



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΔΠΜΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ**

**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ**

**“ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΛΥΦΟΥΣ  
ΣΙΛΟΦΟΡΟΥ ΟΧΗΜΑΤΟΣ”**

Κ.Ι. Τσαπρούνης

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2017

# Table of Contents

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ.....	1
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	4
2 ΚΕΛΥΦΗ-ΟΡΙΣΜΟΣ.....	5
2.1 ΚΕΛΥΦΗ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ.....	5
2.2 ΚΕΛΥΦΗ ΕΚ ΜΕΤΑΤΩΠΙΣΕΩΣ.....	6
2.3 ΚΟΝΩΕΙΔΗ ΚΕΛΥΦΗ.....	6
2.4 ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΕΛΥΦΗ.....	7
2.5 ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΚΕΛΥΦΗ ΜΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΣΥΝΟΡΑ.....	8
2.6 ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΕΛΥΦΗ.....	9
2.7 ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΚΕΛΥΦΩΝ.....	9
2.8 ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΚΕΛΥΦΩΝ.....	10
2.9 ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΜΒΡΑΝΗΣ ΓΙΑ ΤΑ ΚΕΛΥΦΗ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ.....	11
2.10 ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΤΜΗΜΑ ΚΕΛΥΦΟΥΣ.....	12
2.11 Η ΠΑΡΑΔΟΧΗ ΤΗΣ ΕΝΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΜΕΜΒΡΑΝΗΣ.....	14
2.12 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΕΝΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΤΟΥ ΚΕΛΥΦΟΥΣ.....	18
2.13 ΚΩΝΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ.....	23
2.14 ΚΥΚΛΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ.....	23
2.15 ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΨΗΣ ΚΕΛΥΦΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΜΕ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΑΞΟΝΑ ΦΟΡΤΙΣΗ.....	24
3 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	26
3.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ.....	26
3.2 ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ.....	27
3.3 ΑΡΧΗ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ.....	28
3.4 ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΗΓΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ - ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ.....	29
3.5 ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ – ΑΝΗΓΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ.....	30
3.6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.....	32
3.7 ΜΗΤΡΩΟ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.....	33
3.8 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΜΕ ΕΠΙΚΟΜΒΙΑ ΦΟΡΤΙΑ.....	33
3.9 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΕΛΥΦΟΥΣ.....	34
4 ΤΟΠΟΣ ΔΙΑΡΡΟΗΣ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΣΤΟΧΙΑΣ.....	36
5 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	38

6	ΒΕΛΤΙΣΟΠΟΙΗΣΗ.....	40
7	ΤΕΧΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ.....	41
8	ΑΡΧΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....	46
8.1	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ.....	48
8.2	ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ COMB1.....	48
8.3	ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ COMB2.....	52
8.4	ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ COMB3.....	55
8.5	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΠΡΟΚΥΠΤΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....	58
9	ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....	59
9.1	ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΔΟΚΙΜΗ-ΦΟΡΤΙΣΗ.....	60
9.2	ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΔΟΚΙΜΗ.....	69
9.3	ΦΟΡΤΙΣΗ 1 ΜΕ ΚΟΝΙΑΜΑ -ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ- COMB2.....	76
9.4	ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ 1 ΑΠΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ COMB2.....	83
9.5	ΦΟΡΤΙΣΗ 2 ΜΕ ΚΟΝΙΑΜΑ -ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ- COMB2.....	89
9.6	ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ 2 ΑΠΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ COMB2.....	98
9.7	ΦΟΡΤΙΣΗ 3 ΜΕ ΚΟΝΙΑΜΑ -ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ- COMB2.....	107
9.8	ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ.....	116
10	ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ.....	118
11	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	125

## 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα μελέτη θα αναλυθεί η συμπεριφορά ενός ανεπιτυχούς σχεδιασμού εμπορικού σιλοφόρου οχήματος. Σιλοφόρο λέγεται το όχημα – δεξαμενή που μεταφέρει χύδην φορτίο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το όχημα είναι ελληνικής σχεδίασης και κατασκευής, μεταφέρει τσιμέντο σε μορφή σκόνης και σχεδιάστηκε το έτος 1997. Από το σχέδιο του κατασκευαστή προέκυπταν τα παρακάτω στοιχεία:

- Υλικό κατασκευής : St-42-2
- Πάχος ελασμάτων κελύφους : 5 mm
- Πάχος ελασμάτων στήριξη: 7 mm
- Πίεση δοκιμής : 3 barg
- Πίεση λειτουργίας : 1,8 barg
- Τύπος Πάτων: Kloppe

Τα οχήματα αυτού του τύπου ακολουθώντας την Ελληνική νομοθεσία υπόκεινται σε υδραυλική δοκιμή κάθε 3 χρόνια. Με το πέρας της κατασκευής τους υπόκεινται μόνο σε leaking test (πλήρωση με νερό). Κατά την λειτουργία και μετά την πρώτη υδροστατική δοκιμή πίεσης σημειώθηκαν ατυχήματα με πλήρη κατάρρευση του κελύφους. Αυτό το γεγονός αποτέλεσε την αρχή της παρούσας μελέτης για την εύρεση των αιτιών κατάρρευσης καθώς και προσδιορισμού του τρόπου βελτίωσης της αντοχής της κατασκευής.

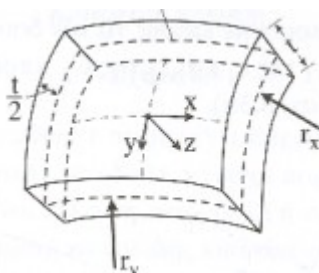
Η όλη μελέτη χωρίζεται σε τέσσερα βασικά μέρη - διερευνήσεις:

- Μη γραμμική ελαστική ανάλυση της κατασκευής για αρχικό προσδιορισμό των “αδύναμων” περιοχών.
- Κυκλική ελαστοπλαστική ανάλυση με βάση τα φορτία της υδραυλικής δοκιμής. Η κατασκευή θα φορτιστεί με το περιεχόμενο νερό και την πίεση δοκιμή και μετά θα αποφορτιστεί.
- Κυκλική ελαστοπλαστική ανάλυση με βάση τα φορτία λειτουργίας. Η κατασκευή θα φορτιστεί με εσωτερική πίεση λειτουργίας και το βάρος του περιεχομένου τσιμέντου και θα ακολουθήσει αποφόρτιση. Η διαδικασία φόρτισης - αποφόρτισης θα συνεχιστεί μέχρι της τελικής καταρρεύσεως της κατασκευής.
- Ελαστική ανάλυση και βελτιστοποίηση πάχους ελασμάτων έτσι ώστε οι αναπτυσσόμενες τάσεις να μην ξεπερνούν τις επιτρεπόμενες με βάση τους κανονισμούς, κρατώντας όσο χαμηλότερα γίνεται το συνολικό βάρος της κατασκευής.

## 2 ΚΕΛΥΦΗ-ΟΡΙΣΜΟΣ

Τα κελύφη είναι λεπτοί καμπύλοι επιφανειακοί φορείς των οποίων των πάχος  $t$  είναι πολύ μικρότερο της ακτίνας καμπυλότητας  $r$ . Για κελύφη που πρακτικά έχουν ενδιαφέρον όπως π.χ. τρούλοι ναών, κυλινδρικές οροφές, σιλό, δοχεία πίεσης, δεξαμενές, ο λόγος  $t/r$  είναι μικρότερος του  $1/500$ .

Για τη μελέτη των κελυφών απαραίτητη είναι η γνώση της γεωμετρίας του σχήματός τους. Αυτή περιγράφεται από μία συνάρτηση  $F(x,y,z)$  του μέσου επιπέδου το οποίο ορίζεται ως το επίπεδο που διχοτομεί σε κάθε σημείο το πάχος  $t$  του κελύφους (σχήμα 2.1). Από την άποψη αυτή διακρίνουμε τις παρακάτω ομάδες κελυφών.

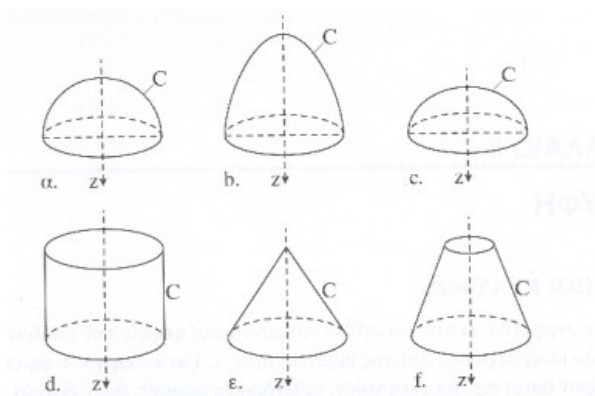


Σχήμα 2.1. Στοιχείο κελύφους

### 2.1 ΚΕΛΥΦΗ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Η μέση επιφάνεια ενός κελύφους εκ περιστροφής σχηματίζεται από την περιστροφή μιας επίπεδης καμπύλης  $C$  γύρω από έναν άξονα  $z$  ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδό της. Η γενέτειρα καμπύλη  $C$  καλείται μεσημβρινός.

Εάν ο μεσημβρινός είναι κύκλος, παραβολή ή έλλειψη, τότε προκύπτει μια σφαιρική επιφάνεια (σχ. 2.2.α) ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής (σχ. 2.2.β) ή ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής (σχ. 2.2 ε,φ). Εάν ο μεσημβρινός είναι μια ευθεία γραμμή τότε προκύπτει ένας κύλινδρος (σχ. 2.2.δ) ή μια κωνική επιφάνεια (σχ. 2.2ε,φ).

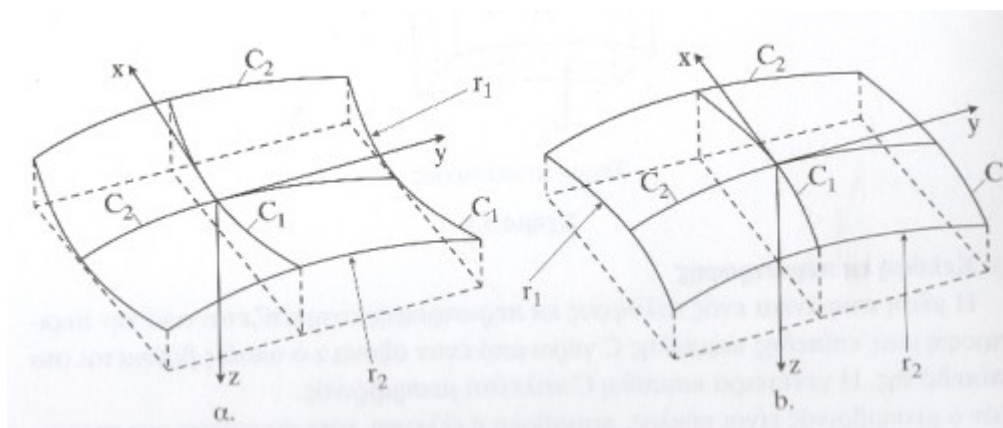


Σχήμα 2.2. Κελύφη εκ περιστροφής

## 2.2 ΚΕΛΥΦΗ ΕΚ ΜΕΤΑΤΩΠΙΣΕΩΣ

Η μέση επιφάνεια του κελύφους προκύπτει από τη μετακίνηση μιας επίπεδης καμπύλης  $C_1$  (γενέτειρας) επάνω σε μια επίπεδη καμπύλη  $C_2$  (οδηγός). Το ρόλο των δύο αυτών καμπυλών μπορούμε επίσης να τον δούμε και αντίστροφα.

Οι ακτίνες καμπυλότητας  $r_1$  της  $C_1$  και  $r_2$  της  $C_2$  μπορεί να έχουν την ίδια φορά (σχ. 2.3.b) ή αντίθετη φορά (σχ. 2.3.a).

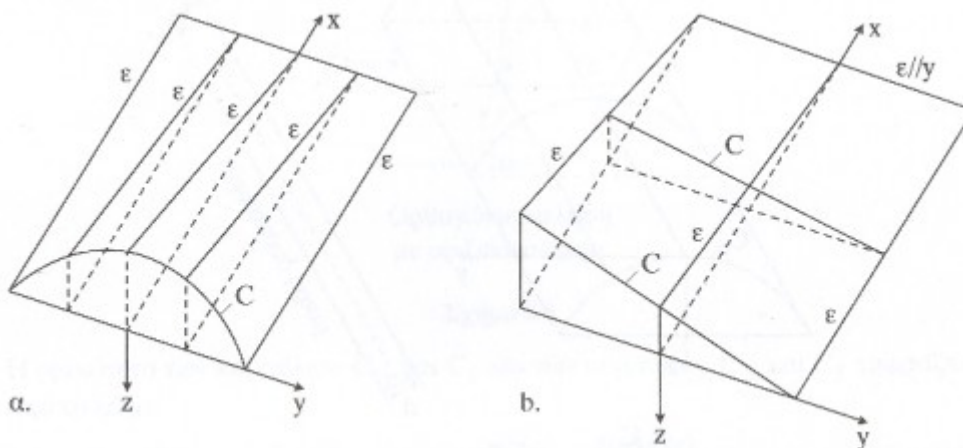


Σχήμα 2.3. Κελύφη εκ μετακινήσεως

Εάν οι καμπύλες  $C_1$ ,  $C_2$  είναι και οι δύο τετραγωνικές παραβολές τότε η επιφάνεια που προκύπτει καλείται παραβολοειδές. Τα παραβολοειδή υποδιαιρούνται σε ελλειπτικά, υπερβολικά ή κυκλικά παραβολοειδή αν από την τομή του παραβολοειδούς με ένα οριζόντιο επίπεδο ( $z = \text{σταθ.}$ ) προκύπτει μια έλλειψη, μία υπερβολή ή ένας κύκλος αντίστοιχα.

## 2.3 ΚΩΝΩΕΙΔΗ ΚΕΛΥΦΗ

Η μέση επιφάνεια του κελύφους προκύπτει από τη μετακίνηση μιας ευθείας  $\epsilon$  (γενέτειρα) κατά μήκος μιας επίπεδης καμπύλης  $C$  παράλληλης στον άξονα  $y$  (καμπύλη οδηγός) (σχ. 2.4).



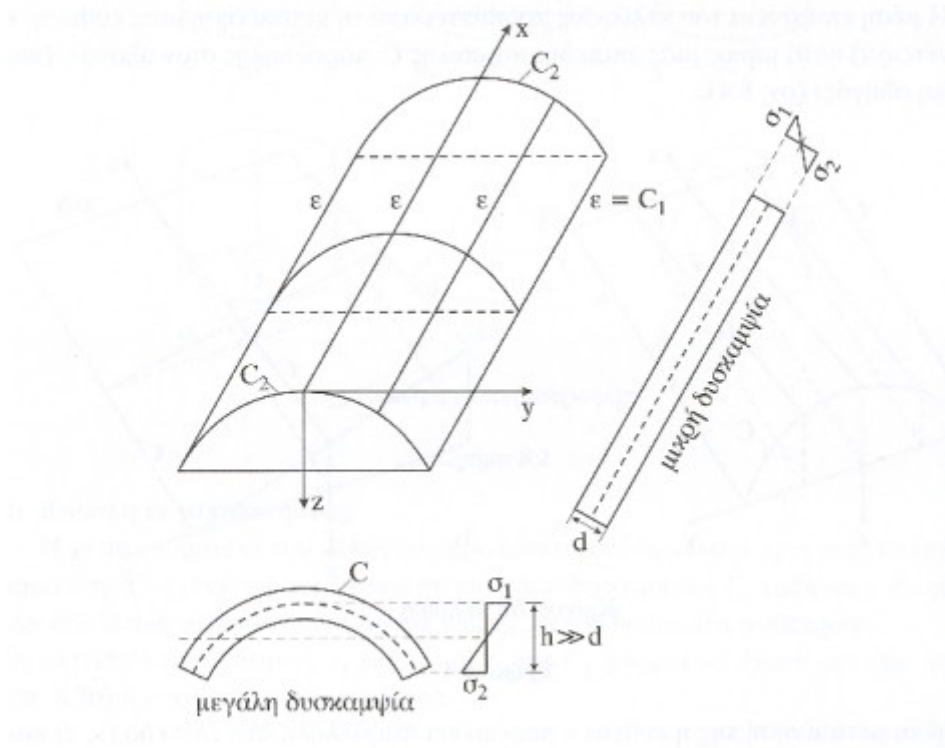
Σχήμα 2.4. Κωνοειδή κελύφη

Κατά τη μετακίνηση της η ευθεία  $\epsilon$  παραμένει παράλληλη στο επίπεδο  $(x, z)$  και επομένως οι προβολές της στο επίπεδο  $(x, y)$  είναι παράλληλες ευθείες.

Εάν η οδηγός καμπύλη  $C$  είναι έλλειψη, παραβολή ή κύκλος τότε προκύπτει μια ελλειπτική, παραβολική ή κυκλική κωνοειδής επιφάνεια αντίστοιχα (σχ. 2.4.a). Στην περίπτωση που η καμπύλη  $C$  είναι μια ευθεία κεκλιμένη σχετικά με την ευθεία  $\varepsilon$  τότε προκύπτει ένα λοξό υπερβολικό παραβολοειδές (σχ. 2.4.b). Ένα λοξό υπερβολικό παραβολοειδές μπορεί να μετασχηματιστεί σ' ένα υπερβολικό παραβολοειδές εκ μεταφοράς με μια αλλαγή συντεταγμένων. Δηλαδή οι δύο αυτές επιφάνειες είναι μεν ταυτόσημες αλλά εκφράζονται σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων.

## 2.4 ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΕΛΥΦΗ

Η μέση επιφάνεια του κελύφους προκύπτει από τη μετακίνηση μιας επίπεδης καμπύλης  $C_2$  κατά μήκος μιας ευθείας  $\varepsilon = C_1$  (σχ. 2.5). Τα κυλινδρικά κελύφη είναι επομένως κελύφη εκ μεταφοράς τα οποία έχουν οδηγό μια ευθεία  $\varepsilon = C_1$ . Η ταξινόμηση των κυλινδρικών κελυφών σαν ιδιαίτερης ομάδας γίνεται λόγω των συχνών εφαρμογών τους στις κατασκευές. Όσον αφορά δε τη στατική τους συμπεριφορά, μόνο κατά την κάθετη διεύθυνση εμφανίζουν μεγάλη δυσκαμψία έναντι κάμψης ενώ κατά την οριζόντια διεύθυνση έχουν μικρή δυσκαμψία. Στα κελύφη με διπλή καμπυλότητα αντιθέτως (σχ. 2.3), η δυσκαμψία έναντι κάμψης είναι μεγάλη και για την κατά μήκος και για την κάθετη διεύθυνση.



Σχήμα 2.5. Κυλινδρικά κελύφη

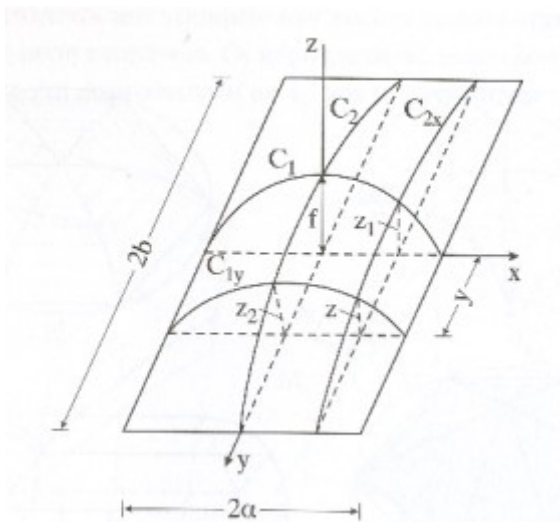
## 2.5 ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΚΕΛΥΦΗ ΜΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΣΥΝΟΡΑ

Η μέση επιφάνεια των κελυφών αυτών σχηματίζεται με τον τρόπο που δείχνεται στο σχ. 2.6. Οι επίπεδες καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  που βρίσκονται στα επίπεδα  $(x, z)$  και  $(y, z)$  αντίστοιχα ορίζονται από τις εξισώσεις.

$$C_1 : z_1 = f(x)$$

$$C_2 : z_2 = g(y)$$

Ένα κάθετο επίπεδο  $y = \text{σταθ.}$  τέμνει τη μέση επιφάνεια κατά μήκος μιας καμπύλης  $C_{1y}$  όμοιας της  $C_1$ . Ομοίως ένα κάθετο επίπεδο  $x = \text{σταθ.}$  τέμνει τη μέση επιφάνεια κατά μήκος μιας καμπύλης  $C_{2x}$  όμοιας με τη  $C_2$ .



Σχήμα 2.6. Ορθογώνια κελύφη με οριζόντια άκρα

Η ομοιότητα των καμπύλων  $C_{1y}$  και  $C_1$  και των καμπύλων  $C_{2x}$  και  $C_2$  εκφράζεται από το λόγο

$$\frac{z}{z_1} = \frac{z_2}{f} \quad \text{ή} \quad \frac{z}{z_2} = \frac{z_1}{f} \quad \text{ή} \quad z = \frac{z_1 z_2}{f} = \frac{f(x)g(y)}{f} \quad (2.1)$$

Η εξίσωση 2.1 δίνει το γεωμετρικό σχήμα της μέσης επιφάνειας. Για την περίπτωση που οι καμπύλες  $C_1, C_2$  είναι τετραγωνικές παραβολές έχουμε:

$$C_1 : z_1 = f \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

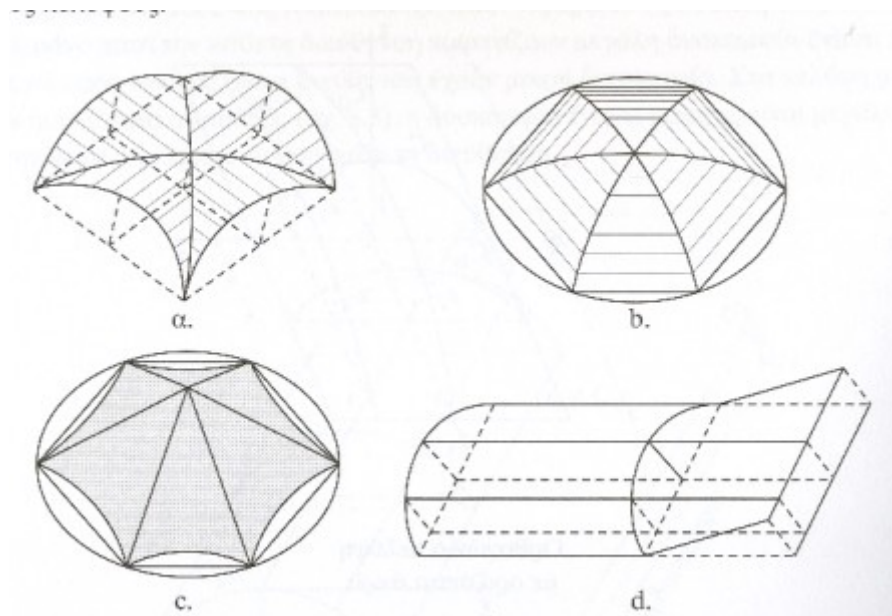
$$z = \frac{z_1 z_2}{f} = f \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (2.2)$$

$$C_2 : z_2 = f \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$



## 2.6 ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΕΛΥΦΗ

Τα κελύφη αυτά προκύπτουν από το συνδυασμό δύο ή και περισσότερων ειδών των προαναφερθέντων κατηγοριών κελυφών. Στο σχ. 2.7.α απεικονίζεται ο συνδυασμός δύο κυλινδρικών κελυφών, ενώ στο σχ. 2.7.β ένας πολυγωνικός τρούλος ο οποίος συντίθεται από ενδιάμεσα κυλινδρικά κελύφη. Στο σχ. 2.7.γ απεικονίζεται ο συνδυασμός των ενδιάμεσων λοξών υπερβολικών παραβολοειδών επάνω σε ένα πολυγωνικό επίπεδο, ενώ στο σχ. 2.7.δ ένας συνδυασμός ενός κυλινδρικού κελύφους και ενός οριζόντιου κωνοειδούς κελύφους.



Σχήμα 2.7. Σύνθετα κελύφη

## 2.7 ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΚΕΛΥΦΩΝ

Η μελέτη των λεπτών κελυφών στηρίζεται κατ' αρχάς στις εξής δύο βασικές υποθέσεις.

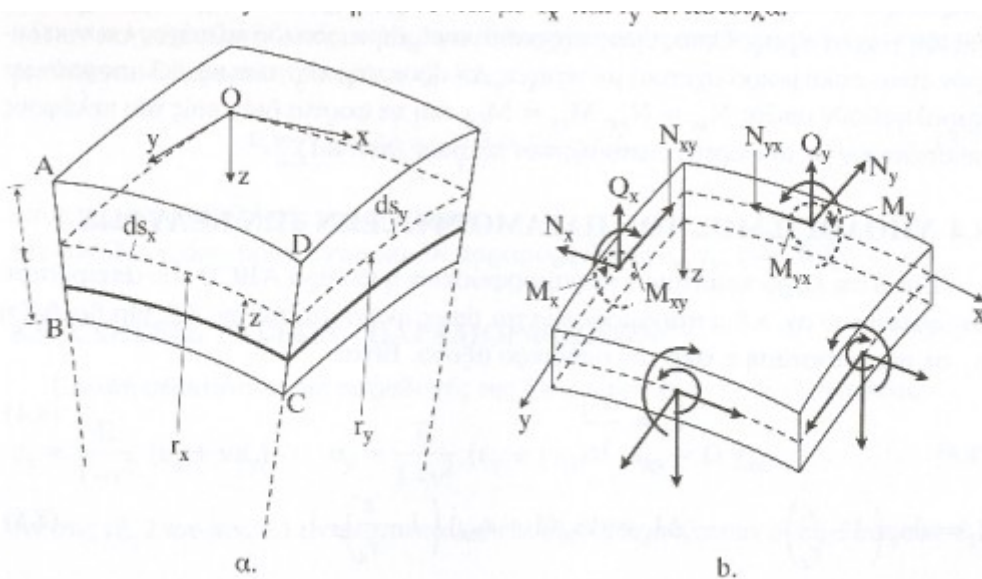
- Ισχύει η θεωρία των μικρών μετακινήσεων σύμφωνα με την οποία οι μετακινήσεις είναι τόσο μικρές που μεταβολές στη γεωμετρία του κελύφους δεν αλλάζουν τις συνθήκες ισορροπίας του συστήματος.
- Ισχύει η γραμμική θεωρία ελαστικότητας.

Επιπλέον γίνονται οι εξής παραδοχές:

- 1 Οι μετακινήσεις συγκρινόμενες με το πάχος του κελύφους είναι μικρές.
- 2 Επίπεδες διατομές κάθετες στη μέση επιφάνεια παραμένουν επίπεδες και κάθετες και στη μέση επιφάνεια της παραμορφωμένης κατάστασης. Αυτό σημαίνει πως οι διατμητικές παραμορφώσεις  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  μπορούν να ληφθούν μηδενικές.
- 3 Οι  $\epsilon_z$ ,  $\sigma_z$  μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες.

## 2.8 ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΚΕΛΥΦΩΝ

Έστω το απειροστό στοιχείο του σχ. 2.8.α το οποίο έχει κοπεί από ένα κέλυφος έτσι που τα ζεύγη των απέναντι πλευρών του να είναι κάθετα στο μέσο επίπεδο και να περιέχουν τις κύριες καμπυλότητες. Οι άξονες  $x$  και  $y$  του συστήματος συντεταγμένων είναι εφαπτόμενοι των γραμμών των κυρίων καμπυλοτήτων στο  $O$  και ο άξονας  $z$  κάθετος στη μέση επιφάνεια. Οι κύριες κτίνες καμπυλότητας βρίσκονται στα επίπεδα  $xz$  και  $yz$  και σημειώνονται με  $r_x$  και  $r_y$  αντίστοιχα.



Σχήμα 2.8

Αν οι τάσεις που ασκούνται στις πλευρικές επιφάνειες του απειροστού στοιχείου αναλυθούν κατά τις διευθύνσεις του συστήματος αξόνων, τότε οι συνιστώσες των τάσεων που προκύπτουν είναι οι  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ . Σαν φορτία διατομής ορίζονται οι συνισταμένες δυνάμεις των τάσεων αυτών ανά μονάδα μήκους (σχ. 2.8.b) οι οποίες είναι:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz & N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz & N_{yx} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz & M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\
 M_{xy} &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz & M_{yx} &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Τα μεγέθη  $z/r_x, z/r_y$  εμφανίζονται στις εξισώσεις 2.3 λόγω της τραπεζοειδούς μορφής των πλευρικών επιφανειών του απειροστού στοιχείου η οποία οφείλεται στην καμπυλότητα του κελύφους.

Παρατηρούμε από τις εξ. 2.3, ότι παρόλο που  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  είναι  $N_{xy} \neq N_{yx}$ ,  $M_{xy} \neq M_{yx}$  επειδή γενικά  $r_x \neq r_y$ . Όπως όμως αρχικά αναφέρθηκε, επειδή το πάχος  $t$  των κελυφών είναι πολύ μικρό σχετικά με τις  $r_x$ ,  $r_y$ , οι όροι  $z/r_x$ ,  $z/r_y$  των εξισώσεων 8.3 μπορούν να παραληφθούν οπότε  $N_{xy} = N_{yx}$ ,  $M_{xy} = M_{yx}$  και τα φορτία διατομής τους κελύφους συμπίπτουν με τα φορτία διατομής των πλακών.

## 2.9 ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΜΒΡΑΝΗΣ ΓΙΑ ΤΑ ΚΕΛΥΦΗ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Για την εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας των κελυφών, θεωρείται σκόπιμο να εξεταστεί αρχικά μόνο σε ειδικό και καταλληλότερο για τον σκοπό αυτό τύπος κελυφών, τα κελύφη εκ περιστροφής. Αυτά αποτελούν την σπουδαιότερη κατηγορία κελυφών, χρησιμοποιημένα για την κατασκευή θόλων και δεξαμενών.

Στο σχήμα 2.9 φαίνεται ένα κέλυφος εκ περιστροφής, εφαρμοσμένο στην οικοδομική για την διαμόρφωση των θόλων. Η μέση επιφάνεια προκύπτει από την περιστροφή επιπέδου καμπύλης γύρω από τον άξονα, ο οποίος χαρακτηρίζεται ως άξονας του κελύφους. Οι τομές της μέσης επιφάνειας από δύο ομάδες επιπέδων, οι μεν διέρχονται από τον άξονα, οι δε είναι κάθετες σε αυτόν, αποτελούν δίκτυο γραμμών καμπυλότητας. Αυτές καλούνται στην προκειμένη μεσημβρινοί και παράλληλοι, κατ' αναλογία στις παρεμφερείς γραμμές της υδρογείου. Ως τομές κατά τους μεσημβρινούς και τους παράλληλους χαρακτηρίζονται τα επίπεδα, τα οποία τέμνουν τη μέση επιφάνεια κατά τις αντίστοιχες γραμμές καμπυλότητας.

Αναφορικά με το σχ. 2.9, εισάγονται οι κατώτεροι συμβολισμοί, στους οποίους  $\rho$  είναι τυχαίο σημείο της μέσης επιφάνειας:

$r_\theta$  = ακτίνα καμπυλότητας μεσημβρινού

$r_\phi$  = μήκος της καθέτου επί το κέλυφος μεταξύ του σημείου  $\rho$  και του άξονα του κελύφους

$\alpha$  = ακτίνα καμπυλότητας του παράλληλου κύκλου

Για τον προσδιορισμό της θέσης τυχαίου σημείου  $\rho$  της μέσης επιφάνειας χρησιμοποιούμε τις γωνίες  $\theta$  και  $\phi$ , που σημαίνει:

$\theta$  = γωνία μεταξύ άξονα κελύφους και καθέτου επί το κέλυφος

$\phi$  = γωνία μεταξύ της ακτίνας του περιέχοντος το  $\rho$  παράλληλου και μιας διεύθυνσης εκλεγόμενης κατάλληλη για την εκάστοτε εξεταζόμενη περίπτωση.

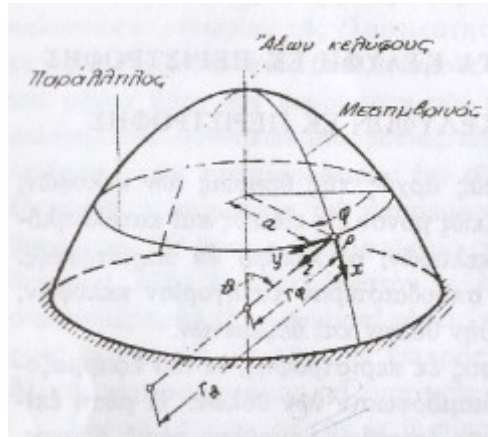
Η γεωμετρική σχέση μεταξύ των ακτίνων  $\alpha$  και  $r_\phi$  του σχήματος 2.9 παριστάνεται ως εξής:

$$\alpha = r_\phi \sin \theta$$

Μία τομή κατά τον παράλληλο δεν είναι και κάθετη στο κέλυφος, εφόσον το επίπεδο της δεν περιλαμβάνει την κάθετη ευθεία στο κέλυφος, αλλά σχηματίζει γωνία  $(\pi/2) - \theta$  μετά της αντίστοιχης κάθετης τομής, η οποία διέρχεται μέσω της εφαπτομένη του παράλληλου. Σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα του Meusnier, η ακτίνα καμπυλότητας της κάθετης τομής ισούται με:

$$\frac{\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

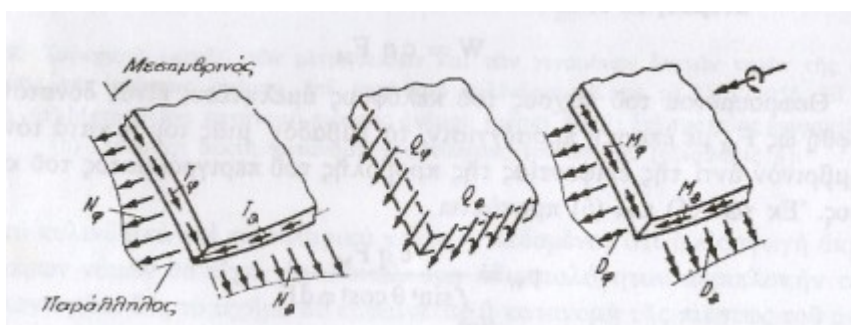
Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η  $r_\phi$  πρέπει να συμπίπτει με την ακτίνα καμπυλότητας της κάθετης τομής, η οποία περιέχει την εφαπτομένη του παράλληλου. Συνεπώς, η  $r_\phi$  είναι η δεύτερη πρωτεύουσα ακτίνας καμπυλότητας, ενώ η πρώτη είναι η  $r_\phi$ . Τέλος, ορίζεται το σημείο  $\rho$  ως αρχή ορθογωνίου δεξιόστροφου συστήματος συντεταγμένων  $x, y, z$ , στο οποίο ο άξονας των  $x$  είναι κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης του μεσημβριού, ο άξονας των  $y$  στη διεύθυνση της εφαπτομένης του παράλληλου και ο άξονας των  $z$  στη διεύθυνση της καθέτου επί το κέλυφος.



Σχήμα 2.9. Κέλυφος εκ περιστροφής και χρησιμοποιημένα σύμβολα για τα διάφορα μεγέθη αυτού.

## 2.10 ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΤΜΗΜΑ ΚΕΛΥΦΟΥΣ

Για να καταστεί δυνατός ο υπολογισμός ενός φορέα απαιτείται να προσδιορισθούν οι τάσεις, οι οποίες προκαλούνται από τα ασκούμενα φορτία. Στη θεωρία των γραμμικών φορέων ή συνήθους μέθοδος που ακολουθείται συνίσταται στον προσδιορισμό των εσωτερικών δυνάμεων (ορθή δύναμη, διατμητικές δυνάμεις, καμπτικές ροπές, ενδεχόμενα και ροπές στρέψης) και τον υπολογισμό των τάσεων με το γνωστό τρόπο. Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται και για τον υπολογισμό των κελυφών.



Σχήμα 2.10. Κατανομημένες εσωτερικές δυνάμεις σε κέλυφος εκ περιστροφής.

(α) Ορθές και διατμητικές δυνάμεις (β) Τέμνουσες δυνάμεις (γ) Ροπές κάμψης και συστροφής.

Για το σκοπό αυτό, εξετάζεται η εντατική κατάσταση σε δύο τομές, αντίστοιχα κατά μήκος ενός μεσημβρινού και ενός παράλληλου, κάθετα στη μέση επιφάνεια. Σχετικά με τις ράβδους, οι εσωτερικές δυνάμεις μπορεί να προκύψουν ως συνισταμένες δυνάμεις και ροπές των τάσεων της διατομής. Στην περίπτωση όμως των κελυφών, οι τάσεις μπορεί να ανάγονται σε συνισταμένες δυνάμεις μόνο για την ολοκλήρωση κατά την έννοια του πάχους του κελύφους, διότι η μεταβολή των εσωτερικών δυνάμεων κατά μήκος των μεσημβρινών και των παραλλήλων έχει ουσιαστική σημασία. Για παράδειγμα, στην αξονική δύναμη μιας ράβδου αντιστοιχεί, στην περίπτωση του κελύφους, κατανεμημένη του πάχους του κελύφους, ορθή δύναμη, η οποία είναι μεταβλητή κατά μήκος του μεσημβρινού ή του παράλληλου. Τέτοιες δυνάμεις χαρακτηρίζονται στα κελύφη ως κατανεμημένες, με ανάλογο τρόπο στη θεωρία των γραμμικών φορέων, στην οποία γίνεται διάκριση των κατανεμημένων φορτίων ανά μονάδα μήκους σε σχέση με τα συγκεντρωμένα. Παρόμοια ισχύουν και για τις διατμητικές τάσεις, οι οποίες μπορεί να εκφράζονται με τις αντίστοιχες κατανεμημένες δυνάμεις. Τέλος, η ακανόνιστη κατανομή των τάσεων υπό την έννοια του πάχους του κελύφους μπορεί να λαμβάνεται υπόψη με την εισαγωγή της έννοιας των κατανεμημένων ροπών.

Ετσι προκύπτουν οι κατώτερες εσωτερικές δυνάμεις του κελύφους εκ περιστροφής, οι οποίες φαίνονται στα σχήματα 2.10 α - γ (για την ευκολότερη διάκρισή τους οι δυνάμεις αυτές παρουσιάζονται χωρισμένες σε τρία ανεξάρτητα σχήματα):

Κατανεμημένες ορθές δυνάμεις  $\left[ \frac{\bar{\xi} \dot{\nu} \alpha \mu \eta}{\mu \dot{\eta} \omega \varsigma} \right] N_{\theta}, N_{\phi}$

Κατανεμημένες επαπτομενικές διατμητικές δυνάμεις  $\left[ \frac{\bar{\xi} \dot{\nu} \alpha \mu \eta}{\mu \dot{\eta} \omega \varsigma} \right] T_{\theta}, T_{\phi}$

Κατανεμημένες τέμνουσες δυνάμεις  $\left[ \frac{\bar{\xi} \dot{\nu} \alpha \mu \eta}{\mu \dot{\eta} \omega \varsigma} \right] Q_{\theta}, Q_{\phi}$

Κατανεμημένες ροπές κάμψης  $\left[ \frac{\bar{\xi} \dot{\nu} \alpha \mu \eta \chi \mu \dot{\eta} \omega \varsigma}{\mu \dot{\eta} \omega \varsigma} \right] M_{\theta}, M_{\phi}$

Κατανεμημένες ροπές συστροφής  $\left[ \frac{\bar{\xi} \dot{\nu} \alpha \mu \eta \chi \mu \dot{\eta} \omega \varsigma}{\mu \dot{\eta} \omega \varsigma} \right] D_{\theta}, D_{\phi}$

Οι παραπάνω δυνάμεις φαίνονται στο σχήμα 2.10 με τη θετική φορά τους. Τα σημεία έχουν εκλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε οι θετικές δυνάμεις και ροπές να ενεργούν κατά τη διεύθυνση των θετικών συντεταγμένων. Για παράδειγμα, οι κατανεμημένες ορθές δυνάμεις είναι θετικές, εάν είναι εφελκυστικές. Στην περίπτωση των κελυφών ενδείκνυται να γίνεται διαφοροποίηση μεταξύ των επαπτομενικών διατμητικών δυνάμεων και των τέμνουσών, μολονότι στους γραμμικούς φορείς και οι δύο καλούνται είτε τέμνουσες είτε διατμητικές δυνάμεις. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι επαπτομενικές διατμητικές δυνάμεις ενεργούν εντός της μέσης επιφάνειας, τείνουν δε να παραμορφώσουν ένα ιδεατό στοιχειώδες ορθογώνιο, που βρίσκεται πάνω στην τομή αυτής

της επιφάνειας, σε λοξό παραλληλόγραμμο. Αντίθετα, οι κατανεμημένες τέμνουσες είναι συνισταμένες διατμητικές τάσεις, που ενεργούν κάθετα στη μέση επιφάνεια. Στο σχήμα 2.10c οι κατανεμημένες ροπές παριστάνονται από σχεδιασμένα διανύσματα με διπλό βέλος για τη διάκριση των διανυσμάτων των δυνάμεων.

## 2.11 Η ΠΑΡΑΔΟΧΗ ΤΗΣ ΕΝΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΜΕΜΒΡΑΝΗΣ

Για τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων των κελυφών διατίθενται πρώτα οι συνθήκες στατικής ισορροπίας. Αυτές εφαρμόζονται στο ιδεατό στοιχείο του κελύφους για τον προσδιορισμό της ισορροπίας των δυνάμεων σε τρεις διευθύνσεις και των ροπών σε τρεις άξονες. Στην προκειμένη περίπτωση, από τις συνθήκες που υπάρχουν, θα πρέπει να υπολογισθούν δέκα άγνωστοι. Έτσι εύλογα προκύπτει ότι είναι γενικά αδύνατο να υπολογιστούν οι εσωτερικές δυνάμεις με την απλή εφαρμογή των συνθηκών στατικής ισορροπίας και ότι για το λόγο αυτό η κατανομή των δυνάμεων στο κέλυφος είναι στατικά αόριστη. Δεδομένου ότι η αοριστία αυτή δεν εξαρτάται από τις στηρίξεις του κελύφους αλλά υπάρχει σε κάθε στοιχείο του, μπορεί να χαρακτηριστεί το κέλυφος ως εσωτερικά στατικά αόριστο. Συνεπώς απαιτείται να ληφθούν υπόψη και οι παραμορφώσεις, για να είναι δυνατή η στατική επίλυση ενός κελύφους.

Ευτυχώς υπάρχει η δυνατότητα να αποφευχθεί ο επίπονος υπολογισμός, ο οποίος εφαρμόζεται στην περίπτωση των στατικά αορίστων συστημάτων. Αυτό επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της προσεγγιστικής μεθόδου, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε πολύ χρήσιμα αποτελέσματα για πολλές περιπτώσεις της πράξης. Η μέθοδος αυτή είναι η λεγόμενη *θεωρία μεμβράνης*, της οποίας η κεντρική ιδέα και η επιτυχία συνδέονται στενά με τη χαρακτηριστική κατανομή των δυνάμεων στους καμπύλους επιφανειακούς φορείς. Για αυτή την κατανομή των δυνάμεων γίνεται αναφορά στην εισαγωγή του παρόντος. Οι βασικές παραδοχές της θεωρίας μεμβράνης πρέπει να εξεταστούν επισταμένα. Ως αφετηρίας αυτής της εξέτασης ενδείκνυται να χρησιμεύσουν και πάλι οι γνωστές βασικές αρχές της στοιχειώδους στατικής των γραμμικών φορέων.

Κατά τον υπολογισμό των τριγωνικών δικτυωμάτων γίνεται γενικά δεκτό ότι οι αποτελούσες ράβδοι του φορέα συνδέονται μεταξύ τους με τις ιδεατές αρθρώσεις, στις οποίες δεν αναπτύσσονται ροπές. Έτσι, οι ράβδοι δεν υπόκεινται σε ροπές ή διατμητικές δυνάμεις, αλλά μόνο σε αξονικές δυνάμεις. Με την παραδοχή αυτή, οι υπολογισμοί απλουστεύονται σημαντικά. Πράγματι, εάν οι ροπές θεωρηθούν αμελητέες, μπορεί να αποβεί ο φορέας ισοστατικός. Βέβαια η παραδοχή των ιδεατών αρθρώσεων δεν ανταποκρίνεται γενικά στην πράξη με τη μέθοδο κατασκευής των δικτυωμάτων που ακολουθείται. Πράγματι, τόσο το άνω όσο και το κάτω πέλμα των δικτυωμάτων είναι συνήθως συνεχές. Κατά μήκος αυτών των συνεχών πελμάτων διατάσσονται οι κόμβοι συνδέσεως των ορθοστατών και διαγωνίων. Με τον τρόπο αυτό, η

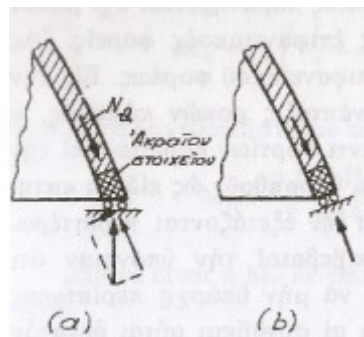
αντοχή των πελμάτων σε κάμψη είναι κατά τους κόμβους όχι απλά διάφορος του μηδενός αλλά λαμβάνοντας υπόψη και τα κομβοελάσματα, κατά πολύ μεγαλύτερη από την υφιστάμενη σε οποιαδήποτε άλλη θέση αυτών των πελμάτων. Η παραδοχή αρθρωτής σύνδεσης των ράβδων κατά τον υπολογισμό των δικτυωμάτων δικαιολογείται από μία άλλη διαπίστωση. Συγκεκριμένα εάν οι συνδέσεις των ράβδων ενός δικτυώματος θεωρηθούν δύσκαμπτες και υπολογιστεί αυτό ως πολλαπλά στατικά αόριστο σύστημα για τη χρησιμοποίηση του αντίστοιχου ιδεατού αρθρωτού δικτυώματος ως ισοδύναμου ισοστατικού συστήματος, πάνω στο οποίο εφαρμόζονται οι άγνωστες ροπές στηρίξης των ράβδων, θα προκύψουν από τις ροπές αυτές τιμές τόσο μικρού μεγέθους ώστε να είναι δυνατό να θεωρηθούν αμελητέες. Έτσι, σε σχέση με το τελικό αποτέλεσμα του υπολογισμού, οι εν λόγω καμπτικές ροπές είναι τελείως δευτερεύουσας σημασίας.

Αυτή η διαπίστωση για τη στατική λειτουργία των δικτυωμάτων έχει επανειλημμένα αποδειχτεί πως ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, μπορεί δε να δικαιολογήσει την προσπάθεια κατάρτισης της προσεγγιστικής θεωρίας και για τα κελύφη, στην οποία να παραλείπονται τόσο οι τέμνουσες δυνάμεις όσο και οι ροπές. Σε αυτή την περίπτωση θα ήταν δυνατό να τεθούν οι  $Q_\theta$ ,  $Q_\phi$ ,  $M_\theta$ ,  $M_\phi$ ,  $D_\theta$ ,  $D_\phi$  ίσες με το μηδέν, λαμβάνοντας υπόψη στην προκειμένη μόνο τις ορθές δυνάμεις  $N_\theta$ ,  $N_\phi$  καθώς και τις επαπτομενικές διατμητικές δυνάμεις  $T_\theta$ ,  $T_\phi$ . Έτσι προκύπτει η θεωρία μεμβράνης η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως *σκόπιμη παράλειψη των τεμνουσών δυνάμεων, ροπών κάμψης και ροπών συστροφής*. Η ονομασία της θεωρίας αυτής οφείλεται στην παρατηρημένη απουσία ροπών κάμψης στις πραγματικές μεμβράνες όπως π.χ. σε τεταμένο δέρμα τυμπάνου κλπ. Κατά τα υπόλοιπα, ούτε το σχήμα ούτε η κατανομή των τάσεων της μεμβράνης έχει πολλές ομοιότητες με τα κελύφη.

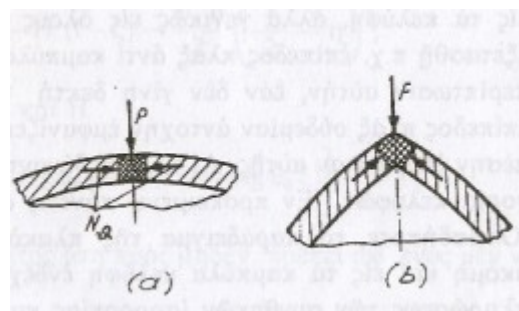
Εκ πρώτης όψεως, η εφαρμογή των παραδοχών υπολογισμού των δικτυωμάτων και στη θεωρία μεμβράνης εμφανίζεται πολλή ενθαρρυντική. Ωστόσο, κατόπιν λεπτομερής εξέτασης του θέματος, προκύπτουν αμφιβολίες σε σχέση με την ορθότητα εφαρμογής αυτών των παραδοχών και στα κελύφη. Οι αμφιβολίες αυτές δημιουργούνται κυρίως από τη σκέψη ότι οπωσδήποτε τα κελύφη δεν είναι γενικά όμοια με τα δικτυώματα και συνεπώς ενδέχεται να μην είναι επιτρεπτό να μεταφυτευθεί μια υπόθεση της στατικής των γραμμικών φορέων στη θεωρία των επιφανειακών φορέων. Πρώτα πρέπει να προσδιοριστεί, εάν στα κελύφη το έργο παραμορφώσεως αποβαίνει ελάχιστο για την περίπτωση ανάπτυξης των ελάχιστων δυνατών ροπών. Αυτό το σοβαρό θέμα μπορεί να ερευνηθεί με τον καλύτερο τρόπο μέσω της εξέτασης ορισμένων παραδειγμάτων. Η εξέταση όμως αυτή είναι προτιμότερο να αναβληθεί προς το παρόν. Στη συνέχεια, τίθεται το ερώτημα, εάν οι συνθήκες της αρχής του Castigliano μπορούν να πληρούνται στην περίπτωση παράλειψης των τεμνουσών δυνάμεων και των ροπών κάμψης και συστροφής. Η αρχή του ελάχιστου έργου παραμόρφωσης μπορεί να οδηγήσει στην πραγματική

εντατική κατάσταση μόνο εάν γίνει σύγκριση διάφορων καταστάσεων, οι οποίες πληρούν στο σύνολό τους τις συνθήκες ισορροπίας. Η πρόταση δεν έχει ακόμα αποδειχτεί με τη θεωρία μεμβράνης, αποτελεί δε αντικείμενο της ακόλουθης εξέτασης.

Είναι εύκολο να ευρεθούν ορισμένα απλά παραδείγματα, τα οποία προφανώς δεν πληρούν τις συνθήκες ισορροπίας. Έστω λοιπόν το κελύφος εκ περιστροφής που φαίνεται στο σχήμα 2.11α, το οποίο έχει στηρίξεις επιτρεπόμενης οριζόντιας μετατόπισης. Στην προκειμένη περίπτωση, είναι δυνατή η ύπαρξη μόνο κατακόρυφων αντιδράσεων. Ωστόσο, οι κατανεμημένες ορθές δυνάμεις  $N_\theta$  του κελύφους ενεργούν προς την κατεύθυνση του μεσημβρινού. Έτσι, το ακραίο στοιχείο του κελύφους (βλ. σχήμα 2.11α) δεν μπορεί να ισορροπεί, διότι η αντίδραση περιλαμβάνει κάθετη συνιστώσα πάνω στη μέση επιφάνεια και μη εξισορροπημένη υπό άλλη δύναμη του κελύφους. Η δυσκολία αυτή μπορεί να παρακαμφθεί με την πρόβλεψη των στηρίξεων (όπως στην περίπτωση του σχ. 2.11b), οι οποίες προκαλούν αντιδράσεις συμβατές με τη θεωρία μεμβράνης. Το παράδειγμα πάντως αυτό επιτρέπει την διατύπωση μιας γενικής πρότασης, που είναι: Η θεωρία μεμβράνης μπορεί να εφαρμόζεται μόνο όταν οι οριακές συνθήκες είναι συμβατές με τις συνθήκες ισορροπίας.



Σχήμα 2.11. Εξάρτηση της ισορροπίας των δυνάμεων της μεμβράνης με τις οριακές συνθήκες του κελύφους.



