ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ και την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»

Ευστάθεια Μη Γραμμικών Συστημάτων με χρήση γενικευμένων κριτηρίων Lyapunov

Χρυσάφη Αικατερίνη

Αριθμός Μητρώου : 09315041

Επιβλέπων : Τσινιάς Ιωάννης
Καθηγητής Τομέα Μαθηματικών

Αθήνα ,Ιούλιος 2017

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στον Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου κατά το διάστημα Σεπτέμβριο 2016 έως Ιούλιο 2017 .Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Ι.Τσινιά για την πρόταση του συγκεκριμένου θέματος ,για την αμέριστη συμπαράσταση ,επιστημονική και ηθική ,καθώς επίσης και για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε .Ακόμα ,τον ευχαριστώ για τη συνεχή ενθάρρυνση και υποστήριξη καθώς και για την έμπνευση που μου οιστρηλατούσε σε όλη τη διαδικασία του πονήματος αυτού .Χωρίς την καθοριστική του συμβολή ,αυτή η εργασία θα ήταν αδύνατο να ολοκληρωθεί σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα .Επιπλέον ,ευχαριστώ ιδιαίτερα τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Ι.Καραφύλλη για τους νέους δρόμους που μου άνοιξε στα επιστημονικά μου ενδιαφέροντα και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Β.Κοκκίνη για την προθυμία του να συμμετάσχει στη σύσταση της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής της μεταπτυχιακής μου εργασίας .Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την αδιάκοπη υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Χρυσάφη Κατερίνα

Αθήνα ,Ιούλιος 2017

Περίληψη

Η παρούσα εργασία ,ασχολείται με την ανάλυση ευστάθειας μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων μέσω γενικεύσεων της κλασικής μεθόδου *Lyapunov* .Συγκεκριμένα επιχειρείται ο περιορισμός των απαιτούμενων ιδιοτήτων βοηθητικών συναρτήσεων ώστε να συνεπάγονται τα διάφορα είδη ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας .Η εργασία αποτελείται από επτά κεφάλαια και τη βιβλιογραφία .

Στο πρώτο κεφάλαιο ,παρουσιάζεται η τυπική μορφή της θεωρίας Lyapunov για αυτόνομα δυναμικά συστήματα .Παρατίθεται ως επέκταση ,το Θεώρημα των Barbashin-Krasowskii που εγγυάται τις ιδιότητες ευστάθειας ολικά .Επιπλέον διατυπώνεται και αποδεικνύεται το Θεώρημα αστάθειας του Chetaev .Παρεμβάλλονται παραδείγματα ευστάθειας και αστάθειας ώστε να γίνουν κατανοητά τα αποτελέσματα των εν λόγω θεωρημάτων .

Στο δεύτερο κεφάλαιο ,διατυπώνεται και αποδεικνύεται η αρχή του αναλλοίωτου του LaSalle .Πρόκειται για ένα θεώρημα το οποίο αξιοποιεί τοπολογικές ιδιότητες συνόλων προκειμένου να μελετηθεί η συμπεριφορά των τροχιών ενός αυτόνομου συστήματος με την πάροδο του χρόνου .Οι απαραίτητοι ορισμοί των εννοιών που χρησιμοποιούνται ,διατυπώνονται συνοπτικά στην αρχή του κεφαλαίου .Η συγκεκριμένη αρχή ,αποτελεί ένα ιδιαίτερα χρήσιμο αποτέλεσμα ειδικά σε περιπτώσεις όπου δια της μεθόδου Lyapunov, οδηγούμαστε σε ανεπαρκή συμπεράσματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο ,συνδυάζονται στοιχεία της θεωρίας γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων προς διατύπωση θεωρημάτων ευστάθειας .Η μέθοδος που προτείνεται,γνωστή και ως ''Εμμεση μέθοδος Lyapunov'' ,βασίζεται κυρίως σε ιδιότητες πινάκων και συμπεριφοράς των ιδιοτιμών τους .

Στο τέταρτο κεφάλαιο ,αρχικά παρουσιάζονται συνοπτικά η έννοια του χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος και οι αντίστοιχες προεκτάσεις της θεωρίας Lyapunov για τη μελέτη της ευστάθειας .Στη συνέχεια εισάγονται οι έννοιες των συναρτήσεων κλάσης K, K_∞, KL οι οποίες αποτελούν χρήσιμο αποδεικτικό εργαλείο για αποτελέσματα που προκύπτουν σε επόμενα κεφάλαια .Τέλος ,διατυπώνεται και αποδεικνύεται ένα θεώρημα ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας .

Στο πέμπτο κεφάλαιο ,παρατίθενται εναλλακτικές μέθοδοι υπό περιπτώσεις όπου η μέθοδος Lyapunov αποτυγχάνει να εφαρμοστεί με τη χρήση συγκεκριμένων βοηθητικών συναρτήσεων .Διατυπώνονται και αποδεικνύονται αναλυτικά τα θεωρήματα των Butz και Gunderson .

Στο έκτο κεφάλαιο ,παρουσιάζεται αναλυτικά και σε κάθε στάδιο η μέθοδος των Meigoli και Nikravesh .Οι τελευταίοι ,εκμεταλλευόμενοι τις ιδέες των δύο παραπάνω θεωρημάτων ,οδηγούνται σε ένα γενικευμένο αποτέλεσμα όπου απλοποιούνται οι ιδιότητες μιας Lyapunov συνάρτησης .Τα πορίσματα που προκύπτουν επιτρέπουν την εξαγωγή αποτελεσμάτων ευστάθειας διαθέτοντας αρχικά μία ακατάλληλη Lyapunov συνάρτηση και επιπλέον οδηγούν πιθανώς στην εύρεση μεγαλύτερης περιοχής έλξης σε σχέση με την αντίστοιχη που προκύπτει μέσω της μεθόδου Lyapunov .Στην τελευταία ενότητα ,διατυπώνονται και αποδεικνύονται δύο αντίστροφα θεωρήματα τα οποία αξιοποιούν τα παραπάνω αποτελέσματα

Στο έβδομο κεφάλαιο ,τα αποτελέσματα της προσέγγισης των Meigoli και Nikravesh διαφαίνονται μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων .Στα παραδείγματα αυτά ,αποδεικνύεται η ασυμπτωτική ευστάθεια με εφαρμογή είτε της πρώιμης ,είτε της τελικής μορφής του βασικού θεωρήματος του κεφαλαίου 6 .

Τέλος ,πραγματοποιείται σύνοψη και συζήτηση πάνω στα αποτελέσματα που προέκυψαν μέσω της νέας μεθόδου και γίνονται προτάσεις για μελλοντική ερευνητική εργασία .

Abstract

Within the framework of stability analysis of nonlinear systems via Lyapunov's direct method ,some difficulties may arise .This thesis attempts to generalize Lyapunov's method and to relax the properties of a Lyapunov function in order to obtain results of asymptotic stability .The thesis consists of seven chapters and the list of the references.

In the first chapter the foundations of Lyapunov's theory for autonomous systems are presented. In particular, we define the notion of stability of an equilibrium point.In addition we state and prove theorems about global asymptotic stability(Barbashin-Krasowskii) and instability (Chetaev) .The methods become totally understandable through simple examples .

In the second chapter ,we present LaSalle's Invariance Principle .This approach exploits topological properties of sets and examines the behaviour of the trajectories of an autonomous system through time .The necessary definitions are given before the statement of the relative theorem .This principle is proved to be useful ,especially in cases where Lyapunov's method leads to defficient conclusions .

In the third chapter ,we state and prove a stability theorem combining the theory of linear and nonlinear systems .We focus on properties of matrices and their eigenvalues .The relative theorem is also known as "*Lyapunov's indirect method*" .

In the fourth chapter ,the concept of nonautonomous systems is introduced .We deformate the definition of stability in chapter 1 based on the new element which is the time variance .Next ,we give the definitions of funtions of class K, K_∞, KL which will be proved useful enough for proof techniques in following chapters .In the end we state and prove a stability theorem for nonautonomous systems.

In the fifth chapter ,alternative methods for stability analysis are presented .Here,we focus on cases where Lyapunov's method fails to give results or the relative properties are hard to be confirmed .In particular ,we state and prove the theorems of Butz and Gunderson .

In the sixth chapter we present step-by-step the recent method of

Meigoli and Nikravesh which generalizes all the previous results .First ,we conclude to an early form of their main theorem and then ,the final form is constructed , which relaxes some conditions of the first form .The importance of the following corollaries ,lies in the fact that we are able to prove a bigger region of attraction compared with the region proved by Lyapunov's direct method .In the last section ,we prove some converse theorems based on previous results.

In the seventh chapter ,we appose some examples and applications which are analyzed in detail .By these examples ,the approach of Meigoli and Nikravesh is clearly illustrated .

Finally ,we summarize the conclusions and the remarks of the previous methods and some recommendations for future research are presented .

Κεφάλαιο 1

Αυτόνομα συστήματα

1.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε ένα αυτόνομο σύστημα [1] της μορφής :

$$\dot{x} = f(x(t)) \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ t \geq 0 \tag{1.1.1}$$

όπου το x παίρνει τιμές στον n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ [1] και το t συνήθως αντιπροσωπεύει το χρόνο.Υποθέτουμε ότι η $f : D \to \mathbb{R}^n$, είναι μία τοπικά Lipschitz [1] απεικόνιση από μία περιοχή [1] $D \subset \mathbb{R}^n$,με τιμές στο $\mathbb{R}^n$ και ότι το $\bar{x} \in D$ είναι ένα σημείο ισορροπίας του (1.1.1) .Ισοδύναμα :

$$f(\bar{x}) = 0$$

Στόχος είναι ο χαρακτηρισμός και η μελέτη της ευστάθειας του $\bar{x}$. Για λόγους απλότητας και χωρίς περιορισμό της γενικότητας,η διατύπωση όλων των ορισμών,των λημμάτων,των θεωρημάτων και των πορισμάτων που ακολουθούν,αναφέρεται στην περίπτωση που το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι η αρχή του $\mathbb{R}^n$,δηλαδή $\bar{x} = 0$. Πράγματι, κάθε μη μηδενικό σημείο ισορροπίας $\bar{x}$,μπορεί να μετατοπιστεί στην αρχή μέσω μίας αλλαγής μεταβλητών : $y = x - \bar{x}$. Οπότε για την παράγωγο του y ,ισχύει :

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) \equiv g(y)$$

όπου $g(0) = 0$.Με τη νέα μεταβλητή y ,το σύστημα έχει σημείο ισορροπίας το σημείο μηδέν. Συνεπώς,μπορούμε πάντοτε να υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και να εξετάζουμε την ευστάθεια της αρχής $x = 0$.

1.2 Ευστάθεια σημείου ισορροπίας

Ορισμός 1.2.1 *Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του 1.1.1,είναι :*

- ***ευσταθές***, *αν για κάθε $\varepsilon > 0$,υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

- ***ασταθές***,*αν δεν είναι ευσταθές.*

- ***ασυμπτωτικά ευσταθές***,*αν είναι ευσταθές και μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$,τέτοιο ώστε :*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν,ότι για να αναδειχθεί η ευστάθεια της αρχής 0, χρησιμοποιώντας την απαίτηση $\varepsilon - \delta$ του ορισμού,θα πρέπει για κάθε $\varepsilon > 0$, να προσδιορίσουμε μία τιμή του δ , εν γένει εξαρτώμενη από το ε,τέτοια ώστε μία τροχιά $x(t)$ του συστήματος (1.1.1) η οποία ξεκινάει από μία γειτονιά του 0 με ακτίνα δ,να μην εγκαταλείπει ποτέ τη γειτονιά ακτίνας ε με την πάροδο του χρόνου t.[5]

1.3 Θεωρία Lyapunov

Το 1892,ο A.Lyapunov,απέδειξε ότι μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις.

Έστω $V : D \to \mathbb{R}$,μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση ορισμένη σε μία περιοχή $D \subset \mathbb{R}^n$ η οποία περιέχει την αρχή $\mathbf{0}$.Η παράγωγος της V διαμέσου των τροχιών του συστήματος (1.1.1) συμβολίζεται με $\dot{V}$ και ορίζεται ως εξής :

$$\dot{V}(x) \overset{\text{ορ}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \tag{1.3.1}$$

Προφανώς η $\dot{V}$,κατά μήκος των τροχιών του συστήματος, εξαρτάται από τη δοθείσα εξίσωση (1.1.1) και επιπλέον αν $\varphi(x;t)$ είναι η λύση του (1.1.1) η οποία ξεκινάει με αρχική κατάσταση x σε χρόνο $t = 0$, τότε :

$$\dot{V}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\varphi(t;x))|_{t=0}$$

Συνεπώς,αν η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητική,η V θα είναι φθίνουσα κατά μήκος της λύσης του (1.1.1) .Στο σημείο αυτό ,διατυπώνουμε το **Θεώρημα Ευστάθειας κατά Lyapunov**.

Θεώρημα 1.3.1 *Έστω $x = 0$,ένα σημείο ισορροπίας του (1.1.1) και $D \subset \mathbb{R}^n$,μία περιοχή της αρχής 0.*
*Έστω επίσης $V : D \to \mathbb{R}$ μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση,**θετικά ορισμένη** στο D.Δηλαδή*

$$V(0) = 0 \ \textit{και} \ V(x) > 0 \ \textit{στο} \ D \setminus \{0\} \tag{1.3.2}$$

Τότε

- *Αν η $\dot{V}(x)$ είναι **αρνητικά ημιορισμένη**,δηλαδή :*

$$\dot{V}(x) \leq 0, \ \textit{στο} \ D \tag{1.3.3}$$

*τότε το $x = 0$ είναι **ευσταθές** .*

- *Αν η $\dot{V}(x)$ είναι **αρνητικά ορισμένη**,δηλαδή :*

$$\dot{V}(x) < 0, \ \textit{στο} \ D \tag{1.3.4}$$

*τότε το $x = 0$ είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές**.*

Σημείωση: Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες (1.3.2) και (1.3.3) ,η $V : D \to \mathbb{R}$ ως έχει οριστεί κατά την 1.3.1 ,λέγεται ***συνάρτηση Lyapunov***. Αν επιπλέον ισχύει η (1.3.4) ,η V λέγεται ***αυστηρή συνάρτηση Lyapunov***.

Απόδειξη: Δοθέντος $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $r \in (0, \varepsilon]$,τέτοιο ώστε :

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| \leq r\} \subset D$$

Έστω $\alpha = min(V(x))$,για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| = r$. Τότε $\alpha > 0$, λόγω της (1.3.2). Θεωρούμε $\beta \in (0, \alpha)$ και ορίζουμε το σύνολο :

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r | V(x) \leq \beta\}$$

Θα δείξουμε ότι το Ω_β περιέχεται στο εσωτερικό του B_r ,δηλαδή ότι

$$\Omega_\beta \subset B_r^\circ \tag{1.3.5}$$

Υποθέτουμε ότι η (1.3.5) δεν ισχύει .Τότε θα υπάρχει ένα σημείο $p \in \Omega_\beta$ το οποίο κείται στο σύνορο ∂B_r του B_r. Οπότε στο σημείο αυτό,θα ισχύει : $V(p) \geq \alpha > \beta$ Αυτό όμως είναι άτοπο διότι για κάθε $x \in \Omega_\beta$ είναι $V(x) \leq \beta$ και $p \in \Omega_\beta$. Άρα $\Omega_\beta \subset B_r$.

Το σύνολο Ω_β , προσδίδει σε κάθε τροχιά που ξεκινάει από αυτό τη χρονική στιγμή $t = 0$, την ιδιότητα να εξακολουθεί να παραμένει εντός αυτού, για κάθε $t \geq 0$. Αυτό προκύπτει από την (1.3.3) διότι :

$$\dot{V}(x) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \forall t \geq 0$$

Επιπλέον το Ω_β είναι εξ' ορισμού κλειστό σύνολο,αλλά και φραγμένο,καθώς περιέχεται στο B_r όπως αποδείχτηκε προηγουμένως. Άρα το Ω_β είναι *συμπαγές*.

Στο σημείο αυτό ,παραθέτουμε το εξής Λήμμα :

Λήμμα 1.3.1 [2] *Υποθέτουμε ότι στο σύστημα (1.1.1) η f είναι τμηματικά συνεχής ως προς t και τοπικά Lipschitz ως προς x για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε x το οποίο ανήκει σε μία περιοχή $D \subset \mathbb{R}^n$.Θεωρούμε W ένα συμπαγές υποσύνολο του D με $x_0 \in W$.Υποθέτουμε επιπλέον ότι κάθε λύση του (1.1.1) βρίσκεται εντός του W .Τότε υπάρχει μοναδική λύση του (1.1.1) η οποία ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$.*$\square$

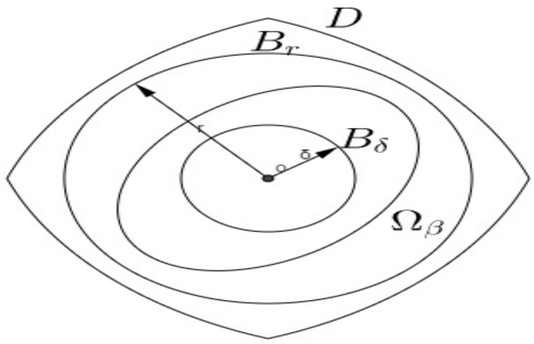
Με βάση το Λήμμα 1.3.1 ,συμπεραίνουμε ότι το (1.1.1) έχει μοναδική λύση ορισμένη για $t \geq 0$, όταν $x(0) \in \Omega_\beta$.Εφόσον η $V(x)$ είναι συνεχής και $V(0) = 0$,θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$$

Τότε αν $B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| \leq \delta\}$,έχουμε :

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r \subset D \tag{1.3.6}$$

Όπως μπορεί να φανεί και στο Σχήμα 1



Σχήμα 1 : Διάγραμμα του εγκλεισμού της (1.3.6)

Επιπλέον θα ισχύει :

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r, \forall t \geq 0$$

Επομένως,

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon \quad , \quad \forall t \geq 0 \tag{1.3.7}$$

Η (1.3.7) ,δείχνει ότι το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι *ευσταθές*.

Ας υποθέσουμε τώρα,ότι ισχύει και η (1.3.4) .Για να υπάρχει ασυμπτωτική ευστάθεια θα πρέπει να δειχθεί ότι $x(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$,δηλαδή για κάθε $\alpha > 0$, υπάρχει $T > 0$,έτσι ώστε $\|x(t)\| < \alpha$, για κάθε $t > T$.Με επανάληψη των προηγούμενων επιχειρημάτων,μπορούμε για κάθε $\alpha > 0$, να επιλέξουμε $b > 0$ ώστε $\Omega_b \subset B_\alpha$. Τότε αρκεί να δείξουμε ότι $V(x(t)) \to 0$ καθώς $t \to \infty$. Εφόσον η $V(x(t))$ φθίνει γνησίως λόγω της (1.3.4) και είναι κάτω φραγμένη από το 0 λόγω της (1.3.2) θα ισχύει το εξής :

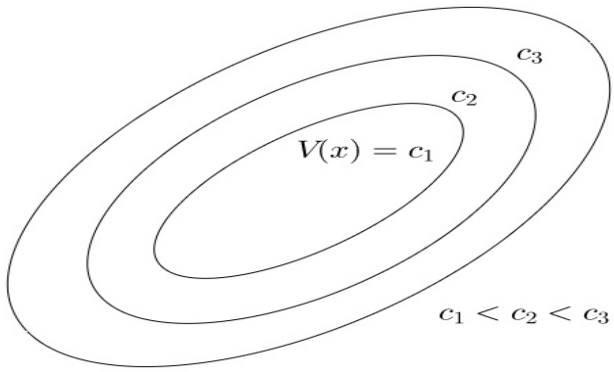
$$V(x(t)) \to c \geq 0 \ \text{, καθώς } t \to \infty$$

Θα πρέπει λοιπόν,να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ισχύει μόνο η ισότητα στην παραπάνω σχέση,δηλαδή $c = 0$. Προς εις άτοπον απαγωγή υποθέτουμε ότι $c > 0$. Λόγω συνέχειας της $V(x)$, θα υπάρχει $d > 0$ τέτοιο ώστε $B_d \subset \Omega_c$. Το γεγονός ότι η $V(x(t))$ συγκλίνει σε μία αυστηρά θετική ποσότητα ,οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η τροχιά $x(t)$ βρίσκεται εκτός της μπάλας B_d , για κάθε $t \geq 0$. Έστω $-\gamma = max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$,το οποίο υπάρχει [3] αφού η $\dot{V}(x)$ είναι συνεχής και άρα θα λαμβάνει μία μέγιστη τιμή μέσα στο συμπαγές σύνολο $\{d \leq \|x\| \leq r\}$.Λόγω της (1.3.4) θα ισχύει : $-\gamma < 0$.Η $V(x(t))$ μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau))d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t \tag{1.3.8}$$

Με την πάροδο του χρόνου t το δεξί μέλος της (1.3.8) ,θα γίνει τελικά αρνητικό ,κάτι το οποίο δεν είναι δυνατό να ισχύει αφού η V είναι θετικά ορισμένη. Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο λόγω της αρχικής υπόθεσης ότι $c > 0$. Συνεπώς $c = 0$ και άρα :

$$V(x(t)) \to 0, \text{ καθώς } t \to +\infty$$



Σχήμα 2 : Επιφάνειες Lyapunov

Η συνθήκη (1.3.3) υπονοεί ότι όταν μία τροχιά εισέρχεται σε μια επιφάνεια Lyapunov $V(x) = c$, μετακινείται εντός του συνόλου :

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq c\} \tag{1.3.9}$$

και δε μπορεί να ξαναβγεί από αυτό .Όταν $\dot{V}(x) < 0$,η τροχιά μετακινείται από μία επιφάνεια Lyapunov σε μία εσώτερη με μικρότερο c

.Καθώς το c μειώνεται,η $V(x) = c$ συρρικνώνεται προς την αρχή 0 , δείχνοντας ότι η τροχιά πλησιάζει την αρχή καθώς κυλάει ο χρόνος.

Γνωρίζοντας απλώς ότι $\dot{V}(x) \leq 0$, δεν είναι σίγουρο ότι η τροχιά προσεγγίζει την αρχή,αλλά προκύπτει ότι το $x = 0$ είναι *ευσταθές* καθώς η τροχιά μπορεί να περιέχεται σε κάθε μπάλα B_c με την απαίτηση η αρχική κατάσταση $x(0)$ να κείται στο εσωτερικό μιας επιφάνειας Lyapunov που περιέχεται στη μπάλα αυτή. □

1.4 Παραδείγματα ευστάθειας

Παράδειγμα 1.4.1 *Θεωρούμε την εξίσωση του εκκρεμούς χωρίς τριβή*

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -\alpha \sin(x_1) \end{aligned}$$

Εξετάζουμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $(0, 0)$. Μια φυσική υποψήφια συνάρτηση Lyapunov, είναι η συνάρτηση ενέργειας

$$V(x) = \alpha(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

Για την παραπάνω V λοιπόν,έχουμε ότι : $V(0) = 0$ και η $V(x)$ είναι *θετικά ορισμένη* κατά μήκος του τμήματος $-2\pi < x_1 < 2\pi$. Η παράγωγος της $V(x)$ μέσα από τις τροχιές του συστήματος,δίνεται

$$\dot{V}(x) = \alpha\dot{x_1}\sin x_1 + x_2\dot{x_2} = \alpha x_2 \sin x_1 - \alpha x_2 \sin x_1 = 0$$

Έτσι,διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις (1.3.2) και (1.3.3) του Θεωρήματος 1.3.1 ,οπότε η αρχή είναι ***ευσταθής*** .Εφόσον $\dot{V} \equiv 0$,μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε ότι δεν έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια της αρχής,το οποίο σημαίνει ότι οι τροχιές που ξεκινούν από μία επιφάνεια Lyapunov $V(x) = c$, παραμένουν στην ίδια επιφάνεια για όλους τους μελλοντικούς χρόνους.

Παράδειγμα 1.4.2 *Θεωρούμε και πάλι την εξίσωση του εκκρεμούς,αλλά αυτή τη φορά με τριβή:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha \sin(x_1) - bx_2 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Δοκιμάζουμε εκ νέου τη $V(x) = \alpha(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$, ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov. Οπότε έχουμε :

$$\dot{V}(x) = \alpha \dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = -bx_2^2 \leq 0$$

Η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη και όχι αρνητικά ορισμένη,καθώς $\dot{V}(x) = 0$, για $x_2 = 0$, άσχετα με την τιμή του x_1 .Πράγμα που σημαίνει ότι $\dot{V}(x) = 0$ σε όλον τον άξονα x_1 .Επομένως,μπορούμε απλώς να συμπεράνουμε ότι η αρχή είναι *ευσταθής*. Στο επόμενο κεφάλαιο διαπιστώνεται ότι με τη χρήση ενός θεωρήματος από τον LaSalle [6],καταλήγουμε στο γεγονός ότι το μηδενικό σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.4.1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.Αν στο συγκεκριμένο παράδειγμα αναζητήσουμε μια διαφορετική υποψήφια συνάρτηση Lyapunov της οποίας η παράγωγος κατά μήκος των τροχιών του (1.4.1) είναι αρνητικά ορισμένη τότε μπορούμε να επεκτείνουμε το αρχικό μας συμπέρασμα ως προς την (ασυμπτωτική) ευστάθεια της αρχής .Πράγματι ,αντικαθιστούμε αρχικά τον όρο $\frac{1}{2}x_2^2$ της συνάρτησης ενέργειας $V(x)$ με μία πιο γενική μορφή $\frac{1}{2}x^T Px$,όπου ο P είναι ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος 2×2 πίνακας :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς προκύπτει μία νέα υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το (1.4.1) με τύπο

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \frac{1}{2}x^T Px + \alpha(1 - \cos x_1) \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \alpha(1 - \cos x_1) \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Πρωτίστως απαιτείται η V_1 να είναι θετικά ορισμένη .Επικεντρωνόμαστε στην τετραγωνική μορφή $\frac{1}{2}x^T Px$.Εφόσον ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος ,θα ισχύει $x^T Px > 0$,για κάθε $x \neq 0$.Επομένως για τα στοιχεία p_{ij} του P θα έχουμε

$$\begin{aligned} p_{11} > 0 \ , \ p_{22} > 0 \\ det(P) > 0 \Rightarrow p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την παράγωγο της V_1 κατά μήκος των τροχιών του (1.4.1) :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x) &= (p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \alpha \sin x_1)x_2 + \\ &+ (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)(-\alpha \sin x_1 - bx_2) \\ &= \alpha(1 - p_{22})x_2 \sin x_1 - \alpha p_{12}x_1 \sin x_1 + \\ &+ (p_{11} - p_{12}b)x_1x_2 + (p_{12} - p_{22}b)x_2^2\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Θα επιλέξουμε τις τιμές των p_{11}, p_{12}, p_{22} στη σχέση (1.4.4) ώστε η $\dot{V}_1$ να είναι αρνητικά ορισμένη .Εξετάζοντας μεμονωμένα τους όρους του δεξιού μέλους της (1.4.4) ,παρατηρούμε ότι τα γινόμενα $x_2 \sin x_1$ και x_1x_2 είναι απροσδιορίστου προσήμου .Οπότε θα τα απαλείψουμε μηδενίζοντας τους συντελεστές τους .Συνεπώς θα έχουμε

$$p_{22} = 1 \ , \ p_{11} = bp_{12} \tag{1.4.5}$$

Σύμφωνα με αυτές τις τιμές των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του πίνακα P ,από τη σχέση (1.4.3) απαιτείται επιπλέον να ισχύει $0 < p_{12} < b$,ούτως ώστε η V_1 από τη σχέση (1.4.2) να είναι θετικά ορισμένη .Βάσει του τελευταίου περιορισμού ,μπορούμε να επιλέξουμε

$$p_{12} = \frac{1}{2}b \tag{1.4.6}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την επιλογή των p_{ij} σύμφωνα με τις σχέσεις (1.4.5) και (1.4.6) ,η (1.4.2) διαμορφώνεται ως εξής :

$$\dot{V}_1(x) = -\frac{1}{2}\alpha b x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}bx_2^2$$

Απαιτώντας η $\dot{V}_1$ να είναι αρνητικά ορισμένη ,προκύπτει ότι το γινόμενο $x_1 \sin x_1$ θα πρέπει να είναι μη αρνητικό .Παρατηρούμε ότι όταν $x_1 \in (-\pi, \pi)$,ισχύει $x_1 \sin x_1$.Επομένως θεωρώντας το σύνολο

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 | \, |x_1| < \pi \right\}$$

επιβεβαιώνεται ότι εντός του D ,η V_1 είναι θετικά ορισμένη και η $\dot{V}_1$ είναι αρνητικά ορισμένη .Δηλαδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.3.1 και άρα το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος

(1.4.1) είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές* .□

Από το Παράδειγμα 1.4.2 ,διαφαίνεται ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος 1.3.1 είναι απλώς ικανές και όχι αναγκαίες .Δηλαδή το γεγονός ότι μία επιλεχθείσα υποψήφια συνάρτηση Lyapunov δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.3.1 δε συνεπάγεται απαραίτητα ότι το σημείο ισορροπίας του εκάστοτε συστήματος δεν είναι ευσταθές ή ασυμπτωτικά ευσταθές .Αντί αυτού σημαίνει ότι οι ιδιότητες ευστάθειας δε μπορούν να επιβεβαιωθούν με τη χρήση της συγκεκριμένης συνάρτησης .Συνεπώς σε πολλές περιπτώσεις απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση για την απόδειξη της ευστάθειας ή της ασυμπτωτικής ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας .

1.5 Το Θεώρημα Barbashin-Krasowskii

Αν επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του (1.1.1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές ,το ενδιαφέρον συχνά έγκειται στο μέγεθος της απομάκρυνσης που μπορεί να έχει μία τροχιά από το 0 εξακολουθώντας να διατηρεί την ιδιότητα να κατευθύνεται προς αυτό καθώς $t \to \infty$.Ο συγκεκριμένος προβληματισμός αποτελεί έναυσμα προσδιορισμού της έννοιας της *περιοχής έλξης* ή αλλιώς *Περιοχή ασυμπτωτικής ευστάθειας* ή *Τομέας έλξης* ή *Κόλπος* .

Ορισμός 1.5.1 *Έστω $\varphi(t;x)$ η λύση του συστήματος (1.1.1) η οποία ξεκινά από μία αρχική κατάσταση x σε χρόνο $t = 0$.Ως* ***περιοχή έλξης*** *ορίζεται το σύνολο όλων των σημείων $x \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία ισχύει $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t;x) = 0$*

Η διαδικασία εύρεσης της ακριβούς περιοχής έλξης συχνά παρουσιάζει δυσκολίες και σε πολλές περιπτώσεις καθίσταται αδύνατη .Ωστόσο ,διαπιστώνεται ότι οι συναρτήσεις Lyapunov μπορούν να χρησιμοποιηθούν προς εκτίμηση της περιοχής έλξης μέσω προσδιορισμού συνόλων που περιέχονται στην ακριβή περιοχή έλξης .Σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 ,αν μία συνάρτηση Lyapunov ικανοποιεί τις προϋποθέσεις ασυμπτωτικής ευστάθειας εντός μιας περιοχής $D \subset \mathbb{R}^n$ και το σύνολο Ω_c ως έχει οριστεί στην (1.3.9) είναι φραγμένο και ισχύει $\Omega_c \subset D$,τότε κάθε τροχιά η οποία ξεκινά εντός του Ω_c ,παραμένει σε αυτό και προσεγγίζει την αρχή 0 καθώς $t \to +\infty$.Συνεπώς ,το σύνολο

Ω_c αποτελεί μια εκτίμηση της περιοχής έλξης χωρίς όμως απόλυτη ακρίβεια .Η πραγματική περιοχή έλξης είναι συνήθως κατά πολύ ευρύτερη του Ω_c .

Στην παρούσα ενότητα ,αναζητούνται οι συνθήκες υπό τις οποίες ολόκληρος ο χώρος $\mathbb{R}^n$ αποτελεί την περιοχή έλξης για το σύστημα (1.1.1) .Αυτό συμβαίνει αν είμαστε εις θέση να δείξουμε ότι για κάθε αρχική κατάσταση x ,η τροχιά $\varphi(t;x)$ πλησιάζει προς την αρχή 0 καθώς $t \to +\infty$ ασχέτως του μεγέθους της τιμής του $\|x\|$.Ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται ότι είναι *ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές* .Από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 ,παρατηρούμε ότι η ιδιότητα της ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας του σημείου ισορροπίας ,υφίσταται αν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,ανήκει και στο φραγμένο σύνολο Ω_c .Εφόσον $\Omega_c \subset D$,προφανώς απαιτείται να ισχύει $D = \mathbb{R}^n$.Ωστόσο η συνθήκη αυτή δεν αρκεί ώστε να εγγυάται την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια .Το κώλυμα που παρουσιάζεται ,αποδίδεται στο γεγονός ότι για μεγάλα c ,υπάρχει περίπτωση το Ω_c να μην είναι φραγμένο σύνολο .Το ακόλουθο θεώρημα των Barbashin-Krasowskii ,παρέχει επιπλέον προϋποθέσεις που οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα .

Θεώρημα 1.5.1 [2] *Έστω $x = 0$ ένα σημείο ισορροπίας του (1.1.1) .Έστω επίσης $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε :*

$$\bullet\ V(0) = 0 \text{ και } V(x) > 0\ ,\ \ \forall x \neq 0 \tag{1.5.1}$$

$$\bullet\ \|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty \tag{1.5.2}$$

$$\bullet\ \dot{V}(x) < 0,\ \ \forall x \neq 0 \tag{1.5.3}$$

*Τότε το $x = 0$ είναι **ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές**.*

Απόδειξη : Δοθέντος τυχαίου σημείου $p \in \mathbb{R}^n$,θεωρούμε $c = V(p)$.Από την (1.5.2) προκύπτει ότι για κάθε $c > 0$,υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει

$$V(x) > c \quad \text{όταν} \quad \|x\| > r \tag{1.5.4}$$

Επομένως ,λόγω της (1.3.9) και της (1.5.4) ,καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\Omega_c \subset B_r$,όπου $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| \leq r\}$.Η απόδειξη συνεχίζεται ακολουθώντας όμοια πορεία με εκείνη του Θεωρηματος 1.3.1 . □

1.6 Το Θεώρημα Αστάθειας του Chetaev

Τα θεωρήματα 1.3.1 και 1.5.1 χρησιμοποιούνται προς απόδειξη της ευστάθειας ή της ασυμπτωτικής ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας του (1.1.1) τοπικά ή ολικά .Αντίστοιχα ,διατυπώνονται θεωρήματα που υποδηλώνουν αστάθεια σημείου ισορροπίας .Εκείνο που παρέχει τις ισχυρότερες συνθήκες είναι το Θεώρημα του Chetaev που ακολουθεί .

Θεώρημα 1.6.1 *Έστω $x = 0$ ένα σημείο ισορροπίας του (1.1.1) .Έστω επίσης $V : D \to \mathbb{R}$, μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $V(0) = 0$ και $V(x_0) > 0$, για κάποιο x_0 με $\|x_0\|$ αρκετά μικρό. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε η μπάλα $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| \leq r\}$ να περιέχεται στο D και ορίζουμε το σύνολο*

$$U = \{x \in B_r | V(x) > 0\} \tag{1.6.1}$$

Το σύνολο αυτό,είναι μη κενό (λόγω της ύπαρξης του x_0 εξ' υποθέσεως) και περιέχεται στη B_r .Το σύνορό του,δίνεται από την επιφάνεια $V(x) = 0$ και τη σφαίρα $\|x\| = r$.Υποθέτουμε επίσης,ότι εντός του U ισχύει : $\dot{V}(x) > 0$. Τότε το $x = 0$ είναι ασταθές.

