ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΔΙΑΣΤΑΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ BANACH - ΚΑΘΟΛΙΚΑ ΑΔΙΑΣΠΑΣΤΟΙ ΧΩΡΟΙ BANACH

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΠΑΔΙΑΜΑΝΤΗ Κ. ΜΑΡΙΟΥ

Διπλωματούχου Μαθηματικού Ε.Κ.Π.Α.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
Ι. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Νοέμβριος 2017

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΔΙΑΣΤΑΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ BANACH - ΚΑΘΟΛΙΚΑ ΑΔΙΑΣΠΑΣΤΟΙ ΧΩΡΟΙ BANACH

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΠΑΔΙΑΜΑΝΤΗ Κ. ΜΑΡΙΟΥ

Διπλωματούχου Μαθηματικού Ε.Κ.Π.Α.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:
1. Ι. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ Καθ. Ε.Μ.Π.
2. Α. ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ Επικ. Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Ν. ΓΙΑΝΝΑΚΑΚΗΣ Επικ. Καθ. Ε.Μ.Π.

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:
1. Ι. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ Καθ. Ε.Μ.Π.
2. Α. ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ Επικ. Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Ν. ΓΙΑΝΝΑΚΑΚΗΣ Επικ. Καθ. Ε.Μ.Π.
4. Ι. ΓΑΣΠΑΡΗΣ Καθ. Ε.Μ.Π.
5. Β. ΚΑΝΕΛΛΟΠΟΥΛΟΣ Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.
6. Θ. ΡΑΣΣΙΑΣ Καθ. Ε.Μ.Π.
7. Π. ΨΑΡΡΑΚΟΣ Καθ. Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Νοέμβριος 2017

Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από την Ανώτατη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).

Αφιερώνεται στον πατέρα μου.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω βαθύτατα τον δάσκαλο και επιβλέποντα καθηγητή μου, Καθηγητή Ε.Μ.Π. Ιωάννη Σαραντόπουλο για την πολύτιμη καθοδήγηση και τις εύστοχες συμβουλές του, χωρίς τις οποίες αυτή η διατριβή δεν θα είχε πραγματοποιηθεί. Με τις ατελείωτες συζητήσεις μας - μαθηματικού και μη περιεχομένου - με δίδαξε μαθηματικά και ήθος βοηθώντας με έτσι να βγω από αυτή τη διαδικασία καλύτερος μαθηματικός, ερευνητής και άνθρωπος.

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον Α. Αρβανιτάκη Επ. Καθηγητή και τον Ν. Γιαννακάκη Επ. Καθηγητή για την συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή και που ήταν εκεί για μένα όποτε τους χρειάστηκα.

Επίσης, ευχαριστώ τους Ι. Γάσπαρη Καθηγητή, Β. Κανελλόπουλο Αν. Καθηγητή, Θ. Ρασσιά Καθηγητή και Π. Ψαρράκο Καθηγητή που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην επταμελή εξεταστική επιτροπή για την αξιολόγηση της διδακτορικής μου διατριβής.

Τέλος, ευχαριστώ τη μητέρα μου και τη σύντροφό μου, Χριστίνα, για τη στήριξη σε συναισθηματικό και πρακτικό επίπεδο, αλλά και για πολλά που μου έχουν προσφέρει απλόχερα και που δεν περιγράφονται με λόγια. Ένα μεγάλο ευχαριστώ σ΄ εκείνες, καθώς και στην εξαδέλφη μου Πόπη, για τη δύναμη που μου έχουν δώσει με την υπερηφάνεια που έχουν νιώσει και την πίστη που έχουν δείξει στις ικανότητές μου.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή έχει ως θέμα την εκτίμηση του φράγματος νορμών πολυωνύμων σε απειροδιάστατους χώρους Banach, την εφαρμογή του στον υπολογισμό της ακτίνας αναλυτικότητας μιας δυναμοσειράς, καθώς και την κατασκευή ενός καθολικά αδιάσπαστου χώρου Banach με συγκεκριμένες ιδιότητες. Ειδικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο διατυπώνονται κάποια προκαταρκτικά αποτελέσματα και ορίζονται κάποιες βασικές έννοιες, ενώ στη συνέχεια παρουσιάζονται οι τρεις εργασίες που προέκυψαν από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε.

Αν $F(x)$ είναι μια δυναμοσειρά σε ένα πραγματικό χώρο Banach X με κέντρο το 0, ρ η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισής της και ρ_A η ακτίνα αναλυτικότητάς της, η πρώτη απόπειρα να εκτιμηθεί η τιμή της ακτίνας αναλυτικότητας οφείλεται στον A. E. Taylor, οποίος απέδειξε το 1938 στο [55, Θεώρημα 4.2] ότι $\rho_A \geq \frac{\rho}{e\sqrt{2}}$. Πλέον έχουν προκύψει σταδιακά βελτιώσεις αυτής της τιμής, αρχικά παίρνοντας $\rho_A \geq \frac{\rho}{e}$ ([18]) και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας μιγαδικοποίηση στον X ([42]), το αποτέλεσμα αυτό οδηγείται σε $\frac{\rho}{2}$. Ο T. Nguyen στο [43] παρέχει μια περαιτέρω βελτίωση για την ακτίνα αναλυτικότητας. Για την ακρίβεια, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hoeffding ([32]) ως βασικό εργαλείο ώστε να περιορίσει τη νόρμα $\|L\|_{(2)}$, απέδειξε ότι $\rho_A \geq \frac{\rho}{\sqrt{e}}$. Στο δεύτερο κεφάλαιο βελτιώνουμε το αποτέλεσμα του T. Nguyen σε $\rho_A \geq \rho/\sqrt{2}$ και παρέχουμε κάποια αντίστοιχα αποτελέσματα για τη n-οστή Fréchet παράγωγο της $F(x)$. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι

Θεώρημα I. *Έστω $F(x)$ μια δυναμοσειρά σε ένα χώρο Banach X, την οποία μπορούμε να επιλέξουμε με κέντρο την αρχή. Έστω επίσης, $\rho > 0$ η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισής της και ρ_A η ακτίνα αναλυτικότητάς της. Τότε:*

(i) $\rho_A \geq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$,

(ii) *η n-οστή Fréchet παράγωγος $D^nF : X \to \mathcal{L}(^nX, Y)$ της $F(x)$, ως συνάρτηση από τον X στο χώρο Banach $\mathcal{L}(^nX, Y)$, έχει σειρά Taylor με κέντρο την αρχή και ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης τουλάχιστον $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$ για $n = 1$ και $\frac{\rho}{\sqrt{e}}$ για $n \geq 2$,*

(iii) *η ακτίνα αναλυτικότητας της δυναμοσειράς* $D^n F(x)$ *με κέντρο την αρχή είναι τουλάχιστον* $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$.

Για να συμβεί αυτό, για κάθε L συνεχή συμμετρική m-γραμμική μορφή ορίζεται η νόρμα

$$\|L\|_{(n)} = \sup_{k_1+\cdots+k_n=m} \sup\left\{\left|L\left(x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}\right)\right| : \|x_1\|\leq 1,\ldots,\|x_n\|\leq 1\right\}$$

και στη συνέχεια επιτυγχάνεται ένα καλύτερο φράγμα για την $\|L\|_{(2)}$ από αυτό που είχε χρησιμοποιήσει ο T. Nguyen.

Ειδικότερα, αν X, Y είναι χώροι Banach, $L : X^m \to Y$ είναι μια συνεχής συμμετρική m-γραμμική απεικόνιση και $\widehat{L}$ είναι το αντίστοιχο συνεχές m-ομογενές πολυώνυμο, ο L. A. Harris στο [30] έχει αποδείξει ότι

$$\left|L\left(x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}\right)\right| \leq \sqrt{\frac{m^m}{k_1^{k_1}\cdots k_n^{k_n}}}\,\|\widehat{L}\|\,,$$

για κάθε μοναδιαία διανύσματα $x_1,\ldots,x_n$ του X, όπου $k_1,\ldots,k_n$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $k_1+\cdots+k_n=m$. Με τη βοήθεια αυτού του τύπου, αποδεικνύεται σε αυτή την εργασία ότι

$$\left(\frac{\|L\|_{(n)}}{\|\widehat{L}\|}\right)^{1/m} \leq \begin{cases}\sqrt{2} & \text{αν } n=2\\ C\sqrt{e} & \text{αν } n\geq 3\,,\end{cases}$$

όπου το $C = C(m,n) = \left[\left(\frac{2em}{n}\right)^n \binom{m-1}{n-1}\right]^{1/m}$ είναι ανεξάρτητο των L, X, Y και τείνει στο 1 καθώς $m\to\infty$ για σταθερό n. Αυτή η ανισότητα χρησιμοποιείται για να οδηγήσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ο L. A. Harris στα σχόλιά του για το Πρόβλημα 73 των Mazur και Orlicz στο γνωστό σύγγραμμα "The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Cafe" διατύπωσε την ακόλουθη φυσιολογική γενίκευση του εν λόγω προβλήματος:

Αν X, Y *είναι χώροι Banach και* $L : X^m \to Y$ *είναι μια συνεχής συμμετρική* m*-γραμμική απεικόνιση, ζητείται να βρεθεί η βέλτιστη σταθερά* $c(k_1,\ldots,k_n;X)$ *τέτοια ώστε*

$$|L(x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n})| \leq c(k_1,\ldots,k_n;X)\|\widehat{L}\|\,,$$

για κάθε μοναδιαία διανύσματα $x_1,\ldots,x_n$ *του* X*, όπου* $k_1,\ldots,k_n$ *μη αρνητικοί ακέραιοι με άθροισμα* m*.*

Το τρίτο κεφάλαιο έχει ως αντικείμενο τη μελέτη και βελτίωση της σταθεράς $c(k_1, \ldots, k_n; X)$ στην περίπτωση που ο X είναι ένας *πραγματικός* $L_p(\mu)$ χώρος. Παρέχουμε λοιπόν κάποιες εκτιμήσεις για τη σταθερά $c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu))$, αρχικά για *μιγαδικούς* $L_p(\mu)$ χώρους και στη συνέχεια για *πραγματικούς* $L_p(\mu)$ χώρους. Στη *μιγαδική* περίπτωση, επιλέγεται ως (x_i) μια ημι-νορμαρισμένη unconditional βασική ακολουθία, η οποία δίνει ως ειδική την περίπτωση που τα x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, έχουν ξένα support. Γενικά, είναι σαφώς δυσκολότερο να αντιμετωπιστεί η πραγματική περίπτωση. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε τρεις διαφορετικές τεχνικές για να ξεπεραστούν οι όποιες δυσκολίες, όταν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα με ξένα support. Στην πρώτη χρησιμοποιούνται κάποια βάρη και ένας ευρέως γνωστός τύπος πολικότητας και οδηγούμαστε στο

Θεώρημα II. *Έστω $1 \le p \le \infty$ και $L \in \mathcal{L}^s({}^m L_p(\mu), \mathbb{R})$. Αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον $L_p(\mu)$ με ξένα support, τότε*

$$|L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| \le \frac{k_1^{k_1} \cdots k_n^{k_n}}{m!} n^{\frac{m}{p}} \|\widehat{L}\| \,,$$

για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \ldots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$.

Η δεύτερη εξαρτάται από μια γενίκευση των ανισοτήτων του Clarkson ([57]), με χρήση της οποίας αποδεικνύουμε ότι

Θεώρημα III. *Έστω $1 \le p \le \infty$ και $L \in \mathcal{L}^s({}^m L_p(\mu), \mathbb{R})$. Αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον $L_p(\mu)$ με ξένα support, τότε*

$$|L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| \le c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu)) \|\widehat{L}\|$$

για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \ldots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$, όπου

$$c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu)) = \begin{cases} \frac{\left(k_1^{p-1} + \cdots + k_n^{p-1}\right)^{\frac{m}{p}}}{m!} & \text{αν } p \ge m \\ \frac{n^{\frac{m-p}{p}}\left(k_1^{m-1} + \cdots + k_n^{m-1}\right)}{m!} & \text{αν } p \le m \,. \end{cases}$$

Η τρίτη τεχνική χρησιμοποιεί μια πιθανοθεωρητική ανισότητα του W. Hoeffding ([32]), από όπου προκύπτει το

Θεώρημα IV. *Έστω $1 \le p \le \infty$ και $L \in \mathcal{L}^s({}^m L_p(\mu), \mathbb{R})$. Αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον $L_p(\mu)$ με ξένα support, τότε*

$$|L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| \le c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu)) \|\widehat{L}\| \,,$$

για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \dots, k_n$ *με* $k_1 + \dots + k_n = m$, *όπου*

$$c(k_1, \dots, k_n; L_p(\mu)) = \begin{cases} \frac{\left(\sqrt{2\pi}[p]!! \sum_{i=1}^n k_i^{[p]/2}\right)^{\frac{m}{[p]}}}{m!} & \text{αν } p \geq m \\ \frac{n^{\frac{m-p}{p}} \sqrt{2\pi} m!! \sum_{i=1}^n k_i^{m/2}}{m!} & \text{αν } p \leq m \ . \end{cases}$$

Σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις προκύπτουν βέλτιστα αποτελέσματα και μελετάται η ασυμπτωτική συμπεριφορά των τύπων που προκύπτουν. Κάθε μια από τις τεχνικές χρησιμοποιείται επίσης για να πάρουμε αντίστοιχες εκτιμήσεις για μια ημι-νορμαρισμένη unconditional βασική ακολουθία (x_i) με τις απαραίτητες επιπλέον σταθερές. Επειδή υπάρχουν πολλές παράμετροι που επηρεάζουν κάθε τύπο, στο τέλος του κεφαλαίου εξηγείται αναλυτικά γιατί και πότε είναι χρήσιμη κάθε τεχνική.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αποδεικνύεται το

Θεώρημα V. *Για κάθε* $r \in (1, \infty)$, *υπάρχει* $\mathcal{L}^\infty$ *χώρος Banach* $\mathfrak{X}_r$ *που είναι* ℓ_r *κορεσμένος.*

και παρουσιάζεται η μέθοδος κατασκευής του χώρου αυτού. Για να επιτευχθεί αυτό, επιλέγουμε αρχικά ένα φυσικό αριθμό n και μια πεπερασμένη ακολουθία $\overline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ θετικών πραγματικών αριθμών με $b_1 < 1$, $b_2, b_3, \dots, b_n < \frac{1}{2}$ τέτοια ώστε $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^{r'} = 1$ και $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Ο ορισμός του $\mathfrak{X}_r$ συνδυάζει τη Bourgain-Delbaen μέθοδο κατασκευής "*εξωτικών*" $\mathcal{L}^\infty$ χώρων ([17]), με το χώρο τύπου Tsirelson $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \overline{b})$, ο οποίος αποδεικνύεται ότι είναι ισόμορφος με τον ℓ_r ([3], [6], [12], [15], [47]). Αξίζει να σημειωθεί ότι για $n = 2$ οι χώροι $\mathfrak{X}_r$ ταυτίζονται ουσιαστικά με τους κλασικούς χώρους Bourgain-Delbaen $\mathfrak{X}_{a,b}$. Επομένως, αυτή η κατασκευή των $\mathcal{L}^\infty$ χώρων που είναι ℓ_r κορεσμένοι, μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση της μεθόδου των Bourgain-Delbaen. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι Bourgain-Delbaen χώροι είναι παραδείγματα διαχωρίσιμων $\mathcal{L}^\infty$ χώρων που δεν περιέχουν ισομορφικά τον c_0 και είναι γνωστό ([37]) ότι κάθε διαχωρίσιμος $\mathcal{L}^\infty$ χώρος Banach που δεν περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1 έχει συζυγή ισόμορφο με τον ℓ_1. Στο [31], οι κλασικοί Bourgain-Delbaen χώροι $\mathfrak{X}_{a,b}$ με $a < 1$, $b < \frac{1}{2}$ και $a + b > 1$ αποδείχθηκε ότι είναι ℓ_p κορεσμένοι για p που ικανοποιεί τους τύπους $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $a^q + b^q = 1$.

Ο $\mathfrak{X}_r$ έχει μια φυσιολογική FDD (M_k). Δεδομένης μιας νορμαρισμένης (skipped block) βάσης (u_k) της (M_k) με τα support των u_k να απέχουν αρκετά, δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι η (u_k) κυριαρχεί την (e_k), που είναι η συνήθης βάση του $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \overline{b})$. Το ίδιο ισχύει για κάθε νορμαρισμένη block βάση της (u_k). Η προσσέγγιση που ακολουθούμε οδηγεί σε μία εναλλακτική απόδειξη για τον κορεσμό των χώρων τύπου Bourgain-Delbaen με αντίγραφα του ℓ_r, η οποία είναι πιο κοντά στο πνεύμα των μεθόδων εκτίμησης νορμών σε χώρους τύπου Tsirelson και mixed Tsirelson.

Στη συνέχεια, ορίζεται η δενδροειδής ανάλυση των συναρτησιακών $\{e_\gamma^* : \gamma \in \Gamma\}$ που αποτελούν 1-norming υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του $\mathfrak{X}_r^*$. Η δενδροειδής ανάλυση είναι παρόμοια με την αντίστοιχη που χρησιμοποιείται στους χώρους Tsirelson και mixed Tsirelson στο [6]. Τέλος, αποδεικνύουμε τις άνω και κάτω εκτιμήσεις νορμών για συγκεκριμένες block ακολουθίες του χώρου $\mathfrak{X}_r$, καθώς και ότι για κάθε block βάση ως προς την (M_k) υπάρχει περαιτέρω νορμαρισμένη block βάση (x_k) τέτοια ώστε κάθε νορμαρισμένη block βάση της (x_k) είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του χώρου $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$. Με το θεώρημα του Zippin αποδεικνύεται ότι ο $\mathfrak{X}_r$ είναι ℓ_r κορεσμένος.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή - Προκαταρκτικές έννοιες

1.1 Πολυώνυμα σε απειροδιάστατους χώρους Banach

Έστω ότι οι X,Y είναι χώροι Banach επί του $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Αν με X^m συμβολίσουμε το καρτεσιανό γινόμενο $X \times X \times \cdots \times X$ με m παράγοντες, η απεικόνιση $L : X^m \to Y$ θα λέγεται *m-γραμμική*, αν η απεικόνιση $x_i \mapsto L(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, είναι γραμμική. Δηλαδή μια m-γραμμική απεικόνιση είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή, όταν θεωρήσουμε σταθερές τις υπόλοιπες μεταβλητές. Θα λέμε ότι η m-γραμμική απεικόνιση $L : X^m \to Y$ είναι *συμμετρική* αν

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = L(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \,,$$

για κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X^m$ και κάθε αναδιάταξη σ των πρώτων m φυσικών αριθμών.

Θέτουμε $\mathcal{L}^s(^m X; Y)$ το χώρο Banach όλων των *συνεχών συμμετρικών m-γραμμικών μορφών* $L : X^m \to Y$ εφοδιασμένων με τη supremum νόρμα

$$\|L\| = \sup\{|L(x_1, \ldots, x_m)| : \|x_1\| \leq 1, \ldots, \|x_m\| \leq 1\} \,.$$

Για ευκολία, γράφουμε $\mathcal{L}^s(^m X)$ αντί για $\mathcal{L}^s(^m X; \mathbb{K})$. Μια συνάρτηση $P : X \to \mathbb{K}$ είναι *συνεχές m-ομογενές πολυώνυμο* αν υπάρχει μια συνεχής συμμετρική m-γραμμική μορφή $L : X^m \to \mathbb{K}$ για την οποία ισχύει ότι $P(x) = L(x, \ldots, x)$ για κάθε $x \in X$. Σε αυτή την περίπτωση είναι βολικό να γράφουμε $P = \widehat{L}$. Από τον ορισμό της m-γραμμικής απεικόνισης και του m-ομογενούς πολυωνύμου, προκύπτει ότι $P(\lambda x) = \lambda^m P(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και κάθε $x \in X$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(^m X)$

το χώρο Banach όλων των *συνεχών m-ομογενών πολυωνύμων* $P : X \to \mathbb{K}$ εφοδιασμένων με τη supremum νόρμα

$$\|P\| = \sup\{|P(x)| : \|x\| \leq 1\}\,.$$

Αποδεικνύεται στο [55, Θεώρημα 2.1] ότι κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού m γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ομογενών πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του m:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{m} P_n(x)\,,$$

όπου το $P_n(x)$ είναι βαθμού n.

Όπου χρειαστεί στη συνέχεια, θα γράφουμε $L\left(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}\right)$ ως συντομογραφία του $L(x_1, \ldots, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_n)$, όπου κάθε x_i εμφανίζεται k_i φορές για $1 \leq i \leq n$, $k_1 + \cdots + k_n = m$.

Από το θεώρημα Hahn-Banach μπορούμε να περιορίσουμε την προσοχή μας στην περίπτωση που $Y = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, αφού οι εκτιμήσεις μπορούν να μεταφερθούν σε τυχαίους τοπικά κυρτούς χώρους όταν αυτό απαιτείται.

Πρόταση 1. *Έστω X χώρος με νόρμα. Σε κάθε ομογενές πολυώνυμο $\widehat{L} \in \mathcal{P}(^m X)$ αντιστοιχεί μοναδική συμμετρική m-γραμμική μορφή $L \in \mathcal{L}^s(^m X)$, τέτοια ώστε $L(x, \ldots, x) = \widehat{L}(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση $L : X^m \to \mathbb{K}$ ορίζεται ως εξής:

$$L(x_1, \ldots, x_m) := \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial t_1 \ldots \partial t_m}\widehat{L}(t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m)\,, \tag{1.1.1}$$

για κάθε $x_1, \ldots, x_m \in X$ και $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{K}$. Από τον ορισμό, προκύπτει ότι το $m! L(x_1, \ldots, x_m)$ είναι ο συντελεστής του $t_1 \cdots t_m$ στο ανάπτυγμα του $\widehat{L}(t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m)$ βλέποντάς το ως αλγεβρικό πολυώνυμο ως προς $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{K}$. Εύκολα φαίνεται ότι η L είναι μια συμμετρική m-γραμμική μορφή, τέτοια ώστε $L(x, \ldots, x) = \widehat{L}(x)$ για κάθε $x \in X$.

Για να αποδείξουμε ότι η L είναι μοναδική, αρκεί να δείξουμε ότι αν η L είναι μια συμμετρική m-γραμμική μορφή με $L(x, \ldots, x) = \widehat{L}(x) \equiv 0$, τότε $L(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0$. Όμως η σχέση $\widehat{L}(x) \equiv 0$ συνεπάγεται ότι

$$\widehat{L}(t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m) = 0,$$

για κάθε $(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{K}^m$ και επομένως ο συντελεστής του $t_1 \cdots t_m$ είναι μηδέν. Δηλαδή,

$$L(x_1, \ldots, x_m) = 0\,.$$

□

Πρόταση 2. *Έστω X,Y δύο χώροι Banach, $L \in \mathcal{L}^s(^mX;Y)$ μια συμμετρική m-γραμμική απεικόνιση και $\widehat{L} \in \mathcal{P}(^mX;Y)$ το αντίστοιχο ομογενές πολυώνυμο. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) Η $L : X^m \to Y$ είναι συνεχής.

(ii) Το $\widehat{L} : X \to Y$ είναι συνεχές.

(iii) Το $\widehat{L} : X \to Y$ είναι συνεχές στο 0.

(iv) Υπάρχει σταθερά $M_1 > 0$ τέτοια ώστε $\|\widehat{L}(x)\| \leq M_1\|x\|^m$.

(v) Υπάρχει σταθερά $M_2 > 0$ τέτοια ώστε $\|L(x_1, \ldots, x_m)\| \leq M_2\|x_1\| \cdots \|x_m\|$, για κάθε $(x_1, \ldots, x_m) \in X^m$.

Το επόμενο λήμμα αποτελεί τον αρχικό και ευρέως γνωστό τύπο πολικότητας (δες [20, Πόρισμα 1.6]).

Λήμμα 1. *Έστω X,Y χώροι με νόρμα και $L \in \mathcal{L}^s(^mX;Y)$. Αν $x_1, \ldots, x_m \in X$, τότε*

$$L(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \widehat{L}\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right), \qquad (1.1.2)$$

όπου το άθροισμα το παίρνουμε για όλα τα $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$.

Απόδειξη. Από το πολυωνυμικό θεώρημα, έχουμε

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i\right)^m &= \sum_{n_1+\cdots+n_m=m} \frac{m!}{n_1! \cdots n_m!} L((\varepsilon_1 x_1)^{n_1} \cdots (\varepsilon_m x_m)^{n_m}) \\ &= \sum_{n_1+\cdots+n_m=m} \frac{m!}{n_1! \cdots n_m!} \varepsilon_1^{n_1} \cdots \varepsilon_m^{n_m} L(x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}). \end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε το δεξί μέρος της (1.1.2) με K, τότε

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \sum_{n_1+\cdots+n_m=m} \frac{m!}{n_1! \cdots n_m!} \varepsilon_1^{n_1} \cdots \varepsilon_m^{n_m} L(x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}) \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{n_1+\cdots+n_m=m} \frac{1}{n_1! \cdots n_m!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^{n_1+1} \cdots \varepsilon_m^{n_m+1} L(x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}). \end{aligned}$$

Αν $n_j = 0$ για κάποιο $j = 1, \ldots, m$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^{n_1+1} \cdots \varepsilon_m^{n_m+1} &= \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^{n_1+1} \cdots \varepsilon_{j-1}^{n_{j-1}+1} 1 \varepsilon_{j+1}^{n_{j+1}+1} \cdots \varepsilon_m^{n_m+1} \\ &\quad + \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^{n_1+1} \cdots \varepsilon_{j-1}^{n_{j-1}+1} (-1) \varepsilon_{j+1}^{n_{j+1}+1} \cdots \varepsilon_m^{n_m+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\sum\limits_{\varepsilon_i=\pm 1} \varepsilon_1^{n_1+1} \cdots \varepsilon_m^{n_m+1} \neq 0$ αν και μόνο αν $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1$. Όμως, σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε $\sum\limits_{\varepsilon_i=\pm 1} \varepsilon_1^2 \cdots \varepsilon_m^2 = 2^m$ και καταλήγουμε ότι $K = L(x_1, \ldots, x_m)$. $\square$

Αν $r_i(t) = \operatorname{sign} \sin 2^i \pi t$ είναι η i-οστή συνάρτηση Rademacher στο [0,1], τότε χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις Rademacher αντί των ε_i, παίρνουμε την ακόλουθη μορφή του τύπου πολικότητας:

$$L(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!} \int_0^1 r_1(t) \cdots r_m(t) \widehat{L} \left(\sum_{i=1}^m r_i(t) x_i \right) dt \,. \tag{1.1.3}$$

Ο τύπος αυτός γενικεύεται από το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο θα χρειαστεί σε πολλές περιπτώσεις στα επόμενα κεφάλαια.

Λήμμα 2. *Έστω X χώρος με νόρμα και $L \in \mathcal{L}^s({}^m X)$. Αν $x_1, \ldots, x_n \in X$, τότε*

$$L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}) = \frac{1}{m!} \int_0^1 r_1(t) \cdots r_m(t) \widehat{L} \left(\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t) x_1 + \cdots + \sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t) x_n \right) dt$$

για κάθε μη αρνητικούς ακεραίους $k_1, \ldots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$.

Η παρακάτω πρόταση αποδεικνύεται με χρήση του τύπου πολικότητας (1.1.2) (δες [20, Πρόταση 1.8]), όμως εμείς θα την αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον ισοδύναμο τύπο πολικότητας (1.1.3).

Πρόταση 3. *Έστω X,Y χώροι με νόρμα. Τότε, ισχύει ότι*

$$\|\widehat{L}\| \leq \|L\| \leq \frac{m^m}{m!} \|\widehat{L}\| \,,$$

για κάθε $L \in \mathcal{L}^s({}^m X, Y)$

Απόδειξη. Η ανισότητα $\|\widehat{L}\| \leq \|L\|$ προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των L και $\widehat{L}$. Αν $x_1, \ldots, x_m$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον X, από τον τύπο πολικότητας

(1.1.3) έχουμε

$$\begin{aligned}
\|L(x_1,\dots,x_m)\| &= \frac{1}{m!}\left\|\int_0^1 r_1(t)\dots r_m(t)\widehat{L}\left(\sum_{i=1}^m r_i(t)x_i\right)dt\right\| \\
&\le \frac{1}{m!}\int_0^1 \left\|\widehat{L}\left(\sum_{i=1}^m r_i(t)x_i\right)\right\| dt \\
&\le \frac{\|\widehat{L}\|}{m!}\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^m r_i(t)x_i\right\|^m dt \\
&\le \frac{\|\widehat{L}\|}{m!}\left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|\right)^m \\
&= \frac{m^m}{m!}\|\widehat{L}\|\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|L\| \le \frac{m^m}{m!}\|\widehat{L}\|\,.$$

Άρα για κάθε $L \in \mathcal{L}^s(^mX,Y)$ ισχύει

$$\|\widehat{L}\| \le \|L\| \le \frac{m^m}{m!}\|\widehat{L}\|\,.$$

□

Από όλα τα παραπάνω, εύλογα καταλήγουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4. *Αν X και Y είναι δύο χώροι Banach, η απεικόνιση*

$$\widehat{\ }\ :\ \mathcal{L}^s(^mX,Y)\ \to\ \mathcal{P}(^mX,Y)$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός.

Απόδειξη. Για κάθε $L_1, L_2 \in \mathcal{L}^s(^mX,Y)$ και $a \in \mathbb{K}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(\widehat{aL_1+L_2})(x) &= (aL_1+L_2)(x,\dots,x) \\
&= aL_1(x,\dots,x) + L_2(x,\dots,x) \\
&= a\widehat{L_1}(x) + \widehat{L_2}(x)\,.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η $\widehat{\ }$ είναι γραμμική. Επιπλέον, από την Πρόταση 1 η $\widehat{\ }$ είναι 1-1 και επί και τέλος από την Πρόταση 3 προκύπτει ότι η απεικόνιση αυτή είναι γραμμικός ισομορφισμός. □

Ο S. Dineen στο [20] εισήγαγε τον ακόλουθο χρήσιμο ορισμό:

Ορισμός 1. *Έστω X χώρος Banach επί του $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $m \in \mathbb{N}$. Η m-οστή σταθερά πολικότητας $\mathbb{K}(m, X)$ του X ορίζεται ως*

$$\mathbb{K}(m, X) = \inf\{M > 0 : \|L\| \leq M\|\widehat{L}\|, \text{ για κάθε } L \in \mathcal{L}^s(^m X)\},$$

όπου L η συνεχής συμμετρική m-γραμμική απεικόνιση που συσχετίζεται με το πολυώνυμο $\widehat{L}$. Επίσης, ορίζουμε τη σταθερά πολικότητας του X ως

$$\mathbb{K}(X) = \limsup_{m \to \infty} \mathbb{K}(m, X)^{\frac{1}{m}}.$$

Αποδεικνύεται ότι η $\mathbb{K}(m, \cdot)$ είναι ισομετρική ιδιότητα των χώρων Banach, όμως η σταθερά εξαρτάται από τη διάσταση του χώρου (π.χ. $\mathbb{C}(m, \ell_1^m) = \frac{m^m}{m!}$ και $\mathbb{C}(m, \ell_1^{m-1}) = \frac{m^m}{2m!}$). Από την Πρόταση 3, προκύπτει ότι για κάθε χώρο Banach X ισχύει

$$1 \leq \mathbb{K}(m, X) \leq \frac{m^m}{m!}.$$

Αν γνωρίζουμε τη βέλτιστη σταθερά $\mathbb{K}(m, X)$ και θέλουμε να κάνουμε υπολογισμούς, εργαζόμαστε στον $\mathcal{L}^s(^m X)$ γιατί είναι δύσκολοι οι υπολογισμοί στο χώρο $\mathcal{P}(^m X)$. Όπως θα φανεί στο επόμενο παράδειγμα, η σταθερά $\frac{m^m}{m!}$ είναι η βέλτιστη δυνατή για τυχαίο χώρο Banach. Σε συγκεκριμένους χώρους, όπως στον ℓ_1^{m-1} προηγουμένως και αρκετούς άλλους που θα μελετήσουμε παρακάτω, προκύπτουν καλύτερες τιμές.

