ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Μελέτη Προτύπων Μεμβρανών Συνδιάστασης Μεγαλύτερης από 1 και Εξέταση της Ευστάθειάς τους κάτω από Βαρυτικές Διαταραχές

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

Μηνά Γ. Τσουκαλά

Επιβλέπων: Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούνιος 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Μελέτη Προτύπων Μεμβρανών Συνδιάστασης Μεγαλύτερης από 1 και Εξέταση της Ευστάθειάς τους κάτω από Βαρυτικές Διαταραχές

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

Μηνά Γ. Τσουκαλά

Επιβλέπων: Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή

....	....	....
Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος Καθηγητής Ε.Μ.Π	Αλέξανδρος Κεχαγιάς Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Γεώργιος Κουτσούμπας Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
....	....	....
Κωσταντίνος Φαράκος Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Νίκος Ήργες Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Νικόλαος Τετράδης Αναπ. Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.
	....	
	Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης Αναπ. Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.	

Αθήνα, Ιούνιος 2011.

....
Μηνάς Γ. Τσουκαλάς
Ε.Μ.Π.

Στους γονείς μου Γιώργο και Ελένη,
την αδερφή μου Σοφία
και τη Θένια μου.

“...Όταν μας έρχουνται ανάποδα όλα, τι χαρα να δοκιμάζουμε την ψυχή μας αν έχει αντοχή κι αξία! Θαρρείς κι ένας οχτρός αόρατος, παντοδύναμος - άλλοι τον λένε Θεό κι άλλοι διάολο - χιμάει να μας ρίξει, μα εμείς στέκουμε όρθιοι. Κι έτσι κάθε φορά που εσωτερικά είμαστε νικητές, όταν εξωτερικά είμαστε νικημένοι κατα κράτος, ο αληθινός άντρας νιώθει άφραστη περιφάνια και χαρά· η εξωτερική συμφορά μετουσιώνεται σε ανώτατη, δυσκολώτατη ευδαιμονία.”

“Βίος και πολιτεία του Αλέξη Ζορμπά”
Νίκος Καζαντζάκης

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε τα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2 και την ύπαρξη λύσεων μελανών οπών στη μεμβράνη. Αρχικά θα θεωρήσουμε ένα πενταδιάστατο πρότυπο βαρύτητας με έναν όρο Gauss - Bonnet στο bulk και έναν όρο επαγόμενης βαρύτητας σε μία τρισδιάστατη μεμβράνη. Μπορούμε να δούμε ότι σύστημα αυτό, δέχεται ως λύσεις τρισδιάστατες BTZ μελανές οπές στη μεμβράνη, με τις λύσεις να επεκτείνονται ομαλά στο bulk. Επιπλέον εξετάζουμε το αντίστοιχο ζήτημα στην περίπτωση ενός εξαδιάστατου προτύπου βαρύτητας και πάλι με έναν όρο Gauss - Bonnet στο bulk και έναν επαγόμενο όρο βαρύτητας, αυτή τη φορά σε μία τετραδιάστατη μεμβράνη. Και πάλι το σύστημα επιδέχεται λύσεις μελανών οπών στη μεμβράνη, και την επέκτασή τους στο bulk. Ωστόσο η προβολή του όρου Gauss - Bonnet στη μεμβράνη επιβάλλει μια σχέση η οποία απαιτεί, την παρουσία ύλης στις επιπλέον διαστάσεις. Παράλληλα, εξετάζουμε και το ζήτημα της ευστάθειας της πενταδιάστατης λύσης. Για να γίνει αυτό, εξάγουμε την εξίσωση Lichnerowicz υπό την παρουσία του όρου Gauss - Bonnet. Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz μελετάμε τις διαταραχές της μετρικής.

Παράλληλα, ξέχωρα από την παραπάνω ανάλυση, εξετάζουμε την περίπτωση ενός πενταδιάστατου προτύπου μεμβρανών συνδιάστατης - 1, στο οποίο η επιπλέον χωρική διάσταση, μετασχηματίζεται διαφορετικά από ότι οι υπόλοιπες διαστάσεις πάνω στη μεμβράνη. Βρίσκουμε τις μέγιστα συμμετρικές λύσεις της μεμβράνης στην περίπτωση που το bulk περιέχει μια κοσμολογική σταθερά. Οι λύσεις, θυμίζουν τις λύσεις στο πρότυπο των Randall και Sundrum, αλλά εξαρτώνται από τις παραμέτρους που αντιπροσωπεύουν το σπάσιμο τις αναλλοιώτητας κάτω από τον πενταδιάστατο διφεομορφισμό. Ακολούθως, μελετάμε τις βαθμωτές διαταραχές, όπου και παρατηρούμε ότι το πρότυπο έχει μερικές παθογένειες, καθώς και το χαρακτηριστικό, ότι στο όριο που η αναλλοιώτητα κάτω απο τον πενταδιάστατο διφεομορφισμό έχει αποκατασταθεί, ένας όρος με αρνητική κινητική ενέργεια παραμένει στο σύστημα.

Abstract

In this thesis we discuss codimension-2 braneworlds and the existence of black holes on the brane. Firstly we consider a five-dimensional gravity model with a Gauss-Bonnet term in the bulk and an induced gravity term on a 2-brane of codimension-2. We show that this system admits BTZ black holes on the 2-brane which are extended into the bulk with regular horizons. Furthermore we discuss black hole solutions in six-dimensional gravity with a Gauss-Bonnet term in the bulk and an induced gravity term on a thin 3-brane of codimension-2. We show that these black holes can be localized on the brane, and they can further be extended into the bulk by a warp function. These solutions have regular horizons and no other curvature singularities appear apart from the string-like ones. The projection of the Gauss-Bonnet term on the brane imposes a constraint relation which requires the presence of matter in the extra dimensions. Additionally we address the stability issue of the five-dimensional solutions. In order to do so, we derive the Lichnerowicz equation in the presence of the Gauss-Bonnet term. Using the modified Lichnerowicz equation we study the metric perturbations of Gauss-Bonnet black strings in codimension-2 braneworlds.

Apart from the above analysis, we consider a codimension-1 scenario in a five-dimensional theory, where the extra spatial dimension has different scaling than the other four dimensions. We find background maximally symmetric solutions, when the bulk is filled with a cosmological constant and at the same time it has a three-brane embedded in it. These background solutions are reminiscent of Randall-Sundrum warped metrics, with bulk curvature depending on the parameters of the breaking of diffeomorphism invariance. Subsequently, we consider the scalar perturbation sector of the theory and show that it has certain pathologies and the striking feature that in the limit where the diffeomorphism invariance is restored, there remain ghost scalar mode(s) in the spectrum.

Ευχαριστίες

Πρώτα και κύρια, θα ήθελα να εκφράσω τη βαθιά μου ευγνωμοσύνη στον επιβλέποντα της διδακτορικής μου διατριβής Καθηγητή κ. Ελευθέριο Παπαντωνόπουλο, για την πίστη που επέδειξε στο πρόσωπό μου, την επιμονή και υπομονή του απέναντι σε όσα προβλήματα αντιμετώπισα, τις αμέτρητες συζητήσεις μας, αλλά και για το ειλικρινές του ενδιαφέρον για την επιστημονική μου κατάρτηση και εξέλιξη.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής μου επιτροπής, κ. κ. Αν. Καθηγητή Αλέξανδρο Κεχαγιά και Αν. Καθηγητή Γεώργιο Κουτσούμπα για το χρόνο που απλόχερα μου διέθεσαν, όσες φορές χρειάστηκα τη βοήθειά τους όλα αυτά τα χρόνια. Επίσης ευχαριστώ τον Καθηγητή κ. Χρήστο Χαρμούση του Laboratoire de Physique Theorique d'Orsay για το ενδιαφέρον του, αλλά και για τη βοήθειά του σε τεχνικά ζητήματα.

Επίσης ευχαριστώ ιδιαιτέρως, τους φίλους και συνεργάτες μεταδιδακτορικούς ερευνητές Βασίλη Ζαμαρία, Αντώνη Παπάζογλου, Bertha Cuadros - Melgar και τον Παύλο Πασιπουλαρίδη για τη στήριξή τους και για όσα έμαθα από αυτούς. Αντώνη σε ευχαριστώ για την επανειλημένη φιλοξενία.

Δίχως την υποτροφία από τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε.) του ΕΜΠ δεν θα ήταν δυνατή η ομαλή διεξαγωγή της διδακτορικής διατριβής. Επίσης ευχαριστώ τον Τομέα Φυσικής του ΕΜΠ που μου έδωσε τη δυνατότητα να συμμετάσχω σε διάφορα συνέδρια τα τελευταία τρία χρόνια. Επιπρόσθετα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Bob Nichol διευθυντή του Institute of Cosmology and Gravitation του Πανεπιστημίου του Portsmouth για τη ευκαιρία που μου έδωσε να επισκεφτώ το ινστιτούτο, τον Αν. Καθηγητη κ. Χρήστο Παναγόπουλο του Πανεπιστημίου της Κρήτης για τη δυνατότητα να συμμετάσχω στο σχολείο το οποίο διοργανώθηκε το 2009 στο Ηράκλειο, καθώς επίσης και τον Καθηγητή κ. Χρήστο Χαρμούση του Laboratoire de Physique Theorique d' Orsay για την ευκαιρία που μου έδωσε ώστε να συμμετάσχω στο σχολείο το οποίο διοργανώθηκε στην Orsay.

Αρκετά άτομα από το ΕΜΠ συνετέλεσαν στη ολοκλήρωση αυτής της διατριβής. Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους Γιώργο Ελευθερίου και Γιώργο Τσάμη για τις καθημερινές μας συζητήσεις. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τους Πάρη Παρισιάδη, Παναγιώτη Κοτετέ και Αλέξανδρο Απέρη για την ειλικρινή τους φιλία και την υποστήριξή τους σε διάφορες δύσκολες φάσεις τα τελευταία τρία χρόνια. Περισσότερο από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Θοδωρή Κολυβάρη για τη χρόνια φιλία του αλλά και για τις άπειρες συζητήσεις μας, μοιράζοντας τις σκέψεις, τις αγωνίες και τις ελπίδες μου μαζί του. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους προαναφερόμενους, για τα άπειρα λίτρα μπύρας που καταναλώσαμε μαζί.

Ευχαριστώ τους φίλους μου Χρήστο, Γιάννη, Βασίλη, Ηλία, Νίκο, Σταύρο, Φάνη, Νικόλα, Σοφία, Χριστίνα, Κώστα, Γιώργο, Σταύρο, Ράνια, Βερονικα και Βύρωνα για το ενδιαφέρον τους για την πορεία της διατριβής μου.

Η διατριβή εκτελέστηκε κάτω από τους ήχους των Clint Mansell, Ricardo Villalobos, Richie Hawtin και Γιάννη Αγγελάκα τους οποίους και ευχαριστώ για τις υπέροχες μουσικές.

Ευχαριστώ μέσα από την καρδιά μου τους θείους μου Θοδωρή και Λαμπρινή για το ενδιαφέρον τους όλα αυτά τα χρόνια.

Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη και την αγάπη μου στους γονείς μου Γιώργο και Ελένη και στην αδερφή μου Σοφία, για τη συνεχή τους συμπαράσταση, και την αμέριστη αγάπη τους. Σας ευχαριστώ μέσα από την καρδιά μου για όλα. Τέλος δεν υπαρχουν λόγια για να εκφράσω την απέραντη ευγνωμοσύνη και αγάπη στη Θένια μου, χάρη στο σθένος και την υποστήριξή της οποίας ολοκληρώθηκε η εν λόγω διατριβή. Η πίστη σου σε εμένα με βοηθά να βρίσκω κάθε φορά τον εαυτό μου.

Πρόλογος

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) είναι η μόνη βαρυτική θεωρία στις τέσσερεις διαστάσεις, της οποίας οι εξισώσεις κίνησης, εμπεριέχουν μέχρι δεύτερης τάξης παραγώγους (κατ΄ αντιστοιχία με την εξίσωση Poisson στη Νευτώνια θεωρία), ενώ παράλληλα διατηρείται η ενέργεια. Οι εξισώσεις, προκύπτουν από τη μεταβολή της Einstein - Hilbet δράσης με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Ως θεωρία έχει αποδειχθεί οτι αποτελεί ένα αρκετά ενδιαφέρον πεδίο έρευνας, τόσο από της άποψη της εξερεύνησης στατικών λύσεων, όσο και της μελέτης κοσμολογικών προτύπων. Αν και ως θεωρία έχει επιβεβαιωθεί αρκετές φορές, πρόσφατα αστροφυσικά δεδομένα και κοσμολογικές παρατηρήσεις, υποδεικνύουν ότι η ΓΘΣ θα πρέπει να τροποποιηθεί στο όριο των μεγάλων αποστάσεων. Επιπρόσθετα γνωρίζουμε ότι σε υψηλές ενέργειες η θεωρία καταρρέει, επομένως είναι ανάγκη να τροποποιηθεί στο όριο των μικρών αποστάσεων, ώστε να συμπεριλάβει και κβαντικά φαινόμενα.

Η μόνη αλλαγή στο πεδίο της δράσης, από μια γεωμετρική ματιά, η οποία μπορεί να μας δώσει εξισώσεις κίνησης, οι οποίες να ικανοποιούν τις δύο παραπάνω απαιτήσεις, είναι η εισαγωγή μιας κοσμολογικής σταθεράς. Οποιαδήποτε εισαγωγή μεγαλύτερων δυνάμεων όρων καμπυλότητας, είτε θα μπορεί να απαλειφθεί μέσω παραγοντικών ολοκληρώσεων, είτε θα εισάγει παθογένειες (ghosts) στο σύστημα. Παρόλ΄ αυτά αντί να μείνουμε στο πλαίσιο των τεσσάρων διαστάσεων μπορούμε να θεωρήσουμε ένα πρότυπο με επιπλέον διαστάσεις και να εξετάσουμε τις επιπτώσεις τόσο για τον υψηλοδιάστατο χωροχρόνο, όσο και για τον τετραδιάστατο.

Η πρώτη προσπάθεια προς αυτή την κατεύθυνση έγινε με την πρωτοπόρα δουλειά των Kaluza και Klein, η οποία πυροδότησε αργότερα τη γενικότερη μελέτη στη θεωρία χορδών. Πιο πρόσφατα μεγάλο ενδιαφέρον προσέλκυσαν τα πρότυπα μεμβρανών, κατά τα οποία το σύμπαν μπορεί να αναπαρασταθεί με μία τετραδιάστατη μεμβράνη, η οποία είναι εμβαπτισμένη σε ένα υψηλοδιάστατο χωροχρόνο (bulk). Όλα τα πεδία του Καθιερωμένου Προτύπου είναι είναι εντοπισμένα πάνω στη μεμβράνη, ενώ μόνο η βαρύτητα μπορεί να διαδίδεται στον επιπλέον χώρο.

Η συγκεκριμένη ιδέα χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους Arkani - Hamed, Dimopoulos και Dvali (ADD) [7], σε μια προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος της ιεραρχίας. Αργότερα οι Randall και Sundrum (RS), υπέθεσαν ένα πρότυπο με δύο μεμβράνες σε πέντε διαστάσεις, υπό την παρουσία μιας αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έγινε δυνατή και πάλι η επίλυση του προβλήματος της ιεραρχίας, ενώ θεωρώντας το αντίστοιχο πρότυπο, αλλά με μία μεμβράνη αυτή τη φορά, μπόρεσε να αποδειχθεί ότι είναι δυνατόν να εντοπισθεί με συνεπή τρόπο η βαρύτητα στη μεμβράνη.

Με βάση το πρότυπο των Randall και Sundrum ξεκίνησε μια ενδελεχής μελέτη των προτύπων μεμβρανών συνδιάστατσης - 1, όπου δηλαδή έχουμε μία επιπρόσθετη διάσταση κάθετη σε μία μεμβράνη, τόσο στο πεδίο της κοσμολογίας, όσο και στην εξερεύνηση των μελανών οπών [6]. Ωστόσο μπορούμε να αυξήσουμε το βαθμό συνδιάστασης και να θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα πρότυπο μεμβρανών συνδιάστασης - 2, στο οποίο τώρα θα έχουμε δύο επιπλέον χωρικές διαστάσεις, κάθετες στη μεμβράνη.

Η ανάλυση των προτύπων μεμβρανών συνδιάστασης - 2, προσέλκυσε το ενδιαφέρον λόγω του ότι έχουν την ιδιότητα να επηρεάζουν τον εγκάρσιο στη μεμβράνη δυσδιάστατο χώρο. Η εισαγωγή μιας τετραδιάστατης μεμβράνης για παράδειγμα σε ένα εξαδιάστατο bulk, έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας ελλείπουσας γωνίας, η οποία εξαρτάται από το ενεργειακό περιεχόμενο της μεμβράνης. Η συγκεκριμένη ιδιότητα χρησιμοποιήθηκε με στόχο την επίλυση του προβλήματος της κοσμολογικής σταθεράς. Ωστόσο για να έχει κανείς ένα γενικό τανυστή ενέργειας ορμής στη μεμβράνη θα πρέπει είτε να δώσει ένα πάχος στη μεμβράνη, είτε να θεωρήσει επιπλέον όρους καμπυλώτητας στο bulk, ή στη μεμβράνη. Όπως και στην περίπτωση των προτύπων των Randall και Sundrum, έτσι και στα πρότυπα συνδιάστασης - 2 έγινε μια εκτενής μελέτη των κοσμολογικών λύσεων, αλλά και των μελανών οπών.

Στην κατεύθυνση της τροποποίησης της βαρύτητας σε μικρές αποστάσεις, ιδιαίτερη προσοχή έχει δοθεί σε ιδέες που προέρχονται από τη φυσική συμπυκνωμένης ύλης. Προς το παρόν έχουν υπάρξει δύο βασικές κατευθύνσεις. Η πρώτη αφορά το πεδίο των ολογραφικών υπεραγωγών και η δεύτερη στο πεδίο θεωριών που επιβάλλουν ανισοτροπικούς μετασχηματισμούς στις διαστάσεις, εισάγοντας με αυτό τον τρόπο εναλλακτικά πρότυπα για ΓΘΣ προκειμένου να έχουμε μια συνεπή θεωρία βαρύτητας κοντά στο όριο των υψηλών ενεργειών.

Εστιάζοντας στην δεύτερη περίπτωση, το κύριο ενδιαφέρον έχει αποδοθεί σε θεωρίες που παραβιάζουν τη συμμετρία Lorentz, κυρίως στο πλαίσιο της θεωρίας Hořava - Lifshitz κατα την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο χρόνος μετασχηματίζεται διαφορετικά σε σχέση με τις υπόλοιπες τρείς χωρικές διαστάσεις [118],[119]. Η θεωρία προσέλκυσε μεγάλο ενδιαφέρον, αφού μπόρεσε να δώσει μία πιθανή εκδοχή ενός επανακανονικοποιήσιμου πρότυπου για μια θεωρία βαρύτητας, η οποία σε μεγάλες αποστάσεις συγκλίνει στη ΓΘΣ.

Στο εν λόγω πρότυπο δεν έχουμε συμμετρία κάτω από τους γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων (general coordinate invariance), αλλά κάτω από το πιο περιοριστικό σύνολο των μετασχηματισμών διατήρησης φύλλωσης (foliation preserving diffeomorphisms). Κατ′ αυτόν το τρόπο οι βαθμοί ελευθερίας της βαρύτητας αυξάνονται κατα ένα βαθμό ελευθερίας. Το βαθμωτό πεδίο το οποίο εμφανίζεται παίζει σημαντικότατο ρόλο στη θεωρία. Αναλύοντας το φάσμα των βαθμωτών διαταραχών τις θεωρίας, βρέθηκε ότι ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας εμφανίζει ένα πρόβλημα ισχυρής σύζευξης (strong coupling problem), κοντά στο όριο που η θεωρία συγκλίνει στη ΓΘΣ, θέτοντας σοβαρά υπόψην την βιωσιμότητα της θεωρίας [126].

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, θα εξετάσουμε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2, κατα τα οποία μία μεμβράνη εμβαπτίζεται σε ένα χωροχρόνο με επιπλέον δύο χωρικές διαστάσεις, καθώς επίσης και πρότυπα κατα τα οποία, μία διάσταση μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο από ότι οι υπόλοιπες. Στην πρώτη κατεύθυνση, κύριος σκοπός μας είναι η εύρεση λύσεων μελανών οπών πάνω στη μεμβράνη και η επέκτασή τους στον επιπλέον χώρο, ώστε να σχηματίζουν λύσεις μελανών χορδών. Παράλληλα θα μας απασχολήσει και το ζήτημα της ευστάθειας μίας εκ τον λύσεων που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια. Στο θέμα της ανάλυσης προτύπων κατα τα οποία μια διάσταση μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο από ότι οι υπόλοιπες, θα ασχοληθούμε με την κατασκευή ενός προτύπου, όπου μία τετραδιάστατη μεμβράνη εμβαπτίζεται σε ένα πενταδιάστατο χωροχρόνο, με την επιπλέον χωρική διάσταση να μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο από οτι οι υπόλοιπες τέσσερεις, που βρίσκονται στη μεμβράνη, συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα κάνουμε μία γενική επισκόπηση των προτύπων ADD και RS και θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στη μελέτη των λύσεων μελανών χορδών, καθώς επίσης και στην εξέταση της ευστάθειάς τους κάτω από κλασικές διαταραχές της μετρικής. Στη συνέχεια στο δεύτερο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2. Αρχικά θα δούμε τον μηχανισμό με τον οποίο εμφανίζεται η ελλείπουσα γωνία στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο, και ακολούθως θα εξετάσουμε διάφορους τρόπους που θα μας δώσουν τη δυνατότητα να μελετήσουμε τις πιθανές λύσεις μελανών χορδών στα εν λόγω πρότυπα.

Ακολούθως στο τρίτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις λύσεις σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2 σε πέντε και έξι διαστάσεις, στα οποία θα θεωρήσουμε ότι έχουμε έναν όρο Gauss - Bonnet (GB) στο bulk και έναν επαγώμενο όρο βαρύτητας στη μεμβράνη. Στις πέντε διαστάσεις θα μπορέσουμε να βρούμε λύσεις οι οποίες πάνω στη μεμβράνη αντιστοιχούν σε τρισδιάστατες μελανές οπές BTZ , οι οποίες μπορούν να επεκταθούν στον εγκάρσιο δυσδιάστατο στη μεμβράνη χώρο, σχηματίζοντας μελανές χορδές [105]. Στην εξαδιάστατη περίπτωση θα δούμε ότι και πάλι μπορούμε πάνω στη μεμβράνη να βρούμε λύσεις τετραδιάστατων Schwarzschild μελανών οπών, αλλά σε αυτή την περίπτωση η προβολή του όρου Gauss - Bonnet στη μεμβράνη επιβάλλει μια σχέση η οποία απαιτεί, την παρουσία ύλης στις επιπλέον διαστάσεις [106]. Στο τέταρτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις διαταραχές της πενταδιάστατης λύσης [107]. Αρχικά θα αναπτύξουμε το φορμαλισμό για την περίπτωση που έχουμε επιπλέον όρους Gauss - Bonnet στις εξισώσεις κινησης και στη συνέχεια επιλέγοντας κατάλληλα τη μορφή της διαταραχής θα εξετάσουμε την ευστάθεια της λύσης. Θα δούμε ότι μακρυά από το όριο Chern - Simons, οι βαθμωτές διαταραχές δεν αποσταθεροποιούν το σύστημα. Για τις τανυστικές και διανυσματικές συνιστώσες της διαταραχής η κατάστασης είναι πιο ευαίσθητη.

Συνεχίζοντας στο πέμπτο κεφάλαιο θα κάνουμε μία επισκόπηση της λεγόμενης θεωρίας Hořava - Lifshitz και στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη δομή και τις λύσεις σε ένα πενταδιάστατο πρότυπο μεμβρανών συνδιάστασης - 1, κατα το οποίο η επιπλέον χωρική διάσταση μετασχηματίζεται διαφορετικά από ότι οι υπόλοιπες τέσσερεις διαστάσεις στη μεμβράνη [141]. Εξετάζοντας τις βαθμωτές διαταραχές του συστήματος θα δούμ ότι η θεωρία χαρακτηρίζεται από δύο δυναμικούς βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι εμφανίζονται στη δράση ώς διορθωτικοί όροι με παραγώγους υψηλής τάξης. Επιπρόσθετα για τον ένα από τους βλέπουμε ότι εμφανίζεται και ώς γηοστ πάνω στη μεμβράνη, δίχως να εξαφανίζεται στο όριο που η θεωρία συγκλίνει στην πενταδιάστατη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Τέλος θα κλείσουμε με τα συμπεράσματά μας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πρότυπα Μεμβρανών Συνδιάστασης Ένα

Για περισσότερα από δέκα χρόνια, τα πρότυπα μεμβρανών, έχουν απασχολήσει ιδιαίτερα την επιστημονική κοινότητα, λόγω πολλών, αρκετά ελκυστικών χαρακτηριστικών τους. Ήδη από το 1920, με τις εργασίες των Kaluza και Klein [1, 2], σε μια προσπάθεια ενοποίησης της βαρύτητας με τον ηλεκτρομαγνητισμό, εισήχθει η ιδέα των επιπλέον χωρικών διαστάσεων, μία ιδέα η οποία απέκτησε εντονότατο ενδιαφέρον στο πλαίσιο της θεωρίας χορδών [3, 4, 5].

Στα πρότυπα μεμβρανών, θεωρούμε ότι το τετραδιάστατο σύμπαν το οποίο αντιλαμβανόμαστε, αντιστοιχεί σε μία απείρως λεπτή μεμβράνη, ή σύμφωνα με την ορολογία, μία 3-brane, με τον αριθμό 3, να αντιστοιχεί στον αριθμό των χωρικών διαστάσεων. Η εν λόγω μεμβράνη είναι εμβαπτισμένη σε ένα $(4+n)$-διάστατο χωρόχρονο τον οποίο και θα ονομάσουμε bulk, με τα πεδία του Καθιερωμένου Προτύπου (Standard Model) να είναι εντοπισμένα πάνω στη μεμβράνη και τη βαρύτητα να μπορεί να διαδοθεί και στις επιπλέον διαστάσεις. Στην περίπτωση που έχουμε μόνο μία επιπλέον χωρική διάσταση κάθετη στη μεμβράνη τότε έχουμε ένα πρότυπο μεμβρανών συνδιάστασης - 1, κ.ο.κ. [6].

Τα κυριότερα πρότυπα στα οποία βασίστηκε η μελέτη των προτύπων μεμβρανών ήταν το πρότυπο των Arkani-Hamed, Dimopoulos, και Dvali (ADD) [7, 8, 9], καθώς επίσης και τα πρότυπα των Randall και Sundrum (RS) [10, 11]. Στο πρότυπο των ADD έγινε δυνατή η επίλυση του προβλήματος της ιεραρχία, ενώ στα πρότυπα των RS, έγινε επίσης μία επίλυση του προβλήματος της ιεραρχίας (στην περίπτωση του προτύπου με δύο μεμβράνες (RS1)), καθώς επίσης μελετήθηκε και το φαινόμενο του εντοπισμού της βαρύτητας στη μεμβράνη (στην περίπτωση του προτύπου με μία μεμβράνη (RS2)). Στη συνέχεια θα κάνουμε μία επισκόπηση των προτύπων αυτών και ακολούθως θα επικεντρωθούμε σε κάποια πιο ειδικά θέματα, τα οποία αφορούν την κατασκευή και μελέτη των μελανών χορδών σε πρότυπα μεμβράνων συνδιάστασης - 1.

Η δομή του κεφαλαίου θα είναι η εξής. Στην πρώτη παράγραφο θα δούμε τα κυριότερα χαρακτηριστικά των προτύπων ADD, RS1 και RS2. Στη συνέχεια θα δούμε τις λύσεις οι οποίες αντιστοιχούν σε μελανές χορδές και στην τρίτη παράγραφο θα ασχοληθούμε με το θέμα τις ευστάθειας των μελανών χορδών κάτω από βαρυτικές διαταραχές. Επιπρόσθετα θα σχολιάσουμε την αδυναμία ύπαρξης λύσεων μελανών χορδών σε πενταδιάστατα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 1 με επιπλέον όρους Gauss - Bonnet.

1.1 Πρότυπα ADD και RS1, RS2

Στο πρότυπο ADD [7], έχουμε έναν επίπεδο χώρο $D = 4 + n$ διαστάσεων, με n συμπαγωποιημένες επιπλέον διαστάσεις, η τοπολογία των οποίων αντιστοιχεί σε ένα τόρο μεγέθους R. Η θεμελιώδης $(4 + n)$ - διάστατη μάζα Planck M_*, η οποία εμπεριέχει τη σύζευξη του βαρυτικού πεδίου με τα πεδία της ύλης, συνδέεται με την ενεργό τετραδιάστατη μάζα Planck M_P, μέσω της σχέσης

$$M_{Pl}^2 = M_*^{2+n}\, R^n. \tag{1.1}$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε πως, αν η M_* είναι της τάξης μεγέθους της ηλεκτρασθενούς κλίμακας $(1\,TeV)$, μπορούμε να πάρουμε μια αρκετά μεγάλη τετραδιάστατη μάζα Planck M_{Pl}, εφόσον το μέγεθος των επιπρόσθετων διαστάσεων είναι μεγάλο. Το όριο στο μέγεθος των επιπλέον χωρικών διαστάσεων, θεωρώντας ότι μόνο η βαρύτητα μπορεί να διαδίδεται στο bulk, είναι της τάξης

$$R \lesssim 10^{-1} mm. \tag{1.2}$$

Επομένως για $M_{Pl} \sim 10^{16}\ TeV$ βρίσουμε ότι $R \sim 0,1mm$ για την περίπτωση που $n = 2$, δηλαδή στην περίπτωση που έχουμε δύο επιπλέον χωρικές διαστάσεις κάθετες στη μεμβράνη (πρότυπο μεμβρανών συνδιάστασης - 2).

Στο πρώτο πρότυπο RS1, των Randall και Sundrum (RS) [10], βασισμένο στην [12], έχουμε δύο τετραδιάστατες μεμβράνες (3 - branes), η οποίες είναι εμβαπτισμένες σε ένα πενταδιάστατο bulk το οποίο περιέχει μία αρνητική κοσμολογική σταθερά. Οι μεμβράνες θα βρίσκονται στις θέσεις $y = 0$ και $y = y_c$ της επιπλέον διάστασης y, για την οποία ισχύει μια S^1/Z_2 συμμετρία.

Η δράση του προτύπου έχει την εξής μορφή

$$\begin{aligned}
S &= S_{\rm EH} + S_1 + S_2 && (1.3)\\
S_{\rm EH} &= \frac{1}{2\kappa_{(5)}^2}\int d^4x\, dy \sqrt{-g^{(5)}}\left(R^{(5)} - 2\Lambda_5\right) && (1.4)\\
S_1 &= \frac{1}{2\kappa_{(4)}^2}\int d^4x \sqrt{-g^{(4)}}(-T) && (1.5)\\
S_2 &= \frac{1}{2\kappa_{(4)}^2}\int d^4x \sqrt{-g'^{(4)}}(-T'), && (1.6)
\end{aligned}$$

όπου $g^{(5)}$ είναι η ορίζουσα της πενταδιάστατης μετρικής, Λ_5 η πενταδιάστατη κοσμολογική σταθερά, $R^{(5)}$ το πενταδιάστατο βαθμωτό Ricci, $g^{(4)}$ και $g'^{(4)}$ η ορίζουσα της μετρικής για τις δύο μεμβρανές στις θέσεις $y = 0$ και $y = y_c$ της επιπλέον διάστασης αντίστοιχα και τέλος T και T' η τάση (πυκνότητα ενέργειας) των δύο μεμβρανών. Οι σταθερές ζεύξης $\kappa^2_{(5)}$,$\kappa^2_{(4)}$ ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\kappa^2_{(5)} = 8\pi\, G_{(5)} = 8\pi\, M^{-3}_{(5)}, \qquad \kappa^2_{(4)} = 8\pi\, G_{(4)} = 8\pi\, M^{-2}_{(4)}. \tag{1.7}$$

Οι εξισώσεις Einstein που προκύπτουν σύμφωνα με την παραπάνω δράση,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g^{(5)}}\, G^{(5)}_{MN} &= -[\Lambda_5 \sqrt{-g^{(5)}} g^{(5)}_{MN} + \kappa^2_{(4)}\, T \sqrt{-g^{(4)}} g^{(4)}_{\mu\nu} \delta^\mu_M \delta^\nu_N \delta(y - y_c) \\ &\quad + \kappa^2_{(4)}\, T' \sqrt{-g'^{(4)}} g'^{(4)}_{\mu\nu} \delta^\mu_M \delta^\nu_N \delta(y)], \end{aligned} \tag{1.8}$$

ικανοποιούνται για μία μετρική της μορφής,

$$ds^2 = a(y)^2 \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu + dy^2 \tag{1.9}$$

με τη συνάρτηση $a(y)$, η οποία θα ονομάζεται συνάρτηση στρέβλωσης (warp factor), να δίνεται από την

$$a(y) = e^{-|y|/l}. \tag{1.10}$$

Με βάση την (1.9) υπολογίζουμε ότι

$$R^{(5)}_{AB} = -\frac{4}{l^2}\, g^{(5)}_{AB} \tag{1.11}$$

$$R^{(5)} = -\frac{20}{l^2} \tag{1.12}$$

$$G^{(5)}_{AB} = -\frac{4}{l^2}\, g^{(5)}_{AB} - \frac{1}{2}\left(-\frac{20}{l^2}\right) = \frac{6}{l^2} g^{(5)}_{AB}, \tag{1.13}$$

απ΄ όπου καταλλήγουμε ότι το bulk έχει μία αρνητική κοσμολογική σταθερά

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{l^2}, \tag{1.14}$$

με l την ακτίνα καμπυλώτητας του AdS χώρου. Η τετραδιάστατη κοσμολογική σταθερά πάνω στις μεμβρανές δίνεται, βάση της σχέσης

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}\left(\Lambda_5 + \kappa^2_{(4)}\, \lambda\right), \tag{1.15}$$

όπου το λ σχετίζεται με τις τάσεις στις μεμβρανές

$$T' = -T = \lambda. \tag{1.16}$$

Απαιτώντας ότι $\Lambda_{(4)} = 0$ βρίσκουμε

$$\lambda = \frac{3M_{(4)}^2}{4\pi\, l^2}. \tag{1.17}$$

Η τετραδιάστατη κλίμακα Planck δίνεται από την σχέση

$$M_{(4)}^2 = M_{(5)}^3\, l \left[1 - e^{-2y_c/l}\right]. \tag{1.18}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να έχουμε μία νέα προσέγγιση στο πρόβλημα της ιεραρχίας (hierarchy problem), εξαιτίας του εκθετικού παράγοντα, για όχι και τόσο μεγάλες τιμές του y_c.

Παίρνοντας το όριο κατά το οποίο $y_c \to \infty$, καταλλήγουμε στο δεύτερο πρότυπο των Randall και Sundrum (RS2) [11], στο οποίο ουσιατικά έχουμε μόνο μία μεμβράνη θετικής τάσης. Σ' αυτή την περίπτωση δεν έχουμε κάποιο μηχανισμό επίλυσης του προβλήματος της ιεραρχίας, αλλά λόγω της στρεβλωμένης γεωμετρίας στην επιπλέον χωρική διάσταση, μπορούμε και έχουμε εντοπισμό της βαρύτητας στη μεμβράνη [13]. Έτσι, για τις κλίμακες ενέργειας θα ισχύει ότι

$$M_{(5)}^3 = \frac{M_{(4)}^2}{l}. \tag{1.19}$$

Η δράση είναι και πάλι της ίδιας μορφής με την (1.4)

$$\begin{aligned} S &= S_{\mathrm{EH}} + S_1 && (1.20)\\ S_{\mathrm{EH}} &= \frac{1}{2\kappa_{(5)}^2}\int d^4x\, dy \sqrt{-g^{(5)}}\left(R^{(5)} - 2\Lambda\right) && (1.21)\\ S_1 &= \frac{1}{2\kappa_{(4)}^2}\int d^4x \sqrt{-g^{(4)}}(-T), && (1.22) \end{aligned}$$

όπως επίσης και η μετρική

$$ds^2 = e^{-2|y|/l}\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu + dy^2, \tag{1.23}$$

με τη διαφορά ότι το βαρυτόνιο είναι εντοπισμένο στη μεμβράνη. Διαταράσοντας τη λύση κενού και επιλέγοντας την κατάλληλη βαθμίδα βλέπουμε ότι το $zero - mode$, δίνει ένα τετραδιάστατο βαρυτικό δυναμικό $V \propto r^{-1}$, ενώ τα $massive{-}modes$, δίνουν μία διόρθωση στο δυναμικό $V \propto r^{-3}$. Για $r \ll l$ έχουμε

$$V(r) \approx \frac{GMl}{r^2} \tag{1.24}$$

από όπου βλέπουμε ότι το δυναμικό αποκτά πενταδιάστατο χαρακτήρα σε χαμηλές κλίμακες. Για $r \gg l$,

$$V(r) \approx \frac{GMl}{r}\left(1 + \frac{2l^2}{3r^2}\right), \tag{1.25}$$

όπου υπάρχουν μικρές διορθώσεις σε χαμηλές ενέργειες λόγω φαινομένων από τις επιπλέον διαστάσεις [13].

Οι σχέσεις τώρα, που συνδέουν την πενταδιάστατη κοσμολογική σταθερά με την ακτίνα καμπυλότητας του Anti de-Sitter χώρου, καθώς και τη σχέση μεταξύ τάσης της μεμβράνης και της πενταδιάστατης ενεργειακής κλίμακας είναι

$$\Lambda_{(5)} \;=\; -6/l^2, \qquad \lambda = \frac{3M_{(5)}^3}{4\pi\, l} \tag{1.26}$$

1.2 Μελανές Χορδές

Έχοντας μελετήσει τα κύρια χαρακτηριστικά των προτύπων μεμβρανών, θα περάσουμε στη συνέχεια στην ανάλυση των μελανών χορδών (black strings). Η μετρική σε D-διαστάσεις, η οποία αντιστοιχεί σε μία μελανή χορδή, έχει την ακόλουθη μορφή,

$$ds^2 = -V dt^2 + V^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2 + dz^2, \qquad V = 1 - \frac{r_0^{d-3}}{r^{d-3}}, \tag{1.27}$$

όπου έχουμε πάρει μία d-διάστατη στατική μελανή οπή Schwarzschild-Tangherlini [14] και έχουμε προσθέσει μία επιπλέον επίπεδη διάσταση z. Ο ορίζοντας γεγονότων είναι στη θέση r_0, με την τοπολογία του να είναι της μορφής $S^{d-2} \times \mathbb{R}$.

Από τη μεριά τώρα των προτύπων μεμβρανών συνδιάστασης - 1 και συγκεκριμένα έχοντας υπ΄ όψην το RS2 πρότυπο των Randall και Sundrum (RS2) [11], το ερώτημα που προκύπτει είναι κατα πόσο μπορούμε να έχουμε μία αντίστοιχη κατασκευή στο εν λόγο πρότυπο. Λόγω του θεωρήματος των Campell - Magaard [15, 16], στη μετρική (1.23) αντί για το $\eta_{\mu\nu}$, μπορούμε να έχουμε οποιαδήποτε *Ricci flat* λύση της μεμβράνης. Η πρώτη προσπάθεια να βρεθεί μία λύση μελανής οπής σε μία μεμβράνη στο RS2 πρότυπο έγινε από τους Chamblin, Hawking και Reall (CHR black string) [17], κατα την οποία αντικαταστάθηκε η μετρική Minkowski της (1.23) με τη μετρική για μία τετραδιάστατη Schwarzchild μελανή οπή.

$$ds^2 = \alpha(z)^2 \left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{II}^2 \right] + dz^2 \tag{1.28}$$

Εκτελώντας την παρακάτω αλλαγή μεταβλητών

$$y = l e^{z/l} \tag{1.29}$$

και υπολογίζοντας το βαθμωτό Ricci και τον τανυστή Ricci, βρίσκουμε ότι έχουν πεπερασμένη τιμή. Ωστόσο κατά τον υπολογισμό του τετραγώνου του τανυστή Riemann, έχουμε

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}\, R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{l^4} \left(40 + \frac{48 M^2 y^4}{r^6} \right). \tag{1.30}$$

απ΄ όπου και βλέπουμε ότι αποκλίνει στον ορίζοντα του AdS χώρου $y = \infty$, όπως επίσης και στην θέση της απροσδιοριστίας (singularity) της μελανής χορδής $r = 0$. Οι συγγραφείς της [17] ισχυρίστηκαν ότι τελικά η επέκταση της λύσης στην επιπλέον διάσταση δεν θα φτάνει μέχρι τον ορίζοντα του AdS χώρου και θα σταματήσει σε μια ενδιάμεση απόσταση, σχηματίζοντας ένα *black cigar*, λόγω της αστάθειας Gregory - Laflamme (Gregory - Laflamme instability) [18, 19, 20]. Θα δούμε περίσσοτερα για το εν λόγω ζήτημα στην επόμενη παράγραφο.

Η λύση των CHR για τη μελανή χορδή (1.28), αποτελεί τη μόνη γνωστή λύση για μία μελανή χορδή σε μία μεμβράνη στο πρότυπο RS2, της οποίας η λύση μπορεί να επεκτείνεται στο bulk. Ωστόσο, θα περίμενε κανείς ότι, θεωρώντας ότι η ύλη είναι εντοπισμένη στη μεμβράνη, όλα τα βαρυτικά φαινόμενα να είναι και αυτά εντοπισμένα κοντά στη μεμβράνη. Αν για παράδειγμα μελετούσαμε την κατάρρευση ενός αστέρα, θα περιμέναμε ότι ο ορίζοντας γεγονότων που θα σχηματιζόταν, θα μπορούσε να επεκταθεί στο bulk, όχι σε πολύ μεγάλες αποστάσεις, αλλά αρκετά κοντά στη θέση της μεμβράνης [21].

Οι λύσεις μελανών οπών στη μεμβράνη έχουν μελετηθεί εκτενέστατα στη βιβλιογραφία. Στην [22], οι Dadhich et al. χρησιμοποιώντας τις επαγώμενες τετραδιάστατες εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη, στο RS2 πρότυπο [23], κατάφεραν να βρούν λύση για μία στατική μαύρη τρύπα, η οποία βρίσκεται πάνω στη μεμβράνη.

Οι Emparan et al. [24] βρήκαν επίσης λύσεις για μαύρες οπές, για μία τρισδιάστατη μεμβράνη (2-brane), η οποία είναι εμβαπτισμένη σε ένα τετραδιάστατο bulk, χρησιμοποιώντας τη μετρική για μία επιταχυνόμενη μαύρη τρύπα (C-metric) [25]. Σε ακόλουθη εργασία οι Emparan, Gregorry και Santos [26] βασισμένοι στην [24] έδωσαν πάχος στη μεμβράνη (domain wall) και ανέλυσαν την περιγραφή μίας μαύρης τρύπας, η οποία είναι περιορισμένη στη συγκεκριμένη κατασκευή.

Οι Kofinas, Papantonopoulos και Pappa στην [27] ανέλυσαν σφαιρικά συμμετρικές μεμβράνες, εισάγωντας στην δράση έναν τετραδιάστατο βαθμωτό όρο καμπυλώτητας, παίρνοτας ως συνοριακή συνθήκη ότι το ηλεκτρικό κομμάτι του τανυστή του Weyl μηδενίζεται πάνω στη μεμβράνη. Κάποιες από τις λύσεις για μία στατική ύλη εντοπισμένη πάνω στη μεμβράνη, έχουν την μορφή Schwarzschild-$(A)dS_{(4)}$. Επεκτείνοντας τη μελέτη, οι Kofinas, Papantonopoulos και Zamarias [28], μελέτησαν σφαιρικά συμμετρικές μεμβράνες με επαγώμενη βαρύτητα (induced gravity), εισάγωντας μη τοπικά φαινόμενα από το bulk.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει τέλος η μελέτη των Barcelo et. al. [29], στην οποία εξετάστηκε το ενδεχόμενο ύπαρξης αναλυτικής λύσης για μία μελανή χορδή σε πρότυπα μεμβρανών, με επιπρόσθετους όρους Gauss - Bonnet στο bulk. Το αποτέλεσμα είναι ότι για να έχουμε μια τέτοια λύση στο εν λόγω πρότυπο, θα πρέπει το τετράγωνο του τανυστή Riemann (Kretschmann Scalar) είναι σταθερό, το οποίο για μία Schwarzschild μελανή οπή δεν ισχύει. Θα δούμε στη συνέχεια ότι παραμένοντας σε ένα πενταδιάστατο πρότυπο, αλλά μεταβάλοντας το βαθμό συνδιάστασης από ένα σε δύο μπορούμε επιτυχώς να έχουμε μία λύση η οποία να ικανοποιεί αυτό το κριτήριο.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την ευστάθεια των μελανών χορδών σε πρότυπα συνδιάστασης - 1, με έμφαση στο πρότυπο RS2.

1.3 Διαταραχές

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την ευστάθεια των μελανών χορδών στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας [21, 30, 31]. Αρχικά θα δούμε την αντιστοιχία στη Νευτώνια θεωρία και ακολούθως θα εξετάσουμε τον μηχανισμό της αστάθειας Gregory - Laflamme [18] για διαταραχές με μεγάλο μήκος κύματος (long wavelength modes).

1.3.1 Αστάθεια Jeans

Η πρώτη μελέτη σχετικά με την ευστάθεια, κάτω από διαταραχές μεγάλου μήκους κύματος έγινε από τον Sir James Jeans [32] στο πλαίσιο της Νευτώνιας θεωρίας. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δείγμα στατικής ύλης με σταθερή πυκνότητα μάζας $\rho = \rho_0$, πίεση $p = p_0$ και μηδενική ταχύτητα $\vec{v} = 0$. Η εξίσωση συνέχειας και η εξίσωση Euler αντίστοιχα, μας παρέχουν τις εξισώσεις κίνησης, για ένα μη σχετικιστικό, ισοτροπικό υδροδυναμικό σύστημα. Αυτές είναι οι εξής

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \ , \tag{1.31}$$

και η εξίσωση Euler

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \vec{g} \tag{1.32}$$

ενώ οι εξισώσεις για το βαρυτικό πεδίο είναι οι

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho \ , \tag{1.33}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας, p η πίεση, $\vec{v}$ η ταχύτητα και $\vec{g}$ το εξωτερικό βαρυτικό πεδίο, με G να είναι η σταθερά του Νεύτωνα.

Διαταράσοντας το σύστημα με βάση το παρακάτω σχήμα,

$$\rho_0 + \delta\rho \quad p_0 + \delta p \quad \delta\vec{v} \quad \vec{g} + \delta\vec{g} \tag{1.34}$$

παραμελώντας τη συνεισφορά λόγω φαινομένων αυτοβαρύτητας (self-gravitation effects), καταλλήγουμε στα παρακάτω αποτελέσματα, μετά απο αντικατάσταση στις εξισώσεις

$$\partial_t \delta\rho + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} = 0 \quad \partial_t \delta\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\delta p + \delta\vec{g} \quad \vec{\nabla} \times \delta\vec{g} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{g} = -4\pi G \delta\rho . \tag{1.35}$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι

$$\partial_t^2 \delta\rho = \vec{\nabla}^2 \delta p + 4\pi G \rho_0 \delta\rho \ . \tag{1.36}$$

Απαιτούμε η διαταραχή να ικανοποιεί μία καταστατική εξίσωση, $\delta p = v_s^2 \delta\rho$. Αναλύοντας κατα Fourier, $\delta\rho = A e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ καταλλήγουμε στη ζητούμενη σχέση διασποράς

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \ . \tag{1.37}$$

Με βάση τη σχέση (1.37), είναι προφανές ότι, αν έχουμε μία διαταραχή με ένα σχετικά μεγάλο μήκος κύματος,

$$\lambda > \lambda_J \equiv \sqrt{\frac{\pi \upsilon_s}{G\rho_0}} \tag{1.38}$$

παρατηρούμε την εμφάνιση μιας ασταθούς συνιστώσας με $\omega^2 < 0$. Το παραπάνω αποτέλεσμα μας δείχνει ουσιαστικά, ότι αν σε ένα αντικείμενο το μέγεθός του ξεπεράσει το κρίσιμό μήκος κύματος Jeans λ_J, τότε γίνεται ασταθές κάτω από βαρυτικές διαταραχές.

Στη συνέχεια θα δούμε το μηχανισμό της αστάθειας Gregory - Laflamme, όπου και σε αυτή την περίπτωση μόλις το σύστημα ξεπεράσει κάποιο συγκεκριμένο όριο γίνεται ασταθές κάτω από βαρυτικές διαταραχές.

1.3.2 Αστάθεια Gregory - Laflamme

Μελετώντας της διαταραχές στη ΓΘΣ, ξεκινάμε από μία λύση των εξισώσεων Einstein $g_{\alpha\beta}$ και υποθέτουμε ότι ισχύει

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{1.39}$$

όπου θεωρούμε ότι το $h_{\alpha\beta}$, είναι αρκετά μικρό. Τώρα η κύρια συμμετρία της ΓΘΣ είναι η συμμετρία κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συνταταγμένων (General Coordinate Transformatiosn,(GCT)) [33]. Κάτω από τους εν λόγω μετασχηματισμούς ισχύει ότι για

$$X^\alpha \to X^\alpha + \xi^\alpha, \tag{1.40}$$

έχουμε ότι

$$\delta g_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha}. \tag{1.41}$$

Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να διαλέξουμε κατάλληλα το ξ^α, ώστε να καταλλήξουμε στην αρμονική βαθμίδα (harmonic gauge), για το $h_{\alpha\beta}$, για την οποία στο κενό θα ισχύει

$$h^\alpha_\alpha = \nabla_\alpha h^\alpha_\beta = 0. \tag{1.42}$$

Στη συνέχεια χρειζόμαστε τη μεταβολή του τανυστή Ricci η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\delta R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{\alpha\beta} - R_{\alpha\gamma\beta\delta}h^{\gamma\delta} + R^\gamma_{(\alpha}h_{\beta)\gamma} + \nabla_{(\alpha}\nabla^\gamma h_{\beta)\gamma} = -\frac{1}{2}\Delta_L h_{\alpha\beta}, \tag{1.43}$$

όπου ονομάζεται τελεστής Lichnerowicz (Lichnerowicz operator). Οι δείκτες ανεβαίνουν με τη βοήθεια του $g_{\alpha\beta}$. Περισσότερα για τις διαταραχές και τη μορφή του τελεστή Lichnerowicz, θα δούμε στο κεφάλαιο 5.

Για τις εξισώσεις κενού και θεωρώντας την αρμονική βαθμίδα η εξίσωση Lichnerowicz, παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\nabla^2 h^{\alpha\beta} + 2R^{\alpha\ \beta}_{\ \gamma\ \delta}h^{\gamma\delta} = 0. \tag{1.44}$$

Σε πρώτη φάση θα μελετήσουμε τις διαταραχές τις (1.27) στην περίπτωση που $d = 4$, δηλαδή θα εξετάσουμε την ευστάθεια της

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{II}^2 + dz^2. \tag{1.45}$$

Η διαραραχή $h_{\alpha\beta}$ μπορεί να αναλυθεί σε ενα πλήρως τετραδιάστατο κομμάτι, ένα το οποίο θα αντιστοιχεί στο συνδιασμό του εγκάρσιου και του τετραδιάστατου μέρους και τέλος ένα πλήρως εγκάρσιο μέρος. Σχηματικά θα έχουμε

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\mu\nu} & h_{\mu z} \\ h_{z\nu} & h_{zz} \end{pmatrix}, \tag{1.46}$$

όπου $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Το $h_{\mu\nu}$, θα αντιστοιχεί στις τανυστικές διαταραχές (tensor perturbation), το $h_{\mu z}$ στις διανυσματικές (vector perturbation) και τέλος το h_{zz} στις βαθμωτές διαταραχές (scalar perturbation). Είναι αρκετά εύκολο να δεί κανείς ότι χρησιμοποιώντας την (1.45) και τη μορφή της διαταραχής ότι το βαθμωτό μέρος διαχωρίζεται αμέσως από τις υπόλοιπες συνινστώσες της διαταραχής και ότι δεν αποσταθεροποιεί το σύστημα. Αντίστοιχα το ίδιο συμβαίνει και για το διανυσματικό μέρος της διαταραχής [34].

Μπορούμε λοιπόν να μηδενίσουμε τις συγκεκριμένες συνιστώσες και να επικεντρωθούμε στις τανυστικές διαταραχές. Λόγω της συμμετρίας στην επιπλέον διάσταση μπορούμε να αναλύσουμε τη διαταραχή με βάση την παρακάτω μορφή

$$h^{\alpha\beta} = e^{\Omega t} e^{i\mu z} \begin{bmatrix} h^{tt}(r) & h^{tr}(r) & 0 & 0 & 0 \\ h^{tr}(r) & h^{rr}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K(r)/\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.47}$$

Από την εξίσωση Lichnerowicz (1.44) καταλλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση

$$\left(\Delta_L^{(4)} + \mu^2\right) h_{\mu\nu} = 0, \tag{1.48}$$

όπου $\Delta_L^{(4)}$ είναι ο τετραδιάστατος τελεστής Lichnerowicz και το Ω είναι πραγματικός. Βλέπουμε δηλαδή ότι από μία πενταδιάστατη εξίσωση Lichnerowicz χωρίς μάζα, παίρνουμε μία τετραδιάστατη με έναν όρο μάζας. Οποιαδήποτε λύση της (1.48), για την οποία η διαταραχή εμφανίζει μία εκθετικά αύξουσα συμπεριφορά, δηλαδή όπου το Ω είναι θετικό, θα αποτελεί ένδειξη ότι το σύστημα δεν είναι ευσταθές. Αντίστοιχα κριτήρια ισχύουν και στη μελέτη των ψευδοκανονικών τρόπων ταλάντωσης (Quasi Normal Modes-QNM) [35]. Πράγματι μία τέτοια λύση μπορεί να βρεθεί αριθμητικά, με αποτέλεσμα η λύση να είναι ασταθής για διαταραχές των οποίων το μήκος κύματος είναι της τάξης του ορίζοντα γεγονότων

$$\lambda_{GL} \approx r_0, \tag{1.49}$$

όπου r_0 είναι ο ορίζοντας γεγονότων της τετραδιάστατης μελανής οπής. Ουσιαστικά κατά τη μελέτη της ευστάθειας μελανών χορδών σε πρότυπα συνδιάστασης - 1, καταλλήγοντας σε μία τετραδιάστατη εξίσωση Lichnerowicz με μάζα, μας εξασφαλίζει αυτόματα την αστάθεια του συστήματος.

Κατ΄ αυτό τον τρόπο μπορεί να αποδειχθεί και η αστάθεια Gregory - Laflamme, για τις μελανές χορδές στο RS2, παρόλο που η επιπρόσθετη διάσταση δεν θα είναι πλέον επίπεδη, λόγω του παράγοντα στρέβλωσης (warp factor). Αυτή τη φορά θα ξεκινήσουμε από τη μετρική (1.28) και θα θεωρήσουμε ότι η διαταραχή είναι συμμετρική ως προς τις γωνιακές συντεταγμένες (s-wave). Η μορφή της διαταραχής θα είναι

$$h^{\alpha\beta} = e^{\Omega t} \begin{bmatrix} h^{tt}(r,z) & h^{tr}(r,z) & 0 & 0 & 0 \\ h^{tr}(r,z) & h^{rr}(r,z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(r,z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K(r,z)/\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.50}$$

Όλες οι συνιστώσες του $h^{\alpha\beta}$ συνδέονται μεταξύ τους μέσω της βαθμίδας *transverse* και *traceless*. Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει μια εκθετική συνιστώσα ως προς z, εξαιτίας του εκθετικού παράγοντα στρέβλωσης στη μετρική (1.28). Και πάλι έχουμε μία διαταραχή τανυστικής μορφής από την τετραδιάστατη οπτική γωνία. Θα περιμένε κανείς ότι η παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς θα άλλαζε τα χαρακτηριστκά της διαταραχής. Ωστόσο δουλεύοντας τις εξισώσεις διαταραχών καταλλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$\left((\nabla^{(4)})^2 h_{\mu\nu} + 2R^{(4)}_{\mu\lambda\nu\rho}h^{\lambda\rho}\right) - \left[a^4\left(a^{-2}h_{\mu\nu}\right)'\right]' = 0\,. \tag{1.51}$$

Υποθέτοντας ότι $h_{\mu\nu} = \chi_{\mu\nu}(r)u_m(z)$, με τη συνάρτηση $u(z)$ να δίνεται από τη σχέση

$$u_z(z) = \mathcal{A}J_2\left(\frac{m}{k}e^{kz}\right) - \mathcal{B}N_2\left(\frac{m}{k}e^{kz}\right), \tag{1.52}$$

όπου τα $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη $\mathcal{A}J_2\left(\frac{m}{k}\right) = \mathcal{B}N_2\left(\frac{m}{k}\right)$, καταλλήγουμε σε μία εξίσωση η οποία ικανοποιείται από τη συνάρτηση $u(z)$

$$-h_{\mu\nu} + 2\left(\frac{\alpha''}{\alpha} + \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right)h_{\mu\nu} = \alpha^{-2}m^2 h_{\mu\nu} \tag{1.53}$$

και μία τετραδιάστατη εξίσωση Lichnerowicz με μάζα για το $\chi_{\mu\nu}$

$$\left(\Delta_L^{(4)} + m^2\right)\chi_{\mu\nu} = 0. \tag{1.54}$$

Το αποτέλεσμα της $u(z)$ είναι να επάγει έναν όρο μάζας για το $\chi_{\mu\nu}$, κατ΄ ανάλογο τρόπο με την περίπτωση της επίπεδης επιπλέον διάστασης. Με βάση την ανάλυση την οποία παρουσιάσαμε παραπάνω, βλέπουμε ότι και στην περίπτωση των μελανών χορδών στο πρότυπο των Randall και Sundrum με μία μεμβράνη θα έχουμε την εμφάνιση ασταθειών για διαταραχές, των οποίων το μήκος κύματος θα είναι της τάξης του ορίζοντα γεγονότων της μελανή οπής Schwarzschild.

