ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

ΤΗΣ

ΒΕΝΕΤΙΑΣ Ν. ΚΑΡΑΦΩΤΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ,ΙΟΥΛΙΟΣ 2017

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

ΤΗΣ

ΒΕΝΕΤΙΑΣ Ν. ΚΑΡΑΦΩΤΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ,ΙΟΥΛΙΟΣ 2017

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ

ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

ΒΕΝΕΤΙΑΣ Ν. ΚΑΡΑΦΩΤΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 14 Ιουλίου 2017

Α. ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

....

Θ. ΡΑΣΣΙΑΣ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

....

Ε. ΔΟΥΚΑ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

....

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2017

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΒΕΝΕΤΙΑ ΚΑΡΑΦΩΤΗ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

....

ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ Ε.Μ.Π.

2017-All rights reserved

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με οποιονδήποτε τρόπο στην επιτυχή εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Θα πρέπει να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Αντώνιο Χαραλαμπόπουλο για την επίβλεψη της εργασίας μου. Ήταν πάντα διαθέσιμος με τις πολύτιμες συμβουλές του, γνώσεις, εμπειρία και την ουσιαστική καθοδήγηση του για τη βαθύτερη κατανόηση των χώρων *Sobolev* και την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων μέσα σε αυτόν τον χώρο.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογενειά μου, των οποίων η πίστη στις δυνατότητες μου αποτέλεσε ένα μεγάλο κίνητρο σε όλους τους στόχους και τα όνειρα μου για να συνεχίσω τις σπουδές μου και να αποκτήσω αυτό το μεταπτυχιακό δίπλωμα. Επίσης τους λίγους και πολύ καλούς μου φίλους που ήταν και ελπίζω να συνεχίσουν να είναι δίπλα μου να με στηρίζουν σε όλες τις σημαντικές στιγμές και αποφάσεις της ζωής μου.

Πρόλογος

Τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα είναι πολύπλοκα, είναι πραγματικά αδύνατο να θεμελιωθούν και να περιγραφούν πλήρως με μαθηματικό τρόπο. Γι΄ αυτό προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την πραγματικότητα με μαθηματικά μοντέλα (πρότυπα), κάνοντας ορισμένες υποθέσεις που απλοποιούν τα φαινόμενα και τους νόμους που τα διέπουν.

Επομένως, στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ασχοληθήκαμε με την σύνδεση των Θεωρητικών Μαθηματικών και τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Συγκεκριμένα, στο πρώτο και δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσονται έννοιες και θεωρήματα που αποτελούν αποτελέσματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται το θεώρημα $Hille - Yosida$ και οι ιδιότητες του. Το θεώρημα $Hille - Yosida$ χαρακτηρίζει τις ισχυρά συνεχές μεταβλητές γραμμικών τελεστών στους χώρους $Banach$.

Το τέταρτο και πέμπτο κεφάλαιο είναι δύο κεφάλαια που αφοράν τους χώρους $Sobolev$. Στα μαθηματικά, ένας χώρος $Sobolev$ είναι ένας χώρος διανυσμάτων εφοδιασμένος με μια νόρμα που είναι ένας συνδυασμός L^p και παραγώγων της για μια δεδομένη τάξη. Τα παράγωγα κατανοούνται με μια κατάλληλη ασθενή έννοια για να καταστεί ο χώρος πλήρης. Διαισθητικά, ένας χώρος $Sobolev$ είναι ένας χώρος με πολλά παράγωγα για κάποιον τομέα εφαρμογής, όπως μερικές διαφορικές εξισώσεις. Εν κατακλείδι, καταλήγουμε στο τελευταίο κεφάλαιο όπου περιγράφουμε το πρόβλημα της ¨Εξίσωσης Θερμότητας¨. Η εξίσωση θερμότητας είναι παραβολική διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων, η οποία περιγράφει την κατανομή της θερμότητας (ή την μεταβολή της θερμοκρασίας) σε μια δοσμένη περιοχή καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος.

Λέξεις Κλειδιά:

$Banach$, Ομαλότητα, Εξίσωση Θερμότητας, Διανυσματικός Χώρος, $Sobolev$.

Abstract

Most physical phenomena are quite complex, it is really impossible to be founded and fully described in a mathematical way. That is why we try to approach reality with mathematical models, by making certain assumptions that simplify the phenomena and the laws that govern them.

Therefore, in this postgraduate thesis we have dealt with the connection of theoretical mathematics and partial differential equations. In particular, the first and second chapters develop concepts and theorems that are the results of Functional Analysis. Then, in the third chapter, we refer to the Hille-Yosida theorem and its properties. The Hille-Yosida theorem denotes the strong continuous linear variables in Banach.

The fourth and fifth chapters are two chapters that refer to Sobolev. In mathematics, a space Sobolev is a vector space provided with a norm that is a combination of L^p and its derivatives for a given class. Derivatives are understood in an appropriate weak sense to make the space complete. In conclusion, we come to the last chapter where we describe the problem of "Heat equation". The heat equation is a parabolic differential equation of some derivatives, which describes the distribution of heat (or temperature change) in a given range as time changes.

Key Words:

Banach, Normality, Heat Equation, Vector Space, Sobolev.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ Hanh-Banach

1.1 Αναλυτική Μορφή Του Θεωρήματος $Hanh-Banach$ Επέκταση Γραμμικών Συναρτησιακών

Θεώρημα 1.1.1. *Αναλυτική μορφή Hanh-Banach*
Έστω $p : E \to \mathbf{R}$ μια απεικόνιση που ικανοποιεί
(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E$ *και* $\lambda > 0$
(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$
Έστω, επί πλέον , $G \subset E$ ένας γραμμικός υπόχωρος και έστω $g : G \to \mathbf{R}$ ένα γραμμικό συναρτησιακό τέτοιο ώστε:
(3) $g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G$
Τότε υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό f ορισμένο στο E που επεκτείνει το g, δηλαδή $g(x) = f(x) \quad \forall x \in G$.

Ορισμός
Συμβολίζουμε με $E^{'}$ τον (τοπολογικό δυϊκό του E, δηλαδή τον χώρο των συνεχών γραμμικών συναρτησιακών πάνω στον E. Ο E' είναι εφοδιασμένος με την δυϊκή νόρμα.

$$(5) \quad \|f\|_{E'} = sup_{x \in E_{\|x\| \leq 1}} |f(x)| = sup_{x \in E_{\|x\| \leq 1}} f(x).$$

Για $f \in E^{'}$ και $x \in E$ θα γράφουμε γενικά $< f, x >$ αντί $f(x)$. Λέμε ότι το $<, >$ είναι το εσωτερικό γινόμενο ως προς τη δυϊκότητα E', E.

Θεώρημα 1.1.2. *Σταθερού σημείου Banach - Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων Picard*
Έστω X ένας πλήρης μετρικός χώρος και $S : X \to X$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq kd(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X, k \leq 1$$

Τότε η S έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, $u = Su$.

1.2 Σχέσεις Ορθογωνιότητας

Ορισμός
Έστω X ένας χώρος *Banach*. Αν $M \subset X$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος θέτουμε:

$$M^{\perp} = \{f \in X' :< f, x >= 0 \quad \forall x \in M\}$$

Ο $M^{\perp}$ καλείται ορθογώνιος χώρος του M. Παρατηρούμε ότι ο $M^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X'.

Θεώρημα 1.2.1. (***Θεώρημα του σταθέρου σημείου*** *Banach* **- *Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων*** *Picard*)
Έστω X μη κενός πλήρης μετρικός χώρος και μια $S : X \to X$ απεικόνιση τέτοια ώστε

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq kd(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \text{ με } k < 1$$

Τότε η S έχει μοναδικό σταθερό σημείο, $u = Su$.

1.3 Εισαγωγή Στους Φραγμένους Γραμμικούς Τελεστές - Ορισμός Του Συζυγούς

Ορισμός (Ορισμός του συζυγούς A^*)
Έστω $A : D(A) \subset E \to F$ ένας μη φραγμένος τελαστής με πυκνό πεδίο ορισμού. Ορίζουμε έναν μη φραγμένο τελεστή $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ ως εξής: Θέτουμε $D(A^*) = \{v \in F' : \exists c \geq 0 \text{ τέτοιος ώστε } | < v, Au > | \leq c\|u\| \forall u \in D(A)\}$
Είναι φανερό ό,τι ο $D(A^*)$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του F'. Θα ορίσουμε τώρα το A^*v για $v \in D(A^*)$. Για δεδομένο $v \in D(A^*)$, θεωρούμε την απεικόνιση $g : D(A) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την σχέση

$$g(u) =< v, Av > \quad u \in D(A)$$

Έχουμε

$$|g(u)| \leq c\|u\| \quad \forall u \in D(A)$$

Από το θεώρημα 1.1 ($Hahn - Banach$, αναλυτική μορφή), γνωρίζουμε ότι η g μπορεί να επεκταθεί σε μια γραμμική απεικόνιση $f : E \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$|f(u)| \leq c\|u\| \quad \forall u \in E$$

Επομένως, $f \in E'$ παρατηρούμε ότι η επέκταση της g είναι **μοναδική**, αφού η f είναι συνεχής στον Ε και το $D(A)$ είναι **πυκνό**.
Θέτουμε

$$A^*v = f$$

Είναι φανερό ότι ο A^* είναι γραμμικός. Ο τελεστής $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ καλείται **συζυγής** του A. Ισχύει, επομένως, η ακόλουθη βασική σχέση που συνδέει τον A με τον A^* :

$$< v, Au >_{F',F} = < A^*v, u >_{E',E} \quad \forall u \in D(A),\ \forall v \in D(A^*)$$

1.4 Τοπολογικό Συμπλήρωμα - Τελεστές Αντιστρέψιμοι Από Δεξία

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω E ένας χώρος Banach και G, L δύο κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι τέτοιοι ώστε*

ο $G + L$ να είναι κλειστός.

Τότε υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{κάθε } z \in G + L \text{ επιδέχεται μια ανάκλαση της μορφής} \\ z = x + y \text{ με } x \in G\ ,\ y \in L\ ,\ \|x\| \le C\|z\| \\ \text{και } \|y\| \le C\|z\| \end{array} \right\}$$

Ορισμός Έστω $G \subset E$ **κλειστός** υπόχωρος ενός χώρου *Banach* E. Λέμε ότι ο υπόχωρος L είναι ένα **τοπολογικό συμπλήρωμα** του G αν :

(ι) ο L είναι **κλειστός**

(ιι) $G \cap L = \{0\}$ και $G + L = E$

Στην περίπτωση αυτή, κάθε $z \in E$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $z = x + y$ με $x \in G$ και $y \in L$. Από το Θεώρημα 1.6 προκύπτει ότι οι **τελεστές προβολής** $z \mapsto x, z \mapsto y$ είναι συνεχείς γραμμικοί τελεστές (Η ιδιότητα αυτή θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να ορίσουμε τα τοπολογικά συμπληρώματα).

Πόρισμα 1. *Έστω $A : D(A) \subset E \to F$ ένας μη φραγμένος κλειστός τελεστής με $\overline{D(A)} = E$. Τότε ισχύουν*

(ι) $N(A) = R(A^*)^{\perp}$

(ιι) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$

(ιιι) $N(A)^{\perp} \supset \overline{R(A^*)}$

(ιν) $N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$

1.5 Χαρακτηρισμός Των Τελεστών Με Κλειστή Εικόνα - Τελεστές Επί - Φραγμένοι Τελεστές

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω $A : D(A) \subset E \to F$ ένας μη φραγμένος κλειστός τελεστής με $\overline{D(A)} = E$. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:*

(ι) *το $R(A)$ είναι κλειστό*

(ιι) *το $R(A^*)$ είναι κλειστό*

(ιιι) $R(A) = N(A^*)^{\perp}$

(ιν) $R(A^*) = N(A)^{\perp}$

Ορισμός
Θα λέμε ότι ένας τελεστής $T \in \mathcal{L}(E, F)$ είναι **συμπαγής** αν το $T(B_E)$ είναι σχετικά συμπαγές για την ισχυρή τοπολογία. Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}(E, F)$ το σύνολο των συμπαγών τελεστών και θέτουμε $\mathcal{K} = \mathcal{K}(E, E)$.