Σχήμα 2.12. Ισορροπία των δυνάμεων της μεμβράνης υπό συγκεντρωμένο φορτίο  
(α) Περίπτωση μη επίτευξης ισορροπίας (β) Δυνατή ισορροπία



Ένα δεύτερο παράδειγμα δίνεται στο σχήμα 2.12α, όπου παριστάνεται κέλυφος υποκείμενο σε συγκεντρωμένο φορτίο κάθετο στη μέση επιφάνεια, δηλαδή ενεργεί κατά την διεύθυνση του άξονα των  $z$ . Το στοιχείο του κελύφους, πάνω στο οποίο εφαρμόζεται το φορτίο, δεν βρίσκεται ενδεχόμενα σε ισορροπία. Εάν το στοιχείο είναι ξεπερασμένου μεγέθους, θα ήταν εύλογο να γίνει η σκέψη ότι οι ορθές δυνάμεις  $N_e$  και οι μη εμφανείς στο σχήμα  $N_\phi$  θα έχουν, λόγω της καμπυλότητας του κελύφους, συνιστώσες επαρκούς μεγέθους κατά την διεύθυνση του συγκεντρωμένου φορτίου, με τρόπο ώστε να πληρούνται οι συνθήκες ισορροπίας. Εάν όμως εξεταστούν διαδοχικά στοιχεία με συνεχώς μειωμένο μέγεθος, οι συνιστώσες αυτές θα τείνουν προς το μηδέν σε σύγκριση με το εφαρμοζόμενο φορτίο. Συνεπώς, συγκεντρωμένα φορτία κάθετα στη μέση επιφάνεια δεν συμβιβάζονται με τη θεωρία μεμβράνης. Στο σχήμα 2.12b παριστάνεται μια εξαίρεση αυτού του κανόνα, που αντιστοιχεί στην περίπτωση, όπου το φορτίο εφαρμόζεται στην κορυφή της μέσης επιφάνειας, όπως μπορεί να συμβεί π.χ. σε γοτθικό θόλο. Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή οι εσωτερικές δυνάμεις του κελύφους μπορούν να αναλάβουν το εξωτερικό φορτίο.

Από τα προηγούμενα δύο παραδείγματα προκύπτει ότι η ισορροπία του κελύφους μπορεί να διαταράσσεται σε αυτές τις περιοχές, δηλαδή στα σημεία εφαρμογής συγκεντρωμένων φορτίων. Οποσδήποτε αυτή η διατάραξη της ισορροπίας παρατηρείται όχι μόνο στα κελύφη, αλλά γενικά σε όλους τους επιφανειακούς φορείς. Ας εξεταστεί π.χ. επίπεδη πλάκα αντί καμπυλωτού επιφανειακού φορέα. Στην περίπτωση αυτή, εάν δεν γίνει δεκτή η ανάπτυξη ροπών κάμψης, η επίπεδη πλάκα δεν εμφανίζει καμία αντοχή έναντι κάθετων φορτίων στη μέση επιφάνειά της. Οι πλάκες μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική κατηγορία κελυφών. Στην προκειμένη περίπτωση πάντως αυτές δεν εξετάζονται περαιτέρω. Οποσδήποτε, το παράδειγμα της πλάκας επιβεβαιώνει την υπόνοια ότι ακόμη και στα καμπυλωτά κελύφη ενδέχεται να μην υπάρχει περίπτωση πληρώσεως των συνθηκών ισορροπίας και ότι οι συνθήκες αυτές μπορεί να πληρούνται κάτω από τελείως ειδικές προϋποθέσεις μόνο. Για την απόδειξη της υπόθεσης αυτής εξετάζεται παρακάτω η μεταβίβαση των φορτίων σε κέλυφος πολύ απλουστευμένης μορφής.

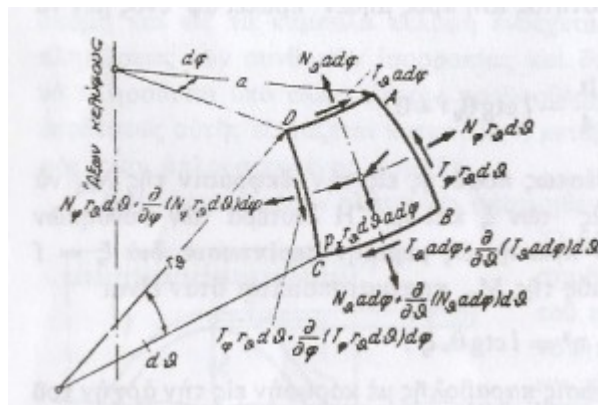
Στην θεωρία των επίπεδων τοξωτών φορέων, ισχύει ότι «ισορροπία χωρίς κάμψη είναι δυνατή μόνο εάν ο άξονας του τόξου έχει ειδικό σχήμα, προσδιοριζόμενο από τις συνθήκες φόρτισης. Αυτό το ειδικό σχήμα καλείται *γραμμή πιέσεων* των αντίστοιχων φορτίων. Η θεωρία της γραμμής πίεσης έχει μεγάλη σημασία στη μελέτη τοξωτών φορέων, έχοντας σημαντικό νεκρό βάρος. Πράγματι, μεγάλη οικονομία υλικού μπορεί να επιτευχθεί εάν ο άξονας του τόξου σχεδιαστεί με τρόπο ώστε να συμπίπτει με τη γραμμή πιέσεων, η οποία αντιστοιχεί στην εκτιμώμενη μέση τιμή των αναμενόμενων φορτίων.

Εάν ήδη γίνει δεκτή μία καταρχήν ομοιότητα στην μεταβίβαση των φορτίων αφενός στο τόξο και αφετέρου στο κέλυφος, συνάγεται κατ' ανάγκη ότι κατά τη θεωρία της μεμβράνης οι συνθήκες

ισορροπίας ενός τρισδιάστατου στοιχείου κελύφους με δεδομένη μέση επιφάνεια μπορούν να πληρούνται μόνο κάτω από συγκεκριμένη συνθήκη φόρτισης. Αντίστροφα δε, εάν τα φορτία είναι γνωστά, ισορροπία μπορεί να προκύψει για συγκεκριμένο μόνο σχήμα της μέσης επιφάνειας. Αντί λοιπόν της γραμμής πιέσεων, θα υπολογίζεται μια επιφάνεια πιέσεων. Έτσι η θεωρία μεμβράνης θα μπορεί να εφαρμόζεται σε λίγες μόνο ειδικές περιπτώσεις και συνεπώς η πρακτική σημασία αυτής θα είναι πολλή περιορισμένη. Η άποψη αυτή εξετάζεται λεπτομερώς αμέσως παρακάτω.

## 2.12 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΕΝΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΤΟΥ ΚΕΛΥΦΟΥΣ

Παρακάτω εξετάζεται η ισορροπία μεμονωμένου στοιχείου κελύφους υπό την επίδραση μονο των δυνάμεων της θεωρίας μεμβράνης. Έστω ήδη το στοιχείο του σχήματος 2.13, το οποίο αποτιμάται από το κέλυφος μέσω δύο τομών κατά μεσημβρινούς, κάθετων στη μέση επιφάνεια, καθώς και δύο τομών κατά παράλληλους.



Σχήμα 2.13. Δυνάμεις της θεωρίας μεμβράνης, που ενεργούν πάνω στο στοιχείο του κελύφους εκ περιστροφής

Οι πλευρές της επιφάνειας ABCD του στοιχείου έχουν μήκη  $r_e d\theta$  και  $ad\phi$ . Στο σχήμα φαίνεται η κατεύθυνση των δυνάμεων, οι οποίες ενεργούν πάνω στο στοιχείο. Οι τιμές των εσωτερικών δυνάμεων, οι οποίες ενεργούν πάνω στις πλευρές AB και AD, προκύπτουν με απλό πολλαπλασιασμό των κατανεμημένων ορθών δυνάμεων επί τα αντίστοιχα μήκη πλευρών. Για τις πλευρές BC και CD πρέπει να ληφθούν υπόψη οι επαυξήσεις  $d\phi$  και  $d\theta$  των γωνιών  $\phi$  και  $\theta$ . Οι εσωτερικές δυνάμεις των πλευρών αυτών προσαυξάνονται αντίστοιχα, όπως σημειώνεται στο σχήμα. Στην ακόλουθη ανάλυση λαμβάνονται οπωσδήποτε υπόψη οι όροι, οι οποίοι έχουν μέγεθος της τάξης των προηγούμενων επαυξήσεων, δηλαδή της τάξης μεγέθους του γινομένου  $d\phi$  και  $d\theta$ . Σε αντίθετη περίπτωση, τα αποτελέσματα της διερεύνησης μπορεί να μην ανταποκρίνονται στον επιδιωκόμενο σκοπό.

Ακόλουθα, εξετάζονται τα φορτία, τα οποία υποτίθεται πως ενεργούν στο κέντρο βάρους του στοιχείου. Αυτά προκύπτουν με τον πολλαπλασιασμό των συνιστώσεων  $r_x$ ,  $r_y$  και  $r_z$  της φόρτισης

της μέσης επιφάνειας επί την επιφάνεια του στοιχείου  $r_\theta d\theta$  α  $d\phi$ . Για λόγους ευκολίας, στο σχήμα σημειώνεται μόνο η έκφραση της συνιστώσας του φορτίου κατά την διεύθυνση του άξονα των  $x$ .

Διατίθενται από τις συνθήκες ισορροπίας για το εξεταζόμενο στοιχείο. Για τη διευκόλυνση και απλοποίηση των υπολογισμών, εκλέγονται οι συνθήκες ισορροπίας των προβολών των δυνάμεων επί τους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  και οι συνθήκες ισορροπίας των προβολών των δυνάμεων ως προς τους άξονες αυτούς. Εύκολα διαπιστώνεται η ισορροπία των ροπών ως προς τους άξονες των  $x$  και  $y$ , δηλαδή τις εφαπτόμενες του μεσημβρινού και του παράλληλου. Πράγματι, επειδή όλες οι δυνάμεις της θεωρίας μεμβράνης ενεργούν πάνω στη μέση επιφάνεια, δεν θα μπορούν να προκαλέσουν ροπές ως προς τους άξονες  $x$  και  $y$ , εάν παραλειφθούν οι όροι της **παραπάνω** τάξης σε σχέση με την επαύξηση των εσωτερικών δυνάμεων και των φορτίων του στοιχείου. Η ισορροπία όμως των ροπών ως προς την κάθετο επί το κέλυφος δεν είναι τόσο απλή. Αυτή εκφράζεται με την ακόλουθη εξίσωση, από την οποία έχουν παραλειφθεί οι όροι της **παραπάνω** τάξης (η παράλειψη αυτών των όρων θα γίνεται κατά κανόνα στην προκειμένη διερεύνηση):

$$T_\theta \alpha d\phi r_\theta d\theta - T_\phi r_\theta d\theta \alpha d\phi = 0$$

Κατόπιν της διαίρεσης της επιφάνειας του στοιχείου  $r_e d\theta$  α  $d\phi$ , προκύπτει

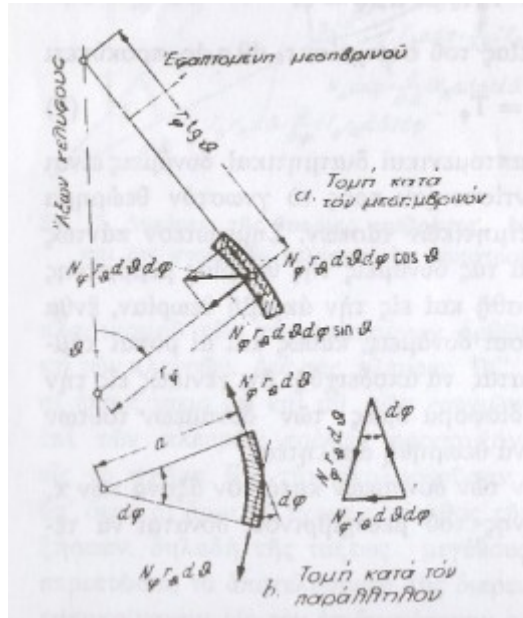
$$T_\theta = T_\phi \tag{2.4}$$

Συνεπώς, οι δύο κατανεμημένες εφαπτομενικές διατμητικές δυνάμεις είναι ίσες, άρα αποτελεί συμπέρασμα αντίστοιχο με το γνωστό θεώρημα περί της ισότητας των συζυγών διατμητικών τάσεων. Σημειώνεται πάντως ότι το συμπέρασμα αυτό βγήκε από τις δυνάμεις της θεωρίας μεμβράνης και συνεπώς δεν μπορεί να εφαρμοστεί και στην ακριβή θεωρία, όπου λαμβάνονται υπόψη και οι τέμνουσες δυνάμεις, καθώς και οι ροπές κάμψης και συστροφής. Πράγματι, μπορεί να αποδειχθεί ότι γενικά στην ακριβή θεωρία είναι  $T_\phi \neq T_\theta$ . Η διαφορά όμως αυτών των δυνάμεων είναι τόσο μικρή, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Όσο αφορά στην ισορροπία των δυνάμεων κατά τον άξονα των  $x$ , δηλαδή την διεύθυνση της εφαπτομένης του μεσημβρινού, μπορεί να τεθεί:

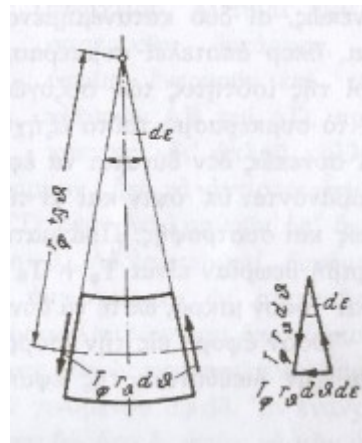
$$\frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta \alpha d\phi) d\theta + \frac{\partial}{\partial \phi} (T_\phi r_\theta d\theta) d\phi - N_\phi r_\theta d\theta d\phi \cos \theta + p_x r_\theta d\theta \alpha d\phi = 0 \tag{2.5}$$

Ο πρώτος όρος αυτής της εξίσωσης μπορεί να εξηγηθεί απλά ως το άθροισμα των ορθών δυνάμεων, οι οποίες δρουν στις πλευρές  $AD$  και  $BC$ . Όμοια, ο δεύτερος όρος εκφράζει το άθροισμα των εφαπτομενικών διατμητικών δυνάμεων, οι οποίες ενεργούν κατά τη διεύθυνση των  $x$ , κατά μήκος των πλευρών  $CD$  και  $AB$ . Ο τρίτος όμως όρος απαιτεί λεπτομερέστερη εξέταση. Στα σχήματα 2.14α και 2.14β φαίνονται δύο τομές του στοιχείου του κελύφους, αντίστοιχα κατά τον μεσημβρινό και κατά τον παράλληλο, σημειώνονται δε μόνο οι ορθές δυνάμεις  $N_\phi r_e d\theta$  και οι συνιστώσες τους. Οι επαυξήσεις αυτών των δυνάμεων έχουν παραλειφθεί, δεδομένου ότι η

επίδραση τους είναι στην προκειμένη περίπτωση ανώτερης τάξης. Στο σχήμα 2.14b είναι προφανές ότι οι δύο δυνάμεις  $N_\phi$   $r_\theta$   $d\theta$   $d\phi$  κατευθύνεται προς τον άξονα του κελύφους, περιλαμβάνεται δε στο επίπεδο της γενομένης τομής κατά τον παράλληλο. Ακόλουθα αναλύεται αυτή (βλ. σχήμα 2.14α) στις συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις  $x$  και  $z$ . Η συνιστώσα κατά την  $x$  έχει τιμή  $N_\phi$   $r_\theta$   $d\theta$   $d\phi$   $\cos \theta$ , δηλαδή είναι ο τρίτος όρος της εξίσωσης 2.5α, η οποία παριστάνει την ισορροπία των δυνάμεων κατά την διεύθυνση της θετικής φοράς του άξονα των  $x$ . Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης 2.5α είναι η συνιστώσα του φορτίου, η οποία φαίνεται στο σχήμα 2.13.



Σχήμα 2.14. Τομές στοιχείου κελύφους κατά τον μεσημβρινό και τον παράλληλο.



Σχήμα 2.15. Προβολή στοιχείου κελύφους κατά την διεύθυνση της καθέτου στο κέλυφος.

Για την ισορροπία κατά τον άξονα των  $y$ , προκύπτει η συνθήκη

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (N_\phi r_\theta d\theta) d\phi + \frac{\partial}{\partial \theta} (T_\theta \alpha d\phi) d\theta + T_\phi r_\theta d\theta \frac{\alpha d\phi}{r_\phi \tan \theta} + p_y r_\theta \alpha d\theta d\phi = 0 \quad (2.6)$$

Οι δύο πρώτοι όροι, καθώς και ο τελευταίος, αναγνωρίζονται εύκολα στο σχήμα 2.13. Ο τρίτος όρος απαιτεί κι εδώ επισταμένη εξέταση. Στο σχήμα 2.15 φαίνεται προβολή του στοιχείου του κελύφους κατά την διεύθυνση της καθέτου επί το κέλυφος. Στο σχήμα αυτό σημειώνονται επίσης οι εφαπτομενικές διατμητικές δυνάμεις  $T_\phi r_\theta d\theta$ . Οι διευθύνσεις αυτών των δυνάμεων σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία, συμβολιζόμενη με το  $de$ . Έτσι προκύπτει η συνιστώσα  $T_\phi r_\theta d\theta de$ , η οποία βαίνει κατά τον άξονα των  $y$ . Το επόμενο βήμα συνίσταται στον προσδιορισμό έκφρασης για την  $de$  σε συνάρτηση των ήδη χρησιμοποιημένων μεγεθών. Γι' αυτό, παρατηρείται ότι το στοιχείο  $\alpha d\phi$  του παράλληλου κύκλου (βλ. σχήμα 2.14b) πρέπει να ισούται προς  $r_\phi tg \theta de$ .

Συνεπώς είναι  $de = \frac{\alpha d\phi}{r_\phi tg\theta}$ , έτσι  $de$  εξηγείται πλέον ο όρος

$$T_\phi r_\theta d\theta \frac{\alpha d\phi}{r_\phi tg\theta} \text{ της εξίσωσης} \quad (2.7).$$

Η μη ακόμα εξεταζόμενη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων κατά τον άξονα των  $z$  περιλαμβάνει πρώτα τον όρο  $N_\theta \alpha d\phi d\theta$  των ορθών δυνάμεων, οι οποίες αναπτύσσονται στο επίπεδο του μεσημβρινού και σχηματίζουν γωνία  $d\theta$  μεταξύ τους συνέπεια της καμπυλότητας του μεσημβρινού. Ως δεύτερος όρος προκύπτει η συνιστώσα  $N_\phi r_\theta d\theta d\phi \sin \theta$  (βλ. σχήμα 2.14α). Ο τελευταίος όρος είναι και στην προκειμένη περίπτωση η συνιστώσα του φορτίου. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει:

$$N_\theta \alpha d\phi d\theta + N_\phi r_\theta d\theta d\phi \sin \theta + p_z r_\theta d\theta \alpha d\phi = 0 \quad (2.8)$$

Ήδη στις εξισώσεις 2.5, 2.6 και 2.7 τίθεται  $\alpha = r_\phi \sin \theta$ . Ομοίως, λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση 2.5, τίθεται:

$$T_e = T_\phi = T \quad (2.9)$$

Αυτές οι αντικαταστάσεις δεν γίνονται μέχρι τώρα, για τον σκοπό να καταστεί εμφανής η προέλευση των διάφορων όρων κατά την κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας. Τέλος, διαιρουμένων όλων των εξισώσεων δια  $d\theta d\phi$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ακτίνες καμπυλότητας  $r_e$  και  $r_\phi$  μεταβάλλονται μεν μετά της  $\theta$ , άλλες είναι ανεξάρτητες της  $\phi$ , προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} [N_\theta r_\phi \sin(\theta)] + \frac{\partial T}{\partial \phi} r_\theta - N_\phi r_\theta \cos(\theta) + p_x r_\theta r_\phi \sin(\theta) &= 0 \\ \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} r_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} [T r_\phi \sin(\theta)] + T r_\theta \cos(\theta) + p_y r_\theta r_\phi \sin(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$N_\theta r_\phi + N_\phi r_\theta + p_z r_\theta r_\phi = 0$$

Το παραπάνω σύστημα από δύο διαφορικές και μια συνήθης εξίσωση είναι επαρκές για τον υπολογισμό των αγνώστων  $N_\theta$ ,  $N_\phi$  και  $T$ . Το συμπέρασμα αυτό έχει μεγάλη σημασία καθώς οδηγεί στην διατύπωση της πρότασης ότι οι συνθήκες ισορροπίας σε στοιχείο κελύφους μπορούν γενικά να πληρούνται σύμφωνα με τη θεωρία μεμβράνης για οποιαδήποτε κατάσταση φόρτισης και

οποιοδήποτε σχήμα της μέσης επιφάνειας. Στην προηγούμενη παράγραφο, από την εξέταση της μεταβίβασης των φορτίων στους τοξωτούς φορείς προέκυψε η άποψη ότι, σε αναλογία με τη θεωρία της γραμμής πίεσης των τόξων, η θεωρία μεμβράνης θα μπορεί να ισχύει στο κέλυφος με ειδικό μόνο σχήμα της μέσης επιφάνειας, προσδιοριζόμενο από τα φορτία. Ήδη αποδεικνύεται ότι η άποψη αυτή είναι εσφαλμένη. Η μεταβίβαση των φορτίων είναι στα κελύφη τελείως διαφορετική σε σχέση με τους τοξωτούς φορείς. Στα κελύφη τα φορτία δεν ακολουθούν μία μόνο διεύθυνση – την διεύθυνση του μεσημβρινού – για να μεταβιβαστούν στις στηρίξεις, αλλά επίσης κατανέμονται κατάλληλα και κατά την διεύθυνση των παράλληλων κύκλων.

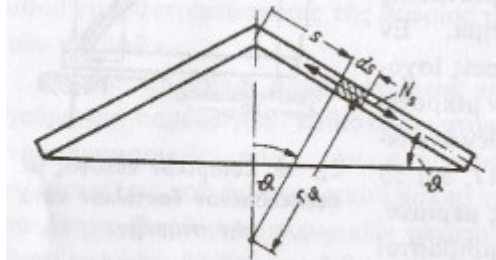
Αυτή η κατανομή των φορτίων είναι χαρακτηριστική της στατικής συμπεριφοράς των κελυφών, αποτελεί δε εξήγηση, για τη σημαντικότερη οικονομία, η οποία παρατηρείται στις κατασκευές με κελύφη. Στα τόξα οι ροπές κάμψης μπορούν να μηδενιστούν μόνο εάν ο άξονας του τόξου σχεδιαστεί με τρόπο ώστε να ανταποκρίνεται στη γραμμή πίεσεων. Έτσι και αυτή η λύση ισχύει για ένα μόνο τύπο φόρτισης. Αντίθετα στα κελύφη οι ροπές κάμψης μπορούν να μηδενιστούν σύμφωνα με τις εξισώσεις ισορροπίας. Έτσι δεν υπάρχει πλέον περίπτωση ιδιαίτερου χαρακτηρισμού για την «επιφάνεια των πιέσεων» των κελυφών, δεδομένου ότι κάθε κέλυφος αποτελεί πάντοτε μια τέτοια επιφάνεια.

Με τον τρόπο αυτό αίρονται οι κυριότερες αντιρρήσεις έναντι της θεωρίας μεμβράνης. Οι συνθήκες για την εφαρμογή της αρχής του Castigliano μπορούν να πληρούνται, με εξαίρεση των προηγούμενων αναφερόμενων περιπτώσεων των ακραίων περιοχών και των συγκεντρωμένων φορτίων, οι οποίες δεν είναι συμβατές με τη θεωρία μεμβράνης. Ωστόσο παραμένει ακόμη το ερώτημα, εάν η θεωρία μεμβράνης συνεπάγεται το ελάχιστο έργο παραμόρφωσης, καθώς και κάτω από ποιες συνθήκες θα μπορεί να μην ισχύει η παραδοχή αυτή. Στην επόμενη παράγραφο δίνεται απάντηση στο ερώτημα αυτό για μία όμως μερική περίπτωση.

Η θεωρία μεμβράνης μπορεί να πληρεί τις συνθήκες ισορροπίας, διότι ο αριθμός των εξισώσεων, δεν είναι μεγαλύτερος αλλά ίσος με τον αριθμό των αγνώστων. Αφετέρου η μεγάλη απλότητα της θεωρίας αυτής οφείλεται στο γεγονός ότι ο αριθμός των συνθηκών δεν είναι μικρότερος του αριθμού των αγνώστων εσωτερικών δυνάμεων, έτσι παρέλκει η εξέταση των παραμορφώσεων του κελύφους. Συνεπώς, η εντατική κατάσταση είναι στη θεωρία μεμβράνης εσωτερικά στατικά ορισμένη. Είναι αναγκαίο να διευκρινιστεί ότι η εντατική κατάσταση είναι «εσωτερικά» στατικά ορισμένη, διότι στις διαφορετικές εξισώσεις 2.10 δεν λαμβάνονται υπόψη οι στηρίξεις και οι οριακές συνθήκες (δεδομένου ότι αυτές λογίζονται μόνο κατά τον προσδιορισμό των αυθαίρετων σταθερών ολοκλήρωσης), έτσι δεν θα μπορεί να περιπλακεί το πρόβλημα των κελυφών σε περίπτωση εξωτερικής στατικής αοριστίας.

### 2.13 ΚΩΝΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ

Παρακάτω εξετάζεται το κωνικό κέλυφος, το οποίο έχει κι αυτό σχήμα που επιτρέπει απλό υπολογισμό. Απαιτείται όμως να γίνει κατάλληλη προσαρμογή των εξισώσεων 2.10. Δεδομένου ότι στην περίπτωση αυτή η καμπυλότητα του μεσημβρινού είναι μηδενική, δεν μπορεί να γίνει χρήση της γωνίας  $\theta$  για τον καθορισμό της θέσης των παράλληλων κύκλων. Αντ' αυτής εισάγεται η συντεταγμένη  $s$ , η οποία παριστάνει την απόσταση σημείου της μέσης επιφάνειας από την κορυφή του κώνου, μετρημένη κατά μήκος της γενέτειρας (βλ. σχήμα 2.16).



Σχήμα 2.16

Εισάγεται επίσης το νέο σύμβολο  $N_s$  αντί του  $N_\theta$ . Έτσι είναι:

$$\begin{aligned} \theta = \cos(t), r_\theta = \frac{T}{2}, r_\varphi = s \operatorname{ctg}(\theta) \\ r_\theta d\theta = ds, N_\theta = N_s \end{aligned} \quad (2.11)$$

Αυτές οι εκφράσεις εισάγονται στις παρακάτω εξισώσεις, οι οποίες προκύπτουν από τις εξισώσεις 2.10.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{r_\theta \partial \theta} [N_\theta r_\varphi \sin(\theta)] \frac{1}{\cos(\theta)} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{1}{\cos(\theta)} - N_\varphi + p_x r_\varphi \operatorname{tg} \theta = 0 \\ \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} \frac{1}{\cos(\theta)} + \frac{\partial}{r_\theta \partial \theta} \frac{T r_\varphi \sin(\theta)}{\cos(\theta)} + T + p_y r_\varphi \operatorname{tg} \theta = 0 \\ N_\theta \frac{r_\varphi}{r_\theta} + N_\varphi + p_z r_\varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Στις εξισώσεις αυτές μπορούν εύκολα να γίνουν οι αναγκαίες προσαρμογές του κωνικού κελύφους, έτσι προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (N_s s) + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{1}{\cos(\theta)} - N_\varphi + p_x s = 0 \\ \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} \frac{1}{\cos(\theta)} + \frac{\partial}{\partial s} (Ts) + T + p_y s = 0 \\ N_\varphi + p_z s \operatorname{ctg} \theta = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.14 ΚΥΚΛΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ

Οι διαφορικές εξισώσεις του κυκλικού κυλινδρικού κελύφους μπορούν να προκύψουν από τις

εξισώσεις του κωνικού κελύφους. Γι' αυτό χρησιμοποιούνται οι καταρτισμένες εξισώσεις 2.13 του κωνικού κελύφους, στις οποίες τίθεται  $s = r_\phi \operatorname{tg} \theta$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial(N_s r_\phi)}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \frac{1}{\sin(\theta)} - N_\phi \operatorname{ctg} \theta + p_x r_\phi &= 0 \\ \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} \frac{1}{\sin(\phi)} + \frac{\partial(T r_\phi)}{\partial s} + T \operatorname{ctg} \theta + p_y r_\phi &= 0 \\ N_\phi + p_z r_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Για την οριακή περίπτωση του κυλίνδρου, όπου είναι:

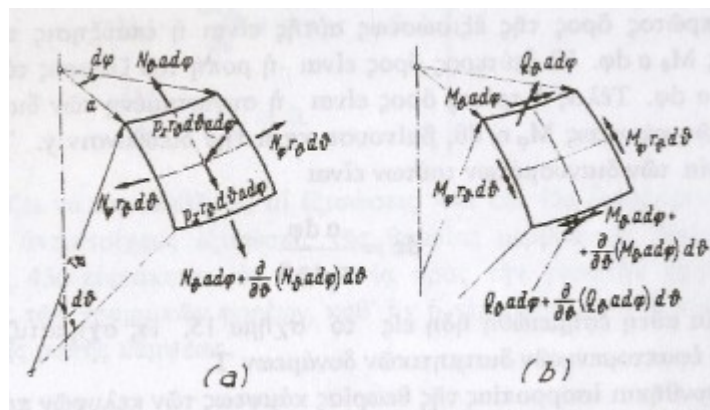
$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad r_\phi = \operatorname{const} = r$$

λαμβάνονται οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s}{\partial s} r + \frac{\partial T}{\partial \phi} + p_x r &= 0 \\ \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial T}{\partial s} r + p_y r &= 0 \\ N_\phi + p_z r &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

## 2.15 ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΨΗΣ ΚΕΛΥΦΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΜΕ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΑΞΟΝΑ ΦΟΡΤΙΣΗ

Το απειροστό στοιχείο του σχήματος 2.17 ανήκει σε κέλυφος εκ περιστροφής που φορτίζεται από συμμετρική ως προς τον άξονα περιστροφής φόρτιση. Εξαιτίας της συμμετρίας υπάρχουνε πέντε φορτία διατομής,  $N_\phi$ ,  $N_\theta$ ,  $M_\phi$ ,  $M_\theta$ ,  $Q_\phi$ .



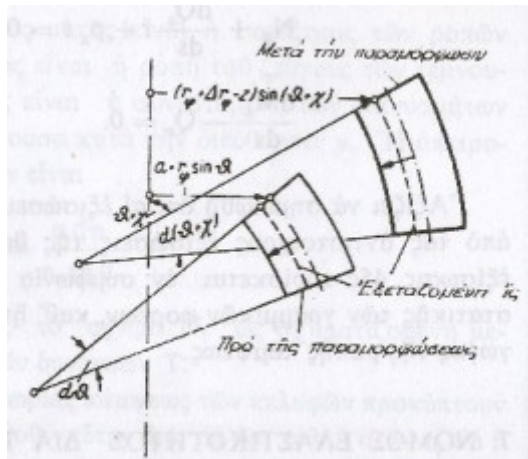
Σχήμα 2.17

Οι συνθήκες ισορροπίας ως προς τους άξονες x-y-z διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} (N_\phi r) - N_\theta r_1 \cos(\phi) - r Q_\phi + q_y r_1 r &= 0 \\ N_\phi r + N_\theta r_1 \sin(\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} Q_\phi r + q_z r_1 r &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi} (M_\phi r) - M_\theta r_1 \cos(\phi) - Q_\phi r_1 r &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$



Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τους πέντε άγνωστους εντατικούς όρους πρέπει να συνδεθούν οι εντατικοί όροι με τις μετατοπίσεις – γεγονός που δεν συμβαίνει στην μεμβρανική θεωρία - δηλαδή να γραφούν οι καταστατικές εξισώσεις.



Σχήμα 2.18

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi} &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{r_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) + \frac{\nu}{r_2} (u \cot(\varphi) - w) \right] \\
 N_{\theta} &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{r_2} (u \cot(\varphi) - w) + \frac{\nu}{r_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) \right] \\
 M_{\varphi} &= -K \left[ \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v}{r_1} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{1}{r_1} \right) + \frac{\nu}{r_2} \left( \frac{v}{r_1} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{1}{r_1} \right) \cot(\varphi) \right] \\
 M_{\theta} &= -K \left[ \left( \frac{v}{r_1} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{1}{r_1} \right) \frac{\cot(\varphi)}{r_2} + \frac{\nu}{r_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v}{r_1} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{1}{r_1} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

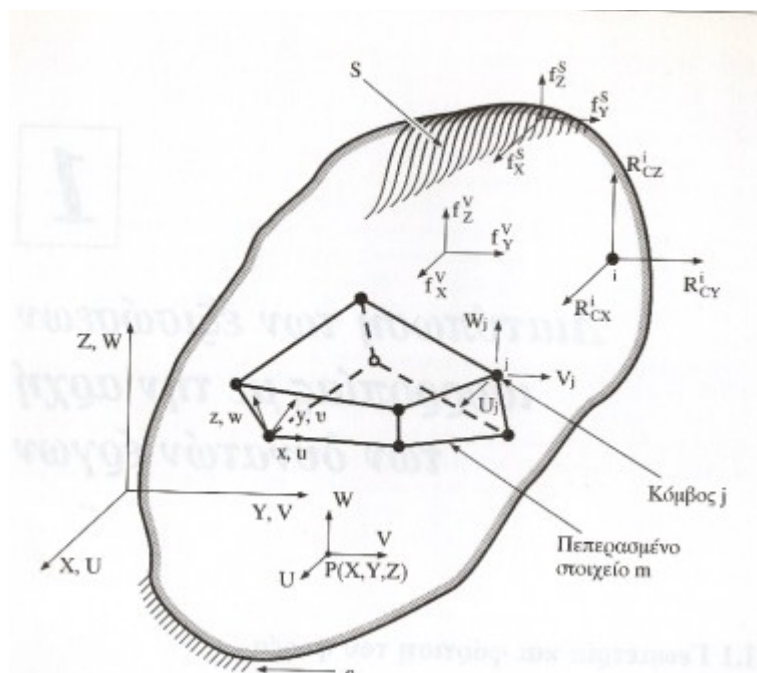
όπου : 
$$K = \frac{Et}{12(1-\nu^2)}$$

### 3 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

#### 3.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

Η γενική εξίσωση ισορροπίας της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων θα διατυπωθεί αρχικά για ένα φορέα τρισδιάστατης ελαστικότητας μέσω της αρχής των δυνατών έργων. Ας θεωρήσουμε την ισορροπία του φορέα του σχήματος 3.1 ο οποίος ορίζεται ως προς το καθολικό σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων XYZ. Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων θεωρούμε ότι ο φορέας αποτελείται από ένα σύνολο διακριτών πεπερασμένων στοιχείων τα οποία εφάπτονται μεταξύ τους χωρίς να αφήνουν κανένα κενό και συνδέονται με τους κόμβους που βρίσκονται στα σύνορα των στοιχείων. Το σύνολο αυτό των στοιχείων ονομάζεται **δίκτυο** ή **πλέγμα** και η προσομοίωση του φορέα με το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων ονομάζεται **διακριτοποίηση** του φορέα.

Ο φορέας του σχήματος 3.1 στηρίζεται στην επιφάνεια  $S_u$  με καθορισμένες μετατοπίσεις  $\{D^{Su}\}$ , και υποβάλλεται στις επιφανειακές δράσεις  $\{f^S\}$  (δράσεις ανά μονάδα επιφάνειας) στην περιοχή της επιφάνειας  $S$ . Επιπλέον ο φορέας υποβάλλεται σε μαζικές δράσεις  $\{f^V\}$  (δράσεις ανά μονάδα όγκου) και στις επικόμβιες δράσεις  $\{R_C^i\}$  στον κόμβο  $i$ . Στο σχήμα 3.1 φαίνεται επίσης το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του πεπερασμένου στοιχείου  $m$ . Τα διανύσματα των εξωτερικών δράσεων ορίζονται από τις σχέσεις



Σχήμα 3.1 Ολόσωμος τρισδιάστατος φορέας διακριτοποιημένος με εξαεδρικά πεπερασμένα στοιχεία οκτώ κόμβων

$$\{ R_C^i \} = \begin{pmatrix} R_{CX}^i \\ R_{CY}^i \\ R_{CZ}^i \end{pmatrix}, \quad \{ f^V \} = \begin{pmatrix} f_X^V \\ f_Y^V \\ f_Z^V \end{pmatrix}, \quad \{ f^S \} = \begin{pmatrix} f_X^S \\ f_Y^S \\ f_Z^S \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

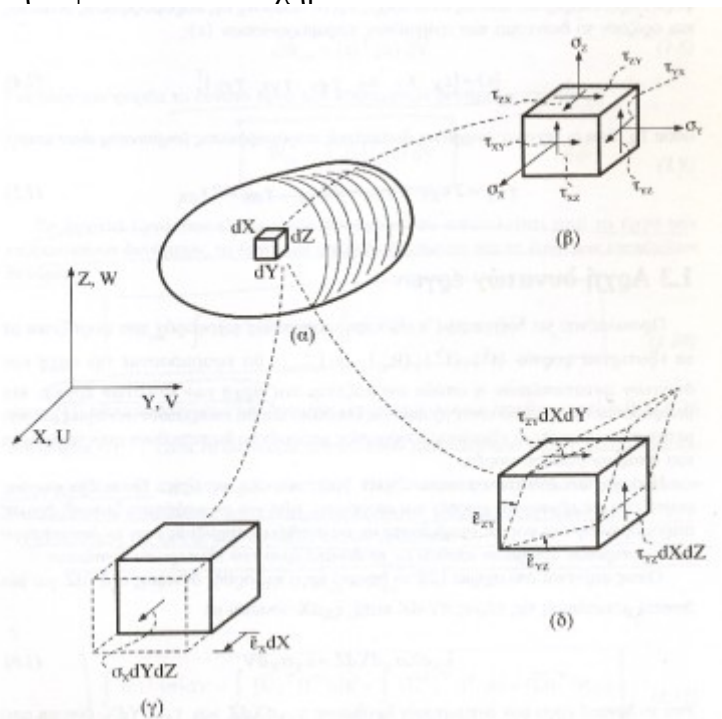
Οι μετατοπίσεις ενός τυχαίου σημείου P (X,Y,Z) του φορέα, ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων XYZ, εκφράζονται από το διάνυσμα

$$\{ U(X,Y,Z) \} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

ενώ οι επικόμβιες μετατοπίσεις όλων των κόμβων του φορέα εκφράζονται από το διάνυσμα  $\{ D \} = [U_1 V_1 W_1 U_2 V_2 W_2 \dots]^T$ .

### 3.2 ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Οι τάσεις οι οποίες ασκούνται σε ένα στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο  $dX-dY-dZ$  στην τρισδιάστατη ελαστικότητα φαίνονται στο σχήμα 3.2α.



Σχήμα 3.2 (α) Ολόσωμος τρισδιάστατος φορέας (β) στερεό τάσεων, (γ) ορθή δυνατή παραμόρφωση, (δ) διατμητική δυνατή παραμόρφωση

Λόγω του ότι ισχύουν οι σχέσεις  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  και  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , η εντατική κατάσταση σε οποιοδήποτε σημείο του φορέα προσδιορίζεται από τις έξι συνιστώσες της τάσης  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , οι οποίες και καθορίζουν το διάνυσμα των τάσεων  $\{ \sigma \}$ :

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (3.3)$$

Κατ' αναλογία προς τις τάσεις, η κατάσταση της παραμόρφωσης ενός σημείου του φορέα προσδιορίζεται από τις αντίστοιχες έξι συνιστώσες της παραμόρφωσης οι οποίες και ορίζουν το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων  $\{\varepsilon\}$ :

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \quad (3.4)$$

όπου  $\gamma_{ij}$  είναι οι τεχνικές ανηγμένες διατμητικές παραμορφώσεις (*engineering shear strain*):

$$\gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy}, \quad \gamma_{yz} = 2 \varepsilon_{yz}, \quad \gamma_{zx} = 2 \varepsilon_{zx}^T \quad (3.5)$$

### 3.3 ΑΡΧΗ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

Προκειμένου να διατυπωθεί η εξίσωση ισορροπίας του φορέα που φορτίζεται με τα εξωτερικά φορτία  $\{f^s\}$ ,  $\{f^v\}$ ,  $\{R_C^i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , θα εφαρμόσουμε την αρχή των δυνατών μετατοπίσεων η οποία ονομάζεται και *αρχή των δυνατών έργων*. Θα θεωρήσουμε ότι το υλικό είναι γραμμικώς ελαστικό και ότι επικρατούν συνθήκες μικρών μετατοπίσεων οπότε οι εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να διατυπωθούν στην γεωμετρία του απαραμόρφωτου φορέα.

Η αρχή των δυνατών μετατοπίσεων διατυπώνεται ως εξής: Όταν ένας φορέας φορτίζεται με εξωτερικά φορτία και ισορροπεί, τότε για οποιαδήποτε «μικρή» δυνατή παραμόρφωση του φορέα, συμβιβαστή με τις συνθήκες στηρίξεώς του, το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2β το δυνατό έργο της ορθής δύναμης  $\sigma_x dY dZ$  για μια δυνατή μετατόπιση της έδρας  $dY-dZ$  κατά  $\bar{\varepsilon}_x dX$  ισούται με

$$\bar{\varepsilon}_x dX dY dZ = \bar{\varepsilon}_x \sigma_x dV \quad (3.6)$$

ενώ το δυνατό έργο των διατμητικών δυνάμεων  $\tau_{yz} dXdZ$  και  $\tau_{zy} dYdX$  δίνεται από το άθροισμα των γινομένων

$$\bar{\varepsilon}_{yz} dY \tau_{yz} dXdZ + \bar{\varepsilon}_{zy} dZ \tau_{zy} dXdY$$

ή

$$2 \bar{\varepsilon}_{yz} dY \tau_{yz} dXdZ = \bar{\gamma}_{yz} \tau_{yz} dV \quad (3.7)$$

Επομένως το συνολικό δυνατό έργο των δυνάμεων που δρουν στο στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο ισούται με

$$dW_{\text{inte}} = (\bar{\epsilon}_x \sigma_x + \bar{\epsilon}_y \sigma_y + \bar{\epsilon}_z \sigma_z + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy} + \bar{\gamma}_{yz} \tau_{yz} + \bar{\gamma}_{xz} \tau_{xz}) dV$$

$$dW_{\text{inte}} = \{\bar{\epsilon}\}^T \{\sigma\} dV \quad (3.8)$$

Για όλον τον φορέα το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με

$$W_{\text{inte}} = \int \{\bar{\epsilon}\} \{\sigma\} dV \quad (3.9)$$

Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων θα αποτελείται από το έργο των επιφανειακών δυνάμεων, το έργο των μαζικών δυνάμεων και το έργο των επικόμβιων δυνάμεων:

$$W_{\text{ext}} = \int \{\bar{U}\}^T \{f^V\} dV + \int \{\bar{U}^S\}^T \{f^V\} dV + \{\bar{D}\}^T \{R_C\} \quad (3.10)$$

όπου  $\{\}$  είναι το διάνυσμα των δυνατών μετατοπίσεων ενός τυχαίου σημείου P(X,Y,Z) του φορέα,  $\{\bar{U}^S\}$  είναι το διάνυσμα των δυνατών μετατοπίσεων ενός τυχαίου σημείου της φορτιζόμενης επιφάνειας S, και  $\{D\}$ ,  $\{R_C\}$  είναι τα διανύσματα των δυνατών επικόμβιων μετατοπίσεων και επικόμβιων δράσεων του φορέα, αντίστοιχα.

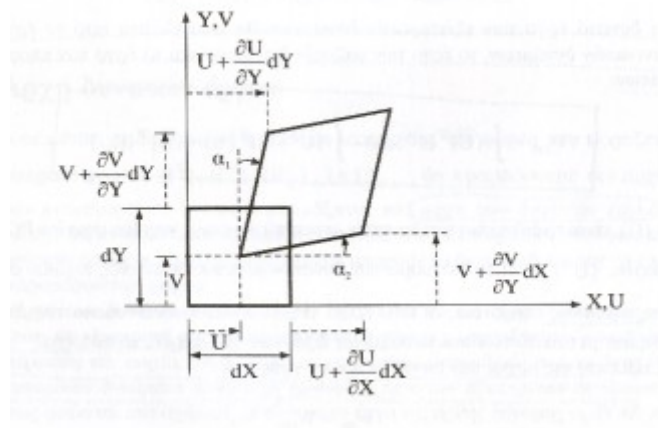
Η εξίσωση της αρχής των δυνατών έργων γράφεται

$$W_{\text{inte}} = W_{\text{ext}} \Rightarrow \int \{\bar{\epsilon}\}^T \{\sigma\} dV = \int \{\bar{U}\}^T \{f^V\} dV + \int \{\bar{U}^S\}^T \{f^V\} dV + \{\bar{D}\}^T \{R_C\} \quad (3.11)$$

Στην εξίσωση (3.1) έχουμε θεωρήσει ότι οι τάσεις  $\{\sigma\}$  αντιστοιχούν στις τάσεις που ισορροπούν τα εξωτερικά φορτία. Οι δυνατές μετατοπίσεις  $\{\bar{U}\}$  αντιπροσωπεύουν ένα συνεχές πεδίο δυνατών μετατοπίσεων, συμβιβαστό με τις συνθήκες στηρίξεως του φορέα  $\{\bar{U}\} = 0$  στις στηρίξεις  $S_u$ , από το οποίο προσδιορίζονται οι δυνατές ανηγμένες παραμορφώσεις  $\{\bar{\epsilon}\}$ .

### 3.4 ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΗΓΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ - ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Οι ανηγμένες παραμορφώσεις συνήθως διατυπώνονται στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αλλά μπορούν επίσης να διατυπωθούν και σε άλλα συστήματα ή με άλλους τρόπους πέραν του κλασικού.



Σχήμα 3.3. Παραμόρφωση στοιχειώδους ορθογωνίου  $dX-dY$

Το σύνολο των σχέσεων ανηγμένων παραμορφώσεων – μετατοπίσεων σε τρεις διαστάσεις γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial X}, \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial Y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial Z}, \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Σε μητρική γραφή οι σχέσεις (3.12) μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\{\varepsilon\} = \{\partial_\varepsilon\} \{U\} \quad (3.13)$$

όπου το διάνυσμα  $\{U\} = [U \ V \ W]^T$  συμβολίζει το πεδίο των μετατοπίσεων σε κάποιο σημείο του φορέα και το μητρώο  $[\partial_\varepsilon]$  τον διαφορικό τελεστή της σχέσης (3.13).

### 3.5 ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ – ΑΝΗΓΓΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Οι μητρικές σχέσεις τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων γραμμικώς ελαστικών υλικών σε ισοθερμική παραμόρφωση γράφονται ως εξής

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [C] \{\sigma\} \\ \{\sigma\} &= [E] \{\varepsilon\} \\ [C] &= [E]^{-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

όπου  $[C]$  είναι ένα συμμετρικό μητρώο το οποίο εκφράζει την παραμόρφωση του υλικού στις ασκούμενες τάσεις και  $[E]$  είναι επίσης ένα συμμετρικό μητρώο που εκφράζει τη στιβαρότητα του υλικού στις επιβαλλόμενες παραμορφώσεις με  $[E] = [C]^{-1}$ . Στη γενική περίπτωση της

ανισοτροπίας, τα μητρώα [C] και [E] περιλαμβάνουν 21 ανεξάρτητους όρους. Οι σχέσεις (3.16) εκφράζουν το νόμο του Hooke κατά τον οποίο οι τάσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των ανηγμένων παραμορφώσεων και ισχύουν με την παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων και για συγκεκριμένα υλικά.

Στην περίπτωση ισότροπων υλικών, οι ιδιότητες των υλικών εκφράζονται με τον συνδυασμό του μέτρου ελαστικότητας E και του συντελεστή Poisson ν. Στην περίπτωση αυτή το μητρώο [E] στην τριδιάστατη ελαστικότητα έχει τη μορφή

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Ως γνωστόν από την θεωρία ελαστικότητας το μέτρο διατμήσεως ορίζεται ως  $G = E/2(1+\nu)$  το οποίο συνδέει τις διατμητικές τάσεις με τις ανηγμένες διατμητικές παραμορφώσεις:

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx} \quad (3.16)$$

Είναι δυνατόν, πριν την παραμόρφωση ενός φορέα λόγω εξωτερικής φόρτισης, να προϋπάρχουν αρχικές τάσεις  $\{\sigma_0\}$  με μηδενικές παραμορφώσεις, καθώς και οι αρχικές παραμορφώσεις  $\{\epsilon_0\}$  οι οποίες δεν έχουν προκαλέσει τάσεις (π.χ. λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών σε ελεύθερους να παραμορφωθούν φορείς). Στην περίπτωση αυτή για να προκύψουν οι τελικές τάσεις θα πρέπει να προστεθούν στις τάσεις  $\{\sigma\}$  λόγω εξωτερικής φόρτισης οι αρχικές τάσεις  $\{\sigma_0\}$ :

$$\{\sigma_t\} = \{\sigma\} + \{\sigma_0\} \quad (3.17)$$

Ενώ κατά τον υπολογισμό των τάσεων  $\{\sigma\}$  θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η αρχική παραμόρφωση  $\{\epsilon_0\}$ :

$$\{\sigma\} = [E] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) \quad (3.18)$$

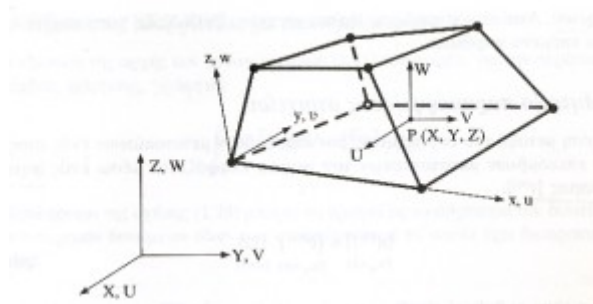
όπου  $\{\epsilon\}$  είναι το διάνυσμα των συνολικών ανηγμένων παραμορφώσεων.

Ο συνδυασμός των σχέσεων (3.17) και (3.18) θα μας δώσει την έκφραση του συνολικού διανύσματος των τάσεων όταν υπάρχουν αρχικές τάσεις και παραμορφώσεις στον φορέα:

$$\{\sigma_t\} = [E] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (3.19)$$

### 3.6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Η βασική παραδοχή η οποία επηρεάζει σημαντικά την αξιοπιστία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων εστιάζεται στον ορισμό ενός προσεγγιστικού πεδίου μετατοπίσεων στο εσωτερικό του κάθε πεπερασμένου στοιχείου. Οι συνιστώσες της μετατόπισης  $U, V, W$  στο καθολικό σύστημα του φορέα σε κάθε σημείο  $P(X,Y,Z)$  του πεπερασμένου στοιχείου συνθέτουν το πεδίο των μετατοπίσεων το οποίο εκφράζεται συναρτήσει των επικόμβων μετατοπίσεων  $\{d\} = [U_1 V_1 W_1 \quad U_2 V_2 W_2 \dots]^T$  του στοιχείου. Έτσι για το στοιχείο  $m$  του σχήματος 3.1 με  $n_e$  κόμβους, το οποίο σχεδιάστηκε απομονωμένο στο σχήμα 3.4 θεωρούμε ότι ισχύει η σχέση



Σχήμα 3.4. Εξαεδρικό στοιχείο οκτώ κόμβων με το τοπικό και το καθολικό σύστημα αξόνων

$$\begin{bmatrix} U(X,Y,Z) \\ V(X,Y,Z) \\ W(X,Y,Z) \end{bmatrix} = [N(X,Y,Z)] \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \dots \\ U_{n_e} \\ V_{n_e} \\ W_{n_e} \end{bmatrix} \Rightarrow \{ U(X,Y,Z) \} = [N(X,Y,Z)]\{d\} \quad (3.20)$$

και

$$\{U^s(X,Y,Z)\} [N^s(X,Y,Z)]\{d\} \quad (3.21)$$

όπου  $\{U(X,Y,Z)\}$  είναι το διάνυσμα των συνιστωσών των μετατοπίσεων ενός σημείου  $P(X,Y,Z)$  στο εσωτερικό του στοιχείου το οποίο εκφράζει το πεδίο των μετατοπίσεων του στοιχείου,  $\{d\}$  είναι το διάνυσμα των επικόμβων μετατοπίσεων του στοιχείου και  $[N(X,Y,Z)]$  είναι το μητρώο των συναρτήσεων σχήματος ή συναρτήσεων παρεμβολής το οποίο εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται το πεδίο των μετατοπίσεων συναρτήσει των επικόμβων μετατοπίσεων του



στοιχείου. Κατ'αντιστοιχία,  $\{U^S(X,Y,Z)\}$  και  $[N^S(X,Y,Z)]$  είναι το πεδίο των μετατοπίσεων και οι συναρτήσεις σχήματος ενός σημείου στην επιφάνεια  $S$  του στοιχείου που συμπίπτει με τη φορτιζόμενη επιφάνεια του φορέα.

