



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διείσδυση κυλίνδρου σε ελαστικό ημιχώρο στα πλαίσια της μικροπολικής θεωρίας ελαστικότητας

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Δ.Π.Μ.Σ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΑΡΑΒΑΝΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

Επιβλέποντες

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Γ. ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ
Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΖΗΣΗΣ
Επίκουρος Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Αθήνα, Οκτώβριος 2017

Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, κατά το χρονικό διάστημα Σεπτέμβριο 2016 έως Οκτώβριο 2017. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Χ. Γεωργιάδη και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Α. Ζήση για την άριστη συνεργασία και την πολύτιμη βοήθειά τους καθ' όλη τη διάρκεια της διατριβής.

Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας Σχημάτων.....	4
Πίνακας Συμβόλων.....	6
Περίληψη.....	7
Summary.....	8
1. Εισαγωγή.....	9
2 Δι-διάσταση διείσδυση ενός στερεού μικροδομής που χαρακτηρίζεται από ελαστικότητα τάσης-ζεύγους.....	11
2.1 Φαινόμενα Κλίμακας και Προβλήματα Επαφής.....	11
2.2 Μοντελοποίηση μικροδομικών υλικών – Μακροσκοπική συμπεριφορά.....	12
2.3 Γενικευμένες Θεωρίες Συνεχούς Μέσου.....	13
2.4 Βασικές εξισώσεις επίπεδης παραμόρφωσης.....	15
2.5 Εξισώσεις ημιεπιπέδου Green.....	21
2.6 Μετασχηματισμός Fourier Άρτιων και Περιττών Συναρτήσεων.....	25
2.7 Αποτελέσματα.....	28
3. Διατύπωση του προβλήματος Επαφής.....	32
3.1 Διατύπωση Συνοριακών Συνθηκών.....	32
3.2 Προσέγγιση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων.....	34
3.3 Αριθμητική Επίλυση.....	36
3.4 Αποτελέσματα.....	37
4. Συμπεράσματα.....	43
Βιβλιογραφία.....	45
Παράρτημα.....	49

Πίνακας Σχημάτων

Σχήμα 1. Συνιστώσες τάσεων και τάσεων ζεύγους για ένα στοιχειώδες σωματίδιο σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.....	15
Σχήμα 2 . Φορτίο που ασκείται στην επιφάνεια ενός ελαστικού ημιεπιπέδου	21
Σχήμα 3. Αδιάστατο πεδίο μετατοπίσεων συναρτήσει της απόστασης x/ℓ από το σημείο εφαρμογής του φορτίου για διάφορες τιμές του λόγου Poisson.....	30
Σχήμα 4. Αδιάστατη στροφή συναρτήσει της απόστασης x/ℓ από το σημείο εφαρμογής του φορτίου για διάφορες τιμές του λόγου Poisson.....	31
Σχήμα 5. Ισοτασικές καμπύλες παραμόρφωσης για το πρόβλημα Flamant-Boussinesq για την Κλασική Ελαστικότητα και την Ελαστικότητα Τάσης Ζεύγους με λόγο Poisson $\nu = 0.33$	31
Σχήμα 6. Ισοτασικές καμπύλες στροφής για το πρόβλημα Flamant-Boussinesq για την Κλασική Ελαστικότητα και Ελαστικότητα Τάσης Ζεύγους με λόγο Poisson $\nu = 0.33$	32
Σχήμα 7. Κυλινδρικό σώμα που διεισδύει σε ελαστικό ημιχώρο	33
Σχήμα 8. Κατανομή της πίεσης κάτω από τον κυλινδρικό διεισδυτή σε σχέση με την κανονικοποιημένη απόσταση x/b για διάφορες τιμές του q για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$	38
Σχήμα 9. Εξάρτηση της αδιάστατης ακτίνας επαφής b/b_{clas} και της αδιάστατης μέσης πίεσης $P_{av} / P_{av,clas}$ από το λόγο ℓ/b και Poisson ν	39
Σχήμα 10. Τασικά Πεδία ισοδύναμης τάσης σ_{eq} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$	42
Σχήμα 11. Τασικά πεδία για την συνιστώσα της τάσης σ_{xx} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$	50
Σχήμα 12. Τασικά πεδία για την συνιστώσα της τάσης σ_{yy} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$	51
Σχήμα 13. Τασικά πεδία για την συνιστώσα της τάσης σ_{xy} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$	52
Σχήμα 14. Τασικά πεδία για την συνιστώσα της τάσης σ_{yx} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$	53

Σχήμα 15. Πεδίο τανυστή τάσεων ζεύγους m_{xz} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$	54
Σχήμα 16. Πεδίο τανυστή τάσεων ζεύγους m_{yz} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$	55

Πίνακας Συμβόλων

σ_{xy}	Ορθογώνια συνιστώσα ασύμμετρης τάσης
m_{xz}	Τανυστής τάσεων ζεύγους
u_x	Μετατόπιση
ε_{xx}	Τανυστής παραμόρφωσης
ω	Περιστροφή
k_{xz}	Συνιστώσα τανυστή καμπυλότητας
μ	Μέτρο διάτμησης
ν	Λόγος Poisson
ℓ	Χαρακτηριστικό μήκος υλικού
∇^2	Δι-διάστατος τελεστής Laplace
$\Phi(x, y)$	Ομαλή τασική συνάρτηση
$\Psi(x, y)$	Ομαλή τασική συνάρτηση
P	Συγκεντρωμένο φορτίο
$\delta(x)$	Συνάρτηση Dirac
b	Μήκος ημιεπαφής
q	Λόγος μήκους υλικού προς επιφάνεια επαφής
$U_n(\tilde{s})$	Πολυώνυμα Chebyshev
b_{clas}	Μήκος ημιεπαφής στην κλασική ελαστικότητα
p_{av}	Μέση πίεση
$\hat{f}(\xi)$	Μετασχηματισμός Fourier

Περίληψη

Στην παρούσα μελέτη, αντλούμε γενικές λύσεις για δι-διάστατα προβλήματα επαφής στο πλαίσιο της δεσμευμένης μικροπολικής θεωρίας ελαστικότητας (θεωρία τάσεων ζεύγους). Αυτή η θεωρία εισάγει χαρακτηριστικά μήκη και είναι σε θέση να συλλάβει τις σχετικές επιδράσεις του φαινομένου μεγέθους που προκύπτουν από την μικροδομή του υλικού και συχνά παρατηρούνται στις δοκιμές διείδυσης που χρησιμοποιούνται για το μηχανικό χαρακτηρισμό του υλικού. Το πρόβλημα επαφής που μελετάται προσεγγίζεται με τη χρήση των συναρτήσεων Green. Οι συναρτήσεις αυτές λαμβάνονται με χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών και αντιστοιχούν στη λύση του δι-διάστατου προβλήματος Flamant-Boussinesq στα πλαίσια της δεσμευμένης μικροπολικής θεωρίας ελαστικότητας.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ύπαρξη ισχυρής εξάρτησης από τα μικροδομικά χαρακτηριστικά του υλικού όταν αυτό γίνεται συγκρίσιμο με τη χαρακτηριστική διάσταση του προβλήματος, το οποίο στην περίπτωση μιας δοκιμής διείδυσης είναι το μήκος/επιφάνεια επαφής.

Summary

In this study, we derive general solutions for two-dimensional plane strain contact problems within the framework of the generalized continuum theory of constrained micropolar elasticity (couple stress elasticity). This theory introduces characteristic material lengths and is able to capture the associated scale effects that emerge from the material microstructure which are often observed in indentation tests used for the material characterization. The contact problems are formulated in terms of singular integral equations using a Green's function approach.

The pertinent Green's function obtained through the use of integral transforms corresponds to the solution of the two-dimensional Flamant–Boussinesq half-plane problem in constrained micropolar elasticity. The results show a strong dependence on the microstructural characteristics of the material when this becomes comparable to the characteristic dimension of the problem, which in the case of an indentation test is the contact length/area.

1. Εισαγωγή

Η μηχανική των επαφών είναι η μελέτη της παραμόρφωσης των στερεών τα οποία έρχονται σε επαφή το ένα με το άλλο σε ένα ή περισσότερα σημεία. Κεντρική πτυχή της μηχανικής των επαφών είναι οι πιέσεις που ενεργούν κάθετα στις επιφάνειες των σωμάτων. Η μηχανική των επαφών είναι θεμελιώδης στον τομέα της μηχανολογίας διότι παρέχει τις απαραίτητες πληροφορίες για τον ασφαλή και ενεργειακά αποδοτικό σχεδιασμό των τεχνικών συστημάτων και για τη μελέτη της τριβολογίας και της σκληρότητας των διεισδυτών. Οι αρχές της μηχανικής επαφών μπορούν να εφαρμοστούν σε περιοχές όπως η επαφή τροχού-σιδηροτροχιάς, τα συστήματα πέδησης, τα ελαστικά, οι τριβείς, οι μηχανές καύσης, οι μηχανικές συνδέσεις, η μεταλλουργία και η μορφοποίηση μετάλλων. Οι τρέχουσες προκλήσεις που συναντώνται στο πεδίο αυτό μπορεί να περιλαμβάνουν ανάλυση τάσεων των υλικών επαφής και την επίδραση της λίπανσης και του σχεδιασμού του υλικού για αντοχή στην τριβή και τη φθορά. Οι εφαρμογές της μηχανικής των επαφών επεκτείνονται περαιτέρω στον τομέα της μικρο- και νανοτεχνολογίας.

Η πρώτη μελέτη της μηχανικής των επαφών πραγματοποιήθηκε από τον Hertz ο οποίος επιχείρησε να ερμηνεύσει τον τρόπο με τον οποίο οι οπτικές ιδιότητες των πολλαπλών στοιβαγμένων φακών μπορεί να αλλάξουν με τη δύναμη που τους συγκρατεί. Η τάση επαφής Hertzian αναφέρεται στις εντοπισμένες τάσεις που αναπτύσσονται καθώς δύο καμπύλες επιφάνειες έρχονται σε επαφή και παραμορφώνονται ελαφρώς κάτω από την επίδραση των επιβαλλόμενων φορτίων. Αυτή η ποσότητα παραμόρφωσης εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του υλικού που έρχεται σε επαφή. Η τάση επαφής Hertzian αποτελεί το θεμέλιο για τις εξισώσεις που αφορούν την ικανότητα επιβολής φόρτισης και κόπωσης σε ρουλεμάν, γρανάζια και άλλα σώματα όπου δύο επιφάνειες βρίσκονται σε επαφή.

Τα πειράματα διεΐσδυσης αποτελούν πρόβλημα της Μηχανικής των Επαφών και είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τον καθορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών διότι παρέχουν μια εύκολη, φθηνή, μη καταστρεπτική και αντικειμενική μέθοδο αξιολόγησης των βασικών ιδιοτήτων από μικρούς όγκους υλικών. Καθώς τα μήκη επαφής μειώνονται σημαντικά σε τέτοιου είδους πειράματα (μικρο-νανο-κλίμακες), τα εσωτερικά μήκη των υλικών γίνονται σημαντικά και η επίδρασή τους στη μακροσκοπική απόκριση των υλικών δεν μπορεί να αγνοηθεί. Τα είδη διεισδυτών που χρησιμοποιούνται

στα πειράματα αυτά αφορούν ένα εύρος τρισδιάστατων κεφαλών και περιλαμβάνουν τη σφαίρα (Brinell test), τον κυκλικό κώνο (Rockwell C), την πυραμίδα τριών πλευρών (Berkovich), την πυραμίδα τεσσάρων πλευρών (Vickers), καθώς και ένα εύρος διδιάστατων διεισδυτών όπως ο κυλινδρικός και ο σφηνοειδής.

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη προβλημάτων επιβολής συγκεντρωμένων φορτίων από τη διείσδυση κυλίνδρου στην επιφάνεια ημιχώρου στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους. Παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους, η οποία εισάγει νέες σταθερές του υλικού που υποδεικνύουν την ύπαρξη χαρακτηριστικού «εσωτερικού» μεγέθους.

Χρησιμοποιώντας τη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους στα πλαίσια επίπεδης παραμόρφωσης, εξετάζεται το πρόβλημα κάθετης συγκεντρωμένης φόρτισης στην επιφάνεια ημι-άπειρου χωρίου, το οποίο αντιμετωπίζεται με τη χρήση μετασχηματισμών Fourier. Ακολούθως, διατυπώνεται το πρόβλημα επαφής κατά τη διείσδυση ενός κυλίνδρου σε ένα ελαστικό ημιεπίπεδο. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του προβλήματος διείσδυσης και εντοπίζονται οι σημαντικότερες διαφορές της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους με την Κλασική Ελαστικότητα.

Η μέθοδος επίλυσης βασίζεται στους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς και είναι ακριβής. Τα αποτελέσματα δείχνουν σημαντικές διαφορές από τα αντίστοιχα της Κλασικής Ελαστικότητας καθώς οι στροφές φράσσονται στο σημείο εφαρμογής των φορτίων, ενώ οι μετατοπίσεις παρότι παρουσιάζουν τα ίδια ασυμπτωτικά χαρακτηριστικά στα πλαίσια και των δύο Θεωριών, εμφανίζουν ουσιαστικές ποιοτικές διαφορές.

Τέλος παρουσιάζονται τα τασικά πεδία ως αποτέλεσμα της διείσδυσης του κυλίνδρου στο ελαστικό ημιεπίπεδο κάτω από το σημείο εφαρμογής του φορτίου. Τα αποτελέσματα δείχνουν σημαντική απόκλιση από τις προβλέψεις της κλασικής ελαστικότητας αποκαλύπτοντας ότι είναι ανεπαρκές να αναλυθούν τα προβλήματα διείσδυσης σε μικροδομημένα υλικά που χρησιμοποιούν μόνο κλασική μηχανική επαφής [1].

2 Δι-διάστατη διείσδυση ενός στερεού μικροδομής που χαρακτηρίζεται από ελαστικότητα τάσης-ζεύγους

2.1 Φαινόμενα Κλίμακας και Προβλήματα Επαφής

Τα αποτελέσματα της μικροδομής πάνω στην μακροσκοπική συμπεριφορά των υλικών αναφέρονται ως "φαινόμενα κλίμακας". Οι κλασικές θεωρίες μηχανικής αδυνατούν να εξηγήσουν το φαινόμενο το οποίο έχει αποδειχτεί και πειραματικά για αρκετά υλικά. Όλα σχεδόν τα υλικά στη φύση μπορούν να θεωρηθούν ως σύνθετα, δηλαδή αποτελούμενα από δύο ή περισσότερα υλικά. Στις περισσότερες περιπτώσεις το σφάλμα που εισάγουμε στους υπολογισμούς θεωρώντας το υλικό πλήρως ομοιογενές είναι μικρό. Όσο όμως η κλίμακα μικραίνει, τόσο μεγαλώνει το σφάλμα και από ένα σημείο και μετά, όταν η κλίμακα της κατασκευής είναι συγκρίσιμη με την κλίμακα της μικροδομής του υλικού, τα αποτελέσματα της κλασικής θεωρίας μηχανικής παύουν να είναι αξιόπιστα. Φαινόμενα κλίμακας, έχουν παρατηρηθεί σε πειράματα διείσδυσης ειδικά σε περιπτώσεις που το χαρακτηριστικό μήκος διείσδυσης, δηλαδή η επιφάνεια επαφής, είναι συγκρίσιμο με τη μικροδομή του υλικού.

Συγκεκριμένα έχει αποδειχθεί ότι ισχυρά φαινόμενα κλίμακας, λαμβάνουν χώρα στη σκληρότητα πολυκρυσταλλικών, κυψελλωτών αλλά και πολυμερικών υλικών ειδικά σε πολύ μικρά βάθη διείσδυσης. Για παράδειγμα έχει παρατηρηθεί ότι η σκληρότητα διείσδυσης μετάλλων και κεραμικών υλικών διπλασιάζεται καθώς η επιφάνεια επαφής μειώνεται από 10 σε 1μm [2], [3], [4]. Επιπρόσθετα δοκιμές διείσδυσης λεπτών υμενίων (film) έδειξαν αύξηση του ορίου διαρροής καθώς ελαττώνεται το πάχος του υμενίου [5]. Σύμφωνα με τους Fleck et al. τα παρατηρούμενα φαινόμενα κλίμακας στην σκληρότητα των υλικών [6], οφείλονται στις υψηλές βαθμίδες τάσεων/τροπών που παρουσιάζονται σε μικρού βάθους διεισδύσεις. Συνοψίζοντας τα ανωτέρω και λαμβάνοντας υπόψη ότι η τεχνική διείσδυσης εμπλέκεται στο χαρακτηρισμό των υλικών, η διερεύνηση των επιδράσεων της μικροδομής στη μακροσκοπική συμπεριφορά του διεισδυθέντος υλικού είναι μεγάλης σημασίας [7], [8].