Θεώρημα 1.5.2. *Το σύνολο $\mathcal{K}(E, F)$ είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}(E, F)$ (για τη νόρμα $\| * \|_{\mathcal{L}(E,F)}$)*

Ορισμός Λέμε ότι ένας τελεστής $T \in \mathcal{L}(E, F)$ είναι πεπερασμένου βαθμού

Θεώρημα 1.5.3. *(Schauder)Αν $T \in \mathcal{K}(E, F)$ τότε $T^* \in (F', E')$, και αντίστροφα.*

Λήμμα 1.5.4. *(Λήμμα Riesz) Έστω E ένας γραμμικός χώρος με νόρμα και $M \subset E$ ένας κλειστός υπόχωρος τέτοιος ώστε $M \neq E$. Τότε*

$$\forall \epsilon > 0 \exists u \in E \text{ τέτοιο ώστε } \|u\| = 1 \text{ και } dist(u, M) \geqslant 1 - \epsilon$$

Θεώρημα 1.5.5. *(Riesz) Έστω E ένας γραμμικός χώρος με νόρμα τέτοιος ώστε η B_E να είναι συμπαγής. Τότε ο E είναι πεπερασμένης διαστάσεως.*

Θεώρημα 1.5.6. *(Εναλλακτικότητα Fredholm) Έστω $T \in \mathcal{K}(E)$ Τότε*

1) *Ο $N(I - T)$ είναι πεπερασμένης διαστάσεως*

2) *Ο $R(I - T)$ είναι κλειστός και ακριβέστερα $R(I - T) = N(I - T)^{\perp}$*

3) $N(I - T) = 0 \Leftrightarrow R(I - T) = E$

4) $dimN(I - T) = dimN(I - T^*)$

Κεφάλαιο 2

ΟΙ ΧΩΡΟΙ L^p

2.1 Ορισμός Και Βασικές Ιδιότητες Των Χώρων L^p

Ορισμός
Έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$. Θέτουμε

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ μετρήσιμη και } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Θέτουμε

$$\|f\|_{L^p} = [\int_\Omega |f(x)|^p dx]^{1/p}$$

Ορισμός
Θέτουμε

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ μετρίσιμη και } \exists \text{ σταθερά } C \text{ τέτοια ώστε } |f(x)| \leq C \text{ σ.π στο } \Omega\}$$

Συμβολισμός
Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Συμβολίζουμε με $p^{'}$ τον **συζυγή εκθέτη** του p, δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Θεώρημα 2.1.1. *(Ανισότητα Hölder)*
Έστω $f \in L^p$ και $g \in L^{p^{'}}$, όπου $1 \leq p \leq \infty$. Τότε $f \cdot g \in L^1$ και

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

2.2 Συνέλιξη και Ομαλοποίηση

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ και $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ με $1 \leq p \leq \infty$. Τότε, για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^N$ η συνάρτηση $yf(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}^N$. Θέτουμε*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

Τότε $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *και*

$$\|f * g\| - L^p \leq \|f\|_{L^p}\|f\|_{L^{p'}}$$

Πρόταση 2.2.2. *Έστω* $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ *και* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *όπου* k *ακέραιος. Τότε* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ *και* $D^k(f * g) = (D^k f) * g$. *Ειδικά, αν* $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *και* $g \in L61_{loc}(\mathbb{R}^N)$

Ομαλοποιητικές ακολουθίες

Ορισμός

Καλούμε ***ομαλοποιητική ακολουθία*** *κάθε ακολουθία συναρτήσεων* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *τέτοια ώστε :*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \quad supp\rho_n \subset B(0, \tfrac{1}{n}) \quad \int \rho_n = 1 \quad \rho_n \geq 0 \text{ στο } \mathbb{R}^N$$

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *με* $1 \leq p < \infty$. *Τότε* $\rho_n * f \to f$ *στον* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Πόρισμα 2. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ανοιχτό. Τότε ο χώρος* $C_c^\infty(\Omega)$ *είναι πυκνός στον* $L^p(\Omega)$ *για* $1 \leq p < \infty$

Θεώρημα 2.2.4. *(Θεώρημα αναπαραστάσεως Riesz - Frechet) Για δεδομένο* $\varphi \in H'$ *υπάρχει* $f \in H$ *μοναδικό τέτοιο ώστε*

$$< \varphi, v >= (f, v) \; \forall v \in H$$

Επί πλέον, ισχύει

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}$$

2.3 Θεώρημα Stampacchia και Lax- Milgram

Ορισμός

Λέμε ότι ένα διγραμμικό συναρτησιακό $\alpha(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ είναι

(ι) **συνεχές**, αν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$|\alpha(u, v)| \leq C|u||v| \; \forall u, v \in H$$

(ιι) **πιεστικό** αν υπάρχει σταθερά $\alpha > 0$ τέτοια ώστε

$$\alpha(u, v) \geq \alpha|v|^2 \; \forall v \in H$$

Θεώρημα 2.3.1. *(Stampacchia) Έστω* $\alpha(u, v)$ *ένα διγραμμικό συνεχές πιεστικό συναρτησιακό. Έστω* K *ένα κλειστό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του* H. *Για δεδομένα* $\varphi \in H'$ *υπάρχει* $u \in K$ *μοναδικό τέτοιο ώστε*

$$\alpha(u, v-u) \geq < \varphi, v-u > \ \ \forall v \in K$$

Επί πλέον, αν το α είναι συμμετρικό, τότε το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

$$u \in K$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha(u,v) - < \varphi, u > = min_{v \in K}\{\frac{1}{2}\alpha(v,v) - < \varphi, v >\}$$

Θεώρημα 2.3.2. *(Lax - Milgram) Έστω $\alpha(u,v)$ ένα διγραμμικό, συνεχές και πιεστικό συναρτησιακό. Τότε για κάθε $\varphi \in H'$ υπάρχει $u \in H$ μοναδικό τέτοιο ώστε*

$$\alpha(u,v) = < \varphi, u > \ \ \forall v \in H$$

Επί πλέον, αν το α είναι συμμετρικό, τότε το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

$$u \in H$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha(u,u) - < \varphi, u > = min_{v \in H}\{\frac{1}{2}\alpha(v,v) - < \varphi, v >\}$$

Κεφάλαιο 3

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ Hille - Yosida

3.1 Ορισμός Και Βασικές Ιδιότητες Των Μεγιστικών Μονότονων Τελεστών

Ορισμός
Έστω $A : D(A) \subset H \to H$ ένας γραμμικός **μη φραγμένος** τελεστής. Λέμε ότι ο A είναι **μονότονος** αν

$$(Av, v) \geq 0 \quad , \forall v \in D(A)$$

Ο A είναι **μεγιστικός(maximal) μονότονος** αν επί πλέον, $R(I + A) = H$ δηλαδή

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ τέτοιο ώστε } u + Au = f$$

Πρόταση 3.1.1. *Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής. Τότε*
(α) ο $D(A)$ είναι πυκνός στον H
(β) ο A είναι κλειστός
(γ)Για κάθε $\lambda > 0$, ο $(I + \lambda A)$ είναι αμφιμονοσήμαντος τελεστής από το $D(A)$ επί του H, ο $(I + \lambda A)^{-1}$ είναι φραγμένος τελεστής και $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$

Πρόταση 3.1.2. *Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής. Ισχύουν*

- $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \qquad \forall v \in H \quad , \forall \lambda > 0$
- $A_{\ \lambda} u = J_\lambda(Av) \qquad \forall v \in D(A) \quad , \forall \lambda > 0$
- $|A_\lambda v| \leq |Av| \qquad \forall v \in D(A) \quad , \forall \lambda > 0$
- $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v \qquad \forall v \in H$
- $\lim\limits_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av \qquad \forall v \in D(A)$

- $(A_\lambda v, v) \geq 0 \qquad \forall v \in H \quad , \forall \lambda > 0$
- $|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda}|v| \qquad \forall v \in H \quad , \forall \lambda > 0$

3.2 Επίλυση Του Εξελικτικού Προβλήματος - Ύπαρξη Και Μοναδικότητα

Θεώρημα 3.2.1. *Cauchy-Lipschitz-Picard*
Έστω E ένας χώρος Banach και $F : E \to E$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$\|Fu - Fv\| \leq L\|u - v| \qquad \forall u, v \in E \quad (L \geq 0)$$

Τότε $\forall u_0 \in E$ $\exists u \in C^1([0,\infty), E)$ μοναδικό τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Fu \quad \sigma\tau o \quad [0,\infty) \\ u(0) = u_0 \quad (\text{ αρχική τιμή }) \end{cases} \tag{3.1}$$

Απόδειξη
Ύπαρξη. Η επίλυση της (3.1) ισοδυναμεί με το να βρεθεί $u \in C([0,\infty), E)$, τέτοιο ώστε

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\, ds \tag{3.2}$$

Για δεδομένο $k > 0$, το οποίο θα σταθεροποιήσουμε αργότερα, εισάγουμε τον χώρο

$$X = \{u \in C([0,\infty), E) : \sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty\}$$

Εύκολα επαληθεύονται οι ακόλουθες ιδιότητες:

(ι) ο X είναι χώρος*Banach* για τη νόρμα

$$\|u\|_X = \sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|u(t)\|.$$

(ιι) Για κάθε $u \in X$ η συνάρτηση

$$(\Phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\, ds$$

ανήκει στον X

(ιιι) $\|\Phi u - \Phi v\|_X \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_X$ $\forall u, v \in X$

Για $k > L$, η Φ έχει ένα σταθερό σημείο που είναι μια λύση της (3.2).
Μοναδικότητα. Έστω u και $\overline{u}$ δύο λύσεις της (3.1). Θέτοντας

$$\phi(t) = \|u(t) - \overline{u}(t)\| \ ,$$

Έχουμε, λόγω της (3.2),

$$\phi(t) \leq L \int_0^t \phi(s)\, ds \qquad \forall t \geq 0$$

Άρα, $\phi \equiv 0$ □

Το θεώρημα $Cauchy - Lipschitz - Picard$ είναι πολύ χρήσιμο για τη μελέτη των **συνήθων διαφορικών εξισώσεων**, αλλά είναι πρακτικά άχρηστο για την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Αντίθετα, το ακόλουθο θεώρημα είναι ένα πολύ **αποτελεσματικό** εργαλείο για την επίλυση **εξελικτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων**.

Θεώρημα 3.2.2. ***(Hille - Yosida)*** *Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελαστής σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε για κάθε $u_0 \in D(A)$ υπάρχει μια συνάρτηση*

$$u \in C^1([0,\infty), H) \bigcap C([0,\infty), D(A))$$

μοναδική τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \frac{du}{dv} + Au = 0 \quad \text{στο} \quad [0,\infty) \\ u(0) = u_0 \quad (\text{ αρχική τιμή}) \end{cases} \tag{3.3}$$

Επί πλέον, ισχύουν
$|u(t)| \leq |u_0|$ *και* $|\frac{du}{dt}(t)| = |Au(t)| \leq |Au_0| \qquad \forall t \geq 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Το κύριο ενδιαφέρον του θεωρήματος 3.2.2 βρίσκεται στο γεγονός ότι, για να λύσουμε το **εξελικτικό** πρόβλημα 2.3, αναγόμαστε στο να επαληθεύσουμε ότι ο A είναι μεγιστικός μονότονος , δηλαδή, στη μελέτη της **στάσιμης** εξισώσεως $u + \lambda Au = f$.
Απόδειξη :
Θα γίνει σε 6 βήματα:
(1^o βήμα Μοναδικότητα) Έστω u και $\overline{u}$ δύο λύσεις της (3.3). Έχουμε

$$(\tfrac{d}{dt}(u-\overline{u}), u-\overline{u}) = -(A(u-\overline{u}), u-\overline{u}) \leq 0$$

Εξάλλου, ισχύει

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}|u(t)-\overline{u}(t)|^2 = (\tfrac{d}{dt}(u(t)-\overline{u}(t)), u(t)-\overline{u}(t)).$$

Άρα η συνάρτηση $t \mapsto |u(t)-\overline{u}(t)|$ είναι φθίνουσα στο $[0,\infty)$. Επειδή ισχύει $|u(0)-\overline{u}(0)| = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$|u(t)-\overline{u}(t)| = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Για να δείξουμε **την ύπαρξη** της u, αντικαθιστούμε τον A με τον ομαλοποιημένο $Yosida$ A_λ, αποδεικνύουμε διάφορες εκτιμήσεις **ανεξάρτητες του** λ και παίρνουμε στο όριο όταν $\lambda \to 0$.
Έστω u_λ η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad \sigma\tau o \quad [0, \infty) \\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A) \end{cases}$$

Σημειωτέον ότι η u_λ υπάρχει λόγω του θεωρήματος $Cauchy - Lipschitz - Picard$ που εφαρμόζεται για την απεικόνιση $F = -A_\lambda$.

