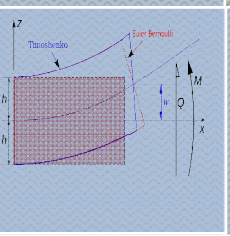
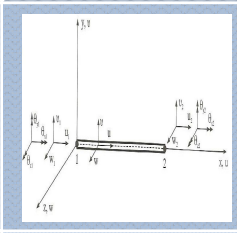
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΕΠΙΡΡΟΗ ΣΤΡΕΒΛΩΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΡΕΒΛΩΣΗΣ





ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΑΡΑΜΠΑΤΣΟΥ ΜΑΡΙΑ ΠΟΛΥΞΕΝΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ:

ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ Ε. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΡΓΥΡΙΔΗ Α. ΥΠΟΨΗΦΙΑ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑΣ ΕΜΠ

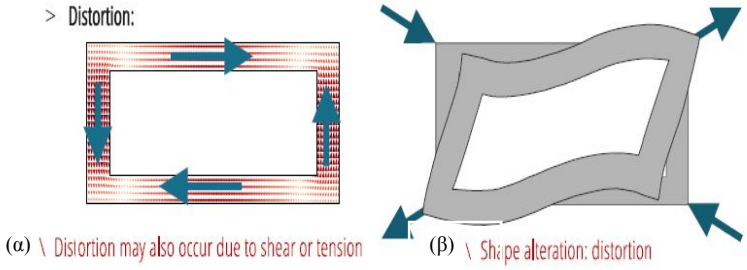
Αθήνα, Ιούλιος 2017

Περιεχόμενα

1.Εισαγωγή

Στην ιστορία της μηχανικής έχει γίνει αντιληπτό ότι η δημιουργία μοντέλων δοκού με σκοπό την δομική ανάλυση είναι ιδιαίτερα σημαντική. Φανερό είναι επίσης ότι ακόμη και εάν οι θεωρίες δοκού παρέχουν απλές και εύστοχες λύσεις, βασίζονται σε παραδοχές οι οποίες απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Οι πιο βασικές από αυτές είναι ότι 1) η εγκάρσια διατομή παραμένει επίπεδη και 2) ότι το σχήμα της δεν αλλάζει κατά την διάρκεια της παραμόρφωσης.

Εκτελώντας αναλύσεις στοιχείων δοκού χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η πρώτη παραδοχή τότε προκύπτει το φαινόμενο της διατμητικής υστέρησης και οδηγεί σε ακριβέστερα αποτελέσματα (μετακινήσεις, εντάσεις κτλ.) διατηρώντας έτσι το πλεονέκτημα πιο εκλεπτυσμένων προσεγγίσεων του μοντέλου της δοκού. Ακόμη και αν μ' αυτό τον τρόπο είναι πιο ακριβή τα αποτελέσματα ωστόσο βασίζονται στην δεύτερη παραδοχή που αφορά το απαραμόρφωτο σχήμα της διατομής. Οι εντός επιπέδου παραμορφώσεις των διατομών εντάσσονται στο φαινόμενο της διαστρέβλωσης και πρόκειται για μία δομική συμπεριφορά που παρατηρείται (σε συνδυασμό με επιρροές στρέβλωσης) κυρίως σε λεπτότοιχα μέλη δοκού. Φαινόμενα διαστρέβλωσης προκύπτουν εξαιτίας της εντός επιπέδου διαστρέβλωσης μίας στοιχειώδης φέτα δοκού υπό



Σχήμα 1: *(α)Εσωτερική διατμητική ροη (β) Εξωτερική δράση*

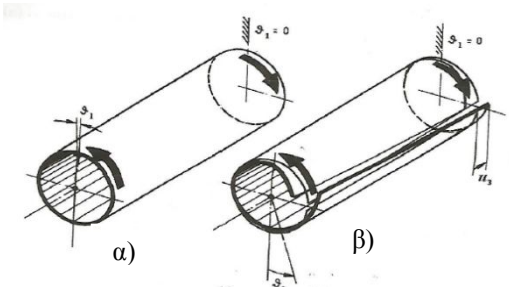
την επίδραση συνδυασμένης εξωτερικής δράσης και διαφορικής εσωτερικής διατμητικής ροής (Σχήμα 1). Παρ' όλο που αυτές οι δράσεις είναι αυτό-ισορροπούμενες, μπορεί να προκαλέσουν παραμορφώσεις από την στιγμή που τα σημεία εφαρμογής τους δεν συμπίπτουν. Αυτή η μη ομοιόμορφη κατανομή των παραμορφώσεων κατά μήκος της δοκού οδηγεί επίσης σε εκτός επιπέδου εντάσεις. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να είναι υπεύθυνη για την αύξηση των μετακινήσεων και λιγότερο ευνοϊκή για την δομική συμπεριφορά του μέλους.

Σε πολλές περιπτώσεις διατομών που χρησιμοποιούνται συνήθως (όπως κοίλη ή λεπτότοιχη διατομή ή δοκοί από υλικό αδύναμα στην διάτμηση) η στρέβλωση και η διαστρέβλωση δεν είναι ασήμαντη αναγκάζοντας τους μηχανικούς να έρθουν αντιμέτωποι με ποικίλες διατάξεις όπως τα διαφράγματα (Σχήμα 2) ώστε να επιβεβαιώνουν την εγκυρότητα των κινηματικών παραδοχών της θεωρίας δοκού. Εκτός από το γεγονός ότι δεν είναι δυνατό να παρεμποδιστούν ανεπιθύμητα αποτελέσματα λόγω της παραβίασης των παραδοχών, τα εφαρμοζόμενα διαφράγματα μπορεί είναι υπεύθυνα για επιπρόσθετες εντάσεις εξαιτίας του περιορισμού της στρέβλωσης και της διαστρέβλωσης .Η επιρροή αυτού του φαινομένου γίνεται πιο περίπλοκη όταν η δοκός αποτελείται από σύμμικτο υλικό. Ως εκ τούτου στο σχεδιασμό των μελών

Σχήμα 2: *Διαφράγματα*

μπορεί να έχει επίδραση το λεγόμενο distortional rigidity-οι δυσκαμψίες λόγω διαστρέβλωσης (Heo et al, 2003). Από την άλλη πλευρά, είναι δυνατό να επιτευχθεί ένας περισσότερο βέλτιστος σχεδιασμός των μελών (δηλαδή μείωση διαφραγμάτων, λεπτότερες διατομές), επιτρέποντας και ελέγχοντας την παραμόρφωση της εντός επιπέδου διατομής.

Στους σύγχρονους κανονισμούς διαπιστώνεται ο ιδιαίτερα σημαντικός ρόλος της επίδρασης της διαστρέβλωσης στην κατανομή της έντασης και της παραμόρφωσης πάνω στην δοκό. Παρ' όλα αυτά, οι σχετικές οδηγίες είναι συχνά γενικές χωρίς να προτείνει κάποια συγκεκριμένη μεθοδολογία για τα παραπάνω φαινόμενα. Λαμβάνοντας υπόψη τους Ευρωπαϊκούς Κανονισμούς σχετικά με την διαστρέβλωση δοκών, παρατηρείται ότι οι περισσότεροι κανονισμοί του (ΕΚ 3-Τμήμα 1.1) που αφορούν στρέψη ισχύουν μόνο όταν η παραμόρφωση της διαστρέβλωσης μπορεί να αγνοηθεί (ενότητα 6.2.7). Οι αναφορές που γίνονται στην αντίσταση των μελών στο λυγισμό (ενότητα 6.3.3) είναι αποτελεσματικές μόνο όταν δεν εμφανίζεται στην διατομή διαστρέβλωση. Η σημασία της διαστρέβλωσης επίσης επισημαίνεται στην ενότητα 6.3.5.2. όπου αναφέρει ότι η διαστρέβλωση θα πρέπει να παρεμποδίζεται τουλάχιστον στις τοπικές πλαστικές αρθρώσεις. Οι επιδράσεις της διαστρέβλωσης θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά την διάρκεια του σχεδιασμού μη ενισχυμένων αρθρώσεων (τμήμα 1.8 ενότητα 7.5.2.1(7)) και της εκτίμησης ονομαστικών τάσεων από φαινόμενα κόπωσης (ΕΚ3, τμήμα 1.9, ενότητα 4). Θεωρώντας ότι σχεδιάζεται ένα δομικό στοιχείο από αλουμίνιο που είναι επιρρεπές στην κόπωση, οι Ευρωκώδικες αναφέρουν ότι τροποποιημένες ονομαστικές τάσεις θα πρέπει να χρησιμοποιούνται στη θέση των ονομαστικών τάσεων (ΕΚ9 τμήμα 1.3 ενότητα 5.2). Τέλος, η διαστρέβλωση δεν παρατηρείται μόνο σε στοιχεία από αλουμίνιο και χάλυβα αλλά και σε στοιχεία από σκυρόδεμα. Συγκεκριμένα το άνοιγμα μίας άρθρωσης σε μία κοίλη διατομή κάτω από συγκεκριμένες προδιαγραφές (ΕΚ2-τμήμα 2-ενότητα 6.3.2(106)) μπορεί να αλλάξει τον μηχανισμό αντίστασης σε στρέψη και να μετατρέψει την κλειστή ροή στρέψης τύπου Bredt σε έναν συνδυασμό από στρέψη λόγω στρέβλωσης και στρέψη τύπου St.Venant. (Σχήμα 3). Με αποτέλεσμα η διατμητική ροή εξαιτίας της στρέψης πρακτικά να διπλασιάζεται και έτσι να αυξάνεται η διαστρέβλωση.



Σχήμα 3: *α)Κλειστός κυκλικός σωλήνας (απουσία στρέβλωσης, μεγάλη στρεπτική αντίσταση) β)Ανοιχτός κυκλικός σωλήνας (εμφανής στρέβλωση, πολύ μικρή στρεπτική αντίσταση)*

Περισσότερη προσοχή σε θέματα διαστρέβλωσης έχει δοθεί σε κανονισμούς για το σχεδιασμό χαλύβδινων και σύμμικτων γεφυρών. Συγκεκριμένα στο 2° τμήμα του ΕΚ3 αναφέρεται ότι μέλη που υφίστανται και στρέψη και διαστρέβλωση θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη αναφέροντας παρ' όλα αυτά ότι οι παραπάνω επιδράσεις μπορούν να αγνοηθούν σε μέλη που εξαιτίας της τοπικής εγκάρσιας ακαμψίας σε λυγισμό της διατομής και/ή του διαφράγματος, οι επιρροές τους από διαστρέβλωση δεν υπερβαίνουν το 10% από αυτές του λυγισμού. Παρόμοια προσοχή δίνεται και σε άλλες οδηγίες όπως αυτές του American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) και Hanshin Expressway Public Corporation of Japan. Σύμφωνα με αυτές η μέγιστη απόσταση των διαφραγμάτων που τοποθετούνται σε κυρτά δοκάρια γέφυρας ελέγχεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι συνήθεις εντάσεις στρέβλωσης λόγω διαστρέβλωσης στα όρια του λυγισμού (λιγότερο από 10% για το AASHATO, λιγότερο από 5% για το Hanshin Expressway Public Corporation of Japan) (Park et al., 2003).

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, για να εκτιμηθούν και να εισάγονται σωστά οι αναπτυσσόμενες εντάσεις και να ελαχιστοποιούνται οι αβεβαιότητες στην πρόβλεψη της αντοχής των δομικών στοιχείων, εκτιμάται σημαντικό να συμπεριλαμβάνονται οι επιδράσεις λόγω διαστρέβλωσης στην ανάλυση δοκού. Όμως από την στιγμή που τα συμβατικά δοκάρια δεν μπορούν να λάβουν υπόψη την παραπάνω δομική συμπεριφορά, αυτές οι πρόσθετες τάσεις δεν μπορούν να προβλεφθούν αν δεν διεξαχθούν αναλύσεις τρισδιάστατων ή κελυφωτών μοντέλων. Συνεπώς, ποικίλα μοντέλα μεγάλης συνθετότητας και υπολογιστικού κόστους είναι δυνατό να δημιουργηθούν κατά την διάρκεια του σχεδιασμού με στόχο να υπολογιστούν επιπρόσθετες εντάσεις, οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο ιδιαιτέρως στα προεντεταμένα μέλη ή και σε αναλύσεις κόπωσης και ερπυσμού. Είναι επομένως σημαντικό να συμπεριληφθούν οι επιδράσεις μη ομοιόμορφης κατανομής της διαστρέβλωσης στα πλαίσια της θεωρίας δοκού έτσι ώστε να εκμεταλλευτεί κανείς τα πλεονεκτήματα των στοιχείων δοκού χωρίς να διακυβεύεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Πολλές ερευνητικές προσπάθειες έχουν ήδη δημοσιευτεί σχετικά με τις θεωρίες δοκού οι οποίες περιλαμβάνουν τις επιρροές της διαστρέβλωσης. Η πλειοψηφία αυτών των ερευνητικών προσπαθειών εστιάζουν σε λεπτότοιχες διατομές, γι' αυτό και οι απλοποιημένες υποθέσεις της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών (Thin Tube Theory (TTT)) (Vlasov, 1963) παίζουν κυρίαρχο ρόλο για την διατύπωση των σχετι-

κών θεωριών. Στα πλαίσια της θεωρίας TTT, μερικές από τις πρώτες κλασσικές προσεγγίσεις αντιμετωπίζουν το πρόβλημα διαστρέβλωσης λόγω στρέψης απλοποιώντας το σε μία ισοδύναμη θεωρία της Δοκού επί Ελαστικού Εδάφους (Beam-on-Elastic-Foundation (BEF)) (Vlasov, 1963; Wright et al., 1968; Stavridis, 2010). Αυτή η προσέγγιση δίνει φως σε μερικές σημαντικές πλευρές που αφορούν τον μηχανισμό ανάπτυξης της λόγω διαστρέβλωσης. Αναλόγως για να επιβεβαιωθεί η θεωρία BEF, ορισμένες ερευνητικές προσπάθειες επέκτειναν την κλασική θεωρία Vlasov TTT, διαμορφώνοντας αντίστοιχα τέσσερις κατά σειρά διαφορικές εξισώσεις συμπεριλαμβάνοντας την διαστρέβλωση λόγω στρέψης, και εισάγοντας ταυτοχρόνως βασικές ιδέες για την στρέβλωση λόγω διαστρέβλωσης ,την κεντροειδή διαστρέβλωση και την διαστρέβλωση λόγω ροπής (Boswell and Zhang, 1983, 1984; Zhang and Lyons, 1984a, 1984b; Kermani and Waldron, 1993; Kim and Kim, 1999; Park et al., 2003, 2005). Η σχέση μεταξύ των προαναφερόμενων επιπρόσθετων διατμητικών τάσεων στρέβλωσης λόγω διαστρέβλωσης και δευτερευουσών στρεπτικών διατμητικών τάσεων έχει επίσης επισημανθεί (Boswell and Li, 1995). Παρ' όλα αυτά οι προηγούμενες μελέτες επικεντρώνονται κυρίως σε κιβωτοειδή διατομές καταστρωμάτων γέφυρας και δεν ισχύουν γενικά αφού δεν περιλαμβάνουν τις επιπτώσεις της διαστρέβλωσης λόγω κάμψης, ενώ περιορισμοί έχουν τεθεί σε σχέση με το σχήμα της διατομής και τις παραμορφώσεις της (π.χ. οι εντός επιπέδου διατμητικές παραμορφώσεις σε στοιχείο δίσκου λόγω διαστρέβλωσης αμελούνται).

Ένα βήμα προς την γενίκευση της θεωρίας Vlasov έτσι ώστε να συμπεριληφθούν οι επιπτώσεις διαστρέβλωσης λόγω κάμψης και στρέψης είναι η ανάπτυξη της γενικής θεωρίας δοκού–General Beam Theory (GBT). Η θεωρία της GBT διαμορφώθηκε από τον Schardt (Schardt, 1989, 1994a, 1994b) και διαδόθηκε από τον Davies και τους συνεργάτες του (Davies and Leach, 1994; Davies et al., 1994; Leach, 1994; Leach and Davies, 1996) μέσω από μια σειρά δημοσιεύσεων που μελετούν γραμμικά στατικά ή προβλήματα λυγισμού λεπτότοιχων δοκών. Η εγκυρότητα αυτών των πρώτων διατυπώσεων της γενικής θεωρίας δοκού-GBT βασίζεται στην παραδοχή ότι τα δομικά μέλη έχουν ανοιχτές διατομές που αποτελούνται από ορθογώνιους τοίχους/πλάκες. Έτσι παραδοχές για την θεωρία λεπτών πλακών χρησιμοποιούνται για το κάθε τοίχωμα. Η ανάλυση της γενικής θεωρίας δοκού αποτελείται από δύο φάσεις 1) την ανάλυση της διατομής και 2) την ανάλυση του μέλους. Η ανάλυση της διατομής βασίζεται σε δύο φάσεις οι οποίες αποτελούνται από τον καθορισμό των μορφών στρέβλωσης και τις αντίστοιχες της διαστρέβλωσης χρησιμοποιώντας την συνθήκη Vlasov μηδενικής διατμητικής έντασης. Αυτή η διαδικασία γίνεται ακόμη πιο περίπλοκη σε διατομές όπου ένας κόμβος μπορεί να συνδέσει περισσότερους από δύο δίσκους και σε κλειστές διατομές όπου η συνθήκη διατμητικής μηδενικής τάσης δεν ισχύει. Βελτιώσεις για τα παραπάνω μειονεκτήματα της μεθόδου έχουν προταθεί και εφαρμοστεί από τους Camotim, Silvestre και τους συνεργάτες του σε μια σειρά δημοσιεύσεων επεκτείνοντας την εφαρμογή της μεθόδου σε μια ποικιλία διατομών, ορθότροπων υλικών όπως και επίσης γεωμετρικά μη γραμμικά και ανελαστικά προβλήματα (Silvestre and Camotim, 2002; Gonçalves and Camotim, 2004, 2007, 2011; Silvestre, 2007; Dinis et al., 2010; Gonçalves et al., 2010; Silvestre and Camotim,

2010; Camotim and Dinis, 2011; Dinis and Camotim, 2011; Abambres et al., 2013). Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της γενικής θεωρίας δοκού GBT πηγάζει από τον γενικό ιδιομορφικού τύπου χαρακτήρα αποσύνθεσης της ανάλυσης της διατομής, το οποίο έδωσε την δυνατότητας στους ερευνητές να προσπαθήσουν να ταξινομήσουν τις εντός επιπέδου μορφές σε καθολικές, διαστρεβλώσεως ή τοπικές. Αυτή η κατηγοριοποίηση διευκολύνει την κατανόηση των δομικών μηχανισμών και την ιεραρχικής τους ταξινόμηση, επιβεβαιώνοντας το πλεονέκτημα των θεωριών δοκού ενάντια σε πιο εκλεπτυσμένες αλλά λιγότερο διορατικές μεθόδους (κελυφωτά ή τρισδιάστατα μοντέλα FEM).

Ο αριθμός και η ακρίβεια των εντός επιπέδου μορφών παραμόρφωσης που υπολογίστηκαν κατά την φάση της ανάλυσης της διατομής βασίζονται στην διακριτοποίηση της διατομής σε στοιχεία πλάκας (για να αυξηθεί ο αριθμός προστέθηκαν ενδιάμεσοι κόμβοι). Αυτή η διακριτοποίηση δεν είναι μια προφανής διαδικασία αφού εξαρτάται από το σχήμα της διατομής και την τοπολογία των κόμβων (ανοιχτές και κλειστές διατομές μπορεί να συμπεριλαμβάνονται). Με την επέκταση της θεωρίας TTT εισάγεται η ιδέα της ανάλυσης της διατομής με βάση τις ιδιοτιμές (Balch and Steele, 1987; Mentrasti, 1990) για την καθιέρωση σημαντικών ιδιομορφών παραμόρφωσης με τα αντίστοιχα εκθετικά μειούμενα μήκη τους, επιτρέποντας την ταξινόμηση τους με βάση την σημαντικότητα τους. Με βάση αυτή την ιδέα μερικές περίπλοκες διαδικασίες της γενικής θεωρίας δοκού GBT, όπως φάνηκε παραπάνω, μπορεί να αποφευχθούν. Στην ανάλυση της διατομής με βάση τις ιδιοτιμές πρωτοστάτησε ο Ranzi και ο Luongo (2011), Jönsson και Andreassen (Jönsson και Andreassen, 2011; Andreassen και Jönsson, 2012a, 2012b, 2013) και Vieira et al. (2014) επισημαίνοντας ότι με αυτή την προσέγγιση δεν είναι αναγκαίο να ταξινομηθούν οι διατομές σύμφωνα με τις παραμέτρους της γεωμετρίας τους (ανοιχτές, κλειστές διατομές). Επιπλέον, οι προκύπτουσες μορφές περιέχουν τις πιο σημαντικές και σχηματίζουν πιο σημαντικές και εύστοχες βάσεις εξισώσεων συγκρίνοντας με αυτές της θεωρία δοκού GBT οι οποίες προβάλλουν έναν πιο τοπικό χαρακτήρα (Ranzi and Luongo, 2011).

Παράλληλα με την γενική θεωρία δοκού GBT, η μέθοδος πεπερασμένων λωρίδων (Finite Strip Method-FSM), έχει εφαρμοστεί κατ' επέκταση για την ανάλυση λεπτότοιχων διατομών δοκού. Παρομοίως με τη GBT, η FSM βασίζεται στης υποθέσεις της θεωρίας των πλακών οι οποίες εφαρμόζονται σε κάθε τοίχωμα της διατομής. Η θεωρία FSM είναι περισσότερο μία γενικού σκοπού θεωρία FEM απ' ότι μια θεωρία δοκού. Παρ' όλα αυτά, ο Schafer, ο Ádány και οι συνεργάτες τους έχουν παρουσιάσει μελέτες που χρησιμοποιούν τα πλεονεκτήματα της θεωρίας FSM σε συνδυασμό με τη GBT έτσι ώστε να μελετούνται προβλήματα λυγισμού δοκών. Γι' αυτό το σκοπό κινηματικοί περιορισμοί και περιορισμοί παραμόρφωσης έχουν εφαρμοστεί στη συμβατική θεωρία FSM οδηγώντας στην ανάπτυξη της λεγόμενης δεσμευμένης θεωρίας FSM (constrained FSM-cFSM) (Schafer και Ádány, 2005, 2006; Ádány και Schafer, 2006a, 2006b, 2008, Li et al., 2011). Η μέθοδος cFSM χρησιμοποιεί ειδικά επιλεγμένους περιορισμούς οι οποίοι αναγκάζουν το μέλος να παραμορφωθεί σύμφωνα με τους μηχανικούς περιορισμούς που ταιριάζουν με τους ορισμούς των καθολικών ή διαστρεβλωτικών κατηγοριών λυγισμού (Ádány and Schafer, 2008).

Όπως προαναφέρθηκε, όλες οι παραπάνω μελέτες από την βιβλιογραφία οι οποίες περιγράφουν της επιρροή της διαστρέβλωσης σε αναλύσεις δοκού αφορούν αποκλειστικά λεπτότοιχες διατομές. Ακόμη και αν η θεωρία TTT προσφέρει τα μέσα για μια πιο απλοποιημένη διατύπωση, περιορίζει την εφαρμογή της σε σχετικά μοντέλα, ενώ έχει διαπιστωθεί αμφισβητήσιμη η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της ακόμη και στις λεπτότοιχες διατομές. (βλ. μελέτη του Tsipiras and Sapountzakis (2014)). Το πρόβλημα της ανάλυσης της διαστρέβλωσης των δοκών σε τυχαίες διατομές εκθέτει αυξημένη πολυπλοκότητα ακόμη και αν οι βασικές αναλύσεις είναι ίδιες με αυτές της GBT. Όσον αφορά την ανάλυση της διατομής, πρέπει να καθοριστεί μια κατάλληλη βάση για τις εκτός επιπέδου μορφές παραμόρφωσης που συνοδεύονται από αντίστοιχα των εντός επιπέδου, όμως το γεγονός αυτό παρουσιάζει πιο πολύπλοκη συμπεριφορά, από την στιγμή που στην τυχαία διατομή, κινηματικές θεωρίες και βασικές σχέσεις της δεν μπορεί να απλοποιηθούν. Σχετικά τώρα με την ανάλυση των μελών, παρομοίως με την γενική θεωρία δοκού (GBT), η διατύπωση αποτελείται από την έκφραση του πεδίου μετακίνησης ως ένας γραμμικός συνδυασμός των μορφών που προκύπτουν πολλαπλασιασμένες με σχετικούς παραμέτρους οι οποίοι θεωρούνται σαν γενικευμένες συντεταγμένες. Σ' αυτήν την φάση ,οι διαφορές της θεωρίας TTT και GBT βασίζονται κυρίως στη χρήση εξαρτημένων ή ανεξάρτητων παραμέτρων ως γενικευμένες συντεταγμένες, αλλάζοντας έτσι τη διαχείριση της διατμητικής παραμόρφωσης.

Για να λυθεί το πρόβλημα τυχαίου σχήματος ομογενούς ή σύμμικτης διατομής, το πρόβλημα του St.Venant ελαστικού πρισματικού σώματος παίζει κρίσιμο ρόλο για την διατύπωση χρήσιμων συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του γεγονότος ότι σ' αυτά τα προβλήματα η ανάλυση της παραμόρφωσης περιορίζεται στην εκτίμηση διδιάστατων εξισώσεων για την επιφάνεια της διατομής, συχνά αναφερόμενες ως κεντρικές λύσεις (central solutions) (βλ. μελέτες του Kosmatka και Dong (1991) και Ie και Kosmatka (1993) για τις λύσεις St. Venant σε ανισότροπα πρισματικά σώματα). Όπως είναι ευρέως γνωστό, στα προβλήματα St.Venant η κεντρική λύση είναι έγκυρη για το εξεταζόμενο πρισματικό σώμα προϋποθέτοντας ότι δεν περιορίζονται οι παραμορφώσεις στρέβλωσης και οι αντίστοιχες των εντός επιπέδου στην διατομή-στήριξη (ακόμη και εάν οι μετακινήσεις του στερεού σώματος απαγορεύονται). Όμως οι κεντρικές λύσεις εφαρμόζονται συνήθως σε πιο γενικές συνοριακές συνθήκες όπως προτάθηκε από το Saint Venant μέσω της «αρχής της ελαστικής ισοδυναμίας των στατικά ισοδύναμων φορτίσεων » (Love, 1944; Xu et al., 1997; Reagan and Pilkey, 2002). Αυτή η αρχή αναφέρεται και ως '*Αρχή St. Venant'* σύμφωνα με το οποίο ο ενδεχόμενος περιορισμός κοντά στη στήριξη του εξεταζόμενου πρισματικού σώματος δεν επηρεάζει την λύση μακριά από την στήριξη. Όμως επεκτείνοντας την θεωρία του St.Venant, πολλοί ερευνητές εξετάζουν τις επιρροές από τα άκρα των δοκών (συχνά αναφέρονται και ως extremity solutions, eigensolution και transitional solution) (Pai, 2014) όταν η παραπάνω υπόθεση αγνοείται (π.χ. στην περίπτωση πακτωμένου άκρου). Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την ημί-αντίστροφη μέθοδο του St.Venant υπό στατικές συνθήκες, το

πεδίο μετακινήσεων της ακόλουθης μορφής μπορεί να αναφερθεί (Regan και Pilkey, 2002) ως:

$$\underbrace{\bar{\mathbf{u}}}_{\text{Συνολική μετακίνηση}} = \underbrace{\bar{\mathbf{u}}_{SV}}_{\text{St. Venant λύση}} + \underbrace{\bar{\mathbf{u}}_{res}}_{\substack{\text{Παραμένουσες μετατοπίσεις} \\ \text{λόγω των επιρροών απο τα άκρα}}} \tag{1 a}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{res}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i(x)\,\mathbf{W}_i(y,z) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i(x) \begin{Bmatrix} \Phi_i(y,z) \\ V_i(y,z) \\ W_i(y,z) \end{Bmatrix} \tag{1 b}$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις, το διάνυσμα μετακίνησης $\bar{u}$ σε ένα τυχαίο σημείο της διατομής προκύπτει ως το άθροισμα της λύσης St.Venant δηλαδή του διανύσματος $\bar{u}_{SV}$ (π.χ. βλ. Kosmatka και Dong (1991)) και του διανύσματος της παραμένουσας μετακίνησης $\bar{u}_{res}$ εξαιτίας των επιρροών από τα άκρα που είναι υπεύθυνα για την παραγωγή αυτό-ισορροπούμενης κατανομής τάσεων (Giavotto et al., 1983; Kazic και Dong, 1990; Xu et al., 1997; Reagan και Pilkey, 2002). Αυτές οι πρόσθετες μετακινήσεις γράφονται ως ένα άθροισμα *K* διδιάστατων συναρτήσεων Wi (συναρτήσεις παραμόρφωσης στρέβλωσης/εντός επιπέδου) πολλαπλασιασμένες με παραμέτρους αi που εκφράζουν την ένταση τους. Συνιστώσες τάσεων εξαιτίας των επιρροών από τα άκρα της δοκού θεωρείται ότι ικανοποιούν ανεξάρτητα τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας. Έτσι εφαρμόζοντας εξισώσεις ισορροπίας τρισδιάστατης ελαστικότητας, χρησιμοποιώντας έναν εκθετικά μειούμενο χαρακτήρα των επιρροών από τα άκρα και εισάγοντας μια κατάλληλη διακριτοποίηση για την διατομή, ένα διδιάστατο τετραγωνικό πρόβλημα ιδιοτιμών διατυπώνεται. Ως εκ τούτου η ιδέα της αυτό-ισορροπίας των επιρροών από τα άκρα της δοκού επιτρέπει την παραγωγή μίας βάσης από κατάλληλες μορφές στρέβλωσης και εντός επιπέδου παραμορφώσεις σε τυχαίες επιφάνειες διατομών, συνδυάζοντας διδιάστατη κεντρική λύση St.Venant με ανάλυση ιδιοτιμής.

