



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Πρόβλημα κινούμενου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ελαστοδυναμικού ημι-χώρου

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Δ.Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΦΑΡΜΑΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Επιβλέποντες

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Γ. ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ
Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΖΗΣΗΣ
Επίκουρος Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2017

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου κατά το διάστημα Σεπτέμβριο 2015 έως Φεβρουάριο 2017. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητή κ. Χ.Γεωργιάδη και Επίκουρο Καθηγητή κ. Α.Ζήση για την πρόταση του συγκεκριμένου θέματος καθώς επίσης και για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχαν. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την αδιάκοπη υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Γεώργιος Β. Φαρμάκης
Αθήνα, Φεβρουάριος 2017

Περιεχόμενα

<i>Πρόλογος</i>	<i>1.</i>
<i>Περίληψη</i>	<i>4.</i>
<i>Summary</i>	<i>5.</i>
Κεφάλαιο 1: Θεωρία Ελαστοδυναμικής	
1.1 Γενικά.....	6
1.2 Τανυστής Τάσεως.....	7
1.3 Τανυστής Απειροστών Τροπών.....	9
1.4 Εξισώσεις Συμβιβαστού.....	10
1.5 Αρχή Διατήρησης της Ορμής.....	10
1.6 Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής.....	11
1.7 Καταστατικός Νόμος Hooke.....	13
1.8 Ενέργεια Παραμόρφωσης.....	16
1.9 Το Πρόβλημα Ελαστοδυναμικής.....	17
1.10 Προβλήματα Επίπεδης Παραμόρφωσης.....	19
1.11 Ελαστικά Κύματα.....	20
Κεφάλαιο 2: Το Πρόβλημα Κινούμενου Συγκεντρωμένου φορτίου στην Επιφάνεια Ημι-χώρου	
2.1 Γενικά.....	23
2.2 Διατύπωση του Προβλήματος.....	24
2.3 Εφαρμογή Μετασχηματισμού Laplace και Γενική Μετασχηματισμένη Λύση.....	28
2.4 Εύρεση και Διερεύνηση της Τελικής Μετασχηματισμένης Λύσης.....	31
2.4.1 Υποηχητική Περιοχή.....	31
2.4.2 Υπερηχητική Περιοχή.....	38

2.4.3	Παρηχητική Περιοχή.....	40
2.5	Αντιστροφή Μετασχηματισμένης Λύσης	42
2.5.1	Υποηχητική Περιοχή.....	42
2.5.2	Υπερηχητική Περιοχή.....	47
2.5.3	Παρηχητική Περιοχή.....	49
2.6	Αποτελέσματα και συζήτηση.....	54
2.7	Ενδεικτικά Αποτελέσματα.....	61
	Σύνοψη - Ζητήματα για Μελλοντική Έρευνα.....	63
	Βιβλιογραφία.....	64

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία αυτή μελετάται το πρόβλημα ενός κινούμενου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ελαστοδυναμικού ημι-χώρου στα πλαίσια της επίπεδης *Κλασικής Θεωρίας Ελαστικότητας*. Το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα πεδία της Μηχανικής των Επαφών και της Τριβολογίας καθώς τα αποτελέσματα που εξάγονται μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις Green για τον φορμαλισμό δυναμικών προβλημάτων επαφής. Η εργασία αποτελείται από δύο κεφάλαια και την βιβλιογραφία.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις βασικές αρχές της Κλασικής Θεωρίας Ελαστικότητας όπου λαμβάνονται υπ'όψιν και αδρανειακά φαινόμενα. Συγκεκριμένα αφού ορισθεί ο τανυστής τάσεως και ο τανυστής των απειροστών τροπών εξάγονται τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από τις Αρχές Διατήρησης της Ορμής και Στροφορμής. Στη συνέχεια με χρήση του καταστατικού νόμου και του ορισμού της παραμορφωσιακής ενέργειας δίνονται οι περιορισμοί για τις υλικές σταθερές στην περίπτωση ισοτροπίας και διατυπώνεται το πρόβλημα της Ελαστοδυναμικής. Τέλος, μελετάται η περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης και δίνονται οι ορισμοί των ταχυτήτων με τις οποίες διαδίδονται τα διαμήκη και εγκάρσια κύματα σε ένα ελαστικό μέσο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό Laplace για την επίλυση και διερεύνηση του επίπεδου δυναμικού προβλήματος σταθερής κατάστασης ενός κινούμενου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ημι-χώρου. Μέσω αυτής της μεθόδου θα προκύψουν οι αναλυτικές εκφράσεις του πεδίου μετατοπίσεων για υποηχητικές, παρηχητικές και υπερηχητικές ταχύτητες της πηγής. Στο τέλος της ενότητας παρουσιάζονται διαγράμματα για τις επιφανειακές μετατοπίσεις σε κάθε μία από τις παραπάνω τρεις περιπτώσεις και δίνονται προτάσεις για μελλοντική ερευνητική εργασία.

Summary

Within the framework of the linearized dynamic theory of Elasticity, a plain strain solution is obtained for the problem of a moving concentrated load over the surface of a half-plane. This problem is of basic interest in the fields of Contact Mechanics and Tribology, and an exact formulation is considered. The results may serve as a Green's function for more general elastodynamic contact problems. The thesis consists of two chapters and the list of references.

In the first chapter the foundations of the linear elastodynamic theory are presented. In particular, we define the stress and strain tensors and the equations of motion are developed by using the principles of conservation of linear and angular momentum. Next, by introducing the constitutive law and the strain energy for isotropic materials, we give the restrictions for the material constants and the problem statement in dynamic elasticity. Finally, we study the two-dimensional state of strain and define the velocity of longitudinal and transverse waves which propagate in elastic materials.

In the second chapter we apply the two-sided Laplace transform in order to solve and investigate the steady-state problem of a moving concentrated load over the surface of a half-plane. Analytical expressions for the displacement field are obtained for the subsonic, supersonic and transonic range. At the end of this chapter graphs for the displacements at the surface and recommendations for future research are presented.

Κεφάλαιο 1: Θεωρία Ελαστοδυναμικής

1.1 Γενικά

Η Θεωρία Ελαστικότητας αποτελεί έναν από τους βασικούς κλάδους της ευρύτερης περιοχής της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου καθώς δίνει λύση σε ένα μεγάλο πλήθος προβλημάτων της Μηχανικής των Υλικών και των Κατασκευών, της Υπολογιστικής Μηχανικής, της Μηχανικής των Επαφών και των Θραύσεων αλλά και σε πολλές άλλες περιοχές της Μηχανικής. Επίσης, χαρακτηρίζεται από την ιδιαίτερη σχέση της με τα Μαθηματικά δεδομένου ότι είναι μία από τις κύριες πηγές ανάπτυξης αρκετών περιοχών της Μαθηματικής Επιστήμης (ιδέ π.χ. **Antman 1983, Truesdell 1983**). Το αντικείμενο της Γραμμικής Θεωρίας Ελαστικότητας είναι ο προσδιορισμός των τάσεων και των παραμορφώσεων που αναπτύσσονται σε ένα σώμα υπό την επίδραση διαφόρων μηχανικών ή θερμικών φορτίων με την προϋπόθεση ότι όταν αυτά αφαιρεθούν τότε το σώμα επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση. Αν στην ανάπτυξη της Θεωρίας Ελαστικότητας θεωρήσουμε και αδρανειακά φαινόμενα τότε εισβάλλουμε στο πεδίο της Θεωρίας Ελαστοδυναμικής η οποία μελετάει την διάδοση ελαστικών κυμάτων στα υλικά. Να επισημάνουμε ότι η Θεωρία Ελαστικότητας και η Θεωρία Ελαστοδυναμικής αποτελούν το βασικό πλαίσιο πάνω στο οποίο βασίζεται η Σεισμολογία (ιδέ π.χ. **Τσελέντης 1997, Aki and Richards 2002**) και πολλά από τα προβλήματά και τις μεθόδους τους βρίσκουν εφαρμογή εκεί.

Σκοπός του πρώτου κεφαλαίου είναι η διατύπωση των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών και αρχικών συνθηκών για ένα παραμορφώσιμο στερεό υπό τη θεώρηση του ως συνεχές μέσο (ιδέ π.χ **Fung 1965**) στα πλαίσια της Γραμμικής Θεωρίας Ελαστοδυναμικής. Για το λόγο αυτό θα εισάγουμε αρχικά τον τανυστή τάσεως και τον τανυστή απειροστών τροπών ή μικρών παραμορφώσεων. Για μία πιο λεπτομερή παρουσίαση των εννοιών και των προβλημάτων της Θεωρίας Ελαστικότητας και της Θεωρίας Ελαστοδυναμικής παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία (**Fung 1965, Achenbach 1973, Eringen and Suhubi 1975, Γδούτος 1988, Graff 1991, Barber 2002, Γεωργιάδης 2003, Sadd 2005**).

1.2 Τανυστής Τάσεως

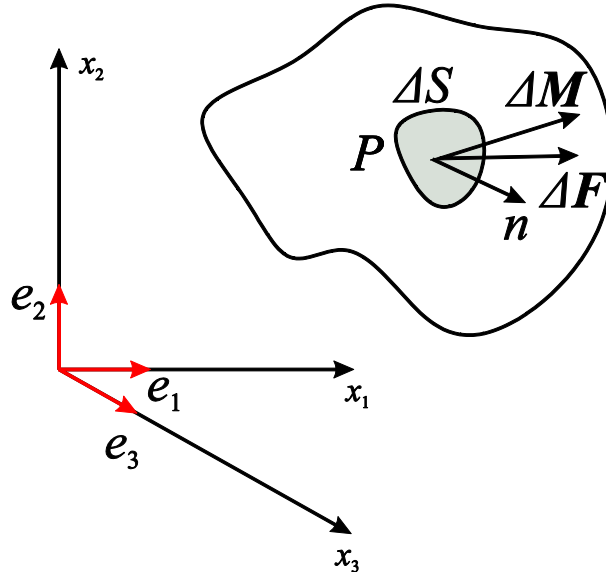
Αρχικά, να σημειώσουμε ότι για την ανάπτυξη των επόμενων παραγράφων θα χρησιμοποιήσουμε την σύμβαση της άθροισης ή σύμβαση Einstein, δεχόμεστε δηλαδή ότι ένας δείκτης που θα εμφανίζεται δύο φορές θα δηλώνει άθροιση για όλες τις τιμές του (συνήθως 1, 2, 3).

Θεωρούμε λοιπόν σταθερό ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή O και συμβολίζουμε με (x_1, x_2, x_3) τις συντεταγμένες ενός σημείου P και με $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ το διάνυσμα θέσης του P , όπου $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ τα διανύσματα βάσης.

Έστω παραμορφώσιμο σώμα όγκου V και επιφάνειας S υπό την επίδραση επιφανειακών και καθολικών δυνάμεων. Συμβολίζουμε με ΔS ένα στοιχείο επιφάνειας στο εσωτερικό του σώματος ή στην επιφάνεια του και με \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που καθορίζει τον προσανατολισμό της (Σχήμα 1). Αν $\Delta \mathbf{F}$ και $\Delta \mathbf{M}$ είναι η συνιστώσα δύναμη και συνιστώσα ροπή που ασκούνται στο ΔS τότε κάνουμε τη βασική υπόθεση ότι

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \mathbf{T}^{(n)} \quad (1)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta S} = \mathbf{0} \quad (2)$$



Σχήμα 1: Στοιχείο επιφάνειας του σώματος με \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, $\Delta \mathbf{F}$ η συνιστώσα δύναμη και $\Delta \mathbf{M}$ συνιστώσα ροπή.

Το διάνυσμα $\mathbf{T}^{(n)}$ ονομάζεται ελκυστής ή διάνυσμα τάσεως και εκφράζει τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας που ασκείται στο σημείο P . Για τον ελκυστή $\mathbf{T}^{(n)}$ ισχύουν οι παρακάτω δύο σχέσεις

$$-\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}^{(-n)} \quad (3)$$

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4)$$

Η πρώτη σχέση (3) εκφράζει το νόμο δράσης-αντίδρασης του Newton ενώ η δεύτερη σχέση (4) είναι το θεώρημα του Cauchy για τις τάσεις, σύμφωνα με το οποίο ο ελκυστής $\mathbf{T}^{(n)}$ είναι γραμμική συνάρτηση του \mathbf{n} . Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται ένας τανυστής σ δεύτερης τάξης ανεξάρτητος του \mathbf{n} , με συνιστώσες σ_{ij} . Ο σ ονομάζεται τανυστής τάσεως. Γενικά οι συνιστώσες σ_{ij} είναι συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου, δηλαδή $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$.

1.3 Τανυστής Απειροστών Τροπών

Ο τανυστής απειροστών τροπών αναφέρεται στην παραμόρφωση ενός συνεχές μέσου. Αν $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ είναι το διάνυσμα της μετατόπισης τότε η κίνηση του συνεχούς μέσου μπορεί να εκφραστεί ως συνδιασμός βαθμίδων του $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας των παραμορφώσεων ορίζεται ο τανυστής τροπών $\boldsymbol{\varepsilon}$ με συνιστώσες

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5)$$

καθώς επίσης και ο τανυστής στροφών $\boldsymbol{\omega}$ με συνιστώσες

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6)$$

$$\text{όπου } (\)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\)$$

Παρατηρούμε ότι ο $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι ένας δεύτερης τάξης συμμετρικός τανυστής ενώ ο $\boldsymbol{\omega}$ είναι ένας δεύτερης τάξης αντισυμμετρικός τανυστής, δηλαδή

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ji}(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

$$\omega_{ij}(\mathbf{x}, t) = -\omega_{ji}(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

1.4 Εξισώσεις Συμβιβαστού

Αποδεικνύεται ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι οι $u_i(\mathbf{x}, t)$ μονότιμες και συνεχείς συναρτήσεις σε απλώς-συνεκτικό σώμα θα πρέπει να ικανοποιούνται οι λεγόμενες εξισώσεις συμβιβαστού για τις τροπές ε_{ij} (ιδέ π.χ. **Fung 1965, Sadd 2005**)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (9)$$

Οι εξισώσεις (9) αποτελούν τη μαθηματική διατύπωση της συνέχειας ενός παραμορφώσιμου σώματος και εξασφαλίζουν ότι οι συναρτήσεις ε_{ij} αποτελούν πράγματι συνιστώσες ενός ταυστή απειροστών τροπών. Στην περίπτωση πολλαπλώς-συνεκτικών σωμάτων πρέπει να ισχύουν πρόσθετες συνθήκες (ιδέ π.χ. **Fung 1965**).

