

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Γραμμικά ακουστικά κύματα και
κρουστικά κύματα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γέτα Μόλλα

Επιβλέπων
Χαραλαμπίδης Αντώνιος

9 Οκτωβρίου 2017

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	2
2	Γραμμικά ακουστικά κύματα	3
2.1	Η εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης	3
2.2	Επίπεδα Κύματα	7
2.3	Ακουστική Ενέργεια	10
2.4	Επίπεδος κυματοδηγός	15
2.5	Κυκλικός κυματοδηγός	18
3	Κρουστικά Κύματα	22
3.1	Στοιχεία Θερμοδυναμικής	22
3.2	Εξισώσεις Κίνησης	30
3.3	Εύρεση των Χαρακτηριστικών Καμπυλών	33
3.4	Η δημιουργία ενός Κρουστικού Κύματος από ένα ομοιόμορφα επι- ταχυνόμενο έμβολο	35
3.5	Οι σχέσεις Rankine-Hugoniot	37
3.6	Εκρήξεις	44

1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την εργασία ασχολήθηκα με γραμμικά ακουστικά κύματα και μη γραμμικά ακουστικά κύματα. Πιο συγκεκριμένα, όταν η ταχύτητα διάδοσης ενός ακουστικού κύματος ξεπεράσει την ταχύτητα του ήχου, τότε δημιουργείται κρουστικό κύμα και πλέον η γραμμική προσέγγιση είναι μη έγκυρη.

Σε πρώτο στάδιο περιγράφω τα γραμμικά ακουστικά κύματα, διεξάγοντας την κυματική εξίσωση. Επιπλέον, ασχολήθηκα με την περιγραφή της ενέργειας του κύματος και με δύο περιπτώσεις κυματοδηγών. Σε δεύτερο στάδιο, προκειμένου να κατανοήσω καλύτερα τα κρουστικά κύματα, μελέτησα κάποια στοιχεία θερμοδυναμικής. Ύστερα, έγραψα τις εξισώσεις κίνησης που διέπουν ένα ακουστικό κύμα που προκύπτει από μεγάλο εύρος διατάραξης αερίου, όπως μια συμπιεσμένη μάζα αερίου. Βρήκα τις χαρακτηριστικές καμπύλες για το σύστημα εξισώσεων διατήρησης. Επιπρόσθετα, μελέτησα τις σχέσεις Rankine-Hugoniot, οι οποίες είναι κομβικής σημασίας για την κατανόηση των κρουστικών κυμάτων, καθώς μας δίνουν πληροφορίες για τη μεταβολή βασικών ποσοτήτων, όπως η μάζα και η πυκνότητα. Τέλος, μελέτησα εκρήξεις και σφαιρικά κύματα έκρηξης.

2 Γραμμικά ακουστικά κύματα

Ο ήχος αποτελεί μέρος της καθημερινότητάς μας. Ο ήχος διαδίδεται μέσω των ακουστικών κυμάτων, έτσι έχουμε τη δυνατότητα να μιλήσουμε, να ακούσουμε μουσική ή να ενοχληθούμε από διάφορους θορύβους (όπως ο θόρυβος που κάνει το αεροπλάνο, η μελωδία από ένα μουσικό όργανο). Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθώ με το να εξάγω την τρισδιάστατη κυματική εξίσωση, η οποία διέπει τη διάδοση του ήχου ή των ακουστικών κυμάτων. Έπειτα, θα μελετήσω τη διάδοση του ήχου σε σωλήνες και κόρνες. Τέλος, θα εξετάσω τη ανάκλαση ενός κύματος σε επίπεδο κυματοδηγό και τους σφαιρικούς κυματοδηγούς.

2.1 Η εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης

Τα ακουστικά κύματα μπορούν να παραχθούν από μικρές διαταράξεις του πλάτους ενός σώματος συμπιεστού αέρα. Προκειμένου να τα μελετήσω, θα πάρω τις εξισώσεις που εκφράζουν τη διατήρηση της μάζας και της ορμής σε ένα μη ιζώδες αέριο, οι οποίες είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.1.2)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του αερίου, p η πίεση του αερίου, u η ταχύτητα του αερίου και t ο χρόνος. Προς το παρόν, θα αγνοήσουμε τις βαρυτικές και ιζώδεις δυνάμεις. Επίσης, θα υποθέσουμε ότι $\rho = \rho(p)$ αντί για $\rho = \rho(p, T)$, όπου T η

απόλυτη θερμοκρασία.

Θεωρούμε μια μικρή διατάραξη ενός ομοιόμορφου, ακίνητου σώματος αέρα την οποία γράφουμε ως εξής :

$$p = p_0 + \tilde{p}, \quad \rho = \rho_0 + \tilde{\rho} \quad u = \tilde{u} \quad (2.1.3)$$

Στην ομοιόμορφη κατάσταση έχουμε $p = p_0$, $\rho = \rho_0 = \rho(p_0)$ και $u = 0$. Οι ποσότητες \tilde{p} , $\tilde{\rho}$, \tilde{u} είναι μικρές διαταράξεις αυτής της κατάστασης. Αντικαθιστώντας στις 2.1.1, 2.1.2 έχουμε:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla((\rho_0 + \tilde{\rho})\tilde{u}) = 0 \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} = -\frac{1}{\rho_0 + \tilde{\rho}} \nabla \tilde{p} \quad (2.1.5)$$

Επειδή έχουμε θεωρήσει μικρές διαταράξεις του πλάτους, μπορούμε να αγνοήσουμε τις μικρές ποσότητες στις παραπάνω εξισώσεις, άρα :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla((\rho_0 + \tilde{\rho})\tilde{u}) = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \tilde{u}) + \nabla(\tilde{\rho} \tilde{u}) = 0$$

Λόγω ότι η ποσότητα $\nabla(\tilde{\rho} \tilde{u})$ θεωρείται μικρή καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \tilde{u} = 0 \quad (2.1.6)$$

Επίσης, έχουμε από την 2.1.5 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} &= -\frac{1}{\rho_0 + \tilde{\rho}} \nabla \tilde{p} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (\rho_0 + \tilde{\rho}) \tilde{u} \nabla \tilde{u} &= -\nabla \tilde{p} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (\rho_0 + \tilde{\rho}) \tilde{u} \nabla \tilde{u} &= -\nabla \tilde{p} \end{aligned}$$

Επειδή οι ποσότητες $\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$, $(\rho_0 + \tilde{\rho}) \tilde{u} \nabla \tilde{u}$ είναι μικρές θα έχουμε:

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} \quad (2.1.7)$$

Γνωρίζουμε ότι $\rho_0 + \tilde{\rho} = \rho(p_0 + \tilde{p})$ και επειδή $|\tilde{p}| \ll p_0$, θα γράψουμε το ανάπτυγμα Taylor για τον όρο $\rho_0 + \tilde{\rho}$:

$$\rho_0 + \tilde{\rho} \approx \rho(p_0) + \tilde{p} \frac{\partial \rho}{\partial p}(p_0)$$

Ξέρουμε ότι $\rho_0 = \rho(p_0)$, συνεπώς

$$\tilde{\rho} \approx \tilde{p} \frac{\partial \rho}{\partial p}(p_0)$$

Άρα, η 2.1.6 θα γίνει:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}(p_0) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\nabla \tilde{u} \quad (2.1.8)$$

Εάν παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση ως προς t και χρησιμοποιήσουμε 2.1.7 για να κάνουμε την απαλοιφή του $\partial \tilde{u} / \partial t$ προκύπτει:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial p}(p_0) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \tilde{u}) = -\nabla \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 \tilde{p} \quad (2.1.9)$$

Ορίζουμε:

$$c = \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial p}(p_0) \right\}^{-1/2} \quad (2.1.10)$$

Συνεπώς, θα έχουμε:

$$\nabla^2 \tilde{p} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} \quad (2.1.11)$$

Βλέπουμε πως μικρές διαταράξεις της πίεσης ικανοποιούν την τρισδιάστατη κυματική εξίσωση με την ταχύτητα c του κύματος να ικανοποιεί τη 2.1.10.

Θα μελετήσουμε ποιά εξίσωση ικανοποιεί η διατάραξη της ταχύτητας \tilde{u} . Επειδή το αέριο χωρικά, κατανέμεται ομοιόμορφα μπορούμε να γράψουμε τη 2.1.7 ως εξής:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0} \right) \quad (2.1.12)$$

Θεωρούμε:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -\frac{\tilde{p}}{\rho_0}$$

για κάποια συνάρτηση $\tilde{\phi}$. Άρα, η 2.1.11 θα γίνει :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) &\Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \nabla \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{u} - \nabla \tilde{\phi}) = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\tilde{u} - \nabla \tilde{\phi} = f(x)$ για κάποια συνάρτηση f . Εάν υποθέσουμε ότι $\tilde{u} = 0$ για $t = t_0$ τότε:

$$f(x) = -\nabla \tilde{\phi}(x, t_0)$$

Άρα,

$$\tilde{u}(x, t) = \nabla (\tilde{\phi}(x, t) - \tilde{\phi}(x, t_0))$$

Εάν ορίσουμε $\phi = \tilde{\phi}(x, t) - \tilde{\phi}(x, t_0)$ τότε:

$$\tilde{u} = \nabla \phi \quad (2.1.13)$$

Η συνάρτηση $\tilde{\phi}$ καλείται το δυναμικό της ακουστικής ταχύτητας. Παρατηρούμε ότι:

$$\nabla \tilde{u} = \nabla \times \nabla \phi = 0$$

Άρα, οι ακουστικές διαταράξεις ενός ακίνητου αερίου είναι μη περιστροφικές. Επιπλέον, έχουμε:

$$\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.1.14)$$

Αντικαθιστώντας αυτούς τους ορισμούς της διατάραξης της ταχύτητας και της πίεσης βάση του δυναμικού της ταχύτητας στις εξισώσεις που τα διέπουν και χρησιμοποιώντας τις 2.1.8, 2.1.10 προκύπτει:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.1.15)$$

Έτσι και το δυναμικό της ταχύτητας ικανοποιεί την τρισδιάστατη κυματική εξίσωση με ταχύτητα κύματος c . Όταν ξέρουμε τη ϕ , μπορούμε να υπολογίσουμε τα \tilde{u} και \tilde{p} . Τέλος,

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \tilde{u} = \nabla \phi, \quad \tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

2.2 Επίπεδα Κύματα

Θα μελετήσουμε τη λύση για την εξίσωση του ακουστικού κύματος σε μια διάσταση για την πίεση και το δυναμικό της ταχύτητας. Στον άξονα x η εξίσωση για την πίεση γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} \quad (2.2.1)$$

Για το δυναμικό της ταχύτητας έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.2.2)$$

όπου $\tilde{u} = \nabla \phi$ και $\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$.

