ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΟΥΣΙΚΟ ΓΡΑΦΗΜΑ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΝΕΟ-RIEMANNIAN ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΗ ΜΟΥΣΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΒΑΛΛΙΑΝΑΤΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ:

ΣΟΦΙΑ ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ, ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΕΜΠ

2 Οκτωβρίου 2017

Περίληψη

Το αντικείμενο της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι η σύνδεση της μουσικής θεωρίας με δύο σημαντικά γνωστικά πεδία των μαθηματικών, τη θεωρία ομάδων και τη θεωρία γραφημάτων. Στην προσπάθεια που γίνεται για την επισήμανση αλλά και την ακριβή απόδειξη της ύπαρξης της στενής σχέσης μαθηματικών και μουσικής μελετάμε δύο εφαρμογές: τα Chord Progression που αποτελούν τρόπους δόμησης της ρυθμικής βάσης των μουσικών κομματιών και το μουσικό γράφημα, μια γεωμετρική αναπαράσταση που αναδεικνύει την αρμονική σχέση συγχορδιών. Για την παρουσίαση των δύο αυτών εφαρμογών είναι απαραίτητη η διατύπωση των αντίστοιχων θεωριών καθώς και ο έγκυρος τρόπος με τον οποίο μετασχηματίζουμε βασικά στοιχεία της μουσικής θεωρίας σε μαθηματικά αντικείμενα.

Abstract

The subject of this thesis is the connection of music theory with two important areas of mathematics, group theory and graph theory. Attempting to point out and prove the strong relationship between mathematics and music, two applications are being studied: Chord Progression which are being used for the construction of musical pieces and Musical Graph, a graph that reveal the harmony between chords. For the presentation of these two applications, the formulation of the corresponding theories and the valid modification of musical elements into mathematical objects are required.

Πρόλογος

Αρχικά, θέλω να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια του ΕΜΠ, κ. Σοφία Λαμπροπούλου για την επίβλεψη της εργασίας, για την παρότρυνσή της να συνδυάσω τη μουσική με τα μαθηματικά αναζητώντας νέα γνωστικά πεδία και για την ενθάρρυνσή της σε όλο αυτό το εγχείρημα. Την ευχαριστώ ιδιαίτερα για την πολύ σημαντική συμβολή της στην υλοποίηση των απαραίτητων διαδικασιών για την ολοκλήρωση και την παρουσίαση της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Επιτροπής για τον χρόνο τους και τη συνεισφορά τους. Ευχαριστώ τον κ. Δημήτριο Κοντοκώστα, Επίκουρο Καθηγητή του ΕΜΠ και τον κ. Πέτρο Στεφανέα, Επίκουρο Καθηγητή του ΕΜΠ, που παρευρέθησαν στην παρουσίαση της εργασίας και για το ενδιαφέρον που επέδειξαν στο θέμα της.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να αναφέρω πόσο σημαντική και καθοριστική υπήρξε για τη δημιουργία αυτής της εργασίας, η διπλωματική εργασία «Μουσική και Συμμετρία: Οι δράσεις της Ατονικής και της Neo-Riemannian Ομάδας πάνω στο σύνολο των σύμφωνων τριάδων» της συναδέλφου Δέσποινας Μάνδρατζη. Η μελέτη της αποτέλεσε κίνητρο για την ενασχόλησή μου με το συγκεκριμένο θέμα καθώς με ενδιέφερε ιδιαίτερα η στενή σχέση μαθηματικών και μουσικής.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όλους τους δικούς μου ανθρώπους, την οικογένειά μου και τους φίλους μου, για την υποστήριξή τους όλο αυτό τον καιρό. Οι συμβουλές, η συμπαράσταση και η ενθάρρυνσή τους βοήθησαν σε πολύ μεγάλο βαθμό ώστε να ολοκληρωθεί αυτή η εργασία.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στην σύγχρονη αντίληψη η μουσική λειτουργεί σαν τρόπος έκφρασης ή έχει τον επιστημονικό ρόλο της μελέτης του ήχου και των μέσων που τον παράγουν. Στην αρχαιότητα όμως η μουσική είχε άμεση σχέση με τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία. Πρώτος ο Πυθαγόρας πριν από 26 αιώνες διέκρινε αυτή τη στενή σχέση αντιστοιχίζοντας τα ανάλογα τμήματα με τις ευχάριστες στο άκουσμα ηχητικές αποστάσεις. Αυτός ο πειραματισμός του Πυθαγόρα είχε σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία των μουσικών διαστημάτων που υπάρχουν, έπειτα από τροποποιήσεις, μέχρι και σήμερα.

Με το πέρασμα του χρόνου η ανάγκη για ερμηνεία της μουσικής πρακτικής με φυσικούς νόμους, οι οποίοι διατυπώνονται με μαθηματικές σχέσεις, οδήγησε στη θεμελίωση της μουσικής θεωρίας πάνω σε λογικές βάσεις όπου η μαθηματική δομή είναι ιδιαίτερα προφανής.

Αυτή η αμφίδρομη συσχέτιση μαθηματικών και μουσικής παρατηρείται μέσα από τον εντοπισμό των μαθηματικών προτύπων που παρουσιάζουν συγκεκριμένες μουσικές πρακτικές και τάσεις αλλά και από τη σύνθεση μουσικών έργων, η οποία είναι αυστηρά βασισμένη σε μαθηματικές διαδικασίες.

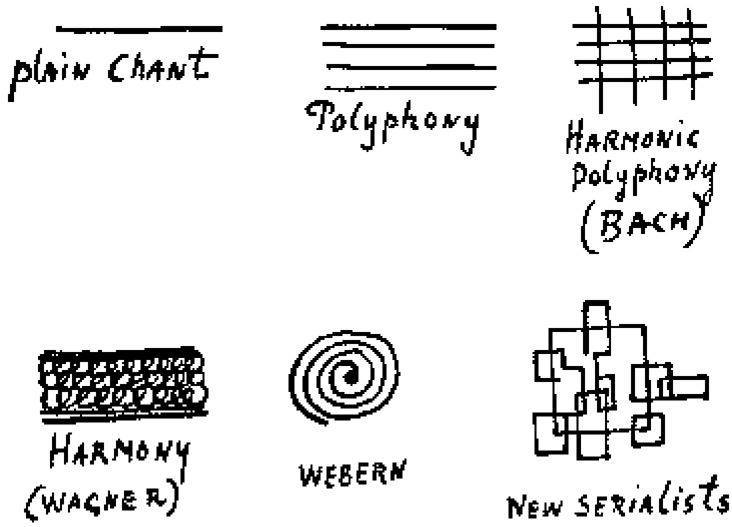
Από τον $16^{\text{ο}}$ αιώνα παρατηρείται η αλληλεπίδραση των δύο επιστημών στη μουσική σύνθεση με χαρακτηριστικό παράδειγμα τις φούγκες του Bach. Μετά από τρεις αιώνες, ο Γερμανός θεωρητικός μουσικός Hugo Riemann στην προσπάθειά του να προσεγγίσει τη μουσική μέσω των θετικών επιστημών εισήγαγε τις συναρτήσεις P, L, R, τις οποίες και θα περιγράψουμε αναλυτικά. Για την κατανόηση της δράσης τους μελετάμε την εφαρμογή των συναρτήσεων σε μια πολύ διαδεδομένη μουσική πρακτική, το chord progression, το οποίο αποτελεί κατά κάποιον τρόπο κανόνα για την ορθολογική αρμονικά θεμελίωση ενός μουσικού έργου. Η συμμετρία που παρουσιάζει η Θεωρία Ομάδων είναι το στοιχείο που μας επιτρέπει να μετατρέψουμε βασικά στοιχεία της μουσικής θεωρίας σε μαθηματικά αντικείμενα.

Η διακριτή μορφή των μουσικών εννοιών και δομών που αποτελούν αντικείμενο μελέτης της Neo-Riemannian ανάλυσης μας δίνει τη δυνατότητα να επεκτείνουμε τα αποτελέσματά μας και στο πεδίο των διακριτών μαθηματικών και πιο εξειδικευμένα σε αυτό της Θεωρίας Γραφημάτων. Αυτή η επέκταση γίνεται μέσω της εφαρμογής του μουσικού γραφήματος, όπου παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος κατασκευής του και η περιγραφή των ιδιοτήτων του, στα δύο τελευταία κεφάλαια της εργασίας.

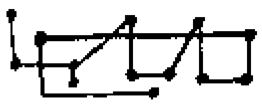
Το μουσικό γράφημα είναι ένα από τα πολλά γραφήματα που περιγράφουν αρμονικές σχέσεις και τα οποία χρησιμοποιήθηκαν από αρκετούς συνθέτες με πρώτο τον Johan Sebastian Bach και μεταγενέστερους τους Milton Babbitt και Andrzej Panufnik.

Ένα από τους σημαντικότερους συνθέτες του 20ου αιώνα, ο Ρώσος Igor Stravinsky, κύριος εκφραστής της αρμονικής ελευθερίας δημιουργώντας αρκετά παράδοξες συνθέσεις, όταν ρωτήθηκε για το πως θα σχεδίαζε τη μουσική του απάντησε:

R.C. Would you "draw" your recent music? For example:



I.S. This is *my* music:



Κεφάλαιο 1: Κλάσεις Φθόγγων

Σε αυτό το πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις βασικές έννοιες του μουσικού φθόγγου και του διαστήματος, απαραίτητες για την πρώτη επαφή με τη μουσική ανάλυση. Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε τις νότες σε μαθηματικά αντικείμενα με τη βοήθεια του συνόλου των ακεραίων $\mathbb{Z}_{12}$.

1.1 Φθόγγοι και Διαστήματα

Ο ***φθόγγος*** είναι ο ήχος που παράγεται είτε από τη φωνή του ανθρώπου είτε από κάποιο μουσικό όργανο και τα χαρακτηριστικά του είναι το ύψος, η διάρκεια και η ένταση.

Οι μουσικοί φθόγγοι μπορούν να συνδεθούν ακουστικά με το φυσικό μέγεθος της συχνότητας, η οποία εκφράζει το πλήθος των ταλαντώσεων N ανά μονάδα χρόνου t, δηλαδή f = N/t, με μονάδα μέτρησης το 1 Hertz. Επομένως, κάθε μουσικός φθόγγος θα χαρακτηρίζεται και από μια συχνότητα.

Σύμφωνα με τον Πυθαγόρα, ο οποίος πρώτος το παρατήρησε, δύο φθόγγοι ακούγονται ευχάριστα, είτε ταυτόχρονα είτε σε σειρά, όταν ο ρητός αριθμός p/q, που αναπαριστά τον λόγο μεταξύ των συχνοτήτων τους, αποτελείται από μικρούς ακέραιους αριθμούς.

Πίνακας 1.1: Οι μουσικοί φθόγγοι (νότες)

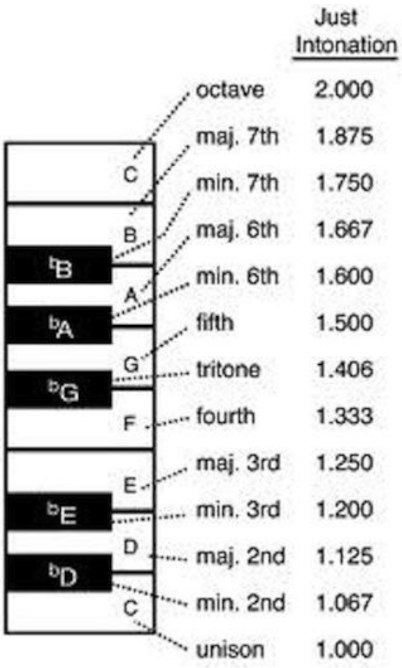
Ντο	Ντο#	Ρε	Ρε#	Μι	Φα	Φα#	Σολ	Σολ#	Λα	Λα#	Σι
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B

Διάστημα στη θεωρία της μουσικής ορίζεται η απόσταση ανάμεσα σε δύο φθόγγους και το όνομά του εκφράζεται αριθμητικά ανάλογα με τους φθόγγους που περιλαμβάνει. Τα διαστήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τα *μελωδικά*, όπου οι φθόγγοι έχουν σειρά διαδοχής και τα *αρμονικά*, όπου οι φθόγγοι ηχούν ταυτόχρονα. Επίσης, τα διαστήματα διακρίνονται σε *σύμφωνα* και *διάφωνα*, ανάλογα με το πόσο ευχάριστα ή δυσάρεστα ακούγονται οι δύο φθόγγοι, είτε σε σειρά είτε ταυτόχρονα.
Το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών φθόγγων, δηλαδή η ελάχιστη απόσταση, ονομάζεται ***ημιτόνιο***.

Πίνακας 1.2: Οι μουσικοί όροι των διαστημάτων

Διάστημα	**Ημιτόνια**
Πρώτη καθαρή	0
Δεύτερη μικρή	1

Δεύτερη μεγάλη	2
Τρίτη μικρή	3
Τρίτη μεγάλη	4
Τέταρτη καθαρή	5
Τέταρτη αυξημένη	6
Πέμπτη καθαρή	7
Έκτη μικρή	8
Έκτη μεγάλη	9
Έβδομη μικρή	10
Έβδομη μεγάλη	11
Οκτάβα	12



Εικόνα 1.1: Τα διαστήματα στο πιάνο

Γνωρίζοντας ότι όλοι οι μουσικοί φθόγγοι είναι 12, η οκτάβα μας μεταφέρει στον αμέσως επόμενο φθόγγο με το ίδιο όνομα αλλά σε διαφορετικό ύψος.

Πίνακας 1.3: Σύμφωνα διαστήματα

Διάστημα	**Αναλογία συχνοτήτων**
Οκτάβα	2/1
Πέμπτη	3/2
Τέταρτη	4/3
Τρίτη μεγάλη	5/4
Τρίτη μικρή	6/5
Έκτη μεγάλη	5/3
Έκτη μικρή	8/5

Όταν ο λόγος είναι 2/1 οι φθόγγοι ακούγονται παρόμοιοι.

1.2 Κλάσεις Φθόγγων και αντιστοίχιση με τους ακεραίους modulo12

Ορισμός 1.2.1:
Μια σχέση ~ σε ένα σύνολο X ονομάζεται ***σχέση ισοδυναμίας*** αν και μόνο αν για κάθε $a,b,c \in X$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ανακλαστική: $a \sim a$
2. Συμμετρική: Αν $a \sim b$ τότε $b \sim a$
3. Μεταβατική: Αν $a \sim b$ και $b \sim c$ τότε $a \sim c$

Στο σύνολο των φθόγγων-συχνοτήτων F ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας ~ ως εξής:
$a \sim b$ αν $a/b = 2^j$, όπου $j \in \mathbb{Z}$. (1)

Αρκεί να επαληθεύσουμε τις τρεις ιδιότητες:

1. $\frac{a}{a} = 2^0 \Rightarrow 1 = 2^j \Rightarrow j = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \sim a$

Άρα για όλους τους φθόγγους $a \sim a$.

2. $a \sim b \Rightarrow \frac{a}{b} = 2^j \Rightarrow \frac{b}{a} = 2^{-j}, -j \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \sim a$

Άρα αν $a \sim b$ τότε $b \sim a$.

3. $a \sim b \Rightarrow \frac{a}{b} = 2^j, j \in \mathbb{Z}$

$b \sim c \Rightarrow \frac{b}{c} = 2^k, k \in \mathbb{Z}$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη έχουμε:
$$\frac{a}{b}\frac{b}{c} = 2^{j+k} \Rightarrow \frac{a}{c} = 2^{j+k}, (j+k) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \sim c$$

Άρα αν $a \sim b$ και $b \sim c$ τότε $a \sim c$.

Επομένως η (1) είναι σχέση ισοδυναμίας, η οποία κατηγοριοποιεί φθόγγους-συχνότητες με λόγο 2^j, $j \in \mathbb{Z}$, σε μία ισοδύναμη κλάση φθόγγων.

Δύο ισοδύναμοι φθόγγοι απέχουν j οκτάβες και ακούγονται παρόμοιοι σύμφωνα με τον Πυθαγόρα.

Άρα η οκτάβα μπορεί να οριστεί ως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ισοδύναμων φθόγγων με λόγο $a/b = 2$.

Διαιρώντας την οκτάβα σε 12 ίσα μέρη που αντιστοιχούν σε λόγο s το καθένα έχουμε: $s^{12} = 2/1 \Rightarrow s = 2^{1/12} = 1.0594$. Ο λόγος s, που είναι ο λόγος συχνοτήτων δύο γειτονικών φθόγγων, αντιστοιχεί στο διάστημα του ημιτονίου.

Σύμφωνα με τη σχέση ισοδυναμίας (1) ισοδύναμοι φθόγγοι αντιστοιχίζονται στην ίδια νότα, άρα όλοι οι φθόγγοι μπορούν να αντιπροσωπευτούν από τις 12 νότες. Επομένως έχουμε 12 ισοδύναμες κλάσεις φθόγγων, οι οποίες ταυτίζονται με τις 12 νότες. Δηλαδή, αν για τις συχνότητες δύο φθόγγων ισχύει $a/b = 2^j, j \in \mathbb{Z}$, τότε οι φθόγγοι ανήκουν στην ίδια νότα.

Ορισμός 1.2.2:
Έστω h και k δύο ακέραιοι στο $\mathbb{Z}$ και n οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος. Ορίζουμε ότι ***ο h είναι ισότιμος με τον k modulo n***, και γράφουμε $h \equiv k (\bmod n)$, αν ο h-k διαιρείται με n, δηλαδή αν $h - k = ns$ για κάποιον $s \in \mathbb{Z}$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της ισοτιμίας modulo n λέγονται κλάσεις υπολοίπων modulo n.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις κλάσεις μουσικών φθόγγων στις κλάσεις των ακεραίων modulo12.

Ορίζουμε στο $\mathbb{Z}$ τη σχέση ισοδυναμίας $\equiv$ ως εξής:

Έστω ακέραιοι-φθόγγοι $a, b \in \mathbb{Z}$ με $a \equiv b$ αν $b - a = 12n, n \in \mathbb{Z}$.

Αρκεί να επαληθεύσουμε τις τρεις ιδιότητες:

1. $a - a = 0 \Rightarrow n = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \equiv a$
Άρα $a \equiv a$ για όλους τους φθόγγους α.

2. $a \equiv b \Rightarrow b - a = 12n \Rightarrow a - b = 12(-n), -n \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \equiv a$
Άρα αν $a \equiv b$ τότε $b \equiv a$.

3. $a \equiv b \Rightarrow b - a = 12n, n \in \mathbb{Z}$
$b \equiv a \Rightarrow c - b = 12m, m \in \mathbb{Z}$
Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη έχουμε:
$b - a + c - b = 12(n + m) \Rightarrow c - a = 12(n + m), (n + m) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \equiv c$
Άρα αν $a \equiv b$ και $b \equiv c$ τότε $a \equiv c$.

Η σχέση ισοδυναμίας $\equiv$ διαμερίζει το σύνολο των ακεραίων σε 12 κλάσεις ισοδυναμίας: 0, 1, …, 11 όπου σε κάθε κλάση ανήκουν οι ακέραιοι οι οποίοι διαιρούμενοι με το 12 δίνουν αντίστοιχα υπόλοιπα 0, 1, …, 11.

Το σύνολο των 12 κλάσεων υπολοίπων modulo12 συμβολίζεται με $\mathbb{Z}_{12}$.

Πίνακας 1.4: Οι 12 κλάσεις των μουσικών φθόγγων στο $\mathbb{Z}_{12}$

Ντο	Ντο#	Ρε	Ρε#	Μι	Φα	Φα#	Σολ	Σολ#	Λα	Λα#	Σι
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Οι πράξεις στο $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ ορίζονται σύμφωνα με το σύστημα του ρολογιού.

Πιο συγκεκριμένα, για παράδειγμα:

i. $6+5=11(\bmod 12)$

ii. $11+1=12(=12-12)=0(\bmod 12)$

iii. $6+9=15(=15-12)=3(\bmod 12)$

iv. $3-7=-4(=-4+12)=8(\bmod 12)$

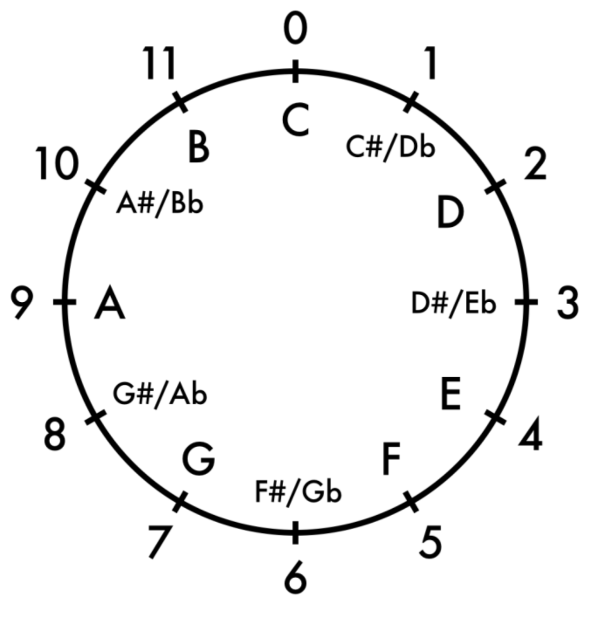
Αντίστοιχα μπορούμε να υπολογίσουμε τη μετάβαση από μια νότα κατά συγκεκριμένο διάστημα σε μία άλλη:

i. $F\#+5$ ημιτόνια $= B$

ii. $B+1$ ημιτόνιο $= C$

iii. $F\#+9$ ημιτόνια $= D\#$

iv. $D\#-7$ ημιτόνια $= G\#$



Εικόνα 1.2: Το σύστημα του ρολογιού για τις πράξεις των κλάσεων φθόγγων

Κεφάλαιο 2: Ομάδα T/I

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο προχωράμε ακόμα περισσότερο στη μουσική ανάλυση με αλγεβρικά μέσα συνδυάζοντας δύο θεμελειώδη στοιχεία και από τις δύο περιοχές, την ομάδα και τη συγχορδία. Αφού πρώτα ορίσουμε τις μουσικές λειτουργίες της μετατόπισης και της αναστροφής σαν μαθηματικά αντικείμενα θα εξετάσουμε πως δρουν πάνω στις κλάσεις φθόγγων και τις συγχορδίες αλλά και την αλγεβρική τους δομή.

2.1 Οι συναρτήσεις T_n, I_n

Δύο βασικές μουσικές λειτουργίες, τις οποίες τις συναντάμε συχνά σε μουσικά έργα είναι η μετατόπιση και η αναστροφή.

Η ***μετατόπιση*** επιτρέπει την αυτούσια επαναδιατύπωση της μελωδίας σε χαμηλότερους ή υψηλότερους τόνους διατηρώντας τα διαστήματα μεταξύ των φθόγγων.

Η ***αναστροφή*** επιτρέπει την αναδιατύπωση μιας μελωδίας διατηρώντας τις αποστάσεις των φθόγγων κατά απόλυτη τιμή χωρίς να διατηρεί αυτούσια τα διαστήματα.

Αυτές οι μουσικές λειτουργίες μπορούν να οριστούν και σαν μαθηματικές συναρτήσεις:

Ορισμός 2.1.1:
Έστω $n \in \mathbb{Z}_{12}$

- Μετατόπιση κατά n είναι η συνάρτηση $T_n(x) : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ που ορίζεται από τη σχέση $T_n(x) := x + n(\text{mod}12)$
- Αναστροφή κατά n είναι η συνάρτηση $I_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ που ορίζεται από τη σχέση $I_n(x) := -x + n(\text{mod}12)$

<u>Παράδειγμα 2.1.1:</u>
$T_5(9) = 9 + 5(\text{mod}12) = 2(\text{mod}12)$
$I_7(6) = -6 + 7(\text{mod}12) = 1(\text{mod}12)$

Οι συναρτήσεις T_n και I_n μπορούν να εφαρμοστούν όχι μόνο σε μεμονωμένες κλάσεις φθόγγων αλλά και σε σύνολα κλάσεων φθόγγων ή ακολουθίες κλάσεων φθόγγων, οι οποίες αντιπροσωπεύουν συγκεκριμένες μελωδίες.

<u>Παράδειγμα 2.1.2:</u>
$T_5\{3,6,7\} = \{T_5(3), T(6), T(7)\} = \{8,11,0\}$

$$I_7\{3,7,9\} = \{I_7(3), I_7(7), I_7(9)\} = \{4,0,10\}$$

<u>Παράδειγμα 2.1.3 (Μουσικό παράδειγμα):</u>
Το 1722 ο Johann Sebastian Bach δημοσίευσε το βιβλίο «The Well-Tempered Clavier» το οποίο περιλαμβάνει πρελούδια και φούγκες για σόλο πιάνο και στις 24 γνωστές κλίμακες. Το πρελούδιο είναι μουσικό κομμάτι σχεδιασμένο να έχει το ρόλο της εισαγωγής σε ένα άλλο μουσικό κομμάτι όπως η φούγκα, η οποία αποτελείται από ένα βασικό μουσικό θέμα που επαναλαμβάνεται με διαφορετικές φωνές εφαρμόζοντας διάφορες περιπτώσεις μετατοπίσεων και αναστροφών.

