

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα: Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση του Loewner

Διπλωματική εργασία

Σπυρόπουλος Χρήστος

Επιβλέπων καθηγητής: Βασίλης Παπανικολάου

Αθήνα, Οκτώβριος 2017

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα: Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



Στοχαστική Διαφορική εξίσωση του Loewner

Διπλωματική εργασία

Σπυρόπουλος Χρήστος

Τριμελής Επιτροπή

Βασίλης Παπανικολάου(Επιβλέπων)

Μιχάλης Λουλάκης

Δημήτρης Φουσκάκης

Αθήνα, Οκτώβριος 2017

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, κ. Βασίλη Παπανικολάου, Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την βοήθεια και την καθοδήγηση που μου προσέφερε καθόλη τη διάρκεια της εργασίας. Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την βοήθεια που μου παρείχαν όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τη Stochastic Loewner evolution, η οποία βρίσκει εφαρμογή στα lattice model (πλεγματικά μοντέλα). Ουσιαστικά περιγράφει την κίνηση των μορίων σε ένα πλαστικό όταν το κατασκευάζουμε, αλλά για να την αναπτύξουμε και να την αναλύσουμε πρέπει πρωτίστως να αναφέρουμε μερικούς απαραίτητους ορισμούς αλλά και να κάνουμε μια εκτενή αναφορά στην Κίνηση Brown.

Αρχικά, θα ξεκινήσουμε με την εισαγωγή, όπου θα αναφερθούμε σε μαθηματικά προβλήματα για κρίσιμα φαινόμενα και θα μιλήσουμε για τον αυτοαποφεύγων τυχαίο περίπατο και θα αναφέρουμε μερικά γενικά χαρακτηριστικά που εμφανίζονται στα περισσότερα φυσικά φαινόμενα. Ακόμα θα σημειώσουμε μερικούς πολύ χρήσιμους ορισμούς για τη συνέχεια.

Στο πρώτο κεφάλαιο, θα κάνουμε μια εισαγωγή στην Κίνηση Brown, θα αναφέρουμε μερικές βασικές της ιδιότητες, όπου κάποιες από αυτές θα τις αποδείξουμε κιόλας. Στην συνέχεια, θα αναφερθούμε στην πολυδιάστατη Κίνηση Brown και στις ιδιότητές της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα κάνουμε μια επανάληψη πάνω στην μιγαδική ανάλυση ώστε να θυμηθούμε κάποιες έννοιες που θα μας φανούν πολύ χρήσιμες στην συνέχεια. Μέσα στο δεύτερο κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις έννοιες αλλά και πολλές ιδιότητες της Κίνησης Brown για να μιλήσουμε για hulls (καλύμματα), Brownian excursion και τα chordal restriction μέτρα που είναι απαραίτητα για τον ορισμό της Stochastic Loewner evolution.

Στο τρίτο κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με το κύριο κομμάτι της διπλωματικής, την Stochastic Loewner evolution, τον ορισμό της και κάποιες ιδιοτητές της και για τις δύο περιπτώσεις, την chordal Stochastic Loewner evolution και την radial Stochastic Loewner evolution.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με εφαρμογές της Stochastic Loewner evolution και θα δούμε πόσο χρήσιμη μπορεί να φανεί σε κάποια προβλήματα που αλλιώς δεν θα μπορούσαμε να τα προσεγγίσουμε.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	6
Κεφάλαιο 1 Κίνηση Brown	
1.1 Στοχαστική ανέλιξη της Κίνησης Brown	12
1.2 Ιδιότητες της Κίνησης Brown	19
1.3 Κίνηση Brown σε πολλές διαστάσεις	23
Κεφάλαιο 2 Κίνηση Brown και restriction measures	
2.1 Υπενθύμιση από μιγαδική ανάλυση	26
2.2 Conformal invariance (σύμμορφη αναλλοίωτη) της Κίνησης Brown	26
2.3 Hulls (Καλύμματα)	28
2.4 Brownian excursions	29
2.5 Restriction property	31
2.6 Chordal restriction measures	31
Κεφάλαιο 3 Stochastic Loewner evolution (SLE)	
3.1 Motivation	35
3.2 Loewner differential equation	36
3.3 Stochastic Loewner evolution (SLE)	40
Κεφάλαιο 4 Εφαρμογές στα μονοπάτια της Κίνησης Brown	
4.1 Hausdorff dimension	45
4.2 Cut/frontier/pioneer σημεία για μονοπάτια της Κίνησης Brown	46
4.3 A half plane exponent	47
4.4 Crossing exponent για την chordal SLE_κ	48
4.5 Χρησιμοποιούμε το $\nu(\beta)$ για να υπολογίσουμε το $\tilde{\xi}(1, \lambda)$	51
Βιβλιογραφία	53

Εισαγωγή

Μαθηματικά προβλήματα για κρίσιμα φαινόμενα

Αρχικά, θα ήταν καλό να αναφέρουμε τι εννοούμε με τον όρο κρίσιμα φαινόμενα. Στην φυσική με τον όρο κρίσιμα φαινόμενα αναφερόμαστε σε φαινόμενα τα οποία ασχολούνται με τις φυσικές αρχές που διέπουν ένα κρίσιμο σημείο. Στα κρίσιμα φαινόμενα υπάρχουν συσχετίσεις ανάμεσα σε διαφορετικές μεταβλητές που περιγράφονται με την χρήση power-law συναρτήσεων και με πολλούς δείκτες όπως οι critical exponents, universality, fractal behavior, ergodicity breaking. Γενικά σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με το γενικό πρόβλημα των critical exponents και του scaling limit (ορίο της απόστασης) για lattice models (πλεγματικά μοντέλα) στο χώρο της στατιστικής φυσικής. Η αλήθεια είναι ότι αυτό το πρόβλημα εμφανίζεται σε μεγάλο αριθμό διαφορετικών μοντέλων όπως self avoiding walk (πολυμερή), percolation, loop erased random walk (uniform spanning trees, domino tilings), μοντέλο Ising, μοντέλο Potts, non intersecting simple random walks.

Ένα πολύ ενδιαφέρον παράδειγμα λοιπόν, είναι ο αυτοαποφεύγων τυχαίος περίπατος self-avoiding walk (SAW). Ο αυτοαποφεύγων τυχαίος περιπατητής (self-avoiding random walker – SAW) είναι ένα μοντέλο που προτάθηκε για πρώτη φορά και θα περιέγραφε γραμμικά πολυμερή σε καλό διάλυμα. Σε μια πρώτη προσέγγιση είχε φανεί σαν ένα χοντροκομμένο μοντέλο. Τα πραγματικά πολυμερή υπάρχουν στο συνεχή χώρο, έχουν τετραεδρικούς δεσμούς και σχετικά πολύπλοκη αλληλεπίδραση μεταξύ των μονομερών τους. Από την άλλη μεριά ο αυτοαποφεύγων τυχαίος περιπατητής “υπάρχει” πάνω σε διακριτό πλέγμα χωρίς τετραεδρικές γωνίες, έχει ενέργεια που είναι ανεξάρτητη από τη στροφή των δεσμών και σταθερό απωστικό δυναμικό μεταξύ των μονομερών. Ελάχιστες είναι πλέον οι αμφιβολίες για το ότι είναι όχι απλά ένα πολύ καλό, αλλά ένα σχεδόν τέλειο μοντέλο για κάποιες από τις ιδιότητες ενός γραμμικού πολυμερούς σε καλό διάλυμα. Αυτό το φαινομενικό “θαύμα” προκύπτει από την παγκοσμιότητα (universality) που παίζει κεντρικό ρόλο στην σύγχρονη θεωρία των κρίσιμων φαινομένων. Εν συντομία, βασικά συστήματα στατιστικής μηχανικής μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε διάφορες κλάσεις παγκοσμιότητας (universality classes) με βάση κάποιες γενικές ιδιότητες όπως τις χωρικές διαστάσεις, τις συμμετρίες και άλλα. Στην περιοχή γύρω από το κρίσιμο σημείο, και μόνο εκεί, η ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος είναι ακριβώς η ίδια για όλα τα συστήματα της ίδιας κλάσης παγκοσμιότητας! Επομένως, το καίριο ζήτημα πλέον είναι να προσδιορίσουμε ποιες ποσότητες είναι παγκόσμιες και ποιες όχι στο φυσικό σύστημα που μελετάμε. Για τον υπολογισμό των μη παγκόσμιων ποσοτήτων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις κλασικές μεθόδους της θεωρητικής φυσικής: Θεωρούμε ένα μοντέλο κάπως ρεαλιστικό ή και ημιεμπειρικό, το οποίο

θα υφίσταται σταδιακές προσεγγίσεις. Επομένως, τα αποτελέσματά του θα περιμένουμε να είναι μία απλή και μόνο προσέγγιση της πραγματικότητας. Το ίδιο βεβαίως θα περιμένουμε ακόμη και αν το μαθηματικό μοντέλο λύνεται αναλυτικά, αφού το ίδιο από μόνο του είναι μια προσέγγιση της πραγματικότητας! Από την άλλη μεριά, για τον υπολογισμό των παγκόσμιων ποσοτήτων ακολουθούμε μία αρκετά διαφορετική διαδικασία. Μπορούμε να επιλέξουμε ένα μαθηματικό μοντέλο (όσο πιο απλό τόσο το καλύτερο) που ανήκει στην ίδια κλάση με το υπό μελέτη σύστημα. Λύνοντάς το, θα έχουμε υπολογίσει ακριβώς τις τιμές των παγκόσμιων ποσοτήτων! Φυσικά, κάποια μαθηματικά μοντέλα μπορεί να μην λύνονται αναλυτικά, επομένως επιπλέον προσεγγίσεις ή αριθμητικές προσομοιώσεις ίσως είναι απαραίτητες αλλά οι τελευταίες θα είναι η μόνη πηγή σφαλμάτων στα αποτελέσματά μας. Σε αυτή τη περίπτωση είναι αναγκαίο να επιβεβαιώσουμε ότι το παραλλαγμένο μοντέλο, με τις επιπλέον προσεγγίσεις, ανήκει επίσης στην ίδια κλάση παγκοσμιότητας. Τότε μπορούμε να γνωρίζουμε με σιγουριά ότι οι προσεγγίσεις δεν θα έχουν καμία επίδραση στις παγκόσμιες ποσότητες. Επικεντρώνοντας λοιπόν το ενδιαφέρον μας στον αυτοαποφεύγοντα τυχαίο περιπατητή (SAW) διαπιστώνουμε ότι η συμπεριφορά ενός τέτοιου περίπατου στο όριο που το μήκος του τείνει στο άπειρο περιγράφεται με κάποια παγκόσμια μεγέθη. Έχει βρεθεί εμπειρικά ότι το τετράγωνο της μέσης απόστασης από άκρη σε άκρη ενός περίπατου που αποτελείται από N βήματα έχει την παρακάτω ασυμπτωτική συμπεριφορά:

$$\langle R^2 \rangle = AN^{2\nu} [1 + O(N^{-4})] \quad N \rightarrow \infty$$

όπου ο κρίσιμος εκθέτης ν είναι παγκόσμιος για όλα τα πολυμερή, διαλύματα για οποιαδήποτε θερμοκρασία και η τιμή του εκτιμάται ότι είναι $\frac{3}{4}$. Αντίθετα, ο κρίσιμος συντελεστής πλάτους

A , δεν είναι παγκόσμιος αλλά εξαρτάται από το πολυμερές. Ένας αυτοαποφεύγων τυχαίος περίπατος (SAW) με μήκος n που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων σε ένα σύστημα (integer lattice) \mathbb{Z}^d είναι μια συνεχή σειρά που αποτελείται από σημεία $\omega = [\omega_0=0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ στο

\mathbb{Z}^d με $|\omega_j - \omega_{(j-1)}| = 1, j=1, \dots, n$ και $\omega_j \neq \omega_k, 0 \leq j < k \leq n$. Ο SAW είναι ένα κατεξοχήν απλό πλεγματοειδές μοντέλο για πολυμερή για να το εξηγήσεις, όχι όμως τόσο για να το αναλύσεις. Ας πούμε ότι C_n είναι ο αριθμός των SAWs που έχουν μήκος n . Είναι εύκολο κάποιος να δει ότι

$C_{(n+m)} \leq C_n C_m$, γιατί το αριστερό μέλος θα περιλαμβάνει μόνο τα πιθανά μονοπάτια που μετά τα πρώτα n βήματα δεν περνάνε από τα σημεία που έχουν περάσει μέχρι το n , ενώ το δεξί μέλος μετά τα n πρώτα βήματα κάνει άλλο SAW, συνεπώς έχεις το δικαίωμα να περάσεις από όπου θες για αυτό προκύπτει εξάλλου και η ανισότητα, ή με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι η $\log(C_n)$ είναι υποπροσθετική (subadditive) συνάρτηση. Επίσης

$C_n \geq d^n$ επειδή ο τυχαίος περίπατος για την κάθε του συντεταγμένη μπορεί να πάρει μόνο $+1$ σε κάθε βήμα και $C_n \leq (2d)(2d-1)^{n-1}$ επειδή το να περνάει από μέρη που έχει ξαναπεράσει είναι απαγορευμένο, επομένως $d^n \leq C_n \leq (2d)(2d-1)^{n-1}$. Ακόμα από την ιδιότητα (subadditive) της συνάρτησης $\log(C_n)$ προκύπτει ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log(C_n) = \inf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log(C_n)$$

Υπάρχει ένας αριθμός $\beta_d \in [d, 2d-1]$ τέτοιος ώστε $C_n^{1/n} \rightarrow \beta_d$. Αυτός ο αριθμός ονομάζεται connective constant. Υπάρχουν β_d διαφορετικοί τρόποι για να συνεχίσεις έναν n-step SAW σε έναν (n+1)-SAW. Ακόμα η γεννήτρια συνάρτηση για το SAW είναι:

$$G_d(s) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^n.$$

Η κρίσιμη τιμή για την γεννήτρια συνάρτηση είναι $s=1/\beta_d$ αυτή είναι η τιμή στην οποία η συνάρτηση γίνεται για πρώτη φορά άπειρη. Για $s < 1/\beta_d$ μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο πιθανότητας του SAWs, m_{SAWs}^s , όπου αυτό είναι το μέτρο $G(s)_d^{-1} s^n$ και εξαρτάται από το μήκος n του κάθε SAW. Κάποιος θα μπορούσε να περιγράψει το criticality problem για το SAW σαν το πρόβλημα ανάλυσης του μέτρου πιθανότητας m_{SAWs}^s , όσο $s \uparrow 1/\beta_d$.

Τα γενικά χαρακτηριστικά που εμφανίζονται σε όλα τα κρίσιμα φαινόμενα που μελετούνται είναι τα ακόλουθα:

- Η συμπεριφορά του μοντέλου στην κρίσιμη περιοχή εξαρτάται κυρίως από την διάσταση d του κάθε μοντέλου.
- Όμως η συμπεριφορά του στην κρίσιμη περιοχή δεν εξαρτάται κυρίως από την επιλογή του υλικού ή τις μικροσκοπικές λεπτομέρειες.
- Αυτή η υπόθεση αρκετές φορές θεωρείται ως δεδομένη.
- Για παράδειγμα, ένας μη γειτονικός SAW στο integer lattice \mathbb{Z}^d περιμένουμε να έχει την ίδια ποιοτική συμπεριφορά με ένα γειτονικό SAW στο \mathbb{Z}^d (με προϋπόθεση ο τυχαίος περίπατος να είναι διάστασης d).
- Υπάρχει μια κρίσιμη διάσταση d_c όπου πάνω από αυτή τη διάσταση η critical behavior είναι mean-field και μας είναι εύκολο να την περιγράψουμε (τον όρο mean-field τον χρησιμοποιούμε συνήθως όταν θέλουμε να εξετάσουμε ένα δύσκολο πρόβλημα και αντί για αυτό εξετάζουμε ένα άλλο που είναι πολύ πιο εύκολο αλλά έχει περίπου παρόμοιες ιδιότητες).
- Με τον όρο mean-field εννοούμε διαφορετικά πράγματα για διαφορετικά μοντέλα. Στην περίπτωση των τυχαίων περιπατών με interactions or potentials (όπως στον SAWs), mean-field είναι ο ίδιος περίπατος χωρίς interacting walks, ουσιαστικά η mean-field theory για SAWs είναι ένας απλός τυχαίος περίπατος.
- Ενώ η υπόθεση που έχουμε κάνει πως είναι εύκολο να περιγράψουμε την συμπεριφορά του μοντέλου σε μεγάλες διαστάσεις είναι σωστή, δεν είναι τόσο εύκολο να αποδείξουμε ότι υπάρχει αυτή η συμπεριφορά.
- Για το SAWs και για τα περισσότερα μοντέλα η κρίσιμη διάσταση είναι για $d_c=4$. Για percolation το $d_c=6$.
- Τα μονοπάτια του απλού τυχαίου περιπάτου έχουν μορφοκλασματική διάσταση(fractal dimension) 2. Αυτό συμβαίνει επειδή για n βήματα έχουν διανύσει $n^{1/2}$ από την αρχή του περιπάτου. Αυτό μπορούμε να το παρατηρήσουμε και από το ότι ο αριθμός των

σημείων σε ένα μονοπάτι ενός δίσκου με ακτίνα R , είναι R^2 . Δύο δυσδιάστατα επίπεδα φαίνεται να τέμνονται σε διάσταση μικρότερη από τέσσερα αλλά αντιθέτως φαίνεται ότι δεν τέμνονται σε διάσταση μεγαλύτερη του τέσσερα. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος ώστε το $d_c=4$ είναι η κρίσιμη διάσταση για μοντέλα όπως το SAW όπου για τέτοιου είδους μοντέλα, η τομή των μονοπατιών τους είναι πολύ σημαντική.

- Στην κρίσιμη διάσταση d_c συναντούμε μια mean-field συμπεριφορά με λογαριθμικές διορθώσεις.
- Για τον SAW για $d=4$, υποθέτουμε ότι $\langle |\omega(n)|^2 \rangle_n \sim cn (\log n)^{1/4}$
- Κάτω από την κρίσιμη διάσταση για το κάθε μοντέλο, το scaling limit (όριο της απόστασης) και οι critical exponents δεν συμπεριφέρονται σύμφωνα με την mean-field συμπεριφορά. Ακόμα πιστεύουμε ότι όταν ένα όριο υπάρχει τότε η μεταβλητή παραμένει αναλλοίωτη και μάλιστα αναλλοίωτη και μετά από περιστροφές.
- Για το SAW, υποθέτουμε ότι ο exponent $\nu = \frac{3}{4}$ για $d=2$ και $\nu=0.588$ για $d=3$
- Για $d=2$ όσο το όριο είναι κλιμακωτό και αναλλοίωτο κάτω από περιστροφές τότε είναι και conformally invariant (κανονικά αναλλοίωτο). Επίσης καλό θα ήταν να αναφέρουμε ότι οι εκθέτες περιμένουμε να είναι πραγματικοί αριθμοί.
- Οι θεωρητικοί φυσικοί χρησιμοποιούν μεθόδους όπως το conformal field theory για να δώσουν ακριβείς προβλέψεις για τους exponents. Επειδή οι προβλέψεις τους είναι πολύ σταθερές σύμφωνα με αριθμητικές προσομοιώσεις, συμπεραίνουμε γενικά ότι είναι σωστές.
- Η ύπαρξη ενός conformally invariant (κανονικά αναλλοίωτου) ορίου δεν έχει αποδειχθεί για τον SAW. Όμως υπό την υπόθεση ότι υπάρχει ένα τέτοιο όριο η critical behavior μπορεί να βρεθεί.
- Σίγουρα μπορούμε να πούμε ότι μεταξύ των 2 και d_c διαστάσεων, δεν υπάρχει λόγος να πιστεύουμε ότι οι exponents είναι πραγματικοί αριθμοί ή ότι μπορούν να υπολογιστούν.
- Αυτές οι διαστάσεις είναι οι πιο δύσκολες για την ανάλυση και παραμένουν ανοιχτά προβλήματα ακόμη.
- Γενικότερα είναι πολύ δύσκολο να δείξεις ότι ο exponent (εκθέτης) υπάρχει. Στην περίπτωση του απλού τυχαίου περίπατου ο intersection exponent μπορεί να δειχθεί ότι είναι ο ίδιος όπως ο intersection exponent της κίνησης Brown και μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει για $d=3$. Όμως δεν μπορούμε να βρούμε ακριβώς την τιμή του.