Γενικά, η σκλήρυνση (hardening) των υλικών οφείλεται σε συνδυασμό της παρουσίας γεωμετρικά αναγκαίων εξαρμώσεων (dislocations) οι οποίες σχετίζονται με τις βαθμίδες πλαστικής τροπής και με τις στατιστικά αποθηκευμένες εξαρμώσεις που σχετίζονται με τις πλαστικές τροπές. Αν και οι βαθμίδες χρησιμοποιούνται εκτεταμένα για την ερμηνεία των φαινομένων κλίμακας στην πλαστική παραμόρφωση, είναι επίσης

σημαντικές για υλικά που παραμορφώνονται ελαστικά όταν το αντιπροσωπευτικό μήκος της παραμόρφωσης είναι συγκρίσιμο με το χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής του υλικού. Για παράδειγμα, υπάρχουν πολυμερή που εμφανίζουν σημαντικά φαινόμενα κλίμακας στην ελαστική περιοχή παραμόρφωσης [9], [10]. Σύμφωνα με τους Maraganti Sharma, [11] έδειξε ότι τα αποτελέσματα βαθμίδος αναμένονται να παίζουν σημαντικό ρόλο στην ελαστική παραμόρφωση ενός πολύπλοκου κυτταρικού τύπου υλικού με χονδρόκοκκη δομή.

Κατά τη διάρκεια των πειραμάτων διείδυσης, σε πολύ μικρά βάθη διείδυσης, η πλαστική διαρροή (plastic flow) δεν ενεργοποιείται έως ότου η ισοδύναμη τροπή φθάσει σε ένα κρίσιμο όριο διαρροής ενώ η αποφόρτιση είναι κυρίως ελαστική. Ως εκ τούτου, η Ελαστική Θεωρία Επαφών είναι επαρκής όταν χρησιμοποιείται για να καθοριστεί το μέτρο ελαστικότητας σύμφωνα με τους Pharr et.al [12]. Υπό αυτές τις συνθήκες, η παρατηρούμενη απόκριση του υλικού μπορεί να ερμηνευτεί χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των καθαρά ελαστικών θεωρήσεων και ανάλογα με το πρόβλημα, οι βαθμίδες τροπών μπορεί να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στη μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού στην ελαστική περιοχή.

2.2 Μοντελοποίηση μικροδομικών υλικών – Μακροσκοπική συμπεριφορά

Προκειμένου να μελετηθούν τα φαινόμενα κλίμακας που παρατηρούνται στη μακροσκοπική συμπεριφορά κατά τη σύνθετη φόρτιση ενός υλικού με μικροδομή, δύο διαφορετικές διαδρομές μπορούν να ακολουθηθούν.

Στην πρώτη λαμβάνεται υπόψη η μορφολογία της μικροδομής του υλικού μέσω της διακριτής μοντελοποίησης και ενσωμάτωσης των λεπτομερειών της μικροδομής του υλικού. Αυτή η προσέγγιση, αν και είναι πολύ λεπτομερής και ακριβής μειονεκτεί σε υπολογιστικό κόστος το οποίο αυξάνεται όσο αυξάνεται η πολυπλοκότητα της μικροδομής.

Με την αυξανόμενη πολυπλοκότητα του υλικού η εναλλακτική λύση είναι η χρήση μιας Θεωρίας Συνεχούς Μέσου σύμφωνα με την οποία τα χαρακτηριστικά της μικροδομής του υλικού διανέμονται υπό την έννοια της μέσης τιμής αλλά το χαρακτηριστικό μήκος της μικροδομής διατηρείται. Η προσέγγιση διά μέσου της Θεωρίας Συνεχούς Μέσου είναι πολύ ισχυρή δεδομένου ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά σε προβλήματα που απαιτούν μεγάλο αριθμό υπολογισμών, αλλά σε σύγκριση με την προηγούμενη μέθοδο, στερείται λεπτομερούς περιγραφής της

μικροδομής ενώ μεταχειρίζεται το μικροδομικό μήκος με μία λογική μέσης τιμής. Τέτοιες θεωρίες είναι γνωστές ως Θεωρίες Συνεχούς Μέσου (Generalized Continuum Theories). Η διακριτή μοντελοποίηση της μικροδομής του υλικού κατά τη διάρκεια του πειράματος διείσδυσης έχει πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας κλασικές θεωρίες [4], [13], [14], [15], [16], ενώ οι φαινομενολογικές προσεγγίσεις με βάση τη Θεωρία Συνεχούς Μέσου έχουν επίσης εκτενώσ ακολουθηθεί [17], [18] [19], [20], [21], [22].

2.3 Γενικευμένες Θεωρίες Συνεχούς Μέσου

Μία από τις πιο αποτελεσματικά γενικευμένες Θεωρίες Συνεχούς Μέσου είναι η επονομαζόμενη θεωρία Ελαστικότητας Τάσης Ζεύγους, γνωστή ως θεωρία Cosserat με δεσμευμένες στροφές [23], [24], [25]. Αυτή η θεωρία είναι η απλούστερη Θεωρία Βαθμίδας στην οποία εμφανίζονται τάσεις ζεύγη. Η Θεωρία Τάσης Ζεύγους μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση της Κλασικής Θεωρίας Ελαστικότητας και διαφέρει από την κλασική θεωρία από πολλές απόψεις. Συγκεκριμένα, η τροποποιημένη πυκνότητα ενεργειακής παραμόρφωσης και οι προκύπτουσες καταστατικές σχέσεις περιλαμβάνουν εκτός από τις συνήθεις απειροελάχιστες παραμορφώσεις και βαθμίδες του διανύσματος στροφής. Επίσης, οι γενικευμένες σχέσεις τάσης παραμόρφωσης για την ιστροπική περίπτωση περιλαμβάνουν, εκτός από το συμβατικό ζεύγος ελαστικών σταθερών, δύο νέες ελαστικές σταθερές, μία εκ των οποίων εκφράζεται με όρους μιας παραμέτρου υλικού ℓ , που έχει διάσταση μήκους.

Η Θεωρία Τάσης Ζεύγους είχε κάποιες επιτυχημένες εφαρμογές, κυρίως για τα προβλήματα συγκέντρωσης τάσης, τις δεκαετίες του 1960 και '70. Ωστόσο τα τελευταία χρόνια, υπάρχει εκ νέου ενδιαφέρον για τη Θεωρία Τάσης Ζεύγους και τη σχετική Θεωρία Βαθμίδας που ασχολούνται με προβλήματα μικροδομής υλικών με ρωγμές, πλαστικότητα, ασυνέχειες και διάδοση κυμάτων. Πρόσφατες εφαρμογές περιλαμβάνονται στο έργο των Fleck et al. [6], Vardoulakis and Sulem [26], Huang et al. [27], Lubarda και Markenscoff [28], Fleck και Hutchinson [29], Georgiadis and Velgaki [30], Grammenoudis and Tsakmakis [31], Grentzelou and Georgiadis [32], Radi [33], Gourgiotis and Georgiadis [34], Dal Corso and Willis [35], Gourgiotis and Piccolroaz [36], Triantafyllou and Gannakopoulos [37], Zisis et al [38].

Η φυσική συνάφεια των κλιμάκων μήκους υλικού όπως εισήχθη μέσω Γενικευμένων Θεωριών Συνεχούς Μέσου έχει αποτελέσει αντικείμενο πολλών θεωρητικών και πειραματικών μελετών. Οι Chen et al. [39], ανέπτυξαν ένα συνεχές

μοντέλο για κυψελλοειδή υλικά και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η περιγραφή της συνέχειας αυτών των υλικών υπακούει στη θεωρία Ελαστικότητας Βαθμίδας τύπου τάσης ζεύγους. Σε μεταγενέστερη μελέτη, το εγγενές μήκος υλικού προσδιορίζονταν με το μέγεθος κυψελλών. Επιπλέον, όσον αφορά τα κυψελλοειδή στερεά, οι Tekoglu και Onck [40], συνέκριναν τα αναλυτικά αποτελέσματα διαφόρων βαθμίδων γενικευμένων θεωριών συνέχειας με τα υπολογιστικά αποτελέσματα διακριτών μοντέλων μέσω μιας σειράς συνοριακών προβλημάτων βασισμένα στις αναπαραστάσεις Voronoi κυτταρικών μικροδομών. Η ανάλυση που εκτελέστηκε αυστηρά εντός του ελαστικού ορίου, αξιολόγησε τις δυνατότητες γενικευμένων θεωριών συνέχειας στη σύλληψη φαινομένων μεγέθους σε κυτταρικά στερεά και συνέδεσε το μέγεθος κυψέλης με τη μικροδομική κλίμακα.

Επιπρόσθετα, μια πρόσφατη μελέτη των Bigoni, Drugan, [41], παρείχε ένα υπολογισμό για τον καθορισμό των ενοτήτων τάσης ζεύγους μέσω της ομογενοποίησης ανομοιογενών υλικών. Επιπλέον, οι Shodja et al. [42], χρησιμοποιώντας ab αρχικούς υπολογισμούς της Θεωρίας Συναρτησιακής Πυκνότητας (DFT), υπολόγισαν το χαρακτηριστικό μήκος υλικού της Θεωρίας Ελαστικότητας Βαθμίδας για διάφορα κυβικά κρυσταλλικά σώματα.

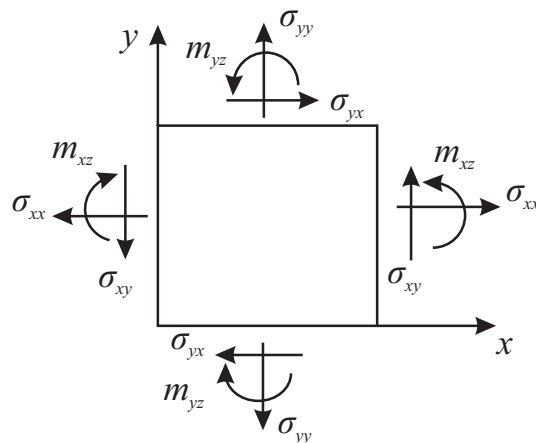
Πειράματα με καμπύλες διασποράς δείχνουν ότι για τα περισσότερα μέταλλα, το χαρακτηριστικό εσωτερικό μήκος είναι της τάξεως των 0.25nm σύμφωνα με τους Zhang και Sharma [43], ενώ άλλα μικρομοριακά υλικά έχουν μεγαλύτερο εσωτερικό χαρακτηριστικό μήκος. Για παράδειγμα για το ημιαγώγιμο υλικό GaAs, οι Zhang και Sharma [44], υπολόγισαν χαρακτηριστικό μήκος της τάξεως των 0.82nm.

Μία χαρακτηριστική περίπτωση προβλημάτων επαφής της ελαστικότητας τάσης ζεύγους που εξετάζεται στην παρούσα μελέτη είναι η διείσδυση κυλινδρικού διεισδυτή σε ένα ημιεπιπέδο. Σημειώνεται ότι οι Muki και Sternberg [17], ήταν οι πρώτοι που μελέτησαν τα αποτελέσματα των τάσεων ζευγών κατά την απόκριση επίπεδης διείσδυσης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διπλών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Πιο πρόσφατα, οι Zisis et al. [38] μελέτησαν μερικά κλασικά δι-διάστατα (2D) προβλήματα επαφής στο πλαίσιο της Θεωρίας Ελαστικότητας Τάσης Ζεύγους χρησιμοποιώντας την τεχνική του ενιαίου μετασχηματισμού και γενικευμένων λειτουργιών. Εδώ, ακολουθείται μια πιο γενική προσέγγιση με βάση τις βασικές συναρτήσεις Green που αντιστοιχούν στη λύση του προβλήματος Flamant-Boussinesq δι-διάστατου ημιχώρου στην ελαστικότητα τάσης ζεύγους.

Αρχικά, παρουσιάζονται οι θεμελιώδεις πτυχές της ελαστικότητας τάσης ζεύγους υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Στη συνέχεια εξάγονται οι συναρτήσεις Green του ημιεπιπέδου χρησιμοποιώντας μια ανάλυση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού. Χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες συναρτήσεις Green, τα προβλήματα επαφής ενός κυλινδρικού διεισδυτή διατυπώνονται με όρους ολοκληρωτικών εξισώσεων που επιλύονται από αναλυτικές εκτιμήσεις στα ολοκληρώματα και αριθμητική επεξεργασία χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της υπέρθεσης (collocation). Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση του κυλινδρικού διεισδυτή και συζητείται λεπτομερώς η επίδραση της μικροδομής στην επίλυση.

2.4 Βασικές εξισώσεις επίπεδης παραμόρφωσης

Στο **Σχήμα 1**, απεικονίζονται οι ορθογώνιες συνιστώσες των ασύμμετρων τάσεων ($\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$) και τάσεων ζεύγους (m_{xz}, m_{yz}) που ασκούνται στις επιφάνειες ενός πεπερασμένου ορθογωνικού στοιχείου μοναδιαίου πάχους. Σύμφωνα με τη μελέτη των Zisi, Gourgioti [45], αν οι τάσεις και οι τάσεις ζεύγη μεταβάλλονται κατά μήκος του στοιχείου τότε οι διατμητικές τάσεις σ_{xy}, σ_{yx} δεν είναι απαραίτητως ίσες και αν οι διατμητικές τάσεις είναι ίσες ή μηδενικές τότε οι τάσεις ζεύγη δεν απαλείφονται.



Σχήμα 1. Οι συνιστώσες των τάσεων και των τάσεων ζεύγους σε καρτεσιανές συντεταγμένες για ένα στοιχειώδες σωματίδιο σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης

Για ένα σώμα που καταλαμβάνει ένα τομέα στο x,y επίπεδο κάτω από συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, το δι-διάστατο πεδίο των μετατοπίσεων παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$u_x \equiv u_x(x, y) \neq 0, \quad u_y \equiv u_y(x, y) \neq 0, \quad u_z \equiv 0, \quad (1.1)$$

Επιπλέον για την κινηματική περιγραφή του ελαστικού σώματος, ισχύουν τα κάτωθι για τις συνιστώσες του τανυστή τροπής:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

Για το διάνυσμα στροφής ισχύουν τα κάτωθι για τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad k_{xz} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad k_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (1.3)$$

όπου

ε , ο τανυστής παραμόρφωσης

ω , η περιστροφή

k_{xz}, k_{yz} , τα εναπομείναντα στοιχεία του τανυστή καμπυλότητας εκφρασμένα σε μονάδες [μήκους]⁻¹.