Εικόνα 2.1: Bach, Fugue No.6 in D Minor

Αναλύοντας τα πρώτα μέτρα του μουσικού αποσπάσματος της Εικόνας 2.1 μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής μετατοπίσεις και αναστροφές:

Στα δύο πρώτα έχουμε τη μελωδία
$M_{1,2} = \langle D, E, F, G, E, F, D, C\#, D, A\#, G, A \rangle = \langle 2,4,5,7,4,5,2,1,2,10,7,9 \rangle$
και στα επόμενα δύο τη
$M_{3,4} \langle A, B, C, D, B, C, A, G\#, A, F, D, E \rangle = \langle 9,11,0,2,11,0,9,8,9,5,2,4 \rangle$
η οποία προκύπτει με την εφαρμογή της συνάρτησης T_7 στην πρώτη

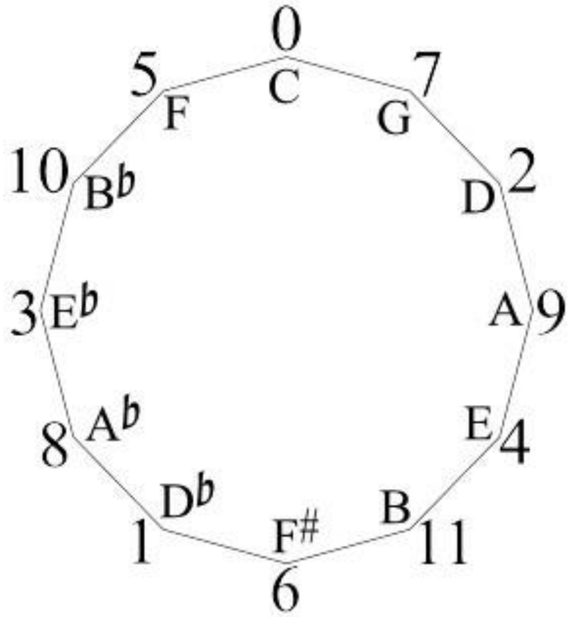
Στην αναζήτηση αναστροφής χρειάζεται να φτάσουμε στο 14ο μέτρο το οποίο αποτελεί εφαρμογή της I_6 στην ακριβώς προηγούμενη μελωδία στο 13ο μέτρο, δηλαδή αν
$M_{13} = \langle A, B, C\#, D, B, C\#, A, G\#, A, F, D, E \rangle = \langle 9,11,1,2,11,1,9,8,9,5,2,4 \rangle$
τότε
$M_{14} = I_6(M_{13}) = \langle E, D, C\#, B, D, C\#, E, F, E, A, C, A\# \rangle = \langle 4,2,1,11,2,1,4,5,4,9,0,10 \rangle$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε τη σημασία της συνάρτησης T_7 η οποία αντιστοιχεί στη μετατόπιση κατά 7 ημιτόνια, δηλαδή στο διάστημα της καθαρής πέμπτης, ένα πολύ εύηχο διάστημα και χαρακτηριστικό στη δυτική μουσική το οποίο όπως θα δούμε και στη συνέχεια αλλά και σε επόμενο κεφάλαιο είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τον ορισμό και την κατασκευή της συγχορδίας και της κλίμακας.

Παράδειγμα 2.1.4:
Με αφετηρία την κλάση φθόγγων $0 = C$ και εφαρμόζοντας διαδοχικά τη συνάρτηση T_7 έχουμε τον κύκλο με τις πέμπτες, ο οποίος αποτελείται από όλες τις κλάσεις φθόγγων.

Αναλυτικά:

$T_7(0) = 7 = G$
$T_7(7) = 2 = D$
$T_7(2) = 9 = A$
$T_7(9) = 4 = E$
$T_7(4) = 11 = B$
$T_7(11) = 6 = F\#$
$T_7(6) = 1 = C\#$
$T_7(1) = 8 = G\#$
$T_7(8) = 3 = D\#$
$T_7(3) = 10 = A\#$
$T_7(10) = 5 = F$
$T_7(5) = 0 = C$



Εικόνα 2.2: Ο κύκλος με τις πέμπτες

Παράδειγμα 2.1.5:
Άλλο ένα ιδιαίτερα εύηχο διάστημα το οποίο χρησιμοποιείται αρκετά είναι η τέταρτη καθαρή. Μάλιστα στην εποχή του Μεσαίωνα μόνο η οκτάβα, η καθαρή $5^{η}$ και η καθαρή $4^{η}$ θεωρούνταν σύμφωνα διαστήματα.
Με τον ίδιο τρόπο όπως στο προηγούμενο παράδειγμα εφαρμόζοντας διαδοχικά τη συνάρτηση T_5 έχουμε τον κύκλο με τις τέταρτες.

Αναλυτικά:

$T_5(0) = 5 = F$

$T_5(5) = 10 = A\#$

$T_5(10) = 3 = D\#$

$T_5(3) = 8 = G\#$

$T_5(8) = 1 = C\#$

$T_5(1) = 6 = F\#$

$T_5(6) = 11 = B$

$T_5(11) = 4 = E$

$T_5(4) = 9 = A$

$T_5(9) = 2 = D$

$T_5(2) = 7 = G$

$T_5(7) = 0 = C$

Παρατηρούμε ότι ο κύκλος με τις $4^{ες}$ προκύπτει αν στον κύκλο με τις $5^{ες}$ κατευθυνθούμε προς την αντίθετη φορά, την αντιωρολογιακή.

2.2 Η ομάδα T/I

Ορίζουμε το σύνολο T/I:
$T/I := T \cup I = \{T_n \mid \mathrm{n} = 0,1,...,11\} \cup \{\mathrm{I}_n \mid n = 0,1,...,11\}$ εφοδιασμένο με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.

Ορισμός 2.2.1:
Ομάδα $\langle G,*\rangle$ είναι ένα σύνολο G , μαζί με μία διμελή πράξη * στο G τέτοια ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. Το G είναι κλειστό ως προς την πράξη *, δηλαδή $a*b \in G, \forall a,b \in G$.
2. Η διμελής πράξη * είναι προσεταιριστική.
3. Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο ώστε $e*x = x*e = x, \forall x \in G$, το οποίο ονομάζεται ταυτοτικό στοιχείο για την * στο G.
4. Για κάθε $a \in G$ υπάρχει ένα στοιχείο a' με την ιδιότητα $a*a' = a'*a = e$, το οποίο λέγεται αντίστροφο του α ως προς την πράξη *.

Θεώρημα 2.2.1:
Το σύνολο T/I με διμελή πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων είναι ομάδα.

<u>Απόδειξη:</u>
Αρκεί να αποδείξουμε τις τέσσερις αξιωματικές ιδιότητες της ομάδας για το σύνολο T/I.

1. Κλειστότητα: Πρέπει να εξετάσουμε αν όλες οι πιθανές συνθέσεις δύο στοιχείων της T/I δίνουν στοιχείο που ανήκει και αυτό στην T/I.

$$(T_m \circ T_n)(x) = T_m(T_n(x)) = T_m(x+n) = x+n+m = x+(n+m) + T_{m+n(\mathrm{mod}12)}(x)$$
Άρα $T_m \circ T_n = T_{m+n(\mathrm{mod}12)} \in T/I$ (1)

$$T_m \circ I_n(x) = T_m(I_n(x)) = T_m(-x+n) = -x+n+m = -x+(n+m) = I_{m+n(\mathrm{mod}12)}(x)$$
Άρα $T_m \circ I_n(x) = I_{m+n(\mathrm{mod}12)}(x) \in T/I$ (2)

$$I_m \circ T_n(x) = I_m(T_n(x)) = I_m(x+n) = -x-n+m = -x+(m-n) = I_{m+n(\mathrm{mod}12)}(x)$$
Άρα $I_m \circ T_n(x) = I_{m-n(\mathrm{mod}12)}(x) \in T/I$ (3)

$$(I_m \circ I_n)(x) = I_m(I_n(x)) = I_m(-x+n) = x-n-m = x+(m-n) = T_{m-n(\mathrm{mod}12)}(x)$$
Άρα $I_m \circ I_n = T_{m-n(\mathrm{mod}12)} \in T/I$ (4)

Επομένως είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση συναρτήσεων.

2. Προσεταιριστική: Έστω $I_n, I_m, T_k \in T/I$ με $n,m,k \in \{0,1,...11\}$. Πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει $I_n \circ (I_m \circ T_k) = (I_n \circ I_m) \circ T_k$

$I_n \circ (I_m \circ T_k) = I_n \circ I_{m-k(\text{mod}12)}$ λόγω της (3)
$I_n \circ I_{m-k(\text{mod}12)} = T_{n-m+k(\text{mod}12)}$ λόγω της (4)
$(I_n \circ I_m) \circ T_k = T_{n-k(\text{mod}12)} \circ T_k$ λόγω της (4)
$T_{n-m(\text{mod}12)} \circ T_k = T_{n-m+k(\text{mod}12)}$ λόγω της (1)

Πράγματι, ισχύει $I_n \circ (I_m \circ T_k) = (I_n \circ I_m) \circ T_k$

3. Ταυτοτικό στοιχείο: Παρατηρούμε ότι
$T_0 \circ T_n = T_n$ και $T_n \circ T_0 = T_n$
$I_0 \circ I_n = I_n$ και $I_n \circ I_0 = I_n$
Άρα υπάρχει ταυτοτικό στοιχείο $e = T_0 \in T / I$

4. Αντίστροφο στοιχείο: Με τη βοήθεια της σχέσης (1) παρατηρούμε ότι
$T_n \circ T_{12-n} = T_{n+12-n(\text{mod}12)} T_0 = e$ και $T_{12-n} \circ T_n = T_{12-n+n(\text{mod}12)} = T_0 = e$
Άρα υπάρχει αντίστροφο στοιχείο $(T_n)^{-1} = T_{-n} = T_{(12-n)} \in T / I$ για κάθε στοιχείο T_n
Επίσης $(I_n)^{-1} = I_n$ αφού λόγω της (4) έχουμε $I_n \circ I_n = T_0 = e$.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι το σύνολο T / I εφοδιασμένο με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων είναι ομάδα.

Προκειμένου να αναλύσουμε εκτενέστερα την αλγεβρική δομή της ομάδας T / I θα χρειαστεί να μελετήσουμε τι είναι συμμετρία και πως συνδέεται γεωμετρικά με μία ομάδα.

Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό της μετάθεσης:

Ορισμός 2.2.2:
Μετάθεση ενός συνόλου A λέγεται μια συνάρτηση από το A στο A που είναι ταυτόχρονα ένα-προς-ένα και επί.
$\varphi : A \xrightarrow[\varepsilon\pi\acute{\iota}]{1-1} B$

Παράδειγμα 2.2.1:
Έστω το σύνολο $A = \{1,2,3,4,5\}$ και η μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
Δηλαδή $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 5, \sigma(4) = 3, \sigma(5) = 1$

Ορισμός 2.2.3:
Έστω A το πεπερασμένο σύνολο $\{1,2,...,n\}$. Η ομάδα όλων των μεταθέσεων του A λέγεται ***συμμετρική ομάδα*** για τους n χαρακτήρες, συμβολίζεται με S_n και έχει $n!$ στοιχεία.

Ορισμός 2.2.4:
Συμμετρία ορίζεται η οποιαδήποτε κίνηση μιας γεωμετρικής κατασκευής έτσι ώστε η κατασκευή να παραμένει σταθερή στον χώρο, δηλαδή να καταλαμβάνει το ίδιο χωρίο, με τα σημεία της όμως να έχουν μετακινηθεί.

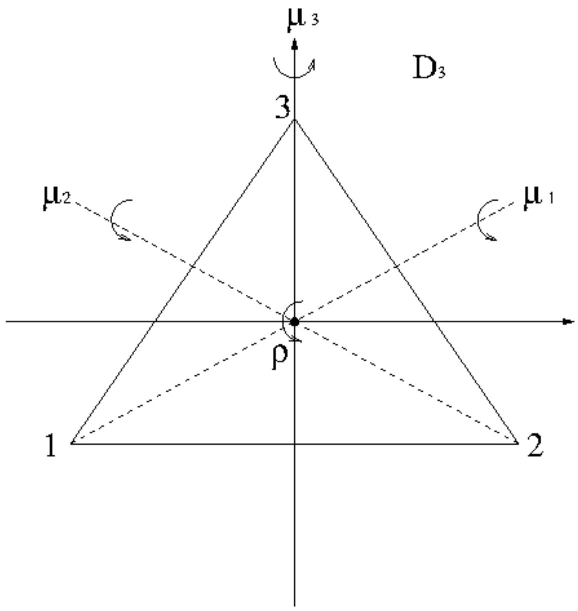
Ορισμός 2.2.5:
Διεδρική ομάδα τάξης 2n D_n είναι η ομάδα συμμετριών ενός κανονικού n-γώνου που περιέχει στροφές του n-γώνου στο επίπεδο και ανακλάσεις (στροφές στον χώρο), όπου μετά τις δράσεις τους παραμένει σταθερό στον χώρο.

Αν θεωρήσουμε κανονικό n-γωνο με κορυφές πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, ξεκινώντας από το (1,0) με αντιωρολογιακή φορά έχουμε:
$\{C_k \mid k=0,1,...,n-1\}$ το σύνολο των στροφών κατά γωνίες $2\pi k/n$
$\{\Sigma_k \mid k=0,1,...,n-1\}$ το σύνολο των ανακλάσεων ως προς τους άξονες που σχηματίζουν γωνίες $\pi k/n$ με τον άξονα xx'.

Παράδειγμα 2.2.2:
Έστω το σύνολο $A=\{1,2,3\}$. Γράφουμε όλες τις μεταθέσεις του A:

$$\rho_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\ \rho_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\ \rho_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$
$$\mu_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\ \mu_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\ \mu_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

Η συμμετρική ομάδα S_3 αποτελείται από τα $3!=6$ παραπάνω στοιχεία.
Υπάρχει μία φυσιολογική αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία της S_3 και τους τρόπους με τους οποίους δύο αντίγραφα ενός ισοπλεύρου τριγώνου με κορυφές 1,2 και 3 μπορούν να τοποθετηθούν ώστε το ένα να καλύπτει το άλλο.
Για αυτό το λόγο, η ομάδα S_3 λέγεται και η ομάδα D_3 των συμμετριών ενός ισοπλεύρου τριγώνου, όπου με ρ_i συμβολίζουμε τις στροφές και με μ_i τις ανακλάσεις ως προς τις διχοτόμους των γωνιών.



Εικόνα 2.3: Η διεδρική ομάδα D_3

Για n=12 έχουμε τη διεδρική ομάδα, τάξης 24
$D_{12} = \{C_0 = e, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, \Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6, \Sigma_7, \Sigma_8, \Sigma_9, \Sigma_{10}\Sigma_{11}\}$
των συμμετριών του κανονικού δωδεκαγώνου.

Σε αυτό το σημείο για να αποδείξουμε τη σχέση μεταξύ της ομάδας T/I και της διεδρικής ομάδας D_{12} πρέπει πρώτα να ορίσουμε τι είναι γεννήτορας μιας κυκλικής ομάδας και τι είναι ισομορφισμός:

Ορισμός 2.2.6:
Μια ομάδα G λέγεται ***κυκλική*** αν υπάρχει κάποιο στοιχείο $a \in G$ που την παράγει, δηλαδή $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = G$. Το στοιχείο $a \in G$ ονομάζεται γεννήτορας της G.

Ορισμός 2.2.7:
Μια απεικόνιση φ μιας ομάδας G σε μία ομάδα G' λέγεται ***ομομορφισμός*** αν $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \forall a, b \in G$.
Ισομορφισμός $\varphi : G \to G'$ είναι ένας ομομορφισμός ένας-προς-ένα και επί της G' και συμβολίζουμε $G \simeq G'$.

Πρόταση 2.2.1:
Η ομάδα T/I είναι ισόμορφη με την D_{12}: $T/I \simeq D_{12}$.

Απόδειξη: Τα στοιχεία C, Σ αποτελούν γεννήτορες μιας διεδρικής ομάδας τάξης 2n, για τα οποία ισχύουν:

$C^n = 1$
$\Sigma^2 = 1$

$\Sigma C \Sigma^{-1} = C^{-1}$

Για τη διεδρική ομάδα D_{12} έχουμε $n = 12, C = C_1, \Sigma = \Sigma_0$
Ορίζουμε $\varphi : D_{12} \to T / \mathrm{I}$ με εικόνες των γεννητόρων $\varphi : C \to T_1, \Sigma \to I_0$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση φ είναι ισομορφισμός.

Αρχικά θα δείξουμε ότι είναι ομομορφισμός, όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση αρκεί να ικανοποιεί τις σχέσεις (2), (3), (4) αφού έχει οριστεί πάνω σε γεννήτορες.

Πράγματι, έχουμε:
$\varphi(C^{12}) = \varphi(C)^{12} = \varphi(\mathrm{T}_1)^{12} = T_{12} = T_0 = e$
$\varphi(\Sigma^2) = \varphi(\Sigma)^2 = (I_0)^2 = I_0 \circ I_0 = I_0 \circ (I_0)^{-1} = e$
$\varphi(\Sigma C \Sigma^{-1}) = \varphi(\Sigma)\varphi(C)\varphi(\Sigma^{-1}) = I_0 \circ T_1 \circ I_0 = I_0 \circ I_1 = -I_1$ και
$-I_1(x) = x - 1 = T_{-1}(x) = (T_1(x))^{-1} = C^{-1}$

Επομένως, αφού όλα τα στοιχεία της ομάδας T / I είναι εικόνες μέσω του φ και οι ομάδες T / I και D_{12} έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, ο ομομορφισμός φ είναι ένα-προς-ένα και επί της T / I. Άρα ο φ είναι ισομορφισμός και κατά συνέπεια $T / I \simeq D_{12}$

2.3 Συγχορδίες και δράση της ομάδας T / I

Άλλο ένα μουσικό αντικείμενο ιδιαίτερης σημασίας, το οποίο μπορεί να εκφραστεί και αλγεβρικά είναι η συγχορδία.

Συγχορδία είναι ένα σύνολο τριών τουλάχιστον φθόγγων που ηχούν ταυτόχρονα. Σχηματίζεται με επάλληλους φθόγγους που απέχουν μεταξύ τους διάστημα τρίτης πάνω από ένα βασικό φθόγγο (θεμέλιος).

Αρμονικά πλήρης είναι η συγχορδία που περιέχει τουλάχιστον τρεις φθόγγους, γιατί υπάρχουν και συγχορδίες που σχηματίζονται από δύο μόνο φθόγγους (powerchords).
Οι τρίφωνες συγχορδίες ή τριάδες, διακρίνονται ανάλογα με τα διαστήματα που περιέχουν, σε μείζονες, ελάσσονες, αυξημένες και ελαττωμένες.

Ακόμα μια διάκριση των συγχορδιών είναι σε *σύμφωνες*, όταν οι ήχοι της ικανοποιούν την ακοή μας, και *διάφωνες*, όταν οι ήχοι της απαιτούν μια λύση που πρέπει να καταλήξει στο άκουσμα μιας άλλης σύμφωνης.
Σύμφωνες συγχορδίες είναι οι *μείζονες* και οι *ελάσσονες*.

Η ***μείζονα (ματζόρε) συγχορδία*** αποτελείται από την πρώτη νότα η οποία δίνει και το όνομα στη συγχορδία , τη δεύτερη νότα σε απόσταση τρίτης μεγάλης (4 ημιτόνια) από την πρώτη και την τρίτη σε απόσταση πέμπτης καθαρής (7 ημιτόνια) από την θεμέλιο νότα.

(C,E,G) είναι η Ντο-μείζονα

Η ***ελάσσονα (μινόρε) συγχορδία*** αποτελείται από τη θεμέλιο νότα η οποία επίσης δίνει όνομα στη συγχορδία, τη δεύτερη νότα σε απόσταση τρίτης μικρής (3 ημιτόνια) από τη βάση και την τρίτη σε απόσταση πέμπτης καθαρής (7 ημιτόνια) από την πρώτη νότα.

(A,C,E) είναι η Λα-ελάσσονα

Αν θεωρήσουμε ως x τη βασική νότα, τότε η αλγεβρική μορφή τους είναι:
$(x, x+4(\mathrm{mod}12), x+7(\mathrm{mod}12))$ για τη μείζονα συγχορδία
$(x, x+3(\mathrm{mod}12), x+7(\mathrm{mod}12))$ για την ελάσσονα συγχορδία

Άρα αντίστοιχα έχουμε
$(0,4,7)=(C,E,G)$
$(9,0,4)=(A,C,E)$

Επομένως κάθε συγχορδία μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα σύνολο κλάσεων φθόγγων.

Ορίζουμε S το σύνολο των συμφώνων συγχορδιών:

$$S = S^+ \cup S^-$$
$$= \{\langle x, x+4(\mathrm{mod}12), x+7(\mathrm{mod}12)\rangle \mid x \in \mathbb{Z}_{12}\} \cup \{\langle x, x+3(\mathrm{mod}12), x+7(\mathrm{mod}12)\rangle \mid x \in \mathbb{Z}_{12}\}$$

Πίνακας 2.1: Τα στοιχεία του συνόλου S

Μείζονες συγχορδίες	**Ελάσσονες συγχορδίες**
$C=\langle 0,4,7\rangle$	$f=\langle 0,8,5\rangle$
$C\#=\langle 1,5,8\rangle$	$f\#=\langle 1,9,6\rangle$
$D=\langle 2,6,9\rangle$	$g=\langle 2,10,7\rangle$
$D\#=\langle 3,7,10\rangle$	$g\#=\langle 3,11,8\rangle$
$E=\langle 4,8,11\rangle$	$a=\langle 4,0,9\rangle$
$F=\langle 5,9,0\rangle$	$a\#=\langle 5,1,10\rangle$
$F\#=\langle 6,10,1\rangle$	$b=\langle 6,2,11\rangle$
$G=\langle 7,11,2\rangle$	$c=\langle 7,3,0\rangle$
$G\#=\langle 8,0,3\rangle$	$c\#=\langle 8,4,1\rangle$
$A=\langle 9,1,4\rangle$	$d=\langle 9,5,2\rangle$
$A\#=\langle 10,2,5\rangle$	$d\#=\langle 10,6,3\rangle$
$B=\langle 11,3,6\rangle$	$e=\langle 11,7,4\rangle$

Οι συγχορδίες αν και δεν είναι ακολουθίες κλάσεων φθόγγων αλλά σύνολα, εκφράζονται σαν διατεταγμένα σύνολα. Πιο συγκεκριμένα οι μείζονες έχουν σαν πρώτη νότα τη βάση τους ενώ η βάση των ελασσόνων είναι τρίτη στη σειρά και παρατηρώντας τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι οι συγχορδίες κάθε γραμμής προέρχονται από την ίδια θεμελιώδη νότα. Μια μείζονα και μια ελάσσονα σχηματίζονται από την ίδια νότα με τον ακριβώς αντίστροφο τρόπο, δηλαδή η μείζονα προκύπτει από μια τρίτη μεγάλη και μια πέμπτη καθαρή από τη βάση ενώ η ελάσσονα με τα ίδια διαστήματα από τη βάση της μείζονας, προς την αντίθετη κατεύθυνση όμως.

Για παράδειγμα:
Ντο μείζονα = Ντο, Ντο+3η μεγάλη, Ντο+5η καθαρή
Φα ελάσσονα = Ντο, Ντο-3η μεγάλη, Ντο-5η καθαρή

Η συγκεκριμένη παρατήρηση και ανάλυση αποτελεί μέρος της θεωρίας περί δυισμού του Hugo Riemann.

Οι συναρτήσεις της μετατόπισης και της αναστροφής μπορούν να εφαρμοστούν και στις συγχορδίες, αφού είναι υποσύνολα του $\mathbb{Z}_{12}$ των κλάσεων των φθόγγων.

Για κάθε $s = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle \in S$ έχουμε $T_n, I_n : S \to S, n = 0,1,...,11$:

$$T_n(s) = T_n(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle) = \langle T_n(y_1), T_n(y_2), T_n(y_3) \rangle = s' \in S$$
$$I_n(s) = I_n(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle) = \langle I_n(y_1), I_n(y_2), I_n(y_3) \rangle = s' \in S$$

Η δράση των μετατοπίσεων διατηρεί το αν είναι μείζονα ή ελάσσονα η συγχορδία, γιατί μένουν σταθερά τα διαστήματα και η σειρά τους.
Με την T_n περνούμε από μια μείζονα με βάση μ_1 στη μείζονα με βάση $\mu_2 : \mu_2 = \mu_1 + n(\text{mod}12)$

Οι αναστροφές μετατρέπουν τις μείζονες σε ελάσσονες και αντίστροφα γιατί αναστρέφουν τη σειρά των διαστημάτων αν και τα διατηρούν.
Με την I_n περνούμε από μια μείζονα με βάση μ_1 στην ελάσσονα με βάση $\varepsilon_2 : \varepsilon_2 = 5 + n - \mu_1(\text{mod}12)$.

Παράδειγμα 2.3.1:
$$T_3(C) = T_3(\langle 0,4,7 \rangle) = \langle T_3(0), T_3(4), T_3(7) \rangle = \langle 3,7,10 \rangle = D\#$$
$$I_3(C) = I_3(\langle 0,4,7 \rangle) = \langle I_3(0), I_3(4), I_3(7) \rangle = \langle 3,11,8 \rangle = g\#$$

Ορισμός 2.3.1:
Έστω X ένα σύνολο και G μια ομάδα. ***Δράση*** της G πάνω στο X λέμε μία απεικόνιση $\cdot : G \times X \to X$ τέτοια ώστε:

1. $e \cdot x = x, \forall x \in X$, δηλαδή το ταυτοτικό στοιχείο δρα ταυτοτικά.
2. $(g_1 g_2) \cdot (x) = g_1 \cdot (g_2 \cdot x), \forall x \in X$ και κάθε $g_1, g_2 \in G$.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, το X είναι ένα G-σύνολο.

