{\xi\alpha\} \simeq -0.0094$. Ακόμη και για την πρώτη περίπτωση όπου $|Re\{\xi\alpha\}| \simeq 5 \times 10^{-4} \ll 1$ και $|Im\{\xi\alpha\}| \simeq 9.42 \times 10^{-6} \ll 1$, δεν μπορούμε να αμελήσουμε την ποσότητα $q(z - z') = \frac{\omega \varepsilon e^{jk|z-z'|}}{\alpha \sigma 4\pi k} = \xi e^{jk|z-z'|}$ και να πούμε ότι τείνει στο μηδέν όπως στην περίπτωση τέλει αγωγού. Αυτό φαίνεται και στο σχήμα (7.1). Ενώ θα περίμενε κανείς ότι για τόσο μικρή τιμή του ξ θα βρισκόμασταν στην περίπτωση του τέλει αγωγού σωλήνα του κεφαλαίου (5) με ταλαντώσεις μόνο στο φανταστικό μέρος, παρατηρούμε την εμφάνιση ταλαντώσεων στο πραγματικό μέρος, οι οποίες δεν είναι εκθετικά μειούμενες όπως στην περίπτωση του κεφαλαίου (6). Αυτές οι ταλαντώσεις έχουν παρατηρηθεί χωρίς να ερμηνευθούν στο [4].



Σχήμα 7.1: Το πραγματικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $Re\{\xi\alpha\} \simeq 5 \times 10^{-4}$, $Im\{\xi\alpha\} \simeq -9.42 \times 10^{-6}$, $N = 85$, $f = 1GHz$, $\alpha = 0.34nm$, $h = 30\alpha$. Παρατηρούνται ταλαντώσεις κοντά στο κέντρο που δεν προβλέπονται από τη σχέση (7.2.7) του τέλεια αγωγίμου σωλήνα παρά τη μικρή τιμή των $Re\{\xi\alpha\}$ και $Im\{\xi\alpha\}$.

Έτσι ο παράγοντας $q(z - z') = \frac{1}{4\pi Z_0 \alpha \sigma} e^{jk|z-z'|}$ κάνει αισθητή την παρουσία του χωρίς όμως να είναι τόσο μεγάλος ώστε να βρισκόμαστε στην περίπτωση του κεφαλαίου (6) ($\xi \rightarrow +\infty$) ούτε τόσο μικρός ώστε να αντιστοιχεί στην περίπτωση του κεφαλαίου (5) (τέλειος αγωγός). Όπως ήδη φάνηκε στο σχήμα (7.1), η πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι οι ταλαντώσεις στο φανταστικό μέρος θα συνεχίσουν να εμφανίζονται όπως στο κεφάλαιο (5) αλλά θα εμφανισθούν και στο κέντρο του πραγματικού μέρους, δεδομένης της συμπεριφοράς που περιγράφηκε στην περίπτωση μεγάλου παράγοντα $q(z - z')$. Με τη σχέση (7.2) μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της λύσης $I_n^{(\infty)}$ για την άπειρη κεραία. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\bar{A}(\theta) = \bar{A}_1(\theta) + \bar{A}_2(\theta)$ λόγω του νέου πυρήνα της ολοκληρωτικής εξίσωσης $K_{new} = K_{ap}(z) + \xi e^{ik|z|}$ έχουμε

$$\begin{aligned} I_{ap,n}^{(\infty)} &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}_{new}(\theta)} \cos n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}_1(\theta) + \bar{A}_2(\theta)} \cos n\theta d\theta \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

όπου τα $\bar{B}(\theta)$, $\bar{A}_1(\theta)$, $\bar{A}_2(\theta)$ δίνονται από τις σχέσεις (7.2.3), (7.2.5) και (7.2.9) αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί πως $I_{ap,n}^{(\infty)} \neq I_{1,ap,n}^{(\infty)} + I_{2,ap,n}^{(\infty)}$, δηλαδή η πρακτική περίπτωση δεν προκύπτει από την επαλληλία των οριακών περιπτώσεων.

7.4 Προσεγγιστική λύση για την άπειρη κεραία

Στην ενότητα αυτή θα βρούμε έναν ασυμπτωτικό τύπο για τη λύση $I_{ap,n}^{(\infty)}$ της άπειρης κεραίας. Σύμφωνα με τη σχέση (7.3.2) και με την προϋπόθεση ότι $\bar{A}_2(\theta) \ll \bar{A}_1(\theta)$ που ισχύει στην πράξη, έχουμε

$$\frac{1}{\bar{A}(\theta)} \simeq \frac{1}{\bar{A}_1(\theta)} - \frac{\bar{A}_2(\theta)}{[\bar{A}_1(\theta)]^2} \quad (7.4.1)$$

άρα

$$\begin{aligned} I_{ap,n}^{(\infty)} &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}_1(\theta) + \bar{A}_2(\theta)} \cos n\theta d\theta \\ \Rightarrow I_{ap,n}^{(\infty)} &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)}{\bar{A}_1(\theta)} \cos n\theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)\bar{A}_2(\theta)}{[\bar{A}_1(\theta)]^2} \cos n\theta d\theta \\ \Rightarrow I_{ap,n}^{(\infty)} &= I_{1,ap,n} - \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)\bar{A}_2(\theta)}{[\bar{A}_1(\theta)]^2} \cos n\theta d\theta \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

Η ποσότητα

$$I = -\frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)\bar{A}_2(\theta)}{[\bar{A}_1(\theta)]^2} \cos n\theta d\theta \quad (7.4.3)$$

μπορεί να ειπωθεί ως ένας διορθωτικός όρος σε σχέση με τον πρώτο όρο $I_{1,ap,n}$. Στη συνέχεια θα βρούμε έναν ασυμπτωτικό τύπο για αυτή την ποσότητα και θα καθορίσουμε τις συνθήκες εκείνες υπό τις οποίες μπορεί να ειπωθεί ως διορθωτικός όρος. Έχουμε

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\theta)\bar{A}_2(\theta)}{[\bar{A}_1(\theta)]^2} \cos n\theta d\theta \\ &\stackrel{\theta=\pi-\varphi}{=} -\frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\pi-\varphi)\bar{A}_2(\pi-\varphi)}{[\bar{A}_1(\pi-\varphi)]^2} \cos n\varphi d\varphi \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