1.5 Αρχή Διατήρησης της Ορμής

Έστω τμήμα του σώματος με όγκο V και σύνορο S . Στην επιφάνεια S ασκείται μία κατανομή ελκυστών $\mathbf{T}^{(n)}(\mathbf{x}, t)$ ενώ στον όγκο V εφαρμόζεται ένα καθολικό πεδίο δυνάμεων $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ανά μονάδα όγκου. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με την ολική δύναμη που ασκείται στο τμήμα του σώματος (δηλαδή στον όγκο V). Αν ρ είναι η πυκνότητα του υλικού τότε στη γραμμική θεωρία προκύπτει τελικά η παρακάτω εξίσωση

$$\int_S \mathbf{T}^{(n)}(\mathbf{x}, t) dS + \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) dV \quad (10)$$

$$\text{όπου } (\dot{\quad}) = \frac{\partial}{\partial t}(\quad).$$

Σε μορφή δεικτών η παραπάνω εξίσωση έχει τη μορφή

$$\int_s T_i^{(n)}(\mathbf{x}, t) dS + \int_V f_i(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) dV \quad (11)$$

Όμως $T_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$ και με χρήση του θεωρήματος Green-Gauss συνεπάγεται ότι

$$\int_s \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \sigma_{ji,j} dV \quad (12)$$

Άρα η (11) θα γίνει

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i) dV = 0 \quad (13)$$

Η τελευταία σχέση (13) ισχύει για τυχαίο όγκο V και η ολοκληρωτέα ποσότητα θεωρείται συνεχής, οπότε θα έχουμε τελικά ότι

$$\sigma_{ji,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \text{ για } i, j = 1, 2, 3 \quad (14)$$

Οι εξισώσεις (14) αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του παραμορφώσιμου σώματος ως προς τις συνιστώσες του τανυστή τάσεως.

1.6 Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής

Στην περίπτωση της γραμμικής θεωρίας ελαστοδυναμικής η αρχή διατήρησης της στροφορμής διατυπώνεται ως εξής

$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{T}^{(n)} dS + \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f} dV = \int_V \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV \quad (15)$$

Με χρήση δεικτών γράφουμε

$$\int_S e_{klm} x_l T_m^{(n)} dS + \int_V e_{klm} x_l f_m dV = \int_V \rho e_{klm} x_l \ddot{u}_i dV \quad (16)$$

όπου e_{klm} είναι το σύμβολο εναλλαγής ή σύμβολο Levi-Civita. Επίσης από το θεώρημα Green-Gauss θα έχουμε ότι

$$\int_S e_{klm} x_l T_m^{(n)} dS = \int_S e_{klm} x_l \sigma_{jm} n_j dS = \int_V (e_{klm} x_l \sigma_{jm})_{,j} dV \quad (17)$$

Συνεπώς η (16) με χρήση της (17) θα γίνει

$$\int_V (e_{klm} x_l \sigma_{jm})_{,j} dV = \int_V (\rho e_{klm} x_l \ddot{u}_i - e_{klm} x_l f_m) dV \Rightarrow$$

$$\int_V e_{klm} \delta_{lj} \sigma_{jm} dV + \int_V e_{klm} x_l \sigma_{jm,j} dV = \int_V e_{klm} x_l (\rho \ddot{u}_i - f_m) dV \Rightarrow$$

$$\int_V e_{klm} \sigma_{lm} dV + \int_V e_{klm} x_l \left(\sigma_{jm,j} + f_m - \rho \ddot{u}_i \right) dV = 0 \quad (18)$$

Όπου $x_{l,j} = \delta_{lj}$ το δέλτα του Kronecker. Ισχύουν όμως οι εξισώσεις κίνησης (14) άρα η (18) θα γίνει

$$\int_V e_{klm} \sigma_{lm} dV = 0 \quad (19)$$

Η (19) ισχύει για τυχαίο όγκο V και η ολοκληρωτέα ποσότητα θεωρείται συνεχής, οπότε θα έχουμε τελικά ότι

$$e_{klm} \sigma_{lm} = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (20)$$

Προκύπτει δηλαδή ότι ο τανυστής τάσεως είναι συμμετρικός. Συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης ως προς τις τάσεις θα έχουν τη μορφή

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{για} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (21)$$

1.7 Καταστατικός Νόμος Hooke

Γενικά η γραμμική σχέση μεταξύ των συνιστωσών του τανυστή τάσεως και του τανυστή τροπών διατυπώνεται μέσω του τέταρτης τάξης τανυστή ελαστικότητας \mathbf{C} με τη σχέση

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (22)$$

Για τις συνιστώσες του \mathbf{C} ισχύουν οι παρακάτω συμμετρίες

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = C_{ijlk} \quad (23)$$

Συνεπώς ο \mathbf{C} έχει 21 ανεξάρτητες συνιστώσες από τις 81. Λέμε ότι το υλικό είναι ομογενές αν οι συντελεστές C_{ijkl} είναι σταθερές. Επίσης το υλικό είναι ισότροπο όταν οι ελαστικές σταθερές είναι οι ίδιες ανεξαρτήτως από τον προσανατολισμό του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων σύμφωνα με το οποίο υπολογίζονται οι συνιστώσες σ_{ij} και ε_{ij} .

Αποδεικνύεται ότι λόγω της ισοτροπίας προκύπτει η σχέση

$$C_{ijkl} = \lambda(\delta_{ij}\delta_{kl}) + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (24)$$

Έτσι καταλήγουμε στη γνωστή μορφή του νόμου του Hooke της γραμμικής ελαστικότητας για ένα ομογενές και ισότροπο παραμορφώσιμο σώμα

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (25)$$

όπου λ , μ οι σταθερές του Lamé. Με αντιστροφή των σχέσεων (25) θα έχουμε

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 3\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (26)$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\mu \neq 0 \text{ και } 3\lambda + 2\mu \neq 0 \quad (27)$$

Επίσης για την ύπαρξη μη-μηδενικών τροπών όταν οι τάσεις είναι πεπερασμένες πρέπει να ισχύει ότι

$$|\mu| < \infty \text{ και } |3\lambda + 2\mu| < \infty \quad (28)$$

Εξετάζοντας κάποιες ειδικές περιπτώσεις εντατικής κατάστασης μπορούμε να βρούμε κι άλλους περιορισμούς για τις ελαστικές σταθερές λ και μ .

(I) Απλή διάτμηση

Υποθέτουμε ότι $\sigma_{12} \neq 0$ και για τα υπόλοιπα $\sigma_{ij} = 0$ τότε $\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$.

Πειραματικά έχει παρατηρηθεί ότι για μικρές παραμορφώσεις τα σ_{12} και ε_{12} έχουν την ίδια κατεύθυνση, συνεπώς

$$\mu > 0 \quad (29)$$

(II) Υδροστατική πίεση

Υποθέτουμε ότι $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ τότε $p = -B\varepsilon_{kk}$ όπου $B = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ το μέτρο διόγκωσης.

Για απειροστές τροπές ο όρος ε_{kk} εκφράζει την μεταβολή του όγκου ενός στοιχείου του σώματος και επειδή η υδροστατική πίεση θα πρέπει να μειώνει τον όγκο του σώματος, συνεπάγεται ότι $B > 0$, δηλαδή

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0 \quad (30)$$

Συνοψίζοντας λοιπόν τις (27), (28), (29), (30) θα έχουμε τους εξής περιορισμούς για τις ελαστικές σταθερές λ και μ

$$0 < \lambda + \frac{2}{3}\mu < \infty, \quad 0 < \mu < \infty \quad (31)$$

Άλλες ελαστικές σταθερές που εμφανίζονται στη θεωρία ελαστικότητας είναι το μέτρο Young ή μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος Poisson ν .

Ισχύουν οι μεταξύ τους σχέσεις

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{και} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (32)$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{και} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (33)$$

1.8 Ενέργεια Παραμόρφωσης

Από τον ορισμό της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας U (ενέργεια ανά μονάδα όγκου) έχουμε

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (34)$$

Όμως ισχύει ο νόμος του Hooke (25). Συνεπώς στην ισότροπη γραμμική ελαστικότητα η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας μετά από ολοκλήρωση της σχέσης (34) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$U(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{kk})^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (35)$$

Οι συνθήκες (31)

$$0 < \lambda + \frac{2}{3}\mu < \infty, \quad 0 < \mu < \infty \quad (31)$$

ή

$$E > 0, \quad -1 < \nu < 1/2 \quad (36)$$

αποδεικνύεται ότι εξασφαλίζουν την απαίτηση η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας να είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή $U \geq 0$ (ιδέ π.χ **Sadd 2005**).

1.9 Το Πρόβλημα της Ελαστοδυναμικής

Έστω παραμορφώσιμο σώμα B που καταλαμβάνει την περιοχή V στον χώρο R^3 . Το σύστημα των εξισώσεων που διέπουν την κίνηση ενός ομογενούς, ισότροπου και γραμμικά ελαστικού σώματος αποτελείται από τις εξισώσεις κίνησης ως προς τις τάσεις (21), το νόμο του Hooke (25) και τις σχέσεις τροπών-μετατοπίσεων (5).

Ο συνδιασμός των παραπάνω εξισώσεων θα μας δώσει τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης ως προς τις μετατοπίσεις ή τις ελαστοδυναμικές εξισώσεις κύματος ή από δω και πέρα απλά εξισώσεις κίνησης.

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (37)$$

όπου $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ και $\mathbf{x} \in V \subset R^3, t > 0$

Επίσης, στο σύνορο S του παραμορφώσιμου σώματος B θα πρέπει να ισχύουν κάποιες συνοριακές συνθήκες. Αυτές που συναντώνται πιο συχνά στα προβλήματα της ελαστοδυναμικής είναι οι παρακάτω.

(I) Συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις

u_i γνωστές στο σύνορο S , δηλαδή

$$u_i(\mathbf{x}, t) = U_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{για } \mathbf{x} \in S, t > 0 \quad (38)$$

(II) Συνοριακές συνθήκες για τις τάσεις

σ_{ij} γνωστές στο σύνορο S , δηλαδή

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \Sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad \text{για } \mathbf{x} \in S, t > 0 \quad (39)$$

(III) Μεικτές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή

$$u_i(\mathbf{x}, t) = U_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{για } \mathbf{x} \in S_1, t > 0 \quad (40)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \Sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad \text{για } \mathbf{x} \in S_2 = S - S_1, t > 0 \quad (41)$$

Τέλος, πρέπει να διατυπώσουμε και τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Για $\mathbf{x} \in V, t = 0$

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = h_i(\mathbf{x}) \quad (42)$$

$$\frac{d}{dt} u_i(\mathbf{x}, 0) = g_i(\mathbf{x}) \quad (43)$$

όπου h_i, g_i γνωστές συναρτήσεις.

1.10 Προβλήματα Επίπεδης Παραμόρφωσης

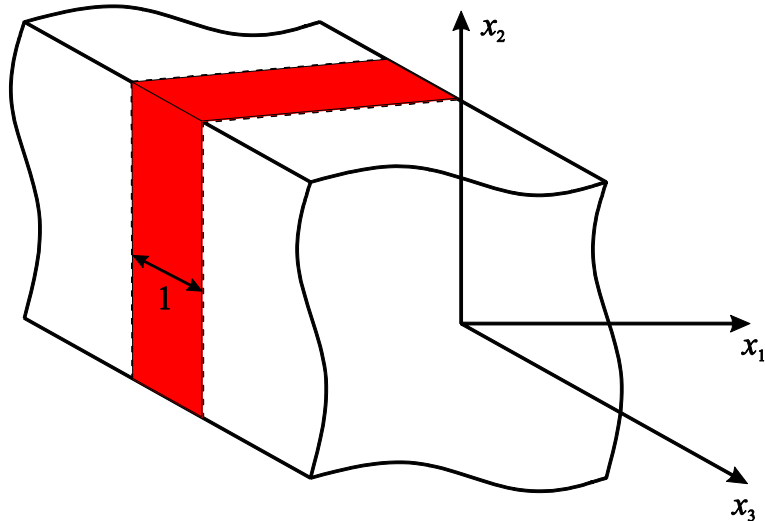
Στα προβλήματα δύο διαστάσεων οι καθολικές δυνάμεις και οι συνιστώσες του τανυστή τάσεως είναι ανεξάρτητες από μία από τις τρεις χωρικές μεταβλητές, έστω την x_3 άρα $\partial/\partial x_3 \equiv 0$. Μία ειδική περίπτωση επίπεδων προβλημάτων είναι τα προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης. Σε αυτήν την περίπτωση η διάσταση x_3 είναι πολύ μεγαλύτερη από τις x_1, x_2 και έτσι η τροπή κατά τη διεύθυνση αυτή μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Με αυτόν τον τρόπο η ανάλυση μπορεί να γίνει σε ένα αποκομμένο επίπεδο μοναδιαίου πάχους κατά τον άξονα x_3 εφόσον η φόρτιση είναι ομοιόμορφη κατά τον άξονα αυτόν (Σχήμα 2).

Συνεπώς, τα υπό μελέτη μεγέθη είναι ανεξάρτητα του x_3 και

$$u_3 \equiv 0, \quad u_1 = u_1(x_1, x_2, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, t). \quad (44)$$

Οπότε θέτοντας $u_{x_3} \equiv 0$ και $\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv 0$ στις εξισώσεις κίνησης (37) θα έχουμε τελικά

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{για } i, j = 1, 2 \quad (45)$$



Σχήμα 2: Περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης.

1.11 Ελαστικά Κύματα

Οι εξισώσεις κίνησης (37) σε διανυσματική μορφή με απουσία καθολικών δυνάμεων μπορούν να γραφούν ως έξης

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (46)$$

Όπου $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ ο τελεστής βαθμίδας και $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ ο τελεστής

Laplace.

Σε ένα ελαστικό μέσο μπορούμε να διακρίνουμε δύο ειδών κύματα χώρου, τα διαμήκη και τα εγκάρσια κύματα.