Έστω σχέση ισοδυναμίας ~ που ορίζεται ως εξής:

Για $x, y \in X$: $x \sim y$ αν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $gx = y$.

Πράγματι είναι σχέση ισοδυναμίας αφού:

1. $gx = x \Rightarrow g = e \in G \Rightarrow x \sim x$
Άρα $x \sim x$ για όλα τα στοιχεία του Χ.

2. $x \sim y \Rightarrow gx = y, g \in G \Rightarrow g^{-1}(gx) = g^{-1}y \Rightarrow (g^{-1}g)x = g^{-1}y \Rightarrow ex = g^{-1}y$
$g^{-1}y = x, g^{-1} \in G \Rightarrow y \sim x.$

Άρα αν $x \sim y$ τότε $y \sim x, \forall x, y \in X$.

3. $x \sim y \Rightarrow gx = y, g \in G$
$y \sim z \Rightarrow hy = z, h \in G$
$h(gx) = hy \Rightarrow \underbrace{(hg)}_{f \in G} x = hy \Rightarrow fx = hy = z \Rightarrow x \sim z.$

Άρα αν $x \sim y$ και $y \sim z$ τότε $x \sim z, \forall x, y, z \in X$.

Ορισμός 2.3.2:
Η ***τροχιά*** ενός στοιχείου x που ανήκει σε ένα σύνολο X κάτω από τη δράση μιας ομάδας G πάνω στο X αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία του X στα οποία μετακινείται και ορίζεται ως
$Orbit(x) = \{gx \mid g \in G\} \subset X$

Ουσιαστικά τροχιά είναι η κλάση ισοδυναμίας που προκύπτει από τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $gx = y$, δηλαδή
$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$.

Οι συγκεκριμένοι ορισμοί μας βοηθούν για να δώσουμε μια αλγεβρική προσέγγιση στον τρόπο που οι συναρτήσεις της μετατόπισης και της αναστροφής δρουν πάνω στο σύνολο των συμφώνων συγχορδιών.

Πιο συγκεκριμένα, η ομάδα T/I δρα πάνω στο σύνολο S και η τροχιά είναι ένα σύνολο από συγχορδίες.

<u>*Παράδειγμα 2.3.2:*</u>
Η τροχιά της συγχορδίας C κάτω από τη δράση της ομάδας T/I.

$$
\begin{array}{ll}
T_0(\langle 0,4,7\rangle) = \langle 0,4,7\rangle = C & I_0(\langle 0,4,7\rangle) = \langle 0,8,5\rangle = f \\
T_1(\langle 0,4,7\rangle) = \langle 1,5,8\rangle = C\# & I_1(\langle 0,4,7\rangle) = \langle 1,9,6\rangle = f\# \\
T_2(\langle 0,4,7\rangle) = \langle 2,6,9\rangle = D & I_2(\langle 0,4,7\rangle) = \langle 2,10,7\rangle = g \\
T_3(\langle 0,4,7\rangle) = \langle 3,7,10\rangle = D\# & I_3(\langle 0,4,7\rangle) = \langle 3,11,8\rangle = g\# \\
\vdots & \vdots \\
T_{11}(\langle 0,4,7\rangle) = \langle 11,3,6\rangle = B & I_{11}(\langle 0,4,7\rangle) = \langle 11,7,4\rangle = e
\end{array}
$$

όπου όλα τα στοιχεία της ομάδας T/I δρουν πάνω στη συγχορδία C.

Με τη χρήση της ομάδας T/I μπορούμε να μεταφερθούμε άμεσα από μια σύμφωνη συγχορδία σε οποιαδήποτε άλλη με μοναδικό τρόπο. Όμως για να πάμε από μια μείζονα σε μια συγκεκριμένη ελάσσονα, και αντίστροφα, δεν χρησιμοποιείται η ίδια συνάρτηση, για παράδειγμα $C \xrightarrow{I_7} c$ ενώ $A \xrightarrow{I_1} a$. Αυτό το πρόβλημα λύνεται με την ομάδα των συναρτήσεων PLR.

Κεφάλαιο 3: Neo-Riemannian Ομάδα PLR

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στη Neo-Riemannian θεωρία και τις συναρτήσεις P, L, R οι οποίες λύνουν το πρόβλημα που αναφέραμε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου. Θα μελετήσουμε πως αυτές οι συναρτήσεις δρουν πάνω στο σύνολο των συμφώνων συγχορδιών καθώς και την αλγεβρική τους δομή, η οποία αποτελεί και αυτή ομάδα.

3.1 Οι συναρτήσεις P, L, R

Στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα ο Γερμανός μουσικός θεωρητικός Hugo Riemann εισήγαγε τις συναρτήσεις P, L, R στην όλο και εξελισσόμενη προσέγγιση της μουσικής θεωρίας μέσω των μαθηματικών, οι οποίες αποτελούν και βασικό κομμάτι της neo-Riemannian μουσικής θεωρίας που αναπτύχθηκε κυρίως τις τελευταίες δεκαετίες του $20^{ου}$ αιώνα.

Σκοπός της δημιουργίας των συναρτήσεων αυτών ήταν η αλγεβρική ανάλυση μουσικών έργων που μέχρι τότε αντιμετώπιζε προβλήματα με τα υπάρχοντα μαθηματικά εργαλεία.

Οι τρεις συναρτήσεις P, L, R που ορίζονται με τη βοήθεια των αναστροφών I_n και δρουν πάνω στο σύνολο S των συμφώνων συγχορδιών είναι οι εξής:

<u>Παράλληλη (Parallel):</u>
Η συνάρτηση $P: S \to S$ που ορίζεται από τη σχέση
$$P(\langle y_1, y_2, y_3\rangle) := I_{y_1+y_3}(\langle y_1, y_2, y_3\rangle) = \langle I_{y_1+y_3}(y_1), I_{y_1+y_3}(y_2), I_{y_1+y_3}(y_3)\rangle = \langle y_3, y_1 + y_3 - y_2, y_1\rangle$$

Η συνάρτηση P μετασχηματίζει μια σύμφωνη συγχορδία στη μοναδική συγχορδία αντίθετης ομοτιμίας, αναστρέφοντας την πρώτη με την τρίτη νότα της αρχικής, δηλαδή μια μείζονα στην ομώνυμη (ίδιο όνομα-αντίθετη ομοτιμία) ελάσσονα και μια ελάσσονα στην ομώνυμη μείζονα.

<u>Παράδειγμα 3.1.1:</u>
$$P(C^+) = P(\langle 0,4,7\rangle) = I_7(\langle 0,4,7\rangle) = \langle I_7(0), I_7(4), I_7(7)\rangle = \langle 7,3,0\rangle = C^-$$
$$P(C^-) = P(\langle 7,3,0\rangle) = I_7(\langle 7,3,0\rangle) = \langle I_7(7), I_7(3), I_7(0)\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C^+$$

<u>Ανταλλαγή προσαγωγέα (Leading tone exchange):</u>
Η συνάρτηση $L: S \to S$ που ορίζεται από τη σχέση
$$L(\langle y_1, y_2, y_3\rangle) := I_{y_2+y_3}(\langle y_1, y_2, y_3\rangle) = \langle I_{y_2+y_3}(y_1), I_{y_2+y_3}(y_2), I_{y_2+y_3}(y_3)\rangle = \langle y_2 + y_3 - y_1, y_3, y_2\rangle$$

Η συνάρτηση L μετασχηματίζει μια σύμφωνη συγχορδία στη μοναδική αντίθετης ομοτιμίας, αναστρέφοντας τη δεύτερη με την τρίτη νότα της αρχικής, δηλαδή μια μείζονα στην ελάσσονα με βάση μία τρίτη μεγάλη (4 ημιτόνια) πάνω από τη βάση της μείζονας και μια ελάσσονα στη μείζονα με βάση 4 ημιτόνια κάτω από τη βάση της ελάσσονας. Η συνάρτηση L λέγεται ανταλλαγή προσαγωγέα καθώς αν θεωρήσουμε μια μείζονα κλίμακα (θα γίνει αναφορά στο επόμενο κεφάλαιο), περνούμε από την τονική της κλίμακας στον προσαγωγέα της και αντίστροφα.

Παράδειγμα 3.1.2:

$$L(C^{+}) = L(\langle 0,4,7\rangle) = I_{11}(\langle 0,4,7\rangle) = \langle I_{11}(0), I_{11}(4), I_{11}(7)\rangle = \langle 11,7,4\rangle = E^{-}$$

$$L(E^{-}) = L(\langle 11,7,4\rangle) = I_{11}(\langle 11,7,4\rangle) = \langle I_{11}(11), I_{11}(7), I_{11}(4)\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C^{+}$$

Σχετική (Relative):

Η συνάρτηση $R: S \to S$ που ορίζεται από τη σχέση

$$R(\langle y_1, y_2, y_3\rangle) := I_{y_1+y_2}(\langle y_1, y_2, y_3\rangle) = \langle I_{y_1+y_2}(y_1), I_{y_1+y_2}(y_2), I_{y_1+y_2}(y_3)\rangle = \langle y_2, y_1, y_1+y_2-y_3\rangle$$

Η συνάρτηση R μετασχηματίζει μια σύμφωνη συγχορδία στη μοναδική συγχορδία αντίθετης ομοτιμίας, αναστρέφοντας την πρώτη με τη δεύτερη νότα, δηλαδή μία μείζονα στη σχετική της ελάσσονα (βάση ελάσσονας 3 ημιτόνια κάτω από τη βάση μείζονας) και μια ελάσσονα στη σχετική της μείζονα.

Παράδειγμα 3.1.3:

$$R(C^{+}) = R(\langle 0,4,7\rangle) = I_{4}(\langle 0,4,7\rangle) = \langle I_{4}(0), I_{4}(4), I_{4}(7)\rangle = \langle 4,0,9\rangle = A^{-}$$

$$R(A^{-}) = R(\langle 0,4,9\rangle) = I_{4}(\langle 0,4,9\rangle) = \langle I_{4}(0), I_{4}(4), I_{4}(9)\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C^{+}$$

Από τα παραδείγματα κάθε συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι αν εφαρμόσουμε δύο φορές μια συνάρτηση σε σύμφωνη συγχορδία, επιστρέφει την ίδια τη συγχορδία, δηλαδή $P^2 = e, L^2 = e, R^2 = e$.

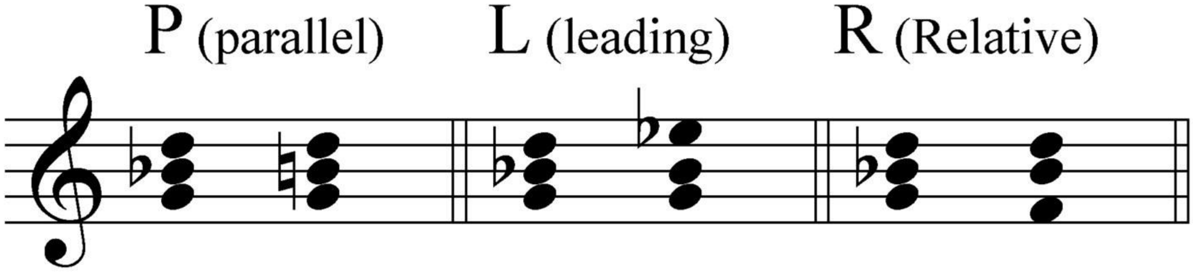
Παράδειγμα 3.1.4:

Η δράση των P, L, R πάνω στην $G^{-} = \langle 2,10,7\rangle$

$$P(G^{-}) = P\langle 2,10,7\rangle = I_9\langle 2,10,7\rangle = \langle 7,11,2\rangle = G^{+}$$

$$L(G^{-}) = L\langle 2,10,7\rangle = I_5\langle 2,10,7\rangle = \langle 3,7,10\rangle = D\#$$

$$R(G^{-}) = R\langle 2,10,7\rangle = I_0\langle 2,10,7\rangle = \langle 10,2,5\rangle = A\#$$



Εικόνα 3.1: Η δράση των P, L, R πάνω στην $G^{-} = \langle 2,10,7\rangle$

3.2 Η Ομάδα PLR

Ορισμός 3.2.1:
Η ***ομάδα*** PLR είναι η ομάδα της οποίας το σύνολο αποτελείται από όλες τις πιθανές συνθέσεις των συναρτήσεων P, L, R με διμελή πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.

Παράδειγμα 3.2.1:
Η τροχιά της C^+ κάτω από τη δράση των συναρτήσεων L, R εφαρμόζοντας εναλλάξ την κάθε μία πάνω στη C^+.

$$R(C^+) = A^-$$
$$LR(C^+) = L(A^-) = F^+$$
$$R(LR)(C^+) = R(LR)(C^+) = D^-$$
$$(LR)^2(C^+) = L(R(LR)(C^+)) = A\#^+$$
$$R(LR)^2(C^+) = R(LR)^2(C^+) = R(A\#^+) = G^-$$
$$(LR)^3(C^+) = L(R(LR)(C^+) = L(G^-) = D\#^+$$
$$R(LR)^3(C^+) = R(D\#^+) = C^-$$
$$(LR)^4(C^+) = L(R(LR)^3(C^+) = L(C^-) = G\#^+$$
$$R(LR)^4(C^+) = R(G\#^+) = F^-$$
$$(LR)^5(C^+) = L(R(LR)^4(C^+)) = L(F^-) = C\#^+$$
$$R(LR)^5(C^+) = R(C\#^+) = A\#^-$$
$$(LR)^6(C^+) = L(R(LR)^5(C^+)) = L(A\#^-) = F\#^+$$
$$R(LR)^6(C^+) = R(F\#^+) = D\#^-$$
$$(LR)^7(C^+) = L(R(LR)^6(C^+)) = L(D\#^-) = B^+$$
$$R(LR)^7(C^+) = R(B^+) = G\#^-$$
$$(LR)^8(C^+) = L(R(LR)^7(C^+)) = L(G\#^-) = E^+$$
$$R(LR)^8(C^+) = R(E^+) = C\#^-$$
$$(LR)^9(C^+) = L(R(LR)^8(C^+)) = L(C\#^-) = A^+$$
$$R(LR)^9(C^+) = R(A^+) = F\#^-$$
$$(LR)^{10}(C^+) = L(R(LR)^9(C^+)) = L(F\#^-) = D^+$$
$$R(LR)^{10}(C^+) = R(D^+) = B^-$$
$$(LR)^{11}(C^+) = L(R(LR)^{10}(C^+)) = L(B^-) = G^+$$
$$R(LR)^{11}(C^+) = R(G^+) = E^-$$
$$(LR)^{12}(C^+) = L(R(LR)^{11}(C^+)) = L(E^-) = C^+$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε 24 σύνθετες συναρτήσεις οι οποίες επαναλαμβάνονται:

$$\Sigma=\{LR,(LR)^2,(LR)^3,(LR)^4,(LR)^5,(LR)^6,(LR)^7,(LR)^8,(LR)^9,(LR)^{10},(LR)^{11},(LR)^{12},$$
$$R,R(LR),R(LR)^2,R(LR)^3,R(LR)^4,R(LR)^5,R(LR)^6,R(LR)^7,R(LR)^8,R(LR)^9,R(LR)^{10},R(LR)^{11}\}$$

Η συνάρτηση P μπορεί να οριστεί μέσω των συναρτήσεων L,R οπότε περιοριζόμαστε στο σύνολο $PLR=L/R$.

Πρόταση 3.2.1:
Στο σύνολο PLR ισχύουν τρεις βασικές σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων:

Έστω $s\in S$, τότε:
1. $P(s)=R(LR)^3(s)$
2. $L(s)=R(LR)^{11}(s)$
3. $(LR)^{12}(s)=(LR)^0(s)=L^2(s)=R^2(s)=s$, δηλαδή η $(LR)^{12}$ είναι ταυτοτικό στοιχείο.

<u>Απόδειξη:</u>
1. Για κάθε $s\in S$ και κάποιο $n\in\mathbb{Z}_{12}$ $s=\begin{cases}T_n(C^+), s\in S^+\\ I_n(C^+), s\in S^-\end{cases}$

Δηλαδή κάθε μείζονα προκύπτει από τη δράση της T_n στη C^+ για κάποιο $n\in\mathbb{Z}_{12}$ και κάθε ελάσσονα από τη δράση της I_n στη C^+ για κάποιο $n\in\mathbb{Z}_{12}$.

Επίσης ισχύει $T_nP(s)=P(s)T_n$ διότι
$$PT_1(\langle y_1,y_2,y_3\rangle)=P(\langle y_1+1,y_2+1,y_3+1\rangle)=\langle y_3+1,y_1-y_2+y_3+1,y_1+1\rangle$$
$$T_1P(\langle y_1,y_2,y_3\rangle)=T_1(\langle y_3,y_1-y_2+y_3,y_1\rangle)=\langle y_3+1,y_1-y_2+y_3+1,y_1+1\rangle$$

Άρα $PT_1(s)=T_1P(s)$ και αφού T_1 είναι γεννήτορας της T/I θα ισχύει και $PT_n(s)=T_nP(s)$.
$$T_nP(C^+)=T_nR(LR)^3(C^+)\Leftrightarrow PT_n(C^+)=R(LR)^3T_n(C^+)\Leftrightarrow P(s)=R(LR)^3(s),\forall s\in S^+.$$

Όμοια για την I_n έχουμε ότι $I_nP(s)=PI_n(s),\forall s\in S^-$ καθώς
$$PI_0(\langle y_1,y_2,y_3\rangle)=P(\langle -y_1,-y_2,-y_3\rangle)=\langle -y_3,-y_1+y_2-y_3,-y_1\rangle$$
$$I_0P(\langle y_1,y_2,y_3\rangle)=I_0(\langle y_3,y_1-y_2+y_3,y_1\rangle)=\langle -y_3,-y_1+y_2-y_3,-y_1\rangle$$

Άρα $PI_0(s)=I_0P(s)$ και η I_0 είναι γεννήτορας της T/I.
$$I_nP(C^+)=I_nR(LR)^3(C^+)\Leftrightarrow PI_n(C^+)=R(LR)^3I_n(C^+)\Leftrightarrow P(s)=R(LR)^3(s),\forall s\in S^-$$

Επομένως ισχύει $P(s)=R(LR)^3(s)$.

2. Ως γνωστόν $L(C^+)=R(LR)^{11}(C^+)$
Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία καταλήγουμε στη σχέση $L(s)=R(LR)^{11}(s)$

3. Εφαρμόζοντας και πάλι την παραπάνω διαδικασία και με δεδομένο ότι $(LR)^{12}(C^+)=L^2(C^+)=R^2(C^+)=C^+$ συμπεραίνουμε ότι

$(LR)^{12}(s)=(LR)^{0}(s)=L^{2}(s)=R^{2}(s)=s$.

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω η P μπορεί να εκφραστεί μέσω των άλλων δύο συναρτήσεων, οπότε έχουμε ότι $PLR=L/R$ και οποιαδήποτε σύνθετη συνάρτηση που προκύπτει από τις L,R είναι ισοδύναμη με κάποια από τις 24 συναρτήσεις του συνόλου Σ.

Συνεπώς $PLR=\{(LR)^{n} \mid n=1,2,...12\}\cup\{R(LR)^{n} \mid n=0,2,...,11\}$ και $|PLR|=24$.

Θεώρημα 3.2.1:
Το σύνολο $PLR=L/R$ εφοδιασμένο με διμελή πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων είναι ομάδα.

Απόδειξη:
Αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι αξιωματικές ιδιότητες της ομάδας.

1. Κλειστότητα: Πρέπει όλες οι πιθανές συνθέσεις μεταξύ δύο στοιχείων της PLR να δίνουν στοιχεία τα οποία επίσης ανήκουν στην PLR.

Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι

$$(LR)^{n}\circ(LR)^{m}=(LR)^{n+m(\mathrm{mod}12)}\in PLR$$

$$R(LR)^{n}\circ(LR)^{m}=R(LR)^{m+n(\mathrm{mod}12)}\in PLR$$

Επίσης εξετάζοντας για κάθε $n=1,2,...12$ και $m=1,2,...,12$ συμπεραίνουμε ότι

$$(LR)^{n}\circ R(LR)^{m}=R(LR)^{m-n(\mathrm{mod}12)}\in PLR$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει επίσης ότι

$$R(LR)^{n}\circ R(LR)^{m}=R((LR)^{n}R(LR)^{m})=R(R(LR)^{m-n(\mathrm{mod}12)})=(LR)^{m-n(\mathrm{mod}12)}$$

$$\Rightarrow R(LR)^{n}\circ R(LR)^{m}=(LR)^{m-n(\mathrm{mod}12)}\in PLR$$

Άρα όλες οι πιθανές συνθέσεις των στοιχείων PLR ανήκουν στην PLR.

2. Προσεταιριστική:Αρκεί να αποδείξουμε την ιδιότητα για μια τριάδα της PLR.

Έστω $n,m\in\{1,2,...,12\}$ και $k\in\{0,1,...,11\}$

$$((LR)^{n}\circ(LR)^{m}\circ R(LR)^{k}=(LR)^{n+m(\mathrm{mod}12)}\circ R(LR)^{k}=R(LR)^{k-n-m(\mathrm{mod}12)}$$

$$(LR)^{n}\circ((LR)^{m})\circ R(LR)^{k})=(LR)^{n}\circ R(LR)^{k-n(\mathrm{mod}12)}=R(LR)^{k-m-n(\mathrm{mod}12)}$$

Άρα ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.

3. Ταυτοτικό στοιχείο: Από προηγούμενη πρόταση υπάρχει το ταυτοτικό στοιχείο $e=(LR)^{12}\in PLR$.

4. Αντίστροφο στοιχείο: Για κάθε στοιχείο $(LR)^{n}$ υπάρχει ο αντίστροφος $((LR)^{n})^{-1}=(LR)^{-n}=(LR)^{12-n(\mathrm{mod}12)}\in PLR$, διότι

$(LR)^n \circ (LR)^{12-n(\text{mod}12)} = (LR)^{n+12-n(\text{mod}12)} = (LR)^0 = e$.

Επίσης από προηγούμενη πρόταση έχουμε $(RL)^n = (LR)^{12-n} = (LR)^{-n}$.

Επιπλέον, $R(LR)^n \circ R(LR)^n = (LR)^{n-n} = (LR)^0 = e$. Άρα ο αντίστροφος του $R(LR)^n$ είναι ο εαυτός του.

Συνεπώς, το σύνολο PLR με διμελή πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων είναι ομάδα.

Πρόταση 3.2.2:
Η ομάδα PLR είναι ισόμορφη με τη D_{12}: $PLR \simeq D_{12}$.

Απόδειξη:
Αρκεί να ορίσουμε ομομορφισμό στην ομάδα PLR που να ικανοποιεί τις γνωστές σχέσεις (2), (3), (4).

Έστω $\varphi : D_{12} \to PLR$ με εικόνες $\varphi : C \to LR, \Sigma \to L = R(LR)^{11}$

Πράγματι, έχουμε

$$\varphi(C^{12}) = \varphi(C)^{12} = (LR)^{12} = e$$

$$\varphi(\Sigma^2) = \varphi(\Sigma)^2 = L^2 = e$$

$$\varphi(\Sigma C \Sigma^{-1}) = \varphi(\Sigma)\varphi(C)\varphi(\Sigma^{-1}) = \varphi(\Sigma)\varphi(C)\varphi(\Sigma)^{-1} = L(LR)L = L^2(RL) = RL = (LR)^{-1} = C^{-1}$$

Επομένως, αφού όλα τα στοιχεία της ομάδας PLR είναι εικόνες μέσω του φ και οι ομάδες PLR και D_{12} έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, ο ομομορφισμός φ είναι ένα-προς-ένα και επί της PLR.

Άρα ο φ είναι ισομορφισμός και κατά συνέπεια $PLR \simeq D_{12}$.

Κεφάλαιο 4: Neo-Riemannian ανάλυση των Chord Progression

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε μια εφαρμογή της Neo-Riemannian θεωρίας στη μουσική πρακτική. Συγκεκριμένα θα αναλύσουμε την αλγεβρική δομή των Chord Progression. Για να καταλάβουμε τι είναι το Chord Progression θα χρειαστεί να κάνουμε επεξήγηση των μουσικών όρων της κλίμακας και της εναρμόνισης. Στη συνέχεια, μέσω των συναρτήσεων P, L, R θα αναλύσουμε κάποια βασική είδη Chord Progression, με τη βοήθεια μουσικών παραδειγμάτων.

4.1 Κλίμακα-Εναρμόνιση και Chord Progression

Ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της μουσικής θεωρίας αλλά και πρακτικής είναι η εναρμόνιση της μελωδίας, δηλαδή η ρυθμική συνοδεία μέσω συγχορδιών από ένα ή περισσότερα μουσικά όργανα μιας μουσικής φράσης.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους αναπτύσσονται οι συγχορδίες στη ρυθμική συνοδεία, και ουσιαστικά πως διαδέχεται η μία την άλλη (chord progression).

Αρχικά, θα χρειαστεί να αναφέρουμε και να ερμηνεύσουμε τις έννοιες της κλίμακας και της εναρμόνισης.

Ορισμός 4.1.1:
Κλίμακα ή σκάλα (scale) είναι μια σειρά από μουσικούς φθόγγους με συγκεκριμένο τρόπο διάταξης ανάλογα με τις ηχητικές τους αποστάσεις (διαστήματα).