Ακολούθως έχουμε ότι:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1.4)$$

και υποθέτοντας ότι οι καθολικές δυνάμεις απαλείφονται, οι εξισώσεις ισορροπίας στις παρούσες συνθήκες γίνονται:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0,$$

$$\sigma_{xy} - \sigma_{yx} + \frac{\partial m_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

Οι Εξ. (1.5) είναι οι εξισώσεις ισορροπίας Cosserat στις δύο διαστάσεις. Η σύνδεση μεταξύ τάσεων και τροπών δίνονται από τη μηχανική συμπεριφορά του σώματος και ονομάζονται καταστατικές εξισώσεις. Οι καταστατικές εξισώσεις δίνονται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= (2\mu)^{-1} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \varepsilon_{yy} &= (2\mu)^{-1} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \varepsilon_{xy} &= (4\mu)^{-1} (\sigma_{xy} + \sigma_{yx})\end{aligned}\tag{1.6}$$

Και

$$\begin{aligned}k_{xz} &= (4\mu\ell^2)^{-1} m_{xz} \\ k_{yz} &= (4\mu\ell^2)^{-1} m_{yz}\end{aligned}\tag{1.7}$$

Όπου

μ , το μέτρο διάτμησης

ν , ο λόγος Poisson

ℓ , το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού

Η εξίσωση συμβιβαστού των τροπών έχει ως ακολούθως:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 0\tag{1.8}$$

Αντικαθιστώντας τις καταστατικές εξισώσεις (1.6), στην ανωτέρω εξίσωση συμβιβαστού (1.8), έχουμε:

$$\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]}{\partial y^2} - \frac{2}{4\mu} \frac{\partial^2 (\sigma_{xy} + \sigma_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 (\sigma_{xy} + \sigma_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} = \nu \left[\frac{\partial^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial x^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 (\sigma_{xy} + \sigma_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} = \nu \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.9)$$

Από τις Εξ. (1.3), (1.7) προκύπτει:

$$\frac{\partial k_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial k_{yz}}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial m_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial m_{yz}}{\partial x} \quad (1.10)$$

οι οποίες (1.10) είναι οι εξισώσεις συμβιβαστού των καμπυλοτήτων. Από τη Εξ. (1.3) έχουμε:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \varepsilon_{xy} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \quad (1.11)$$

Από τις Εξ. (1.3), (1.7) παίρνουμε:

$$k_{xz} = (4\mu\ell^2)^{-1} m_{xz} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{4\mu\ell^2} m_{xz} \quad (1.12)$$

Οπότε λαμβάνοντας υπόψη την (1.11) έχουμε διαδοχικά:

$$4\mu\ell^2 \left[\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right] = m_{xz} \quad (1.13)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις για τα ε_{xy} και ε_{xx} από τις Εξ. (1.6) παίρνουμε:

$$m_{xz} = -2\ell^2 \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \ell^2 \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xy} + \sigma_{yx}) \quad (1.14)$$

Όμοια προκύπτει και ότι:

$$m_{yz} = 2\ell^2 \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] - \ell^2 \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy} + \sigma_{yx}) \quad (1.15)$$

οι οποίες είναι οι εξισώσεις συμβιβαστού καμπυλοτήτων και τροπών. Η λύση των εξισώσεων ισορροπίας δέχεται ότι:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad (1.16)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (1.17)$$

$$m_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad m_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1.18)$$

Όπου Φ, Ψ είναι τυχαίες αλλά επαρκώς ομαλές τασικές συναρτήσεις. Αντικαθιστώντας τις Εξ. (1.16), (1.17), (1.18) στις Εξ. (1.15) έχουμε το ακόλουθο ζεύγος διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= -2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} (\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= 2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Προκειμένου να αποσυζευχθεί το ανωτέρω συζευγμένο ζεύγος διαφορικών Εξ. (1.19), παραγωγίζουμε την πρώτη εκ των δύο εξισώσεων ως προς y και την δεύτερη εξίσωση ως προς x αντίστοιχα και αφαιρούμε κατά μέλη:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= -2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= 2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\end{aligned}\tag{1.20}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi &= 0 \\ \nabla^4 \Phi &= 0\end{aligned}\tag{1.21}$$

Παραγωγίζοντας τις Εξ. (1.19) παίρνουμε αντιστοίχως:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= -2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= 2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{1.22}$$

Προσθέτοντας τις Εξ. (1.21) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= 0 \\ (\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) &= 0\end{aligned}$$

$$\nabla^2 \Psi - \ell^2 \nabla^4 \Psi = 0 \quad (1.23)$$

Το σύστημα των Εξ. (1.21), (1.23) μπορεί να καταλήξει στην κλασική τασική συνάρτηση Airy, καθώς οι ποσότητες $\ell, \partial_x \Psi, \partial_y \Psi$ τείνουν στο μηδέν. Συνδυάζοντας τις Εξ. (1.16), (1.17), (1.18), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) παίρνουμε:

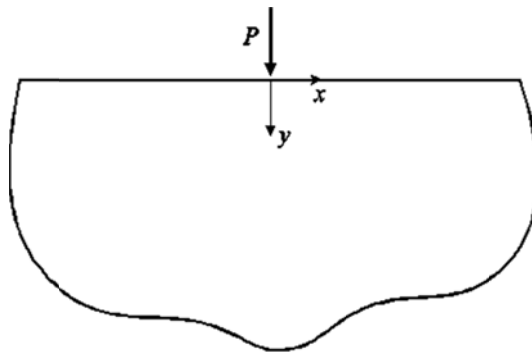
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \nu \nabla^2 \Phi \right) \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \nu \nabla^2 \Phi \right) \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{1}{2\mu} \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \quad (1.26)$$

2.5 Εξισώσεις ημιεπιπέδου Green

Σε ένα δι-διάστατο πεδίο, το πρόβλημα προσδιορισμού των τάσεων και του πεδίου παραμόρφωσης σε ένα ιστροπικό ημιεπίπεδο, που υπόκειται σε συγκεντρωμένο φορτίο που ασκείται στην επιφάνειά του, είναι το πρόβλημα Flamant-Boussinesq και φαίνεται στο **Σχήμα 2** ακολούθως.



Σχήμα 2 . Φορτίο που ασκείται στην επιφάνεια ενός ελαστικού ημιεπιπέδου

Στο πλαίσιο της Γενικευμένης Θεωρίας Συνεχούς Μέσου (Generalized Continuum Theory), τα προβλήματα συγκεντρωμένου φορτίου έχουν μελετηθεί εκτεταμένα παρέχοντας λύσεις που εκφεύγουν από τις αντίστοιχες της Κλασικής Ελαστικότητας. Μια πλήρης μελέτη του θέματος μπορεί να βρεθεί στο πρόσφατο έργο

των Georgiadi, Anagnostou [46]. Σχετικά με την θεωρία τάσης ζεύγους, οι Muki και Sternberg [17], ήταν οι πρώτοι που παρουσίασαν τα ασυμπτωτικά πεδία τάσεων στο πρόβλημα Flamant-Boussinesq.

Στην παρούσα μελέτη παρέχεται μία λύση του προβλήματος Flamant-Boussinesq που στη συνέχεια χρησιμοποιείται σαν η σχετική συνάρτηση Green για τη διατύπωση των προβλημάτων επαφής.

Θεωρούμε ένα σώμα που καταλαμβάνει ένα ημιεπίπεδο ($-\infty < x < \infty, y > 0$) σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης στο οποίο ασκείται κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο που φαίνεται στο **Σχήμα 2**. Το σημείο που ασκείται το συγκεντρωμένο φορτίο εντοπίζεται στο σημείο ($x = y = 0$) ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Οι διαστάσεις του συγκεντρωμένου φορτίου εκφράζονται σε $[\Deltaύναμη][\text{Μήκος}]^{-1}$.

Οι συνοριακές συνθήκες κατά μήκος της επιφάνειας $y = 0$ γράφονται ως εξής:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -P\delta(x) \quad \forall \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.27)$$

$$\sigma_{yx}(x, 0) = 0 \quad \forall \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.28)$$

$$m_{yz}(x, 0) = 0 \quad \forall \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.29)$$

όπου $\delta(\)$ είναι η Dirac δέλτα κατανομή.

Σημειώνεται ότι η διαδικασία επίλυσης για την περίπτωση ενός εφαπτομενικού φορτίου που ασκείται στην επιφάνεια ενός ημιεπιπέδου είναι ανάλογη με τη διαδικασία που θα παρουσιασθεί στη συνέχεια. Το πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier. Ο μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ορίζονται ως ακολούθως:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx \quad (1.30)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} dx \quad (1.31)$$

$$\acute{\omicron}\pi\omicron\upsilon \ i = (-1)^{1/2} \quad (1.32)$$

εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στην Εξ. (1.21) και προκύπτει:

$$\frac{d^4 \hat{\Phi}}{dy^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} + \xi^4 \hat{\Phi} = 0 \quad (1.33)$$

Με τον ίδιο τρόπο η Εξ. (1.23) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\ell^2 \frac{d^4 \hat{\Psi}}{dy^4} - (1 + 2\ell^2 \xi^2) \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2} + \xi^2 (1 + \ell^2 \xi^2) \hat{\Psi} = 0 \quad (1.34)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier οι μετασχηματισμένες τάσεις και τα μετασχηματισμένα ζεύγη τάσεων γράφονται:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xx} &= \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} + i\xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy}, & \hat{\sigma}_{yy} &= -\xi^2 - i\xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy} \\ \hat{\sigma}_{yx} &= i\xi \frac{d\hat{\Phi}}{dy} - \xi^2 \hat{\Psi}, & \hat{\sigma}_{xy} &= i\xi \frac{d\hat{\Phi}}{dy} - \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2} \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\hat{m}_{xz} = -i\xi \hat{\Psi}, \quad \hat{m}_{yz} = \frac{d\hat{\Psi}}{dy} \quad (1.36)$$

Οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις αντιστοίχως γράφονται ως ακολούθως:

$$\hat{u}_x = \frac{1}{2\mu\xi} \left(i(1-\nu) \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} - \xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy} + i\nu\xi^2 \hat{\Phi} \right) \quad (1.37)$$

$$\hat{u}_y = \frac{1}{2\mu\xi^2} \left((1-\nu) \frac{d^3 \hat{\Phi}}{dy^3} - (2-\nu)\xi^2 \frac{d\hat{\Phi}}{dy} - i\xi^3 \hat{\Psi} \right) \quad (1.38)$$

Οι Εξ. (1.33) και (1.34) έχουν τις κάτωθι γενικές λύσεις:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = [C_1(\xi) + yC_2(\xi)]e^{-|\xi|y} + [B_1(\xi) + yB_2(\xi)]e^{|\xi|y}, \quad (1.39)$$

$$\hat{\Psi}(\xi, y) = C_3(\xi)e^{-|\xi|y} + C_4(\xi)e^{-\gamma y} + B_3(\xi)e^{\xi y} + B_4(\xi)e^{\gamma y}, \quad (1.40)$$

Η παραπάνω γενική λύση για μηδενιζόμενες τάσεις καθώς το $y \rightarrow \infty$, λαμβάνει την ακόλουθη φραγμένη μορφή:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = [C_1(\xi) + yC_2(\xi)]e^{-|\xi|y} \quad (1.41)$$

$$\hat{\Psi}(\xi, y) = C_3(\xi)e^{-|\xi|y} + C_4(\xi)e^{-\gamma y} \quad (1.42)$$

$$\text{Όπου } \gamma = \gamma(\xi) = (1/l^2 + \xi^2)^{1/2}$$

Οι άγνωστες συναρτήσεις $C_i(\xi)$ ($i = 1, \dots, 4$) θα υπολογιστούν βάσει των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών και των εξισώσεων συμβιβαστού της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους, Εξισώσεις (1.19) δια μέσου της σχέσης:

$$C_3(\xi) = -4i\ell^2(1-\nu)\xi C_2(\xi) \quad (1.43)$$

Έτσι στην προκειμένη περίπτωση οι συναρτήσεις $C_i(\xi)$ ($i = 1, \dots, 4$), δίνονται ως:

$$C_1 = \frac{P}{\xi^2} \quad (1.44)$$

$$C_2 = \frac{P\gamma}{\sqrt{\xi^2} R(\xi)}, \quad (1.45)$$

$$C_3 = -\frac{4i\ell^2 P(1-\nu)\sqrt{\xi^2}\gamma}{\xi R(\xi)}, \quad (1.46)$$

$$C_4 = \frac{4i\ell^2 P(1-\nu)\xi}{R(\xi)}, \quad (1.47)$$

$$\text{Όπου } R(\xi) = \left(\gamma - 4\ell^2(1-\nu) \left((\xi^2)^{3/2} - \xi^2\gamma \right) \right) \quad (1.48)$$

2.6 Μετασχηματισμός Fourier Άρτιων και Περιττών Συναρτήσεων

Λαμβάνοντας υπόψη την αρτιότητα και περιττότητα των μετασχηματισμένων

\hat{u}_x και \hat{u}_y καταλήγουμε στα εξής:

$$u_x(x, y) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{u}_x(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi \quad (1.49)$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{u}_y(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \quad (1.50)$$

Οπότε η συνάρτηση διατηρεί τον απειρισμό της στο $1/\xi$. Οι μετατοπίσεις u_x στο $y=0$ είναι φραγμένες ενώ οι μετατοπίσεις u_y δεν είναι φραγμένες. Αυτό είναι αληθές για την περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας και η ίδια συμπεριφορά παρουσιάζεται και στη Θεωρία Τάσης Ζεύγους.

Όπου

$$\hat{u}_x(\xi, y) = \frac{iP}{2\mu\xi\Delta} \left[4\ell^2(1-\nu)\xi^2\gamma e^{-\gamma y} + (\gamma(y\xi - 1 + 2\nu) - 4\ell^2(1-\nu)\xi^3) e^{-\xi y} \right] \quad (1.51)$$

$$\hat{u}_y(\xi, y) = \frac{P}{2\mu\xi\Delta} \left[4\ell^2(1-\nu)\xi^3 e^{-\gamma y} + (\gamma(y\xi + 2(1-\nu)) - 4\ell^2(1-\nu)\xi^3) e^{-\xi y} \right] \quad (1.52)$$

Και

$$\Delta = \Delta(\xi) = \gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(\xi - \gamma)$$

Η εφαπτομενική μετατόπιση $u_x(x, y)$ μπορεί να υπολογιστεί απευθείας εξαιτίας του γεγονότος ότι η $\hat{u}_x(\xi, y)$ είναι φραγμένη καθώς το $\xi \rightarrow 0$. Από την άλλη πλευρά, η

αντιστροφή της $\hat{u}_y(\xi, y)$, αποκλίνει από τη στιγμή που η ολοκληρωτέα συνάρτηση στη δεύτερη σχέση της Εξ. (1.50) συμπεριφέρεται ως $\hat{u}_y(\xi, y) = \mathcal{O}(\xi^{-1})$ όταν το $\xi \rightarrow 0$. Επισημαίνεται ότι στην Κλασική Θεωρία Ελαστικότητας, οι λύσεις για την κανονική και εφαπτομενική μετατόπιση είναι:

$$u_x^{class}(x, y) = \frac{P}{2\pi\mu} \left[\frac{xy}{r^2} - (1-2\nu) \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) \right] \quad (1.53)$$

$$u_y^{class}(x, y) = \frac{P}{2\pi\mu} \left[\frac{y^2}{r^2} - 2(1-\nu) \log(r) \right] \quad (1.54)$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των εφαπτομενικών και των ορθών μετατοπίσεων στο πλαίσιο της Θεωρίας Τάσης Ζεύγους, εξετάζεται στο σημείο εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου. Για το σκοπό αυτό, θα κάνουμε χρήση των θεωρημάτων Abel-Tauber [47] και θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των μετασχηματισμένων λύσεων (1.51) και (1.52) καθώς το $\xi \rightarrow 0$. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι:

$$u_x^{asympt}(x, y) = \frac{P}{2\pi\mu(3-2\nu)} \left[-(1-2\nu) \frac{xy}{r^2} + \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) \right] \quad (1.55)$$

$$u_y^{asympt}(x, y) = \frac{P}{2\pi\mu(3-2\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{y^2}{r^2} + 2(1-\nu) \log(r) \right] \quad (1.56)$$

Όπου

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

Σημειώνεται πως σε ό,τι αφορά τις μετατοπίσεις, αυτές παρουσιάζουν την ίδια ιδιομορφία στην Θεωρία Τάσης Ζεύγους και στην Κλασική Θεωρία Ελαστικότητας. Παρόλαυτα η δομή αυτών των πεδίων είναι διαφορετική. Τα στοιχεία παραμόρφωσης μπορούν εύκολα να υπολογισθούν από τις Εξ. (1.49), (1.50) μέσω κατάλληλων παραγωγίσεων. Μπορεί να δειχθεί ότι οι παραμορφώσεις απειρίζονται και ισχύει:

$$\varepsilon_{ij} = O(r^{-1}) \text{ όταν } r \rightarrow 0 \quad (1.57)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αντίθεση με την Κλασική Ελαστικότητα, η στροφή φράσσεται στο σημείο εφαρμογής του φορτίου. Υπενθυμίζεται ότι στην περίπτωση της Κλασικής Ελαστικότητας η στροφή απειρίζεται παρουσιάζοντας μια διακύμανση r^{-1} καθώς $r \rightarrow 0$.

Αν και μπορούμε να σχηματίσουμε προβλήματα επαφής με τις Εξ. (1.49), (1.50), είναι πιο εύκολο να εργασθούμε με όρους βαθμίδας μετατόπισης, απαλείφοντας τυχόν σταθερές [48]. Έτσι η ποσότητα $\frac{du_y}{dx}$ υπολογίζεται στην επιφάνεια του ημιεπιπέδου ($y = 0$) ως ακολούθως:

$$\frac{du_y}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\xi) \sin(\xi x) d\xi \quad (1.58)$$

Όπου

$$g(\xi) = -\xi \hat{u}_y(\xi, 0)$$

Το ολοκλήρωμα της Εξ. (1.58), αποκλίνει καθώς $\xi \rightarrow \infty$. Ακολουθώντας γράφουμε:

$$g(\xi) = g_{\infty}(\xi) + (g(\xi) - g_{\infty}(\xi)) \quad (1.59)$$

Όπου

$$g_{\infty}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi) = \frac{-P(1-\nu)}{\mu(3-2\nu)} \quad (1.60)$$

Τότε η Εξ. (1.58), δίνει:

$$\frac{du_y}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g_{\infty}(\xi) \sin(\xi x) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (g(\xi) - g_{\infty}(\xi)) \sin(\xi x) d\xi \quad (1.61)$$

Με βάση τη θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων και θεωρία κατανομών, η Εξ. (1.61) ξαναγράφεται ως ακολούθως:

$$\frac{du_y}{dx} = -\frac{P(1-\nu)}{\pi\mu(3-2\nu)} \frac{1}{x} + \frac{P}{\pi\mu} N(x) \quad (1.62)$$

Όπου

$$N(x) = \frac{2(1-\nu^2)}{(3-2\nu)} \int_0^\infty \frac{(2l^2\xi^2(\gamma-\xi)-\gamma)}{\gamma+4(1-\nu)l^2\xi^2(\gamma-\xi)} \sin(\xi x) d\xi \quad (1.63)$$

Η Εξ. (1.62), θα χρησιμοποιηθεί για το σχηματισμό των ολοκληρωτικών εξισώσεων των προβλημάτων επαφής.

