



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ**

**Εκτίμηση Δυναμικού Μοντέλου μικρού μη Επανδρωμένου  
Αεροσκάφους με περιορισμένο αισθητηριακό σύστημα**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

του

**ΠΑΡΙ Μ. ΒΑΪΟΠΟΥΛΟΥ**

**Επιβλέπων:** Γεώργιος Στασινόπουλος  
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2017





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ**

## **Εκτίμηση Δυναμικού Μοντέλου μικρού μη Επανδρωμένου Αεροσκάφους με περιορισμένο αισθητηριακό σύστημα**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

ΤΟΥ

**ΠΑΡΙ Μ. ΒΑΪΟΠΟΥΛΟΥ**

**Επιβλέπων:** Γεώργιος Στασινόπουλος  
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 26η Οκτωβρίου 2017.

.....  
Γεώργιος Στασινόπουλος  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Νικόλαος Θεοδώρου  
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2017

.....

**Πάρις Μ. Βαϊόπουλος**

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Ηλεκτρονικών Υπολογιστών ΕΜΠ

© 2017 Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights reserved.

## Περίληψη

Κατά την διάρκεια των τελευταίων ετών, ένα ικανό μέρος της παγκόσμιας ακαδημαϊκής έρευνας αφιερώνει πόρους για την κατασκευή, υλοποίηση και μελέτη μη επανδρωμένων ιπτάμενων συστημάτων (Unmanned Aerial Systems-UAS). Οι εφαρμογές εκτείνονται από την μετεωρολογία, την αεροφωτογραφία και χαρτογράφηση δυσπρόσιτων περιοχών, την παρακολούθηση, την ασφάλεια/ διάσωση μέχρι, προσφάτως, την μεταφορά εμπορευμάτων.

Καθώς οι απαιτήσεις των αυτόνομων εναέριων συστημάτων αυξάνονται, η ανάγκη για μοντελοποίηση των ασκούμενων αεροδυναμικών τάσεων και ροπών εν πτήση προβάλλει ολοένα και πιο επιτακτική. Η δημιουργία προσομοιωτών υψηλής ακρίβειας, η ανάπτυξη ελεγκτών υψηλών προδιαγραφών όπως και η πρόβλεψη/χαρακτηρισμός σφαλμάτων κατά την διάρκεια της πτήσης, εξαρτώνται άμεσα από την ακρίβεια και την προβλεψιμότητα των εκτιμώμενων μοντέλων της δυναμικής συμπεριφοράς της σχετικής πλατφόρμας. Παράλληλα, οι περιορισμοί κόστους και πόρων καθιστούν την χρήση Αεροσήραγγας και εξειδικευμένου εργαστηριακού εξοπλισμού απαγορευτική για πολλές ερευνητικές ομάδες.

Βασικός στόχος της συγκεκριμένης μελέτης είναι ο υπολογισμός των παραμέτρων (Parameter Identification) του Δυναμικού Μοντέλου μη επανδρωμένου αεροσκάφους μικρής ή μεσαίας κλίμακας με την βοήθεια περιορισμένου αισθητηριακού συστήματος χαμηλού κόστους χρησιμοποιώντας δεδομένα αποκλειστικά από δοκιμαστικές πτήσεις. Η ανάπτυξη αλγορίθμων σχετικών με το Parameter Identification απαιτεί τον παράλληλο σχεδιασμό τεχνικών εκτίμησης της κατάστασης του αεροσκάφους συνδυάζοντας πληροφορία από την φυσική ανάλυση και το αισθητηριακό σύστημα (State Estimation/ Sensor Fusion). Επιπλέον, μέρος της εργασίας αφιερώθηκε στον σχεδιασμό και την εκτέλεση πειραμάτων για την βαθμονόμηση αισθητήρων (Sensor Calibration) με την βοήθεια Αεροδυναμικής Σήραγγας (Wind Tunnel Tests). Όλη η παραπάνω τεχνογνωσία επιβεβαιώθηκε πειραματικά και θα ενσωματωθεί στο πειραματικό αεροσκάφος του Control Systems Lab της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ.

**Λέξεις κλειδιά:** UAV, εκτίμηση παραμέτρων, εκτίμηση κατάστασης, βαθμονόμηση αισθητήρων, αεροδυναμικό μοντέλο, φίλτρα Κάλμαν, στατιστικές μέθοδοι μοντελοποίησης

## Abstract

System Identification in the discipline of aerodynamics, incorporates various Parameter Estimation techniques in order to model the exerted forces and moments on an airframe. Core to this process is the determination of the Stability and Control derivatives, which govern the relationship between flight dynamics and fundamental aircraft variables (e.g. control surface deflections, stability angles, angular rates).

The escalating complexity of implementations associated with Unmanned Aerial Systems (UAS), renders the identification of the Aerodynamic Model pivotal to various cutting edge control systems. Sophisticated autopilots, fault tolerant systems and high fidelity flight simulators, all require the explicit knowledge of the Aerodynamic Parameters of the vehicle under consideration. For this reason, a considerable amount of research has been conducted in the field.

Providing feasible solutions to such prerequisites is a non-trivial goal, especially in small-scale unmanned aircrafts. Payload, cost and computational constraints are dominant factors in the design of such Parameter Identification (Pid) algorithms. Moreover, costly and time consuming wind tunnel tests cannot be considered a viable option for many research groups with limited resources. Contrariwise, the characterization of the Aerodynamic Model by means of flight data can overcome such deficiencies while providing the respective confidence intervals for the parameter estimates.

Central concept of this study is the decomposition of the State Estimation/Parameter Identification problem. After implementing a suitable -model independent- sensor fusion process, the estimated outputs are used for Model Identification. As a considerable amount of uncertainty is present in the explanatory variables, a Total Least Squares (TLS) method is implemented for Aerodynamic Parameter Estimation.

Main contribution of this work is a fully developed, computationally efficient Pid procedure, oriented towards the needs of small low-cost UAVs. The proposed algorithms are based on the non-linear aircraft model and are suitable for both off-line and real-time applications. A batch implementation serves for the identification of reference models for different flight states. A sequential approach can be used for control purposes and in-flight parameter tracking -e.g. for contributing to a greater Fault Detection and Identification module. Parameter tracking capabilities have been enhanced with the application of an adaptive Variable Forgetting Factor, while lack of Persistent Excitation of the input signals is handled by Principal Component Analysis. Finally, we devised a Monte Carlo method for accurate uncertainty quantification in synthetic aerodynamic variables, a crucial step for securing the robustness and reliability of the process.

**Keywords:** UAV, Parameter Identification, sensor fusion, state estimation, aerodynamic model, Kalman Filter, regression methods, sensor calibration, Singular Value Decomposition, Principal Component Analysis, Monte Carlo Methods

## Ευχαριστίες

Η εκπόνηση αυτής της μελέτης είναι ο καρπός μίας πολύμηνης εργασίας, η οποία χωρίς την αρωγή του προσωπικού του Control Systems Lab δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί. Ήταν μια σημαντική διαδικασία μάθησης, συνεργασίας και προσωπικής ανάπτυξης στο αντικείμενο που σπούδασα και αγαπώ. Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή κ. Κυριακόπουλο για την πολύτιμη καθοδήγηση και εποπτεία όλων αυτών των μηνών, για την πρόσβαση στις υποδομές των εργαστηρίων του ΕΜΠ και κυρίως διότι στο πλαίσιο του εργαστηρίου και των συνεργατών του είχα την ευκαιρία να μάθω πως πρέπει να πραγματοποιείται η σοβαρή ακαδημαϊκή έρευνα.

Δεν θα μπορούσα να παραλείψω την αμέριστη συμβολή του Γ. Ζωγόπουλου στην υλοποίηση του πρότζεκτ. Η συνεργασία μας και η καθοδήγηση του ήταν θεμέλιος λίθος τόσο της θεωρητικής ανάλυσης όσο και της πειραματικής επιβεβαίωσης της μελέτης αυτής. Τον ευχαριστώ θερμά τόσο για την συνεργασία όσο και την -ομολογουμένως μεγάλη- υπομονή που επέδειξε. Μεγάλο μέρος της αξίας αυτής της δουλειάς αποδίδεται στην υποστήριξη και την καθοδήγηση του.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που με στήριξε και με στηρίζει πάντα ηθικά και πρακτικά. Σας αγαπώ πολύ. Το ίδιο ισχύει και για τους κοντινούς μου ανθρώπους. Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω αυτήν την προσπάθεια στην μνήμη του πατέρα μου Μιλτιάδη, που ήταν και θα είναι πάντα το σημαντικότερο σημείο αναφοράς στη ζωή μου, τόσο για τον επαγγελματισμό όσο και για το ήθος του.

*Στην μνήμη του πατέρα μου, Μιλτιάδη*



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>8</b>
1.1	Μη επανδρωμένα ιπτάμενα συστήματα και έρευνα	8
1.2	Διάγνωση Βλαβών / Ανοχή στα σφάλματα	8
1.3	Σκοπός της εργασίας	9
<b>2</b>	<b>Βασικές Έννοιες Αεροπλοΐας</b>	<b>9</b>
2.1	Πλαίσια Αναφοράς	9
2.1.1	Μητρώα Στροφής-Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων	11
2.2	Τα διάνυσματα κατάστασης και ελέγχου	11
2.3	Ατμοσφαιρικές Διαταραχές - Άνεμος	12
2.3.1	Μοντελοποίηση του ανέμου	14
2.4	Αεροδυναμική Ευστάθεια	16
<b>3</b>	<b>Κινηματική και Δυναμική του Αεροσκάφους</b>	<b>16</b>
3.1	Κινηματικές Εξισώσεις	16
3.2	Δυναμικές εξισώσεις	17
3.3	Συγκεντρωτικές εξισώσεις Κινηματικού και Δυναμικού Μοντέλου	18
3.4	Ανάλυση των ασκούμενων τάσεων και ροπών στο α/φος	19
3.5	Αεροδυναμικές Τάσεις και Ροπές	19
3.5.1	Διαμήκης Άξονας	20
3.5.2	Εγκάρσιος Άξονας	20
3.5.3	Οι εξισώσεις του αεροδυναμικού μοντέλου	21
3.5.4	Οι Παράγωγοι Ευστάθειας του αεροδυναμικού μοντέλου	22
<b>4</b>	<b>Ανίχνευση Παραμέτρων (Parameter Identification)</b>	<b>23</b>
4.1	Εισαγωγή	23
4.2	Προσέγγιση Ελαχίστων Τετραγώνων Ordinary Least Squares	24
4.2.1	Συνδιακύμανση και στατιστική σημαντικότητα των παραμέτρων	25
4.2.2	Διάνυσμα Υπολειπόμενης πληροφορίας	26
4.2.3	Εκτίμηση Παραμέτρων σε πραγματικό χρόνο (OLS)	27
4.2.4	OLS : Αποτελέσματα προσομοίωσης	28
4.2.4.1	Μή αναδρομικός Αλγόριθμος	29
4.2.4.2	Αναδρομικός Αλγόριθμος	31
4.2.5	Η περίπτωση της αβεβαιότητας στη μήτρα των προβλεπτών	33
4.3	Προσέγγιση των Ολικών Ελαχίστων Τετραγώνων Total Least Squares	37
4.3.1	Βασικές Έννοιες και Ορισμοί	37
4.3.2	TLS: Διατύπωση του προβλήματος εκτίμησης παραμέτρων	40
4.3.3	TLS: Επίλυση της ελαχιστοποίησης με χρήση Διάσπασης Ιδιαζουσών Τιμών (Singular Value Decomposition)	41
4.3.4	Μήτρα Συνδιακύμανσης των παραμέτρων	43
4.3.5	Υπολογισμός Εκτιμώμενης Μήτρας Σφαλμάτων	43

4.3.6	Το πρόβλημα της Ανεπαρκούς Διέγερσης Εισόδου του Συστήματος .	43
4.3.6.1	Γενικά . . . . .	43
4.3.6.2	Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών - Principal Component Analysis .	45
4.3.7	Αναδρομικός Αλγόριθμοι για εκτιμητές TLS . . . . .	47
4.3.8	PCA-TLS: Αποτελέσματα με χρήση προσομοίωσης . . . . .	49
4.3.8.1	Batch Μέθοδος . . . . .	50
4.3.8.2	On-line Μέθοδος . . . . .	52
4.3.9	Προσαρμογή Εκτιμητών σε δομικές μεταβολές του μοντέλου . . . . .	56
4.3.9.1	Γενικά . . . . .	56
4.3.9.2	Χρονοσταθερός Παράγοντας Εξασθένησης-Constant Forgetting Factor-CFF . . . . .	56
4.3.9.3	CFF: ενδεικτικά αποτελέσματα . . . . .	57
4.3.9.4	Προσαρμοστικός Παράγοντας Εξασθένησης -Variable Forgetting Factor . . . . .	60
4.3.9.5	VFF: Ενδεικτικά Αποτελέσματα . . . . .	62
4.4	Αρχικοποίηση των εκτιμητών . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Το αισθητηριακό σύστημα του αεροσκάφους και οι περιορισμοί του</b>	<b>67</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	67
5.2	Το διαθέσιμο αισθητηριακό σύστημα του αεροσκάφους . . . . .	68
5.2.1	Το σύστημα αδρανειακής πλοήγησης (Inertial Navigation System) . .	68
5.2.1.1	Επιταχυνσιόμετρο . . . . .	68
5.2.1.2	Γυροσκόπιο . . . . .	68
5.2.1.3	GPS . . . . .	69
5.2.1.4	Μαγνητόμετρο και Γωνίες Euler . . . . .	69
5.2.2	Το σύστημα μεταβλητών αέρος - Air Data Boom . . . . .	69
5.2.2.1	Το σύστημα pitot-static . . . . .	69
5.2.2.2	Οι ανεμοδείκτες γωνιών ευστάθειας- Wind Vanes . . . . .	69
5.2.3	Απλοποιήσεις . . . . .	69
5.2.4	Βαθμονόμηση συστήματος μεταβλητών αέρος . . . . .	70
5.3	Οι περιβαλλοντικές διαταραχές . . . . .	70
5.4	Φίλτρα Κάλμαν για εκτίμηση του ανέμου και της τριάδας ευστάθειας . .	71
5.4.1	Γενικά . . . . .	71
5.4.2	Ο γενικός αλγόριθμος του Extended Kalman Filter . . . . .	73
5.4.3	Model-Free υλοποίηση του φίλτρου Κάλμαν . . . . .	74
5.4.3.1	Time Update . . . . .	74
5.4.3.2	Measurement Update . . . . .	75
5.4.3.3	Εξαγωγή της τριάδας αεροδυναμικής ευστάθειας . . . . .	76
5.4.4	Αποτελέσματα Model-Free υλοποίησης με δεδομένα προσομοίωσης . .	76
5.4.4.1	Συμπεράσματα . . . . .	83
5.4.5	Model-Based υλοποίηση του φίλτρου Κάλμαν . . . . .	83
5.4.5.1	Time Update . . . . .	83
5.4.5.2	Measurement Update . . . . .	84
5.4.6	Αποτελέσματα Model-Based υλοποίησης με δεδομένα προσομοίωσης .	85
5.4.6.1	Συμπεράσματα . . . . .	91

5.5	Απομόνωση Αεροδυναμικών Συντελεστών	91
5.6	Εκτίμηση Αβεβαιότητας σύνθετων Αεροδυναμικών Μεταβλητών με χρήση μεθόδων Monte-Carlo	92
<b>6</b>	<b>Πειραματική Επαλήθευση των Αλγορίθμων</b>	<b>95</b>
6.1	Γενικά	95
6.2	Η πειραματική πλατφόρμα UnATRaP	96
6.3	Οι πειραματικές πτήσεις	98
6.4	Αποτελέσματα MF φίλτρου Κάλμαν	103
6.5	Αποτελέσματα Εκτίμησης Δυναμικού Μοντέλου	104
6.5.1	Εκμάθηση Μοντέλων	104
6.5.2	Επαλήθευση Μοντέλου	109
6.6	Συμπεράσματα	111
<b>7</b>	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>112</b>
	<b>Παράρτημα Α΄ Υπολογισμός Θεμελειωδών Παραγώγων</b>	<b>119</b>
A.1	Συμβολισμοί	119
A.2	Αεροδυναμικές Τάσεις	119
A.3	Ιακωβιανή Μήτρα Μοντέλου Δυνάμεων του Άξονα ανέμου	120
A.4	Ιακωβιανή μήτρα αισθητήρων Model-Free Υλοποίησης	121
A.4.1	GPS	121
A.4.2	Pitot	122
A.4.3	Ανεμοδείκτες Ευστάθειας	123
A.5	Ιακωβιανή μήτρα αισθητήρων Model Based Υλοποίησης	123
A.5.1	Επιαταχυνσιόμετρο	124
A.5.2	GPS	124
	<b>Ευρετήριο Γραφημάτων και Εικόνων</b>	<b>126</b>
	<b>Ευρετήριο Πινάκων</b>	<b>129</b>

# 1 Εισαγωγή

## 1.1 Μη επανδρωμένα ιπτάμενα συστήματα και έρευνα

Κατά την διάρκεια των τελευταίων ετών, ένα ικανό μέρος της παγκόσμιας ακαδημαϊκής έρευνας αφιερώνει πόρους για την κατασκευή, υλοποίηση και μελέτη μη επανδρωμένων ιπτάμενων συστημάτων (Unmanned Aerial Systems-UAS). Οι εφαρμογές εκτείνονται απο την μετεωρολογία, την αεροφωτογραφία και χαρτογράφηση δυσπρόσιτων περιοχών, την παρακολούθηση, την ασφάλεια/ διάσωση μέχρι -προσφάτως- την μεταφορά εμπορευμάτων.

Καθώς οι απαιτήσεις αποδοτικότητας αυξάνουν, το ενδιαφέρον εστιάζεται ολοένα και περισσότερο στην ανάπτυξη αυτόνομων αεροσκαφών σταθερής πτέρυγας (fixed wing aircrafts). Τα βασικά πλεονεκτήματα αυτών των αρχιτεκτονικών περιλαμβάνουν:

- την απλοποιημένη δομή που διευκολύνει τις διαδικασίες συντήρησης και αναβάθμισης
- την βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά ακόμα και κατά τη διάρκεια περίπλοκων ελιγμών
- την δυνατότητα μεταφοράς αυξημένου ωφέλιμου φορτίου (payload)
- την πολύ μεγαλύτερη εμβέλεια σε σχέση με άλλες αρχιτεκτονικές
- την χαμηλότερη κατανάλωση ενεργειακών πόρων
- την δυνατότητα ενσωμάτωσης πιο ολοκληρωμένων αισθητηριακών συστημάτων

## 1.2 Διάγνωση Βλαβών / Ανοχή στα σφάλματα

Στο πλαίσιο αυτό, καθίσταται υψηλής προτεραιότητας η ανάπτυξη μεθόδων και τεχνολογίας στην κατεύθυνση ακόμα πιο αυτόνομων εναέριων συστημάτων ικανών να εντοπίζουν και να διαχειρίζονται βλάβες χωρίς την ανθρώπινη παρέμβαση. Τέτοιες τεχνικές συνίστανται στον σχεδιασμό αυτοματοποιημένων διαδικασιών -αλγορίθμων- με σκοπό τον εντοπισμό πιθανών σφαλμάτων εν πτήση (Fault Diagnosis) και στην κατασκευή ηλεκτρικών ικανών να αντιμετωπίζουν τις προκείμενες βλάβες (Fault Tolerant Controllers).

Στην περίπτωση αεροσκαφών υψηλών προδιαγραφών, η διάγνωση σφαλμάτων επιτυγχάνεται με τη χρήση εκτεταμένων και πολύπλοκων αισθητηριακών συστημάτων τα οποία επιτρέπουν την διαφορική διάγνωση της πτητικής κατάστασης και της αξιοπλοΐας. Όσον αφορά, όμως, την περίπτωση εμπορικών εφαρμογών μικρής και μεσαίας κλίμακας, η δυνατότητα εγκατάστασης τέτοιων συστημάτων καθίσταται πρακτικά αδύνατη. Εν προκειμένω λοιπόν, οι τεχνικές Fault Diagnosis βασίζονται στην εκ των προτέρων εκτίμηση μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν την συμπεριφορά των αεροσκαφών όπως και στην παρακολούθηση σε πραγματικό χρόνο (real time tracking) όλων των σχετικών παραμέτρων. Η απόκλιση των μοντέλων αυτών απο την εκτιμώμενη ονομαστική κατάσταση

ενεργοποιεί τις σχετικές διαδικασίες για την διάγνωση και τον χαρακτηρισμό των πιθανών σφαλμάτων.

### 1.3 Σκοπός της εργασίας

Ένας σημαντικός όγκος πληροφορίας για την μοντελοποίηση των αεροσκαφών προκύπτει από τον υπολογισμό των παραμέτρων που σχετίζονται με την αεροδυναμική συμπεριφορά της ατράκτου. **Βασικός στόχος της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι υπολογισμός των παραμέτρων (Parameter Identification) του Δυναμικού Μοντέλου μη επανδρωμένου αεροσκάφους μικρής ή μεσαίας κλίμακας με την βοήθεια περιορισμένου αισθητηριακού συστήματος χαμηλού κόστους.** Η ανάπτυξη αλγορίθμων σχετικών με το Parameter Identification απαιτεί τον παράλληλο σχεδιασμό τεχνικών εκτίμησης της κατάστασης του αεροσκάφους συνδυάζοντας πληροφορία από την φυσική ανάλυση και το αισθητηριακό σύστημα (**State Estimation/Sensor Fusion**). Επιπλέον, μέρος της εργασίας αφιερώθηκε στον σχεδιασμό και την εκτέλεση πειραμάτων για την βαθμονόμηση αισθητήρων (**Sensor Calibration**) με την βοήθεια Αεροδυναμικής Σήραγγας (**Wind Tunnel Tests**). Όλη η παραπάνω τεχνογνωσία επιβεβαιώθηκε πειραματικά και θα ενσωματωθεί στο αεροσκάφος του Control Systems Lab της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ.

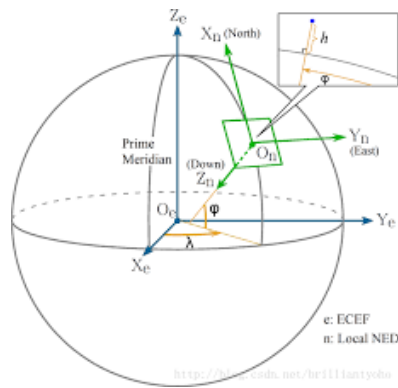
## 2 Βασικές Έννοιες Αεροπλοΐας

### 2.1 Πλαίσια Αναφοράς

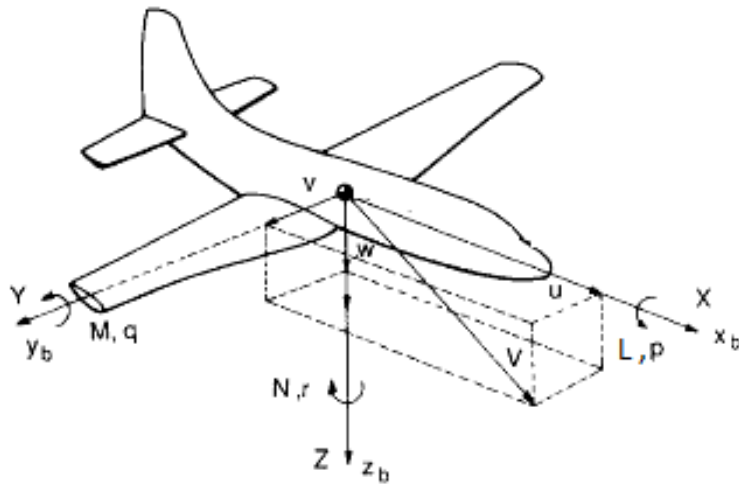
Η μοντελοποίηση της κίνησης και του προσανατολισμού του αεροσκάφους επιτυγχάνεται με την χρήση διαφόρων πλαισίων αναφοράς των οποίων οι γενέτειρες βρίσκονται είτε στο έδαφος είτε επί του αεροσκάφους. Τα τρία βασικά πλαίσια αναφοράς που εξυπηρετούν την ανάλυση της συγκεκριμένης μελέτης είναι τα παρακάτω:

- Το αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς, τοποθετημένο σε ένα σταθερό σημείο στην επιφάνεια της γης και προσανατολισμένο κατά το πρότυπο **NED** ( $x$ -North,  $y$ -East,  $z$ -Down) (Εικόνα 1)
- Το σωματόδετο πλαίσιο αναφοράς (**Body Frame**) με αρχή το κέντρο μάζας της ατράκτου και προσδεμένο στο αεροσκάφος. Ο προσανατολισμός του συγκεκριμένου πλαισίου χαρακτηρίζεται βάσει των γωνιών Euler ( $\phi, \theta, \psi$ ) (Εικόνα 2)
- Το πλαίσιο ανέμου (**Wind Frame**) του οποίου ο άξονας  $x$  ταυτίζεται με την κατεύθυνση του διανύσματος ταχύτητας αέρος του αεροσκάφους (Εικόνα 3). Ο σχετικός προσανατολισμός του πλαισίου ανέμου σε σχέση με το σωματόδετο πλαίσιο χαρακτηρίζεται βάσει της γωνίας προσβολής ( $\alpha$ ) και της γωνίας πλαγιολίσθησης ( $\beta$ ).

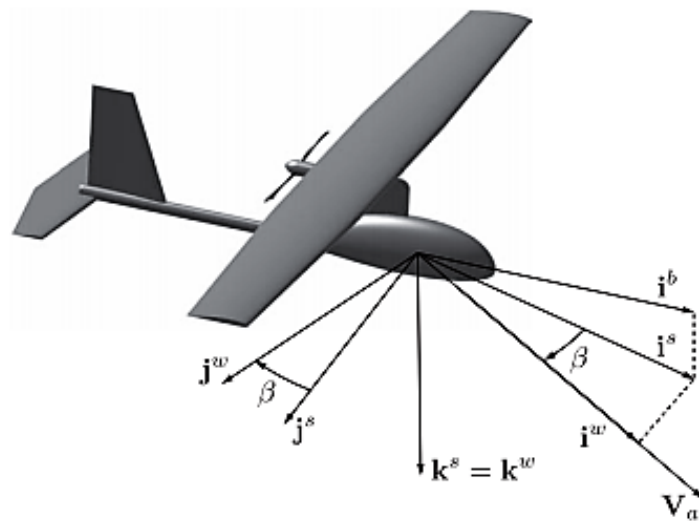
Στο εξής, η αναφορά στα πλαίσια θα γίνεται με τη χρήση της αγγλικής ορολογίας (NED-frame, Body Frame, Wind Frame) και τους αντίστοιχους δείκτες (G,B,W).



Εικόνα 1: Αδρανειακό Πλαίσιο NED



Εικόνα 2: Σωματόδετο Πλαίσιο (Body Frame)



Εικόνα 3: Πλαίσιο Ανέμου (Wind Frame)

### 2.1.1 Μητρώα Στροφής-Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων

Στην κινηματική και δυναμική ανάλυση των αεροσκαφών, διανύσματα που αφορούν την ταχύτητα και τον προσανατολισμό του α/φους εκφράζονται σε διαφορετικά πλαίσια, ανάλογα με τις ανάγκες της φυσικής ανάλυσης ή της θέσης του αισθητηριακού συστήματος. Στην γενική περίπτωση, ένα διάνυσμα  $\mathbf{x}$  εκπεφρασμένο σε ένα πλαίσιο αναφοράς  $I$  μπορεί να εκφραστεί με συντεταγμένες αναφοράς ενός πλαισίου  $II$  ως:

$$\mathbf{x}^{II} = T + R_I^{II} \mathbf{x}^I \quad (2.1)$$

όπου  $T \in \mathbb{R}^3$  ένας μετασχηματισμός μεταφοράς (μετάθεσης) και  $R_I^{II} \in \mathbf{SO}(3)$  το μητρώο μετασχηματισμού προσανατολισμού (μητρώο στροφής) από το πλαίσιο  $I$  στο πλαίσιο  $II$ . Στο εύρος της συγκεκριμένης μελέτης, οι μετασχηματισμοί αφορούν ταχύτητες, δυνάμεις και ροπές. Στις περιπτώσεις αυτές, η μήτρα  $T$  ταυτίζεται συνήθως με το μηδενικό διάνυσμα. Τα βασικά μητρώα στροφής αφορούν μετασχηματισμούς από το αδρανειακό πλαίσιο NED ( $\mathbf{G}$ ) στο σωματόδετο πλαίσιο ( $\mathbf{B}$ ) και έπειτα στο πλαίσιο ανέμου ( $\mathbf{W}$ ). Αυτά είναι:

$$R_B^G = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \theta \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$R_W^B = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Δεδομένου ότι τα μητρώα στροφής ανήκουν στον  $\mathbf{SO}(3)$ , ισχύουν ακόμα:

$$R_I^{II} = (R_{II}^I)^T \quad (2.4)$$

$$R_n^{n+2} = R_n^{n+1} R_{n+1}^{n+2} \quad (2.5)$$

## 2.2 Τα διάνυσματα κατάστασης και ελέγχου

Η διεθνής βιβλιογραφία έχει κατά καιρούς χρησιμοποιήσει πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις για το διάνυσμα κατάστασης του αεροσκάφους. Για τον σκοπό της συγκεκριμένης εργασίας προτιμήθηκε η αναπαράσταση που παρουσιάζεται στην πηγή [8]. Ήτοι:

$$\mathbf{x}_F = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi \ u \ v \ w \ p \ q \ r]^T \quad (2.6)$$

Ο πίνακας 1 παρουσιάζει τις συνιστώσες του διανύσματος κατάστασης, την αντίστοιχη ορολογία και το πλαίσιο αναφοράς κάθε μεταβλητής.

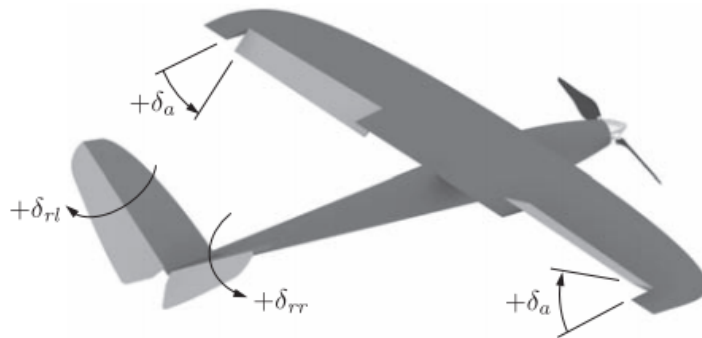
Η κίνηση του αεροσκάφους επιτυγχάνεται από την Ωση (**Thrust-T**) που παρέχει ο εκάστοτε κινητήρας. Ο χειρισμός και η πλοήγηση επιτυγχάνονται με την εκτροπή των επιφανειών ελέγχου του αεροσκάφους (**Control Surfaces**). Τα συμβατικά αεροσκάφη σταθερής πτέρυγας είναι εξοπλισμένα με τις παρακάτω επιφάνειες ελέγχου (Εικόνα 4):

- το πτερύγιο ανόδου-καθόδου (**elevator-ε**) που επιτρέπει τον έλεγχο της **πρόνευσης (pitch)**
- το πτερύγιο εκτροπής (**rudder-r**) με σκοπό τον έλεγχο της **εκτροπής (yaw)**
- τα πτερύγια κλίσης (**aileron-α**) του αεροσκάφους για την εκτέλεση **ελιγμών περιστροφής (roll)**

Ο χειριστής καθορίζει κάθε στιγμή την γωνία εκτροπής των επιφανειών ελέγχου και την παραγόμενη ώση προκειμένου το αεροσκάφος να αποκτήσει την επιθυμητή ταχύτητα και τον αντίστοιχο προσανατολισμό. Μαθηματικά, η διαδικασία αυτή μοντελοποιείται με ένα διάνυσμα ελέγχου.

$$\mathbf{u} = [\delta T \quad \delta e \quad \delta r \quad \delta \alpha]^T \quad (2.7)$$

Η ονοματολογία των μεταβλητών δίνεται στον Πίνακα 2



Εικόνα 4: Τυπική αρχιτεκτονική επιφανειών ελέγχου σε α/φος σταθερής πτέρυγας

## 2.3 Ατμοσφαιρικές Διαταραχές - Άνεμος

Η δυναμική του αεροσκάφους επηρεάζεται από τις ατμοσφαιρικές συνθήκες που επικρατούν κάθε στιγμή κατά τη διάρκεια της πτήσης. Η ταχύτητα του ανέμου θεωρείται θεμελιώδης ατμοσφαιρική μεταβλητή για την αεροπλοΐα καθώς μπορεί να επηρεάσει σε σημαντικό βαθμό την ευστάθεια της πτήσης. Η μοντελοποίηση της συμπεριφοράς του ανέμου είναι απαραίτητη διαδικασία, ειδικά σε περιπτώσεις μη επανδρωμένων αεροσκαφών μικρής κλίμακας.

Για τον λόγο αυτό, πρέπει να γίνει διάκριση μεταξύ των ταχυτήτων εδάφους, άερος και ανέμου. Έτσι, στην περίπτωση ενός αδρανειακού παρατηρητή του πλαισίου NED, η καταγραφόμενη ταχύτητα του αεροσκάφους αποτελείται από τις παρακάτω συνιστώσες:

$$\vec{V}_g = \vec{V}_a + \vec{V}_w \quad (2.8)$$

όπου:



Μεταβλητή	Ελληνική Ορολογία	Αγγλική ορολογία	Πλαίσιο Αναφοράς
<b>x</b>	Αδρανειακή Θέση στον άξονα x	Inertial North Position	G
<b>y</b>	Αδρανειακή Θέση στον άξονα y	Inertial East Position	G
<b>z</b>	Αδρανειακή Θέση στον άξονα z	Inertial Down Position	G
<b>φ</b>	Γωνία Περιστροφής	Roll Angle	(V2)
<b>θ</b>	Γωνία Πρόνευσης	Pitch Angle	(V1)
<b>ψ</b>	Γωνία Εκτροπής	Yaw Angle	(V)
<b>u</b>	Αξονική Ταχύτητα	x-axis Body Frame Velocity	B
<b>v</b>	Εγκάρσια Ταχύτητα	y-axis Body Frame Velocity	B
<b>w</b>	Κάθετη Ταχύτητα	z-axis Body Frame Velocity	B
<b>p</b>	Ρυθμός Περιστροφής	Roll rate	B
<b>q</b>	Ρυθμός Πρόνευσης	Pitch rate	B
<b>r</b>	Ρυθμός Εκτροπής	Yaw Angle	B

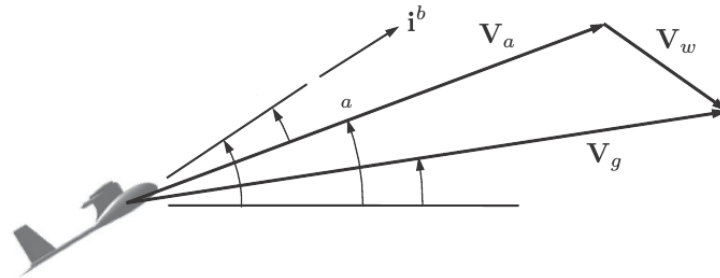
Πίνακας 1: Οι μεταβλητές κατάστασης του αεροσκάφους

- $V_g$  η ταχύτητα εδάφους του αεροσκάφους (αυτή δηλαδή που καταγράφεται απο έναν αδρανειακό παρατηρητή)
- $V_a$  η ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς την αέρια μάζα
- $V_w$  η ταχύτητα του ανέμου ως προς το έδαφος

Η εξίσωση 2.8 αναφέρεται ως **τρίγωνο του ανέμου (Wind Triangle)**

Μεταβλητή	Αγγλική Ορολογία
$\delta\tau$	Throttle
$\delta\epsilon$	Elevator Deflection
$\delta r$	Rudder Deflection
$\delta\alpha$	Aileron Deflection

Πίνακας 2: Οι μεταβλητές ελέγχου του αεροσκάφους



The wind triangle projected onto the vertical plane.

Εικόνα 5: Το τρίγωνο του Ανέμου (Wind Triangle)

Η μητρική μορφή της εξίσωσης 2.8 στους αδρανειακούς άξονες NED είναι:

$$\begin{pmatrix} V_x^g \\ V_y^g \\ V_z^g \end{pmatrix} = (R_G^B)^{-1} \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_N \\ W_E \\ W_D \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

όπου  $R_G^B$  το μητρώο στροφής από το αδρανειακό στο σωματόδετο πλαίσιο.

### 2.3.1 Μοντελοποίηση του ανέμου

Η ακριβής προσομοίωση των συνθηκών πτήσης ενός μικρού αεροσκάφους πρέπει να λαμβάνει υπόψη τις τις ατμοσφαιρικές διαταραχές. Η σημαντικότερη εξ' αυτών είναι η ύπαρξη του ανέμου. Τα μοντέλα ταχύτητας ανέμου αποτελούνται συνήθως από έναν σταθερό και έναν στοχαστικό όρο. Έτσι:

$$V_w = V_{ws} + V_{wg} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{ws} \\ v_{ws} \\ w_{ws} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{wg}(t) \\ v_{wg}(t) \\ w_{wg}(t) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Ο χρονο-μεταβλητός ή στοχαστικός όρος αφορά την μοντελοποίηση ριπών ανέμου και αναταράξεων. Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης μελέτης, οι ριπές ανέμου παράχθηκαν με την χρήση του μοντέλου αναταράξεων Dryden (US Department of Defence, Handbook MIL-F-8785-C). Αυτοί οι όροι παράγονται διεγείροντας τα παρακάτω Γραμμικά Χρονικώς

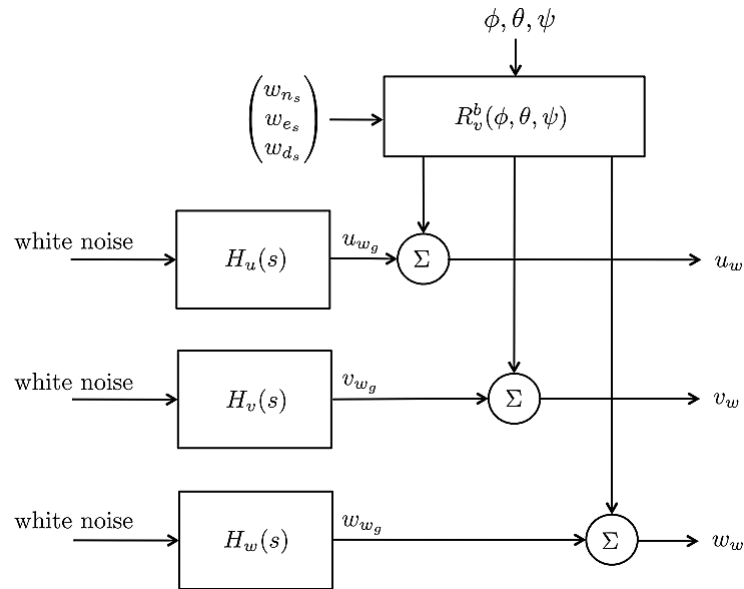
Ανεξάρτητα (ΓΧΑ) φίλτρα με λευκό θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας διακύμανσης. Οι συναρτήσεις μεταφορά των φίλτρων είναι:

$$H_u(s) = \sigma_u \sqrt{\frac{2V_a}{L_u}} \frac{1}{s + \frac{V_a}{L_u}} \quad (2.11\alpha')$$

$$H_v(s) = \sigma_v \sqrt{\frac{3V_a}{L_u}} \frac{s + \frac{V_a}{\sqrt{3}L_v}}{(s + \frac{V_a}{L_u})^2} \quad (2.11\beta')$$

$$H_w(s) = \sigma_w \sqrt{\frac{3V_a}{L_w}} \frac{s + \frac{V_a}{\sqrt{3}L_w}}{(s + \frac{V_a}{L_w})^2} \quad (2.11\gamma')$$

Η αρχιτεκτονική του συνολικού φίλτρου περιγράφεται σχηματικά στην Εικόνα 6. Οι διάφορες παράμετροι των εξισώσεων (2.11) εξαρτώνται από το υψόμετρο της πτήσης και της επιθυμητής έντασης. Οι τιμές τους φαίνονται στην Εικόνα 7.



Εικόνα 6: Αρχιτεκτονική του φίλτρου Dryden για την παραγωγή ριπών ανέμου

Dryden gust model parameters [24]

<i>gust description</i>	<i>altitude</i> (m)	$L_u = L_v$ (m)	$L_w$ (m)	$\sigma_u = \sigma_v$ (m/s)	$\sigma_w$ (m/s)
low altitude, light turbulence	50	200	50	1.06	0.7
low altitude, moderate turbulence	50	200	50	2.12	1.4
medium altitude, light turbulence	600	533	533	1.5	1.5
medium altitude, moderate turbulence	600	533	533	3.0	3.0

Εικόνα 7: Οι τιμές των παραμέτρων του φίλτρου Dryden ανάλογα με το υψόμετρο και την επιθυμητή ένταση

## 2.4 Αεροδυναμική Ευστάθεια

Για τον χαρακτηρισμό της ευστάθειας της πτήσης, γίνεται χρήση των παρακάτω μεταβλητών:

- της νόρμας της ταχύτητας αέρος  $V_a$  (airspeed norm)
- της γωνίας προσβολής  $\alpha$  (angle of attack) η οποία ορίζεται ως η γωνία μεταξύ της χορδής της αεροτομής και της διεύθυνσης του αέρα γύρω από αυτή
- της γωνίας πλαγιολίσθησης (angle of sideslip) η οποία ορίζεται ως η γωνία μεταξύ του διανύσματος της ταχύτητας αέρος και του διαμήκου άξονα του αεροσκάφους

Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται **τριάδα ευστάθειας (stability triplet)** και μαθηματικά ορίζονται ως:

$$V_a = \sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2} \quad (2.12)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w_r}{v_r}\right) \quad (2.13)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{v_r}{V_a}\right) \quad (2.14)$$

## 3 Κινηματική και Δυναμική του Αεροσκάφους

### 3.1 Κινηματικές Εξισώσεις

Η θέση του αεροσκάφους εκφράζεται συνήθως στο αδρανειακό πλαίσιο NED. Αντίθετα, όπως είδαμε οι μεταφορικές ταχύτητες εκφράζονται στο σωματόδετο πλαίσιο. Συνδυάζοντας τις πληροφορίες αυτές έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_B^G \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (R_G^B)^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ήτοι, χρησιμοποιώντας την (2.2):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \theta \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Αντίστοιχα, οι γωνιακές ταχύτητες ως προς τους ρυθμούς μεταβολής των γωνιών Euler έχουν ως:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

## 3.2 Δυναμικές εξισώσεις

Το αεροσκάφος μοντελοποιείται ως ένα στερεό σώμα έξι βαθμών ελευθερίας (6-DOF rigid body). Κάνοντας χρήση του Θεμελιώδους Νόμου της Μηχανικής, οι εξασκούμενες τάσεις και ροπές περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις (Body Frame):

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \quad (3.5)$$

όπου:

- $\mathbf{V}$  το διάνυσμα της μεταφορικής ταχύτητας

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

- $\mathbf{J}$  το μητρώο των ροπών αδράνειας

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

- $\boldsymbol{\omega}$  το διάνυσμα των γωνιακών ταχυτήτων (angular rates)

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

- $m$  η μάζα του αεροσκάφους

Το σωματόδετο πλαίσιο αποτελεί ένα σύστημα περιστρεφόμενων αξόνων. Έτσι, η παραπάνω διαφορίση θα πρέπει να λάβει υπόψη της τον ρυθμό μεταβολής των ταχυτήτων όσο και την περιστροφή των αξόνων (όροι coriolis). Αυτό εκφράζεται ως ([49, eq. (3.39)]):

$$\frac{d}{dt}(\bullet) = \frac{\delta}{\delta t}(\bullet) + \boldsymbol{\omega} \times (\bullet) \quad (3.9)$$

Παραδεχόμενοι πως η μάζα του αεροσκάφους παραμένει (σχεδόν) σταθερή κατά τη διάρκεια της πτήσης, έχουμε:

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times (m\mathbf{V}) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \quad (3.11)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, εξάγουμε τις δυναμικές εξισώσεις του αεροσκάφους:

**Εξισώσεις Τάσεων (Body Frame):**

$$F_x = m(\dot{u} + qw - rv) \quad (3.12\alpha')$$

$$F_y = m(\dot{v} + ru - pw) \quad (3.12\beta')$$

$$F_z = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (3.12\gamma')$$

**Εξισώσεις Ροπών (Body Frame):**

$$M_x = \dot{p}J_x - \dot{r}J_{xz} + qr(J_z - J_y) - qpJ_{xz} \quad (3.13\alpha')$$

$$M_y = \dot{q}J_y + pr(J_x - J_z) + (p^2 - r^2)J_{xz} \quad (3.13\beta')$$

$$M_z = \dot{r}J_z - \dot{p}J_{xz} + pq(J_y - J_x) + qrJ_{xz} \quad (3.13\gamma')$$

### 3.3 Συγκεντρωτικές εξισώσεις Κινηματικού και Δυναμικού Μοντέλου

Συγκεντρωτικά, το κινηματικό/δυναμικό μοντέλο του αεροσκάφους, βάσει των μεταβλητών κατάστασης, έχει ως:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = R_G^{B-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_N \\ W_E \\ W_D \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr \\ \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_3 l + \Gamma_4 M_x \\ \frac{1}{J_y} M_y \\ \Gamma_4 l + \Gamma_8 M_z \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

όπου :

$$\Gamma = J_x J_z - J_{xz}^2$$

$$\Gamma_1 = \frac{J_{xz}(J_x - J_y + J_z)}{\Gamma}$$

$$\Gamma_2 = \frac{J_z(J_z - J_y) + J_{xz}^2}{\Gamma}$$

$$\Gamma_3 = \frac{J_z}{\Gamma}$$

$$\Gamma_4 = \frac{J_{xz}}{\Gamma}$$

$$\Gamma_5 = \frac{J_z - J_x}{J_y}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_6 &= \frac{J_{xz}}{J_y} \\ \Gamma_7 &= \frac{J_z(J_x - J_y) + J_{xz}^2}{\Gamma} \\ \Gamma_8 &= \frac{J_x}{\Gamma}\end{aligned}$$

### 3.4 Ανάλυση των ασκούμενων τάσεων και ροπών στο α/φος

Εν πτήσει, οι εξασκούμενες τάσεις και ροπές στο α/φος οφείλονται στην αεροδυναμική, την παραγόμενη ώση από τον κινητήρα και την βαρύτητα. Οι βαρυτικές δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας του αεροσκάφους και κατ' επέκταση δεν παράγουν ροπή. Έτσι, έχουμε:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_G \quad (3.18)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_T \quad (3.19)$$

Οι βαρυτικές δυνάμεις εξαρτώνται από τον προσανατολισμό της ατράκτου κάθε στιγμή. Χρησιμοποιώντας τις γωνίες Euler, το διάνυσμα της βαρύτητας εκφράζεται ως:

$$\mathbf{F}_G = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \sin \theta \\ g \cos \theta \sin \phi \\ g \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Παραδεχόμαστε ακόμη πως η  $\Omega$ ση του κινητήρα (στο εξής Thrust), ασκείται κατά την διεύθυνση του άξονα  $x$  του σωματόδετου πλαισίου. Επομένως:

$$\mathbf{F}_T = \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Κατά την παραγωγή ώσης, ο κινητήρας αυξάνει την στροφορμή της αέριας μάζας παράγοντας έτσι μία ροπή αντίδρασης:

$$\mathbf{M}_T = \begin{pmatrix} \tau_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Οι αεροδυναμικές τάσεις απαιτούν σύνθετη ανάλυση και για τον λόγο αυτό θα εξετάζονται ενδελεχώς στην επόμενη ενότητα.

### 3.5 Αεροδυναμικές Τάσεις και Ροπές

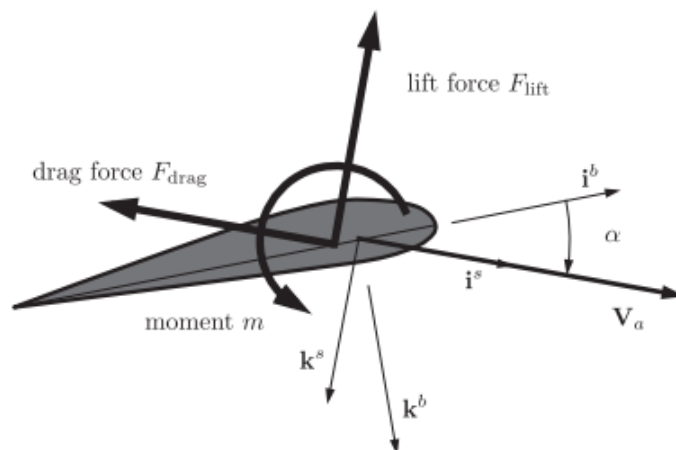
Καθώς το α/φος κινείται ως προς την αέρια μάζα, παρατηρείται μη ομοιόμορφη κατανομή της πίεσης, η οποία και προκαλεί τις αεροδυναμικές δράσεις. Αυτές εξαρτώνται

από την πυκνότητα της αέριας μάζας, την ταχύτητα αέρος, την γεωμετρία και τον προσανατολισμό του αεροσκάφους. Με βάση όσα προηγήθηκαν, προχωρούμε στην ανάλυση των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται στο αεροσκάφος κατά την διάρκεια της πτήσης.

### 3.5.1 Διαμήκης Άξονας

Στον εγκάρσιο άξονα του αεροσκάφους (Εικόνα 8) ασκούνται οι κάτωθι αεροδυναμικές δράσεις:

- η κάθετη άντωση (**Lift - L**) που οφείλεται στην διαφορική πίεση που παράγεται από τις αεροδυναμικά διαμορφωμένες επιφάνειες του αεροσκάφους (κυρίως την πτέρυγα)
- η οπισθέλκουσα (**Drag - D**) που αντίκειται στην κίνηση του αεροσκάφους και οφείλεται στην τριβή της ατράκτου και της πτέρυγας με την αέρια μάζα
- η ροπή πρόνευσης (**Pitching Moment - m**) που οφείλεται σε ποικίλλους παράγοντες που επηρεάζουν την αεροδυναμική



Εικόνα 8: Ο εγκάρσιος άξονας του α/φους

### 3.5.2 Εγκάρσιος Άξονας

Αντίστοιχα, στον εγκάρσιο άξονα του αεροσκάφους ασκούνται:

- η πλάγια δύναμη (**Lateral Force - Y**) που ασκείται στον άξονα y του σωματόδετου πλαισίου αναφοράς
- η ροπή διατοιχισμού (**Rolling Moment - l**) που προκαλεί περιστροφή ως προς τον σωματόδετο άξονα x



- η ροπή εκτροπής (**Yawing Moment-n**) που προκαλεί περιστροφή ως προς τον σωματόδετο άξονα z

### 3.5.3 Οι εξισώσεις του αεροδυναμικού μοντέλου

Βάσει των [8],[49],[51] οι αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις: Συγκεκριμένα:

$$\mathbf{F}_A = \bar{q}S \begin{pmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{M}_A = \bar{q}S \begin{pmatrix} bC_l \\ \bar{c}C_m \\ bC_n \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

όπου

- $\rho$  : η πυκνότητα της αέριας μάζας
- $S$  : η επιφάνεια της πτέρυγας
- $\bar{c}$  : η μέση χορδή της πτέρυγας
- $b$  : το μήκος της πτέρυγας
- $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V_a^2$  : η δυναμική πίεση
- $C, C, \dots, C_n$  : οι αδιάστατοι αεροδυναμικοί συντελεστές

Η άντωση και η οπισθέλκουσα ορίζονται στο πλαίσιο ανέμου ως:

$$L = \bar{q}S (-C_Z \cos \alpha + C_X \sin \alpha) = \bar{q}SC_L \quad (3.25)$$

$$D = \bar{q}S (-C_X \cos \alpha - C_Z \sin \alpha) = \bar{q}SC_D \quad (3.26)$$

Η τελική μορφή του μοντέλου που κάνει χρήση η συγκεκριμένη μελέτη έχει ως:

$$L = \bar{q}SC_L = \frac{1}{2}\rho V_a^2 SC_L \quad (3.27\alpha')$$

$$D = \bar{q}SC_D = \frac{1}{2}\rho V_a^2 SC_D \quad (3.27\beta')$$

$$m = \bar{q}S\bar{c}C_m = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S\bar{c}C_m \quad (3.27\gamma')$$

$$Y = \bar{q}SC_Y = \frac{1}{2}\rho V_a^2 SC_Y \quad (3.27\delta')$$

$$l = \bar{q}SbC_l = \frac{1}{2}\rho V_a^2 SbC_l \quad (3.27\epsilon')$$

$$n = \bar{q}SbC_n = \frac{1}{2}\rho V_a^2 SbC_n \quad (3.27\sigma')$$

### 3.5.4 Οι Παράγωγοι Ευστάθειας του αεροδυναμικού μοντέλου

Εν γένει, η δυναμική πίεση ( $\bar{q}$ ) και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά κάθε αεροδυναμικής επιφάνειας αποτελούν γνωστά και αυστηρώς ορισμένα μεγέθη. Επομένως, το ενδιαφέρον εστιάζεται στον υπολογισμό και την **μοντελοποίηση των αδιάστατων αεροδυναμικών συντελεστών**  $\{C_L, C_D, \dots, C_n\}$

Στην περίπτωση μη επανδρωμένων αεροσκαφών μικρής κλίμακας (Micro Aerial Vehicles- MAVs) και σταθερών συνθηκών αέρα (quasi-steady flow) οι αεροδυναμικοί συντελεστές εξαρτώνται κυρίως από:

- τις γωνίες ευστάθειας  $\alpha, \beta$
- τις γωνιακές ταχύτητες  $p, q, r$
- τις εντολές χειρισμού ( $\delta\epsilon, \delta r, \delta\alpha$ )

Έτσι έχουμε:

Για τον διαμήκη άξονα του α/φους:

$$C_L = C_L(\alpha, q, \delta\epsilon)$$

$$C_D = C_D(\alpha, q, \delta\epsilon)$$

$$C_m = C_m(\alpha, q, \delta\epsilon)$$

Αντίστοιχα, για τον εγκάρσιο άξονα:

$$C_Y = C_Y(\beta, p, r, \delta\alpha, \delta r)$$

$$C_l = C_l(\beta, p, r, \delta\alpha, \delta r)$$

$$C_n = C_n(\beta, p, r, \delta\alpha, \delta r)$$

Η δομή των συναρτήσεων είναι γενικά άγνωστη και μη γραμμική. Εν τούτοις, στην περίπτωση της στρωτής αργά μεταβαλλόμενης ροής (quasi-steady flow) μπορούν να προσεγγιστούν με την χρήση σειρών Taylor.

