ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

# ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σωφρονίου Δήμητρα

Επιβλέπων καθηγητής : Ανάργυρος Γ. Φελλούρης

*Αθήνα, Σεπτέμβριος 2017*

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

# ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σωφρονίου Δήμητρα

Επιβλέπων καθηγητής : Ανάργυρος Γ. Φελλούρης

Μέλη επιτροπής:

Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής ΕΜΠ

Δημήτρης Κοντοκώστας, Επ. Καθηγητής ΕΜΠ

*Αθήνα, Σεπτέμβριος 2017*

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κύριο **Ανάργυρο Φελλούρη**, Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ, για την συνεχή καθοδήγηση και υποστήριξη του, καθώς και για την έμπρακτη συμβολή του στην επιτυχή ολοκλήρωση των προπτυχιακών σπουδών μου.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον κύριο **Παναγιώτη Ψαρράκο**, Καθηγητή ΕΜΠ, και τον κύριο **Δημήτρη Κοντοκώστα**, Επίκουρο Καθηγητή ΕΜΠ, που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή εξέτασης της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την συμπαράσταση τους, όπως και τους φίλους μου και συνοδοιπόρους στη φοιτητική μου πορεία.

**Αθήνα, 29/9/2017**

# <u>Περιεχόμενα</u>


**Περίληψη** 1

**Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγικά στοιχεία γραμμικής άλγεβρας** 3

**Κεφάλαιο 2 : Εισαγωγικά στοιχεία βασικής άλγεβρας** 12

**Κεφάλαιο 3 : Κανονική μορφή πινάκων ως προς τη σχέση ισοδυναμίας** 25

**Κεφάλαιο 4 : Κανονικές μορφές ως προς τη σχέση ομοιότητας** 30

Η τριγωνική μορφή 31

Το θεώρημα της πρωταρχικής ανάλυσης 34

Μηδενοδύναμες γραμμικές απεικονίσεις 38

Η κανονική μορφή Jordan 45

Κυκλικοί υπόχωροι 53

Η ρητή κανονική μορφή 56

**Κεφάλαιο 5 : Κανονικές μορφές σε χώρο εσωτερικού γινομένου** 63

**Βιβλιογραφία** 75

## Περίληψη

Στη παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται οι κανονικές μορφές μετασχηματισμών και πινάκων. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά σε ορισμούς της γραμμικής άλγεβρας. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται ορισμοί, καθώς και θεωρήματα της βασικής άλγεβρας τα οποία στοχεύουν να συνεισφέρουν σε επόμενο κεφάλαιο για την απόδειξη του θεωρήματος της πρωταρχικής ανάλυσης. Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται η κανονική μορφή πίνακα διάστασης $m \times n$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας. Επίσης δίνεται παράδειγμα της διαδικασίας αναγωγής ενός $m \times n$ πίνακα στη συγκεκριμένη κανονική μορφή. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται η κανονική μορφή ενός τετραγωνικού πίνακα ως προς τη σχέση ομοιότητας, δηλαδή μας απασχολεί η εύρεση αντιπροσώπων της απλούστερης μορφής, όπως διαγώνιοι ή τριγωνικοί, σε κάθε κλάση ισοδυναμίας του συνόλου των τετραγωνικών πινάκων πάνω σε ένα σώμα. Θα γίνει αναφορά στη τριγωνική μορφή, στη κανονική μορφή Jordan και στη ρητή κανονική μορφή, οι οποίες αποτελούν τις βασικές κανονικές μορφές. Επιπλέον, παρουσιάζεται το θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης και ορίζονται οι μηδενοδύναμες γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες και στη συνέχεια η έννοια των κυκλικών υποχώρων με τη βοήθεια των οποίων θα μελετηθεί η εύρεση της ρητής κανονικής μορφής πίνακα ως προς τη σχέση ομοιότητας. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η κανονική μορφή ενός πίνακα σε χώρο εσωτερικού γινομένου με τη χρήση του θεωρήματος Schur και τονίζεται η περίπτωση αναφοράς σε κανονικό πίνακα.

## Abstract

The objective of this thesis is to study the canonical forms of a linear operator or a matrix. Specifically, in the first chapter some definitions from linear algebra are mentioned. In the second chapter some definitions and theorems of basic algebra are presented, which are useful for the proof of the primary decomposition theorem. The third chapter consists of the canonical form of an ($m \times n$) matrix. In the fourth chapter we study canonical forms of a square matrix. We want to find a similar matrix that is going to have the simplest form such as diagonal or triangular. The triangulation of a matrix and the Jordan canonical form are included in this chapter. The final chapter deals with the canonical form of a matrix representing a linear transformation acting on an inner product space.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

### Πίνακες

Ορισμός

Μία ορθογώνια παράταξη μν στοιχείων από το σώμα Κ σε μ οριζόντιες σειρές, που λέγονται **γραμμές**, και σε ν κατακόρυφες σειρές, που λέγονται **στήλες**, της μορφής

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2\nu} \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & . & . & . & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

λέγεται ***πίνακας*** τύπου $\mu\times\nu$. Συνήθως συμβολίζεται με ένα από τα κεφαλαία γράμματα ή με το γενικό στοιχείο $\alpha_{ij}$ σε παρένθεση, δηλαδή γράφουμε $A=(\alpha_{ij})_{\mu x\nu}$ ή $A=(\alpha_{ij})$, αν ο τύπος του πίνακα είναι γνωστός.

Ορισμός

Αν ο πίνακας Α είναι τετραγωνικός τύπου νxν και υπάρχει πίνακας Χ τέτοιος ώστε

$$AX=XA=I_\nu$$

Τότε λέμε ότι ο πίνακας Α είναι ***αντιστρέψιμος*** και ο πίνακας Χ είναι ο αντίστροφος πίνακας του . Γράφουμε τότε $X=A^{-1}$.

Ορισμός

Αν $A=(\alpha_{ij})\in M_{\mu\times\nu}$, τότε ο πίνακας που προκύπτει από τον Α με εναλλαγή μεταξύ γραμμών και στηλών του λέγεται ***ανάστροφος πίνακας*** του Α και συμβολίζεται με $A^T$, έχουμε δηλαδή

$A^T=(\alpha_{ji})\in M_{\nu\times\mu}$

π.χ $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad A^T=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Ορισμός

Ο τετραγωνικός πίνακας $A=(\alpha_{ij}) \in M_\nu$ λέγεται :

**α)** ***συμμετρικός*** , αν $A^T = A$, δηλαδή, αν $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ , για κάθε $i,j = 1,2,\dots,\nu$ ,

**β)** ***αντισυμμετρικός*** , αν $A^T = -A$, δηλαδή αν $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ ,για κάθε $i,j = 1,2,\dots,\nu$ .

π.χ Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικός , ενώ ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός.

Σημειώνουμε ότι σε μία γραμμή που δεν έχει όλα τα στοιχεία της 0, το ***ηγετικό στοιχείο*** της είναι το πρώτο, από αριστερά προς τα δεξιά, μη μηδενικό στοιχείο της.

Ορισμός

**α)** Ο πίνακας $A=(\alpha_{ij}) \in M_{\mu\times\nu}$ λέγεται ***κλιμακωτός*** ή ***κλιμακωτής μορφής,*** όταν ισχύουν τα ακόλουθα :

**i)** Οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, βρίσκονται στη σειρά μετά τις μη μηδενικές γραμμές και

**ii)** Αν $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_\kappa$ , $\kappa\le\mu$ είναι οι μη μηδενικές γραμμές του πίνακα A, τότε το ηγετικό στοιχείο της $\gamma_{i+1}$ - γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το ηγετικό στοιχείο της $\gamma_i$ - γραμμής.

**β)** Ο πίνακας $A=(\alpha_{ij}) \in M_{\mu\times\nu}$ λέγεται ***ανηγμένος κλιμακωτός*** ή ***ανηγμένης κλιμακωτής μορφής*** , αν ισχύουν τα ακόλουθα :

**i)** Είναι κλιμακωτός

**ii)** Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι 1 και

**iii)** Σε μία στήλη που περιέχει το ηγετικό στοιχείο κάποιας γραμμής, όλα τα άλλα στοιχεία της είναι 0.

π.χ ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι κλιμακωτός, ενώ ο πίνακας

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

## Όμοιοι και ισοδύναμοι πίνακες

Ορισμός

**α)** Ο πίνακας $A \in M_n(K)$ είναι ***όμοιος*** με τον πίνακα $B \in M_n(K)$, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε να ισχύει

$$B = P^{-1}AP$$

**β)** Ο πίνακας $A \in M_{m\times n}(K)$ είναι ***ισοδύναμος*** με τον πίνακα $B \in M_{m\times n}(K)$ αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in GL(m,K)$ και $Q \in GL(n,K)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$B = P^{-1}AQ$$

Μέσω του ορισμού ορίζεται στο σύνολο $M_n(K)$ μία διμελής σχέση $\sim$ , η οποία λέγεται **σχέση ομοιότητας** , ως εξής :

$$A\sim B \Leftrightarrow B=P^{-1}AP \text{ , } P \in GL(n,K)$$

Η σχέση $\sim$ της ομοιότητας είναι **σχέση ισοδυναμίας** στο σύνολο $M_n(K)$ , αφού ικανοποιεί τις ιδιότητες :

**i)** **αυτοπαθής ,** $[A=I^{-1}AI \Rightarrow A\sim A]$

**ii)** **συμμετρική,** $[A\sim B \Rightarrow B=P^{-1}AP \Rightarrow A=PBP^{-1} \Rightarrow B\sim A]$

**iii)** **μεταβατική,** $[A\sim B$ και $B\sim \Gamma \Rightarrow B= P^{-1}AP$ και $\Gamma=Q^{-1}BQ \Rightarrow \Gamma= Q^{-1} P^{-1}APQ=(PQ^{-1})A(PQ) \Rightarrow A\sim \Gamma]$

Έτσι η σχέση ομοιότητας $\sim$ ορίζει στο σύνολο $M_n(K)$ μία διαμέριση από υποσύνολά του που ονομάζονται **κλάσεις ισοδυναμίας ή κλάσεις ομοιότητας.**

## Διανυσματικός χώρος

Ορισμός

Έστω ότι το μη κενό σύνολο V είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις, μια εσωτερική πράξη την **πρόσθεση**

$$+: V\times V \to V, (x,y) \to x+y$$

και μία εξωτερική πράξη με συντελεστές από ένα σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, το **βαθμωτό πολλαπλασιασμό**

$$\cdot: K\times V\to V, (\lambda,x)\to\lambda\cdot x \text{ ή } \lambda x$$

έτσι ώστε, για κάθε $x,y,z \in V$, $\lambda,\mu \in K$, να ισχύουν¨

1. $x+y = y+x$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
2. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
3. υπάρχει $0\in V$ τέτοιο ώστε : $x+0 = x$ (ουδέτερο στοιχείο)
4. για κάθε $x \in V$ υπάρχει $-x \in V$ : $x+(-x) = 0$ (αντίθετο στοιχείο)

5. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ (επιμεριστική ως προς την πρόσθεση του K)
6. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda x$ (επιμεριστική ως προς την πρόσθεση του V)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
8. $1\cdot x = x$

Τότε το σύνολο V ονομάζεται ***διανυσματικός χώρος*** (vector space) ή ***γραμμικός χώρος*** (linear space) πάνω στο σώμα K.

<u>Ορισμός</u>

Ένα υποσύνολο $U\neq \emptyset$ ενός διανυσματικού χώρου V λέγεται ***διανυσματικός υπόχωρος*** ή ***γραμμικός υπόχωρος*** ή απλά υπόχωρος του V, αν για κάθε $\lambda \in K$ και $x,y \in U$ , ισχύουν

**α)** $\lambda x \in U$,

**β)** $x+y \in U$,

ή ισοδύναμα, αν για κάθε $\lambda,\mu \in K$, $x,y \in U$, ισχύει :

**γ)** $\lambda x + \mu y \in U$

<u>Ορισμός</u>

Θεωρούμε τα διανύσματα $x_1, x_2,..., x_n \in \mathbb{N}^*$ , ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα K.

Το διάνυσμα

$$\lambda_1x_1+ \lambda_2x_2 +\ldots+ \lambda_nx_n$$

λέγεται ***γραμμικός συνδυασμός*** των διανυσμάτων $x_1, x_2,\ldots,x_n$ με συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ από το σώμα K και ανήκει στο διανυσματικό χώρο V.

Το σύνολο

$$[x_1, x_2,\ldots,x_n]:=\{ \lambda_1x_1+ \lambda_2x_2 +\ldots+ \lambda_nx_n : \lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n \in K \}$$

ονομάζεται ***γραμμική θήκη*** ή ***γραμμικό περίβλημα των διανυσμάτων*** $x_1, x_2,\ldots,x_n$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

<u>Ορισμός</u>

**α)** Τα στοιχεία $x_1, x_2,\ldots,x_n$ $n\in \mathbb{N}^*$ , του διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα K είναι ***γραμμικώς εξαρτημένα***, αν υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n \in K$, όχι όλοι μηδέν, έτσι ώστε να ισχύει

$$\lambda_1x_1+ \lambda_2x_2 +\ldots+ \lambda_nx_n = 0.$$

**β)** Τα στοιχεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $n \in \mathbb{N}^*$, του διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα K είναι ***γραμμικώς ανεξάρτητα***, αν δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή ισοδύναμα, αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

<u>Ορισμός</u>

Το υποσύνολο $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ του διανυσματικού χώρου V, πάνω στο σώμα K, είναι μία ***βάση του διανυσματικού V***, αν ισχύουν:

**α)** Τα $u_1, u_2, \ldots u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,

**β)** $[u_1, u_2, \ldots u_n] = V$, δηλαδή τα $u_1, u_2, \ldots u_n$ παράγουν το χώρο V.

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K, και W υπόχωρος του V. Στο διανυσματικό χώρο V ορίζουμε τη σχέση

$$x \equiv y (\text{mod } W) \Leftrightarrow y - x \in W \qquad (1)$$

η οποία είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο V. Πράγματι, ισχύουν :

i) Για κάθε $x \in V$ ισχύει $x \equiv x(\text{mod } W)$, αφού $x - x = 0 \in W$ (*ανακλαστική ιδιότητα*)

ii) Αν $x \equiv y(\text{mod } W)$, τότε $y - x \in W \Rightarrow x - y \in W$, οπότε ισχύει και $y \equiv x(\text{mod } W)$ (*συμμετρική ιδιότητα*)

iii) Αν $x \equiv y(\text{mod } W)$ και $y \equiv z(\text{mod } W)$, τότε $y - x$, $z - y \in W$, οπότε και $z - x = (z - y) + (y - x) \in W$, δηλαδή ισχύει και $x \equiv z(\text{mod } W)$ (*μεταβατική ιδιότητα*)

Έστω $x \in V$ και $[x]$ η κλάση ισοδυναμίας του. Επιπλέον ισχύει
$y \in [x] \Leftrightarrow y - x \in W \Leftrightarrow y - x = w \in W \Leftrightarrow y = x + w,\ w \in W$,
οπότε :

$$[x] = \{ x + w : w \in W \} := x + W.$$

<u>Ορισμός</u>

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του διανυσματικού χώρου V ως προς τη σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται από την (1) ονομάζεται ***σύνολο πηλίκο*** του V ως προς τον υπόχωρο W, με συμβολισμό $V/W := \{[x] : x \in V\}$ .

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K, W υπόχωρος του V και [x] = x + W η κλάση ισοδυναμίας του x ∈ W ως προς τη σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται από την (1). Τότε ισχύουν :

i) Οι διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας x + W αποτελούν διαμέριση του συνόλου V.

ii) Αν ορίσουμε στο σύνολο V/W := {[x] : x ∈ V} τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού
(x + W) + (y + W) := (x+y) + W ,
λ(x + W) := λx + W , λ ∈ K,

τότε το σύνολο V/W αποκτά τη δομή διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα K και λέγεται ***διανυσματικός χώρος πηλίκο*** του V ***ως προς τον υπόχωρο*** W. Το μηδενικό στοιχείο του V/W είναι η κλάση ισοδυναμίας 0 + W = W του 0, ενώ το αντίθετο στοιχείο του x + W είναι το στοιχείο (-x) + W.

Θεώρημα 1.1

Έστω U υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V και $\{u_1,u_2,\dots u_r\}$ μία βάση του U. Αν το σύνολο $\{v_1+ U,v_2+ U,\dots,v_s+ U\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου V/ U , τότε το : $\{ v_1, v_2,\dots, v_s, u_1,u_2,\dots u_r\}$ είναι μία βάση του V.

Απόδειξη

Αρχικά, το $\{v_1, v_2,\dots, v_s\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο του V , διότι αν ήταν γραμμικώς εξαρτημένο θα υπήρχαν $\lambda_i$ ,i = 1,…s και κάποιο $i_0$ ώστε $\lambda_{i_0} \neq 0$ , τέτοια που

$$0 = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(v_i + U) = (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i) + U = 0 + U$$

άρα, το σύνολο $\{v_1+ U,v_2+ U,\dots,v_s+ U\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Άτοπο.
Έστω x∈V , τότε υπάρχουν $\lambda_i$ ,i=1,…s ώστε $x+U = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(v_i + U) = (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i) + U \Rightarrow$ $x \in (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i) + U$ ,άρα υπάρχει u ∈ U ώστε $x = (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i) + u$
κι άρα αφού υπάρχουν $\lambda_i$ , i=s+1,…s+r ώστε $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{s+1} u_i$ ,τότε
$x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \lambda_{s+1} u_i$ ,άρα

$$\{v_1, v_2,\dots, v_s, u_1,u_2,\dots u_r\}$$

παράγει τον V.

Έστω ότι δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Τότε υπάρχουν $\lambda_i$ , i=1,…s+r, ώστε $0 = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \lambda_{s+1} u_i$ και υπάρχει $i_0$ ώστε $\lambda_{i_0} \neq 0$. Αν $\lambda_i = 0$, i=s+1,…s+r τότε $\{ v_1, v_2,\dots, v_s \}$ γραμμικώς εξαρτημένο. Άτοπο. Άρα, $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i = - \sum_{i=1}^{r} \lambda_{s+1} u_i \neq 0$ , άρα επειδή $\gamma = - \sum_{i=1}^{r} \lambda_{s+1} u_i \in U$ και $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(v_i + U) = (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i) + U = \gamma + U = U = 0 + U$.
Επειδή $\{v_1+ U,v_2+ U,\dots,v_s+ U\}$ βάση του V/U , $\lambda_i$ , i=1,…s ⇒ $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i = 0$
Άτοπο ,διότι γ≠0.

**Βαθμός γραμμικής απεικόνισης και πίνακα**

Αρχικά δίνεται ο ορισμός του πυρήνα και της εικόνας μίας γραμμικής απεικόνισης. Έστω $f : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων X και Y πάνω στο σώμα , τότε το σύνολο

$$\ker f := \{x \in X : f(x)=0\} \subseteq X$$

λέγεται ***πυρήνας*** της f, ενώ το σύνολο

$$\mathrm{Im} f := f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y$$

λέγεται ***εικόνα*** της f.

Ορισμός

Αν X,Y είναι διανυσματικοί χώροι, πεπερασμένης διάστασης πάνω στο σώμα K και $f : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση, τότε

**α)** Ο **βαθμός της γραμμικής απεικόνισης** f είναι η διάσταση του υποχώρου Im f και συμβολίζεται με $\rho(f) = \dim \mathrm{Im} f$.

**β)** Η **μηδενικότητα της γραμμικής απεικόνισης** f είναι η διάσταση του υποχώρου ker f και συμβολίζεται με $\nu(f) = \dim\ker f$.

Ισχύει η σχέση $\nu(f) + \rho(f) = \dim X$

Ορισμός

**α)** Ο **βαθμός** ρ(A) **του πίνακα** $A \in M_{m\times n}(K)$είναι ο αριθμός που εκφράζει το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A ή ισοδύναμα είναι ο αριθμός που εκφράζει το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα A, δηλαδή είναι

$$\rho(A)=\rho_\sigma(A)=\rho_\gamma(A).$$

**β)** Η **μηδενικότητα** ν(A) **του πίνακα** $A \in M_{m\times n}(K)$ είναι η διάσταση του χώρου των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$AX=0, \text{ όπου } X=[x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T.$$

Ισχύει η σχέση $\nu(A) + \rho(A) = n = \dim K^n$

## Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Ορισμός

**α)** Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $K=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Το διάνυσμα $x \in V\text{-}\{0\}$ ονομάζεται ***ιδιοδιάνυσμα*** ή ***χαρακτηριστικό διάνυσμα*** της γραμμικής απεικόνισης f, αν υπάρχει $\lambda \in K$ τέτοιος ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση

$$f(x)=\lambda x$$

Ο αριθμός $\lambda \in K$ για τον οποίο το διάνυσμα $x \neq 0$ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση, ονομάζεται ***ιδιοτιμή*** ή ***χαρακτηριστική τιμή*** της f.

**β)** Το διάνυσμα $x \in K^n\text{-}\{0\}$ ονομάζεται ***ιδιοδιάνυσμα*** ή ***χαρακτηριστικό διάνυσμα*** του πίνακα $A \in M_n(K)$, αν ικανοποιεί την εξίσωση

$$Ax=\lambda x$$

για κάποιο $\lambda \in K$, το οποίο τότε ονομάζεται ***ιδιοτιμή*** ή ***χαρακτηριστική τιμή*** του πίνακα A.

Ορισμός

**α)** Η εξίσωση (ως προς t)

$$\det(tI\text{-}A)=0,$$

λέγεται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** του πίνακα A , ενώ το πολυώνυμο

$$\chi_A(t):=\det(tI\text{-}A),$$

λέγεται ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** του πίνακα A.

**β)** Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A λέγεται ***φάσμα*** του A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$.

Ορισμός

Ο υπόχωρος $V(\lambda)=\{x : Ax=\lambda x , x\in K^n \}$ του $K^n$ λέγεται ***ιδιόχωρος*** του πίνακα A αντίστοιχος της ιδιοτιμής λ.