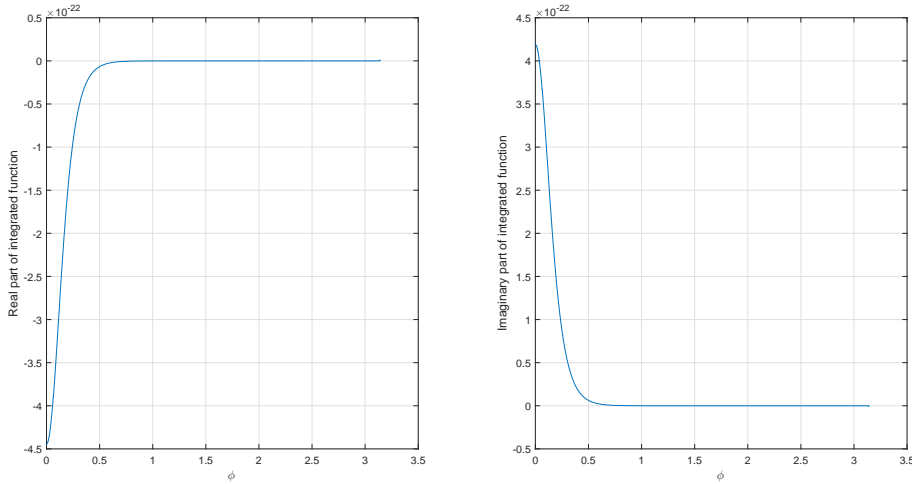
Αφού $\bar{A}_2(\pi-\varphi) = 4z_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \left[\bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi-\varphi}{z_0}\right) \frac{1}{(\pi-\varphi)^2} + \bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi+\varphi}{z_0}\right) \frac{1}{(\pi+\varphi)^2} \right]$ έχουμε

$$I = \frac{(-1)^{n+1}}{16\pi z_0^2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\bar{B}(\pi-\varphi)\bar{A}_2(\pi-\varphi) / \cos^4 \frac{\varphi}{2}}{\left[\bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi-\varphi}{z_0}\right) \frac{1}{(\pi-\varphi)^2} + \bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi+\varphi}{z_0}\right) \frac{1}{(\pi+\varphi)^2} \right]^2} \cos n\varphi d\varphi \quad (7.4.5)$$

Επειδή η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα προέρχεται από τιμές του φ κοντά στο 0, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το άνω άκρο του ολοκληρώματος με 1. Αυτό φαίνεται και στο αριθμητικό

παράδειγμα του σχήματος (7.2) Λαμβάνοντας ακόμη υπόψη την (7.2.6) έχουμε

$$I = \frac{(-1)^{n+1}}{16\pi z_0^2} \int_{\varphi=0}^1 \frac{\bar{B}(\pi - \varphi)\bar{A}_2(\pi - \varphi)/\cos^4 \frac{\varphi}{2}}{\left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{z_0}{2\pi\alpha(\pi - \varphi)}} e^{-\frac{\alpha}{z_0}(\pi - \varphi)} \frac{1}{(\pi - \varphi)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z_0}{2\pi\alpha(\pi + \varphi)}} e^{-\frac{\alpha}{z_0}(\pi + \varphi)} \frac{1}{(\pi + \varphi)^2} \right]^2} \cos n\varphi d\varphi \quad (7.4.6)$$



Σχήμα 7.2: Το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος της ολοκληρωταίας ποσότητας $\frac{\bar{B}(\pi - \varphi)\bar{A}_2(\pi - \varphi)/\cos^4 \frac{\varphi}{2}}{\left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{z_0}{2\pi\alpha(\pi - \varphi)}} e^{-\frac{\alpha}{z_0}(\pi - \varphi)} \frac{1}{(\pi - \varphi)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z_0}{2\pi\alpha(\pi + \varphi)}} e^{-\frac{\alpha}{z_0}(\pi + \varphi)} \frac{1}{(\pi + \varphi)^2} \right]^2} \cos n\varphi$ για $n=1$ για τιμές των παραμέτρων $N = 250$, $f = 50GHz$, $\alpha = 2.034nm$, $h = 50\alpha$. Η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα είναι μέχρι τη μονάδα, ενώ για τιμές μεγαλύτερες μέχρι το π είναι σχεδόν μηδενική η ολοκληρωταία ποσότητα.

Ο παρανομαστής γράφεται

$$\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z_0}{2\pi\alpha}} e^{-\frac{\alpha\pi}{z_0}} \left[\frac{e^{\frac{\alpha}{z_0}\varphi}}{(\pi - \varphi)^{5/2}} + \frac{e^{-\frac{\alpha}{z_0}\varphi}}{(\pi + \varphi)^{5/2}} \right] \right\}^2 = \frac{z_0}{8\pi\alpha} e^{-\frac{2\alpha\pi}{z_0}} \left[\frac{e^{\frac{\alpha}{z_0}\varphi}}{(\pi - \varphi)^{5/2}} + \frac{e^{-\frac{\alpha}{z_0}\varphi}}{(\pi + \varphi)^{5/2}} \right]^2 \quad (7.4.7)$$

Έτσι, δεδομένου ότι $\frac{(-1)^{n+1}}{16\pi z_0^2} = \frac{(-1)^{n+1}\alpha}{2z_0^3} e^{\frac{2\alpha\pi}{z_0}}$, έχουμε

$$I = \frac{(-1)^{n+1}\alpha}{2z_0^3} e^{\frac{2\alpha\pi}{z_0}} \int_{\varphi=0}^1 \frac{\bar{B}(\pi - \varphi)\bar{A}_2(\pi - \varphi)/\cos^4 \frac{\varphi}{2}}{\left[\frac{e^{\frac{\alpha}{z_0}\varphi}}{(\pi - \varphi)^{5/2}} + \frac{e^{-\frac{\alpha}{z_0}\varphi}}{(\pi + \varphi)^{5/2}} \right]^2} \cos n\varphi d\varphi \quad (7.4.8)$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{\varphi\alpha}{z_0} \Leftrightarrow \varphi = \frac{z_0x}{\alpha}$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^{n+1}}{2z_0^2} e^{\frac{2\alpha\pi}{z_0}} \int_{x=0}^{\frac{\alpha}{z_0}} \frac{\bar{B}(\pi - \frac{z_0x}{\alpha}) \bar{A}_2(\pi - \frac{z_0x}{\alpha}) / \cos^4 \frac{z_0x}{2\alpha}}{\left[\frac{e^x}{(\pi - \frac{z_0x}{\alpha})^{5/2}} + \frac{e^{-x}}{(\pi + \frac{z_0x}{\alpha})^{5/2}} \right]^2} \cos \frac{n z_0 x}{\alpha} dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2} e^{\frac{2\alpha\pi}{z_0}} \int_{x=0}^{\frac{\alpha}{z_0}} \frac{\bar{B}(\pi - \frac{z_0x}{\alpha}) / [kz_0^2 \cos^4 \frac{z_0x}{2\alpha}] [k\bar{A}_2(\pi - \frac{z_0x}{\alpha})]}{\left[\frac{e^x}{(\pi - \frac{z_0x}{\alpha})^{5/2}} + \frac{e^{-x}}{(\pi + \frac{z_0x}{\alpha})^{5/2}} \right]^2} \cos \frac{n z_0 x}{\alpha} dx \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