Απόδειξη[2],[4] : Αρχικά παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό του συνόλου U κατά την (1.6.1) ισχύει $x_0 \in U$. Έστω $V(x_0) = \alpha > 0$.Για να έχουμε αστάθεια,θα πρέπει η τροχιά $x(t)$ που ξεκινάει από το $x(0) = x_0$ να εγκαταλείπει με την πάροδο του χρόνου το σύνολο U .Εφόσον $\dot{V}(x) > 0$ στο U , θα ισχύει $V(x(t)) \geq \alpha$ για όση διάρκεια η $x(t)$ βρίσκεται μέσα στο U .Ειδικότερα ισχύει

$$V(x_0) \geq \alpha \tag{1.6.2}$$

Θέτουμε στη συνέχεια :

$$\gamma = min\left\{\dot{V}(x)|x \in U, V(x) \geq \alpha\right\} \tag{1.6.3}$$

Το γ της (3.3.10) υπάρχει [3] καθώς η συνεχής συνάρτηση $\dot{V}(x)$ λαμβάνει μία ελάχιστη τιμή στο συμπαγές σύνολο :

$$\{x \in U \,\text{και}\, V(x) \geq \alpha\} = \{x \in B_r \,\text{και}\, V(x) \geq \alpha\}$$

Από τη (3.3.10) προκύπτει ότι

$$\dot{V}(x) \geq \gamma \ , \ \ \forall x \in U \tag{1.6.4}$$

Προφανώς $\gamma > 0$, αφού $\dot{V}(x) > 0$ στο U. Η συνάρτηση $V(x(t))$ μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s))ds$$

και λόγω των σχέσεων (1.6.2) και (1.6.4) ,θα ισχύει η ανισότητα :

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s))ds \geq \alpha + \int_0^t \gamma ds = \alpha + \gamma t$$

η οποία δείχνει ότι η $x(t)$ είναι αδύνατο να παραμείνει διά παντός στο U επειδή η $V(x(t))$ είναι φραγμένη σ'αυτό. Εφόσον $V(x) \geq \alpha > 0$,η $x(t)$ δεν μπορεί να εγκαταλείψει το U μέσω της επιφάνειας $V(x) = 0$.Οπότε το μόνο που απομένει είναι να διαφεύγει από το U μέσω της σφαίρας $\|x\| = r$,κάτι το οποίο πράγματι συμβαίνει όταν η ποσότητα $\|x_0\|$ είναι αρκετά μικρή . Συνεπώς η αρχή $\mathbf{0}$, είναι ***ασταθής*** $\square$.

1.7 Παράδειγμα αστάθειας

Παράδειγμα 1.7.1 *Θεωρούμε το σύστημα δεύτερης τάξης*

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= x_1 + g_1(x)\\ \dot{x_2} &= -x_2 + g_2(x)\end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $g_1(*), g_2(*)$ ικανοποιούν τη συνθήκη:

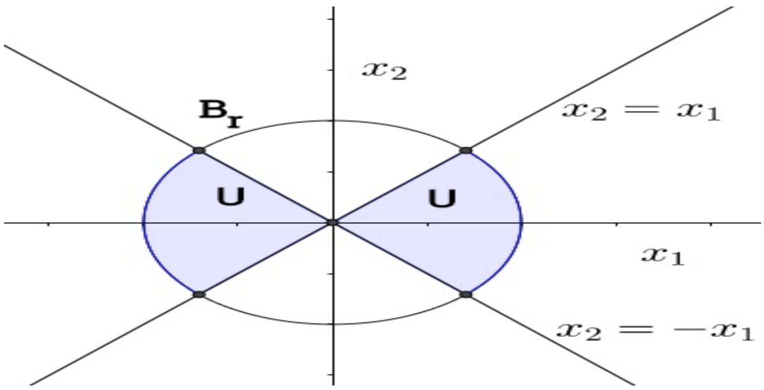
$$|g_i(x)| \leq k \|x\|_2^2 \ , \ i = 1, 2 \ , \ k > 0$$

σε μία γειτονιά D του 0.

Στην παραπάνω ανισότητα,για $x = 0$, έχουμε : $g_i(0) = 0, i = 1, 2$. Οπότε η αρχή,είναι ένα σημείο ισορροπίας για το συγκεκριμένο σύστημα.
Έστω η συνάρτηση :

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

Ισχύει $V(x) > 0$, πάνω στην ευθεία $x_2 = 0$ σε σημεία που βρίσκονται αρκούντως κοντά στην αρχή. Το σύνολο U όπως ορίστηκε στη σχέση (1.6.1) για την εν λόγω $V(x)$, αναπαρίσταται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3 : Το σύνολο U στο επίπεδο

Η παράγωγος της $V(x)$, κατά μήκος των τροχιών του συστήματος,δίνεται :

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$$

Για τον όρο $x_1g_1(x)$–$x_2g_2(x)$, λόγω της ιδιότητας των g_i ισχύει:

$$|x_1g_1(x) - x_2g_2(x)| \leq |x_1|\,|g_1(x)| + |x_2|\,|g_2(x)|$$

$$\Leftrightarrow |x_1g_1(x) - x_2g_2(x)| \leq |x_1|\,k\,\|x\|_2^2 + |x_2|\,k\,\|x\|_2^2$$

$$= k\,\|x\|_2^2\,(|x_1| + |x_2|)$$

$$= k\,\|x\|_2^2\,((|x_1|^2)^{\frac{1}{2}} + (|x_2|^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$\leq k\,\|x\|_2^2\,2(|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow |x_1g_1(x) - x_2g_2(x)| \leq 2k\,\|x\|_2^3$$

$$\Leftrightarrow x_1g_1(x) - x_2g_2(x) \geq -2k\,\|x\|_2^3$$

Άρα ,

$$\dot{V}(x) \geq \|x\|_2^2 - 2k\,\|x\|_2^3 = \|x\|_2^2\,(1 - 2k\,\|x\|_2) \tag{1.7.1}$$

Επιλέγοντας r τέτοιο ώστε $B_r \subset D$ και $r < \frac{1}{2k}$,διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος 1.6.1 .Πράγματι ,βάσει της συγκεκριμένης επιλογής του r ,το B_r διαμορφώνεται ως εξής

$$B_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n |\, \|x\|_2 \leq r < \frac{1}{2k} \right\}$$

Εφόσον $U \subset B_r$,θα ισχύει $\|x\|_2 < \frac{1}{2k}$,για κάθε $x \in U$.Επομένως εντός του U ,η ποσότητα $1 - 2k\,\|x\|_2$ είναι θετική .Από τη σχέση (1.7.1) προκύπτει ότι $\dot{V}(x) \geq 0$,για κάθε $x \in U$.Συνεπώς , η αρχή είναι ***ασταθής***.□

Κεφάλαιο 2

Η αρχή του αναλλοίωτου του LaSalle

2.1 Εισαγωγή

Στο Παράδειγμα 1.4.2 ,μελετήθηκε η εξίσωση του εκκρεμούς με τριβή και διαπιστώθηκε ότι η συνάρτηση ενέργειας Lyapunov που επιλέχθηκε, δεν αρκεί για να ικανοποιήσει τη συνθήκη της ασυμπτωτικής ευστάθειας της αρχής για το σύστημα,καθώς η $\dot{V}(x) = -\frac{k}{m}x_2^2$ είναι αρνητικά ημιορισμένη. Οπότε μπορούμε απλά να συμπεράνουμε ότι το $x = 0$, είναι ευσταθές .

Παρατηρούμε ωστόσο,ότι η $\dot{V}(x)$ είναι παντού αρνητική,εκτός από την ευθεία $x_2 = 0$, όπου μηδενίζεται . Για να διατηρείται λοιπόν για το σύστημα η συνθήκη $\dot{V}(x) = 0$, θα πρέπει η τροχιά του ,να περιορίζεται στην ευθεία $x_2 = 0$. Για να είναι όμως αυτό εφικτό,απαιτείται το εξής:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \sin x_1(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1 = 0, \text{ για } -\pi < x_1 < \pi \ .$$

Οπότε στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, της ευθείας $x_2 = 0$ (που είναι ο άξονας των x_1) , το σύστημα μπορεί να διατηρήσει τη συνθήκη $\dot{V}(x) = 0$, μόνο στην αρχή $x = 0$.Αυτό σημαίνει ότι η $V(x(t))$ θα πρέπει να φθίνει προς το 0 και άρα : $x(t) \to 0$, καθώς $t \to \infty$, γεγονός που συνηγορεί στο ότι λόγω τριβής ,η ενέργεια δε μπορεί να παραμείνει σταθερή καθώς το σύστημα είναι εν κινήσει.

Το παραπάνω επιχείρημα,δείχνει επίσημα ότι αν σε μια περιοχή του 0 , μπορεί να βρεθεί μια συνάρτηση Lyapunov της οποίας η παράγωγος μέσα από τις τροχιές του συστήματος είναι αρνητικά ημιορισμένη και επιπλέον επιβεβαιωθεί ότι καμμία τροχιά δεν μπορεί να παραμείνει σε σημεία όπου $\dot{V}(x) = 0$ εκτός από το σημείο 0 ,τότε η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής . Επακόλουθο της ιδέας αυτής είναι η Αρχή του Αναλλοίωτου του LaSalle που διατυπώνεται ως θεώρημα στη συνέχεια.

2.2 Οριακά σύνολα

Προκειμένου να γίνει η διατύπωση του θεωρήματος του LaSalle ,απαιτείται η εισαγωγή συγκεκριμένων βοηθητικών εννοιών που αφορούν ιδιότητες συνόλων ως προς ένα δοθέν αυτόνομο σύστημα.

Ορισμός 2.2.1 *Έστω $x(t)$ η λύση του συστήματος (1.1.1) .*

- *i. Ένα σημείο p , καλείται **Θετικό Οριακό Σημείο** της $x(t)$, αν υπάρχει ακολουθία $\{t_n\}$ με $t_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$ ώστε : $x(t_n) \to p$, καθώς $n \to \infty$*

- *ii. Το σύνολο όλων των θετικών οριακών σημείων της $x(t)$, καλείται **Θετικό Οριακό Σύνολο** της $x(t)$ και συμβολίζεται συνήθως με L^+.*

$$L^+ = \left\{ p | \exists \left\{ t_n \right\}_{n=1}^{\infty}, t_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 : x(t_n) \underset{n\to\infty}{\to} p \right\}$$

- *iii. Ένα σύνολο M , λέγεται **Αναλλοίωτο**,ως προς το σύστημα (1.1.1) , αν ισχύει :*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \ , \forall t \in \mathbb{R}$$

  Αυτό σημαίνει ότι αν μία λύση ανήκει στο M για κάποια χρονική στιγμή t_0 , τότε θα ανήκει στο M για κάθε μελλοντικό και παρελθοντικό χρόνο.

- *iv. Ένα σύνολο M , λέγεται **Θετικά Αναλλοίωτο** , αν :*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \ , \forall t \geq 0$$

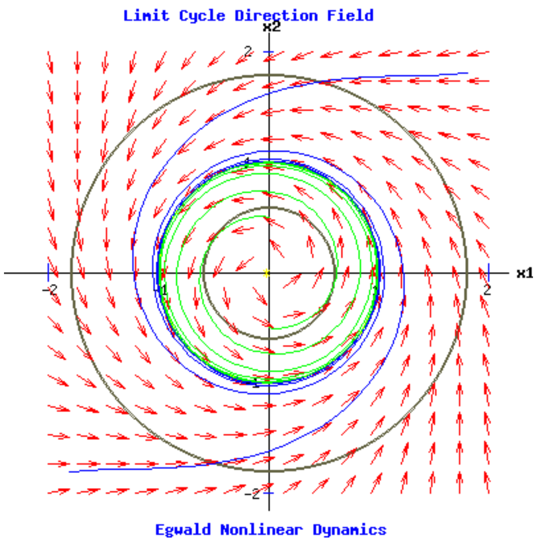
- *v. Τέλος, θα λέγεται ότι η $x(t)$ **συγκλίνει σε ένα σύνολο** M καθώς $t \to \infty$ αν :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists T > 0 : dist(x(t), M) < \varepsilon \ , \ \forall t > T$$

$$\text{όπου} : dist(p, M) = \inf_{x \in M} \|p - x\|$$

Γράφουμε $x(t) \to M$ *καθώς* $t \to \infty$

Όλες αυτές οι έννοιες,μπορούν να αποτυπωθούν εξετάζοντας ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας και έναν ευσταθή οριακό κύκλο στο επίπεδο (Σχήμα 4). Η ασυμπτωτικά ευσταθής ισορροπία,είναι το θετικό οριακό σύνολο κάθε λύσης που ξεκινάει επαρκώς κοντά στο σημείο ισορροπίας ενώ ο ευσταθής οριακός κύκλος είναι το θετικό οριακό σύνολο κάθε λύσης που ξεκινά επαρκώς κοντά στον οριακό κύκλο. Έτσι,η λύση προσεγγίζει τον οριακό κύκλο καθώς $t \to \infty$, όπως διαφαίνεται και στο Σχήμα 4. Παρατηρούμε ωστόσο,ότι η λύση δεν πλησιάζει κάποιο συγκεκριμένο σημείο του οριακού κύκλου. Με άλλα λόγια η συνθήκη : $x(t) \to M$, καθώς $t \to \infty$, δεν εγγυάται την ύπαρξη του ορίου $\lim_{t \to \infty} x(t)$



Σχήμα 4 : Ευσταθής οριακός κύκλος στο επίπεδο

Το σύνολο όλων των σημείων ισορροπίας του συστήματος και ο οριακός κύκλος είναι αναλλοίωτα σύνολα,διότι κάθε λύση που ξεκινάει σε καθένα από αυτά,μένει εντός αυτών για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Το σύνολο

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq c\}$$

με $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in \Omega_c$ είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο ,διότι όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 (Θεώρημα ευστάθειας κατά Lyapunov) κάθε λύση του συστήματος που ξεκινάει από το Ω_c ,παραμένει μέσα σ' αυτό, για κάθε $t \geq 0$.

Μία θεμελιώδης ιδιότητα των οριακών συνόλων,διατυπώνεται στο ακόλουθο Λήμμα :

Λήμμα 2.2.1 [2] *Αν μία λύση $x(t)$ του συστήματος (1.1.1) είναι φραγμένη και ανήκει σε μία περιοχή D για $t \geq 0$, τότε το θετικό οριακό σύνολο L^+ της $x(t)$ είναι μη κενό,συμπαγές και αναλλοίωτο. Επιπλέον ισχύει:*

$$x(t) \to L^+ \text{ , καθώς } t \to +\infty$$

2.3 Το Θεώρημα του LaSalle

Στο σημείο αυτό ,διατυπώνουμε την **Αρχή του Αναλλοίωτου του LaSalle**.

Θεώρημα 2.3.1 *Έστω $\Omega \subset D$, συμπαγές και θετικά αναλλοίωτο σύνολο ως προς το σύστημα (1.1.1). Έστω $V : D \to \mathbb{R}$, μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε να ισχύει $\dot{V}(x) \leq 0$, εντός του συνόλου Ω. Έστω E , το σύνολο όλων των σημείων του Ω όπου $\dot{V}(x) = 0$, δηλαδή $E = \left\{x \in \Omega | \dot{V}(x) = 0\right\}$ και M το μεγαλύτερο θετικά αναλλοίωτο υποσύνολο του E . Τότε : Κάθε λύση του (1.1.1) που ξεκινά από το Ω ,συγκλίνει στο M ,καθώς $t \to \infty$.*

Απόδειξη: Έστω $x(t)$, η λύση του συστήματος (1.1.1) , που ξεκινάει από το σύνολο Ω. Αφού ισχύει $\dot{V}(x) \leq 0$, στο Ω , η $V(x(t))$ θα είναι φθίνουσα μέσα στο Ω. Επιπλέον το Ω είναι συμπαγές και η $V(x(t))$ είναι συνεχής ως διαφορίσιμη. Άρα συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε ότι θα είναι κάτω φραγμένη εντός του Ω,που σημαίνει ότι θα έχει ένα όριο α (σταθερό) καθώς $t \to \infty$. Επειδή το Ω είναι κλειστό ,εφόσον είναι συμπαγές ,κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του Ω ,θα συγκλίνει σε στοιχείο του Ω .Συνεπώς το θετικό οριακό σύνολο L^+ της $x(t)$ θα βρίσκεται μέσα στο Ω . Από τον Ορισμό 2.2.1ii του θετικού οριακού συνόλου,έχουμε ότι για κάθε $p \in L^+$, υπάρχει ακολουθία

$\{t_n\}$ με $t_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$ ώστε: $x(t_n) \to p$,καθώς $n \to \infty$.Λόγω συνέχειας της V , προκύπτει

$$V(x(t_n)) \to V(p) = \lim_{n\to\infty} V(x(t_n)) = \alpha \tag{2.3.1}$$

και επομένως από την (2.3.1) ,προκύπτει ότι $V(x) = \alpha$ (σταθερό) , για κάθε $x \in L^+$. Επειδή το L^+ είναι αναλλοίωτο λόγω του Λήμματος 2.2.1 , έχουμε ότι: $\dot{V}(x) = 0$, για κάθε $x \in L^+$. Επίσης έχουμε ορίσει το σύνολο M να είναι το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο που περιέχεται μέσα στο E.Συνεπώς θα ισχύει ο εξής εγκλεισμός:

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega \tag{2.3.2}$$

και εφόσον η $x(t)$ είναι φραγμένη,θα συγκλίνει στο L^+ καθώς $t \to \infty$ (Λήμμα 2.2.1). Άρα λόγω της (2.3.2) ,η $x(t)$ θα συγκλίνει στο M καθώς $t \to \infty$,κάτι το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2.4 Σύγκριση με το Θεώρημα Lyapunov

Σε αντίθεση με το θεώρημα Lyapunov, (Θεώρημα 1.3.1) , το θεώρημα LaSalle, δεν απαιτεί η V να είναι θετικά ορισμένη. Παρατηρούμε επίσης ότι η κατασκευή του συνόλου Ω όπως παραπάνω ,δε συνδέεται υποχρεωτικά με την κατασκευή της συνάρτησης V . Ωστόσο,σε πολλές εφαρμογές,ο ορισμός της V , εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τέτοιου συνόλου Ω . Συγκεκριμένα,αν το σύνολο Ω_c ως έχει οριστεί στην (1.3.9) είναι φραγμένο και $\dot{V}(x) \leq 0$, στο Ω_c , τότε μπορούμε να θέσουμε : $\Omega = \Omega_c$ με η $V(x)$ να είναι θετικά ορισμένη όταν το Ω_c είναι φραγμένο, για αρκετά μικρό $c > 0$.

Σε περιπτώσεις όπου η V δεν είναι θετικά ορισμένη , το αντίστοιχο Ω_c δεν είναι απαραίτητα φραγμένο σύνολο .Για παράδειγμα αν $V(x) = (x_1 - x_2)^2$,το Ω_c δεν είναι φραγμένο άσχετα με το πόσο μικρό είναι το c .Αν η V είναι ακτινικά μη φραγμένη,δηλαδή : $V(x) \to \infty$ καθώς $\|x\| \to \infty$, τότε το Ω_c είναι φραγμένο είτε η V είναι θετικά ορισμένη είτε όχι .

Γενικότερα ,είναι ευκολότερο να ελέγξουμε αν μια συνάρτηση V είναι ακτινικά μη φραγμένη όταν η V είναι θετικά ορισμένη .Πράγματι ,μία τέτοια συνθήκη μας αρκεί για να αφήσουμε το x να τείνει στο άπειρο διασχίζοντας τους αρχικούς μας άξονες .Θεωρώντας εκ νέου την περίπτωση που $V(x) = (x_1 - x_2)^2$ η οποία δεν είναι θετικά ορισμένη ,διαπιστώνουμε ότι ισχύει $V(x) \to \infty$ καθώς $\|x\| \to \infty$ κατά μήκος των ευθειών $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ (άξονες) αλλά όταν $\|x\| \to \infty$ κατά μήκος της ευθείας $x_1 = x_2$, η V μηδενίζεται .

Όταν λοιπόν το ενδιαφέρον μας έγκειται στο να δείξουμε ότι $x(t) \to 0$, καθώς $t \to \infty$, θα πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο που περιέχεται στο $E = \left\{x \in \Omega | \dot{V}(x) = 0\right\}$ είναι το μονοσύνολο $\{0\}$ το οποίο λειτουργεί ως M διαμορφώνοντας τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.1 . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί , δείχνοντας ότι καμμία λύση δε μπορεί να μείνει ταυτοτικά στο E εκτός της τετριμμένης $x(t) = 0$.

Εξειδικεύοντας επομένως το Θεώρημα 2.3.1 προσαρμόζοντάς το στην προανεφερθείσα περίπτωση και θέτοντας τη $V(x)$ με τρόπο ώστε να είναι θετικά ορισμένη ,προκύπτουν τα ακόλουθα δύο πορίσματα ,τα οποία αποτελούν ουσιαστικά επέκταση των Θεωρημάτων 1.3.1 και 1.5.1 αντίστοιχα.

Πόρισμα 2.4.1 [2] *Έστω $x = 0$, ένα σημείο ισορροπίας του (1.1.1) και $V : D \to \mathbb{R}$, μία συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά ορισμένη συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο D ,το οποίο περιέχει και την αρχή $x = 0$,τέτοια ώστε να ισχύει $\dot{V}(x) \leq 0$ στο D. Ορίζουμε το σύνολο $S = \left\{x \in D | \dot{V}(x) = 0\right\}$ και υποθέτουμε ότι καμμία λύση δε μπορεί να παραμείνει ταυτοτικά στο S, εκτός της τετριμμένης. Τότε η αρχή $x = 0$,είναι* ***ασυμπτωτικά ευσταθής.***

Πόρισμα 2.4.2 [2] *Έστω $x = 0$,ένα σημείο ισορροπίας του (1.1.1) και $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,μία συνεχώς διαφορίσιμη,ακτινικά μη φραγμένη και θετικά ορισμένη συνάρτηση ώστε $\dot{V}(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(x) = 0\right\}$ και υποθέτουμε ότι καμμία λύση δε μπορεί να παραμείνει ταυτοτικά στο S,εκτός της τετριμμένης. Τότε η αρχή $x = 0$,είναι* ***ολικά,ασυμπτωτικά ευσταθής.***

Όταν η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη,το εν λόγω S είναι : $S = \{0\}$.Τότε τα Πορίσματα 2.4.1 και 2.4.2 ταυτίζονται με τα Θεωρήματα 1.3.1 και

1.5.1 αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 3

Γραμμικά Συστήματα και Γραμμικοποίηση

3.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{3.1.1}$$

με $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,το οποίο είναι ανεξάρτητο του χρόνου. Δηλαδή ο πίνακας A ,έχει ως στοιχεία του πραγματικούς αριθμούς και δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή του χρόνου t . Το σύστημα αυτό,έχει ένα σημείο ισορροπίας στην αρχή **0** . Αυτό το σημείο ισορροπίας είναι απομονωμένο αν και μόνο αν ισχύει: $det(A) \neq 0$.Αν $det(A) = 0$, ο πίνακας A,έχει ένα μη τετριμμένο μηδενοχώρο:

$$ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$$

Συνεπώς,κάθε $x \in ker(A)$,αποτελεί σημείο ισορροπίας για το (3.1.1). Σημειώνεται ότι ένα γραμμικό σύστημα,δε μπορεί να έχει πολλαπλά απομονωμένα σημεία ισορροπίας. Δηλαδή αν x_1* και x_2^* είναι δύο σημεία ισορροπίας για το (3.1.1) ,τότε θα έχουμε ότι $Ax_1^* = 0$ και $Ax_2^* = 0 \Rightarrow A(x_2^* - x_1^*) = 0$.Το $x_2^* - x_1^*$,είναι διάνυσμα με αρχή το σημείο x_1^* και πέρας το σημείο x_2^* . Άρα λόγω γραμμικότητας,κάθε σημείο της ευθείας που συνδέει τα x_1^* και x_2^* ,θα είναι σημείο ισορροπίας για το (3.1.1) .

Οι ιδιότητες ευστάθειας της αρχής,μπορούν να διερευνηθούν μελετώντας τις ιδιοτιμές του πίνακα A .Σύμφωνα με τη θεωρία γραμμικών συστημάτων (ιδέ π.χ. [7],[8]),η λύση του (3.1.1) για μία δεδομένη αρχική συνθήκη $x(0)$, δίνεται :

$$x(t) = exp(At) \cdot x(0) \tag{3.1.2}$$

Επιπλέον ισχύει ότι για κάθε πίνακα A , υπάρχει ένας ομαλός πίνακας P (πιθανώς μιγαδικός) ,που μετατρέπει τον A στη Jordan μορφή του. Δηλαδή:

$$P^{-1}AP = J = blockdiag\left[J_1, J_2, ..., J_n\right]$$

όπου J_i είναι το Jordan block που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i του A. Ένα Jordan block τάξης m ,είναι ένας $m \times m$ πίνακας της μορφής :

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

οπότε :

$$P^{-1}AP = J \Rightarrow A = PJP^{-1} \Rightarrow exp(At) = Pexp(Jt)P^{-1}$$

$$\Rightarrow \exp(At) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} exp(\lambda_i t) R_{ik} \tag{3.1.3}$$

όπου m_i ,είναι η τάξη του J_i για την ιδιοτιμή λ_i ,(ή ισοδύναμα η πολλαπλότητα της λ_i ως ρίζα του ελαχίστου πολυωνύμου του A) και R_{ik} είναι $n \times n$ πίνακας της μορφής :

$$R_{ik} = P \cdot blockdiag[0, ..., \underset{\text{i-θέση}}{R_k}, ..., 0] \cdot P^{-1}$$

Όπου R_k είναι $m \times m$ πίνακας με

$$R_1 = I_{m_i \times m_i}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

$$\vdots$$

$$R_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

3.2 Θεώρημα ευστάθειας

Με βάση την εξαγωγή των αποτελεσμάτων της ενότητας 3.1 ,διατυπώνεται το ακόλουθο θεώρημα με το οποίο μπορούμε να αποφανθούμε για τη συμπεριφορά της ευστάθειας του συστήματος (3.1.1) μέσω των ιδιοτιμών του εκάστοτε πίνακα A.

Θεώρημα 3.2.1 [2] *Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του (3.1.1) είναι:*

- ***ευσταθές***, *αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές λ_i του A ,ικανοποιούν τη συνθήκη : $Re(\lambda_i) \leq 0$ και κάθε ιδιοτιμή με $Re(\lambda_i) = 0$ να έχει αντίστοιχο Jordan block τάξης 1.*
- ***(ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθές***, *αν και μόνο αν για όλες τις ιδιοτιμές λ_i του A ,ισχύει: $Re(\lambda_i) < 0$.*

Όταν για όλες τις ιδιοτιμές λ_i του A ,ισχύει $Re(\lambda_i) < 0$,ο A λέγεται ***πίνακας ευστάθειας ή πίνακας Hurwitz*** *.*

1η Παρατήρηση : Η ασυμπτωτική ευστάθεια της αρχής του συστήματος (3.1.1) , μπορεί να μελετηθεί , χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των συναρτήσεων Lyapunov που περιγράφηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 1. Θεωρούμε λοιπόν την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov με την παρακάτω τετραγωνική μορφή :

$$V(x) = x^T P x \tag{3.2.1}$$

όπου P είναι ένας πραγματικός ,συμμετρικός και θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας.Η παράγωγος της V κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (3.1.1) ,δίνεται

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T P A x + x^T A^T P x = x^T (PA + A^T P) x = -x^T Q x$$

όπου Q είναι συμμετρικός και

$$-Q = PA + A^T P \tag{3.2.2}$$

Αν λοιπόν ο Q είναι θετικά ορισμένος,καταλήγουμε από το Θεώρημα 1.3.1 στο συμπέρασμα ότι η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αφού κάτι τέτοιο σημαίνει ότι $x^T Q x > 0$, για κάθε $x \neq 0$ και κατ' επέκταση η παράγωγος $\dot{V}$ είναι αρνητικά ορισμένη .Οπότε για όλες τις ιδιοτιμές λ_i του A ,ισχύει $Re(\lambda_i) < 0$. Ακολουθούμε συνεπώς τη συνηθισμένη διαδικασία , απαιτώντας η V να είναι θετικά ορισμένη και ελέγχοντας στη συνέχεια αν η $\dot{V}$ είναι αρνητικά ορισμένη.

2η Παρατήρηση :Προς απόδειξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας του σημείου ισορροπίας στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων έχουμε την ευχέρεια να πραγματοποιήσουμε τις διαδικασίες της πρώτης παρατήρησης αντίστροφα .Επιλέγουμε αρχικά έναν πραγματικό ,συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα Q και στη συνέχεια λύνουμε την (3.2.2) ως προς P .Αν η λύση που θα προκύψει είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας ,τότε έχοντας ορίσει την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov κατά την (3.2.1) ,προκύπτει ότι η V είναι θετικά ορισμένη με αρνητικά ορισμένη παράγωγο .Συνεπώς λόγω του Θεωρήματος 1.3.1 η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής .

Σημείωση :Η (3.2.2) καλείται ***εξίσωση Lyapunov*** .

Θεώρημα 3.2.2 *Ένας πίνακας A είναι Hurwitz , δηλαδή $Re\lambda_i < 0$, για κάθε ιδιοτιμή του A , αν και μόνο αν για κάθε δοθέντα συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα Q , υπάρχει ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας P που ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov (3.2.2) . Επιπλέον αν ο A είναι Hurwitz, τότε ο P είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (3.2.2) .*

Απόδειξη: Στόχος είναι να δειχθεί ότι η ύπαρξη του πίνακα P ώστε να ικανοποιούνται τα παραπάνω,αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο A πίνακας ευστάθειας. Η ικανότητα προκύπτει από το Θεώρημα 1.3.1 επιλέγοντας τη συνάρτηση Lyapunov $V(x) = x^T Px$, όπως έχουμε ήδη αποδείξει σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις . Για την αναγκαιότητα υποθέτουμε ότι για όλες τις ιδιοτιμές λ_i του A , ισχύει $Re\lambda_i < 0$ και θεωρούμε τον πίνακα P :

$$P = \int_0^\infty exp(A^T t)Qexp(At)dt \tag{3.2.3}$$

Το ολοκλήρωμα στην (3.2.3) υπάρχει ,διότι πρόκειται για ένα άθροισμα όρων της μορφής $t^{k-1}exp(\lambda_i t)$, όπου $Re\lambda_i < 0$. Ο P είναι συμμετρικός ,αφού και ο Q είναι συμμετρικός. Θα δείξουμε ότι ο P είναι θετικά ορισμένος με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει .Τότε θα υπάρχει ένα διάνυσμα $x \neq 0$,τέτοιο ώστε: $x^T Px = 0$. Άρα :

$$x^T Px = 0 \Rightarrow \int_0^\infty x^T exp(A^T t)Qexp(At)xdt = 0 \Rightarrow exp(At)x \equiv 0 \Rightarrow x = 0$$

γιατί ο $exp(At)$ είναι ομαλός. Οπότε καταλήγουμε σε άτοπο και ο P τελικά,είναι πράγματι θετικά ορισμένος.

Από τη σχέση (3.2.3) αντικαθιστώντας τον P στο αριστερό μέλος της (3.2.2) ,έχουμε

$$PA + A^T P = \int_0^\infty exp(A^T t)Qexp(At)A\,dt + \int_0^\infty A^T exp(A^T t)Qexp(At)dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} exp(A^T t)Qexp(At)dt = exp(A^T t)Qexp(At)|_0^\infty = -Q$$

που σημαίνει ότι ο P ,ως έχει οριστεί κατά την (3.2.3) ,επαληθεύει την εξίσωση (3.2.2) . Για να δείξουμε τη μοναδικότητα,υποθέτουμε ότι υπάρχει κι άλλη λύση $P^* \neq P$ της (3.2.2) .Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -Q \\ P^* A + A^T P^* &= -Q \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη,προκύπτει:

$$(P - P^*)A + A^T(P - P^*) = 0$$

$$\Rightarrow \exp(A^T t)\left[(P - P^*)A + A^T(P - P^*)\right]\exp(At) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp(A^T t)(P - P^*)\exp(At)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \exp(A^T t)(P - P^*)\exp(At) \equiv \alpha \ \ \text{σταθερό} \ \forall t \geq 0$$

Οπότε για $t = 0$, ισχύει $P - P^* = \alpha$, άρα

$$P - P^* = exp(A^T t)[(P - P^*)exp(At) \to 0 \ \ \text{καθώς} \ \ t \to \infty$$

Συνεπώς , $P = P^*$ και έχουμε μοναδική λύση . □

3.3 Έμμεση μέθοδος Lyapunov

Στην ενότητα αυτή ,παρουσιάζεται ένα θεώρημα ,το οποίο παρέχει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες προκύπτουν συμπεράσματα για την ευστάθεια της αρχής ,όταν αυτή αποτελεί σημείο ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος .Κατά τη διαδικασία της απόδειξης του εν λόγω θεωρήματος ,μελετάται η συμπεριφορά ευστάθειας της αρχής αντιμετωπίζοντάς την επιπλέον και ως ένα σημείο ισορροπίας ενός γραμμικού συστήματος. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό και ως *έμμεση μέθοδος Lyapunov*.

Θεώρημα 3.3.1 *Έστω $x = 0$,ένα σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$ όπου $f : D \to \mathbb{R}^n$,είναι συνεχώς διαφορίσιμη*

και D είναι μια γειτονιά του 0 .
Θεωρούμε τον Ιακωβιανό πίνακα A της f στο σημείο $\mathbf{0}$.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\bigg|_{x=0} \tag{3.3.1}$$

Έστω επίσης
$\lambda_i, i = 1, 2, ..., n$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Τότε

- ***1**) Η αρχή είναι **ασυμπτωτικά ευσταθής** ,αν για κάθε λ_i ισχύει $Re\lambda_i < 0$.*

- ***2**) Η αρχή είναι **ασταθής** ,αν για μία η περισσότερες λ_i ισχύει $Re\lambda_i > 0$.*

Απόδειξη :

1) Σύμφωνα με την υπόθεση ισχύει $Re\lambda_i < 0$, για όλες τις ιδιοτιμές του A. Άρα ο A είναι πίνακας ευστάθειας. Από το Θεώρημα 3.2.2 ,είναι γνωστό ότι η λύση P της εξίσωσης Lyapunov (3.2.2) , είναι θετικά ορισμένη ,για κάθε συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα Q. Επιλέγουμε ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το μη γραμμικό σύστημα την

$$V(x) = x^T P x$$

Η παράγωγος της $V(x)$ κατά μήκος των τροχιών του μη γραμμικού συστήματος ,είναι:

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T P f(x) + f^T(x) P x \tag{3.3.2}$$

Το $x = 0$, είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος. Συνεπώς ισχύει $f(0) = 0$.Τότε από το *θεώρημα μέσης τιμής* [1],[2],θα υπάρχει z_i το οποίο κείται στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το x με την αρχή $\mathbf{0}$,έτσι ώστε

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x \ , \ i \in \{1, ..., n\} \tag{3.3.3}$$

Η ισότητα (3.3.3) ισχύει για κάθε x στο D τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το x αυτό,με την αρχή,να βρίσκεται εξ' ολοκλήρου εντός του D . Εφόσον $f(0) = 0$ και λόγω της (3.3.3) ,κάθε συνιστώσα $f_i(x)$ της $f(x)$ θα γράφεται

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right]x \tag{3.3.4}$$

Θέτουμε

$$g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right]x \tag{3.3.5}$$

ώστε $g_i(x)$ να είναι οι συντεταγμένες μίας συνάρτησης $g : D \to \mathbb{R}^n$.Οπότε συνδυάζοντας τις (3.3.1) ,(3.3.4) και (3.3.5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax + g(x) \\ \Leftrightarrow \dot{x} &= Ax + g(x) \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

με τη $g_i(x)$ να ικανοποιεί για κάθε $i = 1, ..., n$ την ανισότητα :

$$|g_i(x)| \leq \left\|\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right\| \|x\|$$

Άρα λόγω συνέχειας της $\frac{\partial f}{\partial x}$, ισχύει :

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \underset{\|x\|\to 0}{\to} 0 \tag{3.3.7}$$

για οποιαδήποτε νόρμα .Επομένως διαπιστώνουμε ότι σε μία γειτονιά της αρχής μπορούμε να προσεγγίσουμε το μη γραμμικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$ μέσω γραμμικοποίησης γύρω από την αρχή 0 .Συνεπώς οδηγούμαστε σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής της (3.1.1) όπου $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$.

Οπότε συνεχίζοντας από την (3.3.2) , έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T P[Ax + g(x)] + [x^T AT +^g T(x)]Px \\ &= x^T(PA + A^T P)x + 2x^T Pg(x) \end{aligned}$$

Άρα
$$\dot{V}(x) = -x^T Q x + 2x^T P g(x) \tag{3.3.8}$$

Επειδή ο Q είναι θετικά ορισμένος, ισχύει $-x^T Q x < 0$. Μένει να προσδιοριστεί ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της (3.3.8) ώστε να αποφανθούμε για το πρόσημο της παραγώγου. Επιλέγοντας τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, η $g(x)$ λόγω της (3.3.7) ικανοποιεί το εξής

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \underset{\|x\|_2 \to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{3.3.9}$$

Επομένως ,λόγω της (3.3.9) ,για κάθε $\gamma > 0$ θα υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει
$$\|g(x)\|_2 \leq \gamma \|x\|_2 \ \ , \ \forall x \ \text{με} \ \|x\|_2 < r \tag{3.3.10}$$

Άρα από τις (3.3.8) και (3.3.10) έχουμε :

$$\dot{V}(x) < -x^T Q x + 2\left\|x^T\right\|_2 \cdot \|P\|_2 \cdot \|g(x)\|_2$$

$$\overset{3.3.10}{\Rightarrow} \dot{V}(x) < -x^T Q x + 2\|x\|_2 \|P\|_2 \gamma \|x\|_2 \ \ , \ \forall x \ \text{με} \ \|x\|_2 < r$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) < -x^T Q x + 2\gamma \|P\|_2 \|x\|_2^2 \ \ , \ \forall x \ \text{με} \ \|x\|_2 < r \tag{3.3.11}$$

Όμως
$$x^T Q x \geq \lambda_{min}(Q) \|x\|_2^2 \tag{3.3.12}$$

όπου $\lambda_{min}(\cdot)$ είναι η ελάχιστη ιδιοτιμή ενός πίνακα. Επειδή ο Q είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος,η $\lambda_{min}(Q)$ θα είναι πραγματική και θετική .Λαμβάνοντας υπόψιν την (3.3.12) ,από την (3.3.11) έχουμε :

$$\dot{V}(x) < -[\lambda_{min}(Q) - 2\gamma \|P\|_2] \|x\|_2^2 \ , \forall x \ \text{με} \ \|x\|_2 < r$$

Άρα για $\gamma < \frac{\lambda_{min}(Q)}{2\|P\|_2}$,εξασφαλίζεται ότι η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη και κατ' επέκταση ότι η αρχή είναι ***ασυμπτωτικά ευσταθής*** σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.1. □

2) Αρχικά θεωρούμε την ειδική περίπτωση υπό την οποία ο A δεν έχει ιδιοτιμές στο φανταστικό άξονα,δηλαδή $Re\lambda_i \neq 0$.Αν οι ιδιοτιμές του

A ομαδοποιούνται λοιπόν στο δεξί και στο αριστερό ανοιχτό μιγαδικό επίπεδο,υπάρχει ένας ομαλός πίνακας T ,τέτοιος ώστε

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = blockdiag[-A_1, A_2] \tag{3.3.13}$$

Όπου οι A_1 και A_2 είναι πίνακες Hurwitz .Ένας από τους διάφορους τρόπους προσδιορισμού του πίνακα T είναι ο μετασχηματισμός του πίνακα A στην πραγματική Jordan Μορφή του [57] .