### 3.7 ΜΗΤΡΩΟ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Η σχέση μεταξύ του διανύσματος των επικόμβιων μετατοπίσεων ενός στοιχείου και των επικόμβιων μετατοπίσεων του φορέα εκφράζεται μέσω ενός μητρώου συμβατότητας  $[t^{(m)}]$ :

$$\{d^{(m)}\} = [t^{(m)}] \{D\} \quad (3.22)$$

Το μητρώο  $[t^{(m)}]$  είναι ένα μητρώο Boolean, με όρους 0 ή 1, που συνδέει τους τοπικούς με τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας των κόμβων του στοιχείου και εκφράζει τη συνθήκη του συμβιβαστού των μετατοπίσεων των κόμβων του στοιχείου με τους κόμβους του φορέα στους οποίους αντιστοιχούν. Το μητρώο  $[t^{(m)}]$  εκφράζει τη διασπορά των όρων ενός τοπικού διανύσματος σε ένα καθολικό διάνυσμα, όπως υποδηλώνει η σχέση (3.22), ενώ το ανάστροφο μητρώο  $[t^{(m)}]^T$  εκφράζει την κατανομή των όρων ενός καθολικού διανύσματος  $\{R^{(m)}\}$  στις τοπικές θέσεις  $\{r^{(m)}\}$ :

$$\{R^{(m)}\} = [t^{(m)}]^T \{r^{(m)}\} \quad (3.23)$$

Για ένα πεπερασμένο στοιχείο  $m$  η σχέση (3.13), δυνάμει των σχέσεων (3.20) και (3.21), γράφεται

$$\{\varepsilon^{(m)}\} = [ \partial_\varepsilon ] [N^{(m)}(X,Y,Z)] \{d^{(m)}\} = [B^{(m)}(X,Y,Z)] \{d^{(m)}\} \quad (3.24\alpha)$$

ή

$$\{\varepsilon^{(m)}\} = [B^{(m)}(X,Y,Z)] [t^{(m)}] \{D\} \quad (3.24\beta)$$

Το μητρώο  $[B^{(m)}(X,Y,Z)]$  ονομάζεται **μητρώο παραμορφώσεως** του στοιχείου και συνδέει το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων με τις επικόμβιες μετατοπίσεις του στοιχείου.

Εάν θεωρήσουμε ότι το πεδίο των δυνατών μετατοπίσεων  $\{(X,Y,Z)\}$  εκφράζεται με τις ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής της σχέσης (3.20) που ορίζουν το πραγματικό πεδίο των μετατοπίσεων, τότε το διάνυσμα των δυνατών ανηγμένων παραμορφώσεων δίνεται από μια σχέση ανάλογη της (3.24β):

$$\{\bar{\varepsilon}^{(m)}\} = [B^{(m)}] [t^{(m)}] \{\bar{D}\} \quad (3.25)$$

### 3.8 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΜΕ ΕΠΙΚΟΜΒΙΑ ΦΟΡΤΙΑ

Η εξίσωση της αρχής των δυνατών έργων (1.11) του φορέα, για την περίπτωση μόνο επικόμβιας φόρτισης και για όλα τα στοιχεία γράφεται ως εξής:

$$\sum \int [t^{(m)}]^T [B^{(m)}]^T [E] [B^{(m)}] [t^{(m)}] dV_e^{(m)} \{D\} = \{R_c\} \quad (3.26)$$

όπου  $V_e$  είναι ο όγκος του στοιχείου  $m$ .

Κατά συνέπεια το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας είναι :

$$\begin{aligned} [K] &= \left[ \sum \int [t^{(m)}]^T [B^{(m)}]^T [E] [B^{(m)}] [t^{(m)}] dV_e^{(m)} \right] \Rightarrow \\ [K] &= \sum [t^{(m)}]^T \left[ \int [B^{(m)}]^T [E] [B^{(m)}] dV_e^{(m)} \right] [t^{(m)}] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Με την ίδια λογική της αρχής δυνατών έργων προκύπτουν τα μητρώα, για τις μαζικές δυνάμεις τις επιφανειακές δυνάμεις, τις δυνάμεις από αρχικές παραμορφώσεις και τέλος τις δυνάμεις από αρχικές τάσεις, οι οποίες ανάγονται όλες πια σε επικόμβια φορτία. Τα μητρώα αυτά είναι τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \{R_V\} &= \sum [t^{(m)}]^T \int [N^{(m)}]^T \{f^V(m)\} dV_e \\ \{R_S\} &= \sum [t^{(m)}]^T \int [N^S(m)]^T \{f^S(m)\} dS_e \\ \{R_{\epsilon_0}\} &= \sum [t^{(m)}]^T \int [B^{(m)}]^T \{[E] \epsilon_0^{(m)}\} dV_e \\ \{R_{\sigma_0}\} &= - \sum [t^{(m)}]^T \int [B^{(m)}]^T \{\sigma_0^{(m)}\} dV_e \end{aligned} \quad (3.28)$$

Έτσι πια το συνολικό διάνυσμα φορτίσεων διαμορφώνεται ως εξής:

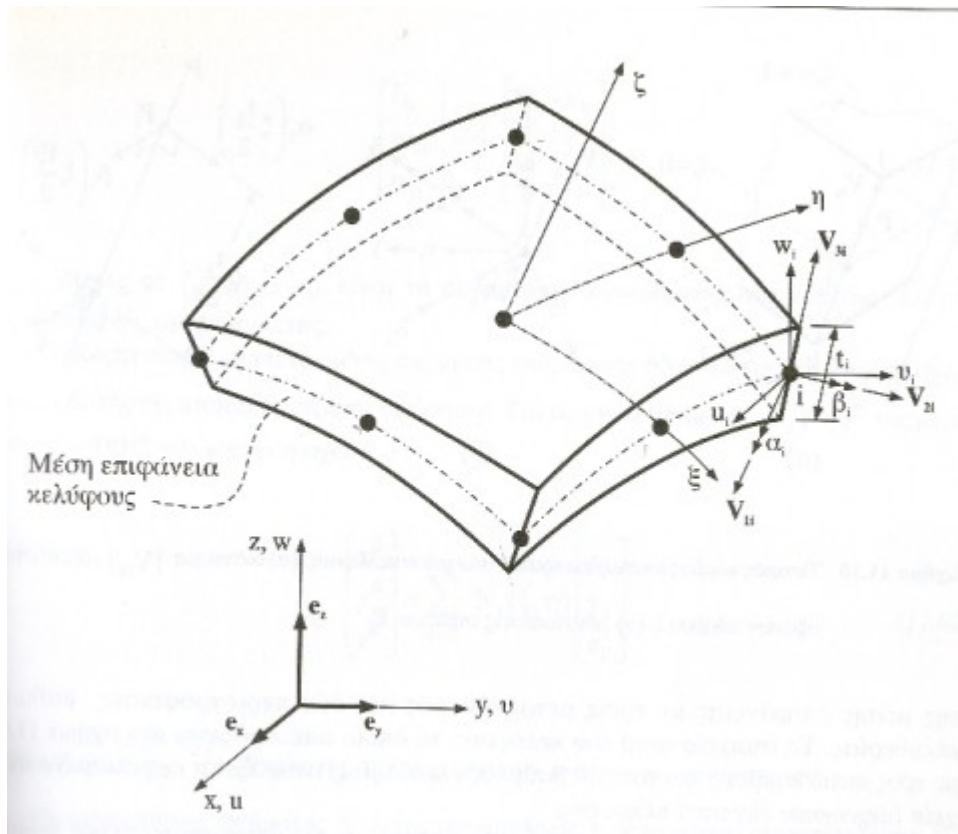
$$\{R\} = \{R_c\} + \{R_V\} + \{R_{\sigma_0}\} + \{R_{\epsilon_0}\}$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση ισορροπίας γράφεται:

$$[K][D] = [R] \quad (3.29)$$

### 3.9 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΕΛΥΦΟΥΣ

Ένα κέλυφος οποιασδήποτε μορφής είναι δυνατόν να προσομοιωθεί με ισο-παραμετρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας των οποίων το πάχος είναι σημαντικά μικρότερο των άλλων διαστάσεων. Το βασικό μειονέκτημα των στοιχείων αυτών είναι ότι καθώς το πάχος του στοιχείου μειώνεται ο όρος του μητρώου στιβαρότητας που αντιστοιχεί στην ανηγμένη παραμόρφωση  $\epsilon_z$  αυξάνεται σημαντικά με αποτέλεσμα να δημιουργούνται προβλήματα αριθμητικής φύσεως στην επίλυση του προβλήματος. Για αυτό τον λόγο δημιουργήθηκαν τα στοιχεία κελύφους τα οποία αναφέρονται στην μέση επιφάνεια του κελύφους και ομοιάζουν με τα στοιχεία πλάκας. Στα στοιχεία αυτά η κατά πάχος παραμόρφωση  $\epsilon_z$  θεωρείται μηδενική στα thin shell elements και σταθερή στα thick shell elements.



Σχήμα 3.5 Στοιχείο κελύφους κατά την μέση επιφάνεια

Κατά ακολουθία των προηγούμενων παραγράφων το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου κελύφους δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$[k] = \int \int \int [B]^T * [E] * [B] * \det[J] d\xi dn d\zeta \quad (3.30)$$

όπου ο Ιακωβιανός πίνακας J δίνεται από την παρακάτω σχέση και εκφράζει τον τρόπο που ορίζεται μεταβολή μεγέθους από το γενικό σύστημα συντεταγμένων στο τοπικό.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Στην συγκεκριμένη μελέτη τα στοιχεία κελύφους που χρησιμοποιούνται ακολουθούν την θεωρία Middlin-Reissner.

#### 4 ΤΟΠΟΣ ΔΙΑΡΡΟΗΣ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΣΤΟΧΙΑΣ

Η συνθήκη η οποία διακρίνει την ελαστική από την πλαστική συμπεριφορά ομοιογενούς υλικού ονομάζεται τόπος διαρροής ή κριτήριο αστοχίας. Ο όρος τόπος προκύπτει από την μαθηματική διατύπωση η οποία αποδεικνύεται ότι αποτελεί γεωμετρικό τόπο ή n-διάστατη επιφάνεια. Συνεχίζοντας την φυσική σημασία που υπάρχει πίσω από τον ορισμό των αναλλοίωτων ποσοτήτων καταλήγουμε στο ότι η επιφάνεια διαρροής πρέπει να είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε το εντατικό πεδίο. Κατά συνέπεια θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωσή της επιφάνειας διαρροής με βάση τις αναλλοίωτες του τανυστή τάσεων και βέβαια τα χαρακτηριστικά του υλικού μας. Έτσι για ισότροπο ομοιογενές υλικό με όριο διαρροής σε μονοαξονικό εφελκυσμό  $R_e$  η επιφάνεια διαρροής μπορεί να γραφεί όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned} f(J_1, J_2, J_3) &= g(R_e) \\ J_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ J_2 &= -(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33}) \\ J_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιείται το κριτήριο διαρροής Von-Mises το οποίο στηρίζεται στην διαπίστωση ότι στα όλκιμα γραμμικά ελαστικά υλικά ο όρος της υδροστατικής πίεσης

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad \text{δεν επηρεάζει την διαρροή και συγχρόνως το όριο διαρροής σε μονοαξονικό}$$

εφελκυσμό είναι το ίδιο με αυτό σε θλίψη. Κατά συνέπεια η επιφάνεια διαρροής εξαρτάται πια από τις αναλλοίωτες του αποκλίνοντα τανυστή τάσεων του οποίου η διατύπωσή ανά στοιχείο είναι η παρακάτω:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} p \quad (4.2)$$

Στον αποκλίνοντα τανυστή τάσεων ισχύει  $J_1 = 0$ , ενώ αγνοώντας τον όρο  $J_3$  προκύπτει η συνθήκη:

$$S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 = 2 * C^2 \quad (4.3)$$

Αποδुकνειεται ότι  $C = k$  όπου  $k$  είναι η τάση διαρροής σε καθαρή διάτμηση. Επεξεργαζόμενοι περαιτέρω την εξίσωση (4.3) προκύπτει μία από τις πολλές γραφές του κριτηρίου διαρροής Von Misses:

$$R_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2} \quad (4.4)$$

Όπως είδαμε και παραπάνω το κριτήριο διαρροής καθορίζει το όριο μεταξύ της ελαστικής και της πλαστικής συμπεριφοράς του ισότροπου ομοιογενούς υλικού. Στην περίπτωση της μη ύπαρξης κρατύνσεως του υλικού δηλαδή της απολύτου πλαστικότητας η ισοδύναμη τάση κινείται

εντός η επί της επιφάνειας διαρροής. Ο τρόπος που κινείται το τασικό πεδίο - σε ένα σημείο του σώματος -επί της επιφάνειας διαρροής καθορίζεται από τον νόμο ροής (πλαστικό δυναμικό – νόμος gradient). Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι η επιφάνεια διαρροής είναι πάντα κυρτή. Αυτό προκύπτει απο το 2ο θερμοδυναμικό αξίωμα και αντανακλά άμεσα στα υπολογιστικά του θέματος.

## 5 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Στην παρούσα μελέτη υφίστανται τρία φαινόμενα που κάνουν ανακριβή την όποια γραμμική επίλυση. Αυτά είναι τα εξής:

- Μεγάλες παραμορφώσεις που εισάγουν δευτερογενή εντατικά μεγέθη
- Διαρροή μεγάλων περιοχών της κατασκευής
- Κατάρρευση από αστάθεια – buckling - των δαχτυλιδιών των πυθμένων στην ελαστική περιοχή εξαιτίας της ασκούμενης εσωτερικής πίεσης (στην περιοχή αυτή στους πυθμένες τύπου Klorper έχουμε θλίψη από εσωτερική πίεση).

Όλα αυτά απαιτούν την μη γραμμική επίλυση της κατασκευής για τον πλήρη προσδιορισμό τάσεων και παραμορφώσεων. Για αυτό τον λόγο θα χρησιμοποιηθεί ο υπολογιστικός κώδικας μη γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων ADYNA. Για την κατανόηση των βασικών αρχών της μη γραμμικής ανάλυσης αλλά και της φύσεως του προβλήματος θα δοθεί σχηματικά η προσαυξητική μέθοδος με την χρήση της Newton – Raphson.

Η εξίσωση ισορροπίας στην κατάσταση (1) μπορεί να γραφεί:

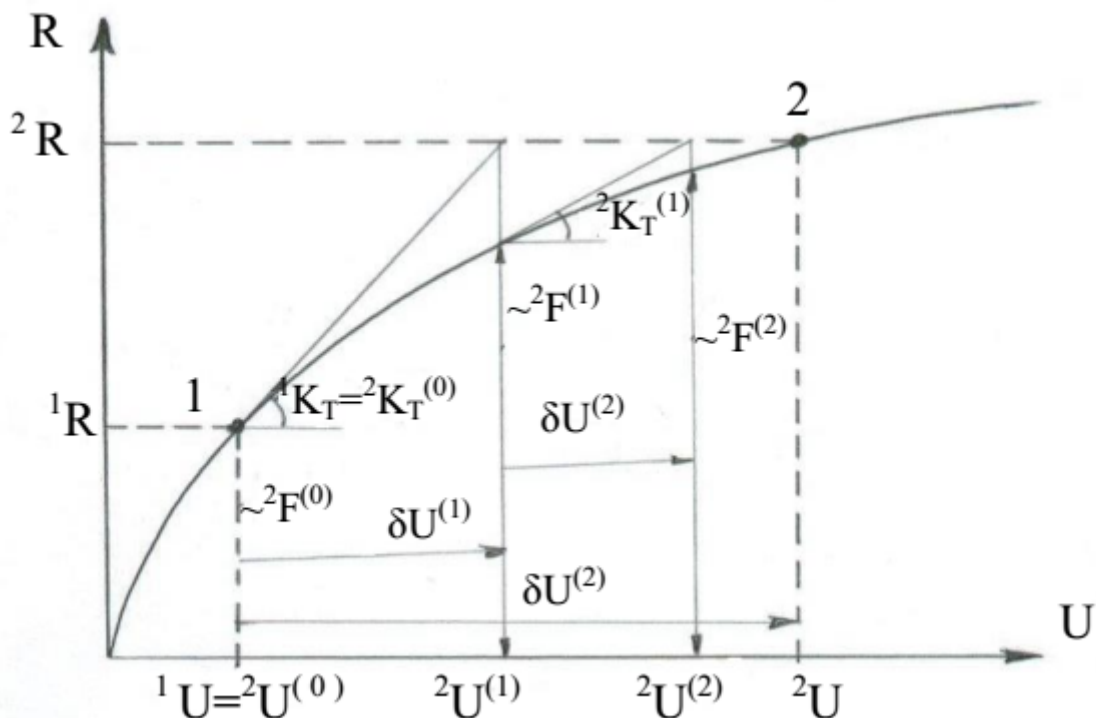
$$F^1 - R^1 = 0 \quad (5.1)$$

όπου:

F οι εσωτερικές δράσεις

R τα εξωτερικά φορτία

Έστω ότι το διάγραμμα R-U της κατασκευής είναι το παρακάτω:



Σχήμα 5.1

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.1 η σχέση R-U δεν είναι γραμμική , κατά συνέπεια δεν υπάρχει ένας και μοναδικός πίνακας δυσκαμψίας K για να περιγράψει το φαινόμενο και να έχουμε άμεση γνώση της κατάστασης (2).

Στη κατάσταση (2) ισχύει και πάλι ισορροπία άρα επιθυμούμε να επιτύχουμε το παρακάτω:

$$\begin{aligned} F^2 - R^2 &= r^2 \\ \text{norm}(r^2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Αναπτύσσοντας την σχέση F-U με σειρά Taylor και μέχρι πρώτης τάξεως παράγωγο έχουμε:

$$\begin{aligned} F^2 &= F^1 + \frac{\partial F^1}{\partial U^1} \Delta U_1^2 \\ \Delta U_1^2 &= U^2 - U^1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ο όρος  $\frac{\partial F^1}{\partial U^1}$  είναι ουσιαστικά η ελαστικότητα του συστήματος στο σημείο (1) και την καλούμε εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας  $K_T$ . Με βάση τα παραπάνω η εξίσωση (5.2) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$F^1 + K_T * \Delta U_1^2 - R^2 = r^2 \Rightarrow F^1 - R^2 = K_T \Delta U_1^2 \quad (5.4)$$

Όπως είναι κατανοητό με αλληπάλληλες επαναλήψεις και προσεγγίσεις του  $K_T$  σε ενδιάμεσες θέσεις μεταξύ (1) και (2) καταλήγουμε στο τελικό  $U^2$  όπου έχει επιτευχθεί η συνθήκη  $\text{norm}(r^2)=0$ . Βασικό στοιχείο της μεθόδου είναι ο υπολογισμός του  $K_T$  σε όποια θέση της φόρτισης είναι αυτός αναγκαίος. Η σχέση που μας δίνει το εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας είναι :

$$K_T = \int z^2 B_b^T \hat{C}_T^b B_b + B_s^T \hat{C}_T^s B_s dV \quad (5.5)$$

όπου οι αναφερόμενοι πίνακες έχουν την εξής φυσική σημασία:

- $B_b, B_s$  : συνδέουν τις ανηγμένες παραμορφώσεις με τις γενικευμένες μετατοπίσεις για τους όρους κάμψης και διάτμησης.
- $C$  : είναι το μητρώο που περιέχει τον καταστατικό νόμο , το κριτήριο διαρροής και τον νόμο ροής ανάλογα με το αν η παραμόρφωση είναι ελαστική ή πλαστική. Οι δείκτες b, s αναφέρονται στους όρους κάμψης και διάτμησης αντίστοιχα.

## 6 ΒΕΛΤΙΣΟΠΟΙΗΣΗ

Όπως σημειώθηκε και στη εισαγωγή θα επιδιωχθεί η εύρεση επιτυχημένου και ασφαλούς σχεδιασμού μέσα από διαδικασία βελτιστοποίησης. Η μεθοδολογία που θα χρησιμοποιηθεί στηρίζεται στην ικανοποίηση των συνθηκών KARUSH-KUHN-TUCKER με πολλαπλασιαστές Lagrange για την συσσωμάτωση των περιορισμών στην αντικειμενική συνάρτηση. Οι συνθήκες KKT είναι αναγκαίες για την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου. Καθίστανται ικανές όταν η προς ελαχιστοποίηση ποσότητα – συνάρτηση είναι κυρτή.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

$$\text{Να ελαχιστοποιηθεί η} \quad f(x); x \in R^n \quad (6.1)$$

$$\text{Υποκείμενη στους περιορισμούς:} \quad \begin{aligned} g_i(x) &\leq 0; i=1, \dots, p \\ h_j(x) &= 0; j=1, \dots, q \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\text{ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ} \quad L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x) + \sum \mu_j h_j(x) \quad (6.3)$$

### ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΚΤ

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, \lambda, \mu)}{\partial x_k} &= 0; \quad k=1, \dots, n \\ \lambda_i &\geq 0; \quad i=1, \dots, p \\ \lambda_i g_i(x) &= 0; \quad i=1, \dots, p \\ g_i(x) &= 0; \quad i=1, \dots, p \\ h_j(x) &= 0; \quad j=1, \dots, q \end{aligned} \quad (6.4)$$

Η μεθοδολογία προσέγγισης του βέλτιστου σημείου είναι αυτή των επιτρεπτών διευθύνσεων – MFD – όπου γίνεται χρήση του αλγορίθμου μέγιστης κλίσεως  $-\text{grad} L$ . Για τον υπολογισμό των συνιστωσών της μέγιστης κλίσεως – ευαισθησιών- χρησιμοποιείται η άμεση μέθοδος (direct method).

Όπως διαπιστώνουμε το πρόγραμμα ανάλυσης που χρησιμοποιείται για την βελτιστοποίηση της απόκρισης της κατασκευής διαθέτει τους πιο απλούς αλγορίθμους εύρεσης ελαχίστου. Το γεγονός αυτό δεν επηρεάζει αρνητικά την εύρεση του ολικού ελαχίστου εξαιτίας των παρακάτω:

- η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση είναι κυρτή – βάρος κατασκευής – και εξαρτάται γραμμικά από το πάχος των ελασμάτων
- οι περιορισμοί – επιτρεπόμενες τάσεις – είναι συνήθως συναρτήσεις δευτέρας τάξεως ως προς το πάχος των ελασμάτων.

Κατά συνέπεια η μέθοδος MFD είναι ικανή να μας δώσει το ελάχιστο της αντικειμενικής σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Εξαιτίας της χρήσης της μέγιστης κλίσεως η ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου είναι χαμηλή.



## 7 ΤΕΧΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Η κατασκευή μας είναι σύνθετη από την άποψη την άποψη ότι έχουμε κέλυφος – όχημα. Από το σχέδιο του κατασκευαστή προέκυπτan τα παρακάτω στοιχεία:

- Υλικό κατασκευής : St-42-2
- Πάχος ελασμάτων κελύφους: 5 mm
- Πάχος ελασμάτων στήριξης: 7mm
- Πίεση δοκιμής : 3 barg
- Πίεση λειτουργίας : 1,8 barg
- Τύπος Πάτων: Klopper
- Διάμετρος πάτων 1480 mm
- Μέγιστης διάμετρος 2490 mm
- Μήκος κελύφους 8900 mm
- Δύο άξονες πίσω τεχνικής ικανότητας 10000 kg έκαστος
- King Pin τεχνικής ικανότητας 11581 kg
- Απόβαρο οχήματος κελύφους 4840 kg

Για το υλικό κατασκευής οι μηχανικές ιδιότητες είναι οι εξής:

Re=260 Mpa

Rm=425 MPa

Το όχημα καθορίζει τις συνοριακές συνθήκες στο κέλυφος. Οι αρχικές συνθήκες είναι οι παρακάτω:

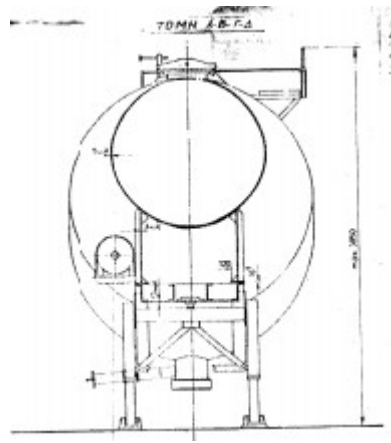
- Πλήρης στήριξη – πάκτωση - στο πίσω μέρος του κελύφους εξαιτίας της ύπαρξης των δύο τροχών
- Απλή στήριξη – κύλιση εμπρός εξαιτίας της υπάρξεως του king – pin (πέιρος πρόσδεσης στον ελκυστήρα). Η στήριξη αυτή είναι εν δυνάμει κύλιση από την στιγμή που οι εσωτερικές δυνάμεις στο κέλυφος ξεπεράσουν την αντίσταση κύλισης και την αδράνεια του ελκυστήρα.

Εάν θεωρήσουμε το βάρος του ελκυστήρα 7000 kg και συντελεστής κύλισης 0,01προκύπτει η δύναμη αντίστασης κύλισης είναι  $(11581+7000)*0,001+Acc.=185 + Acc$  (kg). Εάν υποθέσουμε για απλοποιητικούς λόγους ότι η δύναμη επιτάχυνσης είναι μηδενική – παραδοχή άστοχη – τότε οι εσωτερικές δυνάμεις που θα αναπτυχθούν στο κέλυφος για να έχουμε κίνηση της εμπρόσθιας στήριξης θα πρέπει να είναι 185 kg.

Ας εξετάσουμε υπό ποιες προϋποθέσεις μπορεί να εμφανιστεί αυτή η δύναμη:

Παραδοχές: Κυλινδρικό κέλυφος με μέση διάμετρο D=1940 mm.





Σχήμα 7.3

Το κέλυφος αποτελείται από τους πάτους και 4 κωνικά μέρη συμμετρικά τοποθετημένα. Οι πάτοι είναι τύπου Klopper με διαστάσεις:

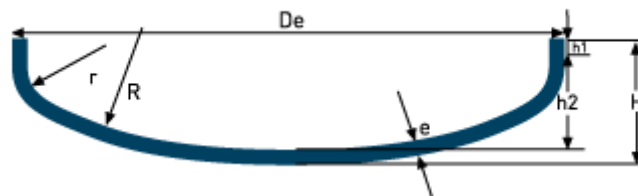
$$De=1480 \text{ mm}$$

$$R=1480 \text{ mm}$$

$$r=148 \text{ mm}$$

$$h1=20 \text{ mm}$$

$$e=5 \text{ mm}$$

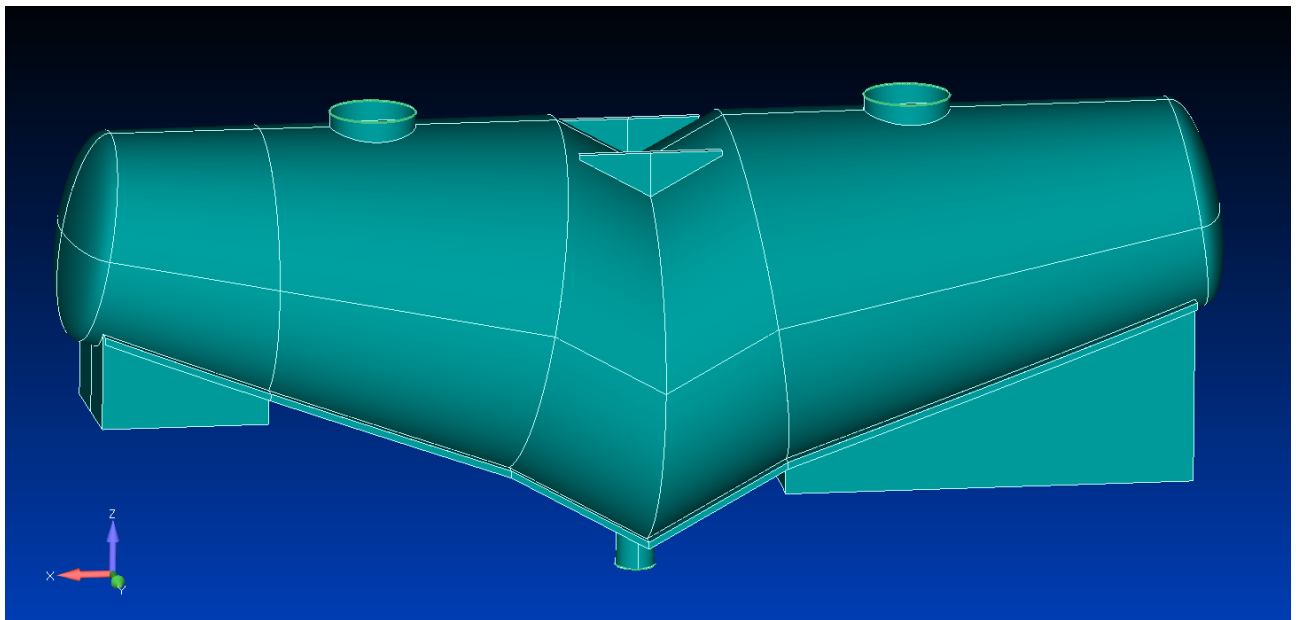


Σχήμα 7.4

Ο τύπος αυτός των πάτων είναι για μικρές εσωτερικές πιέσεις. Στην περίπτωση άσκησης εσωτερικής πίεσης στην καμπυλότητα με ακτίνα  $r$  αναπτύσσονται θλιπτικές τάσεις κατά τον μεσημβρινό. Κατά συνέπεια αύξηση της εσωτερικής πίεσης οδηγεί σε κατάρρευση της καμπυλότητας από ελαστική αστάθεια (buckling). Συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο ότι πρέπει να ικανοποιηθεί το γεωμετρικό συμβιβαστό μεταξύ των καμπυλοτήτων με ακτίνες  $r$  και  $R$ .

Η μέγιστη εσωτερική πίεση λειτουργίας που μπορεί να αναπτυχθεί στην συγκεκριμένη γεωμετρία με βάση τον κανονισμό ASME VIII DIV.1 δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 S &= \min 2/3 R_e ; 2/7 R_m = 121,4 \text{ MPa} \\
 J &= 1 (\text{Joint efficiency}) \\
 L/r &= 10 ; M = 1,54 P_{max} = \frac{2 S J E e}{M L - e (M - 0,2)} = 0,534 \text{ MPa} = 5,34 \text{ Barg}
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$



Σχήμα 7.5

Το υπόλοιπο κέλυφος όπως φαίνεται στο σχήμα 7.5 αποτελείται από 2 κωνικά τμήματα και 2 κυλινδρικά ανά δύο συμμετρικά τοποθετημένα. Τα τμήματα αυτά έχουν τις εξής διαστάσεις:

Τμήμα 1

$$D_i = 1480 \text{ mm}$$

$$D_o = 2490 \text{ mm}$$

$$L = 3060 \text{ mm}$$

$$e = 5 \text{ mm}$$

Με βάση τον ASME VIII DIV.1 η μέγιστη εσωτερική πίεση που μπορεί να αναπτυχθεί είναι η εξής:

$$S = \min 2/3 R_e; 2/7 R_m = 121,4 \text{ MPa}$$

$$J = 1 (\text{Joint efficiency})$$

$$\tan(\varphi) = \frac{(D_o - D_i)}{2 * L}; \varphi = 9,371 \text{ Deg} \quad (7.3)$$

$$P_{max} = \frac{2 S J e \cos(\varphi)}{D_o - 0.8 e \cos(\varphi)}; P_{max} = 0,241 \text{ MPa} = 2,41 \text{ Barg}$$

Ήδη παρατηρούμε ότι η μέγιστη εσωτερική πίεση που μπορεί να αναπτυχθεί είναι μικρότερη της πίεσης δοκιμής.

Τμήμα 2

$$D = 2490 \text{ mm}$$

$$e = 5 \text{ mm}$$

Με βάση τον ASME VIII DIV.1 η μέγιστη εσωτερική πίεση που μπορεί να αναπτυχθεί είναι η εξής:

$$S = \min 2/3 R_e; 2/7 R_m = 121,4 \text{ MPa}$$

$$J = 1 (\text{Joint efficiency})$$

$$P_{max} = \frac{2 S J e}{D - 0.8 e}; P_{max} = 0,488 \text{ MPa} = 4,88 \text{ Barg} \quad (7.4)$$

Η μέγιστη εσωτερική πίεση που μπορεί να αναπτυχθεί είναι μεγαλύτερη της πίεσης δοκιμής.

Με βάση τον ASME VIII DIV.1 η πίεση υδραυλική δοκιμής καθορίζεται ως  
 $P_T = 1,43 * P_D = 2,574 \text{ Barg}$

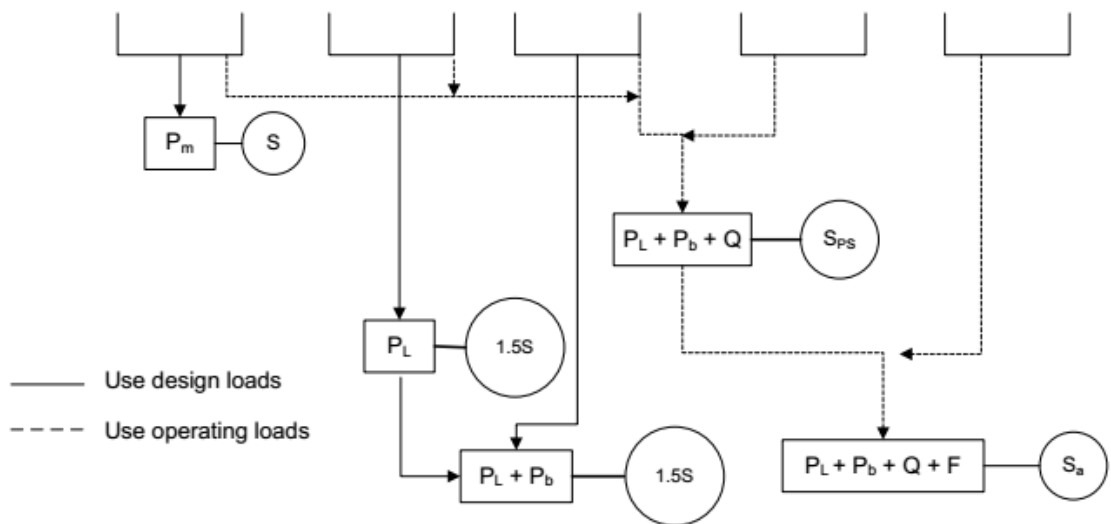
Από την παραπάνω ανάλυση που στηρίζεται μόνο στις μεμβρανικές τάσεις παρατηρούμε ότι η προκαθορισμένη πίεση υδραυλικής δοκιμής υπερβαίνει την υπολογιζόμενη από τον κώδικα. Συγχρόνως η κατασκευή έχει πολλά σημεία όπου αναμένονται υψηλές αναπτυσσόμενες τάσεις. Τα σημεία αυτά είναι τα εξής:

- Η εσωτερική πίεση είτε από την υδραυλική δοκιμή είτε κατά την λειτουργία έχει κατακόρυφη γραμμική κατανομή εξαιτίας του βάρους του νερού , είτε εξαιτίας του βάρους της σκόνης τσιμέντου. Αυτό βάζει όλη την κατασκευή σε κάμψη.
- Τα ανοίγματα των ανθρωποθυρίδων δεν είναι ενισχυμένα.
- Στην ένωση των διαφορετικών τμημάτων του κελύφους εξαιτίας του συμβιβαστού των παραμορφώσεων και των εντόνων ασυνεχειών των πρώτων παραγώγων της γεωμετρίας αναπτύσσονται τάσεις από τοπική κάμψη και διάτμησης του κελύφους.

## 8 ΑΡΧΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η παρούσα ανάλυση είναι μη-γραμμική ελαστική και γίνεται για να έχουμε μία πρώτη άποψη των περιοχών με πιθανές αστοχίες στο κέλυφος. Για τον χαρακτηρισμό των επικίνδυνων περιοχών θα χρησιμοποιηθούν οι επιτρεπτές τάσεις που ορίζει ο κανονισμός ASME VIII DIV.2 στην παράγραφο 5, Fig. 5.15.

Stress Category	Primary			Secondary Membrane plus Bending	Peak
	General Membrane	Local Membrane	Bending		
Description (For examples, see Table 5.2)	Average primary stress across solid section. Excludes discontinuities and concentrations. Produced only by mechanical loads.	Average stress across any solid section. Considers discontinuities but not concentrations. Produced only by mechanical loads.	Component of primary stress proportional to distance from centroid of solid section. Excludes discontinuities and concentrations. Produced only by mechanical loads.	Self-equilibrating stress necessary to satisfy continuity of structure. Occurs at structural discontinuities. Can be caused by mechanical load or by differential thermal expansion. Excludes local stress concentrations.	<ol style="list-style-type: none"> <li>Increment added to primary or secondary stress by a concentration (notch).</li> <li>Certain thermal stresses which may cause fatigue but not distortion of vessel shape.</li> </ol>
Symbol	$P_m$	$P_L$	$P_b$	$Q$	$F$



Σχήμα 8.1

Εδώ θεωρούμε καλό να εξηγήσουμε πως καθορίζει τις επιτρεπόμενες τάσεις σε ένα κέλυφος ο χρησιμοποιούμενος κανονισμός με βάση το είδος των αναπτυσσόμενων τάσεων και την αιτία που τις προκαλεί.

Κατά αρχήν υπάρχει άμεση διάκριση των τάσεων που προκύπτουν από την ύπαρξη μηχανικών φορτίων – primary – και αυτών που προκύπτουν από αυτεντατικές καταστάσεις όπως η ικανοποίηση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων ή τά θερμικά φορτία (secondary). Ο δεύτερος διαχωρισμός στις primary τάσεις είναι η φύση των τάσεων που μπορεί να είναι είτε

μεμβρανικές είτε καμπτικές. Με βάση λοιπόν τα παραπάνω υφίστανται οι εξής έλεγχοι επιτρεπομένων τάσεων για τα φορτία σχεδιασμού:

- $P_m \leq S$
- $P_L + P_b \leq 1.5 S$

όπου  $S = \min\{2/3 R_e ; 2/7 R_m\} = 121,4 \text{ Mpa}$ , για την υδραυλική δοκιμή ορίζεται σαν  $S = 0,9 * R_e = 234 \text{ Mpa}$ .

Να σημειωθεί η αναφορά σε τάσεις γενικά υποδηλώνει την ισοδύναμη τάση Von Misses Stress.

Οι εξεταζόμενοι συνδυασμοί φόρτισης είναι οι εξής:

- $COMB1 = D + C$
- $COMB2 = D + C + OP$
- $COMB3 = D + W + HP$

όπου:

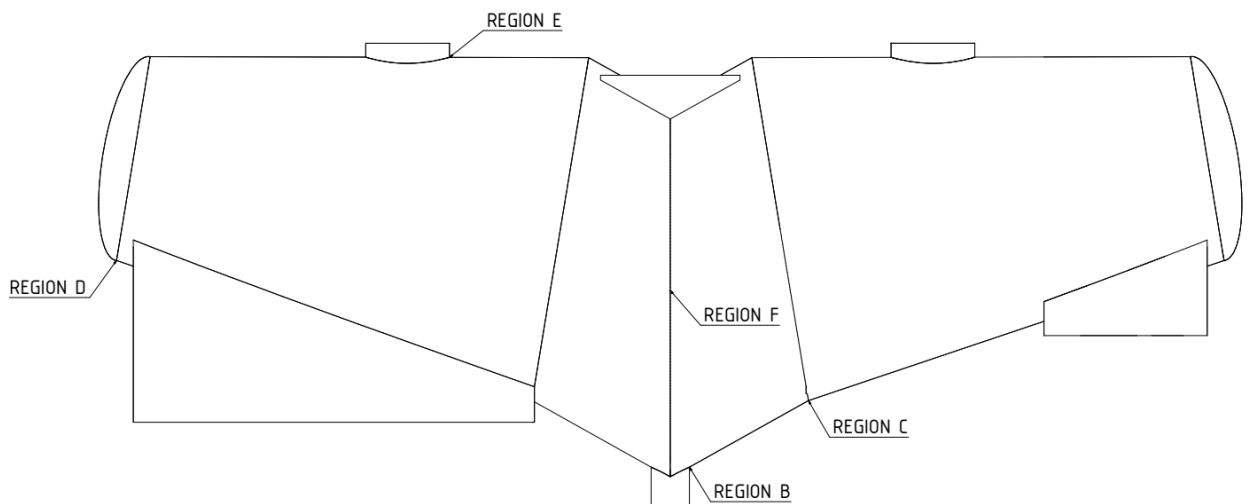
D: Ίδιον βάρος

C: Σκόνη τσιμέντου

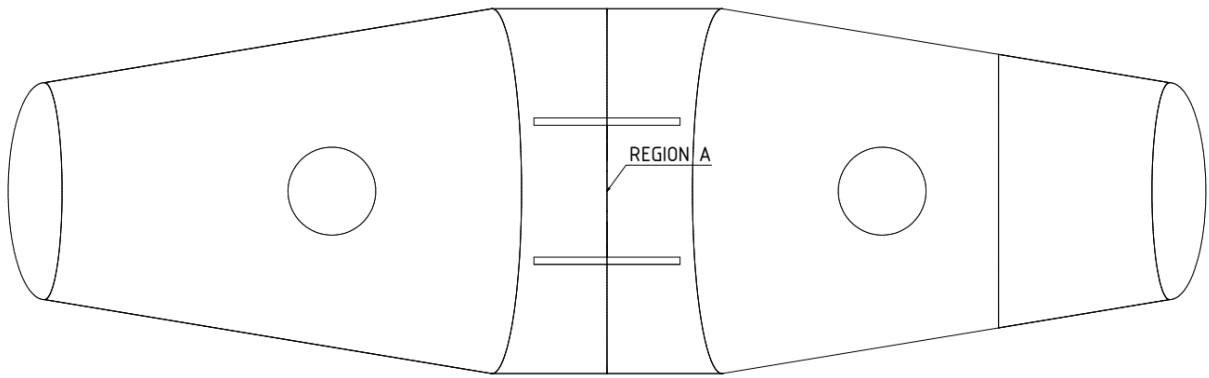
OP: Πίεση Σχεδιασμού (1.8 bar)

W: Νερό υδραυλικής δοκιμής

HP: Πίεση υδραυλικής δοκιμής (3 bar)



Σχήμα 8.2



Σχήμα 8.3

Στα σχήματα 8.2-8.3 εντοπίζονται οι περιοχές που θα καταγραφούν οι ισοδύναμες τάσεις και που θεωρούνται επικίνδυνες για αστοχία.

### 8.1 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

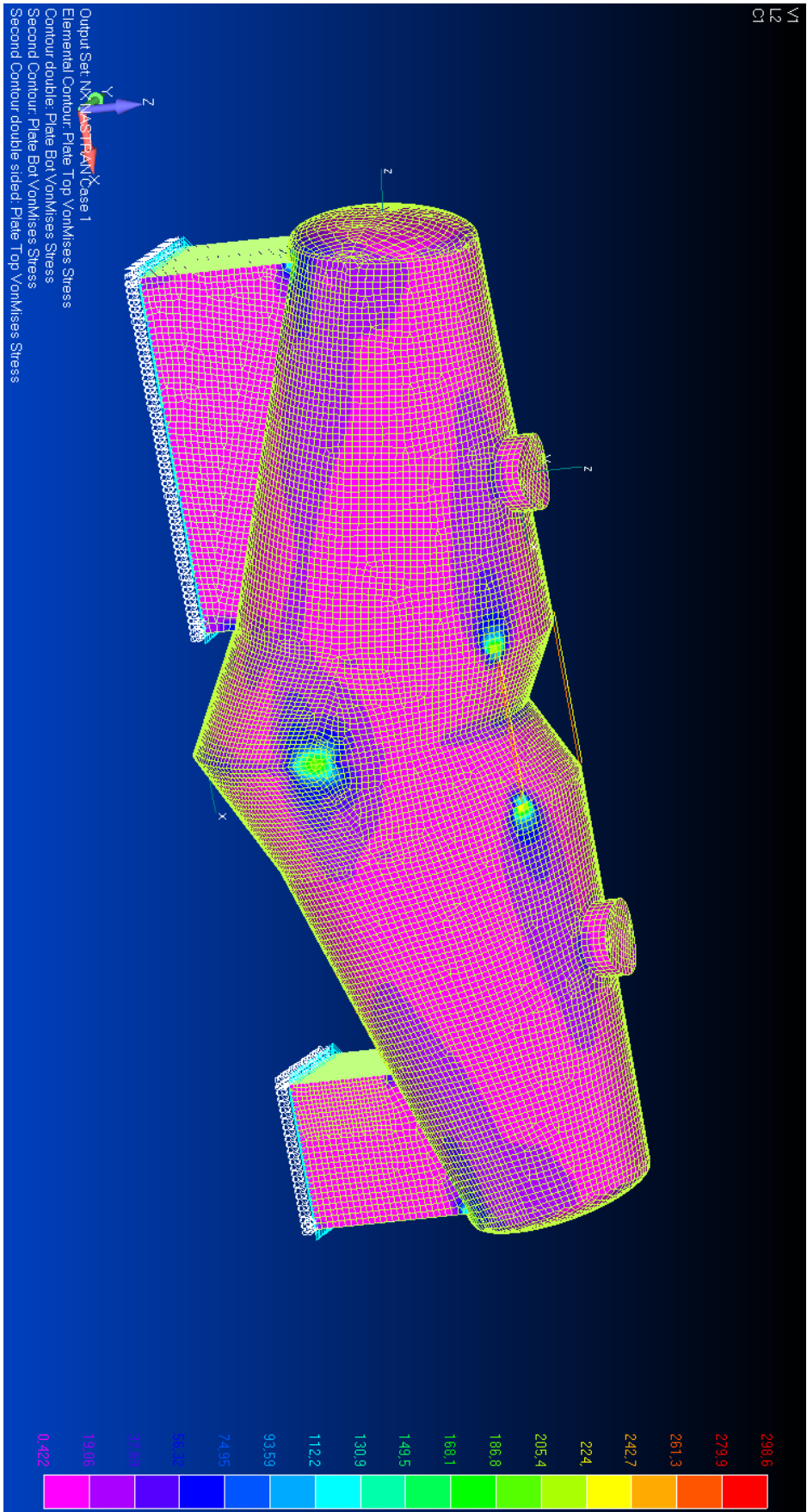
Για την ελαστική μη-γραμμική ανάλυση του κελύφους με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό NASTRAN. Η γεωμετρία αναλύθηκε με την χρήση 4-κομβων γραμμικών shell elements τύπου Midlin-Reisner. Το μοντέλο αποτελείται από 31636 στοιχεία και 30992 κόμβους. Το μέσο μέγεθος των στοιχείων είναι 50 mm. Το μέγεθος των στοιχείων προέκυψε από διαδικασία σύγκλισης με κριτήριο η μεταβολή των τάσεων αλλά και των μετατοπίσεων από την μία διακριτοποίηση σε σχέση με την επόμενη να είναι μικρότερο του 1%.