Από τις σχέσεις (7.2.3) και (7.2.9) έχουμε

$$\frac{\bar{B}(\pi - \frac{z_0x}{\alpha})}{kz_0^2 \cos^4 \frac{z_0x}{2\alpha}} = -\frac{jV}{Z_0} \frac{2}{(kz_0)^2} \frac{1}{\cos^4 \frac{z_0x}{\alpha}} \sin^2 \frac{kz_0}{4} \frac{\cos \frac{kz_0}{2} + \sin^2 \frac{z_0x}{2\alpha}}{\cos(\frac{z_0x}{2\alpha} + \frac{kz_0}{2}) \cos(\frac{z_0x}{2\alpha} - \frac{kz_0}{2})} \quad (7.4.10)$$

και

$$k\bar{A}_2(\pi - \frac{z_0x}{\alpha}) = -\frac{j\xi}{k} (kz_0 - \sin kz_0) \frac{f(kz_0) - \cos \frac{z_0x}{\alpha}}{\cos(\frac{z_0x}{2\alpha} + \frac{kz_0}{2}) \cos(\frac{z_0x}{2\alpha} - \frac{kz_0}{2})} \quad (7.4.11)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $kz_0 = k\alpha \frac{z_0}{\alpha}$ οι τρεις τελευταίες εκφράσεις έχουν γραφεί ως συνάρτηση των $n\frac{z_0}{\alpha}$, $k\alpha$, $\frac{z_0}{\alpha}$, x και τη νέα αδιάστατη παράμετρο $\frac{\xi}{k}$. Όπως ακριβώς έγινε στο [3], αναπτύσσουμε σε όρους της παραμέτρου $\frac{z_0}{\alpha}$ ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι θεωρούνται σταθερές. Η απόδειξη για την εύρεση του πρώτου όρου της σειράς βρίσκεται στο παράρτημα (Δ'). Με τη βοήθεια της συνάρτησης *taylor* του Matlab, έχουμε την ανάπτυξη σε όρους της παραμέτρου $\frac{z_0}{\alpha}$ με τις υπόλοιπες παραμέτρους να θεωρούνται σταθερές

$$\begin{aligned} \frac{\bar{B}(\pi - \frac{z_0x}{\alpha}) / [kz_0^2 \cos^4 \frac{z_0x}{2\alpha}] [k\bar{A}_2(\pi - \frac{z_0x}{\alpha})]}{\left[\frac{e^x}{(\pi - \frac{z_0x}{\alpha})^{5/2}} + \frac{e^{-x}}{(\pi + \frac{z_0x}{\alpha})^{5/2}} \right]^2} &= -\frac{V}{Z_0} \frac{\pi^5}{192} \frac{\xi}{k} (k\alpha)^3 \left(\frac{z_0}{\alpha}\right)^3 \\ &\times \left[\frac{1}{\cosh^2 x} - \frac{5}{\pi} \left(\frac{z_0}{\alpha}\right) \frac{x \sinh x}{\cosh^3 x} + O\left(\left(\frac{z_0}{\alpha}\right)^2\right) \right] \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

Με τα ολοκληρώματα

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{x \sinh x \cos(\varrho x)}{\cosh^3 x} dx = \frac{y}{\sinh y} - \frac{y^2 \cosh y}{2 \sinh^2 y} \quad (7.4.13)$$

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\cos(\varrho x)}{\cosh^2 x} dx = \frac{y}{\sinh y} \text{ όπου } y = \frac{\varrho\pi}{2}, \varrho > 0 \quad (7.4.14)$$

έχουμε

$$I \simeq \frac{V}{Z_0} \frac{\pi^5}{384} \frac{\xi}{k} (kz_0)^3 (-1)^n e^{\frac{2\alpha\pi}{z_0}} \frac{y}{\sinh y} \left[1 - \frac{5}{\pi} \left(\frac{z_0}{\alpha}\right) + \frac{5}{2\pi} \left(\frac{z_0}{\alpha}\right) y \operatorname{coth} y \right] \quad (7.4.15)$$

όπου $y = \frac{\pi n z_0}{2\alpha}$. Για να θεωρηθεί ως ένας διορθωτικός όρος όπως αναφέρθηκε προηγουμένως σε σχέση με τον όρο $I_{1,ap,n}$ - σχέση (7.2.7) - θα πρέπει να είναι πολύ μικρότερος από αυτόν δηλαδή

για μικρά n κοντά στο κέντρο της κεραίας να ισχύει

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\xi}{k} (kz_0)^2 e^{\frac{2\alpha\pi}{z_0}} \right| &\ll kz_0 \sqrt{\frac{z_0}{\alpha}} e^{\frac{\alpha\pi}{z_0}} \\
 \text{ή } \left| \frac{\xi}{k} \right| &\ll \frac{e^{-\frac{\alpha\pi}{z_0}}}{(kz_0)^2} \sqrt{\frac{z_0}{\alpha}} \\
 \text{ή } |\xi\alpha| &\ll \frac{e^{-\frac{\alpha\pi}{z_0}}}{kz_0} \sqrt{\frac{\alpha}{z_0}}
 \end{aligned} \tag{7.4.16}$$

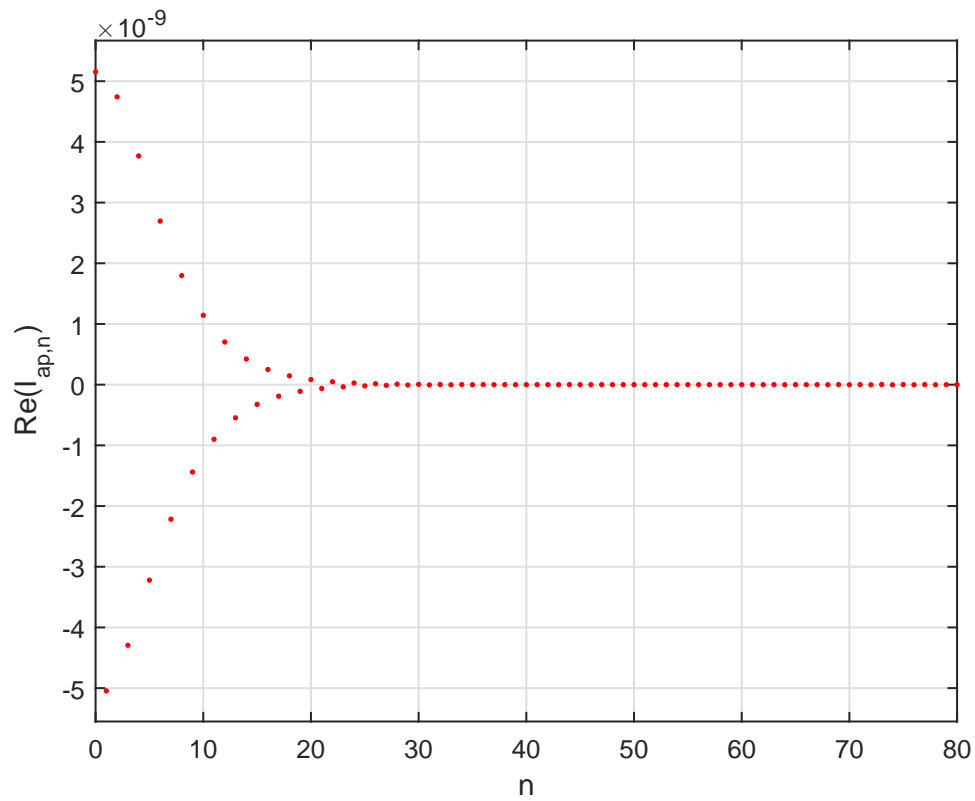
λαμβάνοντας υπόψη ότι γενικά ο ξ είναι μιγαδικός αριθμός.