Εν συνεχεία ,θεωρούμε το διάνυσμα

$$z = Tx = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

όπου z_1, z_2 είναι μη μηδενικά διανύσματα με τη μορφή πίνακα-στήλης ,έτσι ώστε το άθροισμα των διαστάσεών τους να είναι ίσο με n .Συγκεκριμένα ,το z_1 έχει τόσες γραμμές ,όσες οι στήλες του A_1 και το z_2 έχει τόσες γραμμές ,όσες και οι στήλες του A_2 .Εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβλητών $x = T^{-1}z$ στο σύστημα (3.3.6) ,προκύπτει

$$T^{-1}\dot{z} = AT^{-1}z + g(T^{-1}z)$$

$$\stackrel{\times T}{\Rightarrow} \dot{z} = TAT^{-1}z + TT^{-1}g(z)$$

$$\stackrel{(3.3.13)}{\Rightarrow} \dot{z} = blockdiag[-A_1, A_2]z + g(z)$$

Συνεπώς ,η αλλαγή μεταβλητών : $z = Tx$, μετατρέπει το σύστημα (3.3.6) στη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -A_1 z_1 + g_1(z) \\ \dot{z}_2 &= A_2 z_2 + g_2(z) \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

όπου οι συναρτήσεις $g_i(z)$ έχουν την ιδιότητα για κάθε $\gamma > 0$, να υπάρχει $r > 0$ ούτως ώστε

$$\|g_i(z)\|_2 < \gamma \|z\|_2 \ , \ \forall \|z\|_2 \leq r \ , \ i = 1, 2$$

Η αρχή $x = 0$ είναι σημείο ισορροπίας και για το νέο σύστημα με τις z – συντεταγμένες αφού αν $x = 0$,τότε και $z = 0$ σύμφωνα με την αλλαγή μεταβλητών που εφαρμόστηκε παραπάνω. Συνεπώς κάθε συμπέρασμα που εξάγεται σχετικά με τη συμπεριφορά ευστάθειας του $z = 0$,μεταφέρεται και στο σημείο ισορροπίας $x = 0$ για το αρχικό σύστημα με τις x-συντεταγμένες αφού ο πίνακας T είναι ομαλός. Η αστάθεια της αρχής,θα αποδειχθεί με τη χρήση του Θεωρήματος 1.6.1. Έστω Q_1 και Q_2 θετικά ορισμένοι και συμμετρικοί πίνακες με τις διαστάσεις των A_1 και A_2 αντίστοιχα. Επειδή οι A_1 , A_2 είναι πίνακες ευστάθειας ,προκύπτει από το Θεώρημα 3.2.2 ότι οι εξισώσεις Lyapunov

$$P_iA_i + A_i^T P_i = -Q_i \quad , \quad i = 1, 2$$

Θα έχουν μοναδικές ρίζες P_1 και P_2 . Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$V(z) = z_1^T P_1 z_1 - z_2^T P_2 z_2 = z^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} z$$

Επειδή ο P_1 είναι θετικά ορισμένος και $z_1 \neq 0$,θα ισχύει $z_1^T P_1 z_1 > 0$.Οπότε κατά μήκος της ευθείας $z_2 = 0$,ισχύει $V(z) > 0$ στα σημεία που βρίσκονται αρκετά κοντά στην αρχή. Θεωρούμε το σύνολο :

$$U = \{z \in \mathbb{R}^n | \, \|z\|_2 \leq r, V(z) > 0\}$$

Τότε εντός του U θα έχουμε :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -z_1^T(P_1A_1 + A_1^T P_1)z_1 + 2z_1^T P_1 g_1(z) - z_2^T(P_2A_2 + A_2^T P_2)z_2 + \\ &\quad + 2z_2^T P_2 g_2(z) \end{aligned}$$

$$= z_1^T Q z_1 + z_2^T Q z_2 + 2z^T \begin{bmatrix} P_1 g_1(z) \\ -P_2 g_2(z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V}(x) &\geq \lambda min(Q_1) \|z_1\|_2^2 + \\ &\quad + \lambda min(Q_2) \|z_2\|_2^2 - 2\|z\|_2 \sqrt{\|P_1\|_2^2 \|g_1(z)\|_2^2 + \|P_2\|_2^2 \|g_2(z)\|_2^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) > (\alpha - 2\sqrt{2}\beta\gamma) \|z\|_2^2$$

όπου $\alpha = min\left\{\lambda min(Q_1), \lambda min(Q_2)\right\}$, $\beta = max\left\{\|P_1\|_2, \|P_2\|_2\right\}$
Διότι

$$\dot{V}(x) \geq \alpha \|z_1\|_2^2 + \alpha \|z_2\|_2^2 - 2\|z\|_2^2 \sqrt{\beta^2\gamma^2 \|z\|_2^2 + \beta^2\gamma^2 \|z\|_2^2}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) > (\|z_1\|_2^2 + \|z_2\|_2^2)\alpha - 2\sqrt{2}\beta\gamma \|z\|_2^2 = (\alpha - 2\sqrt{2}\beta\gamma)\|z\|_2^2$$

Έτσι,επιλέγοντας $\gamma < \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\beta}$, βεβαιώνεται ότι $\dot{V}(z) > 0$ στο U και ικανοποιείται η συνθήκη του Θεωρήματος 1.6.1 για την αστάθεια του μηδενός. $\square$

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι το Θεώρημα 1.6.1 , θα μπορούσε να εφαρμοστεί και στο σύστημα με τις αρχικές x–συντεταγμένες. Πράγματι , ορίζουμε τους πίνακες :

$$P = T^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} T \quad \text{και} \quad Q = T^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} T$$

οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$PA + A^T P = Q$$

Επισημαίνεται ότι ο Q είναι θετικά ορισμένος. Επιλέγουμε τη V σε τετραγωνική μορφή $V(x) = x^T P x$, η οποία είναι θετικά ορισμένη στα σημεία αρκετά κοντά στην αρχή .Θεωρούμε τώρα τη γενική περίπτωση ,όπου ο A μπορεί να έχει επιπλέον και ιδιοτιμές που βρίσκονται πάνω στο φανταστικό άξονα ,δηλαδή μπορούν να υπάρχουν λ_i για τις οποίες ισχύει $Re\lambda_i = 0$.Ωστόσο η περίπτωση αυτή,μπορεί να περιοριστεί σ' εκείνη που μελετήθηκε προηγουμένως,εφαρμόζοντας μία μετατόπιση του φανταστικού άξονα .Υποθέτουμε ότι ο A έχει m πλήθους ιδιοτιμές λ_i με $Re\lambda_i > \delta > 0$. Τότε ο πίνακας $\left[A - \frac{\delta}{2}I\right]$ έχει ιδιοτιμές της μορφής $\lambda_i - \frac{\delta}{2}$ οι οποίες έχουν επίσης αυστηρά θετικό πραγματικό μέρος, βάσει του τρόπου που ορίστηκε το δ .Δηλαδή ο πίνακας αυτός ,έχει m ιδιοτιμές στο ανοιχτό δεξί μιγαδικό επίπεδο αλλά καμμία ιδιοτιμή πάνω στο φανταστικό άξονα. Οπότε κατ' αναλογία με προηγούμενα επιχειρήματα ,υπάρχουν συμμετρικοί πίνακες P, Q ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω εξίσωση Lyapunov

$$P\left[A-\frac{\delta}{2}I\right]+\left[A-\frac{\delta}{2}I\right]^T P=Q$$

Η παράγωγος της $V(x)=x^TPx$,κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (3.3.6) δίνεται

$$\dot{V}(x)=x^T(PA+A^TP)x+2x^TPg(x)=x^T\left[P(A-\frac{\delta}{2}I)+(A-\frac{\delta}{2}I)^TP\right]x+$$

$$+\delta x^TPx+2x^TPg(x)=x^TQx+\delta V(x)+2x^TPg(x)$$

Τότε στο σύνολο :

$$\{x\in\mathbb{R}^n|\,\|x\|_2\le r, V(x)>0\}$$

με την επιλογή του $r>0$ ώστε $\|g(x)\|_2\le\gamma\|x\|_2$, για $\|x\|_2<r$, ισχύει για τη $\dot{V}(x)$ ότι

$$\dot{V}(x)\ge\lambda min(Q)\|x\|_2^2-2\|P\|_2\|x\|_2\|g(x)\|_2\ge(\lambda min(Q)-2\gamma\|P\|_2)\|x\|_2^2$$

Για $\gamma<\frac{\lambda min(Q)}{2\|P\|_2}$ έχουμε $(\lambda min(Q)-2\gamma\|P\|_2)\|x\|_2^2>0$

Οπότε ικανοποιείται το Θεώρημα 1.6.1 σύμφωνα με το οποίο η αρχή είναι ***ασταθής*** .□

Κεφάλαιο 4

Μη αυτόνομα συστήματα

4.1 Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα

Θεωρούμε το μη αυτόνομο [1] σύστημα :

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \ , \ x(t_0) = x_0 \tag{4.1.1}$$

όπου η $f : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^n$,είναι τμηματικά συνεχής στο t και τοπικά Lipschitz ως προς x στο $[0, \infty) \times D$ και $D \subset \mathbb{R}^n$ είναι μία περιοχή που περιλαμβάνει την αρχή $x = 0$.Ικανοποιούνται επομένως οι προϋποθέσεις για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης .Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t \geq t_0 \geq 0$ κοντά στο t_0 ,ορίζεται η συνεχής απεικόνιση της λύσης $x(t) = x(t; , t_0, x_0)$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

- **(i)** Για κάθε $t_0 \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η αρχική συνθήκη :

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0$$

- **(ii)** Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ ισχύει η ισότητα :

$$x(t_2; t_0, x_0) = x(t_2; t_1, x(t_1, t_0, x_0)) \tag{4.1.2}$$

Η (4.1.2) ,αποτελεί συνέπεια της δεδομένης ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων για το σύστημα (4.1.1) .Μία λύση η οποία ξεκινά στο σημείο (t_1, x_1) με $x_1 = x(t_1; t_0, x_0)$ θα είναι μοναδική .Επομένως για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ θα ισχύει

$$x(t_2; t_0, x_0) = x(t_2; t_1, x_1) = x(t_2; t_1, x(t_1; t_0, x_0))$$

Η ιδιότητα (ii) ,καλείται "*Ιδιότητα ημι-ομάδας με 2 παραμέτρους*" .Εν προκειμένω ,οι παράμετροι είναι οι t και t_0 .Σε αντίθεση με την περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων όπου οι λύσεις εξαρτώνται από την ποσότητα $(t - t_0)$ η οποία εκφράζει το χρόνο που έχει παρέλθει ,οι λύσεις μη αυτόνομων συστημάτων εξαρτώνται ξεχωριστά από τη μεταβλητή του χρόνου t και τον αρχικό χρόνο t_0 . Συνεπώς ,σε κάθε δοθείσα εξίσωση της μορφής (4.1.1) ,οι λύσεις καθορίζονται από τις αρχικές τους τιμές .[9]

Προς κατανόηση της παραπάνω διαφοροποίησης ,παραθέτουμε το ακόλουθο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα .

Παράδειγμα : Θεωρούμε το μη αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = -2tx(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.1.3}$$

Αρχικά βρίσκουμε τη λύση του (4.1.3)

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) + 2tx(t) = 0 \\
&\Rightarrow e^{t^2}\dot{x}(t) + 2t \cdot e^{t^2}x(t) = 0 \\
&\Rightarrow \left(e^{t^2}x(t)\right)' = 0 \\
&\Rightarrow e^{t^2}x(t) = c \text{ (σταθερό)}
\end{aligned}$$

Λόγω της αρχικής συνθήκης προκύπτει ότι $c = e^{t_0^2}x_0$.Επομένως αντικαθιστώντας προκύπτει η ζητούμενη λύση

$$x(t) = e^{-(t^2 - t_0)} \cdot x_0$$

Παρατηρούμε ότι η λύση δεν είναι δυνατό να εκφραστεί εξαρτώμενη αμειγώς από τον όρο $(t - t_0)$ καθώς $t^2 - t_0^2 = (t - t_0)^2 + 2(t - t_0)t_0$.$\square$

Το $x = 0$ είναι σημείο ισορροπίας για το (4.1.1) ,αν ισχύει $f(t, 0) = 0$, για κάθε $t \geq 0$.Ένα σημείο ισορροπίας στην αρχή **0** ,μπορεί να αποτελεί ένα μη μηδενικό σημείο ,καθώς υπάρχει εξάρτηση και από τη μεταβλητή του χρόνου t ,ή γενικότερα μία μη μηδενική λύση του συστήματος (4.1.1) .Για να γίνει κάτι τέτοιο πλήρως αντιληπτό,υποθέτουμε ότι η $\hat{y}(\tau)$ είναι λύση του συστήματος:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = g(\tau, y) \tag{4.1.4}$$

όπου η g είναι ορισμένη για όλα τα τ με $\tau \geq \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζοντας την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών : $x = y – \hat{y}(\tau)$, $t = \tau – \alpha$ το σύστημα (4.1.4) παίρνει τη μορφή :

$$\dot{x} = g(\tau, y) – \dot{\hat{y}}(\tau) = g(t + \alpha, x + \hat{y}(t + \alpha)) - \dot{\hat{y}}(t + \alpha) \overset{\text{ορ}}{=} f(t, x(t)) \tag{4.1.5}$$

Αφού $\dot{\hat{y}}(t + \alpha) = g(t + \alpha, \hat{y}(t + \alpha))$, για κάθε $t \geq 0$, η αρχή $x = 0$,θα είναι ένα σημείο ισορροπίας του μετασχηματισμένου συστήματος (4.1.5) στο $t = 0$. Έτσι ,εξετάζοντας την ευστάθεια της αρχής ως ένα σημείο ισορροπίας του νέου συστήματος ,μπορούμε να αποφανθούμε για τη συμπεριφορά της ευστάθειας της λύσης $\hat{y}$ του αρχικού συστήματος (4.1.4) .Επισημαίνεται ότι αν η $\hat{y}$ δεν είναι σταθερή, το σύστημα (4.1.5) θα είναι μη αυτόνομο ακόμα και όταν το αρχικό σύστημα (4.1.4) είναι αυτόνομο ,δηλαδή στην περίπτωση που $g(\tau, y) = g(y)$.Αυτός είναι και ο λόγος που η μελέτη της συμπεριφοράς ευστάθειας των λύσεων του (4.1.1) με την έννοια Lyapunov , μπορεί να γίνει μόνο μέσω της διερεύνησης της συμπεριφοράς ευστάθειας των σημείων ισορροπίας μη αυτόνομων συστημάτων.

4.2 Ορισμοί ευστάθειας

Οι έννοιες της ευστάθειας και της ασυμπτωτικής ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας ενός μη αυτόνομου συστήματος,είναι κατά βάση οι ίδιες όπως εισήχθησαν αρχικά στην περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων στο Κεφάλαιο 1. Το καινούριο στοιχείο σε αυτό το κεφάλαιο ,είναι ότι ενώ η λύση ενός αυτόνομου συστήματος εξαρτάται μόνο από την ποσότητα $(t – t_0)$,η λύση ενός μη αυτόνομου συστήματος,εξαρτάται από αμφότερα τα t και t_0 ,λόγω της ιδιότητας ημι-ομάδας που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα .

Έτσι ,η συμπεριφορά ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας,θα εξαρτάται στη γενική περίπτωση,από το t_0 .Η αρχή $x = 0$, είναι ένα *ευσταθές* σημείο ισορροπίας για το (4.1.1) , αν για κάθε $\varepsilon > 0$, για κάθε $t_0 \geq 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, έτσι ώστε

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad , \forall \;\; t \geq t_0 \tag{4.2.1}$$

Η σταθερά δ ,εξαρτάται γενικά από τον αρχικό χρόνο t_0 .Ωστόσο η ύπαρξη του δ , για κάθε t_0 ,δεν εγγυάται απαραίτητα ότι υπάρχει ένα σταθερό δ που εξαρτάται μόνο από το ε το οποίο θα ικανοποιούσε την (4.2.1) για όλα τα t_0.

Όπως διαπιστώθηκε στην προηγούμενη ενότητα ,ο ορισμός της ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας σύμφωνα το Κεφάλαιο 1 ,δεν επαρκεί για να καλύψει την περίπτωση των μη αυτόνομων συστημάτων .Συνεπώς,χρειάζεται να επαναπροσδιοριστεί ο Ορισμός 1.2.1 ώστε να δοθεί έμφαση στην εξάρτηση της συμπεριφοράς της ευστάθειας της αρχής,από τον αρχικό χρόνο t_0 .

Ορισμός 4.2.1 [2] *Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του (4.1.1) είναι:*

- ***ευσταθές***, *αν για κάθε $\varepsilon > 0$,υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, έτσι ώστε*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \; , \; \forall t \geq t_0 \geq 0 \tag{4.2.2}$$

- ***ομοιόμορφα ευσταθές*** , *αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, ανεξάρτητο του t_0 ώστε να ικανοποιείται η σχέση (4.2.2) .*

- ***ασταθές***, *αν δεν είναι ευσταθές.*

- ***Ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές*** *,αν είναι ομοιόμορφα ευσταθές και υπάρχει $c > 0$,ανεξάρτητο του t_0 , έτσι ώστε για κάθε $x(t)$ με $\|x(t_0)\| < c$, να ισχύει $x(t) \to 0$, καθώς $t \to \infty$, ομοιόμορφα στο t_0 . Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$,υπάρχει $T = T(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε :*

$$\|x(t)\| < \varepsilon \; , \; \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon) \; , \; \forall \, \|x(t_0)\| < c$$

- ***Ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές***,*αν είναι ομοιόμορφα ευσταθές και για κάθε ζεύγος θετικών αριθμών ε και c ,υπάρχει $T = T(\varepsilon, c) > 0$, τέτοιο ώστε :*

$$\|x(t)\| < \varepsilon \ , \ \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, c) \ , \ \forall \|x(t_0)\| < c$$

Στη βιβλιογραφία απαντώνται και άλλες μορφοποιήσεις του Ορισμού 1.2.1 (ιδέ π.χ. [4]) .

4.3 Συναρτήσεις κλάσης K ,KL

Ο χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης ευστάθειας ή της ασυμπτωτικής ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας του (4.1.1) ,μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί μελετώντας τις ιδιότητες ειδικών βαθμωτών συναρτήσεων γνωστών και ως συναρτήσεις κλάσης K και κλάσης KL.

Ορισμός 4.3.1 *Μία συνεχής συνάρτηση $\alpha : [0, a) \to [0, \infty)$,λέγεται ότι ανήκει στην κλάση K , αν είναι γνησίως αύξουσα και $\alpha(0) = 0$.*
Αν $a = \infty$ και $\alpha(r) \to \infty$, καθώς $r \to \infty$,τότε η α ανήκει στην κλάση K_∞

Ορισμός 4.3.2 *Μία συνεχής συνάρτηση $\beta : [0, b) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, λέγεται ότι ανήκει στην κλάση KL αν για κάθε s, η απεικόνιση $\beta(r, s)$ ανήκει στην κλάση K ως προς το r και για κάθε σταθερό r , η $\beta(r, s)$ είναι φθίνουσα ως προς s και επίσης $\beta(r, s) \to 0$, καθώς $s \to \infty$*

Στο ακόλουθο λήμμα διατυπώνονται κάποιες προφανείς ιδιότητες των συναρτήσεων κλάσης K και κλάσης KL που καθιστώνται ιδιαίτερα χρήσιμες στη συνέχεια.

Λήμμα 4.3.1 [2] *Έστω $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$ συναρτήσεις κλάσης K στο διάστημα $[0, a)$, $\alpha_3(\cdot)$,$\alpha_4(\cdot)$ συναρτήσεις κλάσης K_∞ και $\beta(\cdot, \cdot)$ συνάρτηση κλάσης KL. Συμβολίζουμε την αντίστροφη της $\alpha_i(\cdot)$ με $\alpha_i^{-1}(\cdot)$. Τότε :*

- *Η α_1^{-1} ορίζεται στο $[0, \alpha_1(a))$ και ανήκει στην κλάση K.*
- *Η α_3^{-1} ορίζεται στο $[0, \infty)$ και ανήκει στην κλάση K_∞ .*
- *Η σύνθεση $\alpha_1 \circ \alpha_2$ ανήκει στην κλάση K.*
- *Η σύνθεση $\alpha_3 \circ \alpha_4$ ανήκει στην κλάση K_∞.*
- *Η $\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ ανήκει στην κλάση KL.*

Στο επόμενο λήμμα ,δίνονται ισοδύναμοι ορισμοί της ομοιόμορφης ευστάθειας και της ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας με τη χρήση συναρτήσεων κλάσης K και KL.

Λήμμα 4.3.2 [2] *Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του (4.1.1) είναι :*

- ***ομοιόμορφα ευσταθές***, *αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $\alpha(\cdot)$ κλάσης K και θετική σταθερά c, ανεξάρτητη του t_0 , έτσι ώστε*

$$\|x(t)\| < \alpha(\|x(t_0)\|) \ , \forall t \geq t_0 \geq 0 \ , \ \forall \|x(t_0)\| < c \tag{4.3.1}$$

- ***ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές*** *, αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $\beta(\cdot,\cdot)$ κλάσης KL και θετική σταθερά c , ανεξάρτητη του t_0 , έτσι ώστε*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t – t_0) \ , \ \forall t \geq t_0 \geq 0 \ , \ \forall \|x(t_0)\| < c \tag{4.3.2}$$

- ***ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές*** *,αν και μόνο αν η (4.3.2) ικανοποιείται για κάθε αρχική κατάσταση $x(t_0) = x_0$.*

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι ιδιότητες της λύσης μια βαθμωτής αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης σε σχέση με τις συναρτήσεις κλάσης K και κλάσης KL.

Λήμμα 4.3.3 [2] *Θεωρούμε τη βαθμωτή αυτόνομη διαφορική εξίσωση*

$$\dot{y} = -\alpha(y) \ , \ y(t_0) = y_0$$

Όπου $\alpha(\cdot)$ είναι μία συνάρτηση τοπικά Lipschitz και κλάσης K ορισμένη στο $[0, a)$. Για όλα τα y_0 με $0 \leq y_0 \leq a$, η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση y , ορισμένη για κάθε $t \geq t_0$.Επιπλέον $y(t) = \sigma(y_0, t - t_0)$ όπου $\sigma(r, s)$ είναι μια συνάρτηση κλάσης KL , ορισμένη στο $[0, a) \times [0, \infty)$

Στο ακόλουθο λήμμα ,δίνονται άνω και κάτω φράγματα μιας θετικά ορισμένης συνάρτησης σύμφωνα με τους όρους των συναρτήσεων κλάσης K.

Λήμμα 4.3.4 [2] *Έστω $V : D \to \mathbb{R}$,μία συνεχής και θετικά ορισμένη συνάρτηση σε μία περιοχή $D \subset \mathbb{R}^n$,η οποία περιλαμβάνει την αρχή* **0** *του $\mathbb{R}^n$. Έστω $B_r \subset D$, για κάποιο $r > 0$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις α_1 και α_2 κλάσης* **K** *,ορισμένες στο διάστημα $[0, r]$ τέτοιες ώστε*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \ , \ \forall x \in B_r$$

Επιπλέον,αν $D = \mathbb{R}^n$ και η $V(x)$ είναι ακτινικά μη φραγμένη ,τότε η παραπάνω ανισότητα μπορεί να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ επιλέγοντας τις συναρτήσεις α_1 και α_2 ούτως ώστε να ανήκουν στην κλάση $\boldsymbol{K_\infty}$

4.4 Θεωρία Lyapunov

Στο Κεφάλαιο 1 ,διατυπώθηκαν οι βασικές αρχές της θεωρίας Lyapunov για τη μελέτη της συμπεριφοράς ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας στην περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων .Μέσω των θεωρημάτων 1.3.1 ,1.5.1 και 1.6.1 ,παρέχονται συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν την (ολική)(ασυμπτωτική) ευστάθεια ή την αστάθεια του σημείου ισορροπίας .Για καθένα από τα προαναφερθέντα θεωρήματα ,μπορούν να γίνουν αντίστοιχες προεκτάσεις για ένα σημείο ισορροπίας ενός συστήματος της μορφής (4.1.1) .(ιδέ π.χ. [1],[4],[10]) .

Μέσω ενός βασικού θεωρήματος που διατυπώνεται ακολούθως ,επικεντρωνόμαστε στην απόδειξη της ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (4.1.1) .Στο συγκεκριμένο θεώρημα ,αξιοποιούνται ιδιότητες μιας υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov για το σύστημα (4.1.1) που έγκεινται στη σύγκριση με συνεχείς και θετικά ορισμένες συναρτήσεις .Ανάλογες προϋποθέσεις παρέχονται από τα θεωρήματα του Κεφαλαίου 6 μέσω των οποίων αποδεικνύεται η ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του μηδενικού σημείου ισορροπίας τοπικά ή ολικά .Συνεπώς ,στο πλαίσιο της παρούσας ενότητας ,θα μας απασχολήσει μεμονωμένα η εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων .

Στην προκειμένη περίπτωση ,ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov ,ορίζουμε μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^n$.Η παράγωγος της V κατά μήκος των τροχιών του (4.1.1) ορίζεται ως εξής :

$$\dot{V}(t, x(t)) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x(t)) \qquad \textbf{(4.4.1)}$$

Πριν τη διατύπωση και την απόδειξη του βασικού θεωρήματος για την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας του (4.1.1) , απαιτείται ένα επιπλέον λήμμα,γνωστό και ως *"Λήμμα της Σύγκρισης"* .

Λήμμα 4.4.1 [2] *Θεωρούμε την κλιμακωτή διαφορική εξίσωση :*

$$\dot{u} = f(t,u)\ ,\ u(t_0) = u_0$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο t και τοπικά Lipschitz ως προς u , για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $u \in J \subset \mathbb{R}$. Έστω $[t_0, T)$,($T \leq \infty$) το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης $u(t)$ και υποθέτουμε ότι $u(t) \in J$, για κάθε $t \in [t_0, T)$. Έστω επίσης $v(t)$ μία συνεχής συνάρτηση της οποίας η άνω Dini παράγωγος

$$D^+v(t) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

ικανοποιεί την ακόλουθη διαφορική ανισότητα :

$$D^+v(t) \leq f(t, v(t))\ ,\ v(t_0) \leq u_0 \ \textit{με}\ v(t) \in J\ ,\ \forall t \in [t_0, T)$$

Τότε θα ισχύει

$$v(t) \leq u(t)\ ,\ \forall t \in [t_0, T)$$

Στο σημείο αυτό ,βρισκόμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας μη αυτόνομου συστήματος .

Θεώρημα 4.4.1 *Έστω $x = 0$ ένα σημείο ισορροπίας για το σύστημα (4.1.1) και $D \subset \mathbb{R}^n$,μία περιοχή του $x = 0$. Έστω επίσης $V : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$, μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε να ισχύουν :*

$$W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x) \tag{4.4.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -W_3(x) \ \ , \ \forall t \geq 0 \ , \ \forall x \in D \tag{4.4.3}$$

όπου $W_i(x)$,$i = 1,2,3$, είναι συνεχείς και θετικά ορισμένες συναρτήσεις στο D .
Τότε το $x = 0$ είναι ***ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές*** *.*

Απόδειξη [4],[10]: Η παράγωγος της V κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (4.1.1) ως έχει οριστεί κατά την (4.4.1) ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα :

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -W_3(x)$$

Η ανισότητα ισχύει λόγω της σχέσης (4.4.3) .Επιλέγουμε $r > 0$ και $\rho > 0$ τέτοια ώστε $B_r \subset D$ και $\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$, όπου $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \|x\| \leq r\}$. Τότε το σύνολο $\{x \in B_r | W_1(x) \leq \rho\}$ περιέχεται στο B_r° . Ορίζουμε ένα σύνολο $\Omega_{t,\rho}$,το οποίο εξαρτάται από τη μεταβλητή του χρόνου t , ως εξής :

$$\Omega_{t,\rho} = \{x \in B_r | V(t,x) \leq \rho\} \tag{4.4.4}$$

Παρατηρούμε ότι το $\Omega_{t,\rho}$ περιέχει το σύνολο $\{x \in B_r | W_2(x) \leq \rho\}$ αφού αν για τυχαίο $x \in B_r$ ισχύει $W_2(x) \leq \rho$,προκύπτει από την (4.4.2) ότι $V(t,x) \leq \rho$ και άρα $x \in \Omega_{t,\rho}$.Επιπλέον $\Omega_{t,\rho} \subset \{x \in B_r | W_1(x) \leq \rho\}$ διότι αν για τυχαίο $x \in B_r$ ισχύει $V(t,x) \leq \rho \Rightarrow W_1(x) \leq \rho$ και πάλι λόγω της (4.4.2) . Συνεπώς προκύπτει ο ακόλουθος εγκλεισμός :

$$\{x \in B_r | W_2(x) \leq \rho\} \subset \Omega_{t,\rho} \subset \{x \in B_r | W_1(x) \leq \rho\} \ \ , \ \ \forall t \geq 0 \tag{4.4.5}$$

Από τη σχέση (4.4.3) και από το γεγονός ότι η W_3 είναι θετικά ορισμένη στο D ,προκύπτει ότι η $\dot{V}(t,x)$ είναι αρνητική στο $D \setminus \{0\}$. επομένως η $V(t,x)$ είναι φθίνουσα σε αυτήν την περιοχή του 0 .Αυτό σημαίνει ότι για οποιοδήποτε $t_0 \geq 0$ και για οποιοδήποτε $x_0 \in \Omega_{t,\rho}$,η λύση $x(t) \in B_r$ που ξεκινάει από το σημείο (t_0, x_0) ,παραμένει στο $\Omega_{t,\rho}$ από τη στιγμή t_0 και έπειτα,δηλαδή για κάθε $t \geq t_0$. Υποθέτουμε ότι $x_0 \in \{x \in B_r | W_2(x) \leq \rho\}$.Εφόσον οι W_1, W_2, W_3 είναι συνεχείς και θετικά ορισμένες συναρτήσεις στο D ,από το Λήμμα 4.3.4 ,θα υπάρχουν συναρτήσεις α_1 ,α_2 και α_3 κλάσης K ,ορισμένες στο $[0, r]$ τέτοιες ώστε

$$W_1(x) > \alpha_1(\|x\|) \ \ , \ \ W_2(x) > \alpha_2(\|x\|) \ \ , \ \ W_3(x) > \alpha_3(\|x\|) \tag{4.4.6}$$

Οπότε λόγω της (4.4.6) και των (4.4.2) ,(4.4.3) ,για κάθε $t \geq 0$,ισχύουν οι ανισότητες

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{4.4.7}$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \tag{4.4.8}$$

Επειδή η α_2 είναι κλάσης K , από το Λήμμα 4.3.1 η α_2^{-1} θα είναι επίσης κλάσης K ορισμένη στο $[0, \alpha_2(r)]$ και άρα εξ' ορισμού θα είναι αύξουσα. Συνεπώς από τη σχέση (4.4.7) ,έχουμε

$$\alpha_2^{-1}(V(t, x(t))) \leq \|x\| \tag{4.4.9}$$

Επιπλέον,η α_3 είναι αύξουσα διότι ανήκει στην κλάση K ,οπότε η (4.4.9) γίνεται

$$\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(t, x))) \leq \alpha_3(\|x\|) \Rightarrow -\alpha_3(\|x\|) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(t, x))) \tag{4.4.10}$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν τις (4.4.9) και (4.4.10) ,προκύπτει από την (4.4.8) το εξής :

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(t, x))) \overset{\text{ορ}}{=} -\alpha(V(t, x)) \tag{4.4.11}$$

Λόγω του Λήμματος 4.3.1 , η συνάρτηση $\alpha(\cdot)$ είναι κλάσης K ορισμένη στο $[0, r]$.Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι η $\alpha(\cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz.Εάν κάτι τέτοιο δεν ισχύει ,μπορεί να επιλεγεί μια συνάρτηση β η οποία θα είναι τοπικά Lipschitz και κλάσης K ,τέτοια ώστε $\alpha(r) \geq \beta(r)$ στο σύνολο που εξετάζουμε. Τότε $-\alpha(r) \leq -\beta(r) \Rightarrow \dot{V}(t, x(t)) \leq -\beta(V(t, x(t)))$ και η απόδειξη μπορεί να συνεχιστεί με τη χρήση της β αντί της α . Έστω $y(t)$ που ικανοποιεί την αυτόνομη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης :

$$\dot{y} = -\alpha(y) \ , \ y(t_0) = V(t_0, x(t_0)) \geq 0$$

Τότε από την (4.4.11) και το Λήμμα 4.4.1 , θα ισχύει :

$$V(t, x(t)) \leq y(t) \ , \ \forall t \geq t_0$$

και λόγω του Λήμματος 4.3.3 ,θα υπάρχει συνάρτηση $\sigma(r, s)$ κλάσης KL, ορισμένη στο $[0, r] \times [0, \infty)$ έτσι ώστε

$$V(t,x(t)) \leq \sigma(V(t_0,x(t_0)),t\text{–}t_0)\ ,\ \forall V(t_0,x(t_0)) \in [0,\rho] \qquad (4.4.12)$$

Οπότε από την (4.4.7) και την (4.4.12) , κάθε λύση $x(t)$ που ξεκινάει στο $\Omega_{t_0,\rho}$, ικανοποιεί την ανισότητα :

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(V(t,x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(V(t_0,x(t_0),t\text{–}t_0))$$

$$\leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\|x(t_0)\|),t\text{–}t_0)) \overset{\text{ορ}}{=} \beta(\|x(t_0)\|\,,t\text{–}t_0)$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|\,,t\text{–}t_0)$$

Η β είναι κλάσης *KL* λόγω του Λήμματος 4.3.1 ,οπότε ισχύει η (4.3.2) για κάθε $x(t_0) \in \{x \in B_r | W_2(x) \leq \rho\}$, που συνεπάγεται ότι το $x = 0$ είναι ***ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές*** .□

Στην παραπάνω απόδειξη,εκτιμάται η περιοχή έλξης της αρχής 0 με τη βοήθεια του συνόλου $\{x \in B_r | W_2(x) \leq \rho\}$.Το ακόλουθο πόρισμα,αποτελεί επέκταση του εν λόγω θεωρήματος σε όλο το $\mathbb{R}^n$.

Πόρισμα 4.4.1 *Έστω ότι όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.4.1 ,ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και η $W_1(x)$ είναι ακτινικά μη φραγμένη. Τότε το σημείο ισορροπίας του (4.1.1) , $x = 0$, είναι* ***ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές*** *.*

Απόδειξη : Εφόσον η $W_1(x)$ είναι ακτινικά μη φραγμένη , το ίδιο θα ισχύει και για τη $W_2(x)$ λόγω της σχέσης (4.4.2) . Επομένως το σύνολο $\{x \in B_r | W_2(x) \leq \rho\}$ είναι φραγμένο για οποιοδήποτε $\rho > 0$. Οπότε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$,μπορούμε να επιλέξουμε αρκετά μεγάλο ρ ,έτσι ώστε $x_0 \in \{x \in B_r | W_2(x) \leq \rho\}$ και η απόδειξη ακολουθεί ακριβώς την ίδια πορεία όπως στο Θεώρημα 4.4.1 αναφερόμενη σε όλο το $\mathbb{R}^n$.□

Κεφάλαιο 5

Εναλλακτικές μέθοδοι

5.1 Εισαγωγικά

Η ευθεία μέθοδος Lyapunov που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 1 ,αποτελεί τον πλέον αποτελεσματικό τρόπο προσέγγισης της ανάλυσης ευστάθειας μη γραμμικών συστημάτων .Ωστόσο ,υπάρχουν περιπτώσεις όπου η εφαρμογή της δεν καθίσταται εφικτή .Οι δυσκολίες που μπορούν να προκύψουν έγκεινται συνήθως στην εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov για ένα δοθέν δυναμικό σύστημα .Ιδιαίτερα σύνηθες φαινόμενο αποτελεί το γεγονός ότι μία θετικά ορισμένη συνάρτηση V δεν έχει αρνητικά ορισμένη παράγωγο $\dot{V}$.Κατά συνέπεια ,μία τέτοια V δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση ευστάθειας μέσω της ευθείας μεθόδου Lyapunov .