### 8.2 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ COMB1

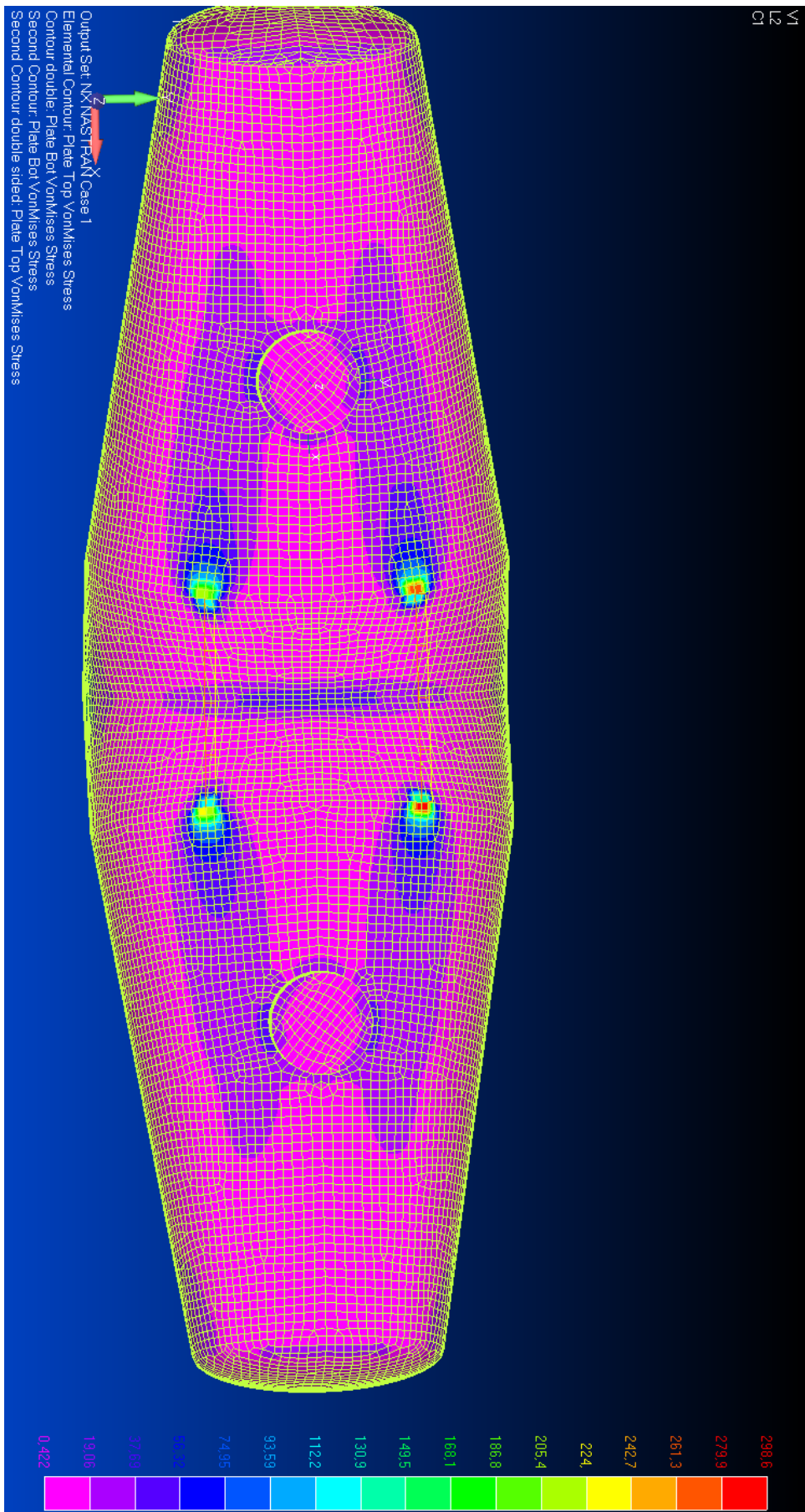
Για το συνδυασμό COMB1 προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

REGION	Sv (MPa)	ALLOWABLE (MPa)	STRESS
A	55,638	182,1	
B	75,906	182,1	
C	19,060	182,1	
D	48,693	182,1	
E	49,079	182,1	

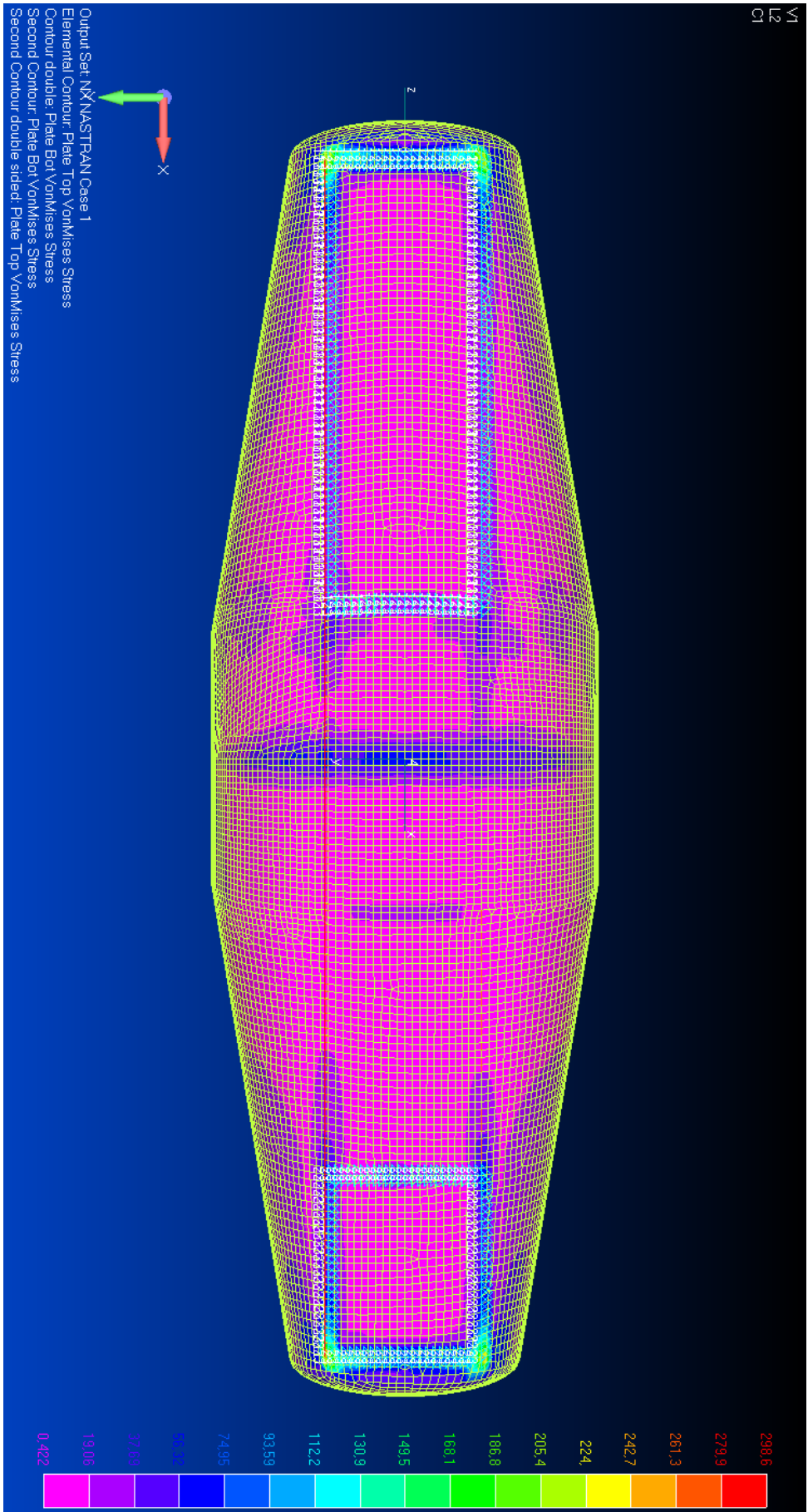




Σχήμα 8.3 Von Misses Stress



Σχήμα 8.4 Von Misses Stress

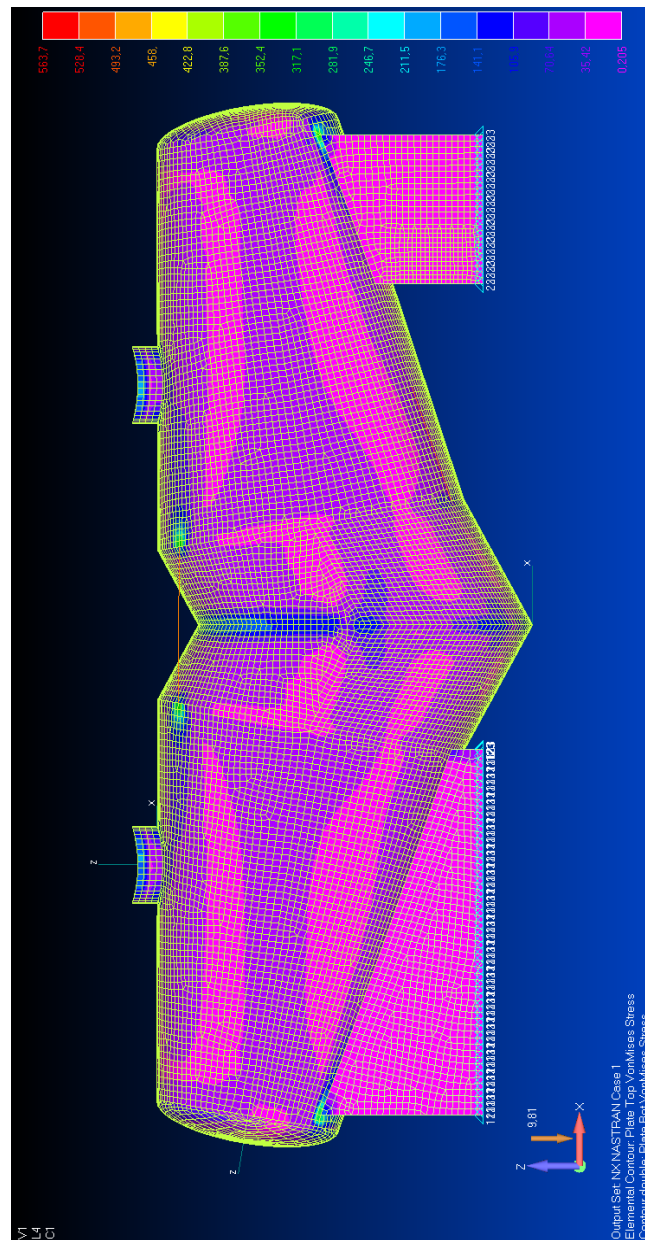


Σχήμα 8.5 Von Mises Stress

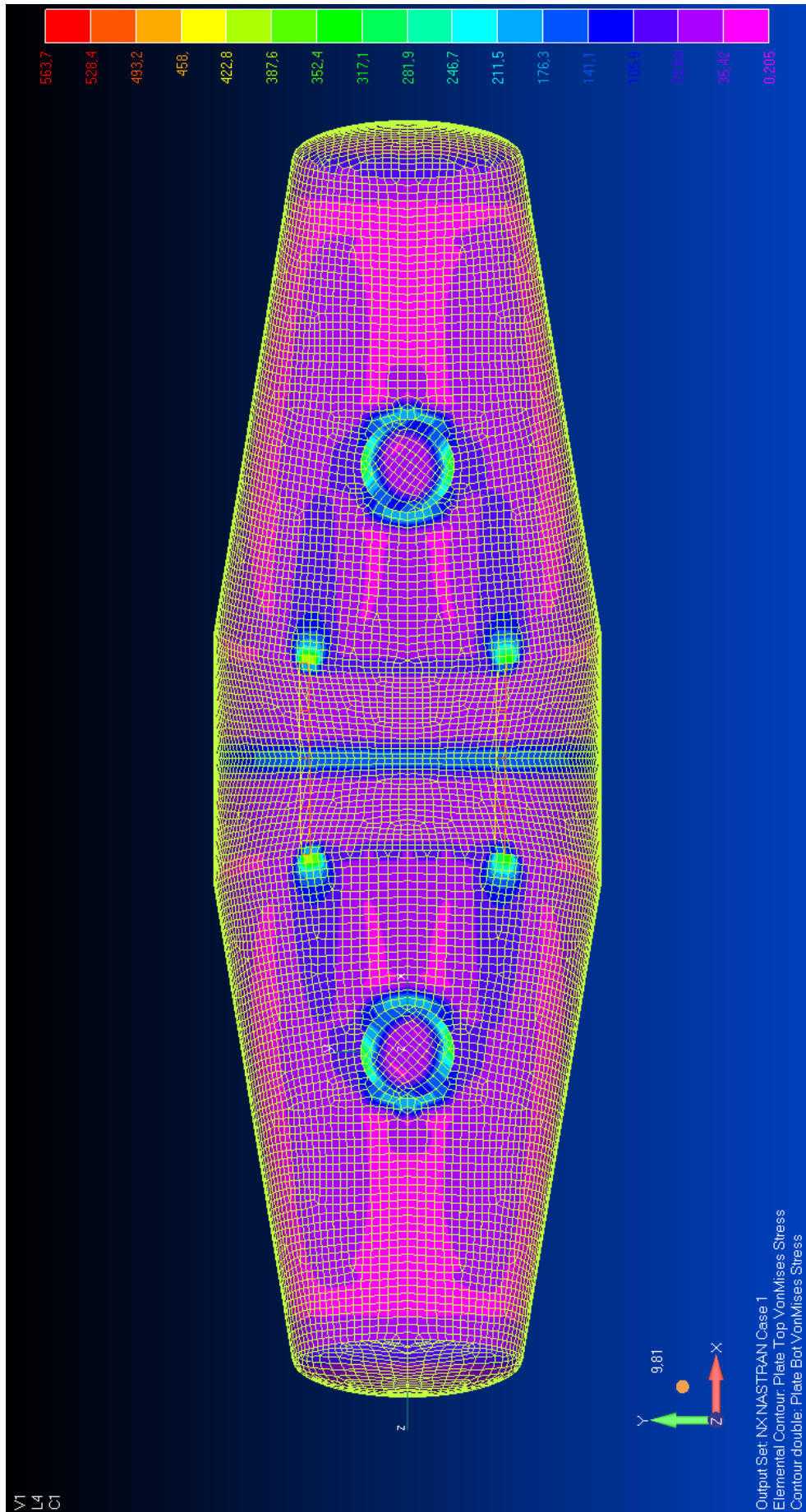
### 8.3 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ COMB2

Για το συνδυασμό COMB2 προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

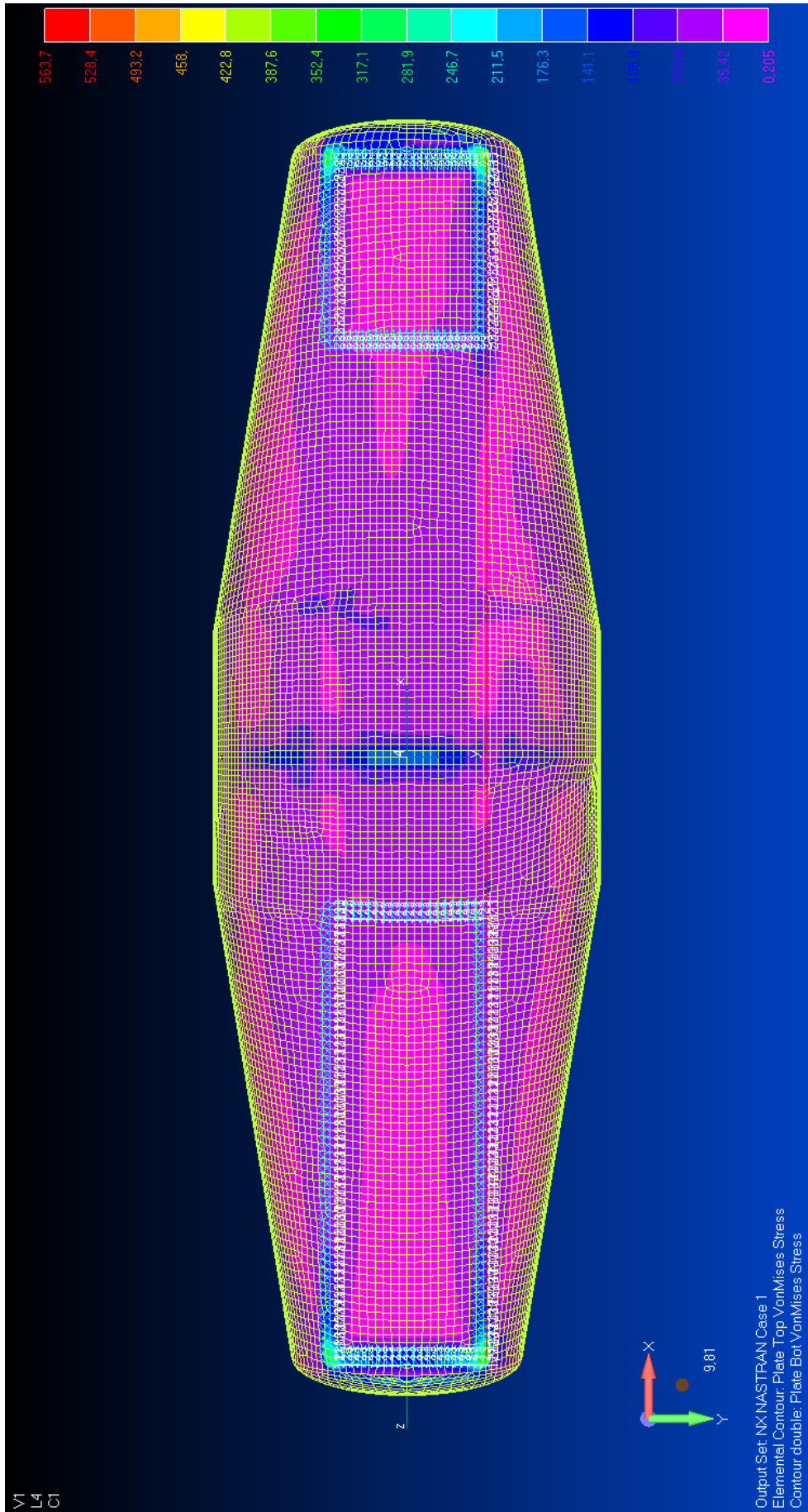
REGION	Sv (MPa)	ALLOWABLE STRESS (MPa)
A	141,1	182,1
B	148,3	182,1
C	70,64	182,1
D	105,5	182,1
E	95,03	182,1



Σχήμα 8.6 Von Misses Stress



Σχήμα 8.7 Von Misses Stress

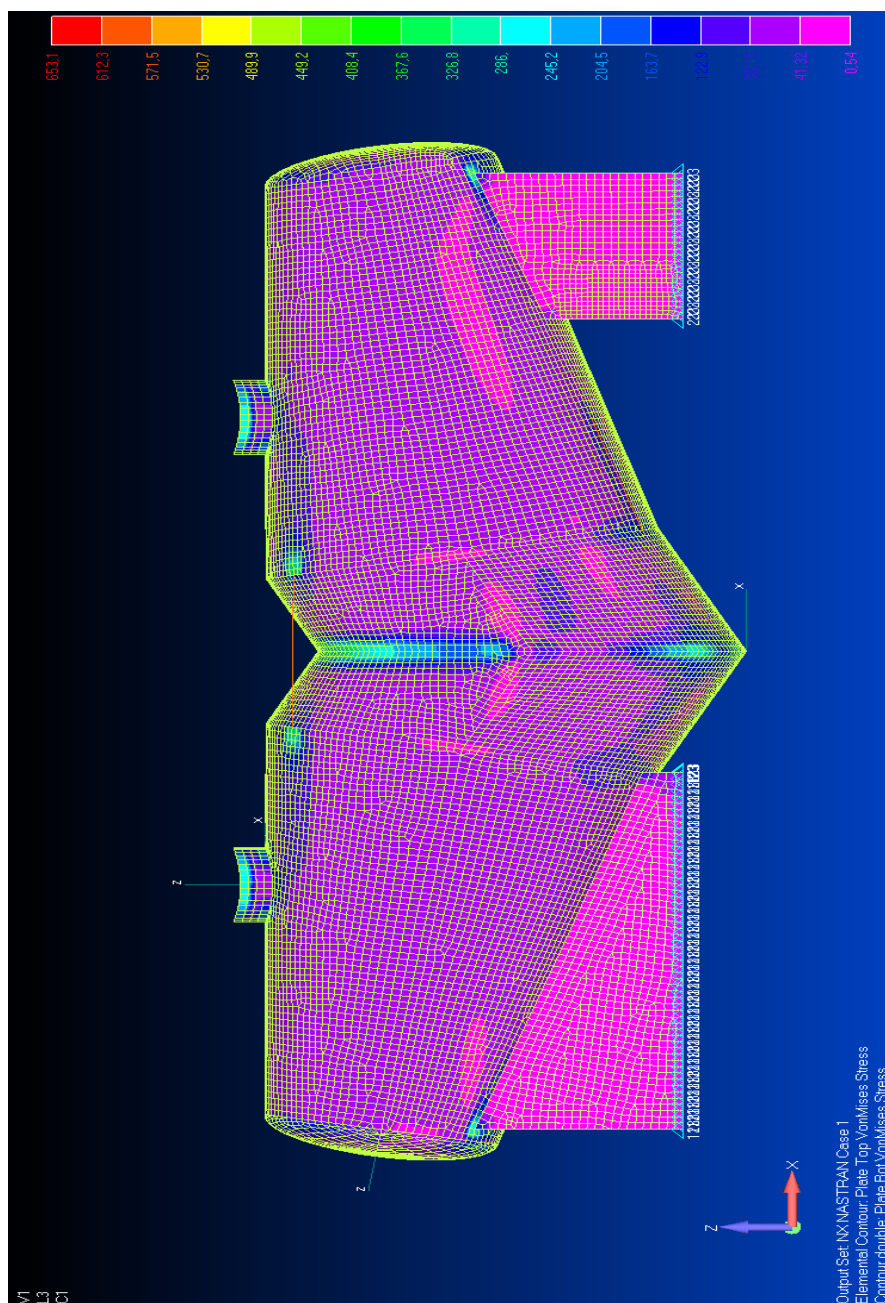


Σχήμα 8.8 Von Misses Stress

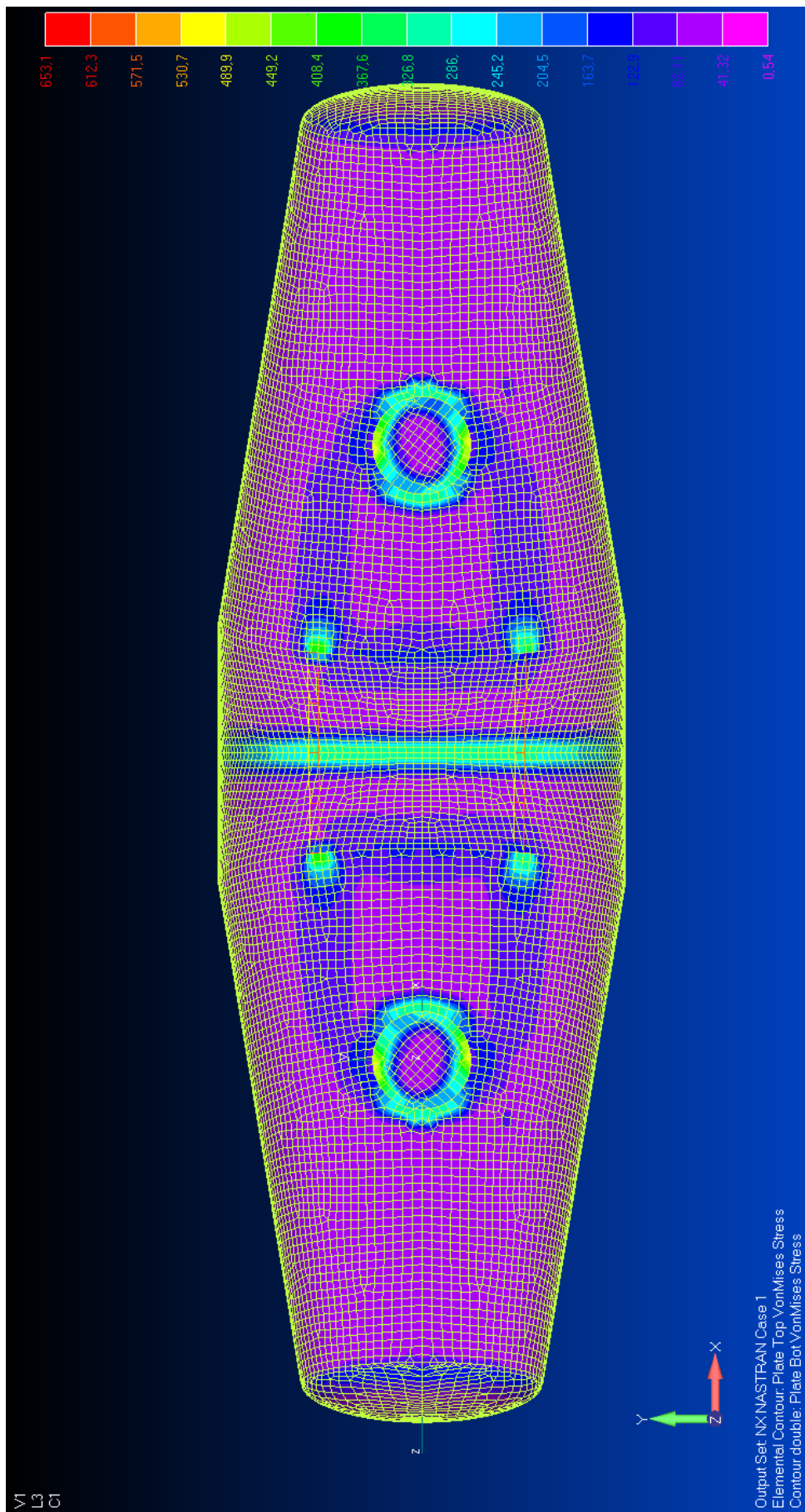
### 8.4 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ COMB3

Για το συνδυασμό COMB3 προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

REGION	Sv (MPa)	ALLOWABLE (MPa)	STRESS
A	326,8	234	
B	296,2	234	
C	163,7	234	
D	226,2	234	
E	342,3	234	

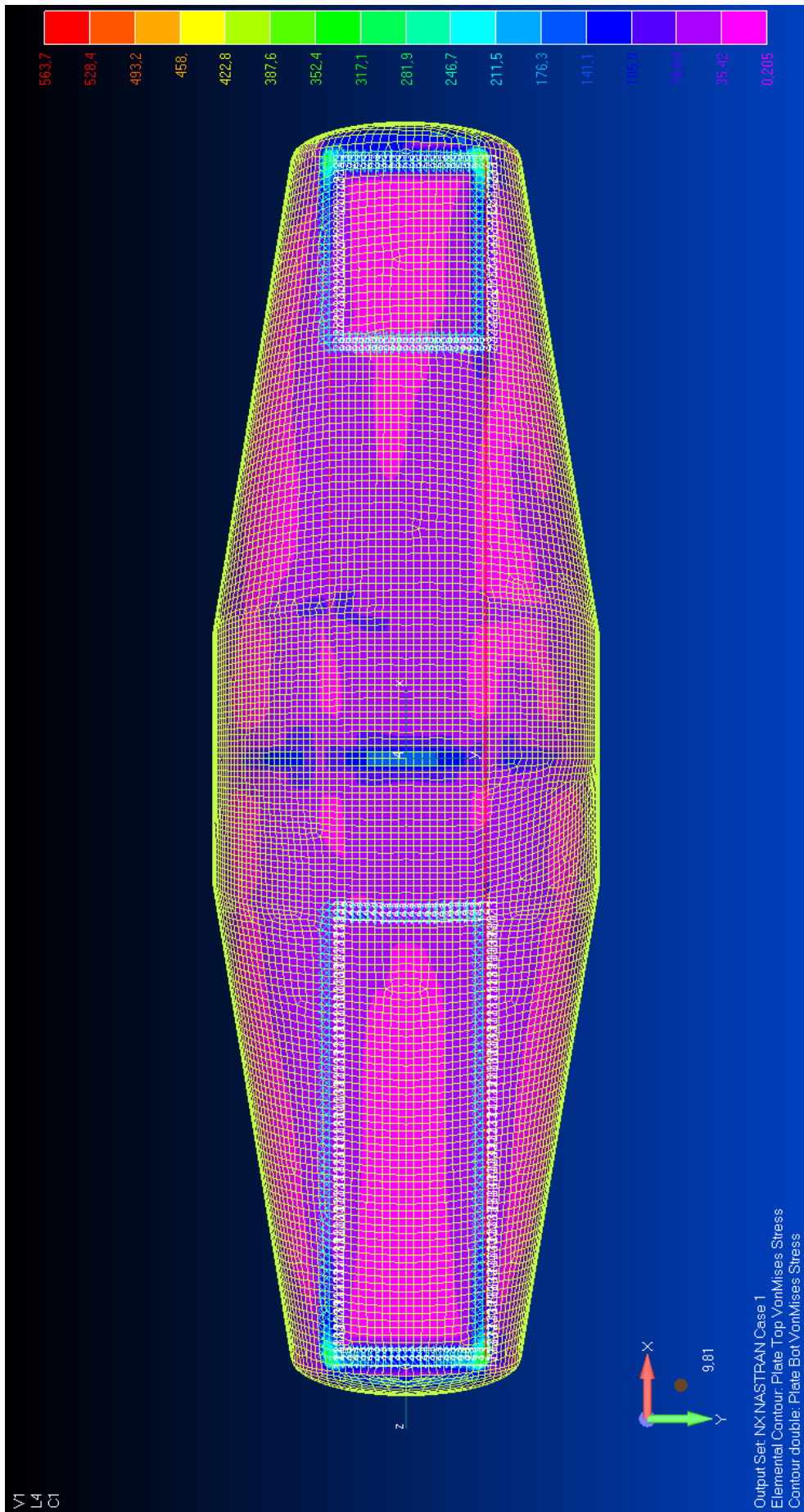


Σχήμα 8.9 Von Misses Stress



Σχήμα 8.10 Von Mises Stress





Σχήμα 8.11 Von Mises Stress

## **8.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΠΡΟΚΥΠΤΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι κατά την προκαθορισμένη υδραυλική δοκιμή έχουμε υπέρβαση επιτρεπομένων τάσεων αλλά και του ορίου διαρροής στις περιοχές A, B, E. Παρατηρούμε ότι η ζώνη υπέρβασης του ορίου διαρροής στην περιοχή A είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν στην περιοχή B. Αυτό το γεγονός σημαίνει ότι αν επέλθει πλαστικοποίηση τότε έχουμε μετάθεση του ουδέτερου άξονα προς τα πάνω με αποτέλεσμα την αύξηση της πλαστικοποιημένης ζώνης στην περιοχή B.

Όπως γίνεται αντιληπτό οι αστοχίες που θα προκύψουν κατά την υδραυλική δοκιμή θα συμβούν σε κρίσιμες περιοχές της διατομής, θα έχουν μεγάλη έκταση και θα αλλάξουν την συμπεριφορά της κατασκευής κατά την λειτουργία. Κατά συνέπεια ενώ η κατασκευή παραμένει ασφαλής κατά την λειτουργία η υδραυλική δοκιμή προκαλεί βλάβες που στο μέλλον θα οδηγήσουν σε πλήρη κατάρρευση της.

## 9 ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Με βάση τα συμπεράσματα της ελαστικής ανάλυσης προχωράμε σε μη γραμμική ανάλυση ως προς την γεωμετρία και το υλικό. Το υλικό θεωρείται ελαστικό – πλήρως πλαστικό ενώ το όλο προσομοίωμα θα υπολογιστεί λαμβάνοντας υπόψη την θεώρηση των μεγάλων μετατοπίσεων.

Το λογισμικό που χρησιμοποιείται είναι το ADINA. Η γεωμετρία αναλύθηκε με την χρήση 4-κομβων γραμμικών shell elements τύπου Midlin-Reisner και reduced integration. Το μοντέλο αποτελείται από 76929 στοιχεία και 77778 κόμβους. Το μέσο μέγεθος των στοιχείων είναι 25 mm. Το μέγεθος των στοιχείων προέκυψε από διαδικασία σύγκλισης με κριτήριο η μεταβολή των τάσεων αλλά και των μετατοπίσεων από την μία διακριτοποίηση σε σχέση με την επόμενη να είναι μικρότερο του 1% (σε ελαστική ανάλυση).

Οι εξεταζόμενοι συνδυασμοί φόρτισης είναι οι εξής:

- COMB1=D+W+HP
- COMB2=D+C+OP
- COMB3=D

όπου:

D: Ίδιον βάρος

C: Σκόνη τσιμέντου

OP: Πίεση Σχεδιασμού

W: Νερό υδραυλικής δοκιμής

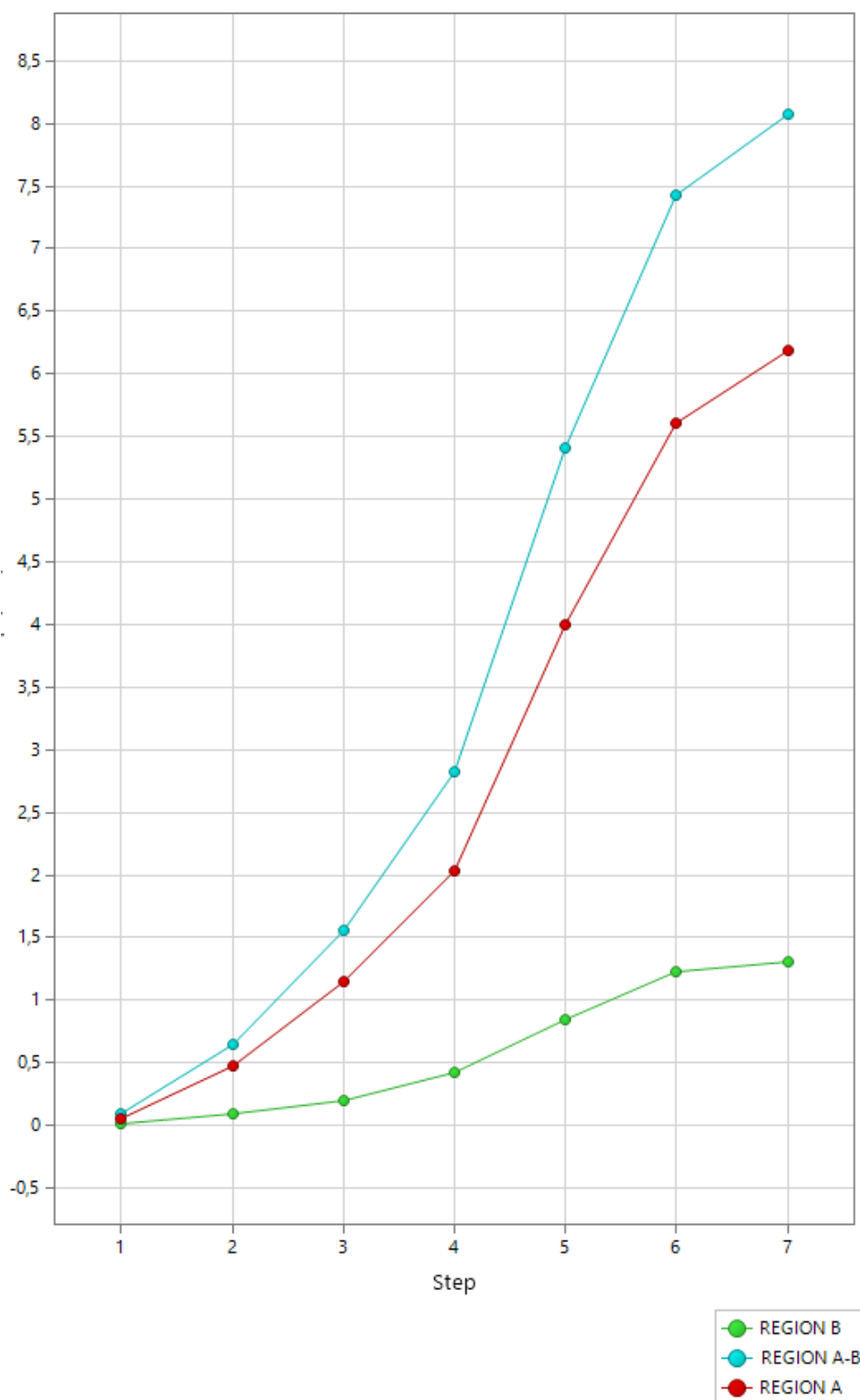
HP: Πίεση υδραυλικής δοκιμής

Ο συνδυασμός φορτίσεων 3 αναφέρεται στην αποφόρτιση από τους συνδυασμούς 1 και 2.

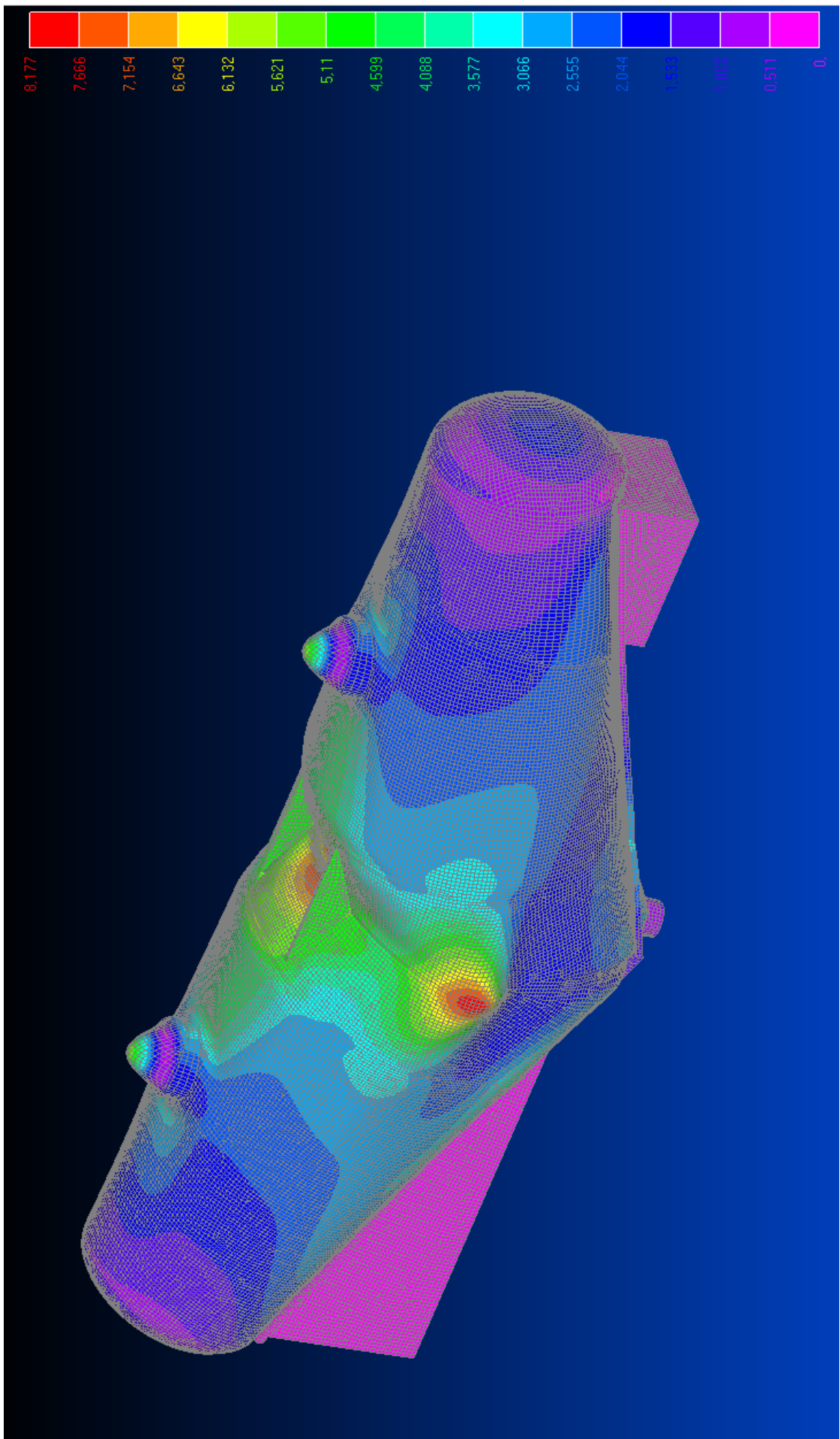
Οι χαρακτηριστικές περιοχές ελέγχου τάσεων και μετατοπίσεων είναι αυτές του σχήματος 8.2.

### 9.1 ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΔΟΚΙΜΗ-ΦΟΡΤΙΣΗ

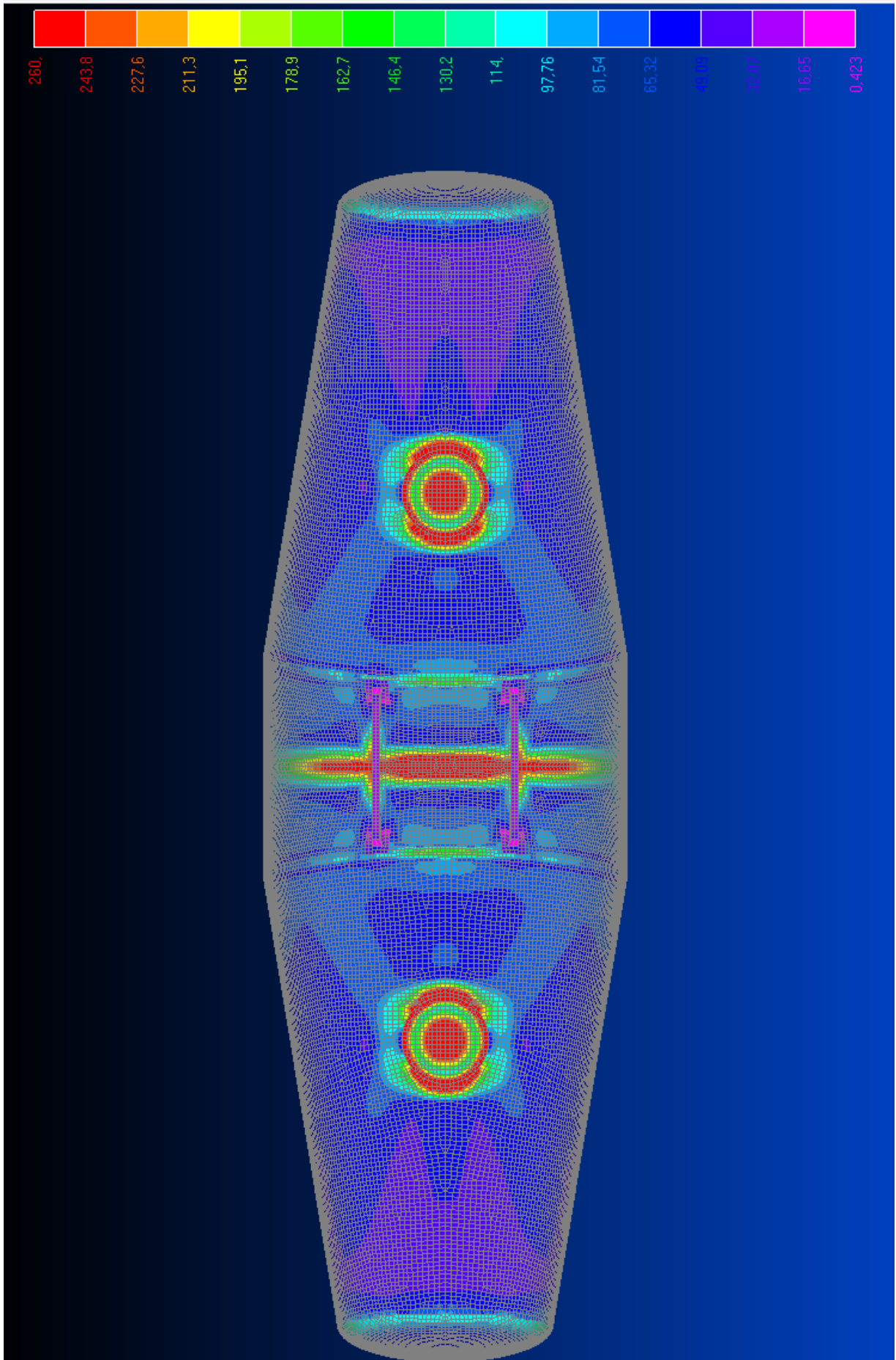
Στις επόμενες παραγράφους και σχήματα θα δοθούν τα αποτελέσματα της ανάλυσης για την υδραυλική δοκιμή του κελύφους ( πίεση δοκιμής και περιεχόμενο νερό COMP1).



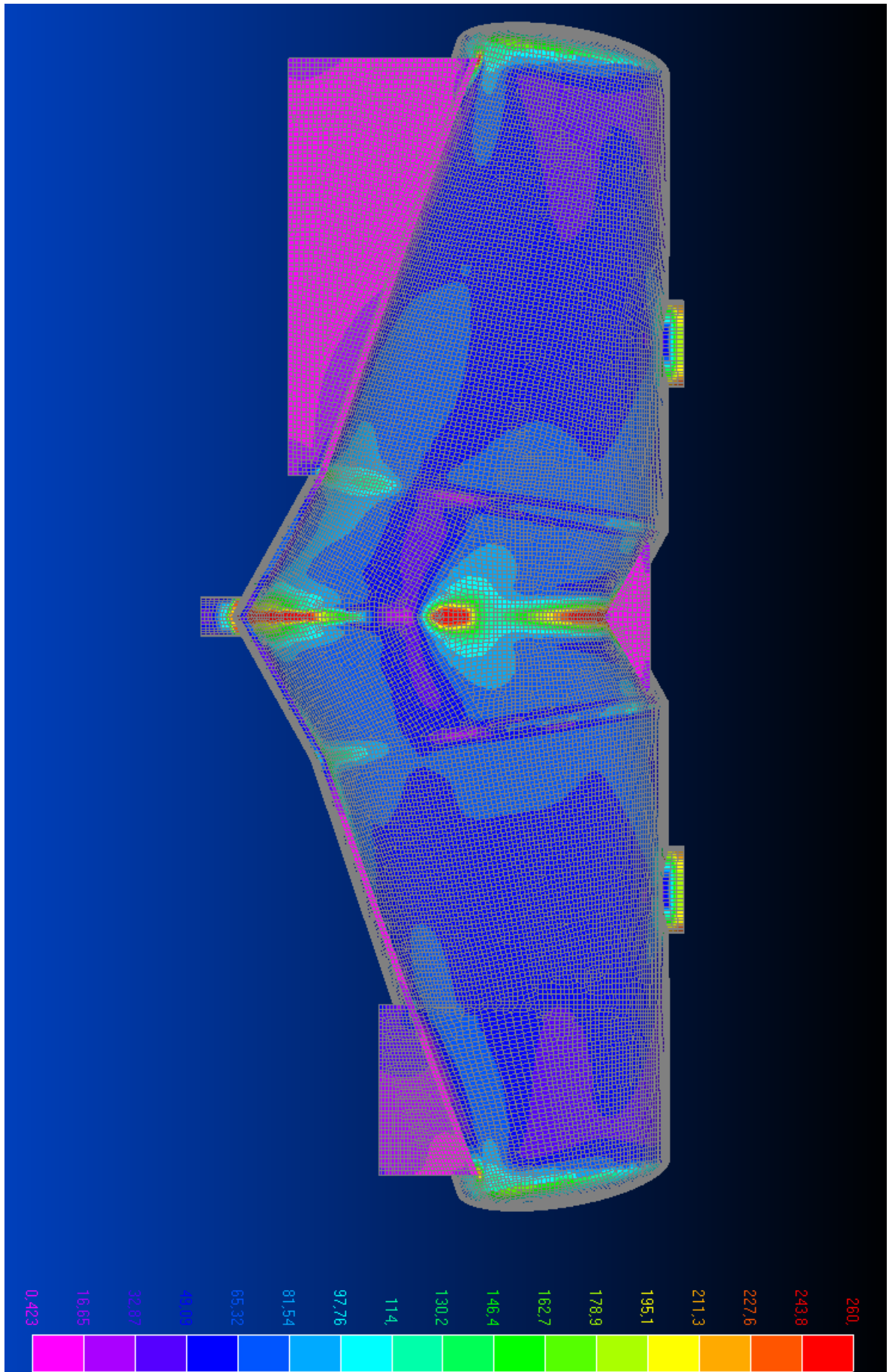
Σχήμα 9.1 Μετατοπίσεις χαρακτηριστικών σημείων ανά βήμα υπολογισμού (mm)



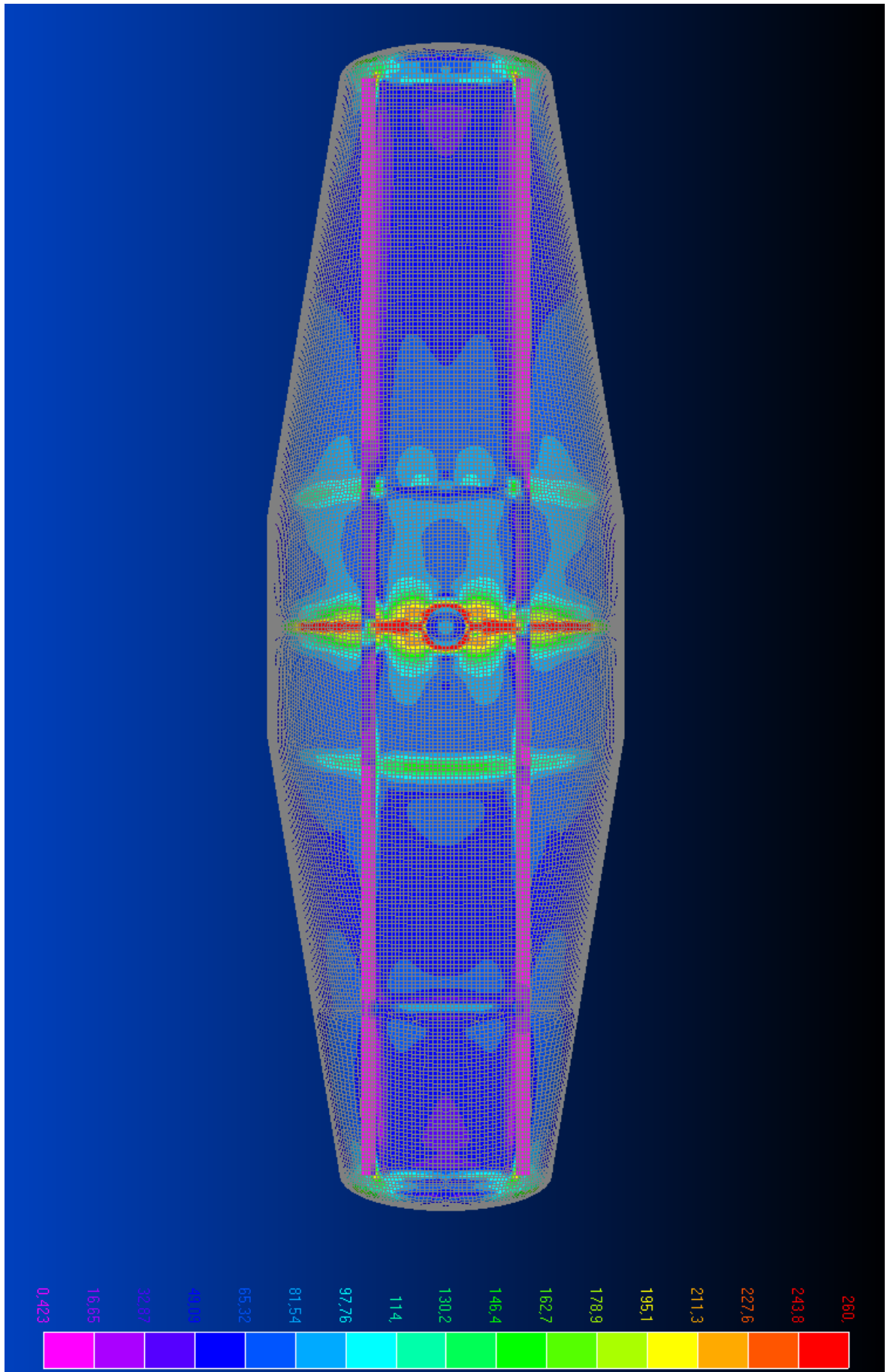
Σχήμα 9.2 Τελικές μετατοπίσεις (mm)



Σχήμα 9.3 Von Misses Stress (MPa)

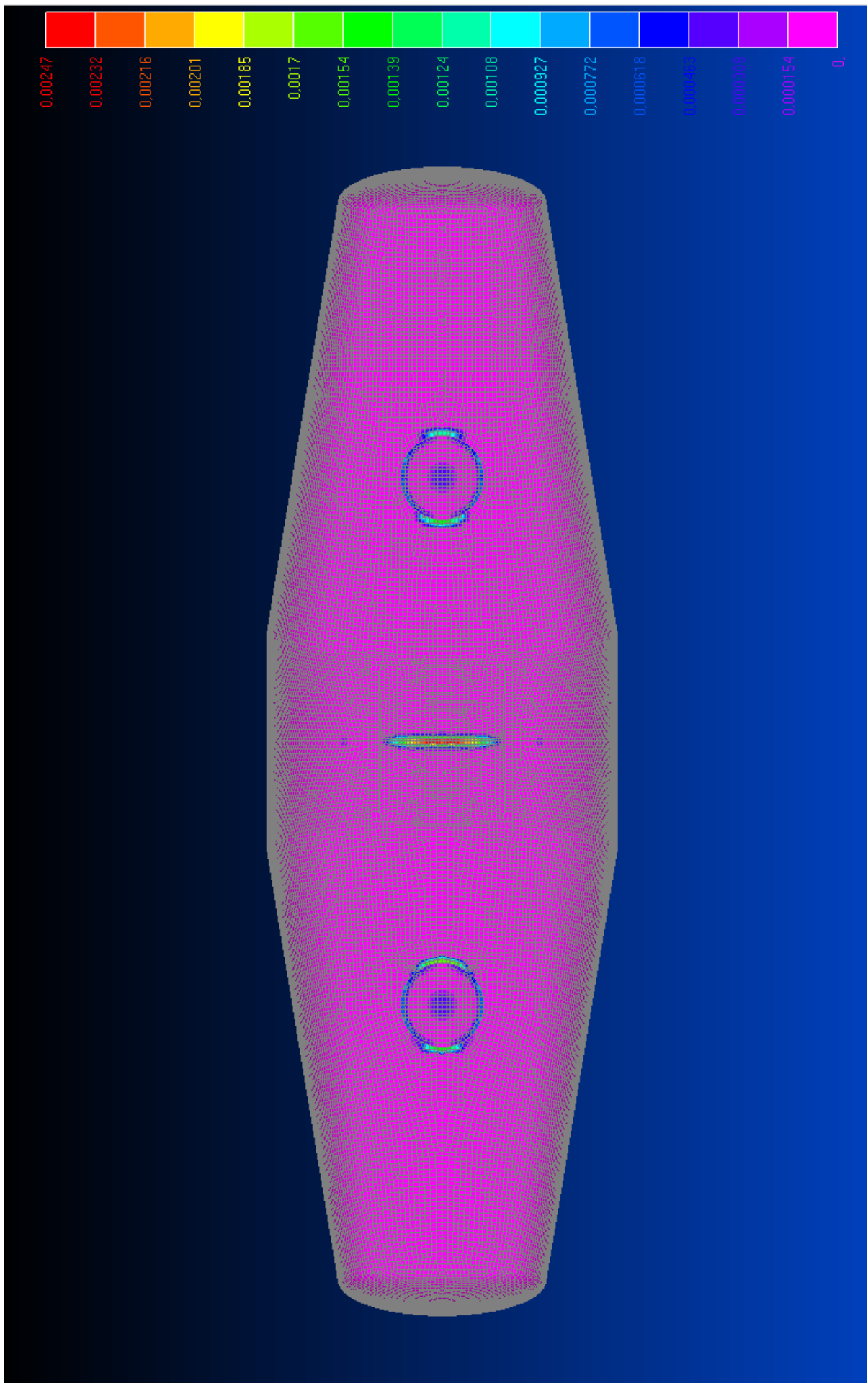


Σχήμα 9.4 Von Misses Stress (MPa)