Λόγω αυτών των αποστάσεων, κάθε κλίμακα έχει ένα δικό της χαρακτηριστικό άκουσμα, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται για διαφορετικούς σκοπούς.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μουσική κλίμακα αποτελεί τη βάση για τη δημιουργία οποιουδήποτε μουσικού έργου, καθώς μας καθοδηγεί στην επιλογή των κατάλληλων φθόγγων ανάλογα με τις μελωδίες που θέλουμε να δημιουργήσουμε.

Κάθε νότα της κλίμακας αποτελεί μια βαθμίδα της.

Πίνακας 4.1: Οι βαθμίδες της κλίμακας

Αριθμός βαθμίδας	**Όνομα βαθμίδας**
I	Τονική
II	Επιτονική
III	Μέση
IV	Υποδεσπόζουσα
V	Δεσπόζουσα
VI	Επιδεσπόζουσα
VII	Προσαγωγέας

Υπάρχουν διάφορα είδη κλιμάκων πάνω στις οποίες οι λαοί έχουν θεμελιώσει τις δικές τους δημιουργίες, τα οποία διακρίνονται ανάλογα με τον αριθμό των βαθμίδων αλλά και των ηχητικών αποστάσεων.

Οι πιο γνωστές και επικρατέστερες κλίμακες είναι η Μείζονα (Ματζόρε) και η Ελάσσονα (Μινόρε).

Η δομή μιας ***μείζονας κλίμακας*** είναι:

- $I \xrightarrow{T} II \xrightarrow{T} III \xrightarrow{H} IV \xrightarrow{T} V \xrightarrow{T} VI \xrightarrow{T} VII \xrightarrow{H} I$

ενώ μιας ***ελάσσονας***:

- $I \xrightarrow{T} II \xrightarrow{H} III \xrightarrow{T} IV \xrightarrow{T} V \xrightarrow{H} VI \xrightarrow{3H} VII \xrightarrow{H} I$

όπου με T και H έχουμε συμβολίσει αντίστοιχα τον τόνο (= 2 ημιτόνια) και το ημιτόνιο.

Ορισμός 4.1.2:
Εναρμόνιση είναι η συνοδεία συγχορδιών σε μια μελωδία χρησιμοποιώντας κάθε νότα της κλίμακας, πάνω στην οποία έχει δημιουργηθεί η μελωδία, σαν θεμέλιο νότα για συγχορδία.

Η διαδικασία της εναρμόνισης αποτελείται από τους εξής σχηματισμούς συγχορδιών:

- Η συγχορδία της τονικής I είναι το κέντρο του αρμονικού συνόλου.
- Οι πιο σημαντικές συγχορδίες που συνδέονται με την τονική είναι της υποδεσπόζουσας IV και της δεσπόζουσας V.
- Οι τρεις αυτές συγχορδίες χαρακτηρίζουν την κλίμακα στην οποία ανήκουν και αποτελούν τις κύριες συγχορδίες της εναρμόνισης.
- Οι υπόλοιπες τρεις συγχορδίες, της επιτονικής II, της μέσης III και της επιδεσπόζουσας VI, είναι οι δευτερεύουσες που συμπληρώνουν την εναρμόνιση.

Αφού έχει γίνει η επιλογή των βάσεων για κάθε συγχορδία, πρέπει να καθορίσουμε και την ομοτιμία κάθε μιας, δηλαδή αν θα είναι μείζονα ή ελάσσονα. Αυτό θα μπορούσε να γίνει με την ανάλυση της κλίμακας και τον σχηματισμό συγχορδιών ανάλογα με τις νότες που περιέχει. Όμως ένας βασικός κανόνας της εναρμόνισης που μας διευκολύνει στην επιλογή ομοτιμίας είναι ο ακόλουθος:

Οι κύριες συγχορδίες έχουν την ίδια ομοτιμία με την κλίμακα και οι δευτερεύουσες την αντίθετη.

Αναλυτικά δηλαδή έχουμε:

<u>Μείζονα κλίμακα</u>	**<u>Ελάσσονα κλίμακα</u>**
1^{η} νότα $\rightarrow I$ ματζόρε	1^{η} νότα $\rightarrow i$ μινόρε
2^{η} νότα $\rightarrow ii$ μινόρε	2^{η} νότα $\rightarrow ii$ ελαττωμένης
3^{η} νότα $\rightarrow iii$ μινόρε	3^{η} νότα $\rightarrow III$ ματζόρε
4^{η} νότα $\rightarrow IV$ ματζόρε	4^{η} νότα $\rightarrow iv$ μινόρε
5^{η} νότα $\rightarrow V$ ματζόρε	5^{η} νότα $\rightarrow v$ μινόρε
6^{η} νότα $\rightarrow vi$ μινόρε	6^{η} νότα $\rightarrow VI$ ματζόρε
7^{η} νότα $\rightarrow vii$ ελαττωμένης	7^{η} νότα $\rightarrow VII$ ματζόρε

Οι συγχορδίες της αυξημένης και της ελαττωμένης, που αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δε θα μας απασχολήσουν καθώς είναι διάφωνες και δεν συνάδουν με την neo-riemannian θεωρία.

Ορισμός 4.1.3:
Chord Progression ή Αρμονική Πρόοδος είναι μια συγκεκριμένη ακολουθία συγχορδιών, με λογική μουσικά διαδοχή, η οποία καθορίζει την αρμονική κίνηση και πορεία ενός μουσικού έργου.

Ουσιαστικά Chord Progression είναι ο τρόπος με τον οποίο μια συγχορδία διαδέχεται την άλλη. Αποτελεί πολύ σημαντικό μέρος της μουσικής δημιουργίας καθώς λειτουργεί σαν κανόνας στη θεμελίωση της δομής ενός μουσικού κομματιού ξεκινώντας από το μηδέν.

Κάθε Chord Progression ταυτίζεται με συγκεκριμένη ακολουθία από κύριες και δευτερεύουσες συγχορδίες, οι οποίες προκύπτουν από κλίμακα της επιλογής μας.

Υπάρχουν εκατοντάδες διαφορετικά Chord Progression από την περίοδο της Αναγέννησης μέχρι σήμερα, αρκετά από αυτά μάλιστα παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες μεταξύ τους, και κάθε ένα προσδίδει στο αντίστοιχο μουσικό κομμάτι διαφορετικό σκοπό και ύφος.

Θα αναφέρουμε και θα αναλύσουμε μόνο 3 από αυτά, τα πιο διαδεδομένα και καθοριστικά στην ιστορία της μουσικής, που τα συναντάμε στα περισσότερα μουσικά έργα.

Βασικός σκοπός είναι η neo-riemannian ανάλυση των Chord Progression, δηλαδή ποιες συναρτήσεις της ομάδας PLR χρησιμοποιούνται για να μεταφερθούμε από τη μία συγχορδία στην επόμενη που τη διαδέχεται στην ακολουθία.

Σε κάθε Chord Progression θα χρησιμοποιούμε για την ανάλυση συγχορδίες από τη Ντο μείζονα και Λα ελάσσονα, όπου οι συγκεκριμένες αναλύσεις θα γενικεύονται και στις υπόλοιπες μείζονες και ελάσσονες κλίμακες αντίστοιχα, καθώς για να μεταφερθούμε από μια μείζονα σε μια άλλη μείζονα χρειάζονται μόνο μετατοπίσεις, οι οποίες διατηρούν αναλλοίωτες τις αποστάσεις με αποτέλεσμα οι συναρτήσεις να μην αλλάζουν. Το ίδιο ισχύει και για τις ελάσσονες.

4.2 Είδη Chord Progression και ανάλυση με τις συναρτήσεις P, L, R

1. Folia Progression

Είναι το πρώτο chord progression που καταγράφηκε στην ιστορία της μουσικής και χρονολογείται τον 16^{o} αιώνα. Η δομή του χαρακτηρίζεται σαν κλασσικό ευρωπαϊκό μουσικό θέμα και διακρίνεται σε δύο βασική είδη: στο early Folia με πιο ελεύθερη δομή και later Folia με σταθερή δομή, το οποίο αποτελείται από 16 μέτρα τα οποία επαναλαμβάνονται σε ρυθμό ¾.

Η ακολουθία συγχορδιών είναι η εξής:
$i - v - i - VII / III - VII - i - v$

Έστω η κλίμακα Λα ελάσσονα ή A minor: $A - B - C - D - E - F - G$

Το αντίστοιχο Folia Progression: $A^- - E^- - A^- - G^+ / C^+ - G^+ - A^- - E^-$

Παρατηρούμε ότι:

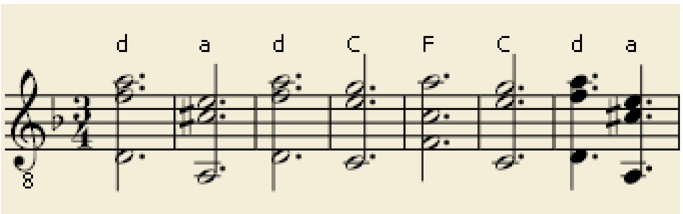
$$E^- = L(C^+) = L(R(A^-)) \Rightarrow A^- \xrightarrow{L \circ R} E^-$$
$$A^- = R(C^+) = R(L(E^-)) \Rightarrow E^- \xrightarrow{R \circ L} A^-$$
$$G^+ = R(E^-) = R(L(C^+)) = R(L(R(A^-))) \Rightarrow A^- \xrightarrow{R \circ L \circ R} G^+$$
$$C^+ = L(E^-) = L(R(G^+)) \Rightarrow G^+ \xrightarrow{L \circ R} C^+, C^+ \xrightarrow{R \circ L} G^+$$
$$A^- = R(C^+) = R(L(E^-)) = R(L(R(G^+))) \Rightarrow G^+ \xrightarrow{R \circ L \circ R} A^-$$

Συνεπώς η ανάλυσή του είναι :

$$i \xrightarrow{L \circ R} v \xrightarrow{R \circ L} i \xrightarrow{R \circ L \circ R} VII \xrightarrow{L \circ R} III \xrightarrow{R \circ L} VII \xrightarrow{R \circ L \circ R} i \xrightarrow{L \circ R} v \xrightarrow{R \circ L} i$$

<u>Παράδειγμα 4.2.1:</u>
Ακολουθία συγχορδιών και συναρτήσεων L, R σε μουσικό έργο Later Folia του $18^{ου}$ αιώνα, σε κλίμακα D minor:

$$D^- \xrightarrow{R \circ L} A^- \xrightarrow{L \circ R} D^- \xrightarrow{L \circ R \circ L} C^+ \xrightarrow{R \circ L} F^+ \xrightarrow{L \circ R} C^+ \xrightarrow{L \circ R \circ L} D^- \xrightarrow{R \circ L} A^-$$



Εικόνα 4.1: Later Folia in D minor (Chord Progression)

2. Pachelbel Progression

Το συγκεκριμένο chord progression εμφανίστηκε πρώτη φορά στο έργο Canon in D (Κανόνας σε Ρε μείζονα) του Γερμανού συνθέτη Johann Pachelbel. Το έργο γράφτηκε το 1680 και ξεχάστηκε μέχρι τον 20^{o} αιώνα, όπου μια δημοσίευση το 1919 το έκανε ευρέως γνωστό.

Η ακολουθία συγχορδιών είναι η εξής:
$I - V - vi - iii$ για μείζονες κλίμακες και $i - v - VI - III$ για ελάσσονες

Σε κλίμακα Ντο μείζονα ή C major $C - D - E - F - G - A - B$

Το αντίστοιχο Pachelbel Progression: $C^{+} - G^{+} - A^{-} - E^{-}$

$$
\begin{aligned}
&G^{+} = R(E^{-}) = R(L(C^{+})) \Rightarrow C^{+} \xrightarrow{R\circ L} G^{+} \\
&A^{-} = R(C^{+}) = R(L(E^{-})) = R(L(R(G^{+}))) \Rightarrow G^{+} \xrightarrow{R\circ L\circ R} A^{-} \\
&E^{-} = L(C^{+}) = L(R(A^{-})) \Rightarrow A^{-} \xrightarrow{L\circ R} E^{-} \\
&C^{+} = L(E^{-}) \Rightarrow E^{-} \xrightarrow{L} C^{+}
\end{aligned}
$$

Άρα η ανάλυσή του είναι:

$$I \xrightarrow{R\circ L} V \xrightarrow{R\circ L\circ R} vi \xrightarrow{L\circ R} iii \xrightarrow{L} I$$

Σε κλίμακα A minor έχουμε $A^{-} - E^{-} - F^{+} - C^{+}$

$$
\begin{aligned}
&E^{-} = L(C^{+}) = L(R(A^{-})) \Rightarrow A^{-} \xrightarrow{L\circ R} E^{-} \\
&F^{+} = L(A^{-}) = L(R(C^{+})) = L(R(L(E^{-}))) \Rightarrow E^{-} \xrightarrow{L\circ R\circ L} F^{+} \\
&C^{+} = R(A^{-}) = R(L(F^{+})) \Rightarrow F^{+} \xrightarrow{R\circ L} C^{+} \\
&A^{-} = R(C^{+}) \Rightarrow C^{+} \xrightarrow{R} A^{-}
\end{aligned}
$$

Με αντίστοιχη ανάλυση:

$$i \xrightarrow{L\circ R} v \xrightarrow{L\circ R\circ L} VI \xrightarrow{R\circ L} III \xrightarrow{R} i$$

Παράδειγμα 4.2.2:
Το Chord Progression του «Κανόνα σε Ρε μείζονα» του Pachelbel με τις αντίστοιχες συναρτήσεις L, R :

Σε D major $D^{+} \xrightarrow{R\circ L} A^{+} \xrightarrow{R\circ L\circ R} B^{-} \xrightarrow{L\circ R} F^{-}$

Εικόνα 4.2: Pachelbel - Canon in D (Chord Progression)

3. Andalusian Cadence

Θεωρείται ως ένα από τα διασημότερα chord progression από την Αναγέννηση μέχρι σήμερα. Αν και χρησιμοποιήθηκε κυρίως από τη μουσική φλαμένκο έχει αφήσει το στίγμα του σε κλασσικά έργα αλλά και στη ροκ μουσική του 20ου αιώνα.

Έχει της εξής δομή:
$vi - V - IV - iii$ και $VI - v - iv - III$

Σε C major $A^- - G^+ - F^+ - E^-$

$$G^+ = R(E^-) = R(L(C^+)) = R(L(R(A^-))) \Rightarrow A^- \xrightarrow{R \circ L \circ R} G^+$$
$$F^+ = L(A^-) = L(R(C^+)) = L(R(L(E^-))) = L(R(L(R(G^+)))) \Rightarrow G^+ \xrightarrow{L \circ R \circ L \circ R} F^+$$
$$E^- = L(C^+) = L(R(A^-) = L(R(L(F^+))) \Rightarrow F^+ \xrightarrow{L \circ R \circ L} E^-$$
$$A^- = R(C^+) = R(L(E^-)) \Rightarrow E^- \xrightarrow{R \circ L} A^-$$

$$vi \xrightarrow{R \circ L \circ R} V \xrightarrow{L \circ R \circ L \circ R} IV \xrightarrow{L \circ R \circ L} iii \xrightarrow{R \circ L} vi$$

Σε A minor $F^+ - E^- - D^- - C^+$

$$E^- = L(C^+) = L(R(A^-)) = L(R(L(F^+))) \Rightarrow F^+ \xrightarrow{L \circ R \circ L} E^-$$
$$D^- = R(F^+) = R(L(A^-)) = R(L(R(C^+))) = R(L(R(L(E^-)))) \Rightarrow E^- \xrightarrow{R \circ L \circ R \circ L} D^-$$
$$C^+ = R(A^-) = R(L(F^+)) = R(L(R(D^-))) \Rightarrow D^- \xrightarrow{R \circ L \circ R} C^+$$
$$F^+ = L(A^-) = L(R(C^+)) \Rightarrow C^+ \xrightarrow{L \circ R} F^+$$

$$VI \xrightarrow{L \circ R \circ L} v \xrightarrow{R \circ L \circ R \circ L} iv \xrightarrow{R \circ L \circ R} III \xrightarrow{L \circ R} VI$$

Παράδειγμα 4.2.3:
Ο ρυθμός της κιθάρας στο κομμάτι «Sultans of Swing» των Dire Straits:

$$D^{-} \xrightarrow{R \circ L \circ R} C^{+} \xrightarrow{L \circ R \circ L \circ R} A\#^{+}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε Andalusian Cadence σε κλίμακα F major, για τις 3 πρώτες συγχορδίες. Σε αντίθεση όμως με τον κανόνα της εναρμόνισης, στα περισσότερα κομμάτια που χρησιμοποιείται Andalusian Cadence, η τελευταία συγχορδία είναι μείζονα αντί για ελάσσονα, γεγονός που αλλάζει τη δομή του.

Εικόνα 4.3: Dire Straits – Sultans of Swing (Chord Progression)

4.3 Παρατηρήσεις και Σχόλια

Κάποιοι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα που έχουμε στη διάθεσή μας είναι οι εξής:

-Κάθε σύνθετη συνάρτηση $(LR)^n, n = 1, 2, ..., 12$ *διατηρεί την ομοτιμία της συγχορδίας.*

Συγκεκριμένα, αν το όρισμα είναι μείζονα συγχορδία, με βάση μ_1, τότε δίνει επίσης μείζονα με βάση $\mu_2 = \mu_1 - 7n(\mathrm{mod}12)$. Ενώ, αν το όρισμα είναι ελάσσονα συγχορδία, με βάση ε_1, προκύπτει ελάσσονα με βάση $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 7n(\mathrm{mod}12)$

Επομένως, η δράση της συνάρτησης $(LR)^n$ στις σύμφωνες συγχορδίες ορίζεται ως:

$(LR)^n(\langle \mu_1, \mu_1 + 4, \mu_1 + 7 \rangle) = \langle \mu_2, \mu_2 + 4, \mu_2 + 7 \rangle(\mathrm{mod}12)$ όπου $\mu_2 = \mu_1 - 7n(\mathrm{mod}12)$ και
$(LR)^n(\langle \varepsilon_1 + 7, \varepsilon_1 + 3, \varepsilon_1 \rangle) = \langle \varepsilon_2 + 7, \varepsilon_2 + 3, \varepsilon_2 \rangle(\mathrm{mod}12)$ όπου $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 7n(\mathrm{mod}12)$.

-Κάθε σύνθετη συνάρτηση $R(LR)^n, n = 0, 1, ..., 11$ *δίνει συγχορδία αντίθετης ομοτιμίας από το όρισμά της.*

Αν το όρισμα είναι μείζονα με βάση μ_1 τότε δίνει ελάσσονα με βάση $\varepsilon_2 = \mu_1 - 3 - 7n(\mathrm{mod}12)$, ενώ αν είναι ελάσσονα με βάση ε_1 προκύπτει μείζονα με βάση $\mu_2 = \varepsilon_1 + 3 + 7n(\mathrm{mod}12)$. Άρα η δράση της συνάρτησης $R(LR)^n$ είναι:
$R(LR)^n(\langle \mu_1, \mu_1 + 4, \mu_1 + 7 \rangle) = \langle \varepsilon_2 + 7, \varepsilon_2 + 3, \varepsilon_2 \rangle(\mathrm{mod}12)$

όπου $\varepsilon_2 = \mu_1 - 3 - 7n(\text{mod}12)$ και

$$R(LR)^n(\langle \varepsilon_1 + 7, \varepsilon_1 + 3, \varepsilon_1 \rangle) = \langle \mu_2, \mu_2 + 4, \mu_2 + 7 \rangle (\text{mod}12)$$

όπου $\mu_2 = \varepsilon_1 + 3 + 7n(\text{mod}12)$.

-Σε κάθε chord progression που αναλύσαμε πήραμε δύο περιπτώσεις, μία για μείζονα κλίμακα και μία για ελάσσονα, καθώς σύμφωνα με τον κανόνα εναρμόνισης είναι διαφορετικές οι συχγορδίες και ως προς την τονικότητα και ως προς την ομοτιμία.

Συγκρίνοντας τις συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε περίπτωση, στις αντίστοιχες όμως θέσεις, παρατηρούμε ότι υπάρχει αντικατάσταση της L από την R ή της R από την L. Για παράδειγμα, στο Pachelbel Progression έχουμε:

$$I \xrightarrow{R\circ L} V \xrightarrow{R\circ L\circ R} vi \xrightarrow{L\circ R} iii \xrightarrow{L} I$$
$$i \xrightarrow{L\circ R} v \xrightarrow{L\circ R\circ L} VI \xrightarrow{R\circ L} III \xrightarrow{R} i$$

Αυτό συμβαίνει διότι για κάθε μείζονα κλίμακα υπάρχει μια σχετική ελάσσονα, και αντίστροφα, όπως η C major με την A minor. Επομένως, οι συγχορδίες στις αντίστοιχες θέσεις σχετίζονται μεταξύ τους με τις συναρτήσεις L και R, δηλαδή παραμένοντας στο παράδειγμα Pachelbel Progression βλέπουμε ότι στην περίπτωση C major $C^+ - G^+ - A^- - E^-$

και για A minor $A^- - E^- - F^+ - C^+$

όπου $A^- = R(C^+), E^- = R(G^+), F^+ = L(A^-), C^+ = L(E^-)$.

Το αποτέλεσμα αυτό, όπως είπαμε και παραπάνω, μπορεί να γενικευτεί και στις υπόλοιπες κλίμακες, καθώς προκύπτουν από μετατοπίσεις των C major και A minor χωρίς να αλλοιώνουν τα διαστήματα μεταξύ των βαθμίδων της κάθε κλίμακας.

-Από το αποτέλεσμα που μόλις αναφέραμε, συμπεραίνουμε επίσης ότι οι σύνθετες συναρτήσεις στις αντίστοιχες θέσεις στις δύο περιπτώσεις του κάθε chord progression είναι αντίστροφα στοιχεία μεταξύ τους. Για παράδειγμα:

$$(R\circ L)\circ(L\circ R) = R\circ \underbrace{(L\circ L)}_{e} \circ R = R\circ R = e.$$

-Χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα μεταξύ των σύνθετων συναρτήσεων του κάθε chord progression σε συνδυασμό ότι οι L, R έχουν σαν αντίστροφο τον εαυτό τους και την προσεταιριστική ιδιότητα που ισχύει για αυτές τις συναρτήσεις, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι το σύνολο των συναρτήσεων κάθε chord progression εφοδιασμένο με διμελή πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων αποτελεί ομάδα.

Αν πάρουμε όμως το παράδειγμα του Pachelbel Progression με το αντίστοιχο σύνολο συναρτήσεων από το οποίο αποτελείται:

$$M = \{R, L, R \circ L, R \circ L \circ R, L \circ R, L \circ R \circ L\}$$

παρατηρούμε ότι

$$R \circ (L \circ R \circ L) = R \circ L \circ R \circ L \notin M$$

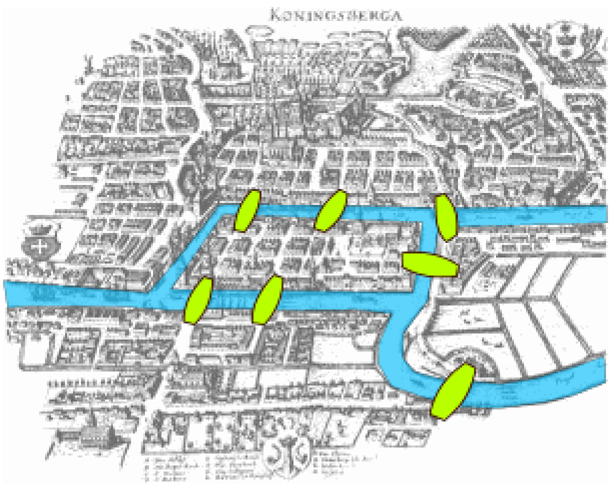
Δηλαδή δεν ισχύει η ιδιότητα της κλειστότητας. Επομένως το σύνολο των συναρτήσεων κάθε chord progression εφοδιασμένο με διμελή πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων δεν μπορεί να είναι ομάδα.

Κεφάλαιο 5: Το Μουσικό Γράφημα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε κάποιους βασικούς όρους της θεωρίας γραφημάτων, οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την παρουσίαση και την ανάλυση του μουσικού γραφήματος. Το συγκεκριμένο γράφημα αποτελεί μια άμεση εφαρμογή της θεωρίας των γράφων (αρκετές φορές προτιμάται αυτός ο όρος για να μη συγχέεται με το γράφημα συνάρτησης), αλλά η περαιτέρω ανάλυση από αυτό το γνωστικό πεδίο των διακριτών μαθηματικών θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο. Τώρα θα μας απασχολήσει η μουσική του δομή καθώς και η σύνδεση με τη Neo-Riemannian θεωρία.