Η διατύπωση εξελιγμένων θεωριών δοκού που περιέχουν τις επιρροές στρέβλωσης/διαστρέβλωσης σε δοκούς τυχαίων διατομών χρησιμοποιεί ελάχιστη βιβλιογραφία. Στις περισσότερες από τις πρόσφατες μελέτες, οι ιδέες που περιγράφηκαν στης προηγούμενη παράγραφο έχουν χρησιμοποιηθεί. Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδέες από τις λύσεις St.Venant, El Fatmi και Ghazouani (Ghazouani και El Fatmi, 2010, 2011; El Fatmi και Ghazouani, 2011) χρησιμοποιούν εντός επιπέδου μορφές St.Venant σε αντιστοιχία με αυτές της στρέβλωσης τυχαίας ορθότροπης διατομής πολλαπλασιασμένες με ανεξάρτητους παραμέτρους, έτσι ώστε να λάβουν υπόψη την μη ομοιόμορφη κατανομή τους στο μήκος της δοκού. Η ίδια ιδέα έχει εφαρμοστεί και από τον Petrov και Geradin (1998), οι οποίοι διατύπωσαν μία θεωρία για καμπύλα και προστραμμένα δοκάρια τυχαίων ομογενών διατομών καλύπτοντας επίσης το εύρος γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Όμως αυτές οι διατυπώσεις συμπεριλαμβάνουν μόνο καμπτικές και αξονικές μορφές παραμορφώσεων υπό την επήρεια της αναλογίας

Poisson, ενώ η παραμόρφωση λόγω στρέψης αγνοείται. Ως εκ τούτου θα πρέπει να αναφερθεί ότι αυτές οι ερευνητικές προσπάθειες μελετούν τις επιρροές λόγω της αναλογίας Poisson και όχι λόγω διαστρέβλωσης. Η ιδέα της ανάλυσης ιδιοτιμών έχει χρησιμοποιηθεί και σε μερικές πρόσφατες ερευνητικές προσπάθειες. Πιο συγκεκριμένα , ο Ferradi και ο Cespedes (2014) διαμόρφωσαν ένα στοιχείο δοκού με βάση το FEM και του προβλήματος ανάλυσης ιδιοτιμής που αφορά το φαινόμενο της διαστρέβλωσης στη συμπεριφορά της διατομής (πρόβλημα εντός επιπέδου) και υπολογίζει συναρτήσεις στρέβλωσης ξεχωριστά, χρησιμοποιώντας ένα κατ' επέκταση σχήμα ισορροπίας βασισμένο σε προηγούμενη μελέτη από τους ίδιους συγγραφείς (Ferradi et al., 2013). Ο Pai (2014) παρουσίασε ένα πρότυπο FEM για την ανάλυση της διατομής θεωρώντας μηδενικό το έργο λόγω στρέβλωσης. Αυτή η ανάλυση ασχολείται με την μελέτη ισότροπων ή ανισότροπων δοκών που υφίσταται μεγάλη παραμόρφωση. Τελικά ο Genoese et al. (2014) ανέπτυξε μία FEM διαδικασία βασισμένη στο "mixed variational theory" για ορθότροπες δοκούς αναπτύσσοντας ένα πρόβλημα ιδιοτιμών για τις διατομές παράγοντας ταυτόχρονα συναρτήσεις διαστρέβλωσης και στρέβλωσης για τυχαίου σχήματος διατομές.

Το αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει μια γενική θεωρία συνοριακών στοιχείων για την ανάλυση σύνθετων δοκών τυχαίας διατομής λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή γενικευμένης στρέβλωσης και διαστρέβλωσης διατομών εξαιτίας της κάμψης και της στρέψης. Σ' αυτή τη μελέτη μία κατάλληλη βάση από μορφές στρέβλωσης /διαστρέβλωσης προέκυψε λύνοντας τα αντίστοιχα διδιάστατα προβλήματα συνοριακών τιμών. Αυτά τα προβλήματα διατυπώθηκαν χρησιμοποιώντας ένα σχήμα διαδοχικής ισορροπίας. Αυτή η προσέγγιση η οποία δεν έχει αναφερθεί στην βιβλιογραφία για αυτό το πρόβλημα, προτιμάται από την μέθοδο ανάλυσης ιδιοτιμών εξαιτίας κυρίως του γεγονότος ότι διατηρεί μερικά βασικά πλεονεκτήματα των αντίστοιχων προβλημάτων ιδιοτιμής, π.χ. συναρτήσεις διαστρέβλωσης και στρέβλωσης εκτιμούνται από το ίδιο πρόβλημα και με σειρά σπουδαιότητας τους ενώ αντίθετα απ' την ανάλυση της ιδιοτιμής επιτρέπει την ξεχωριστή εκτίμηση των μορφών από αξονική, καμπτική και στρεπτική ένταση. Επιπλέον μία θεωρία δοκού αναπτύχθηκε χρησιμοποιώντας ένα σχετικά μικρό αριθμό άγνωστων συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας τις πιο σημαντικές μορφές (πρώτες λύσεις από το σχήμα διαδοχικής ισορροπίας) έτσι ώστε να διατηρούν ικανοποιητικά την απλοποιημένη εκδοχή της εν λόγω διατύπωσης. Έτσι ένα πακέτο από δεκαέξι προβλήματα συνοριακών τιμών διατυπώθηκαν σε σχέση με τις συνιστώσες μετακίνησης και στροφής όπως επίσης και με τους ανεξάρτητες παραμέτρους και λύθηκε χρησιμοποιώντας την μέθοδο αναλογικής εξίσωσης (Analogue Equation Method –AEM) (Katsikadelis, 2002b), μία μέθοδο βασισμένη στο 'BEM'. Συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης εκτιμούνται χρησιμοποιώντας μια διδιάστατη διαδικασία BEM (Katsikadelis, 2002a; Beer et al., 2008). Μετά τον καθορισμό των βαθμών ελευθερίας, τα εντατικά στοιχεία σε ένα οποιοδήποτε τυχαίο σημείο κάθε διατομής μπορεί να εκτιμηθούν αποδίδοντας μία πρόβλεψη σε συμφωνία μιας τρισδιάστατης λύσης σε αντίθεση με τα συμβατικά στοιχεία δοκού. Προς γνώση του συγγραφέα μια μέθοδος BEM για την ανάλυση

διαστρέβλωσης σύνθετων δοκών τυχαίας διατομής δεν έχει αναφερθεί στην βιβλιογραφία:

Τα ουσιώδη χαρακτηριστικά και οι καινοτόμες πλευρές για την παρούσα διατύπωση συνοψίζονται στα ακόλουθα:

i. Αναφέρεται σε ένα τυχαίου σχήματος διατομή λεπτότοιχη ή μη. Η θεωρία δεν βασίζεται στην παραδοχή λεπτότοιχης δομής και επομένως η ακαμψία της διατομής ως προς την κάμψη, την στρέψη, την στρέβλωση και την διαστρέβλωση εκτιμάται με αριθμητική ακρίβεια.

ii. Μορφές στρέβλωσης και διαστρέβλωσης διατομών προκύπτουν εφαρμόζοντας ένα σχήμα διαδοχικής ισορροπίας το οποίο προβάλλει πλεονεκτήματα έναντι των προσεγγίσεων με ιδιοτιμές
   - Επιτρέπει την ξεχωριστή ανάλυση για μορφές λόγω αξονικής, καμπτικής και στρεπτικής έντασης. Ως εκ τούτου δεν απαιτεί την εποπτεία του αναλυτή προκειμένου να χρησιμοποιεί μορφές που να αντιπροσωπεύουν όλους τους μηχανισμούς παραμόρφωσης.
   - Παρακάμπτει την αναγκαιότητα λύσης προβλήματος ιδιοτιμής το οποίο παράγει σημαντική ποσότητα δεδομένων τα περισσότερα των οποίων δεν πρόκειται να είναι χρήσιμα. Από την άλλη πλευρά το παρόν σχήμα μπορεί να εφαρμοστεί επαναληπτικά τόσες πολλές φορές όσες επιθυμεί ο αναλυτής ώστε να αποκτήσει επίσης ανώτερες μορφές παραμόρφωσης.
   - Προβλήματα στρέβλωσης μπορούν να λυθούν ανεξάρτητα από αυτά της διαστρέβλωσης, επιτρέποντας άρα την λύση μικρότερων συστημάτων σε δύο βήματα. Στην περίπτωση προβλήματος ιδιοτιμών αυτό δεν είναι δυνατό.

iii. Η επιρροή της αναλογίας Poisson, λαμβάνεται υπόψη και στην ανάλυση της διατομής και στην καθολική ανάλυση του μέλους.

iv. Η δοκός υφίσταται τυχαία εξωτερική φόρτιση συμπεριλαμβάνοντας ροπές στρέβλωσης και διαστρέβλωσης και στηρίζεται από τις πιο γενικευμένες συνοριακές συνθήκες συμπεριλαμβάνοντας ελαστική στήριξη ή περιορισμό.

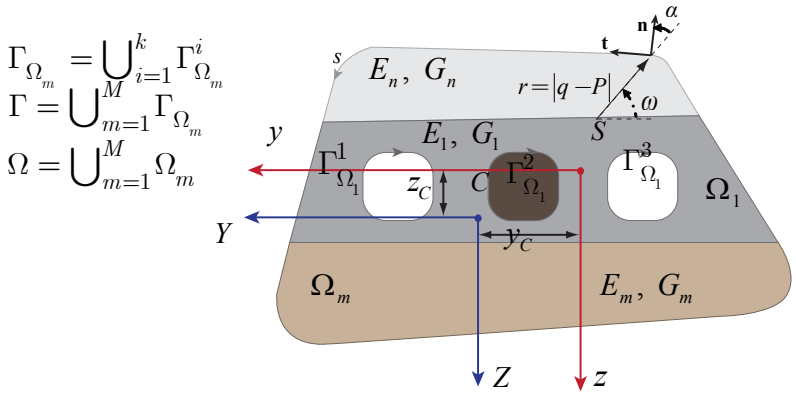
v. Η προτεινόμενη μέθοδος χρησιμοποιεί την προσέγγιση BEM (που απαιτεί συνοριακή διακριτοποίηση για την ανάλυση της διατομής) καταλήγοντας σε γραμμικά ή παραβολικά στοιχεία αντί επιφανειακών στοιχείων των λύσεων FEM (απαιτώντας ολόκληρη η διατομή να διακριτοποιηθεί σε τριγωνικά ή τετραγωνικά επιφανειακά στοιχεία), ενώ ένας μικρός αριθμός από γραμμικά στοιχεία απαιτείται ώστε να επιτευχθεί μεγάλη ακρίβεια.

vi. Η χρήση της BEM επιτρέπει την υπολογιστική ακρίβεια των παραγώγων από το πεδίο των συναρτήσεων (π.χ. τάσεις) το οποίο είναι πολύ σημαντικό στην ανάλυση διαστρέβλωσης των δοκών.

2.Περιγραφή του προβλήματος

2.1.Τοπική ισορροπία – Υπολογισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης

Για την ανάλυση που παρουσιάζεται σε αυτήν την ενότητα λαμβάνονται υπόψη οι κύριες παραδοχές των προβλημάτων St. Venant, θεωρώντας μια δοκό (σε μορφή πρίσματος) μήκους L, τυχαίου σχήματος σύνθετης διατομής που αποτελείται από υλικά σε επαφή, καθένα από τα οποία περιβάλλονται από ένα πεπερασμένο αριθμό προσθηκών (τρύπες). Τα υλικά, τα οποία αποτελούνται από απλά ή πολλαπλά ενωμένα σύνολα Ω_m ($m = 1, 2, \ldots, M$) στο επίπεδο yz (Σχήμα 1) είναι σταθερά συνδεδεμένα μεταξύ τους και θεωρούνται ομογενή ισότροπα και γραμμικά ελαστικά με μέτρο ελαστικότητας E_m, μέτρο διάτμησης G_m και μέτρο Poisson ν_m. Σχετικά με τα σύνορα μη διασταυρούμενων συνόλων Ω_m δηλώνονται από το Γ_{Ω_m} ($m = 1, 2, \ldots, M$). Αυτές οι συνοριακές καμπύλες είναι κατά τμήματα ομαλές (π.χ. έχουν έναν πεπερασμένο αριθμό από γωνίες). Στο Σχήμα 4, CXYZ είναι το βασικό σύστημα συντεταγμένων για κάμψη έχοντας στην διατομή ως κεντροειδή το σημείο C, ενώ y_C, z_C είναι οι συντεταγμένες του σε σχέση με το σύστημα $Sxyz$ έχοντας ως κέντρο στροφής το σημείο S. Σ' αυτή την φάση θεωρείται ότι η δοκός είναι αφόρτιστη στο εσωτερικό του και τυχαία κατανομή τάσεων εφαρμόζεται μόνο στην ακραία διατομή. Με σκοπό να υπολογιστούν οι επιρροές από τις στηρίξεις, η παραδοχή ότι η διατομή στη στήριξη είναι περιορισμένη μόνο για τις κινήσεις του στερεού σώματος (π.χ. μετακινήσεις λόγω στρέβλωσης και διαστρέβλωσης δεν περιορίζονται) αναιρείται . Συνεπώς εκθετικά μειούμενες μετακινήσεις λόγω στρέβλωσης και διαστρέβλωσης συμβαίνουν στη διατομή κοντά στην στήριξη του προβόλου.



***Σχήμα 4**:Τυχαία σύνθετη διατομή μορφής πρίσματος με διδιάστατες περιοχές Ω*

2.1.1. Προσέγγιση προβλήματος ιδιοτιμής

Στην ενότητα αυτή υιοθετώντας την ιδέα των επιρροών από τα άκρα της δοκού, διατυπώνεται ένα πρόβλημα ιδιοτιμής για την ανάλυση της διατομής. Οι εξισώσεις που προκύπτουν, χρησιμοποιούνται επίσης στην επόμενη ενότητα έτσι ώστε να κατασκευαστεί ένα 'σχήμα' διαδοχικής ισορροπίας σαν μια εναλλακτική προσέγγιση για την ανάλυση της διατομής. Συνεπώς, υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις, το πεδίο μετακινήσεων θεωρείται ως:

$$\bar{u}(x,y,z)=\bar{u}_{RB}(x,y,z)+\bar{u}_{res}(x,y,z)=\underbrace{u(x)+\theta_Y(x)Z-\theta_Z(x)Y}_{\text{κινήσεις στερεού σώματος}}+\underbrace{\alpha(x)\Phi(y,z)}_{\text{στρέβλωση}} \quad (2.1a)$$

$$\bar{v}(x,y,z)=\bar{v}_{RB}(x,y,z)+\bar{v}_{res}(x,y,z)=\underbrace{v(x)-z\theta_x(x)}_{\text{κινήσεις στερεού σώματος}}+\underbrace{\alpha_{,x}(x)V(y,z)}_{\text{διαστρέβλωση}}$$

(2.1b)

$$\bar{w}(x,y,z)=\bar{w}_{RB}(x,y,z)+\bar{w}_{res}(x,y,z)=\underbrace{w(x)+yq_x(x)}_{\text{κινήσεις στερεού σώματος}}+\underbrace{\alpha_{,x}(x)W(y,z)}_{\text{διαστρέβλωση}}$$

(2.1c)

όπου $()_{,i}$ δηλώνει παραγώγιση σε σχέση με το i, $\Phi:\Phi(y,z)$ είναι η συνάρτηση στρέβλωσης, $V:V(y,z)$, $W:W(y,z)$ είναι συνιστώσες των εντός επιπέδου μορφών παραμόρφωσης $U:U(y,z)$, ενώ $\alpha:\alpha(x)$ είναι μία παράμετρος που δηλώνει την ένταση της παραμόρφωσης κατά μήκος της δοκού. Αξιοσημείωτο είναι ότι ποικίλες μελέτες από την βιβλιογραφία (π.χ. βλ την μελέτη του Giavotto et al (1983)) το 'α' το δηλώνουν ως μία παράμετρο πολλαπλασιασμένη με U (π.χ. βλ εξ.(1α),(1β)) αντί για '$\alpha_{,x}$' που χρησιμοποιήθηκε εδώ. Επισημαίνεται επίσης ότι η επιλογή του $\alpha_{,x}$ (εξ. 2.1) οδηγεί στην άμεση διατύπωση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμής αντί του τετραγωνικού το οποίο απαιτεί τον διπλασιασμό των αγνώστων. Οι εισαγόμενες πρόσθετες μετακινήσεις θεωρείται ότι οδηγούν στην αυτό-ισορροπούμενη κατανομή τάσεων η οποία προκαλείται από τις εκτός επιπέδου και εντός επιπέδου παραμορφώσεις της διατομής. Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο, οι συνιστώσες παραμόρφωσης εξαιτίας των επιρροών από τα άκρα της δοκού υπολογίστηκαν ως εξής:

$$(\varepsilon_{xx})_m=(\bar{u}_{res,x})_m=\alpha_{,x}(\Phi)_m \quad (2.2a)$$

$$(\varepsilon_{yy})_m=(\bar{v}_{res,y})_m=\alpha_{,x}(V_{,y})_m \quad (2.2b)$$

$$(\varepsilon_{zz})_m=(\bar{w}_{res,z})_m=\alpha_{,x}(W_{,z})_m \quad (2.2c)$$

$$\left(\gamma_{xy}\right)_m = \left(\bar{v}_{res,x}\right)_m + \left(\bar{u}_{res,y}\right)_m = \alpha_{,xx}\left(V\right)_m + \alpha\left(\Phi_{,y}\right)_m \tag{2.2d}$$

$$\left(\gamma_{xz}\right)_m = \left(\bar{w}_{res,x}\right)_m + \left(\bar{u}_{res,z}\right)_m = \alpha_{,xx}\left(W\right)_m + \alpha\left(\Phi_{,z}\right)_m \tag{2.2e}$$

$$\left(\gamma_{yz}\right)_m = \left(\bar{w}_{res,y}\right)_m + \left(\bar{v}_{res,z}\right)_m = \alpha_{,x}\left[\left(W_{,y}\right)_m + \left(V_{,z}\right)_m\right] \tag{2.2f}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο Hook τάση- παραμόρφωση, τα αντίστοιχα εντατικά στοιχεία Cauchy από το m-υλικό της διατομής μπορεί να προκύψουν ως εξής:

$$\left(\sigma_{xx}\right)_m = \left(2\mu_m + \lambda_m\right)\alpha_{,x}\left(\Phi\right)_m + \lambda_m\alpha_{,x}\left[\left(V_{,y}\right)_m + \left(W_{,z}\right)_m\right] \tag{2.3a}$$

$$\left(\sigma_{yy}\right)_m = \left(2\mu_m + \lambda_m\right)\alpha_{,x}\left(V_{,y}\right)_m + \lambda_m\alpha_{,x}\left[\left(\Phi\right)_m + \left(W_{,z}\right)_m\right] \tag{2.3b}$$

$$\left(\sigma_{zz}\right)_m = \left(2\mu_m + \lambda_m\right)\alpha_{,x}\left(W_{,z}\right)_m + \lambda_m\alpha_{,x}\left[\left(\Phi\right)_m + \left(V_{,y}\right)_m\right] \tag{2.3c}$$

$$\left(\tau_{xy}\right)_m = \mu_m\left[\alpha_{,xx}\left(V\right)_m + \alpha\left(\Phi_{,y}\right)_m\right] \tag{2.3d}$$

$$\left(\tau_{xz}\right)_m = \mu_m\left[\alpha_{,xx}\left(W\right)_m + \alpha\left(\Phi_{,z}\right)_m\right] \tag{2.3e}$$

$$\left(\tau_{yz}\right)_m = \mu_m\alpha_{,x}\left[\left(W_{,y}\right)_m + \left(V_{,z}\right)_m\right] \tag{2.3f}$$

Όπου μ_m, λ_m είναι οι συντελεστές Lame από το m-υλικό. Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου $\nu_m \to 0$ οι εξισώσεις (2.3a-c) μπορούν να απλοποιηθούν σε :

$$\left(\sigma_{xx}\right)_m = E_m\alpha_{,x}\left(\Phi\right)_m \quad \left(\sigma_{yy}\right)_m = E_m\alpha_{,x}\left(V_{,y}\right)_m \quad \left(\sigma_{zz}\right)_m = E_m\alpha_{,x}\left(W_{,z}\right)_m \tag{2.4a,b,c}$$

όπου σ' αυτήν την ιδιαίτερη περίπτωση ισχύει ότι $E_m = 2\mu_m$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας τρισδιάστατης ελαστικότητας και θεωρώντας τις μαζικές δυνάμεις να μηδενίζονται προκύπτει:

$$\left(\bar{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)_m = 0 \quad \forall Q \in \Omega \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\sigma_{xx,x}\right)_m + \left(\tau_{xy,y}\right)_m + \left(\tau_{xz,z}\right)_m &= 0\\
\left(\tau_{xy,x}\right)_m + \left(\sigma_{yy,y}\right)_m + \left(\tau_{yz,z}\right)_m &= 0\\
\left(\tau_{xz,x}\right)_m + \left(\tau_{yz,y}\right)_m + \left(\sigma_{zz,z}\right)_m &= 0
\end{aligned}\right\} \forall\, Q \in \Omega \tag{2.5}$$

και αντικαθιστώντας τις συνιστώσες των τάσεων από το (2.3), το ακόλουθο σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων μπορεί να προέλθει από την m-οστή περιοχή ως:

$$\mu_m \alpha \nabla^2 (\Phi)_m + (\mu_m + \lambda_m)\alpha_{,xx} (\nabla \cdot \mathbf{U})_m + (2\mu_m + \lambda_m)\alpha_{,xx} (\Phi)_m = 0 \qquad (2.6a)$$

$$\mu_m \alpha_{,x} \nabla^2 (V)_m + (\mu_m + \lambda_m)\alpha_{,x} (\nabla \cdot \mathbf{U})_{m,y} + (\mu_m + \lambda_m)\alpha_{,x} (\Phi_{,y})_m + \mu_m \alpha_{,xxx} (V)_m = 0 \qquad (2.6b)$$

$$\mu_m \alpha_{,x} \nabla^2 (W)_m + (\mu_m + \lambda_m)\alpha_{,x} (\nabla \cdot \mathbf{U})_{m,z} + (\mu_m + \lambda_m)\alpha_{,x} (\Phi_{,z})_m + \mu_m \alpha_{,xxx} (W)_m = 0 \qquad (2.6c)$$

με $\nabla \equiv (\,)_{,y}\mathbf{i}_y + (\,)_{,z}\mathbf{i}_z$ να είναι ένας διδιάστατος αρμονικός τελεστής. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι οι επιρροές από τις ακριανές στηρίξεις παριστάνουν την κατανομή των τάσεων, το μέγεθος των οποίων μειώνεται εκθετικά από την στήριξη σύμφωνα και με την αρχή του St.Venant (Giavotto et al., 1983; Reagan and Pilkey, 2002; Jönsson and Andreassen, 2011), αναζητάμε μία λύση για το α της μορφής

$$\alpha(x) = e^{-cx} \qquad (2.7)$$

όπου c είναι μία σταθερά που πρέπει να προσδιορισθεί σχετικά με την έκταση του μήκους επιρροής από τα άκρα. (Reagan and Pilkey, 2002; Jönsson and Andreassen, 2011). Αντικαθιστώντας το (2.7) στο (2.6) προκύπτει το ακόλουθο σύστημα :

$$\left[\mu_m \nabla^2 (\Phi)_m + c^2 (\mu_m + \lambda_m)(\nabla \cdot \mathbf{U})_m + c^2 (2\mu_m + \lambda_m)(\Phi)_m\right] e^{-cx} = 0 \qquad (2.8a)$$

$$\left[c\mu_m \nabla^2 (V)_m + c(\mu_m + \lambda_m)(\nabla \cdot \mathbf{U})_{m,y} + c(\mu_m + \lambda_m)(\Phi_{,y})_m + c^3 \mu_m (V)_m\right] e^{-cx} = 0 \qquad (2.8b)$$

$$\left[c\mu_m \nabla^2 (W)_m + c(\mu_m + \lambda_m)(\nabla \cdot \mathbf{U})_{m,z} + c(\mu_m + \lambda_m)(\Phi_{,z})_m + c^3 \mu_m (W)_m\right] e^{-cx} = 0 \qquad (2.8c)$$

Για να ισχύει το παραπάνω σύστημα για κάθε τιμή του x, οι ακόλουθες εξισώσεις χρειάζεται να ικανοποιούνται:

$$\nabla^2 (\Phi)_m = c^2 \left[-\frac{2\mu_m + \lambda_m}{\mu_m}(\Phi)_m - \frac{\mu_m + \lambda_m}{\mu_m}(\nabla \cdot \mathbf{U})_m\right] \qquad (2.9a)$$

$$\nabla^2 (V)_m + \frac{\mu_m + \lambda_m}{\mu_m}\left[(\nabla \cdot \mathbf{U})_{m,y} + (\Phi_{,y})_m\right] = c^2\left[-(V)_m\right] \qquad (2.9b)$$

$$\nabla^2 (W)_m + \frac{\mu_m + \lambda_m}{\mu_m}\left[(\nabla \cdot \mathbf{U})_{m,z} + (\Phi_{,z})_m\right] = c^2\left[-(W)_m\right] \qquad (2.9c)$$

Το παραπάνω σύστημα την μερικών διαφορικών εξισώσεων για την διδιάστατη περιοχή της διατομής υφίσταται τις ακόλουθες φυσικές συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} \left(\tau_{xn}(s)\right)_m = 0 \quad s \in \Gamma^{fr}_{\Omega_m}, \quad m = 1,2,...,M \\ \left(\tau_{xn}(s)\right)_m = -\left(\tau_{xn}(s)\right)_n \quad s \in \Gamma^{int}_{\Omega_m} \cup \Gamma^{int}_{\Omega_n}, \; m,n = 1,2,...,M, \; m \neq n \end{cases} \tag{2.10a}$$

$$\begin{cases} \left(\tau_{yn}(s)\right)_m = 0 \quad s \in \Gamma^{fr}_{\Omega_m}, \quad m = 1,2,...,M \\ \left(\tau_{yn}(s)\right)_m = -\left(\tau_{yn}(s)\right)_n \quad s \in \Gamma^{int}_{\Omega_m} \cup \Gamma^{int}_{\Omega_n}, \; m,n = 1,2,...,M, \; m \neq n \end{cases} \tag{2.10b}$$

$$\begin{cases} \left(\tau_{zn}(s)\right)_m = 0 \quad s \in \Gamma^{fr}_{\Omega_m}, \quad m = 1,2,...,M \\ \left(\tau_{zn}(s)\right)_m = -\left(\tau_{zn}(s)\right)_n \quad s \in \Gamma^{int}_{\Omega_m} \cup \Gamma^{int}_{\Omega_n}, \; m,n = 1,2,...,M, \; m \neq n \end{cases} \tag{2.10c}$$

όπου,

$$\left(\tau_{xn}\right)_m = \left(\tau_{xy}\right)_m n_y + \left(\tau_{xz}\right)_m n_z \xrightarrow{(2.3d,e)}$$

$$\left(\tau_{xn}\right)_m = \alpha\mu_m\left(\Phi_{,n}\right)_m + \alpha_{,xx}\mu_m\left[\left(V\right)_m n_y + \left(W\right)_m n_z\right] \tag{2.11a}$$

$$\left(\tau_{yn}\right)_m = \left(\sigma_{yy}\right)_m n_y + \left(\tau_{yz}\right)_m n_z \xrightarrow{(2.3b,f)}$$

$$\left(\tau_{yn}\right)_m = \alpha_{,x}\left\{\mu_m\left(V_{,n}\right)_m + \mu_m\left[\left(V_{,y}\right)_m n_y + \left(W_{,y}\right)_m n_z\right] + \lambda_m\left[\left(V_{,y}\right)_m + \left(W_{,z}\right)_m\right]n_y + \right.$$
$$\left. + \lambda_m\left(\Phi\right)_m n_y\right\} \tag{2.11b}$$

$$\left(\tau_{zn}\right)_m = \left(\tau_{zy}\right)_m n_y + \left(\sigma_{zz}\right)_m n_z \xrightarrow{(2.3c,f)}$$

$$\left(\tau_{zn}\right)_m = \alpha_{,x}\left\{\mu_m\left(W_{,n}\right)_m + \mu_m\left[\left(V_{,z}\right)_m n_y + \left(W_{,z}\right)_m n_z\right] + \lambda_m\left[\left(V_{,y}\right)_m + \left(W_{,z}\right)_m\right]n_z + \right.$$
$$\left. + \lambda_m\left(\Phi\right)_m n_z\right\} \tag{2.11c}$$