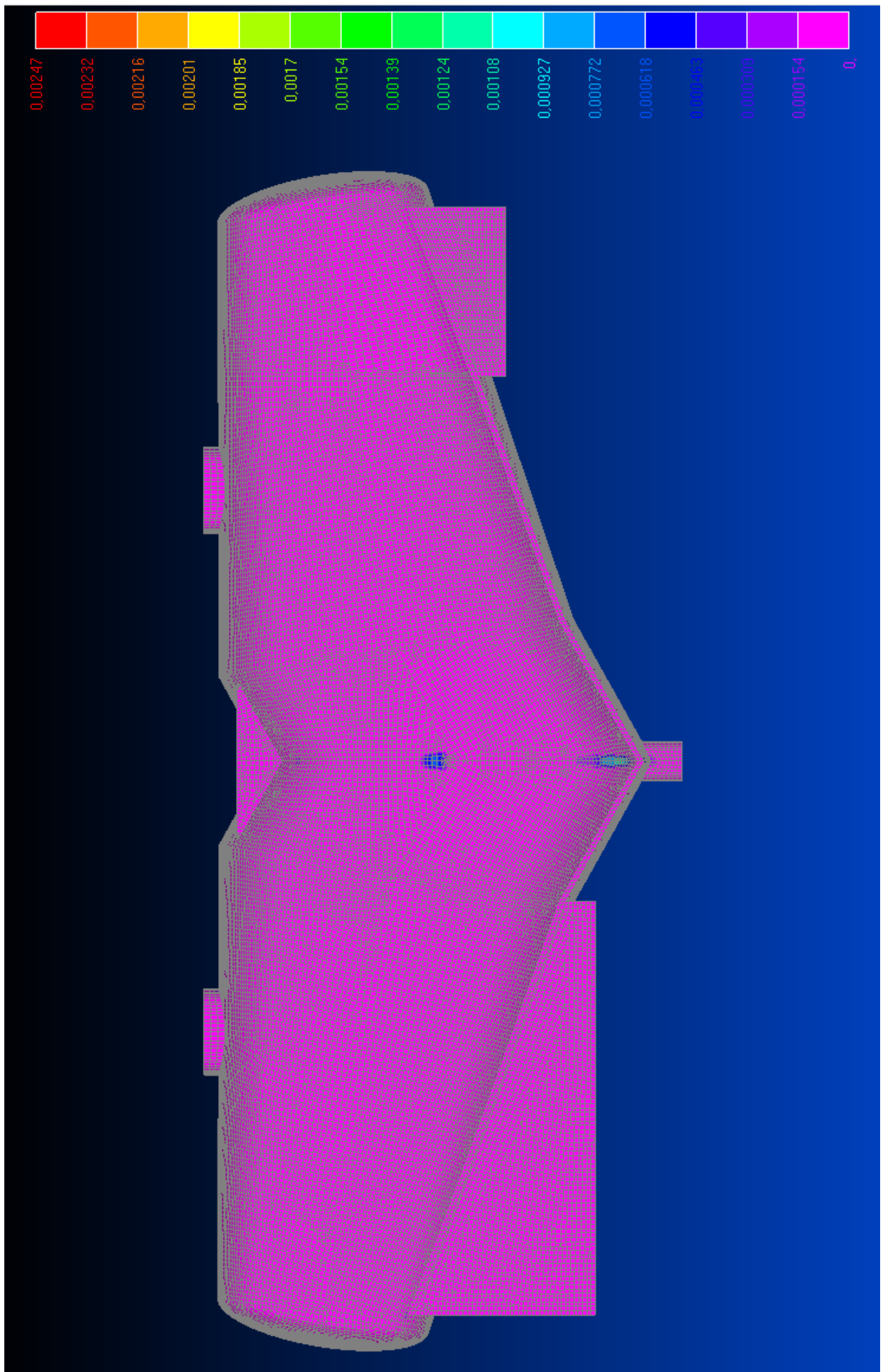


Σχήμα 9.5 Von Misses Stress (MPa)

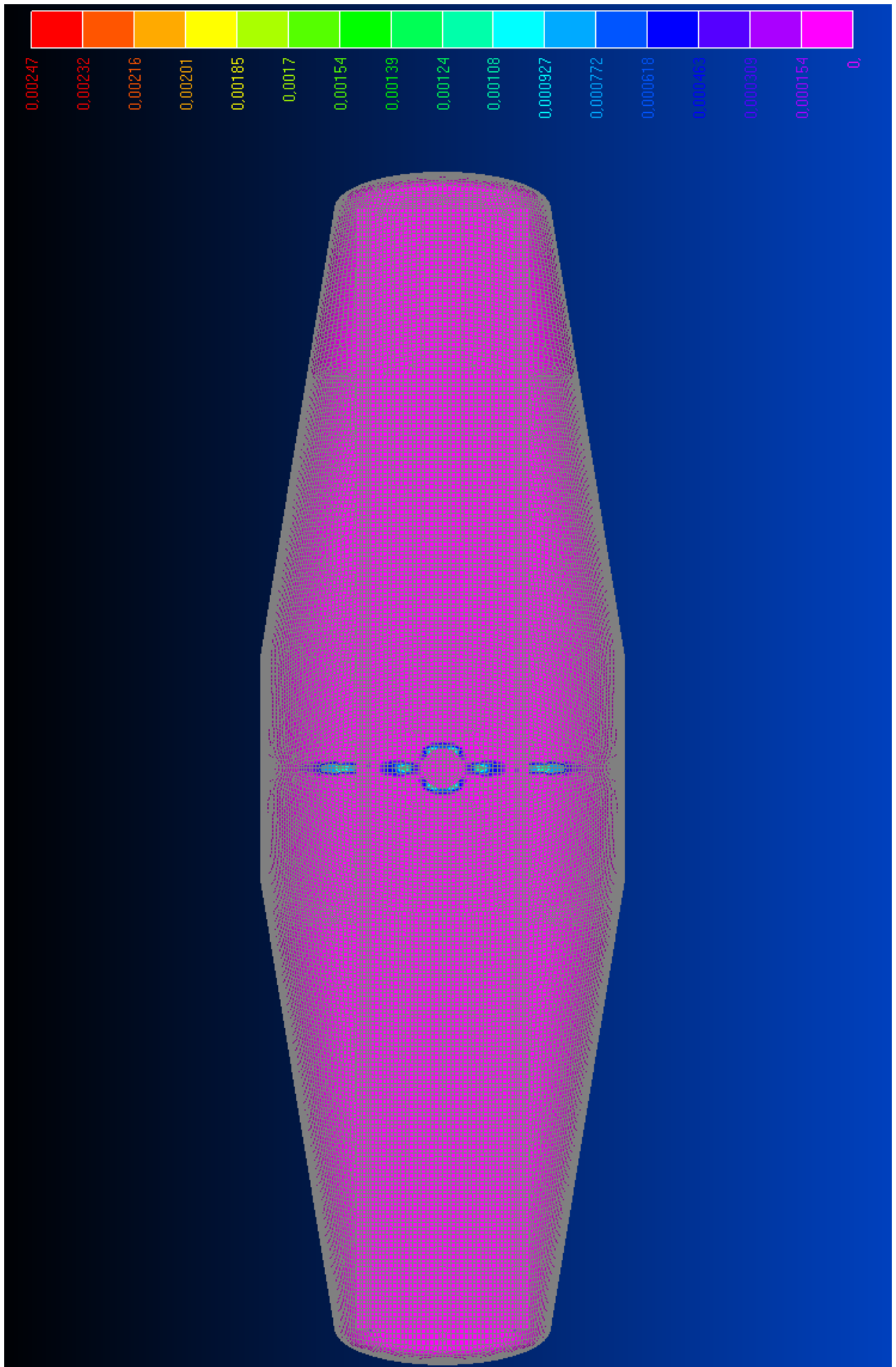




Σχήμα 9.6 Von Mises Plastic Strain



Σχήμα 9.7 Von Misses Plastic Strain



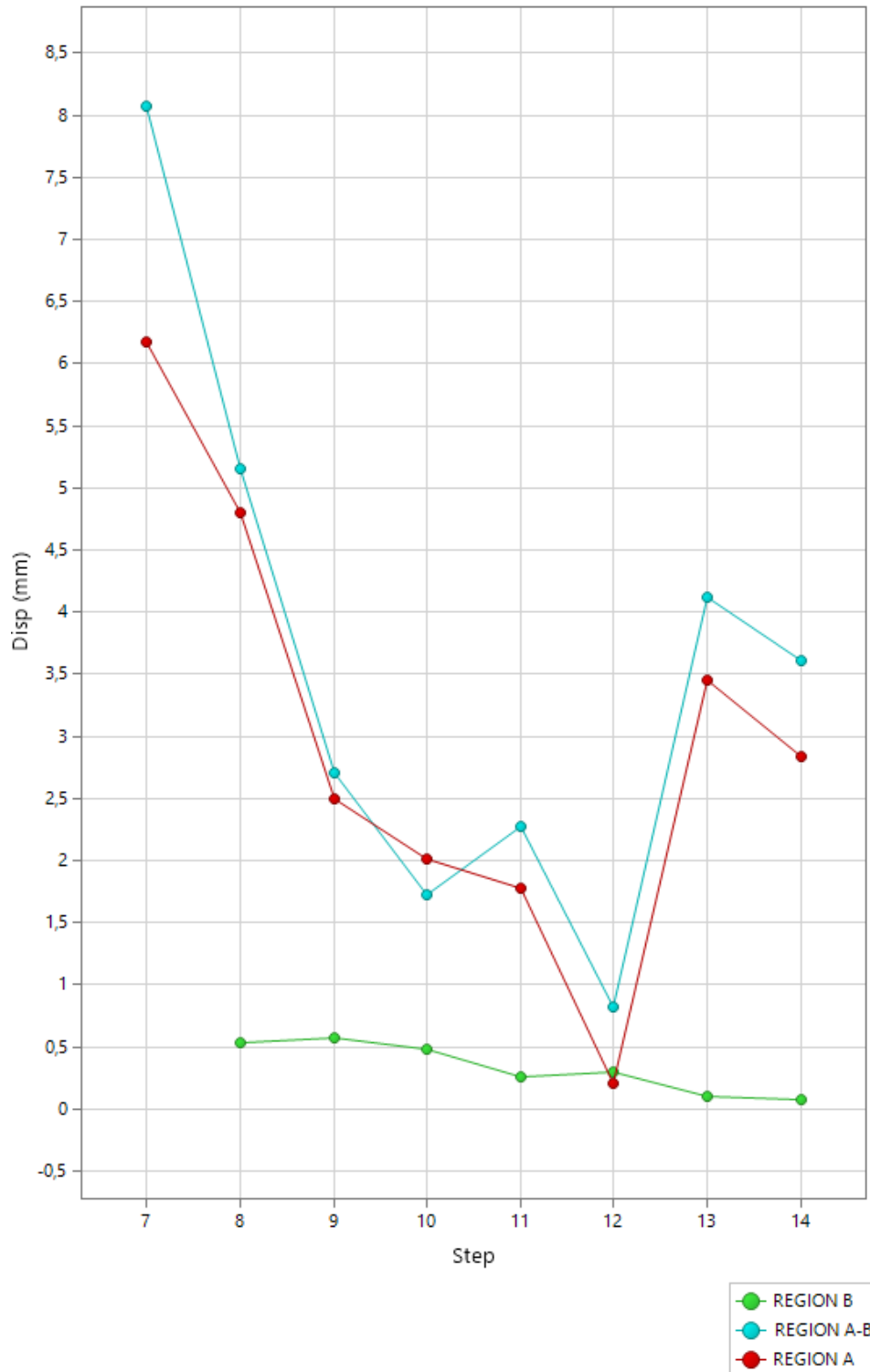
Σχήμα 9.8 Von Misses Plastic Strain

Από τα παραπάνω γραφήματα εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

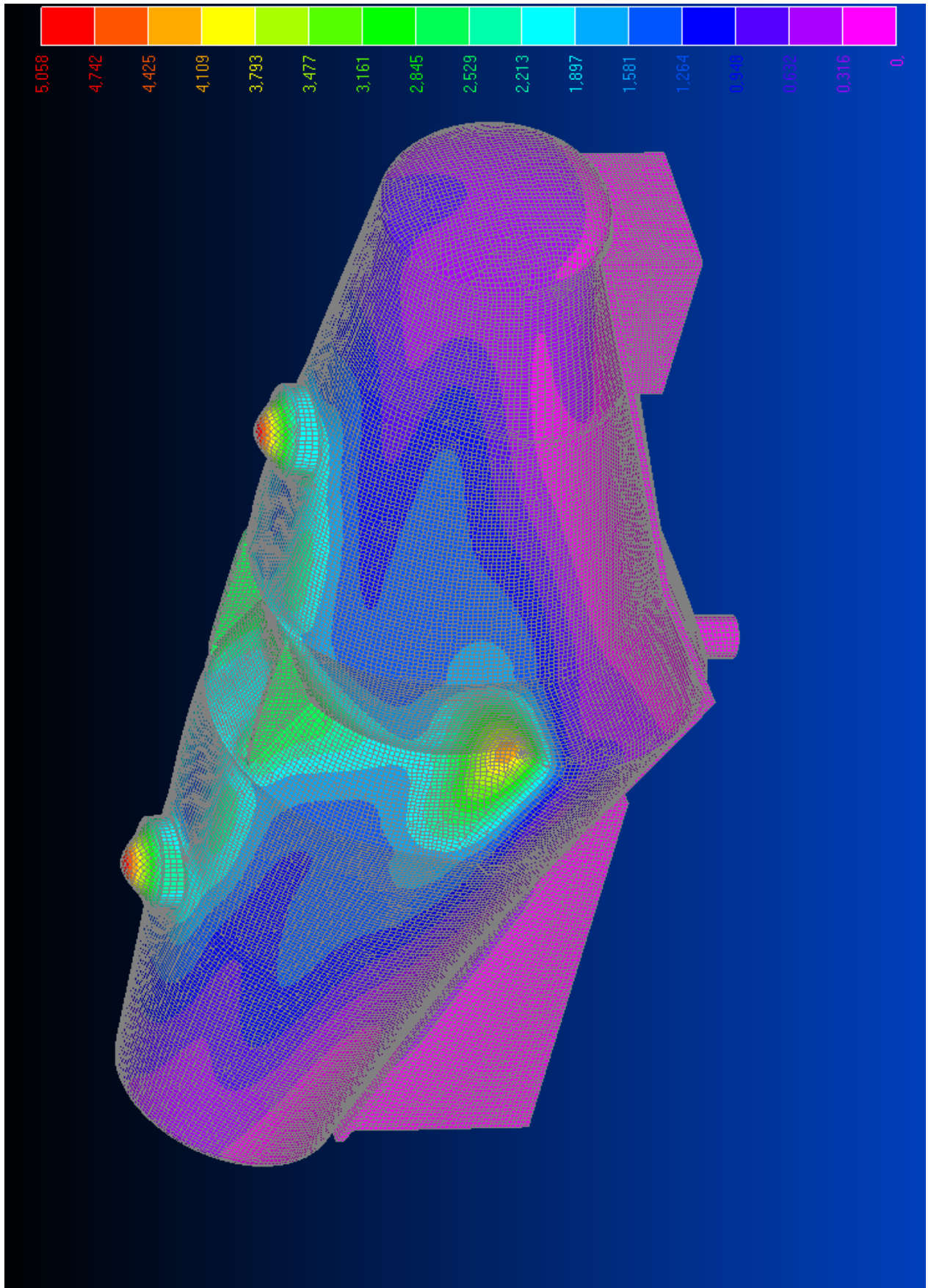
1. Οι περιοχές A,B,E διαρρέουν και κομμάτι αυτών προχωρά στην πλαστική περιοχή με μέγιστη πλαστική παραμόρφωση 0.247%.
2. Στα καπάκια των ανθρωποθυρίδων αναπτύσσονται υψηλές τάσεις – διαρροή - και μετατοπίσεις με αποτέλεσμα να μην εξασφαλίζεται η στεγανότητα.
3. Το εύρος ζώνης διαρροής στις κρίσιμες περιοχές είναι, περιοχή A 90 mm, περιοχή B 80 mm, περιοχή E 80 mm.
4. Στους πάτους αναπτύσσεται υψηλή τάση 162.7 Mpa χωρίς όμως την εμφάνιση φαινομένων buckling.
5. Μια περιοχή που δεν είχε φανεί κρίσιμη στην ελαστική ανάλυση αλλά στην παρούσα ανάλυση ανέπτυξε διαρροή είναι αυτή που αντιστοιχεί στο μέσον του ιδεατού ευθυγράμμου τμήματος AB. Σε αυτή την περιοχή έχουμε έντονη ασυνέχεια  $C^1$ , των καμπυλοτήτων των κελυφών. Κατά συνέπεια εμφανίζονται πρόσθετες - των μεμβρανικών τάσεων - τάσεις εξαιτίας της απαίτησης του συμβιβαστού των μετατοπίσεων. Η πλαστική παραμόρφωση που εμφανίζεται σε αυτή την περιοχή είναι 0,07%.

## 9.2 ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΔΟΚΙΜΗ

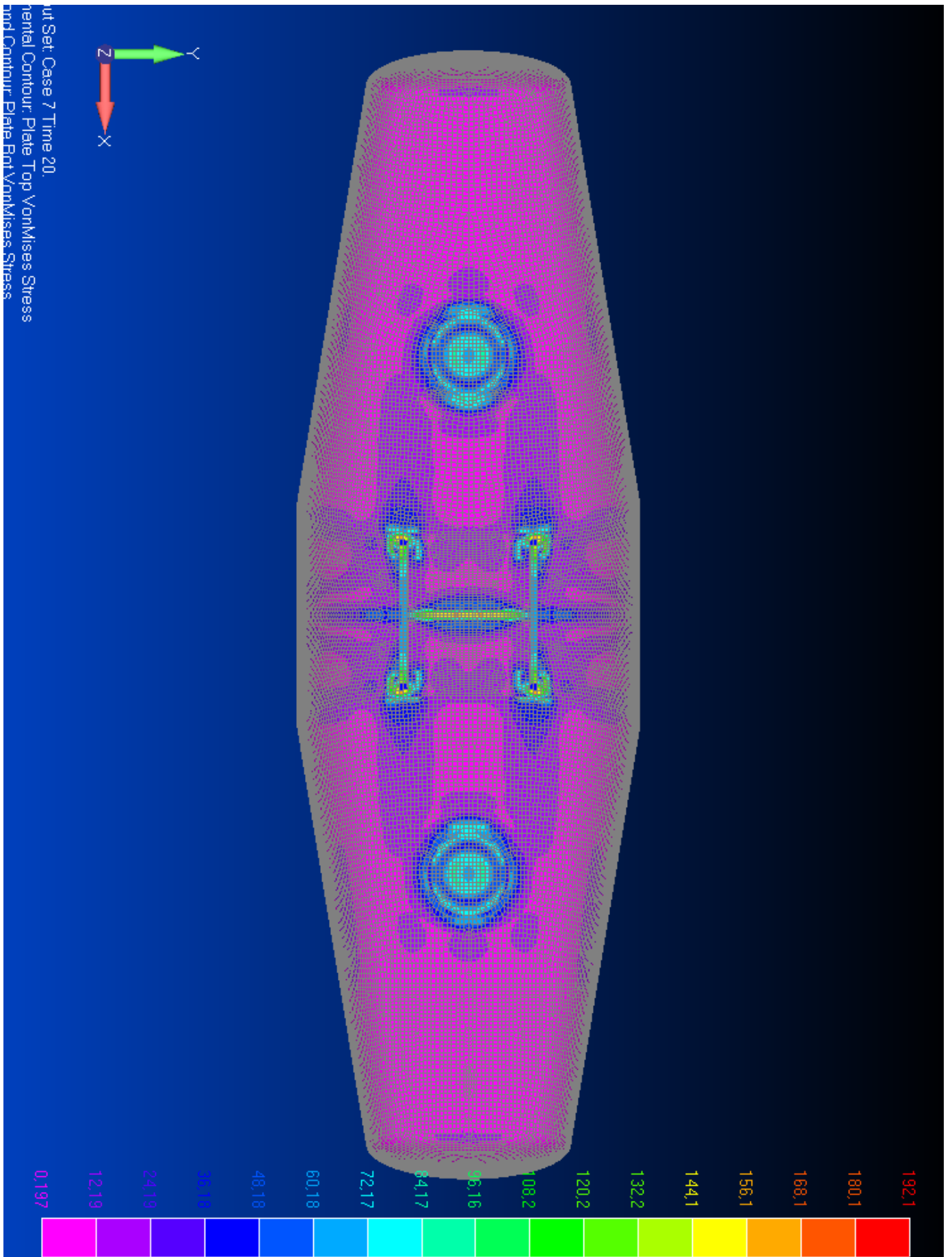
Στις επόμενες παραγράφους και σχήματα θα δοθούν τα αποτελέσματα της ανάλυσης για την αποφόρτιση από την υδραυλική δοκιμή του κελύφους ( μηδενισμό πίεσης δοκιμής και περιεχόμενου νερού COMP1->COMP3).



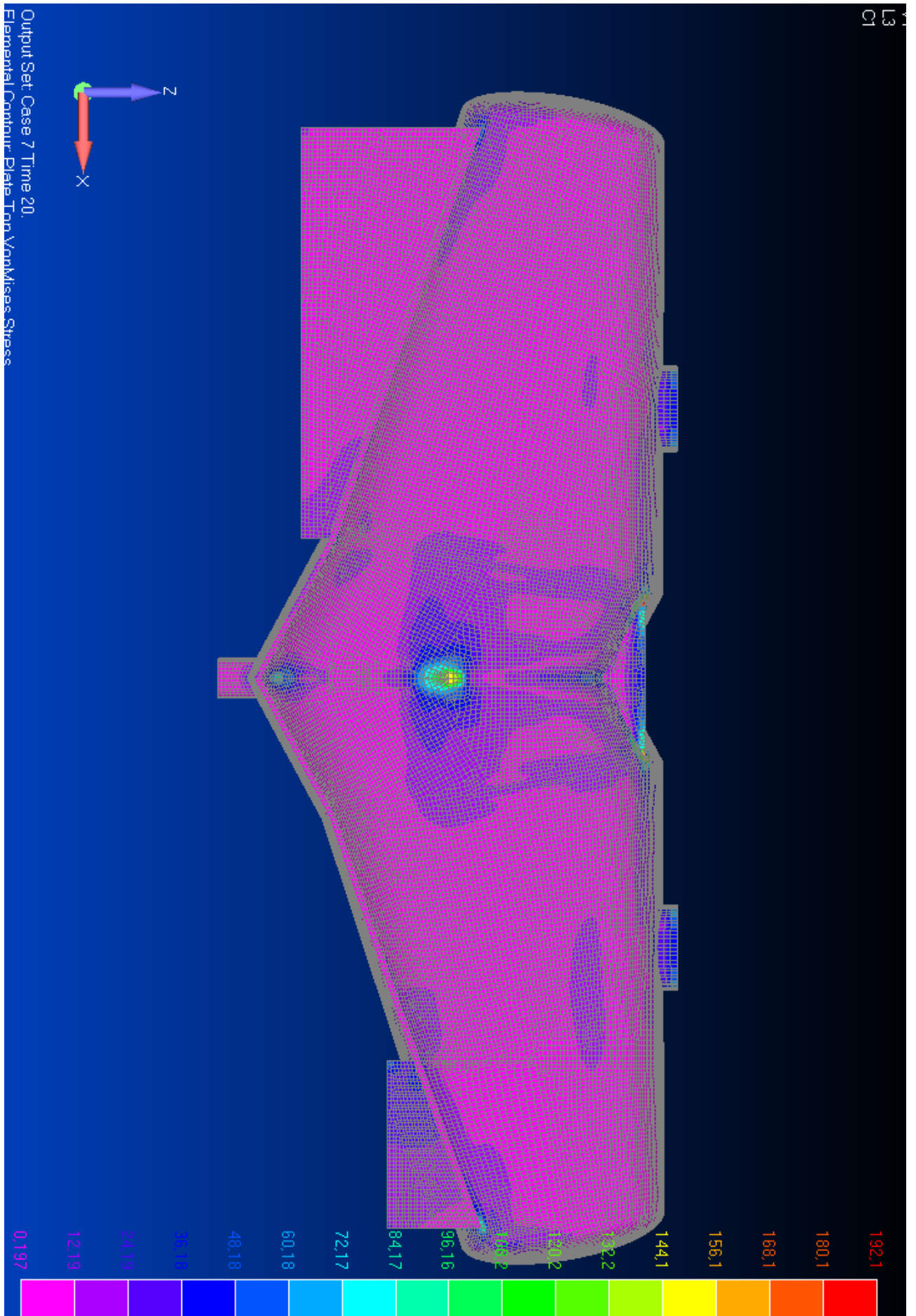
Σχήμα 9.9 Μετατοπίσεις χαρακτηριστικών σημείων ανά βήμα υπολογισμού (mm)



Σχήμα 9.10 Τελικές μετατοπίσεις (mm)

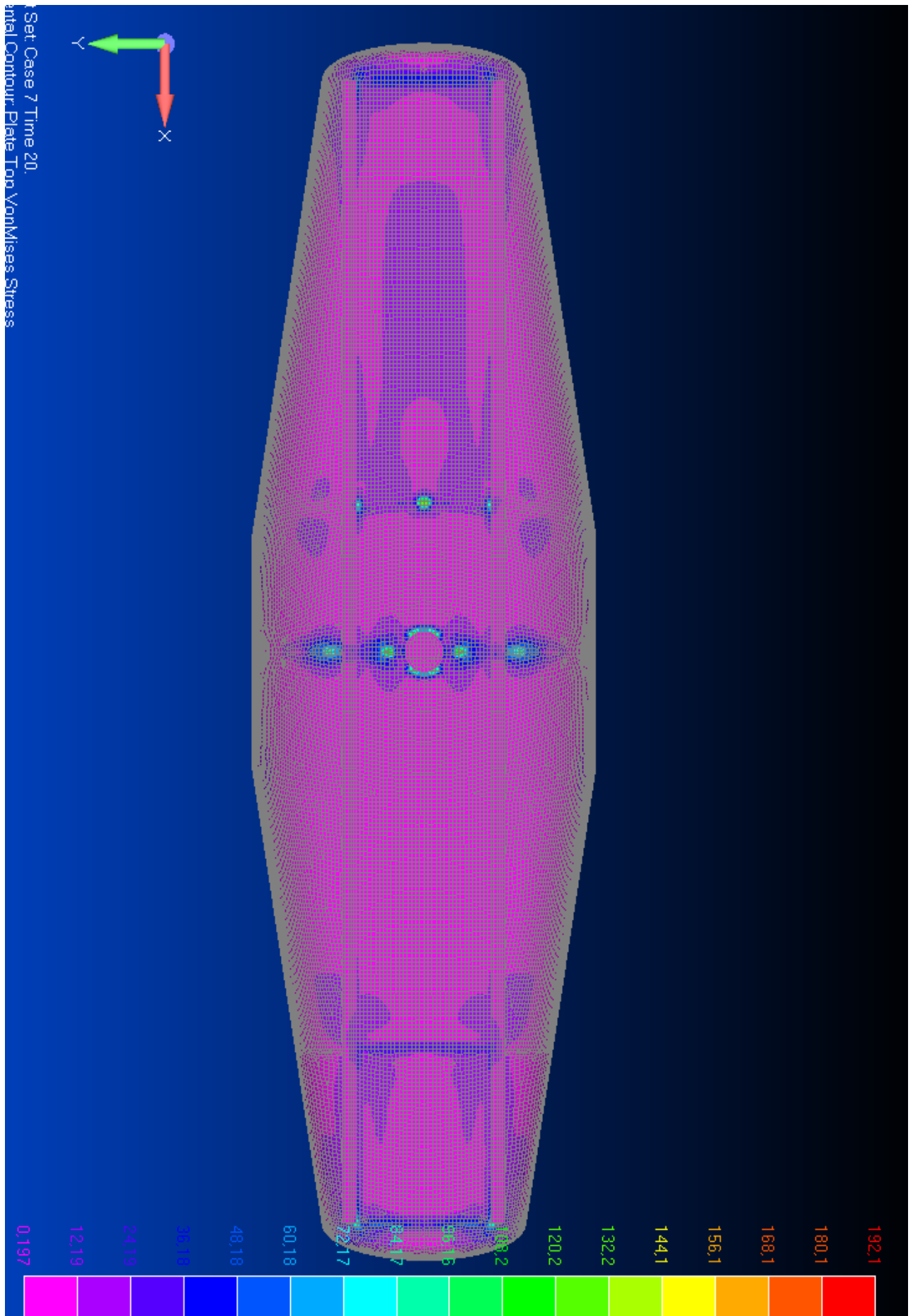


Σχήμα 9.11 Von Mises Stress (MPa)

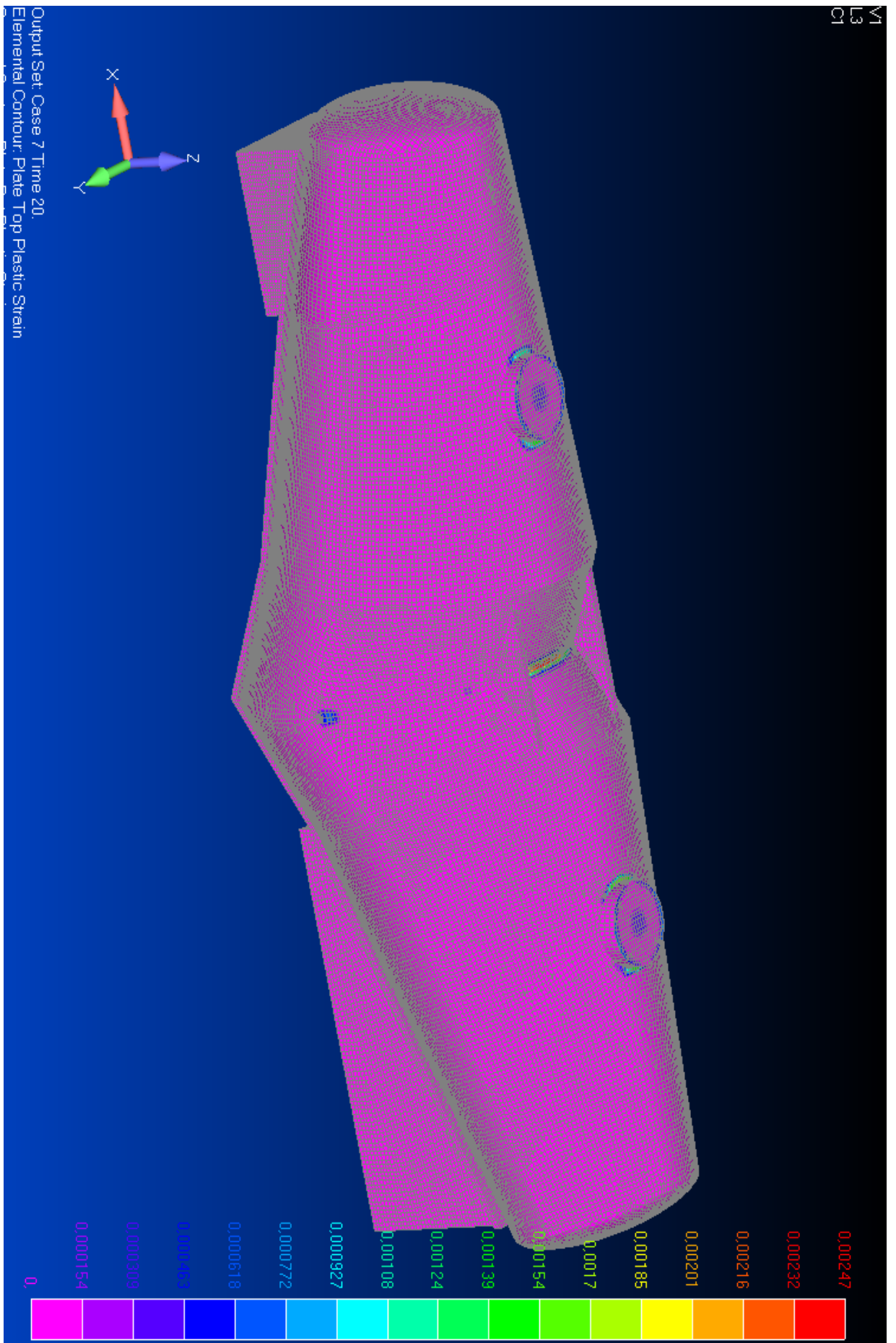


Σχήμα 9.12 Von Mises Stress (MPa)





Σχήμα 9.13 Von Mises Stress (MPa)



Σχήμα 9.14 Von Misses Plastic Strain

Από τα παραπάνω γραφήματα εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

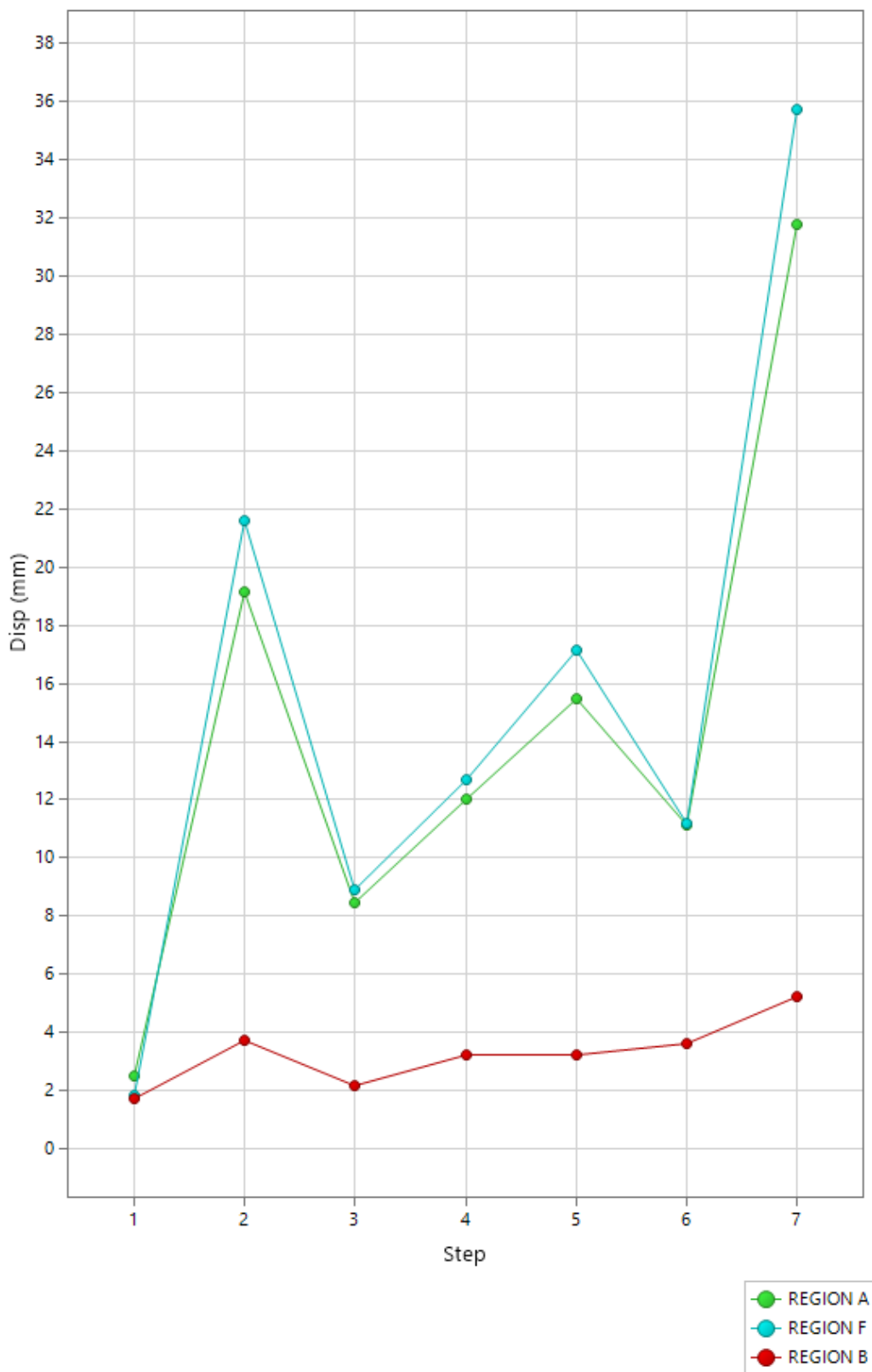
1. Η πλαστική παραμόρφωση στις περιοχές A, B, E δεν αλλάζει.
2. Στις περιοχές A,B,E έχουμε υψηλές παραμένουσες τάσεις 95-160 MPa
3. Στην περιοχή F έχουμε ελαστική αστάθεια – buckling – και τελικά πλαστική παραμόρφωση περιφερειακά στην post buckling κατάσταση (0,0927% plastic strain).
4. Επειδή στην περιοχή D είχαμε κατά την υδραυλική δοκιμή ελαστικές παραμορφώσεις, έχουμε πλήρη επαναφορά του κελύφους κατά την αποφόρτιση.
5. Η γενική εικόνα του κελύφους μετά την πλήρη αποφόρτιση είναι ότι στον κεντρικό μεσημβρινό AFB έχουμε αλλαγή της καμπυλότητας εξαιτίας του buckling στο F και μια αμφίπλευρη συμπίεση του κελύφους με αποτέλεσμα η απόσταση AB να είναι μεγαλύτερη της αρχικής.

Εν τέλη στο κέλυφος μετά την υδραυλική δοκιμή και την αποφόρτιση από αυτήν έχουν σχηματιστεί στις περιοχές A, B, F πλαστικές ζώνες. Αυτό το γεγονός έχει τις εξής συνέπειες ως προς την στατική αρτιότητα και λειτουργία της κατασκευής:

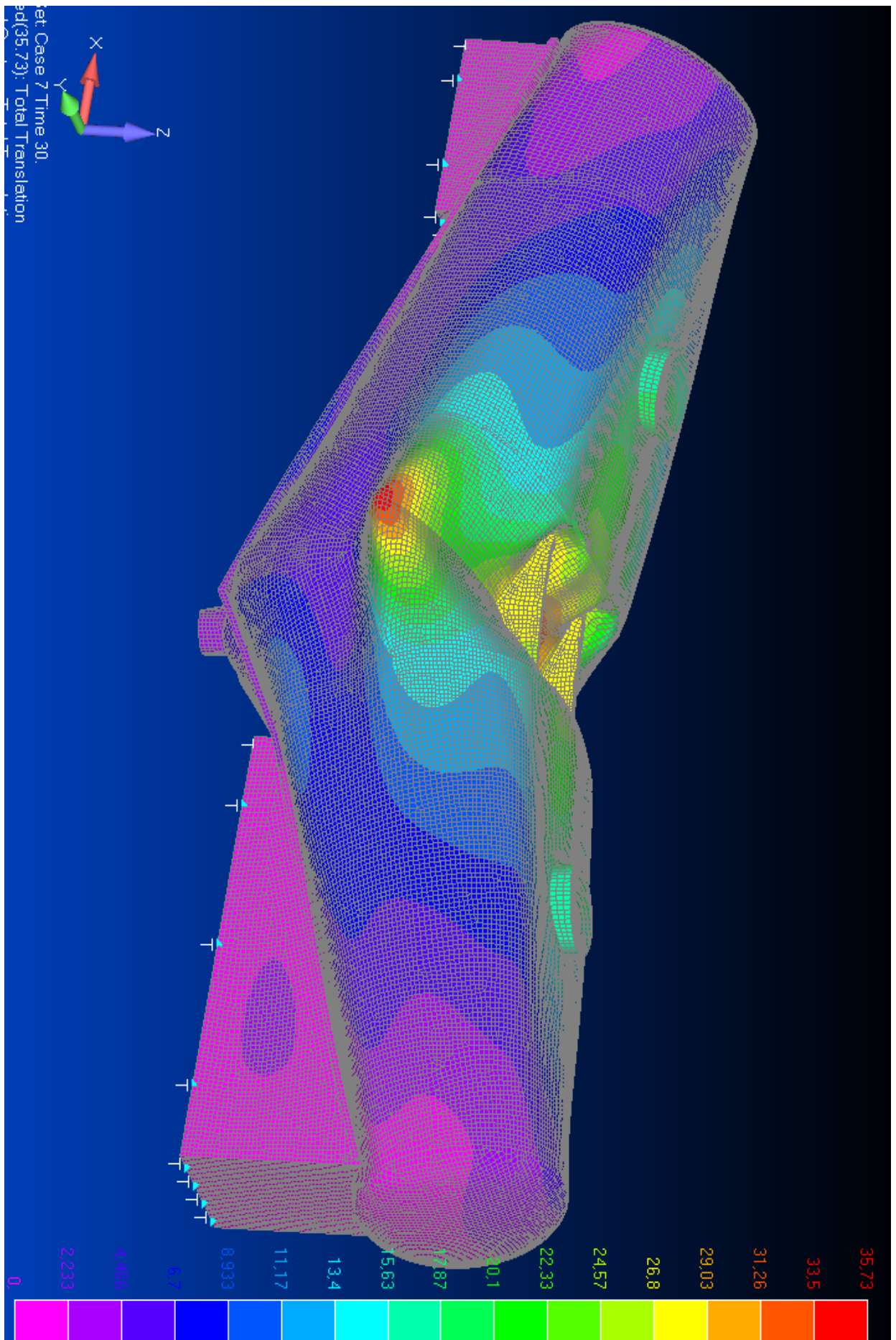
1. Κάθε φόρτιση που θα δώσει ισοδύναμες τάσεις μεγαλύτερες του ορίου διαρροής θα προκαλέσει ροή του υλικού.
2. Οι πλαστικές ζώνες δεν είναι του ίδιου μεγέθους κατά συνέπεια έχουμε μετατόπιση του ουδέτερου άξονα. Αποτέλεσμα αυτού είναι πιο έντονη φόρτιση των πιο μακρινών ινών από το ουδέτερο άξονα και την επέκταση της πλαστικής ζώνης.
3. Η γεωμετρία του κελύφους έχει αλλάξει, οι ασυνέχειες  $C^1$  έχουν γίνει πιο έντονες κατά συνέπεια θα αλλάξουν και οι κατανομή των μεμβρανικών τάσεων αλλά και οι ροπές κάμψης - διατμητικές τάσεις -ικανοποίηση συμβιβαστού μετατοπίσεων - σε μελλοντική φόρτιση.

### 9.3 ΦΟΡΤΙΣΗ 1 ΜΕ ΚΟΝΙΑΜΑ -ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ- COMB2

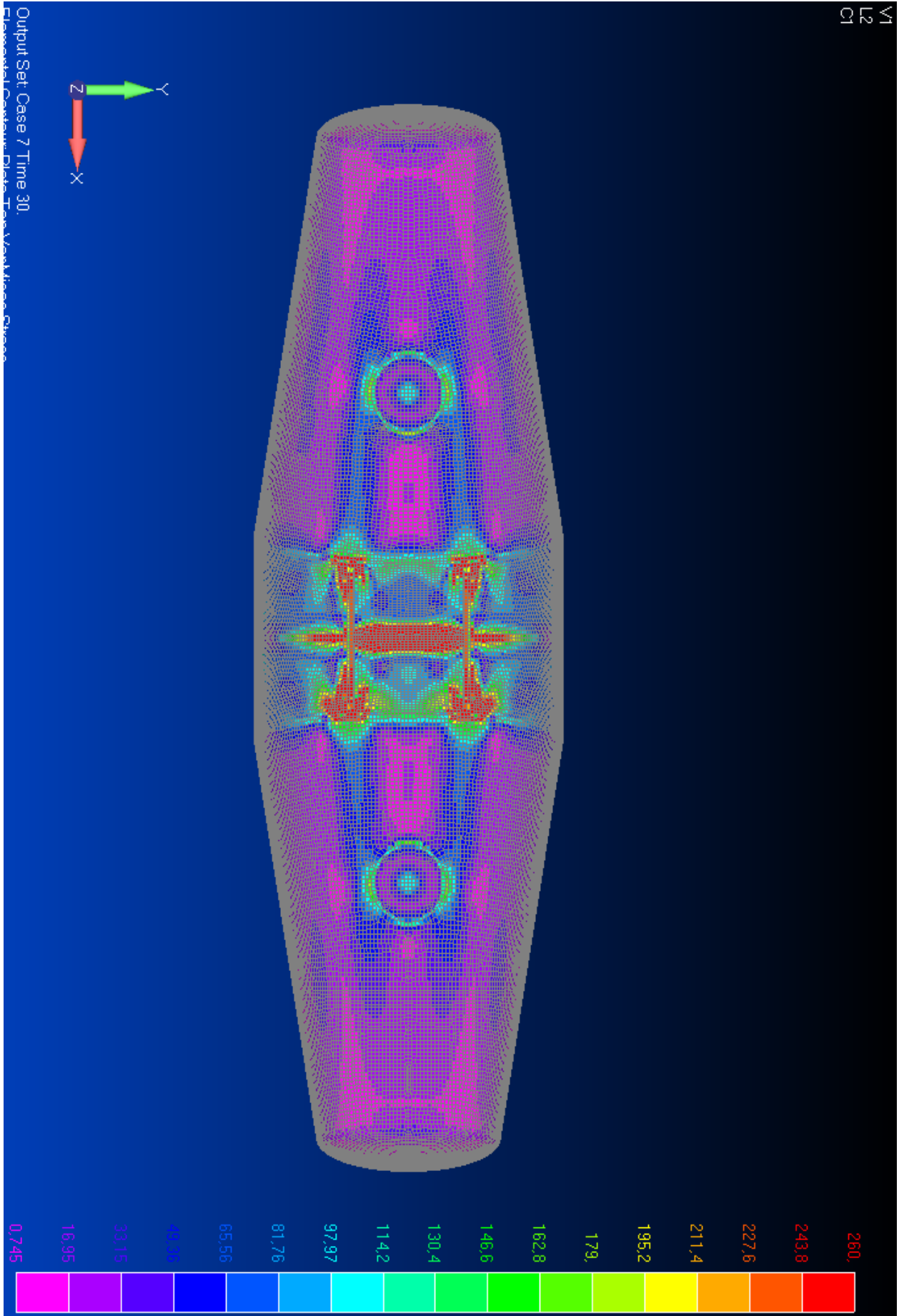
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την φόρτιση με τον συνδυασμό COMP2. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης.



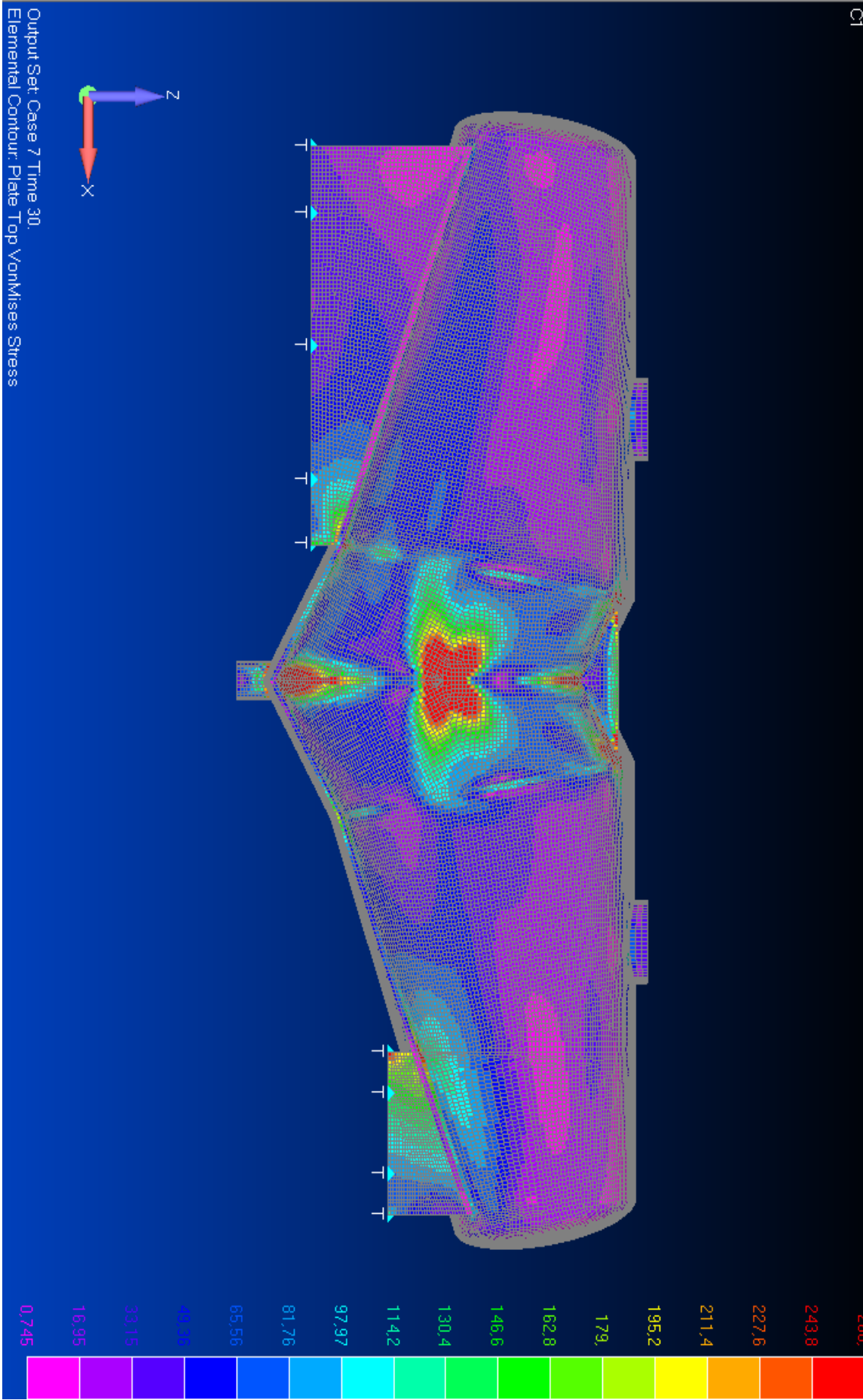
Σχήμα 9.15 Μετατοπίσεις χαρακτηριστικών σημείων ανά βήμα υπολογισμού (mm)



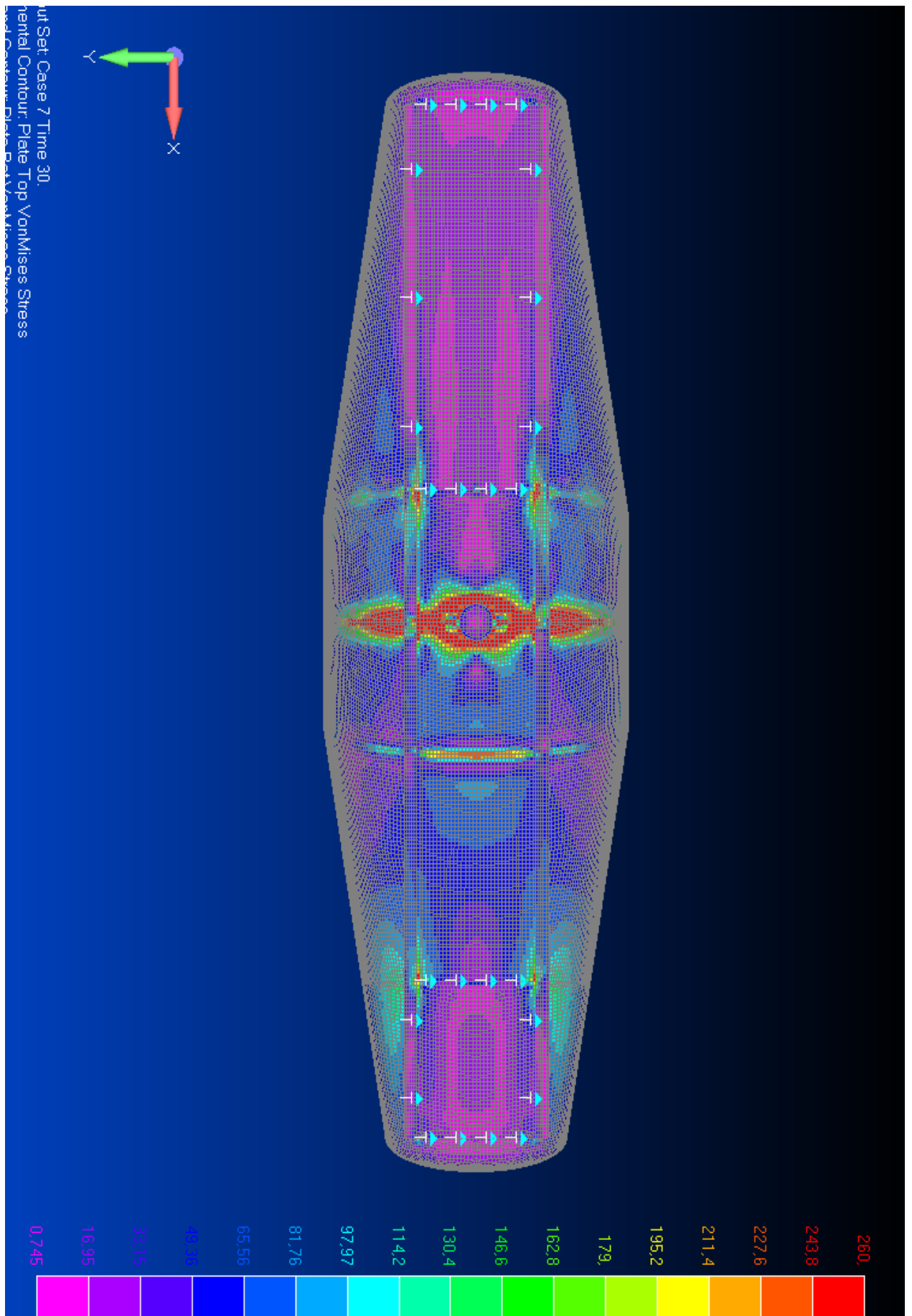
Σχήμα 9.16 Τελικές μετατοπίσεις (mm)



Σχήμα 9.17 Von Misses stress (MPa)