Ορισμός

**α)** Η πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής $\lambda \in K$ του πίνακα $A \in M_n(K)$ ως ρίζας της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\chi_A(t)=0$ λέγεται ***αλγεβρική πολλαπλότητα*** της ιδιοτιμής λ και συμβολίζεται με $\alpha(\lambda)$.

**β)** Η διάσταση του ιδιόχωρου V(λ) λέγεται ***γεωμετρική πολλαπλότητα*** της ιδιοτιμής λ και συμβολίζεται με γ(λ), δηλαδή είναι

$$\gamma(\lambda)=\dim V(\lambda) .$$

Έστω λ ιδιοτιμή του πίνακα $A \in M_n(K)$ με αλγεβρική πολλαπλότητα α(λ) και γεωμετρική πολλαπλότητα γ(λ). Τότε ισχύει ότι

$$\gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$$

επίσης ισχύει

$$\gamma(\lambda) = n - \rho(A-\lambda I) .$$

## Το ελάχιστο πολυώνυμο πίνακα

Θεωρούμε τον πίνακα $A \in M_n(K)$ και το σύνολο

$$F_A :=\{f(t):f(t)\in K[t] \text{ με } f(t)\neq 0 \text{ και } f(A)=0\}$$

Είναι $F_A \neq \emptyset$ , αφού το $F_A$ περιέχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α.

<u>Ορισμός</u>

Το πολυώνυμο $m_A(t) \in K[t]$ λέγεται ***ελάχιστο πολυώνυμο*** του πίνακα $A \in M_n(K)$, αν ισχύουν

:

**α)** $m_A(t) \in F_A$ , δηλαδή ισχύει $m_A(A)=0$

**β)** $\deg m_A(t)\leq \deg f(t)$ , για κάθε $f(t) \in F_A$ και

**γ)** Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $m_A(t)$ είναι ίσος με 1.

<u>Ορισμός</u>

Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

λέγεται ***συνοδεύων ή συνοδός*** πίνακας του πολυωνύμου

$$f(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0 \in K[t]$$

όπου K[t] το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές από το σώμα Κ.

# <u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</u>

## ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΒΑΣΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

<u>Ορισμός</u>

***Ομάδα*** $< G,* >$ είναι ένα σύνολο G μαζί με μια διμελή πράξη $*$ G τέτοια ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα :

**α)** Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική

**β)** Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο ώστε $e * x = x * e = x$ για κάθε $x \in G$. Αυτό το στοιχείο e λέγεται ταυτοτικό στοιχείο για την $*$ στο G.

**γ)** Για κάθε α στο G υπάρχει ένα στοιχείο α΄ στο G με την ιδιότητα $α' * α = α * α' = e$. Το στοιχείο α΄ λέγεται αντίστροφο του α ως προς την πράξη $*$ .

<u>Ορισμός</u>

Ένας ***δακτύλιος*** $<R,+,\cdot>$ είναι ένα σύνολο R μαζί με δύο διμελείς πράξεις + και · , τις οποίες αποκαλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, ορισμένες στο R έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα :

**α)** $<R,+>$ είναι μία αβελιανή ομάδα.

**β)** Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός .

**γ)** Για κάθε $α,b,c \in R$, ισχύουν ο αριστερός επιμεριστικός νόμος , $a(b+c) = (ab)+(ac)$, και ο δεξιός επιμεριστικός νόμος, $(a+b)c = (ac)+(bc)$.

Ένα τετριμμένο παράδειγμα δακτυλίου είναι ο ***μηδενικός δακτύλιος*** $R = \{α\}$ με $α+α = α$ και $α\cdot α = α$.

Είναι φανερό ότι το $\{0\}$, αν ορίσουμε $0+0 = 0$ και $(0)(0) = 0$, γίνεται δακτύλιος. Σε αυτή τη περίπτωση το 0 δρα ως πολλαπλασιαστικό και ως προσθετικό ταυτοτικό στοιχείο. Μόνο σε αυτή τη περίπτωση το 0 μπορεί να είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, διότι αν $0α = α$, τότε $α = 0$.

<u>Ορισμός</u>

Ένας δακτύλιος στον οποίο ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετική πράξη λέγεται ***αντιμεταθετικός δακτύλιος***. Ένας δακτύλιος με πολλαπλασιαστικό ταυτοτικό στοιχείο 1, για το οποίο $1x = x1 = x$ για κάθε $x \in R$, λέγεται ***δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο***. Κάθε ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού λέγεται ***μοναδιαίο στοιχείο***.

Ορισμός

Έστω R ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Ένα στοιχείο u του R λέγεται ***αντιστρέψιμο*** του R αν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στο R. Αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι ***αντιστρέψιμο***, τότε ο R λέγεται ***δακτύλιος διαίρεσης***. ***Σώμα*** λέγεται ένας μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης.

Ορισμός

Αν a και b είναι δύο μη μηδενικά στοιχεία ενός δακτυλίου R τέτοια, ώστε ab=0, τότε τα a και b λέγονται ***διαιρέτες του 0***. Ειδικότερα, το a λέγεται ***αριστερός διαιρέτης του 0*** και το b ***δεξιός διαιρέτης του 0***.

Ορισμός

***Ακέραια περιοχή*** λέγεται ένας μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος D με μοναδιαίο στοιχείο, που δεν περιέχει διαιρέτες του 0.

Ορισμός

Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα ***πολυώνυμο*** f(t) με συντελεστές από τον R είναι ένα άπειρο τυπικό άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n + \ldots$$

όπου $\alpha_i \in R$ και $\alpha_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος τιμών του i. Τα $\alpha_i$ είναι οι ***συντελεστές*** του f(t). Αν για κάποια i >0 ισχύει $\alpha_i \neq 0$, η μεγαλύτερη τέτοια τιμή του i λέγεται ***βαθμός*** του f(t). Αν δεν υπάρχει τέτοιο i >0, τότε λέμε ότι το f(t) είναι ***βαθμού μηδέν***.

Στη συνέχεια ως K[t] συμβολίζουμε το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές από το σώμα K.

Θεώρημα 2.1 (αλγόριθμος διαίρεσης για τον K[t])

Έστω

$$f(t)=\alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \ldots + \alpha_0$$

και

$$g(t)=b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \ldots + b_0$$

δύο στοιχεία του K[t] , όπου τα $\alpha_n$ και $b_m$ είναι μη μηδενικά στοιχεία του K και m>0. Τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα q(t) και r(t) στον K[t] τέτοια ώστε f(t)=g(t)q(t) + r(t),με τον βαθμό του r(t) μικρότερο από το βαθμό m του g(t).

Απόδειξη

Θεωρούμε το σύνολο $S = \{f(t)-g(t)s(t) : s(t) \in K[t]\}$ . Έστω r(t) ένα στοιχείο ελάχιστου βαθμού στο S. Τότε

$$f(t) = g(t)q(t) + r(t)$$

για κάποιο $q(t) \in K[t]$. Πρέπει να δείξουμε ότι ο βαθμός του r(t) είναι μικρότερος από m. Υποθέτουμε ότι

$$r(t) = c_p t^p + c_{p-1} t^{p-1} + \dots + c_0,$$

όπου $c_j \in K$ και $c_p \neq 0$. Αν $p \geq m$, τότε

$$f(t)-q(t)g(t) - (c_p/b_m)t^{p-m}g(t) = r(t) - (c_p/b_m)t^{p-m}g(t), \qquad (1)$$

το τελευταίο είναι της μορφής

$$r(t) – (c_p t^p + \text{όροι μικρότερου βαθμού}),$$

είναι δηλαδή πολυώνυμο με βαθμό μικρότερο από p, τον βαθμό του r(t).

Όμως, το πολυώνυμο της (1) γράφεται στη μορφή

$$f(t) – g(t)[q(t) + (c_p/b_m)t^{p-m}],$$

επομένως ανήκει στο S, κάτι που αντιφάσκει με την επιλογή του r(t) ως στοιχείου ελαχίστου βαθμού στο S. Έτσι ο βαθμός του r(t) είναι μικρότερος από τον βαθμό m του g(t), άτοπο.

Για την μοναδικότητα, αν

$$f(t) = g(t)q_1(t) + r_1(t)$$

και

$$f(t) = g(t)q_2(t) + r_2(t),$$

τότε αφαιρώντας κατά μέλη :

$$g(t)[q_1(t) – q_2(t)] = r_2(t) – r_1(t).$$

Αφού ο βαθμός του $r_2(t) – r_1(t)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του g(t), αναγκαστικά έχουμε $q_1(t) – q_2(t)=0$ δηλαδή $q_1(t)=q_2(t)$.Τότε, πρέπει να είναι και $r_2(t) – r_1(t)=0$,δηλαδή $r_1(t)=r_2(t)$.

□

Ορισμός

Ένα μη σταθερό πολυώνυμο $f(t) \in K[t]$ λέγεται ***ανάγωγο πάνω από το*** K ή ***ανάγωγο πολυώνυμο στον*** K[t], αν δεν μπορούμε να γράψουμε το f(t) ως γινόμενο g(t)h(t) δύο πολυωνύμων g(t) και h(t) στον K[t], τα οποία να έχουν, και τα δύο, βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του f(t).

Θεώρημα 2.2

Έστω $\phi : G \to G'$ ένας ισομορφισμός ομάδων με πυρήνα H. Τότε, τα σύμπλοκα της H αποτελούν μια ομάδα, την G/H, της οποίας η διμελής πράξη ορίζει το γινόμενο (αH)(bH) δύο συμπλόκων με επιλογή στοιχείων α και b από τα σύμπλοκα, και την ισότητα (αH)(bH) = (αb)H. Επίσης, η απεικόνιση $\mu : G/H \to \phi(G)$ που ορίζεται από την $\mu(\alpha H) = \phi(\alpha)$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να μας απασχολήσει είναι ο ορισμός (αH)(bH) = (αb)H για το γινόμενο δύο συμπλόκων στην G/H. Το γινόμενο υπολογίζεται με την επιλογή ενός στοιχείου από καθένα από τα σύμπλοκα αH και bH , και την εύρεση του συμπλόκου που περιέχει το γινόμενο τους, δηλαδή το αb. Αρχίζουμε, δείχνοντας ότι η (αH)(bH) = (αb)H δίνει μια καλά ορισμένη πράξη στο G/H. Για το σκοπό αυτό, ας υποθέσουμε ότι $\alpha h_1 \in \alpha H$ και $bh_2 \in bH$ είναι δύο άλλα αντιπροσωπευτικά στοιχεία από αυτά τα σύμπλοκα. Πρέπει να δείξουμε ότι $(\alpha b)H = (\alpha h_1 b h_2)H$, δηλαδή ότι τα αb και $\alpha h_1 b h_2$ ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο της G/H. Αρκεί να δείξουμε ότι $\phi(\alpha b) = \phi(\alpha h_1 b h_2)$. Υπενθυμίζουμε ότι $\phi(h) = e'$, το ταυτοτικό στοιχείο της G' , για κάθε $h \in H$. Άρα,

$$\phi(\alpha h_1 b h_2) = \phi(\alpha)\phi(h_1)\phi(b)\phi(h_2) = \phi(\alpha)e'\phi(b)e'$$

$$= \phi(\alpha)\,\phi(b) = \phi(\alpha b).$$

Έχουμε λοιπόν μια καλά ορισμένη διμελή πράξη στο G/H.

Ελέγχουμε τώρα τα αξιώματα της ομάδας για την G/H :

**Προσεταιριστικότητα.** Είναι

$$(\alpha H)[(bH)(cH)] = (\alpha H)[bcH)] = [\alpha(bc)]H$$

$$= [(\alpha b)c]H = [(\alpha b)H](cH)$$

$$= [(\alpha H)\,)(bH)]\,(cH).$$

Επομένως, η προσεταιριστικότητα στην G/H προκύπτει από την προσεταιριστικότητα στην G, αφού για τους υπολογισμούς μας στην G/H, επιλέγουμε αντιπροσώπους από τα σύμπλοκα και πραγματοποιούμε τους υπολογισμούς στην G.

**Ταυτοτικό στοιχείο.** Παρατηρούμε ότι,

$(\alpha H)(eH) = (\alpha e)H = \alpha H = (e\alpha)H = (eH)(\alpha H)$,

άρα το $H = eH$ δρα ως ταυτοτικό σύμπλοκο στην $G/H$.

**Αντιστρόφως**, παρατηρούμε ότι,

$(\alpha^{-1}H)(\alpha H) = (\alpha^{-1}\alpha)H = eH = (\alpha\alpha^{-1})H = eH = (\alpha\alpha^{-1})H = (\alpha H)(\alpha^{-1}H)$,

άρα το $\alpha^{-1}H$ είναι το αντίστροφο του $\alpha H$ στην $G/H$.

Επομένως, η $G/H$ είναι ομάδα.

Δείχνουμε τώρα ότι η $\mu : G/H \to \phi(G)$, που ορίζεται από την $\mu(\alpha H) = \phi(\alpha)$, είναι ισομορφισμός. Η $\mu$ ορίζεται με επιλογή στοιχείων από τα σύμπλοκα και υπολογισμό της $\phi$ αυτών των στοιχείων. Πρέπει να ξεκινήσουμε, δείχνοντας ότι αυτή η απεικόνιση $\mu$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή, ανεξάρτητη από τις επιλογές των στοιχείων από τα σύμπλοκα. Για το σκοπό αυτό, ας υποθέσουμε ότι $\alpha h$ είναι ένα άλλο στοιχείο του συμπλόκου $\alpha H$, όπου $h \in H$. Τότε $\phi(\alpha h) = \phi(\alpha)\phi(h) = \phi(\alpha)e' = \phi(\alpha)$, άρα η $\mu$ είναι στ' αλήθεια καλά ορισμένη.

Δείχνουμε τώρα ότι είναι ισομορφισμός.

**Ιδιότητα ομομορφισμού**. Παρατηρούμε ότι

$$\mu((\alpha H)(bH)) = \mu((\alpha b)H) = \phi(\alpha b) = \phi(\alpha)\phi(b) = \mu(\alpha H)\mu(bH).$$

Αυτό αποδεικνύει την ιδιότητα του ομομορφισμού.

**Ένα προς ένα.** Ας υποθέσουμε ότι $\mu(\alpha H) = \mu(bH)$. Τότε $\phi(\alpha) = \phi(b)$, άρα το $\alpha H$ και $bH$ είναι το ίδιο σύμπλοκο.

**Επί της $\phi(G)$**. Έστω $y \in \phi(G)$. Τότε $y=\phi(x)$ για κάποιο $x \in G$, και $\mu(xH) = \phi(x) = y$.

Η απόδειξη είναι πλήρης.

□

## Θεώρημα 2.3

Έστω $\phi : R \to R'$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων με πυρήνα Η. Τότε, τα προσθετικά σύμπλοκα του Η σχηματίζουν ένα δακτύλιο R/H, του οποίου οι διμελείς πράξεις ορίζονται μέσω αντιπροσώπων. Δηλαδή, το άθροισμα δύο συμπλόκων ορίζεται από την

$$(\alpha+H) + (b+H) = (\alpha+b) + H$$

Και το γινόμενο τν συμπλόκων ορίζεται από την

$$(\alpha+H)(b+H) = (\alpha b) + H.$$

Τέλος, η απεικόνιση $\mu$: $R/H \to \phi(R)$, που ορίζεται από την $\mu(\alpha+H) = \phi(\alpha)$, είναι ισομορφισμός.

## Απόδειξη

Το προσθετικό μέρος της θεωρίας είναι δεδομένο από το θεώρημα 2.2. Συνεχίζουμε ελέγχοντας ό,τι έχει σχέση με το πολλαπλασιασμό.

Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι ο πολλαπλασιασμός των συμπλόκων μέσω αντιπροσώπων είναι καλά ορισμένος. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε $h_1$ , $h_2 \in H$ και τους αντιπροσώπους $\alpha+h_1$ του $\alpha+H$ και $b+h_2$ του $b+H$. Θέτουμε,

$$c = (\alpha+h_1)(b+h_2) = \alpha b + \alpha h_2 + h_1 b + h_1 h_2.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι αυτό το στοιχείο c ανήκει στο σύμπλοκο $\alpha b+H$. Αφού $\alpha b+H = \phi^{-1}\{\phi(\alpha b)\}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\phi(c) = \phi(\alpha b)$. Αφού η $\phi$ είναι ομομορφισμός και $\phi(h) = 0'$ αν $h \in H$ , έχουμε

$$\begin{aligned}\phi(c) &= \phi(\alpha b + \alpha h_2 + h_1 b + h_1 h_2)\\ &= \phi(\alpha b) + \phi(\alpha h_2) + \phi(h_1 b) + \phi(h_1 h_2)\\ &= \phi(\alpha b) + \phi(\alpha)0' + 0'\phi(b) + 0'0\\ &= \phi(\alpha b) + 0' + 0' + 0' = \phi(\alpha b). \qquad (1)\end{aligned}$$

Επομένως ο πολλαπλασιασμός μέσω αντιπροσώπων είναι καλά ορισμένος .

Για να δείξουμε ότι το R/H είναι δακτύλιος, μένει να δείξουμε ότι η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και οι επιμεριστικοί νόμοι ισχύουν στον R/H. Δεδομένου ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός εκτελούνται με τη βοήθεια αντιπροσώπων, οι ιδιότητες αυτές έπονται αμέσως από τις αντίστοιχες ιδιότητες του $\mathbb{R}$.

Από το θεώρημα 2.2, εξασφαλίζεται ότι η απεικόνιση $\mu : R/H \rightarrow \phi(R)$, που ορίζεται από την $\mu(\alpha+H) = \phi(\alpha)$ , είναι καλά ορισμένη , ένα προς ένα, επί του $\phi(R)$, και ικανοποιεί την προσθετική ιδιότητα του ομομορφισμού. Για τον πολλαπλασιασμό έχουμε :

$\mu[(\alpha+H)(b+H)] = \mu(\alpha b+H) = \phi(\alpha b) = \phi(\alpha)\phi(b) = \mu(\alpha+H)\mu(b+H)$.

Άρα η μ είναι ισομορφισμός.

□

Θεώρημα 2.4

Έστω H ένας υποδακτύλιος του δακτυλίου R. Ο πολλαπλασιασμός των προσθετικών συμπλόκων του H ορίζεται καλά από την ισότητα

$$(\alpha+H)(b+H) = \alpha b+H$$

αν και μόνο αν $\alpha h \in H$ και $hb \in H$ για κάθε $\alpha, b \in R$ και $h \in H$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\alpha h \in H$ και $hb \in H$ για κάθε $\alpha, b \in R$ και $h \in H$. Έστω $h_1 , h_2 \in H$, οπότε τα $\alpha+ h_1$ και $b+ h_2$ είναι αντιπρόσωποι των συμπλόκων $\alpha+H$ και $b+H$ που περιέχουν τα α και b. Τότε

$$(\alpha+ h_1)(b+ h_2) = \alpha b + \alpha h_2 + h_1 b + h_1 h_2.$$

Από την υπόθεση, τα $\alpha h_2$ και $h_1 b$ , $h_1 h_2$ ανήκουν όλα στον H, οπότε το $(\alpha+ h_1)(b+ h_2) \in \alpha b+H$.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι ο πολλαπλασιασμός των προσθετικών συμπλόκων μέσω αντιπροσώπων είναι καλά ορισμένος. Έστω $\alpha \in R$ και ας θεωρήσουμε το γινόμενο συμπλόκων $(\alpha+H)H$. Επιλέγοντας τους αντιπροσώπους $\alpha \in (\alpha+H)$ και $0 \in H$, βλέπουμε ότι $(\alpha+H)H = \alpha 0 + H = 0 + H = H$. Επίσης, εφ'όσον μπορούμε να υπολογίσουμε τα $(\alpha+H)H$ επιλέγοντας το $\alpha \in (\alpha+H)$ και οποιοδήποτε $h \in H$, διαπιστώνουμε ότι $\alpha h \in H$ για οποιοδήποτε $h \in H$. Ανάλογη διαδικασία, με χρήση όμως του γινομένου $H(b+ H)$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το $hb \in H$ για οποιοδήποτε $h \in H$.

□

Ορισμός

Ένας υποδακτύλιος N ενός δακτυλίου R που ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$\alpha N \subseteq N \quad \text{και} \quad Nb \subseteq N \text{ για κάθε } \alpha,b \in R$$

λέγεται ***ιδεώδες***.

Πόρισμα

Έστω N ένα ιδεώδες ενός δακτυλίου R. Τότε τα προσθετικά σύμπλοκα του N σχηματίζουν έναν δακτύλιο R/N με τις διμελείς πράξεις που ορίζονται από τις

$$(\alpha+N) + (b+N) = (\alpha+b) + N$$

και

$$(\alpha+N) + (b+N) = \alpha b + N.$$

Ορισμός

Ο δακτύλιος R/N του προηγούμενου πορίσματος λέγεται ***δακτύλιος-πηλίκο του*** R ***ως προς*** N.

Θεώρημα 2.5

Αν R είναι ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, και N είναι ένα ιδεώδες του R που περιέχει αντιστρέψιμο στοιχείο, τότε N = R.

Απόδειξη

Έστω N ένα ιδεώδες του R, και ας υποθέσουμε ότι $u \in N$ για κάποιο αντιστρέψιμο στοιχείο u του R. Τότε από τη συνθήκη $rN \subseteq N$ για κάθε $r \in R$ έπεται, αν πάρουμε $r = u^{-1}$ και $u \in N$, ότι το $1 = u^{-1} u$ ανήκει στο N. Αλλά τότε, από την $rN \subseteq N$ για κάθε $r \in R$ έπεται ότι το $r1 = r$ ανήκει στο N για κάθε $r \in R$, δηλαδή N = R.

□

Ορισμός

***Μέγιστο ιδεώδες ενός δακτυλίου*** R λέμε ένα ιδεώδες M που είναι διαφορετικό από τον R και δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα γνήσιο ιδεώδες N του R.

Θεώρημα 2.6

Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Τότε το M είναι μέγιστο ιδεώδες του R αν και μόνο αν R/M είναι σώμα.