Κεφάλαιο 2

Πρότυπα Συνδιάστασης Δύο

2.1 Κωνικές Ατέλειες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τη δυναμική των προτύπων μεμβρανών συνδιάστασης - 2, όπου τώρα θα έχουμε δύο επιπλέον χωρικές διαστάσεις κάθετες στη μεμβράνη. Θα δούμε ότι η παρουσία της μεμβράνης στο bulk έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας ελλείπουσας γωνίας (deficit angle) στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο [40], η οποία θα εξαρτάται ακριβώς από το ενεργειακό περιεχόμενο της μεμβράνης. Λόγω της φύσης του συστήματος, ο τανυστής ενέργειας ορμής της μεμβράνης μπορεί να είναι ανάλογος της μετρικής της μεμβράνης [41]. Ωστόσο αν κανείς θεωρήσει, ότι η μεμβράνη έχει κάποιο πάχος [59, 60, 61], ή συμπεριλάβει επιπλέον όρους καμπυλότητας στη δράση, είτε υπό τη μορφή του όρου Gauss-Bonnet [66], είτε υπο τη μορφή ενός όρου επαγόμενης βαρύτητας [99], μπορεί κανείς να πάρει πιο γενικές μορφές για τον τανυστή ενέργειας ορμής της μεμβράνης, ενώ παράλληλα έχουμε και την αναπαραγωγή των εξισώσεων Einstein πάνω στη μεμβράνη.

Η κατανόηση των κοσμολογικών λύσεων στα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2 εξακολουθεί να είναι σχετικά ανεπαρκής. Στο όριο που η μεμβράνη δεν έχει κάποια επέκταση στις επιπλέον χωρικές διαστάσεις, εξαιτίας της σχέσης μεταξύ του τανυστή ενέργειας ορμής της μεμβράνης και του bulk, δεν μπορούμε να πάρουμε μία ρεαλιστική κοσμολογία στη μεμβράνη [67, 68]. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να κανονικοποιήσουμε (regularize), τη μεμβράνη εισάγοντας κάποιο πάχος και να υποθέσουμε ότι έχουμε κάποιου είδους μάζα [69, 70, 71, 72]. Για να έχουμε μια κάποια κοσμολογική εξέλιξη στην κανονικοποιημένη μεμβράνη, ο όγκος της μεμβράνης θα πρέπει να επεκτείνεται και γενικά ο bulk χώρος θα πρέπει να είναι χρονοεξαρτώμενος. Πρόκειται για μια αρκετά δύσκολη διαδικασία και έτσι μια εναλλακτική προσπάθεια εξετάστηκε στις [73, 74] υποθέτοντας ότι μία μεμβράνη συνδιάστασης - 1 κινείται στο κανονικοποιημένο υπόβαθρο. Το αποτέλεσμα ωστόσο δεν μπορεί να θεωρηθεί ρεαλιστικό, αφού εμφανίζεται μία αρνητική σταθερά του Νεύτωνα (για μια σύντομη επισκόπηση της κοσμολογίας στις έξι διαστάσεις μπορεί κανείς να συμβουλευτεί την [75], ενώ για μια σχετικά πρόσφατη μελέτη μπορεί κανείς να συμβουλευτεί την [76]).

Επιπρόσθετα οι λύσεις μελανών οπών σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2 έχουν προσελκύσει έντονο ενδιαφέρον. Γενικεύοντας τον τετραδιάστατο μηχανισμό των Aryal, Ford και Vilenkin [77, 78], όπου μία κοσμική χορδή διαπερνά μία μελανή οπή, οι Kaloper και Kiley [79] κατασκεύασαν μία εξαδιάστατη μελανή οπή η οποία εμφανίζει κωνικές ατέλειες εξαιτίας της παρουσίας μιας τετραδιάστατης μεμβράνης. Ωστόσο δεν είναι απόλυτα ξεκάθαρο πώς μπορεί κανείς να πάρει τέτοιου είδους λύσεις στο όριο που η μεμβράνη είναι λεπτή, όπου οι επιπλέον όροι καμπυλότητας παίζουν σημαντικό ρόλο. Η γενίκευση της [79] με την εισαγωγή στροφορμής μελετήθηκε στην [80], ενώ η ανάλυση των διαταραχών διεξήχθει στην [81, 82].

Οι κωνικές ατέλειες εμφανίζονται και σε άλλες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα στην τρισδιάστατη βαρύτητα [36, 37, 38], αλλά και σε πρότυπα κοσμικών χορδών [39]. Ας εξετάσουμε για παράδειγμα την περίπτωση της τρισδιάστατης βαρύτητας, της οποίας η περιγραφή είναι σχετικά απλή. Στις τρείς διαστάσεις αν μετρήσουμε τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, θα δούμε ότι είναι μηδέν. Ξεκινάμε έχοντας έξι βαθμούς ελευθερίας από τους οποίους αφαιρούμε τρείς, λόγω της συμμετρίας κάτω από τους γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων και αφαιρούμε άλλους τρείς εξαιτίας των τριών μη-δυναμικών εξισώσεων που υπάρχουν στις τρεις διαστάσεις, με αποτέλεσμα να μην έχουμε κανένα βαθμό ελευθερίας.

Παρόλ' αυτά ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο από σημειακές μάζες οι οποίες έχουν τοποθετηθεί σε διάφορα σημεία του δυσδιάστατου χώρου [36]. Μακρυά από της μάζες ο χωρόχρονος είναι επίπεδος και μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τι γίνεται κοντά στην περιοχή των μαζών. Θα μελετήσουμε τις εξισώσεις Einstein

$$G_\alpha^\beta = 8\pi G T_\alpha^\beta, \tag{2.1}$$

όπου για τα α, β έχουμε ότι $\alpha, \beta = 0, 1, 2$ και το G έχει διαστάσεις αντίστροφης μάζας. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η μετρική έχει την εξής μορφή

$$-g_{00} = N^2(r), \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = \gamma_{ij}(r), \quad \sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}, \tag{2.2}$$

με $i, j = 1, 2$ και g και γ να είναι οι ορίζουσες των g_{ij} και γ_{ij}. Υπολογίζοντας τον τανυστή Einstein μπορούμε να δούμε ότι εξαρτάται από την εσωτερική χωρική γεωμετρία του δυσδιάστατου χώρου και τη συνάρτηση N,

$$-\sqrt{\gamma} G_0^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma} R, \quad G_i^0 = 0, \quad G_{ij} = -\frac{1}{2N}(D_i D_j - \gamma_{ij} D^2) N. \tag{2.3}$$

Στην παραπάνω σχέση D_i είναι η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς την χωρική μετρική γ_{ij} και το R αντιστοιχεί στην καμπυλότητα του δυσδιάστατου χώρου. Ο τανυστής ενέργειας ορμής ο οποίος θα αντιπροσωπεύει την παρουσία σημειακών μαζών m_n σε διάφορες θέσεις r_n, θα έχει την εξής μορφή

$$T^{00} = \sum_n m_n \delta^2(r - r_n), \qquad T^{0i} = T^{ij} = 0. \tag{2.4}$$

Το γεγονός ότι ισχύει $G_{ij} = 0$, συνεπάγεται ότι $D^2 N = 0$, $D_i D_j N = 0$, επομένως μπορούμε να επιλέξουμε $N = 1$. Επίσης θεωρούμε ότι $\gamma_{ij} = \phi\delta_{ij}$. Τότε το $\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}R$ είναι ανάλογο του $-\frac{1}{2}\nabla^2 \ln\phi$, του οποίου η συνάρτηση Green είναι η $\ln r$ όπου $\nabla^2 \ln r = 2\pi\delta^2(r)$ και επομένως η λύση της (00) συνιστώσας των εξισώσεων είναι

$$\ln\phi = -8\pi G \sum_n m_n \ln|r - r_n| + \ln C, \tag{2.5}$$

με τη μετρική να γίνεται

$$g_{00} = -1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = C\delta_{ij} \prod_n |r - r_n| - 8Gm_n. \tag{2.6}$$

Η σταθερά C μπορεί να απαληφθεί με έναν επαναορισμό της συντεταγμένης r. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε μία μάζα μόνο, η μορφή της δυσδιάστατης χωρικής μετρική έχει την μορφή

$$dl^2 = r^{-8Gm}\left[dr^2 + r^2 d\theta^2\right], \tag{2.7}$$

με το θ να κυμαίνεται από $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Εκτελώντας την παρακάτω αλλαγή μεταβλητών,

$$\rho = \alpha^{-1} r^{\alpha}, \quad \theta' = \alpha\theta, \quad \alpha \equiv 1 - 4Gm, \tag{2.8}$$

καταλλήγουμε στη γνωστή μορφή για μία επίπεδη δυσδιάστατη χωρική μετρική

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 (d\theta')^2, \tag{2.9}$$

μόνο που σε αυτή την περίπτωση το θ' κυμαίνεται από $0 \leqslant \theta' \leqslant 2\pi\alpha$. Το αποτέλεσμα είναι να έχουμε έναν κωνικό χώρο, ο οποίος είναι παντού επίπεδος, εκτός από ένα σημείο, τη μύτη του κώνου.

Στην περίπτωση των κοσμικών χορδών τώρα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ασθενές βαρυτικό πεδίο, με τη μετρική να μην απέχει πολύ απο την επίπεδη μορφή της,

$$g_{\mu\nu} = \eta + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| << 1. \tag{2.10}$$

Οι εξισώσεις Einstein στην αρμονική βαθμίδα (harmonic gauge) έχουν την ακόλουθη απλή μορφή

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu}, \tag{2.11}$$

όπου

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T^{\alpha}_{\alpha}, \tag{2.12}$$

με το $T^{\mu\nu}$ να είναι ο τανυστής ενέργειας ορμής και με τους δείκτες να ανεβαίνουν με τη μετρική $\eta_{\mu\nu}$. Η αρμονική βαθμίδα καθορίζεται από τη συνθήκη

$$\partial_\nu \left(h^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu h^\alpha_\alpha \right) = 0. \tag{2.13}$$

Ο τανυστής ενέργειας ορμής της κοσμικής χορδής έχει την εξής μορφή

$$T^\nu_\mu = \mu\delta(x)\delta(y) diag(1,0,0,1), \tag{2.14}$$

με αποτέλεσμα η λύση για τη μετρική σε κυλινδρικές συντεταγμένες να είναι

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + (1 - 8G\mu)d\theta^2, \tag{2.15}$$

με το θ να κυμαίνεται από $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Όπως και στην τρισδιάστατη περίπτωση εκτελώντας την παρακάτω αλλαγή μεταβλητών

$$\theta' = 1 - 4G\mu \tag{2.16}$$

βρίσκουμε την επίπεδη μετρική σε κυλινδρικές συντεταγμένες, μόνο που πλέον για τη θ' ισχύει ότι $0 \leqslant \theta' \leqslant 2\pi(1 - 4G\mu)$, με αποτέλεσμα ο εγκάρσιος δυσδιάστατος χώρος με σταθερό t και z, κοντά στην κοσμική χορδή να έχει την τοπολογία ενός κώνου με έλλειμμα γωνίας

$$\Delta = 8\pi G\mu. \tag{2.17}$$

Και στις δύο περιπτώσεις, τόσο για μια σημειακή μάζα, αλλά και στην περίπτωση της κοσμικής χορδής έχουμε να ασχοληθούμε με προβλήματα μεμβρανών συνδιάστασης - 2. Η σημειακή μεμβράνη ουσιαστικά είναι μια μηδέν-μεμβράνη (0-brane) , εμβαπτισμένη σε ένα τρισδιάστατο bulk, ενώ η κοσμική χορδή είναι μια, ένα-μεμβράνη (1-brane) εμβαπτισμένη σε ένα τετραδιάστατο bulk. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την συμπεριφορά μιας p-μεμβράνης εμβαπτισμένης σε ένα bulk χώρο με δύο επιπλέον χωρικές διαστάσεις και θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου το $p = 3$, δηλαδή σε ένα εξαδιάστατο πρότυπο συνδιάστασης - 2.

2.2 Πρότυπα Μεμβρανών με Κωνικές Ατέλειες

Τα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2, εμφανίζουν αρκετό ενδιαφέρον, λόγο του ότι η βαρύτητα φαίνεται να έχει μια πολύ ιδιαίτερη συμπεριφορά σε αυτά. Το κύριο χαρακτηριστικό αυτών των προτύπων είναι ότι η ενέργεια κενού της μεμβράνης, αντί να επηρεάζει την ίδια την μεμβράνη, φαίνεται ότι επιδρά στον τον bulk χώρο, επάγοντας ένα έλλειμμα γωνίας στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο [40]. Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε εκτενέστατα προς την επίληση του προβλήματος της κοσμολογικής σταθεράς [42], [43]-[56]. Επιπρόσθετα σύμφωνα με το πρότυπο των Antoniadis, Arkani-Hamed, Dimopoulos και Dvali [7, 8, 9], κατα το οποίο ζούμε σε μία 3-μεμβράνη εμβαπτισμένη σε ένα $(3 + 1 + n)$-διάστατο χωρόχρονο, η υψηλοδιάστατη κλίμακα Planck συνδέεται με την τετραδιάστατη, μέσω της σχέσης $M_{Pl}^2 = M^{2+n} V_n$, όπου V_n είναι ο όγκος του συμπαγοποιημένου χώρου. Η ιεραρχία μεταξύ της ηλεκτρασθενούς κλίμακας και της κλίμακας Planck μπορεί να δημιουργηθεί αν υποθέσουμε ότι έχουμε $n \geqslant 2$, έχοντας δηλαδή το λιγότερο δύο επιπλέον διαστάσεις, με το μήκος τους να είναι της τάξης του $10^{-2}mm$. Αξίζει να αναφέρουμε την ιδιότητα των προτύπων συνδιάστασης - 2 να αυτορυθμίζονται, (selftunning) [48, 49, 50]. Τέλος πρότυπα συνδιάστασης - 2, χωρίς κωνική τοπολογία, μπορούν να προκύψουν και από την τομή μεμβρανών συνδιάστασης

- 1 υπό την παρουσία όρων Gauss - Bonnet στο bulk, όπου η μεμβράνη συνδιάστασης - 2 θα βρίσκεται ακριβώς πάνω στην τομή [57], [58].

Έστω ότι έχουμε μία εξαδιάστατη μετρική η οποία είναι της μορφής

$$ds^2 = \omega^2(r)\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu + dr^2 + \rho^2(r)\, d\theta^2, \tag{2.18}$$

όπου x^μ ($\mu = 0,1,2,3$) παραμετροποιούν το χώρο της μεμβράνης, $\eta_{\mu\nu}$ είναι η τετραδιάστατη μετρική του Minkowski και r, θ παραμετροποιούν τον εγκάρσιο χώρο. Αυτή η μετρική είναι η πιό γενική μετρική η οποία διατηρεί την αναλλοιώτητα κατα Poincaré και έχει μία κυλινδρική συμμετρία δηλαδή θεωρούμε ότι η μεταβλητη θ είναι περιοδική με μία περίοδο 2π. Μία μεμβράνη τότε τοποθετημένη στο $r = 0$ επάγει μία κωνική ανωμαλία (singularity) με μια ελλείπουσα γωνία

$$\Delta\theta = 2\pi\left[\rho'(0) - 1\right] = \frac{T_4}{M_6^4}, \tag{2.19}$$

όπου T_4 είναι η τάση της μεμβράνης (tension) και M_6, είναι η εξαδιάστατη κλίμακα Planck[40].

Αναλυτικότερα ξεκινάμε με μία δράση της μορφής

$$S = \frac{1}{\kappa^2}\int d^6X\sqrt{-G}R - T\int d^4x\sqrt{-g}, \tag{2.20}$$

η οποία είναι δηλαδή το άθροισμα μίας κανονικής Einstein - Hilbert δράσης μαζί με ένα τετραδιάστατο κομμάτι. T είναι η τάση της μεμβράνης. Επιπλέον αντί της (2.18) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu + k(r)\left(dr^2 + \rho^2(r)\, d\theta^2\right), \tag{2.21}$$

η οποία διατηρεί τα χαρακτηριστκά της (2.18).

Οι εξισώσεις κίνησης της (2.20) είναι

$$\frac{\sqrt{-G}}{\kappa^2}\left(R^{MN} - \frac{1}{2}RG^{MN}\right) = -\frac{T}{2}\delta^{(2)}(y)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta^M_\mu\,\delta^N_\nu, \tag{2.22}$$

όπου $y = (r\cos\phi, r\sin\phi)$, $\delta^{(2)}$ είναι η δυσδιάστατη δέλτα συνάρτηση του Dirac (για περισσοτερες πληροφορίες σχετικα με τη δέλτα συνάρτηση μπορεί κανείς να κοιτάξει στο παράρτημα της [63]) και G^{MN} είναι τα στοιχεία της εξαδιάστατης μετρικής αλλά τώρα στις συντεταγμένες x και y. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι $M, N : 0,1,2,3,4,5$, υποδεικύοντας όλες της συντεταγμένες του εξαδιάστατου χώρου, $\mu, \nu : 0,1,2,3$ τα οποία αναφέρονται μόνο για τις συντεταγμένες πάνω στη μεμβράνη και $m, n : 4, 5$ τα οποία σχετίζονται μόνο με τις δύο έξτρα εγκάρσιες διαστάσεις. Χρησιμοποιώντας την (2.21), τα μ, ν στοιχεία των εξισώσεων Einstein δίνουν

$$\frac{1}{\kappa^2}\sqrt{g_2}\, R^{(2)} = T\delta^{(2)}(y), \tag{2.23}$$

όπου g_2 είναι η ορίζουσα της δυσδιάστατης μετρικής g_{mn} και $R^{(2)}$ είναι το δυσδιάστατο βαθμωτό Ricci, με βάση τη μετρική g_{mn}. Παρατηρούμε ότι το βαθμωτό Ricci έξω από τη μεμβράνη δεν έχει καμία εξάρτηση από την τάση της μεμβράνης και για την ακρίβεια μηδενίζεται. Μία παρόμοια συμπεριφορά είδαμε και στην τρισδιάστατη περίπτωση όπου η καμπυλότητα του εγκάρσιου δυσδιάστατου χώρου επηρεάζεται κατ΄ ανάλογο τρόπο, από τις σημειακές μάζες. Το γεγονός αυτό μας υποδεικνύει την πιθανή ανεξαρτησία της γεωμετρίας από τις τάσεις των μεμβρανών στα πρότυπα συνδιάστασης - 2. Τα m, n στοιχεία λόγω κενού του bulk ικανοποιούν αμέσως την $R_{mn} - \frac{1}{2}Rg_{mn} = 0$ και η δυσδιάστατη μετρική g_{mn} ικανοποιεί τη σχέση $R_{mn} = K(r)g_{mn}$ για κάποια συνάρτηση του r.

Επιπλέον για το βαθμωτό Ricci ισχύει ότι

$$R^{(2)} = -\frac{1}{k}\nabla_E^2 \ln k, \tag{2.24}$$

με ∇_E^2 να είναι η συναλλοίωτη Λαπλασιανή (Laplacian), υπολογισμένη με την Ευκλείδια μετρική $ds_E^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$. Αντικαθιστώντας την (2.24) στην (2.23) παίρνουμε μία διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης για την συνάρτηση k, η οποία ικανοποιείται μόνο αν $k \propto r^{2\alpha}$, όπου χρησιμοποιείται η σχέση $\nabla_E^2 \ln r = 2\pi\delta^{(2)}(y)$ με το α να δίνεται υπό τη μορφή

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}\kappa^2 T. \tag{2.25}$$

Η παράμετρος α έχει ένα γεωμετρικό ενδιαφέρον το οποίο μπορεί να κατανοηθεί με την εισαγωγή της συντατεγμένης $\rho \equiv r^{\alpha+1}/(\alpha+1)$. Τότε η δυσδιάστατη μετρική παίρνει τη νέα μορφή $d\rho^2 + (\alpha+1)^2\rho^2 d\phi^2$. Επομένως για μία μη μηδενική τιμή της α έχουμε την μετατώπιση $\phi \to (\alpha+1)\phi$ της ϕ συντεταγμένης, η οποία δημιουργεί μία ελλείπουσα γωνία Δ η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\frac{2\Delta}{\kappa^2} = T. \tag{2.26}$$

Βλέπουμε δηλαδή, ότι επαγόμενη γεωμετρία του εγκάρσιου στη μεμβράνη δυσδιάστατου χώρου, εμφανίζει μία κωνική ατέλεια (conical defect) ή αλλιώς μια κωνική μοναδικότητα (conical singularity) στο $r = 0$ [65]. Ανάλογη κατάσταση μπορεί κανείς να βρεί επίσης και σε πρότυπα χορδών στις έξι διαστάσεις [64].

Η εισαγωγή επομένως, μίας τετραδιάστατης μεμβράνης, η οποία χαρακτηρίζεται από έναν τανυστή ενέργειας ορμής που είναι ανάλογος με την μετρική (τάση,tension), αλλάζει την τοπολογία του εξαδιάστατου χώρου και συγκεκριμμένα επιδρά στις δύο επιπλέον, εγκάρσιες στη μεμβράνη, διαστάσεις. Στην [41] έγινε αντιληπτό, ότι δεν είναι εμφανές το κατα πόσο μπορούμε να έχουμε λύση στις εξαδιάστατες εξισώσεις του Einstein, εάν πάνω στην μεμβράνη έχουμε οποιουδήποτε είδους ύλη ή ακτινοβολία. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία μετρική της μορφής

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + M^2 dx_i\, dx^i + B^2 d\rho^2 + L^2 d\theta^2, \tag{2.27}$$

όπου όλες οι συναρτήσεις της μετρικής εξαρτώνται από το r και το ρ και θεωρούμε τους όρους των εξισώσεων Einstein που περιέχουν απροσδιοριστεία (singularity), λόγω των δυσδιάστατων δέλτα συναρτήσεων:

$$00 \ : \ 3\left(\frac{M''}{M}+\frac{M'L'}{ML}\right)+\frac{L''}{L} \sim \epsilon B^2\delta^{(2)}(\rho) \tag{2.28}$$

$$ii \ : \ 2\left(\frac{M''}{M}+\frac{M'L'}{ML}\right)+\left(\frac{N''}{N}+\frac{N'L'}{NL}\right)+\frac{L''}{L} \sim pB^2\delta^{(2)}(\rho) \tag{2.29}$$

$$\theta\theta \ : \ 3\left(\frac{M''}{M}+\frac{M'L'}{ML}\right)+\left(\frac{N''}{N}+\frac{N'L'}{NL}\right) \sim 0. \tag{2.30}$$

Σε όλες τις λύσεις που βρέθηκαν στην [41] η πυκνότητα ενέργειας της μεμβράνης δίνεται από $\epsilon = -p = \tau^3$, και $M' = N' = 0$ στο $\rho = 0$, έτσι ώστε να μην υπάρχει κάποια απροσδιοριστεία στα μέρη των εξισώσεων που περιέχουν M'' ή N''. Για να έχουμε $\epsilon \neq -p$, είναι αναγκαίο να έχουμε ανώμαλη συμπεριφορά όχι μόνο στο L''/L, αλλά επίσης και σε άλους όρους. Ωστόσο το L''/L δίνει μία δυσδιάστατη δέλτα συνάρτηση $\delta^{(2)}(\rho) \sim \delta(\rho)/\rho$ συνεπεία του γεγονότος ότι το L θα μηδενίζεται καθώς το $\rho \to 0$. Αυτή τη συμπεριφορά μπορούμε να την έχουμε από το M''/M αν και το M μηδενίζεται επίσης, το οποίο δεν έχει φυσικό νόημα αφού τότε θα μηδενιζόταν η τετραδιάστατη μετρική, γεγονός αδύνατο για το καθιερωμένο πρότυπο.

Συνοψίζοντας τα κύρια μέρη αυτή της παραγράφου, θα λέγαμε ότι η εισαγωγή μίας τετραδιάστατης μεμβράνης σε έναν εξαδιάστατο χώρο έχει σαν αποτέλεσμα, την επαγωγή μίας ελλείπουσας γωνίας στον εγκάρσιο στη μεμβράνη χώρο, ενώ παράλληλα η ίδια η μεμβράνη μπορεί να έχει έναν τανυστή ενέργειας ορμής ο οποίος θα είναι ανάλογος της τετραδιάστατης μετρικής, δίοτι σε αντίθετη περίπτωση η μεμβράνη θα προκαλλεί σοβαρές απροσδιοριστείες (singularities) στη μετρική γύρω από τη θέση τς μεμβράνης. Στη συνέχεια θα δούμε διάφορους τρόπους που μπορούμε ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα και να έχουμε έναν τανυστή ενέργειας ορμής διαφορετικό από καθαρή τάση, ο οποίος ωστόσο θα πρέπει να ικανοποιεί και πάλι κάποιες συνθήκες.

2.3 Μεμβράνες με Πάχος

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ότι αν και η ενέργεια κενού της μεμβράνης επηρεάζει τον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο, στα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2, δεν μπορούμε να έχουμε μία γενική μορφή για τον τανυστή ενέργειας ορμής της μεμβράνης, η οποία να υποστηρίζεται από το σύστημά μας. Μία λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι να δώσουμε ένα πάχος στη μεμβράνη, επεκτείνοντάς την στις επιπλέον διαστάσεις.

Οι Navvaro και Santiago [61], κάνοντας αυτή τη θεώρηση, υπολόγισαν τις συνθήκες συμβολής (matching conditions), για μία γενική θεωρία βαρύτητας σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2, υπό την προϋπόθεση ότι δεν μας ενδιαφέρει η πλήρης περιγραφή της εσωτερικής δομής της μεμβράνης. Σε αυτή την περίπτωση, οι παράγωγοι της μετρικής ως προς τις συντεταγμένες της μεμβράνης και συνεπακόλουθα ο τανυστής του Ricci, με βάση την επαγόμενη μετρική αποτελούν αμελητέες ποσότητες. Οι συνθήκες συμβολής όπως έχουμε αναφέρει ήδη, είναι εξισώσεις οι οποίες συνδέουν, τις πρώτες παραγώγους της μετρικής ώς προς την ακτινική διεύθυνση πάνω στον κώνο στο σύνορο της μεμβράνης, με τον τανυστή ενέργειας ορμής της μεμβράνης.

Θεωρούμε μία μετρική

$$ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dr^2 - L(x,r)^2 d\theta^2, \tag{2.31}$$

με το x^μ να υποδηλώνει τις τέσσερεις διαστάσεις της μεμβράνης, $\mu = 0,...,3$, ενώ το r,θ υποδηλώνουν την ακτινική και γωνιακή συντεταγμένη των δύο επιπλέον χωρικών διαστάσεων. Για να αποφευχθούν οποιουδήποτε είδους ανωμαλίες θεωρούμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες στο $r = 0$:

$$L(x,0), = \;0, \quad L'(x,0), = \;1, \quad \partial_r g_{\mu\nu}(x,0) \;=\; 0, \tag{2.32}$$

με τον τόνο να υποδηλώνει την παραγώγηση ως προς r. Ο χώρος μας έχει κυλινδρική συμμετρία γύρω από από το σημείο $r = 0$ στο οποίο βρίσκεται η μεμβράνη. Οι εξισώσεις Einstein, μπορούν να γραφούν υπό την μορφή

$$M^4{*}R^M_N \;=\; T^M_N - \frac{1}{4}\delta^M_N T, \tag{2.33}$$

όπου $M^4{*}$ είναι η εξαδιάστατη κλίμακα μάζας, T^M_N ο τανυστή ενέργειας ορμής και $T \equiv T^M_M$ το ίχνος του. Η μεμβράνη θα είναι ένα κυλινδρικά συμμετρικό αντικείμενο, το οποίο θα γεμίζει το χώρο μέχρι τιν περιοχή $r < \epsilon$. Χρειαζόμαστε τις πρώτες παραγώγους της μετρικής στη θέση $r = \epsilon$ για να βρούμε τις συνθήκες συμβολής. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις κίνησης. Εφόσσον δεν μας ενδιαφέρει η εσωτερική δομή της μεμβράνης οι κυρίαρχοι όροι θα είναι αυτοί οι οποίοι περιέχουν παραγώγους ως προς r και άρα κατα την ολοκλήρωση θα κρατήσουμε μόνο αυτούς τους όρους.

Οι $(\mu\,\nu)$ όροι του τανυστή Ricci, δίνονται από τη σχέση

$$\sqrt{g}LR^\mu_\nu = \frac{1}{2}\,[\sqrt{g}LK^\mu_\nu]' + \sqrt{g}LR^\mu_\nu(g) - \sqrt{g}\nabla^\mu\nabla_\nu L, \tag{2.34}$$

όπου $K_{\mu\nu} \;=\; \partial_r g_{\mu\nu}$ (και $K \equiv K^\mu_\mu$), ∇_μ είναι η τετραδιάστατη συναλλοίωτη παράγωγος ως προς την μετρική $g_{\mu\nu}$ και $R^\mu_\nu(g)$ είναι ο τανυστής Ricci, για την τετραδιάστατη μετρική $g_{\mu\nu}$. Η $(\theta\theta)$ συνιστώσα θα έχει την εξής μορφή

$$\sqrt{g}LR^\theta_\theta \;=\; \left[(\sqrt{g}L'\right]' - \sqrt{g}\nabla^\rho\nabla_\rho L. \tag{2.35}$$

Οι δύο προηγούμενες εξισώσεις μπορούν να γραφούν σαν μια ολική παράγωγος ως προς r συν κάποιους όρους που σχετίζονται με παραγώγους ως προς τις διαμήκεις συντεταγμένες της μεμβράνης. Αυτές θα καθορίσουν και τις συνθήκες συμβολής. Τα (rr) και (μr) στοιχεία θα είναι αντίστοιχα,

$$R^r_r = \frac{L''}{L} + \frac{1}{2}K' + \frac{1}{4}K^\nu_\mu K^\mu_\nu \tag{2.36}$$

και

$$R_{\mu r} = -\frac{\partial_\mu L'}{L} + \frac{K^\nu_\mu \partial_\nu L}{2L} + \frac{1}{2}\nabla^\nu (K_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} K). \tag{2.37}$$

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε τα $(\mu\,\nu)$ και $(\theta\theta)$ στοιχεία του τανυστή Ricci από $0 \leq r \leq \epsilon$ και να βρούμε τις ζητούμενες συνοριακές συνθήκες συμβολής. Αγνοώντας τους όρους που δέν έχουν παραγωγήσεις ως προς r έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{\sqrt{g}\,|_\epsilon} \int_0^\epsilon dr\, \sqrt{g} L R^\mu_\nu \simeq \pi \, \frac{K^\mu_\nu|_\epsilon}{M_b} \simeq \\ &\frac{1}{M_*^4 \sqrt{g}\,|_\epsilon} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\epsilon dr\, \sqrt{g} L \left[T^\mu_\nu - \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu T \right] \equiv \frac{\hat{T}^\mu_\nu - \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu \hat{T}}{M_*^4}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

όπου $L(x,\epsilon) \equiv 1/M_b$, ενώ το σύμβολο $|_p$ συμβολίζει τον υπολογισμό μίας ποσότητας στη $r = p$. Επίσης $\hat{T}^M_N$ είναι ο τετραδιάστατος τανυστής ενέργειας ορμής, ορισμένος μέσω της ολοκλήρωσης του εξαδιάστατου τανυστή στην περιοχή $r < \epsilon$:

$$\hat{T}^M_N \equiv \frac{1}{\sqrt{g}\,|_\epsilon} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\epsilon dr\, \sqrt{g} L T^M_N, \tag{2.39}$$

και $\hat{T} \equiv \hat{T}^M_M$ ίχνος του.

Κάνοντας την ίδια διαδικασία για το $(\theta\theta)$ στοιχείο έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{\sqrt{g}\,|_\epsilon} \int_0^\epsilon dr\, \sqrt{g} L R^\theta_\theta \simeq 2\pi \left(\beta - \frac{\sqrt{g}\,|_0}{\sqrt{g}\,|_\epsilon} \right) \simeq \\ &\frac{1}{M_*^4 \sqrt{g}\,|_\epsilon} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\epsilon dr\, \sqrt{g} L \left[T^\theta_\theta - \frac{1}{4} T \right] \equiv \frac{\hat{T}^\theta_\theta - \frac{1}{4}\hat{T}}{M_*^4}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

όπου έχουμε ορίσει $\beta(x) \equiv L'(x,\epsilon)$. Είναι φανερό ότι η $(\theta\theta)$ εξίσωση ορίζει την ελλείπουσα γωνία στον εγκάρσιο χώρο, ενώ οι $\mu\nu$ εξισώσεις έχουν την καθαρή ερμηνεία της απαίτησης μιας μη μηδενικής εξωτερικής καμπυλότητας στο $r = \epsilon$ αν δεν έχουμε $\hat{T}^\mu_\nu - \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu \hat{T}$.

Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι οι συνθήκες συμβολής κοντά στη μεμβράνη μοιάζουν με τις συνοριακές συνθήκες Israel [62], για την περίπτωση που έχουμε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 1. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι πλέον η μεμβράνη μας έχει μια έκταση στον εγκάρσιο χώρο και δεν ειναι πλήρως μια μεμβράνη συνδιάστασης - 2. Επιπρόσθετα έχουμε και μια επιπλέον συνοριακή εξίσωση, στην οποία και πάλι παρατηρούμε την εμφάνιση μιας ελλείπουσας γωνίας, (2.40). Στην περίπτωση μίας μεμβράνης συνδιάστασης - 2, η οποία έχει μόνο τάση σαν τανυστή ενέργειας ορμής και $\hat{T}^r_r = \hat{T}^\theta_\theta = 0$, αυτή η συνεισφορά απορροφά τελείως την επιρροή της μεμβράνης δίνοντάς μας τη δυνατότητα να έχουμε μη-μηδενική εξωγενή καμπυλότητα. Το γεγονός αυτό δεν ισχύει στα πρότυπα συνδιάστασης - 1. Αυτή η διαφορά είναι που κάνει τα πρότυπα συνδιάστασης - δύο ελκυστικά στην προσπάθεια λύσης του προβλήματος της κοσμολογικής σταθεράς. Επιπλέον στα πρότυπα συνδιάστασης - 2 δεν μπορούμε να πάρουμε το όριο στο μηδέν, διότι $\sqrt{G} = L\sqrt{g}$ θα μηδενιστεί στο

$r = 0$, με αποτέλεσμα το αριστερό κομμάτι της εξίσωσης (2.38) πηγαίνει στο μηδέν για $\epsilon \to 0$ αν επιμείνουμε να κρατήσουμε το K_μ^ν πεπερασμένο. Σε αυτή την περίπτωση είναι φυσικό να περιμένει κανείς ότι, κρατώντας το ϵ μικρό αλλά πεπερασμένο, σε ένα πρότυπο συνδιάστασης - 2 η εξωτερική καμπυλότητα θα έχει την κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα (2.38). Γι΄ αυτό και μπορούμε με ασφάλεια να αγνοήσουμε όρους παραγώγησης ως προς τις μεταβλητές της μεμβράνης στις περισσότερες περιπτώσεις, κυρίως αν το ενδιαφέρον μας εστιάζεται σε ύστερους κοσμολογικούς χρόνους, στους οποίους η τετραδιάστατη καμπυλότητα είναι πάρα πολύ μικρή.

Χρησιμοποιώντας τώρα κανείς τις συνθήκες συμβολής μπορεί να καθορίσει το (μr) στοιχείο του τανυστή ενέργειας ορμής, το οποίο θα αποτυπώνει την ροή ενέργειας από την μεμβράνη στο bulk. Παράλληλα επιλέγοντας κανείς μία μη-στατική μετρική μπορεί να δεί ποιά θα είναι η κοσμολογική εξέλιξη ενός τέτοιου προτύπου, θέμα με το οποίο δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα φάση. Τέλος μπορούμε νά έχουμε και πάλι σχέσεις για τις κλίμακες μάζας όπως για παράδειγμα και στα πρότυπα των Randall και Sundrum, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$M_{Pl}^2 \,=\, -8\pi^2 \frac{M_*^8}{M_b^2}\,(p_r + p_\theta) \,\simeq\, 4\pi \frac{M_*^8}{\Lambda_r}\left(1 - \frac{T_0}{2\pi M_*^4}\right), \tag{2.41}$$

όπου Λ_r είναι μία bulk κοσμολογική σταθερά, και p_r, p_θ είναι οι πιέσεις κατα τις κατευθύνσεις r και θ και σχετίζονται με τον τανυστή ενέργειας ορμής του bulk.

2.4 Επιπλέον Όροι Καμπυλότητας

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να αναπαράγουμε τις εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη, εάν συμπεριλάβουμε στη δράση επιπλέον όρους καμπυλότητας. Οι επιπλέον αυτοί όροι, μπορεί να εμφανίζονται είτε υπό τη μορφή του Gauss - Bonnet συνδιασμού [66], είτε υπό τη μορφή ενός επαγόμενου όρου βαρύτητας της μεμβράνης [99]. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

2.4.1 Ο Όρος Gauss - Bonnet

Δύο απο τα βασικότερα χαρακτηριστικά της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας σε τέσσερεις διαστάσεις, είναι ότι εξισώσεις κίνησης εμπεριέχουν μέχρι δεύτερης τάξης παραγώγους (κατ΄ αντιστοιχία με την εξίσωση Poisson στη Νευτώνια θεωρία), ενώ παράλληλα διατηρείται η ενέργεια. Ωστόσο σε υψηλότερες διαστάσεις η ΓΘΣ δεν είναι η μόνη θεωρία η οποία μπορεί και ικανοποιεί αυτές τις απαιτήσεις. Η γενικότερη θεωρία η οποία, έχει σαν όριο στις τέσσερεις διαστάσεις τη ΓΘΣ και μπορεί να δώσει δευτεροτάξιες εξισώσεις κίνησης, ενώ παράλληλα να μην παραβιάζει κάποια ενεργειακή συνθήκη, είναι η θεωρία Lovelock [86]. Η Λανγκραντζιανή της θεωρίας Lovelock αποτελείται από το άθροισμα των δυνάμεων k της 2-μορφής ($2-$form) της καμπυλότητας με τις κατάλληλες μορφές των συζυγών Hodge (Hodge duals) [87, 88].

Η δύναμη k της 2-μορφής της καμπυλότητας σχετίζεται με την διάσταση του χωροχρόνου μέσω της σχέσης $k = [(D-1)/2]$, όπου οι αγκύλες υπονοούν το ακέραιο μέρος. Για τις πέντε και έξι διαστάσεις, αυτοί οι επιπλέον όροι καταλλήγουν στον Gauss - Bonnet (GB) συνδιασμό, ο οποίος περιλαμβάνει τετραγωνικά αναλλοίωτους όρους καμπυλώτητας.

Πρότυπα με όρους Gauss - Bonnet έχουν εξετασθεί διεξοδικά σε πολλές περιπτώσεις. Για παράδειγμα εχουν βρεθεί στατικές λύσεις οι οποίες γενικεύουν την τετραδιάστατη Schwarzchild μελανή οπή [89], [90], [91],[92] . Επιπρόσθετα σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 1 ο όρος Gauss - Bonnet στο bulk επηρεάζει σημαντικά την κοσμολογική εξέλιξη στη μεμβράνη [93, 94], ενώ παράλληλα δεν επιτρέπει την εύρεση λύσεων μελανών χορδών [29].

Ας εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο, ένας όρος Gauss - Bonnet στο bulk επηρεάζει τη δυναμική των προτύπων μεμβρανών συνδιάστασης - 2. Θεωρώντας ότι η μεμβράνη έχει μία μετρική $\hat{g}_{\mu\nu}(x^\mu)$, η οποία είναι συνεχής στην περιοχή της μεβράνης, με x^μ να είναι οι συντεταγμένες της μεμβράνης, r η ακτινική απόσταση πάνω στον κώνο και θ η γωνία που θα προσδιορίζει τη γωνιακή θέση πάνω στον κώνο, θα έχουμε ότι η εξαδιάστατη μετρική θα δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x,r)dx^\mu dx^\nu - dr^2 - L^2(x,r)d\theta^2 \tag{2.42}$$

όπου $g_{\mu\nu}(x,0) = \hat{g}_{\mu\nu}(x)$.

Για να βρεθούν οι εξισώσεις στη μεμβράνη αναπτύσουμε τη συνάρτηση $L(x,r)$ γύρω από τη θέση της μεμβράνης

$$L(x,r) = \beta(x)r + O(r^2). \tag{2.43}$$

Για $\beta \neq 1$ θα υπάρχει μία κωνική ανωμαλία στο $r = 0$, η οποία δικαιολογείται λόγω της δέλτα συνάρτησης από την παρουσία της μεμβράνης. Ορίζεται ότι $L'(x,0) = 1$, $g'_{\mu\nu}(x,0) = 0$, έτσι ώστε ο τανυστής καμπυλότητας να έχει την απαιτούμενη καλά ορισμένη συμπεριφορά κοντά στην περιοχή της μεμβράνης, με τον τόνο να υποδεικνύει την παραγώγηση ως προς r.

Το πρόβλημα εντοπίζεται στη εύρεση της βαρυτικής δυναμικής, κατά την οποία ο τανυστής ενέργειας ορμής θα δίνεται από τη σχέση

$$T_{MN} = \begin{pmatrix} \hat{T}_{\mu\nu}\frac{\delta(r)}{2\pi L} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.44}$$

(τα κεφαλαία γράμματα τρέχουν σε όλες τις διαστάσεις). Αυτό που μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα, είναι η σχέση της μετρικής $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ με τον τανυστή ενέργειας ορμής της μεμβράνης.

Ξεκινάμε με την εξίσωση Einstein - Gauss - Bonnet

$$M_*^4\left(G_{MN} + H_{MN}\right) = T_{MN} + S_{MN}, \tag{2.45}$$

όπου M_* είναι η εξαδιάστατη κλίμακα μάζας και

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R, \tag{2.46}$$

ενώ ο όρος Gauss - Bonnet δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} H_{MN} &= \alpha\,[\frac{1}{2}g_{MN}(R^2 - 4R^{PQ}R_{PQ} + R^{PQST}R_{PQST}) - 2RR_{MN} \\ &\quad +4R_{MP}R_N^P + 4R^K_{MPN}R^P_K - 2R_{MQSP}R_N^{QSP}], \end{aligned} \tag{2.47}$$

με το α να είναι μία παράμετρος με διαστάσεις $(m)^{-2}$. S_{MN} είναι ο τανυστής ενέργειας ορμής του bulk για τον οποίο θα θεωρήσουμε ότι δεν έχει καμία συνεισφορά απο συναρτήσεις δέλτα του Dirac.

Για να είναι σωστή η εξίσωση (2.45), θα πρέπει να εξισωθούν οι δέλτα συνεισφορές και από τα δύο μέλη. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει κάποιο κομμάτι στο αριστερό μέρος της (2.45), το οποίο θα περιέχει δέλτα όρους. Τέτοια συνεισφορά μπορεί να προκύψει από όρους οι οποίοι περιέχουν τις παρακάτω εκφράσεις

$$\frac{L''}{L} = -(1-\beta)\frac{\delta(r)}{L} + \text{non-singular terms} \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial_r^2 g_{\mu\nu}}{L} = \partial_r g_{\mu\nu}\frac{\delta(r)}{L} + \text{non-singular terms} \tag{2.49}$$

Πρέπει να δούμε ποία είναι η δέλτα συνεισφορά τους αριστερού κομματιού της (2.45) και να το εξισώσουμε με τον τανυστή ενέργειας ορμής της μεμβράνης. Υπολογίζοντας τα μ, ν στοιχεία βρίσκουμε ότι το μέρος το οποίο μπορεί να εμφανίζει κάποια ανωμαλία δίνεται από τη σχέση

$$-\frac{L''}{L}\left[g_{\mu\nu} + 4\alpha\left(R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(g)\right)\right] + \frac{\alpha}{L}\,\partial_r\left(L'W_{\mu\nu}\right), \tag{2.50}$$

με το $W_{\mu\nu}$ να ορίζεται βάση των παραγώγων της τετραδιάστατης μετρικής

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= g^{\lambda\sigma}\partial_r g_{\mu\lambda}\partial_r g_{\nu\sigma} - g^{\lambda\sigma}\partial_r g_{\lambda\sigma}\partial_r g_{\mu\nu} \\ &\quad +\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[(g^{\lambda\sigma}\partial_r g_{\lambda\sigma})^2 - g^{\lambda\sigma}g^{\delta\rho}\partial_r g_{\lambda\delta}\partial_r g_{\sigma\rho}]. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες

$$\frac{L''}{L} = -(1-\beta)\frac{\delta(r)}{L} + \ldots \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial_r(L'\,W_{\mu\nu})}{L} = \beta\,W_{\mu\nu}|_{r=0^+}\,\frac{\delta(r)}{L} + \ldots, \tag{2.53}$$

μπορούμε να βρούμε τις συνοριακές συνθήκες, εξισώνοντας τους όρους της (2.45) που περιέχουν $\frac{\delta(r)}{L}$ και να πάρουμε την παρακάτω σχέση

$$2\pi\ (1-\beta)\ M_*^4\left[\hat{g}_{\mu\nu} + 4\alpha\,\hat{G}_{\mu\nu} + \alpha\,\frac{\beta}{1-\beta}\,\hat{W}_{\mu\nu}\right] = \hat{T}_{\mu\nu}, \tag{2.54}$$

όπου το $\hat{G}_{\mu\nu}$ είναι ο τετραδιάστατος τανυστής του Einstein για την επαγόμενη μετρική $\hat{g}_{\mu\nu}$ και $\hat{W}_{\mu\nu} \equiv W_{\mu\nu}|_{r=0^+}$. Όπως μπορούμε να δούμε οι βαρυτικές εξισώσεις πάνω στη μεμβράνη είναι οι εξισώσεις Einstein μαζί με έναν επιπλέον όρο Weyl $\hat{W}_{\mu\nu}$, ο οποίος εξαρτάται από την bulk λύση. Ας δούμε όμως ποιές είναι οι επιπτώσεις αυτού του όρου.

Πέρνοντας το όριο $\alpha \to 0$ καταλλήγουμε στην περίπτωση των εξαδιάστατων εξισώσεων Einstein. Τότε η εξίσωση (2.54) γίνεται

$$2\pi\ (1-\beta)\ M_*^4\ =\ \hat{T}_{\mu\nu}, \tag{2.55}$$

όπου το β αν δεν είναι σταθερό δεν μπορεί να καθοριστεί από τις εξισώσεις της μεμβράνης και μόνο. Ωστόσο κοιτώντας τους $O(\frac{1}{r})$ όρους των (μ,ν), (r,r) και (μ,r) συνιστωσών των εξισώσεων Einstein έχουμε

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\,\frac{[L'']}{L} - \frac{L'}{2L}[\partial_r g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\partial_r g_{\rho\sigma}] &= 0 \\ \frac{L'}{2L}\,g^{\rho\sigma}\partial_r g_{\rho\sigma} = 0 \quad , \quad \frac{\partial_\mu L'}{L} &= 0, \end{aligned} \tag{2.56}$$

όπου το $[L'']$ είναι το ομαλό κομμάτι της δεύτερης παραγώγου του L καθως πλησιάζουμε στη θέση της μεμβράνης. Από τις παραπάνω εξισώσεις βλέπουμε ότι το β πρέπει να είναι σταθερό, $\partial_r^2 L|_{r=0^+} = 0$ και $\partial_r g_{\mu\nu} = 0$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, επαναπροσδιορίζεται το αποτέλεσμε των Cline et al. [41]. Το γεγονός ότι $\partial_r g_{\mu\nu} = 0$, έχει μεγάλη σημασία διότι με αυτό το τρόπο είναι δυνατή η εξομάλυνση των ανωμαλιών που εμφανίζει ο τανυστής καμπυλώτητας Ricci και το βαθμωτό καμπυλότητας στο $r = 0$,

$$R_{\mu\nu}\ =\ \frac{1}{2}\frac{L'}{L}\partial_r g_{\mu\nu} + \ldots = \frac{\partial_r g_{\mu\nu}}{2r} + O(1). \tag{2.57}$$

Ωστόσο κανείς μπορεί να συνεχίσει και να προσθέσει επιπλέον όρους καμπυλότητας, κάνοντας το πρόβλημα ακόμα πιό δύσκολο, γεγονός που μας οδηγεί στο ότι πρέπει να επιβάλουμε τη συνθήκη $\partial_r g_{\mu\nu} = 0$, απ' όπου βλέπουμε ότι από την (2.56) ότι η ελλείπουσα γωνία β πρέπει να είναι σταθερή και έτσι η εξίσωση (2.54) γίνεται

$$\hat{G}_{\mu\nu}\ =\ \frac{1}{8\pi(1-\beta)\alpha\,M_*^4}\,\hat{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{4\alpha}\hat{g}_{\mu\nu}, \tag{2.58}$$

καταλλήγοντας δηλαδή στις συνήθεις τετραδιάστατες εξισώσεις Einstein.

Η σχέση της τετραδιάστατης μάζας Planck και της θεμελιώδους κλίμακας μάζας θα είναι

$$M_{Pl}^2\ =\ 8\pi(1-\beta)\alpha\,M_*^4, \tag{2.59}$$

καθώς επίσης θα έχουμε και την παρουσία μιας ενεργούς τετραδιάστατης κοσμολογικής σταθεράς

$$\Lambda_4 = T_0 - 2\pi(1-\beta)\,M_*^4, \tag{2.60}$$

όπου T_0 είναι η τάση της μεμβράνης:

$$\hat{T}_0\ =\ T_0 g_{\mu\nu} + \delta\,T_{\mu\nu}. \tag{2.61}$$

Όπως μπορούμε να δούμε η σχέση μεταξύ της τάσης της μεμβράνης και της ελλείπουσας γωνίας, $T_0 = 2\pi\,(1-\beta)\,M_*^4$, δεν ισχύει στη βαρύτητα με όρους Gauss - Bonnet, όπου μπορούμε να προσδιορίσουμε τα δύο μεγέθη ανεξάρτητα, με την επαγωγή όμως μίας τετραδιάστατης κοσμολογικής σταθεράς.

Επομένως, βλέπουμε ότι προσθέτοντας έναν όρο Gauss-Bonnet στο bulk, μπορούμε να έχουμε μία ρεαλιστική άποψη της βαρύτητας σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2, όπου η μεμβράνη δεν έχει πάχος, δίνοντας μας για την ακρίβεια τις τετραδιάστατες εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη, ανεξάρτητα από το ποιά είναι η δομή του bulk, με τη μόνη επίδραση από το bulk εμφανίζεται μέσω της ελλείπουσας γωνίας.

2.4.2 Επαγόμενος Όρος Βαρύτητας

Ξέχωρα από την περίπτωση του όρου Gauss - Bonnet, ένας επαγόμενος όρος βαρύτητας της μεμβράνης μπορεί εξίσου να χρησιμοποιηθεί ώστε να αναπαράγουμε τις εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη. Σε αυτή την περίπτωση όμως, όπως θα δούμε παρακάτω, ο τανυστής ενέργειας της μεμβράνης θα πρέπει να ικανοποιεί μια συγκεκριμένη σχέση, ώστε να είναι συνεπές το όλο σύστημα. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε κανονικά ένα εξαδιάστατο πρότυπο, του οποίου η δυναμική θα περιγράφεται μέσω της Λαγκρατζιανής πυκνότητας $\mathfrak{L}_{bulk}$ μαζί με μία μεμβράνη η οποία θα βρίσκεται στη θέση $r=0$ του δυσδιάστατου εγκάρσιου χώρου, της οποίας η δυναμική θα περιγράφεται από την Λαγκρατζιανή πυκνότητα $\mathfrak{L}_{brane}$.

Εισάγοντας έναν επαγόμενο όρο βαθμωτής καμπυλότητας, εντοπισμένο στην θέση της μεμβράνης θα έχουμε μία δράση σύμφωνα με την σχέση

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{M_6^4}{2}\Big[\int d^6x\,\sqrt{G}\,R^{(6)} + r_c^2\int d^4x\,\sqrt{g}\,R^{(4)}\,\frac{\delta(r)}{2\pi\,L}\Big] \\
&+ \int d^6x\,\mathfrak{L}_{bulk} + \int d^4x\,\mathfrak{L}_{brane}\,\frac{\delta(r)}{2\pi\,L}. \qquad (2.62)
\end{aligned}
$$

Ισχύει ότι M_6 είναι η εξαδιάστατη μάζα Planck, M_4 είναι η τετραδιάστατη μάζα Planck και $r_c = M_4/M_6^2$ είναι η κλίμακα αναλογίας μεταξύ τετραδιάστατης και εξαδιάστατης βαρύτητας. Η μετρική που θα χρησιμοποιήσουμε είναι της μορφής

$$
ds^2 = g_{\mu\nu}(x,r)dx^\mu dx^\nu + dr^2 + L^2(x,r)d\theta^2, \qquad (2.63)
$$

όπου $g_{\mu\nu}(x,0)$ είναι η μετρική της μεμβράνης, x^μ υποδεικνύουν τις συντεταγμένες στη μεμβράνη με $\mu = 0,\ldots,3$ και r,θ είναι η ακτινική και γωνιακή συνιστώσα αντίστοιχα, των δύο επιπλέον διαστάσεων. Τα κεφαλαία γράμματα θα τρέχουν σε όλο τον χωρόχρονο, ενω υπονοούμε ότι υπάρχει αζιμουθιακή συμμετρία ως προς τη γωνιακή συντεταγμένη του εγκάρσιου, στη μεμβράνη, δυσδιάστατου χώρου.

Όπως και στην περίπτωση της εισαγωγής του Gauss-Bonnet όρου, αναπτύσουμε την συνάρτηση L γύρω από τη θέση της μεμβράνης ως,

$$
L(x,r) = \beta(x)r + O(r^2). \qquad (2.64)
$$

Στη θέση της μεμβράνης θα ισχύει ότι $L'(x,0) = \beta(x)$. Οπως θα δούμε παρακάτω η ύπαρξη της κωνικής ανωμαλίας, απαιτεί κάποια ομαλοποίηση του προβλήματος, γεγονος που θα μας οδηγήσει στο να ορίσουμε τις επιπλέον συνοριακές συνθήκες $\partial_r\beta = 0$ και $\partial_r g_{\mu\nu}(x,0) = 0$.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω δράση εξάγουμε τις εξισώσεις Einstein, παρουσία της μεμβράνης

$$G_M^{(6)N} + r_c^2 G_\mu^{(4)\nu}\delta_M^\mu\delta_\nu^N\frac{\delta(r)}{2\pi L} = \frac{1}{M_6^4}\big[T_M^{(B)N} + T_\mu^{(br)\nu}\delta_M^\mu\delta_\nu^N\frac{\delta(r)}{2\pi L}\big], \tag{2.65}$$

με $G_M^{(6)N}$ και $G_\mu^{(4)\nu}$ να είναι ο εξαδιάστατος και τετραδιάστατος τανυστής του Einstein αντίστοιχα και $T_M^{(B)N}$ και $T_\mu^{(br)\nu}$ οι τανυστές ενέργειας ορμής του εξαδιάστατου χώρου και της μεμβράνης αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της [61] γράφουμε τον εξαδιάστατο τανυστή του Ricci σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις

$$R_\mu^{(6)\nu} = -\frac{(\sqrt{g}LK_\mu^\nu)'}{2\sqrt{g}L} + R_\mu^{(4)\nu} - \frac{\nabla_\mu^{(4)}\partial^\nu L}{L} \tag{2.66}$$

$$R_\theta^{(6)\theta} = -\frac{(\sqrt{g}L')'}{\sqrt{g}L} - \frac{\Box^{(4)}L}{L} \tag{2.67}$$

$$R_r^{(6)r} = -\frac{L''}{L} - \frac{1}{2}K' - \frac{1}{4}K_\mu^\nu K_\nu^\mu \tag{2.68}$$

$$R_{\mu r}^{(6)} = -\frac{\partial_\mu L'}{L} + \frac{K_\mu^\nu\partial_\nu L}{2L} + \frac{1}{2}\nabla_{(4)}^\nu(K_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}K), \tag{2.69}$$

όπου $K_{\mu\nu}$ είναι η εξωγενής καμπυλότητα για την οποία βάση της συγκεκριμένης βαθμίδας $g_{rr} = 1$, ισχύει ότι δίνεται από τη σχέση $K_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$. Για να εξάγουμε τις εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2.48) και (2.49) [66]

$$\frac{L''}{L} = -(1-\beta)\frac{\delta(r)}{L} + \text{non-sigular terms} \tag{2.70}$$

$$\frac{\partial_r^2 g_{\mu\nu}}{L} = \partial_r g_{\mu\nu}\frac{\delta(r)}{L} + \text{non-sigular terms.} \tag{2.71}$$

Βασιζόμενοι στις σχέσεις (2.66)-(2.68), μπορούμε να υπολογίσουμε τη $(\mu\,\nu)$ συνιστώσα του τανυστή Einstein. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκφράσεις για το L''/L και για το $K'_{\mu\nu}/L$ μπορούμε να εξισώσουμε τους όρους που περιέχουν δέλτα συναρτήσεις στην εξίσωση (2.65) και να λάβουμε τις συνοριακές εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη,

$$G_\mu^{(4)\nu}|_0 = \frac{1}{r_c^2 M_6^4}T_\mu^{(br)\nu} + \frac{2\pi}{r_c^2}(1-\beta)\delta_\mu^\nu + \frac{2\pi L}{2r_c^2}\big(K_\mu^\nu - \delta_\mu^\nu K\big)|_0, \tag{2.72}$$

όπου με το σύμβολο $|_0$ εννοείται ότι ο υπολογισμός γίνεται πάνω στη μεμβράνη.