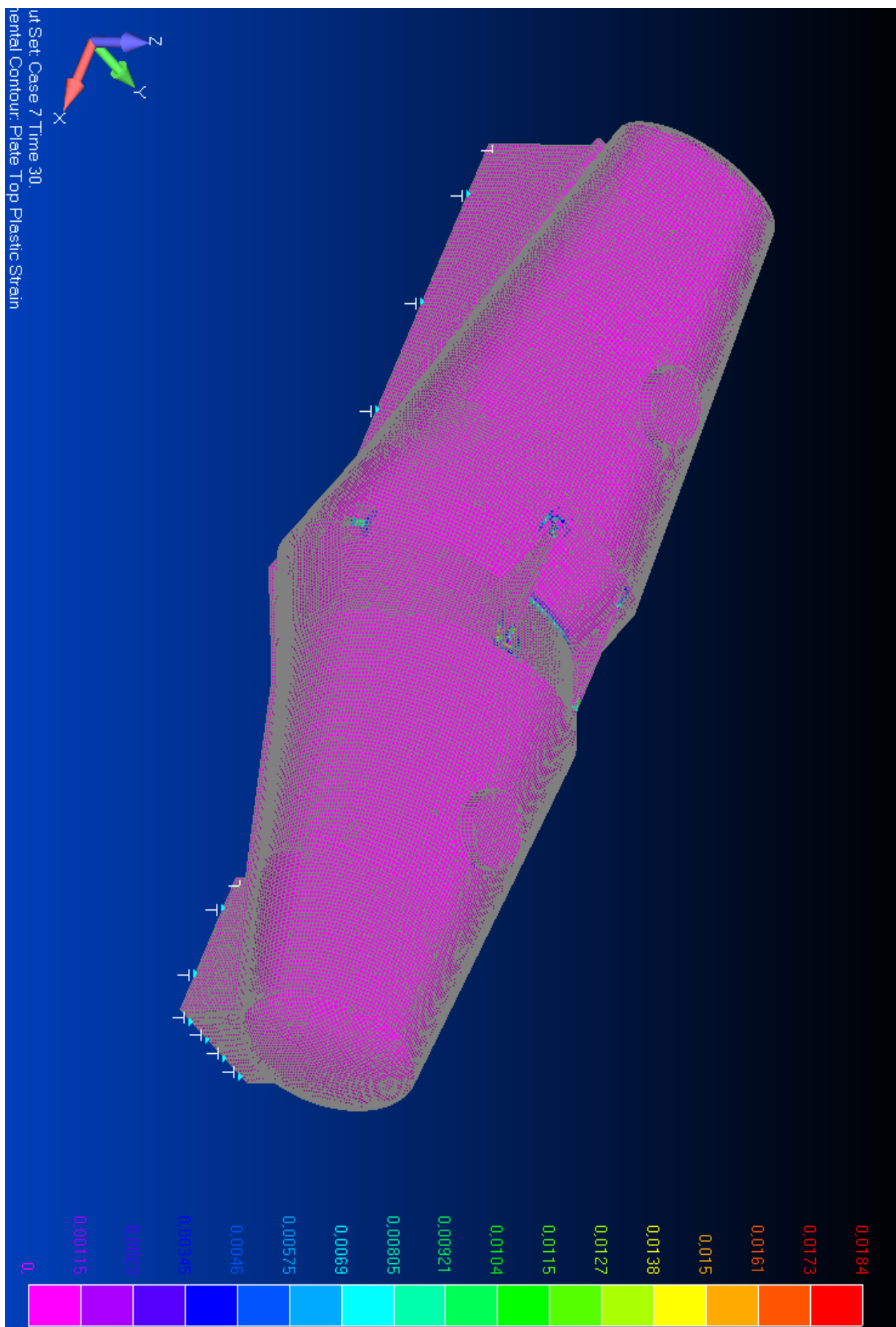


Σχήμα 9.18 Von Misses stress (MPa)



Σχήμα 9.19 Von Mises stress (MPa)





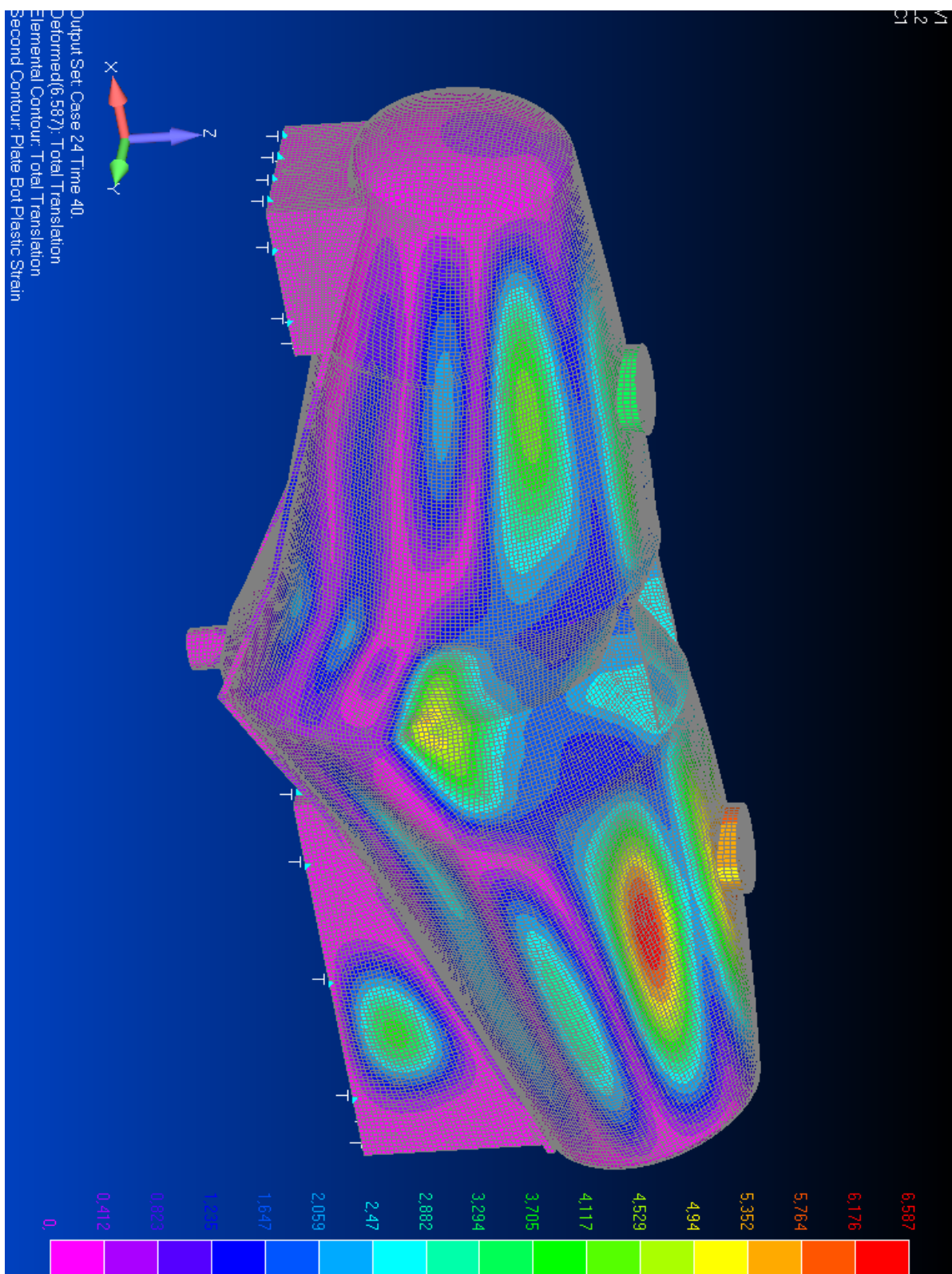
Σχήμα 9.20 Plastic strain

Από τα παραπάνω γραφήματα εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

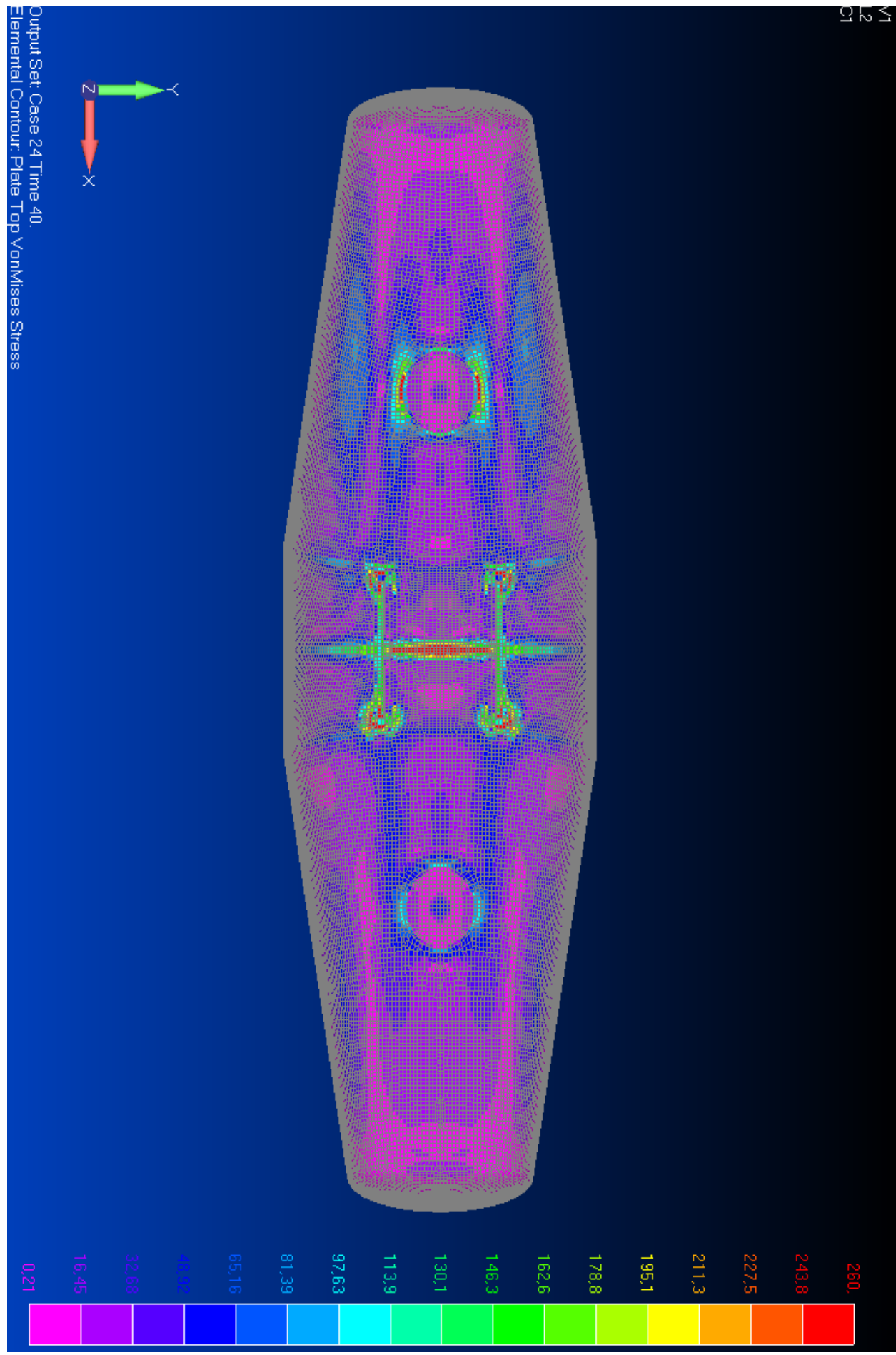
1. Στις περιοχές A, B, E, F έχουμε αύξηση της πλαστικής παραμόρφωσης στο 0,8%.
2. Μπαίνει στην πλαστική περιοχή η θέση έδρασης των δοκών άνω. Η πλαστική παραμόρφωση που αναπτύσσεται είναι 1,27% (εκεί είναι θέση μελλοντικής διάτρησης του κελύφους).
3. Γύρω από τις περιοχές A, F, B σχηματίζονται ευρύτερες ζώνες που αρχίζουν να διαρρέουν.
4. Στην περιοχή D εμφανίζεται πλαστική παραμόρφωση 0,2%. Η περιοχή αυτή είναι ιδιαίτερα κρίσιμη αφού αποτελεί την στήριξη του κελύφους πλησίον του όπισθεν πάτου.

### 9.4 ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ 1 ΑΠΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ COMB2

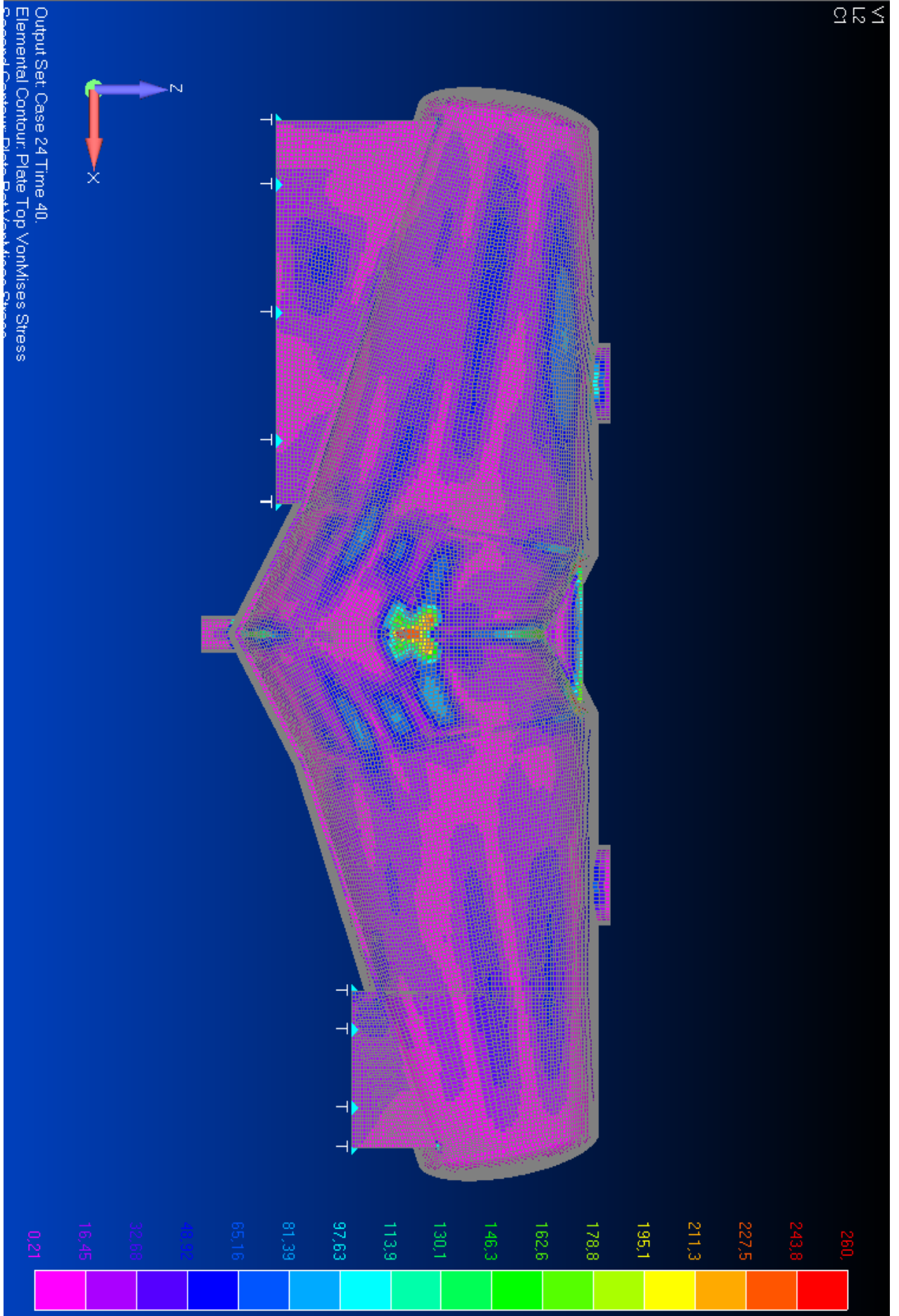
Στις επόμενες παραγράφους και σχήματα θα δοθούν τα αποτελέσματα της ανάλυσης για την αποφόρτιση από την 1η φόρτωση του κελύφους ( μηδενισμό πίεσης λειτουργίας και περιεχόμενου κονιάματος COMP2->COMP3).



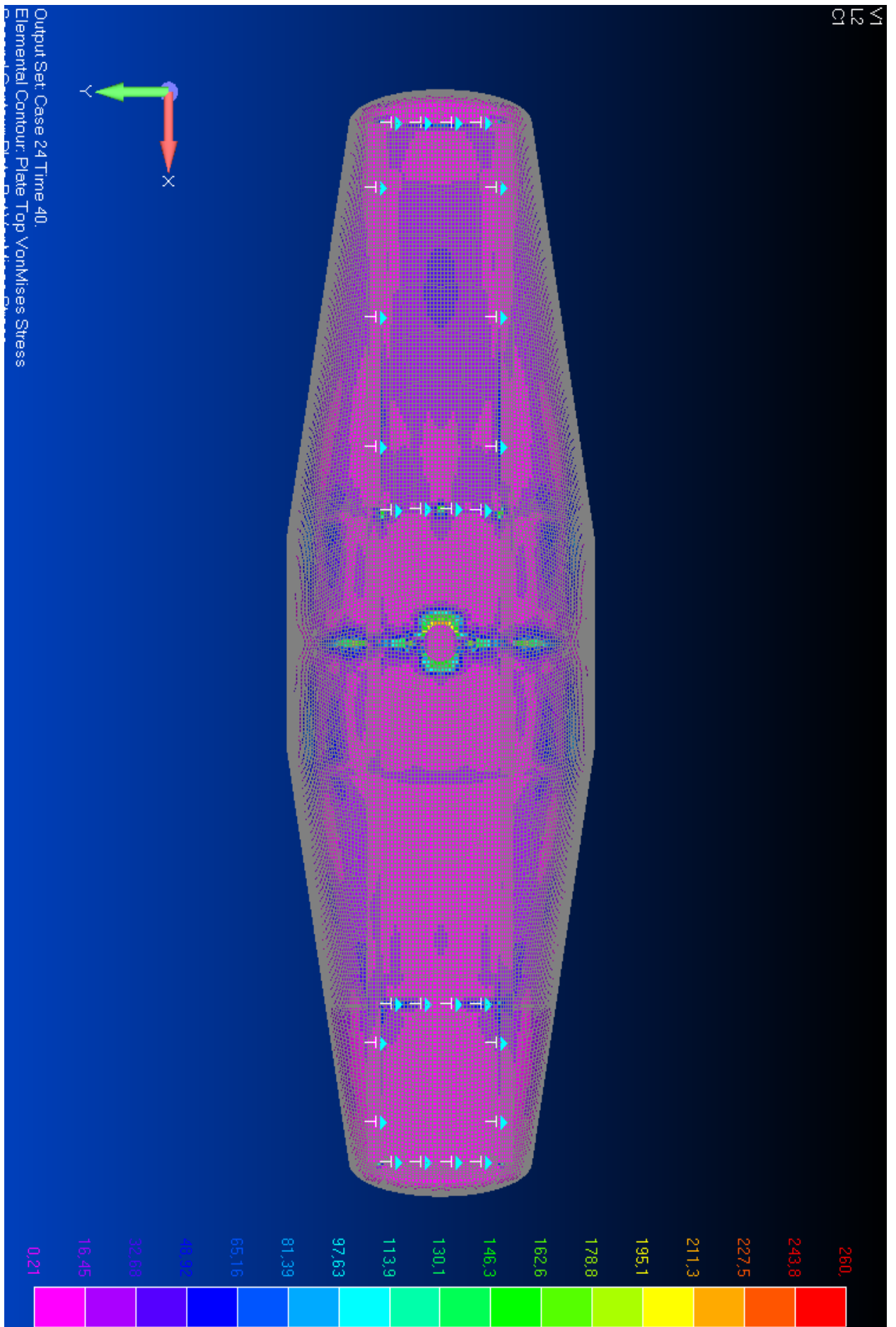
Σχήμα 9.21 Τελικές μετατοπίσεις (mm)



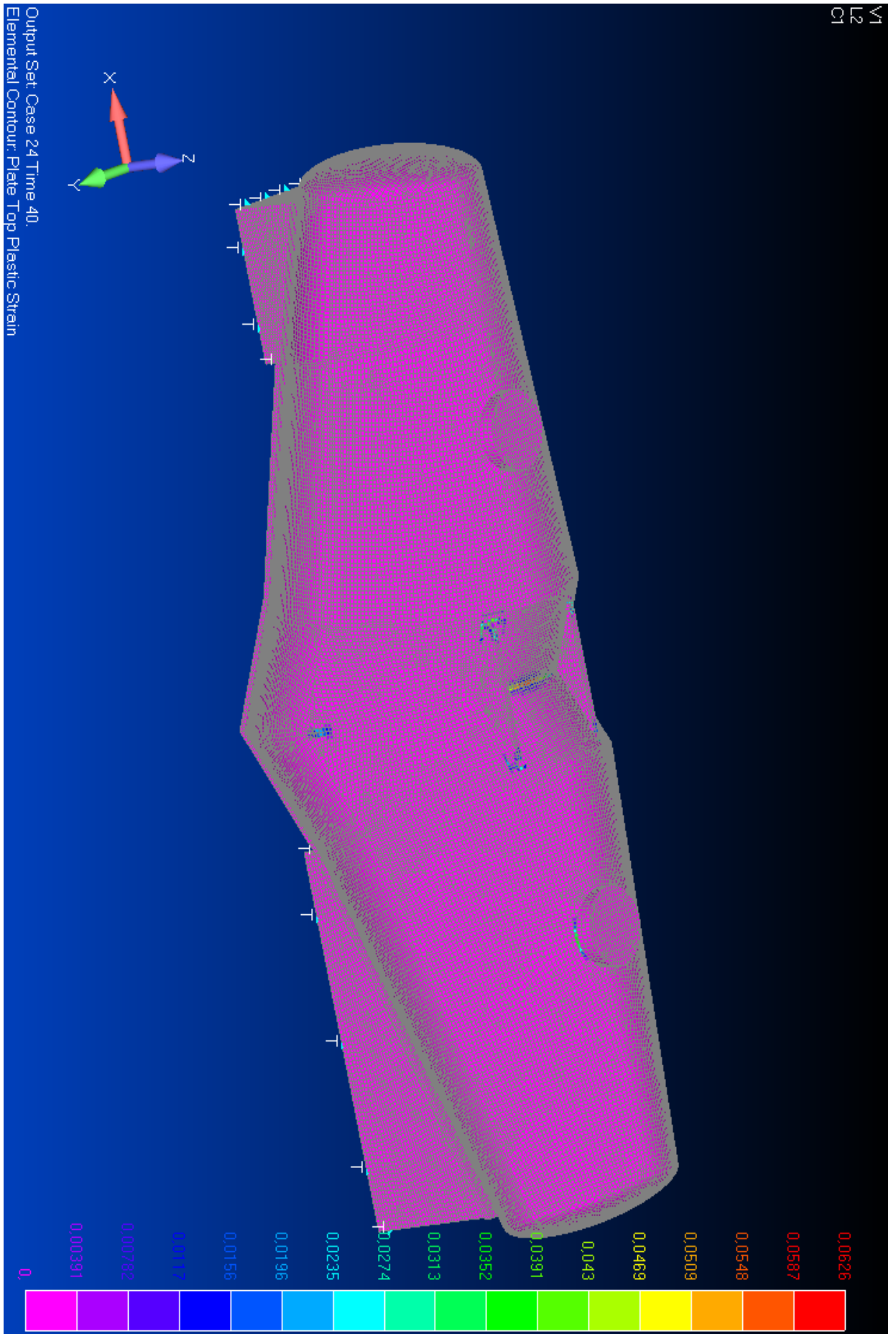
Σχήμα 9.22 Von Mises stress (MPa)



Σχήμα 9.23 Von Mises stress (MPa)



Σχήμα 9.24 Von Mises stress (MPa)



Σχήμα 9.24 Von Mises strain

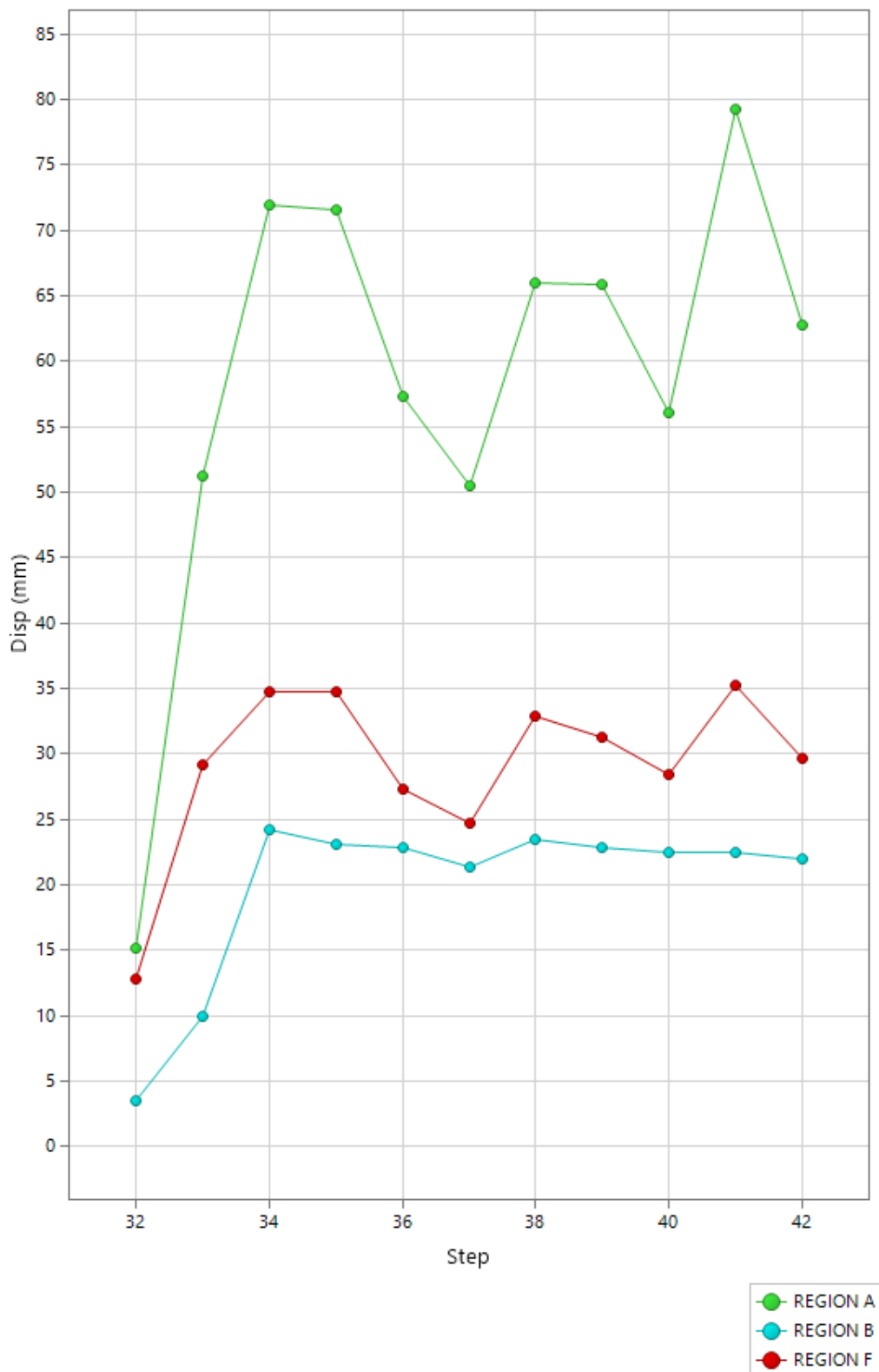
Από τα παραπάνω γραφήματα εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

1. Οι πλαστικές παραμορφώσεις στις διάφορες ζώνες είναι οι παρακάτω:
  - Ζώνη A -> 6,26%
  - Ζώνη B -> 1,56%
  - Ζώνη F → 2,74%
  - Ζώνη D→ 1,17%
  - Στήριξη άνω δοκών -> 3,13%
2. Τα πλευρικά τοιχώματα του κελύφους υπόκεινται σε elastic buckling και υποχωρούν προς τα μέσα.
3. Οι παραμένουσες τάσεις βρίσκονται σε υψηλά επίπεδα 160-260 MPa

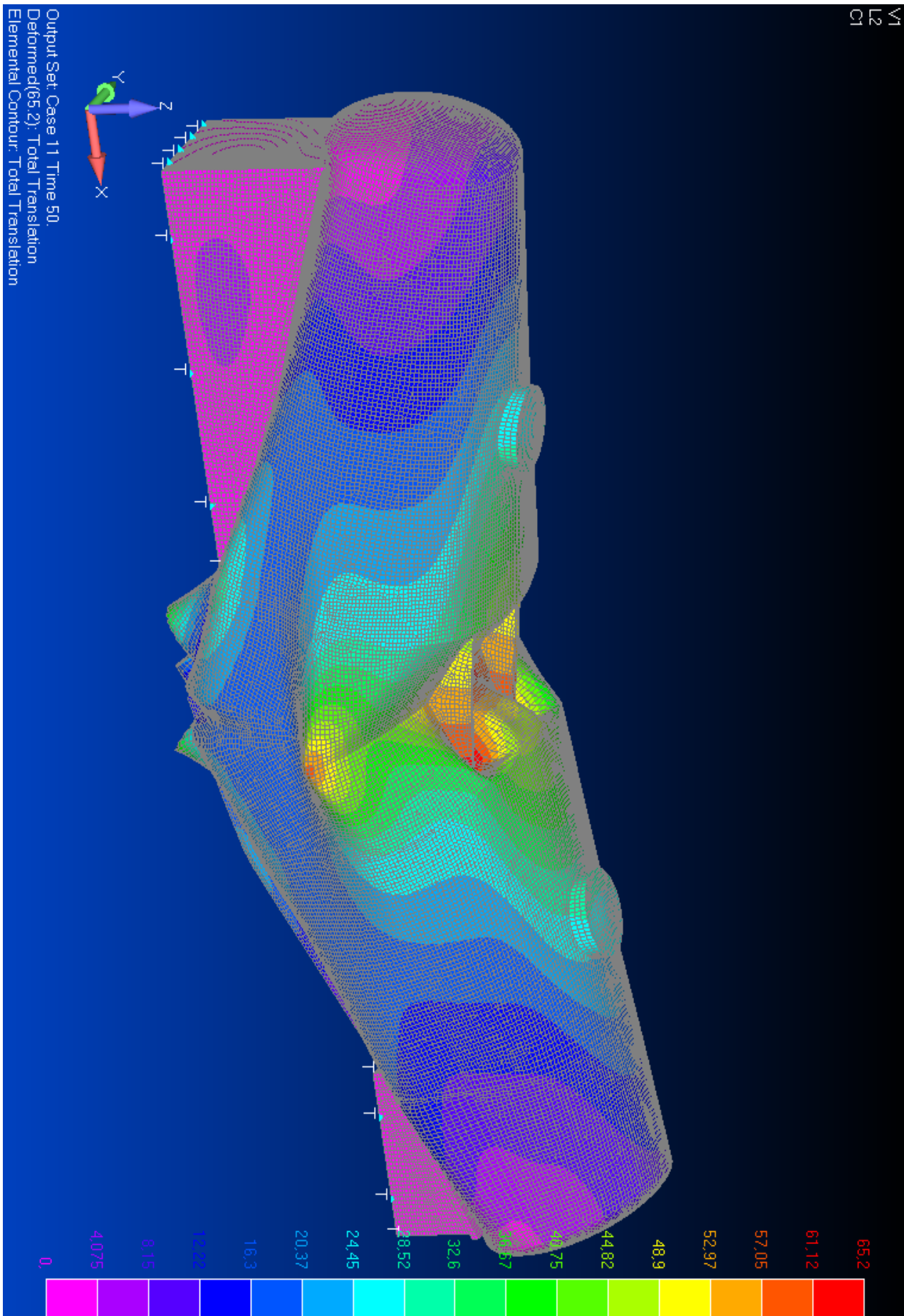


### 9.5 ΦΟΡΤΙΣΗ 2 ΜΕ ΚΟΝΙΑΜΑ -ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ- COMB2

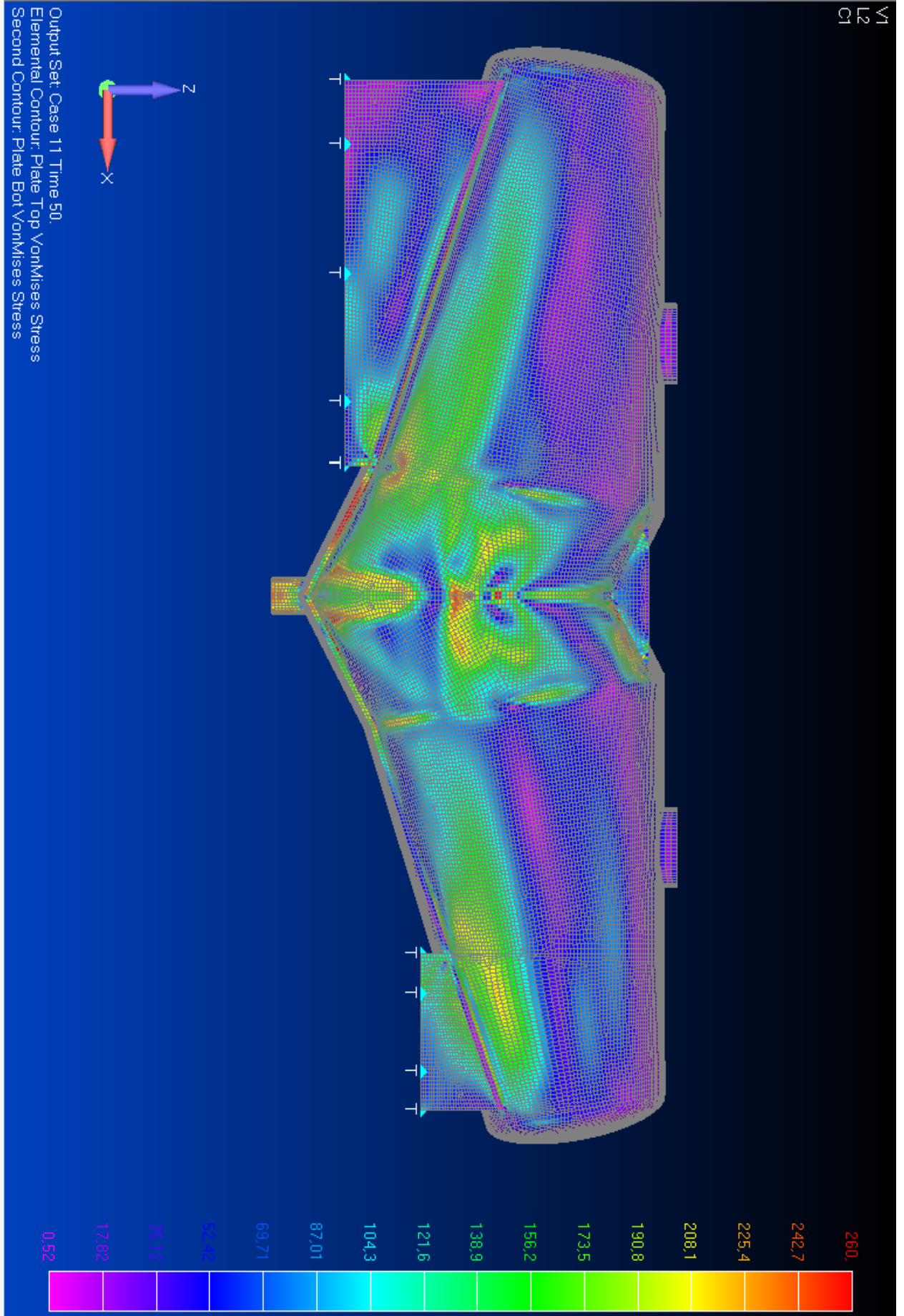
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την φόρτιση με τον συνδυασμό COMP2. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης.



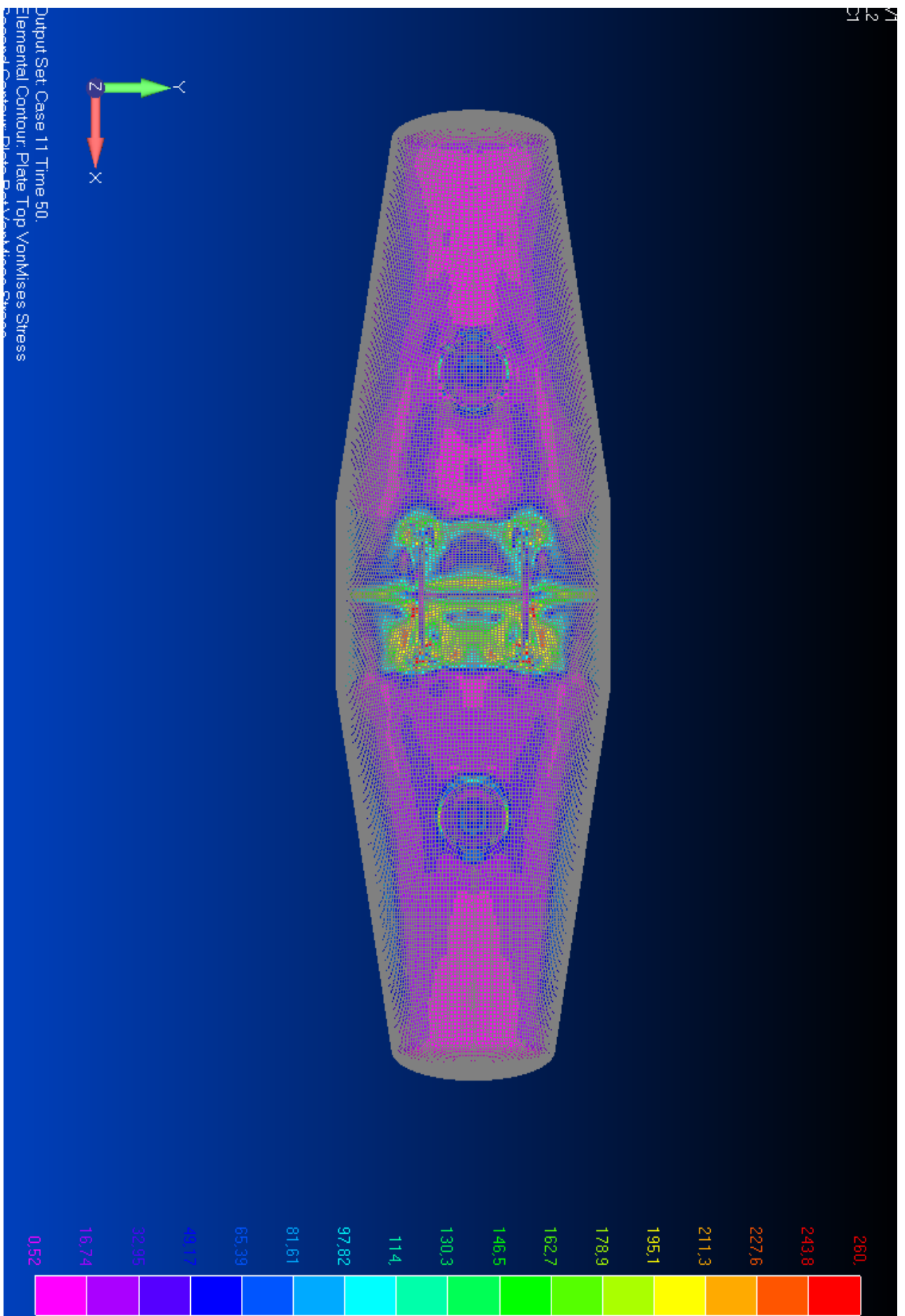
Σχήμα 9.25 Μετατοπίσεις χαρακτηριστικών σημείων ανά βήμα υπολογισμού (mm)



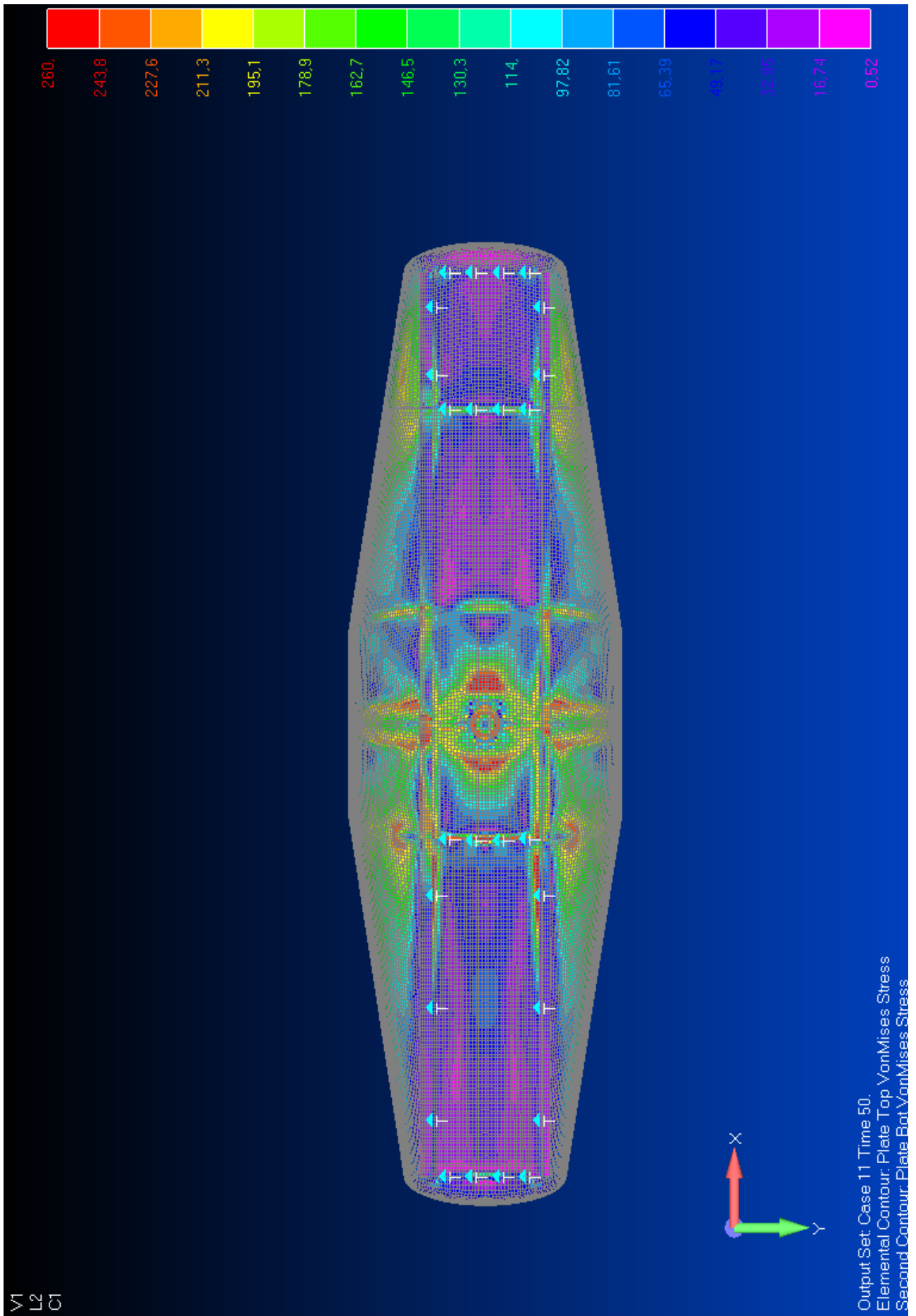
Σχήμα 9.26 Τελικές μετατοπίσεις (mm)



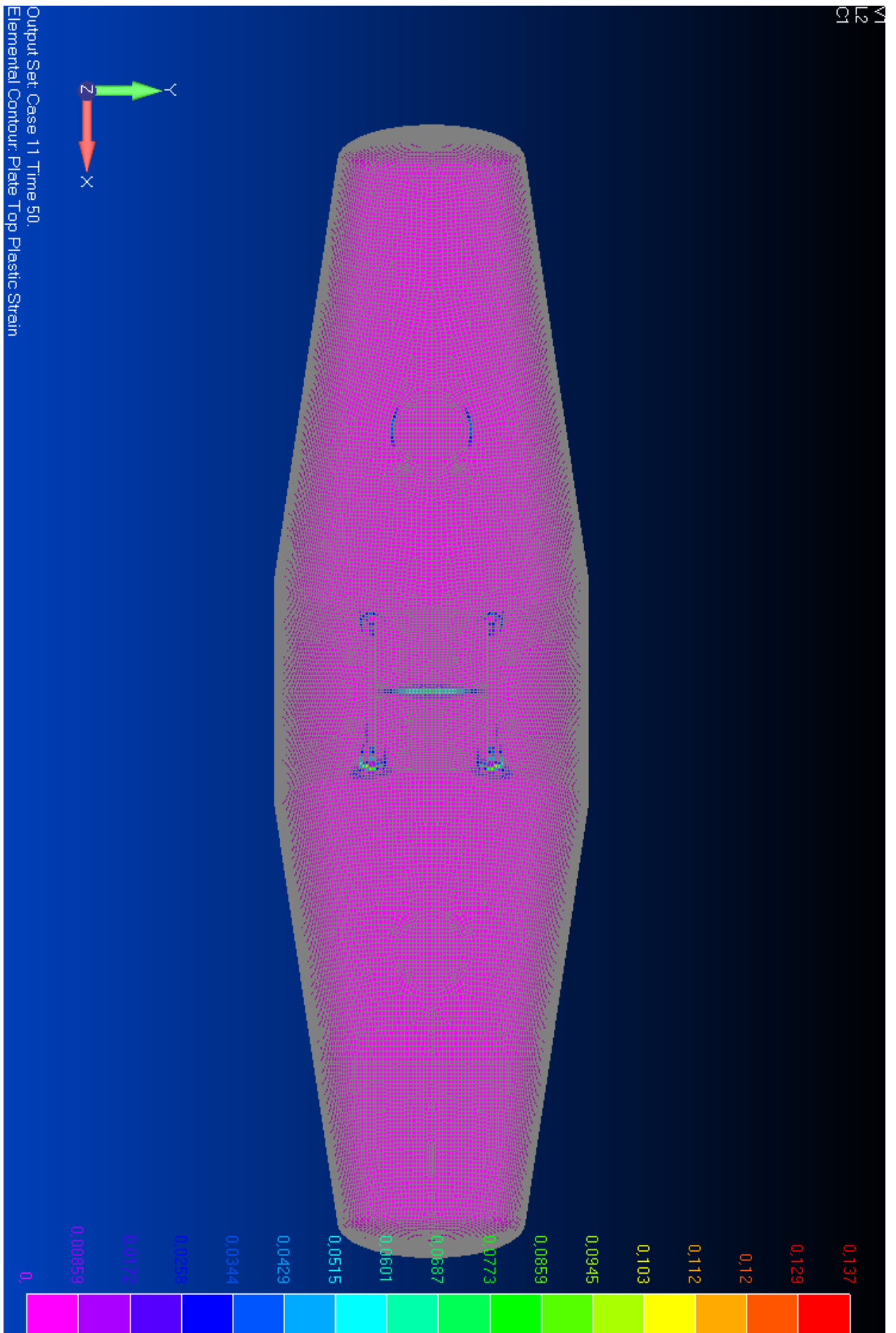
Σχήμα 9.27 Von Mises stress (MPa)



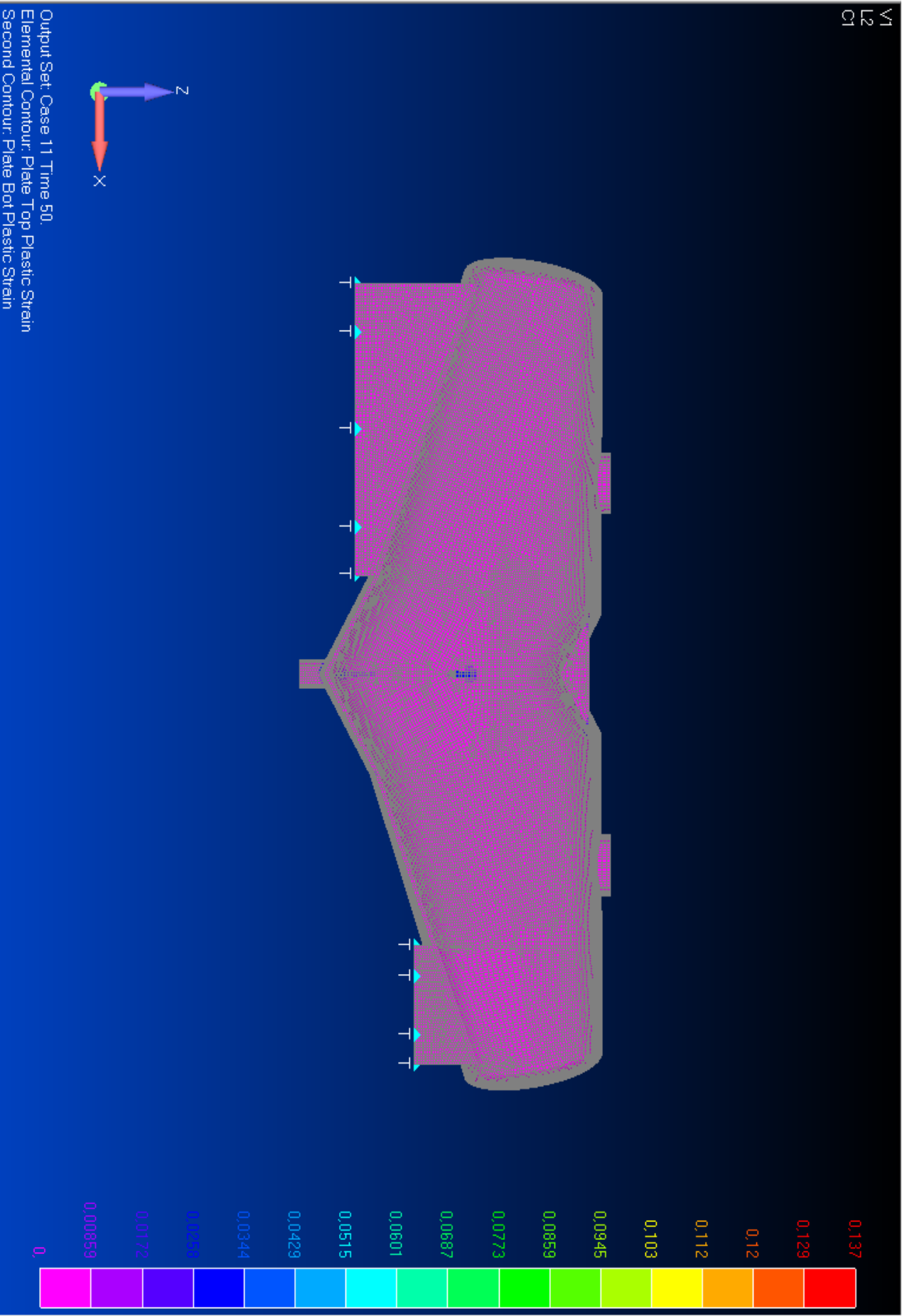
Σχήμα 9.28 Von Misses stress (MPa)