Παραδείγμα 1 (Nachbin, 1968)**.** *Έστω $x = (x_i) \in \ell_1$, $L \in \mathcal{L}^s(^m l_1)$ και $\widehat{L} \in \mathcal{P}(^m l_1)$ το πολυώνυμο που αντιστοιχεί στην L τέτοιο ώστε*

$$\widehat{L}(x) = x_1 x_2 \cdots x_m.$$

Αν $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ είναι η συνήθης βάση του ℓ_1, τότε

$$\begin{aligned} L(e_1, \ldots, e_m) &= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \widehat{L}\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i e_i\right) \\ &= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^2 \cdots \varepsilon_m^2 \\ &= \frac{1}{m!}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|L\| \geq \frac{1}{m!}.$$

Από την ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου, έχουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{L}(x)| &= |x_1 x_2 \cdots x_m| \\ &\leq \left(\frac{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|}{m}\right)^m \\ &\leq \frac{1}{m^m}\|x\|_1^m \ . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|\widehat{L}\| \leq \frac{1}{m^m}\,.$$

Όμως, για το $x = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}, 0, \dots\right)$, *ισχύει* $\|x\|_1 = 1$ *και* $|\widehat{L}(x)| = \frac{1}{m^m}$.
Άρα,

$$\|\widehat{L}\| = \frac{1}{m^m}\,.$$

Τελικά, παίρνουμε

$$\|L\| \leq \frac{m^m}{m!}\|\widehat{L}\| = \frac{m^m}{m!} \cdot \frac{1}{m^m} = \frac{1}{m!} \leq \|L\|$$

και καταλήγουμε ότι

$$\|L\| = \frac{m^m}{m!}\|\widehat{L}\|\,,$$

δηλαδή $\mathbb{K}(m, \ell_1) = \frac{m^m}{m!}$.

Για να εκμεταλλευτούμε την ισομετρική φύση της $\mathbb{K}(m, \cdot)$, ορίζουμε τη *Banach-Mazur απόσταση* $d(\cdot, \cdot)$. Αν οι X,Y είναι ισόμορφοι χώροι Banach, υπάρχει μια συνεχής αμφιμονοσήμαντη γραμμική απεικόνιση $T : X \to Y$, για την οποία ισχύει

$$\|x\| = \|T^{-1}T(x)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|\,.$$

Επομένως, $\|T^{-1}\| \cdot \|T\| \geq 1$ και η T είναι πολλαπλάσιο ισομετρίας αν και μόνο αν $\|T^{-1}\| \cdot \|T\| = 1$. Παίρνοντας το infimum ως προς όλους τους ισομορφισμούς, προκύπτει ένα ποσοτικό μέτρο που περιγράφει πόσο κοντά είναι οι χώροι X και Y ισομετρικά.

Ορισμός 2. *Έστω X,Y ισόμορφοι χώροι Banach. Η Banach-Mazur απόσταση μεταξύ των X και Y ορίζεται ως*

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| : \ T : X \to Y \ \textit{ισομορφισμός}\}\,.$$

Προκύπτει ότι $d(X,Y) \geq 1$ για κάθε X,Y και $d(X,Y)d(Y,Z) \geq d(X,Z)$ για κάθε X,Y,Z. Επίσης, λέμε ότι ο X είναι ισομετρικός του Y, όταν υπάρχει αντιστρέψιμη απεικόνιση $T : X \to Y$ επί, τέτοια ώστε $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ (δηλαδή $\|T(x)\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $d(X,Y) = 1$, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει (μπορεί να ισχύει ότι $d(X,Y) = 1$, αλλά το infimum στον ορισμό του $d(X,Y)$ να μην επιτυγχάνεται, οπότε ο X δεν είναι ισομετρικός του Y).

Πρόταση 5. *Αν X,Y είναι δυο ισόμορφοι χώροι Banach, τότε*

$$\mathbb{K}(m,Y) \leq d^m(X,Y)\,\mathbb{K}(m,X)\,,$$

όπου $d(X,Y)$ είναι η Banach-Mazur απόσταση μεταξύ των X και Y.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $L \in \mathcal{L}^s({}^mY)$ τέτοιο ώστε

$$\|L\| \geq (\mathbb{K}(m,Y) - \varepsilon)\,\|\widehat{L}\|\,.$$

Επίσης, υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε

$$\|T^{-1}\| = 1 \;\text{ και }\; \|T\| \leq d(X,Y) + \varepsilon\,.$$

Θέτουμε $F = L \circ T^m \in L^s({}^mX)$, επομένως $L = F \circ (T^{-1})^m$ και

$$\|L\| \leq \|F\| \cdot \|T^{-1}\|^m = \|F\|\,.$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{F}\| &\leq \|\widehat{L}\| \cdot \|T\|^m \\
&\leq \|\widehat{L}\|(d(X,Y)+\varepsilon)^m \\
&\leq \frac{\|L\|}{\mathbb{K}(m,Y)-\varepsilon}\,(d(X,Y)+\varepsilon)^m \\
&\leq \frac{\|F\|}{\mathbb{K}(m,Y)-\varepsilon}\,(d(X,Y)+\varepsilon)^m\,.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|F\| \geq \frac{\mathbb{K}(m,Y)-\varepsilon}{(d(X,Y)+\varepsilon)^m}\|\widehat{F}\|$$

και από την τελευταία ανισότητα προκύπτει ότι

$$(\mathbb{K}(m,Y) - \varepsilon) \leq (d(X,Y)+\varepsilon)^m\,\mathbb{K}(m,X)\,.$$

Αφού αυτό αληθεύει για κάθε $\varepsilon > 0$, η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Στο επόμενο λήμμα συμβολίζουμε με $\check{}$ την αντίστροφη απεικόνιση της $\hat{}$.

Λήμμα 3. *Αν ο Y είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Banach X και $\pi : X \to Y$ είναι μία συνεχής προβολή, τότε*

$$\mathbb{K}(m, Y) \leq \|\pi\|^m \mathbb{K}(m, X) .$$

Απόδειξη. Αν $P \in \mathcal{P}(^mY)$, τότε $P \circ \pi \in \mathcal{P}(^mX)$ και $P \circ \pi\,|_Y = P$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|P \circ \pi\| &= \sup_{\|x\| \leq 1,\, x \in X} |P(\pi(x))| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1,\, x \in X} \|P\| \cdot \|\pi(x))\|^m \\ &\leq \|P\| \cdot \|\pi\|^m . \end{aligned}$$

Από τον τύπο πολικότητας, $P \check{\circ} \pi\,|_{Y^m} = \check{P}$. Επομένως

$$\|\check{P}\| \leq \|P \check{\circ} \pi\| \leq \mathbb{K}(m, X) \cdot \|P \circ \pi\| \leq \mathbb{K}(m, X)\|\pi\|^m \|P\|$$

και

$$\mathbb{K}(m, Y) \leq \|\pi\|^m \mathbb{K}(m, X) .$$

□

Στη συνέχεια, ακολουθεί ένα θεώρημα που αρχικά αποδείχτηκε από τον G. Pisier το 1974 (δες [49]) και παρουσιάζουμε μία γενίκευσή του που αποδείχθηκε από τους B. Maurey - G. Pisier το 1976. Για να καταλήξουμε όμως εκεί, χρειάζονται πρώτα κάποιοι ορισμοί.

Ορισμός 3. *Ένας χώρος Banach X λέμε ότι έχει type p, $1 \leq p \leq 2$, αν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε για κάθε πεπερασμένο σύνολο $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ να ισχύει*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Ένας χώρος Banach X λέμε ότι έχει cotype q, $2 \leq q \leq \infty$, αν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε για κάθε πεπερασμένο σύνολο $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ να ισχύει

$$C \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \geq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} ,$$

ή ισοδύναμα

$$C\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Για παράδειγμα, οι χώροι L_p, $1 \leq p < \infty$, έχουν type ίσο με $\min\{p, 2\}$ και cotype ίσο με $\max\{p, 2\}$. Αυτό αποδεικνύεται με χρήση της ανισότητας του Khinchine (δες [11]), σύμφωνα με την οποία για κάθε $0 < p < \infty$, υπάρχουν $0 < A_p \leq B_p < \infty$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και πραγματικούς αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$, ισχύει

$$A_p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right\|_{L_p} \leq B_p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.4}$$

Το δεξιό μέλος της ανισότητας (1.1.4) με $B_p = 1$ προκύπτει άμεσα για $0 < p < 2$ από την ανισότητα του Hölder και το γεγονός ότι τα r_i είναι είναι ορθοκανονικά στον L_2. Το ίδιο ισχύει και για το αριστερό μέλος με $A_p = 1$ για $2 < p < \infty$.

Επίσης, αν ένας χώρος έχει type p, τότε έχει και κάθε type μικρότερο του p και αν έχει cotype q, τότε έχει και κάθε cotype μεγαλύτερο του q. Οι δεύτεροι τύποι των type και cotype που δόθηκαν στον προηγούμενο ορισμό, δίνουν απλούστερες εκτιμήσεις για τους L_p και εφαρμόζονται καλύτερα στη δυϊκότητα.

Ορισμός 4. *Έστω X,Y χώροι Banach. Ο X λέγεται πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο X_0 του X, υπάρχει πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος Y_0 του Y και ισομορφισμός $T : X_0 \to Y_0$ τέτοιος ώστε*

$$\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon.$$

Για παράδειγμα, κάθε χώρος Banach X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον c_0 και ο X^{**} είναι στον X (local reflexivity principle). Επίσης, ο L_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον ℓ_p, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Από τον ορισμό της Banach-Mazur απόστασης, η συνθήκη που ικανοποιεί ο ισομορφισμός του προηγούμενου ορισμού, είναι ισοδύναμη με την

$$d(X_0, Y_0) < 1 + \varepsilon.$$

Για περαιτέρω χρήση, σημειώνουμε ότι οι επόμενες εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

- Ο ℓ_1 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.
- Ο ℓ_1 είναι $(1 + \varepsilon)$-ισόμορφος με τον X.

- Ο X περιέχει σχεδόν ισομετρικά τον ℓ_1.
- Ο X περιέχει σχεδόν ισομετρικά αντίγραφα του ℓ_1^n.

Ορισμός 5. *Αν $\mathcal{P}$ είναι μια ιδιότητα που ορίζεται για χώρους Banach, τότε ένας χώρος Banach X έχει την ιδιότητα super $\mathcal{P}$ αν κάθε χώρος Banach πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$.*

Από τον παραπάνω ορισμό, προκύπτει εύλογα ο επόμενος.

Ορισμός 6. *Μία ιδιότητα $\mathcal{P}$ που ορίζεται για χώρους Banach, λέγεται super-ιδιότητα αν γνωρίζουμε ότι οποτεδήποτε ένας χώρος Banach X έχει την $\mathcal{P}$, τότε κάθε χώρος Banach πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X έχει την $\mathcal{P}$.*

Τα type και cotype είναι super-ιδιότητες γιατί κληρονομούνται στους υπόχωρους.

Θεώρημα 1. *Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

α. Ο X δεν έχει type p για κάθε $p > 1$.

β. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in X$ με $\|x_i\| = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ τέτοια ώστε

$$\min_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\| \geq n - \varepsilon \,.$$

γ. Ο ℓ_1 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Το θεώρημα του G. Pisier είναι πολύ σημαντικό γιατί αποτελεί το πέρασμα από ένα πιθανοθεωρητικό περιεχόμενο του ορισμού του type σε μια καθαρά ντετερμινιστική κατάσταση που περιγράφεται στο (γ). Μας λέει ότι συγκεκριμένες αφηρημένες καταστάσεις, όπως στο (α), συμβαίνουν μόνο λόγω της παρουσίας πολύ συγκεκριμένων υπόχωρων όπως είναι οι ℓ_1^n. Ήταν η αρχή για τη μελέτη της σύνδεσης μεταξύ των type-cotype και της γεωμετρίας του χώρου. Πλέον το θέμα έχει αναπτυχθεί πολύ.

Με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος, αποδεικνύεται συντομότερα το επόμενο (δες [46]), του οποίου η αρχική του απόδειξη βρίσκεται στο [20].

Θεώρημα 2. *Έστω X χώρος Banach με $\mathbb{K}(m, X) = \frac{m^m}{m!}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε ο X περιέχει σχεδόν ισομετρικά αντίγραφα του l_1^m για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα, ο X δεν έχει type p για κάθε $p > 1$.*

Το αντίστροφο δεν ισχύει και αυτό μπορούμε να το δούμε αν θεωρήσουμε το μιγαδικό χώρο Banach ℓ_∞. Από το [38] γνωρίζουμε ότι ο ℓ_∞ δεν έχει type p για κάθε $p > 1$ και από το θεώρημα του G. Pisier περιέχει σχεδόν ισομετρικά αντίγραφα του ℓ_1^m για κάθε m. Όμως, από το [29] έχουμε ότι

$$\mathbb{K}(m, \ell_\infty) \leq \frac{m^{\frac{m}{2}}(m+1)^{\frac{m+1}{2}}}{2^m m!} < \frac{m^m}{m!}\,.$$

Αν ο X είναι χώρος Banach διάστασης m, τότε κάθε πλειογραμμική μορφή στον X είναι συνεχής. Αν L είναι μια συμμετρική m-γραμμική μορφή στον X, τότε η L επιτυγχάνει τη νόρμα της αφού η μοναδιαία μπάλα του X^m είναι συμπαγής. Χρησιμοποιώντας αυτές τις παρατηρήσεις παίρνουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 1. *Έστω X χώρος Banach διάστασης m. Ισχύει ότι $\mathbb{K}(m, X) = \frac{m^m}{m!}$ αν και μόνο αν ο X είναι ισομετρικός του l_1^m.*

Θα παρουσιάσουμε τώρα τις προαπαιτούμενες γνώσεις ώστε να αποδείξουμε ότι σε κάθε πραγματικό ή μιγαδικό χώρο Hilbert H ισχύει $\|L\| = \|\widehat{L}\|$ για κάθε $\widehat{L} \in \mathcal{P}(^m H)$. Η απόδειξη που παρουσιάζεται, χρησιμοποιεί μία γνωστή ανισότητα του S. Bernstein για τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Ορισμός 7. *Έστω X,Y δύο χώροι με νόρμα και U είναι ένα μη-κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Η απεικόνιση $f : U \to Y$ λέγεται Fréchet παραγωγίσιμη στο $x \in U$ αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $F : X \to Y$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{y \to 0} \frac{\|f(x+y) - f(x) - F(y)\|}{\|y\|} = 0\,.$$

Η F είναι η *Fréchet παράγωγος της f στο $x \in U$* και συμβολίζεται με $Df(x)$, δηλαδή $F = Df(x)$. Αν η $f : U \to Y$ είναι Fréchet παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του U, τότε η f λέγεται Fréchet παραγωγίσιμη στο U. Σε αυτή την περίπτωση η απεικόνιση $U \ni x \mapsto Df(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ είναι η Fréchet παράγωγος της f στο U και συμβολίζεται με Df.

Πρόταση 6. *Αν $L \in \mathcal{L}^s(^m X, Y)$, τότε το ομογενές πολυώνυμο $\widehat{L}$ είναι Fréchet παραγωγίσιμο για κάθε $x \in X$ και ισχύει*

$$D\widehat{L}(x)(y) = mL(x^{m-1}y)\,, \;\; y \in X\,.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} & \frac{\|\widehat{L}(x+y)-\widehat{L}(x)-mL(x^{m-1}y)\|}{\|y\|} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\|L((x+y)^m)-L(x^m)-nL(x^{m-1}y)\|}{\|y\|} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\big\|\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}L(x^{m-k}y^k)-L(x^m)-mL(x^{m-1}y)\big\|}{\|y\|} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\big\|\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}L(x^{m-k}y^k)\big\|}{\|y\|} \\
&\le \lim_{y\to 0}\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}\|L\|\|x\|^{m-k}\|y\|^{k-1}=0\,,
\end{aligned}
$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το διωνυμικό τύπο. Από τον ορισμό της Fréchet παραγώγου, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Για να αποδείξουμε ότι $\|L\|=\|\widehat{L}\|$, αρκεί να δείξουμε ότι $L(x^{m-1}y)\le\|\widehat{L}\|$ για κάθε μοναδιαία διανύσματα $x,y\in H$. Δηλαδή, $\|L\|=\|\widehat{L}\|$ για κάθε $\widehat{L}\in\mathcal{P}(^mH)$ αν και μόνο αν

$$\|D\widehat{L}\|\le m\|\widehat{L}\|\,, \tag{1.1.5}$$

για κάθε $\widehat{L}\in\mathcal{P}(^mH)$. Πράγματι, αν $\|L\|=\|\widehat{L}\|$, ισχύει

$$\|D\widehat{L}(x)\|=\sup_{\|y\|\le 1}|D\widehat{L}(x)(y)|=m\sup_{\|y\|\le 1}|L(x^{m-1}y)|\le m\|L\|=m\|\widehat{L}\|\,,$$

για κάθε $x\in H$ με $\|x\|\le 1$. Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα με επαγωγή στο m. Γνωρίζουμε ότι η ανισότητα τύπου Bernstein (1.1.5) ισχύει σε μιγαδικούς και πραγματικούς χώρους Hilbert από το [29] και το [53] αντίστοιχα. Επιπλέον, για πραγματικούς χώρους Hilbert είναι ισοδύναμη με την ανισότητα του Szegö για πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα (δες [29]). Σύμφωνα με αυτήν, αν

$$T(\theta)=\sum_{k=-m}^{m}c_k e^{ik\theta}\,,\quad \text{με}\ \ c_{-k}=\bar{c}_k\,,$$

είναι ένα πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού m τέτοιο ώστε $|T(\theta)|\le 1$ για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$, τότε

$$m^2T^2(\theta)+[T'(\theta)]^2\le m^2\,,$$

για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. Όμως, η ανισότητα του Szegö αποτελεί ειδική περίπτωση μιας γενικότερης ανισότητας για ακέραιες συναρτήσεις εκθετικού τύπου, οι οποίες ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 8. *Μία ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ λέγεται εκθετικού τύπου αν για κάποιο $A > 0$ η ανισότητα*

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)| < e^{Ar}$$

ικανοποιείται για επαρκώς μεγάλες τιμές του r. Το μέγιστο ελάχιστο φράγμα για τις τιμές του A που ικανοποιούν την παραπάνω ασυμπτωτική ανισότητα λέγεται τύπος $\sigma = \sigma_f$ της συνάρτησης f.

Από τον ορισμό του τύπου, προκύπτει ότι

$$\sigma_f = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M_f(r)}{r}.$$

Για παράδειγμα, αν το $T(\theta) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ik\theta}$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $\leq m$, τότε η $T(z) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikz}$ είναι ακέραια συνάρτηση εκθετικού τύπου $\leq m$. Ένα γνωστό θεώρημα του S. N. Bernstein λέει ότι αν μία f είναι ακέραια συνάρτηση εκθετικού τύπου $\leq \sigma$, τότε ικανοποιεί την ανισότητα

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sigma \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Το επόμενο θεώρημα (δες [16]) δίνει την ανισότητα του Bernstein ως ειδική περίπτωση.

Θεώρημα 3. *Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μία ακέραια συνάρτηση εκθετικού τύπου $\leq \sigma$ με $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$. Τότε, για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)\cos\omega + \sigma f(x)\sin\omega| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|. \tag{1.1.6}$$

Η ισότητα ισχύει στην (1.1.6) αν και μόνο αν $f(z) = ae^{i\sigma z} + be^{-i\sigma z}$, όπου $a, b \in \mathbb{C}$.

Ειδικότερα, αν το T είναι πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού m, η ανισότητα 1.1.6 δίνει την ανισότητα του Szegö:

$$\sqrt{m^2T^2(\theta) + [T'(\theta)]^2} \leq m \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|.$$

Τώρα, θα αποδείξουμε ότι η ανισότητα τύπου Bernstein (1.1.5) σε πραγματικούς ή μιγαδικούς χώρους Hilbert μπορεί να προκύψει από την ανισότητα (1.1.6).

Θεώρημα 4. *Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας πραγματικός ή μιγαδικός χώρος Hilbert. Αν $\widehat{L} \in \mathcal{P}(^m H)$, τότε*

$$\|D\widehat{L}\| \leq m\|\widehat{L}\|\,.$$

Με άλλα λόγια, $\|L\| = \|\widehat{L}\|$ για κάθε $L \in \mathcal{L}^s(^m H)$.

Απόδειξη. Έστω x,y μοναδιαία διανύσματα στον H και $c \in \mathbb{C}$ με $|c| = 1$. Τότε το

$$T(\theta) := \widehat{L}(x\cos\theta + cy\sin\theta)$$

είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $\leq m$. Αν τα x,y είναι ορθογώνια, τότε για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$

$$|T(\theta)| = \left|\widehat{L}\left(x\cos\theta + cy\sin\theta\right)\right| \leq \|\widehat{L}\|\|x\cos\theta + cy\sin\theta\|^m = \|\widehat{L}\|\,.$$

Όμως,

$$T'(\theta) = D\widehat{L}(x\cos\theta + cy\sin\theta)(-x\sin\theta + cy\cos\theta)$$

και από την (1.1.6), για $\theta = 0$, έχουμε

$$|cD\widehat{L}(x)(y)\cos\omega + m\widehat{L}(x)\sin\omega| \leq m\|\widehat{L}\|\,,$$

για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$. Για κατάλληλη επιλογή του c, με $|c| = 1$, παίρνουμε

$$\left(|D\widehat{L}(x)(y)|^2 + m^2|\widehat{L}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq m\|\widehat{L}\|$$

και επομένως

$$\left(|L(x^{m-1}y)|^2 + |\widehat{L}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\widehat{L}\|\,. \tag{1.1.7}$$

Έστω τώρα x ένα σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα στον H. Τότε, για δοθέν μοναδιαίο διάνυσμα $z \in H$ μπορούμε να βρούμε $y \in H$ ορθογώνιο στο x τέτοιο ώστε $z = ax + by$, όπου $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Χρησιμοποιώντας την (1.1.7) παίρνουμε

$$\left|L(x^{m-1}z)\right| = \left|a\widehat{L}(x) + bL(x^{m-1}y)\right| \leq \left(|\widehat{L}(x)|^2 + |L(x^{m-1}y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\widehat{L}\|\,.$$

Άρα,

$$\|D\widehat{L}(x)\| = \sup_{\|z\|=1} |D\widehat{L}(x)(z)| = m \sup_{\|z\|=1} |L(x^{m-1}z)| \leq m\|\widehat{L}\|\,.$$

□

Το Θεώρημα 4, όταν ο H είναι πραγματικός χώρος Hilbert, αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Kellogg, van der Corput - Schaake και Banach.

1.2 Καθολικά αδιάσπαστοι χώροι Banach

Ορισμός 9. *Έστω X ένα μη κενό αριθμήσιμο σύνολο. Με $c_{00}(X)$ συμβολίζουμε το διανυσματικό χώρο $\{f : X \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0$ για πεπερασμένα $x\}$, με τις κατά σημείο πράξεις.*

Συνήθως σε τέτοιους χώρους θεωρούμε $X = \mathbb{N}$, δηλαδή χρησιμοποιούμε τον $c_{00}(\mathbb{N})$, ή απλούστερα c_{00}.

Ορισμός 10. *Αν $f \in c_{00}(X)$, ορίζουμε $\operatorname{supp} f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Επίσης, με $(e_x)_{x\in X}$ συμβολίζουμε τη συνήθη Hamel βάση του $c_{00}(X)$, που αποτελείται από τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις των μονοσυνόλων του X, δηλαδή ισχύει $e_x(y) = 0$ για κάθε $y \neq x$ και $e_x(x) = 1$. Ειδικότερα, αν ο χώρος είναι ο $c_{00}(\mathbb{N})$, με $\operatorname{ran} f$ συμβολίζουμε το ελάχιστο διάστημα του $\mathbb{N}$ που περιέχει το $\operatorname{supp} f$ και με $(e_n)_n$ τη βάση του.*

Παρατήρηση 1. *Συχνά ο χώρος X είναι αριθμήσιμο σύνολο, διαφορετικό του $\mathbb{N}$ και εφοδιασμένο με μία ολική διάταξη "$<$". Σε αυτή την περίπτωση, το $\operatorname{ran} f$ ορίζεται ανάλογα.*

Ορισμός 11. *Έστω E_1, E_2 δύο μη κενά, πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Τα E_1, E_2 λέγονται διαδοχικά όταν $\max E_1 < \min E_2$ και συμβολίζονται με $E_1 < E_2$. Αντίστοιχα, για κάθε $x, y \in c_{00}$ με $\operatorname{ran} x < \operatorname{ran} y$ γράφουμε $x < y$. Τέλος, μία ακολουθία $(x_n)_n \subset c_{00}$ τέτοια ώστε $x_n < x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λέγεται block ακολουθία.*

Σε χώρους $c_{00}(X)$, όπου ο X ορίζεται όπως στην Παρατήρηση 1, οι παραπάνω έννοιες ορίζονται ανάλογα.

Στη συνέχεια ανακαλούμε τον ορισμό της Schauder βάσης, της βασικής ακολουθίας, καθώς και κάποια ευρέως γνωστά αποτελέσματα από το κλασικό βιβλίο των J. Lindenstrauss, L. Tzafriri [38].

Ορισμός 12. *Μία ακολουθία $(x_n)_n$ σε ένα χώρο Banach X λέγεται Schauder βάση του X, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_n$ τέτοια ώστε $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Μια ακολουθία $(x_n)_n$ που είναι Schauder βάση της κλειστότητας του γραμμικού χώρου που παράγει, λέγεται (Schauder) βασική ακολουθία.*

Έστω $(X, \|\|)$ ένας χώρος Banach με βάση $(x_n)_n$. Για κάθε $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ στον X, η έκφραση $|||x||| = \sup\limits_n \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$ είναι πεπερασμένη. Επομένως, η $||| \cdot |||$ είναι νόρμα στον X και ισχύει $\|x\| \leq |||x|||$ για κάθε $x \in X$. Ο X είναι επίσης πλήρης ως προς την $|||\cdot|||$ και από το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης, οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $|||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες. Αυτές οι παρατηρήσεις αποδεικνύουν την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 7. *Έστω X χώρος Banach με Schauder βάση $(x_n)_n$. Τότε οι προβολές $P_n : X \to X$ που ορίζονται ως*

$$P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και ισχύει $\sup_n \|P_n\| < \infty$.

Οι προβολές $(P_n)_n$ λέγονται φυσικές προβολές που συσχετίζονται με την βάση $(x_n)_n$.

Ορισμός 13. *Έστω X χώρος Banach με βάση $(x_n)_n$. Ο αριθμός $\sup_n \|P_n\|$ λέγεται σταθερά της βάσης. Μία βάση λέγεται μονότονη όταν έχει σταθερά βάσης ίση με 1 και διμονότονη όταν $\sup_n \|P_I\| = 1$, όπου I ένα αυθαίρετο διάστημα των φυσικών αριθμών.*

Παρατήρηση 2. *Κάθε Schauder βάση $(x_n)_n$ είναι μονότονη ως προς τη νόρμα $|||x||| = \sup_n \|P_n(x)\|$, που ορίσαμε παραπάνω. Πράγματι,*

$$|||P_n(x)||| = \sup_m \|P_m(P_n(x))\| = \sup_{1\leq m\leq n} \|P_m(x)\| \leq |||x|||\,.$$

Επομένως, δοθείσης οποιασδήποτε Schauder βάσης $(x_n)_n$ του X, μπορούμε να περάσουμε σε μία ισοδύναμη νόρμα στον X, για την οποία η συγκεκριμένη βάση είναι μονότονη.

Πρόταση 8. *Έστω $(x_n)_n$ μία ακολουθία διανυσμάτων στον X. Η $(x_n)_n$ είναι Schauder βάση του X αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι επόμενες τρεις συνθήκες.*

(i) $x_n \neq 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και φυσικών $n < m$, ισχύει*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

(iii) *Η κλειστή γραμμική θήκη της $(x_n)_n$ είναι ο X.*

Μία βάση $(x_n)_n$ λέγεται *νορμαρισμένη* όταν $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η $(x_n)_n$ είναι Schauder βάση του X, η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)_n$ είναι νορμαρισμένη βάση του X. Η συνήθης βάση $(e_n)_n$ του $c_{00}(\mathbb{N})$ αποτελεί μονότονη και νορμαρισμένη Schauder βάση του χώρου c_0 των μηδενικών ακολουθιών με τη νόρμα άπειρο και των ℓ_p, για $1 \leq p < \infty$.

Το γεγονός ότι στους συνήθεις χώρους υπάρχει Schauder βάση, οδήγησε τον Banach να θέσει το ερώτημα κατά πόσον κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει βάση. Το πρόβλημα αυτό παρέμεινε ανοικτό για πολύ καιρό και απαντήθηκε αρνητικά το 1973 από τον P. Enflo [22].

Θεώρημα 5. *Υπάρχει χώρος Banach που δεν έχει καμία Schauder βάση.*

Παρόλα αυτά, αποδείχθηκε από τον S. Mazur ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει βασική ακολουθία.

Θεώρημα 6. *Κάθε χώρος Banach περιέχει βασική ακολουθία.*

Λήμμα 4. *Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach, $B \subset X$ πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος και $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε*

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|\,,$$

για κάθε $y \in B$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\varepsilon < 1$. Έστω $y_1, \ldots, y_m$ στοιχεία νόρμας 1 στον B τέτοια ώστε για κάθε $y \in B$ με $\|y\| = 1$ υπάρχει $1 \leq i \leq m$ για το οποίο ισχύει $\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Έστω επίσης, $y_1^*, \ldots, y_m^*$ στοιχεία νόρμας 1 στον X^* τέτοια ώστε $y_i^*(y_i) = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$ και έστω $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $y_i^*(x) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Αυτό το x έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Πράγματι, έστω $y \in B$ με $\|y\| \leq 1$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ τέτοιο ώστε $\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\|y + \lambda x\| \geq \|y_i + \lambda x\| - \frac{\varepsilon}{2} \geq y_i^*(y_i + \lambda x) - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\|y\|}{1+\varepsilon}\,.$$

□

Απόδειξη του θεωρήματος 6. Έστω $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon_n)_n$ ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n) \leq 1+\varepsilon$ και x_1 στοιχείο του X νόρμας 1. Από το Λήμμα 6, μπορούμε να κατασκευάσουμε επαγωγικά μία ακολουθία $(x_n)_{n\geq 2}$ μοναδιαίων διανυσμάτων τέτοιων ώστε για κάθε $n \geq 1$ να ισχύει

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon_n)\|y + \lambda x_{n+1}\|\,,$$

για κάθε $y \in \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Επειδή

$$\|P_n\| \leq \prod_{i=n}^{\infty}(1+\varepsilon_i)\,,$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, η ακολουθία $(x_n)_n$ είναι βασική ακολουθία στον X με σταθερά βάσης μικρότερη ή ίση του $1+\varepsilon$. □

Μια πολύ χρήσιμη μέθοδος για να βρούμε νέες βασικές ακολουθίες, ξεκινώντας από δοθείσα βάση ή βασική ακολουθία, είναι θεωρώντας block βάσεις.