2.7 Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα της ορθής μετατόπισης και στροφής απεικονίζονται στην επιφάνεια ($y = 0$) ημιχώρου και στο εσωτερικό του ημιχώρου στα **Σχήματα 3,4,5** και **6** ακολούθως. Τα αποτελέσματα αναφορικά με τις ποσότητες στην επιφάνεια, παρουσιάζονται για διάφορες τιμές του λόγου Poisson, ενώ οι ισοτασικές καμπύλες στο εσωτερικό του ημιχώρου παρουσιάζονται μόνο για την τιμή $\nu = 0.33$. Αναφορικά με την ορθή μετατόπιση, φαίνεται ότι η λογαριθμική απόκριση απειρισμού της κλασικής λύσης, καθώς το x/ℓ πλησιάζει στο σημείο εφαρμογής του φορτίου, διατηρείται και στην περίπτωση της Θεωρίας Τάσης Ζεύγους.

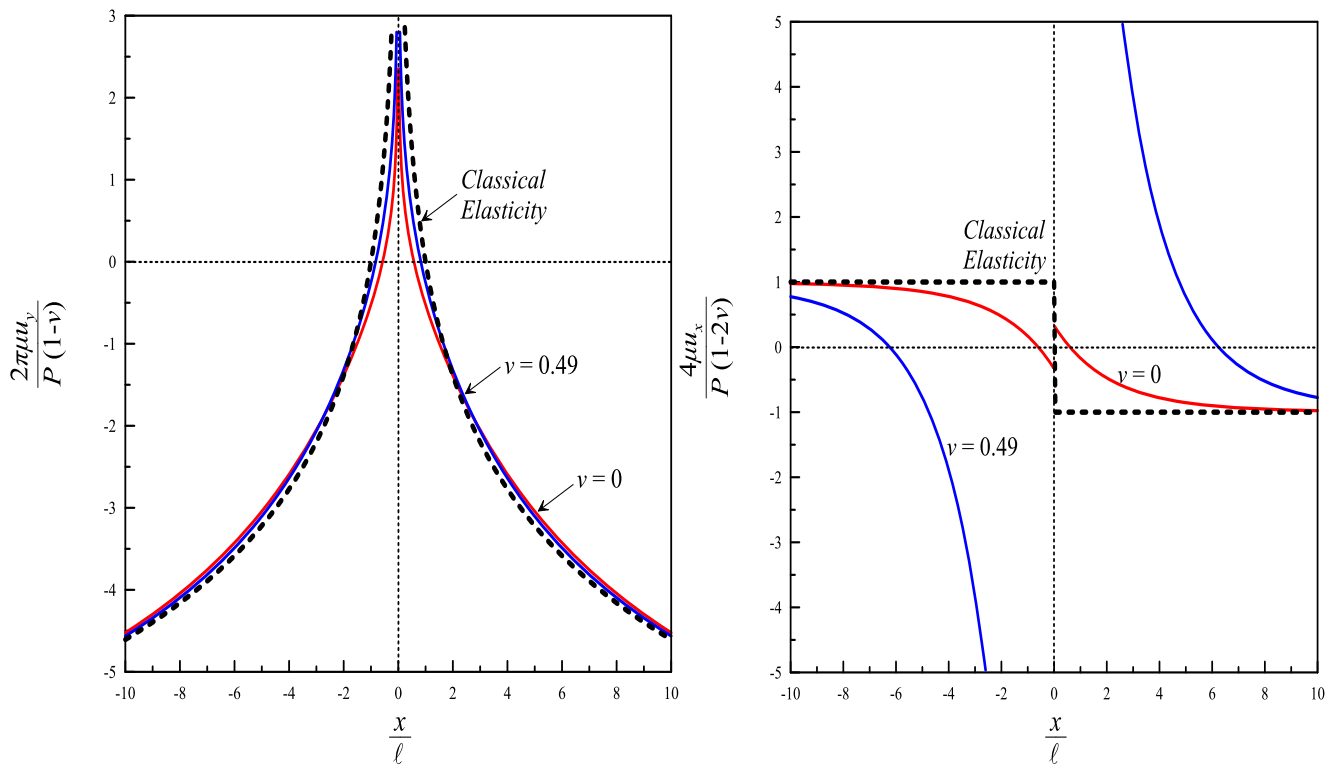
Παρατηρείται ότι, η λύση της Κλασικής Θεωρίας Ελαστικότητας για την παρούσα κανονικοποίηση, είναι ανεξάρτητη της επίδρασης του λόγου Poisson, ενώ η λύση για την ίδια κανονικοποίηση για την περίπτωση της Θεωρίας Τάσης Ζεύγους, διατηρεί την εξάρτηση της από το λόγο Poisson.

Αναφορικά με την στροφή, σημειώνεται ότι η λύση της Κλασικής Θεωρίας Ελαστικότητας, έχει μη φραγμένη συμπεριφορά στο σημείο εφαρμογής του φορτίου. Από την άλλη πλευρά, αυτή η ασυμπτωτική συμπεριφορά, εξουδετερώνεται στην Θεωρία Τάσεων Ζεύγους, όπου παρουσιάζεται μια μηδενική στροφή στο ίδιο σημείο. Φυσικά το φαινόμενο του λόγου Poisson, είναι ξεκάθαρο στην περίπτωση της Θεωρίας Τάσης

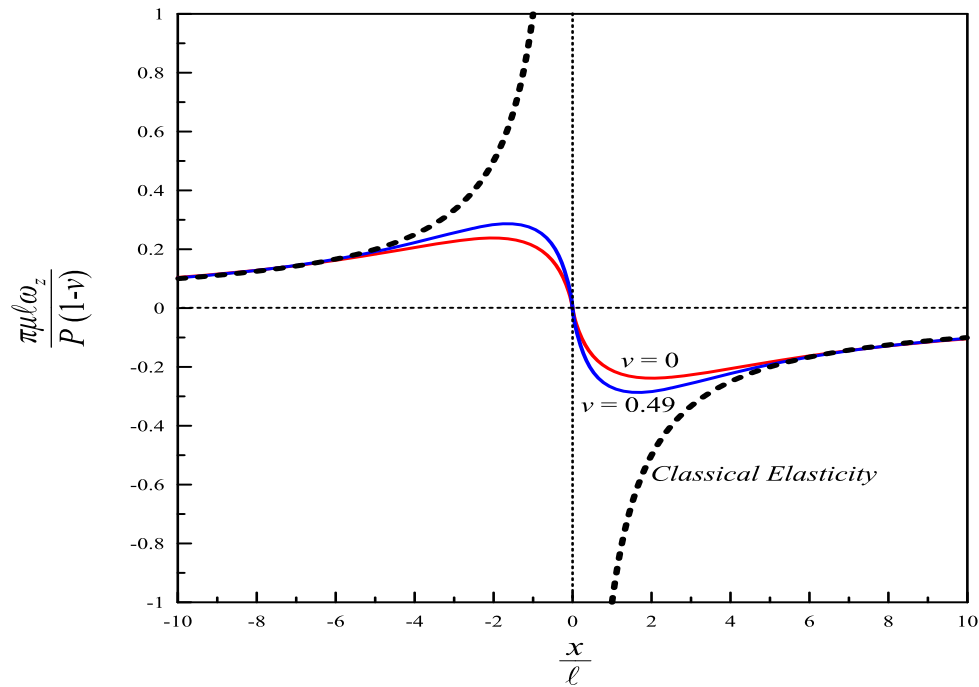
Ζεύγους, σε αντιδιαστολή με την περίπτωση της Κλασικής Θεωρίας Ελαστικότητας για την παρούσα κανονικοποίηση.

Σημειώνεται ότι η επίδραση της τάσης ζεύγους, είναι σημαντική κοντά στο σημείο εφαρμογής του φορτίου όπου η στροφή είναι έντονη. Επιπλέον, η λύση της Θεωρίας Τάσης Ζεύγους προσεγγίζει την κλασική, όταν εξαφανίζεται η επίδραση του λόγου Poisson, καθώς κινούμαστε πιο μακριά από την πηγή του φορτίου.

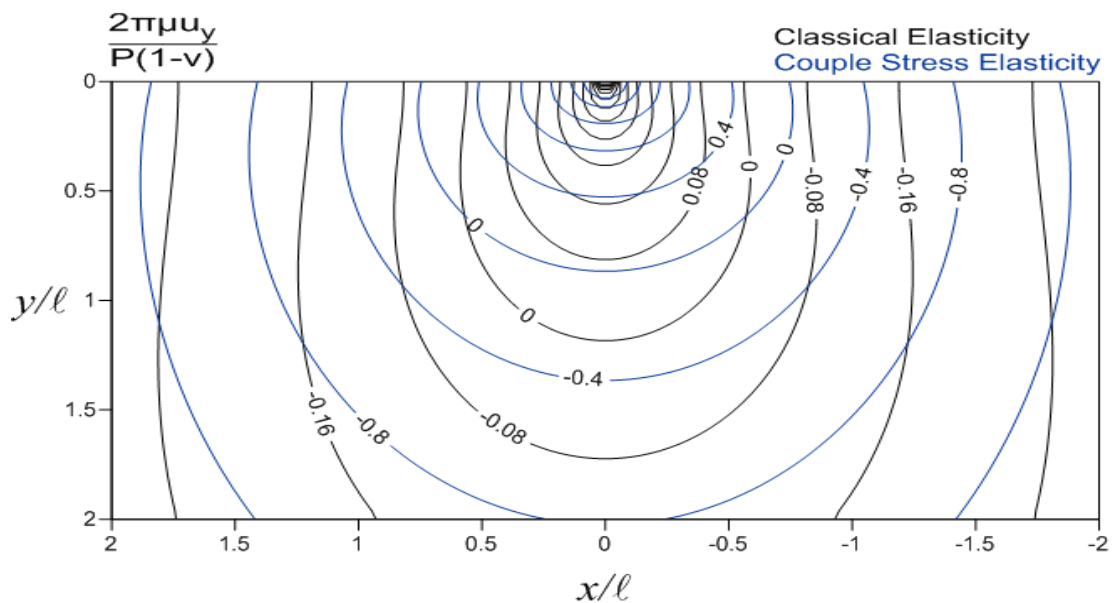
Η γενικότερη αδιαστατοποίηση του προβλήματος, επιτάσσει οι αποστάσεις να αδιαστατοποιηθούν με το εσωτερικό μήκος (x/ℓ), η μετατόπιση με το μέτρο διάτμησης και το εφαρμοζόμενο φορτίο ($\mu u_x/P$, $\mu u_y/P$) ενώ η στροφή με το μέτρο διάτμησης, το εφαρμοζόμενο φορτίο και το εσωτερικό μήκος ($\mu \ell \omega/P$). Για την περίπτωση που γίνεται αναφορά στις μετατοπίσεις και στροφές στην επιφάνεια του ημιεπιπέδου μπορεί να πραγματοποιηθεί μία αδιαστατοποίηση της μορφής $4\mu u_x/P(1-2\nu)$, $2\pi\mu u_y/P(1-\nu)$ και $\pi\mu \ell \omega_z P(1-\nu)$. Παρατηρείται ότι οι μετατοπίσεις $u_y(x,0)$ παρουσιάζουν την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά στην Κλασική Ελαστικότητα και στη Θεωρία Τάσεων Ζεύγους και οι μετατοπίσεις $u_x(x,0)$ την ίδια μορφής ασυνέχειας.



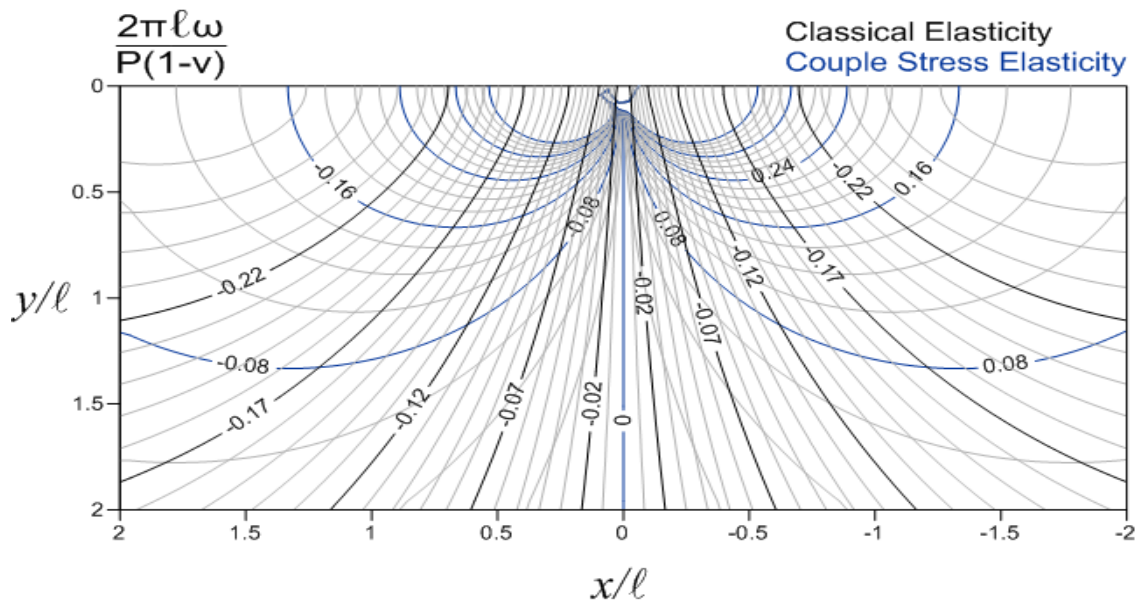
Σχήμα 3. Συμπεριφορά επιφανείας ($y = 0$) ημιχώρου υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσης Ζεύγους (C.S.E.). Παρουσιάζεται το αδιάστατο πεδίο μετατοπίσεων $2\pi\mu_y/P(1-\nu)$ και $4\mu_x/P(1-2\nu)$ συναρτήσει της απόστασης x/ℓ από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P . Τα αποτελέσματα εξετάστηκαν για διάφορες τιμές του λόγου Poisson.



Σχήμα 4. Συμπεριφορά επιφανείας ($y = 0$) ημιχώρου υπό την επίδραση κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσης Ζεύγους (C.S.E.). Παρουσιάζεται η αδιάστατη στροφή $\pi\mu\omega_z/P(1-\nu)$ συναρτήσει της απόστασης x/ℓ από το σημείο εφαρμογής του φορτίου P . Τα αποτελέσματα εξετάστηκαν για διάφορες τιμές του λόγου Poisson.



Σχήμα 5. Ισοτασικές καμπύλες μετατόπισης για το πρόβλημα Flamant-Boussinesq για τις περιπτώσεις της Κλασικής Ελαστικότητας και Ελαστικότητας Τάσης Ζεύγους για λόγο Poisson $\nu = 0.33$

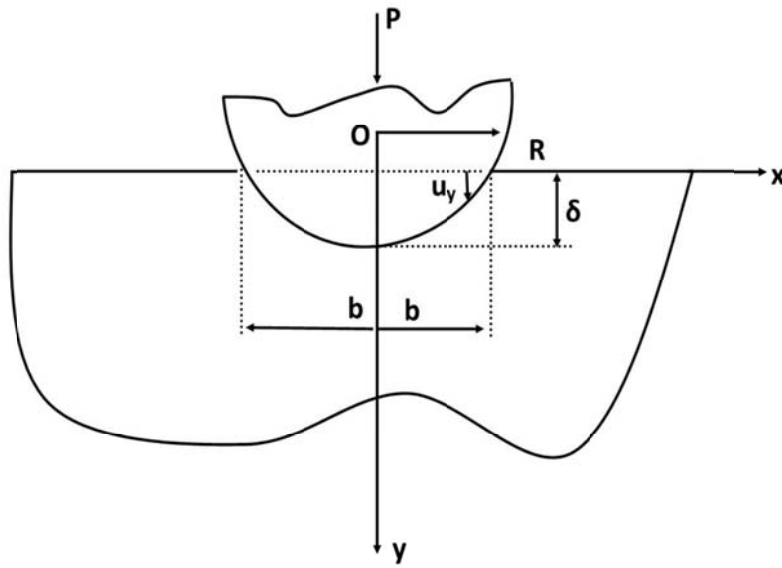


Σχήμα 6. Ισοτασικές καμπύλες στροφής για το πρόβλημα Flamant-Boussinesq για τις περιπτώσεις της Κλασικής Ελαστικότητας και της Ελαστικότητας Τάσης Ζεύγους για λόγο Poisson $\nu = 0.33$

3. Διατύπωση του προβλήματος Επαφής

3.1 Διατύπωση Συνοριακών Συνθηκών

Θεωρούμε τις τάσεις που παράγονται σε ένα ελαστικό ημιχώρο από την διείδυση ενός άκαμπτου κυλινδρικού διεισδυτή που εισέρχεται στην επιφάνεια όπως φαίνεται στο **Σχήμα 7**. Ένα φορτίο P ασκείται στον κυλινδρικό διεισδυτή, που στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης έχει διαστάσεις $[Δύναμη][Μήκος]^{-1}$.