7.5 Αποτελέσματα προσομοίωσης

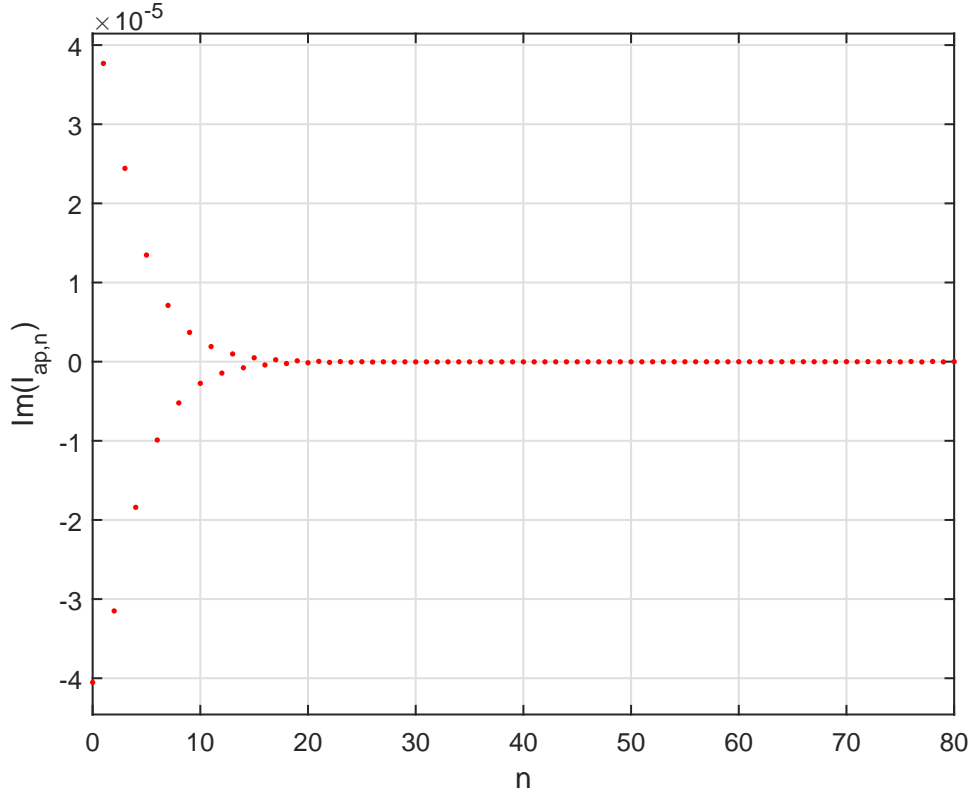
Η αριθμητική μέθοδος Galerkin που περιγράφηκε στο κεφάλαιο (3) υλοποιήθηκε με τον κώδικα Matlab (παράρτημα (Γ')). Σύμφωνα με όσα περιγράφηκαν, η λύση $I_{ap,n}$ για την πρακτική περίπτωση όπου ισχύει η συνθήκη (7.4.16), θα είναι το άθροισμα $I_{ap,n} = I_{1,ap,n} + I$ όπου τα $I_{1,ap,n}$ και I δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (7.2.7) και (7.4.15). Δηλαδή

$$\begin{aligned}
 I_{ap,n}^{(\infty)} &\simeq -j \frac{V}{Z_0} \frac{\pi^3}{32\sqrt{2}} kz_0 \sqrt{\frac{z_0}{\alpha}} (-1)^n e^{\frac{\alpha\pi}{z_0}} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \frac{z_0}{\alpha} n\right)} \\
 &\times \left[1 - \frac{5z_0}{2\pi\alpha} + \frac{5}{4} n \left(\frac{z_0}{\alpha}\right)^2 \tanh\left(\frac{\pi}{2} \frac{z_0}{\alpha} n\right) \right] \\
 &+ \frac{V}{Z_0} \frac{\pi^5}{384} \frac{\xi}{k} (kz_0)^3 (-1)^n e^{\frac{2\alpha\pi}{z_0}} \frac{y}{\sinh y} \left[1 - \frac{5}{\pi} \left(\frac{z_0}{\alpha}\right) + \frac{5}{2\pi} \left(\frac{z_0}{\alpha}\right) y \coth y \right]
 \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

Το σημαντικό εδώ είναι ότι ο όρος I προβλέπει ταλαντώσεις και στο πραγματικό μέρος πέραν των ταλαντώσεων που οφείλονταν στην ύπαρξη του πρώτου όρου $I_{1,ap,n}$. Πράγματι, αυτό φαίνεται και από τα σχήματα (7.3) και (7.4).



Σχήμα 7.3: Το πραγματικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 80$, $f = 10GHz$, $\alpha = 3.05nm$, ($m = n = 45$), $h = 20\alpha$. Ικανοποιείται η συνθήκη αφού, $|\xi\alpha| = 0.0046 \ll 40.74 = \frac{e^{-\frac{\alpha\pi}{z_0}}}{kz_0} \sqrt{\frac{\alpha}{z_0}}$. Παρατηρούνται ταλαντώσεις στο πραγματικό μέρος κοντά στο κέντρο.



Σχήμα 7.4: Το φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης $I_{ap,n}$ για $N = 80$, $f = 10GHz$, $\alpha = 3.05nm$, ($m = n = 45$), $h = 20\alpha$. Ικανοποιείται η συνθήκη αφού, $|\xi\alpha| = 0.0046 \ll 40.74 = \frac{e^{-\frac{\alpha\pi}{z_0}}}{kz_0} \sqrt{\frac{\alpha}{z_0}}$. Παρατηρούνται ταλαντώσεις στο φανταστικό μέρος κοντά στο κέντρο.