Όπως βλέπουμε από τη σχέση (2.66) το $R_{\mu\nu}$ απειρίζεται καθώς πλησιάζουμε στη θέση της μεμβράνης

$$R^{(6)\nu}_{\mu} \;=\; -\frac{1}{2}\frac{L''}{L}\,\partial_r g_{\mu\nu} + \ldots \;=\; -\frac{\partial_r g_{\mu\nu}}{2r} + O(1). \tag{2.73}$$

Για να αποφύγουμε οποιουδήποτε είδους ανωμαλίες πρέπει να θέσουμε $\partial_r g_{\mu\nu} = 0$, δηλαδή ότι $K_{\mu\nu}|_0 = 0$. Τότε οι εξισώσεις Einstein(2.72) γίνονται,

$$G^{(4)}_{\mu\nu}|_0 = \frac{1}{r_c^2 M_6^4} T^{(br)}_{\mu\nu} + \frac{2\pi}{r_c^2}\big(1-\beta\big). \tag{2.74}$$

Οι τετραδιάστατες εξισώσεις Einstein(2.74), αναπαριστούν την βαρυτική δυναμική πάνω στη μεμβράνη, με την τετραδιάστατη μάζα Planck και την τετραδιάστατη κοσμολογική σταθερά να δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$M_{Pl}^2 = M_4^2 \;=\; r_c^2 M_6^4, \tag{2.75}$$

$$\Lambda_4 \;=\; \lambda - 2\pi\, M_6^4(1-\beta). \tag{2.76}$$

Ωστόσο αν και μπορέσαμε να αναπαραγάγουμε τις εξισώσεις της τετραδιάστατης Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας πάνω στη μεμβράνη, δεν έχουμε πεί τίποτα σχετικά με το κατά πόσο η ελλείπουσα γωνία μπορεί να είναι σταθερή ή όχι, καθώς επίσης και τι είδους ύλη μπορεί να υποστηρίξει η μεμβράνη. Αρχικά μπορούμε να δούμε από την εξίσωση (2.69) για το $(\mu\, r)$ στοιχείο της εξίσωσης Einstein (2.65), μαζί με το γεγονός ότι $\partial_r g_{\mu\nu} = 0$, πως

$$\left.\frac{\partial_\mu L'}{L}\right|_0 \;=\; -\frac{1}{M_6^4} T^{(B)}_{\mu r}|_0. \tag{2.77}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να είναι συνεπής μόνο στην περίπτωση που $\beta = L'|_0 =$ σταθερό, διότι διαφορετικά το $\partial_\mu L'/L$ θα απειρίζεται στη θέση $r = 0$. Αυτό σημαίνει επίσης ότι $\frac{\Box^{(4)} L}{L}|_0 = 0$, καθώς επίσης ότι δεν έχουμε καμία ροή ενέργειας από τη μεμβράνη στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο, αφού με αυτό τον τρόπο προκύπτει ότι $T^{(B)}_{\mu r} = 0$.

Υπολογίζοντας τώρα την (rr) συνιστώσα της εξίσωσης Einstein (2.65) μέσω των εξισώσεων (2.66)-(2.67) στη θέση $r = 0$ βρίσκουμε ότι

$$R^{(4)}|_0 \;=\; -\frac{2}{M_6^4}\, T^{(B)\,r}_{r}|_0. \tag{2.78}$$

Παίρνοντας τώρα το ίχνος της συνοριακής εξίσωσης Einstein (2.72) έχουμε

$$R^{(4)}|_0 = -\frac{1}{r_c^2 M_6^4} T^{(br)\mu}_{\mu} - \frac{8\pi}{r_c^2}\big(1-\beta\big). \tag{2.79}$$

Από τις εξισώσεις (2.78) και (2.79) καταλήγουμε στη σχέση των στοιχείων των τανυστών ενέργειας ορμής του bulk και της μεμβράνης.

$$T^{(B)r}_{r} \;=\; \frac{1}{2r_c^2}\left[T^{(br)\mu}_{\mu} + 8\pi M_6^4\big(1-\beta(r)\big)\right]. \tag{2.80}$$

Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να δούμε ότι ναι μεν μπορούμε να έχουμε ένα τανυστή ενέργειας ορμής στη μεμβράνη διαφορετικό από τάση, πρέπει όμως αυτός ο τανυστής ενέργειας ορμής να συμπρεριφέρεται κατ΄ ανάλογο τρόπο με τον τανυστή του bulk, αφού όπως προείπαμε η ελλείπουσα γωνία είναι σταθερή. Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι οποιαδήποτε κοσμολογική εξέλιξη πάνω στη μεμβράνη επάγεται από το περιεχόμενο του bulk.

2.4.3 Συνδιασμός και των δύο όρων

Αφού εξετάσαμε την επίδραση του κάθε όρου ξεχωριστά, θα μελετήσουμε τώρα το αποτέλεσμα που έχουν και οι δύο όροι συνδιαστικά. Επομένως θα θεωρήσουμε ότι μαζί με την εξαδιάστατη δράση (2.62) έχουμε και τον όρο Gauss - Bonnet και θα παρατηρήσουμε της αλλαγές που προκαλούνται στα προαναφερθέντα αποτελέσματα. Άρα η (2.62) αλλάζει κατα έναν επιπλέον όρο

$$S_{GB} = \frac{M_6^4 \alpha}{2} \int d^6x (R^{(6)\ 2} - 4R^{(6)\ 2}_{MN} + R^{(6)\ 2}_{MNK\Lambda}) \ . \tag{2.81}$$

Οι εξισώσεις Einstein (2.65), περιέχουν και αυτές έναν επιπλέον όρο,

$$\begin{aligned} H_M^N &= -\alpha \Big[\frac{1}{2} \delta_M^N (R^{(6)\ 2} - 4R^{(6)\ 2}_{K\Lambda} + R^{(6)\ 2}_{ABK\Lambda}) - 2R^{(6)} R^{(6)N}_M \\ &\quad +4R^{(6)}_{MP} R^{NP}_{(6)} \quad +4R^{(6)\ \ N}_{KMP} R^{KP}_{(6)} - 2R^{(6)}_{MK\Lambda P} R^{NK\Lambda P}_{(6)} \Big] \ . \end{aligned} \tag{2.82}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη ενότητα, καταλλήγουμε στις συνοριακές εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη

$$G^{(4)}_{\mu\nu}|_0 = \frac{1}{M_6^4 (r_c^2 + 8\pi(1-\beta)\alpha)} T^{(br)}_{\mu\nu} + \frac{2\pi(1-\beta)}{r_c^2 + 8\pi(1-\beta)\alpha} g_{\mu\nu}|_0 \ . \tag{2.83}$$

Η σχέση (2.83) περιγράφει ακριβώς τη βαρυτική δυναμική σε μία μεμβράνη συνδιάστασης - δύο, όταν και οι δύο όροι, ενός επαγόμενου όρου βαρύτητας της μεμβράνης και ενός όρου Gauss - Bonnet, έχουν συμπεριληφθεί στη δράση. Για την τετραδιάστατη μάζα Planck και την κοσμολογική σταθερά έχουμε

$$M_{Pl}^2 = M_6^4 (r_c^2 + 8\pi(1-\beta)\alpha) \ , \tag{2.84}$$

$$\Lambda_4 = \lambda - 2\pi M_6^4 (1-\beta) \ , \tag{2.85}$$

όπου και πάλι λ είναι η τάση της μεμβράνης. Βλέπουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η μάζα Planck εξαρτάται από την ελλείπουσα γωνία, γεγονός το οποίο οφείλεται στην παρουσία του όρου Gauss - Bonnet στο bulk.

Στη συνέχεια υπολογίζοντας την (rr) συνιστώσα των εξισώσεων Einstein στη θέση της μεμβράνης $r = 0$ καταλλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$R^{(4)}|_0 + \alpha(R^{(4)\ 2} - 4R^{(4)\ 2}_{\kappa l} + R^{(4)\ 2}_{\alpha\beta\kappa\lambda})|_0 = -\frac{2}{M_6^2} T_r^{(B)r}|_0 \ . \tag{2.86}$$

Από τη σχέση (2.86) παρατηρούμε, οτι δεν υπάρχει καμία σχέση μεταξύ της συνιστώσας $T_r^{(B)r}|_0$ του τανυστή ενέργειας ορμής του bulk στη θέση της μεμβράνης, με το ίχνος του τανυστή ενέργειας ορμής της μεμβράνης $T_\mu^{(br)\mu}$. Αυτό οφείλεται στη παρουσία του τανυστή Riemann, ο οποίος δεν μπορεί να υπολογισθεί από κάποια από τις προηγούμενες εξισώσεις (ο τανυστής Ricci και το βαθμωτό Ricci μπορούν να αντικατασταθούν από την (2.83). Αντ΄ αυτού, χρησιμοποιώντας την (2.83) και την (2.86), μπορούμε να λύσουμε ως προς $R^{(4)\ 2}_{\alpha\beta\kappa\lambda}|_0$ και να το υπολογίσουμε ως συνάρτηση της ύλης στη μεμβράνη και στο bulk, στη θέση της μεμβράνης.

Κεφάλαιο 3

Μελανές Χορδές & Μελανές Οπές Συνδιάστασης - 2

Έχοντας κάνει μια σύντομη επισκόπηση των προτύπων μεμβρανών συνδιάστασης - 1 και -2 θα περάσουμε στη συνέχεια στην μελέτη των στατικών λύσεων στα πρότυπα συνδιάστασης - 2 και συγκεκριμένα στις πέντε και έξι διαστάσεις. Αντίστοιχες μελέτες έχουν γίνει όπως προαναφέραμε και στις [79, 80, 81, 82]. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε λύσεις οι οποίες έχουν τη μορφή μελανών χορδών.

Ο εντοπισμός μιας μελανής οπής στη μεμβράνη και η επέκτασή της στο bulk είναι ένα δύσκολο έργο. Όπως είδαμε στην περίπτωση των προτύπων μεμβρανών συνδιάστασης - 1, η πρώτη μελέτη για μια τέτοιου είδους λύση εξετάσθηκε στην [17], με την επακόλουθη αστάθεια λόγω των διαταραχών μεγάλου μήκους κύματος [18, 19, 20]. Αριθμητικές λύσεις έχουν βρεθεί στην [83], ενώ αναλυτικά οι εξισώσεις της μεμβράνης έχουν αναλυθεί υπό την παρουσία της προβολής του τανυστή Weyl, [23, 84] πάνω στη μεμβράνη. Εφόσον το σύστημα των εξισώσεων δεν κλείνει, θα πρέπει να γίνουν συγκεκριμένες παραδοχές είτε στη μορφή της μετρικής ή στη μορφή του τανυστή Weyl [85].

Αρχικά θα ξεκινήσουμε θεωρώντας ότι έχουμε ένα πενταδιάστατο bulk, στο οποίο και εμβαπτίζουμε μια τρισδιάστατη μεμβράνη. Προφανώς έχουμε ένα πενταδιάστατο πρότυπο μεμβρανών συνδιάστασης - 2. Επιπρόσθετα θα υποθέσουμε ότι στο bulk έχουμε την παρουσία επιπλέον όρων Gauss - Bonnet και μιας κοσμολογικής σταθεράς, ενώ πάνω στη μεμβράνη έχουμε έναν επαγόμενο όρο βαρύτητας της μεμβράνης. Οι λύσεις που θα βρούμε περιγράφουν μία μελανή οπή πάνω στη μεμβράνη της οποίας η λύση μπορεί να επεκταθεί και στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο. Τέλος η αντίστοιχη μελέτη θα διεξαχθεί και για την περίπτωση των έξι διαστάσεων όπου και θα δούμε για ποιό λόγο δεν μπορούμε να έχουμε ακριβείς λύσεις μελανών χορδών στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Η δομή του κεφαλαίου είναι η εξής. Αρχικά θα δούμε τις λύσεις για το πενταδιάστατο πρότυπο και θα εξετάσουμε τις λύσεις πάνω στη μεμβράνη [105]. Ακολούθως θα δούμε τις λύσεις σε εξαδιάστατα πρότυπα στην περίπτωση σταθερής και μη - σταθερής ελλείπουσας γωνίας, και τέλος θα εξετάσουμε το ρόλο του όρου Gauss - Bonnet [106].

3.1 Μελανές Χορδές σε πέντε διαστάσεις

Θεωρούμε την παρακάτω δράση σε πέντε διαστάσεις με έναν όρο Gauss-Bonnet στο bulk και έναν όρο επαγόμενης βαρύτητας πάνω στη μεμβράνη

$$\begin{aligned} S_{\rm grav} = \frac{M_{(5)}^3}{2} \int d^5x\sqrt{-g^{(5)}} \left\{ R^{(5)} + \alpha \left[R^{(5)2} - 4R^{(5)}_{MN}R^{(5)MN} + R^{(5)}_{MNKL}R^{(5)MNKL} \right] \right\} \\ + r_c^2 \int d^3x\sqrt{-g^{(3)}}\, R^{(3)} \frac{\delta(\rho)}{2\pi b} + \int d^5x \mathfrak{L}_{bulk} + \int d^3x \mathfrak{L}_{brane} \frac{\delta(\rho)}{2\pi b} \, , \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου $\alpha\,(\geq 0)$ είναι η Gauss-Bonnet σταθερά σύζευξης και $r_c = M_{(3)}/M_{(5)}^3$ η σταθερά κλίμακας της επαγόμενης βαρύτητας, η οποία σηματοδοτεί το πέρασμα από την τρισδιάστατη, στην πενταδιάστατη βαρύτητα.

Στην παραπάνω δράση, $M_{(5)}$ είναι η πενταδιάστατη μάζα Planck και $M_{(3)}$ είναι η τρισδιάστατη. Θα δουλέψουμε σε ένα συγκεκριμενο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο η μετρική παίρνει την παρακάτω μορφή

$$ds_5^2 = g_{\mu\nu}(x,\rho)dx^\mu dx^\nu + a^2(x,\rho)d\rho^2 + b^2(x,\rho)d\theta^2 \ , \tag{3.2}$$

όπου $g_{\mu\nu}(x,0)$ είναι η μετρική της μεμβράνης και x^μ υποδεικνύουν τις τρείς διαστάσεις της, με $\mu = 0,1,2$ ενώ ρ, θ υποδεικνύουν την ακτινική και την γωνιακή συντεταγμένη των δύο επιπλέον διαστάσεων (η ρ κατεύθυνση έχει τη δυνατότητα να είναι συμπαγής ή όχι και η θ συντεταγμένη κυμαίνεται από 0 έως 2π). Οι κεφαλαίοι M, N δείκτες παίρνουν τιμές στον πενταδιάστατο χώρο. Επιπλέον, έχουμε υποθέσει ότι το σύστημά μας έχει αζιμουθιακή συμμετρία, έτσι ώστε τόσο η επαγόμενη πάνω στη μεμβράνη μετρική όσο και οι συναρτήσεις a και b δεν εξαρτώνται από το θ.

Οι εξισώσεις του Einstein οι οποίες προκύπτουν από τη μεταβολή (variation) της δράσης (3.1) είναι

$$G^{(5)N}_M + r_c^2 G^{(3)\nu}_\mu g^\mu_M g^N_\nu \frac{\delta(\rho)}{2\pi b} - \alpha H^N_M = \frac{1}{M^3_{(5)}} \left[T^{(B)N}_M + T^{(br)\nu}_\mu g^\mu_M g^N_\nu \frac{\delta(\rho)}{2\pi b} \right] \ , \tag{3.3}$$

όπου

$$\begin{aligned} H^N_M \ = \ & \left[\frac{1}{2} g^N_M (R^{(5)\ 2} - 4R^{(5)\ 2}_{K\Lambda} + R^{(5)\ 2}_{ABK\Lambda}) - 2R^{(5)}R^{(5)N}_M \right. \\ & \left. + 4R^{(5)}_{MP}R^{NP}_{(5)} \quad + 4R^{(5)\quad N}_{KMP}R^{KP}_{(5)} - 2R^{(5)}_{MKLP}R^{NKLP}_{(5)} \right] \ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Για να λάβουμε τις εξισώσεις πάνω στη μεμβράνη, αναπτύσουμε τη μετρική κοντά στη μεμβράνη ως

$$b(x,\rho) = \beta(x)\rho + O(\rho^2) \ . \tag{3.5}$$

Στο σύνορο του δυσδιάστατου χώρου όπου βρίσκεται η 2-μεμβράνη, η συνάρτηση b συμπεριφέρεται σαν $b\,'(x,0)=\beta(x)$, όπου ο τόνος υποδεικνύει παράγωγο ως προς το ρ. Επιπλέον απαιτούμε ότι ο χώρος στην περιοχή κοντά στην κωνική ανωμαλία, είναι ομαλός, γεγονός το οποίο επιβάλλει τις επιπλέον συνθήκες ότι $\partial_\mu\beta=0$ και $\partial_\rho g_{\mu\nu}(x,0)=0$ [66].

Η εξωγενής (extrinsic) καμπυλότητα στο συγκεκριμένο gauge $g_{\rho\rho}=1$ το οποίο θεωρούμε, δίνεται από τη σχέση $K_{\mu\nu}=g'_{\mu\nu}$. Η παραπάνω επιλογή θα φανεί χρήσιμη στη συνέχεια, έτσι ώστε να βρεθεί η επαγόμενη δυναμική της μεμβράνης. Επιπλέον θα εκμεταλευθούμε το γεγονός, ότι οι δευτεροτάξιες παράγωγοι των συναρτήσεων της μετρικής, εμπεριέχουν συναρτήσεις δ στη θέση στην οποία βρίσκεται η μεμβράνη. Η φύση της εν λόγω απροσδιοριστίας, μας δίνει τις παρακάτω σχέσεις [66].

$$\frac{b''}{b} = -(1-b')\frac{\delta(\rho)}{b} + \mathrm{non-singular\ terms}\ , \tag{3.6}$$

$$\frac{K'_{\mu\nu}}{b} = K_{\mu\nu}\frac{\delta(\rho)}{b} + \mathrm{non-singular\ terms}\ . \tag{3.7}$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις μπορούμε να εξισώσουμε τα μέρη των εξισώσεων Einstein τα οποία και περιέχουν δ συναρτήσεις και να πάρουμε τις συνοριακές εξισώσεις Einstein.

$$G^{(3)}_{\mu\nu} = \frac{1}{M^3_{(5)}(r_c^2+8\pi(1-\beta)\alpha)}T^{(br)}_{\mu\nu} + \frac{2\pi(1-\beta)}{r_c^2+8\pi(1-\beta)\alpha}g_{\mu\nu}\ . \tag{3.8}$$

Η ενεργός τρισδιάστατη μάζα Planck και η κοσμολογική σταθερά δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις

$$M_3^2 = M^3_{(5)}(r_c^2+8\pi(1-\beta)\alpha)\ , \tag{3.9}$$

$$\Lambda_3 = \lambda - 2\pi M^3_{(5)}(1-\beta)\ , \tag{3.10}$$

όπου λ είναι τη τάση της μεμβράνης. Ας συμειώσουμε ότι η τρισδιάστατη μάζα Planck μπορεί να εξαρτάται από την ελλείπουσα γωνία. Αυτό προκύπτει ως αποτέλεσμα του όρου Gauss-Bonnet στο bulk.

Θεωρούμε ότι έχουμε μία τρισδιάστατη μελανή οπή πάνω στη μεμβράνη. Η μετρική της μεμβράνης έχει την παρακάτω μορφή

$$ds_3^2 = \left(-n(r)^2dt^2 + n(r)^{-2}dr^2 + \frac{r^2}{l^2}d\phi^2\right)\ , \tag{3.11}$$

όπου $0\le r<\infty$ είναι η ακτινική συντεταγμένη, το ϕ έχει την συνήθη περιοδικότητα $(0,2\pi)$ και l η κλίμακα μήκους του AdS_3 χώρου. Θα εξετάσουμε την ύπαρξη λύσεων μελανών χορδών των εξισώσεων Einstein (3.3) χρησιμοποιώντας την πενταδιάστατη μετρική (4.54) στην παρακάτω μορφή

$$ds_5^2 = f^2(\rho)\left(-n(r)^2dt^2 + n(r)^{-2}dr^2 + \frac{r^2}{l^2}d\phi^2\right) + a^2(r,\rho)d\rho^2 + b^2(r,\rho)d\theta^2\ . \tag{3.12}$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο χώρος έξω από την κωνική ανωμαλία είναι ομαλός και επομένως θεωρούμε ότι και η συνάρτηση στρέβλωσης $f(\rho)$, είναι επίσης ομαλή παντού. Θεωρούμε επίσης ότι στο bulk έχουμε την παρουσία μόνο της κοσμολογικής σταθεράς Λ_5, ενώ επιπλέον επιλέγουμε ότι $a(r,\rho) = 1$. Τότε από τις εξισώσεις στο bulk

$$G^{(5)}_{MN} - \alpha H_{MN} = -\frac{\Lambda_{(5)}}{M^3_{(5)}} g_{MN} \ , \tag{3.13}$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
tt-comp. \quad &\Longrightarrow \quad -\ \frac{n^3\dot{n}}{r} - n^2\left(f'^2 + 2ff'' + 2ff'\frac{b'}{b} + f^2\frac{b''}{b}\right) \\
&\quad +\ 4\alpha\frac{n^2}{b}\left[b''\left(\frac{n\dot{n}}{r} + f'^2\right) + 2f'b'f''\right] = \Lambda_{(5)} n^2 f^2 \ , \qquad (3.14) \\
rr-comp. \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\dot{n}}{nr} + \frac{1}{n^2}\left(f'^2 + 2ff'' + 2ff'\frac{b'}{b} + f^2\frac{b''}{b}\right) \\
&\quad -\ 4\frac{\alpha}{bn}\left[b''\left(\frac{\dot{n}}{r} + \frac{f'^2}{n}\right) + 2\,\frac{f'b'f''}{n}\right] = -\Lambda_{(5)}\frac{f^2}{n^2} \ , \qquad (3.15) \\
\phi\phi-comp. \quad &\Longrightarrow \quad (\dot{n}^2 + n\ddot{n}) + \left(f'^2 + 2ff'' + 2ff'\frac{b'}{b} + f^2\frac{b''}{b}\right) \\
&\quad -\ 4\frac{\alpha}{b}\left[b''\left(n\ddot{n} + \dot{n}^2 + f'^2\right) + 2f'b'f''\right] = -\Lambda_{(5)} f^2 \ , \qquad (3.16) \\
\rho\rho-comp. \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{f^2}\left(\dot{n}^2 + n\ddot{n} + 2\frac{n\dot{n}}{r}\right) + 3\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{f'b'}{fb}\right] \\
&\quad -\ 4\alpha\frac{f'b'}{f^3b}\left(2\frac{n\dot{n}}{r} + n\ddot{n} + \dot{n}^2 + 3f'^2\right) = -\Lambda_{(5)} \ , \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta\theta-comp. \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{f^2}\left(\dot{n}^2 + n\ddot{n} + 2\frac{n\dot{n}}{r}\right) + 3\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{f''}{f}\right] \\
&\quad -\ 4\alpha\frac{f''}{f^3}\left(2\frac{n\dot{n}}{r} + n\ddot{n} + \dot{n}^2 + 3f'^2\right) = -\Lambda_{(5)} \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Συνδιάζοντας τις εξισώσεις (3.15) και (3.16) παίρνουμε

$$\left(\dot{n}^2 + n\ddot{n} - \frac{n\dot{n}}{r}\right)\left(1 - 4\alpha\frac{b''}{b}\right) = 0 \ . \tag{3.19}$$

Επίσης αφαιρώντας την εξίσωση (3.17) από την (3.18) παίρνουμε

$$\left(f'' - \frac{f'b'}{b}\right)\left[3 - 4\frac{\alpha}{f^2}\left(\dot{n}^2 + n\ddot{n} + 2\frac{n\dot{n}}{r} + 3f'^2\right)\right] = 0 \ . \tag{3.20}$$

Εν συνεχεία θα εξετάσουμε τις λύσεις των δύο παραπάνω εξισώσεων.

3.1.1 BTZ Χορδές ως λύση των Bulk Εξισώσεων

Αρχικά θα θεωρήσουμε την εξίσωση

$$\dot{n}^2 + n\ddot{n} - \frac{n\dot{n}}{r} = 0 \ , \tag{3.21}$$

η οποία έχει ώς λύση την πιο απλή BTZ μελανή οπή χωρίς φορτίο ή στροφορμή [95]

$$n^2(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} \ . \tag{3.22}$$

Η BTZ μελανή οπή έχει, για θετική μάζα, ορίζοντα γεγονότων στο $r = l\sqrt{M}$ και η ακτίνα καμπυλότητας του AdS_3 χώρου $l = (-\Lambda_3)^{-1/2}$ παρέχει την αναγκαία κλίμακα μήκους για να οριστεί ο εν λόγω ορίζοντας. Για τιμές τις μάζας στις οποίες έχουμε $-1 < M < 0$ η οποία είναι αδιάστατη, η BTZ μελανή οπή έχει μία γυμνή κωνική ανωμαλία, ενώ για $M = -1$ έχουμε ανάκτηση του AdS_3 χώρου. Τότε η εξίσωση (3.20) γίνεται

$$\left(f'' - \frac{f'b'}{b}\right)\left[1 - 4\frac{\alpha}{f^2}\left(\frac{1}{l^2} + f'^2\right)\right] = 0 \ . \tag{3.23}$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε δύο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι

$$f'^2 - \frac{f^2}{4\alpha} + \frac{1}{l^2} = 0 \ . \tag{3.24}$$

Η εξίσωση αυτή, έχει την ακόλουθη λύση

$$f_1(\rho) = C_1\, e^{\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}} + C_2\, e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\alpha}}} \ , \tag{3.25}$$

όπου C_1 και C_2 είναι ολοκληρωτικές σταθερές και ικανοποιούν τη σχέση $C_1 C_2 = \alpha/l^2$. Η συνάρτηση $f(\rho)$ είναι ομαλή και αν απαιτήσουμε στη θέση της μεμβράνης τη συνοριακή συνθήκη $f^2(\rho = 0) = 1$, οι ολοκληρωτικές σταθερές μπορούν να έκφραστούν σε σχέση με τα α και l

$$C_1 = \pm\frac{1 + \varepsilon\sqrt{1 - 4\frac{\alpha}{l^2}}}{2} \ , \tag{3.26}$$

$$C_2 = \pm\frac{1 - \varepsilon\sqrt{1 - 4\frac{\alpha}{l^2}}}{2} \ , \tag{3.27}$$

όπου $\varepsilon = \pm 1$ ανεξάρτητα απο το πρόσημο $\pm$ των C_1 και C_2. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λύσεις στην εξίσωση (3.17) παίρνουμε μία ακριβώς καθορισμένη σχέση μεταξύ των α και Λ_5

$$\Lambda_5 = -\frac{3}{4\alpha} \ . \tag{3.28}$$

Λόγω του γεγονότος ότι το α είναι θετικό, ο πενταδιάστατος bulk χώρος είναι Anti-de-Sitter.Ας σημειώσουμε επίσης ότι αυτή η ακριβώς καθορισμένη σχέση εμφανίζεται και σε μια συγκεκριμένη κλάση λύσεων της πενταδιάστατης θεωρίας Gauss-Bonnet

[96]. Η συνάρτηση $b(\rho)$ δεν καθορίζεται από τις υπόλοιπες εξισώσεις και παραμένει μια αυθαιρετη συνάρτηση του ρ. Μπορεί κανείς να δεί ότι η λύση (3.25) είναι συνεπής με όλες τις εξισώσεις στις (3.14)-(3.18).

Η δεύτερη περίπτωση είναι

$$f'' - \frac{f'b'}{b} = 0 \ , \tag{3.29}$$

το οποίο σημαίνει ότι $b(\rho) = b_0\, f'(\rho)$. Τότε χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.17) μαζί με την σχέση (3.28), παίρνουμε την εξίσωση

$$\left(1 - 4\,\alpha\,\frac{f''}{f}\right)\left[1 - 4\frac{\alpha}{f^2}\left(\frac{1}{l^2} + f'^2\right)\right] = 0 \ . \tag{3.30}$$

από την οποία έχουμε δύο υποπεριπτώσεις.

Η πρώτη υποπερίπτωση είναι $\left(1 - 4\,\alpha\,\frac{f''}{f}\right) = 0$ η οποία χρησιμοποιώντας την (3.28) δίνει

$$f_2(\rho) = C_1\, e^{\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}} + C_2\, e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\alpha}}} \ , \tag{3.31}$$

και από την (3.29) έχουμε

$$b_2(\rho) = b_0\left[C_1\, e^{\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}} - C_2\, e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\alpha}}}\right] \ , \tag{3.32}$$

όπου C_1 και C_2 είναι ολοκληρωτικές σταθερές. Θεωρώντας ξανά τη συνοριακή συνθήκη $f^2(\rho = 0) = 1$ και το γεγονός ότι στη θέση της μεμβράνης $b(\rho = 0) = 0$ και $b'(\rho = 0) = \beta$ παίρνουμε $C_1 = C_2 = \pm\frac{1}{2}$ και $b_0 = 4\,\alpha\beta$. Επομένως για την συγκεκριμένη περίπτωση οι συναρτήσεις $f(\rho)$ και $b(\rho)$ μπορούν να γραφούν ως

$$f_2(\rho) \ = \ \pm\cosh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right), \tag{3.33}$$

$$b_2(\rho) \ = \ \pm 2\,\beta\,\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right). \tag{3.34}$$

Μπορεί κανείς να δει ότι η λύση (3.33)-(3.34) είναι συνεπής με όλες τις εξισώσεις στις (3.14)-(3.18).

Για τη δεύτερη υποπερίπτωση έχουμε, οπως και για την πρώτη περίπτωση, την ίδια λύση για τη συνάρτηση $f(\rho)$ (εξίσωση (3.25) με $C_1\, C_2 = \alpha/l^2$, αλλά η συνάρτηση $b(\rho)$ δίνεται από τη σχέση $b(\rho) = b_0\, f'(\rho)$. Θεωρώντας και πάλι τις συνοριακές συνθήκες για τις συναρτήσεις $f^2(\rho)$ και $b(\rho)$ έχουμε $b_0 = 2\,\alpha\,\beta$ και $C_1 = C_2 = 1/2$. Τότε οι $f(\rho)$ και $b(\rho)$ δίνονται από τις (3.33) και (3.34) αντίστοιχα, η σχέση (3.28) ισχύει και σε αυτή την περίτωση και επιπλέον έχουμε τον ακόλουθο περιορισμό

$$l^2 = 4\,\alpha. \tag{3.35}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις λύσεις πίσω στις σχέσεις (3.14)-(3.18) μπορούμε να δούμε ότι ικανοποιούνται.

Οι λύσεις αυτές επεκτείνουν την BTZ μελανή οπή, πάνω στη μεμβράνη, στο bulk. Υπολογίζοντας το τετράγωνο της βαθμωτής καμπυλότητας Ricci βρίσκουμε

$$R^2 = \frac{4}{r^2 b^2 f^4}\Big[r f^2 b'' + 3 r f (b' f' + b f'') + b(3 r f'^2 + 2 n\dot{n} + r\dot{n}^2 + r n\ddot{n}\Big]^2 . \quad (3.36)$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα, μπορούμε να δούμε ότι η μόνη απροσδιοριστία η οποία εμφανίζεται στο σύστημά μας είναι η BTZ εμφανίζεται και οτι η BTZ χορδή είναι ομαλή στο bulk. Η ακριβής σχέση (3.85) και η σχέση $\Lambda_5 = -6/L^2$ όπου L η κλίμακα μήκους του πενταδιάστατου AdS χώρου, μας δίνει

$$L^2 = 8\,\alpha. \quad (3.37)$$

Η συνάρτηση στρέβλωσης $f^2(\rho)$ καθορίζει τη μορφή του ορίζοντα της BTZ χορδής. Το μέγεθος του ορίζοντα καθορίζεται από την κλίμακα $\sqrt{\alpha}$ και αν αυτή ικανοποιεί μία σχέση ακρίβειας με την κλίμακα μήκους του πενταδιάστατου AdS χώρου, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.37), η συνάρτηση στρέβλωσης $f(\rho)$ είναι πεπερασμένη στο σύνορο του AdS χώρου.

Υπάρχει επίσης και μία σταθερή λύση για την $f(\rho)$, η οποία μας δίνει

$$\begin{aligned} f_4(\rho) &= \pm 1, && (3.38)\\ n(r) &= \sqrt{-M + \frac{r^2}{l^2}}, && (3.39)\\ b_4(\rho) &= \sqrt{-\frac{3 + 4\,\alpha\,\Lambda_5}{2\,\Lambda_5}}\,\sinh\left(\sqrt{-\frac{2\Lambda_5}{3 + 4\alpha\Lambda_5}}\,\rho\right), && (3.40)\\ \Lambda_5 &= -\frac{3}{l^2}. && (3.41) \end{aligned}$$

3.1.2 Γενικές Λύσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε γενικότερες λύσεις πέραν αυτών για τις οποίες η συνάρτης $n(r)$ περιγράφει μία BTZ μελανή οπή. Αυτό σημαίνει ότι στην εξίσωση (3.19) επιλέγουμε

$$1 - 4\alpha\frac{b''}{b} = 0\ , \quad (3.42)$$

από το οποίο η συνάρτηση $b(\rho)$ παίρνει την παρακάτω μορφή

$$b_5(\rho) = C_1\ e^{\rho/2\sqrt{\alpha}} + C_2\ e^{-\rho/2\sqrt{\alpha}}\ . \quad (3.43)$$

Η πρώτη περίπτωση είναι να θεωρήσουμε απο την (3.20)

$$f'' - \frac{f'b'}{b} = 0\ , \quad (3.44)$$

το οποίο σημαίνει ότι $b(\rho) = b_0\, f'(\rho)$. Τότε έχουμε

$$f_5(\rho) = f_0\,\sqrt{\alpha}\left(C_1\,e^{\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}} - C_2\,e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\alpha}}}\right) + C_3\ , \quad (3.45)$$

όπου C_1, C_2 και C_3 είναι ολοκληρωτικές σταθερές. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λυσεις στην εξίσωση (3.18) βρίσκουμε ότι $C_3 = 0$ και την σχέση ακρίβειας (3.28). Θεωρώντας ξανά τις συνοριακές συνθήκες για την $f^2(\rho)$ και $b(\rho)$ έχουμε $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ και $b_0 = 4\,\alpha\,\beta$. Επομένως στη συγκεκριμένη περίπτωση οι $f(\rho)$ και $b(\rho)$, μπορούν να γραφτούν ώς (3.33) και (3.34) αντίστοιχα. Η συνάρτηση $n(r)$ παραμένει μια αυθαίρετη συνάρτηση του r και δεν καθορίζεται από τις υπόλοιπες εξισώσεις. Μπορεί κανείς να δεί ότι η παραπάνω λύση ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις (3.14)-(3.18).

Για τη δεύτερη περίπτωση θα αναλύσουμε απο την (3.19), τον όρο

$$3\left(f^2 - 4\alpha\, f'^2\right) - 4\alpha\left(\dot{n}^2 + n\ddot{n} + 2\frac{n\dot{n}}{r}\right) = 0\ . \tag{3.46}$$

Η πρώτη παρένθεση της παραπάνω εξίσωσης εξαρτάται από το ρ, ενώ η δεύτερη από το r. Επομένως κάθε ένας όρος θα πρέπει εν γένει να είναι ίσως με μία σταθερά κ. Τότε έχουμε ότι

$$3\left(f^2 - 4\,\alpha\, f'^2\right) \;=\; \kappa\ , \tag{3.47}$$

$$4\alpha\left(2\frac{n\dot{n}}{r} + n\ddot{n} + \dot{n}^2\right) \;=\; \kappa\ , \tag{3.48}$$

οι οποίες έχουν ώς λύση

$$f_6(\rho) \;=\; C_3\, e^{\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}} + \frac{\kappa}{12\, C_3}\, e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\alpha}}}\ , \tag{3.49}$$

$$n(r) \;=\; \sqrt{C_5 + \frac{\kappa}{12\,\alpha}\, r^2 + \frac{C_6}{r}}\ . \tag{3.50}$$

Επιβάλλοντας τη συνθήκη $f^2(\rho = 0) = 1$, έχουμε για την συνάρτηση $f(\rho)$, όπως και στην πρώτη περίπτωση των BTZ λύσεων, ότι

$$f_6(\rho) = C_3\, e^{\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}} + C_4\, e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\alpha}}}\ , \tag{3.51}$$

όπου

$$C_3 \;=\; \pm\frac{1 + \varepsilon\sqrt{1 - \frac{\kappa}{3}}}{2}\ , \tag{3.52}$$

$$C_4 \;=\; \pm\frac{1 - \varepsilon\sqrt{1 - \frac{\kappa}{3}}}{2}\ . \tag{3.53}$$

Επιπλέον επιβάλλοντας τις συνθήκες $b(0) = 0$ και $b'(0) = \beta$ παίρνουμε

$$b_6(\rho) = \pm 2\,\beta\,\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{2\,\sqrt{\alpha}}\right). \tag{3.54}$$

Εάν επαναπροσδιορίσουμε τις σταθερές $C_5 = -M$, $C_6 = -\zeta$ και $l^2 = \frac{12}{\kappa}\,\alpha$, καταλλήγουμε σε μία BTZ μελανή οπή με έναν επιπλέον όρο, λύση η οποία αντιστοιχεί σε μία BTZ μελανή οπή σύμμορφα συζευγμένη με ένα βαθμωτό πεδίο [97]

$$n(r) = \sqrt{-M + \frac{r^2}{l^2} - \frac{\zeta}{r}}\ . \tag{3.55}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λύσεις στην εξίσωση (3.17) πέρνουμε την (3.28). Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\Lambda_5 = -6/L^2$ πέρνουμε την ακόλουθη ακριβή σχέση, μεταξύ της κλίμακας μήκους του πενταδιάστατου AdS χώρου και του τρισδιάστατου χώρου

$$L^2 = \frac{2\,\kappa\,l^2}{3}\ . \tag{3.56}$$

Εύκολα μπορεί κανείς να δεί, ότι η παραπάνω λύση είναι συνεπής με τις εξισώσεις (3.14)-(3.18). Ας συμειώσουμε ότι για $\kappa = 3$ παίρνουμε

$$f_6(\rho) = \pm\cosh\left(\frac{\rho}{2\,\sqrt{\alpha}}\right)\ , \tag{3.57}$$

με $l^2 = 4\,\alpha$ και $L^2 = 2\,l^2$. Επίσης υπάρχει και μία σταθερή λύση της $f(\rho)$ για την οποία έχουμε

$$\begin{aligned} f_7(\rho) &= \pm 1\ , && (3.58)\\ n(r) &= \sqrt{-M + \frac{r^2}{l^2} - \frac{\zeta}{r}}\ , && (3.59)\\ b_7(\rho) &= 2\,\beta\,\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{2\,\sqrt{\alpha}}\right)\ , && (3.60)\\ \Lambda_5 &= -\frac{1}{4\alpha} = -\frac{3}{l^2}\ . && (3.61) \end{aligned}$$

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματά μας στον ακόλουθο πίνακα.

$n(r)$	$f(\rho)$	$b(\rho)$	$-\Lambda_5$	Περιορισμοί
BTZ	$C_1\,e^{\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}} + C_2\,e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\alpha}}}$	$\forall b(\rho)$	$\frac{3}{4\alpha}$	$C_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4\frac{\alpha}{l^2}}}{2}$
BTZ	$\cosh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)$	$2\,\beta\,\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)$	$\frac{3}{4\alpha}$	-
BTZ	$\cosh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)$	$2\,\beta\,\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)$	$\frac{3}{4\alpha}$	$l^2 = 4\,\alpha$
BTZ	± 1	$\frac{1}{}\,\sinh(\rho)$	$\frac{3}{l^2}$	$= \sqrt{-\frac{2\Lambda_5}{3+4\alpha\Lambda_5}}$
$\forall n(r)$	$\cosh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)$	$2\,\beta\,\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)$	$\frac{3}{4\alpha}$	-
$\sqrt{-M + \frac{r^2}{l^2} - \frac{\zeta}{r}}$	$C_1\,e^{\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}} + C_2\,e^{\frac{-\rho}{2\sqrt{\alpha}}}$	$2\,\beta\,\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)$	$\frac{3}{4\alpha}$	$C_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4\frac{\alpha}{l^2}}}{2}$
				$\frac{l^2}{\alpha} = \frac{12}{\kappa}$
$\sqrt{-M + \frac{r^2}{l^2} - \frac{\zeta}{r}}$	± 1	$2\,\beta\,\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)$	$\frac{1}{4\alpha}$	$\Lambda_5 = -\frac{1}{4\alpha} = -\frac{3}{l^2}$

3.1.3 Εξισώσεις στη Μεμβράνη

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε την ανάλυση των λύσεων μας, με την εισαγωγή της μεμβράνης, θα πρέπει να λύσουμε και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες μετάβασης, οι οποίες δίνονται από τις εξισώσεις του Einstein στη μεμβράνη (3.8), χρησιμοποιώντας την επαγόμενη μετρική στη μεμβράνη η οποία δίνεται από τη σχέση

(3.11). Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση $n(r)$ αντιστοιχεί σε μία BTZ μελανή οπή (3.22), και η κοσμολογική σταθερά της μεμβράνης δίνεται από τη σχέση $\Lambda_3 = -1/l^2$, βρήκαμε ότι ο τανυστής ενέργειας ορμής είναι μηδενικός. Επομένως η BTZ μελανή οπή βρίσκεται στη μεμβράνη στο κενό.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $n(r)$ είναι της μορφής (3.55), βρήκαμε τον ακόλουθο τανυστή ενέργειας ορμής

$$T_\alpha^\beta = \text{diag}\,\left(\frac{\zeta}{2r^3}, \frac{\zeta}{2r^3}, -\frac{\zeta}{r^3}\right), \tag{3.62}$$

ο οποίος διατηρείται πάνω στη μεμβράνη, $\nabla_\beta T_\alpha^\beta = 0$. Η ιδιότητα αυτή έχει μελετηθεί στην [98] για πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2 στις έξι διαστάσεις. Παρόλ' αυτά, φαίνεται ότι είναι μία ιδιότητα ανεξάρτητη από τις bulk διαστάσεις για τα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2 με όρους Gauss-Bonnet τα οποία έχουν μία αξονικά συμμετρική μετρική σαν την (3.2) με $a^2(x,\rho) = 1$, και ικανοποιούν συνοριακές συνθήκες μετάβασης ανάλογες με την (3.8).

Η μελανή οπή της μορφής (3.55) αντιστοιχεί σε μία BTZ μελανή οπή, σύμμορφα συζευγμένη με ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο [97]. Το βαθμωτό πεδίο δεν εισαγάγει ένα ανεξάρτητο διατηρούμενο ρεύμα και γι' αυτό τον λόγο δεν εμφανίζεται στη μορφή της μετρικής. Τροποποιεί μόνο τον τανυστή ενέργειας ορμής των τρισδιάστατων εξισώσεων Einstein. Εάν υπολογίσουμε τον τανυστή ενέργειας ορμής στην [97], ο οποίος είναι αναγκαίος για να υποστηρίξει μία τέτοια λύση και πάρουμε το όριο $r/l << 1$, καταλλήγουμε στο ενδιαφέρον αποτέσμα, ότι συγκλίνει στη μορφή της σχέσης (3.62), η οποία είναι αναγκαία για να έχουμε μία τέτοια μελανή οπή στην κωνική μεμβράνη. Ένας τρόπος για να καταλάβουμε αυτό το αποτέλεσμα, είναι ότι επειδή σε αυτό το όριο το r είναι πολύ μικρό, η μελανή οπή είναι εντοπισμένη κοντά στην κωνική ανωμαλία και επομένως οποιουδήποτε είδους ύλη θα πάρει μία διανεμητική μορφή (distributional form), γύρω από αυτή την ανωμαλία. Ας σημειώσουμε επίσης ότι αυτή η λύση είναι αποτέλεσμα της παρουσίας του όρου Gauss-Bonnet.Αν μηδενίσουμε τη σταθερά σύζευξης του Gauss-Bonnet, τότε από τις σχέσεις (3.19) και (3.20) μπορεί κανείς να δεί ότι μόνο η BTZ μελανή οπή αποτελεί λύση.

3.2 Μελανές Χορδές σε έξι διαστάσεις

Στη συγκεκριμένη εννότητα θα εξετάσουμε την ύπαρξη λύσεων μελανών χορδών σε έξι διαστάσεις με κωνικές ανωμαλίες. Ξεκινώντας θα θεωρήσουμε μία δράση της μορφής (3.1) αλλά σε έξι διαστάσεις,

$$S = \frac{M_6^4}{2}\left\{\int d^6x\sqrt{-g^{(6)}}\left[R^{(6)} + \alpha\left(R^{(6)2} - 4R^{(6)}_{MN}R^{(6)MN} + R^{(6)}_{MNKL}R^{(6)MNKL}\right)\right]\right.$$
$$\left. + r_c^2\int d^4x\sqrt{-g^{(4)}}R^{(4)}\right\} + \int d^6x\mathfrak{L}_{bulk} + \int d^4x\mathfrak{L}_{brane}\,. \tag{3.63}$$

Όπως και στη πενταδιάστατη περίπτωση, $r_c = M_4/M_6^2$ είναι η σταθερά κλίμακας της επαγόμενης βαρύτητας, η οποία σηματοδοτεί το πέρασμα από την τετραδιάστατη, στην εξαδιάστατη βαρύτητα, M_6 είναι η εξαδιάστατη μάζα Planck και M_4 είναι η τετραδιάστατη.

Η μετρική όπως και στην πενταδιάστατη περίπτωση έχει τη παρακάτω μορφή

$$ds_6^2 = g_{\mu\nu}(r,\chi)dx^\mu dx^\nu + a^2(r,\chi)d\chi^2 + L^2(r,\chi)d\xi^2 \ , \tag{3.64}$$

όπου τώρα $\mu = 0, 1, 2, 3$ ενώ χ, ξ υποδηλώνουν την ακτινική και γωνιακή συντεταγμένη αντίστοιχα, για τις δύο επιπλέον διαστάσεις (η κατεύθυνση χ μπορεί να είναι συμπαγής ή όχι, ενώ η ξ συντεταγμένη κυμαίνεται από 0 έως 2π). Ας σημειώσουμε ότι έχουμε υποθέσει αζιμουθιακή συμμετρία στο σύστημά μας, επομένως τόσο η επαγώμενη τετραδιάστατη μετρική, αλλά και οι συναρτήσεις a και L δεν εξαρτώνται από το ξ.

Οι εξισώσεις του Einstein που αντιστοιχούν στην παραπάνω δράση είναι

$$G_M^{(6)N} + r_c^2 G_\mu^{(4)\nu} g_M^\mu g_\nu^N \frac{\delta(\chi)}{2\pi L} - \alpha H_M^N = \frac{1}{M_6^4}\left[-\Lambda_6 + T_M^{(B)N} + T_\mu^{(br)\nu} g_M^\mu g_\nu^N \frac{\delta(\chi)}{2\pi L}\right] \ , \tag{3.65}$$

όπου H_M^N είναι ο εξαδιάστατος όρος της σχέσης (3.4).

Για να λάβουμε τις εξισώσεις πάνω στη μεμβράνη, αναπτύσσουμε τη μετρική κοντά στη μεμβράνη ως

$$L(r,\chi) = \beta(r)\chi + O(\chi^2) \ , \tag{3.66}$$

και όπως και στην πενταδιάστατη περίπτωση η συνάρτηση L συμπεριφέρεται σαν $L'(r,0) = \beta(r)$. Οι συνοριακές εξισώσεις Einstein είναι

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(4)}\left(r_c^2 + 8\pi(1-\beta)\alpha\right)|_0 &= \frac{1}{M_6^4} T_{\mu\nu}^{(br)}|_0 + 2\pi(1-\beta) g_{\mu\nu}|_0 \\ &+ \pi L(r,\chi)\, E_{\mu\nu}|_0 - 2\pi\beta\alpha\, W_{\mu\nu}|_0 \ , \end{aligned} \tag{3.67}$$

όπου ο όρος

$$E_{\mu\nu}|_0 = (K_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} K)|_0 \ , \tag{3.68}$$

εμφανίζεται λόγω της παρουσίας του όρου επαγόμενης βαρύτητας στη δράση, ενώ ο όρος

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}|_0 &= g^{\lambda\sigma}\partial_\chi g_{\mu\lambda}\partial_\chi g_{\nu\sigma}|_0 - g^{\lambda\sigma}\partial_\chi g_{\lambda\sigma}\partial_\chi g_{\mu\nu}|_0 \\ &+ \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\left[\left(g^{\lambda\sigma}\partial_\chi g_{\lambda\sigma}\right)^2 - g^{\lambda\sigma} g^{\delta\rho}\partial_\chi g_{\lambda\delta}\partial_\chi g_{\sigma\rho}\right]\Big|_0 \ , \end{aligned} \tag{3.69}$$

είναι ο όρος Weyl λόγω της παρουσίας του όρου Gauss-Bonnet term στο bulk [66]. Η ενεργός τετραδιάστατη μάζα και κοσμολογική σταθερά δίνονται από

$$M_{Pl}^2 = M_6^4 (r_c^2 + 8\pi(1-\beta)\alpha) \ , \tag{3.70}$$

$$\Lambda_4 = \lambda - 2\pi M_6^4 (1-\beta) \ , \tag{3.71}$$

όπου λ είναι η τάση της μεμβράνης.

Εάν απαιτήσουμε ότι ο χώρος στην εγγύτητα της κωνική ανωμαλίας είμαι ομαλός ($\partial_\mu \beta = 0$) τότε η (3.67) απλά καταλήγει στην [66, 99]

$$G^{(4)}_{\mu\nu}\left(r_c^2 + 8\pi(1-\beta)\alpha\right)|_0 = \frac{1}{M_6^4} T^{(br)}_{\mu\nu}|_0 + 2\pi(1-\beta) g_{\mu\nu}|_0 \ . \tag{3.72}$$

3.2.1 Λύσεις Τύπου Μελανών Χορδών με καθαρή κωνική ανωμαλία

Σε αυτή την υποεννότητα , κάνουμε την υπόθεση ότι η ανωμαλία κοντά στη θέση της μεμβράνης είναι καθαρά κωνική. Επομένως, θα λύσουμε τις bulk εξισώσεις για μία σταθερή ελλείπουσα γωνία β ($\partial_\mu \beta = 0$). Θεωρούμε ότι η μετρική της μεμβράνης είναι της μορφής

$$ds_4^2 = -A(r)^2 dt^2 + A(r)^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \ , \tag{3.73}$$

όπου $0 \leq r < \infty$ είναι η ακτινική συντεταγμένη, και το ϕ έχει τη συνήθη περιοδικότητα $(0, 2\pi)$. Θα εξετάσουμε την ύπαρξη λύσεων της μορφής των μελανών χορδών στις εξισώσεις Einstein (3.65) χρησιμοποιώντας την εξαδιάστατη μετρική (3.64) στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} ds_6^2 = F^2(\chi)&\left(-A(r)^2 dt^2 + A(r)^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \\ &+ a^2(r,\chi) d\chi^2 + L^2(r,\chi) d\xi^2 \ . \end{aligned} \tag{3.74}$$

Όπως έχουμε ήδη σχολιάσει, ο χώρος πέρα από την κωνική ανωμαλία στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο είναι ομαλός, επομένως απαιτούμε ότι και η συνάρτηση στρέβλωσης $F(\chi)$ είναι επίσης ομαλή παντού. Έχουμε σπάσει το γενικό τανυστή ενέργειας ορμής του bulk $\tilde{T}^{(B)\,N}_M$ σε μία κοσμολογική σταθερά Λ_6 και έναν τανυστή ενέργειας ορμής για το bulk $T^{(B)\,N}_M$. Επιπλέον υποθέτουμε για τη συνάρτηση a ότι $a(r,\chi) = 1$. Τότε από τις εξισώσεις του bulk

$$G^{(6)}_{MN} - \alpha H_{MN} = \frac{1}{M_6^4}\left(-\Lambda_6\, g_{MN} + T^{(B)}_{MN}\right) \ , \tag{3.75}$$

παίρνοντας το συνδιασμό $rr - \theta\theta$ και $\chi\chi - \xi\xi$ των εξισώσεων Einstein καταλλήγουμε αντίστοιχα στις παρακάτω σχέσεις

$$\left(\dot{A}^2 + A\ddot{A} - \frac{A^2}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right)\left[1 - 4\alpha\left(\frac{L''}{L} + \frac{F''}{F} + \frac{F'L'}{FL}\right)\right] = 0 \ , \tag{3.76}$$

$$\left(F'' - \frac{F'L'}{L}\right)\left[1 - \frac{2\alpha}{F^2}\left(\dot{A}^2 + A\ddot{A} + \frac{A^2}{r^2} + 4\frac{A\dot{A}}{r} - \frac{1}{r^2} + 6F'^2\right)\right] = 0 \ . \tag{3.77}$$

Οι $\chi\chi$ και $\xi\xi$ συνιστώσες των εξισώσεων Einstein είναι

$$\begin{aligned} G^\chi_\chi &= T^\chi_\chi \ , \\ G^\xi_\xi &= T^\xi_\xi \ , \end{aligned} \tag{3.78}$$

και επομένως για να πάρουμε την (3.77) θα πρέπει να πάρουμε τη διαφορά $G^\chi_\chi - G^\xi_\xi = T^\chi_\chi - T^\xi_\xi$, και αφού η μόνη επιπλέον ενεργειακή συνεισφορά στο bulk προέρχεται από την κοσμολογική σταθερά, η ύλη στις δύο επιπλέον διαστάσεις θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $T^\chi_\chi = T^\xi_\xi$.

3.2.2 Λύσεις των Bulk Εξισώσεων: Περίπτωση 1

Αρχικά θα θεωρήσουμε την

$$\dot{A}^2 + A\ddot{A} - \frac{A^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \ , \tag{3.79}$$

η οποία έχει σαν λύση την

$$A^2(r) = 1 + \frac{r^2}{L_4^2} - \frac{\zeta}{r} \ , \tag{3.80}$$

όπου L_4 είναι η κλίμακα μήκους του AdS_4 χώρου, και ζ είναι μία ολοκληρωτική σταθερά. Τότε η εξίσωση (3.77) παίρνει την παρακάτω μορφή

$$\left(F'' - \frac{F'L'}{L}\right)\left[1 - 12\frac{\alpha}{F^2}\left(\frac{1}{L_4^2} + F'^2\right)\right] = 0 \ . \tag{3.81}$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε δύο υποπεριπτώσεις:

- Υποπερίπτωση 1α: Στην πρώτη υποπερίπτωση έχουμε

$$F'^2 - \frac{F^2}{12\alpha} + \frac{1}{L_4^2} = 0 \ . \tag{3.82}$$

Αυτή η εξίσωση έχει την ακόλουθη λύση

$$F(\chi) = C_1\, e^{\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}} + C_2\, e^{\frac{-\chi}{2\sqrt{3\alpha}}} \ , \tag{3.83}$$

όπου C_1 και C_2 είναι ολοκληρωτικές σταθερές, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $C_1\, C_2 = 3\alpha/L_4^2$. Η συνάρτηση $F(\chi)$ είναι ομαλή και αν επιπλέον απαιτήσουμε ότι στη θέση της μεμβράνης ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $F^2(\chi = 0) = 1$, οι ολοκληρωτικές σταθερές μπορούν να εκφρασθούν με τη βοήθεια του α και του L_4 ως

$$\begin{aligned} C_1 &= \pm\frac{1 + \varepsilon\sqrt{1 - 12\frac{\alpha}{L_4^2}}}{2} \ , \\ C_2 &= \pm\frac{1 - \varepsilon\sqrt{1 - 12\frac{\alpha}{L_4^2}}}{2} \ , \end{aligned} \tag{3.84}$$

όπου το $\varepsilon = \pm 1$ ανεξάρτητα απο το $\pm$ πρόσημο στην C_1 και C_2. Επιπλέον χρειαζόμαστε $\partial_\chi g_{\mu\nu}|_{(\chi=0)} = 0$, π.χ., $\partial_\chi F|_{(\chi=0)} = 0$, επομένως $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

και $\alpha = \frac{L_4^2}{12}$. Έτσι, $F(\chi) = \cosh\left(\frac{\chi}{L_4}\right)$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λύσεις στις tt, rr, $\theta\theta$, και $\phi\phi$ συνιστώσες των εξισώσεων Einstein καταλλήγουμε στη σχέση ακρίβειας μεταξύ του α και Λ_6

$$\Lambda_6 = -\frac{5}{12\alpha} = -\frac{5}{L_4^2} \ . \tag{3.85}$$

Λόγω του γεγονότος ότι η σταθερά α είναι θετική, ο εξαδιάστατος bulk χώρος είναι Anti-de-Sitter. Επιπλέον έχουμε μία σχέση μεταξύ της εξαδιάστατης κοσμολογικής σταθεράς Λ_6 και της κλίμακας μήκους του AdS_4 χώρου L_4. Εάν απαιτήσουμε οι εξισώσεις στο bulk να έχουν ώς λύση μία Schwarzschild-AdS μελανή οπή (3.80) με $\zeta \neq 0$, τότε η συνέπεια μεταξύ των εξισώσεων απαιτεί ότι οι $\chi\chi$ και $\xi\xi$ συνιστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής νά έχουν τη μορφή

$$T_\chi^{(B)\,\chi} = T_\xi^{(B)\,\xi} = -\frac{6\,\alpha\,\zeta^2}{r^6}\,\frac{1}{F(\chi)^4} \ , \tag{3.86}$$

με τις υπόλοιπες συνιστώσες να είναι μηδέν. Ας σημειώσουμε ότι εκτός της συνάρτησης στρέβλωσης $F(\chi)$, οι παραπάνω συνιστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής δεν εξαρτώνται από το χ, αλλά μόνο από την ακτινική συνιστώσα πάνω στη μεμβράνη. Θα ασχοληθούμε περεταίρω με αυτή την εξάρτηση στη συνέχεια του κεφαλαίου.

- Υποπερίπτωση 1β: Στη δεύτερη υποπερίπτωση θεωρούμε ότι

$$F'' - \frac{F'L'}{L} = 0 \ , \tag{3.87}$$

το οποίο σημαίνει ότι $L(\chi) = L_0\,F'(\chi)$. Σε κάθε περίπτωση καταλλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με την υποπερίπτωση 1a Ωστόσο η συνάρτηση $L(\chi)$ δεν είναι πλέον αυθέρετη και δίνεται από τη σχέση $L(\chi) = \beta\,L_4\,\sinh\left(\frac{\chi}{L_4}\right)$, όπου χρησιμοποιήσαμε τις συνοριακές συνθήκες $L(\chi=0)=0$ και $L'(\chi=0)=\beta$.