Έτσι, για παράδειγμα:

$$C_L = C_{L0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_L}{\partial q} q + \frac{\partial C_L}{\partial \delta\epsilon} \delta\epsilon + \dots \quad (3.28)$$

$$= C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha + C_{Lq} \frac{\bar{c}}{2V_a} q + C_{L\delta\epsilon} \delta\epsilon + \dots \quad (3.29)$$

Η τάξη της προσέγγισης ποικίλλει ανάλογα την κλίμακα του α/φους και την κατάσταση της πτήσης (προσγείωση, απογείωση, cruising, ελιγμοί).

Τυπικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται συνήθως στις περιπτώσεις των MAVs έχουν ως

εξης ([8] )<sup>1</sup> :

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{Lq_n}q_n + C_{L\delta\epsilon}\delta\epsilon \quad (3.31\alpha')$$

$$C_D = C_{D0} + C_{D\alpha}\alpha + C_{D\alpha^2}\alpha^2 + C_{Dq_n}q_n + C_{D\delta\epsilon}\delta\epsilon \quad (3.31\beta')$$

$$C_Y = C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Yp_n}p_n + C_{Yr_n}r_n + C_{Y\delta\alpha}\delta\alpha + C_{Y\delta r}\delta r \quad (3.31\gamma')$$

$$C_l = C_{l0} + C_{l\beta}\beta + C_{lp_n}p_n + C_{lr_n}r_n + C_{l\delta\alpha}\delta\alpha + C_{l\delta r}\delta r \quad (3.31\delta')$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{mq_n}q_n + C_{m\delta\epsilon}\delta\epsilon \quad (3.31\epsilon')$$

$$C_n = C_{n0} + C_{n\beta}\beta + C_{np_n}p_n + C_{nr_n}r_n + C_{n\delta\alpha}\delta\alpha + C_{n\delta r}\delta r \quad (3.31\sigma')$$

Το σύνολο των συντελεστών αυτών ονομάζονται **παράγωγοι ευστάθειας και ελέγχου (control & stability derivatives)**. Η εκτίμηση τις τιμές τους είναι αντικείμενο μαθηματικών εργαλείων σχετικών με την **ανίχνευση παραμέτρων (Parameter Identification)**.

## 4 Ανίχνευση Παραμέτρων (Parameter Identification)

### 4.1 Εισαγωγή

Όπως προκύπτει απο τα παραπάνω, οι αεροδυναμικοί συντελεστές μοντελοποιούνται ως συναρτήσεις γνωστών μεταβλητών και ενός συνόλου παραμέτρων.

Για παράδειγμα, αναπαριστώντας την σχέση (3.29) σε μητρική μορφή καταλήγουμε:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{Lq_n}q_n + C_{L\delta\epsilon}\delta\epsilon + \dots = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & q_n & \delta\epsilon & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{L0} \\ C_{L\alpha} \\ C_{Lq_n} \\ C_{L\delta\epsilon} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Θεωρούμε πως ,για συγκεκριμένα στάδια της πτήσης, οι παράγωγοι ευστάθειας παραμένουν σταθεροί και ανεξάρτητοι του χρόνου. Η παραδοχή αυτή ,που στηρίζεται στις παρατηρήσεις των [8] & [49], καθιστά το πρόβλημα της μοντελοποίησης **γραμμικό ως προς τις παραμέτρους (linear in the paramaters)**.

Γενικεύοντας, οι προσεγγίσεις των αεροδυναμικών συντελεστών λαμβάνουν την μορφή:

$$y = \theta_0 + \sum_{k=1}^n \theta_k \xi_k(x) \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>Είθισται, για λόγους συνέπειας ως προς την διαστασιολόγηση, οι γωνιακές ταχύτητες  $p, q, r$  να κανονικοποιούνται. Οι κανονικοποιημένες μορφές των μεταβλητών συνοδεύονται απο τον δείκτη  $n$  και ισχύει:

$$\{p_n, q_n, r_n\} = \left\{ \frac{b}{2V_a} p, \frac{\bar{c}}{2V_a} q, \frac{b}{2V_a} r \right\} \quad (3.30)$$

όπου:

$y$  : η ανεξάρτητη μεταβλητή (εν προκειμένω οι αεροδυναμικοί συντελεστές)

$\xi_k$  : γραμμικοί ή μη γραμμικοί συνδυασμοί των ανεξάρτητων μεταβλητών  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$   
που κατασκευάζουν τις συναρτήσεις των αεροδυναμικών συντελεστών  
(ονομάζονται **προβλέπτες ή regressors**)

$\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k\}$  : το σύνολο των αντίστοιχων παραμέτρων

Θεωρούμε ,ακόμα, την ύπαρξη ενός διανύσματος παρατήρησης της ανεξάρτητης μεταβλητής (που εμπεριέχει αβεβαιότητα) τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} z(i) &= y(i) + v(i) \\ v &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

Ένα βασικό εργαλείο, που επιτρέπει τον υπολογισμό τέτοιων παραμέτρων, είναι η πολυμεταβλητή παλινδρόμηση (**Multivariate Regression**). Αποτελεί μία απο τις πιο δημοφιλείς μεθόδους Parameter Identification στο πεδίο της αεροναυτικής.

## 4.2 Προσέγγιση Ελαχίστων Τετραγώνων Ordinary Least Squares

Η γενική μορφή του μοντέλου της (4.2) μπορεί να γραφεί και ως:

$$y = X\theta \tag{4.3}$$

Συνοδευόμενη απο το διάνυσμα παρατήρησης:

$$z = X\theta + v \tag{4.4}$$

Όπου:

$z = [z_{(1)} \ z_{(2)} \ \dots \ z_{(N)}]^T$  :το  $N \times 1$  διάνυσμα των παρατηρήσεων

$\theta = [\theta_0 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]^T$  :το διάνυσμα των  $n_p = n + 1$  παραμέτρων

$X = [1 \ \xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n]$  :η  $N \times n_p$  μήτρα παρατηρήσεων των προβλεπτών (regressors)

$v = [v_{(1)} \ v_{(2)} \ \dots \ v_{(N)}]^T$  :το  $N \times 1$  διάνυσμα των σφαλμάτων μέτρησης

Επίσης, παραδεχόμαστε οτι:

- οι προβλέπτες  $\xi_k = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  είναι ντερτερμινιστικής φύσεως (μηδενικά επίπεδα αβεβαιότητας ή θορύβου) (I)
- το διάνυσμα των σφαλμάτων είναι IID<sup>2</sup> διαδικασία για την οποία ισχύει:  $E(v) = 0$ ,  $E(vv^T) = \sigma^2 I$  (Λευκός Θόρυβος) (II)

Με βάση την προσέγγιση των Απλών Ελαχίστων Τετραγώνων (Ordinary Least Squares - OLS), ο βέλτιστος προβλέπτης του διανύσματος  $\theta$  προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του κριτηρίου:

$$J(\theta) = \frac{1}{2}(z - X\theta)^T(z - X\theta) \quad (4.5)$$

Επομένως, πρέπει :

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -X^T z + X^T X \hat{\theta} = 0 \Rightarrow X^T X \hat{\theta} = X^T z \quad (4.6)$$

Η μήτρα  $X^T X$  είναι πάντα συμμετρική. Θεωρώντας, επίσης, ότι οι προβλέπτες  $\xi$  που κατασκευάζουν τον πίνακα  $X$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, συμπεραίνουμε πως ο πίνακας  $X^T X$  είναι θετικά ορισμένος και αντιστρέψιμος. Έτσι:

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T z \quad (4.7)$$

#### 4.2.1 Συνδιακύμανση και στατιστική σημαντικότητα των παραμέτρων

Η μήτρα συνδιακύμανσης του  $\hat{\theta}$  προκύπτει ως:

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\theta}) &= E[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] = E\{(X^T X)^{-1} X^T (z - y)(z - y)^T X (X^T X)^{-1}\} \\ &= (X^T X)^{-1} X^T E(vv^T) X (X^T X)^{-1} \end{aligned}$$

Βάσει της παραδοχής (II), το διάνυσμα  $v$  είναι μηδενικής μέσης τιμής και αυτοσυσχέτισης.

Επομένως:

$$Cov(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \quad (4.8)$$

Σύμφωνα με την [49], το διάνυσμα των εκτιμώμενων παραμέτρων πρέπει να εξεταστεί στο πλαίσιο της στατιστικής σημαντικότητας.

Παραδεχόμενοι πως τα σφάλματα μέτρησης έχουν την μορφή λευκού θορύβου, μπορούμε να συνάγουμε:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &\sim \mathcal{N}(\theta, \sigma_\theta^2 I) \\ \hat{y} &\sim \mathcal{N}(X\theta, \sigma_y^2 I) \end{aligned}$$

Έτσι, κάθε συνιστώσα του διανύσματος παραμέτρων ακολουθεί κανονική κατανομή και, κατ' επέκταση, το σύνολο των παρακάτω μεταβλητών:

$$t = \frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\hat{\sigma}_\theta} \quad i = 1, 2, \dots, n_p \quad (4.9)$$

ακολουθεί την κατανομή του Student ( $t$ ) με  $N - n_p$  βαθμούς ελευθερίας<sup>??</sup>. Το  $100(1 - \alpha)$  διάστημα εμπιστοσύνης για κάθε παράμετρο  $\theta_i$  είναι:

$$\hat{\theta}_i - t\left(\frac{\alpha}{2}, N - n_p\right)\hat{\sigma}_\theta \leq \theta_i \leq \hat{\theta}_i + t\left(\frac{\alpha}{2}, N - n_p\right)\hat{\sigma}_\theta \quad (4.10)$$

<sup>2</sup>IID: Independent & Identically Distributed Random Process

Επιλέγοντας διάστημα εμπιστοσύνης της τάξης του 95% ( $\alpha = 0.05$ ) και δεδομένου ότι  $N - n_p \gg 100$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned}\theta_i &= \hat{\theta}_i \pm 1.96\sigma_\theta \\ &\approx \hat{\theta}_i \pm 2\sigma_\theta\end{aligned}\quad (4.11)$$

Κάνοντας χρήση του λόγου:

$$t_0 = \frac{\theta_i}{\sigma_{\theta_i}} \quad (4.12)$$

χαρακτηρίζουμε ως στατιστικά σημαντικές τις παραμέτρους για τις οποίες ισχύει:

$$|t_0| > t\left(\frac{\alpha}{2}, N - n_p\right) \quad (4.13)$$

Η συνεισφορά μια μη στατιστικά σημαντικής παραμέτρου θεωρείται αμελητέα και η αντίστοιχη τιμή της μηδενίζεται.

#### 4.2.2 Διάνυσμα Υπολειπόμενης πληροφορίας

Τελικά, το εκτιμώμενο μοντέλο έχει την μορφή:

$$\hat{y} = X\hat{\theta} = X(X^T X)^{-1} X^T z \quad (4.14)$$

Η διαφορά μεταξύ του διανύσματος παρατήρησης και του εκτιμώμενου μοντέλου ονομάζεται **διάνυσμα υπολειπόμενης πληροφορίας (residual)** και ισχύει:

$$\begin{aligned}\nu &= z - \hat{y} = z - X\hat{\theta} \\ &= z - X(X^T X)^{-1} X^T z \\ &= (I - K)z\end{aligned}\quad (4.15)$$

Στην ιδανική περίπτωση που οι παραδοχές (I) & (II) ικανοποιούνται στο ακέραιο, το διάνυσμα των residuals έχει την μορφή λευκού γκαουσιανού θορύβου (Εικόνα 9). Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο έχει απορροφήσει όλη την πληροφορία που εμπεριέχει το διάνυσμα παρατήρησης και επομένως η μοντελοποίηση είναι βέλτιστη (στο πλαίσιο της μεθοδολογίας των Ελαχίστων Τετραγώνων). Η ανάλυση των residuals είναι θεμελιώδης για την αξιολόγηση της αξιοπιστίας των μοντέλων μας.

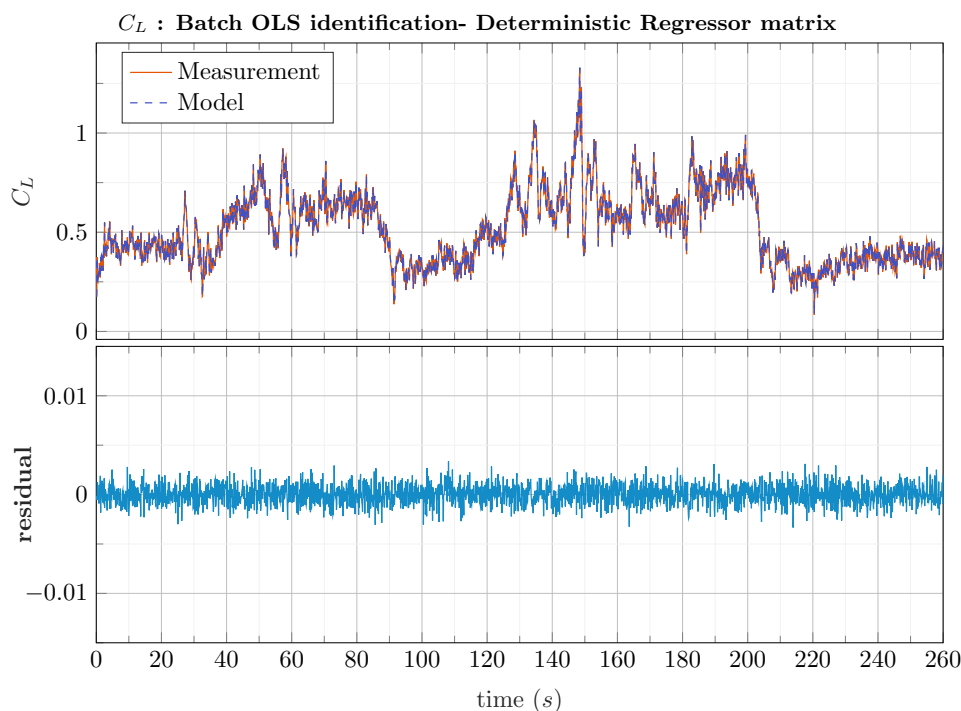
Η κατανομή του διανύσματος υπολειπόμενης πληροφορίας μπορεί να αξιολογηθεί με χρήση πιθανοτικού διαγράμματος (normal probability plot). Αυτό κατασκευάζεται αναπαριστώντας γραφικά τις τιμές του μοντέλου ( $y$ ) ως προς την ακόλουθη ποσότητα [49]:

$$\Phi^{-1}\left[\frac{\left(i - \frac{1}{2}\right)}{N}\right] \quad (4.16)$$

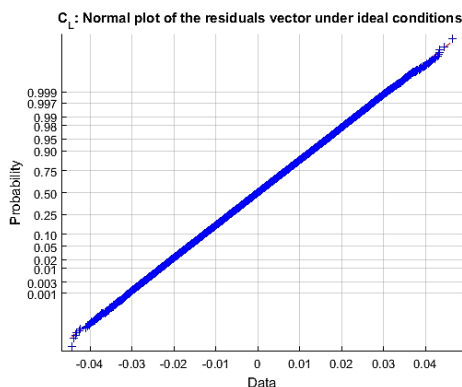
όπου

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (4.17)$$

Το πιθανοτικό διάγραμμα μιας κανονικά κατανεμημένης ποσότητας πρέπει να έχει τη μορφή ευθείας γραμμής. Όσο μεγαλύτερη η καμπυλότητα τόσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση της κατανομής από την κανονική (gaussian). Ένα τυπικό διάγραμμα ενός γκαουσιανού διανύσματος υπολειπόμενης πληροφορίας φαίνεται στην Εικόνα 10.



Εικόνα 9: Διάνυσμα Υπολειπόμενης πληροφορίας μετά από επιτυχή εκτίμηση παραμέτρων του μοντέλου της άντωσης ( $C_L$ )



Εικόνα 10: Πιθανοτικό διάγραμμα γκαουσιανού residual

#### 4.2.3 Εκτίμηση Παραμέτρων σε πραγματικό χρόνο (OLS)

Πληθώρα εφαρμογών σχετικά με το Parameter Identification στο πεδίο της Αεροναυτικής απαιτούν την εκτίμηση του διανύσματος παραμέτρων σε πραγματικό χρόνο. Η πα-

ρακολούθηση των παραμέτρων εξυπηρετεί την έγκαιρη ανίχνευση και τον χαρακτηρισμό σφαλμάτων της πτήσης ενώ παράλληλα διευκολύνει την προσαρμογή του εκτιμητή σε αλλαγές του δυναμικού μοντέλου κατά την αλλαγή της κατάστασης πτήσης. Τέλος, ένα χρονομεταβλητό διάνυσμα παραμέτρων δύναται να μοντελοποιεί ισχυρά μη γραμμικά φαινόμενα που οφείλονται σε σύνθετη δυναμική συμπεριφορά του α/φους ή σε σύνθετους ελιγμούς ([49],[88]).

Στις περιπτώσεις αυτές οι αλγόριθμοι των OLS τροποποιούνται έτσι ώστε να αποκτήσουν αναδρομική μορφή. Έτσι πλέον θεωρούμε πως η μήτρα προβλεπτών και το διάνυσμα παρατήρησης έχουν χρονομεταβλητό μέγεθος:

$$\mathbf{X}_m^T = [\mathbf{X}_{m-1}^T, x_m^T] \quad (4.18)$$

$$\mathbf{z}_m^T = [\mathbf{z}_{m-1}^T, z_m] \quad (4.19)$$

ενώ η ελαχιστοποίηση του κόστους των OLS έχει πλέον την μορφή:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\{ \lambda_F^{k-i} [z(i) - x^T(i)\theta]^2 \right\} \quad (4.20)$$

όπου  $0 \ll \lambda_F \leq 1$  ένας παράγοντας διαμόρφωσης παραθύρου παρατήρησης (exponential forgetting window/forgetting factor).

Δεδομένου ότι η σχέση  $X_m^T X_m = \lambda_F X_{m-1}^T X_{m-1} + x_m^T x_m$  μπορεί να γραφεί ως  $P_{m-1}^{-1} + x_m^T I x_m$  και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Woodbury για την αντιστροφή μητρών (Matrix Inversion Lemma [42]) έχουμε:

$$(X_m^T X_m)^{-1} = P_m = \lambda_F^{-1} \left( P_{m-1} - \frac{P_{m-1} x_m^T x_m P_{m-1}}{\lambda_F + x_m P_{m-1} x_m^T} \right) \quad (4.21)$$

όπου η εναπομείνασα ποσότητα προς αντιστροφή είναι βαθμωτό μέγεθος. Έτσι, θέτοντας  $k = \frac{P_{m-1} x_m^T}{\lambda_F + x_m P_{m-1} x_m^T}$  καταλήγουμε στον αναδρομικό αλγόριθμο Ελαχίστων Τετραγώνων (Recursive Ordinary Least Squares- ROLS):

$$k = \frac{P_{m-1} x_m^T}{\lambda_F + x_m P_{m-1} x_m^T} \quad (4.22)$$

$$P_m = \lambda_F^{-1} (P_{m-1} - k x_m P_{m-1}) \quad (4.23)$$

$$\theta_m = \theta_{m-1} + k (z_m - x_m \theta_{m-1}) \quad (4.24)$$

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος ανήκει στην οικογένεια των φίλτρων Kalman.

#### 4.2.4 OLS : Αποτελέσματα προσομοίωσης

Ο σχεδιασμός αλγορίθμων για πραγματικά συστήματα πρέπει να επιβεβαιώνεται με την βοήθεια προσομοίωσης. Η προσομοίωση ένα σημαντικό σημείο αναφοράς για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας του εκάστοτε αλογρίθμου εκτίμησης. Σε αυτή την μελέτη



έγινε χρήση του προσομοιωτή πτήσης last letter <sup>3</sup> που αναπτύχθηκε από τον Γιώργο Ζωγόπουλο, διδακτορικό ερευνητή του Control Systems Lab της σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ υπό την εποπτεία του Δρ. Κωνσταντίνου Κυριακόπουλου.

Ο προσομοιωτής μπορεί να εξυπηρετήσει πληθώρα αεροσκαφών και άλλων ιπτάμενων πλατφορμών μικρής ή μεσαίας κλίμακας και είναι εφοδιασμένος με την δυνατότητα παραγωγής ατμοσφαιρικών διαταραχών με τη μορφή σταθερού ανέμου και αναταράξεων (Dryden Gusts). Οι δυναμικές παράμετροι κάθε πλατφόρμας είναι γνωστές εκ των προτέρων ενώ η δημιουργία ψευδο-αισθητηριακού συστήματος γίνεται με την πρόσθεση λευκού γκαουσιανού θορύβου ή άλλης μορφής αβεβαιοτήτων στα ντετερμινιστικά σήματα με την βοήθεια της πλατφόρμας της Matlab.

Όπως είδαμε παραπάνω, η ανίχνευση παραμέτρων μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους:

- Μή αναδρομικά (στο εξής Batch Identification) όπου η ανίχνευση παραμέτρων επιτυγχάνεται μετά το πέρας της πτήσης χρησιμοποιώντας τα δεδομένα συνολικά ή ομαδοποιημένα
- Αναδρομικά (στο εξής real-time/sequential identification), όπου η ανίχνευση παραμέτρων πραγματοποιείται σε πραγματικό χρόνο κατά διάρκεια της πτήσης επεξεργαζόμενοι τα δεδομένα σειριακά. Οι αναδρομικοί αλγόριθμοι μπορούν να εφαρμοστούν με τον ίδιο τρόπο και σε batch δεδομένα. Στην περίπτωση των OLS, Τα αποτελέσματα αναδρομικών και μή αναδρομικών αλγορίθμων ταυτίζονται.

**4.2.4.1 Μή αναδρομικός Αλγόριθμος** Εν πρώτοις, εξετάζουμε την απόδοση των σχεδιαζόμενων εκτιμητών με την μή αναδρομική μέθοδο. Η δυνατότητα του μοντέλου να προσαρμοστεί στις μετρήσεις αξιολογείται με την χρήση του συντελεστή προσδιορισμού ( $R^2$ ):

$$R^2 = \frac{\theta^T X^T - N\bar{z}^2}{z^T z - N\bar{z}^2} \quad (4.25)$$

όπου:

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \quad (4.26)$$

$R^2$  κυμαίνεται στο διάστημα  $[0, 1]$ . Τιμές κοντά στην μονάδα υποδεικνύουν πολύ καλή προσαρμοστικότητα του μοντέλου. Αξιόπιστα μοντέλα συνοδεύονται με συντελεστές προσδιορισμού άνω του 0.85.

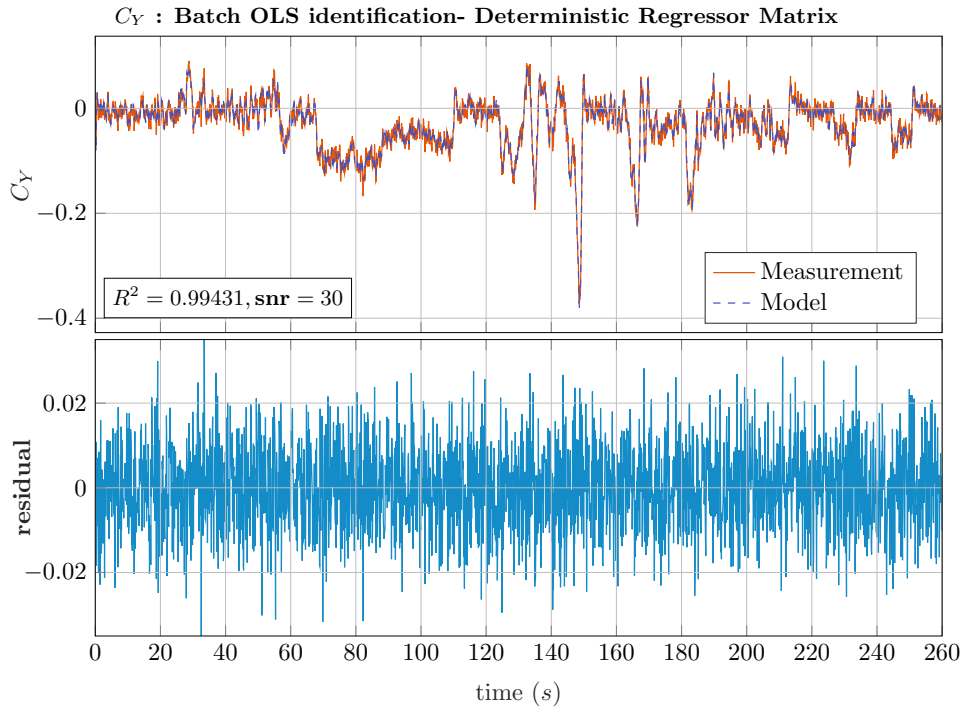
**Συντελεστής Πλάγιας Δύναμης** Ας εξετάσουμε τον συντελεστή της πλάγιας δύναμης  $C_Y$ . Κάνουμε χρήση του παρακάτω γραμμικού μοντέλου:

$$C_Y = C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Yp_n}p_n + C_{Yr_n}r_n + C_{Y\delta\alpha}\delta\alpha + C_{Y\delta r}\delta r \quad (4.27)$$

Το διάνυσμα παρατήρησης του  $C_Y$  αλλοιώνεται με χρήση προσθετικού λευκού θορύβου. Ο λόγος σήματος προς θόρυβο ( $SNR$ ) είναι 30.

<sup>3</sup>[https://github.com/Georacer/last\\_letter](https://github.com/Georacer/last_letter)

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 11 και στον Πίνακα εκτιμώμενων παραμέτρων 3 η ανίχνευση παραμέτρων είναι επιτυχής.



Εικόνα 11: Ανίχνευση Παραμέτρων του Συντελεστή Πλάγιας Δύναμης ( $C_Y$ ). Η μήτρα προβλεπτών ( $X$ ) είναι ντετερμινιστικής φύσεως.

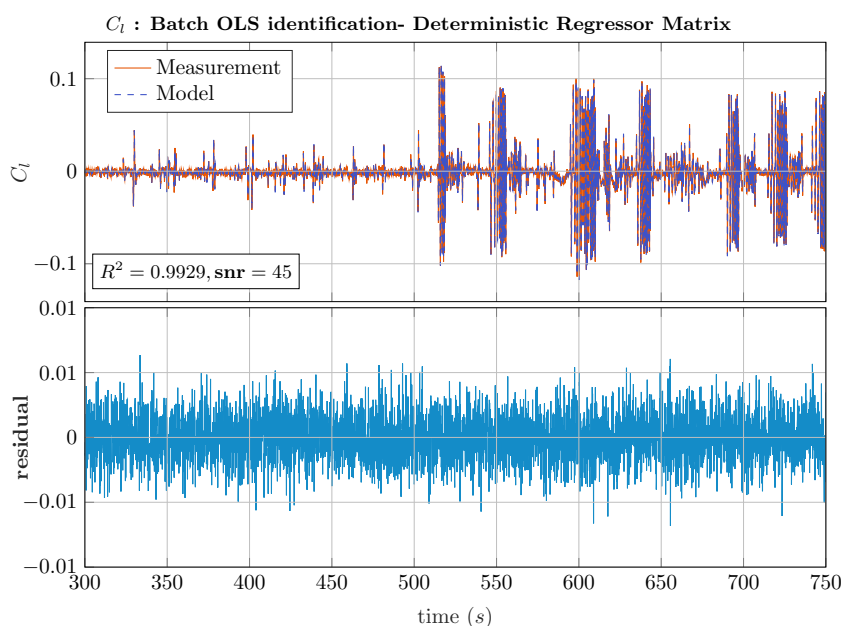
	$C_{Y_0}$	$C_{Y_\beta}$	$C_{Y_{p_n}}$	$C_{Y_{r_n}}$	$C_{Y_{\delta\alpha}}$	$C_{Y_{\delta r}}$
<b>Τιμή Αναφοράς</b>	0.00	-0.98	0.00	0.00	0.00	-0.20
<b>Εκτιμώμενη Τιμή</b>	0.00	-0.9804	0.00	0.0001	0.0002	-0.1994
<b>Διάστημα Εμπιστ. (<math>\pm 1\sigma</math>)</b>	0.0002	0.0240	0.0192	0.0482	0.0042	0.0052

Πίνακας 3:  $C_Y$  Σύγκριση εκτιμώμενων παραμέτρων σε σχέση με τις πραγματικές (Τιμές Αναφοράς) (SNR=30)

**Συντελεστής Ροπής Διατοιχισμού** Το αντίστοιχο μοντέλο για την ροπή διατοιχισμού είναι:

$$C_l = C_{l_0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{p_n}}p_n + C_{l_{r_n}}r_n + C_{l_{\delta\alpha}}\delta\alpha + C_{l_{\delta r}}\delta r$$

Τα αποτελέσματα της διαδικασίας φαίνονται στην Εικόνα 12 και στον πίνακα 4.



Εικόνα 12: Ανίχνευση Παραμέτρων του Συντελεστή Ροπής Διατοιχισμού ( $C_l$ ). Η μήτρα προβλεπτών ( $X$ ) είναι ντετερμινιστικής φύσεως.

	$C_{l_0}$	$C_{l_\beta}$	$C_{l_{pn}}$	$C_{l_{rn}}$	$C_{l_{\delta\alpha}}$	$C_{l_{\delta r}}$
<b>Τιμή Αναφοράς</b>	0.00	-0.12	-1.00	0.14	0.25	-0.0037
<b>Εκτιμώμενη Τιμή</b>	0.00	-0.1258	-0.9974	0.1363	0.2494	-0.0029
<b>Διάστημα Εμπιστ. (<math>\pm 1\sigma</math>)</b>	0.0004	0.0423	0.0339	0.0851	0.0742	0.0091

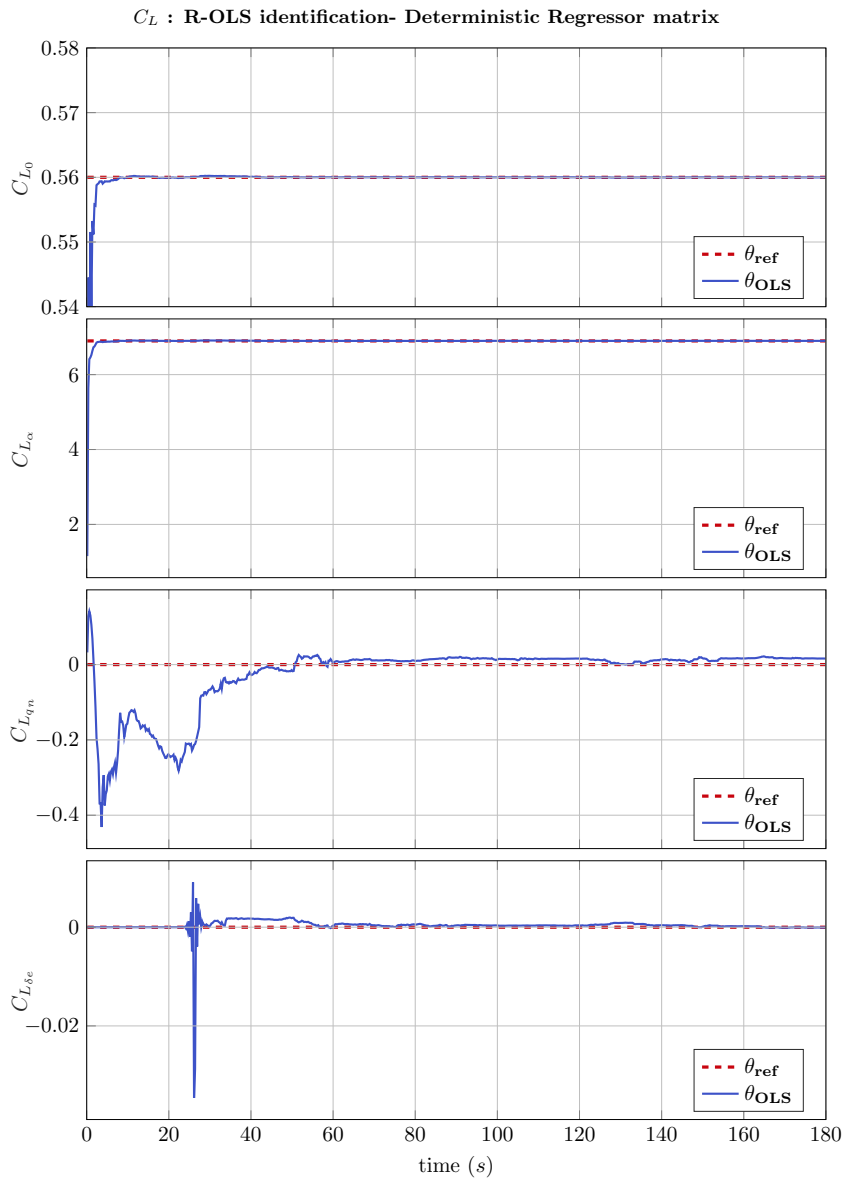
Πίνακας 4:  $C_l$  Σύγκριση εκτιμώμενων παραμέτρων σε σχέση με τις πραγματικές (Τιμές Αναφοράς) (SNR=45)

**4.2.4.2 Αναδρομικός Αλγόριθμος** Στην υποενότητα αυτή εξετάζουμε την αποδοτικότητα των σχεδιαζόμενων αλγορίθμων με την αναδρομική μέθοδο. Στα διαγράμματα που ακολουθούν εξετάζουμε την εξέλιξη κάθε παραμέτρου ξεχωριστά. Τα διανύσματα παρατήρησης έχουν αλλοιωθεί με χαμηλής ενέργειας προσθετικό λευκό θόρυβο. Η μήτρα των προβλεπτών παραμένει ντετερμινιστικής φύσεως.

**Συντελεστής κάθετης Άντωσης** Το μοντέλο του συντελεστή κάθετης άντωσης έχει ως:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{Lq_n}q_n + C_{L\delta\epsilon}\delta\epsilon \quad (4.28)$$

Η χρονική εξέλιξη των εκτιμώμενων παραμέτρων σε σχέση με τις πραγματικές φαίνεται στην Εικόνα 13.

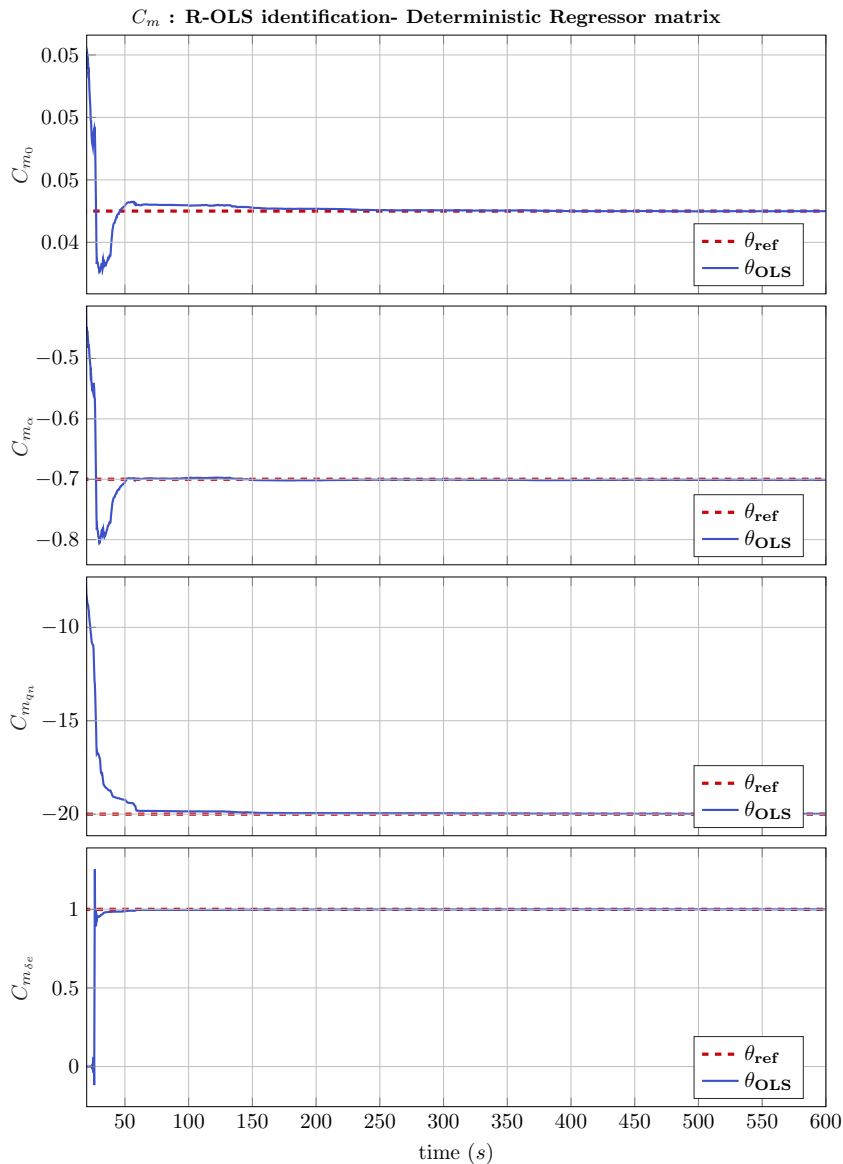


Εικόνα 13: Αναδρομική Εκτίμηση Παραμέτρων με την μέθοδο των OLS για τον συντελεστή άντωσης ( $C_L$ ). Το διάνυσμα παρατήρησης αλλοιώθηκε με προσθετικό λευκό θόρυβο μικρού πλάτους ( $snr > 50$ )

**Συντελεστής ροπής πρόνευσης** Αντίστοιχα, για τον συντελεστή ροπής πρόνευσης χρησιμοποιούμε το παρακάτω μοντέλο:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{mq_n}q_n + C_{m\delta\epsilon}\delta\epsilon \quad (4.29)$$

Η χρονική εξέλιξη των εκτιμώμενων παραμέτρων σε σχέση με τις πραγματικές φαίνεται στην Εικόνα 14.



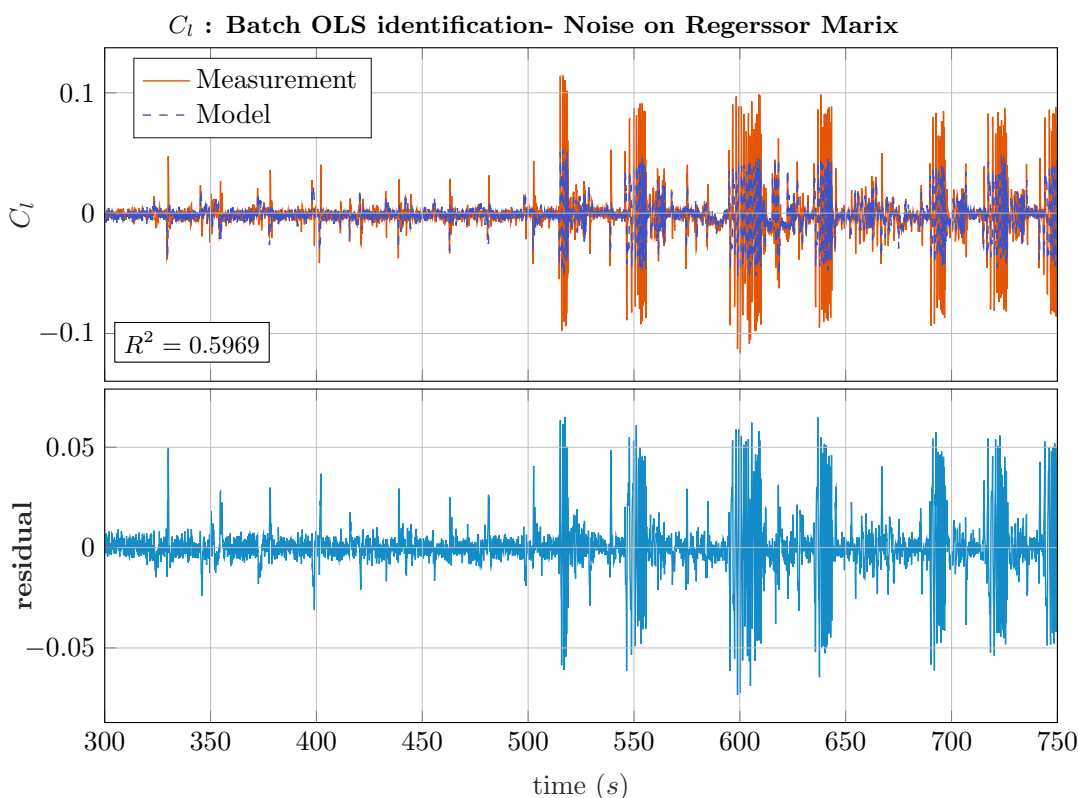
Εικόνα 14: Αναδρομική Εκτίμηση Παραμέτρων με την μέθοδο των OLS για τον συντελεστή ροπής πρόνευσης ( $C_m$ ). Το διάνυσμα παρατήρησης αλλοιώθηκε με προσθετικό λευκό θόρυβο μικρού πλάτους ( $snr > 50$ )

#### 4.2.5 Η περίπτωση της αβεβαιότητας στη μήτρα των προβλεπτών

Σύμφωνα με τις παραδοχές της θεωρίας των OLS, η μήτρα προβλεπτών  $X$  πρέπει να είναι ντετερμινιστικής φύσεως, Αυτό σημαίνει πως ο εκτιμητής παρουσιάζει μεγάλη ευαισθησία στις διαταραχές ή στην αβεβαιότητα των προβλεπτών (regressors). Σε πραγματικές εφαρμογές αεροπλοΐας, οι προβλέπτες αποτελούν εκτιμώμενα μεγέθη τα οποία αντλούνται από το αισθητηριακό σύστημα. Ειδικά στις περιπτώσεις UAVs μικρής κλίμακας, το εγκατεστημένο αισθητηριακό σύστημα είναι συνήθως χαμηλού κόστους και αμφίβολης ακρίβειας. Η στρέβλωση αυτή δημιουργεί σοβαρά προβλήματα στους εκτιμητές

που χρησιμοποιούν την OLS μέθοδο, οδηγώντας σε προκατειλημμένες (biased) εκτιμήσεις. Καθώς μάλιστα ο λόγος σήματος προς θόρυβο (snr) μειώνεται οι εκτιμήσεις αποκλίνουν απογοητευτικά από τις πραγματικές τιμές. Ενδεικτικά, αποτελέσματα για τις διάφορες διακυμάνσεις του snr στις περιπτώσεις των  $C_D, C_m$  φαίνονται στις εικόνες 16,???. Ενδεικτική περίπτωση μη αναδρομικής εφαρμογής των OLS με θόρυβο στην μήτρα προβλεπτών για την περίπτωση του  $C_l$  φαίνεται στην Εικόνα 15 και τον Πίνακα 5.

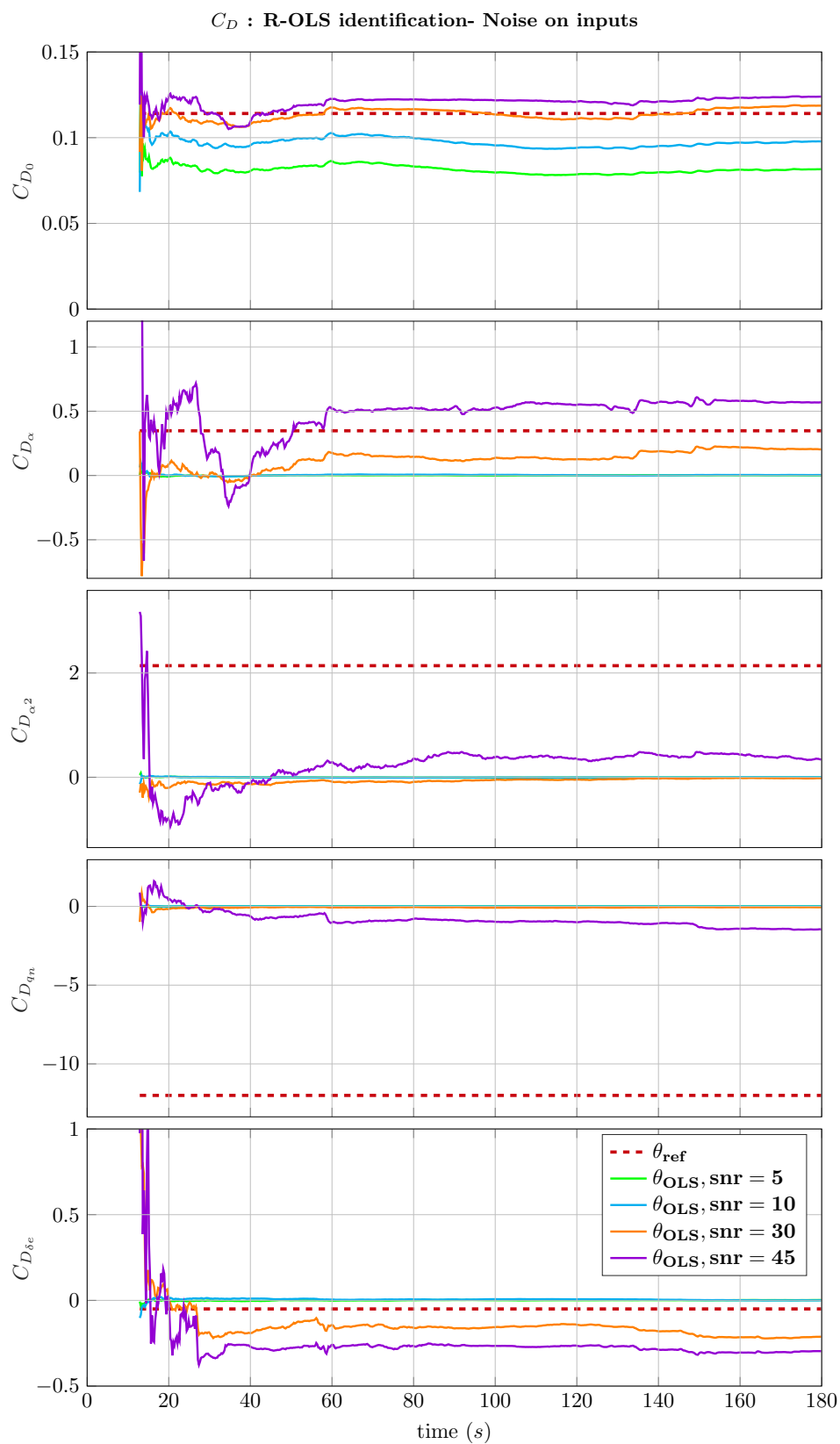
Εν τέλει, για τις ανάγκες εφαρμογών χαμηλού κόστους και κλίμακας όπου οι περιορισμοί στην ακρίβεια αλλά και το ωφέλιμο φορτίο είναι πολύ αυστηροί, η προσέγγιση των OLS -ειδικά για εφαρμογές σε πραγματικό χρόνο- είναι μη βέλτιστη.



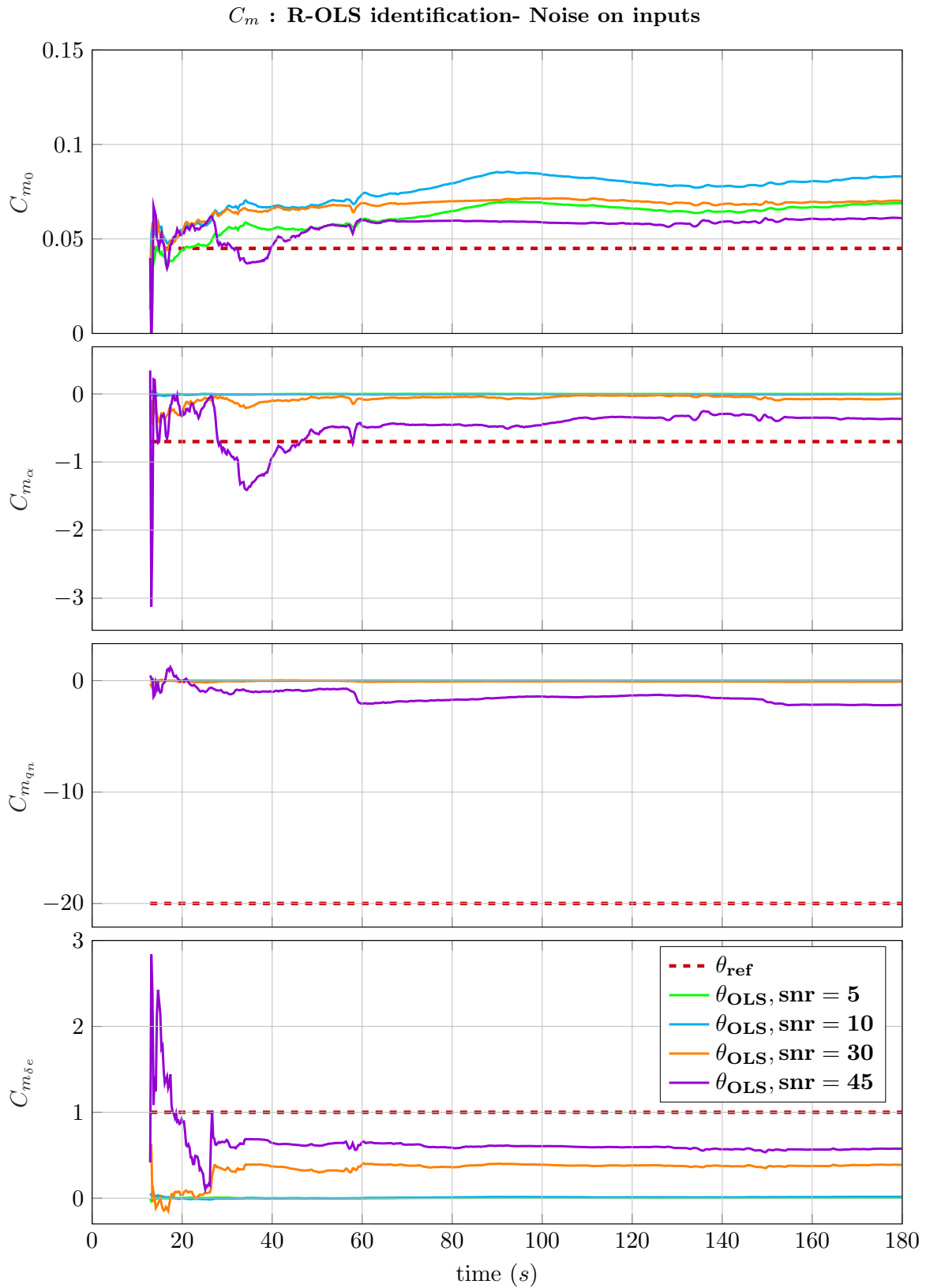
Εικόνα 15: Batch Εκτίμηση Παραμέτρων με την μέθοδο των OLS για τον συντελεστή ροπής διατοχισμού ( $C_l$ ). Η μήτρα των προβλεπτών έχει αλλοιωθεί με προσθετικό λευκό θόρυβο.