όπου n_y, n_z είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης συνήθη εξωτερικών διανυσμάτων στο σύνορο n σε σχέση με τους y, z άξονες. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (2.7), (2.10) σε συνδυασμό με τις (2.9), (2.11) ,το ακόλουθο διδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών γράφεται ως

$$\nabla^2\left(\Phi\right)_m = c^2\left[-\frac{2}{1-\bar{\nu}_m}\left(\Phi\right)_m - \frac{1+\bar{\nu}_m}{1-\bar{\nu}_m}\left(\nabla\cdot\mathbf{U}\right)_m\right] \tag{2.12a}$$

$$\begin{cases} \left(\Phi_{,n}\right)_m = c^2\left[-\left(V\right)_m n_y - \left(W\right)_m n_z\right] \quad \text{στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_m\left(\Phi_{,n}\right)_m + \mu_n\left(\Phi_{,n}\right)_n = c^2\left(\mu_m - \mu_n\right)\left[-\left(V\right)_m n_y - \left(W\right)_m n_z\right] \text{στην διεπιφάνεια} \end{cases} \tag{2.12b}$$

$$\nabla^2\left(V\right)_m + \frac{1+\bar{\nu}_m}{1-\bar{\nu}_m}\left[\left(\nabla\cdot\mathbf{U}\right)_{m,y} + \left(\Phi_{,y}\right)_m\right] = c^2\left[-\left(V\right)_m\right] \tag{2.12c}$$

$$\nabla^2\left(W\right)_m + \frac{1+\bar{\nu}_m}{1-\bar{\nu}_m}\left[\left(\nabla\cdot\mathbf{U}\right)_{m,z} + \left(\Phi_{,z}\right)_m\right] = c^2\left[-\left(W\right)_m\right] \tag{2.12d}$$

$$\begin{cases} \mu_m\left\{\left(V_{,n}\right)_m + \left[\left(V_{,y}\right)_m n_y + \left(W_{,y}\right)_m n_z\right]\right\} + \lambda_m\left[\left(V_{,y}\right)_m + \left(W_{,z}\right)_m\right]n_y = -\lambda_m\left(\Phi\right)_m n_y \\ \text{στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_m\left\{\left(V_{,n}\right)_m + \left[\left(V_{,y}\right)_m n_y + \left(W_{,y}\right)_m n_z\right]\right\} + \lambda_m\left[\left(V_{,y}\right)_m + \left(W_{,z}\right)_m\right]n_y + \\ \mu_n\left\{\left(V_{,n}\right)_n + \left[\left(V_{,y}\right)_n n_y + \left(W_{,y}\right)_n n_z\right]\right\} + \lambda_n\left[\left(V_{,y}\right)_n + \left(W_{,z}\right)_n\right]n_y = -\left(\lambda_m + \lambda_n\right)\left(\Phi\right)_m n_y \\ \text{στην διεπιφάνεια} \end{cases} \tag{2.12e}$$

$$\begin{cases} \mu_m\left\{\left(W_{,n}\right)_m + \left[\left(V_{,z}\right)_m n_y + \left(W_{,z}\right)_m n_z\right]\right\} + \lambda_m\left[\left(V_{,y}\right)_m + \left(W_{,z}\right)_m\right]n_z = -\lambda_m\left(\Phi\right)_m n_z \\ \text{στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_m\left\{\left(W_{,n}\right)_m + \left[\left(V_{,z}\right)_m n_y + \left(W_{,z}\right)_m n_z\right]\right\} + \lambda_m\left[\left(V_{,y}\right)_m + \left(W_{,z}\right)_m\right]n_z + \\ \mu_n\left\{\left(W_{,n}\right)_n + \left[\left(V_{,z}\right)_n n_y + \left(W_{,z}\right)_n n_z\right]\right\} + \lambda_n\left[\left(V_{,y}\right)_n + \left(W_{,z}\right)_n\right]n_z = -\left(\lambda_m + \lambda_n\right)\left(\Phi\right)_m n_z \\ \text{στην διεπιφάνεια} \end{cases} \tag{2.12f}$$

όπου με $\bar{\nu}_m = \nu_m / \left(1-\nu_m\right)$ είναι το ενεργό μέτρο Poisson. Εάν έχουμε επίπεδη ένταση για το εξεταζόμενο πρόβλημα , το $\bar{\nu}_m$ αντικαθίσταται από το ν_m , ενώ όταν $\nu_m \to 0$ αυτό συνάγει ότι $\lambda_m = 0$. Σ' αυτήν την ιδιαίτερη περίπτωση, το συνοριακό πρόβλημα τιμών (2.12) περιορίζεται στο ακόλουθο :

$$\nabla^2\left(\Phi\right)_m = c^2\left[-2\left(\Phi\right)_m - \left(\nabla\cdot\mathbf{U}\right)_m\right] \tag{2.13a}$$

$$\begin{cases} \left(\Phi_{,n}\right)_m = c^2\left[-\left(V\right)_m n_y - \left(W\right)_m n_z\right] \text{ στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_m\left(\Phi_{,n}\right)_m + \mu_n\left(\Phi_{,n}\right)_n = c^2\left(\mu_m + \mu_n\right)\left[-\left(V\right)_m n_y - \left(W\right)_m n_z\right] \text{ στην διεπιφάνεια} \end{cases} \tag{2.13b}$$

$$\nabla^2 \left(V\right)_m + \left(\nabla \cdot \mathbf{U}\right)_{m,y} + \left(\Phi_{,y}\right)_m = c^2 \left[-\left(V\right)_m\right] \tag{2.13c}$$

$$\nabla^2 \left(W\right)_m + \left(\nabla \cdot \mathbf{U}\right)_{m,z} + \left(\Phi_{,z}\right)_m = c^2 \left[-\left(W\right)_m\right] \tag{2.13d}$$

$$\begin{cases} \left(\mathrm{V}_{,\mathrm{n}}\right)_\mathrm{m} + \left[\left(\mathrm{V}_{,\mathrm{y}}\right)_\mathrm{m} \mathrm{n}_\mathrm{y} + \left(\mathrm{W}_{,\mathrm{y}}\right)_\mathrm{m} \mathrm{n}_\mathrm{z}\right] = 0 \quad \text{στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_\mathrm{m}\left\{\left(\mathrm{V}_{,\mathrm{n}}\right)_\mathrm{m} + \left[\left(\mathrm{V}_{,\mathrm{y}}\right)_\mathrm{m} \mathrm{n}_\mathrm{y} + \left(\mathrm{W}_{,\mathrm{y}}\right)_\mathrm{m} \mathrm{n}_\mathrm{z}\right]\right\} + \mu_\mathrm{n}\left\{\left(\mathrm{V}_{,\mathrm{n}}\right)_\mathrm{n} + \left[\left(\mathrm{V}_{,\mathrm{y}}\right)_\mathrm{n} \mathrm{n}_\mathrm{y} + \left(\mathrm{W}_{,\mathrm{y}}\right)_\mathrm{n} \mathrm{n}_\mathrm{z}\right]\right\} = 0 \\ \text{στην διεπιφάνεια} \end{cases} \tag{2.13e}$$

$$\begin{cases} \left(\mathrm{W}_{,\mathrm{n}}\right)_\mathrm{m} + \left[\left(\mathrm{V}_{,\mathrm{z}}\right)_\mathrm{m} \mathrm{n}_\mathrm{y} + \left(\mathrm{W}_{,\mathrm{z}}\right)_\mathrm{m} \mathrm{n}_\mathrm{z}\right] = 0 \quad \text{στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_\mathrm{m}\left\{\left(\mathrm{W}_{,\mathrm{n}}\right)_\mathrm{m} + \left[\left(\mathrm{V}_{,\mathrm{z}}\right)_\mathrm{m} \mathrm{n}_\mathrm{y} + \left(\mathrm{W}_{,\mathrm{z}}\right)_\mathrm{m} \mathrm{n}_\mathrm{z}\right]\right\} + \mu_\mathrm{n}\left\{\left(\mathrm{W}_{,\mathrm{n}}\right)_\mathrm{n} + \left[\left(\mathrm{V}_{,\mathrm{z}}\right)_\mathrm{n} \mathrm{n}_\mathrm{y} + \left(\mathrm{W}_{,\mathrm{z}}\right)_\mathrm{n} \mathrm{n}_\mathrm{z}\right]\right\} = 0 \\ \text{στην διεπιφάνεια} \end{cases} \tag{2.13f}$$

Επακολούθως, εφαρμόζοντας κατάλληλη διακριτοποίηση στην διατομή, τα παραπάνω ζεύγη συνοριακών τιμών του προβλήματος (2.12) (ή το απλοποιημένο που δίνεται από τις εξισώσεις (2.13)) οδηγεί στην διατύπωση του γενικευμένου προβλήματος συνοριακών τιμών της μορφής:

$$\mathbf{AW} = \mathrm{c}^2 \mathbf{BW} \tag{2.14}$$

Όπου $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ είναι γνωστά μητρώα συντελεστών τα οποία εξαρτώνται από την διακριτοποίηση, ενώ $c^2, \mathbf{W} = \left[\Phi \quad \mathbf{U}\right]^T$ είναι γενικευμένες τιμές ιδιοτιμής και ιδιοδιανύσματος του μητρώου $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ αντίστοιχα. Η λύση του προβλήματος ιδιοτιμής (2.14) παράγει ένα πακέτο από N ιδιοτιμές c_i^2 μαζί με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{W}_i (i = 1, \ldots, N)$ τα οποία αποτελούν μία βάση από μορφές παραμόρφωσης της διατομής κατάλληλη για την ανάλυση διαστρέβλωσης των δοκών.

2.1.2 Σχήμα διαδοχικής ισορροπίας

Η ανάλυση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα οδηγεί σε ένα πακέτο χρήσιμων μορφών παραμόρφωσης, που όμως παρουσιάζει το εξής μειονέκτημα. Αυτό το εν λόγω πακέτο μορφών εμπεριέχει καμπτικές, στρεπτικές μορφές και μορ-

φές λόγω αξονικής έντασης με σειρά σημαντικότητας, χωρίς κάποια διάκριση μεταξύ τους. Ως εκ τούτου μία προσπάθεια να κρατηθεί η ποσότητα των αγνώστων της δοκού ελάχιστη απαιτείται έλεγχο από τον αναλυτή έτσι ώστε να βρίσκει σχετικά σημαντικές μορφές (π.χ. εκείνες με τις μικρότερες ιδιοτιμές). Διαφορετικά εάν προτιμάται μια αυτόματη επιλογή μορφών, ένας σχετικά μεγάλος προ-καθορισμένος αριθμός μορφών θα πρέπει να χρησιμοποιείται για να επιβεβαιωθεί ότι όλοι οι μηχανισμοί (αξονικοί, καμπτικοί, στρεπτικοί) παριστάνονται σωστά από τις χρησιμοποιούμενες μορφές.

Στη παρούσα εργασία το παραπάνω έλλειμμα παρακάμπτεται, εκμεταλλεύοντας τις ιδέες από την ανάλυση του γενικευμένου προβλήματος στρέβλωσης δοκών. Πιο συγκεκριμένα, στην δεύτερη ανάλυση, για να υπολογιστούν σχετικές συναρτήσεις στρέβλωσης γίνεται μια προσπάθεια για να εκπληρώνεται διαδοχικά η τοπική ισορροπία εισάγοντας πρόσθετες συναρτήσεις στρέβλωσης, έτσι ώστε να ισορροπούν τα μη ισορροπημένα 'κατάλοιπα' εντάσεων. Χρησιμοποιώντας και γενικεύοντας την ιδέα αυτή ,η i μορφή παραμόρφωσης $\mathbf{W}_i$ διαχωρίζεται ως εξής :

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \mathbf{w}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \mathbf{U}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{i-1} \\ \mathbf{u}_{i-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \mathbf{u}_i \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

Υποθέτοντας ότι $\mathbf{w}_{i-1}$ είναι ένα ήδη καθορισμένο στοιχείο από την i μορφή, οι εξισώσεις (2.12) γράφονται ως :

$$\nabla^2 \left(\tilde{\Phi}_i\right)_m = -\frac{2}{1-\bar{\nu}_m}\left(\varphi_{i-1}\right)_m - \frac{1+\bar{\nu}_m}{1-\bar{\nu}_m}\left(\nabla \cdot \mathbf{u}_{i-1}\right)_m \tag{2.16a}$$

$$\begin{cases} \left(\tilde{\Phi}_{i,n}\right)_m = -\left(v_{i-1}\right)_m n_y - \left(w_{i-1}\right)_m n_z \text{ στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_m \left(\tilde{\Phi}_{i,n}\right)_m + \mu_n \left(\tilde{\Phi}_{i,n}\right)_n = \left(\mu_m + \mu_n\right)\left[-\left(v_{i-1}\right)_m n_y - \left(w_{i-1}\right)_m n_z\right] \text{ στην διεπιφάνεια} \end{cases} \tag{2.16b}$$

$$\nabla^2 \left(\tilde{V}_i\right)_m + \frac{1+\bar{\nu}_m}{1-\bar{\nu}_m}\left[\left(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i\right)_{m,y} + \left(\tilde{\Phi}_{i,y}\right)_m\right] = -\left(v_{i-1}\right)_m \tag{2.16c}$$

$$\nabla^2 \left(\tilde{W}_i\right)_m + \frac{1+\bar{\nu}_m}{1-\bar{\nu}_m}\left[\left(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i\right)_{m,z} + \left(\tilde{\Phi}_{i,z}\right)_m\right] = -\left(w_{i-1}\right)_m \tag{2.16d}$$

$$\begin{cases} \mu_m\left\{\left(\tilde{V}_{i,n}\right)_m+\left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_m n_y+\left(\tilde{W}_{i,y}\right)_m n_z\right]\right\}+\lambda_m\left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_m+\left(\tilde{W}_{i,z}\right)_m\right]n_y=-\lambda_m\left(\tilde{\Phi}_i\right)_m n_y \\ \text{στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_m\left\{\left(\tilde{V}_{i,n}\right)_m+\left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_m n_y+\left(\tilde{W}_{i,y}\right)_m n_z\right]\right\}+\lambda_m\left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_m+\left(\tilde{W}_{i,z}\right)_m\right]n_y+ \\ \mu_n\left\{\left(\tilde{V}_{i,n}\right)_n+\left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_n n_y+\left(\tilde{W}_{i,y}\right)_n n_z\right]\right\}+\lambda_n\left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_n+\left(\tilde{W}_{i,z}\right)_n\right]n_y=-\left(\lambda_m+\lambda_n\right)\left(\tilde{\Phi}_i\right)_m n_y \\ \text{στην διεπιφάνεια} \end{cases} \tag{2.16e}$$

$$\begin{cases} \mu_m\left\{\left(\tilde{W}_{i,n}\right)_m+\left[\left(\tilde{V}_{i,z}\right)_m n_y+\left(\tilde{W}_{i,z}\right)_m n_z\right]\right\}+\lambda_m\left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_m+\left(\tilde{W}_{i,z}\right)_m\right]n_z=-\lambda_m\left(\tilde{\Phi}_i\right)_m n_z \\ \text{στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_m\left\{\left(\tilde{W}_{i,n}\right)_m+\left[\left(\tilde{V}_{i,z}\right)_m n_y+\left(\tilde{W}_{i,z}\right)_m n_z\right]\right\}+\lambda_m\left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_m+\left(\tilde{W}_{i,z}\right)_m\right]n_z+ \\ \mu_n\left\{\left(\tilde{W}_{i,n}\right)_n+\left[\left(\tilde{V}_{i,z}\right)_n n_y+\left(\tilde{W}_{i,z}\right)_n n_z\right]\right\}+\lambda_n\left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_n+\left(\tilde{W}_{i,z}\right)_n\right]n_z=-\left(\lambda_m+\lambda_n\right)\left(\tilde{\Phi}_i\right)_m n_z \\ \text{στην διεπιφάνεια} \end{cases} \tag{2.16f}$$

όπου $\mathbf{W}_i = c_i^2\tilde{\mathbf{W}}_i$. Σημειώνεται εδώ ότι οι όροι του $\mathbf{w}_i$ στο δεξί μέλος των παραπάνω εξισώσεων (2.16) θεωρούνται ως υπολειπόμενοι όροι και έχουν παραληφθεί έτσι ώστε να υπάρχει ισορροπία στην επόμενη φάση $i+1$. Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να λυθεί επαναληπτικά, μέχρι το σφάλμα εξαιτίας του υπολειπόμενων ορίων $\mathbf{w}_i$ να είναι το ελάχιστο. Όταν $\nu_m \to 0$ το παραπάνω συνοριακό πρόβλημα τιμών περιορίζεται στο παρακάτω :

$$\nabla^2\left(\tilde{\Phi}_i\right)_m=-2\left(\varphi_{i-1}\right)_m-\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_{i-1}\right)_m \tag{2.17a}$$

$$\begin{cases} \left(\tilde{\Phi}_{i,n}\right)_m=-\left(v_{i-1}\right)_m n_y-\left(w_{i-1}\right)_m n_z \text{ στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_m\left(\tilde{\Phi}_{i,n}\right)_m+\mu_n\left(\tilde{\Phi}_{i,n}\right)_n=\left(\mu_m+\mu_n\right)\left[-\left(v_{i-1}\right)_m n_y-\left(w_{i-1}\right)_m n_z\right] \text{στην διεπιφάνεια} \end{cases} \tag{2.17b}$$

$$\nabla^2\left(\tilde{V}_i\right)_m+\left[\left(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{U}}_i\right)_{m,y}+\left(\tilde{\Phi}_{i,y}\right)_m\right]=-\left(u_{i-1}\right)_m \tag{2.17c}$$

$$\nabla^2\left(\tilde{W}_i\right)_m+\left[\left(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{U}}_i\right)_{m,z}+\left(\tilde{\Phi}_{i,z}\right)_m\right]=-\left(w_{i-1}\right)_m \tag{2.17d}$$

$$\begin{cases} \left(\tilde{V}_{i,n}\right)_m + \left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_m n_y + \left(\tilde{W}_{i,y}\right)_m n_z\right] = 0 \ \text{στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_m \left\{\left(\tilde{V}_{i,n}\right)_m + \left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_m n_y + \left(\tilde{W}_{i,y}\right)_m n_z\right]\right\} + \mu_n \left\{\left(\tilde{V}_{i,n}\right)_n + \left[\left(\tilde{V}_{i,y}\right)_n n_y + \left(\tilde{W}_{i,y}\right)_n n_z\right]\right\} = 0 \\ \text{στην διεπιφάνεια} \end{cases}$$

(2.17e)

$$\begin{cases} \left(\tilde{W}_{i,n}\right)_m + \left[\left(\tilde{V}_{i,z}\right)_m n_y + \left(\tilde{W}_{i,z}\right)_m n_z\right] = 0 \ \text{στην ελεύθερη επιφάνεια} \\ \mu_m \left\{\left(\tilde{W}_{i,n}\right)_m + \left[\left(\tilde{V}_{i,z}\right)_m n_y + \left(\tilde{W}_{i,z}\right)_m n_z\right]\right\} + \mu_n \left\{\left(\tilde{W}_{i,n}\right)_n + \left[\left(\tilde{V}_{i,z}\right)_n n_y + \left(\tilde{W}_{i,z}\right)_n n_z\right]\right\} = 0 \\ \text{στην διεπιφάνεια} \end{cases}$$

(2.17f)

Η ανάλυση της διατομής με βάση το παραπάνω σχήμα διαδοχής (2.16) (ή τον απλοποιημένο (2.17)) αρχίζει όταν i=1 εξετάζοντας ξεχωριστά το αξονικό, καμπτικό και στρεπτικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας ένα προκαθορισμένο διάνυσμα $\mathbf{w}_{i-1} \equiv \mathbf{w}_0$ εκφράζοντας τις αντίστοιχες μετακινήσεις στερεού σώματος της διατομής (για κάμψη σε σχέση με τον άξονα z ,σημαίνει ότι $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, για στρέψη $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \end{bmatrix}^T$, κ.λπ.). Ποιοτικές παρατηρήσεις για τα χαρακτηριστικά των παραγόμενων μορφών θα γίνουν στην επόμενη ενότητα.

Αξιοσημείωτο είναι ότι η i μορφή $\tilde{\mathbf{W}}_i$ που υπολογίστηκε από τις εξισώσεις (2.16) (ή από τις απλοποιημένες (2.17)) εκτιμήθηκε σε σχέση με την σταθερά c_i^2. Αυτή η σταθερά υπολογίστηκε έτσι ώστε να πληρείται η ορθογωνικότητα

$$\langle \varphi_{i-1}, \varphi_i \rangle = \sum_{m=1}^{M} e_m \int_{\Omega_m} \left(\varphi_{i-1}\right)_m \left(\varphi_i\right)_m d\Omega = 0 \qquad (2.18)$$

Η παραπάνω συνθήκη καθιστά την συνάρτηση στρέβλωσης ικανή να παράγει αποσυζευγμένες κατανομές ορθών τάσεων. Ως εκ τούτου, εκμεταλλευόμενοι την ακόλουθη εξίσωση .

$$c_i^2 \tilde{\Phi}_i = \Phi_i \xrightarrow{(2.15)} c_i^2 \tilde{\Phi}_i = \varphi_{i-1} + \varphi_i \qquad (2.19a,b)$$

πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές με φ_{i-1} και ολοκληρώνοντας την, κατάλληλα σε όλη την διατομή, η ακόλουθη σχέση για c_i^2 προκύπτει ως :

$$c_i^2 = \frac{\sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega_m} e_m \left(\varphi_{i-1}\right)_m \left(\varphi_{i-1}\right)_m d\Omega}{\sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega_m} e_m \left(\varphi_{i-1}\right)_m \left(\tilde{\Phi}_i\right)_m d\Omega} = \frac{I_{\varphi_{i-1}\varphi_{i-1}}}{I_{\varphi_{i-1}\tilde{\Phi}_i}} \tag{2.20}$$

όπου $e_m = \left(2\mu_m + \lambda_m\right) \Big/ \left(2\mu_{ref} + \lambda_{ref}\right)$. Μετά την εκτίμηση της τιμής c_i^2, μπορεί να οριστεί το $\mathbf{W}_i = c_i^2 \tilde{\mathbf{W}}_i$ και επακολούθως το $\mathbf{w}_i$ μπορεί να προκύψει από την (2.15). Αξιοσημείωτο είναι ότι εφαρμόζοντας την προηγούμενη διαδικασία, τα $\mathbf{u}_{i-1}$, $\mathbf{u}_i$ δεν είναι αναγκαία ορθογωνικά.

Όπως και θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα, στα πλαίσια της γενικής θεωρίας δοκού με επιρροή διαστρέβλωσης, όλες οι προκύπτουσες συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης πολλαπλασιάζονται με ανεξάρτητους παραμέτρους ελέγχοντας την ένταση τους, άρα αυτές λειτουργούν απλά ως πρότυπες μορφές παραμόρφωσης για την διατομή. Συνεπώς το μέγεθος τους δεν είναι σημασίας ,ενώ δεν είναι αναγκαίο να διατηρείται η σύζευξη των μορφών διαστρέβλωσης. Στη παρούσα φάση, σε μία προσπάθεια να περιοριστούν τα συμπεριλαμβανόμενα ζεύγη στη καθολική ανάλυση μετά τον υπολογισμό των διανυσμάτων $\mathbf{u}_i$ μια πρόσθετη διαδικασία ορθογωνοποίησης προστίθεται έτσι ώστε τα $\mathbf{u}_i$ για κάθε μηχανισμό (κάμψης , στρέψης) να είναι αμοιβαία ορθογωνικά. Αυτή η ορθογωνοποίηση αποτελείται από τον υπολογισμό κατάλληλων σταθερών a_i έτσι ώστε :

$$\mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{u}}_i + \alpha_i \, \mathbf{u}_{i-1} \tag{2.21a}$$

$$\langle \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i \rangle = \sum_{m=1}^{M} g_m \int_{\Omega_m} \left(\mathbf{u}_{i-1}\right)_m \cdot \left(\mathbf{u}_i\right)_m d\Omega = 0 \tag{2.21b}$$

όπου το σύμβολο $\hat{\mathbf{u}}_i$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει την μορφή πριν τη ορθογωνοποίηση. Έτσι χρησιμοποιώντας το (2.21a) και ολοκληρώνοντας το κατάλληλα στην διατομή, οι σταθερές a_i εκτιμώνται ως εξής :

$$\alpha_i = \frac{\sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega_m} g_m \left(\mathbf{u}_{i-1}\right)_m \cdot \left(\mathbf{u}_{i-1}\right)_m d\Omega}{\sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega_m} g_m \left(\mathbf{u}_{i-1}\right)_m \cdot \left(\hat{\mathbf{u}}_i\right)_m d\Omega} \tag{2.22}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις το $g_m = \mu_m / \mu_{ref}$ είναι σταθμισμένο μέτρο διάτμησης σε σχέση με το μ_{ref}, το οποίο είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού αναφοράς. Τα προβλήματα συνοριακών τιμών (2.16), (2.17) έχουν συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann , άρα κάθε μορφή στρέβλωσης /διαστρέβλωσης περιέχει τυχαία ολοκλήρωση σταθερών δείχνοντας τις μετακινήσεις και τις στροφές του στερεού σώματος. Η εκτίμηση αυτών των σταθερών πραγματοποιείται όπως παρουσιάζεται στο (Sapountzakis and Mokos, 2003).

2.2 Παρατηρήσεις για τις μορφές παραμόρφωσης λόγω διαστρέβλωσης

Εξετάζοντας το προηγούμενο αναπτυγμένο σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων (2.16) (ή το απλοποιημένο 2.17) μερικές ποιοτικές παρατηρήσεις γίνονται για τον μηχανισμό της παραμόρφωσης λόγω διαστρέβλωσης. Εξετάζοντας να παρουσιαστεί πιο απλοποιημένα και χωρίς να χάνεται η γενικότητα της περίπτωσης ομογενούς διατομής, το σύστημα (2.16) γράφεται με την ακόλουθη μορφή ως:

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_i = f_{i-1} \qquad \tilde{\Phi}_{i,n} = -v_{i-1} n_y - w_{i-1} n_z \tag{2.23a,b}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \tilde{V}_i + \dfrac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i \right)_{,y} = -\dfrac{1}{\mu} \left(b_y \right)_i \\ \nabla^2 \tilde{W}_i + \dfrac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i \right)_{,z} = -\dfrac{1}{\mu} \left(b_z \right)_i \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(t_y \right)_i = -\lambda \tilde{\Phi}_i n_y \\ \left(t_z \right)_i = -\lambda \tilde{\Phi}_i n_z \end{cases} \tag{2.23c,d}$$

όπου,

$$f_{i-1} = -\frac{2}{1-\bar{\nu}} \varphi_{i-1} - \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \nabla \cdot \mathbf{u}_{i-1} \tag{2.24a}$$

$$\left(b_y \right)_i = \mu \left(\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \tilde{\Phi}_{i,y} + v_{i-1} \right) \qquad \left(b_z \right)_i = \mu \left(\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \tilde{\Phi}_{i,z} + w_{i-1} \right) \tag{2.24b,c}$$

$$\left(t_y \right)_i = \mu \left(\tilde{V}_{i,n} + \tilde{V}_{i,y} n_y + \tilde{W}_{i,y} n_z \right) + \lambda \left(\tilde{V}_{i,y} + \tilde{W}_{i,z} \right) n_y \tag{2.24d}$$

$$\left(t_z \right)_i = \mu \left(\tilde{W}_{i,n} + \tilde{V}_{i,z} n_y + \tilde{W}_{i,z} n_z \right) + \lambda \left(\tilde{V}_{i,y} + \tilde{W}_{i,z} \right) n_z \tag{2.24e}$$

Εύκολα παρατηρείται τώρα ότι από την στιγμή που $\mathbf{w}_{i-1}$ είναι ένα γνωστό διάνυσμα, η εξίσωση Poisson (2.23a) μπορεί να λυθεί ανεξάρτητα για να παράγει συνάρτηση στρέβλωσης $\tilde{\Phi}_i$. Επακολούθως, για να εκτιμάται η εντός επιπέδου παραμόρφωση που αναπαρίσταται από την μορφή διαστρέβλωσης $\tilde{\mathbf{U}}_i$, το πρόβλημα της επίπεδης

έντασης/τροπής (όπως φάνηκε από την παρουσία του τελεστή Navier στο αριστερό μέρος της εξίσωσης (2.23c,d) υπό την επίδραση γενικευμένων καταπονήσεων στερεού σώματος $(b_j)_i$ και συνοριακών τάσεων $(t_j)_i$ ($j = y, z$) χρειάζεται να λυθούν. Όπως επίσης παρατηρείται από τις εξισώσεις (2.24b-e) ,αυτή η γενικευμένη φόρτιση συμπεριλαμβάνει διατμητική ροή στο επίπεδο της διατομής εξαιτίας της στρέβλωσης $\tilde{\Phi}_i$ συνδυαζόμενο με την απομένουσα διατμητική ροή εξαιτίας της διαστρέβλωσης $\mathbf{u}_{i-1}$. Ως εκ τούτου, αξιοπρόσεχτο για την ανάπτυξη διαστρέβλωσης είναι ότι το επίπεδο της διατομής συμπεριφέρεται ως ένας δίσκος με επίπεδη ένταση/παραμόρφωση, της οποίας η εντός επιπέδου παραμόρφωση προκύπτει έτσι ώστε η στρέβλωση που προκαλείται από την διατμητική ροή (συνδυαζόμενη με τις απομένουσες τάσεις εξαιτίας του $\mathbf{u}_{i-1}$) να εξισορροπείται. Το γεγονός αυτό μοιάζει με την προσπάθεια της εξιστάθμισης της διατμητικής ροής που πραγματοποιείται στην κλασική προσέγγιση της διαστρέβλωσης δημιουργώντας την BEF αναλογία (Wright et al., 1968; Stavridis, 2010). Η διαφορά στην παρούσα προσέγγιση με το δεύτερο, όσον αφορά το παραπάνω είναι ότι οι εν λόγω εξισώσεις δεν εξαρτώνται από την εφαρμογή εξωτερικής φόρτισης.

Στη επόμενη ενότητα μορφές λόγω κάμψης και στρέψης, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να διατυπωθεί ένα γενικό μοντέλο δοκού με επιρροή διαστρέβλωσης, θα εξεταστεί ξεχωριστά έτσι ώστε να επισημανθεί η επιρροή της αναλογίας Poisson ,όπως και επίσης να διευκρινιστούν οι ομοιότητες των γενικευμένων συναρτήσεων λόγω στρέβλωσης με αυτές στο (Dikaros and Sapountzakis (2016)). Αξιοσημείωτο είναι ότι για να διατηρηθεί η απλοποίηση εξελιγμένων θεωριών δοκού στο υψηλότερο δυνατό επίπεδο, αξονικές εντός επιπέδου μορφές παραμόρφωσης αγνοούνται στην ανάλυση.