Ορισμός 14. *Έστω $(x_n)_n$ μία βασική ακολουθία σε ένα χώρο Banach X. Μια ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων $(y_i)_i$ στον X της μορφής $y_i = \sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} a_n x_n$, με $(a_n)_n$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $p_1 < p_2 < \cdots$ φυσικούς, λέγεται block βασική ακολουθία ή απλούστερα block βάση της $(x_n)_n$.*

Είναι σαφές ότι μια block βάση $(y_i)_i$ της $(x_n)_n$ είναι βασική ακολουθία, της οποίας η σταθερά βάσης δεν ξεπερνά αυτή της $(x_n)_n$. Η χρησιμότητα της έννοιας της block βάσης έγκειται στην επόμενη πρόταση. Πρώτα όμως θα χρειαστεί να ορίσουμε τις ισοδύναμες βάσεις.

Ορισμός 15. *Δύο βάσεις $(x_n)_n$ του X και $(y_n)_n$ του Y λέγονται ισοδύναμες όταν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ συγκλίνει.*

Πρόταση 9. *Έστω X χώρος Banach με Schauder βάση $(x_n)_n$ και Y κλειστός απειροδιάστατος υπόχωρος του X. Τότε, υπάρχει υπόχωρος Z του Y που έχει βάση ισοδύναμη με μία block βάση της $(x_n)_n$.*

Απόδειξη. Επειδή ο Y είναι απειροδιάστατος, υπάρχει για κάθε ακέραιο p, στοιχείο $y \in Y$ με $\|y\| = 1$ της μορφής $y = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n x_n$. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά τη block βάση της $(x_n)_n$.

Επιλέγουμε $y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,1} x_n \in Y$ με $\|y_1\| = 1$. Υπάρχει ακέραιος p_1 τέτοιος ώστε $\|y_1 - u_1\| < \frac{1}{4K}$, όπου $u_1 = \sum_{n=1}^{p_1} a_{n,1} x_n$ και K η σταθερά βάσης της $(x_n)_n$.

Στη συνέχεια, επιλέγουμε $y_2 = \sum_{n=p_1+1}^{\infty} a_{n,2} x_n \in Y$ με $\|y_2\| = 1$ και ακέραιο p_2 τέτοιο ώστε $\|y_2 - u_2\| < \frac{1}{4^2 K}$, όπου $u_2 = \sum_{n=p_1+1}^{p_2} a_{n,2} x_n$.

Συνεχίζοντας ομοίως, κατασκευάζουμε ακολουθία $(u_n)_n$ που είναι block βάση της $(x_n)_n$ και ισχύει $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|y_n - u_n\| < \frac{1}{3K}$.

Τότε, η $(y_n)_n$ είναι βασική ακολουθία ισοδύναμη με την $(u_n)_n$. Πράγματι, έστω $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n \in X$ και $T : X \to X$ με $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y_n$. Η σειρά συγκλίνει και έχουμε

$$\begin{aligned} \|(I-T)(x)\| &= \|x - T(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|u_n - y_n\| \\ &\leq \max_n |a_n| \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n - y_n\| \leq 2K\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n - y_n\| < \|x\| . \end{aligned}$$

Επομένως, $\|I - T\| < 1$ και τότε ο T είναι αυτομορφισμός του X. Ο χώρος $Z = \overline{\mathrm{span}}\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. □

Έστω X χώρος Banach με Schauder βάση $(x_n)_n$. Για κάθε n το γραμμικό συναρτησιακό x_n^* στον X που ορίζεται ως

$$x_n^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = a_n$$

είναι, από την Πρόταση 7, φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό. Συγκεκριμένα, $\|x_n^*\| \leq \frac{2K}{\|x_n\|}$, όπου K η σταθερά βάσης της $(x_n)_n$. Αυτά τα συναρτησιακά λέγονται διορθογώνια συναρτησιακά της $(x_n)_n$. Αν (P_n) είναι οι φυσικές προβολές που συσχετίζονται με την βάση $(x_n)_n$, είναι σαφές ότι για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_i)_i$ και για κάθε φυσικούς $n < m$, ισχύει

$$P_n^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^* \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*.$$

Από την Πρόταση 8, προκύπτει ότι η $(x_n^*)_n$ είναι βασική ακολουθία στον X^*, της οποίας η σταθερά βάσης ισούται με αυτή της $(x_n)_n$.

Πρόταση 10. *Έστω $(x_n)_n$ βάση ενός χώρου Banach X. Τα διορθογώνια συναρτησιακά $(x_n^*)_n$ είναι βάση του X^* αν και μόνο αν για κάθε $x^* \in X^*$ η νόρμα των $x^*|_{\overline{span}\{x_i\}_{i \geq n}}$ (δηλαδή οι περιορισμοί του x^* στους κλειστούς υπόχωρους $\overline{span}\{x_i\}_{i \geq n}$ που παράγονται από την $(x_i)_{i \geq n}$) συγκλίνει στο 0 καθώς $n \to \infty$. Μια βάση $(x_n)_n$ με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται συρρίκνουσα.*

Απόδειξη. Αν $(x_n^*)_n$ είναι μία βάση του X^*, τότε $\|P_n^* x^* - x^*\| \to 0$ για κάθε $x^* \in X^*$. Αφού $(P_{n-1}^* x^*)|_{\overline{\text{span}}\{x_i\}_{i\geq n}} = 0$, προκύπτει ότι $\lim_n \|x^*|_{\overline{\text{span}}\{x_i\}_{i\geq n}}\| = 0$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\|x^*|_{\overline{\text{span}}\{x_i\}_{i\geq n}}\| \to 0$ και έστω $x \in X$ νόρμας 1. Τότε

$$(x^* - P_n^* x^*)(x) = x^*((I - P_n)(x) \leq \|x^*|_{\overline{\text{span}}\{x_i\}_{i\geq n+1}}\|(K+1)\,,$$

όπου K η σταθερά βάσης της $(x_n)_n$. Συνεπώς, $\|P_n^* x^* - x^*\| \to 0$. □

Άλλη μια σημαντική έννοια που αφορά τις βάσεις, η οποία μπορεί να θεωρηθεί δυϊκή της συρρίκνουσας, είναι η φραγμένα πλήρης.

Ορισμός 16. *Μία βάση $(x_n)_n$ λέγεται φραγμένα πλήρης αν για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_n$ τέτοια ώστε $\sup_n \left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| < \infty$, η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ συγκλίνει.*

Ένα κλασικό παράδειγμα μη φραγμένα πλήρους βάσης είναι η βάση των μοναδιαίων διανυσμάτων του c_0, η οποία είναι φραγμένα πλήρης σε όλους τους χώρους ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι αν η $(x_n)_n$ είναι συρρίκνουσα βάση του X, τότε η $(x_n^*)_n$ είναι φραγμένα πλήρης βάση του X^*.

Πρόταση 11. *Ένας χώρος Banach X με φραγμένα πλήρη βάση $(x_n)_n$ είναι ισόμορφος με ένα δυϊκό χώρο. Ειδικότερα, ο X είναι ισόμορφος με το δϋικό του υπόχωρου $\overline{span}\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ του X^*.*

Απόδειξη. Έστω $Z = \overline{\text{span}}\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ και $T : X \to Z^*$ με $Tx(z) = z(x)$. Ο T είναι ισομορφισμός επί.

Πράγματι, έστω $x \in \text{span}\{x_n\}_{n=1}^\infty$ και $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|x^*\| = 1$ και $x^*(x) = \|x\|$. Τότε, $P_n^* x^*(x) = x^*(x)$, $P_n^* x^* \in Z$ και $\|P_n^* x^*\| \leq K$, όπου K η σταθερά βάσης της $(x_n^*)_n$. Συνεπώς, $\frac{\|x\|}{K} \leq \|T(x)\| \leq \|x\|$ που σημαίνει ότι ο T είναι ισομορφισμός.

Για να αποδείξουμε ότι ο T είναι επί, παρατηρούμε αρχικά ότι τα $\{Tx_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ είναι διορθογώνια συναρτησιακά των $\{x_n^* | \, n \in \mathbb{N}\}$ στον Z^*. Έστω $z^* \in Z^*$. Για την ακολουθία $\left(\sum_{i=1}^n z^*(x_i^*) T x_i\right)_n$ ισχύει $\sup_n \left\|\sum_{i=1}^n z^*(x_i^*) T x_i\right\| \leq K\|z^*\|$ και επιπλέον η $(x_n)_n$ είναι φραγμένα πλήρης, επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^\infty z^*(x_n^*) x_n$ συγκλίνει στον X σε κάποιο στοιχείο x, τέτοιο ώστε $z^* = Tx$. □

Συνδυάζοντας τις έννοιες της συρρίκνουσας και της φραγμένα πλήρους βάσης, παίρνουμε τον επόμενο χαρακτηρισμό της αυτοπάθειας ενός χώρου ως προς τη βάση του.

Θεώρημα 7. *Ένας χώρος Banach X με Schauder βάση $(x_n)_n$ είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν η $(x_n)_n$ είναι συρρίκνουσα και φραγμένα πλήρης.*

Στο προηγούμενο θεώρημα, θεωρήσαμε μια συγκεκριμένη βάση του X. Στο [59], ο M. Zippin απέδειξε ότι αν θεωρήσουμε όλες τις βάσεις σε ένα χώρο, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μόνο μία από τις δύο ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν στο θεώρημα. Πιο συγκεκριμένα:
Ένας χώρος Banach X με βάση, είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν κάθε βάση στον X είναι συρρίκνουσα, ή εναλλακτικά φραγμένα πλήρης.

Αν ένας χώρος Banach X έχει βάση, ο δυϊκός του X^* δεν έχει απαραίτητα βάση ακόμα και αν ο X^* είναι αυτοπαθής. Ένα ενδιαφέρον και βαθύ αποτέλεσμα των W. B. Johnson, H. P. Rosenthal και M. Zippin [33] δείχνει ότι η ύπαρξη βάσης στον X^* συνεπάγεται ότι και ο X έχει βάση.

Θεώρημα 8. *Έστω X χώρος Banach τέτοιος ώστε ο X^* να έχει βάση. Τότε ο X έχει συρρίκνουσα βάση και άρα ο X^* έχει φραγμένα πλήρη βάση.*

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τον ορισμό και κάποιους χαρακτηρισμούς των unconditional βάσεων.

Πρόταση 12. *Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία σε ένα χώρο Banach X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ συγκλίνει για κάθε μετάθεση π των φυσικών.*

(ii) *Η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ συγκλίνει για κάθε επιλογή $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.*

(iii) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ συγκλίνει για κάθε επιλογή προσήμων $\theta_n = \pm 1$.*

(iv) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\left\| \sum_{i\in\sigma} x_i \right\| < \varepsilon$ για κάθε πεπερασμένο σύνολο φυσικών σ με $\min\{i \in \sigma\} > n$.*

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ που ικανοποιεί μία, άρα και όλες τις παραπάνω ιδιότητες, λέγεται unconditionally συγκλίνουσα.

Ορισμός 17. *Μια βάση $(x_n)_n$ ενός χώρου Banach X λέγεται unconditional αν για κάθε $x \in X$, το ανάπτυγμά του $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ ως προς τη βάση συγκλίνει unconditionally.*

Η επόμενη πρόταση είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 12.

Πρόταση 13. *Μία βασική ακολουθία $(x_n)_n$ είναι unconditional αν και μόνο αν ικανοποιείται κάποια από τις ακόλουθες συνθήκες:*

(i) Για κάθε μετάθεση π των φυσικών η ακολουθία $(x_{\pi(n)})_n$ είναι βασική ακολουθία.

(ii) Για κάθε υποσύνολο σ των φυσικών η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συνεπάγεται τη σύγκλιση της $\sum_{n\in\sigma} a_n x_n$.

(iii) Η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συνεπάγεται τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ εφόσον $|b_n| \leq |a_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το απλούστερο παράδειγμα unconditional βάσης είναι η $(e_n)_n$ στον c_0 ή στον ℓ_p, $1 \leq p < \infty$.

Τα επόμενα αποτελέσματα συσχετίζονται με τον ορισμό νορμών που επάγονται από norming σύνολα.

Ορισμός 18. *Έστω $C > 0$, X χώρος Banach και $W \subset B_{X^*}$. Το W καλείται C-norming αν για κάθε $x \in X$ έχουμε $\|x\| \leq C \cdot \sup\{x^*(x) : x \in W\}$. Το W καλείται norming αν $C = 1$.*

Παραδείγμα 2. *Υπάρχουν πολλά παραδείγματα συνόλων που επάγουν τη νόρμα σε ένα χώρο. Ένα από αυτά προκύπτει αν θεωρήσουμε τον c_0 με τη $\|\cdot\|_\infty$, όπου το $W = \{\pm e_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ είναι norming σύνολο για το χώρο αυτό.*

Στις περισσότερες κατασκευές χώρων με βάση ο ορισμός της νόρμας γίνεται μέσω ενός τέτοιου συνόλου. Ειδικότερα, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 14. *Έστω ο χώρος $c_{00}(\mathbb{N})$ και $W \subset c_{00}(\mathbb{N})$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *$\{\pm e_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset W$.*

2. *Το W είναι συμμετρικο, δηλαδή αν $f \in W$ τότε $-f \in W$.*

3. *Για κάθε διάστημα I των φυσικών αριθμών και $f \in W$ ο περιορισμός του f στο I είναι στοιχείο του W.*

Τότε, θεωρώντας τη νόρμα $\|x\| = \sup\{f(x) : f \in W\}$, για $x \in c_{00}$ που επάγει το W, προκύπτει ότι η πλήρωση του c_{00} με αυτή τη νόρμα είναι χώρος Banach και μάλιστα έχει διμονότονη βάση την $(e_n)_n$.

Παρατηρήση 3. *Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για χώρους της μορφής* $c_{00}(X)$*, όπως ορίστηκαν παραπάνω. Ειδικότερα, αν* X *αριθμήσιμο σύνολο και* $<$ *μία ολική διάταξη του, τότε η* $(e_x)_{x\in X}$ *αριθμημένη ως προς την προηγούμενη διάταξη, αποτελεί βάση του χώρου Banach που προκύπτει από την πλήρωση του* $c_{00}(X)$ *με μια νόρμα που επάγεται από ένα norming σύνολο της παραπάνω μορφής.*

Το 1991, οι W. T. Gowers και B. Maurey [27] κατασκεύασαν ανεξάρτητα παραδείγματα αυτοπαθών χώρων Banach χωρίς unconditional βάση. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι κατέληξαν στον ίδιο χώρο, παρόλο που εργάστηκαν ανεξάρτητα. Αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί μία πολύ σημαντική ανακάλυψη με πληθώρα συνεπειών και έχουμε φτάσει σήμερα να έχουμε μία ολόκληρη θεωρία που ξεκίνησε από την εργασία των Gowers και Maurey. Ο W. Johnson παρατήρησε ότι το παράδειγμα των Gowers και Maurey είναι καθολικά αδιάσπαστος (HI) χώρος.

Ορισμός 19. *Έστω* X *χώρος Banach. Ο* X *καλείται αδιάσπαστος, αν δε μπορεί να γραφεί ως ευθύ άθροισμα δύο απειροδιάστατων κλειστών υπόχωρων του. Ο* X *καλείται καθολικά αδιάσπαστος (HI) αν κάθε κλειστός απειροδιάστατος υπόχωρός του είναι αδιάσπαστος. Εναλλακτικά, για κάθε* Y *κλειστό απειροδιάστατο υπόχωρο δεν υπάρχει μη τετριμμένη προβολή* $P : Y \to Y$*, δηλαδή για κάθε προβολή* P *της παραπάνω μορφής* $\dim\ker P < \infty$ *ή* $\dim \operatorname{Im} P < \infty$*.*

Η ακόλουθη πρόταση χαρακτηρίζει τους καθολικά αδιάσπαστους χώρους.

Πρόταση 15. *Έστω* X *χώρος Banach. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο* X *είναι καθολικά αδιάσπαστος.*

2. *Κάθε απειροδιάστατοι κλειστοί υπόχωροι* Y, Z *του* X *έχουν απόσταση σφαιρών ίση με μηδέν, δηλαδή ισχύει* $d(S_Y, S_Z) = 0$*.*

3. *Για κάθε κλειστούς απειροδιάστατους υπόχωρους* Y, Z *του* X *και* $\delta > 0$*, υπάρχουν* $y \in Y$ *και* $z \in Z$ *τέτοια ώστε* $\|y - z\| < \delta\|y + z\|$*.*

4. *[V. D. Milman] Για κάθε κλειστό απειροδιάστατο υπόχωρο* Y *του* X*,* $\varepsilon > 0$ *και* $W \subset B_{X^*}$*, ώστε το* W *να είναι* ε*-norming για τον* Y*, ο χώρος* $W_\perp = \{x \in X : f(x) = 0,\ \text{για κάθε } f \in W\}$ *είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του* X*.*

Απόδειξη. Οι ισχυρισμοί (1), (2), (3) είναι ισοδύναμοι λόγω του θεωρήματος ανοιχτής απεικόνισης και της τριγωνικής ανισότητας.
(1) $\Rightarrow$ (4) : Αν Y απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του X, $\varepsilon > 0$ και $W \subset B_{X^*}$

τέτοια ώστε το W να είναι ε-norming για τον Y, τότε $Y \cap W_\perp = \{0\}$ και ο $Y \oplus W_\perp$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Το γεγονός ότι ο X είναι καθολικά αδιάσπαστος συνεπάγεται ότι ο $W_\perp$ είναι πεπερασμένης διάστασης.
(4) $\Rightarrow$ (1) : Έστω ότι ο X δεν είναι καθολικά αδιάσπαστος. Τότε, υπάρχουν δύο απειροδιάστατοι κλειστοί υπόχωροι Y, Z του X τέτοιοι ώστε $Y \cap Z = \{0\}$ και ο $Y + Z$ να είναι κλειστός υπόχωρος του X. Θέτοντας $\varepsilon = \frac{1}{\|P\|}$, η προβολή $P : Y + Z \to Y$ είναι συνεχής. Για κάθε $y^* \in \varepsilon B_{Y^*}$ μπορούμε να επιλέξουμε, από το Θεώρημα Hahn-Banach, ένα συναρτησιακό $\widetilde{y}^* \in B_{X^*}$ τέτοιο ώστε το $\widetilde{y}^*$ να επεκτείνει το $y^* \circ P$ και $\|\widetilde{y}^*\| = \|y^* \circ P\|_{(Y+Z)^*}$. Θέτουμε $W = \{\widetilde{y}^* \mid y^* \in \varepsilon B_{Y^*}\}$. Τότε το W είναι ε-norming για τον Y, επομένως από το (4), ο χώρος $W_\perp$ πρέπει να είναι πεπερασμένης διάστασης. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο $W_\perp$ περιέχει τον απειροδιάστατο χώρο Z. Άρα, ο X είναι καθολικά αδιάσπαστος. $\square$

Σημαντική ιδιότητα των καθολικά αδιάσπαστων χώρων είναι η επόμενη.

Θεώρημα 9. *Κάθε καθολικά αδιάσπαστος χώρος Banach X εμφυτεύεται στον ℓ_∞.*

Οι καθολικά αδιάσπαστοι χώροι έχουν κάποιες αντιφατικές ιδιότητες που προκύπτουν από τον τρόπο κατασκευής τους. Από τη μία, κάθε καθολικά αδιάσπαστος χώρος δεν είναι ισόμορφος με κανένα γνήσιο υπόχωρό του. Από την άλλη, κάθε δύο κλειστοί απειροδιάστατοι υπόχωροί του, έχουν περαιτέρω υπόχωρους που είναι σχεδόν ισομετρικοί. Μία ειδική περίπτωση της περίφημης διχοτομίας του Gowers [26] παρέχει την πρώτη ικανοποιητική κατηγοριοποίηση των χώρων Banach.

Θεώρημα 10. *Ένας χώρος Banach περιέχει είτε unconditional βασική ακολουθία ή καθολικά αδιάσπαστο υπόχωρο.*

Το παράδειγμα των Gowers και Maurey καθώς και όλες οι αντίστοιχες κατασκευές έχουν τις ρίζες τους στη θεμελιώδη ανακάλυψη του B. S. Tsirelson (1972) ενός αυτοπαθούς χώρου με unconditional βάση που δεν περιέχει κανένα ℓ_p, με $1 < p < \infty$. Οι χώροι Tsirelson αποτελούν μία σημαντική ανακάλυψη στη θεωρία χώρων Banach. Είναι οι πρώτοι πραγματικά μη κλασικοί χώροι σύμφωνα με τους E. Odell και Th. Schlumprecht. Για την ακρίβεια είναι οι πρώτοι χώροι, των οποίων η νόρμα ορίζεται επαγωγικά και το πιο σημαντικό είναι ότι για την κατασκευή τους εισάγεται μία θεμελιώδης μέθοδος για τον κορεσμό της δομής ενός χώρου Banach με την ιδιότητα P.

Μπορούμε να θεωρήσουμε υπό μία έννοια, ότι μία Schauder βάση διασπά ένα χώρο Banach σε άθροισμα μονοδιάστατων χώρων. Στο Κεφάλαιο 4 θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε διασπάσεις, όπου τα στοιχεία στα οποία διασπάμε ένα χώρο Banach είναι υπόχωροι διάστασης μεγαλύτερης από 1.

Ορισμός 20. *Έστω X χώρος Banach. Μία ακολουθία $(X_n)_n$ κλειστών υπόχωρων του X λέγεται Schauder διάσπαση του X αν κάθε $x \in X$ έχει μοναδική αναπαράσταση $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, με $x_n \in X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Αν $\dim X_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή αν $X_n = \operatorname{span}\{x_n\}$, τότε η $(X_n)_n$ είναι Schauder διάσπαση του X αν και μόνο αν η $(x_n)_n$ είναι Schauder βάση του X. Οι διασπάσεις που είναι συχνά χρήσιμες, είναι αυτές για τις οποίες ισχύει $\dim X_n < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (το $\sup_n \dim X_n$ δεν χρειάζεται να είναι πεπερασμένο). Μία τέτοια διάσπαση λέγεται πεπερασμένης διάστασης Schauder διάσπαση ή απλούστερα FDD του X.

Από το [38], έχουμε ότι η $(X_n)_n$ είναι Schauder διάσπαση του X αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία προβολών $(P_n)_n$ στον X με $P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ τέτοιες ώστε $P_n \circ P_m = P_{\min(n,m)}$ για κάθε φυσικούς n, m, $\sup_n \|P_n\| < \infty$ και $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} P_n(X)} = X$. Ο αριθμός $\sup_n \|P_n\|$ λέγεται *σταθερά διάσπασης* της $(X_n)_n$. Η Schauder διάσπαση $(X_n)_n$ του X λέγεται συρρίκνουσα αν για κάθε $x^* \in X^*$, ισχύει $\|P_n^* x^* - x^*\| \to 0$.

Χρησιμοποιώντας τη Banach-Mazur απόσταση από τον Ορισμό 2, αρχικά θα ορίσουμε τους $\mathcal{L}^\infty$ χώρους και στη συνέχεια θα παραθέσουμε κάποιες ιδιότητες των χώρων αυτών. Ορίζουμε επίσης, πότε ένας χώρος λέγεται Y κορεσμένος, αφού ο χώρος Banach που κατασκευάζουμε στο Κεφάλαιο 4 είναι $\mathcal{L}^\infty$ και ℓ_r κορεσμένος για κάποιο $r \in (1, \infty)$.

Ορισμός 21. *Ένας χώρος Banach X λέγεται $\mathcal{L}^\infty_\lambda$ χώρος, για $\lambda \geq 1$, αν για κάθε $E \subset X$, όπου E ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X, υπάρχει ένας επίσης πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος $F \subset X$ τέτοιος ώστε $E \subset F$ και $d(F, \ell_\infty^{\dim F}) \leq \lambda$. Αν ο X είναι $\mathcal{L}^\infty_\lambda$ χώρος για κάποιο λ, λέμε απλά ότι ο X είναι $\mathcal{L}^\infty$ χώρος.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται συμπαγής αν το σύνολο $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο (έχει συμπαγή κλειστότητα) του Y, όπου B_X συμβολίζει τη μοναδιαία μπάλα του X.

Θεώρημα 11. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(a) Ο X είναι $\mathcal{L}^\infty$ χώρος.

(β) *Ο X έχει την ιδιότητα συμπαγούς επέκτασης, δηλαδή αν Z_1, Z_2 και X χώροι Banach με τον Z_1 να είναι υπόχωρος του Z_2 και $T_1 : Z_1 \to X$ συμπαγής τελεστής, τότε υπάρχει συμπαγής τελεστής $T_2 : Z_2 \to X$ που επεκτείνει τον T_1.*

(γ) *Το ίδιο με το β, αλλά η επέκταση T_2 δεν χρειάζεται να είναι συμπαγής, δηλαδή κάθε συμπαγής τελεστής έχει συνεχή επέκταση.*

(δ) *Ο X^* είναι ισόμορφος με ένα συμπληρωματικό υπόχωρο ενός L_1 χώρου.*

Για διαχωρίσιμο X, τα (α),(β),(γ),(δ) είναι ισοδύναμα με το

(ε) *Ο X^* είναι ισόμορφος με τον ℓ_1 αν και μόνο αν ο X δεν περιέχει υπόχωρο ισόμορφο με τον ℓ_1.*

Ορισμός 22. *Έστω X, Y χώροι Banach. Ο X λέγεται Y κορεσμένος αν κάθε απειροδιάστατος υπόχωρος του X περιέχει περαιτέρω υπόχωρο ισόμορφο με τον Y.*

Κεφάλαιο 2

Ακτίνα αναλυτικότητας μιας δυναμοσειράς σε πραγματικούς χώρους **Banach**

2.1 Εισαγωγή και συμβολισμοί

Αν $F(x)$ είναι μια δυναμοσειρά, ρ η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισής της και ρ_A η ακτίνα αναλυτικότητάς της, στο παρόν κεφάλαιο βελτιώνουμε το αποτέλεσμα του T. Nguyen σε $\rho_A \geq \rho/\sqrt{2}$ και παρέχουμε κάποια αντίστοιχα αποτελέσματα για τη n-οστή Fréchet παράγωγο της $F(x)$.

Αν $L \in \mathcal{L}^s({}^m X)$, ορίζουμε τη νόρμα

$$\|L\|_{(n)} = \sup_{k_1+\cdots+k_n=m} \sup \left\{ \left| L\left(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}\right) \right| : \|x_1\| \leq 1, \ldots, \|x_n\| \leq 1 \right\} ,$$

η οποία, για $n = 2$ δίνει

$$\|L\|_{(2)} = \sup_{1 \leq k \leq m} \sup \left\{ \left| L\left(x_1^k x_2^{m-k}\right) \right| : \|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1 \right\} .$$

Άμεσα προκύπτει ότι

$$\|\widehat{L}\| \leq \|L\|_{(n)} \leq \|L\|_{(n+1)} \leq \|L\|,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $1 \leq n < m$. Στις περιπτώσεις που θα χρειαστεί να τονίσουμε ότι μια συνεχής συμμετρική μορφή είναι m-γραμμική ή ένα συνεχές πολυώνυμο είναι m-ομογενές, θα γράφουμε L_m, P_m, $\widehat{L}_m$ αντί για L, P, $\widehat{L}$ αντίστοιχα.

Έστω X χώρος Banach, $k_1, \ldots, k_n$ μη αρνητικοί ακέραιοι με άθροισμα m και $c(k_1, \ldots, k_n; X)$ ο μικρότερος αριθμός τέτοιος ώστε για κάθε συμμετρική m-γραμμική απεικόνιση L από ένα πραγματικό γραμμικό χώρο με νόρμα σε έναν άλλο, να ισχύει

$$|L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| \leq c(k_1, \ldots, k_n; X) \|\widehat{L}\| .$$

Αντίστοιχα με τον ορισμό της σταθεράς πολικότητας, που δόθηκε από τον S. Dineen στο [20], καλούμε την $c(k_1, \ldots, k_n; X)$ ως m-οστή *σταθερά πολικότητας* του χώρου Banach X. Στο [29, Θεώρημα 1] έχει αποδειχθεί ότι αν θεωρήσουμε *μιγαδικούς* γραμμικούς χώρους με νόρμα, τότε

$$c(k_1, \ldots, k_n; X) = \frac{k_1! \cdots k_n!}{k_1^{k_1} \cdots k_n^{k_n}} \frac{m^m}{m!} \,. \tag{2.1.1}$$

Για τη συνέχεια του κεφαλαίου, θα χρειαστούμε τους επόμενους ορισμούς:

Ορισμοί 1. *Έστω X,Y χώροι Banach.*

(i) *Μια δυναμοσειρά με κέντρο το $a \in X$ είναι μια σειρά της μορφής*

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a) \,, \tag{2.1.2}$$

όπου $P_m : X \to Y$ είναι ένα συνεχές m-ομογενές πολυώνυμο.

(ii) *Η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης της δυναμοσειράς (2.1.2) είναι το supremum όλων των $0 \leq r \leq +\infty$ τέτοιων ώστε η (2.1.2) να συγκλίνει ομοιόμορφα στην κλειστή μπάλα $\overline{B}(a,r)$ και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο ([18, Θεώρημα, σελ. 153]):*

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \|P_m\|^{1/m}} \,.$$

Αφού το r μπορεί να γίνει 0, η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης υπάρχει πάντα.

(iii) *Η σειρά Taylor μίας συνάρτησης F που είναι ορισμένη σε μια περιοχή του a και άπειρες φορές παραγωγίσιμη, είναι η δυναμοσειρά που ορίζεται ως*

$$T_a F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D^m F(a)((x-a)^m) \,,$$

όπου $D^m F(a) : X^m \to Y$ είναι η συμμετρική m-γραμμική απεικόνιση που προκύπτει παίρνοντας την Fréchet παράγωγο της F m φορές.

(iv) *Η F λέγεται αναλυτική στο a αν η δυναμοσειρά $T_aF(x)$ έχει θετική ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης και ισούται με $F(x)$ εντός του πεδίου της ομοιόμορφης σύγκλισης. Αν το $U \subset X$ είναι ανοικτό, λέμε ότι η F είναι αναλυτική στο U αν είναι αναλυτική σε κάθε $a \in U$. Αν επιπλέον, η $T_aF(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστή μπάλα με κέντρο το a που περιέχεται στο U, για κάθε $a \in U$, η F λέγεται πλήρως αναλυτική στο U.*

(v) *Έστω $F(x)$ μια δυναμοσειρά με κέντρο το a και ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης $\rho > 0$. Η ακτίνα σύγκλισης $\rho_A = \rho_A(F)$ της $F(x)$ στο a είναι το μεγαλύτερο $r > 0$, για το οποίο η $F(x)$ είναι πλήρως αναλυτική στη μπάλα $B(a, r)$.*

Σημειώνουμε ότι άμεση συνέπεια του ορισμού της ακτίνας αναλυτικότητας είναι η ιδιότητα $\rho_A \leq \rho$.

Παρατήρηση 4. *Αν $\rho > 0$, είναι γνωστό (δες [18]) ότι για κάθε $0 < r < \rho$ η σειρά (2.1.2) είναι ομοιόμορφα και απόλυτα συγκλίνουσα για κάθε $x \in B(a, r)$. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση η (2.1.2) ορίζει μια συνάρτηση στη μπάλα $B(a, \rho)$ που παίρνει τιμές στον Y.*

Έστω $F(x)$ μια δυναμοσειρά με κέντρο το μηδέν σε ένα μιγαδικό χώρο Banach X με ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης $\rho > 0$ και ακτίνα αναλυτικότητας ρ_A και έστω $a \in B(0, \rho)$ διαφορετικό από το 0. Αν $X, Y = \mathbb{C}$, από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy η $F(x)$ είναι πλήρως αναλυτική στη μπάλα $B(0, \rho)$ και επομένως, δες για παράδειγμα το [18, Κεφάλαιο 9], η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης της $T_a F(x)$ είναι τουλάχιστον $\rho - |a|$. Θεωρούμε τώρα ότι οι X και Y είναι οποιοιδήποτε *μιγαδικοί* χώροι Banach. Είναι ενδιαφέρον ότι ακόμα και σε αυτή τη γενική περίπτωση ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα. Για να αποδειχθεί αυτό, χρειάζεται απλώς να εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy στη συνάρτηση $g : U(x, y) \to Y$ με $g(z) = F(zx + (1 - z)y)$, για κάθε $x, y \in X$, όπου $U(x, y) = \{z \in \mathbb{C} : zx + (1 - z)y \in U, U \subset X \text{ ανοικτό}\}$ (δες [18, Κεφάλαιο 13]). Παρατηρούμε ότι η g είναι ολόμορφη στο ανοικτό υποσύνολο $U(x, y)$ των μιγαδικών αριθμών. Άρα, από τον ορισμό του ρ_A, προκύπτει ότι $\rho_A = \rho$.