Σχήμα 7. Κυλινδρικό σώμα που διεισδύει σε ελαστικό ημχώρο

Ξεκινάμε θεωρώντας το όριο της ελλειπτικής επαφής Herz, όπου ο ένας άξονας της έλλειψης γίνεται σημαντικά μεγαλύτερος από τον άλλο άξονα [49]. Αυτό το όριο αντιστοιχεί σε ένα κυλινδρικό διεισδυτή ακτίνας R , με τους άξονες του να βρίσκονται παράλληλα με τον άξονα των Z , στο παρόν σύστημα συντεταγμένων και ο οποίος έρχεται σε επαφή με ένα ελαστικό ημιεπίπεδο κάτω από την επίδραση δύναμης P . Τα δύο σώματα έρχονται σε επαφή κατά μήκος μιας λωρίδας πλάτους $2b$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα των X , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 7** παραπάνω. Για τα σημεία που βρίσκονται στην επιφάνεια επαφής, $-b < x < b$, μετά τη φόρτιση έχουμε την ακόλουθη συνοριακή συνθήκη:

$$u_y = k(x) \tag{1.64}$$

Η οποία για την περίπτωση του κυλινδρικού διεισδυτή παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$k(x) = \delta - \left(\frac{1}{2}R\right)x^2 \tag{1.65}$$

όπου δ είναι μια θετική σταθερά.

Σχετικά με τις συνοριακές συνθήκες επαφής, παρατηρούμε ότι εφόσον δεν υφίσταται κάποιος περιορισμός στο u_x , και στο du_x/dy , κάτω από το διεισδυτή, η στροφή ω είναι τυχαία, στην περιοχή της επαφής. Έτσι επιβάλλοντας την αρχή της εικονικής δύναμης [25], υποθέτουμε μηδενική διάτμηση και έλξεις ζεύγους κάτω από τον διεισδυτή. Σαν αποτέλεσμα για μια επαφή χωρίς τριβή [20], ισχύουν οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$\sigma_{yy}(x,0) = 0 \quad \forall x > b \quad (1.66)$$

$$\sigma_{yx}(x,0) = 0 \quad \forall -\infty < x < \infty \quad (1.67)$$

$$m_{yz}(x,0) = 0 \quad \forall -\infty < x < \infty \quad (1.68)$$

Οι οποίες συνοδεύονται από τις ακόλουθες βοηθητικές συνθήκες:

$$\int_{-b}^b \sigma_{yy}(x,0) dx = - \int_{-b}^b p(x) dx = -P \quad (1.69)$$

Όπου $p(x)$ είναι η πίεση κάτω από το διεισδυτή με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$|x| > b \text{ και } p(x) = -p(x), (|x| < b) \quad (1.70)$$

Επιπλέον επειδή, η επιφάνεια διείσδυσης είναι μία μη φραγμένη περιοχή, οι παραπάνω συνοριακές συνθήκες πρέπει να συμπληρωθούν από τις συνθήκες στο άπειρο δηλ.

$$\sigma_{ij} \rightarrow 0, m_{ij} \rightarrow 0 \quad \text{όταν } r \rightarrow \infty \quad (1.71)$$

3.2 Προσέγγιση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

Ο σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι ο προσδιορισμός της κατανομής της τάσης επαφής κάτω από τον άκαμπτο διεισδυτή και ο προσδιορισμός του σχετικού μήκους της επιφάνειας επαφής. Υποθέτουμε ότι στην επιφάνεια του ημιεπιπέδου ασκείται ένα κατανεμημένο φορτίο $p(\xi)$ ανά μονάδα μήκους. Τα πεδία τάσης και

παραμόρφωσης, μπορούν να υπολογισθούν με υπέρθεση, χρησιμοποιώντας τη λύση Flamant-Boussinesq, όμοια με τη λύση Green, δηλαδή συμπεριφέροντας στο καταναμημένο φορτίο, όπως το όριο από έναν αριθμό φορτίων μεγέθους $p(\xi)d\xi$. Σημειώνεται ότι η λύση Flamant-Boussinesq, ικανοποιεί αυτόματα τις συνοριακές συνθήκες επαφής, (1.67), (1.68).

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η εφαπτομενική κλίση της ορθής μετατόπισης στην επιφάνεια του ημιεπιπέδου, υποθέτει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{du_y}{dx} = -\frac{(1-\nu)}{(3-2\nu)\pi\mu} CPV \int_{-b}^b \frac{p(s)}{x-s} ds + \frac{1}{\pi\mu} \int_{-b}^b N(x-s) p(s) ds, \quad |x| < b \quad (1.72)$$

Κατά συνέπεια, λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (1.64), έπειτα από κατάλληλη κανονικοποίηση, λαμβάνουμε την μοναδική ολοκληρωτική εξίσωση της ελαστικότητας τάσης ζεύγους:

$$-\frac{1-\nu}{3-2\nu} CPV \int_{-1}^1 \frac{p(\tilde{s})}{\tilde{x}-\tilde{s}} d\tilde{s} + \int_{-1}^1 \tilde{N}(\tilde{x}-\tilde{s}) p(\tilde{s}) d\tilde{s} = \frac{\pi\mu}{b} \frac{d\tilde{k}\tilde{x}}{d\tilde{x}}, \quad |\tilde{x}| < 1 \quad (1.73)$$

Όπου

$$\tilde{x} = x / b$$

$$\tilde{s} = s / b$$

Σημειώνεται ότι το πρώτο ολοκλήρωμα της Εξ. (1.73), εξηγείται με τη λογική της κύριας τιμής Cauchy (Cauchy Principal Value). Επιπρόσθετα, το κανονικό μέρος του παραπάνω ολοκληρώματος ορίζεται ως ακολούθως:

$$\tilde{N}(\tilde{x}-\tilde{s}) = \frac{2(1-\nu)^2}{(3-2\nu)} \int_0^\infty \frac{2q^2 \zeta^2 (\tilde{\gamma}-q\zeta) - \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma} + 4(1-\nu)q^2 \zeta^2 (\tilde{\gamma}-q\zeta)} \sin((\tilde{x}-\tilde{s})\zeta) d\zeta \quad (1.74)$$

Όπου

$$\zeta = \xi b$$

$$q = \ell / b$$

$$\tilde{\gamma} = (1 + q^2 \zeta^2)^{\frac{1}{2}}$$

Το παραπάνω συγκλίνον ολοκλήρωμα, είναι ένας μετασχηματισμός Fourier και επιλύεται εύκολα με τη χρήση του υπολογιστικού λογισμικού MATHEMATICA. Σημειώνεται ότι το ολοκλήρωμα της Εξ. (1.73), έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν από τους Zisis et.al [38], όπου εισήχθη μια διαφορετική προσέγγιση, βασισμένη στη μέθοδο των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών και γενικευμένων εξισώσεων.

3.3 Αριθμητική Επίλυση

Στην Κλασική Θεωρία Ελαστικότητας, οι επιφανειακές δυνάμεις (contact tractions) για τον κυλινδρικό διεισδυτή, δεν παρουσιάζουν ιδιομορφία στα ακραία σημεία του μήκους επαφής $x = \pm b$ [50]. Με οδηγό τα αποτελέσματα που αφορούν τις τροποποιήσεις των τασικών ιδιομορφιών κατά την παρουσία τάσεων ζεύγους [34],[51] υποθέτουμε ότι η κατανομή της πίεσης ακολουθεί την εξής μορφή:

$$p(\tilde{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n U_n(\tilde{s}) \sqrt{1 - \tilde{s}^2} \quad (1.75)$$

Όπου $U_n(\tilde{s})$ είναι τα πολυώνυμα Chebyshev. Η ολοκληρωτική εξίσωση τότε γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left\{ -\frac{1-\nu}{3-2\nu} \int_{-1}^1 \frac{U_n(\tilde{s}) \sqrt{1-\tilde{s}^2}}{(\tilde{x}-\tilde{s})} d\tilde{s} + \int_{-1}^1 U_n(\tilde{s}) \sqrt{1-\tilde{s}^2} \tilde{N}(\tilde{x}-\tilde{s}) d\tilde{s} \right\} = -\frac{\mu\pi b}{R} \tilde{x} \quad (1.76)$$

$$\text{Με } |\tilde{x}| \leq 1$$

Σημειώνεται ότι η επιφάνεια ημιαπαφής b , δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων και θα καθοριστεί από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών. Στην Εξ. (1.76), το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται σαν ένα ολοκλήρωμα CPV, χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σχέση:

$$CPV \int_{-1}^1 \frac{U_n(\tilde{s}) \sqrt{1-\tilde{s}^2}}{(\tilde{x}-\tilde{s})} d\tilde{s} = \pi \Gamma_{n+1}(\tilde{x}) \quad \forall n \geq 0, |\tilde{x}| \leq 1 \quad (1.77)$$

Συνεπώς, φτάνουμε στην ακόλουθη εξίσωση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αριθμητική διακριτοποίηση

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left\{ -\frac{1-\nu}{3-2\nu} \pi \Gamma_{n+1}(\tilde{x}) + W_n(\tilde{x}) \right\} = -\frac{\mu p b}{R} \tilde{x} \quad (1.78)$$

Όπου

$$W_n(\tilde{x}) = \int_{-1}^1 U_n(\tilde{s}) \sqrt{1-\tilde{s}^2} \mathbb{N}(\tilde{x}-\tilde{s}) d\tilde{s}$$

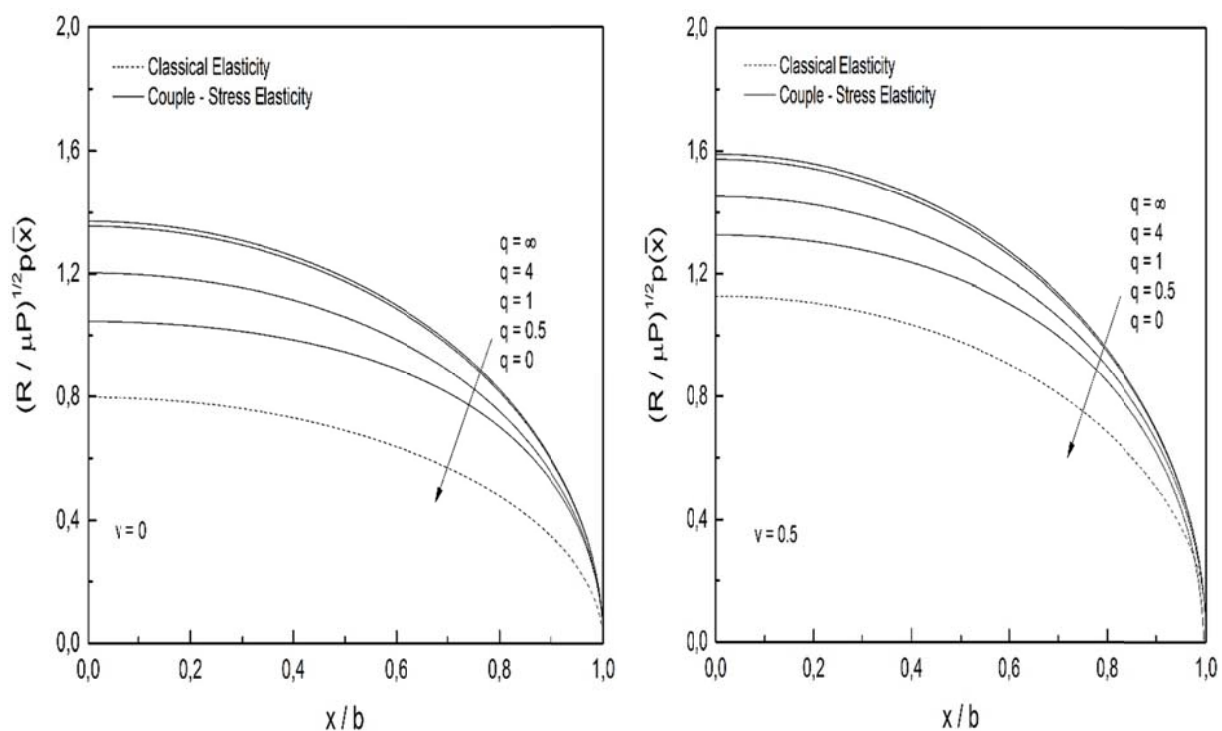
είναι ένα κανονικό ολοκλήρωμα το οποίο μπορεί να υπολογισθεί, με την μέθοδο του τετραγωνισμού Gauss. Η Εξ. (1.78), επιλύεται με αποκοπή της σειράς στο $n=N$ και χρησιμοποιώντας κατάλληλη τεχνική ταξιθεσίας (collocation) με σημεία επιλεγμένα από τις ρίζες της:

$$\tilde{x}_j = \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{2(N+1)} \right) \quad \mu \varepsilon \quad j = 1, 2, \dots, N+1 \quad (1.79)$$

Η συμπληρωματική συνθήκη (1.69), χρησιμοποιείται στη συνέχεια για τον υπολογισμό της επιφάνειας επαφής $2b$.

3.4 Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα εξετάζονται υπό την επίδραση του λόγου ℓ/b , (κανονικοποιημένο μέγεθος διεισδυτή) και του λόγου Poisson ν , στην κατανομή της πίεσης επαφής, του πλάτους της επιφάνειας επαφής και της μέσης πίεσης. Στο **Σχήμα 8**, παρουσιάζονται λεπτομέρειες των χαρακτηριστικών κατανομής πίεσης κάτω από τον κυλινδρικό διεισδυτή.



Σχήμα 8. Κατανομή της πίεσης κάτω από τον κυλινδρικό διεισδυτή σε σχέση με την κανονικοποιημένη απόσταση x/b για διάφορες τιμές του q . Τα αποτελέσματα απεικονίζονται για τις περιπτώσεις όπου ο λόγος Poisson παίρνει τις τιμές $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$.

Όπως παρατηρούμε από τα γραφήματα, η κατανομή της πίεσης στην περίπτωση του κυλινδρικού διεισδυτή, εξαρτάται μονοτονικά από το λόγο ℓ/b . Αυξάνοντας το λόγο ℓ/b η πίεση κάτω από τον κυλινδρικό διεισδυτή, αυξάνεται σημαντικά. Στην πραγματικότητα όσο $\ell/b \rightarrow \infty$ η πίεση τείνει στο όριο $\sqrt{3-2\nu} p_{class}(x)$. Από την άλλη πλευρά όσο $\ell/b \rightarrow 0$ οδηγούμαστε στην κλασική καμπύλη κατανομής πίεσης.