- Υπάρχουν επίσης δύο σταθερές λύσεις για την $F(\chi)$ για τις οποίες έχουμε

$$\begin{aligned} F(\chi) &= \pm 1, && (3.88)\\ A(r) &= \sqrt{1+\frac{r^2}{L_4^2}-\frac{\zeta}{r}}, && (3.89)\\ L(\chi) &= \beta\,\frac{\sinh(\,\chi)}{}, && (3.90)\\ \gamma &= \frac{1}{L_4}\sqrt{\frac{1-\frac{L_4^2}{4\alpha}}{1-\frac{L_4^2}{12\alpha}}} && \\ \Lambda_6 &= -\frac{6}{L_4^2}\left(1-\frac{2\alpha}{L_4^2}\right) && (3.91)\\ \zeta \neq 0 \quad T_\chi^{(B)\,\chi} &= T_\xi^{(B)\,\xi} = -\frac{6\alpha\zeta^2}{r^6}. && (3.92) \end{aligned}$$

Η δεύτερη έχει το ίδιο $F(\chi)$ και $A(r)$, όπως επίσης και τη σχέση $T_\chi^{(B)\,\chi} = T_\xi^{(B)\,\xi}$, αλλά

$$
\begin{aligned}
L(\chi) &= \beta\,\chi\,\frac{\sinh\gamma}{\gamma}, && (3.93)\\
T_t^{(B)\,t} = T_r^{(B)\,r} = T_\theta^{(B)\,\theta} &= T_\phi^{(B)\,\phi} = \frac{3\left(4\alpha - L_4^2\right)}{L_4^4}. && (3.94)
\end{aligned}
$$

3.2.3 Λύσεις των Bulk Εξισώσεων: Περίπτωση 2

Σε αυτή την εννότητα επιλέγουμε από την (3.76) την εξίσωση

$$
1 - 4\alpha\left(\frac{L''}{L} + \frac{F''}{F} + \frac{F'L'}{FL}\right) = 0\ . \tag{3.95}
$$

- Υποπερίπτωση 2α: Αρχικά θεωρούμε από τη σχέση (3.77)

$$
F'' - \frac{F'L'}{L} = 0\ , \tag{3.96}
$$

το οποίο σημαίνει ότι $L(\chi) = L_0\,F'(\chi)$. Αν και αυτή η σχέση δεν αρκεί για να λύσουμε την (3.95), υπάρχει μία εκθετική λύση και για τις δύο συναρτήσεις, η οποία δίνεται από την

$$
\begin{aligned}
F(\chi) &= C_1\,e^{\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}} + C_2\,e^{\frac{-\chi}{2\sqrt{3\alpha}}}\ , && (3.97)\\
L(\chi) &= L_0\,F'(\chi)\,. && (3.98)
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω λύση στις tt, rr, $\theta\theta$, και $\phi\phi$ συνιστώσες των εξισώσεων Einstein καταλλήγουμε σε μία σχέση ακρίβειας μεταξύ του α και του Λ_6,

$$
\Lambda_6 = -\frac{5}{12\alpha}\ . \tag{3.99}
$$

Εάν επιλέξουμε, όπως έχουμε κάνει και προηγούμενα, $C_1 C_2 = \frac{3\alpha}{L_4^2}$, τότε παίρνουμε μία διαφορική εξίσωση για το $A(r)$, η οποία έχει την ακόλουθη λύση

$$
A^2(r) = 1 + \frac{r^2}{L_4^2} \pm \sqrt{1 + \frac{C_3}{L_4^2} + \frac{C_4}{L_4^4}\,r}\ , \tag{3.100}
$$

με τον περιορισμό ότι $12\alpha = L_4^2$ ο οποίος συσχετίζει την 6-διάστατη κοσμολογική σταθερά Λ_6 με την κλίμακα μήκους του AdS_4 χώρου L_4 ώς $\Lambda_6 = -\frac{5}{L_4^2}$. Επομένως επιβάλοντας τις συνοριακές συνθήκες $F^2(\chi = 0) = 1$ ($\partial_\chi F|_{(\chi=0)} = 0$ ικανοποιήται ήδη), $L(\chi = 0) = 0$ και $L'(\chi = 0) = \beta$ έχουμε ότι $F(\chi) = \cosh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}\right)$ και $L(\chi) = 2\sqrt{3\alpha}\,\beta\,\sinh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}\right)$ ικανοποιώντας όλες τις εξισώσεις Einstein.

- Υποπερίπτωση 2β: Στη συγκεκριμένη υποπερίπτωση θα θεωρήσουμε απο την (3.77)

$$\left(F^2 - 12\alpha\, F'^2\right) - 2\alpha\left(\dot{A}^2 + A\ddot{A} + \frac{A^2}{r^2} + 4\frac{A\dot{A}}{r} - \frac{1}{r^2}\right) = 0\ , \tag{3.101}$$

Ο πρώτος όρος είναι ουσιαστικά μία συνάρτηση του χ ενώ ο δεύτερος είναι συνάρτηση του r. Επομένως, κάθε όρος θα πρέπει γενικά να είναι ίσως με μία σταθερά κ. Τότε έχουμε ότι

$$F^2 - 12\alpha\, F'^2 \;=\; \kappa\ , \tag{3.102}$$

$$2\alpha\left(\dot{A}^2 + A\ddot{A} + \frac{A^2}{r^2} + 4\frac{A\dot{A}}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \;=\; \kappa\ , \tag{3.103}$$

οι οποίες δίνουν

$$F(\chi) \;=\; C_1\, e^{\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}} + C_2\, e^{\frac{-\chi}{2\sqrt{3\alpha}}}\ , \tag{3.104}$$

$$A^2(r) \;=\; 1 + \frac{2\,C_3}{r^2} + \frac{C_4}{r} + \frac{\kappa\, r^2}{12\,\alpha}, \tag{3.105}$$

με $C_1 C_2 = \frac{\kappa}{4}$. Καμιά λύση δεν είναι δυνατόν να βρεθεί εκτός αν θέσουμε $\Lambda_6 = -\frac{5}{12\alpha}$. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να λύσουμε την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$-L(\chi) + \sqrt{3\alpha}\left(\frac{1 - \frac{\kappa}{4\,C_1^2}\, e^{\frac{-\chi}{\sqrt{3\alpha}}}}{1 + \frac{\kappa}{4\,C_1^2}\, e^{\frac{-\chi}{\sqrt{3\alpha}}}}\right) L'(\chi) + 6\alpha\, L''(\chi) = 0, \tag{3.106}$$

η οποία έχει σαν λύση τη

$$L(\chi) = \frac{4\,C_1^2\, C_5\, e^{\frac{\chi}{\sqrt{3\alpha}}}}{\kappa}\ {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}, -\frac{4\,C_1^2}{\kappa}\, e^{\frac{\chi}{\sqrt{3\alpha}}}\right]\ , \tag{3.107}$$

όπου η ${}_2F_1$ είμαι η υπεργεωμετρική συνάρτηση του δευτέρου είδους. Οι $\chi\chi$ και $\xi\xi$ συνιστώσες των εξισώσεων Einstein μας επιβάλουν ότι $C_1 = 0$, αλλά σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να έχουμε $\partial_\chi\, g_{\mu\nu} = 0$. Αρα θα πρέπει να ισχύει ότι $C_1 \neq 0$ και πρέπει να θεωρήσουμε ειδικές μορφές για τις $\chi\chi$ και $\xi\xi$ συνιστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής, οι οποίες θα εξαρτώνται από το r και το χ και οι οποίες δίνονται από την παρακάτω σχέση

$$T_\chi^{(B)\,\chi} = T_\xi^{(B)\,\xi} = -\frac{2\alpha\left(40\,C_3^2 + 24\,C_3\,C_4\,r + 3\,C_4^2\,r^2\right)}{r^8}\,\frac{1}{F(\chi)^4}. \tag{3.108}$$

Επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες $F^2(\chi = 0) = 1$, $L(\chi = 0) = 0$ και $L'(\chi = 0) = \beta$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
C_1 &= \pm\frac{1 + \varepsilon\sqrt{1-\kappa}}{2}\ , && (3.109)\\
C_2 &= \pm\frac{1 - \varepsilon\sqrt{1-\kappa}}{2}\ , && (3.110)\\
\kappa &= \beta, && (3.111)\\
C_5 &= \frac{5\,\sqrt{3\alpha}\,\beta^3}{\eta^2}\Big(5\,\beta\ {}_2F_1\left[\frac{1}{2},2,\frac{5}{2},-\frac{\eta^2}{\beta}\right] \\
&- 2\,\eta^2\ {}_2F_1\left[\frac{3}{2},3,\frac{7}{2},-\frac{\eta^2}{\beta}\right]\Big), && (3.112)\\
\eta &= 1 + \sqrt{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Επιπλέον θα πρέπει να ισχύει $\partial_\chi F|_{(\chi=0)} = 0$, επομένως $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ π.χ. $\kappa = 1$ επιβάλλοντας ότι $C_5 = 0$. Έτσι δεν υπάρχει λύση.

- Υπάρχει επιπλέον μία σταθερή λύση για την $F(\chi)$ η οποία μας δίνει

$$\begin{aligned}
F(\chi) &= \pm 1, && (3.113)\\
A(r)^2 &= 1 + \frac{r^2}{4\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{12\alpha}\sqrt{2\,r^4 - 3\,C_4\,r + 48\,\alpha\ (\alpha - C_3)}, && (3.114)\\
L(\chi) &= 2\sqrt{\alpha}\,\beta\,\sinh\frac{\chi}{2\sqrt{\alpha}}, && (3.115)\\
\Lambda_6 &= -\frac{1}{4\alpha}. && (3.116)
\end{aligned}$$

3.2.4 Μελανές Οπές πάνω στη Μεμβράνη

Προκειμένου να ολοκληρωθούν οι λύσεις μας παρουσία της μεμβράνης, θα πρέπει να λύσουμε τις συνθήκες συμβολής, οι οποίες δίνονται από τις εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη (3.72) χρησιμοποιώντας την επαγόμενη μετρική πάνω στη μεμβράνη (3.73).

Η εξίσωση (3.72) μπορεί να γραφεί σαν

$$\frac{T^{(br)\,\nu}_{\mu}|_0}{M_4^6} = \left(r_c^2 + 8\pi\ (1-\beta)\ \alpha\right)\ G^{(4)\,\nu}_{\mu}|_0 - 2\pi\ (1-\beta)\ g_\mu^{\ \nu}|_0, \qquad (3.117)$$

Επιπλέον η $(\chi\chi)$ συνιστώσα του εξαδιάστατου τανυστή Einstein υπολογισμένη στο $\chi = 0$ δίνεται από

$$-\frac{1}{2}\,R^{(4)}|_0 - \frac{\alpha}{2}\left(R^{(4)\,2} - 4R^{(4)\,2}_{\mu\nu} + R^{(4)\,2}_{\mu\nu\kappa\lambda}\right)\Big|_0 = \frac{1}{M_6^4}\,T^{(B)\,\chi}_{\chi}|_0 - \frac{\Lambda_6}{M_6^4}|_0, \qquad (3.118)$$

η οποία μας δίνει τη μορφή της $(\chi\chi)$ συνιστώσας του bulk τανυστή ενέργειας ορμής υπό τη μορφή των ποσοτήτων της μεμβράνης

$$\frac{1}{M_6^4}\,T_\chi^{(B)\,\chi}|_0 = -\frac{1}{2}\,R^{(4)}|_0 - \frac{\alpha}{2}\left(R^{(4)\,2} - 4R_{\mu\nu}^{(4)\,2} + R_{\mu\nu\kappa\lambda}^{(4)\,2}\right)\Big|_0 + \frac{\Lambda_6}{M_6^4}|_0. \qquad (3.119)$$

- <u>Για την Υποπερίπτωση 1α έχουμε:</u>

$$\begin{aligned} A^2(r) &= 1 + \frac{r^2}{L_4^2} - \frac{\zeta}{r}, \\ F(\chi) &= \cosh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}\right), \end{aligned}$$

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $L(\chi)$ είναι αυθαίρετη, και έχουμε τον ακόλουθο περιορισμό $\alpha = \frac{L_4^2}{12}$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \Lambda_6 &= -\frac{5}{12\alpha} = -\frac{5}{L_4^2}, & (3.120) \\ T_\chi^{(B)\,\chi} = T_\xi^{(B)\,\xi} &= -\frac{6\,\alpha\,\zeta^2}{r^6}\,\frac{1}{F(\chi)^4}. & (3.121) \end{aligned}$$

Τότε η (3.119) είναι συνεπής με την (3.121) ενώ η (3.117) δίνει σαν αποτέλεσμα

$$\frac{T_\mu^\nu}{M_6^4} = 3\frac{r_c^2}{L_4^2}\,\delta_\mu^\nu. \qquad (3.122)$$

- <u>Για την Υποπερίπτωση 1β έχουμε:</u>

$$\begin{aligned} A^2(r) &= 1 + \frac{r^2}{L_4^2} - \frac{\zeta}{r}, \\ F(\chi) &= \cosh\left(\frac{\chi}{L_4}\right), & (3.123) \\ L(\chi) &= \beta\,L_4\,\sinh\left(\frac{\chi}{L_4}\right), & (3.124) \end{aligned}$$

με τον περιορισμό $\alpha = \frac{L_4^2}{12}$ και

$$\begin{aligned} \Lambda_6 &= -\frac{5}{12\alpha} = -\frac{5}{L_4^2}, \\ T_\chi^{(B)\,\chi} = T_\xi^{(B)\,\xi} &= -\frac{6\,\alpha\,\zeta^2}{r^6}\,\frac{1}{F(\chi)^4}. & (3.125) \end{aligned}$$

Από τη (3.117) παίρνουμε $\frac{T_\mu^\nu}{M_6^4} = 3\frac{r_c^2}{L_4^2}\,\delta_\mu^\nu$ ενώ οι (3.119) και (3.125) είναι συνεπείς.

- Για την Υποπερίπτωση 2α ισχύει:

$$
\begin{aligned}
A^2(r) &= 1+\frac{r^2}{L_4^2} \pm \sqrt{1+\frac{C_3}{L_4^2}+\frac{C_4}{L_4^4}\,r}, \\
F(\chi) &= \cosh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}\right), \\
L(\chi) &= 2\sqrt{3\alpha}\,\beta\,\sinh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}\right), \\
\Lambda_6 &= -\frac{5}{12\alpha} = -\frac{5}{L_4^2},
\end{aligned}
$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι (3.119) και (3.117) δίνουν αντίστοιχα, αρκετά περίπλοκες εκφράσεις, εξαρτόμενες απο το r για τα T_χ^χ και T_μ^μ, όπως επίσης και για τη λύση (3.113)-(3.116).

- Για την υποπερίπταση 2β δεν έχουμε καμιά λύση.

Τα αποτελέσματά μας συνοψίζονται στον πίνακα 3.1.

3.2.5 Λύσεις δίχως καθαρή κωνική ανωμαλία: Περίπτωση $\partial_\mu\beta \neq 0$

Σε αυτή την ενότητα δεν θα θεωρήσουμε πλέον ότι στη περιοχή κοντά στη μεμβράνη, ο εγκάρσιος δυσδιάστατος χώρος σχηματίζει μία κωνική ανωμαλία. Επομένως γενικά θα θεωρίσουμε ότι $\partial_\chi\, g_{\mu\nu} \neq 0$ με τη συνάρτηση $\beta(r)$ να εξαρτάται απο το r.

Λύσεις Τύπου Μελανών Χορδών στις Bulk Εξισώσεις

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο συνδιασμός των $rr-tt$ συνιστωσών των bulk εξισώσεων (3.75) δίνει

$$
rr-tt:\; -\frac{A^2\,\ddot{L}}{r^2\,F^4\,L}\left[4\alpha-4\alpha A^2+r^2\left(F^2-4\alpha F'^2-8\alpha FF''\right)\right]. \tag{3.126}
$$

Εάν θέλουμε να διατηρήσουμε αυτή την παραγοντοποιημένη μορφή, μπορούμε να επιλέξουμε $\ddot{L}=0$, το οποίο όμως δεν πρόκειται να διευκολύνει την προσπάθειά μας. Επομένως θα θεωρήσουμε εν γένει ότι $\ddot{L}\neq 0$. Η δεύτερη πιθανότητα είναι να θεωρήσουμε την παράσταση μέσα στην αγκύλη ότι είναι ίση με μηδέν.

- Υποπερίπτωση 1: Θεωρούμε αρχικά ότι ο όρος στην αγκύλη της (3.126) είναι ίσος με μηδέν. Επομένως θα έχουμε ότι $T_r^{(B)\,r}=T_t^{(B)\,t}$ και πρέπει να λύσουμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
4l^2\alpha-4\alpha A^2 &= -\kappa r^2, & (3.127)\\
F^2-4\alpha F'^2-8\alpha FF'' &= \kappa\;, & (3.128)
\end{aligned}
$$

$A^2(r)$	$F(\chi)$	$L(\chi)$	$-\Lambda_6$	Περιορισμοί & $T^{(B)}$
$1+\frac{r^2}{L_4^2}-\frac{\zeta}{r}$	$\cosh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}\right)$	$\forall L(\chi)$	$\frac{5}{12\alpha}$	$\alpha=\frac{L_4^2}{12}$, $T_\chi^\chi=T_\xi^\xi=-\frac{6\alpha\zeta^2}{r^6 F(\chi)^4}$
$1+\frac{r^2}{L_4^2}-\frac{\zeta}{r}$	$\cosh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}\right)$	$2\sqrt{3\alpha}\beta\sinh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}\right)$	$\frac{5}{12\alpha}$	$\alpha=\frac{L_4^2}{12}$, $T_\chi^\chi=T_\xi^\xi=-\frac{6\alpha\zeta^2}{r^6 F(\chi)^4}$
$1+\frac{r^2}{L_4^2}-\frac{\zeta}{r}$	±1	$\frac{\beta}{\gamma}\sinh(\chi)$	$\frac{6}{L_4^2}\left(1-\frac{2\alpha}{L_4^2}\right)$	$=\frac{1}{L_4}\sqrt{\frac{1-\frac{L_4^2}{4\alpha}}{1-\frac{L_4^2}{12\alpha}}}$, $T_\chi^\chi=T_\xi^\xi=-\frac{6\alpha\zeta^2}{r^6}$
$1+\frac{r^2}{L_4^2}-\frac{\zeta}{r}$	±1	$\frac{\beta}{\gamma}\chi\sinh$	$\frac{6}{L_4^2}\left(1-\frac{2\alpha}{L_4^2}\right)$	$\gamma=\frac{1}{L_4}\sqrt{\frac{1-\frac{L_4^2}{4\alpha}}{1-\frac{L_4^2}{12\alpha}}}$, $T_\chi^\chi=T_\xi^\xi=-\frac{6\alpha\zeta^2}{r^6}$, $T_t^t=T_r^r=T_\theta^\theta=$ $=T_\phi^\phi=\frac{3(4\alpha-L_4^2)}{L_4^2}$
(3.100)	$\cosh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}\right)$	$2\sqrt{3\alpha}\,\beta\sinh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}\right)$	$\frac{5}{12\alpha}$	$\alpha=\frac{L_4^2}{12}$
(3.114)	±1	$2\sqrt{\alpha}\,\beta\sinh\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\alpha}}\right)$	$\frac{1}{4\alpha}$	$\alpha=\frac{L_4^2}{4}$

Πίνακας 3.1: Λύσεις Τύπου Μελανών Χορδών σε Εξαδιάστατα Πρότυπα Μεμβρανών Συνδιάστασης-2

όπου κ είναι μία σταθερά. Τότε οι λύσεις είναι τις μορφής

$$A^2(r) = 1+\frac{\kappa}{4\alpha}r^2, \tag{3.129}$$

$$F(\chi) = C_1 e^{\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}}+C_2 e^{\frac{-\chi}{2\sqrt{3\alpha}}}, \tag{3.130}$$

με $\kappa=\frac{4C_1C_2}{3}$. Εάν επαναπροσδιορίσουμε ότι $\frac{4\alpha}{\kappa}=L_4^2$ παίρνουμε

$$A^2(r) = 1+\frac{r^2}{L_4^2}\,, \tag{3.131}$$

$$F(\chi) = C_1 e^{\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}}+C_2 e^{\frac{-\chi}{2\sqrt{3\alpha}}} \quad \text{with} \quad C_1C_2=\frac{3\alpha}{L_4^2}\,. \tag{3.132}$$

Σε αυτή την περίπτωση όλες οι bulk Einstein εξισώσεις ικανοποιούνται για $\Lambda_{(6)}=-\frac{5}{12\alpha}$ χωρίς ύλη στο bulk. Επιπλέον εάν απαιτήσουμε ότι στη θέση της μεμβράνης ισχύει η συνοριακή συνθήκη $F^2(\chi=0)=1$, οι ολοκληρωτικές σταθερές μπορούν να εκφρασθούν όπως και στην υποπερίπτωση 1a με σταθερή ελλείπουσα γωνία, σε σχέση με το α και το L_4

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \pm\frac{1+\varepsilon\sqrt{1-12\frac{\alpha}{L_4^2}}}{2} \ , \\
C_2 &= \pm\frac{1-\varepsilon\sqrt{1-12\frac{\alpha}{L_4^2}}}{2} \ ,
\end{aligned}
\tag{3.133}
$$

όπου $\varepsilon = \pm 1$ ανεξάρτητα απο το $\pm$ πρόσημο στο C_1 και το C_2. Επιπλέον, η συνάρτηση $L(r,\chi)$ είναι αυθαίρετη.

- Υποπερίπτωση 2: Εν συνεχεία θα θεωρήσουμε ότι η παραγωντοποιημένη εξίσωση (3.126), δεν είναι ίση με μηδέν (π.χ. $T_r^{(B)\,r} \neq T_t^{(B)\,t}$) κάνοντας έτσι τις bulk εξισώσεις Einstein να μην είναι εν γένει επιλύσημες. Ωστόσο εάν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $A(r)$ έχει την ίδια μορφή όπως και στις προηγούμενες υποπεριπτώσεις (1α) και (1β),

$$A^2(r) = 1 + \frac{r^2}{L_4^2} - \frac{\zeta}{r} \ , \tag{3.134}$$

τότε ο συνδιασμός $\theta\theta - tt$ και $\chi\chi - \xi\xi$ των bulk εξισώσεων (3.75), μπορεί αντίστοιχα να παραγοντοποιηθεί ως

$$
\begin{aligned}
\theta\theta - tt \quad : \quad & \frac{\left(2l^2 r - 3\zeta\right)\dot{L}\left[8\alpha\zeta L_4^2 + 4\alpha r^3 + r^3 L_4^2\left(4\alpha F'^2 + 8\alpha F F'' - F^2\right)\right]}{2r^5 L_4^2 F^4 L} \\
& - \frac{12\alpha\zeta r \ddot{L}\left(r^3 + l^2 L_4^2 r - L_4^2\zeta\right)}{2r^5 L_4^2 F^4 L} \ ,
\end{aligned}
\tag{3.135}
$$

$$
\begin{aligned}
\chi\chi - \xi\xi \quad : \quad & \left(12\alpha - L_4^2 F^2 + 12\alpha L_4^2 F'^2\right) \times \\
& \times \frac{\left[\dot{L}\left(4r^3 + 2l^2 L_4^2 r - \zeta L_4^2\right) + r\,\ddot{L}\,\left(r^3 + L_4^2\, r\, l^2 - \zeta\, L_4^2\right) + 4r^2 L_4^2 F\left(F'L' - F''L\right)\right]}{r^2 L_4^4 F^4 L} \ ,
\end{aligned}
\tag{3.136}
$$

όπου η τελεία υποδηλώνει παράγωγο ως προς r. Ας σημειώσουμε εδώ ότι στον $\theta\theta - tt$ συνδιασμό ο πρώτος όρος στην αγκύλη δεν μπορεί ποτέ να είναι μηδέν, ενώ ο δεύτερος δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Επομένως εδώ έχουμε $T_r^r \neq T_\theta^\theta$. Στον $\chi\chi - \xi\xi$ συνδιασμό, ο δεύτερος όρος στην αγκύλη, επίσης δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Άρα ο μόνος όρος ο οποίος μπορεί να μηδενιστεί, ούτως ώστε να διατηρήσουμε αυτή την παραγοντοποιημένη μορφή, είναι η πρώτη αγκύλη (3.136). Τότε έχουμε ότι $F(\chi) = C_1\, e^{\frac{\chi}{2\sqrt{3\alpha}}} + C_2\, e^{\frac{-\chi}{2\sqrt{3\alpha}}}$ με $C_1\, C_2 = \frac{3\alpha}{L_4^2}$. Τέλος οι bulk εξισώσεις Einstein ικανοποιούνται για $\Lambda_{(6)} = -\frac{5}{12\alpha}$ και $\zeta = 0$, εκτός αν έχουμε τον ακόλουθο bulk τανυστή ενέργειας ορμής

$$\begin{aligned} T_t^{(B)\,t} &= -T_\theta^{(B)\,\theta} = -T_\phi^{(B)\,\phi} = \frac{2\alpha\zeta}{r^5 L F^4} \\ &\times \left[\left(3\zeta - 2l^2 r\right)\dot{L} + 2r^2 \ddot{L}\left(l^2 + \frac{r^2}{L_4^2} - \frac{\zeta}{r}\right)\right], \qquad (3.137) \\ T_r^{(B)\,r} &= \frac{2\alpha\zeta}{r^5 L F^4}\left(3\zeta - 2l^2 r\right)\dot{L}\,, \qquad (3.138) \\ T_\chi^{(B)\,\chi} &= T_\xi^{(B)\,\xi} = -\frac{6\,\alpha\,\zeta^2}{r^6}\,\frac{1}{F(\chi)^4}\,. \qquad (3.139) \end{aligned}$$

Επιπλέον εάν απαιτήσουμε στη θέση της μεμβράνης τη συνοριακή συνθήκη $F^2(\chi = 0) = 1$, οι ολοκληρωτικές σταθερές μπορούν να εκφρασθούν όπως και στην (3.133). Επιπλέον η συνάρτηση, $L(r, \chi)$ είναι αυθαίρετη.

3.2.6 Μελανές Οπές Πάνω στη Μεμβράνη

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε τη μελέτη με την είσοδο της μεμβράνης, θα πρέπει να λύσουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις συμβολής οι οποίες δίνοντα από τις εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη (3.67), χρησιμοποιώντας την επαγόμενη μετρική στη μεμβράνη (3.73). Η εξίσωση (3.67) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \frac{T_\mu^{(br)\,\nu}|_0}{M_4^6} &= \left(r_c^2 + 8\pi(1-\beta)\alpha\right)\, G_\nu^{(4)\,\mu}|_0 - 2\pi(1-\beta)\delta_\nu^\mu|_0 \\ &- \pi L(r,\chi)\, E_\nu^\mu|_0 + 2\pi\beta\alpha\, W_\nu^\mu|_0.\,, \qquad (3.140) \end{aligned}$$

Επιπλέον η $(\chi\chi)$ συνιστώσα του εξαδιάστατου τανυστή Einstein υπολογισμένη στο $\chi = 0$ δίνεται, υπό τη μορφή των ποσοτήτων της μεμβράνης, ως

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_6^4}\, T_\chi^{(B)\,\chi}\Big|_0 &= -\frac{1}{2}\, R^{(4)}\Big|_0 - \frac{\alpha}{2}\left(R^{(4)\,2} - 4R_{\mu\nu}^{(4)\,2} + R_{\mu\nu\kappa\lambda}^{(4)\,2}\right)\Big|_0 \\ &- \frac{K'}{4}\Big|_0 - \frac{1}{8}K_\mu^\nu K_\nu^\mu|_0 + \frac{g'L'}{4gL}\Big|_0 + \frac{\nabla_\mu^{(4)}\partial^\mu L}{L}\Big|_0 + \frac{\Lambda_6}{M_6^4}\Big|_0. \qquad (3.141) \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{K'}{4}\Big|_0 &= 2\left(\frac{F''}{F} - \frac{F'^2}{F^2}\right)\Big|_0 \qquad (3.142) \\ \frac{1}{8}K_\mu^\nu K_\nu^\mu|_0 &= 2\frac{F'^2}{F^2}\Big|_0, \qquad (3.143) \\ \frac{g'L'}{4gL}\Big|_0 &= \frac{F'L'}{2FL}\Big|_0, \qquad (3.144) \\ \frac{\nabla_\mu^{(4)}\partial^\mu L}{L}\Big|_0 &= \frac{1}{F^2\,L}\left[2\dot{L}\left(\frac{A^2}{r} + A\dot{A}\right) + A^2\ddot{L}\right]\Big|_0, \qquad (3.145) \end{aligned}$$

απ΄ όπου μπορούμε να δούμε ότι απαιτώντας το $L(r,\chi=0)=0$, όλοι οι όροι είναι ομαλοί εκτός από τον (3.144) ο οποίος έχει μία $\frac{1}{\chi}$ συνεισφορά. Η εν λόγω συνεισφορά μπορεί να αποφευχθεί εάν $F'|_0=0$, έτσι $\alpha=\frac{L_4^2}{12}$, για παράδειγμα εάν το β είναι σταθερό. Ένας άλλος τρόπος, που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ώστε να γίνει η σχέση (3.141) ομαλή, είναι να θεωρήσουμε μόνο την Gauss Bonnnet περίπτωση, χωρίς τον όρο επαγόμενης βαρύτητας στη δράση. Σε αυτή την περίπτωση οι bulk λύσεις είναι ακριβώς οι ίδιες και επιπλέον δεν έχουμε τη συνεισφορά των (3.142)-(3.145) στην (3.141) η οποία παίρνει την μορφή της (3.119). Τότε και για τις δύο υποπεριπτώσεις 1 και 2 εάν θέλουμε να ταιριάξουμε την $T_\chi^{(B)\,\chi}$ συνιστώσα της bulk λύσης, με αυτήν τη οποία προκύπτει από την (3.141), θα πρέπει να ισχύει η παρακάτω σχέση $\alpha=\frac{\lambda^2}{12}$, η οποία μας δίνει την περίπτωση κατα την οποία το β είναι σταθερό. Επομένως η σχέση (3.141) μεταξύ του bulk και της μεμβράνης ποσοτικοποιεί την ελλειπουσα γωνία να είναι σταθερή, ώστε στην περιοχή κοντά στην κωνική ανωμαλία ο χώρος να είναι ομαλός.

3.3 Ο ρόλος του όρου Gauss-Bonnet

Είναι γνωστό ότι από μία Ricci flat $(D-1)$-διάστατη λύση, μπορούμε να παράγουμε μία D-διάστατη λύση, η οποία να ικανοποιεί τις D-διάστατες Ricci flat εξισώσεις Einstein [15], [16],[100]. Η διαδικασία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που έχουμε μία D-διάστατη αρνητική κοσμολογική σταθερά στο bulk. Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιήθηκε στην [17], ούτος ώστε να κατασκευασθεί μία πενταδιάστατη μελανή χορδή σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 1.

Εάν έχουμε έναν όρο Gauss-Bonnet στο bulk, τότε το αποτέλεσμα αλλάζει δραματικά [29, 101]. Στην πενταδιάστατη περίπτωση, η συνέπεια των τετραδιάστατων εξισώσεων Einstein επιβάλλουν ότι η προβολή του τετραδιάστατου όρου Gauss-Bonnet πάνω στη μεμβράνη είναι μία σταθερή ποσότητα [29] [1]. Αυτό υπονοεί ότι δεν θα μπορούσαν να υπάρχουν λύσεις μελανών χορδών της μορφής [17], με έναν όρο Gauss-Bonnet στο bulk, σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 1.

Στα πρότυπα συνδιάστασης - 2, υπάρχει μία σχέση η οποία συνδέει την προβολή του όρου Gauss-Bonnet πάνω στη μεμβράνη, με τις συνιστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής στο bulk, οι οποίες αντιστοιχούν στις επιπλέον διαστάσεις [99]. Σε έξι διαστάσεις αυτή παίρνει την παρακάτω μορφή

$$-\frac{1}{2}\,R^{(4)}|_0-\frac{1}{2}\alpha\left(R^{(4)\,2}-4R^{(4)\,2}_{\mu\nu}+R^{(4)\,2}_{\mu\nu\kappa\lambda}\right)\Big|_0=\frac{1}{M_6^4}\,T_\chi^{(B)\,\chi}|_0-\frac{\Lambda_6}{M_6^4}|_0\,. \qquad (3.146)$$

Όλες οι bulk λύσεις θα πρέπει να ικανοποιούν αυτή τη σχέση η οποία δρα ως σχέση συνέπειας. Παρά το γεγονός ότι στις τέσσερεις διαστάσεις ο όρος Gauss-Bonnet είναι ένας τοπολογικά αναλλοίωτος όρος, όταν προβάλλεται πάνω στη μεμβράνη, αφήνει το

[1] Μία παρόμοια σχέση, η οποία επιτεύχθηκε στην [29] και εμπεριέχει τον όρο Gauss-Bonnet παρουσιαστηκε στην [102] σε ένα διαφορετικό πλαίσιο.

ίχνος του μέσω της παραπάνω σχέσης. Για την Schwarzschild-AdS λύση της μορφής (3.80) το τετράγωνο του τανυστή Riemann έχει ως εξής

$$R^2_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{192\zeta^2 e^{\frac{4\chi}{L_4}}}{(1+e^{\frac{2\chi}{L_4}})^4 r^6} + \frac{60}{L_4^4} \,, \qquad (3.147)$$

ενώ το βαθμωτό Ricci και ο τανυστής Ricci είναι σταθερές ποσότητες. Επομένως αν θέλουμε να ισχύει η σχέση (3.146), bulk τανυστής ενέργειας ορμής $T_\chi^{(B)\,\chi}|_0$ πρέπει να έχει μία συμπεριφορά της μορφής $1/r^6$ με τους σωστούς πάντα συντελεστές. Αυτό είναι ακριβώς που συμβαίνει αν πάρουμε υπ'οψην μας το αποτέλεσμα (3.86). Επιπλέον είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε οτι η σχέση (3.146) ικανοποιείται, αφού αντικαταστήσουμε τις αντίστοιχες ποσότητες. Επομένως η παρουσία του όρου Gauss-Bonnet στο bulk, ο οποίος δρά ως μία μορφή πηγής, λόγω τις αποκλείνουσας φύσης του, επιβάλλει τη μορφή της ύλης η οποία πρέπει να εισαχθεί στο bulk, έτσι ώστε να υποστηρίζεται μία λύση μελανής οπής στη μεμβράνη. [2].

Στην την πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση, όπου πάνω στην μεμβράνη έχουμε μία Schwarzschild-AdS μελανή οπή, βρήκαμε ότι πρέπει να έχουμε μία μη συμβατική μορφή ύλης στις επιπλέον δύο διαστάσεις η οποία δίνεται από τη σχέση (3.86). Αυτές οι συνιστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής εξαρτώνται από την ακτινική απόσταση, r πάνω στη μεμβράνη αλλά και από την ακτινική απόσταση χ του εγκάρσιου δυσδιάστατου χώρου, μέσω της συνάρτησης $F(\chi)$. Επομένως εάν μετακινηθούμε μακρυά από τη μεμβράνη (για μεγάλα χ), λόγω της μορφής της συνάρτησης στέβλωσης (Πίνακας 2), ο τανυστής ενέργειας ορμής αποσυνδέεται. Αυτό σημαίνει ότι πάνω στη μεμβράνη έχουμε μία κανονική τετραδιάστατη βαρύτητα χωρίς διορθώσεις, οι οποίες να προέρχονται από το bulk. Σε αντίθεση, κοντά στη μεμβράνη ο $1/r^6$ κυριαρχεί (η συνάρτηση στρέβλωσης είναι μία σταθερά) μεταβάλοντας έντονα το τετραδιάστατο περιεχόμενο της βαρύτητας στη μεμβράνη.

Στις πέντε διαστάσεις ισχύει μία παρόμοια σχέση με (3.146). Τότε, εάν χρησιμοποιήσουμε τη λύση της τρισδιάστατης μελανής οπής του Πίνακα 1, η αντίστοιχη σχέση ικανοποιείται ταυτοτικά. Ο λόγος είναι ότι η μελανή οπή BTZ δεν έχει μία ανωμαλία στο $r = 0$ [104] και επομένως όλα τα αναλλοίωτα καμπυλότητας τα οποία εμφανίζονται στην εν λόγω σχέση είναι σταθερές. Επιπλέον η μελανή οπή BTZ δεν χρειάζεται μάζα στο bulk [105]. Έτσι η αντίστοιχη σχέση της (3.146) στις πέντε διαστάσεις, ικανοποιείται άμμεσα, επιτρέποντας ουσιαστικά την ύπαρξη λύσεων μελανών χορδών σε πενταδιάστατα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2, με έναν όρο Gauss-Bonnet στο bulk.

Στην περίπτωση της BTZ μελανής οπή, σύμμορφα συζευγμένης μέ ένα βαθμωτό πεδίο, η εξέταση πρέπει να γίνει με περισσότερη προσοχή. Η συγκεκριμένη μελανή οπή έχει μία $1/r$ συμπεριφορά, και επομένως ένα μη σταθερό βαθμωτό Krestschmann, το οποίο είναι ανάλογο με $1/r^6$. Αυτό σημαίνει ότι αν θέλουμε να ισχύει η εν λόγω σχέση, ο συνδιασμός του τετραγώνου του τρισδιάστατου βαθμωτού Ricci

[2] Μελανές οπές σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης -2 έχουν εξετασθεί επίσης στο πλαίσιο της [103].

και του τετραγώνου του τανύστη Ricci, θα πρέπει να είναι επίσης ανάλογα με $1/r^6$, με τους κατάλληλους πάντα συντελεστές. Τις συγκεκριμένες ποσότητες, μπορούμε να τις υπολογίσουμε αφού λύσουμε τις τρισδιάστατες εξισώσεις Einstein στη μεμβράνη (3.67). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, μια μη συμβατική μορφή ύλης θα πρέπει να εισαχθεί, αυτή τη φορά στη μεμβράνη και είναι αυτό ακριβώς που συμβαίνει όπως επιβεβαιώθηκε στην [105] (σχέση (3.62)).

Στην εν λόγω περίπτωση, η ύλη που χρειάζεται ώστε να αποκτήσουμε μία τέτοια μελανή οπή πάνω στη μεμβράνη, αντστοιχεί σε ένα βαθμωτό πεδίο σύμμορφα συζευγμένο με την BTZ μελανή οπή. Στις έξι διαστάσεις δεν είναι ξεκάθαρο σε τι είδους ύλη αντιστοιχεί ο τανυστής ενέργειας ορμής τον οποίο βρήκαμε, ώστε να έχουμε μία Schwarzschild-AdS μελανή οπή στη μεμβράνη.

3.4 Συμπεράσματα

Στις παραπάνω παραγράφους μελετήσαμε λύσεις μελανών οπών, εντοπισμένες πάνω σε μεμβράνες σε πρότυπα συνδιάστασης - 2 και την επέκτασή τους σε ένα AdS bulk. Η έρευνα επικεντρώθηκε για πρότυπα σε πέντε και έξι διαστάσεις. Για να αναπαράγουμε τις εξίσωσεις του Einstein πάνω στη μεμβράνη, είναι αναγκαίο να συμπεριλάβουμε και έναν όρο Gauss-Bonnet στη δράση. Επιπρόσθετα θεωρήσαμε στη δράση μας και έναν επαγόμενο όρο βαρύτητας της μεμβράνης.

Στην πενταδιάστατη περίπτωση, βρήκαμε μία τρισδιάστατη BTZ μελανή οπή στη μεμβράνη, με τη λύση να επεκτείνεται επίσης και στον εγκάρσιο χώρο, σχηματίζοντας μία μελανή χορδή. Επιπρόσθετα μεταξύ άλλων λύσεων, βρήκαμε και μία λύση στη μεμβράνη, η οποία αντιστοιχεί σε μία BTZ μελανή οπή, σύμμορφα συζευγμένη με ένα βαθμωτό πεδίο. Ωστόσο για να είμαστε συνεπείς με την ακριβή τρισδιάστατη περιγραφή θα πρέπει η θεώρηση του βαθμωτού πεδίου να γίνει για μικρές ακτινικές αποστάσεις.

Για την εξαδιάστατη περίπτωση βρήκαμε μία τετραδιάστατη μελανή οπή στη μεμβράνη, με τη λύση και πάλι να επεκτείνεται στον εγκάρσιο χώρο. Σε αυτή την περίπτωση όμως, λόγω του μη σταθερού βαθμωτού Kretsmann θα πρέπει να έχουμε μία μη συμβατική μάζα στον εγκάρσιο χώρο ώστε να αντισταθμίσει την παρουσία της μελανής οπής στη μεμβράνη. Τέλος επεκτείναμε τη μελέτη μας και σε πρότυπα συνδιάστασης - 2, στα οποία η ελλείπουσα γωνία είναι μη σταθερή.

Κεφάλαιο 4

Διαταραχες σε Μελανές Χορδές Συνδιάστασης - 2

Έχοντας μελετήσει στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, τις λύσεις μελανών χορδών σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2 στις πέντε και έξι διαστάσεις, θα συνεχίσουμε εστιάζοντας στην μελέτη της ευστάθειας της πενταδιάστατης μελανής χορδής, η οποία διεξήχθει στην [107]. Γενικότερα η μελέτη των μελανών οπών σε πρότυπα με επιπλέον διαστάσεις έχει εξετασθεί επαρκώς στην [108], ενώ παράλληλα η κατανόηση τις ευστάθειας των μελανών χορδών και μελανών δακτυλίων (black rings) έχει βελτιωθεί σημαντικά [30, 31].

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο πέρα από το θέμα της ευστάθειας της πενταδιάστατης μελανής χορδής σε ένα πρότυπο μεμβρανών συνδιάστασης - 2 με όρους Gauss-Bonnet στο bulk, θα μας αποσχολήσει γενικότερα το εν λόγο ζήτημα για θεωρίες βαρύτητας με επιπλέον όρους καμπυλότητας στη δράση. Στην περίπτωση των προτύπων μεμβρανών συνδιάστασης - 1, η επέκταση μίας μελανής οπής Schwarzschild στο bulk μελετήθηκε στην [17]. Η έρευνα για την ευστάθεια της λύσης έδειξε ότι είναι ασταθής, κάτω από κλασικές γραμμικές διαταραχές της μετρικής [18, 19, 20]. Μία χαμηλοδιάστατη εκδοχή μίας τρισδιάστατης μελανής οπής σε ένα πρότυπο μεμβρανών συνδιάστασης - 1 θεωρήθηκε στην [109]. Η θερμοδυναμική μελέτη για την ευστάθεια της λύσης έδειξε ότι η συγκεκριμένη μελανή χορδή παραμένη σε μία ευσταθή κατάσταση, εφόσσον το εγκάρσιο προς τη μεμβράνη μήκος της είναι συγκρίσιμο με με την ακτίνα του AdS χώρου. Πάνω από αυτό το όριο η λύση γίνεται ασταθής, λόγο της αστάθειας Gregory-Laflamme [18, 19], με αποτέλεσμα να έχουμε εντοπισμένες BTZ μελανές οπές πάνω στη μεμβράνη. Επιπρόσθετα η μελέτη των BTZ μελανών χορδών σε πρότυπα συνδιάστασης - 1 εξετάσθηκε και στην [110]

Ένας τρόπος για να μελετήσουμε την ευστάθεια είναι και η εύρεση των ιδιοτιμών του τελεστή Lichnerowicz για μία δεδομένη διαταραχή της μετρικής. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα εξάγουμε την τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz υπό την παρουσία όρων Gauss-Bonnet. Θα κάνουμε εφαρμογή της μεθόδου στην περίπτωση μίας εξαδιάστατης σφαιρικά συμμετρικής μελανής οπής της θεωρίας Gauss-Bonnet, επαναπροσδιορίζοντας τα αποτελέσματα της [111], για τις διαταραχές τανυστικού τύπου (tensor perturbations).

Ακολούθως θα χρησιμοποιήσουμε την τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz για τη μελέτη των γραμμικών διαταραχών της πενταδιάστατης μελανής χορδής σε ένα πρότυπο μεμβρανών συνδιάστασης - 2 [105], μακρυά από το όριο Chern-Simons. Θα δούμε ότι η γνώση της εξίσωσης Lichnerowicz μπορεί να μας δώσει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την ευστάθεια ενός συστήματος το οποίο χαρακτηρίζεται από αρκετά πολύπλοκες συζευγμένες διαφορκές εξισώσεις. Στην περίπτωση όπου έχουμε πρότυπα συνδιάστασης - 2, η μελανή χορδή μπορεί να επεκταθεί σε δύο επιπλέον εγκάρσιες διαστάσεις, επομένως διαισθητικά κανείς θα περίμενε ότι οι διαταραχές της μετρικής θα έχουν πολύ πιο σοβαρά προβλήματα από ότι οι συμβατικές μελανές χορδές σε πρότυπα συνδιάστασης - 1, στα οποία έχουμε μία επιπλέον εγκάρσια διάσταση.

Κατα την ανάλυση που θα ακολουθήσει θα δούμε ότι οι τανυστικές διαταραχές (tensor perturbations) της τροποποιημένης εξίσωσης Lichnerowicz, λόγω των συμμετριών της μελανής χορδής για το πρότυπο συνδιάστασης - 2, δεν μπορούν να μας δώσουν κάποια πληροφορία, υποδεικνύοντάς μας ότι είτε δεν έχουμε τανυστικούς βαθμούς ελευθερίας στο σύστημά μας, είτε ότι είμαστε αντιμέτωποι με ένα πρόβλημα ισχυρής σύζευξης. Για τις διανυσματικές διαταραχές (vector perturbations) θα δούμε ότι έχουμε ένα εκφυλισμό των συνιστωσών στο bulk, ενώ παράλληλα δεν θα μπορέσουμε να εξάγουμε κάποια πληροφορία για τη μεμβράνη. Το γεγονός αυτό θα μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι έχουμε ασταθείς συνιστώσες. Για να υπολογίσουμε τις βαθμωτές διαταραχές (scalar perturbations) θα εφαρμόσουμε την τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz, στο βαθμωτό μέρος των διαταραχών της μετρικής. Λόγω της μορφής της μετρικής της μελανής χορδής, τα αποτελέσματα είναι τα ίδια με το να εξετάσουμε την ευστάθεια της λύσης μέσω της εξίσωσης Klein-Gordon. Και οι δύο μέθοδοι υποδεικνύουν την ευστάθεια του συστήματος κάτω από τις εν λόγω διαταραχές.

Μία επιπλέον πληροφορία που μπορούμε να πάρουμε μέσω της τροποποιημένης εξίσωσης Lichnerowicz, είναι η συμπεριφορά της λύσης κοντά στο όριο Chern-Simons. Στη θεωρία Gauss-Bonnet έχουμε δύο κλάδους σφαιρικά συμμετρικών λύσεων στο κενό: τον Schwarzschild-AdS κλάδο (γνωστό και ως το όριο Einstein) και τον κλάδο χορδών (γνωστό και ως το όριο Gauss-Bonnet) [115]. Οι δύο κλάδοι συγκλίνουν στό όριο Chern-Simons, κατα το οποίο η θεωρία γίνεται ισχυρά συζευγμένη. Όπως θα δούμε και στην περίπτωσή μας το όριο Chern-Simons κάνει αισθητή την παρουσία του μέσω ενός συντελεστή στις εξισώσεις διαταραχών. Το όριο κατα το οποίο αυτός ο συντελεστής μηδενίζεται είναι ακριβώς το σημείο ένδειξης του προβλήματος ισχυρής σύζευξης, το οποίο και σηματοδοτεί την αδυναμία εφαρογής οποιασδήποτε μεθόδου διαταραχών.

Η δομή του κεφαλαίου έχει ώς εξής: Στην πρώτη παράγραφο παρουσιάσουμε το γενικό φορμαλισμό για τις γραμμικές διαταραχές της μετρικής και θα εξάγουμε την εξίσωση Lichnerowicz. Στην δεύτερη παράγραφο θα επεκτείνουμε τον φορμαλισμό εισάγοντας και τον επιπλέον όρο Gauss-Bonnet, καταλλήγοντας σε μία τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz, όπου λόγω της παρουσίας του όρου Gauss-Bonnet έχουμε την εμφάνιση επιπλέον όρων. Ακολούθως στην τρίτη παράγραφο θα κάνουμε εφαρμογή της μεθόδου σε μία σφαιρικά συμμετρική λύση της θεωρίας Gauss-Bonnet. Στις παραγράφους τέσσερα έως και επτά θα ασχοληθούμε με τις βαθμωτές (scalar), διανυσματικές (vector) και τανυστικές (tensor) διαταραχές της μελανής χορδής στο πενταδιάστατο πρότυπο συνδιάστασης - 2 και τέλος θα κλείσουμε το κεφάλαιο με τα συμπεράσματά μας.

4.1 Τελεστής Lichnerowitz

Σε αυτή την εννότητα θα μελετήσουμε τον γενικό φορμαλισμό των γραμμικών διαταραχών της μετρικής και θα εξάγουμε την D-διάστατη εξίσωση Lichnerowitz [20]. Με έναυσμα αυτή την εξίσωση, στη συνέχεια του κεφαλαίου θα εξάγουμε την τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowitz, υπό την παρουσία του όρου Gauss-Bonnet.

4.1.1 Γενικός φορμαλισμός γραμμικών διαταραχών της μετρικής

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία D-διάστατη πολλαπλότητα $(\mathcal{B}, \tilde{g})$. Η μελέτη της ευστάθειας μιας λύσης των εξισώσεων Einstein, μπορεί να αναχθεί στην αναζήτηση και λύση, μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης, της μορφής μίας εξίσωσης Schrödinger,την οποία θα ονομάσουμε εξίσωση Lichnerowicz. Αυτό σημαίνει οτι θα πρέπει να καθορίσουμε το φάσμα των λύσεων του τελεστή Lichnerowicz χρησιμοποιώντας συμμετρικά τανυστικά πεδία, τα οποία ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες (transverse, traceless symmetric tensor fields) στην πολλαπλότητα $\mathcal{B}$. Θα εξετάσουμε αρχικά το γενικό φορμαλισμό και στη συνέχεια θα επεκταθούμε και στην περίπτωση που έχουμε και όρους Gauss-Bonnet. Θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό του τανυστή Riemann, σύμφωνα με την [33],

$$\nabla_C \nabla_D T^A - \nabla_D \nabla_C T^A = R^A_{BCD} T^B \tag{4.1}$$

και θα υποθέσουμε την ακόλουθη γραμμική διαταραχή σε ένα D-διάστατο υπόβαθρο $\bar{g}_{MN}$

$$g_{MN} = \bar{g}_{MN} + \varepsilon\, h_{MN}, \tag{4.2}$$

όπου οι Λατινικοί κεφαλαίοι χαρακτήρες M, N παίρνουν τιμές στον D-διάστατο χώρο και όλες οι μη διαταραχόμενες ποσότητες μπορούν να γραφούν ως $\bar{X}$. Επιπλέον θα αναλύσουμε τον τανυστή Ricci και τον D-διάστατο τανυστή ενέργειας ορμής T_{MN} αντίστοιχα ως εξής

$$\begin{aligned} R_{MN} &= \bar{R}_{MN} + \varepsilon\, \delta R_{MN}, & (4.3)\\ T_{MN} &= \bar{T}_{MN} + \varepsilon\, \delta T_{MN}. & (4.4) \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein είναι οι

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} R\, g_{MN} = T_{MN}, \tag{4.5}$$

και παίρνοντας το ίχνος τους, μπορούν να γραφούν σαν

$$R_{MN} = T_{MN} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{D-2}\,g_{MN}\,T^{L}_{L}. \tag{4.6}$$

Οι μηδενικής τάξης εξισώσεις (ή αλλιώς λύση υποβάθρου) είναι οι

$$\bar{R}_{MN} = \bar{T}_{MN} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{D-2}\,\bar{g}_{MN}\,\bar{T}^{L}_{L}, \tag{4.7}$$

ενώ η πρώτης τάξης εξισώσεις Einstein (εξισώσεις διαταραχής) έχουν την παρακάτω μορφή

$$\delta R_{MN} = \delta S_{MN}. \tag{4.8}$$

Γενικά ισχύει ότι

$$\delta\Gamma^{A}_{B\Gamma} = \frac{1}{2}\bar{g}^{AK}\left(h_{KB;\Gamma} + h_{K\Gamma;B} - h_{K;B\Gamma}\right), \tag{4.9}$$

όπου $\Gamma^{A}_{B\Gamma}$ είναι τα σύμβολα Christofell, ενώ για τον τανυστή Riemann έχουμε

$$\begin{aligned}
\delta R^{A}{}_{B\Gamma\Delta} &= \left(\delta\Gamma^{A}_{B\Delta}\right)_{;\Gamma} - \left(\delta\Gamma^{A}_{B\Gamma}\right)_{;\Delta} \Rightarrow \qquad (4.10)\\
&= \frac{1}{2}\bar{g}^{AK}(h_{KB;\Delta;\Gamma} + h_{K\Delta;B;\Gamma} - h_{B\Delta;K;\Gamma}\\
&\qquad - h_{KB;\Gamma\Delta} - h_{K\Gamma;B;\Delta} + h_{B\Gamma;K;\Delta}). \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Τέλος για τον τανυστή Ricci έχουμε

$$\delta R_{MN} = \left(\delta\Gamma^{\Delta}_{MN}\right)_{;\Delta} - \left(\delta\Gamma^{\Delta}_{M\Delta}\right)_{;N} \tag{4.12}$$

επομένως

$$\delta R_{MN} = -\frac{1}{2}\left(\Box h_{MN} + \nabla_N\nabla_M\, h - \nabla^K\nabla_M\, h_{KN} - \nabla^K\nabla_N\, h_{MK}\right), \tag{4.13}$$

με το $\Box h_{MN} = \bar{g}^{AB}\,\nabla_A\,\nabla_B h_{MN}$, και

$$\delta S_{MN} = \delta T_{MN} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{D-2}\left(\bar{g}_{MN}\,\bar{g}^{KL}\,\delta T_{KL} + \bar{g}_{MN}\,h^{PS}\,\bar{T}_{PS} - h_{MN}\,\bar{T}^{L}_{L}\right). \tag{4.14}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι οι εξισώσεις Einstein (4.5) ικανοποιούνται για $g_{MN} = \bar{g}_{MN} + \varepsilon\, h_{MN}$ και $T_{MN} = \bar{T}_{MN} + \varepsilon\,\delta T_{MN}$. Για να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις μας επιλέγουμε τη βαθμίδα de Donder η οποία ουσιαστικά είναι οι, traceless και transverse, συνθήκες βαθμίδας, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις

$$\bar{g}^{MN}\,h_{MN} = 0, \tag{4.15}$$

$$\nabla^{M}\,h_{MN} = 0. \tag{4.16}$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω βαθμίδας, ο τανυστής Ricci με όρους πρώτης τάξης (4.13), μπορεί να γραφεί ως

$$\delta R_{MN} = -\frac{1}{2}\left(\Box h_{MN} - 2\,\bar{R}_{KNML}\,h^{KL} - \bar{R}^{K}_{M}\,h_{KN} - \bar{R}^{K}_{N}\,h_{MK}\right). \tag{4.17}$$

Στο κενό ($T_{MN} = 0$), οι εξισώσεις Einstein καταλλήγουν στη σχέση $R_{MN} = 0$, της οποίας το μέρος το οποίο αντιστοιχεί στους όρους μηδενικής τάξης $\bar{R}_{MN} = 0$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εξίσωση των όρων πρώτης τάξης (4.17), ώστε να αποκτήσουμε την *εξίσωση Lichnerowicz για γραμμικές διαταραχές στο κενό*

$$\Box h_{MN} - 2\,R_{KMNL}\,h^{KL} = 0. \tag{4.18}$$

Όταν επιπλέον έχουμε και μία κοσμολογική σταθερά, για παράδειγμα ($T_{MN} = -\Lambda_D\,g_{MN}$) οι εξισώσεις μηδενικής και πρώτης τάξης (4.6) αντίστοιχα είναι οι εξης

$$\bar{R}_{MN} = -\tilde{\Lambda}_D\,\bar{g}_{MN}, \tag{4.19}$$

$$\delta R_{MN} = -\tilde{\Lambda}_D\,h_{MN}, \tag{4.20}$$

όπου $\tilde{\Lambda}_D = \frac{D-3}{D-2}\,\Lambda_D$. Χρησιμοποιώντας την (4.19) στην (4.17), η εξίσωση πρώτης τάξης (4.20) καταλλήγει και πάλι στην εξίσωση Lichnerowicz (4.18).