Αξίζει να σημειωθεί πως η συνθήκη (7.4.16), υπό την οποία ισχύουν τα προηγούμενα με ακρίβεια, καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος των πρακτικών περιπτώσεων, δηλαδή για συχνότητες της τάξης των GHz έως κλάσματα των THz , για ακτίνες της τάξης των nm και για αριθμό συναρτήσεων βάσης σχετικά μεγάλο. Στις περιπτώσεις μεγαλύτερων συχνοτήτων ή, ακριβέστερα, μικρότερης αγωγιμότητας σ και συνεπώς μεγαλύτερου ξ βρισκόμαστε στην περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου όπου $\xi \rightarrow \infty$. Η ακρίβεια της ασυμπτωτικής σχέσης $I_{ap,n} = I_{1,ap,n} + I$ όπου τα $I_{1,ap,n}$ και I δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (7.2.7) και (7.4.15), υποδεικνύεται και στον πίνακα (7.1) όπου συγκρίνονται οι τιμές της προσομοίωσης με τις τιμές που προβλέπονται από την ασυμπτωτική σχέση.

n	$Re \{I_{ap,n}/V\}$	$Re \{I_{ap,n}^{(\infty)}/V\}$	$Im \{I_{ap,n}/V\}$	$Im \{I_{ap,n}^{(\infty)}/V\}$
0	$+5.15 \times 10^{-9}$	$+4.59 \times 10^{-9}$	-3.15×10^{-5}	-3.58×10^{-5}
1	-5.04×10^{-9}	-4.53×10^{-9}	$+3.77 \times 10^{-5}$	$+3.44 \times 10^{-5}$
2	$+4.73 \times 10^{-9}$	$+4.36 \times 10^{-9}$	-3.15×10^{-5}	-3.05×10^{-5}
3	-4.29×10^{-9}	-4.07×10^{-9}	$+2.44 \times 10^{-5}$	$+2.51 \times 10^{-5}$
4	$+3.76 \times 10^{-9}$	$+3.69 \times 10^{-9}$	-1.84×10^{-5}	-1.95×10^{-5}
5	-3.22×10^{-9}	-3.26×10^{-9}	$+1.35 \times 10^{-5}$	$+1.46 \times 10^{-5}$
6	$+2.69 \times 10^{-9}$	$+2.80 \times 10^{-9}$	-0.99×10^{-5}	-1.07×10^{-5}
7	-2.21×10^{-9}	-2.35×10^{-9}	$+7.10 \times 10^{-6}$	$+7.74 \times 10^{-6}$
8	$+1.80 \times 10^{-9}$	$+1.93 \times 10^{-9}$	-5.22×10^{-6}	-5.56×10^{-6}
9	-1.44×10^{-9}	-1.56×10^{-9}	$+3.70 \times 10^{-6}$	$+3.98 \times 10^{-6}$
10	$+1.14 \times 10^{-9}$	$+1.24 \times 10^{-9}$	-2.74×10^{-6}	-2.83×10^{-6}
11	-8.98×10^{-10}	-9.76×10^{-10}	$+1.91 \times 10^{-6}$	2.01×10^{-6}
12	$+7.02 \times 10^{-10}$	$+7.59 \times 10^{-10}$	-1.45×10^{-6}	2.01×10^{-6}
13	-5.45×10^{-10}	-5.84×10^{-10}	$+9.75 \times 10^{-7}$	$+10.1 \times 10^{-7}$
14	$+4.22 \times 10^{-10}$	$+4.46 \times 10^{-10}$	-7.72×10^{-7}	-7.12×10^{-7}
15	-3.25×10^{-10}	-3.39×10^{-10}	$+4.90 \times 10^{-7}$	$+5.02 \times 10^{-7}$
16	$+2.49 \times 10^{-10}$	$+2.55 \times 10^{-10}$	-4.19×10^{-7}	-3.53×10^{-7}
17	-1.90×10^{-10}	-1.91×10^{-10}	$+2.38 \times 10^{-7}$	2.48×10^{-7}
18	$+1.45 \times 10^{-10}$	$+1.43 \times 10^{-10}$	-2.35×10^{-7}	-1.74×10^{-7}

Πίνακας 7.1: Σύγκριση των κανονικοποιημένων τιμών του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της λύσης $I_{ap,n}^{(\infty)}/V$ όπως υπολογίστηκαν από τη σχέση (7.5.1) και των τιμών $I_{ap,n}/V$ που προέκυψαν από την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου για $N = 80$, $f = 10GHz$, $\alpha = 3.05nm$, ($m = n = 45$), $h = 20\alpha$. Ικανοποιείται η συνθήκη αφού, $|\xi\alpha| = 0.0046 \ll 40.74 = \frac{e^{-\frac{\alpha\pi}{2z_0}}}{kz_0} \sqrt{\frac{\alpha}{z_0}}$.

Βιβλιογραφία

- [1] G. Fikioris and I. Tastsoglou, “Fundamentals of thin-wire integral equations with the finite-gap generator—part I”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 61, number 11, pages 5517–5526, November 2013.
- [2] ———, “Fundamentals of thin-wire integral equations with the finite-gap generator—part II”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 61, number 11, pages 5527–5532, November 2013.
- [3] G. Fikioris and T. T. Wu, “On the application of numerical methods to Hallén’s equation”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 49, number 3, pages 383–392, March 2001.
- [4] N. Fichtner, H. Zhou, and P. Russer, “Investigation of carbon nanotube antennas using thin wire integral equations”, *Advances in Radio Science*, volume 6, pages 209–211, 2008.

Κεφάλαιο 8

Συμπεράσματα - Προεκτάσεις - Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

8.1 Συμπεράσματα

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναλύσαμε διεξοδικά ως προς την αριθμητική της λύση την εξίσωση

$$\int_{z'=-h}^h \left(K(z-z') + q(z-z') \right) I(z') dz' = C \cos kz + j \frac{V}{2Z_0} \sin k|z| \quad (8.1.1)$$

για τον προσδιορισμό του ρεύματος σε μια νανοκεραία άνθρακα. Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτό του σωληνοειδούς διπόλου. Στο κέντρο του υπάρχει ένα απειροστά μικρό διάκενο (infinitesimal gap) στο οποίο βρίσκεται η γεννήτρια δ-συνάρτησης (delta-function generator) [1]. Η αριθμητική μέθοδος είναι η μέθοδος Galerkin με παλμικές συναρτήσεις [2]. Τα κύρια συμπεράσματά μας είναι

α) Περίπτωση τέλει αγωγού ($\xi = 0$): Η εμφάνιση "αφύσικων" ταλαντώσεων στο φανταστικό μέρος της αριθμητικής λύσης όταν χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός πυρήνας και ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης είναι αρκετά μεγάλος στην περίπτωση του τέλει αγωγού [3].