(2^o **βήμα**) Έχουμε την εκτίμηση

$$|\frac{du_\lambda}{dt}(t)| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0, \forall \lambda > 0 \tag{3.4}$$

Η ανισότητα αυτή προκύπτει ως άμεση συνέπεια από το

Λήμμα 3.2.3. *Έστω $w \in C^1([0, \infty), H)$ μια συνάρτηση που ικανοποιεί*

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w \ \ sto \ \ [0, \infty) \tag{3.5}$$

Τότε οι συναρτήσεις $t \mapsto |w(t)|$ και $t \mapsto |\frac{dw}{dt}(t)| = |A_\lambda w(t)|$ είναι φθίνουσες στο $[0, \infty)$.

Απόδειξη. Έχουμε $(\frac{dw}{dt}, w) + (A_\lambda w, w) = 0$. Επί πλέον, $(A_\lambda w, w) \geq 0$ και επομένως $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 \leq 0$. Εξάλλου, επειδή ο A_λ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, συμπεραίνουμε από την (3.5) ότι $w \in C^\infty$ και ότι

$$\frac{d}{dt}(\frac{dw}{dt}) + A_\lambda(\frac{dw}{dt}) = 0 \tag{3.6}$$

Εφαρμόζουμε τότε τα παραπάνω στη $\frac{dw}{dt}$. □

3^o **βήμα** Θα δείξουμε ό,τι, για κάθε $t \geq 0$, η $u_\lambda(t)$ συγκλίνει όταν $\lambda \to 0$, σε ένα όριο, έστω $u(t)$. Επιπλέον, η σύγκλιση αυτή είναι ομοιόμορφη ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα $[0, T]$.
Πράγματι, έστω $\lambda, \mu > 0$. Έχουμε

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0 \tag{3.7}$$

και επομένως

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0 \tag{3.8}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu)$$

$$= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda + J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu)$$
$$= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)$$
$$\geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)(3.9)$$

Συμπεραίνουμε τότε από τις (3.4), (3.8) και (3.9) ότι

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda+\mu)|Au_0|^2$$

και με ολοκλήρωση

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 \leq 4(\lambda+\mu)t|Au_0|^2$$

δηλαδή

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}|Au_0|. \tag{3.10}$$

Προκύπτει ότι, για κάθε $t0$, η $(u_\lambda(t))$ είναι $Cauchy$ και άρα συγκλίνει όταν $\lambda \to 0$ σε ένα όριο, έστω $u(t)$. Παίρνοντας το όριο στη (3.10) όταν $\mu \to 0$, βρίσκουμε

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{\lambda t}|Au_0| \ .$$

Επομένως, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα $[0,T]$ και $u \in C([0,\infty), H)$.

4^o **βήμα**. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι ισχύει $u_0 \in D(A^2)$, δηλαδή $u_0 \in D(A)$ και $Au_0 \in D(A)$ τότε η $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ συγκλίνει όταν $\lambda \to 0$, για κάθε $t \geq 0$ ομοιόμορφα ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα $[0,T]$. Πράγματι, θέτοντας $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, προκύπτει ότι $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$. Ακολουθώντας το 3^o βήμα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda|A_\lambda v_\lambda| + \mu|A_\mu v_\mu|) \tag{3.11}$$

Αλλά από το λήμμα 3.2.3, έχουμε

$$|A_\lambda v_\lambda| \leq |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0| \tag{3.12}$$

και παρομοίως

$$|A_\mu v_\mu| \leq |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0|. \tag{3.13}$$

Τέλος, επειδή $Au_0 \in D(A)$, προκύπτει

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0$$

και άρα

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A^2 u_0|, \qquad |A_\mu A_\mu u_0| \leq |A^2 u_0| \tag{3.14}$$

Συνδυάζοντας τις (3.11), (3.12), (3.13) και (3.14), παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq 2(\lambda+\mu)|A^2u_0|^2 \ .$$

Συμπεραίνουμε, όπως στο 3ο βήμα, ότι η $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ συγκλίνει, όταν $\lambda \to 0$, για κάθε $t \geq 0$ και ομοιόμορφα ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα.
5^o **βήμα** Υπάρχει μια λύση της (3.3), αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $u_0 \in D(A^2)$. Πράγματι, από τα παραπάνω, γνωρίζουμε ότι για κάθε $T < \infty$:

$$\begin{aligned} u_\lambda(t) \to u(t) \ , &\quad \text{όταν } \lambda \to 0, \text{ ομοιόμορφα στο } [0,T] \\ \frac{du_\lambda}{dt}(t) \text{ συγκλίνει} \ , &\quad \text{όταν } \lambda \to 0 \text{ ομοιόμορφα στο } [0,T] \end{aligned}$$

Προκύπτει ότι $u \in C^1([0,\infty), H)$ και ότι $\frac{du_\lambda}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t)$, όταν $\lambda \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,T]$. Γράφουμε την (3.4) στη μορφή

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0 \tag{3.15}$$

Σημειώνουμε ότι $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$ καθώς $\lambda \to 0$, διότι

$$\begin{aligned} |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &\leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \to_{\lambda\to 0} 0 \end{aligned}$$

Επειδή το γράφημα του A είναι κλειστό, έπεται από την (3 .15) ότι $u(t) \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ και ότι

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0$$

Τέλος, επειδή $u \in C^1([0,\infty), H)$,η συνάρτηση $t \mapsto Au(t)$ είναι συνεχής από το $[0,\infty)$ στο H και άρα $u \in C([0,\infty), D(A))$.
Επομένως, έχουμε μια λύση της (3.3) που ικανοποεί $|u(t)| \leq |u_0|, \quad \forall t \geq 0$
και $|\frac{du}{dt}(t)| \leq |Au_0|, \quad \forall t \geq 0$
Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα χρειαστούμε το

Λήμμα 3.2.4. *Έστω $u_0 \in D(A)$. Τότε*
$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \overline{u}_0 \in D(A^2)$ τέτοιο ώστε $|u_0 - \overline{u}_0| < \epsilon$ και $|Au_0 - A\overline{u}_0| < \epsilon$
Με άλλα λόγια, ο $D(A^2)$ είναι πυκνός στον $D(A)$ (για τη νόρμα του γραφήματος).

Απόδειξη του λήμματος 3.2.4. Έστω $\overline{u}_0 = J_\lambda u_0$, οπότε ισχύει $\overline{u}_0 \in D(A)$ και $\overline{u}_0 + \lambda A\overline{u}_0 = u_0$. Άρα $A\overline{u}_0 \in D(A)$, δηλαδή $\overline{u}_0 \in D(A^2)$ Εξάλλου, γνωρίζουμε ότι

$$A\overline{u}_0 = A_\lambda u_0 = J_\lambda A u_0$$

και

$$\lim_{\lambda\to 0} |J_\lambda u_0 - u_0| = 0, \qquad \lim_{\lambda\to 0} |J_\lambda A u_0 - Au_0| = 0$$

Επιλέγουμε τότε το $\lambda > 0$ αρκετά μικρό και παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα □

6^o **βήμα : συμπέρασμα** Έστω $u_0 \in D(A)$. Βάσει του προηγούμενου λήμματος, υπάρχει ακολουθία $(u_{0_n}) \in D(A^2)$ τέτοια ώστε $u_{0_n} \to u_0$ και $Au_{0_n} \to Au_0$. Από το 5^o βήμα γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια λύση u_n του προβλήματος

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = 0, & \text{στο}[0,\infty) \\ u_n(0) = u_{0_n} \end{cases} \tag{3.16}$$

Επιπλέον, έχουμε

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0_n} - u_{0_m}| \longrightarrow_{m,n\to\infty} 0$$
$$|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)| \leq |Au_{0_n} - Au_{0_m}| \longrightarrow_{m,n\to\infty} 0$$

Επομένως,

$$\begin{cases} u_n(t) \to u(t) & \text{ομοιόμορφα στο } [0,\infty) \\ \frac{du_n}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t) & \text{ομοιόμορφα στο } [0,\infty) \end{cases}$$

με $u \in C^1([0,\infty), H)$. Παίρνοντας το όριο στη (3.16), επειδή το γράφημα του A είναι κλειστό, βλέπουμε ότι $u \in C([0,\infty), D(A))$ και ότι η u ικανοποποιεί την (3.3) □

3.3 Ομαλότητα

Θα συμπληρώσουμε τώρα το αποτέλεσμα του θεωρήματος 3.2.2 αποδεικνύοντας ότι η λύση u του προβλήματος (3.3) είναι **πιο ομαλή** μέσω πρόσθετων υποθέσεων πάνω στην αρχική τιμή u_0 .

Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε επαγωγικά τον χώρο

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1}) : Av \in D(A^{k-1})\}, \quad \text{kακέραιος} \geq 2.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι ο $D(A^k)$ είναι ένας χώρος $Hilbert$ για το εσωτερικό γινόμενο

$$(u,v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} (A^j u, A^j v)$$

Η αντίστοιχη νόρμα είναι

$$|u|_{D(A^k)} = (\sum_{j=0}^{k} |A^j u|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Θεώρημα 3.3.1. *Υποθέτουμε ότι $u_0 \in D(A^k)$ με $k \geq 2$. Τότε η λύση u του προβλήματος (3.3) που δίνει το θεώρημα 3.2.2 ικανοποιεί επί πλέον*

$$u \in C^{k-j}([0,\infty), D(a^j)) \quad \textit{για } j = 0,1,...,k$$

Απόδειξη

Ας αρχίσουμε υποθέτοντας ότι $k = 2$.

Θεωρούμε τον χώρο $Hilbert$ $H_1 = D(A)$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $(u,v)_{D(A)}$.

Εύκολα επαληθεύεται ότι ο τελαστής $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \to H_1$ που ορίζεται με

$$\begin{gathered} D(A_1) = D(A^2) \\ A_1 u = Au \quad \text{για } u \in D(A_1) \end{gathered}$$

είναι μεγιστικός μονότονος στον H_1. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.2.2 για τον **τελεστή** A_1 **στον χώρο** H_1, βλέπουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση

$$u \in C^1([0,\infty), H_1) \bigcap C([0,\infty), D(A_1))$$

τέτοια ώστε

$$\begin{gathered} \tfrac{du}{dt} + A_1 u = 0 \quad \text{στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0 \end{gathered}$$

Ειδικά, η u ικανοποιεί την (3.3). Άρα, λόγω της μοναδικότητας , πρόκειται για τη λύση της (3.3). Απομένει μόνο να δείξουμε ότι $u \in C^2([0,\infty), H)$. Επειδή

$$A \in \mathcal{L}(H_1, H) \text{ και } u \in C^1([0,\infty), H_1)$$

προκύπτει ότι $Au \in C^1([0,\infty), H)$ και ότι

$$\frac{d}{dt}(Au) = A(\frac{du}{dt}) \tag{3.17}$$

Εφαρμόζοντας την (3.3), βλέπουμε ότι $\frac{du}{dt} \in C^1([0,\infty), H)$, δηλαδή ισχύει $u \in C^2([0,\infty), H)$ και ότι

$$\frac{d}{dt}(\frac{du}{dt}) + A(\frac{du}{dt}) = 0 \quad \text{στο } [0,\infty) \tag{3.18}$$

Ας περάσουμε τώρα στη γενική περίπτωση $k \geq 3$. Θα εργαστούμε με επαγωγή προς k. Ας υποθέσουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει μέχρι το $k-1$ και ότι $u_0 \in D(A^k)$. Από τα παραπάνω γνωρίζουμε ήδη ότι η λύση u της (3.3) ανήκει στον $C^2([0,\infty), H) \bigcap C^1([0,\infty), D(A))$ και ότι η u ικανοποιεί την (3.18). Θέτοντας

$$v = \tfrac{du}{dt}$$

παίρνουμε

$$\begin{gathered} v \in C^1([0,\infty), H) \bigcap C([0,\infty), D(A))) \\ \tfrac{dv}{dt} + Av = 0 \quad \text{στο } [0,\infty) \\ v(0) = -Au_0 \end{gathered}$$

Με άλλα λόγια, η v είναι η λύση της (3.3) που αντιστοιχεί στην αρχική τιμή $v_0 = -Au_0$. Επειδή $v_0 \in D(A^{k-1})$, γνωρίζουμε από την υπόθεση της επαγωγής ότι

$$v \in C^{k-1-j}([0,\infty), D(A^j)) \quad \text{για } j = 0, 1, ..., k-1 \tag{3.19}$$

δηλαδή

$$u \in C^{k-j}([0,\infty), D(A^j)) \quad \text{για } j = 0, 1, ..., k-1$$

Απομένει μόνο να επαληθεύσουμε ότι

$$u \in C([0,\infty), D(A^k)) \tag{3.20}$$

Θέτοντας στην (3.19) $j = k-1$ παίρνουμε

$$\frac{du}{dt} \in C([0,\infty), D(A^{k-1})) \tag{3.21}$$

Συμπεραίνουμε από την (3.21) και την εξίσωση (3.3) ότι

$$Au \in C([0,\infty), D(A^{k-1}))$$

Δηλαδή την (3.20) □

3.4 Η Περίπτωση Αυτοσυζυγούς Τελεστή

Έστω $A : D(A) \subset H \to H$ γραμμικός μη φραγμένος τελαστής με $\overline{D(A)} = H$. Αν κάνουμε την ταύτιση $H' = H$, , μπορούμε να θεωρήσουμε τον A^* ως μη φραγμένο τελεστή στον H .