4.2 Τροποποιημένος τελεστής Lichnerowicz με όρους Gauss-Bonnet

Θα θέλαμε να εξασφαλίσουμε την αντίστοιχη εξίσωση Lichnerowicz, στην περίπτωση όπου ένας όρος Gauss-Bonnet εμπεριέχεται επίσης στην πολλαπλότητα $\mathcal{B}$. Στις πέντε ή και στις έξι διαστάσεις, ο συγκεκριμένος όρος έχει την ακόλουθη μορφή στη δράση

$$\alpha\mathcal{L}_{GB} = \alpha\left(R^2 - 4R_{KL}\,R^{KL} + R_{KLPQ}R^{KLPQ}\right), \tag{4.21}$$

όπου $\alpha(\geq 0)$ είναι η σταθερά σύζευξης Gauss-Bonnet. Η μεταβολή του συγκεκριμένου όρου μας δίνει τον όρο Gauss-Bonnet $\alpha\,H_{MN}$ στις εξισώσεις πεδίου, όπου H_{MN} είναι ο τανυστής Gauss-Bonnet,

$$G_{MN} - \alpha H_{MN} = -\Lambda_D\,g_{MN}. \tag{4.22}$$

Για ευκολία θα χωρίσουμε τον συγκεκριμένο τανυστή στους παρακάτω πέντε όρους $H_{MN_i}(i = 1, ..., 5)$ οι οποίοι είναι

$$H_{MN_1} = \frac{1}{2}\,g_{MN}\,\mathcal{L}_{GB}, \tag{4.23}$$

$$H_{MN_2} = -2R\,R_{MN}, \tag{4.24}$$

$$H_{MN_3} = +4R_{MK}\,R^{K}_{N}, \tag{4.25}$$

$$H_{MN_4} = +4R^{K}_{MLN}\,R^{L}_{K}, \tag{4.26}$$

$$H_{MN_5} = -2R_{MKLP}\,R^{KLP}_{N}. \tag{4.27}$$

Όσον αφορά τις γραμμικές διαταραχές, αναλύουμε τον τανυστή Gauss-Bonnet ως εξής

$$H_{MN} = \bar{H}_{MN} + \varepsilon\, \delta H_{MN} = \sum_{i=1}^{5} \left(\bar{H}_{MN_i} + \varepsilon\, \delta H_{MN_i} \right). \tag{4.28}$$

Μετά από μία σειρά μακροσκελών υπολογισμών, κατα τους οποίους χρησιμοποιήσαμε τις συνθήκες βαθμίδας (4.15) και (4.16), βρίσκουμε ότι η πρώτης τάξης συνεισφορά των πέντε όρων του τανυστή Gauss-Bonnet είναι η παρακάτω

$$\begin{aligned}
\delta H_{MN_1} &= \frac{1}{2} h_{MN} \mathcal{L}_{GB} - \bar{g}_{MN}\, h^{KL}\, \bar{R}_{KL}\, \bar{R} + 2\bar{g}_{MN}\, \bar{R}^{KL} \Box\, h_{KL} \\
&\quad -4\bar{g}_{MN}\, \bar{R}^{KL}\, \bar{R}^{P}{}_{KL}{}^{Q}\, h_{QP} - \bar{g}_{MN}\, \bar{R}^{KLPQ}\, h_{KR}\, \bar{R}^{R}{}_{LPQ} \\
&\quad +2\bar{g}_{MN}\, \bar{R}^{KLQP}\, \nabla_Q \nabla_L\, h_{KP}, &(4.29)\\
\delta H_{MN_2} &= 2h^{KL}\, \bar{R}_{KL}\, \bar{R}_{MN} + \bar{R}\, \Box\, h_{MN} - 2\bar{R}\, \bar{R}^{K}{}_{MN}{}^{L}\, h_{LK} \\
&\quad -\bar{R}\, \bar{R}^{K}_{N}\, h_{MK} - \bar{R}\, \bar{R}^{K}_{M}\, h_{NK}, &(4.30)\\
\delta H_{MN_3} &= 2\bar{R}^{K}_{N} \left(-\Box\, h_{MK} + 2\bar{R}^{L}{}_{MK}{}^{Q}\, h_{LQ} + \bar{R}^{L}{}_{K}\, h_{ML} \right) \\
&\quad +2\bar{R}^{K}_{M} \left(-\Box\, h_{KN} + 2\bar{R}^{L}{}_{NK}{}^{Q}\, h_{LQ} + \bar{R}^{L}_{K}\, h_{LN} \right), &(4.31)\\
\delta H_{MN_4} &= 2\bar{R}^{KL} (-\bar{R}^{P}{}_{KLN}\, h_{MP} + \nabla_L \nabla_M\, h_{KN} - \nabla_L \nabla_K\, h_{MN} \\
&\quad -\nabla_N \nabla_M\, h_{KL} + \nabla_N \nabla_K\, h_{ML}) \\
&\quad +2\bar{R}_{KMLN} \left(-h^{LP}\, \bar{R}^{K}_{P} - \Box\, h^{KL} - 2\bar{R}^{LPKQ}\, h_{QP} \right), &(4.32)\\
\delta H_{MN_5} &= +2\bar{R}_{N}^{KLP} \left(\nabla_P \nabla_K\, h_{ML} - \nabla_P \nabla_M\, h_{KL} \right) \\
&\quad +2\bar{R}_{M}^{KLP} \left(\nabla_P \nabla_K\, h_{LN} - \nabla_P \nabla_N\, h_{KL} \right) \\
&\quad -\bar{R}_{MKLP}\, \bar{R}^{QKLP}\, h_{QN} + 4\bar{R}_{M}^{KLP}\, \bar{R}_{NKQP}\, h^{Q}{}_{L} \\
&\quad -\bar{R}_{N}^{KLP}\, \bar{R}_{QKLP}\, h^{Q}{}_{M}. &(4.33)
\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein (4.22), μπορούν επίσης να γραφούν σαν

$$R_{MN} = \alpha\, H_{MN} - \Lambda_D\, g_{MN} - \frac{1}{D-2}\, g_{MN}\, \left(\alpha\, H - D\, \Lambda_D \right), \tag{4.34}$$

όπου οι εξισώσεις μηδενικής τάξης είναι οι παρακάτω

$$\bar{R}_{MN} = \alpha\, \bar{H}_{MN} - \Lambda_D\, \bar{g}_{MN} - \frac{1}{D-2}\, \bar{g}_{MN}\, \left(\alpha\, \bar{H} - D\, \Lambda_D \right). \tag{4.35}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.35) μαζί με τη σχέση (4.17), οι εξισώσεις διαταραχών πρώτης τάξης μπορούν να γραφούν με την ακόλουθη μορφή

$$\Box\, h_{MN} - 2\bar{R}_{KMNL}\, h^{KL} = \alpha\, \mathcal{B}_{MN}, \tag{4.36}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{MN} = -2\delta H_{MN} + \frac{2}{D-2}\, \bar{g}_{MN}\, \bar{g}^{KL} \delta H_{KL} - \frac{2}{D-2}\, \bar{g}_{MN}\, \bar{H}_{KL}\, h^{KL} \\
+\bar{H}^{K}_{M}\, h_{KN} + \bar{H}^{K}_{N}\, h_{MK}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Υπολογίζοντας τη μεταβολή του τανυστή Gauss-Bonnet, χρησιμοποιήσαμε την αρμονική βαθμίδα (harmonic gauge). Παρόλ' αυτά λόγο της μορφής του (4.37) και των μεταβολών (4.29-4.33), μπορούμε να απλοποιήσουμε μερικούς όρους.

Ο δεύτερος όρος της (4.37) γράφεται σαν

$$\begin{aligned}\bar{g}^{KL}\delta H_{KL} &= (2-D)\, h^{MN}\bar{R}_{MN}\bar{R} + (8-2D)\,\bar{R}^{MN}\Box\, h_{MN} \\ &+ (4D-10)\,\bar{R}^{MS}\bar{R}^{P}{}_{M}{}^{N}{}_{S}h_{PN} - (D-2)\,\bar{R}^{ABMS}\bar{R}^{P}{}_{BMS}h_{AP} \\ &+ 4\bar{R}^{LP}\bar{R}^{T}{}_{P}h_{LT} + (2D-8)\,\bar{R}^{ABMS}\nabla_M\nabla_B h_{AS} \qquad (4.38)\end{aligned}$$

ενώ ο τρίτος όρος γίνεται

$$\begin{aligned}\bar{H}_{KL}\, h^{KL} &= -\bar{R}\,\bar{R}_{KL}\, h^{KL} + 4\bar{R}_{KP}\,\bar{R}_{L}{}^{P}\, h^{KL} \\ &+ 4\bar{R}^{M}{}_{KPL}\,\bar{R}_{M}{}^{P}\, h^{KL} - 2\bar{R}_{KMNP}R_{L}{}^{MNP}\, h^{KL} \qquad (4.39)\end{aligned}$$

Η σχέση (4.36) είναι η *τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz.* Η διαφορά της σε σχέση με την (4.18) είναι η εμφάνιση του όρου $\alpha\,\mathcal{B}_{MN}$, λόγο της παροσουσίας του όρου Gauss-Bonnet στη δράση

Ένας άλλος τρόπος, ούτως ώστε να καταλλήξουμε στα ακριβώς ίδια αποτελέσματα, είναι να θεωρήσουμε τη διαταραχή εξάρχής της εξίσωσης (4.22). Ωστόσο η τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz (4.36) είναι αρκετά χρήσιμη μιάς και μας δίνει απ' ευθείας τις εξισώσεις διαταραχής μόλις καθοριστεί η μορφή της διαταραχής της ίδιας.

4.3 Διαταραχές μελανών οπών με όρους Gauss-Bonnet

Ως μία πρώτη εφαρμογή του φορμαλισμού που αναπτύξαμε παραπάνω, θα εξετάσουμε τις διαταραχές σε σφαιρικά συμμετρικές λύσεις των εξισώσεων Einstein-Gauss-Bonnet

$$G_{MN} - \alpha H_{MN} = -\Lambda_D\, g_{MN}, \qquad (4.40)$$

όπου G_{MN} είναι ο τανυστής Einstein και H_{MN} είναι ο τανυστής Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned}H_{M}^{N} &= \frac{1}{2}g_{M}^{N}\left(R^2 - 4R_{KL}\,R^{KL} + R_{KLPQ}R^{KLPQ}\right) - 2R\,R_{M}^{N} \qquad (4.41) \\ &+ 4R_{MK}\,R^{NK} + 4R_{KMP}{}^{N}\,R^{KP} - 2R_{MKLP}\,R^{NKLP}.\end{aligned}$$

Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε την ακόλουθη σχέση

$$\delta G_{A}^{\ B} - \alpha\delta H_{A}^{\ B} = -\Lambda_D\delta g_{A}^{\ B}. \qquad (4.42)$$

Στην transverse traceless βαθμίδα η μεταβολή του τανυστή Einstein έχει ως εξής

$$\begin{aligned}\delta G_{AB} &= -\frac{1}{2}\left(\Box h_{AB} + 2R^{L}{}_{A}{}^{K}{}_{B}h_{LK} - R^{L}{}_{A}h_{BL} - R^{L}{}_{B}h_{AL}\right) \\ &- \frac{1}{2}h_{AB}R + \frac{1}{2}g_{AB}h^{KL}R_{KL} \qquad (4.43)\end{aligned}$$

και
$$\delta G_A^{\;B} = g^{BK}\delta G_{AK} - h^{BK}G_{AK}. \tag{4.44}$$
Επιπλέον,
$$\delta H_A^{\;B} = g^{BK}\delta H_{AK} - h^{BK}H_{AK}, \tag{4.45}$$
όπου οι μεταβολή δH_{AK} δίνεται από τις σχέσεις (4.29)-(4.33), οι οποίες εμπεριέχουν ήδη την transverse traceless βαθμίδα. Επιπρόσθετα, είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι
$$\delta g_A^{\;B} = g^{BK}h_{AK} - h^{BK}g_{AK} = 0. \tag{4.46}$$

Θα θεωρήσουμε σφαιρικά συμμετρικές λύσεις μελανών οπών των εξισώσεων Einstein - Gauss - Bonnet σε έξι διαστάσεις. Η διαδικασία είναι ακριβώς η ίδια και για την περίπτωση των πέντε διαστάσεων. Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι
$$\delta G'^{\;B}_A + \alpha'\,\delta H'^{\;B}_A = 0, \tag{4.47}$$
όπου $\delta H'^{\;B}_A$ δίνεται από τις (4.29)-(4.33) οι οποίες συμπίπτουν ακριβώς με τις εξισώσεις οι οποίες έχουν εξαχθεί στην [111] για τανυστικές διαταραχές με τις παρακατάτω ταυτοποιήσεις $-\frac{1}{2}H_{AB} = H'_{AB}$ και $\alpha = 2\alpha'$.

Ακολουθώντας τα βήματα της [111], οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να λυθούν μετασχηματίζοντάς τες σε μία εξίσωση μορφής Schrödinger. Ας λάβουμε υπ΄ όψην μας την παρακάτω σφαιρικά συμμετρική μετρική
$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\left[d\theta^2 + \sin^2\theta\left(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\left(d\chi^2 + \sin^2\chi d\psi^2\right)\right)\right] \tag{4.48}$$
η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.40). Οι διαταραχές της παραπάνω μετρικής έχουν ως εξής [111]
$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{4.49}$$
όπου
$$h_{\alpha\beta} = r^2\phi\,(r,t)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{\theta\theta} & h_{\theta\varphi} & h_{\theta\chi} & h_{\theta\psi} \\ 0 & 0 & h_{\theta\varphi} & h_{\varphi\varphi} & h_{\varphi\chi} & h_{\varphi\psi} \\ 0 & 0 & h_{\chi\theta} & h_{\chi\varphi} & h_{\chi\chi} & h_{\chi\psi} \\ 0 & 0 & h_{\psi\theta} & h_{\psi\varphi} & h_{\psi\chi} & h_{\psi\psi} \end{pmatrix}. \tag{4.50}$$
Για κάθε όρο της διαταραχής έχουμε ότι $h_{ij} = h_{ij}\,(\theta,\varphi,\chi,\psi)$ με τα $i,j = \theta,\varphi,\chi,\psi$. Επιπλέον η επιλογή της transverse και traceless βαθμίδας παράλληλα με τις συμμετρίες της μετρικής συνεπάγουν ότι τον περιορισμό του $h_{\alpha\beta}$ πάνω στη σφαίρα να είναι transverse και traceless και επομένως μπορεί να αναπτυχθεί σύμφωνα με τη βάση των ιδιοτανυστών της Λαπλασιανής πάνω στη σφαίρα [112]. Έτσι με τα i,j να τρέχουν πάνω στη σφαίρα, έχουμε ότι
$$h_{ij} = r^2\phi\,(r,t)\,\bar{h}_{ij}(x), \tag{4.51}$$

όπου

$$\bar{\nabla}^k \bar{\nabla}_k \bar{h}_{ij} = \bar{h}_{ij}, \qquad \bar{\nabla}^i \bar{h}_{ij} = 0, \qquad \bar{g}^{ij} \bar{h}_{ij} = 0. \tag{4.52}$$

Η μπάρα υποδεικνύει στη μετρική και σε τανυστές πάνω στον S^4.

Αντικαθιστώντας την (4.50) στην (4.44) και χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη του h_{ij} σύμφωνα με τη βάση των ιδιοτανυστών της Λαπλασιανής πάνω στη σφαίρα καταλλήγουμε στην εξίσωση (11) της [111]. Αλλά αυτό υπο μία έννοια είναι αναμενόμενο. Επιπλέον βρίσκουμε ακριβώς τις ίδιες εξισώσεις, όπως και στην [111] και για τον συνδιασμό του όρου Gauss-Bonnet. Αντικαθιστώντας και πάλι την (4.50) στην (4.45) και χρησιμοποιώντας τόσο την ανάπτυξη του h_{ij} σύμφωνα με τη βάση των ιδιοτανυστών της Λαπλασιανής πάνω στη σφαίρα, όπως επίσης και την transverse και traceless βαθμίδα, καταλλήγουμε μετά από αρκετές αλγεβρικές πράξεις στην εξίσωση (12) της [111].

Το σημαντικό στοιχείο της παραπάνω ανάλυσης έρχεται από τις συμμετρίες του χωροχρόνου. Εδώ η σφαιρική συμμετρία επιτρέπει τη ανάλυση του h_{ij} σύμφωνα με τη βάση των ιδιοτανυστών της Λαπλασιανής πάνω στη σφαίρα, γεγονός το οποίο εν κατακλείδη αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα, ώστε να καταλήξουμε σε μία κύρια εξίσωση για τη μελέτη των διαταραχών. Μία τέτοια απλούστευση είναι αρκετά πιο δύσκολη και μερικές φορές αδύνατη σε περιπτώσεις που ο χωρόχρονος εμπεριέχει συμμετρίες διαφορετικές από αυτή της σφαιρικής, όπως θα δούμε σε παρακάτω εννότητα.

4.4 Διαταραχές σε μελανές χορδές με όρους Gauss-Bonnet

Έχοντας μελετήσει την κατασκευή της εξίσωση Lichnerowicz, τόσο στην κανονική της μορφή, όσο και στην τροποιημένη της έκφραση με την παρουσία όρων Gauss-Bonnet και αφού εξετάσαμε την αξιοπιστεία του φορμαλισμού σε μία ήδη υπάρχουσα ανάλυση για μελανές οπές, θα συνεχίσουμε εξετάζοντας την ευστάθεια των μελανών χορδών σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2.

Θα θεωρήσουμε μία πενταδιάστατη δράση, με όρους Gauss-Bonnet, της μορφής

$$S = \frac{M_5^3}{2} \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} \left[R^{(5)} + \alpha \left(R^{(5)2} - 4R^{(5)}_{MN} R^{(5)MN} + R^{(5)}_{MNKL} R^{(5)MNKL} \right) \right]. \tag{4.53}$$

Όπως έχουμε δεί και σε προηγούμενη εννότητα, οι λύσεις των εξισώσεων πεδίου που προκύπτουν από την παραπάνω δράση έχουν την παρακάτω δομή

$$ds_5^2 = g_{\mu\nu}(x,\rho) dx^\mu dx^\nu + a^2(x,\rho) d\rho^2 + L^2(x,\rho) d\theta^2 \ . \tag{4.54}$$

Η τοπολογία του εγκάρσιου δυσδιάστατου χώρου (ρ, θ), μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα κώνο με μία ελλείπουσα γωνία β. Για να είναι ευσταθές το σύστημά μας θα πρέπει στην κορυφή του κώνου να εισάγουμε μία μεμβράνη. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, η παρουσία της μεμβράνης, έχει σημαντικές συνέπειες στην ανάλυση των διαταραχών, χώρων με παρόμοια τοπολογία. Λύσεις της μορφής (4.54) έχουν βρεθεί στην [105] και έχουν ήδη περιγραφεί σε προηγούμενη ενότητα. Εδώ θα αναπτύξουμε το γενικό φορμαλισμό των διαταραχών τις μετρικής και θα σχολιάσουμε τις βαθμωτές (scalar), διανυσματικές (vector) και τανυστικές (tensor) διαταραχές.

4.4.1 Γενικός φορμαλισμός των διαταραχών της μετρικής

Ας θεωρήσουμε την παρακάτω μετρική

$$ds^2 = f^2(\rho)\left[-n^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{n^2(r)} + r^2 d\phi^2\right] + d\rho^2 + b^2(\rho)d\theta^2\,, \tag{4.55}$$

η οποία είναι της μορφής (4.54). Ακολούθως θα θεωρήσουμε για τις συναρτήσεις $f(\rho) = \cosh(\rho/2\sqrt{\alpha})$, $b(\rho) = 2\,\beta\,\sqrt{\alpha}\,\sinh(\rho/2\sqrt{\alpha})$, και $n^2(r) = -M + r^2/l^2$, για της οποίες η (4.55) αποτελεί λύση της (4.53) με την επιπρόσθετη εισαγωγή ένός συνοριακού όρου στη μεμβράνη [105].

Έχοντας ώς στόχο την διερεύνηση της ευστάθειας της λύσης κάτω από βαρυτικές διαταραχές, θα πρέπει να υιοθετίσουμε μία αρχική μορφή (ansatz) για τις διαταραχές. Όπως μπορούμε να δούμε η παραπάνω μετρική έχει 3 διανύσματα Killing. Επομένως μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Fourier τη διαταραχή μας, σύμφωνα με τις συντεταγμένες t, ϕ, θ και να κρατήσουμε όλες τις συνιστώσες της διαταραχής, ως συναρτήσεις των r, ρ. Πρόκειται να εξετάσουμε διαταραχές, οι οποίες διατηρούν την γωνιακή συμμετρία τόσο πάνω στη μεμβράνη, όσο και στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο. Κρατώντας την αξονική συμμετρία και στη μεμβράνη και στον κάθετο χώρο σημαίνει, ότι οποιαδήποτε ποσότητα κάτω απο παραγωγίσεις Lie με βάση τα διανύσματα ∂_ϕ και ∂_θ, θα πρέπει να είναι μηδέν [113]. Κατ΄ αυτόν τον τρόπο, θε μελετήσουμε κύματα-s του συστήματός μας και για τις δύο γωνιακές συντεταγμένες.

Ως αποτέλεσμα των συμμετριών του χωροχρόνου μας, μπορούμε να χωρίσουμε την διαταραχή μας σε ένα πλήρες δυσδιάστατο εγκάρσιο κομμάτι, ένα ανομοιογενές μέρος το οποίο θα αντισοιχεί σε μία συντεταγμένη της μεμβράνης και μία του εγκάρσιου χώρου και ένα καθαρό τρισδιάστατο κομμάτι. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την εν λόγο διαταραχή ως εξής

$$\begin{pmatrix} h_{\mu\nu} & h_{\mu i} \\ h_{j\nu} & h_{ij} \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

όπου $(\mu, \nu = t, r, \phi)$ και $(i, j = \rho, \theta)$. Ως μία Kaluza-Klein θεωρία, αυτές οι διαταραχές μπορούν να ερμηνευθούν σαν βαθμωτές (scalar), διανυσματικές (vector) και τανυστικές (tensor) διαταραχές αντίστοιχα, με βάση τον τρισδιάστατο χώρο. Ας υποθέσουμε την ακόλουθη μορφή για τη διαταραχή

$$h_{AB} = e^{\Omega t}\begin{pmatrix} h_{\mu\nu}(r,\rho) & h_{\mu i}(r,\rho) \\ h_{j\nu}(r,\rho) & h_{ij}(r,\rho) \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

Η παραπάνω επιλογή περιέχει το μέγιστο βαθμό πληροφορίας σχετικά με τη διαταραχή του συστήματος, σύμφωνα πάντα με τις παραδοχές τις οποίες υιοθετήσαμε (συμμετρία τόσο ως προς τη γωνιακή συντεταγμένη της μεμβράνης, όσο και για τη γωνιακή συντεταγμένη του εγκάρσιου χώρου).

Αντικαθιστώντας την (4.57) στην τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz (4.36), μπορούμε να δούμε άμεσα ότι η $h_{\phi\theta}(r,\rho)$ συνιστώσα διαχωρίζεται από το υπόλοιπο σύστημα των συνιστωσών, ενώ οι $h_{t\phi}\,(r,\rho)$, $h_{r\phi}\,(r,\rho)$ και $h_{\rho\phi}\,(r,\rho)$ είναι συζευγμένες και οι τρείς. Ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και για τις $h_{t\theta}\,(r,\rho)$, $h_{r\theta}\,(r,\rho)$ και $h_{\rho\theta}\,(r,\rho)$ συνιστώσες. Θα μπορούσαμε να τις θέσουμε ίσες με μηδέν, ώστε να εξετάσουμε το υπόλοιπο σύστημα, αλλά προς το παρόν θα τις διατηρήσουμε, μιας και που σε οποιαδήποτε περίπτωση, για την προσέγγιση των συμμετρικών κυμμάτων (s-waves), το οποία και μελετάμε, δεν αλληλεπιδρούν με τις υπόλοιπες συνιστώσες. Σαν ένα πρώτο βήμα θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των βαθμωτών συνιστωσών $h_{\theta\theta}\,(r,\rho)$, $h_{\rho\rho}\,(r,\rho)$ και $h_{\rho\theta}\,(r,\rho)$.

4.5 Βαθμωτές (scalar) διαταραχές

Ξεκινώντας τη μελέτη των γραμμικών διαταραχών της μετρικής, θα μελετήσουμε τις Βαθμωτές (scalar) συνιστώσες. Σκοπός μας είναι να λύσουμε την τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz (4.36), θεωρώντας ότι η λύση στο αδιατάραχτο σύστημα αντιστοιχεί στην μετρική (4.55). Το ansatz το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε είναι της μορφής (4.57). Αντικαθιστώντας τη διαταραχή βλέπουμε αμέσως ότι όλες οι εξισώσεις διαταραχών διέπονται από ένα κοινό παράγοντα, $\left(l^2-4\alpha\right)$. Βλέπουμε ότι όταν βρισκόμαστε κοντά στο όριο $l^2 \to 4\alpha$, ερχόμαστε αντιμέτωποι με ένα πρόβλημα ισχυρής σύζευξης (strong coupling problem). Ουσιαστικά στο όριο αυτό οποιαδήποτε τεχνική διαταραχών καταρρέει. Θα ασχοληθούμε με το εν λόγο όριο στη συνέχεια.

Χρησιμοποιώντας τις (4.38) και (4.39) μπορούμε να υπολογίσουμε τις εξισώσεις για τις βαθμωτές συνιστώσες της διαταραχής. Σε αυτές, οι βαθμωτές συνιστώσες είναι συζευγμένες με τις τανυστικές (tensor) και διανυσματικές (vector) συνιστώσες. Ωστόσο είναι δυνατόν να αποσυζευχθούν. Ας δούμε αναλυτικά τον τρόπο αυτό.

Αρχικά επιλέγουμε την traceless εξίσωση και λύνουμε ως προς τη συνάρτηση h_{rr}, την οποία και αντικαθιστούμε πλήρως στην $(\theta\theta)$ συνιστώσα τις εξίσωσης Lichnerowicz (4.36). Πλήρως εννούμε ότι αντικαθιστούμε τη σχέση για το h_{rr}, ακόμα και για παραγώγους του. Επιπλέον αντικαθιστούμε τη συνάρτηση h_{rr} στη σχέση $\nabla^A h_{A\rho}$, απ᾽ όπου και λύνουμε για $\partial_r h_{r\rho}$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το $\partial_r h_{r\rho}$ και $\partial_r\partial_\rho h_{r\rho}$ στην $(\theta\theta)$ συνιστώσα των εξισώσεων διαταραχής. Ακολουθούμε ακριβώς τα ίδια βήματα επίσης και για την $(\rho\rho)$ συνιστώσα της (4.36). Από τις δύο αξισώσεις στις οποίες καταλλήγουμε, παίρνουμε τον παρακάτω συνδιασμό $4\alpha\beta^2\frac{\tanh^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{sech^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}(\rho\rho)-(\theta\theta)$ και βρίσκουμε την παρακάτω εξίσωση για τις δύο βαθμωτές συνιστώσες $h_{\rho\rho}$ και $h_{\theta\theta}$

$$\frac{\left(2\,l^2\,\alpha\,\Omega^2-\left(l^2M-r^2\right)\,\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\,\mathrm{sech}^4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\right)}{4\,l^2\,\left(l^2M-r^2\right)\,\alpha}\,h_{\theta\theta}$$

$$
\begin{aligned}
&+\beta^2\frac{\left(3r^2-l^2\left(3M-\alpha\Omega^2\right)\right)\left(1-8\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)-5\left(l^2M-r^2\right)\cosh\left(\frac{2\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)}{8l^2\left(l^2M-r^2\right)\operatorname{sech}^{-4}\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}h_{\rho\rho}\\
&-\frac{6\operatorname{csch}^3\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\sinh^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^2\sqrt{\alpha}}\partial_\rho h_{\theta\theta}-\frac{\sqrt{\alpha}\beta^2\left(-3+4\cosh\left(\frac{2\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)\sinh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^2\cosh^3\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}\partial_\rho h_{\rho\rho}\\
&+\frac{\partial_{\rho\rho}h_{\theta\theta}}{l^2\left(1+\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)}-\frac{2\alpha\beta^2\tanh^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\partial_{\rho\rho}h_{\rho\rho}}{l^2}\\
&-\frac{\left(l^2M-3r^2\right)\operatorname{sech}^4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\partial_r h_{\theta\theta}}{2l^4r}-\frac{\left(l^2M-r^2\right)\operatorname{sech}^4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\partial_{rr}h_{\theta\theta}}{2l^4}\\
&+\frac{32\left(l^2M-3r^2\right)\alpha\beta^2\operatorname{csch}^4\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\sinh^6\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\partial_r h_{\rho\rho}}{l^4r}\\
&+\frac{32\left(l^2M-r^2\right)\alpha\beta^2\operatorname{csch}^4\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\sinh^6\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\partial_{rr}h_{\rho\rho}}{l^4}=0.
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

Χρειαζόμαστε μία ακόμα εξίσωση ούτος ώστε να λύσουμε το σύστημα. Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την $(t\rho)$ συνιστώσα της (4.36), και μπορεί να εξαχθεί με παρόμοιο τρόπο, όπως και η (4.58). Και πάλι λύνουμε την traceless συνθήκη για το h_{rr} και το αντικαθιστούμε στην $(t\rho)$ συνιστώσα των εξισώσεων διαταραχής. Επιπρόσθετα αντικαθιστούμε στην $\nabla^A h_{A\rho}$ και λύνουμε ως προς $\partial_r\, h_{r\rho}$. Κάνουμε ακριβώς το ίδιο και για το $\nabla^A h_{At}$ και λύνουμε ως προς $\partial_r h_{t\rho}$, απ΄ όπου παίρνουμε $\partial_r\partial_\rho h_{t\rho}$. Τέλος απο την συνιστώσα $(t\rho)$ παίρνουμε την ακόλουθη σχέση

$$
h_{\rho\rho}=\frac{1}{\beta^2}\partial_\rho\left(\frac{h_{\theta\theta}}{\sqrt{a}\sinh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)}\right).
\tag{4.59}
$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.59), η σχέση (4.58) γίνεται

$$
\begin{aligned}
&\frac{-2\alpha\Omega^2l^2+\left(8\left(r^2-l^2M\right)-6\alpha\Omega^2l^2\right)\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)+\left(r^2-l^2M\right)\left[7+\cosh\left(\frac{2\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]}{8l^2\left(l^2M-r^2\right)\alpha\,\sinh^{-6}\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}h_{\theta\theta}\\
&\frac{-8\alpha\Omega^2l^2+\left(6\left(r^2-l^2M\right)+4\alpha\Omega^2l^2\right)\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)+\left(r^2-l^2M\right)\left[11-5\cosh\left(\frac{2\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]}{16\,l^2\left(l^2M-r^2\right)\sqrt{\alpha}\operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\sinh^{-5}\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}\partial_\rho h_{\theta\theta}\\
&-\frac{\left(l^2M-3r^2\right)\left[1+3\,\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]\operatorname{sech}^6\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{4l^4r}\partial_r h_{\theta\theta}\\
&-\frac{\left(l^2M-r^2\right)\left[1+3\,\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]\operatorname{sech}^6\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{4\,l^4}\partial_{rr}h_{\theta\theta}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{\left[-7+\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]\operatorname{sech}^4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{4l^2}\partial_{\rho\rho}h_{\theta\theta}-\frac{2\sqrt{\alpha}\operatorname{csch}\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\tanh^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^2}\partial_{\rho\rho\rho}h_{\theta\theta}$$
$$+\frac{\left(l^2M-3r^2\right)\sqrt{\alpha}\operatorname{sech}^4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\tanh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^4\,r}\partial_r\,\partial_\rho h_{\theta\theta}$$
$$+\frac{\left(l^2M-r^2\right)\sqrt{\alpha}\operatorname{sech}^4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\tanh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^4}\partial_{rr}\,\partial_\rho\,h_{\theta\theta}=0. \tag{4.60}$$

Εξετάζοντας την εξίσωση (4.60) μπορούμε να δούμε ότι εμπεριέχει παραγώγους τρίτης τάξης ως προς ρ, όπως επίσης και ανάμεικτους όρους της μορφής $\partial_r\partial_\rho$ και $\partial_{rr}\partial_\rho$. Το γεγονός αυτό κάνει το χειρισμό της εξίσωσης ιδιαίτερα δύσκολο. Θα συνεχίσουμε θεωρώντας ότι η συνάρτηση $h_{\theta\theta}$ έχει την παρακάτω μορφή

$$h_{\theta\theta}=\left[2\,\beta\,\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\right]^2u\left(r,\rho\right). \tag{4.61}$$

Τότε αντικαθιστώντας την (4.61) στη σχέση (4.60) καταλλήγουμε

$$\frac{2\,\alpha\,\Omega^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\tanh^4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^2M-r^2}u\left(r,\rho\right)$$
$$-\frac{\left[6\left(r^2-l^2M\right)+8\alpha\Omega^2l^2\right]\left[1+\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]-3\left(r^2-l^2M\right)\left[1+\cosh\left(\frac{2\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]}{4l^2\alpha^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sech}^{-4}\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\tanh^{-1}\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(l^2M-r^2\right)}\partial_\rho u\left(r,\rho\right)$$
$$-\frac{\alpha\left[-1+7\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]\operatorname{sech}^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\tanh^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^2}\partial_{\rho\rho}u\left(r,\rho\right)$$
$$-\frac{4\,\alpha^{\frac{3}{2}}\tanh^3\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^2}\partial_{\rho\rho\rho}u\left(r,\rho\right)$$
$$-\frac{2\left(l^2M-3r^2\right)\alpha\operatorname{sech}^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\tanh^4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^4\,r}\partial_r u\left(r,\rho\right)$$
$$-\frac{2\left(l^2M-3r^2\right)\alpha\operatorname{sech}^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\tanh^4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^4}\partial_{rr}u\left(r,\rho\right)$$
$$+\frac{128\left(l^2M-3r^2\right)\alpha^{\frac{3}{2}}\operatorname{csch}^5\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\sinh^8\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^4\,r}\partial_{r\rho}u\left(r,\rho\right)$$
$$+\frac{128\left(l^2M-3r^2\right)\alpha^{\frac{3}{2}}\operatorname{csch}^5\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\sinh^8\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^4}\partial_{rr\rho}u\left(r,\rho\right)=0. \tag{4.62}$$

Η παραπάνω σχέση, μετά από μερικές πράξεις, παίρνει την ακόλουθη σχετικά απλή μορφή,

$$
-\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{2\,\Omega^2\,l^2}{(l^2M-r^2)\cosh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}\,u\left(r,\rho\right)+\frac{3\left[1-2\cosh^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\right]}{\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\,u\left(r,\rho\right)\right.
$$

$$
\left.-2\,\cosh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\,\frac{\partial^2\,u\left(r,\rho\right)}{\partial\rho^2}+\frac{2\,\frac{\partial}{\partial\,r}\left[r\,\left(r^2M-r^2\right)\,\frac{\partial\,u(r,\rho)}{\partial\,r}\right]}{l^2\,r\,\cosh\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}\right\}=0. \tag{4.63}
$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ολοκληρώσιμη ως προς την ρ συντεταγμένη. Θέτοντας την ολοκληρωτική σταθερά με μηδέν και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών, με βάση τη σχέση $u\left(r,\rho\right)=f\left(r\right)\,y\left(\rho\right)$, καταλλήγουμε στις παρακάτω δύο διαφορικές εξισώσεις,

$$
\frac{4\,\alpha^{3/2}\,\coth\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{l^2}\left(3\,\cosh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\,\frac{\partial\,y\left(\rho\right)}{\partial\,\rho}+\sqrt{\alpha}\,\sinh\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\,\frac{\partial^2\,y\left(\rho\right)}{\partial\,\rho^2}\right)+m\,y\left(\rho\right)=0, \tag{4.64}
$$

όπου m είναι η σταθερά που χρησιμοποιούμε ώστε να διαχωρίσουμε την αρχική σχέση στις δύο παραγώμενες.

$$
\left(m-\frac{8\,\alpha^2\,\Omega^2}{l^2\,M-r^2}\right)\,f\left(r\right)+\frac{8\,\alpha^2}{l^4\,r}\left(\left(l^2\,M-3r^2\right)\,\frac{\partial\,f\left(r\right)}{\partial\,r}+r\left(l^2\,M-r^2\right)\,\frac{\partial^2\,f\left(r\right)}{\partial\,r^2}\right)=0. \tag{4.65}
$$

Η εξίσωση (4.65) μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$
\left(-l^2\,M+r^2\right)\,\frac{\partial^2\,f\left(r\right)}{\partial\,r^2}+\frac{\left(-l^2\,M+3r^2\right)}{r}\frac{\partial\,f\left(r\right)}{\partial\,r}+\frac{l^4}{8\alpha^2}\left(\frac{8\,\alpha^2\,\Omega^2}{l^2\,M-r^2}-m\right)\,f\left(r\right)=0. \tag{4.66}
$$

Θέτοντας $f\left(r\right)=\frac{\psi(r)}{\sqrt{r}}$, και εισάγοντας ένα νέο σύστημα συντεταγμένων το οποίο ορίζεται σύμφανα με τη σχέση

$$
dr_*=\frac{dr}{-M+\frac{r^2}{l^2}}
$$

η εξίσωση (4.66) μπορεί να γραφεί σαν μία εξίσωση Schrödinger

$$
\frac{d^2\psi\left(r\right)}{dr_*^2}+\left[V\left(r\right)-\Omega^2\right]\,\psi\left(r\right)=0, \tag{4.67}
$$

όπου το $V\left(r\right)$ έχεις ως εξής

$$
V\left(r\right)=\frac{M}{2l^2}+\frac{M^2}{4r^2}-\frac{3r^2}{4l^4}+\frac{l^2mM}{8\alpha^2}-\frac{mr^2}{8\alpha^2}\,. \tag{4.68}
$$

Ας σημειώσουμε ότι το παραπάνω δυναμικό, εξαρτάται τόσο από τη σταθερά m, όσο και από τη σταθερά σύζευξης Gauss-Bonnet α. Όλη η πληροφορία του bulk εμπεριέχεται σε αυτές τις δύο σταθερές. Επιπρόσθετα δεν εξαρτάται από την ελείπουσα γωνία β. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η συνάρτηση $b(\rho)$ εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο ανταποκρίνεται η bulk γεωμετρία στην παρουσία της κωνικής ανωμαλίας, μία πληροφορία η οποία είναι πλήρως κωδικοποιημένη στην εξίσωση αποσύζευξης (4.64), η οποία και περιγράφει τη συμπεριφορά της διαταραχής στις επιπλέον διαστάσεις. Στην επόμενη παράγραφο, θα δούμε ότι η ελλείπουσα γωνία εμφανίζεται ρητά στην εξίσωση που αφορά τον εγκάρσιο χώρο, μόνο εάν θεωρήσουμε μία γωνιακή εξάρτηση για τη διαταραχή, όπως φαίνεται από τη σχέση (4.84) και τη λύση αυτής (4.103).

Το εν λόγο δυναμικό είναι παρόμμοιο με εκείνο το οποίο βρέθηκε κατα τον υπολογισμό των ψευδοκανονικών τρόπων ταλάντωσης (quasinormal modes) της BTZ μελανής οπής [114]. Επιπρόσθετα είναι ακριβώς ίδιο, με το δυναμικό που θα βρούμε λύνοντας την εξίσωση Klein-Gordon για την ίδια λύση του αδιατάρακτου συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι κάνουμε την ακόλουθη ταυτοποίηση $\nu^2 \to \frac{l^2 m}{8\alpha^2}$. Η εξίσωση Schrödinger (4.67) θα λυθεί στην επόμενη παράγραφο. Η λύση της επιβάλλει ότι

$$\Omega = -\frac{\sqrt{M}}{l}\left(1 + 2N + \sqrt{1 + \frac{ml^4}{8\alpha^2}}\right), \tag{4.69}$$

όπου N είναι θετικός ακέραιος. Καθώς αυτή η ποσότητα είναι πάντα αρνητική, συνεπάγεται ότι η λύση για τη διαταραχή είναι φθίνουσα στο χρόνο, εξασφαλίζοντας με αυτό τον τρόπο την ευστάθεια του συστήματος κάτω από βαθμωτές (scalar) διαταραχές. Αν και εν γένει η μάζα μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές, το φάσμα του m μπορεί να βρεθεί εξετάζοντας την bulk εξίσωση (4.64), της οποίας η γενική λύση είναι η εξής

$$y(\rho) = \mathcal{C}_1\, q^A\, {}_2F_1(A, B; C; q) + \mathcal{C}_2\, q^{A'}\, {}_2F_1(A', B'; C'; q)\,, \tag{4.70}$$

όπου

$$\begin{aligned}
q &= \cosh^2(\rho/2\sqrt{\alpha})\,, && (4.71)\\
A &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{4 + 2l^2 m/\alpha}\,, && (4.72)\\
B &= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{4 + 2l^2 m/\alpha}\,, && (4.73)\\
C &= 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4 + 2l^2 m/\alpha}\,, && (4.74)\\
A' &= -C/2\,, && (4.75)\\
B' &= B - A - C/2\,, && (4.76)\\
C' &= -2A\,. && (4.77)
\end{aligned}$$

Για τη λύση αυτή, ας επιλέξουμε τα $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$ να έχουν τέτοιες τιμές, ώστε να εξασφαλίσουμε μία φθίνουσα συμπεριφορά, η οποία θα μας εξασφαλίσει μία ομαλή μετάβαση για μεγάλες τιμες του ρ. Καθώς οι μεταβλητές των υπεργεωμετρικών συναρτήσεων πρέπει να είναι πραγματικές, ο πρώτος περιορισμός για το m προέρχεται από τη ρίζα: $m \geq -2\alpha/l^2$. Η ισότητα στην προηγούμενη σχέση, μόλις αντικατασταθεί στην (4.69) αντιστοιχεί στο όριο ισχυρής σύζευξης (strong coupling limit) ή αλλιώς στο όριο Chern-Simons. Στο συγκεκριμένο όριο ο επιπλέον όρος στη σχέση διασποράς εξαφανίζεται και καταλλήγουμε στο αποτέλεσμα των τρισδιάστατων ψευδοκανονικών τρόπων ταλάντωσης μίας BTZ μελανής οπής [114]. Παρόλ' αυτά οι υπεργεωμετρικές συναρτήσεις δεν είναι καλώς ορισμένες για όλες τις τιμές του m πάνω από το εν λόγω όριο. Αυτό εξαρτάται αυτηρά από τις παραμέτρους τις κάθε συνάρτησης. Μία προσεκτική ανάλυση αποκαλύπτει ότι το $\mathcal{C}_2$ πρέπει να είναι μηδέν μιάς και δεν μπορεί να σχηματίσει λύσεις με φθίνουσα συμπεριφορά. Επιπλέον χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συγκεκριμένων συναρτήσεων, μπορούμε να βρούμε μία ειδική περίπτωση, θέτοντας $B = 0$, η οποία αντιστοιχεί στο $m = 48\alpha/l^2$, όπου η διαταραχεί χαρακτιρίζεται από μία φθίνουσα συμπεριφορά.

Με βάση την ανάλυση την οποία ξεκινήσαμε, έχουμε άλλη μία βαθμωτή συνιστώσα, η οποία είναι η $h_{\rho\theta}$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η συγκεκριμένη συνιστώσα είναι συζευγμένη με τις $h_{t\theta}$ και $h_{r\theta}$ συνιστώσες. Ωστόσο χρησιμοποιώντας την transverse βαθμίδα, μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε ότι και αυτή η συνιστώσα αποσυζεύγνεται από τις άλλες δύο και ικανοποιεί ακριβώς την ίδια εξίσωση Schrödinger με την $h_{\theta\theta}$ συνιστώσα.

4.6 Βαθμωτές διαταραχές - Λύνοντας την εξίσωση Klein-Gordon

Σε αυτή την παράγραφο θα αναλύσουμε τις βαθμωτές διαταραχές, λύνοντας την την εξίσωση Klein-Gordon, Θα δούμε ότι θα καταλλήξουμε στα ίδια συμπεράσματα με αυτά στα οποία οδηγηθήκαμε κατά τη μελέτη της εξίσωσης Lichnerowicz, με τη διαφορά ότι εξετάζοντας την εξίσωση Klein-Gordon καταλλήγουμε να έχουμε μία καλύτερη κατανόηση της ευστάθειας της μελανής χορδής κάτω από βαθμωτές διαταραχές.

Ξεκινάμε θεωρώντας την εξίσωση Klein-Gordon με μάζα

$$\Box\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_M(\sqrt{-g}g^{MN}\partial_N)\Phi = m^2\Phi\,. \tag{4.78}$$

Χρησιμοποιώντας τη μετρική (4.55) και αναλύοντας το βαθμωτό πεδίο ως εξής

$$\Phi(t,r,\phi,\rho,\theta) = Z(t,r,\rho)\Xi(\phi)\Theta(\theta)\,, \tag{4.79}$$

καταλλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση

$$-\frac{1}{f^2n^2}\frac{\partial_t^2 Z}{Z} + \left(\frac{n^2}{f^2r} + \frac{2n\dot{n}}{f^2}\right)\frac{\partial_r Z}{Z} + \frac{n^2}{f^2}\frac{\partial_r^2 Z}{Z} + \left(\frac{3f'}{f} + \frac{b'}{b}\right)\frac{\partial_\rho Z}{Z} + \frac{\partial_\rho^2 Z}{Z} \\ + \frac{l^2}{f^2r^2}\frac{\partial_\phi^2\Xi}{\Xi} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial_\theta^2\Theta}{\Theta} - m^2 = 0\,. \tag{4.80}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών στα μέρη της εξίσωσης τα οποία εξαρτώνται ως προς θ- και ϕ-. Επομένως οι λύση των $\Theta(\theta)$ και $\Xi(\phi)$ δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= Ae^{i\kappa\theta} + Be^{-i\kappa\theta} && (4.81) \\ \Xi(\phi) &= Ce^{i\epsilon\phi} + De^{-i\epsilon\phi}\,, && (4.82) \end{aligned}$$

όπου A, B, C, και D είναι ολοκληρωτικές σταθερές, ενώ τα κ και ϵ είναι επίσης σταθερές. Η εναπομείνουσα εξίσωση μπορεί να αναλυθεί περεταίρω σε δύο εξισώσεις, με βάση την παρακάτω παραδοχή $Z(t,r,\rho) = \Psi(t,r)P(\rho)$ όπως μπορούμε να δούμε,

$$\begin{aligned} \partial_t^2\Psi - n^2\left(\frac{n^2}{r} + 2n\dot{n}\right)\partial_r\Psi - n^4\partial_r^2\Psi + \left(\frac{\epsilon^2 l^2 n^2}{r^2} + \nu^2 n^2\right)\Psi &= 0 && (4.83) \\ \partial_\rho^2 P + \left(3\frac{f'}{f} + \frac{b'}{b}\right)\partial_\rho P + \left(-\frac{\kappa^2}{b^2} - m^2 + \frac{\nu^2}{f^2}\right)P &= 0\,, && (4.84) \end{aligned}$$

με το ν^2 να είναι η σταθερά διαχωρισμού των δύο εξισώσεων. Η σχέση (4.83) περιγράφει την εξέλιξη της βαθμωτής διατραχής πάνω στη μεμβράνη, ενώ η εξίσωση (4.84) εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο αυτή η διαταραχή διαδίδεται σε διαφερετικές αποστάσεις από την μεμβράνη.

Για να λύσουμε την σχέση (4.83), θα κάνουμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών

$$r_* = \int \frac{dr}{n^2}\,. \tag{4.85}$$

κατα την οποία η (4.83) παίρνει τη παρακάτω μορφή μίας εξίσωσης Schrödinger

$$-\frac{\partial^2 X(t,r_*)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 X(t,r_*)}{\partial r_*^2} = V[r(r_*)]X(t,r_*)\,. \tag{4.86}$$

Η συνάρτηση $X(t,r_*)$ ορίζεται ώς εξής

$$X(t,r_*) = \sqrt{r}\,\Psi(t,r)\,, \tag{4.87}$$

και ο όρος δυναμικού μπορεί να γραφεί ως

$$V(r) = \frac{n^2}{2r}\left(2n\dot{n} - \frac{n^2}{2r}\right) + \frac{\epsilon^2 l^2 n^2}{r^2} + \nu^2 n^2\,. \tag{4.88}$$

Συγκρίνοντας το παραπάνω δυναμικό με εκείνο της καθαρής τριδιάστατης περίπτωσης το οποίο μελετήθηκε στην [114], βλέπουμε ότι η εξίσωση (5.38) έχει μία επιπλέον διόρθωση $\nu^2 n^2$. Αυτός ο νέος όρος ουσιαστικά συνδέει τις διαταραχές στη μεμβράνη με αυτές στο bulk μέσω της σταθεράς ν και εν γένει δεν είναι μηδενικός.

Επιλέγουμε την εξάρτηση ως προς τον χρόνο να είναι της μορφής $e^{-i\omega t}$, έτσι ώστε $X(t,r) = e^{-i\omega t}R(r)$ και επομένως, η εξίσωση (4.86) γίνεται

$$\frac{d^2R}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)]R = 0\,. \tag{4.89}$$

Επιλέγοντας τη συνάρτηση $n(r)$ να έχει τη μορφή που αντιστοιχεί σε μία BTZ μελανή οπή, $n^2(r) = -M + r^2/l^2$, το δυναμικό (5.38) καταλήγει να είναι

$$V(r) = \left(\frac{3}{4l^4} + \frac{\nu^2}{l^2}\right) r^2 - \left(\frac{M}{2l^2} + M\nu^2 - \epsilon^2\right) + \left(-\frac{M^2}{4} - l^2 M\epsilon^2\right) \frac{1}{r^2}\,. \qquad (4.90)$$

Με βάση την προαναφερθείσα αλλαγή μεταβλητών (4.85) βρίσκουμε ότι

$$r = -l\sqrt{M}\,\coth\left(\frac{r_*\sqrt{M}}{l}\right). \qquad (4.91)$$

Ας σημειώσουμε ότι το $r_H = l\sqrt{M} \leq r < \infty$ αντιστοιχεί στο $-\infty < r_* \leq 0$.

Συνεχίζουμε κάνοντας μία επιπλέον αλλαγή μεταβλητών,

$$x = \frac{1}{\cosh^2(\frac{r_*\sqrt{M}}{l})}\,, \qquad (4.92)$$

όπου $0 \leq x \leq 1$, έτσι ώστε το δυναμικό να πάρει την παρακάτω μορφή

$$V(x) = -\frac{x}{4}\left[\frac{4M(1+\nu^2 l^2) - Mx - 4l^2\epsilon^2(x-1)}{l^2(x-1)}\right] \qquad (4.93)$$

και η εξίσωση (4.89) γίνεται

$$4x(1-x)\frac{d^2R}{dx^2} + (4-6x)\frac{dR}{dx} + \left[\frac{\omega^2 l^2}{Mx} + \frac{1+\nu^2 l^2}{x-1} - \frac{x}{4(x-1)} - \frac{l^2\epsilon^2}{M}\right] R = 0\,. \qquad (4.94)$$

Έχοντας ως απότερο σκοπό να γράψουμε αυτή την εξίσωση σε μία ποιο οικία μορφή, κάνουμε την ακόλουθη αντικατάσταση,

$$R = \frac{(x-1)^{3/4}}{x^{i\omega l/2\sqrt{M}}}\,y(x)\,. \qquad (4.95)$$

Έτσι η σχέση (4.94) προκύπτει ότι είναι η εξής

$$-x(x-1)y'' + \left[1 - 3x + \frac{i\omega l}{\sqrt{M}}(x-1)\right] y' + \left[\frac{\omega^2 l^2}{4M} + \frac{i\omega l}{\sqrt{M}} - \frac{l^2\epsilon^2}{4M} - 1 + \frac{\nu^2 l^2}{4(x-1)}\right] y = 0\,. \qquad (4.96)$$

Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια των υπεργεωμετρικών συναρτήσεων δευτέρου είδους ${}_2F_1(a,b;c;x)$. Έχοντας ως απότερο σκοπό την ευστάθεια του συστήματός μας, θα κρατήσουμε το φθίνον τμήμα της γενικής λύσης και θα απαιτήσουμε να ισχύουν οι κατάλληλες συνθήκες.

$$y(x) = (1-x)^{-(1+\sqrt{1+\nu^2 l^2})/2}\ \ {}_2F_1(a,b;c;x)\,, \qquad (4.97)$$

όπου

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+\nu^2 l^2}-\frac{i\omega l}{\sqrt{M}}+\frac{il\epsilon}{\sqrt{M}}\right)\\
b &= \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+\nu^2 l^2}-\frac{i\omega l}{\sqrt{M}}-\frac{il\epsilon}{\sqrt{M}}\right)\\
c &= 1-\frac{i\omega l}{\sqrt{M}}\,.
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

Αφού ο $(2+1)$ χωροχρόνος είναι ασυμπτωτικά AdS, η ακριβής συνοριακή συνθήκη η οποία πρέπει να θεωρηθεί για την εξίσωση (4.97) είναι η συνθήκη ροής (flux condition),

$$
\mathcal{F} \sim \left(y^*\partial_\mu y - y\partial_\mu y^*\right)\Big|_{x=1} = 0\,. \tag{4.99}
$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε αυτή την συνθήκη στο $x=1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ιδιότητα των υπεργεωμετρικών συναρτήσεων. Δεδομένου ότι έχουμε μία συνάρτηση ${}_2F_1(a',b';c';x)$, εάν η σταθερά c' δεν είναι ένας αρνητικός ακέραιος αριθμός, η σειρά συγκλίνει όταν $x=1$ εφόσσον $\Re(c'-a'-b')>0$, και τότε μπορούμε να γράψουμε την υπεργεωμετρική συνάρτηση ως εξής

$$
{}_2F_1(a',b';c';1) = \frac{\Gamma(c')\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')}\,. \tag{4.100}
$$

Η παράγωγος της υπεργεωμετρικής συνάρτησης με την οποία ασχολούμαστε έχει την παρακάτω μορφή

$$
{}_2F_1{}'(a,b;c;x=1) = \frac{ab}{c}\,{}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x=1)\,. \tag{4.101}
$$

Χρησιμοποιώντας την (4.98) μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι $\Re(c-a-b-1) = \sqrt{1+\nu^2 l^2}-1>0$ αφού $\nu^2>0$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε την (4.101) σε σχέση με τις Γ συναρτήσεις, όπως και στην (4.100) και να επιστρέψουμε στη συνθήκη ροής (4.99). Η νέα εξίσωση ικανοποιείται όταν $c-a=-N$ ή $c-b=-N$, όπου N είναι θετικός ακέραιος. Κατ' αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζουμε τις ψευδοκανονικές συχνότητες (quasinormal frequencies),

$$
\omega = \pm\epsilon - i\frac{\sqrt{M}}{l}\left(1+2N+\sqrt{1+\nu^2 l^2}\right)\,. \tag{4.102}
$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το φανταστικό μέρος αυτών των συχνοτήτων είναι αρνητικό, γεγονός το οποίο υποδεικνύει την ευστάθεια του συστήματός μας κάτω απο βαθμωτές διαταραχές. Ας προσέξουμε ότι στην (4.102) εμφανίζεται ένας όρος ανάλογος του ν^2, ο οποίος εμπεριέχει την πληροφορία του bulk και όταν το $\nu^2=0$ καταλλήγουμε στα αμιγή αποτελέσματα για μία τρισδιάστατη BTZ μελανή οπή [114].

Για να ολοκληρώσουμε την ανάλυσή μας, θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση (4.84). Εδώ θα εξετάσουμε δύο υποπεριπτώσεις:

1. Όταν $f(\rho) = \cosh(\rho/2\sqrt{\alpha})$ και $b(\rho) = 2\beta\sqrt{\alpha}\sinh(\rho/2\sqrt{\alpha})$, η πιο γενική λύση της εξίσωσης (4.84) δίνεται από την

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{(z-1)^{\kappa/2\beta}}{\sqrt{2z}}[C_1 z^{-\sqrt{1+4\nu^2\alpha}/2} \;\; {}_2F_1(\hat{a},\hat{b};\hat{c};z) \\ &\qquad + C_2 z^{\sqrt{1+4\nu^2\alpha}/2} \;\; {}_2F_1(\hat{a}',\hat{b}';\hat{c}';z)]\,, \end{aligned} \tag{4.103}$$

όπου

$$z = \cosh^2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{\alpha}}\right)\,, \tag{4.104}$$

C_1 και C_2 είναι σταθερές και

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\kappa}{\beta}-\sqrt{1+4\nu^2\alpha}+2\sqrt{1+m^2\alpha}\right) \\ \hat{b} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\kappa}{\beta}-\sqrt{1+4\nu^2\alpha}-2\sqrt{1+m^2\alpha}\right) \\ \hat{c} &= 1-\sqrt{1+4\nu^2\alpha} \\ \hat{a}' &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\kappa}{\beta}+\sqrt{1+4\nu^2\alpha}-2\sqrt{1+m^2\alpha}\right) \\ \hat{b}' &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\kappa}{\beta}+\sqrt{1+4\nu^2\alpha}+2\sqrt{1+m^2\alpha}\right) \\ \hat{c}' &= 1+\sqrt{1+4\nu^2\alpha}\,. \end{aligned} \tag{4.105}$$

Μία προσεκτική μελέτη και των δύο υπεργεωμετρικών συναρτήσεων, δείχνει ότι το C_2 θα πρέπει να είναι μηδέν αν θέλουμε να έχουμε μία φθίνουσα συμπεριφορά. Λαμβάνοντας υπ' όψην ένα κατάλληλο σύνολο παραμέτρων η εναπομείνουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση έχει την επιδιωκόμενη συμπεριφορά. Μία ειδική περίπτωση εμφανίζεται όταν το ν^2 αποκτά την παρακάτω μορφή,

$$\nu^2 = m^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\kappa}{2\alpha\beta}\left(1+\frac{\kappa}{2\beta}\right) + \frac{\sqrt{m^2\alpha+1}}{\alpha}\left(1+\frac{\kappa}{\beta}\right)\,, \tag{4.106}$$

η οποία μας δίνει $b=0$. Η συγκεκριμένη περίπτωση αντιστοιχεί σε μία ταλάντωση με απόσβεση στο ρ. Επομένως το σύστημα έχει μία καλή συμπεριφορά κάτω από τις εν λόγο διαταραχές με τις ψευδοκανονικές συχνότητες να δίνοντας απο τη σχέση (4.102).

2. Όταν $f(\rho) = \pm 1$ και $b(\rho) = \gamma\sinh(\rho/\gamma)$, με $\gamma = \sqrt{(l^2-4\alpha)/2}$, καταλλήγουμε στην παρακάτω λύση για την εξίσωση (4.84),

$$P(w) = \sqrt{2}(w-1)^{\kappa/2}\left[C_3 \;\; {}_2F_1(\tilde{a},\tilde{b};\tilde{c};w) + C_4\sqrt{2w} \;\; {}_2F_1(\tilde{a}',\tilde{b}';\tilde{c}';w)\right]\,, \tag{4.107}$$

όπου

$$w = \cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}\,\rho}{\sqrt{l^2-4\alpha}}\right), \tag{4.108}$$

C_3 και C_4 είναι σταθερές και

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= \frac{1}{4}+\frac{\kappa}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{1+(l^2-4\alpha)(2m^2-2\nu^2)} \\
\tilde{b} &= \frac{1}{4}+\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{1+(l^2-4\alpha)(2m^2-2\nu^2)} \\
\tilde{c} &= \frac{1}{2} \\
\tilde{a}' &= \frac{3}{4}+\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{1+(l^2-4\alpha)(2m^2-2\nu^2)} \\
\tilde{b}' &= \frac{3}{4}+\frac{\kappa}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{1+(l^2-4\alpha)(2m^2-2\nu^2)} \\
\tilde{c}' &= \frac{3}{2}\,.
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Σε αυτή την περίπτωση και οι δύο υπεργεωμετρικές συναρτήσεις εμφανίζουν αύξουσα συμπεριφορά. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι, όταν η βαθμωτή διαταραχή περνά στο bulk διαδίδεται δίχως κάποια συνοριακή συνθήκη. Μία σχετικά ανάλογη συμπεριφορά βρέθηκε και στην ανάλυση μιας πενταδιάστατης μελανής χορδής σε πρότυπα συνδιάστασης - 1, [17].