Το ίδιο ισχύει όταν ο X είναι πραγματικός χώρος Hilbert, αφού είναι γνωστό από τον S. Banach στο [9] ότι $\|L\| = \|\widehat{L}\|$ (δες ακόμα [20]) και επομένως $\|L\|_{(n)} = \|\widehat{L}\|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το επιθυμητό αποτέλεσμα $\rho_A = \rho$ είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 7 και του Θεωρήματος 12 που βρίσκονται στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου, με τα οποία αποδεικνύουμε ότι

$$\rho_A \geq \frac{\limsup_{m\to\infty} \|\widehat{L}_m\|^{1/m}}{\limsup_{m\to\infty} \|L_m\|_{(2)}^{1/m}} \cdot \rho\,.$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω, στην περίπτωση ενός *μιγαδικού* χώρου Banach X έχουμε ότι $\rho_A = \rho$. Παρατηρούμε ότι η προηγούμενη ανισότητα μαζί με την m-οστή σταθερά πολικότητας $c(k_1, \ldots, k_n; X)$ που δίνεται στην (2.1.1) δεν οδηγούν στο $\rho_A = \rho$. Αντιθέτως, παίρνουμε την εκτίμηση $\rho \geq \rho_A \geq \frac{\rho}{e}$.

Στην περίπτωση ενός πραγματικού χώρου Banach X, θα θέλαμε να επιτύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα, το οποίο είναι $\rho_A = \rho$. Όμως, αφού ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy δεν ισχύει, η κατάσταση γίνεται πιο περίπλοκη. Συνεπώς, θα εργαστούμε με πολυώνυμα σε πραγματικούς χώρους Banach. Η πρώτη απόπειρα να εκτιμηθεί η τιμή της ακτίνας αναλυτικότητας οφείλεται στον A. E. Taylor, ο οποίος απέδειξε το 1938 στο [55, Θεώρημα 4.2] ότι $\rho_A \geq \frac{\rho}{e\sqrt{2}}$. Πλέον έχουν προκύψει σταδιακά βελτιώσεις αυτής της τιμής, αρχικά παίρνοντας $\rho_A \geq \frac{\rho}{e}$ (δες [18]) και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας μιγαδικοποίηση στον X (δες [42]), το αποτέλεσμα αυτό οδηγείται σε $\frac{\rho}{2}$.

Ο T. Nguyen στο [43] παρέχει μια περαιτέρω βελτίωση για την ακτίνα αναλυτικότητας. Για την ακρίβεια, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hoeffding (δες [32]) ως βασικό εργαλείο ώστε να περιορίσει τη νόρμα $\|L\|_{(2)}$, απέδειξε ότι $\rho_A \geq \frac{\rho}{\sqrt{e}}$ (η ανισότητα Hoeffding χρησιμοποιείται επίσης στο [44] με παρόμοιο τρόπο). Σε αυτό το κεφάλαιο, επιτυγχάνουμε ένα καλύτερο φράγμα για την $\|L\|_{(2)}$ και αποδεικνύουμε ότι $\rho_A \geq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$.

2.2 Πολυώνυμα σε πραγματικό χώρο με νόρμα

Παραθέτουμε αρχικά το γνωστό αποτέλεσμα του L. A. Harris στο [30, Πόρισμα 7] (δες ακόμα [50], [54]). Έχουμε ότι

$$\left|L\left(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}\right)\right| \leq \sqrt{\frac{m^m}{k_1^{k_1}\cdots k_n^{k_n}}}\,\|\widehat{L}\| \tag{2.2.1}$$

για κάθε μη αρνητικούς ακεραίους $k_1,\dots,k_n$ με $k_1+\cdots+k_n = m$.
Για $n=2$ παίρνουμε

$$\left|L\left(x_1^{k}x_2^{m-k}\right)\right| \leq \sqrt{\frac{m^m}{k^k(m-k)^{m-k}}}\,\|\widehat{L}\|\,.$$

Σημειώνουμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει από το μέρος (α) του Πορίσματος του Θεωρήματος 3 στο [54].

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η τετραγωνική ρίζα παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι $(\sqrt{2})^m$, όταν $k=\frac{m}{2}$ (υποθέτουμε προς το παρόν ότι το m είναι άρτιος). Για να το αποδείξουμε, απλά θεωρούμε τη συνάρτηση $f(k) = k^k(m-k)^{m-k}$, με

$0 < k < m$. Τότε,

$$\begin{aligned} f'(k) &= (1+\ln k)k^k(m-k)^{m-k} - k^k[1+\ln(m-k)](m-k)^{m-k} \\ &= k^k(m-k)^{m-k}\ln\frac{k}{m-k} \end{aligned}$$

και

$$f'(k) = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{k}{m-k} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{m-k} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{m}{2},$$

αφού $k \neq 0$ και $k \neq m$. Επιπλέον, $f'(k) < 0$ για $0 < k < \frac{m}{2}$ και $f'(k) > 0$ για $\frac{m}{2} < k < m$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα για $0 < k \leq \frac{m}{2}$ και γνησίως αύξουσα για $\frac{m}{2} \leq k < m$. Επομένως, η ελάχιστη τιμή της f είναι $f\left(\frac{m}{2}\right) = \left(\frac{m}{2}\right)^m$.

Άρα,

$$\left(\frac{\|L\|_{(2)}}{\|\widehat{L}\|}\right)^{1/m} \leq \sqrt{2}\,.$$

Αν το m είναι περιττός, η προηγούμενη ανισότητα είναι γνήσια (αφού $k \in \mathbb{N}$). Ομοίως, για $n \in \mathbb{N}$ με $n \leq m$, αποδεικνύεται το ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα:

$$\left(\frac{\|L\|_{(n)}}{\|\widehat{L}\|}\right)^{1/m} \leq \sqrt{n}\,.$$

Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$ ο χώρος μέτρου Lebesgue και $E \in \mathcal{M}$. Αν η f είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση στο E, ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της, $\lambda_f : (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ με

$$\lambda_f(a) = \lambda(\{x \in E : |f(x)| > a\})\,,$$

όπου το λ συμβολίζει μέτρο Lebesgue. Από το [23], έχουμε την ακόλουθη:

Πρόταση 16. *Αν $\lambda_f(a) < \infty$ για κάθε $a > 0$ και ϕ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση Borel στο $(0, \infty)$, τότε*

$$\int_E \phi \circ |f|\, d\lambda = -\int_0^\infty \phi(a) d\lambda_f(a)\,.$$

Δηλαδή, τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων της $|f|$ στο E ανάγονται σε Lebesgue-Stieltjes ολοκληρώματα.

Η παραπάνω πρόταση μας ενδιαφέρει στην περίπτωση που είναι $\phi(a) = a^p$, το οποίο δίνει

$$\int_E |f|^p\, d\lambda = -\int_0^\infty a^p\, d\lambda_f(a)\,.$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες του δεξιού μέλους, παίρνουμε

$$\int_E |f|^p \, d\lambda = p \int_0^\infty a^{p-1} \lambda_f(a) \, da \, .$$

Η εγκυρότητα αυτού του υπολογισμού γίνεται εμφανής αν λάβουμε υπόψιν ότι $a^p \lambda_f(a) \to 0$ καθώς $a \to 0$ και $a \to \infty$ (αφού η λ_f είναι γνησίως φθίνουσα). Στο επόμενο λήμμα, η συνάρτηση f θα είναι της μορφής

$$f(t) = r_1(t) + \ldots + r_k(t), \; k \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς, αν το $\mathbf{P}$ συμβολίζει πιθανότητα, πρέπει να βρούμε ένα άνω φράγμα για την

$$\lambda_f(x) := \lambda_k(x) = \mathbf{P}(|r_1(t) + \cdots + r_k(t)| \geq x) \, .$$

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hoeffding (δες [32, Θεώρημα 2]):
Αν $X_1, X_2, \ldots, X_k$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $a_i \leq X_i \leq b_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ και μέση τιμή μ, τότε για κάθε $x > 0$

$$\mathbf{P}(\overline{X}_k - \mu \geq x) \leq e^{-2k^2 x^2 / \sum_{i=1}^k (b_i - a_i)^2} \, .$$

Στη περίπτωσή μας $a_i = -1$, $b_i = 1$ και $\mu = 0$ για κάθε i, οπότε

$$\mathbf{P}(r_1(t) + \cdots + r_k(t) \geq x) = \mathbf{P}\left(\frac{r_1(t) + \cdots + r_k(t)}{k} \geq \frac{x}{k} \right) \leq e^{-2k^2 (\frac{x}{k})^2 / 4k} = e^{-\frac{x^2}{2k}}$$

και καταλήγουμε ότι

$$\lambda_f(x) = \mathbf{P}(|r_1(t) + \cdots + r_k(t)| \geq x) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2k}} \, .$$

Λήμμα 5. *Έστω X,Y χώροι Banach και $L \in \mathcal{L}^s(^m X; Y)$. Αν $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον X, τότε*

$$\left| L\left(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \right) \right| \leq e^{m/2} \left(\frac{2em}{n} \right)^n \binom{m-1}{n-1} \|\widehat{L}\| \, , \tag{2.2.2}$$

για κάθε μη αρνητικούς ακεραίους $k_1, \ldots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| &\leq \frac{\|\widehat{L}\|}{m!} \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{k_1} r_i(t) x_1 + \cdots + \sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t) x_n \right\|^m dt \\ &\leq \frac{\|\widehat{L}\|}{m!} \int_0^1 \left(\left| \sum_{i=1}^{k_1} r_i(t) \right| + \cdots + \left| \sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t) \right| \right)^m dt \, . \end{aligned}$$

Από την προηγούμενη ανάλυση και το πολυωνυμικό θεώρημα παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&|L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})| \\
&\leq \frac{\|\widehat{L}\|}{m!}\sum_{\ell_1+\cdots+\ell_n=m}\frac{m!}{\ell_1!\cdots\ell_n!}\ell_1\int_0^\infty x^{\ell_1-1}\lambda_{k_1}(x)\,dx\cdots\ell_n\int_0^\infty x^{\ell_n-1}\lambda_{k_n}(x)\,dx \\
&= \|\widehat{L}\|\sum_{\ell_1+\cdots+\ell_n=m}\frac{1}{\ell_1!\cdots\ell_n!}\mathcal{I}_{\ell_1,k_1}\cdots\mathcal{I}_{\ell_n,k_n}\,,
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\mathcal{I}_{\ell,k}=\ell\int_0^\infty x^{\ell-1}\lambda_k(x)\,dx\leq\ell\int_0^\infty x^{\ell-1}2e^{-\frac{x^2}{2k}}\,dx=\ell(2k)^{\frac{\ell}{2}}\Gamma\left(\frac{\ell}{2}\right)\,,
$$

για κάθε $\ell,k\in\mathbb{N}$. Η τελευταία ισότητα προκύπτει ως εξής:
Για τη συνάρτηση Γάμμα γνωρίζουμε ότι

$$
\Gamma\left(\frac{\ell}{2}\right)=\int_0^\infty t^{\frac{\ell}{2}-1}e^{-t}\,dt\,.
$$

Θέτοντας $t=\frac{x^2}{2k}$, παίρνουμε ότι $dt=\frac{x}{k}\,dx$ και

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{\ell}{2}\right) &= \int_0^\infty\left(\frac{x^2}{2k}\right)^{\frac{\ell}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{2k}}\frac{x}{k}\,dx \\
&= \int_0^\infty x^{\ell-2}\frac{2k}{(2k)^{\frac{\ell}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2k}}\frac{x}{k}\,dx \\
&= \frac{1}{(2k)^{\frac{\ell}{2}}}\int_0^\infty x^{\ell-1}2e^{-\frac{x^2}{2k}}\,dx\,,
\end{aligned}
$$

συνεπώς η ζητούμενη ισότητα αποδείχτηκε. Στη συνέχεια, θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Για $\ell\neq 2$ άρτιο:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\ell,k} &\leq \left(\frac{\ell}{2}-1\right)!\ell(2k)^{\frac{\ell}{2}} \\
&\leq \ell(2k)^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{\frac{\ell}{2}-1}{e}\right)^{\frac{\ell}{2}-1}e\sqrt{\frac{\ell}{2}-1} \\
&= \ell e(2k)^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{\ell-2}{2e}\right)^{\frac{\ell}{2}}\frac{2e}{\ell-2}\sqrt{\frac{\ell-2}{2}} \\
&= \ell e\sqrt{\frac{2}{\ell-2}}\left(e^{\frac{2}{\ell}}\frac{\ell-2}{\ell}\right)^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{k\ell}{e}\right)^{\frac{\ell}{2}}\leq\ell e\left(\frac{k\ell}{e}\right)^{\frac{\ell}{2}}.
\end{aligned}
$$

Για $\ell \neq 1$ περιττό:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\ell,k} &\leq \ell(2k)^{\frac{\ell}{2}}\Gamma\left(\frac{\ell+1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{\ell-1}{2}\right)!\ell(2k)^{\frac{\ell}{2}} \\
&\leq \ell(2k)^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{\frac{\ell-1}{2}}{e}\right)^{\frac{\ell-1}{2}} e\sqrt{\frac{\ell-1}{2}} \\
&= \ell e(2k)^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{\ell-1}{2e}\right)^{\frac{\ell}{2}}\sqrt{\frac{2e}{\ell-1}}\sqrt{\frac{\ell-1}{2}} \\
&= \ell e\left(e^{\frac{1}{\ell}}\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{k\ell}{e}\right)^{\frac{\ell}{2}} \leq \ell e\left(\frac{k\ell}{e}\right)^{\frac{\ell}{2}}.
\end{aligned}$$

Στα παραπάνω χρειάστηκε ο τύπος του Stirling, σύμφωνα με τον οποίο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n! \leq e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Επίσης,

$$\mathcal{I}_{1,k} \leq \sqrt{2\pi k} \quad \text{και} \quad \mathcal{I}_{2,k} \leq 4k\,,$$

αφού $\Gamma(1) = 1$ και $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Με σκοπό να κάνουμε απλούστερους τους επόμενους υπολογισμούς, ενοποιούμε τις προηγούμενες περιπτώσεις επιλέγοντας

$$\mathcal{I}_{\ell,k} \leq 2\ell e\left(\frac{k\ell}{e}\right)^{\frac{\ell}{2}}.$$

Ο όρος $2\ell e$ θα μπορούσε να είναι λίγο μικρότερος, αλλά αυτό δεν θα είχε κάποια ουσιαστική διαφορά. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling, έχουμε

$$\begin{aligned}
&|L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})| \\
&\leq \|\widehat{L}\| \sum_{\ell_1+\cdots+\ell_n=m} \frac{1}{\ell_1!\cdots\ell_n!}2\ell_1 e\left(\frac{k_1\ell_1}{e}\right)^{\frac{\ell_1}{2}}\cdots 2\ell_n e\left(\frac{k_n\ell_n}{e}\right)^{\frac{\ell_n}{2}} \\
&= \|\widehat{L}\|e^{\frac{m}{2}}(2e)^n \sum_{\ell_1+\cdots+\ell_n=m} \ell_1\cdots\ell_n\left(\frac{k_1}{\ell_1}\right)^{\frac{\ell_1}{2}}\cdots\left(\frac{k_n}{\ell_n}\right)^{\frac{\ell_n}{2}}\frac{1}{\ell_1!}\left(\frac{\ell_1}{e}\right)^{\ell_1}\cdots\frac{1}{\ell_n!}\left(\frac{\ell_n}{e}\right)^{\ell_n} \\
&\leq \|\widehat{L}\|e^{\frac{m}{2}}(2e)^n \sup_{\ell_i}(\ell_1\cdots\ell_n) \sum_{\ell_1+\cdots+\ell_n=m}\left(\frac{k_1}{\ell_1}\right)^{\frac{\ell_1}{2}}\cdots\left(\frac{k_n}{\ell_n}\right)^{\frac{\ell_n}{2}} \\
&\leq e^{\frac{m}{2}}\left(\frac{2em}{n}\right)^n\binom{m-1}{n-1}\|\widehat{L}\|\,.
\end{aligned}$$

Αφού $\ell_i \in \mathbb{N}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, φαίνεται εύκολα ότι η μέγιστη τιμή του όρου $\left(\frac{k_1}{\ell_1}\right)^{\frac{\ell_1}{2}}\cdots\left(\frac{k_n}{\ell_n}\right)^{\frac{\ell_n}{2}}$ του παραπάνω αθροίσματος είναι 1, όταν $\ell_i = k_i$ για κάθε

$i = 1, 2, \ldots, n$. Αυτό συνεπάγεται ότι το άθροισμα φράσσεται από το $\binom{m-1}{n-1}$, αφού ο αριθμός των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$\ell_1 + \cdots + \ell_n = m\,,$$

με $\ell_i \geq 1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ ισούται με τον αριθμό των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$r_1 + \cdots + r_n = m - n\,,$$

με $r_i = \ell_i - 1 \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή με τον αριθμό

$$\binom{n+m-n-1}{m-n} = \binom{m-1}{m-n} = \binom{m-1}{n-1}$$

των συνδυασμών των n ανά $m-n$ με επανάληψη. □

Η ανισότητα (2.2.2) είναι χειρότερη από την ανισότητα (2.2.1). Όμως, ασυμπτωτικά (δηλαδή καθώς $m \to \infty$) δίνει καλύτερη εκτίμηση, οπότε θα φανεί χρήσιμη στην επόμενη παράγραφο.

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (2.2.1) και (2.2.2), παίρνουμε το ακόλουθο

Λήμμα 6. *Έστω X,Y χώροι Banach και $L \in \mathcal{L}^s(^m X; Y)$. Τότε*

$$\left(\frac{\|L\|_{(n)}}{\|\widehat{L}\|}\right)^{1/m} \leq \begin{cases} \sqrt{2} & \text{αν } n = 2 \\ C\sqrt{e} & \text{αν } n \geq 3\,, \end{cases}$$

όπου το $C = C(m,n) = \left[\left(\frac{2em}{n}\right)^n \binom{m-1}{n-1}\right]^{1/m}$ είναι ανεξάρτητο των L, X, Y και τείνει στο 1 καθώς $m \to \infty$ για σταθερό n. Επιπλέον,

$$\limsup_{m\to\infty} \|L\|_{(n)}^{1/m} \leq \begin{cases} \sqrt{2}\limsup\limits_{m\to\infty} \|\widehat{L}\|^{1/m} & \text{αν } n = 2 \\ \sqrt{e}\limsup\limits_{m\to\infty} \|\widehat{L}\|^{1/m} & \text{αν } n \geq 3\,. \end{cases}$$

2.3 Ακτίνα αναλυτικότητας μιας δυναμοσειράς σε ένα πραγματικό χώρο Banach

Λήμμα 7. *Έστω $F(x)$ μια δυναμοσειρά σε ένα χώρο Banach X με κέντρο το 0 και $\rho > 0$ η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισής της. Τότε, για κάθε σταθερό $\|y\| < \frac{\rho}{\sqrt{2}}$, έχουμε ότι*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x-y)^k \tag{2.3.1}$$

για $\|x-y\| < \frac{\rho}{\sqrt{2}} - \|y\|$, όπου $A_k(z^k) = \sum\limits_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} L_m(y^{m-k} z^k)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά (2.1.2) με κέντρο το $a = 0$, την οποία μπορούμε να γράψουμε ως

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x^m). \tag{2.3.2}$$

Από το διωνυμικό τύπο, για κάθε $y \in X$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} L_m((y + x - y)^m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} L_m(y^{m-k}(x-y)^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} L_m(y^{m-k}(x-y)^k) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x-y)^k \,, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

όπου η εναλλαγή των αθροισμάτων επιτρέπεται να γίνει εφόσον η διπλή σειρά συγκλίνει απόλυτα. Συνεπώς, αν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε αυτή την αλλαγή της άθροισης για κάθε $x \in B(y, r)$, για κάποιο $r > 0$, τότε θα έχουμε εκφράσει την $F(x)$ ως δυναμοσειρά με κέντρο το y. Παρατηρούμε ότι η απόλυτη σύγκλιση της διπλής σειράς (2.3.3) για $x \in B(y, r)$ συνεπάγεται την απόλυτη σύγκλιση των A_k στη μπάλα $B(0, r)$ και επομένως σε όλο τον X λόγω της ομογένειας.

Η απόλυτη σύγκλιση της (2.3.3) ικανοποιείται αν

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \|L_m\|_{(2)} \|y\|^{m-k} \|x-y\|^k = \sum_{m=0}^{\infty} \|L_m\|_{(2)} (\|y\| + \|x-y\|)^m < \infty \,.$$

Αυτό ισχύει όταν

$$\|y\| + \|x-y\| < \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \|L_m\|_{(2)}^{1/m}} \,. \tag{2.3.4}$$

Συνεπώς, η νόρμα που πρέπει να περιορίσουμε είναι η $\|L_m\|_{(2)}$.

Έστω $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \|\widehat{L}_m\|^{1/m}} > 0$ η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης της (2.3.2) και υποθέτουμε ότι $\rho < \infty$. Τότε, η (2.3.4) ικανοποιείται αν

$$\|y\| + \|x-y\| < \frac{\rho}{\sqrt{2}} \,,$$

αφού

$$\frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \|L_m\|_{(2)}^{1/m}} = \frac{\limsup\limits_{m\to\infty} \|\widehat{L}_m\|^{1/m}}{\limsup\limits_{m\to\infty} \|L_m\|_{(2)}^{1/m}} \cdot \rho \geq \frac{\rho}{\sqrt{2}} \,,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το Λήμμα 6. Άρα, για $\|y\| < \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ και $\|x - y\| < \frac{\rho}{\sqrt{2}} - \|y\|$, η σειρά (2.3.3) συγκλίνει απόλυτα. □

Η πρόταση και το λήμμα που ακολουθούν, προκύπτουν από το [18].

Πρόταση 17. *Έστω* $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x-y)^k$ *μια δυναμοσειρά σε ένα χώρο Banach* X *με κέντρο το* y *και ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης* $\rho > 0$. *Αν* $z \in B(y,\rho)$, *τότε υπάρχουν συντελεστές*

$$B_n = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} A_k (z-y)^{k-n}$$

τέτοιοι ώστε

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x-z)^n \,,$$

για $\|x-z\| < \rho - \|z-y\|$, *έχοντας ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης τουλάχιστον* $\rho - \|z-y\|$.

Απόδειξη. Έστω $0 < r < \rho$. Τότε $\limsup_{k\to\infty} \left(\|A_k\| r^k\right)^{\frac{1}{k}} = r \limsup_{k\to\infty} \|A_k\|^{\frac{1}{k}}$ και από το κριτήριο ρίζας για σειρές μη αρνητικών όρων, η $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| r^k$ συγκλίνει αν

$$r \limsup_{k\to\infty} \|A_k\|^{\frac{1}{k}} < 1 \Leftrightarrow \frac{r}{\rho} < 1 \Leftrightarrow r < \rho \,.$$

Συνεπώς, $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| r^k < +\infty$ και η $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(x-y)^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\overline{B}(y,r)$. Για $z \in B(y,r)$, εφαρμόζοντας στο $A_k((z-y)+(x-z))^k$ το διωνυμικό θεώρημα, προκύπτει ότι

$$A_k(x-y)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} A_k (z-y)^{k-n} (x-z)^n \,.$$

Τότε,

$$\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \|A_k\| \|z-y\|^{k-n} \|x-z\|^n \leq \|A_k\| r^k \,,$$

για $\|x-z\| < \rho - \|z-y\|$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k(x-y)^k\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} \|A_k\| \|z-y\|^{k-n} \|x-z\|^n \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| r^k < \infty \,. \end{aligned}$$

Επειδή η προηγούμενη διπλή σειρά συγκλίνει, μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά των αθροισμάτων ώστε να προκύψει

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\|A_k\|\|z-y\|^{k-n}\right)\|x-z\|^n<\infty\,.$$

Συνεπώς, αν θέσουμε

$$B_n=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}A_k(z-y)^{k-n}\,,$$

παίρνουμε ότι $\|B_n\|<+\infty$. Άρα, $B_n\in\mathcal{L}^s({}^nX;Y)$ και έχουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x-y)^k=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x-z)^n\,,$$

με τη σύγκλιση στην τελευταία σειρά να είναι ομοιόμορφη για $\|x-z\|<r-\|z-y\|$. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης της $\sum\limits_{n=0}^{\infty}B_n(x-z)^n$ είναι τουλάχιστον $\rho-\|z-y\|$ αφού το r είναι τυχαίο. □

Λήμμα 8. *Κάθε δυναμοσειρά* $F(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k(x-y)^k$ *σε ένα χώρο Banach* X *με κέντρο το* y *και ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης* $\rho>0$, *είναι* C^∞ *συνάρτηση και ισχύει*

$$A_k=\frac{1}{k!}D^kF(y)$$

ως k*-ομογενή πολυώνυμα.*

Απόδειξη. Έστω $0<r<\rho$. Όπως δείξαμε στην απόδειξη της Πρότασης 17, ισχύει ότι $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|A_k\|r^k<+\infty$ και θέτουμε

$$d=\sup\{\|A_k\|r^k:k=0,1,2,\ldots\}\,.$$

Παρατηρούμε ότι $F(y)=A_0$ και

$$F(x)-F(y)-A_1(x-y)=\sum_{k=2}^{\infty}A_k(x-y)^k\,.$$

Συνεπώς,

$$\|F(x)-F(y)-A_1(x-y)\|\le\sum_{k=2}^{\infty}\frac{d}{r^k}\|x-y\|^k=\frac{d\|x-y\|^2}{r(r-\|x-y\|)}\,,$$

για κάθε $x \in B(y, r)$. Το τελευταίο αποδεικνύει ότι η F είναι διαφορίσιμη στο y με $DF(y) = A_1$. Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα για $z \in B(y, \rho)$ και

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x - z)^n ,$$

για $\|x - z\| < \rho - \|z - y\|$ (όπου τα B_n ορίστηκαν στην Πρόταση 17), καταλήγουμε ότι η F είναι διαφορίσιμη στο z με

$$DF(z) = B_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k (z - y)^{k-1} .$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι διαφορίσιμη στην $B(y, \rho)$ και ισχύει

$$DF(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k (x - y)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} D A_k (x - y)^k ,$$

για κάθε $x \in B(y, \rho)$.

Αφού $\limsup_{k \to \infty} \|kA_k\|^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k \to \infty} \|A_k\|^{\frac{1}{k}}$, η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{k=1}^{\infty} k A_k (x - y)^{k-1}$ ισούται με ρ. Εργαζόμενοι όπως παραπάνω, καταλήγουμε ότι η DF είναι διαφορίσιμη στην $B(y, \rho)$ και συγκεκριμένα

$$D^2 F(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k (x - y)^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} D^2 A_k (x - y)^k ,$$

όπου η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης ισούται με ρ. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $A_2 = \frac{1}{2!} D^2 F(y)$.

Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι η F είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη στην $B(y, \rho)$ και ισχύει

$$A_k = \frac{1}{k!} D^k F(y)$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$. □

Θεώρημα 12. *Έστω $F(x)$ μια δυναμοσειρά σε ένα χώρο Banach X, την οποία μπορούμε να επιλέξουμε με κέντρο την αρχή. Έστω επίσης, $\rho > 0$ η ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισής της και ρ_A η ακτίνα αναλυτικότητάς της. Τότε:*

(i) $\rho_A \geq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$,

(ii) *η n-οστή Fréchet παράγωγος $D^n F : X \to \mathcal{L}(^n X, Y)$ της $F(x)$, ως συνάρτηση από τον X στο χώρο Banach $\mathcal{L}(^n X, Y)$, έχει σειρά Taylor με κέντρο την αρχή και ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης τουλάχιστον $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$ για $n = 1$ και $\frac{\rho}{\sqrt{e}}$ για $n \geq 2$,*

(iii) η ακτίνα αναλυτικότητας της δυναμοσειράς $D^nF(x)$ με κέντρο την αρχή είναι τουλάχιστον $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$.

Απόδειξη. (i) Αν $\rho < \infty$, η απόδειξη του Λήμματος 7 συνεπάγεται ότι για $\|y\| < \frac{\rho}{\sqrt{2}}$, η σειρά Taylor (2.3.1) είναι απολύτως συγκλίνουσα στο $\{x : \|x-y\| < \frac{\rho}{\sqrt{2}} - \|y\|\}$. Επομένως, προκύπτει ομοιόμορφη σύγκλιση της (2.3.1) στο $\{x : \|x-y\| < r\}$ για κάθε $r < \frac{\rho}{\sqrt{2}} - \|y\|$, αφού μπορούμε να φράξουμε την ουρά της (2.3.1) ως εξής:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N}^{\infty} A_k(x-y)^k \right\| &\leq \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} \|L_m(y^{m-k}(x-y)^k)\| \\ &\leq \sum_{m=N}^{\infty} \|L_m\|_{(2)} (\|y\| + \|x-y\|)^m \,, \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

όπου η (2.3.5) τείνει στο μηδέν ομοιόμορφα στο x καθώς $N \to 0$ υπό την προϋπόθεση ότι το $\|y\| + \|x-y\| \leq \|y\| + r$ φράσσεται από το $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Αυτό προκύπτει επειδή έχουμε δείξει ότι η (2.3.5), βλέποντάς την ως δυναμοσειρά μίας πραγματικής μεταβλητής, έχει ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης τουλάχιστον $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Τελικά, το Λήμμα 8 συνεπάγεται ότι η δυναμοσειρά (2.3.1) είναι μία σειρά Taylor της $F(x)$ με κέντρο το y. Συνεπώς, για $\rho < \infty$, αυτό αποδεικνύει το (i).

Αν $\rho = \infty$, δηλαδή $\limsup_{m\to\infty} \|\widehat{L}_m\|^{1/m} = 0$, το Λήμμα 6 συνεπάγεται επίσης ότι $\limsup_{m\to\infty} \|L_m\|_{(2)}^{1/m} = 0$. Από την (2.3.4), μπορούμε να εφαρμόσουμε την προηγούμενη ανάλυση για κάθε $y \in X$, οπότε $\rho_A = \rho = \infty$.

(ii) Από το [18, Πόρισμα 1, σελ. 165], δοθείσας μίας δυναμοσειράς $F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x^m)$ με ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης $\rho > 0$, για κάθε n, η $D^nF(x)$ έχει σειρά Taylor με κέντρο την αρχή που δίνεται από τον τύπο

$$T_0 D^n F(x) = n! \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} L_{m+n}(x^m) \,. \tag{2.3.6}$$

Στην (2.3.6), οι γραμμικές απεικονίσεις L_{m+n} εκτιμώνται μόνο σε $n+1$ το πολύ διακριτά ορίσματα (η $D^nF(x)$ παίρνει τιμές σε n-γραμμικές απεικονίσεις). Άρα, από το Λήμμα 6, για $n \geq 2$, το κάτω φράγμα για την ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης της (2.3.6) είναι $\frac{\rho}{\sqrt{e}}$, αφού

$$\begin{aligned}
&\limsup_{m\to\infty}\left\|\binom{m+n}{n}L_{m+n}\right\|_{(n+1)}^{1/m}\\
&\leq \quad \left(\limsup_{m\to\infty}\binom{m+n}{n}^{1/m}\sqrt{e}\right)\times\left(\limsup_{m\to\infty}\|\widehat{L}_{m+n}\|^{1/m}\right)\leq\frac{\sqrt{e}}{\rho}\,.
\end{aligned}$$

Ομοίως, το κάτω φράγμα για την ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης της

$$T_0DF(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)L_{m+1}(x^m)$$

είναι $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$, αφού

$$\limsup_{m\to\infty}\|(m+1)L_{m+1}\|_{(2)}^{1/m}\leq\frac{\sqrt{2}}{\rho}\,.$$

Από το Λήμμα 8 και τον τύπο για τα A_k του Λήμματος 7, παίρνουμε ότι για $n\geq 2$, $T_0D^nF(y)=D^nF(y)$ για κάθε y τέτοιο ώστε $\|y\|<\frac{\rho}{\sqrt{e}}$ και $T_0DF(y)=DF(y)$ για κάθε y τέτοιο ώστε $\|y\|<\frac{\rho}{\sqrt{2}}$.