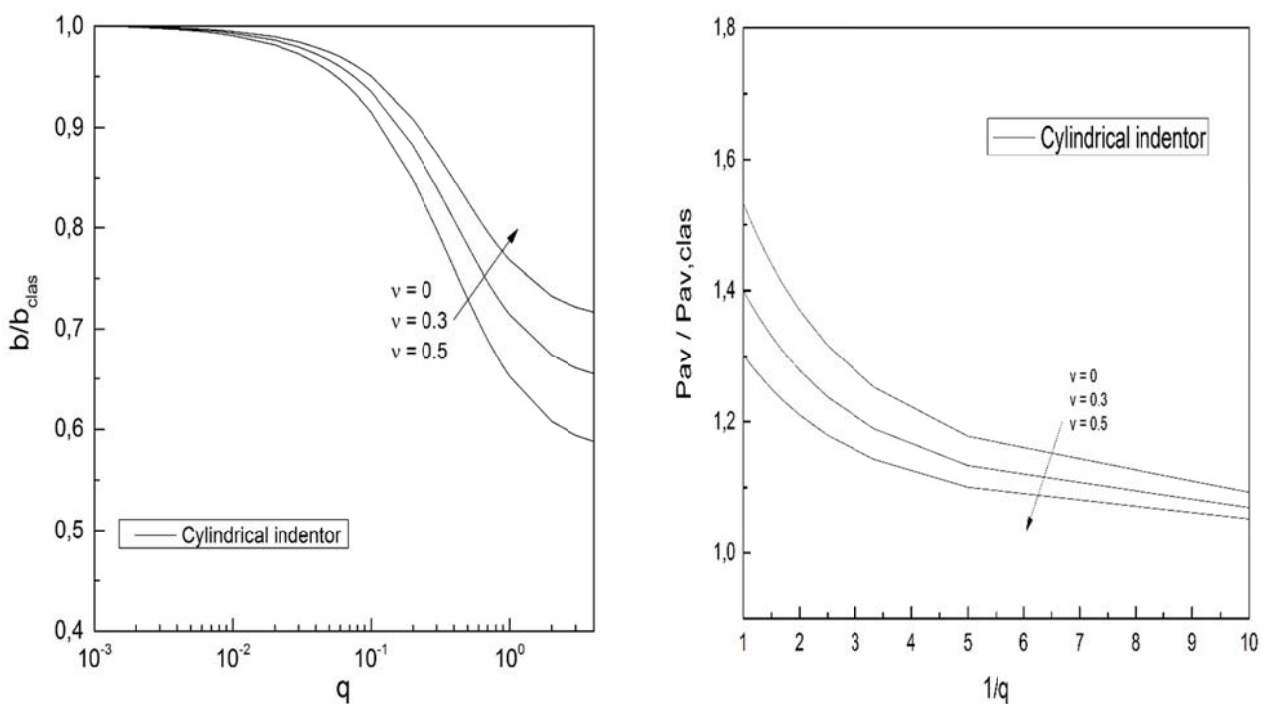
Μία από τις πιο σημαντικές πληροφορίες που αντλούνται από τα πειράματα διείσδυσης είναι η επιφάνεια διείσδυσης (η οποία μειώνεται σε ένα πλάτος επαφής στη δι-διάστατη περίπτωση που εξετάζεται εδώ) και η μέση πίεση σε συνάρτηση του λόγου ℓ/b . Για το σκοπό αυτό το πλάτος ημιαπαφής b , κανονικοποιείται με το πλάτος ημιαπαφής b_{clas} στην κλασική ελαστικότητα. Σύμφωνα με τον Johnson [51], σημειώνεται ότι:

$$b_{clas} = \left(\frac{4(1-\nu^2)PR}{\pi E} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.80)$$

Στο ίδιο πνεύμα, η μέση πίεση $p_{av} = \frac{P}{2b}$ κανονικοποιείται με το αντίστοιχο $p_{av,clas}$. Στο

Σχήμα 9α ακολούθως, απεικονίζεται η εξάρτηση του κανονικοποιημένου πλάτους επαφής $\frac{b}{b_{clas}}$ ως συνάρτηση του λόγου ℓ/b , για διαφορετικές τιμές του λόγου Poisson ν .

Το πλάτος επαφής για τον κυλινδρικό διεισδυτή εξαρτάται σημαντικά από το λόγο ℓ/b .



Σχήμα 9. (α) Στο αριστερό σχήμα απεικονίζεται η εξάρτηση της αδιάστατης ακτίνας επαφής b/b_{clas} από το λόγο ℓ/b ($q = \ell/b$) και από το λόγο Poisson ν . (β) Στο δεξί σχήμα απεικονίζεται η εξάρτηση της αδιάστατης μέσης πίεσης $p_{av}/p_{av,clas}$ από το λόγο b/ℓ και από το λόγο Poisson ν .

Παρατηρούμε ότι αυξάνοντας το λόγο ℓ/b , το πλάτος επαφής b , μειώνεται σημαντικά. Για τιμές του λόγου $\ell/b > 2$, παρατηρείται μία σταθερή συμπεριφορά και δεν υπάρχει επιπλέον επίδραση του λόγου στο πλάτος επαφής. Σημειώνεται ότι η

χαρακτηριστική εξάρτηση του λόγου ℓ/b από το πλάτος επαφής, λαμβάνει χώρα στην περιοχή $0.1 < \ell/b < 1$, όπου η εξάρτηση αυτή είναι πιο έντονη.

Στη συνέχεια, στο **Σχήμα 9β** παρουσιάζεται η επίδραση του λόγου b/ℓ , στην κανονικοποιημένη μέση πίεση $P_{av}/P_{av,clas}$ (σκληρότητα). Παρατηρείται ότι το διάγραμμα του Σχήματος 9β, προκύπτει ουσιαστικά από το διάγραμμα του Σχήματος 9α διότι ισχύει:

$$P_{av} = \frac{P}{2b} \quad \text{και} \quad \frac{P_{av}}{P_{av,clas}} = \frac{\frac{P}{2b}}{\frac{P}{2b_{clas}}} = \frac{b_{clas}}{b}$$

Από το **Σχήμα 9β** συμπεραίνουμε ότι όταν τα φαινόμενα τάσης ζεύγους λαμβάνονται υπόψη, ($\ell \neq 0$), η σκληρότητα αυξάνεται σημαντικά σε σύγκριση με την κλασική προσέγγιση. Για την περίπτωση ενός κυλινδρικού διεισδυτή όσο ο λόγος b/ℓ αυξάνεται, η σκληρότητα μειώνεται μονοτονικά προσεγγίζοντας το όριο της μονάδας.

Παρόμοια φαινόμενα κλίμακας διείσδυσης έχουν παρατηρηθεί σε πειράματα που εκτελέστηκαν από τους Han και Nikolov [9], κατά τη διάρκεια ελαστικής παραμόρφωσης πολυμερών υλικών και συγκεκριμένα της σιλικόνης. Στη μελέτη τους, έδειξαν ότι φαινόμενα μεγέθους διείσδυσης, συνδέονται άμεσα με την ελαστική και όχι απαραίτητα με την πλαστική παραμόρφωση όπως αναφέρεται για την εξαρτώμενη από το μέγεθος του υλικού παραμόρφωση για την περίπτωση των μεταλλικών υλικών. Στην πραγματικότητα, τα πειράματα διείσδυσης με ένα διεισδυτή Berkovich, που εκτελέστηκαν σε υλικά όπως polycarbonate (PC), epoxy, polyethylene terephthalate (PET), και polyamide 66 ή nylon66 (PP66), έδειξαν μια αυξανόμενη σκληρότητα καθώς μειώνεται το βάθος διείσδυσης, ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι πολύ όμοιο με τη γραφική παράσταση του **Σχήματος 9β** και τη σχέση που συνδέει το P_{av} με το b .

Επιπλέον οι Han και Nikolov [9], ανέφεραν ότι το βάθος στο οποίο η σκληρότητα αρχίζει να αυξάνεται, έχει ισχυρή εξάρτηση στην περιοχή της ελαστικής παραμόρφωσης, με τον τύπο του πολυμερούς. Συγκεκριμένα ανέφεραν ότι η σκληρότητα σε μικρά βάθη διείσδυσης (ή μικρές επιφάνειες επαφής), μπορεί να αυξηθεί από 0% έως 300%. Σε αντιστοιχία με τα αποτελέσματα αυτά, η ανάλυση της παρούσας μελέτης έδειξε ότι ανάλογα με το λόγο Poisson, μια μέγιστη αύξηση της τάξεως του 30%-55% για τον κυλινδρικό διεισδυτή λαμβάνεται, για ένα μήκος επαφής διπλάσιο του μεγέθους του χαρακτηριστικού μήκους του υλικού ($b/\ell = 1$).

Για πειραματικό σκοπό, οι κυλινδρικοί και σφηνοειδής διεισδυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν με σκοπό την εξαγωγή του χαρακτηριστικού μήκους του υλικού ℓ από το διεισδυθέν υλικό. Για την περίπτωση του κυλινδρικού διεισδυτή, παρά το γεγονός ότι είναι λιγότερο ευαίσθητος στις μεταβολές του λόγου ℓ/b , δεν παρουσιάζονται τα ίδια μειονεκτήματα με τον σφηνοειδή διεισδυτή όπου στην περιοχή κάτω από από το διεισδυτή προκαλείται αστοχία του υλικού. Έτσι ο κυλινδρικός διεισδυτής μπορεί στην πραγματικότητα να διαθέτει την καλύτερη γεωμετρία για να διερευνηθεί η επίδραση της κλίμακας του μήκους του υλικού, στη συμπεριφορά ενός μικροδομικού ελαστικού υλικού.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να εξεταστεί η ισοδύναμη τάση προκειμένου να αναγνωρισθεί η πιο κρίσιμη τάση και κατά συνέπεια οι πιθανές περιοχές όσον αφορά το σημείο εφαρμογής του φορτίου στις οποίες ενδέχεται να εμφανιστεί πλαστικότητα.

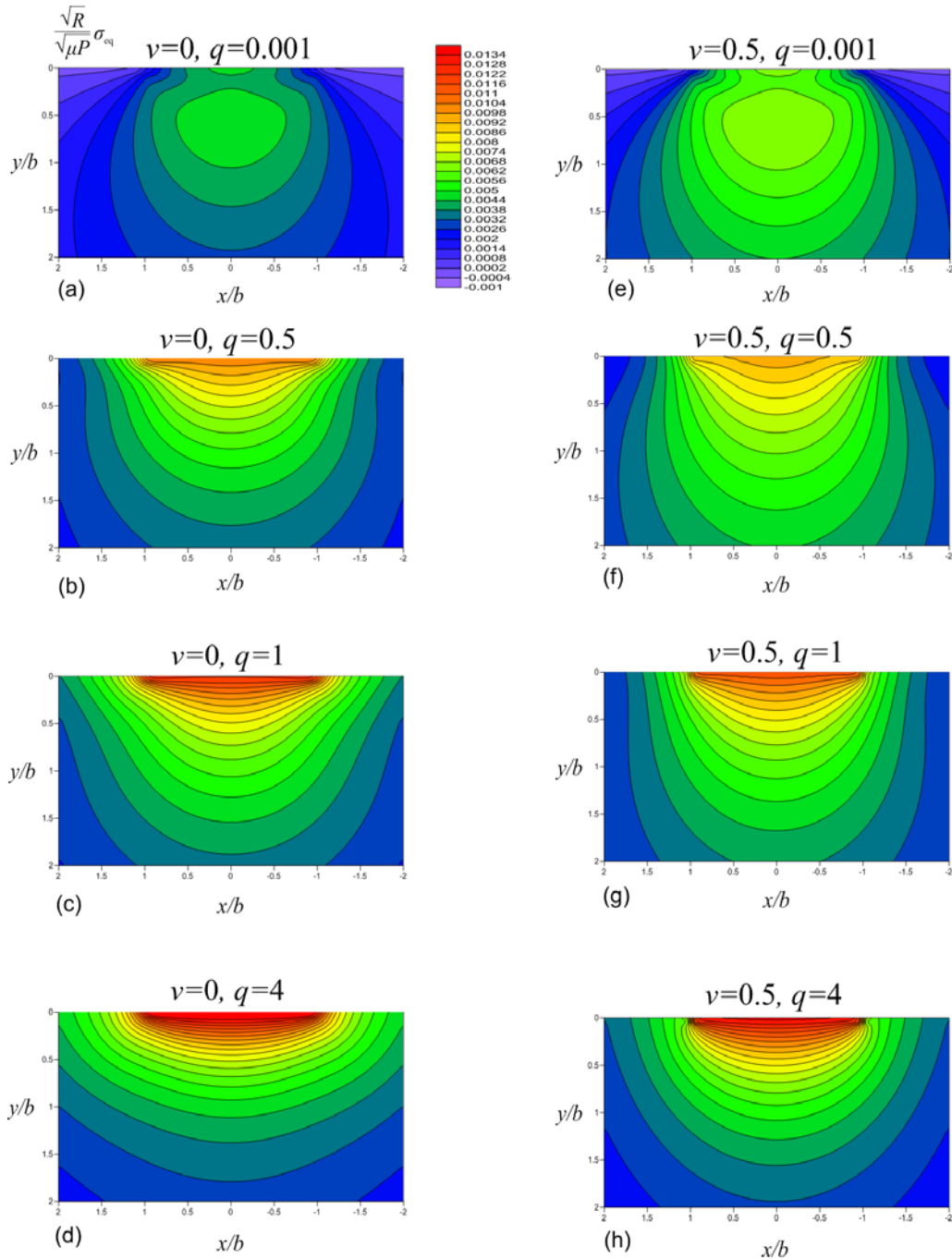
Στο πλαίσιο της Θεωρίας Τάσης Ζεύγους η μορφή των ισοτασικών καμπύλων για την ισοδύναμη τάση εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά μικροδομής του υλικού. Για την περίπτωση της ελαστικότητας τάσης ζεύγους και σύμφωνα με τους **Borst (1989)** και **Shu and Fleck (1998)**, η γενική μορφή της κανονικοποιημένης ισοδύναμης τάσης παρουσιάζεται ως ακολούθως:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3 \left(\frac{1}{2} (s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2) + \frac{1}{4} \sigma_{xy}^2 + \frac{1}{2} \sigma_{xy} \sigma_{yx} + \frac{1}{4} \sigma_{yx}^2 + \frac{1}{2} \left((m_{xz})^2 + (m_{yz})^2 \right) \right)} \quad (1-81)$$

Όπου $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$ είναι η αποκλίνουσα τάση.

Όταν η ισοδύναμη τάση προσεγγίσει την τάση διαρροής του υλικού, η διαρροή θα ξεκινήσει παρά το γεγονός ότι η πλαστική περιοχή θα είναι περικυκλωμένη από ελαστικό υλικό και σε φορτία ελάχιστα πάνω από το όριο ελαστικότητας μπορεί να προσεγγιστεί με μία από τις ισοτασικές καμπύλες του **Σχήματος 10** εξαρτώμενη από το χαρακτηριστικό μήκος μικροδομής ℓ και το λόγο Poisson ν .

Παρατηρείται ότι ελαττώνοντας το χαρακτηριστικό μήκος ℓ , η μέγιστη ισοδύναμη τάση αυξάνεται και η περιοχή της μέγιστης ισοδύναμης τάσης διευρύνεται σημαντικά. Όταν το $\ell \rightarrow 0$, η πιθανή περιοχή διαρροής αυξάνεται σημαντικά. Τα τασικά πεδία της ισοδύναμης τάσης εξετάστηκαν για τις τιμές του λόγου Poisson $\nu=0$ και $\nu=0.5$ και οι τάσεις έχουν κανονικοποιηθεί με τον όρο $\sqrt{\frac{R}{\mu P}}$.



Σχήμα 10. Πεδίο ισοδύναμης τάσης για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$

Στο Παράρτημα της παρούσας μελέτης παρουσιάζονται επίσης τα τασικά πεδία που αναπτύσσονται κατά την εφαρμογή φορτίου P στην περίπτωση του κυλινδρικού διευσδυτη, $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx})$ καθώς και οι ροπές m_{xz}, m_{yz} . Τα τασικά πεδία εξετάστηκαν για λόγους Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$ και οι τάσεις έχουν κανονικοποιηθεί με τον όρο

$$\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{\mu P}}.$$

4. Συμπεράσματα

Σε αυτή τη μελέτη, οι συναρτήσεις ημιεπιπέδου Green, προέκυψαν στο πλαίσιο της δεσμευμένης θεωρίας ελαστικότητας (θεωρία τάσεων ζεύγους). Η θεωρία αυτή παρουσιάζει το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού, με σκοπό να περιγράψει τα σχετικά φαινόμενα κλίμακας, που προκύπτουν από την μικροδομή του υλικού. Η συνάρτηση Green, χρησιμοποιείται για την εξαγωγή ενός βασικού δι-διάστατου προβλήματος επαφής της επίπεδης παραμόρφωσης.

Τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής, επιδεικνύουν σημαντικές διαφορές από την περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας. Αναφορικά με το πρόβλημα του συγκεντρωμένου φορτίου, παρατηρείται ότι ενώ τα στοιχεία μετατοπίσεων παρουσιάζουν την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά όπως στην περίπτωση της θεωρίας κλασικής ελαστικότητας, η αναλυτική δομή διαφέρει σημαντικά στη θεωρία τάσης ζεύγους.

Σε αντίθεση με την Κλασική Θεωρία Ελαστικότητας, η στρόφη είναι φραγμένη, όταν υπολογίζεται στα πλαίσια της Θεωρίας Τάσεων Ζεύγους. Η διαφορά με την κλασική ελαστικότητα γίνεται σημαντική κοντά στο σημείο εφαρμογής του φορτίου όπου οι βαθμίδες περιστροφής/παραμόρφωσης γίνονται πιο έντονες, ενώ καθώς απομακρυνόμαστε από το σημείο εφαρμογής του φορτίου, οι διαφορές εξομαλύνονται και η λύση τάσης ζεύγους προσεγγίζει αυτή της κλασικής ελαστικότητας.

Αναφορικά με τον κυλινδρικό διεισδυτή, αποδεικνύεται ότι αυξάνοντας το λόγο ℓ/b , η πίεση κάτω από το διεισδυτή, αυξάνει σημαντικά, συγκρινόμενη με τις προβλέψεις της κλασικής ελαστικότητας. Επιπλέον παρατηρείται ότι όσο το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού αυξάνεται, το μήκος επαφής μειώνεται.