Θα λύσουμε τη 2.2.2 με τη μέθοδο D'Alembert. Εισάγουμε τις νέες μεταβλητές:

$$\begin{aligned}\xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct\end{aligned}$$

Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε για τις παραγώγους ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}\end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(-c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \phi = -c \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + c \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \quad (2.2.4)$$

Αντικαθιστώντας τις 2.2.3, 2.2.4 στη 2.2.2 προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Η μερική διαφορική εξίσωση 2.2.5 έχει ως λύση:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} &= \int 0 \partial \eta \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = h(\xi) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \partial \xi &= \int h(\xi) \partial \xi \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \phi(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

Συνεπώς, η λύση για το δυναμικό της ταχύτητας είναι

$$\phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

για f, g αυθαίρετες. Επειδή θα μελετήσουμε κύματα που διαδίδονται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x , θα θεωρήσουμε $g \equiv 0$. Τελικά, έχουμε:

$$\phi(x, t) = f(x - ct) \quad (2.2.6)$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει επίπεδα κύματα διότι οι τιμές της ϕ άρα και των \tilde{p} , \tilde{u} , είναι σταθερές σε επίπεδα κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης. Από τον ορισμό της ϕ , μπορούμε να δούμε ότι η διατάραξη της ταχύτητας συμπίπτει με τη διεύθυνση του άξονα x και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\tilde{u} = f'(x - ct) \quad (2.2.7)$$

ενώ η διατάραξη της πίεσης δίνεται από:

$$\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho_0 f'(x - ct) = \rho_0 c f'(x - ct) = \rho_0 c \tilde{u} \quad (2.2.8)$$

2.3 Ακουστική Ενέργεια

Γνωρίζουμε πως τα περισσότερα είδη κυμάτων μεταφέρουν ενέργεια, άρα και τα ακουστικά. Ένα παράδειγμα είναι, όποτε μιλάμε η ενέργεια που μετατρέπεται σε ήχο μεταδίδεται στο αυτί, όπου κινεί τα απαραίτητα οστά και ο ήχος ακούγεται. Συνεπώς, μας ενδιαφέρει με τι ταχύτητα μεταδίδεται η ενέργεια και πόση είναι αποθηκευμένη σε ένα δοσμένο κύμα. Θα δείξουμε ότι για κάθε στοιχείο του αερίου ισχύει:

$$\frac{d}{dt}(\text{δυναμική ενέργεια} + \text{κινητική ενέργεια}) =$$

$$= \text{τιμή στην οποία οι δυνάμεις της πίεσης παράγουν έργο}$$

Θα ξεκινήσουμε παίρνοντας το βαθμωτό γινόμενο της ταχύτητας u με την εξίσωση της διατήρησης της ορμής 2.1.2:

$$u \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \nabla u \right) = -u \nabla p \quad (2.3.1)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω ταυτότητες:

1)

$$u \times (\nabla \times u) = \frac{1}{2} \nabla (u \cdot u) - u \cdot \nabla u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u \cdot \nabla u = \frac{1}{2} \nabla (u \cdot u) - u \times (\nabla \times u)$$

2)

$$u \cdot u \times (\nabla \times u) = 0$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην 2.3.1 προκύπτει:

$$\begin{aligned} u(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} \nabla(u \cdot u) - \rho \{u \times (\nabla \times u)\}) &= -u \nabla p \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \rho \frac{1}{2} \nabla(u \cdot u) - \rho u \cdot u \times (\nabla \times u) &= -u \nabla p \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{1}{2} \nabla(u \cdot u) &= -u \nabla p \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} |u|^2) + \rho u \nabla (\frac{1}{2} |u|^2) &= -u \nabla p \quad (2.3.2) \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω σχέσεις για να κάνουμε καλύτερη επεξεργασία της 2.3.2:

1.

$$\nabla(up) = u \nabla p + p \nabla u \Leftrightarrow -u \nabla p = p \nabla u - \nabla(up)$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} |u|^2) &= \rho \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} |u|^2) + \frac{1}{2} |u|^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} |u|^2) &= \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} |u|^2) - \frac{1}{2} |u|^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \nabla(\frac{1}{2} \rho |u|^2) &= \rho u \nabla (\frac{1}{2} |u|^2) + \frac{1}{2} |u|^2 (\nabla(\rho u)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho u \nabla (\frac{1}{2} |u|^2) &= \nabla(\frac{1}{2} \rho |u|^2) - \frac{1}{2} |u|^2 (\nabla(\rho u)) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη 2.3.2 προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 \right) - \frac{1}{2} |u|^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 u \right) - \frac{1}{2} |u|^2 \nabla(\rho u) = \\ = p \nabla u - \nabla(pu) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

από τη διατήρηση της μάζας, εξίσωση 2.1.1, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = 0 \Leftrightarrow \rho \nabla u = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - u \nabla \rho \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla u = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \nabla \rho \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

όπου $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \nabla$ η υλική παράγωγος για την πυκνότητα. Η υλική παράγωγος μετράει το ρυθμό αλλαγής μιας ιδιότητας ενός στοιχείου καθώς μεταφέρεται με την κίνηση του ρευστού, αντί να θεωρήσουμε την παράγωγο σε σταθερό σημείο. Αντικαθιστώντας την 2.3.4 στην 2.3.3 έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 \right) + \frac{1}{2} |u|^2 \nabla(\rho u) + \nabla \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 u \right) - \frac{1}{2} |u|^2 \nabla(\rho u) = \\ = -\nabla(Up) - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 \right) + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \left\{ \left(p + \frac{1}{2} \rho |u|^2 \right) u \right\} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Ολοκληρώνοντας την 2.3.5 σε συγκεκριμένο όγκο V σε επιφάνεια S προκύπτει:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 \right) dV + \int_V \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} dV = \int_V -\nabla \left\{ \left(p + \frac{1}{2} \rho |u|^2 \right) u \right\} dV$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \rho |u|^2 dV + \int_V \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} dV = \int_S -\left\{p + \frac{1}{2} \rho |u|^2\right\} u \cdot \eta dS \quad (2.3.6)$$

Όπου S είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S . Η εξίσωση 2.3.6 μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{aligned} & \text{ρυθμός αλλαγής(κινητικής ενέργειας + δυναμική ενέργεια συμπίεσης)} \\ & = \text{έργο που έγινε επί της } S + \text{ροή κινητικής ενέργειας μέσα στο } V \end{aligned}$$

Παρακάτω θα εξηγήσουμε καλύτερα τον όρο δυναμική ενέργεια συμπίεσης. Θεωρούμε ένα αέριο μάζας M , του οποίου ο όγκος αυξάνεται κατά ΔV . Η πυκνότητα του αλλάζει κατά $\Delta \rho$. Ξέρουμε, όμως, πως η μάζα του αερίου δεν μεταβάλλεται, άρα:

$$M = \rho V = (\rho + \Delta \rho)(V + \Delta V) \cong \rho V + V \Delta \rho + \rho \Delta V$$

Συνεπώς, $\Delta V = -\frac{V \Delta \rho}{\rho}$. Το έργο που παράγεται κατά την αλλαγή του όγκου είναι $-p \Delta V = p \frac{V \Delta \rho}{\rho}$. Άρα, ο ρυθμός με τον οποίο αποθηκεύεται η δυναμική ενέργεια ενός δοσμένου όγκου του αερίου, αλλάζει σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\int_V \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} dV$$

Στις ακουστικές προσεγγίσεις θεωρούμε $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$, $p = p_0 + \tilde{p}$, $u = \tilde{u}$ με $\tilde{\rho}$, \tilde{p} , \tilde{u} μικρά. Συνεπώς:

$$\int_V \frac{p_0}{\rho_0} \frac{D\tilde{\rho}}{Dt} = - \int_S p_0 \tilde{u} \cdot \eta dS$$

$$\text{καθώς } \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot u.$$

Με βάση την παραπάνω σχέση η 2.3.6 γίνεται:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho_0 |\tilde{u}|^2 dV + \int_V \frac{\tilde{p}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} dV = - \int_S p \tilde{u} \cdot \eta dS \quad (2.3.7)$$

Παρατηρούμε ότι στο 2ο μέλος της 2.3.7 δεν εμφανίζεται ο όρος που αφορά την ροή της κινητικής ενέργειας, λόγω ότι είναι κυβικός, θεωρείται αμελητέος για τις μικρές προσεγγίσεις. Επίσης, ο όρος $\tilde{p} \tilde{u} \cdot \eta$ δείχνει ότι μας ενδιαφέρει μόνο το έργο που παράγεται από τη διατάραξη της πίεσης, \tilde{p} , και όχι το έργο που παράγεται από την ομοιόμορφη πίεση p_0 . Ξέρουμε ότι $\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}$ άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\tilde{p}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{c^2 \tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \tilde{\rho}^2 \right)$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε την 2.3.7 ως εξής:

$$\frac{d}{dt} \int_V (K + U) dV = - \int_S I \cdot \eta dS \quad (2.3.8)$$

όπου K η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου:

$$K = \frac{1}{2} \rho_0 |\tilde{u}|^2 \quad (2.3.9)$$

όπου U είναι η δυναμική ενέργεια συμπίεσης ανά μονάδα όγκου, που οφείλεται στη διατάραξη της πίεσης

$$U = \frac{c^2 \tilde{\rho}^2}{2\rho_0} = \frac{\tilde{p}}{2c^2 \rho_0} \quad (2.3.10)$$

και I το ποσοστό του έργου της διατάραξης της πίεσης

$$I = \tilde{p} \tilde{u} \quad (2.3.11)$$

Το οποίο είναι, επίσης, ίσο με τη ροή ενέργειας ανά μονάδα περιοχής που είναι γνωστό ως **ακουστική ένταση**. Η ακουστική ένταση έχει μονάδες $W m^{-2}$.

Προφανώς, όσο μεγαλύτερη η ακουστική ένταση τόσο πιο δυνατά ακούγεται στο ανθρώπινο αυτί. Η ένταση ενός ακουστικού κύματος ορίζεται ως $120 + 10 \log |I|$ και μετράται σε decibels. Το ελάχιστο ακουστικό επίπεδο εμβέλειας από 500 ως 800 Hz είναι $0dB$, το οποίο είναι ισοδύναμο με $10^{-2}Wm^{-2}$.

Τέλος, θεωρούμε το ποσοστό ενέργειας που περιέχεται και μεταδίδεται σε ένα επίπεδο κύμα. Από τις 2.2.6-2.2.8 έχουμε:

$$K = U = \frac{1}{2}\rho_0 f'^2$$

Συνεπώς, σε κάθε σημείο του κύματος είναι:

$$K + U = \rho_0 f'^2 = \rho_0 \tilde{u}^2$$

και η ακουστική ένταση είναι:

$$I = \tilde{p}\tilde{u} = \rho_0 c \tilde{u}$$

2.4 Επίπεδος κυματοδηγός

Σε αυτή τη περίπτωση θα θεωρήσουμε δύο άκαμπτους, παράλληλους τοίχους στο $x = 0$ και $x = d$. Συνεπώς, το ερώτημα που προκύπτει είναι, τι είδους ακουστικά κύματα μπορούν να διαδοθούν στον επίπεδο κυματοδηγό, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει μεταβολή στη διεύθυνση του y . Γνωρίζουμε ότι ένα επίπεδο κύμα μπορεί να διαδοθεί κατά μήκος του κυματοδηγού με διάνυσμα κυματάριθμου κατά τη z διεύθυνση. Αυτό που μπορούμε να φανταστούμε είναι ένα κύμα, το οποίο διαδίδεται σε διαφορετική κατεύθυνση και ανακλάται συνεχώς από τις πλάκες με προσπίπτουσα γωνία θ_1 και ίδια γωνία ανάκλασης.