β) Περίπτωση $\xi \rightarrow \infty$: Η εμφάνιση εκθετικά μειούμενων ταλαντώσεων στο πραγματικό και το φανταστικό μέρος ξεκινώντας από το κέντρο της κεραίας. Αυτό συμβαίνει επειδή ότι η αριθμητική λύση προσεγγίζει την πραγματική λύση η οποία είναι η χροστική συνάρτηση και με την έννοια αυτή μπορούν να δικαιολογηθούν. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται για μεγάλες τιμές της συχνότητας της τάξης εκατοντάδων THz και μικρές τιμές της αγωγιμότητας. Η τιμή της συχνότητας αυτής καθορίζεται από τη δομή της κεραίας και την ακτίνα της και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του προσεγγιστικού ή του ακριβή πυρήνα.

γ) Ενδιάμεση περίπτωση: Η εμφάνιση αφύσικων ταλαντώσεων τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος της κεραίας όταν χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός πυρήνας στην περίπτωση της νανοκεραίας άνθρακα. Πρόκειται για την ενδιάμεση περίπτωση των α) και β).

8.2 Προεκτάσεις - Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

8.2.1 Χρήση προσεγγιστικού πυρήνα

Τόσο στην περίπτωση τέλειου αγωγού όσο και στην ενδιάμεση περίπτωση παρατηρήθηκαν "άφυσικες" ταλαντώσεις. Αυτές θα συνέβαιναν και σε έναν ιδανικό υπολογιστή με άπειρο wordlength και αιτία τους είναι η μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης λόγω της χρήσης του προσεγγιστικού πυρήνα. Ένα βιαστικό συμπέρασμα θα ήταν η επιτακτική ανάγκη να χρησιμοποιούμε τον ακριβή πυρήνα σε κάθε περίπτωση. Ωστόσο, αυτή δε θα ήταν η καλύτερη λύση λόγω της πολυπλοκότητάς του.

Η χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα δεν είναι απαγορευτική. Αντίθετα, το πλεονέκτημα της απλότητάς του θα πρέπει να συνοδεύεται και από την προσεκτική επιλογή του αριθμού του συναρτήσεων βάσης η οποία δεν μπορεί εύκολα να γίνει εκ των προτέρων. Χρειάζεται δηλαδή η γνώση του φαινομένου ώστε στην περίπτωση που εμφανιστούν "άφυσικες" ταλαντώσεις μετά την αριθμητική επίλυση να ερμηνευτούν ορθά και, διορθώνοντας τον αριθμό των συναρτήσεων βάσης και άλλες παραμέτρους, να οδηγηθούμε σε αξιόπιστο αποτέλεσμα.

8.2.2 Επιλογή μοντέλου και μεθόδου

Το μοντέλο τροφοδότησης της γεννήτριας δ-συνάρτησης (delta-function generator) δεν είναι το μόνο που χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα ένα άλλο μοντέλο είναι αυτό του frill generator [4]. Επίσης, οι αριθμητικές μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ποικίλλουν. Για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η point-matching, όπως στα [5], [6].

Επομένως, απομένει η επέκταση αυτών των συμπερασμάτων σε άλλα μοντέλα και άλλες αριθμητικές μεθόδους. Πιθανολογούμε πως η μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης θα έχει ανάλογα αποτελέσματα στη λύση της εξίσωσης τόσο σε διαφορετικά μοντέλα όσο και σε διαφορετικές αριθμητικές μεθόδους. Κύρια αιτία είναι η προσπάθεια επίλυσης μιας εξίσωσης η οποία δεν έχει λύση ούτε καταρχήν. Όσον αφορά την περίπτωση β) όπου αυξάνουμε τη συχνότητα και μειώνεται η αγωγιμότητα είδαμε ότι στο μοντέλο της γεννήτριας δ-συνάρτησης (delta-function generator) η λύση θα προσεγγίζει την χροστική συνάρτηση ανεξάρτητα από την επιλογή του πυρήνα. Αυτό φαίνεται και στο ([7], fig.9) όπου η λύση προσεγγίζει την χροστική συνάρτηση με τη μέθοδο point-matching.

8.2.3 Πειραματική επαλήθευση

Είδαμε ότι στην περίπτωση αρκετά μεγάλων συχνοτήτων το ρεύμα είναι συσσωρευμένο στο κέντρο και προσεγγίζει την χροστική συνάρτηση. Βέβαια, το συμπέρασμα αυτό εξαρτάται από την επιλογή του μοντέλου. Όπως είδαμε στο (2) το συγκεκριμένο μοντέλο προϋποθέτει ότι $\alpha \ll \lambda$, ότι ισχύει ο νόμος του Ohm και ο τύπος της αγωγιμότητας είναι ακριβής για υψηλές συχνότητες. Ωστόσο, όσο μεγαλώνει η συχνότητα δεν ισχύει με ακρίβεια ότι $\alpha \ll \lambda$ (καθώς το μήκος κύματος είναι αντιστρόφως ανάλογο της συχνότητας) και ο νόμος του Ohm. Επίσης ο τύπος της αγωγιμότητας βασίζεται σε π-electron tight-binding μοντέλο [8]. Όπως όμως αναλύεται στα [9] και [7] το μοντέλο αυτό οδηγεί σε σημαντικά σφάλματα στις οπτικές συχνότητες σε κεραίες μικρής διαμέτρου. Έτσι έχουμε τρεις πηγές που καθιστούν το μοντέλο μας όχι απόλυτα αξιόπιστο στις υψηλές συχνότητες.

Επομένως, περαιτέρω μελέτη είναι αναγκαία προκειμένου να προσδιοριστεί η καταλληλότητα των μοντέλων ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων καθώς και η πειραματική επαλήθευση ότι το ρεύμα υπό ορισμένες συνθήκες συσσωρεύεται στο κέντρο της κεραίας. Ακόμη και αν αυτό δεν επαληθευτεί και πιθανόν οφείλεται στους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε ότι θα υπάρχει ιδιαιτερότητα στα χαρακτηριστικά των κεραιών στις υψηλές συχνότητες λόγω της διαφοράς στην αγωγιμότητα και της μικρής ακτίνας. Έτσι, το θέμα των χαρακτηριστικών των νανοκεραιών άνθρακα στις υψηλές συχνότητες είναι ανοιχτό για την έρευνα [10], [11] τόσο σε πειραματικό όσο και θεωρητικό επίπεδο.