Απόδειξη

Έστω ότι το M είναι μέγιστο ιδεώδες του R. Από υπόθεση, ο R/M είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, διότι εκεί οι πράξεις ορίζονται μέσω των αντιπροσώπων των συμπλόκων. Θέλουμε να δείξουμε ότι για το τυχαίο στοιχείο $x \in R$, το σύμπλοκο $x + R$ έχει αντίστροφο στοιχείο στο R/M. Θέτουμε το σύνολο $N = \{r x + m | \ r \in R,\ m \in M\}$. Αυτό είναι ιδεώδες προφανώς, το οποίο περιέχει το M. Επειδή, το M είναι μέγιστο, πρέπει N = R. Άρα, $1 \in N$. Άρα, υπάρχουν $r_1$ , $m_1$ ώστε

$$r_1 x + m_1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$r_1 x = 1 - m_1 \Leftrightarrow$$

$$r_1 x \in 1 + M$$

άρα, $(r_1 + M)(x + M) = r_1 x + M = 1 + M$.

Αντίστροφα, έστω ότι ο R/M είναι σώμα και το M δεν είναι μέγιστο ιδεώδες. Τότε θα υπάρχει $\Gamma \supsetneq M$ και Γ γνήσιο ιδεώδες. Οπότε, υπάρχει $x \in N$ και $x \notin M$. Άρα, το $N=\{r x + m | \ r \in R,\ m \in M\}$ είναι κι αυτό ιδεώδες προφανώς το οποίο περιέχει το M και είναι γνήσιο διότι $N \subseteq \Gamma$. Άρα, $1 \notin N$, όμως αφού R/M σώμα, το $x + M$ έχει αντίστροφο. Άρα, υπάρχει $r_1 \in R$ ώστε

$$(r_1 + M)(x + M) = 1 + M \Leftrightarrow$$

$$r_1 x + M = 1 + M \Leftrightarrow$$

$$r_1 x \in 1 + M \Leftrightarrow$$

άρα υπάρχει $m_1 \in M$ ώστε $1 = r_1 x - m_1 \Leftrightarrow 1 \in N$.

Άρα άτοπο.

□

Ορισμός

Ένα ιδεώδες $N \neq R$ σε έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο R λέγεται ***πρώτο ιδεώδες*** αν από την $ab \in N$ έπεται ότι η $a \in N$ ή $b \in N$, για κάθε $a, b \in R$.

Θεώρημα 2.7

Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και $N \neq R$ ένα ιδεώδες του R. Τότε ο R/N είναι ακέραια περιοχή αν και μόνο αν το N είναι πρώτο ιδεώδες του R.

Απόδειξη

Ο δακτύλιος - πηλίκο R/N θα είναι ακέραια περιοχή αν και μόνο αν από την $(α+N)(b+N) = N$

έπεται ότι

$$α+N = N \text{ ή } b+N = N.$$

Αυτό ισοδυναμεί με το ότι ο R/N δεν έχει διαιρέτες του 0, αφού το σύμπλοκο N παίζει το ρόλο του 0 στον R/N. Κοιτάζοντας τους αντιπροσώπους, βλέπουμε ότι αυτή η συνθήκη αντιστοιχεί στο να λέμε ότι αν $αb \in N$, τότε είτε $α \in N$ είτε $b \in N$.

□

Πόρισμα

Κάθε μέγιστο ιδεώδες σε έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο είναι πρώτο ιδεώδες.

Απόδειξη

Αν το M είναι μέγιστο στον R, τότε το R/M είναι σώμα, επομένως και ακέραια περιοχή, οπότε λόγω του θεωρήματος 2.7, το M είναι πρώτο ιδεώδες.

Ορισμός

Αν R είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και $α \in R$, τότε το ιδεώδες $\{rα / r \in R\}$ όλων των πολλαπλασίων του α είναι ***το κύριο ιδεώδες που παράγεται από το*** α και συμβολίζεται με $<α>$. Ένα ιδεώδες N του R λέγεται ***κύριο ιδεώδες*** αν $N = <α>$ για κάποιο $α \in R$.

Θεώρημα 2.8

Αν το K είναι σώμα, τότε κάθε ιδεώδες του K[t] είναι κύριο.

Απόδειξη

Έστω N ένα ιδεώδες του K[t]. Αν $N = \{0\}$, τότε $N = <0>$. Υποθέτουμε ότι $N \neq \{0\}$, και έστω g(t) ένα μη μηδενικό στοιχείο N με τον ελάχιστο δυνατό βαθμό. Αν ο βαθμός του g(t) είναι 0. Τότε $g(t) \in K$ και είναι αντιστρέψιμο στοιχείο, οπότε $N = K[t] = <1>$ από το θεώρημα 2.5, δηλαδή το N είναι κύριο. Αν ο βαθμός του g(t) είναι ≥ 1, έστω f(t) οποιοδήποτε στοιχείο του N. Τότε από το θεώρημα 2.1 (αλγόριθμο διαίρεσης) έχουμε, f(t) = g(t)q(t) + r(t) ,όπου (βαθμός r(t) < βαθμός g(t). Αλλά, αφού f(t) ∈ N και g(t) ∈ N έπεται ότι f(t) - g(t)q(t) = r(t) ∈ N από τον ορισμό του ιδεώδους. Αφού το g(t) είναι μη μηδενικό στοιχείο με τον ελάχιστο δυνατό βαθμό στο N, πρέπει να έχουμε r(t) = 0. Άρα, f(t) = g(t)q(t) και N = < g(t)>.

□

Θεώρημα 2.9

Ένα ιδεώδες < p(t) > ≠ 0 του K[t] είναι μέγιστο αν και μόνο αν το p(t) είναι ανάγωγο πάνω από το K.

Απόδειξη

Έστω ότι το < p(t) > είναι μέγιστο και το p(t) δεν είναι ανάγωγο πάνω από το K. Τότε υπάρχουν κ(t) , g(t) ∈ K[t] ώστε : p(t) = κ(t)g(t) και τα κ(t) , g(t) έχουν βαθμό μεγαλύτερο από το 0. Τότε, το < g(t) > περιέχει το < p(t) > και είναι γνήσιο ιδεώδες του K[t] διότι δεν περιέχει το 1 και g(t) ∉ < p(t) >, διότι κάθε στοιχείο του < p(t) > έχει βαθμό τουλάχιστον όσο το p(t) και το g(t) έχει βαθμό μικρότερο του p(t). Άτοπο.

Αντίστροφα, έστω ότι το p(t) είναι ανάγωγο πάνω από το K. Έστω ότι το < p(t) > δεν είναι μέγιστο ιδεώδες του K[t] ,άρα υπάρχει N γνήσιο ιδεώδες του K[t] ώστε το N να περιέχει γνήσια το < p(t) >. Επειδή κάθε ιδεώδες του K[t] είναι κύριο υπάρχει g(t) ∈ K[t] ώστε N = < g(t) >. Άρα, επειδή p(t) ∈ N υπάρχει κ(t) ∈ K[t] ώστε p(t) = κ(t)g(t), αλλά το g(t) έχει βαθμό μεγαλύτερο 0, διότι αν ήταν μηδενικού βαθμού N = K[t], οπότε αν το κ(t) έχει κι αυτό βαθμό μεγαλύτερο του 0, τότε το p(t) δε θα ήταν ανάγωγο. Άρα, κ(t) μηδενικού βαθμού κι άρα υπάρχει α ∈ K ώστε α = κ(t) , α ≠ 0. Οπότε, g(t) = $α^{-1}$ p(t) κι οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα N = < p(t) >. Άτοπο.

□

Θεώρημα 2.10

Έστω p(t) ένα ανάγωγο πολυώνυμο στον K[t]. Αν το p(t) διαιρεί το r(t)s(t) για κάποια r(t) και s(t) ∈ K[t], τότε είτε το p(t) διαιρεί το r(t) είτε το p(t) διαιρεί το s(t).

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι το p(t) διαιρεί το r(t)s(t). Τότε το r(t)s(t) ∈ < p(t) >, το οποίο είναι μέγιστο ιδεώδες, από το προηγούμενο θεώρημα. Επομένως, το < p(t) > είναι ένα πρώτο ιδεώδες, από προηγούμενο πόρισμα. Άρα, από την r(t)s(t) ∈ < p(t) > έπεται ότι είτε r(t) ∈ < p(t) >, που μας δίνει ότι το p(t) διαιρεί το r(t), είτε ότι s(t) ∈ < p(t) >, που μας δίνει ότι το p(t) διαιρεί το s(t).

□

## Πόρισμα

Αν το $p(t)$ είναι ανάγωγο στον $K[t]$ και το $p(t)$ διαιρεί το γινόμενο $r_1(t)\dots r_n(t)$ όπου $r_i(t) \in K[t]$, τότε το $p(t)$ διαιρεί το $r_i(t)$ για τουλάχιστον ένα i.

## Θεώρημα 2.11

Αν K είναι ένα σώμα, τότε κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $f(t) \in K[t]$ αναλύεται σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων στον $K[t]$, τα οποία είναι μονοσήμαντα ορισμένα, αν εξαιρέσουμε την διάταξη και αντιστρέψιμους (δηλαδή, σταθερούς μη μηδενικούς) παράγοντες από το K.

### Απόδειξη

Έστω $f(t) \in K[t]$ ένα μη σταθερό πολυώνυμο. Αν το $f(t)$ δεν είναι ανάγωγο, τότε $f(t)=g(t)h(t)$, με τους βαθμούς των $g(t)$ και $h(t)$ γνήσια μικρότερους από τον βαθμό του $f(t)$. Αν τα $g(t)$ και $h(t)$ είναι και τα δύο ανάγωγα, σταματάμε εδώ. Αν όχι, τουλάχιστον ένα από αυτά αναλύεται σε πολυώνυμα μικρότερου βαθμού. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία (για να είμαστε ακριβείς, με ένα επαγωγικό επιχείρημα), καταλήγουμε σε μία παραγοντοποίηση

$$f(t) = p_1(t)p_2(t)\dots p_r(t),$$

όπου το $p_i(t)$ είναι ανάγωγο για $i=1,2,\dots r$.

Μένει να δείξουμε το μονοσήμαντο. Ας υποθέσουμε ότι

$$f(t) = p_1(t)p_2(t)\dots p_r(t) = q_1(t)q_2(t)\dots q_s(t)$$

είναι δύο αναλύσεις του $f(t)$ σε ανάγωγα πολυώνυμα. Τότε από το προηγούμενο πόρισμα, το $p_1(t)$ διαιρεί κάποιο $q_j(t)$ , και μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι το $q_1(t)$. Αφού το $q_1(t)$ είναι ανάγωγο,

$$q_1(t) = u_1p_1(t),$$

όπου $u_1\neq0$, αλλά το $u_1$ ανήκει στο K, δηλαδή είναι αντιστρέψιμο. Αντικαθιστώντας το $q_1(t)$ με $u_1p_1(t)$ και διαγράφοντας, παίρνουμε

$$p_2(t)\dots p_r(t) = u_1q_2(t)\dots q_s(t).$$

Με ανάλογους συλλογισμούς, έχουμε, ας πούμε, $q_2(t) = u_2p_2(t)$, οπότε

$$p_3(t)\dots p_r(t) = u_1u_2q_3(t)\dots q_s(t).$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, φτάνουμε τελικά στην

$$1 = u_1u_2\dots u_rq_{r+1}(t)\dots q_s(t).$$

Είναι φανερό ότι αυτό μπορεί να ισχύει μόνο αν $s = r$ , οπότε η τελευταία ισότητα είναι της μορφής $1 = u_1u_2\dots u_r$ . Έτσι, οι ανάγωγοι παράγοντες $p_i(t)$ και $q_j(t)$ ήταν οι ίδιοι, εκτός ίσως από τη διάταξη και αντιστρέψιμους παράγοντες.

□

Θεώρημα 2.12

Έστω K σώμα και $f_1(t)$, $f_2(t) \in K[t]$ και πρώτα μεταξύ τους. Τότε υπάρχουν $g_1(t)$, $g_2(t) \in K[t]$ ώστε $g_1(t)\, f_1(t)+ g_2(t)\, f_2(t) = 1$.

Απόδειξη

$M_1 = \{\kappa(t)\, f_1(t) : \kappa(t) \in K[t]\}$

$M_2 = \{\kappa(t)\, f_2(t) : \kappa(t) \in K[t]\}$

Τα $M_1$, $M_2$ είναι προφανώς ιδεώδη του $K[t]$. Επίσης, το $M_1+ M_2$ είναι κι αυτό προφανώς ιδεώδες του $K[t]$. Όμως, από προηγούμενο θεώρημα κάθε ιδεώδες του $K[t]$ είναι κύριο. Άρα, υπάρχει $\gamma(t) \in K[t]$ ώστε $M_1+ M_2 = <\gamma(t)>$. Επομένως, αν $\gamma(t)$ μη μηδενικού βαθμού, τότε υπάρχουν $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t) \in K[t]$ ώστε $f_1(t) = \lambda_1(t)\, \gamma(t)$ και $f_2(t) = \lambda_2(t)\, \gamma(t)$ οπότε $f_1(t)$ και $f_2(t)$ όχι πρώτα. Άρα, $\gamma(t)$ μηδενικού βαθμού κι οπότε υπάρχει $\alpha \in K$ ώστε $\alpha = \gamma(t)$, άρα $1 \in <\gamma(t)> = M_1+ M_2$ κι άρα θα υπάρχουν $g_1(t)$, $g_2(t) \in K[t]$ ώστε $g_1(t)\, f_1(t)+ g_2(t)\, f_2(t) = 1$.

□

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Στο σύνολο $\mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$(K) των mxn πινάκων με στοιχεία από το σώμα K (K=$\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) , η έννοια της ισοδυναμίας πινάκων (B∼A ⟺ B= $Q^{-1}AP$, Q∈GL(m,K) ,P∈GL(n,K) )ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας, η οποία χωρίζει το $\mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$(K) σε κλάσεις ισοδυναμίας, δηλαδή σε υποσύνολα ισοδύναμων πινάκων. Σε κάθε τέτοια κλάση ενδιαφερόμαστε να βρούμε, αν υπάρχει, τον απλούστερο δυνατό αντιπρόσωπο της.

Για κάθε πίνακα A ∊ $\mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$(K) υπάρχουν κατάλληλοι αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q , P∈GL(n,K) και Q∈GL(m,K) τέτοιοι ώστε

$$Q^{-1}AP = E_r = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

όπου r= ρ(A) και με το O συμβολίζουμε τους μηδενικούς πίνακες κατάλληλων διαστάσεων έτσι, ώστε ο πίνακας $E_r$ να είναι τύπου mxn.

Διαπιστώνουμε ότι κάθε πίνακας A είναι ισοδύναμος με κάποιον από τους πίνακες

$$E_r, r=0,1,\ldots,k = \min\{n,m\}$$

και όλοι οι πίνακες οι ισοδύναμοι με τον πίνακα $E_r$ έχουν βαθμό r.

Έτσι η σχέση ισοδυναμίας που αναφέρθηκε παραπάνω διαμερίζει το σύνολο $\mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$(K) σε κλάσεις ισοδυναμίας πεπερασμένου πλήθους των οποίων οι απλούστεροι δυνατοί αντιπρόσωποι είναι οι πίνακες $E_r$ .

Για παράδειγμα, κάθε 3x4 πίνακας είναι ισοδύναμος με έναν από τους πίνακες

$E_0 = O_{3X4}$

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για την εύρεση μίας πρακτικής μεθόδου αναγωγής ενός πίνακα Α στην κανονική του μορφή $Q^{-1}AP = E_r = Q_0AP$ ,αν θέσω $Q_0 = Q^{-1}$, χρησιμοποιούνται οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ή στηλών και η πρόταση σύμφωνα με την οποία η εφαρμογή μίας στοιχειώδους πράξης γραμμών (αντίστοιχα στηλών) στον πίνακα Α ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του πίνακα Α από αριστερά (αντίστοιχα από δεξιά) με τον αντίστοιχο στοιχειώδη πίνακα, δηλαδή

αν τ: $M_{m\times n} \rightarrow M_{m\times n}$ είναι μία στοιχειώδης πράξη γραμμών και $A \in M_{m\times n}(K)$, τότε

$$\tau(A)=\tau(I_\mu)A$$

και, αν σ: $M_{m\times n} \rightarrow M_{m\times n}$ είναι μία στοιχειώδης πράξη στηλών και $A \in M_{m\times n}(K)$, τότε

$$\sigma(A)=A\sigma(I_\nu)$$

Η διαδικασία αναγωγής ενός mxn πίνακα Α στην κανονική του μορφή είναι η εξής :

**i)** Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μετασχηματίζεται ο πίνακας Α στον κλιμακωτής μορφής $Q_0A$ . Για την εύρεση του πίνακα $Q_0$ γράφεται ο μοναδιαίος πίνακας $I_m$ αριστερά του Α και με εφαρμογή κατάλληλων πράξεων στους δύο πίνακες :

$[I_m|A] \rightarrow [Q_1 \mid Q_1A] \rightarrow\ldots\rightarrow [Q_k\ldots Q_2Q_1 \mid Q_k\ldots Q_2Q_1A]$ ,

όπου ο πίνακας $Q_k\ldots Q_2Q_1A$ είναι κλιμακωτής μορφής και ο πίνακας

$$Q_0 := Q_k\ldots Q_2Q_1$$

είναι αντιστρέψιμος αφού είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων .

**ii)** Με στοιχειώδεις πράξεις στηλών μετασχηματίζεται ο πίνακας $Q_0A$ στον πίνακα $Q_0AP$. Για την εύρεση του πίνακα P γράφεται ο μοναδιαίος πίνακας $I_n$ δεξιά του Α και με εφαρμογή κατάλληλων πράξεων στους δύο πίνακες :

$\begin{bmatrix} Q_0A \\ I_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Q_0AP_1 \\ P_1 \end{bmatrix} \rightarrow\ldots\rightarrow \begin{bmatrix} Q_0AP_1P_2\ldots P_s \\ P_1P_2\ldots P_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0AP \\ P \end{bmatrix}$ ,

όπου $Q_0AP$ είναι ο πίνακας $E_r$ και ο πίνακας $P:=P_1P_2\ldots P_s$ είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Παράδειγμα 1

Έστω ο πίνακας A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \quad \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2\gamma_1 \quad , \quad \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 3\gamma_1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -6 & -5 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -6 & -5 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \quad \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - \gamma_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -6 & -5 & 7 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 7 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_2 - 2\sigma_1 , \sigma_3 \rightarrow \sigma_3 - 3\sigma_1 , \sigma_4 \rightarrow \sigma_4 + 2\sigma_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_2 = (-1/6)\sigma_2 \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1/3 & -3 & 2 \\ 0 & -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_3 \rightarrow \sigma_3 + 5\sigma_2 , \sigma_4 \rightarrow \sigma_4 - 7\sigma_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1/3 & -4/3 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε :

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } Q_0AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2

Έστω ο πίνακας A = $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ -2 & 7 & -9 & 4 \\ -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 11 & -14 & 7 \end{bmatrix}$. Θα βρεθεί ισοδύναμος πίνακας με τον A.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 7 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 11 & -14 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \quad \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + 2\gamma_1 \ , \quad \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + \gamma_1 \ , \quad \gamma_4 \rightarrow \gamma_4 + 3\gamma_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \quad \gamma_4 \rightarrow \gamma_4 - 2\gamma_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \quad \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - \gamma_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_2 + 3\sigma_1 \ , \sigma_3 \rightarrow \sigma_3 - 4\sigma_1 \ , \sigma_4 \rightarrow \sigma_4 + \sigma_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_3 \rightarrow \sigma_3 + \sigma_2 \ , \ \sigma_4 \rightarrow \sigma_4 - 2\sigma_2 \ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα έχουμε :

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } Q_0AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα $Q_0AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, όχι όμως όμοιος.

Η σχέση $\sim$ της ομοιότητας $A \sim B \Leftrightarrow B = P^{-1}AP$ , $P \in GL(n,K)$ ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $M_n(K)$ όλων των τετραγωνικών πινάκων τύπου $n \times n$ που όμως δε ταυτίζεται με τη σχέση ισοδυναμίας που ορίζει η σχέση $B = P^{-1}AQ$ , $P \in GL(n,K)$ και $Q \in GL(n,K)$ , στο ίδιο σύνολο.

Προφανώς δύο όμοιοι πίνακες είναι και ισοδύναμοι , το αντίστροφο όμως δεν ισχύει.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετηθεί η κανονική μορφή τετραγωνικών πινάκων $n \times n$ ως προς τη σχέση ομοιότητας.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός

Ένας πίνακας $A \in M_n(K)$ είναι ***διαγωνοποιήσιμος***, αν είναι **όμοιος** με ένα διαγώνιο πίνακα, δηλαδή, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in GL(n,K)$ τέτοιος ώστε

$$P^{-1}AP = D \ ,$$

όπου ο D είναι διαγώνιος πίνακας.

Ο πίνακας $A \in M_n(K)$ είναι διαγωνοποιήσιμος ,αν, και μόνο αν, ο πίνακας A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Αναλυτικότερα, αν $\mathbf{x_i} = (\xi_{i1},\xi_{i2},\ldots,\xi_{in}) \in K^n$ , i=1,2,…,n είναι n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A, αντίστοιχα των ιδιοτιμών $\lambda_i$ , i = 1,2,…,n όχι κατ’ ανάγκη διαφορετικές μεταξύ τους, τότε ο πίνακας

$$P := [\mathbf{x_1}\ \mathbf{x_2}\ \ldots\ \mathbf{x_n}]$$

με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, είναι αντιστρέψιμος και ισχύει

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \ .$$

Όμως υπάρχουν πίνακες οι οποίοι δεν είναι διαγωνοποιήσιμοι, οπότε είναι φανερό ότι το πρόβλημα της εύρεσης αντιπροσώπων σε κάθε κλάση ισοδυναμίας του συνόλου $M_n(K)$ ως προς τη σχέση ομοιότητας παραμένει ανοικτό. Στόχος είναι η εύρεση αντιπροσώπων της απλούστερης δυνατής μορφής, όπως διαγώνιοι και άνω τριγωνικοί οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ευκολότερη επίλυση προβλημάτων που είναι αναλλοίωτα ως προς τους γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Οι πίνακες απλής μορφής τους οποίους προσδιορίζουμε ως αντιπροσώπους στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του συνόλου $M_n(K)$ ως προς τη σχέση ομοιότητας, αποτελούν τις λεγόμενες **κανονικές μορφές**. Οι βασικές κανονικές μορφές είναι :

- **Η τριγωνική μορφή**
- **Η κανονική μορφή Jordan**,
  τις οποίες λαμβάνουν γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες με ιδιοτιμές μέσα στο σώμα K στο οποίο ορίζονται. Αυτό συμβαίνει όταν το σώμα K είναι αλγεβρικά κλειστό, για παράδειγμα $K = \mathbb{C}$.
- **Η ρητή κανονική μορφή**,
  την οποία λαμβάνουν γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες με ιδιοτιμές μέσα στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, χωρίς καμία προϋπόθεση για τις ιδιοτιμές τους.