(iii) Αρκεί να δείξουμε ότι η ακτίνα αναλυτικότητας της (2.3.6) είναι τουλάχιστον $\frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Για να το πετύχουμε αυτό, πρέπει να περιορίσουμε την $\|L_{m+n}\|_{(n+2)}$, αλλά αυτή είναι ακριβώς η $\|\cdot\|_{(2)}$-νόρμα της L_{m+n}, βλέποντάς την ως απεικόνιση από τον X στον $\mathcal{L}(^nX,Y)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 6, η απόδειξη ολοκληρώνεται.

$\square$

Κεφάλαιο 3

Εκτιμήσεις πολυωνύμων σε πραγματικούς και μιγαδικούς χώρους $L_p(\mu)$

3.1 Εισαγωγή και συμβολισμοί

Είναι γνωστό [20, Πρόταση 1.8] ότι αν $L \in \mathcal{L}^s(^m X)$ και $\widehat{L}$ είναι το πολυώνυμο που παράγεται από την L, τότε

$$\|L\| \leq \frac{m^m}{m!} \|\widehat{L}\|$$

και η σταθερά $\frac{m^m}{m!}$ είναι η βέλτιστη δυνατή (Παράδειγμα 1). Αυτή είναι η απάντηση στο Πρόβλημα 73 των Mazur και Orlicz στο [56]:

Έστω c_m ο μικρότερος αριθμός με την ιδιότητα ότι αν $F(x_1, \ldots, x_m)$ είναι μια τυχαία m-γραμμική απεικόνιση ενός γραμμικού χώρου με νόρμα σε έναν άλλο, τότε

$$\sup_{\|x_i\| \leq 1,\, i=1,\ldots,m} \|F(x_1, \ldots, x_m)\| \leq c_m \sup_{\|x\| \leq 1} \|F(x, \ldots, x)\| .$$

Είναι γνωστό (S. Banach [9]) ότι υπάρχει τέτοιος c_m. Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός c_m ικανοποιεί τις ανισότητες

$$\frac{m^m}{m!} \leq c_m \leq \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \cdot k^m.$$

Ισχύει ότι $c_m = \frac{m^m}{m!}$;

Η απάντηση σε αυτό το πρόβλημα είναι καταφατική για κάθε πραγματικό γραμμικό χώρο με νόρμα και οφείλεται στον R. S. Martin (1932). Αξίζει να σημειωθεί ότι από το Θεώρημα Hahn-Banach, δεν υπάρχει βλάβη της γενικότητας σε αυτό το πρόβλημα αν όλες οι πλειογραμμικές απεικονίσεις παίρνουν μιγαδικές τιμές.

Στην περίπτωση *μιγαδικού* χώρου L_p, $1 \leq p < \infty$, εικάζεται ότι

$$\|L\| \leq \left(\frac{m^m}{m!}\right)^{\frac{|p-2|}{p}} \|\widehat{L}\|,$$

και έχει αποδειχθεί από τον L. A. Harris ([29, Θεώρημα 6]) όταν το m είναι δύναμη του 2. Μία βελτιωμένη εκτίμηση δόθηκε στο [53, Θεώρημα 2] από τον I. Σαραντόπουλο, αλλά ισχύει για μικρό εύρος από p. Στην περίπτωση *πραγματικού* ή *μιγαδικού* χώρου $L_p(\mu)$, για $1 \leq p \leq m'$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$, απέδειξε ότι

$$\|L\| \leq \frac{m^{\frac{m}{p}}}{m!} \|\widehat{L}\|. \tag{3.1.1}$$

Η τεχνική που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της πραγματικής περίπτωσης αποτελεί μεθοδολογία για κάποιες από τις αποδείξεις που ακολουθούν. Πριν την παρουσιάσουμε, αναφέρουμε ένα λήμμα που είναι μια επεκταμένη μορφή του θεωρήματος παρεμβολής των Riesz-Thorin (extended version of the Riesz-Thorin interpolation theorem). Παραπέμπουμε στο [14, theorems 4.1.2, 5.1.1, 5.1.2])

Λήμμα 9. *Έστω X ένας χώρος μέτρου με ένα θετικό μέτρο ν και έστω $1 \leq p \leq 2$. Αν έχουμε ένα ορθοκανονικό σύνολο μιγαδικών μετρήσιμων συναρτήσεων s_i που ικανοποιούν την $|s_i(t)| \leq 1$ σχεδόν παντού ($1 \leq i \leq k$), τότε*

$$\left(\int_X \left\|\sum_{i=1}^k f_i s_i(t)\right\|_p^{p'} d\nu(t)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\sum_{i=1}^k \|f_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

για κάθε $f_1, \ldots, f_k \in L_p(\mu)$.

Απόδειξη της (3.1.1). Για κάθε $L \in \mathcal{L}^s({}^m L_p(\mu), \mathbb{R})$ ο τύπος πολικότητας (1.1.3) δίνει

$$m!|L(x_1, \ldots, x_m)| \leq \|\widehat{L}\| \int_0^1 \|r_1(t)x_1 + \cdots + r_m(t)x_m\|_p^m dt \tag{3.1.2}$$

για κάθε $x_1, \ldots, x_m \in L_p(\mu)$. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις Rademacher, το Λήμμα 9 οδηγεί στην ακόλουθη γενικευμένη ανισότητα του Clarkson

$$\left(\int_0^1 \|r_1(t)x_1 + \cdots + r_m(t)x_m\|_p^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.3}$$

για $1 \leq p \leq 2$ (δες επίσης [57]). Έχουμε ότι $m' \leq 2$, άρα για $1 \leq p \leq m'$ η ανισότητα του Hölder και η (3.1.3) σε συνδυασμό με την (3.1.2) δίνουν την

$$m!|L(x_1, \ldots, x_m)| \leq \|\widehat{L}\| \left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_p^p\right)^{\frac{m}{p}}.$$

Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει η

$$\|L\| \leq \frac{m^{\frac{m}{p}}}{m!} \|\widehat{L}\| .$$

□

Με παρόμοιο αποδεικνύεται και ότι για $p \geq m$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ισχύει

$$\|L\| \leq \frac{m^{\frac{m}{p'}}}{m!} \|\widehat{L}\| .$$

Ο L. A. Harris στα σχόλιά του για το Πρόβλημα 73 διατύπωσε την ακόλουθη φυσιολογική γενίκευση:

Έστω X χώρος Banach, $k_1, \ldots, k_n$ μη αρνητικοί ακέραιοι με άθροισμα m και $c(k_1, \ldots, k_n; X)$ ο μικρότερος αριθμός με την ιδιότητα ότι αν L είναι μια συμμετρική m-γραμμική απεικόνιση από ένα πραγματικό γραμμικό χώρο με νόρμα σε έναν άλλο, τότε

$$|L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| \leq c(k_1, \ldots, k_n; X) \|\widehat{L}\| .$$

Αυτό το κεφάλαιο έχει ως αντικείμενο τη μελέτη και βελτίωση αυτής της σταθεράς στην περίπτωση που ο X είναι ένας *πραγματικός* χώρος $L_p(\mu)$. Για να το επιτύχουμε αυτό, χρησιμοποιούμε τρεις διαφορετικές τεχνικές και σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις παίρνουμε βέλτιστα αποτελέσματα.

Σε αντιστοιχία με τον Ορισμό 1 που δόθηκε στην εισαγωγή για τη σταθερά πολικότητας, ορίζουμε

$$c(X) = \limsup_{m \to \infty} c(k_1, \ldots, k_n; X)^{\frac{1}{m}} ,$$

που περιγράφει πως συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά η σταθερά. Αυτός ο συμβολισμός θα χρησιμοποιηθεί μόνο στην περίπτωση που τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα με ξένα support.

Αποδεικνύεται στο [29, Θεώρημα 1], ότι αν θεωρήσουμε μόνο *μιγαδικούς* χώρους με νόρμα, τότε

$$c(k_1, \ldots, k_n; X) = \frac{k_1! \cdots k_n!}{k_1^{k_1} \cdots k_n^{k_n}} \frac{m^m}{m!} . \tag{3.1.4}$$

Στην περίπτωση *πραγματικών* γραμμικών χώρων με νόρμα, ο L. A. Harris έχει αποδείξει στο [30, Πόρισμα 7] (δες επίσης [50], [54]) ότι

$$|L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| \leq \sqrt{\frac{m^m}{k_1^{k_1} \cdots k_n^{k_n}}} \|\widehat{L}\| , \tag{3.1.5}$$

για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \ldots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$.

Ο L. A. Harris έχει αποδείξει ακόμα το ακόλουθο:

Λήμμα 10 ([29, Θεώρημα 1])**.** *Έστω $1 \le p \le \infty$ και $L \in \mathcal{L}^s({}^m\ell_p, \mathbb{C})$. Αν $x_1, \dots, x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον ℓ_p με ξένα support, τότε*

$$|L(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n})| \le \frac{k_1! \cdots k_n! m^{\frac{m}{p}}}{k_1^{\frac{k_1}{p}} \cdots k_n^{\frac{k_n}{p}} m!} \|\widehat{L}\|,$$

για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \dots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $p < \infty$. Θέτουμε $r_i = \left(\frac{n_i}{m}\right)^{\frac{1}{p}}$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και ορίζουμε

$$f(z_1, \dots, z_{n-1}) = \widehat{L}(r_1 x_1 + z_1 r_2 x_2 + \cdots + z_{n-1} r_n x_n)$$

για κάθε $z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$D_1^{k_2} \dots D_{n-1}^{k_n} f(0, \dots, 0) = \frac{m!}{k_1!} r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n} L(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n})$$

από το πολυωνυμικό θεώρημα για την L. Επίσης, η $|f|$ είναι φραγμένη από την $\|\widehat{L}\|$ στην ανοιχτή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{C}^{n-1}$. Επομένως, από τις εκτιμήσεις του Cauchy για συναρτήσεις πολλών μιγαδικών μεταβλητών,

$$\frac{m!}{k_1!} r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n} |L(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n})| \le k_2! \cdots k_n! \|\widehat{L}\|,$$

η οποία είναι η ζητούμενη σχέση. □

Παρατηρούμε ότι η (3.1.4) προκύπτει από την προηγούμενη εκτίμηση για $p = 1$, αφού κάθε χώρος Banach είναι ισομετρικός με ένα πηλίκο του ℓ_1. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η σταθερά στο Λήμμα 10 είναι η βέλτιστη δυνατή.

Παραδείγμα 3. *Θεωρούμε ένα πραγματικό ή μιγαδικό χώρο ℓ_p και για κάθε $x = (x_i) \in \ell_p$, έστω $\widehat{L} \in \mathcal{P}({}^m\ell_p)$ με $\widehat{L}(x) = x_1 x_2 \cdots x_m$.*
Επιλέγουμε e_j, $j = 1, 2, \dots, m$ να είναι το j-οστό διάνυσμα της συνήθους βάσης του ℓ_p και ορίζουμε

$$y_1 = k_1^{-\frac{1}{p}}(e_1 + \cdots + e_{k_1})$$

και

$$y_i = k_i^{-\frac{1}{p}}(e_{k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1} + \cdots + e_{k_1 + \cdots + k_i}), \quad i = 2, \dots, n.$$

Προκύπτει ότι τα $y_1, \dots, y_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα του ℓ_p με ξένα support και

$$L(y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}) = \frac{k_1! \cdots k_n!}{m! k_1^{\frac{k_1}{p}} \cdots k_n^{\frac{k_n}{p}}}.$$

Από την ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου, έχουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{L}(x)| &= |x_1 x_2 \cdots x_m| \\ &= \left[(|x_1|^p |x_2|^p \cdots |x_m|^p)^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{m}{p}} \\ &\leq \left(\frac{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_m|^p}{m} \right)^{\frac{m}{p}} \\ &\leq m^{-\frac{m}{p}} \|x\|_p^m \ . \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|\widehat{L}\| \leq m^{-\frac{m}{p}}$$

και καταλήγουμε ότι

$$|L(y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n})| \geq \frac{k_1! \cdots k_n! \, m^{\frac{m}{p}}}{k_1^{\frac{k_1}{p}} \cdots k_n^{\frac{k_n}{p}} \, m!} \|\widehat{L}\| \, .$$

Στις επόμενες δύο ενότητες, παρέχουμε κάποιες εκτιμήσεις για τη σταθερά $c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu))$, αρχικά για *μιγαδικούς* χώρους $L_p(\mu)$ και στη συνέχεια για *πραγματικούς* χώρους $L_p(\mu)$. Στη *μιγαδική* περίπτωση, επιλέγουμε ως (x_i) μια ημι-νορμαρισμένη unconditional βασική ακολουθία, η οποία δίνει ως ειδική την περίπτωση που τα x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, έχουν ξένα support. Γενικά, είναι σαφώς δυσκολότερο να αντιμετωπίσουμε την πραγματική περίπτωση. Για το λόγο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τρεις διαφορετικές τεχνικές για να ξεπεράσουμε τις όποιες δυσκολίες, όταν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα με ξένα support. Στην πρώτη χρησιμοποιούνται κάποια βάρη και ένας ευρέως γνωστός τύπος πολικότητας, ενώ η δεύτερη εξαρτάται από μία γενίκευση των ανισοτήτων του Clarkson (βλέπε [57]). Η τρίτη τεχνική χρησιμοποιεί την ανισότητα του Hoeffding, η οποία φάνηκε ιδιαιτέρως χρήσιμη στο προηγούμενο κεφάλαιο ώστε να βρούμε ένα κάτω φράγμα για την ακτίνα αναλυτικότητας μίας δυναμοσειράς. Οι τιμές για τη σταθερά $c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu))$ που προκύπτουν από την τρίτη τεχνική είναι οι χειρότερες με λίγες εξαιρέσεις, αλλά ασυμπτωτικά παίρνουμε καλύτερα αποτελέσματα.

Κάθε μια από τις τεχνικές χρησιμοποιείται επίσης για να πάρουμε αντίστοιχες εκτιμήσεις για μία ημι-νορμαρισμένη unconditional βασική ακολουθία (x_i) με τις απαραίτητες επιπλέον σταθερές. Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου εξηγούμε αναλυτικά γιατί και πότε είναι χρήσιμη κάθε τεχνική. Θα φαινόταν λογικό να προσεγγίσουμε το πρόβλημα με χρήση των type και cotype του χώρου, όμως οι τιμές που προκύπτουν για τις σταθερές απέχουν πολύ από τις ιδανικές.

3.2 Η μιγαδική περίπτωση

Υπενθυμίζουμε ότι η n-οστή συνάρτηση Rademacher r_n ορίζεται στο $[0,1]$ ως $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin 2^n\pi t$. Επιπλέον, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$, οι γενικευμένες συναρτήσεις Rademacher (s_j) ορίζονται επαγωγικά ως εξής (δες [8]): Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n$ οι μιγαδικές n-οστές ρίζες της μονάδας. Για $j = 1, \dots, n$ θέτουμε $I_j = \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)$ και με I_{j_1,j_2} συμβολίζουμε το j_2-οστό ανοικτό υποδιάστημα μήκους $1/n^2$ του I_{j_1} $(j_1, j_2 = 1, 2, \dots, n)$. Συνεχίζοντας ομοίως, είναι εμφανές πως να ορίσουμε το διάστημα $I_{j_1,j_2,\dots,j_k}$ για κάθε k. Τώρα, το $s_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ ορίζεται θέτοντας $s_1(t) = a_j$ για $t \in I_j$, όπου $1 \leq j \leq n$. Δεν δημιουργείται κάποιο πρόβλημα αν θέσουμε $s_k(t) = 1$ για κάθε άκρο t διαστήματος. Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο *τύπο πολικότητας* (δες [8]):

$$L(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \int_0^1 s_1^{m-1}(t) \cdots s_m^{m-1}(t) \widehat{L}\left[\sum_{i=1}^m s_i(t) x_i\right] dt\,,$$

ο οποίος μπορεί να γενικευτεί με χρήση του πολυωνυμικού θεωρήματος και του [8, Λήμμα 1] από το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 11. *Έστω ότι το σώμα είναι το $\mathbb{C}$, X είναι διανυσματικός χώρος και $L \in \mathcal{L}^s(^mX)$. Αν $x_1, \dots, x_n \in X$, τότε*

$$L(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}) = \frac{k_1! \cdots k_n!}{m!} \int_0^1 s_1^{m-k_1}(t) \cdots s_n^{m-k_n}(t) \widehat{L}\left(\sum_{i=1}^n s_i(t) x_i\right) dt$$

για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \dots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$.

Η ανισότητα του Khinchine δηλώνει ότι για κάθε $0 < p < \infty$, υπάρχουν $0 < A_p \leq B_p < \infty$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε βαθμωτά $a_1, \dots, a_n$,

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right\|_{L_p} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

όπου το B_p εξαρτάται όχι μόνο από το p αλλά και από το n. Ειδικότερα, από το [36, Θεώρημα & Πόρισμα 3] ορίζεται ως

$$B_p(n) = \begin{cases} \dfrac{\left(\int_0^1 |\sum_{i=1}^n r_i|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{2}}} & \text{αν } p \geq 3 \\[2ex] \dfrac{\left(\int_0^1 |\sum_{i=1}^n r_i|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}}} & \text{αν } 2 \leq p < 3\,. \end{cases}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η αυτή η τιμή για το B_p ισχύει και για τις γενικευμένες συναρτήσεις Rademacher.

Ορισμός 23. *Μία ακολουθία (x_i) σε ένα χώρο Banach X λέγεται K-unconditional βασική ακολουθία αν υπάρχει $K < \infty$ τέτοιο ώστε για κάθε n, κάθε πραγματικούς αριθμούς $a_1, \dots, a_n$ και κάθε επιλογή από $\epsilon_i = \pm 1$, ισχύει*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| .$$

Αν η (f_i) είναι μία K-unconditional ακολουθία στον $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, από το [21] για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:

$$K^{-p} A_p^p \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(t)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dt \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \right\|_p^p \leq K^p B_p^p \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(t)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dt .$$

Αν $1 \leq p \leq 2$, τότε

$$A_p K^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \right\|_p \leq B_p K \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Αν $2 \leq p < \infty$, τότε

$$A_p K^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \right\|_p \leq B_p K \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Ορισμός 24. *Μία ακολουθία (x_i) σε ένα χώρο Banach X λέγεται ημι-νορμαρισμένη όταν $\inf_i \|x_i\| > 0$ και $\sup_i \|x_i\| < \infty$.*

Αν $\phi \in L_p(\mu)$, $2 < p < \infty$ και $\phi > 0$ σχεδόν παντού, θέτουμε $d\mu_\phi = \phi^p d\mu$ και ορίζουμε για $f \in L_p(\mu)$, $U_\phi f = f/\phi$. Από το θεώρημα των Radon-Nikodým, η U_ϕ είναι ισομετρία του $L_p(\mu)$ στον $L_p(\mu_\phi)$. Από τις προηγούμενες ανισότητες και την Πρόταση 3.4 του [21] έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 18. *Έστω (f_i) μία ημι-νορμαρισμένη K-unconditional βασική ακολουθία στον $L_p(\mu)$, $2 < p < \infty$. Αν για κάθε $\phi > 0$ με $\int_0^1 \phi(t)^p dt = 1$ ισχύει ότι*

$$C_\phi = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|U_\phi f_i\|_{L_2(\mu_\phi)}^{2p(p-2)} \right)^{\frac{p-2}{2p}} < \infty ,$$

τότε η (f_i) είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p και για κάθε n και κάθε $a_1, \dots, a_n$ έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right\| \leq K B_p C \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} , \tag{3.2.1}$$

όπου B_p είναι η σταθερά Khinchine και $C = \sup C_\phi < \infty$.

Πρόταση 19. *Έστω $2 < p < \infty$ και $L \in \mathcal{L}^s({}^m L_p(\mu), \mathbb{C})$. Υποθέτουμε ότι η (x_i) είναι μία ημι-νορμαρισμένη K-unconditional βασική ακολουθία στον $L_p(\mu)$ και για κάθε $\phi > 0$ με $\int_0^1 \phi(t)^p dt = 1$ ισχύει ότι*

$$C_\phi = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|U_\phi x_i\|_{L_2(\mu_\phi)}^{2p(p-2)} \right)^{\frac{p-2}{2p}} < \infty\,.$$

Τότε, η (x_i) είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p και για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \ldots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$ έχουμε

$$|L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| \leq (KB_pC)^m \frac{k_1! \cdots k_n! m^{\frac{m}{p}}}{k_1^{\frac{k_1}{p}} \cdots k_n^{\frac{k_n}{p}} m!} \|\widehat{L}\|\,,$$

όπου B_p είναι η σταθερά Khinchine και $C = \sup C_\phi < \infty$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 11 και την Πρόταση 18, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{k_1^{\frac{k_1}{p}} \cdots k_n^{\frac{k_n}{p}}}{m^{\frac{m}{p}}} L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}) \right| \\
&\quad = \left| L\left(\left(\frac{k_1}{m}\right)^{\frac{k_1}{p}} x_1^{k_1} \ldots \left(\frac{k_n}{m}\right)^{\frac{k_n}{p}} x_n^{k_n} \right) \right| \\
&\quad = \left| \frac{k_1! \cdots k_n!}{m!} \int_0^1 s_1^{m-k_1}(t) \cdots s_n^{m-k_n}(t) \widehat{L} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{k_i}{m}\right)^{\frac{1}{p}} s_i(t) x_i \right) dt \right| \\
&\quad \leq \frac{k_1! \cdots k_n!}{m!} \|\widehat{L}\| \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n \left(\frac{k_i}{m}\right)^{\frac{1}{p}} s_i(t) x_i \right\|_p^m dt \\
&\quad \leq (KB_pC)^m \frac{k_1! \cdots k_n!}{m!} \|\widehat{L}\| \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{m} \right)^{\frac{m}{p}} dt \\
&\quad = (KB_pC)^m \frac{k_1! \cdots k_n!}{m!} \|\widehat{L}\|\,.
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 5. *Αν στην Πρόταση 19 επιλέξουμε τα $x_1, \ldots, x_n$ να έχουν ξένα support, τότε παίρνουμε το αποτέλεσμα του Harris στο Λήμμα 10.*

3.3 Η πραγματική περίπτωση

3.3.1 Χρήση βαρών

Θεώρημα 13. *Έστω $1 \le p \le \infty$ και $L \in \mathcal{L}^s({}^mL_p(\mu),\mathbb{R})$. Αν τα $x_1,\dots,x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον $L_p(\mu)$ με ξένα support, τότε*

$$|L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})| \le \frac{k_1^{k_1}\cdots k_n^{k_n}}{m!} n^{\frac{m}{p}} \|\widehat{L}\|\,, \tag{3.3.1}$$

για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1,\dots,k_n$ με $k_1+\dots+k_n=m$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $L \in \mathcal{L}^s({}^mL_p(\mu),\mathbb{R})$, προκύπτει ότι

$$L\left(\left(\frac{x_1}{k_1}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{x_n}{k_n}\right)^{k_n}\right) = \frac{1}{k_1^{k_1}\dots k_n^{k_n}} L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})$$

και εφαρμόζοντας το Λήμμα 2 στα $\frac{x_1}{k_1},\dots,\frac{x_n}{k_n}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}&|L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})|\\ &\quad \le \frac{k_1^{k_1}\cdots k_n^{k_n}}{m!}\|\widehat{L}\| \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)\frac{x_1}{k_1}+\dots+\sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)\frac{x_n}{k_n}\right\|_p^m dt\,.\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)\frac{x_1}{k_1}+\dots+\sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)\frac{x_n}{k_n}\right\|_p^m dt\\ &\quad\le \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{k_1}\left|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)\right|\right)^p+\dots+\left(\frac{1}{k_n}\left|\sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)\right|\right)^p\right]^{\frac{m}{p}} dt\\ &\quad\le n^{\frac{m}{p}}\end{aligned}$$

και η απόδειξη της (3.3.1) προκύπτει άμεσα. □

Παρατήρηση 6. *Για $k_1=\dots=k_n=1$, το άνω φράγμα της $c(k_1,\dots,k_n;\ell_p)$ από το Λήμμα 10 και το κάτω φράγμα από το Θεώρημα 13 δίνουν την ίδια εκτίμηση, η οποία είναι $\frac{m^{\frac{m}{p}}}{m!}$.*

Αφού από τον τύπο του Stirling ισχύει $m! \sim \sqrt{2\pi}m^{(m+1/2)}e^{-m}$, η σταθερά του Θεωρήματος 13 δίνει ασυμπτωτικά $c(L_p(\mu)) = n^{\frac{1}{p}}e$.

Χρησιμοποιώντας την (3.2.1) στην απόδειξη του Θεωρήματος 13, παίρνουμε το επόμενο αποτέλεσμα για μία ημι-νορμαρισμένη unconditional βασική ακολουθία (x_i) με τις απαραίτητες επιπλέον σταθερές.

Πρόταση 20. *Έστω $2 < p < \infty$ και $L \in \mathcal{L}^s({}^m L_p(\mu), \mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι η (x_i) είναι μία ημι-νορμαρισμένη K-unconditional βασική ακολουθία στον $L_p(\mu)$ και για κάθε $\phi > 0$ με $\int_0^1 \phi(t)^p dt = 1$ ισχύει ότι*

$$C_\phi = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|U_\phi x_i\|_{L_2(\mu_\phi)}^{2p(p-2)} \right)^{\frac{p-2}{2p}} < \infty .$$

Τότε, η (x_i) είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p και για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \dots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$ έχουμε

$$|L(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n})| \le (KB_pC)^m \frac{k_1^{k_1} \dots k_n^{k_n}}{m!} n^{\frac{m}{p}} \|\widehat{L}\| ,$$

όπου B_p είναι η σταθερά Khinchine και $C = \sup C_\phi < \infty$.

Στη συνέχεια, θα συγκρίνουμε κάποιες ενδεικτικές τιμές της $c(k_1, \dots, k_n; L_p(\mu))$ που προκύπτουν από το Θεώρημα 13 με τις αντίστοιχες που ήδη γνωρίζουμε από την (3.1.5).

Παραδείγματα 1. *(α) Για $m = 8$, $c(1, \dots, 1, 2; L_8(\mu)) \simeq 0.0007$, ενώ η (3.1.5) δίνει 2048.*

(β) $c(1, 1, 2; L_8(\mu)) \simeq 0.29$, ενώ η (3.1.5) δίνει 8.

(γ) $c(1, 1, 6; L_4(\mu)) \simeq 10.4$, ενώ η (3.1.5) δίνει 19.

(δ) Για $m = 8$, $c(1, \dots, 1, 2; L_2(\mu)) \simeq 0.24$, ενώ η (3.1.5) δίνει 2048.

3.3.2 Χρήση των ανισοτήτων του Clarkson

Ο J. A. Clarkson απέδειξε στο [19, Θεώρημα 2] ότι για κάθε στοιχεία x και y στον L_p ή στον ℓ_p, με $p \ge 2$ ισχύουν οι παρακάτω γνωστές ανισότητες (θεωρώντας $q = p/(p-1)$ το συζυγή εκθέτη του p):

$$2(\|x\|^p + \|y\|^p) \le \|x+y\|^p + \|x-y\|^p \le 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p) ,$$

$$2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1} \le \|x+y\|^q + \|x-y\|^q ,$$

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \le 2(\|x\|^q + \|y\|^q)^{p-1} .$$

Για $1 < p \le 2$ οι ανισότητες ισχύουν αντίστροφα.

Χρησιμοποιώντας επιπλέον την ανισότητα του Hölder, καθώς και αυτή του Khinchine, αν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, προκύπτουν οι ακόλουθες ανισότητες τύπου Clarkson (δες [57, Θεώρημα 5]):

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i\right|^\lambda dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad \text{αν } 0 < \lambda \leq 2$$

και

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i\right|^\lambda dt\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^{\lambda'}\right)^{\frac{1}{\lambda'}} \quad \text{αν } 2 \leq \lambda < \infty\,,$$

όπου $\lambda' = \lambda/(\lambda-1)$ ο συζυγής εκθέτης του λ.

Θεώρημα 14. *Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και $L \in \mathcal{L}^s({}^mL_p(\mu), \mathbb{R})$. Αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον $L_p(\mu)$ με ξένα support, τότε*

$$|L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| \leq c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu))\|\widehat{L}\|$$

για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \ldots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$, όπου

$$c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu)) = \begin{cases} \frac{\left(k_1^{p-1}+\cdots+k_n^{p-1}\right)^{\frac{m}{p}}}{m!} & \text{αν } p \geq m \\ \frac{n^{\frac{m-p}{p}}\left(k_1^{m-1}+\cdots+k_n^{m-1}\right)}{m!} & \text{αν } p \leq m\,. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2 έχουμε

$$\begin{aligned} |L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| &\leq \frac{\|\widehat{L}\|}{m!}\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)x_1 + \cdots + \sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)x_n\right\|_p^m dt \\ &\leq \frac{\|\widehat{L}\|}{m!}\int_0^1 \left(\left|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)\right|^p + \cdots + \left|\sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)\right|^p\right)^{\frac{m}{p}} dt\,. \end{aligned}$$

Έστω $p \geq m$. Τότε $m/p \leq 1$ και από την ανισότητα του Hölder

$$\begin{aligned} |L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| &\leq \frac{\|\widehat{L}\|}{m!}\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)\right|^p dt + \cdots + \int_0^1 \left|\sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)\right|^p dt\right)^{\frac{m}{p}} \\ &\leq \frac{(k_1^{\frac{p}{p'}} + \cdots + k_n^{\frac{p}{p'}})^{\frac{m}{p}}}{m!}\|\widehat{L}\| \qquad (\text{αφού } p \geq 2) \\ &= \frac{(k_1^{p-1} + \cdots + k_n^{p-1})^{\frac{m}{p}}}{m!}\|\widehat{L}\|\,. \end{aligned}$$

Έστω $p \le m$. Τότε $m/p \ge 1$ και από την ανισότητα του Hölder

$$
\begin{aligned}
&|L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})| \\
&\quad \le \frac{n^{\frac{m}{p}}\|\widehat{L}\|}{m!}\int_0^1\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)\right|^p+\cdots+\frac{1}{n}\left|\sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)\right|^p\right)^{\frac{m}{p}} dt \\
&\quad \le \frac{n^{\frac{m}{p}}\|\widehat{L}\|}{m!}\int_0^1\frac{1}{n}\left(\left|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)\right|^m+\cdots+\left|\sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)\right|^m\right) dt \\
&\quad = \frac{n^{\frac{m-p}{p}}\|\widehat{L}\|}{m!}\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)\right|^m dt+\cdots+\int_0^1\left|\sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)\right|^m dt\right) \\
&\quad \le \frac{n^{\frac{m-p}{p}}(k_1^{\frac{m}{m'}}+\cdots+k_n^{\frac{m}{m'}})}{m!}\|\widehat{L}\| \qquad (\text{αφού } m \ge 2) \\
&\quad = \frac{n^{\frac{m-p}{p}}(k_1^{m-1}+\cdots+k_n^{m-1})}{m!}\|\widehat{L}\|\,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Παρατηρήσεις 1. *Για $k_1=\cdots=k_n=1$, το άνω φράγμα της $c(k_1,\dots,k_n;\ell_p)$ από το Λήμμα 10 και το κάτω φράγμα από το Θεώρημα 14 όταν $p \ge m$, δίνουν την ίδια εκτίμηση, η οποία είναι $\frac{m^{\frac{m}{p}}}{m!}$.*

Από τον τύπο του Stirling, η σταθερά του Θεωρήματος 14 δίνει ασυμπτωτικά $c(L_\infty(\mu))=e$ και $c(L_p(\mu))=n^{\frac{1}{p}}e$ για $1\le p<\infty$.