Διαμήκη ελαστικά κύματα:

Τα διαμήκη ελαστικά κύματα αφορούν στη διάδοση της μεταβολής του όγκου ή της

πυκνότητας. Με εφαρμογή του διαφορικού τελεστή απόκλισης $div(\mathbf{u}) \equiv \nabla \cdot (\mathbf{u})$ και των σχέσεων $\nabla \nabla = \nabla^2$, $\nabla \nabla^2(\mathbf{u}) = \nabla^2(\nabla \mathbf{u})$ στην (46) θα έχουμε ότι:

$$\nabla^2(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \mathbf{u}) \quad (47)$$

Προκύπτει δηλαδή η μερική διαφορική εξίσωση κύματος ως προς τη μεταβολή του όγκου ή διασταλτικότητα

$$\Delta = \nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \quad (48)$$

Η ταχύτητα διάδοσης αυτών των κυμάτων είναι $v_1 = (\lambda + 2\mu/\rho)^{1/2}$. Ένα κύμα που περιγράφεται από την (47) ονομάζεται διαμήκες ή **P** ή πρωτεύων διότι έχει τη μεγαλύτερη ταχύτητα από τα άλλα είδη κυμάτων και καταγράφεται πρώτο από τα σεισμολογικά όργανα. Κατά τη διάδοση **P**-κυμάτων σε ελαστικό μέσο, τα υλικά σημεία αυτού ταλαντώνονται κατά διεύθυνση παράλληλα προς τη διεύθυνση του κύματος (ιδέ π.χ. **Τσελέντης 1997**).

Εγκάρσια ελαστικά κύματα

Τα εγκάρσια ελαστικά κύματα αφορούν τη μεταβολή του σχήματος του συνεχές μέσου. Εφαρμόζοντας τον διαφορικό τελεστή στροφής $rot(\mathbf{u}) = \nabla \times (\mathbf{u})$ στην (46) θα έχουμε ότι

$$\nabla \times ((\lambda + \mu) \nabla \nabla \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}) = \nabla \times (\rho \ddot{\mathbf{u}}) \quad (49)$$

Όμως από τη διανυσματική ανάλυση γνωρίζουμε ότι $\nabla \times (\nabla \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Συνεπώς η (49) θα γίνει

$$\nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{v_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (50)$$

όπου $v_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ η ταχύτητα διάδοσης.

Κύματα που περιγράφονται από την (50) ονομάζονται εγκάρσια ή **S** ή δευτερεύοντα επειδή φθάνουν δεύτερα, μετά τα διαμήκη ($v_2 < v_1$), στους σεισμολογικούς σταθμούς. Κατά τη διάδοση **S**-κυμάτων σε ελαστικό μέσο, τα υλικά σημεία αυτού ταλαντώνονται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και με τέτοιο τρόπο ώστε το μέσο να υπόκειται μόνο σε διατμητική παραμόρφωση (ιδέ π.χ. **Τσελέντης 1997**).

Δηλαδή θα έχουμε τελικά ότι τα διαμήκη ή **P** κύματα διαδίδονται με ταχύτητα:

$$v_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2} \quad (51)$$

και τα εγκάρσια ή **S** κύματα διαδίδονται με ταχύτητα

$$v_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} \quad (52)$$

Κεφάλαιο 2: Το Πρόβλημα Κινούμενου Συγκεντρωμένου Φορτίου στην Επιφάνεια Ημι-χώρου

2.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί το πρόβλημα Cole and Huth το οποίο περιγράφει την κίνηση ενός συγκεντρωμένου μηχανικού φορτίου με σταθερή ταχύτητα στην επιφάνεια ελαστοδυναμικού ημι-χώρου στα πλαίσια της Γραμμικής Θεωρίας Ελαστικότητας για την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης. Το συγκεκριμένο πρόβλημα σχετίζεται με διάφορες περιοχές της Μηχανικής και της Μηχανολογίας π.χ. την Μηχανική των Επαφών (ιδέ π.χ. **Jonson 1985**), την Τριβολογία και την Εδαφοδυναμική. Τυπικές εφαρμογές είναι οι ακόλουθες: (α) παραμόρφωση του εδάφους που προκαλείται από την κίνηση σύγχρονων τραίνων υψηλής ταχύτητας ή από τη διάδοση κυμάτων που οφείλονται σε εκρήξεις ή σε υπερηχητικά αεροσκάφη (β) ολίσθηση κόκκων (asperities) στην επιφάνεια ενός υλικού. Τέτοιου είδους δυναμικές φορτίσεις είναι δυνατόν να προκαλέσουν ισχυρή παραμόρφωση σε μια λεπτή περιοχή κοντά στην επιφάνεια του ημι-χώρου προκαλώντας εκτεταμένη φθορά έως και θραύση στην περιοχή επαφής. Συνεπώς, καθίσταται αναγκαία η μελέτη αυτού του είδους προβλημάτων και ο υπολογισμός των μετατοπίσεων στην επιφάνεια του ημιχώρου και/ή κοντά στην περιοχή εφαρμογής του φορτίου.

Σε πολλές περιπτώσεις οι καταστάσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω μπορούν να θεωρηθούν ως ένα πρόβλημα σταθερής κατάστασης. Η υπόθεση της σταθερής κατάστασης, είναι γνωστό ότι δίνει ακριβή αποτελέσματα όταν το φορτίο κινείται με σταθερή ταχύτητα για μεγάλο χρονικό διάστημα, οπότε τα φαινόμενα παροδικού τύπου έχουν εξασθενήσει αρκετά (ιδέ π.χ. **Fung 1965, Eringen and Suhubi 1975, Brock and Georgiadis 1997**). Το πρόβλημα αρχικά αντιμετωπίστηκε από τον **Sneddon (1952)** και βρέθηκαν λύσεις σε κλειστή μορφή, με χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών, αλλά για ταχύτητες μικρότερες από την ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων. Στη συνέχεια οι **Cole and Huth (1958)** έδωσαν την πλήρη λύση του προβλήματος σε κλειστή μορφή για όλο το εύρος ταχυτήτων. Να σημειώσουμε όμως ότι η λύση τους περιέχει σφάλμα για ταχύτητες που κυμαίνονται μεταξύ της ταχύτητας των εγκάρσιων και διαμήκων κυμάτων, το οποίο διορθώθηκε από τους **Georgiadis and Barber (1993)**. Η λύση του προβλήματος περιέχεται πλέον σε κλασικά συγγράμματα της Θεωρίας Ελαστικότητας και Ελαστοδυναμικής και μπορεί να θεωρηθεί ως υποπερίπτωση του προβλήματος Lamb (**Fung 1965, Eringen and**

Suhubi 1975). Επίσης, πρόσφατα ο **Itou (2016)** έδωσε τη λύση του προβλήματος για την περίπτωση ορθότροπου ημι-χώρου. Όσον αφορά την επίλυση του τρι-διάστατου προβλήματος να αναφέρουμε της εργασίες των **Lansing (1966)**, **Barber (1996)** και **Georgiadis and Lykotrafitis (2001)** στην οποία εμπεριέχεται και η επίλυση του αντίστοιχου δι-διάστατου προβλήματος αντι-επίπεδης διάτμησης.

Στη δική μας περίπτωση, όπως έχουμε ήδη αναφέρει θα επιλύσουμε το πρόβλημα των Cole and Huth, με χρήση του μετασχηματισμού Laplace και βασιζόμενοι στην εργασία των **Brock and Georgiadis (1997)** θεωρώντας μηδενικές θερμικές επιδράσεις, καθώς στην εργασία τους επιλύεται το δι-διάστατο πρόβλημα σταθερής κατάστασης της κίνησης μιας θερμομηχανικής πηγής με σταθερή ταχύτητα στην επιφάνεια ημι-χώρου στα πλαίσια της Συζευγμένης Θερμοελαστοδυναμικής. Τα αποτελέσματα που θα εξαχθούν μπορούν να χρησιμεύσουν ως συναρτήσεις Green κατά την διατύπωση, υπό την μορφή ολοκληρωτικών εξισώσεων, δυναμικών προβλημάτων επαφής, όπως το πρόβλημα κίνησης ενός επίπεδου διεισδυτή σε ελαστοδυναμικό ημι-χώρο.

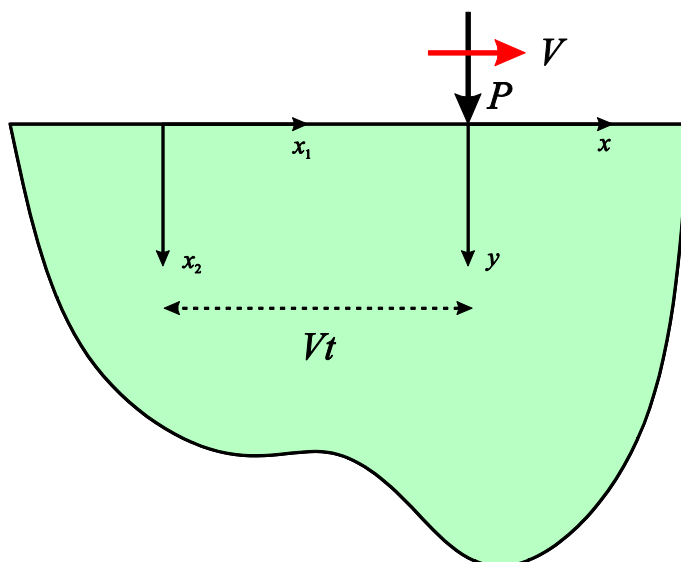
2.2 Διατύπωση του Προβλήματος

Έστω ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό μέσο σε μορφή ημιχώρου $x_2 \geq 0$ υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Στην επιφάνεια του ημιχώρου ασκείται κινούμενο συγκεντωμένο φορτίο P με σταθερή ταχύτητα V (Σχήμα 3). Οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα ως προς ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (Ox_1x_2) είναι οι μερικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης (45).

Αν το κινούμενο φορτίο P έχει εφαρμοσθεί για μεγάλο χρονικό διάστημα τότε τα αρχικά φαινόμενα παροδικού τύπου θα έχουν αποσβεθεί και έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι θα έχει διαμορφωθεί μία σταθερή κατάσταση ως προς ένα παρατηρητή ευρισκόμενο στο σύστημα αναφοράς Ox_1y , το οποίο είναι σταθερά συνδεδεμένο με το κινούμενο φορτίο P .

Μπορούμε λοιπόν να εισάγουμε τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου:

$$x = x_1 - vt, \quad y = x_2, \quad t = t' \quad (53)$$



Σχήμα 3: Κινούμενο συγκεντρωμένο φορτίο στην επιφάνεια ημι-χώρου.

Οπότε θα έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (54)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t'} = -v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (55)$$

Όμως ένας παρατηρητής στο κινούμενο σύστημα αναφοράς δεν αντιλαμβάνεται μεταβολές

ως προς το χρόνο, δηλαδή $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$. Άρα,

$$\frac{\partial}{\partial t'} = -v \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (56)$$

Επίσης εισάγουμε τους παρακάτω συμβολισμούς

$$\sigma_{11} = \sigma_x(x, y), \sigma_{22} = \sigma_y(x, y), \sigma_{12} = \tau_{xy}(x, y), \sigma_{21} = \tau_{yx}(x, y) \quad (57)$$

$$u_1 = u_x(x, y), u_2 = u_y(x, y) \quad (58)$$

Οπότε από τις (54), (56), (57), (58) ο νόμος του Hooke (25) και οι εξισώσεις κίνησης (45) θα μετατραπούν στις παρακάτω

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \sigma_x &= m^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + (m^2 - 2) \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{1}{\mu} \sigma_y &= (m^2 - 2) \frac{\partial u_x}{\partial x} + m^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \tau_{xy}$$

$$\nabla^2 u_x + \frac{\partial}{\partial x} \left((m^2 - 1) \Delta \right) - m^2 c^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0 \quad (60)$$

$$\nabla^2 u_y + \frac{\partial}{\partial y} \left((m^2 - 1) \Delta \right) - m^2 c^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0$$

όπου $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ο δι-διάστατος τελεστής Laplace και $\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$ η διαστολή του όγκου ως προς το Oxy .

Επίσης $m = \frac{v_1}{v_2}$, όπου $v_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων ή **P** κυμάτων και

$v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ η ταχύτητα των εγκάρσιων ή **S** κυμάτων, ενώ

$$c \equiv M_1 = \frac{v}{v_1} \text{ και } mc \equiv M_2 = \frac{v}{v_2} \quad (61)$$

είναι οι αριθμοί Mach.

Επιπρόσθετα, οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος γίνονται ανεξάρτητες του χρόνου και λαμβάνουν την μορφή

$$\sigma_y(x, y=0) = -P\delta(x) \quad \text{για } -\infty < x < +\infty \quad (62)$$

$$\tau_{yx}(x, y=0) = 0$$

όπου $\delta(\)$ η κατανομή δέλτα του Dirac.

Συνεπώς, θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών που αποτελείται από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης (60) και τις συνοριακές συνθήκες (62), ως προς $u_x(x, y)$ και $u_y(x, y)$ για $-\infty < x < +\infty$, $y \geq 0$.

2.3 Εφαρμογή Μετασχηματισμού Laplace και Γενική Μετασχηματισμένη Λύση

Για την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών θα εφαρμόσουμε τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace (ιδέ π.χ. **van der Pol and Bremmer 1950, Carrier et al 1966**) ως προς τη μεταβλητή x . Το ζεύγος μετασχηματισμού (ευθύς και αντίστροφος) ορίζεται ως εξής

$$f^*(q, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(-qx) dx \quad (63)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} f^*(q, y) \exp(qx) dq \quad (64)$$

όπου Br συμβολίζει τη διαδρομή ολοκλήρωσης Bromwich, η οποία είναι μία ευθεία παράλληλη στον άξονα των φανταστικών αριθμών και βρίσκεται εντός της περιοχής αναλυτικότητας της συνάρτησης $f^*(q, y)$ στο μιγαδικό q -επίπεδο.