Απαιτείται λοιπόν η ανάπτυξη και η εφαρμογή εναλλακτικών μεθόδων οι οποίες καλύπτουν την προαναφερθείσα περίπτωση .Στο πλαίσιο αυτής της απόπειρας ,έχουν διατυπωθεί και αποδειχθεί θεωρήματα με νέους περιορισμούς για τις συναρτήσεις Lyapunov που επιλέγονται .Εξάγονται επομένως συμπεράσματα για την (ομοιόμορφη) ασυμπτωτική ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας τοπικά ή ολικά ,τόσο στην περίπτωση των αυτόνομων όσο και των μη αυτόνομων συστημάτων .

Αρχικά θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n \tag{5.1.1}$$

με σημείο ισορροπίας το $x = 0$.Όταν συμβεί η παράγωγος $\dot{V}$ μιας υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov V για το (5.1.1) να μην είναι αρνητικά ορισμένη ή αρνητικά ημιορισμένη υπάρχουν δύο ενδεχόμενα : είτε η V δεν έχει επιλεχθεί καταλλήλως ,είτε δεν υπάρχει υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το εκάστοτε σύστημα η οποία να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.3.1 .Οι μέθοδοι που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο ,επιβεβαιώνουν ότι η περίπτωση κατά την οποία ισχύει οποιοδήποτε από τα δύο παραπάνω ενδεχόμενα ,δεν οδηγεί απαραίτητα στο συμπέρασμα ότι το σύστημα (5.1.1) δεν είναι ευσταθές .

Από τον ορισμό της V στην ενότητα 1.3 προκύπτει ότι το σύστημα (5.1.1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σε μια γειτονιά N της αρχής 0 του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν ισχύει

$$V(x(t)) \to 0 \quad \text{καθώς} \quad t \to +\infty \tag{5.1.2}$$

για κάθε αρχική κατάσταση $x(0) \in N$.Συνεπώς αναζητούνται συνθήκες που μπορούν να οδηγήσουν στην εξαγωγή της (5.1.2) δεδομένου ότι η $\dot{V}$ δεν είναι αρνητικά ορισμένη .Σε επόμενη ενότητα θα διαπιστωθεί ότι η μελέτη της συμπεριφοράς των παραγώγων υψηλότερης τάξης της V όπως η $\ddot{V}$ και η $\dddot{V}$ βάσει συγκεκριμένων συνθηκών στις οποίες ενσωματώνονται ,μπορεί επίσης να συνεπάγεται την (5.1.2) .

5.2 Παράγωγοι υψηλότερης τάξης συναρτήσεων Lyapunov

Θεωρούμε ότι στο δυναμικό σύστημα (5.1.1) η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι Lipschitz και συνεχής .Ικανοποιούνται επομένως οι προϋποθέσεις που αναφέρονται στην ενότητα 1.1 για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης .Υποθέτουμε ότι το (5.1.1) έχει ένα σημείο ισορροπίας στην αρχή 0 του $\mathbb{R}^n$,δηλαδή ισχύει $f(0) = 0$.

Ορίζουμε μία υποψήφια συνάρτηση Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για το σύστημα (5.1.1) .Αν η V είναι αρκούντως λεία ,δηλαδή έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι μίας συγκεκριμένης τάξης m στο πεδίο ορισμού της ,τότε υπάρχει η δυνατότητα να ορίσουμε τις μέχρι m τάξης χρονικές παραγώγους της V κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (5.1.1) .Η πρώτη χρονική παράγωγος της V έχει οριστεί κατά τη σχέση (1.3.1) .Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε μεταβατικά και τις επόμενες παραγώγους ως εξής

$$\ddot{V}(x(t)) \overset{\text{ορ}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_i} f_i(x) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} f(x) \tag{5.2.1}$$

$$\dddot{V}(x(t)) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{\partial \ddot{V}}{\partial x} f(x)$$

$$\vdots$$

$$V^{(m)}(x(t)) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{\partial V^{(m-1)}}{\partial x} f(x)$$

Οι σχέσεις (5.2.1) μπορούν να γραφούν ισοδύναμα με τη χρήση εσωτερικού γινομένου ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \left\langle \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, f(x(t)) \right\rangle \\ \ddot{V}(x(t)) &= \left\langle \frac{\partial \dot{V}(x(t))}{\partial x}, f(x(t)) \right\rangle \\ &. \\ &. \\ &. \\ V^{(m)}(x(t)) &= \left\langle \frac{\partial V^{(m-1)}(x(t))}{\partial x}, f(x(t)) \right\rangle \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Στις επόμενες ενότητες ,παρουσιάζονται δύο θεωρήματα τα οποία θεμελιώνουν ιδιότητες υψηλότερης τάξης παραγώγων συναρτήσεων Lyapunov ,με τη χρήση των οποίων επιβεβαιώνεται η ευστάθεια ή η ασυμπτωτική ευστάθεια σε αυτόνομα και μη αυτόνομα συστήματα .

5.3 Θεώρημα Ασυμπτωτικής Ευστάθειας του Butz

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει ,έγκειται στην απόδειξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας του μηδενικού σημείου ισορροπίας του (5.1.1) εξετάζοντας τη συμπεριφορά των υψηλότερης τάξης παραγώγων μιας δεδομένης υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,όταν η μελέτη της πρώτης παραγώγου δεν επαρκεί για την εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων .Συγκεκριμένα θα επικεντρωθούμε σε ιδιότητες γραμμικών συνδυασμών των τριών πρώτων παραγώγων της V κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (5.1.1) .

Το θεώρημα ασυμπτωτικής ευστάθειας που ακολουθεί ,απεδείχθη από τον A.Butz (1969)[14] ,ο οποίος αποδεικνύει ότι συνθήκες οι οποίες εξετάζουν μεμονωμένα τις δύο πρώτες παραγώγους $\dot{V}$ και $\ddot{V}$ της V (Kudaev 1962 [11],Yorke 1969 [12],[13]) είναι τετριμμένες .Πριν τη διατύπωση του θεωρήματος ,παρατείθεται το ακόλουθο βοηθητικό λήμμα

Λήμμα 5.3.1 [14] *Θεωρούμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$\alpha_2 \dddot{y} + \alpha_1 \ddot{y} + \dot{y} = z(t) \ , \ t \geq 0 \tag{5.3.1}$$

Όπου $\alpha_1 \geq 0$ και $\alpha_2 \geq 0$ είναι σταθερές .Τότε η γενική λύση της (5.3.1) δίνεται

$$y(t) = y(0)u_0(t) + \dot{y}(0)u_1(t) + \ddot{y}(0)u_2(t) + \int_0^t w(t-\tau)z(\tau)d\tau \tag{5.3.2}$$

Όπου u_0, u_1, u_2, w, z είναι κατάλληλες συναρτήσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες

- *Οι συναρτήσεις $u_0(t), u_1(t)$ και $u_2(t)$ είναι φραγμένες .*
- $w(t) \geq 0$
- *Αν οι συναρτήσεις $y(t)$,$\dot{y}(t)$ και $\ddot{y}(t)$ είναι φραγμένες ,τότε και η συνάρτηση*

$$\int_0^t z(\tau)d\tau$$

είναι επίσης φραγμένη .

Απόδειξη Εφαρμόζοντας αρχικά το μετασχηματισμό Laplace [15] στην (5.3.1) ,προκύπτει

$$\overset{(5.3.1)}{\Rightarrow} L\left\{\alpha_2 \dddot{y}(t) + \alpha_1 \ddot{y}(t) + \dot{y}(t)\right\} = L\left\{z(t)\right\}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 L\left\{\dddot{y}(t)\right\} + \alpha_1 L\left\{\ddot{y}(t)\right\} + L\left\{\dot{y}(t)\right\} = Z(s)$$

$$\Rightarrow \alpha_2\left[s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0)\right] + \alpha_1\left[s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\right] + \\ + sY(s) - y(0) = Z(s)$$

$$\Rightarrow \left[\alpha_2 s^3 + \alpha_1 s^2 + s\right] Y(s) = \left[\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1\right] y(0) + \left[\alpha_2 s + \alpha_1\right]\dot{y}(0) + \\ + \alpha_2 \ddot{y}(0) + Z(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1}{s\left[\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1\right]} y(0) + \frac{\alpha_2 s + \alpha_1}{s\left[\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1\right]}\dot{y}(0) +$$

$$+ \frac{\alpha_2}{s\left[\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1\right]}\ddot{y}(0) + \frac{1}{s\left[\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1\right]} Z(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} y(0) + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1} + \frac{\alpha_1}{s\left[\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1\right]}\right]\dot{y}(0) + \\ + \frac{\alpha_2}{s\left[\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1\right]}\ddot{y}(0) + \frac{1}{s\left[\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1\right]} Z(s) \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Θέτουμε

$$W(s) = \frac{1}{s\left[\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1\right]} \tag{5.3.4}$$

Λόγω της (5.3.4) η (5.3.3) γράφεται

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{s} y(0) + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1} + \alpha_1 W(s)\right]\dot{y}(0) + \\ + \alpha_2 W(s)\ddot{y}(0) + W(s) Z(s) \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Θέτουμε επίσης

$$U_0(s) = \frac{1}{s} \tag{5.3.6}$$

$$U_1(s) = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1} + \alpha_1 W(s) \tag{5.3.7}$$

$$U_2(s) = \alpha_2 W(s) \tag{5.3.8}$$

Προς εύρεση της γενικής λύσης $y(t)$ της (5.3.2) εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της (5.3.5) .Συνεπώς προκύπτει ότι

$$\overset{(5.3.5)}{\Rightarrow} L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{U_0(s)y(0) + U_1(s)\dot{y}(0) + U_2(s)\ddot{y}(0) + W(s)Z(s)\}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow L^{-1}\{Y(s)\} = {} & L^{-1}\{U_0(s)\}\, y(0) + L^{-1}\{U_1(s)\}\, \dot{y}(0) + L^{-1}\{U_2(s)\} + \\ & + L^{-1}\{W(s)Z(s)\}\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις του χρόνου t ως εξής

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} \ \ , \ t \geq 0 \tag{5.3.10}$$

$$u_0(t) = L^{-1}\{U_0(s)\} \Rightarrow u_0(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \Rightarrow u_0(t) = 1 \ , t \geq 0 \tag{5.3.11}$$

$$u_1(t) = L^{-1}\{U_1(s)\} \ , \ t \geq 0 \tag{5.3.12}$$

$$u_2(t) = L^{-1}\{U_2(s)\} \ , \ t \geq 0 \tag{5.3.13}$$

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\} \ , t \geq 0 \tag{5.3.14}$$

Επιπλέον υπολογίζοντας τον όρο $L^{-1}\{W(s)Z(s)\}$ προκύπτει ότι

$$L^{-1}\{W(s)Z(s)\} = (w * z) = \int_0^t w(t-\tau)z(\tau)d\tau \tag{5.3.15}$$

όπου $*$ είναι η πράξη της συνέλιξης .Συνοψίζοντας καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι λόγω των σχέσεων (5.3.10) έως (5.3.15) ,η (5.3.9) γράφεται

$$y(t) = y(0)u_0(t) + \dot{y}(0)u_1(t) + \ddot{y}(0)u_2(t) + \int_0^t w(t-\tau)z(\tau)d\tau$$

Οπότε προκύπτει η ζητούμενη σχέση (5.3.2) όπου υπολογίζεται η γενική λύση $y(t)$ της εξίσωσης (5.3.1) .

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις συναρτήσεις $u_0(t)$,$u_1(t)$,$u_2(t)$ και $w(t)$ από τις σχέσεις (5.3.11) έως (5.3.14) για $\alpha_1 \geq 0$,$\alpha_2 \geq 0$.Από τη σχέση (5.3.11) ,προκύπτει άμεσα ότι η $u_0(t)$ είναι φραγμένη για κάθε $t \geq 0$ ως σταθερή συνάρτηση .Στη συνέχεια διαπιστώνουμε ότι οι συναρτήσεις $U_1(s)$ και $U_2(s)$ εξαρτώνται από τη $W(s)$ λόγω των σχέσεων (5.3.7) και (5.3.8) .Συνεπώς ,προς διευκόλυνσή μας ,θα υπολογιστεί αρχικά η $w(t)$ με τη χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace στη σχέση (5.3.4 .

Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1$ έχει δύο πραγματικές ρίζες .Αυτό σημαίνει ότι η διακρίνουσα Δ θα είναι θετική ,επομένως θα ισχύει

$$\alpha_1^2 > 4\alpha_2 \ , \ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \tag{5.3.16}$$

Επιλέγουμε τιμές των α_1, α_2 ώστε να ικανοποιείται η (5.3.16) .Έστω $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_2 = 2$.Τότε η (5.3.4) γίνεται

$$W(s) = \frac{1}{s\left[2s^2 + 3s + 1\right]} \tag{5.3.17}$$

Το πολυώνυμο $2s^2+3s+1$ έχει ρίζες τις $s_1=-1$ και $s_2=-2$.Επομένως η $W(s)$ γράφεται

$$W(s)=\frac{1}{2s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+1}+\frac{c_3}{s+2}\right] \tag{5.3.18}$$

Όπου οι c_1, c_2, c_3 είναι σταθερές με

$$c_1=\left[s\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right]_{s=0}=\frac{1}{2} \tag{5.3.19}$$

$$c_2=\left[(s+1)\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right]_{s=-1}=-1 \tag{5.3.20}$$

$$c_3=\left[(s+2)\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right]_{s=-2}=\frac{1}{2} \tag{5.3.21}$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές c_1, c_2, c_3 από τις σχέσεις (5.3.19),(5.3.20) και(5.3.21) στην (5.3.18) προκύπτει ότι

$$W(s)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}\right] \tag{5.3.22}$$

Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (5.3.22) και έχουμε

$$L^{-1}\left\{W(s)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-2e^{-t}+e^{-2t}\right)$$

Άρα λόγω της (5.3.14)

$$w(t)=\frac{1}{4}\left(1-2e^{-t}+e^{-2t}\right) \tag{5.3.23}$$

Ακολούθως ,παρατηρούμε ότι

$$|w(t)| = \frac{1}{4}\left|1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right| \leq \frac{1 + 2e^{-t} + e^{-2t}}{4} \overset{t\geq 0}{\leq} \frac{1+2+1}{4}$$
$$\Rightarrow |w(t)| \leq 1 \ , \ \forall t \geq 0 \tag{5.3.24}$$

Από τη σχέση (5.3.24) προκύπτει ότι η w είναι φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$.Επιπλέον ,παρατηρούμε ότι

$$w(t) = \frac{1}{4}\left(1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^{-t}\right)^2 - 2e^{-t} + 1\right]$$

Άρα

$$w(t) = \frac{1}{4}(e^{-t} - 1)^2 \ , \ t \geq 0 \tag{5.3.25}$$

Συνεπώς η $w(t)$ είναι μη αρνητική για κάθε $t \geq 0$.Είμαστε λοιπόν σε θέση να υπολογίσουμε και τις συναρτήσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$.Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στη σχέση (5.3.7) για $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_2 = 2$,έχουμε

$$L^{-1}\left\{U_1(s)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{2s^2+3s+1} + 3W(s)\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2}{2s^2+3s+1}\right\} + 3w(t)$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} + 3w(t)$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right\} + 3w(t)$$

$$\overset{(5.3.24)}{=} e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}$$

Άρα τελικά ,Λόγω της (5.3.12) θα έχουμε

$$u_1(t) = \frac{3e^{-t} - 3e^{-2t} + 1}{4}$$

$$\Rightarrow |u_1(t)| = \frac{|3e^{-t} - 3e^{-2t} + 1|}{4} \leq \frac{3e^{-t} + 3e^{-2t} + 1}{4}$$

Άρα εφόσον $t \geq 0$ θα ισχύει

$$|u_1(t)| \leq \frac{7}{4} \ , \ \ \forall t \geq 0 \tag{5.3.26}$$

Λόγω της (5.3.26) ,η u_1 ,είναι φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$.Τέλος ,εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (5.3.8) για $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_2 = 2$,προκύπτει άμεσα ότι

$$L^{-1}\left\{U_2(s)\right\} = L^{-1}\left\{2W(s)\right\} = 2L^{-1}\left\{W(s)\right\} = 2w(t)$$

Οπότε λόγω των (5.3.13) και (5.3.25) έχουμε τελικά

$$u_2(t) = \frac{1}{2}(e^{-1} - 1)^2 \ , \ t \geq 0 \tag{5.3.27}$$

Η u_2 είναι φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$ καθώς και η w είναι φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$ όπως συμπεραίνουμε από τη σχέση (5.3.24) .Διαπιστώνεται ότι οι u_0 ,u_1 ,u_2 είναι φραγμένες συναρτήσεις του $t \geq 0$ και η w πάντοτε μη αρνητική στην περίπτωση που η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1 = 0$ είναι θετική .$\square$

Αν εργαστούμε με παρόμοιο τρόπο κατά τις υπόλοιπες περιπτώσεις της διπλής ρίζας και των συζυγών μιγαδικών ριζών ,οδηγούμαστε στο ίδιο συμπέρασμα για τις u_0 ,u_1 ,u_2 και w . Πράγματι ,στην περίπτωση της διπλής ρίζας ,θα ισχύει $\Delta = 0$.Θέτοντας $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 1$,τότε οι σχέσεις (5.3.4) ,(5.3.7) και (5.3.8) γίνονται :

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} \tag{5.3.28}$$

$$U_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + 2W(s) \tag{5.3.29}$$

$$U_2(s) = W(s) \tag{5.3.30}$$

Η $W(s)$ από την (5.3.28) γράφεται ως εξής :

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{c}{s} + \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} \tag{5.3.31}$$

Όπου οι c, c_1, c_2 είναι σταθερές για τις οποίες ισχύει :

$$c = \left[s\frac{1}{s(s+1)^2} \right]_{s=0} = 1 \tag{5.3.32}$$

$$c_1 = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[(s+1)^2 \frac{1}{s(s+1)^2} \right] \right]_{s=-1} = -1 \tag{5.3.33}$$

$$c_2 = \left[(s+1)^2 \frac{1}{s(s+1)^2} \right]_{s=-1} = -1 \tag{5.3.34}$$

Άρα αντικαθιστώντας τις c, c_1, c_2 από τις (5.3.32) ,(5.3.33) και (5.3.34) στην (5.3.31) προκύπτει ότι

$$W(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \tag{5.3.35}$$

Υπολογίζουμε εκ νέου τη $w(t)$ εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (5.3.35) και λαμβάνουμε

$$w(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} \quad , \quad t \geq 0 \tag{5.3.36}$$

Παρατηρούμε ότι $w(0) = 0$ και $w'(t) = te^{-t} \geq 0$,για κάθε $t \geq 0$.Επομένως η w είναι αύξουσα στο $[0, +\infty]$.Δηλαδή για κάθε $t \geq 0$ θα ισχύει

$w(t) \geq w(0) = 0$.

Επιπλέον για την $w(t)$ από την (5.3.36) ισχύει :

$$|w(t)| = \left|1 - e^{-t} - te^{-t}\right| \leq 1 + \frac{1+t}{e^t} \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 1 \qquad (5.3.37)$$

διότι $\frac{1+t}{e^t} \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0$.Άρα λόγω της (5.3.37) η $w(t)$ στην περίπτωση της διπλής ρίζας ,θα είναι φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$.Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στις (5.3.29) και (5.3.30) λαμβάνοντας υπόψιν την (5.3.36) .Συνεπώς προκύπτουν οι τύποι :

$$u_1(t) = 2 - 2e^{-t} - te^{-t} \ , \ \ t \geq 0 \qquad (5.3.38)$$

$$u_2(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} \ , \ \ 0 \qquad (5.3.39)$$

Λόγω της (5.3.39) ,η $u_2(t)$ είναι φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$ εφόσον ταυτίζεται με τη $w(t)$.Από τη σχέση (5.3.38) έχουμε ότι για τη $u_1(t)$ ισχύει :

$$|u_1(t)| = \left|2 - 2e^{-t} - te^{-t}\right| \leq 2 + \frac{2+t}{e^t} \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 2 \qquad (5.3.40)$$

καθώς $\frac{2+t}{e^t} \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0$.Άρα και η u_1 είναι φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$.□

Στην περίπτωση που ισχύει $\Delta < 0$ και κατά συνέπεια της ύπαρξης συζυγών μιγαδικών ριζών ,θέτοντας $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_2 = 1$,οι (5.3.4) ,(5.3.7) και (5.3.8) διαμορφώνονται ως εξής :

$$W(s) = \frac{1}{s(s-i)(s+i)} \qquad (5.3.41)$$

$$U_1(s) = \frac{1}{s^2+1} \qquad (5.3.42)$$

$$U_2(s) = W(s) \qquad (5.3.43)$$

Από τη σχέση (5.3.41) ,η $W(s)$ γράφεται :

$$W(s) = \frac{c_1}{s-i} + \frac{\bar{c}_1}{s+i} + \frac{c_2}{s} \tag{5.3.44}$$

Όπου

$$c_1 = \left[(s-i)\frac{1}{s(s-i)(s+i)}\right]_{s=i} = -\frac{1}{2} = \bar{c}_1 \tag{5.3.45}$$

$$c_2 = \left[s\frac{1}{s(s-i)(s+i)}\right]_{s=0} = 1 \tag{5.3.46}$$

Άρα αντικαθιστώντας τις σταθερές $c_1, \bar{c}_1, c_2$ από τις (5.3.45) και (5.3.46) στην (5.3.44) έχουμε τελικά :

$$W(s) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right] + \frac{1}{s} \tag{5.3.47}$$

Προς εύρεση της $w(t)$ στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών ,με εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace στην (5.3.47) προκύπτει

$$\begin{aligned} w(t) &= -\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) + 1 \\ &= -\frac{1}{2}(\cos t + i\sin t + \cos t - i\sin t) + 1 \\ &= -\frac{1}{2}(2\cos t) + 1 = -\cos t + 1 \geq 0 \ , \ \forall t \geq 0 \end{aligned} \tag{5.3.48}$$

Λόγω της σχέσης (5.3.48) ,η $w(t)$ είναι μη αρνητική για κάθε $t \geq 0$ και επιπλέον ισχύει :

$$|w(t)| = |1 - \cos t| \leq 1 + |\cos t| \leq 1 \ , \ \forall t \geq 0 \tag{5.3.49}$$

Συνεπώς ,λόγω της (5.3.49) ,η $w(t)$ θα είναι φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$ και στην περίπτωση των συζυγών μιγαδικών ριζών .Από την

(5.3.43) προκύπτει άμεσα ότι η u_2 είναι επίσης φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$.Τέλος ,από την (5.3.42) έχουμε :

$$U_1(s) = \frac{1}{(s-i)(s+i)} = \frac{b}{s-i} + \frac{\bar{b}}{s+1} \tag{5.3.50}$$

Όπου

$$\begin{aligned} b &= \left[(s-i)\frac{1}{(s-i)(s+i)}\right]_{s=i} = -\frac{i}{2} \\ \bar{b} &= \frac{i}{2} \end{aligned} \tag{5.3.51}$$

Αντικαθιστούμε τα $b, \bar{b}$ από την (5.3.51) στην (5.3.50) και προκύπτει :

$$U_1(s) = \frac{-\frac{i}{2}}{s-i} + \frac{\frac{i}{2}}{s+1} \tag{5.3.52}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (5.3.52) :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{i}{2}(e^{-it} - e^{it}) \\ &= \frac{i}{2}(\cos t - i\sin t - \cos t - i\sin t) \\ &= \frac{i}{2}(-2i\sin t) = \sin t \;\; , \;\; t \geq 0 \end{aligned} \tag{5.3.53}$$

Το γεγονός ότι η u_1 είναι φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$ προκύπτει άμεσα από την (5.3.53) .Επομένως οι ιδιότητες των u_0, u_1, u_2, w σύμφωνα με το Λήμμα 5.3.1) επιβεβαιώνονται και στην περίπτωση των συζυγών μιγαδικών ριζών .□

Προς απόδειξη της τελευταίας πρότασης του Λήμματος ,ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη της (5.3.1) στο διάστημα $[0, t]$ και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left[\alpha_2 \dddot{y}(\tau) + \alpha_1 \ddot{y}(\tau) + \dot{y}(\tau)\right] d\tau = \int_0^t z(\tau) d\tau \\
&\Rightarrow \alpha_2 \int_0^t \dddot{y}(\tau) d\tau + \alpha_1 \int_0^t \ddot{y}(\tau) d\tau + \int_0^t \dot{y}(\tau) d\tau = \int_0^t z(\tau) d\tau \\
&\Rightarrow \int_0^t z(\tau) d\tau = \alpha_2 \left[\ddot{y}(t) - \ddot{y}(0)\right] + \alpha_1 \left[\dot{y}(t) - \dot{y}(0)\right] + y(t) - y(0) \\
&\Rightarrow \int_0^t z(\tau) d\tau = \alpha_2 \ddot{y}(t) + \alpha_1 \dot{y}(t) + y(t) - \alpha_2 \ddot{y}(0) - \alpha_1 \dot{y}(0) - y(0)
\end{aligned}$$

Οι όροι $\ddot{y}(0), \dot{y}(0)$ και $y(0)$ συνιστούν σταθερές ποσότητες .Επομένως αν οι συναρτήσεις $\ddot{y}$,$\dot{y}$ και y είναι φραγμένες συναρτήσεις του $t \geq 0$,τότε και η συνάρτηση $\int_0^t z(\tau) d\tau$ είναι επίσης φραγμένη συνάρτηση του $t \geq 0$ □

Ακολούθως,διατυπώνουμε ένα θεώρημα ευστάθειας στο οποίο εμπλέκονται οι τρεις πρώτες παράγωγοι μιας Lyapunov συνάρτησης V και ιδιότητες γραμμικών συνδυασμών τους

Θεώρημα 5.3.1 [14] *Θεωρούμε το σύστημα (5.1.1) όπου η f είναι δύο φορές διαφορίσιμη και $f(0) = 0$.Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $V : D \to \mathbb{R}$ ως υποψήφια συνάρτηση Liapunov για το σύστημα (5.1.1) η οποία είναι τρεις φορές διαφορίσιμη .Αν υπάρχουν σταθερές $\alpha_1 \geq 0$ και $\alpha_2 \geq 0$ έτσι ώστε*

$$\alpha_2 \dddot{V}(x) + \alpha_1 \ddot{V}(x) + \dot{V}(x) < 0 \quad , \quad \forall x \neq 0 \tag{5.3.54}$$

Τότε ικανοποιούνται τα εξής

- **1**) *Για κάθε $\theta > 0$,υπάρχει $\phi > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε αρχική κατάσταση $x(0)$ να ισχύει η παρακάτω συνεπαγωγή*

$$V(x(0)) \leq \phi \Rightarrow V(x(t)) \leq \theta \quad , \quad \forall t \geq 0 \tag{5.3.55}$$

- **2**) *Για κάθε αρχική κατάσταση $x(0)$,ισχύει*

$$x(t) \to 0 \ \ \text{καθώς} \ \ t \to +\infty \tag{5.3.56}$$

Απόδειξη

1) Προς διευκόλυνση ,θα χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις $\dddot{V}$,$\ddot{V}$ και $\dot{V}$ κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (5.1.1) ως έχουν οριστεί σύμφωνα με τις σχέσεις που περιγράφονται στην (5.2.2) .Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης

$$\alpha_2\dddot{V}(x(t)) + \alpha_1\ddot{V}(x(t)) + \dot{V}(x(t)) = -g(x(t)) \tag{5.3.57}$$

Όπου η συνάρτηση g είναι συνεχής και ισχύει

$$\begin{cases} g(x(t)) > 0 & \text{αν } x \neq 0 \\ g(x(t)) = 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases} \tag{5.3.58}$$

Η συνάρτηση g ορίζεται οπως στην (5.3.58) διότι η συνθήκη $f(0) = 0$ για το σύστημα (5.1.1) ,λόγω των σχέσεων (5.2.2) συνεπάγεται ότι οι $\dot{V}(0)$,$\ddot{V}(0)$ και $\dddot{V}(0)$ ισούνται με 0.

Λόγω του Λήμματος 5.3.1 η γενική λύση $V(x(t))$ της εξίσωσης (5.3.57) θα έχει τη μορφή

$$\begin{split} V(x(t)) = V(x(0))u_0(t) + \dot{V}(x(0))u_1(t) + \\ + \ddot{V}(x(0))u_2(t) - \int_0^t w(t-\tau)g(x(\tau))d\tau \end{split} \tag{5.3.59}$$

Όπου οι συναρτήσεις u_0 ,u_1 και u_2 είναι φραγμένες συναρτήσεις του $t \geq 0$ και $w(t) \geq 0$ για $t \geq 0$.Τότε από την (5.3.59) προκύπτει ότι

$$V(x(t)) \leq V(x(0))u_0(t) + \dot{V}(x(0))u_1(t) + \ddot{V}(x(0))u_2(t) \tag{5.3.60}$$

Εφόσον οι u_0 ,u_1 και u_2 είναι φραγμένες συναρτήσεις του $t \geq 0$ και οι ποσότητες $V(x(0))$,$\dot{V}(x(0))$ και $\ddot{V}(x(0))$ είναι σταθερές ,η ζητούμενη σχέση (5.3.55) μπορεί να επακολουθήσει επιλέγοντας $\phi > 0$ αρκετά μικρό ώστε και οι όροι $V(x(0))$,$\dot{V}(x(0))$ και $\ddot{V}(x(0))$ να λαμβάνουν επαρκώς μικρές τιμές .Επομένως αν επιλεχθεί κατάλληλα κάποιο $\phi > 0$ έτσι ώστε $V(x(0)) \leq \phi$,λόγω της (5.3.60) προκύπτει ότι

$$V(x(t)) \leq \theta \ , \ \forall t \geq 0 \quad \theta > 0 \tag{5.3.61}$$

Συνεπώς καταλήγουμε μέσω της (5.3.61) στο ζητούμενο αποτέλεσμα του πρώτου σκέλους του θεωρήματος.

2) Προς εις άτοπον απαγωγή υποθέτουμε ότι οι τροχιές $x(t)$ του συστήματος (5.1.1) δεν καταλήγουν γενικά στην αρχή 0 με την πάροδο του χρόνου t .Δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \geq 0$,να υπάρχει $t' \geq t$ έτσι ώστε

$$\|x(t')\| \geq \varepsilon \tag{5.3.62}$$

Λόγω της σχέσης (5.3.62) συμπεραίνουμε ότι η $\|f(x(t))\|$ είναι μη φραγμένη .Ολοκληρώνοντας την (5.3.57) στο διάστημα $[0,t]$ έχουμε :

$$\alpha_2 \int_0^t \dddot{V}(x(\tau))d\tau + \alpha_1 \int_0^t \ddot{V}(x(\tau))d\tau +$$

$$+ \int_0^t \dot{V}(x(\tau))d\tau = - \int_0^t g(x(\tau))d\tau$$

$$\Rightarrow \alpha_2 \left[\ddot{V}(x(t)) - \ddot{V}(x(0))\right] + \alpha_1 \left[\dot{V}(x(t)) - \dot{V}(x(0))\right] +$$

$$+ V(x(t)) - V(x(0)) = - \int_0^t g(x(\tau))d\tau$$

$$\Rightarrow \alpha_2 \ddot{V}(x(t)) - \alpha_2 \ddot{V}(x(0)) + \alpha_1 \dot{V}(x(t)) - \alpha_1 \dot{V}(x(0)) +$$

$$+ V(x(t)) - V(x(0)) = - \int_0^t g(x(\tau))d\tau$$

Άρα για $t \geq 0$,προκύπτει

$$\begin{aligned} V(x(t)) = V(x(0)) - \alpha_2 \ddot{V}(x(t)) + \alpha_2 \ddot{V}(x(0)) - \alpha_1 \dot{V}(x(t)) +& \\ + \alpha_1 \dot{V}(x(0)) - \int_0^t g(x(\tau))d\tau& \end{aligned} \tag{5.3.63}$$

Όπως αποδείχθηκε στο πρώτο μέρος ,η $V(x(t))$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}^+$.Επομένως και οι συναρτήσεις $\dot{V}(x(t))$ και $\ddot{V}(x(t))$ θα είναι φραγμένες λόγω της (5.3.63) .Όμως από τους ορισμούς 5.2.2 προκύπτει το γεγονός ότι και η $\|f(x(t))\|$ θα είναι φραγμένη για κάθε $t \geq 0$,το οποίο οδηγεί σε άτοπο λόγω της υπόθεσής μας κατά τη σχέση (5.3.62) .Συνεπώς όλες οι τροχιές του συστήματος (5.1.1) κατευθύνονται προς την αρχή 0 του $\mathbb{R}^n$ με την πάροδο του χρόνου t .Άρα το μηδενικό σημείο ισορροπίας του (5.1.1) είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές* .□

5.4 Το θεώρημα ευστάθειας του Gunderson

Η προσέγγιση του Butz που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα ,αποτελεί έναυσμα για περαιτέρω διερεύνηση συνθηκών όπου εμπλέκονται οι παράγωγοι υψηλότερης τάξης μιας υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov για δοθέν δυναμικό σύστημα .Στη μέθοδο που ακολουθεί ,ένα βασικό αποτέλεσμα της θεωρίας διαφορικών εξισώσεων υψηλότερης τάξης ,οδηγεί στη σύσταση ενός λήμματος συγκριτικού τύπου ,το οποίο εμπλέκει παραγώγους τροχιών έως τάξης m .Το συγκεκριμένο λήμμα διατυπώθηκε από τον Gunderson (1970)[16] και οδηγεί στην κατασκευή ενός θεωρήματος ευστάθειας για την περίπτωση ενός μη αυτόνομου συστήματος με τη χρήση υψηλότερης τάξης παραγώγων συναρτήσεων Lyapunov .

Αρχικά θεωρούμε το μη αυτόνομο σύστημα πρώτης τάξης

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \;\; x \in \mathbb{R}^n \;\; t \geq 0 \tag{5.4.1}$$

με αρχική συνθήκη

$$x(t_0) = x_0 \tag{5.4.2}$$

Υποθέτουμε ότι συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής στο σύνολο :

$$D_r = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T < +\infty \;,\; \|x\| \leq r\} \subset \mathbb{R}^n \;\;,\;\; r > 0. \tag{5.4.3}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση τάξης m

$$u^{(m)}(t) = w(t, u, u', ..., u^{(m-1)}) \;\;,\;\; 0 \leq t \leq T < +\infty \tag{5.4.4}$$

με αρχικές συνθήκες

$$u^{(j)}(t_0) = u_j \;\;,\;\; j = 0, 1, 2, ..., m-1 \tag{5.4.5}$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση w της (5.4.4) είναι συνεχής στο $[0, T] \times \mathbb{R}^m$.

Μία λύση του συστήματος (5.4.1) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη (5.4.2) θα συμβολίζεται με $\mathbf{x}(\mathbf{t}, \mathbf{t_0}, \mathbf{x_0})$.Μία λύση της εξίσωσης (5.4.4) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (5.4.5) θα συμβολίζεται με $\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{t_0}, \mathbf{U_0})$.

Πριν τη διατύπωση του συγκριτικού λήμματος ,απαιτείται να δοθούν οι παρακάτω ορισμοί

Ορισμός 5.4.1 *Μια βαθμωτή συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θα λέγεται ότι είναι κλάσης W^* σε ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ αν ισχύει*

$$g(a) \leq g(b)$$

για κάθε $a, b \in S$ για τα οποία ισχύει

$$\begin{cases} a_n = b_n \\ a_i \leq b_i \;\;,\;\; i = 1, 2, ...n-1 \end{cases}$$

Ορισμός 5.4.2 *Μία λύση $u_m(t, t_0, U_0)$ καλείται **δεξιά μέγιστη λύση** της (5.4.4) σε ένα διάστημα $[t_0, a)$ αν ισχύει*

$$u^{(j)}(t) \leq u_m^{(j)}(t, t_0, U_0) \;\;,\;\; t \in [t_0, a) \cap [t_0, a^*)$$

για κάθε λύση $u(t)$ της (5.4.4) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (5.4.5) και ορίζεται στο διάστημα $[t_0, a^*)$.