	$C_{l_0}$	$C_{l_\beta}$	$C_{l_{pn}}$	$C_{l_{rn}}$	$C_{l_{\delta\alpha}}$	$C_{l_{\delta r}}$
<b>Τιμή Αναφοράς</b>	0.00	-0.12	-1.00	0.14	0.25	-0.0037
<b>Εκτιμώμενη Τιμή</b>	-0.006	-0.2198	-0.6457	0.096	0.1755	0.0052
<b>Διάστημα Εμπιστ. (<math>\pm 1\sigma</math>)</b>	0.01	0.0643	0.0583	0.0856	0.0136	0.0108

Πίνακας 5: OLS με θόρυβο στη μήτρα προβλεπτών:  $C_l$  Σύγκριση εκτιμώμενων τιμών με τις τιμές αναφοράς (SNR=45)



Εικόνα 16: Αναδρομική Εκτίμηση Παραμέτρων με την μέθοδο των OLS για τον συντελεστή οπισθέλκουσας ( $C_D$ ). Η μήτρα των προβλεπτών έχει αλλοιωθεί με προσθετικό λευκό θόρυβο.



Εικόνα 17: Αναδρομική Εκτίμηση Παραμέτρων με την μέθοδο των OLS για τον συντελεστή ροπής πρόνευσης ( $C_m$ ). Η μήτρα των προβλεπτών έχει αλλοιωθεί με προσθετικό λευκό θόρυβο.



### 4.3 Προσέγγιση των Ολικών Ελαχίστων Τετραγώνων Total Least Squares

Στην περίπτωση των πραγματικών συστημάτων, τουλάχιστον ένα υποσύνολο των μεταβλητών  $x_1, x_2, \dots, x_n$  μετράται ή εκτιμάται με κάποιο επίπεδο αβεβαιότητας. Το γεγονός αυτό, οδηγεί στην παραβίαση της παραδοχής (I) της θεωρίας των Απλών Ελαχίστων Τετραγώνων που απαιτεί οι προβλέπτες  $\xi_i(x_1, \dots, x_k) (k \leq n)$  να είναι ντερερμινιστικής φύσεως.

Η ανεπάρκεια αυτή επιλύεται από την θεωρία των **Ολικών Ελαχίστων Τετραγώνων (Total Least Squares-TLS)** [1] η οποία παραδέχεται την ύπαρξη σφαλμάτων στη μήτρα των προβλεπτών.

Εν προκειμένω λοιπόν, η μήτρα όπως και το διάνυσμα παρατήρησης  $z$  μετρώνται ή εκτιμώνται σε ένα επίπεδο αβεβαιότητας έτσι ώστε:

$$X_m = X + \Delta X \quad (4.30)$$

$$z = y + \varepsilon \quad (4.31)$$

όπου  $\Delta X$ ,  $\varepsilon$  τα μητρώα διαταραχής της μήτρας προβλεπτών και του διανύσματος παρατήρησης αντίστοιχα.

#### 4.3.1 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τα βασικά μεγέθη και έννοιες που χρησιμοποιούνται από την θεωρία των TLS. Οι παρακάτω ορισμοί αποτελούν βασικά εργαλεία για την ανάλυση του προβλήματος.

**Επαυξημένος πίνακας του συστήματος** Η βασική αρχή των TLS επαναδιατυπώνει το μοντέλο ως εξής:

$$[X|y] \begin{bmatrix} \theta \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.32)$$

όπου  $[X|y]$  είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος όπου ενοποιεί τη μήτρα των προβλεπτών με το διάνυσμα παρατήρησης.

**Πραγματικές και Εκτιμώμενες ποσότητες** Βάσει όσων ειπώθηκαν παραπάνω, ο επαυξημένος πίνακας της σχέσης (4.32) δεν είναι διαθέσιμος. Αντ'αυτού, χρησιμοποιούμε τον εκτιμώμενο επαυξημένο πίνακα που υπόκειται σε σφάλματα:

$$[X_m|z] = [X|y] + [\Delta X|\varepsilon] \quad (4.33)$$

Ο εκτιμώμενος πίνακας της (4.33) είναι πλέον πλήρους τάξης και επομένως δεν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα παραμέτρων  $[\theta^T \ 1]^T$  που να ικανοποιεί ταυτόχρονα και την (4.32), [99]:

$$[X_m|z] \begin{bmatrix} \theta \\ -1 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (4.34)$$

Εναλλακτικά και για λόγους συντομίας, στο πλαίσιο αυτής της μελέτης η αναφορά στις επαυξημένες μήτρες θα πραγματοποιείται **και** με την παρακάτω σημειολογία:

$$D_0 = [X|y] \quad (4.35)$$

$$D = [X_m|z] \quad (4.36)$$

**Μήτρα Εκτιμώμενων σφαλμάτων** Σε γενικές γραμμές, η θεωρία των TLS απαιτεί η μήτρα των σφαλμάτων να αποτελείται από δείγματα IID<sup>4</sup> ακολουθιών ενώ η προκύπτουσα μήτρα συνδιακύμανσης να είναι γνωστή σε τουλάχιστον έως έναν παράγοντα αναλογικότητας ("up to a level of proportionality" [99]).

Η συγκεκριμένη μελέτη περιορίζει την γενικότητα αυτού του ορισμού υιοθετώντας το ακόλουθο μοντέλο για την επαυξημένη μήτρα σφαλμάτων :

$$[\Delta X|\varepsilon] = FEC \quad (4.37)$$

όπου :

$E$  : μία  $N \times (n_p + 1)$  μήτρα κανονικών τυχαίων ασυσχέτιστων μεταβλητών μηδενικής μεσης τιμής και μοναδιαίας διακύμανσης (standard normal deviates)

$F$  : η μήτρα χρονικής συσχέτισης των σφαλμάτων

$C$  : η μήτρα τυπικής απόκλισης των σφαλμάτων

Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης εφαρμογής, η μήτρα  $F$  θεωρείται μοναδιαία ενώ η μήτρα  $C$  υπολογίζεται ως μία διάσπαση Cholesky ([79]) του πίνακα συνδιακύμανσης των σφαλμάτων  $W_T$ :

$$W_T = C^T C = E([\Delta X|\varepsilon]^T [\Delta X|\varepsilon]) = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1, x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 z} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 & \cdots & \sigma_{x_2 z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_1 x_n} & \sigma_{x_2 x_n} & \cdots & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$\Rightarrow C = \mathbf{chol}(W_T) \quad (4.39)$$

στην περίπτωση ασυσχέτιστων σφαλμάτων η μήτρα  $C$  προκύπτει ως:

$$C_{(n_p+1) \times (n_p+1)} = \mathbf{diag}(\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2} \dots \sigma_{x_n}, \sigma_z) \quad (4.40)$$

Ένα τυπικό παράδειγμα της μήτρας  $C$  για το μοντέλο της άντωσης (σχ. (3.31α')) είναι:

$$C_{C_L(\alpha, q_n, \delta e)} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{c}}{2V_a} \sigma_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\delta e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{C_L} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Εναλλακτικά, η μήτρα σφαλμάτων συμβολίζεται και ως:

$$\delta D = [\Delta X|\varepsilon] \quad (4.42)$$

<sup>4</sup>Independent Identically Distributed

**Κανονικοποιημένη μορφή του συστήματος** Η επίλυση προβλημάτων με την χρήση των TLS απαιτεί τα σφάλματα να φέρουν κοινή διακύμανση. Στην περίπτωση που αυτό το προαπαιτούμενο δεν ικανοποιείται, η εκτίμηση επιτυγχάνεται με τη γενικευμένη μέθοδο των TLS (Generalized Total Least Squares - GTLS, [97]) όπου οι επαυξημένοι πίνακες του συστήματος κανονικοποιούνται με τον κάτωθι τρόπο:

$$\begin{aligned}
& [X|y] \begin{bmatrix} \theta \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow ([X_m|z] - [\Delta X|\varepsilon]) \begin{bmatrix} \theta \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow F \left( F^{-1} [X_m|z] C^{-1} - F^{-1} [\Delta X|\varepsilon] C^{-1} \right) C \begin{bmatrix} \theta \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow F ([X_m|z]^* - [\Delta X|\varepsilon]^*) C \begin{bmatrix} \theta \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \tag{4.43}
\end{aligned}$$

όπου:

$$[X_m|z]^* = F^{-1} [X_m|z] C^{-1} \tag{4.44}$$

$$[\Delta X|\varepsilon]^* = F^{-1} [\Delta X|\varepsilon] C^{-1} \tag{4.45}$$

ή

$$D^* = F^{-1} D C^{-1} \tag{4.46}$$

$$\delta D^* = F^{-1} \delta D C^{-1} \tag{4.47}$$

**Νόρμα Frobenius** Όπως θα δούμε παρακάτω, η εκτίμηση με χρήση των TLS βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της νόρμας Frobenius της επαυξημένης μήτρας σφαλμάτων. Για έναν πίνακα  $A_{m \times n}$ , η νόρμα Frobenius υπολογίζεται ως:

$$\|A\|_F^2 = \sqrt{\sum_1^m \sum_1^n |\alpha_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A * A)} \tag{4.48}$$

**Παραδοχές των TLS** Οι νέες παραδοχές του προβλήματος έχουν ως εξής:

- οι αβεβαιότητες όλων των μετρούμενων ποσοτήτων μοντελοποιούνται ως γκαουσιανός λευκός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας διακύμανσης (i)
- οι παρατηρήσεις τόσο του  $\hat{X}$  όσο και του  $z$  δεν εμπεριέχουν συστηματικά σφάλματα (ii)

### 4.3.2 TLS: Διατύπωση του προβλήματος εκτίμησης παραμέτρων

Στα πλαίσια της θεωρίας των TLS, η εκτίμηση παραμέτρων μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimation,[51]). Σκοπός μας είναι η μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανότητας των εκτιμώμενων ποσοτήτων υπό τον περιορισμό της συμφωνίας αυτών με την γενικευμένη εξίσωση του μοντέλου (4.32). Έτσι, έχουμε:

$$[\hat{X}_{ML}|\hat{y}_{ML}] = \mathbf{arg\ max}_{[X\ y]} \left\{ p\left( [X_m\ z] \middle| [X\ y] \right) \right\}$$

υπό τον περιορισμό:

$$[X|y] \begin{bmatrix} \theta \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.49)$$

ή βάσει της (4.43):

$$[\hat{\Delta X}_{ML}|\hat{\varepsilon}_{ML}]^* = \mathbf{arg\ max}_{[\Delta X|\varepsilon]^*} \left\{ p\left( [\Delta X|\varepsilon]^* \right) \right\}$$

υπό:

$$\left( [X_m|z]^* - [\Delta X|\varepsilon]^* \right) C \begin{bmatrix} \theta \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.50)$$

Υπό την ισχύ της παραδοχής των κανονικά κατανομημένων σφαλμάτων, η συνάρτηση πιθανότητας της (4.51) μπορεί να γραφεί και ως:

$$\begin{aligned} p\left( [\Delta X|\varepsilon]^* \right) &= \prod_{i=1, j=1}^{i=m, j=n_p+1} p\left( [\Delta X|\varepsilon]^*(i, j) \right) \\ &= \prod_{i=1, j=1}^{i=m, j=n_p+1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2}([\Delta X|\varepsilon]^*(i, j))^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m(n_p+1)}{2}}} \exp\left( -\frac{1}{2} \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(i,j)=(m,n_p+1)} ([\Delta X|\varepsilon]^*(i, j))^2 \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m(n+1)}{2}}} \exp\left( -\frac{1}{2} \left\| [\Delta X|\varepsilon]^* \right\|_F^2 \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Εφαρμόζοντας νεπέριους λογάριθμους στην σχέση (4.51) η ελαχιστοποίηση της (??) γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
[\hat{\Delta}X_{ML}|\hat{\varepsilon}_{ML}]^* &= \arg \max \left\{ p([\Delta X|\varepsilon]^*) \right\} \\
&= \arg \min \left\{ \ln \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m(n_p+1)}{2}}} \exp \left( -\frac{1}{2} \|\Delta X|\varepsilon]^*\|_F^2 \right) \right) \right\} \\
&= \arg \min \left\{ \frac{m(n_p+1)}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \|\Delta X|\varepsilon]^*\|_F^2 \right\} \\
&= \arg \min \left\{ \|\Delta X|\varepsilon]^*\|_F^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Ήτοι, το πρόβλημα της εκτίμησης παραμέτρων μπορεί να γραφεί ως ένα πρόβλημα μείωσης της τάξης (rank reduction) της επαυξημένης μήτρας του συστήματος με όρους απόστασης Frobenius

Τελικά, θεωρώντας πως  $F = I$ , έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\min_{\hat{\theta}, \Delta \hat{X}, \hat{\varepsilon}} \left\| [\Delta X|\varepsilon]^* \right\|_F \\
\text{υπό : } & \left( [X_m|z]^* - [\Delta \hat{X}|\hat{\varepsilon}]^* \right) C \begin{bmatrix} \theta \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

### 4.3.3 TLS: Επίλυση της ελαχιστοποίησης με χρήση Διάσπασης Ιδιαζουσών Τιμών (Singular Value Decomposition)

Η λύση στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης των TLS επέρχεται με την χρήση της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών (Singular Value Decomposition- SVD) στον εκτιμώμενο επαυξημένο πίνακα της (4.33).

Ήτοι, θεωρούμε:

$$[X_m|z] C^{-1} = U \Sigma V^T = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{n_p} & \\ - & - & - & - & \sigma_{n_p+1} \\ & & 0 & & - \end{bmatrix} V^T \tag{4.54}$$

όπου

$U$  : η αριστερή μήτρα ιδιοδιανυσμάτων. Οι στήλες της είναι τα ιδιοδιανύσματα του  $[X_m|z][X_m|z]^T$

$V$  : η δεξιά μήτρα ιδιοδιανυσμάτων. Οι στήλες της είναι τα ιδιοδιανύσματα του  $[X_m|z]^T[X_m|z]$

$\Sigma$  : η διαγώνια μήτρα ιαζουσών τιμών, διατεταγμένες απο την μεγαλύτερη στην μικρότερη

Στην περίπτωση πινάκων πλήρους ταξης, όλες οι ιδιάζουσες τιμές είναι μη μηδενικές.

Σύμφωνα με την θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας, η καλύτερη  $k$ -τάξης προσέγγιση μίας μήτρας (rank deficient matrix) με όρους απόστασης Frobenius είναι ([1],[51]):

$$\min_{\text{rank}(N)=k} \|M - N\|_F^2 = \|M - M_k\|_F^2 = \sqrt{\sum_{j=k+1}^n \sigma_j^2} \quad (4.55)$$

Βάσει αυτών, καταλήγουμε στους παρακάτω πίνακες μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood) :

$$[\hat{\Delta}X|\hat{\varepsilon}] C^{-1} = U \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ - & - & - & - & \sigma_{n_p+1} \\ & & 0 & & - \end{bmatrix} V^T \quad (4.56)$$

$$[\hat{X}|\hat{y}] C^{-1} = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{n_p} & \\ - & - & - & - & 0 \\ & & 0 & & - \end{bmatrix} V^T \quad (4.57)$$

Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα απο τις (4.57),(4.33),(4.56) και αντικαθιστώντας στην (??) έχουμε:

$$\{[\hat{X}|\hat{y}] C^{-1}\} C \begin{bmatrix} \theta_{TLS} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.58)$$

ή , βάσει της Γραμμικής Άλγεβρας :

$$C \begin{bmatrix} \theta_{TLS} \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_{\ker}([\hat{X}|\hat{y}] C^{-1}) \quad (4.59)$$

Σύμφωνα με τις [1],[51], ο πυρήνας του πίνακα  $[\hat{X}|\hat{y}] C^{-1}$  ταυτίζεται με την τελευταία στήλη της δεξιάς μήτρας ιδιοδιανυσμάτων  $v_{n_p+1}$ .

Τελικά:

$$C \begin{bmatrix} \theta_{TLS} \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda v_{n_p+1} \quad (4.60)$$

ή

$$\boxed{\begin{bmatrix} \theta_{TLS} \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda C^{-1} v_{n_p+1}} \quad (4.61)$$

Ο παράγοντας κανονικοποίησης  $\lambda$  χρησιμοποιείται προκειμένου το τελευταίο στοιχείο της μήτρας  $C^{-1}v_{n+1}$  να ισούται με -1.

#### 4.3.4 Μήτρα Συνδιακύμανσης των παραμέτρων

Σχετικά με την μήτρα συνδιακύμανσης που συνοδεύει το διάνυσμα των TLS παραμέτρων, η [99] την προσεγγίζει ως:

$$\text{cov}(\theta_{TLS}) = [\theta_0 \quad -1] C^T C \begin{bmatrix} \theta_0 \\ -1 \end{bmatrix} [X_0^T X_0]^{-1} \quad (4.62)$$

η αναδρομικά:

$$\text{cov}(\theta_{TLS}) \approx \frac{\sigma_{n_p+1}^2}{N} (1 + \|\theta_{TLS}\|)^2 (X_m^T X_m - \sigma_{n_p+1}^2 I)^{-1} \quad (4.63)$$

#### 4.3.5 Υπολογισμός Εκτιμώμενης Μήτρας Σφαλμάτων

Στην περίπτωση των λευκών γκαουσιανών σφαλμάτων, η μήτρα μέγιστης πιθανοφάνειας των σφαλμάτων υπολογίζεται ως [79]:

$$\delta \hat{D} = [\hat{\Delta} X | \varepsilon] = -D(v_k v_k^T) \frac{(C^T C)}{v_k^T (C^T C) v_k} \quad (4.64)$$

όπου  $v_k$  γραμμικός συνδυασμός των τελευταίων  $n_p - k$  δεξιών ιδιοδιανυσμάτων. Στην περίπτωση επαρκούς διέγερσης των μεταβλητών πρόβλεψης ( $x_i$ ) το διάνυσμα  $v_k$  ισούται με το δεξιότερο διάνυσμα της μήτρας  $V$ . Πιο λεπτομερής ανάλυση για αυτό το ζήτημα θα γίνει στην επόμενη ενότητα.

#### 4.3.6 Το πρόβλημα της Ανεπαρκούς Διέγερσης Εισόδου του Συστήματος

**4.3.6.1 Γενικά** Μία βασική ανεπάρκεια των εκτιμητών TLS -ειδικά σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου- είναι η Ανεπαρκής Διέγερση της Εισόδου (Insufficient System Excitation - ISE). Αυτό συνίσταται στο χαμηλό πληροφοριακό περιεχόμενο ή στην περιορισμένη μεταβλητότητα των σημάτων εισόδου (που συνιστούν την επαυξημένη μήτρα συστήματος). Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα σήματα εξόδου των εκτιμητών (διάνυσμα παραμέτρων) παρουσιάζουν απρόβλεπτες χρονικές μεταβολές χωρίς φυσικό νόημα, επιστρέφοντας προκατειλημμένες (biased) εκτιμήσεις. Τέτοια φαινόμενα μπορούν να προκαλέσουν

ακόμα και την κατάρρευση των αλγορίθμων (crash) εξαιτίας αριθμητικών σφαλμάτων. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ανεπαρκούς διέγερσης της εισόδου αφορά σε περιπτώσεις μικρής και σταθερής εκτροπής των επιφανειών ελέγχου ( $\delta e, \delta a, \delta r$ ) για μεγάλα χρονικά διαστήματα σε συνθήκες ονομαστικής πτήσης. Υπό αυτό το καθεστώς, οι εκτιμητές αποτυγχάνουν να αποδώσουν τις σωστές τιμές παραμέτρων γιατί τα σήματα αυτά δεν ξεχωρίζουν σε πληροφοριακό περιεχόμενο από τον σταθερό, μοναδιαίο προβλέπτη (constant bias,  $\theta_0$ ).

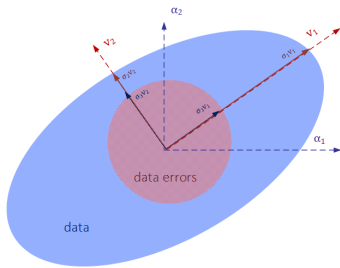
Η ανεπαρκής διέγερση της εισόδου γίνεται εμφανής και με όρους ιδιαζουσών τιμών ( $\sigma_i$ ). Συγκεκριμένα, το χαμηλό πληροφοριακό περιεχόμενο ενός υποσυνόλου των προβλεπτών οδηγεί σε περίπου ίσες τιμές των τελευταίων  $n_p + 1 - k$  ιδιαζουσών τιμών:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_{k+1} \simeq \sigma_{k+2} \simeq \dots \simeq \sigma_{n_p+1} \quad (4.65)$$

Κατ' επέκταση, η ελαχιστοποίηση της (4.53) ικανοποιείται από οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των τελευταίων  $n_p + 1 - k$  φασματικών κατευθύνσεων.

$$\begin{bmatrix} \theta_{TLS} \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_{k+1} C^{-1} v_{k+1} + \dots + \lambda_{n_p+1} C^{-1} v_{n_p+1} \quad (4.66)$$

Επομένως, υπό αυτές τις συνθήκες, η μοναδικότητα της λύσης παραβιάζεται καθώς όλες οι παραπάνω λύσεις για  $[\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_{n_p+1}] \in \mathbb{R}$  είναι αποδεκτές.



Εικόνα 18: Ιδιάζουσες Τιμές και Δεξιά Ιδιοδιανύσματα. Ένα τυπικό παράδειγμα ISE (σχήμα από [51])

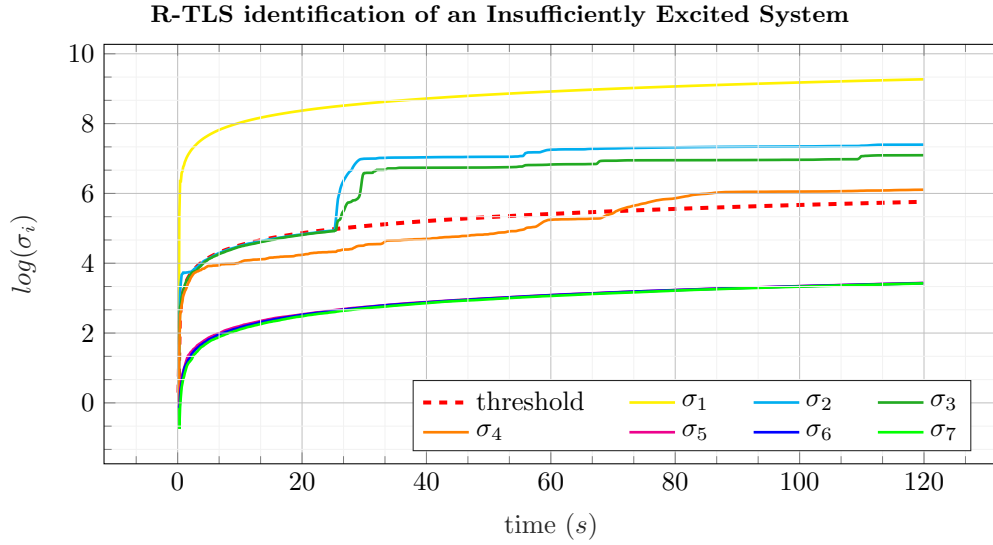
Εν γένει, οι ιδιάζουσες τιμές είναι ένας σημαντικός δείκτης της διέγερσης του συστήματος. Η παραγοντοποίηση SVD διασπά τον χώρο της επαυξημένης μήτρας σε κάθετες, γραμμικώς ανεξάρτητες κατευθύνσεις (singular directions/φασματικές κατευθύνσεις). Κάθε φασματική κατεύθυνση συνεισφέρει ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες στην εξήγηση του μοντέλου. Συνήθως, λόγω συσχέτισης, οι φασματικές κατευθύνσεις δεν αντιστοιχούν αμφιμονοσήματα σε μία στήλη της επαυξημένης μήτρας συστήματος. Από την άλλη, τα σφάλματα συνεισφέρουν σε όλες τις κατευθύνσεις κατά έναν όρο:

$$\forall_k \left( \sigma_k^2 \right)_{errors} = m - n_p \quad (4.67)$$

όπου  $m$  ο δείκτης της τρέχουσας μέτρησης.

Μια τυπική κατάσταση ISE φαίνεται στην Εικόνα 18. Η μωβ έλλειψη περιγράφει τον χώρο των δεδομένων ενώ ο κόκκινος πυρήνας απεικονίζει τον χώρο των σφαλμάτων. Η εν λόγω πληροφορία αποτελείται από δύο φασματικές κατευθύνσεις. Όπως φαίνεται, το διάνυσμα της κατεύθυνσης 1 ( $\sigma_1 v_1$ ) έχει ξεπεράσει σε μέτρο τον πυρήνα των σφαλμάτων. Αντίθετα, η δεύτερη κατεύθυνση ( $\sigma_2 v_2$ ) δεν εμπεριέχει υψηλό πληροφοριακό περιεχόμενο και δεν έχει ξεπεράσει τα όρια του θορύβου. Στις περιπτώσεις αυτές, η συγκεκριμένη κατεύθυνση πρέπει να απορριφθεί. Η Εικόνα 19 δείχνει την εξέλιξη των ιδιαζουσών τιμών ενός συστήματος με Ανεπάρκεια Διέγερσης Εισόδου (ISE). Οι τελευταίες ιδιάζουσες τιμές  $\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7$  έχουν σχεδόν ίση τιμή.





Εικόνα 19: Εξέλιξη Ιδιαζουσών Τιμών ενός συστήματος με ISE

**4.3.6.2 Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών - Principal Component Analysis** Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με χρήση της ανάλυσης Κυρίων Συνιστωσών (Principal Component Analysis-PCA). Η τεχνική αυτή περιορίζει το πληροφοριακό περιεχόμενο της επαυξημένης μήτρας στις επαρκώς διεγερμένες φασματικές κατευθύνσεις. Ο περιορισμός αυτός πραγματοποιείται με περαιτέρω μείωση της τάξης της επαυξημένης μήτρας χρησιμοποιώντας τις πρώτες  $k$  ιδιάζουσες τιμές για τις οποίες ισχύει:

$$\sigma_k > (S/n + 1)\sqrt{m - n_p} > \sigma_{n_p+1} \quad \forall k = 1, \dots, n_p \quad (4.68)$$

όπου

$S/n$  : ο ελάχιστος λόγος σήματος προς θόρυβο προκειμένου που επιτρέπει την είσοδο της φασματική διεύθυνσης στο μοντέλο

$m$  : ο δείκτης τρέχουσας μέτρησης

ήτοι , ο ακέραιος αριθμός  $k$  ορίζεται ως το πλήθος των στοιχείων του παρακάτω συνόλου:

$$S_{SE} = \left\{ \sigma_j : \sigma_j \geq (S/n + 1)\sqrt{N - n_p}, j \leq n_p \right\} \quad (4.69)$$

$$k = \text{card}(S_{SE}) \quad (4.70)$$

Η παράμετρος  $S/n$  εξαρτάται από τις ειδικές ανάγκες του μοντέλου. Οι τυπικές τιμές της παραμέτρου αυτής κυμαίνονται στο διάστημα  $[1, 10]$ . Εν τέλει, η επαυξημένη μήτρα διαχωρίζεται σε τρία μέρη: ένα επαρκώς διεγερμένο ( $se$ ), ένα μη επαρκώς διεγερμένο ( $v$ )

και στα εκτιμώμενα σφάλματα:

$$[X_m|z]^* = \sum_{j=1}^{n_p+1} u_j \sigma_j v_j^T \quad (4.71)$$

$$[X_{ex}|y_{ex}]^* = \sum_{j=1}^k u_j \sigma_j v_j^T \quad (4.72)$$

$$[X_v|y_v]^* = \sum_{j=k+1}^{n_p} u_j \sigma_j v_j^T \quad (4.73)$$

$$[\hat{\Delta}X|\hat{\varepsilon}]^* = u_{n_p+1} \sigma_{n_p+1} v_{n_p+1}^T \quad (4.74)$$

Όπως διαπιστώθηκε πριν, μη επαρκώς διεγερμένα συστήματα δεν συνοδεύονται με μοναδική λύση για το εκτιμώμενο διάνυσμα παραμέτρων. Αντ' αυτού, ο χώρος των λύσεων εκφράζεται από τον γραμμικό συνδυασμό των  $n_p + 1 - k$  δεξιών ιδιοδιανυσμάτων:

$$\begin{bmatrix} \theta_{PCA} \\ -1 \end{bmatrix} = \mu_{k+1} C^{-1} v_{k+1} + \dots + \mu_{n_p+1} C^{-1} v_{n_p+1} \quad \forall \mu \in \mathfrak{R}^{n_p+1-k} \quad (4.75)$$

Η εξαγωγή μοναδικής λύσης επιτυγχάνεται με την επιβολή ενός πρόσθετου περιορισμού. Εν προκειμένω, από τον χώρο της (4.75), επιλέγεται το διάνυσμα παραμέτρων που ελαχιστοποιεί την παρακάτω σταθμισμένη νόρμα (Weighted Norm Solution):

$$\theta_{PCAMIN} = \min \|W \theta_{PCA}\|_2^2 \quad (4.76)$$

όπου  $W_{n_p \times n_p}$  μία κατάλληλα επιλεγμένη μήτρα βαρών. Τα διαγώνια στοιχεία της μήτρας καθορίζουν την σημαντικότητα κάθε παραμέτρου, ενώ τα υπόλοιπα καθορίζουν την σχέση σημαντικότητας/ιεραρχίας μεταξύ δύο παραμέτρων. Σε περιπτώσεις που δεν υπάρχει καμία παραδοχή ή a priori γνώση για το διάνυσμα των παραμέτρων, θεωρούμε θεωρούμε πως  $W = I_{n_p \times n_p}$ . Η ελαχιστοποίηση της (4.76) επιτυγχάνεται με την επίλυση του ανάλογου προβλήματος Σταθμισμένων Ελαχίστων τετραγώνων:

$$\left( \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{-1} v_{k+1} \dots C^{-1} v_{n_p+1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mu_{k+1} \\ \vdots \\ \mu_{n_p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

ή, με απλούστευση των συμβολισμών:

$$U_W \begin{pmatrix} \mu_{k+1} \\ \vdots \\ \mu_{n_p+1} \end{pmatrix} = \beta_\infty$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \mu_{k+1} \\ \vdots \\ \mu_{n_p+1} \end{pmatrix} = (U_W^T U_W)^{-1} U_W^T \beta_\infty} \quad (4.78)$$

όπου:

$$U_W = \left[ \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & \infty \end{pmatrix} (C^{-1}v_{k+1} \dots C^{-1}v_{n_p+1}) \right]$$

$$\beta_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Σε πρακτικό επίπεδο, στα απειρισμένα στοιχεία ανατίθεται μία μεγάλη σταθερή τιμή (**μεγαλύτερη από  $10^7$** ).

Η μέθοδος PCA συνοδεύεται από την ακόλουθη μήτρα συνδιακύμανσης:

$$\text{cov}_{TLS,PCA} = \left( B_0 + \begin{bmatrix} \theta_{PCA}^T & -1 \end{bmatrix} C^T C \begin{bmatrix} \theta_{PCA} \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ex}^T & X_{ex} \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (4.80)$$

όπου η μήτρα  $B_0$  χρησιμεύει ως άνω όριο.

#### 4.3.7 Αναδρομικός Αλγόριθμοι για εκτιμητές TLS

Σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου, ο υπολογισμός της SVD διάσπασης είναι εξαιρετικά κοστοβόρος από πλευράς υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Γι' αυτόν τον λόγο, αναπτύχθηκαν διάφορες τεχνικές αναδρομικού υπολογισμού των SVD με προσανατολισμό την ελαχιστοποίηση των υπολογιστικών πόρων.

Στην περίπτωση των TLS, η επαυξημένη μήτρα συστήματος κάθε χρονική στιγμή ( $t = t_{k-1}$ ,  $D^*(t_{k-1}) = D_{k-1}^*$ ) παραγοντοποιείται ως:

$$D_{k-1}^* = U_{k-1} \Sigma_{k-1} V_k^T \quad (4.81)$$

Την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή ( $t = t_k$ ) μία νέα σειρά δεδομένων ( $d^*$ ) προστίθεται στην μήτρα  $D$  έτσι ώστε:

$$D_k^* = \begin{pmatrix} D_{k-1}^* \\ d_k^* \end{pmatrix} = U_k \Sigma_k V_k^T \quad (4.82)$$

Μία απλή ακολουθιακή υλοποίηση της παραγοντοποίησης πραγματοποιείται ως:

$$\begin{aligned}
D_k^* &= \begin{pmatrix} D_{k-1}^* \\ d_k^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} U_{k-1} \Sigma_{k-1} V_{k-1}^T \\ d_k^* V_{k-1} V_{k-1}^T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} U_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{k-1} \\ d_k^* V_{k-1} \end{pmatrix} V_{k-1}^T \\
&= \begin{pmatrix} U_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (U_* \Sigma_k V_*^T) V_{k-1}^T \\
&= \left( \begin{pmatrix} U_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_* \right) \Sigma_k (V_*^T V_{k-1}^T) \\
&= U_k \Sigma_k V_k^T
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Για τις μεθόδους TLS-GTLS, η γνώση της μεταβλητού μεγέθους μήτρας  $U$  δεν εξυπηρετεί με κάποιο τρόπο τους εκτιμητές μας και γι'αυτό δεν υπολογίζεται. Κατ' επέκταση, η ακολουθιακή παραγοντοποίηση SVD ελαττώνεται στις παρακάτω σχέσεις:

$$\Sigma_k = U_*^T \begin{pmatrix} \Sigma_{i-1} \\ x_k V_{k-1} \end{pmatrix} V_* \tag{4.84}$$

$$V_k = V_{k-1} V_* \tag{4.85}$$

όπου πλέον η παραγοντοποίηση γίνεται σε μία σταθερού μεγέθους μήτρα διαστάσεων  $(n_p + 2) \times (n_p + 1)$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο, μειώνονται δραματικά οι απαιτούμενες πράξεις όπως και οι απαιτήσεις σε υπολογιστικούς πόρους, επιτρέποντας έτσι την ακολουθιακή υλοποίηση σε πραγματικό χρόνο.

Στην περίπτωση χρήσης εκθετικού παραθύρου παρατήρησης με παράμετρο  $\lambda_F$  οι παραπάνω σχέσεις έχουν την μορφή:

$$D_k^* = \begin{pmatrix} \lambda_F D_{k-1}^* \\ d_k^* \end{pmatrix} = U_k \Sigma_k V_k^T \tag{4.86}$$

$$\Sigma_k = U_*^T \begin{pmatrix} \lambda_F \Sigma_{i-1} \\ x_k V_{k-1} \end{pmatrix} V_* \tag{4.87}$$

Ως προς τα υπόλοιπα, η ακολουθιακή υλοποίηση των εκτιμητών βασίζεται στην ανάλυση της προηγούμενης ενότητας. Η διαδικασία περιγράφεται συνολικά στους Αλγορίθμους 1, 2.

---

**Algorithm 1** Recursive PCA-GTLS

---

```
1: Initialize  $C, W, \frac{s}{n}, \lambda_F, N_c \leftarrow 0$ 
2: input:  $x_m(t), z(t)$ 
3: loop
4:    $d^* \leftarrow [x_m(t) \ z(t)] C^{-1}$ 
5:    $[S_t, V_t] \leftarrow \mathbf{R}_{\text{SVD}}(d^*, S_{t-1}, V_{t-1}, \lambda_F)$ 
6:   if  $N_c > n_p$  then
7:      $k \leftarrow \text{card}\{\sigma_i(t) > (1 + \frac{s}{n}) \sqrt{N_c - n_p}\}$ 
8:     if  $k < n_p$  then
9:        $\hat{\theta}_t \leftarrow \min \|W\theta_{PCA}\|_2^2$ 
10:    else
11:       $\hat{\theta}_t \leftarrow \mu C^{-1} v_{n_p+1}(t)$ 
12:    end if
13:  end if
14:   $N_c \leftarrow N_c + 1$ 
15:  estimate  $\text{cov}\hat{\theta}$  using eq. (4.80)
16: end loop
```

---

---

**Algorithm 2** Recursive SVD

---

```
1: constant:  $e_M$  (machine precision)
2: procedure  $\mathbf{R}_{\text{SVD}}(d^*, S_{t-1}, V_{t-1}, \lambda_F)$ 
3:    $\pi \leftarrow V_{t-1} d^*$ 
4:    $M_0 \leftarrow \begin{pmatrix} \lambda_F S_{t-1} \\ \pi^T \end{pmatrix}$ 
5:    $QR \leftarrow qr(d^* - V_{t-1} \pi)$ 
6:    $\zeta \leftarrow \sqrt{\det(R^T R)}$ 
7:   if  $\zeta < e_M$  then
8:      $U_* S_* V_*^T \leftarrow \text{svd}(M_0)$ 
9:      $S_t \leftarrow S_*(1 : n_p, 1 : n_p)$ 
10:  else
11:     $U_* S_t V_*^T \leftarrow \text{svd}(M_0, 'econ')$  ▷ thin SVD
12:  end if
13:   $V_t \leftarrow V_{t-1} V_*$ 
14: end procedure
```

---

### 4.3.8 PCA-TLS: Αποτελέσματα με χρήση προσομοίωσης

Βάσει των όσων προηγήθηκαν, παρουσιάζουμε ενδεικτικές εξόδους των εκτιμητών σε περιβάλλον προσομοίωσης. Τα σήματα των ψευδο-αισθητήρων αλλοιώθηκαν με λευκό θόρυβο κατάλληλης διακύμανσης, βάσει των αναμενόμενων αβεβαιοτήτων του αισθητηριακού συστήματος. Εξετάζουμε την αποτελεσματικότητα των σχεδιασμένων αλγορίθμων

τόσο για batch όσο και για on-line υλοποιήσεις. Όλες οι δοκιμαστικές πτήσεις πραγματοποιήθηκαν υπό το καθεστώς περιβαλλοντικών διαταραχών (σταθερός άνεμος και ριπές Dryden).

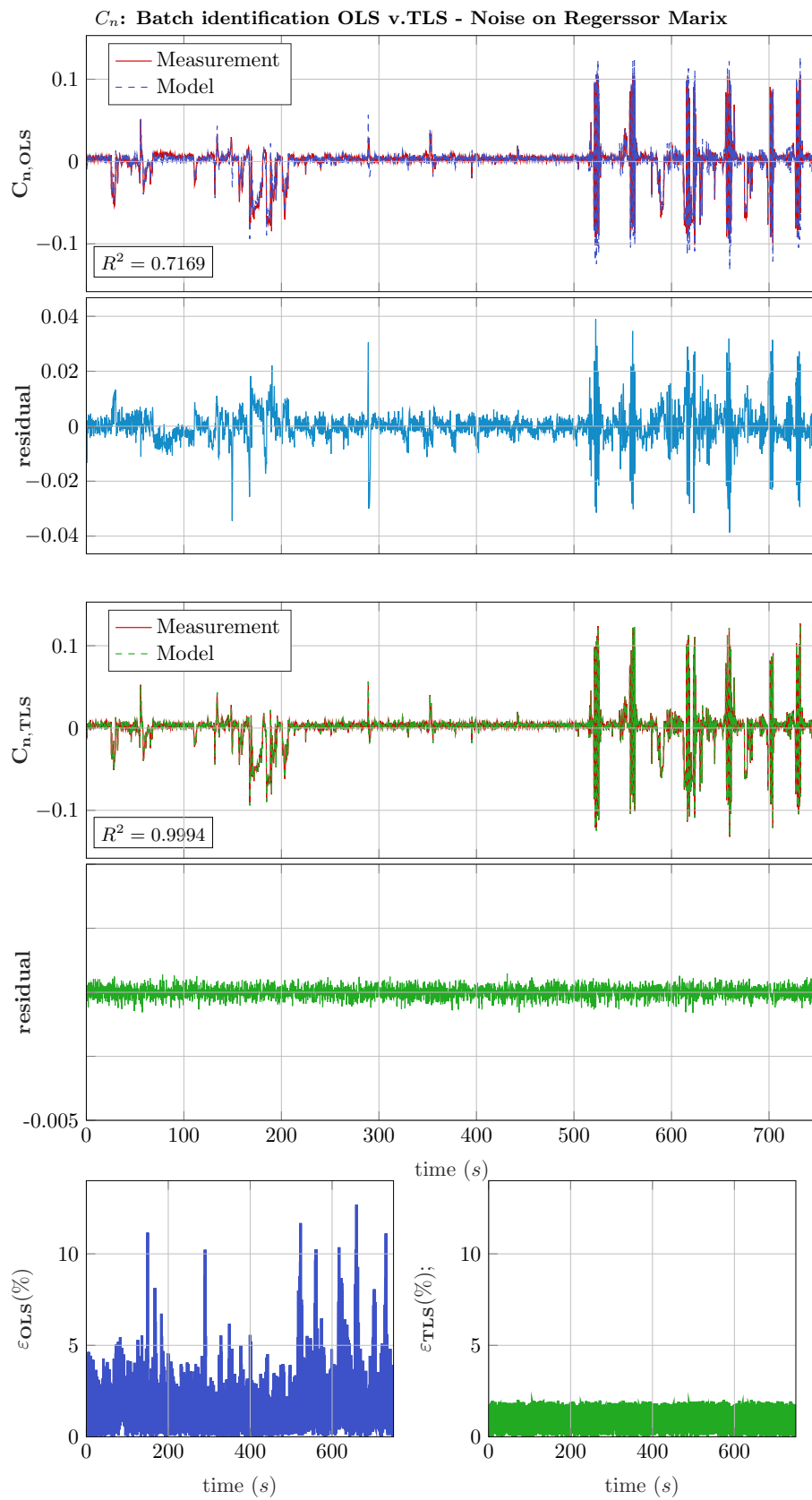
**4.3.8.1 Batch Μέθοδος** Πρώτα εξετάζουμε την μή αναδρομική μορφή των αλγορίθμων. Στην εικόνα 20 φαίνονται τα εκτιμώμενα μοντέλα OLS, TLS για τον συντελεστή ροπής εκτροπής ( $C_n$ ). Το εκτιμώμενο μοντέλο έχει την μορφή:

$$C_n = C_{n0} + C_{n\beta}\beta + C_{np_n}p_n + C_{nr_n}r_n + C_{n\delta\alpha}\delta\alpha + C_{n\delta r}\delta r \quad (4.88)$$

Είναι εμφανές πως η αλλοίωση της μήτρας προβλεπτών ( $X$ ) με προσθετικό θόρυβο επηρεάζει σημαντικά τον εκτιμητή OLS. Το αντίστοιχο residual περιλαμβάνει σημαντική ποσότητα μή μοντελοποιημένης πληροφορίας ενώ το σταθμισμένο σχετικό σφάλμα ( $\varepsilon_{OLS}$ ) ξεπερνάει σε κατά τύπους το 10%. Αντίθετα, ο εκτιμητής TLS φέρεται να μην επηρεάζεται από τις αβεβαιότητες της μήτρας προβλεπτών. Ο εκτιμητής συγκλίνει στο μοντέλο αναφοράς ενώ το αντίστοιχο residual έχει καθαρά τη μορφή λευκού θορύβου. Το σταθμισμένο σχετικό σφάλμα TLS ( $\varepsilon_{TLS}$ ) κυμαίνεται στα όρια του 2%, σημαντικά χαμηλότερα από το σφάλμα του αντίστοιχου εκτιμητή OLS. Οι εκτιμώμενοι παράμετροι σε σχέση με το προκαθορισμένο διάνυμα αναφοράς της προσομοίωσης φαίνονται στον Πίνακα 6.

	$C_{n0}$	$C_{n\beta}$	$C_{np_n}$	$C_{nr_n}$	$C_{n\delta\alpha}$	$C_{n\delta r}$
$\theta_{ref}$	<b>0.00</b>	<b>0.25</b>	<b>0.022</b>	<b>-1.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.10</b>
$\theta_{OLS}$	<b>-0.0034</b>	<b>0.0835</b>	<b>-0.0057</b>	<b>-0.1067</b>	<b>-0.0011</b>	<b>0.0844</b>
$\delta\theta_{OLS}(\pm 1\sigma)$	0.0009	0.0056	0.00105	0.0169	0.0012	0.0011
$\theta_{TLS}$	<b>0.0118</b>	<b>0.2509</b>	<b>0.0121</b>	<b>-1.0129</b>	<b>-0.0001</b>	<b>0.100</b>
$\delta\theta_{TLS}(\pm 1\sigma)$	0.0009	0.0078	0.0084	0.0334	0.001	0.0011

Πίνακας 6:  $C_n$  : Εκτιμώμενες παράμετροι με τις μεθόδους OLS και TLS



Εικόνα 20:  $C_n$ : Μη Αναδρομική εκτίμηση των παραμέτρων της ροπής εκτροπής. Σύγκριση μεταξύ OLS και TLS μεθόδων

**4.3.8.2 On-line Μέθοδος** Στην υποενότητα αυτή, εξετάζουμε την επίδοση των εκτιμητών OLS, TLS σε υλοποιήσεις πραγματικού χρόνου (real time) με χρήση προσομοιωτή. Για άλλη μία φορά, η μήτρα προβλεπτών κατασκευάζεται από ψευδο-αισθητηριακά δεδομένα, αλλοιωμένα με τις προσδοκώμενες αβεβαιότητες.

Η on-line υλοποίηση TLS επιτρέπει την αξιολόγηση του συχνοτικού περιεχομένου και της διέγερσης των σημάτων εισόδου. Η επαρκής διέγερση των σημάτων εισόδου επιτυγχάνεται με εγκάρσιους και διαμήκεις ελιγμούς που φέρουν υψηλό συχνοτικό/πληροφοριακό περιεχόμενο. Οι χειρισμοί πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε να καταγραφεί όλο το αεροδυναμικό φάσμα του  $\alpha/\phi$ ους. Η αποτελεσματικότητα των ελιγμών αξιολογείται με την παρακολούθηση της χρονικής εξέλιξης των ιδιαζουσών τιμών.

Στην εικόνα 21 εξετάζεται η περίπτωση των παραμέτρων του συντελεστή της οπισθέλκουσας ( $C_D$ ). Το μοντέλο αναφοράς έχει την μορφή:

$$C_D = C_{D0} + C_{D\alpha}\alpha + C_{D\alpha^2}\alpha^2 + C_{Dq_n}q_n + C_{D\delta\epsilon}\delta\epsilon \quad (4.89)$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, συγκρίνουμε την επίδοση των on-line υλοποιήσεων των OLS, TLS εκτιμητών. Λαμβάνουμε επίσης υπόψη το ζήτημα της επάρκειας διέγερσης. Όπως βλέπουμε, ο εκτιμητής TLS συγκλίνει στις τιμές αναφοράς, αμέσως μόλις όλες οι ιδιάζουσες τιμές ξεπεράσουν το προκαθορισμένο κατώφλι. Ακόμα και στην περίπτωση μη λευκού θορύβου -προβλέπτης  $\alpha^2$ , ο εκτιμητής συγκλίνει μετά από εγκάρσιους ελιγμούς (maneuvers) μεγάλου πλάτους και υψηλού συχνοτικού περιεχομένου ( $t_{se} = 255s$ ). Η σκιασμένη περιοχή αφορά το χρονικό διάστημα της επαρκούς διέγερσης της εισόδου, όπως αυτή αναλύθηκε στην ενότητα των PCA-TLS. Αντίθετα, ο εκτιμητής OLS αποτυγχάνει να συγκλίνει στο διάνυσμα αναφοράς - ακόμα και μετά το πέρας μεγάλου χρονικού διαστήματος που περιλαμβάνει πληθώρα ελιγμών.

Τα επόμενα δύο παραδείγματα αφορούν μόνο τους εκτιμητές TLS καθώς έχει πλέον διαπιστωθεί η πολύ καλύτερη επίδοση τους. Οι αλγόριθμοι εξετάζονται για τις περιπτώσεις του εγκάρσιου μοντέλου και των ροπών.

Η εικόνα 22 παρουσιάζει την περίπτωση της εκτίμησης του μοντέλου της πλάγιας δύναμης. Η δομή του μοντέλου αναφοράς έχει ως:

$$C_Y = C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Yp_n}p_n + C_{Yr_n}r_n + C_{Y\delta\alpha}\delta\alpha + C_{Y\delta r}\delta r \quad (4.90)$$

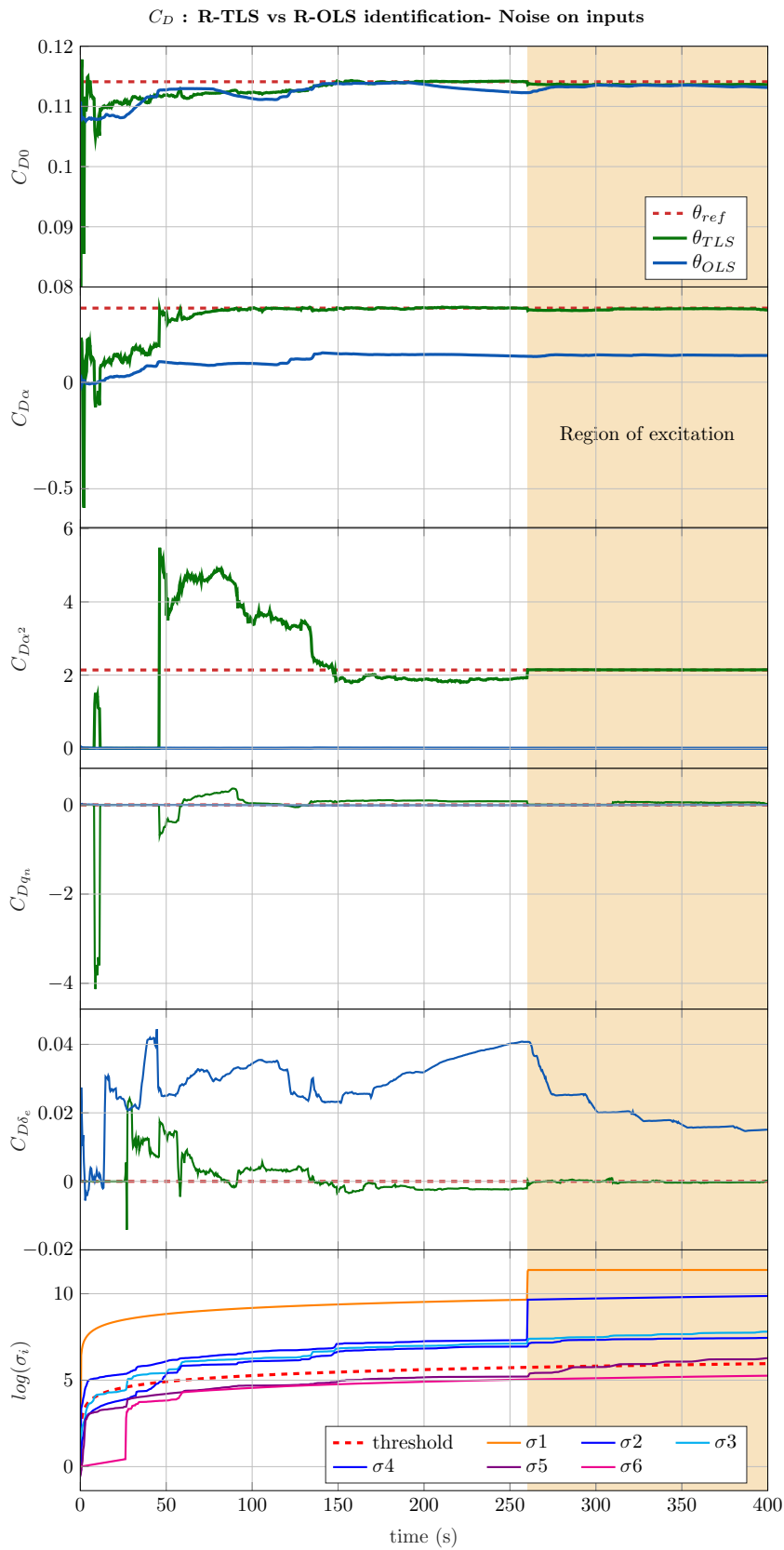
Η σύγκλιση των εκτιμώμενων παραμέτρων είναι επιτυχής αλλά πιο αργή εξαιτίας της χαμηλότερης διέγερσης του εγκάρσιου άξονα.