2.2.1 Καμπτικές μορφές

Μορφές λόγω κάμψης εξετάζονται ανεξάρτητα θεωρώντας π.χ. κάμψη περί τον άξονα Z (παρόμοια ανάλυση πραγματοποιείται για κάμψη περί τον Y άξονα). Εφαρμόζοντας το σχήμα ισορροπίας (2.22) για $i = 1$ και υποθέτοντας $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, το οποίο υποδεικνύει μια μετακίνηση του στερεού σώματος της διατομής , το πρόβλημα στρέβλωσης (2.23a,b) γράφεται ως εξής:

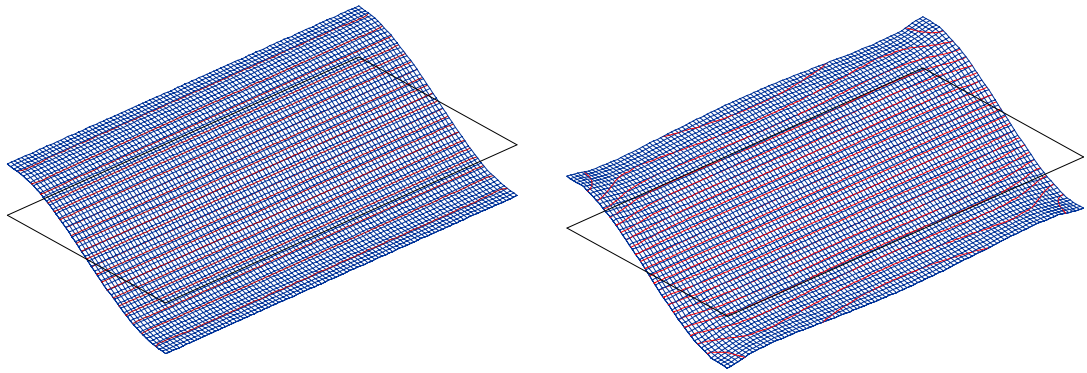
$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_1 = 0 \qquad \tilde{\Phi}_{1,n} = -n_z \tag{2.25a,b}$$

Το παραπάνω πρόβλημα Laplace (2.25) ικανοποιείται από την συνάρτηση $\tilde{\Phi}_1 = -Z$ το οποίο αναπαριστά την περιστροφή λόγω λυγισμού της διατομής γνωσ-

τό από τις κλασικές θεωρίες δοκού. Χρησιμοποιώντας αυτή την λύση για $\tilde{\Phi}_1$, η γενικευμένη φόρτιση επίπεδου προβλήματος (εξ. (2.24b-e)) γράφεται ως εξής:

$$\left(b_y\right)_1 = 0 \qquad \left(b_z\right)_1 = -\mu\frac{2\bar{v}}{1-\bar{v}} \qquad (2.26a,b)$$

$$\left(t_y\right)_1 = \lambda Z n_y \qquad \left(t_z\right)_1 = \lambda Z n_z \qquad (2.26c,d)$$



(α) $\nu = 0$ (β) $\nu = 0.3$

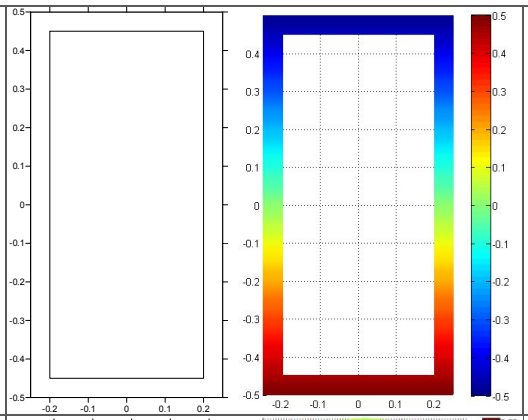
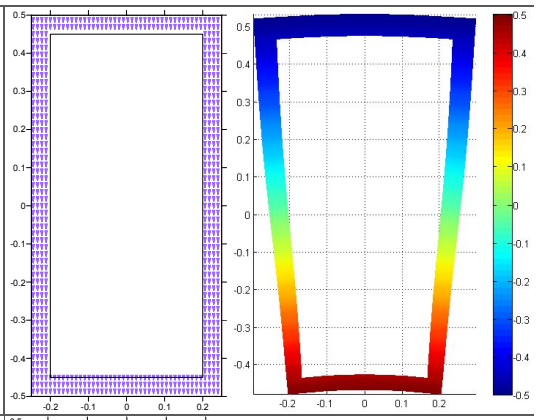
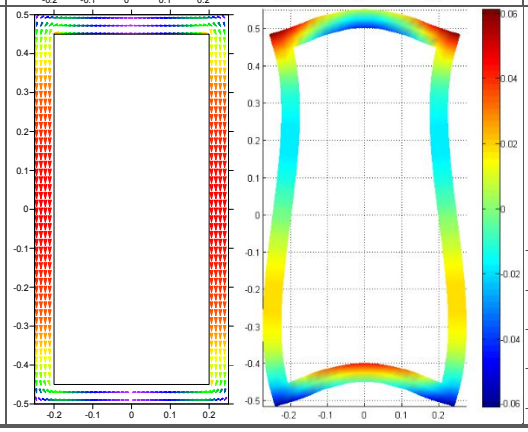
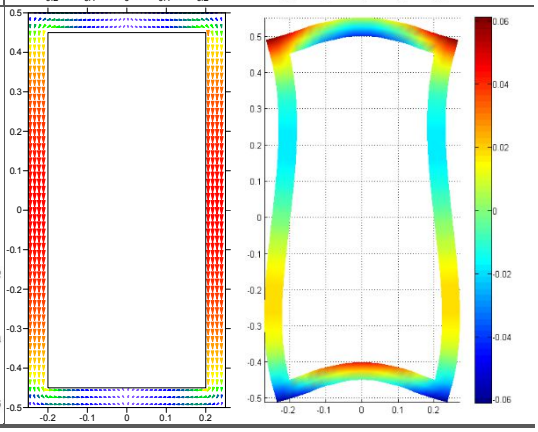
***Σχήμα 5**: Συναρτήσεις στρέβλωσης $\bar{\Phi}^P_{CY}$ σε μια ορθογωνική διατομή με α)μηδενικό και β)μη μηδενικό λόγο Poisson.*

Σ' αυτήν την συγκεκριμένη φάση, εξετάζοντας το (2.25) , παρατηρείται ότι όταν $\nu \to 0$, δεν τίθεται θέμα γενικευμένης φόρτισης. Ως εκ τούτου το πρόβλημα επίπεδης έντασης οδηγεί σε εντός επιπέδου μετακίνηση στερεού σώματος για την διατομή δηλαδή δεν συμβαίνει καμία παραμόρφωση. Εάν $\nu \neq 0$, τότε προκύπτει μη μηδενική διατμητική ροή και αναπτύσσεται εντός επιπέδου παραμόρφωση $\tilde{\mathbf{U}}_1$ (βλ. την πρώτη σειρά του Πίνακα1,2) .Από την στιγμή που αυτή η δεύτερη μορφή παραμόρφωσης εξαρτάται από την τιμή Poisson, σε ότι ακολουθεί αυτό θα αναφέρεται ως μορφή παραμόρφωσης Poisson και είναι ισοδύναμο με τις μορφές που χρησιμοποιήθηκαν σε μερικές μελέτες από την βιβλιογραφία που ερευνούν την επιρροή της εντός επιπέδου παραμόρφωσης της διατομής (π.χ. βλ. Fatmi and Ghazouani, 2011). Έχοντας υπολογίσει την $\tilde{\mathbf{W}}_1$ και από την στην στιγμή που $\varphi_0 = 0$, το c_1^2 επιλέγεται ως μοναδιαίο και $\varphi_1 = -Z$, $\mathbf{u}_1 = \tilde{\mathbf{U}}_1 - \mathbf{u}_0$.

Συνεχίζοντας την ανάλυση για $i = 2$ το πρόβλημα στρέβλωσης (2.23a,b) γράφεται ως :

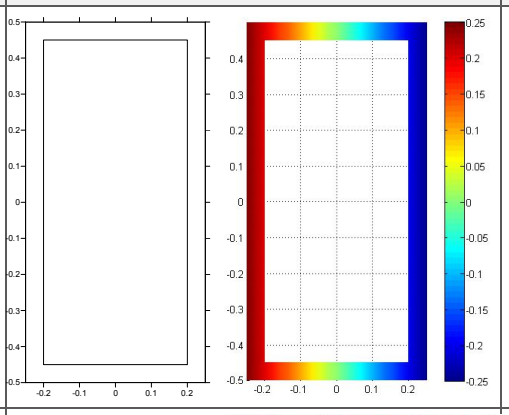
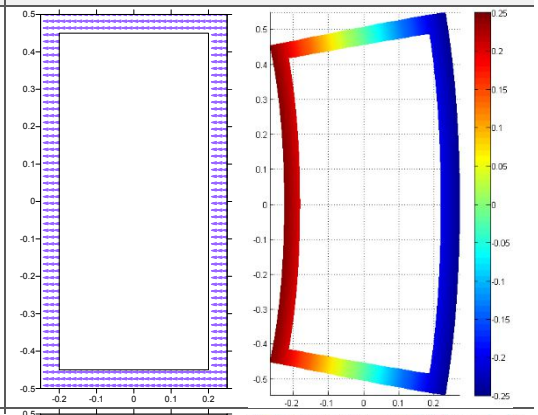
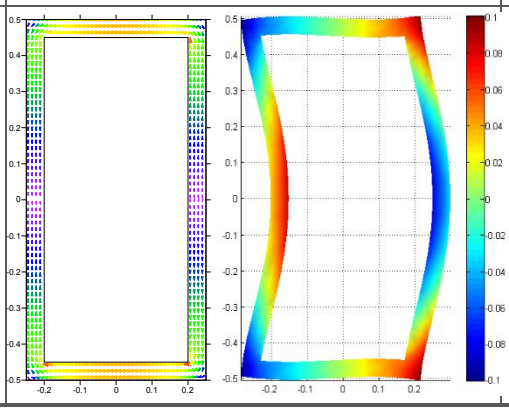
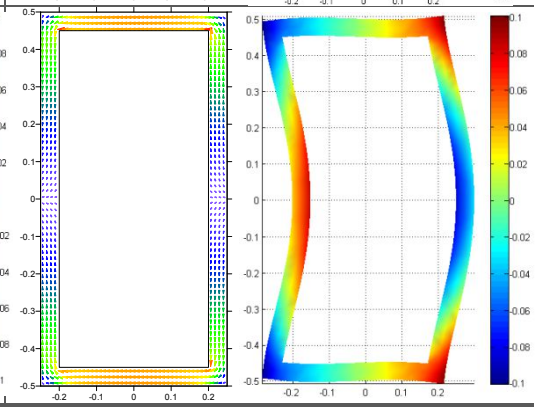
$$\nabla^2\tilde{\Phi}_2 = \frac{2}{1-\bar{v}}Z - \frac{1+\bar{v}}{1-\bar{v}}\nabla\cdot\mathbf{u}_1 \quad \tilde{\Phi}_{2,n} = -v_1 n_y - w_1 n_z \quad (2.27a,b)$$

Πίνακας 1 *:Εντός επιπέδου μορφές παραμόρφωσης σε αντιστοιχία με τις γενικευμένες μαζικές δυνάμεις σώματος στην επιφάνεια της διατομής σε κοίλη ορθογωνική διατομή για κάμψη περί τον άξονα* z *. Οι ισοϋψείς καμπύλες αναπαριστούν την αντίστοιχη συνάρτηση στρέβλωσης.*

	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$
$\mathbf{w}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \end{Bmatrix}$ $\tilde{\Phi}^1 = -Z$		
$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} -Z \\ v_1 \\ w_1 \\ \end{Bmatrix}$ $\tilde{\Phi}_2 = \overline{\Phi}^P_{CY}$		

Για ν=0 η γενικευμένη φόρτιση του επίπεδου προβλήματος γράφεται :

Πίνακας 2*: Εντός επιπέδου μορφές παραμόρφωσης με τις αντίστοιχες γενικευμένες μαζικές δυνάμεις στην επιφάνεια της διατομής σε κοίλη ορθογωνική διατομή για κάμψη περί του άξονα Y. Οι ισοϋψείς καμπύλες αναπαριστούν την αντίστοιχη συνάρτηση στρέβλωσης.*

	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$
$\mathbf{w}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $\tilde{\Phi}^1 = -Y$		
$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} -Y \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix}$ $\tilde{\Phi}_2 = \bar{\Phi}^P_{CZ}$		

$$\left(b_y\right)_2 = \mu\left(\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\bar{\Phi}^P_{CY,y} + v_1\right) \qquad \left(b_z\right)_2 = \mu\left(\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\bar{\Phi}^P_{CY,z} + w_1\right) \qquad (2.28a,b)$$

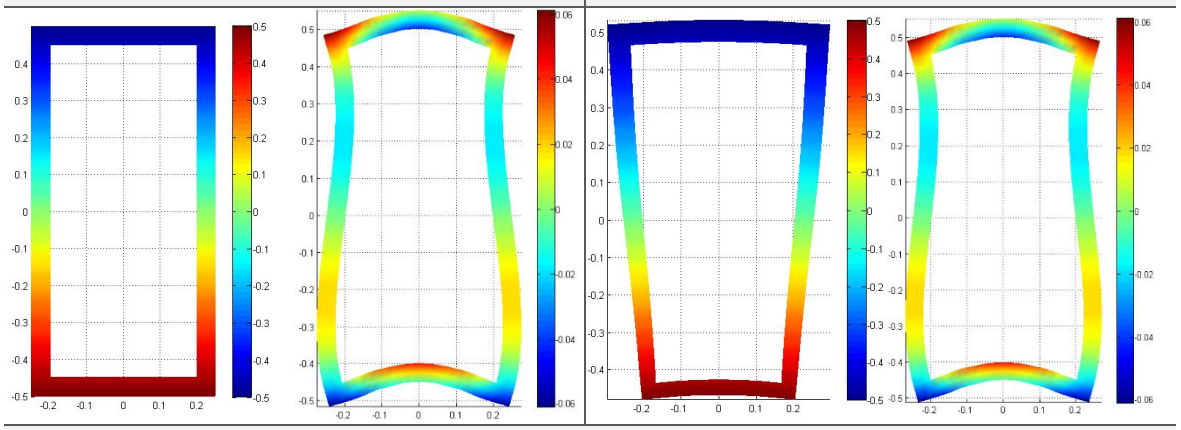
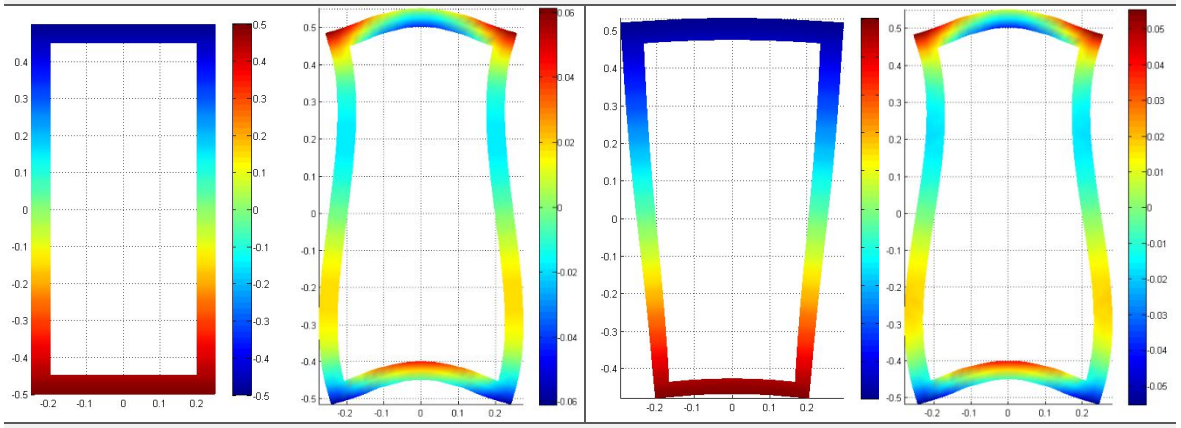
$$\left(t_y\right)_2 = -\lambda\bar{\Phi}^P_{CY} n_y \qquad \left(t_z\right)_2 = -\lambda\bar{\Phi}^P_{CY} n_z \qquad (2.28c,d)$$

Εξετάζοντας την σχέση (2.28) μαζί με την δεύτερη σειρά των Πινάκων 1, 2 παρατηρείται ότι η γενικευμένη φόρτιση είναι μη μηδενική ανεξαρτήτως της τιμής Poisson και σχετίζεται με την μη ομοιόμορφη διατμητική ροή υπεύθυνη για την διατμητική υστέρηση. Η εξισορρόπηση αυτής της κατανομής της διατμητικής ροής θα οδηγεί σε εντός επιπέδου παραμόρφωση $\tilde{\mathbf{U}}_2$ της διατομής όπως φάνηκε από το πρόβλημα επίπεδης έντασης/παραμόρφωσης (2.23c,d). Αυτές οι παρατηρήσεις ισχύουν επίσης και για $i > 2$. Ως εκ τούτου, σε ότι ακολουθεί τις μορφές παραμόρφωσης $\tilde{\mathbf{U}}_i$ για $i \geq 2$ αναφέρεται και ως μορφές λόγω διαστρέβλωσης.

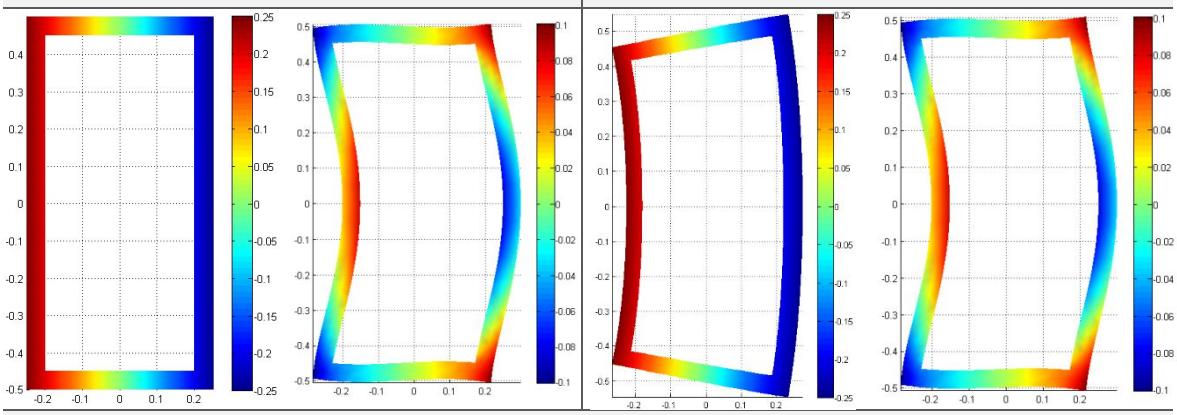
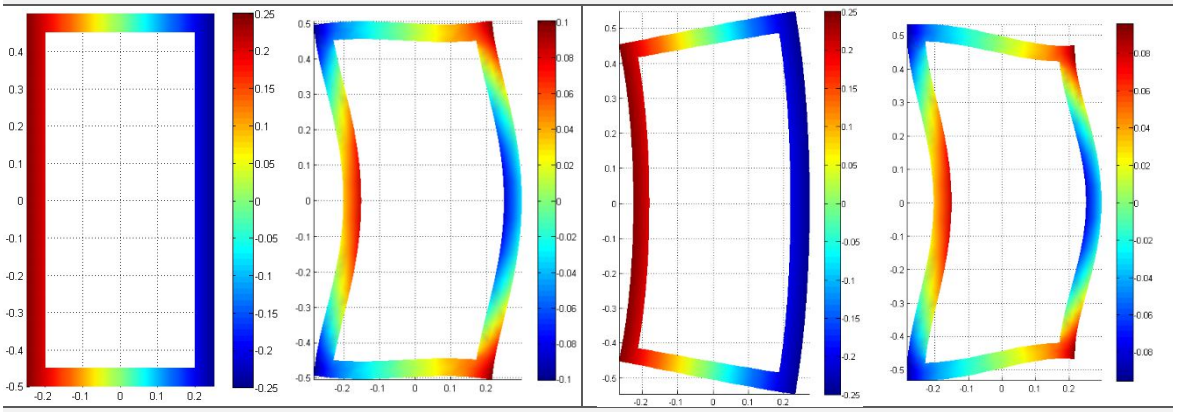
Μετά τον υπολογισμό ενός επιθυμητού αριθμού μορφών παραμόρφωσης, η επιπρόσθετη διαδικασία ορθογωνοποίησης όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότη-

τα (εξ.(2.20) ,(2.21)) μπορεί να εφαρμοστεί για να οδηγήσει σε αμοιβαίες ορθογωνικές εντός επιπέδου μορφές παραμόρφωσης (π.χ. Πίνακες 3 ,4)

***Πίνακας 3**: Μη ορθογωνικές και ορθογωνοποιημένες εντός επιπέδου μορφές παραμόρφωσης σε κοίλη ορθογωνική διατομή για κάμψη περί τον άξονα Z. Οι ισοϋψείς καμπύλες αναπαριστούν την αντίστοιχη συνάρτηση στρέβλωσης.*

$\nu = 0$	$\nu = 0.3$
	
Πριν την ορθογωνοποίηση των εντός επιπέδου μορφών	
	
Μετά την ορθογωνοποίηση των εντός επιπέδου μορφών	

Πίνακας 4: *Μη ορθογωνικές και ορθογωνοποιημένες εντός επιπέδου μορφές παραμόρφωσης για κοίλη ορθογωνική διατομή για κάμψη περί τον άξονα Y. Οι ισοϋψείς καμπύλες αναπαριστούν την αντίστοιχη συνάρτηση στρέβλωσης*

$\nu = 0$	$\nu = 0.3$
	
Πριν την ορθογωνοποίηση των εντός επιπέδου μορφών	
	
Μετά την ορθογωνοποίηση των εντός επιπέδου μορφών	

2.2.2 Μορφές λόγω στρέψης

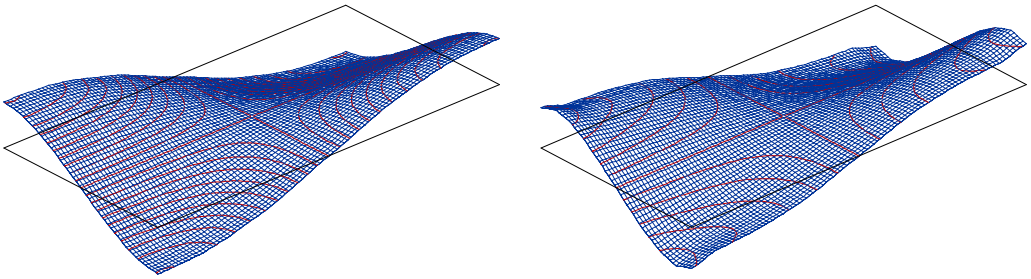
Για να προκύψουν οι μορφές λόγω στρέψης η ανάλυση αρχίζει για $i = 1$, υποθέτοντας ότι $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \end{bmatrix}^T$ το οποίο δείχνει μια στρεπτική στροφή της διατομής. Στην περίπτωση του προβλήματος στρέβλωσης (2.23a,b) γράφεται ότι :

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_1 = 0 \qquad \tilde{\Phi}_{1,n} = zn_y - yn_z \qquad (2.29a,b)$$

το οποίο είναι ιδανικό στο γνωστό πρόβλημα για την πρωτογενή στρέβλωση λόγω στρέψης (πρόβλημα St.Venant για ομοιόμορφη στρέψη). Ως εκ τούτου, η λύση $\tilde{\Phi}_1$ είναι ισοδύναμο με την συνάρτηση στρέβλωσης φ_S^P (όπως ορίστηκε στο "Chapter 3" Dikaros and Sapountzakis 2016). Χρησιμοποιώντας την λύση για $\tilde{\Phi}_1$, η γενικευμένη φόρτιση επίπεδου προβλήματος (εξ.(2.24b-e)) γράφεται ως :

$$\left(b_y\right)_1 = \mu\left(\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\varphi_{S,y}^P + v_1\right)$$
$$\left(b_z\right)_1 = \mu\left(\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\varphi_{S,z}^P + w_1\right) \qquad (2.30a,b)$$

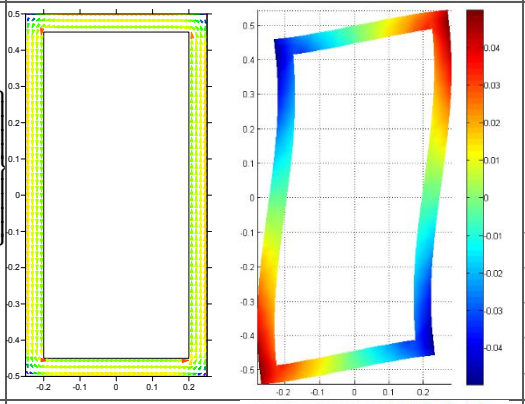
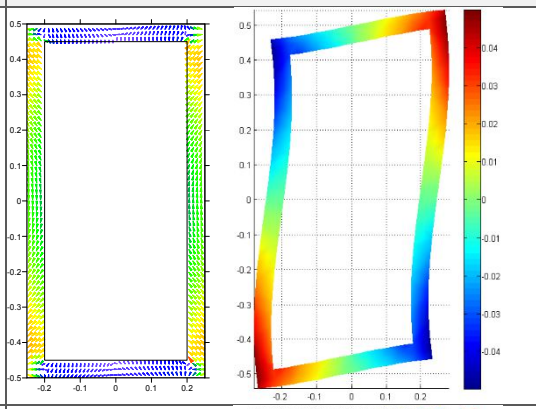
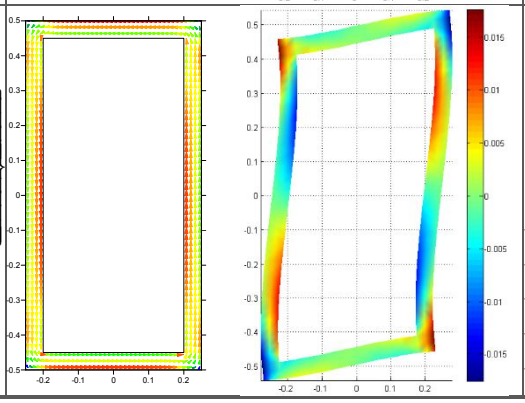
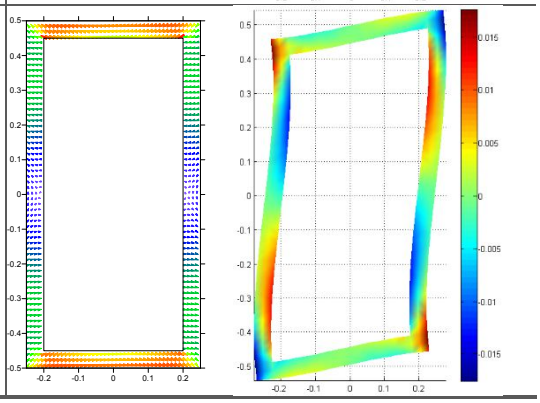
$$\left(t_y\right)_1 = -\lambda\varphi_S^P n_y$$
$$\left(t_z\right)_1 = -\lambda\varphi_S^P n_z \qquad (2.30c,d)$$



(α) $\nu = 0$ (β) $\nu = 0.3$

Σχήμα 6: *Συναρτήσεις στρέβλωσης* $\bar{\Phi}_S^S$ *σε μια ορθογωνική διατομή για α)μηδενικό β) μη μηδενικό λόγο Poisson.*

Πίνακας 5: *Εντός επιπέδου μορφές παραμόρφωσης με τις αντίστοιχες γενικευμένες καταπονήσεις στη επιφάνεια της διατομής σε κοίλη ορθογωνική διατομή για στρέψη. Οι ισοϋψείς καμπύλες αναπαριστούν την αντίστοιχη συνάρτηση στρέβλωσης.*

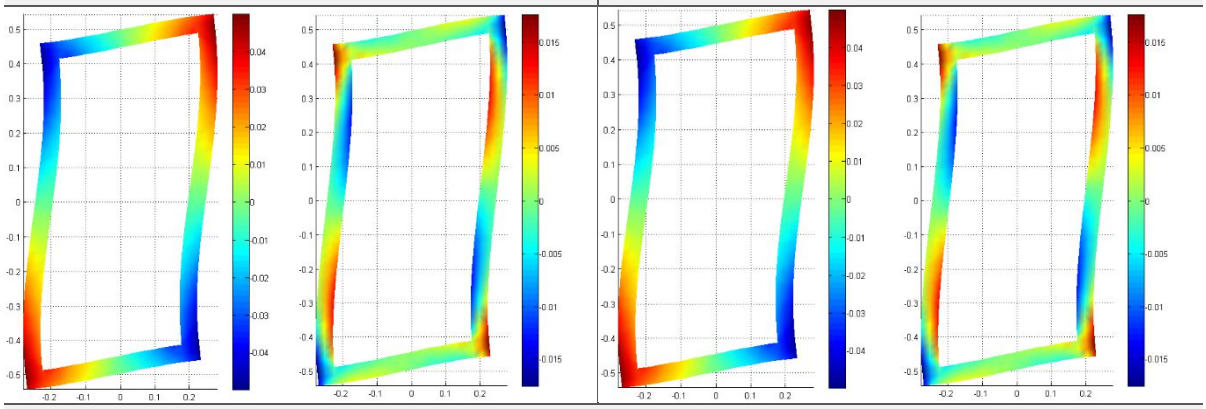
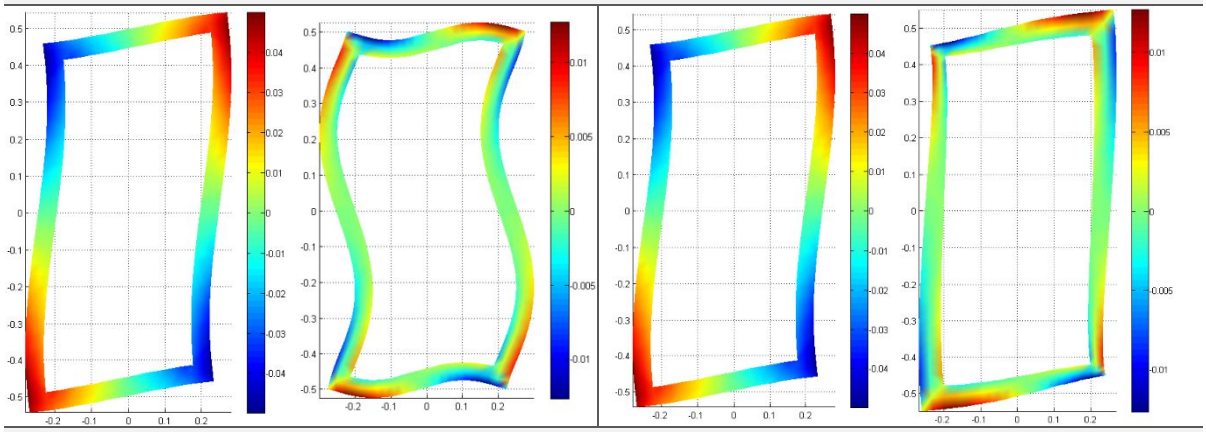
	$\nu = 0$	$\nu = 0.3$
$\mathbf{w}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{Bmatrix}$ $\tilde{\Phi}^1 = \varphi_S^P$		
$\mathbf{w}_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_S^P \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix}$ $\tilde{\Phi}_2 = \bar{\Phi}_S^S$		

Εξετάζοντας την (2.30) παρατηρείται ότι όταν $\nu \to 0$, οι τάσεις στα σύνορα εξαφανίζονται και οι μαζικές φορτίσεις δημιουργούν τη γνωστή κυκλοφοριακή διατμητική ροή Bredt, ενώ στην περίπτωση όπου $\nu \neq 0$, προκύπτει μία ελάχιστα τροποποιημένη διατμητική ροή. Αυτές οι παραγόμενες διατμητικές ροές οδηγούν σε εντός επιπέδου παραμόρφωση $\tilde{\mathbf{U}}_1$ όπως φάνηκε στη πρώτη σειρά του Πίνακα 5. Έχοντας καθορίσει την $\tilde{\mathbf{W}}_1$ και από την στιγμή που $\varphi_0 = 0$, c_1^2 επιλέγεται ως μοναδιαία και $\varphi_1 = \varphi_S^P$, $\mathbf{u}_1 = \tilde{\mathbf{U}}_1 - \mathbf{u}_0$.