Εμείς σε αυτή την διπλωματική θα ασχοληθούμε κυρίως με την περίπτωση $d=2$. Οι μαθηματικοί έχουν αρχίσει να καταλαβαίνουν αυστηρά το scaling limit (όριο της απόστασης) για δύο δυσδιάστατα συστήματα. Για τα περισσότερα από αυτά τα μοντέλα η στρατηγική που ακολουθείται είναι η παρακάτω:

- Κατασκευάζουμε πιθανά συνεχή όρια για αυτά τα μοντέλα. Και μετά προσπαθούμε να δείξουμε ότι υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός από αυτά τα όρια που είναι κανονικά

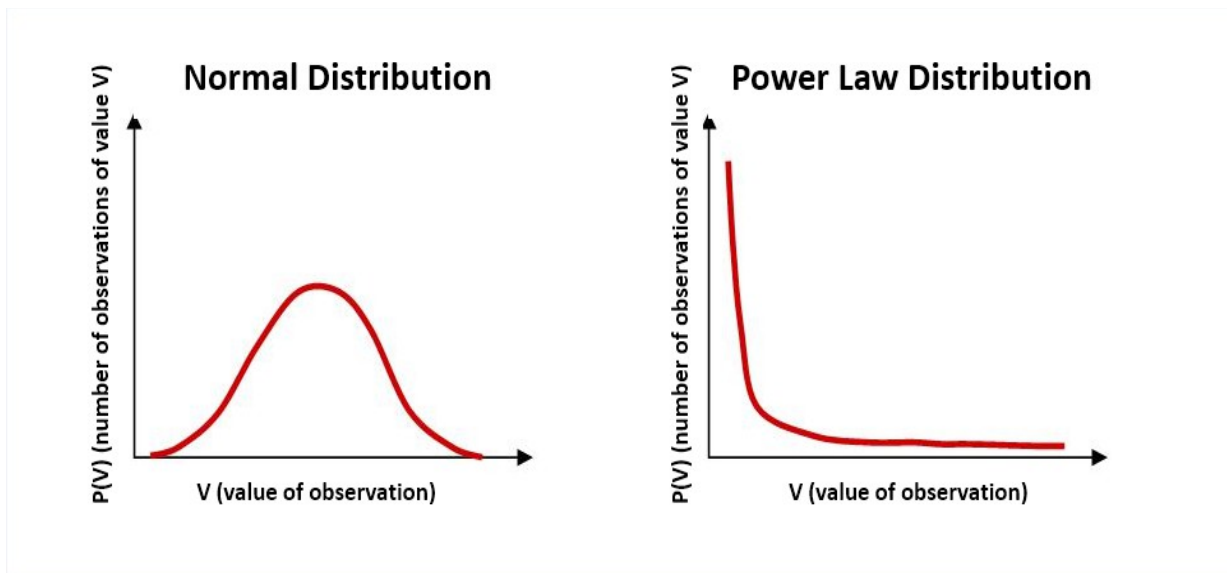
αναλλοίωτα.

- Μετά αποδεικνύουμε ότι τα lattice model ικανοποιούν αυτά τα συνεχή όρια.

Θα πρέπει να σκεφτούμε ότι το πρώτο στάδιο θα είναι το ίδιο για όλα τα μοντέλα. Ένα παράδειγμα που ήδη ξέρουμε είναι ότι το scaling limit ενός απλού τυχαίου περιπάτου, είναι Κίνηση Brown. Αυτό που θα εξετάσουμε εμείς σαν μια ενδιαφέρουσα νέα ιδέα είναι τα restriction measures και η Stochastic Loewner evolution(SLE). Στην συνέχεια, θα συζητήσουμε αυστηρά αποτελέσματα για lattice models που ικανοποιούν τα συνεχή όρια, αναφερόμενοι κυρίως σε μη επικαλυπτόμενους τυχαίους περιπάτους(nonintersecting random walks), percolation και το loop-erased random walk. Σαν κανόνα θα λάβουμε ότι οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιηθούν για το κάθε μοντέλο θα είναι οι ίδιοι.

Χρήσιμοι ορισμοί για την συνέχεια

Power law: είναι μια συνάρτηση μεταξύ δύο ποσοτήτων, όπου η αλλαγή στην μία ποσότητα θα έχει ως αποτέλεσμα και να αλλάξει η άλλη ποσότητα και αυτή η αλλαγή θα εξαρτάται κυρίως από το αρχικό μέγεθος των δύο ποσοτήτων. Αν για παράδειγμα σε ένα κύβο διπλασιάσουμε την ακμή του τότε θα πρέπει αυτόματα να οκταπλασιάσουμε τον όγκο του. Ένα παράδειγμα μιας Power law συνάρτησης είναι αυτό που βλέπουμε στη παρακάτω εικόνα όπου βλέπουμε την διαφορά μεταξύ μιας κανονικής κατανομής και μιας Power law κατανομής



Critical exponents: περιγράφουν την συμπεριφορά των φυσικών ποσοτήτων σε συνεχείς μεταβάσεις φάσεων. Επίσης είναι σημαντικό αν και δεν έχει αποδειχτεί ότι θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητοι από τις λεπτομέρειες του εκάστοτε φυσικού συστήματος αλλά εξαρτώνται μόνο από την διάσταση του συστήματος, από το εύρος της αλληλεπίδρασης των ποσοτήτων και από το spin της διάστασης.

Universality: είναι η παρατήρηση που έχουμε κάνει ότι πολλές ιδιότητες σε μεγάλη γκάμα συστημάτων είναι ανεξάρτητες από τις δυναμικές λεπτομέρειες του συστήματος.

Fractal behavior: είναι το πώς απεικονίζεται αυτή η συσχέτιση σε ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο και τί συμπεριφορά διακρίνουμε ότι έχει το μοντέλο μας από αυτό το γράφημα.

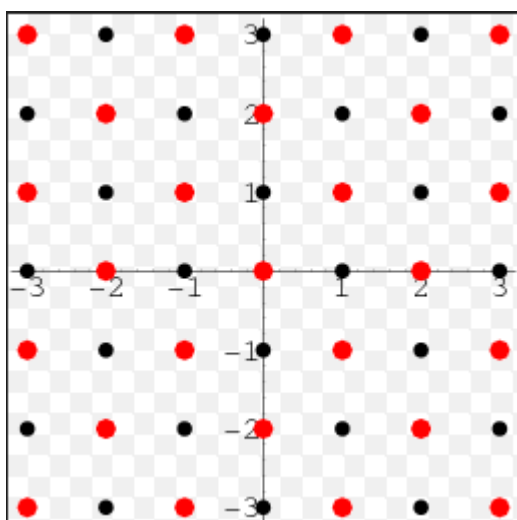
Ergodicity breaking: στη φυσική ότι σε μεγάλα χρονικά διαστήματα ο χρόνος που δαπανάται από ένα σύστημα σε μία περιοχή με την ίδια ενέργεια είναι ανάλογος με τον όγκο της ίδιας περιοχής.

Scaling limit: όταν η απόσταση μεταξύ των ατόμων φτάνει κοντά στο 0 για πλεγματικά μοντέλα. Όταν λοιπόν τα μόρια φτάσουν στην πολυπύκνωση απόσταση zero το μοντέλο καταφέρνει να φτάσει σε επόμενη φάση.

Lattice model: πλεγματικά μοντέλα που συναντούμε σε πολλές επιστήμες από την Φυσική μέχρι και τα Οικονομικά. Με αυτόν τον όρο στην Φυσική εννοούμε μοντέλα που έχουν την μορφή πλέγματος και τα συναντάμε κυρίως στην Κβαντομηχανική.

Self avoiding walk: είναι ο αυτοαποφύεψων τυχαίος περίπατος, δηλαδή ένας τυχαίος περίπατος που δεν μπορεί ποτέ να ξαναπεράσει από θέση που έχει βρεθεί. Για παράδειγμα αν μιλάγαμε για έναν τέτοιο περίπατο σε δύο διαστάσεις και αυτός ο περίπατος ξεκινούσε από το σημείο (0,0) τότε δεν θα μπορούσε να περάσει ποτέ ξανά από εκεί. Αυτού του είδους ο περίπατος συναντιέται πολύ στα πολυμερή και θα ασχοληθούμε πάρα πολύ σε αυτή την εργασία με τέτοιες περιπτώσεις.

Integer lattice: είναι ουσιαστικά ένα πλέγμα στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n όπου τα σημεία του είναι κουκίδες πάνω στους ακεραίους όπου παριστάνουν τα άτομα του πλέγματος. Αυτό το πλέγμα απεικονίζεται ακριβώς στην παρακάτω εικόνα:



Subadditive function: είναι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ όπου και τα δύο σύνολα A,B είναι κλειστά και ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\forall x, y \in A, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

Κεφάλαιο 1

Κίνηση Brown

1.1 Η στοχαστική ανέλιξη της Κίνησης Brown

Αρχικά είναι απαραίτητο να αναφέρουμε τί εννοούμε με τον όρο Κίνηση Brown. Είναι το πιθανοθεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε αρχικά με σκοπό την περιγραφή και ανάλυση της κίνησης μικρών σωματιδίων μέσα σε κάποιο υγρό, υπό την επίδραση των συγκρούσεων που υφίστανται από τα μόρια του υγρού αλλά έγινε αντιληπτό ότι μπορεί να περιγράψει με την ίδια ακρίβεια και άλλα προβλήματα. Η παρατήρηση της κίνησης αυτής γίνεται για κάποιο χρονικό διάστημα που έχουμε ορίσει $[0, s]$ και δίνει στο κάθε σωματίδιο, μια τροχιά $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)), t \in [0, s]$ στο χώρο. Το πείραμα θεωρείται πείραμα τύχης με την έννοια ότι δύο σωματίδια διαγράφουν διαφορετικές τροχιές κατά το διάστημα $[0, s]$ παρά το γεγονός ότι (μακροσκοπικά τουλάχιστον) οι συνθήκες στις οποίες βρίσκονται είναι ίδιες. Ισοδύναμα: ένα σωματίδιο διαγράφει διαφορετικές τροχιές σε δύο επαναλήψεις του πειράματος, γεγονός που καθιστά την Κίνηση Brown μια πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση στοχαστικής ανέλιξης. Οι εφαρμογές του πιθανοθεωρητικού μοντέλου που έχουν προταθεί, είναι πάρα πολλές, όχι μόνο στο χώρο των ρευστών αλλά και στα χρηματοοικονομικά και σε πολλούς άλλους τομείς. Προφανώς η Κίνηση Brown έχει αναπτυχθεί για οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων. Πρωτίστως θα ορίσουμε το μοντέλο της Κίνησης Brown για μία διάσταση και θα το αναπτύξουμε στο πρώτο κομμάτι του κεφαλαίου, και στην συνέχεια θα αναφερθούμε και στο μοντέλο των πολλαπλών διαστάσεων και θα το αναπτύξουμε.

Ορισμός 1.1.1

Τυπική μονοδιάστατη Κίνηση Brown ονομάζεται μια στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \in [0, \infty)\}$ με τιμές στο \mathbb{R} , ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{L}, P) εφοδιασμένο με μια διύλιση $\{\mathcal{L}_t, t \geq 0\}$ με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

- α) Για κάθε $t \geq 0$ η B_t είναι \mathcal{L}_t -μετρήσιμη.
- β) Η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ έχει συνεχείς τροχιές.
- γ) $B_0 = 0$ P -σ.β.

δ) Όταν $0 \leq s < t$ τότε η τυχαία μεταβλητή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας \mathcal{L}_s .

ε) Όταν $0 \leq s < t$ τότε η τυχαία μεταβλητή $B_t - B_s$ ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(0, t-s)$.

Θα γράφουμε απλά: Η $B_t, t \geq 0$ είναι \mathcal{L}_t -κίνηση Brown η ακόμα $(B_t, \mathcal{L}_t), t \geq 0$ είναι μια Κίνηση Brown.

Η στοχαστική ανέλιξη $B_t, t \in [0, s]$ όπου $s > 0$ θα λέγεται: μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown στο $[0, s]$.

Συμπεράσματα

1) Είναι εύκολο να συμπαιράνουμε ότι μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown είναι επίσης μια \mathcal{L}_t^B -κίνηση Brown όπου $\mathcal{L}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s < t), t \geq 0$.

2) Έστω $\{B_t, t \geq 0\}$ μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown στον χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{L}, P) . Έστω $\{\pi_t, t \geq 0\}$ που είναι η κανονική της ισοδύναμη ορισμένη στον χώρο πιθανότητας $(C([0, \infty], \mathbb{R}), \mathcal{L}_0, P_0)$ όπου \mathcal{L}_0, P_0 . Τότε έχουμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{\pi_t, t \geq 0\}$ είναι \mathcal{L}_t^0 -κίνηση Brown όπου $\mathcal{L}_t^0 = \sigma(\pi_s, 0 \leq s < t)$.

3) Αν $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{-B_t, t \geq 0\}$ είναι επίσης μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown κάτι που προκύπτει πολύ εύκολα από τον παραπάνω Ορισμό.

Πρόταση 1.1.1

Έστω $\{B_t, t \geq 0\}$ μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown .

α) Αν $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n$ τότε έχουμε ότι οι προσαυξήσεις $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}, j = 1, 2, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες.

β) Η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι \mathcal{L}_t -martingale.

γ) Η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t^2 - t, t \geq 0\}$ είναι \mathcal{L}_t -martingale.

δ) Για οποιαδήποτε $s, t \geq 0$, $Cov(B_s, B_t) = \min\{s, t\}$.

ε) Αν $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n$ τότε το τυχαίο δείγμα $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ ακολουθεί Κανονική Κατανομή $N(0, \Gamma)$ όπου $\Gamma = [\min\{t_i, t_j\}]_{1 \leq i, j \leq n}$.

Απόδειξη

α) Για να ξεκινήσουμε την απόδειξη θα μας βοηθούσε αν χρησιμοποιούσαμε τον ορισμό της Κίνησης Brown. Αρχικά η τυχαία μεταβλητή $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{L}_{t_{n-1}}^B$, άρα είναι ανεξάρτητη και των τυχαίων μεταβλητών $B_{t_0}, B_{t_1}, \dots, B_{t_{n-1}}$ και συνεπώς και των τυχαίων μεταβλητών $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}$. Όμοια η τυχαία μεταβλητή $B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}$ είναι ανεξάρτητη των τυχαίων μεταβλητών $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}$. Και συνεπώς για όλες τις προσαυξήσεις ισχύει το ίδιο ακριβώς με αποτέλεσμα να είναι ανεξάρτητες.

β) Έστω $0 \leq s < t$. Αφού $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας \mathcal{L}_s , τότε θα ισχύει ότι

$E(B_t - B_s | \mathcal{L}_s) = E(B_t - B_s) = 0$ και άρα $E(B_t | \mathcal{L}_s) = B_s$ αφού είναι γνωστό ότι η τυχαία μεταβλητή B_s είναι F_t -μετρήσιμη.

γ) Για $0 \leq s < t$ έχουμε διαδοχικά και $P - \sigma.β.$

$$E[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{L}_s] = E[B_t^2 | \mathcal{L}_s] - 2E[B_t B_s | \mathcal{L}_s] + E[(B_s)^2 | \mathcal{L}_s]$$

$$E[B_t^2 | \mathcal{L}_s] - 2B_s E[B_t | \mathcal{L}_s] + (B_s)^2 \text{ και λόγω του } \beta \text{ ερωτήματος έχουμε ότι}$$

$$E[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{L}_s] = E[B_t^2 | \mathcal{L}_s] - 2(B_s)^2 + (B_s)^2 = E[B_t^2 | \mathcal{L}_s] - (B_s)^2$$

Εξάλλου γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της \mathcal{L}_s και άρα

$$E[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{L}_s] = E(B_t - B_s)^2 = V(B_t - B_s)^2 = t - s$$

Εύκολα τώρα μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι $E[B_t^2 - t | \mathcal{L}_s] = B_s^2 - s$. Άρα δείξαμε το ζητούμενο μας.

δ) Πάλι έστω ότι $0 \leq s < t$ τότε θα έχουμε ότι

$$Cov(B_s, B_t) = E(B_s B_t) = E((B_t - B_s + B_s) B_s) = E((B_t - B_s) B_s) + E(B_s^2)$$

και λαμβάνοντας υπόψη από το πρώτο ερώτημα ότι $B_t - B_s$, B_s είναι ανεξάρτητες, βρίσκουμε ότι $Cov(B_s, B_t) = E(B_t - B_s) E(B_s) + E(B_s^2)$ και από τον ορισμό της Κίνησης Brown καταλήγουμε στο $Cov(B_s, B_t) = s$. Όμοια θα μπορούσαμε να πάρουμε την περίπτωση

$$0 \leq t < s \text{ τότε θα βρίσκαμε ουσιαστικά ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα } Cov(B_s, B_t) = t.$$

ε) Έστω $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n$. Με $t_0 = 0$, γνωρίζουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}, j = 1, 2, \dots, n$ ακολουθούν Κανονικές κατανομές $N(0, t_j - t_{j-1})$ και ότι είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς το τυχαίο δείγμα $(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(0, B)$ όπου B διαγώνιος $n \times n$ πίνακας με $b_{ii} = t_i - t_{i-1}$.

$$\text{Όμως } \begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{t_1} - B_{t_0} \\ B_{t_2} - B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \end{bmatrix}$$

και συνεπώς το τυχαίο δείγμα $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(0, \Gamma)$ με $\Gamma = [Cov B_{t_i}, B_{t_j}]_{1 \leq i, j \leq n}$. Αρκεί τώρα να χρησιμοποιήσουμε το συμπέρασμα του δ) έτσι ώστε να τελειώσουμε την απόδειξη.

Παρατηρήσεις

1) Από την ε) βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη Gauss με το ιδιαίτερο γνώρισμα ότι $\Gamma = [Cov B_{t_i}, B_{t_j}] = [\min\{t_i, t_j\}]$. Ακόμα ότι όλες οι τυπικές 1-διάστασιες Κινήσεις Brown είναι ισοδύναμες.

2) Από τα β) και γ) διαπιστώνουμε ότι για $0 \leq s < t$ ισχύουν $E[B_t - B_s | \mathcal{L}_s] = 0$ και

$$E[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{L}_s] = t - s.$$

Πρόταση 1.1.2.

Έστω στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ ορισμένη στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{L}, P) και θέτουμε

$$\mathcal{L}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t).$$

Υποθέτουμε ότι :

α) $B_0 = 0$ $P - \sigma. \beta.$

β) Η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ έχει συνεχείς τροχιές.

γ) Όταν $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}, j = 1, 2, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες.

δ) Όταν $0 \leq s < t$ η τυχαία μεταβλητή $B_t - B_s$ ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(0, t - s)$.

Τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι \mathcal{L}_t^B -κίνηση Brown.

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε την Πρόταση αρκεί να δείξουμε ότι για $0 \leq s < t$ η τυχαία μεταβλητή

$B_t - B_s$ και η σ-άλγεβρα \mathcal{L}_s^B είναι ανεξάρτητες. Πράγματι έχουμε ότι για $0 \leq s < t$ και

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n = s$$

οι τυχαίες μεταβλητές $B_t - B_s$ και $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}, j = 1, 2, \dots, n$

είναι ανεξάρτητες. Όμως η σ-άλγεβρα $\sigma(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) = \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ και

συνεπώς η τυχαία μεταβλητή $B_t - B_s$ και η σ-άλγεβρα $\sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ είναι ανεξάρτητες για

όλα τα $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n = s$ και ουσιαστικά η απόδειξη τελείωσε γιατί ξέρουμε ότι

αν $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\sigma(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) = \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$

για όλα τα $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n = s$ τότε είναι ανεξάρτητη και της \mathcal{L}_s^B .