Τέλος, εξετάζουμε μία περίπτωση εκτίμησης συντελεστή ροπής. Στην εικόνα 23 βλέπουμε την εξέλιξη της διαδικασίας εκτίμησης των παραμέτρων της ροπής πρόνευσης. Το μοντέλο αναφοράς είναι:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{mq_n}q_n + C_{m\delta\epsilon}\delta\epsilon \quad (4.91)$$

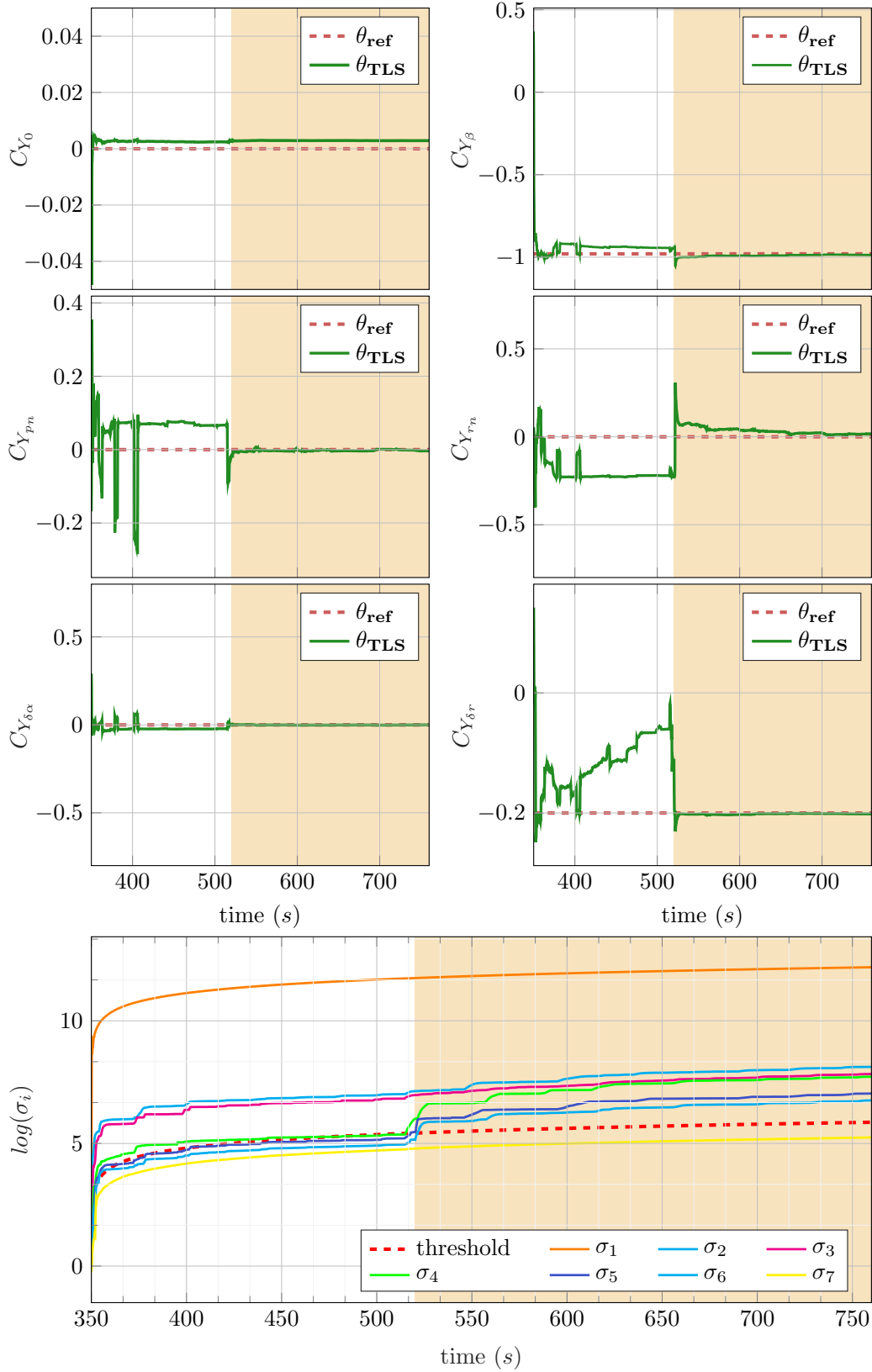
Όπως παρατηρούμε, η εκτίμηση είναι επιτυχής και με σχετικά ταχεία σύγκλιση.





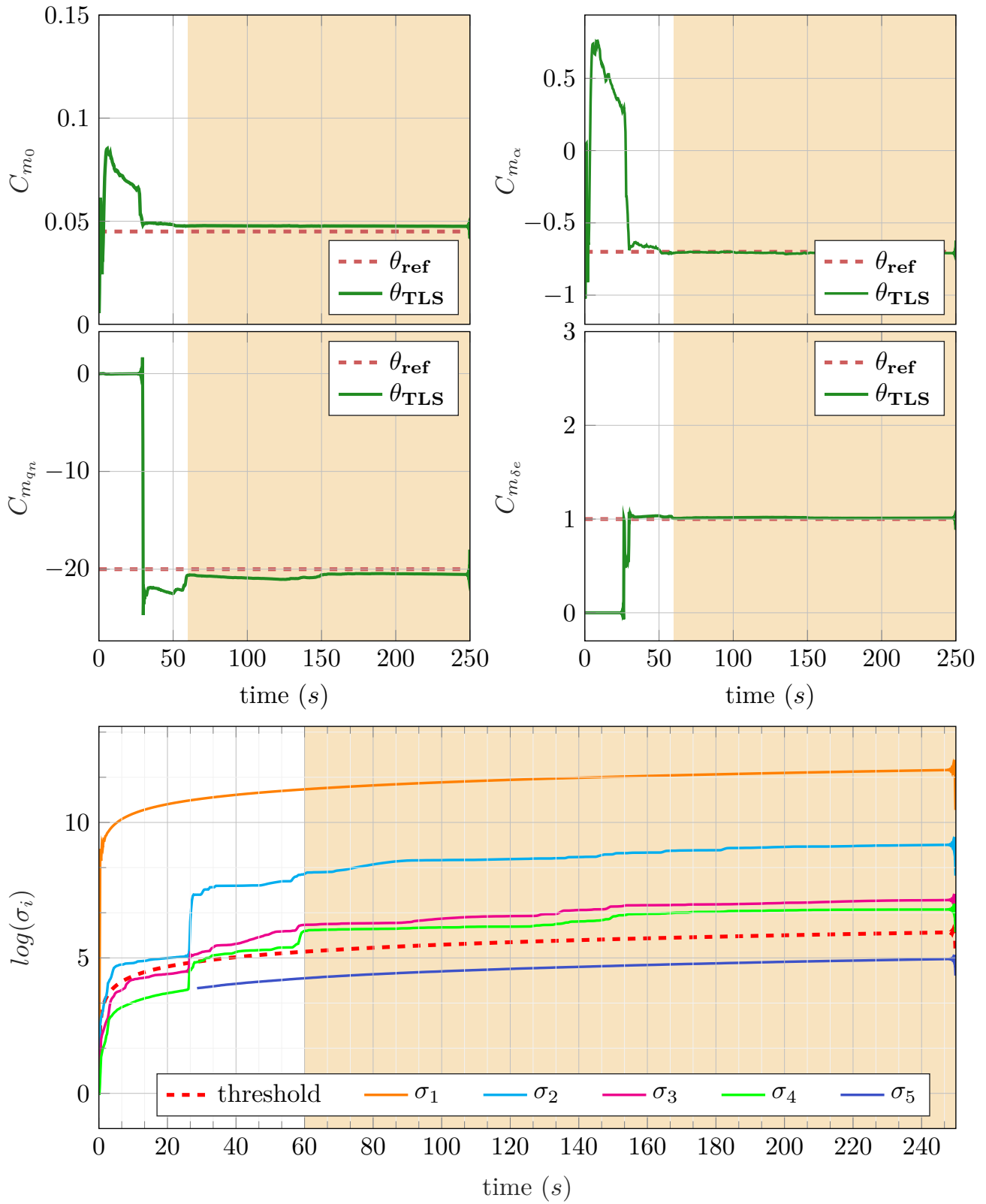
Εικόνα 21:  $C_D$ : on-line εκτίμηση παραμέτρων του συντελεστή οπισθέλκουσας. Σύγκριση των μεθόδων OLS, TLS. Η σκιασμένη περιοχή υποδεικνύει την κατάσταση επαρκούς διεγερσης του συστήματος με βάση τις ιδιάζουσες τιμές.

$C_Y$  : R-TLS identification- Noise on inputs



Εικόνα 22:  $C_Y$ : on-line εκτίμηση παραμέτρων της πλάγιας δύναμης με την μέθοδο των TLS.

$C_m$  : R-TLS identification- Noise on inputs



Εικόνα 23:  $C_m$ : on-line εκτίμηση παραμέτρων της ροπής πρόνευσης με την μέθοδο των TLS.

### 4.3.9 Προσαρμογή Εκτιμητών σε δομικές μεταβολές του μοντέλου

**4.3.9.1 Γενικά** Οι υλοποιήσεις των εκτιμητών σε πραγματικό χρόνο πρέπει να είναι σε θέση να εντοπίζουν και να παρακολουθούν εγκαίρως τις αλλαγές στη δυναμική συμπεριφορά και ,κατ' επέκταση, στις παραμέτρους του αεροδυναμικού μοντέλου του αεροσκάφους. Η συγκεκριμένη ιδιότητα είναι απαραίτητη για συστήματα που είναι εμπλουτισμένα με αλγορίθμους διάγνωσης σφαλμάτων/βλαβών είτε σε περιπτώσεις που οι εκτιμητές προσεγγίζουν συστήματα με ραγδαία μεταβαλλόμενη δυναμική.

Όπως αναφέρθηκε στις εισαγωγικές ενότητες, το Αεροδυναμικό Μοντέλο αεροσκαφών σταθερής πτέρυγας δεν είναι απαραίτητα σταθερό υπό διαφορετικές συνθήκες πτήσης. Για παράδειγμα, οι παράμετροι των μοντέλων μπορεί να διαφέρουν όταν πραγματοποιούνται διαφορετικοί ελιγμοί ή όταν η πτητική κατάσταση υπερβαίνει κάποια ονομαστικά όρια (λ.χ. πολύ υψηλές γωνίες προσβολής,  $\alpha$ ). Επιπλέον, επιτρέποντας σε ένα γραμμικό μοντέλο να μεταβάλλεται με τον χρόνο, μπορούμε να επιτύχουμε αποτελεσματική χαμηλής τάξης προσέγγιση ισχυρά μη γραμμικών φαινομένων. Για τους λόγους αυτούς, οι εκτιμητές περιορίζουν τα διαθέσιμα δεδομένα σε ένα εκθετικά σταθμισμένο παράθυρο παρατήρησης με τη χρήση μια παραμέτρου  $\lambda_F$  (παράγοντας εξασθένησης).

Ο παράγοντας εξασθένησης λαμβάνει τιμές στο διάστημα  $(0, 1]$ . Συνήθως αναθέτουμε τιμές πολύ κοντινές στην μονάδα. Στις περιπτώσεις όπου  $\lambda_F = 1$ , ο εκτιμητής λαμβάνει υπόψη του όλες τις διαθέσιμες παρατηρήσεις. Καθώς η τιμή του μειώνεται, το παράθυρο παρατήρησης στενεύει και ο εκτιμητής αναθέτει υψηλότερα βάρη στις πρόσφατες παρατηρήσεις. Χαμηλές τιμές του  $\lambda_F$  μπορούν να οδηγήσουν σε προβλήματα σύγκλισης ή ακόμα και σε απόκλιση. Έτσι, η σωστή επιλογή τιμής για τον παράγοντα εξασθένησης πρέπει να εκφράζει τον συμβιβασμό μεταξύ ταχύτητας σύγκλισης και επάρκειας πληροφορίας.

**4.3.9.2 Χρονοσταθερός Παράγοντας Εξασθένησης-Constant Forgetting Factor-CFF** Οι περισσότερες υλοποιήσεις εκτιμητών με σταθμισμένα εκθετικά παράθυρα παρατήρησης κάνουν χρήση παράγοντα εξασθένησης με σταθερή τιμή. Κατ' επέκταση, η προγενέστερη πληροφορία των εκτιμητών εξασθενεί ανεξάρτητα με την πτητική κατάσταση. Αυτό συχνά μπορεί να οδηγήσει τον εκτιμητή σε απώλεια διέγερσης και να έχει ως αποτέλεσμα την απόκλιση του εκτιμώμενου διανύσματος παραμέτρων. Παρ' όλα αυτά, αν η αλλαγές στο μοντέλο είναι σταδιακές, οι δυνατότητες παρακολούθησης του χρονοσταθερού παράγοντα εξασθένησης είναι ικανοποιητικές.

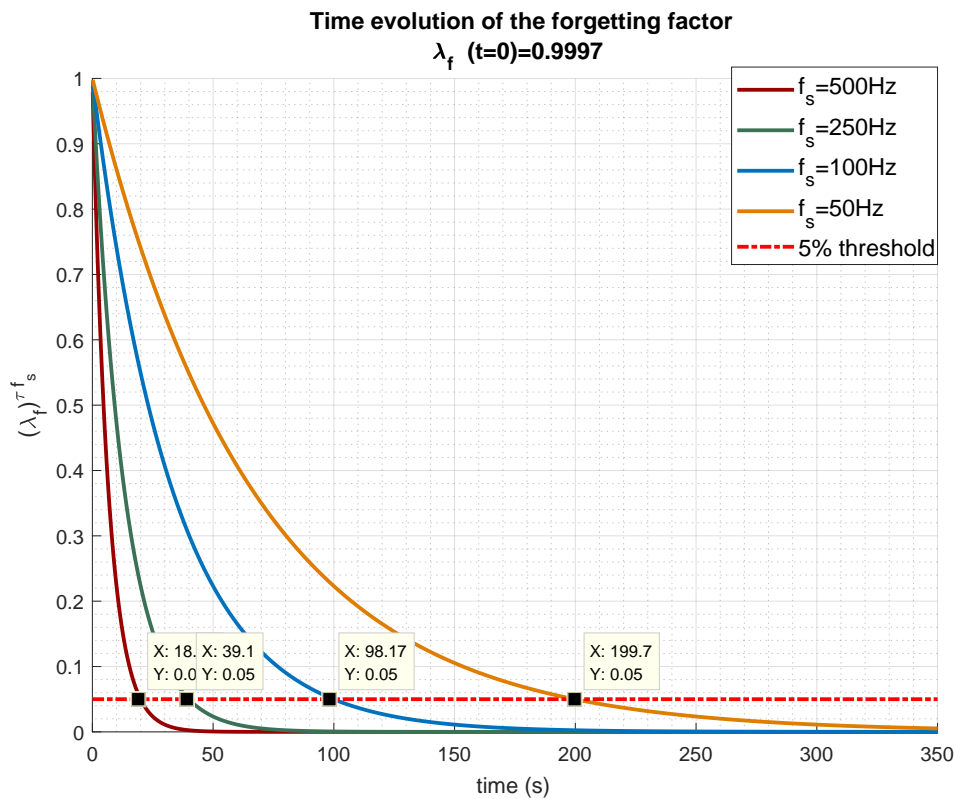
Η σωστή επιλογή παράγοντα εξασθένησης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την συχνότητα δειγματοληψίας ( $f_s$ ). Ο συνδυασμός υψηλού ρυθμού δειγματοληψίας και χαμηλού παράγοντα εξασθένησης ( $\leq 0.99$ ) μπορεί να αποτελέσει συχνά αιτία διακυμάνσεων ή και απόκλισης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μήτρα δεδομένων πολλαπλασιάζεται επαναλαμβανόμενα από έναν παράγοντα  $\lambda_F$ , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι την χρονική στιγμή  $t_0 + \tau$  η παρατήρηση  $d_0$ , που ελήφθη την χρονική στιγμή  $t_0$ , θα έχει πολλαπλασιαστεί με ένα συνολικό βάρος εξασθένησης:

$$w_{x_0} = (\lambda_F)^{\tau f_s} = (\lambda_F)^m \quad (4.92)$$

Παραδεχόμενοι πως η παρατήρηση  $d_0$  παύει να συνεισφέρει στο πληροφοριακό περιεχόμενο του εκτιμητή όταν  $w_{d_0} \leq 0.05$ , καταλήγουμε στο χρονικό κατώφλι πλήρους εξασθένισης:

$$\begin{aligned} (\lambda_F)^{\tau_{5\%} f_s} &= 0.05 \\ \Leftrightarrow \tau_{5\%} &= \frac{\ln(0.05)}{f_s \ln(\lambda_F)} \end{aligned} \quad (4.93)$$

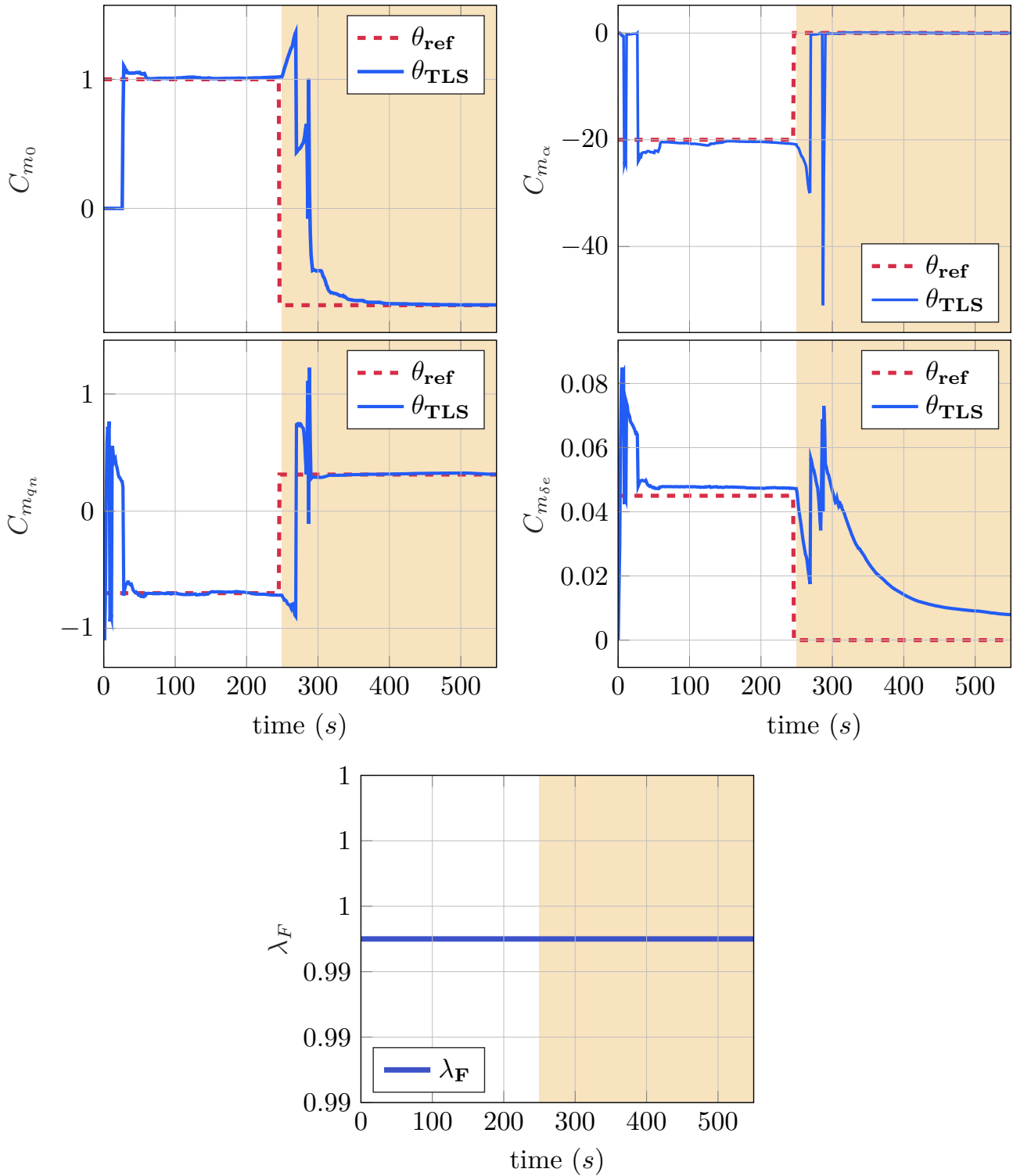
Το κατώφλι πλήρους εξασθένισης για την τυπική τιμή  $\lambda_F = 0.997$  για διάφορες συχνότητες δειγματοληψίας φαίνεται στην Εικόνα 24.



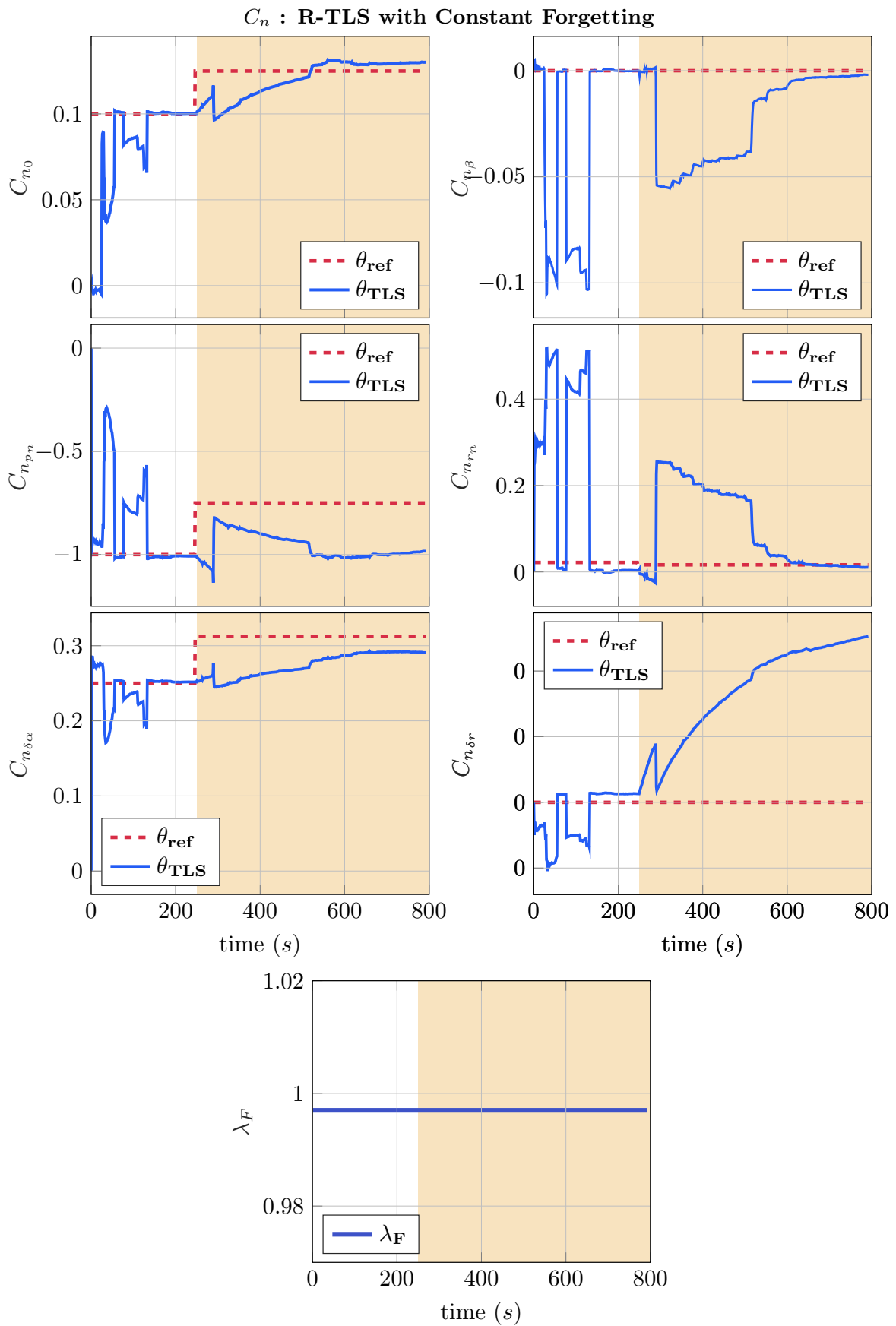
Εικόνα 24: Η χρονική εξέλιξη του βάρους εξασθένισης για διάφορες συχνότητες δειγματοληψίας. Η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή υποδεικνύει το κατώφλι πλήρους εξασθένισης.

**4.3.9.3 CFF: ενδεικτικά αποτελέσματα** Στην παράγραφο αυτή, εξετάζουμε την επίδοση των εκτιμητών TLS με χρήση χρονοσταθερού παράγοντα εξασθένισης. Η πρώτη περίπτωση (Εικόνα 25) αφορά την μοντελοποίηση του συντελεστή ροπής πρόνευσης. Το σύστημα παρουσιάζει μία απότομη αλλαγή του διανύσματος παραμέτρων την  $t = 300s$ . Η τιμή του παράγοντα εξασθένισης είναι  $\lambda_F = 0.9997$ . Η σύγκλιση του εκτιμητή είναι σχετικά ικανοποιητική. Στην δεύτερη περίπτωση όμως (Εικόνα 26), ο εκτιμητής αποτυγχάνει να συγκλίνει στις τιμές αναφοράς καθότι το σύστημα δεν είναι επαρκώς διεγερμένο στον διαμήκη άξονα. Η συνεχής μετακίνηση του παραθύρου δυσχεραίνει την κατάσταση των εκτιμητών διότι μειώνει το διαθέσιμο πληροφοριακό περιεχόμενο.

$C_m$  : R-TLS with Constant Forgetting



Εικόνα 25:  $C_m$ : Προσαρμογή του εκτιμητή σε απότομη αλλαγή των παραμέτρων με χρήση χρονοσταθερού παράγοντα εξασθένισης



Εικόνα 26: Αδυναμία σύγκλισης και προσαρμογής του εκτιμητή λόγω συνεχούς απώλειας πληροφορίας

**4.3.9.4 Προσαρμοστικός Παράγοντας Εξασθένησης -Variable Forgetting Factor** Οι περιορισμένες δυνατότητες του χρονοσταθερού παράγοντα εξασθένησης οδήγησαν την ακαδημαϊκή έρευνα στην ανάπτυξη πιο προσαρμοστικών τεχνικών. Η ανάπτυξη του χρονομεταβλητού παράγοντα εξασθένησης βασίζεται στον εξαναγκασμό ισχυρής μείωσης του  $\lambda_F$  σε περιπτώσεις όπου διαπιστώνονται σημαντικές, ντετερμινιστικές αποκλίσεις του μοντέλου από την μέτρηση. Αυτό επιτυγχάνεται με την αξιολόγηση του διανύσματος υπολειπόμενης πληροφορίας [73],[55].

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας την θεμελιώδη σχέση που περιγράφει την μέτρηση :

$$z(t) = \mathbf{x}(t)\theta(t) + \varepsilon(t) \quad (4.94)$$

επιδιώκουμε η υπολειπόμενη πληροφορία να ανακατασκευάζει την σήμα θορύβου:

$$z(t) - \mathbf{x}(t)\hat{\theta}(t) = \varepsilon(t) \quad \forall t > 0 \quad (4.95)$$

Η ανάπτυξη του προσαρμοστικού παράγοντα εξασθένησης βασίζεται στα a priori και a posteriori διανύσματα υπολειπόμενης πληροφορίας (στο εξής σφάλματα),  $\nu(t)$  και  $r(t)$  αντίστοιχα, όπου:

$$\nu(t) = z(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (4.96)$$

$$r(t) = z(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\hat{\theta}(t) \quad (4.97)$$

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση μας χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της on-line μεθόδου των OLS και έπειτα θα γενικεύσουμε τα συμπεράσματα μας για την περίπτωση των OLS. Υπενθυμίζουμε πως το φίλτρο των on-line OLS έχει την μορφή:

$$\nu(t) = z(t) - x(t)\theta(t-1) \quad (4.98)$$

$$k(t) = \frac{P(t-1)x^T(t)}{\lambda_F(t) + x(t)P(t-1)x^T(t)} \quad (4.99)$$

$$\theta(t) = \theta(t-1) + k(t)\nu(t) \quad (4.100)$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda_F(t)} [P(t-1) - k(t)x(t-1)P(t-1)] \quad (4.101)$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.96),(4.97) και (4.100) καταλήγουμε στη σχέση διάδοσης του a posteriori σφάλματος:

$$r(t) = \nu(t) [1 - x(t)k(t)] \quad (4.102)$$

Η προσδοκία ανακατασκευής του θορύβου από το a posteriori σφάλμα μπορεί να επιτευχθεί απαιτώντας:

$$E\{r^2(t)\} = \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.103)$$



όπου:

$$\varepsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (4.104)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή μέσης τιμής στην (4.102) και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό  $q(t) = x(t)P(t-1)x^T(t)$ , καταλήγουμε σε:

$$E \left\{ \left[ 1 - \frac{q(t)}{\lambda_F(t) + q(t)} \right]^2 \right\} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\nu^2} \quad (4.105)$$

όπου:

$$E\{\nu^2(t)\} = \sigma_\nu^2(t) \quad (4.106)$$

Έτσι, λύνοντας ως προς  $\lambda_F$  έχουμε τελικά:

$$\lambda_F(t) = \frac{\sigma_q(t)\sigma_\varepsilon}{\sigma_\nu(t) - \sigma_\varepsilon} \quad (4.107)$$

όπου:

$$E\{q^2(t)\} = \sigma_q^2(t) \quad (4.108)$$

Πρακτικά, τα μεγέθη  $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_q^2$  εκτιμώνται από τις παρακάτω σταθμίσεις:

$$\sigma_\nu^2(t) = \lambda_e \sigma_\nu^2(t-1) + (1 - \lambda_e) \nu^2(t) \quad (4.109)$$

$$\sigma_q^2(t) = \lambda_e \sigma_q^2(t-1) + (1 - \lambda_e) q^2(t) \quad (4.110)$$

όπου το  $\lambda_e$  αποτελεί μια προκαθορισμένη τιμή στάθμισης.

Η προσαρμοστικότητα της διαδικασίας βελτιώνεται αισθητά όταν και η εκτίμηση του  $\sigma_\varepsilon$  σταθμίζεται και εκείνη από ένα αρκετά πλατύτερο παράθυρο στάθμισης:

$$\sigma_\varepsilon^2(t) = \lambda_\varepsilon \sigma_\varepsilon^2(t-1) + (1 - \lambda_\varepsilon) \nu^2(t) \quad (4.111)$$

Οι σταθμιστές  $\lambda_e, \lambda_\varepsilon$  αποτελούν ουσιαστικά ρυθμιστικές παραμέτρους (tunning parameters) και η τιμή τους εξαρτάται από τις ιδιαιτερότητες της εκάστοτε εφαρμογής. Σε γενικές γραμμές οι τιμές τους μπορούν να καθοριστούν ως:

$$\lambda_e = 1 - \frac{1}{K_e n_p} \quad (4.112)$$

$$\lambda_\varepsilon = 1 - \frac{1}{K_\varepsilon n_p} \quad (4.113)$$

όπου  $K_\varepsilon > K_e \geq 2$  (εφόσον  $\lambda_\varepsilon > \lambda_e$ ).

Θεωρητικά ισχύει ότι  $\sigma_e(t) \geq \sigma_\varepsilon(t)$ . Παρ' όλα αυτά, η χρήση σταθμιζόμενων ποσοτήτων μπορεί συχνά να προκαλέσει διακυμάνσεις της ποσότητας  $\sigma_e(t)$  στην περιοχή του εύρους τιμών της  $\sigma_\varepsilon$ . Για τον λόγο αυτό, η σχεδιαζόμενη διαδικασία θα πρέπει να μην αποδέχεται την ύπαρξη αλλαγής στην δομή του μοντέλου όταν:

$$\sigma_e(t) \leq \gamma \sigma_\varepsilon(t) \quad (4.114)$$

όπου  $1 < \gamma \leq 2$ . Η επιλογή της παραμέτρου  $\gamma$  έρχεται να συμβιβάσει την γρήγορη απόκριση της διαδικασίας με την ευρωστία του εκτιμητή. Γενικά, σε περιπτώσεις που ισχύει η σχέση (4.114), ο παράγοντας εξασθένησης λαμβάνει την μέγιστη δυνατή τιμή του,  $\lambda_{Fmax}$  η οποία μπορεί και να ταυτίζεται με την μονάδα. Ειδιάλλως, η τιμή του παράγοντα καθορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\lambda_F(t) = \min \left\{ \frac{\sigma_q(t)\sigma_\varepsilon(t)}{\varsigma + |\sigma_\nu(t) - \sigma_\varepsilon(t)|}, \lambda_{Fmax} \right\} \quad (4.115)$$

όπου  $\varsigma$  είναι μία μικρή σταθερά που αποτρέπει τον μηδενισμό του παρανομαστή του παραπάνω κλάσματος.

Όσα προηγήθηκαν βρίσκουν άμεση εφαρμογή στην περίπτωση της μεθόδου OLS. Καθότι όμως η διαδικασία υλοποίησης του χρονομεταβλητού παράγοντα εξασθένησης απαιτεί την ντετερμινιστική φύση των εισόδων  $\mathbf{x}(t)$ . Παραδεχόμενοι όμως πως η μήτρα προβλεπτών είναι αλλοιωμένη αποκλειστικά με προσθετικό λευκό θόρυβο, αποδεικνύεται πως η TLS εκτίμηση της  $\mathbf{x}_{TLS}(t)$  αποτελεί την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimate) της πραγματικής μήτρας  $\mathbf{x}(t)$  [99, p. 233],[30]. Σε αυτήν την περίπτωση η TLS μήτρα προβλεπτών μπορεί να εξαχθεί από την σχέση (4.64) ως:

$$[\hat{\Delta}X|\hat{\varepsilon}] = -[X_m|z] (v_x v_x^T) \frac{(C^T C)}{v_x^T (C^T C) v_x} \quad (4.116)$$

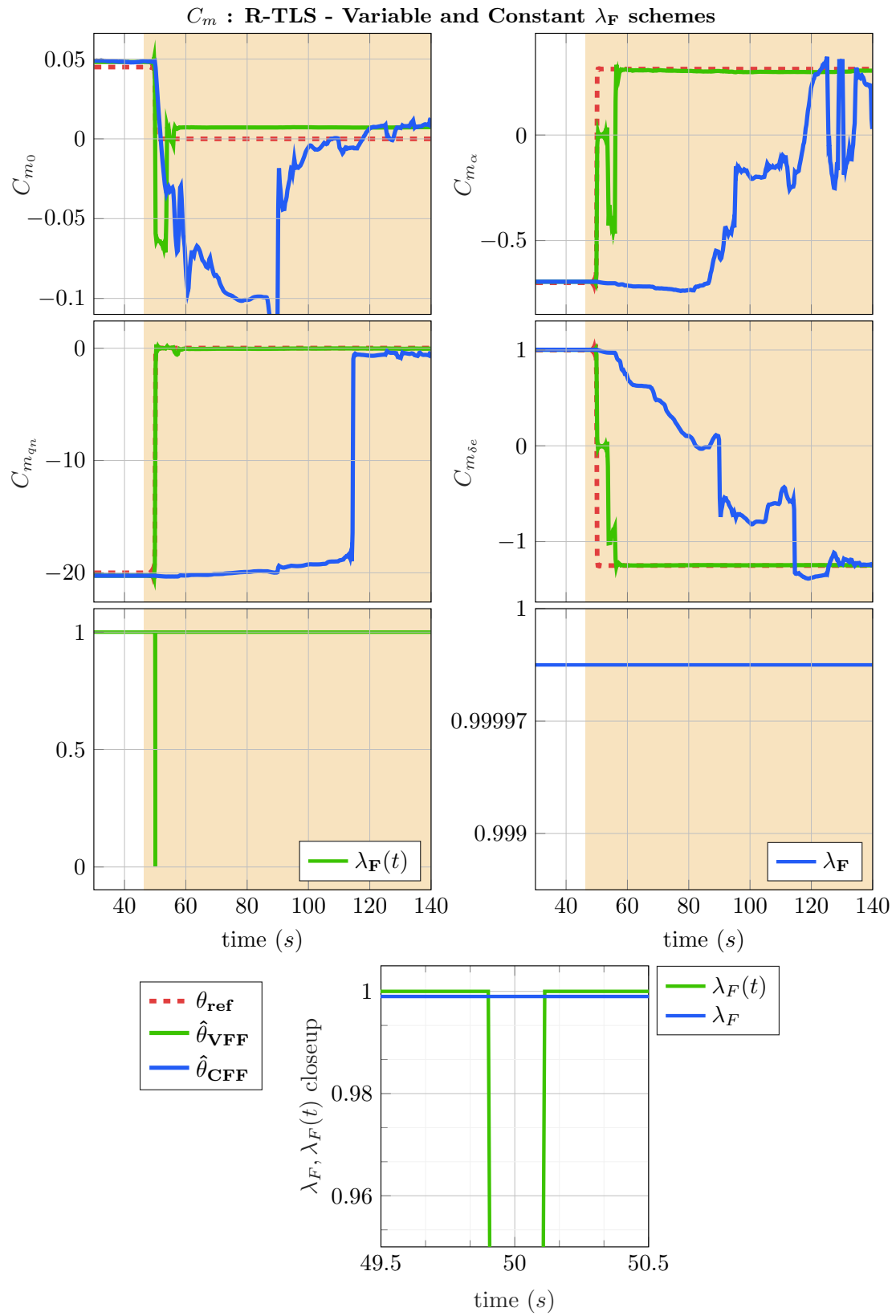
$$\Rightarrow [X|y]_{TLS} = [X_m|z] - [\hat{\Delta}X|\hat{\varepsilon}] = [X_m|z] \left( I_{n_p+1} + (v_x v_x^T) \frac{(C^T C)}{v_x^T (C^T C) v_x} \right) \quad (4.117)$$

όπου

$$v_x = [\theta_{TLS}^T - 1]^T \left( 1 + \theta_{TLS}^T \theta_{TLS} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.118)$$

Στην περίπτωση αυτή, η εφαρμογή του προσαρμοστικού παράγοντα εξασθένησης μπορεί να ενσωματωθεί και στους εκτιμητές TLS.

**4.3.9.5 VFF: Ενδεικτικά Αποτελέσματα** Στα γραφήματα της εικόνας 27 συγκρίνει τα αποτελέσματα υλοποίησης των εκτιμητών με χρονοσταθερό και προσαρμοστικό παράθυρο παρατήρησης. Όπως φαίνεται, η σύγκλιση του προσαρμοστικού εκτιμητή είναι σαφώς γρηγορότερη. Αναθέσαμε τιμή του  $\lambda_{Fmax}$  στη μονάδα έτσι ώστε να μην υπάρχει απώλεια πληροφορίας σε περίπτωση μη δομικών αλλαγών στο μοντέλο. Όπως παρατηρούμε στην περίπτωση του  $C_{mqn}$  το χρονοσταθερό παράθυρο παρατήρησης οδηγεί τον εκτιμητή σε κατάσταση ανεπαρκούς διέγερσης.



Εικόνα 27:  $C_m$ : Σύγκριση εκτιμητών ροπής πρόνενσης με σταθερό και προσαρμοστικό παράγοντα εξασθένισης με απότομη αλλαγή των παραμέτρων

Στην δεύτερη περίπτωση, αναλύουμε μια καθαρά μη γραμμική συμπεριφορά του μοντέλου που αφορά τον συντελεστή κάθετης άντωσης ( $C_L$ ). Συγκεκριμένα, σε περιπτώσεις όπου το αεροσκάφος οδηγείται σε πολύ υψηλές γωνίες προσβολής, η ροή του αέρα επί της πτέρυγας αποκολλάται με αποτέλεσμα την απώλεια στήριξης (stall). Η απώλεια στήριξης είναι μία μη γραμμική δυναμική κατάσταση η οποία οδηγεί το αεροσκάφος σε απρόβλεπτη και ακανόνιστη συμπεριφορά. Το μοντέλο της άντωσης και οπισθέλκουσας για γωνίες κοντινές η υψηλότερες από το κατώφλι της κρίσιμης γωνίας προσβολής ( $\alpha_0$ ) γίνεται:

$$C_L(\alpha) = (1 - \sigma(\alpha)) [C_{L_0} + C_{L\alpha}\alpha] + \sigma(\alpha) [2\text{sign}(\alpha) \sin^2(\alpha) \cos(\alpha)] \quad (4.119)$$

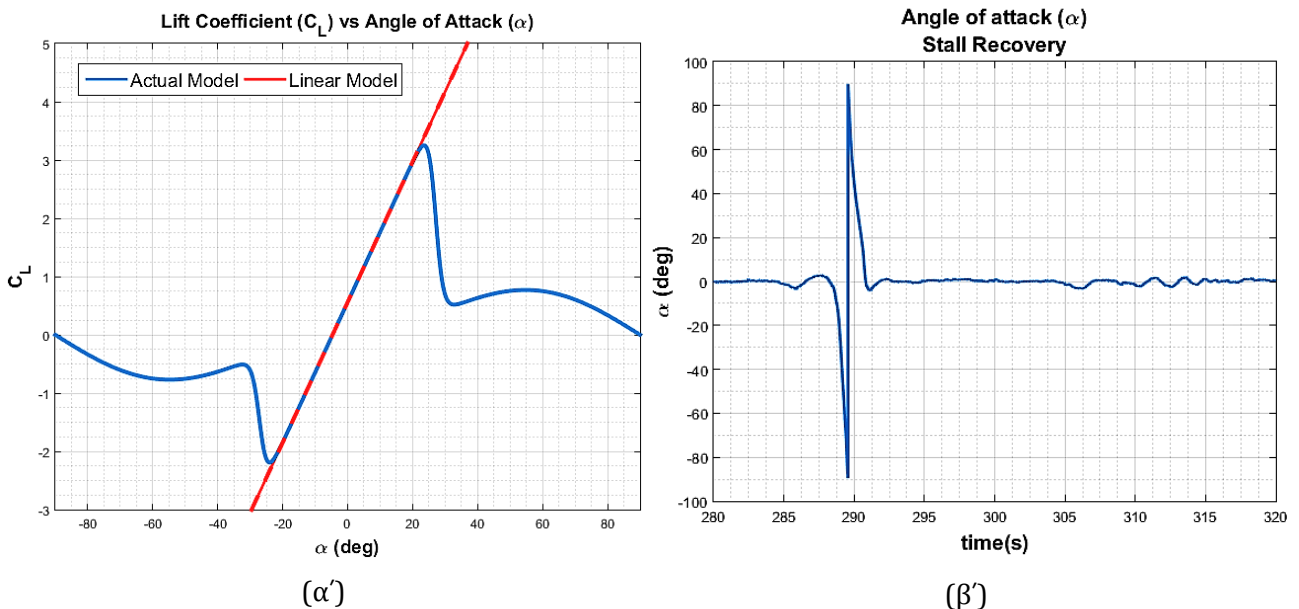
$$C_D(\alpha) = (1 - \sigma(\alpha)) [C_{D_0} + C_{D\alpha}\alpha] + \sigma(\alpha) [2\sin^3(\alpha)] \quad (4.120)$$

όπου:

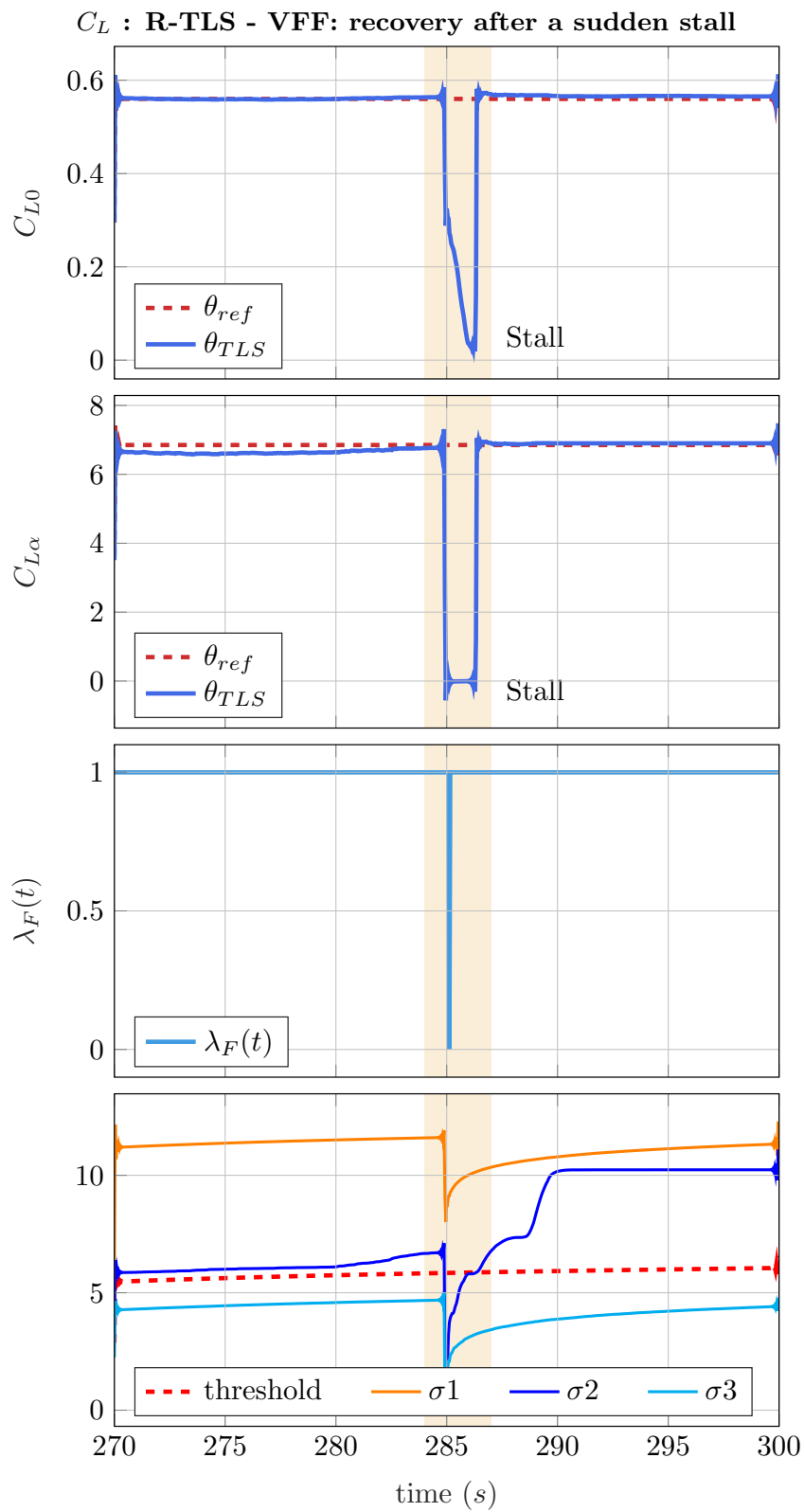
$$\sigma(\alpha) = \frac{1 + e^{-M(\alpha-\alpha_0)} + e^{M(\alpha+\alpha_0)}}{(1 + e^{-M(\alpha-\alpha_0)}) (1 + e^{M(\alpha+\alpha_0)})} \quad (4.121)$$

Η απόκριση του μοντέλου του συντελεστή Άντωσης φαίνεται στην Εικόνα 28α'.

Προκειμένου να αξιολογήσουμε την απόκριση του εκτιμητή σε ακραίες συνθήκες, οδηγήσαμε το προσομοιωμένο αεροσκάφος σε υψηλή γωνία προσβολής επιφέροντας απώλεια στήριξης. Σχεδόν άμεσα, και με κατάλληλους χειρισμούς, επαναφέρουμε το αεροσκάφος σε ονομαστική κατάσταση πτήσης. Η αντίστοιχη γωνία προσβολής φαίνεται στην Εικόνα 28β'. Ο εκτιμητής όπως διαπιστώνουμε στην Εικόνα 29 ανιχνεύει τις δύο απότομες αλλαγές και επανέρχεται άμεσα στην ονομαστική κατάσταση μόλις το αεροσκάφος ξεφύγει από το καθεστώς απώλειας στήριξης.



Εικόνα 28:  $C_L$ : Αριστερά: Απόκριση συντελεστή Άντωσης σε όλο το φάσμα των γωνιών προσβολής. Δεξιά: Γωνία προσβολής σε καθεστώς απώλειας στήριξης



Εικόνα 29:  $C_L$ : Επαναφορά του εκτιμητή μετά από απώλεια στήριξης

#### 4.4 Αρχικοποίηση των εκτιμητών

Στο πεδίο της Αεροδυναμικής αεροσκαφών, η εκτίμηση παραμέτρων ακολουθεί συνήθως μια υβριδική προσέγγιση στο ζήτημα της ακολουθιακής ή batch υλοποίησης των εκτιμητών. Σε γενικές γραμμές, οι batch υλοποιήσεις είναι λιγότερο περίπλοκες και, καθότι η επεξεργασία των δεδομένων δεν γίνεται σε πραγματικό χρόνο, το υπολογιστικό κόστος αποτελεί ζήτημα δευτερεύουσας σημασίας. Ακόμα, η προ-επεξεργασία και η ποιοτική βελτίωση των δεδομένων που επιτρέπουν οι batch αλγόριθμοι είναι σημαντικά προτερήματα που εξασφαλίζουν μεγαλύτερη ακρίβεια την εκτίμηση των παραμέτρων. Από την άλλη, η παρακολούθηση της δυναμικής σε πραγματικό χρόνο είναι απαραίτητη για τον έλεγχο, την προσαρμοστικότητα της πλατφόρμας όπως και για την ανίχνευση σφαλμάτων.

Η υβριδική υλοποίηση συνίσταται στην αρχικοποίηση των on-line εκτιμητών με δεδομένα που έχουν προκύψει από batch αναλύσεις πειραματικών πτήσεων. Έτσι, σε κάθε εκκίνηση οι εκτιμητές εμπλουτίζονται με την a priori γνώση που έχουμε για το δυναμικό μοντέλο επιτρέποντας έτσι ταχύτερη απόκριση και ευρωστία. Η αρχικοποίηση, λοιπόν, προϋποθέτει την γνώση ενός προϋπολογισμένου διανύσματος αναφοράς  $\hat{\theta}_0$  και την συνοδευόμενη μήτρα συνδιακύμανσης του,  $P_{\theta_0}$  όπου :

$$P_{\theta_0} = \mathbf{E} \left\{ (\hat{\theta}_0 - \theta_0)^T (\hat{\theta}_0 - \theta_0) \right\} \quad (4.122)$$

Στην περίπτωση των OLS η αρχικοποίηση πραγματοποιείται με την επαύξηση (augmentation) των μητρών  $X, z$  ως:

$$X_0 = \begin{pmatrix} & P_{\theta_0}^{-\frac{1}{2}} & \\ x_1(t_0) & \dots & x_{n_p}(t_0) \end{pmatrix} \quad (4.123)$$

$$z_0 = \begin{pmatrix} P_{\theta_0}^{-\frac{1}{2}} \theta_0 \\ z(t_0) \end{pmatrix} \quad (4.124)$$

Αντίστοιχα στην περίπτωση των TLS, η επαύξηση γίνεται ως:

$$[X_m \ z]^* = \begin{pmatrix} (c_0 P_{\theta})^{-\frac{1}{2}} & (c_0 P_{\theta})^{-\frac{1}{2}} \theta_0 \\ \mathbf{x}^*(\mathbf{t}_0) & z^*(t_0) \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

όπου:

$$c_0 = [\theta_0^T \ -1]^T C^T C \begin{bmatrix} \theta_0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

και  $t_0$  ο χρόνος έναρξης της εκτίμησης.