Ορισμός Λέμε ότι
ο **A** είναι **συμμετρικός** αν

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in D(A)$$

ο **A** είναι **αυτοσυζυγής** αν

$$A^* = A$$

που υπονοεί ότι $D(A^*) = D(A)$

Πρόταση 3.4.1. *Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος και συμμετρικός τελεστής. Τότε ο A είναι αυτοσυζυγής.*

Απόδειξη. Έστω $J_1 = (I + A)^{-1}$. Θα δείξουμε πρώτα ότι ο J_1 είναι αυτοσυζυγής. Αρκεί να επαληθεύσουμε, επειδή $J_1 \in \mathcal{L}(H)$, ότι

$$(J_1 u, v) = (u, J_1 v) \quad \forall u, v \in H \tag{3.22}$$

Θέτουμε $u_1 = J_1 u$ και $v_1 = J_1 v$, οπότε

$$\begin{aligned} u_1 + Au_1 = u \\ v_1 + Av_1 = v \end{aligned}$$

Επειδή $(u_1, Av_1) = (Au_1, v_1)$, προκύπτει ότι $(u_1, v) = (u, v_1)$, δηλαδή η (3.22)
Έστω $u \in D(A^*)$ και θέτουμε $f = u + A^*u$. Έχουμε

$$(f, v) = (u, v + Av) \quad \forall v \in D(A)$$

δηλαδή,

$$(f, J_1 w) = (u, w) \quad \forall w \in H$$

Επομένως, $u = J_1 f$ και άρα $u \in D(A)$. Συμπέρασμα : $D(A^*) = D(A)$ □

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος και αυτοσυζυγής τελαστής. Τότε, για κάθε $u_0 \in H$, υπάρχει μια συνάρτηση*

$$u \in C([0, \infty), H) \bigcap C^1((0, \infty), H) \bigcap C(0, \infty), D(A))$$

μοναδική τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{στο } (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{cases} |u(t)| \leq |u_0| \ \text{και} |\frac{du}{dt}(t)| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t > 0 \\ u \in C^k((0, \infty), D(A^l)) \quad \forall k, l(\text{ακέραιοι} \geq 0) \end{cases} \tag{3.23}$$

Απόδειξη
Μοναδικότητα . Έστω u και $\overline{u}$ δύο λύσεις. Εφαρμόζοντας τη μονοτονία του A, βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\varphi(t) = |u(t) - \overline{u}(t)|^2$ είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$. Εξάλλου, η φ είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ και $\varphi(0) = 0$. Συνεπώς, $\varphi \equiv 0$

Ύπαρξη

1ο βήμα. Υποθέτουμε πρώτα ότι $u_0 \in D(A^2)$ και έστω u η λύση της (3.3) που δίνει το θεώρημα 3.2.2. Θα δείξουμε την εκτίμηση

$$|\frac{du}{dt}(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t > 0 \tag{3.24}$$

Σημειώνουμε ότι

$$J_\lambda^* = J_\lambda \text{ και } A_\lambda^* = A_\lambda \quad \forall \lambda > 0$$

Επαναλαμβάνουμε την προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος 3.2.2

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad \text{ στο } [0,\infty), u_\lambda(0) = u_0 \tag{3.25}$$

Παίρνοντας μετά το εσωτερικό γινόμενο στην (3.25) με u_0 και ολοκληρώνοντας στο $[0,T]$, βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)\ dt = \frac{1}{2}|u_0|^2 \tag{3.26}$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο στην 3.25) με $t\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ και ολοκληρώνοντας στο $[0,T]$, βρίσκουμε

$$\int_0^T |\frac{du_\lambda}{dt}(t)|^2 t\ dt + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t))t\ dt = 0 \tag{3.27}$$

Εξάλλου,

$$\tfrac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = (A_\lambda \tfrac{du_\lambda}{dt}, u_\lambda) + (A_\lambda u_\lambda, \tfrac{du_\lambda}{dt}) = 2(A_\lambda u_\lambda, \tfrac{du_\lambda}{dt})$$

αφού $A_\lambda^* = A_\lambda$. Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέρη βρίσκουμε

$$\int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t))t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}[A_\lambda u_\lambda, u_\lambda]t\ dt = \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T))T - \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u\lambda)\ dt \tag{3.28}$$

Εξάλλου, επειδή η συνάρτηση $t \mapsto |\frac{du_\lambda}{dt}(t)|$ είναι φθίνουσα έχουμε

$$\int_0^T |\frac{du_\lambda}{dt}(t)|^2 t\ dt \geq |\frac{du_\lambda}{dt}(T)|^2 \frac{T^2}{2} \tag{3.29}$$

Συνδυάζοντας τις (3.26), (3.27), (3.28) και (3.29) καταλήγουμε στην

$$\tfrac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + T(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + T^2|\tfrac{du_\lambda}{dt}(T)|^2 \leq \tfrac{1}{2}|u_0|^2$$

από όπου προκύπτει, ειδικά, ότι

$$|\frac{du_\lambda}{dt}(T)| \leq \frac{1}{T}|u_0| \quad \forall T > 0 \tag{3.30}$$

Τελειώνουμε την απόδειξη της (3.24), παίρνοντας το όριο στην(3.30) όταν $\lambda \to 0$ (σημειωτέον ότι $\frac{du_\lambda}{dt} \to \frac{du}{dt}$ σύμφωνα με το 5ο βήμα της αποδείξεως του θεωρήματος 3.2.2) .

2ο βήμα. Υποθέτουμε τώρα ότι $u_0 \in H$. Έστω (u_{0_n}) μια ακολουθία στο $D(A)$, τέτοια ώστε $u_{0_n} \to u_0$. Έστω u_n η λύση της εξισώσεως

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \quad \text{στο } [0, \infty)$$
$$u_n(0) = u_{0_n}$$

Γνωρίζουμε (θεώρημα 3.2.2) ότι

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0_n} - u_{0_m}| \quad \forall m, n, \forall t \geq 0$$

και (1ο βήμα) ότι

$$|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)| \leq \frac{1}{t}|u_{0_n} - u_{0_m}| \quad \forall m, n, \forall t > 0$$

Προκύπτει ότι η $u_n(t)$ συγκλίνει σε ένα όριο $u(t)$ ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$ και ότι η $\frac{du_n}{dt}$ συγκλίνει στη $\frac{du}{dt}$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta, +\infty)$ με $\delta > 0$. Άρα

$$u \in C([0, \infty), H) \bigcap C^1((0, \infty), H)$$

Εύκολα προκύπτει ότι η $u(t) \in D(A)$ για κάθε $t > 0$ και ότι η u ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{du}{dt} + Au = 0$ στο $(0, \infty)$ (χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ο A είναι κλειστός).
Απόδειξη της (3.23) Θα δείξουμε επαγωγικά ως προς $kgeq2$ ότι

$$u \in C^{k-j}((0, \infty), D(A^j)) \quad \forall j = 0, 1, ..., k \tag{3.31}$$

Ας δεχθούμε ότι η (3.31) ισχύει για $k - 1$. Προκύπτει ειδικά ότι

$$u \in C((0, \infty), D(A^{k-1}))$$

Για να δείξουμε ότι ισχύει η (3.31) για k, αρκεί (σύμφωνα με το θεώρημα 3.3.1) να επαληθεύσουμε ότι

$$u \in C(0, \infty), D(A^k)) \tag{3.32}$$

Στον χώρο *Hilbert* $\tilde{H} = D(A^{k-1})$, θεωρούμε τον τελεστή $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset \tilde{H} \to \tilde{H}$ που ορίζεται με

$$D(\tilde{A}) = D(A^k)$$
$$\tilde{A} = A$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι ο $\tilde{A}$ είναι μεγιστικός μονότονος και συμμετρικός (άρα αυτοσυζυγής) στον $\tilde{H}$.
Εφαρμόζοντας το πρώτο μέρος του θεωρήματος 3.4.2 στον $\tilde{H}$ με τον τελεστή $\tilde{A}$, βλέπουμε ότι, για κάθε $v_0 \in \tilde{H}$, υπάρχει μια μοναδική λύση του προβλήματος.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = 0 \quad \text{στο}(0, \infty) \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{3.33}$$

με

$$v \in C([0, \infty), \tilde{H}) \bigcap C^1((0, \infty), \tilde{H} \bigcap C((0, \infty), D(\tilde{A}))$$

Επιλέγοντας $v_0 = u(\epsilon)(\epsilon > 0)$ ($v_0 \in \tilde{H}$ λόγω της (3.31)) βλέπουμε ότι ισχύει $u \in C((\epsilon, \infty), D(A^k))$, άρα και η (3.32). □

Κεφάλαιο 4

ΧΩΡΟΙ *Sobolev* $W^{m,p}(I),\ I \subseteq \mathbb{R}$

4.1 Ο Χώρος Sobolev $W^{1,p}(I)$

Έστω $I = (a, b)$ ένα διάστημα **φραγμένο ή μη** και έστω $p \in \mathbb{R}$, με $1 \leq p \leq \infty$
Ορισμός Ο **χώρος Sobolev** $W^{1,p}(I)$ ορίζεται με

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ τέτοια ώστε } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \ \forall \varphi \in C_c^1(I)\}$$

Θέτουμε

$$H^1(I) = W^{1,2}(I)$$

Για $u \in W^{1,p}(I)$, γράφουμε $u' = g$
Συμβολισμοί Ο χώρος $W^{1,p}$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

(ή καμιά φορά, με την ισοδύναμη νόρμα $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}}$) Ο χώρος H^1 είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

Η αντίστοιχη νόρμα

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2}$$

είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,2}$.

Πρόταση 4.1.1. *Ο χώρος $W^{1,p}$ είναι ένας χώρος Banachγια $1 \leq p \leq \infty$. Ο χώρος $W^{1,p}$ είναι ανακλαστικός για $1 < p < \infty$ και διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$.*
Ο χώρος H^1 είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert .

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $\overline{u} \in C(I)$ τέτοια ώστε*

$$u = \overline{u} \text{ σ.π . στο } I$$

και

$$\overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u'(t)\, dt \quad \forall x, y \in \overline{I}$$

Στην απόδειξη του θεωρήματος4.1.2 θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα λήμματα

Λήμμα 4.1.3. *Έστω $f \in L^1_{loc}(I)$ τέτοια ώστε*

$$\int_I f\phi' = 0 \quad \forall \phi \in C^1_c(I)$$

Τότε υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $f = C$ σ.π. .

Λήμμα 4.1.4. *Έστω $g \in L^1_{loc}(I)$. Για y_0 σταθερό στο I ,θέτουμε*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)\, dt, \quad x \in I$$

Τότε $v \in C(I)$ και

$$\int_I v\phi' = -\int_I g\phi \quad \forall \phi \in C^1_c(I)$$

Πρόταση 4.1.5. *Έστω $u \in L^p$ με $1 < p \leq \infty$. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:*

ι) $u \in W^{1,p}$

ιι) Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $|\int_I u\phi'| \leq C\|\phi\|_{L^{p'}(I)} \quad \forall \phi \in C^\infty_c(I)$

ιιι) Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε , για κάθε ανοιχτό $\omega \subset\subset I$ και κάθε $h \in \mathbb{R}$, με $|h| < dist(\omega, \complement I)$, να ισχύει $\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|$.