Επίσης θα κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y) \right) \exp(-qx) dx = q^n f^*(q, y) \quad (65)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) \right) \exp(-qx) dx = \frac{d^n}{dy^n} f^*(q, y) \quad (66)$$

Με την εφαρμογή λοιπόν του μετασχηματισμού Laplace (63) και των (65), (66) στις εξισώσεις (60) θα καταλήξουμε στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$K \begin{pmatrix} u_x^* \\ u_y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

όπου $u_x^* = u_x^*(q, y)$ και $u_y^* = u_y^*(q, y)$ και ο διαφορικός τελεστής K ορίζεται ως εξής

$$K = \begin{pmatrix} d^2 + m^2(1-c^2)q^2 & (m^2-1)qd \\ (m^2-1)qd & m^2d^2 + (1-m^2c^2)q^2 \end{pmatrix} \quad \text{με } d^n = \frac{d^n}{dy^n}, n \in N \quad (68)$$

Για να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (67) θα χρησιμοποιήσουμε τη συμβολική μέθοδο (ιδέ π.χ. **Τραχανάς 1995**). Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο οι $u_x^* = u_x^*(q, y)$, $u_y^* = u_y^*(q, y)$ ικανοποιούν την ίδια διαφορική εξίσωση

$$\{\det(K)\}u_x^*(q, y) = 0 \quad \text{και} \quad \{\det(K)\}u_y^*(q, y) = 0$$

Για να έχει το ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων λύση διαφορετικής της τετριμμένης θα πρέπει η ορίζουσα του K , $\det(K)$, να είναι μηδενική, δηλαδή θέλουμε

$$\det(K) = 0 \quad (69)$$

Η λύση της (69) ως προς d θα μας δώσει

$$d_{1,2} = \pm\varphi(q) \quad \text{και} \quad d_{3,4} = \pm h(q) \quad (70)$$

$$\text{Όπου } \varphi(q) = \sqrt{(c^2-1)q^2} \quad \text{και} \quad h(q) = \sqrt{(c^2m^2-1)q^2} \quad (71)$$

Τότε για τη λύση του συστήματος θα πάρουμε

$$u_x^*(q, y) = b_1 \exp(\varphi y) + b_2 \exp(-\varphi y) + b_3 \exp(hy) + b_4 \exp(-hy) \quad (72)$$

$$u_y^*(q, y) = w_1 \exp(\varphi y) + w_2 \exp(-\varphi y) + w_3 \exp(hy) + w_4 \exp(-hy) \quad (73)$$

Όμως οι σταθερές b_i, w_i δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Θα προσδιορίσουμε τη σχέση των w_i ως προς τα b_i . Από την πρώτη διαφορική εξίσωση του συστήματος (67) θα έχουμε

$$(d^2 + (1-c^2)m^2q^2)u_x^* + (q(m^2-1)d)u_y^* = 0 \quad (74)$$

Με αντικατάσταση των μετασχηματισμένων λύσεων (72), (73) στην (74), εκτελώντας τις παραγωγίσεις και αναδιατάσσοντας τους όρους θα πάρουμε την παρακάτω εξίσωση

$$\begin{aligned} & (b_1\varphi^2 + (1-c^2)m^2q^2b_1 + q(m^2-1)w_1\varphi)\exp(\varphi y) + (b_2\varphi^2 + (1-c^2)m^2q^2b_2 - q(m^2-1)w_2\varphi)\exp(-\varphi y) + \\ & (b_3h^2 + (1-c^2)m^2q^2b_3 + q(m^2-1)w_3h)\exp(hy) + (b_4h^2 + (1-c^2)m^2q^2b_4 - q(m^2-1)w_4h)\exp(-hy) = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

Η εξίσωση (75) ικανοποιείται μόνο αν οι συντελεστές των εκθετικών μηδενίζονται. Άρα θα πάρουμε τις σχέσεις

$$w_1 = -\frac{\varphi^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)\varphi}b_1, \quad w_2 = \frac{\varphi^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)\varphi}b_2 \quad (76)$$

$$w_3 = -\frac{h^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)h}b_3, \quad w_4 = \frac{h^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)h}b_4 \quad (77)$$

Τελικά η γενική λύση του συστήματος θα είναι

$$u_x^*(q, y) = b_1 \exp(\varphi y) + b_2 \exp(-\varphi y) + b_3 \exp(hy) + b_4 \exp(-hy) \quad (78)$$

$$u_y^*(q, y) = -\frac{\varphi^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)\varphi}b_1 \exp(\varphi y) + \frac{\varphi^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)\varphi}b_2 \exp(-\varphi y) \\ -\frac{h^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)h}b_3 \exp(hy) + \frac{h^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)h}b_4 \exp(-hy) \quad (79)$$

2.4 Εύρεση και Διερεύνηση της Τελικής Μετασχηματισμένης Λύσης

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις σταθερές της μετασχηματισμένης λύσης μέσω των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος και να εκτελέσουμε στη συνέχεια τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace θα πρέπει να διακρίνουμε τρεις περιοχές ταχυτήτων οι οποίες θα αποτελούν τα όρια μέσα στα οποία θα βρίσκεται η ταχύτητα V του φορτίου P και θα μας βοηθήσουν να κάνουμε την κατάλληλη επιλογή των $u_x^* = u_x^*(q, y)$ και $u_y^* = u_y^*(q, y)$. Οι περιοχές αυτές είναι (i) υποηχητική (subsonic), (ii) υπερηχητική (supersonic), (iii) παρηχητική (transonic).

2.4.1 Υποηχητική Περιοχή

Σε αυτήν την περίπτωση υποθέτουμε ότι η ταχύτητα του φορτίου είναι μικρότερη από την ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων και των εγκάρσιων κυμάτων, δηλαδή $v < v_2 < v_1$ ή $M_1 < M_2 < 1$. Επίσης θέλουμε οι $u_x^*(q, y)$, $u_y^*(q, y)$ να είναι φραγμένες καθώς $y \rightarrow +\infty$, συνεπώς επιλέγουμε σαν λύση από τις (78), (79) την παρακάτω

$$u_x^*(q, y) = A \exp(-\alpha y) + B \exp(-\beta y) \quad (80)$$

$$u_y^*(q, y) = \frac{\alpha^2 + (1-c^2)m^2 q^2}{q(m^2-1)\alpha} A \exp(-\alpha y) + \frac{\beta^2 + (1-c^2)m^2 q^2}{q(m^2-1)\beta} B \exp(-\beta y) \quad (81)$$

$$\mu \quad \alpha(q) = \sqrt{(c^2 m^2 - 1)q^2} \quad \text{και} \quad \beta(q) = \sqrt{(c^2 - 1)q^2} \quad (82)$$

Οι $A = A(q)$, $B = B(q)$ θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες. Με εφαρμογή του νόμου Hooke (59) και στη συνέχεια του μετασχηματισμού Laplace (63), των ιδιοτήτων (65), (66) καθώς και των λύσεων (80), (81) στις συνοριακές συνθήκες (62), θα έχουμε διαδοχικά:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y(x, y=0) = -P\delta(x) \\ \tau_{yx}(x, y=0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{P}{\mu} = (m^2 - 2)q u_x^*(q, y=0) + m^2 \frac{d}{dy} u_y^*(q, y=0) \\ 0 = \frac{d}{dy} u_x^*(q, y=0) + q u_y^*(q, y=0) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ((m^2 - 2)q - m^2 \alpha H_1) A + ((m^2 - 2)q - m^2 \beta H_2) B = -\frac{P}{\mu} \\ (q H_1 - \alpha) A + (q H_2 - \beta) B = 0 \end{array} \right\} \quad (83)$$

Η λύση του συστήματος (83) ως προς $A(q)$, $B(q)$ είναι

$$A = -P \frac{(qH_2 - \beta)}{\mu H_3} \quad \text{και} \quad B = P \frac{(qH_1 - \alpha)}{\mu H_3} \quad (84)$$

όπου

$$H_1 = \frac{\alpha^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)\alpha}, \quad H_2 = \frac{\beta^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)\beta} \quad (85)$$

και

$$H_3 = (qH_2 - \beta)(q(m^2-2) - \alpha m^2 H_1) - (qH_1 - \alpha)(q(m^2-2) - \beta m^2 H_2) \quad (86)$$

Στη συνέχεια με χρήση των παρακάτω σχέσεων

$$cm = M_2, \quad c = M_1, \quad m = \frac{M_2}{M_1} \quad (87)$$

$$\alpha(q) = \sqrt{(c^2 m^2 - 1)q^2} \quad \text{και} \quad \beta(q) = \sqrt{(c^2 - 1)q^2} \quad (88)$$

και εκτελώντας τις πράξεις στα H_1, H_2, H_3 θα έχουμε τελικά για την μετασχηματισμένη λύση τις εκφράσεις

$$u_x^*(q, y) = A \exp(-\alpha y) + B \exp(-\beta y) \quad (89)$$

$$u_y^*(q, y) = \frac{q}{\alpha} A \exp(-\alpha y) - \frac{\beta}{q} B \exp(-\beta y)$$

με

$$A = \frac{2P}{\mu R} \left(\frac{\alpha \beta q}{q^4} \right), \quad B = \frac{P}{\mu R} \frac{(q^2 - \alpha^2) q}{q^4} \quad (90)$$

και

$$R = 4(M_1^2 - 1)^{1/2} (M_2^2 - 1)^{1/2} - (2 - M_2^2) \left((M_1^2 - 1) \frac{M_2^2}{M_1^2} + \left(\frac{M_2^2}{M_1^2} - 2 \right) \right)$$

Όμως επειδή βρισκόμαστε στη υποηχητική περιοχή, $M_1 < M_2 < 1$, θα έχουμε

$$\alpha(q) = \beta_2 (-q^2)^{1/2} \quad (91)$$

$$\beta(q) = \beta_1 (-q^2)^{1/2} \quad (92)$$

$$\text{και} \quad R = (1 + \beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2 \quad (93)$$

όπου έχουμε εισάγει τους συμβολισμούς που υπάρχουν στην βιβλιογραφία (ιδέ π.χ. **Fung 1965, Eringen and Suhubi 1975**).

$$\beta_1 = \sqrt{1-M_1^2} \text{ και } \beta_2 = \sqrt{1-M_2^2}. \quad (94)$$

Παρατηρούμε ότι στη λύση μας έχει εισαχθεί η πλειότιμη μιγαδική συνάρτηση $\sqrt{-q^2}$. Για να μπορέσουμε να ορίσουμε τις κλαδικές τομές αυτής της συνάρτησης και να εκτελέσουμε τις αντιστροφές για την τελική λύση θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό $\tau > 0$ τέτοιο ώστε $\tau \rightarrow 0$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$V(q) = \sqrt{\tau^2 - q^2}, \quad q \in \mathbb{C} \quad (95)$$

Η εισαγωγή του τ αποτελεί συνήθης τεχνική σε λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών (ιδέ π.χ **Carrier, Krook and Pearson 1966**). Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να γράψουμε για τις (91), (92) ότι

$$a(q) = \beta_2 V(q) = \sqrt{1-M_2^2} (\tau^2 - q^2)^{1/2} \quad (96)$$

$$\beta(q) = \beta_1 V(q) = \sqrt{1-M_1^2} (\tau^2 - q^2)^{1/2} \quad (97)$$

Η $V(q)$ είναι μία πλειότιμη συνάρτηση με κλαδικά σημεία τα $q = \pm\tau$, συνεπώς πρέπει να ορίσουμε κατάλληλες κλαδικές τομές σύμφωνα με τον περιορισμό ότι $\text{Re}(V(q)) \geq 0$, όπου $\text{Re}(\)$ δηλώνει το πραγματικό μέλος της $V(q)$. Η απαίτηση αυτή προκύπτει από τον εξής συλλογισμό: Στις εκφράσεις των $u_x^* = u_x^*(q, y)$, $u_y^* = u_y^*(q, y)$ περιέχονται όροι της μορφής $\exp(-V(q)y)$, δηλαδή έχουμε

$$\exp(-V(q)y) = \exp(-\operatorname{Re}(V(q)y))[\cos(\operatorname{Im}V(q)y) - i\sin(\operatorname{Im}V(q)y)] \quad (98)$$

Όμως θέλουμε $\exp(-V(q)y) \rightarrow 0$ καθώς $y \rightarrow +\infty$, άρα από την (98) προκύπτει ότι θα πρέπει $\operatorname{Re}(V(q)) \geq 0$

Για τη μελέτη της $V(q)$ γράφουμε

$$V(q) = \sqrt{\tau^2 - q^2} = \sqrt{(\tau - q)(\tau + q)} = \sqrt{|\rho_1 \rho_2|} \exp\left(i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

όπου

$$\tau - q = |\tau - q| \exp(i\theta_1) = \rho_1 \exp(i\theta_1) \quad \text{με} \quad -\pi < \theta_1 < \pi$$

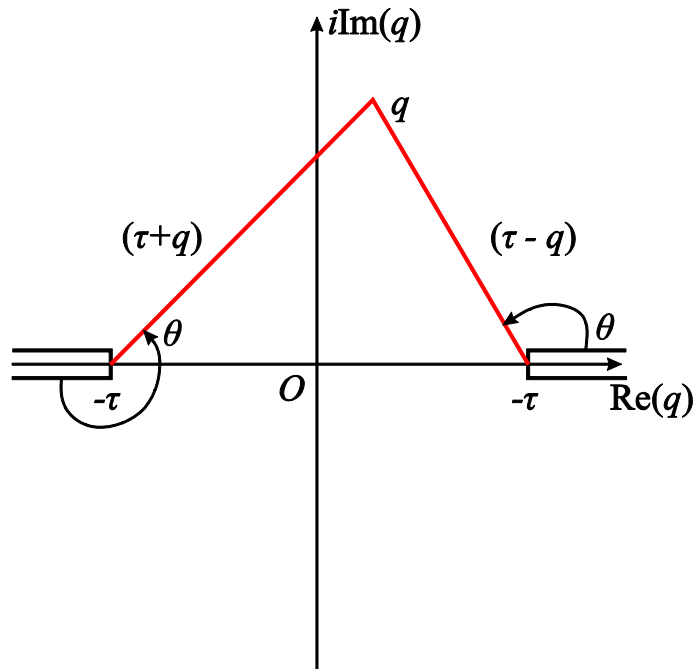
$$\tau + q = |\tau + q| \exp(i\theta_2) = \rho_2 \exp(i\theta_2) \quad \text{με} \quad -\pi < \theta_2 < \pi$$

Τότε
$$V(q) = |V(q)| \exp(i\theta) = \sqrt{|\tau^2 - q^2|} \exp(i\theta)$$

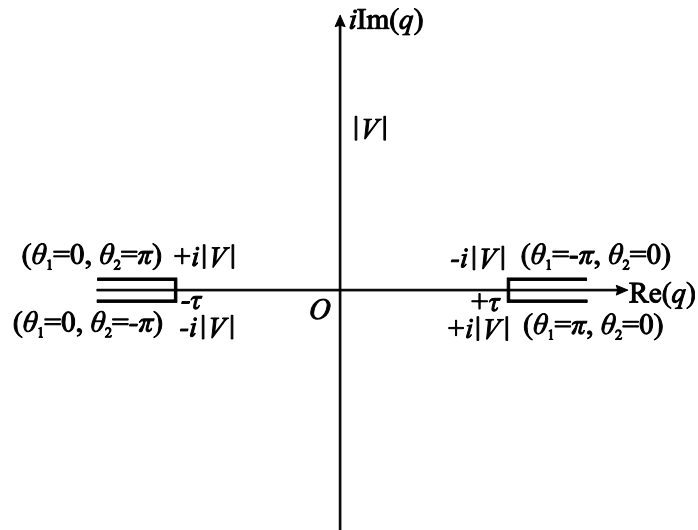
(99)

με
$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

Οι γωνίες θ_1, θ_2 , οι κλαδικές τομές και οι τιμές της $V(q)$ στο τετμημένο μιγαδικό q – επίπεδο φαίνονται παρακάτω (Σχήμα 4 και 5)



Σχήμα 4: Κλαδικές τομές της $V(q)$.