Συνεχίζοντας της ανάλυση για $i = 2$, το πρόβλημα στρέβλωσης (2.23.a,b) γράφεται ως :

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_2 = -\frac{2}{1-\bar{\nu}} \varphi_S^P - \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \qquad \tilde{\Phi}_{2,n} = -v_1 n_y - w_1 n_z \qquad (2.31a,b)$$

***Πίνακας 6**:Μη ορθογωνικές και ορθογωνοποιημένες εντός επιπέδου μορφές παραμόρφωσης από κοίλη ορθογωνική διατομή στη περίπτωση στρέψης*

$\nu = 0$	$\nu = 0.3$
	
Πριν την ορθογωνοποίηση των εντός επιπέδου μορφών	
	
Μετά την ορθογωνοποίηση των εντός επιπέδου μορφών	

Η γενικευμένη φόρτιση του επίπεδου προβλήματος σ' αυτή την φάση γράφεται ως:

$$\left(b_y\right)_2 = \mu\left(\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\bar{\Phi}^S_{S,y} + v_1\right) \qquad \left(b_z\right)_2 = \mu\left(\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\bar{\Phi}^S_{S,z} + w_1\right) \qquad (2.32a,b)$$

$$\left(t_y\right)_2 = -\lambda\bar{\Phi}^S_S n_y \qquad \left(t_z\right)_2 = -\lambda\bar{\Phi}^S_S n_z \qquad (2.32c,d)$$

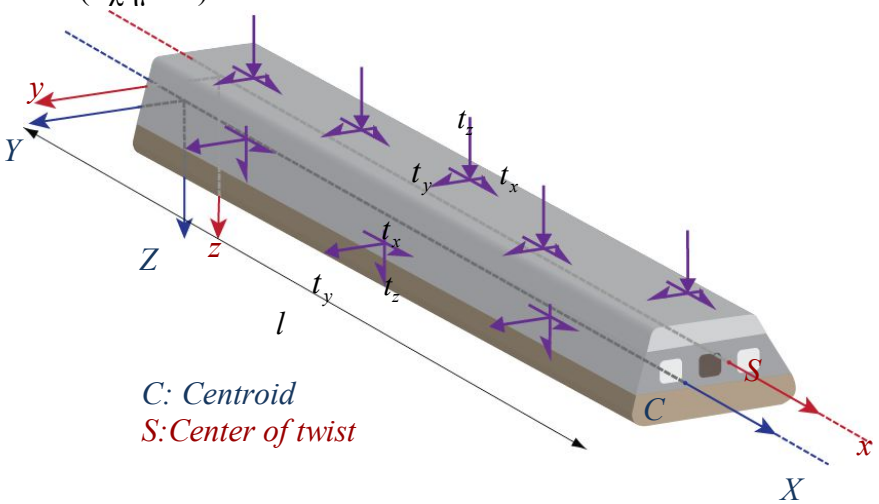
Το οποίο οδηγεί σε εντός επιπέδου παραμόρφωση $\tilde{\mathbf{U}}_2$ (βλ. δεύτερη σειρά του Πίνακα 5) .

Μετά τον υπολογισμό ενός επιθυμητού αριθμού μορφών παραμόρφωσης, η επιπρόσθετη διαδικασία ορθογωνοποίησης όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα (2.21), (2.22) μπορεί να εφαρμοστεί ώστε να οδηγήσει αμοιβαία σε ορθογωνικές εντός επιπέδου μορφές παραμόρφωσης (π.χ. βλ. Πίνακα 6).

2.3 Καθολική ισορροπία –Ανάλυση δοκών με επιρροή διαστρέβλωσης

2.3.1 Μετακινήσεις, πεδίο παραμορφώσεων και τάσεων

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση της διατομής που βασίζεται στο σχήμα διαδοχικής ισορροπίας που περιγράφεται στις προηγούμενες ενότητες έτσι ώστε να προκύψουν μορφές διαστρέβλωσης λόγω κάμψης και στρέψης, η ανάλυση της δοκού με επιρροή διαστρέβλωσης μπορεί να πραγματοποιηθεί. Σ' αυτήν την περίπτωση, οι υποθέσεις που θεωρήσαμε στην αρχή της ενότητας 2.1 μπορεί να γενικευτούν έτσι ώστε να μη εφαρμοστεί κανένας περιορισμός όσον αφορά τον τρόπο της στήριξης και της φόρτισης. Η δοκός μπορεί να υφίσταται σε ένα συνδυασμό δράσεων από τυχαίες κατανεμημένες ή συγκεντρωμένες αξονικές φορτίσεις $p_x : p_x(X)$ κατά την διεύθυνση X, εγκάρσια φορτία $p_y : p_y(x)$ και $p_z : p_z(x)$ κατά τις διευθύνσεις y, z αντίστοιχα, στρεπτικές ροπές $m_t : m_t(x)$ περί της διεύθυνσης x, ροπές λυγισμού $m_Y : m_Y(x)$, $m_Z : m_Z(x)$ περί των διευθύνσεων Y, Z ,αντίστοιχα , όπως επίσης και ροπές λόγω στρέβλωσης $m_{\varphi_S^P} : m_{\varphi_S^P}(x)$, $m_{\varphi_S^S} : m_{\varphi_S^S}(x)$, $m_{\varphi_{CY}^P} : m_{\varphi_{CY}^P}(x)$, $m_{\varphi_{CZ}^P} : m_{\varphi_{CZ}^P}(x)$ και ανώτερες ροπές $m_{Dx}^P : m_{Dx}^P(x)$, $m_{Dx}^S : m_{Dx}^S(x)$, $m_{DY}^P : m_{DY}^P(x)$, $m_{DY}^S : m_{DY}^S(x)$, $m_{DZ}^P : m_{DZ}^P(x)$, $m_{DZ}^S : m_{DZ}^S(x)$ οι οποίες σε ότι ακολουθεί μπορεί να αναφερθούν και ως ροπές διαστρέβλωσης που θα οριστούν στην επόμενη ενότητα. Οι παραπάνω φορτίσεις συμβαίνουν ως αποτέλεσμα τυχαίων κατανεμημένων διανυσμάτων τάσεως $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^T$ πάνω στη παράπλευρη επιφάνεια της δοκού (Σχήμα 7) .



Σχήμα 7: *Τυχαίο σύνθετο πρισματικό μέλος που υφίσταται τυχαίες κατανεμημένες τάσεις*

Υπό την επήρεια της παραπάνω γενικής φόρτισης και των πιθανών περιορισμών, η δοκός οδηγείται σε κάμψη και /ή στρέψη συνοδευόμενα από την ανάπτυξη παραμορφώσεων λόγω στρέβλωσης και διαστρέβλωσης. Στα πλαίσια των παραπάνω, οι συνιστώσες μετακίνησης σε ένα τυχαίο σημείο της δοκού δίνεται όπως παρακάτω:

$$\bar{u}(x,y,z)=\bar{u}^{P}(x,y,z)+\bar{u}^{S}(x,y,z)=\underbrace{u(x)+\theta_{Y}(x)Z-\theta_{Z}(x)Y+\eta_{x}(x)\varphi_{S}^{P}(y,z)}_{\text{πρωτογενείς διαμήκεις μετακινήσεις}}+$$

$$+\underbrace{\eta_{Y}(x)\varphi_{CY}^{P}(y,z)+\eta_{Z}(x)\varphi_{CZ}^{P}(y,z)+\xi_{x}(x)\varphi_{S}^{S}(y,z)}_{\text{δευτερογενείς διαμήκεις μετακινήσεις}} \qquad (2.33a)$$

$$\bar{v}(x,y,z)=v(x)-z\theta_{x}(x)+\underbrace{\zeta_{x}(x)v_{S}^{P}(y,z)+\zeta_{Y}(x)v_{CY}^{P}(y,z)+\zeta_{Z}(x)v_{CZ}^{P}(y,z)}_{\text{εγκάρσιες μετακινήσεις εξαιτίας της διαστρέβλωσης}}+$$

$$+\underbrace{\lambda_{x}(x)v_{S}^{S}(y,z)+\lambda_{Y}(x)v_{CY}^{S}(y,z)+\lambda_{Z}(x)v_{CZ}^{S}(y,z)}_{\text{εγκάρσιες μετακινήσεις εξαιτίας της διαστρέβλωσης}} \qquad (2.33b)$$

$$\bar{w}(x,y,z)=w(x)+y\theta_{x}(x)+\underbrace{\zeta_{x}(x)w_{S}^{P}(y,z)+\zeta_{Y}(x)w_{CY}^{P}(y,z)+\zeta_{Z}(x)w_{CZ}^{P}(y,z)}_{\text{εγκάρσιες μετακινήσεις εξαιτίας της διαστρέβλωσης}}+$$

$$\underbrace{\lambda_{x}(x)w_{S}^{S}(y,z)+\lambda_{Y}(x)w_{CY}^{S}(y,z)+\lambda_{Z}(x)w_{CZ}^{S}(y,z)}_{\text{εγκάρσιες μετακινήσεις εξαιτίας της διαστρέβλωσης}} \qquad (2.33c)$$

όπου $\bar{u}:\bar{u}(x,y,z)$, $\bar{v}:\bar{v}(x,y,z)$, $\bar{w}:\bar{w}(x,y,z)$ είναι οι αξονικές και εγκάρσιες συνιστώσες μετακινήσεων σε σχέση με το σύστημα αξόνων $Sxyz$,ενώ $\bar{u}^{P}:\bar{u}^{P}(x,y,z)$, $\bar{u}^{S}:\bar{u}^{S}(x,y,z)$ δηλώνει τις πρωτογενείς και τις δευτερογενείς διαμήκεις μετακινήσεις αντίστοιχα. Επιπλέον, $v:v(x)$, $w:w(x)$ περιγράφουν την εκτροπή του κέντρου στροφής S, ενώ $u:u(x)$ δηλώνει 'τη μέση' αξονική μετακίνηση της διατομής. $\theta_{Y}:\theta_{Y}(x)$, $\theta_{Z}:\theta_{Z}(x)$ είναι οι γωνίες περιστροφής κατά μήκος των κεντροειδή αξόνων Y, Z ,αντίστοιχα. $\eta_{x}:\eta_{x}(x)$, $\xi_{x}:\xi_{x}(x)$ είναι οι ανεξάρτητοι παράμετροι στρέβλωσης που εισάγονται για να περιγράψουν την μη ομοιόμορφη κατανομή πρωτογενούς και δευτερογενούς στρεπτικής στρέβλωσης ενώ $\eta_{Y}:\eta_{Y}(x)$, $\eta_{Z}:\eta_{Z}(x)$ είναι οι ανεξάρτητοι παράμετροι στρέβλωσης που εισάγονται για να περιγράψουν την μη ομοιόμορφη κατανομή της πρωτογενούς στρέβλωσης εξαιτίας της διάτμησης, $\varphi_{S}^{P}:\varphi_{S}^{P}(y,z)$ είναι η πρωτογενής και $\varphi_{S}^{S}:\varphi_{S}^{S}(y,z)$ η δευτερογενή συ-

νάρτηση στρεπτικής στρέβλωσης σε σχέση με το κέντρο στροφής S, ενώ $\varphi_{CY}^{P} : \varphi_{CY}^{P}\left(y,z\right)$, $\varphi_{CZ}^{P} : \varphi_{CZ}^{P}\left(y,z\right)$ είναι οι αντίστοιχες πρωτογενείς συναρτήσεις στρέβλωσης λόγω διάτμησης σε σχέση με την κεντροειδή C. Ακολουθώντας την ίδια ιδέα $\zeta_x : \zeta_x\left(x\right)$, $\lambda_x : \lambda_x\left(x\right)$ είναι οι ανεξάρτητοι παράμετροι διαστρέβλωσης που εισάγονται για να περιγράψουν την μη ομοιόμορφη κατανομή λόγω στρέψης (πρωτογενή και δευτερογενή αντίστοιχα) και $\zeta_Y : \zeta_Y\left(x\right)$, $\lambda_Y : \lambda_Y\left(x\right)$, $\zeta_Z : \zeta_Z\left(x\right)$, $\lambda_Z : \lambda_Z\left(x\right)$ είναι οι ανεξάρτητοι παράμετροι διαστρέβλωσης που εισάγονται για να περιγράψουν την μη ομοιόμορφη κατανομή της διαστρέβλωσης λόγω κάμψης (πρωτογενή και δευτερογενή αντίστοιχα), $v_S^i : v_S^i\left(y,z\right)$, $w_S^i : w_S^i\left(y,z\right)$, $v_{CY}^i : v_{CY}^i\left(y,z\right)$, $w_{CY}^i : w_{CY}^i\left(y,z\right)$, $v_{CZ}^i : v_{CZ}^i\left(y,z\right)$, $w_{CZ}^i : w_{CZ}^i\left(y,z\right)$ ($i = P, S$) είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων των συναρτήσεων διαστρέβλωσης $\mathbf{u}_S^i$, $\mathbf{u}_{CY}^i$, $\mathbf{u}_{CZ}^i$ ($i = P, S$). Τελικά αυτό σημαίνει ότι $Z = z - z_C$, $Y = y - y_C$. Οι εξισώσεις (2.33) μπορούν να συγχωνευτούν πιο εύκολα σε μορφή πίνακα :

$$\bar{\mathbf{u}}\left(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}\right) = \mathbf{\Phi}\left(\mathrm{y},\mathrm{z}\right)\mathbf{u}\left(\mathrm{x}\right) \tag{2.34}$$

όπου

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathrm{y},\mathrm{z}\right) = \left[\mathbf{\Phi}_{\mathrm{GW}}\left(\mathrm{y},\mathrm{z}\right) \quad \mathbf{\Phi}_{\mathrm{D}}\left(\mathrm{y},\mathrm{z}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathrm{y},\mathrm{z}\right) = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Z} & -\mathrm{Y} & \varphi_S^P & \varphi_{CY}^P & \varphi_{CZ}^P & \varphi_S^S \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{GW}}\left(\mathrm{y},\mathrm{z}\right)} \quad \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_S^P & v_{CY}^P & v_{CZ}^P & v_S^S & v_{CY}^S & v_{CZ}^S \\ w_S^P & w_{CY}^P & w_{CZ}^P & w_S^S & w_{CY}^S & w_{CZ}^S \end{matrix}}_{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{D}}\left(\mathrm{y},\mathrm{z}\right)}\right]$$

(2.35a)

$$\mathbf{u}\left(\mathrm{x}\right) = \left[\mathbf{u}_{\mathrm{GW}}\left(\mathrm{x}\right) \quad \mathbf{u}_{\mathrm{D}}\left(\mathrm{x}\right)\right]^{\mathrm{T}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{u}\left(\mathrm{x}\right) = \left[\underbrace{\mathrm{u} \quad \mathrm{v} \quad \mathrm{w} \quad \theta_{\mathrm{x}} \quad \theta_{\mathrm{Y}} \quad \theta_{\mathrm{Z}} \quad \eta_{\mathrm{x}} \quad \eta_{\mathrm{Y}} \quad \eta_{\mathrm{Z}} \quad \xi_{\mathrm{x}}}_{\mathbf{u}_{\mathrm{GW}}\left(\mathrm{x}\right)} \quad \underbrace{\zeta_{\mathrm{x}} \quad \zeta_{\mathrm{Y}} \quad \zeta_{\mathrm{Z}} \quad \lambda_{\mathrm{x}} \quad \lambda_{\mathrm{Y}} \quad \lambda_{\mathrm{Z}}}_{\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\left(\mathrm{x}\right)}\right]^{\mathrm{T}}$$

(2.35b)

όπου οι συντομογραφίες GW, D σημαίνουν «generalized warping -γενικευμένη στρέβλωση» και «distortional-διαστρέβλωση» αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας εκφράσεις μετακίνησης που δίνεται από τις εξισώσεις (2.33), οι εκφράσεις από τις συνιστώσες παραμόρφωσης υπολογίζονται ως εξής :

$$\left(\varepsilon_{xx}\right)_m = \left(\bar{u}^P_{,x}\right)_m + \left(\bar{u}^S_{,x}\right)_m = \underbrace{u_{,x} + \theta_{Y,x} Z - \theta_{Z,x} Y + \eta_{x,x}\left(\varphi^P_S\right)_m}_{\text{πρωτογενή ορθή παραμόρφωση}} +$$

$$+ \underbrace{\eta_{Y,x}\left(\varphi^P_{CY}\right)_m + \eta_{Z,x}\left(\varphi^P_{CZ}\right)_m + \xi_{x,x}\left(\varphi^S_S\right)_m}_{\text{δευτερογενή ορθή παραμόρφωση}} \tag{2.36a}$$

$$\left(\varepsilon_{yy}\right)_m = \left(\bar{v}_{,y}\right)_m = \underbrace{\zeta_x\left(v^P_{S,y}\right)_m + \zeta_Y\left(v^P_{CY,y}\right)_m + \zeta_Z\left(v^P_{CZ,y}\right)_m}_{\text{εγκάρσια ορθή παραμόρφωση λόγω διαστρέβλωσης}} +$$

$$+ \underbrace{\lambda_x\left(v^S_{S,y}\right)_m + \lambda_Y\left(v^S_{CY,y}\right)_m + \lambda_Z\left(v^S_{CZ,y}\right)_m}_{\text{εγκάρσια ορθή παραμόρφωση λόγω διαστρέβλωσης}} \tag{2.36b}$$

$$\left(\varepsilon_{zz}\right)_m = \left(\bar{w}_{,z}\right)_m = \underbrace{\zeta_x\left(w^P_{S,z}\right)_m + \zeta_Y\left(w^P_{CY,z}\right)_m + \zeta_Z\left(w^P_{CZ,z}\right)_m}_{\text{εγκάρσια ορθή παραμόρφωση λόγω διαστρέβλωσης}} +$$

$$+ \underbrace{\lambda_x\left(w^S_{S,z}\right)_m + \lambda_Y\left(w^S_{CY,z}\right)_m + \lambda_Z\left(w^S_{CZ,z}\right)_m}_{\text{εγκάρσια ορθή παραμόρφωση λόγω διαστρέβλωσης}} \tag{2.36c}$$

$$\left(\gamma_{xy}\right)_m = \left(\bar{v}_{,x}\right)_m + \left(\bar{u}_{,y}\right)_m = \underbrace{\gamma^P_x\left[-z + \left(\varphi^P_{S,y}\right)_m\right] + \gamma^P_z\left(\Phi^P_{CY,y}\right)_m + \gamma^P_y\left(\Phi^P_{CZ,y}\right)_m}_{\text{πρωτογενής διατμητική παραμόρφωση}} +$$

$$+ \underbrace{\gamma^S_x\left(\Phi^S_{S,y}\right)_m + \gamma^S_z\left(\varphi^P_{CY,y}\right)_m + \gamma^S_Y\left(\varphi^P_{CZ,y}\right)_m}_{\text{δευτερογενής δαιτμητική παραμόρφωση}} + \underbrace{\gamma^T_x\left(\varphi^S_{S,y}\right)_m}_{\text{τριτογενής διατμητική παραμόρφωση}} +$$

$$\underbrace{\zeta_{x,x}\left(v^P_S\right)_m + \zeta_{Y,x}\left(v^P_{CY}\right)_m + \zeta_{Z,x}\left(v^P_{CZ}\right)_m + \lambda_{x,x}\left(v^S_S\right)_m + \lambda_{Y,x}\left(v^S_{CY}\right)_m + \lambda_{Z,x}\left(v^S_{CZ}\right)_m}_{\text{διατμητική παραμόρφωση εξαιτίας της διαστρέβλωσης}} \tag{2.36d}$$

$$\left(\gamma_{xz}\right)_m = \left(\bar{w}_{,x}\right)_m + \left(\bar{u}_{,z}\right)_m = \underbrace{\gamma^P_x\left[y + \left(\varphi^P_{S,z}\right)_m\right] + \gamma^P_z\left(\Phi^P_{CY,z}\right)_m + \gamma^P_y\left(\Phi^P_{CZ,z}\right)_m}_{\text{πρωτογενής διατμητική παραμόρφωση}} +$$

$$+ \underbrace{\gamma^S_x\left(\Phi^S_{S,z}\right)_m + \gamma^S_z\left(\varphi^P_{CY,z}\right)_m + \gamma^S_y\left(\varphi^P_{CZ,z}\right)_m}_{\text{δευτερογενής δαιτμητική παραμόρφωση}} + \underbrace{\gamma^T_x\left(\varphi^S_{S,z}\right)_m}_{\text{τριτογενής διατμητική παραμόρφωση}} +$$

$$\underbrace{\zeta_{x,x}\left(w^P_S\right)_m + \zeta_{Y,x}\left(w^P_{CY}\right)_m + \zeta_{Z,x}\left(w^P_{CZ}\right)_m + \lambda_{x,x}\left(w^S_S\right)_m + \lambda_{Y,x}\left(w^S_{CY}\right)_m + \lambda_{Z,x}\left(w^S_{CZ}\right)_m}_{\text{διατμητική παραμόρφωση εξαιτίας της διαστρέβλωσης}} \tag{2.36e}$$

$$\left(\gamma_{yz}\right)_m = \left(\overline{w}_{,y}\right)_m + \left(\overline{v}_{,z}\right)_m =$$

$$= \underbrace{\zeta_x\left[\left(w^P_{S,y}\right)_m + \left(v^P_{S,z}\right)_m\right] + \zeta_Y\left[\left(w^P_{CY,y}\right)_m + \left(v^P_{CY,z}\right)_m\right] + \zeta_Z\left[\left(w^P_{CZ,y}\right)_m + \left(v^P_{CZ,z}\right)_m\right]}_{\text{διατμητική παραμόρφωση εξαιτίας της διαστρέβλωσης}} +$$

$$+ \underbrace{\lambda_x\left[\left(w^S_{S,y}\right)_m + \left(v^S_{S,z}\right)_m\right] + \lambda_Y\left[\left(w^S_{CY,y}\right)_m + \left(v^S_{CY,z}\right)_m\right] + \lambda_Z\left[\left(w^S_{CZ,y}\right)_m + \left(v^S_{CZ,z}\right)_m\right]}_{\text{διατμητική παραμόρφωση εξαιτίας της διαστρέβλωσης}}$$

(2.36f)

όπου

$$\Phi^P_{CY} = Z + \varphi^P_{CY} \qquad \Phi^P_{CZ} = Y + \varphi^P_{CZ} \qquad \Phi^S_S = \varphi^P_S + \varphi^S_S \qquad (2.37\ a,b,c)$$

Οι ποσότητες $\gamma^P_x = \theta_{x,x}$, $\gamma^S_x = \eta_x - \theta_{x,x}$, $\gamma^T_x = \xi_x - \eta_x + \theta_{x,x}$, $\gamma^P_z = w_{,x} + \theta_Y$, $\gamma^P_y = v_{,x} - \theta_Z$, $\gamma^S_Z = \eta_Y - w_{,x} - \theta_Y$ και $\gamma^S_Y = \eta_Z - v_{,x} + \theta_Z$ χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν την μέση διατμητική παραμόρφωση. Οι συνιστώσες παραμόρφωσης (2.36) μπορούν εύκολα να συναθροισθούν σε έναν μητρώο της μορφής :

$$\left(\mathbf{e}\right)_m = \left(\tilde{\mathbf{B}}\right)_m \mathbf{u} + \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}\right)_m \tilde{\mathbf{e}} \qquad (2.38)$$

όπου

$$\left(\tilde{\mathbf{B}}\right)_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v^P_{S,y} & v^P_{CY,y} & v^P_{CZ,y} & v^S_{S,y} & v^S_{CY,y} & v^S_{CZ,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^P_{S,z} & w^P_{CY,z} & w^P_{CZ,z} & w^S_{S,z} & w^S_{CY,z} & w^S_{CZ,z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w^P_{S,y}+v^P_{S,z} & w^P_{CY,y}+v^P_{CY,z} & w^P_{CZ,y}+v^P_{CZ,z} & w^S_{S,y}+v^S_{S,z} & w^S_{CY,y}+v^S_{CY,z} & w^S_{CZ,y}+v^S_{CZ,z} \end{bmatrix}_m$$

(2.39a)

$$
\left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}\right)_m = \left[\begin{array}{ccccccccccccc|ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & Z & -Y & \varphi_S^P & \varphi_{CY}^P & \varphi_{CZ}^P & \varphi_S^S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_S^P & v_{CY}^P & v_{CZ}^P & v_S^S & v_{CY}^S & v_{CZ}^S & -z+\varphi_{Sy}^P & \Phi_{CY,y}^P & \Phi_{CZ,y}^P & \Phi_{Sy}^S & \varphi_{CY,y}^P & \varphi_{CZ,y}^P & \varphi_{Sy}^S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_S^S & w_{CY}^P & w_{CZ}^P & w_S^S & w_{CY}^S & w_{CZ}^S & y+\varphi_{Sz}^P & \Phi_{CY,z}^P & \Phi_{CZ,z}^P & \Phi_{Sy}^S & \varphi_{CY,z}^P & \varphi_{CZ,z}^P & \varphi_{Sz}^S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]_m
\tag{2.39b}
$$

$$
\tilde{\mathbf{e}} = \left[\mathbf{k} \quad \mathbf{g}\right]^{\mathrm{T}} \tag{2.39c}
$$

$$
\mathbf{k} = \mathbf{u}_{,\mathrm{x}} \qquad \mathbf{g} = \left[\gamma_{\mathrm{x}}^{\mathrm{P}} \quad \gamma_{\mathrm{z}}^{\mathrm{P}} \quad \gamma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{P}} \quad \gamma_{\mathrm{x}}^{\mathrm{S}} \quad \gamma_{\mathrm{z}}^{\mathrm{S}} \quad \gamma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{S}} \quad \gamma_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{2.39d,e}
$$

Στις εξισώσεις (2.39) $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ είναι 6×16 , 6×23 μητρώα με γνωστούς συντελεστές, αντίστοιχα, που προέρχονται από το δεξί μέρος των εξισώσεων (2.36), **k** είναι το γενικευμένο διάνυσμα καμπυλότητας. Χρησιμοποιώντας την διάκριση των στοιχείων του **g**, το διάνυσμα (2.38) μπορεί κατ' επέκταση να διασπαστεί στο άθροισμα:

$$
\tilde{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}_0 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{,\mathrm{x}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{u} + \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_{,\mathrm{x}} \tag{2.40}
$$

όπου

$$
\tilde{\mathbf{A}}_0 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \tag{2.41a}
$$

$$
\tilde{\mathbf{A}}_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c|ccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \tag{2.41b}
$$

είναι μητρώα 6×16 με γνωστούς συντελεστές που προσδιορίζουν τις τιμές των βαθμών ελευθερίας και των παραγώγων τους σε σχέση με το x σε αντιστοιχία με τις ποσότητες της παραμόρφωσης. Στην εξίσωση (2.40) $\mathbf{0}$, $\mathbf{I}$ είναι 16×16 μηδενικός και μοναδιαίος πίνακας, αντίστοιχα. Άρα, χρησιμοποιώντας τη (2.40) η εξίσωση (2.38) γράφεται ως :

$$(\mathbf{e})_{\mathrm{m}} = \left(\tilde{\mathbf{B}}\right)_{\mathrm{m}} \mathbf{u} + \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}\right)_{\mathrm{m}} \left[\mathbf{A}_0 \mathbf{u} + \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_{,\mathrm{x}}\right] = \left[\left(\tilde{\mathbf{B}}\right)_{\mathrm{m}} + \left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}\right)_{\mathrm{m}} \mathbf{A}_0\right] \mathbf{u} + \left[\left(\tilde{\mathbf{\Gamma}}\right)_{\mathrm{m}} \mathbf{A}_1\right] \mathbf{u}_{,\mathrm{x}} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{e})_m = (\mathbf{B})_m \mathbf{u} + (\mathbf{\Gamma})_m \mathbf{u}_{,x} \tag{2.42}$$