Επί πλέον, μπορούμε να επιλέξουμε $C = \|u'\|_{L^p}$ στις (ii) και (iii).

Πόρισμα 3. *Μια συνάρτηση u του $L^\infty(I)$ ανήκει στον $W^{1,\infty}(I)$, αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά C, τέτοια ώστε*

$$|u(x)-u(y)| \leq C|x-y| \quad \sigma.\pi \quad x,y \in I$$

Θεώρημα 4.1.6. *(**Τελεστής επεκτάσεως**) Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Υπάρχει ένας τελεστής επεκτάσεως $P: W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$, γραμμικός και συνεχής τέτοιος ώστε*

(ι) $Pu_{|I} = u \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$

(ιι) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}} \leq C\|u\|_{L^p(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

(ιιι) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$

(όπου το C εξαρτάται μόνο από το $|I| \leq \infty$)

Απόδειξη. Ας αρχίσουμε από την περίπτωση $I=(0,\infty)$, δείχνοντας ότι η **επέκταση με ανάκλαση** που ορίζεται με

$$(Pu)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x) & x \geq 0 \\ u(-x) & x < 0 \end{cases}$$

είναι η ζητούμενη.
Πρώτα, έχουμε $\|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\ \|_{L^p(I)}$. Θέτουμε

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & x > 0 \\ -u'(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι $v \in L^p(\mathbb{R})$ και ότι

$$u^*(x) - u(0) = \int_0^x v(t)\ dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ και $\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(I)}$. Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση ενός **φραγμένου διαστήματος** I. Μπορούμε πάντοτε να αναχθούμε στην περίπτωση $I=(0,1)$. Επιλέγουμε μια συνάρτηση $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, με $0 \leq \eta \leq 1$, τέτοια ώστε $\eta(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{4} \\ 0 & x > \frac{3}{4} \end{cases}$ Για δεδομένη συνάρτηση f ορισμένη $(0,1)$, θέτουμε

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

Θα χρειαστούμε το

Λήμμα 4.1.7. *Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε*

$$\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty) \text{ και } (\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u}'$$

Απόδειξη. Έστω $\varphi \in C_c^1(0,1)$. Έχουμε
$\int_0^\infty \eta\tilde{u}\varphi' = \int_0^1 \eta u\varphi' = \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi]$
$= -\int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi$, (αφού $\eta\varphi \in C_c^1(0,1)$)
$= -\int_0^\infty (\tilde{u'}\eta + \tilde{u}\eta')\varphi$.
Τέλος της αποδείξεως του θεωρήματος 4.1.2. Για δεδομένη $u \in W^{1,p}(I)$ γράφουμε

$$u = \eta u + (1-\eta)u$$

Η συνάρτηση ηu επεκτείνεται **πρώτα** στο $(0,\infty)$ με $\eta\overline{u}$ (με τη βοήθεια του λήμματος 4.1.7) και **μετά** στον $\mathbb{R}$ με ανάκλαση. Παίρνουμε έτσι μια συνάρτηση $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ που επεκτείνει την ηu και τέτοια ώστε

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}, \quad \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

(όπου το C εξαρτάται από το $\|\eta'\|_{L^\infty}$). Ανάλογη διαδικασία ακολουθούμε και για την $(1-\eta)u$, δηλαδή επεκτείνουμε την $(1-\eta)u$ **πρώτα** στο $(-\infty,1)$ με 0 στο $(-\infty,0]$ και **μετά** στον $\mathbb{R}$ με ανάκλαση (ως προς το σημείο 1). Παίρνουμε έτσι μια συνάρτηση $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ που επεκτείνει την $(1-\eta)u$ και τέτοια ώστε

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}, \quad \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

Τότε η $Pu = v_1 + v_2$ είναι η ζητούμενη επέκταση. □
Μερικές ιδιότητες των συναρτήσεων τάξεως C^1 ισχύουν για τις συναρτήσεις του $W^{1,p}$. Συμφέρει να δείξουμε αυτές τις ιδιότητες ¨**μέσω πυκνότητας** ' με τη βοήθεια του ακόλουθου αποτελέσματος.

Θεώρημα 4.1.8. ***(Πυκνότητα).*** *Έστω $u \in W^{1,p}(i)$ μϵ $1 \leq p < \infty$ Τότϵ υπάρχϵι ακολουθία (u_n) στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστϵ $u_{n|I} \to u$ στον $W^{1,p}(I)$.*

Απόδειξη. Μπορούμε πάντοτε να υποθέσουμε ότι $I = \mathbb{R}$ αλλιώς επεκτείνουμε πρώτα την u σε μια συνάρτηση του $W^{1,p}(\mathbb{R})$ σύμφωνα με το θεώρημα 4.1.6. Χρησιμοποιούμε μια σημαντική τεχνική **συνελίξεως** (που κάνει τις συναρτήσεις C^∞) και **αποκοπής** (που κάνει τις συναρτήσεις με συμπαγή φορέα).
α) Συνέλιξη
Θα χρειαστούμε το

Λήμμα 4.1.9. *Έστω $p \in L^1(\mathbb{R})$ και $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ μϵ $1 \leq p \leq \infty$. Τότϵ*

$$p * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \text{ και } (p*v)' = p*v'$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η p είναι με συμπαγή φορέα. Γνωρίζουμε ότι $p * v \in L^p$. Έστω $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$. Από τις γνωστές προτάσεις έχουμε

$$\int (p * v)\varphi' = \int v(\check{p} * \varphi') = \int v(\check{p} * \varphi)' = -\int v'(\check{p} * \varphi) = -\int (p * v')\varphi.$$

Άρα,

$$p * v \in W^{1,p} \text{ και } (p * v)' = p * v'$$

Αν η p δεν είναι με συμπαγή φορέα, εισάγουμε μια ακολουθία (p_n) του $C_c(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $p_n \to p$ στον L^1. Από τα παραπάνω έχουμε

$$p_n * v \in W^{1,p} \text{ και } (p_n * v)' = p_n * v'$$

Επειδή $p_n * v \to p * v$ στον L^p και $p_n * v' \to p * v'$ στον L^p συμπεραίνουμε ότι

$$p * v \in W^{1,p} \text{ και ότι } (p * v)' = p * v' \qquad \square$$

β) Αποκοπή

Επιλέγουμε μια συνάρτηση $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $0 \le \zeta \le 1$ και

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| \ge 2 \end{cases}$$

Ορίζουμε την ακολουθία

$$\zeta_n(x) = \zeta(\tfrac{x}{n}) \text{ για } n = 1, 2, ...$$

Εύκολα επαληθεύεται, με το θεώρημα κυριαρχημένης συγκλίσεως, ότι αν μια συνάρτηση f ανήκει στον L^p, με $1 \le p < \infty$, τότε $\zeta_n f \to f$ στον L^p.

γ) Συμπέρασμα

Επιλέγουμε μια ομαλοποιητική ακολουθία (p_n). Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $u_n = \zeta_n(p_n * u) \to u$ στον $W^{1,p}$. Κατάρχήν, έχουμε $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$. Πράγματι, γράφουμε

$$u_n - u = \zeta_n[(p_n * u) - u] + [\zeta_n u - u]$$

και άρα

$$\|u_n - u\|_{L^p} \le \|(p_n * u) - u\|_{L^p} + \|\zeta_n u - u\|_{L^P} \to 0$$

Στη συνέχεια, από το λήμμα 4.1.9, έχουμε

$$u_n' = \zeta_n'(_n * u) + \zeta_n(p_n * u')$$

Συνεπώς
$\|u_n' - u'\|_{L^p} \leq \|\zeta_n'(p_n * u)\|_{L^p} + \|\zeta_n(p_n * u') - u'\|_{L^p}$

$\leq \frac{C}{n}\|u\|_{L^p} + \|(p_n * u') - u'\|_{L^p} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p} \to 0$

όπου $C = \|\zeta'\|_{L^\infty}$. □

Θεώρημα 4.1.10. *Υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται μόνο από το $|I| \leq \infty$) τέτοια ώστε*

(1) $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{w^{1,P}(I)} \quad \forall u \in w^{1,P}(I), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty$
δηλαδή ισχύει $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ με συνεχή ενσφήνωση, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ Επίσης, αν το I είναι φραγμένο, έχουμε

(2) Η ενσφήνωση $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ είναι συμπαγής για $1 < p \leq \infty$

(3) Η ενσφήνωση $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ είναι συμπαγής για $1 \leq q < \infty$

Απόδειξη. Πρώτα αποδεικνύουμε την (1) για $I = \mathbb{R}$. Η γενική περίπτωση προκύπτει από το θεώρημα επεκτάσεως. Έστω $v \in C_c^1(\mathbb{R})$. Για $1 \leq p < \infty$ θέτουμε $G(s) = |s|^{p-1}s$. Η συνάρτηση $w = G(v)$ ανήκει στον $C_c^1(\mathbb{R})$ και

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'$$

Άρα, για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$G(v(x)) = \int_{\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)\ dt$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα $H\ddot{o}older$, παίρνουμε

$$|v(x)|^p \leq p\|v\|_{L^p}^{p-1}\|v'\|_{L^p}$$

από όπου προκύπτει, μέσω της ανισότητας$Young$, ότι

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{W1,p} \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R})$$

όπου C μια ανεξάρτητη σταθερά.
Χρησιμοποιούμε τώρα την πυκνότητα. Για $u \in W^{1,p}$, υπάρχει ακολουθία (u_n) του $C_c^1(\mathcal{R})$ τέτοια ώστε $u_n \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Εφαρμόζοντας την (8), βλέπουμε ότι η (u_n) είναι η ακολουθία $Cauchy$ στον L^∞. Συνεπώς, ισχύει $u_n \to u$ στον L^∞ και έτσι παίρνουμε την (1).

Απόδειξη της (2). Έστω $\mathcal{F}$ η μοναδιαία μπάλα του $W^{1,p}$, με $1, p \leq \infty$. Για $u \in \mathcal{F}$, έχουμε

$$|u(x) - u(y)| = |\int_{y}^{x} u'(t)\ dt| \leq \|u'\|_{L^p}|x-y|^{1/p'} \leq |x-y|^{1/p'} \quad \forall x, y \in I$$

Από το θεώρημα $Ascoli$ προκύπτει τότε ότι η $\mathcal{F}$ είναι σχετικά συμπαγής στον $C(\overline{I})$

Απόδειξη της (3). Έστω $\mathcal{F}$ η μοναδιαία μπάλα του $W^{1,1}(I)$. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι σχετικά συμπαγής στον $L^q(I)$, με $1 \leq q < \infty$ εφαρμόζουμε το πόρισμα. Ας επαληθεύσουμε τη συνθήκη. Έστω $\omega \subset\subset I, u \in \mathcal{F}$ και $|h| < dist(\omega, \complement I)$. Από την πρόταση έχουμε

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leq |h| \|u'\|_{L^1(I)} \leq |h| \ .$$

Άρα,

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q \ dx \leq (2\|u\|_{L^\infty(I)})^{q-1} \int_\omega |u(x+h) - u(x)| \ dx \leq C|h|$$

και επομένως

$$(\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q \ dx)^{1/q} \leq C^{1/q}|h|^{1/q} < \epsilon \quad \text{αν} \quad |h| < \delta$$

Ας επαληθεύσουμε τη συνθήκη. Για $u \in \mathcal{F}$, έχουμε

$$\|u\|_{L^q(I\backslash\omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(I)} |I\backslash\omega|^{1/q} \leq C|I\backslash\omega|^{1/q} < \epsilon$$

αν το $|I\backslash\omega|$ είναι αρκετά μικρό. Επιλέγουμε το ω τέτοιο ώστε αυτό να ισχύει.