Στο σημείο αυτό ,είμαστε εις θέση να παραθέσουμε το ακόλουθο λήμμα

Λήμμα 5.4.1 [16] *Θεωρούμε το σύστημα (5.4.1) και την εξίσωση (5.4.4) .Υποθέτουμε ότι η f του (5.4.1) είναι C^{m-1} συνάρτηση στο σύνολο D_r ως έχει οριστεί κατά την (5.4.3) .Ορίζουμε τη συνάρτηση $v : D_r \to \mathbb{R}$*

με $v \in C^{m-1}$ *στο* D_r *.Έστω ότι η* w *της (5.4.4) είναι κλάσης* W^* *για κάθε* $t \geq 0$ *σε ένα σύνολο* S *όπου*

$$S = \left\{(t, v(t,x), \dot{v}(t,x), ..., v^{(m-1)}(t,x)) \ | \ (t,x) \in D_r\right\}$$

Θέτοντας $v^{(j)}(0, x_0) = u_j$ *,ισχυριζόμαστε ότι για* $(t,x) \in D_r$ *ισχύει*

$$v^{(m)}(t,x) \leq w(t, v, v', ..., v^{(m-1)}) \tag{5.4.6}$$

Έστω J *το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της δεξιάς μέγιστης λύσης της (5.4.4)* $u_m(t, 0, U_0)$ *.Τότε θα ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα*

$$v^{(j)}(t, x(t, 0, x_0)) \leq u_m^{(j)}(t, 0, U_0) \tag{5.4.7}$$

για κάθε $t \in J \cap [0, T]$ *.*

Το Λήμμα 5.4.1 είναι απαραίτητο κατά τη διαδικασία της απόδειξης του επόμενου θεωρήματος ευστάθειας

Θεώρημα 5.4.1 [16] *Έστω ότι οι συναρτήσεις* v, f *και* w *ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Λήμματος (5.4.1) .Υποθέτουμε ότι* $f(t, 0) \equiv 0$ *για κάθε* $t \in [0, \infty)$ *και επιπλέον ότι ισχύουν τα εξής*

- *(i)*

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x(t)\|) \leq v(t, x(t)) &\leq \alpha_2(\|x(t)\|) \\ (t, x(t)) \in D_r \quad , &\quad \alpha_1, \alpha_2 \in K \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

- *(ii) Οι λύσεις της (5.4.4) ικανοποιούν την ανισότητα*

$$0 < u(t, 0, V_0) < \alpha_3(v_0) \quad , \quad \alpha_3 \in K \quad , \quad 0 \leq t \leq T < +\infty \tag{5.4.9}$$

όπου

$$v_0 = v(0, x_0) \quad , \quad V_0 = \left\{v(0, x_0), \dot{v}(0, x_0), ..., v^{(m-1)}(0, x_0)\right\} \tag{5.4.10}$$

και

$$\|x_0\| < r_1 \quad , \quad 0 < r_1 < r \tag{5.4.11}$$

Τότε η μηδενική λύση του (5.4.1) είναι ***ευσταθής*** *στο* $t = 0$.

Απόδειξη Ορίζουμε την παρακάτω σύνθεση

$$\delta = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_3^{-1} \circ \alpha_1 \tag{5.4.12}$$

Η συνάρτηση δ της (5.4.12) είναι κλάσης K ως σύνθεση συναρτήσεων κλάσης K (Λήμμα 4.3.1) .Έστω $\varepsilon > 0$ ώστε να ισχύει $\delta(\varepsilon) \geq r_1$.Τότε από την (5.4.9) έχουμε

$$\begin{aligned} &\|x_0\| < \delta(\varepsilon) \\ \overset{(5.4.12)}{\Rightarrow} &\|x_0\| < \alpha_2^{-1} \circ \alpha_3^{-1} \circ \alpha_1(\varepsilon) \\ \Rightarrow &\alpha_2(\|x_0\|) < \alpha_3^{-1} \circ \alpha_1(\varepsilon) \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

Αντικαθιστώντας όπου $x = x_0$ στην (5.4.8) και λαμβάνοντας υπόψιν τις (5.4.10) και (5.4.13) προκύπτει ότι

$$v(0, x_0) \leq \alpha_2(\|x_0\|) < \alpha_3^{-1} \circ \alpha_1(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow v_0 < \alpha_3^{-1} \circ \alpha_1(\varepsilon)$$

Άρα

$$\alpha_3(v_0) < \alpha_1(\varepsilon) \tag{5.4.14}$$

Από την (5.4.9) και την (5.4.14) έχουμε

$$u(t, 0, V_0) < \alpha_3(v_0) < \alpha_1(\varepsilon) \ , \forall \, , t \in [0, \infty) \tag{5.4.15}$$

Εφόσον ικανοποιούνται οι συνθήκες του Λήμματος 5.4.1 ,για $j = 0$ και θέτοντας $V_0 \equiv U_0$,η (5.4.7) γίνεται

$$v(t, x(t, 0, x_0)) \leq u(t, 0, V_0) \ \ , \forall \, t \in [0, \infty) \tag{5.4.16}$$

Επομένως από την (5.4.8) και τις σχέσεις (5.4.15) ,(5.4.16) έχουμε τελικά

$$\alpha_1(\|x(t, 0, x_0)\|) \leq v(t, x(t, 0, x_0)) \leq u(t, 0, V_0) < \alpha_1(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \|x(t,0,x_0)\| < \varepsilon \quad , \ \forall t \in [0,\infty) \quad , \quad \varepsilon > 0 \tag{5.4.17}$$

Σύμφωνα με την (5.4.17) , για $t_0 = 0$ η τροχιά $x(t,0,x_0)$ δε μετακινείται εκτός κάποιας περιοχής με κέντρο την αρχή 0 του $\mathbb{R}^n$ και ακτίνα ε ,με την πάροδο του χρόνου t .Επομένως η μηδενική λύση του (5.4.1) είναι ευσταθής και αποδεικνύεται το ζητούμενο αποτέλεσμα . □

Σημείωση : Με ανάλογο τρόπο ,είναι εφικτό να εξάγουμε συμπεράσματα και για την ασυμπτωτική ευστάθεια της μηδενικής κατάστασης ισορροπίας του (5.4.1) .[16]

Κεφάλαιο 6

Η μέθοδος των Meigoli-Nikravesh

6.1 Διανυσματικές συναρτήσεις Lyapunov

Θεωρούμε το ακόλουθο n-διάστατο δυναμικό σύστημα με μία μηδενική κατάσταση ισορροπίας

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(t,x) \ , \ t \geq 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^n \\ f(t,0) = 0 \ , \ \forall t \geq 0 \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Όπου η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι Lipschitz και συνεχής,έτσι ώστε οι λύσεις του (6.1.1) να εξαρτώνται κατά μοναδικό τρόπο από τις αρχικές τιμές.

Ορισμός 6.1.1 *Η συνάρτηση $v(t,x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ λέγεται **ελαττούμενη** αν υπάρχει συνάρτηση ψ κλάσης K τέτοια ώστε*

$$v(t,x) < \psi(\|x\|) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \textit{και} \ t \geq 0$$

Ορισμός 6.1.2 *Θεωρούμε μία C^1 συνάρτηση $v_1(t,x)$ η οποία είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$.Δηλαδή*

$$v_1(t,0) = 0 \ , \ \forall t \geq 0 \ \textit{και} \ \exists \phi_1 \in K_\infty \ \textit{ώστε}$$

$$v_1(t,x) \geq \phi_1(\|x\|) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall t \geq 0 \tag{6.1.2}$$

Η *Ολική χρονική παράγωγος* της $v_1(t,x)$ κατά μήκος των λύσεων του (6.1.1) ορίζεται :

$$\dot{v}_1(t,x) \overset{\text{ορ}}{=} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}(t,x)\right]^T f(t,x) + \frac{\partial v_1}{\partial t}(t,x) \ , \ t \geq 0 \tag{6.1.3}$$

Παρατήρηση : Αν $v_1 \in C^m$ και $f \in C^{m-1}$, τότε οι έως τάξης m παράγωγοι της $v_1(t,x)$, κατά μήκος της λύσης του (6.1.1) , υπολογίζονται επαναληπτικά με τη χρήση της ακόλουθης σχέσης :

$$v_1^{(j)}(t,x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[v_1^{(j-1)}(t,x)\right] = \left[\frac{\partial v_1^{(j-1)}}{\partial x}(t,x)\right]^T f(t,x) + \frac{\partial v_1^{(j-1)}}{\partial t}(t,x) \tag{6.1.4}$$

με $t \geq 0$, $j = 1, ..., m$

Στη συνέχεια ορίζουμε:

$$v_{j+1}(t,x) \equiv \dot{v}_j(t,x) \ , \ \forall t \geq 0 \ , \ j = 1, ..., m-1 \tag{6.1.5}$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ,το συγκριτικό λήμμα του Gunderson (Λήμμα 5.4.1) ,παρέχει ως βασική προϋπόθεση τη σχέση (5.4.6) .Οπότε δεδομένης της (6.1.5) ,προκύπτει το ακόλουθο σύστημα ανισοτήτων μεταξύ παραγώγων πρώτης τάξης συναρτήσεων Lyapunov

$$\begin{aligned} \dot{v_1} &= v_2 \\ \dot{v_2} &= v_3 \\ &\vdots \\ \dot{v_m} &\leq w(t, v_1, v_2, ..., v_m) \ , \forall\, t \geq 0 \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Η (6.1.6) αποτελεί κίνητρο διαχείρησης των υψηλότερης τάξης παραγώγων ως ένα μέσο κατασκευής διανυσματικών συναρτήσεων [17] .Βασιζόμενοι στη συγκεκριμένη ιδέα ,θεωρούμε τη C^1 διανυσματική συνάρτηση:

$$\boldsymbol{V}(t,x) = [v_1(t,x), v_2(t,x), ..., v_m(t,x)]^T \tag{6.1.7}$$

όπου $t \geq 0$

Κατά τον υπολογισμό της χρονικής παραγώγου της $\boldsymbol{V}$ κατά μήκος της λύσης του (6.1.1) , μπορεί για κάποιο $j \in \mathbb{N}$, η αντίστοιχη συνιστώσα $\dot{v}_j$ να μην είναι C^1 συνάρτηση . Σε αυτήν την περίπτωση , για τον προσδιορισμό της v_{j+1} σύμφωνα με τις (6.1.4) και (6.1.5) , ώστε να συνεχιστεί η κατασκευή της $\boldsymbol{V}$,είναι αδύνατον να χρησιμοποιηθεί η ισότητα $v_{j+1} = \dot{v}_j$. Ωστόσο υπάρχει η δυνατότητα εύρεσης μίας C^1 συνάρτησης v_{j+1} ,η οποία θα αποτελεί άνω φράγμα μιας $\dot{v}_j$ η οποία δεν είναι C^1 συνάρτηση .Δηλαδή θα ισχύει $v_{j+1}(t,x) \geq \dot{v}_j(t,x)$, για κάθε $t \geq 0$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Υπό αυτές τις συνθήκες,η C^1 διανυσματική συνάρτηση

$$\boldsymbol{V}(t,x) = [v_1(t,x), v_2(t,x), ..., v_m(t,x)]^T$$

μπορεί να υλοποιηθεί σταδιακά με την εισαγωγή υψηλότερης τάξης παραγώγων .Η διάσταση m μίας τέτοιας απεικόνισης δεν είναι προκαθορισμένη .Στην πραγματικότητα ,ξεκινώντας από μία C^1 και θετικά ορισμένη συνάρτηση $v_1(t,x)$ και συνεχίζοντας επαναληπτικά σύμφωνα με την ανισότητα

$$v_{j+1}(t,x) \geq \dot{v}_j(t,x) \ , \forall j = 1, 2, ... \ , \forall t \geq 0$$

προκύπτει το ζητούμενο άνω φράγμα για κάθε $\dot{v}_j(t,x)$. Η διαδικασία αυτή,θα διακοπεί στην περίπτωση εύρεσης μιας αρνητικά ορισμένης $\dot{v}_m(t,x)$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,διαμορφώνονται οι επόμενες ανισότητες

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t,x) &\leq v_2(t,x) \\ &. \\ &. \\ &. \\ \dot{v}_{m-1}(t,x) &\leq v_m(t,x) \\ \dot{v}_m(t,x) &\leq -\phi_2(\|x\|) \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

για κάθε $t \geq 0$ όπου $\phi_2 \in \boldsymbol{K}$. Η τελευταία ανισότητα της (6.1.8) , ισχύει,καθώς η $\dot{v}_m(t,x)$ είναι αρνητικά ορισμένη και η ϕ_2 είναι κλάσης K .Γενικότερα επιδιώκουμε όλες οι συνιστώσες της $\boldsymbol{V}(t,x)$ να είναι ελαττούμενες,δηλαδή να υπάρχει μία συνάρτηση $\psi_j \in \boldsymbol{K}$, $j = 1, ..., m$ ώστε

$$v_j(t,x) \leq \psi_j(\|x\|) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall t \geq 0 \tag{6.1.9}$$

Η έννοια της ελαττούμενης συνάρτησης μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση των διανυσματικών συναρτήσεων .Παρατίθεται ο ακόλουθος ορισμός :

Ορισμός 6.1.3 [19] *Μια διανυσματική συνάρτηση* $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *της μορφής (7.1.12) καλείται* ***τοπικά ελαττούμενη*** *αν υπάρχει συνάρτηση* $\psi \in K$ *ώστε να ισχύει*

$$\|V(t,x)\| \leq \psi(\|x\|) \tag{6.1.10}$$

με $\|x\| < r$ *,*$r > 0$ *.Αν η (6.1.10) ισχύει σε όλο το* $\mathbb{R}^n$ *,δηλαδή για* $\|x\| \to \infty$ *,τότε η* V *καλείται* ***ολικά ελαττούμενη***

Τα παραπάνω μας οδηγούν στη διατύπωση ενός βασικού θεωρήματος σε επόμενη ενότητα , όπου παρουσιάζονται συνθήκες που εγγυώνται ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (6.1.1) τόσο ολικά όσο και τοπικά , σύμφωνα με τις ανισότητες που έχουν διαμορφωθεί βάσει του ορισμού και των ιδιοτήτων των συνιστωσών της διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{V}$.

6.2 Ανάπτυξη της μεθόδου

Η μέθοδος των Meigoli και Nikravesh ,χρησιμοποιεί ανισοτικές σχέσεις μεταξύ συνιστωσών διανυσματικών συναρτήσεων Lyapunov για την εξαγωγή αποτελεσμάτων ευστάθειας μιας μηδενικής κατάστασης ισορροπίας του συστήματος (6.1.1) .Η κλασική προσέγγιση Lyapunov που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 4 ,ανάγει ως βασική προϋπόθεση για την (ολική) ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας του συτόνομου συστήματος (6.1.1) την ύπαρξη μιας θετικά ορισμένης συνάρτησης Lyapunov v ,της οποίας η παράγωγος $\dot{v}$ κατά μήκος των τροχιών του συστήματος θα είναι αρνητικά ορισμένη .

Θεωρούμε τη C^1 συνάρτηση $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα (6.1.1) .Η ολική παράγωγος κατά μήκος των τροχιών του (6.1.1) ,ορίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\dot{v}(t,x(t)) \overset{\text{ορ}}{=} \left[\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\right]^T f(t,x) + \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} \;\; , \;\; t \geq 0 \tag{6.2.1}$$

Η κεντρική ιδέα της ανάπτυξης της μεθόδου των Meigoli και Nikravesh ,ασχολείται με την περίπτωση όπου δεν είναι εφικτός ο προσδιορισμός του προσήμου της $\dot{V}$.Εν όψει ενός τέτοιου κωλύματος ,η χρήση της ευθείας μεθόδου Lyapunov δεν οδηγεί στα επιθυμητά συμπεράσματα .Με βάση τις ιδέες των Butz και Gunderson που περιγράφονται στο

Κεφάλαιο 5 ,επιχειρείται η διατύπωση ενός θεωρήματος κατά το οποίο επιστρατεύοντας τις υψηλότερης τάξης παραγώγους της v γενικεύονται τα παραπάνω αποτελέσματα .Οι υψηλότερης τάξης χρονικές παράγωγοι της v κατά μήκος των τροχιών του (6.1.1) μπορούν να υπολογιστούν μεταβατικά με τη χρήση της παρακάτω σχέσης προνοώντας ότι οι v και f είναι αρκούντως λείες .Επομένως θα ισχύει :

$$v^{(j)}(t,x(t)) \overset{\text{ορ}}{=} \left[\frac{\partial v^{(j-1)}(t,x)}{\partial x}\right]^T f(t,x) + \frac{\partial v^{(j-1)}(t,x)}{\partial t} \tag{6.2.2}$$

για $t \geq 0$ και $j = 1, 2, ...$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των Butz και Gunderson ,θα επικεντρωθούμε σε ιδιότητες γραμμικών συνδυασμών της v και των υψηλότερης τάξης παραγώγων της .Αρχικά υποθέτουμε ότι η $\dot{v}$ δεν είναι αρνητικά ορισμένη και για δοθέντα θετικό ακέραιο αριθμό m ισχύει το εξής

$$v^{(m)}(t,x(t)) + \alpha_{m-1}v^{(m-1)}(t,x(t)) + ... + \alpha_0 v(t,x(t)) = d_m(t,x(t)) \tag{6.2.3}$$

για κάθε $t \geq 0$,όπου $\alpha_i \geq 0$ για $i = 0, ..., m-1$ και η d_m είναι μία αρνητικά ημιορισμένη συνάρτηση ,δηλαδή ισχύει

$$d_m(t,x(t)) \leq 0 \quad , \quad \forall t \geq 0 \tag{6.2.4}$$

Ακολούθως επιλέγουμε την τροχιά $x(t,t_0,x_0)$ και συγκρίνουμε την τιμή $v(t,x(t,t_0,x_0))$ η οποία ικανοποιεί την (6.2.3) με μία συνάρτηση $u(t)$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω

$$u^{(m)}(t) + \alpha_{m-1}u^{(m-1)}(t) + ... + \alpha_1\dot{u}(t) + \alpha_0 u(t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \tag{6.2.5}$$

$$u^{(i)}(t_0) = v^{(i)}(t_0,x_0) \quad , \quad \forall i = 0, 1, 2, ..., m-1 \tag{6.2.6}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (6.2.5) γράφεται

$$s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + ... + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0 \tag{6.2.7}$$

Αν επικεντρωθούμε στην ειδική περίπτωση όπου όλες οι λύσεις της (6.2.7) είναι αρνητικές πραγματικές ,έχουμε την ακόλουθη σχέση

$$v(t,x(t,t_0,x_0)) \leq u(t) \;\; y, \quad \forall t \geq t_0 \tag{6.2.8}$$

καθώς η d_m στην (6.2.3) είναι μη θετική .Επιπλέον από την (6.2.5) προκύπτει ότι $u(t) \to 0$,καθώς $t \to +\infty$.Συνεπώς λόγω της (6.2.8) ισχύει $v(t, x(t, t_0, x_0)) \to 0$,καθώς $t \to +\infty$ και το σύστημα (6.1.1) έχει ασυμπτωτικά ευσταθή μηδενική κατάσταση ισορροπίας .

Αν αγνοήσουμε την παραπάνω συνθήκη ,παρατηρούμε ότι η (6.2.8) δεν ισχύει .Ως αντιπαράδειγμα ([20]) ,χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις $v(t, x(t))$ και $u(t)$ για τις οποίες ισχύει

$$\begin{aligned} \ddot{v}(t, x(t)) + 2\dot{v}(t, x(t)) + 2v(t, x(t)) = -20e^{-4t} < 0 \\ t \geq 0 \ , \ \ v(0) = 1 \ \ , \ \ \dot{v}(0) = -1 \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) + 2u(t) = 0 \\ t \geq 0 \ , \ \ u(0) = 1 \ \ , \ \ \dot{u}(0) = -1 \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

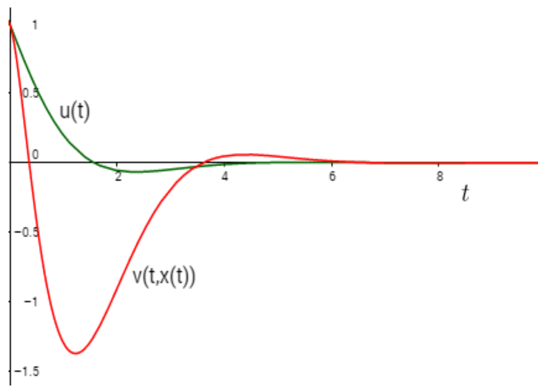
Από την (6.2.10) εξάγεται η χαρακτηριστική εξίσωση $s^2 + 2s + 2 = 0$ η οποία έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες : $s_1 = -1 + i$ και $s_2 = -1 - i$.Εφαρμόζοντας τον ευθύ και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στις (6.2.9) και (6.2.10) προκύπτουν για κάθε $t \geq 0$ οι παρακάτω λύσεις :

$$\begin{cases} u(t) = e^{-t}\cos t \\ v(t, x(t)) = 3u(t) - 2e^{-4t} - 6e^{-t}\sin t \end{cases} \tag{6.2.11}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.2.11) όπου $t = 4$ έχουμε

$$u(4) = e^{-4}\cos 4 < 0$$

$$v(4, x(4)) = 3u(4) - 2e^{-16} - 6e^{-t}\sin 4 \simeq 0.047 > 0$$



Σχήμα 5 : Γραφικές παραστάσεις των u και v ως προς t

Επομένως ισχύει $v(4) > u(4, x(4))$,αποτέλεσμα που αντίκειται στην (6.2.8) .Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει διότι λόγω των μιγαδικών λύσεων της χαρακτηριστικής εξίσωσης ,προκύπτουν οι λύσεις της (6.2.11) ,οι οποίες με την πάροδο του χρόνου t ,μπορούν να ταλαντεύονται και να αλλάζουν πρόσημο ακόμα και όταν το δεξί μέλος της (6.2.8) παραμένει αρνητικό .Στο παραπάνω κοινό γράφημα των u και v ως προς το χρόνο t (Σχήμα 5) ,διαφαίνεται ότι για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ,η τιμή της v είναι μεγαλύτερη από εκείνη της u ,ωστόσο παρατηρούμε ότι σε βάθος χρόνου ,οι δύο τιμές συμπίπτουν . □

Στόχος είναι η εξαγωγή αποτελεσμάτων ευστάθειας για το (6.1.1) ασχέτως ισχύος της (6.2.8) .Θα πρέπει επομένως να διευρύνουμε τον περιορισμό για τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (6.2.7) .Θεωρούμε την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov v για το σύστημα (6.1.1) η οποία είναι θετικά ορισμένη και C^1 .Υποθέτουμε ότι οι παράγωγοι της v είναι απροσδιορίστου προσήμου αλλά ικανοποιείται η σχέση (6.2.3) .Αρχικά παρατηρούμε ότι η (6.2.3) μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν μια εξίσωση χώρου καταστάσεων ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος .Ορίζουμε τις μεταβλητές κατάστασης ως εξής

$$v_i(t, x(t)) \equiv v^{(i-1)}(t, x(t)) \tag{6.2.12}$$

για κάθε $t \geq 0$ και $i = 1, 2, ..., m$.Στη συνέχεια ορίζουμε τη C^1 διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{V} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ως ακολούθως :

$$\mathbf{V}(t, (x(t)) \overset{\text{ορ}}{=} [v_1(t, x(t))\ v_2(t, x(t))\ ...\ v_m(t, x(t))]^T \quad , \; t \geq 0 \tag{6.2.13}$$

Θέτοντας $v = v_1(t, x)$,οι (6.2.3) και (6.2.12) μπορούν να αποτυπωθούν ταυτόχρονα μέσω της ακόλουθης σχέσης πινάκων

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t,x) \\ \dot{v}_2(t,x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{v}_m(t,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t,x) \\ v_2(t,x) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m(t,x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_m(t,x) \end{bmatrix}$$

$$t \geq 0 \;\; , \;\; \alpha_i \geq 0 \;\; , \;\; i = 0, ..., m-1 \tag{6.2.14}$$

Πράγματι ,οι σχέσεις που προκύπτουν από τις πρώτες $m - 1$ γραμμές

,ανάγονται στις ισότητες που ορίστηκαν σύμφωνα με την (6.2.12) και η σχέση που προκύπτει από τη γραμμή m ,ταυτίζεται με την (6.2.3) δεδομένης της (6.2.12) λύνοντας ως προς $\dot{v}_m(t, x(t)) = v^{(m)}(t, x(t))$.

Η συγκεκριμένη μέθοδος απαιτεί μόνο η πρώτη συνιστώσα v_1 της **V** από την (6.2.13) να είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση .Οι υπόλοιπες συνιστώσες v_i , $i = 2, ..., m$ μπορούν να παραμείνουν απροσδιόριστες .Η (6.2.14) μπορεί να επεκταθεί σε μια γενική μορφή ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα [18],[19] :

- **1**) Αρχικά επιλέγεται μία C^1 και θετικά ορισμένη συνάρτηση v_1 της οποίας η ολική χρονική παράγωγος κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (6.1.1) υπολογίζεται με τη χρήση της (6.2.1)

- **2**) Εφόσον δεν είναι γνωστό αν γενικά η $\dot{v}_1$ είναι C^1 συνάρτηση ,μπορεί να βρεθεί μία άλλη συνάρτηση $v_2 \in C^1$ η οποία θα είναι άνω φράγμα της $\dot{v}_1$.Επομένως θα ισχύει

$$v_2(t, (x(t)) > \dot{v}_1(t, x(t)) \quad , \quad \forall t \geq 0 \tag{6.2.15}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά αξιοποιώντας το ενδεχόμενο οι παράγωγοι των συνιστωσών της **V** να μην είναι C^1 συναρτήσεις ,οδηγούμαστε στις ανισότητες :

$$v_{i+1}(t, x(t)) \geq \dot{v}_i(t, x(t)) \ , \ \forall t \geq 0 \tag{6.2.16}$$

- **3**) Ορίζουμε για κάθε $t \geq 0$ την ακόλουθη συνάρτηση :

$$d_1(t, x(t)) \equiv \dot{v}_1(t, x(t)) - v_2(t, x(t)) \tag{6.2.17}$$

Λόγω της (6.2.15) ισχύει $d_1(t, x(t)) < 0$,για κάθε $t \geq 0$.Οι υπόλοιπες C^1 συναρτήσεις $v_i(t, x(t))$, $i = 3, 4, ..., m-1$ και οι πιθανόν μη λείες $d_i(t, x(t))$, $i = 2, 3, ..., m$ υπολογίζονται με παρόμοιο τρόπο μέσω της ακόλουθης γενικής μορφής

$$d_i(t, x(t)) \equiv \dot{v}_i(t, x(t)) - v_{i+1}(t, x(t)) \quad , \quad i = 2, 3, ..., m-1 \tag{6.2.18}$$

για κάθε $t \geq 0$.Λαμβάνοντας υπόψιν την (6.2.16) ,προκύπτει ότι σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία κατασκευής τους ,οι συναρτήσεις d_i θα είναι αρνητικά ημιορισμένες ,για κάθε $i = 1, ..., m$.

Συνοψίζοντας ,η αρχική σχέση (6.2.17) που προκύπτει από την (6.2.15) ,καθώς και οι ισότητες της (6.2.18) ,μπορούν να συμπτυχθούν στην παρακάτω έκφραση :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t,x) \\ \dot{v}_2(t,x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{v}_m(t,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t,x) \\ v_2(t,x) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m(t,x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1(t,x) \\ d_2(t,x) \\ \vdots \\ \vdots \\ d_m(t,x) \end{bmatrix}$$

$$t \geq 0 \ , \ \alpha_i \geq 0 \ , \ i = 0, ..., m-1 \tag{6.2.19}$$

Όπου η $v = v_1(t, x(t))$ είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση και επιπλέον ισχύει

$$d_i(t, x(t)) \leq 0 \ , \ t \geq 0 \ , \ i = 1, 2, ..., m \tag{6.2.20}$$

Γράφοντας αναλυτικά τις σχέσεις που προκύπτουν από τις γραμμές της (6.2.19) , για $t \geq 0$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t, x(t)) &= v_2(t, x(t)) + d_1(t, x(t)) \\ \dot{v}_2(t, x(t)) &= v_3(t, x(t)) + d_2(t, x(t)) \\ &\vdots \\ \dot{v}_m(t, x(t)) &= -\alpha_0 v_1(t, x(t)) - ... - \alpha_{m-1} v_m(t, x(t)) + d_m(t, x(t)) \end{aligned} \tag{6.2.21}$$

Από τις (6.2.20) και (6.2.21) προκύπτουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t, x(t)) & \leq v_{i+1}(t, x(t)) \ , \ i = 1, 2, ..., m-1 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad t \geq 0 \\ \dot{v}_m(t, x(t)) & \leq -\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i-1} v_i(t, x(t)) \end{cases} \tag{6.2.22}$$

Υποθέτοντας ότι ισχύει $v_i(t, 0) = d_i(t, 0)$,για κάθε $t \geq 0$ και $i = 1, 2, ..., m$,διαπιστώνουμε ότι ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος (6.2.19) συμπίπτει με τη μηδενική κατάσταση ισορροπίας του (6.1.1)

.Οι αρνητικά ημιορισμένες συναρτήσεις d_i θεωρούνται μη θετικές είσοδοι .Για την ανάλυση της ευστάθειας του (6.1.1) ορίζουμε την (6.2.19) ως εξίσωση σύγκρισης .Συνεπώς δεδομένης της ισχύος των (6.2.19) και (6.2.20) το πρόβλημα που ανακύπτει ,έγκειται στην αναζήτηση επιπλέον συνθηκών οι οποίες θα οδηγήσουν στην απόδειξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας της μηδενικής κατάστασης ισορροπίας του (6.1.1) .Οι εν λόγω συνθήκες ,παρέχονται από το κάτωθι θεώρημα .

Θεώρημα 6.2.1 [18],[20] *Θεωρούμε τη C^1 διανυσματική συνάρτηση m συνιστωσών $\mathbf{V}(t, x(t))$ ως έχει οριστεί από τη σχέση (6.2.13) .Η παράγωγος $\dot{\mathbf{V}}$ κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (6.1.1) ικανοποιεί την (6.2.19) ,για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα*

- ***(i)*** *Η χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.7) του συστήματος (6.2.19) είναι Hurwitz ,δηλαδή όλες οι λύσεις της βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο .*

- ***(ii)*** *Ισχύει η σχέση (6.2.20) σύμφωνα με την οποία οι είσοδοι d_i ,$i = 1, ..., m$ είναι αρνητικά ημιορισμένες συναρτήσεις .*

- ***(iii)*** *Η πρώτη συνιστώσα $v_1(t, x(t))$ της **V** είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη ,δηλαδή ισχύει $v_1(t, 0) = 0$ και για κάποια συνάρτηση $\varphi_1 \in K_\infty$,η v_1 ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα*

$$v_1(t, x(t)) \geq \varphi_1(\|x(t)\|) \;,\; \forall x \in \mathbb{R}^n \;,\; t \geq 0 \tag{6.2.23}$$

- ***(iv)*** *Η **V** είναι ολικά ελαττούμενη ,δηλαδή υπάρχει $\varphi_2 \in K$ τέτοια ώστε*

$$\|\mathbf{V}(t, x(t))\| \leq \varphi_2(\|x(t)\|) \;,\; \forall x \in \mathbb{R}^n \;,\; t \geq 0 \tag{6.2.24}$$

Αν ικανοποιούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις τότε :

- ***a)*** *Η μηδενική κατάσταση ισορροπίας του (6.1.1) είναι* ***ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής*** *.*

- ***b)*** *Αν οι συνθήκες (i) έως (iv) ικανοποιούνται τοπικά ,δηλαδή σε μία φραγμένη περιοχή $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,τότε η μηδενική κατάσταση ισορροπίας του (6.1.1) είναι* ***ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής*** *.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1 παραλείπεται .Παραπέμπουμε στο άρθρο [18] της βιβλιογραφίας όπου παρατίθεται αναλυτικά .Βασικό περιορισμό της συγκεκριμένης πρώιμης μορφής του βασικού θεωρήματος ,αποτελεί η απαίτηση για τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος (6.2.24) να είναι Hurwitz .Στην επόμενη ενότητα ,διατυπώνεται το βασικό θεώρημα με λιγότερους περιορισμούς .Συγκεκριμένα η συνθήκη Hurwitz ,αντικαθίσταται από την προϋπόθεση ότι οι συντελεστές α_i , $i = 1, ..., m$ θα πρέπει να είναι μη αρνητικοί .Αναλυτικότερη σύγκριση μεταξύ των δύο μορφών του θεωρήματος ασυμπτωτικής ευστάθειας ,θα πραγματοποιηθεί παρακάτω μέσω ενός πορίσματος που προκύπτει από το Θεώρημα 6.2.1 .

6.3 Η τελική μορφή του βασικού θεωρήματος

Θεώρημα 6.3.1 [19],[21] *Έστω μία C^1 διανυσματική συνάρτηση m συνιστωσών $\boldsymbol{V}(t,x) = [v_1(t,x), v_2(t,x), ..., v_m(t,x)]^T$ με τις εξής ιδιότητες*

- ***(i)*** *Η πρώτη συνιστώσα v_1 της* ***V*** *είναι* ***θετικά ορισμένη*** *,δηλαδή ικανοποιείται η (6.1.2).*
- ***(ii)*** *Όλες οι συνιστώσες $v_j(t,x)$ είναι* ***ελαττούμενες*** *,δηλαδή ισχύει η (6.1.9) για κάθε $j = 1, ..., m$.*

α) *Αν υπάρχει μία συνάρτηση $\phi_2 \in K$ και ένας* ***κάτω τριγωνικός*** *πίνακας*

$$A = [\alpha_{ij}]_{m\times m}$$

με την ιδιότητα

$$\begin{aligned} &\alpha_{ij} = 0, \ \textit{αν } i < j \\ &\alpha_{ij} > 0, \ \textit{αν } i = j \\ &\alpha_{ij} \geq 0, \ \textit{αν } i > j \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

ώστε να ικανοποιούνται ολικά οι ακόλουθες διαφορικές ανισότητες κατά μήκος των τροχιών του (6.1.1)

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \alpha_{ij} & \ddots & 0 & \vdots \\ \alpha_{m-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ \alpha_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{m,m-1} & \alpha_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{v}_{m-1} \\ \dot{v}_m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \\ -\phi_2(\|x\|) \end{bmatrix} \tag{6.3.2}$$

*Τότε για κάθε $t \geq 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n$, το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του (6.1.1) είναι **ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές**.*

β)*Αν οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται τοπικά ,δηλαδή για $\|x\| < r$, για δοθέν $r > 0$, τότε το $x = 0$ είναι **ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές**.*

$1^η$ **Παρατήρηση** : Για $m = 1$, το Θεώρημα 6.3.1 ,συμπίπτει με το Θεώρημα 4.4.1 και το Πόρισμα 4.4.1 που προκύπτει από αυτό .Πράγματι ,στην περίπτωση αυτή ,ο πίνακας A διαμορφώνεται σε πίνακα ενός αυστηρά θετικού στοιχείου ,του $\alpha_{11} > 0$.Η διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{V}$ θα είναι διάστασης 1 με μοναδική συνιστώσα τη $v_1(t, x(t))$.Συνεπώς θα ισχύει $\boldsymbol{V}(t, x) = v_1(t, x)$ και η (6.3.2) διαμορφώνεται ως εξής

$$\alpha_{11}\dot{v}_1(t, x(t)) \leq -\phi_2(\|x(t)\|)$$

$$\Leftrightarrow \dot{v}_1(t, x(t)) \leq -\frac{\phi_2(\|x(t)\|)}{\alpha_{11}} \ , \ t \geq 0$$

Εφόσον $\alpha_{11} > 0$ και $\phi_2 \in K$ θα ισχύει κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (6.1.1) ότι $\dot{v}_1(t, x(t)) < 0$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.Άρα η $\dot{v}_1$ είναι αρνητικά ορισμένη .Συνοφίζοντας ,η v_1 είναι θετικά ορισμένη και ελαττούμενη εξ'υποθέσεως του θεωρήματος .Επιπλέον η παράγωγός της v_1 κατά μήκος των τροχιών του (5.1.1) ,$\dot{v}_1$ είναι αρνητικά ορισμένη σε όλο το χώρο $\mathbb{R}^n$.Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.4.1 σε όλο το $\mathbb{R}^n$,οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι το μηδενικό σημείο ισορροπίας του (6.1.1) είναι *ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές*

$2^η$ **Παρατήρηση** : Μία ειδική μορφή της (6.3.2) είναι η ακόλουθη

$$\dot{v}_j(t,x(t)) = v_{j+1}(t,x(t)), \;\; j = 1,...,m-1$$

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_1^{(j)}(t,x(t)) \leq -\phi_2(\|x(t)\|) \tag{6.3.3}$$

$$\forall\, t \geq 0$$

Οι πρώτες ισότητες ισχύουν ,προνοώντας ότι $\dot{v}_j \in C^1$, για κάθε $j = 1,...,m-1$ και θέτοντας στην (6.3.2) $\alpha_{ii} = 1$ για $i = 1,...,m-1$ και $\alpha_{ij} = 0$ για $i > j$ με $i = 2,...,m-1$ και $j = 1,...,m-2$.Δεδομένων αυτών,προκύπτει η μετέπειτα ανισότητα από την τελευταία γραμμή στη σχέση (6.3.2) , θέτοντας $\alpha_{mj} = \alpha_j$, $j = 1,...m$.Δηλαδή αρχής γενομένης από τη $v_1(t,x(t))$, μπορούν μεταβατικά να υπολογιστούν όλες οι υπόλοιπες συνιστώσες της διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{V}$,που είναι στην ουσία οι παράγωγοι της v_1 μέχρι τάξης $m-1$.