Βιβλιογραφία

- [1] R. E. Collin and F. J. Zucker, “Antenna Theory Part 1”, in. McGraw-Hill, 1969, ch. 8.
- [2] W. Gibson, *The method of moments in electromagnetics*. CRC Press, 2007.
- [3] G. Fikioris and T. T. Wu, “On the application of numerical methods to Hallén’s equation”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 49, number 3, pages 383–392, March 2001.
- [4] G. Fikioris, “The use of the frill generator in thin-wire integral equations”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, volume 51, pages 1847–1854, 2003.
- [5] G. Hanson, “Radiation efficiency of nano-radius dipole antennas in the microwave and far-infrared regimes”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, volume 50, number 3, pages 66–77, June 2008.
- [6] S. D. Keller, A. I. Zaghoul, and V. Shanov, “Electromagnetic Simulation and Measurement of Carbon Nanotube Thread Dipole Antennas”, *IEEE Transactions on Nanotechnology*, volume 13, pages 394–403, March 2014.
- [7] J. Hao and G. Hanson, “Infrared and optical properties of carbon nanotube dipole antennas”, *IEEE Transactions on Nanotechnology*, volume 5, pages 766–775, November 2006.
- [8] S. A. Maksimenko, G. Y. Slepyan, A. Lakhtakia, O. Yevtushenko, and A. V. Gusakov, “Electrodynamics of carbon nanotubes: Dynamic conductivity, impedance boundary conditions, and surface wave propagation,” , *Phys. Rev. B*, volume 60, number 3, pages 17 136–17 149, Dec. 1999.
- [9] V. N. Popov and L. Henrard, “Comparative study of the optical properties of single-walled carbon nanotubes within orthogonal and nonorthogonal tight-binding models”, *Physical Review B*, volume 70, number 11, page 115 407, 2004.
- [10] Z. Wang, F. Hu, W. Chen, and F. A. Hegmann, “Terahertz polarization properties of free-standing millimeter-scale carbon nanotube array sheets cut with femtosecond laser pulses”, *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*, volume 5, number 3, pages 377–382, 2015.
- [11] L. Ren, Q. Zhang, C. Pint, A. Wójcik, M. Bunney Jr, T. Arikawa, I. Kawayama, M. Tonouchi, R. Hauge, A. Belyanin, *et al.*, “Collective antenna effects in the terahertz and infrared response of highly aligned carbon nanotube arrays”, *Physical Review B*, volume 87, number 16, page 161 401, 2013.

Παράρτημα Α'

Μερική λύση της εξίσωσης

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) f(z) = -j\frac{4\pi k}{Z_0}V\delta(z)$$

Για τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad (\text{A'.0.1})$$

ισχύει

$$\frac{dH(z)}{dz} = \delta(z) \quad (\text{A'.0.2})$$

όπου $\delta(z)$ η συνάρτηση δέλτα. Η συνάρτηση $-j\frac{2\pi V}{Z_0}\sin k|z|$ αποτελεί μια ειδική λύση του προβλήματος

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \int_{z'=-h}^h K_{ex}^{(i)}(z-z')I_{ex}(z')dz' = -j\frac{4\pi k}{Z_0}V\delta(z) \quad (\text{A'.0.3})$$

Πράγματι,

$$-j\frac{2\pi V}{Z_0}\sin k|z| = -j\frac{2\pi V}{Z_0} \begin{cases} \sin kz & , z > 0 \\ -\sin kz & , z < 0 \end{cases} \quad (\text{A'.0.4})$$

$$\frac{d}{dz} \left(-j\frac{2\pi V}{Z_0}\sin k|z| \right) = -j\frac{2\pi V}{Z_0}k \begin{cases} \cos kz & , z > 0 \\ -\cos kz & , z < 0 \end{cases} = -j\frac{2\pi V}{Z_0}k \cos kz [2H(z) - 1]$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(-j\frac{2\pi V}{Z_0}\sin k|z| \right) = +j\frac{2\pi V}{Z_0}k^2 \sin k [2H(z) - 1] - j\frac{2\pi V}{Z_0}k \cos(kz)2\delta(z) \quad (\text{A'.0.5})$$

$$= k^2 j\frac{2\pi V}{Z_0}\sin k|z| - j\frac{4\pi k}{Z_0}V\delta(z) \quad (\text{A'.0.6})$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα $f(z)\delta(z) = f(0)\delta(z)$.

Παράρτημα Β'

Συνάρτηση Green για τον τελεστή

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2$$

Θεώρημα: Η διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με ομογενείς οριακές συνθήκες

$$L[y] = y'' + p(z)y' + g(z)y = f(z), \text{ για } a < z < b, B_1[y] = B_2[y] = 0$$

έχει λύση

$$y = \int_a^b G(z|z')f(z')dz'$$

όπου η $G(z|z')$ είναι η συνάρτηση Green και ικανοποιεί τις σχέσης

$$L[G(z|z')] = \delta(z - z'), \text{ για } a < z < b, B_1[G(z|z')] = B_2[G(z|z')] = 0$$

και $G(z|z')$ είναι συνεχής και η $G'(z|z')$ παρουσιάζει ασυνέχεια ύψους 1 για $z = z'$.

- Μια συνάρτηση Green για τον τελεστή $\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2$ είναι η

$$G_1(z - z') = \frac{j}{2k} e^{-jk|z-z'|}$$

Απόδειξη: Η $G_1(z - z')$ είναι συνεχής και ισχύει:

$$G_1(z - z') = \frac{j}{2k} e^{-jk|z-z'|} = \begin{cases} \frac{j}{2k} e^{-jk(z-z')} & , z > z' \\ \frac{j}{2k} e^{+jk(z-z')} & , z < z' \end{cases}, \frac{\partial G_1(z - z')}{\partial z} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-jk(z-z')} & , z > z' \\ -\frac{1}{2} e^{+jk(z-z')} & , z < z' \end{cases}$$

Η $G'_1(z|z')$ παρουσιάζει ασυνέχεια ύψους $\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$ για $z = z'$ και

$$\frac{\partial^2 G_1(z - z')}{\partial z^2} = \begin{cases} -\frac{jk}{2} e^{-jk(z-z')} & , z > z' \\ +\frac{jk}{2} e^{+jk(z-z')} & , z < z' \end{cases} + \delta(z - z') = -k^2 G_1(z - z') + \delta(z - z')$$