4.2 Οι Χώροι Sobolev $W^{m,p}(I)$

Ορισμός. Αν $m \geq 2$ ακέραιος και $1 \leq p \leq \infty$ πραγματικός, τότε ορίζουμε αναδρομικά τον χώρο

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I)\}$$

θέτουμε

$$H^m(I) = W^{m,2}(I)$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι $u \in W^{m,p}(I)$ αν και μόνο αν υπάρχουν m συναρτήσεις $g_1, ...g_m \in L^p(I)$ τέτοιες ώστε

$$\int uD^j\varphi = (-1)^j \int g_j \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I) \quad \forall j = 1, 2, ...m$$

όπου το $D^j\varphi$ συμβολίζει την παράγωγο τάξεως j της φ. Όταν $u \in W^{m,p}(I)$. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε τις διαδοχικές παραγώγους $u' = g_1, (u')' = g_2$ μέχρι την τάξη m, τις οποίες συμβολίζουμε με $Du, D^2u, ..., D^mu$. Ο χώρος $W^{m,p}$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

και ο χώρος H^m είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο.

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

Αποδεικνύεται ότι η νόρμα $\|.\|_{W^{m,p}}$ είναι ισοδύναμη με την $|||u||| = \|u\|_{L^p} + \|D^m u\|_{L^p}$. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι , αν $1 \leq j \leq m-1$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει C (που εξαρτάται από το ϵ και το $|I| \leq \infty$) , τέτοια ώστε

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq \epsilon \|D^m u\|_{L^p} + C\|u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{m,p}$$

4.3 Ο Χώρος $W_0^{1,p}(I)$

Ορισμός. Για $1 \leq p < \infty$, συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(I)$ το κλειστό περίβλημα του $C_c^1(I)$ στον $W^{1,p}(I)$. Γράφουμε $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$. Ο χώρος $W_0^{1,p}$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγει ο $W_0^{1,p}$, Ο χώρος H_0^1 είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο που επάγει ο H^1. Ο χώρος $W_0^{1,p}$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος *Banach*. Είναι , επί πλέον ανακλαστικός για $1 < p < \infty$. Ο χώρος H_0^1 είναι διαχωρίσιμος χώρος *Hilbert*.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$ αν και μόνο αν $u = 0$ στο ∂I.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Το παραπάνω θεώρημα εξηγεί τον σημαντικό ρόλο που παίζει ο χώρος $W_0^{1,p}$. Πράγματι, οι συνήθεις (ή μερικές) διαφορικές εξισώσεις είναι συζευγμένες με **συνοριακές συνθήκες**, δηλαδή συνθήκες που καθορίζουν την τιμή της u στο ∂I.

Απόδειξη. Αν $u \in W_0^{1,p}(I)$ υπάρχει ακολουθία (u_n) του $C_c^1(I)$ τέτοια ώστε $u_n \to u$ στον $W^{1,p}(I)$. Άρα, $u_n \to u$ ομοιόμορφα στο $\overline{I}$ και επομένως $u = 0$ στο ∂I.

Αντίστροφα, έστω $u \in W^{1,p}(I)$ τέτοια ώστε $u = 0$ στο ∂I. Επιλέγουμε μια συνάρτηση $G \in C^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$G(t) = \begin{cases} 0 & |t| \leq 1 \\ t & |t| \geq 2 \end{cases}$$

και

$$|G(t)| \leq |t| \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

Θέτουμε $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$, οπότε $u_n \in W^{1,p}(I)$. Εξάλλου,

$$suppu_n \subset \{x \in I : |u(x) \geq \tfrac{1}{n}\}$$

και άρα ο φορέας της u_n είναι συμπαγές σύνολο που περιέχεται στο I (χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $u = 0$ στο ∂I και $u(x)$ όταν $|x| \in \infty, x \in I$). Συνεπώς, $u_n \in W_0^{1,p}$. Τέλος, εύκολα επαληθεύεται, με τη βοήθεια του θεωρήματος κυριαρχημένης συγκλίσεως, ότι $u_n \to u$ στον $W^{1,p}$. □

Πρόταση 4.3.2. *(**Ανισότητα** Poincare) Υποθέτουμε ότι το διάστημα I είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από το $|I|$) τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I) \tag{4.1}$$

Με άλλα λόγια, στον $W_0^{1,p}(I)$ η έκφραση $\|u'\|_{L^p}$ είναι μια νόρμα ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,p}$

Απόδειξη. Για $u \in W_0^{1,p}(I)$ έχουμε

$$|u(x)| = |u(x) - u(\alpha)| = |\int_\alpha^x u'(t)\ dt| \leq \|u'\|_{L^1}$$

Επομένως, $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1}$. Συμπεραίνουμε την (4.1) με χρήση της ανισότητας *Hlder* □

Κεφάλαιο 5

ΧΩΡΟΙ *Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

5.1 Ορισμός Και Βασικές Ιδιότητες Των Χώρων Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα ανοιχτό και $p \in \mathbb{R}$, με $1 \leq p \leq \infty$
Ορισμός Ο χώρος $Sobolev W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται με

$$W^{1,p}(\Omega) = \begin{cases} u \in L^P(\Omega) \\ \exists g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ τέτοιες ώστε} \\ \int_\Omega u \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), i = 1, 2, ...N \end{cases}$$

Θέτουμε

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Για $u \in W^{1,p}(\Omega)$, γράφουμε

$$\tfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{και} \quad \nabla u = (\tfrac{\partial u}{\partial x_i}, \tfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \tfrac{\partial u}{\partial x_N}) = gradu$$

Ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}$$

ή καμιά φορά, με την ισοδύναμη νόρμα

$$(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}^p)^{1/p}$$

Ο χώρος $H^1(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^p} + \sum_{i=1}^N (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2}$$

Η αντίστοιχη νόρμα

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2}^2)^{1/2}$$

είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,2}$.

Πρόταση 5.1.1. *Ο χώρος $W^{1,p}$ είναι χώρος Banach για $1 \leq p \leq \infty$ Ο χώρος $W^{1,p}$ είναι ανακλαστικός για $1 < p < \infty$ ενώ για $1 \leq p < \infty$ διαχωρίσιμος. Από την άλλη, ο χώρος H^1 είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Είναι φανερό ότι, αν $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ και αν $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ για κάθε $i = 1, 2, ...N$ (εδώ $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ συμβολίζει τη μερική παράγωγο με τη συνήθη έννοια), τότε $u \in W1, p(\Omega)$. Επιπλέον, οι μερικές παράγωγοι με τη συνήθη έννοια συμπίπτουν με τις μερικές παραγώγους υπό την έννοια του $W^{1,p}(\Omega)$. Ειδικά, αν το Ω είναι **φραγμένο**, τότε $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Αντίστροφα, αποδεικνύεται ότι, αν $u \in W^{1,p} \cap C(\Omega)$, με $1 \leq p \leq \infty$ και αν $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega)$, για κάθε $i = 1, 2, ..., N$ (το $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ συμβολίζει τη μερική παράγωγο με την έννοια του $W^{1,p}$), τότε $u \in C^1(\Omega)$.

Θεώρημα 5.1.2. *(Friedrichs). Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, με $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει η ακολουθία (u_n) του $C_c^\infty(\mathbb{R}_N)$ τέτοια ώστε*

(1) $\quad u_{n|\Omega} \to u \quad$ *στον* $L^p(\Omega)$

(2) $\quad \nabla u_{n|\omega} \to \nabla u_{|\omega} \quad$ *στον* $L^p(\omega)^N$ *για κάθε* $\omega \subset\subset \Omega$

(Υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός $\omega \subset\subset \Omega$ σημαίνει ότι το ω είναι ένα ανοιχτό τέτοιο ώστε $\overline{\omega} \subset \Omega$ και το $\overline{\omega}$ να είναι συμπαγές).

Λήμμα 5.1.3. *Έστω $p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ και έστω $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ με $1 \leq p \leq \infty$ Τότε*

$$p * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{και} \quad \tfrac{\partial}{\partial x_i}(p * v) = p * \tfrac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, ..., N$$

Απόδειξη του θεωρήματος. Ορίζουμε την

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{αν } x \in \Omega \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}$$

και θέτουμε $v_n = p_n * \overline{u}$ (όπου p_n είναι μια ομαλοποιητική ακολουθία). Γνωρίζουμε ότι $v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ και $v_n \to \overline{u}$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$. Θα δείξουμε ότι $\nabla v_{n|\omega} \to \nabla u_{|\omega}$ στον $L^p(\omega)$ για κάθε $\omega \subset\subset \Omega$. Για δεδομένο $\omega \subset\subset \Omega$ **επιλέγουμε** μια συνάρτηση $\alpha \in C_c^1(\Omega), 0 \leq \alpha \leq 1$ τέτοια ώστε $\alpha = 1$ σε μια περιοχή του ω. Σημειωτέον ότι για n αρκετά μεγάλο έχουμε

$$(3) \qquad p_n * \overline{\alpha u} = p_n * \overline{u} \text{ στο } \omega.$$

Πράγματι,

$$supp(p_n * \overline{\alpha u} - p_n * \overline{u}) = supp[p_n * (1-\overline{a})\overline{u}]$$
$$\subset suppp_n + supp(1-\overline{a})\overline{u} \subset B(0, \tfrac{1}{n}) + supp(1-\overline{a}) \subset \mathbb{R}^N \backslash \omega$$

για n αρκετά μεγάλο. Από όπου προκύπτει η (3).
Από το λήμμα 4.0.3 έχουμε

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i}(p_n * \overline{au}) = p_n * (\overline{a\tfrac{\partial u}{\partial x_i} + \tfrac{\partial \alpha}{\partial x_i}u})$$

και επομένως,

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i}(p_n * \overline{au}) \to \overline{\alpha\tfrac{\partial u}{\partial x_i} + \tfrac{\partial \alpha}{\partial x_i}u} \quad \text{στον} \quad L^p(\mathbb{R}^N)$$

Ειδικά,

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i}(p_n * \overline{\alpha u}) \to \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{στον} \quad L^p(\omega)$$

Τέλος, ' αποκόπτουμε ' την ακολουθία (v_n) όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος. Συγκεκριμένα, θέτουμε $u_n = \zeta_n v_n$. Εύκολα επαληθεύεται ότι η ακολουθία (u_n) έχει τις ζητούμενες ιδιότητες, δηλαδή $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), u_n \to u$ στον $L^p(\Omega)$ και $\nabla u_n \to \nabla u$ στον $L^p(\omega)^N$ □

5.2 Οι Χώροι $W^{m,p}(\Omega)$

Έστω $m \geq 2$ ένας ακέραιος και p ένας πραγματικός με $1 \leq p \leq \infty$. Ορίζουμε αναδρομικά τον χώρο

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \; \forall i = 1, 2, ..., N\}$$

Ισοδύναμα, ο χώρος αυτός ορίζεται με

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \; \forall \alpha \text{ με } |\alpha| \leq m \; \exists g_\alpha \in L^p(\Omega)$$
$$\text{τέτοιο ώστε } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \; \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$$

Συμβολίζουμε $D^\alpha u = g_\alpha$
Ο χώρος $W^{m,p}(\Omega)$, εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

είναι χώρος *Banach*.
Θέτουμε $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Ο $H^m(\Omega)$, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

είναι χώρος *Hilbert*.
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αποδεικνύεται ότι, αν το Ω είναι' αρκετά ομαλό ¨, με $\partial\Omega$ φραγμένο, τότε η νόρμα του $W^{m,p}(\Omega)$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα

$$\|u\|_{L^p} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

Συγκεκριμένα, αποδεικνύται ότι για κάθε πολυδείκτη α, με $0 < |\alpha| < m$, και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από τα Ω, ϵ, α) τέτοια ώστε

$$\|D^\alpha u\|_{L^p} \leq \epsilon \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta u\|_{L^p} + C\|u\|_{L^p} \ \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

5.3 Ανισότητες *Sobolev*

Θεώρημα 5.3.1. *(Sobolev, Gagliardo, Nirenderg) Έστω $1 \leq p < N$, τότε*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ , όπου το } p^* \text{ δίνεται από } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \text{ ,}$$

και υπάρχει σταθερά $C = C(p,N)$ τέτοια ώστε

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \ \forall u \in W^{L,p}(\mathbb{R}^N)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Η τιμή του p^* μπορεί να βρεθεί με ένα πολύ απλό επιχείρημα **ομογένειας** (σημειωτέον ότι μέσω ομογένειας παίρνουμε, καποίες φορές, ενδιαφέρουσες πληροφορίες με λίγη προσπάθεια). Πράγματι, **αν υπάρχουν** σταθερές C και $1 \leq p \leq \infty$ που ικανοποιούν

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \ \forall u \in W^{L,p}(\mathbb{R}^N)$$

τότε αναγκαστικά $q = p^*$. Για να το δούμε, επιλέγουμε την $u_\lambda(x) = u(\lambda x)(\lambda > 0)$ στη θέση της u. Παίρνουμε

$$\|u\|_{L^p} \leq C\lambda^{1+\frac{N}{q}-\frac{N}{p}}\|\nabla u\|_{L^p} \ \forall \lambda > 0$$

που συνεπάγεται ότι $q = p^*$.