## 5 Το αισθητηριακό σύστημα του αεροσκάφους και οι περιορισμοί του

### 5.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η πρόσβαση σε αξιόπιστα αισθητηριακά δεδομένα είναι εξαιρετικής σημασίας για την ακριβή εκτίμηση των αεροδυναμικών παραμέτρων του αεροσκάφους. Δυστυχώς όμως, οι πλατφόρμες μικρής ή μεσαίας κλίμακας συνοδεύονται από αισθητηριακά συστήματα χαμηλής αξιοπιστίας λόγω περιορισμών κόστους και ωφέλιμου φορτίου. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η απευθείας χρήση αισθητηριακών δεδομένων raw data από τους εκτιμητές οδηγεί σε μεγάλες ανακρίβειες που καθιστούν όλη την διαδικασία αναξιόπιστη ή και μη χρηστική.

Οι αβεβαιότητες του αισθητηριακού συστήματος διακρίνονται σε τυχαίες και συστηματικές. Ένα διαδεδομένο μοντέλο αισθητήρα για την καταγραφή μία ποσότητας  $\psi$  έχει την μορφή:

$$\psi_s(t) = b_{\psi_0} + \tilde{b}_{\psi}(t) + (1 + s_f)\psi(t) + \eta(t) + w_p(t) \quad (5.1)$$

όπου:

- $b_{\psi_0}$  : η σταθερή προκατάληψη του αισθητήρα (bias)
- $\tilde{b}_{\psi}(t)$  : η μεταβαλλόμενη προκατάληψη (bias instability)
- $s_f$  : ο παράγοντας κλιμάκωσης της παρατήρησης (scaling factor)
- $\eta(t)$  : ο θόρυβος της μέτρησης (white measurement noise)
- $w_p(t)$  : οι εξωτερικές διαταραχές (process noise-external disturbances)

Οι συστηματικές αβεβαιότητες οφείλονται στην εσωτερική αρχιτεκτονική ή στις αρχές λειτουργίας του κάθε αισθητήρα. Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι προκαταλήψεις ( $b_{\psi_0}$ ),  $\tilde{b}_{\psi}(t)$ , ο παράγοντας κλιμάκωσης ( $s_f$ ) και οι εξωτερικές διαταραχές. Η κατηγορία της τυχαίων αβεβαιοτήτων περιλαμβάνει τον θόρυβο της μέτρησης ( $\eta(t)$ ).

Η σταθερή προκατάληψη και ο παράγοντας κλιμάκωσης αποτελούν συνήθως κομμάτι των προδιαγραφών του αισθητήρα και εμπεριέχονται στο φύλλο οδηγιών του κατασκευαστή. Σε περιπτώσεις που αυτή η πληροφορία δεν είναι διαθέσιμη, η ασφαλής εκτίμηση των μεγεθών αυτών πραγματοποιείται με την διεξαγωγή πειραμάτων βαθμονόμησης (calibration experiments). Στην περίπτωση εφαρμογών αεροπλοΐας τα πειράματα αυτά διεξάγονται με την βοήθεια αεροσήραγγας (wind tunnel). Οι υπόλοιπες αβεβαιότητες απαλείφονται με τον σχεδιασμό φίλτρων κατάστασης State Estimation Sensor Fusion filters, τα οποία συνδυάζουν με βέλτιστο τρόπο τις διαφορετικές πηγές πληροφορίας του αισθητηριακού συστήματος, επιστρέφοντας τις καλύτερες δυνατές εκτιμήσεις των θεμελιωδών μεταβλητών κατάστασης του αεροσκάφους.

Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης μελέτης, τα τυχαία σφάλματα μοντελοποιούνται ως λευκός γκαουσιανός θόρυβος :

$$\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\psi}^2) \quad (5.2)$$

Επίσης, παραδεχόμαστε πως η προκατάληψη των αισθητήρων είναι χρονοσταθερή:

$$\tilde{b}_\psi(t) = 0 \quad (5.3)$$

## 5.2 Το διαθέσιμο αισθητηριακό σύστημα του αεροσκάφους

Σε αυτήν την ενότητα θα αναλύσουμε τα δομικά στοιχεία των αισθητηριακών συστημάτων των μικρών μη επανδρωμένων αεροσκαφών σταθερής πτέρυγας και θα παρουσιάσουμε τα αντίστοιχα μαθηματικά μοντέλα τους. Για πιο λεπτομερή ανάλυση των επιμέρους συστημάτων, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο εγχειρίδιο [96].

### 5.2.1 Το σύστημα αδρανειακής πλοήγησης (Inertial Navigation System)

Το σύστημα αδρανειακής πλοήγησης (Inertial Navigation System-INS) περιλαμβάνει το επιταχυνσιόμετρο, το γυροσκόπιο και το δορυφορικό σύστημα θεσιθεσίας (GPS).

**5.2.1.1 Επιταχυνσιόμετρο** : Το επιταχυνσιόμετρο καταγράφει το διάνυσμα επιτάχυνσης (περιλαμβανομένων και των όρων coriolis) του αεροσκάφους ως προς το σωματόδετο πλαίσιο. Στην περίπτωση των επιταχυνσιόμετρων τύπου MEMS (micro-electro-mechanical systems) οι καταγραφόμενες ποσότητες είναι:

$$\begin{bmatrix} y_{accelx} \\ y_{accely} \\ y_{accelz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} + qw - rv - g_x \\ \dot{v} + ru - pw - g_y \\ \dot{w} + pv - qu - g_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{accelx} \\ b_{accely} \\ b_{accelz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{accelx} \\ \eta_{accely} \\ \eta_{accelz} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

όπου:

$$g = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \theta \\ g \cos \theta \sin \phi \\ g \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

ισοδύναμα αν  $[f_x, f_y, f_z]^T$  είναι οι ασκούμενες δυνάμεις στο σωματόδετο πλαίσιο του αεροσκάφους ισχύει:

$$\begin{bmatrix} y_{accelx} \\ y_{accely} \\ y_{accelz} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + \mathbf{b}_{accel} + \eta_{accel} \quad (5.6)$$

**5.2.1.2 Γυροσκόπιο** : Το γυροσκόπιο καταγράφει τις γωνιακές ταχύτητες του αεροσκάφους ως προς το σωματόδετο πλαίσιο:

$$\begin{bmatrix} y_{gyrox} \\ y_{gyroy} \\ y_{gyroz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \mathbf{b}_{gyro} + \eta_{gyro} \quad (5.7)$$



**5.2.1.3 GPS** Το GPS καταγράφει τα διανύσματα θέσης και ταχύτητας ως προς το αδρανειακό πλαίσιο NED. Οι αισθητήρες GPS συνήθως δεν αλλοιώνονται από προκατάληψη

$$y_{gps} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} + \eta_{gps} \quad (5.8)$$

**5.2.1.4 Μαγνητόμετρο και Γωνίες Euler** Συνήθως το INS περιλαμβάνει μαγνητόμετρο που καταγράφει την κατεύθυνση του αεροσκάφους ως προς τον μαγνητικό βορρά. Σε αυτή την περίπτωση εσωτερικές διαδικασίες και φίλτρα του INS μπορούν να παράσχουν σχετικά αξιόπιστες εκτιμήσεις του προσανατολισμού του αεροσκάφους υπό την μορφή γωνιών Euler.

$$\begin{bmatrix} \psi_{ins} \\ \phi_{ins} \\ \theta_{ins} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} + \mathbf{b}_{ang} + \eta_{ang} \quad (5.9)$$

## 5.2.2 Το σύστημα μεταβλητών αέρος - Air Data Boom

Το σύστημα μεταβλητών αέρος περιλαμβάνει το σύστημα pitot-static και τους ανεμοδείκτες γωνιών αεροδυναμικής ευστάθειας.

**5.2.2.1 Το σύστημα pitot-static** Το σύστημα pitot-static καταγράφει την διαφορική πίεση αέρα, την στατική πίεση και την θερμοκρασία αέρος

$$y_{pitot} = \mathbf{diag}(1 + s_d, 1 + s_p, 1 + s_T) \begin{bmatrix} \bar{q} \\ p_s \\ T \end{bmatrix} + \mathbf{b}_{pitot} + \eta_{pitot} \quad (5.10)$$

Υπενθυμίζουμε ότι, με βάση τον νόμο Bernoulli, ισχύει  $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V_a^2$

**5.2.2.2 Οι ανεμοδείκτες γωνιών ευστάθειας- Wind Vanes** Οι ανεμοδείκτες γωνιών ευστάθειας καταγράφουν την γωνία προσβολής και την γωνία πλαγιολίσθησης.

$$y_{vanes} = \mathbf{diag}(1 + s_\alpha, 1 + s_\beta) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \mathbf{b}_{vanes} + \eta_{vanes} \quad (5.11)$$

## 5.2.3 Απλοποιήσεις

Τα περισσότερα πειραματικά αεροσκάφη ενσωματώνουν σύγχρονα INS τα οποία απαλείφουν αυτόματα, μέσω εσωτερικών διαδικασιών, τα συστηματικά σφάλματα των μετρήσεων. Για τον λόγο αυτό, παραδεχόμαστε πως τα παρεχόμενα δεδομένα από το INS δεν

αλλοιώνονται από προκαταλήψεις (biases):

$$\left\{ \mathbf{b}_{\text{accel}}, \mathbf{b}_{\text{gyro}}, \mathbf{b}_{\text{ang}}, \mathbf{b}_{\text{gps}} \right\} \approx \mathbf{0} \quad (5.12)$$

### 5.2.4 Βαθμονόμηση συστήματος μεταβλητών αέρος

Το σύστημα μεταβλητών αέρος βαθμονομήθηκε μετά από διεξαγωγή πειραμάτων στην αεροσήραγγα του εργαστηρίου Αεροδυναμικής του ΕΜΠ. Για αναλυτικές λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο σχετικό εγχειρίδιο του Control Systems Lab [104]. Στο εξής, θεωρούμε πως τα συστηματικά σφάλματα, πλην των εξωτερικών διαταραχών ( $w$ ), έχουν εκτιμηθεί και απαλειφθεί από τις μετρήσεις μας. Η απομόνωση των συνιστωσών της ταχύτητας αέρος του αεροσκάφους θα πραγματοποιηθεί με χρήση φίλτρων εκτίμησης κατάστασης (State Estimation).

## 5.3 Οι περιβαλλοντικές διαταραχές

Η βασικότερη πηγή εξωτερικών διαταραχών για τα μικρά αεροσκάφη είναι ο άνεμος. Ο άνεμος, όπως αναφέρθηκε και στο εισαγωγικό κεφάλαιο, μοντελοποιείται ως ένα διάνυσμα ταχύτητας<sup>5</sup>. Καθότι, η γνώση της σχετικής ως προς την αέρια μάζα ταχύτητας του αεροσκάφους είναι ύψιστης σημασίας, η επίδραση του ανέμου στα αισθητηριακά δεδομένα πρέπει να εκτιμηθεί και απαλειφθεί.

Το σημαντικότερο εργαλείο για την απαλοιφή του ανέμου είναι οι μετρήσεις ταχύτητας που καταγράφονται από το GPS. Όπως αναφέρθηκε και στο εισαγωγικό κεφάλαιο της αεροπλοΐας, η ταχύτητα εδάφους (όπως αυτή καταγράφεται από το GPS) περιλαμβάνει και την συνιστώσα του ανέμου:

$$\vec{V}_g = \vec{V}_a + \vec{V}_w \quad (5.13)$$

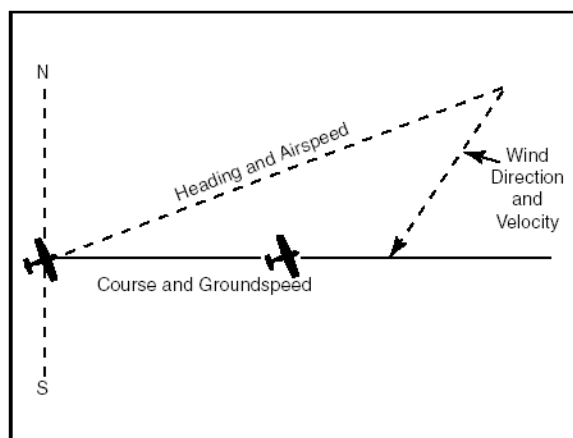
ή ισοδύναμα:

$$\begin{pmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{pmatrix} = (R_G^B)^{-1} \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_N \\ W_E \\ W_D \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Οι δύο παραπάνω συνιστώσες σχηματίζουν το τρίγωνο του ανέμου (Εικόνα 30).

Η απαλοιφή των όρων ανέμου πραγματοποιείται στο πλαίσιο του φίλτρου εκτίμησης κατάστασης που περιγράφεται στις επόμενες ενότητες. Η μοντελοποίηση των συνιστωσών ανέμου γίνεται βάσει όσων ειπώθηκαν στην ενότητα 2.3.

<sup>5</sup>Η ταχύτητα του ανέμου σε προβλήματα μικρής κλίμακας εμπεριέχει μόνο μεταφορική συνιστώσα. Σε προβλήματα υψηλότερης ακρίβειας, το διάνυσμα ανέμου μπορεί να περιλαμβάνει και τυρβώσεις με τη μορφή γωνιακών ταχυτήτων



Εικόνα 30: Το τρίγωνο ανέμου

## 5.4 Φίλτρα Κάλμαν για εκτίμηση του ανέμου και της τριάδας ευστάθειας

### 5.4.1 Γενικά

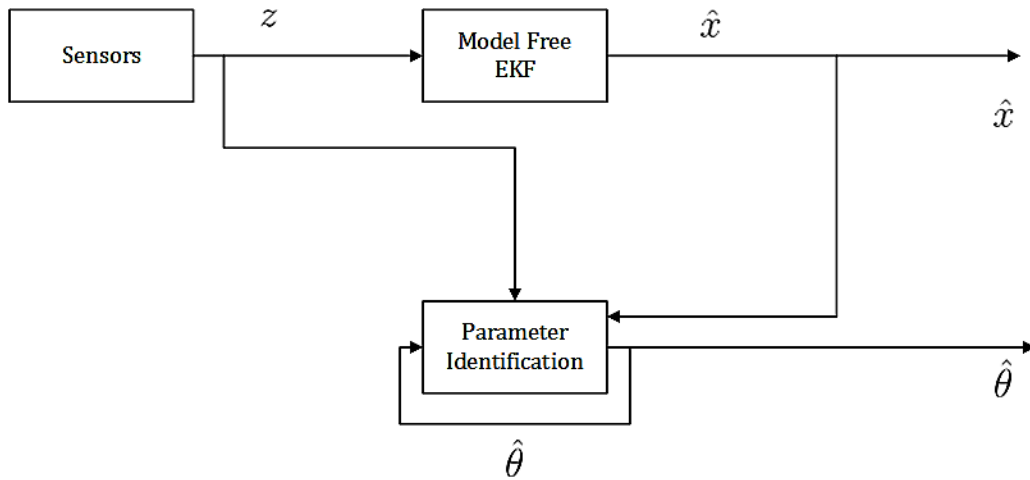
Θεμέλιος λίθος της αξιόπιστης εκτίμησης του αεροδυναμικού μοντέλου, είναι ακριβείς μετρήσεις για την τριάδα αεροδυναμικής ευστάθειας  $(V_a, \alpha, \beta)$ . Καθότι το αισθητηριακό σύστημα είναι χαμηλής αξιοπιστίας, σχεδιάσαμε ειδικούς αλγορίθμους/φίλτρα για την καλύτερη δυνατή εκτίμηση αυτών των ποσοτήτων εκμεταλλευόμενοι με την βέλτιστη μέθοδο όλη την πληροφορία που μπορούμε να εξάγουμε από τις διαθέσιμες παρατηρήσεις. Οι αλγόριθμοι Εκτίμησης Κατάστασης (State Estimation) που αναπτύξαμε βασίζονται στις αρχές του Επεκτεταμένου Φίλτρου Κάλμαν (Extended Kalman Filter) το οποίο είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος State Estimation για μη γραμμικά συστήματα.

Το σημαντικότερο εμπόδιο που συναντήσαμε κατά την ανάπτυξη των αλγορίθμων αφορούσε το γεγονός πως οι περισσότερες έως αρχιτεκτονικές βασίζονταν στην εκ των προτέρων γνώση των παραμέτρων του Αεροδυναμικού Μοντέλου. Προφανώς, η περίπτωση μας δεν μπορούσε να εξυπηρετηθεί από τέτοιες τεχνικές - τουλάχιστον μέχρις ότου αποκτήσουμε μία πρώτη εκτίμηση του διανύσματος παραμέτρων μέσω πειραματικών πτήσεων. Αυτή η σύζευξη επιλύθηκε με την ανάπτυξη αρχιτεκτονικών ανεξάρτητων του αεροδυναμικού μοντέλου (Model Free Implementations-MF). Όπως θα δούμε και παρακάτω η MF υλοποίηση του φίλτρου Κάλμαν δεν απαιτεί γνώση των παραμέτρων του μοντέλου και είναι σε θέση να επιστρέψει αρκετά αξιόπιστες εκτιμήσεις. Επίσης, έχει εξασφαλισμένη ευρωστία καθότι δεν παρουσιάζει καμία ευαισθησία σε διακυμάνσεις της δυναμικής της αεροσκάφους -ακόμα και σε εξαιρετικά δυσχερείς συνθήκες όπως είναι η απώλεια στήριξης (stall). Η αρχιτεκτονική του συστήματος με χρήση MF Κάλμαν φίλτρου παρίσταται διαγραμματικά στην Εικόνα 31.

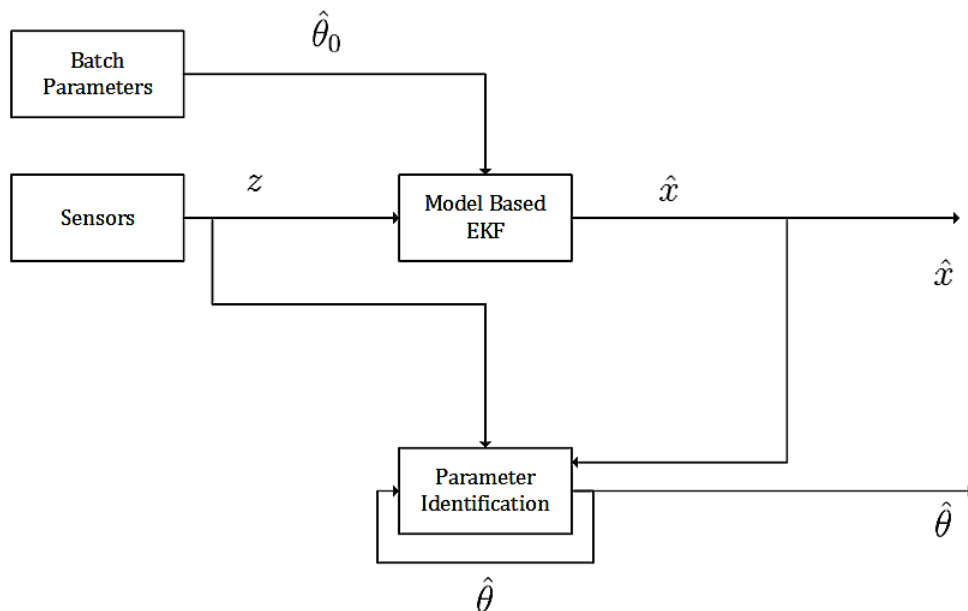
Εφόσον αποκτήσουμε πρόσβαση σε εκτιμήσεις των αεροδυναμικών παραμέτρων, μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην ανάπτυξη φίλτρων Κάλμαν με βάση τις εξισώσεις του μοντέλου (Model Based Implementations-MB). Σε αυτήν την περίπτωση οι εκτιμήσεις του ανέμου όσο και της τριάδας ευστάθειας έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια. Παρ'όλα

αυτά, η υλοποίηση αυτή είναι εξαιρετικά ευαίσθητη σε διακυμάνσεις των παραμέτρων και επομένως δεν είναι τόσο εύρωστη. Ειδικά σε περιπτώσεις υλοποίησης κλειστού βρόχου (closed loop) το σύστημα μπορεί υπό την επίδραση μικρών διαταραχών να οδηγηθεί σε αστάθεια. Το σχηματικό διάγραμμα της MB υλοποίησης ανοιχτού βρόχου φαίνεται στην Εικόνα 32.

Στις επόμενες υπο-ενότητες παρουσιάζουμε την μαθηματική διατύπωση της αρχιτεκτονικής των δύο φίλτρων και τα σχετικά αποτελέσματα από προσομοιώσεις.



Εικόνα 31: Model-Free υλοποίηση φίλτρου Κάλμαν



Εικόνα 32: Model-Based υλοποίηση του φίλτρου Κάλμαν σε ανοιχτό βρόχο

## 5.4.2 Ο γενικός αλγόριθμος του Extended Kalman Filter

Εν πρώτοις, παρουσιάζουμε τον γενικό αλγόριθμο State Estimation που χρησιμοποιεί η τεχνική του Extended Kalman Filtering. Θεωρούμε ότι εξετάζουμε ένα μη γραμμικό σύστημα με δυναμική συνεχούς χρόνου και εξισώσεις κατάστασης που περιγράφονται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t), u(t), t) + w(t) \\ w(t) &\sim \mathcal{N}(0, Q)\end{aligned}$$

Η κατάσταση του συστήματος παρατηρείται μη-γραμμικώς από ένα σύνολο διαδικασιών (λ.χ. αισθητηριακό σύστημα) σε διακριτό χρόνο έτσι ώστε:

$$\begin{aligned}y_k &= h_k(x_k, v_k) + v_k \\ v_k &\sim \mathcal{N}(0, R_k)\end{aligned}$$

Η αρχική κατάσταση του συστήματος μπορεί να εκτιμηθεί σε ένα επίπεδο αβεβαιότητας που εκφράζεται από την αρχικοποιημένη τιμή των διανυσμάτων κατάστασης και της αντίστοιχης μήτρας συνδιακύμανσης:

$$\begin{aligned}\hat{x}(0)^+ &= \mathbf{E}\{x(0)\} \\ P(0) &= \mathbf{E}\{(x(0) - \hat{x}(0))(x(0) - \hat{x}(0))^T\}\end{aligned}$$

Η δυναμική του συστήματος προβλέπεται σε συνεχή χρόνο από τις εξισώσεις του μοντέλου (Time Update). Κάθε χρονική στιγμή η πρόβλεψη πραγματοποιείται βάσει των εξισώσεων:

### Time Update

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u, t) \\ F &= \left. \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \right|_{(x=\hat{x})} \\ \dot{P} &= FP + PF^T + Q\end{aligned}$$

Οι προβλέψεις διορθώνονται τις χρονικές στιγμές που υπάρχουν διαθέσιμες μετρήσεις με βάση τα κέρδη του παρατηρητή Κάλμαν. Η μήτρα  $D$  χρησιμεύει ως μάσκα του διανύσματος παρατήρησης<sup>6</sup>.

### Measurement Update

$$\begin{aligned}C_k &= D_k H_k \\ H &= \left. \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right|_{(x=\hat{x}_k^-)} \\ K_k &= P_k^- C_k^T (C_k P_k^- C_k^T + R_k)^{-1} \\ \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k (y_k - h_k(\hat{x}_k^-, t_k)) \\ P_k^+ &= (I - K_k C_k) P_k^- + K_k R_k K_k^T\end{aligned}$$

<sup>6</sup> Διαγώνια μήτρα που μοντελοποιεί την διαθεσιμότητα των παρατηρήσεων- αν η μέτρηση είναι διαθέσιμη στο αντίστοιχο στοιχείο ανατίθεται η μοναδιαία τιμή ενώ σε αντίθετη περίπτωση η μηδενική

Οι μήτρες  $Q, R$  εκφράζουν την εμπιστοσύνη στην πρόβλεψη του μοντέλου και στις παρατηρήσεις αντίστοιχα. Ήτοι:

$$Q(t)\delta(t_j - t_i) = \mathbf{E}\left\{w(t_i)w^T(t_j)\right\} \quad (5.15)$$

$$R(t)\delta(t_j - t_i) = \mathbf{E}\left\{v(t_i)v^T(t_j)\right\} \quad (5.16)$$

### 5.4.3 Model-Free υλοποίηση του φίλτρου Κάλμαν

Στην περίπτωση της MF υλοποίησης, θεωρούμε το παρακάτω διάνυσμα παρατήρησης:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \\ W_N \\ W_E \\ W_D \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Κατά τα γνωστά, το υποδιάνυσμα  $[u_r, v_r, w_r]^T$  αφορά τις σχετικές ταχύτητες του αεροσκάφους ως προς την αέρια μάζα, ενώ το  $[W_N, W_E, W_D]^T$  αφορά στις μεταφορικές ταχύτητες του ανέμου στις κατευθύνσεις Βόρεια, Ανατολικά και προς τα κάτω.

**5.4.3.1 Time Update** Θεωρούμε ότι οι εξισώσεις του αεροδυναμικού μοντέλου είναι προς το παρόν άγνωστες. Παρατηρούμε, όμως, πως οι έξοδοι του επιταχυνσιόμετρου έχουν την μορφή:

$$\begin{pmatrix} y_{accelx} \\ y_{accely} \\ y_{accelz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} + qw - rv - g_x \\ \dot{v} + ru - pw - g_y \\ \dot{w} + pv - qu - g_z \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

όπου:

$$g = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \sin \theta \\ g \cos \theta \sin \phi \\ g \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Το επιταχυνσιόμετρο και το γυροσκόπιο δύνανται να επιστρέφουν παρατηρήσεις σε πολύ υψηλούς ρυθμούς δειγματοληψίας (άνω των  $150Hz$ ). Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις του μοντέλου με τις παρατηρήσεις αυτές -ρυθμίζοντας κατάλληλα την μήτρα  $Q$ .

Ακόμη, παραδεχόμαστε πως οι ταχύτητες ανέμου κυμαίνονται με αργούς ρυθμούς. Αυτό μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις μοντέλου ως:

$$[\dot{W}_N, \dot{W}_E, \dot{W}_D]^T \approx 0 \quad (5.20)$$

Αντιμετωπίζοντας το επιταχυνσιόμετρο ως είσοδο στο σύστημα ( $u$ ), οι εξισώσεις του μοντέλου αντικαθίστανται από τις παρακάτω (ψευδο-δυναμικό μοντέλο):

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_r \\ \dot{v}_r \\ \dot{w}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{accelx} - qw_r + rv_r + g_x \\ y_{accely} - ru_r + pw_r + g_y \\ y_{accelz} - pv_r + qu_r + g_z \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Εν τέλει, καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή για το Time Update:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_r \\ \dot{v}_r \\ \dot{w}_r \\ \dot{W}_N \\ \dot{W}_E \\ \dot{W}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{accelx} - qw_r + rv_r + g_x \\ y_{accely} - ru_r + pw_r + g_y \\ y_{accelz} - pv_r + qu_r + g_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Η Ιακωβιανή του συστήματος έχει την μορφή:

$$F = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & r(t) & -q(t) & 0 & 0 & 0 \\ -r(t) & 0 & p(t) & 0 & 0 & 0 \\ -p(t) & q(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Η αρχική τιμή του διανύσματος κατάστασης μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: θεωρώντας πως έχουμε διαθέσιμες τις πρώτες παρατηρήσεις για την νόρμα της ταχύτητας αέρα  $V_a(t_0)$  και της ταχύτητας εδάφους  $\mathbf{V}_g(t_0)$  εκτιμάμε το διάνυσμα σχετικής ταχύτητας ως:

$$\begin{bmatrix} u_r(t_0) \\ v_r(t_0) \\ w_r(t_0) \end{bmatrix} = V_a(t_0) \frac{\mathbf{V}_g(t_0)}{\|\mathbf{V}_g(t_0)\|} \quad (5.24)$$

ενώ για την ταχύτητα ανέμου έχουμε:

$$\begin{bmatrix} W_N(t_0) \\ W_E(t_0) \\ W_D(t_0) \end{bmatrix} = (R_B^G)^{-1} \left( \mathbf{V}_g(t_0) - \begin{bmatrix} u_r(t_0) \\ v_r(t_0) \\ w_r(t_0) \end{bmatrix} \right) \quad (5.25)$$

**5.4.3.2 Measurement Update** Το διάνυσμα παρατηρήσεων περιλαμβάνει το GPS, το σύστημα pitot και τους ανεμοδείκτες γωνιών ευστάθειας. Πρώτα εκφράζουμε τα μοντέλα των αισθητήρων ως προς το διάνυσμα κατάστασης.

Για το GPS, δεδομένης της πρόσβασης στις γωνίες Euler από το INS, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \theta \cos \psi)u_r + (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi)v_r + \\ + (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)w_r + W_N \\ (\cos \theta \sin \psi)u_r + (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi)v_r + \\ + (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)w_r + W_E \\ (-\sin \theta)u_r + (\sin \phi \cos \theta)v_r + (\cos \phi \cos \theta)w_r + W_D \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Για το σύστημα pitot:

$$y_4 = \bar{q} = \frac{1}{2}\rho (u_r^2 + v_r^2 + w_r^2) \quad (5.27)$$

Τέλος, για τους ανεμοδείκτες των γωνιών ευστάθειας:

$$\begin{bmatrix} y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{u_r}{w_r}\right) \\ \arcsin\left(\frac{v_r}{\sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2}}\right) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Η σχετική Ιακωβιανή μήτρα  $H = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}$  υπολογίζεται στο Παράρτημα A.4.

**5.4.3.3 Εξαγωγή της τριάδας αεροδυναμικής ευστάθειας** Η εκτιμώμενη τριάδα αεροδυναμικής ευστάθειας είναι πλέον:

$$\begin{bmatrix} V_{a,kal} \\ \alpha_{kal} \\ \beta_{kal} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \arctan\left(\frac{x_1}{x_3}\right) \\ \arcsin\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\right) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

#### 5.4.4 Αποτελέσματα Model-Free υλοποίησης με δεδομένα προσομοίωσης

Η βασική αξιολόγηση σχετικών αρχιτεκτονικών Κάλμαν γίνεται με την βοήθεια κάποιου περιβάλλοντος προσομοίωσης. Η προσομοίωση επιτρέπει άμεση και αδιαμφισβήτητη πρόσβαση στα σήματα αναφοράς ("αληθινές τιμές") επιτρέποντας έτσι την ποσοτικοποίηση της επίδοσης των αλγορίθμων υπό ποικίλες συνθήκες. Εν προκειμένω χρησιμοποιήσαμε ξανά τον προσομοιωτή πτήσης του Control Systems Lab<sup>7</sup> που αναπτύχθηκε από τον Δρ. Γ. Ζωγόπουλο. Όπως προαναφέραμε, οι περιβαλλοντικές διαταραχές είναι εξέχουσας σημασίας για το πεδίο των μικρών μή επανδρωμένων αεροσκαφών. Για τον λόγο αυτό, η προσομοίωση περιλαμβάνει διαταραχές ανέμου, σε χρονοσταθερή μορφή όπως και με την μορφή ριπών, χρησιμοποιώντας το μοντέλο Dryden<sup>8</sup> για χαμηλό υψόμετρο και έντονες αναταράξεις.

Η προσομοίωση της ροής δεδομένων πραγματοποιήθηκε με ανάπτυξη ενός ψευδοαισθητηριακού συστήματος. Συγκεκριμένα, τα σήματα αναφοράς αλλοιώθηκαν με βάση τα γνωστά μοντέλα των αισθητήρων και προσθετικό λευκό θόρυβο με χρήση ρουτινών που αναπτύχθηκαν στο περιβάλλον της MATLAB (Εικόνα 33). Όπου ήταν απαραίτητο, μειώσαμε τον ρυθμό δειγματοληψίας των ψευδο-αισθητηριακών δεδομένων προκειμένου να συμφωνούν με τις προδιαγραφές των αντίστοιχων αισθητήρων. Οι πληροφορίες αυτές παρατίθενται στον Πίνακα 7.

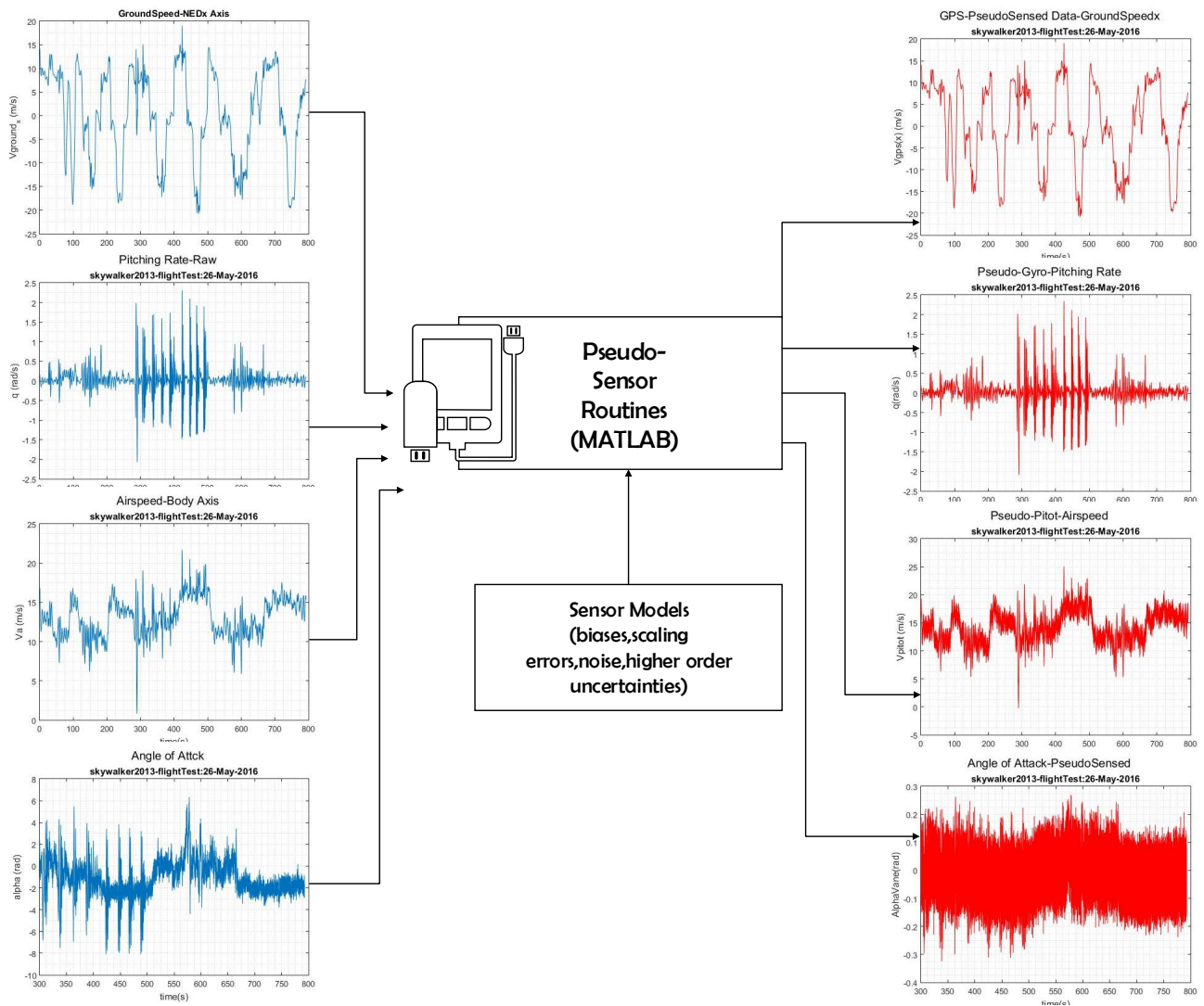
<sup>7</sup>[https://github.com/Georacer/last\\_letter](https://github.com/Georacer/last_letter)

<sup>8</sup>Ενότητα 2.3



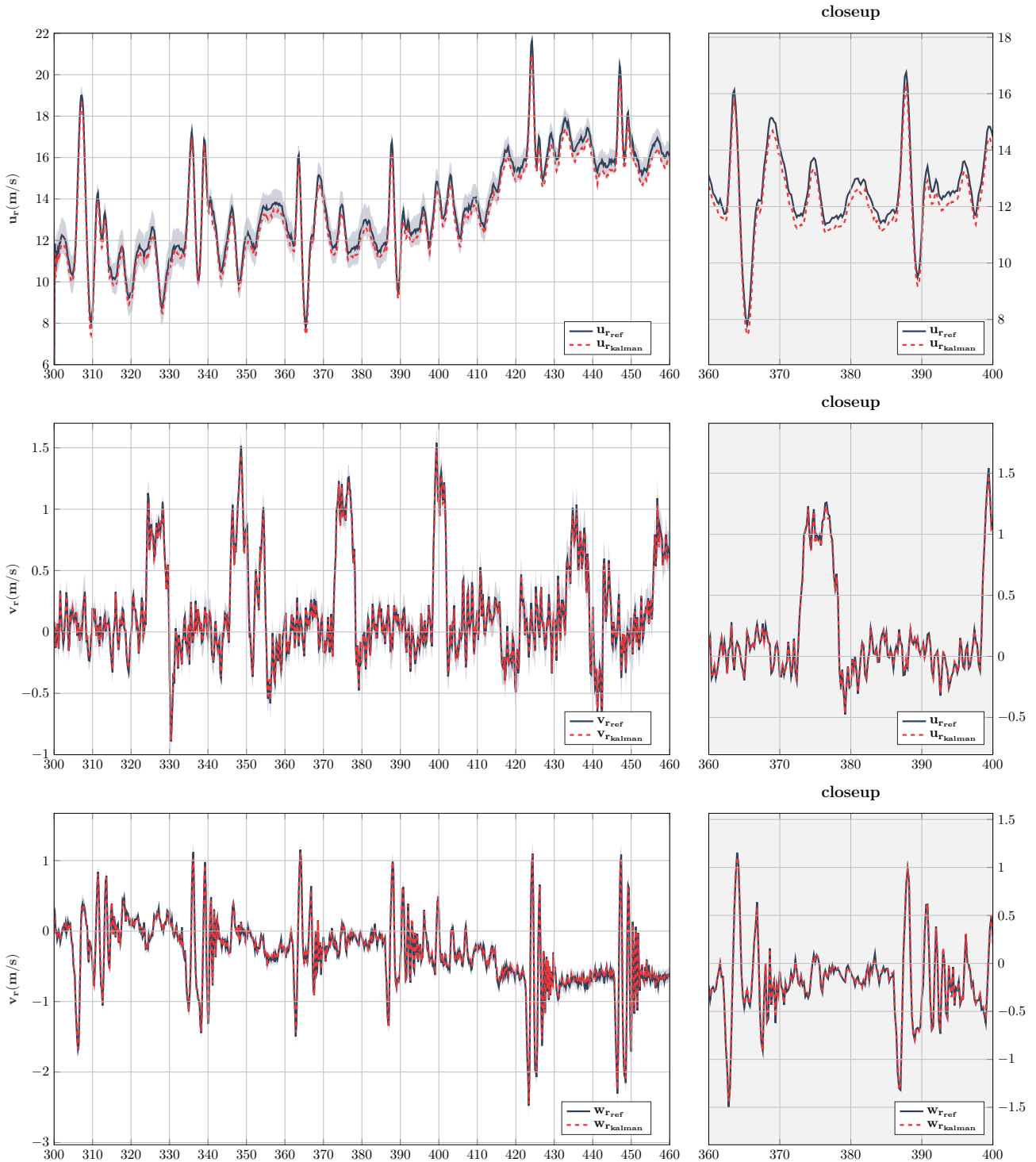
Pseudo-sensor	Quantity	Units	Noise ( $\pm 2\sigma$ )	Rate (Hz)
Accelerometer	$a_x, a_y, a_z$	$m/s^2$	0.1	100
Gyro	$p, q, r$	$rad/s$	0.7	100
	$\psi, \phi, \theta$	deg	1.5	100
GPS	$V_N, V_E$	$m/s$	0.1	20
	$V_D$	$m/s$	0.2	20
Pitot	$\bar{q}$	Pa	20	100
Wind Vanes	$\alpha, \beta$	deg	1.2	100

Πίνακας 7: Χαρακτηριστικά Ψευδοαισθητηριακού Συστήματος



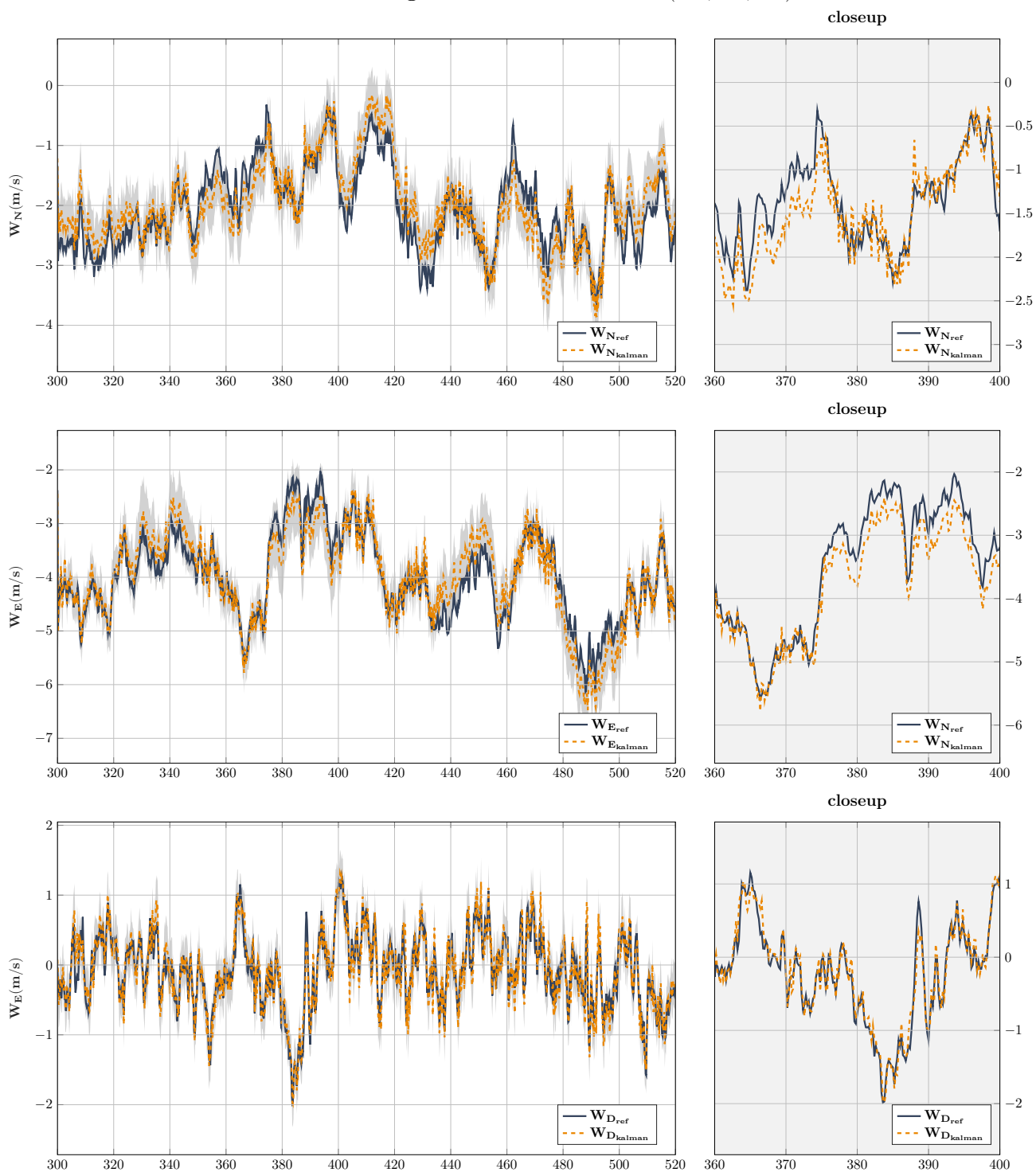
Εικόνα 33: Υλοποίηση ψευδο-αισθητηριακού συστήματος με την χρήση του περιβάλλοντος MATLAB

Kalman Filtering- Estimated Air-Relative Velocity vector ( $u_r, v_r, w_r$ )



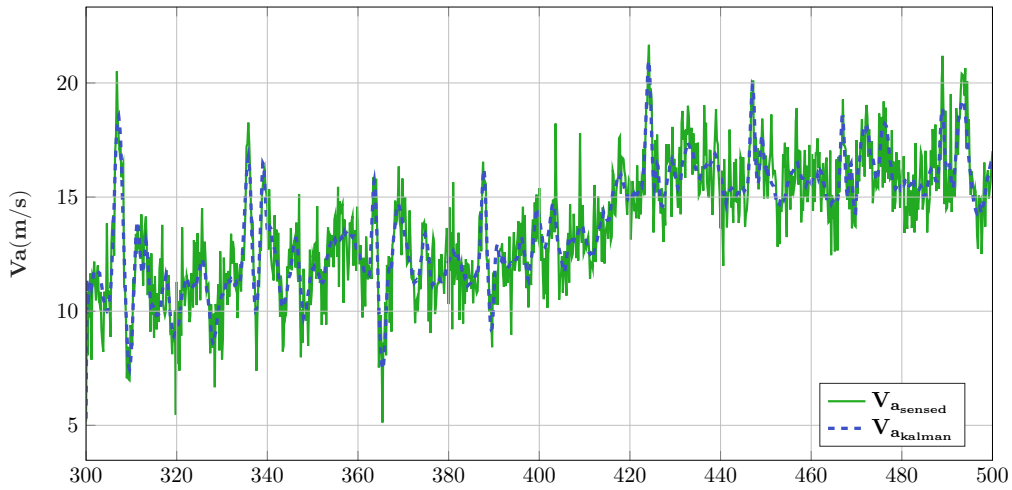
Εικόνα 34: MF-Kalman: Το διάνυσμα σχετικής ταχύτητας αεροσκάφους και αέρας μάζας. Σύγκριση μεταξύ εκτιμώμενων σημάτων και σημάτων αναφοράς ("αληθινά"). Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης

### Kalman Filtering- Estimated Wind vector ( $W_N, W_E, W_D$ )

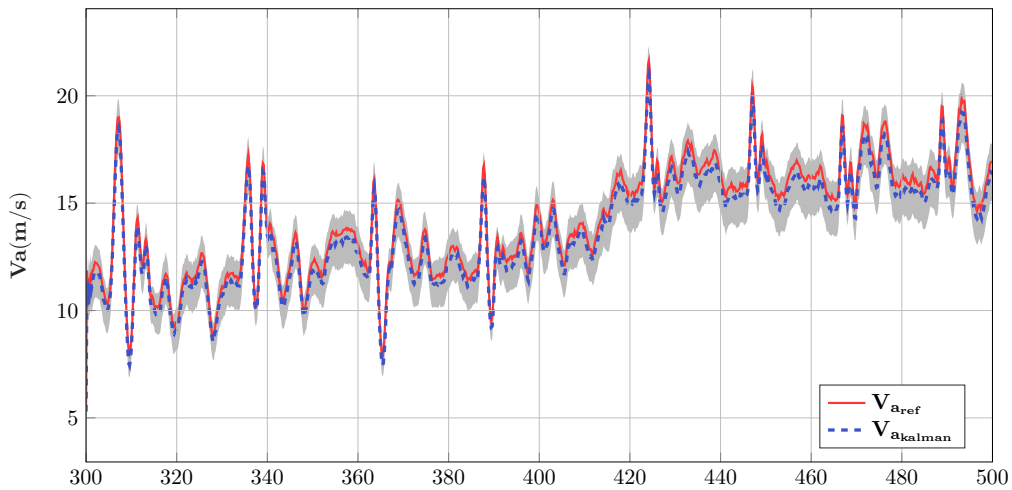


Εικόνα 35: MF-Kalman: Το διάνυσμα ταχυτήτων ανέμου στο πλαίσιο NED. Σύγκριση μεταξύ εκτιμώμενων σημάτων και σημάτων αναφοράς ("αληθινά"). Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης

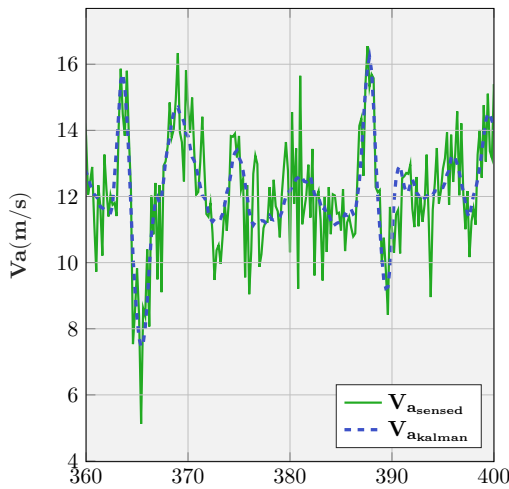
### Kalman Filtering- Airspeed ( $V_a$ ) sensed to estimated comparison



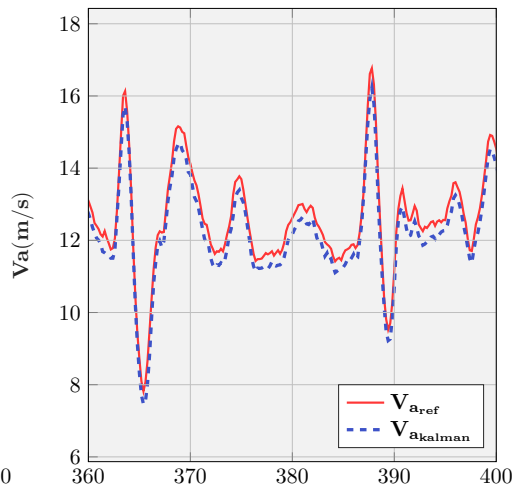
### reference to estimated comparison



### sensed to estimated closeup

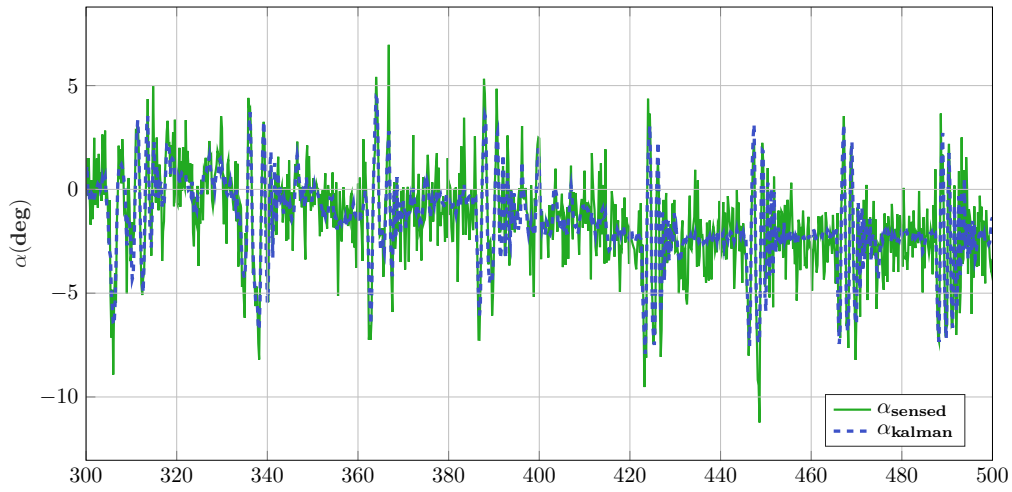


### reference to estimated closeup

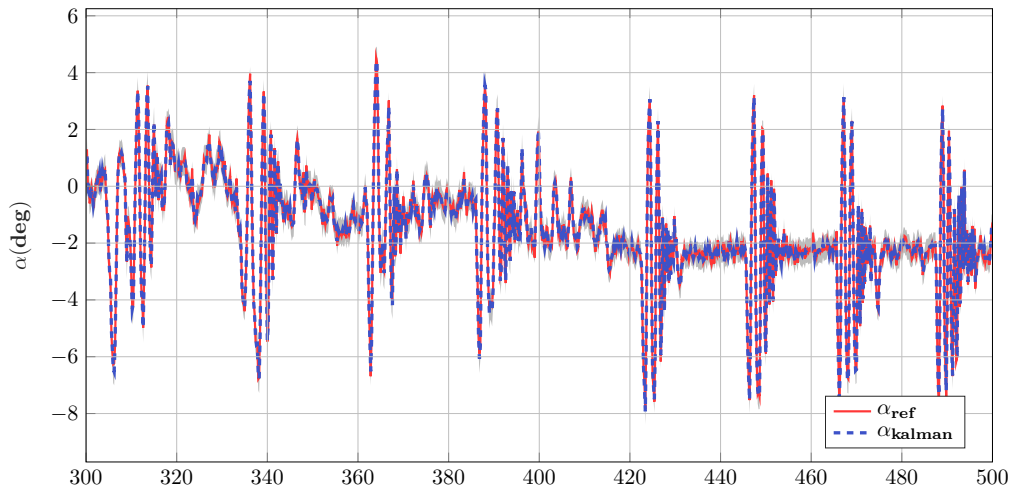


Εικόνα 36: MF-Kalman: Ταχύτητα αέρος αεροσκάφους. Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης

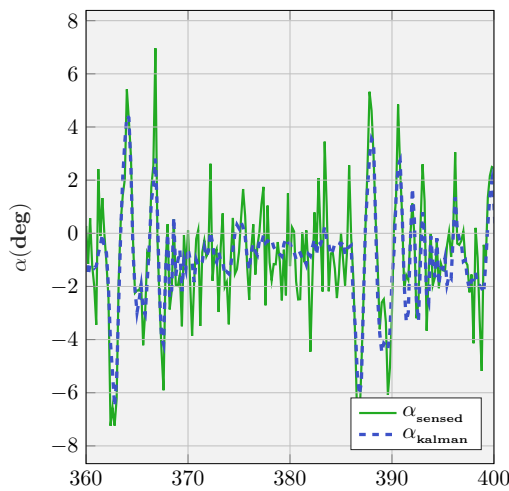
**Kalman Filtering- Angle of attack ( $\alpha$ )**  
sensed to estimated comparison



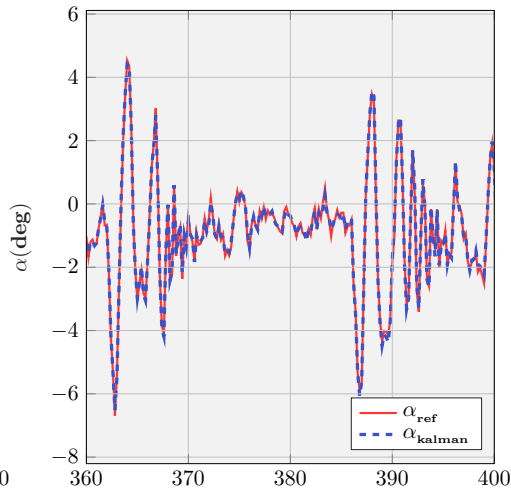
reference to estimated comparison



sensed to estimated closeup

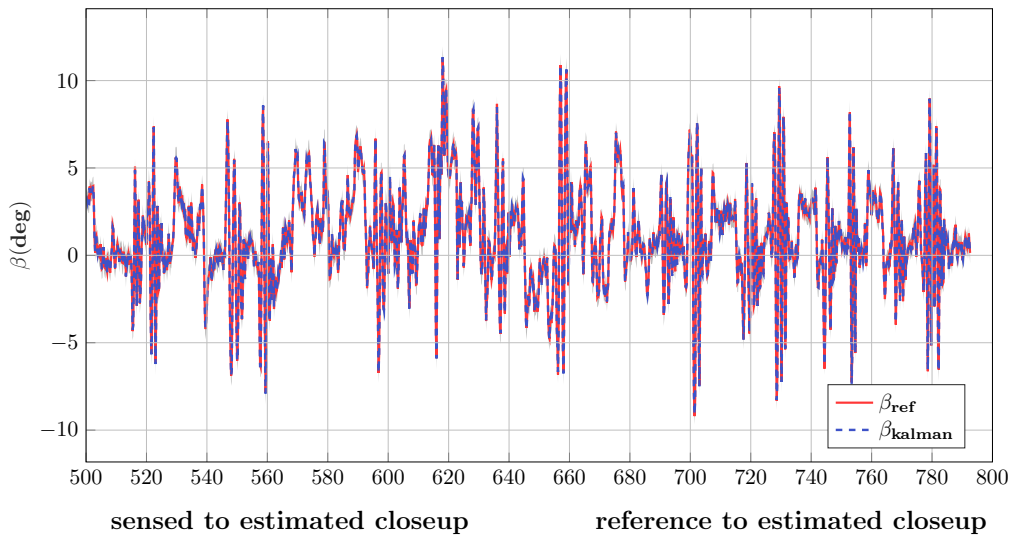
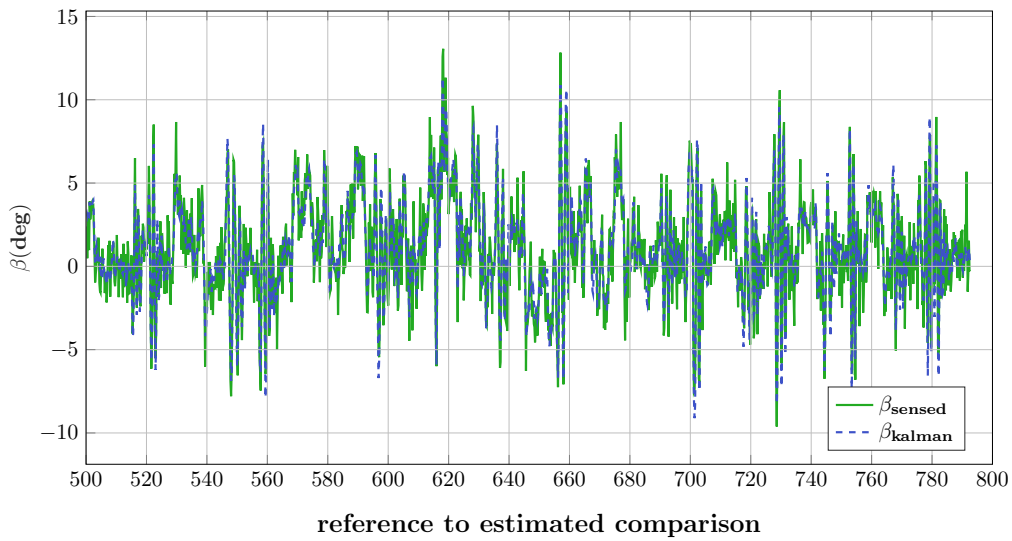


reference to estimated closeup



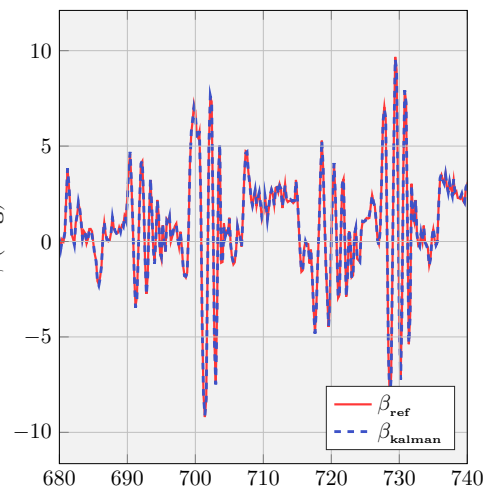
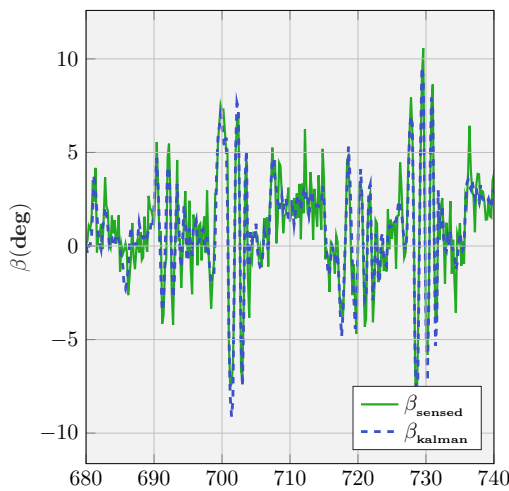
Εικόνα 37: MF-Kalman: Γωνία προσβολής αεροσκάφους ( $\alpha$ ). Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης

**Kalman Filtering- Angle of sideslip ( $\beta$ )**  
sensed to estimated comparison



sensed to estimated closeup

reference to estimated closeup



Εικόνα 38: MF-Kalman: Γωνία πλαγιολίσθησης αεροσκάφους ( $\beta$ ). Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης

**5.4.4.1 Συμπεράσματα** Όπως βλέπουμε στα παραπάνω διαγράμματα, το MF φίλτρο Κάλμαν κατάφερε να απομονώσει το μεγαλύτερο μέρος των αβεβαιοτήτων από τα σήματα των ψευδοαισθητήρων. Τα διανύσματα του ανέμου (Εικόνα 35), αν και υψηλής διακύμανσης και μειωμένης παρατηρητικότητας, κατάφεραν να προβλεφθούν ικανοποιητικά και εντός των αντίστοιχων διαστημάτων εμπιστοσύνης (σκιασμένη περιοχή). Στην περίπτωση της ταχύτητας αέρος (Εικόνα 36)- και κυρίως αναφορικά με την εγκάρσια συνιστώσα της ( Εικόνα 34)- παρατηρούμε μία ελαφριά προκατάληψη των εκτιμήσεων της τάξεως των  $0.2 \text{ m/s}$ . Αυτή είναι αποτέλεσμα της παραδοχής μας ότι η πλήρης μοντελοποίηση των συστηματικών σφαλμάτων των μετρήσεων είναι πρακτικά ανέφικτη. Για τον λόγο αυτό, στην περίπτωση ορισμένων ψευδοαισθητηριακών δεδομένων η απαλοιφή των συστηματικών σφαλμάτων έγινε μόνο μερικώς. Δυστυχώς όμως, τα φίλτρα Κάλμαν δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν με βέλτιστο τρόπο τις συστηματικές αλλοιώσεις των παρατηρήσεων, οδηγώντας έτσι σε μία μικρή προκατάληψη των εκτιμήσεων. Κατά τ'άλλα, οι εκτιμήσεις των γωνιών ευστάθειας  $\alpha, \beta$  (Εικόνες 37,38) επιστρέφουν ακρίβεια  $0.25 \text{ deg}$  η οποία κρίνεται ως πολύ ικανοποιητική.

#### 5.4.5 Model-Based υλοποίηση του φίλτρου Κάλμαν

Στην δεύτερη υλοποίηση του φίλτρου μας, θεωρούμε πως έχουμε πρόσβαση στα batch διανύσματα παραμέτρων. Για λόγους ελαχιστοποίησης της υπολογιστικής πολυπλοκότητας ορίζουμε το νέο διάνυσμα κατάστασης του φίλτρου ως:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ \alpha \\ \beta \\ W_N \\ W_E \\ W_D \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

η αναφορά πλέον του υποδιανύσματος  $[x_1, x_2, x_3]^T$  γίνεται πλέον στο πλαίσιο ανέμου του αεροσκάφους.

**5.4.5.1 Time Update** Οι εξισώσεις κατάστασης του φίλτρου είναι πλέον εξαρτώμενες από το μοντέλο και συγκεκριμένα η τριάδα ευστάθειας  $(V_a, \alpha, \beta)$  ακολουθεί τις δυναμικές εξισώσεις των αξόνων ανέμου (Wind-Axes Force Equations):

$$\begin{aligned} \dot{V}_\alpha &= -\frac{\bar{q}S}{m} C_{Dw} + \frac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \\ &+ g(\cos \phi \cos \theta \sin \alpha \cos \beta + \sin \phi \cos \theta \sin \beta - \sin \theta \cos \alpha \cos \beta) \\ &= \Phi_1(t) \end{aligned} \quad (5.31\alpha')$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\bar{q}S}{mV_a \cos \beta} C_L + q - \tan \beta (p \cos \alpha + r \sin \alpha) - \frac{T \sin \alpha}{mV_a \cos \beta} \quad (5.31\beta')$$

$$+ \frac{g}{V_a \cos \beta} (\cos \phi \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha)$$

$$= \Phi_2(t)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\bar{q}S}{mV_a} C_{Y_W} + p \sin \alpha - r \cos \alpha + \frac{g}{V_a} \cos \beta \sin \phi \cos \theta \quad (5.31\gamma')$$

$$+ \frac{\sin \beta}{V_a} (g \cos \alpha \sin \theta - g \sin \alpha \cos \phi \cos \theta + \frac{T \cos \alpha}{m})$$

$$= \Phi_3(t)$$

όπου:

$$C_{D_W} = C_D \cos \beta - C_Y \sin \beta \quad (5.31\delta')$$

$$C_{Y_W} = C_Y \cos \beta + C_D \sin \beta \quad (5.31\epsilon')$$

Τελικά έχουμε:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{W}_N \\ \dot{W}_E \\ \dot{W}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \Phi_3(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Όπου οι ποσότητες  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$ ,  $\Phi_3(t)$  αντιστοιχούν στις σχέσεις (5.31α')-(6.6). Τα μοντέλα των αεροδυναμικών συντελεστών βασίζονται στις σχέσεις (3.31α')-(3.31στ'). Η Ιακωβιανή του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια των παραγώγων του Παραρτήματος Α.3.

**5.4.5.2 Measurement Update** Οι παρατηρήσεις του επιταχυνσιόμετρου προωθούνται πλέον στην υποδιαδικασία του Measurement Update.

Έτσι έχουμε:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{accel} \\ y_{gps} \\ y_{pitot} \\ y_{vanes} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

όπου:

$$\mathbf{y}_{accel} = \begin{bmatrix} y_{accel,x} \\ y_{accel,y} \\ y_{accel,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho V_a^2 S}{2m} [-C_D \cos \alpha + C_L \sin \alpha] + \frac{T}{m} \\ \frac{\rho V_a^2 S}{2m} C_Y \\ \frac{\rho V_a^2 S}{2m} [-C_D \sin \alpha - C_L \cos \alpha] \end{bmatrix} \quad (5.34)$$



Αντίστοιχα, το μοντέλο του GPS με βάση το νέο διάνυσμα παρατήρησης κατασκευάζεται από την σχέση [49] :

$$\begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{bmatrix} = V_a \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Έτσι τελικά έχουμε:

$$\mathbf{y}_{\text{gps}} = \begin{bmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} \\ V_{gz} \end{bmatrix} = (R_B^G)^{-1} \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_N \\ W_E \\ W_D \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

ή αντίστοιχα:

$$\mathbf{y}_{\text{gps}} = (R_B^G)^{-1} V_a \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_N \\ W_E \\ W_D \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Το pitot πλέον διατηρεί το μοντέλο:

$$y_{\text{pitot}} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 \quad (5.38)$$

Τέλος, το μοντέλο για του ανεμοδείκτες γίνεται:

$$\mathbf{y}_{\text{van}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Η Ιακωβιανή μήτρα των αισθητήρων κατασκευάζεται ως:

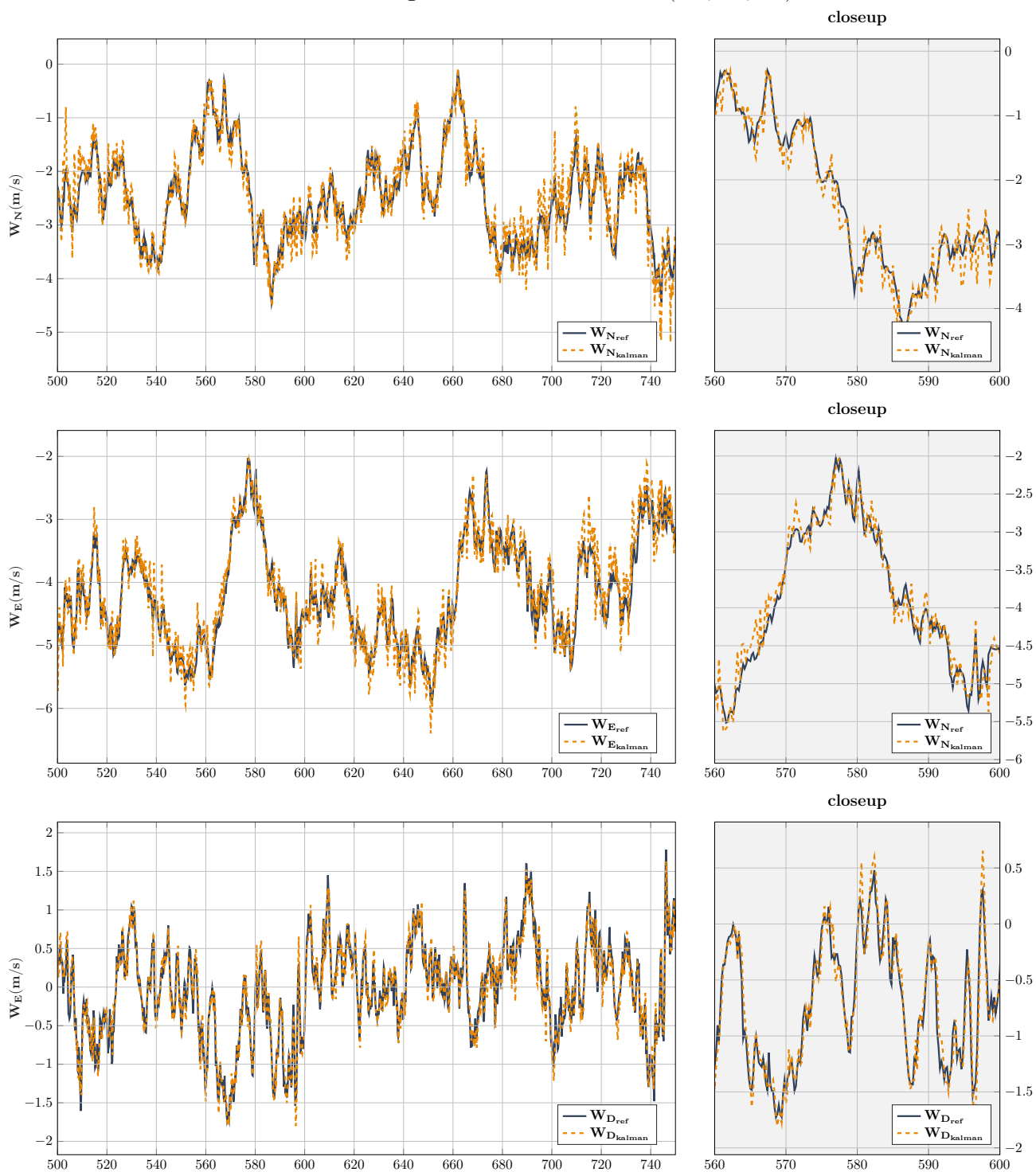
$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_{\text{accel},x}}{\partial V_a} & \cdots & \frac{\partial y_{\text{accel},x}}{\partial W_D} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial y_{\text{GPS},Vx}}{\partial V_a} & \cdots & \frac{\partial y_{\text{GPS},Vx}}{\partial W_D} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial y_{\text{pitot}}}{\partial V_a} & \cdots & \frac{\partial y_{\text{pitot}}}{\partial W_D} \\ \frac{\partial y_{\text{vanes},\alpha}}{\partial V_a} & \cdots & \frac{\partial y_{\text{vanes},\alpha}}{\partial W_D} \\ \frac{\partial y_{\text{vanes},\beta}}{\partial V_a} & \cdots & \frac{\partial y_{\text{vanes},\beta}}{\partial W_D} \end{pmatrix}_{9 \times 6} \quad (5.40)$$

Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων (5.40) παρατίθεται στο Παράρτημα A.5. Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά αποτελέσματα από το προσομοιωμένο φίλτρο.

#### 5.4.6 Αποτελέσματα Model-Based υλοποίησης με δεδομένα προσομοίωσης

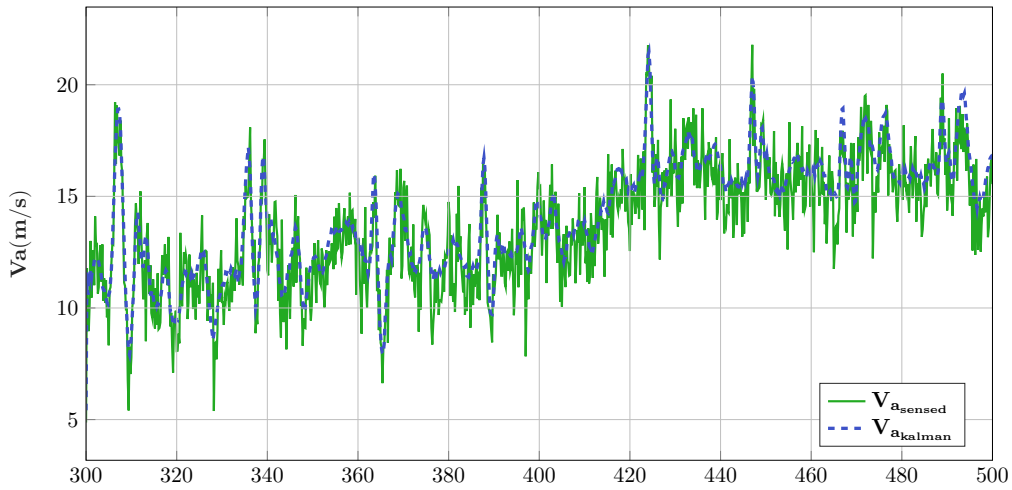
Όπως και στην προηγούμενη ενότητα το φίλτρο αναπτύχθηκε με την βοήθεια της πλατφόρμας της MATLAB. Η υλοποίηση είναι παρόμοια με την ενότητα 5.4.4

### Kalman Filtering- Estimated Wind vector ( $W_N, W_E, W_D$ )

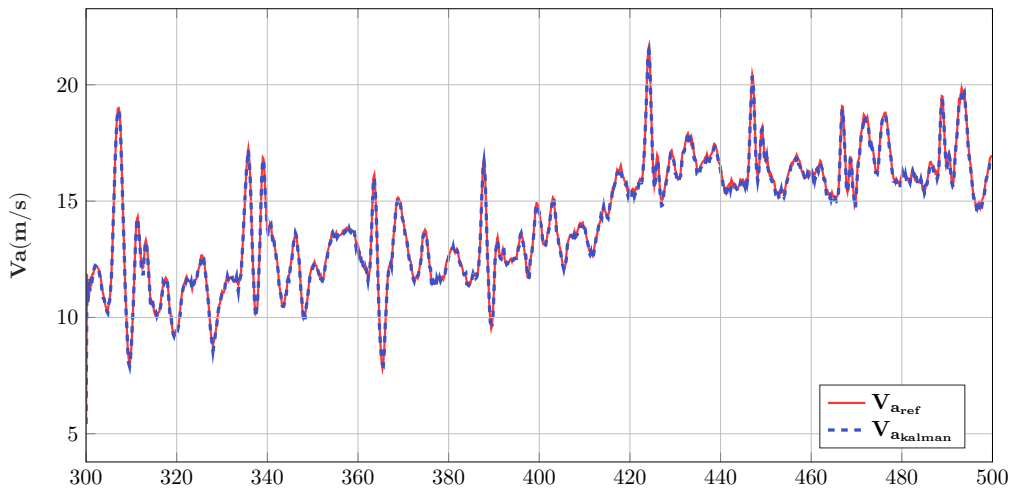


Εικόνα 39: MB-Kalman: Το διάνυσμα ταχυτήτων ανέμου στο πλαίσιο NED. Σύγκριση μεταξύ εκτιμώμενων σημάτων και σημάτων αναφοράς ("αληθινά"). Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης

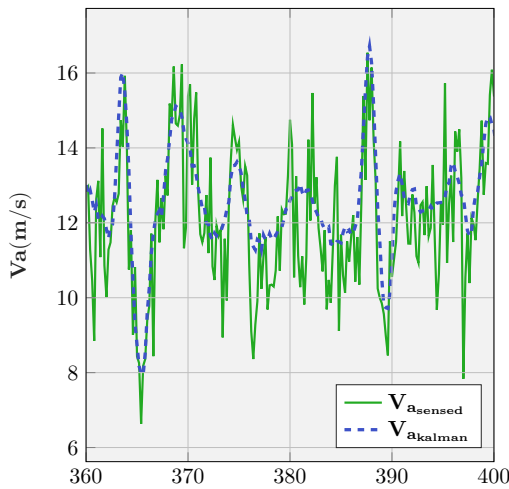
### Kalman Filtering- Airspeed ( $V_a$ ) sensed to estimated comparison



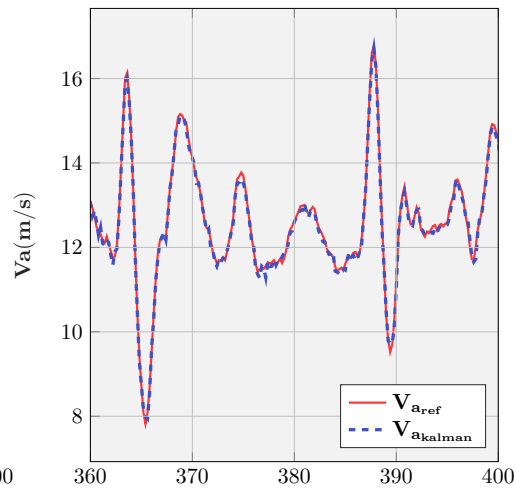
### reference to estimated comparison



### sensed to estimated closeup

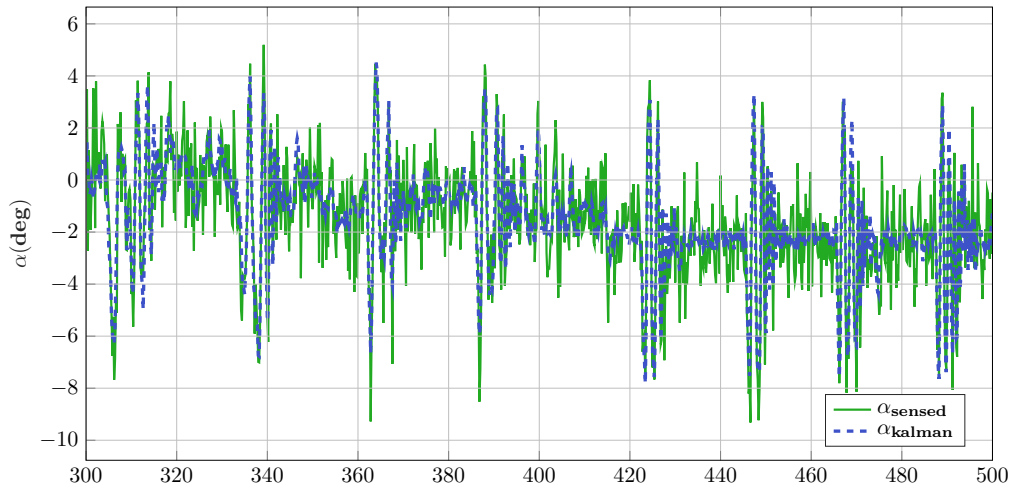


### reference to estimated closeup

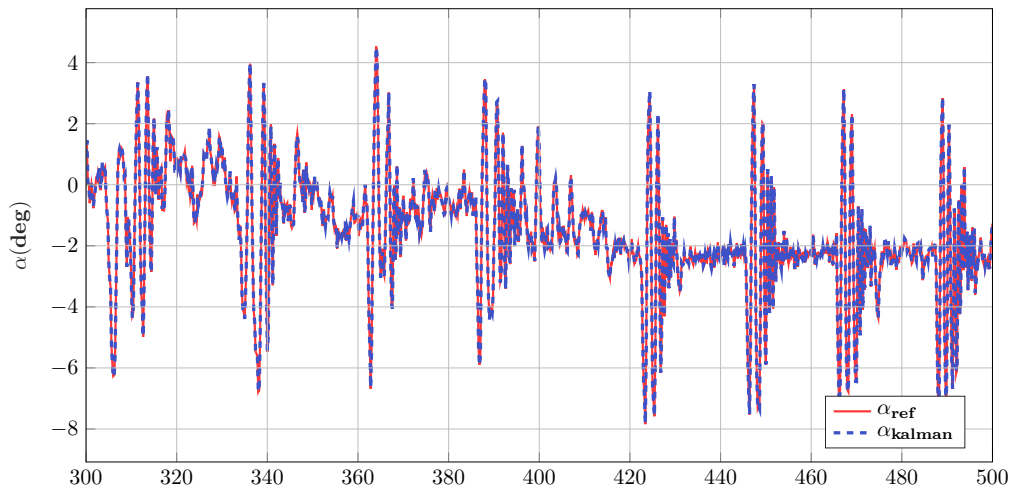


Εικόνα 40: MB-Kalman: Ταχύτητα αέρος αεροσκάφους. Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης

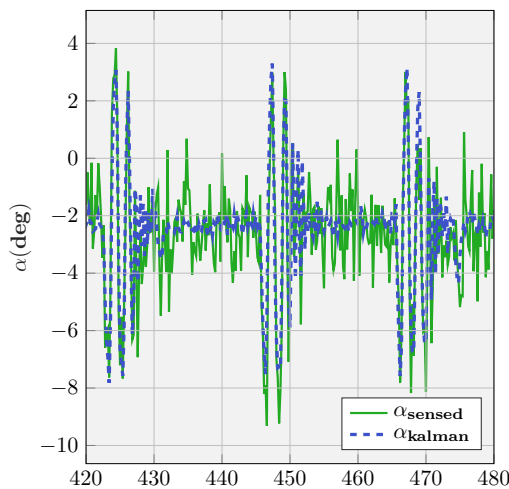
**Kalman Filtering- Angle of attack ( $\alpha$ )**  
sensed to estimated comparison



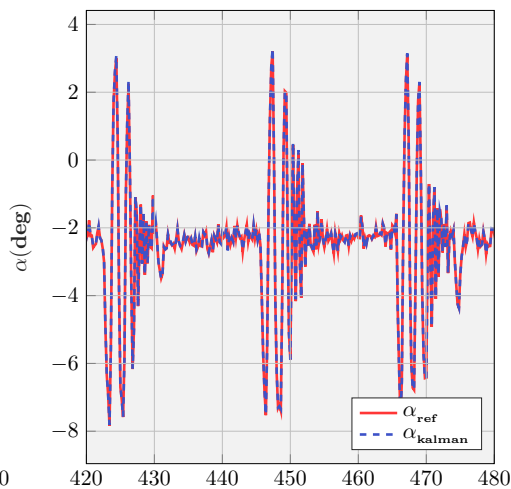
reference to estimated comparison



sensed to estimated closeup

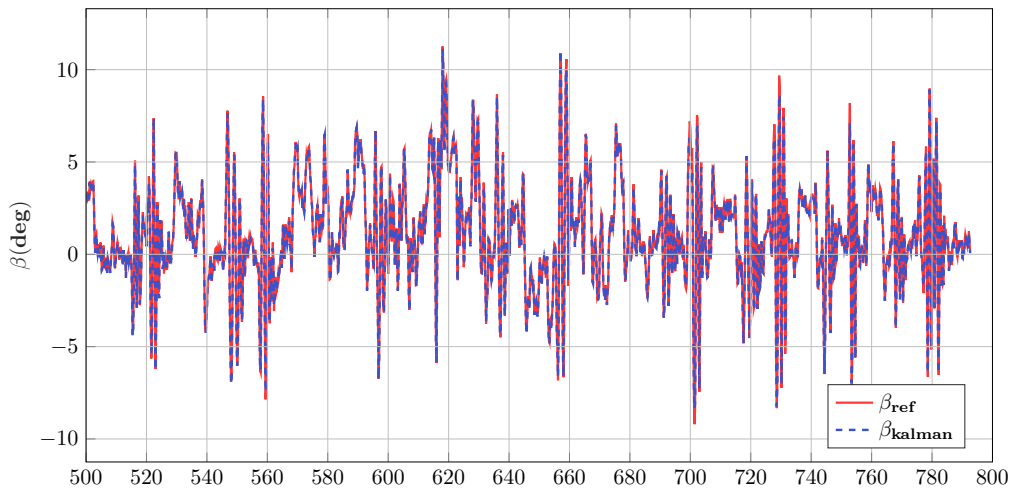
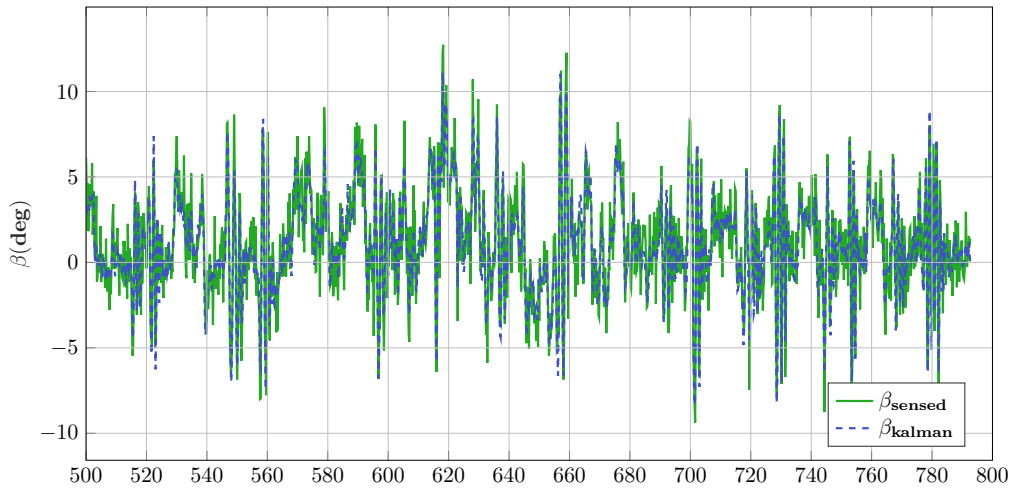


reference to estimated closeup



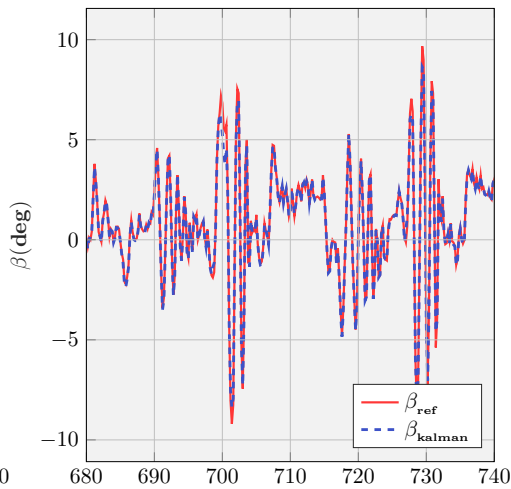
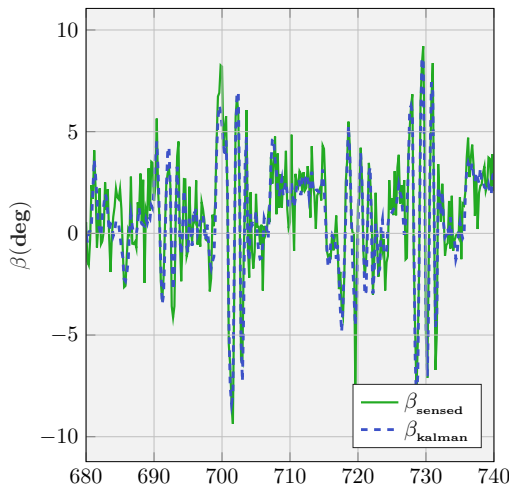
Εικόνα 41: MB-Kalman: Γωνία προσβολής αεροσκάφους ( $\alpha$ ). Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης

**Kalman Filtering- Angle of sideslip ( $\beta$ )**  
sensed to estimated comparison



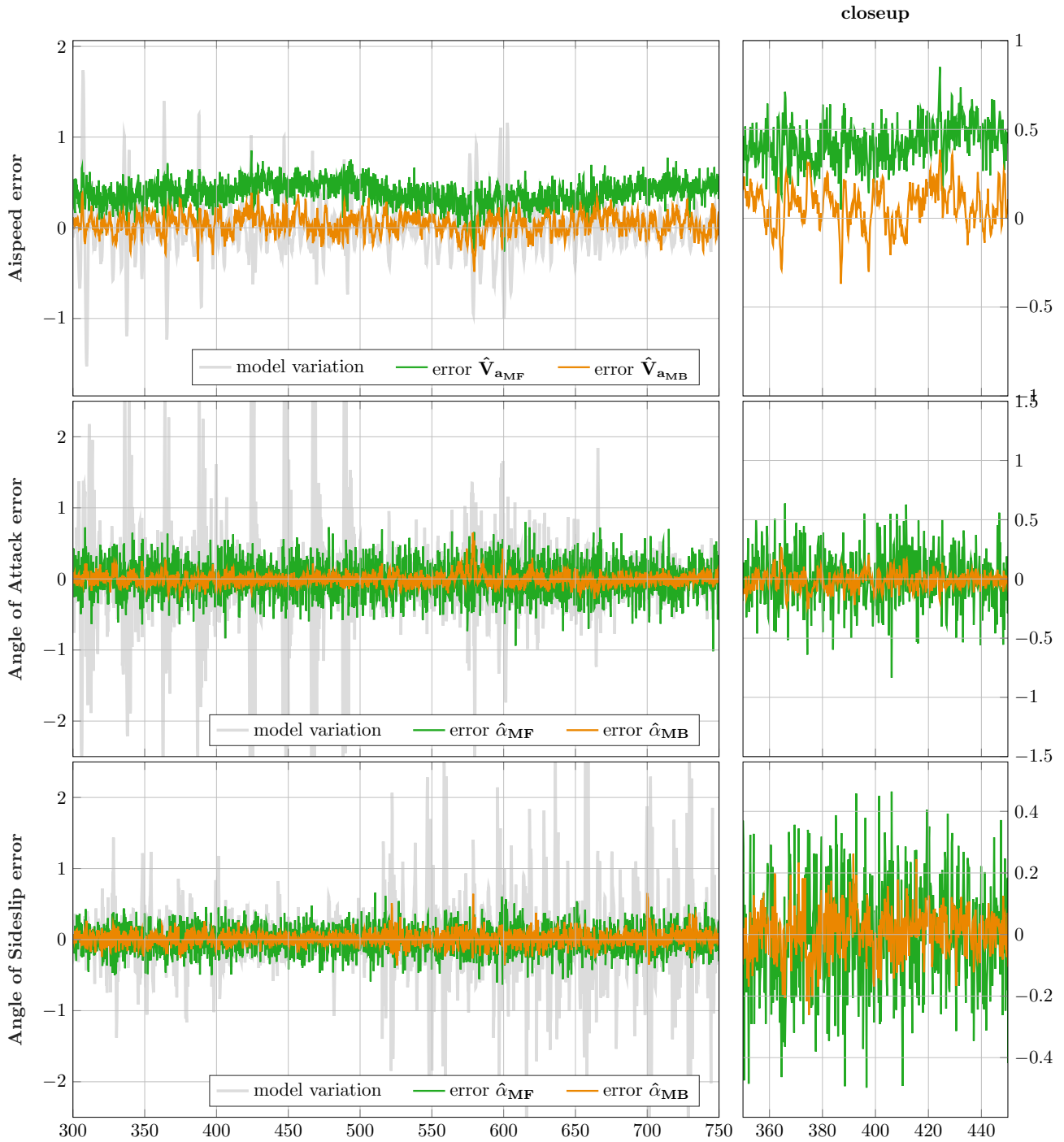
sensed to estimated closeup

reference to estimated closeup



Εικόνα 42: MB-Kalman: Γωνία πλαγιολίσθησης αεροσκάφους ( $\beta$ ). Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης

### Kalman Filters: Estimation Error for MF and MB techniques



Εικόνα 43: Σύγκριση Σφαλμάτων εκτίμησης για τις Model-Based και Model-Free τεχνικές. Στο υπόβαθρο, η σκιασμένη περιοχή χαρακτηρίζει διακύμανση του πραγματικού σήματος.

**5.4.6.1 Συμπεράσματα** Δεδομένης της αξιόπιστης εκτίμησης των παραμέτρων του μοντέλου, παρατηρούμε πως η Model-Based υλοποίηση του φίλτρου Κάλμαν παρουσιάζει μεγαλύτερη ακρίβεια. Ειδικά στην περίπτωση εκτίμησης του των συνιστωσών του ανέμου (Εικόνα 39) και της ταχύτητας αέρος του αεροσκάφους (Εικόνα 36), τα αποτελέσματα είναι αισθητά καλύτερα. Όπως βλέπουμε από την ποσοτικοποίηση των σφαλμάτων των δύο τεχνικών (Εικόνα 43) το σημαντικότερο κέρδος έγκειται στην απαλοιφή μερικής προκατάληψης που παρατηρείται στο διάνυσμα ταχύτητας αέρος. Παρ' όλα αυτά, θα πρέπει να τονιστεί πως σε περίπτωση πραγματικών διακυμάνσεων στο διάνυσμα παραμέτρων (ήτοι μικρές αλλαγές στην αεροδυναμική κατάσταση του αεροσκάφους που εκφράζονται με μικρές αλλαγές στις παραγώγους ευστάθειας) είναι εξαιρετικά αμφίβολο το κατά πόσο η Model-Based υλοποίηση παρουσιάζει καλύτερη επίδοση από την αντίστοιχη Model-Free. Τέλος, η υλοποίηση ενός Model-Based φίλτρου Κάλμαν σε κλειστό βρόχο μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια σε περιπτώσεις απότομων αλλαγών στο διάνυσμα των παραμέτρων ή σε έναν μη-βέλτιστο συντονισμό των παραμέτρων που αφορούν τον παράγοντα εξασθένισης ( $\lambda_F$ )

## 5.5 Απομόνωση Αεροδυναμικών Συντελεστών

Επεξεργαζόμενοι τις εξόδους των παραπάνω βαθμίδων του αισθητηριακού συστήματος και γνωρίζοντας πλέον τις βασικές συστηματικές συνιστώσες των σφαλμάτων, θεωρούμε ότι μπορούμε να εξάγουμε εκτιμήσεις για:

- τις μεταφορικές επιταχύνσεις του αεροσκάφους  $[a_x, a_y, a_z]^T$
- τις γωνιακές ταχύτητες  $[p, q, r]^T$
- την δυναμική πίεση  $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V_a^2$
- τις γωνίες ευστάθειας  $\alpha, \beta$

Επίσης, θεωρούμε πως έχουμε σχεδιάσει κατάλληλα φίλτρα για την εκτίμηση των παραγώγων των γωνιακών ταχυτήτων  $[\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]$  [96]

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με την γνώση των γεωμετρικών και αδρανειακών χαρακτη-

ριστικών του αεροσκάφους, εκτιμάμε τις αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές ως:

$$z_{C_L} = -\frac{ma_z}{\bar{q}S} \cos \alpha + \frac{(ma_x - T)}{\bar{q}S} \sin \alpha \quad (5.41\alpha')$$

$$z_{C_D} = -\frac{(ma_x - T)}{\bar{q}S} \cos \alpha - \frac{ma_z}{\bar{q}S} \sin \alpha \quad (5.41\beta')$$

$$z_{C_Y} = \frac{ma_y}{\bar{q}S} \quad (5.41\gamma')$$

$$z_{C_l} = \frac{1}{\bar{q}Sb} (\dot{p}J_x - \dot{r}J_{xz} + qr(J_z - J_y) - qpJ_{xz} - \tau_p) \quad (5.41\delta')$$

$$z_{C_m} = \frac{1}{\bar{q}S\bar{c}} (\dot{q}J_y + pr(J_x - J_z) + (p^2 - r^2)J_{xz}) \quad (5.41\epsilon')$$

$$z_{C_n} = \frac{1}{\bar{q}Sb} (\dot{r}J_z - \dot{p}J_{xz} + pq(J_y - J_x) + qrJ_{xz}) \quad (5.41\sigma')$$

## 5.6 Εκτίμηση Αβεβαιότητας σύνθετων Αεροδυναμικών Μεταβλητών με χρήση μεθόδων Monte-Carlo

Αντίθετα με την μέθοδο OLS, οι εκτιμητές Ολικών Ελαχίστων Τετραγώνων απαιτούν την εκ των προτέρων (a priori) γνώση ή εκτίμηση των αβεβαιοτήτων όλων των μεταβλητών εισόδου. Η μή σωστή κανονικοποίηση της μήτρας  $D$  (μέσω του πίνακα  $C$ ), μπορεί να οδηγήσει σε καθεστώς τεχνητής στρέβλωσης (artificial ill-conditioning) του προβλήματος ελαχιστοποίησης, εισάγοντας διακυμάνσεις και προκατάληψη (variations and bias) στο διάλυμα παραμέτρων. Συνεπώς, η ακριβής εκτίμηση των ορίων αβεβαιότητας των μεταβλητών εισόδου είναι ύψιστης σημασίας για την ευρωστία των εκτιμητών.

Η ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας σε περιπτώσεις μή σύνθετων ή απευθείας μετρούμενων μεταβλητών πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τις προδιαγραφές των σχετικών αισθητήρων. Αντίστοιχα, σε περιπτώσεις όπου η μεταβλητή προκύπτει ως έξοδος κάποιου φίλτρου εκτίμησης κατάστασης (State Estimation), η αβεβαιότητα υπολογίζεται από την συνοδευόμενη μήτρα συνδιακύμανσης του διανύσματος κατάστασης.

Από την άλλη, υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι μεταβλητές εισόδου κατασκευάζονται συνθετικά, με χρήση πολλαπλών παρατηρήσεων από διαφορετικούς αισθητήρες ή φίλτρα, που υπόκεινται σε ποικίλα σφάλματα. Για παράδειγμα, η μέτρηση του συντελεστή κάθεταις άντωσης ( $C_L$ ) εξάγεται χρησιμοποιώντας παρατηρήσεις από το επιταχυνσιόμετρο ( $a_x, a_y, a_z$ ), το σύστημα pitot-static (για την εκτίμηση της διαφορικής πίεσης αέρα  $\bar{q}$ ), το μοντέλο της Ωσης ( $T$ ) και τους ανεμοδείκτες των γωνιών ευστάθειας ( $\alpha, \beta$ ):

$$z_{C_L}(\bar{q}, a_x, a_z, \alpha, T) = -\frac{ma_z}{\bar{q}S} \cos \alpha + \frac{(ma_x - T)}{\bar{q}S} \sin \alpha \quad (5.42)$$

Συνήθως, σε τέτοιες περιπτώσεις η εκτίμηση των επιπέδων αβεβαιότητας πραγματοποιείται με γραμμικοποίηση των σύνθετων εξισώσεων της μορφής της (5.42) και την εφαρ-



μογή του Γενικευμένου Νόμου Διάδοσης των Σφαλμάτων (General Law of Error Propagation) [68]. Παρ'όλα αυτά, οι μέθοδοι αυτές συχνά αποτυγχάνουν να εκτιμήσουν αξιόπιστα τα όρια της αβεβαιότητας, ειδικά όταν η διαδικασία εμπεριέχει ισχυρά μή γραμμικές εξισώσεις, χρονομεταβλητές αβεβαιότητες και μη κανονικά κατανομημένες παρατηρήσεις [20]. Μία εναλλακτική λύση σε αυτούς τους περιορισμούς είναι η ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας με χρήση των αριθμητικών μεθόδων Monte Carlo. Η μέθοδος περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω.

Θεωρούμε μια μετρούμενη ποσότητα  $Z$  (στο εξής measurand) η οποία κατασκευάζεται συνθετικά από μία μή γραμμική συνάρτηση τυχαίων μεταβλητών (TM)  $\Xi_i$  ώστε:

$$Z = f(\Xi_1, \dots, \Xi_n) \quad (5.43)$$

όπου όλες οι μεταβλητές  $\Xi$  προέρχονται από δειγματοληψία κάποιων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΠ),  $g_{\Xi_j}(\xi_j)$ .

Πρώτα απ'όλα, η ακόλουθη ανάλυση χρησιμοποιεί σε θεμελιώδεις παραδοχές:

- Τα συστηματικά σφάλματα των μετρήσεων είναι γνωστά εκ των προτέρων και έχουν αφαιρεθεί από την τελική μέτρηση
- οι αβεβαιότητες των TM εισόδου ( $\Delta\Xi$ ) είναι γνωστές με επαρκή ακρίβεια
- οι μήτρες συνδιακύμανσης των TM ( $\Sigma_{\Xi}$ ) και των σφαλμάτων ( $\Sigma_{\Delta\Xi}$ ) είναι διαθέσιμες ή έχουν εκτιμηθεί

Η μέθοδος Monte Carlo (MC) βασίζεται στην επαναλαμβανόμενη πραγματοποίηση της  $f$  με δειγματοληψία των TM από τις αντίστοιχες ΣΠΠ. Μετά το πέρας ενός μεγάλου πλήθους πραγματοποιήσεων  $M$  ( $\geq 10^6$ ), κατασκευάζουμε αριθμητικά την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΚ) :

$$\hat{G}_Z(z) \approx P[Z \leq z] \quad (5.44)$$

Η αβεβαιότητα εκτιμάται αντιστρέφοντας την ΑΚ και υπολογίζοντας τα όρια που αντιστοιχούν σε κάποιον συντελεστή πιθανοτικής επικάλυψης  $p$  (συνήθως  $p = 95\%$ ). Μία σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας φαίνεται στην Εικόνα 44.

Εφόσον οι παραπάνω προϋποθέσεις ικανοποιούνται, το σφάλμα ποσοτικοποιείται σε κάθε πραγματοποίηση  $i \leq M$  ως:

$$\varepsilon(\Xi) = Z - \tilde{Z} = f(\Xi) - f(\Xi + \Delta\Xi) \quad (5.45)$$

όπου τα διανύσματα  $\Xi$ ,  $\Delta\Xi$  είναι δείγματα των παραπάνω ΣΠΠ.

Γενικά υποθέτουμε πως οι TM εισόδου ( $\Xi$ ) ανήκουν σε γνωστά προκαθορισμένα διαστήματα ονομαστικής κατάστασης ή λειτουργίας. Για τον λόγο αυτό, τα δείγματα των εισόδων αντλήθηκαν από ομοιόμορφες κατανομές. Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί πως, σε εφαρμογές αεροδυναμικής, οι περισσότερες μεταβλητές που συνθέτουν την  $f$  έχουν αρκετά υψηλή ετεροσυσχέτιση.

Η κατασκευή ομοιόμορφων κατανομών με ετεροσυσχέτιση, γίνεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Sklar και την χρήση Gaussian Copulas [45]. Έτσι, στην περίπτωση πολυμεταβλητών ομοιόμορφων κατανομών (joint rectangular distributions) οι μεταβλητές εισόδου κατασκευάζονται ως εξής:

$$C_G(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (5.46)$$

$$\Rightarrow (u_1, \dots, u_n) \sim \mathcal{U}(0, 1) \quad (5.47)$$

όπου  $C_G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  είναι η γκαουσιανή copula,  $\Phi_R$  μία πολυμεταβλητή γκαουσιανή κατανομή μηδενικής μέσης τιμής και συνδιακύμανσης  $\Sigma_{\Xi}$  και  $\Phi^{-1}$  η αντίστροφη συνάρτηση ΑΚ μίας κανονικής (standard normal) ΤΜ. Έτσι, καταλήγουμε με ένα σύνολο συσχετισμένων μεταβλητών με ομοιόμορφες οριακές κατανομές.