Σχήμα 5: Τιμές της $V(q)$.

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο και στο τρίτο τεταρτημόριο ισχύει ότι $-\pi < \theta_1 + \theta_2 < 0$

ενώ στο δεύτερο και τέταρτο ισχύει ότι $0 < \theta_1 + \theta_2 < \pi$ και επειδή από την (99) έχουμε:

$$V(q) = |V(q)| \cos \theta + i |V(q)| \sin \theta \Rightarrow \operatorname{Re}(V(q)) \geq 0.$$

Η παραπάνω ανάλυση για την $V(q)$ προέρχεται από τους **Felsen and Marcuvitz (1994)** ενώ περισσότερα για τις πλειότεμες συναρτήσεις παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία (ιδέ π.χ. **Ablowitz and Fokas 2003, Watanabe 2015**).

2.4.2 Υπερηχητική Περιοχή

Σε αυτήν την περίπτωση υποθέτουμε ότι η ταχύτητα του φορτίου είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων και των εγκάρσιων κυμάτων, δηλαδή $v_2 < v_1 < v$ ή $1 < M_1 < M_2$. Η γενική λύση (78), (79) του συστήματος (67) θα πρέπει να υπακούει στις συνθήκες ακτινοβολίας (radiation conditions) σύμφωνα με τις οποίες δεν θα πρέπει να υπάρχει διάδοση κύματος από το άπειρο προς την πηγή, δηλαδή προς το σημείο εφαρμογής του φορτίου P (ιδέ π.χ **Sommerfeld 1949, Fung 1965, Vladimirov 1971, Eringen and Suhubi 1975, Scot 1992, Brock and Georgiadis 1997, Georgiadis and Lykotrafitis 2001, Zauderer 2006**).

Παρατηρούμε ότι στην γενική μετασχηματισμένη λύση (78), (79) οι όροι

$$b_2 \exp(-\varphi y) = b_2 \exp\left(-\left(\sqrt{(c^2 - 1)q^2}\right)\right) = b_2 \exp\left(-\left(\sqrt{(M_1^2 - 1)q^2}\right)\right)$$

$$b_4 \exp(-hy) = b_4 \exp\left(-\left(\sqrt{(c^2 m^2 - 1)q^2}\right)\right) = b_4 \exp\left(-\left(\sqrt{(M_2^2 - 1)q^2}\right)\right)$$

θα δώσουν ένα διαμήκες και ένα εγκάρσιο κύμα αντίστοιχα, που διαδίδεται μπροστα από το φορτίο. Το φορτίο P όμως κινείται με ταχύτητα V τέτοια ώστε $v_2 < v_1 < v$. Για να αποφύγουμε λοιπόν αυτό το φαινόμενο το οποίο αντίκειται στις συνθήκες ακτινοβολίας, θέτουμε $b_2 = b_4 = 0$ και επιλέγουμε σαν λύση την παρακάτω

$$u_x^*(q, y) = A \exp(\alpha y) + B \exp(\beta y) \tag{100}$$

$$u_y^*(q, y) = -\frac{\alpha^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)\alpha} A \exp(\alpha y) - \frac{\beta^2 + (1-c^2)m^2q^2}{q(m^2-1)\beta} B \exp(\beta y) \quad (101)$$

$$\mu \alpha(q) = \sqrt{(c^2m^2-1)q^2} \quad \text{και} \quad \beta(q) = \sqrt{(c^2-1)q^2} \quad (102)$$

Ο προσδιορισμός των $A = A(q)$, $B = B(q)$ θα γίνει με παρόμοια διαδικασία μέσω των συνοριακών συνθηκών όπως και στην προηγούμενη ενότητα 2.4.1. Θα καταλήξουμε στο παρακάτω αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{l} \left((m^2-2)q - m^2\alpha H_1 \right) A + \left((m^2-2)q - m^2\beta H_2 \right) B = -\frac{P}{\mu} \\ (qH_1 - \alpha) A + (qH_2 - \beta) B = 0 \end{array} \right. \quad (103)$$

το οποίο είναι το ίδιο με το σύστημα (83) στην περίπτωση της υποηχητικής περιοχής. Συνεπώς οι σταθερές A, B θα δίνονται από τις σχέσεις (84), (85), (86).

Στη συνέχεια με χρήση των (87), (88) θα έχουμε τελικά για την μετασχηματισμένη λύση (100), (101) ότι

$$u_x^*(q, y) = A \exp(\alpha y) + B \exp(\beta y) \quad (104)$$

$$u_y^*(q, y) = -\frac{q}{\alpha} A \exp(\alpha y) + \frac{\beta}{q} B \exp(\beta y)$$

$$\mu \epsilon \quad A = \frac{2P}{\mu R} \left(\frac{\alpha\beta q}{q^4} \right), \quad B = \frac{P}{\mu R} \frac{(q^2 - \alpha^2)q}{q^4} \quad (105)$$

και επειδή βρισκόμαστε στην υπερηχητική περιοχή θα έχουμε ότι

$$\alpha(q) = m_2 q, \beta(q) = m_1 q \quad (106)$$

$$\text{και } R = (1 - m_2^2)^2 + 4m_1 m_2 \quad (107)$$

$$\text{όπου } m_1 = \sqrt{1 - M_1^2}, m_2 = \sqrt{1 - M_2^2} \quad (108)$$

2.4.3 Παρηχητική Περιοχή

Στην περίπτωση της παρηχητικής περιοχής υποθέτουμε ότι η ταχύτητα του φορτίου είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων αλλά μικρότερη από την ταχύτητα των διαμήκων, δηλαδή $v_2 < v < v_1$ ή $M_1 < 1 < M_2$. Σύμφωνα με τις συνθήκες ακτινοβολίας για $v_2 < v$ και την απαίτηση η λύση μας είναι φραγμένη καθώς $y \rightarrow +\infty$ για $v < v_1$ επιλέγουμε σαν λύση από τις (78), (79) την παρακάτω

$$u_x^*(q, y) = A \exp(\alpha y) + B \exp(-\beta y) \quad (109)$$

$$u_y^*(q, y) = -\frac{\alpha^2 + (1 - c^2)m^2 q^2}{q(m^2 - 1)\alpha} A \exp(\alpha y) + \frac{\beta^2 + (1 - c^2)m^2 q^2}{q(m^2 - 1)\beta} B \exp(-\beta y) \quad (110)$$

$$\text{με } \alpha(q) = \sqrt{(c^2 m^2 - 1)q^2} \text{ και } \beta(q) = \sqrt{(c^2 - 1)q^2} = \sqrt{(c^2 - 1)(-q^2)}.$$

Ο προσδιορισμός των $A = A(q)$, $B = B(q)$ θα γίνει μέσω των συνοριακών συνθηκών όπως και στις δύο προηγούμενες ενότητες. Θα καταλήξουμε στο παρακάτω αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων το οποίο διαφέρει από τις άλλες δύο περιπτώσεις.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left((m^2 - 2)q - m^2 \alpha H_1 \right) A + \left((m^2 - 2)q - m^2 \beta H_2 \right) B = -\frac{P}{\mu} \\ (\alpha - qH_1) A + (qH_2 - \beta) B = 0 \end{array} \right. \quad (111)$$

Οι σταθερές A, B θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$A = -P \frac{(qH_2 - \beta)}{\mu H_4} \quad \text{και} \quad B = P \frac{(\alpha - qH_1)}{\mu H_4} \quad (112)$$

$$\text{όπου } H_1 = \frac{\alpha^2 + (1 - c^2)m^2 q^2}{q(m^2 - 1)\alpha}, \quad H_2 = \frac{\beta^2 + (1 - c^2)m^2 q^2}{q(m^2 - 1)\beta} \quad \text{και}$$

$$H_4 = (qH_2 - \beta)(q(m^2 - 2) - \alpha m^2 H_1) - (\alpha - qH_1)(q(m^2 - 2) - \beta m^2 H_2).$$

Στη συνέχεια με την εισαγωγή των αριθμών Mach M_1, M_2 και λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι βρισκόμαστε στην παρηχητική περιοχή, εκτελούμε τις πράξεις στα H_1, H_2, H_4 και θα έχουμε τελικά για την μετασχηματισμένη λύση τις εξής εκφράσεις

$$u_x^*(q, y) = A \exp(\alpha y) + B \exp(-\beta y) \quad (113)$$

$$u_y^*(q, y) = -\frac{q}{\alpha} A \exp(\alpha y) - \frac{\beta}{q} B \exp(-\beta y)$$

$$\text{με } A = -\frac{2Pm_2}{\mu R} \frac{\beta}{q^2} N, \quad B = -\frac{P}{\mu R} \frac{(\alpha^2 - q^2)}{q^2 \sqrt{q^2}} N, \quad R = (1 - m_2^2)^4 + 16m_2 \beta_1$$

$$N = (1 - m_2^2)^2 + 16m_2 \beta_1 (-i) \quad (114)$$

$$\text{και } \alpha(q) = \sqrt{(M_2^2 - 1)} \sqrt{q^2} = m_2 \sqrt{q^2} \quad \beta(q) = \sqrt{(1 - M_1^2)} \sqrt{\tau^2 - q^2} = \beta_1 V(q).$$

2.5 Αντιστροφή Μετασχηματισμένης Λύσης

Αφού λοιπόν έχουμε υπολογίσει το πεδίο μετατοπίσεων σε κάθε μία από τις τρεις περιοχές ταχυτήτων είμαστε έτοιμοι να εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και να υπολογίσουμε αναλυτικά τις εκφράσεις τους.

2.5.1 Υποηχητική Περιοχή

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην περίπτωση αυτή για τους αριθμούς Mach ισχύει ότι $M_1 < M_2 < 1$. Επίσης οι $u_x^* = u_x^*(q, y)$, $u_y^* = u_y^*(q, y)$ δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις

$$u_x^*(q, y) = A \exp(-\alpha y) + B \exp(-\beta y) \quad (89)$$

$$u_y^*(q, y) = \frac{q}{\alpha} A \exp(-\alpha y) - \frac{\beta}{q} B \exp(-\beta y)$$

με τα $A, B, \alpha(q), \beta(q)$ να δίνονται από τις (90), (93), (94), (96), (97).

(I) Με αντικατάσταση λοιπόν των (90), (93), (94), (96), (97) στην έκφραση της $u_x^*(q, y)$ από τις (89) θα πάρουμε

$$u_x^*(q, y) = \frac{P}{\mu R} \left(\left(2\beta_1\beta_2 \frac{\exp(-\beta_2 V(q)y)}{q^3} - \beta_2^2 \frac{\exp(-\beta_1 V(q)y)}{q^3} \right) \tau^2 + \left((1 + \beta_2^2) \frac{\exp(-\beta_1 V(q)y)}{q} - 2\beta_1\beta_2 \frac{\exp(-\beta_2 V(q)y)}{q} \right) \right)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (64) καταλήγουμε ότι

$$u_x(x, y) = \frac{P}{\mu R} \tau^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \left(2\beta_1\beta_2 \frac{\exp(-\beta_2 V(q)y)}{q^3} - \beta_2^2 \frac{e^{-\beta_1 V(q)y}}{q^3} \right) \exp(qx) dq$$

$$+ \frac{P}{\mu R} (1 + \beta_2^2) \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\exp(-\beta_1 V(q)y)}{q} \exp(qx) dq - \frac{P}{\mu R} 2\beta_1\beta_2 \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\exp(-\beta_2 V(q)y)}{q} \exp(qx) dq$$

ή

$$u_x(x, y) = \frac{P}{\mu R} \tau^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \left(2\beta_1\beta_2 \frac{\exp(-\beta_2 V(q)y)}{q^3} - \beta_2^2 \frac{\exp(-\beta_1 V(q)y)}{q^3} \right) \exp(qx) dq +$$

$$\frac{P}{\mu R} (1 + \beta_2^2) \frac{1}{2\pi i} I_1 - \frac{P}{\mu R} 2\beta_1\beta_2 \frac{1}{2\pi i} I_2$$

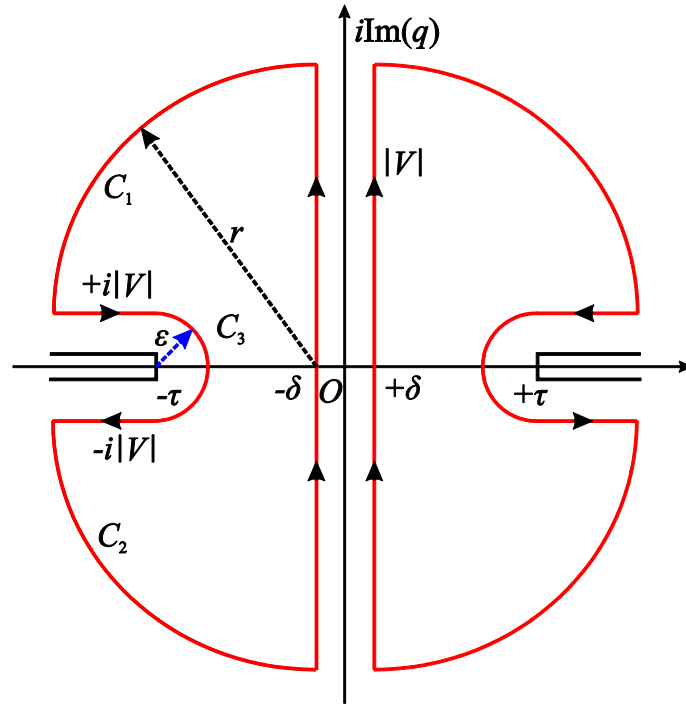
(115)

όπου $I_1 = \int_{Br} \frac{\exp(-\beta_1 V(q)y)}{q} \exp(qx) dq$, $I_2 = \int_{Br} \frac{\exp(-\beta_2 V(q)y)}{q} \exp(qx) dq$

Θα υπολογίσουμε το I_1 και με παρόμοια διαδικασία θα βρούμε το I_2 . Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται παραμορφώνοντας την αρχική διαδρομή Bromwich σε δύο δρόμους ολοκλήρωσης που βρίσκονται στο μιγαδικό ημι-επίπεδο $\text{Re}(q) < 0$ για $x > 0$ ή στο ημι-επίπεδο $\text{Re}(q) > 0$ για $x < 0$ (Σχήμα 6). Δηλαδή, αν θεωρήσουμε ένα $\delta > 0$ τότε

$$I_1 = \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{\exp(-\beta_1 V(q)y)}{q} \exp(qx) dq \text{ για } x > 0$$

$$I_1 = \int_{+\delta-i\infty}^{+\delta+i\infty} \frac{\exp(-\beta_1 V(q)y)}{q} \exp(qx) dq \text{ για } x < 0$$



Σχήμα 6: Δρόμοι ολοκλήρωσης για το I_1 .