Αυτή η περίπτωση μπορεί να περιγραφεί ως το άθροισμα δύο επίπεδων κυμάτων:

$$\begin{aligned} \phi = & A \exp \left\{ i\omega \left(t - \sin \theta_1 \frac{z}{c} + \cos \theta_1 \frac{x}{c} \right) \right\} \\ & + A \exp \left\{ i\omega \left(t - \sin \theta_1 \frac{z}{c} - \cos \theta_1 \frac{x}{c} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Πρέπει, επίσης, να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{στο} \quad x = d$$

συνεπώς

$$\exp \left(i \cos \theta_1 \frac{\omega d}{c} \right) = \exp \left(-i \cos \theta_1 \frac{\omega d}{c} \right)$$

αυτό σημαίνει ότι

$$\cos \theta_1 \frac{\omega d}{c} = -\cos \theta_1 \frac{\omega d}{c} + 2n\pi$$

άρα, για $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\cos \theta_1 = \frac{n\pi c}{\omega d}$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση υπάρχει ένα διακριτό σύνολο για το n_{max} και το θ_1 , καθώς $\cos \theta_1 \leq 1$, για το οποίο μπορεί να διαδοθεί το κύμα ζικ-ζακ. Όπου n_{max} είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $n_{max} \leq \omega d / \pi c$. Κάθε τέτοιος αριθμός καλείται κυματομορφή για το συγκεκριμένο κυματάριθμο. Μπορούμε να γράψουμε το ακουστικό δυναμικό για τη ν-οστή κυματομορφή ως εξής

$$\phi_n = 2A \cos \frac{n\pi x}{d} e^{i(\omega t - k_n z)} \quad \text{για} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(2.4.2)

όπου

$$k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}} \quad (2.4.3)$$

είναι ο κυματάρριθμος στην z -διεύθυνση. Για $n = 0$ παρατηρούμε ότι η λύση αναπαριστά ένα επίπεδο κύμα, το οποίο διαδίδεται στη διεύθυνση του z με ταχύτητα c . Για $0 < n < n_{max}$, παρόλο που αυτή η περίπτωση δεν μπορεί να έχει φυσική σημασία, στην περίπτωση της πρόσθεσης δύο επίπεδων κυμάτων η 2.4.2 παραμένει έγκυρη, με k_n φανταστικό. Η λύση μειώνεται εκθετικά καθώς $z \rightarrow \infty$, συνεπώς αυτές είναι κυματομορφές που σβήνουν. Εναλλακτικά, για σταθερό κυματάρριθμο k , ένα κύμα μπορεί να διαδοθεί κατά μήκος ενός κυματοδηγού μόνο για συχνότητες μεγαλύτερες από τις συχνότητες αποκοπής

$$\omega_c = \frac{\pi c}{d}$$

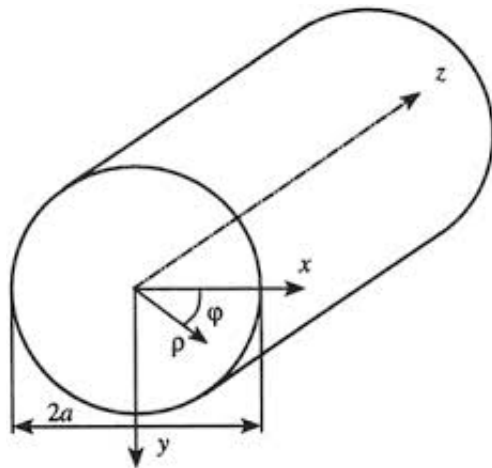
και υπάρχει μόνο μια ακολουθία από ιδιοσυχνότητες, για τις οποίες το αέριο μπορεί να διεγερθεί, που δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\omega_n = c\sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{d^2}}$$

ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ανάκλασης κύματος σε επίπεδο κυματοδηγό αποτελεί η ανάκλαση φωτός σε οπτικές ίνες.

2.5 Κυκλικός κυματοδηγός

Θεωρούμε ένα άκαμπτο κυκλικό κύλινδρο του οποίου το εσωτερικό δίνεται από τις κυλινδρικές συντεταγμένες, με $0 \leq a, -\infty < z < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ όπως φαίνεται παρακάτω:



Η τρισδιάστατη κυματική εξίσωση δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.5.1)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{στο} \quad r=a$$

Καθώς δεν μπορεί να υπάρχει κανονική ταχύτητα στους στερεούς τοίχους της κυκλικής ράβδου.

Με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών ψάχνουμε λύσεις της μορφής $\phi(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t)$. Εάν αντικα-

ταστήσουμε στην 2.5.1 έχουμε:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.5.2)$$

Διαλέγουμε ως σταθερά το $-\omega^2/c^2$, επειδή θέλουμε να προκύψουν ταλαντωτικές λύσεις ως προς τα t, r, z . Βρίσκουμε πρώτα λύσεις για τη μεταβλητή του χρόνου:

$$\frac{T''}{T} \frac{1}{c^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow T'' = -\omega^2 T \Leftrightarrow T'' + \omega^2 T = 0 \quad (2.5.3)$$

για $\omega > 0$. Η παραπάνω εξίσωση έχει ως λύση:

$$T(t) = \exp(\pm i\omega t)$$

Αντικαθιστώντας την 2.5.2 προκύπτει:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = -\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{Z''}{Z} = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \quad (2.5.4)$$

Άρα,

$$\frac{Z''}{Z} = k^2 \Leftrightarrow Z'' + k^2 Z = 0$$

και ως λύσεις η παραπάνω εξίσωση έχει:

$$Z(z) = \exp(\pm ikz)$$

Αυτό δείχνει ότι για κύματα που διαδίδονται στη διεύθυνση του άξονα z , έχουν ως κυματοδηγό το k . Τέλος, από την 2.5.4 έχουμε

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) R = 0 \quad (2.5.5)$$

Υποθέτουμε ότι $\omega^2 < k^2 c^2$, καθώς για $\omega^2 < k^2 c^2$ δεν υπάρχουν φραγμένες λύσεις που να ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη. Θέτουμε

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \lambda^2$$

και

$$\bar{r} = \lambda r \Leftrightarrow d\bar{r} = \lambda dr \Leftrightarrow \frac{d\bar{r}}{dr} = \lambda$$

Συνεπώς,

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{dr} = \frac{dR}{d\bar{r}} \lambda \quad (2.5.6)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dr} \frac{d\bar{r}}{dr} \right) = \frac{d^2 R}{d\bar{r}^2} \lambda^2 + \frac{dR}{d\bar{r}} \frac{d^2 \bar{r}}{dr^2} = \lambda^2 \frac{d^2 R}{d\bar{r}^2} \quad (2.5.7)$$

Αντικαθιστώντας τις 2.5.6, 2.5.7 στην 2.5.5 έχουμε:

$$\lambda^2 \frac{d^2 R}{d\bar{r}^2} + \lambda \frac{\lambda dR}{\bar{r} d\bar{r}} + \lambda^2 R = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 R}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dR}{d\bar{r}} + R = 0 \quad (2.5.8)$$

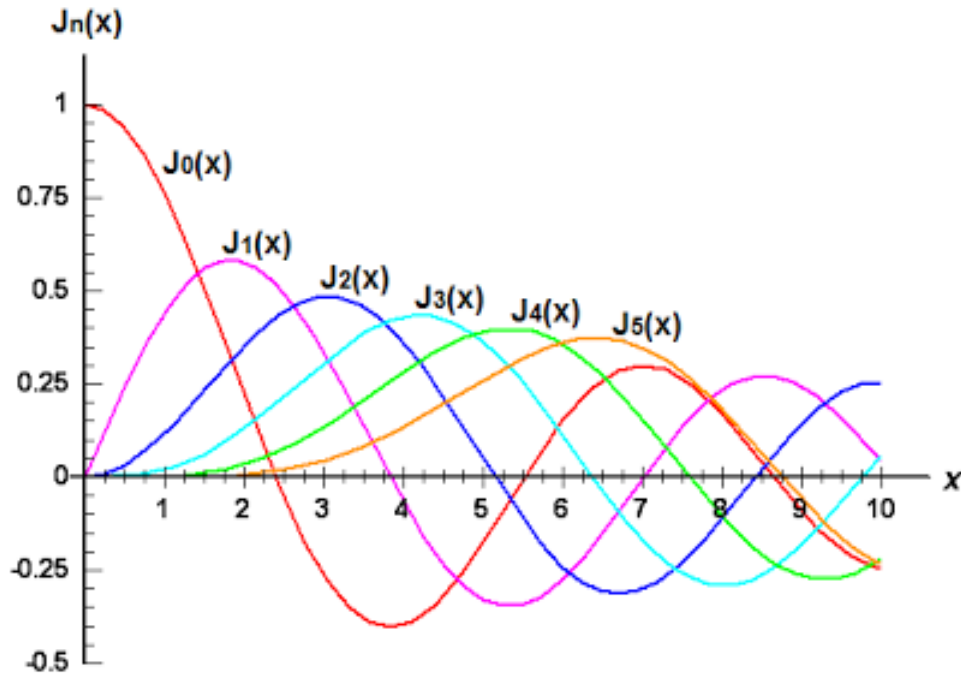
Η 2.5.8 είναι η εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης και έχει ως γενική λύση :

$$R = AJ_0(\bar{r}) + BY_0(\bar{r})$$

για αυθαίρετες σταθερές A, B . Όπως αναφέραμε πιο πάνω αναζητάμε λύσεις για να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη και επειδή για $\bar{r} \rightarrow 0$, $Y_0 \rightarrow -\infty$, η Y_0 δεν είναι αποδεκτή. Συνεπώς, η τελική λύση για την 2.5.5 είναι:

$$R = AJ_0 \left(\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)^{1/2} r \right)$$

όπου $J_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1)} \cdot \left(\frac{r}{2} \right)^{2n}$ και απεικονίζεται παρακάτω :



Θέλουμε, επίσης, αυτή η λύση να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $\frac{\partial \phi}{\partial t}|_{r=a} = 0$, άρα πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα k ώστε :

$$J'_0 \left(\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)^{1/2} a \right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)^{1/2} a = m_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

όπου m_n είναι τα σημεία καμπής της J_0 . Για δοσμένη γωνιακή ταχύτητα έχουμε:

$$k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m_n^2}{a^2}}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Για διαφορετικές τιμές των n προκύπτουν διαφορετικές κυματομορφές. Άρα, ως τελική λύση της 2.5.1 έχουμε:

$$\phi(r, z, t) = \exp(-i(\omega t - k_n z)) J_0(m_n r/a)$$

για κύματα που διαδίδονται στη θετική κατεύθυνση.

3 Κρουστικά Κύματα

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελέτησα ακουστικά κύματα, τα οποία είναι μικρές διαταράξεις του πλάτους ενός στατικού σώματος συμπιεσμένου αέρα. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσω τη δυναμική ενός αερίου που είναι συμπιεσμένο, το οποίο συνεπάγεται ότι το εύρος διατάραξης δεν είναι μικρό. Πιο συγκεκριμένα, θα καταλήξω στο ότι μπορούν να δημιουργηθούν κρουστικά κύματα και θα μελετήσω τις ιδιοτητές τους. Η πίεση, η πυκνότητα, η ταχύτητα και η τοπική ακουστική ταχύτητα στο αέριο μπορούν να μεταβάλλονται με μη συνεχή τρόπο στα κρουστικά κύματα.

3.1 Στοιχεία Θερμοδυναμικής

Στην κλασική κινητική θεωρία, το θεώρημα της ισοκατανομής της ενέργειας μας λέει ότι υπάρχει μια μέση εσωτερική ενέργεια $\frac{1}{2}kT$, η οποία συνδέεται με κάθε βαθμό ελευθερίας των μορίων μέσα σε ένα ιδανικό αέριο, για το οποίο δεν υπάρχει διαμοριακή αλληλεπίδραση, όπου k είναι η σταθερά Boltzmann και T η απόλυτη θερμοκρασία. Για ένα άτομο σε μεταφορική κίνηση υπάρχουν 3 βαθμοί ελευθερίας, έτσι η εσωτερική ενέργεια είναι $\frac{3}{2}kT$. Για ένα γραμμομόριο αυτών των ατόμων, η ενέργεια είναι $\frac{3}{2}kN_A T$, όπου N_A ο αριθμός Avogadro. Η παγκόσμια σταθερά αερίου είναι $R = kN_a \approx 8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, έτσι η εσωτερική ενέργεια ενός γραμμομρίου ατόμων είναι $E = \frac{3}{2}RT$. Για ένα γραμμομόριο μορίων που αποτελείται από 2 άτομα, εκτός από τους βαθμούς ελευθερίας που οφείλονται στη μεταφορική κίνηση, υπάρχουν και άλλοι δύο βαθμοί ελευθερίας λόγω περιστροφής, έτσι ώστε η συνολική εσωτερική ενέργεια να

είναι $E = \frac{3}{2}RT$. Αυτή είναι μια λογική προσέγγιση για τον αέρα, ο οποίος αποτελείται κυρίως από διατομικά αέρια αζώτου και οξυγόνου. Παρατηρούμε ότι η E είναι ανάλογη με την ιδανική θερμοκρασία ενός ιδανικού αερίου.

