



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ
ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΑΚΗ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ

ΑΜ: 09412038

Επιβλέπων Καθηγητής: Χ. Κουκουβίνος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2017



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES
MASTER: APPLIED MATHEMATICAL SCIENCES

**CONTROL CHARTS FOR PROCESS LOCATION AND
DISPERSION**

MASTER THESIS

CHRISTOFORAKI EVANGELIA

Supervisor Professor: Koukouvinos Christos,
Professor NTUA

Athens, 2017

ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΑΚΗ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ

Copyright © Ευαγγελία Ι. Χριστοφοράκη

Με επιφύλαξη παντός νομίμου δικαιώματος. All rights reserved.

Περίληψη

Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (ΣΕΔ) είναι μια συλλογή χρήσιμων εργαλείων για την ανίχνευση κάποιας μεταβολής σε μια διεργασία και έχει ευρεία εφαρμογή στον τομέα της βιομηχανίας, της ιατρικής και σε άλλους τομείς όπου παρακολουθείται ο μέσος και η μεταβλητότητα της εκάστοτε διεργασίας. Τα διαγράμματα ελέγχου είναι το πιο χρήσιμο, πιο αποτελεσματικό και πιο συνηθισμένο εργαλείο για την παρακολούθηση των παραμέτρων θέσης και διασποράς μιας διεργασίας.

Στο 1^ο Κεφάλαιο περιγράφονται τα κύρια χαρακτηριστικά του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας, του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών (ΣΕΔ) καθώς και των Διαγραμμάτων Ελέγχου. Επίσης, γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των διαγραμμάτων ελέγχου μεταβλητών, διαγραμμάτων ελέγχου ιδιοτήτων, αλλά και των διαγραμμάτων CUSUM και EWMA.

Στο 2^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια βελτιωμένα διαγράμματα για το εύρος R και την τυπική απόκλιση S που προτάθηκαν από τους Khoo & Lim (2005) και τον Zhang (2014).

Στο 3^ο Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα διαγράμματα ελέγχου μνήμης για την παρακολούθηση της διασποράς μιας διεργασίας. Για τον σκοπό αυτό περιγράφονται τα διαγράμματα CUSUM με χρήση της τεχνικής FIR καθώς και τα εύρωστα διαγράμματα ελέγχου CUSUM για την διασπορά, λαμβάνοντας υπόψη τη χρήση διαφόρων εύρωστων εκτιμητριών.

Στο 4^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια διαγράμματα ελέγχου για τον από κοινού έλεγχο του μέσου και της διασποράς μιας διεργασίας. Τα διαγράμματα τα οποία περιγράφονται είναι το Max – CUSUM και τα διάγραμμα EWMA – SC.

Λέξεις – κλειδιά: ΣΕΔ, Διαγράμματα Ελέγχου, Shewhart, CUSUM, EWMA, Max – CUSUM, EWMA – SC, FIR CUSUM, ARL

Abstract

Statistical process control (SPC) is a collection of useful tools for detecting change in a process and it has wide application in the industrial, the medical and other fields where process mean and process variation are being monitored. Control chart is the most useful, the most effective and the most commonly used tool for monitoring the location and dispersion parameters of a process.

In 1st Chapter the main features of statistical quality control, statistical process control (spc) and control charts are described. Also, we provide a summary of control charts for variables, control charts for attributes, CUSUM and EWMA charts.

In 2nd Chapter improved R control charts by Khoo and Lim (2005), and improved S control charts, proposed by Zhang (2014), are being presented.

In 3rd Chapter we refer to the memory control charts for monitoring the dispersion of a process. For this purpose, we describe improve CUSUM charts using FIR for monitoring, and robust CUSUM control charts for process dispersion, based on the use of some robust estimators.

In 4th Chapter we present some control charts for joint control of the process mean and process dispersion. Control charts which are described are the Max – CUSUM chart and a EWMA control chart for monitoring both location and dispersion.

Key - words: SPC, Control Charts, Shewhart, CUSUM, EWMA, Max – CUSUM, EWMA – SC, FIR CUSUM, ARL

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χρήστο Κουκουβίνο, Καθηγητή του Ε.Μ.Π. και επιβλέποντα της διπλωματικής μου διατριβής για την υποστήριξη και ενθάρρυνση του καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών καθώς και για την καθοδήγησή του για την επιλογή του θέματος και την ολοκλήρωση της όλης εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την υποψήφια διδάκτορα Λάππα Αγγελική για τον χρόνο και την υποστήριξη που μου πρόσφερε μέχρι και το τέλος της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, ιδιαίτερος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τους φίλους μου που με στήριξαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	v
Abstract	vii
Ευχαριστίες.....	ix
Περιεχόμενα	xi
Κατάλογος Συντομογραφιών.....	xv
Λίστα Πινάκων.....	xvii
Λίστα Σχημάτων.....	xix
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή.....	21
1.1 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας.....	21
1.1.1 Ορισμός και Διαστάσεις της ποιότητας.....	21
1.1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (ΣΕΔ).....	24
1.2 Διαγράμματα Ελέγχου.....	28
1.2.1 Βασικές αρχές διαγραμμάτων ελέγχου.....	28
1.2.2 Αναγνώριση μοτίβων	31
1.2.3 Προειδοποιητικά όρια ελέγχου.....	34
1.2.4 Μέγεθος δείγματος και συχνότητα δειγματοληψίας	35
1.2.5 Φάση I και II.....	39
1.2.6 Κανόνες ευαισθητοποίησης για τα διαγράμματα ελέγχου (Run Rules).....	40
1.3 Διαγράμματα Ελέγχου Μεταβλητών.....	42
1.3.1 Εισαγωγή.....	42
1.3.2 \bar{X} και R Διαγράμματα Ελέγχου	42
1.3.3 \bar{X} και S Διαγράμματα Ελέγχου.....	45
1.3.4 Διαγράμματα Ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις	46
1.4 Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων.....	48
1.4.1 Εισαγωγή.....	48
1.4.2 Διαγράμματα Ελέγχου p και np	49
1.4.3 Διαγράμματα Ελέγχου c	51
1.4.4 Διαγράμματα Ελέγχου u	53
1.5 Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου (Cumulative Sum Control Charts- CUSUM) .	55
1.5.1 Εισαγωγή.....	55
1.5.2 Διάγραμμα Tabular CUSUM	55
1.5.3 Τυποποιημένο Διάγραμμα CUSUM.....	56

1.5.4	Διάγραμμα Scale CUSUM	57
1.6	Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη (Exponentially Weighted Moving Average Control Charts)	58
1.6.1	Εισαγωγή και βασικές έννοιες.....	58
1.6.2	Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους (Moving Average Control Charts)	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	Βελτιωμένα R και S Διαγράμματα για τον έλεγχο της διασποράς.....	61
2.1	Βελτιωμένο διάγραμμα R (Khoo & Lim, 2005).....	61
2.1.1	Λεπτομερής περιγραφή της κατανομής, κεντρικής γραμμής και ορίων ελέγχου	61
2.1.2	Απόδοση του διαγράμματος R (ARL) με κώδικα στην R	64
2.1.3	Σύγκριση της απόδοσης του κλασικού διαγράμματος R και του βελτιωμένου διαγράμματος R	66
2.1.4	Αριθμητικό παράδειγμα	69
2.2	Βελτιωμένο διάγραμμα R (Zhang, 2014)	71
2.2.1	Λεπτομερής περιγραφή της κατανομής, κεντρικής γραμμής, ορίων ελέγχου και σταθερών για το βελτιωμένο διάγραμμα R	71
2.2.2	Απόδοση του βελτιωμένου διαγράμματος R (ARL) με χρήση κώδικα στην $R75$	77
2.2.3	Αριθμητικό παράδειγμα	77
2.3	Βελτιωμένο διάγραμμα S	79
2.3.1	Λεπτομερής περιγραφή της κατανομής, κεντρικής γραμμής, ορίων ελέγχου και σταθερών για το βελτιωμένο διάγραμμα S	79
2.3.2	Απόδοση του βελτιωμένου διαγράμματος S	82
2.3.3	Αριθμητικό παράδειγμα	83
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	Διαγράμματα Ελέγχου Μνήμης για τον έλεγχο της διασποράς	87
3.1	Χρήση της FIR για βελτίωση των Διαγραμμάτων CUSUM για παρακολούθηση της διασποράς.....	87
3.1.1	Εισαγωγή.....	87
3.1.2	Σωρευτικό Αθροιστικό Διάγραμμα για την παράμετρο της διασποράς	88
3.1.3	Το προτεινόμενο Διάγραμμα Ελέγχου Συσσωρευτικού Αθροίσματος για την διασπορά	89
3.1.4	Εκτίμηση απόδοσης και σύγκριση	93
3.2	Εύρωστα Διαγράμματα Ελέγχου CUSUM για την διασπορά	103
3.2.1	Εισαγωγή.....	103
3.2.2	Περιγραφή των εκτιμητριών της διασποράς της διαδικασίας	106
3.2.3	Τα προτεινόμενα διαγράμματα CUSUM για την διασπορά.....	113
3.2.4	Εκτίμηση της απόδοσης των διαγραμμάτων $\hat{\theta}$ - CUSUM	115

3.2.5	Συζήτηση για τα αποτελέσματα	116
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Διαγράμματα ελέγχου για τον από κοινού έλεγχο του μέσου και της διασποράς διεργασιών		
4.1	Διάγραμμα Max – CUSUM.....	125
4.1.1	Εισαγωγή	125
4.1.2	Περιγραφή του νέου διαγράμματος.....	127
4.1.3	Κατασκευή του διαγράμματος Max – CUSUM	129
4.1.4	Σύγκριση της απόδοσης του διαγράμματος Max – CUSUM με άλλα διαγράμματα	132
4.1.5	Διαδικασία σχεδίασης του Max – CUSUM	135
4.1.6	Αριθμητικό Παράδειγμα.....	137
4.2	Διάγραμμα EWMA – SC.....	143
4.2.1	Εισαγωγή	143
4.2.2	Περιγραφή του διαγράμματος EWMA – SC.....	144
4.2.3	Σχεδιασμός του διαγράμματος EWMA – SC.....	146
4.2.4	Σύγκριση διαγράμματος EWMA – SC με άλλα διαγράμματα	153
4.2.5	Διαδικασία σχεδίασης του διαγράμματος EWMA – SC	160
4.2.6	Αριθμητικό παράδειγμα	161
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Συμπεράσματα.....		
Παράρτημα.....		169
Βιβλιογραφία.....		171

Κατάλογος Συντομογραφιών

ARL	Μέσο Μήκος Ροής	Average Run Length
CL	Κεντρική γραμμή	Center Line
CUSUM	Σωρευτικά Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου	Cumulative Sum Control Charts
EQL	Υπέρ τετραγωνική απώλεια	Extra Quadratic Loss
EWMA	Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη	Exponentially Weighted Moving Average (Control Charts)
FIR	Γρήγορη αρχική απόκριση	Fast Initial Response
IQR	Ενδοτεταρτημοριακό εύρος	Interquartile range
IRC	Βελτιωμένο διάγραμμα R	Improved R Chart
ISC	Βελτιωμένο διάγραμμα S	Improved S Chart
LCL	Κάτω όριο ελέγχου	Lower Control Limit
LSL	Κάτω όρια προδιαγραφών	Lower Specification Limits
MA	Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους	Moving Average (Control Charts)
MR	Κινούμενο εύρος	Moving Range
OACAP	Εκτός ελέγχου πρόγραμμα δράσης	Out of Control Action Plan
PCI	Δείκτης σύγκρισης αποδόσεων	Performance Comparison Index
RARL	Σχετικό μέσο μήκος ροής	Relative Average Run Length
RE	Σχετική απόδοση	Relative Efficiency
RL	Μήκος ροής	Run Length
SC	Διάγραμμα ημικυκλίου	Semicircle Chart
SDRL	Τυπική απόκλιση του μήκους ροής	Standard Deviation of the Run Length
SPC (ΣΕΔ)	Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών	Statistical Process Control
SV	Κανονικοποιημένες διασπορές	Standardized Variances
USL	Άνω όρια προδιαγραφών	Upper Specification Limits
UCL	Άνω όριο ελέγχου	Upper Control Limit

Λίστα Πινάκων

Πίνακας 2.1. Τιμές των ARL για το βελτιωμένο διάγραμμα R για την ανίχνευση μετατοπίσεων στην διασπορά με $ARL_0=370$	65
Πίνακας 2.2. Τιμές των ARL για το κλασικό άνω και αμφίπλευρο διάγραμμα R	67
Πίνακας 2.3. Τιμές των ARL για το βελτιωμένο άνω και αμφίπλευρο διάγραμμα R	68
Πίνακας 2.4. Προσομοιωμένα δεδομένα	70
Πίνακας 2.5. Τιμές των σταθερών (των UCL, LCL) $D_U^*, D_L^*, D_1^* - D_4^*$ του βελτιωμένου διαγράμματος R (IRC) για $\alpha = 0.0027$	74
Πίνακας 2.6. Τιμές των σταθερών (των UCL, LCL) $D_U^*, D_L^*, D_1^* - D_4^*$ του βελτιωμένου διαγράμματος R (IRC) για $\alpha = 0.005$	75
Πίνακας 2.7. Τιμές των ARL για το διάγραμμα IRC με $ARL_0 = 370$	76
Πίνακας 2.8. Προσομοιωμένα δεδομένα	78
Πίνακας 2.9. Τιμές των LCL, UCL και $B_3^* - B_6^*$ για το ISC για $\alpha = 0.0027$	81
Πίνακας 2.10. Τιμές των LCL, UCL και $B_3^* - B_6^*$ για το ISC για $\alpha = 0.005$	81
Πίνακας 2.11. Τιμές των ARL για το διάγραμμα ISC με $ARL_0 = 370$	83
Πίνακας 2.12. Προσομοιωμένα δεδομένα	84
Πίνακας 3.1. $SDRL$ και Ποσοστιαία σημεία των προτεινόμενων διαγραμμάτων για άνω τάσεις στο σ με $ARL = 200$	96
Πίνακας 3.2. $SDRL$ και Ποσοστιαία σημεία των προτεινόμενων διαγραμμάτων για κάτω τάσεις στο σ με $ARL = 200$	97
Πίνακας 3.3. $EQL, RARLL$ και PCI των προτεινόμενων διαγραμμάτων.....	97
Πίνακας 3.4. Σύγκριση των ARL των προτεινόμενων διαγραμμάτων για θετικές μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση	99
Πίνακας 3.5. Σύγκριση των ARL των προτεινόμενων διαγραμμάτων για αρνητικές μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση.	101
Πίνακας 3.6. SV των εκτιμητριών διασποράς υπό διαφορετικά περιβάλλοντα.	111
Πίνακας 3.7. RE των εκτιμητριών διασποράς υπό διαφορετικά περιβάλλοντα.	112
Πίνακας 3.8. Τιμές του $K_{\hat{\theta}}$ για τα $\hat{\theta}$ - CUSUM υπό την κανονική κατανομή.....	114
Πίνακας 3.9. Τιμές του $H_{\hat{\theta}}$ για τα $\hat{\theta}$ - CUSUM υπό διαφορετικά περιβάλλοντα.	114
Πίνακας 3.10. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ - CUSUM υπό την μη νοθευμένη $N(0, 1)$ με $ARL = 500$	117
Πίνακας 3.11. Τιμές $SDRL$ των $\hat{\theta}$ - CUSUM υπό την μη νοθευμένη $N(0, 1)$ με $ARL = 500$	118
Πίνακας 3.12. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ - CUSUM υπό την νοθευμένου περιβάλλοντος συμμετρικής διασποράς με $ARL = 500$	119
Πίνακας 3.13. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ - CUSUM υπό την νοθευμένου περιβάλλοντος ασύμμετρης διασποράς με $ARL = 500$	120
Πίνακας 3.14. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ - CUSUM υπό νοθευμένου περιβάλλοντος παραμέτρου θέσης με $ARL = 500$	121

Πίνακας 3.15. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ – CUSUM υπό την $G(1, 1)$ με $ARL = 500$	123
Πίνακας 3.16. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ – CUSUM υπό την T_4 με $ARL = 500$	123
Πίνακας 3.17. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ – CUSUM υπό την $Logis(0, 1)$ με $ARL = 500$	124
Πίνακας 4.1. Συνδυασμοί των (k, h) και οι αντίστοιχες τιμές ARL για το διάγραμμα Max – CUSUM με $ARL_0 = 250$	131
Πίνακας 4.2. Τιμές των ARL για τον διάγραμμα Max – CUSUM με $h = 4.051$ και $k = 0.500$	132
Πίνακας 4.3. Επίπεδα μετατόπισης που λαμβάνονται υπόψη για τον μέσο και την τυπική απόκλιση	133
Πίνακας 4.4. Τιμές των ARL του Max – CUSUM και του Omnibus CUSUM για $k = 1, n = 1, a = 0.5$ και $h = 1.279$	134
Πίνακας 4.5. Τιμές ARL για το Max – CUSUM διάγραμμα και το Max διάγραμμα για $n = 4$ και $ARL_0 = 250$	134
Πίνακας 4.6. Τιμές ARL για το Max – CUSUM διάγραμμα και το Max – EWMA διάγραμμα για $ARL_0 = 250$	135
Πίνακας 4.7. Μετρήσεις των διαμέτρων.....	138
Πίνακας 4.8. Οι (λ, L) συνδυασμοί και τα αντίστοιχα ARL για βέλτιστα διαγράμματα EWMA – SC σε μια σταθερή κατάσταση όταν $ARL_0 = 250$ και $n = 5$	149
Πίνακας 4.9. Οι (λ, L) συνδυασμοί και τα αντίστοιχα ARL για βέλτιστα διαγράμματα EWMA – SC σε μια σταθερή κατάσταση όταν $ARL_0 = 370$ και $n = 5$	150
Πίνακας 4.10. Οι (λ, L) συνδυασμοί και τα αντίστοιχα ARL για βέλτιστα διαγράμματα EWMA – SC σε μια σταθερή κατάσταση όταν $ARL_0 = 500$ και $n = 5$	151
Πίνακας 4.11. Οι συνδυασμοί (λ, L) και τα αντίστοιχα ARL για το βέλτιστο διάγραμμα EWMA – SC σε μια αρχική κατάσταση και $n = 5$	152
Πίνακας 4.12. Οι συνδυασμοί (λ, L) για το διάγραμμα EWMA – SC σε μια σταθερή κατάσταση όταν $n = 5$	153
Πίνακας 4.13. Βέλτιστες τιμές ARL του διαγράμματος EWMA – SC και του συνδυασμού των διαγραμμάτων \bar{X} και S όταν $n = 5$ και $ARL_0 = 250$	155
Πίνακας 4.14. Οι βέλτιστες τιμές παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στα διαγράμματα EWMA \bar{X} και EWMA $\ln S^2$ όταν $ARL_0 = 500$ και $n = 5$	157
Πίνακας 4.15. Οι βέλτιστες τιμές ARL των διαγραμμάτων EWMA – SC και του συνδυασμού των δυο διαγραμμάτων EWMA με $ARL_0 = 250$ και $n = 5$	158
Πίνακας 4.16. Τιμές ARL του διαγράμματος EWMA – SC και τον συνδυασμό των δυο διαγραμμάτων EWMA με $n = 5$ και $ARL_0 = 250$	159

Λίστα Σχημάτων

Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου	28
Σχήμα 1.2. Κυκλικό Μοτίβο	31
Σχήμα 1.3. Μικτό Μοτίβο	31
Σχήμα 1.4. Μοτίβο άλματος	32
Σχήμα 1.5. Μοτίβο τάσης	32
Σχήμα 1.6. Μοτίβο έλλειψης μεταβλητότητας.....	33
Σχήμα 1.7. Διάγραμμα ελέγχου με προειδοποιητικά όρια και ζώνες A, B και C. 35	
Σχήμα 1.8. Χαρακτηριστική καμπύλη \bar{X} - διαγράμματος.....	37
Σχήμα 1.9. Χαρακτηριστικές καμπύλες για το \bar{X} – διάγραμμα	38
Σχήμα 1.10. Παράδειγμα Western Electric Rules.....	41
Σχήμα 2.1. Το βελτιωμένο διάγραμμα R_j των δεδομένων του παραδείγματος....	71
Σχήμα 2.2. Διάγραμμα <i>IRC</i>	78
Σχήμα 2.3. Διάγραμμα <i>ISC</i>	85
Σχήμα 3.1. Γραφικές παραστάσεις των <i>ARL</i> των προτεινόμενων διαγραμμάτων από τα δεδομένα του Πίνακα 3.4 για ανοδικές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης.....	100
Σχήμα 3.2. Γραφικές παραστάσεις των <i>ARL</i> των προτεινόμενων διαγραμμάτων από τα δεδομένα του Πίνακα 3.5 για καθοδικές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης.....	102
Σχήμα 4.1. Το διάγραμμα Max – CUSUM.....	140
Σχήμα 4.2. Το διάγραμμα Max – CUSUM.....	140
Σχήμα 4.3. Το διάγραμμα Max - CUSUM	141
Σχήμα 4.4. Το διάγραμμα Max – CUSUM.....	142
Σχήμα 4.5. Το διάγραμμα Max - CUSUM	142
Σχήμα 4.6. Το 1 ^ο διάγραμμα EWMA – SC.	162
Σχήμα 4.7. Το 2 ^ο διάγραμμα EWMA – SC.	163
Σχήμα 4.8. Το 3 ^ο διάγραμμα EWMA – SC.	164
Σχήμα 4.9. Το 4 ^ο διάγραμμα EWMA – SC	164

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

1.1.1 Ορισμός και Διαστάσεις της ποιότητας

Η ποιότητα είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες λήψης απόφασης των καταναλωτών για την επιλογή μεταξύ των ανταγωνιστικών προϊόντων και υπηρεσιών. Το φαινόμενο αυτό είναι ευρύτατο, ανεξάρτητα από το αν ο καταναλωτής είναι ένα άτομο, ένας βιομηχανικός οργανισμός, ένα κατάστημα λιανικής, μια τράπεζα ή ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή ένα πρόγραμμα στρατιωτικής άμυνας.

Κατά συνέπεια, η κατανόηση και η βελτίωση της ποιότητας είναι βασικοί παράγοντες που οδηγούν στην επιτυχία, ανάπτυξη και ενισχυμένη ανταγωνιστικότητα των επιχειρήσεων. Υπάρχει σημαντική απόδοση των επενδύσεων από τη βελτίωση της ποιότητας και από την επιτυχημένη εφαρμογή της ποιότητας ως αναπόσπαστο μέρος της συνολικής επιχειρηματικής στρατηγικής.

Σημαντικό ρόλο σε αυτή την προσπάθεια ελέγχου των παραγωγικών διεργασιών με σκοπό την βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων έχει ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (*Statistical Quality Control*). Ένας από τους βασικούς στόχους του είναι η έγκαιρη ανακάλυψη των μη συμμορφούμενων με τις προδιαγραφές παραγόμενων προϊόντων η οποία σηματοδοτεί τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για την απομάκρυνση των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις, συμβάλλοντας έτσι στη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων.

Η ποιότητα ενός προϊόντος μπορεί να περιγραφεί και να εκτιμηθεί με διάφορους τρόπους. Είναι πολύ σημαντικό να διαχωριστούν αυτές οι διαφορετικές διαστάσεις της ποιότητας. Παρακάτω συνοψίζονται οι 8 διαστάσεις της ποιότητας:

1. **Απόδοση**

Έχει να κάνει με το αν το προϊόν κάνει για τη δουλειά που προορίζεται. Οι πιθανοί πελάτες συνήθως αξιολογούν ένα προϊόν για να προσδιορίσουν αν εκτελεί κάποιες συγκεκριμένες λειτουργίες και πόσο καλά.

2. **Αξιοπιστία**

Αφορά τη συχνότητα επισκευής ενός προϊόντος. Τα σύνθετα προϊόντα, όπως αυτοκίνητα ή αεροπλάνα, συνήθως απαιτούν κάποια επισκευή καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής τους.

3. **Διάρκεια**

Είναι η πραγματική διάρκεια ζωής του προϊόντος. Προφανώς, οι πελάτες επιθυμούν προϊόντα που λειτουργούν ικανοποιητικά για μεγάλο χρονικό διάστημα.

4. **Επισκευή**

Υπάρχουν βιομηχανίες στις οποίες η άποψη του πελάτη για την ποιότητα επηρεάζεται άμεσα από το πόσο γρήγορα και οικονομικά επιτυγχάνεται μια επισκευή ή συνήθης δραστηριότητα συντήρησης.

5. **Αισθητική**

Αναφέρεται στην οπτική ελκυστικότητα του προϊόντος, λαμβάνοντας υπόψη παράγοντες όπως στυλ, χρώμα, σχήμα, εναλλακτικές συσκευασίας, χαρακτηριστικά αφής και άλλων αισθητηριακών χαρακτηριστικών.

6. **Δυνατότητες**

Είναι σύνηθες από τους πελάτες να συνδέουν την υψηλή ποιότητα ενός προϊόντος με τα πρόσθετα χαρακτηριστικά, δηλαδή αν διαθέτουν χαρακτηριστικά πέραν των βασικών.

7. Εκλαμβανόμενη ποιότητα

Έχει να κάνει με τη φήμη της επιχείρησης ή του προϊόντος. Σε πολλές περιπτώσεις, οι πελάτες βασίζονται στην φήμη μιας εταιρίας από παλαιότερα προϊόντα της. Η φήμη αυτή επηρεάζεται άμεσα από αποτυχίες κάποιου προϊόντος που είναι εμφανείς στο ευρύ κοινό ή που απαιτεί την ανάκληση κάποιου προϊόντος, καθώς και από την αντιμετώπιση του πελάτη σε περίπτωση που αναφερθεί κάποιο πρόβλημα.

8. Συμμόρφωση στις προδιαγραφές

Αναφέρεται στο κατά πόσο το προϊόν κατασκευάζεται όπως προοριζόταν από τον κατασκευαστή. Συνήθως, θεωρούμε ένα προϊόν υψηλής ποιότητας όταν ανταποκρίνεται ακριβώς στις απαιτήσεις που τίθενται σε αυτό.

Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα, η ποιότητα είναι μια πολύπλευρη έννοια και δεν είναι πάντα εύκολο να δοθεί μια απλή απάντηση στην ερώτηση του τι είναι ποιότητα.

Ο παραδοσιακός ορισμός της ποιότητας βασίζεται στην άποψη ότι τα προϊόντα και οι υπηρεσίες πρέπει να πληρούν τις απαιτήσεις αυτών που τα χρησιμοποιούν. Σύμφωνα με τον παραδοσιακό ορισμό, ποιότητα σημαίνει *καταλληλότητα για χρήση*.

Στα πλαίσια του παραδοσιακού ορισμού για την ποιότητα, υπάρχουν δυο βασικές απόψεις: ποιότητα σχεδιασμού και ποιότητα συμμόρφωσης. Όλα τα προϊόντα και οι υπηρεσίες παράγονται σε διάφορα επίπεδα και βαθμό ποιότητας. Αυτές οι διαφορές στο βαθμό και στα επίπεδα ποιότητας είναι προμελετημένες και ορίζουν την ποιότητα σχεδιασμού. Για παράδειγμα, όλα τα αυτοκίνητα έχουν ως βασικό σκοπό να παρέχουν ασφαλή μεταφορά των πελατών, όμως διαφέρουν στο μέγεθος, την εμφάνιση και τη λειτουργικότητα. Αυτές οι διαφορές είναι το αποτέλεσμα προμελετημένων χαρακτηριστικών που έχουν σχεδιαστεί, τα οποία περιλαμβάνουν διαφορετικά είδη υλικών που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή εξαρτημάτων ή εξοπλισμού.

Η ποιότητα συμμόρφωσης είναι το πόσο καλά συμμορφώνεται το προϊόν στις προδιαγραφές που απαιτούνται από τον σχεδιασμό και επηρεάζεται από ένα μεγάλο αριθμό παραγόντων όπως την επιλογή της διαδικασίας και το είδος της ασφάλειας που θα χρησιμοποιηθεί. Δυστυχώς, ο παραδοσιακός ορισμός της ποιότητας έχει

συσχετιστεί περισσότερο με την άποψη της συμμόρφωσης παρά του σχεδιασμού, γεγονός που έχει οδηγήσει σε πολύ λιγότερο ενδιαφέρον για τις ανάγκες του καταναλωτή, αγνοώντας αν το τελικό προϊόν είναι πραγματικά κατάλληλο για χρήση από τον καταναλωτή.

Σύμφωνα με έναν μοντέρνο ορισμό, η ποιότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη της διασποράς. Ο ορισμός αυτός υποδηλώνει ότι αν μειωθεί η διασπορά στα σημαντικά χαρακτηριστικά ενός προϊόντος, αυξάνεται η ποιότητα του.

1.1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (ΣΕΔ)

Εξετάζοντας περισσότερο την πρακτική πλευρά της ποιότητας, προκειμένου να κατασκευαστεί ένα προϊόν που θα ικανοποιεί συνεχώς τις ανάγκες και προσδοκίες των καταναλωτών, θα πρέπει να παράγεται κάτω από σταθερές και επαναλαμβανόμενες διεργασίες. Συγκεκριμένα, οι παραγωγικές διεργασίες θα πρέπει να έχουν μικρή μεταβλητότητα γύρω από τις ονομαστικές τους διαστάσεις ή τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει το τελικό προϊόν. Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (ΣΕΔ) (*Statistical Process Control – SPC*) είναι μια συλλογή εργαλείων που είναι χρήσιμα για την επίτευξη της σταθερότητας μιας διεργασίας, περιορίζοντας την μεταβλητότητά της και παρέχοντας τη δυνατότητα προσδιορισμού της ικανότητας (*capability*) μιας διεργασίας να λειτουργεί σύμφωνα με τις απαιτούμενες προδιαγραφές.

Ο ΣΕΔ μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε διεργασία. Τα επτά κυριότερα εργαλεία που χρησιμοποιεί είναι τα ακόλουθα (cf. Montgomery, 2013):

1. Ιστόγραμμα (*Histogram*)
2. Διάγραμμα Αιτίας - Αποτελέσματος (*Cause-and-Effect diagram*)
3. Διάγραμμα Pareto
4. Φύλλα Ελέγχου (*Check Sheets*)
5. Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων (*Defect concentration diagram*)
6. Διάγραμμα συσχετισμού (*Scatter plot*)

7. Διάγραμμα ελέγχου (*Control chart*).

Τα διαγράμματα ελέγχου είναι το πιο χρήσιμο, πιο αποτελεσματικό και πιο συνηθισμένο εργαλείο μεταξύ των άλλων εργαλείων για την παρακολούθηση σε πραγματικό χρόνο της ποιότητας παραγωγής και της πορείας μιας παραγωγικής διεργασίας. Στις μέρες μας, υπάρχουν γενικώς αποδεκτοί κανόνες για τον τρόπο που θα χρησιμοποιηθούν τα διαγράμματα ελέγχου στις εταιρίες, σε αντίθεση με το παρελθόν που δεν υπήρχαν καθολικά αποδεκτοί κανόνες για τη χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου.

Σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά είναι σχεδιασμένη και το πόσο καλά επιβλέπεται και συντηρείται, θα υπάρχει πάντα μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας που θα τη συνοδεύει. Δηλαδή, όσο καλά ρυθμισμένα και να είναι τα μηχανήματα και όσο ικανοί και να είναι οι χειριστές των μηχανημάτων ή όσο ικανοποιητική και αν είναι η πρώτη ύλη, ποτέ δυο παραγόμενα προϊόντα δεν θα είναι ίδια. Αυτή η φυσική μεταβλητότητα είναι το αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών μικρών αιτιών (δεν μπορούν να αποδοθούν σε ελέγξιμους παράγοντες), που καλούνται **συνήθεις ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας** (*common or chance cause of variation*). Μια διεργασία, η οποία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας λέγεται **εντός (στατιστικού) ελέγχου διεργασία** (*in (statistical) process control*), ή ότι λειτουργεί σε **ευσταθή κατάσταση** (*stable state*).

Όμως, σε μια διεργασία μπορεί να εμφανίζονται περιστασιακά και άλλες μορφές μεταβλητότητας, οι οποίες δεν οφείλονται σε τυχαίες αιτίες αλλά αφορούν στη συστηματική αλλαγή του επιπέδου κάποιων παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Αυτή η μορφή μεταβλητότητας οφείλεται συνήθως σε λανθασμένη ρύθμιση μηχανών, λάθη χειριστών ή ελαττωματική πρώτη ύλη. Η μεταβλητότητα είναι μεγαλύτερη σε μέγεθος της φυσικής μεταβλητότητας και η παρουσία της οδηγεί συνήθως σε μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διεργασίας. Η προαναφερθείσα μεταβλητότητα καλείται **ειδική μεταβλητότητα** και οι αιτίες που οδηγούν σε αυτή ονομάζονται **ειδικές ή προσδιορισμένες αιτίες μεταβλητότητας** (*special or assignable causes of variation*). Μια διεργασία η οποία λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας λέγεται **εκτός ελέγχου διεργασία** (*out of (statistical) control process*) ή ότι λειτουργεί σε **ασταθή κατάσταση** (*unstable state*).

Με την παραγωγή ενός προϊόντος συνδέεται άμεσα η έννοια των **ορίων προδιαγραφών** (*specification limits*) των ποιοτικών χαρακτηριστικών (*quality characteristics*) του προϊόντος τα οποία καθορίζονται στη φάση σχεδιασμού. Αυτά είναι τα **άνω και κάτω όρια προδιαγραφών** (*upper and lower specification limits, USL και LSL*) και εντός αυτών των ορίων πρέπει να βρίσκονται οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού για κάθε παραγόμενο προϊόν προκειμένου να είναι ποιοτικά αποδεκτά. Επίσης, στη φάση σχεδιασμού του προϊόντος ορίζεται μια επιθυμητή τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό που ονομάζεται **τιμή στόχος** (*target value*) που είναι συνήθως το μέσο του διαστήματος [*LSL, USL*]. Κάτω από συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας, η πλειοψηφία των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού βρίσκεται εντός των ορίων προδιαγραφών, ενώ υπό συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας δεν ισχύει το ίδιο.

Το κύριο αντικείμενο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η έγκαιρη ανίχνευση της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία έτσι ώστε να προχωρήσουμε σε έρευνα και στις απαραίτητες διορθωτικές ενέργειες προτού κατασκευαστούν αρκετά προϊόντα που δεν πληρούν τις προδιαγραφές. Όπως, αναφέρθηκε και προηγουμένως, τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται ευρέως για την ανίχνευση εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία σε πραγματικό χρόνο (*on-line-process-monitoring*).

Για να είναι αποτελεσματικός ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών θα πρέπει να συνοδεύεται από ένα **εκτός ελέγχου πρόγραμμα δράσης** (*out-of-control action plan, OCAP*) το οποίο θα πρέπει να ενεργοποιείται κάθε φορά που το διάγραμμα ελέγχου παρέχει ενδείξεις εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας στη διεργασία. Το *OCAP* περιγράφει την ακολουθία των ενεργειών που πρέπει να γίνουν με σκοπό την εξάλειψη των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας και ο σχεδιασμός του απαιτεί τη συνεργασία ατόμων από διάφορα τμήματα της επιχείρησης.

Σημαντικό είναι επίσης να ορίσουμε κάποιες έννοιες όπως **μη συμμορφούμενο ή ελαττωματικό προϊόν** (*nonconforming or defective product*) και **αριθμός ελαττωμάτων ή ατελειών** (*defects or nonconformities*) ενός προϊόντος προκειμένου να αποφύγουμε τη συσχέτιση των διαγραμμάτων ελέγχου μόνο με την περίπτωση που οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού του προϊόντος περιγράφονται από μια

συνεχή τυχαία μεταβλητή (*variable*), δηλαδή από μια μεταβλητή που παίρνει τιμές σε μια συνεχή κλίμακα.

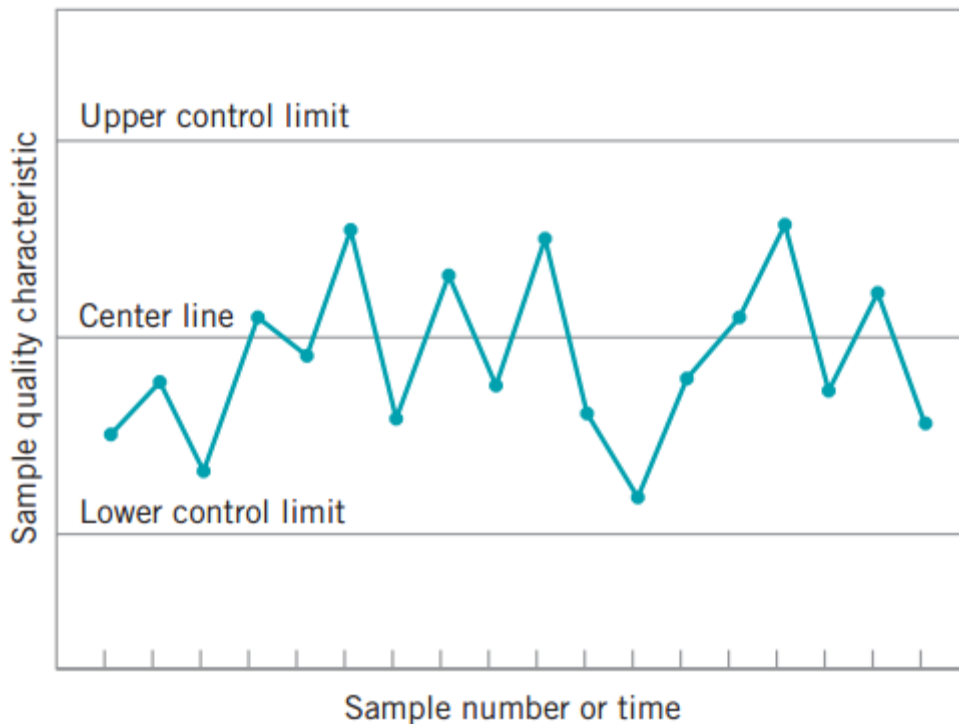
Με τον όρο μη συμμορφούμενο ή ελαττωματικό προϊόν ονομάζουμε το προϊόν για το οποίο τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του έχει τιμή η οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών, δηλαδή παρουσιάζει τουλάχιστον ένα ελάττωμα ή ατέλεια. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις ανάλογα με τον αριθμό και τη σοβαρότητα των ελαττωμάτων που παρουσιάζει ένα προϊόν μπορεί να χαρακτηριστεί συμμορφούμενο ή μη ελαττωματικό προϊόν και να προωθηθεί προς πώληση στην αγορά. Για παράδειγμα, ένα ρούχο μπορεί να χαρακτηριστεί ελαττωματικό εάν το τελικό προϊόν έχει ελαττώματα στις ραφές, ή ελαττώματα στο χρώμα, ή ελαττώματα στο ύφασμα, κτλ. Όμως αρκετές φορές το ρούχο δεν θα χαρακτηριστεί (πρακτικά) ελαττωματικό αν παρουσιάζει μόνο ένα από τα παραπάνω ελαττώματα, ή ακόμα και αν παρουσιάζει περισσότερα ελαττώματα αλλά σε μικρότερο βαθμό. Σε τέτοιες περιπτώσεις κατασκευάζονται διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων ή ακόμα και για τον αριθμό των ελαττωμάτων ενός προϊόντος που ως ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός προϊόντος δεν μετρώνται σε μια συνεχή κλίμακα αλλά παίρνουν αριθμήσιμο πλήθος τιμών και περιγράφονται με **διακριτές τυχαίες μεταβλητές** (*attributes*). Τέτοια διαγράμματα χρησιμοποιούνται και στην περίπτωση που η προς πώληση μονάδα είναι μια συσκευασία η οποία περιέχει έναν αριθμό προϊόντων και η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ελαττωματική ή μη, βάσει του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων που περιέχει.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, στα διαγράμματα ελέγχου μπορούμε να διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που περιγράφει το ποιοτικό χαρακτηριστικό του προϊόντος:

- Διαγράμματα ελέγχου για συνεχή χαρακτηριστικά – μεταβλητές (*control charts for variables*)
- Διαγράμματα ελέγχου για διακριτά χαρακτηριστικά – ιδιότητες (*control charts for attributes*)

1.2 Διαγράμματα Ελέγχου

1.2.1 Βασικές αρχές διαγραμμάτων ελέγχου



Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου.

Το διάγραμμα ελέγχου είναι μια γραφική απεικόνιση ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού που μετρήθηκε ή εκτιμήθηκε από ένα δείγμα σε συνάρτηση με τον αριθμό δείγματος ή τον χρόνο. Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Το διάγραμμα ελέγχου περιλαμβάνει μια **κεντρική γραμμή** (*center line - CL*) που αναπαριστά τη μέση τιμή (*average value*) του ποιοτικού χαρακτηριστικού που αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου κατάσταση. Στο διάγραμμα περιέχονται και δύο άλλες οριζόντιες γραμμές, το άνω όριο ελέγχου (*upper control limit - UCL*) και κάτω όριο ελέγχου (*lower control limit - LCL*). Τα όρια ελέγχου επιλέγονται έτσι ώστε αν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, όλα σχεδόν τα σημεία του δείγματος να βρίσκονται μεταξύ αυτών των γραμμών. Όσο τα σημεία κατανομούνται εντός των ορίων ελέγχου, η διαδικασία θεωρείται ότι είναι υπό έλεγχο και δεν απαιτείται καμία ενέργεια. Όμως η παρουσία κάποιου σημείου εκτός των ορίων ελέγχου, ερμηνεύεται ως απόδειξη ότι

η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου και απαιτείται έρευνα και διορθωτικές ενέργειες για να βρεθούν και να εξαλειφθούν οι ειδικές αιτίες ή οι αιτίες που προκαλούν αυτή τη συμπεριφορά. Συνήθως, τα σημεία του δείγματος στο διάγραμμα ελέγχου συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα για να απεικονίζεται ευκολότερα το πώς εξελίσσεται η ακολουθία των σημείων στο χρόνο.

Όμως, ακόμη και αν όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο, τότε αυτό θα μπορούσε να είναι μια ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Για παράδειγμα, αν 18 από τα 20 τελευταία σημεία ενός διαγράμματος βρίσκονται πάνω από την κεντρική γραμμή αλλά κάτω από το άνω όριο ελέγχου και μόνο δυο από αυτά βρίσκονται κάτω από την κεντρική γραμμή αλλά πάνω από το κάτω όριο ελέγχου, θα υποψιαζόμασταν ότι κάτι πάει στραβά στη διαδικασία. Αν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, όλα τα σημεία του δείγματος θα πρέπει να κατανέμονται εντός των ορίων ελέγχου με εντελώς τυχαίο τρόπο. Μπορούν να εφαρμοστούν στα διαγράμματα ελέγχου μέθοδοι εύρεσης μη τυχαίων ακολουθιών προκειμένου να εντοπιστούν περιπτώσεις διαδικασιών εκτός ελέγχου. Συνήθως, υπάρχει κάποιος λόγος που εμφανίζεται μια συγκεκριμένη μη τυχαία ακολουθία σημείων σε ένα διάγραμμα ελέγχου και η απόδοση της διαδικασίας μπορεί να βελτιωθεί αν αυτός ο λόγος εντοπιστεί και διορθωθεί.

Στη συνέχεια, θα δοθεί ένα γενικό μοντέλο για το διάγραμμα ελέγχου, το *μοντέλο ορίων σίγμα (sigma limits model)*. Το μοντέλο ορίων σίγμα προτάθηκε από τον Shewhart (1931) και γι' αυτό καλείται διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart και δίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_W + L\sigma_W \\ \text{Center Line} &= \mu_W \\ LCL &= \mu_W - L\sigma_W, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

όπου τα μ_W και σ_W συμβολίζουν τη μέση τιμή και τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, της στατιστικής συνάρτησης W που εκτιμά το ποιοτικό χαρακτηριστικό ενός προϊόντος που θέλουμε να παρακολουθήσουμε. Ο αριθμός L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Συνήθως, το $L = 3$, οπότε και μιλάμε για την κατασκευή διαγράμματος ελέγχου 3σ ορίων. Για μεγάλες τιμές του L , μεγαλώνει η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική

γραμμή και έτσι μειώνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I, δηλαδή μειώνεται ο κίνδυνος να βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εντός ελέγχου. Ταυτόχρονα όμως, αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, δηλαδή τα σημεία να φαίνονται εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εκτός. Για μικρές τιμές του L , έχουμε τα αντίθετα αποτελέσματα, δηλαδή αυξάνεται το σφάλμα τύπου I και μειώνεται το σφάλμα τύπου II.

Για 3σ όρια ελέγχου και κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W , όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η πιθανότητα να πάρει η W τιμή εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με $\alpha = 0.0027$. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι ένας εσφαλμένος συναγερμός συμβαίνει 27 φορές ανά 10,000 σημεία του διαγράμματος ελέγχου.

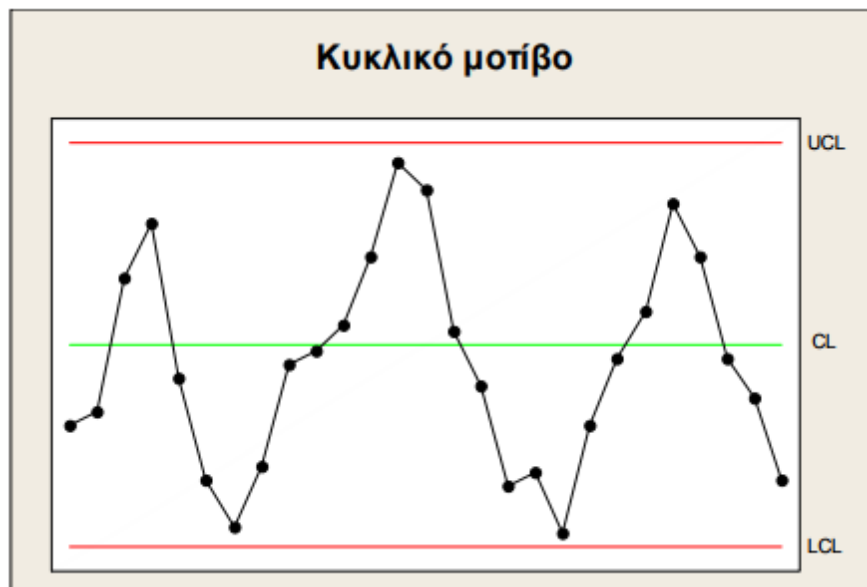
Επιπλέον, για την κατασκευή ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας (*probability limits model*). Για κανονική ή προσεγγιστικά κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W , η κεντρική γραμμή και τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για το μοντέλο ορίων πιθανότητας α είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_W + z_{\alpha/2} \sigma_W = w_{\alpha/2} \\ \text{Center Line} &= \mu_W \\ LCL &= \mu_W - z_{\alpha/2} \sigma_W = w_{1-(\alpha/2)}, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

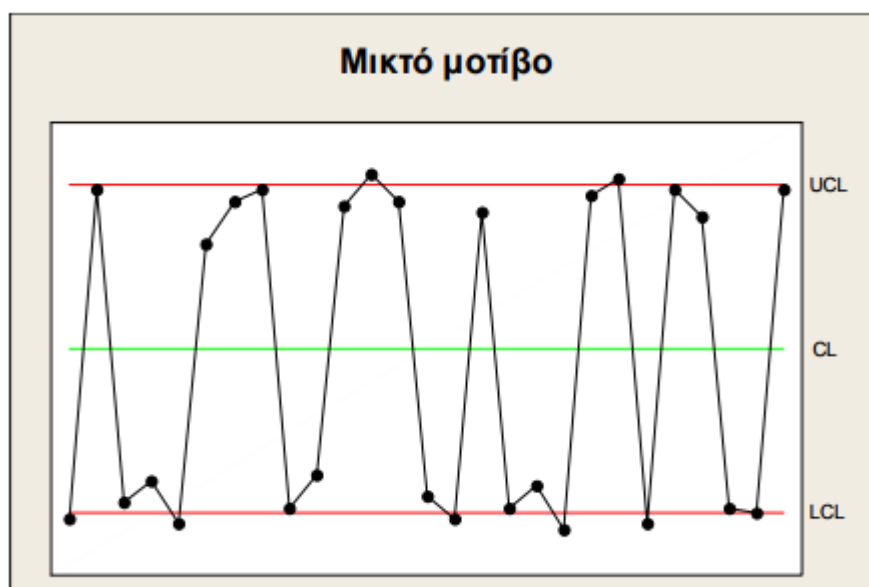
όπου το w_α είναι το άνω ποσοστιαίο σημείο της W . Για εντός ελέγχου διεργασίες (με κανονική κατανομή) έχουμε ότι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού σε κάθε πλευρά των ορίων ελέγχου είναι ίση με $\alpha/2$ (όπου α είναι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού). Για $\alpha/2 = 0.001$ (δηλαδή μοντέλο με όρια πιθανότητας 0.002), ισχύει ότι $z_{\alpha/2} = 3.09024$. Στην περίπτωση που η κατανομή της W δεν είναι κανονική μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής W .

1.2.2 Αναγνώριση μοτίβων

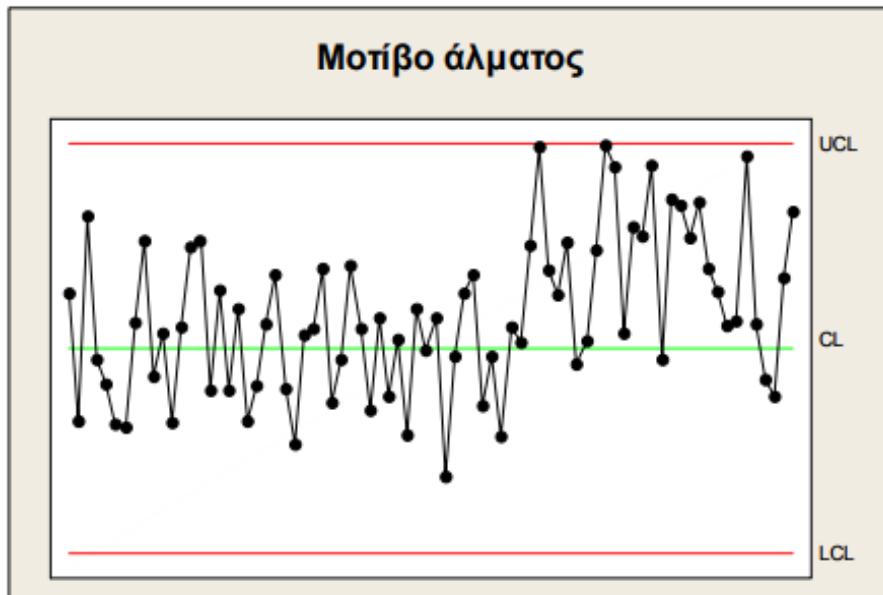
Οι βασικότερες μορφές **προτύπων** ή **μοτίβων** (*patterns*) μη τυχαίου τρόπου συμπεριφοράς μιας ακολουθίας σημείων είναι τα κυκλικά μοτίβα (*cycles*), τα μικτά (*mixtures*), αλμάτων (*shifts in the process level*), τάσεων (*trends*) και τα μοτίβα έλλειψης μεταβλητότητας (*stratification*) τα οποία περιγράφονται οπτικά στα παρακάτω σχήματα.