Έστω $x > 0$, τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cauchy από τη μιγαδική ανάλυση (ιδέ π.χ. **Ablowitz and Fokas 2003**) θα έχουμε

$$I_1 + \int_{-\infty}^{-\tau} \frac{\exp(-i\beta_1 y |V|)}{q} \exp(qx) dq + \int_{-\tau}^{-\infty} \frac{\exp(+i\beta_1 y |V|)}{q} \exp(qx) dq +$$

$$\int_{C_1(r)} \frac{\exp(-\beta_1 V(q) y)}{q} \exp(qx) dq + \int_{C_1(\varepsilon)} \frac{\exp(-\beta_1 V(q) y)}{q} \exp(qx) dq + \int_{C_1(r)} \frac{\exp(-\beta_1 V(q) y)}{q} \exp(qx) dq = 0$$

Από το λήμμα του Jordan για $r \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0$ και με χρήση του τύπου του Euler θα έχουμε

$$I_1 = -2i \int_{\tau}^{+\infty} \sin\left(\beta_1 y (q^2 - \tau^2)^{1/2}\right) \frac{\exp(-qx)}{q} dq \text{ και για } \tau \rightarrow 0 \text{ θα πάρουμε}$$

$$I_1 = -2i \int_0^{+\infty} \sin(\beta_1 y q) \frac{\exp(-qx)}{q} dq \quad \text{ή} \quad I_1 = -2i \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta_1 y}{x}\right)$$

Για $x < 0$ θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα και με παρόμοια διαδικασία θα πάρουμε ότι

$$I_2 = -2i \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta_2 y}{x}\right)$$

Συνεπώς για $\tau \rightarrow 0$ η (115) θα γίνει

$$u_x(x, y) = \frac{P}{\pi \mu R} \left((1 + \beta_2^2) \left(-\operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta_1 y}{x}\right) \right) + 2\beta_1 \beta_2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta_2 y}{x}\right) \right) \quad (116)$$

Όμως λόγω της συμπεριφοράς της $\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$ καθώς $y \rightarrow 0$ για $x > 0$ και $x < 0$ και επειδή θέλουμε να διατηρήσουμε τη συμμετρία του προβλήματος γράφουμε τελικά ότι

$$u_x(x, y) = \frac{P}{\pi \mu R} \left((1 + \beta_2^2) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta_1 y}{x}\right) \right) \operatorname{sgn}(x) - 2\beta_1 \beta_2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta_2 y}{x}\right) \right) \operatorname{sgn}(x) \right) \quad (117)$$

Τέλος για $y \rightarrow 0$ θα έχουμε στην επιφάνεια του ημι-χώρου ότι

$$u_x(x, y \rightarrow 0) = \frac{P}{2\mu R} (1 + \beta_2^2 - 2\beta_1 \beta_2) \operatorname{sgn}(x) \quad (118)$$

όπου $\text{sgn}(x) = 1 - 2H(-x)$ είναι η συνάρτηση προσήμου και $H(\cdot)$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος ή συνάρτηση Heaviside.

(II) Παρόμοια για την $u_y^*(q, y)$ εκτελώντας τις πράξεις θα πάρουμε ότι

$$u_y^*(q, y) = -\frac{P}{\mu R} \beta_1 (1 + \beta_2^2) \frac{V}{q^2} \exp(-\beta_1 V y) + \frac{2P}{\mu R} \beta_1 \frac{V}{q^2} \exp(-\beta_2 V y) + \tau^2 \frac{P}{\mu R} \beta_1 \beta_2^2 \frac{V}{q^4} \exp(-\beta_1 V y)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (64) καταλήγουμε ότι

$$u_y(x, y) = -\frac{P}{\mu R} \beta_1 (1 + \beta_2^2) \frac{1}{2\pi i} J_1 + \frac{2P}{\mu R} \beta_1 \frac{1}{2\pi i} J_2 + \tau^2 \frac{P}{\mu R} \beta_1 \beta_2^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{V}{q^4} \exp(-\beta_1 V y) \exp(qx) dq \quad (119)$$

$$\text{όπου } J_1 = \int_{Br} \frac{V}{q^2} \exp(-\beta_1 V y) \exp(qx) dq \quad \text{και} \quad J_2 = \int_{Br} \frac{V}{q^2} \exp(-\beta_2 V y) \exp(qx) dq .$$

Με την ίδια διαδικασία υπολογισμού του I_1 θα έχουμε για τα J_1, J_2 ότι

$$J_1 = -2i \int_{\tau}^{+\infty} \frac{(|q^2 - \tau^2|)^{1/2}}{q^2} \cos\left(\beta_1 y (|q^2 - \tau^2|)^{1/2}\right) \exp(-qx) dq$$

$$J_2 = -2i \int_{\tau}^{+\infty} \frac{(|q^2 - \tau^2|)^{1/2}}{q^2} \cos\left(\beta_2 y (|q^2 - \tau^2|)^{1/2}\right) \exp(-qx) dq$$

και για $\tau \rightarrow 0$

$$J_1 = -2i \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-qx)}{q} \cos(\beta_1 y q) dq = 2i \log\left(\left(x^2 + \beta_1^2 y^2\right)^{1/2}\right)$$

$$J_2 = -2i \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-qx)}{q} \cos(\beta_2 y q) dq = 2i \log\left(\left(x^2 + \beta_2^2 y^2\right)^{1/2}\right)$$

Συνεπώς για $\tau \rightarrow 0$ η (119) θα γίνει

$$u_y(x, y) = -\frac{P}{\pi\mu R} \beta_1 \left((1 + \beta_2^2) \log\left(\left(x^2 + \beta_1^2 y^2\right)^{1/2}\right) - 2 \log\left(\left(x^2 + \beta_2^2 y^2\right)^{1/2}\right) \right) \quad (120)$$

Τέλος καθώς $y \rightarrow 0$ θα έχουμε

$$u_y(x, y \rightarrow 0) = \frac{P}{\pi\mu R} \beta_1 (1 - \beta_2^2) \log|x| = \frac{P}{\pi\mu R} \beta_1 (1 - \beta_2^2) \log\left(\left(x^2\right)^{1/2}\right) \quad (121)$$

2.5.2 Υπερηχητική Περιοχή

Σε αυτή τη περίπτωση οι αριθμοί Mach είναι μεγαλύτερη του ένα, $1 < M_1 < M_2$ και οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις δίνονται από τις εκφράσεις

$$u_x^*(q, y) = A \exp(\alpha y) + B \exp(\beta y) \quad (104)$$

$$u_y^*(q, y) = -\frac{q}{\alpha} A \exp(\alpha y) + \frac{\beta}{q} B \exp(\beta y)$$

με τα $A, B, a(q), \beta(q)$ να δίνονται από τις (105), (106), (107), (108).

Εκτελώντας τις πράξεις θα πάρουμε ότι

$$u_x^*(q, y) = \frac{P}{\mu R} \left((1 - m_2^2) \frac{\exp(m_1 y q)}{q} + 2m_1 m_2 \frac{\exp(m_2 y q)}{q} \right)$$

$$u_y^*(q, y) = \frac{P}{\mu R} m_1 \left((1 - m_2^2) \frac{\exp(m_1 y q)}{q} - 2 \frac{\exp(m_2 y q)}{q} \right)$$

και εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace θα έχουμε

$$u_x(x, y) = \frac{P}{\mu R} \left((1 - m_2^2) \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\exp(m_1 y q)}{q} \exp(qx) dq + 2m_1 m_2 \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\exp(m_2 y q)}{q} \exp(qx) dq \right)$$

$$u_y(x, y) = \frac{P}{\mu R} m_1 \left((1 - m_2^2) \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\exp(m_1 y q)}{q} \exp(qx) dq - 2 \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\exp(m_2 y q)}{q} \exp(qx) dq \right)$$

Από τους πίνακες του μετασχηματισμού Laplace (ιδέ π.χ. **van der Pol and Bremmer 1950, Bracewell 1965, Graff 1991**) γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\exp(m_1 y q)}{q} \exp(qx) dq = H(x + m_1 y) \quad \text{και} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\exp(m_2 y q)}{q} \exp(qx) dq = H(x + m_2 y)$$

Άρα, θα έχουμε

$$u_x(x, y) = \frac{P}{\mu R} \left((1 - m_2^2) H(x + m_1 y) + 2m_1 m_2 H(x + m_2 y) \right) \quad (122)$$

$$u_y(x, y) = \frac{P}{\mu R} m_1 \left((1 - m_2^2) H(x + m_1 y) - 2H(x + m_2 y) \right) \quad (123)$$

Τέλος καθώς $y \rightarrow 0$ θα προκύψει ότι

$$u_x(x, y \rightarrow 0) = \frac{P}{\mu R} \left((1 - m_2^2) + 2m_1 m_2 \right) H(x) \quad (124)$$

$$u_y(x, y \rightarrow 0) = -\frac{P}{\mu R} m_1 (1 + m_2^2) H(x) \quad (125)$$

2.5.3 Παρηχητική Περιοχή

Αν η ταχύτητα του φορτίου βρίσκεται στην παρηχητική περιοχή τότε για τους αριθμούς Mach ισχύει ότι $M_1 < 1 < M_2$ και οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις δίνονται από τις εκφράσεις

$$u_x^*(q, y) = A \exp(\alpha y) + B \exp(-\beta y) \quad (113)$$

$$u_y^*(q, y) = -\frac{q}{\alpha} A \exp(\alpha y) - \frac{\beta}{q} B \exp(-\beta y)$$

με τα $A, B, \alpha(q), \beta(q)$ να δίνονται από τις (114)

(I) Με αντικατάσταση των (114) στην έκφραση της $u_x^*(q, y)$ θα πάρουμε

$$u_x^*(q, y) = \frac{P}{\mu R} \left(-2\beta_1 m_2 (1 - m_2^2)^2 \frac{V}{q^2} \exp(m_2 y q) - 8\beta_1^2 m_2^2 \frac{(-i)V}{q^2} \exp(m_2 y q) + \right. \\ \left. (1 - m_2^2)^3 \frac{\exp(-\beta_1 y V)}{q} - 4\beta_1 m_2 (m_2^2 - 1) \frac{(-i)\sqrt{q^2}}{q^2} \exp(-\beta_1 y V) \right) \quad (126)$$

Την ποσότητα $\sqrt{q^2}$ στην τελευταία σχέση την αντικαθιστούμε με την $\sqrt{q^2 - \tau^2}$ και την ορίζουμε έτσι ώστε $\sqrt{q^2 - \tau^2} = q$ όταν $\tau \rightarrow 0$. Επίσης ο ορισμός της $V(q) = \sqrt{\tau^2 - q^2}$ που έχει δοθεί στην παράγραφο 2.4.1 είναι συμβατός με την ισότητα $(-i)\sqrt{q^2 - \tau^2} = \sqrt{\tau^2 - q^2} = V(q)$ (ιδέ π.χ. **Noble 1958, Roos 1969**).