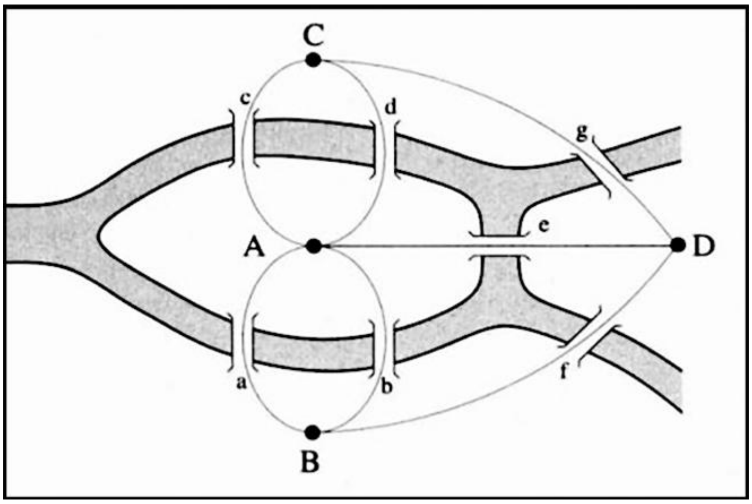
5.1 Εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων

Η θεωρία των γραφημάτων οφείλει τη γένεσή της στον Ελβετό μαθηματικό Leonard Euler (1707-1783) ο οποίος το 1736 με τη δημοσίευσή του «Λύση ενός προβλήματος που αναφέρεται στη γεωμετρία θέσης» (Solutio problematic ad geometriam situs pertinentis) έδωσε απάντηση σε ένα πρόβλημα που έμεινε στην ιστορία των μαθηματικών σαν «Το πρόβλημα των γεφυρών του Καίνιξμπεργκ».
Το Καίνιξμπεργκ διασχίζεται από τον ποταμό Πρέγκελ μέσα στον οποίο υπάρχουν δύο νησάκια που συνδέονται μεταξύ τους αλλά και με την ξηρά με επτά γέφυρες.



Εικόνα 5.1: Οι γέφυρες του Καίνιξμπεργκ

Οι κάτοικοί της για χρόνια προσπαθούσαν να διασχίσουν και τις επτά γέφυρες αλλά μία μόνο φορά. Ο Euler έλυσε το πρόβλημα θεωρώντας το παρακάτω γράφημα.



Εικόνα 5.2: Το γράφημα του Euler

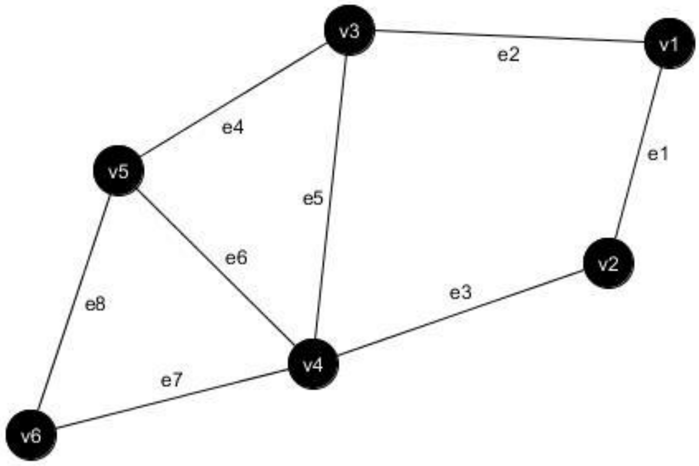
Σε απλή ορολογία γράφημα είναι ένα σύνολο κορυφών, ορισμένες από τις οποίες ενώνονται μεταξύ τους. Ένας ακριβής ορισμός όμως είναι ο εξής:

Ορισμός 5.1.1:
Ένα ***γράφημα*** G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων $V \neq \varnothing$ και E, όπου E είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών του V. Τα σύνολα V και E είναι πεπερασμένα.

Τα στοιχεία του συνόλου V ονομάζονται ***κορυφές*** του γραφήματος G και ο αριθμός $|V|=|V(G)|$ ***τάξη*** του γραφήματος, ενώ τα στοιχεία του συνόλου E ονομάζονται ***πλευρές*** του γραφήματος και ο αριθμός $|E|=|E(G)|$ ***μέγεθος*** του γραφήματος G.

Η πλευρά που ενώνει τις κορυφές $u \in V(G)$ και $v \in V(G)$ συμβολίζεται με uv ή vu. Αν $uv \in E(G)$ τότε οι κορυφές u, v ονομάζονται ***γειτονικές***.

Παράδειγμα 5.1.1:
Το γράφημα $G=(V,E)$ με $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ και $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$ έχει τάξη $|V|=6$ και μέγεθος $|E|=8$



Όταν τα ζεύγη κορυφών είναι διατεταγμένα, δηλαδή οι ακμές έχουν συγκεκριμένη κατεύθυνση τότε το γράφημα ονομάζεται ***κατευθυνόμενο*** και οι πλευρές-τόξα συμβολίζονται με βέλη.

Ο ***βαθμός*** της κορυφής v ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $d(v)$ και είναι ο αριθμός των πλευρών που διέρχονται από την κορυφή αυτή.

Αν $d(v)=0$ τότε η κορυφή λέγεται μεμονωμένη. Προφανώς για κάθε κορυφή $v \in V(G)$ ισχύει $0 \le d(v) \le n-1$ όπου $n = |V(G)|$.

Επίσης μία κορυφή λέγεται άρτια ή περιττή ανάλογα αν ο βαθμός της είναι άρτιος ή περιττός.

Ένα γράφημα για το οποίο ισχύει $d(v)=k$ για όλες τις κορυφές του ονομάζεται ***κανονικό*** ή ***k-κανονικό*** γράφημα.

Ο μεγαλύτερος και ο μικρότερος από τους βαθμούς των κορυφών ενός γραφήματος συμβολίζεται με $\Delta(G)$ και $\delta(G)$ αντίστοιχα.

Στο γράφημα του παραδείγματος 5.1.1 έχουμε:
$d(v_1)=2, d(v_2)=2, d(v_3)=3, d(v_4)=4, d(v_5)=3, d(v_6)=2$
$\Delta(G)=4$
$\delta(G)=2$

Θεώρημα 5.1.1:
Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος G ισούται με το διπλάσιο του αριθμού των πλευρών του, δηλαδή $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$.
<u>Απόδειξη:</u>
Εφόσον κάθε πλευρά προσπίπτει σε δύο κορυφές, θα προσφέρει δύο μονάδες στο άθροισμα των βαθμών, μία μονάδα για κάθε κορυφή που είναι άκρο της πλευράς αυτής.

Άμεσο πόρισμα του θεωρήματος είναι το ακόλουθο:

Πόρισμα 5.1.1:
Σε ένα γράφημα G το πλήθος των κορυφών, καθεμία από τις οποίες έχει βαθμό περιττό, είναι άρτιος αριθμός.

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω $u_1, u_2, ..., u_k$ οι κορυφές με άρτιο βαθμό και $v_1, v_2, ..., v_l$ οι κορυφές με περιττό βαθμό. Θα δείξουμε ότι l=άρτιος.

Από το Θεώρημα 5.1.1 έχουμε:
$\sum d(u_i) + \sum d(v_j) = 2e$

Αλλά το $\sum d(u_i)$ ως άθροισμα αρτίων είναι άρτιος αριθμός, άρα $\sum d(v_j) = 2e - \sum d(u_i)$, επομένως $\sum d(v_j)$ είναι άρτιος αριθμός ως διαφορά αρτίων.

Εφόσον ένα άθροισμα περιττών αριθμών είναι άρτιο, έπεται ότι το πλήθος των προσθετέων του είναι άρτιος αριθμός.

Μια τελευταία σχέση που αφορά τα κανονικά γραφήματα και είναι αρκετά εύκολη στην απόδειξη είναι η παρακάτω:

Πρόταση 5.1.1:
Κάθε r-κανονικό γράφημα G έχει $\frac{r\,|V(G)|}{2}$ ακμές.

<u>Απόδειξη:</u>

Από το Θεώρημα 5.1.1 έχουμε $|E(G)| = \frac{\sum_{v \in V(G)} d_G(v)}{2}$

Όμως $d_G(v) = \mathrm{r}$ για κάθε $v \in V(G)$

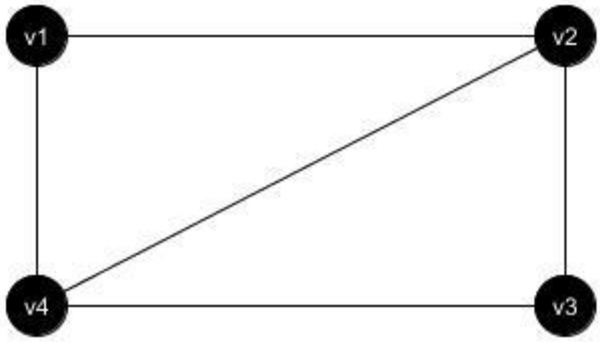
Άρα $|E(G)| = \frac{\sum_{v \in V(G)} d_G(v)}{2} = \frac{r\,|V(G)|}{2}$

Ένα γράφημα G μπορεί να αναπαρασταθεί αλγεβρικά με την χρήση πινάκων.
Θεωρούμε γράφημα G με $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$.

Ο $n \times n$ πίνακας $A = \left(a_{ij}\right)$, όπου $a_{ij} = \begin{cases} 1, v_i v_j \in E(G) \\ 0, v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$

ονομάζεται ***πίνακας γειτνίασης*** του γραφήματος. Πρόκειται για ένα συμμετρικό πίνακα, με στοιχεία 0 και 1, διαγώνιο με στοιχεία 0.

<u>Παράδειγμα 5.1.2:</u>
Για το γράφημα



Έχουμε τον πίνακα γειτνίασης $A = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα κάθε γραμμής (και στήλης αφού ο πίνακας είναι συμμετρικός) ισούται με το βαθμό της αντίστοιχης κορυφής v_i.

Σε ένα γράφημα G θεωρούμε μια πεπερασμένη ακολουθία στην οποία εναλλάσσονται κορυφές και πλευρές του G, η οποία να αρχίζει και να τελειώνει σε κορυφή και όπου κάθε πλευρά που περιέχεται στην ακολουθία προσπίπτει στην κορυφή που προηγείται και στην κορυφή που έπεται.

Μια τέτοια ακολουθία λέγεται ***δρόμος***. Ο δρόμος $v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n$ όπου $e_i = v_{i-1}v_i$ με $1 \le i \le n$, λέγεται $v_0 \to v_n$ δρόμος.

Αν σε ένα δρόμο ενός γραφήματος G κάθε πλευρά του δρόμου εμφανίζεται μία μόνο φορά (ενώ μία κορυφή μπορεί να εμφανιστεί και περισσότερες από μία φορά), ο δρόμος λέγεται ***δρομίσκος ή περιήγηση***.

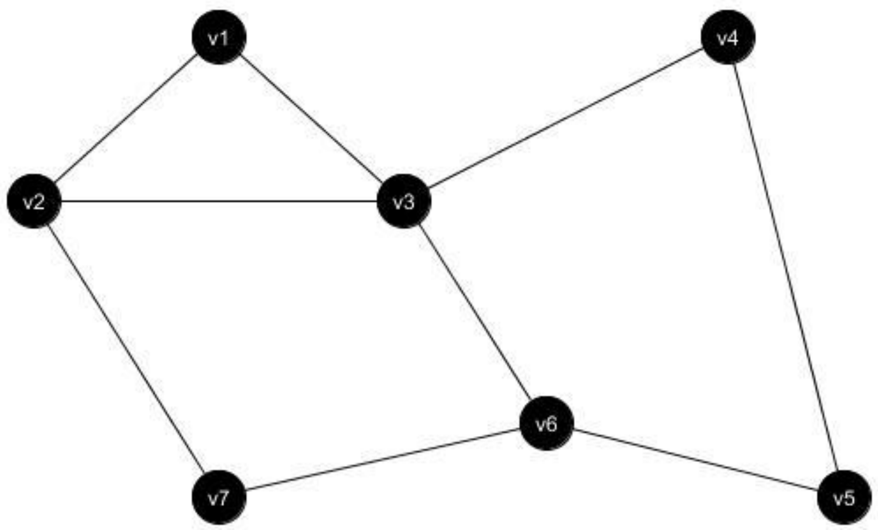
Ένας δρόμος στον οποίο κάθε κορυφή και κάθε πλευρά του δρόμου εμφανίζονται ακριβώς μία φορά λέγεται ***μονοπάτι***. Δύο μονοπάτια λέγονται ***ανεξάρτητα*** όταν οι μοναδικές κοινές κορυφές τους είναι τα άκρα τους.

Ένας δρόμος ή δρομίσκος που έχει ως άκρα την ίδια κορυφή λέγεται ***κλειστός δρόμος*** ή ***κλειστός δρομίσκος***.

Ένα κλειστό μονοπάτι λέγεται ***κύκλος***.

Το πλήθος των πλευρών ενός δρόμου, ενός μονοπατιού και ενός κύκλου λέγεται αντίστοιχα ***μήκος*** του δρόμου, του μονοπατιού, του κύκλου.

Παράδειγμα 5.1.3:



Η ακολουθία $v_1, v_1v_3, v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_4v_3, v_3, v_3v_6, v_6$ είναι ένας v_1v_6 δρόμος μήκους 6.

Η ακολουθία $v_1v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_3, v_3v_2$ είναι ένας δρομίσκος μήκους 6.

Η ακολουθία $v_1v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7$ είναι ένα μονοπάτι μήκους 5.

Η ακολουθία $v_1v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_2, v_2v_1$ είναι κύκλος μήκους 7.

Ένα γράφημα λέγεται ***συνεκτικό* (connected)**, αν για κάθε ζεύγος $\{x, y\}$ διακεκριμένων κορυφών του υπάρχει μονοπάτι από το x στο y. Ένα γράφημα G ονομάζεται ***k-συνεκτικό*** με $k \in \mathbb{N}$ αν $|V(G)| \geq k+1$ και για κάθε $X \subset V(G)$ με $|X| < k$ ισχύει ότι το $G \setminus X$ είναι μη συνεκτικό, δηλαδή απαιτείται η αφαίρεση $k(G)$ κορυφών από το G ώστε να καταστεί μη συνεκτικό.

Ένα μη συνεκτικό γράφημα αποτελείται από δύο ή περισσότερα συνεκτικά υπογραφήματα που ονομάζονται ***συνεκτικές συνιστώσες***.

Ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους ονομάζεται ***δέντρο***.

Θεώρημα 5.1.2:
Ένα $G(n, m)$ γράφημα είναι δέντρο αν και μόνο αν $n = m+1$ και δεν περιέχει κύκλους.

<u>Απόδειξη:</u>
Αν το G είναι δέντρο τότε από ορισμό δεν περιέχει κύκλους. Η απόδειξη της ισότητας $n = m+1$ γίνεται με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών n. Για $n = 1$ η ισότητα ισχύει. Υποθέτουμε ότι η ισότητα ισχύει για όλα τα δέντρα $G(n, m)$ με n κορυφές και έστω G_1 ένα δέντρο με $n+1$ κορυφές. Έστω v μία κορυφή του G_1 με $d(v) = 1$. Το γράφημα $G_2 = G_1 \setminus v$ είναι δέντρο με n κορυφές και από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $n = m(G_2)+1$. Αλλά το G_1 έχει μία κορυφή και μία πλευρά περισσότερη από το G_2, οπότε $n(G_1) = n+1 = (m(G_2)+1) = m(G_1)+1$.
Αντίστροφα, έστω $G(n, m)$ ένα γράφημα χωρίς κύκλους με $n = m+1$. Θα δείξουμε ότι είναι δέντρο. Για αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το G είναι συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι δεν είναι συνεκτικό και έστω $G_1(n_1, m_1)$, ..., $G_k(n_k, m_k)$ οι k συνεκτικές συνιστώσες του G με $k \geq 1$.
Αφού το G_i είναι δέντρο με $1 \leq i \leq k$, θα είναι $n_i = m_i + 1$. Άρα

$$n-1 = m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k \Rightarrow k = 1$$

Άρα το G είναι συνεκτικό.

5.2 Πράξεις και σχέσεις γραφημάτων

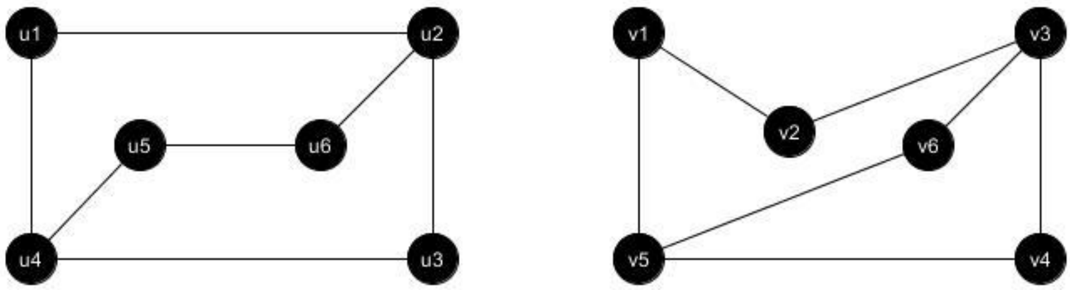
Ορισμός 5.2.1:
Έστω γράφημα G. Ορίζουμε ως ***συμπλήρωμα*** του G το γράφημα $\overline{G} = \{V(G), \{u, v \in V(G) \wedge (u,v) \notin E(G)\}\}$, δηλαδή το $\overline{G}$ έχει τις ίδιες κορυφές που έχει το G αλλά έχει ακριβώς τις ακμές που δεν έχει το G.

Ορισμός 5.2.2:
Έστω γραφήματα G και H.
Ορίζουμε το ***γινόμενο*** $G \times H$: $V(G \times H) = \{(u,v) : u \in V(G), v \in V(H)\}$ και $E(G \times H) = \{\{((u,x),(v,x)) : (u,v) \in E(G), x \in V(H)\} \cup \{((u,x),(u,y)) : u \in V(G), (x,y) \in E(H)\}\}$

Ορισμός 5.2.3:
Δύο γραφήματα $G = (V(G), E(G))$ και $H = (V(H), E(H))$ είναι ***ισόμορφα*** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη (1-1 και επί) απεικόνιση $\varphi : V(G) \to V(H)$ τέτοια ώστε $(u,v) \in E(G) \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(H) \forall u, v \in V(G)$, δηλαδή μία 1-1 αντιστοιχία που διατηρεί τις γειτνιάσεις και μη.

Αν δύο γραφήματα G και H είναι ισόμορφα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $G \simeq H$.

Επίσης αν δύο γραφήματα είναι ισόμορφα τότε έχουν την ίδια τάξη, το ίδιο μέγεθος και την ίδια ακολουθία βαθμών. Το ανίστροφο όμως δεν ισχύει.



Εικόνα 5.3: Ισόμορφα Γραφήματα

Θεώρημα 5.2.1:
Ο ισομορφισμός γραφημάτων είναι σχέση ισοδυναμίας.

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω γραφήματα $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ και $G'' = (V'', E'')$.

1.Ανακλαστική: Για κάθε γράφημα G έχουμε $G \simeq G$.

Πράγματι, έστω $\varphi : V \to V$ με $\varphi(v) = v \ \ \forall v \in V(G)$

Αν $(v, w) \in E$ τότε $(\varphi(v), \varphi(w)) = (v, w) \in E$

Όμοια αν $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E$ τότε $(v, w) \in E$

2.Συμμετρική: Έστω ότι $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ είναι ισόμορφα, τότε υπάρχει $\varphi^{-1} : V' \to V$ που είναι 1-1 και επί.

Έστω $(v, w) \in E'$ τότε $(\varphi(\varphi^{-1}(v)), \varphi(\varphi^{-1}(w))) = (v, w) \in E'$, όμως φ ισομορφισμός, άρα $(\varphi(x), \varphi(y)) \in E' \Rightarrow (x, y) \in E$.

Έτσι παίρνοντας $x = \varphi^{-1}(v)$ και $y = \varphi^{-1}(w)$ έχουμε $(\varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w)) \in E$.

Ανίστροφα, έστω $(\varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w)) \in E$, τότε $(\varphi(\varphi^{-1}(v)), \varphi(\varphi^{-1}(w))) = (v, w) \in E'$.

Άρα φ ισομορφισμός.

3.Μεταβατική: Έστω ισομορφισμοί $\varphi : G \to G'$ και $\psi : G' \to G''$, τότε $(v, w) \in E \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in E'$

και $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E' \Leftrightarrow (\psi(\varphi(v)), \psi(\varphi(w))) = ((\psi \circ \varphi)(v), (\psi \circ \varphi)(w)) \in E''$

Άρα $(v, w) \in E \Leftrightarrow ((\psi \circ \varphi)(v), (\psi \circ \varphi)(w)) \in E''$.

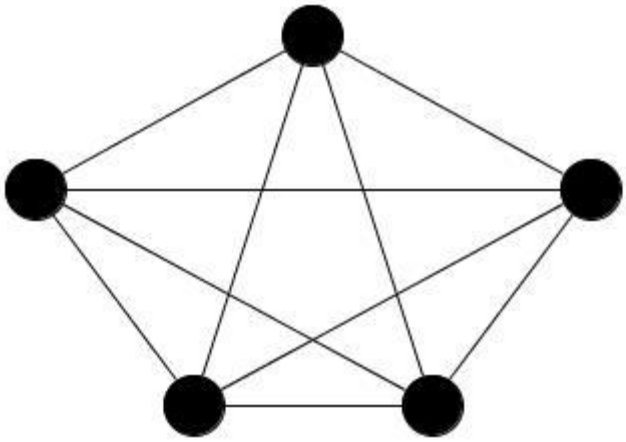
Συνεπώς ο ισομορφισμός είναι σχέση ισοδυναμίας.

Από το Θεώρημα 5.2.1 συμπεραίνουμε ότι ένα γράφημα μπορεί να είναι ισόμορφο με άπειρα στο πλήθος γραφήματα που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

Σε πολλές περιπτώσεις συμβολίζουμε με ένα γράφημα-αντιπρόσωπο όλη την κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει.

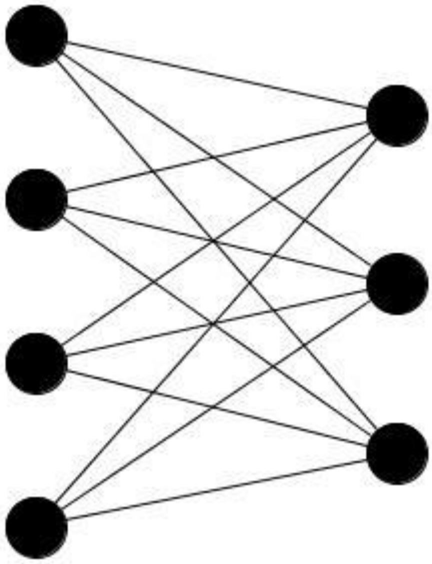
Μερικά από τα κυριότερα γραφήματα αντιπρόσωποι ή ειδικά γραφήματα είναι τα εξής:

K_n: πλήρες γράφημα ή κλίκα n κορυφών για το οποίο ισχύει $|V(K_n)| = n$, $|E(K_n)| = \dfrac{n(n-1)}{2}$ και $d_{K_n}(u) = \mathrm{n}-1 \ \ \forall u \in V(K_n)$



K_5

$K_{m,n}$: πλήρες διμερές γράφημα όπου $|V(K_{m,n})| = m+n$ και $|E(K_{m,n})| = mn$

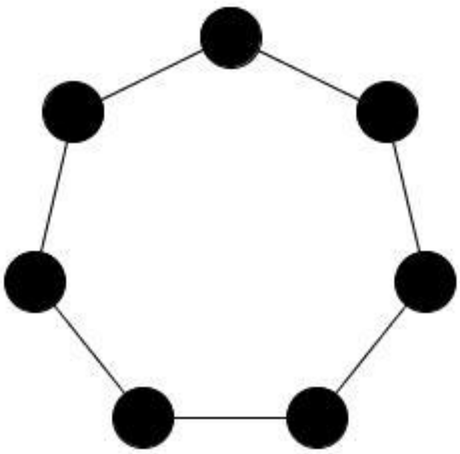


$K_{4,3}$

P_n : μονοπάτι με n κορυφές

P_6

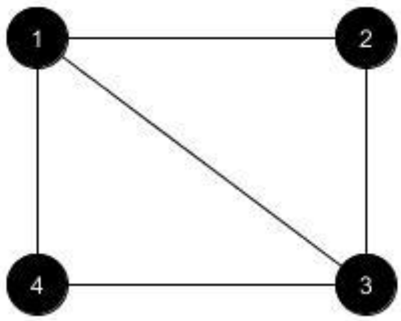
C_n : κύκλος με n κορυφές



C_7

Ορισμός 5.2.4:
Έστω γράφημα G. Καλούμε ***αυτομορφισμό*** του G κάθε ισομορφισμό του G στον εαυτό του. Συνεπώς κάθε αυτομορφισμός ενός γραφήματος είναι μια μετάθεση των κορυφών του.

<u>*Παράδειγμα 5.2.1:*</u>
Οι αυτομορφισμοί του γραφήματος G περιγράφονται από τις εξής μεταθέσεις:
$(1,2,3,4)$, $(1,4,3,2)$, $(3,2,1,4)$ και $(3,4,1,2)$



G

Θεώρημα 5.2.2:
Το σύνολο $Aut(G)$ των αυτομορφισμών του γραφήματος G είναι ομάδα.

<u>Απόδειξη:</u>
Η ταυτοτική μετάθεση $i: G \to G$ είναι προφανώς αυτομορφισμός.
Αν σ είναι ένας αυτομορφισμός τότε η μετάθεση σ^{-1} είναι και αυτή προφανώς αυτομορφισμός.
Άρα όλοι οι αυτομορφισμοί του G σχηματίζουν μια υποομάδα της S_G, η οποία είναι η ομάδα όλων των μεταθέσεων του G.

Προκύπτει άμεσα ότι κάθε γράφημα G είναι ισόμορφο με κάποια υποομάδα της συμμετρικής ομάδας S_n.

Ορισμός 5.2.5:
Έστω γράφημα G και $x, y \in V(G)$. Λέμε ότι οι κορυφές x και y είναι ***όμοιες*** αν $\sigma(x) = y$ για κάποιον αυτομορφισμό $\sigma \in Aut(G)$ και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x \sim y$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\sim$ καλούνται ***τροχιές*** του G.