Ας λάβουμε υποψή μας τις αλλαγές θερμοκρασίας και πίεσης που συμβαίνουν όταν ένα αέριο θερμαίνεται και επιτρέπεται να αλλάζει ο όγκος του. Εάν ένα ποσό θερμότητας Q απορροφάται (ή ελευθερώνεται) από ένα όγκο αερίου και το έργο που παράγεται από οποιαδήποτε αλλαγή του όγκου είναι W , τότε η αλλαγή στην εσωτερική ενέργεια δίνεται από τον **πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής**:

$$dE = Q - W \quad (3.1.1)$$

Εάν αγνοήσουμε το ιζώδες και μαγνητικά φαινόμενα, τότε έχουμε $W = pdV$, έτσι ώστε:

$$dE = Q - pdV \quad (3.1.2)$$

Τώρα θα εισάγουμε την ιδέα της εντροπίας ενός αερίου S , σαν το ποσό της θερμικής ενέργειας το οποίο δεν είναι διαθέσιμο για μετατροπή σε μηχανική ενέργεια. Αυτό μας οδηγεί στο να θεωρούμε την εντροπία σαν ένα μέτρο της τυχαιότητας και αταξίας του αερίου. Πιο συγκεκριμένα, εάν ένα ποσό θερμότητας απορροφάται στην απόλυτη θερμοκρασία τότε η εντροπία αυξάνεται κατά ένα ποσό $dS = \frac{Q}{T}$ και σε αυτό το σημείο μπορούμε να παρουσιάσουμε το **δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής**

$$dE = TdS - pdV \quad (3.1.3)$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε την E ως μια συνάρτηση του S και του V έχουμε

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S dV \quad (3.1.4)$$

έτσι ώστε να μπορούμε επίσημα να ορίσουμε:

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V, \quad p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S$$

καθώς από 3.1.3, 3.1.4 έχουμε :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S dV &= TdS - pdV \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V, \quad p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S \end{aligned}$$

Σε αυτές τις εξισώσεις το υπογεγραμμένο γράμμα δηλώνει ποιά μεταβλητή παραμένει σταθερή κατά την παραγωγή.

Υπάρχουν δύο επιπλέον ενέργειες που θα χρησιμοποιήσουμε: Η **ενθαλπία** $H = E + pV$ και η **ελεύθερη ενέργεια** $F = E - TS$. Αυτά είναι μέτρα το κατά πόση ενέργεια έχει διαθέσιμη το αέριο για να ανταλλάξει με το περιβάλλον. Για τη μεταβολή της ενθαλπίας έχουμε:

$$dH = dE + pdV + Vdp \quad (3.1.5)$$

Χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής η 3.1.5 μπορεί να γίνει:

$$dH = TdS + Vdp \quad (3.1.6)$$

Θεωρώντας την H ως μια συνάρτηση της ενθαλπίας S και της πίεσης p προκύπτει

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S$$

Υποθέτοντας ότι η ενθαλπία έχει ομαλή δεύτερη παράγωγο έχουμε:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \quad (3.1.7)$$

Ένας επιπλέον υπολογισμός για την ελεύθερη ενέργεια δίνει:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \quad (3.1.8)$$

Εάν ένα αέριο απορροφά ένα ποσό θερμότητας και η θερμοκρασία του αυξάνεται κατά dT , τότε μπορούμε να ορίσουμε την **ειδική θερμοχωρητικότητα** ή **ειδική θερμότητα** c ως $Q = cdT$. Από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής παίρνουμε $dE = cdT - pdV$. Εάν η απορρόφηση θερμότητας εκτυλίσσεται σε σταθερό όγκο, τότε έχουμε την ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο και $dE = c_V dT$,

$$c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$$

Όπως έχουμε δει για ένα διατομικό ιδανικό αέριο, $E = \frac{5}{2}RT \Rightarrow c_V = \frac{5}{2}R$. Εάν η απορρόφηση συμβαίνει σε σταθερή πίεση, τότε έχουμε $c = c_P$ την ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση και $dp = 0$, άρα $c_p dT = dE + pdV$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} c_p &= \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left[\frac{\partial}{\partial T}(E + pV)\right]_p = \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \end{aligned}$$

το οποίο μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να εξάγουμε μια σχέση ανάμεσα σε c_V και c_p . Εάν θεωρήσουμε την E

σαν μια συνάρτηση του $V(p, T)$ και T αντί των T και S , τότε:

$$\begin{aligned} c_p &= \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = \left[\frac{\partial}{\partial T} (E[V(p, T), T] + pV) \right] = \\ &= \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει:

$$c_p = c_v + \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Από το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής θεωρώντας την E συναρτήσει των $S = S(V, T)$ και V έχουμε :

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - p$$

άρα,

$$c_p = c_v + T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

από την 3.1.8 έχουμε

$$c_p = c_v + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (3.1.9)$$

Για ένα γραμμομόριο ιδανικού αερίου ισχύει $pV = RT$. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους έχουμε

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p}$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην 3.1.9 προκύπτει:

$$c_p = c_v + T \frac{R R}{V p} = c_v + T \frac{R R}{V RT} V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c_p = c_V + R}$$

Για διατομικά ιδανικά αέρια ισχύει $c_p = \frac{7}{2}R$. Από το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής έχουμε

$$dS = c_V \frac{dT}{T} + p \frac{dV}{T}$$

καθώς

$$dE = TdS - pdV$$

όμως $dE = c_V dT$,

$$dS = \frac{dE}{T} + p \frac{dV}{T} = c_V \frac{dT}{T} + p \frac{dV}{T} = c_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$$

και συνεπώς

$$\frac{dS}{c_V} = \frac{dT}{T} + \left(\frac{c_p}{c_V} - 1 \right) \frac{dV}{V}$$

εάν ορίσουμε $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ τον λόγο των ειδικών θερμοχωρητικότητων του αερίου, τότε ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση προκύπτει :

$$\int \frac{dS}{c_V} = \int \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \int \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{S}{c_V} + c = \ln(T) + (\gamma - 1) \ln(V) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{c_V} + c = \ln(TV^{\gamma-1}) \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = A \exp(S/c_V)$$

για κάποια σταθερά A. Χρησιμοποιώντας το νόμο για ιδανικά αέρια, προκύπτει :

$$\frac{S}{c_V} = \log \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + c \quad (3.1.10)$$

όπου c σταθερά. Άρα,

$$p = k \exp(S/c_V) \rho^\gamma$$

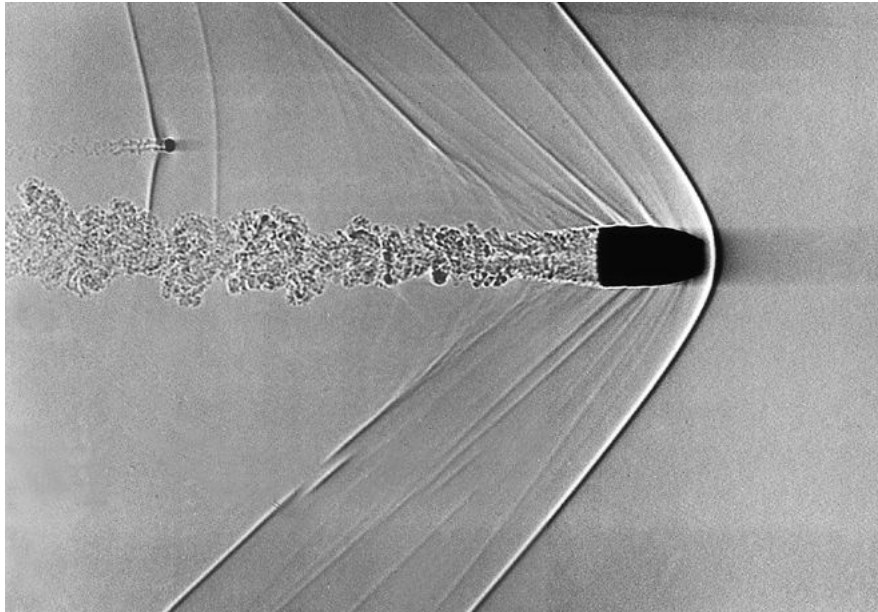
για κάποια σταθερά k .

Για διατομικά αέρια, $\gamma = 1.4$. Αυτή είναι η εξίσωση που χρησιμοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 2, όταν ορίσαμε την ταχύτητα του ήχου σε ένα αέριο. Όπως θα δείξουμε παρακάτω, η εντροπία ενός αερίου ικανοποιεί μια πολύ απλή εξίσωση και τα στοιχεία θερμοδυναμικής που μελετήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι αρκετά ώστε να ασχολήθουμε με τις ιδιότητες που αφορούν τα κρουστικά κύματα. Είναι φανερό ότι η εσωτερική ενέργεια E μιας μονάδας μάζας ενός αερίου μπορεί να γραφτεί ως

$$E = c_V T = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}$$

Μερικά παράδειγματα κρουστικών

Σχήμα 1: Σφαίρα η οποία κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου



Κρουστικά κύματα

Ένα κρουστικό κύμα είναι ένα κύμα, το οποίο κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου σε ένα ρευστό. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2 το κρουστικό κύμα δημιουργείται καθώς το σώμα πέφτει με υπερχητική ταχύτητα και σπρώχνει τον αέρα μπροστά. Στη περιοχή την οποία συμβαίνει αυτό, ηχητικά κύματα τα οποία 'ταξιδεύουν' αντίθετα από τη ροή, φτάνουν σε ένα σημείο στο οποίο δεν μπορούν πλέον να 'ταξιδεύουν' αντίθετα από τη ροή με αποτέλεσμα να συμπιέζεται αέρας γύρω από το σώμα, δηλαδή να δημιουργείται σταδιακά υψηλή πίεση και ένα κρουστικό κύμα υψηλής πίεσης.

Σχήμα 2: Κρουστικό κύμα σε ελεύθερη πτώση



3.2 Εξισώσεις Κίνησης

Θα υποθέσουμε τώρα ότι το αέριο είναι μη ιξώδες και ότι η επίδραση της βαρύτητας δεν είναι σημαντική, όπως κάναμε στο Κεφάλαιο 2, αλλά δεν θα υποθέσουμε ότι η κίνηση του αερίου είναι μια μικρή διαταραχή ενός στατικού σώματος αερίου. Είναι πιο βολικό να γράψουμε τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και ορμής στην μορφή:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla u = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0 \quad (3.2.2)$$

όπου $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\nabla$ η υλική παράγωγος. Χρειαζόμαστε, επίσης, την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας. Η ενέργεια, ανά μονάδα μάζας του αερίου αποτελείται από την εσωτερική ενέργεια E και από την κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}|u|^2$.

Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας συνδέει τη ροή της

ενέργειας με την ενέργεια που παράγεται από τις δυνάμεις που ασκούνται λόγω πίεσης και δίνεται από:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho E \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho E + p \right) u \right\} = 0 \quad (3.2.3)$$

η 3.2.3 μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho E \right) + \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho E \right) \nabla u + \nabla(pu) = 0$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u|^2 \frac{D\rho}{Dt} + \rho u \frac{Du}{Dt} + E \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DE}{Dt} + \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho E \right) \nabla u + \\ + p \nabla u + u \nabla p = 0 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις 3.2.1, 3.2.2 απαλοίφουμε ∇u και Du/Dt καθώς:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u|^2 \frac{D\rho}{Dt} + \rho u \left(\frac{-1}{\rho} \nabla p \right) + E \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DE}{Dt} + \\ + \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho E \right) \left(-\frac{D\rho}{Dt} \frac{1}{\rho} \right) + p \nabla u + u \nabla p = 0 \Leftrightarrow \\ E \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DE}{Dt} - E \frac{D\rho}{Dt} + p \nabla u = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho \frac{DE}{Dt} - \frac{D\rho}{Dt} \frac{1}{\rho} p = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{DE}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \end{aligned}$$

Ξέρουμε ότι:

$$TdS = dE - pdV = dE - \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

Αντικαθιστώντας όπου $dS = \frac{DS}{Dt}$, $dE = \frac{DE}{Dt}$, $d\rho = \frac{D\rho}{Dt}$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} T \frac{DS}{Dt} &= \frac{DE}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{DS}{Dt} &= \frac{\partial S}{\partial t} + u \nabla S = 0 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Ξεκινήσαμε από τη διατήρηση της ενέργειας και καταλήξαμε στην 3.2.4, η οποία αποτελεί τον πιο απλό τρόπο να εκφράσουμε τη διατήρηση της ενέργειας σε μια ιδανική, μη ιξώδης ροή και δηλώνει ότι η εντροπία προσάγεται με τη ροή και για αυτό το λόγο είναι σταθερή κατά μήκος της μη τυρβώδους ροής. Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει από την ιδέα ενός ιδανικού αερίου του οποίου η μοριακή διαχυτικότητα είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να μεταφερθεί θερμότητα μεταξύ των σωματιδίων και η εντροπία πρέπει να βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Αυτού του είδους η ροή χαρακτηρίζεται ως ισεντροπική. Εάν η εντροπία είναι χωρικά ομοιόμορφη, τότε λέμε ότι η ροή είναι ομοεντροπική. Πιο συγκεκριμένα, σε μια ομοεντροπική ροή, χωρίς κρουστικά κύματα, $S = S_0$, τότε $p = k\rho^\gamma$, όπου $k = \kappa \exp^{S_0/c_p}$ μια σταθερά. Αυτή είναι η σχέση που χρησιμοποιήσαμε ανάμεσα στην πίεση και την πυκνότητα στο Κεφάλαιο 2. Οι εξισώσεις 3.2.1 και 3.2.2 γίνονται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u + k \gamma \rho^{\gamma-2} \nabla \rho = 0 \quad (3.2.6)$$

Για μονοδιάστατες ροές έχουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + k\gamma\rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (3.2.8)$$

3.3 Εύρεση των Χαρακτηριστικών Καμπυλών

Σε αυτό το σημείο, θα ασχοληθούμε με την εύρεση των χαρακτηριστικών καμπυλών για το σύστημα 3.2.7 και 3.2.8. Θα γράψουμε το σύστημα βάση της ταχύτητας u και της τοπικής ακουστικής ταχύτητας c , προκειμένου να διευκολυνθούμε στο να τις βρούμε. Όπου c θεωρούμε

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} = \sqrt{\gamma k \rho^{\gamma-1}}$$

Άρα, οι 3.2.7 και 3.2.8 γίνονται

$$2 \frac{\partial c}{\partial t} + 2u \frac{\partial c}{\partial x} + (\gamma - 1)c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2c}{\gamma - 1} \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (3.3.2)$$

Διαιρούμε την 3.3.1 με $\gamma - 1$ και έχουμε

$$\frac{2}{\gamma - 1} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{2u}{\gamma - 1} \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.3.3)$$

Προσθαιρώντας τις 3.3.2 και 3.3.3 καταλήγουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u \pm \frac{2c}{\gamma - 1} \right) + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u \pm \frac{2c}{\gamma - 1} \right) = 0 \quad (3.3.4)$$

Οι αναλλοίωτες του **Riemann** του συστήματος μας

είναι $R_{\pm} = u \pm \frac{2c}{\gamma-1}$, οι οποίες παραμένουν σταθερές πάνω στις χαρακτηριστικές καμπύλες. Οι αναλλοίωτες του Riemann είναι μετασχηματισμοί που κάνουμε, όταν έχουμε ένα σύστημα εξισώσεων διατήρησης, προκειμένου να το λύσουμε πιο εύκολα. Έχουν την ιδιότητα να παραμένουν σταθερές κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών των μερικών διαφορικών εξισώσεων, για αυτό το λόγο ονομάζονται και αναλλοίωτες. Έστω

$$R_{\pm}(x, t) = u \pm \frac{2c}{\gamma - 1}$$

Πάνω στις χαρακτηριστικές καμπύλες θα έχουμε

$$R_{\pm}(X(t), t) = R_{\pm}(X(0), 0) = R_{\pm,0}(X(0))$$

Άρα,

$$\frac{\partial R_{\pm}}{\partial t} = \frac{\partial R_{\pm}}{\partial t} + \frac{\partial X(t)}{\partial t} \frac{\partial R_{\pm}}{\partial X} = 0 \quad (3.3.5)$$

Συνεπώς, από 3.3.4 και 3.3.5 προκύπτει ότι

$$\frac{\partial X(t)_{\pm}}{\partial t} = u \pm c$$

όπου $X(t)_{\pm}$ οι χαρακτηριστικές καμπύλες. Συνοψίζοντας ,

- Στις C_+ χαρακτηριστικές που δίνονται από $dX_+/dt = u + c$, η C_+ αμετάβλητη, $R_+ = u + \frac{2c}{\gamma-1}$ είναι σταθερή
- Στις C_- χαρακτηριστικές που δίνονται από $dX_-/dt = u - c$, η C_- αμετάβλητη, $R_- = u - \frac{2c}{\gamma-1}$ είναι σταθερή

Στην περίπτωση ενός προβλήματος αρχικών τιμών προκειμένου να είναι καλά ορισμένη η λύση του, πρέπει από κάθε σημείο του πεδίου ορισμού να περνάει μοναδική C_+ και μοναδική C_- . Συνεπώς, οι τιμές της u και ρ μπορούν να υπολογιστούν από τις αρχικές τιμές της R_{\pm} .

3.4 Η δημιουργία ενός Κρουστικού Κύματος από ένα ομοιόμορφα επιταχυνόμενο έμβολο

Θα θεωρήσουμε ένα ιδανικό αέριο, το οποίο είναι περιορισμένο σε ένα μακρύ κύλινδρο με κατάλληλο σφιχτό έμβολο και αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία στο $x = 0$. Θα μελετήσουμε την περίπτωση στην οποία το αέριο και το έμβολο βρίσκονται αρχικά σε ηρεμία και το έμβολο κινείται μέσα στο αέριο με ομοιόμορφη επιτάχυνση a . Συνεπώς, το έμβολο θα βρίσκεται στη θέση $x = \frac{1}{2}a^2t$ και το αέριο στην περιοχή $x \geq \frac{1}{2}a^2t$, με αρχική ταχύτητα ήχου c_0 .

Συνδυάζοντας $c_0^2 = \gamma/\rho$ και την καταστατική εξίσωση $pV = RT$ έχουμε ότι το c_0 είναι ανάλογο του \sqrt{T} . Καθώς το έμβολο θα αρχίσει να συμπιέζει το αέριο, η θερμοκρασία θα αυξάνεται. Όσο η διαδικασία εξελίσσεται, η ταχύτητα του κύματος c_0 θα αυξηθεί και κύματα που θα παραχθούν αργότερα, θα φτάσουν αυτά που παράχθηκαν νωρίτερα, το οποίο σημαίνει ότι η λύση μας θα έχει πολλαπλές τιμές.

Υποθέτουμε τώρα ότι, η C_- η οποία δημιουργείται στο αέριο τη χρονική στιγμή $t = 0$, γεμίζει το πεδίο ορισμού. Πάνω σε αυτές τι χαρακτηριστικές καμπύλες ισχύει

$$R_- = u - \frac{2c}{\gamma - 1} = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}$$

άρα,

$$c = c_0 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)u$$

κατά μήκους του αερίου. Αυτό, επίσης, δείχνει ότι όλες οι C_+ χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες, καθώς σε αυτές οι R_+ και συνεπώς τα u, c και dX_+/dt είναι σταθερά. Πιο συγκεκριμένα, οι C_+ που προέρχονται από το έμβολο όταν

$t = t_0$ ικανοποιούν

$$\frac{dX_+}{dt} = u + c = at_0 + c_0 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)at_0 = c_0 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)at_0$$

και συνεπώς

$$X_+(t; t_0) = \frac{1}{2}at_0^2 + \{c_0 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)at_0\}(t - t_0)$$

Οι κλίσεις αυτών των ευθειών, αυξάνονται με ρυθμό t_0 και συνεπώς αναμένουμε να τέμνονται σε κάποιο πεπερασμένο χρόνο t_s , όπου δημιουργείται το σημείο σοκ. Όπως συνήθως αυτό αναμένουμε να συμβεί σε γειτονικές χαρακτηριστικές καμπύλες. Για $\delta t_0 \ll 1$, παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor της X_+

$$X_+(t, t_0 + \delta t_0) = X_+(t, t_0) + \delta t_0 \frac{\partial X_+}{\partial t_0}(t, t_0)$$

Άρα, γειτονικές χαρακτηριστικές καμπύλες θα τέμνονται όταν $\partial X_+ / \partial t_0 = 0$ και συνεπώς

$$t = \frac{2c_0}{a(\gamma + 1)} + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}t_0$$

Αυτό πρώτα συμβαίνει πάνω στις χαρακτηριστικές καμπύλες για τις οποίες ισχύει $t_0 = 0$ όταν

$$t = t_s = \frac{2c_0}{a(\gamma + 1)}$$

άρα,

$$x = x_s = \frac{2c_0^2}{a(\gamma + 1)}$$

Η βαθμωτή επιτάχυνση του εμβόλου αναγκάζει το κύμα, το οποίο αναπαράγει, να πάρει απότομη κλίση μέχρι να δημιουργηθεί κρουστικό κύμα στο σώμα του αερίου στη θέση

$x = x_s$. Η τοπική ταχύτητα του ήχου αυξάνεται πίσω από το σημείο $x = c_0 t$ μέχρι η κλίση να γίνει άπειρη και να σχηματιστεί κρουστικό κύμα. Εάν η κίνηση του εμβόλου ξεκινάει αυθόρμητα όταν $t = 0$, έτσι ώστε να κείται στο $x = v t$ με $v > 0$ σχηματίζεται αμέσως κρουστικό κύμα στο μέτωπο του εμβόλου.