όπου $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Gamma}$ είναι γνωστά μητρώα 6×16 συνδέοντας τις παραμορφώσεις της διατομής με τους βαθμούς ελευθερίας και την πρώτη παράγωγο τους σε σχέση με το x . Τελικά χρησιμοποιώντας τον νόμο τάση παραμόρφωση του Hook, τα στοιχεία του τανυστή τάσεων Cauchy για κάθε περιοχή Ω_m $(m = 1, 2, \ldots, M)$ προκύπτει ως:

$$(\mathbf{s})_{\mathrm{m}} = (\mathbf{C})_{\mathrm{m}} (\mathbf{e})_{\mathrm{m}} = (\mathbf{C})_{\mathrm{m}} (\mathbf{B})_{\mathrm{m}} \mathbf{u} + (\mathbf{C})_{\mathrm{m}} (\mathbf{\Gamma})_{\mathrm{m}} \mathbf{u}_{,\mathrm{x}} \tag{2.43}$$

Όπου ο $\mathbf{C}$ είναι το 6×16 μητρώο ελαστικότητας. Αξιοσημείωτο είναι ότι στο $\mathbf{C}$ περιέχονται μη-διαγώνιοι όροι εξαιτίας της αναλογίας Poisson. Αυτό οδηγεί σε μια πιο περίπλοκη έκφραση τάσεων όπως συγκρίνεται με τα αντίστοιχα που προέρχονται από θεωρίες βασισμένες στην παραδοχή άκαμπτης διατομής. Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου $\nu \to 0$, οι εξισώσεις (2.43) απλοποιούνται και μπορεί να εκφραστούν με τον εξής τρόπο :

$$\begin{aligned}(\sigma_{\mathrm{xx}})_{\mathrm{m}} &= \mathrm{E}_{\mathrm{m}} \Big[\mathrm{u}_{,\mathrm{x}} + \theta_{\mathrm{Y,x}} \mathrm{Z} - \theta_{\mathrm{Z,x}} \mathrm{Y} + \\ &+ \eta_{\mathrm{x,x}} \left(\varphi_{\mathrm{S}}^{\mathrm{P}}\right)_{\mathrm{m}} + \eta_{\mathrm{Y,x}} \left(\varphi_{\mathrm{CY}}^{\mathrm{P}}\right)_{\mathrm{m}} + \eta_{\mathrm{Z,x}} \left(\varphi_{\mathrm{CZ}}^{\mathrm{P}}\right)_{\mathrm{m}} + \xi_{\mathrm{x,x}} \left(\varphi_{\mathrm{S}}^{\mathrm{S}}\right)_{\mathrm{m}} \Big]\end{aligned} \tag{2.44a}$$

$$\begin{aligned}\left(\sigma_{\mathrm{yy}}\right)_{\mathrm{m}} &= \mathrm{E}_{\mathrm{m}} \Big[\zeta_{\mathrm{x}} \left(\mathrm{v}_{\mathrm{S,y}}^{\mathrm{P}}\right)_{\mathrm{m}} + \zeta_{\mathrm{Y}} \left(\mathrm{v}_{\mathrm{CY,y}}^{\mathrm{P}}\right)_{\mathrm{m}} + \zeta_{\mathrm{Z}} \left(\mathrm{v}_{\mathrm{CZ,y}}^{\mathrm{P}}\right)_{\mathrm{m}} + \\ &+ \lambda_{\mathrm{x}} \left(\mathrm{v}_{\mathrm{S,y}}^{\mathrm{S}}\right)_{\mathrm{m}} + \lambda_{\mathrm{Y}} \left(\mathrm{v}_{\mathrm{CY,y}}^{\mathrm{S}}\right)_{\mathrm{m}} + \lambda_{\mathrm{Z}} \left(\mathrm{v}_{\mathrm{CZ,y}}^{\mathrm{S}}\right)_{\mathrm{m}} \Big]\end{aligned} \tag{2.44b}$$

$$\begin{aligned}(\sigma_{\mathrm{zz}})_{\mathrm{m}} &= \mathrm{E}_{\mathrm{m}} \Big[\zeta_{\mathrm{x}} \left(\mathrm{w}_{\mathrm{S,z}}^{\mathrm{P}}\right)_{\mathrm{m}} + \zeta_{\mathrm{Y}} \left(\mathrm{w}_{\mathrm{CY,z}}^{\mathrm{P}}\right)_{\mathrm{m}} + \zeta_{\mathrm{Z}} \left(\mathrm{w}_{\mathrm{CZ,z}}^{\mathrm{P}}\right)_{\mathrm{m}} + \\ &+ \lambda_{\mathrm{x}} \left(\mathrm{w}_{\mathrm{S,z}}^{\mathrm{S}}\right)_{\mathrm{m}} + \lambda_{\mathrm{Y}} \left(\mathrm{w}_{\mathrm{CY,z}}^{\mathrm{S}}\right)_{\mathrm{m}} + \lambda_{\mathrm{Z}} \left(\mathrm{w}_{\mathrm{CZ,z}}^{\mathrm{S}}\right)_{\mathrm{m}} \Big]\end{aligned} \tag{2.44c}$$

$$\left(\tau_{xy}\right)_m = G_m\left\{\gamma_x^P\left[-z+\left(\varphi_{S,y}^P\right)_m\right]+\gamma_z^P\left(\Phi_{CY,y}^P\right)_m+\gamma_y^P\left(\Phi_{CZ,y}^P\right)_m+\right.$$
$$+\gamma_x^S\left(\Phi_{S,y}^S\right)_m+\gamma_z^S\left(\varphi_{CY,y}^P\right)_m+\gamma_y^S\left(\varphi_{CZ,y}^P\right)_m+\gamma_x^T\left(\varphi_{S,y}^S\right)_m+\zeta_{x,x}\left(v_S^P\right)_m+$$
$$\left.+\zeta_{Y,x}\left(v_{CY}^P\right)_m+\zeta_{Z,x}\left(v_{CZ}^P\right)_m+\lambda_{x,x}\left(v_S^S\right)_m+\lambda_{Y,x}\left(v_{CY}^S\right)_m+\lambda_{Z,x}\left(v_{CZ}^S\right)_m\right\} \tag{2.44d}$$

$$\left(\tau_{xz}\right)_m = G_m\left\{\gamma_x^P\left[y+\left(\varphi_{S,z}^P\right)_m\right]+\gamma_z^P\left(\Phi_{CY,z}^P\right)_m+\gamma_y^P\left(\Phi_{CZ,z}^P\right)_m+\right.$$
$$+\gamma_x^S\left(\Phi_{S,z}^S\right)_m+\gamma_z^S\left(\varphi_{CY,z}^P\right)_m+\gamma_y^S\left(\varphi_{CZ,z}^P\right)_m+\gamma_x^T\left(\varphi_{S,z}^S\right)_m+\zeta_{x,x}\left(w_S^P\right)_m+$$
$$\left.+\zeta_{Y,x}\left(w_{CY}^P\right)_m+\zeta_{Z,x}\left(w_{CZ}^P\right)_m+\lambda_{x,x}\left(w_S^S\right)_m+\lambda_{Y,x}\left(w_{CY}^S\right)_m+\lambda_{Z,x}\left(w_{CZ}^S\right)_m\right\} \tag{2.44e}$$

$$\left(\gamma_{yz}\right)_m = G_m\left\{\zeta_x\left[\left(w_{S,y}^P\right)_m+\left(v_{S,z}^P\right)_m\right]+\right.$$
$$+\zeta_Y\left[\left(w_{CY,y}^P\right)_m+\left(v_{CY,z}^P\right)_m\right]+\zeta_Z\left[\left(w_{CZ,y}^P\right)_m+\left(v_{CZ,z}^P\right)_m\right]+$$
$$+\lambda_x\left[\left(w_{S,y}^S\right)_m+\left(v_{S,z}^S\right)_m\right]+\lambda_Y\left[\left(w_{CY,y}^S\right)_m+\left(v_{CY,z}^S\right)_m\right]+\lambda_Z\left[\left(w_{CZ,y}^S\right)_m+\left(v_{CZ,z}^S\right)_m\right] \tag{2.44f}$$

Στην περίπτωση αυτή $E_m = 2G_m$. Στα πλαίσια της θεωρίας δοκού, συνήθως απλοποιητικά οι παραδοχές, υιοθετούνται για την επιρροή της αναλογίας Poisson, ενώ αξιοσημείωτο είναι ότι στην παρούσα εργασία η επιρροή του λόγου Poisson δεν αγνοείται.

2.3.2. Εντατικά μεγέθη, διαφορικές εξισώσεις, συνοριακές συνθήκες

Με σκοπό να καθοριστεί η διαφορική εξίσωση ισορροπίας, χρησιμοποιείται η αρχή των δυνατών έργων

$$\delta U = \delta W \;\Rightarrow\; \int_V \delta\mathbf{e}^T\mathbf{s}\,dV = \int_F \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{t}\,dF \tag{2.45}$$

όπου $\delta(\,)$ δηλώνει δυνατές ποσότητες, $\mathbf{t}$ είναι το διάνυσμα τάσεων που εφαρμόζεται στην παράπλευρη επιφάνεια της δοκού συμπεριλαμβάνοντας τις ακριανές διατομές, που δηλώνονται από το F ενώ το V είναι ο όγκος της δοκού.

Η διαφορά στην ανάλυση δοκού λόγω διαστρέβλωσης βασίζεται στο γεγονός ότι, παρομοίως με την γενικευμένη θεωρία στρέβλωσης, η εισαγωγή επιπρόσθετων

ανεξάρτητων παραμέτρων λόγω διαστρέβλωσης, κυρίως ζ_i, λ_i $(i = x, y, z)$ εισάγει επίσης ανώτερα εντατικά μεγέθη. Αυτά τα ανώτερα εντατικά μεγέθη ορίζονται ως εξής:

$$Q_{Di}^{j} = \sum_{m=1}^{M}\left(Q_{Di}^{j}\right)_m = \sum_{m=1}^{M}\left\{\int_{\Omega_m}\left\{\left(\sigma_{yy}\right)_m\left(v_{k,y}^{j}\right)_m + \left(\sigma_{zz}\right)_m\left(w_{k,z}^{j}\right)_m + \left(\tau_{yz}\right)_m \cdot \right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\left[\left(v_{k,z}^{j}\right)_m + \left(w_{k,y}^{j}\right)_m\right]\right\}d\Omega\right\}, \quad i = x, y, z, \quad j = P, S, \quad k = S, CY, CZ \qquad (2.46a)$$

$$M_{Di}^{j} = \sum_{m=1}^{M}\left(M_{Di}^{j}\right)_m = \sum_{m=1}^{M}\left\{\int_{\Omega_m}\left[\left(\tau_{xy}\right)_m\left(v_{k}^{j}\right)_m + \left(\tau_{xz}\right)_m\left(w_{k}^{j}\right)_m\right]d\Omega\right\},$$
$$i = x, y, z, \quad j = P, S, \quad k = S, CY, CZ \qquad (2.46b)$$

Q_{Di}^{j} $(i = x, y, z,\ j = P, S)$ και M_{Di}^{j} $(i = x, y, z,\ j = P, S)$ είναι ανώτερης τάξης εντατικό μέγεθος που σχετίζεται με την εγκάρσια παραμόρφωση της διατομής και δεν έχουν φυσικό νόημα. Σε ότι ακολουθεί το M_{Di}^{j} θα αναφέρεται ως: "ροπή λόγω διαστρέβλωσης (*distortional moment)"* σε αναλογία με τις ροπές λόγω στρέβλωσης.

Εξαιτίας της σημαντικής πολυπλοκότητας του προβλήματος, σε ότι ακολουθεί θα χρησιμοποιούνται συμβολισμοί για τα μητρώα. Εξετάζοντας την αρχή των δυνατών έργων (εξ. (2.25)) χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες τάσεων και παραμορφώσεων (2.42), (2.43) και εφαρμόζοντας τον τελεστή $\delta(\,)$ στο (2.42), η δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης δU γράφεται ως:

$$\delta U = \int_0^1\left\{\sum_{m=1}^{M}\int_{\Omega_m}\left[\delta\mathbf{u}^T\left(\mathbf{B}\right)_m^T + \delta\mathbf{u}_{,x}^T\left(\mathbf{\Gamma}\right)_m^T\right]\left[\left(\mathbf{C}\right)_m\left(\mathbf{B}\right)_m\mathbf{u} + \left(\mathbf{C}\right)_m\left(\mathbf{\Gamma}\right)_m\mathbf{u}_{,x}\right]d\Omega\right\}dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \delta U = \int_0^1\left[\delta\mathbf{u}_{,x}^T\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_{,x} + \delta\mathbf{u}^T\mathbf{K}_{12}\mathbf{u}_{,x} + \delta\mathbf{u}_{,x}^T\mathbf{K}_{21}\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}^T\mathbf{K}_{11}\mathbf{u}\right]dx \qquad (2.47)$$

όπου

$$\mathbf{K}_{11} = \sum_{m=1}^{M}\int_{\Omega_m}\left(\mathbf{B}\right)_m^T\left(\mathbf{C}\right)_m\left(\mathbf{B}\right)_m d\Omega \qquad \mathbf{K}_{12} = \sum_{m=1}^{M}\int_{\Omega_m}\left(\mathbf{B}\right)_m^T\left(\mathbf{C}\right)_m\left(\mathbf{\Gamma}\right)_m d\Omega$$

(2.48a,b)

$$\mathbf{K}_{21} = \sum_{m=1}^{M}\int_{\Omega_m}\left(\mathbf{\Gamma}\right)_m^T\left(\mathbf{C}\right)_m\left(\mathbf{B}\right)_m d\Omega \qquad \mathbf{K}_{22} = \sum_{m=1}^{M}\int_{\Omega_m}\left(\mathbf{\Gamma}\right)_m^T\left(\mathbf{C}\right)_m\left(\mathbf{\Gamma}\right)_m d\Omega$$

(2.48c,d)

όπου $\mathbf{K}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ είναι 16×16 πίνακες συντελεστών που περιέχουν τις γεωμετρικές ιδιότητες της σύνθετης διατομής. Από τις σχέσεις (2.48) παρατηρείται ότι $\mathbf{K}_{11}$, $\mathbf{K}_{22}$ είναι συμμετρικά μητρώα ενώ $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21}^T$ είναι μη συμμετρικά. Αξίζει να αναφερθεί ότι αυτά τα μητρώα συμπεριλαμβάνουν όλες τις ακαμψίες της κλασικής θεωρίας δοκού, τις αντίστοιχες ανώτερες και διαστρέβλωσης. Ο λόγος Poisson μπορεί να ληφθεί υπόψη στην καθολική ανάλυση σύμφωνα με την κατασκευή του μητρώου $\mathbf{C}$.

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση στην εξίσωση (2.47) έτσι ώστε να περιορίσουν τους παραγώγους δυνατών ποσοτήτων, η ακόλουθη έκφραση για την δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης προκύπτει ως:

$$\delta U = \int_0^l \delta \mathbf{u}^T \left\{ -\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_{,xx} + \left[\mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{21}\right]\mathbf{u}_{,x} + \mathbf{K}_{11}\mathbf{u} \right\} dx + \left[\delta \mathbf{u}^T \left[\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_{,x} + \mathbf{K}_{21}\mathbf{u} \right] \right]_0^l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta U = \int_0^l \delta \mathbf{u}^T \left\{ -\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_{,xx} + \left[\mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{21}\right]\mathbf{u}_{,x} + \mathbf{K}_{11}\mathbf{u} \right\} dx + \left[\delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \right]_0^l \tag{2.49}$$

όπου $\mathbf{f} = \mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_{,x} + \mathbf{K}_{21}\mathbf{u}$, είναι το γενικευμένο διάνυσμα καταπόνησης στα άκρα της δοκού και ορίζεται ως:

$$\mathbf{f} = \left[N \quad Q_y \quad Q_z \quad M_t \quad M_Y \quad M_Z \quad M_{\varphi_S}^P \quad M_{\varphi_{CY}}^P \quad M_{\varphi_{CZ}}^P \quad M_{\varphi_S}^S \quad M_{Dx}^P \quad M_{DY}^P \quad M_{DZ}^P \quad M_{Dx}^S \quad M_{DY}^S \quad M_{DZ}^S \right]^T \tag{2.50}$$

Επιπλέον, το εξωτερικό δυνατό έργο δW χρησιμοποιώντας τη (2.34) στην οποία ο τελεστής $\delta(\ )$ εφαρμόζεται , γράφεται ως :

$$\delta W = \int_0^l \left[\sum_{m=1}^{M} \int_{\Gamma_m} \delta \mathbf{u}^T \left(\mathbf{\Phi}\right)_m^T \left(\mathbf{t}\right)_m ds \right] dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega_m^l} \delta \mathbf{u}^T \left(\mathbf{\Phi}\right)_m^T \left(\mathbf{t}\right)_m d\Omega^l - \sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega_m^0} -\delta \mathbf{u}^T \left(\mathbf{\Phi}\right)_m^T \left(\mathbf{t}\right)_m d\Omega^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta W = \int_0^l \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dx + \left[\delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^* \right]_0^l \tag{2.51}$$

όπου

$$\mathbf{p} = \sum_{m=1}^{M} \int_{\Gamma_m} \left(\mathbf{\Phi}\right)_m^T \left(\mathbf{t}\right)_m ds \tag{2.52a}$$

$$\mathbf{f}_0^* = -\sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega_m^0} \left(\mathbf{\Phi}\right)_m^T \left(\mathbf{t}\right)_m d\Omega^0 \qquad \mathbf{f}_l^* = \sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega_m^l} \left(\mathbf{\Phi}\right)_m^T \left(\mathbf{t}\right)_m d\Omega^l \tag{2.52b,c}$$

είναι το εξωτερικό διάνυσμα φορτίου στην παράπλευρη επιφάνεια της δοκού και οι προκαθορισμένες γενικευμένες καταπονήσεις στις ακραίες διατομές της δοκού. Σημειώνεται ότι οι ορισμοί των (2.52) είναι ισοδύναμες με αυτές από το (Chapter 3-Dikaros and Sapountzakis (2016)) με την διαφορά ότι παρουσιάζονται επιπρόσθετες εξωτερικές ροπές διαστρέβλωσης. Πιο συγκεκριμένα αυτές οι ροπές λόγω διαστρέβλωσης ορίζονται ως εξής :

$$m_{Di}^{j}(x)=\sum_{m=1}^{M}\int_{\Gamma_m}\left(t_y\right)_m\left(v_k^j\right)_m+\left(t_z\right)_m\left(w_k^j\right)_m ds,\ i=x,y,z,\ j=P,S,\ k=S,CY,CZ \tag{2.53}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.49) με (2.51), οι εξισώσεις Euler-Lagrange μαζί με τις σχετικές συνοριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα, άμεσα προκύπτει ότι

$$-\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_{,xx}+\left[\mathbf{K}_{12}-\mathbf{K}_{21}\right]\mathbf{u}_{,x}+\mathbf{K}_{11}\mathbf{u}=\mathbf{p} \tag{2.54a}$$

$$\left[\delta\mathbf{u}^T\left(\mathbf{f}-\mathbf{f}^*\right)\right]_0^l=0 \tag{2.54b}$$

οι οποίες είναι 16 συνήθεις διαφορικές εξισώσεις σε σχέση με 16 αγνώστους, κυρίως τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{u}$. Εξετάζοντας (2.54b) διακρίνονται διαφορές μεταξύ κινηματικών και φυσικών συνοριακών συνθηκών στο $x=0,l$ ως :

$$\delta\mathbf{u}=0 \quad \text{ή} \quad \mathbf{f}=\mathbf{f}^* \tag{2.55}$$

Για να μπορούμε να εξετάσουμε οποιοδήποτε είδος συνοριακών συνθηκών (π.χ. ελαστικές στηρίξεις), το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.54) γράφεται με μια πιο εύχρηστη μορφή

$$-\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_{,xx}+\left[\mathbf{K}_{12}-\mathbf{K}_{21}\right]\mathbf{u}_{,x}+\mathbf{K}_{11}\mathbf{u}=\mathbf{p} \tag{2.56a}$$

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)_{dg}\mathbf{u}+\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)_{dg}\mathbf{f}=\boldsymbol{\alpha}_3 \tag{2.56b}$$

όπου $\boldsymbol{\alpha}_i$ ($i=1,2,3$) είναι διανύσματα 16×1 που περιέχουν συναρτήσεις καθορισμένες αναλόγως στα σύνορα της δοκού ($x=0,l$), ενώ $()_{dg}$ δηλώνει έναν διαγώνιο πίνακα στο οποίο το διάνυσμα τίθεται σε διαγώνια θέση. Οι συνοριακές συνθήκες (2.56b) είναι οι πιο γενικές συνοριακές συνθήκες για το πρόβλημα συμπεριλαμβάνοντας επίσης τις ελαστικές στηρίξεις. Είναι φανερό ότι όλοι οι τύποι συμβατικών συνοριακών συνθηκών (με πάκτωση, απλά στηριζόμενο, με ελεύθερες ή κυλιόμενες άκρες) μπορούν να προέλθουν από αυτές τις εξισώσεις προσδιορίζοντας κατάλληλα

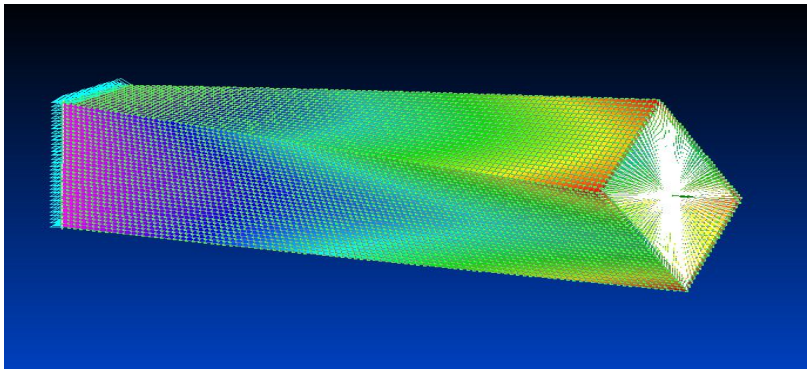
αυτές τις συναρτήσεις) (π.χ. για ένα πακτωμένο άκρο αυτό είναι $\boldsymbol{\alpha}_1 = 1$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$). Τέλος αξιοσημείωτο είναι στην περίπτωση που το μέτρο Poisson αμελείται , οι εξισώσεις (2.56) ισχύουν ακόμη με την διαφορά ότι οι βαθμοί ελευθερίας DOFS ζ_Y , ζ_Z αποκλείονται από την ανάλυση από την στιγμή που όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 2.2.1 οι μορφές παραμόρφωσης με Poisson αποκλείονται.

3.Αριθμητικά Παραδείγματα

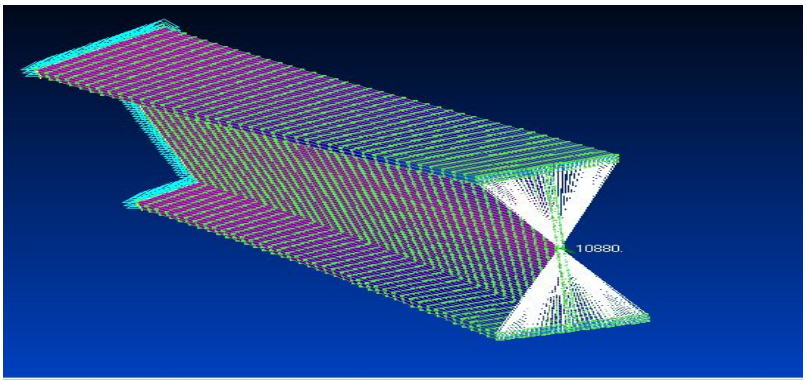
3.1. Περιγραφή των υπολογιστικών μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων της Θεωρίας Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης

Με βάση την Θεωρία Δοκού που εξηγήθηκε στο Κεφάλαιο 2 «Περιγραφή του Προβλήματος» και με στόχο να εξεταστεί η ακρίβεια και η αξιοπιστία της, εξετάστηκε η στρεπτική στροφή σε δύο παραδείγματα προβόλων διαφορετικής διατομής υπό την επίδραση εξωτερικής στρεπτικής καταπόνησης στο ελεύθερο άκρο τους. Το πρώτο αφορά κοίλη ορθογωνική διατομή και το δεύτερο διατομή διπλού Τ (HEA 600). Για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων αναπτύχθηκαν και άλλα μοντέλα όπως τρισδιάστατα, κελυφωτά και μοντέλα δοκού Timoshenko

Τα τρισδιάστατα μοντέλα σχεδιάστηκαν στο FEMAP-Finite Element Modeling and Postprocessing, (Version 11.0.1). Σε κάθε περίπτωση εφαρμόστηκε διάφραγμα στο άκρο της διατομής προκειμένου-να επιβληθεί κεντρικά η στρεπτική καταπόνηση της δοκού. Στην κοίλη ορθογωνική διατομή επιβλήθηκε στρεπτικό φορτίο 32 kNm και κατάλληλη διακριτοποίηση του μέλους και της διατομής ώστε να επιμεριστεί σε 10401 Elements και 21217 Nodes και στη διατομή HEA 600 επιβλήθηκε φορτίο 10,88 kNm και διακριτοποιήθηκε σε 7121 Elements και 12349 Nodes (Σχήμα 8).



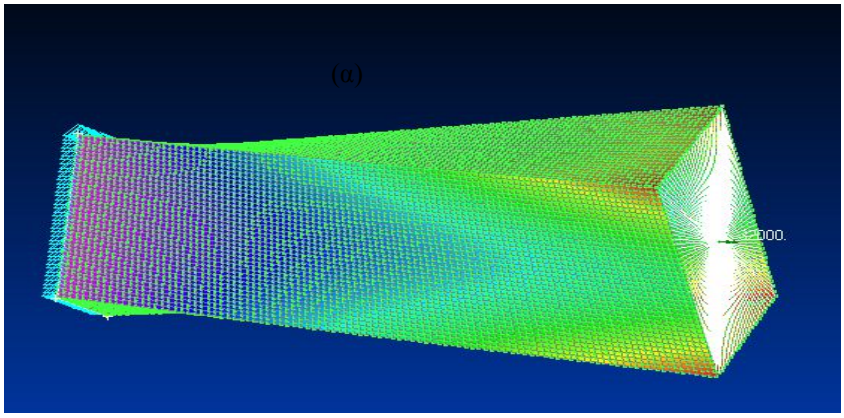
(α)



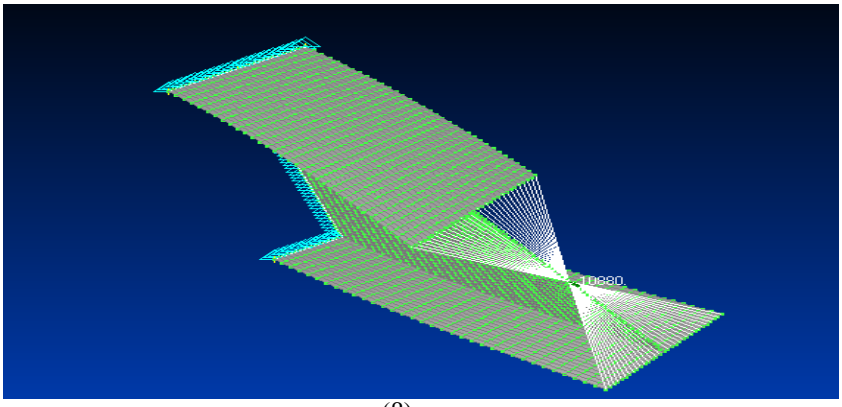
(β)

Σχήμα 8 *:Μοντέλα δοκού με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία για α) το πρώτο παράδειγμα (10401 Elements,21217Nodes) ,β) το δεύτερο παράδειγμα(7121 Elements, 12349Nodes)*

Ομοίως και τα κελυφωτά μοντέλα σχεδιάστηκαν με χρήση του προγράμματος FEMAP, Nastran. Σε κάθε περίπτωση εφαρμόστηκε διάφραγμα στο άκρο της διατομής προκειμένου να επιβληθεί κεντρικά η στρεπτική καταπόνηση της δοκού. Στην κοίλη ορθογωνική διατομή επιβλήθηκε στρεπτικό φορτίο 32 kNm με κατάλληλη διακριτοποίηση του μέλους και της διατομής ώστε να επιμεριστεί σε 5200 Elements και 5710 Nodes και στη διατομή HEA 600 επιβλήθηκε φορτίο 10,88 kNm με 3877 Elements και 4026 Nodes (Σχήμα 9).