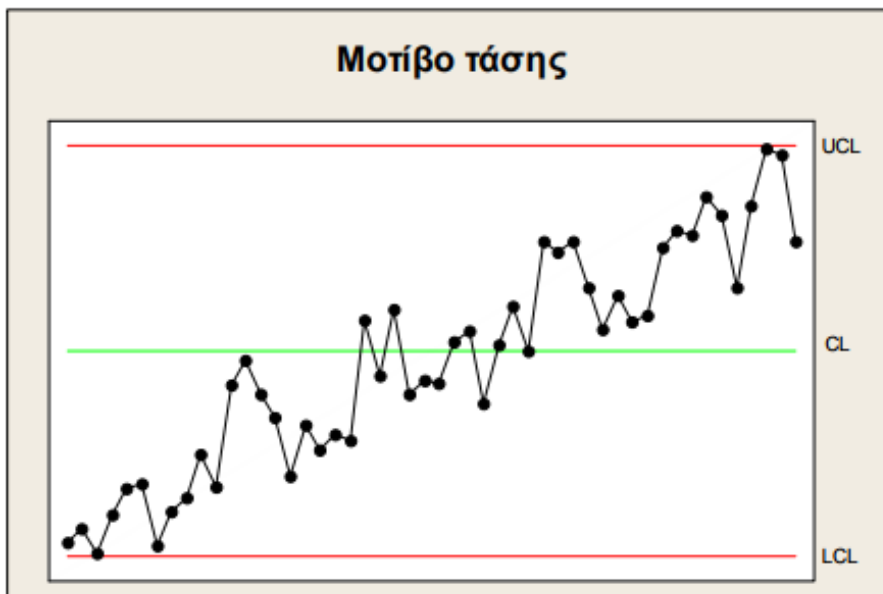
Σχήμα 1.2. Κυκλικό Μοτίβο.



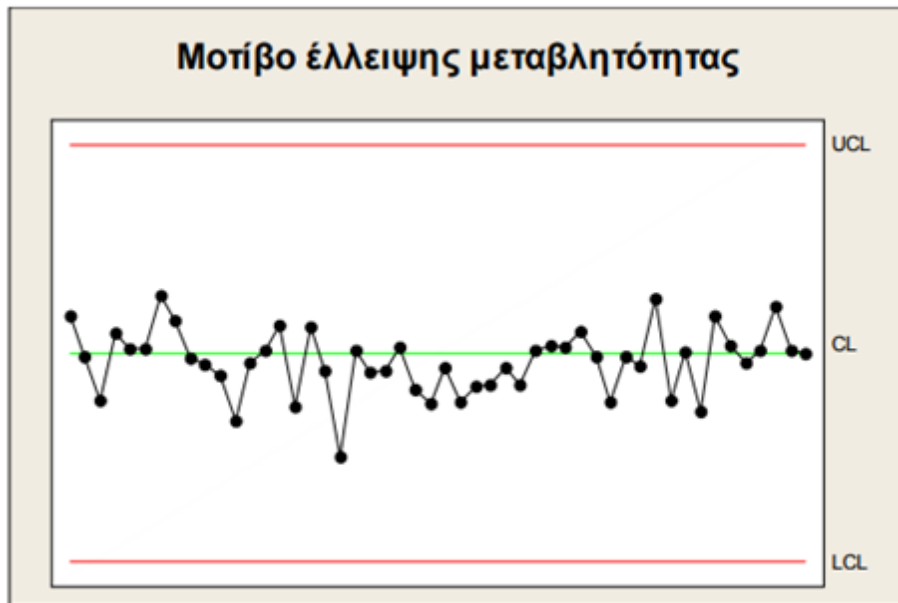
Σχήμα 1.3. Μικτό Μοτίβο.



Σχήμα 1.4. Μοτίβο άλματος.



Σχήμα 1.5. Μοτίβο τάσης.



Σχήμα 1.6. Μοτίβο έλλειψης μεταβλητότητας.

Στα κυκλικά πρότυπα εμφανίζεται μια περιοδικότητα στη διάταξη των σημείων με αποτέλεσμα να σχηματίζονται επαναλαμβανόμενοι κύκλοι. Πιθανές αιτίες είναι οι περιοδικές διακυμάνσεις των περιβαλλοντικών συνθηκών και συνθηκών παραγωγής όπως η θερμοκρασία, η ηλεκτρική τάση κ.λπ.

Τα μικτά πρότυπα φαίνεται να προκύπτουν από δυο διαφορετικές κατανομές του χαρακτηριστικού X μεταξύ των οποίων παλινδρομεί η διεργασία.

Τα πρότυπα αλμάτων οφείλονται συνήθως σε νέους εργαζόμενους, νέες μεθόδους παραγωγής, νέες μηχανές κτλ.

Τα πρότυπα τάσεων προκαλούνται συνήθως από παράγοντες όπως η σταδιακή φθορά εργαλείων, η κόπωση των εργαζομένων, η παρουσία επιθεωρητή κ.λπ.

Στα πρότυπα έλλειψης μεταβλητότητας, τα σημεία του διαγράμματος κινούνται με τεχνητό τρόπο γύρω από την κεντρική γραμμή χωρίς να υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη μεταβλητότητα. Οφείλονται συνήθως σε εσφαλμένη σχεδίαση των ορίων ελέγχου.

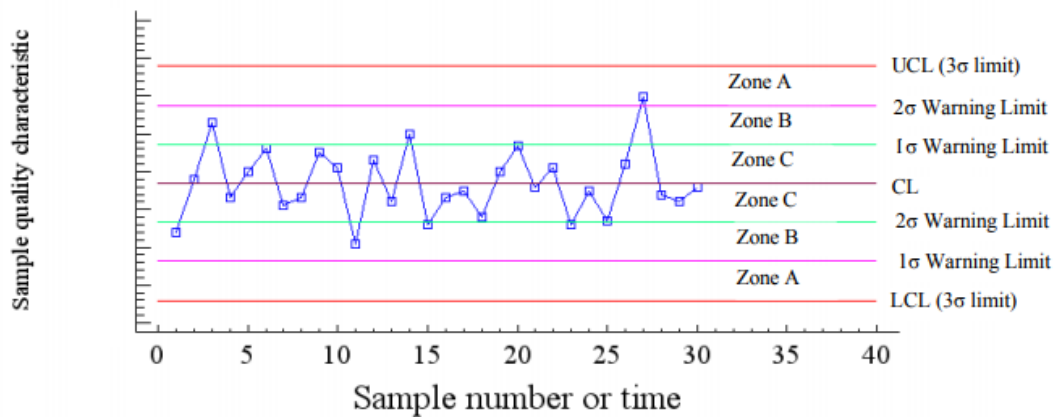
1.2.3 Προειδοποιητικά όρια ελέγχου

Συχνά χρησιμοποιούνται 2 ζεύγη ορίων στα διαγράμματα ελέγχου όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Τα εξωτερικά, όπως αναφέρονται 3σ όρια ελέγχου είναι τα συνηθισμένα όρια δράσης, όπου όταν ένα σημείο βρεθεί εκτός αυτών, απαιτείται έρευνα για την αιτία του προβλήματος και διορθωτικές ενέργειες για την αποκατάστασή του.

Τα **εξωτερικά προειδοποιητικά όρια** (*outer warning limits*) σχεδιάζονται σε απόσταση 2σ από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1). Αν ένα ή περισσότερα σημεία βρεθούν μεταξύ των εξωτερικών προειδοποιητικών ορίων και των ορίων ελέγχου (προς τη μια πλευρά της κεντρικής γραμμής) ή πολύ κοντά στα προειδοποιητικά όρια, υπάρχουν ενδείξεις ότι η διεργασία ίσως δεν λειτουργεί σωστά. Μια πιθανή ενέργεια που μπορεί να πραγματοποιηθεί σε αυτή την περίπτωση είναι η αύξηση της συχνότητας ή του μεγέθους των δειγμάτων έτσι ώστε να λαμβάνονται περισσότερες πληροφορίες για την παραγωγική διεργασία (*adaptive or variable sampling interval or variable sample size process*).

Επίσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα **εσωτερικά προειδοποιητικά όρια** (*inner warning limits*) τα οποία σχεδιάζονται σε απόσταση 1σ από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (Σχήμα 1.1). Τα όρια ελέγχου μαζί με τα προειδοποιητικά όρια (εσωτερικά και εξωτερικά) χωρίζουν το διάγραμμα σε τρεις ζώνες.

Η χρήση των προειδοποιητικών ορίων αυξάνει την **ευαισθησία** (*sensitivity*) του διαγράμματος ελέγχου, καθώς δίνουν τη δυνατότητα στα διαγράμματα ελέγχου να εντοπίσουν γρηγορότερα μια μετατόπιση στη διεργασία. Σημαντικά μειονεκτήματα της χρήσης των προειδοποιητικών ορίων είναι ότι αυξάνουν την πιθανότητα εσφαλμένων σημάτων και επίσης μπορεί να προκαλέσουν σύγχυση στο προσωπικό.



Σχήμα 1.7. Διάγραμμα ελέγχου με προειδοποιητικά όρια και ζώνες A, B και C.

1.2.4 Μέγεθος δείγματος και συχνότητα δειγματοληψίας

Κατά τον σχεδιασμό ενός διαγράμματος ελέγχου, πρέπει να καθοριστεί τόσο το μέγεθος του δείγματος όσο και η συχνότητα της δειγματοληψίας. Γενικά, μεγαλύτερα δείγματα ανιχνεύουν ευκολότερα μικρές μετατοπίσεις στη διεργασία. Χρησιμοποιώντας 3σ όρια ελέγχου και υποθέτοντας ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου και η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού X είναι κανονική, το διάγραμμα ελέγχου δίνει (εσφαλμένη) ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου (σφάλμα τύπου I) με πιθανότητα $\alpha = 0.0027$, ανεξαρτήτως του μεγέθους του δείγματος. Δηλαδή, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και στο διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή απεικονίζεται ο δειγματικός μέσος \bar{X} , η πιθανότητα α (σφάλμα τύπου I) είναι ίση με:

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\bar{X} < \mu - 3\sigma_{\bar{X}} \quad \text{ή} \quad \bar{X} > \mu + 3\sigma_{\bar{X}} \mid X \sim N(\mu, \sigma^2)) \\
&= P(\bar{X} < \mu - 3\sigma_{\bar{X}}) + P(\bar{X} > \mu + 3\sigma_{\bar{X}}) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{\mu - 3\sigma_{\bar{X}} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} > \frac{\mu + 3\sigma_{\bar{X}} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\
&= P(Z < -3) + P(Z > 3) \\
&= \Phi(-3) + 1 - \Phi(3) \\
&= 1 - \Phi(3) + 1 - \Phi(3) \\
&= 2(1 - \Phi(3)) = 0.0027.
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

(προφανώς η πιθανότητα α δεν εξαρτάται από το μέγεθος n του δείγματος)

Αντίστοιχα, η πιθανότητα β (σφάλμα τύπου II) το διάγραμμα ελέγχου να δώσει ένδειξη (εσφαλμένη) ότι η διαδικασία είναι εντός ελέγχου ενώ είναι εκτός λόγω μετατόπισης του μέσου επιπέδου της διεργασίας από μ σε μ^* είναι:

$$\begin{aligned}
\beta &= P(\mu - 3\sigma_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq \mu + 3\sigma_{\bar{X}} \mid X \sim N(\mu^*, \sigma^2)) \\
&= P\left(\frac{\mu - 3\sigma_{\bar{X}} - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{\bar{X} - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{\mu + 3\sigma_{\bar{X}} - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\
&= P\left(\frac{\mu - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} - 3 \leq \frac{\bar{X} - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{\mu - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} + 3\right) \\
&= P\left(\sqrt{n} \frac{\mu - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} - 3 \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \sqrt{n} \frac{\mu - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} + 3\right) \\
&= \Phi\left(\sqrt{n} \frac{\mu - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} + 3\right) - \Phi\left(\sqrt{n} \frac{\mu - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} - 3\right).
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

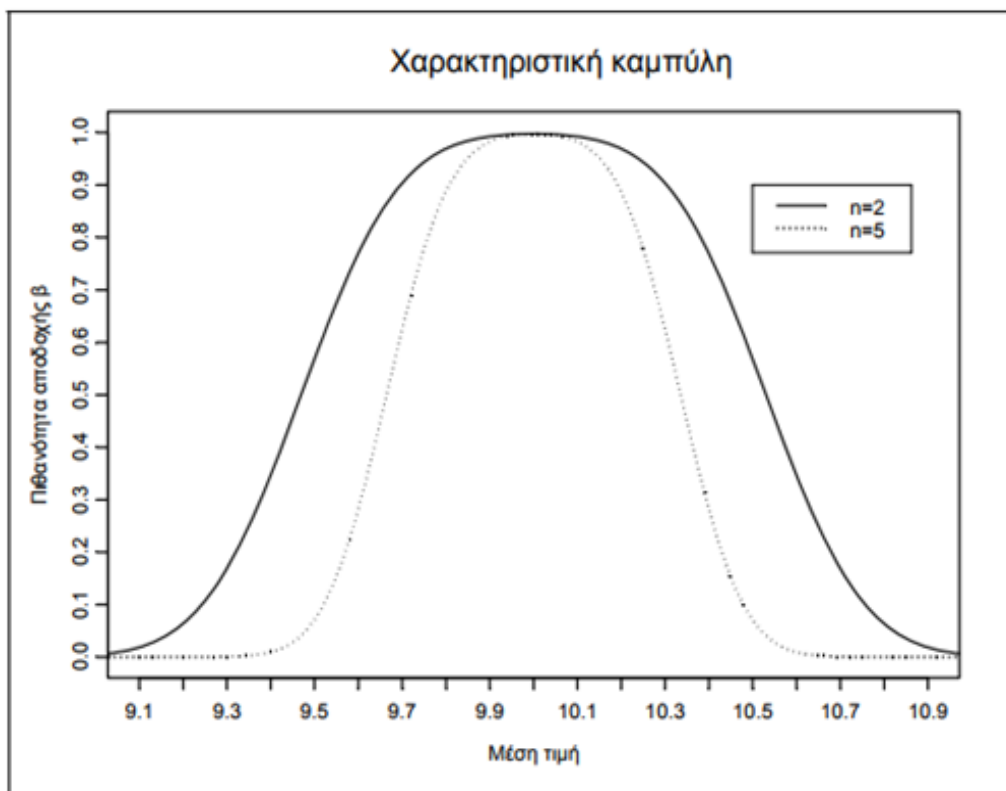
Προφανώς η πιθανότητα β εξαρτάται από το μ^* και από το μέγεθος n του δείγματος, δηλαδή $\beta = \beta(\mu^*, n)$. Αποδεικνύεται ότι αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος, μειώνεται η πιθανότητα β , επομένως αυξάνεται η ικανότητα του διαγράμματος ελέγχου να ανιχνεύει τις μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της διεργασίας.

Στο Σχήμα 1.8 παρουσιάζεται η **χαρακτηριστική καμπύλη** (*operating curve*) ενός \bar{X} - διαγράμματος, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\beta = \beta(\mu^*, n)$ για $n = 2$ και $n = 5$.

Παρατηρούμε ότι αν το μέσο επίπεδο της διεργασίας μετατοπιστεί από $\mu = 10$ σε $\mu^* = 10.5$ για μέγεθος δείγματος $n = 2$, η πιθανότητα το διάγραμμα ελέγχου να δώσει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εκτός ελέγχου είναι ίση με $\beta = 0.5681$. Στην περίπτωση, που το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 5$, η πιθανότητα αυτή είναι ίση με $\beta = 0.0705$, που είναι αρκετά ικανοποιητική.

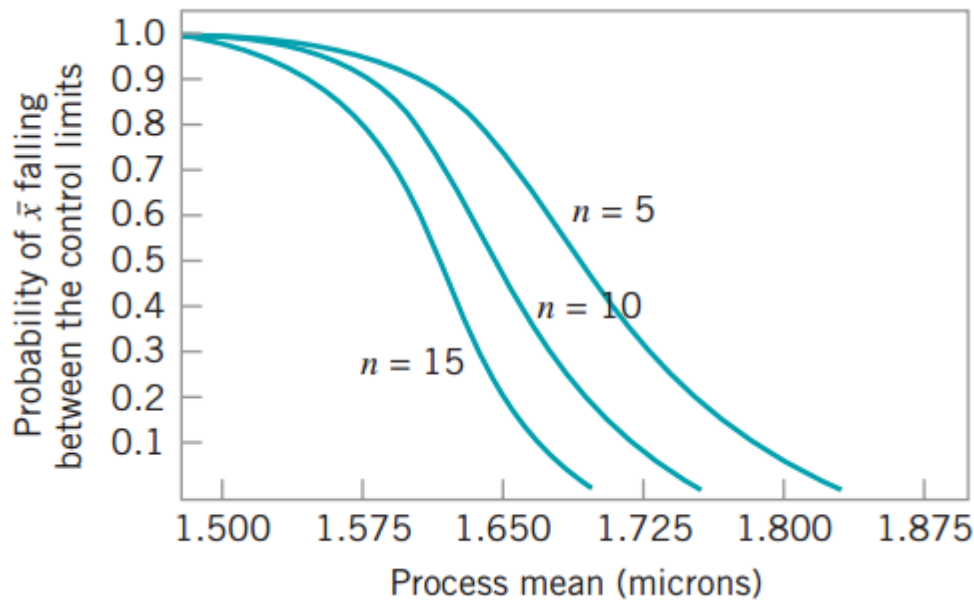
Ωστόσο, για μικρότερες μετατοπίσεις, δηλαδή αν το μέσο επίπεδο της διεργασίας μετατοπιστεί από $\mu = 10$ σε $\mu^* = 10.3$ τότε για $n = 2$ μας δίνει $\beta = 0.9037$, ενώ για $n = 5$ έχουμε ότι $\beta = 0.6243$.

Επομένως, για να ανιχνεύει ένα διάγραμμα ελέγχου σε ικανοποιητικό βαθμό μικρές μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της διεργασίας, κρίνεται αναγκαία η αύξηση του μεγέθους του δείγματος. Συνεπώς, το κατάλληλο μέγεθος δείγματος εξαρτάται από το είδος της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας που θέλουμε να ανιχνεύσουμε.



Σχήμα 1.8. Χαρακτηριστική καμπύλη \bar{X} - διαγράμματος.

Στο Σχήμα 1.9 παριστάνονται οι χαρακτηριστικές καμπύλες του μέσου \bar{X} για διάφορα μεγέθη δείγματος. Παρατηρούμε ξανά ότι η πιθανότητα ανίχνευσης μιας μετατόπισης, για παράδειγμα, από 1.500μ σε 1.600μ, αυξάνεται καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος.



Σχήμα 1.9. Χαρακτηριστικές καμπύλες για το \bar{X} – διάγραμμα.

Όσον αφορά τη συχνότητα της δειγματοληψίας, το επιθυμητό θα ήταν να παίρνουμε δείγματα πολύ συχνά και προφανώς η βέλτιστη κατάσταση θα ήταν να ελέγχουμε όλα τα παραγόμενα προϊόντα. Αυτές, όμως, οι πολιτικές δειγματοληψίας συνεπάγονται μεγάλο οικονομικό κόστος. Συνήθως, η πολιτική που ακολουθείται σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι να λαμβάνονται μικρά μεγέθη δειγμάτων ανά μικρά και τακτά χρονικά διαστήματα (ιδιαίτερα σε περιπτώσεις μαζικής παραγωγής προϊόντων ή όταν εμφανίζονται συχνά ειδικές αιτίες μεταβλητότητας), παρά μεγάλα μεγέθη δειγμάτων λιγότερο συχνά.

Ένας άλλος τρόπος επιλογής του μεγέθους του δείγματος είναι μέσω του **μέσου μήκους ροής** του διαγράμματος (*average run length – ARL*). Η ποσότητα *ARL* είναι ο αναμενόμενος αριθμός σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός ορίων ελέγχου. Για οποιοδήποτε διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart, το *ARL* μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$ARL = \frac{1}{p}, \quad (1.2.5)$$

όπου p είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου.

Όταν μια διεργασία βρίσκεται υπό έλεγχο, στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε 3σ όρια, η πιθανότητα ένα σημείο να ξεπερνά τα όρια ελέγχου είναι $\alpha = p = 0.0027$. Έτσι, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής, ARL_0 , είναι:

$$ARL_0 = \frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.0027} = 370. \quad (1.2.6)$$

Αυτό σημαίνει ότι όταν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, ένα σημείο θα βρίσκεται εκτός ορίων κάθε 370 δείγματα. Προφανώς, θέλουμε να έχουμε μεγάλο ARL_0 .

Για μια διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου επιπέδου της διεργασίας από μ σε μ^* , η πιθανότητα ένα σημείο να βρίσκεται πράγματι εκτός των ορίων είναι $p = 1 - \beta$ και επομένως το **εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής**, ARL_1 είναι:

$$ARL_1 = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - \beta}. \quad (1.2.7)$$

Προφανώς, θέλουμε να έχουμε μικρό ARL_1 , ώστε σε μια εκτός ελέγχου διαδικασία να δίνεται η ένδειξη ότι είναι εκτός ελέγχου σε μικρό αριθμό δειγμάτων.

1.2.5 Φάση I και II

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν δύο **φάσεις** (*phases*) για τον έλεγχο μιας παραγωγικής διεργασίας με τη χρήση διαγραμμικών ελέγχου, η **Φάση I** και η **Φάση II**.

Στη Φάση I, συλλέγεται ένα σύνολο δεδομένων από τη διεργασία και αναλύονται όλα μαζί ταυτοχρόνως σε μια **αναδρομική** (*retrospective*) ανάλυση. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζονται τα **δοκιμαστικά όρια ελέγχου** (*trial control limits*) για να καθοριστεί αν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο που έγινε η

συλλογή των δεδομένων και για να διαπιστωθεί αν μπορούν να καθοριστούν αξιόπιστα όρια ελέγχου για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας. Συνήθως, αυτό είναι το πρώτο πράγμα που γίνεται όταν εφαρμόζεται ένα διάγραμμα ελέγχου σε οποιαδήποτε διεργασία. Τα διαγράμματα ελέγχου στην Φάση I βοηθούν το προσωπικό να «φέρει» τη διεργασία υπό έλεγχο.

Η Φάση II, αρχίζει αφού συγκεντρωθεί ένα «καθαρό» σύνολο δεδομένων υπό συνθήκες ευστάθειας και είναι αντιπροσωπευτική της εντός ελέγχου απόδοσης. Στη Φάση II, χρησιμοποιούνται τα διαγράμματα ελέγχου προκειμένου να ελέγχεται συνεχώς αν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου. Στη φάση αυτή διατίθεται στο προσωπικό ένα πολύτιμο εργαλείο, μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθείται συνεχώς η παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύεται εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος.

1.2.6 Κανόνες ευαισθητοποίησης για τα διαγράμματα ελέγχου (Run Rules)

Για τον εντοπισμό ασυνήθιστων, μη τυχαίων ακολουθιών σημείων σε ένα διάγραμμα ελέγχου μαζί με τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται και κάποιοι κανόνες ευαισθητοποίησης (*sensitizing rules*) που περιγράφουν ενδεχόμενα με την εμφάνιση τέτοιων «ειδικών» ακολουθιών σημείων (όπως περιγράφηκαν στην παράγραφο 1.2.2). Στην περίπτωση που εμφανιστεί η ακολουθία αυτή ή το μοτίβο που περιγράφει ο κανόνας, θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς απαραίτητα να έχουμε κάποιο σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου.

Οι σημαντικότεροι από τους κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου είναι οι ακόλουθοι:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στη Ζώνη A (σε μια από τις δύο ζώνες A).

3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές).
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής.
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
6. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω- κάτω”.
7. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά σε οποιαδήποτε όρια.
8. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη C.
9. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C.
10. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.

Οι πρώτοι τέσσερις κανόνες είναι γνωστοί ως *Western Electric Rules*. Στο Σχήμα 1.10 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα ελέγχου όπου σημειώνονται τα σημεία εκείνα που «χτυπούν» για πρώτη φορά ο καθένας από τους *Western Electric Rules*. Παρατηρούμε δηλαδή ότι στο σημείο 4 χτύπησε ο Κανόνας 2, στο σημείο 11 χτύπησε ο Κανόνας 3, στο σημείο 16 χτύπησε ο Κανόνας 1 και στο σημείο 21 χτύπησε ο Κανόνας 4.



Σχήμα 1.10. Παράδειγμα Western Electric Rules.

1.3 Διαγράμματα Ελέγχου Μεταβλητών

1.3.1 Εισαγωγή

Πολλά ποιοτικά χαρακτηριστικά μπορούν να εκφραστούν σε αριθμητική κλίμακα. Ένα απλό μετρήσιμο ποιοτικό χαρακτηριστικό, όπως χαρακτηριστικά που αφορούν διάσταση, για παράδειγμα το βάρος ή το ύψος, ονομάζεται μεταβλητή. Τα διαγράμματα ελέγχου για μεταβλητές αναπτύχθηκαν το 1930 και χρησιμοποιούνται ευρέως στη βιομηχανία αλλά και σε άλλα επιστημονικά πεδία.

Όταν ασχολούμαστε με ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό που είναι μεταβλητή, είναι συνήθως απαραίτητο να παρακολουθούμε τόσο τη μέση τιμή όσο και τη διασπορά αυτού του ποιοτικού χαρακτηριστικού. Ο έλεγχος για το δειγματικό μέσο γίνεται συνήθως με τα διαγράμματα ελέγχου για το μέσο ή αλλιώς \bar{X} – διαγράμματα. Ο έλεγχος της διασποράς της διεργασίας μπορεί να γίνει είτε με τα διαγράμματα ελέγχου για την τυπική απόκλιση, τα λεγόμενα S – διαγράμματα ή με τα διαγράμματα ελέγχου για το εύρος, τα R – διαγράμματα.

1.3.2 \bar{X} και R Διαγράμματα Ελέγχου

Υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, με μ και σ να είναι γνωστά. Αν $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$ είναι τυχαία δείγματα μεγέθους n , τότε ο δειγματικός μέσος (*sample average*):

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n} \quad (1.3.1)$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2/n)$ και είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της

μέσης τιμής μ του χαρακτηριστικού X . Για οποιοδήποτε δείγμα μεγέθους n , ο δειγματικός μέσος \bar{X}_i παίρνει τιμές στο διάστημα

$$[\mu_{\bar{X}_i} - z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_i}, \mu_{\bar{X}_i} + z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}_i}], \text{ με } \sigma_{\bar{X}_i} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.3.2)$$

με πιθανότητα $1 - \alpha$. Για $\alpha = 0.0027$, $z_{\alpha/2} = 3$, τα όρια ελέγχου στο διάγραμμα για το δειγματικό μέσο είναι:

$$\begin{aligned} LCL_{\bar{X}_i} &= \mu_{\bar{X}_i} - 3\sigma_{\bar{X}_i} = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ CL_{\bar{X}_i} &= \mu_{\bar{X}_i} = \mu \\ UCL_{\bar{X}_i} &= \mu_{\bar{X}_i} + 3\sigma_{\bar{X}_i} = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Τις περισσότερες φορές όμως, οι ποσότητες μ και σ είναι άγνωστες και χρειάζεται να εκτιμηθούν. Για το σκοπό αυτό επιλέγονται συνήθως $m = 20$ έως 25 ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους $n = 4$ έως 6 το καθένα, υποθέτοντας ότι η επιλογή των δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου.

- *Εκτίμηση του μ*

Έστω ότι $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ είναι οι δειγματικοί μέσοι των m δειγμάτων και υπολογίζουμε τη μέση τιμή αυτών

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{X}_{i1} + \bar{X}_{i2} + \dots + \bar{X}_{in}}{n} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}. \quad (1.3.4)$$

Η ποσότητα $\bar{\bar{X}}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{nm}\right)$ και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας μ και ισχύει ότι $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$. Επίσης, ανεξάρτητα από την κατανομή του πληθυσμού, ισχύει ότι $E(\bar{\bar{X}}) = \mu$ και $Var(\bar{\bar{X}}) = \sigma^2/nm$.

- *Εκτίμηση του σ (Μέθοδος S)*

Έστω ότι R_1, R_2, \dots, R_m είναι τα εύρη των m δειγμάτων, δηλαδή,

$$R_i = \max\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\} - \min\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.3.5)$$

με $\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma d_2$ και $\sigma_{R_i} = \sqrt{Var(R_i)} = \sigma d_3$. Θέτουμε $\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$, τότε $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ .

- *Εκτίμηση του σ (Μέθοδος R)*

Ορίζουμε την ποσότητα S από τη σχέση:

$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.3.6)$$

με $\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4$ και $\sigma_{S_i} = \sqrt{Var(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$.

Θέτουμε $\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$, οπότε $E(\bar{S}) = \sigma c_4$. Το $\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ .

Επομένως, τα όρια ελέγχου για τα διαγράμματα είναι:

Όρια ελέγχου \bar{X} διαγράμματος

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \\ CL &= \bar{\bar{X}} \\ LCL &= \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Όρια ελέγχου R διαγράμματος

$$\begin{aligned} UCL &= D_4 \bar{R} \\ CL &= \bar{R} \\ LCL &= D_3 \bar{R}, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

όπου τα $d_2, d_3, c_4, A_2 = 3/(d_2 \sqrt{n}), D_3 = 1 - 3(d_3/d_2)$ και $D_4 = 1 + 3(d_3/d_2)$ είναι σταθερές που δίνονται στο Παράρτημα.

1.3.3 \bar{X} και S Διαγράμματα Ελέγχου

Τα διαγράμματα \bar{X} και S χρησιμοποιούνται κυρίως όταν το μέγεθος του δείγματος n είναι σχετικά μεγάλο, $n > 10$ ή 12 . Για τα διαγράμματα ελέγχου \bar{X} και S απαιτείται η ίδια διαδικασία με τα \bar{X} και R διαγράμματα ελέγχου, με τη διαφορά ότι για κάθε δείγμα πρέπει να υπολογίσουμε το μέσο \bar{X} και την τυπική απόκλιση S .

Για τη διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού X χρησιμοποιείται η σχέση (1.3.6) και ισχύει: $\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4$, $\sigma_{S_i} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$, όπου το c_4 είναι μια σταθερά¹ που εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος. Το μοντέλο με 3σ όρια έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} UCL_S &= \mu_{S_i} + 3\sigma_{S_i} = \left(c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2} \right) \sigma = B_6 \sigma \\ CL_S &= \mu_{S_i} = c_4 \sigma \\ LCL_S &= \mu_{S_i} - 3\sigma_{S_i} = \left(c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2} \right) \sigma = B_5 \sigma. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Όμως, συνήθως η ποσότητα σ είναι άγνωστη και για την εκτίμηση της χρησιμοποιούμε τη σχέση: $\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$, και τα όρια ελέγχου θα είναι:

Όρια ελέγχου S διαγράμματος

$$\begin{aligned} UCL_S &= \mu_{S_i} + 3\sigma_{S_i} = \bar{S} + 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} = \left(1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} \right) \bar{S} = B_4 \bar{S} \\ CL_S &= \mu_{S_i} = \bar{S} \\ LCL_S &= \mu_{S_i} - 3\sigma_{S_i} = \bar{S} - 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} = \left(1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} \right) \bar{S} = B_3 \bar{S}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

¹ Αποδεικνύεται ότι $c_4 = \left(\frac{2}{n-1} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}$.

Αντίστοιχα, τα όρια ελέγχου για το \bar{X} – διάγραμμα θα είναι:

Όρια ελέγχου \bar{X} διαγράμματος

$$\begin{aligned} UCL_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}_i} + 3\sigma_{\bar{X}_i} = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S} \\ CL_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}_i} = \bar{\bar{X}} \\ LCL_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}_i} - 3\sigma_{\bar{X}_i} = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Οι τιμές των παραμέτρων c_4 , A_3 , B_3 , B_4 , B_5 , B_6 για διάφορα μεγέθη n , δίνονται στο Παράρτημα.

1.3.4 Διαγράμματα Ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Στην περίπτωση που το μέγεθος του δείγματος $n = 1$, μιλάμε για τα διαγράμματα ελέγχου μεμονωμένων ή ατομικών παρατηρήσεων (*individual observations*). Τα όρια ελέγχου \bar{X} – διαγράμματος για το ποιοτικό χαρακτηριστικό $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με μ και σ^2 γνωστά και για $n = 2$, θα είναι:

Όρια ελέγχου \bar{X} διαγράμματος, για $n = 1$

$$\begin{aligned} UCL_X &= \bar{X} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{X} + 3\sigma \\ CL_X &= \bar{X} \\ LCL_X &= \bar{X} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{X} - 3\sigma. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Για τη συμπεριφορά της διασποράς του ποιοτικού χαρακτηριστικού X , δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αντίστοιχο R διάγραμμα ελέγχου αφού δεν έχει νόημα να υπολογιστεί το εύρος για $n = 1$. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε το **κινούμενο εύρος** (*moving range, MR*) των μεμονωμένων παρατηρήσεων που ορίζονται από τη σχέση:

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}|, \quad i \geq 2 \quad (1.3.13)$$

και θα ισχύει ότι $\mu_{MR_i} = E(MR_i) = \sigma d_2$ και $\sigma_{MR_i} = \sqrt{Var(MR_i)} = \sigma d_3$. Οι σταθερές d_2, d_3 υπολογίζονται για $n = 2$. Επομένως, το μοντέλο των 3σ ορίων θα είναι:

Όρια ελέγχου MR διαγράμματος:

$$\begin{aligned} UCL_{MR} &= \mu_{MR_i} + 3\sigma_{MR_i} = (d_2 + 3d_3)\sigma = D_2\sigma \\ CL_{MR} &= \mu_{MR_i} = d_2\sigma \\ LCL_{MR} &= \mu_{MR_i} - 3\sigma_{MR_i} = (d_2 - 3d_3)\sigma = D_1\sigma. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

όπου οι σταθερές D_1, D_2 υπολογίζονται ξανά για $n = 2$.

Στην περίπτωση που οι ποσότητες μ και σ^2 είναι άγνωστες, πρέπει να εκτιμηθούν. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους m , $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ από το χαρακτηριστικό $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε ισχύει: $E(\bar{X}) = \hat{\mu} = \bar{X} = \sum_{i=1}^m X_i / m$.

Για την εκτίμηση του σ , θέτουμε: $\overline{MR} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} MR_i}{m-1}$ και θα ισχύει: $E(MR_i) = \sigma d_2$, $\hat{\sigma} = \overline{MR} / d_2$.

Τότε, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκτιμήσεις και από τις σχέσεις (1.3.12) και (1.3.14), έχουμε:

Όρια ελέγχου \bar{X} διαγράμματος

$$\begin{aligned} UCL_X &= \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} \\ CL_X &= \bar{X} \\ LCL_X &= \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Όρια ελέγχου MR διαγράμματος

$$\begin{aligned} UCL_{MR} &= \left(1 + 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \overline{MR} = D_4 \overline{MR} \\ CL_{MR} &= \overline{MR} \\ LCL_{MR} &= \left(1 - 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \overline{MR} = D_3 \overline{MR}. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Όπου και πάλι οι σταθερές D_3, D_4 υπολογίζονται για $n = 2$.

1.4 Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων

1.4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, περιγράφηκαν τα διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών για την περιγραφή ποιοτικών χαρακτηριστικών, ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις ποιοτικών χαρακτηριστικών που δεν μπορούν να εκφραστούν σαν μεταβλητές. Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε ένα προϊόν και να το ταξινομήσουμε ως ελαττωματικό ή μη συμμορφούμενο, αν τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του έχει τιμή εκτός των ορίων προδιαγραφών. Στην περίπτωση αυτή, το προς εξέταση ποιοτικό χαρακτηριστικό περιγράφεται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ονομάζονται **ιδιότητες** (*attributes*) και τα διαγράμματα λέγονται **Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων** (*Attribute Control Charts*).

Εκτός από τις ελαττωματικές μονάδες, σε κάποιες περιπτώσεις μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τα **ελαττώματα ή ατέλειες** (*defects or non conformities*) μιας μονάδας. Ελαττωματικές είναι οι μονάδες που θεωρούνται εντελώς αποτυχημένες, δεν συμμορφώνονται στο απαιτούμενο πρότυπο λόγω της παρουσίας ελαττωμάτων, ενώ ελαττώματα είναι οι ατέλειες ή τα μη συμμορφούμενα χαρακτηριστικά τα οποία προκαλούν δυσλειτουργία στις μονάδες και τις εμποδίζουν να προσαρμοστούν στις προδιαγραφές.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, θα παρουσιάσουμε τέσσερα βασικά είδη διαγραμμάτων ελέγχου ιδιοτήτων. Τα δυο πρώτα διάγραμμα αφορούν το ποσοστό (ή αναλογία ή κλάσμα) και τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας, γνωστά αντίστοιχα ως p και np διαγράμματα ελέγχου. Το τρίτο διάγραμμα αφορά το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης, γνωστό ως u διάγραμμα ελέγχου και το τέταρτο διάγραμμα αφορά το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης γνωστό ως c διάγραμμα ελέγχου.

Με τον όρο μονάδα ή **μονάδα επιθεώρησης** (*inspection unit*) μπορεί να αναφερόμαστε στο ίδιο το προϊόν, σε ένα μέρος του ή σε ένα σύνολο προϊόντων.

1.4.2 Διαγράμματα Ελέγχου p και np

Με τον όρο ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων ορίζουμε το πηλίκο του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων προς το συνολικό αριθμό των παραγόμενων προϊόντων. Για το σχεδιασμό των διαγραμμάτων αρχικά επιλέγονται m προκαταρκτικά δείγματα ισομεγέθη ή μη. Υποθέτουμε ότι το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας είναι γνωστό και ίσο με p και ότι από την παραγωγή επιλέγουμε m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα με μεγέθη n_1, n_2, \dots, n_m αντίστοιχα.

Θα συμβολίζουμε με X_{ij} , $i \geq 1$, $1 \leq j \leq n_i$ την τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 και 0 ανάλογα με το αν το j προϊόν του i δείγματος είναι ελαττωματικό ή όχι. Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim B(1, p)$, ενώ για την

$$X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.4.1)$$

που δηλώνει το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα ισχύει ότι $X_i \sim B(n_i, p)$ με μέση τιμή $\mu_{x_i} = n_i p$ και διασπορά $\sigma_{x_i}^2 = n_i p(1-p)^1$. Τότε για την τυχαία μεταβλητή

$$W_i = p_i = \frac{X_i}{n_i}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.4.2)$$

που δηλώνει το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα ισχύει:

$$\begin{aligned} \mu_{W_i} &= E(W_i) = p \\ \sigma_{W_i}^2 &= Var(W_i) = \frac{p(1-p)}{n_i}, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Επομένως, για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων θα απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση W_i στο διάγραμμα ελέγχου. Τα όρια ελέγχου του p διαγράμματος ελέγχου, στην περίπτωση που το p είναι γνωστό, είναι:

¹ Αν $X \sim B(n, p)$ είναι γνωστό ότι $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} I_A(x)$, $A = \{0, 1, \dots, n\}$ με $\mu_x = np$ και $\sigma_x^2 = np(1-p)$.

Όρια ελέγχου p διαγράμματος (Φάση II)

$$\begin{aligned} UCL_p &= \mu_{W_i} + 3\sigma_{W_i} = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{\bar{n}}} \\ CL_p &= \mu_{W_i} = p \\ LCL_p &= \mu_{W_i} - 3\sigma_{W_i} = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{\bar{n}}}, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

όπου $\bar{n} = \frac{n_1 + \dots + n_m}{m}$ είναι ο μέσος όλων των μεγεθών των m δειγμάτων (για ισομεγέθη δείγματα $\bar{n} = n$).

Στην περίπτωση που τα δείγματα είναι ισομεγέθη, η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων επιταχύνεται με τη βοήθεια της τυχαίας μεταβλητής X_i , η οποία θα απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου όπου $\mu_{X_i} = np$ και $\sigma_{X_i}^2 = np(1-p)$, $1 \leq i \leq m$.

Όρια ελέγχου np διαγράμματος (Φάση II)

$$\begin{aligned} UCL_{np} &= \mu_{X_i} + 3\sigma_{X_i} = np + 3\sqrt{np(1-p)} \\ CL_{np} &= \mu_{X_i} = np \\ LCL_{np} &= \mu_{X_i} - 3\sigma_{X_i} = np - 3\sqrt{np(1-p)}. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Για την κατασκευή ενός p διαγράμματος ελέγχου Φάσης I (p άγνωστο), υποθέτουμε ότι έχουμε m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα με μεγέθη n_1, n_2, \dots, n_m αντίστοιχα, τα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$, $1 \leq i \leq m$, όπου $X_i \sim B(n_i, p)$ με μέση τιμή $\mu_{X_i} = n_i p$ και διασπορά $\sigma_{X_i}^2 = n_i p(1-p)$. Θέτουμε $W_i = p_i = X_i/n_i$, $1 \leq i \leq m$ και οπότε $\bar{p} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}$ με $E(\bar{p}) = p = \hat{p}$ (η εκτίμηση του p).

Από τις σχέσεις (1.4.4) και (1.4.5) προκύπτουν τα όρια ελέγχου για τα διαγράμματα p και np για την περίπτωση που το ποσοστό p είναι άγνωστο (Φάση I):

Όρια ελέγχου p διαγράμματος (Φάση I)

$$\begin{aligned}UCL_p &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{\bar{n}}} \\CL_p &= \bar{p} \\LCL_p &= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{\bar{n}}}\end{aligned}\tag{1.4.6}$$

Όρια ελέγχου np διαγράμματος (Φάση I)

$$\begin{aligned}UCL_{np} &= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\CL_{np} &= n\bar{p} \\LCL_{np} &= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}^1.\end{aligned}\tag{1.4.7}$$

Στην περίπτωση που το LCL στις σχέσεις (1.4.6) και (1.4.7) είναι αρνητικό, η τιμή του θεωρείται μηδέν.

1.4.3 Διαγράμματα Ελέγχου c

Στην παράγραφο αυτή θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης² γνωστού ως c διαγράμματος ελέγχου. Στα διαγράμματα αυτά συνήθως υποθέτουμε ότι ο συνολικός αριθμός ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή *Poisson*. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, θα πρέπει η πιθανότητα εμφάνισης ελαττώματος σε οποιοδήποτε σημείο μιας μονάδας να είναι μικρή.

Έτσι ο αριθμός X των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί κατανομή *Poisson* με παράμετρο c . Δηλαδή, $X \sim P(c)$ με $\mu_{x_i} = \sigma_{x_i}^2 = c$.

¹ Για τον υπολογισμό της ποσότητας $n\bar{p}$ στο διάγραμμα np δεν απαιτείται πρώτα ο υπολογισμός του p_i για κάθε δείγμα και του $\bar{p} = \frac{p_1 + \dots + p_m}{m}$. Είναι $n\bar{p} = n \frac{X_1 + \dots + X_m}{nm} = \frac{X_1 + \dots + X_m}{m}$.

² Ο όρος μονάδα επιθεώρησης χρησιμοποιείται εδώ με την έννοια του δείγματος, γιατί στο c διάγραμμα ελέγχου κάθε δείγμα αποτελείται από 1 μονάδα επιθεώρησης.

Έτσι, στο διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων θα απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση X_i , $i \geq 1$, όπου X_i είναι ο αριθμός των ελαττωμάτων στην i μονάδα επιθεώρησης. Επομένως, τα όρια ελέγχου, όταν το c είναι γνωστό θα είναι:

Όρια ελέγχου c διαγράμματος (Φάση II)

$$\begin{aligned} UCL_c &= c + 3\sqrt{c} \\ CL_c &= c \\ LCL_c &= c - 3\sqrt{c}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Για την κατασκευή ενός c διαγράμματος ελέγχου Φάσης I (c άγνωστο) υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας m προκαταρκτικές μονάδες επιθεώρησης. Έστω X_i ο αριθμός των ελαττωμάτων στην i μονάδα επιθεώρησης, $1 \leq i \leq m$. Θέτουμε $\bar{c} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$, $1 \leq i \leq m$ και έχουμε ότι $E(\bar{c}) = c$ και η ποσότητα \bar{c} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση του c , δηλαδή $\bar{c} = \hat{c}$. Επομένως τα όρια ελέγχου θα είναι:

Όρια ελέγχου c διαγράμματος (Φάση I)

$$\begin{aligned} UCL_c &= \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \\ CL_c &= \bar{c} \\ LCL_c &= \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Αν το LCL για τα παραπάνω όρια είναι αρνητικό τότε θεωρείται μηδέν.

Για τον υπολογισμό του σφάλματος τύπου I σε ένα c διάγραμμα θα ισχύει:

$$\alpha = P(X < LCL_c \text{ ή } X > UCL_c \mid X \sim P(c)), \quad (1.4.10)$$

όπου c είναι η εντός ελέγχου τιμή της παραμέτρου της κατανομής *Poisson* και για το σφάλμα τύπου II σε ένα c διάγραμμα θα ισχύει:

$$\beta = P(LCL_c \leq X \leq UCL_c \mid X \sim P(c^*)), \quad (1.4.11)$$

όπου c^* είναι μια εκτός ελέγχου τιμή της παραμέτρου της κατανομής *Poisson*.

1.4.4 Διαγράμματα Ελέγχου u

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης¹ γνωστού ως u διαγράμματος ελέγχου, υποθέτουμε ξανά ότι ο αριθμός X των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο c . Η βασική διαφορά με το c διάγραμμα ελέγχου είναι ότι τώρα μπορούμε να έχουμε δείγματα μεγέθους μεγαλύτερου της 1 μονάδας επιθεώρησης και διαφορετικά μεταξύ τους.

Υποθέτουμε ότι από την παραγωγή, επιλέγουμε m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα με μεγέθη n_1, n_2, \dots, n_m μονάδες επιθεώρησης το καθένα. Συμβολίζουμε με X_{ij} , $i \geq 1$, $1 \leq j \leq n_i$ την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωμάτων της j μονάδας επιθεώρησης στο i δείγμα. Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim P(c)$ με $\mu_{X_{ij}} = \sigma_{X_{ij}}^2 = c$, ενώ για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}$, $1 \leq i \leq m$ που δηλώνει το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων στο i δείγμα έχουμε ότι $X_i \sim P(n_i c)$ με $\mu_{X_i} = \sigma_{X_i}^2 = n_i c$.

Τότε για την τυχαία μεταβλητή $u_i = X_i/n_i$, $1 \leq i \leq m$, που δηλώνει την αναλογία των ελαττωμάτων στο i δείγμα ισχύει $\mu_{u_i} = c$ και $\sigma_{u_i}^2 = c/n_i$, $i \geq 1$. Συνεπώς, τα όρια του u διαγράμματος ελέγχου για την περίπτωση που η παράμετρος c είναι γνωστή, θα είναι:

Όρια ελέγχου u διαγράμματος (Φάση II)

$$\begin{aligned} UCL_u &= c + 3\sqrt{\frac{c}{\bar{n}}} \\ CL_u &= c \\ LCL_u &= c - 3\sqrt{\frac{c}{\bar{n}}}, \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

όπου $\bar{n} = \frac{n_1 + \dots + n_m}{m}$ ο μέσος όρος όλων των μεγεθών των m δειγμάτων (για ισομεγέθη δείγματα, $\bar{n} = n$).

¹ Ο όρος μονάδα επιθεώρησης χρησιμοποιείται εδώ με την έννοια του προϊόντος, γιατί στο u διάγραμμα ελέγχου κάθε δείγμα μπορεί να έχει μέγεθος μεγαλύτερο της 1 μονάδας επιθεώρησης.

Όταν η παράμετρος c της κατανομής *Poisson* είναι άγνωστη, πρέπει να εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν τα m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα με μεγέθη n_1, n_2, \dots, n_m μονάδες επιθεώρησης αντίστοιχα, έστω τα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας $u_i = X_i / n_i$, $1 \leq i \leq m$, θα έχουμε $\bar{u} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}$ με $E(\bar{u}) = c$, επομένως το \bar{u} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση του c ($\hat{c} = \bar{u}$). Επομένως, τα όρια ελέγχου θα γίνουν:

Όρια ελέγχου u διαγράμματος (Φάση I)

$$\begin{aligned} UCL_u &= \bar{u} + 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{\bar{n}}} \\ CL_u &= \bar{u} \\ LCL_u &= \bar{u} - 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{\bar{n}}}. \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Αν το LCL για τα παραπάνω όρια είναι αρνητικό τότε θεωρούμε την τιμή ίση με μηδέν.

Για τον υπολογισμό του σφάλματος τύπου I σε ένα u διάγραμμα θα ισχύει:

$$\alpha = P\left(\frac{X_i}{n_i} < LCL_u \text{ ή } \frac{X_i}{n_i} > UCL_u \mid X_i \sim P(n_i, c)\right), \quad (1.4.14)$$

όπου c είναι η εντός ελέγχου τιμή της παραμέτρου της κατανομής *Poisson* και για το σφάλμα τύπου II σε ένα u διάγραμμα θα είναι:

$$\beta = P\left(LCL_u \leq \frac{X_i}{n_i} \leq UCL_u \mid X_i \sim P(n_i, c^*)\right), \quad (1.4.15)$$

όπου c^* είναι μια εκτός ελέγχου τιμή της παραμέτρου της κατανομής *Poisson*.