Παρατήρηση 1

Έστω μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown $\{B_t, t \geq 0\}$ και μία στοχαστική ανέλιξη $W = \{W_t, t \geq 0\}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

$$W_0 = 0 \quad P - \sigma. \beta.$$

Η στοχαστική ανέλιξη W έχει συνεχείς τροχιές.

Για οποιαδήποτε $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n$ ισχύει

$$P[(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n}) \in H] = P[(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) \in H] \text{ για κάθε σύνολο } H \in B^n \text{ και μάλιστα έχουν}$$

την ίδια κατανομή.

Τότε η στοχαστική ανέλιξη $W = \{W_t, t \geq 0\}$ είναι μια \mathcal{L}_t^W -κίνηση Brown.

Παρατήρηση 2

Έστω $\{B_t, t \geq 0\}$ μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown και $s > 0$. Θέτουμε $W_t = B_{s+t} - B_s, t \geq 0$. Τότε

μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι η στοχαστική ανέλιξη $W = \{W_t, t \geq 0\}$ είναι μια

$$\mathcal{L}_t^W \text{-κίνηση Brown ανεξάρτητη της } \mathcal{L}_s \text{ (} \mathcal{L}_t^W = \sigma(W_s, 0 \leq s < t \text{))}$$

Μαρκοβιανή ιδιότητα της Κίνησης Brown

Έστω $\{B_t, t \geq 0\}$ μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown. Για $A \in \mathcal{B}$ και $s, t > 0$ ξέρουμε ότι

$$P(B_{s+t} \in A | \mathcal{F}_s) = P(B_{s+t} \in A | B_s) P - \sigma. \beta.$$

$$P(B_{s+t} \in A | B_s = y) = P(y + B_t \in A) P - \sigma. \beta.$$

Στον ορισμό της Κίνησης Brown δεν αναφέρουμε κάπου ότι πρέπει να είναι πλήρης ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{L}, P) και συνεπώς, αν $A \subset \Omega$ και $A \subset N$ όπου $N \in \mathcal{L}$ με $P(N)=0$, δεν προκύπτει ότι $A \in \mathcal{L}$ και πόσο μάλλον ότι $A \in \mathcal{L}_t$. Επειδή αυτό μπορεί να δημιουργήσει σοβαρά προβλήματα μετρησιμότητας πρέπει να κάνουμε την απαιτούμενη διόρθωση:

Έστω μια στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{L}, P_0)$ με $\mathcal{L} = \sigma(B_\tau, 0 \leq \tau) = \mathcal{L}_\infty^B$ που είναι μια \mathcal{L}_t^B -κίνηση Brown. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια στοχαστική ανέλιξη, θέτουμε $N = \{A \subset \Omega : \exists N \in \mathcal{L}_\infty^B \text{ με } A \subset N \text{ και } P_0(N)=0\}$ και για κάθε $t \in [0, \infty]$ θεωρούμε την σ-άλγεβρα

$$\mathcal{L}_t = \sigma(\mathcal{L}_t^B \cup N).$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι $\mathcal{L}_t = \{E \subset \Omega : \exists N \in \mathcal{L}_t^B \text{ με } E \Delta \mathcal{L} \in N\}$. Έτσι για το τυχόν υποσύνολο $E \in \mathcal{L}_t$ υπάρχει $F \in \mathcal{L}_t^B$ με $E \Delta \mathcal{L} \in N$ και μπορούμε να ορίσουμε μονοσήμαντα όπως αποδεικνύεται το παρακάτω μέτρο

$$P(E) = P_0(\mathcal{L}).$$

Αποδεικνύεται τώρα ότι η συνολοσυνάρτηση P είναι μέτρο πιθανότητας και ότι ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{L}_t, P)$ είναι πλήρης. Επιπλέον είναι προφανές ότι $N \subset \mathcal{L}_t$ για κάθε $t \in [0, \infty]$.

Παρατήρηση 3

Πλέον μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ ορισμένη στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{L}_\infty, P)$, είναι μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown.

Λόγω όλων των παραπάνω που έχουν ειπωθεί πλέον είμαστε έτοιμοι να πάρουμε την παρακάτω παραδοχή για να διευκολύνουμε το έργο μας.

Από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε σε μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown θα θεωρούμε ότι ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{L}, P) στον οποίο ορίζεται είναι πλήρης και ότι, αν για ένα υποσύνολο $A \subset \Omega$ υπάρχει $N \in \mathcal{L}$ με $P(N)=0$ με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να είναι $A \subset N$ τότε θα είναι και $A \in \mathcal{L}_t$ για κάθε $t \geq 0$.

Θα εξετάσουμε τώρα μια άλλη πολύ σημαντική ιδιότητα της Κίνησης Brown η οποία την χαρακτηρίζει, την ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα. Η απλή Μαρκοβιανή ιδιότητα μας είναι ήδη γνωστή και είναι η παρακάτω:

$$P(B_{s+t} \in A | \mathcal{L}_s) = P(B_{s+t} \in A | B_s) P - \sigma. \beta. \text{ για οποιαδήποτε } s, t > 0 \text{ και } A \in B.$$

Από την παρατήρηση 2 προκύπτει ξεκάθαρα ότι ο Παρατηρητής κατά τη χρονική στιγμή s , και προκειμένου να εκτιμήσει την (πιθανοθεωρητική) κατάσταση του συστήματος κατά τη μελλοντική χρονική στιγμή $s+t$, δεν χρειάζεται όλη την προιστορία \mathcal{L}_s του συστήματος αλλά μόνο την κατάσταση του B_s κατά την (παρούσα) χρονική στιγμή s . Λόγω της απλής Μαρκοβιανής ιδιότητας αποδεικνύεται επίσης ότι ισχύει:

Για $A \in B$ και $s, t > 0$, $y \in \mathbb{R}$ τότε

$$P(B_{s+t} \in A | B_s = y) = P(y + B_t \in A) P - \sigma. \beta.$$

και είναι λογικό το παρακάτω συμπέρασμα για την παραπάνω σχέση.

Για οποιαδήποτε κατάσταση $B_s = y$ κατά τη χρονική στιγμή s , η περαιτέρω εξέλιξη για χρόνο t της Κίνησης Brown είναι ίδια από πιθανοθεωρητική άποψη με την εξέλιξη για χρόνο t της Κίνησης Brown που ξεκινά από το y , η κίνηση Brown δηλαδή ξεκινά εκ νέου κάθε στιγμή της. Η ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα για την οποία μιλήσαμε παραπάνω περιέχεται κατ ουσίαν στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.1.3.

Έστω $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown και τ είναι ένας \mathcal{L}_t -χρόνος διακοπής με $P(\tau < \infty) = 1$. Ορίζουμε $V_t = B_{t+\tau} - B_\tau, t \geq 0$. Τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{V_t, t \geq 0\}$ είναι μια \mathcal{L}_t^V -κίνηση Brown ανεξάρτητη της \mathcal{L}_t .

Απόδειξη

Κατ αρχήν θα πρέπει να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε t_1, t_2, \dots, t_m από το $[0, \infty)$ για οποιαδήποτε $H \in \mathcal{B}^m$ και οποιοδήποτε $M \in \mathcal{L}_\tau$ ισχύει

$$P(\{(V_{t_1}, \dots, V_{t_m}) \in H\} \cap M) = P(\{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}) \in H\})P(M).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P(M) > 0$.

Ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2^n}\right) I_{\left(\left(k-\frac{1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right)}(\tau).$$

Οι τυχαίες μεταβλητές τ_n ορίζουν \mathcal{L}_t -χρόνος διακοπής διότι για κάθε $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ και $\frac{k}{2^n} \leq t < \frac{k+1}{2^n}$ ισχύει $\{\tau_n \leq t\} = \{\tau \leq \frac{k}{2^n}\}$. Όμως $\{\tau \leq \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{L}_{\frac{k}{2^n}} \subset \mathcal{L}_t$ και συνεπώς έχουμε ότι $\{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{L}_t$.

Επίσης ισχύουν και επαληθεύονται εύκολα τα παρακάτω

$$\tau_n \geq \tau \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

$$\tau_n \rightarrow \tau$$

Θεωρούμε τώρα τυχόν $n \in \mathbb{N}$ και την στοχαστική ανέλιξη

$$V_t^n = B_{\tau_n+t} - B_{\tau_n}, t \geq 0.$$

Αυτό το οποίο επιχειρούμε είναι να δείξουμε την παρατήρηση 3 για την στοχαστική ανέλιξη

$$V_t^n, t \geq 0 \text{ και κατόπιν να μεταβούμε στο όριο } n \rightarrow \infty.$$

Έστω $\{s_1, s_2, \dots\}$ οι τιμές της διακριτής τ.μ. τ_n .

Θέτουμε για κάθε $i = 1, 2, \dots$

$$W_t^i = B_{s_i+t} - B_{s_i}, t \geq 0.$$

Επίσης θέτουμε

$$B = (B_{t_1}, \dots, B_{t_m})$$

$$W^i = (W_{t_1}^i, \dots, W_{t_m}^i)$$

$$V^n = (V_{t_1}^n, \dots, V_{t_m}^n)$$

και έχουμε διαδοχικά για $H \in \mathcal{B}^m, M \in \mathcal{L}_\tau$

$$P(\{V^n \in H\} \cap M) = \sum_i P(\{V^n \in H\} \cap M \cap \{\tau_n = s_i\})$$

$$P(\{V^n \in H\} \cap M) = \sum_i P(\{W^i \in H\} \cap M \cap \{\tau_n = s_i\}) \quad (i)$$

διότι επί του $\{\tau_n = s_i\}$ ισχύει $V_t^n = W_t^i$.

Ακόμα έχουμε ότι $M \in \mathcal{F}_{\tau_n}$ και συνεπώς $M \cap \tau_n = s_i \in \mathcal{L}_{s_i}$ και επίσης από την παρατήρηση 2

προκύπτει ξεκάθαρα ότι η στοχαστική ανελίξη $\{W_t^i, t \geq 0\}$ που προκύπτει από την σχέση

$$W_t^i = B_{s_i+t} - B_{s_i}, t \geq 0 \text{ είναι Κίνηση Brown ανεξάρτητη της } \mathcal{L}_{s_i}. \text{ Έτσι η σχέση (i) γράφεται}$$

διαδοχικά

$$P(\{V^n \in H\} \cap M) = \sum_i P(\{W^i \in H\}) P(M \cap \{\tau_n = s_i\})$$

$$P(\{V^n \in H\} \cap M) = \sum_i P(\{B \in H\}) P(M \cap \{\tau_n = s_i\})$$

και τελικά για τυχόν $n \in \mathbb{N}$ δείξαμε ότι

$$P(\{V^n \in H\} \cap M) = P(\{B \in H\}) P(M). \quad (ii)$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη το μέτρο δεσμευμένης πιθανότητας $P_M(A) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$, η σχέση

(ii) γράφεται ως εξής:

$$P_M(\{V^n \in H\}) = P(\{B \in H\}), H \in \mathcal{B}^m.$$

Το αριστερό μέλος της σχέσης την κατανομή του τυχαίου δείγματος $V^n, n \in \mathbb{N}$ και το δεξιό μέλος την κατανομή του τυχαίου δείγματος B. Επειδή λόγω της συνέχειας των τροχιών της

$\{B_t, t \geq 0\}$, έχουμε ότι $V_t^n = B_{\tau+t} - B_\tau = V_t$, για κάθε $t \geq 0$ όταν $n \rightarrow \infty$ θα έχουμε και ότι:

$$V^n \rightarrow V = (V_{t_1}, \dots, V_{t_m})$$

και συνεπώς η ακολουθία κατανομών $P_M(V^n \in H)$ συγκλίνει ασθενώς προς την κατανομή

$P_M(V \in H)$ και άρα

$$P_M(\{V \in H\}) = P(\{B \in H\}), \text{ για κάθε } H \in \mathcal{B}^m.$$

Εύκολα τώρα παίρνουμε την ζητούμενη σχέση.

Τώρα η σχέση αυτή για $M = \Omega$ μας εξασφαλίζει ότι οι στοχαστικές ανελίξεις $\{V_t, t \geq 0\}$ και

$\{B_t, t \geq 0\}$ είναι ισοδύναμες και επικαλούμενοι την παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι η

στοχαστική ανελίξη $\{V_t, t \geq 0\}$ είναι \mathcal{L}_t^V - κίνηση Brown.

Μένει να δείξουμε την ανεξαρτησία της ως προς την \mathcal{L}_τ . Πράγματι έχουμε ήδη ότι για κάθε

$H \in \mathcal{B}^m$

$$P_M(\{(V_{t_1}, \dots, V_{t_m}) \in H\}) = P(\{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}) \in H\}).$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ισότητας με $P(M)$, $M \in \mathcal{L}_\tau$ και με τη βοήθεια της αρχικής σχέσης έχουμε

$$P(\{(V_{t_1}, \dots, V_{t_m}) \in H\} \cap M) = P(\{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}) \in H\}) P(M).$$

Ως άμεσο πόρισμα της προηγούμενης Πρότασης έχουμε την ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα της κίνησης Brown η οποία συνίσταται στην ισχύ της απλής Μαρκοβιανής ιδιότητας και για χρόνους διακοπής.

Πόρισμα

Έστω $\{B_t, t \geq 0\}$ μια \mathcal{L}_t -κίνηση Brown και τ ένας \mathcal{L}_t -χρόνος διακοπής με $P(\tau < \infty) = 1$.

Τότε ισχύουν για $t > 0, A \in \mathcal{B}, y \in \mathbb{R}$

$$P(B_{\tau+t} \in A | \mathcal{F}_\tau) = P(B_{\tau+t} \in A | B_\tau) P - \sigma. \beta.$$

$$P(B_{\tau+t} \in A | B_\tau = y) = P((y + B_t) \in A) P_{B_t} - \sigma. \beta.$$

1.2 Ιδιότητες της Κίνησης Brown

Πλέον μπορούμε να ασχοληθούμε και με κάποιες άλλες ιδιότητες της Κίνησης Brown. Για παράδειγμα οι τροχιές της Κίνησης Brown είναι μεν συνεχείς αλλά κατά τα άλλα είναι εξαιρετικά μη-ομαλές.

Πρόταση 1.2.1

Εκτός ενός συνόλου N με $P(N) = 0$, οι τροχιές $[0, \infty) \ni t \rightarrow B_t(\omega) \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega \setminus N$ είναι μη παραγωγίσιμες οπουδήποτε στο $[0, \infty)$.

Απόδειξη

Για να διευκολύνουμε τον εαυτό μας όπου χρειάζεται θα γράφουμε $B(t, \omega)$ αντί για $B_t(\omega)$.

Έστω $A = \{\omega \in \Omega : \text{η συνάρτηση } t \rightarrow B_t(\omega) \text{ παραγωγίζεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του } [0, \infty)\}$.

Έστω τώρα τυχόν $\omega \in A$ και έστω υπάρχει $t \in [0, \infty)$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση $B(\omega)$ παραγωγίζεται στο t και έχει παράγωγο $D \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό της παραγώγου υπάρχει $\delta = \delta(\omega, t) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |B_s(\omega) - B_t(\omega)| < (1 + |D|)|s - t|. \quad (i)$$

Επιλέγουμε τώρα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε όταν $n > n_0$ ισχύουν

$$n > t \quad (ii)$$

$$n > 2(|D| + 1) \quad (iii)$$

$$\frac{\delta}{n} > 2^{-n} \quad (iv)$$

Για τυχόν $n > n_0$ επιλέγουμε $k = [t2^n]$ οπότε θα έχουμε $\frac{k}{2^n} \leq t < \frac{k+1}{2^n}$ και συνεπώς, λόγω και της (iv), θα έχουμε ότι:

$$|t - \frac{k-1}{2^n}| = t - \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2\left(\frac{1}{2^n}\right) < \delta,$$

άρα έχουμε ότι

$$|t - \frac{k-1}{2^n}| < \delta \quad (\text{v})$$

Με τον ίδιο τρόπο επαληθεύουμε τα παρακάτω

$$|t - \frac{k}{2^n}| < \delta \quad (\text{vi})$$

$$|t - \frac{k+1}{2^n}| < \delta \quad (\text{vii})$$

$$|t - \frac{k+2}{2^n}| < \delta \quad (\text{viii})$$

Θέτουμε

$$X_{nk}(\omega) = \max\{|B(\frac{k}{2^n}, \omega) - B(\frac{k-1}{2^n}, \omega)|, |B(\frac{k+1}{2^n}, \omega) - B(\frac{k}{2^n}, \omega)|, |B(\frac{k+2}{2^n}, \omega) - B(\frac{k+1}{2^n}, \omega)|\} \quad \text{και}$$

$$Y_n(\omega) = \min\{X_{nl}(\omega) : l < n2^n\}.$$

Επειδή $t < n$ και συνεπώς $k = [t2^n] \leq n2^n$, θα έχουμε

$$Y_n(\omega) \leq X_{nk}. \quad (\text{ix})$$

Εξάλλου λόγω των σχέσεων (i),(v),(viii),(iii) θα έχουμε

$$X_{nk}(\omega) \leq 2(|D|+1) \frac{1}{2^n} < \frac{n}{2^n}. \quad (\text{x})$$

Τελικά από τις (ix),(x) συμπεραίνουμε ότι

$$Y_n(\omega) < \frac{n}{2^n}. \quad (\text{xi})$$

Όστε έχουμε αποδείξει ότι για τυχόν $\omega \in A$ ισχύει η (xi) με $Y_n = \min\{X_{nl} : l < n2^n\}$, όπου

$$X_{nl} = \max\{|B(\frac{i}{2^n}, \bullet) - B(\frac{i-1}{2^n}, \bullet)| : i = l, l+1, l+2\}.$$

Συνεπώς $A \subset A_n = \{Y_n \leq \frac{n}{2^n}\}$ για κάθε $n > n_0$ και άρα

$$A \subset \liminf A_n. \quad (\text{xii})$$

Επειδή $P(A_n) = P(Y_n \leq \frac{n}{2^n}) = P(\bigcup_{l=1}^{n2^n} \{X_{nl} \leq \frac{n}{2^n}\})$, θα είναι

$$P(A_n) \leq P(\sum_{l=1}^{n2^n} \{X_{nl} \leq \frac{n}{2^n}\}), \quad (\text{xiii})$$

Όμως $P(X_{nl} \leq \frac{n}{2^n}) = P(\bigcap_{i=l}^{l+2} \{|B(\frac{i}{2^n}, \bullet) - B(\frac{i-1}{2^n}, \bullet)|\})$ και επειδή ξέρουμε οι τυχαίες μεταβλητές

$B(\frac{i}{2^n}, \bullet) - B(\frac{i-1}{2^n}, \bullet) : i = l, l+1, l+2$ είναι ανεξάρτητες με Κανονική κατανομή $N(0, \frac{1}{2^n})$, θα έχουμε

$$P(X_{n1} \leq \frac{n}{2^n}) = P(|W| \leq \frac{n}{2^n})^3$$

όπου W τυχαία μεταβλητή με κανονική κατανομή και συνεπώς

$$P(X_{n1} \leq \frac{n}{2^n}) = c(2^{\frac{n}{2}} 2n2^{-n})^3 = c(\frac{2n}{\sqrt{2^n}})^3$$

όπου c θετική σταθερά

Από την τελευταία σχέση και από την (xiii) προκύπτει ότι

$$P(A_n) \leq cn2^n (\frac{2n}{\sqrt{2^n}})^3 = c \frac{8n^4}{\sqrt{2^n}}$$

και από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε πολύ εύκολα ότι $P(\liminf A_n) = 0$.