Χρησιμοποιώντας την (3.2.1) στην απόδειξη του Θεωρήματος 14, παίρνουμε το επόμενο αποτέλεσμα για μία ημι-νορμαρισμένη unconditional βασική ακολουθία (x_i) με τις απαραίτητες επιπλέον σταθερές.

Πρόταση 21. *Έστω $2<p<\infty$ και $L\in\mathcal{L}^s({}^mL_p(\mu),\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι η (x_i) είναι μία ημι-νορμαρισμένη K-unconditional βασική ακολουθία στον $L_p(\mu)$ και για κάθε $\phi>0$ με $\int_0^1\phi(t)^p dt=1$ ισχύει ότι*

$$
C_\phi=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|U_\phi x_i\|_{L_2(\mu_\phi)}^{2p(p-2)}\right)^{\frac{p-2}{2p}}<\infty\,.
$$

Τότε, η (x_i) είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p και για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1,\dots,k_n$ με $k_1+\cdots+k_n=m$ έχουμε

$$
|L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})|\le c(k_1,\dots,k_n;L_p(\mu))\|\widehat{L}\|\,,
$$

όπου

$$c(k_1,\ldots,k_n;L_p(\mu)) = \begin{cases} (KB_pC)^m \frac{(k_1^{p-1}+\cdots+k_n^{p-1})^{\frac{m}{p}}}{m!} & \text{αν } p \geq m \\ (KB_pC)^m \frac{n^{\frac{m-p}{p}}(k_1^{m-1}+\cdots+k_n^{m-1})}{m!} & \text{αν } p \leq m\,, \end{cases}$$

με το B_p να είναι η σταθερά Khinchine και $C = \sup C_\phi < \infty$.

Στη συνέχεια, θα συγκρίνουμε κάποιες ενδεικτικές τιμές της $c(k_1,\ldots,k_n;L_p(\mu))$ που προκύπτουν από το Θεώρημα 14 με τις αντίστοιχες που ήδη γνωρίζουμε από την (3.1.5).

Παραδείγματα 2. *(α) $c(4,4;L_8(\mu)) \simeq 0.81$, ενώ η* (3.1.5) *δίνει* 16.

(β) $c(1,3;L_4(\mu)) = 1.1\bar{6}$, *ενώ η* (3.1.5) *δίνει* 3.08.

(γ) $c(1,1,2;L_4(\mu)) = 0.41\bar{6}$, *ενώ η* (3.1.5) *δίνει* 8.

(δ) $c(4,4;L_2(\mu)) \simeq 6.5$, *ενώ η* (3.1.5) *δίνει* 16.

(ε) $c(1,3;L_2(\mu)) = 2.\bar{3}$, *ενώ η* (3.1.5) *δίνει* 3.08.

(στ) $c(1,1,2;L_2(\mu)) = 1.25$, *ενώ η* (3.1.5) *δίνει* 8.

3.3.3 Χρήση της ανισότητας του Hoeffding

Έστω $(\mathbb{R},\mathcal{M},\lambda)$ ο χώρος μέτρου Lebesgue και $E \in \mathcal{M}$. Αν η f είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση στο E, στην ενότητα 2.2 ορίσαμε τη συνάρτηση κατανομής της, $\lambda_f : (0,+\infty) \to [0,+\infty]$ με

$$\lambda_f(a) = \lambda(\{x \in E : |f(x)| > a\})\,,$$

όπου το λ συμβολίζει μέτρο Lebesgue. Από την Πρόταση 16, καταλήξαμε ότι

$$\int_E |f|^p\,d\lambda = p\int_0^\infty a^{p-1}\lambda_f(a)\,da \tag{3.3.3}$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hoeffding βρήκαμε ένα άνω φράγμα για το

$$\lambda_f(x) := \lambda_k(x) = \mathbf{P}(|r_1(t)+\cdots+r_k(t)| \geq x)\,.$$

Συγκεκριμένα,

$$\lambda_k(x) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2k}}\,. \tag{3.3.4}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το διπλό παραγοντικό ενός θετικού ακέραιου n ορίζεται ως

$$n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1 & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 6\cdot 4\cdot 2 & \text{αν } n \text{ άρτιος}\,. \end{cases}$$

Λήμμα 12. *Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε*

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} \frac{2}{n} 2^{-\frac{n}{2}} n!! & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{n} 2^{-\frac{n}{2}} n!! & \text{αν } n \text{ περιττός} . \end{cases}$$

Απόδειξη. Αν ο n είναι άρτιος, τότε

$$n!! = 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \Leftrightarrow n!! = 2^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2}{n} 2^{-\frac{n}{2}} n!! \,.$$

Αν ο n είναι περιττός, τότε

$$n!! = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \Leftrightarrow n!! = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{n} 2^{-\frac{n}{2}} n!! \,.$$

□

Αν $p > 0$, στη συνέχεια με $[p]$ συμβολίζεται το *ακέραιο μέρος του* p. Δηλαδή, το $[p]$ είναι ο μέγιστος θετικός ακέραιος που δεν ξεπερνά το p.

Θεώρημα 15. *Έστω $1 \le p \le \infty$ και $L \in \mathcal{L}^s({}^m L_p(\mu), \mathbb{R})$. Αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον $L_p(\mu)$ με ξένα support, τότε*

$$|L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| \le c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu)) \|\widehat{L}\| \,,$$

για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \ldots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$, όπου

$$c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu)) = \begin{cases} \frac{\left(\sqrt{2\pi}[p]!! \sum_{i=1}^n k_i^{[p]/2}\right)^{\frac{m}{[p]}}}{m!} & \text{αν } p \ge m \\ \frac{n^{\frac{m-p}{p}} \sqrt{2\pi} m!! \sum_{i=1}^n k_i^{m/2}}{m!} & \text{αν } p \le m \,. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2 έχουμε

$$\begin{aligned} |L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| &\le \frac{\|\widehat{L}\|}{m!} \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{k_1} r_i(t) x_1 + \cdots + \sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t) x_n \right\|_p^m dt \\ &\le \frac{\|\widehat{L}\|}{m!} \int_0^1 \left(\left| \sum_{i=1}^{k_1} r_i(t) \right|^p + \cdots + \left| \sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t) \right|^p \right)^{\frac{m}{p}} dt \,. \end{aligned}$$

Έστω $p \ge m$. Αφού $p \ge [p] \ge m$ και $m/[p] \le 1$, με χρήση της ανισότητας του Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned} |L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| &\le \frac{\|\widehat{L}\|}{m!} \int_0^1 \left(\left| \sum_{i=1}^{k_1} r_i(t) \right|^{[p]} + \cdots + \left| \sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t) \right|^{[p]} \right)^{\frac{m}{[p]}} dt \\ &\le \frac{\|\widehat{L}\|}{m!} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{k_1} r_i(t) \right|^{[p]} dt + \cdots + \int_0^1 \left| \sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t) \right|^{[p]} dt \right)^{\frac{m}{[p]}} . \end{aligned}$$

Συνεπώς, από τις (3.3.3) και (3.3.4) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
|L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})| &\le \frac{\|\widehat{L}\|}{m!}\left([p]\int_0^\infty x^{[p]-1}\lambda_{k_1}(x)\,dx+\cdots+[p]\int_0^\infty x^{[p]-1}\lambda_{k_n}(x)\,dx\right)^{\frac{m}{[p]}}\\
&\le \frac{\|\widehat{L}\|}{m!}\left([p]\int_0^\infty x^{[p]-1}2e^{-\frac{x^2}{2k_1}}\,dx+\cdots+[p]\int_0^\infty x^{[p]-1}2e^{-\frac{x^2}{2k_n}}\,dx\right)^{\frac{m}{[p]}}\\
&= \frac{\|\widehat{L}\|}{m!}\left([p](2k_1)^{\frac{[p]}{2}}\Gamma\left(\frac{[p]}{2}\right)+\cdots+[p](2k_n)^{\frac{[p]}{2}}\Gamma\left(\frac{[p]}{2}\right)\right)^{\frac{m}{[p]}}\\
&= \frac{\left([p]2^{\frac{[p]}{2}}\Gamma(\frac{[p]}{2})\sum_{i=1}^n k_i^{\frac{[p]}{2}}\right)^{\frac{m}{[p]}}}{m!}\|\widehat{L}\|\,.
\end{aligned}$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το Λήμμα 12 οδηγούμαστε στην

$$|L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})| \le \begin{cases} \frac{\left(2[p]!!\sum_{i=1}^n k_i^{[p]/2}\right)^{\frac{m}{[p]}}}{m!}\|\widehat{L}\| & \text{αν } [p] \text{ άρτιος}\\ \frac{\left(\sqrt{2\pi}[p]!!\sum_{i=1}^n k_i^{[p]/2}\right)^{\frac{m}{[p]}}}{m!}\|\widehat{L}\| & \text{αν } [p] \text{ περιττός .}\end{cases} \tag{3.3.6}$$

Έστω $p \le m$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hölder και τις (3.3.3), (3.3.4), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&|L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})|\\
&\le \frac{n^{\frac{m}{p}}\|\widehat{L}\|}{m!}\int_0^1\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)\right|^p+\cdots+\frac{1}{n}\left|\sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)\right|^p\right)^{\frac{m}{p}}dt\\
&\le \frac{n^{\frac{m}{p}}\|\widehat{L}\|}{m!}\int_0^1\frac{1}{n}\left(\left|\sum_{i=1}^{k_1} r_i(t)\right|^m+\cdots+\left|\sum_{i=m-k_n+1}^{m} r_i(t)\right|^m\right)dt\\
&\le \frac{n^{\frac{m-p}{p}}\|\widehat{L}\|}{m!}\left(m\int_0^\infty x^{m-1}\lambda_{k_1}(x)\,dx+\cdots+m\int_0^\infty x^{m-1}\lambda_{k_n}(x)\,dx\right)\\
&\le \frac{n^{\frac{m-p}{p}}\|\widehat{L}\|}{m!}\left(m\int_0^\infty x^{m-1}2e^{-\frac{x^2}{2k_1}}\,dx+\cdots+m\int_0^\infty x^{m-1}2e^{-\frac{x^2}{2k_n}}\,dx\right)\\
&= \frac{n^{\frac{m-p}{p}}\|\widehat{L}\|}{m!}\left(m(2k_1)^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)+\cdots+m(2k_n)^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right)\\
&= \frac{n^{\frac{m-p}{p}}m2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\sum_{i=1}^n k_i^{\frac{m}{2}}}{m!}\|\widehat{L}\|\,.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας ξανά το Λήμμα 12 οδηγούμαστε στην

$$|L(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})| \le \begin{cases} \frac{n^{\frac{m-p}{p}}2m!!\sum_{i=1}^n k_i^{m/2}}{m!}\|\widehat{L}\| & \text{αν } m \text{ άρτιος}\\ \frac{n^{\frac{m-p}{p}}\sqrt{2\pi}m!!\sum_{i=1}^n k_i^{m/2}}{m!}\|\widehat{L}\| & \text{αν } m \text{ περιττός .}\end{cases} \tag{3.3.7}$$

Τελικά, η (3.3.5) προκύπτει από τις (3.3.6) και (3.3.7). □

Παρατηρούμε ότι στην *πραγματική* περίπτωση η σταθερά του Θεωρήματος 15 δίνει ότι $c(L_\infty(\mu)) = \sqrt{e}$, η οποία είναι η καλύτερη γνωστή ασυμπτωτική σταθερά και ανεξάρτητη του n. Επιπλέον, $c(L_p(\mu)) = n^{\frac{1}{p}}\sqrt{e}$ για $1 \le p < \infty$. Όπως προκύπτει από το Λήμμα 10, η ασυμπτωτική σταθερά για το *μιγαδικό* χώρο $L_\infty(\mu)$ ισούται με 1.

Χρησιμοποιώντας την (3.2.1) στην απόδειξη του Θεωρήματος 15, παίρνουμε το επόμενο αποτέλεσμα για μία ημι-νορμαρισμένη unconditional βασική ακολουθία (x_i) με τις απαραίτητες επιπλέον σταθερές.

Πρόταση 22. *Έστω $2 < p < \infty$ και $L \in \mathcal{L}^s({}^m L_p(\mu), \mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι η (x_i) είναι μία ημι-νορμαρισμένη K-unconditional βασική ακολουθία στον $L_p(\mu)$ και για κάθε $\phi > 0$ με $\int_0^1 \phi(t)^p dt = 1$ ισχύει ότι*

$$C_\phi = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|U_\phi x_i\|_{L_2(\mu_\phi)}^{2p(p-2)} \right)^{\frac{p-2}{2p}} < \infty .$$

Τότε, η (x_i) είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p και για κάθε μη αρνητικούς ακέραιους $k_1, \ldots, k_n$ με $k_1 + \cdots + k_n = m$ έχουμε

$$|L(x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n})| \le c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu)) \|\widehat{L}\| ,$$

όπου

$$c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu)) = \begin{cases} (KB_pC)^m \dfrac{\left(\sqrt{2\pi}[p]!! \sum_{i=1}^n k_i^{[p]/2}\right)^{\frac{m}{[p]}}}{m!} & \text{αν } p \ge m \\ (KB_pC)^m \dfrac{n^{\frac{m-p}{p}} \sqrt{2\pi} m!! \sum_{i=1}^n k_i^{m/2}}{m!} & \text{αν } p \le m \ , \end{cases}$$

με το B_p να είναι η σταθερά Khinchine και $C = \sup C_\phi < \infty$.

Στη συνέχεια, θα συγκρίνουμε κάποιες ενδεικτικές τιμές της $c(k_1, \ldots, k_n; L_p(\mu))$ που προκύπτουν από το Θεώρημα 15 με τις αντίστοιχες που ήδη γνωρίζουμε από την (3.1.5).

Παραδείγματα 3. *(α)* $c(2, 58, 140; L_{180}(\mu)) \simeq 17.42 \times 10^{27}$, *ενώ η* (3.1.5) *δίνει* 27.14×10^{27}.

(β) $c(2, 58, 140; L_{200}(\mu)) \simeq 15.42 \times 10^{27}$, *ενώ η* (3.1.5) *δίνει* 27.14×10^{27}.

3.4 Συμπεράσματα

Σε αυτή την ενότητα θα εξηγήσουμε πότε είναι χρήσιμη κάθε μία από τις παραπάνω τεχνικές, αλλά οι κανόνες τους οποίους θα παραθέσουμε δεν είναι αυστηροί, αφού για κάθε τιμές που επιλέγουμε για τα m και p υπάρχει μεγάλο εύρος τιμών των n, k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Αρχικά, να σημειωθεί ότι όταν $1 \leq p \leq m'$, με $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$, η ανισότητα (3.1.1) δίνει καλύτερες εκτιμήσεις από οποιαδήποτε από αυτές τις τεχνικές.

Για $p = m$:

Αν το n είναι πολύ μικρό και τα k_i είναι (περίπου) ίσα, παίρνουμε τις καλύτερες τιμές από το Θεώρημα 14 (Παράδειγμα 2α).

Αν το n είναι πολύ μικρό και τα k_i έχουν μεγάλο εύρος τιμών, το Θεώρημα 14 είναι το πιο χρήσιμο για πολύ μικρά m (Παράδειγμα 2β), αλλά η ανισότητα (3.1.5) παραμένει καλύτερη για μεγαλύτερα m.

Αν το n είναι σχετικά μεγάλο (όχι απαραίτητα κοντά στο m), τα καλύτερα αποτελέσματα προκύπτουν από το Θεώρημα 14 για πολύ μικρά m (Παράδειγμα 2γ) και από το Θεώρημα 13 για μεγαλύτερα m (Παράδειγμα 1α).

Για $p > m$:

Για δεδομένο m, καθώς το p αυξάνει, η μοναδική σταθερά που μειώνεται είναι αυτή του Θεωρήματος 13, επομένως για μεγάλα p παίρνουμε τις καλύτερες εκτιμήσεις από το Θεώρημα 13 (Παράδειγμα 1β). Αν το p δεν είναι πολύ μεγάλο (δηλαδή κοντά στο m), ισχύουν οι κανόνες της περίπτωσης $p = m$.

Για $p < m$:

Αν το n είναι πολύ μικρό και τα k_i είναι (περίπου) ίσα, προτιμούμε το Θεώρημα 14 (Παράδειγμα 2δ). Μόνο για μεγάλα m και πολύ μικρά p, παίρνουμε τις καλύτερες τιμές από την ανισότητα (3.1.5).

Αν το n είναι πολύ μικρό και τα k_i έχουν μεγάλο εύρος τιμών, οι καλύτερες εκτιμήσεις προκύπτουν συνήθως από την ανισότητα (3.1.5), υπάρχουν όμως και κάποιες περιπτώσεις που προκύπτουν από τα Θεωρήματα 13 (Παράδειγμα 1γ) και 14 (Παράδειγμα 2ε).

Αν το n είναι σχετικά μεγάλο (όχι απαραίτητα κοντά στο m), το Θεώρημα 13 είναι αυτό που χρειαζόμαστε (Παράδειγμα 1δ), με λίγες εξαιρέσεις για πολύ μικρές τιμές του m όπου τα αποτελέσματα από το Θεώρημα 14 είναι καλύτερα (Παράδειγμα 2στ).

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το Θεώρημα 15 δίνει την καλύτερη γνωστή ασυμπτωτική εκτίμηση για τον $L_\infty(\mu)$, η οποία είναι ανεξάρτητη του n. Επιπλέον, είναι χρήσιμο τόσο για την περίπτωση $p \geq m$ όσο και για την $p < m$ για πολύ μεγάλες τιμές των m και p, όταν $n \geq 3$ (αλλά όχι κοντά στο m) και τα k_i δεν είναι ίσα, αλλά ούτε έχουν μεγάλο εύρος τιμών (Παραδείγματα 3α,3β).

Κεφάλαιο 4

ℓ_r κορεσμένοι $\mathcal{L}^\infty$ χώροι

4.1 Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιαστεί μία μέθοδος κατασκευής, για κάθε $1 < r < \infty$, ενός νέου $\mathcal{L}^\infty$ χώρου που είναι ℓ_r κορεσμένος. Η προσέγγιση μας συνδυάζει, όπως στο [4], τη Bourgain-Delbaen μέθοδο κατασκευής εξωτικών $\mathcal{L}^\infty$ χώρων ([17]), με νόρμες τύπου Tsirelson που είναι ισοδύναμες με κάποια ℓ_r νόρμα (όπως [3], [6], [12], [15], [47]). Υπενθυμίζουμε ότι οι Bourgain-Delbaen χώροι είναι παραδείγματα διαχωρίσιμων $\mathcal{L}^\infty$ χώρων που δεν περιέχουν ισομορφικά τον c_0 και είναι γνωστό ([37]) ότι κάθε διαχωρίσιμος $\mathcal{L}^\infty$ χώρος Banach που δεν περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1 έχει συζυγή ισόμορφο με τον ℓ_1. Στο [31], οι κλασσικοί Bourgain-Delbaen χώροι $\mathfrak{X}_{a,b}$ με $a < 1$, $b < \frac{1}{2}$ και $a + b > 1$ αποδείχθηκε ότι είναι ℓ_p κορεσμένοι για p που ικανοποιεί τους τύπους $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $a^q + b^q = 1$.

Αυτό το κεφάλαιο οργανώνεται ως εξής. Στη δεύτερη ενότητα, δεδομένου ενός $r \in (1, \infty)$, κατασκευάζουμε ένα χώρο Banach $\mathfrak{X}_r$. Για να το επιτύχουμε αυτό, επιλέγουμε αρχικά έναν $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ και μία πεπερασμένη ακολουθία $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ θετικών πραγματικών αριθμών με $b_1 < 1$, $b_2, b_3, \ldots, b_n < \frac{1}{2}$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'} = 1$ και $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Ο ορισμός του $\mathfrak{X}_r$ συνδυάζει τη μέθοδο των Bourgain-Delbaen με το χώρο τύπου Tsirelson $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$, ο οποίος θα αποδειχθεί στη συνέχεια ότι είναι ισόμορφος με τον ℓ_r. Πιο συγκεκριμένα, αν $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = \theta$, ο χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ ταυτίζεται με τον $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \theta)$ ο οποίος είναι γνωστό ότι είναι ισόμορφος με τον ℓ_p για κάποιο $p \in (1, \infty)$ (δες [6]). Αξίζει να σημειωθεί ότι για $n = 2$ οι χώροι $\mathfrak{X}_r$ ταυτίζονται ουσιαστικά με τους κλασσικούς χώρους Bourgain-Delbaen $\mathfrak{X}_{a,b}$. Επομένως, αυτή η κατασκευή των $\mathcal{L}^\infty$ χώρων που είναι ℓ_r κορεσμένοι, μπορεί να θεωρηθεί ως μία γενίκευση της μεθόδου των Bourgain-Delbaen. Πρέπει να τονίσουμε ότι για $n = 2$, η απόδειξή μας ότι ο

$\mathfrak{X}_r$ είναι ℓ_r κορεσμένος, διαφέρει από την αντίστοιχη του R. Haydon ([31]) για τον $\mathfrak{X}_{a,b}$.

Πιο συγκεκριμένα, ο $\mathfrak{X}_r$ έχει μία φυσιολογική FDD (M_k). Δεδομένης μίας νορμαρισμένης skipped block βάσης (u_k) της (M_k) με τα support των u_k να απέχουν αρκετά, δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι η (u_k) κυριαρχεί την (e_k), που είναι η συνήθης βάση του $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})$. Το ίδιο ισχύει για κάθε νορμαρισμένη block βάση της (u_k). Για να κατασκευάσουμε μία νορμαρισμένη block βάση της (u_k) ισούναμη με την (e_k), επιλέγουμε μία ακολουθία $I_1 < I_2 < \dots$ διαδοχικών πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τέτοιων ώστε $\lim_k \left\| \sum_{i\in I_k} u_i \right\| = \infty$. Μία τέτοια επιλογή είναι δυνατό να γίνει επειδή η ακολουθία (e_k) κυριαρχείται από την (u_k). Θέτουμε $v_k = \left\| \sum_{i\in I_k} u_i \right\|^{-1} \sum_{i\in I_k} u_i$ και αποδεικνύουμε ότι κάθε υπακολουθία της (v_k) κυριαρχείται από την (e_k). Για να το επιτύχουμε αυτό εισάγουμε στη συγκεκριμένη κατασκευή τη μέθοδο της ανάλυσης στοιχείων μίας πεπερασμένης block βάσης της (e_k) ως προς ένα συναρτησιακό που ανήκει στο φυσιολογικό norming σύνολο του $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})$ (δες [15]). Αυτή η προσσέγγιση οδηγεί σε μία εναλλακτική απόδειξη για τον κορεσμό των χώρων τύπου Bourgain-Delbaen με αντίγραφα του ℓ_r, η οποία είναι πιο κοντά στο πνεύμα των μεθόδων εκτίμησης νορμών σε χώρους τύπου Tsirelson και mixed Tsirelson.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην απόδειξη της βασικής ιδιότητας, η οποία είναι ότι ο χώρος $\mathfrak{X}_r$ είναι ℓ_r κορεσμένος. Στην ενότητα 3, ορίζουμε τη δενδροειδή ανάλυση των συναρτησιακών $\{e_\gamma^* : \gamma \in \Gamma\}$ που αποτελούν 1-norming υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του $\mathfrak{X}_r^*$. Η δενδροειδής ανάλυση είναι παρόμοια με την αντίστοιχη που χρησιμοποιείται στους χώρους Tsirelson και mixed Tsirelson [6]. Στις δύο επόμενες ενότητες αποδεικνύουμε τις άνω και κάτω εκτιμήσεις νορμών για συγκεκριμένες block ακολουθίες του χώρου $\mathfrak{X}_r$.

Στην τελευταία ενότητα αποδεικνύουμε ότι για κάθε block βάση ως προς την (M_k) υπάρχει περαιτέρω νορμαρισμένη block βάση (x_k) τέτοια ώστε κάθε νορμαρισμένη block βάση της (x_k) είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του χώρου $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})$. Το θεώρημα του . Zippin [58] οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

4.2 Εισαγωγικές έννοιες

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε το χώρο $\mathfrak{X}_r$ συνδυάζοντας τη μέθοδο κατασκευής των Bourgain-Delbaen [17] με κατασκευές τύπου Tsirelson [3], [6].

Πριν προχωρήσουμε, θα υπενθυμίσουμε κάποιους συμβολισμούς και ορολογία από το [4]. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $0 < b_1, b_2, ..., b_n < 1$ με $\sum_{i=1}^{n} b_i > 1$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $r' \in (1, \infty)$ τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^{n} {b_i}^{r'} = 1$. Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$. Ορίζουμε $W[(\mathcal{A}_n, \bar{b})]$ ως το μικρότερο υποσύνολο W του $c_{00}(\mathbb{N})$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\pm e_k^* \in W$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

2. οποτεδήποτε $f_i \in W$ και $\max\operatorname{supp} f_i < \min\operatorname{supp} f_{i+1}$ για κάθε i, έχουμε ότι $\sum_{i\leq a} b_i f_i \in W$, για κάθε $a \leq n$.

Λέμε ότι ένα στοιχείο f του $W[(\mathcal{A}_n, \bar{b})]$ είναι Τύπου 0 αν $f = \pm e_k^*$ για κάποιο k και Τύπου Ι διαφορετικά. Ένα στοιχείο Τύπου Ι λέμε ότι έχει βάρος b_a για κάποιο $a \leq n$, αν $f = \sum_{i=1}^{a} f_i$ για μία κατάλληλη ακολουθία (f_i) διαδοχικών στοιχείων του $W[\mathcal{A}_n, \bar{b}]$.
Ο *χώρος Tsirelson* $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ ορίζεται ως η πλήρωση του c_{00} ως προς τη νόρμα

$$\|x\| = \sup\{\langle f, x\rangle : f \in W[\mathcal{A}_n, \bar{b}]\}.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη νόρμα του χώρου αυτού ως τη μικρότερη συνάρτηση $x \mapsto \|x\|$ που ικανοποιεί το εξής:

$$\|x\| = \max\left\{\|x\|_\infty, \sup\sum_{i=1}^{n} b_i\|E_i x\|\right\},$$

όπου το supremum θεωρείται πάνω σε όλες τις ακολουθίες πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε $E_1 < E_2 < \cdots < E_n$.

Τώρα, θα παρουσιάσουμε τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της κατασκευής των Bourgain-Delbaen.
Η μέθοδος που ακολουθεί μπορεί να χαρακτηριστεί ως η δυική κατασκευή αυτής που παρουσιάζεται στο [4]. Αυτός ο χαρακτηρισμός βασίζεται στο γεγονός ότι στο [4] ο Bourgain-Delbaen χώρος X ορίζεται ως ο προσυζυγής του δυικού του, ο οποίος είναι ο $\ell_1(\Gamma)$ για κάποιο Γ αριθμήσιμο, θεωρώντας ότι ο $\ell_1(\Gamma)$ έχει βάση διαφορετική από τη συνήθη.

Έστω $(\Gamma_q)_{q\in\mathbb{N}}$ μία γνησίως αύξουσα ακολουθία πεπερασμένων συνόλων και Γ η ένωσή τους, δηλαδή $\Gamma = \cup_{q\in\mathbb{N}}\Gamma_q$.
Θέτουμε $\Delta_0 = \Gamma_0$ και $\Delta_q = \Gamma_q \setminus \Gamma_{q-1}$ για $q = 1, 2, \ldots$.
Υποθέτουμε ακόμη ότι για κάθε $\gamma \in \Delta_q$, $q \geq 1$, έχουμε ορίσει ένα γραμμικό

συναρτησιακό $c_\gamma^* : \ell^\infty(\Gamma_{q-1}) \to \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, για $n < m$ στο $\mathbb{N}$, ορίζουμε επαγωγικά ένα γραμμικό τελεστή $i_{n,m} : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \ell^\infty(\Gamma_m)$ ως εξής:
Για $m = n+1$, ορίζουμε $i_{n,n+1} : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \ell^\infty(\Gamma_{n+1})$ με τον κανόνα

$$(i_{n,n+1}(x))(\gamma) = \begin{cases} x(\gamma), & \text{αν } \gamma \in \Gamma_n \\ c_\gamma^*(x), & \text{αν } \gamma \in \Delta_{n+1} \end{cases}$$

για κάθε $x \in \ell^\infty(\Gamma_n)$.
Υποθέτοντας ότι ο τελεστής $i_{n,m}$ έχει ορισθεί, θέτουμε $i_{n,m+1} = i_{m,m+1} \circ i_{n,m}$. Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι για $n < l < m$ ισχύει ότι $i_{n,m} = i_{l,m} \circ i_{n,l}$. Επίσης, συμβολίζουμε με $i_n : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \mathbb{R}^\Gamma$ το όριο $i_n = \lim\limits_{m\to\infty} i_{n,m}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n < m$ έχουμε ότι $\|i_{n,m}\| \leq C$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|i_n\| \leq C$ και άρα ο τελεστής $i_n : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \ell^\infty(\Gamma)$ είναι γραμμικός και φραγμένος. Ειδικότερα, θέτοντας $X_n = i_n[\ell^\infty(\Gamma_n)]$, έχουμε ότι $X_n \overset{C}{\approx} \ell^\infty(\Gamma_n)$ και επιπλέον η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία υπόχωρων του $\ell^\infty(\Gamma)$. Τέλος, θέτουμε το χώρο $\mathfrak{X}_{BD} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n} \hookrightarrow \ell^\infty(\Gamma)$ εφοδιασμένο με τη supremum νόρμα. Εξ' ορισμού ο $\mathfrak{X}_{BD}$ είναι $\mathcal{L}^\infty$ χώρος.

Συμβολίζουμε με $r_n : \ell^\infty(\Gamma) \to \ell^\infty(\Gamma_n)$ τις φυσικές απεικονίσεις περιορισμού $r_n(x) = x|_{\Gamma_n}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο συμβολισμό $r_n : \ell^\infty(\Gamma_m) \to \ell^\infty(\Gamma_n)$ για τις συναρτήσεις περιορισμού από τον $\ell^\infty(\Gamma_m)$ στον $\ell^\infty(\Gamma_n)$ για $n < m$.

Συμβολισμός 1.

(i) Συμβολίζουμε με e_γ^* τον περιορισμό του μοναδιαίου διανύσματος $e_\gamma \in \ell^1(\Gamma)$ στο χώρο $\mathfrak{X}_{BD}$.

(ii) Επεκτείνουμε το συναρτησιακό $c_\gamma^* : \ell^\infty(\Gamma_n) \to \mathbb{R}$ σε ένα συναρτησιακό $c_\gamma^* : \mathfrak{X}_{BD} \to \mathbb{R}$ με τον κανόνα $c_\gamma^*(x) = (c_\gamma^* \circ r_{q-1})(x)$ για $\gamma \in \Delta_q$.

Όπως είναι γνωστό από το [4] και το [17], αντί για τη Schauder βάση του $\mathfrak{X}_{BD}$, είναι πιο βολικό να εργαστούμε με μία FDD που ορίζεται φυσιολογικά ως εξής:

Για κάθε $q \in \mathbb{N}$ θέτουμε $M_q = i_q[\ell^\infty(\Delta_q)]$.
Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε εν συντομία το γεγονός αυτό και έπειτα συνεχίζουμε με τις λεπτομέρειες της κατασκευής του χώρου $\mathfrak{X}_r$.