1.5 Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου (Cumulative Sum Control Charts- CUSUM)

1.5.1 Εισαγωγή

Τα σωρευτικά αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου (*Cumulative Sum Control Charts – CUSUM*) εισήχθηκαν από τον Page το 1954 και είναι ευρέως γνωστά ως διαγράμματα CUSUM. Το βασικό τους πλεονέκτημα είναι ότι είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα στον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων, γι' αυτό χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση μικρών συστηματικών σφαλμάτων. Υποθέτουμε ότι μας ενδιαφέρει να παρακολουθήσουμε το χαρακτηριστικό X το οποίο ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu_0, \sigma^2)$. Για τον σκοπό αυτό, επιλέγουμε τυχαία δείγματα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im})$, $1 \leq i \leq m$, μεγέθους $n \geq 1$ το καθένα. Στην περίπτωση αυτή, ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των διαγραμμάτων CUSUM είναι ότι ενσωματώνουν όλες τις πληροφορίες της ακολουθίας των τιμών του δείγματος, σχεδιάζοντας τα σωρευτικά αθροίσματα των αποκλίσεων των τιμών του δείγματος από την τιμή στόχο.

1.5.2 Διάγραμμα Tabular CUSUM

Για τον σχεδιασμό του διαγράμματος Tabular CUSUM χρειάζεται να υπολογιστούν δυο σωρευτικά αθροίσματα για κάθε τιμή ελέγχου. Οι θετικές αποκλίσεις από το στόχο συναθροίζονται με το **άνω συσσωρευμένο άθροισμα** C_i^+ (*one-sided upper CUSUM*), ενώ οι αρνητικές με το **κάτω συσσωρευμένο άθροισμα** C_i^- (*one-sided lower CUSUM*) και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max[0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \\ C_i^- &= \max[0, (\mu_0 - K) - X_i + C_{i-1}^-], \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

με $1 \leq i \leq m$ ενώ οι αρχικές τιμές είναι $C_0^+ = C_0^- = 0$.

Το K ονομάζεται *τιμή αναφοράς* (*reference or allowance value*). Παρατηρούμε ότι τα C_i^+, C_i^- υπολογίζονται από τις διαφορές των X_i από το μ_0 , εφόσον αυτές είναι μεγαλύτερες από το K . Όταν οι διαφορές γίνονται αρνητικές, το άθροισμα μηδενίζεται και αρχίζει να αυξάνει ξανά όταν οι διαφορές γίνουν μεγαλύτερες του μηδενός. Στο διάγραμμα Tabular CUSUM τα δυο C_i^+, C_i^- σχεδιάζονται ως δυο διαφορετικές στήλες πάνω και κάτω από τη μέση τιμή.

Στο Tabular CUSUM, εκτός από τα δυο αθροίσματα, σχεδιάζεται και το όριο ελέγχου που λέγεται *διάστημα απόφασης*, H (*decision interval*). Το ανώτερο H^+ και κατώτερο H^- σχεδιάζονται με δυο ευθείες γραμμές παράλληλες προς το μέσο μ_0 . Η τιμή του διαστήματος απόφασης υποδεικνύει τα ανώτατα επιτρεπτά όρια των αθροισμάτων και επιλέγεται συνήθως να είναι $H = 5\sigma$. Θέτουμε $H = h\sigma$, $K = k\sigma = \frac{\delta}{2}\sigma$ με $\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma}$, όπου το δ είναι το μέγεθος της μετατόπισης που επιθυμούμε να ανιχνεύσουμε, μ_0 είναι η τιμή στόχος και μ_1 είναι η μετατοπισμένη μέση τιμή.

1.5.3 Τυποποιημένο Διάγραμμα CUSUM

Σε κάποιες περιπτώσεις προτιμάται να τυποποιείται η μεταβλητή X_i πριν τον υπολογισμό των αθροισμάτων. Έτσι, ορίζουμε την παρακάτω μεταβλητή που αποτελεί την τυποποιημένη τιμή της X_i :

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1). \quad (1.5.2)$$

Τα άνω και κάτω συσσωρευμένα αθροίσματα τροποποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max[0, Y_i - k + C_{i-1}^+] \\ C_i^- &= \max[0, -k - Y_i + C_{i-1}^-], \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

με $1 \leq i \leq m$ και αρχικές τιμές $C_0^+ = C_0^- = 0$.

Τα τυποποιημένα διαγράμματα CUSUM έχουν δυο βασικά πλεονεκτήματα:

- Μπορούμε να έχουμε πολλά διαγράμματα CUSUM με τις ίδιες τιμές των k και h .
- Γίνεται ευκολότερος ο έλεγχος της μεταβλητότητας μιας διεργασίας.

1.5.4 Διάγραμμα Scale CUSUM

Τα διαγράμματα Scale CUSUM χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας μιας διεργασίας και λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύουν οι προηγούμενες προϋποθέσεις για τα $X_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ και $Y_i \sim N(0,1)$, ορίζουμε μια νέα μεταβλητή:

$$v_i = \frac{\sqrt{|Y_i|} - 0.822}{0.349}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1.5.4)$$

Οι ποσότητες $v_i \sim N(0,1)$ και τα δυο συσσωρευμένα αθροίσματα για το Scale CUSUM ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} S_i^+ &= \max[0, v_i - k + S_{i-1}^+] \\ S_i^- &= \max[0, -k - v_i + S_{i-1}^-], \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

με $1 \leq i \leq m$ και αρχικές τιμές $S_0^+ = S_0^- = 0$.

Αν η τυπική απόκλιση της διεργασίας αυξηθεί, θα αυξάνονται και οι τιμές των αθροισμάτων S_i^+ και κάποια στιγμή θα ξεπεράσουν το διάστημα απόφασης H . Ενώ στην αντίθετη περίπτωση, που θα μειωθεί η τυπική απόκλιση, θα μειώνονται τα S_i^- μέχρι να ξεπεράσουν το H .

1.6 Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη (Exponentially Weighted Moving Average Control Charts)

1.6.1 Εισαγωγή και βασικές έννοιες

Τα διαγράμματα ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη (*Exponentially Weighted Moving Average – EWMA*) προτάθηκαν από τον Roberts (1959) για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο της διεργασίας. Δεδομένου ότι τα διαγράμματα ελέγχου EWMA είναι γνωστά για την ευαισθησία τους στην ανίχνευση μικρών αλλαγών στο μέσο ή στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, η τεχνική EWMA έχει λάβει μεγάλη προσοχή και έχει αποκτήσει εκτεταμένες εφαρμογές στον τομέα του ελέγχου ποιότητας.

Οι ποσότητες που χρησιμοποιούνται για αυτόν τον έλεγχο και τοποθετούνται πάνω στο διάγραμμα EWMA είναι οι παρακάτω:

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1}, \quad (1.6.1)$$

όπου τα x_i είναι οι παρατηρήσεις, το λ είναι μια παράμετρος που ονομάζεται *συντελεστής βαρύτητας (weighting factor)* με $\lambda \in (0,1]$ και η αρχική τιμή των z_i είναι η μέση τιμή, μ_0 .

Έτσι, το διάγραμμα EWMA μπορεί να κατασκευαστεί δημιουργώντας το γράφημα των z_i ως προς τον δειγματικό αριθμό i . Τα όρια ελέγχου είναι τα εξής:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma\sqrt{[\lambda/(2-\lambda)](1-(1-\lambda)^{2i})} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma\sqrt{[\lambda/(2-\lambda)](1-(1-\lambda)^{2i})}, \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

όπου το L είναι το εύρος των ορίων και μ_0 η τιμή στόχος.

Παρατηρείται ότι το $1 - (1 - \lambda)^{2i} \xrightarrow{i \uparrow} 1$, γεγονός που σημαίνει ότι από ένα σημείο και μετά τα όρια ελέγχου εξομαλύνονται και δίνονται πλέον ως:

$$\begin{aligned}
 UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \\
 CL &= \mu_0 \\
 LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.6.3}$$

Παρατηρούμε ότι τελικά τα όρια αποκτούν μια σταθερή τιμή και απεικονίζονται στο διάγραμμα ελέγχου ως δυο ευθείες γραμμές παράλληλες μεταξύ τους.

1.6.2 Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους (Moving Average Control Charts)

Τα διαγράμματα ελέγχου με Κινητούς Μέσους (*Moving Average Control Charts*) αποτελούν μια εναλλαγή των διαγραμμάτων EWMA χωρίς βάρη. Στην περίπτωση που έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις από μια διαδικασία, έστω x_i , $i = 1, 2, \dots$, ορίζουμε τον *κινητό μέσο* m (*span*) στον χρόνο i , για $i \geq m$ ως ακολούθως:

$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-m+1}}{m}.
 \tag{1.6.4}$$

Δηλαδή, τη χρονική στιγμή i , διαγράφεται η παλαιότερη παρατήρηση και προστίθεται η πιο νέα. Η σχέση του μεγέθους της μεταβολής που επιθυμούμε να ανιχνεύσουμε είναι αντιστρόφως ανάλογη με τον m . Πιο συγκεκριμένα, αν στοχεύουμε στο να ανιχνεύσουμε μια αρκετά μικρή μετατόπιση του μέσου, χρησιμοποιούμε μεγάλο m .

Για $0 \leq i < m$, ο κινητός μέσος ορίζεται ως ο μέσος όρος των παρατηρήσεων:

$$M_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{i}.
 \tag{1.6.5}$$

Οπότε τα 3σ όρια ελέγχου για μια τιμή στόχο μ_0 θα είναι:

$$\begin{aligned}UCL &= \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{m}} \\CL &= \mu_0 \\LCL &= \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{m}}.\end{aligned}\tag{1.6.6}$$

Ενώ για $0 < i < m$, τα όρια ελέγχου θα είναι:

$$\begin{aligned}UCL &= \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{i}} \\CL &= \mu_0 \\LCL &= \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{i}}.\end{aligned}\tag{1.6.7}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βελτιωμένα R και S Διαγράμματα για τον έλεγχο της διασποράς

2.1 Βελτιωμένο διάγραμμα R (Khoo & Lim, 2005)

2.1.1 Λεπτομερής περιγραφή της κατανομής, κεντρικής γραμμής και ορίων ελέγχου

Τα όρια του κλασικού διαγράμματος R βασίζονται στην προσέγγιση των 3σ ορίων, όπως, $\mu_R \pm 3\sigma_R$, όπου μ_R είναι η μέση τιμή και σ_R η τυπική απόκλιση του στατιστικού του εύρους R . Το στατιστικό εύρος R , για κάθε δείγμα, είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση του δείγματος. Τα όρια ελέγχου για το κλασικό διάγραμμα R είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= D_4 \bar{R} \\ LCL &= D_3 \bar{R}, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

όπου τα D_3, D_4 είναι σταθερές των διαγραμμάτων ελέγχου, οι τιμές των οποίων εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος, n , και το \bar{R} είναι η εκτίμηση του μ_R . Ενώ στο \bar{X} διάγραμμα, υπό την κανονική κατανομή, η χρήση των 3σ ορίων παράγει ένα σφάλμα $\alpha = 0.0027$, δεν ισχύει το ίδιο για το κλασικό διάγραμμα R . Η δειγματοληπτική κατανομή του R δεν είναι συμμετρική, ακόμα και όταν η δειγματοληψία προέρχεται από την κανονική κατανομή και η «ουρά» της κατανομής είναι στην υψηλή ή θετική πλευρά. Επομένως, τα 3σ όρια είναι μόνο μια προσέγγιση και το σφάλμα, α , δεν έχει τιμή $\alpha = 0.0027$. Στην πραγματικότητα, για ένα δείγμα μεγέθους $n = 4$, προκύπτει $\alpha = 0.00461$ (cf. Montgomery, 2013). Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, οι Khoo & Lim (2005) πρότειναν το βελτιωμένο διάγραμμα R .

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια σειρά δειγμάτων μεγέθους n το κάθε ένα και επίσης ότι οι παρατηρήσεις, X_1, X_2, \dots, X_n κάθε δείγματος, είναι όλες ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες, τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma_0^2)$. Έτσι, η $Y_i = F(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα της μονάδας, όπου η $F(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(\mu, \sigma_0^2)$. Έστω ότι συμβολίζουμε με $X_{(n)}$ και $X_{(1)}$ τη μεγαλύτερη και μικρότερη παρατήρηση αντίστοιχα, σε ένα δείγμα παρατηρήσεων $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Οι αντίστοιχες μετασχηματισμένες τυχαίες μεταβλητές, για παράδειγμα $Y_i = F(X_i)$, για τις $X_{(n)}$ και $X_{(1)}$ συμβολίζονται με $Y_{(n)}$ και $Y_{(1)}$, αντίστοιχα. Ορίζουμε το (στατιστικό) εύρος, R_j , των μετασχηματισμένων τυχαίων μεταβλητών του δείγματος j , $j = 1, 2, \dots$ να είναι:

$$R_j = Y_{(n)} - Y_{(1)}. \quad (2.1.2)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y_i είναι:

$$k_{Y_i}(y_i) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } 0 < y_i < 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Και η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας είναι:

$$K_{Y_i}(y_i) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } y_i < 0 \\ y_i, & \text{όταν } 0 \leq y_i < 1 \\ 1, & \text{όταν } y_i \geq 1. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Ορίζουμε και τη στατιστική συνάρτηση, $T = (1)/2(Y_{(1)} - Y_{(n)})$. Στους Mood et al. (1974) αποδεικνύεται ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των R και T είναι:

$$\begin{aligned} h_{R,T}(r, t) &= n(n-1) \left[K\left(t + \frac{r}{2}\right) - K\left(t - \frac{r}{2}\right) \right]^{n-2} k\left(t - \frac{r}{2}\right) k\left(t + \frac{r}{2}\right) \\ &= n(n-1) \left(t + \frac{r}{2} - t + \frac{r}{2} \right)^{n-2} \\ &= n(n-1)r^{n-2}, \quad 0 < r < 2t < 2 - r. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Ενώ η περιθώρια κατανομή πυκνότητας πιθανότητας του R είναι:

$$\begin{aligned}
h_R(r) &= \int_{r/2}^{1-r/2} h_{R,T}(r,t) dt \\
&= n(n-1)r^{n-2} \left(1 - \frac{r}{2} - \frac{r}{2}\right) \\
&= n(n-1)(1-r)r^{n-2}, \quad 0 < r < 1.
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Το άνω όριο ελέγχου (*upper control limit – UCL_{IU}*) του μονόπλευρου βελτιωμένου διαγράμματος R για την ανίχνευση ανοδικών μετατοπίσεων στη μεταβλητότητα μιας διεργασίας καθορίζονται από την επίλυση του ολοκληρώματος:

$$\int_{UCL_{IU}}^1 h_{R_j}(r) dr = \alpha, \tag{2.1.7}$$

όπου θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
n(n-1) \left[\frac{r^{n-1}}{n-1} - \frac{r^n}{n} \right]_{UCL_{IU}}^1 &= \alpha \\
n(n-1) \left[\frac{nr^{n-1} - (n-1)r^n}{n(n-1)} \right]_{UCL_{IU}}^1 &= \alpha \\
[r^{n-1}\{n - (n-1)r\}]_{UCL_{IU}}^1 &= \alpha \\
[n - (n-1)] - (UCL_{IU})^{n-1}[n - (n-1)(UCL_{IU})] &= \alpha \\
1 - n(UCL_{IU})^{n-1} + (n-1)(UCL_{IU})^n &= \alpha \\
n(UCL_{IU})^{n-1} - (n-1)(UCL_{IU})^n &= 1 - \alpha,
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

όπου το α είναι το επιθυμητό σφάλμα τύπου I.

Παρόμοια, το κάτω όριο ελέγχου (*lower control limit – LCL_{IL}*) ενός μονόπλευρου βελτιωμένου διαγράμματος R για την ανίχνευση καθοδικών μετατοπίσεων καθορίζεται από την επίλυση του παρακάτω ολοκληρώματος:

$$\int_0^{LCL_{IL}} h_{R_j}(r) dr = \alpha, \quad (2.1.9)$$

το οποίο μας δίνει αντίστοιχα,

$$n(LCL_{IL})^{n-1} - (n-1)(LCL_{IL})^n = \alpha. \quad (2.1.10)$$

Τα όρια ελέγχου (UCL_{IT} και LCL_{IT}) ενός αμφίπλευρου βελτιωμένου διαγράμματος R αποκτώνται επίσης από τις εξισώσεις (2.1.8) και (2.1.10) αντίστοιχα, αν αντικαταστήσουμε και στις δυο εξισώσεις το σφάλμα τύπου I, α με το $\alpha/2$.

2.1.2 Απόδοση του διαγράμματος R (ARL) με κώδικα στην R

Χρησιμοποιώντας την R, διεξάγουμε μια μελέτη προσομοίωσης βασισμένη σε 5000 επαναλήψεις. Θεωρούμε 3 περιπτώσεις εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής (ARL_0), τα οποία είναι: $ARL_0 = 250, 370$ και 500 . Κάθε περίπτωση αποτελείται από 3 μεγέθη δείγματος, που είναι $n = 5, 10$ και 20 . Τα όρια ελέγχου για τα άνω, κάτω και αμφίπλευρα βελτιωμένα διαγράμματα R , καθορίζονται από τις εξισώσεις (2.1.8) και (2.1.10), για τον υπολογισμό των οποίων, έγινε χρήση της R. Οι τιμές του $\delta \in \{1.05, 1.1, 1.15, \dots, 5\}$ αναπαριστούν το μέγεθος των ανοδικών μετατοπίσεων στη μεταβλητότητα μιας διεργασίας, ενώ το $\delta \in \{0.9, 0.8, 0.7, \dots, 0.1\}$ αντιπροσωπεύει το μέγεθος των καθοδικών μετατοπίσεων. Εδώ έχουμε ότι $\delta = \sigma/\sigma_0$, όπου σ_0 είναι η βασική τυπική απόκλιση ενώ σ είναι η μετατοπισμένη τυπική απόκλιση της διεργασίας. Επομένως, στην περίπτωση που η διεργασία βρίσκεται υπό στατιστικό έλεγχο έχουμε $\delta = 1.0$. Οι παρατηρήσεις των δειγμάτων για τις τρεις περιπτώσεις των ARL_0 θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή ($N(0,1)$). Στον Πίνακα 2.1, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση του $ARL_0 = 370$, ενώ τα αποτελέσματα για τις περιπτώσεις των $ARL_0 = 250$ και $ARL_0 = 500$ είναι παρόμοια.

Πίνακας 2.1. Τιμές των ARL για το βελτιωμένο διάγραμμα R για την ανίχνευση μετατοπίσεων στην διασπορά με $ARL_0=370$.

δ $= \sigma/\sigma_0$	$n = 5$			$n = 10$			$n = 20$		
	Upper sided (UCL_{IU} $= 0.98$)	Lower sided (LCL_{IL} $= 0.16$)	Two-sided (UCL_{IT} $= 0.99,$ LCL_{IT} $= 0.13$)	Upper sided (UCL_{IU} $= 0.99$)	Lower sided (LCL_{IL} $= 0.42$)	Two-sided (UCL_{IT} $= 0.99,$ LCL_{IT} $= 0.39$)	Upper sided (UCL_{IU} $= 0.99$)	Lower sided (LCL_{IL} $= 0.66$)	Two- sided (UCL_{IT} $= 1.00,$ LCL_{IT} $= 0.63$)
0.10		1.04	1.14		1.00	1.00		1.00	1.00
0.20		2.61	4.26		1.00	1.01		1.00	1.00
0.30		8.19	15.13		1.23	1.43		1.00	1.00
0.40		21.58	41.11		2.50	3.55		1.06	1.15
0.50		46.49	90.56		6.41	10.42		1.63	2.01
0.60		85.84	173.89		16.94	30.54		3.84	5.51
0.70		144.75	288.12		43.20	79.66		11.56	18.87
0.80		219.20	433.61		96.34	189.01		37.89	68.59
0.90		299.35	520.28		200.17	373.90		124.34	232.09
1.00	371.59	366.68	374.97	377.37	363.28	374.08	363.88	374.19	369.04
1.05	217.86		268.04	187.44		260.34	169.51		250.38
1.10	130.60		182.06	105.43		160.39	85.10		139.91
1.15	84.19		123.08	62.63		98.32	46.72		76.22
1.20	58.77		84.65	39.84		62.28	28.01		44.07
1.30	30.84		44.63	19.43		28.23	12.03		17.79
1.40	18.41		25.90	10.87		15.31	6.54		8.89
1.50	12.64		16.71	6.95		9.29	4.02		5.18
1.60	9.21		11.87	4.98		6.25	2.90		3.45
1.70	7.08		8.85	3.73		4.63	2.19		2.57
1.80	5.76		7.05	3.05		3.59	1.81		2.04
1.90	4.82		5.71	2.51		2.94	1.55		1.73
2.00	4.14		4.86	2.16		2.45	1.40		1.51
2.50	2.48		2.74	1.42		1.53	1.10		1.10
3.00	1.90		2.01	1.19		1.24	1.03		1.04
3.50	1.63		1.68	1.10		1.15	1.02		1.02
4.00	1.48		1.50	1.04		1.11	1.01		1.01
4.50	1.40		1.42	1.03		1.06	1.00		1.00
5.00	1.35		1.34	1.01		1.05	1.00		1.00

Από τον Πίνακα 2.1, συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος της μετατόπισης (είτε θετικά ή αρνητικά), τόσο μειώνονται οι τιμές του ARL και άρα το διάγραμμα ανιχνεύει γρηγορότερα τα σημεία που βρίσκονται εκτός ελέγχου. Επίσης,

από τα αποτελέσματα είναι προφανές ότι η ευαισθησία του διαγράμματος αυξάνεται με την αύξηση του μεγέθους του δείγματος, n .

2.1.3 Σύγκριση της απόδοσης του κλασικού διαγράμματος R και του βελτιωμένου διαγράμματος R

Για την αξιολόγηση της απόδοσης του κλασικού διαγράμματος R , υπολογίζουμε τις τιμές του ARL χρησιμοποιώντας τη μέθοδο προσομοίωσης με τη βοήθεια της R . Για τον σκοπό αυτό, λαμβάνονται υπόψη δείγματα μεγέθους $n = 5, 10$ και 20 για τη δημιουργία ενός αμφίπλευρου και άνω κλασικού διαγράμματος R . Το αμφίπλευρο κλασικό διάγραμμα R βασίζεται στα όρια της εξίσωσης (2.1.1) ενώ για το άνω κλασικό διάγραμμα R δίνονται τα ακόλουθα όρια:

$$\begin{aligned} UCL_U &= D_4 \bar{R} \\ CL &= \bar{R}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Στη μελέτη αυτή, δεν έχουμε λάβει υπόψη το κάτω κλασικό διάγραμμα R , επειδή για την περίπτωση όπου το μέγεθος του δείγματος $n \leq 6$, το LCL_L του διαγράμματος είναι μηδέν, και άρα καθίσταται αδύνατη η ανίχνευση μιας βελτίωσης στη διεργασία. Για την περίπτωση που $n > 6$, όπως $n = 10$ ή 20 , η ανίχνευση μιας βελτίωσης μικρού μεγέθους μετατόπισης είναι δύσκολη εξαιτίας της δεξιάς λοξότητας της κατανομής του R . Επιπλέον, για την εντός ελέγχου περίπτωση, η πιθανότητα $P(R < LCL_L = D_3 \bar{R})$ είναι πρακτικά μηδέν, και έτσι το σφάλμα τύπου I πλησιάζει το μηδέν. Στην παράγραφο αυτή χρησιμοποιούμε το ίδιο μέγεθος μετατοπίσεων $\delta = \sigma/\sigma_0$, όπως στην προηγούμενη παράγραφο.

Στον Πίνακα 2.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των τιμών ARL . Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι παρόλο που το κλασικό διάγραμμα R βασίζεται στα 3σ όρια, οι τιμές των εντός ελέγχου ARL για τα τρία μεγέθη δείγματος είναι χαμηλότερες από τις αναμενόμενες τιμές, δηλαδή 370.

Πίνακας 2.2. Τιμές των ARL για το κλασικό άνω και αμφίπλευρο διάγραμμα R .

$\delta =$ σ/σ_0	$n = 5$		$n = 10$		$n = 20$	
	Upper-sided ($UCL_U =$ 4.92)	Two-sided ($UCL_T = 4.92,$ $LCL_T = 0$)	Upper-sided ($UCL_U =$ 5.47)	Two-sided ($UCL_T = 5.47,$ $LCL_T = 0.69$)	Upper-sided ($UCL_U = 5.92$)	Two-sided ($UCL_T = 5.92,$ $LCL_T = 1.55$)
0.10		-		1.00		1.00
0.20		-		1.46		1.00
0.30		-		6.31		1.04
0.40		-		34.10		1.68
0.50		-		161.29		5.05
0.60		-		650.21		23.31
0.70		-		2250.62		122.72
0.80		-		4143.15		633.14
0.90		-		1277.50		1107.79
1.00	217.71	217.71	232.78	232.78	213.63	213.63
1.05	122.23	122.23	114.47	114.47	97.92	97.92
1.10	74.50	74.50	63.03	63.03	49.73	49.73
1.15	48.06	48.06	37.53	37.53	27.49	27.49
1.20	32.65	32.65	24.04	24.04	16.82	16.82
1.30	17.53	17.53	11.66	11.66	7.61	7.61
1.40	10.64	10.64	6.81	6.81	4.25	4.25
1.50	7.27	7.27	4.40	4.40	2.79	2.79
1.60	5.28	5.28	3.18	3.18	2.03	2.03
1.70	4.03	4.03	2.43	2.43	1.62	1.62
1.80	3.29	3.29	2.02	2.02	1.39	1.39
1.90	2.78	2.78	1.74	1.74	1.25	1.25
2.00	2.42	2.42	1.53	1.53	1.17	1.17
2.50	1.57	1.57	1.14	1.14	1.02	1.02
3.00	1.28	1.28	1.04	1.04	1.00	1.00
3.50	1.15	1.15	1.01	1.01	1.00	1.00
4.00	1.10	1.10	1.00	1.00	1.00	1.00
4.50	1.07	1.07	1.00	1.00	1.00	1.00
5.00	1.03	1.03	1.00	1.00	1.00	1.00

Για παράδειγμα, τα ARL_0 είναι 217.73, 232.79 και 213.62 για $n = 5, 10$ και 20 , αντίστοιχα, επομένως το συμβατικό διάγραμμα R δεν δίνει τις αναμενόμενες τιμές για το ARL_0 . Οι τιμές του ARL του αμφίπλευρου και του άνω κλασικού διαγράμματος R είναι παρόμοιες, επειδή η πιθανότητα το αμφίπλευρο διάγραμμα R να ανιχνεύσει

σημείο κάτω του LCL $P(R < LCL)$ είναι κοντά στο μηδέν. Με μια αύξηση στη διασπορά και τη δεξιά λοξή κατανομή, η πιθανότητα $P(R < LCL)$ είναι πρακτικά μηδέν.

Πίνακας 2.3. Τιμές των ARL για το βελτιωμένο άνω και αμφίπλευρο διάγραμμα R .

$\delta =$ σ/σ_0	$n = 5$		$n = 10$		$n = 20$	
	Upper-sided ($UCL_{IU} =$ 0.98)	Two-sided ($UCL_{IT} = 0.99,$ $LCL_{IT} = 0.15$)	Upper-sided ($UCL_{IU} =$ 0.99)	Two-sided ($UCL_{IT} =$ 0.99, $LCL_{IT} = 0.41$)	Upper-sided ($UCL_{IU} =$ 0.99)	Two-sided ($UCL_{IT} = 0.99,$ $LCL_{IT} = 0.65$)
0.10		1.04		1.00		1.00
0.20		2.93		1.01		1.00
0.30		9.34		1.29		1.00
0.40		25.13		2.78		1.09
0.50		54.54		7.61		1.69
0.60		100.61		20.48		4.12
0.70		170.46		52.71		12.81
0.80		252.45		119.89		42.59
0.90		298.61		233.51		136.24
1.00	222.45	222.12	232.02	232.58	215.45	215.56
1.05	131.43	163.22	123.70	166.18	102.23	152.80
1.10	83.07	115.91	71.35	107.56	54.01	88.26
1.15	56.76	80.58	43.83	68.41	31.19	50.21
1.20	39.74	58.01	28.85	44.86	19.27	30.61
1.30	22.05	31.84	14.90	21.65	8.87	12.93
1.40	14.13	19.18	8.63	12.02	5.02	6.91
1.50	10.06	13.09	5.78	7.62	3.30	4.19
1.60	7.45	9.62	4.19	5.39	2.48	2.89
1.70	5.93	7.35	3.30	4.10	1.98	1.24
1.80	4.91	5.95	2.66	3.26	1.63	1.89
1.90	4.18	4.93	2.25	2.70	1.41	1.64
2.00	3.64	4.26	2.03	2.29	1.35	1.43
2.50	2.29	2.48	1.34	1.49	1.08	1.11
3.00	1.81	1.88	1.17	1.21	1.03	1.04
3.50	1.56	1.59	1.10	1.17	1.01	1.02
4.00	1.45	1.45	1.07	1.08	1.01	1.01
4.50	1.36	1.37	1.05	1.05	1.00	1.00
5.00	1.28	1.29	1.02	1.04	1.00	1.00

Με την βοήθεια της R , πραγματοποιούμε άλλη μια προσομοίωση για το αμφίπλευρο και άνω βελτιωμένο διάγραμμα R , προσαρμόζοντας τα όρια τους που δίνονται από τις εξισώσεις (2.1.8) και (2.1.10) για να αποκτήσουμε τις τιμές των ARL που δίνονται στον Πίνακα 2.2. Τα αποτελέσματα αυτής της προσομοίωσης παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.3.

Συγκρίνοντας τους Πίνακες 2.2 και 2.3, παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα του κλασικού διαγράμματος R είναι πιο ευαίσθητα από αυτά του βελτιωμένου διαγράμματος στην ανίχνευση αυξητικών μετατοπίσεων στη διασπορά μιας διεργασίας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κατανομή του στατιστικού R παρουσιάζει λοξότητα και επομένως δεν αποτελεί έκπληξη το αποτέλεσμα. Όμως, το μειονέκτημα του κλασικού διαγράμματος R είναι ότι το σφάλμα τύπου I έχει προκαθοριστεί και δεν μπορεί να ορισθεί βασισμένο σε μια επιθυμητή τιμή. Ένα δεύτερο μειονέκτημα είναι ότι το κλασικό διάγραμμα R δεν μπορεί να ανιχνεύσει πιθανή βελτίωση της διεργασίας. Το τρίτο πρόβλημα είναι μια τάση που δημιουργεί την εντύπωση σε κάποιον ότι το σφάλμα τύπου I του κλασικού αμφίπλευρου διαγράμματος R με τα 3σ όρια είναι 0.0027, ενώ στην πραγματικότητα είναι μεγαλύτερο, συγκεκριμένα περίπου 0.0045, 0.0043 και 0.0046 για $n = 5, 10$ και 20 , αντίστοιχα, από τα προσομοιωμένα δεδομένα του Πίνακα 2.2. Σε αντίθεση με το κλασικό διάγραμμα R , το βελτιωμένο διάγραμμα R είναι απαλλαγμένο από αυτά τα προβλήματα.

2.1.4 Αριθμητικό παράδειγμα

Στην παράγραφο αυτή, δίνεται ένα παράδειγμα για τον τρόπο που λειτουργεί το βελτιωμένο διάγραμμα R σε πραγματικές καταστάσεις. Για να κάνουμε αυτή την προσομοίωση από μια ρεαλιστική διεργασία, χρησιμοποιούμε την R , για να δημιουργήσουμε τυχαίες παρατηρήσεις από 20 δείγματα. Τα πρώτα 5 δείγματα μεγέθους $n = 5$, επιλέγονται ώστε να αποτελούν παρατηρήσεις της κανονικής κατανομής $N(0,1)$, οι οποίες αναπαριστούν την εντός ελέγχου κατάσταση. Για την προσομοίωση της εκτός ελέγχου κατάστασης, παίρνουμε τα επόμενα 15 δείγματα από

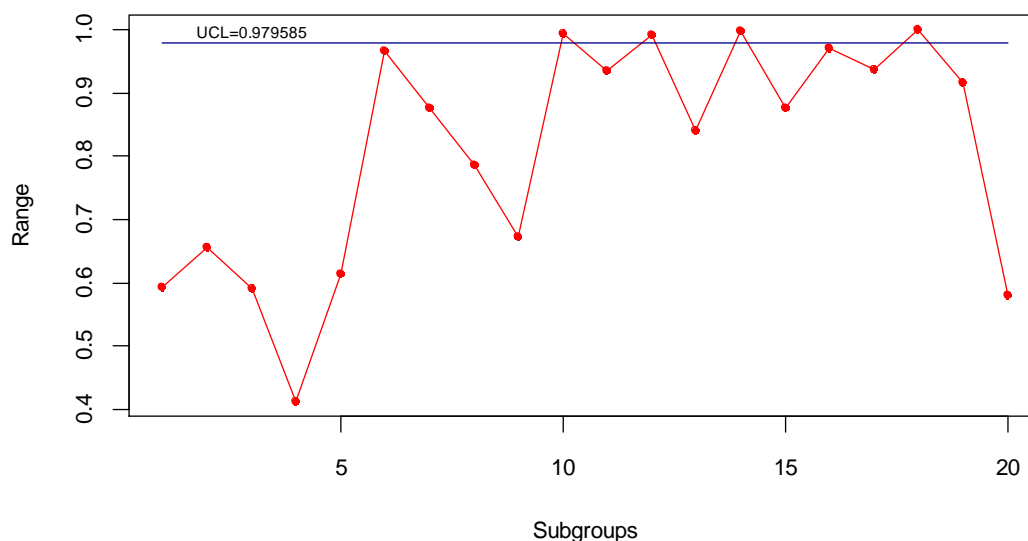
την $N(0,4)$, ώστε το μέγεθος της μετατόπισης να είναι $\delta = \sigma/\sigma_0 = 2$. Στον Πίνακα 2.4, δίνονται τα προσομοιωμένα δεδομένα από τις τυχαίες κανονικές παρατηρήσεις X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 καθενός από τα 20 δείγματα και οι αντίστοιχες μετασχηματισμένες $U(0,1)$ τιμές. Στον ίδιο πίνακα, παρουσιάζεται και το εύρος $R_j, j = 1, 2, \dots, 20$, για κάθε δείγμα, που βασίζεται στις μετασχηματισμένες παρατηρήσεις, Y_i .

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα βελτιωμένο διάγραμμα R για να παρακολουθήσουμε τυχόν αυξήσεις στη διασπορά μιας διεργασίας με σφάλμα τύπου I, $\alpha = 0.004$ (το οποίο μας δίνει εντός ελέγχου $ARL = 250$). Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.1.8), παίρνουμε $UCL_{IU} = 0.979585$.

Πίνακας 2.4. Προσομοιωμένα δεδομένα.

Αρ. Δείγ.	Παρατηρήσεις					Μετασχηματισμένες $Y_i = F(X_i)$					Εύρος R_j
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
1	-0.910	-0.757	0.755	-0.644	-0.910	0.583	0.182	0.224	0.775	0.260	0.593
2	-0.047	0.815	-0.526	1.461	-0.047	0.273	0.481	0.792	0.299	0.928	0.655
3	-0.310	-0.560	-0.421	1.167	-0.310	0.850	0.378	0.288	0.337	0.878	0.591
4	-0.340	-1.012	0.070	0.173	-0.340	0.265	0.367	0.156	0.528	0.568	0.413
5	-0.480	0.521	-0.222	1.214	-0.480	0.273	0.316	0.699	0.412	0.888	0.615
6	1.496	3.122	0.278	0.241	1.496	0.032	0.933	0.999	0.610	0.595	0.967
7	-0.781	-0.440	1.152	-4.052	-0.781	0.714	0.217	0.330	0.875	2.538	0.875
8	-0.959	1.350	-0.945	0.039	-0.959	0.126	0.169	0.911	0.172	0.515	0.786
9	-1.022	-2.060	0.503	-1.511	-1.022	0.444	0.153	0.020	0.693	0.065	0.673
10	-3.073	2.640	-0.320	1.936	-3.073	0.364	0.001	0.996	0.374	0.974	0.995
11	-1.918	-0.379	1.795	-1.185	-1.918	0.792	0.028	0.352	0.964	0.118	0.936
12	0.813	-0.192	-0.012	-2.410	0.813	1.000	0.792	0.424	0.495	0.008	0.992
13	0.153	-2.164	-0.470	1.065	0.153	0.085	0.561	0.015	0.319	0.857	0.841
14	-3.564	-0.922	3.113	-0.042	-3.564	0.872	0.000	0.178	0.999	0.483	0.999
15	-3.069	-3.476	-0.489	-0.923	-3.069	0.876	0.001	0.000	0.312	0.178	0.876
16	1.256	-5.569	-0.494	-2.872	1.256	0.971	0.895	1.280	0.311	0.002	0.971
17	0.558	1.543	-2.855	0.680	0.558	0.876	0.711	0.939	0.002	0.752	0.936
18	0.116	-3.169	-4.948	4.216	0.116	0.020	0.546	0.001	3.755	1.000	1.000
19	3.650	-1.377	0.195	-0.217	3.650	0.984	1.000	0.084	0.577	0.414	0.916
20	0.277	-1.913	-1.235	-0.477	0.277	0.107	0.609	0.028	0.108	0.317	0.581

Επίσης, στο Σχήμα 2.1, δίνεται το γράφημα του εύρους R_j με το άνω όριο ελέγχου UCL_{UV} . Όπως φαίνεται καθαρά, το διάγραμμα ανιχνεύει τη μετατόπιση για πρώτη φορά στο 10^ο δείγμα, ενώ παρατηρείται μια ανοδική τάση από το 5^ο δείγμα και μετά.



Σχήμα 2.1. Το βελτιωμένο διάγραμμα R_j των δεδομένων του παραδείγματος.

2.2 Βελτιωμένο διάγραμμα R (Zhang, 2014)

2.2.1 Λεπτομερής περιγραφή της κατανομής, κεντρικής γραμμής, ορίων ελέγχου και σταθερών για το βελτιωμένο διάγραμμα R

Το R διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart χρησιμοποιείται ευρέως στις διεργασίες ποιοτικού ελέγχου (cf. Shewhart, 1931). Το στατιστικό εύρος R_i ορίζεται ως τη διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση του κάθε δείγματος i . Βασισμένοι στην 3σ προσέγγιση, τα όρια ελέγχου του διαγράμματος R είναι $\mu_R \pm 3\sigma_R$, όπου το μ_R είναι ο μέσος και σ_R η τυπική απόκλιση του R_i .

Τα άνω (UCL) και κάτω (LCL) όρια ελέγχου για το διάγραμμα R είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= D_4 \bar{R} \\ LCL &= D_3 \bar{R}, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

όπου τα D_3 , D_4 είναι σταθερές που εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος, n , και το \bar{R} είναι μια εκτίμηση του μ_R .

Η κατασκευή του διαγράμματος R βασίζεται στην υπόθεση ότι η κατανομή των ποιοτικών χαρακτηριστικών είναι προσεγγιστικά κανονική, ενώ η πραγματική κατανομή του εύρους R έχει μεγάλη ουρά από τα δεξιά. Ακόμα κι αν θεωρήσουμε ένα κανονικό κατανομημένο ποιοτικό χαρακτηριστικό, δεν είναι σωστή η προσέγγιση των 3σ ορίων, καθώς από τις εξισώσεις (2.2.1), τα όρια ελέγχου που βρίσκουμε παράγουν ένα υψηλότερο σφάλμα τύπου I από αυτό του διαγράμματος \bar{X} , δηλαδή δεν μας παρέχουν ένα εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL_0) γύρω στο 370 (ούτε και σφάλμα τύπου I $\alpha = 0.0027$ αντίστοιχα). Όταν το μέγεθος n , του δείγματος είναι μικρό, τα κάτω όρια του διαγράμματος R τείνουν στο 0.

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια σειρά δειγμάτων μεγέθους n το κάθε ένα. Υποθέτουμε επίσης ότι οι παρατηρήσεις, X_1, X_2, \dots, X_n κάθε δείγματος, είναι όλες ανεξάρτητες, ισόνομες, τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma_0^2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε n ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Έστω $U = \min Z_i$, $V = \max Z_i$ και ότι $R = V - U$. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των U και V είναι (cf. Bain & Engelhardt, 1992):

$$f(U, V) = \begin{cases} n(n-1)\varphi(U)\varphi(V)(\Phi(V) - \Phi(U))^{n-2}, & \text{για } V > U \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases} \quad (2.2.2)$$

όπου φ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (*probability density function – pdf*) των Z_i και Φ η συνάρτηση κατανομής των Z_i . Από μετασχηματισμό, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των U και V θα είναι:

$$g(U, R) = \begin{cases} n(n-1)\varphi(U)\varphi(U+R)(\Phi(U+R) - \Phi(U))^{n-2}, & \text{για } R > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Η περιθώρια συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του διαγράμματος R μπορεί να οριστεί ως:

$$\begin{aligned} H_R(r) &= P(R < r) \\ &= \int_0^r \int_{-\infty}^{\infty} g(U, R) dU dR \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^r n(n-1)\varphi(U)\varphi(U+R)(\Phi(U+R) - \Phi(U))^{n-2} dR dU \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} n\varphi(U)(\Phi(U+r) - \Phi(U))^{n-1} dU. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Για ένα μονόπλευρο βελτιωμένο διάγραμμα R (*Improved R Chart – IRC*), μπορούμε να βρούμε το άνω όριο ελέγχου UCL_{RIU} λύνοντας το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} n\varphi(U)(\Phi(U+r) - \Phi(U))^{n-1} dU = 1 - \alpha \quad (2.2.5)$$

για r , λέγεται D_U^* , όπου το α είναι το σφάλμα τύπου I.

Το κάτω όριο ελέγχου μπορεί να βρεθεί από την επίλυση του παρακάτω ολοκληρώματος:

$$\int_{-\infty}^{\infty} n\varphi(U)(\Phi(U+r) - \Phi(U))^{n-1} dU = \alpha \quad (2.2.6)$$

για r , λέγεται D_L^* .

Τα άνω και κάτω όρια του *IRC* υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$UCL_{RIU} = D_U^* \cdot \sigma \quad \text{και} \quad LCL_{RIL} = D_L^* \cdot \sigma. \quad (2.2.7)$$

Για το αμφίπλευρο διάγραμμα *IRC*, μπορούμε να βρούμε τα UCL_{RIT} και LCL_{RIT} από τις εξισώσεις (2.2.5) και (2.2.6) αντίστοιχα, αντικαθιστώντας το σφάλμα τύπου I και στις δυο περιπτώσεις με το $\alpha/2$. Τα όρια αυτά θα είναι:

$$UCL_{RIT} = D_2^* \cdot \sigma \quad \text{και} \quad LCL_{RIT} = D_1^* \cdot \sigma, \quad (2.2.8)$$

και τα δυο αναδρομικά όρια του *IRC* θα είναι:

$$UCL_{RIT} = D_4^* \cdot \bar{R} \quad \text{και} \quad LCL_{RIT} = D_3^* \cdot \bar{R}. \quad (2.2.9)$$

Χρησιμοποιώντας την *R* εκτιμούμε τα ολοκληρώματα των εξισώσεων (2.2.5) και (2.2.6) και παρουσιάζουμε στους Πίνακες 2.5 και 2.6 τις σταθερές $D_U^* - D_L^*$, D_U^* και D_L^* που αντιστοιχούν σε σφάλμα τύπου I ίσο με $\alpha = 0.0027$ και $\alpha = 0.005$ αντίστοιχα.

Πίνακας 2.5. Τιμές των σταθερών (των UCL, LCL) D_U^* , D_L^* , $D_1^* - D_4^*$ του βελτιωμένου διαγράμματος *R* (*IRC*) για $\alpha = 0.0027$.

<i>n</i>	D_U^*	D_L^*	D_1^*	D_2^*	D_3^*	D_4^*
2	4.2426	0.0048	0.0024	4.5328	0.0021	4.0316
3	4.6787	0.0990	0.0700	4.9502	0.0414	2.9322
4	4.9385	0.2784	0.2206	5.1997	0.1072	2.5319
5	5.1231	0.4734	0.3965	5.3774	0.1706	2.3175
6	5.2660	0.6575	0.5690	5.5151	0.2246	2.1815
7	5.3821	0.8245	0.7288	5.6271	0.2696	2.0857
8	5.4798	0.9745	0.8744	5.7215	0.3072	2.0141
9	5.5639	1.1093	1.0064	5.8028	0.3389	1.9580
10	5.6377	1.2309	1.1263	5.8742	0.3660	1.9124
11	5.7034	1.3413	1.2353	5.9377	0.3895	1.8752
12	5.7625	1.4425	1.3363	5.9950	0.4101	1.8438
13	5.8162	1.5344	1.4283	6.0470	0.4281	1.8162
14	5.8689	1.6197	1.5132	6.0998	0.4442	1.7923
15	5.9127	1.6987	1.5923	6.1416	0.4587	1.7714
20	6.0955	2.0227	1.9181	6.3179	0.5136	1.6946
25	6.2344	2.2668	2.1642	6.4528	0.5506	1.6444

Πίνακας 2.6. Τιμές των σταθερών (των UCL, LCL) D_U^* , D_L^* , $D_1^* - D_4^*$ του βελτιωμένου διαγράμματος R (IRC) για $\alpha = 0.005$.

n	D_U^*	D_L^*	D_1^*	D_2^*	D_3^*	D_4^*
2	3.9697	0.0089	0.0044	4.5328	0.0040	3.7981
3	4.4242	0.1348	0.0953	4.9502	0.0563	2.7866
4	4.6941	0.3427	0.2713	5.1997	0.1318	2.4167
5	4.8856	0.5549	0.4642	5.3774	0.1996	2.2182
6	5.0335	0.7490	0.6470	5.5151	0.2553	2.0922
7	5.1536	0.9218	0.8132	5.6271	0.3008	2.0034
8	5.2546	1.0753	0.9627	5.7215	0.3382	1.9369
9	5.3414	1.2121	1.0972	5.8028	0.3695	1.8849
10	5.4176	1.3349	1.2187	5.8742	0.3960	1.8426
11	5.4854	1.4459	1.3290	5.9377	0.4189	1.8080
12	5.5463	1.5469	1.4299	5.9950	0.4389	1.7789
13	5.6017	1.6393	1.5224	6.0470	0.4563	1.7534
14	5.6543	1.7244	1.6076	6.0998	0.4718	1.7312
15	5.7001	1.8031	1.6864	6.1416	0.4857	1.7118
20	5.8892	2.1250	2.0106	6.3179	0.5383	1.6405
25	6.0319	2.3667	2.2549	6.4528	0.5736	1.5939

2.2.2 Απόδοση του βελτιωμένου διαγράμματος R (ARL) με χρήση κώδικα στην R

Για να εκτιμήσουμε το προτεινόμενο διάγραμμα R χρησιμοποιούμε προσομοιώσεις. Έστω ότι σ_0 είναι η ονομαστική τυπική απόκλιση (στην περίπτωση μας $\sigma_0 = 1$) και το σ είναι η μετατοπισμένη τυπική απόκλιση της διεργασίας. Το μέγεθος των μετατοπίσεων στη μεταβλητότητα μιας διεργασίας, δ , ορίζεται ως: $\delta = \sigma/\sigma_0$. Όταν $\delta = 1.0$, η διεργασία είναι υπό στατιστικό έλεγχο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι εντός ελέγχου παρατηρήσεις ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Οι προσομοιώσεις που διεξάγονται βασίζονται σε 1,000,000 επαναλήψεις με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

(1) το εντός ελέγχου $ARL_0 = 370$,

(2) το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 5, 10, 20$ και

(3) οι τιμές του δ για ανοδικές μετατοπίσεις είναι: $\delta \in \{1.05, 1.1, 1.15, \dots, 3\}$ ενώ για καθοδικές μετατοπίσεις είναι: $\delta \in \{0.9, 0.8, 0.7, \dots, 0.1\}$.

Πίνακας 2.7. Τιμές των ARL για το διάγραμμα IRC με $ARL_0 = 370$.

δ $= \sigma/\sigma_0$	$n = 5$			$n = 10$			$n = 20$		
	Upper sided	Lower sided	Two- sided	Upper sided	Lower sided	Two- sided	Upper sided	Lower sided	Two- sided
0.10		1.01	1.04		1.00	1.00		1.00	1.00
0.2		1.81	2.66		1.00	1.00		1.00	1.00
0.3		4.99	8.63		1.11	1.23		1.00	1.00
0.4		12.26	23.01		1.91	2.53		1.04	1.08
0.5		27.09	51.66		4.31	6.82		1.43	1.71
0.6		52.39	101.9		11.26	19.34		3.06	4.20
0.7		93.15	181.6		28.76	52.36		8.56	13.57
0.8		156.8	301.1		71.04	134.0		28.99	50.39
0.9		243.6	423.4		166.8	308.1		102.0	188.0
1.0	371.5	377.4	369.5	376.4	372.0	372.5	374.8	367.9	371.7
1.05	198.1		266.5	181.2		258.6	155.3		248.4
1.10	116.6		172.3	92.66		148.0	77.13		127.5
1.15	72.49		110.7	53.43		87.12	40.52		66.21
1.20	47.47		73.45	33.04		52.27	23.65		37.67
1.30	23.63		35.43	15.33		22.23	9.87		14.29
1.40	13.63		19.61	8.47		11.41	5.04		7.09
1.50	9.13		12.21	5.25		6.89	3.12		4.17
1.60	6.41		8.29	3.68		4.56	2.23		2.78
1.80	3.86		4.70	2.25		2.62	1.50		1.68
2.00	2.72		3.16	1.66		1.84	1.21		1.28
3.00	1.34		1.41	1.05		1.00	1.00		1.00

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε το αμφίπλευρο διάγραμμα IRC για να εξηγήσουμε τον υπολογισμό του ARL . Αρχικά παράγουμε τα δεδομένα υπό διαφορετικές ρυθμίσεις βασιζόμενοι στο μέγεθος των μετατοπίσεων στη

μεταβλητότητα της διεργασίας και το μέγεθος του δείγματος. Έπειτα, υπολογίζουμε το στατιστικό εύρος R_i και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.2.8) υπολογίζουμε τα όρια ελέγχου για να δούμε αν τα R_i είναι μέσα στα όρια ή όχι. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία 1,000,000 φορές. Το ARL είναι το αντίστροφο του ποσοστού των φορών που το R_i είναι εκτός των ορίων. Τα όρια για το άνω, κάτω και αμφίπλευρο διάγραμμα IRC εξάγονται από τις εξισώσεις (2.2.7) και (2.2.8).