3.5 Οι σχέσεις Rankine-Hugoniot

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τον καθορισμό των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιούνται στο σημείο που συμβαίνει το σοκ. Θα θεωρήσουμε τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας σε μια γειτονιά του σημείου σοκ προκειμένου να αντλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες. Υποθέτουμε ότι το κρουστικό κύμα είναι επίπεδο και κείται στο $x = s(t)$, μπορούμε να γράψουμε την 3.2.1 σε ολοκληρωτική μορφή

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho dx + [\rho u]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (3.5.1)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{x_1}^{s(t)} + \int_{s(t)}^{x_2} \right) \rho dx = \left(\int_{x_1}^{s(t)} + \int_{s(t)}^{x_2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + \rho_R \dot{s} - \rho_L \dot{s}$$

όπου τις ποσότητες δεξιά και αριστερά του σοκ τα συμβολίζουμε με R και L αντίστοιχα. Παίρνοντας τα όρια $x_1 \rightarrow s(t)$ και $x_2 \rightarrow s(t)$ στην παραπάνω σχέση η 3.5.1 γίνεται

$$[\rho_L - \rho_R] \dot{s} = \rho_L u_L - \rho_R u_R$$

Εάν ορίσουμε $\bar{u} = u - \dot{s}$ η ταχύτητα του αερίου σε σχέση με το σοκ, καταλήγουμε :

$$\begin{aligned} [\rho_L - \rho_R]\dot{s} &= \rho_L(\bar{u}_L + \dot{s}) - \rho_R(\bar{u}_R + \dot{s}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho_L\dot{s} - \rho_R\dot{s} &= \rho_L\bar{u}_L + \rho_L\dot{s} - \rho_R\bar{u}_R + \rho_R\dot{s} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho_L\bar{u}_L &= \rho_R\bar{u}_R \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

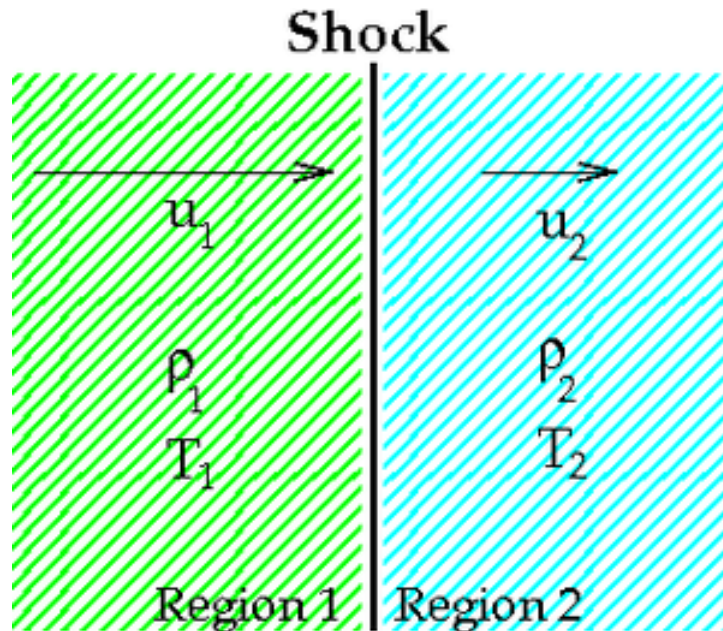
Παρομοίως, χρησιμοποιώντας τις 3.2.2 και 3.2.3 καταλήγουμε

$$\rho_L\bar{u}_L^2 + p_L = \rho_R\bar{u}_R^2 + p_R \quad (3.5.3)$$

και

$$\left(\frac{1}{2}\rho_L\bar{u}_L^2 + \rho_L E_L + p_L \right) \bar{u}_L = \left(\frac{1}{2}\rho_R\bar{u}_R^2 + \rho_R E_R + p_R \right) \bar{u}_R \quad (3.5.4)$$

Σχήμα 3: Οι διάφορες φυσικές ποσότητες σε κάθε πλευρά του σημείου σοκ



Αυτές είναι οι γνωστές σχέσεις Rankine-Hugoniot και εκφράζουν το γεγονός ότι η ροή της μάζας, της ορμής και

της ενέργειας πρέπει να είναι συνεχείς στα κρουστικά κύματα, παρόλο που η πίεση, η πυκνότητα και η εσωτερική ενέργεια του αερίου μπορεί να είναι ασυνεχείς.

Για ένα ιδανικό αέριο η ενέργεια του δίνεται από τη σχέση $E = p/\rho(\gamma - 1)$, έτσι η εξίσωση της συνέχειας της ροής της ενέργειας μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\left(\frac{1}{2}\bar{u}_L^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_L}{\rho_L}\right) \rho_L \bar{u}_L = \left(\frac{1}{2}\bar{u}_R^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_R}{\rho_R}\right) \rho_R \bar{u}_R$$

Χρησιμοποιώντας την 3.5.2 προκύπτει

$$\frac{1}{2}\bar{u}_L^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_L}{\rho_L} = \frac{1}{2}\bar{u}_R^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_R}{\rho_R}$$

Μπορούμε, επίσης, να γράψουμε τις σχέσεις Rankine-Hugoniot βάση της τοπικής ταχύτητας του ήχου $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$

$$\rho_L \bar{u}_L = \rho_R \bar{u}_R \quad (3.5.5)$$

$$\rho_L \left(\bar{u}_L^2 + \frac{1}{\gamma} c_L^2\right) = \rho_R \left(\bar{u}_R^2 + \frac{1}{\gamma} c_R^2\right) \quad (3.5.6)$$

$$\frac{1}{2}\bar{u}_L^2 + \frac{1}{\gamma - 1} c_L^2 = \frac{1}{2}\bar{u}_R^2 + \frac{1}{\gamma - 1} c_R^2 \quad (3.5.7)$$

Αυτή είναι η πιο συνηθισμένη μορφή που θα συναντήσουμε τις σχέσεις Rankine-Hugoniot. Επειδή έχουμε 3 εξισώσεις με έξι αγώστους \bar{u}_L , ρ_L , c_L , \bar{u}_R , ρ_R , c_R , έχουμε τη δυνατότητα να απαλείψουμε 2 από αυτές και να έχουμε μια εξίσωση που θα εμπεριέχει 4 αγνώστους. Για παράδειγμα, για να απαλείψουμε \bar{u}_R , c_R χρησιμοποιούμε την εξίσωση 3.5.5 για να γράψουμε

$$\bar{u} = \frac{\rho_L \bar{u}_L}{\rho_R} \quad (3.5.8)$$

και τις 3.5.6 και 3.5.7 για γράψουμε

$$c_R^2 = c_L^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) \left(1 - \frac{\rho_L^2}{\rho_R^2}\right) \bar{u}_L^2 \quad (3.5.9)$$

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε τις 3.5.8 και 3.5.9 για να απαλείψουμε \bar{u}_R και c_R^2 από την 3.5.6 και βρίσκουμε ότι

$$\rho_L \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_R}\right) \bar{u}_L^2 + \frac{1}{\gamma}(\rho_L - \rho_R)c_L^2 = \rho_R \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(1 - \frac{\rho_L^2}{\rho_R^2}\right) \bar{u}_L^2$$

και καταλήγουμε

$$(\gamma + 1) \frac{\rho_L}{\rho_R} = \gamma - 1 + \frac{2c_L^2}{\bar{u}_L^2}$$

Εάν τώρα γράψουμε με βάση τοπικό αριθμό *Mach* αριστερά του σημείου σοκ $M_L = \bar{u}_L/c_L$ έχουμε

$$\frac{\rho_R}{\rho_L} = \frac{(\gamma + 1)M_L^2}{(\gamma - 1)M_L^2 + 2}$$

Είναι πιο χρήσιμο να γράψουμε την εξίσωση στην παρακάτω μορφή

$$\frac{\rho_R}{\rho_L} = \frac{(\gamma - 1)M_L^2 + 2M_L^2}{(\gamma - 1)M_L^2 + 2} \quad (3.5.10)$$

Είναι φανερό ότι εάν $M_L^2 > 1$ τότε $\rho_R > \rho_L$ και αντίστροφα. Με άλλα λόγια εάν η ροή είναι τοπικά υπερηχητική $M_L^2 > 1$, η πυκνότητα σε αυτή την πλευρά είναι χαμηλότερη από ότι είναι στην άλλη πλευρά. Λόγω συμμετρίας μπορούμε να καταλήξουμε από την 3.5.9 ότι

$$\frac{\rho_L}{\rho_R} = \frac{(\gamma - 1)M_R^2 + 2M_R^2}{(\gamma - 1)M_R^2 + 2}$$

συνεπώς $M_L^2 > 1$ αν και μόνο αν $M_R^2 < 1$. Με άλλα λόγια, η ροή πρέπει να είναι υπερηχητική στη μια πλευρά του κρουστικού

κύματος και υποχητική από την άλλη.

Μπορούμε να εξάγουμε πολλά συμπεράσματα από τις σχέσεις *Rankine – Hugoniot* με παρόμοιους χειρισμούς. Πιο συγκεκριμένα, οι εντροπίες σε κάθε πλευρά του σημείου σοκ, S_L και S_R , ικανοποιούν την παρακάτω σχέση

$$\frac{S_R - S_L}{c_V} = \log \left\{ \frac{(1+z)(2\gamma + (\gamma-1)z)^\gamma}{(2\gamma + (\gamma+1)z)^\gamma} \right\} \quad (3.5.11)$$

όπου $z = (p_R - p_L)/p_L$. Στην περίπτωση που $z \ll 1$, λέμε ότι το κρουστικό κύμα είναι ασθενές. Μια επέκταση της 3.5.10 για $z \ll 1$ δείχνει ότι

$$\frac{S_R - S_L}{c_V} \sim \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} z^3$$

Αυτό σημαίνει ότι για επαρκές ασθενές κρουστικό κύμα, γεννάται πολύ λίγη εντροπία. Μια μικρή αλλαγή στην εντροπία κατά μήκος του σημείου σοκ οδηγεί σε μια μικρή αλλαγή στο νόμο των αερίων κατά μήκος του κρουστικού κύματος. Εάν θεωρήσουμε $z = 1$ τότε $(S_R - S_L)/c_V \approx 0.01$ και η αλλαγή στην εντροπία είναι μικρή. Από την 3.1.10 μια μικρή αλλαγή κατά μήκος του σημείου σοκ οδηγεί σε μια μικρή αλλαγή του νόμου των αερίων κατά μήκος του κρουστικού κύματος.

Παράδειγμα: Η αντανάκλαση ενός κρουστικού κύματος σε ένα επίπεδο στερεό τοίχο

Ας θεωρήσουμε την αντανάκλαση ενός κρουστικού κύματος, το οποίο προσπίπτει σε ένα επίπεδο στερεό τοίχο. Αυτή είναι η προσεγγιστική κατάσταση κατά την οποία μια έκρηξη προκαλεί ένα κρουστικό κύμα, το οποίο ύστερα χτυπάει μια στερεά κατασκευή. Ουσιαστικά, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η πίεση στον τοίχο αφότου το κύμα έχει αντανακλαστεί,

διότι αυτό είναι που προκαλεί τη δύναμη, η οποία ασκείται στη στερεά κατασκευή. Η πρώτη εξίσωση που θα χρειαστούμε, προκύπτει από την απαλοιφή των p_R και ρ_R από τις 3.5.5 έως 3.5.7 είναι

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}\right) \bar{u}_L^2 + \bar{u}_L(\bar{u}_R - \bar{u}_L) - \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right) \frac{p_L}{\rho_L} = 0 \quad (3.5.12)$$

Πριν το κρουστικό κύμα φτάσει στον τοίχο με ταχύτητα διάδοσης U_+ , η πίεση και η πυκνότητα παίρνουν τις αρχικές τιμές p_0 και ρ_0 . Προφανώς, η κανονική ταχύτητα του αερίου είναι μηδέν στον τοίχο. Εάν η πίεση, η πυκνότητα και η κανονική ταχύτητα του αερίου πίσω από το κρουστικό κύμα είναι p_s, ρ_s, u_s , έχουμε $\bar{u}_L = u_s - U_+$ και $\bar{u}_R = -U_+$. Αντικαθιστώντας στην 3.5.12 προκύπτει:

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}\right) (u_s - U_+)^2 + u_s(u_s - U_+) - \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right) \frac{p_s}{\rho_s} = 0 \quad (3.5.13)$$

Αμέσως μετά αφού το κρουστικό έχει αντανακλαστεί, η κανονική του ταχύτητα είναι $-U_-$ και η πίεση και η πυκνότητα στον τοίχο είναι οι άγνωστοι p_1 και ρ_1 . Παρόλα αυτά, η κανονική ταχύτητα στον τοίχο πρέπει να είναι μηδέν. Επιπλέον, η πίεση, η πυκνότητα και η ταχύτητα του αερίου στην άλλη πλευρά του σημείου σοκ είναι p_s, ρ_s και u_s . Αυτό σημαίνει ότι $\bar{u}_L = u_s + U_-$ και $\bar{u}_R = U_-$, έτσι ώστε :

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}\right) (u_s + U_-)^2 + u_s(u_s + U_-) - \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right) \frac{p_s}{\rho_s} = 0 \quad (3.5.14)$$

Συγκρίνοντας τις 3.5.13 και 3.5.14 βρίσκουμε ότι $u_s - U_+$ και $u_s + U_-$ ικανοποιούν την ίδια τετραγωνική εξίσωση και

πρέπει συνεπώς να είναι δύο ρίζες των οποίων οι παράγοντες να είναι:

$$(u_s - U_+)(u_s + U_-) = -\gamma \frac{p_s}{\rho_s} \quad (3.5.15)$$

Η άλλη εξίσωση που χρειαζόμαστε είναι

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}\right) \frac{\rho_L \bar{u}_L^2}{p_L} = \frac{p_R}{p_L} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (3.5.16)$$

η οποία προέρχεται από την απαλοιφή \bar{u}_R και ρ_R από τις 3.5.5 έως 3.5.7. Οι τιμές σε κάθε πλευρά του κρουστικού κύματος πριν και μετά την αντανάκλαση υποδεικνύουν ότι

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}\right) \quad (3.5.17)$$

Εάν τώρα πολλαπλασιάσουμε αυτές τις δύο εξισώσεις και χρησιμοποιήσουμε την 3.5.15 με σκοπό να απαλείψουμε όλες τις ταχύτητες βρίσκουμε ότι

$$\left(\frac{p_0}{p_s} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \left(\frac{p_1}{p_s} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^2 \quad (3.5.18)$$

Τέλος, στην περίπτωση που ένα κρουστικό κύμα προκαλείται από μια έκρηξη, αναμένουμε ότι η πίεση πίσω από το κρουστικό κύμα θα είναι αρκετά μεγαλύτερη από τι μπροστά από αυτό, έτσι ώστε $p_0 \ll p_s$. Χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση στην 3.5.18 καταλήγουμε

$$\frac{p_1}{p_s} \approx \frac{3\gamma-1}{\gamma-1} \quad (3.5.19)$$

Για ατμοσφαιρικό αέρα για $\gamma \approx 1.4$, προκύπτει $p_1 \approx 8p_s$.