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (xii) και το γεγονός ότι ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{L}, P) στον οποίο ορίζεται η Κίνηση Brown είναι πλήρης, τότε έχουμε ότι $A \in \mathcal{L}$ και $P(A) = 0$, άρα το αποδείξαμε.

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά την τετραγωνική κύμανση της Κίνησης Brown.

Πρόταση 1.2.2.

Έστω $\Pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < t_3^n < \dots < t_{m_n}^n = t\}$, $n = 1, 2, \dots$ ακολουθία διαμερίσεων του διαστήματος $[0, t]$, $t > 0$ εις τρόπον ώστε $\|\Pi_n\| = \max\{t_j^n - t_{j-1}^n : 1 \leq j \leq m_n\} \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$. Έστω ακόμα

$$V_n = \sum_{j=1}^{m_n} (B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2, n = 1, 2, \dots \text{ Τότε}$$

$$V_n \rightarrow t \text{ με την } L^2 \text{ έννοια.}$$

Απόδειξη

Θα ξεκινήσουμε με την αρχική σχέση και θα αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη ένα t οπότε η σχέση μας θα γίνει κάπως έτσι

$$V_n - t = \sum_{j=1}^{m_n} [(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)]$$

οπότε αν τετραγωνίσουμε την παραπάνω σχέση θα έχουμε ότι

$$(V_n - t)^2 = \sum_{j=1}^{m_n} [(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)]^2 + 2 \sum_{i < j} [(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)][(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n)]$$

Όμως οι τυχαίες μεταβλητές $[(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2]$ έχουν μέση τιμή $(t_j^n - t_{j-1}^n)$ και είναι ανεξάρτητες ($j = 1, 2, \dots, m_n$). Συνεπώς

$$E(V_n - t)^2 = \sum_{j=1}^{m_n} [(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)]^2$$

$$E(V_n - t)^2 = \sum_{j=1}^{m_n} E[(t_j^n - t_{j-1}^n) Z_j^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)]^2$$

όπου $Z_j \sim N(0, 1)$ αφού γνωρίζουμε ότι $[(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})]$ ακολουθούν Κανονική κατανομή

$N(0, t_j^n - t_{j-1}^n)$. Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$E(V_n - t)^2 = \sum (t_j^n - t_{j-1}^n) E(Z^2 - 1)^2$$

όπου Z ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(0,1)$ και συνεπώς θα έχουμε

$$E(V_n - t)^2 = E(Z^2 - 1)^2 \|\Pi_n\| \forall n \in \mathbb{N}.$$

Από αυτή την σχέση λοιπόν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\lim_n E(V_n - t)^2 = 0$.

Συνοψίζοντας θα αναφέρουμε και κάποιες άλλες ιδιότητες της Κίνησης Brown:

1. Έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Αν $0 \leq s \leq t$ τότε η $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από τη σ -άλγεβρα που παράγουν $F_s = \sigma((B_q)_{0 \leq q \leq s})$ (ουσιαστικά το $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητο με ότι συναίβει στο παρελθόν). Αρκεί να δείξουμε ότι το $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητο από $B_q \forall q \in [0, s]$ αν λοιπόν είναι ανεξάρτητο από κάθε B_q τότε θα είναι ανεξάρτητο και από τη σ -άλγεβρα που παράγει η ένωση τους (σε αυτό μας βοηθά ότι η Κίνηση Brown είναι ανέλιξη Gauss).

Έχουμε ότι $\begin{pmatrix} B_t - B_s \\ B_q \end{pmatrix}$ ακολουθούν Κανονική κατανομή σε 2 διαστάσεις και είναι

ασυσχέτιστες. Οπότε θα δείξουμε ότι είναι και ανεξάρτητες. Το ότι ακολουθούν Κανονική κατανομή θα είναι αρκετά εύκολο να το δείξουμε γιατί ουσιαστικά είναι γραμμικός

μετασχηματισμός του $\begin{pmatrix} B_t - B_s \\ B_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_q \\ B_s \\ B_t \end{pmatrix}$ που είναι μια τρισδιάστατη Κανονική

κατανομή. Τώρα το ότι είναι ασυσχέτιστες μπορούμε να το δείξουμε με τον εξής τρόπο $Cov(B_t - B_s, B_q) = Cov(B_t, B_q) - Cov(B_s, B_q) = q - q = 0$.

2. Θα δούμε ότι η κίνηση Brown έχει συμμετρίες

Αν $W = \{W_t, t \geq 0\}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown τότε η $-W$ είναι και αυτή μια τυπική Κίνηση Brown. Αυτό συμβαίνει επειδή έχει συνεχείς τροχιές και $E[-W_t] = E[W_t] = 0, \forall t \in [0, \infty]$ ακόμα $Cov(-W_t, -W_s) = (-1)(-1)Cov(W_t, W_s)$.

$Cov(W_t, W_s) = t \wedge s$ άρα είναι Κίνηση Brown.

3. Επόμενη ιδιότητα δεν είναι τόσο προφανής αλλά είναι μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα

$\alpha > 0 W_t^{(\alpha)} = (1/\sqrt{\alpha}) W_{\alpha t} \forall t \geq 0$ τότε η $W_t^{(\alpha)}$ είναι τυπική Κίνηση Brown ακόμα έχει συνεχείς τροχιές $E[W_t^{(\alpha)}] = 1/\sqrt{\alpha} E[W_{\alpha t}] = 0 \forall t \in [0, \infty]$ επίσης το ότι είναι κανονικές πολυδιάστατες κατανομές είναι πολύ εύκολο να το δείξουμε.

Ακόμα

$$Cov(W_t^{(\alpha)}, W_s^{(\alpha)}) = Cov(1/\sqrt{\alpha} W_{\alpha t}, 1/\sqrt{\alpha} W_{\alpha s}) = (1/\alpha) Cov(W_{\alpha t}, W_{\alpha s}) = (1/\alpha)(\alpha t \wedge \alpha s) = t \wedge s$$

4. $X_0 = 0, X_t = tW_{1/t}, t > 0$

Τότε η $\{X_t, t \geq 0\}$ είναι τυπική Κίνηση Brown (χρονική αντίστροφη). Επίσης $\{X_t, t \geq 0\}$ έχει κανονικές κατανομές πεπερασμένης διάστασης. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση το t να μην είναι 0 γιατί αν είναι 0 τότε ο πίνακας δεν θα είναι αντιστρέψιμος

$$(t_1 W_1/t_1, \dots, t_N W_N/t_N) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_N \end{pmatrix}$$

Άρα ακολουθούν κανονική κατανομή.

$$E[X_t] = E[t(W/t)] = tE[W/t] = 0$$

$$\text{και } Cov(X_t, X_s) = Cov(t(W/t), s(W/s)) = tsCov(W/t, W/s) = Cov(X_t, X_s) = ts/(t \vee s) = t \wedge s$$

Για την συνέχεια των τροχιών αν το t είναι θετικό η $\{X_t, t \geq 0\}$ έχει συνεχείς τροχιές. Βέβαια για την συνέχεια των τροχιών της $\{X_t, t \geq 0\}$ στο μηδέν θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$P[\lim_{t \rightarrow 0} X_t = 0] = 1$$

Τώρα για να το δείξουμε θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία:

$$P\left[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{t \in (0, t/m)} |x_t| \leq 1/n, \varepsilon \rightarrow 1/n, n \delta \rightarrow m\right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left[\sup_{t \in (0, 1/m) \cap Q} |x_t| \leq 1/n\right]$$

Εφόσον η από κοινού κατανομή του X_t είναι ίδια με του W_t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left[\sup_{t \in (0, 1/m) \cap Q} |x_t| \leq 1/n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left[\sup_{t \in (0, 1/m) \cap Q} |w_t| \leq 1/n\right]$$

$$P[\lim_{t \rightarrow 0} W_t = 0] = 1$$

1.3 Κίνηση Brown σε πολλές διαστάσεις

Ορισμός 1.3.1.

Τυπική n -διάστατη Κίνηση Brown ονομάζεται μια στοχαστική ανέλιξη με τιμές στο \mathbb{R}^n , $\{B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n), t \geq 0\}$, ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{L}, P) εφοδιαμένο με μία δύλιση $\{\mathcal{L}_t, t \geq 0\}$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις :

i) Η B_t είναι \mathcal{L}_t -μετρήσιμη $\forall t \geq 0$ (\mathcal{L}_t προσαρμοσμένη).

ii) Η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ έχει συνεχείς τροχιές.

iii) $B_0 = 0$ P -σ.β.

iv) Όταν $0 \leq s < t$ τότε η τυχαία μεταβλητή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας \mathcal{L}_s .

v) Όταν $0 \leq s < t$ η τυχαία μεταβλητή $B_t - B_s$ ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(0, (t-s)I_n)$.

Παρατηρήσεις

1) Για $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ και $0 \leq s < t$ η τυχαία μεταβλητή $B_t^i - B_s^i$ ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(0, t-s)$ και συνεπώς έχουμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t^i, t \geq 0\}$ είναι μονοδιάστατη \mathcal{L}_t -κίνηση Brown. Κατά συνέπεια έχουμε ότι η $\{B_t^i, t \geq 0\}$ είναι και \mathcal{L}_t^i -κίνηση Brown όπου $\mathcal{L}_t^i = \sigma(B_s^i : 0 \leq s \leq t) \subset \mathcal{L}_t$.

2) Από το v) κομμάτι του ορισμού προκύπτει απευθείας ότι για κάθε $t \geq 0$ οι τυχαίες μεταβλητές B_t^1, \dots, B_t^n είναι ανεξάρτητες. Ισχύει όμως κάτι περισσότερο : αν $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

με $i \neq j$ και $s > t \geq 0$, τότε $B_s^i - B_t^i$ είναι ανεξάρτητη της \mathcal{L}_t άρα και ανεξάρτητη του τυχαίου δείγματος (B_t^i, B_t^j) αφού αυτό το τελευταίο είναι \mathcal{L}_t -μετρήσιμο. Επίσης όπως είδαμε η τυχαία μεταβλητή B_t^i είναι ανεξάρτητη της B_t^j . Διευρύνοντας το επιχείρημα ότι οι σ-άλγεβρες $\mathcal{L}^i = \sigma(B_t^i: 0 \leq t), i=1,2,\dots,n$ είναι ανεξάρτητες.

3) Η κανονική ισοδύναμη μιας n-διάστατης Κίνησης Brown είναι επίσης Κίνηση Brown ορισμένη στον $C = C([0, \infty), \mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}_n^{[0, \infty)}$. Θα ήταν καλό να επαναλάβουμε ότι το σύνολο C εφοδιάζεται με τη σ-άλγεβρα \mathcal{L}_0 που παράγεται από τις προβολές $\pi_t: C \rightarrow \mathbb{R}^n, t \geq 0$. Ακόμα υπενθυμίζουμε ότι η σ-άλγεβρα \mathcal{L}_0 είναι η σ-άλγεβρα Borel (η παραγόμενη από τα ανοικτά) του C όταν έχει την συνήθη μετρική τοπολογία του. Όπως και στην 1-διάστατη περίπτωση, όλες οι n-διάστατες Κινήσεις Brown είναι ισοδύναμες και συνεπώς υπάρχει μια μόνο κανονική ισοδύναμη (C, \mathcal{L}_0, P_0) . Το μονοσήμαντα ορισμένο μέτρο P_0 λέγεται μέτρο Wiener.

4) Η ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα χαρακτηρίζει και την κίνηση Brown n διαστάσεων. Η Πρόταση 1.1.3 και το Πρόσχημα της ισχύουν ως έχουν με μοναδική προσαρμογή στην διατύπωση του Πορίσματος ως εξής $A \in B^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$.

Είναι προφανές ότι ισχύει και η απλή Μαρκοβιανή ιδιότητα.

5) Η martingale συμπεριφορά αναπροσαρμόζεται ως εξής:

Αν $\{B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n), t \geq 0\}$, είναι μια n-διάστατη \mathcal{L}_t -κίνηση Brown τότε για την κάθε συντεταγμένη $\{B_t^i, t \geq 0\}$ έχουμε ότι είναι \mathcal{L}_t -κίνηση Brown μιας διάστασης και συνεπώς

$$\{B_t^i, t \geq 0\} \text{ είναι } \mathcal{L}_t\text{-martingale}$$

$$\{(B_t^i)^2 - t, t \geq 0\} \text{ είναι } \mathcal{L}_t\text{-martingale}$$

$$\{B_t^i B_t^j - \delta_{ij} t, t \geq 0\} \text{ είναι } \mathcal{L}_t\text{-martingale για}$$

$$i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Η διαδικασία διεύρυνσης των σ-αλγεβρών \mathcal{L}_t της είναι δυνατή με το ίδιο ακριβώς τρόπο.

Από τώρα και στο εξής όταν αναφερόμαστε σε μια n-διάστατη \mathcal{L}_t -κίνηση Brown θα θεωρούμε ότι: Ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{L}, P) είναι πλήρης και ότι, αν $A \subset N$ με $N \in \mathcal{L}$ και $P(N) = 0$, τότε ισχύει $A \in \mathcal{L}_t$ για κάθε $t \geq 0$.

Συμπέρασμα

Η τυπική Κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία (παίρνει τιμές στο \mathbb{R}) έχει συνεχείς τροχές και είναι διαδικασία Gauss (δηλαδή όλες οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης είναι πολυδιάστατες κανονικές).

$$(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_N}) \sim N(\vec{E}[B_{t_i}], \Sigma_f) \text{ με } E[B_{t_i}] = 0 \forall t \in (0, \infty)$$

Άρα το διάνυσμα των μέσων τιμών είναι $\vec{0}$ και για την συνδιακύμανση μεταξύ των B_{t_i}

$$\text{ξέρουμε ότι } Cov(B_t, B_s) = \min\{t, s\} = s \wedge t$$

$$\Sigma_f = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \dots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

Αν θέλουμε να έχουμε Κινήσεις Brown που ξεκινούν από το $x \in \mathbb{R}$ $B_t^x = x + W_t$ όπου W_t είναι μια τυπική Κίνηση Brown.

Μια Κίνηση Brown με αρχική κατανομή μ . Πάρτε μια τυχαία μεταβλητή X (να την αλλάξω) ανεξάρτητη $\{W_t, t \geq 0\}$ και με κατανομή μ : $B_t^\mu = X + W_t$

Πολυδιάστατη Κίνηση Brown πάρτε ανεξάρτητες $\{W_t^{(i)}, t \geq 0\}$ συνεπώς ανεξάρτητες τυπικές Κινήσεις Brown $B_t = \{W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(d)}, t \geq 0\} i \in [1, \dots, d]$ (Το πρόβλημα αν υπάρχει η Κίνηση Brown γενικά δεν είναι καθόλου τετριμμένο σαν πρόβλημα και μας πήρε μάλιστα 23 χρόνια.)

Κεφάλαιο 2

Κίνηση Brown και restriction measures

2.1 Υπενθύμιση από μιγαδική ανάλυση:

Εάν $D \subset \mathbb{C}$ είναι ένα υποσύνολο μη κενό ανοικτό και απλά συνεκτικό, τότε υπάρχει μια συνάρτηση f που είναι αναλυτική ή ολόμορφη πάνω στο D , αν η μιγαδική παράγωγος υπάρχει παντού στο D . Έχουμε την συνάρτηση $f = u + iv$, όπου η f είναι αναλυτική στο $z = x + iy$ αν και μόνο αν u_x, u_y, v_x, v_y υπάρχουν και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann $u_x = v_y, u_y = -v_x$. Ακόμα η f είναι conformal (σύμμορφη) στο z αν η f είναι αναλυτική με $f'(z) \neq 0$ και γενικότερα ισχύει ότι μια αναλυτική συνάρτηση είναι conformal (σύμμορφη) σε ένα σημείο z αν και μόνο αν είναι τοπικά 1-1. Μπορούμε να πούμε ότι $f: D \rightarrow D'$ είναι ένας conformal (σύμμορφος) μετασχηματισμός εάν η f είναι αναλυτική και 1-1 σε όλο το D . Ας ορίσουμε το D ως εξής: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Ένα σύνολο λέγεται απλά συνεκτικό όταν είναι συνεκτικό και επιπλέον κάθε κλειστή καμπύλη που ανήκει στο σύνολο μπορεί να συρρικνωθεί με συνεχή τρόπο παραμένοντας μέσα στο σύνολο μέχρι να γίνει ένα σημείο. Ποιο παραστατικά, ένα απλό συνεκτικό σύνολο δεν έχει στο εσωτερικό του τρύπες. Σύμφωνα με το Riemann mapping theorem μπορούμε να πούμε ότι εάν το D είναι απλά συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{C} διαφορετικό από ολόκληρο το \mathbb{C} και $z \in D$, τότε υπάρχει μοναδικός conformal (σύμμορφος) μετασχηματισμός $f: D \rightarrow D'$ έτσι ώστε να ισχύει ότι: $f(z) = 0, f'(z) > 0$

2.2 Conformal invariance (σύμμορφη αναλλοίωτη) της Κίνησης Brown

Υποθέτουμε ότι B_t είναι μια μιγαδική κίνηση Brown $B_t = B_t^1 + iB_t^2$, όπου B_t^1, B_t^2 είναι ανεξάρτητες μιας διάστασης κινήσεις Brown. Εάν τώρα το D είναι ένα σύνολο τέτοιο ώστε

$\tau_D = \inf \{t : B_t \notin D\}$ τότε έχουμε την παρακάτω πρόταση

Πρόταση 2.2.1: Έστω $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση. Ακόμα $Y_t = f(B_t), 0 \leq t < \tau_D$ όπου είναι ένας χρόνος αλλαγής μιας Κίνησης Brown. Πιο συγκεκριμένα, $Y_t = f(B_{\sigma_t})$ είναι μια συνηθισμένη Κίνηση Brown όπου το σ_t ικανοποιεί

$$\int_0^{\sigma_t} |f'(B_s)|^2 ds = t$$

Απόδειξη

Αρχικά είναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις u, v πρέπει να είναι αρμονικές πάνω στο σύνολο D ως προϋπόθεση των Cauchy-Riemann εξισώσεων $\Delta u(z) = \Delta v(z) = 0, z \in D$. Ακόμα, η φόρμουλα του Ito μας δίνει για $t < \tau_D$,

$$\begin{aligned} d[u(B_t)] &= u_x(B_t)dB_t^1 + u_y(B_t)dB_t^2 \\ d[v(B_t)] &= v_x(B_t)dB_t^1 + v_y(B_t)dB_t^2 = -u_y(B_t)dB_t^1 + u_x(B_t)dB_t^2 \end{aligned}$$

Πιο συγκεκριμένα,

$$\langle u(B) \rangle_t = \langle v(B) \rangle_t = \int_0^t [u_x(B_s)^2 + u_y(B_s)^2] ds = \int_0^t |f'(B_s)|^2 ds$$

και ισχύει $\langle u(B), v(B) \rangle_t = 0$

Αν $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma^*: [0, T^*] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι δυο συνεχείς καμπύλες, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι $\rho(\gamma, \gamma^*) < \varepsilon$ εάν υπάρχει ένας αυξανόμενος ομομορφισμός μεταξύ των δύο συναρτήσεων $\varphi: [0, T] \rightarrow [0, T^*]$, ώστε $|\gamma(t) - \gamma^*(\varphi(t))| < \varepsilon, 0 \leq t \leq T$. Να σημειώσουμε ότι η ρ είναι μια μετρική πάνω στο σύνολο \mathbb{C} των ισοδύναμων κλάσεων των καμπυλών γ όπου αυτές οι δύο καμπύλες είναι ισοδύναμες αν η μία είναι μια αυξανόμενη παραμετροποίηση της άλλης. Γενικότερα όταν συζητάμε για μέτρα πάνω στον \mathbb{C} εννοούμε μέτρα πάνω στην Borel σ-άλγεβρα που γεννιούνται από την συγκεκριμένη μετρική.