Πόρισμα 6.3.1 *Η εφαρμογή του Θεωρήματος 6.3.1 για ένα αυτόνομο σύστημα με m C^1 αυτόνομες συναρτήσεις $v_j(x)$ ανεξάρτητες του χρόνου, απαιτεί απλώς να ισχύει $v_j(0) = 0$, $j = 1,...,m$ αντί της (6.1.9).*

Απόδειξη: Κάθε C^1 συνάρτηση είναι και συνεχής .Αν λοιπόν για κάθε $j = 1,...,m$ ισχύει $v_j(0) = 0 \Rightarrow v_j(x) \leq \psi_j(\|x\|)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχοντας επιλέξει τη συνάρτηση $\psi_j \in \boldsymbol{K}$ να είναι $\psi_j(\rho) \equiv sup_{\|x\| \leq \rho}(v_j(x))$ με $j = 1,...,m$.Οπότε καλύπτεται η ιδιότητα των ελαττούμενων συνιστωσών της αυτόνομης διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{V}(x) = [v_1(x), v_2(x), ..., v_m(x)]$.Τηρουμένων των υπολοίπων συνθηκών του Θεωρήματος 6.3.1 τοπικά ή ολικά στην περίπτωση των C^1 αυτόνομων συναρτήσεων $v_j(x)$, $j = 1,...,m$ προκύπτει ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια ή ολική ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια αντίστοιχα . □

Επιχειρώντας να συγκρίνουμε την τελική μορφή του βασικού Θεωρήματος με την πρώιμη που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα ,παραθέτουμε αρχικά ένα πόρισμα που προκύπτει από το Θεώρημα

6.2.1

Πόρισμα 6.3.2 [18],[19] *Έστω μία C^1 m-διανυσματική συνάρτηση **V** για την οποία,κατά μήκος των τροχιών του (6.1.1) ισχύει*

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t,x(t)) \\ \dot{v}_2(t,x(t)) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{v}_m(t,x(t)) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & ... & ... & ... & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t,x(t)) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m(t,x(t)) \end{bmatrix}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall t \geq 0 \ , \ \alpha_i \geq 0 \ , \ i = 0,...,m-1 \tag{6.3.4}$$

Αν επίσης

- ***i)*** *Η $v_1(t,x(t))$ είναι θετικά ορισμένη,δηλαδή ικανοποιείται η (6.1.2)*
- ***ii)*** *Θέτοντας*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & ... & ... & ... & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix}$$

  Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A

$$|sI - A| = s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + ... + \alpha_1 s + \alpha_0$$

  *είναι **Hurwitz**,δηλαδή οι ρίζες του βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο.*

- ***iii)*** $|v_j(t,x(t))| \leq \psi_j(\|x(t)\|) \ , \ \psi_j \in K \ , \ j = 1,...,m$

*Τότε η μηδενική κατάσταση ισορροπίας $x = 0$ του (6.1.1) είναι **ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής***

Απόδειξη: Η προϋπόθεση **iii** , συνεπάγεται τη σχέση (6.1.9) που απαιτεί όλες οι συνιστώσες της $\boldsymbol{V}$ να είναι ελαττούμενες .Λαμβάνοντας υπόψιν επιπλέον και τη σχέση (6.3.4) , προκύπτει το εξής

$$\begin{aligned}
\dot{v}_m(t,x(t)) &\leq -\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j v_{j+1}(t,x(t)) - \alpha_0 v_1(t,x(t)) \\
&\Rightarrow 0 \geq \dot{v}_m(t,x(t)) + \sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j v_{j+1}(t,x(t)) + \alpha_0 v_1(t,x(t)) \\
&\Rightarrow 0 \overset{(6.1.9)}{\geq} \dot{v}_m(t,x(t)) + \sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j \dot{v}_j(t,x(t)) + \alpha_0\phi_1(\|x(t)\|) \ , \ \ t \geq 0
\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

Η συνάρτηση ϕ_1 είναι κλάσης K .Άρα αφού $\alpha_0 > 0$ και η συνάρτηση $a_0\phi_1$ θα είναι κλάσης K.Γράφοντας την ανισότητα (6.3.5) με μορφή πινάκων :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_{m-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{v}_m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \\ -\alpha_0\phi_1(\|x\|) \end{bmatrix}$$

προκύπτει ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 6.3.1 θέτοντας

- $\alpha_{ii} = 1$ για $i = 1, ..., m$
- $\alpha_{ij} = 0$ όταν $i > j$ για $i = 2, ..., m-1$,$j = 1, ..., m-2$
- $\alpha_{mj} = a_j \geq 0$ για $j = 1, ..., m-1$

Συνεπώς το μηδενικό σημείο ισορροπίας του (6.1.1) είναι ***ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές***. $\square$

3^{η} **Παρατήρηση**:Συγκρίνοντας το Θεώρημα 6.3.1 με το Πόρισμα 6.3.2 , διαπιστώνεται ότι η (6.3.4) αποτελεί μία ειδική μορφή της (6.3.2) . Ωστόσο οι υποθέσεις του Θεωρήματος 6.3.1 δεν απαιτούν τη συνθήκη Hurwitz που επιβάλλεται στο Πόρισμα 6.3.2 και επιπλέον περιορίζουν την υπόθεση ***iii*** του Πορίσματος 6.3.2 ,στις ανισότητες της (6.1.9) .

Μέσω του Θεωρήματος 6.3.1 ,θεμελιώνεται μία ιδιότητα ασυμπτωτικής ευστάθειας σύμφωνα με τη σχέση (6.3.2) .Οι Meigoli και Nikravesh ,αξιοποιώντας τα δεδομένα της τελικής μορφής της αντίστοιχης μεθόδου (Θεώρημα 6.3.1) ,οδηγούνται στη διατύπωση του κάτωθι θεωρήματος σύμφωνα με το οποίο προκύπτει μία κατάλληλη συνάρτηση Lyapunov για την ανάλυση ευστάθειας ενός μη γραμμικού συστήματος .

Θεώρημα 6.3.2 *Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 6.3.1 ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$s(t,x(t)) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj} v_j(t,x(t)) \ , \ \ t \geq 0 \tag{6.3.6}$$

Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

- *Είναι ελαττούμενη*
- *Ισχύει* $s(t,0)=0$ *και* $s(t,x)>0$ *για κάθε* $x \neq 0$ *και* $t \geq 0$.
- *Η* $\dot{s}$ *είναι αρνητικά ορισμένη*

Απόδειξη: Από τον Ορισμό 4.3.1 , προκύπτει ότι το άθροισμα συναρτήσεων κλάσης K είναι επίσης συνάρτηση κλάσης K . Οπότε λόγω του Ορισμού 6.1.1 , το άθροισμα ελαττούμενων συναρτήσεων είναι επίσης ελαττούμενη συνάρτηση.

Επιπλέον ισχύει

$$s(t,0) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj} v_j(t,0) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj} 0 = 0$$

σύμφωνα με τον ορισμό των v_j.

Από την τελευταία γραμμή της (6.3.2) προκύπτει το εξής

$$\dot{s}(t, x(t)) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj} \dot{v}_j(t, x(t)) \leq -\phi_2(\|x(t)\|) \ , \ \ t \geq 0$$

$$\Rightarrow \phi_2(\|x\|) \leq -\dot{s}(t, x)\, , \, \forall\, t \geq 0 \tag{6.3.7}$$

Επειδή $\phi_2 \in K$, από την (6.3.7) ,προκύπτει ότι η $\dot{s}$, είναι αρνητικά ορισμένη.

Ολοκληρώνουμε την (6.3.7) κατά μήκος μίας τροχιάς $x(t)$ ξεκινώντας με $x(t_0) = x_0$ και προκύπτει ότι

$$\int_{t_0}^{\infty} \phi_2(\|x(t)\|)dt \leq -\int_{t_0}^{\infty} \dot{s}\,(t, x(t))\, dt$$

$$= -\left(\lim_{t \to \infty} s\,(t, x(t)) - s\,(t_0, x(t_0)) \right)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{\infty} \phi_2(\|x(t)\|)dt \leq s(t_0, x_0) - \lim_{t \to \infty} s\,(t, x(t)) \tag{6.3.8}$$

Από το Θεώρημα 6.3.1 , προκύπτει ότι η μηδενική κατάσταση ισορροπίας του (6.1.1) είναι *ασυμπτωτικά ευσταθής*,το οποίο σημαίνει ότι όλες οι τροχιές καταλήγουν με την πάροδο του χρόνου,στο μηδενικό σημείο ισορροπίας.Δηλαδή ισχύει

$$\lim_{t \to \infty} s\,(t, x(t)) = 0 \tag{6.3.9}$$

Από τις (6.3.8) και (6.3.9) , λαμβάνουμε

$$0 < \int_{t_0}^{\infty} \phi_2(\|x(t)\|)dt \leq s(t_0, x_0) \ , \ \forall x_0 \neq 0 \tag{6.3.10}$$

Η παραπάνω διαδικασία που οδηγεί στην εξαγωγή της (6.3.10) , είναι ανεξάρτητη του t_0 . Συνεπώς η (6.3.10) , ισχύει για κάθε t_0 και x_0 . Επομένως ισχύει $s(t, x(t)) > 0$, για κάθε $t \geq 0$ και $x \neq 0$.

4η **Παρατήρηση** : Το Θεώρημα 6.3.2 υποδηλώνει ότι είναι εφικτό να χρησιμοποιηθούν υψηλότερης τάξης παράγωγοι μιας δεδομένης υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov v_1 προς εύρεση μίας κατάλληλης Lyapunov συνάρτησης s για την ανάλυση ευστάθειας του συστήματος (6.1.1) .Το Πόρισμα 6.3.1 επιτρέπει την ισχύ του αποτελέσματος του Θεωρήματος 6.3.2 και στην περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων όπου θα ορίζεται η συνάρτηση $s(x(t)) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj} v_j(x(t))$ η οποία θα είναι φθίνουσα με $s(0) = 0$ και η $\dot{s}(x(t))$ θα είναι αρνητικά ορισμένη .Σημειωτέον ότι το Θεώρημα 6.3.2 δεν έχει λόγο ύπαρξης χωρίς τη χρήση του αποτελέσματος του Θεωρήματος 6.3.1 καθώς ελλείψει των συνθηκών του η s δεν είναι απαραίτητα συνάρτηση Lyapunov .Η σημασία του Θεωρήματος 6.3.2 ,έγκειται στο γεγονός ότι διαθέτοντας μία κατάλληλη Lyapunov συνάρτηση $v_1(t, x)$ για το σύστημα (6.1.1) ,μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις υψηλότερης τάξης χρονικές παραγώγους $v_1^{(i)}$ κατασκευάζοντας ένα γραμμικό τους συνδυασμό με μη αρνητικούς συντελεστές ώστε να προκύψει μία νέα συνάρτηση Lyapunov $s(t, x)$ με τη χρήση της οποίας προκύπτει μία ευρύτερη περιοχή έλξης για το σύστημα .Το αποτέλεσμα αυτό ,διαφαίνεται αναλυτικά στο Παράδειγμα 7.3.1 του Κεφαλαίου 7 .
□

6.4 Η απόδειξη του βασικού θεωρήματος

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1 , απαιτούνται τρία Λήμματα:

Λήμμα 6.4.1 *Υπό τις συνθήκες του Θεωρήματος 6.3.1 , υπάρχει ένας κάτω τριγωνικός πίνακας $Q = [q_{ij}]_{m\times m}$ με την ίδια ιδιότητα που διέπει τον πίνακα A στην σχέση (6.3.1) , δηλαδή*

$$\begin{aligned} q_{ij} &= 0 \ , \ \text{αν } i < j \\ q_{ij} &> 0 \ , \ \text{αν } i = j \\ q_{ij} &\geq 0 \ , \ \text{αν } i > j \end{aligned}$$

έτσι ώστε

- ***(a)**Αν $\|x(t)\| \geq b \geq 0$, για κάθε $t \in [t_0, t_0 + T]$, για δοθέν t_0 , με $x(t_0) = x_0$ και $T < +\infty$, τότε για $i = 1, ..., m$ ισχύει*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i} q_{ij} v_j(t, x(t)) \leq -\phi_2(b) \frac{(t-t_0)^{m+1-i}}{(m+1-i)!} + \\ + \sum_{r=i}^{m} \frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!} \sum_{j=1}^{r} q_{rj} v_j(t_0, x_0) \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

όπου $\phi_2 \in K$.

Ειδικότερα ,επειδή σύμφωνα με το Θεώρημα 6.3.1 η εν λόγω v_1 είναι θετικά ορισμένη ,θα ικανοποιείται η (6.1.2) .Δηλαδή θα υπάρχει $\phi_1 \in K_\infty$ ώστε να ισχύει

$$q_{11}\phi_1(\|x(t)\|) \leq q_{11} v_1(t, x(t)) \ , \ \forall t \in [t_0, t_0 + T] \tag{6.4.2}$$

Επιπλέον η (6.4.1) για $i = 1$ γίνεται

$$\begin{aligned} q_{11} v_1(t, x(t)) \leq -\phi_2(b) \frac{(t-t_0)^m}{m!} + \\ + \sum_{r=1}^{m} \frac{(t-t_0)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \sum_{j=1}^{r} q_{rj} v_j(t_0, x_0) \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

με $t \in [t_0, t_0 + T]$.Επίσης ,θέτοντας

$$A_b(t) \overset{o\rho}{=} -\phi_2(b) \frac{(t-t_0)^m}{m!} + \sum_{r=1}^{m} \frac{(t-t_0)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \sum_{j=1}^{r} q_{rj} v_j(t_0, x_0) \tag{6.4.4}$$

από τις (6.4.2) ,(6.4.3) και (6.4.4) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} q_{11}\phi_1(\|x(t)\|) \leq -\phi_2(b) \frac{(t-t_0)^m}{m!} + \\ + \sum_{r=1}^{m} \frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!} \cdot \sum_{j=1}^{r} q_{rj} v_j(t_0, x_0) \equiv A_b(t) \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

όταν $\|x(t)\| \geq b \geq 0$ *και* $t \in [t_0, t_0 + T]$.

- ***(b)****Θέτοντας* $b = 0$ *η (6.4.5) γίνεται*

$$q_{11}\phi_1(\|x(t)\|) \leq \sum_{r=1}^{m} \frac{(t-t_0)^{r-1}}{(r-1)!} \sum_{j=1}^{r} q_{rj} v_j(t_0, x_0) \equiv A_0(t) \ , \qquad (6.4.6)$$

για $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

- ***(c)****Τέλος ,καμμία τροχιά του (6.1.1) δε δραπετεύει στο άπειρο,σε πεπερασμένο χρόνο.* $\square$

Απόδειξη: Ο $m \times m$ πίνακας Q είναι κάτω τριγωνικός .Άρα $q_{ij} = 0$, για κάθε $i < j$.Ξεκινώντας από την τελευταία γραμμή m του Q θέτουμε:

$$q_{mj} = \alpha_{mj} \ , \ j = 1, ...m \qquad (6.4.7)$$

όπου τα α_{mj} είναι εκείνα που ορίστηκαν στη σχέση (6.3.2) .Οι υπόλοιπες στήλες του Q ,προκύπτουν εφαρμόζοντας τον ακόλουθο αλγόριθμο:

$$q_{ij} = \sum_{r=j}^{i} q_{i+1,r+1}\alpha_{rj} = [q_{i+1,j+1} \cdots q_{i+1,r+1} \cdots q_{i+1,i+1}] \times [\alpha_{jj} \cdots \alpha_{rj} \cdots \alpha_{ij}]^T \qquad (6.4.8)$$

$i = m-1, ..., 2, 1$,$j = i, ..., 1$

Είναι προφανές ότι

$$\begin{cases} q_{ij} \geq 0 & ,\forall i \geq j \\ q_{ii} = \prod_{r=i}^{m} \alpha_{rr} > 0 & ,\forall i = 1, ..., m \end{cases} \qquad (6.4.9)$$

(a) Έστω $\|x(t)\| \geq b \geq 0$, $t \in [t_0, t_0 + T]$. Η (6.4.1) θα αποδειχθεί με φθίνουσα επαγωγική διαδικασία ως προς $i = m, m-1, ..., 1$.Πράγματι :

- Για ***i=m*** ,επικεντρωνόμαστε στην τελευταία γραμμή της (6.3.2) .Λαμβάνοντας υπόψιν την ανισότητα $\|x(t)\| \geq b$ και το γεγονός ότι $\phi_2 \in \boldsymbol{K}$,προκύπτει ότι

$$\phi_2(\|x(t)\|) \geq \phi_2(b) \Rightarrow -\phi_2(\|x(t)\|) \leq -\phi_2(b) \tag{6.4.10}$$

για κάθε $t \in [t_0, t_0 + T]$.Η τελευταία γραμμή της (6.3.2) παράγει την ανισότητα

$$\alpha_{m1}\dot{v}_1 + \alpha_{m2}\dot{v}_2 + ... + \alpha_{m,m-1}\dot{v}_{m-1} + \alpha_{mm}\dot{v}_m \leq -\phi_2(\|x(t)\|) \tag{6.4.11}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (6.4.11) τα q_{mj} , για $j = 1, ..., m$ ως έχουν οριστεί στην (6.4.7) και αξιοποιώντας την (6.4.10) προκύπτει το εξής

$$\sum_{j=1}^{m} q_{mj}\dot{v}_j(t, x(t)) \leq -\phi_2(b) \ , \ \forall t \in [t_0, t_0 + T] \tag{6.4.12}$$

Έπειτα ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της (6.4.12) ως προς $\tau \in [t_0, t]$, για κάποιο $t \in [t_0, t_0 + T]$.Έτσι έχουμε

$$\int_{t_0}^{t} \left[\sum_{j=1}^{m} q_{mj}\dot{v}_j(\tau, x(\tau))\right] d\tau \leq \int_{t_0}^{t} -\phi_2(b) d\tau$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} q_{mj}v_j(t, x(t)) - \sum_{j=1}^{m} q_{mj}v_j(t_0, x_0) \leq -\phi_2(b)(t - t_0)$$

Άρα ,εν τέλει προκύπτει ότι

$$\sum_{j=1}^{m} q_{mj}v_j(t, x) \leq -\phi_2(b)(t - t_0) + \sum_{j=1}^{m} q_{mj}v_j(t_0, x_0) \tag{6.4.13}$$

για $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Η (6.4.13) ,συμπίπτει με την (6.4.1) για $\mathbf{i} = \mathbf{m}$,οπότε καλύπτεται η συγκεκριμένη περίπτωση .

- Έστω ότι η (6.4.1) ισχύει για $\mathbf{2 \leq i \leq m}$.Τότε από την (6.3.2) έχουμε ότι για κάθε $t \in [t_0, t_0 + T]$,θα ισχύουν :

$$\begin{cases} v_1(t, x(t)) \geq 0 \\ \\ v_{r+1}(t, x(t)) \geq \sum_{j=1}^{r} \alpha_{rj} \dot{v}_j(t, x(t)) \ , \ r = 1, ..., m-1 \end{cases} \tag{6.4.14}$$

Γράφουμε το άθροισμα $\sum_{j=1}^{m} q_{ij} v_j(t, x(t))$ ως εξής

$$\sum_{j=1}^{i} q_{ij} v_j(t, x(t)) = q_{i1} v_1(t, x(t)) + \sum_{r=1}^{i-1} q_{i,r+1} v_{r+1}(t, x(t)) \tag{6.4.15}$$

με $t \in [t_0, t_0 + T]$.Λόγω των υποθέσεων του Θεωρήματος 6.3.1 η v_1 είναι θετικά ορισμένη και $q_{i1} \geq 0$,για κάθε $i = 2, ..., m$.Συνεπώς η ποσότητα $q_{i1} v_1(t, x(t))$ είναι μη αρνητική .Βάσει αυτού ,προκύπτει από την (6.4.15) η ακόλουθη ανισότητα :

$$\sum_{j=1}^{i} q_{ij} v_j(t, x(t)) \geq \sum_{r=1}^{i-1} q_{i,r+1} v_{r+1}(t, x(t)) \ , \ \forall t \in [t_0, t_0 + T] \tag{6.4.16}$$

Σύμφωνα με την (6.4.14) η ανισότητα της (6.4.16) διαμορφώνεται όπως παρακάτω

$$\sum_{j=1}^{i} q_{ij} v_j(t, x(t)) \geq \sum_{r=1}^{i-1} \left(q_{i,r+1} \left[\sum_{j=1}^{r} \alpha_{rj} \dot{v}_j(t, x(t)) \right] \right) \tag{6.4.17}$$

όπου $t \in [t_0, t_0 + T]$.Επιπλέον με αντικατάσταση των q_{ij} από την (6.4.8) στο δεξί μέλος της (6.4.17) ,προκύπτει

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{i-1} \left(q_{i,r+1} \left[\sum_{j=1}^{r} \alpha_{rj} \dot{v}_j(t, x(t)) \right] \right) &= \sum_{j=1}^{i-1} \left(\sum_{r=j}^{i-1} q_{i,r+1} \alpha_{rj} \right) \dot{v}_j(t, x(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} q_{i-1,j} \dot{v}_j(t, x(t)) \ , \ t \in [t_0, t_0 + T] \end{aligned} \tag{6.4.18}$$

Άρα από τις (6.4.17) και (6.4.18) ,προκύπτει ότι

$$\sum_{j=1}^{i-1} q_{i-1,j} \dot{v}_j(t, x(t)) \leq \sum_{j=1}^{i} q_{ij} v_j(t, x(t)) \ , \ \forall t \in [t_0, t_0 + T] \tag{6.4.19}$$

Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι η (6.4.1) ισχύει για $i = 2, ..., m$,λόγω της (6.4.19) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i-1} q_{i-1,j}\dot{v}_j(t, x(t)) \leq -\phi_2(b)\frac{(t-t_0)^{m+1-i}}{(m+1-i)!}+ \\ + \sum_{r=i}^{m} \frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!} \sum_{j=1}^{r} q_{rj}v_j(t_0, x_0)\end{aligned} \tag{6.4.20}$$

για κάθε $t \in [t_0, t_0 + T]$.Έχοντας υπόψιν την ανισότητα της (6.4.1) , ολοκληρώνουμε την (6.4.20) ως προς $\tau \in [t_0, t]$, για κάποιο $t \in [t_0, t_0 + T]$.Οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} \left[\sum_{j=1}^{i-1} q_{i-1,j}\dot{v}_j(\tau, x(\tau))\right] d\tau \leq \int_{t_0}^{t} -\phi_2(b)\frac{(\tau-t_0)^{m+1-i}}{(m+1-i)!}d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t} \sum_{r=i}^{m} \frac{(\tau-t_0)^{r-i}}{(r-i)!} \sum_{j=1}^{r} q_{rj}v_j(t_0, x_0)d\tau\end{aligned} \tag{6.4.21}$$

Απαλείφοντας τα ολοκληρώματα στην (6.4.21) ,έχουμε ισοδύναμα για κάθε $t \in [t_0, t_0 + T]$ ότι :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i-1} q_{i-1,j}v_j(t, x(t)) - \sum_{j=1}^{i-1} q_{i-1,j}v_j(t_0, x_0) \\ \leq -\phi_2(b)\frac{(t-t_0)^{m+2-i}}{(m+2-i)!} + \sum_{r=i}^{m} \frac{(t-t_0)^{r+1-i}}{(r+1-i)!} \sum_{j=1}^{r} q_{rj}v_j(t_0, x_0)\end{aligned} \tag{6.4.22}$$

Ο συνδυασμός των αθροισμάτων του δεξιού μέλους της (6.4.22) ,οδηγεί στη μορφή της (6.4.1) με $i := i - 1$.Δηλαδή

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i-1} q_{i-1,j}v_j(t, x(t)) \leq -\phi_2(b)\frac{(t-t_0)^{m+2-i}}{(m+2-i)!}+ \\ + \sum_{r=i-1}^{m} \frac{(t-t_0)^{r+1-i}}{(r+1-i)!} \sum_{j=1}^{r} q_{rj}v_j(t_0, x_0),\end{aligned} \tag{6.4.23}$$

για κάθε $t \in [t_0, t_0 + T]$.Οπότε προκύπτει η επιθυμητή ανισότητα (6.4.1) που ετέθη προς απόδειξη.

- Για **i=1** η (6.4.1) παίρνει τη μορφή της (6.4.3) και επειδή επί προσθέτως η v_1 είναι θετικά ορισμένη ,από την (6.1.2) προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα (6.4.5) που αποτελεί ειδική μορφή της (6.4.1)

Συνεπώς ,με την ολοκλήρωση της φθίνουσας επαγωγικής διαδικασίας για τις τιμές του $i = m, m-1, ..., 2, 1$ επαληθεύεται ότι ισχύουν οι ανισότητες (6.4.1) και (6.4.5) στην περίπτωση που ισχύει $\|x(t)\| \geq b \geq 0$ για κάθε $t \in [t_0, t_0 + T]$ με $T < +\infty$ και δοθέν t_0 με $x(t_0) = x_0$.

(b) Πραγματοποιώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία όπως στο μέρος **(a)**,για $b = 0$, προκύπτει η (6.4.6).

(c) Από την (6.4.6) προκύπτει ότι

$$\|x(t)\| \leq \phi_1^{-1}\left(\frac{A_0(t)}{q_{11}}\right) < +\infty$$

για κάθε $t \in [0, +\infty)$, διότι $q_{11} > 0$,$\phi_1 \in K_\infty$ και λόγω του λήμματος 4.3.1 η ϕ^{-1} θα είναι κλάσης K_∞ .Επιπλέον το $A_b(t)$ που ορίζεται (6.4.6) , είναι πολυωνυμική συνάρτηση του χρόνου t .Συνεπώς,οι λύσεις δε θα μπορούσαν να αποδράσουν και να ξεφύγουν στο άπειρο,με την πάροδο πεπερασμένου χρόνου .□

Λήμμα 6.4.2 *Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 6.3.1 τότε οι τροχιές του συστήματος (6.1.1) είναι αδύνατο να παραμείνουν πολύ μακριά από την αρχή* **0** *με την πάροδο του χρόνου.Αυτό σημαίνει ότι:*

$$\forall b > 0 \ , \ \forall x(t_0) = x_0 \ , \ \exists t_1 \geq t_0 \ : \|x(t_1)\| \leq b \tag{6.4.24}$$

Απόδειξη: Έστω b, c και T,αυστηρά θετικές ποσότητες έτσι ώστε

$$\|x(t_0)\| \leq c \text{ και } \|x(t)\| \geq b > 0 \ , \ \forall t \in [t_0, t_0 + T] \tag{6.4.25}$$

, δηλαδή σύμφωνα με την (6.4.25) ,υπάρχουν τροχιές που απομακρύνονται από την αρχή καθ'όλη τη διάρκεια της περιόδου T.

Οι συνιστώσες v_j είναι ελαττούμενες για κάθε $j = 1, ..., m$,οπότε σύμφωνα με τον αντίστοιχο Ορισμό 6.1.1 ,για κάθε $j = 1, ..., m$,θα ισχύει

$$v_j(t, x(t)) \leq \psi_j(\|x(t)\|) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ , \ t \geq 0 \text{ και } \psi_j \in K \tag{6.4.26}$$

Επιπλέον επειδή η ψ_j είναι κλάσης K ,άρα και αύξουσα ,από την πρώτη ανισότητα της (6.4.25) ,προκύπτει

$$\psi_j(\|x_0\|) \leq \psi_j(c) \tag{6.4.27}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (6.4.26) όπου $t = t_0$ και ενσωματώνοντας το αποτέλεσμα της (6.4.27) οδηγούμαστε στην ανισότητα

$$v_j(t_0, x_0) \leq \psi_j(\|x_0\|) \leq \psi_j(c) \tag{6.4.28}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την (6.4.28) , το Λήμμα 6.4.1(a) και τις σχέσεις (6.4.5) και (6.4.25) ,προκύπτει η ακόλουθη διπλή ανισότητα

$$q_{11}\phi_1(b) \underset{\varphi_1 \in K_\infty}{\overset{(6.4.25)}{\leq}} q_{11}\phi_1(\|x(t)\|) \underset{(6.4.28)}{\overset{(6.4.5)}{\leq}} A_b^c(\tau) \ , \ \forall \tau \equiv t - t_0 \in [0, T] \tag{6.4.29}$$

Όπου

$$A_b^c(\tau) = -\phi_2(b)\frac{\tau^m}{m!} + \sum_{r=1}^{m} \left[\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!} \sum_{j=1}^{r} q_{rj}\psi_j(c) \right] \tag{6.4.30}$$

είναι ένα πολυώνυμο του $\tau \geq 0$ με $\varphi_2 \in K$.Το A_b^c ως έχει οριστεί κατά την (6.4.30) ,διέπεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

Για κάθε $c \geq b > 0$, ισχύουν :

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{i})\ A_b^c(0) = q_{11}\psi_1(c) \underset{(6.1.2)}{\overset{(6.4.28)_{j=1}}{\geq}} q_{11}\phi_1(b) > 0 \\
&(\mathbf{ii})\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A_b^c(\tau)\right]_{\tau=0} = q_{21}\psi_1(c) + q_{22}\psi_2(c) > 0 \\
&(\mathbf{iii})\ \lim_{\tau\to+\infty} A_b^c(\tau) = -\infty
\end{aligned}
\tag{6.4.31}
$$

από τις ιδιότητες της (6.4.31) προκύπτει ότι το A_b^c λαμβάνει θετική τιμή για $\tau = 0$ και στη συνέχεια γίνεται αρνητικό καθώς $\tau \to +\infty$.Εξάγεται επομένως το συμπέρασμα ότι υπάρχει $T_1 = T_1(b, c) > 0$ ώστε να ισχύει

$$
A_b^c(\tau) \leq A_b^c(T_1) = q_{11}\phi_1(b)\ ,\ \forall\tau \geq T_1 \tag{6.4.32}
$$

Υποθέτουμε ότι $T_1 < T$.Τότε από τις σχέσεις (6.4.29) και (6.4.32) προκύπτει ότι $q_{11}\phi_1(b) \leq A_b^c(\tau) \leq q_{11}\phi_1(b)$ και επομένως οδηγούμαστε στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$
A_b^c(\tau) \equiv q_{11}\phi_1(b)\quad ,\quad \forall\tau \in [T_1(b, c), T]
$$

το οποίο όμως είναι άτοπο καθώς το πολυώνυμο $A_b^c(\tau)$ ως έχει οριστεί στην (6.4.30) είναι ένα μη σταθερό πολυώνυμο του $\tau \geq 0$.Συνεπώς ισχύει το αντίθετο της αρχικής υπόθεσης (6.4.25) ,δηλαδή

$$
\forall\, \|x(t_0)\| \leq c\ ,\ \exists t_1 \in [t_0, t_0 + T_1(b, c)] : \|x(t_1)\| \leq b \tag{6.4.33}
$$

το οποίο συνηγορεί στην απόδειξη. □

Λήμμα 6.4.3 *Αν πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 6.3.1 , υπάρχει μία συνάρτηση $\alpha \in K_\infty$ ώστε να ισχύει*

$$
\|x(t_2)\| \leq \alpha(\|x(t_1)\|)\ ,\ \forall t_2 \geq t_1 \tag{6.4.34}
$$

Απόδειξη: Στη σχέση (6.4.25) και στις σχέσεις (6.4.29) έως (6.4.32) , θέτουμε $c = b \geq 0$ και ορίζουμε $\tau_1(b) \geq 0$ ως το μικρότερο χρόνο που συμβαίνει το εξής

$$A_b^b[\tau_1(b)] = q_{11}\phi_1(b) \ , \ \forall \tau \geq \tau_1(b) \tag{6.4.35}$$

Διακρίνουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα :

• Αν $b = 0$, τότε $A_b^b(\tau) = q_{11}\phi_1(b) \equiv 0$ και συνεπώς $\tau_1(0) = 0$

• Αν $b > 0$,τότε η $\tau_1(b)$ είναι *καλά ορισμένη* ,διότι είναι η μικρότερη τιμή για το $T_1(b, b)$ που ικανοποιεί την (6.4.32) .Αυτή η τιμή,είναι μία από τις συνολικά m ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης:

$$A_b^b(\tau_1) = q_{11}\phi_1(b)$$

Η $\tau_1(b)$ είναι συνεχής ,καθώς όλες οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης ,εξαρτώνται συνεχώς από το b. Με τη χρήση της (6.4.35) ,ορίζουμε

$$M(b) = \sup_{\tau \geq 0} A_b^b(\tau) = \sup_{\tau \in [0, \tau_1(b)]} A_b^b(\tau) \ , \ b \geq 0 \tag{6.4.36}$$

Λόγω της συνέχειάς της λοιπόν ,η $\tau_1(b)$,λαμβάνει μία μέγιστη τιμή τ_1^{max} όταν η παράμετρος b κινείται σε οποιοδήποτε συμπαγές διάστημα $[0, a]$.Τότε από τις (6.4.35) και (6.4.36) προκύπτει ότι

$$M(b) = \sup_{\tau \in [0, \tau_1^{max}]} A_b^b(\tau) \ , \ \forall b \in [0, a] \tag{6.4.37}$$

Αφού η $A_b^b(\tau)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση του b και του τ , η $M(b)$ θα είναι επίσης συνεχής συνάρτηση του b. Ακολούθως,θα αποδειχθεί η κάτωθι ανισότητα

$$q_{11}\phi_1(\|x(t_2)\|) \leq M(\|x(t_1)\|) \ , \ \forall t_2 \geq t_1 \tag{6.4.38}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1^η **Περίπτωση**: Αν $\|x(t_2)\| \leq \|x(t_1)\| = b$, όπου $t_2 \geq t_1$

Τότε εφόσον $q_{11} > 0$ και $\phi_1 \in K_\infty$ στην προκειμένη περίπτωση θα ισχύει

$$q_{11}\phi_1(\|x(t_2)\|) \leq q_{11}\phi_1(b) \overset{(6.4.35)}{=} A_b^b[\tau_1(b)] \ , \ t_2 \geq t_1 \tag{6.4.39}$$

Εν συνεχεία ,λόγω της (6.4.39) και της (6.4.36) προκύπτει η ανισότητα

$$q_{11}\phi_1(\|x(t_2)\|) \leq M(b) = M(\|x(t_1)\|) \ , \ t_2 \geq t_1$$

η οποία ταυτίζεται με τη ζητούμενη στην (6.4.38) .

2^{η} **Περίπτωση:** Αν $\|x(t_2)\| > \|x(t_1)\| = b$, όπου $t_2 \geq t_1$

Τότε υπάρχει $t_0 \in [t_1, t_2)$ ώστε

$$\begin{cases} \|x(t_0)\| = \|x(t_1)\| = b \\ \|x(t)\| \geq b \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_2] \end{cases} \tag{6.4.40}$$

Θέτοντας $T = t_2 - t_0$ και $c = b$ στην έκφραση (6.4.25) ,παρατηρούμε ότι αυτήν ταυτίζεται με την (6.4.40) .Δηλαδή

$$\|x_0\| \leq b \ \text{ και } \ \|x(t)\| \geq b > 0 \ , \ \forall t \in [t_0, t_2] \tag{6.4.41}$$

Άρα λαμβάνοντας υπόψιν τις (6.4.40) και (6.4.41) ,έχουμε

$$\|x_0\| \leq \|x(t)\| \ \ , \ \forall t \in [t_0, t_2] \tag{6.4.42}$$

Επιπλέον για $t = t_2$,από τις σχέσεις (6.4.29) και (6.4.37) προκύπτει οτι

$$q_{11}\phi_1(b) \leq q_{11}\phi_1(\|x(t_2)\|) \leq A_b^b(t_2 - t_0) \overset{(6.4.37)}{\leq} M(b)$$

$$\Rightarrow q_{11}\phi_1(\|x(t_2)\|) \leq M(b) \overset{(6.4.40)}{=} M(\|x(t_1)\|) \ , \ t_2 \geq t_1 \tag{6.4.43}$$

Στο σημείο αυτό ,ορίζουμε

$$\hat{M}(a) \overset{\text{ορ}}{=} \sup_{b \in [0,a]} M(b) \quad , \quad a \geq 0 \tag{6.4.44}$$

ώστε η $\hat{M}$ να είναι μία συνεχής,μη φθίνουσα συνάρτηση με $\hat{M}(0) = M(0) = 0$.