## Η τριγωνική μορφή

Αρχικά θα εισάγουμε την έννοια του αναλλοίωτου υπόχωρου ως προς μία γραμμική απεικόνιση.

Ορισμός

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K = $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και η γραμμική απεικόνιση φ: V→ V ,δηλαδή φ ∊ $L_K(V)$. Ο υπόχωρος U του διανυσματικού χώρου V λέγεται φ-***αναλλοίωτος*** ή ***αναλλοίωτος ως προς τη γραμμική απεικόνιση*** φ, αν ισχύει : φ(U)⊆ U.

Για παράδειγμα, αν φ: V→ V είναι γραμμική απεικόνιση, τότε ο ιδιόχωρος V(λ) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ∈K είναι φ-αναλλοίωτος. Ομοίως, η υπόχωροι {0} , kerφ , Imφ και V είναι φ-αναλλοίωτοι.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια του ελάχιστου πολυωνύμου γραμμικής απεικόνισης κατ' αναλογία με τον ορισμό του ελάχιστου πολυωνύμου πίνακα.

Ορισμός

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$φ: V\to V,$$

όπου V είναι διανυσματικός χώρος ορισμένος πάνω στο σώμα K = $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ $\dim_K V = n$. Τότε το μοναδικό πολυώνυμο του ελάχιστου δυνατού βαθμού, έστω $m_φ(t) \in K[t]$, το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες :

**α)** Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του ισούται με 1

**β)** $m_φ(φ) = 0$,

καλείται ***ελάχιστο πολυώνυμο*** της γραμμικής απεικόνισης φ.

Θεώρημα 4.1

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K και η γραμμική απεικόνιση φ: V→ V. Αν ο υπόχωρος U του V είναι φ-αναλλοίωτος, τότε ισχύουν:

**i)** Μέσω της φ επάγεται επί του διανυσματικού χώρου πηλίκο $\overline{V}$ :=V/U η γραμμική απεικόνιση

$$\overline{\varphi} := \overline{V}\to\overline{V}\text{ , με τύπο } \overline{\varphi}\,(v + U):= φ(v) + U,$$

δηλαδή, αν $\overline{v}$ = v + U, τότε είναι $\overline{\varphi}\,(\overline{v}):= \overline{φ(v)}$.

**ii)** Αν q(t) ∊ K[t] με q(φ)=0, τότε ισχύει και q($\overline{\varphi}$)=0.

**iii)** Αν $m_{\overline{\varphi}}(t) \in K[t]$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο της $\overline{\varphi}$ και $m_{\phi}(t) \in K[t]$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο της $\phi$, τότε $m_{\overline{\varphi}}(t) | m_{\phi}(t)$.

<u>Απόδειξη</u>

**i)** Αρχικά παρατηρούμε ότι ο περιορισμός της γραμμικής απεικόνισης $\phi: V \to V$ στο $\phi$-αναλλοίωτο υπόχωρο U του V, έστω

$$\widetilde{\varphi} = \phi_{|U} : U \to U, \text{ με τύπο } \widetilde{\varphi}(v) := \phi(v),$$

Είναι επίσης γραμμική απεικόνιση, δηλαδή $\phi \in L_K(U)$.

Επίσης, παρατηρούμε, ότι η απεικόνιση $\overline{\varphi}$ είναι καλώς ορισμένη, γιατί αν είναι $\overline{v} = v_1 + U = v_2 + U$ με $v_1, v_2 \in V$, τότε $v_1 - v_2 \in U$ και επιπλέον

$$\phi(v_1 - v_2) = \phi(v_1) - \phi(v_2) \in U \Rightarrow \phi(v_1) + U = \phi(v_2) + U$$

$$\Rightarrow \overline{\varphi}(v_1 + U) = \overline{\varphi}(v_2 + U).$$

Επιπλέον, αν $\overline{v}, \overline{u} \in \overline{V} = V/U$ και $\lambda, \mu \in K$, τότε ισχύει

$$\overline{\varphi}(\lambda\overline{v} + \mu\overline{u}) = \overline{\varphi}(\overline{\lambda v + \mu u}) = \overline{\varphi(\lambda v + \mu u)} = \overline{\lambda\varphi(v)} + \overline{\mu\varphi(u)}$$

$$\lambda\overline{\varphi(v)} + \mu\overline{\varphi(u)} = \lambda\overline{\varphi}(\overline{v}) + \mu\overline{\varphi}(\overline{u}),$$

οπότε η απεικόνιση $\overline{\varphi}$ είναι γραμμική, δηλαδή $\overline{\varphi} \in L_K(\overline{V})$.

**ii)** Έχουμε ακόμη ότι $(\overline{\varphi^2}) = (\overline{\varphi})^2$ και $(\overline{\varphi^n}) = (\overline{\varphi})^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Πράγματι, αν $\overline{v} = v + U \in V/U$, τότε ισχύει :

$$(\overline{\varphi^2})(\overline{v}) = \phi^2(v) + U = \phi(\phi(v)) + U = \overline{\varphi}(\phi(v) + U) = \overline{\varphi}(\overline{\varphi}(v + U)) = (\overline{\varphi})^2(\overline{v}),$$

οπότε πλέον με επαγωγή αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$(\overline{\varphi^n}) = (\overline{\varphi})^n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Επομένως, για κάθε πολυώνυμο $q(t) \in K[t]$ θα ισχύει ότι $\overline{q(\varphi)} = q(\overline{\varphi})$, οπότε αν $q(\phi)=0$, τότε $\overline{q(\varphi)} = q(\overline{\varphi})=0$ ,όπου $\overline{0}$ είναι η μηδενική απεικόνιση στο διανυσματικό χώρο $\overline{V} = V/U$.

**iii)** Αν $q(t) \in K[t]$ είναι τέτοιο, ώστε $q(\overline{\varphi})=0$, τότε $m_{\overline{\varphi}}(t) | q(t)$. Επίσης, επειδή $m_{\phi}(\phi)=0$ θα ισχύει ότι $m_{\phi}(\overline{\varphi})=0$. Επομένως $m_{\overline{\varphi}}(t) | m_{\phi}(t)$.

□

Τώρα, μέσω του θεωρήματος 4.1 μπορούμε να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα για την τριγωνική μορφή μιας γραμμικής απεικόνισης ή ενός πίνακα. Έχουμε σχετικά :

Θεώρημα 4.2

**i)** Αν η γραμμική απεικόνιση φ: V→ V, όπου V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K, έχει όλες τις ιδιοτιμές της στο σώμα K, τότε υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας της φ είναι τριγωνικός.

**ii)** Αν ο πίνακας A ∊ $M_n(K)$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα K, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τύπου nxn τέτοιος, ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι τριγωνικός.

Απόδειξη

**i)** Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς τη διάσταση του V.

Αν είναι $\dim_K V=1$, τότε ο πίνακας της φ είναι 1x1, δηλαδή τριγωνικός. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα αληθεύει για κάθε διανυσματικό χώρο με διάσταση μικρότερη του n και θεωρούμε το χώρο V με $\dim_K V= n$.

Έστω $\lambda_1 \in K$ μία ιδιοτιμή της φ. Τότε υπάρχει $v_1 \in V-\{0\}$ τέτοιο, ώστε $\phi(v_1) = \lambda_1 v_1$ και αν θεωρήσουμε τον υπόχωρο $U:= \{\lambda v_1 : \lambda \in K\}$, τότε είναι $\dim_K U=1$ και ο U είναι φ-αναλλοίωτος. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.1 μέσω της φ επάγεται επί του διανυσματικού χώρου πηλίκο $\overline{V}$ η γραμμική απεικόνιση $\overline{\varphi}$ που είναι τέτοια, ώστε $m_{\overline{\varphi}}(t) | \; m_\phi(t)$. Επομένως, όλες οι ιδιοτιμές της $\overline{\varphi}$ είναι και ιδιοτιμές της φ, οπότε όλες ανήκουν στο K και αφού $\dim_K\overline{V}= \dim_K V- \dim U = n - 1$, από την υπόθεση της επαγωγής έπεται ότι υπάρχει βάση $\{\overline{v_2}, \overline{v_3},\dots,\overline{v_n}\}$ του $\overline{V}$ ως προς την οποία ο πίνακας της $\overline{\varphi}$ είναι τριγωνικός. Επομένως θα έχουμε τις ισότητες

$$\overline{\varphi}\,(\overline{v_2}) = \alpha_{22}\overline{v_2}$$

$$\overline{\varphi}\,(\overline{v_3}) = \alpha_{23}\overline{v_2} + \alpha_{33}\overline{v_3}$$

$$\overline{\varphi}\,(\overline{v_n}) = \alpha_{2n}\overline{v_2} + \alpha_{3n}\overline{v_3} + \dots + \alpha_{nn}\overline{v_n}\,.$$

Αν τώρα $v_2,v_3,\dots,v_n \in V$ είναι τέτοια, ώστε $\overline{v_1} =v_i + U$ i=2,3,…n, τότε το σύνολο $\{v_1, v_2,v_3,\dots,v_n\}$ είναι βάση του V, όπως έχει αποδειχθεί στην εισαγωγή.

Από την ισότητα $\overline{\varphi}\,(\overline{v_2}) - \alpha_{22}\overline{v_2} = \overline{0}$, έχουμε ότι $\phi(v_2) - \alpha_{22}v_2 \in U$, δηλαδή ισχύει $\phi(v_2) - \alpha_{22}v_2 = \alpha_{12}v_1$ με $\alpha_{12} \in K$, οπότε

$$\phi(v_2) = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2\,. \qquad (1)$$

Ομοίως προκύπτουν και οι ισότητες :

$$\phi(v_j) = \alpha_{1j}v_1+ \alpha_{2j}v_2+ \dots + \alpha_{jj}v_j \;, j=3,4,\dots,n \qquad (2)$$

οπότε από τις (1) και (2) και την $\phi(v_1) = \lambda_1 v_1$ προκύπτει ότι ο πίνακας της φ ως προς τη βάση $\{v_1, v_2,v_3,\dots,v_n\}$ είναι τριγωνικός.

**ii)** Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε με τη γραμμική απεικόνιση που ορίζει ο πίνακας $A \in M_n(K)$, έστω φ: $K^n \to K^n$, η οποία ως προς την κανονική βάση του $K^n$ έχει πίνακα τον A.

□

## Το θεώρημα της πρωταρχικής ανάλυσης

Έστω ο διανυσματικός χώρος

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m ,$$

όπου $U_i$ ,i=1,2,…,m είναι υπόχωροι του V αναλλοίωτοι ως προς τη γραμμική απεικόνιση $\phi: V \to V$ , δηλαδή ισχύει $\phi(U_i) \subseteq U_i$ , i=1,2,…,m.

Ορίζουμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$\phi_i := \phi_{|U_i} : U_i \to U_i$ , με τύπο $\phi_i(u_i) := \phi(u_i)$ , i=1,2,…,m.

και τη γραμμική απεικόνιση

$$\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \ldots \oplus \phi_m : V \to V,$$

η οποία ορίζεται από την ισότητα

$(\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \ldots \oplus \phi_m)(u_1+u_2+\ldots+u_m) := \phi_1(u_1)+\phi_2(u_2)+\ldots+\phi_m(u_m)$.

Τότε, για κάθε $u = u_1+u_2+\ldots+u_m \in V$, ισχύει

$$\begin{aligned}(\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \ldots \oplus \phi_m)(u) &:= \phi(u_1)+\phi(u_2)+\ldots+\phi(u_m)\\ &= \phi(u_1+u_2+\ldots+u_m) = \phi(u),\end{aligned}$$

Είναι δηλαδή

$$\phi = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \ldots \oplus \phi_m.$$

Αν θεωρήσουμε ως βάση B του διανυσματικού χώρου V την ένωση των βάσεων

$B_i = \{ u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{ir_i} \}$ ,i=1,2,…,m

των υπόχωρων $U_i$ , i=1,2,…,m , τότε ο πίνακας της $\phi = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \ldots \oplus \phi_m$ , έχει τη μορφή

$$M_\phi = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ : & : & \ldots & : \\ 0 & 0 & \ldots & A_m \end{bmatrix}$$

όπου $A_i$ είναι ο πίνακας της $\phi_i$ ως προς τη βάση $B_i$ , i=1,2,…,m.

Πριν προχωρήσουμε στο θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης, θα παρεμβάλλουμε την ακόλουθη βοηθητική πρόταση

Λήμμα 4.1

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και η γραμμική απεικόνιση $\phi: V \rightarrow V$. Θεωρούμε και το πολυώνυμο $f(t)= f_1(t)f_2(t) \in K[t]$ , όπου τα πολυώνυμα $f_1(t)$ και $f_2(t)$ είναι πρώτα μεταξύ τους και έστω επιπλέον ότι : $f(\phi)=0$. Τότε ισχύουν :

**i)** Ο διανυσματικός χώρος V είναι το ευθύ άθροισμα των φ-αναλλοίωτων υποχώρων $U_i = \ker f_i(\phi)$ ,i=1,2 , δηλαδή ισχύει η ισότητα

$$V= \ker f_1(\phi)\oplus \ker f_2(\phi). \qquad (1)$$

**ii)** Αν $f(t)= f_1(t)f_2(t)= m_\phi(t) \in K[t]$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο της φ και τα πολυώνυμα $f_1(t)$ , $f_2(t)$ έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα, τότε, αν ορίσουμε $\phi_i =\phi_{|U_i}$ i=1,2 θα ισχύει :

$$m_{\phi_i}(t) = f_i(t) ,i=1,2. \qquad (2)$$

Απόδειξη

**i)** Οι υπόχωροι $U_i = \ker f_i(\phi)$ ,i=1,2 είναι φ-αναλλοίωτοι. Επειδή τα πολυώνυμα $f_1(t)$ , $f_2(t)$ είναι πρώτα μεταξύ τους από το θεώρημα 2.12, υπάρχουν πολυώνυμα $g_1(t)$ , $g_2(t) \in K[t]$ τέτοια, ώστε

$g_1(t) f_1(t)+ g_2(t) f_2(t) = 1$,

οπότε θα ισχύει και η ισότητα

$g_1(\phi) f_1(\phi)+ g_2(\phi) f_2(\phi) = 1$.

Επομένως, για κάθε $u \in V$ θα ισχύει

$$u = I(u) = [g_1(\phi) f_1(\phi)](u) + [g_2(\phi) f_2(\phi)](u). \qquad (3)$$

Επειδή από την υπόθεση ισχύει ότι $f(\phi)=0$, θα ισχύουν οι ισότητες

$f_2(\phi)\{[ g_1(\phi) f_1(\phi)](u)\} = g_1(\phi)[ f_2(\phi) f_1(\phi)](u) = g_1(\phi) f(\phi)(u) = 0$,

$f_1(\phi)\{[ g_2(\phi) f_2(\phi)](u)\} = g_2(\phi)[ f_1(\phi) f_2(\phi)](u) = g_2(\phi) f(\phi)(u) = 0$,

οπότε θα έχουμε ότι

$[g_1(\phi) f_1(\phi)](u) \in U_2$ , $[g_2(\phi) f_2(\phi)](u) \in U_1$.

Επομένως, λόγω της (3) θα είναι : $V= U_1 + U_2$.

Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι $u \in U_1 \cap U_2$ , τότε $f_1(\phi)(u) = f_2(\phi)(u) = 0$,

και επιπλέον

$u=[ g_1(\phi) f_1(\phi)](u) + [g_2(\phi) f_2(\phi)](u) = 0$,

οπότε θα είναι $U_1 \cap U_2 =\{0\}$ και τελικά από τις ισότητες $V= U_1 + U_2$ και $U_1 \cap U_2 =\{0\}$ προκύπτει η ζητούμενη ισότητα : $V= U_1\oplus U_2$.

**ii)** Από τον ορισμό των υποχώρων $U_i$ = $\ker f_i(\phi)$ ,i=1,2 θα ισχύουν $f_1(\phi_1)= 0$ και $f_1(\phi_2)= 0$, οπότε τα ελάχιστα πολυώνυμα $m_{\phi1}(t)$ και $m_{\phi2}(t)$ θα διαιρούν τα πολυώνυμα $f_1(t)$ και $f_2(t)$, αντίστοιχα. Όμως, το ελάχιστο πολυώνυμο f(t) της φ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των πολυωνύμων $m_{\phi1}(t)$ και $m_{\phi2}(t)$. Πράγματι, έχουμε ότι $f(t)= f_1(t)f_2(t)$ και επίσης υπάρχουν $\kappa_1(t),\kappa_2(t)$ ώστε

$$f_1(t) = \kappa_1(t)m_{\phi1}(t) \text{ και } f_2(t) = \kappa_2(t)m_{\phi2}(t).$$

Άρα, αν $\kappa(t) = \kappa_1(t)\kappa_2(t)$, τότε $f(t)= \kappa(t)m_{\phi1}(t)m_{\phi2}(t)$ . Οπότε, το f(t) είναι κοινό πολλαπλάσιο των $m_{\phi1}(t)$ και $m_{\phi2}(t)$. Επειδή από i) $V = U_1 \oplus U_2$ εάν υπάρχει κοινό πολλαπλάσιο των $m_{\phi1}(t)$ , $m_{\phi2}(t)$ με βαθμό μικρότερο του f(t), έστω γ(t), τότε γ(φ)=0, διότι, για κάθε $u \in V$ έχουμε ότι $u = u_1 + u_2$, όπου $u_1 \in U_1$ και $u_2 \in U_2$ . 'Ετσι,

$$\gamma(\phi)u = \gamma(\phi)u_1 + \gamma(\phi)u_2 = \lambda_1(\phi)m_{\phi1}(\phi)u_1 + \lambda_2(\phi)m_{\phi2}(\phi)u_2 = 0 + 0 =0.$$

Άτοπο, διότι $\deg\gamma(t) < \deg f(t)$ .

Τα $m_{\phi1}(t)$ και $m_{\phi2}(t)$ είναι πρώτα μεταξύ τους αφού το ίδιο συμβαίνει και για τα $f_1(t)$ και $f_2(t)$. Επομένως θα ισχύει

$$f(t) = m_{\phi1}(t)\, m_{\phi2}(t). \qquad (4)$$

Από την υπόθεση έχουμε ακόμη ότι

$$f(t) = f_1(t)\, f_2(t) = m_\phi(t). \qquad (5)$$

Από τις (4) και (5), από το ότι το πολυώνυμο $m_{\phi i}(t)$ διαιρεί το πολυώνυμο $f_i(t)$ , i=1,2 και επειδή τα πολυώνυμα $f_i(t)$ , i=1,2 έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τους τη μονάδα, έπεται η ισότητα (2).

□

**<u>Θεώρημα 4.3</u> (θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης)**

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K και $\phi : V \to V$ γραμμική απεικόνιση με ελάχιστο πολυώνυμο

$$m_\phi(t) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s},$$

όπου $p_i = p_i(t) \in K[t]$ , i=1,2,…,s είναι ανάγωγα πολυώνυμα, διαφορετικά μεταξύ τους και με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα. Τότε ισχύουν :

**i)** Οι υπόχωροι $U_i := \ker(p_i(\varphi))^{k_i}$ , i=1,2,…,s είναι φ-αναλλοίωτοι,

**ii)** $V = U_1 \oplus U_2 \oplus,\ldots,\oplus U_s$ ,

**iii)** $m_{\varphi_i}(t) := m_{\varphi|U_i}(t) = (p_i(t))^{k_i}$ , i=1,2,…,s.

Απόδειξη

**i)** Αν $\phi : V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση, τότε ορίζουμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$\phi^2 := \phi \circ \phi$

$\phi^n := \phi^{n-1} \circ \phi$ , $n \in \mathbb{N}$, $n>2$,

οπότε, αν είναι $f(t)=\alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} +\ldots+ \alpha_1 t + \alpha_0 \in K[t]$, τότε ορίζεται και η γραμμική απεικόνιση

$f(\phi) = \alpha_n\phi^n + \alpha_{n-1}\phi^{n-1} +\ldots+ \alpha_1\phi + \alpha_0 I \in L_K(V)$,

όπου I η ταυτοτική απεικόνιση επί του διανυσματικού χώρου V.

Ο πυρήνας της $f(\phi)$ είναι $\phi$-αναλλοίωτος υπόχωρος του V, διότι, έστω $u \in \ker f(\phi)$. Τότε $f(\phi)\, u = 0$ και $f(\phi)(0) = 0$. Οπότε, έχουμε το ζητούμενο αν στη θέση του f βάλουμε το $p_i^{k_i}$.

**ii)** Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς το πλήθος s των πολυωνύμων $p_i(t)$. Για s=1, έχουμε $m_\varphi(t) = (p_1(t))^{k_1}$ και $m_\varphi(\phi) = (p_1(\varphi))^{k_1} = 0$

οπότε για κάθε $u \in V$ ισχύει $(p_1(\varphi))^{k_1}(u) = 0 \Rightarrow u \in \ker(p_1(\varphi))^{k_1}$ , οπότε

$$V = \ker(p_1(\varphi))^{k_1}.$$

Έστω ότι το θεώρημα αληθεύει για s = n-1, δηλαδή ισχύει

$V = U_1 \oplus U_2 \oplus,\ldots,\oplus U_{n-1}$ ,όπου $U_i := \ker(p_i(\varphi))^{k_i}$ ,i=1,2,…,n-1.