Στις δύο τελευταίες παραγράφους μελετήσαμε τις βαθμωτές (scalar) διαταραχές μίας μελανής χορδής σε ένα πενταδιάστατο πρότυπο μεμβρανών συνδιάστασης - 2. Χρησιμοποιώντας τόσο την τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz, υπο την παρουσία όρων Gauss-Bonnet, όσο και την εξίσωση Klein-Gordon, εξακριβώσαμε την ευστάθεια του συστήματος κάτω από τις διαταραχές του συγκεκριμένου τύπου. Για τον ενδελεχή αναγνώστη παραθέτουμε ένα επιπλέον σχόλιο σχετικά με την προσέγγιση την οποία και ακολουθήσαμε. Επιλέξαμε να μελετήσουμε τις διαταραχές των συμμετρικών κυμάτων (s-wave), τόσο για την γωνιακή συντεταγμένη πάνω στη μεμβράνη, όσο και για εκείνη στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο. Ωστόσο σε μία γενική περίπτωση η ανάλυση κατα Fourier θα πρέπει να εμπεριέχει τις συνιστώσες συχνοτήτων και για αυτές τις δύο συντεταγμένες. Παρόλ' αυτά, το κατά πόσον η ελλείπουσα γωνία μπορεί να παίξει έναν σημαντικό ρόλο, στην ανάλυση της ευστάθειας του συστήματος σε αυτή την περίπτωση, δεν είναι ξεκάθαρο. Η μέθοδος την οποία ακολουθήσαμε κατα την ανάλυση των ψευδοκανονικών τρόπων ταλάντωσης (quasi-normal modes) αποδεικνύει (βλέπε τις εξισώσεις (4.83) και (4.84)) οτι κάθε γωνιακή συντεταγμένη επιδρά στον αντίστοιχο χώρο, στον οποίο ανήκει. Η εξάρτηση από το ϕ αντικατοπτρίζεται από την εξίσωση της μεμβράνης, ενώ η εξάρτηση από τη θ συντεταγμένη και επομένως η ρητή εμφάνιση της ελλείπουσας γωνίας είναι ξεκάθαρη στην εξίσωση του εγκάρσιου χώρου. Οποιαδήποτε επίδραση της ελλείπουσας γωνίας θα πρέπει να απεικονίζεται στο τμήμα της λύσης το οποίο χαρακτηρίζει το εγκάρσιο τμήμα. Ωστόσο, η μόνη πληροφορία που μπορεί να μας δώσει η εξίσωση (4.84), είναι το πως μεταδίδεται η διαταραχή από τη μεμβράνη στον υπόλοιπο χώρο.

Στην περίπτωση που, κατα την ανάλυση κατα Foyrier, είχαμε επιλέξει μία συνιστώσα συχνότητας για τη θ συντεταγμένη, τότε θα έπρεπε να εξετάσουμε κατα πόσο το βαθμωτό κομμάτι της διαταραχής αποσυζεύγνεται από το υπόλοιπο τμήμα και επιπλέον να δούμε κατα πόσο είναι δυνατόν να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές. Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά πολύπλοκη και επίπονη, λόγο της παρουσίας των τετραγωνικών όρων Gauss-Bonnet's και βρίσκεται πέρα από το σκοπό της συγκεκριμένης μελέτης. Είναι πολύ πιθανό μία ανάλυση κάτω απο το εν λόγω σκεπτικό να δώσει διαφορετικά αποτελέσματα. Παρόλ' αυτά ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, η ελλείπουσα γωνία, εξαιτίας της εσωτερικής της γεωμετρικής φύσης, πιθανόν να επιδρά μόνο στον εγκάρσιο χώρο.

4.7 Διανυσματικές (Vector) και Τανυστικές (Tensor) διαταραχές

Είδαμε ότι εφόσον είμαστε μακρυά από το όριο Chern-Simons μπορούμε πάντα να εφαρμόσουμε την transverse και traceless βαθμίδα και να εξετάσουμε την ευστάθεια του συστήματος. Από τα μέχρι τώρα αποτελέσματά μας παρατηρούμε ότι, για τις βαθμωτές διαταραχές το σύστημά μας εμφανίζει μία εκθετική μείωση, εννοώντας δηλαδή ότι παράμετρος Ω είναι αρνητική, παρά το γεγονός ότι η μάζα m της βαθμωτής συνιστώσας της διαταραχής, μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές μέχρι ένα συγκεκριμένο όριο. Το χαρακτηριστικό αυτό εξασφαλίζει την ευστάθεια του συστήματός μας κάτω από βαθμωτές διαταραχές της μετρικής. Η παρουσία των τετραγωνικών όρων καμπυλότητας, εξαιτίας της εμφάνισης του όρου Gauss-Bonnet, δεν επιτρέπει την άμεση αποσύζευξη των εξισώσεων για το βαθμωτό μέρος της διαταραχής και η διαδικασία για να γίνει αυτό δεν είναι εύκολη και γρήγορη, σε αντιδιαστολή με την περίπτωση που έχουμε μόνο τον τανυστή Einstein, όπου για το κενό το βαθμωτό μέρος της διαταραχής για μία μελανή χορδή διαχωρίζεται άμεσα.

Είναι γνωστό ότι μία κατηγορία σφαιρικά συμμετρικών λύσεων στο κενό, με όρους Gauss-Bonnet, παρουσιάζουν αστάθειες (ghost instabilities), κατα τις οποίες ο κινητικός όρος αποκτά αρνητικό πρόσιμο, ενώ παράλληλα υπάρχει και το πρόβλημα ισχυρής σύζευξης (strong coupling problem), κοντά στο όριο Chern-Simons [115]. Στην περίπτωσή μας αναμένουμε ότι το πρόβλημα ισχυρής σύζευξης να παραμένει τόσο για τις διανυσματικές (vector), όσο και για τις τανυστικές (tensor) διαταραχές. Με βάση την ανάλυση που κάναμε είδαμε ότι κάτω από τη συγκεκριμένη μορφή που επιλέξαμε για τη διαταραχή, έχουμε την εμφάνιση ενός παράγοντα αναλογικότητας, ο οποίος παρουσιάζεται σε όλες τις εξισώσεις διαταραχών και συγκεκριμένα έχει την ακόλουθη μορφή, $(l^2 - 4\alpha)$. Καθώς το $l^2 \to 4\alpha$, όλες οι εξισώσεις ικανοποιούνται ταυτοτικά. Το γεγονός αυτό σημαίνει οτι οι όροι πρώτης τάξης της διαταραχής δεν είναι σημαντικοί και επομένως θα πρέπει να προχωρήσουμε σε όρους δεύτερης τάξης. Διαφορετικά θα μπορούσε να πεί κανείς ότι οποιαδήποτε τεχνική διαταραχών, στο συγκεκριμένο όριο καταρρέει.

Είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους ότι το βαθμωτό κομμάτι της διαταραχής μπορεί να διαχωριστεί από το υπόλοιπο μέρος της διαταραχής με την βοήθεια της transverse και traceless βαθμίδας. Επιπρόσθετα μία προσεκτική ανάλυση των εξισώσεων διαταραχής, ανέδειξε ότι το βαθμωτό μέρος της διαταραχής της μετρικής δεν εμφανίζει κάποια παθολογική συμπεριφορά. Για να εξετάσουμε το υπόλοιπο μέρος της διαταραχής, θα θέσουμε αυτούς τους όρους ίσους με μηδέν και θα διερευνήσουμε την απόκριση του συστήματος.

Η εξίσωση για τη διανυσματική συνιστώσα $h_{\phi\theta}$ είναι αρκετά απλή και διαχωρίζεται άμεσα από το υπόλοιπο σύστημα

$$coth\left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}}\right)\frac{\partial h_{\phi\theta}}{\partial\rho}-\sqrt{\alpha}\frac{\partial^2 h_{\phi\theta}}{\partial\rho^2}=0. \tag{4.110}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι τετριμμένη και μας δίνει πληροφορίες μόνο για το εγκάρσιο μέρος της συγκεκριμένης συνιστώσας. Όπως είναι εμφανές δεν υπάρχει καμία πληροφορία για τη διάδοση της διαταραχής στη μεμβράνη και την εξέλιξή της στο χρόνο. Πρίν κάνουμε οποιοδήποτε σχόλιο σχετικά με το συγκεκριμένο φαινόμενο ας δούμε την εξίσωση για τις $h_{t\theta}$ και $h_{r\theta}$ συνιστώσες.

Χρησιμοποιώντας την transverse βαθμίδα οι συγκεκριμές συνιστώσες διαχωρίζονται μεταξύ τους με αποτέλεσμα και οι δύο να ικανοποιούν την ίδια εξίσωση όπως και η $h_{\phi\theta}$ συνιστώσα, δηλαδή μία εξίσωση της μορφής (4.110). Το γεγονός αυτό δεν αποτελεί μία αναμενόμενη συμπεριφορά από πολλές απόψεις. Πρώτον εφοσον η εξάρτηση από τη μεμβράνη είναι αυθαίρετη, θα μπορούσαμε να έχουμε μια οποιαδήποτε συμπεριφορά, για την οποία η παράμετρος Ω να είναι θετική, σηματοδοτώντας με αυτό τον τρόπο την παρέκκλιση του συστήματος από ευσταθή χαρακτηριστικά. Επιπρόσθετα το σύστημα εμφανίζει χαρακτηριστικά εκφυλισμού, αφού και οι τρείς προαναφερθήσες συνιστώσες συμπεριφέρονται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο, ενώ παράλληλα δεν μπορούμε να κάνουμε καμία προβλεψη για την εξέλιξή τους στη μεμβράνη. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να είναι ένα σημάδι ότι έχουμε ένα επιπλέον πρόβλημα ισχυρής σύζευξης, αλλά δεν είναι ξεκάθαρο το κατα πόσο είναι αυτή η περίπτωση ή όχι.

Έχουμε ακόμα το τανυστικό μέρος της διαταραχής, καθώς επίσης και ένα ακόμα διανυσματικό. Αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε από τις εξισώσεις και αν επιλέξουμε, χρησιμοποιώντας την transverse και traceless βαθμίδα, μπορούμε να την θέσουμε ταυτοτικά ίση με μηδέν. Αυτό συμβαίνει για όλες τις εξισώσεις διαταραχών. Για άλλη μια φορά, το συγκεκριμένο αποτέλεσμα δεν αποτελεί παράδειγμα μιάς φυσικά αποδεκτής συμπεριφοράς. Μπορούμε να δώσουμε τις παρακάτω ερμηνίες για το φαινόμενο αυτό. Πρώτον θα μπορούσαμε να μήν έχουμε άλλους βαθμούς ελευθερίας, γεγονός το οποίο είναι αρκετά πιθανό να συμβαίνει, μιας και που στις τρείς διαστάσεις δεν υπάρχει το βαρυτόνιο. Η δεύτερη πιθανότητα είναι να είμαστε και πάλι αντιμέτωποι με ένα πρόβλημα ισχυρής σύζευξης, το οποίο μας εμποδίζει στο να βγάλουμε κάποιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τους γραμικούς όρους της διαταραχής. [1]. Εν τούτοις,

[1]Στην [116] η ολογραφική περιγραφή μιάς θεωρίας με όρους Gauss-Bonnet σε πέντε

η περίπτωση όπου δεν έχουμε κανένα επιπλέον βαθμό ελευθερίας φαίνεται να είναι η πιο πιθανή, μιας και που στην προσέγγιση των συμμετρικών κυμμάτων που έχουμε θεσπίσει τόσο για τη γωνιακή συντεταγμένη πάνω στη μεμβράνη, όσο και για εκείνη στην εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο, υπό μία έννοια η μεμβράνη ''επικοινωνεί'' με τον εγκάρσιο χώρο, μέσω της γωνιακής συμμετρίας των δύο συντεταγμένων. Η απουσία τα βαρυτονίου στη μεμβράνη, εξαιτίας της τρισδιάστατης φύσης της, αντικατοπτρίζεται επίσης και στον εγκάρσιο χώρο λόγω της προαναφερθήσας συμμετρίας.

4.8 Συμπεράσματα

Στη συγκεκριμένη ενότητα μελετήσαμε τις διαταραχές της μετρικής μίας πενταδιάστατης μελανής χορδής σε ένα πρότυπο συνδιάστασης - δύο, με όρους Gauss-Bonnet στο bulk. Μετά από μία επισκόπηση του γενικού φορμαλισμού των γραμμικών διαταραχών της μετρικής, εξετάσαμε την μορφή μίας τροποποιημένης εξίσωσης Lichnerowicz, υπό την παρουσία ενός όρου Gauss-Bonnet. Ως μία εφαρμογή, θεωρήσαμε μία εξαδιάστατη σφαιρικά συμμετρική Gauss-Bonnet μελανή οπή, στην οποία και εφαρμόσαμε την τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz, απ΄ όπου και καταλλήξαμε στα ήδη γνωστά αποτελέσματα για τις τανυστικές διαταραχές.

Εν συνεχεία θεωρήσαμε τις βαθμωτές διαταραχές μίας μελανής χορδής σε ένα πρότυπο συνδιάστασης - δύο, με όρους Gauss-Bonnet στο bulk. Για να κάνουμε την ανάλυση των εν λόγω διαταραχών χρησιμοποιήσαμε τόσο την τροποποιημένη εξίσωση Lichnerowicz, καθώς επίσης και την εξίσωση Klein-Gordon. Μακρυά από το Chern-Simons όριο είδαμε ότι τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων συγκλίνουν. Η συμπεριφορά της μελανής χορδής κάτω από βαθμωτές διαταραχές μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια δύο εξισώσεων. Η μία από αυτές περιγράφει την εξέλιξη της βαθμωτής διαταραχής, πάνω στη μεμβράνη, ενώ η δεύτερη εξίσωση μας δείχνει, με ποιό τρόπο αυτή η διαταραχή εξελίσεται σε διαφορετικές αποστάσεις από τη μεμβράνη. Η εξέλιξη της μελανής χορδής πάνω στη μεμβράνη εξαρτάται από τους ψευδοκανονικούς τρόπους ταλάντωσης (quasinormal modes), οι οποίοι είναι παρόμοιοι με του ψευδοκανονικούς τρόπους ταλάντωσης μίας τρισδιάστατης μελανής με τη μόνη διαφορά ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε την παρουσία ενός επιπλέον όρου ο οποίος μεταφέρει την πληροφορία του bulk. Η ανάλυση της ευστάθειας μας δείχνει ότι η μελανή χορδή είναι ευσταθής κάτω από βαθμωτές διαταραχές.

Επιπλέον μελετήσαμε τις διανυσματικές (vector) και τανυστικές (tensor) διαταραχές της μελανής χορδής. Βρήκαμε ότι για τις διανισματικές συνιστώσες η μόνη πληροφορία για την συμπεριφορά τους, προέρχεται από το bulk, ενώ για τις τανυστικές δεν βρήκαμε καμία φυσικά διαδιδόμενη συνιστώσα. Το φαινόμενο αυτό κυρίως το αποδίδουμε στις συγκεκριμένες συμμετρίες της μελανής χορδής, τις οποίες και θεωρή-

διαστάσεις τέθηκε υπό μελέτη. Το αποτέλεσμα ήταν ότι υπάρχει μία ιδιαίτερη ανωμαλία (Weyl anomaly) η οποία αποτρέπει την εν λόγω θεωρία να συγκλίνει ομαλά προς το όριο Chern-Simons σηματοδοτώντας έτσι την κατάρρευση οποιασδήποτε μεθόδου διαταραχών τουλάχιστον μέχρι τους όρους γραμμικής τάξης.

σαμε επίσης για την διαταραχή, αλλά θα μπορούσε παράλληλα να είναι και μία ένδειξη ενός πιό σοβαρού προβλήματος ισχυρής σύζευξης.

Κεφάλαιο 5

Θεωρίες Ανισοτροπικών Διαστάσεων

Με την πάροδο των ετών, η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) έχει αποδειχθεί ως ένα αρκετά προσοδοφόρο πεδίο έρευνας, τόσο στο πεδίο της μελέτης στατικών λύσεων, όσο και στον τομέα της κοσμολογίας. Αν και σαν θεωρία, έχει εξετασθεί η εγκυρότητά της αρκετές φορές, πρόσφατα αστροφυσικά δεδομένα και κοσμολογικές παρατηρήσεις μας υποδεικνύουν ότι θα πρέπει να τροποποιηθεί σε μεγάλες αποστάσεις. Παράλληλα είναι γνωστό ότι καθώς πηγαίνουμε σε όλο και πιο υψηλές ενέργειες, η ΓΘΣ καταρρέει και θα πρέπει να αντικατασταθεί από μία νέα θεωρία, η τουλάχιστον να τροποποιηθεί καταλλήλως.

Το θέμα της επανακανονικοποίησης της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας αποτελεί ένα αγκάθι στο όλο οικοδόμημά της, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η θεωρία θα πρέπει να ισχύει μέχρι μια συγκεκριμένη ενεργειακή κλίμακα, όπως προαναφέραμε, πέρα από την οποία κάποιο διαφορετικό πρότυπο για τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις, αλλά και για την περιγραφή του χωροχρόνου θα πρέπει να θεωρηθεί. Ένα τέτοιο παράδειγμα μπορούμε να δούμε στην μελέτη της [117], όπου αντί για την κανονική Einstein-Hilbert δράση έχουμε και την εισαγωγή επιπλέον τετραγωνικών όρων καμπυλότητας. Αν και η θεωρία είναι επανακανονικοποιήσιμη περιέχει όρους με αρνητική κινητική ενέργεια και θα πρέπει να απορυθφεί.

Πρόσφατα ο Hořava διατύπωσε μία θεωρία βαρύτητας, κατα την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο χρόνος συμπεριφέρεται διαφορετικά σε σχέση με τις υπόλοιπες τρείς χωρικές διαστάσεις [118],[119]. Το γεγονός αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να μεταχειριστούμε διαφορετικά, όρους που εμπεριέχουν χρονικές και αντίστοιχα χωρικές παραγώγους. Το συγκεκριμένο πρότυπο προσέλκυσε ένα αρκετά μεγάλο ενδιαφέρον, μίας και θεωρήθηκε ώς ένα πιθανό επανακανονικοποιήσιμο πρότυπο για την βαρύτητα. Αρκετά γρήγορα όμως φάνηκε ότι περιείχε κάποιες παθογένιες. Παρόλ΄ αυτά παραμένει μία αρκετά ενδιαφέρουσα πρόταση.

Σ΄ αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε αρχικά με μία βασική επισκόπηση της βαρυτικής θεωρίας του Hořava και στη συνέχεια θα εξετάσουμε ένα πρότυπο κατα το οποίο έχουμε μία τρισδιάστατη μεμβράνη εμβαπτισμένη σε ένα πενταδιάστατο χωροχρόνο, στον οποίο η επιπλέον χωρική διάσταση συμπεριφέρεται διαφορετικά σε σχέση με τις υπόλοιπες τέσσερεις διαστάσεις οι οποίες βρίσκονται πάνω στη μεμβράνη. Ουσιαστικά έχουμε μία παραλλαγή του προτύπου του Hořava, μόνο που σε αυτή τη περίπτωση έχουμε μία χωρική, και όχι μία χρονική διάσταση η οποία να καθορίζει τα κύρια συστατικά του προτύπου. Στην πρώτη παράγραφο θα εξετάσουμε το σπάσιμο της Lorentz συμμετρίας σε βαθμωτές θεωρίες στην κβαντική θεωρία πεδίου και στη συνέχεια θα δούμε τα κύρια χαρακτηριστικά της θεωρίας του Hořava. Στην τέταρτη παράγραφο θα εξετάσουμε τις επιπτώσεις των ανισοτροπικών επιπλέον χωρικών διαστάσεων. Θα βρούμε τις λύσεις για μερικές εκδοχές του προτύπου και θα μελετήσουμε το σύστημα κάτω από βαθμωτές διαταραχές. Το αποτέλεσμα της ανάλυσης είναι, ότι το σπάσιμο της πενταδιάστατης Lorentz συμμετρίας, κατά το οποίο μία επιπλέον χωρική διάσταση μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο από οτι οι υπόλοιπες τέσσερεις, επιφέρει την εμφάνιση παθογενειών στο σύστημα [141].

5.1 Σπάσιμο της Lorentz συμμετρίας

Πριν εξετάσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά του προτύπου του Hořava, ας μελετήσουμε ένα αντίστοιχο θέμα στη θεωρία πεδίου με βαθμωτά πεδία. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την παρακάτω δράση

$$S = \int dtdx^3 \left(\dot{\phi}^2 - \phi(-\Delta)\phi - \kappa\phi^4\right) \tag{5.1}$$

όπου $\dot{} \equiv \partial/\partial t$ και $\Delta = \vec{\nabla}^2$. Κάνοντας μία διαστατική ανάλυση της παραπάνω δράσης θα δούμε ότι, για $[t] = [x] = -1$ το βαθμωτό πεδίο έχει διάσταση $[\phi] = 1$. Τότε η σταθερά σύζευξης κ έχει μηδενική διάσταση. Μάλιστα, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε μία δράση με έναν όρο με μεγαλύτερη δύναμη από το ϕ^4, διότι σε αυτή την περίπτωση η σταθερά σύζευξης αποκτά αρνητική διάσταση κάνοντας τη θεωρία μας μη επανακανονικοποιήσιμη [120].

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε την παρακάτω δράση

$$S = \int dtdx^3 \left(\dot{\phi}^2 - \phi(-\Delta^z)\phi - \kappa_n\phi^n\right). \tag{5.2}$$

Για $z = 1$ έχουμε την (5.1). Το z και το n είναι θετικοί ακέραιοι. Για να είναι μία θεωρία επανακανονοικοποιήσιμη με καταμέτρηση δυνάμεων (power counting renormalisable), θα πρέπει οι όροι αλληλεπίδρασης να έχουν σταθερές σύζευξης η οποίες να μην έχουν αρνητική διάσταση. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η κλίμακα του χρόνου, είναι διαφορετική από εκείνη των υπολοίπων τριών διαστάσεων, δηλαδή ότι διαστατικά έχουμε ότι

$$[t] = -z, \quad [x] = -1. \tag{5.3}$$

Σε αυτή την περίπτωση βλέπουμε ότι η διάσταση του βαθμωτού πεδίου είναι

$$[\phi] = \frac{3-z}{2}, \tag{5.4}$$

ενώ για τη σταθερά σύζευξης κ_n έχουμε

$$[\kappa_n] = 3 + z + n\,\frac{z-3}{2}. \tag{5.5}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι για $z = 3$ η σταθερά σύζευξης κ_n αποκτά θετική διάσταση, οποιοσδήποτε κι αν είναι ο βαθμός αλληλεπίδρασης. Επι της ουσίας σπάσαμε την Lorentz συμμετρία με αποτέλεσμα να έχουμε μία επανακανονικοποιήσιμη θεωρία στην οποία έχουμε συμπεριλάβει επιπλέον όρους οι οποίοι εμπεριέχουν χωρικές παραγώγους [121],[122]. Η πλήρης δράση θα έχει την παρακάτω μορφή

$$S = \int dt dx^3 \left(\dot{\phi}^2 - \phi(m^2 - c^2\Delta + \tilde{c}^4\Delta^2 - \Delta^3)\phi - \kappa_n \phi^n\right). \tag{5.6}$$

Εν κατακλείδι βλέπουμε ότι αντιμετωπίζοντας το χρόνο και το χώρο διαφορετικά μπορούμε να καταλήξουμε σε μία θεωρία με αρκετά ελκυστικά χαρακτηριστικά: πρώτον είναι επανακανονοικοποιήσιμη θεωρία και δεύτερον είμαστε σε θέση να εισαγάγουμε επιπλέον όρους χωρικών μόνο παραγώγων χωρίς την εμφάνιση επιπλέον χρονικών παραγώγων υψηλής τάξης που θα επέφεραν κινητικούς όρους με αρνητικό πρόσημο. Ακριβώς αυτή την ιδέα θα εφαρμόσουμε στη συνέχεια για μία θεωρία βαρύτητας.

5.2 Θεωρία Hořava

Θα ξεκινήσουμε θεωρώντας ότι η χρονική συνιστώσα εμφανίζει μία ανιστοτροπία σε σχέση με τις υπόλοιπες τρείς χωρικές συνιστώσες, γεγονός το οποίο αντικατοπτρίζεται και στη διαστατικότητά τους, όπου και επιλέγουμε την περίπτωση του $z = 3$,

$$[t] = -3, \quad [x] = -1\ . \tag{5.7}$$

Πριν ασχοληθούμε με τη δράση του προτύπου, είναι χρήσιμο να εκφράσουμε τη μετρική σύμφωνα με την ADM μορφή της [123],

$$ds^2 = -c^2 N^2 dt^2 + g_{ij}\left(dx^i - N^i dt\right)\left(dx^j - N^j dt\right)\ , \tag{5.8}$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός με διάσταση $[c] = 2$. Η g_{ij} είναι η χωρική μετρική με signature $(+,+,+)$, ενώ το N και το N_i είναι η συνάρτηση lapse και shift αντίστοιχα, οι οποίες εμφανίζονται κατα τον διαχωρισμό του χωροχρόνου σε τρισδιάστατες χωρικές υπερεπιφάνιες σταθερού χρόνου. Για τις συγκεκριμένες ποσότητες ισχύει ότι

$$[g_{ij}] = 0, \quad [N] = 0, \quad [N_i] = 2\ . \tag{5.9}$$

Έχοντας υποθέσει ότι ο χρόνος και ο χώρος μετασχηματίζονται με διαφορετικό τρόπο, βλέπουμε πως ο χρόνος παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο στο εν λόγο πρότυπο. Ο ρόλος αυτός μπορεί να κωδικοποιηθεί στην πολλαπλότητα θεωρώντας ότι αυτή έχει τη δομή φύλλωσης συνδιάστασης - 1 (codimension-1 foliation). Πλέον δεν θα έχουμε μία συμμετρία της θεωρίας κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων (general coordinate invariance), αλλά κάτω από ένα πιο αυστηρό σύνολο μετασχηματισμών, το λεγόμενο μετασχηματισμό διατήρησης φύλλωσης (foliation preserving transformations), οι οποίοι έχουν την παρακάτω μορφή

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}(x^j, t), \quad \tilde{t} = \tilde{t}(t) \ . \tag{5.10}$$

Η μορφή των παραπάνω μετασχηματιμών θα μας επιβάλει και την κατάλληλη δομή της δράσης, όπως επίσης θα μας επιτρέψει να εισαγάγουμε επιπλέον όρους στη δράση.

Ο τρόπος με τον οποίο μετασχηματίζονται τα g_{ij}, N και N_i είναι ο εξής. Ξεκινάμε με το g_{ij}. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} t' &= t + f(t) && (5.11)\\ x'^i &= x^i + \zeta^i(t, \chi). && (5.12)\end{aligned}$$

Επομένως για τη χωρική μετρική θα έχουμε

$$\begin{aligned} g'_{ij}\left(X'\right) &= \frac{dx^A}{dx'^i}\frac{dx^B}{dx'^j} g_{AB}\left(X\right) \\ &= (\delta_i^k - \partial_i\zeta^k)(\delta_j^l - \partial_j\zeta^l) g_{kl}\left(X\right) \\ &= g_{ij} - \partial_i\zeta^l g_{jl} - \partial_j\zeta^l g_{il}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

όπου τα κεφαλαία γράμματα τρέχουν σε όλο τον χωρόχρονο, ενώ οι λατινικοί χαρακτήρες υποδηλώνουν μόνο χωρικές συνιστώσες. Επομένως για τη μεταβολή βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} &= g_{ij}\left(X'\right) - g'_{ij}\left(X'\right) \\ &= f\dot{g}_{ij} + \zeta^k\partial_k g_{ij} + \partial_i\zeta^l g_{jl} + \partial_j\zeta^l g_{il}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Κατ΄ αναλογία έχουμε τα παρακάτω και για τα N και N_i, τα οποία συνοψίζουμε μαζί με το g_{ij}

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} &= f\dot{g}_{ij} + \zeta^k\partial_k g_{ij} + \partial_i\zeta^l g_{jl} + \partial_j\zeta^l g_{il} \\ \delta N_i &= N_j\partial_i\zeta^j + \zeta^j\partial_j N_i + \dot{\zeta}^j g_{ij} + \dot{f}N_i + f\dot{N}_i \\ \delta N &= \zeta^j\partial_j N + \dot{f}N + f\dot{N}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Η δράση τώρα για το πρότυπο του Hořava, αποτελείται από έναν κινητικό όρο και ένα δυναμικό

$$S = S_K + S_V, \tag{5.16}$$

με τον κινητικό όρο της δράσης να παίρνει την παρακάτω μορφή

$$S_K = \frac{2}{\kappa^2}\int dtd^3xN\sqrt{g}\left(K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2\right), \tag{5.17}$$

όπου K_{ij} είναι η εξωγενής καμπυλότητα (extrinsic curvature)

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i\right) \tag{5.18}$$

με $K = g_{ij}K_{ij}$ και τη συναλλοίωτη παράγωγο ∇ να υπολογίζεται με βάση τη μετρική g_{ij}, ενώ τα κ, λ είναι σταθερές σύζευξης με το λ να είναι αδιάστατο. Υπολογίζοντας τη διαστατικότητα της εξωγενούς καμπυλότητας έχουμε ότι

$$[K_{ij}] = 3, \tag{5.19}$$

επομέμως βλέπουμε ότι η σταθερά σύζευξης κ είναι και αυτή αδιάστατη. Η παρουσία της σταθεράς λ ουσιαστικά σηματοδοτεί το σπάσιμο της πλήρους συμμετρίας κάτω από τους γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων και επιβάλει, κάθε όρος του κινητικού όρου της δράσης να παραμένει αμετάβλητος κάτω από τους πιο περιοριστικούς μετασχηματισμούς διατήρησης φύλλωσης. Για παράδειγμα για τον πρώτο όρο έχουμε

$$\begin{aligned} K'_{ij}(X') &= \frac{\partial x^A}{\partial x^i}\frac{\partial x^B}{\partial x^j}K_{AB} \\ &= \left(\delta_i^k - \partial_i\zeta^k\right)\left(\delta_j^l - \partial_j\zeta^l\right)K_{kl} \\ &= K_{ij}(X) - \partial_i\zeta^k K_{kj} - \partial_j\zeta^k K_{ki} \end{aligned} \tag{5.20}$$

και

$$K_{ij}(X') = K_{ij}(X) + f\dot{K}_{ij} + \zeta^k\partial_k K_{ij}, \tag{5.21}$$

άρα

$$\delta K_{ij} = f\dot{K}_{ij} + \zeta^k\partial_k K_{ij} + \partial_i\zeta^k K_{kj} + \partial_j\zeta^k K_{ki}. \tag{5.22}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} K'^{ij}(X') &= \frac{\partial x^i}{\partial x^A}\frac{\partial x^j}{\partial x^B}K^{AB} \\ &= \left(\delta_k^i + \partial_k\zeta^i\right)\left(\delta_l^j + \partial_l\zeta^j\right)K^{kl} \\ &= K^{ij}(X) + \partial_k\zeta^i K^{kj} + \partial_k\zeta^j K^{ki} \end{aligned} \tag{5.23}$$

και

$$K^{ij}(X') = K^{ij}(X) + f\dot{K}^{ij} + \zeta^k\partial_k K^{ij}, \tag{5.24}$$

άρα

$$\delta K^{ij} = f\dot{K}^{ij} + \zeta^k\partial_k K^{ij} - \partial_k\zeta^i K^{kj} + \partial_k\zeta^j K^{ki}. \tag{5.25}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε ότι

$$\delta(K_{ij}K^{ij}) = f\partial_t(K_{ij}K^{ij}) + \zeta^k\partial_k(K_{ij}K^{ij}). \tag{5.26}$$

Εκμεταλευόμενοι τις (5.26) και (5.15) και επειδή ισχύει

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ij}\delta g_{ij}, \quad \partial_c g = g g^{ab}\partial_c g_{ab}, \tag{5.27}$$

μπορούμε να δούμε ότι ο πρώτος όρος του κινητικού όρου είναι αμετάβλητος κάτω από το συγκεκριμένο μετασχηματισμό. Αντίστοιχα μπορούμε να αποδείξουμε, ότι και ο δεύτερος όρος παραμένει επίσης αμετάβλητος κάτω από τους μετασχηματισμούς διατήρησης φύλλωσης. Σε αντίθεση με τη Γενική Σχετικότητα η απαίτηση να έχουμε συμμετρία κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, επιβάλει το $\lambda = 1$. Στην περίπτωση της θεωρίας του Hořava η σταθερά λ, είναι μία δυναμική σταθερά.

Έχοντας ορίσει τη μορφή του κινητικού όρου, θα περάσουμε στη συνέχεια στον όρο δυναμικού. Όπως είναι φανερό υπάρχουν πάρα πολλοί συνδιασμοί για το δυναμικό, ωστόσο η αρχική θεωρία βασίστηκε σε μία παραδοχή, η οποία ελάττωνε τους πιθανούς συνδιασμούς. Η συμμετρία λεπτομερούς ισορροπίας (detailed balance), κάτω από την οποία θα πρέπει να υπόκειται το δυναμικό V, προέρχεται από τη φυσική συμπυκνωμένης ύλης και συνοπτικά ορίζει ότι το δυναμικό V θα πρέπει να προκύπτει από ένα υπερδυναμικό W, δηλαδή

$$V = E^{ij}\mathcal{G}_{ijkl}E^{kl}, \tag{5.28}$$

όπου

$$E^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\delta W}{\delta g_{ij}} \tag{5.29}$$

και

$$\mathcal{G}^{ijkl} = \frac{1}{2}\left(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}\right) - \lambda g^{ij}g^{kl}. \tag{5.30}$$

Η πιο γενική δράση που μπορεί να γραφεί με βάση τις παραπάνω παραδοχές έχει την παρακάτω μορφή.

$$S_{db} = \frac{M_{pl}^2}{2}\int d^3x dt N\sqrt{g}\Bigg\{K^{ij}K_{ij} - \lambda K^2 - \frac{\alpha^4}{M_{pl}^4}C_{ij}C^{ij} \tag{5.31}$$

$$+\frac{2\alpha^2\beta}{M_{pl}^3}\frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}}R_{il}\nabla_j R^l{}_k - \frac{\beta^2}{M_{pl}^2}R^{ij}R_{ij} + \frac{\beta^2}{4}\frac{1-4\lambda}{1-3\lambda}R^2$$

$$+\frac{\beta^2\,\zeta}{1-3\lambda}R - \frac{3\beta^2\,\zeta^2}{1-3\lambda}M_{pl}^2\Bigg\}, \tag{5.32}$$

όπου ϵ^{ijk} είναι το σύμβολο Levi-Civita και

$$C^{ij} = \frac{\epsilon^{ikl}}{\sqrt{g}}\nabla^k\left(R^j{}_l - \frac{1}{4}R\delta^j{}_l\right) \tag{5.33}$$

είναι ο τανυστής Cotton και τα α, β και ζ είναι αδιάστατες σταθερές. Ωστόσο η συγκεκριμένη μορφή για τη δράση δεν είναι συμβατή με τις παρατηρήσεις για $\lambda > 1/3$, ενώ παραβιάζει την ισοτιμία (parity).

Επίσης η θεωρία χωρίζεται σε δύο επιπλέον κατηγορίες. Η περίπτωση κατα την οποία το $N = N(t)$, ονομάζεται προβαλώμενη (projectable), ενώ εάν $N = N(t, x^i)$ έχουμε τη μη-προβαλώμενη (non-projectable), περίπτωση. Στην προβαλώμενη περίπτωση έχουμε ότι η δράση παίρνει την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} S_p &= \frac{M_{pl}^2}{2}\int d^3x dt N\sqrt{g}\Big\{ K^{ij}K_{ij} - \lambda K^2 - g_0\, M_{pl}^2 - g_1 R - g_2\, M_{pl}^{-2}\, R^2 \\ &\quad - g_3\, M_{pl}^{-2}\, R_{ij}R^{ij} - g_4\, M_{pl}^{-4}\, R^3 - g_5\, M_{pl}^{-4}\, R(R_{ij}R^{ij}) \\ &\quad - g_6\, M_{pl}^{-4}\, R^i{}_j R^j{}_k R^k{}_i - g_7\, M_{pl}^{-4}\, R\nabla^2 R \\ &\quad - g_8\, M_{pl}^{-4}\, \nabla_i R_{jk}\, \nabla^i R^{jk} \Big\}, \end{aligned} \tag{5.34}$$

με τα g_i να είναι αδιάστατες σταθερές. Βλέπουμε ότι στη δράση δεν υπάρχει καθόλου η παρουσία του τανυστή Riemann. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι στις τρείς διαστάσεις ο τανυστής Riemann μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός του βαθμωτού Ricci και του τανυστή Ricci. Κάτι τέτοιο θα ήταν αδύνατο αν θεωρούσαμε την ίδια θεωρία σε περισσότερες από τέσσερεις διαστάσεις, όπου σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε να τον συμπεριλάβουμε [131]. Στην (5.34) δεν υπάρχουν πλέον όροι που παραβιάζουν την ισοτιμία, ενώ το g_0 σχετίζεται με τη κοσμολογική σταθερά[124],[125],[126].

Στη μη-προβαλώμενη περίπτωση πέρα από τους όρους της (5.34) θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και τον παρακάτω όρο

$$\begin{aligned} \Delta S_V &= \frac{M_{pl}}{2}\int d^3x dt N\sqrt{g}\,[\eta\, \alpha_i\alpha^i + \xi_1\alpha_i^4 + \xi_2\alpha_i\nabla^2\alpha^i + \xi_3\nabla^2 R + ... \\ &\quad \chi_1\alpha_i^6 + \chi_2\alpha_i\nabla^4\alpha^i + \chi_3\nabla^4 R + ...]. \end{aligned} \tag{5.35}$$

όπου

$$\alpha_i = \partial_i \ln N \tag{5.36}$$

Στην παραπάνω σχέση δεν έχουμε γράψει όλο το πλήθος των πιθανών όρων τέταρτης και έκτης τάξης που θα μπορούσαν να συμπεριληθφούν [127].

Η θεωρία όπως προαναφέραμε προσέλκυσε αρκετά μεγάλο ενδιαφέρον, τόσο στον τομέα της κοσμολογίας [129], όσο επίσης και στη μελέτη μελανών οπών [128], [130], [131],[132], καθώς επίσης και σε άλλους τομείς. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το σοβαρότερο θέμα της εν λόγω θεωρίας το οποίο εντοπίζεται στον επιπλέον βαθμό ελευθερίας, ο οποίος εμφανίζεται εξαιτίας του ότι πλέον δεν έχουμε τους πλήρεις μετασχηματισμούς κάτω από μία γενική αλλαγή συντεταγμένων, αλλά ένα πιο περιορισμένο σύνολο.

5.3 Πρόβλημα Ισχυρής Σύζευξης

Το εν λόγο πρόβλημα μελετήθηκε αρχικά στην [133] και στη συνέχεια στις [134], [135], [136], [137], [138]. Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα μελετήσουμε το πρόβλημα της ισχυρούς σύζευξης υπό το πρίσμα της μη-προβαλώμενης θεωρίας (non-projectable) [137].

Ξεκινάμε θεωρώντας την παρακάτω δράση

$$S = \frac{M_{pl}^2}{2}\int d^3x\delta t N\sqrt{g}\left\{K^{ij}K_{ij} - \lambda K^2 - \mathcal{V}\right\}, \tag{5.37}$$

όπου το M_{pl} είναι η μάζα Planck και $\mathcal{V}$ είναι ένα γενικό δυναμικό της δράσης, το οποίο έχει την εξής μορφή

$$\mathcal{V} = 2\Lambda - R + M_{pl}^{-2}O(R^2) + M_{pl}^{-4}O(R^3) + \alpha - terms, \tag{5.38}$$

όπου για το α_i έχουμε ότι

$$\alpha_i \equiv \partial_i N/N. \tag{5.39}$$

Για να συνεχίσουμε, θα ασχοληθούμε με το όριο που η ενέργεια είναι χαμηλή, όπου και διατηρούμε εκείνους τους όρους του δυναμικού, των οποίων η διάσταση είναι το πολύ 2 και θα θέσουμε τη μάζα Planck ίση με ένα. Επομένως η δράση στην οποία και θα επικεντρωθούμε είναι η εξής

$$S = \frac{1}{2}\int d^3x\delta t N\sqrt{g}\left\{K^{ij}K_{ij} - \lambda K^2 + R + \eta\, a_i a^i\right\}. \tag{5.40}$$

Θα εξετάσουμε της βαθμωτές διαταραχές σε ένα επίπεδο υπόβαθρο το οποίο και αποτελεί λύση των εξισώσεων κίνησης της παραπάνω δράσης. Υποθέτουμε λοιπόν ότι έχουμε

$$N = e^{\alpha(t,x)}, \quad N_i = \partial_i\beta(t,x), \quad g_{ij} = e^{2\zeta(t,x)}\delta_{ij}. \tag{5.41}$$

Η ποιο γενική μορφή για τις βαθμωτές διαταραχές περιέχει και έναν όρο ακόμα στη μετρική g_{ij}, ο οποίος είναι της μορφής $\partial_i\partial_j E(t,x)$. Ωστόσο διαλέγοντας ένα κατάλληλο μετασχηματισμό, $x^i \to x^i + \chi^{,i}$, η συνάρτηση E μεταβάλλεται σαν $E \to E - \chi$. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε με κατάλληλο τρόπο το χ, ώστε να απαλλήψουμε τη συνιστώσα E.

Χρησιμοποιώντας την (5.41) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)\\ &= \delta^k_j\partial_i\zeta + \delta^k_i\partial_j\zeta - \delta_{ij}\partial^k\zeta,\end{aligned} \tag{5.42}$$

όπου ισχύει ότι

$$\partial^k\zeta = \delta^{kl}\partial_l\zeta. \tag{5.43}$$

Για την εξωγενή καμπυλότητα (extrinsic curvature) έχουμε

$$\begin{aligned}K_{ij} &= \frac{1}{2N}\left(\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i\right)\\ &= \frac{1}{e^{2\alpha}}\left(2e^{2\zeta}\dot{\zeta}\delta_{ij} - 2\partial_i\partial_j\beta + 2\partial_i\zeta\partial_j\beta + 2\partial_j\zeta\partial_i\beta - 2\delta_{ij}\partial^k\zeta\partial^k\beta\right)\end{aligned} \tag{5.44}$$

και για το ίχνος της

$$\begin{aligned} K &= g^{ij}K_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha-2\zeta}\right)\left(6\dot{\zeta}e^{2\zeta} - 2\Delta\beta - 2\partial^k\zeta\partial^k\beta\right), \end{aligned} \tag{5.45}$$

όπου

$$\Delta = \delta^{ij}\partial_i\zeta\partial_j. \tag{5.46}$$

Τώρα για τον τανυστή Riemann έχουμε ότι

$$\begin{aligned} R^i{}_{jkl} &= \partial_k\Gamma^i_{jl} - \partial_l\Gamma^i_{jk} + \Gamma^e_{jl}\Gamma^i_{ek} - \Gamma^e_{jk}\Gamma^i_{el} \\ &= \delta^i_l\partial_k\partial_j\zeta - \delta_{jl}\partial_k\partial^i\zeta - \delta^i_k\partial_l\partial_j\zeta + \delta_{jk}\partial_l\partial^i\zeta \\ &\quad +\delta^i_k\partial_l\zeta\partial_j\zeta - \delta^i_k\delta_{jl}(\partial\zeta)^2 + \delta_{jl}\partial_k\zeta\partial^i\zeta \\ &\quad -\delta^i_l\partial_k\zeta\partial_j\zeta + \delta^i_l\delta_{jk}(\partial\zeta)^2 - \delta_{jk}\partial^i\zeta\partial_l\zeta, \end{aligned} \tag{5.47}$$

ενώ για τον τανυστή Ricci και το βαθμωτό Ricci βρίσκουμε

$$\begin{aligned} R_{jl} &= R^i{}_{jil} \\ &= -\delta_{jl}\Delta\zeta - \partial_l\partial_j\zeta - \delta_{jl}(\partial\zeta)^2 + \partial_l\zeta\partial_j\zeta \end{aligned} \tag{5.48}$$

και αντίστοιχα

$$\begin{aligned} R &= g^{jl}R_{jl} \\ &= -2e^{-2\zeta}\left((\partial\zeta)^2 + 2\Delta\zeta\right). \end{aligned} \tag{5.49}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες στην (5.40) και διατηρώντας τους όρους δεύτερης τάξης, καταλήγουμε στην ακόλουθη Λανγκραντζιανή, εφαρμόζοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{3}{2}(1-3\lambda)\dot{\zeta}^2 + (\partial\zeta)^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)(\Delta\beta)^2 - (1-3\lambda)\dot{\zeta}\Delta\beta - 2\alpha\Delta\zeta - \frac{\eta}{2}\alpha\Delta\alpha. \tag{5.50}$$

Από την παραπάνω Λανγκραντζιανή, βρίσκουμε τις εξισώσεις για το α και β οι οποίες αντιστοιχουν στις εξισώσεις διατήρησης της ορμής (momentum constraint) και ενέργειας (Hamiltonian constraint), θεωρώντας πάντα κατάλληλες συνοριακές συνθήκες,

$$\Delta\beta = -\frac{1}{c_\zeta^2}\dot{\zeta}, \qquad \alpha = -\frac{2}{\eta}\zeta. \tag{5.51}$$

Για το c_ζ ισχύει ότι

$$c_\zeta^2 = \frac{1-\lambda}{3\lambda-1}. \tag{5.52}$$

Στη Γενική Σχετικότητα, όπου έχουμε τους πλήρης μετασχηματισμούς συντεταγμένων, με τη βοήθεια των παραπάνω συνθηκών θα βρίσκαμε ότι $\zeta = 0$, ότι δηλαδή το βαρυτόνιο δεν έχει ένα βαθμωτό βαθμό ελευθερίας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση όμως λόγο του σπασίματος της συμμετρίας των εν λόγο μετασχηματισμών έχουμε την εμφάνιση του επιπλέον βαθμού ελευθερίας. Αντικαθιστώντας τις (5.51) στην Λανγκραντζιανή δεύτερης τάξης και με κατάλληλες παραγοντικές ολοκληρώσεις βρίσκουμε την ακόλουθη Λανγκραντζιανή

$$S_2 = -\int \delta^3 x \delta t \left[\frac{1}{c_\zeta^2}\dot{\zeta}^2 - \frac{\eta - 2}{\eta}(\partial\zeta)^2 \right]. \tag{5.53}$$

Από την (5.53) βλέπουμε ότι το c_ζ αντιστοιχεί στην ταχύτητα του ήχου, για τη διαταραχή ζ. Είναι φανερό από τη δομή του c_ζ, ότι θα πρέπει να ισχύουν κάποιοι περιορισμοί στις τιμές του λ. Δίχως τη συνεισφορά του η η ζ συνιστώσα της διαταραχής είτε θα ήταν ασταθής για $c_\zeta^2 < 0$, ή θα είχε κινητική ενέργεια με το λάθος πρόσημο στην περίπτωση που $c_\zeta^2 > 0$. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί υποθέτοντας ότι έχουμε τον παρακάτω περιορισμό

$$c_\zeta^2 < 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad 0 < \eta < 2. \tag{5.54}$$

Έχοντας μελετήσει τώρα τη συμπεριφορά για τους όρους δεύτερης τάξης συνεχίζουμε, εξετάζοντας τους όρους τρίτης τάξης, ώστε να ερευνήσουμε το πρόβλημα της ισχυρούς σύζευξης. Η Λανγκραντζιανή για τους όρους τρίτης τάξης έχει ως εξής

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 \;=\; & \frac{9}{2}(1-3\lambda)\zeta\dot{\zeta}^2 - \zeta(\partial\zeta)^2 - \zeta^2\Delta\zeta - (1-3\lambda)\zeta\dot{\zeta}\Delta\beta - (1-3\lambda)\dot{\zeta}\partial_k\zeta\partial^k\beta \\
& + (1-\lambda)\Delta\beta\partial_k\zeta\partial^k\beta - \frac{1}{2}\zeta\partial_i\partial_j\beta\partial^i\partial^j\beta - 2\partial_i\partial_j\beta\partial^i\beta\partial^j\zeta + \frac{\lambda}{2}\zeta(\Delta\beta)^2 \\
& - \frac{3}{2}(1-3\lambda)\alpha\dot{\zeta}^2 + (1-3\lambda)\alpha\dot{\zeta}\Delta\beta - \frac{1}{2}\alpha\partial_i\partial_j\beta\partial^i\partial^j\beta + \frac{\lambda}{2}\alpha(\Delta\beta)^2 - \alpha(\partial\zeta)^2 \\
& - 2\alpha\zeta\Delta\zeta - \alpha^2\Delta\zeta + \frac{\eta}{2}\zeta(\partial\alpha)^2 + \frac{\eta}{2}\alpha(\partial\alpha)^2.
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Αντικαθιστώτας τους περιορισμούς (5.51), βρίσκουμε τη δράση για τους όρους τρίτης τάξης της διαταραχής,

$$\begin{aligned}
S_3 \;=\; & \int \delta t \delta^3 x \left\{ \left(1 - \frac{4(1-\eta)}{\eta^2}\right)\zeta(\partial\zeta)^2 - \frac{2}{c_\zeta^4}\dot{\zeta}\partial_i\zeta\frac{\partial^i}{\Delta}\dot{\zeta} \right. \\
& \left. + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\eta}\right)\left[\frac{1}{c_\zeta^4}\zeta\left(\frac{\partial_i\partial_j}{\Delta}\dot{\zeta}\right)^2 - \frac{(2c_\zeta^2+1)}{c_\zeta^4}\zeta\dot{\zeta}^2\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Παρατηρώντας την (5.56) έχουμε να σημειώσουμε τα εξής. Αν αποκαταστήσουμε τη σταθερά M_{pl} στη δράση και κανονικοποιώντας τον κινητικό όρο στην (5.53) ως, $\zeta = |c_\zeta|\hat{\zeta}/M_{pl}$, όλοι οι όροι της (5.56) εκτός από τον πρώτο μεταβάλλονται σαν $(|c_\zeta|M_{\rm pl})^{-1}$. Επομένως για $\lambda \to 1$, όπου έχουμε αποκατάστασης της Lorentz συμμετρίας, το $c_\zeta \to 0$, με αποτέλεσμα οι αλληλεπιδράσεις της ζ συνιστώσας να γίνονται ισχυρά συζευγμένες για ενέργειες μεγαλύτερες από $|c_\zeta|M_{pl}$. Επιπλέον η παρουσία της σταθεράς σύζευξης η δεν επιλύει το πρόβλημα μιάς και οι τιμές της, για τις οποίες κάποιοι από τους όρους μηδενίζονται βρίσκονται εκτός των επιτρεπτών ορίων. Επιπλέον όπως φαίναται και στην (5.56), ο δεύτερος όρος δεν εξαρτάται από το η και επομένως το προβλημα ισχύρής σύζευξης θα παραμένει έστω και αν υπήρχε κάποια επιτρεπτή τιμή για το η.

Επιπρόσθετα ούτε και οι όροι με παραγώγους ανώτερης τάξης θα άλλαζαν ιδιαίτερα την κατάσταση, αφού θα πρόσθεταν όρους με χωρικές παραγώγους του ζ και του α και όχι του β το οποίο και σχετίζεται με τις χρονικές παραγώγους του ζ και είναι αυτές οι οποίες εμφανίζουν το πρόβλημα ισχυρής σύζευξης. Το μόνο αποτέλεσμα της εισαγωγής των επιπλέον όρων στη δράση, που πιθανώς να έλυνε το πρόβλημα είναι η εισαγωγή μιάς καινούργιας ενεργειακής κλίμακας Z, για την οποία ισχύει $Z < |c_\zeta| M_{\rm pl}$. Σε αυτή την περίπτωση οι όροι με υψηλότερες διαστάσεις θα κυριαρχήσουν κατα τη διαταρακτική διαδικασία, πρίν ενεργοποιηθεί το πρόβλημα ισχυρής σύζευξης [137],[139],[140].

5.4 Ανισοτροπικές επιπλέον χωρικές διαστάσεις

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε τα κύρια χαρακτηριστικά της θεωρίας του Hořava για μία αρκούντως επαρκή θεωρία βαρύτητας, η οποία θα παρέχει αναλλακτική άποψη για το όριο των υψηλών ενεργειών. Η κατασκευή της στηρίζεται στην ύπαρξη μία προτιμητέας φύλλωσης του τρισδιάστατου χώρου σε υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου, χωρίζοντας έτσι το χωροχρόνο σε χώρο και χρόνο με ένα διακριτό τρόπο. Το γεγονός αυτό μας επέτρεψε να εισαγάγουμε στη δράση τελεστές οι οποίοι περιέχουν χωρικές παραγώγους υψηλής τάξης, δίχως την παράλληλη εισαγωγή χρονικών παραγώγων, που θα προκαλούσαν παθογένειες στο σύστημα. Η διαδικασία αυτή βελτιώνει τη συμπεριφορά του διαδώτη της βαρύτητας κάνοντας τη θεωρία επανακανονικοποιήσιμη. Ωστόσο είδαμε ότι λόγω της συγκεκριμένης φύλλωσης θα πρέπει να αποχωριστούμε την συμμετρία κάτω από τους γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων και να υιοθετήσουμε ένα πιο περιοριστικό σύνολο μετασχηματισμών, το οποίο ακολούθως παράγει έναν επιπλέον βαθμωτό βαθμό ελευθερίας. Το συγκεκριμένο βαθμωτό πεδίο, φαίνεται ότι παρουσιάζει ένα πρόβλημα ισχυρής σύζευξης στο όριο κατα το οποίο η θεωρία συγκλίνει στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, βάζοντας σοβαρές σκέψεις για τη βιωσιμότητα της θεωρίας.

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε και πάλι το σπάσιμο των γενικών μετασχηματισμών συντεταγμένων, αλλα τώρα θα ασχοληθούμε με ένα πρότυπο στο οποίο έχουμε μία επιπλέον χωρική διάσταση και η προτιμητέα φύλλωση είναι προσαρμοσμένη στην επιπλέον χωρική διάσταση και όχι στο χρόνο, όπως στο πρότυπο του Hořava [118], [119], [131]. Το γεγονός αυτό θα αφήσει αμετάβλητο τον τετραδιάστατο χωρόχρονο, περαμένοντας αναλλοίωτος κάτω από τους τετραδιάστατους μετασχηματισμούς Lorentz, αλλά θα επιρρεάσει την πλήρη πενταδιάστατη θεωρία. Επιπρόσθετα ανάλογα με τον τρόπο που μετασχηματίζεται η επιπλέον χωρική διάσταση, μπορούμε να εισαγάγουμε επιπλέον όρους της εξωγενούς καμπυλότητας στη δράση, προτού φτάσουμε σε ενέργειες όπου αναπόφευκτα θα πρέπει να εισάγουμε και τετραδιάστατους όρους καμπυλότητας, οι οποίοι τώρα περιέχουν χρονικές παραγώγους και με αυτό τον τρόπο θα έχουμε την εμφάνιση κινητικών όρων με αρνητικό πρόσημο (ghosts).

Σκοπός της μελέτης είναι να εξετάσουμε το σπάσιμο των γενικών μετασχηματισμών συντεταγμένων με ένα τρόπο όπου να αφήνουμε ανέπαφη την τετραδιάστατη συμμετρία και παράλληλα να εξετάσουμε τις επιπτώσεις του προτύπου αυτού. Αφού δούμε ποιά είναι η δράση και οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν απο την εν λόγο δράση θα μελετήσουμε ποιές είναι οι λύσεις κενού για τις εξισώσεις και θα εξετάσουμε την ευστάθεια του μοντέλου κάτω απο βαθμωτές διαταραχές.

5.4.1 Εξισώσεις Κίνησης

Ξεκινάμε αρχικά, θεωρώντας μία πενταδιάστατη Einstein θεωρία βαρύτητας, υπό την παρουσία μίας κοσμολογικής σταθεράς, με μία μεμβράνη εμβαπτισμένη σε κάποιο σημείο, $y = 0$ της επιπλέον χωρικής διάστασης. Υποθέτουμε ότι κατα μήκος της επιπλέον διάστασης μία Z_2 συμμετρία με το $y = 0$ να είναι το σημείο εφαρμογής. Η δράση που αντιστοιχεί στο σύστημα δίνεται κατα τα γνωστά από

$$S = \int d^5x \left(R^{(5)} - 2\Lambda_5\right)\sqrt{-G} - \int_{brane} d^4x\sqrt{-g}\,\sigma, \tag{5.57}$$

όπου $R^{(5)}$ είναι ο πενταδιάστατος όρος Einstein-Hilbert με Λ_5, σ και G_{MN} να είναι η πενταδιάστατη κοσμολογική σταθερά, η τάση της μεμβράνης και η πενταδιάστατη μετρική, ενώ το $g_{\mu\nu}$ αντιστοιχεί στην τετραδιάστατη μετρική. Θέλουμε να τροποποιήσουμε την παραπάνω δράση με τέτοιο τρόπο ώστε να σπάσει η αναλλοιώτητα κάτω απο διφεομορφισμούς ως προς την επιπλέον χωρική διάσταση.

Θα αναλύσουμε την πενταδιάστατη μετρική σύμφωνα με τον ADM φορμαλισμό, με βάση την επιπλέον διάσταση y

$$ds^2 = dy^2N^2c^2 + g_{\mu\nu}\left(N^\mu dy + dx^\mu\right)\left(N^\nu dy + dx^\nu\right), \tag{5.58}$$

με το $g_{\mu\nu}$ να είναι η τετραδιάστατη μετρική, όπως προαναφέραμε. Κατά την τροποποίηση της (5.57) θα υποθέσουμε ότι έχουμε ανισοτροπικούς μετασχηματίσμούς στις διαστάσεις, με $[x^\mu] = -1$ και $[y] = -w$, κατά την οποία η επιπλέον διάσταση μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο από τις υπόλοιπες τέσσερεις διαστάσεις, οι οποίες βρίσκονται πάνω στη μεμβράνη. Για μία τέτοια θεωρία, οι συνιστώσες της ADM μετρικής έχουν τις ακόλουθες διαστάσεις $[g_{\mu\nu}] = 0$, $[N] = 0$ και $[N^\nu] = w - 1$. Η πενταδιάστατη δράση λοιπόν (5.57), μπορεί να γενικευθεί σαν

$$S = \int d^4x dy N\sqrt{-g}\left[\frac{\rho}{2}\left(R^{(4)} - 2\Lambda_5\right) - \frac{2}{\kappa^2}\left(K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - \lambda K^2\right)\right] - \int_{brane} d^4x\sqrt{-g}\,\sigma\,, \tag{5.59}$$

με την εξωγενή καμπυλότητα $K_{\mu\nu}$ να δίνεται από τη σχέση

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N}\left(\partial_y g_{\mu\nu} - \nabla_\mu N_\nu - \nabla_\nu N_\mu\right)\ , \tag{5.60}$$

απ΄ όπου βλέπουμε ότι έχει διάσταση $[K_{\mu\nu}] = w$, ενώ για τις υπόλοιπες σταθερές έχουμε ότι $[\rho] = w+2$, $[\kappa] = \frac{w-4}{2}$, $\left[R^{(4)}\right] = [\Lambda_5] = 2$. Η παραπάνω δράση μπορεί να εμπεριέχει επιπλέον διορθωτικούς όρους, εισάγοντας σε αυτή τελεστές υψηλών διαστάσεων. Ανάλογα με την τιμή του w, μπορούμε να έχουμε ακόμα μεγαλύτερες δυνάμεις της εξωγενούς καμπυλότητας στη δράση, οι οποίες είναι σημαντικές σε εκείνες τις ενεργειακές κλίμακες για τις οποίες δεν χρειάζεται να εισαγάγουμε όρους οι οποίοι θα διαταράξουν την ομαλότητα της θεωρίας (π.χ. για παράδειγμα τετραγωνικούς όρους της τετραδιάστατης καμπυλότητας R^2, οι οποίοι εμπεριέχουν χρονικές παραγώγους υψηλής τάξης). Θα ασχοληθούμε με την συγκεκριμένη πιθανότητα σε επόμενη παράγραφο. Προς το παρόν θα επικεντρωθούμε στη κλασική γενικευμένη δράση (5.59).