Εν συνεχεία,ορίζουμε

$$\alpha'(b) \overset{\text{ορ}}{=} \hat{M}(b) + b \ , \ b \geq 0. \tag{6.4.45}$$

Η α' είναι γνησίως αύξουσα λόγω του ορισμού της $\hat{M}$ κατά την (6.4.44) ως μη φθίνουσα συνάρτηση του $a \geq 0$ και επιπλέον ισχύει

$$\alpha'(0) = \hat{M}(0) + 0 = 0 \tag{6.4.46}$$

Λόγω της (6.4.45) και του γεγονότος ότι η $\hat{M}$ είναι μη φθίνουσα ,ισχύει :

$$\alpha'(b) \to +\infty \ \text{ καθώς } \ b \to +\infty \tag{6.4.47}$$

Άρα εφόσον η α' ορίζεται στο διάστημα $[0, +\infty)$ και ισχύουν οι σχέσεις (6.4.46) και (6.4.47) ,η α' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Ορισμού 4.3.1 σύμφωνα με τις οποίες η α' είναι κλάσης K_∞ . Επί προσθέτως ,λόγω της (6.4.44) και της (6.4.45) ισχύει

$$M(b) \leq \hat{M}(b) \leq \alpha'(b) \quad , \quad b \geq 0 \tag{6.4.48}$$

Τότε ,έχοντας υποθέσει ότι $\|x(t_1)\| = b$, από τις (6.4.43) και (6.4.48) προκύπτει ότι

$$q_{11}\phi_1(\|x(t_2)\|) \leq M(\|x(t_1)\|) \leq \hat{M}(\|x(t_1)\|) \leq \alpha'(\|x(t_1)\|) \quad , \quad \forall t_2 \geq t_1$$

Άρα

$$q_{11}\phi_1(\|x(t_2)\|) \leq \alpha'(\|x(t_1)\|) \quad , \quad \forall t_2 \geq t_1 \tag{6.4.49}$$

Οπότε επειδή $q_{11} > 0$ και $\phi_1 \in K$ η (6.4.49) γίνεται

$$\|x(t_2)\| \leq \phi_1^{-1}\left[\frac{\alpha'(\|x(t_1)\|)}{q_{11}}\right] \ , \ t_2 \geq t_1 \tag{6.4.50}$$

Θέτοντας

$$\alpha(\cdot) = \phi_1^{-1}\left[\frac{\alpha'(\cdot)}{q_{11}}\right]$$

διαπιστώνουμε ότι λόγω του Λήμματος 4.3.1 η συνάρτηση $\alpha(\cdot)$ είναι κλάσης K_∞ , ως σύνθεση συναρτήσεων κλάσης K_∞ .Οπότε αντικαθιστώντας στην (6.4.50) ,λαμβάνουμε την επιθυμητή σχέση (6.4.34). $\square$

Στο σημείο αυτό ,είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.3.1 .

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1

(a) Η ομοιόμορφη ευστάθεια κατά Lyapunov του σημείου ισορροπίας $x = 0$ έχει ήδη αποδειχθεί από το Λήμμα 6.4.3 .Θα δείξουμε την ολική ομοιόμορφη έλξη των τροχιών του σημείου $x = 0$.
Συγκεκριμένα δείχνουμε ότι:

Για κάθε $\eta > 0$, $c > 0$, υπάρχει $T_2 = T_2(\eta, c)$ ώστε

$$\|x(t)\| \leq \eta \quad , \quad \forall \|x(t_0)\| \leq c \ , \ \forall t \geq t_0 + T_2(\eta, c) \tag{6.4.51}$$

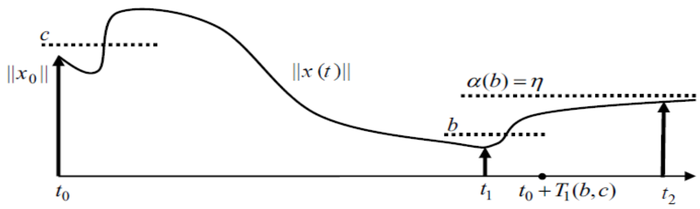
Συνεπώς όλες οι τροχιές κατευθύνονται προς το $x = 0$.Πράγματι , από το Λήμμα 6.4.2 την (6.4.34) προκύπτει :

$$\|x(t_1)\| \leq b \Rightarrow \|x(t_2)\| \leq \alpha(b) \ , \ \forall t_2 \geq t_1 \ , \ \alpha \in K_\infty \tag{6.4.52}$$

και συνδυάζοντας την (6.4.33) που προέκυψε από το Λήμμα 6.4.2 και την (6.4.52) έχουμε ότι για κάθε $\|x(t_0)\| \leq c$,θα υπάρχει $t_1 \in [t_0, t_0 + T_1(b, c)]$,έτσι ώστε να ισχύει

$$\|x(t_2)\| \leq \alpha(b) \ , \ \forall t_2 \geq t_1 \tag{6.4.53}$$

Το αποτέλεσμα της (6.4.53) διαφαίνεται και στο Σχήμα 6 ,υποθέτοντας ότι στον αρχικό χρόνο t_0 ισχύει $\|x_0\| \leq c$, $c > 0$.



Σχήμα 6 : Διάγραμμα μεταβολής της ποσότητας $\|x(t)\|$ συναρτήσει του χρόνου t

Εφόσον η (6.4.53) ισχύει για κάθε $t_2 \geq t_1$ και ο όρος t_1 περιέχεται στο διάστημα $[t_0, t_0 + T_1(b, c)]$, περιοριζόμαστε στις τιμές του t_2 εκτός του διαστήματος $[t_0, t_0 + T_1(b, c)]$, δηλαδή για $t_2 \geq t_0 + T_1(b, c)$ (Σχήμα 6) .

Επομένως ο όρος t_1 μπορεί να απαλειφθεί και η (6.4.53) γίνεται :

$$\|x(t_2)\| \leq \alpha(b) \quad , \quad \forall \|x(t_0)\| \leq c \ , \ \forall t_2 \geq t_0 + T_1(b,c) \tag{6.4.54}$$

Θέτοντας $\alpha(b) = \eta > 0 \Rightarrow b = \alpha^{-1}(\eta)$ και αντικαθιστώντας στην (6.4.54) έχουμε ότι

$$\|x(t_2)\| \leq \eta \quad , \quad \forall \|x(t_0)\| \leq c \ , \ \forall t_2 \geq t_0 + T_1(\alpha^{-1}(\eta), c) \tag{6.4.55}$$

Έτσι η (6.4.51) ικανοποιείται για κάθε $\eta > 0$,$c > 0$ ορίζοντας

$$T_2(\eta, c) = T_1[\alpha^{-1}(\eta), c]$$

και η μηδενική κατάσταση ισορροπίας του συστήματος (6.1.1) είναι ***ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής***.

(b)Η ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $x = 0$, είναι μία εν γένει τοπική ιδιότητα του μη γραμμικού συστήματος (6.1.1) και μπορεί να αποδειχτεί με όμοιο τρόπο με εκείνον του μέρους **(a)**,αφού η σχέση (6.4.34) ,εγγυάται ότι οι τροχιές οι οποίες ξεκινούν αρκετά κοντά στην αρχή δεν ξεφεύγογν από τη δεδομένη περιοχή του $\|x(t)\| \leq r$ με την πάροδο του χρόνου ,δηλαδή καθώς $t \to \infty$.Σημειωτέον ότι όλες οι συναρτήσεις κλάσης K_∞ στο μέρος **(a)** θα πρέπει να αντικατασταθούν με συναρτήσεις κλάσης K κατά την απόδειξη του μέρους **(b)** καθώς η συμπεριφορά ευστάθειας της αρχής,εξετάζεται τοπικά. □

6.5 Αντίστροφα Θεωρήματα

Στις προηγούμενες ενότητες ,διατυπώθηκε και αποδείχθηκε το Θεώρημα 6.3.1 το οποίο αποφαίνεται την ασυμπτωτική ευστάθεια σε αμφότερες τις περιπτώσεις αυτόνομων και μη αυτόνομων συστημάτων ολικά ή τοπικά .Το Θεώρημα 6.3.1 βασίζεται ουσιαστικά σε ιδιότητες γραμμικών συνδυασμών των παραγώγων υψηλότερης τάξης μιας δεδομένης συνάρτησης Lyapunov .Συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται μη αρνητικοί συντελεστές α_{mj} ,$j = 1, ..., m$ προκειμένου ένα άθροισμα της μορφής $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj} \dot{v}_j$ να αποτελεί μία αρνητικά ορισμένη συνάρτηση .Ένα απλοποιημένο αποτέλεσμα ,ωστόσο με περισσότερες απαιτήσεις σύμφωνα και με την 3^{η} Παρατήρηση της ενότητας 6.3 ,δίνεται από το Πόρισμα 6.3.2 .

Στο παρόν κεφάλαιο ,περιοριζόμαστε στην περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων της μορφής

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{6.5.1}$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$,$t \geq 0$ και η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μία Lipschitz και συνεχής απεικόνιση .Θεωρούμε ότι το (6.5.1) έχει ένα σημείο ισορροπίας στην αρχή $\mathbf{0}$ του $\mathbb{R}^n$.Δηλαδή ισχύει $f(0) = 0$.Θεωρούμε τη C^{∞} συνάρτηση Lyapunov $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για το σύστημα (6.5.1).Στην παρούσα ενότητα ,οι χρονικές παράγωγοι της v κάθε τάξης κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (6.5.1) θα ορίζονται κατά τις σχέσεις (5.2.2) .Εφόσον $f(0) = 0$,από την (5.2.2) προκύπτει ότι

$$v^{(i)}(0) = 0 \ \ , \ \ i = 1, ..., m \tag{6.5.2}$$

Καταγράφουμε τις προϋποθέσεις του Πορίσματος 6.3.2 για αυτόνομα συστήματα θέτοντας $v_1(x) = v(x)$,$x \in \mathbb{R}^n$.Τότε λαμβάνοντας υπόψιν και την ισότητα της (6.1.5) από ,την τελευταία γραμμή της ανισότητας πινάκων (6.3.4) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & v^{(m)}(x(t)) \leq -\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j v^{(j)}(x(t)) \\ & \Rightarrow v^{(m)}(x(t)) + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j v^{(j)}(x(t)) \leq -\alpha_0 v(x(t)) \ , \ t \geq 0 \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

Η ισότητα στην (6.5.3) ισχύει σε περίπτωση που $x = 0$ λόγω της (6.5.2) .Επειδή η v είναι θετικά ορισμένη και οι συντελεστές α_i είναι μη αρνητικοί για κάθε $i = 0, ..., m-1$,η (6.5.3) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$v^{(m)}(x(t)) + \alpha_{m-1} v^{(m-1)}(x(t)) + ... + \alpha_1 \dot{v}(x(t)) < 0 \tag{6.5.4}$$

για κάθε $x \neq 0$,$t \geq 0$ και $\alpha_i \geq 0$,$i = 1, ..., m-1$.Σύμφωνα με το Πόρισμα 6.3.2 η (6.5.4) χρησιμοποιείται για την απόδειξη της ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας μιας μηδενικής κατάστασης ισορροπίας του (6.5.1) .Στη συγκεκριμένη ενότητα αποδεικνύεται ότι αν γνωρίζουμε ότι το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του (6.5.1) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές και ισχύει η (6.5.4) ,τότε ασχέτως των ιδιοτήτων της v και των συντελεστών α_i ,έχουμε τη δυνατότητα να εξάγουμε μία νέα συνάρτηση Lyapunov για το (6.5.1)[22] .Αρχικά διατυπώνουμε το ακόλουθο βοηθητικό θεώρημα .[23]

Θεώρημα 6.5.1 *Υποθέτουμε ότι το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (6.5.1) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές .Έστω ότι υπάρχει μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $w(0) = 0$,της οποίας η παράγωγος $\dot{w}$ κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (6.5.1) είναι αρνητικά ορισμένη .Τότε η w είναι θετικά ορισμένη .*

Απόδειξη Προς εις άτοπον απαγωγή ,υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη μηδενικό σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ώστε να ισχύει $w(\bar{x}(t)) \leq 0$.Εκτιμούμε τη συνάρτηση w ξεκινώντας από το σημείο $\bar{x}$ ως αρχική συνθήκη .Παρατηρούμε ότι εφόσον αρχικά η w είναι μη θετική και με την πάροδο του χρόνου η τιμή της φθίνει καθώς ισχύει $\dot{w}(x(t)) < 0$.Συνεπώς η w είναι αδύνατο να μηδενιστεί καθώς $t \to +\infty$.Ωστόσο είναι γνωστό ότι το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του (6.5.1) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές .Αυτό σημαίνει ότι σε βάθος χρόνου ,όλες οι τροχιές του συστήματος (6.5.1) θα πρέπει να κατευθύνονται προς την αρχή $\mathbf{0}$ του $\mathbb{R}^n$,όπου ισχύει $w(0) = 0$.Συνεπώς καταλήγουμε σε άτοπο διότι υποτέθηκε ότι υπάρχει μη μηδενικό $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ώστε $w(\bar{x}(t)) \leq 0$.Άρα προκύπτει ότι $w(\bar{x}(t)) > 0$ και επειδή το $\bar{x}$ είναι τυχαία επιλεγμένο ,συμπεραίνουμε ότι η τελευταία συνθήκη ισχύει για κάθε μη μηδενικό σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.Επομένως ,η w είναι θετικά ορισμένη . □

Με το ακόλουθο θεώρημα των Ahmadi και Parrilo [23] ,αξιοποιείται η συνθήκη (6.5.4) για την κατασκευή μιας νέας συνάρτησης Lyapunov για το σύστημα (6.5.1) .

Θεώρημα 6.5.2 *Έστω ότι το μηδενικό σημείο ισορροπίας $x = 0$ του (6.5.1) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές .Υποθέτουμε ότι ισχύει η (6.5.4) για κάποιους σταθερούς συντελεστές $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}$ απροσδιορίστου προσήμου και για κάποια m φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρ-*

τηση Lyapunov v για το (6.5.1) με $v(0) = 0$.Ορίζουμε τη συνάρτηση $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής

$$w(x(t)) \stackrel{o\varrho}{=} v^{(m-1)}(x(t)) + \alpha_{m-1}v^{(m-2)}(x(t)) + ... + \alpha_2\dot{v}(x(t)) + \alpha_1 v(x(t)) \qquad \textbf{(6.5.5)}$$

όπου $t \geq 0$.

Τότε η w είναι συνεχώς διαφορίσιμη ,θετικά ορισμένη και η παράγωγός της , $\dot{w}$, κατά μήκος των τροχιών του (6.5.1) είναι αρνητικά ορισμένη .

Απόδειξη : Η w ως έχει οριστεί από την (6.5.5) είναι συνεχώς διαφορίσιμη καθώς η v εξ'υποθέσεως είναι συνεχώς διαφορίσιμη .Επιπλέον υπολογίζουμε

$$\dot{w}(x(t)) = v^{(m)}(x(t)) + \alpha_{m-1}v^{(m-1)}(x(t)) + ... + \alpha_1\dot{v}(x(t))$$

Λόγω της (6.5.4) ισχύει ότι $\dot{w}(x(t)) < 0$ για κάθε $x \neq 0$.Άρα η $\dot{w}$ είναι αρνητικά ορισμένη .Τέλος ,εφόσον $v(0) = 0$ και ισχύει η (6.5.2) για τις συνθήκες του συστήματος (6.5.1) ,από την (6.5.5) προκύπτει ότι $w(0) = 0$. □

1η **Παρατήρηση** : Το Θεώρημα 6.5.2 υποδηλώνει ότι αντί να επιβληθεί η (6.5.4) με περιορισμούς για τα α_i και τη v ,μπορεί απλούστερα να υποτεθεί ότι

$$v^{(m-1)}(0) + \alpha_{m-1}v^{(m-2)}(0) + ... + \alpha_2\dot{v}(0) + \alpha_1 v(0) = 0 \qquad \textbf{(6.5.6)}$$

και επιπλέον

$$v^{(m-1)}(x(t)) + \alpha_{m-1}v^{(m-2)}(x(t)) + ... + \alpha_2\dot{v}(x(t)) + \alpha_1 v(x(t)) > 0 \qquad \textbf{(6.5.7)}$$

$$v^{(m)}(x(t)) + \alpha_{m-1}v^{(m-1)}(x(t)) + ... + \alpha_2\ddot{v}(x(t)) + \alpha_1\dot{v}(x(t)) < 0 \qquad \textbf{(6.5.8)}$$

για κάθε $x \neq 0$ και άνευ περιορισμών .Οι σχέσεις (6.5.6) ,(6.5.7) και (6.5.8) έγκεινται στις κλασικές υποθέσεις του θεωρήματος Lyapunov (Θεώρημα 1.3.1) για μία συνάρτηση η οποία έχει αντίστοιχη δομή με εκείνη στη σχέση (6.5.5) .

Κεφάλαιο 7

Εφαρμογές της Μεθόδου Meigoli-Nikravesh

7.1 Εφαρμογές του Θεωρήματος 6.2.1

Στη συγκεκριμένη ενότητα ,παρουσιάζονται εφαρμογές των αποτελεσμάτων της πρώιμης μορφής (Θεώρημα 6.2.1) του βασικού Θεωρήματος 6.3.1 των Meigoli και Nikravesh σε δοθέντα δυναμικά συστήματα .Τα Παραδείγματα 7.1.1 και 7.1.3 αφορούν μη αυτόνομα συστήματα ,ενώ το Παράδειγμα 7.1.2 αποτελεί εφαρμογή του Θεωρήματος 6.2.1 σε γραμμικό αυτόνομο σύστημα .

Παράδειγμα 7.1.1 *Δίνεται το ακόλουθο χρονικά μεταβαλλόμενο μη γραμμικό σύστημα*

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1 - 2x_1x_2 + ke^{-mt}x_1 \\ \dot{x_2} &= x_1^2 - x_2 + ke^{-mt}x_2 \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

όπου $t \geq 0$ *και* $m, k > 0$ *σταθερές .*

Θα δειχθεί ότι η μηδενική κατάσταση ισορροπίας $x = 0$ του (7.1.1) είναι ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής όταν ισχύει

$$m > 2(k-1) > 0 \tag{7.1.2}$$

Θεωρούμε την παρακάτω θετικά ορισμένη υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$v(t, x(t)) = x_1^2 + 2x_2^2 \tag{7.1.3}$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο της v κατά μήκος των τροχιών του (7.1.1) ,προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\dot{v}(t, x(t)) &= 2x_1\dot{x_1} + 4x_2\dot{x_2} \\ &= 2x_1(-x_1 - 2x_1x_2 + ke^{-mt}x_1) + 4x_2(x_1^2 - x_2 + ke^{-mt}y) \\ &= -2x_1^2 - 4x_1^2x_2 + 2ke^{-mt}x_1^2 + 4x_2x_1^2 - 4x_2^2 + 4ke^{-mt}x_2^2\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\dot{v}(t, x(t)) &= -2(x_1^2 + 2x_2^2) + 2ke^{-mt}(x_1^2 + 2x_2^2) \\ &= 2(ke^{-mt} - 1)v(t, x(t))\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

Από την (7.1.4) ,για $t = 0$ ισχύει $\dot{v}(0, x(0)) = 2(k-1)v > 0$,λόγω των (7.1.3) και (7.1.2) .Συνεπώς η $\dot{v}$ δεν είναι αρνητικά ορισμένη και η μέθοδος Lyapunov αποτυγχάνει να επιβεβαιώσει την ασυμπτωτική ευστάθεια του (7.1.1) με τη χρήση της v .

Προσθέτοντας στα δύο μέλη της (7.1.4) τον όρο $2v(t, x(t))$ έχουμε ότι

$$\dot{v}(t, x(t)) + 2v(t, v(t)) = 2ke^{-mt}v(t, x(t)) \tag{7.1.5}$$

Παραγωγίζουμε την (7.1.5) ως προς t και αντικαθιστούμε στο δεύτερο μέλος τη $\dot{v}$ από την (7.1.4)

$$\overset{(7.1.5)}{\Rightarrow} \ddot{v}(t, x(t)) + 2\dot{v}(t, x(t)) = 2ke^{-mt}\dot{v}(t, x(t)) - 2kme^{-mt}v(t, x(t))$$

$$\Rightarrow \ddot{v}(t, x(t)) + 2\dot{v}(t, x(t)) = 4ke^{-mt}(ke^{-mt} - 1)v(t, x(t)) - 2kme^{-mt}v(t, x(t))$$

Επομένως θα ισχύει

$$\ddot{v}(t, x(t)) + 2\dot{v}(t, x(t)) = 2ke^{-mt}v(t, x(t))[2ke^{-mt} - 2 - m] \tag{7.1.6}$$

Στη συνέχεια θέτουμε

$$r = m - 2(k-1) > 0 \tag{7.1.7}$$

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (7.1.5) με το r ως έχει οριστεί κατά την (7.1.7) και έχουμε

$$r[\dot{v}(t,x(t)) + 2v(t,x(t))] = r[2ke^{-mt}v(t,x(t))] \tag{7.1.8}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (7.1.6) και (7.1.8) και προκύπτει

$$\begin{aligned} \ddot{v}(t,x(t)) + 2\dot{v}(t,x(t)) + r[\dot{v}(t,x(t)) + 2v(t,x(t))] = \\ = 2ke^{-mt}v(t,x(t))[2ke^{-mt} - 2 - m] + 2rke^{-mt}v(t,x(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{v}(t,x(t)) + 2\dot{v}(t,x(t)) + r[\dot{v}(t,x(t)) + 2v(t,x(t)) = \\ = 2ke^{-mt}v(t,x(t))[2ke^{-mt} - 2k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{v}(t,x(t)) + 2\dot{v}(t,x(t)) + r[\dot{v}(t,x(t)) + 2v(t,x(t))] = \\ = (e^{-mt} - 1)4k^2e^{-mt}v(t,x(t)) \end{aligned}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $d_2(t,x(t))$ ως εξής

$$d_2(t,x(t)) \equiv (e^{-mt} - 1)4k^2e^{-mt}v(t,x(t)) \quad , \quad t \geq 0 \tag{7.1.9}$$

Η συνάρτηση d_2 είναι αρνητικά ημιορισμένη .Λόγω της (7.1.9) η (7.1.6) θα γράφεται

$$\ddot{v}(t,x(t)) + (2+r)\dot{v}(t,x(t)) + 2rv(t,x(t)) = d_2(t,x(t)) \leq 0 \tag{7.1.10}$$

Παρατηρούμε ότι η (7.1.10) έχει τη μορφή της (6.2.3) και η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η ακόλουθη

$$s^2 + (2+r)s + 2r = 0 \tag{7.1.11}$$

Λύνοντας την (7.1.11) ,προκύπτουν οι ρίζες $s_1 = -2 < 0$ και $s_2 = -m + 2(k-1) = -r < 0$,λόγω της (7.1.7) .Εφόσον η (7.1.11) έχει αρνητικές ρίζες ,είναι Hurwitz .Ορίζουμε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{V}(t,x(t)) \overset{\text{ορ}}{=} \begin{bmatrix} v(t,x(t)) \\ \dot{v}(t,x(t)) \end{bmatrix} \overset{(7.1.4)}{=} \begin{bmatrix} v(t,x(t)) \\ 2(ke^{-mt}-1)v(t,x(t)) \end{bmatrix} \tag{7.1.12}$$

Βρίσκουμε την ολική χρονική παράγωγο της $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(t,x(t)) &= \begin{bmatrix} \dot{v}(t,x(t)) \\ \ddot{v}(t,x(t)) \end{bmatrix} \\ &\overset{(7.1.10)}{=} \begin{bmatrix} 2(ke^{-mt}-1)v(t,x(t)) \\ (-2-r)\dot{v}(t,x(t)) - 2rv(t,x(t)) + d_2(t,x(t)) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.1.13}$$

Γράφοντας τη (7.1.13) στη μορφή

$$\dot{\mathbf{V}}(t,x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-r & -2r \end{bmatrix} \mathbf{V}(t,x(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2(t,x(t)) \end{bmatrix} \tag{7.1.14}$$

παρατηρούμε ότι η (7.1.14) αποτελεί ειδική περίπτωση της (6.2.19) .Επιπλέον η v είναι ακτινικά μη φραγμένη και θετικά ορισμένη .Τέλος ,οι v και $\dot{v}$ είναι ελαττούμενες ,άρα και η $\mathbf{V}$ ως έχει οριστεί κατά την (7.1.12) είναι ολικά ελαττούμενη .Συνεπώς ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος (6.2.1) οι οποίες αποδεικνύουν την ολική ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια της αρχής 0 του συστήματος (7.1.1) .

Παράδειγμα 7.1.2 *Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{7.1.15}$$

Θέτουμε

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας τη χαρακτηριστική εξίσωση $|A - \lambda I| = 0$ του συστήματος (7.1.15) ,προκύπτουν οι λύσεις $\lambda_1 = -1 + 2i$ και $\lambda_2 = -1 - 2i$,οι οποίες βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο .Επομένως το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του (7.1.15) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές ,πράγμα το οποίο μπορεί να επιβεβαιωθεί και με τη χρήση του Θεωρήματος 6.2.1 .Αρχικά θεωρούμε την παρακάτω θετικά ορισμένη συνάρτηση

$$v(x(t)) = x_1^2 + x_2^2$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της v κατά μήκος των τροχιών του (7.1.15)

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(-4x_1 - x_2) \\ \Rightarrow \dot{v}(x) &= -2x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_2^2 \end{aligned} \tag{7.1.16}$$

Από την (7.1.16) παρατηρούμε ότι η $\dot{v}$ δεν είναι αρνητικά ορισμένη .Συνεπώς δε μπορεί να εφαρμοστεί η ευθεία μέθοδος Lyapunov .Ωστόσο ,καθώς η $\dot{v}$ και όλες οι επόμενες παράγωγοι της v κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (7.1.15) θα είναι σε τετραγωνική μορφή ,ενδεχομένως να είναι εφικτό να βρεθεί μία γραμμική εξάρτηση μεταξύ τους .Υπολογίζουμε τη δεύτερη και την τρίτη παράγωγο της v :

$$\begin{aligned} \ddot{v}(x) &= -4x_1(-x_1 + x_2) - 6(x_2(-x_1 + x_2) + x_1(-4x_1 - x_2)) - 4x_2(-4x_1 - x_2) \\ &= 4x_1^2 - 4x_1x_2 - 6(-2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1^2) + 16x_1x_2 + 4x_2^2 \\ &= 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_2 - 6x_2^2 + 24x_1^2 + 16x_1x_2 + 4x_2^2 \end{aligned}$$

Άρα

$$\ddot{v}(x) = 28x_1^2 + 24x_1x_2 - 2x_2^2 \tag{7.1.17}$$

$$\begin{aligned} \dddot{v}(x) &= 56x_1(-x_1 + x_2) + 24(-2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1^2) - 4x_2(-4x_1 - x_2) \\ &= -56x_1^2 + 56x_1x_2 - 48x_1x_2 + 24x_2^2 - 96x_1^2 + 16x_1x_2 + 4x_2^2 \end{aligned}$$

Άρα

$$\dddot{v}(x) = -152x_1^2 + 24x_1x_2 + 28x_2^2 \tag{7.1.18}$$

Χρησιμοποιώντας τη βάση $\{x_1^2 \ , \ x_1x_2 \ , \ x_2^2\}$,οι σχέσεις (7.1.16) ,(7.1.17) και (7.1.18) μπορούν να συμπτυχθούν στην ακόλουθη ισότητα πινάκων

$$\begin{bmatrix} v(x) & \dot{v}(x) & \ddot{v}(x) & \dddot{v}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 28 & -152 \\ 0 & -6 & 24 & 24 \\ 1 & -2 & -2 & 28 \end{bmatrix} \tag{7.1.19}$$

Θέτουμε

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 28 & -152 \\ 0 & -6 & 24 & 24 \\ 1 & -2 & -2 & 28 \end{bmatrix} \tag{7.1.20}$$

Θεωρούμε ένα γραμμικό συνδιασμό των $v^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, 3$.Έστω οι συντελεστές $r_i \in \mathbb{R}$,$i = 0, 1, 2$ για τους οποίους ισχύει

$$r_0v + r_1\dot{v} + r_2\ddot{v} + \dddot{v} = \begin{bmatrix} v & \dot{v} & \ddot{v} & \dddot{v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & 1 \end{bmatrix}^T = 0 \tag{7.1.21}$$

όπου $v \equiv v(x)$.Λόγω της (7.1.19) ,η (7.1.21) γίνεται

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & 1 \end{bmatrix}^T = 0 \Rightarrow P \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & 1 \end{bmatrix}^T = 0$$

$$\overset{(7.1.20)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 28 & -152 \\ 0 & -6 & 24 & 24 \\ 1 & -2 & -2 & 28 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 28 \\ 0 & -6 & 24 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152 \\ -24 \\ -28 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας ως προς r_0, r_1, r_2 προκύπτει ότι

$$r_0 = 40 \ , \ r_1 = 28 \ , \ r_2 = 6$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (7.1.21) έχουμε

$$40v(x) + 28\dot{v}(x) + 6\ddot{v}(x) + \dddot{v}(x) = 0 \qquad (7.1.22)$$

Από την (7.1.22) προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 28s + 40 = 0 \qquad (7.1.23)$$

Λύνοντας την (7.1.23) προκύπτουν οι ρίζες $s_0 = -2$,$s_1 = -2 + 4i$,$s_2 = -2 - 4i$,οι οποίες βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο .Επομένως η (7.1.23) είναι Hurwitz .Ικανοποιούνται εν τέλει οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 6.2.1 που συνεπάγονται την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του μηδενικού σημείου ισορροπίας του συστήματος (7.1.15) . □

Παράδειγμα 7.1.3 *Δίνεται το ακόλουθο μη γραμμικό χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -g_1(x_1) - 2x_1x_2 + ke^{-pt}x \\ \dot{x}_2 &= -g_2(x_2) + x_1^2 + ke^{-pt}x_2 \\ t &\geq 0 \ , \ (k, p > 0) \end{aligned} \tag{7.1.24}$$

Όπου οι k και p είναι θετικές σταθερές και οι $g_i(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ είναι συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$\sigma^2 \leq g_i(\sigma)\sigma \leq 2\sigma^2 \ , \ \forall \sigma \in \mathbb{R} \ , \ \forall i = 1, 2 \tag{7.1.25}$$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις $g_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ είναι μη λείες ,θα αποδειχθεί η ολική ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (7.1.24) ,όταν για τις σταθερές p, k ισχύει

$$p > 2k > 0 \tag{7.1.26}$$

Θεωρούμε τη θετικά ορισμένη υποψήφια συνάρτηση Lyapunov $v_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,όπου

$$v_1(t, x(t)) = x_1^2 + 2x_2^2 \tag{7.1.27}$$

Υπολογίζουμε την ολική χρονική παράγωγο της v_1 κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (7.1.24) .

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t, x(t)) = 2x_1\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2 = -2x_1g_1(x_1) - 4x_2g_2(x_2) + \\ + (x_1^2 + 2x_2^2)2ke^{-pt} \end{aligned} \tag{7.1.28}$$

για κάθε $t \geq 0$.Απαλείφουμε τις g_i από τη (7.1.28) χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.1.25) .Οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} &\dot{v}_1(t, x(t)) \leq -2x_1^2 - 4x_2^2 + (x_1^2 + 2x_2^2)2ke^{-pt} \\ &\Rightarrow \dot{v}_1(t, x(t)) \leq -2(x_1^2 + 2x_2^2) + (x_1^2 + 2x_2^2)2ke^{-pt} \\ &\Rightarrow \dot{v}_1(t, x(t)) \overset{(7.1.27)}{\leq} 2v_1(t, x(t))(ke^{-pt} - 1) \ , \ t \geq 0 \end{aligned} \tag{7.1.29}$$

Αντικαθιστώντας στην (7.1.29) όπου $t = 0$,προκύπτει ότι $v_1(0, x(0)) \leq 2v_1(0, x(0))(k-1)$.Λόγω της (7.1.26) ισχύει ότι $k - 1 > -1$. Επιπλέον η v_1 είναι θετικά ορισμένη .Επομένως γενικά ,η $\dot{v}_1$ δεν είναι αρνητικά ορισμένη και η ευθεία μέθοδος Lyapunov δε μπορεί να εφαρμοστεί . Θέτουμε

$$v_2(t, x(t)) = 2v_1(t, x(t))(ke^{-pt} - 1) \ , \ \ t \geq 0 \tag{7.1.30}$$

Από την (7.1.28) ,προκύπτει ότι η $\dot{v}_1$ είναι μη λεία ,καθώς οι g_i , $i = 1, 2$ είναι επίσης μη λείες .Ωστόσο η v_2 ως έχει οριστεί στη σχέση (7.1.30) είναι λεία συνάρτηση ως γινόμενο λείων συναρτήσεων .Υπολογίζουμε την παράγωγο της v_2 κατά μήκος των τροχιών του (7.1.24)

$$\begin{aligned}
\dot{v}_2(t, x(t)) &= -p2v_1(t, x(t))ke^{-pt} + 2\dot{v}_1(ke^{-pt} - 1) \\
&\overset{(7.1.28)}{=} -p2v_1(t, x(t))ke^{-pt} + \\
&+ 2[-2x_1g_1(x_1) - 4x_2g_2(x_2) + 2v_1(t, x(t))ke^{-pt}](ke^{-pt} - 1)
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\dot{v}_2(t, x(t)) = &-(p+2)2v_1(t, x(t))ke^{-pt} + 4v_1(t, x(t))(ke^{-pt})^2 + \\
&+ 4[x_1g_1(x_1) + 2x_2g(x_2)] - 4[x_1g_1(x_1) + 2x_2g_2(x_2)]ke^{-pt}
\end{aligned} \tag{7.1.31}$$

Εφαρμόζουμε εκ νέου απαλοιφή των g_i , $i = 1, 2$,αξιοποιώντας την (7.1.25) και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\dot{v}_2(t, x(t)) &\leq -(p+2)2v_1(t, x(t))ke^{-pt} + 4v_1(t, x(t))(ke^{-pt})^2 + \\
&+ 8(x_1^2 + 2x_2^2) - 4(x_1^2 + 2x_2^2)ke^{-pt} \\
&= -(p+4)2v_1(t, x(t))2v_1(t, x(t))ke^{-pt} + 4v_1(t, x(t))(ke^{-pt})^2 + \\
&+ 8v_1(t, x(t))
\end{aligned} \tag{7.1.32}$$

Εν συνεχεία θεωρούμε τους σταθερούς πραγματικούς συντελεστές α_0, α_1 και δημιουργούμε το γραμμικό συνδυασμό $\dot{v}_2 + \alpha_1 v_2 + \alpha_0 v_1$.Χρησιμοποιώντας τις (7.1.28) και (7.1.32) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\dot{v}_2(t,x(t)) + \alpha_1 v_2(t,x(t)) + \alpha_0 v_1(t,x(t)) &\leq -(p+4)2v_1(t,x(t)) + 4v_1(t,x(t)) + \\ &+ 8v_1(t,x(t)) + \alpha_1 2v_1(t,x(t))(ke^{-pt}-1) + \alpha_0 v_1(t,x(t)) = \\ &= 2v_1(t,x(t))ke^{-pt}[2ke^{-pt} - (p+4) + \alpha_1] + \\ &+ v_1(t,x(t))[8+\alpha_0 - 2\alpha_1]\end{aligned} \tag{7.1.33}$$

Εφόσον $p > 0$ θα ισχύει $e^{-pt} \leq 1$, για κάθε $t \geq 0$.Άρα η (7.1.33) διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned}\dot{v}_2(t,x(t)) + \alpha_1 v_2(t,x(t)) + \alpha_0 v_1(t,x(t)) \leq 2v_1(t,x(t))(2k - p - 4 + \alpha_1) + \\ + v_1(t,x(t))(8 + \alpha_0 - 2\alpha_1)\end{aligned} \tag{7.1.34}$$

Θέτουμε

$$b = p - 2k \overset{(7.1.26)}{>} 0 \tag{7.1.35}$$

Ακολούθως ,μηδενίζουμε τις παρενθέσεις του δεξιού μέλους της (7.1.34) .Συνεπώς προκύπτει το παρακάτω σύστημα με αγνώστους τους α_0 και α_1

$$\begin{cases} 2k - p - 4 + \alpha_1 \overset{(7.1.35)}{=} -b - 4 + \alpha_1 = 0 \\ 8 + \alpha_0 - 2\alpha_1 = 0 \end{cases} \tag{7.1.36}$$

Λύνοντας το (7.1.36) προκύπτει ότι $\alpha_1 = b + 4$ και $\alpha_0 = 2b$.Αντικαθιστώντας τα α_0 και α_1 στην (7.1.34) ,οι (7.1.29) και (7.1.34) μπορούν να συμπτυχθούν στην ακόλουθη ανισότητα

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t,x(t)) \\ \dot{v}_2(t,x(t)) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2b & -(b+4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t,x(t)) \\ v_2(t,x(t)) \end{bmatrix} \quad , \quad t \geq 0 \tag{7.1.37}$$

Επομένως ικανοποιείται η (6.2.22) για $m = 2$.Από την (7.1.37) προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση

$$s^2 + (b+4)s + 2b = 0 \tag{7.1.38}$$

η οποία λόγω της (7.1.35) είναι Hurwitz καθώς έχει θετικούς συντελεστές .Συγκεκριμένα η (7.1.38) έχει δύο αρνητικές πραγματικές ρίζες εφόσον για τη διακρίνουσα Δ ,ισχύει

$$\Delta = (b+4)^2 - 8b = b^2 + 16 > 0$$

Αν επιπλέον ορίσουμε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{V}(t, x(t)) \overset{\text{ορ}}{=} \begin{bmatrix} v_1(t, x(t)) \\ \\ v_2(t, x(t)) \end{bmatrix} \ , \ \ t \geq 0 \tag{7.1.39}$$

παρατηρούμε ότι η $\mathbf{V}$ είναι ολικά ελαττούμενη καθώς οι συναρτήσεις v_1 ,v_2 ως έχουν οριστεί σύμφωνα με τις σχέσεις (7.1.27) και (7.1.30) είναι ελαττούμενες .Επιπλέον ,η v_1 είναι θετικά ορισμένη και από την (7.1.27) προκύπτει ότι είναι ακτινικά μη φραγμένη .Επομένως πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 6.2.1 ,οι οποίες οδηγούν στην απόδειξη της ολικής ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας της μηδενικής κατάστασης ισορροπίας του συστήματος (7.1.24) . □

7.2 Εφαρμογή του Θεωρήματος 6.3.1

Το συγκεκριμένο παράδειγμα αναφέρεται σε μη αυτόνομο σύστημα με παραμέτρους .Αποδεικνύεται η ολική ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια της μηδενικής κατάστασης ισορροπίας μέσω επιβεβαίωσης των συνθηκών του Θεωρήματος 6.3.1 .