Ορισμός 5.2.6:
Ένα γράφημα G λέγεται ***μεταβατικό*** ως προς τις κορυφές του αν έχει μόνο μία τροχιά, δηλαδή για κάθε ζεύγος κορυφών του x και y υπάρχει αυτομορφισμός $\sigma \in Aut(G)$ τέτοιος ώστε $\sigma(x) = y$.

Όλα τα ειδικά γραφήματα που είδαμε παραπάνω είναι μεταβατικά.

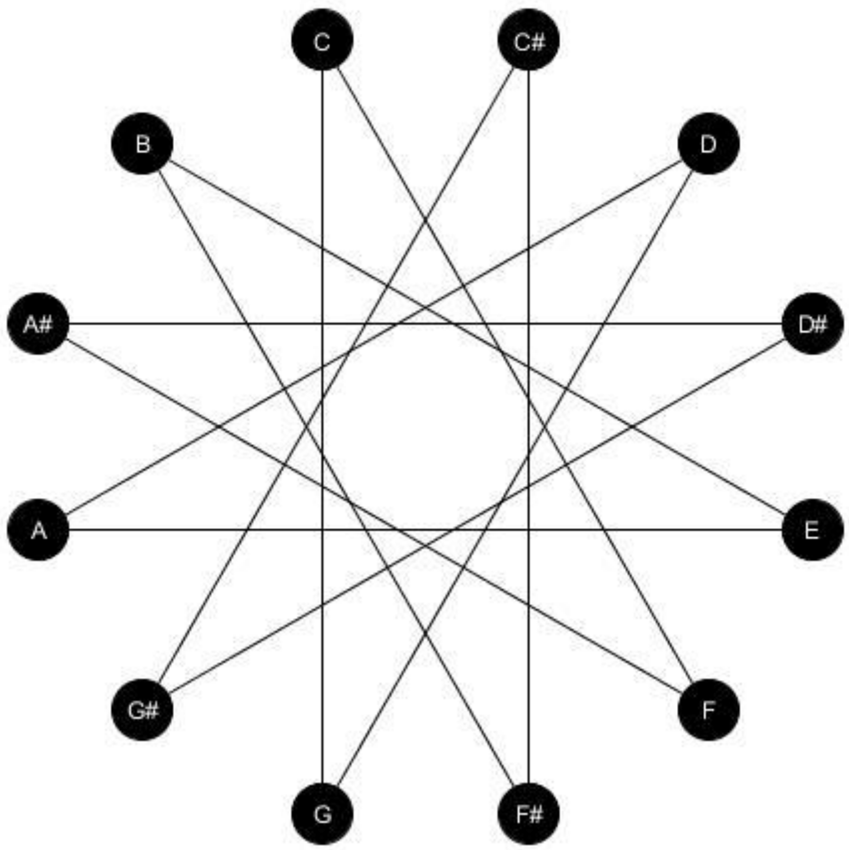
5.3 Κατασκευή του Μουσικού Γραφήματος

Κάνοντας μια απλή μουσική ανάλυση και χρησιμοποιώντας κυρίως την ακουστική εμπειρία παρατηρούμε ότι κάποιες μεταβάσεις συγχορδιών τείνουν να ακούγονται πιο φυσικές από κάποιες άλλες.

Για παράδειγμα, η μετάβαση από *C* major σε *F* major μοιάζει αρκετά φυσική, δηλαδή αυτή η αλλαγή έχει σαν αποτέλεσμα ένα ευχάριστο άκουσμα. Αυτό οφείλεται στο διάστημα καθαρής 4^{ης} που υπάρχει ανάμεσα στις δύο συγχορδίες.

Σύμφωνα με τα βασικά στοιχεία της εναρμόνισης που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η συγχορδία της τονικής μιας κλίμακας συνδέεται με τις συγχορδίες της υποδεσπόζουσας και της δεσπόζουσας.

Έχοντας το μουσικό ρολόι των κλάσεων φθόγγων κατασκευάζουμε το γράφημα



Όπου κάθε κορυφή αντιπροσωπεύει μία major συγχορδία και έχει γειτονικές δύο κορυφές, τις συγχορδίες που απέχουν από αυτήν κατά διαστήματα 4^{ης} και 5^{ης} ή αντίστοιχα τις συγχορδίες της υποδεσπόζουσας και της δεσπόζουσας.

Εύκολα υπολογίζουμε τις βασικές ιδιότητες του γραφήματος:

- τάξη: 12
- μέγεθος: 12
- 2-κανονικό
- συνεκτικό

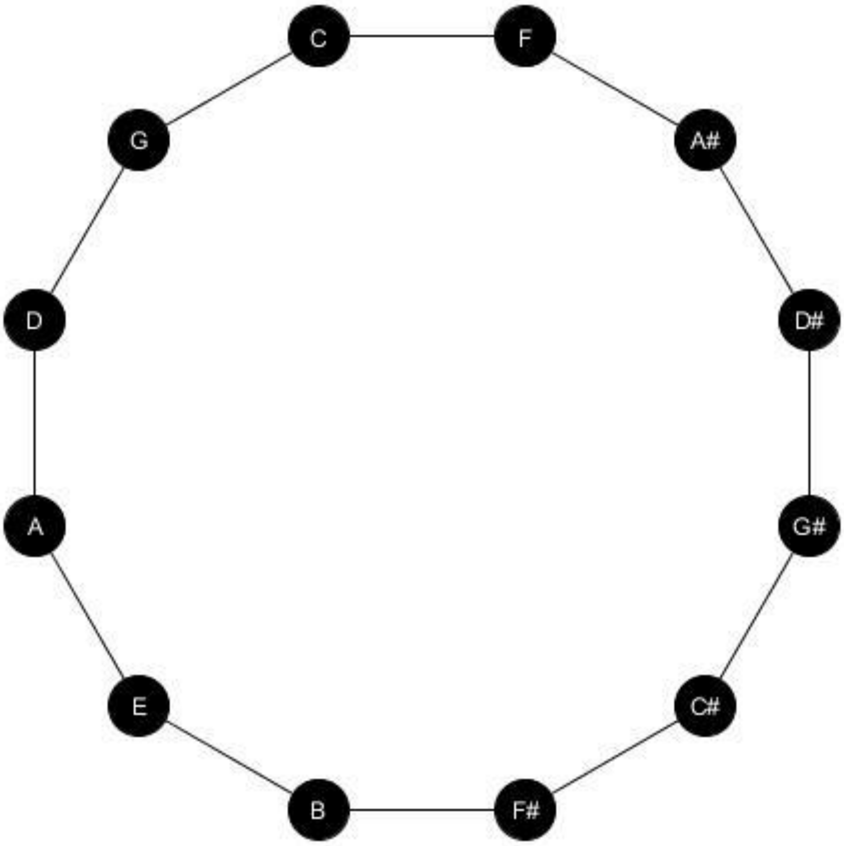
Ο πίνακας γειτνίασης είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ C\# \\ D \\ D\# \\ E \\ F \\ F\# \\ G \\ G\# \\ A \\ A\# \\ B \end{matrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας είναι κυκλικός, δηλαδή κάθε γραμμή προκύπτει από τη μετατόπιση των στοιχείων της προηγούμενης κατά μία θέση προς τα δεξιά.

Κάθε γράφημα που έχει κυκλικό πίνακα γειτνίασης λέγεται ***κυκλικό (circulant)***.

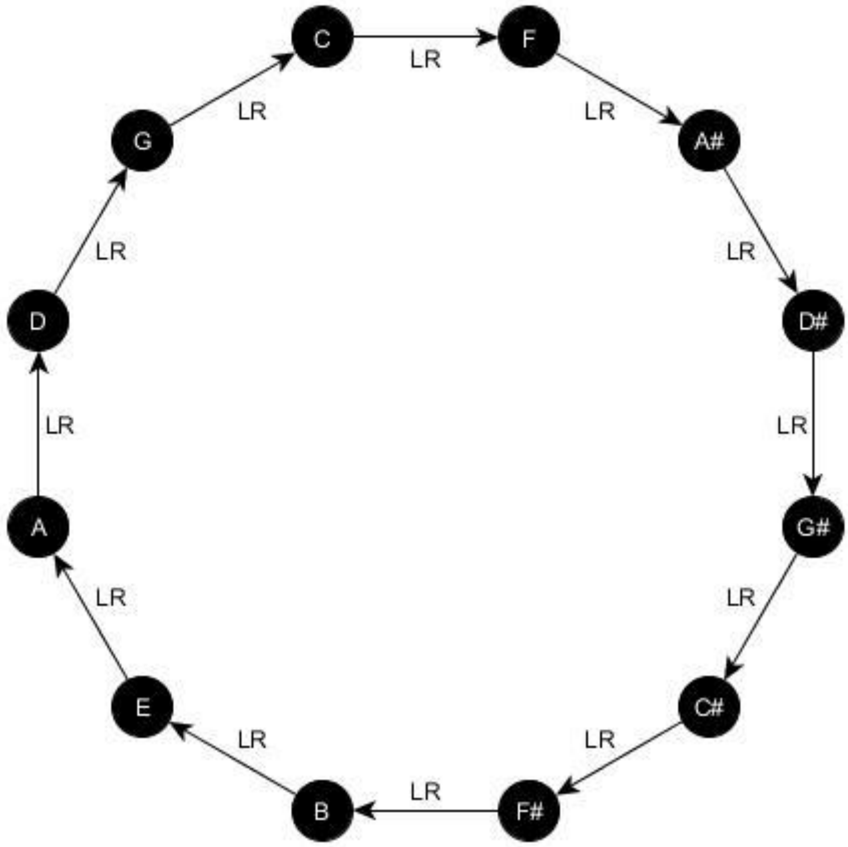
Το παραπάνω γράφημα είναι ισομορφικό με το γράφημα κύκλο C_{12} :



Καθώς έχει το ίδιο σύνολο κορυφών και υπάρχει προφανώς 1-1 αντιστοιχία που διατηρεί τις γειτνιάσεις και μη.

Το συγκεκριμένο γράφημα μας βοηθά να βγάλουμε άλλο ένα συμπέρασμα για τη δομή των συναρτήσεων P, L, R.

Παρατηρούμε ότι η μετάβαση από μια κορυφή-συγχορδία στη γειτονική της με την ωρολογιακή φορά γίνεται μέσω της σύνθετης συνάρτησης LR:

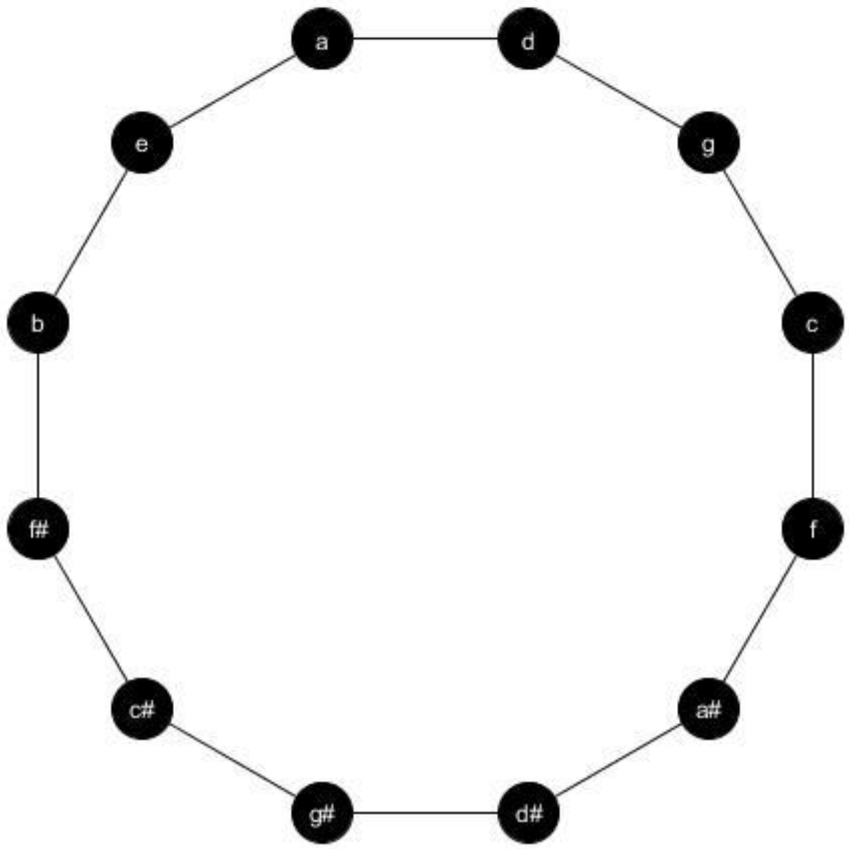


Υπενθυμίζοντας το Παράδειγμα 3.2.1 της δράσης όλων των συνθέσεων των συναρτήσεων L, R στη συγχορδία C major και παρατηρώντας το παραπάνω κατευθυνόμενο γράφημα συμπεραίνουμε ότι:

Το σύνολο των στοιχείων $\{(LR)^n \mid n = 1, 2, ..., 12\}$ μαζί με τη διμελή πράξη είναι υποομάδα της ομάδας PLR διότι είναι κλειστό ως προς την πράξη και ως προς τα αντίστροφα.

Η υποομάδα αυτή είναι κυκλική με γεννήτορα το (LR), δηλαδή $\langle (LR) \rangle = (LR)^n$.

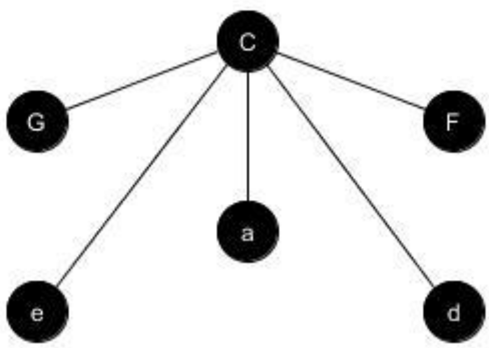
Κατασκευάζουμε το ίδιο γράφημα κύκλο για τις minor συγχορδίες με τις κορυφές να είναι οι αντίστοιχες σχετικές minor, δηλαδή:



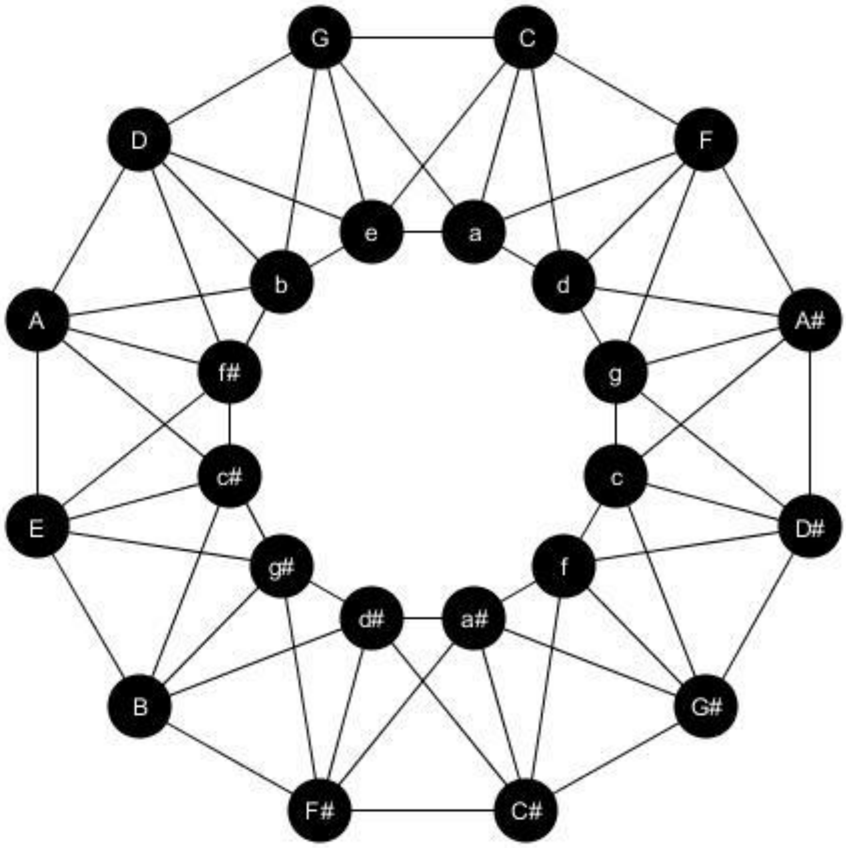
Το μουσικό γράφημα αποτελείται από τα δύο παραπάνω γραφήματα τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με τον εξής τρόπο:

Κάθε κορυφή συγχορδία έχει 5 γειτονικές κορυφές: την υποδεσπόζουσα, τη δεσπόζουσα, τη σχετική κάθε μίας αλλά και τη δική της σχετική.

Οι γειτνιάσεις κάθε κορυφής γίνονται καλύτερα αντιληπτές από το παρακάτω γράφημα δέντρο όπου έχουμε πάρει σαν παράδειγμα τη συγχορδία C major



Συνεπώς έχουμε το 5-κανονικό γράφημα με 24 κορυφές και μέγεθος 60:



Εικόνα 5.4: Το μουσικό γράφημα (musical graph)

Το μουσικό γράφημα ήταν μία από τις πολλές εφαρμογές της θεωρίας γραφημάτων, που παρουσιάστηκαν στο βιβλίο των R. Wilson και J.Watkins «Graphs: An Introductory Approach», στη χημεία, τις κοινωνικές επιστήμες και τη μουσική.

Το συγκεκριμένο γράφημα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την παρουσίαση και την ανάλυση των αρμονικών διαδοχών. Ουσιαστικά αποτελεί μια οπτικοποίηση του αντικειμένου που μελετήσαμε στο 4^{o} κεφάλαιο, του Chord Progression.

Κάθε μετάβαση από μια συγχορδία σε μία άλλη αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι στο γράφημα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μήκος του μικρότερου μονοπατιού ανάμεσα σε δύο κορυφές σαν ένδειξη της αρμονίας μεταξύ των δύο συγχορδιών.

Ένας γενικός κανόνας που μπορεί να οριστεί από τη δομή του γραφήματος είναι ότι ***όσο πιο μικρό είναι το μονοπάτι που συνδέει δύο κορυφές τόσο πιο αρμονική είναι η διαδοχή των αντίστοιχων συγχορδιών***.

Έστω κορυφή v ***του γραφήματος. Οι κορυφές που απέχουν μονοπάτι μήκους 1 από τη*** v ***αποτελούν τις συγχορδίες εναρμόνισης της*** v ***- κλίμακας.***

Επεκτείνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα και στη Neo-Riemannian θεωρία:

Έστω κορυφή v *του γραφήματος. Κάθε συγχορδία ίδιας ομοτιμίας που απέχει μήκος* n *από τη* v *είναι η εφαρμογή της συνάρτησης* $(LR)^n$ *στη συγχορδία της κορυφής* v *ενώ κάθε συγχορδία αντίθετης ομοτιμίας που απέχει μήκος* n *είναι η εφαρμογή της συνάρτησης* $R(LR)^n$.

Σε αντίθεση με το σύνολο $\{(LR)^n \mid n = 1, 2, \ldots, 12\}$, το σύνολο των στοιχείων $\{R(LR)^n \mid n = 0, 1, \ldots, 11\}$ μαζί με τη διμελή πράξη δε σχηματίζουν υποομάδα καθώς λείπει το ταυτοτικό στοιχείο.

Κεφάλαιο 6: Ανάλυση του Μουσικού Γραφήματος

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μια εμβάθυνση στη Θεωρία Γραφημάτων η οποία θα μας χρειαστεί στην ανάλυση που θα κάνουμε πάνω στο μουσικό γράφημα που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η συγκεκριμένη ανάλυση θα γίνει με την επίλυση του προβλήματος που έθεσε ο μαθηματικός και θεωρητικός της Πληροφορικής Donald Knuth στον 4^{o} τόμο του συγγράμματός του «The Art of Computer Programming» όπου ζητούνται οι βασικές ιδιότητες του musical graph και ο υπολογισμός μεγεθών που χαρακτηρίζουν κάθε γράφημα και θα ορίσουμε παρακάτω.

6.1 Μετρικά μεγέθη γραφήματος

Λέγοντας μετρικά μεγέθη εννοούμε τις διάφορες αποστάσεις που χαρακτηρίζουν ένα γράφημα και οι οποίες προκύπτουν από το μέτρημα μήκους μονοπατιών του γραφήματος.

Ορισμός 6.1.1:
Έστω γράφημα G και $u, v \in V(G)$. Η απόσταση $dist(u,v)$ είναι το μήκος του ελαχίστου (συντομότερου) (u,v)- μονοπατιού στο G.

Προφανώς αν δεν υπάρχει (u,v)- μονοπάτι τότε $dist(u,v) = \infty$

Όπως και για τις περισσότερες μετρικές σχέσεις σε διαφορετικά μαθηματικά πεδία έτσι και για τις αποστάσεις γραφήματος ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

Πρόταση 6.1.1:
Έστω γράφημα G και $u, v, w \in V(G)$ τρεις κορυφές του G. Τότε ισχύει:
$dist(u,v) + dist(v,w) \geq dist(u,w)$

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω ότι ισχύει $dist(u,v) + dist(v,w) \neq +\infty$, αλλιώς ισχύει τετριμμένα
$dist(u,v)$ το μήκος του ελάχιστου (u,v)- μονοπατιού P_{uv}
$dist(v,w)$ το μήκος του ελάχιστου (v,w)- μονοπατιού P_{vw}
Η παράθεση $P_{uw} = P_{uv}P_{vw}$ δημιουργεί (u,w)- περίπατο με μήκος $\geq$ από το ελάχιστο (u,w)- μονοπάτι.
Επομένως $dist(u,v) + dist(v,w) \geq dist(u,w)$

Συναρτήσει της απόστασης μπορούμε να ορίσουμε και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά μετρικά μεγέθη ενός γραφήματος:

Εκκεντρότητα κορυφής του G: $ecc(v) = \max_{v \in V(G)} dist(v,u)$

Διάμετρος του G: $diam(G) = \max_{v \in V(G)} ecc(v)$

Ακτίνα του G: $rad(G) = \min_{v \in V(G)} ecc(v)$

Περιφέρεια του G: $girth(G) =$ το μήκος ενός ελάχιστου κύκλου του G

Περίμετρος του G: $crm(G) =$ το μήκος ενός μέγιστου κύκλου του G

Ορισμός 6.1.2:
Έστω γράφημα G. Λέμε ότι ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V(G)$ είναι ***ανεξάρτητο*** σύνολο του G αν κανένα ζεύγος κορυφών από το S δεν είναι ακμή του G. Ο ***αριθμός ανεξαρτησίας*** $\alpha(G)$ ενός γραφήματος G είναι το μέγιστο πλήθος ενός ανεξάρτητου συνόλου του G.

Άμεση σχέση με την ανεξαρτησία ενός γραφήματος έχει ο χρωματισμός του, που αποτελεί ένα από τα πιο ιστορικά και ευρέως μελετημένα προβλήματα της θεωρίας γραφημάτων, με πολλές πρακτικές εφαρμογές σε διάφορα πεδία.
Ένα σύνηθες πρακτικό πρόβλημα είναι ο χρωματισμός χαρτών όπου περιοχές με κοινά σύνορα πρέπει να λαμβάνουν διαφορετικά χρώματα.

Ορισμός 6.1.3:
Χρωματισμός των κορυφών ενός γραφήματος G είναι μία αντιστοιχία διαφόρων χρωμάτων στις κορυφές του G, έτσι ώστε δύο γειτονικές κορυφές του να έχουν διαφορετικό χρώμα.
Ένα γράφημα G λέγεται ***k-χρωματίσιμο*** αν υπάρχει χρωματισμός του με k χρώματα. Ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματιστεί το γράφημα G λέγεται ***χρωματικός αριθμός*** και συμβολίζεται με $\chi(G)$.

Γενικά δεν είναι εύκολο να υπολογίσουμε τον χρωματικό αριθμό $\chi(G)$ ενός γραφήματος G. Για αυτό το λόγο έχουν αναπτυχθεί διάφοροι αλγόριθμοι οι οποίοι επεξεργάζονται τις ιδιότητες του γραφήματος και υπολογίζουν την τιμή του $\chi(G)$ με ακρίβεια ή προσεγγιστικά.

Για μερικά ειδικά γραφήματα είναι σχετικά εύκολο να υπολογισθεί ο χρωματικός αριθμός:
$\chi(K_n) = n$
$\chi(K_{p,q}) = 2$
$\chi(C_{2l}) = 2$ και $\chi(C_{2l+1}) = 3$

Θα αναφέρουμε δύο θεωρήματα τα οποία μας προσδιορίζουν δύο φράγματα, ένα άνω και ένα κάτω, για τον χρωματικό αριθμό τυχαίου γραφήματος.

Θεώρημα 6.1.1:
Έστω γράφημα G. Τότε $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$

<u>Απόδειξη:</u>
Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο n. Έστω n η τάξη του γραφήματος G. Έστω G' το γράφημα που πρκύπτει διαγράφοντας ένα τυχαίο κόμβο v από το G, δηλαδή $G' = G \setminus v$. Τότε $\Delta(G') \le \Delta(G)$. Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε

$\chi(G') \le \Delta(G')+1 \le \Delta(G)+1$. Χρωματίζουμε τους κόμβους του G' με το πολύ $\Delta(G)+1$ χρώματα. Επειδή το πλήθος των κόμβων που γειτνιάζουν με τον v είναι το πολύ $\Delta(G)$ μπορούμε να αναθέσουμε ένα χρώμα στον κόμβο v, το οποίο είναι διαφορετικό από τα χρώματα που έχουν ανατεθεί στους γείτονές του.
Επομένως $\chi(G) \le \Delta(G)+1$.