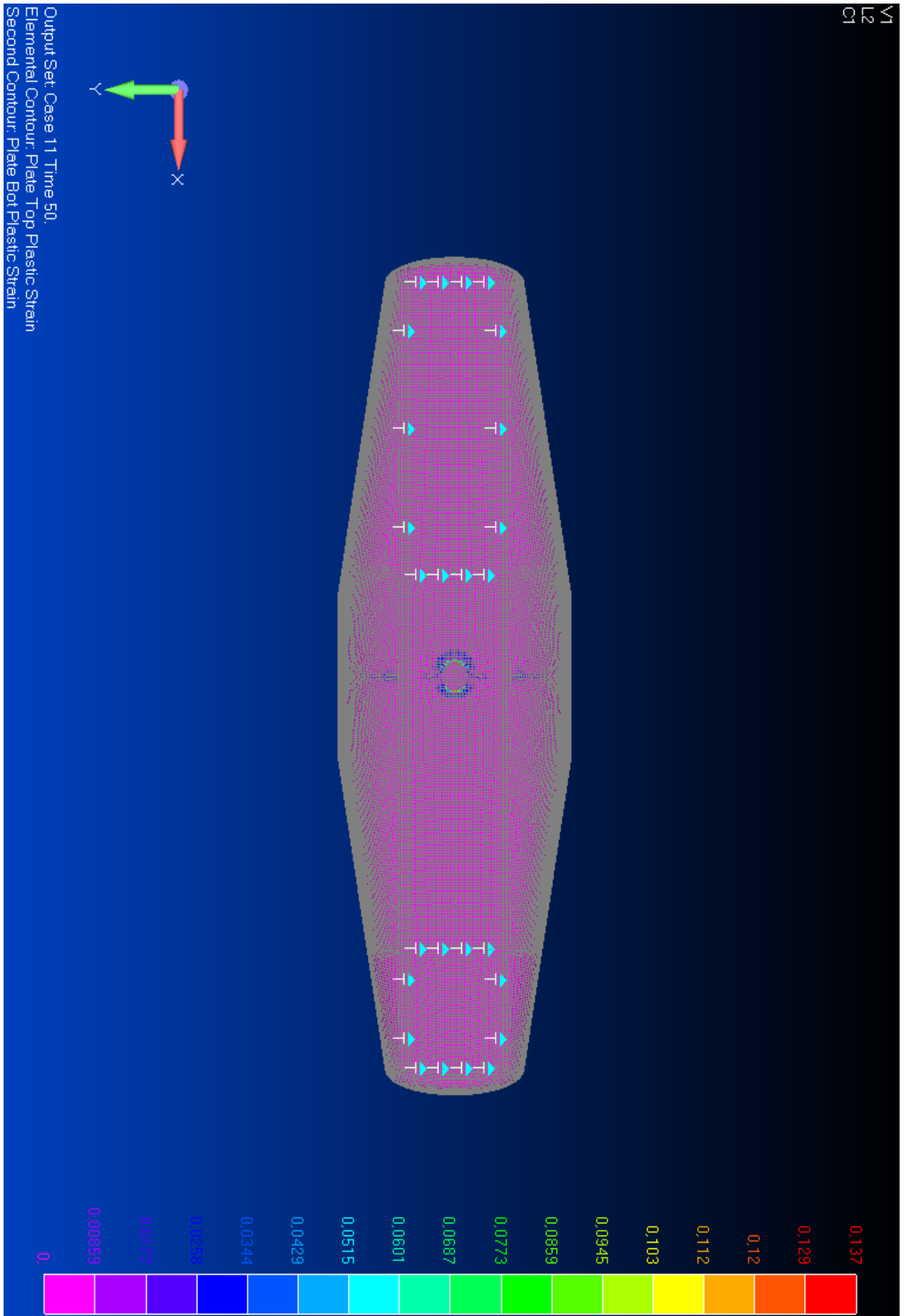
Σχήμα 9.29 Von Misses stress (MPa)



Σχήμα 9.30 Plastic strain (MPa)



Σχήμα 9.31 Plastic strain (MPa)



Σχήμα 9.32 Plastic strain (MPa)

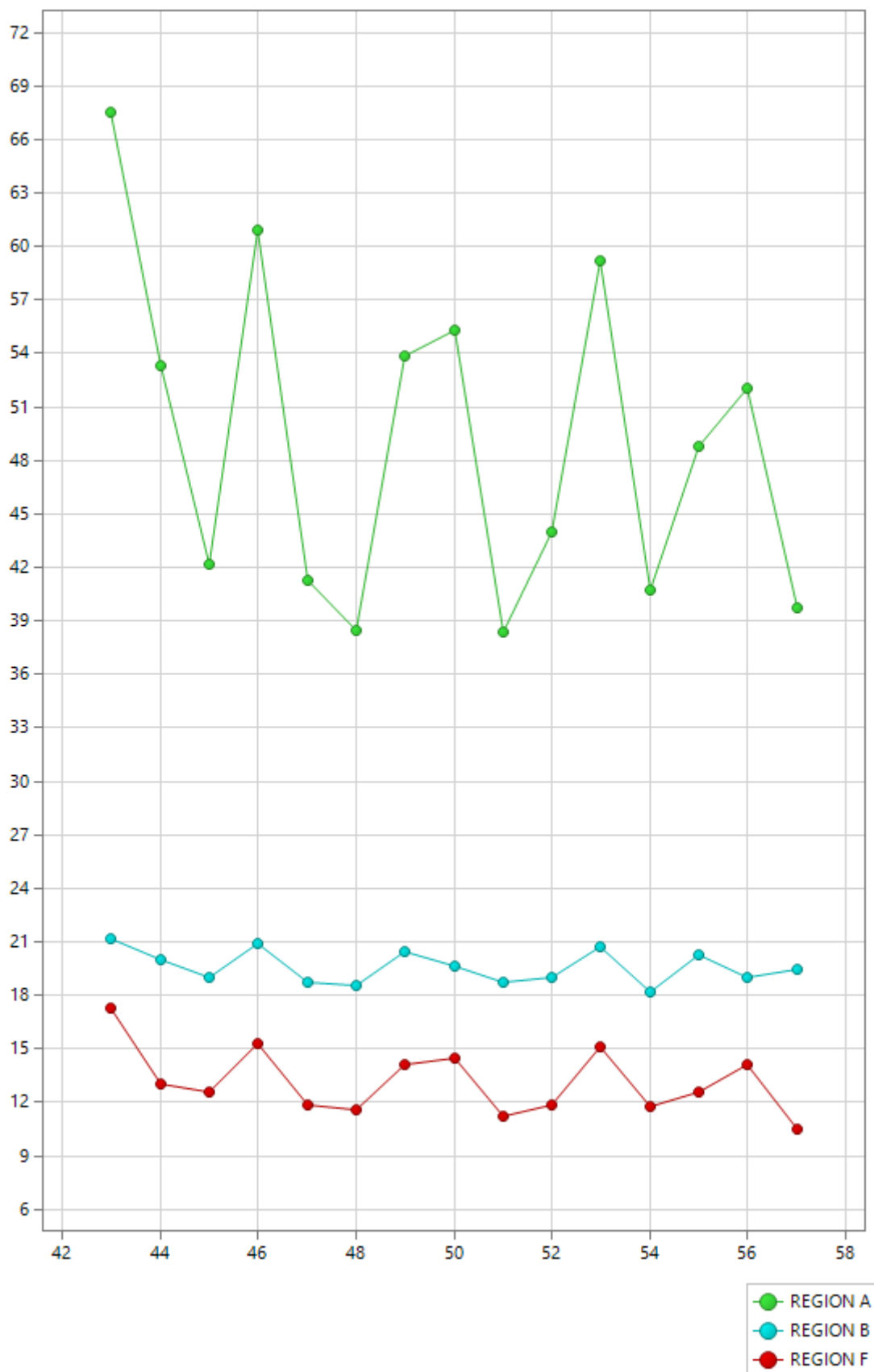


Από τα παραπάνω γραφήματα εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

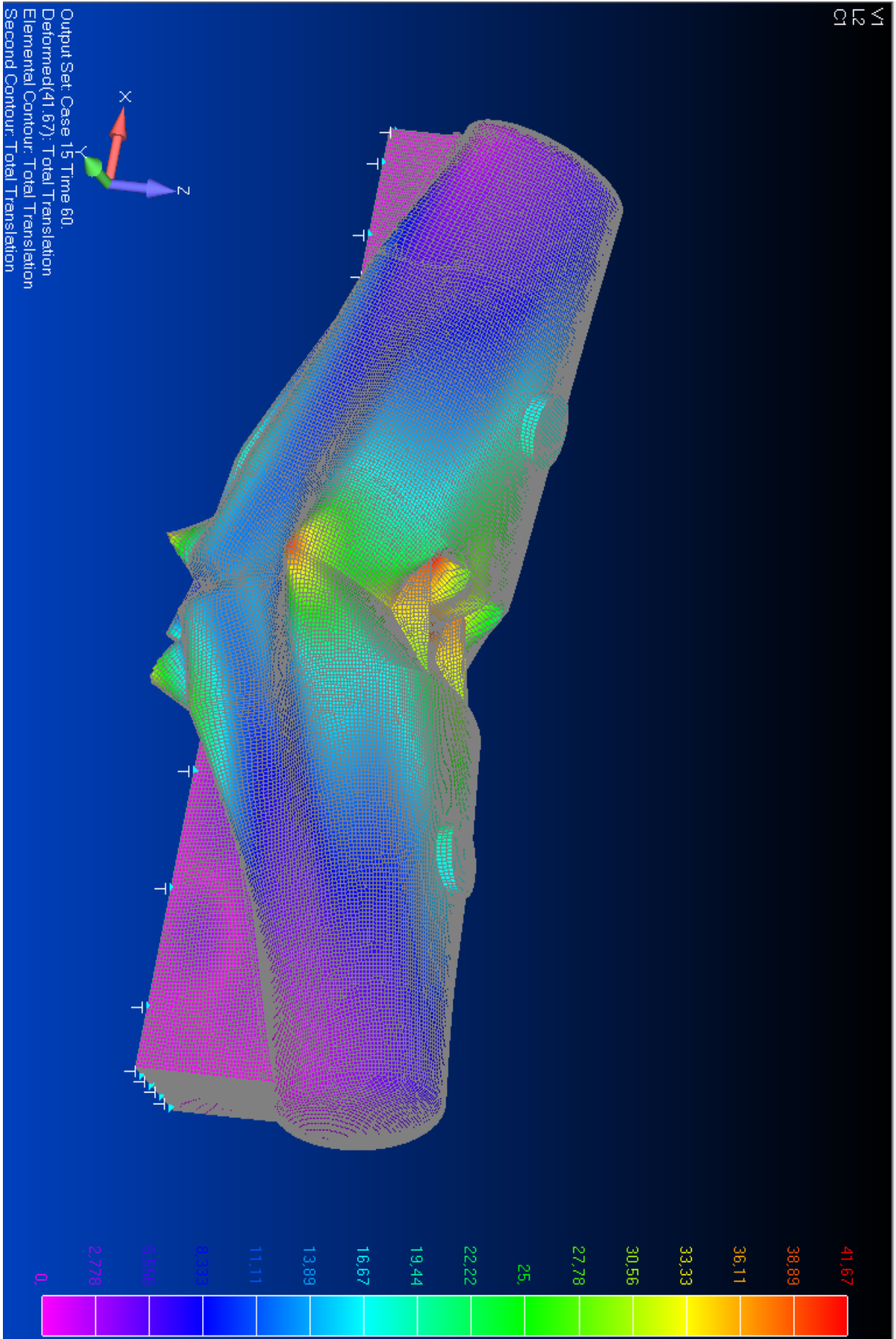
1. Οι πλαστικές παραμορφώσεις στις διάφορες ζώνες είναι οι παρακάτω:
  - Ζώνη A -> 6,87%
  - Ζώνη B -> 7,73%
  - Ζώνη F → 3,44%
  - Ζώνη D→ 2,58%
  - Στήριξη άνω δοκών -> 7,73%
2. Στις κρίσιμες περιοχές έχουμε προχωρήσει αισθητά μέσα στην πλαστική περιοχή.
3. Το άνω μέρος τους κελύφους υποχωρεί έντονα ( 65 mm ). Εξαιτίας αυτού είναι αδύνατη η παραλαβή φορτίου και οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι μέτριες (περίπου 150-170 Mpa) . Στις κρίσιμες περιοχές A και στην στήριξη των άνω δοκών έχουν σχηματιστεί και λειτουργήσει πλήρως οι αρθρώσεις που αντιστοιχούν σε μηχανισμό μερικής κατάρρευσης. Ο σχηματισμός αυτού του μηχανισμού αποτελεί την έναρξη της γενικής κατάρρευσης του κελύφους.
4. Εξαιτίας της παραπάνω κατάστασης έχουμε αύξηση της έντασης στο κάτω μισό του κελύφους. Έτσι αρχίζοντας από τα πλευρικά του κελύφους μέχρι το κάτω μέρος έχουμε περιοχές υψηλών τάσεων 180-260 Mpa, όπως και ευρείες ζώνες διαρροής.

### 9.6 ΑΠΟΦΟΡΤΙΣΗ 2 ΑΠΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ COMB2

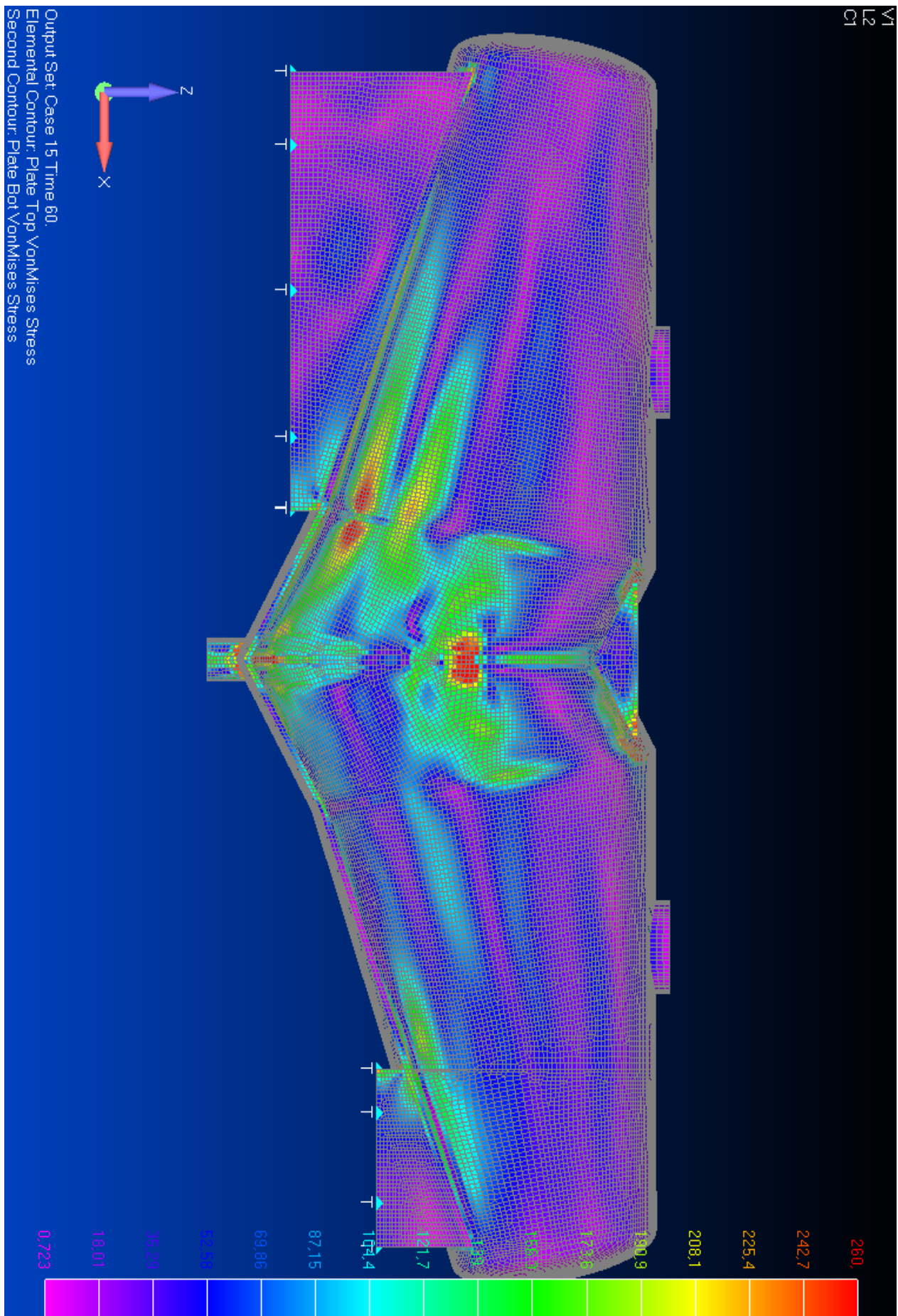
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την αποφόρτιση από τον συνδυασμό COMP2. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης.



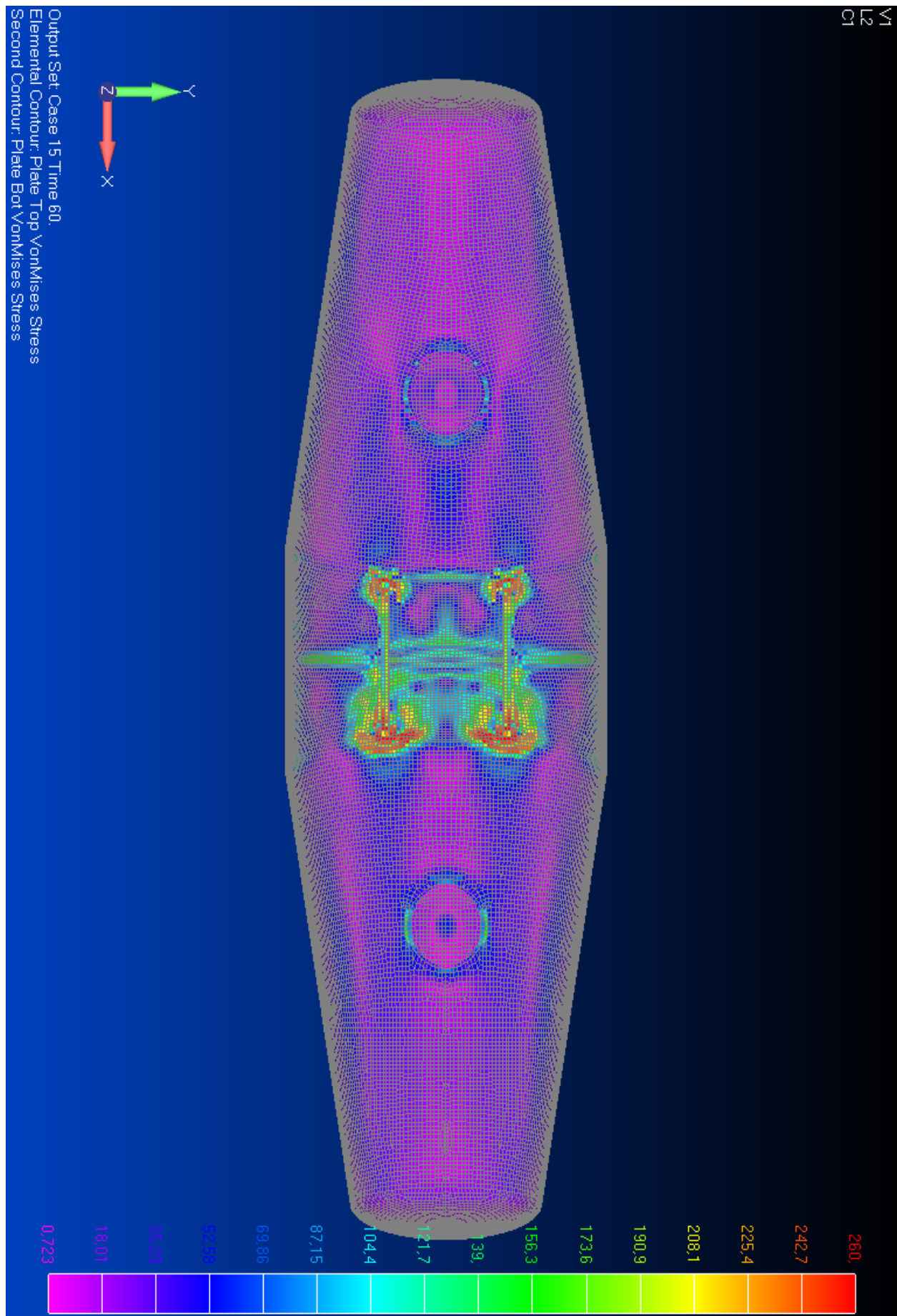
Σχήμα 9.33 Μετατοπίσεις χαρακτηριστικών σημείων ανά βήμα υπολογισμού (mm)



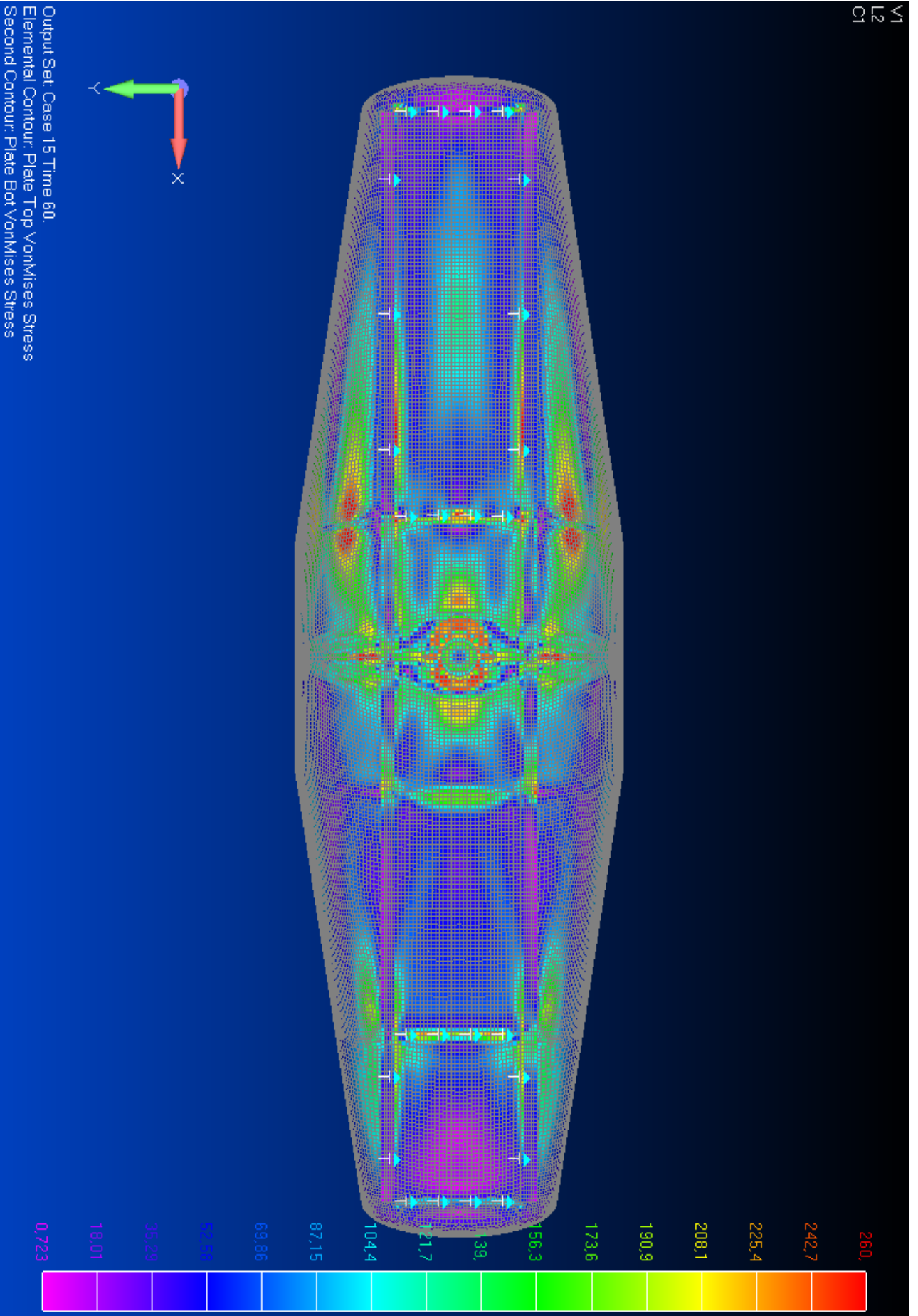
Σχήμα 9.34 Τελικές μετατοπίσεις (mm)



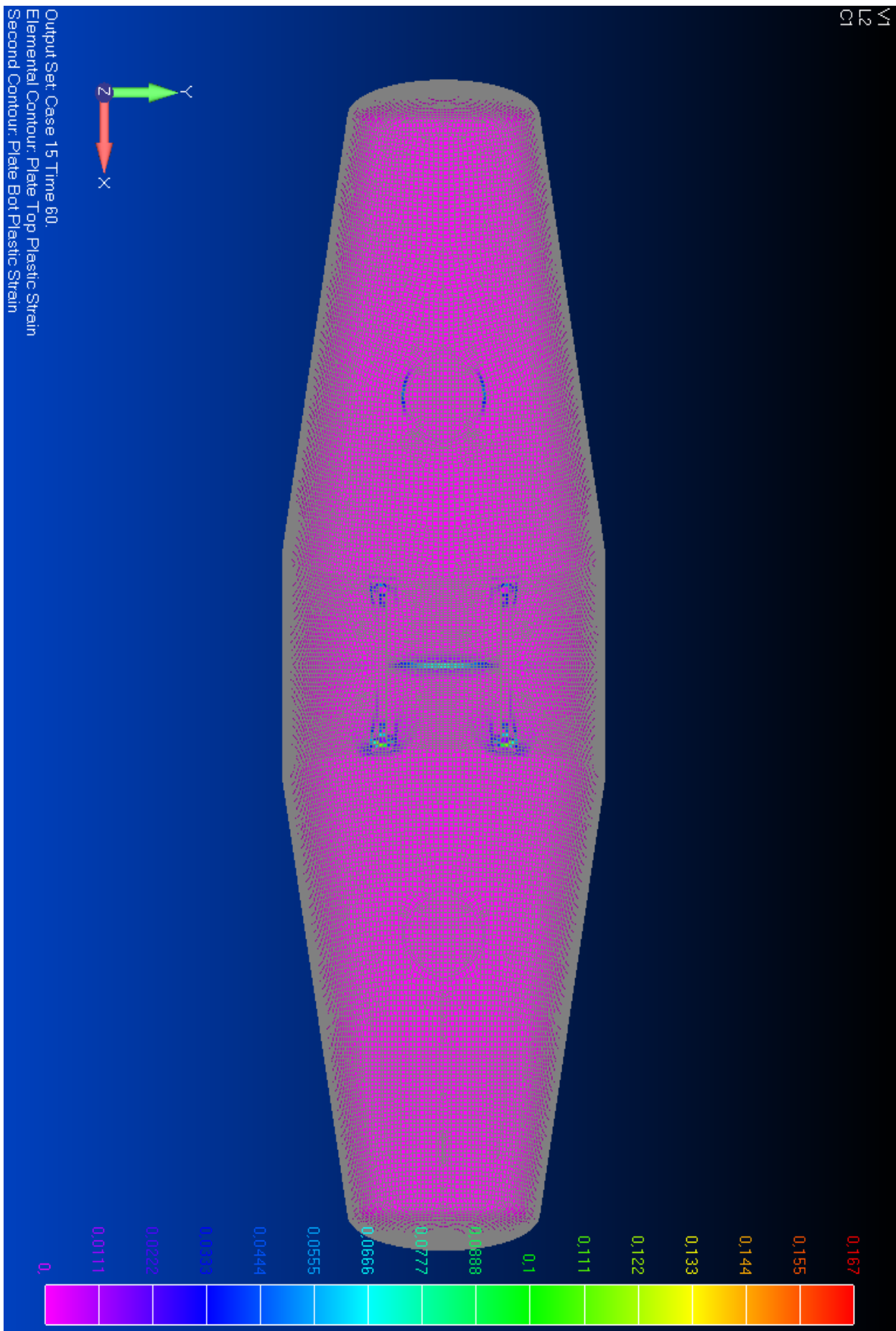
Σχήμα 9.35 Von Misses stress (MPa)



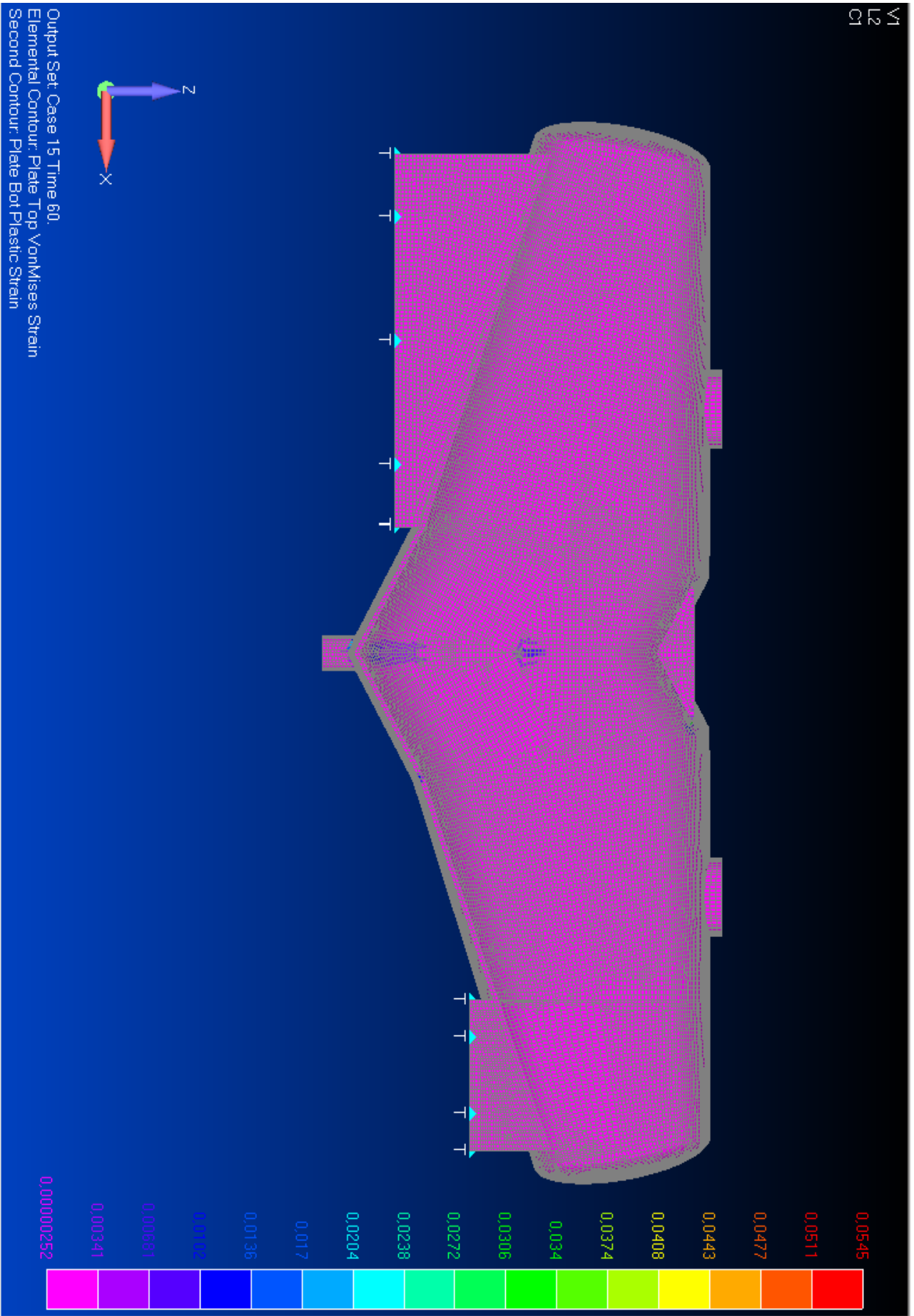
Σχήμα 9.36 Von Misses stress (MPa)



Σχήμα 9.37 Von Mises stress (MPa)

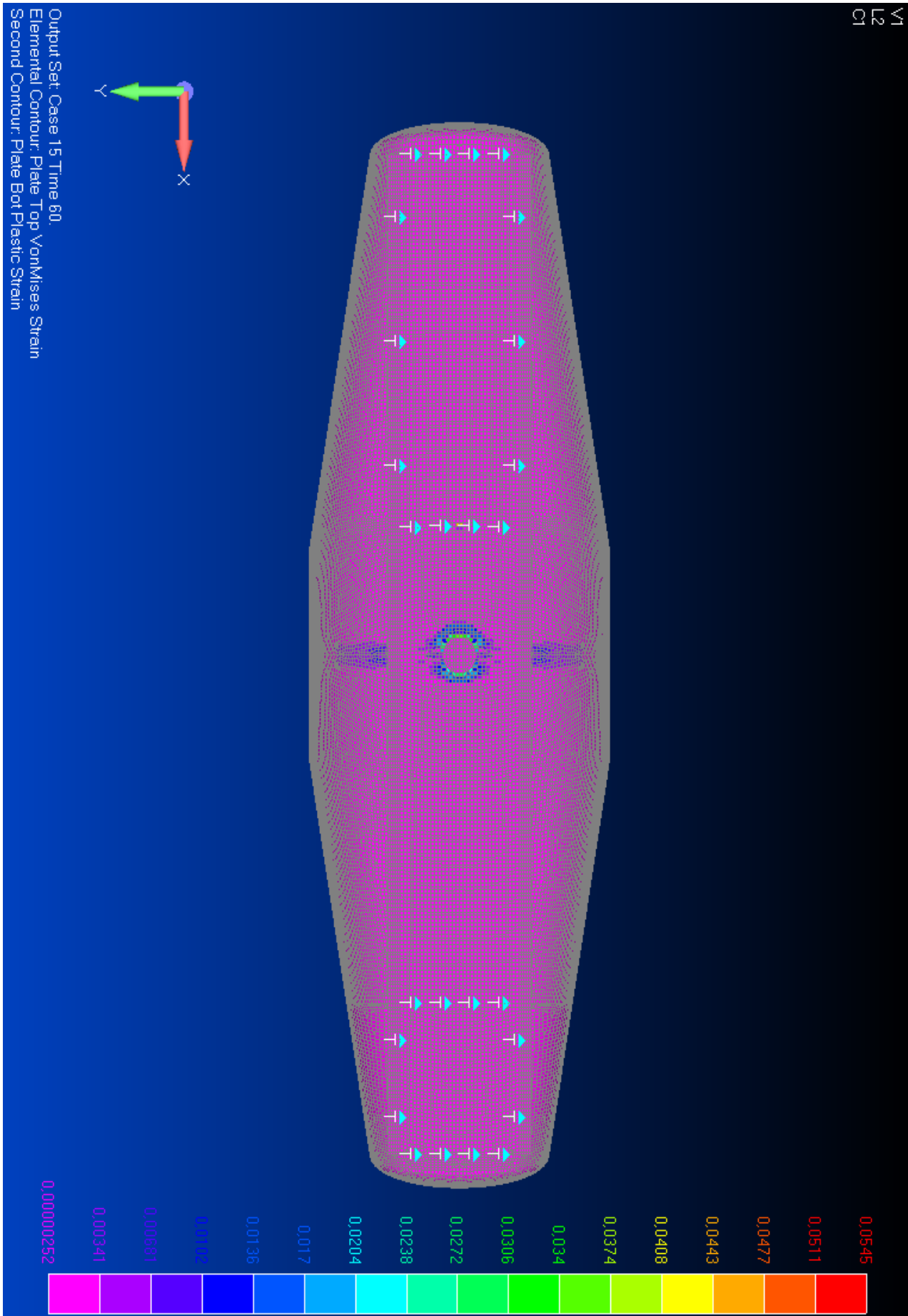


Σχήμα 9.37 Plastic strain



Σχήμα 9.38 Plastic strain





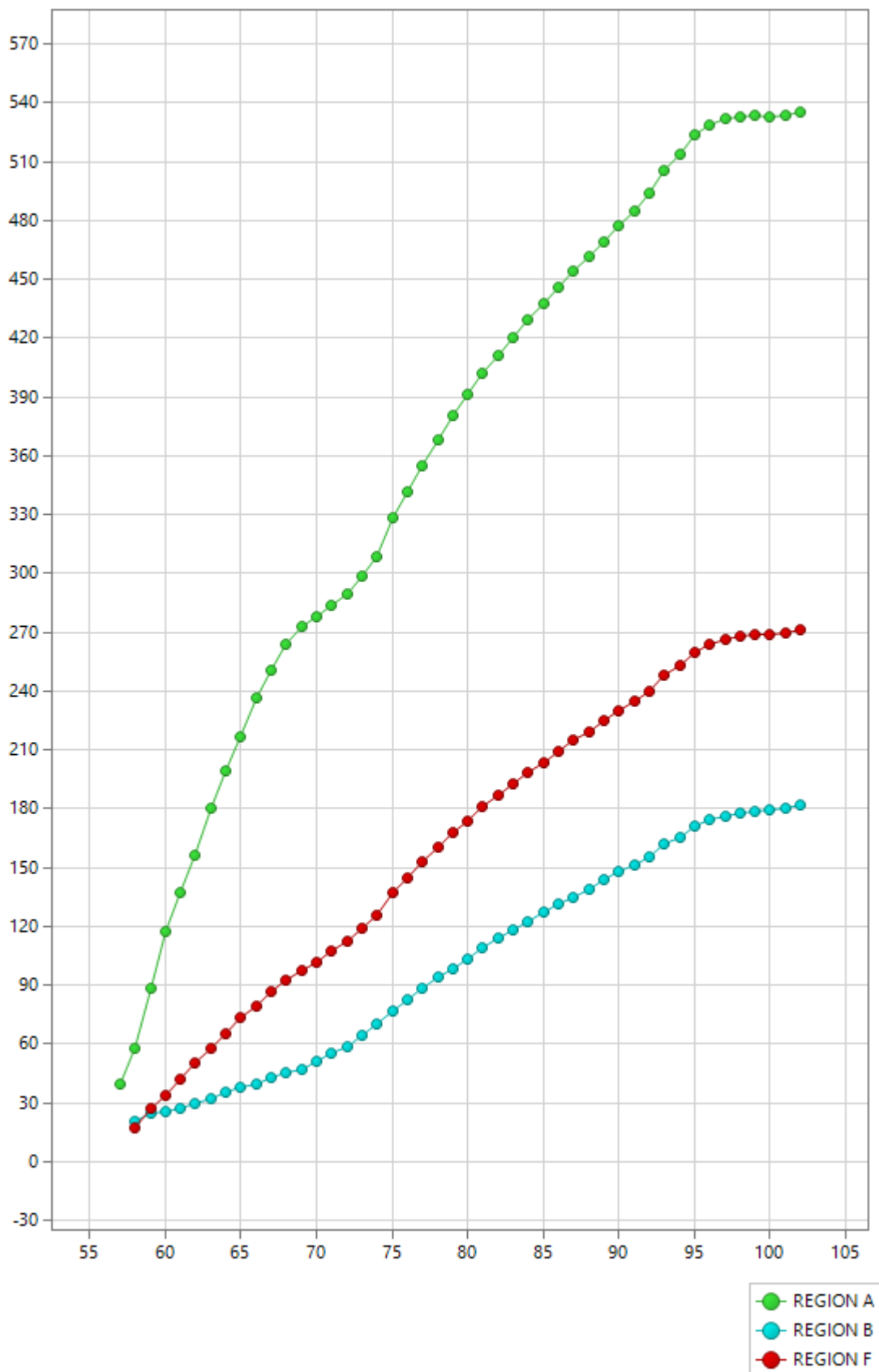
Σχήμα 9.39 Plastic strain

Από τα παραπάνω γραφήματα εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

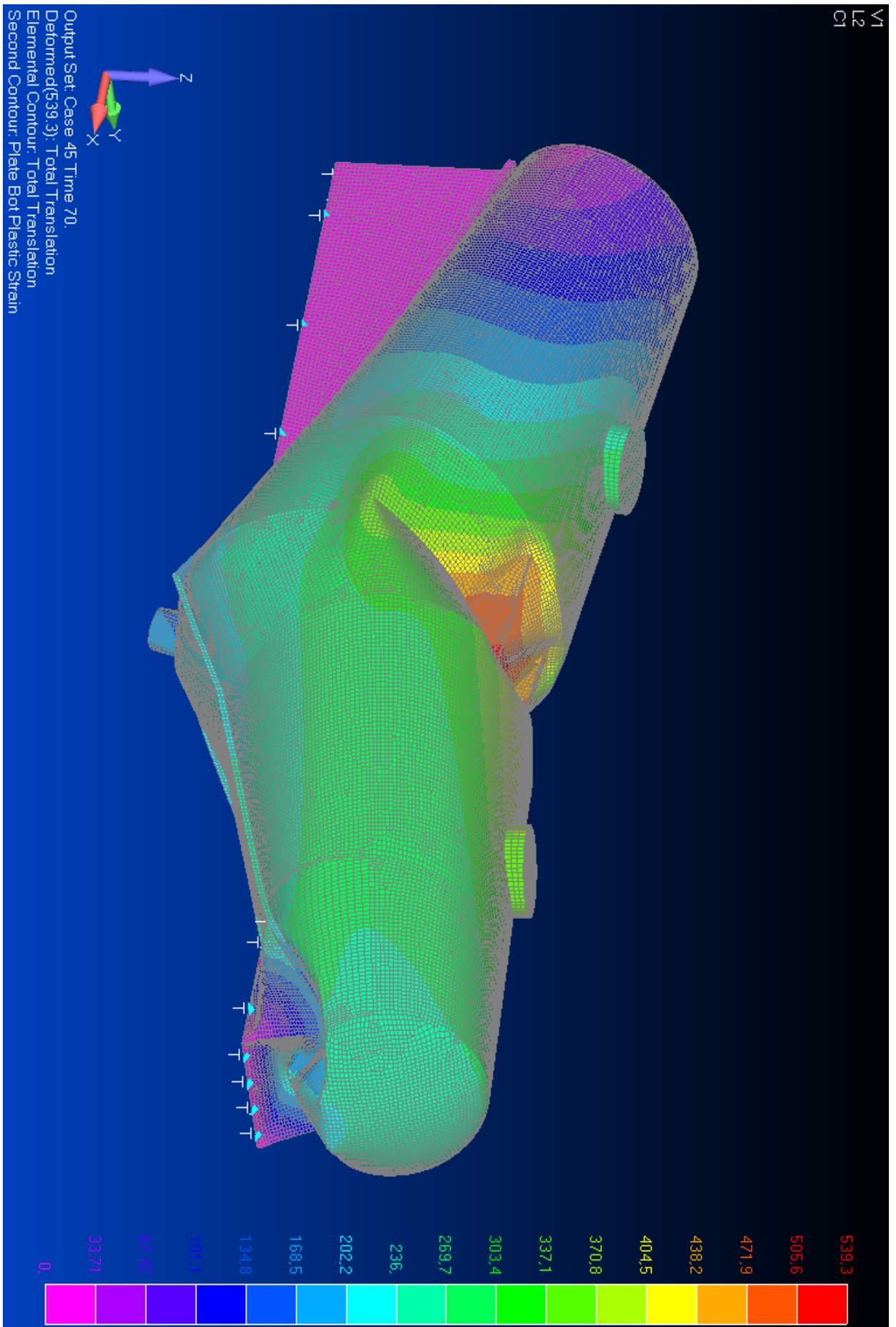
1. Η μείωση των μετατοπίσεων μετά την αποφόρτιση είναι μικρή.
2. Το επάνω μέρος του κελύφους στην περιοχή A, F και στην στήριξη των δοκών έχει πια καταρρεύσει.
3. Οι παραμένουσες τάσεις πλευρικά και στις περιοχές A, B, F είναι υψηλές και έχουνε παγιωθεί.
4. Οι περιοχές με τάσεις κοντά στον όριο διαρροής είναι μεγάλες.
5. Οι παραμένουσες πλαστικές παραμορφώσεις είναι υψηλές (~5%).
6. Μια νέα επικίνδυνη περιοχή σχηματίζεται όπως φαίνεται από τα γραφήματα Von Misses stress, και είναι η εμπρός στήριξη του κελύφους που αρχικά είχα τα χαρακτηριστικά “πάκτωσης”.

### 9.7 ΦΟΡΤΙΣΗ 3 ΜΕ ΚΟΝΙΑΜΑ -ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ- COMB2

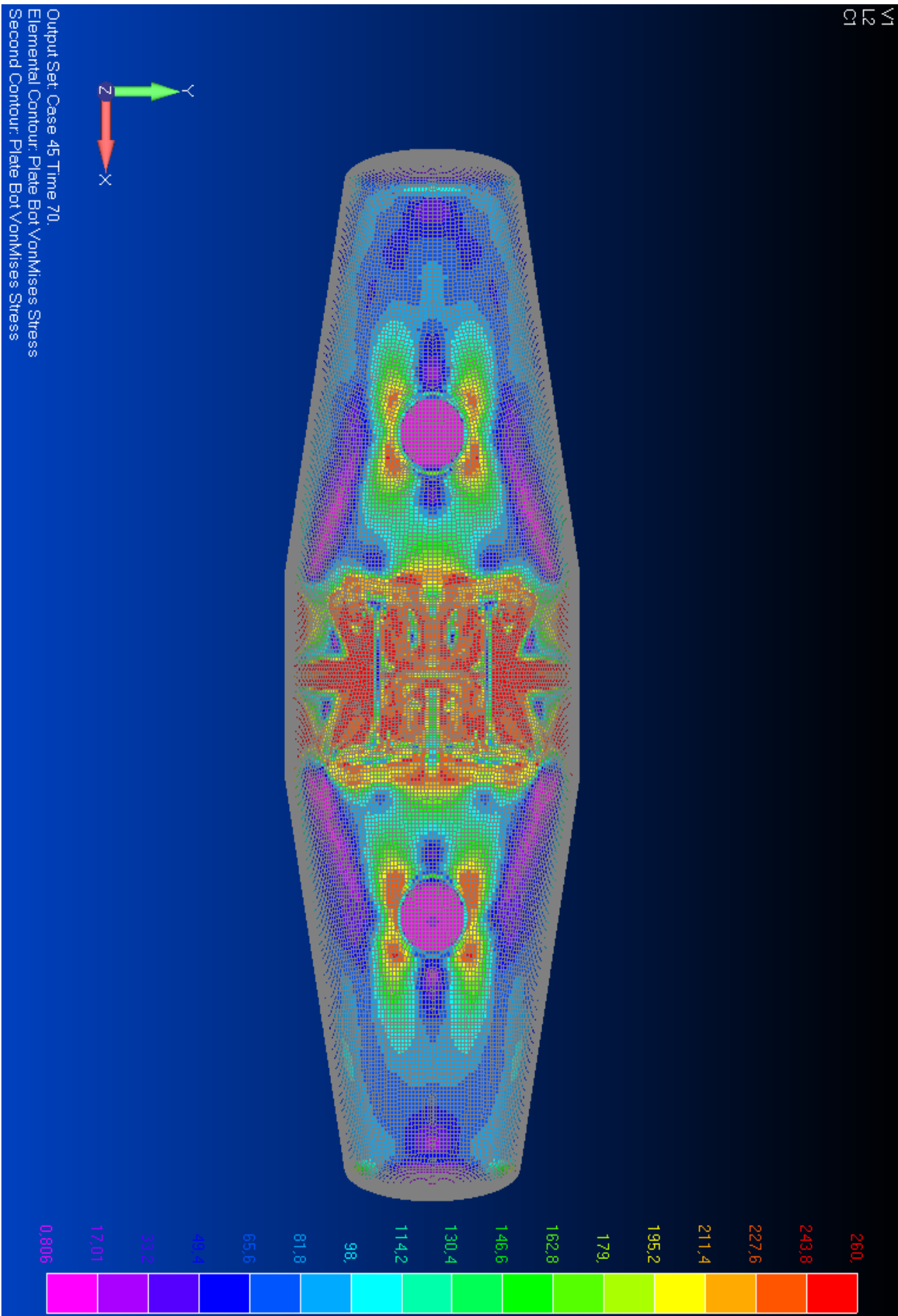
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την φόρτιση με τον συνδυασμό COMP2. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης.