Ακόμα υποθέτουμε ότι το $D \subset \mathbb{C}$ είναι ένα απλό συνεκτικό σύνολο διαφορετικό από ολόκληρο το σύνολο \mathbb{C} και υποθέτουμε ότι η Κίνηση Brown B_t ξεκινάει στο σημείο $z \in D$, με πιθανότητα $P(\tau_D < \infty) = 1$. Ακόμα μπορούμε να σκεφτούμε την $B_t, 0 \leq t \leq \tau_D$, που γεννάει ένα μέτρο πιθανότητας στο \mathbb{C} όπου το ονομάζουμε $\mu_D(z)$. Το οποίο υποστηρίζεται σε καμπύλες που ξεκινούν από ένα σημείο z που βρίσκεται μέσα στο D και μένουν μέσα στο D εκτός από το terminal point (τελικό σημείο) το οποίο βρίσκεται στο σύνορο dD . Όταν

σκεφτόμαστε λοιπόν το μέτρο $\mu_D(z)$ σαν ένα μέτρο πάνω στο \mathbb{C} , αγνοούμε την παραμετροποίηση που δέχεται η καμπύλη, σύμφωνα με το συμπέρασμα μετά την πρόταση 1.

Πρόταση 2.2.2: Έστω D ένα απλό συνεκτικό σύνολο διαφορετικό από το \mathbb{C} , $z \in D$ και $f: D \rightarrow D'$ είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός, τότε

$$f \circ \mu_D(z) = \mu_{D'}(f(z))$$

Σε αυτή την απόδειξη ξεκινώντας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $f \circ \mu_D$ ως εξής $(f \circ \mu_D)(\{f \circ \gamma: \gamma \in V\}) = \mu_{D'}(V)$. Υποθέτουμε, για να διευκολυνθούμε, ότι το σύνορο dD είναι λείο. Αν σκεφτούμε το αρμονικό μέτρο του D που ξεκινάει στο z , τότε έχουμε την κατανομή της $B(\tau_D)$ με αρχικό σημείο το $B_0 = z$. Όσο το dD είναι λείο, μπορούμε να γράψουμε την κατανομή σαν $H_D(z, w) d|w|$ που $H_D(z, w)$ είναι ο Poisson kernel (πυρήνας) για το D . Ομοίως μπορούμε να γράψουμε

$$\mu_D(z) = \int_{dD} \mu_D(z, w) d|w|$$

όπου $\mu_D(z, w)$ αναπαριστά ένα μέτρο στο \mathbb{C} που υποστηρίζεται από καμπύλες που ξεκινάνε από το z και φεύγουν από το D στο w . Το μέτρο $|\mu_D(z, w)|$ είναι $H_D(z, w)$. Το μέτρο πιθανότητας $\mu_D(z, w)/|\mu_D(z, w)|$ μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν κατανομή των Brownian μονοπατιών που ξεκινάνε από το z και φεύγουν από το D στο w . Τώρα εάν $f: D \rightarrow D'$ είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός ο οποίος είναι C^1 στο όριο τότε έχουμε ότι:

$$f \circ \mu_D(z) = |f'(w)| \mu_{D'}(f(z), f(w))$$

2.3 Hulls (Καλύμματα)

Εάν U είναι ένα απλό συνεκτικό σύνολο της σφαίρας Riemann $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \infty$ του οποίου το συμπλήρωμα είναι $H^* = \mathbb{C}^* \setminus U$ και είναι μεγαλύτερο από ένα σημείο, τότε μπορούμε να ονομάσουμε το $H := H^* \cap \mathbb{C}$ κάλυμμα. Εάν D είναι ένα απλό συνεκτικό σύνολο, τότε μπορούμε να πούμε ότι τα $H_0(D), H_1(D), H_2(D)$, είναι τα υποσύνολα του H τα οποία περιέχονται στο \bar{D} των οποίων η τομή του καθενός με το dD περιέχει ακριβώς 0, 1, 2 σημεία αντίστοιχα. Να σημειώσουμε ότι εάν $H \in H_j(D)$ τότε $D \setminus H$ είναι κανονικά ισοδύναμο με

ένα δακτύλιο εάν $j=0$, είναι απλά συνεκτικό το σύνολο αν $j=1$ και η ένωση δύο ξένων απλών συνεκτικών συνόλων εάν $j=2$.

Εάν η $\gamma:[0,T] \rightarrow \bar{D}$ είναι μια συνεχή καμπύλη, ξεχωρίζουμε το κάλυμμα της γ , $H(\gamma)$, έτσι ώστε το μονοπάτι της γ να είναι γεμάτο. Πιο συγκεκριμένα, $H(\gamma)$ είναι το συμπλήρωμα του unbounded component(ανοικτού υποσυνόλου) του $\mathbb{C} \setminus \gamma[0,T]$. Μπορούμε να θεωρήσουμε το $\mu_D(z)$ ή το $\mu_D(z,w)$ σαν μέτρα πάνω στο κάλυμμα $H_1(D)$. Τώρα για την ακρίβεια, χρειάζεται να συγκεκριμενοποιήσουμε μια σ -άλγεβρα για όλα τα καλύμματα του D . Η σ -άλγεβρα που χρειάζεται να δημιουργήσουμε από τα ενδεχόμενα V_U όπου U είναι απλό συνεκτικό υποσύνολο του D όπου περιέχει το z και V_U είναι μια συλλογή από καλύμματα που περιέχονται μέσα στο U (εκτός από το οριακό σημείο). Ένα πεπερασμένο μέτρο $\mu_D(z)$ δίνεται από το $\mu_D(z)$ μέτρο του V_U για κάθε U . Να σημειώσουμε ότι η πιθανότητα το κάλυμμα $H(\gamma)$ να είναι μέσα στο U είναι ίδια με την πιθανότητα το μονοπάτι της καμπύλης γ να μείνει μέσα στο U . Αυτή η πιθανότητα είναι το μέτρο του dD με σεβασμό στο αρμονικό μέτρο μέσα στο U ξεκινώντας από το z , θα μπορούσαμε να πούμε δηλαδή ότι είναι η πιθανότητα η Κίνηση Brown να ξεκινάει από το z και να φτάνει στο dD χωρίς να έχει φύγει πρώτα από το U .

2.4 Brownian excursions

Έστω D ένα απλό συνεκτικό σύνολο με λείο σύνορο, και ένα $z \in dD$. Έστω τώρα n , και για κάθε z μέσα στο D το ορίζουμε ως εξής $z_\varepsilon = z + \varepsilon n$. Τώρα το Brownian excursion μέτρο στο z $\mu_D(z)$ είναι ορισμένο για να είναι το

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \mu_D(z_\varepsilon).$$

Αυτό το μέτρο υποστηρίζεται από καμπύλες που ξεκινούν από το z , και μπαίνουν κατευθείαν στο D , λειτουργούν σαν κινήσεις Brown μέσα στο D , και μετά “πεθαίνουν μόλις χτυπήσουν στο όριο dD . Εάν A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του dD που δεν περιέχει το z , τότε το μέτρο $\mu_D(z)$ του συνόλου των καμπυλών που ξεκινούν από το z και φεύγουν από το D στο A είναι αυστηρά μεταξύ του 0 και του άπειρο. Ακόμα είναι απλό να δείξουμε ότι εάν $f:D \rightarrow D'$ είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός $z \in dD$, τότε

$$f \circ \mu_D(z) = |f'(z)| \mu_D'(f(z))$$

Ο έξτρα συντελεστής $|f'(z)|$ προκύπτει από το γεγονός ότι $f(z_\epsilon) \approx f(z) + |f'(z)| n^*$ όπου το n^* είναι το ίδιο με το n στο D' στο σημείο $f(z)$. Επίσης μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\mu_D(z) = \int_{dD} \mu_D(z, w) d|w|$$

όπου το $\mu_D(z)$ είναι μέτρο πάνω στις καμπύλες που ξεκινάει από το z και τελειώνει στο w .

Το μέτρο $|\mu_D(z)|$ είναι αυστηρά ανάμεσα από το 0 και από τό ∞ για $z \neq w$

χρησιμοποιώντας την λειότητα του dD . Αυτά τα μέτρα ικανοποιούν την σχέση

$$f \circ \mu_D(z) = |f'(z)| |f'(w)| \mu_D'(f(z), f(w))$$

το excursion μέτρο μ_D ορίζεται ως εξής

$$\mu_D = \int_{dD} \mu_D(z) d|z| = \int_{dD} \int_{dD} \mu_D(z, w) |dz| |dw| .$$

Να σημειώσουμε

$$f \circ \mu_D = \int_{dD} f \circ \mu_D(z) |dz|$$

$$f \circ \mu_D = \int_{dD} |f'(z)| \mu_D'(f(z)) |dz|$$

$$f \circ \mu_D = \int_{dD} \mu_D'(w) d|w| = \mu_D'$$

Με άλλα λόγια θα μπορούσαμε να πούμε ότι το excursion μέτρο παραμένει ουσιαστικά ανεπηρέαστο μετά από ένα κανονικό μετασχηματισμό.

Εάν $z, w \in dD$ με $z \neq w$ και μπορούμε να δείξουμε ότι το $|\mu_D(z)|$ θα είναι ένα μέτρο πιθανότητας, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το συγκεκριμένο μέτρο σαν ένα μέτρο μιας Κίνησης Brown που ξεκινάει από το z και είναι προγραμματισμένη να μπει αμέσως στο D και να βγεί από το w . Αυτό το μέτρο πιθανότητας είναι κανονικά αναλλοίωτο. Εμείς λοιπόν μπορούμε να εξετάσουμε την πρόοδο αυτού του μοντέλου αν το εξετάσουμε στο πιο βολικό του υποσύνολο. Ένα πιο βολικό του υποσύνολο είναι το πάνω μέρος των αξόνων x, y

$H = x + iy: y > 0$ με όριο τα σημεία 0 και ∞ . Ακόμα μια excursion Z_t έχει την ίδια

κατανομή όπως $B_t^1 + i|W_t|$, όπου B_t^1, W_t είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου η

B_t^1 είναι μια τυπική Κίνηση Brown και η W_t είναι μια τρισδιάστατη Κίνηση Brown. Η $|W_t|$

έχει την ίδια κατανομή με μια ανέλιξη Y_t που ικανοποιεί την εξίσωση Bessel.

$$dY_t = \frac{1}{Y_t} dt + dB_t^2$$

Εάν τώρα κάποιος θα ήθελε να τσεκάρει κόμματα του γραφήματος της Brownian excursion στο H από το 0 μέχρι το ∞ αν ικανοποιεί την εξίσωση Bessel, το μόνο που χρειάζεται να ελέγξει είναι ότι μία διαστατική κίνηση Brown Y_t παραμένει σε όλα τα σημεία θετική και ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη. Αυτό κανείς μπορεί να το ελέγξει είτε μέσω του “Girsanov μετασχηματισμού” είτε μέσω “h-processes”.

Ακόμα έστω ένα συμπαγές υποσύνολο A το οποίο δεν περιέχει το αρχικό σημείο όπως το $H \setminus A$ που είναι ένα απλό συνεκτικό σύνολο. Υποθέτουμε $\Phi: H \setminus A \rightarrow H$ είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός με $\Phi(0)=0, \Phi(\infty)=\infty$ και τέτοιο ώστε $\Phi(z)=z+O(1)$ ώστε $z \rightarrow \infty$. Η πιθανότητα λοιπόν το μονοπάτι της Brownian excursion από το 0 μέχρι το ∞ στο H να μην περιέχει το A είναι $\Phi'(0)$.

2.5 Restriction Property

Υποθέτουμε $D' \subset D$ είναι δύο απλά συνεκτικά σύνολα διαφορετικά από το \mathbb{C} με λεία σύνορα, $z, w \in dD$ και το dD και το dD' ταυτίζονται κοντά στο z και στο w . Ακόμα το μέτρο $\mu_{D'}(z, w)$ είναι το ίδιο με το $\mu_D(z, w)$ περιορισμένο στα καλύμματα $H \in H_2(D)$ με $H \cap D \subset D'$.

Αυτή την ιδιότητα την ονομάζουμε restriction property (περιορισμένη ιδιότητα). Ίδιες “περιορισμένες ιδιότητες” μπορούμε να δούμε για $\mu_{D'}(z)$ και μ_D αντίστοιχα.

Η restriction property είναι σχεδόν άμεση από τον ορισμό και δεν φαίνεται να είναι σημαντικό να την αναφέρουμε. Όμως, υπάρχουν πολλές κανονικές αναλλοίωτες οικογένειες μέτρων οι οποίες δεν ικανοποιούν την ιδιότητα, παρά μόνο μια μονοπαραμετρική κανονική αναλλοίωτη οικογένεια μέτρων η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα.

2.6 Chordal restriction measures

Υποθέτουμε $m_D(z, w)$ είναι μια οικογένεια από μέτρα πάνω στα καλύμματα, όπου το D καλύπτει όλα τα απλά συνεκτικά υποσύνολα του \mathbb{C} με μη κενά λεία σύνορα και τα z, w είναι διακριτά σημεία στο σύνορο D . Ακόμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $m_D(z, w)$ είναι

στηριζόμενα στα καλύμματα $H \in H_2(D)$ με $H \cap dD = \{z, w\}$. Αυτή την οικογένεια την αποκαλούμε chordal restriction family με εκθέτη α εάν

-Για κάθε D, z, w $|m_D(z, w)| \in (0, \infty)$

-Restriction property (περιορισμένη ιδιότητα): Εάν $D' \subset D$ και dD' συμφωνεί με dD κοντά στα z, w τότε $m_{D'}(z, w)$ είναι $m_D(z, w)$ περιορισμένα στα καλύμματα H με $H \cap D \subset D'$

-Conformal covariance (κανονική συνδιασπορά): εάν $f: D \rightarrow D'$ είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός τότε

$$f \circ m_D(z, w) = |f'(z)|^\alpha |f'(w)|^\alpha m_{D'}(f(z), f(w))$$

Σημειώνουμε ότι

-Ο όρος conformal covariance χρησιμοποιείται για να δείξει την κανονική αναλλοίωτη σύμφωνα με έναν αριθμητικό δείκτη διόρθωσης.

-Μπορούμε να ορίσουμε και άλλα restriction μέτρα με άλλους αριθμητικούς δείκτες

$$f \circ m_D(z, w) = C(z, w, D, f) m_{D'}(f(z), f(w))$$

Όμως μπορούμε να δούμε ότι η πιθανότητα για το $C(z, w, D, f)$ είναι να είναι για κάποιο α ίσο με

$$|f'(z)|^\alpha |f'(w)|^\alpha$$

-Ακόμα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι εάν έχουμε D, D' δύο απλα συνεκτικά σύνολα με λεία σύνορα και $z, w \in dD, z', w' \in dD'$ είναι οριακά σημεία τότε υπάρχουν πάρα πολλοί διαφορετικοί κανονικοί μετασχηματισμοί $f: D \rightarrow D'$ με $f(z) = z', f(w) = w'$. Όμως, η ποσότητα $|f'(z)| |f'(w)|$ είναι η ίδια για όλους τους διαφορετικούς μετασχηματισμούς.

- Επίσης μπορούμε να σκεφτούμε τα μέτρα πιθανότητας $m_D^\#(z, w) = \frac{m_D(z, w)}{|m_D(z, w)|}$. Αυτή η

οικογένεια μετρών ικανοποιεί την conformal invariance

$$f \circ m_D^\#(z, w) = m_{D'}^\#(f(z), f(w)).$$

Η restriction property μπορεί να χρησιμοποιηθεί με μια κατά συνθήκη κατανομή του μέτρου $m_D^\#(z, w)$. Ακόμα μπορούμε να πούμε ότι αυτά τα μέτρα πιθανότητας είναι καλά ορισμένα ακόμα και αν το σύνορο dD δεν είναι λείο.

-Η chordal restriction family με εκθέτη α καθορίζεται από το μέτρο $m_D(-1, 1)$ με $m_D(z, w)$ για άλλα D, z, w μπορεί να αποφασιστεί από την παρακάτω σχέση:

$$f \circ m_D(z, w) = C(z, w, D, f) m_{D'}(f(z), f(w))$$

- Τώρα ας υποθέσουμε ότι $m_D(-1, 1) = \mu_D(-1, 1)$ όπου το μ εκφράζει το Brownian

excursion μέτρο. Πάλι για διαφορετικά D, z, w για να ορίσουμε το m_D χρησιμοποιούμε πάλι την σχέση που βγάλαμε από την chordal restriction family:

$$f \circ m_D(z, w) = C(z, w, D, f) m_D'(f(z), f(w))$$

-Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $m_D^1(z, w), m_D^2(z, w)$ είναι δύο restriction families με εκθέτες α^1, α^2 αντίστοιχα. Ορίζουμε $m_D(z, w) = m_D^1(z, w) \times m_D^2(z, w)$, μπορούμε να το σκεφτούμε σαν ένα μέτρο πάνω στα καλύμματα με την παρακάτω διαδικασία: εάν H^1, H^2 , είναι δυο ξένα μεταξύ τους καλύμματα, ας υποθέσουμε ότι H είναι το κάλυμμα που γεννάται από $H^1 \cup H^2$, εάν H^1, H^2 , είναι φραγμένα, τότε το H θα είναι το “συμπλήρωμα ανοικτού κομματιού” του $H^1 \cup H^2$. Ακόμα, εάν το ενδεχόμενο V_U είναι ο λόγος εξαιτίας του οποίου η τομή του καλύμματος με το D περιέχεται σε ένα απλό συνεκτικό σύνολο U , τότε

$$m_D(z, w)[V_U] = m_D^1(z, w)[V_U] m_D^2(z, w)[V_U]$$

Ακόμα το $m_D(z, w)$ είναι μια restriction family με εκθέτες $\alpha^1 + \alpha^2$. Πιο συγκεκριμένα, για θετικά α , η ένωση μιας Brownian excursions έχει σαν αποτέλεσμα μια restriction family με εκθέτη α .

-Universality. Για κάθε α , υπάρχει τουλάχιστον ένα restriction measure με exponent που ικανοποιεί το $|m_D(-1, 1)| = 1$. Μπορούμε να το δούμε αυτό από $m_D(-1, 1)$ που ικανοποιεί την οικογένεια, αλλά εάν το U είναι ένα απλό συνεκτικό υποσύνολο του D όπου το συνόρο του dD περιέχει περιοχές που περιέχουν το -1 και το 1 , τότε η πιθανότητα $m_D(-1, 1)$ ότι τα καλύμματα περιέχονται μέσα στο U μπορεί να αποφασιστεί με χρήση της γνωστής μας σχέσης $f \circ m_D(z, w) = C(z, w, D, f) m_D'(f(z), f(w))$. Για αυτό το λόγο μιλάμε για την restriction family με εκθέτη α (η οποία ορίζεται πραγματικά μόνο μέχρι μια πολλαπλασιαστική σταθερά). Υπάρχουν πάρα πολλές restriction οικογένειες μέτρων που βρίσκονται πάνω σε καλύμματα. Κάποιος μπορεί να ισχυριστεί ότι τέτοιες οικογένειες μέτρων μπορούν να οριστούν και πάνω σε καμπύλες. Όμως το γενικό αποτέλεσμα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην συγκεκριμένη περίπτωση. Αυτός είναι και ο λόγος εξαιτίας του οποίου θεωρούμε ότι τα καλύμματα παράγονται από τις καμπύλες και όχι από τις διαδρομές των καμπυλών.

-Για μικρό $\alpha > 0$, δεν υπάρχει restriction family. Για να δούμε αυτόν τον ισχυρισμό θεωρούμε $m_D(z, w)$ είναι μια οικογένεια με $|m_D(-1, 1)| = 1$. Αν σκεφτούμε και τα slit(διαχωρισμένα) σύνολα που είναι τα παρακάτω:

$$D^1 = D \setminus [0, i], D^2 = D \setminus [-i, 0].$$

Τότε η $m_D(-1,1)$ πιθανότητα ότι ένα κάλυμμα μένει στο D^1 είναι $|f'(-1)|^\alpha |f'(1)|^\alpha$ όπου $f: D \rightarrow D'$ είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός με $f(-1)=-1, f(1)=1$. Ομοίως η $m_D(-1,1)$ πιθανότητα ότι ένα κάλυμμα μένει στο D^2 είναι $|f'(-1)|^\alpha |f'(1)|^\alpha$. Όμως αυτά τα ενδεχόμενα είναι ξένα οπότε πρέπει να έχουμε ότι $2|f'(-1)|^\alpha |f'(1)|^\alpha \leq 1$. Ψάχνοντας την κατάλληλη f ανακαλύπτουμε ότι $\alpha \geq 1/2$. (Αυτό δεν σημαίνει κιόλας ότι η οικογένεια δεν υπάρχει αν για το α δεν ισχύει ότι $\alpha \geq 1/2$).

Ο όρος γενικότητα μπορεί να μοιάζει λίγο περίεργος για ένα τέτοιο μοναδικό αποτέλεσμα. Όμως, ένας άλλος τρόπος να σκεφτούμε ότι οποιοδήποτε lattice model το οποίο έχει ένα συνεχές όριο μας δίνει μια chordal restriction family (ικανοποιεί την restriction property και την conformal covariance) η οποία πρέπει να είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια μέτρων. Την παράμετρο α μπορούμε να την σκεφτούμε (χοντρικά) σαν τον αριθμό των Brownian excursions. Φυσικά αυτό έχει νόημα μόνο για ακέραιο α . Θα τελειώσουμε αυτό το κομμάτι με ένα θεώρημα χωρίς απόδειξη που μας λέει πότε υπάρχει μια restriction family.

Θεώρημα Ύπαρξης Chordal restriction families

Chordal restriction families $m_D(z, w)$ υπάρχουν για όλα τα $\alpha \geq 5/8$ και για καμία άλλη τιμή του α . Για $\alpha = 5/8$ τα μέτρα υποστηρίζονται από απλές καμπύλες (non-self-intersecting) καμπύλες. Για $\alpha > 5/8$ τα μέτρα δεν υποστηρίζονται από απλές καμπύλες. Για $\alpha = 5/8$ και $|m_D(-1,1)|=1$, τότε $m_D(-1,1)$ είναι το ίδιο με την κατανομή της chordal $SLE_{8/3}$ από το -1 στο 1 μέσα στο σύνολο D .

Κεφάλαιο 3

Stochastic Loewner evolution(SLE)

3.1 Motivation

Υποθέτουμε ένα απλό συνεκτικό σύνολο D και δύο διαφορετικά σημεία που βρίσκονται στο σύνορο dD . Εμείς ενδιαφερόμαστε κυρίως για μέτρα πιθανότητας πάνω σε συνεχείς καμπύλες $\gamma:[0,T] \rightarrow \bar{D}$ με $\gamma(0)=z, \gamma(T)=w$. Ακόμα μπορούμε να πούμε ότι ενδιαφερόμαστε κυρίως για παραμετρικοποιημένες καμπύλες, εάν $\gamma^1:[0,T^1] \rightarrow \bar{D}$ είναι μία άλλη καμπύλη, τότε μπορούμε να πούμε για τις γ και γ^1 ότι είναι ισοδύναμες καμπύλες αν υπάρχει ένας αυξανόμενος ομομορφισμός $\varphi:[0,T] \rightarrow [0,T^1]$ τέτοιος ώστε $\gamma(t)=\gamma^1(\varphi(t)), 0 \leq t \leq T$. Σε αυτή την περίπτωση επιτρέπουμε στις καμπύλες μας να διασταυρώνονται με τον εαυτό τους(self intersections) αλλά δεν τις αφήνουμε να έχουν self-crossings. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη μπορεί να χτυπήσει το παρελθόν της. Μπορούμε να ονομάσουμε αυτές τις καμπύλες ως non-crossing. Να σημειώσουμε κιόλας ότι η Brownian excursions στο D δεν έχουν αυτή την ιδιότητα.

Τώρα μπορούμε να φανταστούμε τα μέτρα πιθανότητας $q_D(z, w)$ στις non-crossing καμπύλες όπου συνδέουν το z με το w . Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να παραμετρικοποιήσουμε έτσι ώστε να έχουμε $T=\infty$. Εμείς ενδιαφερόμαστε για μέτρα που πρέπει να πληρούν σίγουρα τις δύο παρακάτω προϋποθέσεις:

-conformal invariance: εάν $f:D \rightarrow D'$ είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός ο οποίος είναι συνεχείς μέχρι το σύνορο, τότε

$$f \circ q_D(z, w) = q_{D'}(f(z), f(w))$$

-Μαρκοβιανή ιδιότητα: υποθέτουμε ότι ξέρουμε μια καμπύλη γ για το χρόνο t . Μετά χρησιμοποιούμε για την καμπύλη $\gamma[0,t]$ την κατανομή του $\gamma[t, \infty)$ όπου θα είναι το ίδιο με το $q_{D_t}(\gamma(t), w)$. Εδώ το D_t είναι το συνεκτικό σύνολο του $D \setminus \gamma[0, t)$ όπου στο σύνορο

του υπάρχει το w .

Μπορούμε να φανταστούμε τα μέτρα πιθανότητας $\tilde{q}_D(z, w)$ στις non-crossing καμπύλες στο \bar{D} όπου από ένα σημείο z στο σύνορο θα πηγαίνουμε σε ένα σημείο εντός συνόλου το w . Ακόμα ενδιαφερόμαστε για καμπύλες με modulo παραμετρικοποίηση και επιλέγουμε την κατάλληλη παραμετρικοποίηση έτσι ώστε $\gamma(0)=z, w \notin \gamma[0, \infty), \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)=w$. Σε αυτή την περίπτωση το D_t είναι το συνεκτικό σύνολο του $D \setminus \gamma[0, t]$ όπου περιέχει το w . Και σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ικανοποιούν τις δύο παραπάνω προϋποθέσεις (conformal invariance, Μαρκοβιανή ιδιότητα) οι καμπύλες. Από τη στιγμή που υποθέτουμε conformal invariance (κανονική αναλλοίωτη), αρκεί να ορίσουμε τα μέτρα $q_D(z, w)$, $\tilde{q}_D(z, w)$ κυρίως για καλά σύνολα. Ακόμα μπορούμε να επιλέξουμε $q_H(0, \infty)$ και $\tilde{q}_D(w, 0)$, όπου H είναι το πάνω μισό των δύο αξόνων x, y και D είναι ο απλός δίσκος με $|w|=1$.

3.2 Loewner differential equation

Πρόταση 3.2.1

Στις επόμενες ενότητες θα αναλύσουμε μερικές προϋποθέσεις για τα γραφήματα που απεικονίζουν ένα υποσύνολο του H στο H . Θα καταγράψουμε αυτές τις προϋποθέσεις, αλλά δεν θα ασχοληθούμε με την επαληθευσή τους ακόμη. Υποθέτουμε ένα κλειστό υποσύνολο του \bar{H} όπως το $H_A = H \setminus A$ που είναι και απλά συνεκτικό. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

Υπάρχει ένας μοναδικός κανονικός μετασχηματισμός $g_A: H_A \rightarrow H$ έτσι ώστε:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g_A(z) - z = 0$$

Υπάρχει ένας αριθμός $a(A) \geq 0$ τέτοιος ώστε $z \rightarrow \infty$

$$g_A(z) = z + \frac{a(A)}{z} + O(|z|^{-2}).$$

Έστω B_s είναι μια κανονική Κίνηση Brown που ξεκινάει από το $z \in H_A$ και έχουμε

$$\tau = \tau_A = \inf \{s: B_s \notin H_A\}.$$

Ακόμα

$$\Im[g_A(z)] = \Im(z) - E^z[\Im(B_\tau)]$$

Πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y E^{iy} [\Im(B_\tau)] = \alpha(A).$$

Ακόμα η $h(z) = \Im[z - g_A(z)]$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, και αρμονική στο H_A .

Εάν $r > 0$, τότε $\alpha(rA) = r^2 \alpha(A)$

Ακόμα υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 ώστε για όλα τα A , αν

$$V_A = \bigcup_{x+iy \in A} B(x+iy, y),$$

όπου $B(z, \varepsilon)$ είναι κλειστός δίσκος με ακτίνα ε και κέντρο το z , ακόμα να ισχύει

$$c_1 \alpha(A) \leq \text{area}(V_A) \leq c_2 \alpha(A)$$

Chordal 3.2.2

Υποθέτουμε $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \bar{H}$ είναι μια συνεχή non-crossing καμπύλη με $\gamma(t) \rightarrow \infty$ όσο $t \rightarrow \infty$.

Για κάθε t , έστω H_t είναι το μη φραγμένο συνεκτικό υποσύνολο του $H \setminus \gamma[0, t]$, και έστω

ακόμη g_t είναι μοναδικός κανονικός μετασχηματισμός του H_t στο H έτσι ώστε

$g_t(z) - z = o(1)$ με $z \rightarrow \infty$. Τότε το g_t έχει μια επέκταση στο άπειρο,

$$g_t(z) = z + \frac{\alpha(t)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), z \rightarrow \infty.$$

Επίσης μπορούμε να πούμε ότι αν $\alpha(t)$ είναι συνεχής και δεν μειώνεται στο t . Ακόμα, εαν $s < t$ και $H_t \neq H_s$, τότε θα έχουμε $\alpha(t) > \alpha(s)$.

Ο στόχος αυτής της παρατήρησης είναι ότι βλέπουμε ότι εάν φτιάξουμε μια μόνο ελαφρώς ισχυρότερη παραδοχή έτσι ώστε $\alpha(t) \rightarrow \infty$ όσο $t \rightarrow \infty$, τότε μπορούμε να παραμετροποιήσουμε την γ όπως για παράδειγμα $\alpha(t) = 2t$. Υπενθυμίζουμε ότι σε αυτή τη περίπτωση η γ παραμετροποιείται με αυτόν το τρόπο. Από αυτό βλέπουμε ότι, η g_t

ικανοποιεί την chordal Loewner differential equation $\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, g_0(z) = z,$

όπου $U_t = g_t(\gamma(t))$. Η παρακάτω εξίσωση είναι γραμμένη σύμφωνα με τον αντίστροφο μετασχηματισμό $f_t(z) = g_t^{-1}(z),$

$$\frac{d}{dt}f_t(z)=\frac{-2f_t'(z)}{z-U_t}.$$

Αντίστοιχα, εάν $U:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, είναι μια συνεχή συνάρτηση, όπου για κάθε $z\in H$, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών. Αυτή η λύση είναι καλά ορισμένη για το χρόνο $T_z\in(0,\infty)$. Για συγκεκριμένο t, g_t που είναι κανονικός μετασχηματισμός του $H_t:=\{z:T_z>t\}$ στο H με $g_t(z)-z=o(1)$ όσο $z\rightarrow\infty$. Δεν είναι μόνο αυτές οι συνθήκες, αλλά πρέπει να υπάρχει μια καμπύλη γ ώστε H_t να είναι το μη φραγμένο συνεκτικό υποσύνολο του $H\setminus\gamma[0,t]$, και $U_t=g_t(\gamma(t))$. Μια σημαντική αλλά όχι απαραίτητη συνθήκη είναι το U_t να έχει αρκετά μικρή Holder-(1/2) νόρμα, σε αυτή την περίπτωση λοιπόν η γ είναι μια απλή καμπύλη.

Behavior under conformal maps 3.2.3

Υποθέτουμε ότι η γ είναι μια καμπύλη όπως στην προηγούμενη υποενότητα, και μπορούμε να υποθέσουμε $\Phi:N\rightarrow H$ είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός ορισμένος σε μια γειτονία του N στο $\mathbb{0}$ μέσα στο H που περιέχει την $\gamma[0,t]$ και που στέλνει τό $dN\cap\mathbb{R}$ στο \mathbb{R} . Ορίζουμε $\bar{\gamma}(t)=\Phi\circ\gamma(t)$, και έστω $\bar{g}_t(t)$ μέσω του κανονικού μετασχηματισμού στέλνει το μη φραγμένο υποσύνολο $H\setminus\bar{\gamma}[0,t]$ στο H με $\bar{g}_t(z)-z=o(1)$ όσο $z\rightarrow\infty$. Ορίζουμε ακόμη $h_t=\bar{g}_t\circ\Phi\circ g_t^{-1}$. Δύο αποτελέσματα που μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι τα εξής:

Έστω $\bar{\alpha}(t)=\alpha(\bar{\gamma}[0,t])$. Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\bar{\alpha}(t)=h_t'(U_t)^2.$$

Ακόμα μπορούμε να δείξουμε ότι η $\bar{g}_t(z)$ ικανοποιεί την τροποποιημένη Loewner equation

$$\frac{d}{dt}\bar{g}_t(z)=\frac{2h_t'(U_t)^2}{\bar{g}_t(z)-\bar{U}_t}, \bar{g}_0(z)=z,$$

όπου $\bar{U}_t=\bar{g}_t\circ\Phi\circ g_t^{-1}(U_t)$.

Σύμφωνα με την δεύτερη παρατήρηση και τον κανόνα αλυσίδας, μπορούμε να δούμε ότι

$$\frac{d}{dt}h_t(z)=\frac{2h_t'(U_t)^2}{h_t(z)-\bar{U}_t}-\frac{2h_t'(z)}{z-U_t},$$

τουλάχιστον για z κοντά στο U_t . Ακόμα,

$$\frac{d}{d_t} h_t(U_t) = \lim_{z \rightarrow U_t} \left(\frac{2h'_t(U_t)^2}{h_t(z) - \bar{U}_t} - \frac{2h'_t(z)}{z - U_t} \right) = -3h''_t(U_t).$$

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{d}{d_t} h'_t(z) = \frac{2h'_t(z)}{(z - U_t)^2} - \frac{2h''_t(z)}{z - U_t} - \frac{2h'_t(U_t)^2 h'_t(z)}{(h_t(z) - \bar{U}_t)^2}$$

και

$$\frac{d}{d_t} h'_t(U_t) = \lim_{z \rightarrow U_t} d_t h'_t(z) = \frac{h''_t(U_t)^2}{h'_t(U_t)} - \frac{4h'''_t(U_t)}{3}.$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τους ' για να δείξουμε τις z -παραγώγους.

Radial 3.2.4

Υποθέτουμε $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \bar{D}$ είναι μια αυτοαποφεύγων καμπύλη με $\gamma(0) = w \in dD, 0 \notin \gamma(0, \infty)$ και $\gamma(t) \rightarrow 0$ όσο $t \rightarrow \infty$. Έστω D_t είναι το υποσύνολο του $D \setminus \gamma[0, t]$ που περιέχει την αρχική τιμή και έστω \bar{g}_t είναι μοναδικός κανονικός μετασχηματισμός από το D_t στο D με $\bar{g}'_t(0) > 0$. Εάν $s < t$ και $D_s \neq D_t$, τότε μπορούμε να δούμε ότι $\bar{g}'_t(0) > \bar{g}'_s(0)$ σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να παραμετροποιήσουμε το γ από το 0 μέσα στο D έτσι ώστε $\bar{g}'_t(0) = e^t$. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, η \bar{g}_t ικανοποιεί την radial Loewner differential equation

$$\frac{d}{d_t} \bar{g}_t(z) = -\bar{g}_t(z) \frac{\bar{g}_t(z) + e^{iU_t}}{\bar{g}_t(z) - e^{iU_t}}, \bar{g}_0(z) = z, \quad (i)$$

όπου $U: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\bar{g}_t(\gamma(t)) = e^{iU_t}$. Εάν $\bar{g}_t(z) = e^{ih_t(z)}$ (τοπικά) μπορούμε να γράψουμε την διαφορική εξίσωση ως εξής

$$\frac{d}{d_t} h_t(z) = \cot \left[\frac{h_t(z) - U_t}{2} \right].$$

3.3 Stochastic Loewner evolution

Chordal 3.3.1

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια κατανομή πιθανότητας πάνω σε αυτοαποφεύγων καμπύλες $\gamma:(0,\infty)\rightarrow\bar{H}$ με $\gamma(0)=0$, οι οποίες παραμετροποιούνται σύμφωνα με την capacity(χωρητικότητα) ικανοποιώντας τις συνθήκες από το **Motivation 3.1**. Μετά, τα

γραφήματα της g_t είναι τυχαία και ικανοποιούν την σχέση $\frac{d}{dt}g_t(z)=\frac{2}{g_t(z)-U_t}$, $g_0(z)=z$.

Αυτή η σχέση δίνει προϋποθέσεις στην συνάρτηση U_t : στην πραγματικότητα, μπορούμε να πούμε ότι για $s<t$, U_t-U_s είναι ανεξάρτητες από την U_r , $0\leq r\leq s$, και έχουμε την ίδια κατανομή όπως U_{t-s} . Επίσης είναι πολύ γνωστό ότι η μόνη διαδικασία με συνεχή μονοπάτια που την ικανοποιεί, είναι η γνωστή μας Κίνηση Brown. Υπάρχουν δύο παράμετροι που μπορούμε να επιλέξουμε η πρώτη είναι η μέση τιμή μ και η δεύτερη η διασπορά σ^2 . Εάν έχουμε την συνθήκη ισορροπίας, και η κατανομή $q_H(0,\infty)$ είναι συμμετρική ως προς τον φανταστικό άξονα, τότε μπορούμε να ξέρουμε ότι $\mu=0$. Επίσης είναι σίγουρο ότι χρησιμοποιούμε το κ για διασπορά.

Παρατήρηση

Η chordal Stochastic Loewner evolution με παράμετρο $\kappa>0$, περιγράφεται από SLE_κ , είναι μια τυχαία συλλογή από γραφήματα του g_t που γεννιούνται από το πρόβλημα αρχικών

τιμών, δηλαδή από την σχέση $\frac{d}{dt}g_t(z)=\frac{2}{g_t(z)-U_t}$, $g_0(z)=z$, όπου $U_t=\sqrt{\kappa}B_t$ και B_t είναι

μια τυπική μονοδιάστατη Κίνηση Brown.

Ακόμα μπορούμε να πούμε ότι δεν είναι φανερό, αλλά το έχουμε αποδείξει, ότι υπάρχουν τυχαίες καμπύλες γ που γεννούν την g_t με άλλα λόγια, η g_t είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός από ένα μη φραγμένο υποσυνόλο $H\setminus\gamma[0,t]$ στο H και $g_t(\gamma(t))=\sqrt{\kappa}B_t$.

Οι καμπύλες είναι ακόμα γνωστές ως chordal SLE_κ .

Μια ακόμα παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ο Κλιμακωτός Νόμος(Scaling Law).

Υποθέτουμε $\gamma(t)$ είναι ένα SLE_κ , μονοπάτι, με $r > 0$ και $\gamma^*(t) = r\gamma(t)$. Ακόμα μπορούμε να δείξουμε ότι η γ^* έχει την ίδια κατανομή με την κατανομή μιας αλλαγής χρόνου της SLE_κ .

Οι ιδιότητες των SLE_κ μονοπατιών:

Οι παρακάτω ιδιότητες ισχύουν με πιθανότητα 1.

Η Hausdorff dimension των μονοπατιών είναι υπολογισμένη ώστε να είναι το $\min\{1 + (\kappa/8), 2\}$. Αυτό έχει αποδειχθεί στις περιπτώσεις όπου το $\kappa = 8/3, \kappa = 6$ και το πάνω όριο είναι γνωστό για όλα τα κ . (Δείτε το 4.1 για μία αναφορά στην Hausdorff dimension.)

Εάν $\kappa \leq 4$, τότε η γ είναι ένα απλό μονοπάτι που αποφεύγει το όριο, εάν $0 < s < t$ τότε $\gamma(s), \gamma(t) \in H$ και $\gamma(s) \neq \gamma(t)$.

Εάν $4 < \kappa < 8$, τότε τα μονοπάτια των SLE έχουν self-intersections. Ακόμα τα μονοπάτια χτυπούν τον κανονικό άξονα, και $\bigcap_{\tau > 0} H_\tau = \emptyset$.