Πρόταση 23. *Η ακολουθία $(M_q)_{q\in\mathbb{N}}$ είναι FDD για το χώρο $\mathfrak{X}_{BD}$.*

Απόδειξη. Για $q \geq 0$ ορίζουμε τις απεικονίσεις $P_{\{q\}} : \mathfrak{X}_{BD} \to M_q$ με

$$P_{\{q\}}(x) = i_q(r_q(x)) - i_{q-1}(r_{q-1}(x))$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο τελεστής $P_{\{q\}}$ είναι προβολή επί του M_q και ότι για κάθε $q_1 \neq q_2$ και $x \in M_{q_2}$ έχουμε ότι $P_{\{q_1\}}(x) = 0$. Επίσης, ισχύει ότι $\|P_q\| \leq 2C$. Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται προβολές σε διαστήματα της μορφής $I = (p, q]$ έτσι ώστε $P_I(x) = \sum_{i=p+1}^{q} P_{\{i\}}(x)$ οι οποίες ικανοποιούν τον τύπο

$$P_I(x) = i_q(r_q(x)) - i_p(r_p(x)).$$

Σημειώνουμε ότι $\|P_I\| \leq 2C$. Αυτό συνεπάγεται ότι η $(M_q)_q$ είναι FDD που παράγει τον $\mathfrak{X}_{BD}$. $\square$

Για $x \in \mathfrak{X}_{BD}$ συμβολίζουμε με $\operatorname{supp} x$ το σύνολο $\operatorname{supp} x = \{q : P_{\{q\}}(x) \neq 0\}$ και με $\operatorname{ran} x$ το ελάχιστο διάστημα του $\mathbb{N}$ που περιέχει το $\operatorname{supp} x$.

Ορισμός 25. *Μία block ακολουθία $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ στον $\mathfrak{X}_{BD}$ λέγεται* skipped *(ως προς την $(M_q)_{q\in\mathbb{N}}$), αν υπάρχει υπακολουθία $(q_i)_{i=1}^{\infty}$ του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$,* $\operatorname{maxsupp} x_i < q_i < \operatorname{minsupp} x_{i+1}$.

Στη συνέχεια, όποτε αναφερόμαστε σε μία skipped block ακολουθία, θεωρούμε ότι είναι skipped block ως προς την FDD $(M_q)_{q\in\mathbb{N}}$.

Έστω $q \geq 0$. Για κάθε $\gamma \in \Delta_q$ θέτουμε $d^*_\gamma = e_\gamma \circ P_{\{q\}}$. Τότε η οικογένεια $(d^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ αποτελείται από τα διορθογώνια συναρτησιακά της FDD $(M_q)_{q\geq 0}$. Παρατηρούμε ότι για $\gamma \in \Delta_q$,

$$\begin{aligned} d^*_\gamma(x) &= P_q(x)(\gamma) = i_q(r_q(x))(\gamma) - i_{q-1}(r_{q-1}(x))(\gamma) = \\ &= r_q(x)(\gamma) - c^*_\gamma(r_{q-1}(x)) = x(\gamma) - c^*_\gamma(x) = \\ &= e^*_\gamma(x) - c^*_\gamma(x). \end{aligned}$$

Οι ακολουθίες $(\Delta_q)_{q\in\mathbb{N}}$ και $(c^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ορίζονται όπως στο [4] (Ενότητα 4, Θεώρημα 3.5).

Ακολουθεί ένας χρήσιμος συμβολισμός. Για επιλεγμένα $n \in \mathbb{N}$ και $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ με $0 < b_1, b_2, \ldots, b_n < 1$, σε κάθε $\gamma \in \Delta_q$ αντιστοιχίζουμε τα εξής:

(α) την τάξη του γ που συμβολίζεται με $\operatorname{rank}\gamma = q$,

(β) την ηλικία του γ που συμβολίζεται με $a(\gamma) = a$ ώστε $2 \leq a \leq n$,

(γ) το βάρος του γ που συμβολίζεται με $w(\gamma) = b_a$.

Για να προχωρήσουμε στην κατασκευή, πρέπει πρώτα να επιλέξουμε ένα θετικό ακέραιο n και μία φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $b_1, \dots, b_n$ ώστε $b_1 < 1$, $b_i < \frac{1}{2}$, για κάθε $i = 2, \dots, n$ και $\sum_{i=1}^{n} b_i > 1$. Έστω $r \in (1, \infty)$ τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'} = 1$ και $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Τώρα θα ορίσουμε το χώρο $\mathfrak{X}_r$ χρησιμοποιώντας τη Bourgain-Delbaen κατασκευή που περιγράφηκε προηγουμένως.

Θέτουμε $\Delta_0 = \emptyset$, $\Delta_1 = \{0\}$ και για κάθε $q > 1$ ορίζουμε αναδρομικά το σύνολο Δ_q.

Υποθέτουμε ότι τα σύνολα Δ_p έχουν οριστεί για κάθε $p \leq q$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} \Delta_{q+1} \ &= \ \big\{(q+1, a, p, \eta, \varepsilon e_\xi^*) : \ 2 \leq a \leq n, p \leq q, \ \varepsilon = \pm 1, \ e_\xi^* \in S_{\ell^1(\Gamma_q)}, \\ &\qquad \xi \in \Gamma_q \setminus \Gamma_p, \ \eta \in \Gamma_p, \ b_{a-1} = w(\eta)\big\}. \end{aligned}$$

Για $\gamma \in \Delta_{q+1}$ είναι εμφανές από τα προηγούμενα ότι η πρώτη συντεταγμένη είναι η τάξη $\operatorname{rank}\gamma$ του γ, ενώ η δεύτερη είναι η ηλικία $a(\gamma)$ του γ. Τα συναρτησιακά $(c_\gamma^*)_{\gamma \in \Delta_{q+1}}$ ορίζονται με μοναδικό τρόπο για κάθε $\gamma \in \Delta_{q+1}$. Για την ακρίβεια, έστω $x \in \ell^\infty(\Gamma_q)$.

(i) Για $\gamma = (q+1, 2, p, \eta, \varepsilon e_\xi^*)$ θέτουμε

$$c_\gamma^*(x) = b_1 x(\eta) + b_2 \varepsilon e_\xi^*\big(x - i_{p,q}(r_p(x))\big).$$

(ii) Για $\gamma = (q+1, a, p, \eta, \varepsilon e_\xi^*)$ με $a > 2$ θέτουμε

$$c_\gamma^*(x) = x(\eta) + b_a \varepsilon e_\xi^*\big(x - i_{p,q}(r_p(x))\big).$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τις ακολουθίες (i_q), (Γ_q), (X_q) παρόμοια με πριν και θέτουμε $\mathfrak{X}_r = \overline{\bigcup_{q \in \mathbb{N}} X_q}$. Υποθέτοντας ότι η ακολουθία (i_q) είναι ομοιόμορφα φραγμένη από μία σταθερά $C > 0$, καταλήγουμε ότι ο χώρος $\mathfrak{X}_r$ είναι υπόχωρος του $\ell_\infty(\Gamma)$. Η σταθερά C προσδιορίζεται όπως στο [4, Θεώρημα 3.4] και προκύπτει ότι ισχύει $C = \frac{1}{1-2b_2}$. Συνεπώς, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\|i_m\| \leq C$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|P_I\| \leq 2C$ για κάθε I διάστημα του $\mathbb{N}$.

Παρατήρηση 7. *Στην περίπτωση που $n = 2$, δηλαδή $\overline{b} = (b_1, b_2)$, ο χώρος $\mathfrak{X}_\mathfrak{r}$ ταυτίζεται ουσιαστικά με το Bourgain-Delbaen χώρο $\mathfrak{X}_{b_1, b_2}$, αφού κάθε $\gamma \in \Gamma$ είναι ηλικίας 2.*

Παρατήρηση 8. *Όπως θα αποδειχθεί στην Πρόταση 27, η επιλογή του r, που εξαρτάται από τα επιλεγμένα n και $\overline{b}$, έχει ως αποτέλεσμα ότι $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \overline{b}) \cong \ell_r$. Επιπλέον,* *τα βασικά στοιχεία της θεωρίας των χώρων τύπου Tsirelson που θα χρησιμοποιηθούν είναι ουσιαστικά ίδια με τα αντίστοιχα στο [4]. Η βασική διαφορά στη δική μας προσέγγιση είναι ότι χρησιμοποιούμε μόνο μία οικογένεια $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ για κάποια κατάλληλα n και $\bar{b}$.*

4.3 Η ανάλυση των συναρτησιακών e^*_γ για $\gamma \in \Gamma$

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε την ανάλυση των συναρτησιακών e^*_γ όπως στην ενότητα 4 του [4]. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην περίπτωσή μας όλα τα συναρτησιακά e^*_γ έχουν βάρος που εξαρτάται από την ηλικία τους, η οποία είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2.

4.3.1 Η εκτιμήτρια ανάλυση των συναρτησιακών e^*_γ

Αρχικά τονίζουμε ότι για $q \in \mathbb{N}$ κάθε $\gamma \in \Delta_{q+1}$ δέχεται μοναδική ανάλυση ως εξής: Έστω $a(\gamma) = a \leq n$. Τότε, χρησιμοποιώντας αντίστροφη επαγωγή κατασκευάζουμε μία ακολουθία συνόλων $\{p_i, q_i, \varepsilon_i e^*_{\xi_i}\}_{i=1}^a \cup \{\eta_i\}_{i=2}^a$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $p_1 < q_1 < \cdots < p_a < q_a = q$.

(ii) $\varepsilon_i = \pm 1,\ \operatorname{rank} \xi_i \in (p_i, q_i]$ για $1 \leq i \leq a$ και $\operatorname{rank} \eta_i = q_i + 1$ για $2 \leq i \leq a$.

(iii) $\eta_a = \gamma$, $\eta_i = (\operatorname{rank} \eta_i, i, p_i, \eta_{i-1}, \varepsilon_i e^*_{\xi_i})$ για κάθε $i > 2$,
$\eta_2 = (\operatorname{rank} \eta_2, 2, p_2, \varepsilon_1 \xi_1, \varepsilon_2 e^*_{\xi_2})$ και $(p_1, q_1] = (1, \operatorname{rank} \xi_1]$.

Ορισμός 26. *Έστω $q \in \mathbb{N}$ και $\gamma \in \Gamma_q$. Τότε, η ακολουθία $\{p_i, q_i, \varepsilon_i e^*_{\xi_i}\}_{i=1}^a \cup \{\eta_i\}_{i=2}^a$ που ικανοποιεί όλες τις παραπάνω ιδιότητες θα λέγεται ανάλυση του γ.*

Επιπλέον, ακολουθώντας παρόμοια επιχειρήματα με την Πρόταση 4.6 του [4] καταλήγουμε στην εκτιμήτρια ανάλυση του γ που είναι της μορφής

$$e^*_\gamma = \sum_{i=2}^{a} d^*_{\eta_i} + \sum_{i=1}^{a} b_i \varepsilon_i e^*_{\xi_i} \circ P_{(p_i, q_i]} = \sum_{i=2}^{a} e^*_{\eta_i} \circ P_{\{q_i+1\}} + \sum_{i=1}^{a} b_i \varepsilon_i e^*_{\xi_i} \circ P_{(p_i, q_i]}.$$

Θέτουμε $g_\gamma = \sum\limits_{i=2}^{a} d^*_{\eta_i}$ και $f_\gamma = \sum\limits_{i=1}^{a} b_i \varepsilon_i e^*_{\xi_i} \circ P_{(p_i, q_i]}$.

4.3.2 Η r-ανάλυση των συναρτησιακών e^*_γ

Έστω $r \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \Delta_{q+1}$ με ηλικία $a(\gamma) = a \le n$ και $\{p_i, q_i, \varepsilon_i e^*_{\xi_i}\}_{i=1}^a \bigcup \{\eta_i\}_{i=2}^a$ η εκτιμήτρια ανάλυση του γ. Ορίζουμε την r-ανάλυση του e^*_γ ως εξής:

(α) Αν $r \le p_1$, τότε η r-ανάλυση του e^*_γ ταυτίζεται με την εκτιμήτρια ανάλυση του e^*_γ.

(β) Αν $r \ge q_a$, τότε δεν ορίζεται r-ανάλυση για το e^*_γ και λέμε ότι το e^*_γ είναι r-αδιάσπαστο.

(γ) Αν $p_1 < r < q_a$, ορίζουμε $i_r = \min\{i : r < q_i\}$. Σημειώνουμε ότι αυτό είναι καλά ορισμένο. Η r-ανάλυση του e^*_γ είναι η ακόλουθη τριπλέτα

$$\{(p_i, q_i]\}_{i \ge i_r}, \{\varepsilon_i \xi_i\}_{i \ge i_r}, \{\eta_i\}_{i \ge \max\{2, i_r\}},$$

όπου το p_{i_r} είναι είτε το ίδιο ή r στην περίπτωση που $r > p_{i_r}$.

Στη συνέχεια, εισάγουμε την έννοια της δενδροειδούς ανάλυσης του e^*_γ που είναι παρόμοια με τη δενδροειδή ανάλυση των συναρτησιακών των Mixed Tsirelson χώρων (δες [6, Κεφάλαιο II.1]). Θα φανεί παρακάτω ότι η εκτιμήτρια ανάλυση και η r-ανάλυση του e^*_γ αποτελούν το πρώτο επίπεδο της δενδροειδούς ανάλυσης του e^*_γ που πρόκειται να παρουσιάσουμε.

Για τα επόμενα, συμβολίζουμε με $(\mathcal{T}, " \preceq ")$ ένα πεπερασμένο, μερικά διατεταγμένο σύνολο που είναι δένδρο. Τα στοιχεία του είναι πεπερασμένες ακολουθίες φυσικών αριθμών με τη μερική διάταξη $t \preceq s$ αν και μόνο αν το t είναι αρχικό διάστημα του s. Για κάθε $t \in \mathcal{T}$, συμβολίζουμε με S_t τους αμέσως επόμενους του t ως προς τη μερική διάταξη που ορίσαμε προηγουμένως.

Υποθέτουμε τώρα ότι το $(p_t, q_t]_{t \in \mathcal{T}}$ είναι ένα δένδρο από διαστήματα του $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $t \preceq s$ αν και μόνο αν $(p_t, q_t] \supset (p_s, q_s]$ και τα t, s είναι ασύμβατα αν και μόνο αν $(p_t, q_t] \cap (p_s, q_s] = \emptyset$. Για μία τέτοια οικογένεια $(p_t, q_t]_{t \in \mathcal{T}}$ και t, s ασύμβατα, γράφουμε $t < s$ αν και μόνο αν $(p_t, q_t] < (p_s, q_s]$ (δηλαδή $q_t < p_s$).

4.3.3 Η δενδροειδής ανάλυση των συναρτησιακών e^*_γ

Έστω $\gamma \in \Delta_{q+1}$ με $a(\gamma) = a \le n$. Μία οικογένεια της μορφής $\mathcal{F}_\gamma = \{\xi_t, (p_t, q_t]\}_{t \in \mathcal{T}}$ λέγεται δενδροειδής ανάλυση του e^*_γ όταν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

1. Το $\mathcal{T}$ είναι πεπερασμένο δέντρο με μοναδική ρίζα που συμβολίζεται με $\emptyset$.

2. Θέτουμε $\xi_\emptyset = \gamma, (p_\emptyset, q_\emptyset] = (1, q]$ και έστω $\{p_i, q_i, \varepsilon_i e^*_{\xi_i}\}_{i=1}^a \bigcup \{\eta_i\}_{i=2}^a$ η εκτιμήτρια ανάλυση του $\xi_\emptyset$. Θέτουμε $S_\emptyset = \{(1), (2), \ldots, (a)\}$ και για κάθε $s = (i) \in S_\emptyset$, $\{\xi_s, (p_s, q_s]\} = \{\xi_i, (p_i, q_i]\}$.

3. Υποθέτουμε ότι για $t \in \mathcal{T}$ $\{\xi_t, (p_t, q_t]\}$ έχει οριστεί. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

   (α′) Αν το $e^*_{\xi_t}$ είναι p_t-διασπάσιμο, έστω

   $$\{(p_i, q_i]\}_{i \geq i_{p_t}}, \{\varepsilon_i \xi_i\}_{i \geq i_{p_t}}, \{\eta_i\}_{i \geq \max\{2, i_{p_t}\}}$$

   η p_t-ανάλυση του $e^*_{\xi_t}$. Θέτουμε $S_t = \{(t^\frown i) : i \geq i_{p_t}\}$ και

   $$S_t^{p_t} = \begin{cases} S_t, \text{ αν } \eta_{i_{p_t}} \text{ υπάρχει} \\ S_t \diagdown \{(t^\frown i_{p_t})\}, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

   Τότε, για κάθε $s = (t^\frown i) \in S_t$, θέτουμε $\{\xi_s, (p_s, q_s]\} = \{\xi_i, (p_i, q_i]\}$, όπου το $\{\varepsilon_i \xi_i, (p_i, q_i]\}$ είναι μέλος της p_t-ανάλυσης του $e^*_{\xi_t}$.

   (β′) Αν το $e^*_{\xi_t}$ είναι p_t-αδιάσπαστο, τότε το ξ_t αποτελεί ένα μεγιστικό κόμβο του $\mathcal{F}_\gamma$.

Συμβολισμός 2. *Για τη συνέχεια χρειαζόμαστε το εξής:*
Για κάθε $t \in \mathcal{T}$, $e^*_{\xi_t} = f_t + g_t$, *όπου* $f_t = \sum\limits_{s \in S_t} b_s \varepsilon_s e^*_{\xi_s} \circ P_{(p_s, q_s]}$, $g_t = \sum\limits_{s \in S_t^{p_t}} d^*_{\eta_s}$ *και για* $s = (t^\frown i) \in S_t^{p_t}$,

$$\eta_{(t^\frown i)} = (\operatorname{rank} \eta_{(t^\frown i)}, i, p_{(t^\frown i)}, \eta_{(t^\frown i-1)}, \varepsilon_{(t^\frown i)} e^*_{\xi_{(t^\frown i)}}).$$

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, θέτουμε $f_t = f_{\xi_t}$ *και* $g_t = g_{\xi_t}$.

Λήμμα 13. *Έστω* $x \in \mathfrak{X}_r$ *και* $\gamma \in \Gamma$. *Τότε,*

$$e^*_\gamma(x) = \prod_{\emptyset \preceq s \preceq t_x} (\varepsilon_s b_s)(f_{t_x} + g_{t_x})(x),$$

όπου $t_x = \max\{t : \operatorname{ran} x \subseteq (p_t, q_t]\}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}_\gamma = \{\xi_t, (p_t, q_t]\}_{t \in \mathcal{T}}$ η δενδροειδής ανάλυση του γ.
Αν $\{t : \operatorname{ran} x \subseteq (p_t, q_t]\} = \emptyset$, τότε $e^*_\gamma(x) = f_\emptyset(x) + g_\emptyset(x)$ και η ισότητα ισχύει.
Αν $\{t : \operatorname{ran} x \subseteq (p_t, q_t]\} \neq \emptyset$, μπορούμε να βρούμε $\{t_1 \prec t_2 \prec \ldots \prec t_m\} \in \mathcal{T}$ τέτοιο ώστε $t_1 \in S_\emptyset$ και $t_m = t_x$.

Για κάθε $t \in \mathcal{T}$ με $t \prec t_x$, ισχύει $g_t(x) = 0$. Πράγματι, για κάθε $s \in S_t^{p_t}$, έχουμε $d^*_{\eta_s}(x) = e^*_{\eta_s} \circ P_{\{q_s+1\}}(x) = 0$ επειδή $\operatorname{ran} x \subseteq (p_{t_x}, q_{t_x}] \subseteq (p_s, q_s]$.
Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e^*_\gamma(x) &= f_\emptyset(x) = \sum_{s \in S_\emptyset} b_s \varepsilon_s e^*_{\xi_s} \circ P_{(p_s,q_s]}(x) = b_{t_1}\varepsilon_{t_1} e^*_{\xi_{t_1}}(x) \\ &= b_{t_1}\varepsilon_{t_1} f_{t_1}(x) = b_{t_1}\varepsilon_{t_1} b_{t_2}\varepsilon_{t_2} e^*_{\xi_{t_2}} \circ P_{(p_{t_2},q_{t_2}]}(x) = b_{t_1}b_{t_2}\varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2} e^*_{\xi_{t_2}}(x) \\ &= b_{t_1}b_{t_2}\varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2} f_{t_2}(x) = \ldots = \prod_{\emptyset \preceq s \preceq t_x} (\varepsilon_s b_s)(f_{t_x} + g_{t_x})(x), \end{aligned}$$

έχοντας θέσει $\varepsilon_\emptyset = b_\emptyset = 1$. □

Πόρισμα 2. *Αν $\{t : \operatorname{ran} x \subseteq (p_t, q_t]\} \neq \emptyset$ και ο $(f_{t_x}, (p_{t_x}, q_{t_x}])$ είναι μεγιστικός κόμβος, τότε $e^*_\gamma(x) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $(f_{t_x}, (p_{t_x}, q_{t_x}])$ είναι ένας μεγιστικός κόμβος. Τότε $f_{t_x}(x) = 0$, $g_{t_x}(x) = 0$ και από το Λήμμα 13 συμπεραίνουμε ότι $e^*_\gamma(x) = 0$. □

4.4 Η κάτω εκτίμηση

Ορισμός 27. *Ένα συναρτησιακό $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ λέγεται proper συναρτησιακό αν δέχεται δενδροειδή ανάλυση $(\phi_t)_{t \in \mathcal{T}}$ τέτοια ώστε για κάθε μη μεγιστικό κόμβο $t \in \mathcal{T}$, το σύνολο $\{\phi_s : s \in S_t\}$ έχει τουλάχιστον δύο μη μηδενικά στοιχεία.*

Συμβολίζουμε με $W_{pr}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ το υποσύνολο του $W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ που αποτελείται από όλα τα proper συναρτησιακά. Για κάθε $t \in \mathcal{T}$ ισχύει ότι

$$\phi_t = \sum_{s \in S_t} b_s \phi_s,$$

όπου $\{b_s\}_{s \in S_t} \subseteq \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ και $b_\emptyset = 1$.

Λήμμα 14. *Το σύνολο $W_{pr}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ 1-νορμάρει το χώρο $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$, υπάρχει $g \in W_{pr}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ τέτοιο ώστε $|\phi(m)| \leq g(m)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, αφού η βάση είναι 1-unconditional.

Κινούμενοι προς αυτή την κατεύθυνση, έστω $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη δενδροειδή ανάλυση $\{\phi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ του ϕ, συμπεραίνουμε εύκολα ότι για κάθε $m \in \operatorname{supp} f$, υπάρχει ένας μεγιστικός κόμβος $t_m \in \mathcal{T}$ τέτοιος ώστε $\phi_{t_m} = \varepsilon_m e^*_m$ και $\phi(m) = \varepsilon_m \prod_{t < t_m} b_t$.

Για κάθε $m \in \operatorname{supp}\phi$ θέτουμε $K_m = \{t \in \mathcal{T} : t < t_m$ και $\#S_t > 1\}$. Τότε, προκύπτει άμεσα ότι το συναρτησιακό $g = \sum_{m \in \operatorname{supp}\phi} \left(\prod_{t \in K_m} b_t \right) e_m^*$ ανήκει στο $W_{pr}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$. Επίσης, επειδή $b_t < 1$ για κάθε $t \in \mathcal{T}$, παίρνουμε ότι $|\phi(m)| \leq g(m)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Λήμμα 15. *Έστω $\phi \in W_{pr}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ και $l \in \mathbb{N}$. Αν $\operatorname{maxsupp}\phi = l$, τότε $h(\mathcal{T}_\phi) \leq l$.*

Απόδειξη. Έστω θ_n το πλήθος των κόμβων στο n-οστό επίπεδο του $\mathcal{T}_\phi$. Αφού το ϕ είναι proper συναρτησιακό, προκύπτει ότι $\theta_{n+1} > \theta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $h(\mathcal{T}_\phi) > l$, δηλαδή $h(\mathcal{T}_\phi) = l + k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\theta_1 = 1,\ \theta_2 \geq 2,\ \ldots\ ,\ \theta_{l+k} \geq l + k$$

Επειδή το επίπεδο $l + k$ του $\mathcal{T}_\phi$ αποτελείται από συναρτησιακά της μορφής e_i^*, συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{maxsupp}\phi \geq l + k > l$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Πρόταση 24. *Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία νορμαρισμένη skipped block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$ και $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία αυστηρά αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $\operatorname{supp} x_k \subset (q_k + k, q_{k+1})$. Τότε, για κάθε ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ θετικών πραγματικών αριθμών και για κάθε $l \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι*

$$\left\| \sum_{k=1}^{l} a_k e_k \right\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})} \leq C \left\| \sum_{k=1}^{l} a_k x_k \right\|_\infty , \tag{4.4.1}$$

όπου $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ και C ένα άνω φράγμα για τις νόρμες των τελεστών i_m του $\mathfrak{X}_r$.

Απόδειξη. Έστω $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$. Από το Λήμμα 14 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το συναρτησιακό ϕ είναι proper. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο ύψος του δέντρου $\mathcal{T}_\phi$.

Αν $h(\mathcal{T}_\phi) = 0$ (δηλαδή το f είναι μεγιστικό), τότε το ϕ είναι της μορφής $\phi = \varepsilon_k e_k^*$, όπου $\varepsilon_k = \pm 1$. Παρατηρούμε ότι $\left| \phi \left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k \right) \right| = |a_k| = a_k$. Από [4, Πρόταση 4.8], μπορούμε να επιλέξουμε $\gamma \in \Gamma_{q_{k+1}-1} \setminus \Gamma_{q_k+k}$ τέτοιο ώστε $|x_k(\gamma)| \geq \frac{1}{C}\|x_k\| = \frac{1}{C}$. Τότε,

$$\left| \phi \left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k \right) \right| = a_k \leq C|a_k||x_k(\gamma)| = C|e_\gamma^*(a_k x_k)| \leq C \left| e_\gamma^* \left(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k \right) \right|.$$

Υποθέτουμε ότι για κάθε $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ με $h(\mathcal{T}_\phi) = h > 0$ και $\operatorname{maxsupp}\phi = l_0$, υπάρχειγ $\in \Gamma$ τέτοιο ώστε:

1. $\gamma \in \Gamma_{q_{l_0+1}+h} \setminus \Gamma_{q_{l_0+1}}$

2. $h(\mathcal{T}_\phi) = h(\mathcal{F}_\gamma) \leq l_0$

3. $\left|\phi\left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right)\right| \leq C \left|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k(\gamma)\right|$ για κάθε $l \geq l_0$

Από την υπόθεση (1) προκύπτει ότι $x_{l_0} < \operatorname{rank}\gamma < x_{l_0+1}$, ενώ από την υπόθεση (2) έπεται ότι $\operatorname{minsupp} x_{l_0+1} - \operatorname{maxsupp} x_{l_0} > h(\mathcal{T}_\phi)$. Πράγματι,

$$x_{l_0} < q_{l_0+1} < \operatorname{rank}\gamma \leq q_{l_0+1} + h \leq q_{l_0+1} + l_0 < q_{l_0+1} + (l_0+1) < x_{l_0+1}$$

και

$$\operatorname{minsupp} x_{l_0+1} - \operatorname{maxsupp} x_{l_0} > l_0 + 1 > l_0 \geq h(\mathcal{F}_\gamma).$$

Έστω $\phi \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ με $h(\mathcal{T}_\phi) = h+1$, $l_0 = \operatorname{maxsupp}\phi$ και έστω $(\phi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ η δενδροειδής ανάλυση του ϕ. Τότε, το ϕ είναι της μορφής

$$\phi = \sum_{s\in S_\emptyset} b_s \phi_s \ , \ \#S_\emptyset \leq n.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $s \in S_\emptyset$, ισχύει $h(\mathcal{T}_{\phi_s}) = h$. Θέτουμε:
• $p_1 = 1$
• για κάθε $s \in S_\emptyset \setminus \{1\}$, $p_s = \min\{q_k + k : k \in \operatorname{supp}\phi_s\}$
• για κάθε $s \in S_\emptyset$, $r_s = q_{l_s+1} + h$, όπου $l_s = \operatorname{maxsupp}\phi_s$.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση και παίρνουμε $\xi_s \in \Gamma_{r_s} \setminus \Gamma_{q_{l_s}+1}$ με $h(\mathcal{T}_{\phi_s}) = h(\mathcal{F}_{\xi_s})$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}
\left|\phi_s\left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right)\right| &= \left|\phi_s\left(\sum_{k\in\operatorname{supp}\phi_s} a_k e_k\right)\right| \leq C\varepsilon_s \sum_{k\in\operatorname{supp}\phi_s} a_k x_k(\xi_s) \\
&= C\varepsilon_s e^*_{\xi_s}\left(\sum_{k\in\operatorname{supp}\phi_s} a_k x_k\right) = C\varepsilon_s e^*_{\xi_s} \circ P_{(p_s, r_s]}\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k\right),
\end{aligned}$$

όπου τα ε_s ικανοποιούν τη σχέση $\varepsilon_s e^*_{\xi_s}\left(\sum_{k\in\operatorname{supp}\phi_s} a_k x_k\right) = \left|\sum_{k\in\operatorname{supp}\phi_s} a_k x_k(\xi_s)\right|$.

Έστω $\gamma \in \Gamma$ με ανάλυση $\{p_s, r_s, \varepsilon_s e^*_{\xi_s}\}_{s\in S_\emptyset} \bigcup \{\eta_s\}_{s\in S_\emptyset\setminus\{1\}}$, όπου $\eta_s \in \Delta_{r_s+1}$. Παρατηρούμε ότι $\operatorname{rank}\xi_s \in (q_{l_s+1}, r_s] \subset (p_s, r_s]$. Είναι εμφανές ότι για κάθε $s \in S_\emptyset \setminus \{1\}$, ισχύει $d^*_{\eta_s}\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k\right) = 0$. Πράγματι,

$$\operatorname{supp} x_{l_s} < q_{l_s+1} < q_{l_s+1} + (h+1) = r_s + 1 \leq q_{l_s+1} + (l_s+1) < \operatorname{supp} x_{l_s+1}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\left|\phi(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k)\right| &\leq \sum_{s\in S_\emptyset}\left|b_s\phi_s\left(\sum_{k\in \operatorname{supp}\phi_s} a_k e_k\right)\right|\\ &\leq C\sum_{s\in S_\emptyset} b_s\varepsilon_s e^*_{\xi_s}\circ P_{(p_s,r_s]}\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k\right)\leq C\left|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k(\gamma)\right|.\end{aligned}$$

Προκύπτει άμεσα ότι $h(\mathcal{T}_\phi)=h(\mathcal{F}_\gamma)\leq l_0$ και $x_{l_0}<\operatorname{rank}\gamma<x_{l_0+1}$. □

Πόρισμα 3. *Για κάθε block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$ υπάρχει περαιτέρω block ακολουθία που ικανοποιεί την ανισότητα (4.4.1).*

4.5 Η άνω εκτίμηση

Έστω $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ μία νορμαρισμένη skipped block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$. Από το Πόρισμα 3, μπορούμε να βρούμε μία περαιτέρω block ακολουθία της $(y_l)_l$, την οποία εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με $(y_l)_l$, που ικανοποιεί την ανισότητα (4.4.1). Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\left\|\sum_{l=1}^{m} y_l\right\|_\infty \geq \frac{1}{C}\left\|\sum_{l=1}^{m} e_l\right\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}.$$

Για κάθε $j\in\mathbb{N}$, θέτουμε $M_j=\{1,2,\dots,n\}^j$. Ελέγχεται εύκολα ότι για κάθε $j\in\mathbb{N}$, το συναρτησιακό $f_j=\sum_{s\in M_j}\left(\prod_{i=1}^{j} b_{s_i}\right)e^*_s$ ανήκει στο $W(\mathcal{A}_n,\bar{b})$, όπου το s_i είναι η i-οστή συντεταγμένη του s για $i=1,2,\dots,n$ και $\sum\limits_{s\in M_j}\prod\limits_{i=1}^{j} b_{s_i}=\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^j$. Επειδή $\#M_j=n^j$, παίρνουμε ότι

$$\left\|\sum_{l=1}^{n^j} e_l\right\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}=\left\|\sum_{s\in M_j} e_s\right\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}\geq f_j\left(\sum_{l=1}^{n^j} e_l\right)=\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^j.$$

Επίσης, για κάθε $m\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο, μπορούμε να βρούμε $j\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n^{j+1}>m\geq n^j$. Από τα παραπάνω και το γεγονός ότι η βάση του χώρου $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})$ είναι unconditional, προκύπτει ότι

$$\left\|\sum_{l=1}^{m} y_l\right\|_\infty \geq \frac{1}{C}\left\|\sum_{l=1}^{m} e_l\right\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}\geq \frac{1}{C}\left\|\sum_{l=1}^{n^j} e_l\right\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}=\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^j$$

και καταλήγουμε ότι

$$\left\| \sum_{l=1}^{m} y_l \right\|_\infty \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \text{ αφού } \ \sum_{i=1}^{n} b_i > 1.$$

Επιλέγουμε τώρα μία περαιτέρω block ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ της $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ με κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Έστω $\varepsilon > 0$ και μία φθίνουσα ακολουθία $(\varepsilon_k)_k$ θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k\right) < \varepsilon$. Μπορούμε επίσης να επιλέξουμε μία αύξουσα ακολουθία $(n_k)_k$ θετικών ακεραίων και μία ακολουθία $(F_k)_k$ διαδοχικών υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ που ικανοποιούν τα εξής:

1. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n_k} < \varepsilon_k$.
2. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\left\| \sum_{l\in F_k} y_l \right\| > n_k$.