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω η (126) θα γίνει

$$u_x^*(q, y) = -\frac{P}{\mu R} \left(2\beta_1 m_2 (1 - m_2^2)^2 \frac{V}{q^2} \exp(m_2 y q) + 4\beta_1 m_2 (m_2^2 - 1) \frac{V}{q^2} \exp(-\beta_1 y V) \right. \\ \left. - (1 - m_2^2)^3 \frac{\exp(-\beta_1 y V)}{q} - 8\beta_1^2 m_2^2 \frac{\sqrt{q^2 - \tau^2}}{q^2} \exp(m_2 y q) \right)$$

Οπότε εφαρμόζοντας την αντιστροφή θα έχουμε για την $u_x(x, y)$ ότι

$$u_x(x, y) = -\frac{P}{\mu R} \left(2\beta_1 m_2 (1 - m_2^2)^2 \frac{1}{2\pi i} I_3 + 4\beta_1 m_2 (m_2^2 - 1) \frac{1}{2\pi i} I_4 \right. \\ \left. - (1 - m_2^2)^3 \frac{1}{2\pi i} I_5 - 8\beta_1^2 m_2^2 \frac{1}{2\pi i} I_6 \right) \quad (127)$$

Οπου

$$I_3 = \int_{Br} \frac{V}{q^2} \exp(m_2 y q) \exp(qx) dq, \quad I_4 = \int_{Br} \frac{V}{q^2} \exp(-\beta_1 y V) \exp(qx) dq$$

$$I_5 = \int_{Br} \frac{\exp(-\beta_1 y V)}{q} \exp(qx) dq, \quad I_6 = \int_{Br} \frac{\sqrt{q^2 - \tau^2}}{q^2} \exp(m_2 y q) \exp(qx) dq$$

Τότε χρησιμοποιώντας επικαμπύλιο ολοκλήρωση, το θεώρημα Cauchy, το λήμμα του Jordan (Σχήμα 2.5.1.1), για $x < 0$ ή για $x > 0$, και καθώς $\tau \rightarrow 0$ θα πάρουμε ότι

$$I_3 = -2i \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-(x + m_2 y))}{q} dq = 2i \log(|x + m_2 y|)$$

$$I_4 = -2i \int_0^{+\infty} \cos(\beta_1 y q) \frac{\exp(-qx)}{q} dq = 2i \log\left((x^2 + \beta_1^2 y^2)^{1/2}\right)$$

$$I_5 = -2i \int_0^{+\infty} \sin(\beta_1 y q) \frac{\exp(-qx)}{q} dq = -2i \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta_1 y}{x}\right)$$

$$I_6 = \int_{Br} \frac{\exp(m_2 y q) \exp(qx)}{q} dq = 2\pi i \mathbf{H}(x + m_2 y)$$

Συνεπώς από την (127) θα προκύψει η παρακάτω έκφραση για την $u_x(x, y)$

$$u_x(x, y) = -\frac{P}{\mu R} \left(\frac{2\beta_1 m_2}{\pi} (1-m_2^2)^2 \log(|x+m_2 y|) + \frac{4\beta_1 m_2 (m_2^2-1)}{\pi} \log\left((x^2 + \beta_1^2 y^2)^{1/2}\right) \right. \\ \left. - \frac{(1-m_2^2)^3}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\beta_1 y}{x}\right) \right) \text{sgn}(x) - 8\beta_1^2 m_2^2 \text{H}(x+m_2 y) \right) \quad (128)$$

Τέλος καθώς $y \rightarrow 0$ θα έχουμε ότι

$$u_x(x, y \rightarrow 0) = \frac{2P}{\pi\mu R} \beta_1 m_2 (1-m_2^4) \log(|x|) + \frac{P}{2\mu R} \left((1-m_2^2)^3 + 8\beta_1^2 m_2^2 \right) \text{sgn}(x) + \frac{4P}{\mu R} \beta_1^2 m_2^2$$

Όμως ο όρος $(4P\beta_1^2 m_2^2)/(\mu R)$ παριστά κίνηση στερεού σώματος (rigid-body motion) διότι είναι ανεξάρτητος των χωρικών μεταβλητών και μπορεί να αμεληθεί, άρα

$$u_x(x, y \rightarrow 0) = \frac{2P}{\pi\mu R} \beta_1 m_2 (1-m_2^4) \log(|x|) + \frac{P}{2\mu R} \left((1-m_2^2)^3 + 8\beta_1^2 m_2^2 \right) \text{sgn}(x) \quad (129)$$

(II) Με αντικατάσταση των (114) στην έκφραση της $u_y^*(q, y)$ θα πάρουμε

$$u_y^*(q, y) = \frac{P}{\mu R} \left(2\beta_1 (1-m_2^2)^2 \frac{V}{q^2} \exp(m_2 y q) - 8\beta_1^2 m_2 \frac{\sqrt{q^2 - \tau^2}}{q^2} \exp(m_2 y q) - \right. \\ \left. \beta_1 (1-m_2^2)^3 \frac{V}{q^2} \exp(-\beta_1 y q) - 4\beta_1^2 m_2 (m_2^2 - 1) \frac{\exp(-\beta_1 y q)}{q} \right)$$

Οπότε εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και σύμφωνα με τους ορισμούς των ολοκληρωμάτων I_1, I_2, I_3, I_4 και για $\tau \rightarrow 0$ έχουμε διαδοχικά για την $u_y(x, y)$ ότι:

$$u_y(x, y) = \frac{P}{\mu R} \left(2\beta_1(1-m_2^2)^2 \frac{1}{2\pi i} I_3 - \beta_1(1-m_2^2)^3 \frac{1}{2\pi i} I_4 - 4\beta_1^2 m_2(m_2^2-1) \frac{1}{2\pi i} I_5 - 8\beta_1^2 m_2 \frac{1}{2\pi i} I_6 \right)$$

ή

$$u_y(x, y) = \frac{P}{\mu R} \left(2\beta_1(1-m_2^2)^2 \frac{1}{2\pi i} (-2i) \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-(x+m_2 y))}{q} dq - \beta_1(1-m_2^2)^3 \frac{1}{2\pi i} (-2i) \int_0^{+\infty} \cos(\beta_1 y q) \frac{\exp(-qx)}{q} dq \right. \\ \left. - 4\beta_1^2 m_2(m_2^2-1) \frac{1}{2\pi i} (-2i) \int_0^{+\infty} \sin(\beta_1 y q) \frac{\exp(-qx)}{q} dq - 8\beta_1^2 m_2 \frac{1}{2\pi i} \int_{Br}^{+\infty} \frac{\exp(m_2 y q) \exp(qx)}{q} dq \right)$$

Συνεπώς θα καταλήξουμε στην έκφραση

$$u_y(x, y) = \frac{P}{\mu R} \left(\frac{2\beta_1(1-m_2^2)^2}{\pi} \log(|x+m_2 y|) - \frac{\beta_1(1-m_2^2)^3}{\pi} \log\left((x^2 + \beta_1^2 y^2)^{1/2}\right) \right. \\ \left. - \frac{4\beta_1^2 m_2(m_2^2-1)}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\beta_1 y}{x}\right) \right) \text{sgn}(x) - 8\beta_1^2 m_2 \text{H}(x+m_2 y) \right) \quad (130)$$

Τέλος καθώς $y \rightarrow 0$ και αμελώντας τους όρους που παριστάνουν κίνηση στερεού σώματος θα έχουμε στην επιφάνεια του ημι-χώρου ότι

$$u_y(x, y \rightarrow 0) = \frac{P}{\pi \mu R} \beta_1(1-m_2^2)(1-m_2^4) \log|x| - \frac{4P}{\mu R} \beta_1^2 m_2(1+m_2^2) \left(\frac{\text{sgn}(x)}{2} \right) \quad (131)$$

2.6 Αποτελέσματα και συζήτηση

Οι λύσεις (117), (120), (122), (123) που έχουμε βρει στην υποηχητική και υπερηχητική περιοχή συμπίπτουν με αυτές στην βιβλιογραφία (ιδέ π.χ **Fung 1965, Eringen and Suhubi 1975**), ενώ οι λύσεις (128), (130) στην παρηχητική περιοχή συμπίπτουν με αυτές των **Georgiadis and Barber (1993)**.

Αφού έχουμε λοιπόν υπολογίσει τις μετατοπίσεις σε κάθε μία από τις τρεις περιοχές ταχυτήτων, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μία φυσική ερμηνεία των λύσεων κυρίως για την περίπτωση της υπερηχητικής και της παρηχητικής περιοχής. Αν θεωρήσουμε τα δυναμικά των μετατοπίσεων $\varphi(x_1, x_2, t)$, $\psi(x_1, x_2, t)$ στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, τότε οι συνιστώσες της μετατόπισης μπορούν να γραφούν στην μορφή (ιδέ π.χ. **Fung 1965, Achenbach 1973, Eringen and Suhubi 1975**)

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (132)$$

$$u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (133)$$

όπου $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$ και $u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$.

Τότε οι εξισώσεις κίνησης (45) ικανοποιούνται αν οι φ , ψ ικανοποιούν τις παρακάτω κυματικές εξισώσεις

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (134)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (135)$$

Όπου v_1, v_2 οι ταχύτητες διάδοσης των **P** και **S** κυμάτων αντίστοιχα. Τότε με εφαρμογή του μετασχηματισμού Γαλιλαίου (53) στις (134), (135) θα καταλήξουμε στις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις.

$$(1 - M_1^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (136)$$

$$(1 - M_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (137)$$

όπου M_1, M_2 είναι οι αριθμοί Mach και $\varphi = \varphi(x, y), \psi = \psi(x, y)$.

Σύμφωνα με την ταξινόμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης (ιδέ π.χ. **Zauderer 2006**) και με χρήση των ορισμών

$$\beta_1^2 = 1 - M_1^2, \beta_2^2 = 1 - M_2^2, m_1^2 = M_1^2 - 1, m_2^2 = M_2^2 - 1 \quad (138)$$

θα έχουμε σε κάθε περιοχή ταχυτήτων και διαφορετικό τύπο εξισώσεων.

(I) Υποηχητική Περιοχή ($M_1 < M_2 < 1$)

$$\beta_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (139)$$

$$\beta_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (140)$$

(II) Υπερηχητική Περιοχή ($1 < M_1 < M_2$)

$$m_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (141)$$

$$m_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (142)$$

(III) Παρηχητική Περιοχή ($M_1 < 1 < M_2$)

$$\beta_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (143)$$

$$m_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (144)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (139), (140), (143) είναι ελλειπτικού τύπου ενώ οι εξισώσεις (141), (142), (144) είναι υπερβολικού τύπου. Διάδοση κυμάτων όμως θα έχουμε από τις υπερβολικού τύπου εξισώσεις, δηλαδή από τις δύο εξισώσεις στην υπερχητική περιοχή και από την μία εξίσωση στην παρηχητική περιοχή.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε για παράδειγμα τις λύσεις, (128), (130) στην παρηχητική περιοχή παρατηρούμε ότι εμφανίζονται συναρτήσεις με όρισμα $x + m_2 y$.

Όμως, $x + m_2 y = x_1 + m_2 x_2 - vt$ ή

$$\frac{x}{\sqrt{1+m_2^2}} + \frac{m_2 y}{\sqrt{1+m_2^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{1+m_2^2}} + \frac{m_2 x_2}{\sqrt{1+m_2^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

όπου V η ταχύτητα του φορτίου P .

Δηλαδή, έχουμε ένα επίπεδο κύμα με διεύθυνση

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+m_2^2}}, \frac{m_2}{\sqrt{1+m_2^2}} \right\}, \text{ το οποίο διαδίδεται με ταχύτητα } \frac{v}{\sqrt{1+m_2^2}} = v_2.$$

Επίσης, εκφράσεις της μορφής $H(x+m_2 y)$ ή $H(x_1+m_2 x_2 - vt)$ παριστάνουν ένα επίπεδο κρουστικό κύμα (plane shock wave) ή κύμα Mach $x_1+m_2 x_2 - vt = 0$. Συνεπώς, στην περίπτωση της υπερηχητικής περιοχής παρατηρούμε ότι οι εκφράσεις των μετατοπίσεων (122), (123) χαρακτηρίζονται από δύο επίπεδα κύματα Mach με ταχύτητες διάδοσης v_1, v_2 αντίστοιχα.

Όσον αφορά την υποηχητική περιοχή, είδαμε ότι οι μετατοπίσεις δίνονται από τις σχέσεις (117), (120)

$$u_x(x, y) = \frac{P}{\pi \mu R} \left((1+\beta_2^2) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{\beta_1 y}{x} \right) \right) \text{sgn}(x) - 2\beta_1 \beta_2 \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{\beta_2 y}{x} \right) \right) \text{sgn}(x) \right) \quad (145)$$

$$u_y(x, y) = -\frac{P}{\pi \mu R} \beta_1 \left((1+\beta_2^2) \log \left((x^2 + \beta_1^2 y^2)^{1/2} \right) - 2 \log \left((x^2 + \beta_2^2 y^2)^{1/2} \right) \right) \quad (146)$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής των $u_x(x, y), u_y(x, y)$ μηδενίζεται όταν $R=0$ ή όταν

$$(2 - M_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2 = 0 \quad (147)$$

Εισάγοντας τους ορισμούς (138), (61) των β_1 , β_2 και των M_1 , M_2 στην (147) θα έχουμε

$$v^6 - 8v_2^2v^4 + \left(24 - 16\frac{v_2^2}{v_1^2}\right)v_2^4v^2 + 16\left(\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1\right)v_2^6 = 0 \quad (148)$$

Δηλαδή, η ταχύτητα v του φορτίου P ικανοποιεί την (148), η οποία είναι γνωστή σαν σχέση ή εξίσωση Rayleigh (ιδέ π.χ. **Fung 1965**, **Achenbach 1973**, **Eringen and Suhubi 1975**, **Τσελέντης 1997**). Συνεπώς, οι μετατοπίσεις θα απειρίζονται όταν η ταχύτητα του φορτίου θα είναι ίση με την ταχύτητα των κυμάτων Rayleigh.

Τέλος, για την υποηχητική περιοχή, στην επιφάνεια του ημι-χώρου οι μετατοπίσεις δίνονται από τις σχέσεις (118), (121)

$$u_x(x, y \rightarrow 0) = \frac{P}{2\mu R} (1 + \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2) \operatorname{sgn}(x) \quad (149)$$

$$u_y(x, y \rightarrow 0) = \frac{P}{\pi\mu R} \beta_1 (1 - \beta_2^2) \log|x| \quad (150)$$

Για $v \rightarrow 0$, βλέπουμε ότι οι $u_x(x, y \rightarrow 0)$, $u_y(x, y \rightarrow 0)$ γίνονται απροσδιόριστες. Αν όμως αναπτύξουμε σε σειρά γύρω από το $v = 0$ τις ποσότητες

$$1 + \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2 = 2 - \frac{v^2}{v_2^2} - 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_2^2}}$$

$$R = (1 + \beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2 = \left(2 - \frac{v^2}{v_2^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_2^2}}$$

και κρατώντας μέχρι και τους όρους δεύτερης τάξης θα έχουμε

$$1 + \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2 = M_2^2 \frac{v_2^2}{v_1^2} = M_2^2 \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (151)$$

$$R = (1 + \beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2 = 2(M_1^2 - M_2^2) = -\frac{M_2^2}{1-\nu} \quad (152)$$

Όπου $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ ο λόγος Poisson.