Εάν $\kappa \geq 8$ τα μονοπάτια είναι space-filling (Το πάνω όριο μας δείχνει ότι τα μονοπάτια δεν μπορούν να είναι space-filling για $\kappa < 8$).

Ο τρόπος για να αντλήσουμε τέτοιες γεωμετρικές και fractal ιδιότητες από μια καμπύλη γ είναι να αναλύσεις της μιας διάστασης στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Έστω ότι σκεφτόμαστε την περίπτωση των διπλών σημείων σε ποια περίπτωση για συγκεκριμένο κ μπορούμε να βρούμε μονοπάτια που έχουν διπλά σημεία. Ας σκεφτούμε τι μπορεί να συμβεί αν μια καμπύλη έχει διπλά σημεία. Από το παρελθόν της καμπύλης, η καμπύλη είναι κανονικά ισοδύναμη σε ένα σημείο στον πραγματικό άξονα, το οποίο σημαίνει ότι η καμπύλη έχει την ευκαιρία να χτυπήσει τον πραγματικό άξονα. Τώρα μπορούμε να κάνουμε ίσως μια παρόμοια ερώτηση; Ας σκεφτούμε ένα κάλυμμα $K_t := \bar{H} \setminus \bar{H}_t$. Τι είναι όμως το $K_t \cap \mathbb{R}$; Από την τοπολογία γνωρίζουμε ότι το $K_t \cap \mathbb{R}$ είναι ένα συμπαγές σύνολο που περιέχει το 0, και ίσως περιέχει το trivial one-point interval.

Έστω $x > 0$ και ας ψάξουμε την πιθανότητα το $x \in K_t$. Να σημειώσουμε ότι αν το $x \notin K_t$, τότε το σύνορο ∂H περιέχει μια ανοιχτή σφαίρα με κέντρο το x . Σε αυτή την περίπτωση, η $g_t(x)$ είναι μια καλά ορισμένη συνάρτηση που ικανοποιεί την Loewner equation (i) με $U_t = \sqrt{\kappa} B_t$. Ο πρώτος χρόνος t για τον οποίο έχουμε ότι $x \in K_t$ μπορεί να χαρακτηριστεί

ως ο πρώτος χρόνος όπου έχουμε $g_t(x)=U_t$. Έστω $Y_t = \frac{(g_t(x)-U_t)}{\kappa}$. Αυτή η Y_t μπορούμε να πούμε ότι ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dY_t}{dt} = \frac{(\alpha)}{(Y_t)} dt + d\bar{B}_t,$$

όπου $\alpha=2/\kappa$ και $\bar{B}_t = -B_t$. Η λύση της εξίσωσης είναι μια Bessel διαδικασία, εάν $\alpha=(d-1)/2$, όπου η διαδικασία έχει την ίδια κατανομή όπως η κανονική τιμή της d-διάστατης κίνησης Brown. Είναι πολύ γνωστό ότι η Bessel διαδικασία χτυπά την αρχή αν και μόνο αν $\alpha < 1/2$.

Locality για $\kappa=6$ 3.3.2

Ορίζουμε A ένα συμπαγές υποσύνολο του H που δεν περιέχει την αρχή έτσι ώστε $A = \bar{A} \cap \bar{H}$ και $H \setminus A$ που είναι απλό συνεκτικό σύνολο. Έστω $\Phi = \Phi_A$ είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός από το $H \setminus A$ στο H με $\Phi(0)=0, \Phi(\infty)=\infty$ και $\Phi(z) \sim z$ όσο $z \rightarrow \infty$.

Έστω γ είναι ένα chordal SLE_κ μονοπάτι που ξεκινάει από την αρχή και αφήνουμε το χρόνο ώσπου φτάσουμε για πρώτη φορά το χρόνο έτσι ώστε $A \cap H \neq H_t$. Έστω τώρα $\bar{\gamma}(t) = \Phi \circ \gamma(t)$.

Πρόταση 3.3.1 (Locality)

Εάν $\kappa=6$, τότε $\bar{\gamma}(t), 0 \leq t \leq T$, συμπεριφέρεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή έχει την ίδια κατανομή όπως θα είχε ένας time change (χρόνος αλλαγής) ενός μονοπατιού SLE_κ . Η συγκεκριμένη πρόταση αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας την φόρμουλα του Ito και την σχέση

$$\frac{d}{d_t} h_t(U_t) = \lim_{z \rightarrow U_t} \left(\frac{2h'_t(U_t)^2}{h_t(z) - U_t} - \frac{2h'_t(z)}{z - U_t} \right) = -3h''_t(U_t). \quad \text{Μετά από αυτό θα πάρουμε}$$

$$\frac{d}{d} \tilde{U}_t = d[h_t(U_t)] = \sqrt{\kappa} h'_t(U_t) dB_t + [d_t h_t(U_t) + \frac{\kappa}{2} h''_t(U_t)] dt$$

$$\frac{d}{d} \tilde{U}_t = \sqrt{\kappa} h'_t(U_t) dB_t + [(k/2) - 3] h''_t(U_t) dt$$

Το Λήμμα του Ito που το χρησιμοποιούμε με μια σχεδόν γενικότητα από την συνηθισμένη φόρμουλα από την συνάρτηση h_t δεν εξαρτάται από το μέλλον και η h_t είναι C^1 στο t και

C^2 στη χωρική μεταβλητή, βέβαια η συνηθισμένη φόρμουλα του Ito συνεχίζει να είναι έγκυρη. Όπου $\kappa=6$, ο όρος dt πέφτει έξω και το \tilde{U}_t είναι martingale. Εάν $\kappa \neq 6$ η κατανομή του $\tilde{\gamma}$ είναι απολύτως συνεχής με σεβασμό στο time change(χρόνο αλλαγής) της SLE_κ .

Radial 3.3.3

Η radial SLE_κ είναι γνωστό ότι αποτελεί λύση για την radial Loewner equation όπου το $U_t = \sqrt{\kappa} B_t$. Η radial SLE_κ ακόμα είναι στενά συνδεδεμένη με την chordal SLE_κ έχοντας το ίδιο κ . Θέτουμε μία chordal SLE_κ γ όπου το μονοπάτι της ξεκινάει από τη αρχή με $U_t = \sqrt{\kappa} B_t$. Έστω τώρα $\tilde{\gamma}(t) = \exp i\gamma(t)$ και έστω ότι T είναι ο πρώτος χρόνος κατά τον οποίο η $\tilde{\gamma}$ κάνει ένα κλειστό loop γύρω από την αρχή, όπου ο πρώτος χρόνος t τέτοιος ώστε $s < t$ με $\gamma(t) - \gamma(s) = \pm 2\pi$. Θέτουμε $\Phi(z) = e^{iz}$. Εάν τώρα το $t < T$, τότε υπάρχει μια γειτονία N του 0 στο H που περιέχεται στο $\gamma[0, t]$ τέτοια ώστε το Φ απεικονίζει γραφικά το N κανονικά και ένα προς ένα μέσα στο σύνολο D . Έστω ψ συμβολίζει το παράγοντα $-i \log(z)$ στο $\Phi(N)$ με $\psi(1) = 0$. Έστω \tilde{g}_t είναι ο κανονικός μετασχηματισμός του συνεκτικού συνόλου του $D \setminus \Phi \circ \gamma[0, t]$ που περιέχει την αρχή του μονοπατιού στο D με $\tilde{g}_t(0) = 0, \tilde{g}_t'(0) > 0$. Τότε έχουμε,

$$\frac{d}{d_t} [\psi \circ \tilde{g}_t(z)] = \log \tilde{g}_t'(0) \cot \left[\frac{(\psi \circ \tilde{g}_t(z) - \tilde{U}_t)}{2} \right],$$

με $\tilde{U}_t = \psi \circ \tilde{g}_t(\Phi \circ \gamma(t))$. Πιο συγκεκριμένα, $\tilde{U}_t = \psi \circ \tilde{g}_t \circ \Phi \circ g_t^{-1}(U_t)$.

Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω συμπεράσματα κάποιος θα μπορούσε να δείξει ότι η κατανομή ενός Radial SLE_κ μονοπατιού είναι τελείως συνεχής με κατανομή $\exp i\gamma(t)$ όπου γ είναι ένα chordal SLE_κ μονοπάτι, όπου το μονοπάτι $\exp i\gamma(t)$ κάνει ένα κλειστό loop γύρω από την αρχή. Για $\kappa=6$, έχουμε την ίδια ακριβώς κατανομή που έχουμε όταν για πρώτη φορά εφαρμόζεται το loop. Ένα συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε με ασφάλεια είναι ότι η ποιοτική συμπεριφορά της radial SLE_κ είναι η ίδια με της chordal SLE_κ .

Restriction property for $\kappa=8/3$ 3.3.4

Αρχικά ας σκεφτούμε ένα μονοπάτι μιας chordal SLE_κ για $\kappa \leq 4$ τέτοιο ώστε το μονοπάτι $\gamma = \gamma(0, \infty)$ είναι ένα απλό μονοπάτι με $\gamma(0, \infty) \subset H$. Έστω A είναι ένα συμπαγές υποσύνολο

του \bar{H} που δεν περιέχει την αρχή έτσι ώστε $A = \bar{A} \cap \bar{H}$ και $H \setminus A$ είναι ένα απλό συνεκτικό σύνολο και Φ_A είναι ένας μετασχηματισμός όπως στην περίπτωση για Locality $k=6$. Τώρα για $\kappa < 4$, $P\{\gamma \cap A = \emptyset\} > 0$. Για $\kappa = 8/3$, η φόρμουλα είναι πραγματικά πολύ καλή.

Πρόταση 3.3.4.1 Εάν το $\gamma = \gamma(0, \infty)$ είναι ένα απλό μονοπάτι μιας chordal SLE_κ τότε

$$P\{\gamma \cap A = \emptyset\} = \Phi_A'(0)^{5/8}.$$

Συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης είναι το γεγονός ότι η $SLE_{8/3}$ ικανοποιεί την ακόλουθη restriction property: η υπό συνθήκη κατανομή του μονοπατιού $\Phi_A \circ \gamma(0, \infty)$, ως την σκεφτούμε σαν ένα μέτρο σε ένα μονοπάτι modulo παραμετροποίησης, υπό την συνθήκη ότι $\{\gamma(0, \infty) \cap A = \emptyset\}$, είναι η ίδια κατανομή όπως στην $SLE_{8/3}$. Για $\kappa \leq 4$ αλλά διαφορετικό από το $\kappa = 8/3$, η πιθανότητα $P\{\gamma \cap A = \emptyset\} = \Phi_A'(0)^{5/8}$ παίρνει μια πιο περίεργη μορφή από το να είναι απλά της μορφής $\Phi_A'(0)^\alpha$. Αυτή η restriction property δεν ισχύει για αυτές τις τιμές. Η απόδειξη για την πιθανότητα που έχουμε βρεί πιο πάνω είναι η ίδια με την απόδειξη στην περίπτωση για $k=6$ απλά ο υπολογισμός εδώ είναι λίγο πιο σύνθετος. Εκτός από το να διαβάζουμε το $h_t(U_t)$, κανείς χρειάζεται να χρησιμοποιήσει την φόρμουλα του Ito για να βρούμε το semimartingale του $M_t := h_t'(U_t)^{5/8}$ και δείχνουμε ότι έτσι είναι, ένα martingale. Σαν συμπέρασμα αυτού του υπολογισμού μπορούμε να δούμε ότι για να ορίσουμε το chordal restriction μέτρο με εκθέτη $5/8$ θα χρησιμοποιήσουμε την $SLE_{8/3}$.

Υπάρχει μια παρόμοια φόρμουλα για radial $SLE_{8/3}$. Υποθέτουμε ότι A είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του D με $0, 1 \notin A$, $A = \bar{A} \cap \bar{D}$ τέτοια ώστε $D \setminus A$ είναι ένα απλό συνεκτικό σύνολο που περιέχει την αρχή. Έστω Ψ_A είναι ο κανονικός μετασχηματισμός του $D \setminus A$ στο D με $\Psi_A(0) = 0, \Psi_A'(0) > 0$.

Πρόταση 3.3.4.2 Εάν το $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(0, \infty)$ είναι ένα απλό μονοπάτι μιας radial $SLE_{8/3}$, που πηγαίνει από το 1 στο 0 μέσα στον μοναδιαίο δίσκο, τότε

$$P\{\gamma \cap A = \emptyset\} = \Phi_A'(0)^{5/48} |\Psi_A'(1)|^{5/8}.$$

Radial $SLE_{8/3}$ ακόμα ικανοποιεί την restriction property: τότε η υπο συνθήκη κατανομή του $\Psi_A \circ \bar{\gamma}$ υπό το $P\{\gamma \cap A = \emptyset\}$ είναι η ίδια όπως στο radial $SLE_{8/3}$ (modulo time of change).

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές στα μονοπάτια της Κίνησης Brown

Η πρώτη μεγάλη εφαρμογή για την Stochastic Loewner evolution είναι στον υπολογισμό των intersection exponents για επίπεδη Κίνηση Brown από όπου μπορεί να οδηγηθεί στην Hausdorff dimension από προηγούμενα εκθετικά σύνολα ενός μονοπατιού μιας Κίνησης Brown. Η απόδειξη συνδυάζει την ιδέα της universality από το πρώτο κεφάλαιο (η οποία μας λέει ουσιαστικά ότι οι εκθέτες για οποιαδήποτε conformally invariant process (κανονική αναλλοίωτη διαδικασία) ικανοποιούν την restriction property και είναι η ίδια με την ένωση των Brownian μονοπατιών και ακόμα το γεγονός ότι οι exponents για SLE μπορούν να υπολογιστούν. Σε αυτή τη περίπτωση θέτουμε $B_t = B_t^1 + iB_t^2$ ότι είναι μια κανονική Κίνηση Brown στο \mathbb{C} .

Hausdorff dimension 4.1

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τον ορισμό αλλά και μερικά βασικά χαρακτηριστικά της Hausdorff dimension. Υποθέτουμε A ένα φραγμένο Borel υποσύνολο του \mathbb{R}^d . Για κάθε $\alpha > 0$ και οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι

$$H_\varepsilon^\alpha(A) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} [\text{diam}(U_j)]^\alpha,$$

όπου το infimum καλύπτει όλα τα καλύμματα U_1, U_2, \dots του A όπου οι διάμετροι τους είναι μικρότερες από ε . Τώρα το Hausdorff α -μέτρο του A είναι ορισμένο ως εξής:

$$H^\alpha(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon^\alpha(A).$$

Η Hausdorff dimension του A , που την συμβολίζουμε με $\dim_h(A)$, είναι ένα μοναδικό $\alpha_0 \in [0, d]$ τέτοιο ώστε $H^\alpha(A) = \infty$ για $\alpha < \alpha_0$ και $H^\alpha(A) = 0$ για $\alpha > \alpha_0$. Εδώ θα μας δοθούν δύο σίγουροι τρόποι για να υπολογίζουμε τις Hausdorff dimensions, η μια λοιπόν θα μας δείνει το πάνω όριο και η άλλη θα μας δίνει το κάτω όριο. Με την απόδειξη της Hausdorff dimension και με περαιτέρω πληροφορίες θα ασχοληθούμε αργότερα.

Πρόταση 4.1.1

Υποθέτουμε ότι για οποιοδήποτε μικρό ε , αν το A μπορεί να καλυφθεί από την ένωση των $\varepsilon^{-\alpha}$

συνόλων με διάμετρο ε τότε μπορούμε να πούμε για την Hausdorff dimension ότι $\dim_h(A) \leq \alpha$.

Πρόταση 4.1.2

Υποθέτουμε ένα θετικό μέτρο μ με $0 < \mu(A) < \infty$, $\mu(\mathbb{R}^d \setminus A)$, και τέτοιο ώστε να ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:

$$\int_A \int_A \mu(dx) \mu \frac{(dy)}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Τότε έχουμε $\dim_h(A) \geq \alpha$.

Πρόταση 4.1.3

Εάν B_t είναι μια μιγαδική Κίνηση Brown, τότε με πιθανότητα 1 για όλα τα Borel σύνολα $A \subset [0,1]$, $\dim_h[B(A)] = 2\dim_h(A)$.

4.2 Cut/frontier/pioneer σημεία για μονοπάτια της Κίνησης Brown

Ένας χρόνος $t \in [0,1]$ ονομάζεται cut time και το B_t , είναι ένα cut point για την Κίνηση Brown στο $[0,1]$ εάν $B[0,t) \cap B(t,1] = \emptyset$. Δεν ήταν τόσο εμφανές αρχικά ότι μια επίπεδη Κίνηση Brown έχει cut times κάτι που αποδείχθηκε μετά από προσπάθεια από τον Budzy.

Ορισμός 4.2.1

1) Ένας χρόνος $t < t_0$ ονομάζεται cut time και το B_t είναι ένα cut point για $B[0, t_0]$ εάν

$$B[0, t) \cap B(t, t_0] = \emptyset.$$

2) Τα frontier η outer boundary F_t του $B[0, t]$ είναι ένα σύνολο σημείων “ που είναι συνδεδεμένα με το άπειρο”, πιο συγκεκριμένα, είναι το όριο του μη φραγμένου στοιχείου του $\mathbb{C} \setminus B[0, t]$.

3) Ένας χρόνος t καλείται pioneer time και το B_t είναι ένα pioneer point εάν $B_t \in F_t$.

Τότε με πιθανότητα 1 μπορούμε να πούμε για τα cut points, frontier points, pioneer points ότι έχουν Hausdorff dimension $2 - \zeta(1,1)$, $2 - \zeta(2,0)$, $2 - \zeta(1,0)$, αντίστοιχα, πιο συγκεκριμένα αυτό προκύπτει για την κάθε περίπτωση ξεχωριστά επειδή ισχύει ότι:

$$P\{B[0, \frac{1}{2} - \varepsilon^2] \cap B[\frac{1}{2} + \varepsilon^2, 1] = \emptyset\} \approx \varepsilon^{\zeta(1,1)},$$

$$P\{B[0, \frac{1}{2} - \varepsilon^2] \cup B[\frac{1}{2} + \varepsilon^2, 1] \text{ δεν απομακρύνει το } B_{\frac{1}{2}} \text{ από το άπειρο}\} \approx \varepsilon^{\zeta(2,0)},$$

$$P\{B[\varepsilon^2, 1] \text{ δεν απομακρύνει το } 0 \text{ από το άπειρο}\} \approx \varepsilon^{\zeta(1,0)}, \varepsilon \rightarrow 0+$$

Βέβαια με την βοήθεια της Stochastic Loewner evolution και της “universality” μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές για όλους τους παραπάνω εκθέτες, πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$\zeta(1,1)=\frac{5}{4}, \zeta(2,0)=\frac{2}{3}, \zeta(1,0)=\frac{1}{4}.$$

Ακόμα ισχύει ότι ο ορισμός των cut points έχει νοήμα και για τις d -διαστατές Κινήσεις Brown. Αρχικά για $d=1$, δεν υπάρχουν cut points και για $d=4$ όλα τα σημεία είναι cut points. Τώρα η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι για $d=3$, έδω μπορούμε να δούμε ότι η Hausdorff dimension του συνόλου των cut points είναι $2-\zeta_3(1,1)$ όπου το $\zeta_3(1,1)$ είναι το $\zeta(1,1)$ απλά εδώ μιλάμε για τρισδιάστατη Κίνηση Brown. Ενώ είμαστε σίγουροι ότι το $\zeta_3(1,1)$ υπάρχει δεν ξέρουμε πια είναι η ακριβής τιμή του και δεν έχουμε κανένα λόγο να πιστεύουμε ότι αυτή η τιμή είναι πραγματική. Βέβαια ξέρουμε ότι $\frac{1}{2} < \zeta_3(1,1) < 1$ και μια ακόμα αριθμητική προσομοίωση που έχουμε κάνει μας έδωσε το αποτέλεσμα $\zeta_3(1,1) \approx 0.58$.