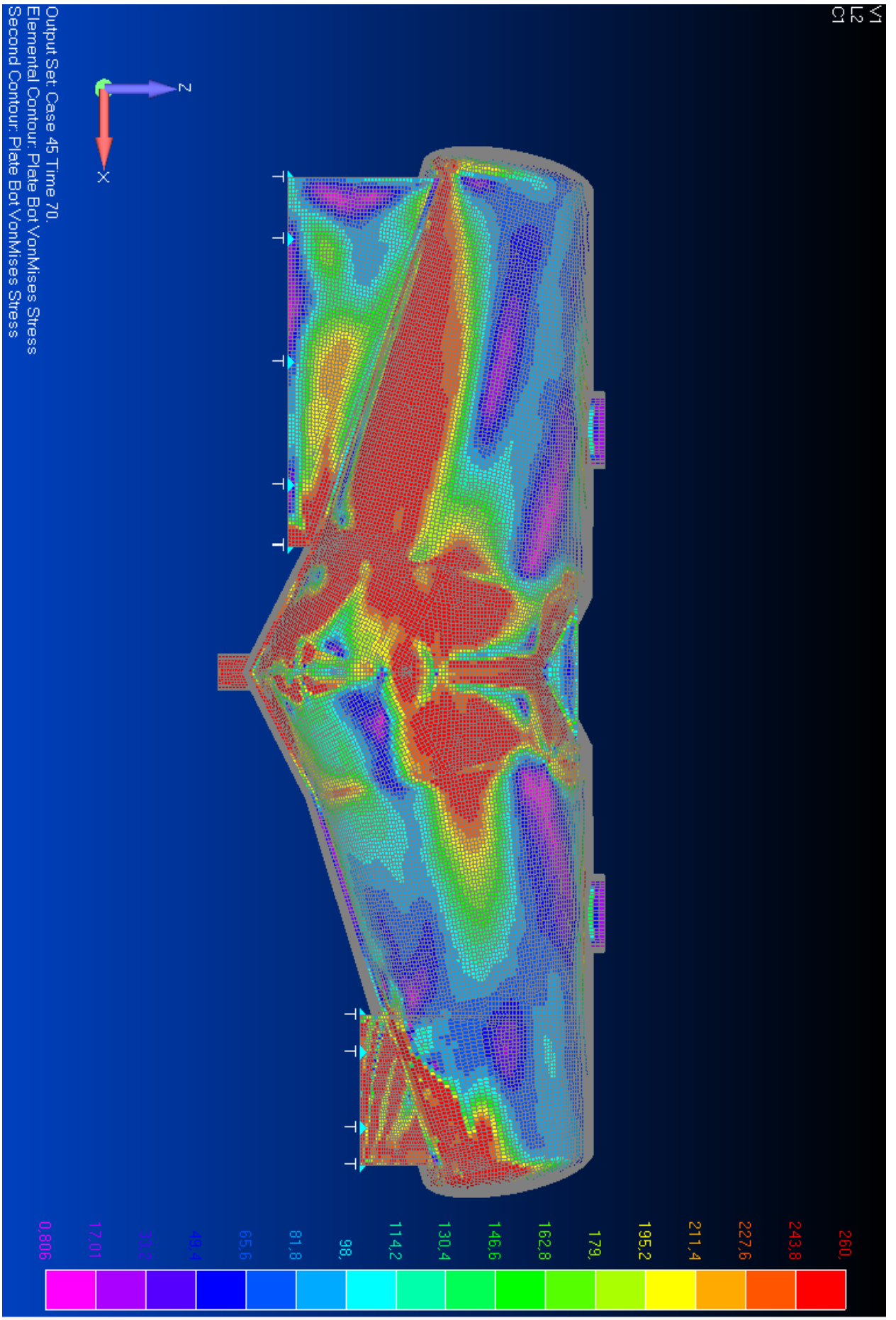
Σχήμα 9.40 Μετατοπίσεις χαρακτηριστικών σημείων ανά βήμα υπολογισμού (mm)



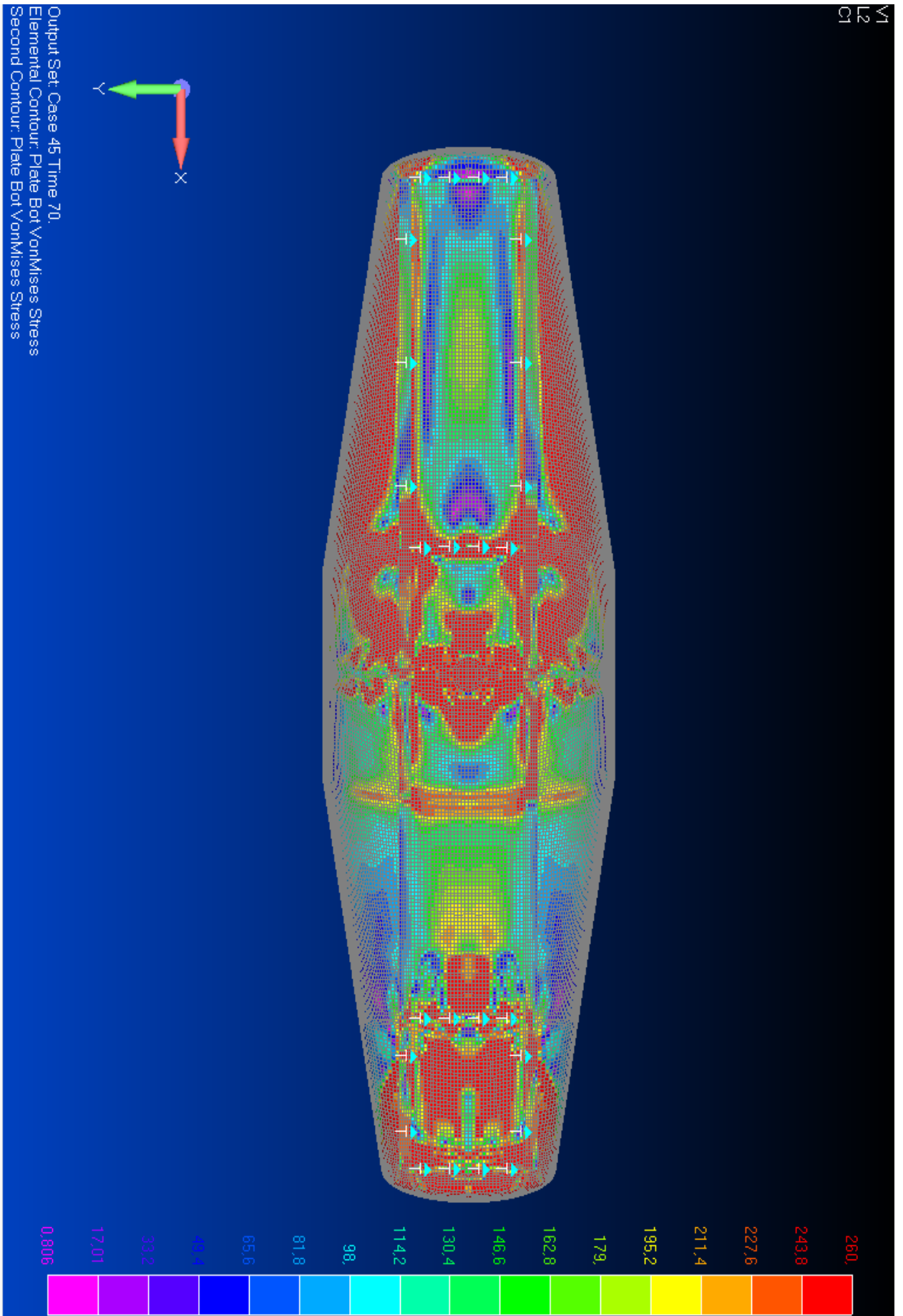
Σχήμα 9.41 Τελικές μετατοπίσεις (mm)



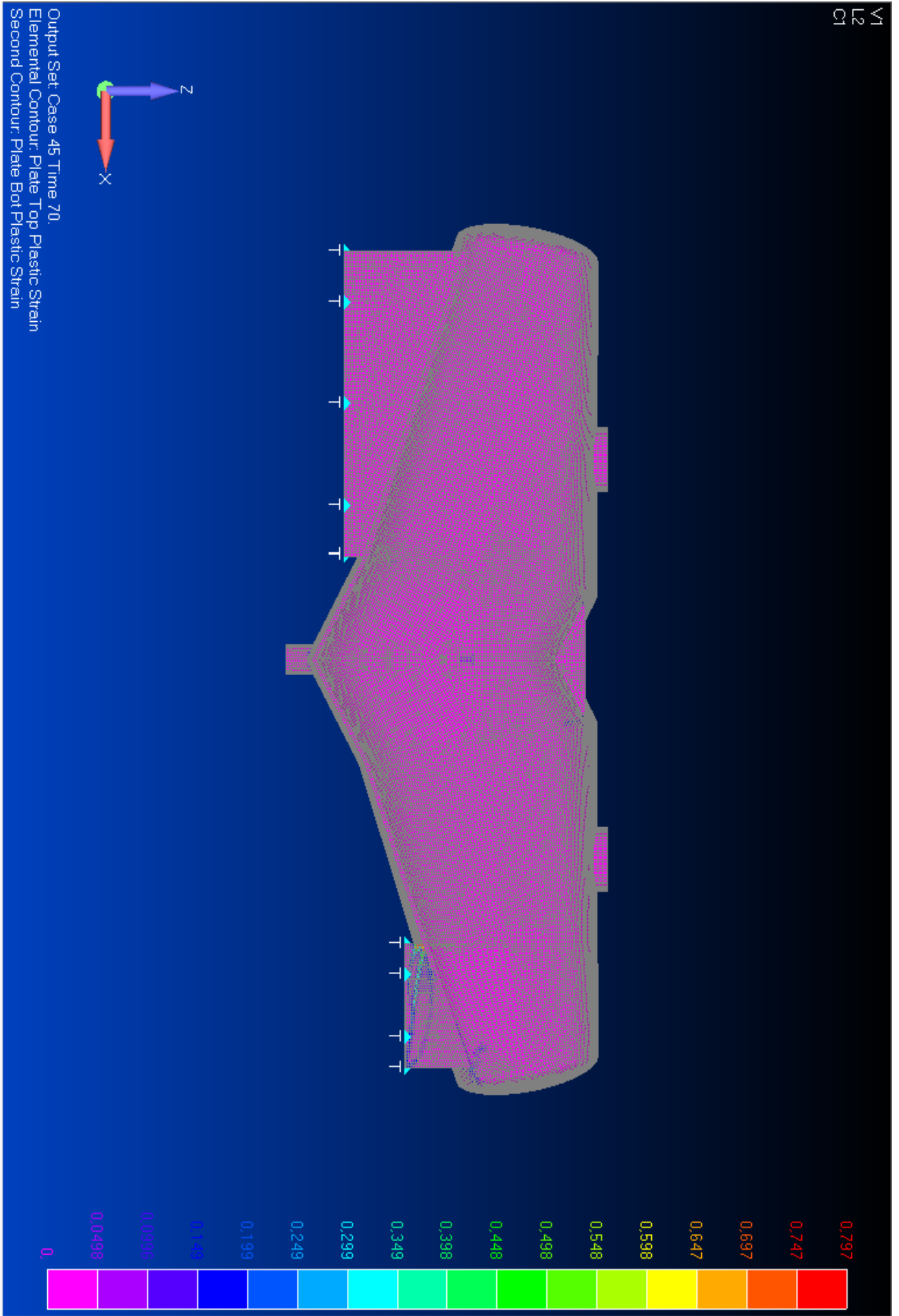
Σχήμα 9.42 Von Mises stress (MPa)



Σχήμα 9.43 Von Mises stress (MPa)

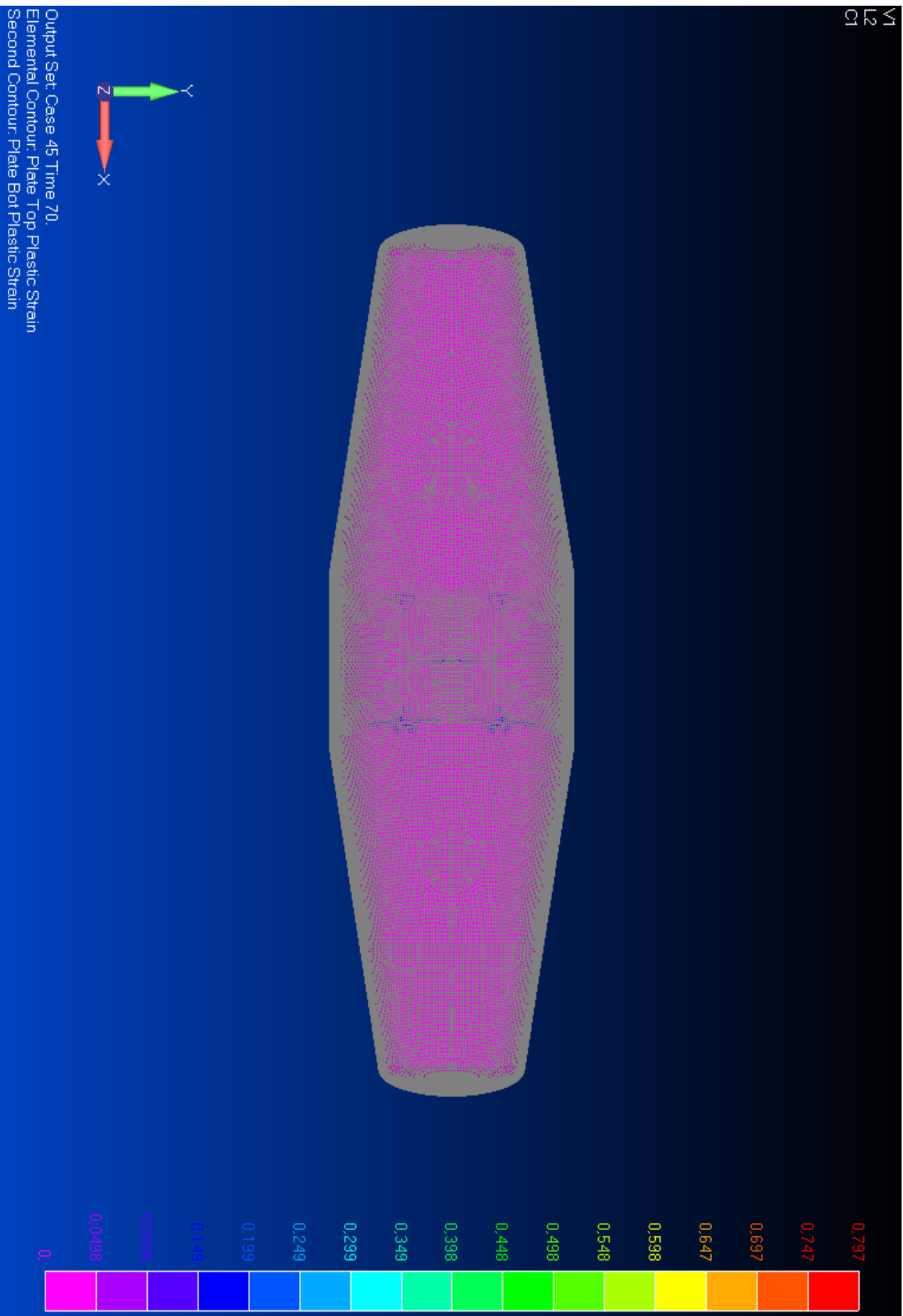


Σχήμα 9.44 Von Misses stress (MPa)

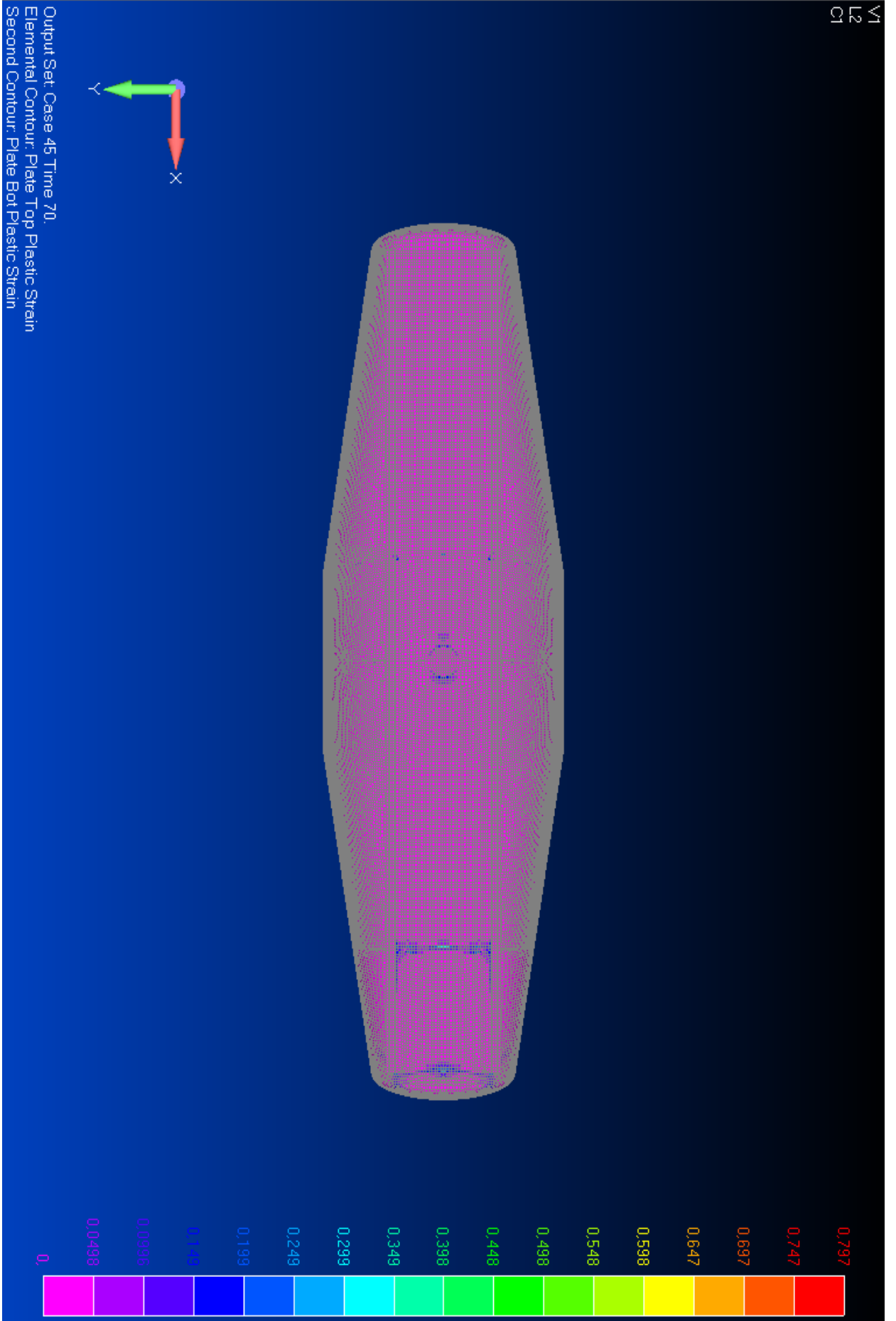


Σχήμα 9.45 Plastic Strain

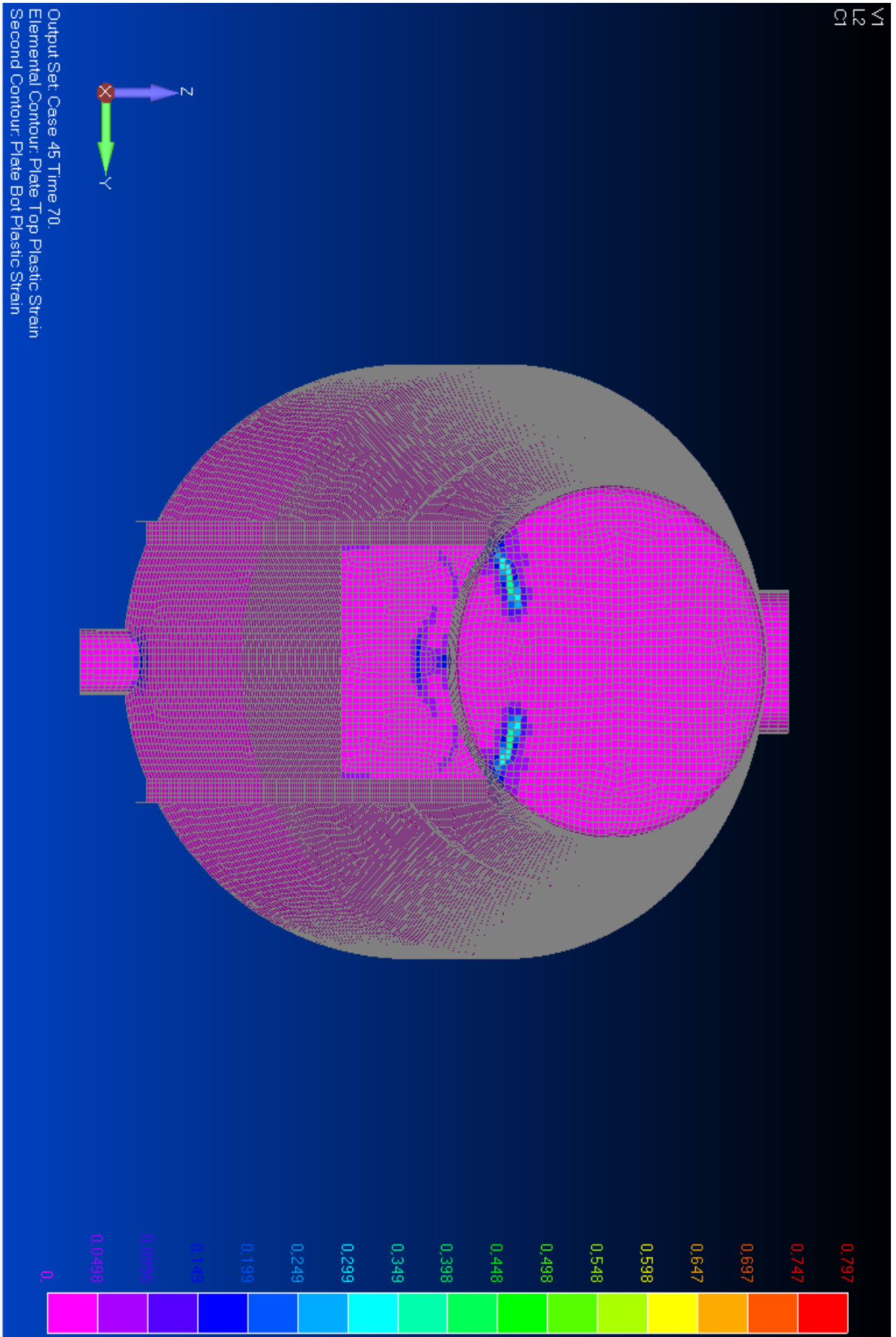




Σχήμα 9.46 Plastic Strain



Σχήμα 9.47 Plastic Strain



Σχήμα 9.49 Plastic Strain

Από τα παραπάνω γραφήματα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

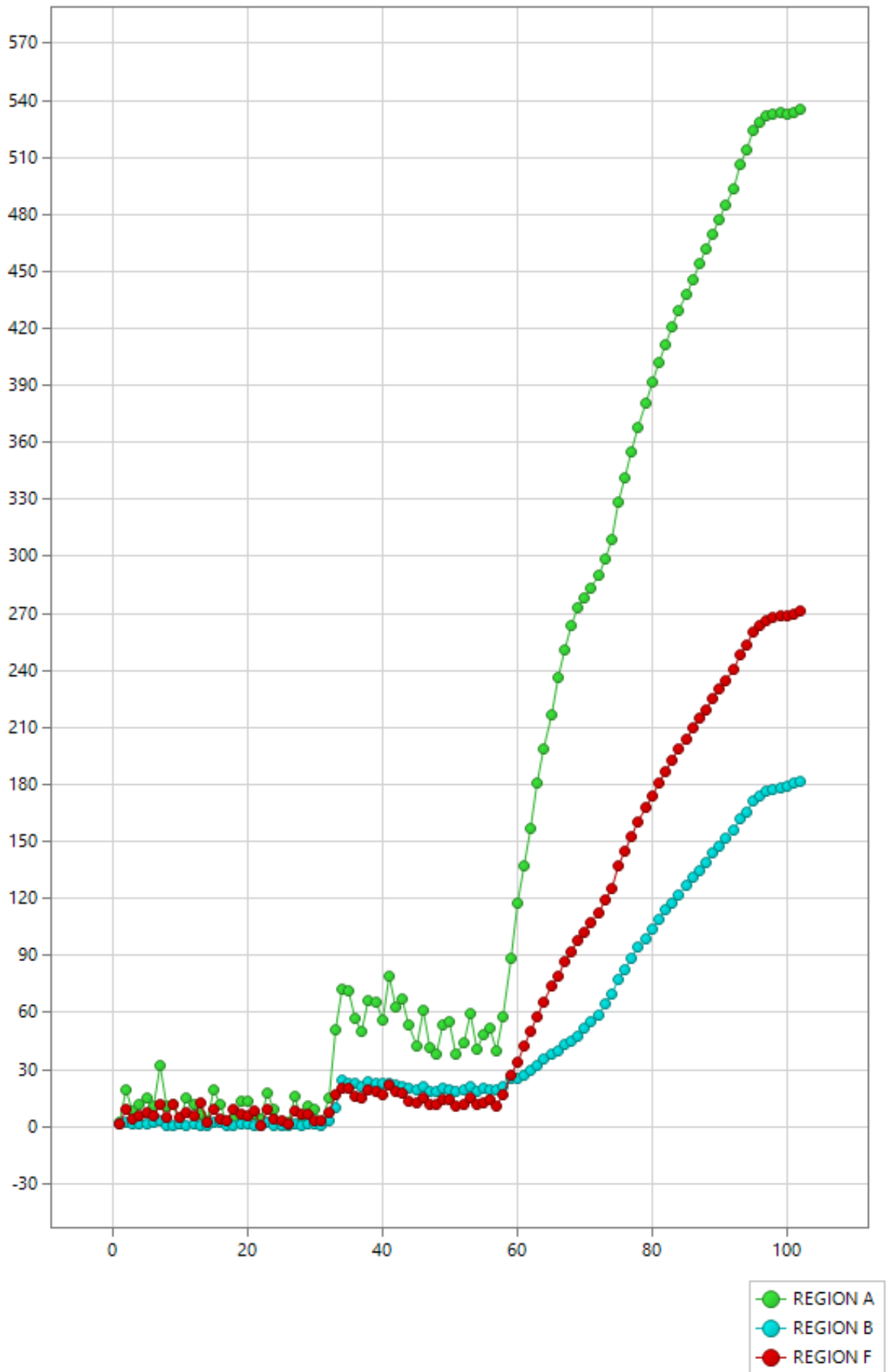
1. Το κέλυφος υπέστη πλήρη κατάρρευση.
2. Εάν παρατηρήσουμε το κέλυφος ως ισοδύναμη “δοκό” τότε πιστοποιείται η πλήρη κατάρρευση αφού έχουμε κατάρρευση στον μέσο μεσημβρινό και στις περιοχές στήριξης του κελύφους.
3. Από πλευράς λειτουργίας κελύφους παρατηρείται η πλαστικοποίηση του σε μεγάλες περιοχές με αποτέλεσμα να μην μπορεί να παραλάβει τις μεμβρανικές τάσεις από τα φορτία σχεδιασμού.
4. Η συνολική μετατόπιση είναι 539 mm ενώ η μέγιστη παραμόρφωση είναι μεγαλύτερη του ορίου θραύσης 20%. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε οδηγηθεί σε απόσχιση τμημάτων του κελύφους που δεν μπορούν να αποδοθούν με το παρόν λογισμικό αφού διαταράσσουν το συμβιβαστό των μετατοπίσεων.

### **9.8 ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**

Στις προηγούμενες παραγράφους περιγράφηκαν βήμα προς βήμα τα στάδια κατάρρευσης του του κελύφους τα οποία είναι τα εξής:

1. Διαρροή του άνω και κάτω μέρους του κελύφους στον κεντρικό μεσημβρινό εξαιτίας της υδραυλικής δοκιμής (περιοχές A και B).
2. Διαρροή της περιοχής F και της στήριξης των δοκών στο επάνω μέρος του κελύφους.
3. Διαρροή των περιοχών στήριξης του κελύφους.

Αυτά τα τρία στάδια ολοκληρώνουν την κατάρρευση του κελύφους. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι μετατοπίσεις του κελύφους κατά την διαδικασία φορτίσεων και επαναφορτίσεων μετά την υδραυλική δοκιμή. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα είναι διακριτές οι περιοχές των δυο φορτίσεων αποφορτίσεων καθώς και αυτή της τελικής φόρτισης που οδηγεί στην καθολική κατάρρευση.



Σχήμα 9.50 Μετατοπίσεις κατά την διάρκεια βημάτων φόρτισης αποφόρτισης

## 10 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Η βελτίωση – ανασχεδιασμός της κατασκευής μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο ένας είναι να αλλάξουμε την γεωμετρία του κελύφους ( αφαίρεση της καμπής του κελύφους στο μέσο μεσημβρινό ). Ο άλλος τρόπος είναι η διαμόρφωση των παχών στα διάφορα μέρη της κατασκευής έτσι ώστε παντού οι αναπτυχθείσες τάσεις δεν ξεπερνούν τις επιτρεπόμενες.

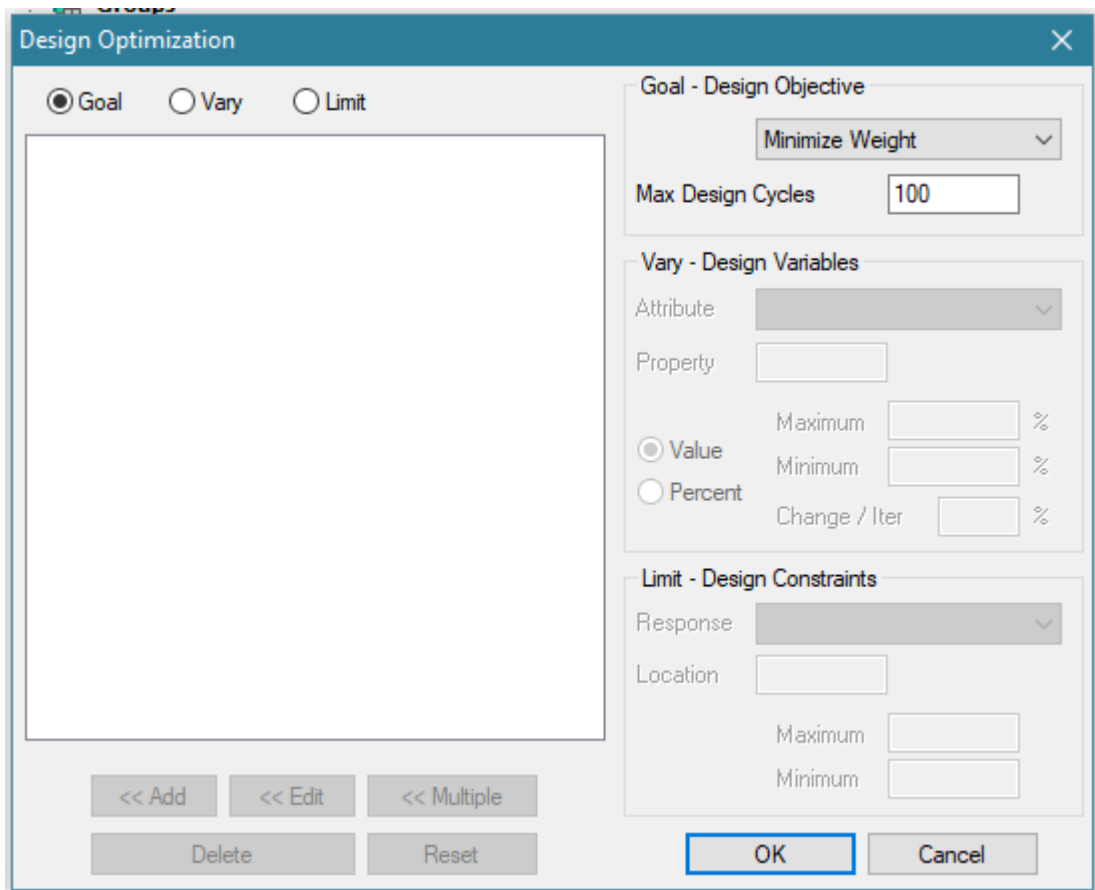
Στην παρούσα διατριβή επιλέχθηκε η δεύτερη μέθοδος. Χωρίστηκε η κατασκευή σε μέρη και καθορίστηκε το πάχος των ελασμάτων της κάθε περιοχής ή εκ προοιμίου η χρησιμοποιώντας τον optimizer του λογισμικού. Η εντατική κατάσταση η οποία προσομοιόθηκε ήτανε αυτή της υδραυλικής δοκιμής που συνίσταται στην πλήρωση με νερό και την άσκηση επιπρόσθετης πίεσης 3 bar.

Η όλη κατασκευή χωρίστηκε στις παρακάτω περιοχές:

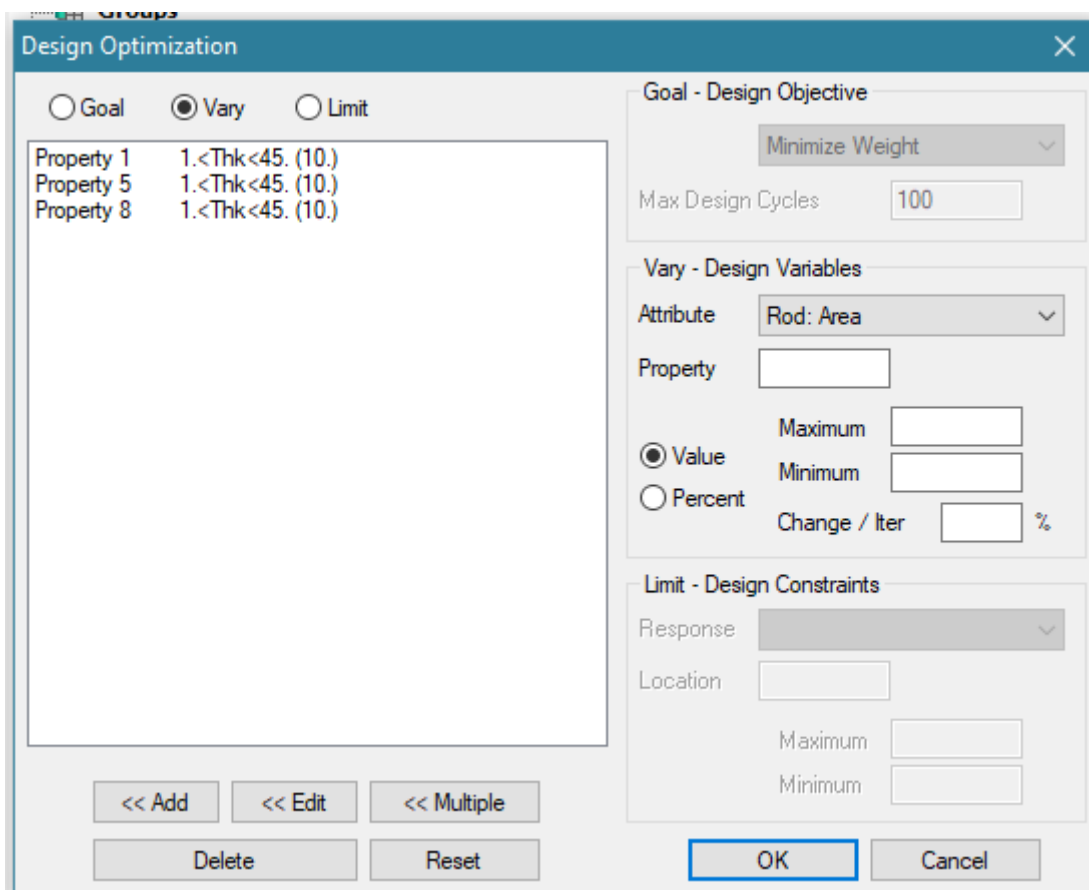
1. Ακρο αριστερό και άκρο δεξιό κωνικό κέλυφος και πάτοι , αρχικό πάχος 5 mm και το τελικό θα προκύψει από την βελτιστοποίηση.
2. Κεντρικοί κωνικά μέρη , αρχικό πάχος 5 mm και το τελικό θα προκύψει από την βελτιστοποίηση.
3. Πάχος Nozzle, καθορίζεται με βάση τον ASME VIII σε 10 mm (20'' SCH STD)
4. Πάχος Nozzle Cup, 34 mm με βάση τον ASME VIII.
5. Πάχος άνω δοκών κελύφους ως έχει εκ κατασκευής 10 mm.
6. Στο τμήμα ενισχύσεων στην συγκόλληση των άνω δοκών με το κέλυφος το συνολικό πάχος καθορίστηκε στα 20 mm.
7. Πάχος padding των nozzles, αρχικό 5 mm και το τελικό θα προκύψει από την βελτιστοποίηση.

Τελικά ο optimizer θα προσδιορίσει τα πάχη 1, 2, 7 τα οποία στο λογισμικό ονομάζονται αντίστοιχα Prop 1, Prop 5 και Prop 8. Η δομή του μαθητικού προβλήματος βελτιστοποίησης είναι η παρακάτω:

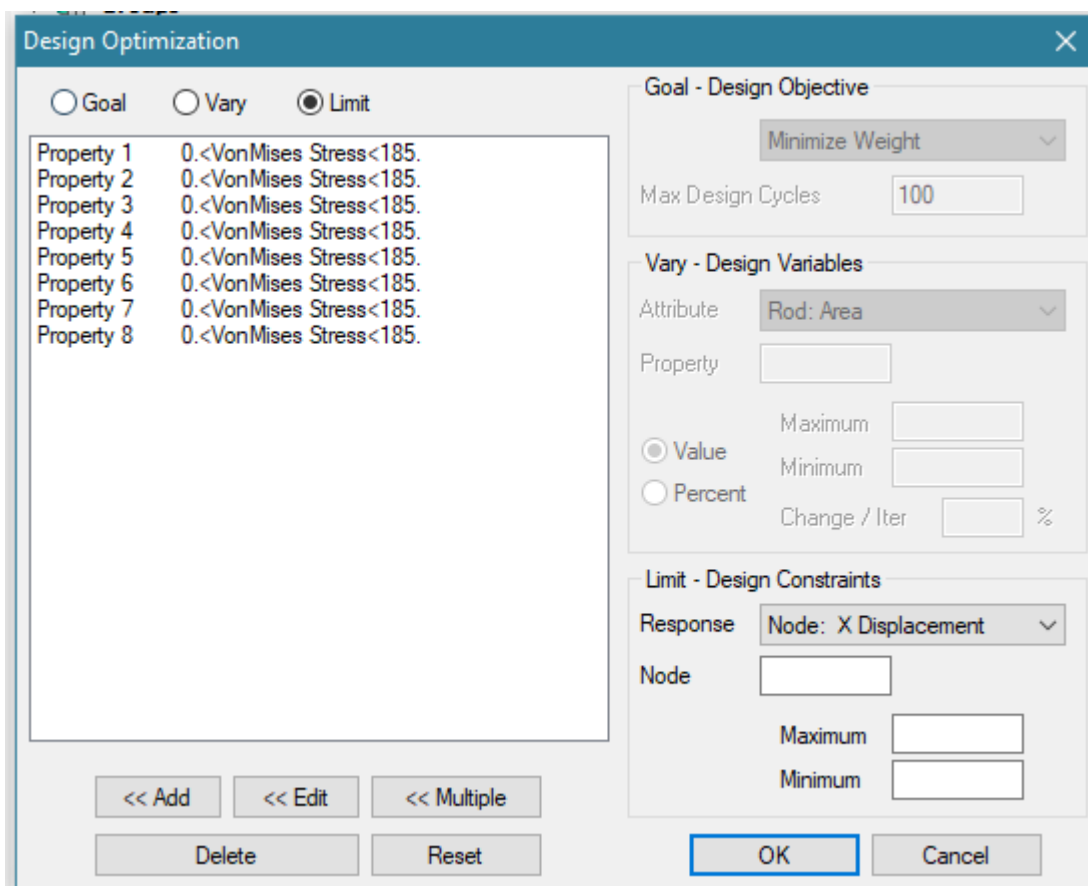
Objective Function:        Weight of structure  
Geometric Constraints:    1 mm <= Prop 1 <=45 mm  
                                  1 mm <= Prop 5 <=45 mm  
                                  1 mm <= Prop 8 <=45 mm  
Stress Constraints:        Von Misses Stress <= Sall=185 Mpa



Σχήμα 10.1

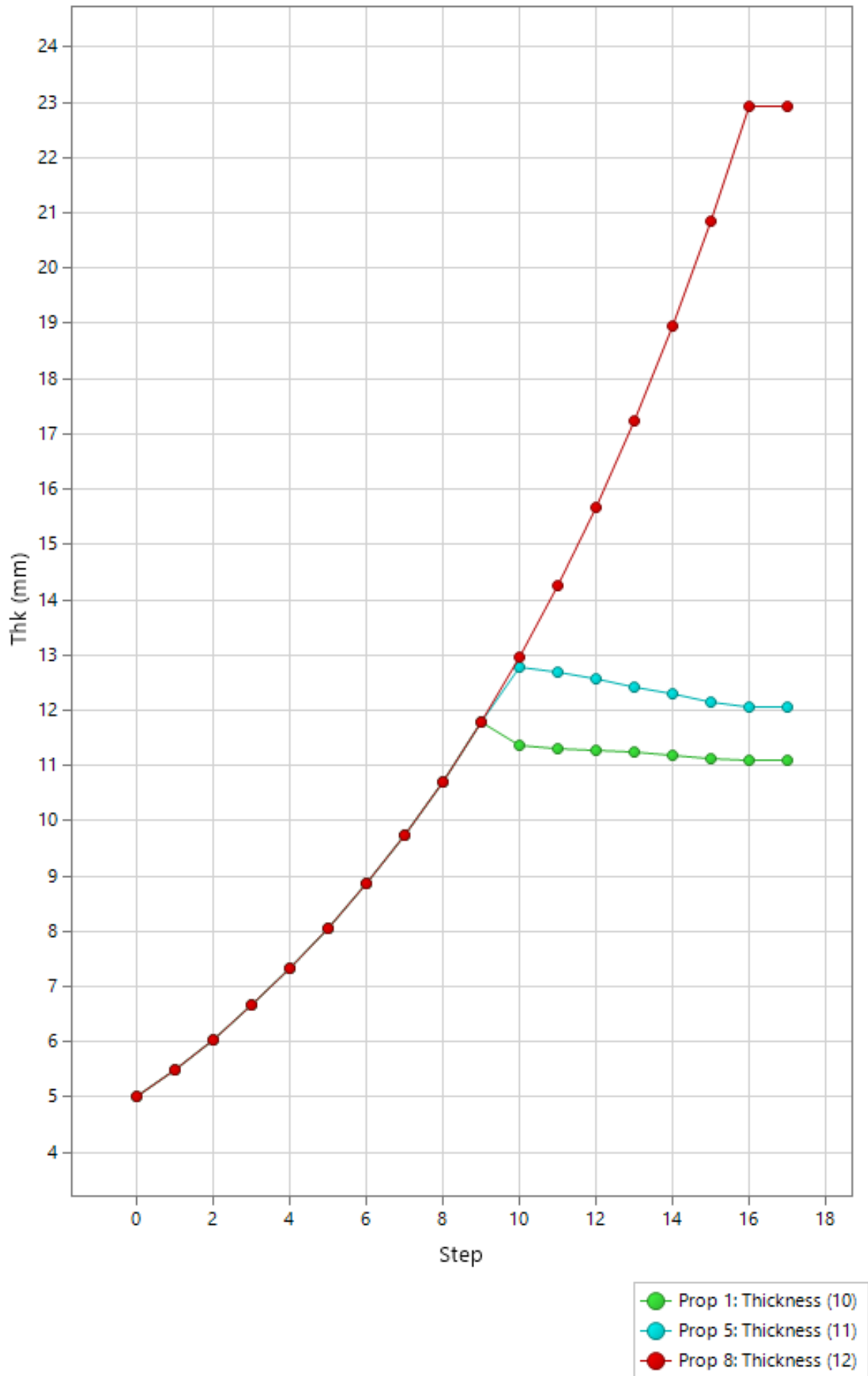


Σχήμα 10.2

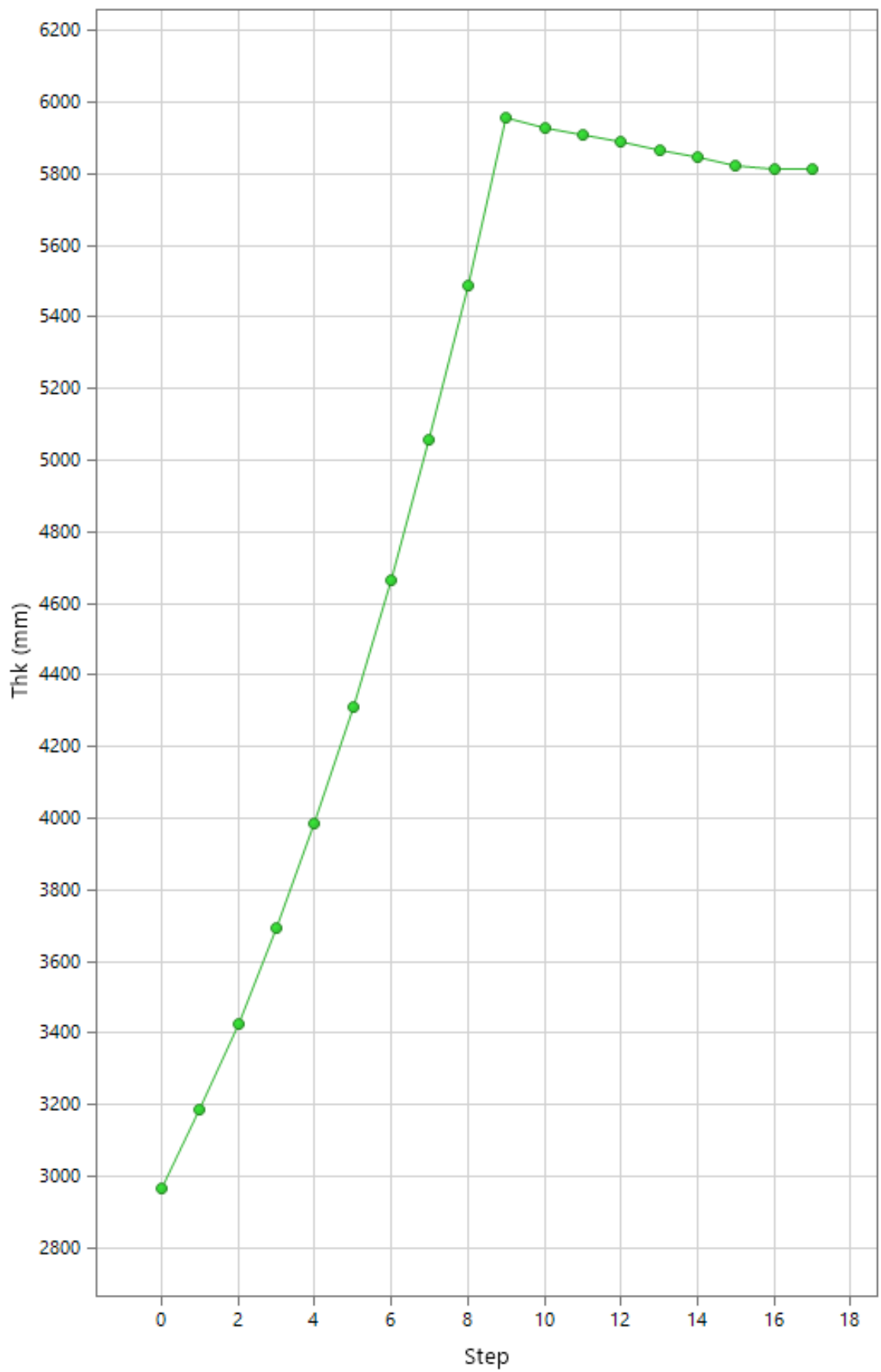


Σχήμα 10.3

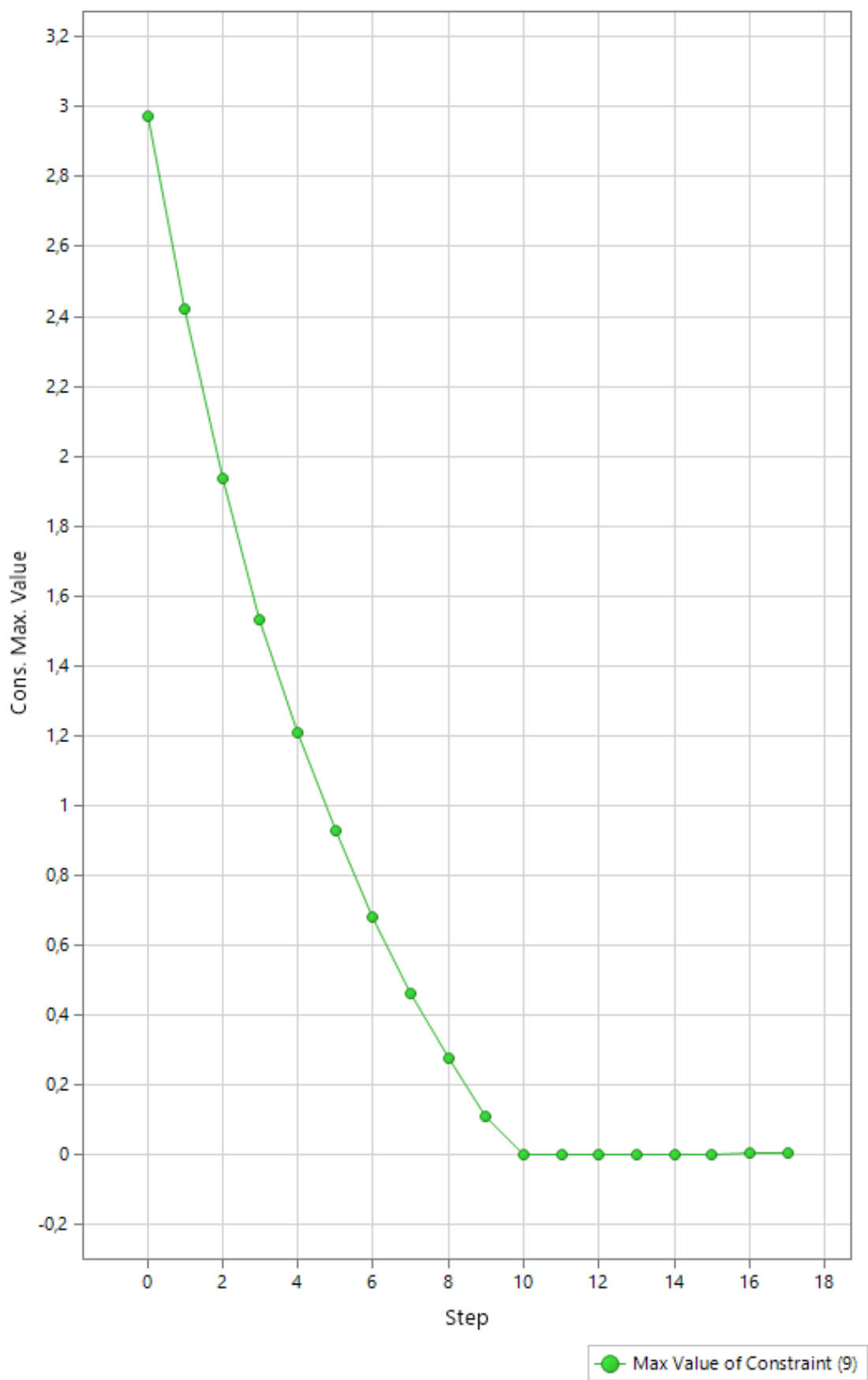




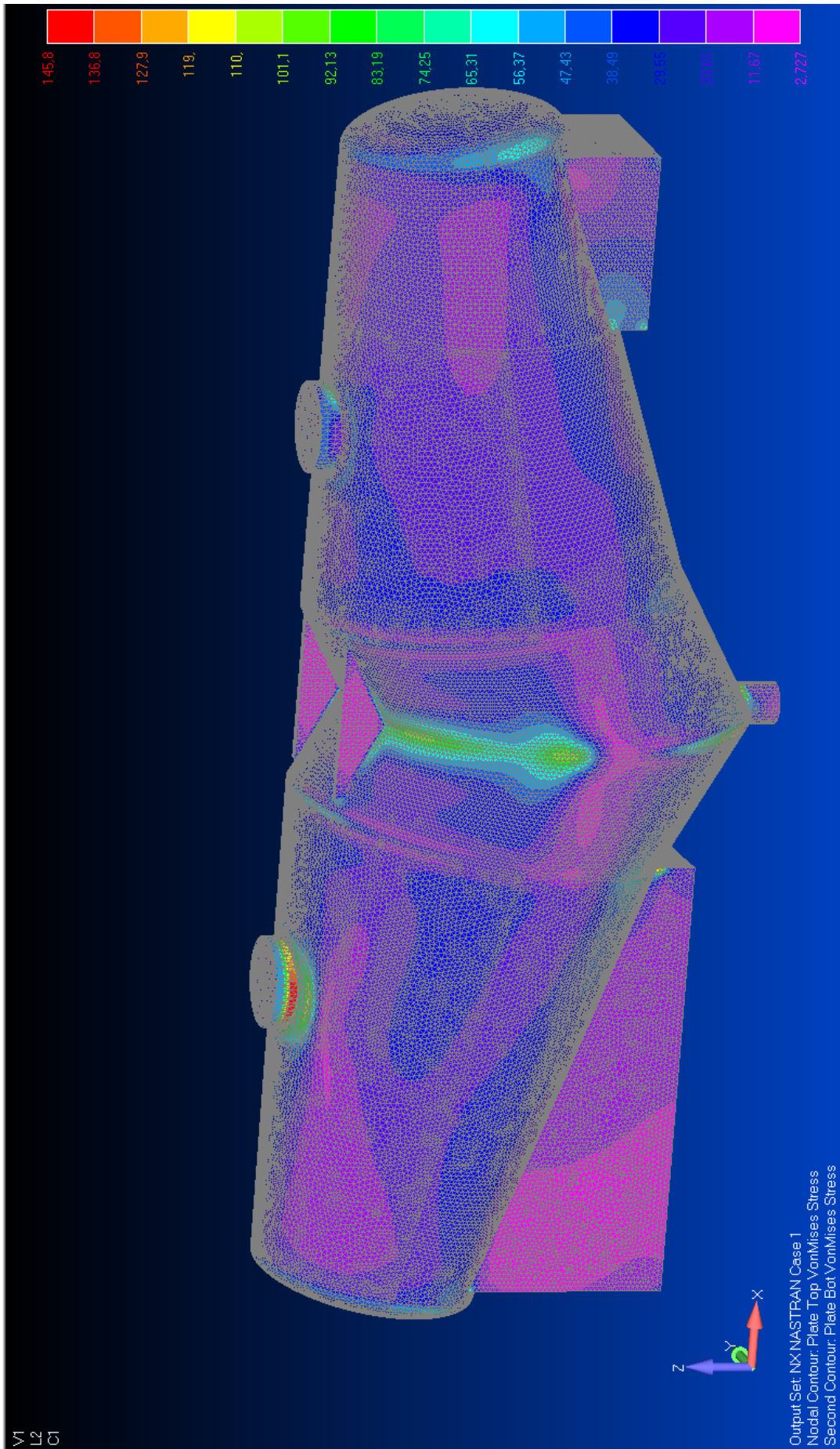
Σχήμα 10.4



Σχήμα 10.5



Σχήμα 10.6



Σχήμα 10.7

Από την διαδικασία βελτιστοποίησης προκύπτουν τα παρακάτω:

- Prop1 τελική τιμή 11.103 mm
- Prop5 τελική τιμή 12.072 mm
- Prop8 τελική τιμή 22,942 mm

Με βάση αυτή την επιλογή παχών ικανοποιούνται μεν οι γεωμετρικοί περιορισμοί αλλά και οι περιορισμοί τάσεων αφού η μέγιστη αναπτυσσόμενη Von Mises είναι 148,5 Mpa .

## 11 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Για την εκπόνηση της παρούσης διατριβής χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω πηγές, βιβλία, σημειώσεις:

- Β. Κουμούση “Κελυφη” , Σημειώσεις ΔΠΜΣ
- Alf Pluger “Κελύφη” , Εκδόσεις Γκιούρδας
- Ο. Ν. Βαλιάση, “Επιφανειακοί φορείς, θεωρεία και μέθοδοι επίλυσης”, Εκδόσεις Ζήση
- S. P. Timosenko – S. W. Krieger , “Theory of plates and shells”, McGraw Hill Ed.
- E. F. Megyesy , “Pressure vessel handbook”, PRESSURE VESSEL PUBLISHING INC.
- H. Bernar, “Pressure vessel design handbook”, Krieger Publishing Comp.
- ASME BPVE SECTION VIII DIV.1 2017
- ASME BPVE SECTION VIII DIV.2 2017
- J. S. Przemieniecki, “Theory of matrix structural analysis”, Dover Ed.
- O. C. Zienkiewicz, R. Taylor, “The finite element method”, Vol. 1,2 , McGraw Hill Ed.
- Μ. Παπαδρακάκης, “Ανάλυση φορέων με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων”, Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Μ. Παπαδρακάκης, “Μη γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία”, ΔΜΠΣ
- Klaus – Jurgern Bathe, “Finite element procedures”, Prentice Hall Ed.
- N. Dowling, “Mechanical behavior of materials”, Prentice Hall Ed.
- Κ. Ι. Βαρκαράκης, “Επίλυση και σχεδιασμός των γραμμικών φορέων με την θεωρεία πλαστικότητας”, Εκδόσεις Ε.Μ.Π.
- Κ. Σπηλιόπουλου, “Προχωρημένη πλαστική ανάλυση ραβδωτών φορέων”, ΔΠΜΣ
- R. Haftka, “Elements of structural optimisation”, McGraw Hill Ed.
- Β. Κουμούσης, “Βέλτιστος σχεδιασμός κατασκευών”, ΔΠΜΣ