Στον Πίνακα 2.7 δίνονται οι τιμές των ARL για το διάγραμμα IRC , απ' όπου βλέπουμε ότι τα εντός ελέγχου ARL είναι γύρω στο 370. Οι τιμές των ARL μικραίνουν καθώς το μέγεθος της μετατόπισης αυξάνεται ή μειώνεται. Παρατηρούμε επίσης ότι με αυξημένο μέγεθος δείγματος, αυξάνεται επίσης και η ευαισθησία του διαγράμματος.

2.2.3 Αριθμητικό παράδειγμα

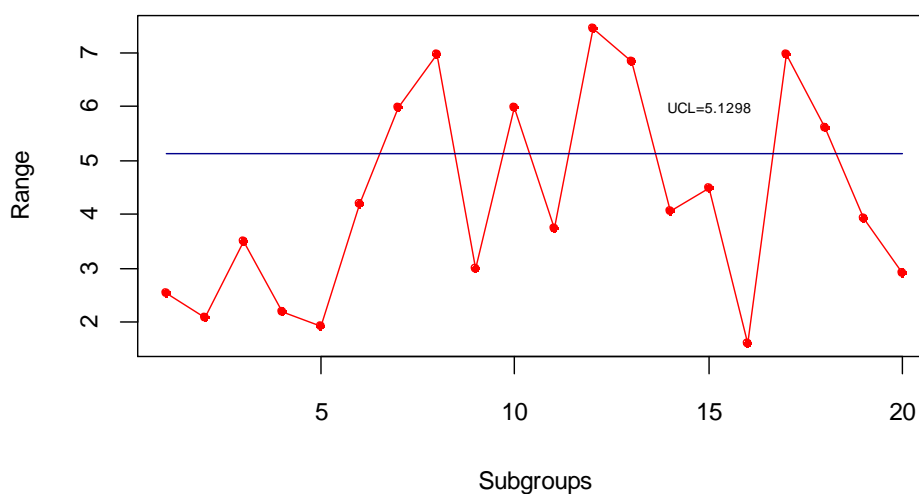
Στην παράγραφο αυτή, δίνεται ένα παράδειγμα στο οποίο περιγράφεται η χρήση του IRC . Προσομοιώνουμε 20 δείγματα μεγέθους 5, από τα οποία τα 5 πρώτα είναι εντός ελέγχου, δηλαδή αντλούνται από την $N(0,1)$, και τα επόμενα 15 είναι εκτός ελέγχου. Για την εκτός ελέγχου περίπτωση, θεωρούμε το μέγεθος της μετατόπισης να είναι: $\delta = \sigma/\sigma_0 = 2$. Στον Πίνακα 2.8 δίνονται τα προσομοιωμένα δεδομένα X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 και οι αντίστοιχες τιμές για το εύρος $R_j, j = 1, 2, \dots, 20$.

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε ένα μονόπλευρο διάγραμμα IRC για την παρακολούθηση διασποράς της διεργασίας με $ARL_0 = 370$. Από την εξίσωση (2.2.7), έχουμε το UCL_{RIU} είναι ίσο με 5.1298.

Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα του στατιστικού εύρους R_j έναντι του αριθμού των δειγμάτων. Από το διάγραμμα αυτό βλέπουμε ότι το πρώτο σήμα για εκτός ελέγχου κατάσταση δίνεται στο 7^ο δείγμα.

Πίνακας 2.8. Προσομοιωμένα δεδομένα.

Αριθμός j	Παρατηρήσεις					Εύρος R_j
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	1.04865	0.37045	-0.08643	-0.20035	1.04865	2.53737
2	0.11359	1.33821	-0.37597	0.15323	0.11359	2.09444
3	0.24556	1.59957	-0.03471	-1.90151	0.24556	3.50107
4	0.86025	0.34811	-0.98864	-1.06139	0.86025	2.19102
5	-1.04827	-1.16349	-0.84146	0.74067	-1.04827	1.92675
6	0.59560	0.98934	-2.67917	1.05589	0.59560	4.20004
7	1.81307	-1.00880	0.59077	-2.97713	1.81307	5.99198
8	2.88948	2.67832	4.21907	-2.60141	2.88948	6.95351
9	1.50793	0.74816	-1.47220	1.01903	1.50793	2.98013
10	-4.24962	-1.41642	-4.21524	1.71685	-4.24962	5.96647
11	0.00905	-3.03044	-0.15143	-0.04360	0.00905	3.74918
12	-4.64062	-1.11885	-2.29180	1.05806	-4.64062	7.45482
13	1.34137	3.02427	-3.80089	0.16632	1.34137	6.82516
14	-2.15016	1.90290	-1.05492	-1.65174	-2.15016	4.05305
15	-2.16605	2.31416	-2.13745	-0.67894	-2.16605	4.48022
16	0.99057	1.00114	-0.59597	0.00818	0.99057	1.59712
17	0.52110	-2.15650	3.79245	-3.16767	0.52110	6.96012
18	2.00368	-0.43282	-0.12352	-2.17931	2.00368	5.59669
19	0.05416	-1.05816	1.48981	2.86805	0.05416	3.92621
20	-0.64085	-1.98567	0.62887	-0.62655	-0.64085	2.91594



Σχήμα 2.2. Διάγραμμα *IRC*.

2.3 Βελτιωμένο διάγραμμα S

2.3.1 Λεπτομερής περιγραφή της κατανομής, κεντρικής γραμμής, ορίων ελέγχου και σταθερών για το βελτιωμένο διάγραμμα S

Για τον υπολογισμό του σ , στηριζόμαστε αυτή τη φορά στη δειγματική διασπορά μιας διαδικασίας:

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}. \quad (2.3.1)$$

Από τη θεωρία πιθανοτήτων έχουμε ότι:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2. \quad (2.3.2)$$

Έστω $W \sim \chi_{n-1}^2$. Το S έχει την ίδια κατανομή με το: $\sigma\sqrt{W}/\sqrt{n-1}$. Η συνάρτηση κατανομής της S για τις τυποποιημένες κανονικές μεταβλητές Z_1, Z_2, \dots, Z_n είναι:

$$\begin{aligned} H_S(s) &= P(S < s) \\ &= P\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{W} < s\right) \\ &= P(W < (n-1)s^2) \\ &= G_{\chi_{n-1}^2}\{(n-1)s^2\}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

όπου το $G(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της χ^2 με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Για ένα μονόπλευρο βελτιωμένο διάγραμμα S (*Improved S Chart – ISC*), το άνω όριο ελέγχου UCL_{SIU} μπορεί να εξαχθεί λύνοντας την ακόλουθη εξίσωση για s , και μας δίνει το B_U^* :

$$G_{\chi_{n-1}^2}\{(n-1)s^2\} = 1 - \alpha. \quad (2.3.4)$$

Αντίστοιχα, το κάτω όριο ελέγχου LCL_{sIL} μπορεί να εξαχθεί λύνοντας την εξίσωση για s και μας δίνει το B_L^* :

$$G_{\chi_{n-1}^2}((n-1)s^2) = \alpha. \quad (2.3.5)$$

Για ένα αμφίπλευρο διάγραμμα ISC , τα όρια ελέγχου UCL_{sIT} και LCL_{sIT} μπορούν να βρεθούν λύνοντας τις εξισώσεις (2.3.4) και (2.3.5) αντίστοιχα, αντικαθιστώντας το σφάλμα τύπου I με $\alpha/2$.

Τα άνω και κάτω όρια του μονόπλευρου διαγράμματος ISC υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$UCL_{sIU} = B_U^* \cdot \sigma \quad \text{και} \quad LCL_{sIL} = B_L^* \cdot \sigma. \quad (2.3.6)$$

Τα όρια του αμφίπλευρου διαγράμματος ISC υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$UCL_{sIT} = B_6^* \cdot \sigma \quad \text{και} \quad LCL_{sIT} = B_5^* \cdot \sigma. \quad (2.3.7)$$

Τα όρια του αναδρομικού αμφίπλευρου διαγράμματος ISC υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$UCL_{sIT} = B_4^* \cdot \bar{s} \quad \text{και} \quad LCL_{sIT} = B_3^* \cdot \bar{s}, \quad (2.3.8)$$

όπου οι σταθερές $B_3^* - B_6^*$, B_U^* και B_L^* , που αντιστοιχούν στα σφάλματα τύπου I για $\alpha = 0.0027$ και $\alpha = 0.005$, παρουσιάζονται στους Πίνακες 2.9 και 2.10, αντίστοιχα.

Πίνακας 2.9. Τιμές των LCL , UCL και $B_3^* - B_6^*$ για το ISC για $\alpha = 0.0027$.

n	B_U^*	B_L^*	B_6^*	B_5^*	B_3^*	B_4^*
2	2.9999	0.0033	3.2051	0.0017	0.0021	4.0167
3	2.4319	0.0520	2.5705	0.0368	0.0415	2.9005
4	2.1722	0.1256	2.2825	0.0995	0.1081	2.4775
5	2.0156	0.1941	2.1095	0.1626	0.1731	2.2440
6	1.9081	0.2520	1.9910	0.2182	0.2294	2.0925
7	1.8285	0.3003	1.9034	0.2656	0.2769	1.9839
8	1.7666	0.3410	1.8353	0.3062	0.3174	1.9019
9	1.7166	0.3756	1.7804	0.3411	0.3520	1.8368
10	1.6752	0.4054	1.7350	0.3714	0.3819	1.7837
11	1.6401	0.4314	1.6966	0.3980	0.4081	1.7394
12	1.6100	0.4543	1.6635	0.4215	0.4313	1.7016
13	1.5837	0.4746	1.6347	0.4425	0.4519	1.6691
14	1.5605	0.4929	1.6094	0.4614	0.4704	1.6406
15	1.5398	0.5094	1.5868	0.4785	0.4872	1.6154
20	1.4624	0.5730	1.5021	0.5449	0.5522	1.5220
25	1.4107	0.6169	1.4457	0.5910	0.5973	1.4609

Πίνακας 2.10. Τιμές των LCL , UCL και $B_3^* - B_6^*$ για το ISC για $\alpha = 0.005$.

n	B_U^*	B_L^*	B_6^*	B_5^*	B_3^*	B_4^*
2	2.8070	0.0062	3.0233	0.0031	0.0040	3.7892
3	2.3018	0.0707	2.4478	0.0500	0.0565	2.7621
4	2.0687	0.1546	2.1848	0.1224	0.1329	2.3715
5	1.9275	0.2274	2.0263	0.1903	0.2026	2.1557
6	1.8303	0.2869	1.9176	0.2480	0.2606	2.0153
7	1.7582	0.3355	1.8371	0.2962	0.3088	1.9148
8	1.7020	0.3759	1.7745	0.3369	0.3491	1.8389
9	1.6566	0.4099	1.7239	0.3715	0.3834	1.7785
10	1.6190	0.4390	1.6820	0.4014	0.4128	1.7293
11	1.5871	0.4643	1.6466	0.4275	0.4383	1.6881
12	1.5596	0.4864	1.6161	0.4505	0.4608	1.6531
13	1.5357	0.5061	1.5895	0.4709	0.4809	1.6230
14	1.5145	0.5236	1.5661	0.4893	0.4988	1.5964
15	1.4957	0.5394	1.5452	0.5058	0.5150	1.5730
20	1.4250	0.6001	1.4669	0.5697	0.5774	1.4865
25	1.3778	0.6418	1.4147	0.6139	0.6204	1.4297

2.3.2 Απόδοση του βελτιωμένου διαγράμματος S

Για να εκτιμήσουμε το προτεινόμενο διάγραμμα S χρησιμοποιούμε προσομοιώσεις με την ίδια λογική που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για το διάγραμμα R . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε και σε αυτή την περίπτωση ότι οι εντός ελέγχου παρατηρήσεις ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή, με μέγεθος μετατοπίσεων στη μεταβλητότητα μιας διεργασίας, δ , που ορίζεται ως: $\delta = \sigma/\sigma_0$. Όταν $\delta = 1.0$, η διεργασία είναι υπό στατιστικό έλεγχο. Όμοια με προηγούμενη παράγραφο, οι προσομοιώσεις που διεξάγονται βασίζονται σε 1,000,000 επαναλήψεις με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

(1) το εντός ελέγχου $ARL_0 = 370$,

(2) το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 5, 10, 20$ και

(3) οι τιμές του δ για ανοδικές μετατοπίσεις είναι: $\delta \in \{1.05, 1.1, 1.15, \dots, 3\}$ ενώ για καθοδικές μετατοπίσεις είναι: $\delta \in \{0.9, 0.8, 0.7, \dots, 0.1\}$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε το αμφίπλευρο διάγραμμα ISC για τον υπολογισμό του ARL , όπου αρχικά παράγουμε τα δεδομένα υπό διαφορετικές ρυθμίσεις βασιζόμενοι στο μέγεθος των μετατοπίσεων στη μεταβλητότητα της διεργασίας και το μέγεθος του δείγματος. Έπειτα, υπολογίζουμε τη δειγματική τυπική απόκλιση S_i από τη σχέση (2.3.1) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.3.7) υπολογίζουμε τα όρια ελέγχου για να δούμε αν τα S_i είναι μέσα στα όρια ή όχι. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία 1,000,000 φορές. Το ARL είναι το αντίστροφο του ποσοστού των φορών που το S_i είναι εκτός των ορίων. Τα όρια για το άνω, κάτω και αμφίπλευρο διάγραμμα ISC εξάγονται από τις εξισώσεις (2.3.6) και (2.3.7).

Στον Πίνακα 2.11 δίνονται οι τιμές των ARL για το διάγραμμα ISC , απ' όπου βλέπουμε ότι τα εντός ελέγχου ARL είναι γύρω στο 370. Οι τιμές των ARL μικραίνουν καθώς το μέγεθος της μετατόπισης αυξάνεται ή μειώνεται. Παρατηρούμε επίσης ότι με αυξημένο μέγεθος δείγματος, αυξάνεται επίσης και η ευαισθησία του διαγράμματος.

Πίνακας 2.11. Τιμές των ARL για το διάγραμμα ISC με $ARL_0 = 370$.

δ $= \sigma/\sigma_0$	$n = 5$			$n = 10$			$n = 20$		
	Upper sided	Lower sided	Two- sided	Upper sided	Lower sided	Two- sided	Upper sided	Lower sided	Two- sided
0.10		1.00	1.03		1.00	1.00		1.00	1.00
0.2		1.78	2.62		1.00	1.00		1.00	1.00
0.3		4.94	8.34		1.06	1.14		1.00	1.00
0.4		12.29	22.41		1.70	2.23		1.00	1.01
0.5		26.62	51.76		3.91	6.12		1.19	1.34
0.6		52.99	103.0		10.41	17.60		2.31	3.03
0.7		93.00	185.3		27.50	49.52		6.71	10.39
0.8		155.1	307.9		69.54	129.0		24.19	42.87
0.9		245.1	444.5		166.6	300.1		95.31	174.6
1.0	372.2	366.1	368.1	368.5	370.9	367.7	374.9	372.8	368.3
1.05	184.7		262.9	156.2		225.1	120.5		187.2
1.10	107.0		157.3	75.26		120.1	48.33		78.82
1.15	65.45		99.68	41.63		63.89	23.03		35.52
1.20	42.56		64.13	24.14		36.69	12.52		18.26
1.30	21.20		30.45	10.39		14.91	5.12		6.72
1.40	12.18		16.81	5.97		7.69	2.81		3.43
1.50	8.01		10.29	3.85		4.67	1.89		2.20
1.60	5.68		7.20	2.58		3.21	1.50		1.64
1.80	3.49		4.16	1.80		2.01	1.15		1.20
2.00	2.50		2.87	1.41		1.51	1.05		1.07
3.00	1.29		1.35	1.02		1.03	1.00		1.00

2.3.3 Αριθμητικό παράδειγμα

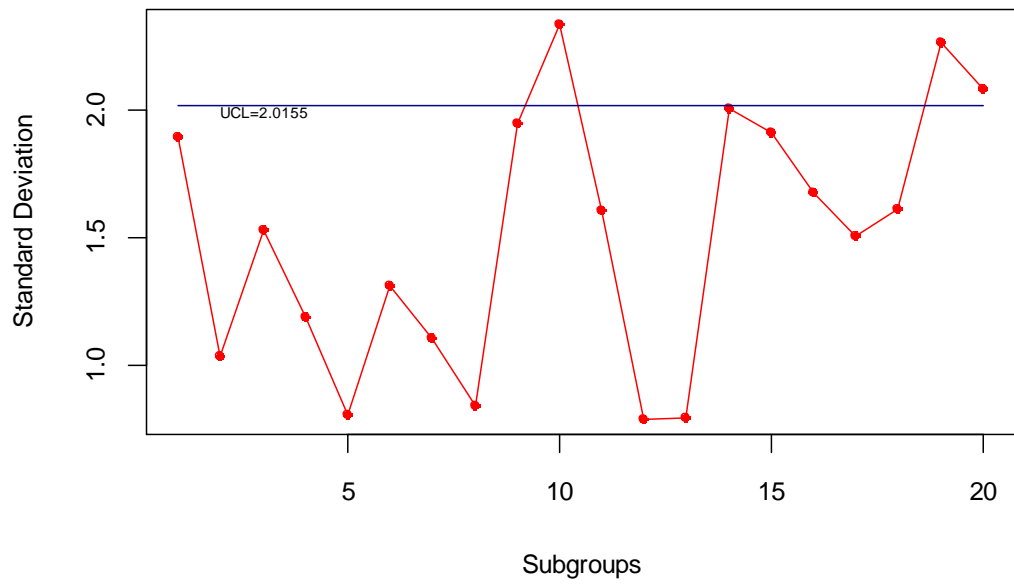
Στο παράδειγμα που ακολουθεί, περιγράφεται η χρήση του ISC στην πράξη. Προσομοιώνουμε 20 δείγματα μεγέθους 5, με τα πρώτα 5 δείγματα να είναι εντός ελέγχου, δηλαδή τα δεδομένα αντλούνται από την $N(0,1)$, και τα επόμενα 15 είναι εκτός ελέγχου. Για την εκτός ελέγχου περίπτωση, θεωρούμε το μέγεθος της μετατόπισης να είναι: $\delta = \sigma/\sigma_0 = 2$. Στον Πίνακα 2.12 δίνονται τα προσομοιωμένα δεδομένα X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 και οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις $S_j, j = 1, 2, \dots, 20$.

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε ένα μονόπλευρο διάγραμμα *ISC* για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας με $ARL_0 = 370$. Από την εξίσωση (2.3.6), έχουμε το UCL_{SIU} είναι ίσο με 2.0155.

Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα του στατιστικού εύρους S_j έναντι του αριθμού των δειγμάτων. Από το διάγραμμα αυτό βλέπουμε ότι το πρώτο σήμα για εκτός ελέγχου κατάσταση δίνεται στο 10^ο δείγμα.

Πίνακας 2.12. Προσομοιωμένα δεδομένα.

Αριθμός δείγματος	Παρατηρήσεις					Τυπική Απόκλιση
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_j
1	0.12992	2.64516	-2.23226	1.96670	0.56076	1.89035
2	-1.00921	0.53617	0.89289	0.66939	-1.32517	1.03637
3	-2.06494	1.38306	0.52147	-1.89940	0.17320	1.53090
4	-1.59364	0.62375	0.17309	1.60186	-0.40616	1.18931
5	-0.06993	0.29467	0.41862	0.26455	-1.52138	0.80254
6	2.15809	0.92133	0.70918	-0.14152	-1.36778	1.30967
7	0.64183	-1.13051	-1.90914	-1.87087	-1.91889	1.10226
8	1.59356	2.16773	1.04389	1.56072	-0.05999	0.83886
9	-0.93879	2.60396	1.39005	-2.02603	-1.19793	1.94476
10	2.64650	-1.92805	-2.23304	1.67974	-1.96589	2.33160
11	-2.06243	-3.01142	-1.44143	0.53766	0.62083	1.60744
12	0.02565	-1.65099	-1.55126	-0.23693	-1.37318	0.78932
13	1.71029	1.62464	0.53791	0.90367	2.59203	0.79531
14	-1.59986	-3.92959	0.32651	0.13598	1.06396	2.00335
15	3.92212	-0.70519	2.56649	0.55093	3.11930	1.91223
16	0.71668	-0.22410	-3.26507	-1.38311	0.68442	1.67303
17	2.00740	1.92588	-1.34383	-0.52219	-0.06916	1.50196
18	2.41730	0.11078	0.66490	-1.85945	-0.83095	1.61208
19	-2.49513	2.78177	-2.47755	-2.33289	-1.37692	2.26256
20	-2.25328	0.37938	0.09747	3.11036	-1.57173	2.08351



Σχήμα 2.3. Διάγραμμα ISC.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Διαγράμματα Ελέγχου Μνήμης για τον έλεγχο της διασποράς

3.1 Χρήση της FIR για βελτίωση των Διαγραμμάτων CUSUM για παρακολούθηση της διασποράς

3.1.1 Εισαγωγή

Τα διαγράμματα CUSUM εφαρμόστηκαν στο εύρος υποομάδων (R) από τον Page (1954) για την ανίχνευση μετατόπισης στη διασπορά μιας διεργασίας. Αργότερα, οι Turrah & Ncube (1987) σύγκριναν αυτή τη διεργασία με μια άλλη η οποία βασίζεται στη δειγματική τυπική απόκλιση (S). Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του ARL διαπίστωσαν ότι η διεργασία που βασίζεται στη δειγματική τυπική απόκλιση ανιχνεύει γρηγορότερα τις μετατοπίσεις από την τιμή – στόχο, δεδομένου ότι οι μεταβλητές της διεργασίας κατανέμονται κανονικά. Επιπλέον, το διάγραμμα EWMA που βασίζεται στο εύρος των υποομάδων προτάθηκε από τον Ng (1988), ενώ ο μετασχηματισμός του φυσικού λογάριθμου της διασποράς των υποομάδων εισήχθη στο μονόπλευρο EWMA για την παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας (cf. Crowder & Hamilton, 1992). Παρομοίως, τα μονόπλευρα και αμφίδρομα διαγράμματα CUSUM που βασίζονται στον λογαριθμικό μετασχηματισμό της διασποράς μιας διεργασίας για την παρακολούθηση μετατοπίσεων στη διασπορά προτάθηκαν από τους Chang & Gan (1995), και επίσης βελτίωσαν την απόδοση των διαγραμμάτων εισάγοντας τη γρήγορη αρχική απόκριση (*Fast Initial Response – FIR*). Η τεχνική/ιδιότητα (*feature*) FIR στο CUSUM αρχικά προτάθηκε από τον Lucas (1982) και αργότερα βελτιώθηκε από τον Steiner (1999) ώστε να μειωθεί η χρονική ποικιλότητα των ορίων των πρώτων παρατηρήσεων του δείγματος. Η τεχνική FIR βελτιώνει την απόδοση του διαγράμματος CUSUM αν υπάρχει μετατόπιση στην αρχή μιας διεργασίας (*start – up*) (cf. Hawkins & Olwell, 1998). Η απόδοση αυτής

της τεχνικής βελτιώθηκε αργότερα, με τη χρήση ενός μετασχηματισμού ισχύος (*power transformation*) σε σχέση με το χρόνο (cf. Haq, 2013).

Στην παράγραφο αυτή επικεντρωνόμαστε στη χρήση της *FIR* για τη βελτίωση της εργασίας των Acosta – Mejia et al. (1999), οι οποίοι παρακολούθησαν την αύξηση και τη μείωση της διασποράς μιας κανονικής διεργασίας χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα CUSUM βασισμένα στο μετασχηματισμό χ^2 (χ – CUSUM), στον μετασχηματισμό της αντίστροφης κανονικής (*inverse normal transformation*) (P_σ CUSUM) και στα CUSUM προερχόμενα από τον έλεγχο λόγου πιθανοφαιγιών για το σημείο αλλαγής κατάστασης μιας κανονικής διεργασίας (*CP CUSUM*).

3.1.2 Σωρευτικό Αθροιστικό Διάγραμμα για την παράμετρο της διασποράς

Το Σωρευτικό Αθροιστικό διάγραμμα για την παράμετρο της διασποράς είναι καλό για τον έγκαιρο εντοπισμό μικρών εκτροπών σε μια διεργασία. Μια από τις δομές αυτού του διαγράμματος είναι το τυποποιημένο αμφίπλευρο διάγραμμα CUSUM. Έστω ότι το \bar{X}_i είναι η i –οστή μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος μεγέθους n , οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και τυπική απόκλιση σ_0 . Ορίζουμε την τυποποιημένη τιμή της X_i :

$$Z_i = (\bar{X}_i - \mu_0) / (\sigma_0/\sqrt{n}). \quad (3.1.1)$$

Το τυποποιημένο αμφίπλευρο διάγραμμα *CUSUM* αποτελείται από τα άνω και κάτω συσσωρευτικά αθροίσματα όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max (0 , Z_i - k_1 + C_{i-1}^+) \\ C_i^- &= \max (0 , -Z_i - k_2 + C_{i-1}^-), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

όπου τα $C_i^-, C_i^+ > 0$, $C_0^+ = C_0^- = 0$ και τα k_1, k_2 είναι η άνω και κάτω, αντίστοιχα, τιμή αναφοράς τα οποία συνήθως συμβολίζονται με $k = k_1 = k_2$ όπου $k = \frac{1}{2} \frac{\delta \sigma_0}{\sqrt{n}}$,

δηλαδή τη θεωρούμε ως το μισό της μετατόπισης του μέσου (δ) που πρέπει να εντοπιστεί, μετρημένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Οι ποσότητες C_i^+, C_i^- που τοποθετούνται στο γράφημα, σχεδιάζονται ως προς τα όρια ελέγχου h_1, h_2 αντίστοιχα. Από τη διεργασία αυτή ανιχνεύεται μια προς τα πάνω ή προς τα κάτω τάση όταν $C_i^+ > h_1$ ή $C_i^- > h_2$, αντίστοιχα. Στις περισσότερες περιπτώσεις, τα όρια ελέγχου σχεδίασης μπορεί να είναι τα ίδια, δηλαδή $h_1 = h_2 = h$.

3.1.3 Το προτεινόμενο Διάγραμμα Ελέγχου Συσσωρευτικού Αθροίσματος για την διασπορά

Έστω $X_i \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ είναι η i -οστή παρατήρηση της μελέτης μεταβλητών σε μια διεργασία. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια διαταραχή στη μεταβλητότητα της διεργασίας, η κατανομή των X_i μετατρέπεται σε: $X_i \sim N(\mu_0, \lambda^2 \sigma_0^2)$, όπου το λ αναπαριστά μια μετατόπιση στην τυπική απόκλιση. Για $\lambda = 1$ σημαίνει ότι δεν υπάρχει μετατόπιση, για $\lambda > 1$ και $\lambda < 1$ θεωρείται ότι υπάρχει θετική και αρνητική μετατόπιση, αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας το εκτός ελέγχου ARL , όταν $\lambda \neq 0$, από το εντός ελέγχου ARL .

Έστω:

$$T_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma_0} \sim N(0, \lambda^2)$$

$$Z_i = \frac{T_i}{\lambda} = \frac{X_i - \mu_0}{\lambda \sigma_0} \sim N(0, 1) \quad (3.1.3)$$

$$\Rightarrow T_i = \lambda Z_i \quad \text{ή} \quad Z_i = \frac{T_i}{\lambda}.$$

Η δομή του CUSUM για τα T_i δίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
 S_0^+ &= S_0^- = 0 \\
 S_i^+ &= \max(0, T_i - k_1 + S_{i-1}^+) \\
 S_i^- &= \max(0, T_i - k_2 + S_{i-1}^-).
 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Σχεδιάζοντας το τυποποιημένο CUSUM για τα Z_i , παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 U_0^+ &= U_0^- = 0 \\
 U_i^+ &= \max\left(0, Z_i - \frac{k_1}{\lambda} + U_{i-1}^+\right) \\
 U_i^- &= \max\left(0, Z_i - \frac{k_2}{\lambda} + U_{i-1}^-\right).
 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.1.4) και (3.1.5), λαμβάνουμε ότι $S_i^+ = \lambda U_i^+$ και $S_i^- = \lambda U_i^-$. Συνεπώς, το $S_i^+ > h_1$ αν και μόνον αν $U_i^+ > \lambda h_1$ και $S_i^- > h_2$ αν και μόνον αν $U_i^- > \lambda h_2$. Το παραπάνω σημαίνει ότι:

- Το ARL του CUSUM S_i^+ (S_i^-) στο όριο ελέγχου h_1 (h_2) είναι αντίστοιχο με το ARL του CUSUM U_i^+ (U_i^-) στο όριο ελέγχου h_1/λ (h_2/λ).
- Τα CUSUM U_i^+ και U_i^- , είναι CUSUM της κανονικής, $N(0,1)$ χωρίς μετατοπίσεις (*standard unshifted*) με τιμές αναφοράς k_1/λ και k_2/λ , αντίστοιχα, και όρια ελέγχου h_1/λ και h_2/λ , αντίστοιχα.

Παρακάτω γίνεται μια μικρή εισαγωγή στα P_σ CUSUM, χ - CUSUM και CP CUSUM για τη διασπορά.

P_σ CUSUM: Έστω ότι με S_i^2 συμβολίζουμε τη μεταβλητότητα του X_i που ακολουθεί κανονική κατανομή με διασπορά σ^2 . Αφού εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό της αντίστροφης κανονικής στο S_i^2 και θεωρώντας ότι $\sigma = \sigma_0$, έχουμε ότι:

$$P_{\sigma i} = \phi^{-1} \left\{ F_{\chi_{n-1}}^2 \left[\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma_0^2} \right] \right\}, \tag{3.1.6}$$

όπου $P_\sigma \sim N(0, 1)$, το $\phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική κατανομή από μια τυπική κανονική κατανομή και το $F_{\chi_{n-1}}^2(\cdot)$ είναι η αθροιστική κατανομή από μια χ^2 κατανομή με $(n - 1)$ βαθμούς ελευθερίας. Η παρακολούθηση του μέσου του P_σ είναι αντίστοιχη με την παρακολούθηση της διασποράς του X_i . Επομένως, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το Z_i με το P_{σ_i} στην εξίσωση (3.1.2) για να παρακολουθήσουμε τη μεταβλητότητα μιας διεργασίας. Οι τιμές αναφοράς k_1, k_2 και τα όρια ελέγχου h_1, h_2 που καθορίζουν ένα συγκεκριμένο *ARL* μπορούν να αποκτηθούν μέσω μιας μεθόδου αναζήτησης ή προσομοίωσης.

$\chi - \text{CUSUM}$: Οι Wilsson & Hilferty (1931) απέδειξαν ότι:

$$\sqrt[3]{\frac{\chi_n^2}{n}} \sim N\left(\left(1 - \frac{2}{9n}\right), \frac{2}{9n}\right). \quad (3.1.7)$$

Για ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες από την $N(\mu, \sigma)$, όταν $\sigma = \sigma_0$, έχουμε:

$$\chi_i = \frac{\left(\left(\frac{S_i^2}{\sigma_0^2}\right)^{1/3} - \left(1 - \frac{2}{9(n-1)}\right)\right)}{\sqrt{\frac{2}{9(n-1)}}} \approx N(0,1). \quad (3.1.8)$$

Η παρακολούθηση του μέσου του χ_i είναι ισοδύναμη με την παρακολούθηση της μεταβλητότητας του X_i . Συνεπώς, αντικαθιστώντας το Z_i με το χ_i στην εξίσωση (3.1.2) δίνει το $\chi - \text{CUSUM}$. Τα h_1 και h_2 που καθορίζουν ένα συγκεκριμένο *ARL* μπορούν να βρεθούν από μια μέθοδο αναζήτησης ή προσομοίωση. Για τον προσδιορισμό των k_1 και k_2 , υποθέτουμε ότι $\sigma_1 > \sigma_0$ για άνω μετατοπίσεις και $\sigma_2 < \sigma_0$ για κάτω μετατοπίσεις, είναι η τυπική απόκλιση που πρόκειται να παρακολουθηθεί, τότε:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{2} \{E(\chi_i|\sigma_0) + E(\chi_i|\sigma_1)\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right)^{1/3} - 1 \right] \left[1 - \frac{2}{9(n-1)} \right]}{\sqrt{\frac{2}{9(n-1)}}} \right\} \quad (3.1.9)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
k_2 &= \frac{1}{2} \{E(-\chi_i|\sigma_0) + E(-\chi_i|\sigma_2)\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[1 - \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right)^{1/3} \right] \left[1 - \frac{2}{9(n-1)} \right]}{\sqrt{\frac{2}{9(n-1)}}} \right\}. \quad (3.1.10)
\end{aligned}$$

CP CUSUM: Το *CP CUSUM* προέρχεται από τον έλεγχο λόγου πιθανοφάνειας για το σημείο αλλαγής κατάστασης της μεταβλητότητας μιας κανονικής διεργασίας για την παρακολούθηση της διασποράς. Η δομή του δίνεται ως εξής:

$$C_0^+ = C_0^- = 0$$

$$C_i^+ = \max(0, Z_i^2 - nk_1 + C_{i-1}^+) \quad (3.1.11)$$

$$C_i^- = \max(0, -Z_i^2 + nk_2 + C_{i-1}^-),$$

όπου το $Z_i^2 = \sum_{m=1}^n Z_{im}^2$, με $Z_{im} = \frac{(X_{im} - \mu_0)}{\sigma_0}$ να αναπαριστά την m -οστή τυποποιημένη παρατήρηση στην i υποομάδα. Οι τιμές αναφοράς ορίζονται ως:

$$k_1 = \frac{\ln \lambda_1}{\left(1 - \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)\right)} \quad \text{και} \quad k_2 = \frac{\ln \lambda_2}{\left(1 - \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)\right)}, \quad (3.1.12)$$

όπου τα $\lambda_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ και $\lambda_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}$ είναι η σχετική αύξηση και μείωση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, αντίστοιχα.

Το P_σ CUSUM, το $\chi -$ CUSUM και το CP CUSUM έχουν αποδειχθεί από τους Acosta–Mejía et al. (1999) ότι ανιχνεύουν γρήγορα μετατοπίσεις στη μεταβλητότητα μιας διεργασίας. Αν υπάρχει κάποιο σημείο εκτός ελέγχου στην αρχή της διεργασίας, θα μπορούσε να ανιχνευθεί το συντομότερο, εισάγοντας κάποιο προβάδισμα (*head start*) στην κατασκευή του CUSUM.

Γρήγορη αρχική απόκριση (*Fast Initial Response*): Η ιδιότητα *FIR* CUSUM σχεδιάστηκε έτσι ώστε να δίνει ένα προβάδισμα (*head start*) στη διεργασία. Το προβάδισμα αυτό δίνει τη δυνατότητα στην κατασκευή του CUSUM να ξεκινήσει από ένα σημείο διαφορετικό από το συνηθισμένο σημείο - μηδέν. Η κατασκευή του CUSUM λειτουργεί συσσωρεύοντας μικρές αλλαγές μέχρι οι αλλαγές αυτές να μεγαλώσουν αρκετά ώστε να μπορούν να παρατηρηθούν. Η ιδιότητα *FIR* θα μπορούσε να επιτρέψει σε ένα διάγραμμα CUSUM να ανιχνεύσει το συντομότερο δυνατόν ένα σημείο που είναι εκτός ελέγχου αν υπάρχει μετατόπιση στην αρχή μιας διεργασίας και επομένως, μειώνει τον χρόνο αυτό. Για να διατηρηθεί το ίδιο εντός ελέγχου ARL (ARL_0) ενός διαγράμματος CUSUM, θα πρέπει να αυξηθεί κατά μια μικρή ποσότητα η τιμή h του αντίστοιχου *FIR* CUSUM. Κατά ειρωνεία της τύχης, το εκτός ελέγχου ARL (ARL_1) του *FIR* CUSUM θα ήταν λιγότερο από αυτό του αντίστοιχου διαγράμματος CUSUM. Στην εργασία των Lucas & Crosier (1982), το ARL_1 του *FIR* CUSUM είναι 30% - 40% μικρότερο από το αντίστοιχο ARL_1 του διαγράμματος CUSUM, στην παρακολούθηση της παραμέτρου θέσης. Χρησιμοποιώντας το συνιστώμενο προβάδισμα τους (50% προβάδισμα) και κάποια άλλα χαρακτηριστικά της *FIR* (25% και 75% προβάδισμα), δημιουργούμε το $C_0 = \frac{h}{4}, \frac{h}{2}$ και $h * \frac{3}{4}$ στην κατασκευή του CUSUM και επικεντρωνόμαστε στην κατασκευή του μονόπλευρου *FIR* CUSUM. Για σκοπούς σύγκρισης, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα του 50% προβαδίσματος.

3.1.4 Εκτίμηση απόδοσης και σύγκριση

Στην εργασία των Abujiya et al. (2015) χρησιμοποιήθηκαν διάφορα μέτρα απόδοσης, όπως το ARL , η τυπική απόκλιση του μήκους ροής ($SDRL$), η υπέρ-τετραγωνική απώλεια (*extra quadratic loss – EQL*), το σχετικό μέσο μήκος ροής

(*RARL*) και ο δείκτης σύγκρισης αποδόσεων (*PCI*), για τον προσδιορισμό και την επεξήγηση της αποδοτικότητας των προτεινόμενων διαγραμμάτων. Με τον ίδιο τρόπο, θεωρούμε την ίδια προσέγγιση εστιάζοντας στο 50% προβάδισμα για λόγους ευκολίας.

- Μέσο μήκος ροής (*Average Run Length – ARL*) είναι ο μέσος αριθμός των παρατηρούμενων δειγμάτων μέχρι την ανίχνευση του πρώτου σημείου εκτός ελέγχου στη διεργασία. Το ARL_0 αντιπροσωπεύει το *ARL* όταν δεν υπάρχει αλλαγή στην παράμετρο μιας διεργασίας (εντός ελέγχου) (παράμετρο διασποράς στην περίπτωση μας) ενώ το ARL_1 αναπαριστά το *ARL* όταν υπάρχει αλλαγή στην παράμετρο. Για μια αποδοτική παρακολούθηση των παραμέτρων ή της παραμέτρου είναι επιθυμητή μια υψηλή τιμή του ARL_0 αλλά χαμηλή για το ARL_1 (cf. Riaz et al., 2014).
- Τυπική απόκλιση του μήκους ροής (*Standard Deviation of the Run Length – SDRL*) είναι η τυπική απόκλιση του αριθμού των παρατηρούμενων δειγμάτων μέχρις ότου ένα δείγμα δώσει μια συνθήκη εκτός ελέγχου στη διεργασία. Συχνά χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του μέτρου απόδοσης ενός διαγράμματος και την ικανότητα του διαγράμματος να αντιδράσει σε μια αλλαγή στις παραμέτρους του (cf. Abbasi et al., 2012). Όσο πιο μικρό *SDRL* έχει ένα διάγραμμα, τόσο καλύτερη είναι η απόδοση του.
- Ποσοστημόρια (*Quantile*) : Τα 0.05, 0.25, 0.50, 0.75 και 0.95 ποσοστημόρια (σημειώνονται ως q_5 , q_{25} , q_{50} , q_{75} και q_{95}) υπολογίζονται για τον προσδιορισμό του μοτίβου της κατανομής του μήκους ροής μιας εντός ελέγχου διεργασίας.
- Επιπλέον, η υπέρ-τετραγωνική απώλεια (*Extra Quadratic Loss - EQL*) δίνει την αποδοτικότητα ενός διαγράμματος για το σύνολο των μετατοπίσεων που λαμβάνονται υπόψη σε μια διεργασία. Το πιο αποδοτικό διάγραμμα θεωρείται αυτό με το χαμηλότερο *EQL*. Για τον υπολογισμό του χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους με τον τύπο:

$$EQL = \frac{1}{\delta_{min} - \delta_{max}} \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} \delta^2 ARL(\delta) d\delta, \quad (3.1.13)$$

όπου το $ARL(\delta)$ είναι η τιμή του ARL για μια συγκεκριμένη μετατόπιση της τυπικής απόκλισης. Τα δ_{max} και δ_{min} είναι το άνω και κάτω όριο των μετατοπίσεων της τυπικής απόκλισης, αντίστοιχα.

- Το σχετικό μέσο μήκος ροής (*Relative Average Run Length – RARL*) δίνει τη συνολική αποτελεσματικότητα ενός διαγράμματος σε σχέση με ένα διάγραμμα αναφοράς. Ένα διάγραμμα αναφοράς είναι συνήθως το καλύτερο διάγραμμα (με το χαμηλότερο EQL) ή το αναφερόμενο διάγραμμα. Η τιμή του ARL χρησιμοποιείται για να προσδιορίσουμε πόσο κοντά είναι ένα διάγραμμα στο διάγραμμα αναφοράς. Το $RARL$ ισούται με ένα για το διάγραμμα αναφοράς και είναι μεγαλύτερο από ένα για το κατώτερο διάγραμμα (στο διάγραμμα αναφοράς) (cf. Zhao et al., 2005).

$$RARL = \frac{1}{\delta_{min} - \delta_{max}} \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} \frac{ARL(\delta)}{ARL_{bmk}(\delta)} d\delta. \quad (3.1.14)$$

- Ο δείκτης σύγκρισης αποδόσεων (*Performance Comparison Index - PCI*) είναι ο λόγος του EQL ενός διαγράμματος προς το EQL του διαγράμματος αναφοράς κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Το καλύτερο διάγραμμα (*benchmark chart*) έχει $PCI = 1$, ενώ το χειρότερο διάγραμμα, συγκρινόμενο με το διάγραμμα αναφοράς (*benchmark chart*), έχει την υψηλότερη τιμή PCI (cf. Ou et al., 2012).

$$PCI = \frac{EQL}{EQL_{bmk}}. \quad (3.1.15)$$

Πίνακας 3.1. SDRL και Ποσοστιαία σημεία των προτεινόμενων διαγραμμάτων για άνω τάσεις στο σ με $ARL = 200$.

% Αύξηση στο σ		0	10	20	30	40	50	100
SDRL	A	215.91	36.85	12.77	6.31	3.78	2.86	1.01
	B	211.20	36.69	12.59	6.15	3.71	2.78	1.20
	C	218.19	30.12	10.02	4.98	3.09	2.14	0.91
q5	A	4.4	2	2	1	1	1	1
	B	4.9	2.7	2	1	1	1	1
	C	5	2	1.5	1	1	1	1
q25	A	49.1	8	4	3	2	1	1
	B	46.5	8.9	4.5	3.2	2.8	2	1
	C	47	7	4	2.2	2	2	1
q50	A	136	23	8	5	4	3	2
	B	131.4	22.5	8	5	4	3	2
	C	133	18.5	7.6	4	3	3	1
q75	A	283	48.1	17.2	9	6	5	1.5
	B	278.5	49.5	17.5	9	6	5	2
	C	282	39.4	14	7.6	5	4	2
q95	A	628.03	110.01	39	20	13	9	4
	B	620.1	109.1	38	19.5	12	9	4
	C	625.1	88.2	29.5	16	10.5	7	3

$$A = P_{\sigma} \text{ CUSUM} + \text{FIR}, B = \chi - \text{CUSUM} + \text{FIR}, C = CP \text{ CUSUM} + \text{FIR}$$

Πίνακας 3.2. SDRL και Ποσοστιαία σημεία των προτεινόμενων διαγραμμάτων για κάτω τάσεις στο σ με $ARL = 200$.

Μετατόπιση		1	0.9	0.8	0.7	0.6
SDRL	A	214.10	35.19	8.31	3.05	1.53
	B	214.35	34.67	8.15	3.01	1.51
	C	214.05	30.36	6.81	2.19	0.95
q5	A	6.3	4.1	3	2	2
	B	6	4	3	2	2
	C	5	3	3	2	2
q25	A	48	10.3	5	4	3
	B	44	9	5	4	3
	C	48	8	4	3	3
q50	A	134	21	8	5	4
	B	132	22	8	5	4
	C	134	20	7	4	3
q75	A	285	47	14	7	5
	B	282	46	14	7	5
	C	284	42	11	6	4
q95	A	631	106	28	12	7
	B	629	106	27	12	7
	C	632	92	22	9	5

$$A = P_{\sigma} CUSUM + FIR, \quad B = \chi - CUSUM + FIR, \quad C = CP CUSUM + FIR$$

Πίνακας 3.3. EQL, RARL και PCI των προτεινόμενων διαγραμμάτων.

	Άνω μετατόπιση στο σ			Κάτω μετατόπιση στο σ		
	A	B	C	A	B	C
EQL	28.50427	28.23217	25.31232	28.24351	28.06285	26.76816
RARL	1.22344	1.218127	1	1.159091	1.141963	1
PCI	1.126103	1.115353	1	1.055116	1.048367	1

$$A = P_{\sigma} CUSUM + FIR, \quad B = \chi - CUSUM + FIR, \quad C = CP CUSUM + FIR$$

Οι τιμές αναφοράς (k) και τα σημεία των σχετικών διαγραμμάτων τυποποιούνται ώστε να είναι ανεξάρτητα από κάθε τιμή του σ_0 . Στο διάγραμμα S CUSUM, έχουμε:

$$C_i^+ = \max\left\{0, \left(\frac{S_i}{\sigma_0}\right) - k_1 + C_{i-1}^+\right\}, \quad (3.1.16)$$

για το άνω διάγραμμα, όπου $k_1 = c_4 \left\{1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)\right\} / 2$. Ομοίως, το άνω διάγραμμα του R CUSUM δίνεται από το παρακάτω:

$$C_i^+ = \max\left\{0, \left(\frac{R_i}{\sigma_0}\right) - k_1 + C_{i-1}^+\right\}, \quad (3.1.17)$$

όπου $k_1 = d_2 \left\{1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)\right\} / 2$.

Το μονόπλευρο διάγραμμα R CUSUM για την ανίχνευση μιας μείωσης στην τυπική απόκλιση δίνεται ως:

$$C_i^- = \max\left\{0, k - \left(\frac{R_i}{\sigma_0}\right) + C_{i-1}^-\right\}, \quad (3.1.18)$$

ενώ το μονόπλευρο διάγραμμα S CUSUM για την ανίχνευση μείωσης στην τυπική απόκλιση δίνεται από τον τύπο:

$$C_i^- = \max\left\{0, k - \left(\frac{S_i}{\sigma_0}\right) + C_{i-1}^-\right\}. \quad (3.1.19)$$

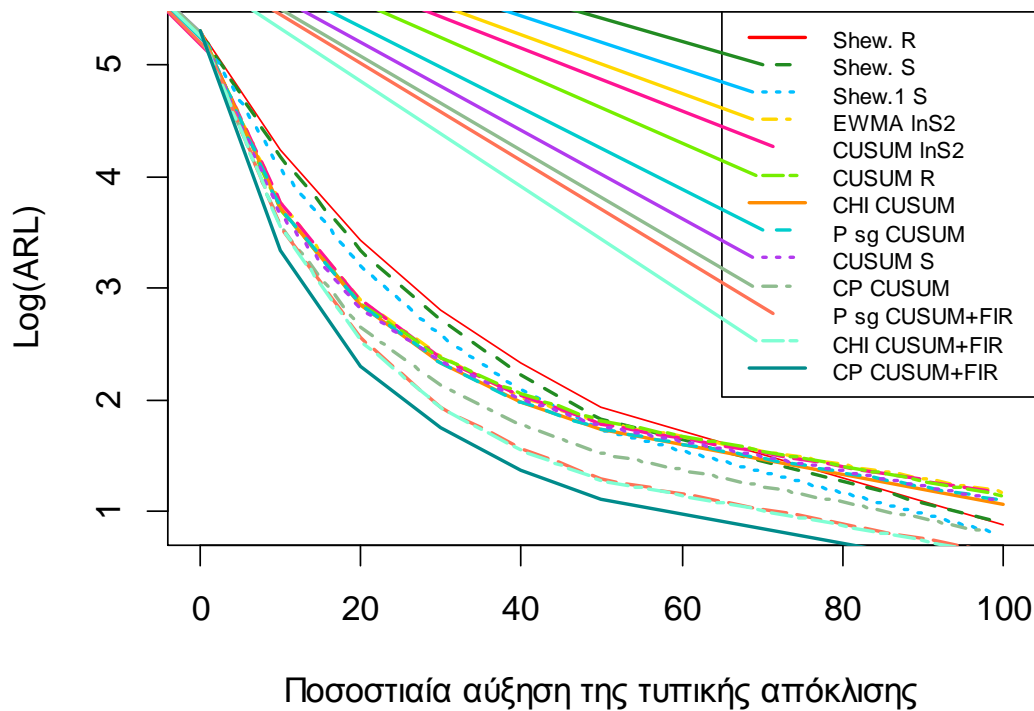
Χρησιμοποιώντας τα μέτρα που συζητήθηκαν, συγκρίνονται τα προτεινόμενα διαγράμματα με 50% προβάδισμα με τα ήδη υπάρχοντα διαγράμματα, για την ανίχνευση μετατοπίσεων στη διασπορά. Το μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM θεωρείται ότι έχει τιμή στόχο για το ARL το 200. Η μετατόπιση στη διασπορά λαμβάνεται υπόψη σχετικά με την ποσοστιαία μετατόπιση στην τυπική απόκλιση, ενώ ο μέσος θεωρείται σταθερός. Τα υπάρχοντα διαγράμματα που λαμβάνονται υπόψη είναι: τα διαγράμματα R και S του Shewhart, το διάγραμμα S Shewhart του Page (1963) με προειδοποιητικές γραμμές, το CUSUM για το εύρος R , το CUSUM για την τυπική απόκλιση S , το $EWMA$ για το $\ln S^2$ (cf. Crowder & Hamilton, 1992), το CUSUM για το $\ln S^2$ (cf. Chang & Gan, 1995), το P_σ CUSUM, το $\chi -$ CUSUM, CP CUSUM των Acosta – Mejia et al. (1999).