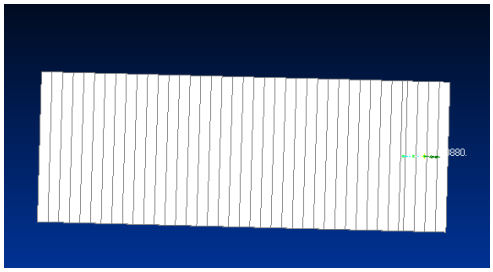
(α)

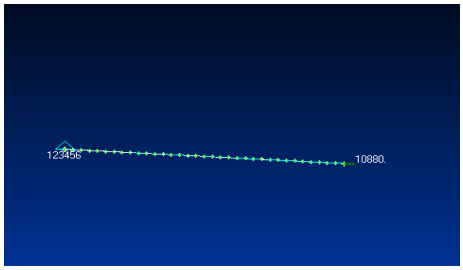


(β)

Σχήμα 9 *:Κελυφωτό μοντέλο δοκού με χρήση διδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων για α) το πρώτο παράδειγμα (5200 Elements,5712 Nodes)β) το δεύτερο παράδειγμα 2 (3877 Elements,4026 Nodes)*

Επιπλέον, μοντέλο δοκού Timoshenko σχεδιάστηκε με χρήση του προγράμματος FEMAP, Nastran. Η περίπτωση αυτή στηρίζεται στη κλασική θεωρία Timoshenko η οποία θεωρεί απαραμόρφωτη διατομή τόσο εντός όσο και εκτός επιπέδου οπότε δεν λαμβάνει υπόψη ούτε την στρέβλωση ούτε την διαστρέβλωση. Στο μοντέλο της κοίλης ορθογωνικής διατομής εφαρμόστηκε στο ελεύθερο άκρο της, στρεπτική ροπή 32 kNm και επιμερίστηκε σε στοιχεία δοκού έτσι ώστε να προκύψουν 100 elements και 101 nodes Στο παράδειγμα με διατομή HEA 600 εφαρμόστηκε στο ελεύθερο άκρο της 10,88 kNm με 34 Elements και 35 Nodes.(Σχήμα 10)

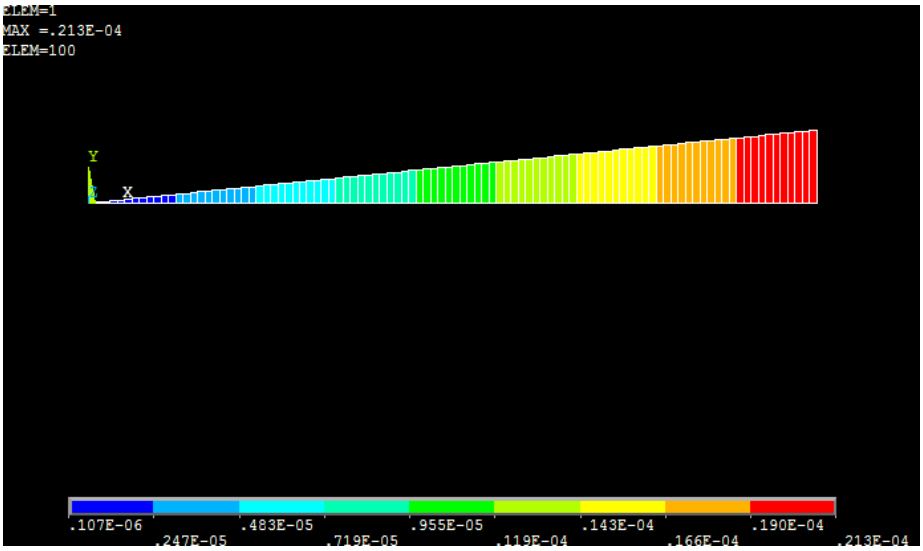




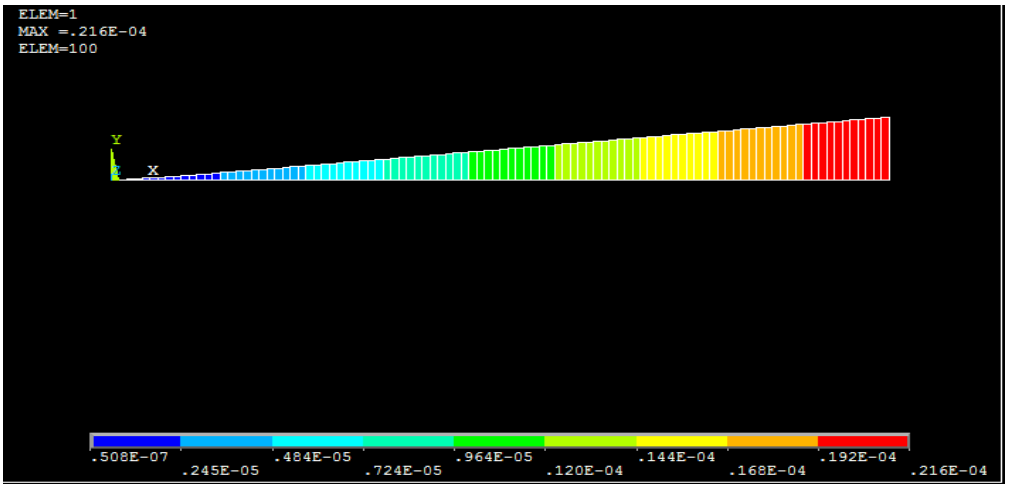
α) *β)*

Σχήμα 10 *:Μοντέλο δοκού α)το πρώτο παράδειγμα (100 Elements,101 Nodes) και β)το δεύτερο παράδειγμα (34 Elements,35 Nodes)*

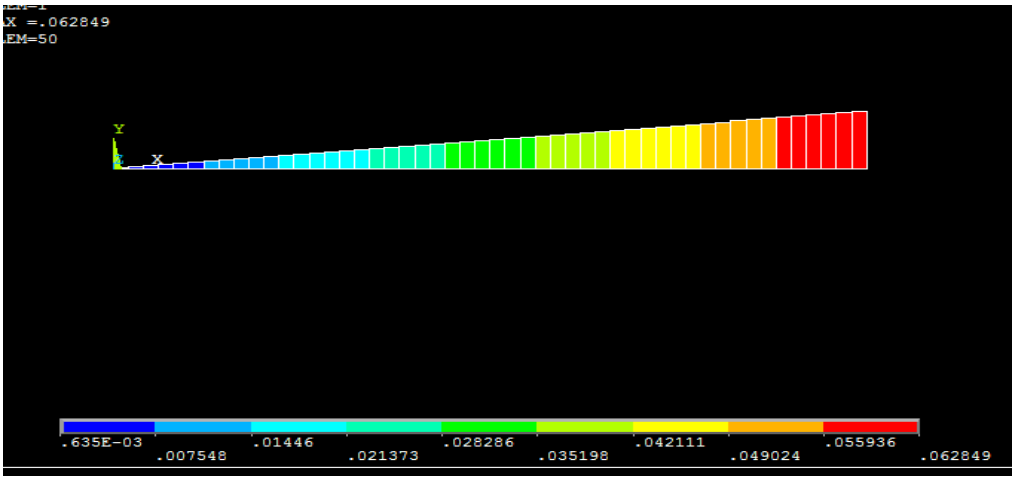
Εκτός της εκδοχής Nastran στο πρόγραμμα FEMAP εξετάστηκαν τα ίδια μοντέλα δοκού με χρήση της εκδοχής Ansys και αυτό γιατί στην τελευταία περίπτωση λαμβάνεται υπόψη στους υπολογισμούς του ένας επιπλέον βαθμός ελευθερίας στρέβλωσης γεγονός που ανταποκρίνεται πιο πολύ στην πραγματικότητα. Σε κάθε παράδειγμα που εφαρμόστηκε εξετάστηκαν δύο περιπτώσεις. Στην μία λαμβάνει τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης και στην άλλη δεν την λαμβάνει. (Σχήμα 11,12,13,14)



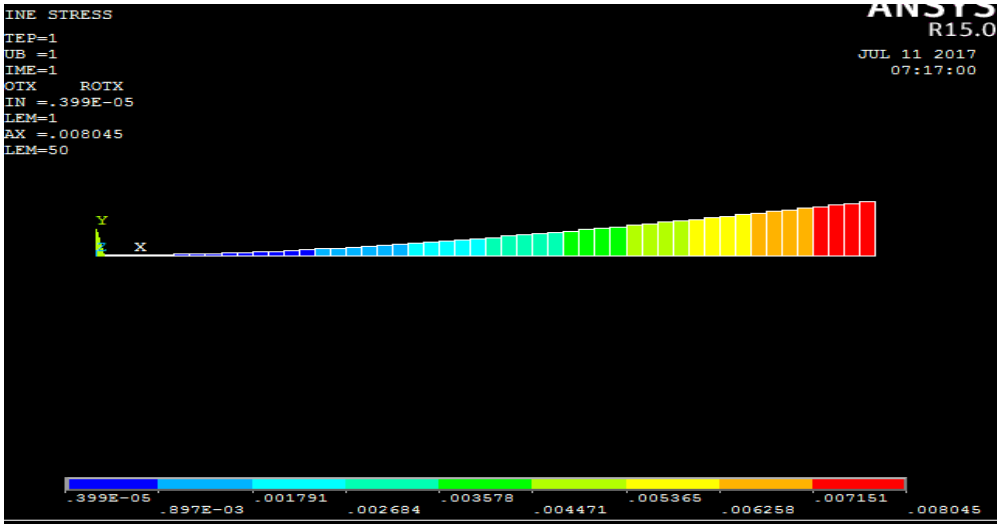
Σχήμα 11*: Κοίλη ορθογωνική διατομή χωρίς να δεσμευτεί ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας στρέβλωσης*



Σχήμα 12: *Κοίλη ορθογωνική διατομή με την δέσμευση του επιπλέον βαθμού ελευθερίας στρέβλωσης*



Σχήμα 13:*ΗΕΑ 600 χωρίς να δεσμευτεί ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας στρέβλωσης*



Σχήμα 14: *ΗΕΑ 600 με την δέσμευση του επιπλέον βαθμού ελευθερίας στρέβλωσης*

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα των μοντέλων συγκρίθηκαν με αυτά της Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης. Σύμφωνα με αυτήν την θεωρία οι συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης παράχθηκαν μέσω του σχήματος διαδοχικής αυτό-ισορροπίας το οποίο παρουσιάζει πλεονεκτήματα συγκρίνοντας το με την ανάλυση ιδιοτιμών όπως αυτή περιγράφεται από την βιβλιογραφία τα κυριότερα από αυτά είναι:

- Ανεξάρτητη λύση για κάθε μηχανισμό παραμόρφωσης (στρεπτικό, καμπτικό, αξονικό). Δεν χρειάζεται εποπτεία από τον αναλυτή.
- Λύση γραμμικού συστήματος αντί του προβλήματος ιδιοτιμών (το οποίο έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος και σημαντική ποσότητα δεδομένων)
- Η λύση της συνάρτησης στρέβλωσης διατομής λύνεται χωριστά από την συνάρτηση διαστρέβλωσης

<u>Παρακάτω για κάθε αριθμητική επίλυση θα πραγματοποιηθούν οι εξής συγκρίσεις:</u>

I. Τα αποτελέσματα της επίλυσης της Θεωρίας Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης με το 1) τρισδιάστατο με το 2) κελυφωτό και με το 3) μοντέλο δοκού Timoshenko (Πίνακες 8,13)

II. Το αποτέλεσμα της επίλυσης Θεωρίας Δοκού με επιρροή στρέβλωσης και διαστρέβλωσης , με το 1) μοντέλο του προγράμματος Ansys που δεν λαμβάνει υπόψη του τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας και με το2) μοντέλο που τον λαμβάνει υπόψη .(Πίνακες 9,14)

III. Τα αποτελέσματα του μοντέλου Δοκού Timoshenko με το 1) μοντέλο του προγράμματος Ansys που δεν λαμβάνει υπόψη του τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας και με το 2) μοντέλο που τον λαμβάνει υπόψη .(Πίνακες 10,15)

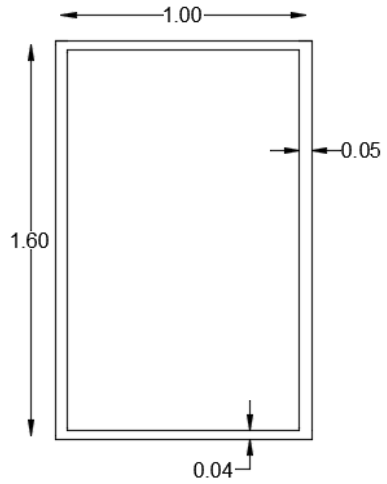
IV. Τα αποτελέσματα του Τρισδιάστατου μοντέλου με το 1)μοντέλο της Θεωρίας Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης με το 2) μοντέλο του προγράμματος Ansys που λαμβάνει υπόψη του τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας. (Πίνακας 11,16)

V. Η τρισδιάστατη εικόνα της επίλυσης της Θεωρίας Δοκού με επιρροή στρέβλωσης και διαστρέβλωσης με το αντίστοιχο του 1) τρισδιάστατου μοντέλου και με του 2)κελυφωτού μοντέλου δοκού .(Σχήμα 20-22) και Σχήμα(27-29)

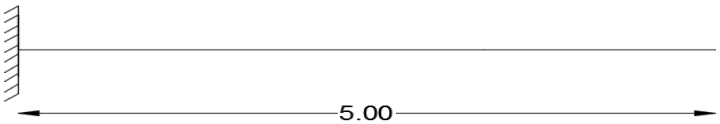
Οι έλεγχοι αποδεκτής σύγκλισης των αποτελεσμάτων αντιστοιχεί σε μέγιστο όριο 7%

3.2. Πρόβολος κοίλης ορθογωνικής διατομής υπό την επίδραση στρεπτικής καταπόνησης.

Πρόβολος (Σχήμα 16) από χάλυβα ($E = 2\times10^8 kN/m^2, G = Gref = 8.0769\times10^7\ kN/m^2$, $L = 5.0m$) με κοίλη ορθογωνική διατομή (Σχήμα 15) υφίσταται μία συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή Mt=32.0 kNm στο ελεύθερο άκρο του με χρήση ενός διαφράγματος ώστε να τεθεί ομοιόμορφα η φόρτιση σε όλη την διατομή. Στο Σχήμα 19 παρουσιάζονται οι παραμορφώσεις κατά μήκος της δοκού που προκύπτουν από την Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης και στον Πίνακα 7 η τιμή της στρεπτικής στροφής $\theta_x(1)$ στο άκρο της διατομής με όλους τους μεθόδους που έχουν υλοποιηθεί.



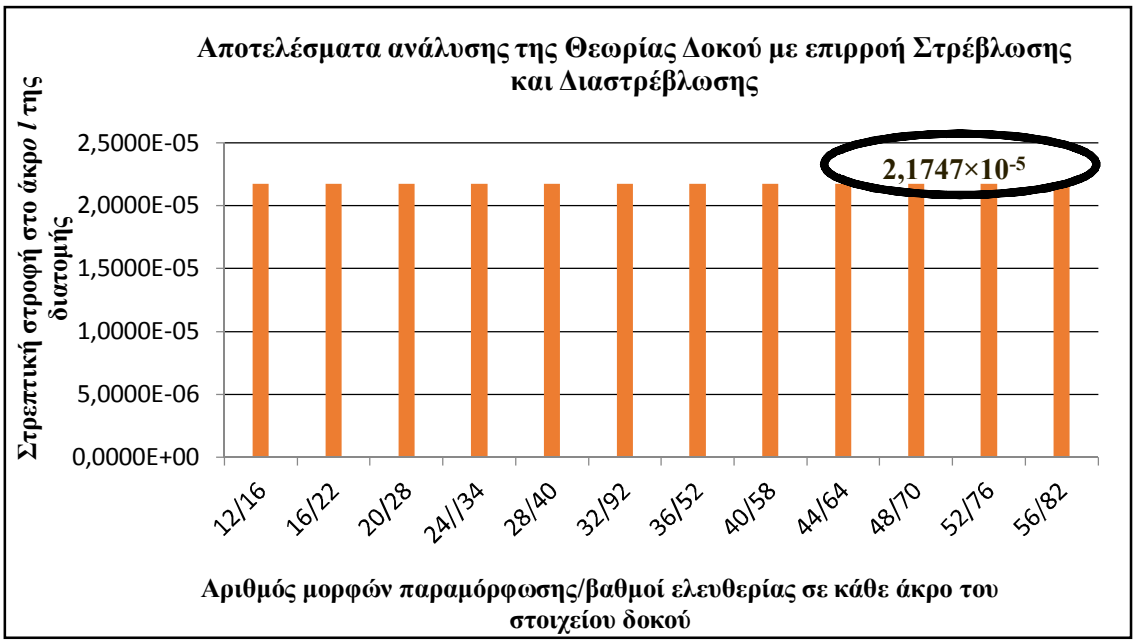
Σχήμα 15 : *Κοίλη ορθογωνική διατομή*



Σχήμα 16*: Στατικό σύστημα*

Πίνακας 7: *Στρεπτική στροφή* θ_x $(\times 10^{-5}\ rad)$ *του προβόλου για* $x = l$.

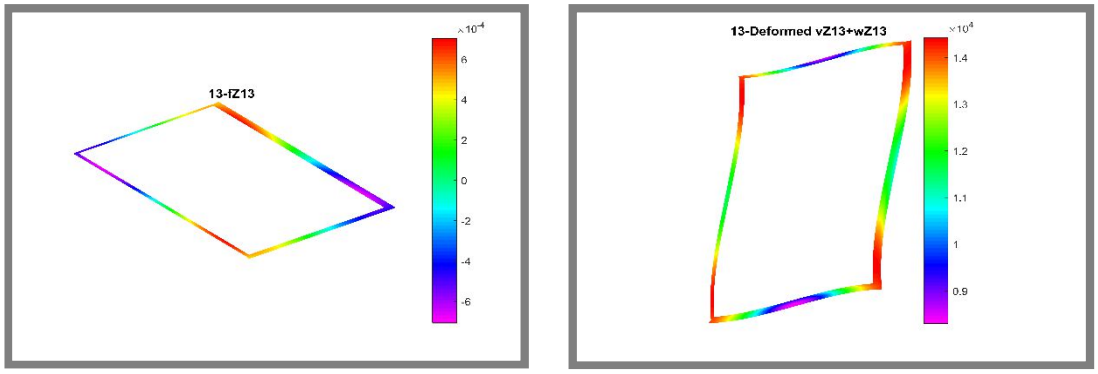
Επιλεγμένη μέθοδος	Γωνία στροφής θ_x $(\times 10^{-5}\ rad)$
Τρισδιάστατο μοντέλο	2,1477
Μοντέλο Δοκού Timoshenko	2,1643
Κελυφωτό μοντέλο	2,1940
Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης	2,1747
ANSYS χωρίς να δεσμεύεται ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας στρέβλωσης	2,1300
ANSYS δεσμεύοντας τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	2,1600



Σχήμα 17:*Αποτελέσματα Θεωρίας Δοκού με επιρροή στρέβλωσης και διαστρέβλωσης στην κοίλη ορθογωνική διατομή*

Μετά από τις τελικές τέσσερις αναλύσεις στα οποία αυξάνονται διαδοχικά οι βαθμοί ελευθερίας σε κάθε άκρο του στοιχείου δοκού και από τις οποίες προέκυψαν το ίδιο αποτέλεσμα, η στρεπτική στροφή ισούται με $2,1747 \times 10^{-5}\ rad$. (Σχήμα 17)

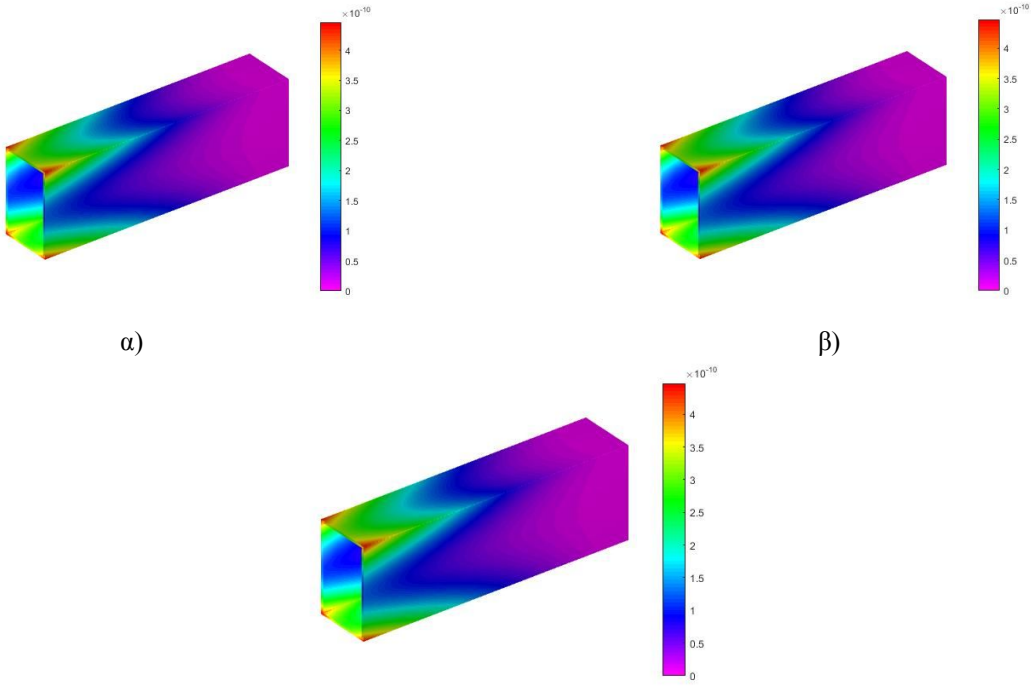
Παρακάτω (Σχήμα 18) εκτιμάται η κατανομή των παραμορφώσεων στην επιφάνεια της διατομής στην περίπτωση 56 μορφών με 82 βαθμούς ελευθερίας σε κάθε άκρο του στοιχείου δοκού σύμφωνα με την Θεωρίας Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης.



(α) (β)

***Σχήμα 18**: Κατανομή παραμορφώσεων στην διατομή της δοκού στην περίπτωση που λαμβάνει υπόψη 82 β.ε. σε κάθε άκρο του στοιχείου δοκού με α)επιρροή στρέβλωσης και β)με επιρροή διαστρέβλωσης*

Ακολουθεί η αποτύπωση των παραμορφώσεων στο μήκος της δοκού . Σε κάθε επίλυση αυξάνονται οι βαθμοί ελευθερίας σε κάθε άκρο του στοιχείου δοκού (παρουσιάζονται ενδεικτικά τρείς περιπτώσεις): α) 12modes /16DOFs, β) 32modes/92DOFs και, γ) 56modes/82DOFs).



α) β)

γ)

***Σχήμα 19**: Κατανομές παραμορφώσεων στο μήκος της δοκού θεωρώντας α) 12modes /16DOFs β) 32modes/92DOFs και γ) 56modes/82DOFs*

Παρατηρείται ότι αυξάνοντας τους βαθμούς ελευθερίας δεν επηρεάζεται ιδιαίτερα η τρισδιάστατη εικόνα της δοκού.

Σύγκριση αποτελεσμάτων

Πίνακας 8 *: Σύγκριση Θεωρίας Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης με τρισδιάστατο, κελυφωτό και μοντέλο δοκού Timoshenko από το πρόγραμμα Femap, Nastran.*

Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης	0,000021747
1)Τρισδιάστατο μοντέλο	0,000021477
2)Κελυφωτό μοντέλο	0,000021940
3)Μοντέλο Δοκού Timoshenko	0,000021643
Έλεγχοι Σύγκλισης	
1)Θεωρία Δοκού και Τρισδιάστατο μοντέλο	1,24%< 7%
2)Θεωρία Δοκού και Κελυφωτό μοντέλο	0,88% < 7%
3)Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης και Μοντέλο δοκού Timoshenko	0,48%< 7%

Πίνακας 9 *: Σύγκριση της Θεωρίας Δοκού* με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης *με τα μοντέλα του Ansys*

Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης	0,000021747
ANSYS χωρίς τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,0000213 00
ANSYS με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,000021600
Έλεγχοι Σύγκλισης	
Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης και ANSYS χωρίς τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας	2,09% < 7%
Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης και ANSYS με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας	0,68% < 7%

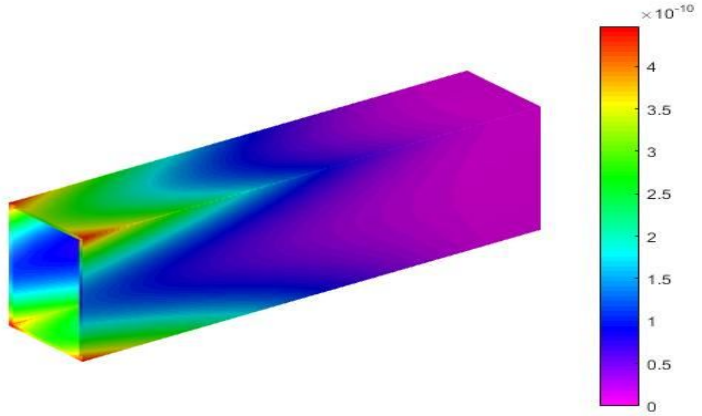
Πίνακας 10*: Σύγκριση του μοντέλου δοκού Timoshenko εκδοχής Nastran με τα αποτελέσματα του μοντέλου Ansys*

Μοντέλο δοκού Timoshenko	0,000021643
ANSYS χωρίς τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,0000213 00
ANSYS με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,000021600
Έλεγχοι Σύγκλισης	
Μοντέλο δοκού Timoshenko με Ansys (χωρίς τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης)	1,61% < 7%
Μοντέλο δοκού Timoshenko με Ansys(με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης)	0,20%< 7%

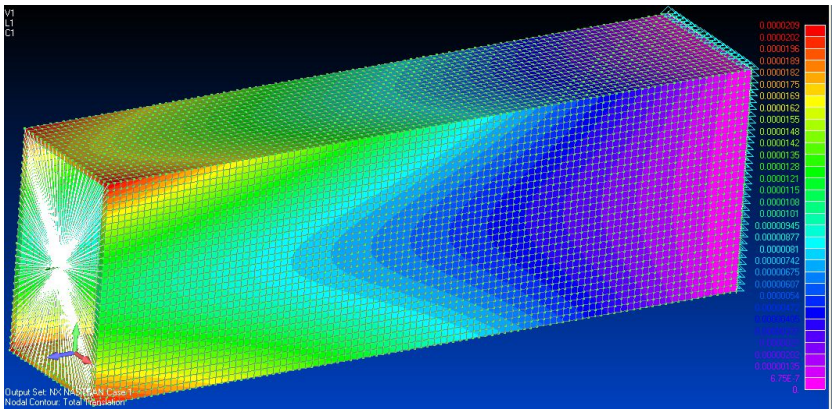
Πίνακας 11:*Σύγκριση του τρισδιάστατου μοντέλου με μοντέλο Ansys (με τον επιπλέον β.ε.) και με το αποτέλεσμα της Θεωρίας Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης*

Τρισδιάστατο μοντέλο	0,000021477
1)Θεωρία Δοκού με Στρέβλωση και Διαστρέβλωση	0,000021747
2)ANSYS με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,000021600
Έλεγχοι Σύγκλισης	
1)Τρισδιάστατο μοντέλο-Θεωρία Δοκού με Στρέβλωση και Διαστρέβλωση	1,26%<7%
2)Τρισδιάστατο μοντέλο-ANSYS με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,57%<7%

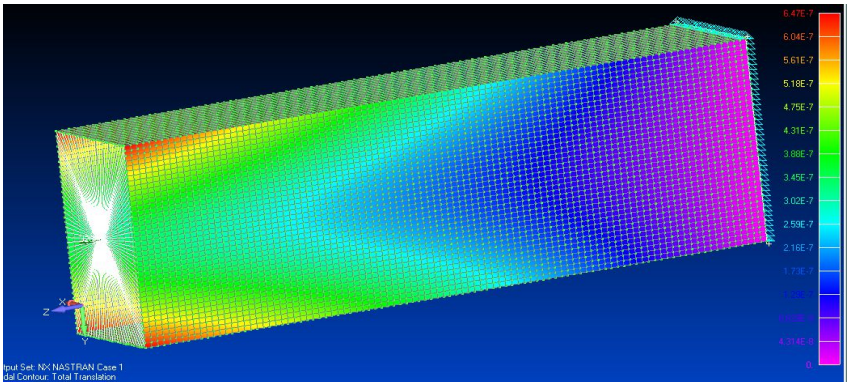
Ακολουθεί η σύγκριση των εξής διαγραμμάτων: της κατά μήκος παραμόρφωσης από την επίλυση της Θεωρίας Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης με το αντίστοιχο του τρισδιάστατου μοντέλου και με το μοντέλο μορφής κελύφους.



Σχήμα 20*:Κατά μήκος παραμορφώσεις της προβόλου δοκού με στρεπτικό φορτίο με βάση την θεωρία στοιχείου δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης (distortional beam theory-DBT)*



Σχήμα 21:*Κατά μήκος παραμορφώσεις της προβόλου δοκού σε τρισδιάστατη μορφή για το στρεπτικό φορτίο με βάση το πρόγραμμα FEMAP*

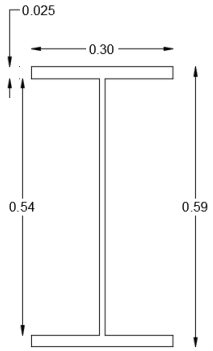


***Σχήμα 22**: Κατά μήκος παραμορφώσεις της προβόλου δοκού μορφής κελύφους για το στρεπτικό φορτίο με βάση το πρόγραμμα FEMAP.*

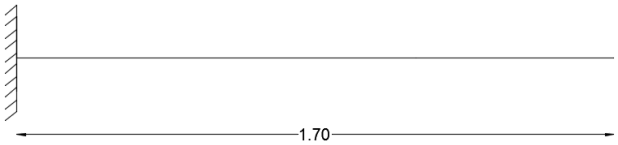
Από τα Σχήματα 20, 21, 22 είναι προφανή η σύγκλιση των παραμορφώσεων στο μήκος της δοκού όπως αυτή εκτιμάται και από τους τρείς επιλεγμένους μεθόδους
.

3.3 Πρόβολος ανοιχτής διατομής διπλής συμμετρίας ΗΕΑ 600 υπό την επίδραση στρεπτικής καταπόνησης.