Ως εκ τούτου η μετρούμενη σκληρότητα σε υλικό με μικροδομικά χαρακτηριστικά παρουσιάζεται αυξημένη έως και μιάμιση φορά ($b/\ell \rightarrow 0$, $\nu=0$), σε σχέση με την αντίστοιχη σκληρότητα που μετριέται σε ένα υλικό χωρίς μικροδομή (κλασική ελαστικότητα). Καθώς το $b/\ell \rightarrow \infty$ τότε $p_{av} / p_{av,clas} \rightarrow 1$.

Ελαττώνοντας το χαρακτηριστικό μήκος η μέγιστη ισοδύναμη τάση αυξάνεται και η περιοχή της μέγιστης ισοδύναμης τάσης διευρύνεται σημαντικά.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, η ελαστική διείσδυση της μικροδομικής δομής των στερεών η οποία παρουσιάζει μια πολύπλοκη συμπεριφορά φόρτισης, μπορεί επίσης να λειτουργήσει σαν εναλλακτική για κοινά πειράματα όπως είναι τα πειράματα διάτμησης

και κάμψης με σκοπό τον προσδιορισμό του χαρακτηριστικού μήκους του υλικού και την παροχή αποτελεσμάτων μεγαλύτερης ακρίβειας.

Βιβλιογραφία

- [1] Nowacki W, «*Theory of Micropolar Elasticity*», New Jersey: Princeton University, 1967.
- [2] Walls MG, Brown LM, Stelmashenko NA, et al., «*Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study*», Acta Metall Mater, pp. 41:2855-2865, 1993.
- [3] Ma Q and Clarke DR, «*Size dependent hardness of silver single crystals*», J Mater Res, pp. 10:853-863, 1995.
- [4] Poole WJ, Ashby MF and Fleck NA, «*Micro-hardness of annealed and work hardened copper polycrystals*», Scripta Mater, pp. 34:559-564, 1996.
- [5] Huber N, Nix WD and Gao H., «*Identification of elastic-plastic material parameters from pyramidal indentation of thin films*», Proc R Soc Lon Ser, Volume A, pp. 1593-1620, 2002.
- [6] Fleck NA, Muller GM, Ashby MF, et al., «*Strain gradient plasticity: theory and experiment*», Acta Metall Mater, pp. 42:475-487, 1994.
- [7] Larsson PL, Giannakopoulos AE, Soderland E, et al., «*Analysis of Berkovich indentation*», Int J Solids Struct , pp. 33: 221-248, 1996.
- [8] Fischer-Cripps AC, «*Nanoidentation*», New York, Springer, 2004.
- [9] Han C-S and Nikolov S, «*Indentation size effects in polymers and related rotation gradients*» J Mater Res, pp. 22:1662-1672, 2007.
- [10] Nicolov S, Han CS and Raabe D, «*On the origin of size effects in small strain elasticity of solid polymers*», Int J Solids, pp. 44:1582-1592, 2007.
- [11] Maranganti R and Sharma P, «*A novel atomistic approach to determine strain gradient elasticity constants: tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers, and the (Ir) relevance for nanotechnologies*», J Mech Phys Solids, pp. 55:1823-1852, 2007.
- [12] Pharr GM, Oliver WC and Brotzen FR, «*On the generality of the relationship among contact stiffness, contact area and elastic modulus during indentation*», J Mater Res, pp. 7: 613-617, 1992.
- [13] Chen X, Hutchinson JW and Evans AG, «*Simulation of the high temperature impression of thermal barrier coatings with columnar microstructure*», Acta Mater, pp. 52: 565-571, 2004.

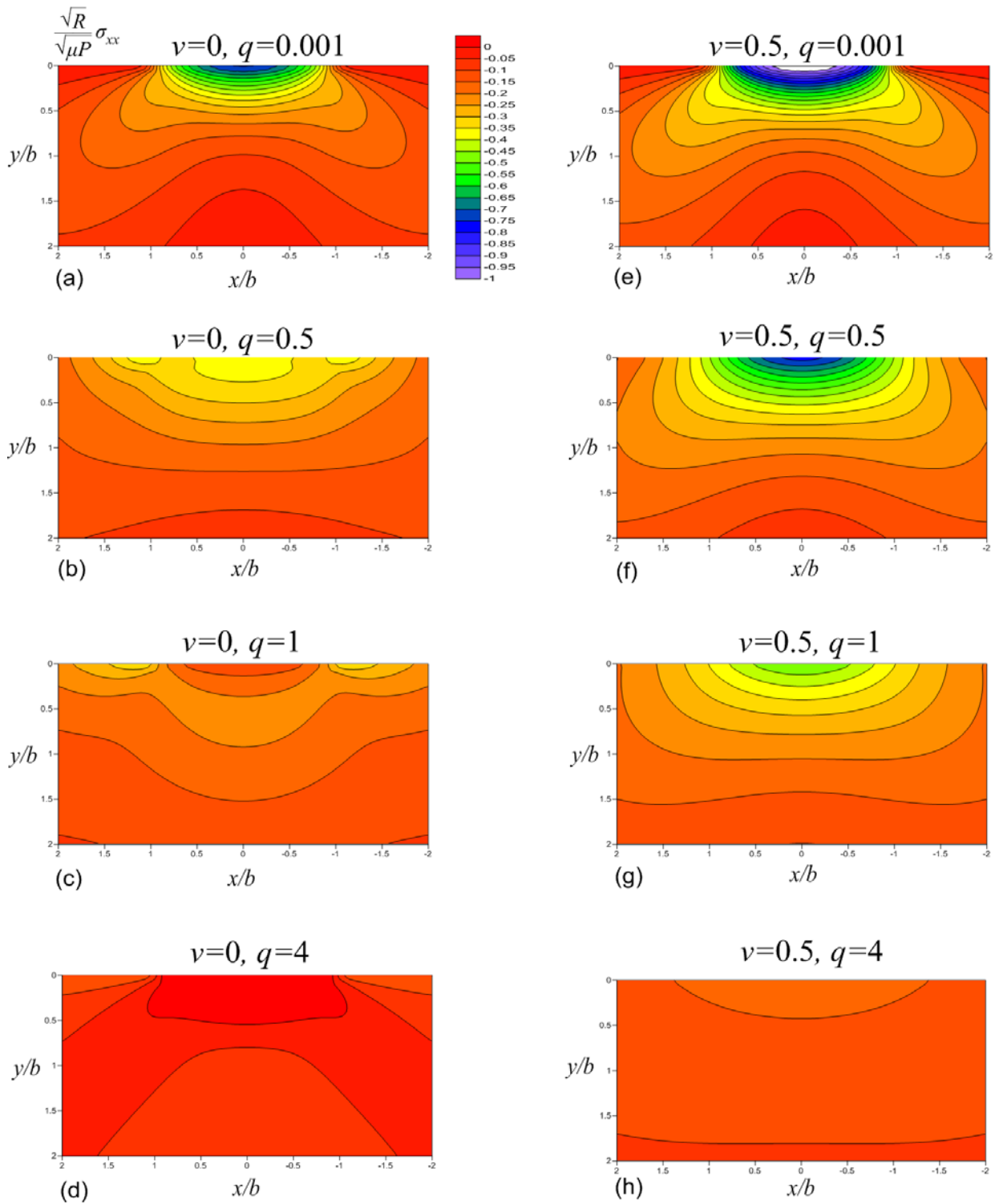
- [14] Stupkiewicz S, «*Micromechanics of contact and interphase layers. Lecture notes in applied and computational mechanics*», Berlin: Springer, 2007.
- [15] Feck NA and Zisis T, «*The erosion of EB-PVD thermal barrier coatings: the competition between mechanisms*», *Wear*, pp. 268: 1214-1224, 2010.
- [16] Zisis T and Fleck NA, «*The elastic - plastic indentation response of a columnar thermal barrier coating*», *Wear*, pp. 268: 443-454, 2010.
- [17] Muki R and Sternberg E, «*The influence of couple stresses on singular stress concentrations in elastic solids*», *Angew Math Phys*, pp. 16:611-648, 1965.
- [18] Begley MR and Hutchinson JW, «*The mechanics of size dependant indentation*», *J Mech Phys Solids*, pp. 46: 2049-2068, 1998.
- [19] Nix WD and Gao H, «*Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity*», *J Mech Phys Solids*, pp. 46: 411-425, 1998.
- [20] Shu JY and Fleck NA, «*The prediction of a size effect in micro indentation*», *Int J Solids Struct*, pp. 35: 1363-1383, 1998.
- [21] Wei Y and Hutchinson JW, «*Hardness trends in micron scale indentation*», *J Mech Phys Solids*, pp. 51:2037-2056, 2003.
- [22] Nielsen KL, Niordson CF and Hutchinson JW, «*Strain gradient effects in periodic flat punch indenting at small scales*», *Int J Solids Struct*, pp. 51: 3549-3556, 2014.
- [23] Mindlin RD and Tiersten HF, «*Effects of couple-stresses in linear elasticity*», *Arch Ration Mech An*, pp. 11:415-448, 1962.
- [24] Mindlin RD, «*Influence of couple stresses on stress concentrations*», *Exp Mech*, pp. 3:1-7, 1963.
- [25] Koiter W, «*Couple stresses in the theory of elasticity. Parts I and II*», *Proq Nederl Akad Wetensch B*, pp. 67:17-29, 1964.
- [26] Vardoulakis I and Sulem J, «*Bifurcation analysis in geomechanics*», London:Blackie Academic and Professional, 1995.
- [27] Huang Y, Chen JY, Guo TF, et al. ,«*Analytic and numerical studies on mode I and mode II fracture in elastic plastic materials with strain gradient effects*», *Int J Fracture*, pp.100:1-27, 1999.
- [28] Lubarda VA and Markenscoff X, «*Conservation integrals in couple stress elasticity*», *J Mech Phys Solids*, pp. 48:553-564, 2000.
- [29] Fleck NA and Hutchinson JW, «*A reformulation of strain gradient plasticity*», *J Mech*

- Phys Solids, pp. 49:2245-2271, 2001.
- [30] Georgiadis HG and Velgaki EG, «*High frequency Rayleigh waves in materials with micro structure and couple stress effects*», Int J Solids Struct, pp. 40:2501-2520, 2003.
- [31] Grammenoudis P and Tsakmakis C, «*Finite element implementation of large deformation micropolar plasticity exhibiting isotropic and kinematic hardening effects*», Int J Numer Meth Eng, pp. 62:1691-1720, 2005.
- [32] Grentzelou CG and Georgiadis HG, «*Uniqueness for plane crack problems in dipolar gradient elasticity and in couple stress elasticity*», Int J Solids Struct, pp. 42:6226-6244, 2005.
- [33] Radi E, «*Effects of characteristic material lengths on mode III crack propagation in couple stress elastic-plastic materials*», Int J Plasticity, pp. 23:1439-1456, 2007.
- [34] Gourgiotis PA and Georgiadis HG, «*An approach based on distributed dislocations and disclinations for crack problems in couple stress elasticity*», Int J Solids Struct, pp. 45:5521-5539, 2008.
- [35] Dal Corso F and Willis J, «*Stability of strain gradient plastic materials*», J Mech Phys Solids, pp. 59:1251-1267, 2011.
- [36] Gourgiotis PA and Piccolroaz A, «*Steady state propagation of a mode II crack in couple stress elasticity*», Int J Fracture, pp. 188:119-145, 2014.
- [37] Triantafyllou A and Giannakopoulos AE, «*Derivation of strain gradient length via homogenization of heterogeneous elastic materials*», Mech Mater, pp. 56:23-37, 2013.
- [38] Zisis T, Gourgiotis PA, Baxevanakis KP, et al., «*Some basic contact problems in couple stress elasticity*», Int J Solids Struct, pp. 51:2084-2095, 1998.
- [39] Chen JY, Huang Y and Ortiz M, «*Fracture analysis of cellular materials: a strain gradient model*», J Mech Phys Solids, pp. 46:789-828, 1998.
- [40] Tekoglu C and Onck PR, «*Size effect in two dimensional Voronoi foams. A comparison between generalized continua and discrete models*», J Mech Phys Solids, pp. 56:3541-3564, 2008.
- [41] Bigoni D and Drugan WJ, «*Analytical derivation of Cosserat moduli via homogenization of heterogeneous elastic materials*», ASME J Appl Mech, pp. 74: 741-753, 2007.
- [42] Shodja HM, Zaheri A and Teyhrachi A, «*Ab initio calculations of characteristic lengths of crystalline materials in first grain gradient elasticity*», Mech Mater, pp. 61: 73-78, 2013.

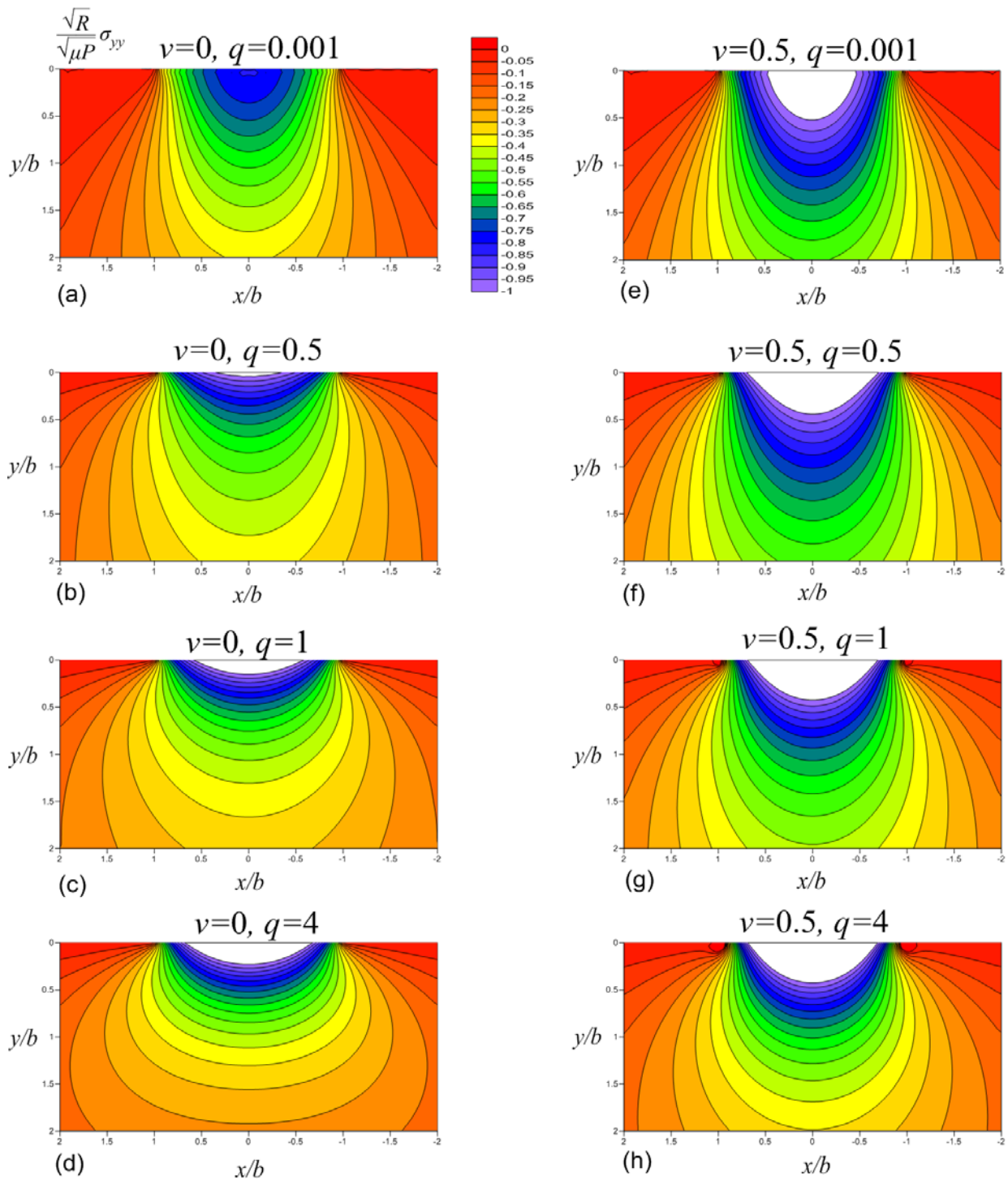
- [43] Zhang X and Sharma P, «*Inclusions and inhomogeneities in strain gradient elasticity with couple stresses and related problems*», Int J Solids Struct, pp. 42: 3833-3851, 2005.
- [44] Zhang X and Sharma P, «*Size dependency of strain in arbitrary shaped anisotropic embedded quantum dots due to nonlocal dispersive effects*», Phys Rev B , pp. 72: 195-345, 2005.
- [45] Zisis T, Gougiotis PA, «*Two-dimensional indentation of microstructured solids characterized by couple-stress elasticity*», Journal of Strain Analysis, Volume 51, pp. 318-331, 2015.
- [46] Georgiadis HG and Anagnostou DS, «*Problems of the Flamant-Boussinesq and Kelvin type in dipolar gradient elasticity*», J Elasticity, pp. 90:71-98, 2008.
- [47] Roos BW, «*Analytic Functions and Distributions in physics and engineering*», New York: Wiley 1969.
- [48] Barber JR, «*Elasticity: Solid mechanics and its applications*», Volume 172, New York: Springer 2010.
- [49] Hills D. and Nowell D, «*Mechanics of fretting fatigue*», Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [50] Johnson K, «*Contact Mechanics*», Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [51] Sternberg E and Muki R, «*The effect of couple stresses on the stress concentration around a crack*», Int J Solids Struct, pp. 3: 69-95, 1967.