- Μια άλλη συνάρτηση Green για τον τελεστή $\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2$ είναι η

$$G_2(z - z') = \frac{1}{2k} \sin k|z - z'|$$

Απόδειξη: Η $G_2(z - z')$ είναι συνεχής και ισχύει:

$$G_2(z - z') = \frac{1}{2k} \sin k|z - z'| = \begin{cases} \frac{1}{2k} \sin k(z - z') & , z > z' \\ \frac{1}{2k} \sin k(z - z') & , z < z' \end{cases}, \frac{\partial G_2(z - z')}{\partial z} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos k(z - z') & , z > z' \\ -\frac{1}{2} \cos k(z - z') & , z < z' \end{cases}$$

Η $G_2'(z|z')$ παρουσιάζει ασυνέχεια ύψους $\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$ για $z = z'$ και

$$\frac{\partial^2 G_2(z - z')}{\partial z^2} = \begin{cases} -\frac{k}{2} \sin k(z - z') & , z > z' \\ +\frac{k}{2} \sin k(z - z') & , z < z' \end{cases} + \delta(z - z') = -k^2 G_2(z - z') + \delta(z - z')$$

Παράρτημα Γ'

Κώδικας Matlab

```
1  clc ;
2  %% Parameters input
3
4  N=input('Enter the N: ');
5  f=input('Enter the frequency f: ');
6  V=1;
7  c=3*10^8;
8  Mhkoskumatos=c/f;
9  k=2*pi/Mhkoskumatos;
10 wmega=2*pi*f;
11 Zo=376.73;
12 e=1.602*10^(-19);
13 u=1/3*10^12;
14 uF=9.71*10^5; hbar=1.0546*10^(-34);
15 epsilon=8.854*10^(-12);
16 m_radius=input('Enter the m=n<50 for the radius: ');
17 a=3/2/pi*0.142*10^(-9)*m_radius;
18 h=input('Enter the length h, where 2h is the dipole length: ');
19 z0=2*h/(2*N+1);
20 sSWNT=+1i*2*e^2*uF/(pi^2*hbar*a*(wmega+1i*u));
21
22 %% Carbon Nanotube simulation
23 Kap_Carbon=@(z) 1/(4*pi)*exp(1i*k*sqrt(z.^2+a^2))./sqrt(z.^2+a^2)+
    wmega*epsilon/(a*sSWNT).*exp(1i*k*abs(z))/(4*pi*k);
24 B1Carbon=zeros(2*N+1,1);
25 B2Carbon=zeros(2*N+1,1);
26 for n=0:N;
27     m=n+N+1;
28     syms z
29     B1Carbon(m,1)=2/k*sin(k*z0/2)*cos(k*z0*n);
30     B2Carbon(m,1)=int(1i*V/(2*Zo)*sin(k*abs(z)),(n-1/2)*z0,(n+1/2)*
        z0);
31 end
32 for n=-N:-1;
```

```

33     m=n+N+1;
34     B1Carbon(m,1)=B1Carbon(2*N+2-m,1);
35     B2Carbon(m,1)=B2Carbon(2*N+2-m,1);
36 end
37
38 A1Carbon=zeros(2*N+1);
39 for n1=-N:N;
40     m1=n1+N+1;
41     for n2=n1:N;
42         m2=n2+N+1;
43         l=n1-n2;
44         A1Carbon(m1,m2)=integral(@(z)(z0-z).*(Kap_Carbon(z+l*z0)+
45                                 Kap_Carbon(z-l*z0)),0,z0);
46     end
47 for n1=-N+1:N;
48     m1=n1+N+1;
49     for n2=-N:n1;
50         m2=n2+N+1;
51         A1Carbon(m1,m2)=A1Carbon(m2,m1);
52     end
53 end
54
55 I1Carbon=linsolve(A1Carbon,B1Carbon);
56 I2Carbon=linsolve(A1Carbon,B2Carbon);
57 CCarbon=-I2Carbon(2*N+1,1)/I1Carbon(2*N+1,1);
58 ICarbon=I2Carbon+CCarbon*I1Carbon;

```

Παράρτημα Δ'

Πρώτος όρος διορθωτικού παράγοντα της σχέσης (7.4.9)

Για τον πρώτο όρο η διαδικασία υποδεικνύει να τεθεί $\frac{z_0}{\alpha} = 0 (\Rightarrow kz_0 = k\alpha\frac{z_0}{\alpha} = 0)$ στο ολοκλήρωμα και να ολοκληρώσουμε από 0 έως $+\infty$. Έχουμε

$$\frac{\bar{B}(\pi - \frac{z_0x}{\alpha})}{kz_0^2 \cos^4 \frac{z_0x}{2\alpha}} \simeq -\frac{jV}{Z_0} \frac{2}{(kz_0)^2} \left(\frac{kz_0}{4}\right)^2 = -\frac{jV}{8Z_0} \quad (\Delta'.0.1)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $x - \sin x \simeq \frac{x^3}{6}$ και ότι $\lim_{kz_0 \rightarrow 0} f(kz_0) = 2$

$$k\bar{A}_2(\pi - \frac{z_0x}{\alpha}) \simeq -\frac{j\xi}{k} \frac{k^3 z_0^3}{6} = -\frac{j\xi}{6k} (kz_0)^3 \quad (\Delta'.0.2)$$

Ο παρονομαστής του ολοκληρώματος μπορεί να γραφεί

$$\left(\frac{e^x}{\pi^{5/2}} + \frac{e^{-x}}{\pi^{5/2}}\right)^2 = \left(\frac{2 \cosh x}{\pi^{5/2}}\right)^2 = \frac{4 \cosh^2 x}{\pi^5} \quad (\Delta'.0.3)$$

Έτσι

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{(-1)^{n+1}}{2} e^{\frac{2\alpha\pi}{z_0}} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{-\frac{jV}{8Z_0} \left[-\frac{j\xi}{6k} (kz_0)^3\right] \cos \frac{nz_0x}{\alpha}}{\frac{4 \cosh^2 x}{\pi^5}} dx \\ &= \frac{V}{Z_0} \frac{\pi^5}{384} \frac{\xi}{k} (kz_0)^3 (-1)^n e^{\frac{2\alpha\pi}{z_0}} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\cos \frac{nz_0x}{\alpha}}{\cosh^2 x} dx \end{aligned} \quad (\Delta'.0.4)$$

Με το ολοκλήρωμα

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\cos(\varrho x)}{\cosh^2 x} dx = \frac{y}{\sinh y} \text{ όπου } y = \frac{\varrho\pi}{2}, \varrho > 0 \quad (\Delta'.0.5)$$

καταλήγουμε ότι ο πρώτος όρος είναι

$$I \simeq \frac{V}{Z_0} \frac{\pi^5}{384} \frac{\xi}{k} (kz_0)^3 (-1)^n e^{\frac{2\alpha\pi}{z_0}} \frac{y}{\sinh y} \quad (\Delta'.0.6)$$

όπου $y = \frac{\pi n z_0}{2\alpha}$.