Αναλογικά μπορούμε να μιλήσουμε και για τυχαίους περιπατούς. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε S^1, S^2 που είναι ανεξάρτητοι τυχαίοι περίπατοι που ξεκινάνε από την αρχή των αξόνων στο \mathbb{Z}^2 . Έστω

$$S^j[0, n] = S_k^j : k=0, 1, \dots, n^2$$

είναι το σύνολο των σημείων που επισκέπτεται ο j περιπατητής στα πρώτα n βήματα. Μπορούμε να ορίσουμε τους interesection exponents του απλού τυχαίου περιπάτου $\zeta(1,1), \zeta(2,0), \zeta(1,0)$. Στην πραγματικότητα η μόνη απόδειξη που μας δείχνει ότι οι exponents στον τυχαίο περίπατο υπάρχουν μας δείχνει κιόλας ότι είναι σχεδόν οι ίδιοι με τους Brownian exponents. Η απόδειξη που δείχνει ότι οι exponents είναι οι ίδιοι δεν χρησιμοποιεί την ακριβή τιμή των exponents παράλαυτα είναι πολύ έγκυρη για την περίπτωση $d=3$. Η αριθμητική προσέγγιση του $\zeta_3(1,1)$ είναι η ίδια με την αριθμητική προσέγγιση του $\zeta_3(1,1)$ οι οποίες έχουν γίνει με την μέθοδο Monte Carlo για απλούς τυχαίους περιπάτους. Η αυστηρή σχέση βέβαια μεταξύ τους είναι η $\zeta_3(1,1) = \zeta_3 \frac{(1,1)}{2}$.

4.3 A half plane exponent

Πρίν αναφέρουμε οτιδήποτε άλλο σε αυτή την παράγραφο θα πρέπει να αναφέρουμε έναν όρο από την Μιγαδική Ανάλυση που θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε πολύ καλύτερα τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε για τους exponents. Αυτός ο όρος είναι το extremal length.

Ορισμός 4.3.1

Έστω D ένα ανοικτό σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο. Υποθέτουμε Γ είναι μια συλλογή από κατύλες γ στο D . Εάν $\rho: D \rightarrow \infty$ είναι Bogel-μετρήσιμη, τότε για κάθε καμπύλη γ ορίζουμε

$$L_\rho(\gamma) := \int_\gamma \rho |dz| \quad \text{ορίζουμε έτσι το } \rho\text{-μήκος της } \gamma.$$

Τώρα έχουμε ότι $L_\rho(\Gamma) := \inf_{\gamma \in \Gamma} L_\rho(\gamma)$.

Η περιοχή που καλύπτει η εκάστοτε καμπύλη γ είναι $A(\rho) := \int_D \rho^2 dx dy$, και ουσιαστικά το

extremal length είναι $EL(\Gamma) := \sup_\rho \frac{L_\rho(\Gamma)^2}{A(\rho)}$, όπου το supremum αφορά όλες τις $\rho: D \rightarrow \infty$ που είναι Borel-μετρήσιμες με $0 < A(\rho) < \infty$.

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μια παρόμοια οικογένεια exponents, η οποία ονομάζεται πάνω ημιεπιπέδου (half plane) Brownian intersection exponents. Έστω ότι R_L είναι το ανοικτό τρίγωνο:

$$R_L = \{x + iy : 0 < x < L, 0 < y < \pi\},$$

και έστω $d_1 = [0, \pi i]$ και $d_{2,L} = [L, L + \pi i]$ που ορίζουν τα κάθετα σύνορα του τριγώνου. Και έστω μ_{R_L} που ορίζει το Brownian excursion μέτρο πάνω στο R_L περιορισμένο να πηγαίνει μόνο από το d_1 στο d_2 .

Έστω D είναι ένα απλό συνεκτικό σύνολο και A_1, A_2 δύο μη τετριμμένα τόξα του συνόρου ∂D τα οποία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε η π-extremal απόσταση μεταξύ των δύο τόξων στο D ορίζεται ως $L(A_1, A_2; D)$ είναι το μοναδικό L έτσι ώστε να υπάρχει κανονικός μετασχηματισμός του D στο R_L τέτοιος ώστε A_1, A_2 να απεικονίζονται πάνω στο d_1, d_2 αντίστοιχα.

Η π-external απόσταση είναι π φορές το external μήκος όπως είναι γνωστό από την μηγαδική ανάλυση. Προτιμάμε να χρησιμοποιήσουμε στην συγκεκριμένη περίπτωση την π-external απόσταση από το συνηθισμένο external μήκος επειδή το R_L έχει το πιο απλό crossing exponent που είναι ίσος με 1.

Υποθέτουμε ότι η γ είναι μια καμπύλη από το d_1 στο d_2 μέσα στο R_L . Έστω $D_+ = D_+(\gamma)$ είναι ένα συνεχές στοιχείο του $R_L \setminus \gamma$ που το συνορό του περιέχει το $[\pi i, L + \pi i]$. Τώρα ο exponent $\tilde{\xi}(1, \lambda)$ είναι ορισμένος για $\lambda > 0$ από την παρακάτω σχέση

$$\mu_{R_L}[\exp -\lambda L(d_1 \cap dD_+, d_2 \cap dD_+; D_+)] \approx e^{-L\tilde{\xi}(1, \lambda)}, L \rightarrow \infty.$$

Βέβαια εδώ να σημειώσουμε ότι η σχεδόν ισότητα που αναφέρουμε στην παραπάνω σχέση δεν ισχύει ακριβώς απλά το κάθε μέλος μπορεί να φράξει το άλλο πολλαπλασιαζόμενο με έναν πραγματικό αριθμό. Ενώ έχουμε σιγουρέψει λοιπόν την ύπαρξη του $\tilde{\xi}(1, \lambda)$ η παραπάνω σχέση δεν μας δίνει ακριβώς την τιμή του exponent $\tilde{\xi}(1, \lambda)$.

4.4 Crossing exponent για την chordal SLE_κ

Τώρα θα ασχοληθούμε με έναν αντίστοιχο crossing exponent για την SLE_κ . Ας υποθέσουμε ότι γ είναι ένα μονοπάτι της SLE_κ στο R_L ξεκινώντας από το $i\pi$ και φτάνοντας στο $L + i\pi$. Μπορούμε να υπενθυμίσουμε ότι αυτή η εικόνα είναι η ίδια με αυτή του SLE_κ στο

πάνω μισό των αξόνων υπό έναν κανονικό μετασχηματισμό του συνόλου H στο R_L όπου στέλνει το $i\pi$ και το ∞ στο $L+i\pi$. Έστω \hat{T} είναι ο πρώτος χρόνος t όπου το $\gamma(t) \in d_2$, και $V=V_L$ έτσι ώστε $\gamma[0, \hat{T}] \cap [O, L] = \emptyset$. Πάνω στο V , έστω D είναι το συνεχές στοιχείο του $\mathbb{R}_L \setminus g[0, \hat{T}]$ του οποίου το σύνορο περιέχει το μικρότερο οριζόντιο σύνορο $[0, L]$, και έστω $\hat{\ell} = L(d_1 \cap dD, d_2 \cap dD; D)$. Τώρα πάνω στο V^c , έχουμε ότι $\hat{\ell} = \infty$. Για $\beta \geq 0$ μπορούμε να ορίσουμε τον chordal crossing exponent $\nu = \nu(\beta)$ από την σχέση:

$$E[e^{-\beta \hat{\ell}}] \approx e^{-\nu L}, L \rightarrow \infty.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι $e^{-\beta \infty} = 0$ ακόμα και για $\beta = 0$. Αυτό είναι ακριβώς το ανάλογο για την SLE_6 ως $\xi(1, \beta)$. Ακόμα στην παραπάνω σχέση γράφουμε ότι είναι παρόμοια η τιμή της μέσης τιμής με το εκθετικό μόνο που στην πραγματικότητα αυτό που ισχύει είναι ότι και οι δύο μεριές είναι φραγμένες από σταθερές επαναλήψεις της κάθε μεριάς.

Ο τρόπος για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα είναι να το ανάγουμε σε έναν πιο εύκολο υπολογισμό της SLE_6 . Το πρώτο βήμα λοιπόν είναι να μετακινήσουμε το πρόβλημα στο πάνω μισό των δύο αξόνων (upper half plane). Έστω Φ ότι είναι ο κανονικός μετασχηματισμός από το R_L στο H με $\Phi(\pi i) = 0, \Phi(0) = 1, \Phi(L + \pi i) = \infty$. Πλέον μας είναι αρκετά εύκολο να δείξουμε ότι $\Phi(L) \leq c e^{-\nu L}, d\Phi(L) \geq e^{-\nu L}, c, d \in (0, \infty)$. Ακόμα έστω γ είναι ένα μονοπάτι της SLE_6 που ξεκινάει από το 0 και πηγαίνει στο άπειρο, τότε

$$T = \inf t: \gamma(t) \in (e^L, \infty)$$

να σημειώσουμε ότι $P[T < \infty] = 1$ όσο $6 > 4$. Έστω $\hat{\ell}$ είναι η π-extremal απόσταση μεταξύ του $[0, 1]$ και του $[e^L, \gamma(T)]$ στο $H \setminus \gamma[0, T]$. Επειδή η π-extremal απόσταση είναι κανονικά αναλλοίωτη έχουμε ότι,

$$E[e^{-\beta \hat{\ell}}] \approx e^{-\nu L} = (e^L)^{-\nu}.$$

Με χρήση ορίων μπορούμε να δούμε ότι το αριστερό μέλος της σχέσης συγκρίνεται με την ποσότητα αν αντικαταστήσουμε το $\hat{\ell}$ με L , π-extremal απόσταση μεταξύ του $[x_0, 1]$ και του $[t, \infty]$ στο $H \setminus \gamma[0, t^2]$, όπου $t = e^L$ και $x_0 > 0$ τέτοιο έτσι ώστε να έχουμε $d(H \setminus \gamma[0, t^2]) \cap [0, 1] = [x_0, 1]$. Τώρα το L είναι η π-extremal απόσταση μεταξύ του $[g_{r^2}(0), g_{r^2}(1)]$ και $[g_{r^2}, \infty]$ στο H . Ακόμα είναι κατανοητό ότι η διαφορά $g_{r^2}(t) - g_{r^2}(1)$ είναι της τάξης του t . Πλέον έχουμε ότι

$$e^L \approx t [g_{r^2}(1) - g_{r^2}(x_0)]^{-1}.$$

Η τελευταία προσέγγιση που θα κάνουμε είναι ότι $g_{r^2}(1) - g_{r^2}(x_0) \approx g_{r^2}'(1)$. Εάν αποδεχτούμε όλες αυτές τις προσεγγίσεις, τότε καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$E[(g_{r^2}'(1))^\beta] = E[e^{\beta \log(g_{r^2}'(1))}] \approx t^{-(\nu-\beta)}, t \rightarrow \infty.$$

Η ποσότητα $E[(g'_t(1))^\beta]$ μπορεί να μετρηθεί με χρήση της Loewner εξίσωσης.

Για $t \geq 0, x \geq 0$, έχουμε

$$h(t, x) = h_{\kappa, \beta}(t, x) = E[e^{\beta \log(g'_t(x))}].$$

Χρειάζεται να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $h(t^2, 1)$ όσο $t \rightarrow \infty$. Ο νόμος μεταβλητότητας (scaling law) για την SLE μας λέει ότι $h(t, x) = h(1, \frac{x}{\sqrt{t}}) = \varphi(\frac{x}{\sqrt{t}})$ για κάποια συνάρτηση φ μιας μεταβλητής και αν το ν υπάρχει έχουμε ότι, $\varphi(y) \approx y^{\nu-\beta}$ όσο $y \rightarrow 0+$. Διαφορίζοντας την Loewner εξίσωση παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} \log[[g'_t(x) - U_t]'] = d_t \log(g'_t(x)) = \frac{-2}{(g'_t(x) - U_t)^2}.$$

ή, εάν $Y_t = g'_t(x) - U_t$,

$$e^{\beta \log(g'_t(x))} = e^{-\beta \int_0^t \frac{2}{Y_s^2} ds}.$$

Εφόσον η Y_t ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dY_t}{dt} = \frac{2}{Y_t} dt - \sqrt{\kappa} dB_t,$$

για $\kappa=6$, η φόρμουλα των Feynman-Kac μας λέει ότι η συνάρτηση $h(t, x)$ ικανοποιεί την

$$\frac{d}{dt} h = 3h'' + \frac{2}{x} h' - \frac{2\beta}{x^2} h,$$

και η φ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$\varphi''(y) + \left(\frac{2}{3y} + \frac{2y}{3}\right) \varphi'(y) - \frac{2\beta}{3y^2} \varphi(y) = 0.$$

Όμως εμείς ενδιαφερόμαστε μόνο για την συμπεριφορά της λύσης όταν $y \rightarrow 0+$, ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε μια λύση της μορφής $\varphi(y) = y^{\nu-\beta} u(y)$ όπου η u είναι λεία και μη μηδενική στην αρχή και όσο $\nu > \beta$. Μετά τοποθετούμε τη παραπάνω σχέση που υποθέσαμε στην εξίσωση που ικανοποιεί η φ και έχουμε ότι

$$(\nu - \beta)(\nu - \beta - 1) + \frac{2}{3}(\nu - \beta) - \frac{2\beta}{3} = 0,$$

οπότε έχουμε

$$\nu(\beta) = \beta + \frac{1 + \sqrt{1 + 24\beta}}{6}.$$

Πρόταση 4.4.1

Υποθέτουμε μια καμπύλη γ που είναι ένα chordal SLE_6 μονοπάτι από το πi στο $L + \pi i$ μέσα στο $R_L (L \geq 1)$. Έστω $D \subset R_L$ είναι ένα απλό συνεκτικό υποσύνολο με $[\pi i, L + \pi i] \subset \partial D$. Τότε

έχουμε,

$$P\{\gamma[0, \infty) \cap R_L \subset D\} \approx e^{-L/3},$$

όπου L είναι η π-extremal απόσταση μεταξύ του $dD \cap [0, \pi]$ και του $dD \cap [L, L + \pi]$ στο D .

4.5 Χρησιμοποιούμε το $\nu(\beta)$ για να υπολογίσουμε το $\tilde{\xi}(1, \lambda)$

Σε αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε το $\tilde{\xi}(1, \lambda)$ με τη βοήθεια του $\nu(\beta)$. Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσαμε να βρούμε τα $\xi(1, 1), \xi(2, 0), \xi(1, 0)$ από τους SLE_6 exponents, αλλά για χάρη ευκολίας θα ασχοληθούμε κυρίως με το $\tilde{\xi}(1, \lambda)$.

Έστω γ μια καμπύλη της SLE_6 από το π στο $L + \pi$ μέσα στο R_L , με την Κίνηση Brown να είναι ορισμένη με σεβασμό σε ένα μέτρο πιθανότητας P . Έστω τώρα μια άλλη καμπύλη γ' που πηγαίνει από το d_1 στο d_2 μέσα στο R_L ορισμένο σύμφωνα με το μέτρο μ_{RL} . Ακόμα έχουμε τα σύνολα D_+, D τα οποία έχουμε ορίσει από την προηγούμενη παράγραφο και το ενδεχόμενο E ότι $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$. Στο ενδεχόμενο E , θέτουμε $D = D_+ \cap D$ το οποίο είναι ένα απλό συνεκτικό σύνολο του οποίου το σύνορο περιέχει τα μη τετριμμένα τόξα $d_1' := d_1 \cap dD, d_2' := d_2 \cap dD$.

Για $\alpha > 0$ ορίζουμε τον exponent ρ μέσω της σχέσης,

$$P \otimes \mu_{RL}[1_\epsilon \exp\{-\alpha L(d_1', d_2'; D)\}] \approx \exp\{-\rho(\alpha)L\}, L \rightarrow \infty.$$

Για να βρούμε το ρ αρχικά θα ολοκληρώσουμε το ένα μέλος ως προς P και μετά το άλλο μέρος ως προς μ_{RL} . Υποθέτουμε ότι η καμπύλη γ δίνεται και λόγω του ότι η γ είναι κανονικά αναλλοίωτη έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_{RL}[1_\epsilon \exp\{-\alpha L(d_1', d_2'; D)\}] &\approx \mu_{RL}[\exp\{-\alpha L(d_1 \cap dD_+, d_2 \cap dD_+; D_+)\}] \\ \mu_{RL}[1_\epsilon \exp\{-\alpha L(d_1', d_2'; D)\}] &\approx \exp\{\tilde{\xi}(1, \alpha)\ell\}. \end{aligned}$$

Το ℓ είναι το ίδιο με την προηγούμενη υποενοότητα.

$$\begin{aligned} P \otimes \mu_{RL}[1_\epsilon \exp\{-\alpha L(d_1', d_2'; D)\}] &\approx P[\exp\{-\tilde{\xi}(1, \alpha)L\}] \\ P \otimes \mu_{RL}[1_\epsilon \exp\{-\alpha L(d_1', d_2'; D)\}] &\approx \exp\{-\nu(\tilde{\xi}(1, \alpha)L)\}, \end{aligned}$$

και $\rho(\alpha) = \nu(\tilde{\xi}(1, \alpha))$. Υποθέτουμε ότι δίνεται η γ' λόγω του ότι είναι κανονικά αναλλοίωτη και ικανοποιεί την locality property για SLE_6 μας δίνει

$$P[1_\epsilon \exp\{-\alpha L(d_1', d_2'; D)\}] \approx \exp\{-\nu(\alpha)L(d_1 \cap dD_+, d_2 \cap dD_+; D_+)\}.$$

Ακόμα

$$\begin{aligned} P \otimes \mu_{RL}[1_\epsilon \exp\{-\alpha L(d_1', d_2'; D)\}] &\approx \mu_{RL}[\exp\{-\nu(\alpha)L(d_1 \cap dD_+, d_2 \cap dD_+; D_+)\}] \\ P \otimes \mu_{RL}[1_\epsilon \exp\{-\alpha L(d_1', d_2'; D)\}] &\approx \exp\{-\tilde{\xi}(1, \nu(\alpha))\}, \end{aligned}$$

και μας δίνει $\rho(\alpha) = \tilde{\xi}(1, \nu(\alpha))$. Πλέον έχουμε ότι $\nu(\tilde{\xi}(1, \alpha)) = \tilde{\xi}(1, \nu(\alpha))$, για όλα $\alpha \geq 0$.

Υποθέτουμε ότι το $\alpha=0$. Τότε $v(0)=\frac{1}{3}$ και $\tilde{\xi}(1,0)=1$, άρα μας δίνεται $\tilde{\xi}(1,\frac{1}{3})=v(1)=2$. Αν

$v(1)=2, \tilde{\xi}(1,1)=v(2)=\frac{10}{3}$. Συνεχίζοντας, πέρνουμε $\tilde{\xi}(1,\lambda)$ μια υπολογίσιμη συλλογή από

λ. Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα παρόμοιο επιχείρημα για να βρούμε το $\tilde{\xi}(1,\lambda)$ για όλα τα $\lambda \geq 0$,

$$\tilde{\xi}(1,\lambda)=\lambda+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{24\lambda+1}.$$

Βιβλιογραφία

- [1]David Duncan, An Introduction to the Loewner Equation and SLE
- [2]Gregory F. Lawler, Conformally Invariant Processes in the Plane 2002
- [3] University de Geneve, Brownian Motion and Stochastic Calculus 2015
- [4]University de Geneve, Geometric Representations of lattice models 2015
- [5]Γεώργιος Κοκολάκης και Ιωάννης Σπηλιώτης :Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Αθήνα 2002
- [6]Ιωάννης Σπηλιώτης : Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αθήνα 2004
- [7]Ιωάννης Χαινης: Επίλεκτα Θέματα Μιγαδικής Ανάλυσης, Αθήνα 2005
- [8]Λουκά Παπαλουκά: Βασική Μιγαδική Ανάλυση, Αθήνα 1994