Οι ομοιόμορφα κατανεμημένες μεταβλητές  $U$  μετατοπίζονται και κλιμακώνονται έτσι ώστε να αντιστοιχούν στα προκαθορισμένα διάστημα ονομαστικής κατάστασης των εισόδων:

$$\xi_j = r_{(-)} + (r_{(+)} - r_{(-)}) u_j \quad (5.48)$$

Τα εικονικά σφάλματα των μετρήσεων αντλούνται απο πολυμεταβλητές γκαουσιανές κατανομές:

$$\Delta \Xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\Delta \Xi}) \quad (5.49)$$

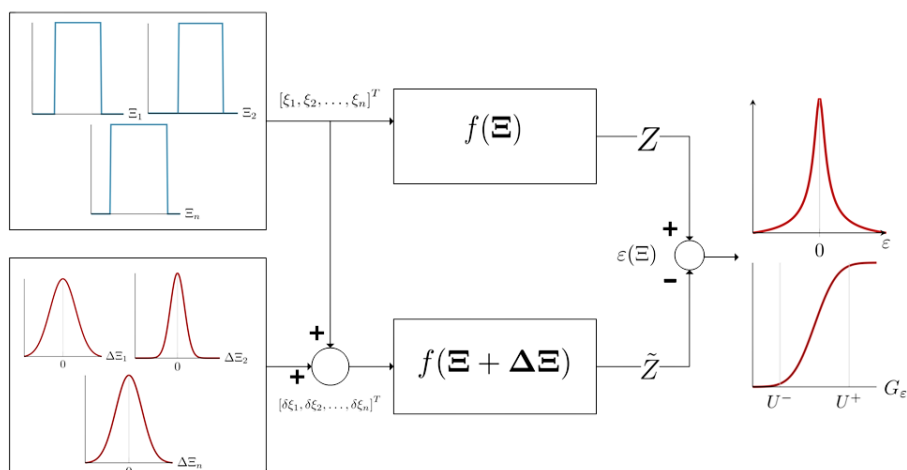
Μετά το πέρας των  $M$  πραγματοποιήσεων μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε μια εκτιμήτρια της ΑΚ του σφάλματος ( $\hat{G}_{\varepsilon}$ ). Χρησιμοποιώντας έναν συντελεστή πιθανοτικής επικάλυψης της τάξης του 95%, τα άνω και κάτω όρια της αβεβαιότητας  $[U_{(-)}, U_{(+)}]$  ποσοτικοποιούνται ως :

$$[U_{(-)}, U_{(+)}] = [\hat{G}_{\varepsilon}^{-1}(0.025), \hat{G}_{\varepsilon}^{-1}(0.975)] \quad (5.50)$$

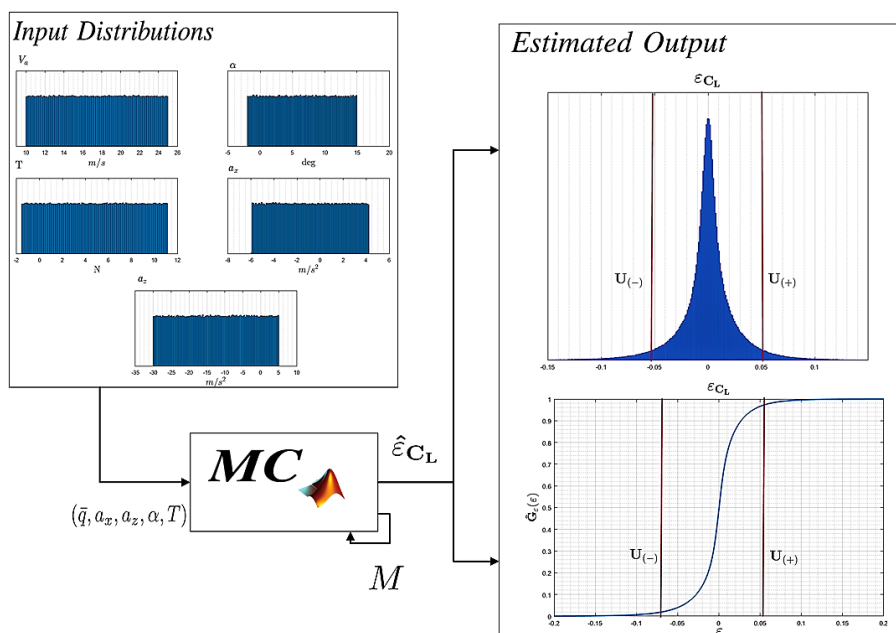
Για το σκοπό την συγκεκριμένης υλοποίησης, τα σφάλματα αυτά προσεγγίζονται από κανονικές κατανομές μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 := \left[ \frac{\max(|U_{(-)}|, |U_{(+)}|)}{1.96} \right]^2 \quad (5.51)$$

Ένα παράδειγμα υλοποίησης της μεθόδου με χρήση MATLAB φαίνεται στην Εικόνα 45.



Εικόνα 44: Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας ποσοτικοποίησης του σφάλματος με χρήση MC



Εικόνα 45: Εκτίμησης αβεβαιότητας της μέτρησης του συντελεστή κάθετης Άντωσης με χρήση της μεθόδου MC

## 6 Πειραματική Επαλήθευση των Αλγορίθμων

### 6.1 Γενικά

Οι διαδικασίες που σχεδιάσαμε παραπάνω, αφορούν την εξυπηρέτηση αναγκών πειραματικής πλατφόρμας υπό πραγματικές συνθήκες. Για τον λόγο αυτό, η επίδοση των αλγορίθμων εκτίμησης που αναπτύξαμε επαληθεύτηκαν με πειραματικά δεδομένα που αποκτήθηκαν από δοκιμαστές πτήσεις του UAV σταθερής πτέρυγας του τμήματος των ενα-

έριων εφαρμογών του Control Systems Lab<sup>9</sup> της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ.

## 6.2 Η πειραματική πλατφόρμα UnATRaP

Οι δοκιμαστικές πτήσεις πραγματοποιήθηκαν με την χρήση του μεσσαίου-μεγέθους μη επανδρωμένου αεροσκάφους σταθερής πτέρυγας UnATRaP (Unmanned Aerial Testbed for Rapid Prototyping). Η συγκεκριμένη πλατφόρμα συναρμολογήθηκε και αναπτύχθηκε από τον Γιώργο Ζωγόπουλο-Παπαλιάκο, διδακτορικό ερευνητή της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Το συγκεκριμένο αεροσκάφος ανήκει στο στόλο των εναέριων οχημάτων του Control Systems Lab υπό την εποπτεία του Δρ. Κωνσταντίνου Κυριακόπουλου.

Η πλατφόρμα του UnATRaP τροφοδοτείται από έναν 32cc κινητήρα εσωτερικής καύσης, απόδοσης 3.8 HP και χωρητικότητας καυσίμου 1 lt, που επιτρέπει μεγάλη ανθεκτικότητα, επαρκές ωφέλιμο φορτίο ( $\sim 2.5$  kg) και σχετικά ικανοποιητικό εύρος πτήσης (36 km). Από την άλλη, οι κινητήρες εσωτερικής καύσης μειονεκτούν ως προς την στιβαρότητα εξαιτίας των παραγόμενων δονήσεων μεγάλου πλάτους. Η τοποθέτηση του αισθητηριακού συστήματος πρέπει να γίνει με μεγάλη προσοχή και με στόχο την μεγαλύτερη δυνατή απόσβεση των δονήσεων. Το άνοιγμα πτέρυγας αγγίζει τα 2.7m και η συνολική επιφάνεια άντωσης ( $S$ ) τα ( $0.92$  m<sup>2</sup>). Τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πλατφόρμας συνοψίζονται στον Πίνακα 8.

Το UnATRaP είναι εξοπλισμένο με ένα αισθητηριακό σύστημα μεσαίου προς χαμηλού κόστους. Περιλαμβάνει τον ελεγκτή Pixhawk ο οποίος ενσωματώνει μονάδες IMU, GPS, Gyro καθώς και ένα εσωτερικό φίλτρο Κάλμαν για εκτίμηση των γωνιών Euler. Τα λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε για την λειτουργία του Pixhawk ήταν το Ardupilot. Στο αεροσκάφος ενσωματώθηκε και ιδιοκατασκευασμένο σύστημα μέτρησης δεδομένων αέρος, που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο των δράσεων του εργαστηρίου από τον Γιώργο Ζωγόπουλο-Παπαλιάκο (περισσότερες πληροφορίες για την ανάπτυξη και την βαθμονόμηση του συστήματος βρίσκονται στην πηγή [104]). Οι ποσότητες που καταγράφηκαν κατά την διάρκεια των πτήσεων συνοδευόμενες από τους αντίστοιχους ρυθμούς δειγματοληψίας συνοψίζονται στον πίνακα 9. Χαρακτηριστικές όψεις του UnATRaP φαίνονται στην Εικόνα 46.

Symbol	Name	Value	Units
$m_0$	zero fuel mass	11.6	kg
$m_F$	operating mass	12.6	kg
$\bar{c}$	mean chord	34	cm
$b$	wingspan	2,72	m
$S$	wing area	0.92	m <sup>2</sup>

Πίνακας 8: Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά UnATRaP

<sup>9</sup><http://www.controlsystemslab.gr/main/>

No	Contained in	Description	Logging Rate (Hz)
1	IMU	IMU1 Accelerometer and Gyroscope	50
2	IMU2	IMU2 Accelerometer and Gyroscope	50
3	ATT	Used Euler angles	25
4	POS	Used latitude, longitude and altitude	25
5	NKF1	Internal Kalman filter Euler Angles	25
6	NKF1	Internal Kalman NED coordinates	25
7	NKF1	Internal Kalman NED velocities	25
8	NKF1, NKF2	Internal Kalman gyroscope and magnetometer	25
9	NKF2	Internal Kalman planar wind components	25
10	BARO	Temperature and barometric pressure inside autopilot	10
11	ARSP	Differential Pressure, air temperature	10
12	ARSP	Calculated airspeed	10
13	RCIN	Pilot RC commands	10
14	RCOU	Commands to servos	10
15	RPM	Engine RPM	10
16	CUR2	Wind vane information	10
17	STAT	isFlying state flag	5
18	MODE	Flight mode	Event

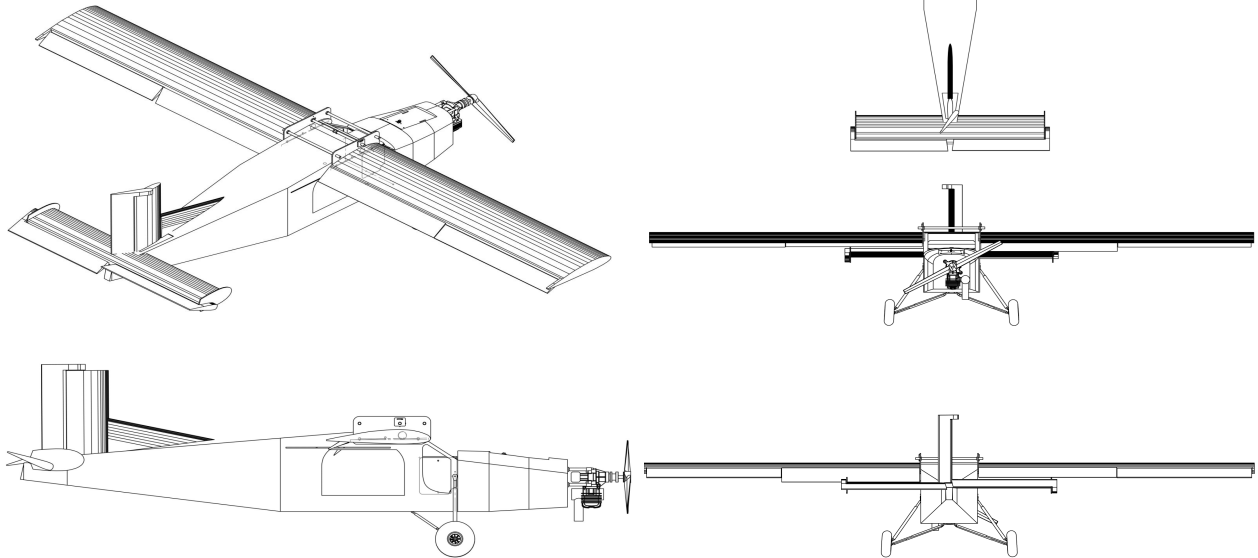
Πίνακας 9: Οι καταγραφόμενες ποσότητες απο το σύστημα λήψης και επισκόπησης δεδομένων του UnARTaP



Εικόνα 47: Το μη επανδρωμένο αεροσκάφος σταθερής πτέρυγας UnATRaP



Unmanned Aerial Testbed for Rapid Prototyping  
by George Zogopoulos-Papaliakos  
Control Systems Lab  
School of Mechanical Engineering  
National Technical University of Athens



Εικόνα 46: Χαρακτηριστικές όψεις του UnATRaP

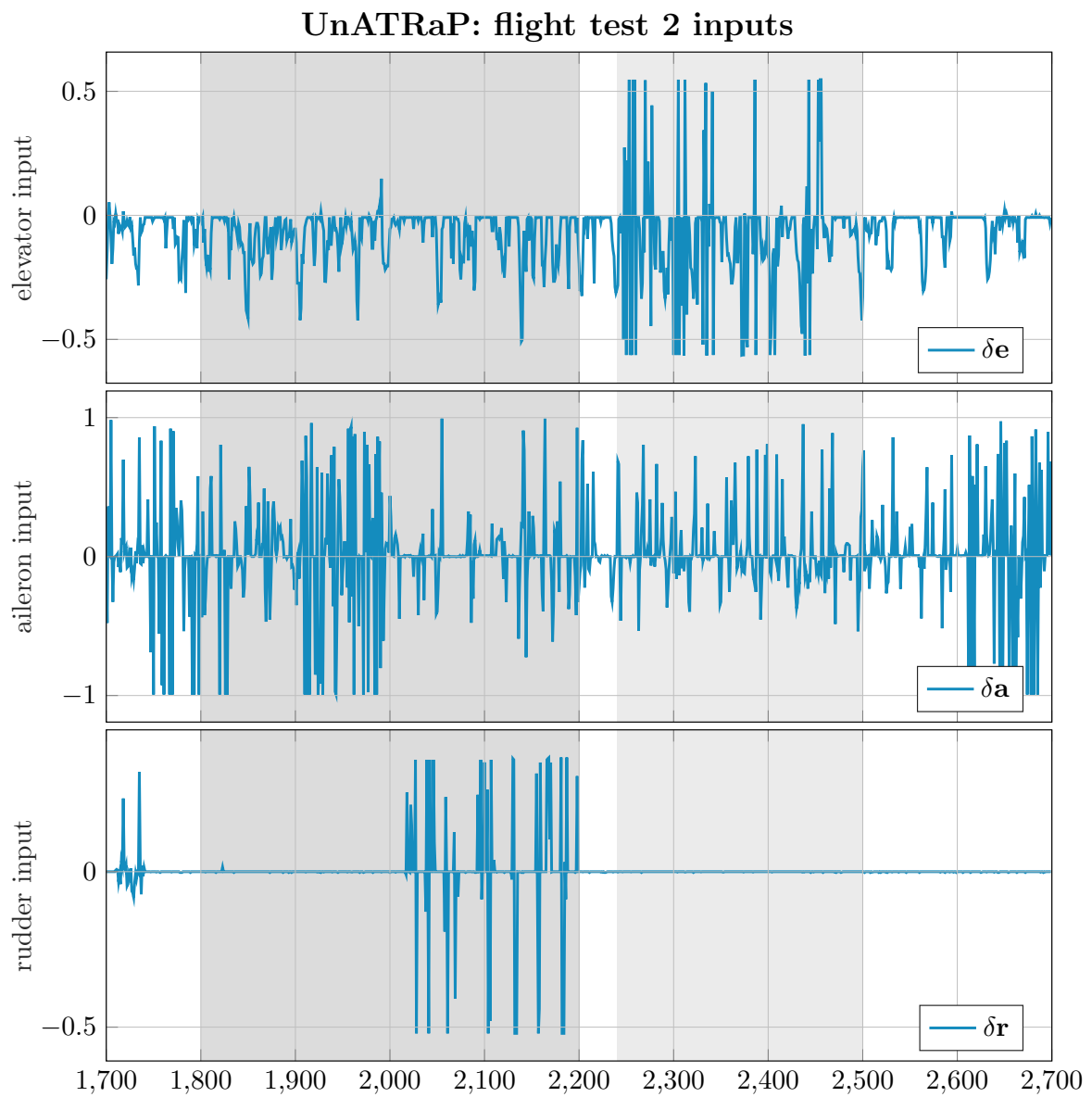
### 6.3 Οι πειραματικές πτήσεις

Οι πειραματικές πτήσεις έλαβαν χώρα στην Αερολέσχη του Κάστρου Βοιωτίας. Αντλήσαμε δεδομένα από τρεις διαφορετικές δοκιμαστικές πτήσεις με διαφορετικές συνθήκες συστηματικής διέγερσης και υποβοηθούμενου ελέγχου. Η πρώτη πτήση πραγματοποιήθηκε με υποβοήθηση του συστήματος αυτόματου πιλότου και περιέχει ελιγμούς μικρού πλάτους. Η δεύτερη πραγματοποιήθηκε χωρίς υποβοήθηση από το σύστημα αυτόματου πιλότου και περιέχει ελιγμούς μεγάλου πλάτους και υψηλού συχνοτικού περιεχομένου, διεγείροντας κατά τόπους τόσο τον εγκάρσιο όσο και τον διαμήκη άξονα του αεροσκάφους. Η τρίτη πραγματοποιήθηκε επίσης χωρίς την βοήθεια αυτόματου πιλότου με το αεροσκάφος να βρίσκεται σε κύριο λόγο σε κατάσταση σταθερής πτήσης με μικρή διέγερση στους άξονες.

Για τις ανάγκες της εκτίμησης του αεροδυναμικού μοντέλου, χρησιμοποιήσαμε δεδομένα από την δεύτερη πτήση. Η επιλογή βασίστηκε στο μεγάλο πληροφοριακό εύρος των δεδομένων. Η χειροκίνητη πλοήγηση επέτρεψε την καταγραφή ελιγμών μεγάλου πλάτους και υψηλού συχνοτικού περιεχομένου, συνθήκες ιδανικές για την πλούσια διέγερση της εισόδου και την αποτελεσματική εκτίμηση του διανυσματος παραμέτρων. Η πτήση 2 διήρκεσε 3000 δευτερόλεπτα και περιελάμβανε περιόδους ξεχωριστής διέγερσης του εγκάρσιου και διαμήκους άξονα.

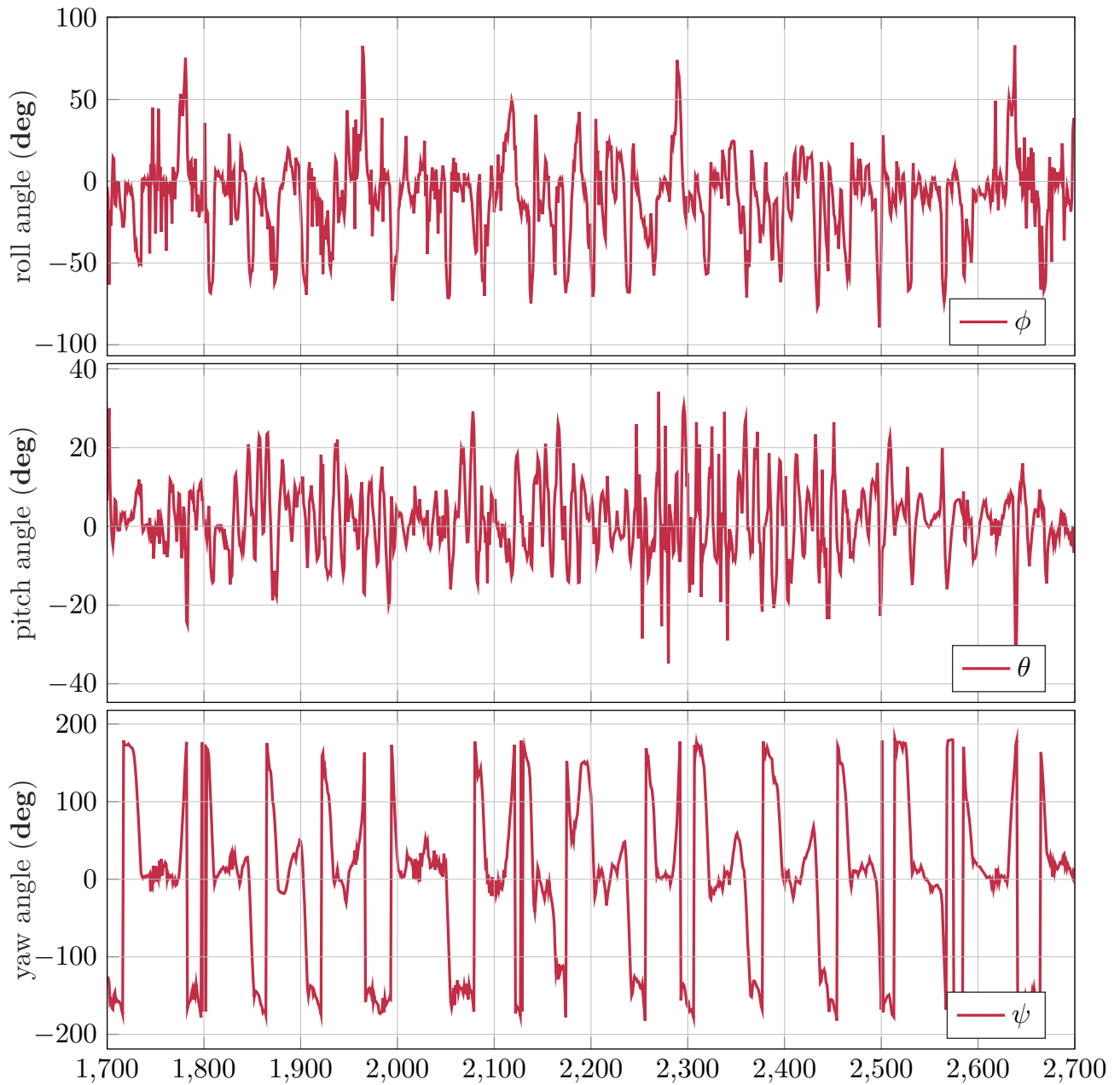
Οι ξεχωριστές περίοδοι διέγερσης σημειώνονται στην εικόνα των σημάτων εκτροπής των επιφανειών ελέγχου (Εικόνα 48). Επίσης, παραθέτουμε ενδεικτικά τις γωνίες Euler (Ει-

κόνα 49) και τις παρατηρούμενες ταχύτητες εδάφους από το GPS (Εικόνα 50).



Εικόνα 48: Τα σήματα εκτροπής των επιφανειών ελέγχου για την δεύτερη πτήση. Οι σκιασμένες περιοχές αντιστοιχούν στις διεγέρσεις των αξόνων του αεροσκάφους (Πρώτα στον εγκάρσιο και έπειτα στον διαμήκη)

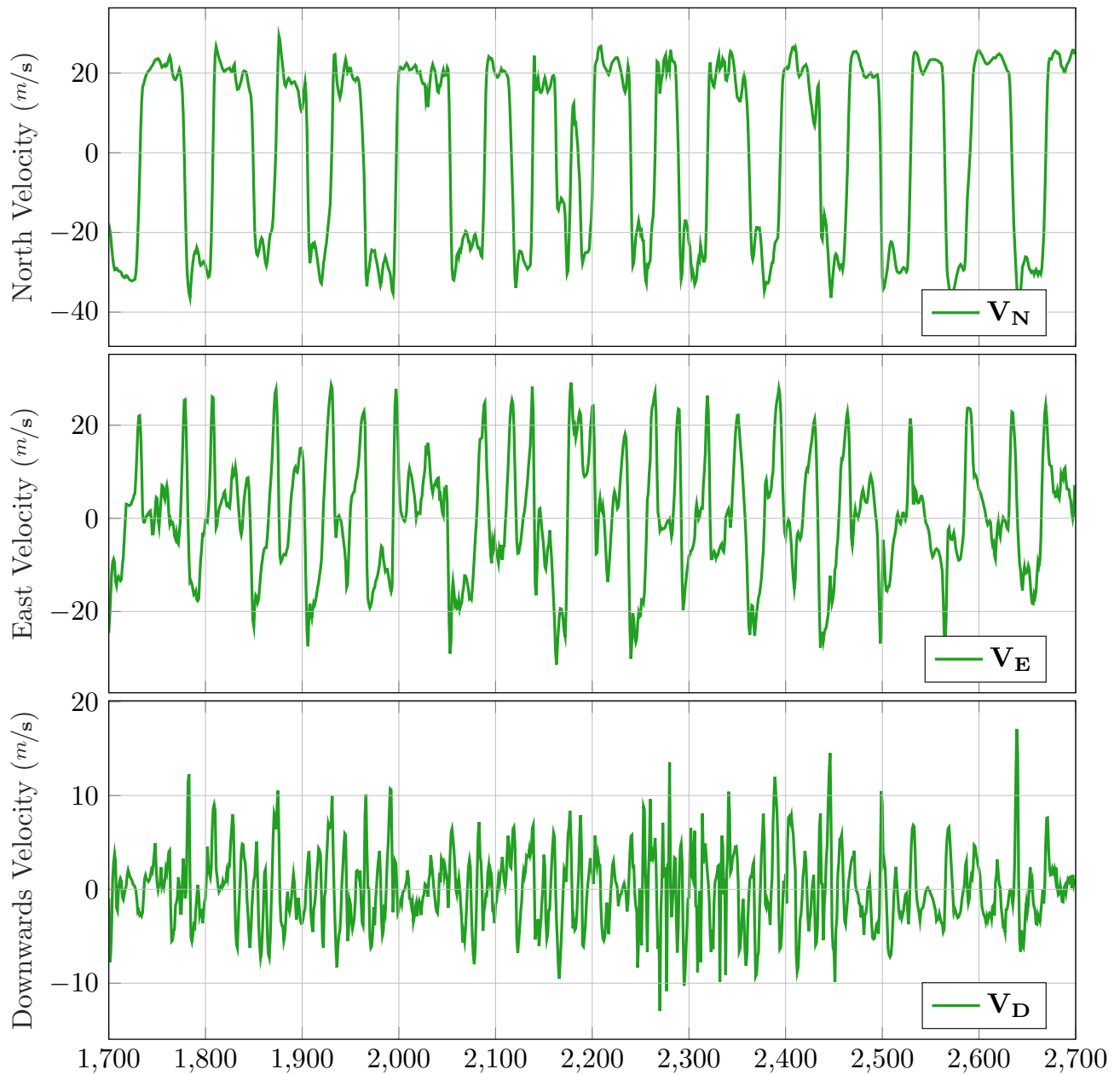
## UnATRaP: flight test 2 Euler Angles



Εικόνα 49: Τα σήματα εκτροπής των γωνιών Euler για την πειραματική πτήση 2



### UnATRaP: flight test 2 ground velocity components



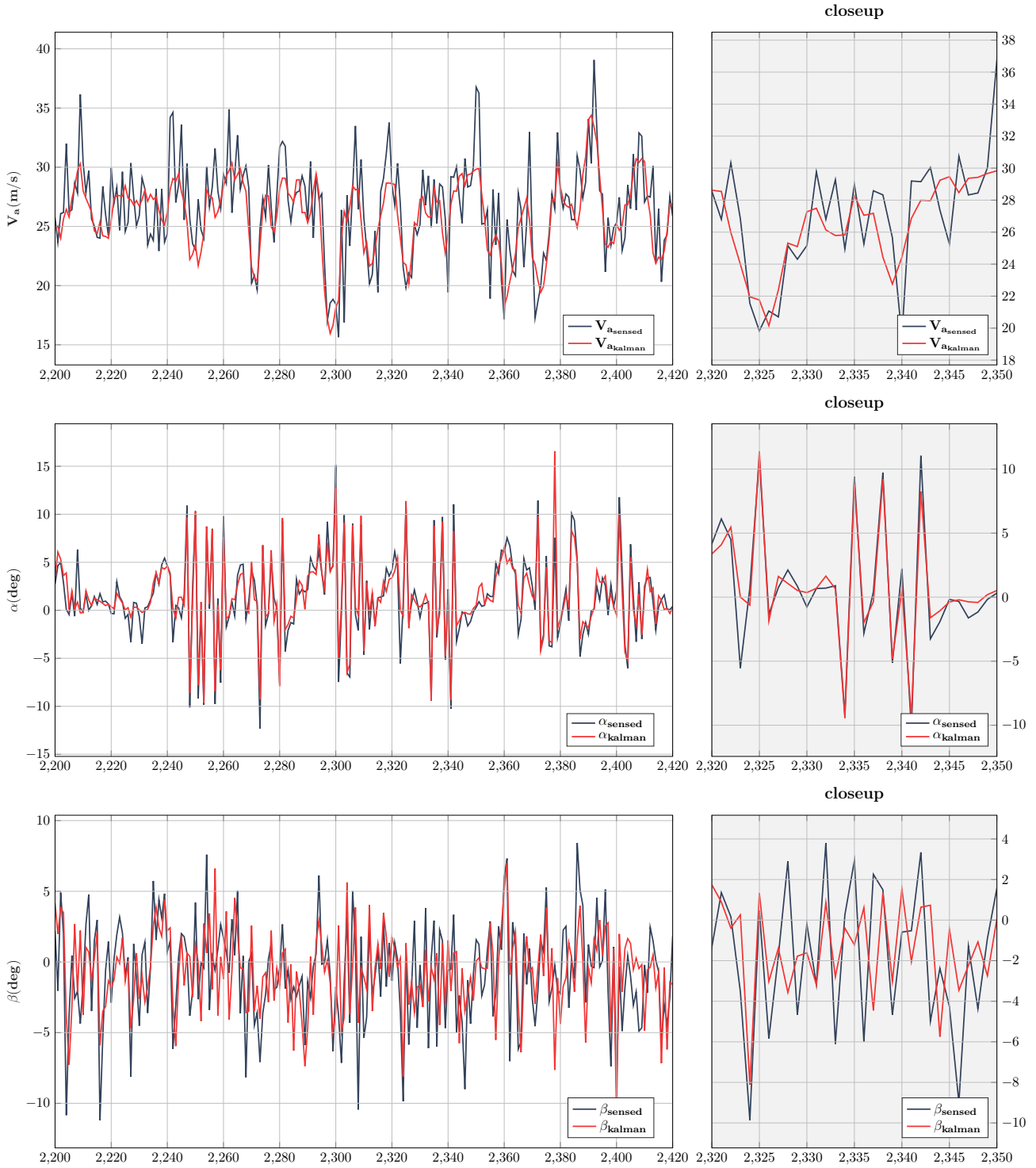
Εικόνα 50: Τα σήματα ταχυτήτων εδάφους για την πειραματική πτήση 2



Εικόνα 51: Το αεροσκάφος κατά την διάρκεια των πειραματικών πτήσεων

## 6.4 Αποτελέσματα MF φίλτρου Κάλμαν

Kalman Filtering- Estimated Air-Relative Velocity vector  $(u_r, v_r, w_r)$



Εικόνα 52: Σύγκριση σημάτων αισθητήρων και σημάτων εκτίμησης του φίλτρου Κάλμαν

Στην Εικόνα 52 φαίνονται οι έξοδοι του φίλτρου Κάλμαν για την τριάδα αεροδυναμικής ευστάθειας για την δεύτερη πειραματική πτήση. Καθότι δεν υπάρχουν τιμές αναφοράς, η σύγκριση γίνεται μόνο με το σήμα του αισθητήρα. Παρατηρούμε πως, τα σήματα εκτίμησης παρουσιάζουν χαμηλότερη μεταβλητότητα, πράγμα αναμενόμενο λόγω της απαλοιφής του θορύβου.

## 6.5 Αποτελέσματα Εκτίμησης Δυναμικού Μοντέλου

Εν προκειμένω, η πειραματική εκτίμηση των δυναμικών παραμέτρων πραγματοποιήθηκε σε δύο στάδια. Πρώτα απομονώσαμε τις ομάδες δεδομένων που αντιστοιχούσαν στις περιόδους διέγερσης του εγκάρσιου και διαμήκους άξονα του αεροσκάφους. Αυτές οι ομάδες δεδομένων (clusters) χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση των μοντέλων μας και την εκτίμηση των παραμέτρων βάσης (Batch Parameters). Ο εκτιμητής που χρησιμοποιήθηκε ήταν ο PCA-TLS. Η επαλήθευση των εκτιμήσεων έγινε με χρήση των εξισώσεων (5.31α')-(6.6), όπου οι εκτιμώμενες παράμετροι χρησιμοποιήθηκαν για να ανακατασκευαστούν την τριάδα αεροδυναμικής ευστάθειας. Τέλος, συγκρίναμε τα ανακατασκευασμένα σήματα με τα αντίστοιχα εκτιμώμενα από το φίλτρο Κάλμαν προκειμένου να διαπιστώσουμε την αξιοπιστία της εκτίμησης. Σε κάθε εκτιμώμενο μοντέλο, παραμένουν μόνο οι παράμετροι που ικανοποιούν τις συνθήκες στατιστικής σημαντικότητας της ενότητας 4.2.1.

Θεωρούμε πως το συχνοτικό περιεχόμενο της δυναμικής του αεροσκάφους δεν ξεπερνάει το φάσμα των 10Hz. Θα πρέπει να τονιστεί πως το αισθητηριακό σύστημα είναι ευαίσθητο στις παραγόμενες δονήσεις από τον κινητήρα, εισάγοντας συνήθως υψίσυχο θόρυβο στα δεδομένα. Επιλέξαμε σχετικά υψηλές συχνότητες δειγματοληψίας, μακριά από τις αρμονικές συχνότητες των δονήσεων προκειμένου να αποφύγουμε την συχνοτική επικάλυψη (aliasing) κοντά στις περιοχές ενδιαφέροντος του φάσματος των αισθητηριακών σημάτων. Επίσης, για τον ίδιο λόγο όπως και για την εκτίμηση μή απευθείας μετρούμενων παραγώγων ( $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ ), τα σήματα εξόδου επεξεργάζονται με κατάλληλα προσαρμοστικά FIR βαθυπερατά ή ζωνοπερατά φίλτρα. Για λεπτομερείς πληροφορίες αναφορικά με την αρχιτεκτονική των φίλτρων που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτήν την εφαρμογή, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο εγχειρίδιο [96].

Τέλος, θα πρέπει να αναφερθεί πως η Ωση και η ροπή του κινητήρα εκτιμήθηκαν με πολυωνυμικά μοντέλα υψηλής τάξης τα οποία αναπτύχθηκαν με βάση τα παρεχόμενα μοντέλα των κατασκευαστών. Επίσης, η εκτίμηση των επιπέδων αβεβαιότητας για τις μετρήσεις των αεροδυναμικών συντελεστών έγινε με χρήση της μεθόδου Monte Carlo που αναπτύχθηκε στην ενότητα 5.6.

### 6.5.1 Εκμάθηση Μοντέλων

Στις παρακάτω εικόνες καταγράφονται τα δεδομένα εκμάθησης των μοντέλων. Το πάνω διάγραμμα κάθε εικόνας συγκρίνει το διάλυσμα παρατήρησης που χρησιμοποιήθηκε για την εκμάθηση με το εκτιμώμενο μοντέλο. Στη μέση παρατίθενται οι χρονική εξέλιξη σημαντικών παραμέτρων του μοντέλου. Το κάτω διάγραμμα παρουσιάζει την χρονική εξέ-

λιξη των ιδιαζουσών τιμών και το προκαθορισμένο κατώφλι επαρκούς διέγερσης. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν τις περιοχές επαρκούς διέγερσης όλων των φασματικών κατευθύνσεων των εκτιμητών. Στον Πίνακα 10 παρατίθενται όλες οι εκτιμώμενοι παράμετροι που αφορούν τις αεροδυναμικές δυνάμεις. Δυστυχώς, μέχρι το πέρας της συγκεκριμένης μελέτης, δεν είχαμε πρόσβαση στην μήτρα ροπών αδρανείας του αεροσκάφους - η οποία πρέπει να προσδιοριστεί πειραματικά.

Τα εκτιμώμενα μοντέλα έχουν την παρακάτω δομή:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{Lq_n}q_n + C_{L\delta\epsilon}\delta\epsilon \quad (6.1)$$

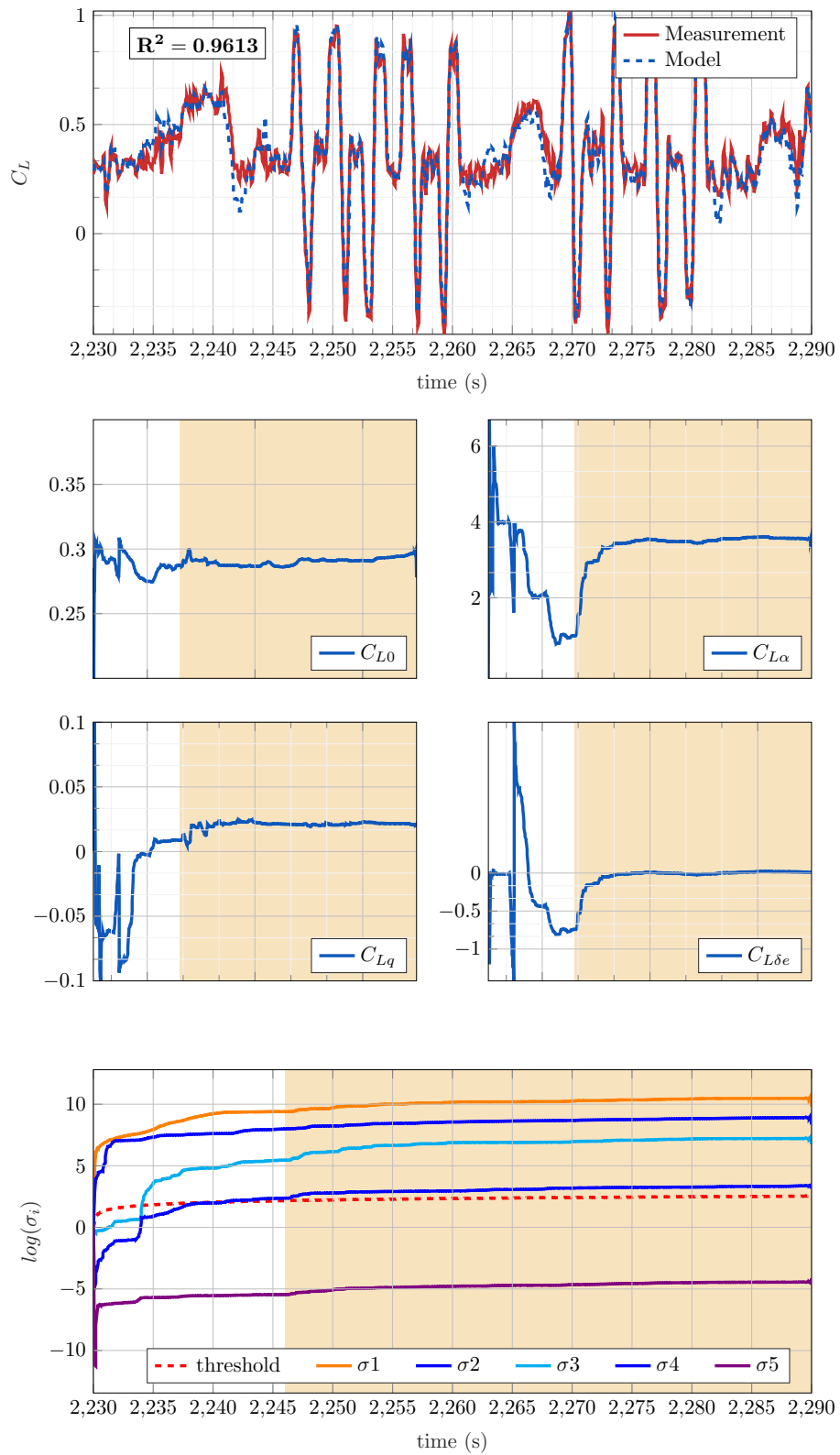
$$C_D = C_{D0} + C_{D\alpha}\alpha + C_{D\alpha^2}\alpha^2 + C_{Dq_n}q_n + C_{D\delta\epsilon}\delta\epsilon + C_{DT_c}T_c \quad (6.2)$$

$$C_Y = C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Yp_n}p_n + C_{Yr_n}r_n + C_{Y\delta\alpha}\delta\alpha + C_{Y\delta r}\delta r \quad (6.3)$$

Παράμετρος	Τιμή	Σφάλμα ( $\pm 1\sigma$ )	Στατιστική Σημαντικότητα
$C_{L0}$	0.2933	0.026	Y
$C_{L\alpha}$	3.6070	0.0334	Y
$C_{Lq_n}$	2.3550	2.6010	N
$C_{L\delta\epsilon}$	0.0711	0.058	N
$C_{D0}$	0.1268	0.0179	Y
$C_{D\alpha}$	0.1268	0.0103	Y
$C_{D\alpha^2}$	1.9081	0.1917	Y
$C_{Dq_n}$	0.2904	0.3118	N
$C_{D\delta\epsilon}$	0.0068	0.1793	N
$C_{DT_c}$	0.0152	0.0090	Y
$C_{Y0}$	0.00312	0.081	N
$C_{Y\beta}$	0.6696	0.049	Y
$C_{Yp_n}$	0.1055	0.0355	Y
$C_{Yr_n}$	0.5134	0.6379	N
$C_{Y\delta\alpha}$	0.0032	0.0019	N
$C_{Y\delta r}$	-0.1257	0.0130	Y

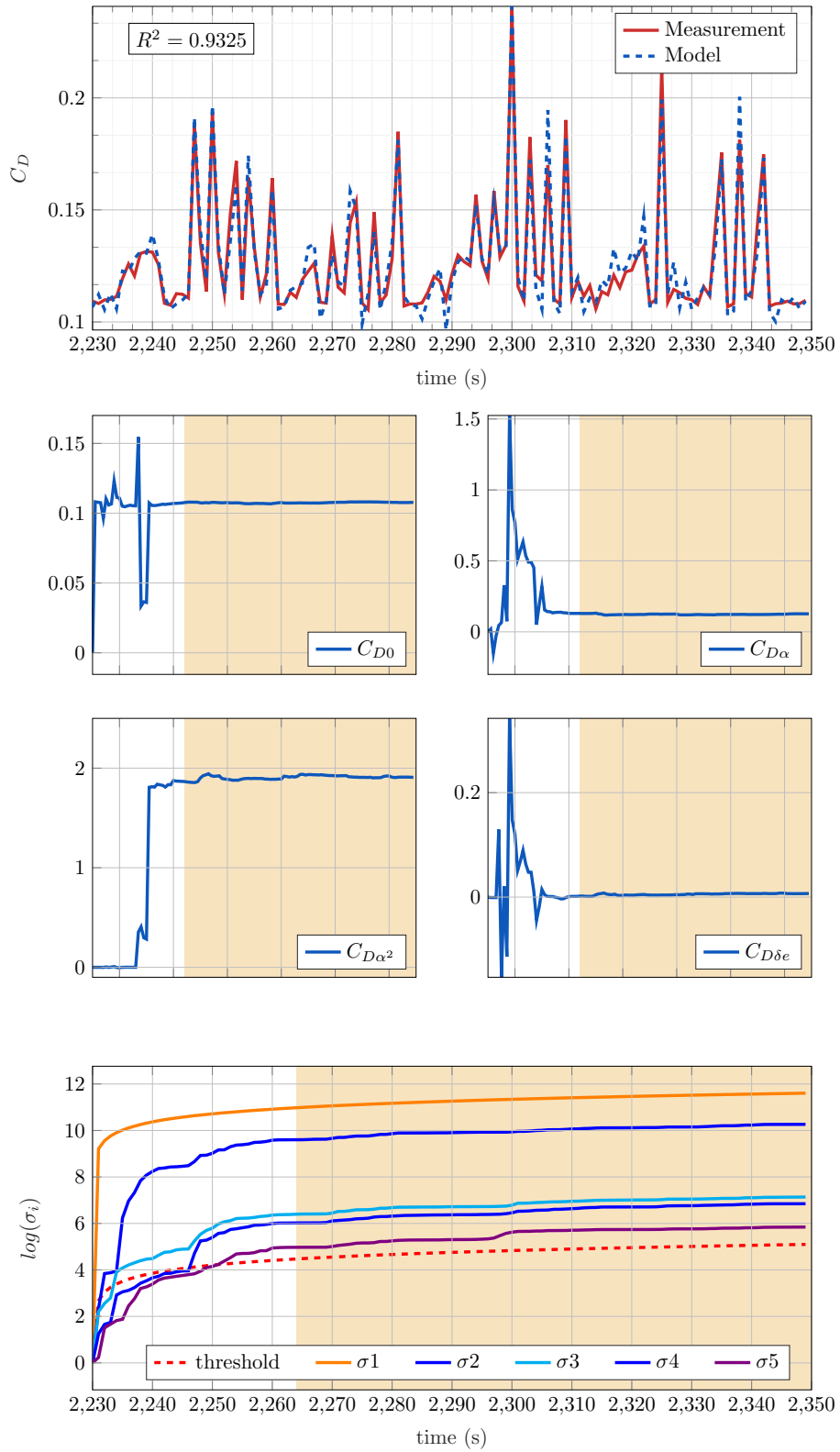
Πίνακας 10: Εκτιμώμενες αεροδυναμικοί παράμετροι του UnATRaP

### $C_L$ : Model Training of experimental flight 2



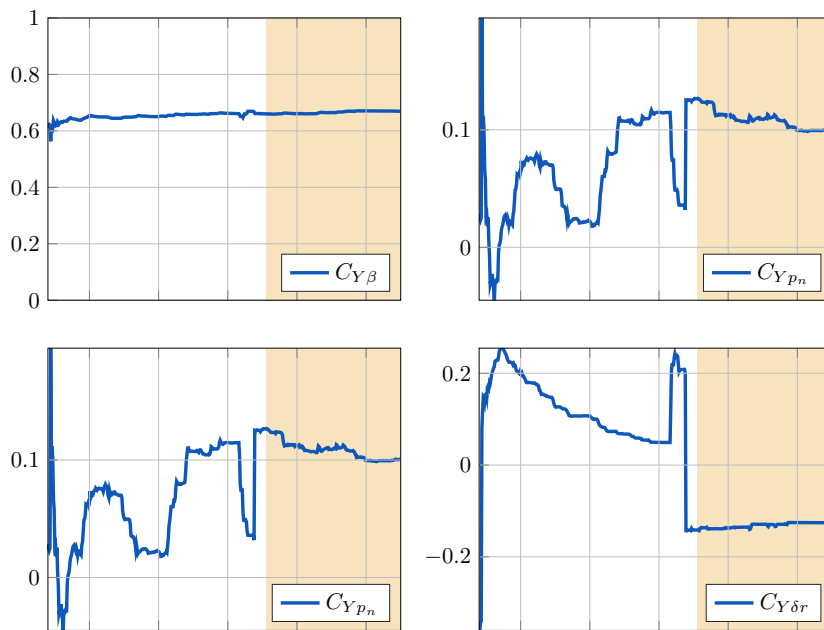
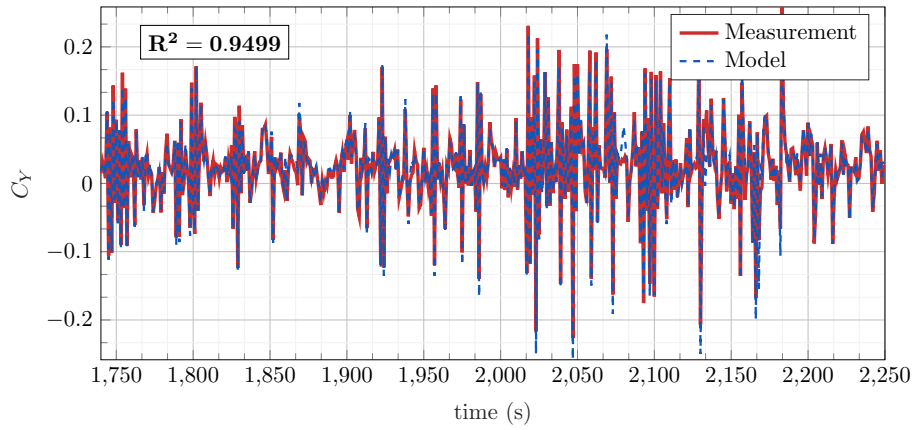
Εικόνα 53: PCA-TLS: Πειραματική εκτίμηση Συντελεστή Κάθετης Άντωσης ( $C_L$ )

### $C_D$ : Model Training of experimental flight 2

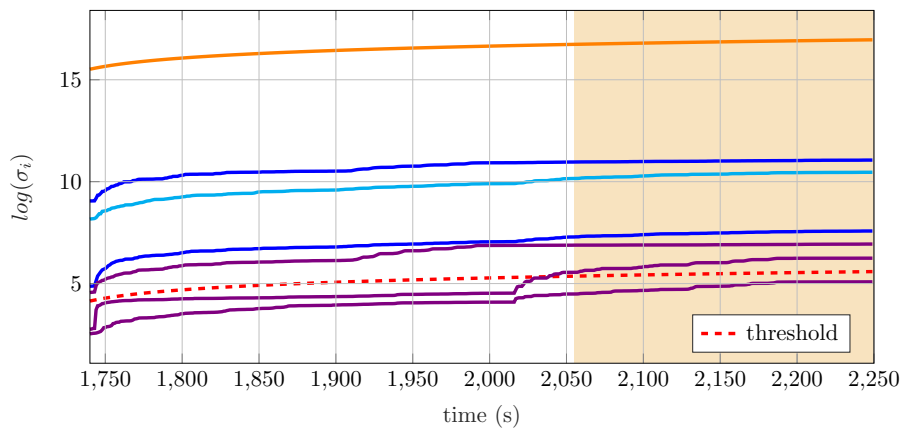


Εικόνα 54: PCA-TLS: Πειραματική εκτίμηση Συντελεστή Οπισθέλκουσας ( $C_D$ )

### $C_Y$ : Model Training of experimental flight 2



### Singular Values Evolution



Εικόνα 55: PCA-TLS: Πειραματική εκτίμηση Συντελεστή Πλάγιας Δύναμης ( $C_Y$ )



## 6.5.2 Επαλήθευση Μοντέλου

Η επαλήθευση του μοντέλου θα πραγματοποιηθεί με την επίλυση του διαφορικού μοντέλου των δυνάμεων αξόνων ανέμου:

$$\begin{aligned}\dot{V}_\alpha &= -\frac{\bar{q}S}{m}C_{D_W} + \frac{T}{m}\cos\alpha\cos\beta \\ &+ g(\cos\phi\cos\theta\sin\alpha\cos\beta + \sin\phi\cos\theta\sin\beta - \sin\theta\cos\alpha\cos\beta) \\ &= \Phi_1(t)\end{aligned}\quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\frac{\bar{q}S}{mV_a\cos\beta}C_L + q - \tan\beta(p\cos\alpha + r\sin\alpha) - \frac{T\sin\alpha}{mV_a\cos\beta} \\ &+ \frac{g}{V_a\cos\beta}(\cos\phi\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) \\ &= \Phi_2(t)\end{aligned}\quad (6.5)$$

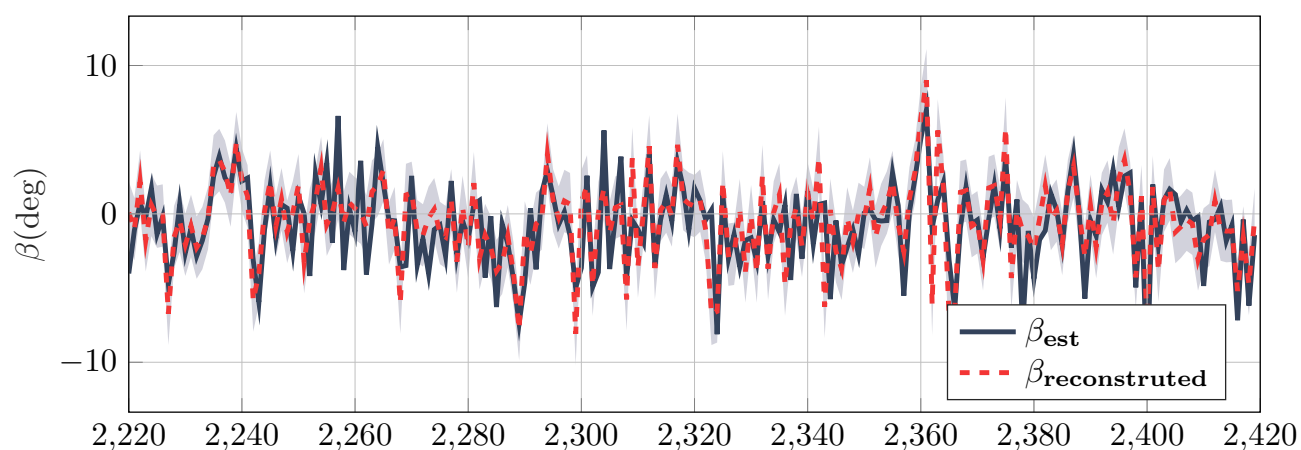
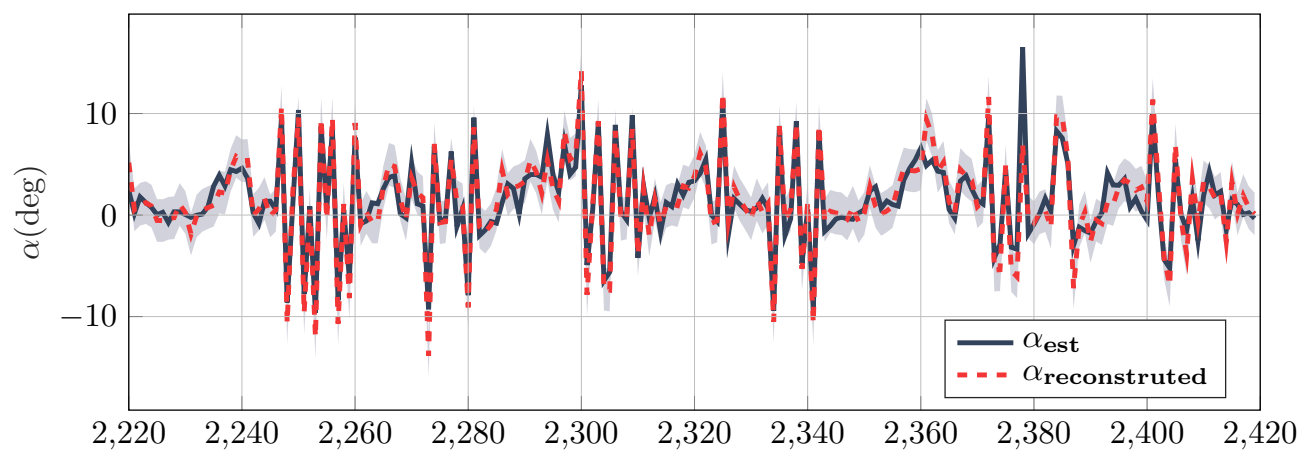
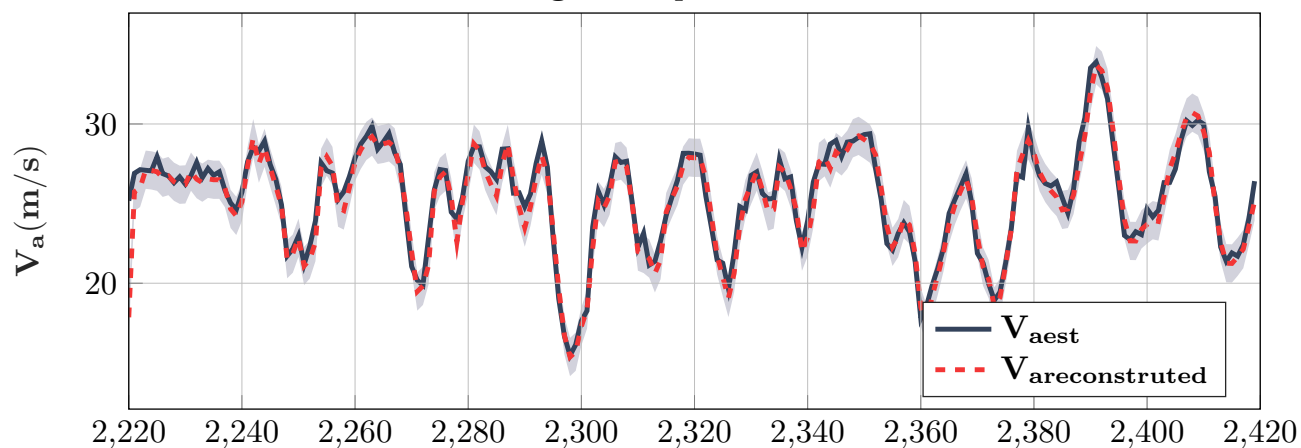
$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \frac{\bar{q}S}{mV_a}C_{Y_W} + p\sin\alpha - r\cos\alpha + \frac{g}{V_a}\cos\beta\sin\phi\cos\theta \\ &+ \frac{\sin\beta}{V_a}(g\cos\alpha\sin\theta - g\sin\alpha\cos\phi\cos\theta + \frac{T\cos\alpha}{m}) \\ &= \Phi_3(t)\end{aligned}\quad (6.6)$$

Η ολοκλήρωση γίνεται με την μέθοδο Runge-Kutta. Καθότι οι εξισώσεις τροφοδοτούνται από το γυροσκόπιο που εμπεριέχει θόρυβο, η ολοκλήρωση διορθώνεται περιοδικά από τις ταχύτητες εδάφους που καταγράφει το GPS. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στην εικόνα 56. Οι αποκλίσεις από τις τιμές αναφοράς (πλήρες MF φίλτρο Κάλμαν) παρατίθενται στον Πίνακα 11.