Θεωρώντας s = n, έχουμε $m_\phi(t) = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n} = p_1^{k_1}(p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n})$ και σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, θα ισχύει $V = U_1 \oplus U_1'$ ,όπου

$U_1 := \ker(p_1(\varphi))^{k_1}$ , $U_1' = \ker[(p_2(\varphi))^{k_2}\ldots(p_n(\varphi))^{k_n}]$,

και επιπλέον

$m_{\varphi_1}(t) := m_{\varphi_{|U_1}}(t) = (p_1(t))^{k_1}$ , $m_{\phi'}(t) := m_{\varphi_{|U_1'}}(t) = (p_2(t))^{k_2}\ldots(p_n(t))^{k_n}$.

Όμως, από την υπόθεση της επαγωγής για s=n-1, θα ισχύει

$U_1' = U_2 \oplus U_3 \oplus\ldots\oplus U_n$, όπου $U_i := \ker(p_i(\varphi'))^{k_i}$ ,i=2,3,…,n

και ακόμη

$m_{\varphi'_i}(t) := m_{\varphi'_{|U_i}}(t) = (p_i(t))^{k_i}$ , i=2,3,..,n.

Επιπλέον, ισχύει $\ker(p_i(\varphi))^{k_i} \subseteq U_1'$ ,για i=2,3,…,n, γιατί το πολυώνυμο $(p_i(t))^{k_i}$ ,i=2,3,…,n διαιρεί το πολυώνυμο $(p_2(t))^{k_2}\ldots(p_n(t))^{k_n}$ ,οπότε θα ισχύει :

$$\ker(p_i(\varphi))^{k_i} = \ker(p_i(\varphi'))^{k_i} = U_i,\ i=2,3,\ldots,n$$

και ακόμη $\phi_i = \phi_i'$ ,για i=2,3,…,n. Επομένως θα έχουμε

$V = U_1 \oplus U_2 \oplus,\ldots,\oplus U_s$ και $m_{\varphi_i}(t) := m_{\varphi_{|U_i}}(t) = (p_i(t))^{k_i}$ , i=1,2,…,s.

□

**Μηδενοδύναμες γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες**

Μια κατηγορία γραμμικών απεικονίσεων, οι οποίες έχουν όλες τις ιδιοτιμές τους στο σώμα K, είναι οι μηδενοδύναμες γραμμικές απεικονίσεις.

Ορισμός

**α)** Η γραμμική απεικόνιση φ: V→V, όπου V διανυσματικός χώρος στο πάνω στο σώμα K, λέγεται ***μηδενοδύναμη (nilpotent)***, αν ισχύει $\phi^k = 0$, για κάποιο $k \in N^*$. Ο αριθμός k λέγεται ***δείκτης μηδενοδυναμίας*** της φ, αν ισχύει $\phi^k = 0$ και $\phi^{k-1} \neq 0$.

**β)** Ο πίνακας $A \in M_n(K)$ λέγεται ***μηδενοδύναμος***, αν ισχύει $A^k = 0$, για κάποιο $k \in N^*$, ενώ ο αριθμός k λέγεται ***δείκτης μηδενοδυναμίας*** του A, αν ισχύει $A^k = 0$ και $A^{k-1} \neq 0$.

**Παρατήρηση 1**

Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε μόνο στη μηδενοδύναμη γραμμική απεικόνιση $\phi \in L_K(V)$, αφού για κάθε μηδενοδύναμο πίνακα A ορίζεται μια γραμμική απεικόνιση, μέσω της οποίας τα αποτελέσματα για τις μηδενοδύναμες γραμμικές απεικονίσεις μεταφέρονται στους μηδενοδύναμους πίνακες.

**Παρατήρηση 2**

Το ελάχιστο πολυώνυμο της μηδενοδύναμης γραμμικής απεικόνισης φ: V→V, όπου V διανυσματικός χώρος στο πάνω στο σώμα K, είναι το $m_\phi(t) = t^k$, οπότε όλες οι ιδιοτιμές της φ είναι 0 και ανήκουν στο σώμα K. Επομένως, υπάρχει βάση του διανυσματικού V ως προς την οποία ο πίνακας της φ είναι τριγωνικός. Όμως, για τις μηδενοδύναμες γραμμικές απεικονίσεις υπάρχει και απλούστερη κανονική μορφή πέραν της τριγωνικής. Αν και το σύνολο των μηδενοδύναμων γραμμικών απεικονίσεων είναι αρκετά περιορισμένο, η σπουδαιότητα της κανονικής μορφής των μηδενοδύναμων γραμμικών απεικονίσεων οφείλεται στο ότι αυτή οδηγεί σε μια πολύ απλή κανονική μορφή για κάθε γραμμική απεικόνιση ή πίνακα που έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα K.

Στη συνέχεια αναφέρονται δύο βοηθητικές προτάσεις σχετικά με τις μηδενοδύναμες απεικονίσεις.

Λήμμα 4.2

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K και η μηδενοδύναμη γραμμική απεικόνιση $\phi: V \rightarrow V$ με δείκτη μηδενοδυναμίας k. Έστω ακόμη $u \in V$ τέτοιο, ώστε $\phi^k(u) = 0$ και $\phi^{k-1}(u) \neq 0$.

Τότε ισχύουν τα εξής :

**i)** Το σύνολο $S = \{u,\phi(u),\dots,\phi^{k-1}(u)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

**ii)** Ο υπόχωρος U που παράγεται από το S είναι φ-αναλλοίωτος.

**iii)** Ο περιορισμός $\widetilde{\varphi} := \phi_{|U}$ της φ στον υπόχωρο U είναι μηδενοδύναμη γραμμική απεικόνιση με δείκτη μηδενοδυναμίας k.

**iv)** Ο πίνακας της $\widetilde{\varphi}$ ως προς τη βάση $\{\phi^{k-1}(u),\dots, \phi(u),u\}$ του U είναι ο kxk μηδενοδύναμος πίνακας

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Απόδειξη

**i)** Θεωρούμε $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1} \in K$ έτσι, ώστε

$$\lambda_0\phi + \lambda_1\phi(u) +\dots+ \lambda_{k-1}\phi^{k-1}(u) = 0 \quad (2)$$

Εφαρμόζοντας την απεικόνιση $\phi^{k-1}$ στα δύο μέλη της (2), λόγω των υποθέσεων $\phi^k(u)=0$ και $\phi^{k-1}(u) \neq 0$, λαμβάνουμε ότι $\lambda_0=0$. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας, την απεικόνιση $\phi^{k-2}$ στα δύο μέλη της (2) λαμβάνουμε $\lambda_1=0$ και με διαδοχική εφαρμογή των απεικονίσεων $\phi^{k-3},\dots,\phi$ στα δύο μέλη της (2) λαμβάνουμε διαδοχικά $\lambda_2=\dots= \lambda_{k-1}=0$.

Άρα το σύνολο $S = \{u,\phi(u),\dots,\phi^{k-1}(u)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

**ii)** Αν $x \in U :=[S]$, τότε $x = \lambda_0 u + \lambda_1\phi(u) +\dots+ \lambda_{k-1}\phi^{k-1}(u)$ με $\lambda_i \in K$, $i=0,1,\dots,k-1$, οπότε λόγω της υπόθεσης $\phi^k(u)= 0$, θα έχουμε

$\phi(x) = \lambda_0\phi(u) + \lambda_1\phi^2(u) +\dots+ \lambda_{k-2}\phi^{k-1}(u) \in U$.

**iii)** Με εφαρμογή της απεικόνισης $\widetilde{\varphi}^k$ στα στοιχεία της βάσης του U και την θεώρηση $\phi^0(u) = u$, λαμβάνουμε

$(\widetilde{\varphi}^k)[\phi^j(u)] = \phi^k(\phi^j(u)) = \phi^{k+j}(u) = 0$, για κάθε $j = 0,1,\dots,k-1$,

οπότε και για κάθε $x \in U$ θα ισχύει ότι : $(\widetilde{\varphi}^k)(x) = 0$. Επιπλέον, ισχύει $(\widetilde{\varphi}^{k-1})(x) = (\phi^{k-1})(x) \neq 0$, για κάποιο $x \in U$, οπότε θα είναι $\widetilde{\varphi}^{k-1} \neq 0$ και η $\widetilde{\varphi}$ είναι μηδενοδύναμη με δείκτη k.

**iv)** Το ζητούμενο έπεται από τις ισότητες

$\widetilde{\varphi}(\phi^{k-1})(u)) = \phi^k(u) = 0$

$\widetilde{\varphi}(\phi^j(u)) = \phi^{j+1}(u)$, για κάθε $j=k-2,\dots,1,0$.

□

Λήμμα 4.3

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K, η γραμμική απεικόνιση $\phi : V \to V$ και οι υπόχωροι

$U_1 = \ker\phi^i$ , $U_2 = \ker\phi^{i+1}$ , $U_3 = \ker\phi^{i+2}$ .

Τότε ισχύουν

**i)** $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3$ ,

**ii)** $\phi(U_2) \subseteq U_1$ και $\phi(U_3) \subseteq U_2$ ,

**iii)** Αν $\{u_1,u_2,\dots,u_r\}$ είναι βάση του $U_1$ ,$\{u_1,u_2,\dots,u_r ,v_1,v_2,\dots,v_s\}$ είναι βάση του $U_2$ και $\{u_1,u_2,\dots,u_r ,v_1,v_2,\dots,v_s ,w_1,w_2,\dots,w_t\}$ είναι βάση του $U_3$ , τότε το σύνολο

$$T = \{ u_1,u_2,\dots,u_r , \phi(w_1),\phi(w_2),\dots,\phi(w_t)\}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Απόδειξη

**i)** Αν $u \in U_1$ , τότε $\phi^i(u) = 0 \Rightarrow \phi^{i+1}(u) = \phi(\phi^i(u)) = 0$, οπότε $u \in U_2$ . Άρα θα είναι $U_1 \subseteq U_2$ και ομοίως προκύπτει ότι : $U_2 \subseteq U_3$.

**ii)** Αν είναι $\phi(u) \in \phi(U_2)$, τότε $u \in U_2$ , οπότε $\phi^{i+1}(u) = 0$. Επομένως, θα έχουμε $\phi^i(\phi(u))= \phi^{i+1}(u) = 0$, οπότε $\phi(u) \in U_1$. Άρα, $\phi(U_2) \subseteq U_1$ και ομοίως αποδεικνύεται $\phi(U_3) \subseteq U_2$ .

**iii)** Λόγω του ii) θα είναι $T \subseteq U_2$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο T είναι γραμμικώς εξαρτημένο, οπότε θα ισχύει η ισότητα

$$\lambda_1u_1 +\dots+ \lambda_ru_r +\mu_1 \phi(w_1)+\dots+\mu_t \phi(w_t) = 0, \qquad (1)$$

χωρίς να είναι όλοι οι συντελεστές ίσοι με 0. Επειδή τα $u_1,u_2,\dots,u_r$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι κάποιος από τους $\mu_1, \mu_2,\dots, \mu_t$ θα είναι διάφορος από το 0. Από την (1) έχουμε

$\mu_1 \phi(w_1)+\dots+ \mu_t \phi(w_t) = - \lambda_1u_1-\dots- \lambda_ru_r \in U_1 = \ker\phi^i$

$\Rightarrow\phi^i(\mu_1 \phi(w_1)+\dots+ \mu_t \phi(w_t)) = \phi^i(- \lambda_1u_1-\dots- \lambda_ru_r) = 0$

$\Rightarrow \phi^{i+1}(\mu_1w_1+\dots+ \mu_tw_t) = 0 \Rightarrow \mu_1w_1+\dots+ \mu_tw_t \in U_2 = \ker\phi^{i+1}$, οπότε, αφού $\{u_1,u_2,\ldots,u_r, v_1,v_2,\ldots,v_s\}$ είναι βάση του $U_2$, θα ισχύει

$\mu_1 w_1+\ldots+\mu_t w_t = \lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_r u_r+\mu_1 v_1+\ldots+\mu_t v_t$

$\mu_1 w_1+\ldots+\mu_t w_t - \lambda_1 u_1-\ldots-\lambda_r u_r-\mu_1 v_1-\ldots-\mu_t v_t = 0$,

χωρίς να είναι όλοι οι συντελεστές 0, που είναι άτοπο, γιατί το σύνολο $\{u_1,u_2,\ldots,u_r, v_1,v_2,\ldots,v_s, w_1,w_2,\ldots,w_t\}$ είναι βάση του $U_3$.

□

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το βασικό θεώρημα για την κανονική μορφή των μηδενοδύναμων γραμμικών απεικονίσεων, το οποίο εύκολα μεταφέρεται και για τους μηδενοδύναμους πίνακες, αν τους θεωρήσουμε ως προς κάποια βάση ως πίνακες μιας μηδενοδύναμης γραμμικής απεικόνισης.

## Θεώρημα 4.4

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K και η μηδενοδύναμη γραμμική απεικόνιση $\phi : V \to V$ με δείκτη μηδενοδυναμίας k, $\dim_K V = n$.

Τότε υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας $M_\phi$ της φ είναι διαγώνιος διαμερισμένος πίνακας με υποπίνακες στη κύρια διαγώνιο της μορφής

$$N_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_j(K),\ j=1,2,\ldots,k.$$

Επιπλέον ισχύουν :

**i)** Υπάρχει ένας τουλάχιστον υποπίνακας $N_j$ με j=k.

**ii)** Ο αριθμός $n_j$ των υποπινάκων $N_j$, για κάθε j=1,2,…,k ορίζεται μονοσήμαντα από τη φ.

**iii)** Ο συνολικός αριθμός των υποπινάκων $N_j$ κάθε τάξης ισούται με τη διάσταση του πυρήνα της φ, δηλαδή

$$n_1+n_2+\ldots+n_k = \dim\ker\phi = n-\rho(\phi).$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τους υποχώρους $U_i := \ker\phi^i$, i=1,2,…,k και θέτουμε $m_i = \dim U_i$, i=1,2,…,k. Επειδή η φ είναι μηδενοδύναμη με δείκτη μηδενοδυναμίας k θα ισχύει $U_k = V$ και $U_{k-1} \neq V$, οπότε $m_{k-1} < m_k = n$.

Έτσι από το προηγούμενο λήμμα προκύπτουν οι σχέσεις εγκλεισμού

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_{k-1} \subseteq U_k = V,$$

οπότε, από το θεώρημα επέκτασης βάσης θα υπάρχει βάση

$B = \{ u_1,u_2,\ldots,u_{m_1},\ldots,u_{m_{k-1}},\ldots,u_n \}$

του χώρου V έτσι, ώστε το σύνολο $\{ u_1,u_2,\ldots,u_{m_i}\}$ να είναι βάση του υπόχωρου $U_i := \ker\phi^i$ , $i=1,2,\ldots,k$.

Για να έχει ο πίνακας φ τη μορφή που περιγράφουμε στο θεώρημα, είναι ανάγκη να κατασκευάσουμε μία νέα βάση της οποίας τα στοιχεία θα διαταχθούν κατάλληλα.

Κατ' αρχή θεωρούμε τα στοιχεία της βάσης B που δεν ανήκουν στη βάση του υποχώρου $U_{k-1}$ ,δηλαδή τα $n_k := m_k - m_{k-1} = \delta_k$ στοιχεία

$z_{k,1} := u_{m_{k-1}+1}$ , $z_{k,2} := u_{m_{k-1}+2}$ ,…, $z_{k,\delta_k} := u_{m_k}$

και θέτουμε

$z_{k-1,1} = \phi(z_{k,1})$ , $z_{k-1,2} = \phi(z_{k,2}),\ldots, z_{k-1,\delta_k} = \phi(z_{k,\delta_k})$.

Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι το σύνολο

$T_1 = \{u_1,\ldots, u_{m_{k-2}}, z_{k-1,1},\ldots, z_{k-1,\delta_k}\}$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του υποχώρου $U_{k-1}$ , οπότε επεκτείνεται σε βάση του $U_{k-1}$ επισυνάπτοντας όσα στοιχεία χρειάζονται, τα οποία ονομάζουμε

$z_{k-1,\delta_k+1}$ , $z_{k-1,\delta_k+2},\ldots, z_{k-1,\delta_{k-1}}$ ,

όπου έχουμε θέσει $\delta_{k-1} = m_{k-1} - m_{k-2}$ .

Συνεχίζοντας ομοίως θέτουμε

$z_{k-2,1} = \phi(z_{k-1,1})$ , $z_{k-2,2} = \phi(z_{k-1,2}),\ldots, z_{k-2,\delta_k} = \phi(z_{k-1,\delta_k})$,

οπότε το σύνολο

$T_2 = \{u_1,\ldots,u_{m_{k-3}}, z_{k-2,1},\ldots, z_{k-2,\delta_k}\}$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $U_{k-2}$ , οπότε επεκτείνεται σε βάση του $U_{k-2}$ ,αν του επισυνάψουμε τα στοιχεία

$z_{k-2,\delta_{k-1}+1}$ , $z_{k-2,\delta_{k-1}+2},\ldots, z_{k-2,\delta_{k-2}}$ ,

όπου έχουμε θέσει $\delta_{k-2} = m_{k-2} - m_{k-3}$ . Συνεχίζοντας ομοίως, καταλήγουμε στη <<νέα>> βάση του V

$$\left\{\begin{array}{c} z_{k,1}, z_{k,2}, \ldots, z_{k,\delta_k} \\ z_{k-1,1}, z_{k-1,2}, \ldots, z_{k-1,\delta_k}, \ldots, z_{k-1,\delta_{k-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{2,1}, z_{2,2}, \ldots, z_{2,\delta_k}, \ldots, z_{2,\delta_{k-1}}, \ldots, z_{2,\delta_2} \\ z_{1,1}, z_{1,2}, \ldots, z_{1,\delta_k}, \ldots, z_{1,\delta_{k-1}}, \ldots, z_{1,\delta_2}, \ldots, z_{1,\delta_1} \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

όπου έχουμε θέσει

$$\delta_j = \begin{cases} m_1 \,, \alpha\nu\ j = 1 \\ m_j - m_{j-1}, \ \alpha\nu\ j = 2,3,..,k \end{cases} .$$

Τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής της παραπάνω βάσης αποτελούν βάση του $U_1$ , τα στοιχεία των δύο τελευταίων γραμμών αποτελούν βάση του $U_2$ , κ.ο.κ. Επιπλέον, ισχύει η ισότητα :

$$\phi(z_{j,i}) = \begin{cases} z_{j-1,i} \,, \alpha\nu\ j > 1 \\ 0 \,, \alpha\nu\ j = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

οπότε, αν αναδιατάξουμε τα στοιχεία της βάσης αρχίζοντας από την πρώτη στήλη από κάτω προς τα πάνω και συνεχίζοντας ομοίως με τη δεύτερη στήλη κ.ο.κ , ο πίνακας της φ ως προς τη βάση που προκύπτει, είναι ο ζητούμενος.

Από τη μορφή της θεωρούμενης βάσης έχουμε τον πίνακας της φ :

$n_k = \delta_k = m_k – m_{k-1}$ υποπίνακες $N_k$

$n_{k-1} = \delta_{k-1} – \delta_k = 2m_{k-1} – m_k – m_{k-2}$ υποπίνακες $N_{k-1}$

…………………………………………………………………………………

$n_2 = \delta_2 – \delta_3 = 2m_2 – m_1 – m_3$ υποπίνακες $N_2$

$n_1 = \delta_1 – \delta_2 = 2m_1 – m_2$ υποπίνακες $N_1$ ,

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες, λαμβάνουμε

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \delta_1 = \dim\ker\phi = n – \rho(\phi), \qquad (3)$$

όπου ρ(φ) είναι ο βαθμός της φ.

Επιπλέον, οι αριθμοί $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ ορίζονται μονοσήμαντα από τη φ, αφού και οι αριθμοί $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ορίζονται μονοσήμαντα από τη φ.

□

Παράδειγμα 1

Ο πίνακας Α= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μηδενοδύναμος με δείκτη 4 , αφού ισχύει $A^3 \neq 0$ και $A^4= 0$.

Στην κανονική μορφή του πίνακα Α υπάρχει τουλάχιστον ένας υποπίνακας $N_4$ .

Ο συνολικός αριθμός υποπινάκων στη διαγώνιο είναι n-ρ(A) = 5-3 = 2. Επομένως, αφού ο πίνακας είναι τύπου 5×5, η κανονική του μορφή θα έχει στη διαγώνιο τους πίνακες $N_4$ και $N_1$, είναι δηλαδή ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Ο πίνακας Α = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μηδενοδύναμος με δείκτη 3, αφού ισχύει $A^2 \neq 0$ και $A^3 =0$. οπότε στη κανονική του μορφή θα υπάρχει ο υποπίνακας $N_3$ ,και μόνον αυτός , αφού είναι τύπου 3×3 δηλαδή

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Β = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μηδενοδύναμος με δείκτη 2 αφού $B^2 = 0$ οπότε στη κανονική του μορφή θα υπάρχει ένας υποπίνακας $N_2$ και συνολικά θα υπάρχουν n – ρ(B) = 3-1=2 υποπίνακες, οπότε τελικά θα περιέχονται οι υποπίνακες $N_2$ και $N_1$ . Άρα έχουμε

$$B \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 3

Ο πίνακας Α = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι μηδενοδύναμος με δείκτη 3, αφού ισχύει $A^3 = 0$ και $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$. Στη κανονική μορφή του Α υπάρχει ένας τουλάχιστον υποπίνακας $N_3$.