Στον Πίνακα 3.4 (μαζί με το Σχήμα 3.1) παρουσιάζονται οι τιμές των *ARL* από τη σύγκριση των διαγραμμάτων για την ανίχνευση αύξησης 20% στην τυπική απόκλιση, με υποομάδες μεγέθους 5. Τα διαγράμματα είναι διατεταγμένα κατά αύξουσα σειρά των αντίστοιχων αποδόσεών τους. Το διάγραμμα *S* Shewhart ενισχυμένο με βοηθητικές γραμμές αποδίδει καλύτερα από τα διαγράμματα *R* και *S* του Shewhart. Το διάγραμμα *EWMA lnS²* έχει καλύτερη απόδοση από τα διαγράμματα Shewhart στην ανίχνευση μιας αύξησης στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, αλλά το διάγραμμα *CUSUM lnS²* υπερισχύει. Όμως, τα διαγράμματα *R CUSUM*, $\chi - CUSUM$, $P_\sigma CUSUM$, *S CUSUM* και *CP CUSUM* υπερέχουν του *CUSUM lnS²*, αλλά αποδίδουν χειρότερα από το $P_\sigma CUSUM$ με *FIR*, $\chi - CUSUM$ με *FIR* και *CP CUSUM* με *FIR*.

Πίνακας 3.4. Σύγκριση των *ARL* των προτεινόμενων διαγραμμάτων για θετικές μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση.

Διαγράμματα διασποράς ($n = 5$)	Ποσοστιαία αύξηση στην τυπική απόκλιση						
	0	10	20	30	40	50	100
Shewhart <i>R</i> ($UCL = 4.88$)	200.12	68.78	30.72	16.53	10.20	6.94	2.39
Shewhart <i>S</i> ($UCL = 1.93$)	200.09	65.08	28.22	15.12	9.22	6.23	2.43
Shewhart ¹ <i>S</i> ($h_1 = 1.53, h_2 = 2.03$)	200.00	58.88	24.57	13.02	8.09	5.69	2.21
<i>EWMA lnS²</i> ($k = 1.06, \lambda = 0.05$)	200.00	43.00	18.10	11.00	7.60	6.00	3.20
<i>CUSUM lnS²</i> ($k = 0.068, h = 2.66$)	199.91	42.90	18.02	10.73	7.63	5.97	3.16
<i>CUSUM R</i> ($k = 2.56, h = 4.88$)	201.72	40.40	17.58	10.80	7.80	6.11	3.13
$\chi CUSUM$ ($k = 0.38, h = 4.28$)	200.69	41.01	17.15	10.20	7.21	5.66	2.90
$P_\sigma CUSUM$ ($k = 0.38, h = 4.28$)	201.09	41.10	17.18	10.20	7.25	5.64	2.98
<i>CUSUM S</i> ($k = 1.034, h = 1.90$)	200.58	38.78	16.86	10.36	7.50	5.84	3.00
<i>CP CUSUM</i> ($k = 1.193, h = 18.45$)	200.75	34.61	14.13	8.40	5.91	4.58	2.20
$P_\sigma CUSUM + FIR$ ($k = 0.38, h = 4.403$)	203.24	34.78	12.87	6.94	4.80	3.61	1.85
$\chi CUSUM + FIR$ ($k = 0.38, h = 4.398$)	198.26	34.64	12.58	6.91	4.75	3.60	1.83
<i>CP CUSUM + FIR</i> ($k = 1.193, h = 18.95$)	202.01	28.21	9.91	5.73	3.95	3.05	1.58

¹ Διάγραμμα Shewhart με κάτω προειδοποιητικά όρια $h_1 r$ και κάτω όριο δράσης $h_2 r$



Σχήμα 3.1. Γραφικές παραστάσεις των *ARL* των προτεινόμενων διαγραμμάτων από τα δεδομένα του Πίνακα 3.4 για ανοδικές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης.

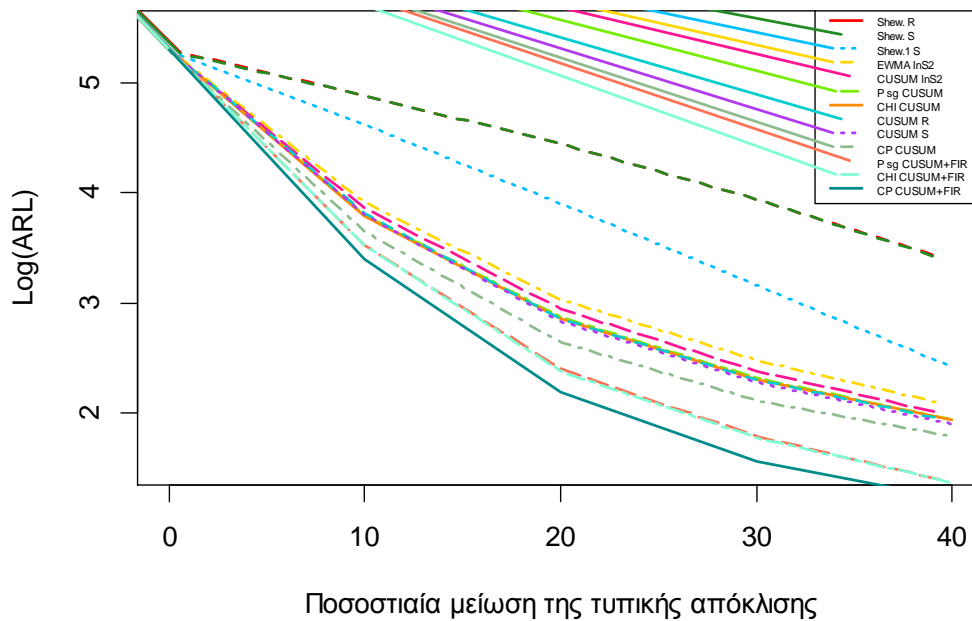
Στον Πίνακα 3.5 (και Σχήμα 3.2) δίνονται οι αποδόσεις *ARL* των διαγραμμάτων για την ανίχνευση μείωσης 20% στην τυπική απόκλιση της διεργασίας, με σταθερό *ARL* στα 200 και υποομάδες μεγέθους 5.

Το *R CUSUM* έχει ένα πλεονέκτημα έναντι των $\chi - CUSUM$ και $P_{\sigma} CUSUM$ στην ανίχνευση μιας μείωσης στο σ (αντίθετα με την ανίχνευση αύξησης στο σ). Τα $P_{\sigma} CUSUM$, $\chi - CUSUM$, *CUSUM R* και *S CUSUM* είναι συγκρίσιμα και παρουσιάζουν καλύτερη απόδοση από τα διαγράμματα Shewhart, το διάγραμμα *EWMA lnS²* και το διάγραμμα *CUSUM lnS²*, αλλά αποδίδουν χειρότερα σε σχέση με τα *CP CUSUM*, $P_{\sigma} CUSUM$ με *FIR*, $\chi - CUSUM$ με *FIR* και *CP CUSUM* με *FIR*. Συνεπώς, τα γραφήματα με την τεχνική της *FIR* έχουν την καλύτερα απόδοση, με το *CP CUSUM* με *FIR* να παρουσιάζει την καλύτερη συνολική απόδοση.

Πίνακας 3.5. Σύγκριση των *ARL* των προτεινόμενων διαγραμμάτων για αρνητικές μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση.

Διαγράμματα διασποράς ($n = 5$)	Ποσοστιαία μείωση στην τυπική απόκλιση				
	0	10	20	30	40
Shewhart R ($UCL = 0.55$)	200.21	133.58	85.36	51.74	29.42
Shewhart S ($UCL = 0.23$)	200.01	133.29	85.35	51.62	29.24
Shewhart ¹ S ($h_1 = 0.47, h_2 = 0.06$)	200.00	101.23	49.44	23.55	11.15
$EWMA \ln S^2$ ($k = 2.22, \lambda = 0.10$)	201.03	50.02	20.67	11.87	7.89
$CUSUM \ln S^2$ ($k = 0.43, h = 5.49$)	200.00	47.47	18.97	10.76	7.15
$P_\sigma CUSUM$ ($k = 0.23, h = 5.76$)	201.10	44.68	17.57	10.14	6.93
$\chi CUSUM$ ($k = 0.23, h = 5.75$)	201.15	44.34	17.40	10.04	6.91
$CUSUM R$ ($k = 2.093, h = 4.34$)	200.90	45.24	17.39	9.97	6.84
$CUSUM S$ ($k = 0.846, h = 1.70$)	200.14	44.59	17.03	9.71	6.69
$CP CUSUM$ ($k = 0.793, h = 11.66$)	199.68	38.35	14.12	8.24	5.98
$P_\sigma CUSUM + FIR$ ($k = 0.23, h = 6.085$)	201.31	34.05	11.02	5.93	3.94
$\chi CUSUM + FIR$ ($k = 0.23, h = 5.94$)	200.32	33.85	10.77	5.87	3.93
$CP CUSUM + FIR$ ($k = 0.793, h = 11.99$)	201.75	30.09	8.91	4.74	3.37

¹ Διάγραμμα Shewhart με κάτω προειδοποιητικά όρια $h_1 r$ και κάτω όρια δράσης $h_2 r$



Σχήμα 3.2. Γραφικές παραστάσεις των ARL των προτεινόμενων διαγραμμάτων από τα δεδομένα του Πίνακα 3.5 για καθοδικές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους Πίνακες 3.1 – 3.5 και στα Σχήματα 3.1 και 3.2 συνοψίζονται παρακάτω τα βασικά συμπεράσματα:

- i. Για $\lambda = 1$, δεν παρατηρείται σημαντική διαφορά ανάμεσα στα ARL και $SDRL$ των προτεινόμενων διαγραμμάτων (Πίνακες 3.1, 3.2, 3.4 και 3.5).
- ii. Για $\lambda \neq 1$, τα ARL και $SDRL$ των προτεινόμενων διαγραμμάτων μειώνονται ραγδαία (Πίνακες 3.1, 3.2, 3.4 και 3.5).
- iii. Η τεχνική FIR δεν βελτιώνει μονάχα την ικανότητα των διαγραμμάτων για την ανίχνευση μιας εκτός ελέγχου κατάστασης στην αρχή της διεργασίας, αλλά και την ικανότητα να ανιχνεύουν κάθε μετατόπιση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας (Πίνακες 3.4, 3.5 και Σχήματα 3.1 και 3.2).
- iv. Τα ποσοστιαία σημεία δείχνουν ότι η κατανομή του μήκους ροής των προτεινόμενων διαγραμμάτων παρουσιάζει θετική λοξότητα. (Πίνακες 3.1 και 3.2).
- v. Το 0.50 ποσοστημόριο (διάμεσος) του μήκους ροής είναι μικρότερο από το σταθερό ARL_0 των 200, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει 50% πιθανότητα της

διαμέσου να δώσει ψευδή ένδειξη (*false alarm*) στα πρώτα 134 δείγματα (περίπου) ενώ η ψευδή ένδειξη εμφανίζεται κατά μέσο όρο κάθε 200 δείγματα (Πίνακες 3.1 και 3.2).

- vi. Γενικά, τα μέτρα απόδοσης υποδεικνύουν σημαντική αύξηση στην αποδοτικότητα των προτεινόμενων διαγραμμάτων.
- vii. Το *CP CUSUM* με την τεχνική *FIR* είναι το πιο αποδοτικό διάγραμμα από τα προτεινόμενα στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων (αύξηση ή μείωση) στη διασπορά μιας διεργασίας.

3.2 Εύρωστα Διαγράμματα Ελέγχου CUSUM για την διασπορά

3.2.1 Εισαγωγή

Τα ευρέως γνωστά διαγράμματα ελέγχου σχεδιάζονται συνήθως υπό τις υποθέσεις της κανονικότητας και τα περιβάλλοντα χωρίς ακραία σημεία (*outlier free*) στο ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η κανονικότητα είναι κάτι περισσότερο από θεωρητική τιμή, και είναι γενικά δύσκολο να βρεθούν πρακτικές καταστάσεις όπου η υπόθεση κανονικότητας ικανοποιείται εύκολα. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν πολλές πρακτικές καταστάσεις όπου η μη-κανονικότητα είναι περισσότερο κοινή. Με βάση την εμπειρία, στα αποτελέσματα των διεργασιών περιστασιακά εμφανίζονται ακραία σημεία. Σε περίπτωση παραβίασης της υπόθεσης της κανονικότητας και της παρουσίας ακραίων σημείων, αυτά τα κοινώς χρησιμοποιημένα διαγράμματα χάνουν την αποτελεσματικότητα και ικανότητα απόδοσής τους και, ως εκ τούτου, τυγχάνουν λιγότερης πρακτικής χρήσης. Σε γενικές γραμμές, προτιμώνται τα εύρωστα διαγράμματα ελέγχου και είναι πιο χρηστικά πρακτικά όταν η δομή σχεδίασης δεν επηρεάζεται από την παραβίαση των προαναφερθέντων ιδεατών παραδοχών.

Η επιλογή των διαγραμμάτων ελέγχου που θα χρησιμοποιηθούν εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά που πρέπει να υπολογιστούν στη διεργασία και τι είδους ποσότητα της μετατόπισης πρέπει να καθοριστεί. Τα διαγράμματα ελέγχου κατατάσσονται σε δυο κατηγορίες, δηλαδή τα διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη και τα διαγράμματα

ελέγχου μνήμης. Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart χαρακτηρίζονται ως διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη, και το κύριο ελάττωμα τους είναι ότι είναι λιγότερο ευαίσθητα σε μικρές και μέτριες μετατοπίσεις στις παραμέτρους (θέση και διασπορά). Τα κοινώς χρησιμοποιούμενα διαγράμματα ελέγχου μνήμης, στην βιβλιογραφία, περιλαμβάνουν τα σωρευτικά αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου (CUSUM) (cf. Page, 1954) και τα διαγράμματα ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη (EWMA) (cf. Roberts, 1959). Αυτά τα διαγράμματα ελέγχου μνήμης σχεδιάζονται έτσι ώστε να χρησιμοποιούν τις προηγούμενες πληροφορίες μαζί με τις τρέχουσες, γεγονός που τα καθιστά πολύ ευαίσθητα σε μικρές και μέτριες μετατοπίσεις των παραμέτρων της διεργασίας.

Το σύστημα διαγραμμάτων ελέγχου κανονικά εφαρμόζεται σε δυο ξεχωριστά στάδια: Φάση I (αναδρομική φάση) και Φάση II (μελλοντική / αναμενόμενη φάση). Στη Φάση I, το κλειδί του προβληματισμού είναι να κατανοήσουμε τη διεργασία και να αποκτήσουμε σταθερότητα αυτής, διασφαλίζοντας ότι η διεργασία λειτουργεί προς τον επιδιωκόμενο στόχο υπό ορισμένες φυσικές αιτίες μεταβλητότητας. Η Φάση I, επίσης, περιλαμβάνει την εκτίμηση των παραμέτρων καθώς και τον καθορισμό ή την εκτίμηση των ορίων ελέγχου. Στη Φάση II, το διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση της διεργασίας κατά τη διάρκεια της παραγωγής ώστε να ανιχνευθούν αλλαγές που προκύπτουν στη διεργασία έτσι ώστε να μπορούν να παρθούν γρήγορα οι απαραίτητες διορθωτικές ενέργειες. Η Φάση II επικεντρώνεται στην απόδοση του ελέγχου, δηλαδή πόσο αποτελεσματικό είναι το διάγραμμα στην ανίχνευση αλλαγών. Οι Jensen et al. (2006) πρότειναν ότι απαιτούνται περισσότερα δεδομένα στη Φάση I απ' όσα συνιστώνται τυπικά για να επιτευχθεί μια απόδοση συγκρίσιμη με τις γνωστές περιπτώσεις παραμέτρων. Συγκεκριμένα, για το διάγραμμα CUSUM, ο αριθμός των πρωταρχικών (*preliminary*) δειγμάτων θα πρέπει να είναι σε κλίμακες εκατοντάδων παρά δωδεκάδων όπως χρησιμοποιούνταν στο διάγραμμα Shewhart (cf. Hawkins & Olwell, 1998). Για παράδειγμα, ο Quesenberry (1993) συνέστησε ότι τουλάχιστον 100 δείγματα μεγέθους 5 θα έπρεπε να χρησιμοποιούνται στη Φάση I για το διάγραμμα CUSUM. Αυτό συμβαίνει επειδή το διάγραμμα CUSUM είναι ευαίσθητο σε μικρές μετατοπίσεις και κάθε τυχαίο σφάλμα στην εκτιμημένη παράμετρο θα έχει την τάση να προκαλέσει εντός και εκτός ελέγχου αποκλίσεις στην απόδοση.

Διάφοροι συγγραφείς έχουν συνεισφέρει στην εφαρμογή εύρωστων εκτιμητριών για την παρακολούθηση της παραμέτρου διασποράς της διαδικασίας. Οι Langenberg & Iglewicz (1986) πρότειναν τον σταθμισμένο μέσο όρο του εύρους των υποομάδων για τον υπολογισμό της διασποράς μιας διαδικασίας. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (*Interquartile range – IQR*) προτάθηκε από τον Rocke (1989) ως μια εκτιμήτρια. Η τροποποιημένη b^2 A- εκτιμήτρια συστήθηκε από τον Tatum (1997). Οι DeMast & Roes (2004) χρησιμοποίησαν μια A- εκτιμήτρια για να κατασκευάσουν τα όρια ελέγχου για ένα μεμονωμένο διάγραμμα ελέγχου. Ο Omar (2008) πρότεινε τη χρήση των απολύτων αποκλίσεων του μέσου των διαμέσων των υποομάδων. Οι Abbasi & Miller (2012) πρότειναν ένα εύρωστο διάγραμμα EWMA Φάσης II βασισμένο στη μέση απόλυτη διασπορά από τη διάμεσο και αποδείχτηκε ότι το προτεινόμενο διάγραμμά τους είναι αποτελεσματικό και εύρωστο έναντι της παραβίασης της παραδοχής της κανονικότητας υπό τον περιορισμό ότι στη Φάση I διατίθεται ένα μεγάλο, καθαρό σύνολο δεδομένων. Δεν έλαβαν υπόψη την παρουσία μολύνσεων στη Φάση II. Οι Schoonhoven et al. (2011) μελέτησαν την αποτελεσματικότητα και ευρωστία διαφορετικών εκτιμητριών διασποράς στα διαγράμματα ελέγχου διασποράς τύπου Shewhart στη Φάση I και Φάση II υπό την κανονικότητα και περιπτώσεις όπου είναι παρούσες ειδικές αιτίες.

Τα CUSUM διαγράμματα ελέγχου έχουν λάβει μεγάλη προσοχή στη βιβλιογραφία του ελέγχου ποιότητας εξαιτίας της απλότητας και αποδοτικότητας τους. Αρχικά έχει χρησιμοποιηθεί ως ένα εργαλείο για την παρακολούθηση των επιπέδων του μέσου της διεργασίας. Οι θεωρητικές ιδιότητες του διαγράμματος CUSUM για την παρακολούθηση του μέσου της διεργασίας έχουν διερευνηθεί διεξοδικά. Αντιθέτως, το διάγραμμα CUSUM ως εργαλείο παρακολούθησης της μεταβλητότητας της διεργασίας έχει λάβει λιγότερη προσοχή και διερεύνηση. Μερικές δημοσιευμένες ιδιότητες προτάθηκαν από τους Page (1963), Chang & Gan (1995), Hawkins & Olwell (1998), Acosta – Mejia (1998), Acosta – Mejia et al. (1999) και Acosta – Mejia & Pignatiello (2000). Να σημειωθεί ότι το αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου EWMA είναι το αντικείμενο ενός διδακτορικού θέματος στο Πανεπιστήμιο του Αμστερνταμ.

3.2.2 Περιγραφή των εκτιμητριών της διασποράς της διαδικασίας

Υποθέτουμε ότι το θ είναι η παράμετρος διασποράς, η οποία πρέπει να παρακολουθηθεί μέσω των διαγραμμάτων ελέγχου, και το $\hat{\theta}$ είναι η εκτιμήτριά του βασισμένη σε ένα δείγμα μεγέθους n . Υπάρχουν πολλές επιλογές για το $\hat{\theta}$. Ο David (1998) παρέχει ένα σύντομο ιστορικό των εκτιμητριών τυπικής απόκλισης. Οι παραδοσιακές εκτιμήτριες είναι η ομαδοποιημένη δειγματική τυπική απόκλιση (*pooled sample*), η μέση τιμή των δειγματικών τυπικών αποκλίσεων και η μέση τιμή των δειγματικών εύρων. Οι Mahmoud et al. (2010) μελέτησαν τις σχετικές αποδόσεις αυτών των εκτιμητριών για διαφορετικά μεγέθη δειγμάτων n και πλήθους δειγμάτων k . Οι Schoonhoven et al. (2011) έλαβαν υπόψη διαφορετικές εκτιμήτριες της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού και παρείχαν μια συνολική ανάλυση στην αποτελεσματικότητα και χρήση τους σε διαγράμματα ελέγχου για διαφορετικές φάσεις.

Κατά την απόκτηση των εκτιμητριών της παραμέτρου διασποράς του πληθυσμού, θα δούμε πιο σφαιρικά κάποιες από τις εκτιμήτριες που συζητήθηκαν στους Schoonhoven et al. (2011) καθώς και κάποιες άλλες εύρωστες εκτιμήτριες που δεν είναι συνήθεις στη βιβλιογραφία των διαγραμμάτων ελέγχου.

Η πρώτη εκτιμήτρια της διασποράς θ (η οποία θα χρησιμοποιηθεί επίσης ως μια εκτιμήτρια αναφοράς στη συνέχεια) είναι η δειγματική τυπική απόκλιση S , η οποία ορίζεται ως:

$$S = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^{1/2}. \quad (3.2.1)$$

όπου το X_i αντιστοιχεί στην i -οστή παρατήρηση ενός δείγματος μεγέθους n και το \bar{X} αναπαριστά την αντίστοιχη μέση τιμή του δείγματος. Η δειγματική τυπική απόκλιση S είναι η πιο αποτελεσματική εκτιμήτρια σε κανονικά κατανομημένα περιβάλλοντα, αλλά οι έρευνες έχουν δείξει ότι επηρεάζεται πολύ από την παρουσία ακραίων σημείων και ειδικών αιτιών. Το σημείο διακοπής (*breakdown point*) (το ποσοστό των απομακρυσμένων παρατηρήσεων που μπορεί να αντιμετωπίσει μια εκτιμήτρια) της δειγματικής τυπικής απόκλισης είναι μηδέν.

Η επόμενη εκτιμήτρια βασίζεται στο δειγματικό IQR και ορίζεται ως $IQR = \frac{Q_3 - Q_1}{1.34898}$, όπου τα Q_3 και Q_1 είναι το τρίτο και πρώτο τεταρτημόριο του δείγματος, αντίστοιχα. Από τον Riaz (2008) μπορούμε να δούμε διαφορετικές ιδιότητες του δειγματικού IQR που σχετίζεται με την αποτελεσματικότητα. Το δειγματικό IQR είναι πιο εύρωστο στις παρεκκλίσεις από την κανονικότητα και τα ακραία σημεία από τη δειγματική τυπική απόκλιση. Το σημείο διακοπής του IQR είναι 25%.

Επίσης, λαμβάνεται υπόψη μια εκτιμήτρια που προτάθηκε από τον Gini (1912), η οποία είναι γνωστή ως μέσες διαφορές του Gini G και ορίζεται ως εξής:

$$G = \frac{4}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-n-1}{2n} \right) X_{(i)}, \quad (3.2.2)$$

όπου το $X_{(i)}$ είναι η i -οστή διατεταγμένη παρατήρηση του δείγματος. Η εκτιμήτρια του Gini είναι εξαιρετικά αποτελεσματική και πιο εύρωστη στα ακραία σημεία από τις εκτιμήτριες που βασίζονται στο εύρος και την τυπική απόκλιση.

Δυο παρόμοιες εκτιμήτριες που ονομάζονται: εκτιμήτρια του Downton που δίνεται από τη σχέση:

$$D = \frac{2\sqrt{\pi}}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{n+1}{2} \right) X_{(i)} \quad (3.2.3)$$

και η εκτιμήτρια που βασίζεται σε πιθανοτικά – σταθμισμένες ροπές:

$$S_{pw} = \frac{\sqrt{\pi}}{n^2} \sum_{i=1}^n (2i-n-1) X_{(i)}, \quad (3.2.4)$$

που χρησιμοποιούνται από τους Khoo (2004) και Muhammad & Riaz (2006), αντίστοιχα, με τη δομή ελέγχου των διαγραμμάτων του Shewhart. Οι ιδιότητες αυτών των εκτιμητριών φαίνονται παρόμοιες με την εκτιμήτρια του Gini επειδή οι τρεις εκτιμήτριες είναι ανάλογες μεταξύ τους.

Επίσης λαμβάνουμε υπόψη μια εύρωστη εκτιμήτρια που προτάθηκε από τον Hampel (1974). Η εύρωστη εκτιμήτριά του βασίζεται στη διάμεσο των απολύτων αποκλίσεων από τη διάμεσο που ορίζεται ως:

$$MADM = 1.4826 * \text{median}|X_i - \tilde{X}|, \quad (3.2.5)$$

όπου το \tilde{X} είναι η δειγματική διάμεσος. Αυτή η εκτιμήτρια είναι πολύ εύρωστη προς τα ακραία σημεία, αλλά η αποτελεσματικότητά της υπό την κανονικότητα είναι πολύ χαμηλή (δηλαδή μόλις 37%).

Υπάρχουν μερικές ακόμα εκτιμήτριες που βασίζονται στις απόλυτες αποκλίσεις, που είναι, η μέση τιμή των απολύτων αποκλίσεων από τη μέση τιμή ($MD = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|}{n}$), η διάμεσος των απολύτων αποκλίσεων από τη μέση τιμή ($MAD = \text{median}|X_i - \bar{X}|$), και η μέση τιμή των απολύτων αποκλίσεων από τη διάμεσο ($AADM = \sum_{i=1}^n |X_i - \tilde{X}| / n$). Οι Wu et al. (2002) απέδειξαν ότι η εκτιμήτρια $MADM$ αποδίδει καλύτερα, συγκρινόμενη με τις άλλες τρεις εκτιμήτριες στη βάση των απολύτων αποκλίσεων, στην περίπτωση των νοθευμένων (*contaminated*) περιβαλλόντων. Το σημείο διακοπής της εκτιμήτριας $MADM$ είναι στο 50%. Η ευαισθησία μικτού σφάλματος (*gross error sensitivity*) (το οποίο μετράει τη χειρότερη επιρροή στην τιμή της εκτιμήτριας που μπορεί να έχει μια μικρή ποσότητα νόθευσης σταθερού μεγέθους) της $MADM$ είναι ίσο με 1.167, το οποίο είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να αποκτηθεί για κάθε εκτιμήτρια κλίμακας στην περίπτωση της κανονικής κατανομής.

Οι Rousseeuw & Croux (1993) πρότειναν διαφορετικές εύρωστες εκτιμήτριες της παραμέτρου διασποράς θ του πληθυσμού, οι οποίες είναι εξαιρετικά εύρωστες ενάντια στα ακραία σημεία και οι αποδόσεις τους υπό την κανονικότητα είναι υψηλότερες συγκρινόμενες με την εκτιμήτρια που προτάθηκε από τον Hampel (1974). Μια από τις εκτιμήτριες των Rousseeuw & Croux (1993) ορίζεται ως:

$$T_n = 1.38 * \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \{\text{median}|X_i - X_l|; i \neq l\}_{(k)}. \quad (3.2.6)$$

Η παραπάνω σχέση ορίζεται ως εξής: για κάθε i , υπολογίζουμε τη διάμεσό του $|X_i - X_l|, l = 1, 2, \dots, n$. Αυτό αποδίδει n τιμές, ο μέσος όρος των πρώτων h διατεταγμένων στατιστικών δίνει την τελική εκτίμηση της T_n , όπου το $h = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, η οποία είναι περίπου το μισό του αριθμού των παρατηρήσεων (το σύμβολο $\lfloor \cdot \rfloor$ αναπαριστά το ακέραιο μέρος ενός κλάσματος). Οι Rousseeuw & Croux (1993), πρότειναν επίσης δυο άλλες εύρωστες εκτιμήτριες (παρόμοιες της T_n), που είναι:

$$S_n = 1.1926 * \text{median}_i \{ \text{median}_l |X_i - X_l|; i \neq l \} \quad (3.2.7)$$

και

$$Q_n = 2.2219 * \{ |X_i - X_l|; i < l \}_{(p)}, \quad (3.2.8)$$

με $p = \frac{h!}{2!(h-2)!}$. Το σημείο διακοπής της εκτιμήτριας T_n είναι το 50%. Η T_n είναι πολύ εύρωστη ενάντια στα ακραία σημεία, και η αποτελεσματικότητά της υπό την κανονικότητα είναι 52%. Η ευαισθησία μικτού σφάλματος της T_n είναι 1.4688. Ο λόγος επιλογής της T_n είναι η χαμηλή ευαισθησία μικτού σφάλματός της σε σύγκριση με τις S_n και Q_n .

Υπολογίζεται επίσης μια εκτιμήτρια της παραμέτρου διασποράς του πληθυσμού που αναφέρθηκε από τους Shamos (1976) και Bickel & Lehmann (1979). Η εκτιμήτρια αυτή αποκτάται με την αντικατάσταση των κατά ζεύγη μέσων όρων από τις κατά ζεύγη αποστάσεις και ορίζεται ως:

$$B_n = 1.0483 * \text{median} \{ |X_i - X_l|; i < l \}. \quad (3.2.9)$$

Αυτή η εύρωστη εκτιμήτρια έχει απόδοση 86% υπό την κανονικότητα, αλλά είναι λιγότερο εύρωστη σε σύγκριση με τις εκτιμήτριες που προτάθηκαν από τους Rousseeuw & Croux (1993) και το σημείο διακοπής της είναι μόλις 29%.

Η τελευταία εκτιμήτρια που μελετάμε βασίζεται στις διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις ορισμένων υποκατηγοριών που προτάθηκαν από τους Croux & Rousseeuw (1992) έχοντας σημείο διακοπής στο 50% και ορίζεται ως:

$$S_r = 1.4826 * |X_{(i+[0.25n]+1)} - X_{(i)}|_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]-[0.25n]\right)}. \quad (3.2.10)$$

Η S_r είναι μια πολύ εύρωστη εκτιμήτρια στην παρουσία ακραίων σημείων, και στους Croux & Rousseeuw (1992) μπορούν να βρεθούν διάφορα χαρακτηριστικά της. Η απόδοση της υπό την κανονικότητα είναι μόλις 37%, όμως είναι περισσότερο αποτελεσματική από τη *MADM* για μικρά δείγματα.

Στους Rousseeuw & Croux (1993), David (1998), Mahmoud et al. (2010), Schoonhoven et al. (2011) και Abbasi & Miller (2012) βλέπουμε περαιτέρω περιγραφή και διαφορετικές ιδιότητες (π.χ. απόδοση και ευρωστία) αυτών των εκτιμητριών.

Αναμένεται ότι ορισμένες εύρωστες εκτιμήτριες αποδίδουν καλά σε ένα μη νοθευμένο (*uncontaminated*) περιβάλλον όπως και στην παρουσία ακραίων σημείων και υπό περιβάλλοντα ειδικών αιτιών όπως ο στόχος τέτοιων εύρωστων εκτιμητριών είναι να υπολογιστεί η παράμετρος διασποράς του πληθυσμού αποτελεσματικά και να παράσχει ανοχή έναντι ακραίων σημείων και περιβαλλόντων ειδικών αιτιών.

3.2.2.1 Αποτελεσματικότητα των εκτιμητριών

Για λόγους σύγκρισης καθώς και για τον υπολογισμό της ακρίβειας των εκτιμητριών διασποράς που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή την παράγραφο, υπολογίζονται οι κανονικοποιημένες διασπορές (*SV- Standardized Variances*) των εκτιμητριών όπως προτάθηκαν από τους Rousseeuw & Croux (1993) και οι σχετικές αποδόσεις των εκτιμητριών όπως χρησιμοποίησαν οι Abbasi & Miller (2012). Η κανονικοποιημένη διασπορά της εκτιμήτριας $\hat{\theta}$, υπολογίζεται ως:

$$SV_{\hat{\theta}} = \frac{nVAR(\hat{\theta})}{[E(\hat{\theta})]^2}. \quad (3.2.11)$$

Ο παρονομαστής της $SV_{\hat{\theta}}$ χρειάζεται για να αποκτηθεί ένα φυσικό μέτρο ακρίβειας της εκτιμήτριας της παραμέτρου κλίμακας (cf. Bickel & Lehmann, 1976). Η σχετική απόδοση (*RE- Relative Efficiency*) της εκτιμήτριας υπολογίζεται ως εξής:

$$RE_{\hat{\theta}} = \frac{\min(SV_{\hat{\theta}})}{SV_{\hat{\theta}}} \times 100, \quad (3.2.12)$$

όπου το $\min(SV_{\hat{\theta}})$ αναπαριστά την ελάχιστη κανονικοποιημένη διασπορά, από όλες τις επιλογές των εκτιμητριών $\hat{\theta}$.

Οι SV και RE υπολογίζονται παράγοντας 10^5 δείγματα μεγέθους $n = 4, 5$ και 9 κάτω από τα ακόλουθα περιβάλλοντα: μη νοθευμένη κανονική κατανομή, νοθευμένη κανονική, Γάμμα, t του Student και λογιστική κατανομή. Η περιγραφή αυτών των κατανομών δίνεται παρακάτω. Οι τιμές των SV δίνονται στον Πίνακα 3.6 και οι τιμές των RE στον Πίνακα 3.7.

Πίνακας 3.6. SV των εκτιμητριών διασποράς υπό διαφορετικά περιβάλλοντα.

Περιβάλλοντα	Μέγεθος	Εκτιμήτριες						
		G	IQR	S	$MADM$	B_n	T_n	S_r
N(0,1)	4	0.7231	0.7247	0.7141	1.3067	0.7732	1.2800	1.3030
	5	0.6700	0.7029	0.6642	1.7130	0.8941	1.0230	1.6475
	9	0.5911	0.9228	0.5787	1.5335	0.7372	1.0663	1.3495
1%CNormal	4	0.8123	0.8233	0.8217	1.3334	0.8639	1.3095	1.3360
	5	0.7772	0.7872	0.7913	1.7375	0.9431	1.0597	1.6753
	9	0.6898	0.9278	0.7718	1.6441	0.8947	1.1094	1.3475
5%CNormal	4	1.1095	1.0929	1.1693	1.4798	1.1296	1.4224	1.4248
	5	1.0514	1.0152	1.1706	1.9132	1.0842	1.2502	1.7875
	9	0.9937	1.2628	1.3316	1.9575	0.8904	1.3425	1.7704
10%CNormal	4	1.3050	1.2076	1.4117	1.6253	1.2877	1.5873	1.6231
	5	1.2618	1.1881	1.3916	2.0849	1.2542	1.4259	2.0734
	9	1.1908	1.4627	1.8695	2.2486	1.3396	1.6735	2.0230
G(1,1)	4	1.5687	1.5609	1.6780	2.2637	1.6059	2.3068	2.2586
	5	1.5039	1.4757	1.6704	2.6112	1.8681	1.8466	2.5361
	9	1.4141	1.7209	1.7095	2.3798	1.6196	1.9879	2.2464
T_4	4	1.3584	1.3524	1.4544	1.6027	1.3685	1.5782	1.6075
	5	1.2865	1.1210	1.4407	2.0250	1.2694	1.3167	1.9643
	9	1.2497	1.2111	1.6094	1.7984	1.1010	1.3291	1.6309
Logistic(0,1)	4	0.8960	0.8960	0.9040	1.4356	0.9102	1.3847	1.4320
	5	0.8621	0.8649	0.8728	1.8771	1.0402	1.1574	1.8221
	9	0.7764	1.0525	0.8137	1.6792	0.9040	1.1990	1.4974

Στον Πίνακα 3.6, για παράδειγμα, υπό την μη νοθευμένη κανονική κατανομή η εκτιμήτρια διασποράς S έχει τη χαμηλότερη SV όπως αναμενόταν και η $MADM$ έχει

την υψηλότερη. Η απόδοση των υπολοίπων εκτιμητριών είναι ανάμεσα στις τιμές αυτών των δύο (S και $MADM$). Υπό τα 5% και 10% συμμετρικής διασποράς νοθευμένα κανονικά μοντέλα, η B_n έχει τη χαμηλότερη SV και για μικρή 1% νόθευση, η G λαμβάνει τη χαμηλότερη SV . Για τα περισσότερα μη κανονικά περιβάλλοντα, οι G και IQR είναι πιο αποτελεσματικές εκτιμήτριες σε σύγκριση με άλλες εκτιμήτριες. Η εκτιμήτρια διασποράς S επηρεάζεται εξαιρετικά από νοθεύσεις και μη-κανονικά περιβάλλοντα.

Πίνακας 3.7. RE των εκτιμητριών διασποράς υπό διαφορετικά περιβάλλοντα.

Περιβάλλοντα	Μέγεθος	Εκτιμήτριες						
		G	IQR	S	MADM	B_n	T_n	S_r
N(0,1)	4	98.7554	98.5373	100.0000	54.6491	92.3564	55.7891	54.8043
	5	99.1343	94.4942	100.0000	38.7741	74.2870	64.9267	40.3156
	9	97.9022	62.7113	100.0000	37.7372	78.4997	54.2718	42.8825
1%CNORMAL	4	100.0000	98.6639	98.8560	60.9195	94.0271	62.0313	60.8009
	5	100.0000	98.7297	98.2181	44.7309	82.4091	73.3415	46.3917
	9	100.0000	74.3479	89.3755	41.9561	77.0985	62.1778	51.1911
5%CNORMAL	4	98.5038	100.0000	93.4662	73.8546	96.7511	76.8349	76.7055
	5	96.5570	100.0000	86.7248	53.0629	93.6359	81.2030	56.7944
	9	89.6045	70.5100	66.8669	45.4866	100.0000	66.3240	50.2937
10%CNORMAL	4	92.5364	100.0000	85.5423	74.3001	93.7796	76.0789	74.4008
	5	94.1591	100.0000	85.3765	56.9859	94.7297	83.3228	57.3020
	9	100.0000	81.4111	63.6962	52.9574	88.8922	71.1563	58.8631
G(1,1)	4	99.5028	100.0000	93.0215	68.9535	97.1978	67.6652	69.1092
	5	98.1249	100.0000	88.3441	56.5142	78.9947	79.9144	58.1878
	9	100.0000	82.1721	82.7201	59.4210	87.3117	71.1354	62.9496
T_4	4	99.5583	100.0000	92.9868	84.3826	98.8235	85.6926	84.1306
	5	87.1356	100.0000	77.8094	55.3580	88.3094	85.1371	57.0687
	9	88.1011	90.9091	68.4106	61.2211	100.0000	82.8380	67.5087
Logistic(0,1)	4	100.0000	100.0000	99.1150	62.4129	98.4399	64.7072	62.5698
	5	100.0000	99.6763	98.7741	45.9272	82.8783	74.4859	47.3135
	9	100.0000	73.7672	95.4160	46.2363	85.8850	64.7540	51.8499

3.2.3 Τα προτεινόμενα διαγράμματα CUSUM για την διασπορά

Για τις διαδικασίες σχετικά με το διάγραμμα CUSUM, υποθέτουμε ότι θέλουμε να ανιχνεύσουμε μια αύξηση στην παράμετρο διασποράς θ της διεργασίας. Έστω ότι το $\hat{\theta}$ είναι η εκτιμήτρια της παραμέτρου διασποράς θ , που αναφέραμε προηγουμένως, από ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n , το οποίο λαμβάνεται από μια συνεχή γραμμή παραγωγής σε τακτά χρονικά διαστήματα. Ο κανόνας για τα διαγράμματα $\hat{\theta}$ -CUSUM είναι ο ακόλουθος:

$$Z_t = \max[0, (\hat{\theta} - K_{\hat{\theta}}) + Z_{t-1}], \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.13)$$

όπου $Z_0 = 0$ σύμφωνα με τους Turyah & Ncube (1987) και το $K_{\hat{\theta}}$ είναι η τιμή αναφοράς για το διάγραμμα. Έπειτα, σχεδιάζονται τα Z_t ως προς τον αριθμό t του δείγματος. Αν $Z_t > H_{\hat{\theta}}$ (όπου το $H_{\hat{\theta}}$ είναι το διάστημα απόφασης) για κάθε τιμή του t , η διαδικασία κρίνεται ότι είναι εκτός ελέγχου και συμπεραίνεται ότι η διασπορά της διαδικασίας έχει αυξηθεί. Ο αριθμός του δείγματος στον οποίο το $Z_t > H_{\hat{\theta}}$ είναι το μήκος ροής της διαδικασίας, και το ARL του διαγράμματος είναι το μέσο μήκος ροής της τυχαίας μεταβλητής.

Οι τιμές του $K_{\hat{\theta}}$ επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να ανιχνεύεται γρήγορα μια μετατόπιση στην παράμετρο διασποράς της διεργασίας. Οι τιμές του $H_{\hat{\theta}}$ επιλέγονται για μια σταθερή τιμή του ARL μαζί με το $K_{\hat{\theta}}$, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου κάτω από όλα τα περιβάλλοντα που ελήφθησαν υπόψη σε αυτή την έρευνα και αναμένεται το ARL να είναι μικρό όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Η τιμή αναφοράς $K_{\hat{\theta}}$ θα βασίζεται στους Ewan & Kemp (1960), Page (1963) και Turyah & Ncube (1987), επομένως η τιμή του $K_{\hat{\theta}}$ λαμβάνεται να είναι η μισή των αναμενόμενων τιμών του $\hat{\theta}$, δεδομένου του $\theta_0 = 1$ και των αναμενόμενων τιμών του $\hat{\theta}$ δεδομένου του $\theta_1 = 1.4$, όπου το θ_0 είναι η τιμή στόχος και το θ_1 είναι η τιμή της διασποράς της διεργασίας που χρειάζεται να ανιχνευθεί γρήγορα. Στον Page (1963), παρέχονται οι τιμές αναφοράς ώστε να παρατηρηθεί γρήγορα μια μετατόπιση (όπου από $\theta_1 = 1.40$ έως $\theta_1 = 2.23$) στη διασπορά της διεργασίας χρησιμοποιώντας το δειγματικό εύρος. Κατά συνέπεια, $K_{\hat{\theta}} = [E(\hat{\theta}|\theta_0) + E(\hat{\theta}|\theta_1)] / 2$.

Καθώς είναι δύσκολο να βρεθούν οι αναλυτικές τιμές του $E(\hat{\theta} | \cdot)$, χρησιμοποιείται προσομοίωση και έτσι παράγονται 50,000 τυχαία δείγματα από την κανονική κατανομή με μέση τιμή ($\theta_0 = 1$ αντίστοιχα $\theta_1 = 1.40$) και διασπορά ίση με 1 και υπολογίζεται η αναμενόμενη τιμή. Στον Πίνακα 3.8 δίνονται οι τιμές του $K_{\hat{\theta}}$ για δείγματα μεγέθους $n = 5$ και $n = 9$ για την ανίχνευση μετατόπισης μεγέθους $\theta_1 = 1.4$.

Πίνακας 3.8. Τιμές του $K_{\hat{\theta}}$ για τα $\hat{\theta}$ -CUSUM υπό την κανονική κατανομή.

n	Εκτιμήτριες						
	S	IQR	G	$MADM$	B_n	T_n	S_r
5	1.134	1.473	1.354	0.982	1.321	1.354	1.151
9	1.161	1.340	1.352	1.091	1.264	1.252	1.203

Για τις τιμές του $H_{\hat{\theta}}$ υπό διαφορετικά περιβάλλοντα (κανονικά και μη-κανονικά), έχουμε βρει τις τιμές του $H_{\hat{\theta}}$ παράγοντας τυχαία δείγματα από τα αναφερθέντα περιβάλλοντα χωριστά και έχουμε χρησιμοποιήσει μια επαναληπτική μέθοδο έως ότου ληφθεί η τιμή του $H_{\hat{\theta}}$ σε κάθε περίπτωση που καθορίζει ένα προβλεπόμενο ARL μαζί με την τιμή αναφοράς $K_{\hat{\theta}}$. Στον Πίνακα 3.9 δίνονται οι τιμές του $H_{\hat{\theta}}$ με $ARL_0 = 500$. Με παρόμοιο τρόπο, για άλλες τιμές του ARL_0 μπορούν να βρεθούν εναλλακτικές τιμές του $H_{\hat{\theta}}$.

Πίνακας 3.9. Τιμές του $H_{\hat{\theta}}$ για τα $\hat{\theta}$ -CUSUM υπό διαφορετικά περιβάλλοντα.

Εκτιμήτριες	$N(0,1)$		$G(1,1)$	T_4	$Logis(0,1)$
	$n = 5$	$n = 9$	$n = 5$	$n = 5$	$n = 5$
S	1.531	0.816	2.954	3.120	1.971
IQR	2.203	1.478	2.900	3.060	2.412
G	1.910	0.973	2.812	3.195	2.294
$MADM$	3.310	1.951	1.959	2.240	2.888
B_n	2.460	1.161	2.623	2.312	2.433
T_n	2.877	1.570	2.250	2.220	2.620
S_r	3.641	1.860	2.000	2.596	3.309

Οι τιμές των $K_{\hat{\theta}}$ και $H_{\hat{\theta}}$ έχουν επιλεγεί προσεκτικά επειδή η απόδοση του ARL του διαγράμματος CUSUM είναι ευαίσθητη σ' αυτές τις τιμές.

3.2.4 Εκτίμηση της απόδοσης των διαγραμμάτων $\hat{\theta}$ -CUSUM

Για την αξιολόγηση της απόδοσης των προτεινόμενων διαγραμμάτων $\hat{\theta}$ -CUSUM, χρησιμοποιείται σαν μέτρο απόδοσης το ARL . Για τον προσδιορισμό του ARL σε εντός και εκτός ελέγχου διεργασίες, χρησιμοποιούμε προσομοίωση Monte Carlo. Παρακάτω δίνονται οι λεπτομέρειες της προσομοίωσης:

Δημιουργήσαμε 10^5 τυχαία δείγματα μεγέθους n από τα αρχικά (*parent*) περιβάλλοντα (δηλαδή, κανονικής, νοθευμένης κανονικής και μη-κανονικής κατανομής) και υπολογίσαμε τη στατιστική διασπορά που μας ενδιαφέρει (δηλαδή, S , IQR , G , $MADM$, B_n , T_n ή S_r). Τα αντίστοιχα όρια ελέγχου του διαγράμματος διαμορφώνονται χρησιμοποιώντας τους Πίνακες 3.8 και 3.9. Έπειτα, σημειώνεται ο αριθμός του δείγματος στον οποίο το διάγραμμα του στατιστικού Z_t πέφτει εκτός των ορίων ελέγχου. Αυτός ο αριθμός του δείγματος λέγεται *μήκος ροής* (*Run Length, RL*) και είναι μια τυχαία μεταβλητή. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία 10^4 φορές για να βρεθεί η κατανομή των μηκών ροής. Η μέση τιμή της κατανομής του μήκους ροής αναπαρίσταται με το ARL και η τυπική απόκλιση της κατανομής του μήκους ροής συμβολίζεται με το $SDRL$.

Εμπνευσμένοι από τους Tatum (1997) και Schoonhoven et al. (2011), υπολογίζουμε τα διαγράμματα $\hat{\theta}$ -CUSUM υπό τα ακόλουθα περιβάλλοντα:

1. Ένα μοντέλο (λεγόμενη μη νοθευμένη περίπτωση) στο οποίο όλες οι παρατηρήσεις είναι από την $N(0,1)$.
2. Ένα μοντέλο για συμμετρικές διαταραχές διασποράς στο οποίο κάθε παρατήρηση έχει 99% πιθανότητα να αντληθεί από την $N(0,1)$ και μια 1% πιθανότητα να αντληθεί από την $N(0,9)$ κατανομή.

3. Ένα μοντέλο για ασύμμετρες διαταραχές διασποράς στο οποίο κάθε παρατήρηση αντλείται από την $N(0,1)$ και έχει μια πιθανότητα 1% να έχουμε ένα πολλαπλάσιο μιας χ_1^2 μεταβλητής να προστίθεται σε αυτό, με πολλαπλασιαστή ίσο με 4.
4. Ένα μοντέλο για διαταραχές της μέσης τιμής στο οποίο κάθε παρατήρηση έχει 99% πιθανότητα να αντληθεί από την $N(0,1)$ κατανομή και μια 1% πιθανότητα να αντληθεί από την $N(4,1)$.
5. Για να ερευνήσουμε την επίδραση της χρήσης μη-κανονικών κατανομών, θεωρούμε δυο περιπτώσεις: μια διαταράσσοντας την κύρτωση και την άλλη διαταράσσοντας τη συμμετρία της κατανομής. Για την περίπτωση διαταραχής της κύρτωσης, χρησιμοποιούμε την κατανομή *t Student's* με 4 βαθμούς ελευθερίας (T_4) και τη λογιστική κατανομή ($logis(0,1)$) και για την περίπτωση διαταραχής της συμμετρίας, χρησιμοποιούμε την κατανομή Γάμμα ($G(1,1)$).

3.2.5 Συζήτηση για τα αποτελέσματα

Χρησιμοποιώντας τα προαναφερθέντα περιβάλλοντα, προσδιορίζονται οι τιμές των *ARL* των διαγραμμάτων $\hat{\theta} - \text{CUSUM}$. Θεωρούμε μετατοπίσεις σχετικά με το θ (δηλαδή $\delta\theta$), το οποίο σημαίνει ότι η μετατοπισμένη παράμετρος διασποράς, συμβολίζεται θ' και ορίζεται ως $\theta' = \delta\theta$. Εδώ, το $\delta = 1$ σημαίνει καμία μετατόπιση στο θ και η διασπορά της διαδικασίας είναι σταθερή, ενώ για $\delta > 1$ σημαίνει αύξηση του θ .

3.2.5.1 Μη νοθευμένη περίπτωση

Το περιβάλλον αυτό αποτελεί τη βασική υπόθεση της δομής σχεδίασης κάθε διαγράμματος, το οποίο παρέχει μια βάση για συγκρίσεις διαφορετικών δομών διαγραμμάτων ελέγχου και επομένως για τα προτεινόμενα διαγράμματα $\hat{\theta} - \text{CUSUM}$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.10.