Reconstructed Variable	MAE	Units
$V_{\text{arec}}$	1.2	m/s
$\alpha_{\text{rec}}$	0.87	deg
$\beta_{\text{rec}}$	0.52	deg

Πίνακας 11: Αποκλίσεις ανακατασκευασμένων μεταβλητών από τις αντίστοιχες εκτιμώμενες από το φίλτρο Κάλμαν

UnATRaP: flight 2 experiment validation



Εικόνα 56: UnATRaP: Επαλήθευση του εκτιμώμενου μοντέλου με ανακατασκευή των σημμάτων της τριάδας αεροδυναμικής ευστάθειας

## 6.6 Συμπεράσματα

Στην μελέτη αυτή, αναπτύξαμε μεθόδους εκτίμησης παραμέτρων του αεροδυναμικού μοντέλου με χρήση αβέβαιων αισθητηριακών δεδομένων. Επιδιώκαμε μία αποδοτική μέθοδο με ορίζοντα το χαμηλό κόστος υλοποίησης. Για τον λόγο αυτό, προτείναμε αντί της χρήσης αεροσήραγγας και κοστοβόρων πειραμάτων, την εκτίμηση του αεροδυναμικού μοντέλου με πραγματοποίηση δοκιμαστικών πτήσεων ενός μικρού μη επανδρωμένου αεροσκάφους που εξοπλίστηκε με ένα τυπικό αισθητηριακό σύστημα χαμηλού κόστους.

Η κυρίαρχη ανεπάρκεια αυτών των μεθόδων έγκειται στις αβεβαιότητες των αισθητηριακών σημάτων που προκαλούνται είτε από συστηματικά σφάλματα, είτε από θόρυβο είτε από περιβαλλοντικές διαταραχές. Τα συστηματικά σφάλματα των ιδιοκατασκευασμένων αισθητήρων εκτιμήθηκαν με πειράματα βαθμονόμησης σε μικρή αεροσήραγγα ενώ για το υπόλοιπο μέρος του αισθητηριακού συστήματος η απαλοιφή τους έγινε με τα εργαλεία και τις προδιαγραφές που παρέχουν οι κατασκευαστές.

Περαιτέρω βελτίωση των κρίσιμων σημάτων για την ευστάθεια του αεροσκάφους ( $V_a, \alpha, \beta$ ) υλοποιήθηκε με την χρήση φίλτρων κάλμαν. Οι αλγόριθμοι αυτοί κατάφεραν να απομονώσουν τις περιβαλλοντικές διαταραχές (άνεμος) των οποίων η επίδραση θεωρείται κρίσιμη για αεροσκάφη μικρής ή μεσαίας κλίμακας. Το φίλτρο αναπτύχθηκε με δύο τεχνικές : μια ανεξάρτητη του αεροδυναμικού μοντέλου και μία βασισμένη στις εκτιμώμενες παραμέτρους. Η επίδοση τους κρίθηκε πολύ ικανοποιητική τόσο σε προσομοιωμένο περιβάλλον όσο και σε συνθήκες πραγματικού πειράματος.

Καθότι όμως τα σήματα εξακολουθούν να φέρουν αβεβαιότητες, αποφασίσαμε να απορρίψουμε την χρήση εκτιμητών OLS για το αεροδυναμικό μοντέλο και αντ' αυτών να αναπτύξουμε νέους, βασισμένους στην νεότερη μέθοδο των TLS. Παρόλο που η μαθηματική ανάλυση των TLS εκτιμητών είναι αρκετά πιο σύνθετη, οι εκτιμήσεις τους -όπως φάνηκε και από τα προσομοιωμένα δεδομένα- είναι πολύ πιο αξιόπιστες από αυτές των OLS. Επίσης, καθότι τα σήματα εισόδου του αεροσκάφους δεν ακολουθούν την αρχή της διαρκούς διέγερσης, χρησιμοποιήσαμε τις αρχές της Ανάλυσης Πρωτευουσών Συνιστωσών προκειμένου να προστατέψουμε την κατάρρευση των εκτιμητών μας από ανεπαρκή διέγερση. Ακόμα, οι χρονικές αλλαγές στο μοντέλο παρακολουθούνται από ένα προσαρμοστικό εκθετικό παράθυρο παρατήρησης με σκοπό την βέλτιστη προσαρμογή των εκτιμητών σε διακυμάνσεις των παραμέτρων.

Η όλη τεχνολογία επιβεβαιώθηκε πειραματικά με την χρήση μικρού μη επανδρωμένου αεροσκάφους σταθερής πτέρυγας που ανέπτυξε το Control Systems Lab. Όπως είδαμε, παρά τον περιορισμένο όγκο δεδομένων που είχαμε στη διάθεσή μας τα αποτελέσματα της εκτίμησης ήταν ικανοποιητικά. Η χαμηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα του PCA-TLS επιτρέπει την ενσωμάτωση των εκτιμητών στον on-board υπολογιστή του αεροσκάφους για συνεχή παρακολούθηση των παραμέτρων και την ανίχνευση πιθανών σφαλμάτων εν πτήση.

Μελλοντικός στόχος είναι η ενσωμάτωση των PCA-TLS εκτιμητών σε συστήματα με πιο σύνθετη, καθαρά μή-γραμμική αεροδυναμική συμπεριφορά ή που υποστηρίζουν ακόμη πιο περιορισμένο αισθητηριακό σύστημα.

## 7 Βιβλιογραφία

- [1] *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, 1980.
- [2] *Numerical Linear Algebra, Digital Signal Processing and Parallel Algorithms*. 1991.
- [3] William S Aiken. Standard nomenclature for airspeeds with tables and charts for use in calculation of airspeed.
- [4] G. M. Anderson. Error propagation by the Monte Carlo method in geochemical calculations. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 40(12):1533–1538, 1976.
- [5] Reza Arablouei, Kutluyil Doganay, and Stefan Werner. Recursive Total Least-Squares Algorithm Based on Inverse Power Method and Dichotomous Coordinate-Descent Iterations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 63(8):1941–1949, 2015.
- [6] Lee Barford, Eric Manders, Gautam Biswas, Pieter Mosterman, Vishnu Ram, and Joel Barnett. Derivative estimation for diagnosis. 1999.
- [7] Vinay A. Bavdekar, Anjali P. Deshpande, and Sachin C. Patwardhan. Identification of process and measurement noise covariance for state and parameter estimation using extended Kalman filter. *Journal of Process Control*, 21(4):585–601, 2011.
- [8] Randal W. Beard and Timothy W. McLain. *Small Unmanned Aircraft : Theory and Practice*.
- [9] M. W. Berry. Large scale sparse singular value computations. *International Journal of Supercomputer Applications*, 6:13–49, 1992.
- [10] Jay M. Brandon and Eugene A. Morelli. Real-time onboard global nonlinear aerodynamic modeling from flight data. In *AIAA AVIATION 2014 -AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2014.
- [11] A. Brezoescu, P. Castillo, and R. Lozano. Wind Estimation for Accurate Airplane Path Following Applications. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, pages 1–9, may 2013.
- [12] A. Brezoescu, T. Espinoza, P. Castillo, and R. Lozano. Adaptive trajectory following for a fixed-wing UAV in presence of crosswind. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 69(1-4):257–271, 2013.
- [13] Murat Bronz, Jean-philippe Condomines, and Gautier Hattenberger. Development of an 18cm Micro Air Vehicle : QUARK Murat Bronz , Jean-Philippe Condomines , Gautier Hattenberger To cite this version : Development of an 18cm Micro Air Vehicle : QUARK. 2014.
- [14] Yalcin Bulut and Dionisio Bernal. Process and Measurement Noise Estimation for Kalman Filtering. 3, 2011.

- [15] Nasa-tn-d-Monte Carlo, Analysis Of, Ward F Hodge, and Wayne H Bryant. NOTE NASA TN D-7712 MONTE CARLO ANALYSIS OF INACCURACIES IN ESTIMATED AIRCRAFT PARAMETERS CAUSED BY UNMODELED FLIGHT INSTRUMENTATION ERRORS. (February 1975).
- [16] Am Cho, Jihoon Kim, Sanghyo Lee, and Changdon Kee. Wind estimation and airspeed calibration using a UAV with a single-antenna GPS receiver and pitot tube. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 47(1):109–117, 2011.
- [17] Silviu Ciochină, Constantin Paleologu, Jacob Benesty, and Andrei Alexandru Enescu. On the Influence of the Forgetting Factor of the RLS Adaptive Filter in System Identification. *2009 International Symposium on Signals, Circuits and Systems, ISSCS 2009*, 2009.
- [18] Christian Coff. Incorporation, Digestion and Incarnation.
- [19] Jean-philippe Condomines, Murat Bronz, and Gautier Hattenberger. Experimental Wind Field Estimation and Aircraft Identification Experimental Wind Field Estimation and Aircraft Identification. 2015.
- [20] M G Cox and B R L Siebert. The use of a Monte Carlo method for evaluating uncertainty and expanded uncertainty. *Metrologia*, 2006.
- [21] M G Cox and B R L Siebert. The use of a Monte Carlo method for evaluating uncertainty and expanded uncertainty. *Metrologia*, 43(4):S178–S188, 2006.
- [22] R S Davis. Equation for the Determination of the Density of Moist Air (1981/91). *Metrologia*, 29(1):67–70, 2005.
- [23] Andrei Dorobantu, Peter J. Seiler, and Gary J. Balas. Validating uncertain aircraft simulation models using flight test data. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, pages 1–8, 2013.
- [24] Bruce E. Dunne and Geoffrey A. Williamson. QR-based TLS and mixed LS-TLS algorithms with applications to adaptive IIR filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(2):386–394, 2003.
- [25] Mark Euston, Paul Coote, Robert Mahony, Jonghyuk Kim, and Tarek Hamel. A complementary filter for attitude estimation of a fixed-wing UAV. *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS*, pages 340–345, 2008.
- [26] Mohsen Zamani Fekri and Mohammad Mobed. Angle of attack estimation and aircraft controller design using LQR methods. *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2005(May):2253–2256, 2005.
- [27] Kenneth Gade. Introduction to inertial navigation and kalman filtering. *IAIN World Congress*, (October), 2009.
- [28] Paul Glasserman. Monte Carlo Methods in Financial Engineering (Stochastic Modelling and Applied Probability). page 616, 2003.

- [29] Scott Gleason and Demoz Gebre-Egziabher. *GNSS application and methods*, volume 1. 2004.
- [30] Jay Gleser, Leon. Estimation in a Multivariate “Errors in Variables” Regression Model: Large Sample Results. *The Annals of Statistics*, 9(1):24–44, 1981.
- [31] W Gracey. Summary of Methods of Measuring Angle of Attack, 1958.
- [32] Jared A. Grauer and Eugene A. Morelli. Generic Global Aerodynamic Model for Aircraft. *Journal of Aircraft*, 52(1):13–20, jan 2015.
- [33] JM Hanson and BB Beard. Applying monte carlo simulation to launch vehicle design and requirements analysis. (September), 2010.
- [34] Jouni Hartikainen and Simo Särkkä. Optimal filtering with Kalman filters and smoothers – a Manual for Matlab toolbox EKF / UKF. *Journal of Interprofessional Care*, 25:1–57, 2007.
- [35] Matthias Heller, Stephan Myschik, Florian Holzapfel, and Gottfried Sachs. Angles of Attack and Sideslip Determination Using Navigation Data for Small Aircraft. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, (August):1–7, 2003.
- [36] Nathan V Hoffer. System Identification of a Small Low-Cost Unmanned Aerial Vehicle Using Flight Data from Low-Cost Sensors. 2014, 2014.
- [37] Jonathan P How. Aircraft Stability and Control. page 1, 2004.
- [38] Sabine Van Huffel. Sabine Van Huffel \* and H o n g y u a n Z h a. *Science*, 9(1):377–408, 1993.
- [39] Sabine Van Huffel and Joos Vandewalle. *The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis*. 1991.
- [40] Sabine V A N Huffelf. Formulation, algorithm,. 12(2):292–309, 1991.
- [41] I Introduction. Design and Application of an Extended Kalman Filter in a Flight Control System Development. *Design*, (March):1–11, 2011.
- [42] Rolf Isermann and Marco Munchhof. *Identification of Dynamic Systems*. 2003.
- [43] JS Jang and C Tomlin. Longitudinal Stability Augmentation System Design for the DragonFly UAV Using a Single GPS Receiver. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, (August):1–11, 2003.
- [44] Joint Committee For Guides In Metrology Jcgm. Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement. *International Organization for Standardization Geneva ISBN*, 50(September):134, 2008.
- [45] Harry Joe. Dependence Modeling with Copulas. *CRC Press*, 2015.
- [46] Tor A. Johansen, Andrea Cristofaro, Kim Sorensen, Jakob M. Hansen, and Thor I. Fossen. On estimation of wind velocity, angle-of-attack and sideslip angle of small UAVs using standard sensors. *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, ICUAS 2015*, pages 510–519, 2015.

- [47] Joint Committee for Guides in Metrology. Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method. *Evaluation*, JCGM 101:2:90, 2008.
- [48] Sang Mok Jung and Poogyeon Park. Variable Forgetting Factor Recursive Total Least Squares Algorithm for FIR Adaptive filtering. 49(Iceei):170–174, 2012.
- [49] Vladislav Klein and Eugene A. Morelli. *Aircraft System Identification: Theory and Practice*. 2006.
- [50] Daniel Kubus, Torsten Kröger, and Friedrich M. Wahl. On-line estimation of inertial parameters using a recursive total least-squares approach. *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS*, pages 3845–3852, 2008.
- [51] M Laban. On-Line Aircraft Aerodynamic Model Identification, 1994.
- [52] Martin Laban and Kazuya Masui. Total Least Squares Estimation of Aerodynamic Model Parameters from Flight. *Journal of Aircraft*, 30:150–152.
- [53] Martin Laban and Kazuya Masui. Total Least Squares Estimation of Aerodynamic Model Parameters from Flight. *Journal of Aircraft*, 30(1966):150–152.
- [54] Jack W Langelaan. Wind Field Estimation for Small Unmanned Aerial Vehicles. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 34:1016–1030, 2011.
- [55] Shu Hung Leung and C. F. So. Gradient-based variable forgetting factor RLS algorithm in time-varying environments. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(8):3141–3150, 2005.
- [56] Gregory Lewis. Using gps to determine pitot-static errors. pages 1–6, 2003.
- [57] Zhuo Li, Nathan V. Hoffer, Brandon Stark, and YangQuan Chen. Design, Modeling and Validation of a T-Tail Unmanned Aerial Vehicle. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 69(1-4):91–107, 2012.
- [58] F. Adhika Pradipta Lie and Demoz Gebre-Egziabher. Synthetic Air Data System. *Journal of Aircraft*, 50(4):1234–1249, jul 2013.
- [59] J Lipton, W D Shaw, J Holmes, and A Patterson. Short communication: selecting input distributions for use in Monte Carlo simulations., 1995.
- [60] Jie Liu. DCD Algorithm: Architectures, FPGA Implementations and Applications. 2008.
- [61] Thomas Lombaerts, Eddy Van Oort, Q.P. Chu, J.a. Mulder, and Diederick Joosten. Online Aerodynamic Model Structure Selection and Parameter Estimation for Fault Tolerant Control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 33(3):707–723, 2010.
- [62] F Lorenzelli and K. Yao. SVD updating for nonstationary data. *IEEE Transactions*, 1994.

- [63] Manoranjan Majji and John Junkins. Total Least Squares Estimation of Dynamical Systems. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, (1):1–9, 2007.
- [64] Ivan Markovsky, Maria Luisa Rastello, Amedeo Premoli, Alexander Kukush, and Sabine Van Huffel. The element-wise weighted total least-squares problem. *Computational Statistics and Data Analysis*, 50(1 SPEC. ISS.):181–209, 2006.
- [65] Ivan Markovsky and Sabine Van Huffel. Overview of total least-squares methods. *Signal Processing*, 87(10):2283–2302, 2007.
- [66] S. Martin, J. Bange, and F. Beyrich. Meteorological profiling of the lower troposphere using the research UAV "m2AV Carolo". *Atmospheric Measurement Techniques*, 4(4):705–716, 2011.
- [67] Raman K. Mehra. On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-15(2):175–184, 1970.
- [68] Joint Committee For Guides In Metrology. Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement. *International Organization for Standardization, Geneva*, 2008.
- [69] M G Mongan and M Henrion. *Uncertainty—a guide to dealing with uncertainty in quantitative risk and policy analysis*. 1990.
- [70] Eugene A. Morelli and R. Deloach. Response Surface Modeling Using Multivariate Orthogonal Functions. 2001.
- [71] Marcello Napolitano, Yongkyu Song, and Brad Seanor. On-line parameter estimation for restructurable flight control systems. *Aircraft Design*, 4(1):19–50, 2001.
- [72] Alan V Oppenheim and George C Verghese. *Signals, Systems & Inference*. 2016.
- [73] Constantin Paleologu, Jacob Benesty, Senior Member, and Silviu Ciochin. Least-Squares Algorithm for System Identification. *IEEE Signal Processing Letters*, 15(3):597–600, 2008.
- [74] John Perry, Ahmed Mohamed, Baron Johnson, and Rick Lind. Estimating angle of attack and sideslip under high dynamics on small UAVs. In *ION GNSS Conference*, number September, pages 16–19, 2008.
- [75] M. G. Petovello, K. O’Keefe, G. Lachapelle, and M. E. Cannon. Consideration of time-correlated errors in a Kalman filter applicable to GNSS. *Journal of Geodesy*, 83(1):51–56, 2009.
- [76] J K Pinkelman and S M Batillf. Total Least-Squares Criteria in Parameter Identification for Flight Flutter Testing. 33(4), 1996.
- [77] C E Rasmussen and C K I Williams. Gaussian Markov Processes. *Gaussian Processes for Machine Learning*, 2006.
- [78] Stephan Rhode and Frank Gauterin. Online estimation of vehicle driving resistance parameters with recursive least squares and recursive total least squares. *IEEE Intelligent Vehicles Symposium, Proceedings*, (Iv):269–276, 2013.



- [79] Stephan Rhode, Konstantin Usevich, Ivan Markovsky, and Frank Gauterin. A Recursive Restricted Total Least-squares Algorithm. 2014.
- [80] Jan Roskam. *Dyn cs* ",:-.
- [81] Jan Roskam. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. 2001.
- [82] M S and Grewal. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab*, volume 53. 2013.
- [83] Burkhard Schaffrin and Andreas Wieser. On weighted total least-squares adjustment for linear regression. *Journal of Geodesy*, 82(7):415–421, 2008.
- [84] M. Schuermans, I. Markovsky, and S. Van Huffel. An adapted version of the element-wise weighted total least squares method for applications in chemometrics. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 85(1):40–46, 2007.
- [85] M. Schuermans, I. Markovsky, Peter D. Wentzell, and S. Van Huffel. On the equivalence between total least squares and maximum likelihood PCA. *Analytica Chimica Acta*, 544(1-2 SPEC. ISS.):254–267, 2005.
- [86] Dan Simon. *Optimal State Estimation*, volume 2. 2006.
- [87] The Singular and Value Decomposition. The Singular Value Decomposition and Applications \*. 0:223–235, 2010.
- [88] H M Smali, J Breeman, T J J Lombaerts, and D A Joosten. *Fault Tolerant Flight Control - A Benchmark Challenge*. 2009.
- [89] Marco W Soijer. Sequential Computation of Total Least-Squares Parameter Estimates. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27(3):501–503, 2004.
- [90] H. W. Sorenson. *Parameter estimation : principles and problems*. M. Dekker, New York, 1980.
- [91] Robert Stengel. *Flight dynamics*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004.
- [92] Nick T. Thomopoulos. *Essentials of Monte Carlo Simulation*. Springer, 2013.
- [93] Data Analysis Toolkit, Uncertainty Analysis, Error Propagation Page, Variance Advantages, and James Kirchner. Data Analysis Toolkit #5: Uncertainty Analysis and Error Propagation Page 1 General statement of the problem If some quantity of interest. *Most*, pages 1–8, 2001.
- [94] M. M. Tousi and K. Khorasani. Robust observer-based fault diagnosis for an unmanned aerial vehicle. *2011 IEEE International Systems Conference, SysCon 2011 - Proceedings*, pages 428–434, 2011.
- [95] Olli Vainio, Markku Renfors, and Tapio Saramäki. Recursive implementation of FIR differentiators with optimum noise attenuation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 46(5):1202–1207, 1997.
- [96] Paris Vaiopoulos. Air Data Estimation on Small Unmanned Aerial Vehicles with limited sensor systems . Technical report, National Technical University of Athens, Control Systems Lab dept. of mechanical engineering, 2017.

- [97] Sabine Van Huffel. Analysis and Properties of the Generalized Total Least. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10(3):294–315, 1989.
- [98] Sabine Van Huffel, Chi Lun Cheng, Nicola Mastronardi, Chris Paige, and Alexander Kukush. *Total Least Squares and Errors-in-variables Modeling*, volume 52. 2007.
- [99] Sabine Van Huffel and Zha Hongyuan. *The Total Least Squares Problem*, 1993.
- [100] E.a. a Wan and R. Van Der Merwe. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. *Technology*, v:153–158, 2000.
- [101] Andreas Wenz, Tor Arne Johansen, and Andrea Cristofaro. Combining model-free and model-based angle of attack estimation for small fixed-wing UAVs using a standard sensor suite. *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, ICUAS 2016*, pages 624–632, 2016.
- [102] Brandon M Wilson and Barton L Smith. Taylor-series and Monte-Carlo-method uncertainty estimation of the width of a probability distribution based on varying bias and random error. *Measurement Science and Technology*, 24(3):035301, 2013.
- [103] Vahid Yaghoubi and Thomas Abrahamsson. Topics in Modal Analysis I, Volume 5. 5(MARCH 2012):9–18, 2012.
- [104] George Zogopoulos-Papaliakos and Paris Vaiopoulos. Low-Cost Air Data Instruments for fixed-wing UAVs: Calibration and Discussion. Technical report, National Technical University of Athens, Control Systems Lab dept. of mechanical engineering, 2017.

## Παράρτημα Α' Υπολογισμός Θεμελιωδών Παραγώγων

### Α'.1 Συμβολισμοί

Για λόγους συντομίας, χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς για τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς των βασικών γωνιών του αεροσκάφους

$$\cos \alpha = c_\alpha \quad (\text{A'.1})$$

$$\sin \alpha = s_\alpha \quad (\text{A'.2})$$

$$\cos \beta = c_\beta \quad (\text{A'.3})$$

$$\sin \beta = s_\beta \quad (\text{A'.4})$$

$$\tan \beta = \tau_\beta \quad (\text{A'.5})$$

$$\cos \phi = c_\phi \quad (\text{A'.6})$$

$$\sin \phi = s_\phi \quad (\text{A'.7})$$

$$\cos \theta = c_\theta \quad (\text{A'.8})$$

$$\sin \theta = s_\theta \quad (\text{A'.9})$$

$$\cos \psi = c_\psi \quad (\text{A'.10})$$

$$\sin \psi = s_\psi \quad (\text{A'.11})$$

### Α'.2 Αεροδυναμικές Τάσεις

Οι αεροδυναμικές τάσεις στο κέντρο μάζας του αεροσκάφους έχουν ως:

$$X = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_X = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S (-c_\alpha C_D + s_\alpha C_L) \quad (\text{A'.12})$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_Y \quad (\text{A'.13})$$

$$Z = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_Z = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S (-s_\alpha C_D - c_\alpha C_L) \quad (\text{A'.14})$$

Όπου  $\{C_X, C_Y, C_Z, C_L, C_D\}$  είναι το σύνολο των **αδιάστατων αεροδυναμικών συντελεστών των αεροδυναμικών τάσεων**.

Χρησιμοποιώντας το μοντέλο των (3.31α)-(3.31στ'), προχωράμε στον υπολογισμό των αντίστοιχων παραγώγων του μοντέλου ως προς την τριάδα ευστάθειας  $(V_a, \alpha, \beta)$ :

$$\frac{\partial C_L}{\partial V_a} = -\frac{\bar{c}q}{2V_a^2} C_{L_{qn}} \quad (\text{A'.15})$$

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = C_{L_\alpha} \quad (\text{A'.16})$$

$$\frac{\partial C_L}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{A'.17})$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial V_a} = -\frac{\bar{c}q}{2V_a^2} C_{D_{qn}} \quad (\text{A'.18})$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} = C_{D_\alpha} + 2C_{D_{\alpha^2}} \quad (\text{A'.19})$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{A'.20})$$

$$\frac{\partial C_X}{\partial V_a} = \frac{\bar{c}q}{2V_a^2} (C_{D_{qn}} c_\alpha - C_{L_{qn}} s_\alpha) \quad (\text{A'.21})$$

$$\frac{\partial C_X}{\partial \alpha} = (C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}) s_\alpha + (C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha}) c_\alpha \quad (\text{A'.22})$$

$$\frac{\partial C_X}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{A'.23})$$

$$\frac{\partial C_Y}{\partial V_a} = -\frac{b}{2V_a^2} (C_{Y_{pn}} p + C_{Y_{rn}} r) \quad (\text{A'.24})$$

$$\frac{\partial C_Y}{\partial \alpha} = 0 \quad (\text{A'.25})$$

$$\frac{\partial C_Y}{\partial \beta} = C_{Y_\beta} \quad (\text{A'.26})$$

$$\frac{\partial C_Z}{\partial V_a} = -\frac{\bar{c}q}{2V_a^2} (C_{D_{qn}} s_\alpha + C_{L_{qn}} c_\alpha) \quad (\text{A'.27})$$

$$\frac{\partial C_Z}{\partial \alpha} = -(C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}) c_\alpha + (C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha}) s_\alpha \quad (\text{A'.28})$$

$$\frac{\partial C_Z}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{A'.29})$$

### A'.3 Ιακωβιανή Μήτρα Μοντέλου Δυνάμεων του Άξονα ανέμου

Υπενθυμίζουμε πως οι εξίσωσεις δυνάμεων στο πλαίσιο ανέμου έχουν ως:

$$\dot{V}_\alpha = -\frac{\bar{q}S}{m} C_{D_W} + \frac{T}{m} c_\alpha c_\beta + g(c_\phi c_\theta s_\alpha c_\beta + s_\phi c_\theta s_\beta - s_\theta c_\alpha c_\beta) = \Phi_1(t) \quad (\text{A'.30})$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\bar{q}S}{mV_a c_\beta} C_L + q - \tau_\beta (p c_\alpha + r s_\alpha) - \frac{T s_\alpha}{mV_a c_\beta} + \frac{g}{V_a c_\beta} (c_\phi c_\theta c_\alpha + s_\theta s_\alpha) = \Phi_2(t) \quad (\text{A'.31})$$

$$\dot{\beta} = \frac{\bar{q}S}{mV_a} C_{Y_W} + p s_\alpha - r c_\alpha + \frac{g}{V_a} c_\beta s_\phi c_\theta + \frac{s_\beta}{V_a} (g c_\alpha s_\theta - g s_\alpha c_\phi c_\theta + \frac{T c_\alpha}{m}) = \Phi_3(t) \quad (\text{A'.32})$$

όπου:

$$C_{D_W} = C_D c_\beta - C_Y s_\beta \quad (\text{A'.33})$$

$$C_{Y_W} = C_Y c_\beta + C_D s_\beta \quad (\text{A'.34})$$

Παραγωγίζοντας ως προς την τριάδα αεροδυναμικής ευστάθειας έχουμε:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial V_a} = -m^{-1} S \rho V_a C_{D_W} \quad (\text{A'.35})$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} = g(c_\beta s_\alpha s_\theta + c_\alpha c_\beta c_\phi c_\theta) - m^{-1} T c_\beta s_\alpha - m^{-2} S V_a^2 \rho c_\beta \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \quad (\text{A'.36})$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} = -2m^{-2} S \rho V_a^2 C_{Y_W} + g(c_\beta c_\theta s_\phi + c_\alpha s_\beta s_\theta - c_\phi s_\alpha s_\beta c_\theta) - m^{-1} T c_\alpha s_\beta \quad (\text{A'.37})$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial V_a} = \frac{1}{2m V_a^2 c_\beta} (2T s_\alpha + \rho V_a^2 S C_L - 2mg c_\alpha c_\phi c_\theta) \quad (\text{A'.38})$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} = -\frac{1}{m V_a c_\beta} (T c_\alpha - 1/2 \rho V_a^2 C_{L_\alpha} - g m c_\alpha s_\theta + m V_a r c_\alpha s_\beta + g m c_\phi s_\alpha c_\theta) \quad (\text{A'.39})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} = \frac{1}{m V_a c_\beta^2} (g m s_\alpha s_\beta s_\theta - m V_a p c_\alpha - m V_a r s_\alpha - 2T s_\alpha s_\beta + 1/2 \rho V_a^2 s_\beta C_L \\ + g m c_\alpha c_\phi s_\beta c_\theta) \end{aligned} \quad (\text{A'.40})$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial V_a} = \frac{\rho S}{2m} C_{Y_W} - \frac{g}{V_a^2} c_\beta s_\phi c_\theta - \frac{s_\beta}{V_a^2} (g c_\alpha s_\theta - g s_\alpha c_\phi c_\theta + \frac{T c_\alpha}{m}) \quad (\text{A'.41})$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} = \frac{\rho V_a S s_\beta (C_{D_\alpha} + 2\alpha C_{D_\alpha^2})}{2m} + p c_\alpha + r s_\alpha - \frac{s_\beta}{V_a} (g s_\alpha s_\theta - g c_\alpha c_\phi c_\theta - \frac{T s_\alpha}{m}) \quad (\text{A'.42})$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} = \frac{\bar{q} S}{m V_a} (c_\beta C_D - s_\beta C_Y + c_\beta C_{Y_\beta}) + \frac{g}{V_a} s_\beta s_\phi c_\theta - \frac{c_\beta}{V_a} (g c_\alpha s_\theta - g s_\alpha c_\phi c_\theta + \frac{T c_\alpha}{m}) \quad (\text{A'.43})$$

## A'.4 Ιακωβιανή μήτρα αισθητήρων Model-Free Υλοποίησης

Οι αισθητήρες εκφράζονται ως προς το διάνυσμα κατάστασης:

$$\mathbf{x} = [u_r \quad v_r \quad w_r \quad W_N \quad W_E \quad W_D]^T \quad (\text{A'.44})$$

### A'.4.1 GPS

Το σχετικό μοντέλο του GPS είναι:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = (R_B^G) \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_N \\ W_E \\ W_D \end{bmatrix} \quad (\text{A'.45})$$

Οι σχετικές παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial V_N}{\partial u_r} = c_\theta c_\psi \quad (\text{A'.46})$$

$$\frac{\partial V_N}{\partial v_r} = s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi \quad (\text{A'.47})$$

$$\frac{\partial V_N}{\partial w_r} = c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \quad (\text{A'.48})$$

$$\frac{\partial V_N}{\partial W_N} = 1 \quad (\text{A'.49})$$

$$\frac{\partial V_N}{\partial W_E} = 0 \quad (\text{A'.50})$$

$$\frac{\partial V_N}{\partial W_D} = 0 \quad (\text{A'.51})$$

$$\frac{\partial V_E}{\partial u_r} = c_\theta s_\psi \quad (\text{A'.52})$$

$$\frac{\partial V_E}{\partial v_r} = s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi \quad (\text{A'.53})$$

$$\frac{\partial V_E}{\partial w_r} = c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \quad (\text{A'.54})$$

$$\frac{\partial V_E}{\partial W_N} = 0 \quad (\text{A'.55})$$

$$\frac{\partial V_E}{\partial W_E} = 1 \quad (\text{A'.56})$$

$$\frac{\partial V_E}{\partial W_D} = 0 \quad (\text{A'.57})$$

$$\frac{\partial V_D}{\partial u_r} = -s_\theta \quad (\text{A'.58})$$

$$\frac{\partial V_D}{\partial v_r} = s_\phi c_\theta \quad (\text{A'.59})$$

$$\frac{\partial V_D}{\partial w_r} = c_\phi c_\theta \quad (\text{A'.60})$$

$$\frac{\partial V_D}{\partial W_N} = 0 \quad (\text{A'.61})$$

$$\frac{\partial V_D}{\partial W_E} = 1 \quad (\text{A'.62})$$

$$\frac{\partial V_D}{\partial W_D} = 0 \quad (\text{A'.63})$$

#### A'.4.2 Pitot

Το μοντέλο του pitot είναι:

$$y_{pitot} = \frac{1}{2} \rho (u_r^2 + v_r^2 + w_r^2) \quad (\text{A'.64})$$

Οι σχετικές παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial y_{pitot}}{\partial u_r} = \rho u_r \quad (A'.65)$$

$$\frac{\partial y_{pitot}}{\partial v_r} = \rho v_r \quad (A'.66)$$

$$\frac{\partial y_{pitot}}{\partial w_r} = \rho w_r \quad (A'.67)$$

$$\frac{\partial y_{pitot}}{\partial W_N} = 0 \quad (A'.68)$$

$$\frac{\partial y_{pitot}}{\partial W_E} = 0 \quad (A'.69)$$

$$\frac{\partial y_{pitot}}{\partial W_D} = 0 \quad (A'.70)$$

### A'.4.3 Ανεμοδείκτες Ευστάθειας

Το μοντέλο των ανεμοδεικτών είναι:

$$y_{vn} = \begin{bmatrix} y_{vn,\alpha} \\ y_{vn,\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{u_r}{w_r}\right) \\ \arcsin\left(\frac{v_r}{\sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2}}\right) \end{bmatrix} \quad (A'.71)$$

Οι αντίστοιχες παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial y_{vn,\alpha}}{\partial u_r} = \frac{u_r}{u_r^2 + w_r^2} \quad (A'.72)$$

$$\frac{\partial y_{vn,\alpha}}{\partial v_r} = 0 \quad (A'.73)$$

$$\frac{\partial y_{vn,\alpha}}{\partial w_r} = -\frac{w_r}{u_r^2 + w_r^2} \quad (A'.74)$$

$$\frac{\partial y_{vn,\beta}}{\partial u_r} = -\frac{u_r v_r}{2\rho^2(1 - 4v_r^2)(u_r^2 + v_r^2 + w_r^2)^2} \quad (A'.75)$$

$$\frac{\partial y_{vn,\beta}}{\partial v_r} = \frac{2}{\rho\sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2}} - \frac{2\rho v_r^2}{(1 - 4v_r^2)(u_r^2 + v_r^2 + w_r^2)} \quad (A'.76)$$

$$\frac{\partial y_{vn,\beta}}{\partial w_r} = -\frac{v_r w_r}{2\rho^2(1 - 4v_r^2)(u_r^2 + v_r^2 + w_r^2)^2} \quad (A'.77)$$

## A'.5 Ιακωβιανή μήτρα αισθητήρων Model Based Υλοποίησης

Οι model-based τεχνικές εκτίμησης κατάστασης απαιτούν τον υπολογισμό των παραγώγων των μοντέλων των αισθητήρων Sensor Jacobians σε σχέση με την τριάδα ευστάθειας ( $V_a, \alpha, \beta$ ):

### A'.5.1 Επιταχυνσιόμετρο

Το μοντέλο του επιταχυνσιόμετρου ως προς την τριάδα ευστάθειας εκφράζεται ως:

$$z_{accel} = \begin{bmatrix} y_{accel,x} \\ y_{accel,y} \\ y_{accel,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho V_a^2 S}{2m} C_X \\ \frac{\rho V_a^2 S}{2m} C_Y \\ \frac{\rho V_a^2 S}{2m} C_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho V_a^2 S}{2m} [-C_D c_\alpha + C_L s_\alpha] + \frac{T}{m} \\ \frac{\rho V_a^2 S}{2m} C_Y \\ \frac{\rho V_a^2 S}{2m} [-C_D s_\alpha - C_L c_\alpha] \end{bmatrix} \quad (A'.78)$$

Οι σχετικές παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial y_{accel,x}}{\partial V_a} = \frac{\rho V_a^2}{2m} \left( \frac{2C_X}{V_a} + \frac{\partial C_X}{\partial V_a} \right) \quad (A'.79)$$

$$\frac{\partial y_{accel,x}}{\partial \alpha} = \frac{\rho V_a^2}{2m} \frac{\partial C_X}{\partial \alpha} \quad (A'.80)$$

$$\frac{\partial y_{accel,x}}{\partial \beta} = 0 \quad (A'.81)$$

$$\frac{\partial y_{accel,y}}{\partial V_a} = \frac{\rho V_a^2}{2m} \left( \frac{2C_Y}{V_a} + \frac{\partial C_Y}{\partial V_a} \right) \quad (A'.82)$$

$$\frac{\partial y_{accel,y}}{\partial \alpha} = 0 \quad (A'.83)$$

$$\frac{\partial y_{accel,y}}{\partial \beta} = \frac{\rho V_a^2}{2m} \frac{\partial C_Y}{\partial \beta} \quad (A'.84)$$

$$\frac{\partial y_{accel,z}}{\partial V_a} = \frac{\rho V_a^2}{2m} \left( \frac{2C_Z}{V_a} + \frac{\partial C_Z}{\partial V_a} \right) \quad (A'.85)$$

$$\frac{\partial y_{accel,z}}{\partial \alpha} = \frac{\rho V_a^2}{2m} \frac{\partial C_Z}{\partial \alpha} \quad (A'.86)$$

$$\frac{\partial y_{accel,z}}{\partial \beta} = 0 \quad (A'.87)$$

### A'.5.2 GPS

Κάνουμε χρήση των εκτιμήσεων του GPS για την ταχύτητα εδάφους ( $V_G = [V_N, V_E, V_D]$ )

$$\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = (R_B^G)^{-1} \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_N \\ W_E \\ W_D \end{bmatrix} \quad (A'.88)$$

Οι σχετικές ταχύτητες του αεροσκάφους μπορούν να εκφραστούν στους άξονες ανέμου:

$$\begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{bmatrix} = V_a \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta \\ s_\beta \\ s_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (A'.89)$$



Έτσι:

$$\begin{bmatrix} V \\ V \\ V_D \end{bmatrix} = (R_B^G)^{-1} V_a \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta \\ s_\beta \\ s_\alpha c_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_N \\ W_E \\ W_D \end{bmatrix} \quad (\text{A'.90})$$

Διαφορίζοντας ως προς  $V_a, \alpha, \beta$  έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial V_a} \begin{bmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} \\ V_{gz} \end{bmatrix} = (R_B^G)^{-1} \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta \\ s_\beta \\ s_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A'.91})$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} \\ V_{gz} \end{bmatrix} = (R_B^G)^{-1} V_a \begin{bmatrix} -s_\alpha c_\beta \\ 0 \\ c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A'.92})$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \begin{bmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} \\ V_{gz} \end{bmatrix} = (R_B^G)^{-1} V_a \begin{bmatrix} -c_\alpha s_\beta \\ c_\beta \\ -s_\alpha s_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A'.93})$$

## Ευρετήριο Γραφημάτων και Εικόνων

1	Αδρανειακό Πλαίσιο NED	10
2	Σωματόδετο Πλαίσιο (Body Frame)	10
3	Πλαίσιο Ανέμου (Wind Frame)	10
4	Τυπική αρχιτεκτονική επιφανειών ελέγχου σε α/φος σταθερής πτέρυγας	12
5	Το τρίγωνο του Ανέμου (Wind Triangle)	14
6	Αρχιτεκτονική του φίλτρου Dryden για την παραγωγή ριπών ανέμου	15
7	Οι τιμές των παραμέτρων του φίλτρου Dryden ανάλογα με το υψόμετρο και την επιθυμητή ένταση	15
8	Ο εγκάρσιος άξονας του α/φους	20
9	Διάνυσμα Υπολειπόμενης πληροφορίας μετά από επιτυχή εκτίμηση παραμέτρων του μοντέλου της άντωσης ( $C_L$ )	27
10	Πιθανοτικό διάγραμμα γκαουσιανού residual	27
11	Ανίχνευση Παραμέτρων του Συντελεστή Πλάγιας Δύναμης ( $C_Y$ ). Η μήτρα προβλεπτών ( $X$ ) είναι ντετερμινιστικής φύσεως.	30
12	Ανίχνευση Παραμέτρων του Συντελεστή Ροπής Διατοιχισμού ( $C_l$ ). Η μήτρα προβλεπτών ( $X$ ) είναι ντετερμινιστικής φύσεως.	31
13	Αναδρομική Εκτίμηση Παραμέτρων με την μέθοδο των OLS για τον συντελεστή άντωσης ( $C_L$ ). Το διάνυσμα παρατήρησης αλλοιώθηκε με προσθετικό λευκό θόρυβο μικρού πλάτους ( $snr > 50$ )	32
14	Αναδρομική Εκτίμηση Παραμέτρων με την μέθοδο των OLS για τον συντελεστή ροπής πρόνευσης ( $C_m$ ). Το διάνυσμα παρατήρησης αλλοιώθηκε με προσθετικό λευκό θόρυβο μικρού πλάτους ( $snr > 50$ )	33
15	Batch Εκτίμηση Παραμέτρων με την μέθοδο των OLS για τον συντελεστή ροπής διατοιχισμού ( $C_l$ ). Η μήτρα των προβλεπτών έχει αλλοιωθεί με προσθετικό λευκό θόρυβο.	34
16	Αναδρομική Εκτίμηση Παραμέτρων με την μέθοδο των OLS για τον συντελεστή οπισθέλκουσας ( $C_D$ ). Η μήτρα των προβλεπτών έχει αλλοιωθεί με προσθετικό λευκό θόρυβο.	35

17 Αναδρομική Εκτίμηση Παραμέτρων με την μέθοδο των OLS για τον συντελεστή ροπής πρόνευσης ( $C_m$ ). Η μήτρα των προβλεπτών έχει αλλοιωθεί με προσθετικό λευκό θόρυβο.	36
18 Ιδιάζουσες Τιμές και Δεξιά Ιδιοδιανύσματα. Ένα τυπικό παράδειγμα ISE (σχήμα από [51])	44
19 Εξέλιξη Ιδιαζουσών Τιμών ενός συστήματος με ISE	45
20 $C_n$ : Μη Αναδρομική εκτίμηση των παραμέτρων της ροπής εκτροπής. Σύγκριση μεταξύ OLS και TLS μεθόδων	51
21 $CD$ : on-line εκτίμηση παραμέτρων του συντελεστή οπισθέλκουσας. Σύγκριση των μεθόδων OLS, TLS. Η σκιασμένη περιοχή υποδεικνύει την κατάσταση επαρκούς διέγερσης του συστήματος με βάση τις ιδιάζουσες τιμές.	53
22 $CY$ : on-line εκτίμηση παραμέτρων της πλάγιας δύναμης με την μέθοδο των TLS.	54
23 $C_m$ : on-line εκτίμηση παραμέτρων της ροπής πρόνευσης με την μέθοδο των TLS.	55
24 Η χρονική εξέλιξη του βάρους εξασθένισης για διάφορες συχνότητες δειγματοληψίας. Η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή υποδεικνύει το κατώφλι πλήρους εξασθένισης.	57
25 $C_m$ : Προσαρμογή του εκτιμητή σε απότομη αλλαγή των παραμέτρων με χρήση χρονοσταθερού παράγοντα εξασθένισης	58
26 Αδυναμία σύγκλισης και προσαρμογής του εκτιμητή λόγω συνεχούς απώλειας πληροφορίας	59
27 $C_m$ : Σύγκριση εκτιμητών ροπής πρόνευσης με σταθερό και προσαρμοστικό παράγοντα εξασθένισης με απότομη αλλαγή των παραμέτρων	63
28 $C_L$ : Αριστερά: Απόκριση συντελεστή Άντωσης σε όλο το φάσμα των γωνιών προσβολής. Δεξιά: Γωνία προσβολής σε καθεστώς απώλειας στήριξης	64
29 $C_L$ : Επαναφορά του εκτιμητή μετά από απώλεια στήριξης	65
30 Το τρίγωνο ανέμου	71
31 Model-Free υλοποίηση φίλτρου Κάλμαν	72
32 Model-Based υλοποίηση του φίλτρου Κάλμαν σε ανοιχτό βρόχο	72
33 Υλοποίηση ψευδο-αισθητηριακού συστήματος με την χρήση του περιβάλλοντος MATLAB	77

34 MF-Kalman: Το διάνυσμα σχετικής ταχύτητας αεροσκάφους και αέριας μάζας. Σύγκριση μεταξύ εκτιμώμενων σημάτων και σημάτων αναφοράς ("αληθινά"). Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης	78
35 MF-Kalman: Το διάνυσμα ταχυτήτων ανέμου στο πλαίσιο NED. Σύγκριση μεταξύ εκτιμώμενων σημάτων και σημάτων αναφοράς ("αληθινά"). Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης	79
36 MF-Kalman: Ταχύτητα αέρος αεροσκάφους. Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης	80
37 MF-Kalman: Γωνία προσβολής αεροσκάφους ( $\alpha$ ). Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης	81
38 MF-Kalman: Γωνία πλαγιολίσθησης αεροσκάφους ( $\beta$ ). Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης	82
39 MB-Kalman: Το διάνυσμα ταχυτήτων ανέμου στο πλαίσιο NED. Σύγκριση μεταξύ εκτιμώμενων σημάτων και σημάτων αναφοράς ("αληθινά"). Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης	86
40 MB-Kalman: Ταχύτητα αέρος αεροσκάφους. Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης	87
41 MB-Kalman: Γωνία προσβολής αεροσκάφους ( $\alpha$ ). Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης	88
42 MB-Kalman: Γωνία πλαγιολίσθησης αεροσκάφους ( $\beta$ ). Σύγκριση αισθητηριακού, εκτιμώμενου και σήματος αναφοράς. Οι σκιασμένες περιοχές αφορούν στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης	89
43 Σύγκριση Σφαλμάτων εκτίμησης για τις Model-Based και Model-Free τεχνικές. Στο υπόβαθρο, η σκιασμένη περιοχή χαρακτηρίζει διακύμανση του πραγματικού σήματος.	90
44 Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας ποσοτικοποίησης του σφάλματος με χρήση MC	95
45 Εκτίμησης αβεβαιότητας της μέτρησης του συντελεστή κάθετης Άντωσης με χρήση της μεθόδου MC	95
47 Το μη επανδρωμένο αεροσκάφος σταθερής πτέρυγας UnATRaP	97

46	Χαρακτηριστικές όψεις του UnATRaP	98
48	Τα σήματα εκτροπής των επιφανειών ελέγχου για την δεύτερη πτήση. Οι σκιασμένες περιοχές αντιστοιχούν στις διεγέρσεις των αξόνων του αεροσκάφους (Πρώτα στον εγκάρσιο και έπειτα στον διαμήκη)	99
49	Τα σήματα εκτροπής των γωνιών Euler για την πειραματική πτήση 2	100
50	Τα σήματα ταχυτήτων εδάφους για την πειραματική πτήση 2	101
51	Το αεροσκάφος κατά την διάρκεια των πειραματικών πτήσεων	102
52	Σύγκριση σημάτων αισθητήρων και σημάτων εκτίμησης του φίλτρου Κάλμαν	103
53	PCA-TLS: Πειραματική εκτίμηση Συντελεστή Κάθετης Άντωσης ( $C_L$ )	106
54	PCA-TLS: Πειραματική εκτίμηση Συντελεστή Οπισθέλκουσας ( $C_D$ )	107
55	PCA-TLS: Πειραματική εκτίμηση Συντελεστή Πλάγιας Δύναμης ( $C_Y$ )	108
56	UnaTRaP: Επαλήθευση του εκτιμώμενου μοντέλου με ανακατασκευή των σημάτων της τριάδας αεροδυναμικής ευστάθειας	110

## Ευρετήριο Πινάκων

1	Οι μεταβλητές κατάστασης του αεροσκάφους	13
2	Οι μεταβλητές ελέγχου του αεροσκάφους	14
3	$C_Y$ Σύγκριση εκτιμώμενων παραμέτρων σε σχέση με τις πραγματικές (Τιμές Αναφοράς) (SNR=30)	30
4	$C_l$ Σύγκριση εκτιμώμενων παραμέτρων σε σχέση με τις πραγματικές (Τιμές Αναφοράς) (SNR=45)	31
5	OLS με θόρυβο στη μήτρα προβλεπτών: $C_l$ Σύγκριση εκτιμώμενων τιμών με τις τιμές αναφοράς (SNR=45)	34
6	$C_n$ : Εκτιμώμενες παράμετροι με τις μεθόδους OLS και TLS	50
7	Χαρακτηριστικά Ψευδοαισθητηριακού Συστήματος	77
8	Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά UnATRaP	96
9	Οι καταγραφόμενες ποσότητες απο το σύστημα λήψης και επισκόπησης δεδομένων του UnARTaP	97

10 Εκτιμώμενες αεροδυναμικοί παράμετροι του UnATRaP	105
11 Αποκλίσεις ανακατασκευασμένων μεταβλητών από τις αντίστοιχες εκτιμώμενες από το φίλτρο Κάλμαν	109