Η παράμετρος λ είναι πολύ σημαντική, όπως και στην περίπτωση της θεωρίας του Hořava. Ουσιαστικά αντιπροσωπεύει το σπάσιμο των πενταδιάστατων μετασχηματισμών κάτω από γενικευμένες συντεταγμένες, αφήνοντας την τετραδιάστατη υποομάδα τους ανέπαφη. Η συγκεκριμένη συμμετρία επιβάλλει τη εισαγωγή του $K^2_{\mu\nu}$ και του K^2 στη δράση με διαφορετικό τρόπο, σε αντίθεση με την πλήρη θεωρία για την οποία θα είχαμε $\lambda = 1$.

Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την δράση (5.59) με βάση τα πεδία N, N_μ και $g_{\mu\nu}$ δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta N} = \frac{\rho}{2}\left(R^{(4)} - 2\Lambda_5\right) + \frac{2}{\kappa^2}\left(K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - \lambda K^2\right) \ , \tag{5.61}$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta N_\mu} = -\frac{4}{\kappa^2}\nabla_\mu \pi^{\mu\nu} \ , \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} &= -\frac{\rho}{2}\left(G^{\mu\nu}_{(4)} + g^{\mu\nu}\Lambda_5\right)N \\ &+\frac{2}{\kappa^2}\left[\partial_y \pi^{\mu\nu} + NK\pi^{\mu\nu} + 2\nabla_\sigma\left(\pi^{\sigma(\mu}N^{\nu)}\right) - N_\kappa\nabla^\kappa\pi^{\mu\nu} + 2NK^{\sigma\mu}\pi^\nu_{\ \sigma}\right] \\ &-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{2}{\kappa^2}\left(K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - \lambda K^2\right) - \frac{1}{2}\sigma\delta\left(y\right)g^{\mu\nu} \ , \end{aligned} \tag{5.63}$$

όπου η y - κανονική ορμή της τετραδιάστατης μετρικής είναι

$$\pi^{\mu\nu} = K^{\mu\nu} - \lambda K g^{\mu\nu} \ . \tag{5.64}$$

Όπως και στην αρχική περίπτωση των Randall - Sundrum [10], [11], είναι πολύ σημαντικό να εξετάσουμε τις συνθήκες συμβολής (junction conditions) του συστήματος. Οι συγκεκριμές συνθήκες συμβολής, στις οποίες συμμετέχει η τάση της μεμβράνης, μπορούν αν βρεθούν ταυτοποιώντας τους όρους διασποράς (distributional terms) στις εξισώσεις κίνησης. Είναι σχετικά εύκολο να δούμε από την (5.63), ότι ο μόνος όρος διασποράς είναι $\partial_y \pi^{\mu\nu}$. Ολοκληρώνοντας κατά μήκος της επιπλέον χωρικής διάστασης και παίρνοντας το όριο κοντά στη μεμβράνη, καταλλήγουμε στις εξισώσεις συμβολής, οι οποίες έχουν την παρακάτω μορφή

$$\frac{2}{\kappa^2}\left[\pi^{\mu\nu}\right]^+_- = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\sigma \ . \tag{5.65}$$

Έχοντας υπ΄ όψην την Z_2 συμμετρία, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί σαν

$$\frac{4}{\kappa^2}\pi^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\sigma \ . \tag{5.66}$$

Αφού βρήκαμε τις εξισώσεις κίνησης, στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις λύσεις για τις οποίες έχουμε το μέγιστο αριθμό Killing διανυσμάτων (maximal symmetry), στις τέσσερεις διαστάσεις. Θα δούμε ότι αυτές οι λύσεις φέρουν μεγάλες ομοιότητες με τις λύσεις για το πρότυπο των Randall - Sundrum [10], [11], καθώς επίσης και με το ανάλογό τους στην καμπυλωμένη περίπτωση [142], με την bulk καμπυλότητα να εξαρτάται από το λ.

5.4.2 Μέγιστα Συμμετρικές (Maximally Symmetric) Λύσεις

Σ΄ αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε λύσεις των εξισώσεων κίνησης, για τις οποίες η τετραδιάστατης μετρική $g_{\mu\nu}$ έχει τη μεγαλύτερη δυνατή συμμετρία (maximal symmetry). Η μετρική υπολογισμένη στη θέση της μεμβράνης είναι επίσης και η επαγώμενη μετρική της μεμβράνης στο $y = 0$, μιας και που η μεμβράνη είναι στατική. Επομένως, οι λύσεις για την bulk μετρική, οι οποίες θα ικανοποιούν της κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, ορίζουν οικεγένειες λύσεων της μεμβράνης, με τη μεγαλύτερη δυνατή συμμετρία (maximally symmetric brane solutions).

Επίπεδη Μεμβράνη

Ας μελετήσουμε αρχικά την περίπτωση όπου το $g_{\mu\nu}$ αντιστοιχεί σε μία επίπεδη μετρική. Σε αυτή την περίπτωση θα υιοθετήσουμε τις ακόλουθες παραδοχές για τις συνιστώσες της πενταδιάστατης μετρικής

$$N_\mu = 0, \ \ g_{\mu\nu} = e^{2f(y)}_{\mu\nu}, \ \ N = 1 \ , \tag{5.67}$$

επιτρέποντας να έχουμε μία συνάρτηση στέβλωσης (warp factor), $f(y)$ κατά μήκος της επιπλέον διάστασης. Τότε η εξίσωση (5.61) γίνεται

$$\kappa\Lambda_5\rho + \frac{8\left(-1+4\lambda\right)\,\left(f'\left(y\right)\right)^2}{\kappa} = 0 \ , \tag{5.68}$$

και η εξίσωση (5.62) ικανοποιείται αυτόματα, ενώ η εξίσωση (5.63) μας δίνει ως αποτέλεσμα

$$\kappa^2\Lambda_5\rho + \kappa^2\sigma\delta\left(y\right) + 8\left(-1+4\lambda\right)\left(f'\left(y\right)\right)^2 + 4\left(-1+4\lambda\right)f''\left(y\right) = 0 \ . \tag{5.69}$$

Ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου λ, διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις για τις λύσεις τις οποίες και εξετάζουμε.

- $(\lambda < \frac{1}{4})$

  Σε αυτή την περίπτωση , η (5.68) μας δίνει

$$f\left(y\right) = -\frac{|y|\,\kappa}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\Lambda_5\,\rho}{1-4\lambda}}\ . \tag{5.70}$$

  Προφανώς το $\rho\,\Lambda_5$ θα πρέπει να είναι θετικό. Αντικαθιστώντας τη λύση στην εξίσωση (5.69) παρατηρούμε ότι ικανοποιείται αυτόματα

- $(\lambda > \frac{1}{4})$

  Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε την ίδια μορφή για τη λύση, αλλά τώρα θα πρέπει να ισχύει ότι το $\rho\,\Lambda_5$ είναι αρνητικό. Και πάλι η εξίσωση (5.69) ικανοποιείται. Για $\lambda = 1$ έχουμε τη λύση των Randall - Sundrum [10], [11].

- $(\lambda = \frac{1}{4})$

  Στην περίπτωση που ισχύει $\lambda = \frac{1}{4}$, βρίσκουμε ότι $\Lambda_5 = 0$ και η συνάρτηση $f\left(y\right)$ παραμένει αυθαίρετη. Αυτό αποτελεί και το κρίσιμο σημείο της θεωρίας, όπου η bulk θεωρία γίνεται σύμμορφα αναλλοίωτη.

Αντικαθιστώντας το $g_{\mu\nu}$ στην εξίσωση (5.66) παίρνουμε ότι

$$\kappa^2\sigma + 8\left(-1+4\lambda\right) f'\left(y\right) = 0\ . \tag{5.71}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να αναπαραχθεί ολοκληρώνοντας τα μέρη διασποράς της (5.69). Αντικαθιστώντας και την συνάρτηση $f(y)$ καταλλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για την τάση της μεμβράνης

$$\sigma = -2\sqrt{2}\frac{(1-4\lambda)}{\kappa}\sqrt{\frac{\Lambda_5\rho}{1-4\lambda}}\ . \tag{5.72}$$

Ας σημειώσουμε ότι στην οριακή περίπτωση που το bulk είναι σύμμορφα αναλλοίωτο, η τάση της μεμβράνης είναι μηδέν. Επιπλέον στο όριο που το $\lambda \to 1$, παίρνουμε το σύνηθες αποτέλεσμα μιας μεμβράνης με θετική τάση.

Καμπυλωμένη Μεμβράνη

Αντί να χρησιμοποιήσουμε μία επίπεδη μετρική για το $g_{\mu\nu}$, μπορούμε σε αντιδιαστολή να χρησιμοποιήσουμε μία μετρική με μη μηδενική καμπυλότητα. Συγκεκριμμένα θα έχουμε μία μετρική της μορφής

$$ds^2_{(5)} = ds^2_{(4)} + dy^2\ , \tag{5.73}$$

όπου

$$ds^2_{(4)} = \alpha\left(y\right)^2\left(-dt^2 + e^{2Ht}\delta_{ij}dx^i dx^j\right) \tag{5.74}$$

είναι ένας σύμμορφα επίπεδος χώρος Einstein (conformally flat, Einstein space), μιας σταθερούς και μη μηδενικής καμπυλότητας [143]. Και πάλι η εξίσωση (5.62) ικανοποιείται αυτόματα. Για τις υπόλοιπες δύο εξισώσεις, (5.61) και (5.63), έχουμε αντίστοιχα

$$-\Lambda_5\rho+\frac{1}{\kappa^2\alpha\left(y\right)^2}\left(6H^2\kappa^2\rho+\left(8-32\lambda\right)\left(\alpha'\left(y\right)\right)^2\right)=0\ , \tag{5.75}$$

και

$$\frac{3H^2\rho}{2\alpha\left(y\right)^4}-\frac{\Lambda_5\rho}{2\alpha\left(y\right)^2}-\frac{\sigma}{2\alpha\left(y\right)^2}\delta(y)+\frac{2\left(1-4\lambda\right)}{\kappa^2\alpha\left(y\right)^4}\left(\left(\alpha'\left(y\right)\right)^2+\alpha\left(y\right)\alpha''\left(y\right)\right)=0 \tag{5.76}$$

Λύνοντας την εξίσωση (5.75) για το H^2 και αντικαθιστώντας το στην (5.76) καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$\kappa^2\alpha\left(y\right)\left(\Lambda_5\rho+2\sigma\delta\left(y\right)\right)+8\left(-1+4\lambda\right)\alpha''\left(y\right)=0\ . \tag{5.77}$$

Αυτή είναι η εξίσωση για τη συνάρτηση στρέβλωσης $a(y)$, της οποίας η λύση εξαρτάται από την παράμετρο λ, που σηματοδοτεί την ύπαρξη των μετασχηματισμών διατήρησης φύλωσης. Είναι αρκετά χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι οι εξισώσεις (5.75) και (5.77), στο όριο που το $\lambda\to 1$ συγκλίνουν ακριβώς στις εξισώσεις (6), (7) της [143], με τις κατάλληλες ταυτοποιήσεις $\kappa^2\to\frac{1}{M^3}$, $\rho\to 4M^3$ και $\Lambda_5\to\Lambda_5/4M^3$.

Για να συνεχίσουμε θα χρειαστούμε τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}\sinh\left(m|r|\right) &= \left(2\theta(r)-1\right)\sinh\left(mr\right)\\ \left[\sinh\left(m|r|\right)\right]' &= m\left(2\theta(r)-1\right)\cosh\left(mr\right)\\ \left[\sinh\left(m|r|\right)\right]'' &= 2m\delta(r)+m^2\sinh\left(m|r|\right),\end{aligned} \tag{5.78}$$

όπου ο ($'$) υποδηλώνει παραγώγιση ως προς r. Η $\theta(r)$, είναι η συνάρτηση πέδησης (step function), ή αλλιώς συνάρτηση Heaviside, για την οποία ισχύει $\theta(r)'=\delta(r)$. Επιπρόσθετα θα χρειαστούμε και τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\sin\left(m|r|\right) &= \left(2\theta(r)-1\right)\sin\left(mr\right)\\ \left[\sin\left(m|r|\right)\right]' &= m\left(2\theta(r)-1\right)\cos\left(mr\right)\\ \left[\sin\left(m|r|\right)\right]'' &= 2m\delta(r)-m^2\sin\left(m|r|\right),\end{aligned} \tag{5.79}$$

Έχουμε λοιπόν να ασχοληθούμε με τις εξισώσεις (5.75) και (5.77). Παίρνοντας υπ' όψην την σχέση (5.66), καταλήγουμε να εξετάσουμε τις ακόλουθες τρείς περιπτώσεις:

- $\underline{(\lambda<\frac{1}{4})}$

  Στην περίπτωση που $\lambda<\frac{1}{4}$ ισχύει ότι $1-4\lambda=|1-4\lambda|$. Τότε η εξίσωση (5.77) γίνεται

$$\begin{aligned}\kappa^2\rho\Lambda_5\alpha\left(y\right)-8\left(1-4\lambda\right)\alpha\left(y\right)'' &= 0\Rightarrow\\ \alpha\left(y\right)''-\frac{\kappa^2\rho}{8|1-4\lambda|}\Lambda_5\alpha\left(y\right) &= 0\Rightarrow\\ \alpha\left(y\right)''+m^2\alpha\left(y\right) &= 0\end{aligned} \tag{5.80}$$

όπου

$$m^2 = -\frac{\kappa^2 \rho}{8|1-4\lambda|}\Lambda_5 \ , \tag{5.81}$$

και η πενταδιάστατη κοσμολογική σταθερά Λ_5 θεωρούμε οτι είναι αρνητική. Θεωρώντας ότι έχουμε την Z_2 συμμετρία, η λύση για την παραπάνω εξίσωση έχει την εξής μορφή

$$\alpha\left(y\right) = C_1 \cosh\left(my\right) + C_2 \sinh\left(m|y|\right) \ . \tag{5.82}$$

Κανονικοποιώντας το $\alpha(0) = 1$, παίρνουμε ότι $C_1 = 1$. Για να βρούμε ποιά είναι η τιμή του C_2 θα πρέπει να εξετάσουμε την συνοριακή συνθήκη της (5.77) και να αντιπαραβάλουμε τη συνεισφορά από τις $\delta(y)$ συναρτήσεις. Υπολογίζοντας τις παραγώγους της $\alpha(y)$ και με τη βοήθεια των σχέσεων (5.78) και (5.79), βρίσκουμε ότι

$$C_2 = -\frac{\sigma m}{\rho \Lambda_5}. \tag{5.83}$$

Επομένως η συνάρτηση στρέβλωσης έχει ως λύση την ακόλουθη μορφή

$$\alpha\left(y\right) = \cos\left(my\right) - \frac{\sigma m}{\rho\Lambda_5}\sin\left(m|y|\right) \ , \tag{5.84}$$

με το m να δίνεται από την (5.81), όπως προαναφέραμε. Από την (5.75) υπολογίζουμε το H^2, για το οποίο και βρίσκουμε

$$H^2 = \frac{1}{48}\left(8\Lambda_5 - \frac{\kappa^2\sigma^2}{\rho(1-4\lambda)}\right) = \frac{1}{6\,\Lambda_5\rho^2}(\sigma^2 m^2 + \Lambda_5^2\rho^2) \ . \tag{5.85}$$

- <u>$(\lambda = \frac{1}{4})$</u>

  Για $\lambda = \frac{1}{4}$ έχουμε ότι

  $$\kappa^2 \Lambda_5 \rho \alpha\left(y\right) = 0 \tag{5.86}$$

  και

  $$-\Lambda_5\rho + \frac{6H^2\rho}{\alpha^2\left(y\right)} = 0. \tag{5.87}$$

  Άρα βρίσκουμε ότι $\Lambda_5 = 0$ και $H^2 = 0$, ενώ παράλληλα η μεμβράνη δεν έχει τάση $(\sigma = 0)$.

- <u>$(\lambda > \frac{1}{4})$</u>

  Η τελευταία περίπτωση είναι το $\lambda > \frac{1}{4}$. Τότε θα έχουμε ότι $1-4\lambda = -|1-4\lambda|$. Έτσι η εξίσωση (5.77) γίνεται

  $$\begin{aligned} \kappa^2\rho\Lambda_5\alpha\left(y\right) - 8\left(1-4\lambda\right)\alpha\left(y\right)'' &= 0 \Rightarrow \\ \kappa^2\rho\Lambda_5\alpha\left(y\right) + 8\left(1-4\lambda\right)\alpha\left(y\right)'' &= 0 \Rightarrow \\ \alpha\left(y\right)'' - \left(-\frac{\kappa^2\rho}{8|1-4\lambda|}\Lambda_5\right)\alpha\left(y\right) &= 0 \Rightarrow \\ \alpha\left(y\right)'' - m^2\alpha\left(y\right) &= 0 \end{aligned} \tag{5.88}$$

όπου

$$m^2 = -\frac{\kappa^2 \rho}{8|1-4\lambda|}\Lambda_5 \; . \tag{5.89}$$

και η πενταδιάστατη κοσμολογική σταθερά Λ_5 είναι και πάλι αρνητική. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση καταλλήγουμε να έχουμε

$$\alpha\left(y\right) = C_1 e^{m|y|} + C_2 e^{-m|y|}. \tag{5.90}$$

Κανονικοποιώντας τη λύση ώστε $\alpha(0) = 1$, βρίσκουμε ότι $C_1 + C_2 = 1$. Επομένως η λύση έχει την εξής μορφή

$$\alpha\left(y\right) = \cosh\left(my\right) + \left(1 - C_2\right)\sinh\left(m|y|\right). \tag{5.91}$$

Για να βρούμε την τιμή του C_2, θα πρέπει και πάλι να ανατρέξουμε στη συνοριακή συνθήκη της (5.77), και να αντιπαραβάλουμε τη συνεισφορά από τις $\delta(y)$ συναρτήσεις. Εκτελώντας και πάλι τη διαδικασία όπως και στην περίπτωση για $\lambda < 1/4$ βρίσκουμε οτι για το C_2 ισχύει

$$1 - C_2 = \frac{\sigma m}{\rho \Lambda_5}. \tag{5.92}$$

Τελικά η λύση για το $\alpha(y)$ είναι

$$\alpha\left(y\right) = \cosh\left(my\right) + \frac{\sigma m}{\rho\Lambda_5}\sinh\left(m|y|\right) \; . \tag{5.93}$$

Από την (5.75) βρίσκουμε για το H^2 ότι

$$H^2 = \frac{1}{6}\left(\Lambda_5 \alpha^2\left(y\right) + \frac{8|1-4\lambda|\left(\alpha'\left(y\right)\right)^2}{\kappa^2\rho}\right) \Rightarrow \tag{5.94}$$

$$H^2 = \frac{4}{3}\frac{|1-4\lambda|}{\rho^3\kappa^2}\frac{m^2}{\Lambda_5^2}\left(\sigma^2 m^2 - \Lambda_5^2\rho^2\right), \tag{5.95}$$

απ΄ όπου και καταλλήγουμε

$$|H^2| = \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{|1-4\lambda|}{\rho^3\kappa^2}\frac{m^2}{\Lambda_5^2}\left(\sigma^2 m^2 - \Lambda_5^2\rho^2\right) & , \frac{|\Lambda_5|}{m} < \frac{\sigma}{\rho} \text{ for } dS_4 \text{ branes ,} \\ 0 & , \frac{|\Lambda_5|}{m} = \frac{\sigma}{\rho} \text{ for flat branes ,} \\ \frac{4}{3}\frac{|1-4\lambda|}{\rho^3\kappa^2}\frac{m^2}{\Lambda_5^2}\left(\Lambda_5^2\rho^2 - \sigma^2 m^2\right) & , \frac{|\Lambda_5|}{m} > \frac{\sigma}{\rho} \text{ for } AdS_4 \text{ branes .} \end{cases} \tag{5.96}$$

Υποθέτοντας ότι η κοσμολογική σταθερά Λ_5 είναι θετική, καταλλήγουμε ακριβώς στις ίδιες λύσεις με εναλλαγμένο το πεδίο τιμών του λ και με τη σταθερά m^2 να έχει θετικό πρόσημο στην (5.81). Παρόμοιες λύσεις έχουν βρεθεί και στην [142].

5.4.3 Επιπρόσθετοι τελεστές

Η δράση (5.59) μπορεί να δεχθεί διορθωτικούς όρους υπό την μορφή τελεστών με μεγαλύτερη διασταση. Η διάσταση των εν λόγο τελεστών θα εμπεριέχει το w, αν σε αυτούς συμμετέχει το $K_{\mu\nu}$, η θα είναι ανεξάρτητοι από το w σε περίπτωση που έχουμε τη συμμετοχή τετραδιάστατων όρων καμπυλότητας. Είναι εύλογο να εξετάσουμε τη θεωρία σε εκείνες τις ενεργειακές κλίμακες όπου οι $(R^{(4)})^2$ όροι είναι αμελητέοι, μιάς και που η εισαγωγή τους στη δράση θα επιφέρει την εμφάνιση παθογενειών στο σύστημα (ghosts). Για αυτές τις ενέργειες, ανάλογα με το βαθμό w με τον οποίο μετασχηματίζεται η επιπλέον χωρική διάσταση, μπορούμε να προσθέσουμε μεγαλύτερες δυνάμεις της εξωγενούς καμπυλότητας στη δράση. Γνωρίζοντας ότι η διάστασης του $(R^{(4)})^2$ είναι $[(R^{(4)})^2] = 4$ και της εξωγενούς καμπυλότητας $[K_{ij}] = w$, θα πρέπει να συνυπολογίσουμε στη δράση εκείνες τις δυνάμεις του K για τις οποίες ικανοποιείται η σχέση $nw < 4$. Για παράδειγμα αν θέλουμε να συνυπολογίσουμε κυβικούς όρους στη δράση ($n = 3$), θα πρέπει να ισχύει $w < \frac{4}{3}$, πάντα σε εκείνες τις ενεργειακές κλίμακες που η θεωρία δεν εμφανίζει παθογένειες.

Δεχόμενοι τις παραπάνω παραδοχές θα επεκτείνουμε την (5.59) εισάγοντας σε αυτή τους παρακάτω όρους

$$\Delta S = \int dy dx^4 \sqrt{-g} N \left(\frac{1}{\kappa^4} \frac{1}{\epsilon} \left(\alpha K^3 + \beta K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} K + \gamma K_{\mu\nu} K^{\nu\rho} K^{\mu}_{\rho} \right) \right) , \tag{5.97}$$

όπου $[\kappa] = \frac{w-4}{2}$. Η σταθερά σύζευξης ϵ έχει την εξής διάσταση, $[\epsilon] = 4$ και τα α, β, γ είναι αδιάστατες σταθερές. Το επιπλέον κομμάτι της δράσης το οποίο και προσθέσαμε, χωρίζεται σε τρία κομμάτια $\Delta S = \Delta S_\alpha + \Delta S_\beta + \Delta S$ τα οποία και θα εξετάσουμε ξεχωριστά, ώστε να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης.

Οι εξισώσεις με βάση το $g_{\mu\nu}$ είναι οι εξής

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \Delta S_\alpha}{\delta g_{\mu\nu}} &= N \frac{1}{\kappa^4} \frac{1}{\epsilon} \alpha [N \left(-K^3 g^{\mu\nu} - 3K^2 K^{\mu\nu} \right) - \frac{3}{2} \partial_y \left(K^2 g^{\mu\nu} \right) && (5.98) \\
&\quad -3\nabla_\alpha \left(K^2 g^{(\mu\alpha} N^{\nu)} \right) + \frac{3}{2} N^\alpha \nabla_\alpha \left(K^2 g^{\mu\nu} \right)], \\
\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \Delta S_\beta}{\delta g_{\mu\nu}} &= \frac{1}{\kappa^4} \frac{1}{\epsilon} \beta [-N \left(2K K^{\mu\sigma} K^{\nu}_{\sigma} + K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} K^{\mu\nu} + K^2 K^{\mu\nu} \right) && (5.99) \\
&\quad -(\partial_y (K\, K^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \partial_y (K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} g^{\mu\nu}) + 2\nabla_\alpha (K^{\alpha(\mu} N^{\nu)} K) \\
&\quad +\nabla_\alpha (g^{a(\mu} N^{\nu)} K^{\rho\sigma} K_{\rho\sigma}) - N^\alpha \nabla_\alpha (K K^{\mu\nu}) \\
&\quad -\frac{1}{2} N^\alpha \nabla_\alpha (K^{\kappa l} K_{\kappa l} g^{\mu\nu}))] , \\
\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \Delta S_\gamma}{\delta g_{\mu\nu}} &= \frac{1}{\kappa^4} \frac{1}{\epsilon} \gamma [N (\frac{1}{2} g^{\mu\nu} K_{\lambda\kappa} K^{\kappa\sigma} K_{\sigma}{}^{\lambda} - 3 K_{\lambda}{}^{\mu} K^{\nu\sigma} K_{\sigma}{}^{\lambda} && (5.100) \\
&\quad -\frac{3}{2} K K^{\mu}_{\lambda} K^{\nu\lambda}) - (\partial_y (\frac{3}{2} K^{\mu}_{\sigma} K^{\nu\sigma}) \\
&\quad +3\nabla_\alpha (K^{\alpha}_{\sigma} K^{(\mu\sigma} N^{\nu)}) - N^\alpha \nabla_\alpha (\frac{3}{2} K^{\mu}_{\sigma} K^{\nu\sigma}))] .
\end{aligned}$$

Για το N_μ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\Delta S_\alpha}{\delta N_\mu} &= \frac{1}{\kappa^4}\frac{1}{\epsilon}\,\alpha\,\left(3\,\nabla_\nu\left(K^2 g^{\mu\nu}\right)\right)\ , && (5.101)\\
\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\Delta S_\beta}{\delta N_\mu} &= \frac{1}{\kappa^4}\frac{1}{\epsilon}\beta\left(\nabla_\nu\left(2K^{\mu\nu}K + K^{\rho\sigma}K_{\rho\sigma}g^{\mu\nu}\right)\right)\ , && (5.102)\\
\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\Delta S_\gamma}{\delta N_\mu} &= \frac{1}{\kappa^4}\frac{1}{\epsilon}\gamma\left(\nabla_\nu\left(3\,K^\mu_{\ \sigma}K_\sigma^{\ \nu}\right)\right)\ . && (5.103)
\end{aligned}$$

Τέλος οι εξισώσεις σε σχέση με το N είναι

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\Delta S}{\delta N} = \frac{1}{\kappa^4}\frac{1}{\epsilon}\left(-2\right)\left(\alpha\,K^3 + \beta\,K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}K + \gamma\,K_{\mu\nu}K^{\nu\sigma}K_\sigma^{\ \mu}\right). \qquad (5.104)$$

Όπως και στην αρχική περίπτωση θα πρέπει να υπολογίσουμε τις συνθήκες συμβολής (junction conditions), κοντά στη μεμβράνη. Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (5.98), (5.99), (5.100) και επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας στους όρους διασποράς, βρίσκουμε ότι οι συνθήκες συμβολής έχουν την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}
&[\frac{2}{\kappa^2}\pi^{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa^4}\frac{1}{\epsilon}(-\alpha\frac{3}{2}K^2 g^{\mu\nu} - \beta(KK^{\mu\nu} + \frac{1}{2}K^{\sigma\kappa}K_{\sigma\kappa}g^{\mu\nu})\\
&\qquad\qquad -\gamma\frac{3}{2}K^\mu_{\ \sigma}K^{\nu\sigma})]^+_- = \frac{1}{2}\sigma g^{\mu\nu}\ . \qquad (5.105)
\end{aligned}$$

Παίρνοντας υπ΄ όψην τις παραπάνω εξισώσεις και συγκίνοντάς τες με τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν με τους τετραγωνικούς όρους της εξωγενούς καμπυλότητας μόνο, παρατηρούμε ότι για $\gamma = -4\beta - 16\alpha$ καταλλήγουμε ακριβώς στα ίδια αποτελέσματα, για τις περιπτώσεις της επίπεδης και καμπυλωμένης μεμβράνης. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι σ΄ αυτό το όριο η (5.97) μηδενίζεται. Για την περίπτωση των επίπεδων μεμβρανών που θα μελετήσουμε στη συνέχεια, θα δούμε ότι μακρυά από αυτό το όριο, οι λύσεις που προκύπτουν έχουν την ίδια δομή με την περίπτωση που έχουμε μόνο τετραγωνικούς όρους εξωγενούς καμπυλώτητας στη δράση, αλλά με επαναπροσδιορισμένες σταθερές.

5.4.4 Λύσεις Επίπεδης Μεμβράνης

Αφού βρήκαμε τις εξισώσεις κίνησης για τους επιπλέον κυβικούς όρους τους οποίους συμπεριλάβαμε στη δράση, θα εξετάσουμε τη μορφή των λύσεων για μία επίπεδη μεμβράνη. Θεωρούμε ότι ισχύουν οι παραδοχές της (5.67). Τότε η εξίσωση (5.61) μαζί με τη σχέση (5.104) μας δίνουν

$$-\rho\Lambda_5 + \frac{8\left(1-4\lambda\right)\left(f'\left(y\right)\right)^2}{\kappa^2} - \frac{8\left(16\alpha + 4\beta + \gamma\right)}{\epsilon\,\kappa^4}\left(f'\left(y\right)\right)^3 = 0\ . \qquad (5.106)$$

Η εξίσωση (5.62) μαζί με τις σχέσεις (5.101),(5.102) και (5.103) ικανοποιούνται και πάλι ταυτοτικά. Τέλος η εξίσωση (5.69) μαζί με τις σχέσεις (5.98),(5.99) και (5.100) μας δίνουν την ακόλουθη έκφραση

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\rho}{2} g^{\mu\nu} \Lambda_5 N + \frac{2}{\kappa^2} \left[\partial_y \pi^{\mu\nu} + N K \pi^{\mu\nu} + 2 N K^{\sigma\mu} \pi^{\nu}_{\ \sigma} \right] \\
&- \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{2}{\kappa^2} \left(K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - \lambda K^2 \right) \right) - \frac{1}{2} \sigma g^{\mu\nu} \delta\left(y\right) \\
&+ \frac{1}{\kappa^4} \frac{1}{\epsilon} [\alpha \left(-K^3\, g^{\mu\nu} - 3K^2\, K^{\mu\nu} - \frac{3}{2} \partial_y (K^2\, g^{\mu\nu}) \right) \\
&+ \beta \left(-2K\, K^{\mu\sigma}\, K^{\nu}_{\ \sigma} - K^{\sigma\kappa}\, K_{\sigma\kappa}\, K^{\mu\nu} - \partial_y (K\, K^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \partial_y (K^{\sigma\kappa}\, K_{\sigma\kappa}\, g^{\mu\nu}) \right) \\
&+ \gamma \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\, K_{\sigma\kappa}\, K^{\kappa\lambda}\, K^{\ \sigma}_{\lambda} - 3 K^{\ \mu}_{\lambda}\, K^{\nu\sigma}\, K^{\ \lambda}_{\sigma} - \frac{3}{2} K\, K^{\mu}_{\ \rho}\, K^{\nu\rho} - \frac{3}{2}\, \partial_y (K^{\mu}_{\ \sigma}\, K^{\nu\sigma}) \right)] = 0 \; ,
\end{aligned}
\tag{5.107}
$$

από την οποία καταλλήγουμε στην

$$
\begin{aligned}
&\epsilon\kappa^4 \Lambda_5 \rho + 8 \left(f'(y) \right)^2 \left(\epsilon\kappa^2 (-1 + 4\lambda) + (16\alpha + 4\beta + \gamma) f'(y) \right) \\
&+ \epsilon\kappa^4 \sigma \delta(y) + 2 \left(2\epsilon\kappa^2 (-1 + 4\lambda) + 3(16\alpha + 4\beta + \gamma)\, f'(y) \right) f''(y) = 0 \; .
\end{aligned}
\tag{5.108}
$$

Ανάλογα με τις τιμές της έκφρασης $(16\alpha + 4\beta + \gamma)$ έχουμε να διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\underline{(16\alpha + 4\beta + \gamma) = 0}$

  Είναι προφανές ότι σε αυτή την περίπτωση όπου οι αδιάστατες σταθερές ικανοποιούν τη σχέση $(16\alpha + 4\beta + \gamma) = 0$, καταλλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα με τη περίπτωση που έχουμε μόνο τους τετραγωνικούς όρους, K^2 στη δράση.

- $\underline{(16\alpha + 4\beta + \gamma) \neq 0}$

  Στην περίπτωση που δεν ισχύει η ισότητα, λύνοντας τη σχέση (5.106) για το $(f'(y))^3$ και αντικαθιστώντας το στην εξίσωση (5.108) παίρνουμε ότι

  $$2 \left(2\epsilon\kappa^2 (-1 + 4\lambda) + 3(16\alpha + 4\beta + \gamma) f'(y) \right) f''(y) = 0 \; . \tag{5.109}$$

  - <u>(περίπτωση 1)</u>

    Αν υποθέσουμε ότι

    $$2\epsilon\kappa^2 (-1 + 4\lambda) + 3(16\alpha + 4\beta + \gamma) f'(y) = 0 \; , \tag{5.110}$$

    τότε

    $$f\left(y\right) = \frac{2\left|y\right| \epsilon\, \kappa^2 \left(1 - 4\lambda\right)}{3\left(16\alpha + 4\beta + \gamma\right)} \; , \tag{5.111}$$

και

$$\Lambda_5 = -\frac{32\,\epsilon^2\,\kappa^2\,(-1+4\lambda)^3}{27\,(16\alpha+4\beta+\gamma)^2\,\rho}\,. \tag{5.112}$$

Ας σημειώσουμε εδώ, ότι σε αντιδιαστολή με την περίπτωση των τετραγωνικών όρων, στην εν λόγω περίπτωση η συμπεριφορά της συνάρτησης στρέβλωσης $f(y)$, το κατα πόσο είναι αύξουσα ή φθίνουσα, εξαρτάται από την τιμή του $(1-4\lambda)/(16\alpha+4\beta+\gamma)$. Επιπρόσθετα στην περίπτωση των κυβικών όρων, το πρόσημο του Λ_5, εξαρτάται από την τιμή του λ.

– (περίπτωση 2)
Αν σε αντίθετη περίπτωση έχουμε ότι $f''(y)=0$, για παράδειγμα

$$f\,(y) = Ay + B, \tag{5.113}$$

παρατηρούμε ότι,

$$\Lambda_5 = -\frac{8A^2\left(\epsilon\kappa^2\,(-1+4\lambda)+(16\alpha+4\beta+\gamma)\,A\right)}{\epsilon\kappa^4\rho}\,. \tag{5.114}$$

Στο κρίσιμο σημείο της θεωρίας όπου το $\lambda \to 1/4$, βρίσκουμε ότι $f'(y)f''(y)=0$, επομένως είτε έχουμε $f(y)=const$ και $\Lambda_5=0$, ή $f(y)=Ay+B$ και η κοσμολογική σταθερά γίνεται $\Lambda_5 = -8\,(16\alpha+4\beta+\gamma)\,/\epsilon\kappa^4\rho$. Και πάλι βλέπουμε ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στρέβλωσης, αλλά και το πρόσημο της κοσμολογικής σταθεράς εξαρτώνται από την επιλογή των παραμέτρων.

Παραμένει να μελετήσουμε τις συνοριακές συνθήκες συμβολής. Κάνοντας εφαρμογή των παραπάνω αποτελεσμάτων στην (5.105), βρίσκουμε ότι

$$\epsilon\kappa^4\sigma\delta(y) + 4\epsilon\kappa^2(-1+4\lambda)\left[f'(y)\right]_-^+ + 6\,(16\alpha+4\beta+\gamma)\,[(f'(y))^2]_-^+ = 0\,. \tag{5.115}$$

Εξαιτίας της Z_2 συμμετρίας, οι τετραγωνικοί όροι εξαφανίζονται, με αποτέλεσμα να έχουμε και πάλι την ίδια μορφή για τις συνοριακές συνθήκες συμβολής, όπως και στην περίπτωση των K^2 όρων στη δράση. Αντικαθιστώντας τη λύση για την $f(y)$ (5.111) έχουμε ότι

$$\sigma = \frac{16}{3}\epsilon\frac{(1-4\lambda)^2}{(16\alpha+4\beta+\gamma)}\,, \tag{5.116}$$

ενώ για τη λύση (5.113) βρίσκουμε ότι

$$\sigma = -\frac{8}{\kappa^2}(-1+4\lambda)A\,. \tag{5.117}$$

Και πάλι στο όριο που το $\lambda \to 1/4$ η μεμβράνη δεν έχει τάση. Για να έχουμε κάποια σημαντική αλλαγή για τις συνοριακές συνθήκες συμβολής, θα πρέπει να μελετήσουμε τους πιθανούς K^4 όρους που μπορούν να εισέλθουν στη δράση, μιας και αυτοί οι όροι θα σχηματίσουν μία συνεισφορά της μορφής $(f'(y))^3$, η οποία δεν θα εξαφανίζεται.

5.4.5 Βαθμωτές Διαταραχές

Αφού μελετήσαμε τη δομή και τη λύση του προτύπου, θα περάσουμε στην έρευνα της ευστάθειας του προτύπου κάτω από βαθμωτές διαταραχές. Συγκεκριμένα θα επικεντρωθούμε στην εκδοχή του προτύπου, στην οποία έχουμε μόνο τους τετραγωνικούς όρους της εξωγενούς καμπυλώτητας στη δράση και θα χρησιμοποιήσουμε την επίπεδη λύση η οποία αναλύθηκε σε προηγούμενη ενότητα

$$S = \int N\sqrt{-g}\, dy\, dx^4 \left[\frac{\rho}{2}\left(R^{(4)} - 2\Lambda_5\right) - \frac{2}{\kappa^2}\left(K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - \lambda K^2\right)\right]. \qquad (5.118)$$

Συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι έχουμε την ακόλουθη μορφή για τη μετρική,

$$N = e^{\alpha(x^\nu,y)}, \quad N_\mu = \partial_\mu \beta\left(x^\nu, y\right), \quad g_{\mu\nu} = e^{2(f(y)+\zeta(x^\rho,y))}\eta_{\mu\nu}\ , \qquad (5.119)$$

η οποία διαφέρει από την πιο γενική μορφή για τις βαθμωτές διαταραχές κατα έναν όρο στο $g_{\mu\nu}$, ο οποίος είναι της μορφής $2\partial_\mu\partial_\nu E$. Ο όρος αυτός μπορεί εύκολα να απαληφθεί με μία αλλαγή συντεταγμένων και επομένως δεν θα μας απασχολήσει [137].

Με τη βοήθεια της (5.119), είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τους όρους της (5.118). Αρχικά ξεκινάμε με τον υπολογισμό των συμβόλων Christoffel

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \partial_\mu\zeta\delta^\lambda_\nu + \partial_\nu\zeta\delta^\lambda_\mu - \partial^\lambda\zeta\eta_{\mu\nu} \qquad (5.120)$$

όπου $\partial^\lambda = \eta^{\lambda\kappa}\,\partial_\kappa$. Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα Christoffel μπορούμε να υπολογίσουμε τους όρους της εξωγενούς καμπυλότητας

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \frac{1}{2N}\left(\partial_y g_{\mu\nu} - \nabla_\mu N_\nu - \nabla_\nu N_\mu\right) \qquad (5.121) \\ &= \frac{1}{e^\alpha}\left[e^{2(f+\zeta)}\partial_y\left(f+\zeta\right)\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu\beta + \partial_\mu\zeta\partial_\nu\beta + \partial_\nu\zeta\partial_\mu\beta - \eta_{\mu\nu}\partial^\lambda\zeta\partial_\lambda\beta\right]. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu} = e^{-4\left(f+\zeta+\frac{\alpha}{4}\right)}[&e^{2(f+\zeta)}\partial_y\left(f+\zeta\right)\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\beta + \partial^\mu\zeta\partial^\nu\beta \qquad (5.122) \\ &+\partial^\nu\zeta\partial^\mu\beta - \eta^{\mu\nu}\partial^\lambda\zeta\partial_\lambda\beta], \end{aligned}$$

ενώ το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} K &= g^{\mu\nu}K_{\mu\nu} \qquad (5.123) \\ &= e^{-2\left(f+\zeta+\frac{\alpha}{2}\right)}\left[4\,e^{2(f+\zeta)}\partial_y\left(f+\zeta\right) - \Box^{(4)}\beta - 2\partial^\lambda\zeta\partial_\lambda\beta\right] \end{aligned}$$

όπου $\Box^{(4)} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. Στη συνέχεια θέλουμε να υπολογίσουμε το τετράγωνο του $K_{\mu\nu}$ και το τετράγωνο του ίχνους του. Μετά από μια σειρά πράξεων καταλλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu}\,K_{\mu\nu} &= e^{-4\left(f+\zeta+\frac{\alpha}{2}\right)}[4\,e^{4(f+\zeta)}\left(\partial_y(f+\zeta)\right)^2 \qquad (5.124) \\ &-2\,e^{2(f+\zeta)}\partial_y\left(f+\zeta\right)\Box^{(4)}\beta + 2\Box^{(4)}\beta\,\partial^\rho\zeta\,\partial_\rho\beta \\ &-4\,e^{2(f+\zeta)}\partial_y\left(f+\zeta\right)\partial^\lambda\zeta\,\partial_\lambda\beta + \partial^\mu\partial^\nu\beta\,\partial_\mu\partial_\nu\beta \\ &-4\partial^\mu\partial^\nu\beta\,\partial_\mu\zeta\,\partial_\nu\beta + 2\partial^\nu\zeta\,\partial^\mu\beta\,\partial_\nu\zeta\,\partial_\mu\beta + 2\partial^\nu\zeta\,\partial^\mu\beta\,\partial_\mu\zeta\,\partial_\nu\beta] \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} K^2 &= e^{-4\left(f+\zeta+\frac{\alpha}{2}\right)}[16\, e^{4(f+\zeta)}\, (\partial_y(f+\zeta))^2 \\ &\quad -8\, e^{2(f+\zeta)}\partial_y\,(f+\zeta)\,\Box^{(4)}\beta - 16\, e^{2(f+\zeta)}\partial_y\,(f+\zeta)\,\partial^\lambda\zeta\,\partial_\lambda\beta \\ &\quad +\left(\Box^{(4)}\beta\right)^2 + 4\,\Box^{(4)}\beta\,\partial^\mu\zeta\,\partial_\mu\beta + 4\,(\partial^\nu\zeta\,\partial_\nu\beta)^2]. \end{aligned} \tag{5.125}$$

Συνεχίζουμε υπολογίζοντας τον τανυστή Riemann

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\delta} &= \partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta\Gamma^\alpha_\beta + \Gamma^\lambda_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_\lambda - \Gamma^\lambda_\beta\Gamma^\alpha_{\lambda\delta} \\ &= \partial\partial_\delta\zeta\,\delta^a_\delta - \partial\partial^\alpha\zeta\,\eta_{\beta\delta} - \partial_\delta\partial_\beta\zeta\,\delta^a + \partial_\delta\partial^\alpha\zeta\,\eta_\beta \\ &\quad +\partial_\delta\zeta\,\partial_\beta\zeta\delta^\alpha - (\partial\,\zeta)^2\,\eta_{\beta\delta}\delta^\alpha + \partial\zeta\,\partial^\alpha\zeta\eta_{\beta\delta} \\ &\quad -\partial\zeta\,\partial_\beta\zeta\,\delta^\alpha_\delta + (\partial\,\zeta)^2\,\eta_\beta\delta^\alpha_\delta - \partial_\delta\zeta\,\partial^\alpha\zeta\,\eta_\beta, \end{aligned} \tag{5.126}$$

τον τανυστή Ricci

$$\begin{aligned} R_{\beta\delta} &= R^\alpha_{\beta\alpha\delta} \\ &= -\Box^{(4)}\zeta\eta_{\beta\delta} - 2\partial_\delta\,\partial_\beta\zeta - 2\,(\partial\,\zeta)^2\,\eta_{\beta\delta} + 2\partial_\beta\zeta\,\partial_\delta\zeta \end{aligned} \tag{5.127}$$

και τέλος το βαθμωτό Ricci

$$R = -6\,e^{-2(f+\zeta)}\left(\Box^{(4)}\zeta + (\partial\,\zeta)^2\right). \tag{5.128}$$

Ακολούθως θα αντικαταστήσουμε το βαθμωτό Ricci και το τετράγωνο της εξωγενούς καμπυλότητας, όπως και του ίχνους της στην (5.118), απ΄ όπου και θα εξάγουμε τη μορφή της δράσης με σύμφωνα με τη μορφή των βαθμωτών διαταραχών τις οποίες και εξετάζουμε. Ξεκινάμε με τον όρο του βαθμωτού Ricci και της πενταδιάστατης κοσμολογικής σταθεράς

$$\begin{aligned} S_R &= \int dx^4\,dy\,N\,\sqrt{-g}\,\frac{\rho}{2}\,R \\ &= \int dx^4\,dy\,\left[3\,\rho\,e^{2f}\left((\partial\,\zeta)^2 - \alpha\,\Box^{(4)}\,\zeta\right)\right] \end{aligned} \tag{5.129}$$

και

$$\begin{aligned} S_{\Lambda_5} &= \int dx^4\,dy\,N\,\sqrt{-g}\,\frac{\rho}{2}\,(-2\Lambda_5) \\ &= -\int dx^4\,dy\,\left[\rho\,e^\alpha\,e^{4(f+\zeta)}\,\Lambda_5\right] \\ &= -\int dx^4 dy e^{2f}\rho\left[e^{2f}\left(1+4\zeta+\alpha+4\alpha\zeta+\frac{\alpha^2}{2}+8\zeta^2\right)\Lambda_5\right] \end{aligned} \tag{5.130}$$

όπου εκτελέσαμε κατάλληλες παραγοντικές ολοκληρώσεις με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες. Συνεχίζουμε υπολογίζοντας το μέρος της δράσης με τους τετραγωνικούς όρους της εξωγενούς καμπυλώτητας και του ίχνους της, κρατώντας μέχρι και τους τετραγωνικούς όρους.

$$\begin{aligned} S_{K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}} &= \int dx^4\, dy\, N\,\sqrt{-g}\left(-\frac{2}{\kappa^2}\,K_{\mu\nu}\,K^{\mu\nu}\right) \qquad (5.131)\\ &= -\frac{2}{\kappa^2}\int dx^4\, dy[4e^{4f}((\partial_y f)^2+2\partial_y f\,\partial_y\zeta+(\partial_y\zeta)^2-\alpha\,(\partial_y f)^2-2\alpha\,\partial_y f\,\partial_y\zeta \\ &\quad +\frac{\alpha^2}{2}\,(\partial_y f)^2+4\zeta\,(\partial_y f)^2+8\zeta\partial_y f\,\partial_y\zeta-4\alpha\zeta\,(\partial_y f)^2+8\zeta^2\,(\partial_y f)^2) \\ &\quad +2e^{2f}\partial_y f\alpha\Box^{(4)}\beta-4e^{2f}\partial_y f\zeta\Box^{(4)}\beta-2e^{2f}\partial_y\zeta\Box^{(4)}\beta \\ &\quad -4e^{2f}\partial_y f\partial^\nu\zeta\partial_\nu\beta+\partial^\mu\partial^\nu\beta\partial_\mu\partial_\nu\beta] \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} S_{K^2} &= \int dx^4\, dy\, N\,\sqrt{-g}\left(\frac{2}{\kappa^2}\,\lambda K^2\right) \qquad (5.132)\\ &= \frac{2}{\kappa^2}\,\lambda\int dx^4\, dy[16e^{4f}((\partial_y f)^2+2\partial_y f\,\partial_y\zeta+(\partial_y\zeta)^2-\alpha\,(\partial_y f)^2-2\alpha\,\partial_y f\,\partial_y\zeta \\ &\quad +\frac{\alpha^2}{2}\,(\partial_y f)^2+4\zeta\,(\partial_y f)^2+8\zeta\partial_y f\,\partial_y\zeta-4\alpha\zeta\,(\partial_y f)^2+8\zeta^2\,(\partial_y f)^2) \\ &\quad +8e^{2f}\partial_y f\alpha\Box^{(4)}\beta-16e^{2f}\partial_y f\zeta\Box^{(4)}\beta-8e^{2f}\partial_y\zeta\Box^{(4)}\beta \\ &\quad -16e^{2f}\partial_y f\partial^\nu\zeta\partial_\nu\beta+\left(\Box^{(4)}\beta\right)^2]. \end{aligned}$$

Συγκεντρώνοντας όλους τους όρους καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση

$$\begin{aligned} S &= \int dx^4 dy\, e^{2f}[\rho(3\left((\partial\,\zeta)^2-\alpha\,\Box^{(4)}\,\zeta\right) \qquad (5.133)\\ &- e^{2f}\left(1+4\zeta+\alpha+4\alpha\zeta+\frac{\alpha^2}{2}+8\zeta^2\right)\Lambda_5) \\ &- \frac{2}{\kappa^2}(4e^{2f}(1-4\lambda)((\partial_y f)^2+2\partial_y f\,\partial_y\zeta+(\partial_y\zeta)^2-\alpha\,(\partial_y f)^2-2\alpha\,\partial_y f\,\partial_y\zeta \\ &+ \frac{\alpha^2}{2}\,(\partial_y f)^2+4\zeta\,(\partial_y f)^2+8\zeta\partial_y f\,\partial_y\zeta-4\alpha\zeta\,(\partial_y f)^2+8\zeta^2\,(\partial_y f)^2) \\ &+ 2(1-4\lambda)\partial_y f\alpha\Box^{(4)}\beta-4(1-4\lambda)\partial_y f\zeta\Box^{(4)}\beta-2(1-4\lambda)\partial_y\zeta\Box^{(4)}\beta \\ &- 4(1-4\lambda)\partial_y f\partial^\nu\zeta\partial_\nu\beta+e^{-2f}(1-\lambda)\left(\Box^{(4)}\beta\right)^2)]\;. \end{aligned}$$

Οι όροι που έχουν σχέση με το β είναι οι εξής

$$\begin{aligned} S_\beta &= -\int dx^4 dy\, e^{2f}\frac{2}{\kappa^2}[2(1-4\lambda)\partial_y f\alpha\Box^{(4)}\beta - 4(1-4\lambda)\partial_y f\zeta\Box^{(4)}\beta \\ &\quad -2(1-4\lambda)\partial_y\zeta\Box^{(4)}\beta - 4(1-4\lambda)\partial_y f\partial^\nu\zeta\partial_\nu\beta \\ &\quad +e^{-2f}(1-\lambda)\left(\Box^{(4)}\beta\right)^2], \end{aligned} \tag{5.134}$$

άρα η εξίσωση της β συνιστώσας δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \delta S_\beta = \int dx^4 dy\, e^{2f}\frac{2}{\kappa^2}2\delta\beta[(1-4\lambda)\,\partial_y f\Box^{(4)}\alpha - (1-4\lambda)\,\Box^{(4)}(\partial_y\zeta) \\ +(1-\lambda)\,e^{-2f}\Box^{(4)}(\Box^{(4)}\beta)] => \end{aligned} \tag{5.135}$$

$$(1-\lambda)\,e^{-2f}\Box^{(4)}\beta = (1-4\lambda)\,(\partial_y\zeta - \partial_y f\alpha)\,. \tag{5.136}$$

Αντίστοιχα οι όροι σε σχέση με το α είναι οι εξής

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \int dx^4 dy\, e^{2f}[-3\rho\alpha\Box^{(4)}\,\zeta - \rho e^{2f}\Lambda_5\left(1+4\zeta+\frac{\alpha}{2}\right)\alpha \\ &\quad -\frac{2}{\kappa^2}(4\,e^{2f}\,(1-4\lambda)\left(-\alpha\,(\partial_y f)^2 - 2\alpha\partial_y f\partial_y\zeta + \frac{\alpha^2}{2}\,(\partial_y f)^2 - 4\alpha\zeta\,(\partial_y f)^2\right) \\ &\quad +2\,(1-4\lambda)\,\partial_y f\,\alpha\Box^{(4)}\beta)], \end{aligned} \tag{5.137}$$

επομένως η εξίσωση της α συνιστώσας δίνεται από τη

$$\begin{aligned} \delta S_\alpha &= \int dx^4 dy\, e^{2f}[-3\rho\Box^{(4)}\,\zeta - \rho e^{2f}\Lambda_5\,(1+4\zeta) - \rho e^{2f}\alpha\Lambda_5 \\ &\quad +\frac{2}{\kappa^2}(4\,e^{2f}\,(1-4\lambda)\left((\partial_y f)^2 + 2\partial_y f\partial_y\zeta - \alpha\,(\partial_y f)^2 + 4\zeta\,(\partial_y f)^2\right) \\ &\quad -2\,(1-4\lambda)\,\partial_y f\,\Box^{(4)}\beta)]\delta\alpha => \end{aligned} \tag{5.138}$$

$$\begin{aligned} 3\rho\Box^{(4)}\,\zeta + \frac{4}{\kappa^2}\,(1-4\lambda)\,\partial_y f\,\Box^{(4)}\beta &= \\ = \frac{8}{\kappa^2}e^{2f}\,(1-4\lambda)\left((\partial_y f)^2 + 2\partial_y f\partial_y\zeta - \alpha\,(\partial_y f)^2 + 4\zeta\,(\partial_y f)^2\right) \\ -e^{2f}\rho\Lambda_5\,(1+4\zeta+\alpha)\,. \end{aligned} \tag{5.139}$$

Από τις δύο εξισώσεις (5.136) και (5.139), μόνο η (5.139) αποτελεί μία εξίσωση συνδέσμου, αφού δεν περιέχει χρονικές παραγώγους της συνιστώσας α, της οποία είναι και εξίσωση. Η (5.136) εμπεριέχει χρονικές παραγώγους της β συνιστώσας, αφού στη συγκεκριμένη περίπτωση το $\Box^{(4)} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. Επομένως είναι μία δυναμική εξίσωση του β και δεν μπορεί να αντικατασταθεί. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την (5.139) μπορούμε να απαλείψουμε τη συνιστώσα α από την (5.133), και να καταλήξουμε σε μία έκφραση στην οποία έχουμε δύο δυναμικούς βαθμούς ελευθερίας, το ζ και το β

$$
\begin{aligned}
S &= \int dx^4 dy\, e^{2f}[24\partial_y f(\partial_y\zeta)\Box^{(4)}\zeta\frac{(-1+4\lambda)}{\Lambda_5\kappa^2} \\
&+ 16\partial_y f\partial_y\zeta\,(-1+4\lambda)\,e^{2f}\frac{(1+4\zeta)}{\kappa^2}+3\rho\,(\partial\zeta)^2+\frac{9\rho}{4\Lambda_5}e^{-2f}\left(\Box^{(4)}\zeta\right)^2 \\
&- \frac{3}{2\kappa^2}e^{-2f}\left(\Box^{(4)}\beta\right)^2-6(\partial_y f)e^{-2f}\frac{(-1+4\lambda)}{\kappa^2\Lambda_5}\Box^{(4)}\beta\Box^{(4)}\zeta-2e^{2f}\left(1+4\zeta+8\zeta^2\right)\Lambda_5\rho] \\
&- \int dx^4 dy\, e^{2f}\left(1+4\zeta+8\zeta^2\right)e^{2f}\sigma\delta(y)\ .
\end{aligned}
\tag{5.140}
$$

Ο τελευταίος όρος της παραπάνω δράσης είναι ο συνοριακός όρος της μεμβράνης ο οποίος εμφανίζεται στην (5.59). Επιπλέον μπορούμε να δούμε ότι έχουμε την εμφάνιση είτε σταθερών όρων, είτε και όρων πρώτης τάξης.