Πίνακας 3.10. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ – CUSUM υπό την μη νοθευμένη $N(0, 1)$ με $ARL = 500$.

n	Εκτιμήτρια	δ								
		1	1.1	1.15	1.2	1.25	1.5	1.75	2	3
5	S	502.04	75.01	40.10	25.30	17.61	7.21	4.80	3.78	2.30
	IQR	498.89	78.10	42.32	26.61	18.70	7.35	5.20	3.86	2.31
	G	501.86	75.81	40.51	25.18	18.22	7.32	4.85	2.40	1.73
	$MADM$	497.44	89.15	69.46	47.04	34.57	14.53	9.10	6.9	4.20
	B_n	497.75	91.13	49.53	31.21	23.23	8.50	5.95	4.39	2.97
	T_n	503.22	92.50	53.81	33.33	24.10	9.63	6.49	5.14	3.20
	S_r	499.25	111.87	69.74	45.22	33.89	13.51	8.90	6.73	3.79
9	S	500.11	54.31	26.04	16.27	11.34	4.74	3.29	2.46	1.49
	IQR	498.9	57.76	38.92	23.71	17.22	5.71	4.70	3.22	1.89
	G	496.98	56.32	27.57	16.08	11.27	4.30	3.15	2.47	1.37
	$MADM$	504.56	54.36	48.66	31.19	22.31	8.81	5.79	4.42	2.58
	B_n	504.03	63.54	31.35	19.93	13.09	5.36	3.45	2.50	2.00
	T_n	499.57	75.46	39.38	24.76	17.05	6.92	4.58	3.46	1.95
	S_r	500.44	80.90	44.21	27.42	19.01	7.89	5.18	4.09	2.19

Όταν δεν υπάρχουν νοθεύσεις, τα διαγράμματα $\hat{\theta}$ – CUSUM, που βασίζονται στη δειγματική τυπική απόκλιση, S , αποδίδουν το μέγιστο όπως αναμενόταν, ακολουθούμενο από το διάγραμμα που βασίζεται στη G . Το διάγραμμα CUSUM που βασίζεται στο IQR λειτουργεί καλά καθώς συγκρίνεται με τα διαγράμματα που βασίζονται στις B_n και T_n . Τα άλλα διαγράμματα $\hat{\theta}$ – CUSUM που βασίζονται στις εναπομείνουσες εκτιμήτριες ($MADM$ και S_r) είναι κάπως λιγότερο αποτελεσματικά. Αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος από $n = 5$ σε $n = 9$, έχει ως αποτέλεσμα ότι τα διαγράμματα που βασίζονται στις B_n και T_n αποδίδουν καλύτερα σε σύγκριση με το IQR για $\delta < 1.25$, αλλά για $\delta > 1.25$ το IQR λειτουργεί εξίσου καλά.

Για περαιτέρω εξήγηση της κατανομής του μήκους ροής υπό τα μη νοθευμένα περιβάλλοντα, παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.11 οι τιμές των $SDRL$ των διαγραμμάτων $\hat{\theta}$ – CUSUM, για να ποσοτικοποιήσουμε τη συμπεριφορά της κατανομής του μήκους ροής όπως πρότειναν οι Αντζουλάκος και Ρακιτζής (2008). Όταν η διεργασία είναι υπό έλεγχο, επιθυμούμε το $SDRL$ να είναι κοντά στην προβλεπόμενη τιμή, δηλαδή 500.

Στον Πίνακα 3.11 βλέπουμε ότι το *SDRL* είναι ελαφρώς χαμηλότερο από την προκαθορισμένη τιμή για κάποια διαγράμματα $\hat{\theta}$ –CUSUM και ότι το *SDRL* μειώνεται καθώς αυξάνεται το δ για όλα τα διαγράμματα.

Πίνακας 3.11. Τιμές *SDRL* των $\hat{\theta}$ – CUSUM υπό την μη νοθευμένη $N(0, 1)$ με $ARL = 500$.

<i>n</i>	Εκτιμήτρια	δ								
		1	1.1	1.15	1.2	1.25	1.5	1.75	2	3
5	<i>S</i>	487.71	71.42	34.96	20.38	13.27	3.69	1.96	1.37	0.70
	<i>IQR</i>	498.68	71.17	35.76	21.52	13.48	3.66	2.16	1.48	0.78
	<i>G</i>	484.24	69.31	35.36	20.31	13.56	3.77	2.05	1.40	0.71
	<i>MADM</i>	484.34	109.83	60.96	38.70	26.34	8.51	4.37	3.12	1.55
	B_n	488.56	83.87	44.09	26.73	16.13	4.74	2.60	1.80	0.89
	T_n	491.41	86.34	47.08	28.13	19.04	5.12	3.04	2.02	0.99
	S_r	489.89	102.39	61.01	37.78	25.44	8.04	4.47	3.08	1.46
9	<i>S</i>	486.57	50.83	22.26	12.09	7.69	1.99	1.09	0.78	0.31
	<i>IQR</i>	493.96	66.63	33.27	19.00	11.58	3.06	1.65	1.17	0.53
	<i>G</i>	490.42	50.86	23.36	12.21	7.43	2.13	1.13	0.74	0.32
	<i>MADM</i>	495.09	82.58	42.64	25.20	16.11	4.84	2.56	1.73	0.85
	B_n	499.56	58.37	28.12	15.13	9.34	2.62	1.31	0.95	0.42
	T_n	495.17	68.28	34.17	19.67	12.44	3.43	0.86	1.24	0.63
	S_r	494.12	73.65	37.61	22.65	14.41	4.08	2.21	1.52	0.77

3.2.5.2 Περίπτωση συμμετρικής διασποράς

Στην περίπτωση των συμμετρικών διαταραχών, δημιουργούμε τον Πίνακα 3.12, με τα αποτελέσματα των τιμών των *ARL*, όπου παρατηρούμε ότι τα καλύτερα διαγράμματα CUSUM βασίζονται στις *MADM*, S_r , T_n ακολουθούμενα από την B_n . Οι εκτιμήτριες αυτές είναι πολύ εύρωστες στα ακραία σημεία καθώς αποκλίνουν λιγότερο από το εντός ελέγχου *ARL*. Τα άλλα διαγράμματα CUSUM είναι πολύ ανεπαρκή στην εντός ελέγχου κατάσταση καθώς τα *ARL* αποκλίνουν πάρα πολύ από το αναμενόμενο *ARL*. Η απόδοση των διαγραμμάτων CUSUM βασισμένα στις *S*, *G*

και B_n χειροτερεύει όταν αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος. Όμως, το διάγραμμα CUSUM βασισμένο στο IQR αποδίδει καλύτερα από αυτό που βασίζεται στην T_n για $n = 9$.

Πίνακας 3.12. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ – CUSUM υπό την νοθευμένου περιβάλλοντος συμμετρικής διασποράς με $ARL = 500$.

n	Εκτιμήτρια	δ								
		1	1.1	1.15	1.2	1.25	1.5	1.75	2	3
5	S	125.32	44.21	28.55	20.10	14.86	6.65	4.47	3.61	2.34
	IQR	178.25	50.10	32.00	21.89	16.67	7.09	4.90	3.87	2.52
	G	146.34	45.98	29.56	20.91	15.42	6.98	4.86	3.67	2.37
	$MADM$	387.23	94.98	60.78	42.59	31.25	13.62	8.65	6.80	4.05
	B_n	292.11	67.70	40.68	27.84	21.01	8.64	5.70	4.47	2.65
	T_n	343.39	75.32	45.21	30.45	22.41	9.50	6.30	4.97	3.11
	S_r	357.71	67.01	37.23	25.52	18.21	7.90	5.52	4.13	2.69
9	S	80.97	28.32	19.04	12.71	9.25	4.43	3.10	2.21	1.39
	IQR	356.78	59.01	32.04	20.31	14.75	5.98	4.02	3.27	2.14
	G	108.12	31.06	18.54	13.02	9.45	4.41	3.15	2.42	1.87
	$MADM$	392.08	76.81	43.64	28.29	20.81	8.40	5.70	4.39	2.48
	B_n	267.01	46.98	25.16	16.51	11.76	5.20	3.57	3.02	2.13
	T_n	342.75	59.93	33.86	21.89	16.08	6.56	4.53	3.60	2.47
	S_r	357.73	66.49	37.56	25.43	17.93	7.52	5.23	4.01	2.42

3.2.5.3 Περίπτωση ασύμμετρης διασποράς

Στην περίπτωση των ασύμμετρων διαταραχών, σχηματίζουμε τον Πίνακα 3.13, όπου τα διαγράμματα CUSUM που βασίζονται στις εκτιμήτριες $MADM$, S_r , T_n και B_n δείχνουν καλή αντίσταση έναντι τέτοιων διαταραχών και αποδίδουν αποτελεσματικά στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στις παραμέτρους διασποράς της διεργασίας. Τα άλλα διαγράμματα αποδίδουν χειρότερα στη διατήρηση του εντός ελέγχου ARL . Το διάγραμμα CUSUM που βασίζεται στο IQR ανακάμπτει αρκετά

ουσιαστικά καθώς μεγαλώνει το μέγεθος του δείγματος, αλλά η απόδοση των S και G χειροτερεύει.

Πίνακας 3.13. Τιμές ARL των $\hat{\theta} - CUSUM$ υπό την νοθευμένου περιβάλλοντος ασύμμετρης διασποράς με $ARL = 500$.

n	Εκτιμήτρια	δ								
		1	1.1	1.15	1.2	1.25	1.5	1.75	2	3
5	S	105.12	37.31	26.15	19.63	14.94	6.81	4.69	3.75	2.12
	IQR	171.51	40.43	28.25	20.39	15.79	7.31	4.98	3.96	2.39
	G	167.19	39.28	26.63	19.81	15.16	6.89	4.78	3.83	2.27
	$MADM$	376.48	97.47	61.69	42.99	31.97	13.70	9.01	6.84	4.09
	B_n	251.99	65.76	40.54	27.29	20.30	8.70	5.80	4.59	2.90
	T_n	318.15	75.19	46.11	31.10	22.71	9.61	6.40	5.00	3.09
	S_r	359.16	95.11	60.24	41.37	30.76	13.20	8.59	6.62	3.91
9	S	110.12	26.15	16.76	11.95	9.06	4.33	3.20	2.29	1.59
	IQR	328.51	57.59	32.15	20.88	14.82	6.09	4.19	3.36	2.02
	G	118.78	24.65	17.03	12.36	9.43	4.48	3.21	2.70	1.80
	$MADM$	391.02	78.69	44.78	29.56	21.37	8.65	5.71	4.50	2.86
	B_n	237.51	45.37	26.15	17.00	12.11	5.23	3.72	3.01	2.20
	T_n	337.69	61.18	34.62	22.31	16.13	6.61	4.52	3.60	2.43
	S_r	360.67	66.89	38.90	25.26	18.25	7.56	5.16	4.11	2.68

3.2.5.4 Περίπτωση νόθευσης θέσης

Για την περίπτωση όπου εμφανίζονται διαταραχές στη μορφή εισαγωγής ακραίων σημείων στην παράμετρο θέσης της διαδικασίας δημιουργούμε τον Πίνακα 3.14. Σε αυτή την περίπτωση το διάγραμμα CUSUM που βασίζεται στη $MADM$ αποδίδει καλά καθώς διατηρεί περισσότερο ή λιγότερο το εντός ελέγχου αναμενόμενο ARL , ακολουθούμενο από τα διαγράμματα βασισμένα στις S_r και T_n . Όλα τα άλλα διαγράμματα αποδίδουν λιγότερο καθώς είναι ανίκανα να διατηρήσουν τις εντός ελέγχου ιδιότητες στο στόχο ARL . Η αύξηση του μεγέθους του δείγματος οδηγεί σε ακόμα καλύτερη απόδοση του διαγράμματος CUSUM βασισμένο στη $MADM$. Το

διάγραμμα CUSUM βασισμένο στο IQR αποδίδει ακόμα καλύτερα για μικρού μεγέθους δείγματα, αλλά τα διαγράμματα CUSUM βασισμένα στις S , G και B_n αποκλίνουν ακόμα περισσότερο από τα αναμενόμενα ARL σε αυτές τις συνθήκες.

Πίνακας 3.14. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ – CUSUM υπό νοθευμένου περιβάλλοντος παραμέτρου θέσης με $ARL = 500$.

n	Εκτιμήτριες	δ								
		1	1.1	1.15	1.2	1.25	1.5	1.75	2	3
5	S	131.30	32.23	23.12	17.34	13.68	6.54	4.58	3.72	2.51
	IQR	183.25	38.64	26.12	19.19	14.84	7.03	4.91	3.85	2.57
	G	134.42	35.56	23.78	17.59	14.05	6.60	4.71	3.80	2.60
	$MADM$	285.27	84.44	55.21	39.34	30.11	13.31	8.79	6.80	4.00
	B_n	177.35	54.04	34.95	24.67	18.72	8.24	5.65	4.50	2.90
	T_n	234.61	64.88	39.69	27.91	20.85	9.11	6.21	4.79	3.09
	S_r	268.05	79.56	52.28	36.83	28.20	12.69	8.46	6.50	3.89
9	S	198.20	20.14	14.25	10.61	8.25	4.21	2.99	2.10	1.59
	IQR	234.87	49.65	28.42	18.45	13.67	5.89	4.10	3.15	2.01
	G	100.78	25.16	15.24	11.10	8.70	4.30	3.05	2.24	1.90
	$MADM$	325.26	68.20	40.13	26.73	19.67	8.44	5.60	4.45	2.36
	B_n	152.25	36.10	21.85	14.75	10.98	5.09	3.64	2.89	1.75
	T_n	252.85	52.27	30.32	20.35	14.71	6.42	4.43	3.41	2.15
	S_r	273.75	56.71	33.74	23.18	6.90	7.33	5.05	4.03	2.45

3.2.5.5 Σημεία διακοπής και ευρωστία των διαγραμμάτων

Κάτω από ένα μη νοθευμένο περιβάλλον, όπως αναμενόταν, κανένα άλλο διάγραμμα CUSUM δεν μπορεί να αποδώσει καλύτερα από αυτό που βασίζεται στην S . Μπορεί να βρεθεί από τον Πίνακα 3.11 ότι αυτό το διάγραμμα υπερέχει όλων, ακολουθούμενο από τα διαγράμματα CUSUM που βασίζονται στη G και στο IQR για μικρά δείγματα και τα διαγράμματα CUSUM που βασίζονται στις B_n και T_n δουλεύουν καλά για μεγάλα δείγματα. Τα διαγράμματα CUSUM βασισμένα στη

MADM αποδίδουν χειρότερα από όλα καθώς η αποτελεσματικότητα τους υπό την κανονικότητα είναι πολύ χαμηλή (συγκεκριμένα, μόλις 37%).

Όταν όμως υπάρχει νόθευση στα δεδομένα, μπορεί να βρεθεί από τους Πίνακες 3.12 και 3.13 ότι το διάγραμμα CUSUM βασισμένο στη *MADM* (με σημείο διακοπής στο 50% και με χαμηλή ευαισθησία μικτού σφάλματος) διατηρεί τις εντός ελέγχου ιδιότητες του καλά, ακολουθούμενο από τα άλλα διαγράμματα βασισμένα στις εύρωστες εκτιμήτριες S_r και T_n (και οι δυο εκτιμήτριες έχουν σημεία διακοπής στο 50%). Με μια αύξηση στο μέγεθος των δειγμάτων, παρατηρείται το ίδιο αποτέλεσμα αλλά η εντός ελέγχου απόδοση του διαγράμματος CUSUM βασισμένο στο *IQR* (που έχει σημείο διακοπής στο 25%) βελτιώνεται ουσιαστικά. Υπό νοθεύσεις, τα διαγράμματα CUSUM που βασίζονται στις S και G αποδίδουν χειρότερα καθώς και τα δυο βασίζονται σε μη – εύρωστες εκτιμήτριες (πχ. η S έχει μηδενικό σημείο διακοπής).

3.2.5.6 Περιπτώσεις μη-κανονικότητας

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, τα δείγματα που λαμβάνονται μετασχηματίζονται με τέτοιο τρόπο που το δείγμα που προκύπτει έχει μέση τιμή ίση με μηδέν και διασπορά ίση με ένα. Για το σκοπό αυτό, η μέση τιμή του περιβάλλοντος αφαιρείται από κάθε δείγμα και έπειτα διαιρείται από την τυπική απόκλιση του περιβάλλοντος, έτσι ώστε υπολογίζονται αυτά τα έγκυρα και συγκρίσιμα αποτελέσματα. Παρακάτω δίνονται οι Πίνακες 3.15, 3.16 και 3.17, οι οποίοι αφορούν τις τιμές των *ARL* υπό τις κατανομές Γάμμα, t-Student και Λογιστική αντίστοιχα.

Υπό την κατανομή Γάμμα, το διάγραμμα $\hat{\theta}$ -CUSUM βασισμένο στο *IQR* αποδίδει καλύτερα ακολουθούμενο από τα διαγράμματα που βασίζονται στις S και G . Τα διαγράμματα που βασίζονται σε άλλες εκτιμήτριες ανιχνεύουν κάπως λιγότερο αποτελεσματικά μετατοπίσεις στη διεργασία, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.15.

Μπορεί να παρατηρηθεί από τον Πίνακα 3.16 ότι τα διαγράμματα $\hat{\theta}$ –CUSUM βασισμένα στην T_n υπερέχουν όλων των υπολοίπων υπό την T_4 κατανομή ακολουθούμενο από το διάγραμμα βασισμένο στις S_r , B_n και $MADM$.

Πίνακας 3.15. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ – CUSUM υπό την $G(1, 1)$ με $ARL = 500$.

n	Εκτιμήτριες	δ								
		1	1.1	1.15	1.2	1.25	1.5	1.75	2	3
5	S	502.12	158.21	101.94	67.91	49.12	16.17	9.76	6.96	3.25
	IQR	500.98	157.21	97.35	64.09	46.16	14.90	8.55	6.35	3.41
	G	503.25	158.85	100.25	66.10	46.49	15.34	8.91	6.38	3.54
	$MADM$	504.14	219.57	152.11	110.10	81.39	27.32	14.43	9.48	4.61
	B_n	498.81	200.98	135.51	95.21	68.37	21.34	11.37	7.78	3.91
	T_n	504.64	196.05	127.62	90.81	64.81	21.02	11.08	7.49	3.79
	S_r	504.75	222.28	151.59	110.91	81.48	28.31	14.60	9.55	4.52

Πίνακας 3.16. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ – CUSUM υπό την T_4 με $ARL = 500$.

n	Εκτιμήτριες	δ								
		1	1.1	1.15	1.2	1.25	1.5	1.75	2	3
5	S	499.31	209.97	135.56	87.64	60.88	17.61	9.95	7.18	3.94
	IQR	503.76	189.22	118.32	77.49	51.75	15.06	8.42	6.12	3.48
	G	505.82	194.44	122.35	80.49	54.45	15.90	8.91	6.49	3.65
	$MADM$	503.52	175.90	114.06	76.57	56.27	18.60	10.40	7.49	4.07
	B_n	500.60	172.75	111.75	72.34	49.35	14.52	8.12	5.89	3.35
	T_n	498.75	166.88	102.52	69.47	47.90	14.47	8.17	5.82	3.33
	S_r	500.47	169.80	109.51	74.32	53.85	17.73	10.31	7.32	4.00

Πίνακας 3.17. Τιμές ARL των $\hat{\theta}$ – CUSUM υπό την $Logis(0, 1)$ με $ARL = 500$.

n	Εκτιμήτριες	δ								
		1	1.1	1.15	1.2	1.25	1.5	1.75	2	3
5	S	501.12	102.98	58.22	36.59	25.53	9.31	5.97	4.59	2.92
	IQR	500.63	100.54	56.39	35.79	25.01	9.09	5.82	4.51	2.84
	G	499.14	100.25	56.23	35.45	25.02	9.10	5.85	4.59	2.87
	$MADM$	506.54	136.98	83.87	56.94	41.15	15.35	9.43	7.05	4.01
	B_n	498.64	113.39	64.14	42.09	28.89	10.48	6.53	5.04	3.03
	T_n	498.64	117.21	66.92	43.97	30.26	11.03	6.87	5.20	3.21
	S_r	504.33	135.12	83.01	55.19	38.56	14.96	9.27	6.89	4.01

Επίσης, από τον Πίνακα 3.17, παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα CUSUM βασισμένα στην εκτιμήτρια G λειτουργούν αποτελεσματικά ακολουθούμενα από τα διαγράμματα βασισμένα στο IQR υπό τη λογιστική κατανομή. Τα άλλα διαγράμματα δουλεύουν σχετικά καλά υπό αυτό το περιβάλλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Διαγράμματα ελέγχου για τον από κοινού έλεγχο του μέσου και της διασποράς διεργασιών

4.1 Διάγραμμα Max – CUSUM

4.1.1 Εισαγωγή

Τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται ευρέως στις βιομηχανίες για την παρακολούθηση της ποιότητας μιας διεργασίας. Συνήθως χρησιμοποιούνται δυο διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση μιας διεργασίας: ένα διάγραμμα για την παρακολούθηση του μέσου και ένα άλλο για την παρακολούθηση της διασποράς μιας διεργασίας, όταν έχουμε να κάνουμε με δεδομένα που αφορούν μεταβλητές.

Οι πρώτοι τύποι διαγραμμάτων ελέγχου αναπτύχθηκαν από τον Shewhart στη δεκαετία του 1920 και έπειτα αναπτύχθηκαν αρκετά νέα διαγράμματα σε μια προσπάθεια βελτίωσης της ικανότητας τους να ανιχνεύουν γρήγορα μια μετατόπιση στη διεργασία από την τιμή στόχο. Ωστόσο, το μειονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart είναι ότι χρησιμοποιούν, σχετικά με τη διεργασία, μόνο τις πληροφορίες που προέρχονται από την τελευταία παρατήρηση και τις δοσμένες πληροφορίες από ολόκληρη την ακολουθία σημείων.

Ένα από τα διαγράμματα που αναπτύχθηκαν σαν βελτίωση των διαγραμμάτων τύπου Shewhart είναι τα σωρευτικά αθροιστικά διαγράμματα (CUSUM) τα οποία προτάθηκαν από τον Page το 1954. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των διαγραμμάτων CUSUM είναι ότι ενσωματώνουν όλες τις πληροφορίες της ακολουθίας των τιμών του δείγματος σχεδιάζοντας τα σωρευτικά αθροίσματα των αποκλίσεων των τιμών του δείγματος από την τιμή στόχο. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει ειδική αιτία μεταβλητότητας, τα αμφίπλευρο διάγραμμα CUSUM είναι ένας τυχαίος περίπατος με μηδενική τάση. Αν μετατοπιστεί η διεργασία, αναπτύσσεται

μια τάση είτε ανοδική ή καθοδική, ανάλογα με την κατεύθυνση της μετατόπισης και επομένως αν αναπτυχθεί μια τάση αναζητούνται οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που την προκάλεσαν. Το μέγεθος μιας αλλαγής μπορεί να προσδιοριστεί από την κλίση του διαγράμματος CUSUM και το σημείο στο οποίο πρωτοεμφανίστηκε η αλλαγή είναι το σημείο που αναπτύχθηκε αρχικά η τάση. Αυτή η ικανότητα του διαγράμματος CUSUM να αναδεικνύει ένα σημείο στο οποίο αρχίζουν οι αλλαγές στη διεργασία, το καθιστά ένα βιώσιμο διάγραμμα το οποίο επίσης βοηθά στην έγκαιρη διάγνωση της αιτίας των αλλαγών στη διεργασία. Υπάρχουν δυο τρόποι να αναπαρασταθούν τα διαγράμματα CUSUM: το Tabular CUSUM (ή αλγοριθμικό) και η μέθοδος της V – μάσκας των διαγραμμάτων CUSUM.

Το διάγραμμα CUSUM, για τη μεταβολή στο μέσο και την τυπική απόκλιση για μεταβλητές, έχουν μελετηθεί εκτεταμένα και έχουν δημιουργηθεί δυο ξεχωριστά διαγράμματα για την εκτίμηση μιας μετατόπισης από την τιμή στόχο. Η κατασκευή ξεχωριστών διαγραμμάτων για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση είναι πολύπλοκη και πολύ κουραστική μερικές φορές. Έτσι ο Hawkins (1993) πρότεινε τον σχεδιασμό των δυο στατιστικών στο ίδιο γράφημα, χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεταβλητές σχεδίασης. Παρήγαγε ένα διάγραμμα το οποίο είναι κάπως περίπλοκο να ερμηνευτεί αλλά και παρουσιάζει συμφόρηση με τα πολλά σημεία σχεδίασης στο ίδιο διάγραμμα. Και άλλα διαγράμματα έχουν αναπτυχθεί με την προσπάθεια να προταθούν ξεχωριστά ενιαία διαγράμματα για την παρακολούθηση τόσο της μέσης τιμής όσο και της τυπικής απόκλισης της διεργασίας.

Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιαστεί ένα ενιαίο σωρευτικό αθροιστικό διάγραμμα ελέγχου (CUSUM), το λεγόμενο Max – CUSUM διάγραμμα το οποίο είναι ικανό να ανιχνεύει γρήγορα μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις τόσο στη μέση τιμή όσο και στην τυπική απόκλιση μιας διεργασίας καθώς και να χειρίζεται περιπτώσεις όπου τα μεγέθη του δείγματος διαφέρουν. Το διάγραμμα αυτό βασίζεται στην τυποποίηση των δειγματικών μέσων και τυπικών αποκλίσεων και χρησιμοποιεί μόνο μια μεταβλητή σχεδίασης για την παρακολούθηση και των δυο παραμέτρων.

Για την αξιολόγηση της απόδοσης του προτεινόμενου διαγράμματος, πραγματοποιούνται κάποιες συγκρίσεις με άλλα πρόσφατα ενιαία επίσης διαγράμματα, σχετικά με τα μέσα μήκη ροής τους (ARLs). Το διάγραμμα Max – CUSUM ανιχνεύει γρηγορότερα μικρές μετατοπίσεις στη μέση τιμή και τυπική

απόκλιση από το Max – EWMA διάγραμμα και το Max διάγραμμα. Το γεγονός αυτό καθιστά το Max – CUSUM διάγραμμα περισσότερο εφαρμόσιμο στη σύγχρονη παραγωγική διεργασία όπου παράγονται προϊόντα υψηλής ποιότητας με πολύ χαμηλό ποσοστό μη συμμορφούμενων προϊόντων και υπάρχει μεγάλη ζήτηση για καλή ποιότητα.

4.1.2 Περιγραφή του νέου διαγράμματος

Υποθέτουμε ότι το $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i = 1, 2, \dots$ αναπαριστά μια σειρά δειγμάτων μεγέθους n που λαμβάνονται για το ποιοτικό χαρακτηριστικό X . Επίσης, για κάθε i , τα $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες παρατηρήσεις οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή και τυπική απόκλιση που εξαρτώνται από το i , το οποίο συμβολίζει το i -οστό δείγμα. Έστω μ_0 και σ_0 είναι η ονομαστική μέση τιμή και τυπική απόκλιση, αντίστοιχα. Οι παράμετροι της μέσης τιμής, μ , και τυπικής απόκλισης, σ , εκφράζονται ως: $\mu = \mu_0 + a\sigma_0$ και $\sigma = b\sigma_0$, όπου τα $a = 0$ και $b = 1$, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, διαφορετικά έχει αλλάξει η διεργασία λόγω κάποιων ειδικών αιτιών. Τότε το a και το b αναπαριστούν μια μετατόπιση στη μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διεργασίας, αντίστοιχα με $b > 0$.

Έστω ότι τα $\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}$ και $S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}$ είναι η μέση τιμή και τυπική απόκλιση για το i -οστό δείγμα, αντίστοιχα. Η δειγματική μέση τιμή \bar{X}_i και η δειγματική τυπική απόκλιση S_i^2 είναι οι αμερόληπτες εκτιμήτριες ομοιόμορφα ελάχιστης διασποράς για τις αντίστοιχες παραμέτρους του πληθυσμού. Οι δυο αυτές στατιστικές συναρτήσεις κατανέμονται ανεξάρτητα όπως οι τιμές του δείγματος και ακολουθούν διαφορετικές κατανομές. Τα διαγράμματα CUSUM για την μέση τιμή και τυπική απόκλιση βασίζονται στα \bar{X}_i και S_i αντίστοιχα.

Για την ανάπτυξη ενός ενιαίου διαγράμματος CUSUM, ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$Z_i = \sqrt{n} \frac{(\bar{X}_i - \mu_0)}{\sigma_0} \quad (4.1.1)$$

$$Y_i = \Phi^{-1} \left\{ H \left[\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma_0^2}; n-1 \right] \right\}, \quad (4.1.2)$$

όπου $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, για $Z \sim N(0,1)$, το Φ^{-1} είναι η αντιστροφή της αθροιστικής συνάρτησης της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και $H(w; p) = P(W \leq w | p)$ με $W \sim \chi_p^2$, την κατανομή χ^2 με p βαθμούς ελευθερίας. Οι συναρτήσεις Z_i και Y_i είναι ανεξάρτητες και το Y_i ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή όταν η διασποράς της διεργασίας είναι στην ονομαστική της τιμή.

Για τη σχεδίαση του διαγράμματος CUSUM χρησιμοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις που βασίζονται στα Z_i και Y_i , αντίστοιχα:

$$C_i^+ = \max [0, Z_i - k + C_{i-1}^+] \quad (4.1.3)$$

$$C_i^- = \max [0, -Z_i - k + C_{i-1}^-] \quad (4.1.4)$$

και

$$S_i^+ = \max [0, Y_i - k + S_{i-1}^+] \quad (4.1.5)$$

$$S_i^- = \max [0, -Y_i - k + S_{i-1}^-], \quad (4.1.6)$$

όπου C_0 και S_0 είναι οι αρχικές τιμές. Επειδή τα Z_i και Y_i ακολουθούν την ίδια κατανομή, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση για το ενιαίο διάγραμμα ελέγχου:

$$M_i = \max[C_i^+, C_i^-, S_i^+, S_i^-]. \quad (4.1.7)$$

Η ποσότητα M_i θα είναι μεγάλη στην περίπτωση που ο μέσος της διεργασίας έχει μετατοπιστεί από το μ_0 και/ή η τυπική απόκλιση έχει μετατοπιστεί από το σ_0 . Αντίθετα, μικρές τιμές του M_i δείχνουν ότι η διεργασία είναι υπό στατιστικό έλεγχο. Εφόσον οι τιμές των M_i είναι μη αρνητικές, θα τις συγκρίνουμε μόνο με το άνω διάστημα απόφασης (*decision interval*).

Συχνά, ως μοναδικό μέτρο απόδοσης του διαγράμματος χρησιμοποιείται το μέσο μήκος ροής (*ARL*). Το *ARL* του διαγράμματος είναι ο μέσος αριθμός σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν έως ότου ένα σημείο βρεθεί πάνω ή κάτω από το διάστημα

απόφασης. Όταν συμβεί αυτό, εκδίδεται σήμα ότι βρισκόμαστε εκτός ελέγχου και ξεκινά μια έρευνα για τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας. Ένα διάγραμμα θεωρείται ότι είναι περισσότερο αποδοτικό αν έχει μικρότερη τιμή *ARL* σε σχέση με όλα τα άλλα με τα οποία συγκρίνεται όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και τη μεγαλύτερη αν είναι εντός ελέγχου.

Στην περίπτωση που παρατηρείται μετατόπιση είτε στη μέση τιμή ή την τυπική απόκλιση ή και στα δυο από την τιμή στόχο τους, εκδίδεται ένα σήμα ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Επομένως, το μέγεθος του δείγματος και τα όρια ελέγχου επιλέγονται έτσι ώστε να έχουμε μεγάλο *ARL* όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου και μικρό όταν είναι εκτός. Ο Cox (1999) πρότεινε ότι τα κριτήρια για ένα καλό διάγραμμα είναι οι αποδεκτές πιθανότητες λανθασμένων ενεργειών, τα μέσα αναμενόμενα επίπεδα ποιότητας που φτάνουν στον καταναλωτή και τα μέσα αναμενόμενα φορτία επιθεώρησης (*inspection loads*). Έτσι, το εντός ελέγχου *ARL* επιλέγεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η συχνότητα των εσφαλμένων συναγερμών και να εξασφαλίζει ικανοποιητικούς χρόνους απόκρισης σε πραγματικές μετατοπίσεις.

Σε ένα προκαθορισμένο εντός ελέγχου *ARL*, για τη γρήγορη ανίχνευση μετατοπίσεων στο μέσο και τη διασπορά, προσδιορίζεται ένας βέλτιστος συνδυασμός των h και k , ο οποίος θα ελαχιστοποιήσει το εκτός ελέγχου *ARL* για μια συγκεκριμένη μετατόπιση στο μέσο και την τυπική απόκλιση, όπου το h είναι το διάστημα απόφασης και το k είναι η τιμή αναφοράς του διαγράμματος. Το προτεινόμενο διάγραμμα είναι ευαίσθητο στις αλλαγές τόσο του μέσου όσο και της τυπικής απόκλισης όταν παρουσιάζεται αύξηση στην τυπική απόκλιση και λιγότερο ευαίσθητο όταν η μετατόπιση αυτή είναι καθοδική. Το φαινόμενο αυτό έχει παρατηρηθεί για άλλα διαγράμματα βασισμένα στις τυποποιημένες τιμές Domangue και Patch (1991).

4.1.3 Κατασκευή του διαγράμματος Max – CUSUM

Για την κατασκευή του νέου διαγράμματος ελέγχου, χρησιμοποιούμε την ποσότητα M_i , η οποία είναι μεγαλύτερη των τεσσάρων άλλων (C_i^+ , C_i^- , S_i^+ , S_i^-) και

γι' αυτό το νέο διάγραμμα, καλείται διάγραμμα Max – CUSUM. Για τον υπολογισμό του εντός ελέγχου ARL για το διάγραμμα αυτό, χρησιμοποιείται προσομοίωση Monte Carlo. Η τιμή αναφοράς k υπολογίζεται ως το μισό της μετατόπισης, για ένα δεδομένο εντός ελέγχου ARL και μια μετατόπιση για τη μέση τιμή και/ή τυπική απόκλιση που αναμένεται να ανιχνευθεί από το διάγραμμα. Γι' αυτές τις τιμές (ARL, k) , ακολουθεί και ο υπολογισμός του διαστήματος απόφασης h . Χρησιμοποιούμε, παρακάτω, 10,000 προσομοιώσεις για τον υπολογισμό κάθε τιμής ARL για τις διάφορες αλλαγές στη μέση τιμή και/ή τυπική απόκλιση της διεργασίας.

Στον Πίνακα 4.1 δίνονται οι συνδυασμοί των k και h για ένα εντός ελέγχου ARL ίσο με 250. Υποθέτουμε ότι η διεργασία ξεκινά σε μια εντός ελέγχου κατάσταση με μέσο ίσο με το μηδέν ($\mu_0 = 0$) και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα ($\sigma_0 = 1$), επομένως η αρχική τιμή της συνάρτησης διαγράμματος CUSUM τίθεται ίση με μηδέν, $M_0 = 0$. Για παράδειγμα, αν επιθυμούμε να έχουμε ένα εντός ελέγχου $ARL = 250$ και να προστατευτούμε από μια $3\sigma_0$ αύξηση στο μέσο και $1.25\sigma_0$ αύξηση στην τυπική απόκλιση, όπως $a = 3$ και $b = 1.25$, οι βέλτιστες τιμές για τα k και h είναι: $k = 1.500$ και $h = 1.220$. Οι μετατοπίσεις αυτές μπορούν να ανιχνευθούν στο δεύτερο δείγμα, δηλαδή το ARL είναι περίπου 2. Ένα καλό χαρακτηριστικό του διαγράμματος Max – CUSUM είναι ότι ανιχνεύει πολύ ταχύτερα μικρότερες μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας από το ενιαίο διάγραμμα Shewhart (Max chart) όπως φαίνεται παρακάτω.

Στον Πίνακα 4.1 φαίνεται ότι οι μικρές τιμές του k με μεγάλες τιμές του h οδηγούν σε γρήγορη ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στο μέσο και/ή την τυπική απόκλιση. Αν θέλουμε να προστατευτούμε από μια $3\sigma_0$ αύξηση στο μέσο και $3\sigma_0$ αύξηση στην τυπική απόκλιση, η τιμή του $h = 1.220$ και του $k = 1.500$. Όμως, για μια αύξηση $1\sigma_0$ στη μέση τιμή και $1.25\sigma_0$ στην τυπική απόκλιση, η τιμή για το h είναι $h = 4.051$ και η τιμή του k μειώνεται στο $k = 0.500$.

Πίνακας 4.1. Συνδυασμοί των (k, h) και οι αντίστοιχες τιμές ARL για το διάγραμμα Max – CUSUM με $ARL_0 = 250$.

b	Παράμετροι	α							
		0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	h	4.051	8.572	6.161	4.051	2.981	2.103	1.554	1.220
	k	0.500	0.125	0.250	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500
	ARL	250.21	53.21	22.04	7.99	4.56	2.76	1.96	1.50
0.5	h	4.051	8.572	6.161	4.051	2.981	2.103	1.554	1.220
	k	0.500	0.125	0.250	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500
	ARL	91.30	67.33	25.00	8.24	4.43	2.62	1.84	1.30
1.25	h	4.051	8.572	6.161	4.051	2.981	2.103	1.554	1.220
	k	0.500	0.125	0.250	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500
	ARL	82.42	41.01	18.98	7.40	4.21	2.73	1.91	1.47
1.50	h	4.051	8.572	6.161	4.051	2.981	2.103	1.554	1.220
	k	0.500	0.125	0.250	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500
	ARL	41.84	34.92	16.37	6.93	4.11	2.72	1.89	1.43
2.00	h	4.051	8.572	6.161	4.051	2.981	2.103	1.554	1.220
	k	0.500	0.125	0.250	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500
	ARL	18.81	23.97	12.75	5.95	3.77	2.61	1.87	1.43
2.50	h	4.051	8.572	6.161	4.051	2.981	2.103	1.554	1.220
	k	0.500	0.125	0.250	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500
	ARL	11.78	18.16	10.22	5.11	3.37	2.55	1.86	1.42
3.00	h	4.051	8.572	6.161	4.051	2.981	2.103	1.554	1.220
	k	0.500	0.125	0.250	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500
	ARL	8.63	14.32	8.49	4.53	3.15	2.47	1.84	1.39
4.00	h	4.051	8.572	6.161	4.051	2.981	2.103	1.554	1.220
	k	0.500	0.125	0.250	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500
	ARL	5.85	10.16	6.38	3.80	2.87	2.36	1.81	1.37

Το διάγραμμα Max – CUSUM είναι ευαίσθητο τόσο στις μικρές όσο και στις μεγάλες μετατοπίσεις στη μέση τιμή και τυπική απόκλιση. Μια $0.25\sigma_0$ αύξηση στη μέση τιμή μειώνει το ARL από το 250 περίπου στο 53, ενώ για $1.25\sigma_0$ αύξηση στην τυπική απόκλιση και μια $0.25\sigma_0$ αύξηση στη μέση τιμή, το ARL μειώνεται από το 250 περίπου στο 41. Επίσης, το ARL μειώνεται στο 2 αν και οι δυο παράμετροι αυξάνονται με μεγάλες τιμές. Επομένως, η αύξηση θα ανιχνευθεί στο δεύτερο δείγμα. Για παράδειγμα, μια $3\sigma_0$ αύξηση και στις δυο παραμέτρους θα ανιχνευθεί στο δεύτερο δείγμα.

Μια εναλλακτική μέθοδος για την αξιολόγηση της απόδοσης του διαγράμματος CUSUM είναι να καθορίσουμε τις τιμές των h και k και να υπολογίσουμε τις τιμές των ARL για διάφορες μετατοπίσεις στη μέση τιμή και/ή την τυπική απόκλιση, οι οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2. Για τιμή του $k = 0.5$, θέλουμε να ανιχνεύσουμε μια $1\sigma_0$ μετατόπιση στη μέση τιμή και το $h = 4.051$. Ο συνδυασμός αυτός δίνει ένα εντός ελέγχου $ARL = 250$. Μπορούμε να συμπεράνουμε από τον Πίνακα 4.2 ότι το διάγραμμα είναι ευαίσθητο στις μικρές και στις μεγάλες μετατοπίσεις στη μέση τιμή και/ή την τυπική απόκλιση της διεργασίας ακόμα και όταν έχει σχεδιαστεί να ανιχνεύει μετατοπίσεις μεγέθους $1\sigma_0$.

Πίνακας 4.2. Τιμές των ARL για τον διάγραμμα Max – CUSUM με $h = 4.051$ και $k = 0.500$.

b	α							
	0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	250.21	69.66	29.33	7.99	4.95	3.44	2.68	2.24
1.25	82.42	36.97	19.58	7.40	4.93	3.44	2.64	2.21
1.50	41.84	24.08	15.20	6.93	4.86	3.42	2.61	2.17
2.00	18.81	13.72	10.39	6.95	4.59	3.37	2.59	2.12
2.50	11.78	9.55	7.88	5.11	4.26	3.33	2.55	2.04
3.00	8.63	7.40	6.41	4.53	3.96	3.28	2.47	1.94
4.00	5.85	5.31	4.84	3.80	3.49	3.25	2.44	1.88

4.1.4 Σύγκριση της απόδοσης του διαγράμματος Max – CUSUM με άλλα διαγράμματα

Στην παράγραφο αυτή, συγκρίνεται η απόδοση του διαγράμματος Max – CUSUM με αυτή διαφόρων άλλων διαγραμμάτων που χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της ποιότητας μιας διεργασίας. Τα περισσότερα διαγράμματα CUSUM που αναπτύχθηκαν, έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να παρακολουθούν χωριστά

τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση. Ακόμη και τα συνδυασμένα διαγράμματα CUSUM αναπτύχθηκαν για να παρακολουθούν αυτές τις παραμέτρους χωριστά στα ίδια γραφήματα. Αυτό επιτυγχάνεται, χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεταβλητές σχεδίασης για το μέσο και την τυπική απόκλιση για τη δημιουργία του διαγράμματος και έπειτα υπολογίζονται οι τιμές των *ARL* για την κάθε παράμετρο χωριστά. Έπειτα, λαμβάνεται το *ARL* του διαγράμματος ως η ελάχιστη τιμή από τις δυο. Το νέο διάγραμμα συγκρίνεται με το γενικό (*Omnibus*) διάγραμμα CUSUM που προτάθηκε από τους Domangue & Patch (1991), το Max διάγραμμα (Chen & Cheng, 1998) και το Max – EWMA διάγραμμα (Xie, 1999).

Πίνακας 4.3. Επίπεδα μετατόπισης που λαμβάνονται υπόψη για τον μέσο και την τυπική απόκλιση.

Ονομασία	μ	σ
S_1	0.75	1.0
S_2	1.5	1.0
S_3	0	1.2
S_4	0	1.4
S_5	0.75	1.3
S_6	1.0	1.2

Στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζονται τα μεγέθη των μετατοπίσεων στη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση για τα οποία υπολογίζονται οι τιμές των *ARL* για το διάγραμμα Max – CUSUM και το διάγραμμα Omnibus CUSUM που αναπτύχθηκε από τους Domangue & Patch (1991). Τα αποτελέσματα των υπολογισμών των *ARL* παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.4, από όπου παρατηρούμε ότι το Max – CUSUM αποδίδει καλύτερα από το Omnibus CUSUM για όλες τις μετατοπίσεις έως ότου οι τιμές των *ARL* του Max – CUSUM γίνουν μικρότερες από εκείνες του Omnibus CUSUM. Επίσης, το Max – CUSUM είναι πιο εύκολο στη σχεδίαση και στην ερμηνεία σε σχέση με το Omnibus CUSUM αφού χρησιμοποιεί μόνο μια μεταβλητή σχεδίασης για κάθε δείγμα.

Πίνακας 4.4. Τιμές των ARL του Max – CUSUM και του Omnibus CUSUM για $k = 1$, $n = 1$, $a = 0.5$ και $h = 1.279$.

Διαγράμματα	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Omnibus CUSUM	37.0	7.0	50.4	21.5	15.7	13.0
Max – CUSUM	9.2	3.1	26.1	15.5	6.3	5.0

Στη συνέχεια, στον Πίνακα 4.5 συγκρίνουμε το Max – CUSUM με το Max διάγραμμα. Από τον Πίνακα 4.5 προκύπτει ότι το Max – CUSUM είναι περισσότερο ευαίσθητο σε μικρές μετατοπίσεις στη μέση τιμή, ενώ δεν παρατηρείται σημαντική διαφορά στην απόδοση των δυο διαγραμμάτων για μεγαλύτερες μετατοπίσεις παρόλο που το Max διάγραμμα έχει ελαφρώς χαμηλά $ARLs$ για μεγάλες μετατοπίσεις. Το νέο διάγραμμα αποτελεί μια σημαντική βελτίωση των διαγραμμάτων CUSUM καθώς τα υπάρχοντα διαγράμματα CUSUM είναι λιγότερο ευαίσθητα στις μεγάλες μετατοπίσεις της μέσης τιμής και/ή τυπικής απόκλισης της διεργασίας.

Πίνακας 4.5. Τιμές ARL για το Max – CUSUM διάγραμμα και το Max διάγραμμα για $n = 4$ και $ARL_0 = 250$.

b	Max – CUSUM διάγραμμα						Max διάγραμμα					
	α						α					
	0.00	0.25	0.50	1.00	2.00	3.00	0.00	0.25	0.50	1.00	2.00	3.00
1.00	250.21	69.66	29.33	7.99	3.44	2.24	250.0	143.8	49.3	7.2	1.2	1.0
1.25	82.42	36.97	19.58	7.40	3.44	2.21	34.3	27.2	15.9	4.9	1.3	1.0
1.50	41.84	24.08	15.20	6.93	3.42	2.17	9.8	8.9	6.9	3.5	1.3	1.0
2.00	18.81	13.72	10.39	5.95	3.37	2.04	2.9	2.8	2.6	2.1	1.3	1.1
3.00	8.63	7.40	6.41	4.53	3.28	1.94	1.4	1.4	1.4	1.3	1.2	1.1

Στον Πίνακα 4.6 δίνεται η απόδοση του διαγράμματος Max – CUSUM και Max-EWMA για $ARL_0 = 250$. Και τα δυο διαγράμματα είναι ευαίσθητα σε μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις στη μέση τιμή και/ή τυπική απόκλιση, αποδίδοντας καλύτερα από τα δυο το Max – EWMA για μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις. Τα δυο αυτά

διαγράμματα χρησιμοποιούν μόνο μια μεταβλητή σχεδίασης για κάθε δείγμα και έχουν καλούς τρόπους ένδειξης της πηγής και της κατεύθυνσης των μετατοπίσεων στη διεργασία.

Πίνακας 4.6. Τιμές ARL για το Max – CUSUM διάγραμμα και το Max – EWMA διάγραμμα για $ARL_0 = 250$.

b	Max – CUSUM διάγραμμα						Max – EWMA διάγραμμα					
	α						α					
	0.00	0.25	0.50	1.00	2.00	3.00	0.00	0.25	0.50	1.00	2.00	3.00
1.00	250.21	69.66	29.33	7.99	3.44	2.24	250.0	24.6	8.6	2.9	1.1	1.0
1.25	82.42	36.97	19.58	7.40	3.44	2.21	17.8	12.3	7.1	2.9	1.2	1.0
1.50	41.84	24.08	15.20	6.93	3.42	2.17	6.3	5.7	4.5	2.5	1.2	1.0
2.00	18.81	13.72	10.39	5.95	3.37	2.04	2.5	2.5	2.3	1.8	1.2	1.0
3.00	8.63	7.40	6.41	4.53	3.28	1.94	1.7	1.6	1.6	1.5	1.2	1.1

4.1.5 Διαδικασία σχεδίασης του Max – CUSUM

Η διαδικασία κατασκευής του διαγράμματος Max – CUSUM είναι παρόμοια με του τυπικού άνω διαγράμματος CUSUM. Οι διαδοχικές τιμές των M_i σχεδιάζονται ως προς τους αριθμούς των δειγμάτων ώστε να προκύψει το διάγραμμα. Αν ένα σημείο βρεθεί κάτω από το διάστημα απόφασης, η διεργασία θεωρείται ότι είναι εκτός στατιστικού ελέγχου και το σημείο συμβολίζεται με μια τελεία. Αν οποιοδήποτε σημείο βρίσκεται πάνω από το διάστημα απόφασης, δίνεται ένα εκτός ελέγχου σήμα και τα σημεία αυτά απεικονίζονται με κάποιους χαρακτήρες που δίνονται παρακάτω.

Το διάγραμμα Max – CUSUM είναι ένας συνδυασμός δυο αμφίπλευρων τυπικών διαγραμμάτων CUSUM. Για την κατασκευή του διαγράμματος ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

1. Καθορίζουμε τις ακόλουθες παραμέτρους h , k , δ , την εντός ελέγχου τιμή ή τιμή στόχο της μέσης τιμής, μ_0 , καθώς και την ονομαστική τιμή της τυπικής απόκλισης σ_0 .
2. Αν το μ_0 είναι άγνωστο, χρησιμοποιούμε τη δειγματική μέση τιμή των μέσων, \bar{X} των δεδομένων, για την εκτίμησή του, όπου $\bar{X} = (\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m)/m$. Αν το σ_0 είναι άγνωστο, για την εκτίμησή του χρησιμοποιούμε τα \bar{R}/d_2 ή \bar{S}/c_4 , όπου το $\bar{S} = (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots + \bar{S}_m)/m$ είναι οι μέσοι για το εύρος και την τυπική απόκλιση, ενώ τα d_2 και c_4 είναι σταθερές που προσδιορίζονται.
3. Για κάθε δείγμα υπολογίζουμε τα Z_i και Y_i .
4. Επιλέγουμε έναν βέλτιστο συνδυασμό των (h, k) και υπολογίζουμε τα C_i^+ , C_i^- , S_i^+ και S_i^- για να ανιχνεύσουμε συγκεκριμένες αλλαγές στη μέση τιμή και τυπική απόκλιση της διεργασίας.
5. Υπολογίζουμε τα M_i και τα συγκρίνουμε με το h , που είναι το διάστημα απόφασης.
6. Αν τα $M_i \leq h$, σημειώνουμε τα σημεία με τελείες και τα σχεδιάζουμε ως προς τον αριθμό του δείγματος.
7. Αν κάποιο από τα M_i είναι μεγαλύτερα από το h , χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι χαρακτήρες σχεδίασης για να δείξουν την κατεύθυνση όπως τα σημεία που βρίσκονται πάνω από το διάστημα απόφασης:
 - i. Αν $C_i^+ > h$, συμβολίζουμε με $C +$, το οποίο δηλώνει μια αύξηση στο μέσο της διεργασίας.
 - ii. Αν $C_i^- > h$, συμβολίζουμε με $C -$, δηλώνοντας έτσι μια μείωση στο μέσο της διεργασίας.
 - iii. Αν $S_i^+ > h$, συμβολίζουμε με $S +$, το οποίο δηλώνει μια αύξηση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.
 - iv. Αν $S_i^- > h$, συμβολίζουμε με $S -$, το οποίο φανερώνει μια μείωση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.
 - v. Αν $C_i^+ > h$ και $S_i^+ > h$, συμβολίζουμε με $B + +$ και δηλώνεται έτσι μια αύξηση τόσο στο μέσο όσο και την τυπική απόκλιση της διεργασίας.
 - vi. Αν $C_i^+ > h$ και $S_i^- > h$, συμβολίζουμε με $B + -$, που δηλώνει αύξηση στο μέσο αλλά μείωση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.
 - vii. Αν $C_i^- > h$ και $S_i^+ > h$, συμβολίζουμε με $B - +$ και δηλώνεται έτσι μια μείωση στο μέσο και αύξηση στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.