Παράδειγμα 7.2.1 *Δίνεται το χρονικά μεταβαλλόμενο μη γραμμικό σύστημα:*

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -g_1(x_1) - 2x_1x_2 + ke^{-pt}x_1 \\ \dot{x_2} &= -g_2(x_2) + x_1^2 + ke^{-pt}x_2 \\ & t \geq 0 \ , \ (k, p > 0) \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Όπου οι k και p είναι θετικές σταθερές ,οι g_1, g_2 ,είναι συνεχείς αλλά πιθανόν μη λείες συναρτήσεις(μία λεία συνάρτηση έχει παραγώγους όλων των τάξεων εντός του πεδίου ορισμού της) και ισχύει

$$g_i(0) = 0 \ , \ \ g_i(\sigma) \cdot \sigma > 0 \ , \ \ \forall \sigma \neq 0 \tag{7.2.2}$$

Κατασκευάζεται η διανυσμάτικη συνάρτηση

$$\boldsymbol{V}(t, x(t)) = [v_1(t, x(t)), v_2(t, x(t)), \cdots, v_m(t, x(t))]$$

της οποίας τις συνιστώσες, αποτελούν οι ακόλουθες συναρτήσεις:

$$v_i(t, x(t)) = (2ke^{-pt})^{(i-1)}(x_1^2(t) + 2x_2^2(t)) \ , \ \ i = 1, 2, ..., m \tag{7.2.3}$$

• Για $i = 1$ λαμβάνουμε από την (7.2.3)

$$v_1(t, x) = x_1^2 + 2x_2^2 \geq 0$$

Η v_1,είναι θετικά ορισμένη και ελαττούμενη.Επίσης όλες οι υπόλοιπες συνιστώσες $v_i(t, x(t))$, $i = 2, ..., m$ είναι ελαττούμενες συναρτήσεις. Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της κάθε συνιστώσας:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_i(t, x(t)) = v_{i_t} + v_{i_x} &= -p(i-1)(2ke^{-pt})^{(i-1)}(x_1^2 + 2x_2^2) + \\
&+ (2ke^{-pt})^{(i-1)}(2x_1\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2) \\
&= -p(i-1)(2ke^{-pt})^{(i-1)}(x_1^2 + 2x_2^2) + \\
&+ (2ke^{-pt})^{(i-1)}(-2x_1 g_1(x_1) - 4x_1^2 x_2 + 2x_1^2 ke^{-pt} - 4x_2 g_2(x_2) + \\
&+ 4x_1^2 x_2 + 4x_2^2 ke^{-pt}) \\
&= -(2ke^{-pt})^{(i-1)}[p(i-1)(x_1^2 + 2x_2^2) + 2x_1 g_1(x_1) + 4x_2 g_2(x_2) + \\
&+ 2ke^{-pt}(x_1^2 + 2x_2^2)]
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\dot{v}_i(t, x(t)) = -(2ke^{-pt})^{(i-1)}[&2x_1 g_1(x_1) + 4x_2 g_2(x_2) + \\
&+ (p(i-1) - 2ke^{-pt})(x_1^2 + 2x_2^2)]
\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

Λόγω άγνοιας των τύπων των g_1, g_2 ,δεν είμαστε εις θέση να προσδιορίσουμε το πρόσημο της κάθε παραγώγου .Για παράδειγμα αν $g_1(\sigma) = g_2(\sigma) = \sigma^3$ και με $k > 0$ η

$$\dot{v}_1(t,x) = -2x_1g_1(x_1) + 4x_2g_2(x_2) + 2ke^{-pt}(x_1^2 + 2x_2^2),$$

μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική.

Γράφοντας όμως την (7.2.4) στη μορφή

$$\begin{aligned}
\dot{v}_i(t,x(t)) &= -(2ke^{-pt})^i \cdot (2ke^{-pt})^{-1}[2x_1g_1(x_1) + 4x_2g_2(x_2) + \\
&\quad + (p(i-1) - 2ke^{-pt})(x_1^2 + 2x_2^2)] \\
&= (2ke^{-pt})^i \left[-\frac{2x_1g_1(x_1) + 4x_2g_2(x_2)}{2ke^{-pt}} + \frac{(p(i-1)+1)}{-2ke^{-pt}} \right]
\end{aligned}$$

Οδηγούμαστε στην ανισότητα

$$\dot{v}_i(t,x) \leq (2ke^{-pt})^i(x_1^2 + 2x_2^2) = v_{i+1}(t,x)\ ,\ \forall\, i = 1,2,...,m-1 \qquad (7.2.5)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε το ακόλουθο άθροισμα με θετικούς πραγματικούς συντελεστές α_i :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \dot{v}_i(t,x(t)) &= -[2x_1g_1(x_1) + 4x_2g_2(x_2)] \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (2ke^{-pt})^{(i-1)} + \\
&\quad + (x_1^2 + 2x_2^2) \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (2ke^{-pt})^i - (x_1^2 + 2x_2^2) \cdot \sum_{i=1}^{m} [\alpha_i (2ke^{-pt})^{(i-1)} p(i-1) - \\
&\quad - [2x_1g_1(x_1) + 4x_2g_2(x_2)] \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (2ke^{-pt})^{(i-1)} + \\
&\quad + 2ke^{-pt}(x_1^2 + 2x_2^2) \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (2ke^{-pt})^{(i-1)} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (2ke^{-pt})^{(i-2)} p(i-1) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \dot{v}_i(t, x(t)) = &-[2x_1 g_1(x_1) + 4x_2 g_2(x_2)] \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (2ke^{-pt})^{(i-1)} + \\ &+ 2ke^{-pt}(x_1^2 + 2x_2^2)[\alpha_m (2ke^{-pt})^{(m-1)} + \alpha_1 - p\alpha_2 + \\ &+ \sum_{i=2}^{m-1} \alpha_i (2ke^{-pt})^{(i-1)} + \sum_{i=3}^{m} \alpha_i (2ke^{-pt})^{(i-2)} p(i-1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \dot{v}_i(t, x(t)) = &-[2x_1 g_1(x_1) + 4x_2 g_2(x_2)] \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (2ke^{-pt})^{i-1} + \\ &+ 2ke^{-pt}(x_1^2 + 2x_2^2)[\alpha_m (2ke^{-pt})^{(m-1)} + \alpha_1 - p\alpha_2 + \\ &+ \sum_{i=2}^{m-1} (\alpha_i - p\alpha_{i+1} i) \cdot (2ke^{-pt})^{i-1}]\end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε συντελεστές α_i ,έτσι ώστε

$$\begin{aligned}&\alpha_i - p\alpha_{i+1} i = 0\,,\ \forall i = 2, 3, ..., m-1 \\ &\text{και} \\ &\sup[\alpha_m (2ke^{-pt})^{m-1} + \alpha_1 - p\alpha_2] = 0\end{aligned} \tag{7.2.7}$$

για $t \geq 0$.

Τότε δεδομένης της (7.2.7) ,η (7.2.6) γίνεται :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \dot{v}_i(t, x(t)) \leq -[2x_1 g_1(x_1) + 4x_2 g_2(x_2)] \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (2ke^{-pt})^{i-1} \\ \Rightarrow &\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \dot{v}_i(t, x(t)) \leq -\alpha_1 (2x_1 g_1(x_1) + 4x_2 g_2(x_2)) \ ,\ \ t \geq 0\end{aligned} \tag{7.2.8}$$

Η (7.2.8) και η (7.2.2) μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι το άθροισμα $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \dot{v}_i(t, x(t))$,αποτελεί μία αρνητικά ορισμένη συνάρτηση

.Εν τέλει οι ανισότητες (7.2.5) και (7.2.8) ,αποτελούν ειδική μορφή της σχέσης (6.3.2) . Επομένως ,χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.3.1 με $\alpha_1 > 0$ και $\alpha_i \geq 0$, για κάθε $i = 2, ..., m$, η μηδενική κατάσταση ισορροπίας του συστήματος (7.2.1),είναι ***ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής*** .Μένει να επιβεβαιωθεί ότι οι συντελεστές α_i όπως επιλέχθησαν κατά τη σχέση (7.2.7) είναι θετικοί .Πράγματι ,θέτοντας $\alpha_1 = 1$, από την (7.2.7) , έχουμε

$$\alpha_i = p\alpha_{i+1}i \ , \ i = 2, 3, ..., m-1$$

- $$\text{Για } i = m-1 \rightarrow \alpha_{m-1} = p\alpha_m(m-1) \Rightarrow \alpha_m = \frac{\alpha_{m-1}}{p(m-1)}$$

  Επιπλέον

  $$\alpha_m(2k)^{m-1} + \alpha_1 - p\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_m(2k)^{m-1} + 1 - p\alpha_2 = 0 \qquad (7.2.9)$$

- $$\text{Για } i = m-2 \rightarrow \alpha_{m-1} = \frac{\alpha_{m-2}}{p(m-2)} \Rightarrow \alpha_m = \frac{\alpha_{m-2}}{p^2(m-1)(m-2)}$$

  Η διαδικασία συνεχίζεται κατά τον ίδιο τρόπο με φθίνουσες τιμές του i ,οπότε τελικά προκύπτει:

- $$\text{Για } i = 2 \rightarrow \alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2p} \Rightarrow \alpha_m = \frac{\alpha_2}{p^{m-2}(m-1)!}$$

Αντικαθιστώντας στην (7.2.9) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha_2}{p^{m-2}(m-1)!}(2k)^{m-1} + 1 - p\alpha_2 = 0 \Rightarrow \left(p(\frac{2k}{p})^{m-1} \cdot \frac{1}{(m-1)!} - p\right)\alpha_2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{p[1-(\frac{2k}{p})^{m-1} \cdot \frac{1}{(m-1)!}]} \\ \\ \alpha_i = \frac{\alpha_2}{p^{i-2}(i-1)!} \ , \ i = 3, ..., m \end{cases} \qquad (7.2.10)$$

Εφόσον απαιτείται να ισχύει $\alpha_i > 0$, για κάθε $i = 1, ..., m$,από την (7.2.10) ,προκύπτει ότι θα πρέπει

$$\left(\frac{2k}{p}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{(m-1)!} < 1 \ , \ m \geq 2 \tag{7.2.11}$$

Στην παραπάνω διαδικασία,ο ακέραιος $m \in \mathbb{Z}$,είναι αυθαίρετα επιλεγμένος και λόγω της (7.2.11) ισχύει

$$\left(\frac{2k}{p}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{(m-1)!} \underset{m\to\infty}{\to} 0 \tag{7.2.12}$$

Συνεπώς,για κάθε ζεύγος $p, k > 0$, μπορεί να βρεθεί κάποιο $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, ώστε να ικανοποιείται η (7.2.11) .Έτσι βάσει των προϋποθέσεων του Θεωρήματος 6.3.1 , αποδεικνύεται η ολική ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $x = 0$ του (7.2.1) , για κάθε $p, k > 0$.

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και επιβεβαιώνεται χρησιμοποιώντας την άμεση μέθοδο Lyapunov .Αρχικά έχοντας θέσει $\alpha_1 = 1$ παρατηρούμε ότι από τις σχέσεις (7.2.10) και (7.2.12) έχουμε :

$$\alpha_2 \underset{m\to\infty}{\to} \frac{1}{p} \tag{7.2.13}$$

Άρα λόγω της (7.2.13) προκύπτει η ακόλουθη γενική μορφή της (7.2.10)

$$\alpha_i \underset{m\to\infty}{\to} \frac{1}{(i-1)!p^{i-1}} \ , \ i = 2, 3, ... \tag{7.2.14}$$

Κατασκευάζουμε λοιπόν ,την ακόλουθη συνάρτηση Lyapunov για το (7.2.1) , επιστρατεύοντας τους θετικούς πραγματικούς συντελεστές α_i , $i = 1, ..., m$ σύμφωνα με το αποτέλεσμα της (7.2.14)

$$\begin{aligned} s(t, x(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i(t, x(t)) &= (x_1^2 + 2x_2^2) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2ke^{-pt})^{(i-1)}}{(i-1)!p^{i-1}} \\ &= (x_1^2 + 2x_2^2) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2ke^{-pt}}{p}\right)^{(i-1)} \cdot \frac{1}{(i-1)!} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s(t,x) = (x_1^2 + 2x_2^2)\exp\left(\frac{2ke^{-pt}}{p}\right) \tag{7.2.15}$$

Εν συνεχεία,υπολογίζουμε την ολική παράγωγο της s

$$\dot{s}(t,x(t)) = \left[(2x_1\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2) + \frac{2ke^{-pt}}{p}(-p)(x_1^2 + 2x_2^2)\right]\exp\left(\frac{2ke^{-pt}}{p}\right)$$

$$= [-2x_1g_1(x_1) - 4x_1^2x_2 + 2x_1^2ke^{-pt} - 4x_2g_2(x_2) + 4x_2x_1^2 +$$

$$+ 4x_2ke^{-pt} - 2ke^{-pt}(x_1^2 + 2x_2^2)]\exp\left(\frac{2ke^{-pt}}{p}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{s}(t,x(t)) = -(2x_1g_1(x_1) + 4x_2g_2(x_2))\exp\left(\frac{2ke^{-pt}}{p}\right) \tag{7.2.16}$$

Λόγω των περιορισμών για τις συναρτήσεις g_1 και g_2 που διατυπώνονται στην αρχή του παραδείγματος,ισχύουν τα ακόλουθα

$$\dot{s}(t,0) = 0 \text{ και } \dot{s}(t,x) < 0 \text{ , } \forall x \neq 0$$

Συνεπώς η $\dot{s}$ είναι αρνητικά ορισμένη και επιτρέπεται η εφαρμογή της μεθόδου Lyapunov για μη αυτόνομα συστήματα ,με την οποία ταυτοποιείται το αποτέλεσμα της μεθόδου που προηγήθηκε.

7.3 Εφαρμογή του Θεωρήματος 6.3.2

Το Παράδειγμα που ακολουθεί ,αναφέρεται σε αυτόνομο σύστημα και καταδεικνύει τη χρησιμότητα του Θεωρήματος 6.3.2 προς εύρεση περιοχής έλξης μέσω του ορισμού διαφορετικής συνάρτησης Lyapunov για το σύστημα .

Παράδειγμα 7.3.1 *Θεωρούμε το ακόλουθο μη γραμμικό,αυτόνομο σύστημα*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 + x_2 \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

Η μέθοδος Lyapunov,αποτελεί αποδεικτικό εργαλείο για την ευστάθεια μιας μηδενικής κατάστασης ισορροπίας του (7.3.1) ,με τη χρήση μιας κατάλληλης Lyapunov συνάρτησης.
Έστω

$$v_1(x) = x_1^2 + x_2^2$$

Η v_1 , είναι θετικά ορισμένη και ελαττούμενη.Επιπλέον

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1 + x_2^3) + 2x_2(x_1^3 - x_2) \\ &= -2x_1^2 + 2x_1x_2^3 + 2x_2x_1^3 - 2x_2^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{v}_1(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1x_2 - 1)$$

Η ασυμπτωτική ευστάθεια της αρχής,απαιτεί σύμφωνα με τη μέθοδο Lyapunov,η $\dot{v}_1$, να είναι αρνητικά ορισμένη.Για την άνωθι $\dot{v}_1$, ισχύει :

$$\dot{v}_1(0) = 0$$

και θα πρέπει $\dot{v}_1(x) < 0$, για κάθε $x \neq 0$
Αν λοιπόν , $\dot{v}_1(x) < 0$, προκύπτει :

$$2(x_1^2 + x_2^2)(x_1x_2 - 1) < 0$$

$$\Rightarrow (x_1x_2 - 1) < 0$$

$$\Rightarrow x_1x_2 < 1 \ , \ \forall x \neq 0$$

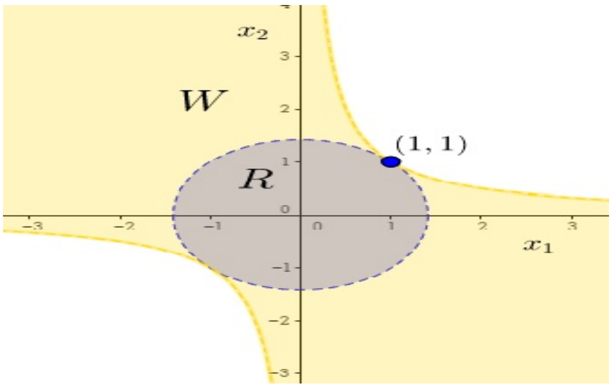
- Αν οι x_1,x_2, είναι *ετερόσημοι* , τότε η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε τέτοιο ζεύγος x_1,x_2,οπότε στο 2^o και στο 4^o τεταρτημόριο του ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων στο Σχήμα 7 , η $\dot{v}_1(x)$, είναι γνήσια αρνητική.

- Αν οι x_1,x_2, είναι *ομόσημοι* , θα πρέπει να ισχύει

$$|x_1| < 1 \text{ και } |x_2| < 1$$

Οπότε στο 1^o και στο 3^o τεταρτημόριο (Σχήμα 7) , η περιοχή όπου η $\dot{v}_1(x)$ είναι αρνητική , περιορίζεται κάτωθεν του γραφήματος της συνάρτησης $|x_2| = \frac{1}{|x_1|}$, για κάθε ζεύγος x_1,x_2, για το οποίο ισχύει $x_1 \cdot x_2 > 0$.
Επιπλέον από τις παραπάνω απαιτήσεις,προκύπτει

$$x_1^2 + x_2^2 < 2$$



Σχήμα 7 : Περιοχή έλξης R του 0 με χρήση της v_1

Στο Σχήμα 7,διαφαίνεται ότι ο κύκλος

$$v_1(x) = x_1^2 + x_2^2 = 2$$

είναι η μεγαλύτερη καμπύλη(ή επιφάνεια Lyapunov) , $v_1 = c$ με $c = 2$, που περικλείεται στο σύνολο

$$W = \{x|\dot{v}_1(x) < 0\}$$

Έτσι η περιοχή έλξης για τη συνάρτηση Lyapunov $v_1(x)$ ως ετέθη , είναι η

$$R = \{x|v_1(x) = x_1^2 + x_2^2 < 2\}$$

Το ζητούμενο είναι να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία ευρύτερη περιοχή έλξης χρησιμοποιώντας μία νέα κατάλληλη συνάρτηση Lyapunov,της μορφής

$$s(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj} v_j(x)$$

Με τα α_{mj} να είναι στοιχεία ενός κάτω τριγωνικού πίνακα A , όπως ορίζονται στη σχέση (6.3.1) . Οπότε δεδομένης της αναδρομικής σχέσης της (6.3.3) ,ικανοποιείται και η ανισότητα (6.3.2).

Συνεπώς λόγω του Θεωρήματος 6.3.2 , για τη συγκεκριμένη s ισχύουν τα ακόλουθα

- Η s είναι ελαττούμενη
- $s(0) = 0$
- $s(x) > 0$, $\forall x \neq 0$
- Η $\dot{s}$, είναι αρνητικά ορισμένη

Όπως και στο Παράδειγμα 7.2.1 , επιλέγουμε $m = 2$ και θέτουμε

$$s_\alpha(x) = v_1(x) + \alpha v_2(x) \text{ , για κάποιο } \alpha > 0$$

Λόγω της (6.3.3) , η $s_\alpha(x)$, γράφεται

$$s_\alpha(x) = v_1(x) + \alpha \dot{v}_1(x) \text{ , για κάποιο } \alpha \geq 0$$

Τότε κοντά στην αρχή των αξόνων $(0, 0)$, απαιτείται να ισχύει

$$\begin{cases} s_\alpha(x) = v_1(x) + \alpha \dot{v}_1(x) > 0 \\ \dot{s}_\alpha(x) = \dot{v}_1(x) + \alpha \ddot{v}_1(x) < 0 \end{cases} \tag{7.3.2}$$

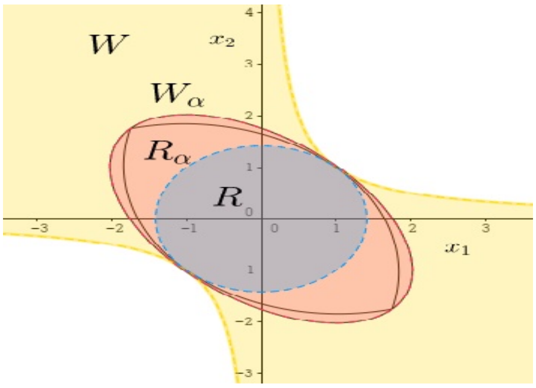
Επιπλέον ορίζοντας εκ νέου τις περιοχές

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \{x | s_\alpha(x) < 2\} \\ W_\alpha &= \{x | \dot{s}_\alpha(x) < 0\} \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

Είναι εφικτό να αποδειχθεί ότι η R_α από την (7.3.3) , είναι μία νέα ευρύτερη περιοχή έλξης αρκεί να περικλείεται στο σύνολο W_α της (7.3.3) , δηλαδή να ισχύει

$$R_\alpha \subset W_\alpha \text{ , για κάποιο } \alpha > 0$$

Βρίσκουμε τη νέα περιοχή έλξης η οποία διαγράφεται στο Σχήμα 8 για $\alpha \geq 0$



Σχήμα 8 : Περιοχή έλξης R_α του 0 με χρήση της s_α

Για $\alpha = 0$, έχουμε $R = R_0 \subset W_0 = W$.

Αν $\alpha > 0$, τότε

$$x \in R \Rightarrow x \in W \Rightarrow v_1(x) < 2 \text{ και } \dot{v}_1(x) < 0$$

Άρα

$$v_1(x) < 2 \text{ και } \alpha\dot{v}_1(x) < 0 \ , \ \alpha > 0$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$v_1(x) + \alpha\dot{v}_1(x) < 2 \Rightarrow s_\alpha(x) < 2 \Rightarrow x \in R_\alpha$$

Συνεπώς $R \subset R_\alpha$. Το R_α διευρύνεται καθώς το α αυξάνεται.

Έχοντας στη διάθεσή μας την πρώτη παράγωγο της θετικά ορισμένης v_1 , υπολογίζουμε και τη δεύτερη παράγωγο προκειμένου να προσδιορίσουμε τα στοιχεία της περιοχής W_α

$$\dot{v}_1(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1x_2 - 1) = 2v_1(x)(x_1x_2 - 1)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ddot{v}_1(x) &= 2\dot{v}_1(x)(x_1x_2 - 1) + 2v_1(x)(\dot{x}_1x_2 + \dot{x}_2x_1) \\
&= 4v_1(x)(x_1x_2 - 1)^2 + 2v_1(x)(x_1^4 + x_2^4 - 2x_1x_2) \\
&= 2v_1(x)[2x_1^2x_2^2 - 6x_1x_2 + 2 + x_1^4 + x_2^4] \\
&= 2v_1(x)[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 6x_1x_2]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{v}_1(x) = 2v_1(x)[v_1(x)^2 - 6x_1x_2 + 2]$$

Επομένως αν $x \in R_\alpha \Rightarrow s_\alpha(x) < 2 \Rightarrow v_1(x) + 2\alpha v_1(x)(x_1x_2 - 1) < 2$

Επειδή εντός του R_α , έχουμε $v_1 < 2$ και $\dot{v}_1 < 0$, θα πρέπει

$$x_1x_2 - 1 < 0$$

Τότε

$$\dot{s}_\alpha(x) = \dot{v}_1(x) + \alpha\ddot{v}_1(x) = 2v_1(x)(x_1x_2 - 1) + 2\alpha v_1(x)[v_1^2 - 6x_1x_2 + 2]$$

Για να καταλήξουμε στο ότι $x \in W_\alpha$ θα πρέπει να ισχύει $\dot{s}_\alpha(x) < 0$, $x \neq 0$. Επειδή κοντά στο 0 η v_1 είναι αυστηρά θετική,εξετάζουμε την ποσότητα

$$x_1x_2 - 1 - 6\alpha x_1x_2 + 2\alpha = (1 - 6\alpha)x_1x_2 - (1 - 2\alpha)$$

Οπότε για να είναι αρνητική η $\dot{s}_\alpha(x)$, κοντά στο 0 θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη

$$(1 - 6\alpha)x_1x_2 - (1 - 2\alpha) < 0$$

η οποία δεδομένου ότι $x_1x_2 - 1 < 0$, αληθεύει για πολύ μικρές θετικές τιμές του α . Συνεπώς $x \in W_\alpha$ και τελικά $R_\alpha \subset W_\alpha$.

Τέλος,αν $x \in W_\alpha \Rightarrow \dot{s}_\alpha(x) < 0 \Rightarrow \dot{v}_1(x) + \alpha\ddot{v}_1(x) < 0$

$$\Rightarrow 2v_1[(1 - 6\alpha)x_1x_2 + 2\alpha - 1 + v_1^2(x)] < 0$$

Άρα

$$(1 - 6\alpha)(x_1x_2 - 1)) + (2\alpha - 1) < 0 \tag{7.3.4}$$

Για να ισχύει $x \in W$, θα πρέπει

$$\dot{v}_1(x) < 0 \Rightarrow 2v_1(x)(x_1x_2 - 1) < 0 \Rightarrow x_1x_2 - 1 < 0$$

το οποίο δεδομένης της (7.3.4) , ισχύει για αρκετά μικρές τιμές του α . Οπότε τελικά προκύπτει ο ακόλουθος εγκλεισμός

$$R \subset R_\alpha \subset W_\alpha \subset W$$

και η νέα περιοχή έλξης R_α όπως διαφαίνεται στο Σχήμα 8 για το σύστημα (7.3.1).

Η μέγιστη τιμή του α ώστε η νέα περιοχή έλξης να εξακολουθεί να περιέχεται στο σύνολο W_α έχει υπολογιστεί αναλυτικά [24] και προέκυψε $\alpha_{max} = 1.5 - \sqrt{2}$. $\square$

Συμπεράσματα και ζητήματα για μελλοντική έρευνα

Στο πλαίσιο εκπόνησης της παρούσας εργασίας ,μελετήθηκαν προεκτάσεις και γενικεύσεις της θεωρίας Lyapunov για την ανάλυση ευστάθειας μη γραμμικών συστημάτων .Διερευνήθηκαν περιπτώσεις όπου διά της κλασικής μεθόδου οδηγούμαστε σε ανεπαρκή συμπεράσματα αλλά και συνθήκες υπό τις οποίες δεν είναι εφικτό η μέθοδος αυτή να εφαρμοστεί .Μέσω της ανάπτυξης εναλλακτικών μεθόδων ,διαπιστώνεται ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος Lyapunov είναι ικανές ,αλλά όχι αναγκαίες καθώς όπως αποδείχθηκε ,μπορούμε ελλείψει συνθηκών του, να καταλήξουμε σε αποτελέσματα ευστάθειας .

Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη μέθοδο των Meigoli και Nikravesh στο Κεφάλαιο 6 .Η μέθοδος επικεντρώνεται στην περίπτωση όπου η παράγωγος $\dot{v}_1$ μιας υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov για ένα (μη) αυτόνομο σύστημα δεν είναι αρνητικά ορισμένη .Στην περίπτωση αυτή ,ανατρέχουμε στις υψηλότερης τάξης παραγώγους της v_1 .Η συγκεκριμένη προσέγγιση ,επηρεασμένη από τα αποτελέσματα των Butz και Gunderson παρουσιάζεται σταδιακά και υφίσταται τροποποιήσεις προ περιορισμό των απαιτήσεων του σχετικού Θεωρήματος .

Η ανάπτυξη της πρώιμης μορφής ,έγινε μέσω της σύγκρισης με ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι Hurwitz .Στο Θεώρημα 6.3.1 Η συνθήκη Hurwitz ,αντικαθίσταται από την προϋπόθεση ότι οι συντελεστές α_i , $i = 1, ..., m$ θα πρέπει να είναι μη αρνητικοί . Η διαδικασία της απόδειξης του Θεωρήματος στην τελική μορφή του ,είναι πιο περίπλοκη σε σχέση με εκείνη της πρώιμης μορφής [18], καθώς ενδέχεται το γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα που χρησιμοποιείται να είναι ασταθές καθιστώντας τη σύγκριση μη αποτελεσματική .

Μέσω του Θεωρήματος 6.3.1 που προκύπτει έπειτα από τροποποιήσεις πρώιμων μορφών ,προκύπτει η συνθήκη $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_1^{(i)}(t,x) < 0, (\alpha_i \geq 0)$ η οποία καθίσταται ικανή για την απόδειξη της (ομοιόμορφης) ασυμπτωτικής ευστάθειας μιας μηδενικής κατάστασης ισορροπίας . Συνεπώς ,επιτυγχάνεται η γενίκευση κατ'αρχάς του Θεωρήματος Lyapunov και επί προσθέτως του αποτελέσματος του $Butz$ για $m > 3$ και για μη αυτόνομα συστήματα . Η αποδεικτική διαδικασία του Θεωρήματος του $Butz$ δε λειτουργεί για $m > 3$ λόγω ενδεχόμενης αστάθειας του συγκρινόμενου γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος σε αυτήν την περίπτωση.

Από το Παράδειγμα 7.2.1 ,διαφαίνεται ότι οι χρονικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης μιας ενδεχομένως ακατάλληλης υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov για τη μελέτη της συμπεριφοράς ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $x = 0$ ενός μη γραμμικού συστήματος,(η πιθανή ακαταλληλότητα έγκειται στη σχέση (7.2.4) για το συγκεκριμένο σύστημα)μπορούν να οδηγήσουν στην κατασκευή μιας τελικά αρμόζουσας συνάρτησης Lyapunov, της $s(t, x(t))$ συγκεκριμένα όπως ορίστηκε στην (7.2.15) και η ευστάθεια να διαπιστωθεί με την εφαρμογή του Θεωρήματος 6.3.1 .

Συνεπώς,όταν ικανοποιούνται οι απαραίτητες συνθήκες που διατυπώνονται στο Θεώρημα 6.3.1 , το Θεώρημα 6.3.2 παρουσιάζει μία κατάλληλη συνάρτηση Lyapunov της μορφής:

$$s(t, x(t)) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_1^{(i-1)}(t, x(t))$$

για την ανάλυση ευστάθειας μιας μηδενικής κατάστασης ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος . Στο Παράδειγμα 7.3.1 , διαπιστώνεται ότι οι πρακτικές των εν λόγω θεωρημάτων , μπορούν να εφαρμοστούν και στην περίπτωση ενός αυτόνομου συστήματος , δηλαδή ενός συστήματος που παραμένει αμετάβλητο με την πάροδο του χρόνου . Κατά συνέπεια αποδεικνύεται ότι παρόλο που η v_1 που τείθεται αρχικά,είναι κατάλληλη συνάρτηση Lyapunov,η εφαρμογή των προαναφερθέντων θεωρημάτων, μπορεί να οδηγήσει στην εύρεση μίας μεγαλύτερης περιοχής έλξης,εντός της οποίας ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Μία ενδεχόμενη αδυναμία της συγκεκριμένης μεθόδου απόδειξης ασυμπτωτικής ευστάθειας αποτελεί ο καθορισμός του αριθμού m της τάξης της παραγώγου μιας υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov .Δεν έχει βρεθεί γενικευμένος τρόπος προσέγγισης ώστε να προσδιοριστεί η τιμή του m σε κάθε περίπτωση .Οι ανισότητες της (6.3.2) κατασκευάζονται γραμμή προς γραμμή έτσι ώστε σε κάθε γραμμή i να αναζητούνται μη αρνητικοί συντελεστές α_{ij} ,$j = 1, ..., m$ οι οποίοι θα καθιστούν το άθροισμα $\sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}\dot{v}_j(t,x)$ μία αρνητικά ορισμένη συνάρτηση .Σε περίπτωση που βρεθούν οι κατάλληλοι συντελεστές ,η διαδικασία μπορεί να τερματιστεί μέσω της υπόθεσης ότι $m \equiv i$,ειδάλλως θα πρέπει να προσδιοριστεί μία συνάρτηση v_{i+1} η οποία θα αποτελεί άνω φράγμα του αθροίσματος της i-γραμμής .Δηλαδή $v_{i+1}(t,x) \geq \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}\dot{v}_j(t,x)$ και η διαδικασία συνεχίζεται αναφερόμενη στην $i+1$-γραμμή .Ωστόσο απαιτείται ο ορισμός ενός αλγορίθμου προς εύρεση κατάλληλων συντελεστών και συναρτήσεων και κατά συνέπεια προς καθορισμό του m σε κάθε περίπτωση. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] M.Vidyasagar,Nonlinear Systems Analysis,second ed. ,Prentice Hall, 1993

[2] H.K.Khalil,Nonlinear Systems,second ed. ,Prentice Hall ,1996

[3] T.M. Apostol .Mathematical Analysis.Addison-Wesley Reading,Mass. ,1957

[4] W.Hahn . Stability of Motion .Springer-Verlag , Ney York 1967

[5] M.W. Hirsch and S.Smale Differential Equations ,Dynamical Systems and Linear Algebra . Academic Press ,New York , 1974

[6] J.P.LaSalle . Some extensions of Lyapunov's method .Ire Trans.Circuit Theory , CT-7(4):520-527 , December 1960

[7] C.-T.Chen . Linear Systems Theory and Design . Holt,Rinehart and Winston , New York, 1984

[8] T.Kailath . Linear Systems . Prentice Hall, Englewood Cliffs , N.J. 1980

[9] P.E.Kloeden ,M.Rasmussen . Nonautonomous Dynamical Systems . American Mathematical Society, Providence ,RI 2011

[10] N.Rouche , P.Habets and M.Laloy . Stability Theory by Lyapunov's direct Method . Springer-Verlag , New York, 1977

[11] M.B.Kudaev, A study of the behavior of the trajectories of systems of differential equations by means of Lyapunov functions, Doklady Akademii Nauk SSSR 147(1962)

[12] J. A. Yorke, "Asymptotic properties of solutions using the second derivative of a Liapunov function", Ph.D. Dissertation, University of Maryland, College Park.

[13] J. A. Yorke, “A theorem on Liapunov functions using v”, Theory of Computing Systems, Springer, vol. 4, no 1, pp. 40-45, 1970.

[14] A. Butz, “Higher order derivatives of Liapunov functions”, IEEE Transactions on Automatic Control 14(1969) 111-112

[15] Σ.Τραχανάς. Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις ,Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

[16] R. W. Gunderson, “A Comparison Lemma for Higher Order Trajectory Derivatives”, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 27, No. 3, pp. 543-548, 1971.

[17] J.Marsden-A.Tromba . Διανυσματικός Λογισμός , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

[18] V. Meigoli, and SKY. Nikravesh, “A new theorem on higher order derivatives of Lyapunov functions”, ISA Trans. 48, 2009: pp.173-179

[19] V. Meigoli and S. K. Y. Nikravesh. Applications of higher order derivatives of Lyapunov functions in stability analysis of nonlinear homogeneous systems. In Proceedings of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists, 2009.

[20] V.Meigoli, and SKY. Nikravesh, “Extension of Higher Order Derivatives of Lyapunov Functions in Stability Analysis of Nonlinear Systems”, Amirkabir Journal of Modeling, Identification, Simulation and Control (MISC),Vol. 41, No. 1,pp. 25-33,spring 2009.

[21] V.Meigoli, and SKY. Nikravesh, ”Stability analysis of nnonlinear systems using higher oerder derivatives of Lyapunov function candidates” . Systems Control Letters ,Elsevier 2012

[22] A.A. Ahmadi . Non-monotonic Lyapunov Functions for Stability of Nonlinear and Switched Systems: Theory and Computation Master’s Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2008

[23] A. A. Ahmadi, P. A. Parrilo .On Higher Order Derivatives of Lyapunov Functions .In Proceedings of the 2011 American Control Conference, Submitted in 2010

[24] V. Meigoli, “Stability analysis of homogeneous nonlinear systems”, Ph.D.Thesis, Dept. of Electrical Eng., Amirkabir University of Technology, May2009.