Παράρτημα

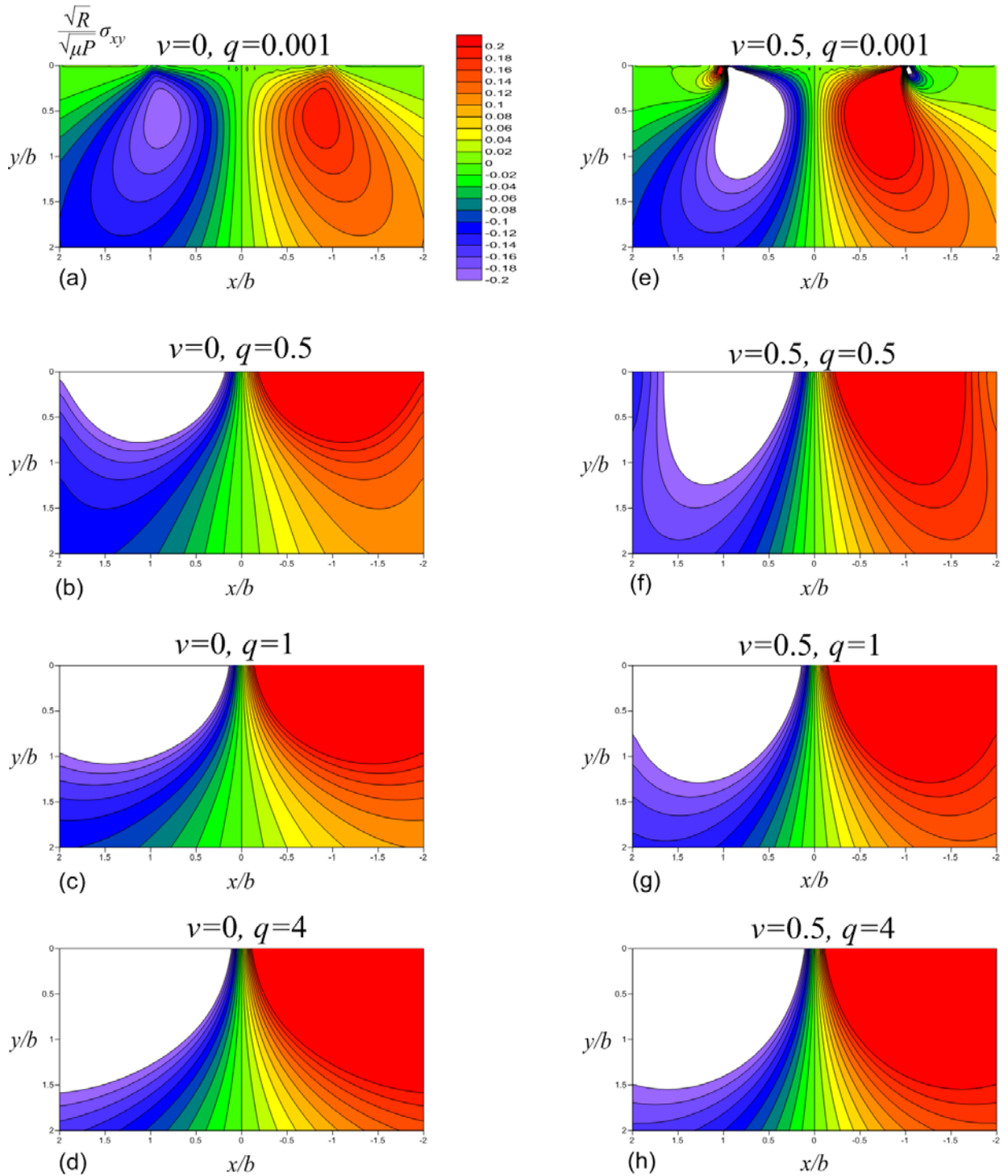
Στο Παράρτημα παρατίθενται τα διαγράμματα ισοτασικών καμπύλων που απεικονίζουν τα τασικά πεδία για τις συνιστώσες της τάσης $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}$ του τανυστή τάσεων m_{xz}, m_{yz} για τις περιπτώσεις που ο λόγος Poisson παίρνει τις τιμές $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$.



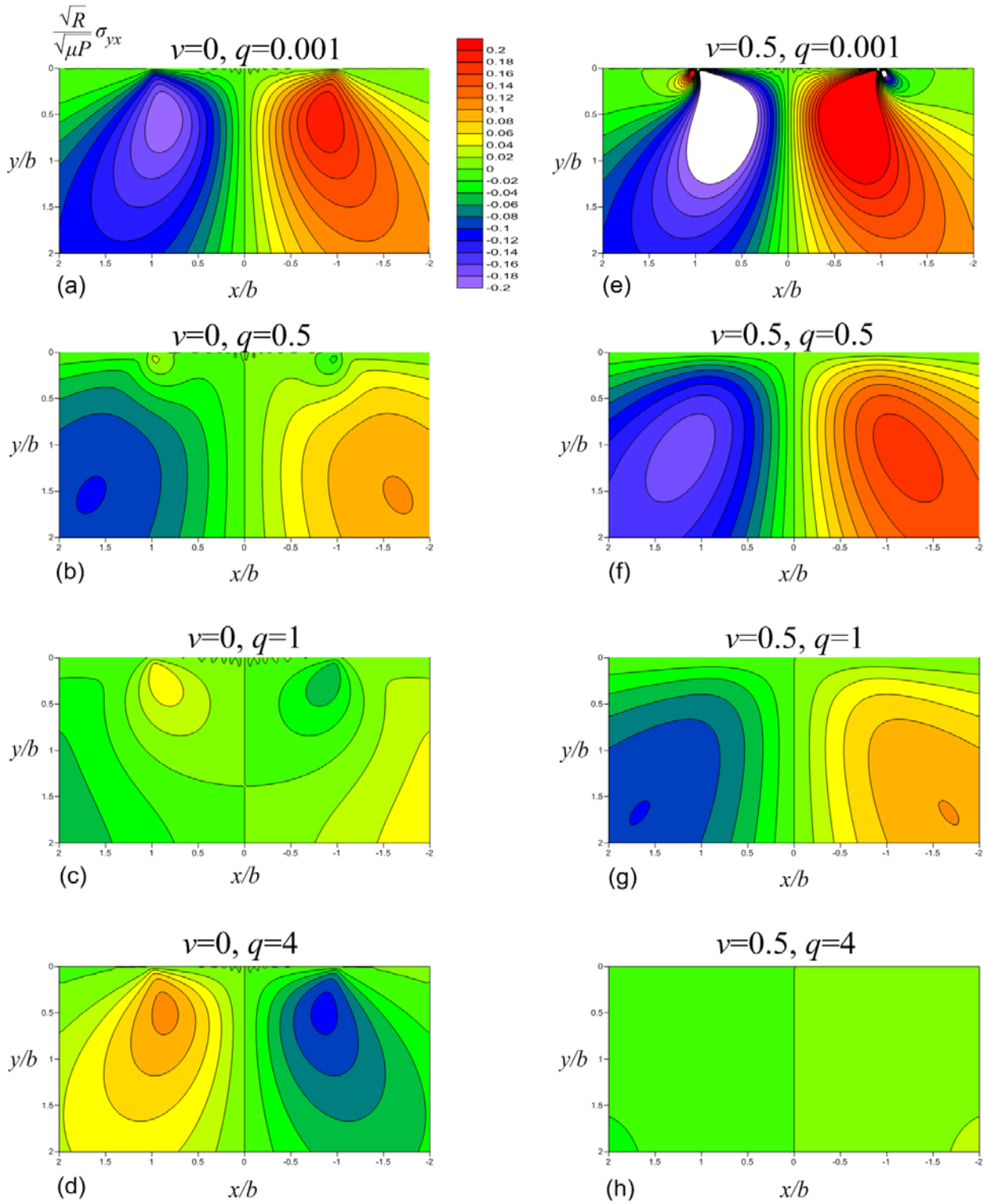
Σχήμα 11. Τασικά πεδία για την συνιστώσα της τάσης σ_{xx} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$



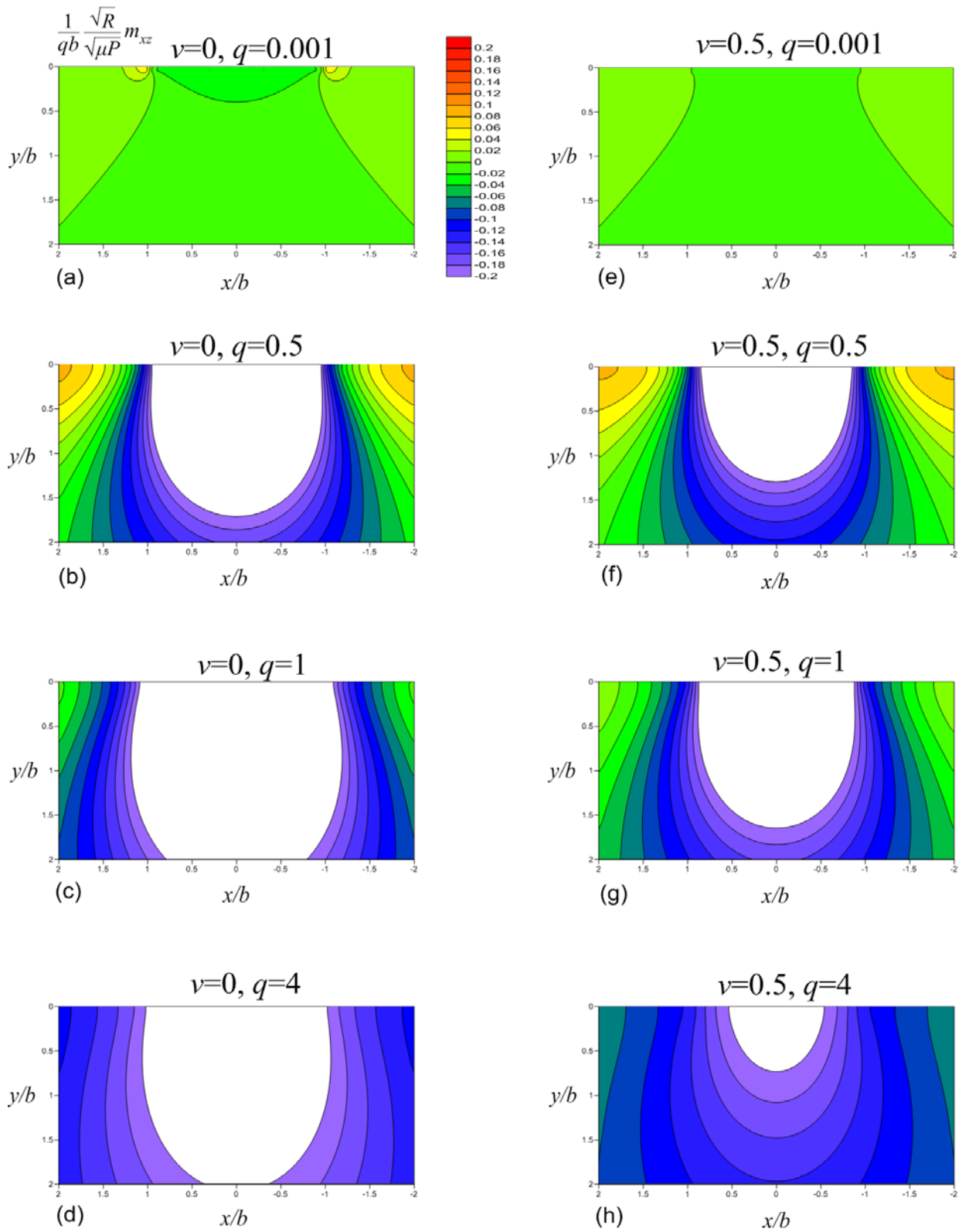
Σχήμα 12. Τασικά πεδία για την συνιστώσα της τάσης σ_{yy} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$



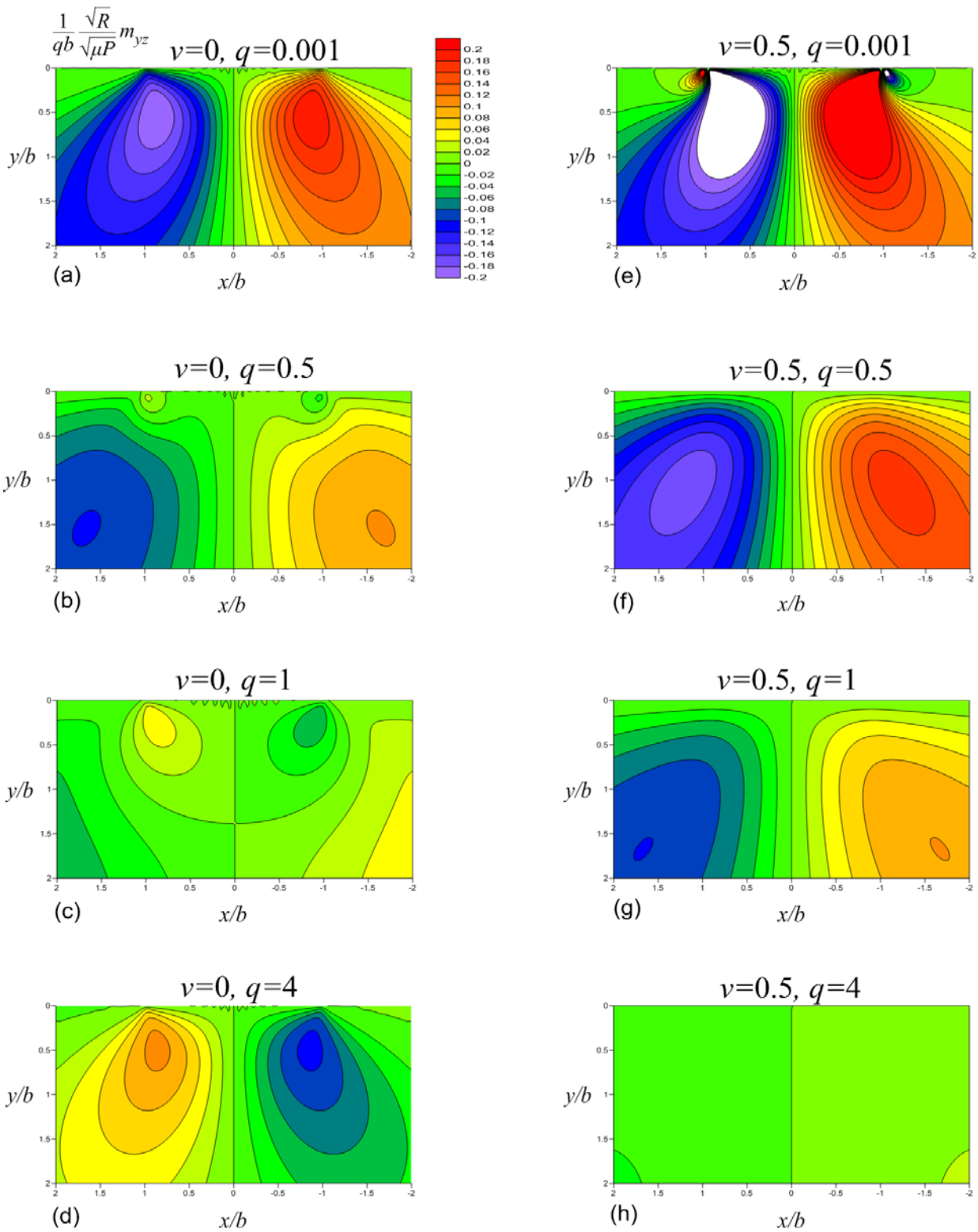
Σχήμα 13. Τασικά πεδία για την συνιστώσα της τάσης σ_{xy} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$



Σχήμα 14. Τασικά πεδία για την συνιστώσα της τάσης σ_{yx} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$



Σχήμα 15. Πεδίο τανυστή τάσεων ζεύγους m_{xz} για τιμές του λόγου Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$



Σχήμα 16. Πεδίο τανυστή τάσεων ζεύγους m_{yz} για τιμές του λόγου Poisson $\nu=0$ και $\nu=0.5$