Η δεύτερη συνθήκη μπορεί να επιτευχθεί λόγω της παραπάνω παρατήρησης. Έχουμε κατασκευάσει λοιπόν, μία νορμαρισμένη skipped block ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ της μορφής

$$x_k = \sum_{l\in F_k} \lambda_l y_l, \quad \text{όπου} \quad \lambda_l = \frac{1}{\left\| \sum_{l\in F_k} y_l \right\|} .$$

Παρατηρούμε ότι $|\lambda_l| < \varepsilon_k$ για κάθε $l \in F_k$.

Έστω $\gamma \in \Gamma$ με δενδροειδή ανάλυση $\mathcal{F}_\gamma = \{\xi_t, (p_t, q_t]\}_{t\in\mathcal{T}}$.
Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε $t_k = \max\{t : \operatorname{ran} x_k \subset (p_t, q_t]\}$. Παρατηρούμε ότι αν για κάποιο x_k, το t_k δεν είναι maximal, τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο αμέσως επόμενοι του t_k, έστω s_1, s_2, τέτοιοι ώστε τα αντίστοιχα διαστήματα $(p_{s_1}, q_{s_1}]$, $(p_{s_2}, q_{s_2}]$ να τέμνουν το $\operatorname{ran} x_k$. Για μεταγενέστερη χρήση, συμβολίζουμε με $(p_{s_0}, q_{s_0}]$ το πρώτο διάστημα, σύμφωνα με τη φυσική διάταξη που ορίζουν τα ξένα ανά δύο διαστήματα των φυσικών αριθμών, που τέμνει το x_k. Πρέπει να σημειωθεί ότι το s_0 δεν είναι απαραίτητα το πρώτο στοιχείο του S_t.
Για το ζεύγος γ, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και για κάθε $t \in \mathcal{T}$ ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα:

$$D_t = \bigcup_{s\succeq t}\{k : s = t_k\},\ K_t = D_t \setminus \bigcup_{s\in S_t} D_s = \{k : t = t_k\} \text{ και } E_t = \{s \in S_t : D_s \neq \emptyset\}.$$

Θέτουμε τώρα $x_k = x'_k + x''_k + x'''_k$, όπου

$$x'_k = x_k \mid_{(p_{s_0}, q_{s_0}]},\ x''_k = x_k \mid_{\bigcup_{s\in S_{t_k}, s\neq s_0}(p_s, q_s]} \ \text{ και } \ x'''_k = x_k - x'_k - x''_k.$$

Παρατήρηση 9. *1. Τα σύνολα D_t, K_t, E_t προσδιορίζονται σύμφωνα με το επιλεγμένο ζεύγος $\gamma, (x_k)_k$. Για κάποιο διαφορετικό ζεύγος, τα σύνολα αυτά είναι πιθανόν να διαφέρουν. Για παράδειγμα, έστω $k \in K_t$ για το ζεύγος $\gamma, (x_k)_k$. Τότε $t = t_k$ για το x_k. Από τον ορισμό του x'_k, υπάρχει $s_k \in S_t$ τέτοιο ώστε $x'_k = x_k \mid_{(p_{s_k}, q_{s_k}]}$. Συνεπώς, επιλέγοτας το ζεύγος $\gamma, (x'_k)_k$, το ίδιο k ανήκει στο K_{s_k}.*

2. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει $|g_{t_k}(x_k)| \leq 2Cn\varepsilon_k$.
Πράγματι, από τον ορισμό της $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|g_{t_k}(x_k)| &\leq \sum_{s\in S_{t_k}^{p_{t_k}}} |d^*_{\eta_s}(x_k)| \leq \sum_{s\in S_{t_k}^{p_{t_k}}} \left| e^*_{\eta_s} \circ P_{\{q_s+1\}} \left(\sum_{l\in F_k} \lambda_l y_l \right) \right| \\
&\leq \sum_{s\in S_{t_k}^{p_{t_k}}} \|e^*_{\eta_s}\| \|P_{\{q_s+1\}}\| |\lambda^s_l| \|y^s_l\| \leq \sum_{s\in S_{t_k}^{p_{t_k}}} 2C\varepsilon_k \\
&\leq 2C\varepsilon_k (\sharp S_{t_k}) \leq 2Cn\varepsilon_k \,.
\end{aligned}$$

3. Προκύπτει άμεσα ότι $g_{t_k}(x_k) = g_{t_k}(x'''_k)$, $f_{t_k}(x'''_k) = 0$ και για κάθε $t \prec t_k$, $g_t(x'''_k) = 0$.

Λήμμα 16. *Για τα ζεύγη $\gamma, (x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $\gamma, (x''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ισχύει ότι $\#(K_t \cup E_t) \leq n$.*

Απόδειξη. Έστω $t \in \mathcal{T}$ και $k \in K_t$. Θέτουμε

$$s_k = \max\{s \in S_t : (p_s, q_s] \cap \operatorname{ran} x'_k \neq \emptyset\}.$$

Από τον ορισμό του t_k, παρατηρούμε ότι $\#S_t \geq 2$. Ισχύει ότι $s_k \notin E_t$.
Πράγματι, από τον ορισμό των t_k, s_k, έχουμε ότι

$$(p_{t_k}, q_{t_k}] \cap \operatorname{ran} x'_k = \operatorname{ran} x'_k \ \text{ και } \ (p_{s_k}, q_{s_k}] \cap \operatorname{ran} x'_k = (p_{s_k}, q_{s_k}].$$

Επειδή $s_k \in S_{t_k}$, παίρνουμε $(p_{s_k}, q_{s_k}] \subseteq (p_{t_k}, q_{t_k}]$ και προκύπτει ότι $(p_{s_k}, q_{s_k}] \subseteq \operatorname{ran} x'_k$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε μία 1-1 απεικόνιση $G : K_t \to S_t \backslash E_t$ και καταλήγουμε ότι

$$\#K_t + \#E_t \leq \#S_t \leq n.$$

Ομοίως γίνεται η απόδειξή για το ζεύγος $\gamma, (x''_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Πρόταση 25. *Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ όπως παραπάνω. Τότε, για κάθε $\gamma \in \Gamma$ υπάρχουν $\phi_1, \phi_2 \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ τέτοια ώστε για κάθε ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ θετικών πραγματικών αριθμών και για κάθε $l \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι*

$$\left| \sum_{k=1}^{l} a_k x_k(\gamma) \right| \leq \frac{1}{b_n} (\phi_1 + \phi_2) \left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k \right) + 2Cn\varepsilon \left(\sum_{k=1}^{l} a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} . \tag{4.5.1}$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma \in \Delta_{q+1}$ με $(\gamma) = a \leq n$ και έστω $\mathcal{F}_\gamma = \{\xi_t, (p_t, q_t]\}_{t\in\mathcal{T}}$, όπου $\xi_\emptyset = \gamma$, η δενδροειδής ανάλυση του γ. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\bigcup_{k=1}^{l} \operatorname{ran} x_k \subset (p_\emptyset, q_\emptyset]$.

Ισχυρισμός. *Για τα ζεύγη $\gamma, (x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $\gamma, (x''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ υπάρχουν $\phi_1, \phi_2 \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ τέτοια ώστε για κάθε ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ θετικών πραγματικών αριθμών και για κάθε $l \in \mathbb{N}$, ισχύουν τα εξής:*

$$\left| f_\emptyset \left(\sum_{k=1}^{l} a_k x'_k \right) \right| \leq \frac{2C}{b_n} \phi_1 \left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k \right) \tag{4.5.2}$$

$$\left| f_\emptyset \left(\sum_{k=1}^{l} a_k x''_k \right) \right| \leq \frac{2C}{b_n} \phi_2 \left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k \right) . \tag{4.5.3}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Θα αποδείξουμε μόνο την ανισότητα (4.5.2). Η απόδειξη της ανισότητας (4.5.3) γίνεται με τα ίδια επιχειρήματα.

Υπενθυμίζουμε ότι $f_t = \sum\limits_{s\in S_t} b_s \varepsilon_s (f_s + g_s) \circ P_{(p_s,q_s]}$ για κάθε μη μεγιστικό $t \in \mathcal{T}$. Από τον ορισμό της $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$, έχουμε ότι $g_s \circ P_{(p_s,q_s]}(x'_k) = 0$ για κάθε $s \in S_t$. Συνεπώς,

$$f_t \left(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k \right) = \left(\sum_{s\in S_t} b_s \varepsilon_s f_s \circ P_{(p_s,q_s]} \right) \left(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k \right) .$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αντίστροφη επαγωγή στα επίπεδα του δέντρου $\mathcal{T}$, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι για κάθε $t \in \mathcal{T}$ υπάρχει $\phi_1^t \in W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ με $\operatorname{supp} \phi_1^t \subseteq D_t$ τέτοιο ώστε

$$\left| f_t \left(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k \right) \right| \leq \frac{2C}{b_n} \phi_1^t \left(\sum_{k\in D_t} a_k e_k \right) .$$

Το πρώτο επαγωγικό βήμα είναι παρόμοιο με το γενικό και γι΄ αυτό παραλείπεται. Έστω $0 < h \leq \max\{|t| : t \in \mathcal{T}\}$. Υποθέτουμε ότι η πρόταση έχει αποδειχθεί για κάθε t με $|t| = h$.

Έστω $t \in \mathcal{T}$ με $|t| = h - 1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν το f_t είναι μεγιστικός κόμβος, ισχύει ότι $K_t = D_t$ και τότε για κάθε $k \in D_t$, από το Πόρισμα 2, προκύπτει ότι $f_t(x'_k) = 0$, αφού $t = t_k$. Άρα, $f_t \left(\sum\limits_{k\in D_t} a_k x'_k \right) = 0$ και ο Ισχυρισμός αποδείχτηκε.

2. Αν το f_t είναι μη μεγιστικός κόμβος, τότε

$$\begin{aligned} f_t\left(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k\right) &= \left(\sum_{s\in S_t} b_s\varepsilon_s f_s\circ P_{(p_s,q_s]}\right)\left(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k\right) \\ &= \sum_{s\in S_t} b_s\varepsilon_s f_s\left(\sum_{k\in D_s} a_k x'_k\right) + \sum_{k\in K_t}\left(\sum_{s\in S_t} b_s\varepsilon_s f_s\right)(a_k x'_k)\,. \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $k\in K_t$ ισχύει $g_t(x'_k)=0$, παίρνουμε ότι

$$|f_t(x'_k)| = |x'_k(\xi_t)| \le \|x'_k\| \le 2C = 2Ce^*_k(e_k)\,.$$

Επιπλέον, για κάθε $s\in E_t$ ισχύει ότι $|s|=h-1$. Για κάθε $k\in D_s$, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$\left|\sum_{s\in S_t} b_s f_s(x'_k)\right| = |b_s f_s(x'_k)| \le b_s\frac{2C}{b_n}\phi^s_1(e_k)\,,$$

όπου $\phi^s_1\in W(\mathcal{A}_n,\overline{b})$ και $\operatorname{supp}\phi^s_1\subseteq D_s$. Θέτουμε

$$\phi^t_1 = \left(\sum_{s\in E_t} b_s\phi^s_1 + \sum_{k\in K_t} b_k e^*_k\right)\,.$$

Από το Λήμμα 16, εύκολα επαληθεύεται ότι $\phi^t_1\in W(\mathcal{A}_n,\overline{b})$ και προκύπτει ότι

$$\left|f_t\left(\sum_{k\in D_t} a_k x'_k\right)\right| \le \frac{2C}{b_n}\phi^t_1\left(\sum_{k\in D_t} a_k e_k\right)\,.$$

□

Υπενθυμίζουμε ότι

$$e^*_\gamma\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k\right) = g_\emptyset\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k\right) + f_\emptyset\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k\right)\,.$$

Το γεγονός ότι

$$\begin{aligned} g_\emptyset\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x'_k\right) &= g_\emptyset\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x''_k\right) \\ &= g_\emptyset\left(\sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k x'''_k\right) = f_\emptyset\left(\sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k x'''_k\right) = 0\,, \end{aligned}$$

συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}\left|e_\gamma^*\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k\right)\right| &\leq \left|g_\emptyset\left(\sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k x_k'''\right)\right| + \left|f_\emptyset\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k'\right)\right| \\ &+ \left|f_\emptyset\left(\sum_{k=1}^{l} a_k x_k''\right)\right| + \left|f_\emptyset\left(\sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k x_k'''\right)\right| .\end{aligned}$$

Από την Παρατήρηση 9, παίρνουμε

$$\left|g_\emptyset\left(\sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k x_k'''\right)\right| \leq \sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k|g_\emptyset(x_k''')| \leq 2Cn \sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k\varepsilon_k .$$

Από το Λήμμα 13 και την Παρατήρηση 9 έχουμε

$$\begin{aligned}\left|f_\emptyset\left(\sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k x_k'''\right)\right| &\leq \sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k\left(\prod_{t<t_k} b_t\right)|g_{t_k}(x_k''')| \\ &\leq 2C\frac{1}{2}n \sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k\varepsilon_k \leq 2Cn \sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k\varepsilon_k .\end{aligned}$$

Τελικά, καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k(\gamma)\right| &\leq 2Cn \sum_{k\in\{m:t_m=\emptyset\}} a_k\varepsilon_k + \frac{2C}{b_n}\phi_1\left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right) \\ &\quad + \frac{2C}{b_n}\phi_2\left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right) + 2Cn \sum_{k\in\{m:t_m\neq\emptyset\}} a_k\varepsilon_k \\ &\leq \frac{2C}{b_n}(\phi_1+\phi_2)\left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right) + 2Cn\sum_{k=1}^{l} a_k\varepsilon_k \\ &\leq \frac{2C}{b_n}(\phi_1+\phi_2)\left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right) + 2Cn\max\{a_k : k\in\mathbb{N}\}\left(\sum_{k=1}^{l}\varepsilon_k\right) \\ &\leq \frac{2C}{b_n}(\phi_1+\phi_2)\left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right) + 2Cn\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{l} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} ,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα εκμεταλευτήκαμε το γεγονός ότι η ℓ_r νόρμα κυριαρχεί την c_0 νόρμα. $\square$

Παρατηρήση 10. *Από το [6, Θεώρημα I.4], γνωρίζουμε ότι*

$$\left\|\sum a_k e_k\right\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})} \geq M\left(\sum a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Από αυτό το αποτέλεσμα και την προηγούμενη Πρόταση, προκύπτει ότι

$$\left|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k(\gamma)\right| \leq \frac{2C}{b_n}(\phi_1+\phi_2)\left(\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right) + \frac{2Cn\varepsilon}{M}\left\|\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}.$$

Για $\varepsilon = \frac{M}{nb_n}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k(\gamma)\right| \leq \frac{6C}{b_n}\left\|\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}.$$

Επομένως,

$$\left\|\sum_{k=1}^{l} a_k x_k\right\|_{\infty} \leq \frac{6C}{b_n}\left\|\sum_{k=1}^{l} a_k e_k\right\|_{\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})}. \tag{4.5.4}$$

Πόρισμα 4. *Για κάθε block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$ υπάρχει περαιτέρω block ακολουθία που ικανοποιεί την ανισότητα (4.5.4).*

4.6 Το κεντρικό αποτέλεσμα

Πρόταση 26. *Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία skipped block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$ για την οποία ισχύει ότι $\operatorname{minsupp} x_{k+1} > \operatorname{maxsupp} x_k + k$ και ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 25. Τότε, η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη βάση του χώρου Tsirelson $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})$, όπου τα n και $\bar{b}$ ορίζονται όπως παραπάνω.*

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια των Προτάσεων 24, 25 και της Παρατήρησης 10. □

Πρόταση 27. *Ο χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_p για κάποιο $p\in(1,\infty)$.*

Απόδειξη. Με παρόμοιο τρόπο όπως στο [6, Θεώρημα I.4], για κάθε νορμαρισμένη block ακολουθία $(x_k)_k$ της βάσης $(e_j)_j$ και για κάθε ακολουθία (a_k) πραγματικών αριθμών, ισχύει ότι

$$\left\|\sum a_k x_k\right\| \leq \frac{2}{b_n}\left\|\sum a_k e_k\right\|.$$

Από το θεώρημα του M. Zippin [58], προκύπτει ότι ο χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n,\bar{b})$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_p για κάποιο $p\in(1,\infty)$. □

Παρατήρηση 11. *Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 4 και 5 μπορεί να προκύψει μία εναλλακτική απόδειξη. Πράγματι, έστω $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ μία skipped block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$. Τότε, υπάρχει μία περαιτέρω block ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί συγχρόνως τις προϋποθέσεις των Πορισμάτων 3 και 4. Συνεπώς, η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί και τις προϋποθέσεις της Πρότασης 26.*

Παρατηρούμε ότι κάθε περαιτέρω block ακολουθία $(z_k)_k$ της $(x_k)_k$ είναι επίσης skipped block και ικανοποιεί την Πρόταση 26, άρα είναι ισοδύναμη με τη βάση του χώρου $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$. Επομένως, κάθε block ακολουθία $(z_n)_n$ της $(x_k)_k$ είναι ισοδύναμη με την $(x_k)_k$. Από το θεώρημα του M. Zippin [58], προκύπτει ότι ο χώρος $\overline{<(x_k)_k>}$ είναι ισόμορφος με κάποιον ℓ_p. Συνεπώς, $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b}) \cong \ell_p$ για κάποιο $p \in (1, \infty)$.

Για να προσδιορίσουμε την ακριβή τιμή του p, χρειαζόμαστε την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 28. *Ο χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_r, όπου $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ και $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^{r'} = 1$.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in c_{00}$, ισχύει $\|x\| \leq \|x\|_r$, το οποίο αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας επαγωγή στην πληθικότητα του συνόλου $\operatorname{supp} x$. Αν $|\operatorname{supp} x| = 1$, είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $y \in c_{00}$ με $|\operatorname{supp} y| \leq n$ και έστω $x \in c_{00}$ με $|\operatorname{supp} x| = n+1$. Τότε, είτε $\|x\| = \|x\|_\infty$ ή $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \|E_i x\|$ για κατάλληλα υποσύνολα $E_1 < E_2 < \ldots < E_n$. Στην πρώτη περίπτωση προφανώς ισχύει, αφού $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ για κάθε $p \in [r, \infty)$. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε τη δεύτερη περίπτωση.

Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, η πληθικότητα του $\operatorname{supp} E_i x$ είναι μικρότερη από την πληθικότητα του $\operatorname{supp} x$ και χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση σε συνδυασμό με την ανισότητα $H\ddot{o}lder$, παίρνουμε ότι

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \|E_i x\|_r \leq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|E_i x\|_r^r \right)^{\frac{1}{r}} = \|x\|_r .$$

Συνδυάζοντας το παραπάνω με την Πρόταση 27, συμπεραίνουμε ότι ο χώρος $\mathcal{T}(\mathcal{A}_n, \bar{b})$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_p για κάποιο $p \in [r, \infty)$.
Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ θέτουμε $M_l = \{1, 2, \ldots, n\}^l$. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι για κάθε $l \in \mathbb{N}$, το συναρτησιακό $f_l = \sum\limits_{s \in M_l} \left(\prod\limits_{i=1}^{l} b_{s_i} \right) e_s^*$ ανήκει στο $W(\mathcal{A}_n, \bar{b})$, όπου s_i είναι η i-οστή συντεταγμένη του s για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και $\sum\limits_{s \in M_l} \prod\limits_{i=1}^{l} b_{s_i} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \right)^l$.

Θέτουμε $a_s = \prod_{i=1}^{l} b_{s_i}$ και $x_l = \sum_{s\in M_l} a_s^{\frac{r'}{r}} e_s$. Βλέπουμε εύκολα ότι $\|x_l\| = 1$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Πράγματι,

$$\|x_l\| \leq \|x_l\|_r = \left(\sum_{s\in M_l} a_s^{r'}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'}\right)^{\frac{l}{r}} = 1 = f_l(x_l) \leq \|x_l\|\,.$$

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $p' > r$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x_l\|_{p'} < \varepsilon$. Αν ο ισχυρισμός ισχύει, έχουμε τελειώσει αφού το p ταυτίζεται με το r.

Απόδειξη του Ισχυρισμού: Παρατηρούμε ότι για $p' > r$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{r'}{r}p'} = \sum_{i=1}^{n} b_i^{r'(1+\delta)}$$

για κάποιο $0 < \delta < 1$. Όμως, $b_i < 1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και άρα

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'(1+\delta)} < \sum_{i=1}^{n} b_i^{r'} = 1.$$

Συνεπώς, υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'(1+\delta)}\right)^{l} < \varepsilon^{p'}$. Τότε για αυτό το l, προκύπτει ότι

$$\|x_l\|_{p'} = \left(\sum_{s\in M_l} a_s^{\frac{r'}{r}p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{s\in M_l} a_s^{r'(1+\delta)}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'(1+\delta)}\right)^{\frac{l}{p'}} < \varepsilon\,.$$

□

Θεώρημα 16. *Για κάθε $r \in (1, \infty)$ ο χώρος $\mathfrak{X}_r$ είναι ℓ_r κορεσμένος.*

Απόδειξη. Όπως αναφέρθηκε στη Παρατήρηση 11, για κάθε skipped block ακολουθία στον $\mathfrak{X}_r$, μπορούμε να βρούμε περαιτέρω block ακολουθία $(x_k)_k$ τέτοια ώστε ο χώρος $\overline{<(x_k)_k>}$ να είναι ισόμορφος με τον ℓ_r. □

Παρατήρηση 12. *Από το προηγούμενο Θεώρημα, συμπεραίνουμε ότι ο $\mathfrak{X}_r$ είναι ένας διαχωρίσιμος $\mathcal{L}^\infty$ χώρος που δεν περιέχει τον ℓ_1. Επομένως, τα αποτελέσματα των D. Lewis - C. Stegall [37] και A. Pelczyński [48] οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο $\mathfrak{X}_r^*$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_1. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αντίστοιχο επιχείρημα του D. Alspach [1] και να δείξουμε άμεσα ότι η ακολουθία (M_q) είναι συρρίκνουσα FDD για τον $\mathfrak{X}_r$. Τότε, προκύπτει ότι η $(e_\gamma^*)_{\gamma\in\Gamma}$ είναι μία βάση για τον $\mathfrak{X}_r^*$, ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_1.*

Βιβλιογραφία

[1] D. Alspach, *The dual of the Bourgain-Delbaen space*, Israel J. Math. **117** (2000), 239–259.

[2] V. A. Anagnostopoulos, Y. Sarantopoulos and A. M. Tonge, *Homogeneous polynomials and extensions of Hardy-Hilbert's inequality*, Math. Nachr. **285** (2012), no. 1, 47–55.

[3] S. A. Argyros and I. Deliyanni, *Banach spaces of the type of Tsirelson*, arXiv (math/9207206v1), (1992).

[4] S. A. Argyros and R. Haydon, *A Hereditarily Indecomposable $\mathcal{L}^\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem*, Acta Math. **206** (2011), no. 1, 1–54.

[5] S.A. Argyros, S. Mercourakis and A. Tsarpalias, *Convex unconditionality and summability of weakly null sequences*, Isr. J. Math. **107** (1998), 157–193.

[6] S. A. Argyros and S. Todorčević, *Ramsey methods in Analysis*, Birkhäuser, CRM, Barcelona, 2005.

[7] S .A. Argyros and A. Tolias, *Methods in the theory of hereditarily indecomposable Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **170** (2004), no. 806.

[8] R. M. Aron, M. Lacruz, R. A. Ryan and A. M. Tonge, *The generalized Rademacher functions*, Note di Mat. **12** (1992), 15–25.

[9] S. Banach, *Über homogene Polynome in (L^2)*, Studia Math. **7** (1938), 36–44.

[10] F. Bayart, *Weak-closure and polarization constant by Gaussian measure*, Math. Z. **264** (2010), 459–468.

[11] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*, North-Holland, 1985.

[12] S. F. Bellenot, *Tsirelson superspaces and ℓ_p*, Journal of Funct. Anal. **69** (1986), no. 2, 207–228.

[13] C. Benítez, Y. Sarantopoulos and A. M. Tonge, *Lower Bounds for Norms of Products of Polynomials*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **124** (1998), 395–408.

[14] J. Berg and J. Löfström, *Interpolation spaces, An Introduction*, Grundlehren der Math., Band 223, Springer–Verlag, 1976.

[15] J. Bernués and I. Deliyanni, *Families of finite subsets of $\mathbb{N}$ of low complexity and Tsirelson type spaces*, Math. Nachr. **222** (2001), 15–29.

[16] R. P. Boas, *Entire functions*, Academic Press, 1954.

[17] J. Bourgain and F. Delbaen, *A class of special $\mathcal{L}^\infty$ spaces*, Acta Mathematica **145** (1980), 155–176.

[18] S. B. Chae, *Holomorphy and calculus in normed spaces*, Pure Appl. Math., vol. 92, 1985.

[19] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396–414.

[20] S. Dineen, *Complex Analysis of Infinite Dimensional Spaces*, Springer Monogr. Math., Springer, 1999.

[21] L. E. Dor and T. Starbird, *Projections of L^p onto subspaces spanned by independent random variables*, Compositio Math. **39** (1979), 141–175.

[22] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.

[23] G. Folland, *Real Analysis*, John Wiley & Sons, 1999.

[24] D. Freeman, E. Odell and Th. Schlumprecht, *The universality of ℓ_1 as a dual space*, Math. Ann. **351** (2011), no. 1, 149–186.

[25] I. Gasparis, M. K. Papadiamantis and D. Z. Zisimopoulou, *More ℓ_r saturated $\mathcal{L}^\infty$ spaces*, Serdica Math. J. **36** (2010), no. 2, 149–170.

[26] W. T. Gowers, *A new dichotomy for Banach spaces*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), no. 6, 1083–1093.

[27] W. T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 851–874.

[28] W. T. Gowers and B. Maurey, *Banach spaces with small spaces of operators*, Math. Ann. **307** (1997), no. 4, 543–568.

[29] L. A. Harris, *Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors*, Proc. Colloq. Analysis, Rio de Janeiro, 1972, Act. Sci et Ind., Hermann, Paris, 1975, 145–163.

[30] L. A. Harris, *A Bernstein-Markov theorem for normed spaces*, J. Math. Anal. Appl. **208** (1997), 476–486.

[31] R. Haydon, *Subspaces of the Bourgain-Delbaen space*, Studia Math. **139** (2000), no. 3, 275–293.

[32] W. Hoeffding, *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, J. Amer. Stat. Assoc. **58** (1963), no. 301, 13–30.

[33] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal and M. Zippin, *On bases,finite-dimensional decompositions and weaker stuctures in Banach spaces*, Israel J. Math. **9** (1971), 488–506.

[34] M. Kato and Y.Takahashi, *Type, Cotype Constants and Clarkson's Inequalities for Banach Spaces*, Math. Nachr. **186** (1997), 187–195.

[35] H. König and L. Tzafriri, *Some Estimates for Type and Cotype Constants.*, Math. Ann. **256** (1981), no. 1, 85–94.

[36] R. Komorowski, *On the best possible constants in the Khintchine inequality for* $p \geq 3$, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), no. 1, 73–75.

[37] D. Lewis and C. Stegall, *Banach spaces whose duals are isomorphic to* $\ell^1(\Gamma)$, J. Funct. Anal. **12** (1971), 167–177.

[38] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I and II*, Springer, 1996.

[39] B. Maurey, *Banach spaces with few operators*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2003, 1247–1297.

[40] B. Maurey, *Type, Cotype and K-Convexity*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2003, 1299–1333.

[41] B. Maurey and H. Rosenthal, *Normalized weakly null sequences with no unconditional subsequence*, Studia Math. **61** (1977), 77–98.

[42] G. Muñoz, Y. Sarantopoulos and A. Tonge, *Complexifications on real Banach spaces, polynomials and multilinear maps*, Sudia Math. **134** (1999), 1–33.

[43] T. Nguyen, *A lower bound on the radius of analyticity of a power series in a real Banach space*, Studia Math. **191** (2009), 171–179.

[44] M. K. Papadiamantis and Y. Sarantopoulos, *Polynomial estimates on real and complex $L_p(\mu)$ spaces*, Studia Math. **235** (2016), 31–45.

[45] M. K. Papadiamantis and Y. Sarantopoulos, *Radius of analyticity of a power series on real Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **434** (2016), 1281–1289.

[46] A. Pappas, A. Kavadjiklis and M. Karamolengos *Polarization constants of polynomials on normed spaces*, Nonlinear Funct. Anal. Appl. **14** (2009), no.4, 551–562.

[47] A. Pelczar, *Stabilization of Tsirelson-type norms on ℓ_p spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), no.5, 1365–1375.

[48] A. Pelczyński, *On Banach spaces containing $L_1(\mu)$*, Studia Math. **30** (1968), 231–246.

[49] G. Pisier, *Sur Les Espaces Qui ne Contiennent Pas de l_n^1 Uniformement*, Seminaire Maurey-Schwartz (expose VII), 2001.

[50] S. G. Révész and Y. Sarantopoulos, *On Markov constants of homogeneous polynomials over real normed spaces*, East J. Approx. **9** (2003), no. 3, 277–304.

[51] S. G. Révész and Y. Sarantopoulos, *Plank problems, polarization and Chebyshev constants*, J. Korean Math. Soc. **41** (2004), no. 1, 157–174.

[52] H.P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces not containing* ℓ_1, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **71** (1974), 2411–2413.

[53] I. Sarantopoulos, *Estimates for polynomial norms on* $L^p(\mu)$*spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99** (1986), 263–271.

[54] Y. Sarantopoulos, *Bounds on the derivatives of polynomials on Banach spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **110** (1991), 307–312.

[55] A. E. Taylor, *Additions to the theory of polynomials in normed linear spaces*, Tohoku Math. J. **44** (1938), 302–318.

[56] *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Cafe*, ed. R. D. Mauldin, Birkhäuser, 1981.

[57] L. R. Williams and J. H. Wells, L^p *Inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **64** (1978), 518–529.

[58] M. Zippin, *On perfectly homogeneous bases in Banach spaces*, Israel J. of Math. **4** (1966), 265–272.

[59] M. Zippin, *A remark on bases and reflexivity in Banach spaces*, Israel J. of Math. **6** (1968), 74–79.