Πόρισμα 4. *(**Οριακή περίπτωση** $p = N$) Ισχύει*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \ \forall q \in [N, +\infty)$$

με συνεχή ενσφήνωση.

Θεώρημα 5.3.2. *(Morrey) Έστω $p > N$, τότε*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

με συνεχή ενσφήνωση.
Επί πλέον, για κάθε $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ισχύει

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p} \qquad \sigma.\pi \qquad x, y \in \mathbb{R}^N$$

με $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ και C μια σταθερά (που εξαρτάται μόνο από το p και το N)

Πόρισμα 5. *Έστω $m \geq 1$ ένας ακέραιος και $1 \leq p < \infty$. Ισχύουν*

$$\text{αν} \qquad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0, \qquad \text{τότε } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \qquad \text{όπου } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$$

$$\text{αν} \qquad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0\ , \qquad \text{τότε } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \qquad \forall q \in [p, +\infty)$$

$$\text{αν} \qquad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0, \qquad \text{τότε } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

με συνεχείς ενσφηνώσεις.
Επί πλέον αν ο $m - N/p > 0$ δεν είναι ακέραιος, θέτουμε

$$k = [m - \tfrac{N}{p}] \qquad \text{και} \qquad \theta = (m - \tfrac{N}{p}) - k \qquad (0 < \theta < 1)$$

Έχουμε, για κάθε $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{m,p}} \qquad \forall \alpha \quad \text{με} \quad |\alpha| \leq k$$

και

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta \qquad \sigma.\pi. \qquad x, y \in \mathbb{R}^N,\ \forall \alpha, |\alpha| = k$$

Ειδικά, $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$

Πόρισμα 6. *Το συμπέρασμα του πορίσματος 5 ισχύει αν αντικαταστήσουμε τον $\mathbb{R}^N$ με το Ω.*

5.4 Ο χώρος $W_0^{1,p}$

Ορισμός. Έστω $1 \leq p < \infty$. Συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(\Omega)$ το κλειστό περίβλημα του $C_c^1(\Omega)$ στον $W^{1,p}(\Omega)$. Γράφουμε

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

Ο χώρος $W_0^{1,p}$, εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγει ο $W_0^{1,p}$, είναι διαχωρίσιμος χώρος *Banach*. Είναι ανακλαστικός, αν $1 < p < \infty$ και ο H_0^1 είναι ένας χώρος *Hilbert* για το εσωτερικό γινόμενο του H^1 .
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (1) Επειδή ο $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, έχουμε

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$$

Αντίθετα, αν $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, τότε γενικά $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$. Αλλά, αν το $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ είναι' αρκετά ισχνό ' για $p < N$, έχουμε $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. Για παράδειγμα, αν $\Omega = \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ και $N \geq 2$, αποδεικνύεται ότι $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (2) Οι συναρτήσεις του $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι συναρτήσεις του $W^{1,p}(\Omega)$ που μηδενίζονται στο $\Gamma = \partial\Omega$. Είναι σημαντικό να δώσουμε μια ακριβή έννοια σε αυτόν τον ισχυρισμό, εφόσον μια συνάρτηση $u \in W^{1,p}(\Omega)$ είναι ορισμένη μόνο σ.π. (και το Γ έχει μέτρο μηδέν !) και η u δεν έχει συνεχή αντιπρόσωπο. Ωστόσο, οι ακόλουθοι χαρακτηρισμοί υπονοούν ότι ' πρόκειται ' για συναρτήσεις που ' μηδενίζονται στο Γ.

5.5 Ομαλότητα Των Ασθενών Λύσεων

Ορισμός Λέμε ότι ένα ανοιχτό Ω είναι της τάξεως C^m, m ακέραιος ≥ 1, αν για κάθε $x \in \Gamma$ υπάρχει περιοχή U του x στον $\mathbb{R}^N$ και μια απεικόνιση $H : Q \to U$ αμφιμονοσήμαντη και επί τέτοια ώστε
$H \in C^m(\overline{Q}) \qquad H^{-1} \in C^m(\overline{U}) \qquad H(Q_+) = U \cap \Omega \qquad H(Q_0) = U \cap \Gamma$
Λέμε ότι το Ω είναι τάξεως C^∞, αν το Ω είναι τάξεως C^m για κάθε m. Τα σημαντικότερα αποτελέσματα ομαλότητας είναι τα ακόλουθα:

Θεώρημα 5.5.1. *(Ομαλότητα για το πρόβλημα Dirichlet). Έστω Ω ένα ανοιχτό σύνολο τάξεως C^2 με Γ φραγμένο (ή $\Omega = \mathbb{R}_+^{\mathrm{N}}$) Έστω $f \in L^2(\Omega)$ και $u \in H_0^1(\Omega)$ που ικανοποιούν την*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{5.1}$$

Τότε $u \in H^2(\Omega)$ και $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$, όπου C μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το Ω. Ακόμα, αν το Ω είναι τάξεως C^{m+2} και αν $f \in H^m(\Omega)$, τότε

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \qquad\qquad \mu\epsilon \qquad\qquad \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m}$$

Ειδικά, αν $m > \frac{N}{2}$, *τότε* $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
Τέλος, αν το Ω *είναι τάξεως* C^∞ *και αν* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *τότε* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Θεώρημα 5.5.2. *(Ομαλότητα για το πρόβλημα Neumann). Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 5.5.1, ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα για τη λύση του προβλήματος Neumann, δηλαδή για* $u \in H^1(\Omega)$ *τέτοια ώστε*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \tag{5.2}$$

Κεφάλαιο 6

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Η Εξίσωση Θερμότητας: Ύπαρξη, Μοναδικότητα Και Ομαλότητα

Συμβολισμοί Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα ανοιχτό σύνορο Γ. Θέτουμε

$$Q = \Omega \times (0, \infty)\ , \qquad \Sigma = \Gamma \times (0, \infty),$$

όπου Σ είναι το πλευρικό σύνορο του κυλίνδρου Q.
Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα: Να βρεθεί μια συνάρτηση

$$u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

(1) $\quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad$ στο Q

(2) $\quad u = 0 \quad$ στο Σ

(3) $\quad u(x,0) = u_0(x) \quad$ στο Ω

όπου $\Delta = \Sigma_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ συμβολίζει τον τελεστή Laplace ως προς τις χωρικές μεταβλητές, t τη χρονική μεταβλητή και $u_0(x)$ σε μια δεδομένη συνάρτηση.
Η εξίσωση (1) καλείται **εξίσωση θερμότητας**, επειδή προτυποποιεί την κατανομή της θερμοκρασίας u στο πεδίο Ω τη στιγμή t. Η εξίσωση θερμότητας και οι παραλαγές της εμφανίζονται σε πολλά φαινόμενα διαχύσεως. Η εξίσωση θερμότητας είναι το απλούστερο παράδειγμα μιας παραβολικής εξισώσεως.
Η εξίσωση (2) είναι η **συνοριακή συνθήκη Dirichlet**. Μπορεί να αντικατασταθεί με τη συνθήκη Neumann

$$(2') \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{στο} \qquad \Sigma$$

(n είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου στο Γ) ή με οποιαδήποτε συνοριακή συνθήκη που συναντήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Η συνθήκη (2) εκφράζει τη διατήρηση του συνόρου Γ του Ω σε μηδενική θερμοκρασία, η δε συνθήκη (2′) εκφράζει το γεγονός ότι η ροή θερμότητας μέσω του Γ είναι μηδενική.
Η συνθήκη (3) είναι **αρχική συνθήκη ή συνθήκη Cauchy**.
Θα λύσουμε το πρόβλημα (1)-(2)-(3) θεωρώντας την $u(x,t)$ ως συνάρτηση ορισμένη στο $[0,+\infty)$ με τιμές σε έναν χώρο H, όπου H ένας χώρος συναρτήσεων που εξαρτώνται μόνο από το x.
Για να απλουστεύσουμε την παρουσίαση, υποθέτουμε, σε ολόκληρο το κεφάλαιο , ό,τι το Ω είναι τάξεως C^∞ με Γ φραγμένο.

Θεώρημα 6.0.1. *Υποθέτουμε ότι $u_o \in L^2(\Omega)$. Τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $u(x,t)$ που ικανοποιεί τις (1), (2), (3) και*

$$u \in C([0,\infty), L^2(\Omega)) \cap C((0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{6.1}$$

$$u \in C^1((0,\infty), L^2(\Omega)) \tag{6.2}$$

Επί πλέον,

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [\epsilon,\infty)) \qquad \forall \epsilon > 0$$

Τέλος, $u \in L^2((0,\infty), H_0^1(\Omega))$ και ισχύει

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} dt = \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall T > 0 \tag{6.3}$$

Απόδειξη Εφαρμόζουμε τη θεωρία Hille - Yosida στον χώρο $H = L^2(\Omega)$. Γι′ αυτό, εισάγουμε τον μη φραγμένο τελεστή $A : D(A) \subset H \to H$ που ορίζεται με

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$
$$Au = -\Delta u$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ενσωματώνουμε τη συνοριακή συνθήκη (2) στον ορισμό του πεδίου ορισμού του Α. Θα επαληθεύσουμε ότι ο Α είναι μεγιστικός μονότονος και αυτοσυζυγής.
Θα μπορέσουμε τότε να εφαρμόσουμε το θεώρημα (3.4.2) για να συμπεράνουμε την ύπαρξη μιας μοναδικής λύσεως των (1), (2), (3), (6.1), (6.2).
(α) Ο Α είναι μονότονος. Πράγματι, αν $u \in D(A)$, έχουμε

$$(Au, u)_{L^2} = \int(-\Delta u)u = \int |\nabla u|^2 0$$

(β) Ο Α είναι μεγιστικός μονότονος. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $R(I + A) = H = L^2$. Αλλά, γνωρίζουμε ότι για κάθε $f \in L^2$ υπάρχει $u \in H^2 \cap H_0^1$ μοναδική λύση της εξισώσεως $u - \Delta u = f$. Αυτό προκύπτει από το θεώρημα (5.5.1).
(γ) Ο Α είναι αυτοσυζυγής. Βάσει της προτάσεως (3.41) αρκεί να επαληθεύσουμε ότι ο Α είναι συμμετρικός. Αλλά, αν $u, v \in D(A)$, έχουμε

$$(Au,v)_{L^2} = \int(-\Delta u)v = \int \nabla u \nabla v$$
$$(u,Av)_{L^2} = \int u(-\Delta v) = \int \nabla u \nabla v$$

και, επομένως, $(Au,v) = (u,Av)$.
Εξάλλου, συμπεραίνουμε από το θεώρημα (5.5.1) ότι $D(A^l) \subset H^{2l}(\Omega)$ με συνεχή ενσφήνωση. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$D(A^l) = \{u \in H^{2l}(\Omega) : u = \Delta u = ... = \Delta^{l-1}u = 0 \quad \text{στο } \Gamma\} \ ,$$

Γνωρίζουμε (θεώρημα 3.4.2) ότι η λύση υ των (1)-(2)-(3) ανήκει στον

$$C^k((0,\infty), D(A^l)) \qquad \forall k, \forall l$$

και άρα $u \in C^k((0,+\infty), H^{2l}(\Omega))$ για κάθε k,l. Προκύπτει από το πόρισμα (5.6) ότι

$$u \in C^k((0,+\infty), C^k(\overline{\Omega}) \qquad \forall k$$

Θα δείξουμε την (6.3). Τυπικά, πολλαπλασιάζουμε την (1) με u και ολοκληρώνουμε στο $\Omega \times (0,T)$. Πρέπει όμως, να είμαστε προσεκτικοί, διότι η $u(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$, αλλά όχι στο $[0,\infty)$. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = \frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)}$. Η φ είναι τάξεως C^1 στο $(0,+\infty)$ από την (6.2) και

$$\varphi'(t) = (u(t), \tfrac{du}{dt}(t))_{L^2} = (u,\Delta u)_{L^2} = -\int_\Omega |\nabla u|^2$$