Ο συνολικός αριθμός υποπινάκων στη διαγώνιο είναι $n - \rho(A) = 4\text{-}2 = 2$. Επομένως, αφού ο πίνακας A είναι τύπου $4 \times 4$ , η κανονική του μορφή θα έχει στη διαγώνιο τους πίνακες $N_3$ και $N_1$ είναι δηλαδή ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Η κανονική μορφή Jordan

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $K = \mathbb{C}$ διάστασης n και η γραμμική απεικόνιση $\phi : V \to V$. Επειδή το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι αλγεβρικά κλειστό όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i$ της φ ανήκουν στο $\mathbb{C}$, οπότε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο της φ είναι γινόμενα παραγόντων της μορφής

$\chi_\phi(t) = (t - \lambda_1)^{n_1}(t - \lambda_2)^{n_2} \dots (t - \lambda_s)^{n_s}$

$m_\phi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1}(t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης ο διανυσματικός χώρος V είναι το ευθύ άθροισμα των φ-αναλλοίωτων υποχώρων

$$U_i = \ker(\varphi - \lambda_i I)^{k_i} \text{ , } i=1,2,\dots,s \qquad (1)$$

όπου $I \in L(V)$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, οπότε η απεικόνιση φ μπορεί να γραφτεί ως

$$\phi = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \dots \oplus \phi_s \text{ ,} \qquad (2)$$

όπου $\phi_i$ είναι ο περιορισμός της φ στον υπόχωρο $U_i$ , i=1,2,…,s, δηλαδή αν

$u = u_1 + u_2 + \dots + u_s \in V = U_1 \oplus U_2 \oplus, \dots, \oplus U_s$ , τότε

$\phi(u) = \phi(u_1 + u_2 + \dots + u_s) = \phi(u_1) + \phi(u_2) + \dots + \phi(u_s)$

$\quad = \varphi_{|U_1}(u_1) + \varphi_{|U_2}(u_2) + \dots + \varphi_{|U_s}(u_s) = \phi_1(u_1) + \phi_2(u_2) + \dots + \phi_s(u_s)$.

Τότε υπάρχει κατάλληλη βάση του V, η οποία είναι η ένωση βάσεων των υποχώρων $U_i$ , i=1,2,…,s, ως προς την οποία ο πίνακας της φ είναι ο

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s) = \begin{bmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ O & O & \dots & A_s \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Επομένως το πρόβλημα του προσδιορισμού κατάλληλης βάσης του V ως προς την οποία ο πίνακας φ να έχει μια ιδιαίτερα απλή μορφή, ανάγεται στον προσδιορισμό των κατάλληλων βάσεων στους υποχώρους $U_i$, ώστε οι αντίστοιχοι πίνακες $A_i$ να είναι της ζητούμενης απλής μορφής, η οποία δίνεται στον ορισμό που ακολουθεί :

Ορισμός

Ο ρ×ρ πίνακας

$$J(\lambda;\rho) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad (4)$$

με $\lambda \in \mathbb{C}$ , λέγεται ***στοιχειώδης πίνακας Jordan***.

Θεώρημα 4.5

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $K = \mathbb{C}$ διάστασης n και η γραμμική απεικόνιση $\phi : V \to V$ με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο

$\chi_\phi(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2} \dots (t-\lambda_s)^{n_s}$

$m_\phi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2} \dots (t-\lambda_s)^{k_s}$

αντίστοιχα, με $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s \in \mathbb{C}$ διακεκριμένα και $1 \le k_i \le n_i$ , $i = 1,2,\dots,s$.

Τότε υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας της φ είναι ο

$$J(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s) = \begin{bmatrix} A(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(\lambda_2) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & A(\lambda_s) \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

όπου οι πίνακες $A(\lambda_i)$ ,i=1,2,…,s ορίζονται ως εξής :

$$A(\lambda_i) = \begin{bmatrix} J(\lambda_i;k_{i1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i;k_{i2}) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_i;k_{ir_i}) \end{bmatrix}, \ i = 1,2,\dots,s.$$

Οι $k_{ij} \times k_{ij}$ πίνακες $J(\lambda_i\,;\,k_{ij})$ , j =1,2,…,$r_i$ είναι στοιχειώδεις πίνακες Jordan, ενώ οι αριθμοί $k_{ij}$ ικανοποιούν τις σχέσεις :

**(α)** $k_i = k_{i1} \geq k_{i2} \geq \ldots \geq k_{ir_i}$ , i = 1,2,…,s

**(β)** $k_{i1} + k_{i2} + \ldots + k_{ir_i} = n_i$ , i = 1,2,…,s

**(γ)** $r_i = \dim\ker(\varphi-\lambda_i I) = \gamma(\lambda_i)$ , i = 1,2,…,s

δηλαδή ο αριθμός των πινάκων $J(\lambda_i\,;\,k_{ij})$ , j =1,2,…,$r_i$ στον πίνακα $A(\lambda_i)$ ισούται με τη γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_i$ , i = 1,2,…,s.

Απόδειξη

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν, αρκεί να προσδιορίσουμε κατάλληλη βάση σε κάθε υπόχωρο $U_i = \ker(\varphi - \lambda_i I)^{k_i}$ , τέτοια ώστε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $\varphi_i := \varphi_{|U_i}$ να είναι $A(\lambda_i)$.

Αν θέσουμε $f_i := \varphi_i - \lambda_i I$ , i=1,2,…,s , τότε έχουμε $\varphi_i = f_i + \lambda_i I$ , i=1,2,…,s , οπότε το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό του πίνακα της μηδενοδύναμης γραμμικής απεικόνισης $f_i$ με δείκτη μηδενοδυναμίας $k_i$ , όπως αυτός δίνεται στο θεώρημα 4.4 για τις μηδενοδύναμες γραμμικές απεικονίσεις, δηλαδή ο πίνακας $M_{f_i}$ της $f_i$ είναι διαγώνιος διαμερισμένος πίνακας με υποπίνακες στη κύρια διαγώνιο της μορφής

$$N_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_j(K)\ ,\ j=1,2,\ldots,k_i\,.$$

Επειδή ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $\lambda_i I$ είναι ο $\mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i, \ldots, \lambda_i)$, τα συμπεράσματα του παρόντος θεωρήματος προκύπτουν με απλή εφαρμογή του θεωρήματος 4.4 για τις μηδενοδύναμες απεικονίσεις στις απεικονίσεις $f_i$ , i=1,2,…,s.

□

**Η κανονική μορφή Jordan πίνακα**

Κάθε $A \in M_n(\mathbb{C})$ ικανοποιεί ένα θεώρημα ανάλογο με το 4.5. Θεωρώντας τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ ως πίνακα μιας γραμμικής απεικόνισης $\varphi \in L(V)$, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι , αν

$\chi_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2} \ldots (t-\lambda_s)^{n_s}$

$m_A(t) = (t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2} \ldots (t-\lambda_s)^{k_s}$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{C}$, i=1,2,…,s είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A, τότε ο πίνακας A είναι όμοιος προς τον πίνακα $J(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s)$ που δίνεται από την (5) και λέγεται **κανονική μορφή Jordan** του πίνακα A, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος, ώστε να ισχύει η ισότητα

$$P^{-1}AP = (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s).$$

Οι στήλες του πίνακα P είναι τα στοιχεία μιας κατάλληλης βάσης του $\mathbb{C}^n$ , η οποία λέγεται **βάση Jordan** και θα οριστεί παρακάτω.

### Στοιχειώδεις διαιρέτες και η χαρακτηριστική του Segre

Από το θεώρημα 4.5 φαίνεται ότι ο τύπος της κανονικής μορφής Jordan της γραμμικής απεικόνισης φ ή ενός πίνακα A προσδιορίζεται πλήρως, εκτός από μεταθέσεις των πινάκων $A(\lambda_i)$, από τους αριθμούς

$k_{ij}$ ,i = 1,2,…,s , j =1,2,…,r,

όπως αυτοί ορίζονται στο προηγούμενο θεώρημα. Τα πολυώνυμα

$$(t-\lambda_i)^{k_{ij}}\ ,\ i = 1,2,\dots,s\ ,j =1,2,\dots,r_i \qquad (6)$$

λέγονται **στοιχειώδεις διαιρέτες** της γραμμικής απεικόνισης φ ή του πίνακα A, ενώ το σύμβολο

$$[(k_{11},k_{12},\dots,k_{1r_1})(\ k_{21},k_{22},\dots,k_{2r_2})(\ k_{s1},k_{s2},\dots,k_{sr_s})] \qquad (7)$$

λέγεται **χαρακτηριστική του Segre** της φ ή του πίνακα A.

Η κανονική μορφής Jordan μιας γραμμικής απεικόνισης φ ή ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ ορίζεται πλήρως από τη χαρακτηριστική του Segre και τις ιδιοτιμές της φ ή του πίνακα A.

Αν για παράδειγμα, ο πίνακας A έχει τις ιδιοτιμές 3, -1 και χαρακτηριστική του Segre [(211)(3)], τότε η κανονική μορφή Jordan του A είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A(3) & O \\ O & A(-1) \end{bmatrix}, \text{ όπου } A(3) = \left[\begin{array}{cc|c|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad \text{και} \quad A(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

### Η βάση Jordan

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\phi \in L(V)$, όπως αυτή ορίστηκε στο θεώρημα 4.5, με αντίστοιχο πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$. Από το ίδιο θεώρημα έπεται ότι υπάρχει βάση του V, ως προς την οποία ο πίνακας της φ είναι ο $J(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s)$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{C}$, i=1,2,…,s είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της φ ή του πίνακα A.

Για τον προσδιορισμό αυτής της βάσης, αρκεί να προσδιορίσουμε τα τμήματα της $\tilde{u}_i$ , i=1,2,…,s, που είναι βάσεις στους υποχώρους

$$U_i = \ker(\varphi - \lambda_i I)^{k_i} \quad , i = 1,2,\ldots,s.$$

Αν $r_i$ είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_i$ ,θεωρούμε τα $r_i$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

$$u_{i1}^1, u_{i2}^1, \ldots, u_{ir_i}^1 , \tag{8}$$

που είναι αντίστοιχα της ιδιοτιμής $\lambda_i$ και αποτελούν βάση του υποχώρου $\ker(\phi - \lambda_i I)$ , i = 1,2,…,s. Επειδή ισχύει

$$\ker(\phi - \lambda_i I) \subseteq \ker(\phi - \lambda_i I)^2 \subseteq \ldots \subseteq \ker(\varphi - \lambda_i I)^{k_i} \tag{9}$$

και $\dim \ker(\varphi - \lambda_i I)^{k_i} = n_i$ είναι φανερό ότι υπάρχουν $n_i - r_i$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στους υποχώρους $\ker(\varphi - \lambda_i I)^{\rho}$ , ρ=2,3,…,$k_i$ , που δεν ανήκουν στον υπόχωρο $\ker(\varphi - \lambda_i I)$, τα οποία μαζί με τα ιδιοδιανύσματα (8) αποτελούν βάση του υποχώρου $U_i = \ker(\varphi - \lambda_i I)^{k_i}$ , i = 1,2,..,s.

Αν $u_{ij}^1$ είναι το τυχόν ιδιοδιάνυσμα από αυτά που δίνονται στη σχέση (8), τότε ορίζουμε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$$u_{ij}^1 , u_{ij}^2 , u_{ij}^{k_{ij}} ,$$

που είναι αντίστοιχα της ιδιοτιμής $\lambda_i$ , από τα συστήματα

$$\left\{\begin{array}{c} (\varphi - \lambda_i I)u_{ij}^1 = 0 \\ (\varphi - \lambda_i I)u_{ij}^2 = u_{ij}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\varphi - \lambda_i I)u_{ij}^{k_{ij}} = u_{ij}^{k_{ij}-1} \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} (A - \lambda_i I)u_{ij}^1 = O \\ (A - \lambda_i I)u_{ij}^2 = u_{ij}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (A - \lambda_i I)u_{ij}^{k_{ij}} = u_{ij}^{k_{ij}-1} \end{array}\right\} . \tag{10}$$

Έτσι εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία για κάθε j = 1,2,…,$r_i$ βρίσκουμε τη βάση του $U_i$ , i = 1,2,…,s

$$\tilde{u}_i = \{u_{i1}^1, u_{i1}^2, \ldots, u_{i1}^{k_{i1}}, u_{i2}^1, u_{i2}^2, \ldots, u_{i2}^{k_{i2}}, \ldots, u_{ir_i}^1, u_{ir_i}^2, \ldots, u_{ir_i}^{k_{ir_i}}\} . \tag{11}$$

Η βάση Jordan της φ ή του πίνακα A είναι η ένωση των βάσεων $\tilde{u}_i$ , δηλαδή είναι η βάση του V

$$\tilde{u} = \bigcup_{i=1}^{s} \tilde{u}_i$$

ως προς την οποία η γραμμική απεικόνιση φ έχει πίνακα $J(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s)$.

Ο nxn πίνακας P που έχει ως στήλες τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα της βάσης $\tilde{u}$ με τη διάταξη που δίνεται στη σχέση (11) είναι τέτοιος, ώστε να ισχύει

$$P^{-1}AP = J(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s).$$

Σημειώνουμε ότι είναι δυνατόν, όταν $r_i > 1$, να μην ορίζεται η ακολουθία γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων (11) πέραν του πρώτου στοιχείου της, ακόμα και για κάθε $j = 1,2,\ldots,r_i$. Στην πράξη βρίσκουμε πρώτα τη συνθήκη συμβιβαστότητας του συστήματος

$$(\varphi - \lambda_i I)u_{ij}{}^2 = u_{ij}{}^1 \text{ ή } (A - \lambda_i I)u_{ij}{}^2 = u_{ij}{}^1 , \qquad (12)$$

έτσι, ώστε να γίνει η κατάλληλη επιλογή των ιδιοδιανυσμάτων $u_{ij}{}^1$ της φ ή του πίνακα A για τα οποία το σύστημα (12) έχει λύση.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Θα βρεθεί η δυνατή κανονική μορφή Jordan μιας γραμμικής απεικόνισης $\phi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με $\chi_\phi(t) = (t-3)^4$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι

$(t-3)$ ή $(t-3)^2$ ή $(t-3)^3$ ή $(t-3)^4$

- Αν $m_\phi(t) = (t-3)$ τότε οι στοιχειώδεις διαιρέτες είναι $(t-3)$, $(t-3)$, $(t-3)$, $(t-3)$ ή ισοδύναμα η χαρακτηριστική του Segre είναι [(1111)].
  Άρα η κανονική μορφή Jordan είναι
  $$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Αν $m_\phi(t) = (t-3)^2$ τότε οι πιθανοί στοιχειώδεις διαιρέτες είναι $(t-3)^2$, $(t-3)^2$ είτε $(t-3)^2$, $(t-3)$, $(t-3)$ ή ισοδύναμα η χαρακτηριστική του Segre είναι [(22)] είτε [(211)].
  Άρα η κανονική μορφή Jordan είναι
  $$\text{είτε } J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ είτε } J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Αν $m_\phi(t) = (t-3)^3$ τότε οι στοιχειώδεις διαιρέτες είναι $(t-3)^3$, $(t-3)$ ή ισοδύναμα η χαρακτηριστική του Segre είναι [(31)].
  Άρα η κανονική μορφή Jordan είναι
  $$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Αν $m_\phi(t) = (t-3)^4$ τότε έχουμε στοιχειώδη διαιρέτη τον $(t-3)^4$ ή ισοδύναμα η χαρακτηριστική του Segre είναι [(4)].
  Άρα η κανονική μορφή Jordan είναι

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Λάβαμε υπόψη το εξής για τον προσδιορισμό των στοιχειωδών διαιρετών διαιρετών. Για κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή $λ_i$ ο πρώτος αντίστοιχος της στοιχειώδης διαιρέτης ταυτίζεται με τον $(t-λ_i)^{k_i}$ που εμφανίζεται στο ελάχιστο πολυώνυμο, ο επόμενος του έχει εκθέτη μικρότερο ή ίσο του $k_i$ κ.ο.κ .

<u>Παράδειγμα 2</u>

Θα βρεθεί η κανονική μορφή Jordan του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

Ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός άρα το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $χ_A(t) = (t-5)^3(t-4)$ .

Η ιδιοτιμή $λ_1 = 5$ έχει γεωμετρική πολλαπλότητα $r_1 = 4-ρ(A-5I) = 4-3 = 1$.
Επομένως αντιστοιχεί ένας στοιχειώδης διαιρέτης στην $λ_1 = 5$ , ο $(t-5)^3$ , καθώς το γινόμενο των στοιχειωδών διαιρετών ισούται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

Η ιδιοτιμή $λ_2 = 4$ έχει κι αυτή γεωμετρική πολλαπλότητα $r_2 = 4-ρ(A-4I) = 4-3 = 1$. Άρα αντιστοιχεί ένας στοιχειώδης διαιρέτης στην $λ_2 = 4$ , ο $(t-4)$.

Ο υποπίνακας Jordan που αντιστοιχεί στην $λ_1 = 5$ είναι ο

$$J(5) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ο υποπίνακας Jordan που αντιστοιχεί στην $λ_2 = 4$ είναι ο
$J(4) = [4]$

Επομένως η κανονική μορφή Jordan του πίνακα A είναι

$$J = diag(J(5), J(4)) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3

Θα βρεθεί η κανονική μορφή Jordan του πίνακα A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, μια βάση Jordan και αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος, ώστε $P^{-1}AP = J$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_A(t) = (t-4)^3$ και το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(t) = (t-4)^2$.

Ο πίνακας A έχει στοιχειώδεις διαιρέτες τους $(t-4)^2$ , $(t-4)$ ή ισοδύναμα χαρακτηριστική του Segre [(21)].

Η κανονική μορφή Jordan του A είναι J = $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Βρίσκουμε ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$.

Λύνοντας το σύστημα $(A-4I)X = 0$ έχουμε $x_1 = x_2 + x_3$ , $x_2 , x_3 \in \mathbb{R}$,

οπότε $X = [x_2 + x_3 , x_2 , x_3]^T = x_2[1,1,0]^T + x_3[1,0,1]^T$ , άρα προκύπτουν συνολικά $r_1 = \gamma(\lambda_1) = 2$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα , αντίστοιχα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 4$ ,

τα $X_1 = [1,1,0]$ και $X_2 = [1,0,1]$.

Επειδή η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 4$ είναι $\alpha(\lambda_1) = 3$ και έχουμε δηλαδή $\alpha(\lambda_1) - \gamma(\lambda_1) = 3-2 = 1$ , θα προσδιορίσουμε ένα ακόμη γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα από το σύστημα

$(A-4I)X_3 = X_2$

Και λύνοντας το παίρνουμε $X_3 = [1,1,1]$.

Το σύστημα $(A-4I)X_3 = X_1$ είναι αδύνατο και δεν προκύπτουν γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

Η βάση Jordan είναι η $B = \{ X_2, X_3, X_1 \}$ με πίνακα

P = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $P^{-1}$ = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

καθώς $P^{-1}AP = J$.

## Κυκλικοί υπόχωροι

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ , $\dim_K V = n$ , και η γραμμική απεικόνιση $\phi: V \to V$. Έστω και $u \in V$ , $u \neq 0$. Αν K[t] είναι ο δακτύλιος των πολυωνύμων πάνω στο σώμα K, τότε το σύνολο

$$Z(u,\phi) :\{ g(\phi)(u) : g \in K[t] \} \subseteq V \qquad (1)$$

είναι φ-αναλλοίωτος υπόχωρος του V και ονομάζεται φ-***κυκλικός υπόχωρος του*** V ***που παράγεται από το u***.

Παρατηρούμε, ότι κάθε άλλος φ-αναλλοίωτος υπόχωρος U του διανυσματικού χώρου V που περιέχει το u, περιέχει και τον υπόχωρο $Z(u,\phi)$.

Πράγματι, επειδή ο υπόχωρος U είναι φ-αναλλοίωτος, τότε $\phi(u) \in U$ και $\phi^k(u) \in U$, για κάθε $k \in N^*$, οπότε $g(\phi)(u) \in U$, για κάθε $g \in K[t]$. Επομένως θα έχουμε ότι $Z(u,\phi) \subseteq U$ και έτσι ο υπόχωρος $Z(u,\phi)$ μπορεί να θεωρηθεί ως τομή όλων των φ-αναλλοίωτων υποχώρων που περιέχουν το u. Άρα έχουμε αποδείξει, ότι :

***Ο*** $Z(u,\phi)$ ***είναι ο ελάχιστος*** φ-***αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει το u*** $\in$ V.

Αν τώρα θεωρήσουμε την ακολουθία διανυσμάτων

$$u , \phi(u) , \phi^2(u),\ldots,\phi^k(u),\ldots$$

του υποχώρου $Z(u,\phi)$, επειδή $\dim_K V = n < +\infty$, θα υπάρχει $k<n$ έτσι, ώστε το διάνυσμα $\phi^k(u)$ να είναι γραμμικώς συνδυασμός των προηγούμενων του διανυσμάτων $u$ , $\phi(u)$ , $\phi^2(u),\ldots,$ $\phi^{k-1}(u)$, αφού διαφορετικά θα είχαμε στο χώρο V, n+1 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα (άτοπο). Θεωρούμε τώρα τον ελάχιστο θετικό ακέραιο k με την παραπάνω ιδιότητα. Τότε θα υπάρχουν συντελεστές $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1} \in K$ τέτοιοι ώστε

$$\phi^k(u) + \lambda_{k-1}\, \phi^{k-1}(u) +\ldots+ \lambda_1\phi(u) + \lambda_0 u = 0$$

και το πολυώνυμο

$$m_u(t) := t^k + \lambda_{k-1}t^{k-1} +\ldots+ \lambda_1 t + \lambda_0 \qquad (2)$$

είναι το μοναδικό πολυώνυμο με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα και του ελάχιστου δυνατού βαθμού που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$m_u(\phi)(u) = 0. \qquad (3)$$

Το πολυώνυμο $m_u(t)$ λέγεται φ-***μηδενιστής*** του διανύσματος u και του υποχώρου $Z(u,\phi)$.

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι, για κάθε $r>k$ ισχύει ότι

$$\phi^r(u) \in [u,\phi(u),\ldots,\phi^{k-1}(u)]$$

με συνέπεια και $g(\phi)(u) \in [u,\phi(u),\ldots,\phi^{k-1}(u)]$, για κάθε $g \in K[t]$. Επομένως, τα διανύσματα $u,\phi(u),\phi^2(u),\ldots,\phi^{k-1}(u)$ είναι γεννήτορες του υποχώρου $Z(u,\phi)$ και αφού είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα, θα αποτελούν βάση του $Z(u,\phi)$ . Άρα είναι

$$\dim_K Z(u,\phi) = k.$$

Θεωρούμε τώρα τον περιορισμό της $\phi$ στον υπόχωρο $Z(u,\phi)$ και τον συμβολίζουμε με $\phi_u$ . Τότε λόγω της συνθήκης (3) το πολυώνυμο $m_u(t)$ θα είναι το ελάχιστο πολυώνυμο της $\phi_u$ .