- viii. Τέλος, αν $C_i^- > h$ και $S_i^- > h$, συμβολίζουμε με $B - -$ και δηλώνεται έτσι μια μείωση τόσο στο μέσο όσο και την τυπική απόκλιση της διεργασίας.
8. Ερευνώνται οι αιτίες της μετατόπισης για κάθε σημείο στο διάγραμμα που βρίσκεται εκτός ελέγχου και εκτελούνται τα απαραίτητα διορθωτικά μέτρα για να επανέλθει η διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου.

4.1.6 Αριθμητικό Παράδειγμα

Εφαρμόζουμε το διάγραμμα Max – CUSUM σε πραγματικά δεδομένα που λαμβάνονται από τους DeVor, Chang & Sutherland (1992). Τα δεδομένα αφορούν μετρήσεις της εσωτερικής διαμέτρου των κυλινδρικών οπών σε μια τροχαλία κινητήρα. Οι μετρήσεις γίνονται στο 1/10,000 της ίντσας. Τα μεγέθη του δείγματος $n = 5$, λαμβάνονται περίπου κάθε μισή ώρα και στον Πίνακα 4.7 δίνονται τα πρώτα 35 δείγματα. Οι πραγματικές τιμές των μετρήσεων είναι της μορφής 3.5205, 2.5202, 3.5204 και ούτω καθεξής, οπότε στον Πίνακα 4.7 παρουσιάζονται τα τρία τελευταία ψηφία των μετρήσεων.

Με βάση την προηγούμενη μας εμπειρία, υποθέτουμε ότι ένας χειριστής θέλει να ανιχνεύσει μια μετατόπιση της τάξης 1σ στο μέσο, δηλαδή $a = 1$ και 2σ στην τυπική απόκλιση, δηλαδή $b = 2$ με $ARL_0 = 250$, τότε από τον Πίνακα 4.1 παρατηρούμε ότι το αντίστοιχο διάστημα απόφασης θα είναι $h = 4.051$ και η τιμή αναφοράς είναι $k = 0.500$. Έτσι, η ονομαστική τιμή του μέσου, μ_0 , εκτιμάται από το \bar{X} και το σ_0 εκτιμάται από το \bar{S}/c_4 . Για το συγκεκριμένο δείγμα, οι εκτιμήσεις αυτές είναι: $\bar{X} = 200.25$ και $\bar{S}/c_4 = 3.31$.

Πίνακας 4.7. Μετρήσεις των διαμέτρων.

Δείγματα	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}
1	205	202	204	207	205
2	202	196	201	198	202
3	201	202	199	197	196
4	205	203	196	201	197
5	199	196	201	200	195
6	203	198	192	217	196
7	202	202	198	203	202
8	197	196	196	200	204
9	199	200	204	196	202
10	202	196	204	195	197
11	205	204	202	208	205
12	200	201	199	200	201
13	205	196	201	197	198
14	202	199	200	198	200
15	200	200	201	205	201
16	201	187	209	202	200
17	202	202	204	198	203
18	201	198	204	201	201
19	207	206	194	197	201
20	200	204	198	199	199
21	203	200	204	199	200
22	196	203	197	201	194
23	197	199	203	200	196
24	201	197	196	199	207
25	204	196	201	199	197
26	206	206	199	200	203
27	204	203	199	199	197
28	199	201	201	194	200
29	201	196	197	204	200
30	203	206	201	196	201
31	203	197	199	197	201
32	197	194	199	200	199
33	200	201	200	197	200
34	199	199	201	201	201
35	200	204	197	197	199

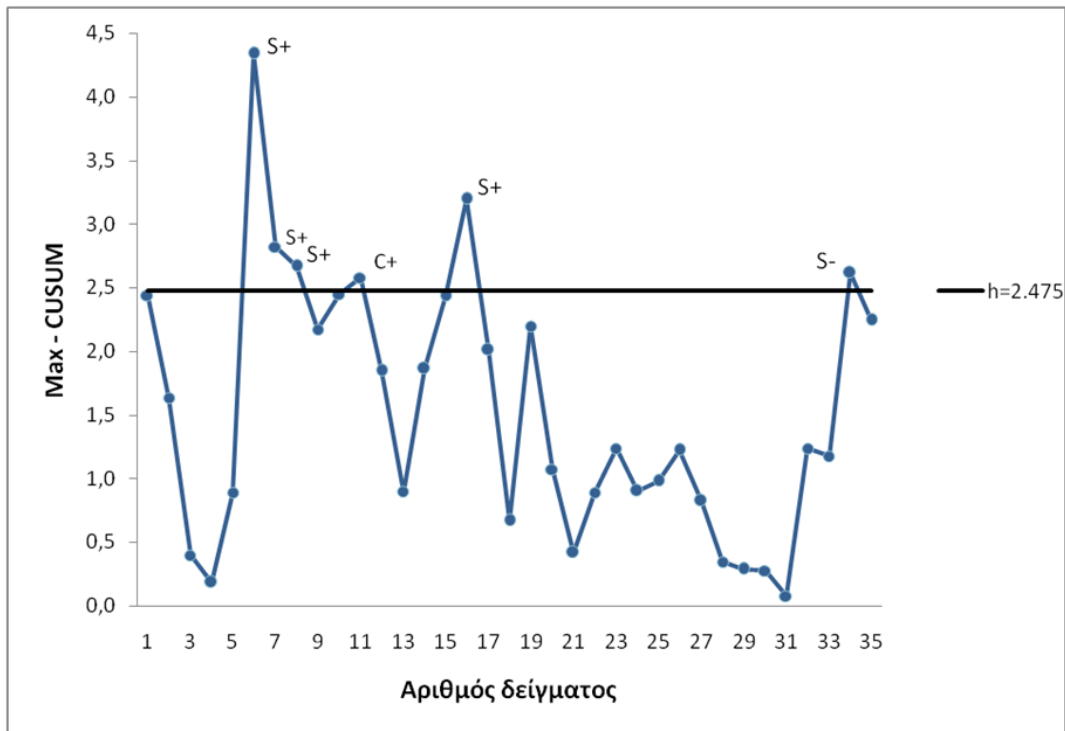
Στο Σχήμα 4.1, στο διάγραμμα Max – CUSUM σχεδιάζονται και οι 35 παρατηρήσεις από όπου φαίνεται ότι διάφορα σημεία βρίσκονται πάνω από το διάστημα απόφασης. Το 6^ο δείγμα δείχνει αύξηση της τυπικής απόκλισης. Μετά από αυτό, τα δείγματα 7 και 8 βρίσκονται επίσης πάνω από το διάστημα απόφασης, όμως στα σημεία αυτά φαίνεται ότι η τυπική απόκλιση μειώνεται προς την περιοχή ελέγχου. Εξαιτίας της πολύ υψηλής τιμής του M_i για την τυπική απόκλιση στο 6^ο δείγμα, οι διαδοχικές τιμές στα δείγματα 7 και 8 δείχνουν μια τιμή πάνω από το διάστημα απόφασης παρόλο που οι τιμές της τυπικής απόκλισης που αντιστοιχούν σε αυτά τα δείγματα είναι εντός ελέγχου. Διερευνούμε λοιπόν, την αιτία της υψηλότερης μεταβλητότητας στο 6^ο δείγμα. Σύμφωνα με τους DeVor, Chang & Sutherland (1992), το συγκεκριμένο δείγμα λήφθηκε όταν απουσίαζε ο τακτικός χειριστής και είχε αναλάβει υπεύθυνος για τη γραμμή παραγωγής ως αντικαταστάτης του ένας άπειρος χειριστής, γεγονός που θα μπορούσε να επηρεάσει τη διεργασία.

Το 11^ο δείγμα επίσης βρίσκεται πάνω από το διάστημα απόφασης, γεγονός που αντιστοιχεί σε μια αύξηση της μέσης τιμής. Το σημείο αυτό αντιστοιχεί σε ένα δείγμα που λήφθηκε στην 1:00 μμ όπου η παραγωγή είχε μόλις ξαναρχίσει μετά από μεσημεριανό διάλειμμα. Οι μηχανές έκλεισαν κατά το μεσημεριανό γεύμα για αλλαγή εργαλείων και έτσι τα στοιχεία παράχθηκαν ενώ τα μηχανήματα ήταν ακόμη κρύα. Μόλις τα μηχανήματα ζεστάθηκαν, η διεργασία τέθηκε σε κατάσταση ευστάθειας. Από το παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η μετατόπιση στο μέσο προκλήθηκε από πρόβλημα ρύθμισης των μηχανών.

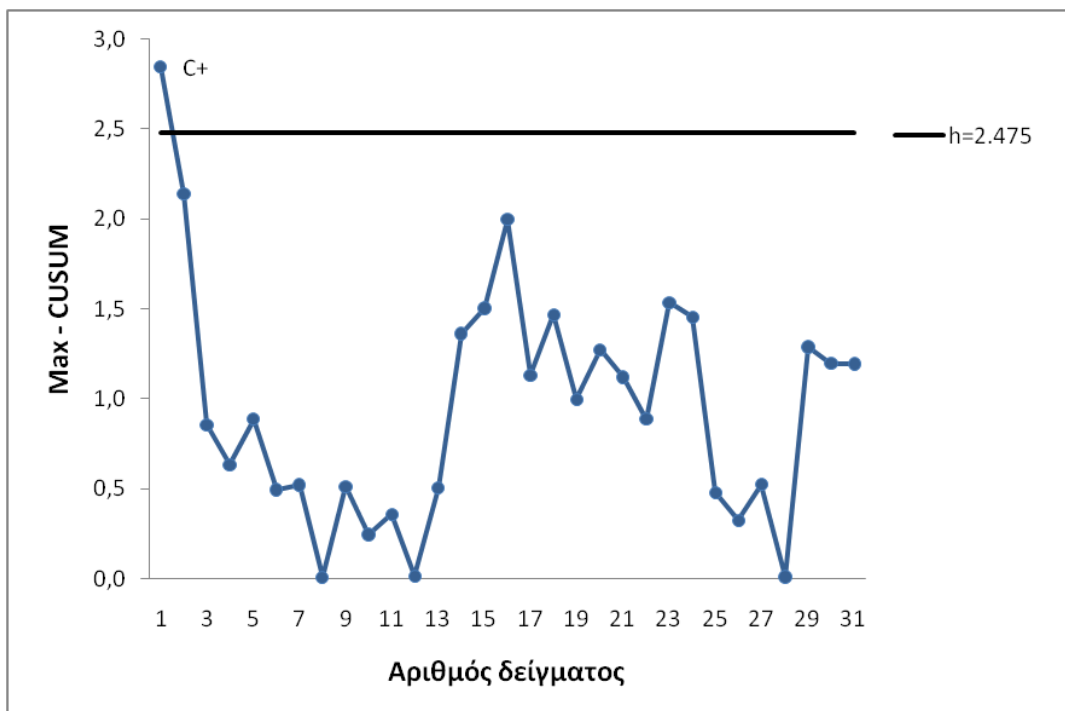
Επίσης, το 16^ο δείγμα παρατηρείται ότι βρίσκεται πάνω από το διάστημα απόφασης και η μετατόπιση αυτή φανερώνει αύξηση στην τυπική απόκλιση. Σύμφωνα με τους DeVor, Chang & Sutherland (1992), αυτό το δείγμα αντιστοιχεί σε μια χρονική στιγμή που ένας μη-έμπειρος χειριστής είχε τον έλεγχο της διεργασίας.

Εκτός από τα προαναφερθέντα σημεία που επίσης βρίσκονται πάνω από το όριο ελέγχου στα διαγράμματα Shewhart, Max και EWMA, πάνω από το διάστημα απόφασης βρίσκεται και το 34^ο δείγμα. Το συγκεκριμένο σημείο αντιστοιχεί σε μια μείωση στην τυπική απόκλιση. Στο διάγραμμα S Shewhart, η τιμή αυτή σχεδιάζεται κοντά στο κάτω όριο ελέγχου αλλά εντός της αποδεκτής περιοχής. Από τον Πίνακα 4.1 φαίνεται ότι το διάγραμμα Max – CUSUM είναι πολύ ευαίσθητο στις μικρές μετατοπίσεις και επομένως σηματοδοτεί για αυτή την μικρή μείωση στην τυπική

απόκλιση.



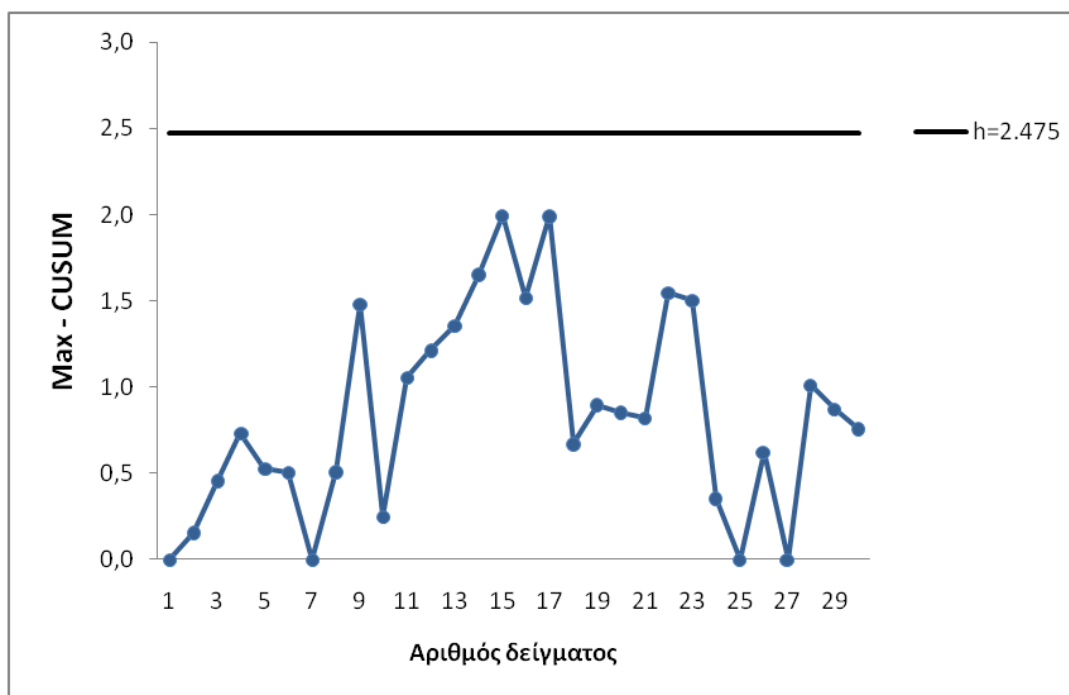
Σχήμα 4.1. Το διάγραμμα Max – CUSUM.



Σχήμα 4.2. Το διάγραμμα Max – CUSUM.

Όταν αυτά τα τέσσερα δείγματα αφαιρεθούν, υπολογίζονται νέες εκτιμήσεις για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, δίνοντας τα ακόλουθα: $\bar{X} = 200.08$ και $\bar{S}/c_4 = 3.02$. Το αναθεωρημένο διάγραμμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2. Στο διάγραμμα αυτό εμφανίζεται μόνο ένα σημείο πάνω από το διάστημα απόφασης. Το σημείο αντιστοιχεί στο 1^ο δείγμα, το οποίο λήφθηκε στις 8:00 πμ και δείχνει μια αύξηση στη μέση τιμή. Το δείγμα αυτό λήφθηκε περίπου στην αρχή της γραμμής παραγωγής το πρωί, όταν το μηχάνημα ήταν κρύο. Μόλις το μηχάνημα θερμάνθηκε, η παραγωγή επιστρέφει σε κατάσταση εντός ελέγχου.

Μετά την αφαίρεση του 1^{ου} δείγματος, κάνουμε ξανά υπολογισμούς και παίρνουμε: $\bar{X} = 199.93$ και $\bar{S}/c_4 = 3.06$. Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζεται το διάγραμμα Max – CUSUM για τα νέα δεδομένα, από όπου φαίνεται ότι όλα τα σημεία βρίσκονται μέσα στο διάστημα απόφασης φανερώοντας ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου.



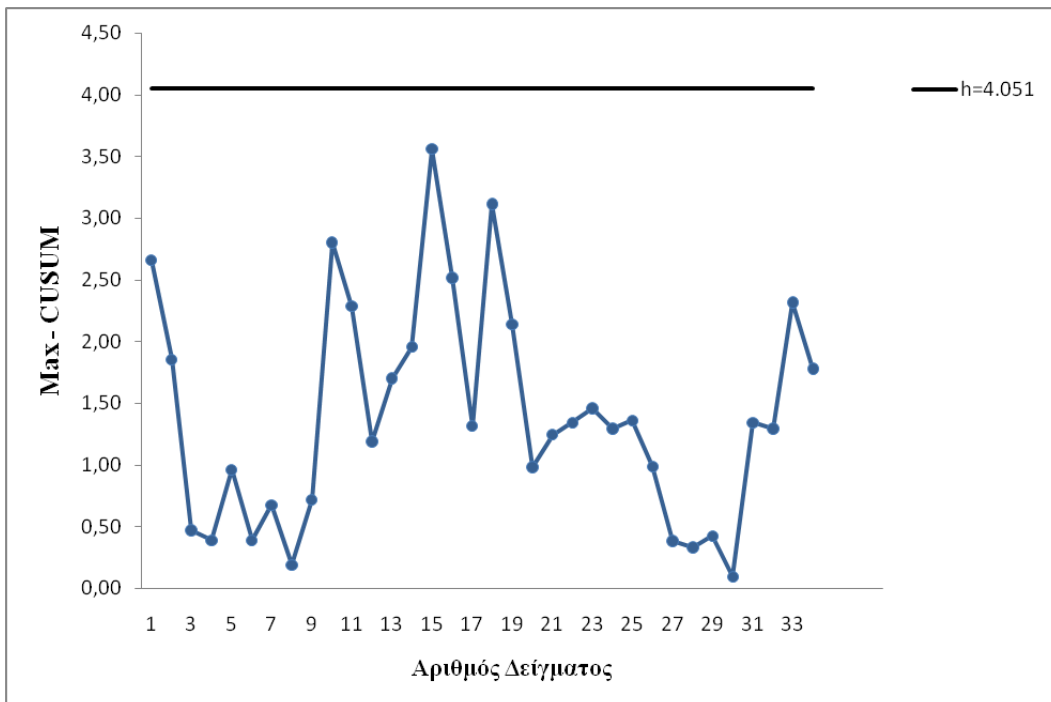
Σχήμα 4.3. Το διάγραμμα Max – CUSUM.

Στην περίπτωση που θεωρήσουμε την τιμή του διαστήματος απόφασης να είναι $h = 4.051$ σύμφωνα με τον Πίνακα 4.1, προκύπτει το Σχήμα 4.4, από το οποίο παρατηρούμε ότι το 6^ο δείγμα βρίσκεται πάνω από το διάστημα απόφασης. Αυτό το

σημείο δείχνει αύξηση της τυπικής απόκλισης. Μετά την αφαίρεση του σημείου αυτού, κάνουμε ξανά υπολογισμούς και παίρνουμε: $\bar{X} = 200.22$ και $\bar{S}/c_4 = 3.10$. Σχεδιάζουμε ξανά το Max – CUSUM, στο Σχήμα 4.5 όπου και παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία είναι εντός των ορίων.



Σχήμα 4.4. Το διάγραμμα Max – CUSUM.



Σχήμα 4.5. Το διάγραμμα Max – CUSUM.

4.2 Διάγραμμα EWMA – SC

4.2.1 Εισαγωγή

Ο Roberts (1959) πρότεινε το διάγραμμα ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη (EWMA) για την ανίχνευση μιας μετατόπισης στο μέσο της διεργασίας. Δεδομένου ότι τα διαγράμματα ελέγχου EWMA είναι γνωστά για την ευαισθησία τους στην ανίχνευση μικρών αλλαγών στο μέσο ή τυπική απόκλιση της διεργασίας, η τεχνική EWMA έχει λάβει μεγάλη προσοχή και έχει αποκτήσει εκτεταμένες εφαρμογές στον τομέα του ελέγχου ποιότητας. Από πολλούς συγγραφείς έχουν γίνει συμβολές στη βιβλιογραφία. Ωστόσο, συνήθως απαιτούνται δυο διαγράμματα EWMA για την παρακολούθηση του μέσου και της τυπικής απόκλισης της διεργασίας αντίστοιχα. Μερικές φορές αυτό είναι ενοχλητικό και χρονοβόρο.

Εκτός από την αποτελεσματικότητα ενός διαγράμματος ελέγχου, είναι σημαντικό, ειδικά σε ένα εργασιακό περιβάλλον παραγωγής, να γίνει η διεργασία σχεδίασης εύκολη στην εφαρμογή. Οι Chao & Cheng (1996) ανέπτυξαν ένα διάγραμμα ελέγχου, το διάγραμμα ημικυκλίου (*Semicircle Chart – SC*). Το διάγραμμα αυτό μπορεί να συνδυάσει την από κοινού ανίχνευση μετατόπισης του μέσου και της τυπικής απόκλισης σε ένα ενιαίο διάγραμμα και είναι απλό στη χρήση και στην κατανόηση. Ένα από τα πιο εντυπωσιακά χαρακτηριστικά του διαγράμματος ημικυκλίου είναι η ευκολία του στο να αποδίδει ένα σήμα εκτός ελέγχου στην αιτία της μετατόπισης του μέσου και/ή της τυπικής απόκλισης. Παρ' όλα αυτά, το SC διάγραμμα δεν είναι ευαίσθητο σε μικρές αλλαγές σε μια διεργασία.

Συνδυάζοντας τα χαρακτηριστικά του διαγράμματος ημικυκλίου με την τεχνική EWMA, εφαρμόζουμε την τεχνική EWMA στο SC διάγραμμα και προτείνεται ένα νέο διάγραμμα. Το διάγραμμα αυτό είναι πολύ ευαίσθητο στην ανίχνευση μικρών αλλαγών μέσα σε μια διεργασία όταν μια μετατόπιση στο μέσο συνοδεύει μια αυξημένη αλλαγή στη διασπορά. Μπορεί ταυτόχρονα να παρακολουθεί τόσο το μέσο όσο και την αυξημένη μεταβλητότητα της διεργασίας και ανιχνεύει την πηγή και την κατεύθυνση ενός σήματος εκτός ελέγχου. Επιπλέον, έχει ένα ακόμα πλεονέκτημα στο να σχεδιάζεται ευκολότερα σε πρακτική εφαρμογή, το οποίο επιτρέπει μεγαλύτερη ευελιξία από τη συνηθισμένη προσέγγιση. Έτσι, προτείνεται μια στρατηγική

σχεδίασης χρησιμοποιώντας τα βέλτιστα λ και L και δίνεται ένα παράδειγμα για να επεξηγηθεί η αφορμή του νέου διαγράμματος έλεγχος.

4.2.2 Περιγραφή του διαγράμματος EWMA – SC

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια σειρά τυχαίων μεταβλητών $X_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots$ και $j = 1, 2, \dots, n_i$. Έστω επίσης ότι το μ_0 είναι η ονομαστική τιμή της μέσης τιμής και σ_0 είναι μια γνωστή τιμή της τυπικής απόκλισης της διεργασίας και υποθέτουμε ότι οι παράμετροι της διεργασίας μ και σ μπορούν να εκφραστούν ως $\mu = \mu_0 + a\sigma_0$ και $\sigma = b\sigma_0$, όπου τα a και b είναι σταθερές με $b > 0$. Η διεργασία είναι υπό έλεγχο όταν $a = 0$ και $b = 1$. Διαφορετικά η διεργασία έχει αλλάξει.

Έστω ότι $\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}/n_i$ είναι ο i -οστός δειγματικός μέσος και $S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / (n_i - 1)$ είναι η i -οστή δειγματική τυπική απόκλιση. Ορίζεται η στατιστική συνάρτηση του διαγράμματος SC ως:

$$T_i = (\bar{X}_i - \mu_0)^2 + \frac{n-1}{n} S_i^2, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.2.1)$$

Έστω ότι $T_i^* = (n/\sigma_0^2) T_i$. Τότε η συνάρτηση Q_i για το EWMA υπολογίζεται ως:

$$Q_i = (1 - \lambda)Q_{i-1} + \lambda T_i^*, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.2.2)$$

όπου το Q_0 είναι η αντίστοιχη αρχική τιμή και το λ είναι η σταθερά εξομάλυνσης για το σχεδιασμό του EWMA, με $0 \leq \lambda \leq 1$.

Επειδή το $T_i^* \sim \chi_n^2$ όπου το $a = 0$ και $b = 1$, είναι εύκολο να δειχθεί ότι:

$$E(Q_i) = E(T_i^*) = n \quad (4.2.3)$$

$$Var(Q_i) = \frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda} Var(T_i^*) = \frac{2n\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}. \quad (4.2.4)$$

Όταν $Q_0 = n$, η εξίσωση (4.2.2) μπορεί επίσης να γραφεί ως:

$$Q_i = U_i + V_i + n, \quad (4.2.5)$$

όπου

$$U_i = (1 - \lambda)U_{i-1} + \lambda \left[\frac{n(\bar{X}_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} - 1 \right] \quad (4.2.6)$$

και

$$V_i = (1 - \lambda)V_{i-1} + \lambda \left[(n - 1) \left(\frac{S_i^2}{\sigma_0^2} - 1 \right) \right], \quad (4.2.7)$$

με $U_0 = V_0 = 0$.

Μια μετατόπιση στο μέσο της διεργασίας και/ή μια μετατόπιση στη μεταβλητότητα της διεργασίας οδηγεί σε μια μεγάλη τιμή του Q_i , διαφορετικά η τιμή του Q_i μικραίνει και η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Επειδή το διάγραμμα EWMA βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση του διαγράμματος SC, το διάγραμμα αυτό ονομάζεται διάγραμμα EWMA – SC. Όσο το Q_i είναι μη-αρνητικό, χρειάζεται μόνο το UCL . Το UCL που αντιστοιχεί στην εξίσωση (4.2.2) δίνεται από τη σχέση:

$$UCL_1 = E(Q_i) + L\sqrt{Var(Q_i)} = n + L \sqrt{\frac{2n\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}}. \quad (4.2.8)$$

Το UCL που αντιστοιχεί στην εξίσωση (4.2.5) δίνεται από τη σχέση:

$$UCL_2 = L \sqrt{\frac{2n\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}}. \quad (4.2.9)$$

Καθώς μεγαλώνει το i , το UCL τείνει να προσεγγίσει την τιμή της κατάστασης ευστάθειας και η εξίσωση (4.2.8) θα γίνει:

$$UCL_1 = n + L \sqrt{\frac{2n\lambda}{2 - \lambda}}. \quad (4.2.10)$$

Και η εξίσωση (4.2.9) γίνεται:

$$UCL_2 = L \sqrt{\frac{2n\lambda}{2-\lambda}}, \quad (4.2.11)$$

όπου τα λ και L είναι οι παράμετροι σχεδιασμού του διαγράμματος EWMA – SC και ελέγχουν την απόδοση του διαγράμματος.

4.2.3 Σχεδιασμός του διαγράμματος EWMA – SC

Με βάση τις θεωρητικές μελέτες των Crowder (1987) και Lucas & Saccucci (1990), το κριτήριο για τον σχεδιασμό ενός βέλτιστου διαγράμματος EWMA – SC είναι να κάνουμε το διάγραμμα να έχει την καλύτερη απόδοση *ARL*. Αν θέλουμε να ανιχνεύσουμε γρήγορα ένα συγκεκριμένο ζεύγος αλλαγών στο μέσο και στη διασπορά της διεργασίας, μπορούμε να αποκτήσουμε το επιθυμητό εντός ελέγχου *ARL* επιλέγοντας το συνδυασμό (λ, L) για τον βέλτιστο σχεδιασμό και ελαχιστοποιεί το εκτός ελέγχου *ARL* για τις συγκεκριμένες αλλαγές στο μέσο και τη διασπορά. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο εξίσωσης ολοκλήρωσης που περιγράφεται παρακάτω μπορούμε να αποκτήσουμε κάθε τιμή *ARL* για το διάγραμμα EWMA – SC.

Για τη χρήση της προσέγγισης της εξίσωσης ολοκληρώματος για τον υπολογισμό του *ARL* πρέπει να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του T_i^* . Το T_i^* μπορεί να αναλυθεί σε:

$$T_i^* = b^2(T_{i1}^* + T_{i2}^*), \quad (4.2.12)$$

όπου

$$T_{i1}^* = \frac{n}{b^2\sigma_0^2} [(\bar{X}_i - \mu) + \alpha\sigma_0^2 T_{i2}^*]^2 \quad (4.2.13)$$

$$T_{i2}^* = \frac{n-1}{b^2\sigma_0^2} S_i^2. \quad (4.2.14)$$

Επειδή το $T_{i1}^* \sim \chi_{1,\delta^2}^2$ και το $T_{i2}^* \sim \chi_{n-1}^2$ και τα T_{i1}^*, T_{i2}^* είναι ανεξάρτητα, θα ισχύει: $T_{i1}^* + T_{i2}^* \sim \chi_{n,\delta^2}^2$, όπου $\delta^2 = na^2/b^2$.

Μια Γκαουσιανή προσέγγιση για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του T_i^* δίνεται από τη σχέση:

$$H_{n,\delta^2}(y) \approx \Phi \left\{ \frac{1}{d} \left[\left(\frac{y}{n + \delta^2} \right)^r - c \right] \right\}, \quad (4.2.15)$$

όπου

$$r = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2\delta^4}{(n + 2\delta^2)^2} \right], \quad c = 1 + \frac{r(r-1)(n + 2\delta^2)}{(n + \delta^2)^2}, \quad d = \frac{r\sqrt{2(n + 2\delta^2)}}{n + \delta^2}.$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (4.2.15) ως προς το y , η Γκαουσιανή προσέγγιση για το $h_{n,\delta^2}(y)$ υπολογίζεται να είναι η ακόλουθη:

$$h_{n,\delta^2}(y) \approx \frac{r}{d(n + \delta^2)^2} \phi \left\{ \frac{1}{d} \left[\left(\frac{y}{n + \delta^2} \right)^r - c \right] \right\}. \quad (4.2.16)$$

Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του T_i^* δίνεται από τη σχέση:

$$f_{T^*}(y) = \frac{1}{b^2} h_{n,\delta^2} \left(\frac{y}{b^2} \right), \quad y \geq 0. \quad (4.2.17)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση ολοκλήρωσης για το ARL του διαγράμματος EWMA – SC θα είναι:

$$L(Q_0) = 1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^{UCL} L(y) f_{T^*} \left(\frac{y - (1 - \lambda)Q_0}{\lambda} \right) dy. \quad (4.2.18)$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ολοκληρώματος εκτιμούμε το ARL χρησιμοποιώντας τα 64 σημεία ολοκλήρωσης του Gauss (*64 point Gaussian quadrature*).

Έτσι, για ένα δεδομένο εντός ελέγχου $ARL = 250$ και $\lambda = 0.05$ (0.005)1, το αντίστοιχο L βρίσκεται ώστε ο συνδυασμός (λ, L) να μας δίνει το επιθυμητό εντός ελέγχου ARL . Χρησιμοποιώντας 191 τέτοιους συνδυασμούς, υπολογίζεται κάθε εκτός

ελέγχου ARL σε σχέση με ένα ζεύγος συγκεκριμένων a και b . Ο βέλτιστος συνδυασμός (λ, L) για ένα ζεύγος καθορισμένων a και b , είναι αυτός που οδηγεί στη μικρότερη τιμή των 191 εκτός ελέγχου $ARLs$. Η προσέγγιση του UCL στην εξίσωση (4.2.10) ή (4.2.11) είναι η τιμή ευσταθούς κατάστασης που θα προσεγγιστεί αφού το διάγραμμα EWMA – SC εκτελεστεί για αρκετές χρονικές περιόδους, που λαμβάνεται περίπου ως 5.

Στους Πίνακες 4.8, 4.9 και 4.10 περιλαμβάνονται μερικές αντιπροσωπευτικές βέλτιστες τιμές των (λ, L) και τα αντίστοιχα εκτός ελέγχου $ARLs$ δεδομένων των αντίστοιχων εντός ελέγχου $ARL_0 = 250, 370$ και 500 , χρησιμοποιώντας το προσεγγιστικό UCL για $n = 5$ με αρχικές τιμές $Q_0 = 5$ ή $U_0 = V_0 = 0$. Για παράδειγμα, αν κάποιος θέλει να έχει ένα εντός ελέγχου $ARL_0 = 250$ και να προφυλαχτεί από μια κατά ένα τέταρτο της μονάδας αύξηση στο μέσο και στη διασπορά, δηλαδή $a = 0.25$, $b = 1.25$, οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων είναι $\lambda = 0.05$ και $L = 1.87996$. Όπως απεικονίζεται στους πίνακες αυτούς, οι μικρότερες τιμές του λ είναι πιο αποτελεσματικές στην ανίχνευση μικρών αλλαγών στο μέσο και/ή στη διασπορά.

Οι MacGregor & Harris (1990) διερεύνησαν τις ιδιότητες του διαγράμματος EWMA και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η χρήση της ακριβούς διασποράς του EWMA οδηγεί σε μια φυσική γρήγορη αρχική απόκριση για ένα διάγραμμα EWMA. Αυτό σημαίνει ότι οι αρχικές εκτός ελέγχου συνθήκες μπορούν να ανιχνευθούν πιο γρήγορα χρησιμοποιώντας το ακριβές UCL στην εξίσωση (4.2.8) ή (4.2.9). Η απόδοση σύμφωνα με τις τιμές των ARL του EWMA – SC διαγράμματος συμφωνεί με τα συμπεράσματα των MacGregor & Harris (1990). Χρησιμοποιώντας το ακριβές UCL , στον Πίνακα 4.11 μπορούμε επίσης να βρούμε μερικές αντιπροσωπευτικές βέλτιστες τιμές των (λ, L) και τα αντίστοιχα εκτός ελέγχου $ARLs$ για $n = 5$ και για διάφορες αλλαγές στο μέσο και τη διασπορά της διεργασίας, δεδομένου ότι έχουμε $ARL_0 = 250$ και αρχικές τιμές $Q_0 = 5$ ή $V_0 = U_0 = 0$. Φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα ότι όλες οι τιμές των $ARLs$ είναι μικρότερες ή ίσες με τις αντίστοιχες τιμές του Πίνακα 4.8.

Πίνακας 4.8. Οι (λ, L) συνδυασμοί και τα αντίστοιχα ARL για βέλτιστα διαγράμματα EWMA – SC σε μια σταθερή κατάσταση όταν $ARL_0 = 250$ και $n = 5$.

b		α							
		0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	λ	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	1.4100	0.7000	0.9200	0.9800
	L	1.87996	1.87996	1.87996	1.87996	3.40589	3.75687	3.87189	3.88108
	ARL	250.00	73.46	22.60	5.16	2.11	1.25	1.03	1.00
1.25	λ	0.0500	0.0500	0.0500	0.3000	0.4650	0.7000	0.9000	0.9700
	L	1.87996	1.87996	1.87996	3.18646	3.49091	3.75687	3.86667	3.88021
	ARL	9.43	8.50	6.51	3.22	1.79	1.23	1.05	1.00
1.50	λ	0.2250	0.2650	0.2650	0.4100	0.5700	0.7300	0.8850	0.9600
	L	3.10506	3.10506	3.40589	3.63012	3.78053	3.86209	3.87907	3.07814
	ARL	4.17	3.96	3.44	2.30	1.56	1.20	1.06	1.01
2.00	λ	0.4650	0.5000	0.5000	0.5900	0.7000	0.7950	0.8850	0.9500
	L	3.54163	3.54163	3.65165	3.75687	3.82226	3.86209	3.87766	3.49091
	ARL	1.87	1.84	1.76	1.52	1.30	1.14	1.06	1.02
2.50	λ	0.6550	0.6550	0.7000	0.7000	0.7950	0.8600	0.9100	0.9350
	L	3.71688	3.75687	3.82226	3.85326	3.85328	3.86948	3.87510	3.71688
	ARL	1.34	1.33	1.31	1.24	1.16	1.10	1.05	1.02
3.00	λ	0.7950	0.7950	0.7950	0.8250	0.8600	0.8850	0.9350	0.9350
	L	3.82226	3.82226	3.83783	3.85328	3.86209	3.87510	3.87510	3.82226
	ARL	1.16	1.16	1.15	1.13	1.09	1.06	1.04	1.02

Πίνακας 4.9. Οι (λ, L) συνδυασμοί και τα αντίστοιχα ARL για βέλτιστα διαγράμματα EWMA – SC σε μια σταθερή κατάσταση όταν $ARL_0 = 370$ και $n = 5$.

b		α							
		0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	λ	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.3650	0.6550	0.9000	0.9800
	L	1.94790	1.94790	1.94790	1.94790	3.57945	3.99578	4.15768	4.14281
	ARL	369.99	78.75	23.66	5.33	2.26	1.30	1.04	1.00
1.25	λ	0.0500	0.0500	0.0500	0.2650	0.4650	0.6750	0.8850	0.9750
	L	1.94790	1.94790	1.94790	3.34585	3.75513	4.01538	4.15283	4.17241
	ARL	9.80	8.80	6.73	3.47	1.89	1.27	1.06	1.01
1.50	λ	0.0500	0.0500	0.2750	0.3650	0.5550	0.7000	0.8700	0.9500
	L	1.94790	1.94790	3.37492	3.57945	3.88463	4.03916	4.14728	4.17076
	ARL	4.48	4.28	3.71	2.44	1.64	1.24	1.07	1.01
2.00	λ	0.4650	0.4650	0.4850	0.5550	0.6550	0.7850	0.8800	0.9500
	L	3.75513	3.75513	3.78798	3.88463	3.99578	4.10416	4.15108	4.16931
	ARL	1.96	1.93	1.84	1.58	1.33	1.16	1.07	1.03
2.50	λ	0.6550	0.6550	0.6550	0.6750	0.7550	0.8450	0.8800	0.9800
	L	3.99578	3.99578	3.99578	4.01538	4.08420	4.13634	4.15108	4.16554
	ARL	1.38	1.37	1.37	1.27	1.18	1.11	1.06	1.02
3.00	λ	0.7750	0.7850	0.7850	0.8150	0.8450	0.8800	0.9300	0.9300
	L	4.09778	4.10416	4.10416	4.12147	4.13634	4.15108	4.16554	4.16554
	ARL	1.18	1.17	1.17	1.14	1.10	1.07	1.04	1.02

Πίνακας 4.10. Οι (λ, L) συνδυασμοί και τα αντίστοιχα ARL για βέλτιστα διαγράμματα EWMA – SC σε μια σταθερή κατάσταση όταν $ARL_0 = 500$ και $n = 5$.

b		α							
		0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	λ	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.3250	0.6550	0.8950	0.9850
	L	1.98485	1.98485	1.98485	1.98485	3.67776	4.20688	4.37768	4.39549
	ARL	499.99	80.96	24.08	5.42	2.37	1.34	1.05	1.00
1.25	λ	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.4650	0.6550	0.8550	0.9750
	L	1.98485	1.98485	1.98485	1.98485	3.95253	4.20688	4.36167	4.39474
	ARL	9.95	8.93	6.82	3.63	1.97	1.30	1.07	1.01
1.50	λ	0.0500	0.0500	0.0500	0.3250	0.5000	0.6750	0.8450	0.9600
	L	1.98485	1.98485	1.98485	3.67776	4.01069	4.22752	4.35674	4.39305
	ARL	4.54	4.34	3.85	2.56	1.69	1.26	1.08	1.02
2.00	λ	0.4650	0.4650	0.4650	0.5700	0.6750	0.7750	0.8450	0.9300
	L	3.95253	3.95253	3.95253	4.10935	4.22752	4.31610	4.35674	4.38762
	ARL	2.04	2.00	1.90	1.63	1.36	1.18	1.07	1.02
2.50	λ	0.6300	0.6300	0.6550	0.6750	0.7500	0.8150	0.9000	0.9300
	L	4.18027	4.18027	4.20688	4.22752	4.29857	4.34115	4.37936	4.38762
	ARL	1.41	1.40	1.38	1.29	1.20	1.12	1.06	1.03
3.00	λ	0.7300	0.7750	0.7850	0.7850	0.8450	0.8450	0.9050	0.9300
	L	4.28130	4.31610	4.32300	4.32300	4.35674	4.35674	4.38117	4.38762
	ARL	1.19	1.19	1.18	1.15	1.11	1.08	1.05	1.03

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι το 0.05 που είναι η μικρότερη τιμή του λ στο επιλεγμένο σύνολο, είναι η βέλτιστη τιμή για το λ , ακόμα και όταν οι μετατοπίσεις στο μέσο και/ή μεταβλητότητα της διεργασίας είναι μεγάλες. Αυτό συμβαίνει επειδή το ακριβές UCL , για μικρό λ , είναι πολύ μικρότερο από το κατά προσέγγιση κατά την αρχική φάση. Στο αρχικό στάδιο, η χρήση του ακριβούς UCL θα βελτιώσει την απόδοση του διαγράμματος EWMA – SC στην ανίχνευση μιας αρχικής εκτός ελέγχου κατάστασης.

Πίνακας 4.11. Οι συνδυασμοί (λ, L) και τα αντίστοιχα ARL για το βέλτιστο διάγραμμα EWMA – SC σε μια αρχική κατάσταση και $n = 5$.

b		α							
		0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	λ	0.40	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	L	3.4054	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	249.94	66.30	21.21	3.61	1.61	1.12	1.01	1.00
1.25	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	L	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	7.53	6.61	4.77	2.38	1.46	1.13	1.02	1.00
1.50	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	L	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	3.07	2.92	2.57	1.82	1.35	1.12	1.03	1.00
2.00	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	L	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	1.56	1.54	1.49	1.34	1.20	1.10	1.04	1.01
2.50	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	L	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	1.23	1.22	1.21	1.17	1.11	1.06	1.03	1.01
3.00	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	L	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	1.11	1.11	1.10	1.09	1.06	1.04	1.02	1.01

Για την ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων στο μέσο και τη μεταβλητότητα, συνιστάται οι τιμές του λ να κυμαίνονται από το 0.05 έως 0.30 επειδή η χρήση μικρότερων τιμών του λ μπορούν να ανιχνεύσουν μικρότερες μετατοπίσεις. Όταν χρησιμοποιούμε μικρές τιμές για το λ , η εμφάνιση ενός προβλήματος αδράνειας είναι η χειρότερη κατάσταση για τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της χειρότερης κατάστασης, το Q_i θα είναι πολύ κοντά στο UCL όταν εμφανίζεται μια μεγάλη μετατόπιση προς την άλλη κατεύθυνση, καταλήγοντας σε μια αργή αντίδραση στη μεγάλη μετατόπιση αν χρησιμοποιείται μια μικρή τιμή για το λ . Προκειμένου να προληφθεί αυτό το πρόβλημα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ταυτόχρονα ένα επιπλέον διάγραμμα EWMA – SC με $\lambda = 1$. Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν το $\lambda = 1$, το διάγραμμα EWMA – SC

είναι ισοδύναμο με το διάγραμμα SC το οποίο είναι μια χρήσιμη εναλλακτική επιλογή στην κοινή πρακτική χρήσης των διαγραμμάτων \bar{X} και R . Ο Montgomery (2013) και ο Lowry (1989) συζήτησαν το πρόβλημα αδράνειας που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA.

Για τα δεδομένα εντός ελέγχου ARL των 250, 370 και 500 καθώς και για κάποιες κοινώς χρησιμοποιούμενες τιμές του λ , το αντίστοιχο L βρίσκεται έτσι ώστε ο συνδυασμός (λ, L) να δίνει τα επιθυμητά εντός ελέγχου ARL , όταν χρησιμοποιούνται το κατά προσέγγιση UCL και οι αρχικές τιμές $Q_0 = 0$ ή $U_0 = V_0 = 0$. Στον Πίνακα 4.12 παρουσιάζονται αυτοί οι συνδυασμοί (λ, L) .

Πίνακας 4.12. Οι συνδυασμοί (λ, L) για το διάγραμμα EWMA – SC σε μια σταθερή κατάσταση όταν $n = 5$.

		$ARL_0 = 250$								
λ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.80	1.00
L	1.88	2.45	2.74	2.93	3.08	3.19	3.39	3.54	3.82	3.88
		$ARL_0 = 370$								
λ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.80	1.00
L	1.95	2.65	2.98	3.17	3.32	3.44	3.65	3.81	4.11	4.17
		$ARL_0 = 500$								
λ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.80	1.00
L	1.98	2.78	3.16	3.36	3.51	3.62	3.84	4.01	4.33	4.40

4.2.4 Σύγκριση διαγράμματος EWMA – SC με άλλα διαγράμματα

Προκειμένου να δοθεί μια εναλλακτική πρόταση στη χρήση συνδυασμών των υφισταμένων διαγραμμάτων ελέγχου, το διάγραμμα EWMA –SC συγκρίνεται με δυο συνδυασμούς διαγραμμάτων: ο συνδυασμός των δυο διαγραμμάτων Shewhart και ο συνδυασμός των δυο διαγραμμάτων EWMA. Για να συγκρίνουμε την απόδοση των διαφόρων διαγραμμάτων ελέγχου επί ίσοις όροις, βαθμονομούμε το κάθε διάγραμμα

έτσι ώστε το εντός ελέγχου ARL να είναι περίπου ίσο με 250 σε μια κατάσταση ευστάθειας και το μέγεθος του δείγματος να είναι σε όλα ίσο με n .

Η πρώτη σύγκριση πραγματοποιείται μεταξύ του διαγράμματος EWMA – SC και του συνδυασμού των διαγραμμάτων \bar{X} και S . Στην περίπτωση του διαγράμματος \bar{X} όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, χρησιμοποιούνται τα 3σ όρια ελέγχου και η πιθανότητα σφάλματος τύπου I είναι ίση με 0.002. Αντίστοιχα, για το διάγραμμα S στην εντός ελέγχου κατάσταση, χρησιμοποιούνται τα όρια ελέγχου πιθανότητας και σε κάθε ουρά αποδίδεται πιθανότητα 0.001 έτσι ώστε η πιθανότητα σφάλματος τύπου I να είναι επίσης 0.002. Ο συνδυασμός των διαγραμμάτων \bar{X} και S έχει μια συνδυασμένη πιθανότητα σφάλματος τύπου I ίση με $1 - (1 - 0.002)^2 = 0.004$, το οποίο ισοδυναμεί σε ένα εντός ελέγχου ARL ίσο με 250. Για διάφορες μετατοπίσεις στο μέσο μεμονωμένα, μεμονωμένα στη μεταβλητότητα αλλά και στο μέσο και μεταβλητότητα, μπορεί να αποκτηθεί εύκολα το ARL για το συνδυασμό των \bar{X} και S διαγραμμάτων, αφού τα διαγράμματα \bar{X} και S είναι ανεξάρτητα, ενώ το ARL για το διάγραμμα EWMA – SC λαμβάνεται από τον Πίνακα 4.8.

Στον Πίνακα 4.13 δίνονται κάποια αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα. Από τον Πίνακα 4.13 λοιπόν μπορούμε να δούμε ότι το διάγραμμα EWMA – SC υπερέρχει του συνδυασμού των διαγραμμάτων \bar{X} και S στην ανίχνευση μετατοπίσεων στο μέσο και/ή τη μεταβλητότητα. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι ότι ακόμα και για μεγάλες μετατοπίσεις σε μια διεργασία, οι βέλτιστες τιμές ARL του διαγράμματος EWMA – SC είναι μικρότερες από αυτές του συνδυασμού διαγραμμάτων \bar{X} και S . Το παραπάνω είναι γενικά αληθές και στην περίπτωση που λαμβάνονται υπόψη και άλλα εντός ελέγχου ARL .

Πίνακας 4.13. Βέλτιστες τιμές ARL του διαγράμματος EWMA – SC και του συνδυασμού των διαγραμμάτων \bar{X} και S όταν $n = 5$ και $ARL_0 = 250$.

Διάγραμμα EWMA – SC								
	α							
b	0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	250.00	73.46	22.60	5.16	2.11	1.25	1.03	1.00
1.25	9.43	8.50	6.51	3.22	1.79	1.23	1.05	1.00
1.50	4.17	3.96	3.44	2.30	1.56	1.20	1.06	1.01
2.00	1.87	1.84	1.76	1.52	1.30	1.14	1.06	1.02
2.50	1.34	1.33	1.31	1.24	1.16	1.10	1.05	1.02
3.00	1.16	1.16	1.15	1.13	1.09	1.06	1.04	1.02

Συνδυασμός διαγραμμάτων Shewhart								
	α							
b	0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	250.21	128.14	38.08	5.05	1.65	1.09	1.01	1.00
1.25	30.92	23.85	13.20	3.82	1.69	1.15	1.02	1.00
1.50	8.30	7.50	5.78	2.90	1.65	1.20	1.08	1.02
2.00	2.43	2.38	2.22	1.80	1.43	1.20	1.08	1.02
2.50	1.52	1.50	1.47	1.37	1.24	1.14	1.07	1.03
3.00	1.24	1.23	1.22	1.19	1.14	1.09	1.06	1.03

Στη συνέχεια, το διάγραμμα EWMA – SC συγκρίνεται με τον συνδυασμό των δυο διαγραμμάτων EWMA. Το ένα από τα δυο διαγράμματα EWMA, που εμπλέκονται στον συνδυασμό, είναι το συνηθισμένο EWMA \bar{X} που προτάθηκε από τον Roberts (1959) και το άλλο είναι το τροποποιημένο διάγραμμα EWMA $\ln(S^2)$ που δίνεται στους Crowder & Hamilton (1992). Για τις παραγράφους που ακολουθούν, θεωρούμε ότι το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 5$.