Επομένως, αν $0<\epsilon<T<\infty$, έχουμε

$$\varphi(T) - \varphi(\epsilon) = \int_\epsilon^T \varphi'(t)dt = -\int_\epsilon^T |\nabla u(t)|^2_{L(\Omega)}dt$$

Όταν $\epsilon \to 0, \varphi(\epsilon) \to \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)}$ και συμπεραίνουμε την (6.3) □

Θεώρημα 6.0.2. *α) Υποθέτουμε ότι $u_0 \in H^1_0(\Omega)$. Τότε η λύση u των (1)-(2)-(3) ικανοποιεί*

$$u \in C([0,\infty), H^1_0(\Omega)) \cap L^2((0,\infty), H^2(\Omega))$$

και

$$\tfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0,\infty), L^2(\Omega)) \ .$$

Επί πλέον, ισχύει

$$\int_0^T |\frac{\partial u}{\partial t}(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt + \frac{1}{2}|\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega)} \tag{6.4}$$

β) Υποθέτουμε ότι $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Τότε ισχύουν

$$u \in C([0,\infty), H^2(\Omega)) \cap L^2((0,\infty), H^3(\Omega))$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0,\infty), H^1(\Omega))$$

γ) Υποθέτουμε ότι $u_0 \in H^k(\Omega)$ *για κάθε* k *και ότι η* u_0 *ικανοποεί τις σχέσεις συμβατότητας*

$$u_0 = \Delta u_0 = ... = \Delta^j u_0 = ... = 0 \text{ στο } \Gamma \qquad \forall j \text{ ακέραιοτότε } u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \quad (6.5)$$

Απόδειξη

α) Επιλέγουμε εδώ τον $H^1 = H_0^1(\Omega)$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u,v)_{H_1} = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv$$

Στον H_1 θεωρούμε το μη φραγμένο τελεστή $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \to H_1$ που ορίζεται με

$$D(A_1) = \{u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta u \in H_0^1(\Omega)\}$$
$$A_1 u = -\Delta u$$

Θα επαλυθεύσουμε ότι ο A_1 είναι μεγιστικός μονότονος και αυτοσυζυγής:

(ι) ο A_1 είναι μονότονος. Πράγματι, αν $u \in D(A_1)$ έχουμε

$$(A_1 u, u)_{H_1} = \int \nabla(-\nabla u)\nabla u + \int (-\Delta u) u = \int |\Delta u|^2 + \int |\nabla u|^2 \geq 0$$

(ιι) ο A_1 είναι μεγιστικός μονότονος. Γνωρίζουμε (θεώρημα 5.5.1) ότι για κάθε $f \in H^1(\Omega)$ υπάρχει $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ μοναδική λύση της εξισώσεως $u - \Delta u = f$ Αν, επί πλέον, $f \in H_0^1(\Omega)$, τότε (από την εξίσωση)

$$\Delta u \in H_0^1(\Omega) \qquad\qquad \text{και άρα} \quad u \in D(A_1)$$

(ιιι) ο A_1 είναι συμμετρικός. Αν $u, v \in D(A_1)$ έχουμε

$$(A_1 u, v)_{H_1} = \int \nabla(-\nabla u)\nabla v + \int (-\Delta u) v = \int \Delta u \Delta v + \int \nabla u \nabla v = (u, A_1 v)_{H_1}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα (3.4.2), βλέπουμε ότι αν $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ υπάρχει λύση u των (1)-(2)-(3) (που ταυτίζεται με αυτήν που παίρνουμε στο θεώρημα 6.0.1) λόγω μοναδικότητας), τέτοια ώστε

$$u \in C([0,\infty), H_0^1(\Omega))$$

Τέλος, θέτουμε $\varphi(t) = \frac{1}{2}|\nabla u(t)|^2_{L^2_\Omega}$. Η συνάρτηση φ είναι C^∞ στο $(0,\infty)$ και

$$\varphi'(t) = (\nabla u(t), \tfrac{du}{dt}(t))_{L^2} = (-\Delta u(t), \tfrac{du}{dt}(t))_{L^2} = -|\tfrac{du}{dt}(t)|^2_{L^2}$$

Προκύπτει ότι αν $0 < \epsilon < T < \infty$, τότε

$$\varphi(T) - \varphi(\epsilon) + \int_{\epsilon}^{T} |\frac{du}{dt}(t)|_{L^2}^2 dt = 0$$

και το συμπέρασμα έπεται αν πάρουμε $\epsilon \to 0$.
β) Η απόδειξη γίνεται τώρα στον χώρο Hilbert $H_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H_2} = (\Delta u, \Delta v)_{L^2} + (u, v)_{L^2}$$

Στον H_2 θεωρούμε τον μη φραγμένο τελεστή $A_2 : D(A_2) \subset H_2 \to H_2$ που ορίζεται με

$$\begin{gathered} D(A_2) = \{u \in H^4(\Omega) : u \in H_0^1(\Omega) \text{ και } \Delta u \in H_0^1(\Omega)\} \\ A_2 u = -\Delta u \end{gathered}$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι ο A_2 είναι μεγιστικός μονότονος και αυτοσυζυγής στον H_2. Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε το θεώρημα (3.4.2) για τον A_2 στον H_2. Τέλος, θέτουμε $\varphi(t) = \frac{1}{2}|\Delta u(t)|_{L^2}^2$. Η συνάρτηση φ είναι C^∞ στο $(0, \infty)$ και έχουμε

$$\varphi'(t) = (\Delta u(t), \Delta \tfrac{du}{dt}(t))_{L^2} = (\Delta u(t), \Delta^2 u(t))_{L^2} = -|\nabla \Delta u(t)|_{L^2}^2,$$

από όπου προκύπτει ότι για $0 < \epsilon < T < \infty$

$$\tfrac{1}{2}|\Delta u(T)|_{L^2}^2 - \tfrac{1}{2}|\Delta u(\epsilon)|_{L^2}^2 + \int_{\epsilon}^{T} |\nabla \Delta u(t)|_{L^2}^2 dt = 0$$

Στο όριο, όταν $\epsilon \to 0$, βλέπουμε ότι $u \in L^2((0, \infty), H^3(\Omega))$ και (από την εξίσωση) $\frac{du}{dt} \in L^2((0, \infty), H^1(\Omega))$.
γ) Θεωρούμε στον $H = L^2(\Omega)$ τον τελεστή $A : D(A) \subset H \to H$ που ορίζεται με

$$\begin{gathered} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au = -\Delta u \end{gathered}$$

Γνωρίζουμε από το θεώρημα (3.4.0) ότι για $u_0 \in D(A^k), k \geq 2$, ισχύει

$$u \in C^{k-j}([0, \infty), D(A^j)) \; \forall j = 0, 1, ..., k$$

Η υπόθεση (8) όμως εκφράζει ακριβώς ότι $u_0 \in D(A^k)$ για κάθε $k \geq 1$. Επομένως, έχουμε

$$u \in C^{k-j}([0, \infty), D(A^j)) \; \forall k \geq 1, \; \forall j = 0, 1, ..., k$$

Προκύπτει ότι $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ (όπως στην απόδειξη του θεωρήματος (6.01)) $\Box$
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. Το θεώρημα (6.0.1) δείχνει ότι η εξίσωση θερμότητας έχει μια ισχυρή ομαλοποιητική επίδραση πάνω στην αρχική τιμή u_0. Σημειωτέον ότι η λύση $u(x,t)$ είναι C^{∞} στο σημείο x για κάθε $t > 0$, ακόμα και αν η αρχική τιμή u_0 είναι ασυνεχής. Προκύπτει, ειδικά, ότι η εξίσωση θερμότητας είναι μη επιστρέψιμη. Γενικά, δεν μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \ \text{ στο } \Omega \times (0,T) \tag{6.6}$$

$$u = 0 \ \text{ στο } \Gamma \times (0,T) \tag{6.7}$$

με ' τελική ' τιμή

$$u(x,T) = u_T(x) \ \text{ στο } \ \Omega \tag{6.8}$$

Θα έπρεπε αναγκαστικά να έχουμε

$$u_T \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \qquad \text{με} \qquad \Delta^j u_T = 0 \quad \text{στο} \quad \Gamma \ , \qquad \forall j \geq 0$$

Αλλά ακόμα και αυτές οι υποθέσεις δεν αρκούν για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μιας λύσεως του οπισθοχρονικού (6.6)-(6.7)-6.8).
Δεν πρέπει να συγχέουμε το πρόβλημα (6.6)-(6.7)-(6.8) με το πρόβλημα (6.9)-(6.7)-(6.8), όπου

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ στο } \Omega \times (0,T) \tag{6.9}$$

το οποίο έχει πάντοτε μια μοναδική λύση για κάθε $u_T \in L^2(\Omega)$ (αντικαθιστούμε το t με $T-t$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα 6.0.1).
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. Τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν επίσης, με ορισμένες τροποποιήσεις, για το πρόβλημα Cauchy με συνθήκες Neumann
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3. Όταν το Ω είναι φραγμένο, το πρόβλημα (1)-(2)-(3) μπορεί να λυθεί με ανάλυση ως προς μια βάση Hilbert του $L^2(\Omega)$. Για τον σκοπό αυτό, συμφέρει να επιλέξουμε μια βάση $(e_i(x))_{i\geq 1}$ του $L^2(\Omega)$ που αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις του $-\Delta$ με συνθήκη Dirichlet δηλαδή

$$-\Delta e_i = \lambda_i e_i \quad \text{στο} \ \ \Omega \ , e_i = 0 \ \text{ στο } \ \ \Gamma$$

Ζητούμε μια λύση των (1)-(2)-(3) στη μορφή

$$u(x,t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) e_i(x) \tag{6.10}$$

Βλέπουμε αμέσως ότι έχουμε, αναγκαστικά,

$$\alpha'_(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = 0 \ , \quad \text{από όπου} \quad \alpha_i(t) = \alpha_i(0) e^{-\lambda_i t}$$

και οι σταθερές $\alpha_i(0)$ προσδιορίζονται από τη σχέση

$$u_0(x) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i(0) e_i(x) \tag{6.11}$$

Με άλλα λόγια, η λύση των (1)-(2)-(3) δίνεται από

$$u(x,t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i(0) e^{-\lambda_i t} e_i(x) \tag{6.12}$$

όπου οι σταθερές $\alpha_i(0)$ είναι οι συνιστώσες της $u_0(x)$ ως προς τη βάση (e_i) .
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4. Οι σχέσεις συμβατότητας (8) δεν πρέπει να εκπλήσσουν. Αποτελούν επίσης αναγκαίες συνθήκες για να ανήκει η λύση u των (1)-(2)-(3) στον $C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ (η υπόθεση $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ και $u_0 = 0$ στο Γ από μόνη της δεν αρκεί !). Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ ικανοποιεί τις (1)-(2)-(3). Έχουμε

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = ... = \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = ... = 0 \qquad \forall j \quad \text{στο} \quad \Gamma \times (0,\infty)$$

και, μέσω συνεχείας, προκύπτει

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0 \qquad \forall j \text{στο} \ \times [0,\infty) \tag{6.13}$$

Εξάλλου, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u \text{ το } Q \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \Delta^2 u \qquad \text{στο } Q \\ &\vdots \\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j} &= \Delta^j u \qquad \forall j \ \text{ στο } \overline{\Omega} \times [0,\infty) \ . \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε την (8) συγκρίνοντας τις (6.12) και (6.13) στο $\Gamma \times \{0\}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5. Βέβαια, μπορούμε να πάρουμε ένα άπειρο πλήθος αποτελεσμάτων ομαλότητας για την u σε μια περιοχή του $t = 0$, κάνοντας ενδιάμεσες υποθέσεις μεταξύ των υποθέσεων β) και γ) του θεωρήματος (6.0.1).

Βιβλιογραφία

(1) Sobolev spaces, Adams R., Acad. Press (1975)

(2) Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Barbu V., Noordhoff (1976)

(3) Nonlinearity and Functional Analysis, Berger M. Acad. Press (1977)

(4) Parabolic interior Schauder estimates by the maximum princible, Knerr B., Archive Rat. Mech. Anal. (1980)

(5) The theory of partial differential equations, Mizohata S., Cambridge Univ. Press(1973)

(6) Convex Analysis, Rockafellar R. T., Princeton Univ. Press (1970)

(7) Functional Analysis, Yosida K. Springer (1965)

(8) The index Theorem and the heat equation, Gilkey P., Publish or Perish (1974)