3.6 Εκρήξεις

Στην περίπτωση που ένα κρουστικό κύμα περνάει από ένα αέριο, η θερμοκρασία πίσω από το σοκ είναι υψηλότερη από αυτή μπροστά από το σημείο σοκ. Μπορούμε να το δούμε αυτό για ένα ιδανικό αέριο, απαλοίφοντας u_R και u_L από τις σχέσεις Rankine-Hugoniot 3.5.5 έως 3.5.7. Ο νόμος των αερίων δείχνει ότι $p_R \rho_L / p_L \rho_R = T_R / T_L$ και αυτό μας οδηγεί στο

$$\frac{T_R}{T_L} = \left\{ \frac{(\gamma + 1)p_L + (\gamma - 1)p_R}{(\gamma - 1)p_L + (\gamma + 1)p_R} \right\} \frac{p_R}{p_L} \quad (3.6.1)$$

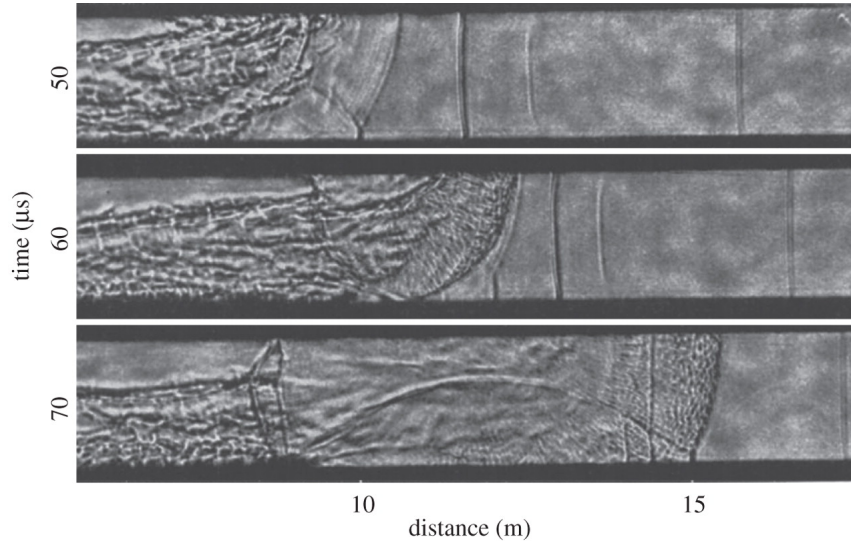
Παρατηρούμε ότι η σχέση στο δεξί μέλος της παραπάνω έκφρασης είναι αυστηρά αύξουσα συνάρτηση του p_R/p_L και συνεπώς $T_R > T_L$ όταν $p_R > p_L$. Στην οριακή περίπτωση ενός ισχυρού κρουστικού κύματος που διαδίδεται από τα δεξιά προς τα αριστερά έτσι ώστε $p_R \gg p_L$ έχουμε

$$\frac{T_R}{T_L} \sim \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \frac{p_R}{p_L} \gg 1$$

Όσο πιο ισχυρή η κρούση, τόσο περισσότερο αυξάνεται η θερμοκρασία.

Σε περίπτωση που το κρουστικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός αερίου που είναι καύσιμο, η αύξηση της θερμοκρασίας μπορεί να είναι επαρκής για να προκαλέσει την **ανατίναξη του αερίου**. Οι καύσεις είναι εξαιρετικά γρήγορες χημικές αντιδράσεις και η περιοχή στην οποία το αέριο καίγεται από αυτήν που δεν καίγεται, διαχωρίζεται από ένα λεπτό κύμα έκρηξης. Θα υποθέσουμε ότι είναι επαρκώς λεπτό σε σχέση με οποιοδήποτε γεωμετρικό μήκος, το οποίο μπορούμε να μοντελοποιήσουμε ως μια επιφάνεια ασυνέχειας, όπως κάναμε και στην περίπτωση του κρουστικού

Σχήμα 4: Κρουστικό κύμα και έκρηξη



κύματος.

Μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τις οποίες μπορεί να υπάρξει κύμα έκρηξης, στις οποίες διαδίδεται με ελαφρώς διαφορετικό τρόπο. Πρώτον, ένα κύμα έκρηξης μπορεί να είναι προσπίπτον σε ένα εύφλεκτο μείγμα και να το πυρπολήσει. Δεύτερον, ένα εύφλεκτο μείγμα μπορεί να πυρποληθεί σε ένα σημείο από μια τοπική θερμότητα, όπως μια σπίθα και αυτόματα γεννάται ένα κύμα έκρηξης από τη βία της χημικής αντίδρασης.

Το σημείο Chapman-Jouguet

Για να μελετήσουμε τη διάδοση των κυμάτων έκρηξης, είναι πρώτα χρήσιμο να εξετάσουμε την έννοια της αδιαβατικής κρούσης (shock adiabatic) για συνήθη κρουστικά κύματα. Απαλοίφοντας τη θερμοκρασία του αερίου από την 3.6.1 έχουμε

$$\frac{p_R}{p_L} = \frac{(\gamma + 1)\rho_L^{-1} - (\gamma - 1)\rho_R^{-1}}{(\gamma + 1)\rho_R^{-1} - (\gamma - 1)\rho_L^{-1}} \quad (3.6.2)$$

για δοσμένες τιμές του p_L και ρ_L^{-1} , αυτή η εξίσωση συσχετίζει p_R με ρ_R^{-1} και είναι γνωστή ως αδιαβατική κρούση (shock adiabatics).

Από τις δύο πρώτες σχέσεις Rankine-Hugoniot

$$j^2 = \frac{p_L - p_R}{\rho_R^{-1} - \rho_L^{-1}} \quad (3.6.3)$$

όπου $j = \rho_R \bar{u}_R = \rho_L \bar{u}_L$, είναι η ροή της μάζας διαμέσου του κρουστικού κύματος.

Για ένα κύμα έκρηξης οι σχέσεις Rankine-Hugoniot 3.5.2 και 3.5.3 παραμένουν ως έχουν. Η πρώτη τροποποίηση που πρέπει να κάνουμε στην ανάλυση για τα κύματα έκρηξης είναι να λάβουμε υπόψη μας την ενέργεια που απελευθερώνεται από τη χημική αντίδραση στην 3.5.4. Η χημική αντίδραση είναι περιορισμένη σε μια λεπτή περιοχή πίσω από το κρουστικό κύμα, το οποίο αντιμετωπίζουμε ως ασυνέχεια στην εσωτερική ενέργεια του αερίου. Δεύτερον, να παρατηρήσουμε ότι ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων μπορεί να είναι διαφορετικός σε κάθε πλευρά της έκρηξης καθώς η χημική σύσταση είναι διαφορετική.

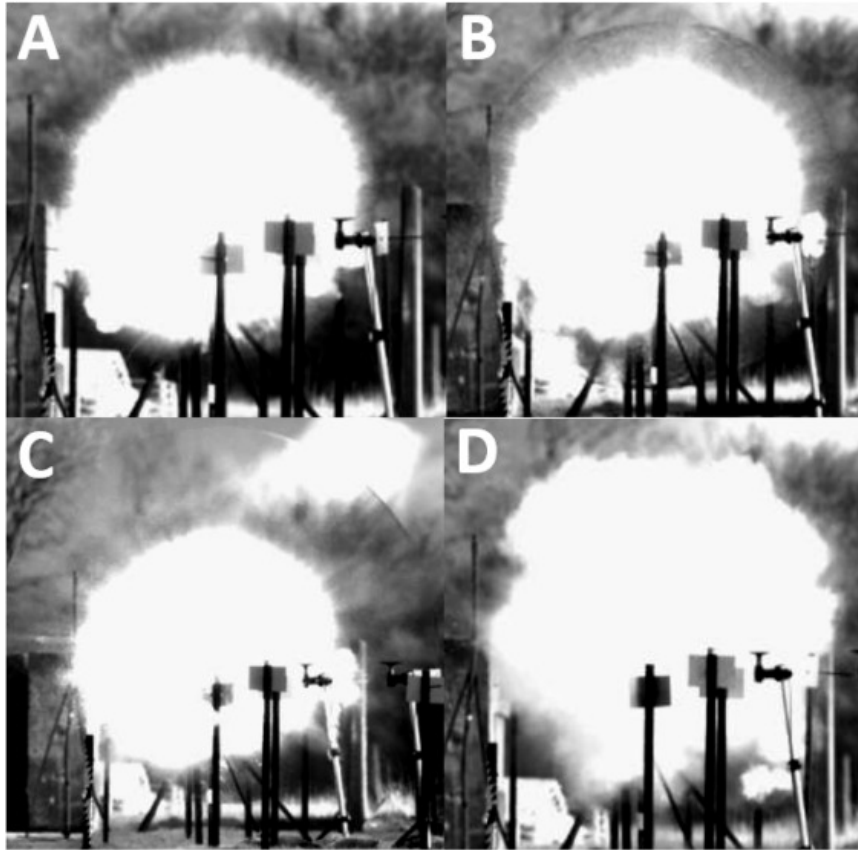
Η τρίτη 3.5.4 σχέση Rankine-Hugoniot συνεπώς γίνεται

$$\frac{1}{2} \bar{u}_R^2 + \frac{\gamma_R}{\gamma_R - 1} \frac{p_r}{\rho_R} = \frac{1}{2} \bar{u}_L^2 + \frac{\gamma_L}{\gamma_L - 1} \frac{p_L}{\rho_L} + q \quad (3.6.4)$$

όπου q είναι η ενέργεια ανά μονάδα μάζας, η οποία απελευθερώνεται από τη χημική αντίδραση και γ_R, γ_L είναι οι διαφορετικοί λόγοι των ειδικών θερμοτήτων. Εάν απαλείψουμε \bar{u}_R και \bar{u}_L από τις σχέσεις Rankine-Hugoniot για την έκρηξη καταλήγουμε στην εξίσωση της αδιαβατικής κρούσης

$$\frac{\gamma_L + 1}{\gamma_L - 1} \frac{p_L}{\rho_L} - \frac{\gamma_R + 1}{\gamma_R - 1} \frac{p_R}{\rho_R} - \frac{p_L}{\rho_R} + \frac{p_R}{\rho_L} = -2q \quad (3.6.5)$$

Σχήμα 5: Σφαιρικό κύμα έκρηξης



Η αδιαβατική έκρηξη κυμαίνεται σε υψηλότερη πίεση για μια δοσμένη τιμή του ρ^{-1} από την αδιαβατική κρούση εξαιτίας της επιπλέον θερμότητας που παράγεται από τη χημική αντίδραση. Παρόλα αυτά, η 3.6.3 ακόμα διατηρείται διότι προέρχεται από τη διατήρηση της μάζας και της ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι η κλίση της ευθείας γραμμής από την αρχική κατάσταση (p_L, ρ_L^{-1}) στην τελική κατάσταση (p_R, ρ_R^{-1}) που τώρα κείται στην αδιαβατική κρούση είναι ακόμα $-j^2$.