Το διάγραμμα EWMA \bar{X} έχει τα ακόλουθα όρια ελέγχου:

$$\begin{aligned}
 UCL_1 &= \mu_1 + L_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{2 - \lambda_1}} \sigma_1 \\
 CL_1 &= \mu_1
 \end{aligned}
 \tag{4.2.19}$$

$$LCL_1 = \mu_1 - L_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{2 - \lambda_1}} \sigma_1,$$

όπου τα λ_1 και L_1 είναι παράμετροι που ελέγχουν την απόδοση του διαγράμματος EWMA \bar{X} , με $\mu_1 = \mu_0$ και $\sigma_1 = \sigma_0/\sqrt{n}$.

Το στατιστικό σχεδίασης ορίζεται ως ακολούθως:

$$Q_i = (1 - \lambda)Q_{i-1} + \lambda\bar{X}_i, \quad i = 1, 2, \dots
 \tag{4.2.20}$$

με $Q_0 = \mu_1$.

Για το διάγραμμα EWMA $\ln(S^2)$, τα όρια ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned}
 UCL_2 &= \mu_2 + L_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{2 - \lambda_2}} \sigma_2 \\
 CL_2 &= \mu_2
 \end{aligned}
 \tag{4.2.21}$$

$$LCL_2 = \mu_2 - L_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{2 - \lambda_2}} \sigma_2,$$

όπου τα λ_2 και L_2 είναι οι παράμετροι που ελέγχουν την απόδοση του διαγράμματος EWMA $\ln(S^2)$, το μ_2 είναι η προσεγγιστική μέση τιμή του $\ln(S^2)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_2 = \ln(\sigma_0^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^5}
 \tag{4.2.22}$$

και σ_2^2 είναι η προσεγγιστική μεταβλητότητα του $\ln(S^2)$ που δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_2^2 = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^2}.
 \tag{4.2.23}$$

Το στατιστικό σχεδίασης λοιπόν, θα είναι:

$$Y_i = (1 - \lambda_2)Y_{i-1} + \ln(S_i^2) \quad , \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.2.24)$$

με $Y_0 = \mu_2$.

Με δεδομένο ότι το εντός ελέγχου ARL είναι $ARL_0 = 500$ τόσο για το διάγραμμα EWMA \bar{X} όσο και για το EWMA $\ln(S^2)$, το εντός ελέγχου ARL του διαγράμματος συνδυασμού είναι 250. Στον Πίνακα 4.14 περιέχονται οι βέλτιστες τιμές των (λ_1, L_1) για συγκεκριμένες μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας, οι βέλτιστες τιμές των (λ_2, L_2) για συγκεκριμένες μετατοπίσεις στη μεταβλητότητα της διεργασίας και τα αντίστοιχα μικρότερα $ARLs$, τα οποία λαμβάνονται από την επίλυση των εξισώσεων ολοκλήρωσης με τον ίδιο τρόπο όπως στον Crowder (1987) και Crowder & Hamilton (1992).

Πίνακας 4.14. Οι βέλτιστες τιμές παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στα διαγράμματα EWMA \bar{X} και EWMA $\ln(S^2)$ όταν $ARL_0 = 500$ και $n = 5$.

Διάγραμμα EWMA \bar{X}								
	α							
	0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
λ_1	0.655	0.055	0.160	0.430	0.765	0.940	0.995	1.000
L_1	3.084	2.645	2.920	3.060	3.088	3.090	3.090	3.090
ARL_1	500.0	24.4	9.6	3.0	1.6	1.1	1.0	1.0
Διάγραμμα EWMA $\ln(S^2)$								
	α							
	1.00	1.25	1.50	2.00	2.50	3.00		
λ_2	0.435	0.050	0.110	0.200	0.270	0.330		
L_2	3.561	2.633	2.900	3.143	3.292	3.402		
ARL_2	500.0	24.5	10.3	4.8	3.3	2.6		

Αφότου ένα διάγραμμα τύπου EWMA ελέγχεται από τον συνδυασμό (λ, L) , υπάρχουν πολλά πιθανά ARL για μια εκτός ελέγχου κατάσταση και μπορούν να χρησιμοποιηθούν δυο προσεγγίσεις για να γίνουν οι συγκρίσεις μεταξύ των διαγραμμάτων τύπου EWMA. Η πρώτη προσέγγιση συγκρίνει την καλύτερη απόδοση

ARL του διαγράμματος EWMA – SC με εκείνη του συνδυασμού των δυο διαγραμμάτων EWMA. Για ένα ζευγάρι καθορισμένων μετατοπίσεων στο μέσο και τη μεταβλητότητα της διεργασίας όπως δίνεται από τα καθορισμένα a και b , μπορούμε να αποκτήσουμε τη μικρότερη τιμή εκτός ελέγχου *ARL* για κάθε διάγραμμα τύπου EWMA χρησιμοποιώντας τις βέλτιστες παραμέτρους τους. Στον Πίνακα 4.15 περιλαμβάνονται τα αποτελέσματα αυτών των συγκρίσεων, ενώ για το διάγραμμα EWMA – SC λαμβάνουμε τις τιμές από τον Πίνακα 4.8. Οι αντίστοιχες τιμές για τον συνδυασμό των διαγραμμάτων EWMA \bar{X} και EWMA $\ln(S^2)$ λαμβάνονται από 10,000 προσομοιώσεις που βασίζονται στις βέλτιστες τιμές παραμέτρων για τους συνδυασμούς των (λ_1, L_1) και (λ_2, L_2) οι οποίες δίνονται στον Πίνακα 4.14.

Πίνακας 4.15. Οι βέλτιστες τιμές *ARL* των διαγραμμάτων EWMA – SC και του συνδυασμού των δυο διαγραμμάτων EWMA με $ARL_0 = 250$ και $n = 5$.

Διάγραμμα EWMA – SC								
b	α							
	0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	250.00	73.46	22.60	5.16	2.11	1.25	1.03	1.00
1.25	9.43	8.50	6.51	3.22	1.79	1.23	1.05	1.00
1.50	4.17	3.96	3.44	2.30	1.56	1.20	1.06	1.01
2.00	1.87	1.84	1.76	1.52	1.30	1.14	1.06	1.02
2.50	1.34	1.33	1.31	1.24	1.16	1.10	1.05	1.02
3.00	1.16	1.16	1.15	1.13	1.09	1.06	1.04	1.02
Συνδυασμός διαγραμμάτων EWMA								
b	α							
	0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	250.13	23.53	8.47	2.94	1.55	1.09	1.01	1.00
1.25	20.83	16.52	7.99	2.94	1.61	1.15	1.02	1.00
1.50	9.26	8.58	6.40	2.88	1.66	1.21	1.05	1.01
2.00	3.83	4.64	4.00	2.54	1.70	1.31	1.12	1.04
2.50	2.57	3.21	2.88	2.16	1.64	1.36	1.18	1.08
3.00	2.04	2.58	2.34	1.89	1.56	1.37	1.21	1.12

Η δεύτερη προσέγγιση αφορά συγκρίσεις όπου τα πέντε διαγράμματα τύπου EWMA χρησιμοποιούν τις ίδιες τιμές για τα βάρη, όπως $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Στον Πίνακα 4.16 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα εκτός ελέγχου ARL του διαγράμματος EWMA – SC και του συνδυασμού των δυο διαγραμμάτων EWMA για διάφορες μετατοπίσεις στο μέσο και τη μεταβλητότητα της διεργασίας.

Πίνακας 4.16. Τιμές ARL του διαγράμματος EWMA – SC και τον συνδυασμό των δυο διαγραμμάτων EWMA με $n = 5$ και $ARL_0 = 250$.

	Διάγραμμα EWMA – SC						Συνδυασμός διαγραμμάτων				
	b	α					α				
		0.00	0.25	0.50	1.00	2.00	0.00	0.25	0.50	1.00	2.00
$\lambda = 0.05$	1.00	250.0	73.5	22.6	5.2	1.6	249.6	24.2	9.9	4.7	2.4
$L = 1.88$	1.25	9.4	8.5	6.5	3.5	1.5	23.1	16.6	9.6	4.7	2.4
$L_1 = 2.61$	1.50	4.3	4.2	3.7	2.6	1.4	10.7	10.1	8.0	4.7	2.5
$L_2 = 2.60$	2.00	2.2	2.1	2.0	1.8	1.3	5.9	5.8	5.5	4.3	2.5
$\lambda = 0.10$	1.00	250.0	109.2	27.5	5.2	1.5	252.1	25.1	8.8	3.9	2.0
$L = 2.45$	1.25	10.1	8.9	6.7	3.4	1.4	24.4	15.8	8.4	3.9	2.1
$L_1 = 2.81$	1.50	4.3	4.1	3.6	2.5	1.4	9.7	8.8	6.9	3.9	2.1
$L_2 = 2.86$	2.00	2.1	2.1	2.0	1.7	1.2	5.0	4.8	4.5	3.5	2.1
$\lambda = 0.20$	1.00	250.0	128.4	34.2	5.2	1.4	250.9	31.5	8.6	3.3	1.7
$L = 2.93$	1.25	10.8	9.5	6.8	3.3	1.3	36.1	17.9	7.9	3.3	1.7
$L_1 = 2.96$	1.50	4.2	4.0	3.5	2.4	1.3	10.2	8.7	6.3	3.3	1.7
$L_2 = 3.14$	2.00	2.0	1.9	1.9	1.6	1.2	4.4	4.3	3.9	2.9	1.7
$\lambda = 0.30$	1.00	250.0	134.8	39.3	5.4	1.3	249.4	40.2	9.4	3.0	1.4
$L = 3.19$	1.25	11.7	10.2	7.1	3.2	1.3	48.7	20.5	8.3	3.4	1.7
$L_1 = 3.02$	1.50	4.1	3.9	3.4	2.3	1.3	10.1	8.5	6.1	3.0	1.7
$L_2 = 3.35$	2.00	1.9	1.9	1.7	1.4	1.2	4.2	4.1	3.3	2.6	1.4

Στους Πίνακες 4.15 και 4.16 παρουσιάζονται παρόμοια αποτελέσματα. Το διάγραμμα EWMA –SC αποδίδει καλύτερα από τον συνδυασμό των διαγραμμάτων EWMA \bar{X} και EWMA $\ln(S^2)$ για όλες τις περιπτώσεις εκτός από εκείνες στις οποίες υπάρχουν μικρές μετατοπίσεις μεμονωμένα στο μέσο ($b = 1$). Παρόμοιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για διαφορετικές τιμές του ARL από το 250.

4.2.5 Διαδικασία σχεδίασης του διαγράμματος EWMA – SC

Υπάρχουν δυο τρόποι να απεικονιστούν τα στατιστικά για το διάγραμμα EWMA – SC. Ένας τρόπος είναι να σχεδιαστούν τα Q_i ως προς τα i , ενώ ο δεύτερος είναι να σχεδιάσουμε τα ζεύγη (U_i, V_i) στο διάγραμμα δυο διαστάσεων. Ο δεύτερος τρόπος είναι προτιμότερος επειδή μπορεί να αναγνωριστεί άμεσα, η πηγή μιας ειδικής αιτίας, από τη θέση των σημείων πάνω στο διάγραμμα. Σε ένα $U - V$ επίπεδο συντεταγμένων, η περιοχή ελέγχου $\{(U_i, V_i) : U_i + V_i \leq UCL_2\}$, αποτελείται από όλα τα σημεία πάνω ή κάτω από τη γραμμή $U_i + V_i = UCL_2$. Η διαδικασία λειτουργεί καλά όταν ένα σημείο βρεθεί κοντά στην πηγή. Αν ένα σημείο βρεθεί πάνω από τη γραμμή, υποδηλώνει ότι η μεταβολή οφείλεται σε μια μετατόπιση στο μέσο της διεργασίας. Όταν το σημείο αποκλίνει αρκετά από τον άξονα V , αυτό υποδεικνύει ότι η μεταβολή οφείλεται σε μια μετατόπιση στη μεταβλητότητα της διεργασίας. Στην περίπτωση που τα σημεία αποκλίνουν αρκετά από τον άξονα U , υπονοείται ότι η μεταβολή οφείλεται σε ένα αποτέλεσμα συνδυασμού τόσο του μέσου όσο και της μεταβλητότητας όταν το σημείο βρεθεί κοντά σε μια από τις δυο γραμμές: $U_i - V_i = 0$ ή $U_i + V_i = 0$.

Στην περίπτωση ενός σήματος εκτός ελέγχου, είναι εύκολο να εντοπίσουμε την κατεύθυνση μιας μετατόπισης στο μέσο και/ή τη μεταβλητότητα της διεργασίας από τη θέση του σημείου του δείγματος. Ένα σημείο στο δεξιό μισό επίπεδο υποδεικνύει ότι ο μέσος της διεργασίας αυξάνεται, διαφορετικά ο μέσος μειώνεται. Ένα σημείο στο άνω μισό επίπεδο δείχνει ότι αυξάνεται η μεταβλητότητα της διεργασίας, διαφορετικά μειώνεται.

Η διαδικασία μπορεί να συνοψιστεί με συντομία στα ακόλουθα βήματα:

1. Αν το μ_0 είναι άγνωστο το αντικαθιστούμε με το $\bar{\bar{X}}$. Αν το σ_0 είναι άγνωστο, αντικαθίσταται το σ_0 με το \bar{S}/c_4 (\bar{R}/d_2) και το σ_0^2 από το \bar{S}^2 .
2. Για κάθε δείγμα, υπολογίζουμε τα U_i και V_i με $U_0 = V_0 = 0$.
3. Στο αρχικό στάδιο, αν επιδιώκουμε να ανιχνεύσουμε γρήγορα συγκεκριμένες μεταβολές στο μέσο και τη μεταβλητότητα της διεργασίας με το ARL στα 250, επιλέγουμε τον βέλτιστο συνδυασμό (λ, L) από τον Πίνακα 4.11. Έστω $U'_i = U_i \sqrt{(2 - \lambda) / \{\lambda [1 - (1 - \lambda)^{2i}] (2n)\}}$

$$\text{και } V_i' = V_i \left\{ (2 - \lambda) / \left[\lambda \left[1 - (1 - \lambda)^{2i} \right] \right] \right\}^{1/2}.$$

Για να αποφύγουμε να σχεδιάσουμε πολλές παράλληλες γραμμές, υπολογίζουμε τα U_i' και V_i' , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ και τα σχεδιάζουμε πάνω στο $U' - V'$ επίπεδο συντεταγμένων. Σχεδιάζουμε τη γραμμή $U_i' + V_i' = L$ ως το όριο της περιοχής ελέγχου.

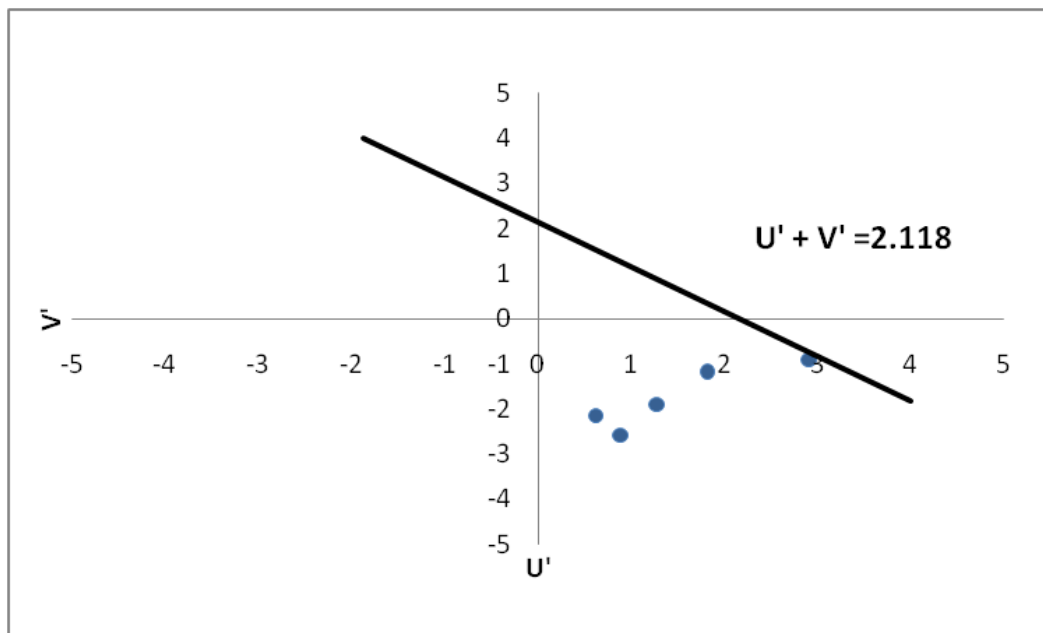
4. Για την ανίχνευση συγκεκριμένων μετατοπίσεων στο μέσο και τη μεταβλητότητα της διεργασίας σε κατάσταση ευστάθειας επιλέγουμε τον βέλτιστο συνδυασμό (λ, L) από τους Πίνακες 4.8, 4.9 και 4.10. Αν δεν είναι εμφανές από ποιες μεταβολές στο μέσο και τη μεταβλητότητα πρέπει να προφυλαχτούμε, επιλέγουμε τον επιθυμητό συνδυασμό (λ, L) από τον Πίνακα 4.12. Σχεδιάζουμε τα U_i και V_i στο $U - V$ επίπεδο συντεταγμένων έχοντας ως όριο της περιοχής ελέγχου τη γραμμή $U + V = L \sqrt{(2n\lambda)/(2 - \lambda)}$.
5. Ελέγχουμε αν κάποιο σημείο βρίσκεται εκτός της περιοχής ελέγχου του. Αν δοθεί ένα σήμα εκτός ελέγχου, εξακριβώνουμε την πηγή και την κατεύθυνση της μεταβολής ανάλογα με τη θέση του σημείου στο διάγραμμα και υποδεικνύουμε την πηγή και κατεύθυνση χρησιμοποιώντας χαρακτηρισες σχεδίασης.
6. Διερευνούμε τις αιτίες που σχετίζονται με κάθε σήμα εκτός ελέγχου.

4.2.6 Αριθμητικό παράδειγμα

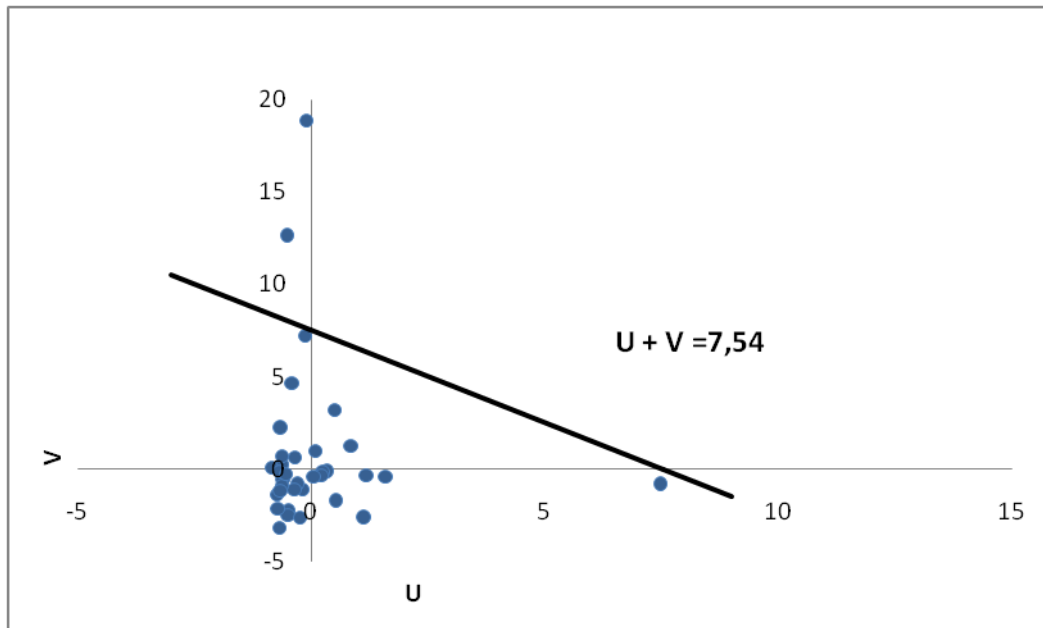
Το παράδειγμα που ακολουθεί λαμβάνεται από τους DeVor, Chang & Sutherland (1992), όπου τα δεδομένα από τα πρώτα 35 δείγματα μεγέθους 5 συλλέχθηκαν ανά μισή ώρα, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, με τον Πίνακα 4.7.

Για τα δεδομένα αυτά, βασισμένοι σε προηγούμενη εμπειρία, υποθέτουμε ότι ένας χειριστής επιθυμεί να προφυλαχθεί από τις μεταβολές $a = 1.50$ και $b = 1.50$. Για τη χρήση του διαγράμματος EWMA – SC ώστε να παρακολουθήσουμε τη διαδικασία παραγωγής των κυλίνδρων, εκτιμούμε το μ_0 από το $\bar{X} = 200.25$ και το σ_0 από το $\bar{S}/c_4 = 3.31$.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκτιμήσεις, κατασκευάζουμε το πρώτο διάγραμμα EWMA – SC, που αποτελείται από τα πρώτα πέντε σημεία για το αρχικό στάδιο με $\lambda = 0.05$ και $L = 2.118$ και τα υπόλοιπα τριάντα σημεία για το στάδιο ευσταθούς κατάστασης με $\lambda = 0.57$ και $L = 3.78054$. Το διάγραμμα αυτό παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.6, στο οποίο υποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει κανένα σημείο πάνω από τη γραμμή $U' + V' = 2.12$, παρόλο που το σημείο του 1^{ου} δείγματος είναι πολύ κοντά στο όριο ελέγχου.



Σχήμα 4.6. Το 1^ο διάγραμμα EWMA – SC.

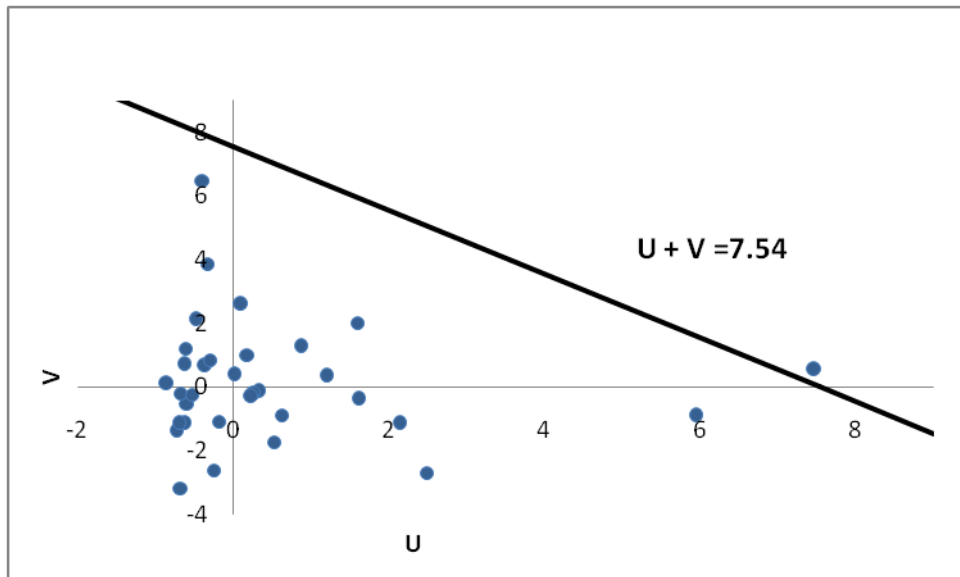


Σχήμα 4.7. Το 2^ο διάγραμμα EWMA – SC.

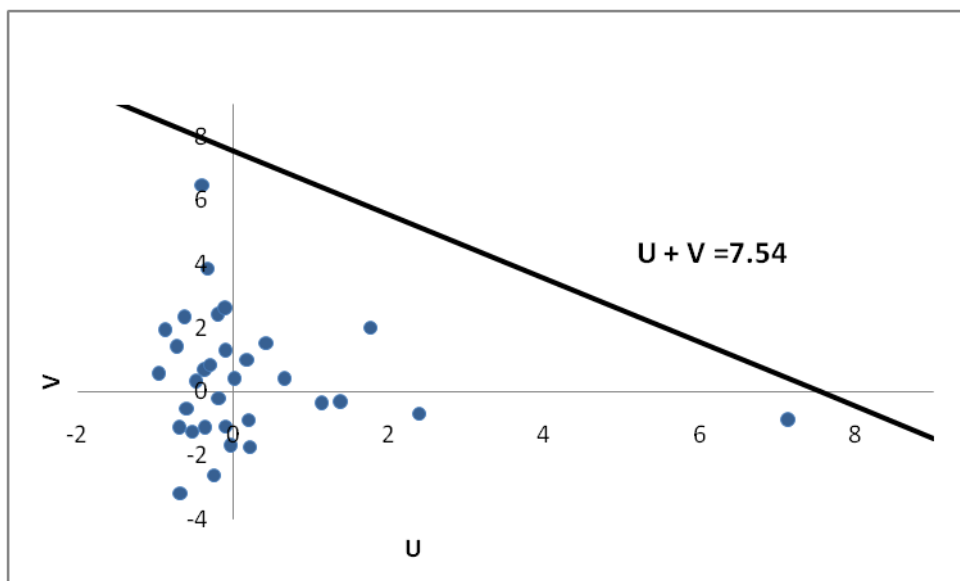
Το δεύτερο διάγραμμα δίνεται στο Σχήμα 4.7. Καθώς η διαδικασία είναι ήδη σε κατάσταση ευστάθειας, εφαρμόζεται το διάγραμμα EWMA – SC με $ARL_0 = 250$, $\lambda = 0.57$ και $L = 3.78054$. Παρατηρούμε ότι δυο σημεία βρίσκονται πάνω από τη γραμμή $U + V = 7.54$. Δεδομένου ότι τα δυο αυτά σημεία βρίσκονται πολύ πάνω από τον άξονα U , και τα δυο σχετίζονται με αυξημένη μεταβλητότητα της διαδικασίας. Μετά από έρευνα αποκαλύπτεται ότι το 6^ο και 16^ο δείγμα αντιστοιχούσαν στο χρόνο όπου απουσίαζε ο τακτικός χειριστής και υπεύθυνος της γραμμής παραγωγής είχε αναλάβει ένας αντικαταστάτης του, με λιγότερη εμπειρία.

Αφού εξαιρέσουμε τα δυο αυτά δείγματα, εκτιμούμε ξανά τις εκτιμήτριες και βρίσκουμε ότι το $\bar{X} = 200.22$ και το $\bar{S}/c_4 = 2.93$. Για να αποφευχθούν οι ίδιες μεταβολές για το στάδιο ευσταθούς κατάστασης, κατασκευάζεται το τρίτο διάγραμμα το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.8. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, το 11^ο δείγμα στο αρχικό σύνολο δεδομένων βρίσκεται πάνω από τη γραμμή. Το δείγμα αυτό συνδέεται με το μέσο της διαδικασίας αφού το σημείο του δείγματος αποκλίνει αρκετά από τον άξονα V και πέφτει στο δεξί μισό επίπεδο. Το 11^ο δείγμα παρήχθη στη 1:00 μμ το οποίο αντιστοιχεί περίπου στην αρχή της γραμμής παραγωγής αμέσως μετά την ώρα του μεσημεριανού γεύματος, όπου η μηχανή σταμάτησε να λειτουργεί

για αλλαγή εργαλείου. Μόλις η μηχανή θερμάνθηκε, σε περίπου 10 λεπτά, το πρόβλημα φαίνεται να εξαφανίζεται. Μετά την περαιτέρω αφαίρεση και αυτού του δείγματος, οι εκτιμήσεις θα είναι $\bar{X} = 200.08$ και $\bar{S}/c_4 = 2.95$. Στο Σχήμα 4.9 δίνεται το τέταρτο διάγραμμα στο οποίο φαίνεται ότι κανένα σημείο δεν βρίσκεται πάνω από τη γραμμή.



Σχήμα 4.8. Το 3^ο διάγραμμα EWMA – SC.



Σχήμα 4.9. Το 4^ο διάγραμμα EWMA – SC.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα

Λαμβάνοντας υπόψη τα κλασικά διαγράμματα τύπου Shewhart που περιγράφηκαν στο 1^ο Κεφάλαιο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το προτεινόμενο βελτιωμένο διάγραμμα R ξεπερνά τα δυο σημαντικά μειονεκτήματα του κλασικού διαγράμματος R . Το ένα μειονέκτημα είναι ότι το πραγματικό εντός ελέγχου ARL είναι πολύ χαμηλότερο από το αναμενόμενο και το δεύτερο είναι ότι μια μείωση στη μεταβλητότητα, που ενδεχομένως αντιστοιχεί σε μια χρήσιμη βελτίωση της διεργασίας, δεν προκαλεί σχεδόν καμία μείωση στο ARL , επομένως δεν είναι δυνατό να ανιχνευθεί η βελτίωση. Έτσι, το βελτιωμένο διάγραμμα R είναι μια ελκυστική εναλλακτική λύση του κλασικού διαγράμματος R . Σε αντίστοιχα συμπεράσματα καταλήγουμε και για το βελτιωμένο διάγραμμα S , το οποίο υπερτερεί του κλασικού διαγράμματος S και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για μεγάλα μεγέθη δείγματος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν επίσης τα ευρήματα που προκύπτουν από τα διαγράμματα ελέγχου μνήμης για τη διασπορά, που αναφέρθηκαν στο 3^ο Κεφάλαιο. Τα διαγράμματα ελέγχου είναι ένα από τα εργαλεία του στατιστικού ποιοτικού ελέγχου για την παρακολούθηση μιας παραγωγικής διεργασίας, και για τον διαχωρισμό μεταξύ ειδικών και τυχαίων αιτιών μεταβλητότητας. Η μεταβλητότητα μπορεί να οφείλεται στη μετατόπιση της παραμέτρου θέσης ή/και της παραμέτρου διασποράς μιας διεργασίας. Τα προτεινόμενα διαγράμματα FIR $CUSUM$, εκτός του ότι ανιχνεύουν γρηγορότερα αρχικές μετατοπίσεις στη διασπορά μιας διεργασίας, έχουν καλύτερη συνολική απόδοση από τα αντίστοιχά τους για την παρακολούθηση της διασποράς. Για λόγους σύγκρισης, χρησιμοποιούνται επίσης μέτρα απόδοσης όπως τα, ARL , $SDRL$, $quantile$, EQL , $RARL$ και PCI .

Όσον αφορά τα εύρωστα διαγράμματα $CUSUM$ μελετήσαμε τη χρήση διαφόρων εκτιμητριών διασποράς στην καθιέρωση ορίων ελέγχου Φάσης II . Για την παρακολούθηση της παραμέτρου διασποράς χρησιμοποιούμε ένα διάγραμμα $CUSUM$ χρησιμοποιώντας αυτές τις εκτιμήτριες, η απόδοση των οποίων έχει αξιολογηθεί κάτω από διάφορες συνθήκες: η μη – νοθευμένη κατανομή και διάφορες

περιπτώσεις νοθευμένων με συμμετρικές και μη συμμετρικές διακυμάνσεις μεταβλητότητας, διακυμάνσεις θέσης, και μη κανονικές κατανομές. Παρατηρούμε ότι υπό τη μη νοθευμένη κανονική κατανομή, αποδίδουν καλά όλα τα διαγράμματα και υπερτερεί όλων το διάγραμμα CUSUM που βασίζεται στη δειγματική τυπική απόκλιση S , όπως αναμενόταν υπό κανονικότητα. Στις περιπτώσεις που υπήρχαν συμμετρικές και μη συμμετρικές διακυμάνσεις, απέδιδαν ικανοποιητικά τα διαγράμματα CUSUM που είναι βασισμένα στις εκτιμήτριες T_n , $MADM$ και S_r , ενώ τα υπόλοιπα ήταν αρκετά ανεπαρκή. Για την κατανομή Γάμμα, αποδίδει καλά το διάγραμμα CUSUM βασισμένο στο IQR , για τη λογιστική κατανομή ξεχωρίζει αυτό με την G ενώ για την κατανομή t Student's είναι το διάγραμμα CUSUM βασισμένο στην εκτιμήτρια T_n . Ωστόσο, οι διαφορές που παρατηρούνται μεταξύ των εκτιμητριών δεν είναι πολύ σημαντικές. Εν ολίγοις, τα διαγράμματα CUSUM που βασίζονται στις εύρωστες εκτιμήτριες ($T_n, MADM, S_r$) συμπεριφέρονται καλά σε όλων των ειδών τα περιβάλλοντα (μη νοθευμένα, νοθευμένα και μη κανονικά).

Τέλος, στο 4^ο Κεφάλαιο έγινε μια παρουσίαση σε διαγράμματα ελέγχου για τον από κοινού έλεγχο του μέσου και της διασποράς διεργασιών. Για τα διαγράμματα Max – CUSUM, παρατηρούμε ότι το ARL τους μειώνεται καθώς αυξάνεται η μετατόπιση. Ένα μειονέκτημα του τυπικού διαγράμματος CUSUM είναι ότι δεν ανιχνεύει γρήγορα μια μεγάλη αύξηση των παραμέτρων της διεργασίας και επομένως δεν συνιστάται για μεγάλη αύξηση τόσο του μέσου όσο και της μεταβλητότητας. Ένα καλό χαρακτηριστικό του διαγράμματος Max – CUSUM είναι η ικανότητά του να ανιχνεύει γρήγορα μικρές και μεγάλες αλλαγές τόσο στο μέσο όσο και στη μεταβλητότητα της διεργασίας. Ένα άλλο πλεονέκτημα του Max – CUSUM είναι ότι είμαστε σε θέση να παρακολουθήσουμε το κέντρο και την έκταση της διεργασίας εξετάζοντας ένα διάγραμμα. Η απόδοση του προτεινόμενου διαγράμματος Max – CUSUM είναι πολύ ανταγωνιστική σε σύγκριση με το διάγραμμα Max και το διάγραμμα Max – EWMA.

Επίσης, τα διαγράμματα EWMA – SC σχεδιάστηκαν κατά κύριο λόγο για να ανιχνεύουν αποτελεσματικά τις μετατοπίσεις του μέσου που συνοδεύονται από αυξημένες μεταβολές στη μεταβλητότητα. Ωστόσο, μπορούν να υπονοηθούν μειώσεις στη μεταβλητότητα της διεργασίας από τη θέση που σχεδιάστηκε το σημείο του δείγματος στο διάγραμμα. Ένα κύριο πλεονέκτημα στη χρήση του διαγράμματος

EWMA – SC είναι ότι όχι μόνο μπορεί να παρακολουθεί ταυτόχρονα ο μέσος και η μεταβλητότητα της διεργασίας, αλλά επίσης έχει τις επιθυμητές ιδιότητες του διαγράμματος EWMA. Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ότι η τεχνική σχεδίασης είναι αποτελεσματική και εύκολη στην εφαρμογή, έτσι ώστε να μπορεί να εντοπιστεί γρήγορα η πηγή και η κατεύθυνση ενός σήματος εκτός ελέγχου στο διάγραμμα. Χρησιμοποιώντας ευρέως υπολογιστές κατά τη διάρκεια της παραγωγής, καθίσταται εύκολη η διαδικασία σχεδίασης στην υλοποίησή της σε ένα εργασιακό περιβάλλον, καθώς μπορεί να πραγματοποιηθεί εύκολα, χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό φύλλο.

Παράρτημα

Πίνακας Συντελεστών των διαγραμμάτων ελέγχου για μεταβλητές

n	A	A ₂	A ₃	d ₂	d ₃	C ₄
2	2.1213	1.88	2.6587	1.1284	0.8525	0.7979
3	1.7321	1.0233	1.9544	1.6926	0.8884	0.8862
4	1.5	0.7286	1.6281	2.0588	0.8798	0.9213
5	1.3416	0.5768	1.4273	2.3259	0.8641	0.94
6	1.2247	0.4832	1.2871	2.5344	0.848	0.9515
7	1.1339	0.4193	1.1819	2.7044	0.8332	0.9594
8	1.0607	0.3725	1.0991	2.8472	0.8198	0.965
9	1.	0.3367	1.0317	2.97	0.8078	0.9693
10	0.9487	0.3083	0.9754	3.0775	0.7971	0.9727
11	0.9045	0.2851	0.9274	3.1729	0.7873	0.9754
12	0.866	0.2658	0.8859	3.2585	0.7785	0.9776
13	0.8321	0.2494	0.8495	3.336	0.7704	0.9794
14	0.8018	0.2354	0.8173	3.4068	0.763	0.981
15	0.7746	0.2231	0.7885	3.4718	0.7562	0.9823
16	0.75	0.2123	0.7626	3.532	0.7499	0.9835
17	0.7276	0.2028	0.7391	3.5879	0.7441	0.9845
18	0.7071	0.1943	0.7176	3.6401	0.7386	0.9854
19	0.6882	0.1866	0.6979	3.689	0.7335	0.9862
20	0.6708	0.1796	0.6797	3.7349	0.7287	0.9869
21	0.6547	0.1733	0.6629	3.7783	0.7242	0.9876
22	0.6396	0.1675	0.6473	3.8194	0.7199	0.9882
23	0.6255	0.1621	0.6327	3.8583	0.7159	0.9887
24	0.6124	0.1572	0.6191	3.8953	0.7121	0.9892
25	0.6	0.1526	0.6063	3.9306	0.7084	0.9896
26	0.5883	0.1484	0.5943	3.9643	0.705	0.9901
27	0.5774	0.1445	0.5829	3.9965	0.7017	0.9904
28	0.5669	0.1408	0.5722	4.0274	0.6986	0.9908
29	0.5571	0.1373	0.5621	4.057	0.6955	0.9911
30	0.5477	0.1341	0.5525	4.0855	0.6927	0.9914

Για $n > 30$

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}} \quad c_4 \approx \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆
0.	3.6859	0.	3.2665	0.	3.2665	0.	2.6063
0.	4.3577	0.	2.5746	0.	2.5682	0.	2.276
0.	4.6982	0.	2.2821	0.	2.266	0.	2.0877
0.	4.9182	0.	2.1145	0.	2.089	0.	1.9636
0.	5.0785	0.	2.0038	0.0304	1.9696	0.0289	1.8742
0.2047	5.204	0.0757	1.9243	0.1177	1.8823	0.1129	1.8058
0.3877	5.3067	0.1362	1.8638	0.1851	1.8149	0.1786	1.7514
0.5465	5.3935	0.184	1.816	0.2391	1.7609	0.2318	1.7068
0.6864	5.4687	0.223	1.777	0.2837	1.7163	0.2759	1.6694
0.8109	5.5348	0.2556	1.7444	0.3213	1.6787	0.3134	1.6373
0.923	5.5939	0.2833	1.7167	0.3535	1.6465	0.3456	1.6095
1.0247	5.6472	0.3072	1.6928	0.3816	1.6184	0.3737	1.5851
1.1177	5.6958	0.3281	1.6719	0.4062	1.5938	0.3985	1.5634
1.2031	5.7404	0.3465	1.6535	0.4282	1.5718	0.4206	1.544
1.2823	5.7817	0.363	1.637	0.4479	1.5521	0.4405	1.5265
1.3557	5.82	0.3779	1.6221	0.4657	1.5343	0.4585	1.5106
1.4243	5.8558	0.3913	1.6087	0.4818	1.5182	0.4748	1.496
1.4885	5.8894	0.4035	1.5965	0.4966	1.5034	0.4898	1.4826
1.5489	5.921	0.4147	1.5853	0.5102	1.4898	0.5036	1.4703
1.6058	5.9509	0.425	1.575	0.5228	1.4772	0.5163	1.4589
1.6596	5.9791	0.4345	1.5655	0.5344	1.4656	0.5281	1.4483
1.7107	6.006	0.4434	1.5566	0.5452	1.4548	0.5391	1.4383
1.7591	6.0316	0.4516	1.5484	0.5553	1.4447	0.5493	1.4291
1.8053	6.056	0.4593	1.5407	0.5648	1.4352	0.5589	1.4203
1.8494	6.0793	0.4665	1.5335	0.5737	1.4263	0.568	1.4121
1.8914	6.1016	0.4733	1.5267	0.582	1.418	0.5765	1.4044
1.9318	6.1231	0.4797	1.5203	0.5899	1.4101	0.5845	1.3971
1.9704	6.1437	0.4857	1.5143	0.5974	1.4026	0.592	1.3902
2.0075	6.1635	0.4914	1.5086	0.6044	1.3956	0.5992	1.3836

Για $n > 30$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

$$B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Βιβλιογραφία

1. Αντζουλακος Δ. (2008) “Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας” Β΄ Έκδοση. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
2. Κουκουβίνος Χ. (2016) “Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας”. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.
3. Abbasi S. and Miller A. (2012) “On proper choice of variability control chart for normal and non-normal processes”. *Quality Reliability and Engineering International*, **28**:279–296.
4. Abujiya M. R., Lee M. H. and Riaz M. (2015) “Increasing the sensitivity of cumulative sum charts for location”. *Quality and Reliability Engineering International*, **31**(6):1035–1051.
5. Acosta-Mejia C. A. (1998) “Monitoring reduction in variability with the range”. *IIE Transactions*, **30**:515–523.
6. Acosta-Mejia C. A., Pignatiello J. J. Jr., Rao BV. (1999) “A comparison of control charting procedures for monitoring process dispersion”. *IIE Transactions*, **31**:569–579.
7. Acosta-Mejia C. A. and Pignatiello J.J. Jr. (2000) “Monitoring process dispersion without subgrouping. *Journal of Quality Technology*, **32**:89–102.
8. Antzoulakos D. L, Rakitzis A. C. (2008) “The modified r out of m control chart”. *Communication in Statistics – Simulations and Computations*, **37**:396–408.
9. Bickel P. J. and Lehmann E. L. (1979) “Descriptive statistics for nonparametric models III: dispersion. In Contributions to Statistics, Hájek Memorial Volume, Jurekova J(ed)”. Academia, Prague, pp.33–40.

10. Chang T. C. and Gan F.F.(1995) “A cumulative sum control chart for monitoring process variance”. *Journal of Quality Technology*, **27**:109–119.
11. Chao M. T. and Cheng S. W. (1996) “Semicircle Control Chart for Variables Data”. *Quality Engineering*, **8(3)**, 441-446.
12. Chen G. and Cheng S. W. (1998) “Max – chart: Combining X – Bar Chart and S Chart”. *Statistica Sinica*, **8**,263- 271.
13. Chen G., Cheng S.W. and Xie H. (2004) “A New EWMA Control Chart for Monitoring Both Location and Dispersion”. *Quality Technology & Quantitative Management*, **1(2)**: 217-231.
14. Cheng S.W. and Thaga K. (2011) “The Max – CUSUM Chart”. Proc. 58th World Statistical Congress, Dublin, p.2996.
15. Cox M. A. (1999) “Towards the Implementation of a Universal Control Chart and Estimation of its Average Run Length Using a Spreadsheet”. *Quality Engineering*, **11**;511-536.
16. Croux C. and Rousseeuw P. J. (1992) “A class of high-breakdown scale estimators based on subranges”. *Communications in Statistics – Theory and Methods*,**21**:1935–1951.
17. Crowder S. V. (1987) “A simple method for studying run length distribution of exponential weighted moving average charts”. *Technometrics*, **29**: 401-407
18. Crowder S. V. and Hamilton M. D. (1992) “An EWMA for monitoring a process standard deviation”. *Journal of Quality Technology*, **24(1)**:12–21.
19. David H. A. (1998) “Early sample measures of variability”. *Statistical Science*, **13**:368–377.
20. De Mast J. and Roes K. (2004) “Robust individuals control chart for exploratory analysis”. *Quality Engineering*, **16**:407–421.

21. DeVor R.E., Chang T. and Sutherland J. W. (1992) "Statistical Quality Design and Control". Macmillan, New York.
22. Domangue R. and Patch S. C. (1991) "Some Omnibus Exponentially Weighted Moving Average Statistical Process Monitoring Schemes". *Technometrics*, **33**:299-313 & **32**:1-12.
23. Ewan W. D. and Kemp K. W. (1960) "Sampling inspection of continuous processes with no autocorrelation between successive results". *Biometrika*, **47**:363–380.
24. Gini C. (1912) "Variabilità e mutabilità, contributo allo studio delle distribuzioni e delle relazioni statistiche". *Studi Economico-Giuridici della R. Università di Cagliari*, **3**:3–159.
25. Hampel F. R. (1974) "The influence curve and its role in robust estimation". *Journal of the American Statistical Association*, **69**:383–393.
26. Hawkins D. M. (1993) "Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool". *Quality Engineering*; **5**, 463-477.
27. Hawkins D. M. and Olwell D.H. (1998) "*Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*". Springer Verlag, New York.
28. Jensen WA, Jones FLA, Champ CW, Woodall WH. (2006) "Effects of parameter estimation on control chart properties; a literature review". *Journal of Quality Technology*, **38**:349-364.
29. Khoo M.B.C. (2004) "Some control charts for the process mean and variance based on downton's estimator". *Proceedings of IEEE International Engineering Management Conference*, **3**:1071–1074.
30. Khoo M. B. C. , Lim E. G.(2005) "An Improved R (Range) Control Chart for Monitoring the Process Variance". *Quality and Reliability Engineering International*, **21**:43-50.

31. Langenberg P. and Iglewicz B. (1986) "Trimmed mean Xbar and R charts". *Journal of Quality Technology*, **18**:152–161.
32. Lowry J. M. (1989) "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart". Ph.D. dissertation, University of South Louisiana.
33. Lucas J. M. and Crosier R. B. (1982) "Fast initial response for CUSUM quality-control schemes: give your CUSUM a head start". *Technometrics*, **24**(3):199–205.
34. Lucas J. M. and Saccucci M. S. (1990) "*Exponentially Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements*". Drexel University Faculty Working Series Paper, pp. 87-5.
35. MacGregor J. F. and Harris T. J. (1990) "Discussion of "exponentially moving average control schemes: properties and enhancements," by J. M. Lucas and M. S. Saccucci". *Technometrics*, **32**: 23-26.
36. Mahmoud M. A, Henderson G. R, Epprecht E. K, Woodall W. H. (2010) "Estimating the standard deviation in quality-control applications". *Journal of Quality Technology*, **42**:348–357.
37. Montgomery D. C.(2013). "*Introduction to Statistical Quality Control*" 7th Edition. John Wiley & Sons, New York.
38. Mood AM, Graybill FA, Boes DC.(1974) "*Introduction to the Theory of Statistics*". McGraw-Hill, New York, pp. 255.
39. Muhammad F, Riaz M. (2006) "Probability weighted moments approach to quality control charts". *Economic Quality Control*, **21**:251–260.
40. Nazir H. Z., Riaz M. and Does R. J.M.M. (2013) "Robust CUSUM Control Charting for Process Dispersion". *Quality and Reliability Engineering International*, **31**(3): 369 – 379.

41. Ng C. H. (1988) “*Development and Evaluation of Control Charts Using Exponentially Weighted Moving Averages*”. Oklahoma State University.
42. Ng C. H. and Case K. E. Development and evaluation of control charts using exponentially moving averages. *Journal of Quality Technology* 1989; **21**: 242-250.
43. Omar M A. (2008) “A simple robust control chart based on MAD”. *Journal of Mathematics and Statistics*, **4**:102–107.
44. Page ES.(1954) “Continuous inspection schemes”. *Biometrika*, pp. 100–115.
45. Page ES.(1963) “Controlling the standard deviation by CUSUM and warning lines”. *Technometrics*, **5**:307–315.
46. Quesenberry C. P. (1993) “The effect of sample size on estimated limits for \bar{X} and X control charts”. *Journal of Quality Technology*, **25**:237-247.
47. Riaz M. (2008) “A dispersion control chart”. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **37**:1239–1261.
48. Roberts SW. (1959) “Control chart tests based on geometric moving averages”. *Technometrics*, **1**(3):239–250.
49. Rocke D. M. (1989) “Robust control charts”. *Technometrics*, **31**:173–184.
50. Rousseeuw P. J. and Croux C. (1993) “Alternatives to the median absolute deviation”. *Journal of the American Statistical Association*, **80**:1273–1283.
51. Sanusi R.A., Riaz M., Abbas N and Abujiya M. R. (2016) “Using FIR to Improve CUSUM Charts for Monitoring Process Dispersion”. *Quality and Reliability Engineering International*, **33**(5): 1045-1056.
52. Schoonhoven M, Riaz M, Does RJMM. (2011) “Design and analysis of control charts for standard deviation with estimated parameters”. *Journal of Quality Technology*, **43**:307–333.

53. Shamos M. I. (1976) “*Geometry and statistics: problems at the interface*”. In New York Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity, Traub JF(ed). Academic Press: New York, pp. 251–280.
54. Shewhart W.A. (1931).”Economic Control of Quality of Manufacturing Processes”. John Wiley & Sons, Milwaukee.
55. Steiner S. H. (1999) “Exponentially weighted moving average control charts with time varying control limits and fast initial response”. *Journal of Quality Technology*, **31**(0):1.
56. Tatum L. G. (1997) “Robust estimation of the process standard deviation for control charts”. *Technometrics*, **39**:127–141.
57. Tuprah K. and Ncube M. (1987) “A comparison of dispersion quality control charts”. *Sequential Analysis*, **6**:155–163.
58. Wu C, Zhao Y, Wang Z. (2002) “The median absolute deviation and their applications to shewhart control charts”. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **31**:425–442.
59. Xie H. (1999) “Contribution to Qualimetry”. PhD. Thesis, University of Manitoba, Winnipeg, Canada.
60. Zhao Y, Tsung F, Wang Z. (2005) “Dual CUSUM control schemes for detecting a range of mean shifts”. *IIE Transactions*; **37**(11):1047–1057.
61. Zhang Guoyi. (2014) “Improved R and s control charts for monitoring the process variance”. *Journal of Applied Statistics*, **41**(6):1260-1273.