Πριν διατυπώσουμε το θεώρημα για το κάτω φράγμα του $\chi(G)$ πρέπει να ορίσουμε τον αριθμό κλίκας.

Ορισμός 6.1.4:
Έστω γράφημα G. Ο μέγιστος αριθμός κορυφών σε μια κλίκα του G ονομάζεται ***αριθμός κλίκας*** του G και συμβολίζεται με $\omega(G)$, δηλαδή
$\omega(G) = \max\{k : K_k \subseteq G\}$

Θεώρημα 6.1.2:
Για κάθε γράφημα G ισχύει $\omega(G) \le \chi(G)$.

Απόδειξη:
Αν το γράφημα G περιέχει κλίκα τάξης k τότε μόνο για την κλίκα απαιτούνται τουλάχιστον k χρώματα. Επομένως ο χρωματικός αριθμός είναι τουλάχιστον ίσος με k.

Ένα γράφημα G λέγεται ***αυστηρά χρωματίσιμο*** αν $\omega(G) = \chi(G)$.

Αποδεικνύεται άμεσα από τον ορισμό της κλίκας ότι $\omega(K_n) = \chi(K_n) = n$, δηλαδή είναι αυστηρά χρωματίσιμη.
Επίσης για το γράφημα κύκλο: $\omega(C_n) = \begin{cases} 3, n = 3 \\ 2, n \ne 3 \end{cases}$

Πρόταση 6.1.2:
Έστω γραφήματα G και H τα οποία είναι αυστηρά χρωματίσιμα. Τότε ισχύει $\chi(G \times H) = \chi(G)\chi(H)$.

Απόδειξη:
Έστω δύο κλίκες των γραφημάτων G και H, τότε προφανώς το γινόμενό τους είναι κλίκα του γραφήματος $G \times H$, άρα $\omega(G \times H) \ge \omega(G)\omega(H) = \chi(G)\chi(H)$ αφού τα γραφήματα G και H είναι αυστηρά χρωματίσιμα. Επίσης από το Θεώρημα 6.1.2 έχουμε ότι $\omega(G \times H) \le \chi(G \times H)$, άρα προκύπτει ότι $\chi(G)\chi(H) \le \chi(G \times H)$ (1).
Έστω τώρα χρωματισμοί $a(u)$ και $b(v)$ για τα γραφήματα G και H αντίστοιχα, τότε ΄χουμε τον χρωματισμό $c(u,v) = (a(u), b(v))$ για το γράφημα $G \times H$. Άρα $\chi(G \times H) \le \chi(G)\chi(H)$ (2).
Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\chi(G \times H) = \chi(G)\chi(H)$.

Ανάλογες έννοιες με αυτές για τον χρωματισμό κορυφών ενός γραφήματος έχουν αναπτυχθεί για τον χρωματισμό ακμών. Έτσι, ένα γράφημα G ονομάζεται ***k-πλευρικά χρωματίσιμο*** αν οι πλευρές του μπορούν να χρωματισθούν με k χρώματα έτσι ώστε δύο πλευρές προσπίπτουσες στον ίδιο κόμβο να μην έχουν το ίδιο χρώμα. Ο ελάχιστος αριθμός k για τον οποίο το G είναι k-πλευρικά χρωματίσμο ονομάζεται ***χρωματικός δείκτης*** και συμβολίζεται με $\chi'(G)$.

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα που διατύπωσε ο Ουκρανός μαθηματικός Vadim Vizing το 1964 για τα φράγματα του χρωματικού δείκτη είναι το εξής:

Θεώρημα 6.1.3:
Έστω απλό γράφημα G. Για τον χρωματικό δείκτη $\chi'(G)$ ισχύει:
$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.

Η αριστερή ανισότητα είναι προφανής, η δεξιά αποδεικνύεται με επαγωγή στο πλήθος των ακμών του γραφήματος και είναι ιδιαίτερα μακροσκελής.

Το συγκεκριμένο θεώρημα κατατάσσει όλα τα απλά γραφήματα σε δύο κατηγορίες: στην πρώτη ανήκουν αυτά για τα οποία ισχύει $\chi'(G) = \Delta(G)$ και στη δεύτερη αυτά για τα οποία $\chi'(G) = \Delta(G)+1$.

Ορισμός 6.1.5:
Μια ακμή e ενός γραφήματος G ***καλύπτεται*** από ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ αν κάποιο από τα άκρα της βρίσκεται στο S. Λέμε ότι ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V(G)$ είναι ***κάλυμμα κορυφών*** του G αν το S καλύπτει όλες τις ακμές του G. Ο ***αριθμός καλύμματος κορυφών*** $vc(G)$ ενός γραφήματος G είναι το ελάχιστο πλήθος κορυφών ενός καλύμματος κορυφών του G.

Πρόταση 6.1.3:
Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $vc(G) = n(G) - a(G)$.

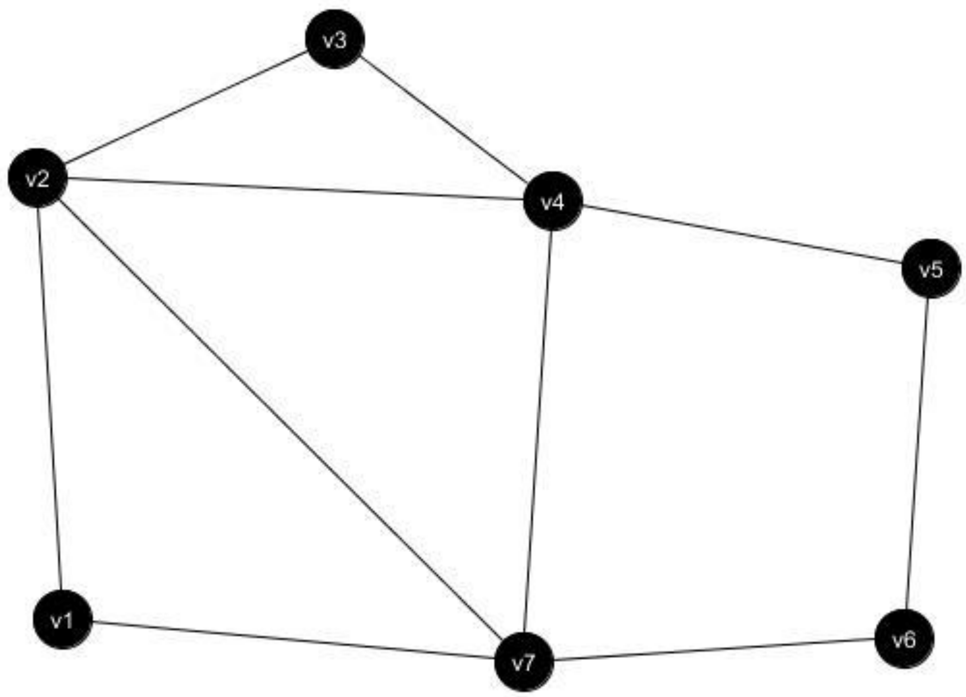
Απόδειξη:
Έστω S ένα ανεξάρτητο σύνολο του γραφήματος G. Αφού καμία από τις ακμές του G δεν έχει και τα δύο άκρα της στο S, έχουμε ότι κάθε ακμή του G θα έχει τουλάχιστον ένα άκρο εκτός του S, δηλαδή στο $V(G) \setminus S$.
Αντιστρόφως, αν το σύνολο S είναι κάλυμμα κορυφών του γραφήματος S, τότε όλες οι ακμές του G θα έχουν τουλάχιστον ένα από τα άκρα τους στο S. Άρα καμία ακμή δε θα έχει και τα δύο άκρα της στο $V(G) \setminus S$, άρα το $V(G) \setminus S$ είναι ανεξάρτητο σύνολο του G.
Καταλήγουμε ότι το G έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k αν και μόνο αν έχει και κάλυμμα κορυφών μεγέθους $\geq n(G) - k$ και άρα η Πρόταση ισχύει.

6.2 Γραφήματα Euler και Hamilton

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο Leonard Euler ήταν αυτός που έδωσε πνοή στη Θεωρία Γραφημάτων στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος των γεφυρών της Καινιξβέργης. Το γράφημα το οποίο κατασκεύασε για να λύσει το άλυτο μέχρι τότε πρόβλημα παρουσίαζε κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τα οποία οδήγησαν στη θεώρηση και τη μελέτη μιας ολόκληρης κατηγορίας γραφημάτων που εμφάνιζε αυτά τα χαρακτηριστικά.

Ορισμός 6.2.1:
Έστω ένα γράφημα G . Μια περιήγηση που διέρχεται από όλες τις πλευρές του G λέγεται ***περιήγηση Euler***. Αν σε ένα γράφημα υπάρχει κλειστή περιήγηση Euler τότε το γράφημα λέγεται ***γράφημα Euler***.

Παράδειγμα 6.2.1:
Το παρακάτω γράφημα έχει την κλειστή περιήγηση Euler:
$v1v2v3v4v2v7v4v5v6v7v1$, άρα είναι γράφημα Euler.



Επειδή δεν είναι πάντα εφικτό να διακρίνουμε μια κλειστή περιήγηση Euler σε ένα γράφημα, ο Euler διατύπωσε το 1736 το κριτήριο των γραφημάτων Euler:

Θεώρημα 6.2.1:
Ένα συνεκτικό γράφημα G είναι γράφημα Euler αν και μόνο αν κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό.

Για να το αποδείξουμε θα χρειαστεί να αναφέρουμε πρώτα το ακόλουθο Λήμμα.

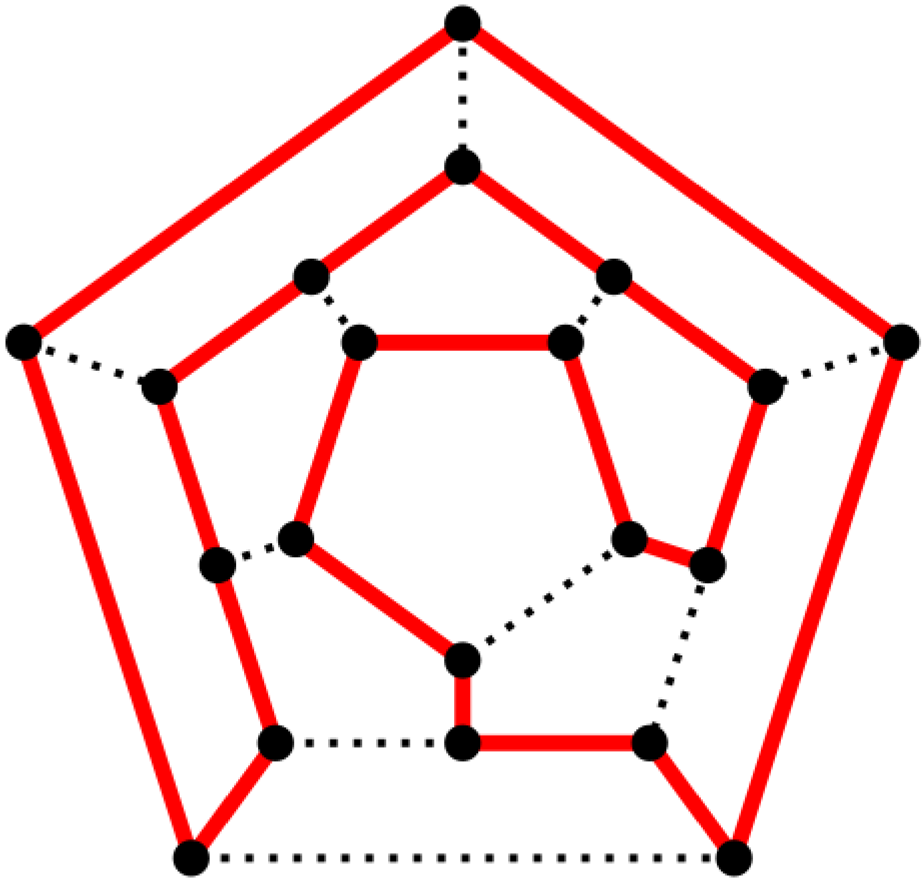
Λήμμα 6.2.1:
Αν στο γράφημα G ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 2, τότε το G περιέχει κάποιο κύκλο.

Απόδειξη:
Έστω κορυφή v του G. Κατασκευάζουμε μία ακολουθία κορυφών $v, v_1, v_2, \dots$ επαγωγικά εκλέγοντας v_1 γειτονική της v και για $i \geq 1$ εκλέγοντας v_{i+1} γειτονική της v_i και διαφορετική από τη v_{i-1}. Η ύπαρξη της v_{i+1} εξασφαλίζεται από την υπόθεσή μας.
Δεδομένου ότι το G έχει πεπερασμένο αριθμό κορυφών, θα εκλέξουμε σε κάποια φάση κάποια κορυφή η οποία έχει ήδη εκλεγεί. Έστω v_k η πρώτη τέτοια κορυφή, τότε το τμήμα της ακολουθίας κορυφών που βρίσκεται μεταξύ των δύο διαδοχικών εκλογών της v_k αποτελεί το ζητούμενο κύκλο.

Επιστρέφουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος.

Απόδειξη:
- Αποδεικνύουμε το αναγκαίο:
Έστω G ένα γράφημα Euler και P μια κλειστή περιήγηση του G. Η περιήγηση P διερχόμενη από την κορυφή v_k συνεισφέρει δύο μονάδες στο βαθμό της κορυφής v_k (μία μονάδα από την πλευρά που φτάνει στη v_k και μία μονάδα από την πλευρά που φεύγει από τη v_k). Επειδή η περιήγηση P διέρχεται από όλες τις κορυφές του γραφήματος, έπεται ότι κάθε κορυφή ενός γραφήματος Euler έχει άρτιο βαθμό.
- Αποδεικνύουμε το ικανό:
Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στον αριθμό των πλευρών του G. Από την υπόθεση και από το γεγονός ότι το G είναι συνεκτικό γράφημα συνεπάγεται ότι ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον δύο.
Από το Λήμμα, το G θα περιέχει κάποιο κύκλο C. Αν ο κύκλος C περιέχει όλες τις πλευρές του G, τότε έχει αποδειχθεί. Αν όχι, αφαιρούμε από το G τις πλευρές του C και σχηματίζουμε ένα νέο γράφημα H που έχει τις ίδιες κορυφές με το G, λιγότερες πλευρές και στο οποίο κάθε κορυφή έχει πάλι άρτιο βαθμό. Από την υπόθεση της επαγωγής κάθε συνιστώσα του H έχει μια κλειστή περιήγηση Euler. Εφόσον κάθε συνιστώσα του H έχει τουλάχιστον μία κορυφή κοινή με το C, παίρνουμε ζητούμενη περιήγηση Euler του G ακολουθώντας τις πλευρές του C μέχρι να συναντήσουμε μία μη μεμονωμένη κορυφή του H. Στη συνέχεια χαράσσουμε την περιήγηση Euler της συνιστώσας του H που περιέχει την κορυφή αυτή και έπειτα ακολουθούμε τις πλευρές του C μέχρι να συναντήσουμε κορυφή που να ανήκει στην επόμενη συνιστώσα του H.
Η όλη διαδικασία τελειώνει όταν επανέλθουμε στην αρχική κορυφή.

Μια άλλη πολύ σημαντική κατηγορία γραφημάτων είναι τα γραφήματα Hamilton, τα οποία πήραν το όνομά τους από τον Ιρλανδό μαθηματικό Sir William Rowan Hamilton, ο οποίος το 1857 ανακάλυψε ένα παιχνίδι και το ονόμασε Icosian. Στο συγκεκριμένο παιχνίδι υπάρχει ένα δωδεκάεδρο του οποίου οι 20 κορυφές έχουν τα ονόματα διαφόρων πόλεων. Ο παίκτης πρέπει να βρει μια διαδρομή που να αρχίζει και να τελειώνει στην ίδια κορυφή περνώντας και από τις 20 κορυφές μία μόνο φορά.



Εικόνα 6.1: Μία από τις λύσεις στο γρίφο του Hamilton

Ορισμός 6.2.2:
Ένα γράφημα G στο οποίο υπάρχει κύκλος που περνά από όλες τις κορυφές του G (όχι όμως υποχρεωτικά και από τις πλευρές του) λέγεται ***γράφημα Hamilton*** και ο αντίστοιχος κύκλος ***κύκλος Hamilton***.

Το ακόλουθο θεώρημα του Dirac είναι μια ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη ώστε ένα γράφημα να είναι Hamilton.

Θεώρημα 6.2.2:
Αν G είναι ένα γράφημα τάξης $n \geq 3$ και ισχύει $d(v_i) \geq \frac{n}{2}$ για $1 \leq i \leq n$, τότε το G είναι γράφημα Hamilton.

Απόδειξη:
Έστω $G=(V,E)$ με $|V|=n \geq 3$ και $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Θεωρώ το μονοπάτι του G με ρο μεγαλύτερο αριθμό κορυφών, έστω το $P=u_1,\ldots,u_k$. Κάθε γειτονική κορυφή της u_1 ανήκει στο P γιατί αν υπήρχε $u_o \notin P$ με $u_0 u_1 \in E(G)$ τότε το μονοπάτι

$u_0, u_1, ..., u_k$ θα περιείχε μεγαλύτερο πλήθος κορυφών από το P, το οποίο είναι άτοπο. Παρόμοια όλοι οι γείτονες της u_k θα ανήκουν στο P. Αφού $d(u_i) \geq \frac{n}{2}$, το P θα περιέχει τουλάχιστον $\frac{n}{2}+1$ κορυφές. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει στο P μία κορυφή u_i, $2 \leq i \leq k$ γειτονική της u_1 που η προηγούμενη της u_{i-1} στο P να είναι γειτονική της u_k.

Πράγματι, αν αυτό δεν ισχύει θα έπρεπε για κάθε γείτονα της u_1 η προηγούμενή της κορυφή στο P να μην είναι γείτονας της u_k. Αλλά $d(u_1) \geq \frac{n}{2}$. Άρα υπάρχουν τουλάχιστον $\frac{n}{2}$ γείτονες της u_1, άρα τουλάχιστον τόσοι μη γείτονες της u_k. Άρα $d(u_k) \leq n-1-\frac{n}{2}$, δηλαδή $d(u_k) < \frac{n}{2}$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

Άρα υπάρχει i, $2 \leq i \leq k$ με $u_1 u_i$ με $u_{i-1} u_k \in E(G)$. Το G λοιπόν περιέχει τον κύκλο $C : u_i u_1 ... u_{i-1} u_k ... u_i$ που περιέχει όλες τις κορυφές του P. Έστω ότι ο C δεν περιέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος G, δηλαδή υπάρχει $w \in G$ με $w \notin C$.

Εφόσον το P έχει τουλάχιστον $\frac{n}{2}+1$ κορυφές, έχω ότι οι κορυφές που δεν ανήκουν στο P είναι λιγότερες από $\frac{n}{2}$. Αλλά από την υπόθεση $d(w) \geq \frac{n}{2}$, η w γειτονεύει με κάποια κορυφή u_j του C (και του P) με $j \neq 1$.

Ο δρόμος $P_1 = w u_j ... u_{i-1} u_k ... u_i u_1 ... u_{j-1}$ είναι ένα μονοπάτι με μήκος $|P|-2+3=|P|+1$, διότι από το P βγάλαμε δύο πλευρές $u_{j-1}u_j$ και $u_{i-1}u_i$ και προσθέσαμε τις 3 πλευρές wu_j, $u_{i-1}u_k$ και $u_1 u_i$.

Άρα $|P_1| > |P|$ που είναι άτοπο.

Άρα ο κύκλος C περιέχει όλες τις κορυφές του G, είναι λοιπόν ένας κύκλος Hamilton του G και το G είναι γράφημα Hamilton.

Τελευταία κατηγορία γραφημάτων που θα αναφέρουμε είναι τα επίπεδα γραφήματα.

Μπορούμε να απεικονίσουμε γραφήματα αντιστοιχίζοντας τις κορυφές του σε σημεία στο επίπεδο και τις ακμές του σε καμπύλες που ενώνουν τα σημεία που αντιστοιχούν στα άκρα της ακμής.

Μια απεικόνιση λέγεται ***επίπεδη*** όταν:

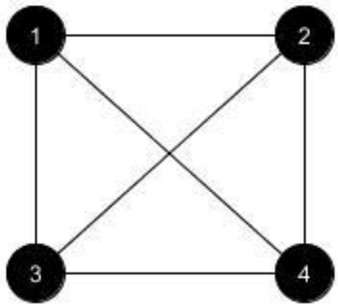
- Οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε ακμές δεν τέμνουν τον εαυτό τους.
- Δύο καμπύλες τέμνονται μόνο σε σημεία που αντιστοιχούν σε κορυφή στην οποία και οι δύο προσπίπτουν.

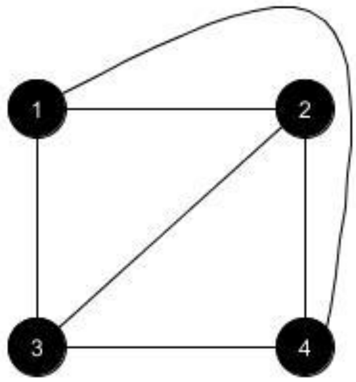
Ορισμός 6.2.3:

Ένα γράφημα G λέγεται ***επίπεδο (planar)*** όταν έχει μια επίπεδη απεικόνιση.

Πιο απλά θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα επίπεδα γραφήματα είναι αυτά που μπορούν να σχεδιαστούν στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές τους.

<u>*Παράδειγμα 6.2.2:*</u>
Έστω γράφημα G αριστερά και δεξιά το αντίστοιχό επίπεδο γράφημα:





Τα ενωμένα τμήματα του επιπέδου που προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τις κορυφές και τις ακμές ενός γραφήματος από μια επίπεδη απεικόνισή του ονομάζονται ***όψεις*** ή ***περιοχές***. Δηλαδή τα τμήματα που φράσσονται από τις ακμές του γραφήματος.

Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε 3 όψεις: τα τμήματα που φράσσονται από τις ακμές:

- 12, 23 και 13
- 24, 43 και 23
- 14, 42 και 12

Θεώρημα 6.2.3:
Το αθροισμα των βαθμών των όψεων ενός συνεκτικού επίπεδου γραφήματος G ισούται με το διπλάσιο του αριθμού των πλευρών, δηλαδή $\sum_{i=1}^{r} d(f_i) = 2e$.

<u>Απόδειξη:</u>
Κάθε πλευρά συνεισφέρει δύο μονάδες στο άθροισμα $\sum_{i=1}^{r} d(f_i)$ και συγκεκριμένα από μία μονάδα στις δύο περιοχές των οποίων η πλευρά αυτή είναι σύνορο. Αν η πλευρά κείται σε μία περιοχή, τότε συνεισφέρει πάλι 2 μονάδες στο βαθμό της περιοχής μέσα στην οποία κείται.
Οι e πλευρές θα συνεισφέρουν $2e$ στο άθροισμα αυτό.

Το 1750 ο Euler απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.2.4:
Αν G ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα με n κορυφές, m πλευρές και f όψεις τότε ισχύει ο τύπος: $n - m + f = 2$

Απόδειξη:

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον αριθμό των πλευρών m. Αν $m=0$, $n=1$ και $f=1$ τότε ο τύπος ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει για όλα τα συνεκτικά επίπεδα γραφήματα που έχουνε λιγότερες από m πλευρές, όπου $m \geq 1$ και έστω ότι το γράφημα G έχει m πλευρές.

Αν το G είναι δέντρο, τότε από το Θεώρημα 5.1.2 $n=m+1$ και επειδή $f=1$ ο τύπος ισχύει. Αν το G δεν είναι δέντρο θα περιέχει κάποιο κύκλο και έστω e μία πλευρά του κύκλου. Το γράφημα $G \setminus e$ είναι συνεκτικό με n κορυφές, $m-1$ πλευρές και $f-1$ όψεις. Από την επαγωγική υπόθεση ισχύει

$n-(m-1)+9f-1)=2 \Rightarrow n-m+f=2$.

Πόρισμα 6.2.1:

Σε κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα με n κορυφές $(n \geq 3)$ και m πλευρές ισχύει $m \leq 3n-6$.

Απόδειξη:

Αν f ο αριθμός των όψεων του γραφήματος, από τον τύπο του Euler έχουμε $n-m+f=2$. Αφού το άθροισμα των βαθμών των όψεων είναι $2m$ και κάθε όψη έχει βαθμό ≥ 3, θα ισχύει $2m \geq 3f \Rightarrow f \leq \frac{2m}{3}$.

Αν αντικαταστήσουμε στον τύπο του Euler έχουμε:

$$2=m-n+f \leq n-m+\frac{2m}{3}=n-\frac{m}{3} \Rightarrow 2 \leq n-\frac{m}{3}$$

Άρα $m \leq 3n-6$.

Άμεση εφαρμογή αποτελεί το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 6.2.2:

Το γράφημα K_5 δεν είναι επίπεδο.

Απόδειξη:

Έστω ότι το K_5 είναι επίπεδο. Στο K_5 έχουμε $n=5$ και $m=10$. Από το Πόρισμα 6.2.1 έχουμε $10=m \leq 3n-6=15-6=9$ που είναι άτοπο.

Άρα το K_5 δεν είναι επίπεδο γράφημα.