Πρόβολος (Σχήμα 23) από χάλυβα ($E = 2\times10^8 kN/m^2, G = Gref = 8{,}0769\times10^7\ kN/m^2,\ L = 1{,}7m$) και διατομή διπλής συμμετρίας ΗΕΑ600 (Σχήμα 22). Υφίσταται μία συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή M_t=10,88 kNm στο ελεύθερο άκρο του με χρήση ενός διαφράγματος ώστε να τεθεί ομοιόμορφα η φόρτιση σε όλη την διατομή. Στο Σχήμα 26 παρουσιάζονται οι παραμορφώσεις κατά μήκος της δοκού που προκύπτουν από την 'Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης και στο Πίνακα 12 η τιμή της στρεπτικής στροφής $\theta_x(l)$ στο άκρο της διατομής με όλους τους μεθόδους που έχουν υλοποιηθεί.



***Σχήμα 22**: ΗΕΑ600*



Σχήμα 23: *Στατικό σύστημα*

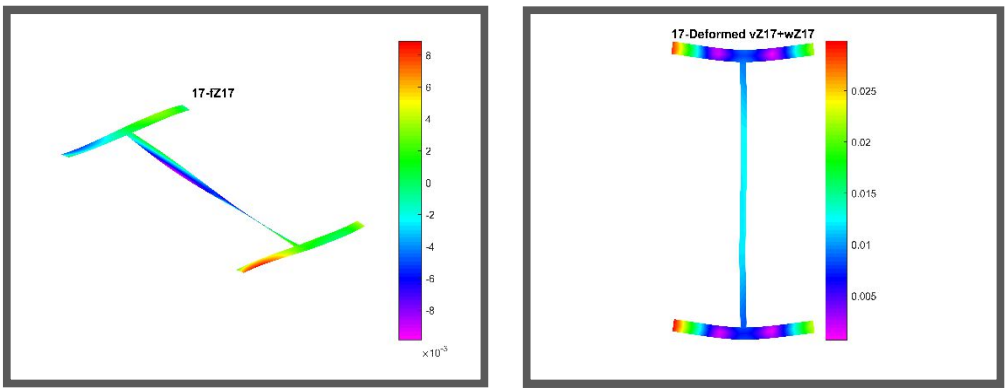
Πίνακας 12 :*Στρεπτική στροφή* θ_x $(\times 10^{-2}\ \mathrm{rad})$ *του προβόλου για* $x = l$

Επιλεγμένη μέθοδος	Στρεπτική στροφή θ_x $(\times 10^{-2}\ rad)$
Τρισδιάστατο μοντέλο	$0,8256$
Μοντέλο δοκού Timoshenko	$6,6079$
Κελυφωτό μοντέλο	$0,8327$
Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης	$0,8780$
ANSYS χωρίς να δεσμεύεται ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας στρέβλωσης	$6,2849$
ANSYS δεσμεύοντας έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	$0,8045$

Σχήμα 24: *Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης στην διατομή ΗΕΑ 600*

Παρατηρώντας το διάγραμμα σε αντίθεση με τη κοίλη ορθογωνική δεν παρουσιάζει αυξανομένη κλίμακα των τιμών στρεπτικής στροφής αλλά διακρίνεται μια κυκλική εναλλαγή στα αποτελέσματα που όμως η μέγιστη θ=0,00878 με την ελάχιστη τιμή θ=0,00833 έχουν απόκλιση μόνο 5%. Επιλέγεται η μεγαλύτερη τιμή θ=0,00878 ως η δυσμενέστερη περίπτωση για να ελεγχθεί η σύγκλιση με τα αποτελέσματα των άλλων επιλεγμένων μεθόδων.

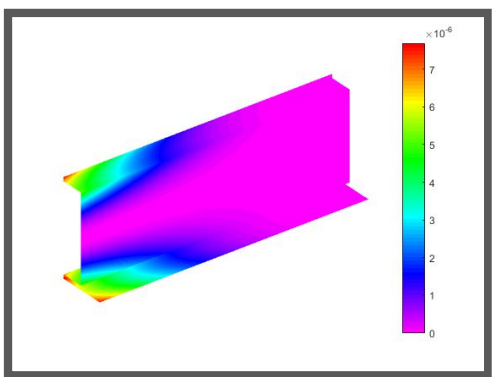
Παρακάτω εκτιμάται η κατανομή των παραμορφώσεων στην επιφάνεια της διατομής στη περίπτωση των 72 μορφών με 212 βαθμούς ελευθερίας σε κάθε άκρο, σύμφωνα με την Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης:



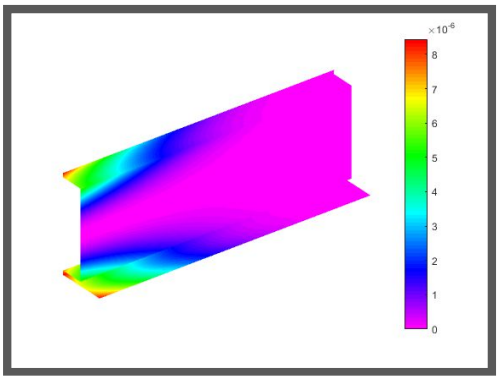
(α) *(β)*

***Σχήμα 25**: Κατανομές των παραμορφώσεων στην διατομή HEA 600 στην περίπτωση που λαμβάνει υπόψη 212 β.ε. σε κάθε άκρο του στοιχείου δοκού με α) επιρροή στρέβλωσης και β)επιρροή διαστρέβλωσης*

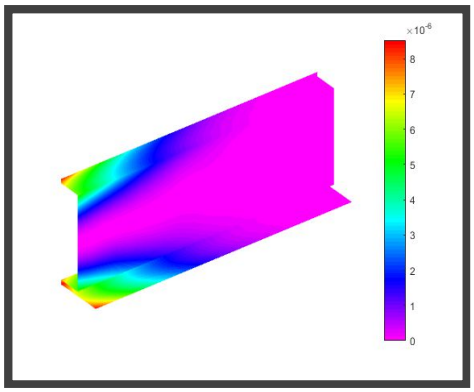
Ακολουθεί η αποτύπωση των παραμορφώσεων στο μήκος της δοκού. Σε κάθε επίλυση αυξάνονται οι βαθμοί ελευθερίας σε κάθε άκρο του στοιχείου δοκού (παρουσιάζονται ενδεικτικά τρείς περιπτώσεις: α) 12modes /16DOFs, β) 40modes/58DOFs και, γ) 72modes/212DOFs)



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 26*: Κατανομές παραμορφώσεων στο μήκος της δοκού θεωρώντας α) 12modes /16DOFs β) 40modes/58DOFs και γ) 72modes/212DOFs*

Παρατηρείται ότι αυξάνοντας τους βαθμούς ελευθερίας δεν επηρεάζεται ιδιαίτερα η τρισδιάστατη εικόνα της δοκού.

Σύγκριση αποτελεσμάτων

Πίνακας 13 *:Σύγκριση θεωρίας δοκού με επιρροή στρέβλωσης και διαστρέβλωσης με τρισδιάστατο, κελυφωτό και μοντέλο δοκού Timoshenko από το πρόγραμμα FEMAP, NASTRAN.*

Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης	0,008780
1)Τρισδιάστατο μοντέλο	0,008256
2)Κελυφωτό μοντέλο	0,008327
3)Μοντέλο δοκού Timoshenko	0,0660790
Έλεγχοι Σύγκλισης	
1)Θεωρία Δοκού και Τρισδιάστατο μοντέλο	6,34%< 7%
2)Θεωρία Δοκού και Κελυφωτό μοντέλο	5,44%< 7%
3)Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης και Μοντέλο Δοκού Timoshenko	651,8%> 7%

Πίνακας 14: *Σύγκριση της Θεωρίας Δοκού* με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης *με τα μοντέλα του Ansys*

Θεωρία Δοκού με Στρέβλωση και Διαστρέβλωση	0,008780
1)ANSYS χωρίς τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,062849
2)ANSYS με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,008045
Έλεγχοι Σύγκλισης	
1)Θεωρία Δοκού με Ansys (χωρίς τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης)	615,82% > 7%
2)Θεωρία Δοκού με Ansys (με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης)	9,14% > 7%

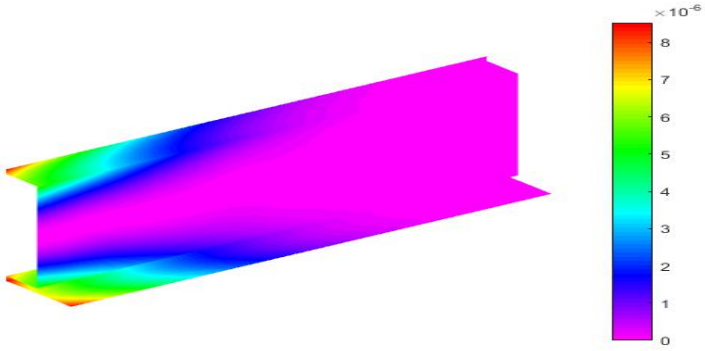
Πίνακας 15: *Σύγκριση του μοντέλου δοκού Timoshenko εκδοχής Nastran με τα αποτελέσματα των μοντέλων Ansys*

Μοντέλο δοκού Timoshenko	0,066079
1)ANSYS χωρίς τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,062849
2)ANSYS με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,008045
Έλεγχοι Σύγκλισης	
1)Μοντέλο δοκού Timoshenko με Ansys (χωρίς τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης)	5,13% > 7%
2)Μοντέλο δοκού Timoshenko με Ansys (με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης)	721% < 7%

Πίνακας 16:*Σύγκριση του τρισδιάστατου μοντέλου με μοντέλο Ansys (με τον επιπλέον β.ε.) και με το αποτέλεσμα της Θεωρίας Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης*

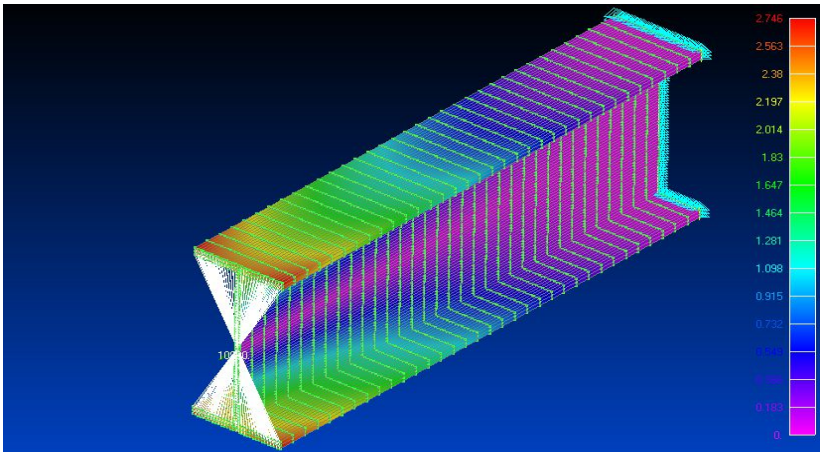
Τρισδιάστατο μοντέλο	0,008256
1)Θεωρία Δοκού με Στρέβλωση και Διαστρέβλωση	0,008780
2)ANSYS με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	0,008045
Έλεγχοι Σύγκλισης	
1)Τρισδιάστατο μοντέλο-Θεωρία Δοκού με Στρέβλωση και Διαστρέβλωση	6,34%
2)Τρισδιάστατο μοντέλο-ANSYS με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας στρέβλωσης	2,56%

Ακολουθεί η σύγκριση των εξής διαγραμμάτων: της κατά μήκος παραμόρφωσης της επίλυσης της Θεωρίας Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης με το αντίστοιχο του τρισδιάστατου μοντέλου και με το μοντέλο μορφής κελύφους.

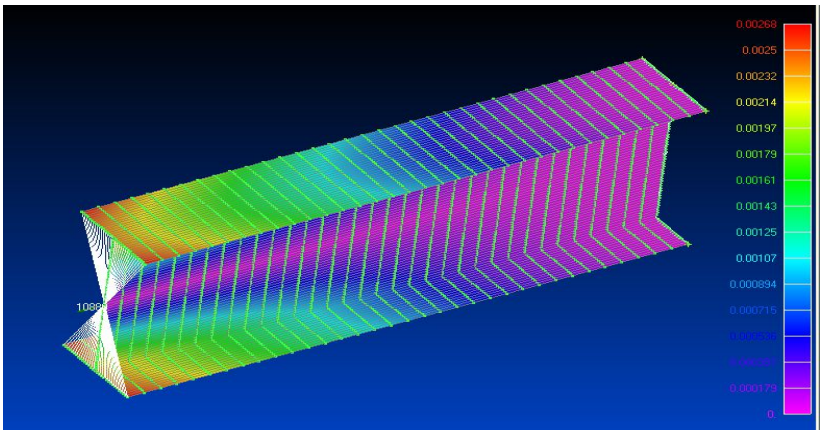


Σχήμα 27: *Κατά μήκος παραμορφώσεις της προβόλου δοκού με στρεπτικό φορτίο με βάση την θεωρία Δοκού με επιρροή στρέβλωσης και διαστρέβλωσης.*

]



Σχήμα 28: *Κατά μήκος παραμορφώσεις της προβόλου δοκού, με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων για το στρεπτικό φορτίο με βάση το πρόγραμμα FEMAP,Nastran*



Σχήμα 29:*Κατά μήκος παραμορφώσεις της προβόλου δοκού μορφής κελύφους με χρήση στοιχείων κελύφους για το στρεπτικό φορτίο με βάση το πρόγραμμα FEMAP,Nastran*

Από τα Σχήματα 27, 28, 29 είναι προφανή η σύγκλιση των παραμορφώσεων στο μήκος της δοκού όπως αυτή εκτιμάται και από τους τρείς επιλεγμένους μεθόδους

4.Συμπεράσματα

Από τις παραπάνω δύο εφαρμογές και για κάθε σύγκριση ξεχωριστά προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα

I. Η Θεωρία Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης η οποία λαμβάνει υπόψη της πολύ λιγότερους βαθμούς ελευθερίας στο μοντέλο της (βλ. Σχήμα 17 και 24) μπορεί να αντικαταστήσει ικανοποιητικά την χρήση πολύπλοκων προσομοιομάτων είτε αυτά είναι τρισδιάστατης μορφής είτε αυτά είναι μορφής κελύφους στα οποία η διακριτοποίηση τους αποτελούνται από τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία και στοιχεία κελύφους Σχήμα (8 και 9), αντίστοιχα και άρα λαμβάνουν υπόψη περισσότερους βαθμούς ελευθερίας στα μοντέλα τους. Δεν συνίσταται να κρίνονται ως τελικά τα αποτελέσματα αυτά του μοντέλου δοκού Timoshenko ιδιαιτέρως στην ανοιχτή διατομή καθώς αγνοούν τοπικά φαινόμενα καθώς λαμβάνουν υπόψη πολύ λιγότερους βαθμούς ελευθερίας και από αυτά της Θεωρίας Δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης.

II. Παρατηρείται ότι στην περίπτωση της ανοιχτής διατομής το μοντέλο Ansys παρ' όλο που λαμβάνει υπόψη του έναν παραπάνω επιπλέον βαθμό ελευθερίας που αφορά την στρέβλωση έχει μεγάλη απόκλιση από αυτά της Θεωρίας δοκού με επιρροή Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης. Αυτή η απόκλιση πρόκειται για 9,14% που είναι πέρα από το όριο και πολύ μεγαλύτερη από την απόκλιση που έχει η Θεωρία Δοκού με το τρισδιάστατο μοντέλο 6,34% που λαμβάνει υπόψη πολλούς βαθμούς ελευθερίας. Το γεγονός αυτό κρίνει αναγκαίο την επιπρόσθετη σύγκριση του τρισδιάστατου μοντέλου με το μοντέλο Ansys που λαμβάνει υπόψη τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας. Αντιθέτως, οι κλειστές κοίλες διατομές παρουσιάζουν καλύτερη ανταπόκριση των αποτελεσμάτων της Θεωρίας Δοκού με επιρροή στρέβλωσης και διαστρέβλωσης με αυτά του μοντέλου Ansys.

III. Παρατηρείται ότι το μοντέλο δοκού Timoshenko από το πρόγραμμα FEMAP, Nastran) δεν συμπίπτει με το αντίστοιχο του μοντέλου Ansys που λαμβάνει υπόψη τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας για τις ανοιχτές ενώ για τις κλειστές διατομές συνάδει με τα αποτελέσματα του μοντέλου Ansys ,ακόμη και όταν αυτό δεν λαμβάνει υπόψη τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας της στρέβλωσης. Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι το υπολογιστικό μοντέλο δοκού ανοιχτών διατομών που βασίζεται στην κλασική θεωρία δοκού είτε αυτό είναι από το μοντέλο Ansys (χωρίς τον επιπλέον β.ε.) είτε από το Nastran δεν συγκλίνουν με αυτά της Θεωρίας Δοκού Στρέβλωσης και Διαστρέβλωσης λόγω των ελάχιστων βαθμών ελευθερίας που χρησιμοποιούν στο μοντέλο τους.

IV. Σ' αυτήν την περίπτωση, το Ansys (με τον επιπλέον β.ε.) σε σύγκριση με το αποτέλεσμα της Θεωρίας Δοκού με Στρέβλωση και Διαστρέβλωση δείχνει να έχει μικρότερη απόκλιση με το τρισδιάστατο μοντέλο του οποίου τα αποτελέσματα προσεγγίζουν καλύτερα την πραγματικότητα απ' όλα τα άλλα μοντέλα. Αυτή η διαφορά όμως στις αποκλίσεις τους από το τρισδιάστατο είναι πολύ μικρή οπότε μπορεί να γίνει αποδεκτό το συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα που βγάζουν και τα δύο μοντέλα είναι το ίδιο αξιόπιστα.

V. Η σύγκλιση των αποτελεσμάτων της αναφερόμενης Θεωρίας Δοκού με τα τρισδιάστατα και κελυφωτά μοντέλα επιβεβαιώνεται και από την κατανομών παραμορφώσεων στο μήκος της δοκού. Συγκρίνοντας τα Σχήματα (20), (21), (22) μεταξύ τους και τα Σχήματα (27) ,(28), (29), αντιστοίχως μεταξύ τους διακρίνεται η ίδια κατανομή των παραμορφώσεων σε ολόκληρο το μήκος της δοκού.

Βιβλιογραφία

1. Abambres, M., Camotim, D. & Silvestre, N. (2013) GBT-Based First-Order Analysis of Elastic Plastic Thin-Walled Steel Members Exhibiting Strain-Hardening. *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering*, DOI: 10.1080/19373260.2012.757209.

2. Ádány, S. & Schafer, B.W. (2006a) Buckling Mode Decomposition of Single-Branched Open Cross-Section Members via Finite Strip Method: Derivation. *Thin-Walled Structures*, 44, 563-584.

3. Ádány, S. & Schafer, B.W. (2006b) Buckling Mode Decomposition of Single-Branched Open Cross-Section Members via Finite Strip Method: Application and Examples. *Thin-Walled Structures*, 44, 585-600.

4. Ádány, S. & Schafer, B.W. (2008) A Full Modal Decomposition of Thin-Walled, Single- Branched Open Cross-Section Members via the Constrained Finite Strip Method. *Journal of Constructional Steel Research*, 64, 12-29.

5. Andreassen, M.J. & Jönsson, J. (2012a) Distortional Solutions for Loaded Semi- Discretized Thin-Walled Beams. *Thin-Walled Structures*, 50, 116-127.

6. Andreassen, M.J. & Jönsson, J. (2012b) Distortional Buckling Modes of Semi-Discretized Thin-Walled Columns. *Thin-Walled Structures*, 51, 53-63.

7. Andreassen, M.J. & Jönsson, J. (2013) A Distortional Semi-Discretized Thin-Walled Beam Element. *Thin-Walled Structures*, 62, 142-157.

8. ANSYS Workbench 15. The Finite Element Method and Applications in Engieering using ANSYS Erdogan Madecini Ibrahim Guven ,321-325

9. Balch, C.D. & Steele, C.R. (1987) Asymptotic Solutions for Warping and Distortion of Thin-Walled Box Beams. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 54, 165-173.

10. Beer, G., Smith, I. & Duenser, Ch. (2008) *The Boundary Element Method with Programming – For Engineers and Scientists*. Springer Wien New York.

11. Boswell, L.F. & Li, Q. (1995) Consideration of the Relationships Between Torsion, Distortion and Warping of Thin-Walled Beams. *Thin-Walled Structures*, 21, 147-161.

12. Boswell, L.F. & Zhang, S.H. (1983) A Box Beam Finite Element for the Elastic Analysis of Thin-Walled Structures. *Thin-Walled Structures* 1, 353-383.

13. Boswell, L.F. & Zhang, S.H. (1984) The Effect of Distortion in Thin-walled Box-Spine Beams. *International Journal of Solids and Structures*, 20(9/10), 842-862.

14. Camotim, D. & Dinis, P.B. (2011) Coupled Instabilities with Distortional Buckling in
Cold-Formed Steel Lipped Channel Columns. *Thin-Walled Structures*, 49, 562-575.

15. Davies, J.M. & Leach, P. (1994) First-Order Generalized Beam Theory. *Journal of*
Constructional Steel Research, 31, 187-221.

16. Davies, J.M., Leach, P. & Heinz, D. (1994) Second-Order Generalized Beam Theory.
Journal of Constructional Steel Research, 31, 221-241.

17. Dikaros, I.C. & Sapountzakis, E.J. (2016) Advanced of beam Theories for the Analysis of Beam Structures-Chapter 4 Distortional Analysis of Beams,149-226

18. Dinis, P.B. & Camotim, D. (2011) Post-Buckling Behaviour and Strength of Cold- Formed Steel Lipped Channel Columns Experiencing Distortional/Global Interaction. *Computers and Structures*, 89, 422-434.

19. El Fatmi, R. & Ghazouani, N. (2011) Higher Order Composite Beam Theory built on
Saint-Venant's Solution. Part-I: Theoretical Developments. *Composite Structures*, 93, 557-566.

20. Eurocode 2 (2005): Design of concrete structures – Part 2: Concrete bridges – Design and detailing rules, European Committee for Standardization, EN 1992-2.

21. Eurocode 3 (2004): Design of Steel Structures – Part 1.5: Plated Structural Elements, European Committee for Standardization, prEN 1993-1-5.

22. Eurocode 9 (2007): Design of aluminium structures – Part 1.3: Structures susceptible to fatigue, European Committee for Standardization, EN 1999-1-3.

23. FEMAP for Windows (2007) Finite element modeling and post-processing software. Help System Index, Version 10.

24. Ferradi, M.K. & Cespedes, X. (2014) A New Beam Element with Transversal and Warping Eigenmodes. *Computers and Structures*, 131, 12-33.

25. Ferradi, M.K., Cespedes, X. & Arquier, M. (2013) A higher Order Beam Finite Element with Warping Eigenmodes. *Engineering Structures*, 46, 748-762.

26. Genoese, A., Genoese, A., Bilotta, A. & Garcea, G. (2014) A Generalized Model for Heterogeneous and Anisotropic Beams Including Section Distortions. *Thin-Walled Structures*, 74, 85-103.

27. Ghazouani, N. & El Fatmi, R. (2010) Extension of the non-uniform warping theory to an orthotropic composite beam. *Comptes Rendus Mecanique*, 338, 704-711.

28. Ghazouani, N. & El Fatmi, R. (2011) Higher Order Composite Beam Theory built on Saint-Venant's Solution. Part-II: Built-in Effects Influence on the Behavior of End-Loaded Cantilever Beams. *Composite Structures*, 93, 567-581.

29. Giavotto, V., Borri, M., Mantegazza, P., Ghiringhelli, G., Carmaschi, V., Maffioli, G.C.
& Mussi, F. (1983) Anisotropic Beam Theory and Applications. *Computers and Structures*, 16(1-4), 403-413.

30. Gonçalves, R., Corrêa, M.R. & Camotim, D. (2010) A Large Displacement and Finite Rotation Thin-Walled Beam Formulation Including Cross-Section Deformation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 199, 1627-1643.

31. Gonçalves, R., Le Grognec, P. & Camotim, D. (2010) GBT-Based Semi-Analytical Solutions for the Plastic Bifurcation of Thin-Walled Members. *International Journal of Solids and Structures*, 47, 34-50.

32. Heo, S., Kim, J.H. & Kim, Y.Y. (2003) Significance of Distortion in Thin-Walled Closed
Beam Section Design. *International Journal of Solids and Structures*, 40, 633-648.

33. Ie, C.A. & Kosmatka, J.B. (1993) Saint-Venant Elasticity Solutions of a Tip-Loaded
Anisotropic Cantilevered Beam with an Elliptical Section. *Composites Engineering*, 3(12), 1149-1164.

34. Jönsson, J. & Andreassen, M.J. (2011) Distortional Eigenmodes and Homogeneous
Solutions for Semi-Discretized Thin-Walled Beams. *Thin-Walled Structures*, 49, 691-707.

35. Katsikadelis, J.T. (2002a) *Boundary Elements: Theory and Applications, Elsevier*".
Amsterdam-London.

36. Katsikadelis, J.T. (2002b) The Analog Equation Method. A Boundary – only Integral Equation Method for Nonlinear Static and Dynamic Problems in General Bodies. *Theoretical and Applied Mechanics*, 27, 13-38.

37. Kazic, M. & Dong, S.B. (1990) Analysis of Restrained Torsion. *Journal of Engineering*
Mechanics, 116(4), 870-891.

38. Kermani, B. & Waldron, P. (1993) Analysis of Continuous Box Girder Bridges Including the Effects of Distortion. *Computers and Structures*, 47(3), 427-440.

39. Kim, Y.Y. & Kim, J.H. (1999) Thin-Walled Closed Box Beam Element for Static and
Dynamic Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 473-490.

40. Kosmatka, J.B. & Dong, S.B. (1991) Saint-Venant Solutions for Prismatic Anisotropic
Beams. *International Journal of Solids and Structures*, 28(7), 917-938.

41. Leach, P. & Davies, J.M. (1996) An Experimental Verification of the Generalized Beam
Theory Applied to Interactive Buckling Problems. *Thin-Walled Structures*, 25(1),

61-79

42. Li, Z., Hanna, M.T., Ádány, S. & Schafer, B.W. (2011) Impact of Basis, Orthogonalization, and Normalization on the Constrained Finite Strip Method for Stability Solutions of Open Thin-Walled Members. *Thin-Walled Structures*, 49, 1108-1122.

43. Love, A.E.H. (1944) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York.

44. Mentrasti, L. (1990) Distorion (and Torsion) of Rectangular Thin-Walled Beams. *Thin- Walled Structures*, 10, 175-193.

45. Pai, P.F. (2014) High-Fidelity Sectional Analysis of Warping Functions, Stiffness Values and Wave Properties of Beams. *Engineering Structures*, 67, 77-95.

46. Park, N.H., Choi, S. & Kang Y.J. (2005) Exact Distortional Behavior and Practical Distortional Analysis of Multicell Box Girders Using an Expanded Method. *Computers and Structures*, 83, 1607-162.

47. Park, N.H., Lim, N.H. & Kang Y.J. (2003) A Consideration on Intermediate Diaphragm Spacing in Steel Box Girder Bridges with a Doubly Symmetric Section. *Engineering Structures*, 25, 1665-1674.

48. Petrov, E. & Géradin, M. (1998) Finite Element Theory for Curved and Twisted Beams Based on Exact Solutions for Three-Dimensional Solids, Part 1: Beam Concept and Geometrically Exact Nonlinear Formulation. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 165, 43-92.

49. Ranzi, G. & Luongo, A. (2011) A New Approach for Thin-Walled Member Analysis in the Framework of GBT. *Thin-Walled Structures*, 49, 1404-1414.

50. Reagan, S.W. & Pilkey, W.D. (2002) Constrained Torsion of Prismatic Bars. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38, 909-919.

51. Schafer, B.W. & Ádány, S. (2005) Understanding and Classifying Local, Distortional and Global Buckling in Open Thin-Walled Members. *Annual Conference Structural Stability Research Council*, Montreal, Canada.

52. Schafer, B.W. & Ádány, S. (2006) Buckling Analysis of Cold-Formed Steel Members Using CUFSM: Conventional and Constrained Finite Strip Methods. *18th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, Orlando, Florida.

53. Schardt, R. (1989) *Verallgemeinerte Technicsche Biegetheory*. Germany: Springler- Verlag.

54. Schardt, R. (1994a) Generalised Beam Theory – An Adequate Method for Coupled Stability Problems. *Thin-Walled Structures*, 19, 161-180.

55. Schardt, R. (1994b) Lateral Torsional and Distortional Buckling of Channel- and Hat- Sections. *Journal of Constructional Steel Research*, 31, 243-265.

56. Silvestre, N. & Camotim, D. (2002) First-Order Generalised Beam Theory for Arbitrary
Orthotropic Materials. *Thin-Walled Structures*, 40, 755-789.

57. Stavridis, L.T. (2010) *Structural Systems: Behaviour and Design.* Thomas Telford Limited,
40 Marsh Wall, London

58. Tsipiras, V.J. & Sapountzakis, E.J. (2014) Bars Under Nonuniform Torsion - Application to Steel Bars, Assessment of EC3 Guidelines. *Engineering Structures*, 60, 133-147.

59. Vieira, R.F., Virtuoso, F.B. & Pereira, E.B.R. (2014) A Higher Order Model for Thin- Walled Structures With Deformable Cross-Sections. *International Journal of Solids and Structures*, 51, 575-598.

60. Vlasov, V. (1963) *Thin-walled elastic beams.* Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.

61. Xu, X.S., Zhong, W.X. & Zhang, H.W. (1997) The Saint-Venant Problem and Principle in Elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 34(22), 2815-2827.

62. Zhang, S.H. & Lyons, L.P.R. (1984a) A Thin-Walled Box Beam Finite Element for
Curved Bridge Analysis. *Computers and Structures*, 18(6), 1035-1046.

63. Zhang, S.H. & Lyons, L.P.R. (1984b) The Application of the Thin-Walled Box Beam

64. Element to Multibox Bridge Analysis. *Computers and Structures*, 18(5), 795-802.

65. Παπαδρακάκης Μ. *Ανάλυση Φορέων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων*, έκδοση Παπασωτηρίου.