Επιπλέον, επειδή ισχύουν

$\phi_u(\phi^r(u)) = \phi^{r+1}(u)$ ,r =0,1,2,…,k-2

$\phi_u(\phi^{k-1}(u)) = - \lambda_0 u - \lambda_1\phi(u) - \ldots - \lambda_{k-1}\phi^{k-1}(u)$,

ο πίνακας της $\phi_u$ ως προς τη βάση $\{ u,\phi(u),\phi^2(u),\ldots,\phi^{k-1}(u) \}$ του υπόχωρου $Z(u,\phi)$ είναι ο

$$M(\phi_u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_2 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

ο πίνακας $M(\phi_u)$ λέγεται ***συνοδός πίνακας*** του πολυωνύμου $m_u(t)$. Το ελάχιστο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, του πίνακα $M(\phi_u)$ είναι το πολυώνυμο $m_u(t)$.

Έτσι έχει αποδειχθεί το θεώρημα που ακολουθεί :

## Θεώρημα 4.6

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο V πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ , $\dim_K V = n$ , τη γραμμική απεικόνιση $\phi$: V→V, το $\phi$-κυκλικό υπόχωρο $Z(u,\phi)$ του V που παράγεται από το u, το πολυώνυμο $m_u(t)$ και τον περιορισμό $\phi_u$ της γραμμικής απεικόνισης $\phi$ στον υπόχωρο $Z(u,\phi)$, όπως αυτά ορίστηκαν παραπάνω.

Τότε υπάρχει $k<n$ έτσι ώστε :

**i)** Το σύνολο $\{ u,\phi(u),\phi^2(u),\ldots,\phi^{k-1}(u) \}$ είναι βάση του $\phi$-κυκλικού υπόχωρου $Z(u,\phi)$, οπότε ισχύει $\dim_K Z(u,\phi) = k$,

**ii)** Το ελάχιστο πολυώνυμο της $\phi_u$ είναι το $m_u(t)$,

**iii)** Ο πίνακας της $\phi_u$ ως προς τη βάση $\{ u,\phi(u),\phi^2(u),\ldots,\phi^{k-1}(u) \}$ είναι ο συνοδός πίνακας $M(\phi_u)$ του πολυωνύμου $m_u(t)$.

Στη συνέχεια θα δούμε μια βοηθητική πρόταση, που στην ουσία συμπληρώνει το θεώρημα 4.1, και είναι αναγκαία για την απόδειξη των θεωρημάτων που αφορούν τη ρητή κανονική μορφή.

Θεώρημα 4.7

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο V πάνω στο σώμα K, τη γραμμική απεικόνιση $\phi$: V→V, το στοιχείο $u \in V$, το $\phi$-κυκλικό υπόχωρο $Z(u,\phi)$ του V που παράγεται από το u καθώς και την επαγόμενη απεικόνιση $\overline{\varphi}$ πάνω στο διανυσματικό χώρο πηλίκο $V/ Z(u,\phi)$.

Τότε ισχύουν :

**i)** Ο $\phi$-μηδενιστής του $u \in V$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο της $\phi$,

**ii)** Ο $\overline{\varphi}$-μηδενιστής του $\overline{u} \in V/ Z(u,\phi)$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο της $\phi$.

Απόδειξη

**i)** Ο $\phi$-μηδενιστής του $u \in V$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του περιορισμού $\phi_u$ της $\phi$ στο $\phi$-κυκλικό υπόχωρο $Z(u,\phi)$ του V που παράγεται από το u. Επειδή για κάθε πολυώνυμο $g(t) \in K[t]$ ισχύει

$$g(\phi_u)(u) = g(\phi)(u), \text{ για κάθε } u \in Z(u,\phi),$$

έπεται ότι

$$m_u(\phi_u)(u) = m_u(\phi)(u) = 0(u) = 0,$$

για κάθε $u \in Z(u,\phi)$. Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο της $\phi_u$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο της $\phi$.

**ii)** Ο $\overline{\varphi}$-μηδενιστής του $\overline{u} = u + Z(u,\phi) \in V/ Z(u,\phi)$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο της $\overline{\varphi}$, λόγω του i) ,άρα από το θεώρημα 4.1 έπεται ότι ο $\overline{\varphi}$-μηδενιστής του $\overline{u} \in V/ Z(u,\phi)$ διαιρεί και το ελάχιστο πολυώνυμο της $\phi$.

□

## Η ρητή κανονική μορφή

Με τη βοήθεια των κυκλικών υποχώρων θα αποδείξουμε ένα βασικό θεώρημα, το οποίο ανήγει το δρόμο για την εύρεση της ρητής κανονικής μορφής πίνακα ως προς τη σχέση ομοιότητας. Έχουμε σχετικά :

Θεώρημα 4.8

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο V πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ με $\dim_K V = n$ και τη γραμμική απεικόνιση $\phi: V \to V$ που έχει ελάχιστο πολυώνυμο $m_\phi(t) = p(t)^k$ , $k \in \mathbb{N}^*$ , όπου $p(t)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο του $K[t]$ με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα.

Τότε ισχύει η ισότητα

$$V = Z(u_1, \phi) \oplus Z(u_2, \phi) \oplus \ldots \oplus Z(u_r, \phi),$$

όπου $Z(u_i, \phi)$ ή για συντομία $Z_i$ , $i = 1,2,\ldots,r$ είναι φ-κυκλικοί υπόχωροι του V με αντίστοιχους φ-μηδενιστές

$$p(t)^{k_i},\ i = 1,2,\ldots,r,\ k = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r .$$

Επιπλέον, κάθε άλλη ανάλυση του V σε ευθύ άθροισμα φ-κυκλικών υποχώρων έχει τον ίδιο αριθμό συνιστωσών και το ίδιο σύνολο φ-μηδενιστών.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς τη διάσταση του V.

Κατ' αρχήν, αν $\dim V = 1$, τότε ο V είναι φ-κυκλικός υπόχωρος του εαυτού του και αληθεύει το ζητούμενο.

Υποθέτουμε ότι το θεώρημα αληθεύει για κάθε διανυσματικό χώρο με διάσταση μικρότερη του V , $\dim V > 1$. Το ελάχιστο πολυώνυμο της φ είναι $p(t)^k$ , οπότε θα υπάρχει $u_1 \in V$ τέτοιο, ώστε

$$(p(\phi))^{k-1}(u_1) \neq 0$$

και ο φ-μηδενιστής του $u_1$ είναι το πολυώνυμο $p(t)^k$ . Θεωρούμε τώρα το φ-κυκλικό υπόχωρο $Z_1 = Z(u_1,\phi)$ που παράγεται από το $u_1$ , όπως και το διανυσματικό χώρο πηλίκο $\overline{V} = V/ Z_1$ .

Αν $\overline{\varphi}$ είναι η γραμμική απεικόνιση επί του $\overline{V} = V/ Z_1$ που παράγεται από τη φ, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο της $\overline{\varphi}$ διαιρεί το $p(t)^k$ . (θεώρημα 4.1)

Από την υπόθεση της επαγωγής, ως προς το διανυσματικό χώρο $\overline{V}$ και τη $\overline{\varphi}$, έπεται ότι

$$\overline{V} = Z(v_2 + Z_1, \overline{\varphi}) \oplus Z(v_3 + Z_1, \overline{\varphi}) \oplus \ldots \oplus Z(v_r + Z_1, \overline{\varphi}), \qquad (1)$$

όπου $Z(v_i + Z_1, \overline{\varphi})$ , $i = 1,2,\ldots,r$ είναι $\overline{\varphi}$-αναλλοίωτοι υπόχωροι με αντίστοιχους $\overline{\varphi}$-μηδενιστές

$p(t)^{k_2}$ , $p(t)^{k_3}$ ,…, $p(t)^{k_r}$ ,$k = k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r$ .

Το επόμενο βήμα μας είναι να βρούμε διανύσματα $u_i \in v_i + Z_1$ , για κάθε $i = 1,2,\ldots,r$ έτσι, ώστε ο φ-μηδενιστής του $u_i$ να είναι το πολυώνυμο $p(t)^{k_i}$ , που είναι ο $\overline{\varphi}$-μηδενιστής του $v_i + Z_1$ . Αν θεωρήσουμε τυχόν σημείο $w_i \in v_i + Z_1$ , $i = 1,2,\ldots,r$ , τότε $p(\varphi)^{k_i}(w_i) \in Z_1$ και θα υπάρχει πολυώνυμο $q(t) \in K[t]$ τέτοιο, ώστε

$$p(\varphi)^{k_i}(w_i) = q(\phi)(u_1) , \ i = 1,2,\ldots,r. \tag{2}$$

Όμως το $p(t)^k$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο της φ, οπότε από τη (2) έπεται ότι

$0 = p(\phi)^k(w_i) = [\, p(\varphi)^{k-k_i} \,]q(\phi)(u_1),\ i = 1,2,\ldots,r$ .

Επειδή το $p(t)^k$ είναι ο φ-μηδενιστής του $u_1$ έπεται ότι το πολυώνυμο $p(t)^k$ διαιρεί το πολυώνυμο $p(t)^{k-k_i}\, q(t)$ , οπότε θα υπάρχει πολυώνυμο $h(t) \in K[t]$ τέτοιο, ώστε

$p(t)^{k-k_i}\, q(t) = p(t)^k h(t) \Leftrightarrow q(t) = p(t)^{k_i} h(t)$.

Αν θέσουμε $u_i := w_i - h(\phi)(u_1)$ , $i = 1,2,\ldots,r$ ,τότε $w_i - u_i = h(\phi)(u_1) \in Z_1$ ,οπότε ο φ-μηδενιστής του $u_i$ είναι πολλαπλάσιο του $\overline{\varphi}$-μηδενιστή του $v_i + Z_1$ , $i = 1,2,\ldots,r$. Όμως, λόγω της (2) θα έχουμε

$p(\varphi)^{k_i}(u_i) = p(\varphi)^{k_i}(w_i - h(\phi)(u_1)) = p(\varphi)^{k_i}(w_i) - q(\phi)(u_1) = 0$.

Άρα ο φ-μηδενιστής του $u_i$ είναι το πολυώνυμο $p(t)^{k_i}$ , $i = 1,2,\ldots,r$.

Θέτουμε τώρα

$$Z_i := Z(u_i,\phi) , \ i = 2,3,\ldots,r.$$

Αν ο βαθμός του πολυωνύμου p(t) ισούται με τ, τότε ο βαθμός του $p(t)^{k_i}$ θα είναι $\tau k_i$ και επειδή το πολυώνυμο $p(t)^{k_i}$ είναι ο φ-μηδενιστής του $u_i$ , αλλά και ο $\overline{\varphi}$-μηδενιστής του $u_i + Z_1$, τα σύνολα

$\{ u_i , \phi(u_i) ,\ldots,\varphi^{\tau k_i-1}(u_i)\}$ και $\{ v_i + Z_1 , \overline{\varphi}(v_i) + Z_1,\ldots,\overline{\varphi}^{\tau k_i-1}(v_i) + Z_1 \}$

είναι βάσεις των υποχώρων $Z_i = Z(u_i,\phi)$ και $Z(v_i + Z_1 , \overline{\varphi})$ , $i = 1,2,\ldots,r$, αντίστοιχα. Λόγω της (1), το σύνολο

$\{ v_2 + Z_1 , \overline{\varphi}(v_2) + Z_1 ,\ldots, \overline{\varphi}^{\tau k_2-1}(v_2) + Z_1 ,\ldots,v_r + Z_1 , \overline{\varphi}(v_r) + Z_1 ,\ldots, \overline{\varphi}^{\tau k_r-1}(v_r) + Z_1 \}$

είναι βάση του $\overline{V}$. Επομένως, λόγω των θεωρημάτων 1.1 και 4.1 το σύνολο

$\{ u_1 , \phi(u_1),\ldots, \varphi^{\tau k_1-1}(u_1), u_2 , \phi(u_2),\ldots, \varphi^{\tau k_2-1}(u_2),\ldots,u_r , \phi(u_r),\ldots, \varphi^{\tau k_r-1}(u_r) \}$

είναι βάση του V, οπότε πλέον είναι φανερό ότι ισχύει :

$V = Z(u_1,\phi) \oplus Z(u_2,\phi) \oplus\ldots\oplus Z(u_r,\phi)$.

**Μοναδικότητα**

Μένει να αποδειχθεί το ότι οι εκθέτες $k_1$ , $k_2$ ,…,$k_r$ ορίζονται μονοσήμαντα μέσω της φ και του V. Κατ' αρχήν, επειδή ο βαθμός του p(t) = τ , θα είναι

$\dim V = \tau(k_1 + k_2 + \ldots + k_r)$ και $\dim Z = \tau k_i$ ,i=1,2,…,r.

Στη συνέχεια μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι για κάθε ακέραιο s, το σύνολο $p(\phi)^s(Z_i)$ είναι ο κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το $p(\phi)^s(u_i)$ και έχει διάσταση

$$\dim p(\phi)^s(Z_i) = \begin{cases} \tau(k_i - s) \text{ αν}, k_i > s\,, \\ 0\,, \text{αν } k_i \leq s. \end{cases}$$

Κάθε διάνυσμα $u \in V$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$u = x_1 + x_2 + \ldots + x_r$ , με $x_i \in Z_i$ , i=1,2,…,r,

οπότε και το τυχόν στοιχείο του $p(\phi)^s(V)$ γράφεται μονοσήμαντα ως

$p(\phi)^s(u) = p(\phi)^s(x_1) + p(\phi)^s(x_2) + \ldots + p(\phi)^s(x_r)$,

όπου $p(\phi)^s(x_i) \in p(\phi)^s(Z_i)$. Αν τώρα $\sigma \in \mathbb{Z}$ που εξαρτάται από το s, είναι τέτοιος, ώστε

$k_1>s$ , $k_2>s$ ,…, $k_\sigma>s$ και $k_{\sigma+1}\leq s$, τότε

$p(\phi)^s(V) = p(\phi)^s(Z_1) \oplus p(\phi)^s(Z_2) \oplus \ldots \oplus p(\phi)^s(Z_r)$,

οπότε θα είναι

$$\dim p(\phi)^s(V) = \tau\,[(k_1-s)+(k_2-s)+\ldots+(k_\sigma-s)]. \qquad (3)$$

Θέτοντας τώρα s = k-1, από την (3) προσδιορίζουμε μονοσήμαντα τον αριθμό των $k_i$ που είναι ίσα με k. Θέτοντας στη συνέχεια s = k-2, από την (3) προσδιορίζουμε μονοσήμαντα τον αριθμό των $k_i$ που είναι ίσα με k-1, αν υπάρχουν. Συνεχίζοντας, την παραπάνω διαδικασία, για s =0 προσδιορίζουμε τον αριθμό των $k_i$ που είναι ίσα με 1.

Άρα τα $k_i$ προσδιορίζονται μονοσήμαντα από τη φ και το χώρο V.

□

Μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε τα ακόλουθα δύο βασικά θεωρήματα, σχετικά με τη ρητή κανονική μορφή γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων.

Θεώρημα 4.9

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο V πάνω στο σώμα K και τη γραμμική απεικόνιση φ : V→V με ελάχιστο πολυώνυμο

$$m_\phi(t) = p_1(t)^{k_1} p_2(t)^{k_2} \ldots p_s(t)^{k_s} ,$$

όπου τα πολυώνυμα $p_i(t)$ είναι διαφορετικά ανά δύο ανάγωγα πολυώνυμα του K[t] με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα.

Τότε υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας φ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & A_s \end{bmatrix}, \text{ με } A_i = \begin{bmatrix} A_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{i2} & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & A_{ir_i} \end{bmatrix}, \ i = 1,2,\ldots,s, \qquad (4)$$

όπου $A_{ij}$ είναι συνοδοί πίνακες των πολυωνύμων $p_i(t)^{k_{ij}}$ , με

$k_1 = k_{i1} \geq k_{i2} \geq \ldots \geq k_{ir_i}, \ldots, k_s = k_{s1} \geq k_{s2} \geq \ldots \geq k_{s_r}$.

Απόδειξη

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.8 και του θεωρήματος πρωταρχικής ανάλυσης 4.1 .

□

Θεώρημα 4.10

Ο πίνακας $A \in M_n(K)$ είναι όμοιος προς τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & A_s \end{bmatrix}, \text{ με } A_i = \begin{bmatrix} A_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{i2} & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & A_{ir_i} \end{bmatrix}, \ i = 1,2,\ldots,s, \qquad (5)$$

όπου $A_{ij}$ είναι συνοδοί πίνακες των πολυωνύμων $p_i(t)^{k_{ij}}$ , με

$k_1 = k_{i1} \geq k_{i2} \geq \ldots \geq k_{ir_i}, \ldots, k_s = k_{s1} \geq k_{s2} \geq \ldots \geq k_{s_r}$.

Τα $p_i(t)$ , i = 1,2,…,s είναι διαφορετικά ανά δύο, ανάγωγα πολυώνυμα του K[t] με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα, ενώ οι πίνακες $A_i$ και A έχουν ελάχιστα πολυώνυμα $p_i(t)^{k_{i1}}$ και $p_1(t)^{k_{11}} \ p_2(t)^{k_{21}} \ldots p_s(t)^{k_{s1}}$ αντίστοιχα. Εξαιρώντας αντιμεταθέσεις των πινάκων $A_i$ , ο πίνακας (5) είναι μονοσήμαντα ορισμένος.

Απόδειξη

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.8 και του θεωρήματος πρωταρχικής ανάλυσης 4.1 .

□

**Παρατηρήσεις**

**1.** Η αναπαράσταση της φ με τον πίνακα (4) που είναι μοναδική, εκτός αντιμεταθέσεων των πολυωνύμων $p_i(t)^{k_{ij}}$ είναι η ***ρητή κανονική μορφή*** αυτής και τα πολυώνυμα $p_i(t)^{k_{ij}}$ λέγονται ***στοιχειώδεις διαιρέτες*** της φ.

**2.** Τα πολυώνυμα $p_i(t)^{k_{ij}}$ , $1 \le j \le r_i$ , καθορίζονται πλήρως από τον πίνακα A και λέγονται ***στοιχειώδεις διαιρέτες*** του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το γινόμενο των στοιχειωδών διαιρετών του. Ο πίνακας (5) είναι η ***ρητή κανονική μορφή*** του πίνακα A.

**3.** Ένα πρώτο συμπέρασμα από το προηγούμενο θεώρημα είναι ότι δύο πίνακες είναι όμοιοι, αν και μόνο αν, έχουν τους ίδιους στοιχειώδεις διαιρέτες.

Παράδειγμα 1

Έστω η γραμμική απεικόνιση φ: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με $\chi_\phi(t) = (t-2)^4$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι

$(t-2)$ ή $(t-2)^2$ ή $(t-2)^3$ ή $(t-2)^4$

Θα βρεθεί η ρητή κανονική μορφή για κάθε περίπτωση ελάχιστου πολυωνύμου της γραμμικής απεικόνισης φ.

- Αν $m_\phi(t) = (t-2)$ τότε οι στοιχειώδεις διαιρέτες είναι (t-2), (t-2), (t-2), (t-2) και η ρητή κανονική μορφή της γραμμικής απεικόνισης φ είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Αν $m_\phi(t) = (t-2)^2$ τότε οι πιθανοί στοιχειώδεις διαιρέτες είναι $(t-2)^2$, $(t-2)^2$ είτε $(t-2)^2$, (t-2), (t-2). Έχουμε$(t-2)^2 = t^2-4t+4$. Η ρητή κανονική μορφή της γραμμικής απεικόνισης φ είναι είτε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{είτε} \quad \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Αν $m_\phi(t) = (t-2)^3$ τότε οι στοιχειώδεις διαιρέτες είναι $(t-2)^3$, $(t-2)$. Έχουμε $(t-2)^3 = t^3-6t^2+12t-8$ και η ρητή κανονική μορφή της γραμμικής απεικόνισης φ είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Αν $m_\phi(t) = (t-2)^4$ τότε έχουμε στοιχειώδη διαιρέτη τον $(t-2)^4$ . Έχουμε $(t-2)^4 = t^4 -8t^3 +24t^2 -32t +16$ και η ρητή κανονική μορφή της γραμμικής απεικόνισης φ είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Έστω ένας πίνακας A με διάσταση 4×4 και με ελάχιστο πολυώνυμο

$m_A(t) = (t^2+1)(t^2-3)$

Οι στοιχειώδεις διαιρέτες είναι οι $(t^2+1)(t^2-3)$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(t) = m_A(t) = (t^2+1)(t^2-3)$.

*1η υπόθεση*

Έστω $A \in M_4(\mathbb{R})$ . Παρατηρούμε ότι ο A δεν έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα $\mathbb{R}$, καθώς έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = i$ , $\lambda_2 = -i \in \mathbb{C}$.

Μπορούμε να βρούμε τη ρητή κανονική μορφή του $A \in M_4(\mathbb{R})$ , αφού για την εύρεση της δεν είναι απαραίτητη προυπόθεση οι ιδιοτιμές του πίνακα A να ανήκουν στον $\mathbb{R}$.

Έχουμε $(t^2-3) = (t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$

άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(t) = (t^2+1)(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$

Επομένως ο πίνακας A είναι όμοιος προς τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

*$2^η$ υπόθεση*

Έστω $A \in M_4(\mathbb{C})$ .

Έχουμε $(t^2+1) = (t-i)(t+i)$ και $(t^2-3) = (t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$

άρα το ελάχιστο πολυώνυμο γράφεται ως $m_A(t) = (t-i)(t+i)(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$

Επομένως ο πίνακας A είναι όμοιος προς τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Αναμενόμενο ο πίνακας A να είναι όμοιος προς ένα διαγώνιο πίνακα, αφού το $m_A(t)$ γράφτηκε ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

# <u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</u>

## ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΣΕ ΧΩΡΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

<u>Ορισμός</u>

**α)** Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ λέγεται ***χώρος εσωτερικού γινομένου***, αν είναι εφοδιασμένος με μία απεικόνιση

$$\langle\ |\ \rangle : V\times V \to K,\ (x,y) \to \langle x|y\rangle,$$

η οποία για κάθε $x,y,z \in V$ και $\lambda,\mu \in K$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. $\langle \lambda x + \mu y|z\rangle = \lambda\langle x|z\rangle + \mu\langle y|z\rangle$,
2. $\langle y|x\rangle = \overline{\langle x|y\rangle}$ , όπου $\overline{\langle x|y\rangle}$ είναι ο συζυγής μιγαδικός του $\langle x|y\rangle$,
3. $\langle x|x\rangle \geq 0$ και ( $\langle x|x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ ).