Ας εξετάσουμε τους παρακάτω όρους της (5.140)

$$
\begin{aligned}
\int dx^4 dy\, e^{2f}[16\partial_y f\partial_y\zeta\,(-1+4\lambda)\,e^{2f}\frac{1+4\zeta}{\kappa^2}-2e^{2f}\left(1+4\zeta+8\zeta^2\right)\Lambda_5\rho] &= \\
= \int dx^4 dy\, e^{2f}4(\partial_{yy}f)e^{2f}\frac{(1-4\lambda)}{\kappa^2}\left(1+4\zeta+8\zeta^2\right)&,
\end{aligned}
\tag{5.141}
$$

όπου εκτελέσαμε μία παραγοντική ολοκλήρωση ως προς την επιπλέον χωρική διάσταση και αντικαταστήσαμε την τιμή για το $(\partial_y f)^2$. Ο συνοριακός όρος έχει παραλειφθεί λόγο της συμμετρίας του συστήματος. Για τις λύσεις της επίπεδης μεμβράνης με $\lambda \neq 1/4$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
f\,(y) &= -\frac{\kappa}{2\sqrt{2}}|y|\sqrt{\frac{\Lambda_5\rho}{1-4\lambda}} \\
(\partial_y f)^2 &= \frac{\kappa^2}{8}\frac{\Lambda_5\rho}{(1-4\lambda)} \\
\partial_{yy}f\,(y) &= -2\frac{\kappa}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\Lambda_5\rho}{1-4\lambda}}\delta\,(y)\,.
\end{aligned}
\tag{5.142}
$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
\int dx^4 dy\, e^{2f}[16\partial_y f\partial_y\zeta\,(-1+4\lambda)\,e^{2f}\frac{1+4\zeta}{\kappa^2}-2e^{2f}\left(1+4\zeta+8\zeta^2\right)\Lambda_5\rho] &= \\
= -\int dx^4 dy\, e^{4f}2\sqrt{2}\frac{(1-4\lambda)}{\kappa}\sqrt{\frac{\Lambda_5\rho}{1-4\lambda}}\left(1+4\zeta+8\zeta^2\right)\delta(y)&\ ,
\end{aligned}
\tag{5.143}
$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ακριβώς το ίδιο με τη συνεισφορά του όρου της μεμβράνης, αλλά με αντίθετο πρόσημο. Ας θυμηθούμε ότι από τις συνοριακές συνθήκες συμβολής της μεμβράνης (junction conditions) έχουμε για την τάση σ της μεμβράνης ότι

$$
\sigma = -2\sqrt{2}\frac{(1-4\lambda)}{\kappa}\sqrt{\frac{\Lambda_5\rho}{1-4\lambda}}. \tag{5.144}
$$

Άρα καταλλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\int dx^4 dy\, e^{2f}[16\partial_y f \partial_y \zeta\,(-1+4\lambda)\, e^{2f}\frac{1+4\zeta}{\kappa^2} - 2e^{2f}\left(1+4\zeta+8\zeta^2\right)\Lambda_5\rho] - \\ - \int dx^4 dy\, e^{2f}\left(1+4\zeta+8\zeta^2\right)e^{2f}\sigma\delta(y) = 0. \qquad (5.145)$$

Συνεχίζουμε με τους ακόλουθους όρους της (5.140)

$$\int dx^4 dy\, e^{2f}[24\partial_y f(\partial_y\zeta)\Box^{(4)}\zeta\frac{(-1+4\lambda)}{\Lambda_5\kappa^2} + 3\rho\,(\partial\zeta)^2]. \qquad (5.146)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\int dx^4 dy\, e^{2f}\partial_y[\partial_\mu\zeta\partial^\mu\zeta] = \int dx^4 dy\, e^{2f}\left(-2\,(\partial_y\zeta)\,\Box^{(4)}\zeta\right), \qquad (5.147)$$

όπου εκτελέσαμε μία παραγοντική ολοκλήρωση ως προς τις συντεταγμένες της μεμβράνης και θεωρήσαμε κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Κατ΄ αυτό τον τρόπο έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int dx^4 dy[3\rho\,(\partial\zeta)^2 e^{2f} + 12\left(-2(\partial_y\zeta)\Box^{(4)}\zeta\right)\partial_y f\, e^{2f}\frac{(1-4\lambda)}{\Lambda_5\kappa^2}] &= \\ \int dx^4 dy[3\rho\,(\partial\zeta)^2 e^{2f} + 12\partial_y\left((\partial\,\zeta)^2\right)\partial_y f\, e^{2f}\frac{(1-4\lambda)}{\Lambda_5\kappa^2}] &= \\ \int dx^4 dy\, e^{2f}\frac{6\sqrt{2}}{\kappa}\frac{(1-4\lambda)}{\Lambda_5}\sqrt{\frac{\Lambda_5\rho}{1-4\lambda}}\,(\partial\,\zeta)^2\,\delta\,(y)\ . & \qquad (5.148) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (5.148) το τελικό αποτέλεσμα της διαταραγμένης δράσης (5.59) κάτω από τις βαθμωτές διαταραχές της μορφής (5.119), είναι το εξής

$$\begin{aligned} S \;=\; \int dx^4 dy\, e^{2f}[&\frac{9\rho}{4\Lambda_5}e^{-2f}\,(\Box\zeta)^2 - \frac{3}{2\kappa^2}e^{-2f}\,(\Box\beta)^2 \qquad (5.149) \\ &-6(\partial_y f)e^{-2f}\frac{(-1+4\lambda)}{\kappa^2\Lambda_5}\Box\beta\Box\zeta \\ &+\frac{6\sqrt{2}}{\kappa}\frac{(1-4\lambda)}{\Lambda_5}\sqrt{\frac{\Lambda_5\rho}{1-4\lambda}}\,(\partial\,\zeta)^2\,\delta\,(y)]\ . \end{aligned}$$

Αυτό είναι και το τελικό αποτέλεσμα της ανάλυσης. Ας εξετάσουμε καλύτερα την παραπάνω σχέση. Οι όροι στην πρώτη και δεύτερη γραμμή είναι όροι παραγώγων μεγαλυτερης τάξης (higher derivative terms) των δύο βαθμών ελευθερίας ζ και β, όπου επίσης υπάρχει και ένας μεικτός κινητικός όρος μεταξύ τους. Ως ενα τεστ αυτοσυνέπειας της παραπάνω σχέσης μπορούμε να δούμε ότι η εξίσωση κίνησης του β είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη που προκύπτει από την δράση (5.133) και συγκεκριμένα είναι η εξής

$$(1-\lambda)\,e^{-2f}\Box^{(4)}\beta = (1-4\lambda)\,(\partial_y\zeta - \partial_y f\alpha)\ . \qquad (5.150)$$

Η αντιστοιχία μπορεί εύκολα να γίνει αντιληπτή αν αντικαταστήσουμε την (5.139) στην (5.150). Παρόμοια η εξίσωση του ζ μας δίνει και το ίδιο αποτέλεσμα αν πάρουμε υπ΄ όψην μας την περιοριστική συνθήκη που ισχύει.

Η δράση (5.149) έχει κάποια καίρια χαρακτηριστικά. Πρώτων όλοι οι όροι του bulk περιλαμβάνουν τέσσερεις παραγώγους των συντεταγμένων της μεμβράνης, επομένως κάποιοι όροι θα περιέχουν τέσσερεις χρονικές παραγώγους. Παρατηρούμε λοιπόν ότι δεν έχουμε μία δράση για τη διαταραχή μας η οποία να περιλαμβάνει το πολύ μέχρι δεύτερες παραγώγους. Δεύτερον ο όρος της μεμβράνης έχει ένα κινητικό όρο με λάθος πρόσιμο (ghost term), για τη συνιστώσα ζ.

Αν αντικαταστήσουμε τις δύο δυναμικές συνιστώσες με τις κυματοσυναρτήσεις τους, η τετραδιάστατη δράση θα αποτελείται από έναν κινητικό όρο με λάθος πρόσημο (ghost kinetic term) για το ζ, συν τους όρους με τις παραγώγους υψηλής τάξης. Αυτοί οι όροι θα εμφανίζονται στη δράση πολλαπλασιασμένοι με διαφορετικές σταθερές σύζευξης. Ωστόσο οποιαδήποτε και αν είναι η ιεραρχία μεταξύ αυτών των σταθερών, θα υπάρχει πάντα κάποιο πρόβλημα του κινητικού όρου (ghost problem), είτε από τον συνοριακό όρο της μεμβράνης είτε από τους όρους με τις παραγώγους υψηλής τάξης.

Οι συγκεκριμένες συνιστώσες θα παραμένουν ακόμα και μετά την αποκατάσταση της πλήρους πενταδιάστατης συμμετρίας κάτω από τους γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, για παράδειγμα όταν το $\lambda \to 1$. Το τελευταίο αυτό χαρακτηριστικό είναι παρεμφερές με τη συμπεριφορά σε πρότυπα που το βαρυτόνιο αποκτά μάζα (massive gravity), και συγκεκριμένα με την ασυνέχεια vDVZ [145, 146]. Σε εκείνη την περίπτωση, η διαμήκης συνιστώσα (longitudinal mode) του βαρυτονίου με μάζα δεν μπορεί να αποσυζευχθεί στο όριο που η Pauli-Fierz [144] μάζα μηδενίζεται. Στη περίπτωση που εξετάσαμε, έχουμε ένα ακόμα δυσκολότερο θέμα, μιας και που οι εναπομένουσες συνιστώσες εμπεριέχουν έναν παθογονικό όρο. Τα προβλήματα αυτά προκύπτουν, εξαιτίας του κατηγορηματικού τρόπου με τον οποίο σπάμε την αναλλοιώτητα κάτω από τον πενταδιάστατο διφεομορφισμό της θεωρίας. Αν και η θεωρία δεν φαίνεται να έχει κάποιο πρόβλημα στην μορφή των λύσεων υποβάθρου, διαταράσοντας το σύστημα βρισκόμαστε αντιμέτωποι με αυτά.

5.5 Συμπεράσματα

Σ΄ αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε θεωρίες στις οποίες μία διάσταση μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο, από οτι οι υπόλοιπες. Αρχικά κάναμε μία επισκόπηση της θεωρίας του Hořava, κατά την οποία ο χρόνος μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο, σε σχέση με τις υπόλοιπες τρείς χωρικές διαστάσεις. Το γεγονός αυτό μας επιβάλλει να αποχωριστούμε τη συμμετρία κάτω από τους γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων και τα επιβάλλουμε ένα πιο περιοριστικό σύνολο κάτω από τους μετασχηματισμούς διατήρησης φύλλωσης (foliation preserving diffeomorphisms). Ουσιαστικά σπάει η Lorentz συμμετρία με αποτέλεσμα να βελτιώνεται η συμπεριφορά του διαδότη κοντά στο όριο των υψηλών ενέργειών. Λόγο του σπασίματος της Lorentz συμμετρίας έχουμε την εμφάνιση ενός επιπλέον βαθμωτού βαθμού ελευθερίας. Εξετάζοντας τη θεωρία εκτελώντας βαθμωτές διαταραχές, παρατηρήσαμε πως η συγκεκριμένη συνιστώσα εμφανίζει ένα πρόβλημα ισχυρής σύζευξης στο όριο που η θεωρία πρέπει να συγκλίνει με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Στη συνέχεια εξετάσαμε τις συνέπειες της υπόθεσης ότι αντί για το χρόνο, μία επιπλέον χωρική διάσταση μετασχηματίζεται διαφορετικά, σε σχέση με τις υπόλοιπες τέσσερεις διαστάσεις, στις οποίες τώρα συμπεριλαμβάνεται και ο χρόνος. Για να το κατορθώσουμε αυτό, θεωρήσαμε ότι έχουμε μία πενταδιάστατη θεωρία με μία κοσμολογική σταθερά και μία τετραδιάστατη μεμβράνη εμβαπτισμένη στον πενταδιάστατο χωροχρόνο. Όπως και στη θεωρία του Hořava, υποθέσαμε ότι οι γενικοί μετασχηματισμοί συντεταγμένων στις πέντε διαστάσεις, δεν ισχύουν και στη θέση τους έχουμε την εμφάνιση των μετασχηματισμών διατήρησης φύλλωσης του τετραδιάστατου υποχώρου. Κατ΄ αυτό τον τρόπο η τετραδιάστατη Lorentz συμμετρία, παραμένει ανέπαφη. Εξαιτίας του διαφορετικού τρόπου μετασχηματισμού της επιπλέον χωρικής διάστασης, μπορούμε να εισαγάγουμε στη δράση μεγαλύτερες δυνάμεις της εξωγενούς καμπυλότητας της τετραδιάστατης υπερεπιφάνειας, τουλάχιστον μέχρι εκείνες τις ενεργειακές κλίμακες, στις οποίες θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και τους επιπλέον όρους οι οποίοι δημιουργούν παθογένειες (ghost terms) στο σύστημα.

Σε πρώτη φάση μελετήσαμε τις λύσεις τις θεωρίας. Για μέγιστα συμμετρικά υπόβαθρα (maximally symmetric) με τετραγωνικούς όρους εξωγενούς καμπυλότητας στη δράση, βρήκαμε όλες τις λύσεις για επίπεδες και καμπυλωμένες μεμβράνες, καθώς επίσης μελετήσαμε και τις συνοριακές συνθήκες συμβολής κοντά στη μεμβράνη. Οι λύσεις αυτές μοιάζουν με τις λύσεις που έχουν ήδη αναφερθεί στη βιβλιογραφία, οι οποίες ωστόσο χαρακτηρίζονται από την παρουσία της παραμέτρου λ, η οποία ουσιαστικά εκφράζει το σπάσιμό της αναλλοιώτητας των πενταδιάστατων διφεομορφισμών. Επιπρόσθετα, εξετάσαμε τις λύσεις για μία επίπεδη μεμβράνη, στην περίπτωση που στη δράση έχουμε την εμφάνιση κυβικών όρων της εξωγενούς καμπυλότητας της μεμβράνης. Οι λύσεις αυτές πέρα από την εξάρτησή τους από το λ, εξαρτώνται επίσης και από την επιλογή των επι μέρους παραμέτρων με τις οποίες οι κυβικοί όροι εισέρχονται στη δράση.

Σπάζοντας την πενταδιάστατη Lorentz συμμετρία στις πέντε διαστάσεις, ψάξαμε για τις πιθανές επιδράσεις στον τετραδιάστατο χωροχρόνο. Όπως και στην περίπτωση της βαρυτικής θεωρίας του Hořava, εκτελέσαμε μία ανάλυση της θεωρίας, με τους τετραγωνικούς όρους της εξωγενούς καμπυλώτητας στη δράση, κάτω από βαθμωτές διαταραχές. Λόγω του σπασίματος της αναλλοιώτητας κάτω απο τους πενταδιάστατους διφεομορφισμούς, έχουμε την εμφάνιση δύο δυναμικών βαθμωτών βαθμών ελευθερίας. Και οι δύο χαρακτηρίζονται από το γεγονός, ότι εμφανίζονται στη δράση ώς διορθωτικοί όροι με παραγώγους υψηλής τάξης. Επιπλέον ένας από τους δύο όρους εμφανίζεται και ώς ghost πάνω στη μεμβράνη. Οι παθολογίες αυτές εφανίζονται λόγω του κατηγορηματικού τρόπου με τον οποίο σπάει η συμμετρία των γενικών μετασχηματισμών συντεταγμένων, στο επίπεδο της δράσης.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, μελετήθηκαν πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2, κατα τα οποία μία μεμβράνη εμβαπτίζεται σε ένα χωροχρόνο με επιπλέον δύο χωρικές διαστάσεις, καθώς επίσης και πρότυπα κατα τα οποία, μία διάσταση μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο από ότι οι υπόλοιπες. Εξετάζοντας τα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2, κύριος σκοπός μας ήταν η εύρεση λύσεων μελανών οπών πάνω στη μεμβράνη και η επέκτασή τους στον επιπλέον χώρο. Παράλληλα μας απασχόλησε και το ζήτημα της ευστάθειας μιας εκ τον λύσεων που βρέθηκαν κατα την εν λόγω μελέτη. Στο θέμα της ανάλυσης προτύπων κατα τα οποία μια διάσταση μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο από ότι οι υπόλοιπες, ασχοληθήκαμε με την κατασκευή ενός προτύπου, όπου μία τετραδιάστατη μεμβράνη εμβαπτίζεται σε ένα πενταδιάστατο χωροχρόνο, με την επιπλέον χωρική διάσταση να μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο από οτι οι υπόλοιπες τέσσερεις, που βρίσκονται στη μεμβράνη, συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου.

Αρχικά κάναμε μία μικρή επισκόπηση στα δύο κυριότερα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 1 και αναφερθήκαμε στα κύρια χαρακτηριστικά τους [7, 10, 11]. Περισσότερο μας απασχόλησε το πλαίσιο της θεωρίας στα πρότυπα μεμβρανών που προτάθηκαν από τους Randall και Sundrum, κατα τα οποία μία τετραδιάστατη μεμβράνη εμβαπτίζεται σε ένα πενταδιάστατο χωροχρόνο, ο οποίος περιέχει μία αρνητική κοσμολογική σταθερά. Πέρα από το αξιόλογο ενδιαφέρον που προκάλεσαν τα εν λόγω πρότυπα, όσον αφορά την επίλυση σημαντικών προβλημάτων, όπως για παράδειγμα το πρόβλημα της ιεραρχίας, αποτέλεσαν πήγη έμπνευσης για τη μελέτη των μελανών οπών. Η πρώτη μελέτη έγινε από τους Chamblin et.al. [17], κατα την οποία η λύση μιας τετραδιάστατης μελανής οπής στη μεμβράνη, μπορεί να επεκταθεί στον εγκάρσιο χώρο σχηματίζοντας μία μελανή χορδή, η οποία μπορεί και ικανοποιεί τις πενταδιάστατες εξισώσεις Einstein. Ωστόσο, όπως είδαμε μία τέτοια λύση δεν μπορεί να παραμείνει ευσταθής κάτω από κλασικές διαταραχές της μετρικής [18, 19]. Κατά την ανάλυση των διαταραχών του συγκεκριμένου συστήματος βρέθηκε ότι η διαταραχή παρουσιάζει μία αύξουσα εκθετική συμπεριφορά, για μήκη κύματος τα οποία είναι της τάξης του ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής της μεμβράνης. Το γεγονός αυτό σηματοδοτεί και την αστάθεια της λύσης, ή όπως συγκεκριμένα αναφέρεται το σύστημα παρουσιάζει μία Gregory - Laflamme αστάθεια.

Ακολούθως εξετάσαμε τα βασικά στοιχεία των προτύπων μεμβρανών συνδιάστασης - 2. Το κύριο χαρακτηριστικό αυτών των προτύπων είναι, ότι με την εισαγωγή της μεμβράνης σε έναν χωροχρόνο, ο οποίος περιέχει επιπλέον δύο διαστάσεις σε σχέση με τη μεμβράνη, έχουμε την εμφάνιση ενός ελλείμματος γωνίας στον εγκάρσιο στη μεμβράνη δυσδιάστατο χώρο, σχηματίζοντας μία κωνική ατέλεια στη θέση της μεμβράνης [40]. Αφού μελετήσαμε το σχηματισμό κωνικών ατελειών σε τρισδιάστατα πρότυπα βαρύτητας [36] και σε τετραδιάστατα πρότυπα κοσμικών χορδών [39], εξετάσαμε το μηχανισμό με τον οποίο εμφανίζεται η ελλείπουσα γωνία σε εξαδιάστατα πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2 [40], με το ενεργειακό περιεχόμενο της μεμβράνης να επιδρά στον εγκάρσιο χώρο. Η συγκεκριμένη ιδιότητα αποτέλεσε το έναυσμα για τη μελέτη επίλυσης του προβλήματος της κοσμολογικής σταθεράς. Ωστόσο, όπως παρατηρήθηκε ο τανυστής ενέργειας ορμής της μεμβράνης πρέπει να είναι ανάλογος της μετρικής, ώστε το σύστημα να αποφύγει σοβαρές ανωμαλίες. Παρόλα αυτά δίνοντας πάχος στη μεμβράνη ή εισάγοντας επιπλέον όρους καμπυλότητας στη δράση, μας δίνει τη δυνατότητα να αποφύγουμε το εν λόγω εμπόδιο. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση των επιπλέον όρων καμπυλότητας αναλύσαμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς λάβει τις τετραδιάστατες εξισώσεις Einstein πάνω στη μεμβράνη, εάν εισάγει έναν όρο Gauss - Bonnet στη δράση [66]. Αντίστοιχα το ίδιο μπορεί να συμβεί εάν θεωρήσουμε έναν επιπλέον όρο επαγομένης βαρύτητας της μεμβράνης στη δράση [99], μόνο που εδώ θα ισχύει μία επιπρόσθετη σχέση για τα στοιχεία του τανυστή ενέργειας ορμής της μεμβράνης. Τέλος εξετάσαμε ποιό είναι το αποτέλεσμα του συνδιασμού και των δύο όρων στη δράση.

Έχοντας εξετάσει τα βασικά χαρακτηριστικά των προτύπων μεμβρανών συνδιάστασης - 1 και συνδιάστασης - 2, στο επόμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με την εύρεση λύσεων μελανών οπών σε πρότυπα μεμβρανών συνδιάστασης - 2 σε πέντε και έξι διαστάσεις. Αρχικά αναλύσαμε την πενταδιάστατη περίπτωση [105], κατά την οποία μία τρισδιάστατη μεμβράνη εμβαπτίζεται σε ένα πενταδιάστατο χωροχρόνο. Στη δράση του συστήματος θεωρήσαμε, πέρα από τον συνήθη Einstein - Hilbert όρο, έναν όρο Gauss - Bonnet, καθώς επίσης και έναν όρο επαγόμενης βαρύτητας της τρισδιάστατης μεμβράνης. Βρήκαμε ότι το σύστημα των εξισώσεων δέχεται ως λύσεις, τρισδιάστατες μελανές οπές BTZ πάνω στη μεμβράνη, με τις λύσεις να επεκτείνονται στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο, σχηματίζοντας μελανές χορδές σε πρότυπα συνδιάστασης - 2. Μεταξύ των αποτελεσμάτων βρέθηκε επίσης και μία λύση η οποία πάνω στη μεμβράνη αντιστοιχεί σε μία τρισδιάστατη μελανή οπή BTZ, σύμμορφα συζευγμένη με ένα βαθμωτό πεδίο. Στη συνέχεια μελετήσαμε την εξαδιάστατη περίπτωση [106], κατά την οποία μία τετραδιάστατη μεμβράνη εμβαπτίζεται σε ένα εξαδιάστατο χωροχρόνο. Και πάλι η μορφή της δράσης είναι ίδια με την πενταδιάστατη περίπτωση. Και σε αυτή την περίπτωση, το σύστημα επιδέχεται λύσεις τετραδιάστατων μελανών οπών Schwarzschild στη μεμβράνη, οι οποίες επεκτείνονται στον επιπλέον δυσδιάστατο χώρο. Ωστόσο η προβολή του όρου Gauss - Bonnet στη μεμβράνη επιβάλλει μια σχέση η οποία απαιτεί, την παρουσία ύλης στις επιπλέον διαστάσεις. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι, στην τετραδιάστατη μελανή οπή το αναλλοίωτο Kretschmann δεν είναι σταθερό, ενώ στην τρισδιάστατη περίπτωση είναι, ακόμα και στην περίπτωση της σύμμορφα συζευγμένης BTZ μελανής οπής.

Όπως και στα πρότυπα συνδιάστατης - 1, είναι σημαντικό να εξετάσουμε την ευστάθεια των λύσεων. Έτσι στο τέταρτο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με την μελέτη της ευστάθειας της πενταδιάστατης λύσης, η οποία πάνω στη μεμβράνη αντιστοιχεί σε μία BTZ μελανή οπή, ενώ η επέκτασή της στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο γίνεται μέσω μίας συνάρτησης στρέβλωσης [107]. Για το σκοπό αυτό εξαγάγαμε την εξίσωση Lichnerowicz, υπό την παρουσία του όρου Gauss - Bonnet. Αφού εξετάσαμε αρχικά το φορμαλισμό της μεθόδου, σε σφαιρικά συμμετρικές μελανές οπές με όρους Gauss - Bonnet, στη συνέχεια μελετήσαμε τις βαθμωτές (scalar), διανυσματικές (vector) και τανυστικές (tensor) διαταραχές της BTZ μελανής χορδής στο πενταδιάστατο πρότυπο μεμβρανών συνδιάστασης - 2, για τις οποίες διατηρούμε των γωνιακή συμμετρία τόσο πάνω στη μεμβράνη, όσο και στον εγκάρσιο δυσδιάστατο χώρο . Μακρυά από το όριο Chern - Simons, στο οποίο το σύστημα εμφανίζει ένα πρόβλημα ισχυρής σύζευξης (strong coupling) για όλους τους τύπους των διαταραχών, οι βαθμωτές διαταραχές μπορούν να αποσυζευχθούν από τις υπόλοιπες συνιστώσες της διαταραχής. Η μελέτη των εξισώσεων διαταραχής μας έδειξε, ότι το σύστημα παραμένει ευσταθές κάτω από τις διαταραχές του συγκεκριμένου τύπου, γεγονός το οποίο επαληθεύτηκε και κατά την ανάλυση της εξίσωσης Klein - Gordon, για τη συγκεκριμένη λύση υποβάθρου. Αναφορικά με τις τανυστικές διαταραχές, λόγω των συμμετριών της μελανής χορδής, για το πρότυπο συνδιάστασης - 2, δεν μπορούμε να πάρουμε κάποια πληροφορία, υποδεικνύοντάς μας ότι, είτε δεν έχουμε τανυστικούς βαθμούς ελευθερίας στο σύστημά μας, είτε ότι είμαστε αντιμέτωποι με ένα πρόβλημα ισχυρής σύζευξης. Τέλος σχετικά με τις διανυσματικές διαταραχές βλέπουμε ότι έχουμε ένα εκφυλισμό των συνιστωσών στον εγκάρσιο χώρο, ενώ παράλληλα δεν είμαστε σε θέση να εξάγουμε κάποια πληροφορία για τη συμπεριφορά των εν λόγω συνιστωσών στη μεμβράνη. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι έχουμε ασταθείς μια ασταθή συμπεριφορά για τις διανυσματικές συνιστώσες της διαταραχής.

Επιπρόσθετα ασχοληθήκαμε και με θεωρίες κατα τις οποίες μία διάσταση μετασχηματίζεται με διαφορετικό τρόπο από ότι οι υπόλοιπες. Η συγκεκριμένη ιδέα αναπτύχθηκε σχετικά πρόσφατα από τον Hořava [118, 119], σε ένα πρότυπο κατά το οποίο, ο χρόνος μετασχηματίζεται διαφορετικά από ότι οι υπόλοιπες τρείς χωρικές διαστάσεις. Η συγκεκριμένη ιδέα πυροδότησε το ενδιαφέρον για τη μελέτη μιας επανακανονικοποιήσιμης θεωρίας για τη βαρύτητα. Λόγω ωστόσο του διαφορετικού τρόπου με τον οποίο μετασχηματίζεται ο χρόνος, δεν έχουμε πλέον συμμετρία κάτω από τους γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, αλλά κάτω από το πιο περιοριστικό σύνολο των μετασχηματισμών διατήρησης φύλλωσης (foliation preserving diffeomorphisms). Το σπάσιμο της συμμετρίας έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση ενός επιπρόσθετου βαθμωτού όρου ελευθερίας, ο οποίος αυξάνει των αριθμό των συνολικών βαθμών ελευθερίας, από δύο σε τρείς. Η ανάλυση των βαθμωτών διαταραχών έδειξε ότι ο συγκεκριμένος βαθμός ελευθερίας, πάσχει από ένα πρόβλημα ισχυρής σύζευξης, κοντά στο όριο που η θεωρία συγκλίνει στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας [126].

Στην περίπτωσή μας θεωρήσαμε ότι έχουμε μία τετραδιάστατη μεμβράνη, η οποία είναι εμβαπτισμένη σε ένα πενταδιάστατο χωρόχρονο, με την επιπλέον χωρική διάσταση να μετασχημετίζεται με διαφορετικό τρόπο από ότι οι υπόλοιπες τέσσερεις, συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου σε αντίθεση με το πρότυπο του Hořava, όπου έχουμε τη χρονική διάσταση να μετασχηματίζεται διαφορετικά [141]. Οι λύσεις του προτύπου έχουν παρόμοια μορφή με τις λύσεις στο πρότυπο των Randall και Sundrum [11], για μια επίπεδη μεμβράνη, όπως και για μία καμπυλομένη μεμβράνη [142, 143] με τις σταθερές να εξαρτώνται από τις παραμέτρους του προτύπου. Μελετώντας τις βαθμωτές διαταραχές είδαμε ότι η θεωρία χαρακτηρίζεται από δύο δυναμικούς βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι εμφανίζονται στη δράση ώς διορθωτικοί όροι με παραγώγους υψηλής τάξης. Επιπρόσθετα για τον ένα από τους δύο παρατηρούμε ότι εμφανίζεται και ώς ghost πάνω στη μεμβράνη, δίχως να εξαφανίζεται στο όριο που η θεωρία συγκλίνει στην πενταδιάστατη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Αδιαμφισβήτητα η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας έχει αποτελέσει ένα απο τα σημαντικότερα θεμέλια της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής. Ωστόσο τα παρατηρησιακά αστροφυσικά και κοσμολογικά δεδομένα, μας υποδεικνύουν ότι θα πρέπει να εξετάσουμε εναλλακτικές θεωρίες πέρα από τα όριά της. Τα τελευταία χρόνια υπάρχει εντονότατο ενδιαφέρον στη μελέτη εναλλακτικών προτύπων κυρίως στο πεδίο των θεωριών με επιπλέον χωρικές διαστάσεις, όπως επίσης και σε πρότυπα τα οποία είναι επηρεασμένα από τη φυσική συμπυκνωμένης ύλης. Αναλύοντας τα εκάστοτε πρότυπα με τη βοήθεια των παρατηρησιακών δεδομένων, καθώς επίσης και των επίγειων πειραμάτων, θα μας δώσει μια εικόνα για το ποιά οδός είναι πιο πρόσφορη για μια πιο ολοκληρωμένη άποψη του σύμπαντός μας.

Βιβλιογραφία

[1] T.Kaluza, Sitzungseber. Press Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse K1 (1921) 966.

[2] O. Klein, Z. Phys. 37 (1926) 895.

[3] B. Zwiebach, "A first course in string theory," Cambridge : Cambridge University Press , (2004)

[4] E. Kiritsis, "String Theory in a Nutshell," Princeton University Press , (2007)

[5] K. Becker, M. Becker and J. Schwarz, "String Theory and M-Theory," Cambridge University Press , (2007)

[6] R. Maartens and K. Koyama, "Brane-World Gravity," Living Rev. Rel. **13** (2010) 5 [arXiv:1004.3962 [hep-th]].

[7] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter," Phys. Lett. B **429** (1998) 263 [arXiv:hep-ph/9803315].

[8] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV," Phys. Lett. B **436**, 257 (1998) [arXiv:hep-ph/9804398].

[9] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity," Phys. Rev. D **59**, 086004 (1999) [arXiv:hep-ph/9807344].

[10] L. Randall and R. Sundrum, "A Large mass hierarchy from a small extra dimension," Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370 [arXiv:hep-ph/9905221].

[11] L. Randall and R. Sundrum, "An Alternative to compactification," Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064].

[12] P. Horava and E. Witten, "Heterotic and type I string dynamics from eleven-dimensions," Nucl. Phys. B **460** (1996) 506 [arXiv:hep-th/9510209].

[13] J. Garriga and T. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **84**, 2778 (2000) [arXiv:hep-th/9911055].

[14] F. R. Tangherlini, "Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem," *Nuovo Cimento* **27** (1963) 636.

[15] J. Campell, A First Course on Differential Geometry (Claredon, Oxford, 1926)

[16] L. Magaard, Ph.D. Thesis (Kiel) (1963)

[17] A. Chamblin, S. W. Hawking and H. S. Reall, "Brane-world black holes," Phys. Rev. D **61**, 065007 (2000) [arXiv:hep-th/9909205].

[18] R. Gregory and R. Laflamme, "Black strings and p-branes are unstable," Phys. Rev. Lett. **70**, 2837 (1993) [arXiv:hep-th/9301052];

[19] R. Gregory, "Black string instabilities in anti-de Sitter space," Class. Quant. Grav. **17**, L125 (2000) [arXiv:hep-th/0004101];

[20] G. Gibbons and S. A. Hartnoll, "A gravitational instability in higher dimensions," Phys. Rev. D **66**, 064024 (2002) [arXiv:hep-th/0206202].

[21] R. Gregory, "Braneworld black holes," Lect. Notes Phys. **769**, 259 (2009) [arXiv:0804.2595 [hep-th]].

[22] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos and V. Rezania, "Black holes on the brane," Phys. Lett. B **487** (2000) 1 [arXiv:hep-th/0003061].

[23] T. Shiromizu, K. i. Maeda and M. Sasaki, "The Einstein equation on the 3-brane world," Phys. Rev. D **62**, 024012 (2000) [arXiv:gr-qc/9910076].

[24] R. Emparan, G. T. Horowitz and R. C. Myers, "Exact description of black holes on branes," JHEP **0001**, 007 (2000) [arXiv:hep-th/9911043].

[25] W. Kinnersley and M. Walker, Phys. Rev. D 2, 1359 (1970).

[26] R. Emparan, R. Gregory and C. Santos, "Black holes on thick branes," Phys. Rev. D **63**, 104022 (2001) [arXiv:hep-th/0012100].

[27] G. Kofinas, E. Papantonopoulos and I. Pappa, "Spherically symmetric brane world solutions with (4)-R term in the bulk," Phys. Rev. D **66**, 104014 (2002) [arXiv:hep-th/0112019].

[28] G. Kofinas, E. Papantonopoulos and V. Zamarias, "Black hole solutions in brane worlds with induced gravity," Phys. Rev. D **66**, 104028 (2002) [arXiv:hep-th/0208207].

[29] C. Barcelo, R. Maartens, C. F. Sopuerta and F. Viniegra, "Stacking a 4D geometry into an Einstein-Gauss-Bonnet bulk," Phys. Rev. D **67**, 064023 (2003) [arXiv:hep-th/0211013].

[30] T. Harmark, V. Niarchos and N. A. Obers, "Instabilities of black strings and branes," Class. Quant. Grav. **24**, R1 (2007) [arXiv:hep-th/0701022].

[31] N. A. Obers, "Black Holes in Higher-Dimensional Gravity," Lect. Notes Phys. **769**, 211 (2009) [arXiv:0802.0519 [hep-th]].

[32] J. H. Jeans, "The stability of a spherical nebula," *Phil. Trans. Roy. Soc.* **199A** (1902) 1–53.

[33] R. M. Wald, "General Relativity," *Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p*

[34] R. Gregory and R. Laflamme, "HYPERCYLINDRICAL BLACK HOLES," Phys. Rev. D **37** (1988) 305.

[35] H. P. Nollert, "TOPICAL REVIEW: Quasinormal modes: the characteristic 'sound' of black holes and neutron stars," Class. Quant. Grav. **16** (1999) R159.

[36] S. Deser, R. Jackiw and G. 't Hooft, "Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space," Annals Phys. **152** (1984) 220.

[37] S. Deser and R. Jackiw, "Three-Dimensional Cosmological Gravity: Dynamics of Constant Curvature," Annals Phys. **153** (1984) 405.

[38] S. Deser and R. Jackiw, "Classical and Quantum Scattering on a Cone," Commun. Math. Phys. **118** (1988) 495.

[39] A. Vilenkin and E. P.S. Shellard, "Cosmic strings and other topological defects," Cambridge University Press , 2000, c1994.

[40] J. W. Chen, M. A. Luty and E. Ponton, "A critical cosmological constant from millimeter extra dimensions," JHEP **0009** (2000) 012 [arXiv:hep-th/0003067].

[41] J. M. Cline, J. Descheneau, M. Giovannini and J. Vinet, "Cosmology of codimension two brane worlds," JHEP **0306**, 048 (2003) [arXiv:hep-th/0304147].

[42] S. Weinberg, "The Cosmological Constant Problem," Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 1.

[43] S. M. Carroll and M. M. Guica, "Sidestepping the cosmological constant with football shaped extra dimensions," arXiv:hep-th/0302067.

[44] I. Navarro, "Codimension two compactifications and the cosmological constant problem," JCAP **0309**, 004 (2003) [arXiv:hep-th/0302129].

[45] Y. Aghababaie, C. P. Burgess, S. L. Parameswaran and F. Quevedo, "Towards a naturally small cosmological constant from branes in 6-D supergravity," Nucl. Phys. B **680**, 389 (2004) [arXiv:hep-th/0304256].

[46] I. Navarro, "Spheres, deficit angles and the cosmological constant," Class. Quant. Grav. **20**, 3603 (2003) [arXiv:hep-th/0305014].

[47] Y. Aghababaie *et al.*, "Warped brane worlds in six-dimensional supergravity," JHEP **0309**, 037 (2003) [arXiv:hep-th/0308064].

[48] H. P. Nilles, A. Papazoglou and G. Tasinato, "Selftuning and its footprints," Nucl. Phys. B **677**, 405 (2004) [arXiv:hep-th/0309042].

[49] H. M. Lee, "A Comment on the selftuning of cosmological constant with deficit angle on a sphere," Phys. Lett. B **587**, 117 (2004) [arXiv:hep-th/0309050].

[50] M. L. Graesser, J. E. Kile and P. Wang, "Gravitational perturbations of a six-dimensional selftuning model," Phys. Rev. D **70**, 024008 (2004) [arXiv:hep-th/0403074].

[51] A. Kehagias, "A Conical tear drop as a vacuum-energy drain for the solution of the cosmological constant problem," Phys. Lett. B **600**, 133 (2004) [arXiv:hep-th/0406025].

[52] J. Garriga and M. Porrati, "Football shaped extra dimensions and the absence of self-tuning," JHEP **0408**, 028 (2004) [arXiv:hep-th/0406158];

[53] S. Randjbar-Daemi and V. A. Rubakov, "4d-flat compactifications with brane vorticities," JHEP **0410**, 054 (2004) [arXiv:hep-th/0407176].

[54] H. M. Lee and A. Papazoglou, "Brane solutions of a spherical sigma model in six dimensions," Nucl. Phys. B **705**, 152 (2005) [arXiv:hep-th/0407208].

[55] V. P. Nair and S. Randjbar-Daemi, "Nonsingular 4d-flat branes in six-dimensional supergravities," JHEP **0503**, 049 (2005) [arXiv:hep-th/0408063].

[56] M. Redi, "Footballs, conical singularities and the Liouville equation," Phys. Rev. D **71**, 044006 (2005) [arXiv:hep-th/0412189].

[57] H. M. Lee and G. Tasinato, "Cosmology of intersecting brane world models in Gauss-Bonnet gravity," JCAP **0404**, 009 (2004) [arXiv:hep-th/0401221].

[58] I. Navarro and J. Santiago, "Higher codimension brane worlds from intersecting branes," JHEP **0404**, 062 (2004) [arXiv:hep-th/0402204].

[59] S. Kanno and J. Soda, "Quasi-thick codimension 2 braneworld," JCAP **0407** (2004) 002 [arXiv:hep-th/0404207].

[60] J. Vinet and J. M. Cline, "Can codimension-two branes solve the cosmological constant problem?," Phys. Rev. D **70** (2004) 083514 [arXiv:hep-th/0406141]; J. Vinet and J. M. Cline, "Codimension-two branes in six-dimensional supergravity and the cosmological constant problem," Phys. Rev. D **71**, 064011 (2005) [arXiv:hep-th/0501098].

[61] I. Navarro and J. Santiago, "Gravity on codimension 2 brane worlds," [arXiv:hep-th/0411250].

[62] W.Israel, Singular Hypersurfaces and Thin Shells in General Relativity, Nuovo Cim. B 44S10(1966) 1,[Erratum-ibid. B 48S10, (1967) 463].

[63] F. Leblond, R. C. Myers and D. J. Winters, "Consistency conditions for brane worlds in arbitrary dimensions," JHEP **0107**, 031 (2001) [arXiv:hep-th/0106140].

[64] T. Gherghetta and M. E. Shaposhnikov, "Localizing gravity on a string - like defect in six-dimensions," Phys. Rev. Lett. **85**, 240 (2000) [arXiv:hep-th/0004014].

[65] A. Salvio, "Aspects of physics with two extra dimensions," arXiv:hep-th/0701020.

[66] P. Bostock, R. Gregory, I. Navarro and J. Santiago, "Einstein gravity on the codimension 2 brane?," Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 221601 [arXiv:hep-th/0311074].

[67] G. Kofinas, "On braneworld cosmologies from six dimensions, and absence thereof," Phys. Lett. B **633** (2006) 141 [arXiv:hep-th/0506035].

[68] E. Papantonopoulos and A. Papazoglou, "Cosmological evolution of a purely conical codimension-2 brane world," JHEP **0509**, 012 (2005) [arXiv:hep-th/0507278].

[69] B. Carter, R. A. Battye and J. P. Uzan, "Gradient formula for linearly self-interacting branes," Commun. Math. Phys. **235** (2003) 289 [arXiv:hep-th/0204042]; M. Kolanovic, M. Porrati and J. W. Rombouts, "Regularization of brane induced gravity," Phys. Rev. D **68** (2003) 064018 [arXiv:hep-th/0304148]; P. Peter, C. Ringeval and J. P. Uzan, "Stability of six-dimensional hyperstring braneworlds," Phys. Rev. D **71** (2005) 104018 [arXiv:hep-th/0301172]; J. R. I. Gott, "Gravitational lensing effects of vacuum strings: Exact solutions," Astrophys. J. **288** (1985) 422.

[70] M. Peloso, L. Sorbo and G. Tasinato, "Standard 4d gravity on a brane in six dimensional flux compactifications," Phys. Rev. D **73** (2006) 104025 [arXiv:hep-th/0603026].

[71] E. Papantonopoulos, A. Papazoglou and V. Zamarias, "Regularization of conical singularities in warp six-dimensional compactifications," JHEP **0703** (2007) 002 [arXiv:hep-th/0611311].

[72] A. J. Tolley, C. P. Burgess, C. de Rham and D. Hoover, "Scaling solutions to 6D gauged chiral supergravity," New J. Phys. **8**, 324 (2006) [arXiv:hep-th/0608083]; B. Himmetoglu and M. Peloso, Nucl. Phys. B **773**, 84 (2007) [arXiv:hep-th/0612140]. T. Kobayashi and M. Minamitsuji, "Gravity on an extended brane in six-dimensional warped flux compactifications," Phys. Rev. D **75**, 104013 (2007) [arXiv:hep-th/0703029]. C. P. Burgess, D. Hoover and G. Tasinato, "UV Caps and Modulus Stabilization for 6D Gauged Chiral Supergravity," JHEP **0709**, 124 (2007) [arXiv:0705.3212 [hep-th]]. T. Kobayashi and M. Minamitsuji, "Brane cosmological solutions in six-dimensional warped flux compactifications," JCAP **0707**, 016 (2007) [arXiv:0705.3500 [hep-th]]. T. Kobayashi and Y. i. Takamizu, "Hybrid compactifications and brane gravity in six dimensions," Class. Quant. Grav. **25**, 015007 (2007) [arXiv:0707.0894 [hep-th]]. E. J. Copeland and O. Seto, "Dynamical solutions of warped six dimensional supergravity," JHEP **0708**, 001 (2007) [arXiv:0705.4169 [hep-th]]. S. Fujii, T. Kobayashi and T. Shiromizu, "Low energy effective theory on a regularized brane in six-dimensional flux compactifications," Phys. Rev. D **76**, 104052 (2007) [arXiv:0708.2534 [hep-th]]. F. Arroja, T. Kobayashi, K. Koyama and T. Shiromizu, "Low energy effective theory on a regularized brane in 6D gauged chiral supergravity," JCAP **0712**, 006 (2007) [arXiv:0710.2539 [hep-th]]. H. M. Lee and A. Papazoglou, "Supersymmetric codimension-two branes in six-dimensional gauged supergravity," JHEP **0801**, 008 (2008) [arXiv:0710.4319 [hep-th]]. F. Chen, J. M. Cline and S. Kanno, "Modified Friedmann Equation and Inflation in Warped Codimension-two Braneworld," Phys. Rev. D **77**, 063531 (2008) [arXiv:0801.0226 [hep-th]]. O. Corradini, K. Koyama and G. Tasinato, "Induced gravity on intersecting brane-worlds. Part II. Cosmology," Phys. Rev. D **78**, 124002 (2008) [arXiv:0803.1850 [hep-th]]. M. Minamitsuji, "Instability of brane cosmological solutions with flux compactifications," Class. Quant. Grav. **25**, 075019 (2008) [arXiv:0801.3080 [hep-th]].

[73] E. Papantonopoulos, A. Papazoglou and V. Zamarias, "Induced cosmology on a regularized brane in six-dimensional flux compactification," arXiv:0707.1396 [hep-th].

[74] M. Minamitsuji and D. Langlois, "Cosmological evolution of regularized branes in 6D warped flux compactifications," Phys. Rev. D **76**, 084031 (2007) [arXiv:0707.1426 [hep-th]].

[75] E. Papantonopoulos, "Cosmology in six dimensions," arXiv:gr-qc/0601011.

[76] C. Charmousis, G. Kofinas and A. Papazoglou, "The Consistency of codimension-2 braneworlds and their cosmology," JCAP **1001**, 022 (2010) [arXiv:0907.1640 [hep-th]].

[77] M. Aryal, L. H. Ford and A. Vilenkin, "Cosmic Strings And Black Holes," Phys. Rev. D **34** (1986) 2263.

[78] A. Achucarro, R. Gregory and K. Kuijken, "Abelian Higgs hair for black holes," Phys. Rev. D **52** (1995) 5729. [arXiv:gr-qc/9505039].

[79] N. Kaloper and D. Kiley, "Exact black holes and gravitational shockwaves on codimension-2 branes," JHEP **0603**, 077 (2006) [arXiv:hep-th/0601110].

[80] D. Kiley, "Rotating Black Holes on Codimension-2 Branes," Phys. Rev. D **76**, 126002 (2007) [arXiv:0708.1016 [hep-th]].

[81] U. A. al-Binni and G. Siopsis, "Quasi-normal modes of a black hole localized on a codimension-two brane of finite tension," Phys. Rev. D **76**, 104031 (2007) [arXiv:0708.3363 [hep-th]].

[82] S. Chen, B. Wang, R. K. Su and W. Y. Hwang, "Greybody factors for rotating black holes on codimension-2 branes," JHEP **0803**, 019 (2008) [arXiv:0711.3599 [hep-th]].

[83] T. Shiromizu and M. Shibata, "Black holes in the brane world: Time symmetric initial data," Phys. Rev. D **62**, 127502 (2000) [arXiv:hep-th/0007203]; A. Chamblin, H. S. Reall, H. A. Shinkai and T. Shiromizu, "Charged braneworld black holes," Phys. Rev. D **63**, 064015 (2001) [arXiv:hep-th/0008177]; T. Wiseman, "Relativistic stars in Randall-Sundrum gravity," Phys. Rev. D **65**, 124007 (2002) [arXiv:hep-th/0111057].

[84] R. Maartens, "Geometry and dynamics of the brane world," arXiv:gr-qc/0101059.

[85] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos and V. Rezania, "Black holes on the brane," Phys. Lett. B **487**, 1 (2000) [arXiv:hep-th/0003061]; M. Bruni, C. Germani and R. Maartens, "Gravitational collapse on the brane," Phys. Rev. Lett. **87**, 231302 (2001) [arXiv:gr-qc/0108013]; R. Casadio, A. Fabbri and L. Mazzacurati, "New black holes in the brane-world?," Phys. Rev. D **65**, 084040 (2002) [arXiv:gr-qc/0111072]; G. Kofinas, E. Papantonopoulos and I. Pappa, "Spherically symmetric braneworld solutions with (4)R term in the bulk," Phys. Rev. D **66**, 104014 (2002) [arXiv:hep-th/0112019]; G. Kofinas, E. Papantonopoulos and V. Zamarias, "Black hole solutions in braneworlds with induced gravity," Phys. Rev. D **66**, 104028 (2002) [arXiv:hep-th/0208207]; P. Kanti and K. Tamvakis, "Quest for localized 4-D black holes in brane worlds," Phys. Rev. D **65**, 084010 (2002) [arXiv:hep-th/0110298]; K. A. Bronnikov, V. N. Melnikov and H. Dehnen,

"On a general class of brane-world black holes," Phys. Rev. D **68**, 024025 (2003) [arXiv:gr-qc/0304068].

[86] D. Lovelock, "The Einstein tensor and its generalizations," J. Math. Phys. **12** (1971) 498.

[87] C. Charmousis, "Higher order gravity theories and their black hole solutions," Lect. Notes Phys. **769** (2009) 299 [arXiv:0805.0568 [gr-qc]].

[88]

[88] M. Nakahara, "Geometry, topology and physics," Boca Raton, USA: Taylor and Francis (2003) 573 p

[89] D. G. Boulware and S. Deser, "String Generated Gravity Models," Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2656.

[90] J. T. Wheeler, "Symmetric Solutions To The Maximally Gauss-Bonnet Extended Einstein Equations," Nucl. Phys. B **273** (1986) 732.

[91] J. T. Wheeler, "Symmetric Solutions To The Gauss-Bonnet Extended Einstein Equations," Nucl. Phys. B **268** (1986) 737.

[92] C. Garraffo and G. Giribet, "The Lovelock Black Holes," Mod. Phys. Lett. A **23**, 1801 (2008) [arXiv:0805.3575 [gr-qc]].

[93] J. E. Lidsey and N. J. Nunes, "Inflation in Gauss-Bonnet brane cosmology," Phys. Rev. D **67** (2003) 103510 [arXiv:astro-ph/0303168];

[94] G. Kofinas, R. Maartens and E. Papantonopoulos, "Brane cosmology with curvature corrections," JHEP **0310**, 066 (2003) [arXiv:hep-th/0307138].

[95] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, "The Black hole in three-dimensional space-time," Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992) [arXiv:hep-th/9204099].

[96] C. Charmousis and J. F. Dufaux, "General Gauss-Bonnet brane cosmology," Class. Quant. Grav. **19**, 4671 (2002) [arXiv:hep-th/0202107].

[97] C. Martinez and J. Zanelli, "Conformally dressed black hole in 2+1 dimensions," Phys. Rev. D **54**, 3830 (1996) [arXiv:gr-qc/9604021].

[98] G. Kofinas, "Conservation equation on braneworlds in six dimensions," Class. Quant. Grav. **22**, L47 (2005) [arXiv:hep-th/0412299].

[99] E. Papantonopoulos and A. Papazoglou, "Brane-bulk matter relations for a purely conical codimension-2 brane world," JCAP **0507** (2005) 004 [arXiv:hep-th/0501112].

[100] D. Brecher and M. J. Perry, "Ricci-flat branes," Nucl. Phys. B **566**, 151 (2000) [arXiv:hep-th/9908018].

[101] T. Kobayashi and T. Tanaka, "Five-dimensional black strings in Einstein-Gauss-Bonnet gravity," Phys. Rev. D **71**, 084005 (2005) [arXiv:gr-qc/0412139].

[102] A. Molina and N. Dadhich, "On Kaluza-Klein spacetime in Einstein-Gauss-Bonnet gravity," Int. J. Mod. Phys. D **18** (2009) 599 [arXiv:0804.1194 [gr-qc]].

[103] C. Charmousis and A. Papazoglou, "Self-properties of codimension-2 braneworlds," JHEP **0807**, 062 (2008) [arXiv:0804.2121 [hep-th]].

[104] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, "Geometry of the (2+1) black hole," Phys. Rev. D **48**, 1506 (1993) [arXiv:gr-qc/9302012].

[105] B. Cuadros-Melgar, E. Papantonopoulos, M. Tsoukalas and V. Zamarias, "BTZ Like-String on Codimension-2 Braneworlds in the Thin Brane Limit," Phys. Rev. Lett. **100**, 221601 (2008) [arXiv:0712.3232 [hep-th]].

[106] B. Cuadros-Melgar, E. Papantonopoulos, M. Tsoukalas and V. Zamarias, "Black Holes on Thin 3-branes of Codimension-2 and their Extension into the Bulk," Nucl. Phys. B **810** (2009) 246 [arXiv:0804.4459 [hep-th]].

[107] B. Cuadros-Melgar, E. Papantonopoulos, M. Tsoukalas and V. Zamarias, "Perturbations of Gauss-Bonnet Black Strings in Codimension-2 Braneworlds," JHEP **1103** (2011) 010 [arXiv:1012.4747 [hep-th]].

[108] H. Kodama and A. Ishibashi, "A master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions," Prog. Theor. Phys. **110**, 701 (2003) [arXiv:hep-th/0305147]; A. Ishibashi and H. Kodama, "Stability of higher-dimensional Schwarzschild black holes," Prog. Theor. Phys. **110**, 901 (2003) [arXiv:hep-th/0305185]; H. Kodama and A. Ishibashi, "Master equations for perturbations of generalized static black holes with Prog. Theor. Phys. **111**, 29 (2004) [arXiv:hep-th/0308128]; H. Kodama, "Perturbations and Stability of Higher-Dimensional Black Holes," Lect. Notes Phys. **769**, 427 (2009) [arXiv:0712.2703 [hep-th]].

[109] R. Emparan, G. T. Horowitz and R. C. Myers, "Exact description of black holes on branes," JHEP **0001**, 007 (2000) [arXiv:hep-th/9911043]; R. Emparan, G. T. Horowitz and R. C. Myers, "Exact description of black holes on branes. II: Comparison with BTZ black holes and black strings," JHEP **0001**, 021 (2000) [arXiv:hep-th/9912135].

[110] L. h. Liu and B. Wang, "Stability of BTZ black strings," Phys. Rev. D **78**, 064001 (2008) [arXiv:0803.0455 [hep-th]].

[111] G. Dotti and R. J. Gleiser, "Gravitational instability of Einstein-Gauss-Bonnet black holes under tensor mode perturbations," Class. Quant. Grav. **22**, L1 (2005) [arXiv:gr-qc/0409005].

[112] Higuchi A 1987 Journal of Mathematical Physics **28** 1553 (Erratum i-bid.43:6385,2002).

[113] N. Kaloper and D. Kiley, "Charting the Landscape of Modified Gravity," JHEP **0705**, 045 (2007) [arXiv:hep-th/0703190].

[114] V. Cardoso and J. P. S. Lemos, "Scalar, electromagnetic and Weyl perturbations of BTZ black holes: Quasinormal modes," Phys. Rev. D **63** (2001) 124015 [arXiv:gr-qc/0101052].

[115] C. Charmousis and A. Padilla, "The Instability of Vacua in Gauss-Bonnet Gravity," JHEP **0812** (2008) 038 [arXiv:0807.2864 [hep-th]].

[116] M. Banados, R. Olea and S. Theisen, JHEP **0510** (2005) 067 [arXiv:hep-th/0509179].

[117] K. S. Stelle, "Renormalization of higher-derivative quantum gravity," Phys. Rev D **16**,953 (1977)

[118] P. Horava, "Membranes at Quantum Criticality," JHEP **0903** (2009) 020 [arXiv:0812.4287 [hep-th]].

[119] P. Horava, "Quantum Gravity at a Lifshitz Point," Phys. Rev. D **79** (2009) 084008 [arXiv:0901.3775 [hep-th]].

[120] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, "An Introduction to quantum field theory," SPIRES entry *Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p*

[121] M. Visser, "Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator," Phys. Rev. D **80** (2009) 025011 [arXiv:0902.0590 [hep-th]].

[122] M. Visser, "Power-counting renormalizability of generalized Horava gravity," arXiv:0912.4757 [hep-th].

[123] R. L. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, "The Dynamics of general relativity," arXiv:gr-qc/0405109.

[124] T. P. Sotiriou, M. Visser and S. Weinfurtner, "Phenomenologically viable Lorentz-violating quantum gravity," Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 251601 [arXiv:0904.4464 [hep-th]].

[125] T. P. Sotiriou, M. Visser and S. Weinfurtner, "Quantum gravity without Lorentz invariance," JHEP **0910** (2009) 033 [arXiv:0905.2798 [hep-th]].

[126] T. P. Sotiriou, “Horava-Lifshitz gravity: a status report,” J. Phys. Conf. Ser. **283**, 012034 (2011) [arXiv:1010.3218 [hep-th]].

[127] D. Blas, O. Pujolas and S. Sibiryakov, “Consistent Extension of Horava Gravity,” Phys. Rev. Lett. **104**, 181302 (2010) [arXiv:0909.3525 [hep-th]].

[128] A. Kehagias and K. Sfetsos, “The Black hole and FRW geometries of non-relativistic gravity,” Phys. Lett. B **678** (2009) 123 [arXiv:0905.0477 [hep-th]].

[129] E. Kiritsis and G. Kofinas, “Horava-Lifshitz Cosmology,” Nucl. Phys. B **821**, 467 (2009) [arXiv:0904.1334 [hep-th]].

[130] E. Kiritsis and G. Kofinas, “On Horava-Lifshitz 'Black Holes',” JHEP **1001**, 122 (2010) [arXiv:0910.5487 [hep-th]].

[131] G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos, P. Pasipoularides and M. Tsoukalas, “Black Hole Solutions in 5D Horava-Lifshitz Gravity,” Phys. Rev. D **81** (2010) 124014 [arXiv:1004.2289 [hep-th]].

[132] G. Koutsoumbas and P. Pasipoularides, “Black hole solutions in Horava-Lifshitz Gravity with cubic terms,” Phys. Rev. D **82**, 044046 (2010) [arXiv:1006.3199 [hep-th]].

[133] C. Charmousis, G. Niz, A. Padilla and P. M. Saffin, “Strong coupling in Horava gravity,” JHEP **0908**, 070 (2009) [arXiv:0905.2579 [hep-th]].

[134] C. Bogdanos and E. N. Saridakis, “Perturbative instabilities in Horava gravity,” Class. Quant. Grav. **27** (2010) 075005 [arXiv:0907.1636 [hep-th]].

[135] D. Blas, O. Pujolas and S. Sibiryakov, “On the Extra Mode and Inconsistency of Horava Gravity,” JHEP **0910**, 029 (2009) [arXiv:0906.3046 [hep-th]].

[136] K. Koyama and F. Arroja, “Pathological behaviour of the scalar graviton in Horava-Lifshitz gravity,” JHEP **1003**, 061 (2010) [arXiv:0910.1998 [hep-th]].

[137] A. Papazoglou and T. P. Sotiriou, “Strong coupling in extended Horava-Lifshitz gravity,” Phys. Lett. B **685**, 197 (2010) [arXiv:0911.1299 [hep-th]].

[138] I. Kimpton and A. Padilla, “Lessons from the decoupling limit of Horava gravity,” JHEP **1007**, 014 (2010) [arXiv:1003.5666 [hep-th]].

[139] D. Blas, O. Pujolas and S. Sibiryakov, “Comment on 'Strong coupling in extended Horava-Lifshitz gravity',” Phys. Lett. B **688** (2010) 350 [arXiv:0912.0550 [hep-th]].

[140] A. Padilla, “The good, the bad and the ugly .... of Horava gravity,” J. Phys. Conf. Ser. **259** (2010) 012033 [arXiv:1009.4074 [hep-th]].

[141] E. Papantonopoulos, A. Papazoglou and M. Tsoukalas, "Anisotropic Extra Dimensions," arXiv:1102.5725 [hep-th].

[142] N. Kaloper, "Bent domain walls as braneworlds," Phys. Rev. D **60**, 123506 (1999) [arXiv:hep-th/9905210].

[143] I. I. Kogan, S. Mouslopoulos and A. Papazoglou, "A new bigravity model with exclusively positive branes," Phys. Lett. B **501** (2001) 140 [arXiv:hep-th/0011141].

[144] M. Fierz and W. Pauli, Roy. Soc. Lond. A 173 (1939) 211.

[145] H. van Dam and M. J. G. Veltman, "Massive And Massless Yang-Mills And Gravitational Fields," Nucl. Phys. B **22**, 397 (1970).

[146] V. I. Zakharov, "Linearized gravitation theory and the graviton mass," JETP Lett. **12** (1970) 312 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **12** (1970) 447].