Πόρισμα 6.2.3:

Το γράφημα $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι το $K_{3,3}$ είναι επίπεδο. Τότε για $n=6$ και $m=9$ ο τύπος του Euler δίνει $f=5$, δηλαδή το επίπεδο γράφημα $K_{3,3}$ έχει 5 όψεις. Αφού το $K_{3,3}$ είναι εξ'ορισμού διμερές γράφημα, προφανώς όλοι οι κύκλοι του θα έχουν άρτιο μήκος, άρα ο βαθμός κάθε όψης είναι τουλάχιστον 4. Το άθροισμα των βαθμών των 5 όψεων θα είναι τουλάχιστον $4 \cdot 5=20$ και από το Θεώρημα 6.2.3 ο αριθμός των πλευρών θα είναι τουλάχιστον 10, που είναι άτοπο αφού $m=9$.

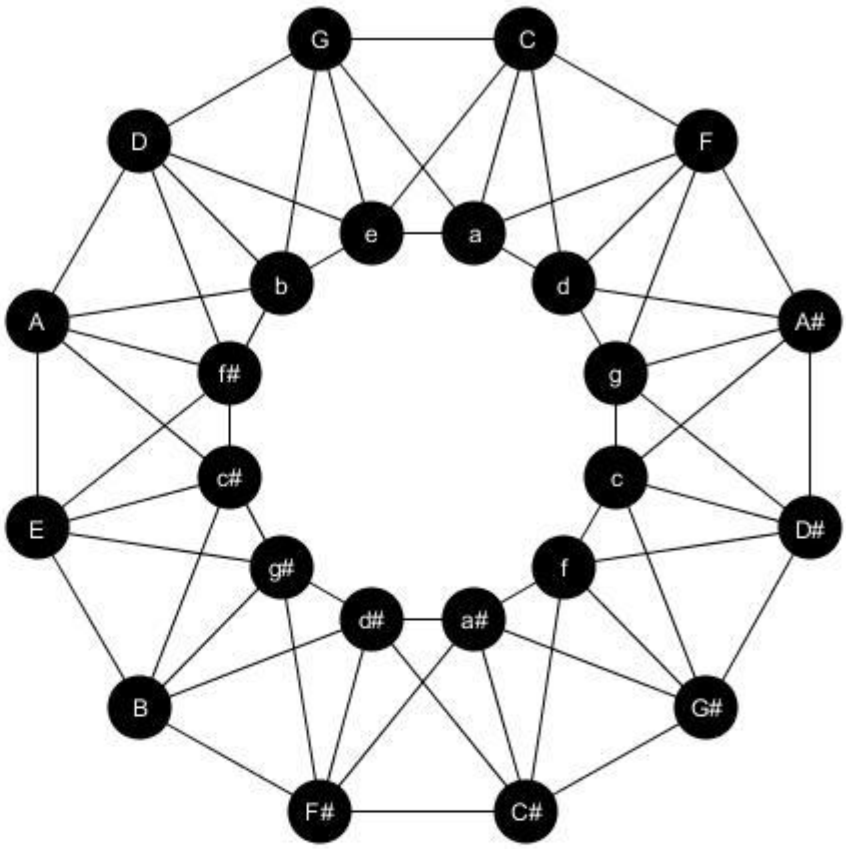
Άρα το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.

Όμως η σχέση του Πορίσματος 6.2.1 δεν είναι πάντα αρκετή για να αποδείξουμε ότι ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο.
Το 1930 ο Πολωνός μαθηματικός Kazimierz Kuratowski χαρακτήρισε πλήρως με το θεώρημά του τα μη επίπεδα γραφήματα.

Θεώρημα 6.2.5:
Ένα γράφημα είναι μη επίπεδο αν και μόνο αν περιέχει υπογράφημα ισόμορφο με το K_5 ή το $K_{3,3}$.

6.3 Εφαρμογή των ιδιοτήτων γραφήματος στο μουσικό γράφημα

Εφαρμογή:
Πρόβλημα 133 στο 7^{ο} Κεφάλαιο του 4^{ου} τόμου του συγγράμματος του D. Knuth «The Art of Computer Programming, Volume 4. Fascicle 0: Introduction to Combinatorial Functions and Boolean Functions».
Μας δίνεται το μουσικό γράφημα G_M



Υπολογίζουμε τα μετρικά μεγέθη που αναφέραμε και ελέγχουμε αν ικανοποιεί κάποιες βασικές ιδιότητες που έχουν σαν συνέπεια συγκεκριμένες θεμελιώδεις κατηγοριοποιήσεις που αποτελούν πολύ σημαντικό αντικείμενο μελέτης της Θεωρίας Γραφημάτων.

Επομένως η εφαρμογή χωρίζεται σε 2 μέρη:

- **Μετρικά μεγέθη:**

<u>1. Τάξη:</u>
Αποτελείται από 24 κορυφές άρα η τάξη είναι $|V(G_M)| = 24$

<u>2. Μέγεθος:</u>
Από το Θεώρημα 5.1.1 έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$.
Αφού κάθε κορυφή έχει βαθμό 5:

$$\sum_{i=1}^{24} d(v_i) = 2|E(G_M)| \Rightarrow \sum_{i=1}^{24} 5 = 2|E(G_M)| \Rightarrow 24 \cdot 5 = 2|E(G_M)| \Rightarrow 120 = 2|E(G_M)| \Rightarrow |E(G_M)| = 60$$

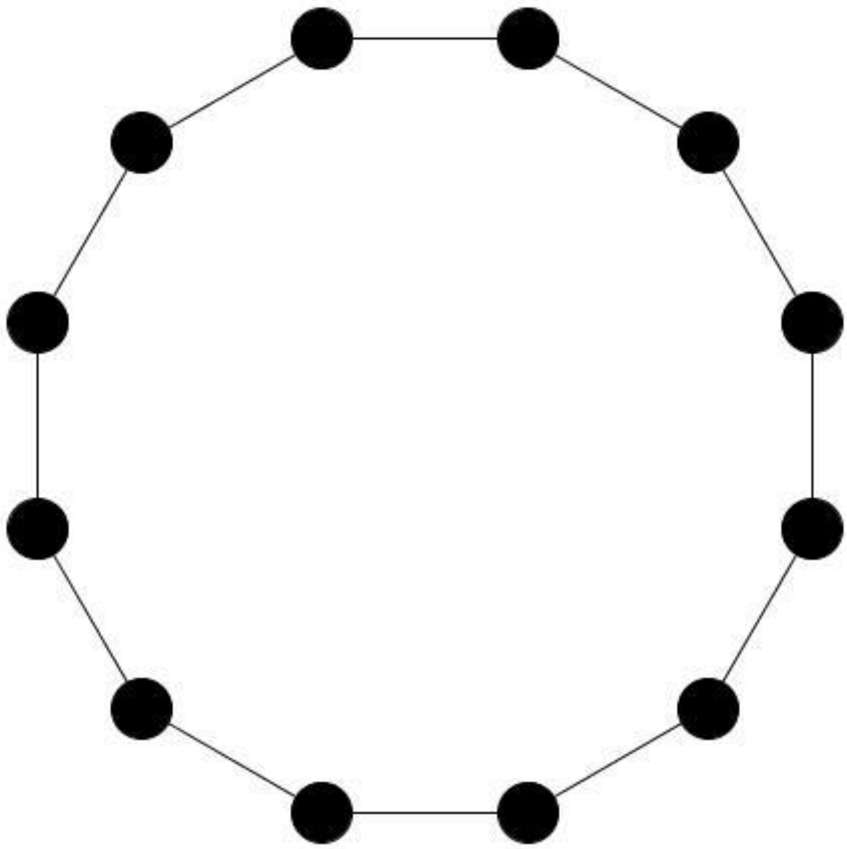
<u>3. Περιφέρεια:</u>
Ο μικρότερος κύκλος είναι το τρίγωνο που σχηματίζουν 3 κορυφές γειτονικές ανά δύο, άρα $girth(G_M) = 3$.

<u>4. Διάμετρος:</u>
Το μέγιστο μονοπάτι ανάμεσα σε 2 κορυφές αποτελείται από 6 ακμές, δηλαδή $diam(G_M) = 6$.

<u>5. Αριθμός ανεξαρτησίας:</u>
Παίρνουμε σαν αφετηρία την κορυφή C και διασχίζοντας διαδοχικά όλες τις κορυφές κατασκευάζουμε ένα σύνολο που περιλαμβάνει τις μη γειτονικές ανα δύο. Οπότε έχουμε το σύνολο ανεξαρτησίας $A = \{C, D, c\#, d\#, G\#, g\}$.
$a(G_M) = |A| = 6$

<u>6. Αλγεβρική μορφή:</u>
Δεν αποτελεί μετρικό μέγεθος αλλά θα μας χρειαστεί στον υπολογισμό των παρακάτω ερωτημάτων. Εκφράζουμε την αλγεβρική μορφή του γραφήματος με τη βοήθεια του γινομένου.

K_2



C_{12}

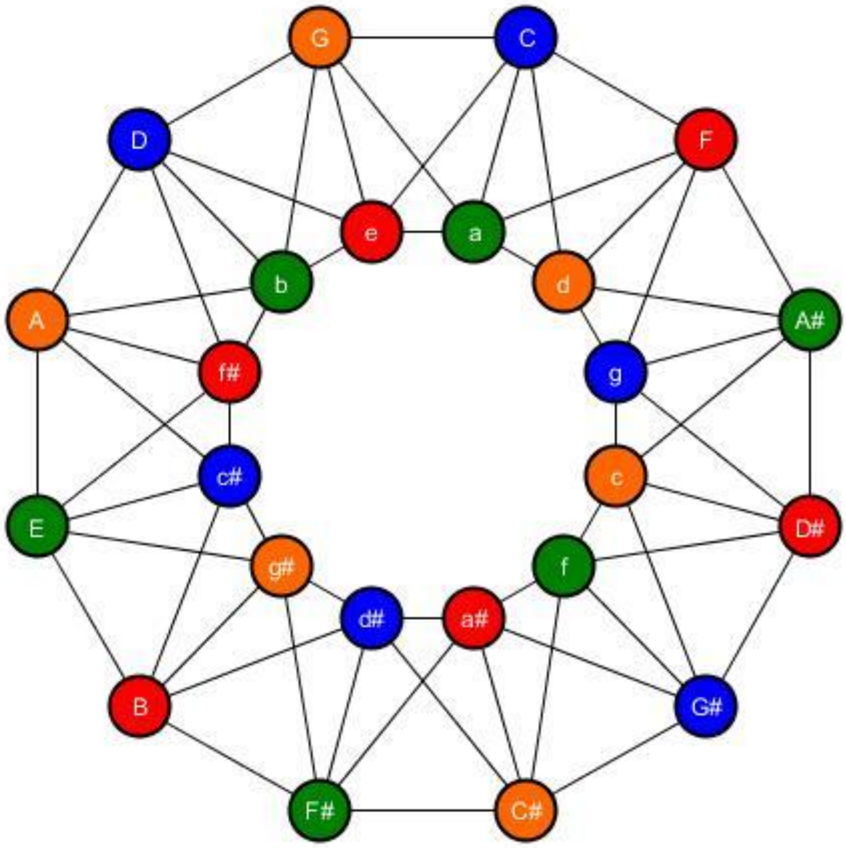
Από τον τύπο του γινομένου προκύπτει $G_M = K_2 \times C_{12}$

7. Χρωματικός αριθμός:

Αφού $G_M = K_2 \times C_{12}$ τότε $\chi(G_M) = \chi(K_2 \times C_{12})$.

Γνωρίζουμε ότι $\chi(K_2) = \omega(K_2) = 2$ και $\chi(C_{12}) = \omega(C_{12}) = 2$, δηλαδή τα γραφήματα είναι αυστηρά χρωματίσιμα οπότε από Θεώρημα 6.1.2 έχουμε $\chi(G_M) = \chi(K_2 \times C_{12}) = \chi(K_2)\chi(C_{12}) = 2 \cdot 2 = 4$.

Το παρακάτω χρωματισμένο γράφημα αποτελείται από 4 διαφορετικά χρώματα που αντιστοιχούν στα 6 ανεξάρτητα σύνολα:



8. Χρωματικός δείκτης:
Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.1.3 έχουμε ότι $\chi'(G_M) = 5$.

9. Αριθμός κλίκας:
Όμοια με τον χρωματικό αριθμό υπολογίζουμε $\omega(G_M) = 4$.

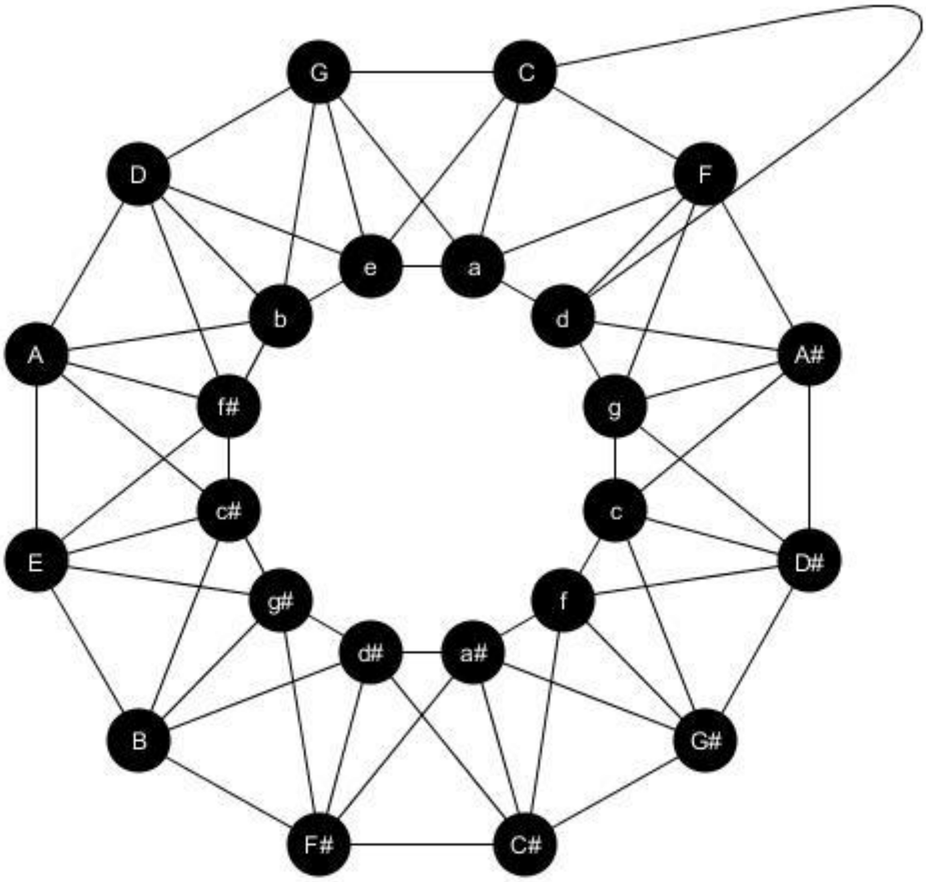
10. Αριθμός καλύμματος κορυφών:
Χρησιμοποιούμε τον τύπο της Πρότασης 6.1.3:
$vc(G_M) = n(G_M) - a(G_M) = 24 - 6 = 18$

- Έλεγχος ιδιοτήτων:

11. Κανονικό:
Από την κατασκευή του γραφήματος G_M έχουμε δείξει ότι είναι 5-κανονικό.

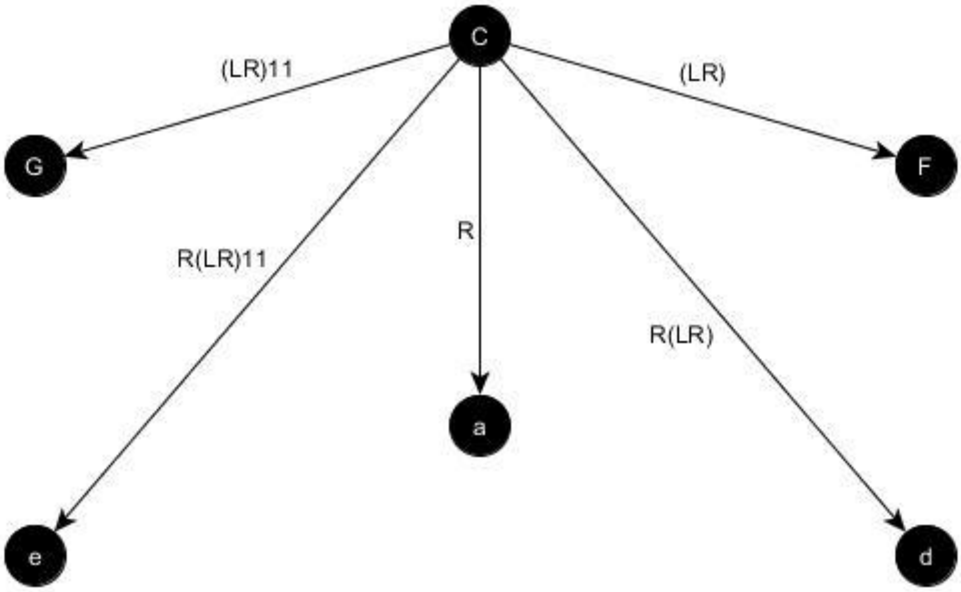
12. Συνεκτικό:
Προφανώς είναι συνεκτικό γιατί όλες οι κορυφές του συνδέονται με μονοπάτι.

13. Επίπεδο:
Εδώ δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία περί μη επίπεδων γραφημάτων, παρά μόνο τον ορισμό καθώς παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει τρόπος να αποφύγουμε τις τομές των πλευρών.



14. Κατευθυνόμενο:

Αναλύοντας τις σχέσεις των κόμβων από τη σκοπιά της μουσικής θεωρίας και εφαρμόζοντας τις συναρτήσεις της Neo-Riemannian θεωρίας έχουμε για κάθε κορυφή το εξής κατευθυνόμενο γράφημα δέντρο:

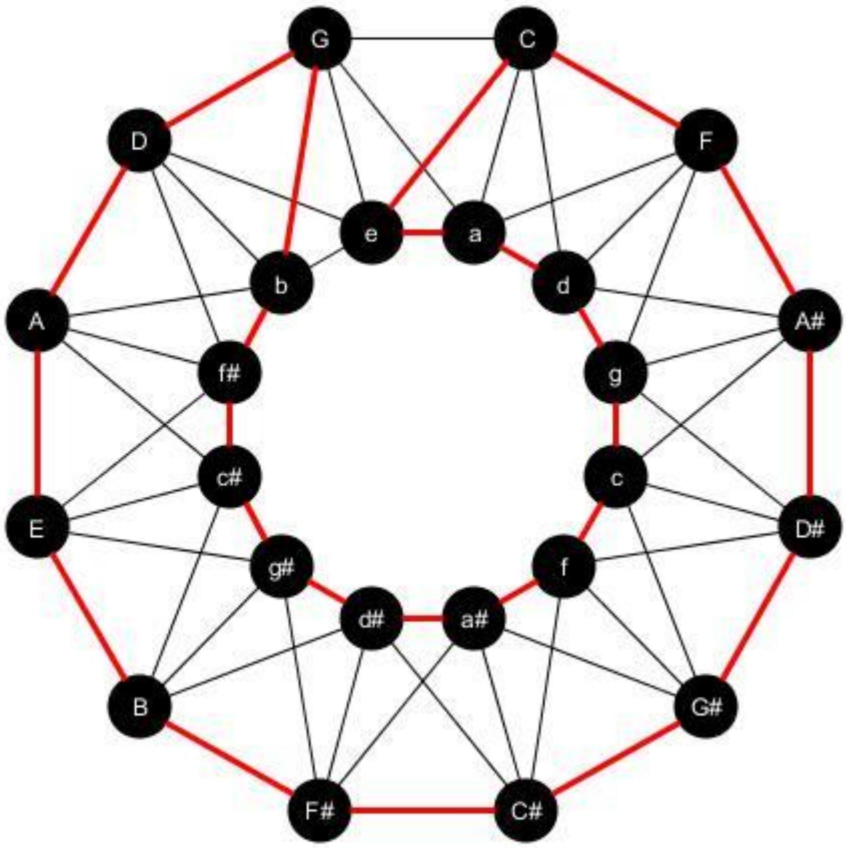


15. Δέντρο:

Προφανώς το γράφημα G_M δεν είναι δέντρο αφού περιέχει κύκλους.

16. Hamiltonian:

Μπορούμε εύκολα στο συγκεκριμένο γράφημα να βρούμε έναν κύκλο Hamilton:



Συμπεράσματα-Επίλογος

Συνοψίζοντας, πραγματοποιήσαμε μια αναφορά και επεξήγηση της Neo-Riemannian θεωρίας, ορίζοντας τις συναρτήσεις T_n, I_n και P, L, R, οι οποίες αποτελούν τα μαθηματικά εργαλεία για την αλγεβρική προσέγγιση της μουσικής θεωρίας. Περιγράψαμε και αποδείξαμε την αλγεβρική δομή αυτών των συναρτήσεων, παράλληλα με τη μουσική τους εφαρμογή μέσω παραδειγμάτων.

Αφετηρία σε όλο αυτό το εγχείρημα αποτέλεσε ο μετασχηματισμός των μουσικών φθόγγων σε μαθηματικά αντικείμενα χρησιμοποιώντας το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}_{12}$. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε και στο μουσικό όρο της συγχορδίας, σαν δομικό στοιχείο της μουσικής δημιουργίας, το οποίο επίσης αντιμετωπίσαμε σαν μαθηματικό αντικείμενο.

Σε αυτά που επικεντρωθήκαμε ήταν η ανάλυση των chord progression, τα οποία αποτελούν τρόπους δόμησης μουσικών κομματιών με την χρήση συγχορδιών, μέσω της Neo-Riemannian θεωρίας, αλλά και η απεικόνιση της αρμονικής σχέσης των συγχορδιών με τη βοήθεια της Θεωρίας Γραφημάτων.

Σκοπός της εργασίας αυτής ήταν η επισήμανση αλλά και η ακριβής απόδειξη της ύπαρξης στενής σχέσης άλγεβρας και μουσικής. Αυτή η σχέση γίνεται αντιληπτή μέσα από την περιγραφή των μαθηματικών δομών που «κρύβει» η μουσική θεωρία αλλά και από την «καλλιτεχνική» εφαρμογή των μαθηματικών. Ο κεντρικός άξονάς της είναι η ανάδειξη της όλο και εξελισσόμενης Neo-Riemannian θεωρίας, η οποία έχει σαν αντικείμενο την προσέγγιση της μουσικής ανάλυσης μέσω αλγεβρικών μεθόδων.

Απαραίτητη προϋπόθεση βέβαια είναι να μη γίνει σύγχυση των δύο τεχνών-επιστημών και κυρίως να μην μετατραπεί η μουσική σε ένα απλό μαθηματικό μοντέλο, απορρίπτοντας την αισθητηριακή εμπειρία και έμπνευση. Αλλά να παρουσιαστεί καλύτερα η άρτια και δομημένη λογική της μουσικής θεωρίας. Η σχέση μαθηματικών-μουσικής βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση και των δύο.

Κάθε προσπάθεια ανάδειξης αυτής της σχέσης πρέπει να αποτελεί κίνητρο για περαιτέρω μαθηματική προσέγγιση περισσότερων μουσικών εννοιών και περιοχών.

Βιβλιογραφία

[1] Benward, B. & Saker, M. (2003) Music: In Theory and Practice.

[2] Brice, R. (2001) Τεχνολογία Μουσικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

[3] Cohen, N. (2011) Three years of graphs and music: Some results in graph theory and its applications.

[4] Crans, A.S., Fiore, T. & Satyendra, R. (2009) Musical Actions of dihedral groups: Amer. Math. Monthly. 479-495.

[5] Fiore, T. (2003) Music and Mathematics: Lecture at the University of Michigan.

[6] Fraleigh, J.B. (2012) Εισαγωγή στην Άλγεβρα, 8η Έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[7] Knuth, D. (2011) The Art of Programming, Volume 4. Fascicle 0: Introduction to Combinatorial Functions and Boolean Functions.

[8] Lewin, D. (1987) Generalized Musical Intervals and Transformations. New Haven: Yale University Press.

[9] Rodriguez, L. Automorphism Groups of Simple Graphs.

[10] Townsend, A. (2011) Maths and Music Theory: Speech to the University College London Undergraduate Maths Colloquium.

[11] Wilson, R. J. & Watkins, J. J. (1990) Graphs: An Introductory Approach.

[12] Zhang, A. (2009) The Framework of music theory as represented with groups.

[13] Θηλυκός, Δ. Σημειώσεις στη Θεωρία Γραφημάτων. Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

[14] Μάνδρατζη, Δ. (2013) Μουσική Συμμετρία: Οι δράσεις της Ατονικής και της Neo-Riemannian ομάδας πάνω στο σύνολο των σύμφωνων τριάδων.

[15] Μητρόπουλος, Β. (2007) Η Τεχνική Εναρμόνισης της Μελωδίας, Εκδόσεις. Fagotto

[16] Νικολόπουλος, Σ. , Γεωργιάδης, Λ. , Παληός, Λ.(2015) Αλγοριθμική Θεωρία Γραφημάτων. Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

[17] Παπαϊωάννου, Α. (2006) Θεωρία Γραφημάτων, Εκδόσεις ΕΜΠ.

[18] Συμβώνης, Α. Σημειώσεις του μαθήματος: Θεωρία Γραφημάτων. Τομέας Μαθηματικών, ΕΜΠ.