Για $K = \mathbb{R}$ η 2. γίνεται: $\langle y|x\rangle = \langle x|y\rangle$.
Η απεικόνιση $\langle\ |\ \rangle$ ονομάζεται ***εσωτερικό γινόμενο***.

**β)** Αν είναι $K = \mathbb{R}$ και $\dim V <+\infty$, τότε ο χώρος εσωτερικού γινομένου V λέγεται ***Ευκλείδειος***, ενώ αν είναι $K = \mathbb{C}$ και $\dim V <+\infty$, τότε ο χώρος εσωτερικού γινομένου V λέγεται ***ορθομοναδιαίος(unitary)***.

Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^n$ γίνεται ορθομοναδιαίος, αν εφοδιαστεί με την απεικόνιση

$$\langle\ |\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ (x,y) \to \langle x|y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n\ ,$$

για κάθε $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ , $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{C}^n$. Η απεικόνιση αυτή λέγεται κανονικό εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{C}^n$.

<u>Ορισμός</u>

Έστω V Ευκλείδειος ή ορθομοναδιαίος χώρος.

**α)** Το διάνυσμα $x \in V$ είναι ***ορθογώνιο*** με το διάνυσμα $y \in V$, αν $\langle x|y\rangle = 0$. Συμβολικά γράφουμε $x\perp y$.

**β)** Αν U είναι υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V, τότε το σύνολο

$$U^{\perp} := \{y: y \in V \text{ και } \langle x|y\rangle = 0, \text{ για κάθε } x \in U\}$$

λέγεται ***ορθογώνιο σύνολο*** του U.

Ορισμός

**α)** Ένα υποσύνολο $S = \{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ του Ευκλείδειου ή ορθομοναδιαίου χώρου V, είναι ορθοκανονικό σύνολο, όταν ισχύουν :

1. $\|u_i\| = 1$, για κάθε $i=1,2,\ldots,n$ ,

2. $\langle u_i|u_j \rangle = 0$, για κάθε $u_i$ , $u_j \in S$ με $i \neq j$,

ή ισοδύναμα, όταν ισχύει :

$$\langle u_i|u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{αν } i = j \\ 0, \text{αν } i \neq 0 \end{cases}.$$

**β)** Ένα υποσύνολο $S = \{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ του Ευκλείδειου ή ορθομοναδιαίου χώρου V, είναι ορθοκανονική βάση του V, όταν είναι ταυτόχρονα βάση και ορθοκανονικό σύνολο του V.

Ορισμός

Έστω $f : V \to V$ γραμμικός μετασχηματισμός, όπου V ορθομοναδιαίος ή Ευκλείδειος χώρος. Η απεικόνιση

$$f^* : V \to V \text{ , } y \to f^*(y),$$

που ορίζεται από τη σχέση

$$\langle f(x)|y\rangle = \langle x|\, f^*(y) \rangle,$$

για κάθε $x,y \in V$ , λέγεται ***συζυγής (adjoint) ή ερμιτιανός συζυγής*** του γραμμικού μετασχηματισμού f.

Ορισμός

Ο πίνακας $\overline{A}^T$ λέγεται ***συζυγής (adjoint) πίνακας*** του $A \in M_n(\mathbb{C})$ και συμβολίζεται με $A^*$ , ενώ όταν είναι $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε $A^* = A^T$.

Ορισμός

**α)** Ο γραμμικός μετασχηματισμός $f \in L(V)$ , όπου $V$ ορθομοναδιαίος ή Ευκλείδειος χώρος, λέγεται ***αυτοσυζυγής*** , αν ταυτίζεται με το συζυγή του, δηλαδή αν

$$f^* = f$$

**β)** Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται ***ερμιτιανός***, αν ικανοποιεί την ισότητα

$$A^* := \overline{A}^T = A,$$

Ενώ ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται ***συμμετρικός***, αν ισχύει

$$A^* := A^T = A.$$

Στις δύο αυτές περιπτώσεις ο πίνακας A λέγεται ***αυτοσυζυγής***.

Ορισμός

**α)** Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται ***ορθομοναδιαίος (unitary)***, αν ικανοποιεί τις ισότητες $AA^* = A^*A = I$ ή ισοδύναμα

$$A^* = A^{-1}.$$

**β)** Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται ***ορθογώνιος***, αν ικανοποιεί τις ισότητες $AA^T = A^TA = I$ ή ισοδύναμα

$$A^T = A^{-1}.$$

Θεώρημα 5.1

Κάθε ιδιοτιμή ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματική.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή ενός ερμιτιανού πίνακα και x είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα : $Ax = \lambda x$. Τότε,

$$\lambda\|x\|^2 = \lambda\langle x,x\rangle = \langle \lambda x,x\rangle = \langle Ax,x\rangle = \langle x,Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{\langle \lambda x, x\rangle} = \overline{\lambda\langle x, x\rangle} = \overline{\lambda}\|x\|^2$$

συμπεραίνουμε ότι $\lambda = \overline{\lambda}$ , άρα λ πραγματική ιδιοτιμή.

□

## Λήμμα (Schur)

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ,n×n με n ∊ ℕ υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U, έτσι ώστε $U^{-1}AU = T$ να είναι άνω τριγωνικός. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ίδιες με αυτές του T και εμφανίζονται στην κύρια διαγώνιο του T.

### Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στη διάσταση n του πίνακα A.

Για n=1 , ο A = [ c ] με c ∊ ℂ. Άρα, [ c ] = [ 1 ][ c ][ 1 ]. Άρα, U=[ 1 ] .

Έστω ότι ισχύει για κάθε πίνακα με διάσταση n=k, θα το δείξουμε για κάθε πίνακα διάστασης n=k+1.

Η det(λI – A) = 0 έχει πάντα μία ρίζα. Έστω $\lambda_1$ μία τέτοια ρίζα. Άρα θα υπάρχει ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής αυτής έστω $x_1$. Οπότε, $Ax_1=\lambda_1x_1$.

Από λήμμα ανταλλαγής του Steinitz υπάρχει ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{C}^n$ που περιέχει το $x_1$. Έστω $U_1$πίνακας με στήλες τα στοιχεία αυτής της βάσης και με το $x_1$ στη πρώτη στήλη.

$$AU_1 = U_1\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & .. & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας B έχει διάσταση k×k , άρα από επαγωγική υπόθεση υπάρχει πίνακας $U_2$ , ώστε $U_2^*B\,U_2 = T_2$ , όπου $T_2$ άνω τριγωνικός.

$$U_1^*AU_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & .. & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & .. & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2T_2U_2^* & \\ 0 & & & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & .. & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2^* & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2^* & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ είναι ορθομοναδιαίοι , άρα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}^* U_1^* A U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & .. & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = T$$

Άρα, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} U_1 = U$ ορθομοναδιαίος και $\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & .. & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ άνω τριγωνικός.

$\det(\lambda I\text{-}A) = \det(U\lambda U^*\text{-}A) = \det(U\lambda U^*\text{-}UTU^*) = \det(U(\lambda I\text{-}T)U^*) = \det U \cdot \det(\lambda I\text{-}T) \cdot \det U^*$

Όμως, $U^* = U^{-1}$ άρα $\det U \cdot \det U^* = 1$.

Άρα, $\det(\lambda I\text{-}A) = \det(\lambda I\text{-}T)$.

□

Παράδειγμα

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε στο χώρο εσωτερικού γινομένου ($\mathbb{C}^3$, <|>).

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ . Θα βρεθεί ορθομοναδιαίος πίνακας U ώστε $U^{-1}AU=T$ ,T άνω τριγωνικός.

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -2$ , $\lambda_2 = 1$ , $\lambda_3 = 3$. Ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -2$ είναι το (-1,0,1), της $\lambda_2 = 1$ είναι το (4,-3,2) και της $\lambda_3 = 3$ είναι το (3,0,2). Το ιδιοδιάνυσμα (-1,0,1) επεκτείνεται στη βάση {(-1,0,1) , (0,1,0) , (1,0,1)} του $\mathbb{C}^3$ με πρώτο διάνυσμα το (-1,0,1). Τα διανύσματα της βάσης είναι ανά δύο ορθογώνια. Κανονικοποιούμε για να δημιουργηθεί μια ορθοκανονική βάση. Έχουμε :

$\{ X_1 = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}], X_2 = [0, 1, 0], X_3 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \}$

και σχηματίζουμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$U_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Τότε, $U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$

και έστω $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$.

Εργαζόμαστε με το B, όπως πριν με τον πίνακα A. Οι ιδιοτιμές του B είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ , (0,1).

Το ιδιοδιάνυσμα (0,1) επεκτείνεται στη βάση {(0,1) , (1,0)} του $\mathbb{C}^2$

και σχηματίζουμε το πίνακα $U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Τότε, $U_2^* B U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T_2$.

Έχουμε από προηγουμένως,

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & B & \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & U_2 T_2 U_2^* & \\ 0 & & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & \\ 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & T_2 & \\ 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2^* & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & \\ 0 & & \end{bmatrix}^* U_1^* A U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & T_2 & \\ 0 & & \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^* A \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας $U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$, ώστε ο Α να είναι όμοιος με τον

ανω τριγωνικό πίνακα $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Βλέπουμε ότι ο άνω τριγωνικός πίνακας έχει στη διαγώνιο τις ιδιοτιμές του, οι οποίες είναι ίδιες με αυτές του πίνακα Α αφού είναι όμοιοι.

Εφαρμογή λήμματος Schur (θεώρημα Cayley-Hamilton)

Θα αποδείξουμε με τη βοήθεια του λήμματος Schur ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A ∈ $M_n(\mathbb{C})$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου. Από λήμμα Schur υπάρχουν U ορθομοναδιαίος και T άνω τριγωνικός, ώστε $A = UTU^*$.

Επειδή $\chi_A(A) = \chi_A(UTU^*) = U\chi_A(T)U^*$, ισχύει $\chi_A(A) = 0 \Leftrightarrow \chi_A(T) = 0$.

$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$, άρα $\chi_A(T) = \prod_{i=1}^{n}(T - \lambda_i I)$

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & & * \\ 0 & \lambda_2 & * & & * \\ \vdots & 0 & .. & .. & * \\ 0 & \vdots & 0 & & * \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ ,οπότε

$$\chi_A(T) = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_i & * & * & & * \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_i & * & & * \\ \vdots & 0 & .. & .. & * \\ 0 & \vdots & 0 & & * \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n - \lambda_i \end{bmatrix} = O.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί αν πάρουμε τους δύο πρώτους όρους του γινομένου έχουμε

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_1 & * & * & & * \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & * & & * \\ \vdots & 0 & .. & .. & * \\ 0 & \vdots & 0 & & * \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & * & * & & * \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_2 & * & & * \\ \vdots & 0 & .. & .. & * \\ 0 & \vdots & 0 & & * \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n - \lambda_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * & & * \\ 0 & 0 & * & * & & * \\ \vdots & 0 & * & .. & .. & * \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & & * \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & * \end{bmatrix}.$$

Συνεχίζοντας, $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * & & * \\ 0 & 0 & * & * & & * \\ \vdots & 0 & * & .. & .. & * \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & & * \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & * & * & * & & * \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_3 & * & * & & * \\ \vdots & 0 & \lambda_3 - \lambda_3 & .. & .. & * \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & & * \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \lambda_n - \lambda_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & * & & * \\ 0 & 0 & 0 & * & & * \\ \vdots & 0 & 0 & .. & .. & * \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & & * \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & * \end{bmatrix}.$$

Όμοια εκτελώντας όλες τις πράξεις βλέπουμε ότι καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Ορισμός

Ένας πίνακας $A \in M_n(K)$ , $K = \mathbb{C}$ (αντίστοιχα, $\mathbb{R}$) λέγεται ***κανονικός(normal)***, αν ικανοποιεί την ισότητα

$$AA^* = A^*A, \text{ (αντίστοιχα, } AA^T = A^TA).$$

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα, ότι κάθε ***ορθομοναδιαίος*** ή ***ορθογώνιος*** μετασχηματισμός ή πίνακας είναι και κανονικός.

Ομοίως, εύκολα επαληθεύεται ότι κάθε ***ερμιτιανός*** ή ***συμμετρικός*** μετασχηματισμός ή πίνακας είναι και κανονικός.

Επίσης, κάθε ***αντιερμιτιανός*** γραμμικός μετασχηματισμός $f \in L(V)$ ( αντίστοιχα πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ )που ορίζεται από την ισότητα

$$f^* = -f, \text{ (αντίστοιχα } A^* = -A)$$

όπου V ορθομοναδιαίος χώρος, είναι και κανονικός.

Το ίδιο ισχύει και για τους ***αντισυμμετρικούς*** γραμμικούς μετασχηματισμούς και πίνακες $f \in L(V)$ ( αντίστοιχα πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ ) που ορίζονται από την ισότητα

$$f^* = -f, \text{ (αντίστοιχα } A^T = -A)$$

**Σύνολο κανονικών μιγαδικών πινάκων**

| | | |
|---|---|---|
| Ερμιτιανοί<br>ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$ | Ορθομοναδιαίοι<br>ιδιοτιμές με μέτρο 1 | Αντιερμιτιανοί<br>ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}_i$ |

**Σύνολο κανονικών πραγματικών πινάκων**

| | | |
|---|---|---|
| Συμμετρικοί<br>ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$ | Ορθογώνιοι<br>ιδιοτιμές με μέτρο 1 | Αντισυμμετρικοί<br>ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}_i$ |

Έχουμε αναφερθεί σε ορθομοναδιαίους , ορθογώνιους, ερμιτιανούς και συμμετρικούς μετασχηματισμούς και πίνακες, που όλοι ανήκουν στο ευρύτερο σύνολο των κανονικών μετασχηματισμών και πινάκων. Θέλουμε να βρούμε την απλούστερη μορφή των παραπάνω μετασχηματισμών και πινάκων ως προς τους μετασχηματισμούς ομοιότητας. Μία πρώτη σκέψη είναι η εφαρμογή της κανονικής μορφής Jordan. Επειδή όμως εργαζόμαστε σε χώρους εσωτερικού γινομένου, ζητάμε μετασχηματισμούς ομοιότητας που διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο. Οι ιδιότητες που ικανοποιούν οι παραπάνω μετασχηματισμοί και πίνακες που μελετάμε μας οδηγούν σε απλούστερες μορφές και μάλιστα διαγώνιες.

Από το λήμμα Schur, για κάθε πίνακα A, υπάρχουν ένας ορθομοναδιαίος U και ένας άνω τριγωνικός $T = U^*AU$. Αν ο A είναι κανονικός, τότε και ο T είναι κανονικός.

Πράγματι,

$TT^* = U^*AUU^*A^*U = U^*AA^*U = U^*A^*AU = U^*A^*UU^*AU = T^*T$

## Θεώρημα 5.2

Αν ο A είναι κανονικός, για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ ,ισχύει ότι $\|Ax\| = \|A^*x\|$.

Απόδειξη

Αφού ο A είναι κανονικός ισχύει $AA^* = A^*A$, $(A^*)^* = A$.

Άρα, $\|Ax\|^2 = \langle Ax,Ax\rangle = \langle A^*Ax,x\rangle = \langle AA^*x,x\rangle = \langle A^*x,A^*x\rangle = \|A^*x\|^2$

□

Από το προηγούμενο θεώρημα , αν $x_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ , το 1 στην i-οστή θέση με i=1,2,..n ,n∈ℕ, οπότε

το $Ax_i = c_i$ , όπου το $A = [c_1|\ldots|c_n]$

και $A^*x_i = k_i$ , όπου $A^* = [k_1|\ldots|k_n]$.

Για ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$ ισχύει $\|y\| = \|\overline{y}\|$. Από το προηγούμενο θεώρημα, για τον πίνακα T, έστω $T = [\sigma_1|..|\sigma_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ θα ισχύει $\|\sigma_i\| = \|Tx_i\| = \|T^*x_i\| = \|\overline{\alpha}_i\| = \|\alpha_i\|$ για κάθε i=1,2,..,n ,n ∈ ℕ, άρα T διαγώνιος.

Οπότε αν ο A είναι κανονικός στη παραγοντοποίηση Schur του , ο U τον διαγωνοποιεί.

Δηλαδή, $A = UTU^*$ , με T διαγώνιο και U ορθομοναδιαίο πίνακα.

AU = UT ,δηλαδή αν ο A είναι κανονικός έχει ένα πλήρες σύνολο n ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων.

Έχουμε δηλαδή το παρακάτω θεώρημα :

## Θεώρημα 5.3

Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ είναι κανονικός, τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U και διαγώνιος πίνακας T τέτοιος ώστε

$$U^*AU = U^{-1}AU = T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$

όπου $\lambda_i$ , i = 1,2,…,n είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

## Θεώρημα 5.4

Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός, τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας

$U \in M_n(\mathbb{R})$ και $\Delta \in M_n(\mathbb{R})$ διαγώνιος πίνακας τέτοιος ώστε

$$U^TAU = U^{-1}AU = \Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$, i = 1,2,…,n είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Απόδειξη

Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ συμμετρικός. Αν δούμε τον A ως πίνακα που ανήκει στον $M_n(\mathbb{C})$ τότε είναι ερμιτιανός και όπως έχουμε αποδείξει θα έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Άρα από την απόδειξη του λήμματος Schur βλέπουμε εύκολα ότι $U \in M_n(\mathbb{R})$ και $U^* = U^T$ .

□

Διαδικασία διαγωνοποίησης ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα

**i)** Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ που είναι όλες πραγματικές.

**ii)** Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \ldots, X_n$, αντίστοιχα των ιδιοτιμών $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$ ( αντίστοιχα, $\mathbb{R}^n$ ). Σε κάθε ιδιοτιμή το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που της αντιστοιχούν είναι ίσο με την αλγεβρική της πολλαπλότητα.

**iii)** Ορθοκανονικοποιούμε με τη μέθοδο Gram-Schmidt τα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Η ορθοκανονικοποίηση, λόγω της ορθογωνιότητας των ιδιοχώρων, μπορεί να γίνει χωριστά σε καθέναν από τους ιδιοχώρους. Στους ιδιοχώρους με διάσταση 1, αρκεί να γίνει απλή κανονικοποίηση του ιδιοδιανύσματος που θεωρούμε ως βάση. Έτσι προκύπτει η ορθοκανονική βάση $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n\}$.

**iv)** Σχηματίζουμε τον πίνακα $U = [\tilde{X}_1 \mid \tilde{X}_2 \mid \ldots \mid \tilde{X}_n]$ με στήλες τα ιδιοδιανύσματα της ορθοκανονικής βάσης που βρήκαμε, οπότε ο πίνακας U είναι ορθομοναδιαίος και ικανοποιεί την ισότητα

$U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ (αντίστοιχα, $U^TAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$).

Παράδειγμα

Έστω ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Θα βρεθεί ορθομοναδιαίος πίνακας U που να τον διαγωνοποιεί.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(t) = t^3 - 12t^2 + 21t + 98 = (t+2)(t-7)^2$ και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 7$ (διπλή).

Το ιδιοδιάνυσμα $X_1 = (2, 1, -2)$ αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ και τα ιδιοδιανύσματα $X_2 = (1, -2, 0)$ και $X_3 = (0, 2, 1)$ αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 7$.

Παρατηρούμε ότι τα $X_1$, $X_2$ και $X_1$, $X_3$ είναι κάθετα μεταξύ τους και άρα χρειάζεται να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt μόνο στα $\{X_2, X_3\}$.

$\| X_2 \| = \sqrt{5}$

$\check{X}_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$

$X_3' = X_3 - \langle X_3 | \check{X}_2 \rangle \check{X}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$

$\| X_3' \| = \frac{\sqrt{45}}{5}$

$\breve{X}_3 = \frac{X_3'}{\|X_3\|} = (\frac{4}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}) = (\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}})$

Μετατρέπουμε και το $X_1$ σε μοναδιαίο και έχουμε $\breve{X}_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})$.

Ο ορθομοναδιαίος πίνακας U είναι ο

$$U = [\,\breve{X}_1\, \breve{X}_2\, \breve{X}_3\,] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

και η διαγωνοποίηση του A είναι

$$U^T A U = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 7 & \\ & & 7 \end{bmatrix}$$

## Βιβλιογραφία


1. ΑΝΑΡΓΥΡΟΣ Γ. ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ , Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία , Αθήνα 2009.
2. Ν. ΚΑΔΙΑΝΑΚΗΣ , Σ. ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ , Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές , Αθήνα 2008.
3. JOHN B. FRALEIGH , Εισαγωγή στην Άλγεβρα , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
4. GILBERT STRANG , Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
5. I. HERSTEIN and D. WINTER, Γραμμική Άλγεβρα , MacMillan PC, 1988.
6. HD IKRAMOV, Γραμμική Άλγεβρα, Mir Publ., 1983.
7. B. KOLMAN, Εισαγωγική Γραμμική Άλγεβρα με Εφαρμογές, Prentice Hall, 1997.
8. DC LAY, Γραμμική Άλγεβρα και οι Εφαρμογές της, Addison-Wesley P.Co., 1994.
9. PETER LAX, Linear Algebra and its applications, John Wiley & Sons, 2007.
10. SHELDOM AXLER, Linear Algebra done right, Springer-Verlag, 1996.
11. PAUL HALMOS, Linear Algebra Problem Book, American Mathematical Society, 1995.
12. K. HOFFMAN and R. KUNZE, Linear Algebra, Prentice Hall, 1971.
13. STEVEN ROMAN, Advanced Linear Algebra, Springer-Verlag, 1992.
14. SETH WARNER, Modern Algebra, Dover, 1990.