Παράδειγμα: Ένα σφαιρικό κύμα έκρηξης

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, οι εξισώσεις για τη διατήρη-

ση της ορμής και της ενέργειας για μια σφαιρικά συμμετρική ροή είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r} = 0 \quad (3.6.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.6.7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial r} \quad (3.6.8)$$

Για ένα κύμα έκρηξης που παράγεται σε ένα σημείο, δεν υπάρχει γεωμετρική κλίμακα μήκους και οι μόνοι παράμετροι στο πρόβλημα είναι p_0 και ρ , η αρχική πίεση και η πυκνότητα στο αέριο και q , η θερμότητα που παράγεται από τη χημική αντίδραση. Μπορούμε να δημιουργήσουμε δύο μόνο αδιάστατες ομάδες συμπεριλαμβανοντας r και t , πιο συγκεκριμένα $\rho_0 r^2 / p_0 t^2$ και $r^2 / q t^2$. Συμπεραίνουμε ότι η λύση θα έχει παρόμοια μορφή, με όλες τις εξαρτημένες μεταβλητές συναρτήσει των $\eta = r/t$. Χρειαζόμαστε να λύσουμε τις 3.6.6-3.6.8 για $0 \leq \eta < \eta_0$ με μια έκρηξη στο $\eta = \eta_0$ και το αέριο να βρίσκεται σε ηρεμία σε μη καύσιμη κατάσταση για $\eta > \eta_0$.

Εάν γράψουμε $\rho \equiv \rho(\eta)$, $u \equiv u(\eta)$ και $p = p(u)$ η 3.6.8 γίνεται

$$(u - \eta)S' = 0 \quad (3.6.9)$$

όπου S' η παράγωγος του S ως προς το η . Υπό την προϋπόθεση ότι $u \neq \eta$, που όπως θα δούμε η εντροπία S πρέπει να είναι σταθερή πίσω από το σφαιρικό κύμα έκρηξης. Συνεπώς, έχουμε $p' = c^2 \rho'$ και μπορούμε να απαλείψουμε p και

ρ μεταξύ 3.6.6 και 3.6.7 έχοντας

$$u' = \frac{2u}{\eta} \left\{ \frac{(u - \eta)^2}{c^2} - 1 \right\}^{-1} \quad (3.6.10)$$

$$c' = -(\gamma - 1) \frac{u(u - \eta)}{c\eta} \left\{ \frac{(u - \eta)^2}{c^2} - 1 \right\}^{-1} \quad (3.6.11)$$

Αυτές οι δύο μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις καθορίζουν πως η ταχύτητα και η τοπική ταχύτητα του ήχου του αερίου διαφέρουν πίσω από το κυμα έκρηξης. Μπορούμε να γράψουμε την 3.6.11 σε αδιάστατη μορφή

$$X = \frac{\eta}{c_0} \quad U = \frac{u}{c_0} \quad C = \frac{c}{c_0}$$

το οποίο δίνει

$$\frac{dU}{dX} = \frac{2U}{X\{(U - X)^2 - 1\}} \quad (3.6.12)$$

$$\frac{dC}{dX} = -\frac{(\gamma - 1)CU(U - X)}{X\{(U - X)^2 - 1\}} \quad (3.6.13)$$

επειδή δεν υπάρχουν πηγές μάζας, η ταχύτητα του αερίου πρέπει να είναι μηδέν στο $X = 0$ και μας βοηθάει να θεωρήσουμε τη λύση όταν $U \ll 1$ και $C \sim 1$.

Υπό την προϋπόθεση ότι το X δεν είναι κοντά στο 1 η 3.6.12 δίνει

$$\frac{dU}{dX} = \frac{2U}{X(X^2 - 1)} \quad (3.6.14)$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$U = k \left(1 - \frac{1}{X^2} \right) \quad (3.6.15)$$

όπου k είναι μια σταθερά. Επειδή $U \rightarrow 0$ καθώς $X \rightarrow 1$, στην πραγματικότητα δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι το X δεν είναι κοντά στο 1 και συνεπώς αυτή η λύση δεν είναι αποδεκτή. Άρα, έχουμε δείξει ότι το U μπορεί να λαμβάνει μόνο μικρές τιμές στη γειτονιά $X = 1$. Προκειμένου να συνεχίσουμε, ορίζουμε $\hat{X} = X - 1$, $\hat{C} = C - 1$ και ψάχνουμε λύσεις για U , \hat{C} και \hat{X} και προκύπτουν οι παρακάτω γραμμικές εξισώσεις

$$\frac{dU}{d\hat{X}} = \frac{U}{\hat{X} - U} \quad (3.6.16)$$

$$\frac{d\hat{C}}{d\hat{X}} = \frac{1}{2}(\gamma - 1) \frac{U}{\hat{X} - U - \hat{C}} \quad (3.6.17)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γραμμικές ως προς το \hat{X} και έχουν ως λύσεις

$$\hat{X} = KU - \frac{1}{2}(\gamma + 1)U \log(U) \quad (3.6.18)$$

$$\hat{C} \sim \frac{1}{2}(\gamma - 1)U \quad (3.6.19)$$

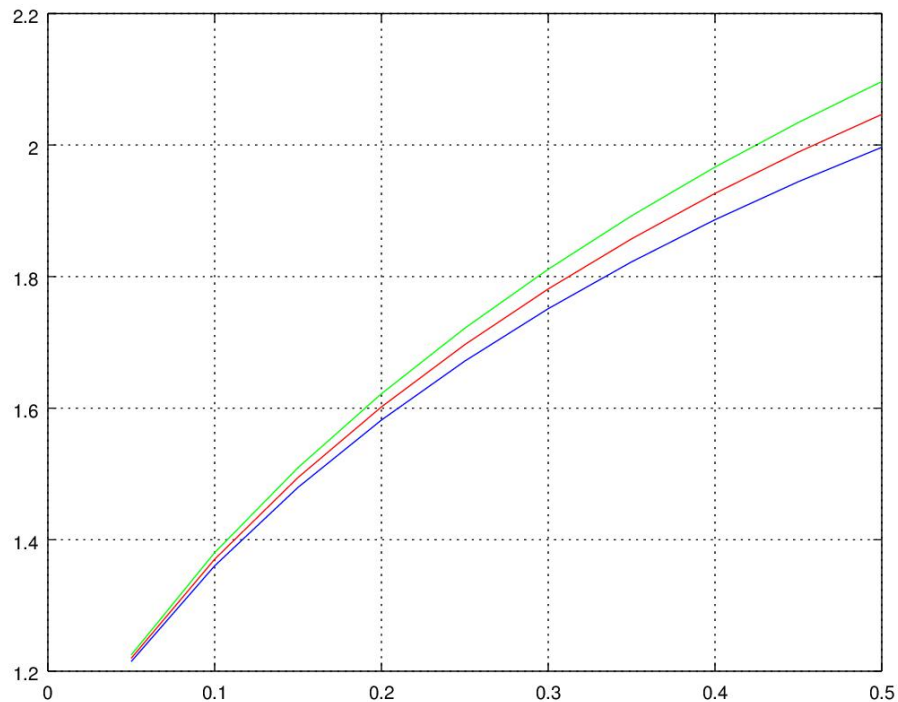
το οποίο δίνει

$$X \sim 1 - \frac{1}{2}(\gamma + 1)U \log U + KU, U \rightarrow 0 \quad (3.6.20)$$

$$C \sim 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)U, U \rightarrow 0 \quad (3.6.21)$$

για κάποια σταθερά K . Αυτό δείχνει ότι $U \rightarrow 0$ και $\frac{dU}{dX} \rightarrow 0$ καθώς $X \rightarrow 1^+$. Συμπεραίνουμε ότι η λύση έχει $U = 0$, $C = 1$, για $0 \leq X \leq 1$ με U και C να δίνονται έμμεσα από τις 3.6.18 και 3.6.19 για $(X - 1)$ μικρό και θετικό. Πρέπει τώρα να διερευνήσουμε πως συμπεριφέρονται τα U και C

Σχήμα 6: Κάποια αριθμητικά αποτελέσματα για τις εξισώσεις 3.6.20 και 3.6.21 για διάφορες τιμές του K



για $X > 1$. Πριν το κάνουμε αυτό, ας εξετάσουμε την περιοχή ύπαρξης ενός κύματος έκρηξης για $X > U + C$ βάση των φυσικών μεταβλητών $r > uT + ct$. Εάν το κύμα έκρηξης κείται στο $r = r_0(t)$ με $r_0(t) > ut + ct$, η τοπική ταχύτητα του ήχου είναι μικρότερη από την ταχύτητα του καμμένου αερίου σε αντιστοιχία του σοκ. Έχουμε ήδη δει πως αυτό φυσικά δεν είναι δυνατό, συνεπώς χρειαζόμαστε να εισάγουμε σε κάποιο σημείο όπου $X \leq U + C$. Είναι σαφώς ευκολότερο να διαχειριστούμε τις X και C ως συναρτήσεις της U . Στο Σχήμα 8, βλέπουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τις 3.6.20 και 3.6.21, ξεκινώντας

την ολοκλήρωση στο $X = 1 + \epsilon$ με $\epsilon \ll 1$ για διάφορες τιμές του K . Από τις 3.6.12 και 3.6.13 βλέπουμε πως $dU/dX = 0$ όταν $X = U \pm C$. Αντιμετωπίζοντας αυτές τις εξισώσεις ως συναρτήσεις του X , με την υπόθεση ότι μας δίνεται το X , είναι έγκυρες για $1 \leq X \leq X_0$, όπου σε αυτό το σημείο το dU/dX απειρίζεται. Η αριθμητική ολοκλήρωση των 3.6.12 και 3.6.13 δείχνει ότι οι λύσεις υπάρχουν για κάθε $K < K_0$, με $K_0 \approx -2.1$. Για $K > K_0$, η X απειρίζεται για πεπερασμένη τιμή του U και δε δίνει λύση κατάλληλη για έκρηξη.

Αναφορές

- [1] J.Billingham,A.C.King,*Κυματική Θεωρία και Εφαρμογές*, Cambridge University Press,2001.
- [2] E.C.Zachmanoglou, Dale W.Thoe, *Εισαγωγή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές*, Dover Publications, Inc., New York, 1975.
- [3] Michael M.Abbott, Hendrick C. Van Mess, *Θερμοδυναμική*, Mc Graw-Hill, New York, 1972.
- [4] R.Courant, K.O.Friedrichs , *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer, 1982.
- [5] F.V.Shugaev,L.S. Shtemenko, *Propagation and Reflection of Shock Waves*, World Scientific Publishing, 1997.
- [6] Eleuterio F.Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 2009.
- [7] John Ockedon, Sam Homison, Andrew Lacey, Alexander Movchan, *Applied Partial Differential Equations*, Oxford University Press, 2003.
- [8] P.Balachandran, *Fundamentals of Compressible Fluid Dynamics*, Import, 2006.
- [9] Michel A.Saad, *Compressible Fluid Flow*, Prentice Hall, 1993.