Εισάγοντας τις (151), (152) στις (149), (150) και με χρήση των

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ και $\beta_1 = \sqrt{1 - M_1^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}}$, με E το μέτρο ελαστικότητας, θα έχουμε ότι

για $\nu \rightarrow 0$, $\beta_1 \rightarrow 1$ και

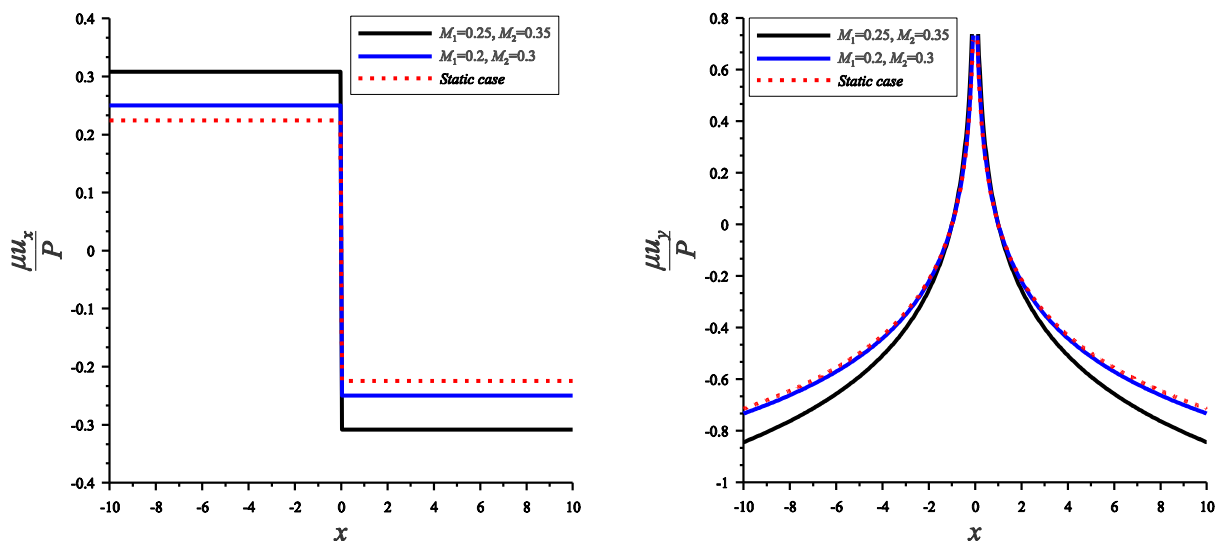
$$u_x(x, y \rightarrow 0) = -\frac{P(1+\nu)(1-2\nu)}{2E} \operatorname{sgn}(x) \quad (153)$$

$$u_y(x, y \rightarrow 0) = -\frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E} \log|x| \quad (154)$$

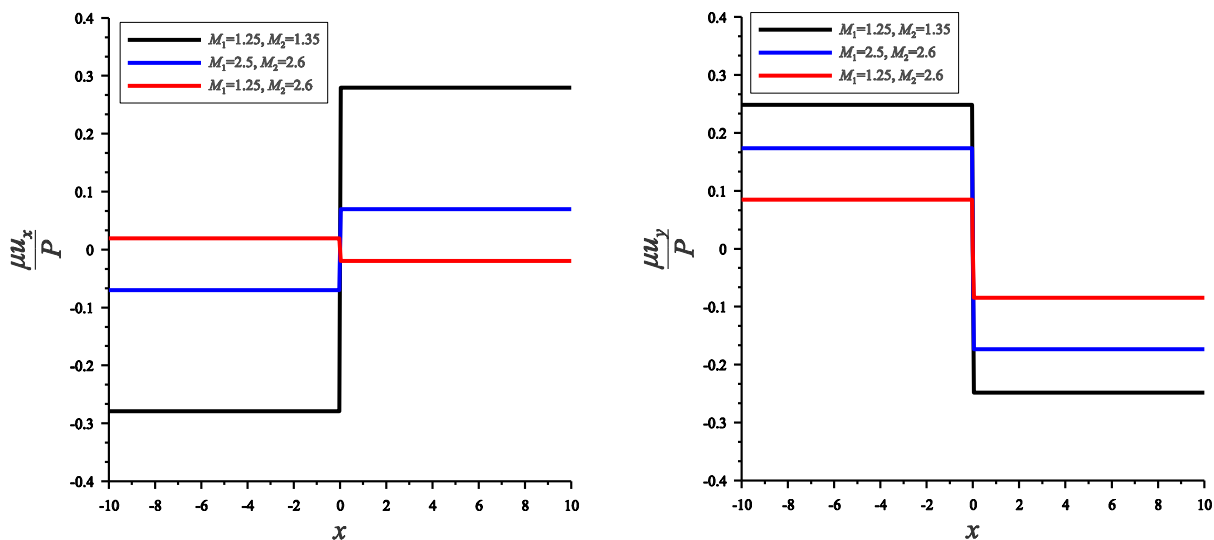
Συνεπώς, καθώς η ταχύτητα του φορτίου τείνει στο μηδέν καταλήγουμε στις εκφράσεις (153), (154) οι οποίες όμως αποτελούν την λύση του στατικού προβλήματος ενός κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ημι-χώρου. Δηλαδή, έχουμε τη λύση του προβλήματος Flamant (ιδέ π.χ. **Jonson 1985, Barber 2002, Γεωργιάδης 2003**)

Μερικά ενδεικτικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα. Παρατηρούμε ότι στην υποηχητική περιοχή για την επιλογή την επιλογή των αριθμών Mach $M_1 = 0.2, M_2 = 0.3$ η λύση είναι αρκετά κοντά με την λύση του στατικού προβλήματος. Επίσης στην υπερηχητική περιοχή παρατηρούμε ότι η $u_x(x, y \rightarrow 0)$ αλλάζει πρόσημο για $M_1 = 1.25, M_2 = 2.6$, ενώ η $u_y(x, y \rightarrow 0)$ το διατηρεί και για τις τρεις επιλογές των M_1, M_2 . Τέλος, στην παρηχητική περιοχή όταν το M_2 είναι αρκετά μεγάλο ($M_2 = 2.6$) και το M_1 είναι είτε πολύ μικρό ($M_1 = 0.05$) είτε κοντά στη μονάδα ($M_1 = 0.95$) η $u_x(x, y \rightarrow 0)$ αλλάζει πρόσημο, ενώ η $u_y(x, y \rightarrow 0)$ και σε αυτή την περίπτωση το διατηρεί και για τους τέσσερις συνδιασμούς των M_1, M_2 .

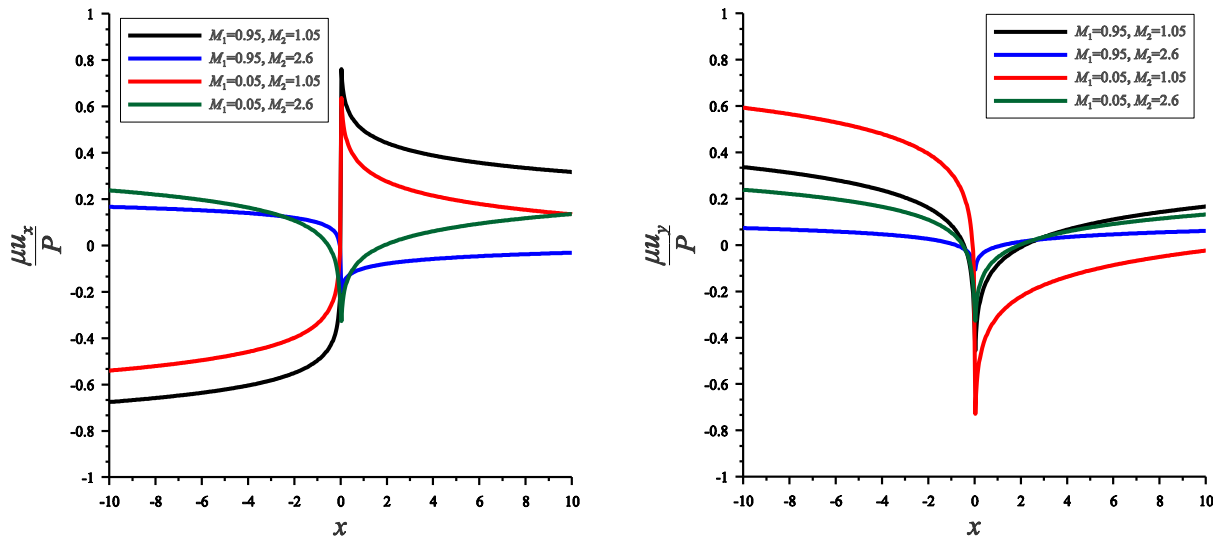
2.7 Ενδεικτικά Αποτελέσματα



Σχήμα 7: Επιφανειακές μετατοπίσεις στην **υποηχητική** περιοχή, για αριθμούς Mach (α) $M_1 = 0.25, M_2 = 0.35$, (β) για $M_1 = 0.2, M_2 = 0.3$. Επίσης παρουσιάζεται η στατική λύση σύμφωνα με τον Flamant.



Σχήμα 8: Επιφανειακές μετατοπίσεις στην **υπερηχητική** περιοχή, για αριθμούς Mach (α) $M_1 = 1.25, M_2 = 1.35$, (β) για $M_1 = 2.5, M_2 = 2.6$ και (γ) για $M_1 = 1.25, M_2 = 2.6$.



Σχήμα 9: Επιφανειακές μετατοπίσεις στην *παρηχητική* περιοχή, για αριθμούς Mach (α) $M_1 = 0.95, M_2 = 1.05$, (β) για $M_1 = 0.95, M_2 = 2.6$, (γ) για $M_1 = 0.05, M_2 = 1.05$ και (δ) για $M_1 = 0.05, M_2 = 2.6$

Σύνοψη - Ζητήματα για Μελλοντική Έρευνα

Στην παρούσα εργασία αφού διατυπώθηκαν οι βασικές αρχές της Δυναμικής Θεωρίας Ελαστικότητας στη συνέχεια μελετήθηκε το πρόβλημα σταθερής κατάστασης ενός συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ημι-χώρου υπό την υπόθεση της επίπεδης παραμόρφωσης ή πρόβλημα Cole and Huth όπως είναι γνωστό στη βιβλιογραφία. Με χρήση του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Laplace υπολογίστηκαν αναλυτικά οι μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του ημι-χώρου για υποηχητικές, υπερηχητικές και παρηχητικές ταχύτητες του φορτίου και επαληθεύτηκαν με αυτές της υπάρχουσας βιβλιογραφίας. Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις Green για την επίλυση δυναμικών προβλημάτων επαφής. Τέλος, όσον αφορά το μέλλον ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του προβλήματος σε πιο σύνθετες θεωρίες Ελαστικότητας όπως η Θεωρία Τάσεων Ζεύγους (ιδέ π.χ. **Mindlin and Tiersten 1962**) καθώς αναμένεται να είναι πιο ρεαλιστικά από αυτά της κλασικής θεωρίας.

Βιβλιογραφία

- Ablowitz, M.J., Fokas, A.S., 2003. *Complex Variables: Introduction and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Achenbach, J.D., 1973. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North Holland.
- Aki, K., Richards, P.G., 2002. *Quantitative Seismology*. University Science Books, California.
- Antman, S.S., 1983. The influence of elasticity on analysis: Modern developments. *Bulletin of the American Mathematical Society* 9, 267-291.
- Barber, J.R., 1996. Surface displacements due to a steadily moving point force. *ASME J. Appl. Mech.* 63, 245-251.
- Barber, J.R., 2002. *Elasticity*. Springer
- Bracewell, R., 1965. *The Fourier Transform and Its Application*. McGraw-Hill, New York.
- Brock, L.M., Georgiadis, H.G., 1997. Steady-state motion of a line mechanical / heat source over a half-space: a thermoelastodynamic solution. *ASME J. Appl. Mech.* 64, 562-567.
- Carrier, G.A., Krook, M., Pearson, C.E., 1966. *Functions of a Complex Variable*. McGraw-Hill, New York.
- Cole, J., Huth, J., 1958. Stresses produced in a half-plane by moving loads. *ASME J. Appl. Mech.* 25, 433-436.
- Eringen, A.C., Suhubi, E.S., 1975. *Elastodynamics Vol. 1, 2*. Academic Press, New York.
- Felsen, L.B., Marcuvitz, N., 1994. *Radiation and Scattering of Waves*. Wiley-IEEE Press, New York.
- Fung, Y.C., 1965. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Georgiadis, H.G., Barber, J.R., 1993. Steady state transonic motion of a line load over an elastic half-space: The corrected Cole-Huth solution. *ASME J. Appl. Mech.* 60, 772-774.
- Georgiadis, H.G., Lykotrafitis, G., 2001. A method based on the Radon transform for three-dimensional elastodynamic problems of moving loads. *J. Elasticity* 65, 87-129.

Graff, K.F., 1991. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Publications Inc., Revised Edition, New York.

Johnson, K., 1985. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Itou, S., 2016. Stresses produced in an orthotropic half-plane under a moving line load. *International Journal of Solids and Structures* 100-101, 411-416.

Lansing, D.L., 1966. The displacement in an elastic half-space due to a moving concentrated normal load. NASA T.R. R-238.

Mindlin R.D., Tiersten H.F., 1962. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11, 415–448.

Noble, B., 1958. *Methods Based on the Weiner-Hopf Technique*. Pergamon Press, New York.

Roos, B.W., 1969. *Analytic Functions and Distributions in Physics and Engineering*. Wiley, New York.

Sadd, M.H., 2005. *Elasticity. Theory, Applications and Numerics*. Butterworth-Heinemann.

Scot, S.H., 1992. Eighty years of Sommerfeld's radiation condition. *Historia Mathematica* 19, 385-401.

Sneddon, I.N., 1952. Stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid. *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo* Vol. 2, January-April, 57-62.

Sommerfeld, A., 1949. *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press Inc., New York.

Truesdell, C., 1983. The influence of elasticity on analysis: The Classic Heritage. *Bulletin of the American Mathematical Society* 9, 293-310.

van der Pol, B., Bremmer, H., 1950. *Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Vladimirov, V.S., 1971. *Equations of Mathematical Physics*. Marcel Dekker, Inc., New York.

Watanabe, K., 2015. *Integral Transform Techniques for Green's Function*. Springer, Second Edition.

Zauderer, E., 2006. Partial Differential Equations of Applied Mathematics. Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey.

Γδούτος, Ε.Ε., 1988. Θεωρία Ελαστικότητας. Εκδοτικός Οίκος Αδερφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη.

Γεωργιάδης, Χ.Γ., 2003. Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Τραχανάς, Σ.Λ., 1995. Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Τσελέντης, Α., 1997. Σύγχρονη Σεισμολογία, Τόμοι Α, Β. Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα.