Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Τομεας Μαθηματικων

Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμενες Μαθηματικες Επιστημες

Ασυνεχής Μέθοδος Galerkin για Μη-Γραμμικά Παραβολικά Προβλήματα

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

της

Δήμητρας Πλάκα

Επιβλέποντες:

Εμμανουήλ Γεωργούλης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Κωνσταντίνος Χρυσαφίνος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2017

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Τομεας Μαθηματικων

Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμενες Μαθηματικες Επιστημες

Ασυνεχής Μέθοδος Galerkin για Μη-Γραμμικά Παραβολικά Προβλήματα

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

της

Δήμητρας Πλάκα

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις __/__/2017.

Εμμανουήλ Γεωργούλης	Κωνσταντίνος Χρυσαφίνος	Βασίλειος Κοκκίνης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.
.....	.....	.....
(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα, ευχαριστώ τους επιβλέποντες καθηγητές της παρούσας διπλωματικής εργασίας, Εμμανουήλ Γεωργούλη και Κωνσταντίνο Χρυσαφίνο, για την στήριξη και την καθοδήγησή τους καθ΄ όλη την διάρκεια, καθώς επίσης και για την θετική επιρροή τους στην ακαδημαϊκή μου πορεία.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον καθηγητή Βασίλειο Κοκκίνη για την συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για την ανιδιοτελή υποστήριξη όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Πρόλογος i

1 Το παραβολικό πρόβλημα **1**

1.1 Προαπαιτούμενα 1

1.1.1 Χώροι συνεχών συναρτήσεων 1

1.1.2 Χώροι ολοκληρώσιμων συναρτήσεων 2

1.1.3 Χώροι Sobolev 3

1.1.4 Χώροι Bochner 6

1.2 Κλασική μέθοδος Galerkin στον χώρο 8

1.2.1 Το ελλειπτικό πρόβλημα 8

Ασθενής διατύπωση και συνθήκες ομαλότητας 8

Διακριτοποίηση στον χώρο 9

Διακριτό σχήμα και βασικές εκτιμήσεις σφάλματος 10

1.2.2 Η εξίσωση θερμότητας 13

Ασθενής διατύπωση και συνθήκες ομαλότητας 13

Πλήρως διακριτό σχήμα 15

1.3 Ασυνεχής μέθοδος Galerkin στον χρόνο 19

1.4 Ανάλυση ευστάθειας 24

1.4.1 Συνεχές πρόβλημα 24

1.4.2 Πλήρως διακριτό πρόβλημα 25

1.5 Ανάλυση σφάλματος 28

2 Το ημιγραμμικό παραβολικό πρόβλημα **43**

2.1 Προαπαιτούμενα 43

2.1.1 Ανισότητες και θεωρήματα ενσφήνωσης σε χώρους Sobolev 43
2.1.2 Ανισότητες Grönwall 44
2.2 Η εξίσωση Allen-Cahn 47
2.2.1 Ασθενής διατύπωση και ανάλυση ευστάθειας 47
2.3 Πλήρως διακριτό πρόβλημα 50
2.3.1 Ανάλυση ευστάθειας 50
2.3.2 Ανάλυση σφάλματος 53

3 Αριθμητικά αποτελέσματα **65**
3.1 Ομογενές παραβολικό πρόβλημα 65
3.2 Μη ομογενές παραβολικό πρόβλημα 67

Βιβλιογραφία **69**

Πρόλογος

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις έκαναν την εμφάνισή τους στην μαθηματική μοντελοποιησή πολλών φυσικών, χημικών, βιολογικών φαινομένων και σε ποικίλες θεματικές περιοχές όπως η μηχανική των ρευστών, ο ηλεκτρομαγνητισμός, η επιστήμη των υλικών, αστροφυσική, οικονομία κ.τ.λ. Ωστόσο, πολύ συχνά οι εξισώσεις είναι τόσο πολύπλοκες, που η εύρεση της ακριβής λύσης μέσω συγκεκριμένων τύπων είτε θεωρητικών αναλυτικών μεθόδων (μετασχηματισμοί Laplace, Fourier ή δυναμοσειρές) καθιστάται αδύνατη είτε μη αποδοτική. Επομένως, είναι απαραίτητη η αναζήτηση αριθμητικών προσεγγίσεων της άγνωστης αναλυτικής λύσης.

Μια συγκεκριμένη κατηγορία αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι τα πεπερασμένα στοιχεία, που προτάθηκαν σε μία εργασία του Richard Courant [6], το 1943. Η μέθοδος αυτή πήρε την απαραίτητη αναγνώριση όταν αναπτύχθηκε, ανεξάρτητα, από μηχανικούς στις αρχές του 1950. Παρόλα αυτά, η μαθηματική ανάλυση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων ξεκίνησε πολύ αργότερα, με τα πρώτα σημαντικά αποτελέσματα του Miloš Zlámal [16], το 1968. Από τότε, η μέθοδος εξελίχθηκε και χρησιμοποιήθηκε ευρέως στην μηχανολογία, τόσο στον τομέα του σχεδιασμού όσο και της ανάλυσης.

Η βασική ιδέα των πεπερασμένων στοιχείων είναι η διακριτοποίηση. Ένα δοθέν συνεχές πρόβλημα με απείρως πολλούς βαθμούς ελευθερίας μετατρέπεται μέσω της διακριτοποίησης σε ένα σύστημα πεπερασμένα πολλών αγνώστων. Η μέθοδος είναι γνωστή ως μέθοδος Galerkin και αποτελείται από τα ακόλουθα στάδια:

- Ασθενή διατύπωση
- Δημιουργία χώρων πεπερασμένης διάστασης
- Λύση του διακριτού προβλήματος
- Εφαρμογή στον υπολογιστή

Σε αυτή την εργασία, θα ασχοληθούμε με δύο χωροχρονικά προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών. Αρχικά, με το γραμμικό παραβολικό πρόβλημα για την εξίωση θερμότητας και στη συνέχεια με μια ημιγραμμική παραλλαγή για την εξίσωση των Allen-Chan. Θα ξεκινήσουμε από βασικές ιδέες και αποτελέσματα της μεθόδου στο στατικό ελλειπτικό πρόβλημα, που θα αποτελέσουν εργαλεία για την μετέπειτα ανάλυση.

Η αριθμητική μέθοδος που θα εφαρμόσουμε χειρίζεται τις μεταβλητές χώρου και χρόνου παρόμοια. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε την κλασική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων στον χώρο και την ασυνεχή μέθοδο Galerkin στον χρόνο. Πρωτοεμφανίστηκε στην εργασία των Reed-Hill, το 1971, για την προσομοίωση μεταφοράς νετρονίων. Βασικό χαρακτηριστικό της τελευταίας είναι η αναζήτηση λύσεων ως κατά τμήματα πολυώνυμα που επιτρέπεται να είναι ασυνεχή στα κομβικά σημεία της χρονικής διαμέρισης.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε την ευστάθεια των μεθόδων, καθώς επίσης και την ακρίβεια των προσεγγιστικών λύσεων, αποδεικνύωντας εκτιμήσεις σφαλμάτων βέλτιστης τάξης. Όλα τα αποτελέσματα εξαρτώνται αποκλειστικά από τα δεδομένα των εκάστοτε προβλημάτων και της ακριβής λύσης. Τέτοιες εκτιμήσεις είναι γνωστές στην βιβλιογραφία ως a priori estimates.

Κεφάλαιο 1

Το παραβολικό πρόβλημα

1.1 Προαπαιτούμενα

1.1.1 Χώροι συνεχών συναρτήσεων

Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων. Μια n-άδα $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ καλείται πολυδείκτης και $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ είναι το μήκος του. Τότε

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \ .$$

Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $k \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με $C^k(\Omega)$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο σύνολο Ω έτσι ώστε $D^\alpha u$ να είναι συνεχής στο Ω για όλα τα $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ με $|\alpha| \leq k \cdot$ και $C^\infty(\Omega)$ ο χώρος συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους όλων των τάξεων.
Αν υποθέσουμε ότι το Ω είναι ένα φραγμένο σύνολο, $C^k(\overline{\Omega})$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $u \in C^k(\Omega)$ για τι οποίες $D^\alpha u$ μπορεί να επεκταθεί από το Ω ως μια συνεχή συνάρτηση στην κλειστότητα $\overline{\Omega}$ για όλα τα $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ με $|\alpha| \leq k$. Ο χώρος αυτός εφοδιάζεται με την νόρμα

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} \left|D^\alpha u(x)\right| \ .$$

Για $k = 0$, γράφουμε $C(\overline{\Omega}) \equiv C^0(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$$

Ορισμός 1.1.1 *Ο φορέας μιας συνεχής συνάρτησης u σε ένα ανοιχτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως*

$$supp\ u\ = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}} \ .$$

Συμβολίζουμε με $C_0^k(\Omega)$ το σύνολο των συναρτήσεων με συμπαγή φορέα που περιέχονται στο $C^k(\Omega)$ και με $C_0^\infty(\Omega)$ τον χώρο των συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους όλων των τάξεων που έχουν συμπαγή φορέα στο Ω. Τις συναρτήσεις αυτές συνηθίζουμε να τις αποκαλούμε συναρτήσεις ελέγχου (test functions).

Θεώρημα 1.1.2 (Ταυτότητα Green) *Έστω u, v βαθμωτές συναρτήσεις ορισμένες στο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(\Omega)$ και $v \in C^1(\Omega)$. Τότε*

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla u \nabla v)\, dV = \oint_{\partial\Omega} v\,(\nabla u\ \vec{n})\, dS\ .$$

1.1.2 Χώροι ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Ορισμός 1.1.3 *Έστω $1 \leq p \leq \infty$, τότε ο χώρος $L_p(\Omega)$ αποτελείται από μετρήσιμες συναρτήσεις $u : \Omega \to R$, με*

$$\int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty$$

και $L_\infty(\Omega)$ ο χώρος των συναρτήσεων u που είναι ουσιωδώς φραγμένες (δηλαδή, υπάρχει θετική σταθερά M ώστε $|u(x)| \leq M$ για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$ · και η μικρότερη τέτοια σταθερά καλείται essential supremum της $|u(x)|$), δηλαδή $ess.\sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty$,

με αντίστοιχες νόρμες

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p},$$

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess.\sup_{x\in\Omega} |u(x)|\ .$$

Για $p = 2$, $L_2(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert με νόρμα και εσωτερικό γινόμενο

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^2\, dx\right)^{1/2},$$

$$(u, v) := \int_\Omega u(x)v(x)\, dx.$$

Θεώρημα 1.1.4 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Έστω $u, v \in L_2(\Omega)$ και $uv \in L_1(\Omega)$. Τότε*

$$|(u, v)| \ \leq\ \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}.$$

Θεώρημα 1.1.5 (Τριγωνική ανισότητα) *Έστω $u, v \in L_p(\Omega)$ και $u + v \in L_p(\Omega)$. Τότε για $1 \leq p \leq \infty$, έχουμε*

$$\|u + v\|_{L_p(\Omega)} \;\leq\; \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)}.$$

Θεώρημα 1.1.6 (Ανισότητα Hölder) *Έστω $p, q \in [1, \infty]$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε, για κάθε $u \in L_p(\Omega)$ και $v \in L_q(\Omega)$, έχουμε*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \;\leq\; \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}.$$

Θεώρημα 1.1.7 (Ανισότητα Hölder τριών όρων) *Έστω $p, q, r \in (1, \infty)$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Τότε, για κάθε $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_q(\Omega)$ και $h \in L_r(\Omega)$, έχουμε*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)h(x)|\, dx \;\leq\; \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)} \|h\|_{L_r(\Omega)}.$$

1.1.3 Χώροι Sobolev

Αρχικά, θα ορίσουμε την ιδέα της ασθενής παραγώγου ώστε να περιγράψουμε τους χώρους *Sobolev*.
Θεωρούμε μια ομαλή συνάρτηση u, έστω $u \in C^k(\Omega)$, Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Τότε, ισχύει η ακόλουθη ολοκλήρωση κατά μέλη:

$$\int_\Omega D^\alpha u(x) v(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha v(x)\, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)\ ,\ |\alpha| \leq k.$$

Υποθέτουμε, επίσης ότι u είναι τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση ω_α, η οποία είναι και αυτή τοπικά ολοκληρώσιμη στο σύνολο Ω, τέτοια ώστε

$$\int_\Omega \omega_\alpha(x) v(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha v(x)\, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)\ ,\ |\alpha| \leq k.$$

Τότε, η ω_α, είναι η ασθενής παράγωγος της συνάρτησης u τάξης $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Αν υπάρχει η κλασική παράγωγος $D^\alpha u$, τότε $D^\alpha u = \omega_\alpha$.

Ορισμός 1.1.8 *Έστω k ένας μη αρνητικός ακέραιος και $p \in [1, \infty]$. Ορίζουμε τον χώρο Sobolev τάξης k ως*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega),\ |\alpha| \leq k\},$$

με τις εξής νόρμες

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p} \ , \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)} \ , \ p = \infty,$$

και ημινόρμες

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p},$$

$$|u|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Παρατήρηση 1 *Για $p = 2$, ο χώρος $W^{k,2}(\Omega)$ είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο*

$$(u, v)_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

Θα ορίσουμε τους κλασικούς χώρους Hilbert H^1, H^2 με τις νόρμες τους.

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), \ j = 1, \ldots, n \right\}$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right\}^{1/2}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), \ j = 1, \ldots, n \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_2(\Omega), i, j = 1, \ldots, n \right\}$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left\{ \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right\}^{1/2}.$$

Τέλος, μια ειδική περίπτωση είναι ο χώρος $H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ στο } \partial\Omega\}$.

Θεώρημα 1.1.9 (Ανισότητα Poincaré - Friedrichs) *Υποθέτουμε ότι Ω είναι ένα φραγμένο και ανοιχτό υποσύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $u \in H^1_0(\Omega)$, τότε υπάρχει $C_{PF} > 0$, τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \ \leq \ C_{PF} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} = C_{PF} |u|_{H^1(\Omega)} \ .$$

Πρόταση 1.1.10 (Ανισότητα Poincaré) *Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο. Τότε, υπάρχει σταθερά $C < \infty$, τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} = C|u|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ορισμός 1.1.11 *Ο δυϊκός χώρος του $H_0^1(\Omega)$ είναι ο χώρος $H^{-1}(\Omega)$, και γράφουμε $(H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)$. Δηλαδή $f \in H^{-1}(\Omega)$ είναι ένα φραγμένο, γραμμικό συναρτησιακό στον χώρο $H_0^1(\Omega)$, με την ακόλουθη νόρμα*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f, u\rangle : u \in H_0^1(\Omega)\ ,\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το ταίριασμα του χώρου $H^{-1}(\Omega)$ με τον $H_0^1(\Omega)$ (duality pairing).

Θεώρημα 1.1.12 *Υποθέτουμε ότι $f \in H^{-1}(\Omega)$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $f^0, f^1, \cdots, f^n \in L_2(\Omega)$ τέτοιες ώστε*

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \left(f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i} \right) dx \qquad (1)$$

όπου $v \in H_0^1(\Omega)$. Επιπλέον,

$$\|f\|_{H_{-1}(\Omega)} = \inf\Big\{ \left(\sum_{i=0}^n |f^i|^2\, dx \right)^{1/2} : f \ \text{ικανοποιεί την (1) για } \ f^0, f^1, \cdots, f^n \in L_2(\Omega) \Big\}.$$

Θεώρημα 1.1.13 (Θεώρημα αναπαράστασης τουRiesz) *Έστω H ένας χώρος Hilbert και $f \in H'$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in H$ ώστε*

$$f(x) = f_y(x) = (x, y)_H \quad \forall x \in H$$

και επιπλέον $\|f\| = \|y\|$.

Θεώρημα 1.1.14 (Lax-Milgram) *Έστω $B : H \times H \to R$ μια διγραμμική απεικόνιση. Τότε, εάν*

- $\exists c_1 > 0 \ \ \forall u \in H$ *ώστε* $B(u, u) \geq c_1\|u\|_H^2$ *(coersive)*
- $\exists c_2 > 0 \ \ \forall u, v \in H$ *ώστε* $|B(u, v)| \leq c_2\|u\|_H\|v\|_H$ *(bounded)*
- $\exists c_3 > 0 \ \ \forall v \in H$ *ώστε* $|l(v)| \leq c_3\|v\|_H$ *(bounded)*

υπάρχει μοναδική λύση $u \in H$ ώστε $B(u, v) = (f, v)\ \forall v \in H$.

1.1.4 Χώροι Bochner

Ορισμός 1.1.15 *Ο χώρος $L_p(0,T;X)$ αποτελείται από μετρήσιμες συναρτήσεις $u : [0,T] \to X$ με:*

$$\|u\|_{L_p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} \ , \ 1 \le p < \infty$$

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;X)} := ess. \sup_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_X .$$

Ορισμός 1.1.16 *Ο χώρος $C([0,T];X)$ περιέχει τις συνεχείς συναρτήσεις $u : [0,T] \to X$ με:*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_X .$$

Ορισμός 1.1.17 *Έστω $u \in L_1(0,T;X)$. Λέμε ότι $v \in L_1(0,T;X)$ είναι η ασθενής παράγωγος της u, γράφοντας $u' = v$, εάν*

$$\int_0^T u\varphi'(t) \, dt = -\int_0^T v\varphi \, dt \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Ορισμός 1.1.18 *Ο Sobolev χώρος $W^{1,p}(0,T;X)$ περιλαμβάνει τις συναρτήσεις $u \in L_p(0,T;X)$ έτσι ώστε u' να υπάρχει με την ασθενή έννοια και να ανήκει στον χώρο $L_p(0,T;X)$. Επιπλέον :*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} \ , \ 1 \le p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} := ess. \sup_{0 \le t \le T} \left(\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X \right).$$

Θα γράφουμε $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$.

Θεώρημα 1.1.19 *Έστω Ω ανοιχτό και φραγμένο σύνολο, με σύνορο $\partial\omega$ ομαλό. Ακόμη υποθέτουμε ότι $u \in L_2(0,T;H^{m+2}(\Omega))$ με $u_t \in L_2(0,T;H^m(\Omega))$, όπου m ένας μη αρνητικός ακέραιος. Τότε*

- $u \in C([0,T];H^{m+1}(\Omega))$·
- *επιπλέον έχουμε την εκτίμηση*

$$\max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)} \ \le \ C \left(\|u\|_{L_2(0,T;H^{m+2}(\Omega))} + \|u_t\|_{L_2(0,T;H^m(\Omega))} \right).$$

Η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα T, Ω, m.

Θεώρημα 1.1.20 (Ανισότητα Young) *Έστω α, b πραγματικοί αριθμοί και $p > 1$. Τότε*

$$\alpha b \leq \frac{p-1}{p}\alpha^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p}b^p.$$

1.2 Κλασική μέθοδος Galerkin στον χώρο

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την εφαρμογή της κλασικής (συνεχής) μεθόδου Galerkin πεπερασμένων στοιχείων για την εύρεση προσεγγιστικής λύσης ενός παραβολικού προβλήματος με κατάλληλες αρχικές και συνοριακές τιμές.
Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών της εξίσωσης θερμότητας με ομογενή συνοριακή συνθήκη Dirichlet:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f,\ x \in \Omega,\ t > 0 \\ u &= 0,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(\cdot, 0) &= v,\ x \in \Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

στο ανοιχτό και φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και όπου $u = u(x,t)$, $u_t = \partial u/\partial t$ και $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$ ο τελεστής Laplace. Ακόμη, $f : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ και $v : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι οι εξωτερικοί παράγοντες και η αρχική συνθήκη, αντιστοίχως.

Το πρόβλημα αυτό περιγράφει την μεταβολή στον χρόνο της θερμοκρασίας $u(x,t)$ ενός σώματος που βρίσκεται στο χωρίο Ω υπό την επίδραση μιας υπάρχουσας πηγής ενέργειας f. Ο όρος Δu αναπαριστά την διάχυση της θερμοκρασίας μέσα στο χωρίο.

1.2.1 Το ελλειπτικό πρόβλημα

Πριν ξεκινήσουμε την συζήτηση για το προαναφερθέν πρόβλημα, θα περιγράψουμε συνοπτικά τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων του αντίστοιχου στατικού προβλήματος, δηλαδή του Dirichlet προβλήματος για την εξίσωση Poisson:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f,\ x \in \Omega, \\ u &= 0,\ x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ασθενής διατύπωση και συνθήκες ομαλότητας

Αρχικά, Θα γράψουμε το πρόβλημα σε ασθενή ή μεταβολική διατύπωση. Θεωρούμε ότι $f \in L_2(\Omega)$. Πολλαπλασιάζουμε την ελλειπτική εξίσωση με μια ομαλή συνάρτηση φ, που εξαφανίζεται στο σύνορο (οπότε αρκεί να ζητήσουμε $\varphi \in H_0^1(\Omega)$), ολοκληρώνουμε πάνω στο χωρίο Ω, εφαρμόζουμε την ταυτότητα Green στο αριστερό μέλος και προκύπτει

$$(\nabla u, \nabla\varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{1.3}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα παρακάτω L_2-εσωτερικά γινόμενα

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f\varphi\, dx,$$

$$(\nabla u, \nabla \varphi) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx.$$

Άρα, το πρόβλημα αναδιατυπώνεται ως εξής:

Βρες $u \in H_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$B(u, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

όπου $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ είναι η διγραμμική μορφή, με $B(u, \varphi) = (\nabla u, \nabla \varphi)$, ενώ, $l : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, με $l(\varphi) = (f, \varphi)$, η γραμμική μορφή.
Μια συνάρτηση $u \in H_0^1$, που ικανοποιεί την (1.3) καλείται μεταβολική ή ασθενής λύση του προβλήματος (1.2). Η ύπαρξη καθώς και η μοναδικότητα μιας τέτοιας λύσης είναι επακόλουθο του θεωρήματος Lax-Milgram [9].

Παρατήρηση 2 *Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.12, το δεξί μέλος f μπορεί να ανήκει στον δϋικό χώρο του $H_0^1(\Omega)$, δηλαδή στον χώρο $H^{-1}(\Omega)$.*

Αν το σύνορο να είναι ομαλό και πιο συγκεκριμένα $\partial\Omega \in C^{m+2}$, η λύση u θα έιναι ομαλότερη κατά δύο παραγώγους στον L_2-χώρο από το δεξί μέλος f. Αυτό εκφράζεται ως elliptic regularity estimate [9], και διατυπώνεται ως εξής

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \;\leq\; C\|\Delta u\|_{H^m(\Omega)} = C\|f\|_{H^m(\Omega)} \; \forall m \geq -1. \tag{1.4}$$

Διακριτοποίηση στον χώρο

Έστω ότι το Ω είναι ένα κυρτό χωρίο στον χώρο $\mathbb{R}^d$, θεωρούμε μια διαμέριση T_h από τρίγωνα τ έτσι ώστε καμία κορυφή από οποιοδήποτε τρίγωνο να μην βρίσκεται στο εσωτερικό πλευράς κάποιου άλλου τριγώνου. Επίσης, η ένωση όλων των τριγώνων σχηματίζει ένα πολυγωνικό χωρίο $\Omega_h \subset \Omega$ με προσπείπτουσες στο σύνορο κορυφές.
Με h_τ θα συμβολίζουμε διάμετρο κάθε τριγώνου τ και $h = \max\limits_{\tau \in T_h} h_\tau$, την μέγιστη διάμετρο της τριγωνοποίησης T_h. Είναι μια παράμετρος που μειώνεται όσο η τριγωνοποίηση γίνεται καλύτερη.
Υποθέτουμε, ακόμη, ότι οι γωνίες φράσσονται από πάνω από μία θετική σταθερά, ανεξάρτητη του h, και κάποιες φορές πως η τριγωνοποίηση μπορεί να είναι σχεδόν ομοιόμορφη, με την έννοια ότι τα τριγωνά θα είναι ουσιαστικά του ίδιου μεγέθους και επιτυγχάνεται ζητώντας το εμβαδό κάθε τριγώνου να είναι μεγαλύτερο είτε ίσο από την ποσότητα Ch^d.

Ορίζουμε, λοιπόν, S_h τον γραμμικό χώρο πεπερασμένης διάστασης χωρικών συναρτήσεων, τέτοιο ώστε $S_h \subset H_0^1(\Omega)$, ως εξής:

$$S_h = \{\chi \in C(\overline{\Omega}) \; ; \; \chi|_\tau \in P_r(\tau) \; , \; \chi|_{\partial\Omega} = 0\},$$

όπου, με $P_r(\tau)$ συμβολίζουμε τον χώρο πολυωνύμων βαθμού $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ στο τ.

Έστω $\{P_j\}_{j=1}^{N_h}$, οι εσωτερικές κορυφές της τριγωνοποίησης, άρα οι συναρτήσεις $\chi \in S_h$ ορίζονται μονοσήμαντα από τις τιμές στα σημεία P_j και επομένως εξαρτώνται από N_h σε πλήθος παραμέτρους. Έστω φ_j οι *συναρτήσεις πυραμίδα* στον S_h που παίρνουν την τιμή 1 στα P_j και μηδενίζονται στις υπόλοιπες κορυφές. Δηλαδή, το $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_h}$ αποτελεί μια βάση του χώρου S_h και, κάθε $\chi \in S_h$, έχει την εξής μοναδική αναπαράσταση:

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^{N_h} a_j \varphi_j(x), \quad a_j(x) = \chi(P_j).$$

Στην γενική περίπτωση, δοθέντος μιας ομαλής συνάρτησης $v \in H_0^1(\Omega)$ και μιας οικογένειας $\{S_h\}$ από πεπερασμένης διάστασης υποχώρους του $H_0^1(\Omega)$, για κάποιο ακέραιο $r \geq 2$ και μικρό h ισχύει η εκτίμηση

$$\inf_{\chi \in S_h} \{\|v - \chi\| + h\|\nabla (v - \chi)\|\} \ \leq \ Ch^s \|v\|_{H^s(\Omega)}, \ 1 \leq s \leq r, \tag{1.5}$$

όταν $v \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ [3],[2]. Ο αριθμός r συμβολίζει την τάξη ακρίβειας της οικογένειας $\{S_h\}$. Όταν $r \geq 2$, ο χώρος συναρτήσεων S_h αποτελείται από κατά τμήματα πολυώνυμα βαθμού τουλάχιστον $r-1$, οπότε εκτιμήσεις της μορφής (1.5) επιτυγχάνονται με την ύπαρξη ενός τελεστή παρεμβολής $I_h : H^s \cap H_0^1 \to S_h$ έτσι ώστε

$$\|I_h v - v\| + h\|\nabla (I_h v - v)\| \ \leq \ Ch^s \|v\|_{H^s(\Omega)}, \ 1 \leq s \leq r. \tag{1.6}$$

Αυτό σημαίνει ότι η μέγιστη τάξη πρόσεγγισης των συναρτήσεων και των κλίσεών τους, σύμφωνα με την υπόθεση (1.5), είναι $\mathcal{O}(h^s)$ και $\mathcal{O}(h^{s-1})$ αντίστοιχα. Μια εξίσου καλή προσέγγιση της v στον χώρο S_h είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής της L_2-προβολής $P_h : L_2 \to S_h$ που ορίζεται ως εξής

$$(P_h v, \chi) = (v, \chi) \ \ \forall \chi \in S_h. \tag{1.7}$$

Παρατήρηση 3 *Θέτωντας $\chi = P_h v \in S_h$ αποδεικνύουμε την ευστάθεια στον χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων L_2, δηλαδή $\|P_h v\| \ \leq \ \|v\| \ \ \forall v \in L_2(\Omega)$.*

Διακριτό σχήμα και βασικές εκτιμήσεις σφάλματος

Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις αυτών των τάξεων για τη λύση του προβλήματος (1.2) με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Το προσεγγιστικό πρόβλημα, τότε, γίνεται: Βρες $u_h \in S_h$ έτσι ώστε

$$(\nabla u_h, \nabla \chi) = (f, \chi) \ \ \forall \chi \in S_h. \tag{1.8}$$

Αυτός ο τρόπος ορισμού μιας προσεγγιστικής λύσης σε όρους της μεταβολικής διατύπωσης του προβλήματος είναι γνωστός ως *μέθοδος Galerkin*, λόγω του Ρώσου εφαρμοσμένου μαθηματικού Boris Grigorievich Galerkin (1871-1945).

Καταλήγουμε από τις (1.3) και (1.8) στην σχέση

$$(\nabla(u_h - u), \nabla\chi) = 0 \quad \forall\chi \in S_h. \tag{1.9}$$

Οπότε το σφάλμα είναι ορθογώνιο στον S_h αναφορικά με το Dirichlet- εσωτερικό γινόμενο $(\nabla v, \nabla w)$. Η σχέση αυτή είναι γνωστή και ως *ορθογωνιότητα Galerkin.*

Το διακριτό πρόβλημα (1.8) μπορεί να αναπαρασταθεί χρησιμοποιώντας την βάση $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ του χώρου πεπερασμένων στοιχείων, S_h, με τον ακόλουθο τρόπο :

Βρες τους συντελεστές α_i της $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i\varphi_i(x)$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j) = (f, \varphi_j) \quad \forall j = 1, \ldots, N_h.$$

Με την χρήση πινάκων το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται ισοδύναμα

$$S\alpha = \tilde{f},$$

όπου $S = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας ακαμψίας (stiffness matrix) με στοιχεία $a_{ij} = (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j)$, $\tilde{f} = (f_j)$ είναι ο πίνακας στήλη (load vector) με στοιχεία $f_j = (f, \varphi_j)$ και τέλος α το διάνυσμα των αγνώστων α_i.
Ο πίνακας ακαμψίας είναι θετικά ορισμένος και αντιστρέψιμος, επομένως η λύση του διακριτού προβλήματος είναι μοναδική.

Θα αποδείξουμε ακριβώς παρακάτω την εκτίμηση σφάλματος μεταξύ των λύσεων του (1.8) και του συνεχούς προβλημάτος (1.2). Πρέπει να σημειώσουμε πως λαμβάνοντας υπόψιν την υπόθεση (1.5), οι εκτιμήσεις θα είναι μέγιστης τάξης.
Ακόμη, αφού έχουμε ζητήσει το συνορό μας να είναι ομαλό, σύμφωνα με την elliptic regularity estimate (1.4), η λύση του (1.2) μπορεί να έχει οποιοδήποτε βαθμό ομαλότητας απαιτεί το πρόβλημα, αρκεί όμως να έχουμε υποθέσει ότι το δεξί μέλος f είναι επαρκώς ομαλό.
Πιο συγκεκριμένα, $u \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ αν $f \in H^{r-2}(\Omega)$, και η λύση u ανήκει στον $C^\infty(\Omega)$, εάν $f \in C^\infty(\Omega)$.

Θεώρημα 1.2.1 *Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση* (1.4)*, και έστω u_h και u οι λύσεις των* (1.7) *και* (1.2)*, αντίστοιχα. Τότε για $1 \le s \le r$, έχουμε*

$$\|u_h - u\| \;\le\; Ch^s\|u\|_{H^s(\Omega)}\ , \quad \|\nabla u_h - \nabla u\| \;\le\; Ch^{s-1}\|u\|_{H^s(\Omega)}.$$

Απόδειξη: Θα ξεκινήσουμε με το σφάλματων κλίσεων.
Αφού $(\nabla(u_h - u), \nabla\chi) = 0$, $\forall\chi \in S_h$, u_h είναι η ορθογώνια προβολή της u στον S_h αναφορικά με το Dirichlet - εσωτερικό γινόμενο.

$$\begin{aligned}\|\nabla(u_h-u)\|^2 &= (\nabla(u_h-u),\nabla(u_h-u))\\ &= (\nabla(u_h-u),\nabla u_h)-(\nabla(u_h-u),\nabla u)\\ &= (\nabla(u_h-u),\nabla\chi)-(\nabla(u_h-u),\nabla u)\\ &= (\nabla(u_h-u),\nabla(\chi-u))\,,\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy - Schwarz και την υπόθεση (1.5) έπεται

$$\|\nabla(u_h-u)\| \;\le\; \|\nabla(\chi-u)\| \;\le\; \inf_{\chi\in S_h}\|\nabla(\chi-u)\| \;\le\; Ch^{s-1}\|u\|_{H^s(\Omega)}.$$

Για το σφάλμα στην L_2-νόρμα θα χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα των Aubin-Nitsche. Έστω φ μια βοηθητική συνάρτηση στον $L_2(\Omega)$, και $\psi \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ η λυση του προβλήματος:

$$\begin{aligned}-\Delta\psi &= \varphi,\ x\in\Omega\\ \psi &= 0,\ x\in\partial\Omega.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Με βάση την σχέση (1.4) η λύση του (1.10) είναι ομαλότερη, κατά δύο παραγώγους, από το δεξί μέλος φ, έτσι ώστε

$$\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \;\le\; C\|\Delta\psi\| = C\|\varphi\|. \tag{1.11}$$

Για κάθε $\psi_h\in S_h$ έχουμε

$$\begin{aligned}(u_h-u,\varphi) &= -(u_h-u,\Delta\psi) = (\nabla(u_h-u),\nabla\psi)\\ &= (\nabla(u_h-u),\nabla\psi)-(\nabla(u_h-u),\nabla\psi_h)\\ &= (\nabla(u_h-u),\nabla(\psi_h-\psi))\\ &\le \|\nabla(u_h-u)\|\,\|\nabla(\psi_h-\psi)\|,\end{aligned}$$

επικαλούμαστε την εκτίμηση για σφάλμα των κλίσεων που δείξαμε παραπάνω, όταν $s=2$ για το πρόβλημα (1.10) και σε συνδυασμό με την (1.11) παίρνουμε

$$\begin{aligned}(u_h-u,\varphi) &\le Ch^{s-1}\|u\|_{H^s(\Omega)}\|\nabla(\psi_h-\psi)\|\\ &\le Ch^{s-1}\|u\|_{H^s(\Omega)}\ h\ \|\psi\|_{H^2(\Omega)}\\ &\le Ch^{s}\|u\|_{H^s(\Omega)}\|\varphi\|.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $\varphi = u_h-u$ προκύπτει ότι

$$\|u_h-u\|^2 \;\le\; Ch^s\|u\|_{H^s(\Omega)}\|u_h-u\|.$$

Άρα, καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα

$$\|u_h - u\| \ \leq \ Ch^s \|u\|_{H^s(\Omega)}.$$

∎

Στο σημείο θα ορίσουμε την ελλειπτική ή αλλιώς Ritz προβολή στον χώρο πεπερασμένων στοιχείων S_h, όπου $R_h : H_0^1(\Omega) \to S_h$,

$$(\nabla R_h u, \nabla \chi) = (\nabla u, \nabla \chi) \ \ \forall \chi \in S_h, \ u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.12}$$

Καλείται επίσης, ορθογώνια προβολή ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\nabla v, \nabla w)$.

Παρατήρηση 4 *Θέτωντας $\chi = \nabla R_h u$ έπεται η ευστάθεια στον χώρο $H_0^1(\Omega)$ ή αλλιώς $\|\nabla R_h u\| \ \leq \ \|\nabla u\| \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega)$.*

Σχόλιο 1 *Από την σκοπιά της σχέσης (1.9), ο παραπάνω ορισμός μπορεί να εκφραστεί διαφορετικά λέγοντας πως η $R_h u$ είναι η πεπαρασμένη προσέγγιση στον S_h της ακριβής λύσης u του ελλειπτικού προβλήματος.*

Λήμμα 1.2.2 *Υποθέτουμε ότι η (1.5) ισχύει. Άρα σύμφωνα με τον τρόπο που ορίσαμε τον προβολικό τελεστή R_h, για $1 \leq s \leq r$,*

$$\|R_h u - u\| + h\|\nabla (R_h u - u)\| \ \leq \ Ch^s \|u\|_{H^s(\Omega)} \ \ \forall u \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Μετά από αυτή την προετοιμασία, θα επανέλθουμε στο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (1.1) της εξίσωσης θερμότητας.

1.2.2 Η εξίσωση θερμότητας

Ασθενής διατύπωση και συνθήκες ομαλότητας

Όπως και στην περίπτωση του ελλειπτικού προβλήματος θα ξεκινήσουμε γράφοντας το πρόβλημα σε ασθενή διατύπωση.
Αρχικά, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με μια ομαλή συνάρτηση φ που εξαφανίζεται στο σύνορο (είτε $\varphi \in H_0^1(\Omega)$), ολοκληρώνουμε πάνω στο χωρίο Ω, έπειτα εφαρμόζουμε την ταυτότητα Green στο αριστερό μέλος και έπεται:

Πόρισμα 1.2.3 *Βρες $u \in H_0^1(\Omega)$ ώστε*

$$(u_t, \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \ t > 0. \tag{1.13}$$

Από το Θεώρημα 1.1.12, έπεται ότι $u_t \in H^{-1}(\Omega)$.

Απόδειξη: Από την ασθενή διατύπωση έχουμε ότι

$$(u_t, \varphi) = (f, \varphi) - (\nabla u, \nabla \varphi) = \int_\Omega (f\varphi - \nabla u \cdot \nabla \varphi)\, dx,$$

με $f, \nabla u \in L_2(\Omega)$.

Από το Θεώρημα 1.1.12 προκύπτει ότι μπορούμε να έχουμε $u_t \in H^{-1}(\Omega)$ και μπορούμε να γράψουμε $(u_t, \varphi) = \langle u_t, \varphi \rangle$. ∎

Ορισμός 1.2.4 *Μια συνάρτηση $u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$, με $u_t \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ αποτελεί ασθενή λύση του παραβολικού προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών* (1.1) *και ισχύουν*

- $\langle u_t, \varphi \rangle + (\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi)$ *για κάθε* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $0 \le t \le T$, *και επιπλέον*
- $u(\cdot, 0) = v$.

Σχόλιο 2 *Βάσει του Θεωρήματος 1.1.19, βλέπουμε ότι $u \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, και επομένως η ισότητα $u(\cdot, 0) = v$ έχει νόημα.*

Πόρισμα 1.2.5 *Η μεταβολική λύση του προβλήματος* (1.13) *είναι μοναδική.*

Απόδειξη: Για $\varphi = u \in H_0^1(\Omega)$ στη σχέση (1.13) έπεται ότι

$$(u_t, u) + (\nabla u, \nabla u) = (f, u),$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \;\le\; \|f\|\|u\|.$$

Από την ανισότητα Poincare-Friedrichs στο αριστερό μέλος προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \frac{1}{C_{PF}}\|u\|^2 \;\le\; \|f\|\|u\|$$

Θέτουμε $k = \frac{1}{C_{PF}}$ και από την ανισότητα Young στο δεξί μέλος έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + k\|u\|^2 \;\le\; \frac{1}{2k}\|f\|^2 + \frac{k}{2}\|u\|^2,$$

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + k\|u\|^2 \;\le\; \frac{1}{k}\|f\|^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{kt}\|u\|^2\right) \;\leq\; \frac{e^{kt}}{k}\|f\|^2.$$

Ολοκληρώνοντας από το 0 εώς το t,

$$e^{kt}\|u\|^2 - \|v\|^2 \;\leq\; \frac{1}{k}\int_0^t e^{ks}\|f\|^2\,ds,$$

$$\|u\|^2 \;\leq\; e^{-kt}\|v\|^2 + \frac{1}{k}\int_0^t e^{-k(t-s)}\|f\|^2\,ds.$$

Έστω u_1, u_2 λύσεις του προβλήματος για $v \equiv 0$ και $f \equiv 0$. Τότε από την τελευταία σχέση έπεται ότι $u \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$. ∎

Εφόσον το σύνορο είναι ομαλό, μια τέτοια λυση είναι ομαλή και καθιστά κατ΄ επέκταση τα δεδομένα ως ομαλές συναρτήσεις, αλλά με την προϋπόθεση ότι θα πληρούνται συγκεκριμένες συνθήκες συμβατότητας την χρονική στιγμή $t = 0$. Οι συνθήκες συμβατότητας που απαιτούνται, υποδηλώνουν ότι αν και διαφορετικές οι συνθήκες στο σύνορο του προβλήματος (1.1) συμφωνούν μεταξύ τους [9]. Όλα αυτά συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα .

Θεώρημα 1.2.6 *Υποθέτουμε ότι* $v \in H^{2m+1}(\Omega)$, $\frac{d^k f}{dt^k} \in L_2(0,T;H^{2m-2k}(\Omega))$ $k = 0,\ldots,m$. *Θεωρούμε, επίσης, τις ακόλουθες συνθήκες συμβατότητας:*

$v_0 := v \in H_0^1(\Omega),\ v_1 := \Delta v_0 + f(0) \in H_0^1(\Omega)\ \ ,\ldots,\ \ v_m := \Delta v_{m-1} + \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}f(0) \in H_0^1(\Omega)$

Τότε $\frac{d^k u}{dt^k} \in L_2(0,T;H^{2m+2-2k}(\Omega))$ $k = 0,\ldots,m$ *και έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση (parabolic regularity estimate)*

$$\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|_{L_2(0,T;H^{2m+2-2k}(\Omega))} \;\leq\; C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^k f}{dt^k}\right\|_{L_2(0,T;H^{2m-2k}(\Omega))} + \|v\|_{H^{2m+1}(\Omega)}\right).$$

Πλήρως διακριτό σχήμα

Τώρα είμαστε έτοιμοι να προσεγγίσουμε την λύση $u(x,t)$ του προβλήματος (1.1) μέσω των συναρτήσεων $u_h(x,t)$, οι οποίες για κάθε σταθερή χρονική στιγμή ανήκουν σε ένα πεπερασμένο γραμμικό χώρο S_h από χωρικές συναρτήσεις. Συνεπώς, η προσεγγιστική λύση θα έιναι λύση ενός h-εξαρτώμενου πεπερασμένου συστήματος από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις στον χρόνο.

Αρχικά διατυπώνουμε το χωρικά ημιδιακριτό πρόβλημα βασισμένοι στην ασθενή διατύπωση (1.13)

Βρες $u_h(t) = u_h(\cdot, t) \in S_h,\ t \geq 0$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} (u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla \chi) = (f, \chi) \ \ \forall \chi \in S_h,\ t > 0 \\ u_h(0) = v_h, \end{aligned} \tag{1.14}$$

όπου v_h είναι μια προσέγγιση της αρχικής συνθήκης v στον χώρο S_h.

Το ημιδιακριτό πρόβλημα (1.14) μπορεί να διατυπωθεί σε όρους της βάσης, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$, του χώρου S_h ως εξής:

Βρες τους συντελεστές $\alpha_i(t)$ της $u_h(x,t) = \sum_{i=i}^{N_h} \alpha_i(t)\varphi_i(t)$ ώστε

$$\sum_{i=i}^{N_h} \alpha_i'(t)(\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{i=i}^{N_h} \alpha_i(t)(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j) = (f, \varphi_j) \ \ \forall j = 1, \ldots, N_h$$

και γ_i οι συντελεστές της αρχικής προσέγγισης v_h, δηλαδή $\alpha_i(0) = \gamma_i$,$\forall j = 1, \ldots, N_h$.

Με την χρήση πινάκων προκύπτει μια ισοδύναμη αναπαράσταση της μορφής :

$$\begin{aligned} M\alpha'(t) + S\alpha(t) = \tilde{f}(t)\ ,\ t > 0 \\ \alpha(0) = \gamma, \end{aligned}$$

όπου $M = (m_{ij})$ ο πίνακας μάζας (mass matrix) με στοιχεία $m_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$, $S = (s_{ij})$ ο πίνακας ακαμψίας (stiffness matrix) με $s_{ij} = (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j)$ και $\tilde{f} = (f_j)$ ο πίνακας στήλη (load vector με στοιχεία $f_j = (f, \varphi_j)$. Ακόμη, $\alpha(t)$ το διάνυσμα των αγνώστων $\alpha_i(t)$, και $\gamma = (\gamma_j)$.
Όπως και ο πίνακας ακαμψίας, έτσι και ο πίνακας μάζας είναι θετικά ορισμένος και αντιστρέψιμος. Άρα, το προηγούμενο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \alpha'(t) + M^{-1}S\alpha(t) = M^{-1}\tilde{f}(t)\ ,\ t > 0 \\ \alpha(0) = \gamma \end{aligned}$$

και προφανώς θα έχει μοναδική λύση για κάθε χρονική στιγμή.

Για να επιτύχουμε ένα πλήρως διακριτό επαναληπτικό σχήμα αρκεί να διακριτοποιήσουμε το σύστημα ως προς τον χρόνο. Στα βασικά σχήματα αυτή η χρονική διακριτοποίηση γίνεται με μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Θα δούμε συνοπτικά κάποια απλά και βασικά σχήματα.
Θα συμβολίζουμε με k το σταθερο χρονικό βηματισμό, οπότε τα χρονικά επίπεδα θα είναι ισαπέχοντα με $t = t_n = nk$ και n ένα μη αρνητικό ακέραιο. Με $U^n = U_h^n \in S_h$ θα δηλώνουμε την προσέγγιση της $u(t_n)$.

Θα ξεκινήσουμε με την *backward Euler Galerkin Method*, όπου προσεγγίζουμε την πρώτη παράγωγο ως προς τον χρόνο από ένα πηλίκο προς τα πίσω διαφορών, $\overline{\partial} U^n = \frac{U^n - U^{n-1}}{k}$,

$$\begin{gathered}(\overline{\partial} U^n, \chi) + (\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(t_n), \chi) \ \ \forall \chi \in S_h \ , \ n \geq 1 \\ U^0 = v_h,\end{gathered}$$

για δοθείσα U^{n-1}, η U^n έπεται άμεσα από την εξίσωση

$$(U^n, \chi) + k(\nabla U^n, \nabla \chi) = (U^{n-1} + kf(t_n), \chi) \ \ \forall \chi \in S_h,$$

η αποία αποτελεί διατύπωση πεπερασμένων στοιχείων της ελλειπτικής εξισωσης της μορφής $(I - k\Delta)u = g$. Η μέθοδος αυτή είναι τάξης ακρίβειας ένα ως προς τον χρόνο, λόγω της μη συμμετρικής επιλογής της διακριτοποίσης του χρονικου διαστήματος.

Συνεχίζουμε με την *Crank - Nicolson Galerkin Method.* Εδώ, η ημιδιακριτή εξίσωση διακριτοποιείται με ένα συμμετρικό τρόπο γύρω από το σημείο $t_{n-\frac{1}{2}} = (n - \frac{1}{2})k$, κατασκευάζονατς μία μέδοθο τάξης ακρίβειας δύο στον χρόνο. Συγκεκριμένα, θέτουμε $\widehat{U}_n = \frac{U^n + U^{n-1}}{2}$ και αναζητούμε $U^n \in S_h$ ώστε

$$\begin{gathered}(\overline{\partial} U^n, \chi) + (\nabla \widehat{U}_n, \nabla \chi) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \chi) \ , \ \forall \chi \in S_h \ , \ n \geq 1, \\ U^0 = v_h\end{gathered}$$

Ένας άλλος τρόπος, για να πετύχουμε τάξη ακρίβειας δύο στον χρόνο, είναι να προσεγγίσουμε την χρονική παράγωγο της διαφορικής εξίσωσης με ένα πηλίκο προς τα πίσω διαφορών αλλά δεύτερης τάξης. Άρα, θέτουμε

$$\overline{D} U^n = \overline{\partial} U^n + \frac{1}{2} k \overline{\partial}^2 U^n = \frac{\frac{3}{2} U^n - 2U^{n-1} + \frac{1}{2} U^{n-2}}{k} \ .$$

Αν εφραμόσουμε το ανάπτυγμα Taylor, για ομαλή συνάρτηση ισχύει $\overline{D} u(t_n) = u_t(t_n) + O(k^2)$ καθώς $k \to 0$.

Στην περίπτωση αυτή το διακριτό πρόβλημα γίνεται

$$(\overline{D} U^n, \chi) + (\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(t_n), \chi) \ , \ \forall \chi \in S_h \ , \ n \geq 2.$$

Να σημειώσουμε ότι για σταθερό n, η παραπάνω εξίσωση χρειάζεται τρία χρονικά επίπεδα εν συγκρίσει με τις προηγούμενες μεθόδους που αρκούσαν δύο. Οπότε έχοντας ως αρχική συνθήκη $U^0 = v_h$, χρειαζόμαστε ακόμη την τιμή U^1. Για αυτό τον λόγο θα χρησιμοποιήσουμε το πρώτο βήμα της *backward Euler Method*, δηλαδή για $n = 1$.

Σχόλιο 3 *Το πλεονέκτημα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε σύγκριση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών είναι ότι χειρίζεται τα περίπλοκα χωρία ,τις γενικές*

συνοριακές συνθήκες και τις μη γραμμικές ιδιότητες πιο εύκολα. Ακόμη, η ξεκάθαρη δομή και ευελιξία επιτρέπει την δημιουργία κώδικα για γενικές εφαρμογές. Τέλος, το μαθηματικό υπόβαθρο των πεπρασμένων στοιχείων καθιστά δυνατή την ανάλυση και την εκτίμηση σφάλματος της προσεγγιστικής λύσης.

1.3 Ασυνεχής μέθοδος Galerkin στον χρόνο

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Galerkin και στη μεταβλητή του χρόνου. Έπομένως, θα ορίσουμε και θα αναλύσουμε μια μέθοδο που χειρίζεται τις μεταβλητές χρόνου και χώρου παρόμοια. Θα αναζητήσουμε την προσεγγιστική λύση ως μια κατά τμήματα πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού το πολύ $q-1$ ως προς τον χρόνο t, η οποία δεν θα είναι κατά ανάγκη συνεχής στα κομβικά σημεία της διαμέρισης.

Αρχικά, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την διακριτοποίηση στον χρόνο. Θεωρούμε H ένα χώρο Hilbert και A ένα αυτοσυζηγή, θετικά ορισμένο, και όχι υποχρεωτικά φραγμένο τελεστή, με πεδίο ορισμού $D(A) \subseteq H$.

Έστω, το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} u' + Au &= f, \ t > 0 \\ u(0) &= v. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Προκειμένου να διακριτοποιήσουμε αυτή την αφηρημένη συνήθη διαφορική εξίσωση, θεωρούμε μια διαμερίση του t - άξονα όχι υποχρεωτικά ομοιόμορφα τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ και θέτουμε $J_n = (t_{n-1}, t_n]$ τα επιμέρους διαστήματα, μήκους $k_n = t_n - t_{n-1}$ και $k = \max_n k_n$. Αναζητούμε μια προσεγγιστική λύση του προβήματος (1.15) πολυωνυμικού βαθμού το πολύ $q-1$ ως προς τον χρόνο σε κάθε υποδιάστημα J_n με συντελεστές που ανήκουν στον χώρο H.

Ορίζουμε τον ακόλουθο χώρο συναρτήσεων,

$$S_k = \{X : [0, \infty) \to H; \ X|_{J_n} = \sum_{j=0}^{q-1} \psi_j t^j \ , \ \psi_j \in H\}.$$

Να σημειώσουμε ότι οι συναρτήσεις που ανήκουν στον χώρο S_k επιτρέπεται να είναι ασυνεχείς στα κομβικά σημεία, αλλά είναι συνεχείς από τα αριστερά. Ακόμη, η $X(0)$ πρέπει να οριστεί ξεχωριστά καθώς $0 \notin J_1$. Για $X = X_k \in S_k$, θα συμβολίζουμε με X^n και X^n_+ την τιμή της X και το κάτω όριο την χρονική στιγμή t_n, αντίστοιχα. Τέλος, με S^n_k θα αναφερόμαστε στον περιορισμό των συναρτήσεων του χώρου S_k σε κάθε διάστημα J_n.

Για να παρουσιάσουμε την μέθοδο διακριτοποίησης, επιλέγουμε ένα διάστημα $[0, t_N]$ με $T = t_N$. Η ακριβής λύση του συνεχούς προβλήματος (1.15) ικανοποιεί την επόμενη εξίσωση για δοθείσα ομαλή συνάρτηση w

$$\int_0^{t_N} ((u', w) + A(u, w)) \, dt = \int_0^{t_N} (f, w) \, dt.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη τον πρώτο όρο του αριστερού μέλους και εφόσον $w(t_N) = 0$,

$$\int_0^{t_N} (-(u, w') + A(u, w)) \, dt = (v, w(0)) + \int_0^{t_N} (f, w) \, dt \tag{1.16}$$

εδώ $A(u,w)$ είναι η διγραμμική μορφή, ορισμένη ως $A(u,w) = (u, Aw) = (Au, w),\ u, w \in D(A)$. Αντικαθιστώντας την u στην ασθενή διατύπωση (1.16) με μια συνάρτηση $U \in S_k$ και ολοκληρώνοντας κατά μέλη σε κάθε υποδιάστημα J_n, παρατηρούμε για τον πρώτο όρο του αριστερού μέλους, με $w^n = w(t_n)$ $(w^N = 0)$,

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{t_N} (U, w')\, dt &= -\sum_{n=1}^{N} \left((U,w)\Big|_{t_{n-1}}^{t_n} + \int_{J_n} (U', w)\, dt \right) \\
&= \int_0^{t_N} (U', w)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} ([U]_n, w^n) + (U_+^0, w^0),
\end{aligned}
$$

όπου $[U]_n = U_+^n - U^n$ είναι το άλμα (jump) της U στο t_n και U' είναι το κατά τμήματα πολυώνυμο βαθμού $q-2$, που συμφωνεί με την παράγωγο $\frac{dU}{dt}$ σε κάθε διάστημα J_n. Ανακαλώντας την σχέση (1.16), μπορούμε να ορίσουμε το διακριτό σχήμα.

Βρες $U \in S_k$ τέτοια ώστε $\forall X \in S_k$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} ((U', X) + A(U, X))\ dt + + \sum_{n=1}^{N-1} \left([U]_n, X_+^n\right) + (U_+^0, X_+^0) &= (v, X_+^0) + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (f, X)\, dt, \\
U^0 &= v
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Η συνάρτηση X δεν απαιτείται να είναι συνεχής στις χρονικές στιγμές t_n, μπορούμε να διαλέξουμε τις τιμές της στα διαφορετικά χρονικά διαστήματα ανεξάρτητα. Επιλέγοντας το X να εξαφανίζεται εκτός του J_n, η εξίσωση ισοδυναμεί με ένα σύνολο εξισώσεων σε κάθε διάστημα $J_n,\ n \le N$, και προκύπτει το ανάλογο διακριτό σχήμα:

Βρες $U \in S_k^n$ τέτοια ώστε $\forall X \in S_k^n,\ 1 \le n \le N$

$$
\begin{aligned}
\int_{J_n} ((U', X) + A(U, X))\ dt + (U_+^{n-1}, X_+^{n-1}) &= (U^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (f, X)\, dt \\
U^0 &= v.
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Παρατηρούμε ότι η διακριτή λύση είναι ανεξάρτητη της επιλογής του τελικού κόμβου t_N. Ακόμη, η ακριβής λύση ικανοποιεί το ημιδιακριτό σχήμα (1.18), δηλαδή η μέθοδος είναι συνεπής.

Τώρα θα δείξουμε ότι το τοπικό πρόβλημα (1.18) έχει μοναδική λύση που ανήκει στον χώρο S_k για δοθέντα U^{n-1} και $f|_{J_n}$. Ωστόσο, για να δείξουμε την μοναδικότητα αρκεί να δείξουμε ότι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$
\int_{J_n} ((U', X) + A(U, X))\ dt + (U_+^{n-1}, X_+^{n-1}) = 0 \quad \forall X \in S_k^n
$$

έχει μοναδική λύση, την τετριμμένη, $U \equiv 0$.

Για τον σκοπό αυτό, υποθέτωντας ότι U είναι η λύση, διαλέγουμε $X = U \in S_k^n$.
Εφόσον, $2(U', U) = \frac{d}{dt}\|U\|^2$, έπεται

$$\|U^n\|^2 - \|U_+^{n-}\|^2 + 2\int_{J_n} A(U,U)\,dt + 2\|U_+^{n-1}\|^2 = 0,$$

είτε

$$\|U^n\|^2 + \|U_+^{n-}\|^2 + 2\int_{J_n} \left|U\right|_1^2 dt = 0. \tag{1.19}$$

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε την νόρμα $|u|_s = \|A^{s/2}u\|$ στον χώρο $\dot{H}_s$ [1],[5]. Πιο συγκεκριμένα, $A(U,U) = \|A^{1/2}u\|^2 = \left|U\right|_1^2$. Από την σχέση (1.19) έπεται ότι $A(U,U) = 0$ στο διάστημα J_n, άρα $U(t) = 0$ στο J_n το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Επίσης, μπορούμε να καταλήξουμε άμμεσα πως $U^n = U_+^{n-1} = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $U(t) = 0$ στο J_n, εάν $q = 1$ ή $q = 2$, αλλά όχι για υψηλότερες τιμές του q.

Στην περίπτωση $q = 1$, δηλαδή όταν οι προσεγγιστικές συναρτήσεις είναι κατά τμήματα σταθερές στον χρόνο, $U' = 0$ και $U(t) = U^n = U_+^{n-1}$ στο J_n, με αποτέλεσμα η μέθοδος να μετατρέπεται στην τροποποιημένη backward Euler μέθοδο,

$$(U^n, \psi) + k_n A(U^n, \psi) = (U^{n-1}, \psi) + \left(\int_{J_n} f(t)\,dt, \psi\right) \quad \forall \psi \in D(A),$$

είτε

$$(I + k_n A)U^n = U^{n-1} + \int_{J_n} f(t)\,dt, \tag{1.20}$$

για $U^n \in D(A)$. Η εξίσωση (1.20) μπορεί επίσης, να γραφεί ως εξής

$$\overline{\partial}_n U^n + AU^n = \frac{1}{k_n}\int_{J_n} f(t)\,dt \quad \text{όπου} \quad \overline{\partial}_n U^n = \frac{U^n - U^{n-1}}{k_n}.$$

Να σημειώσουμε ότι το $f^n = f(t_n)$ της κλασικής backward Euler μεθόδου αντικαταστήθηκε από το μέσο της f στο εκάστοτε διάστημα J_n.

Επειδή ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε το σφάλμα για το πρόβλημα (1.18) την χρονική στιγμή $t = t_N$ θα ορίσουμε την ολική διγραμμική μορφή

$$B_N(V,W) = \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left((V',W) + A(V,W)\right)\,dt + \sum_{n=1}^{N-1}\left([V]_n, W_+^n\right) + (V_+^0, W_+^0) \quad \forall V, W \in S_k. \tag{1.21}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, προκύπτει μια ισοδύναμη αναπαράσταση της διγραμμικής μορφής

$$B_N(V,W) = \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \left(-(V,W') + A(V,W)\right) dt - \sum_{n=1}^{N-1} (V^n, [W]_n) + (V^N, W^N) \ \ \forall V, W \in S_k. \tag{1.22}$$

Με βάση αυτό τον ορισμό οι διακριτές εξισώσεις (1.17) μπορούν να γραφούνε:

Βρες $U \in S_k$ τέτοιο ώστε

$$B_N(U,X) = (v, X_+^0) + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (f, X)\, dt \ \ \forall X \in S_k.$$

Προφανώς η λύση u του συνεχούς προβλήματος ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση και ισχύει

$$B_N(u,X) = (v, X_+^0) + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (f, X)\, dt, \tag{1.23}$$

και για το σφάλμα $e = U - u$ ισχύει

$$B_N(e,X) = 0 \ \ \forall X \in S_k \tag{1.24}$$

Η σχέση (1.24) είναι γνωστή ως *ορθογωνιότητα* Galerkin της μεθόδου.

Στην αναλυσή μας, θα λάβουμε υπόψη το *αντίστροφο* (*backward*) ομογενές πρόβλημα με τελική συνθήκη

$$\begin{aligned} -z' + Az &= 0, \ t < t_N \\ z(t_N) &= \varphi. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Η ανάλογη διακριτή μορφή, βάσει του δεύτερου τρόπου αναπαράστασης (1.22) της διγραμμικής μορφής, είναι

Βρες $Z \in S_k$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} B_N(X,Z) &= (X^N, \varphi) \ \ \forall X \in S_k \\ Z_+^N &= \varphi. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Η ακριβής λύση z επαληθεύει την σχέση (1.26), άρα για το σφάλμα $Z - z$ ισχύει

$$B_N(X, Z - z) = 0 \ \ \forall X \in S_k \ .$$

Αναπτύσσουμε την εξίσωση (1.26) σε επιμέρους για κάθε διάστημα J_n:

Βρες $Z \in S_k^n$ ώστε

$$\int_{J_n} (-(X, Z') + A(X, Z))\, dt + (X^n, Z^n) = (X^n, Z_+^n) \ \ \forall X \in S_k^n, \ n \leq N$$
$$Z_+^N = \varphi.$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε την ασυνεχή μέθοδο Galerkin στον χρόνο για την εύρεση της προσεγγιστικής λύσης του παραβολικού προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών (1.1), που διατυπώσαμε από την αρχή κιόλας της προηγούμενης ενότητας, αλλά για δοθέν χρονικό διάστημα $[0, T]$:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f, \ x \in \Omega, \ t \in (0, T] \\ u &= 0, \ x \in \partial\Omega, \ t \in (0, T] \\ u(\cdot, 0) &= v, \ x \in \Omega. \end{aligned}$$

Θεωρούμε πλέον ότι το Ω είναι ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Θα περιορίσουμε την συζήτηση στην κλασική οικογένεια $S_h = \{\chi \in C(\overline{\Omega}) \ ; \ \chi|_\tau \in P_1(\tau) \ , \ \chi|_{\partial\Omega} = 0\}$ για το ημιδιακριτό πρόβλημα:

Βρες $u_h(t) = u_h(\cdot, t) \in S_h$ για κάθε $t \in (0, T]$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} (u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla \chi) &= (f, \chi) \ \ \forall \chi \in S_h, \ t \in (0, T] \\ u_h(0) &= v_h, \end{aligned}$$

όπου v_h είναι μια προσέγγιση της αρχικής συνθήκης v.

Σε αυτό το πρόβλημα τώρα θα εφαρμόσουμε την ασυνεχή μέθοδο στον χρόνο (*DG time stepping method*), οπότε ο χώρος Hilbert $H_0^1(\Omega)$ θα αντικατασταθεί από τον S_h, εφοδιασμένο με το L_2-εσωτερικό γινόμενο, και ο διακριτός τελεστής Laplace, Δ_h, θα παίξει τον ρόλο του τελεστή A. Όπου $\Delta_h : S_h \to S_h$ ώστε $(\Delta_h \psi, \chi) = -(\nabla \psi, \nabla \chi) \ \ \forall \psi, \chi \in S_h$.

Επομένως, θα εργαστούμε στον ακόλουθο συναρτησιακό χώρο

$$S_{kh} = \{X : [0, T] \to S_h; \ X\big|_{J_n} = \sum_{j=0}^{q-1} X_j t^j \ , \ X_j \in S_h\}$$

και το πλήρως διακριτό πλέον σχήμα γίνεται:

Βρες $U_h \in S_{kh}$ έτσι ώστε

$$B_N(U_h, X) = (v_h, X_+^0) + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (f, X)\, dt \;\; \forall X \in S_{kh} \;,\; N \geq 0, \tag{1.27}$$

αλλά αυτή την φορά

$$\begin{aligned} B_N(V_h, W_h) &= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \left((V_{h,t}, W) + (\nabla V_h, \nabla W_h)\right) dt + \sum_{n=1}^{N-1} \left([V_h]_n, W_{h,+}^n\right) + (V_{h,+}^0, W_{h,+}^0) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \left(-(V_h, W_{h,t}) + (\nabla V_h, \nabla W_h)\right) dt - \sum_{n=1}^{N-1} (V_h^n, [W_h]_n) + (V_h^N, W_h^N). \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην σχέση

$$B_N(e, X) = (v_h - v, X_+^0) \;\; \forall X \in S_{kh}, \tag{1.28}$$

με $e = U_h - u$, το σφάλμα.

Τέλος, εάν υποθέσουμε επιπλέον ότι $v_h = P_h v$, το δεξί μέλος μηδενίζεται.

1.4 Ανάλυση ευστάθειας

1.4.1 Συνεχές πρόβλημα

Θεώρημα 1.4.1 *Έστω $u \in C([0,T]; L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; H_0^1(\Omega))$ η ασθενής λύση του προβλήματος* (1.13). *Τότε, ισχύει η ακόλουθη εκ των προτέρων εκτίμηση ενέργειας*

$$\frac{1}{4}\|u\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|u\|^2_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \;\leq\; T\|f\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \frac{1}{2}\|v\|^2.$$

Απόδειξη: Για $\varphi = u \in C([0,T]; L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; H_0^1(\Omega))$ η σχέση (1.13) γίνεται

$$\int_\Omega u_t u\, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \int_\Omega f u\, dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2\, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \int_\Omega f u\, dx,$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\, dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, ds = \int_0^t \int_\Omega f u\, dx\, ds + \int_\Omega v^2\, dx$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz στο δεξί μέλος έπεται ότι

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 + \int_0^t \|\nabla u\|^2\, ds = \int_0^t (f,u)\, ds + \frac{1}{2}\|v\|^2 \tag{1.29}$$

Εφόσον $0 \le t \le T$ και από τις ανισότητες Young και Hölder έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^t (f,u)\, ds \;&\le\; \int_0^T \|f\|\|u\|\, dt \;\le\; \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^T \|f\|^2\, dt + \varepsilon \int_0^T \|u\|^2\, dt \\ &\le\; \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^T \|f\|^2\, dt + \varepsilon T \max_{t\in[0,T]} \|u\|^2.\end{aligned}$$

Παίρνοντας το supremum σε όλα τα $t \in [0,T]$ στην σχέση (1.29), θέτουμε $\varepsilon T = \frac{1}{4}$ και προκύπτει

$$\frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}\|u\|^2 + \int_0^T \|\nabla u\|^2\, dt \;\le\; T\int_0^T \|f\|^2\, dt + \frac{1}{4}\max_{t\in[0,T]}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2,$$

ή

$$\frac{1}{4}\max_{t\in[0,T]}\|u\|^2 + \int_0^T \|\nabla u\|^2\, dt \;\le\; T\int_0^T \|f\|^2\, dt + \frac{1}{2}\|v\|^2,$$

είτε

$$\frac{1}{4}\|u\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|u\|^2_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \;\le\; T\|f\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \frac{1}{2}\|v\|^2.$$

∎

1.4.2 Πλήρως διακριτό πρόβλημα

Οι σχέσεις (1.27) και (1.28) αποτελούν μια πλήρη διακριτή διατύπωση του παραβολικού προβλήματος (1.1) με αρχικέσ-συνοριακές συνθήκες στον χώρο S_{kh}. Τώρα θα αναλύσουμε την ευστάθεια του διακριτού σχήματος.

Θεώρημα 1.4.2 *Έστω $U_h \in S_{kh}$ η λύση του πλήρως διακριτού προβλήματος* (1.27). *Τότε, ισχύει η ακόλουθουθη εκτιμήση*

$$\|U_h^N\|^2 + \sum_{n=1}^N \int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \sum_{n=0}^{N-1} \|[U_h]_n\|^2 \;\le\; C_{PF}^2 \sum_{n=1}^N \int_{J_n} \|f\|^2\, dt + \|v_h\|^2.$$

Απόδειξη: Σε κάθε υποδιάστημα $J_n = (t_{n-1}, t_n],\ n = 1,\dots,N$ έχουμε

$$\int_{J_n} ((U_{h,t}, X) + (\nabla U_h, \nabla X))\, dt + \big([U_h]_{n-1}, X_+^{n-1}\big) = \int_{J_n} (f, X)\, dt \quad \forall X \in S_{kh}^n,\ 1 \le n \le N$$

Για $X = U_h \in S_{kh}^n$ έπεται ότι

$$\int_{J_n} \left((U_{h,t}, U_h) + (\nabla U_h, \nabla U_h)\right)\, dt + \left([U_h]_{n-1}, U_{h,+}^{n-1}\right) = \int_{J_n} (f, U_h)\, dt,$$

$$\int_{J_n} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_h\|^2\, dt + \int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \left([U_h]_{n-1}, U_{h,+}^{n-1}\right) = \int_{J_n} (f, U_h)\, dt,$$

$$\frac{1}{2}\|U_h^n\|^2 - \frac{1}{2}\|U_{h,+}^{n-1}\|^2 + \int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \left([U_h]_{n-1}, U_{h,+}^{n-1}\right) = \int_{J_n} (f, U_h)\, dt.$$

Εφόσον ισχύει

$$2\left([U_h]_{n-1}, U_{h,+}^{n-1}\right) = \left([U_h]_{n-1}, U_{h,+}^{n-1} + U_{h,+}^{n-1}\right) = \left([U_h]_{n-1}, U_{h,+}^{n-1} + U_h^{n-1} + [U_h]_{n-1}\right)$$

$$= \|[U_h]_{n-1}\|^2 + \left([U_h]_{n-1}, U_{h,+}^{n-1} + U_h^{n-1}\right)$$

$$= \|[U_h]_{n-1}\|^2 + \left(U_{h,+}^{n-1} - U_h^{n-1}, U_{h,+}^{n-1} + U_h^{n-1}\right)$$

$$= \|[U_h]_{n-1}\|^2 + \|U_{h,+}^{n-1}\|^2 - \|U_h^{n-1}\|^2,$$

προκύπτει ότι

$$\|U_h^n\|^2 + 2\int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \|[U_h]_{n-1}\|^2 = 2\int_{J_n} (f, U_h)\, dt + \|U_h^{n-1}\|^2.$$

Αθροίζοντας από $n = 1$ εώς N, παίρνουμε

$$\|U_h^N\|^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \sum_{n=1}^{N}\|[U_h]_{n-1}\|^2 = 2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} (f, U_h)\, dt + \|U_h^0\|^2$$

όμως $U_h^0 = v_h$

$$\|U_h^N\|^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \sum_{n=1}^{N}\|[U_h]_{n-1}\|^2 = 2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} (f, U_h)\, dt + \|v_h\|^2$$

Εφαρμόζοντας τις ανισότητες Cauchy-Schwarz, Young και Poincare-Friedrichs στο δεύτερο μέλος, έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\|U_h^N\|^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|\nabla U_h\|^2\,dt + \sum_{n=1}^{N}\|[U_h]_{n-1}\|^2 &\leq 2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|f\|\|U_h\|\,dt + \|v_h\|^2 \\
&\leq 2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|f\|C_{PF}\|\nabla U_h\|\,dt + \|v_h\|^2 \\
&\leq C_{PF}^2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|f\|^2\,dt + \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|\nabla U_h\|^2\,dt + \|v_h\|^2,
\end{aligned}$$

και καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα ευστάθειας

$$\|U_h^N\|^2 + \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|\nabla U_h\|^2\,dt + \sum_{n=0}^{N-1}\|[U_h]_n\|^2 \leq C_{PF}^2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|f\|^2\,dt + \|v_h\|^2\ .$$

∎

Παρατήρηση 5 *Συνοψίζοντας, το βασικό χαρσκτηριστικό της ασυνεχής μεθόδου Galerkin στον χρόνο είναι ότι το πλήρως διακριτό σχήμα* (1.27) *μιμείται κατά κάποιον τρόπο τις ιδιότητες ευστάθειας του συνεχούς προβλήματος* (1.1).

1.5 Ανάλυση σφάλματος

Υποθέτουμε ότι η τριγωνοποίησή μας, T_h, είναι σχηματικά κανονική και σχεδόν ομοιόμορφη (quasi uniform).

Ορισμός 1.5.1 (Σχηματικά κανονική τριγωνοποίηση) *Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\sigma > 1$ τέτοιο ώστε $h_\tau \leq \sigma \cdot p_\tau$, για κάθε $\tau \in T_h$, όπου p_τ, η διάμετρος του εγγεγραμένου κύκλου, στο τρίγωνο $\tau \in T_h$.*

Ορισμός 1.5.2 (Σχεδόν ομοιόμορφη τριγωνοποίηση) *Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\gamma > 1$ τέτοιο ώστε $\max\limits_{\tau \in T_h} |\tau| \leq \gamma \cdot \min\limits_{\tau \in T_h} |\tau|$.*

Μια διαδεδομένη στρατηγική στην ανάλυση σφάλματος του παραβολικού προβλήματος είναι η διατύπωση του σφάλματος σε άθροισμα δύο όρων, δηλαδή

$$e = U_h - u = \theta + \rho$$

όπου ο όρος ρ, είναι το σφάλμα του ελλειπτικού πρόβλήματος και οπότε μπορούμε να το εκτιμήσουμε άμμεσα, ενώ ο πρώτος όρος θ θα είναι το κύριο ζητούμενο της ανάλυσης.
Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε τα σφάλματα που παρουσιάζονται στα κομβικά σημεία όταν $q = 1,\ q = 2$ και $q \geq 3$.

Στο σημείο αυτό θα διατυπώσουμε τα παρακάτω λήμματα που είναι απαραίτητα για τις αποδείξεις των βασικών θεωρημάτων.

Λήμμα 1.5.3 *Έστω οι τελεστές P_h, R_h, Δ_h και Δ. Η σχέση που τους συνδέει είναι η ακόλουθη*

$$\Delta_h R_h = P_h \Delta.$$

Απόδειξη: Από τις προηγούμενες ενότητες γνωρίζουμε ήδη ότι

$$\begin{aligned}
(P_h v, \chi) &= (v, \chi) \ \ \forall \chi \in S_h \\
(\nabla R_h v, \nabla \chi) &= (\nabla v, \nabla \chi) \ \ \forall \chi \in S_h,\ v \in H_0^1 \\
(\Delta_h \psi, \chi) &= -(\nabla \psi, \nabla \chi) \ \ \forall \psi, \chi \in S_h.
\end{aligned}$$

Για $R_h v \in S_h$, έχουμε

$$(\Delta_h R_h v, \chi) = -(\nabla R_h v, \nabla \chi) = -(\nabla v, \nabla \chi) = (\Delta v, \chi) = (P_h \Delta v, \chi) \ \ \forall \chi \in S_h.$$

∎

Λήμμα 1.5.4 *Υποθέτουμε ότι* $\frac{k_{n+1}}{k_n} \geq c > 0$. *Τότε για την λύση του* (1.26) *ισχύει*

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\|Z_{h,t}\| + \|\Delta_h Z_h\|)\, dt + \sum_{n=1}^{N} \|[Z_h]_n\| \;\leq\; CL_N \|\varphi\|$$

όπου $L_N = \left(\log \frac{t_N}{k_N}\right)^{1/2} + 1$. *(βλ.[14])*

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς

$$\|\varphi\|_{J_n} = \sup_{t \in J_n} \|\varphi\| \;, \quad \|\varphi\|_{2,J_n} = \sup_{t \in J_n} \|\varphi\|_2,$$

όπου τώρα $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα στον $L_2 = L_2(\Omega)$ και $\|\cdot\|_2$ εκείνη στον $H^2 = H^2(\Omega)$.

Παρατήρηση 6 *Να σημειώσουμε ότι η σταθερά* C *που εμφανίζεται σε αυτή την ενότητα είναι θετική, όχι αναγκαστικά η ίδια σε κάθε περίσταση και, τέλος, ανεξάρτητη των εμπλεκόμενων παραμέτρων και συναρτήσεων.*

Αρχικά, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα, όπου οι προσεγγιστικές συναρτήσεις είναι κατά διαστήματα σταθερές ως προς τον χρόνο. Στον χώρο θα αρκεστούμε σε γραμμικές.

Θεώρημα 1.5.5 *Υποθέτουμε ότι* $\frac{k_{n+1}}{k_n} \geq c > 0$ *για κάθε* $n \geq 0$ *και έστω* $q = 1$. *Τότε για τις λύσεις των* (1.1) *και* (1.27), *όπου* $v_h = P_h v$, *έχουμε ότι*

$$\|U_h^N - u(t_N)\| \;\leq\; CL_N \max_{n \leq N} \left(h^2 \|u\|_{2,J_n} + k_n \|u_t\|_{J_n}\right).$$

Απόδειξη: Έστω $\tilde{u}(t) \in S_k$, η κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση (συναρτήσει του χρόνου t), για την οποία ισχύει $\tilde{u}(t) = u(t_n)$, $t \in J_n$. Τότε, αναλύουμε το σφάλμα ως εξής

$$e = U_h - u = \left(U_h - R_h \tilde{u}\right) + \left(R_h \tilde{u} - u\right) = \theta + \rho \tag{1.30}$$

όπου $R_h : H_0^1 \to S_h$, η ελλειπτική προβολή που ορίζεται σύμφωνα με την σχέση (1.12). Επειδή $\tilde{u}(t_N) = u(t_N)$, προκύπτει ότι $\|\rho^N\| = \|\big(R_h u - u\big)(t_N)\| \;\leq\; Ch^2 \|u(t_N)\|_2$.
Για να φράξουμε την ποσότητα θ^N, θα βασιστούμε στο αντίστροφο πρόβλημα (1.26), όπου $\varphi \in L_2(\Omega)$ και Z_h η πλήρως διακριτή μορφή του προηγούμενου Z με

$$B_N(X, Z_h) = (X^N, P_h \varphi) = (X^N, \varphi) \;\; \forall X \in S_{kh}.$$

Να σημειώσουμε ότι η δεύτερη κατά σειρά ισότητα προήλθε από τον ορισμό της L_2-προβολής, (1.7). Οπότε για $X = \theta \in S_{kh}$ προκύπτει

$$(\theta^N, X) = B_N(\theta, Z_h) = B_N(e, Z_h) - B_N(\rho, Z_h).$$

Όμως από υπόθεση $v_h = P_h v$, άρα η (1.28) για $X = Z_h$ γίνεται $B_N(e, Z_h) = 0$.

Αφού $Z_{h,t}(t) \equiv 0$ σε κάθε διάστημα J_n,

$$(\theta^N, \varphi) = -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla Z_h)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} (\rho^n, [Z_h]_n) - (\rho^N, P_h\varphi). \tag{1.31}$$

Όμως $(\nabla\rho, \nabla Z_h) = (\nabla R_h\rho\ , \nabla Z_h)$, άρα

$$\begin{aligned} |(\theta^N, \varphi)| &\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|R_h\rho\| \|\Delta_h Z_h\|\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} \|\rho^n\| \|[Z_h]_n\| + \|\rho^N\| \|P_h\varphi\| \\ &\leq \max_{n\leq N}(\|\rho\|_{J_n} + \|R_h\rho\|_{J_n}) \left(\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|\Delta_h Z_h\|_{L_2(\Omega)}\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} \|[Z_h]_n\| + \|\varphi\| \right). \end{aligned}$$

Από το αποτέλεσμα ευστάθειας του Λήμματος 1.5.4, έχουμε ότι

$$\|\theta^N\| \leq CL_N \max_{n\leq N} \left(\|\rho\|_{J_n} + \|R_h\rho\|_{J_n} \right).$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{J_n} = \|R_h\tilde{u} - u\|_{J_n} &\leq \|R_h\tilde{u} - \tilde{u}\|_{J_n} + \|\tilde{u} - u\|_{J_n} \\ &\leq \|(R_h - I)\tilde{u}\|_{J_n} + \|\tilde{u} - u\|_{J_n} \\ &\leq Ch^2\|u\|_{2,J_n} + Ck_n\|u_t\|_{J_n} \end{aligned}$$

και επειδή $R_h\rho = R_h\tilde{u} - R_h u = \rho - (R_h u - u)$, η συνάρτηση αυτή φράσσεται ακριβώς από την ίδια ποσότητα. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ∎

Για $q = 2$ θα δείξουμε την παρακάτω υπερσύγκλιση τρίτης τάξης στα κομβικά σημεία.

Θεώρημα 1.5.6 *Έστω $q = 2$, και υποθέτουμε ότι $\frac{k_{n+1}}{k_n} \geq c > 0$ για κάθε $n \geq 0$. Τότε για τις λύσεις των (1.1) και (1.27), όπου $v_h = P_h v$, έχουμε ότι*

$$\|U_h^N - u(t_N)\| \leq CL_N \max_{n\leq N} \left(h^2\|u\|_{2,J_n} + k_n^3\|u_{tt}\|_{2,J_n} \right).$$

Απόδειξη: Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη θα αναλύσουμε το σφάλμα σύμφωνα με την σχέση (1.30), δηλαδή

$$e = U_h - u = \big(U_h - R_h\tilde{u}\big) + \big(R_h\tilde{u} - u\big) = \theta + \rho$$

όπου τώρα ορίζουμε ως $\tilde{u}(t) \in S_k$, την κατά τμήματα γραμμική παρεμβάλουσα της ακριβής λύσης του (1.1) απαιτώντας

$$\tilde{u}(t_n) = u(t_n), \qquad n \geq 0$$
$$\int_{J_n} \big(\tilde{u}(t) - u(t)\big)t^l \, dt = 0, \quad l \leq q-2, \quad n \geq 1,$$

δηλαδή η $\tilde{u}$ παρεμβάλλει την u στα κομβικά σημεία, και το σφάλμα παρεμβολής είναι κάθετο στο Π_{q-2} σε κάθε διάστημα J_n [14].

Επίσης, για κάθε $t \in J_n$, $j = 0, 1$ ισχύει ότι

$$|\tilde{u}(t) - u(t)|_j^2 \;\leq\; Ck_n^{2q-1} \int_{J_n} |u^{(q)}|_j^2 \, dt.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}(\theta^N, \varphi) &= B_N(\theta, Z_h) = -B_N(\rho, Z_h) \\ &= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \big(-(\rho, Z_{h,t}) + (\nabla\rho, \nabla Z_h) \big) \, dt + \sum_{n=1}^{N-1} (\rho^n, [Z_h]_n) - (\rho^N, P_h\varphi).\end{aligned}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον ορισμό της $\tilde{u}$, έχουμε

$$\int_{J_n} (\rho, Z_{h,t}) \, dt = \int_{J_n} (R_h\tilde{u} - u, Z_{h,t}) \, dt = \int_{J_n} (R_h u - u, Z_{h,t}) \, dt$$

και από το Λήμμα 1.5.4

$$\begin{aligned}\Big| \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (R_h u - u, Z_{h,t}) \, dt \Big| \;&\leq\; \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \big|(R_h u - u, Z_{h,t})\big| \, dt \\ &\leq\; \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|R_h u - u\| \|Z_{h,t}\| \, dt \\ &\leq\; \max_{n \leq N} \|R_h u - u\|_{J_n} \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|Z_{h,t}\| \, dt \\ &\leq\; CL_N h^2 \max_{n \leq N} \|u\|_{2,J_n} \|\varphi\|.\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=1}^{N-1}(\rho^n,[Z_h]_n)\Big| + \big|(\rho^N,P_h\varphi)\big| &\le \sum_{n=1}^{N-1}\|\rho^n\|\|[Z_h]_n\| + \|\rho^N\|\|P_h\varphi\| \\ &\le \max_{n\le N}\|(R_hu-u)(t_n)\|\big(\sum_{n=1}^{N-1}\|[Z_h]_n\| + \|\varphi\|\big) \\ &\le CL_Nh^2\max_{n\le N}\|u\|_{2,J_n}\|\varphi\|.\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του ελλειπτικού τελεστή έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(\nabla\rho,\nabla Z_h)\,dt = \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(\nabla(R_h\tilde{u}-u),\nabla Z_h)\,dt = \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(\nabla(\tilde{u}-u),\nabla Z_h)\,dt$$

$$= -\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(\Delta(\tilde{u}-u),Z_h)\,dt =: \sum_{n=1}^{N}K_n.$$

Επειδή το σφάλμα παρεμβολής είναι κάθετο στις σταθερές, έχουμε

$$K_n = -\int_{J_n}\big(\Delta(\tilde{u}-u),Z_h\big)\,dt = -\int_{J_n}\left(\Delta(\tilde{u}-u),\ Z_h^{n-1}+\int_{t_{n-1}}^{t}Z_{h,t}(s)\,ds\right)\,dt$$

$$= -\int_{J_n}\left(\Delta(\tilde{u}-u),\int_{t_{n-1}}^{t}Z_{h,t}(s)\,ds\right)\,dt.$$

Επομένως, έπεται

$$\begin{aligned}|K_n| \ &\le\ k_n\|\Delta(\tilde{u}-u)\|_{J_n}\int_{J_n}\|Z_{h,t}\|\,dt \ \le\ k_n^3\|\Delta(u_{tt})\|_{J_n}\int_{J_n}\|Z_{h,t}\|\,dt \\ &= k_n^3\|u_{tt}\|_{2,J_n}\int_{J_n}\|Z_{h,t}\|\,dt\end{aligned}$$

Αθροίζουμε από $n=1$ εώς N και βάσει του Λήμματος 1.5.4 καταλήγουμε

$$\sum_{n=1}^{N}|K_n| \ \le\ \max_{n\le N}k_n^3\|u_{tt}\|_{2,J_n}\ CL_N\|\varphi\|$$

Συνδέοντας τις παραπάνω εκτιμήσεις, έχουμε

$$|(\theta^N, \varphi)| \;\le\; CL_N \max_{n\le N} \big(h^2\|u\|_{2,J_n} + k_n^3\|u_{tt}\|_{2,J_n}\big)\|\varphi\|$$

που φράσσει τον όρο $\|\theta^N\|$ από την επιθυμητή ποσότητα. ∎

Θεώρημα 1.5.7 *Έστω $q \ge 3$, και υποθέτουμε ότι $\frac{k_{n+1}}{k_n} \ge c > 0$ για κάθε $n \ge 0$. Τότε για τις λύσεις των (1.1) και (1.28), όπου $v_h = P_h v$, έχουμε ότι*

$$\|U_h^N - u(t_N)\| \;\le\; CL_N \max_{n\le N} \big(h^2\|u\|_{2,J_n} + k_n^q\|u^{(q)}\|_{J_n}\big).$$

Απόδειξη: Με την βοήθεια του ελλειπτικού τελεστή, το σφάλμα γράφεται, όπως και στις προηγούμενες αποδείξεις

$$e = U_h - u = (U_h - R_h\tilde{u}) + (R_h\tilde{u} - u) = \theta + \rho$$

με την διαφορά τώρα ότι $\tilde{u}$ είναι η κατά τμήματα παρεμβάλουσα το πολύ $q-1$ βαθμού, για την οποία ισχύει

$$\tilde{u}(t_n) = u(t_n), \qquad n \ge 0$$
$$\int_{J_n} \big(\tilde{u}(t) - u(t)\big)t^l\,dt = 0, \quad l \le q-2, \quad n \ge 1,$$

δηλαδή η $\tilde{u}$ παρεμβάλλει την u στα κομβικά σημεία, και το σφάλμα παρεμβολής είναι κάθετο στο Π_{q-2} σε κάθε διάστημα J_n.

Επίσης, για κάθε $t \in J_n$, $j = 0, 1$ ισχύει

$$|\tilde{u}(t) - u(t)|_j^2 \;\le\; Ck_n^{2q-1}\int_{J_n} |u^{(q)}|_j^2\,dt.$$

Μπορούμε κατευθείαν να φράξουμε την ποσότητα $\|\rho^N\|$ ως εξής

$$\rho^N = R_h\tilde{u}(t_N) - u(t_N) = R_h u(t_N) - u(t_N) = (R_h u - u)\,(t_N)$$

και άρα

$$\|\rho^N\| = \|(R_h u - u)\,(t_N)\| \;\le\; Ch^2\|u(t_N)\|_2.$$

Τώρα, θα ασχοληθούμε με τον δεύτερο όρο του σφάλματος

$$\begin{aligned}(\theta^N,\varphi) &= B_N(\theta,Z_h) = -B_N(\rho,Z_h)\\ &= -\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\big(-(\rho,Z_{h,t})+(\nabla\rho,\nabla Z_h)\big)\,dt+\sum_{n=1}^{N-1}(\rho^n,[Z_h]_n)-(\rho^N,P_h\varphi).\end{aligned}$$

Όμως $(\nabla\rho,\nabla Z_h)=(\nabla R_h\rho\ ,\nabla Z_h)$, άρα

$$\begin{aligned}|(\theta^N,\varphi)| &\le \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(\|\rho\|\|Z_{h,t}\|+\|R_h\rho\|\|\Delta_h Z_h\|)\,dt+\sum_{n=1}^{N-1}\|\rho^n\|\|[Z_h]_n\|+\|\rho^N\|\|P_h\varphi\|\\ &\le \max_{n\le N}(\|\rho\|_{J_n}+\|R_h\rho\|_{J_n})\left(\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(\|Z_{h,t}\|+\|\Delta_h Z_h\|)\,dt+\sum_{n=1}^{N-1}\|[Z_h]_n\|+\|\varphi\|\right)\end{aligned}$$

Τελειώνοντας, σύμφωνα με το Λήμμα 1.5.4

$$\|\theta^N\| \le CL_N\max_{n\le N}(\|\rho\|_{J_n}+\|R_h\rho\|_{J_n}).$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}\|\rho\|_{J_n}=\|R_h\tilde{u}-u\|_{J_n} &\le \|R_h\tilde{u}-\tilde{u}\|_{J_n}+\|\tilde{u}-u\|_{J_n}\\ &\le \|(R_h-I)\tilde{u}\|_{J_n}+\|\tilde{u}-u\|_{J_n}\\ &\le Ch^2\|u\|_{2,J_n}+Ck_n^q\|u^{(q)}\|_{J_n},\end{aligned}$$

και επειδή $R_h\rho=R_h\tilde{u}-R_hu=\rho-(R_hu-u)$, η συνάρτηση αυτή φράσσεται ακριβώς από την ίδια ποσότητα. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ∎

Αν και οι παραπάνω εκτιμήσεις αφορούν τα κομβικά σημεία, εκτιμήσεις με βέλτιστης τάξης μπορούν να επιτευχθούν επίσης στο εσωτερικό των διαστημάτων J_n.

Θεώρημα 1.5.8 *Για τις λύσεις των* (1.1) *(με $q\ge 1$) και*(1.27), *με $1\le n\le N$, έχουμε*

$$\|U_h-u\|_{J_n} \le \|U_h^n-u(t_n)\|+C\|U_h^{n-1}-u(t_{n-1})\|+Ch^2\|u\|_{2,J_n}+Ck_n^q\|u^{(q)}\|_{J_n}.$$

Απόδειξη: Αυτή την φορά θα αναλύσουμε το σφάλμα με την βοήθεια του L_2-προβολικού τελεστή ως εξής

$$e = U_h - u = (U_h - P_h\tilde{u}) + (P_h\tilde{u} - u) = \theta + \rho$$

όπου $\tilde{u}$, η κατά τμήματα το πολύ βαθμού $q-1$ παρεμβάλουσα της ακριβής λύσης που ορίσαμε παραπάνω. Άμμεσα έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\|\rho\|_{J_n} = \|P_h\tilde{u} - u\|_{J_n} &\leq \|P_h\tilde{u} - \tilde{u}\|_{J_n} + \|\tilde{u} - u\|_{J_n} \\
&\leq \|(P_h - I)\tilde{u}\|_{J_n} + \|\tilde{u} - u\|_{J_n} \\
&\leq Ch^2\|u\|_{2,J_n} + Ck_n^q\|u^{(q)}\|_{J_n}
\end{aligned}$$

Οπότε, αρκεί να φράξουμε το $\theta \in S_{kh}^n$. Αλλά,

$$\|\theta(t)\| \;\leq\; \|\theta(t_n)\| + \int_t^{t_n} \|\theta_t\|\, ds \;\leq\; \|e^n\| + \|\rho^n\| + \int_{J_n} \|\theta_t\|\, dt,$$

δηλαδή αρκει μόνο να δείξουμε ότι

$$\int_{J_n} \|\theta_t\|\, dt \;\leq\; C\left(\|e^{n-1}\| + \|\rho^n\|\right).$$

Ξεκινάμε απο την σχέση

$$\begin{aligned}
&\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\, dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) \\
&= (U_h^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (f, X)\, dt - \int_{J_n} (((P_h\tilde{u})_t, X) + (\nabla P_h\tilde{u}, \nabla X))\, dt - ((P_h\tilde{u})_+^{n-1}, X_+^{n-1}) \\
&= \left(U_h^{n-1} - (P_h\tilde{u})_+^{n-1}, X_+^{n-1}\right) - \int_{J_n} (\rho_t, X)\, dt \\
&= \left(U_h^{n-1} - u(t_{n-1}) + u(t_{n-1}) - (P_h\tilde{u})_+^{n-1}, X_+^{n-1}\right) - (\rho, X)|_{J_n} + \int_{J_n} (\rho, X_t)\, dt \\
&= (e^{n-1} - \rho_+^{n-1}, X_+^{n-1}) - (\rho^n, X^n) + (\rho_+^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (P_h\tilde{u} - u, X_t)\, dt \\
&= (e^{n-1}, X_+^{n-1}) - (\rho^n, X^n) + \int_{J_n} (\tilde{u} - u, X_t)\, dt
\end{aligned}$$

Λόγω της ορθογωνιότητας του σφάλματος παρεμβολής, καταλήγουμε στην σχέση

$$\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\, dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) = (e^{n-1}, X_+^{n-1}) - (\rho^n, X^n) \quad \forall X \in S_{hk}^n \tag{1.32}$$

Επιλέγοντας για $X(t) = (t - t_{n-1})\theta_t \in S^n_{kh}$, βρίσκουμε, εφόσον $X^{n-1}_+ = 0$,

$$\int_{J_n} ((\theta_t, (t - t_{n-1})\theta_t) + (\nabla\theta, \nabla(t - t_{n-1})\theta_t))\, dt = -(\rho^n, (t - t_{n-1})\theta_t(t_n)).$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz στο δεξί μέλος

$$\int_{J_n} (t - t_{n-1})\|\theta_t\|^2\, dt + \int_{J_n} (t - t_{n-1})\frac{d}{dt}(\nabla\theta, \nabla\theta)\, dt \;\le\; k_n\|\rho^n\|\,\|\theta_t(t_n)\|,$$

$$\int_{J_n} (t - t_{n-1})\|\theta_t\|^2\, dt + \frac{1}{2}\int_{J_n} (t - t_{n-1})\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|^2\, dt \;\le\; k_n\|\rho^n\|\,\|\theta_t(t_n)\|,$$

$$\underbrace{\int_{J_n} (t - t_{n-1})\|\theta_t\|^2\, dt}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}k_n\|\nabla\theta^n\|^2 \;\le\; \frac{1}{2}\int_{J_n} \|\nabla\theta\|^2\, dt + k_n\|\rho^n\|\,\|\theta^n_t\|. \tag{1.33}$$

Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα της ποσότητας (α). Από την ανισότητα Hölder (για $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$) έχουμε ότι

$$\left(\int_{J_n} \|\theta_t\|\, dt\right)^2 \;\le\; k_n \int_{J_n} \|\theta_t\|^2\, dt \;\le\; C\int_{J_n} (t - t_{n-1})\|\theta_t\|^2\, dt \tag{1.34}$$

$$\Rightarrow k_n^2\|\theta^n_t\|^2 \;\le\; C\int_{J_n} (t - t_{n-1})\|\theta_t\|^2\, dt. \tag{1.35}$$

Η ανισότητα (1.33) διατηρείται αν παραλείψουμε τη μη αρνητική ποσότητα $\frac{1}{2}k_n\|\nabla\theta^n\|^2$ και σε συνδιασμό με την ανισότητα Young , παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{J_n} (t - t_{n-1})\|\theta_t\|^2\, dt \;&\le\; \frac{1}{2}\int_{J_n} \|\nabla\theta\|^2\, dt + \frac{\|\rho^n\|^2}{2} + \frac{k_n^2\|\theta^n_t\|^2}{2}\\ &\overset{(1.35)}{\le}\; \frac{1}{2}\int_{J_n} \|\nabla\theta\|^2\, dt + \frac{\|\rho^n\|^2}{2} + C\int_{J_n} (t - t_{n-1})\|\theta_t\|^2\, dt\end{aligned}$$

οπότε

$$\int_{J_n} (t - t_{n-1})\|\theta_t\|^2\, dt \;\le\; C\underbrace{\int_{J_n} \|\nabla\theta\|^2\, dt}_{(\beta)} + C\|\rho^n\|^2. \tag{1.36}$$

Για να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα (β) στο δεξί μέλος της σχέσης (1.36), θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (1.32) για $X = 2\theta \in S^n_{kh}$ και έπεται

$$\int_{J_n} ((\theta_t, 2\theta) + (\nabla\theta, \nabla 2\theta))\, dt + 2(\theta^{n-1}_+, \theta^{n-1}_+) = 2(e^{n-1}, \theta^{n-1}_+) - 2(\rho^n, \theta^n),$$

$$2\int_{J_n}\left((\theta_t,\theta)+2(\nabla\theta,\nabla\theta)\right)\,dt+2(\theta_+^{n-1},\theta_+^{n-1}) \;\le\; 2\|e^{n-1}\|\|\theta_+^{n-1}\|+2\|\rho^n\|\|\theta^n\|,$$

$$\int_{J_n}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2\,dt+2\int_{J_n}\|\nabla\theta\|^2\,dt+2\|\theta_+^{n-1}\|^2 \;\le\; 2\|e^{n-1}\|\|\theta_+^{n-1}\|+2\|\rho^n\|\|\theta^n\|,$$

$$\|\theta^n\|^2-\|\theta_+^{n-1}\|^2+2\int_{J_n}\|\nabla\theta\|^2\,dt+2\|\theta_+^{n-1}\|^2 \;\le\; \|e^{n-1}\|^2+\|\theta_+^{n-1}\|^2+\|\rho^n\|^2+\|\theta^n\|^2,$$

$$\int_{J_n}\|\nabla\theta\|^2\,dt \;\le\; C\left(\|e^{n-1}\|^2+\|\rho^n\|^2\right),$$

Άρα η (1.36), γίνεται

$$\int_{J_n}(t-t_{n-1})\|\theta_t\|^2\,dt \;\le\; C\left(\|e^{n-1}\|^2+\|\rho^n\|^2\right)$$

και από την (1.34) προκύπτει

$$\int_{J_n}\|\theta_t\|\,dt \;\le\; C\left(\|e^{n-1}\|+\|\rho^n\|\right).$$

∎

Δείξαμε, λοιπόν, μία ολική εκτίμηση σφάλματος τάξης $\mathcal{O}(k_n^q+h^2)$ στον χώρο $L_\infty\left(0,t_N;L_2(\Omega)\right)$, η οποία είναι η βέλτιστη τάξη χρησιμοποιώντας πολυώνυμα βαθμού $q-1$ και γραμμικά, στον χρόνο και στο χώρο αντίστοιχα.

Το επόμενο θεώρημα αφορά εκτίμηση σφάλματος στον χώρο συναρτήσεων $L_2\left(0,t_N;H_0^1(\Omega)\right)$.

Θεώρημα 1.5.9 *Για τις λύσεις των* (1.1) *(με* $q\ge 1$*) και* (1.27)*, ισχύει*

$$\|U_h-u\|_{L_2\left(0,t_N;H_0^1(\Omega)\right)} \;\le\; \|\theta^0\|+Ct_N^{1/2}\max_{n\le N}\left(h\|u\|_{2,J_n}+k_n^q\|\nabla u^{(q)}\|_{J_n}\right).$$

Απόδειξη: Θέλουμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα

$$e=U_h-u=(U_h-P_h\tilde{u})+(P_h\tilde{u}-u)=\theta+\rho.$$

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τον όρο θ:

$$\begin{aligned}
&\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\, dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) \\
&= \int_{J_n} ((U_{h,t}, X) + (\nabla U_h, \nabla X))\, dt + (U_{h,+}^{n-1}, X_+^{n-1}) - \int_{J_n} (((P_h\tilde{u})_t, X) + (\nabla P_h\tilde{u}, \nabla X))\, dt \\
&\quad - ((P_h\tilde{u})_+^{n-1}, X_+^{n-1}) \\
&= (U_h^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (f, X)\, dt - \int_{J_n} (((P_h\tilde{u})_t, X) + (\nabla P_h\tilde{u}, \nabla X))\, dt - ((P_h\tilde{u})_+^{n-1}, X_+^{n-1}) \\
&= (U_h^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} ((u_t, X) + (\nabla u, \nabla X))\, dt - \int_{J_n} (((P_h\tilde{u})_t, X) + (\nabla P_h\tilde{u}, \nabla X))\, dt \\
&\quad - ((P_h\tilde{u})_+^{n-1}, X_+^{n-1})
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $(P_h\tilde{u}^{n-1} - u^{n-1}, X) = 0 \quad \forall X \in S_{kh}^n$ και $u^{n-1} = u_+^{n-1}$ διότι $u \in C([0, t_N]; L_2(\Omega))$. Αφαιρώντας από το δεύτερο μέλος τον όρο $(P_h\tilde{u}^{n-1} - u_+^{n-1}, X_+^{n-1})$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\, dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) =& (\theta^{n-1}, X_+^{n-1}) - (\rho_+^{n-1}, X_+^{n-1}) - \int_{J_n} (\rho_t, X)\, dt \\
&- \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla X), dt
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη και επειδή $(\rho^n, X^n) = 0$,

$$\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\, dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) = (\theta^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} ((\rho, X_t) - (\nabla\rho, \nabla X))\, dt,$$

Όμως $(\rho, X_t) = 0$ και, άρα,

$$\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\, dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) = (\theta^{n-1}, X_+^{n-1}) - \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla X)\, dt \quad \forall X \in S_{kh}.$$

Για $X = \theta \in S_{kh}$,

$$\int_{J_n} ((\theta_t, \theta) + (\nabla\theta, \nabla\theta))\, dt + (\theta_+^{n-1}, \theta_+^{n-1}) = (\theta^{n-1}, \theta_+^{n-1}) - \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla\theta)\, dt.$$

Εφαρμόζοντας τις ανισότητες Cauchy-Schwarz και Young στο δεύτερο μέλος έπεται ότι

$$\frac{1}{2}\int_{J_n} \frac{d}{dt}\|\theta\|^2\, dt + \int_{J_n} \|\nabla\theta\|^2\, dt + \left([\theta^{n-1}], \theta_+^{n-1}\right) \;\le\; \frac{1}{2}\int_{J_n} \|\nabla\rho\|^2\, dt + \frac{1}{2}\int_{J_n} \|\nabla\theta\|^2\, dt,$$

$$\frac{1}{2}\|\theta^n\|^2 - \frac{1}{2}\|\theta_+^{n-1}\|^2 + \frac{1}{2}\int_{J_n}\|\nabla\theta\|^2\,dt + \left([\theta^{n-1}],\theta_+^{n-1}\right) \;\le\; \frac{1}{2}\int_{J_n}\|\nabla\rho\|^2\,dt.$$

Αφού

$$2\left([\theta^{n-1}],\theta_+^{n-1}\right) = \|[\theta]^{n-1}\|^2 + \|\theta_+^{n-1}\|^2 - \|\theta^{n-1}\|^2,$$

προκύπτει ότι

$$\|\theta^n\|^2 + \int_{J_n}\|\nabla\theta\|^2\,dt + \|[\theta]^{n-1}\|^2 \;\le\; \int_{J_n}\|\nabla\rho\|^2\,dt + \|\theta^{n-1}\|^2.$$

Αθροίζοντας από $n=1$ μέχρι N,

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|\nabla\theta\|^2\,dt + \underbrace{\sum_{n=1}^{N}\|[\theta]^{n-1}\|^2 + \|\theta^N\|^2}_{(\alpha)} - \|\theta^0\|^2 \;\le\; \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|\nabla\rho\|^2\,dt.$$

Αγνοούμε την μη αρνητική ποσότητα (α)

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|\nabla\theta\|^2\,dt \;\le\; \|\theta^0\|^2 + \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|\nabla\rho\|^2\,dt,$$

και, άρα,

$$\|\theta\|^2_{L_2\left(0,t_N;H_0^1(\Omega)\right)} \;\le\; \|\theta^0\|^2 + \|\rho\|^2_{L_2\left(0,t_N;H_0^1(\Omega)\right)},$$

ή

$$\|\theta\|_{L_2\left(0,t_N;H_0^1(\Omega)\right)} \;\le\; \|\theta^0\| + \|\rho\|_{L_2\left(0,t_N;H_0^1(\Omega)\right)}.$$

Αρκεί, λοιπόν, να φράξουμε τον όρο $\|\rho\|_{L_2\left(0,t_N;H_0^1(\Omega)\right)}$, προκείμένου να ολοκληρώσουμε την απόδειξη.

Από την ανισότητα Hölder (για $\frac{1}{\infty}+\frac{1}{1}=1$) έχουμε

$$\|\rho\|^2_{L_2\left(0,t_N;H_0^1(\Omega)\right)} = \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|\nabla\rho\|^2\,dt \;\le\; t_N\max_{n\le N}\|\nabla\rho\|^2_{Jn}.$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\|\nabla\rho\|_{J_n} &= \|\nabla(P_h\tilde{u}-u)\|_{J_n}\\ &\le \|\nabla(P_h\tilde{u}-\tilde{u})\|_{J_n}+\|\nabla(\tilde{u}-u)\|_{J_n}\\ &\le Ch\|u\|_{2,J_n}+Ck_n^q\|\nabla u^{(q)}\|_{J_n}\end{aligned}$$

που μας αρκεί ώστε

$$\|\theta\|_{L_2\left(0,t_N;H_0^1(\Omega)\right)} \le \|\theta^0\|+Ct_N^{1/2}\max_{n\le N}\left(h\|u\|_{2,Jn}+k_n^q\|\nabla u^{(q)}\|_{Jn}\right).$$

Αν, επιπλέον, ισχύει ότι $v_h=P_hv$, τότε $\|\theta^0\|=\|U_h^0-P_h\tilde{u}(0)\|=\|v_h-P_hv\|=0$. ∎

Θα ολοκληρώσουμε αυτή την ενότητα και κατ΄ επέκταση το πρώτο κεφάλαιο με το ακόλουθο θεώρημα που αφορά την εκτίμηση σφάλματος στον χώρο $L_\infty\left(0,t_N;H_0^1(\Omega)\right)$.

Θεώρημα 1.5.10 *Υποθέτουμε ότι* $\frac{k_{n+1}}{k_n}\ge c>0$ *για κάθε* $n\ge 0$ *και έστω* $q\ge 1$. *Τότε για τις λύσεις των* (1.1) *και* (1.27), *όπου* $v_h=P_hv$, *έχουμε ότι*

$$\|\nabla(U_h-u)(t_N)\| \le CL_N\max_{n\le N}\left(h\|u\|_{2,J_n}+Ck_n^q\|u^{(q)}\|_{1,J_n}\right).$$

Απόδειξη: Έστω $\tilde{u}(t)\in S_k$ η κατά τμήματα παρεμβάλουσα βαθμού το πολύ $q-1$ της ακριβής λύσης u στα κομβικά σημεία, που είναι κάθετη στο Π_{q-2} σε κάθε διάστημα J_n και γράφουμε

$$e=U_h-u=(U_h-R_h\tilde{u})+(R_h\tilde{u}-u)=\theta+\rho\ .$$

Από το Λήμμα 1.2.2 έχουμε ότι

$$\|\nabla\rho^N\|=\|\nabla\rho(t_N)\|=\|\nabla(R_h\tilde{u}-u)(t_N)\|=\|\nabla(R_hu-u)(t_N)\| \le Ch\|u(t_N)\|_2.$$

Για να φράξουμε τον όρο $\nabla\theta^N$, θα βασιστούμε στο πλήρως διακριτό ομογένες αντίστροφο πρόβλημα.

$$B_N(X,Z_h)=(X^N,P_h\varphi)=(X^N,\varphi)\ \ \forall X\in S_{kh}$$

Για $X=\nabla\theta^N\in S_{kh}$,

$$(\nabla\theta^N,\varphi)=B_N(\nabla\theta^N,Z_h)=B_N(\nabla e,Z_h)-B_N(\nabla\rho,Z_h).$$

Όμως $v_h = P_h v$ άρα

$$B_N(e, X) = (v_h - v, X_+^0) = (P_h v - v, X_+^0) = 0 \quad \forall X \in S_{kh}.$$

Επομένως, για $X = \nabla Z_h \in S_{kh}$ ισχύει

$$B_N(e, \nabla Z_h) = 0 \Leftrightarrow B_N(\nabla e, Z_h) = 0$$

και καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}
(\nabla\theta^N, \varphi) &= B_N(\nabla\theta, Z_h) = -B_N(\nabla\rho, Z_h) \\
&= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \big(-(\nabla\rho, Z_{h,t}) + (\nabla(\nabla\rho), \nabla Z_h) \big)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} (\nabla\rho^n, [Z_h]_n) - (\nabla\rho^N, P_h\varphi) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \big((\nabla\rho, Z_{h,t}) - (\nabla\rho, \Delta Z_h) \big)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} (\nabla\rho^n, [Z_h]_n) - (\nabla\rho^N, P_h\varphi).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
|(\nabla\theta^N, \varphi)| &\le \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \big(\|\nabla\rho\|\|Z_{h,t}\| + \|\nabla\rho\|\|\Delta Z_h\| \big)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} \|\nabla\rho^n\|\|\|[Z_h]_n\| + \|\nabla\rho^N\|\|P_h\varphi\| \\
&\le \max_{n\le N} \|\nabla\rho\|_{J_n} \left(\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\|Z_{h,t}\| + \|\Delta Z_h\|)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} \|[Z_h]_n\| + \|\varphi\| \right).
\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 1.5.4 έπεται

$$\|\nabla\theta^N\| \;\le\; CL_N \max_{n\le N} \|\nabla\rho\|_{J_n}$$

όμως

$$\begin{aligned}
\|\nabla\rho\|_{J_n} &= \|\nabla(R_h\tilde{u} - u)\|_{J_n} \\
&\le \|\nabla(R_h\tilde{u} - \tilde{u})\|_{J_n} + \|\nabla(\tilde{u} - u)\|_{J_n} \\
&\le Ch\|u\|_{2,J_n} + Ck_n^q \|\nabla u^{(q)}\|_{J_n} \\
&= Ch\|u\|_{2,J_n} + Ck_n^q \|u^{(q)}\|_{1,J_n}.
\end{aligned}$$

∎

Συνοψίζοντας, οι εκτιμήσεις σφαλμάτων που αποδείξαμε παραπάνω, περιέχουν ποσότητες που εξαρτώνται από την ακριβή λύση του συνεχούς προβλήματος (1.1) και έχουν την επιθυμητή τάξη μεγέθους υπό την προύπόθεση ότι η ακριβής λύση έχει συγκεκριμένες regularity properties. Τέτοιου είδους εκτιμήσεις είναι γνωστές ως εκ των προτέρων εκτιμήσεις (a priori error estimates).
Ωστόσο, αφού η ακριβής λύση δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, τέτοιες εκτιμήσεις δεν παρέχουν ακριβή ποσοτικά άνω φράγματα για το σφάλμα.

Κεφάλαιο 2

Το ημιγραμμικό παραβολικό πρόβλημα

2.1 Προαπαιτούμενα

2.1.1 Ανισότητες και θεωρήματα ενσφήνωσης σε χώρους Sobolev

Ορισμός 2.1.1 *Έστω $1 \leq p < n$, ο Sobolev συζυγής του δείκτη p ορίζεται ως εξής :*

$$p^* := \frac{np}{n-p} \quad \text{και ισχύει} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \ , \ p^* > p.$$

Θεώρημα 2.1.2 (Εκτίμηση για τον χώρο $W^{1,p}$, $1 \leq p < n$) *Έστω Ω, ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και υποθέτουμε ότι $\partial\Omega \in C^1$. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$, τότε $u \in L_{p^*}(\Omega)$ με την ακόλουθη εκτίμηση*

$$\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)} \ \leq \ C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

δηλαδή $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_{p^*}(\Omega)$.

- Εάν $p = n$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega) \ \ \forall q \in [p, \infty)$.
- Ενώ αν $p > n$ ισχύει $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_\infty(\Omega)$.

Θεώρημα 2.1.3 (Εκτίμηση για τον χώρο $W_0^{1,p}$, $1 \leq p < n$) *Έστω Ω, ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, τότε έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση*

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \ \leq \ C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \quad \forall q \in [1, p^*].$$

Σημέιωση 1 *Η σταθερά C που εμφανίζεται στα Θεωρήματα 2.1.2 και 2.1.3 εξαρτάται μόνο από τους δείκτες p, q και το χωρίο Ω.*

Θεώρημα 2.1.4 (Γενικευμένη ανισότητα Sobolev) *Έστω Ω, ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με $\partial\Omega \in C^1$ και $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Εάν $k < \frac{n}{p}$ με $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, τότε $u \in L_q(\Omega)$ και ισχύει*

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \ \leq \ C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Σημέιωση 2 *Στο παραπάνω θεώρημα η σταθερά C εξαρτάται απο τους δείκτες p, q, n και το χωρίο Ω.*

Θεώρημα 2.1.5 (Ανισότητα Ladyszeshkayka-Gagliardo-Nirenberg) *Υπάρχει σταθερά $C > 0$, που εξαρτάται μόνο από το χωρίο Ω, τέτοια ώστε για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$:*

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_4(\Omega)} &\leq C\|u\|_{L_2(\Omega)}^{1/2}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} \ , \ d = 2 \\
\|u\|_{L_3(\Omega)} &\leq C\|u\|_{L_2(\Omega)}^{1/2}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} \ , \ d = 3 \\
\|u\|_{L_4(\Omega)} &\leq C\|u\|_{L_2(\Omega)}^{1/4}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^{3/4} \ , \ d = 3.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 2.1.6 (Αντίστροφη ανισότητα [5]) *Έστω $S_h \subset W^{1,n}$, τότε ικανοποιείται το ακόλουθο διακριτό φράγμα*

$$\|u_h\|_{L_\infty(\Omega)} \ \leq \ C|\log h|^{1-1/n}\|u_h\|_{W^{1,n}(\Omega)} \ \ \forall u_h \in S_h.$$

Για $n = 2$, προκύπτει, λοιπόν,

$$\|u_h\|_{L_\infty(\Omega)} \ \leq \ C|\log h|\|u_h\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u_h \in S_h.$$

2.1.2 Ανισότητες Grönwall

Οι ανισότητες Grönwall αποτελούν βασικό εργαλείο στην ανάλυση των χρονικά εξαρτώμενων προβλημάτων. Θα παρουσιάσουμε την συνεχή και την διακριτή μορφή.

Λήμμα 2.1.7 (Συνεχές Λήμμα Grönwall) *Έστω $u : [0, T] \to [0, \infty)$, μια μη αρνητική και συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$\frac{du}{dt} \ \leq \ Cu \ , \ u(0) = u_0 \ \ \text{για κάποιες σταθερές} \ \ C, u_0 \geq 0 \ .$$

Τότε,

$$u(t) \leq u_0 \ e^{Ct} \ , \ 0 \leq t \leq T$$

είτε

$$u(t) \leq u_0 + C\int_0^t u(s)\, ds \ , \ 0 \leq t \leq T \ .$$

Λήμμα 2.1.8 (Γενικευμένη περίπτωση) *Έστω f, g, h κατά τμήματα συνεχείς μη αρνητικές συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα (α, b). Υποθέτουμε ότι g είναι μη φθίνουσα και ότι υπάρχει μια θετική σταθερά C ανεξάρτητη του t, τέτοια ώστε*

$$\forall t \in (\alpha, b) \quad f(t) + h(t) \;\leq\; g(t) + C \int_{\alpha}^{b} f(s)\, ds.$$

Τότε

$$\forall t \in (\alpha, b) \quad f(t) + h(t) \;\leq\; e^{C(t-\alpha)} g(t).$$

Λήμμα 2.1.9 (Διακριτό Λήμμα Grönwall) *Εάν $(1 - ck_n)\alpha_n + b_n \;\leq\; \alpha_{n-1} + f_n$, και επιπλέον $\max_n ck_n < 1$, τότε*

$$\alpha_N + \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{\prod\limits_{i=n}^{N}(1 - ck_i)} \;\leq\; \frac{\alpha_0}{\prod\limits_{i=1}^{N}(1 - ck_i)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{\prod\limits_{i=n}^{N}(1 - ck_i)}.$$

Λήμμα 2.1.10 *Από το Λήμμα 2.1.9, έπεται η ακόλουθη ανισότητα*

$$\alpha_N + \sum_{n=1}^{N} e^{c(T-t_n)}\, b_n \;\leq\; e^{\frac{ckN}{1-ck}} \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} f_n \right).$$

Απόδειξη: Έστω $\{\alpha_n\}, \{b_n\}, \{f_n\}$ μη αρνητικές ακολουθίες για τις οποίες ισχύει ότι

$$(1 - ck_n)\alpha_n + b_n \;\leq\; \alpha_{n-1} + f_n \;, 1 \leq n \leq N$$

Τότε, εάν $0 < k_n < 1/c$, ισχύει

$$\alpha_N + \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{\prod\limits_{i=n}^{N}(1 - ck_i)} \;\leq\; \frac{\alpha_0}{\prod\limits_{i=1}^{N}(1 - ck_i)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{\prod\limits_{i=n}^{N}(1 - ck_i)}.$$

Εφόσον ισχύει

$$e^{\sum\limits_{i=n}^{N} ck_i} \;\leq\; \frac{1}{\prod\limits_{i=n}^{N}(1 - ck_i)},$$

προκύπτει ότι

$$\alpha_N + \sum_{n=1}^{N} e^{\sum\limits_{i=n}^{N} ck_i}\, b_n \;\leq\; \frac{\alpha_0}{\prod\limits_{i=1}^{N}(1 - ck_i)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{\prod\limits_{i=n}^{N}(1 - ck_i)},$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\alpha_N + \sum_{n=1}^{N} e^{c(T-t_n)}\ b_n &\leq \frac{\alpha_0}{\prod_{i=1}^{N}(1-ck_i)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{\prod_{i=n}^{N}(1-ck_i)} \\ &\leq \frac{\alpha_0}{(1-ck)^N} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f_{n+1}}{(1-ck)^{N-n}},\end{aligned}$$

όπου $k = \max\limits_{1\leq i\leq N} k_i$.

Όμως

$$\frac{1}{1-ck} = \frac{1-ck+ck}{1-ck} = 1 + \frac{ck}{1-ck} = 1 + \left(\frac{c}{1-ck}\right) k \leq e^{\frac{ck}{1-ck}}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\alpha_N + \sum_{n=1}^{N-1} e^{c(T-t_n)}\ b_n &\leq e^{\frac{ckN}{1-ck}}\ \alpha_0 + \sum_{n=0}^{N-1} e^{\left(\frac{ck}{1-ck}\right)^{N-n}} f_{n+1} \\ &\leq e^{\frac{ckN}{1-ck}}\ \left(\alpha_0 + \sum_{n=0}^{N-1} e^{\left(\frac{ck}{1-ck}\right)^{-n}} f_{n+1}\right) \\ &\leq e^{\frac{ckN}{1-ck}}\ \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} f_n\right).\end{aligned}$$

∎

2.2 Η εξίσωση Allen-Cahn

Η εξίσωση Allen-Cahn είναι μια παραβολική ημιγραμμική μερική διαφορική εξίσωση, που εξαρτάται από την παράμετρο ε, της μορφής

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}(u^3 - u) &= f,\ x \in \Omega,\ t \in (0,T] \\ u &= 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T] \\ u(\cdot,0) &= v,\ x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Το Ω είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$ και v, f η αρχική συνθήκη και οι εξωτερικοί παράγοντες αντιστοίχως. Η βασική δυσκολία του παραπάνω προβλήματος έγκειται στην παράμετρο $0 < \varepsilon << 1$, η οποία είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με το χωρίο Ω. Εμείς θα ασχοληθούμε με την ιδανική περίπτωση, όπου $\varepsilon = 1$.

2.2.1 Ασθενής διατύπωση και ανάλυση ευστάθειας

Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών γίνεται:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + u^3 - u &= f,\ x \in \Omega,\ t \in (0,T] \\ u &= 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T] \\ u(\cdot,0) &= v,\ x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Έστω $f \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ και $u_0 \in L_2(\Omega)$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με μια συνάρτηση ελέγχου $\omega \in H_0^1(\Omega) \cap L_4(\Omega)$, ολοκληρώνουμε πάνω στο χωρίο Ω και εφαρμόζοντας την ταυτότητα Green στο αριστερό μέλος καταλήγουμε στην εξής ασθενή διατύπωση:

Βρες $u \in H_0^1(\Omega)$, για κάθε $t \in (0,T]$ τέτοια ώστε

$$(u_t,\omega) + (\nabla u, \nabla\omega) + \big((u^3 - u),\omega\big) = (f,\omega) \tag{2.3}$$

για κάθε $\omega \in H_0^1(\Omega)$ και $t \in (0,T]$, και $u(\cdot,0) = v$.

Σχόλιο 4 *Στην αρχή θεωρήσαμε ότι $\omega \in H_0^1(\Omega) \cap L_4(\Omega)$, αλλά από το Θεώρημα Ενσφήνωσης 2.1.2 (για $n = p = 2$) προκύπτει ότι $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_4(\Omega)$. Επιπλέον, αφού $H_0^1(\Omega)$ είναι υπόχωρος του $H^1(\Omega)$, αρκεί $\omega \in H_0^1(\Omega)$.*

Επειδή το πρόβλημα είναι χωροχρονικό, μια σωστή ασθενής διατύπωση είναι:

Βρες $u \in C([0,T];L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L_4(0,T;L_4(\Omega))$ τέτοια ώστε

$$\int_0^T \big[(u_t,\omega) + (\nabla u,\nabla\omega) + \big((u^3 - u),\omega\big)\big]\,dt = \int_0^T (f,\omega)\,dt$$

για κάθε $\omega \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L_4(0,T;L_4(\Omega))$ και $u(\cdot,0) = v$.

Αφού ολοκληρώσαμε την ασθενή διατύπωση του προβλήματος, θα συνεχίσουμε με το ακόλουθο αποτέλεσμα ευστάθειας.

Θεώρημα 2.2.1 *Η μεταβολική λύση του ασθενώς διατυπωμένου προβλήματος* (2.3) *ικανοποιεί το ακόλουθο εκ των προτέρων αποτέλεσμα ενεργειακής εκτίμησης*

$$\|u\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + 2\|u\|^2_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 2\|u\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega))} \;\le\; e^{3T}\left(\|v\|^2 + \|f\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\right).$$

Απόδειξη: Για $\omega = u \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L_4(0,T;L_4(\Omega))$ η σχέση (2.3) έπεται ότι

$$(u_t, u) + (\nabla u, \nabla u) + (u^3 - u, u) = (f, u).$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz στο δεξί μέλος, έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|u\|^4_{L_4(\Omega)} - \|u\|^2 \;\le\; \|f\|\|u\|.$$

Από την ανισότητα Young στο δεξί μέλος προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|u\|^4_{L_4(\Omega)} - \|u\|^2 \;\le\; \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Ολοκληρώνοντας από 0 εώς t, έχουμε

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u\|^2\,ds + \int_0^t \|u\|^4_{L_4(\Omega)}\,ds \;\le\; \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|f\|^2\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|u\|^2\,ds + \int_0^t \|u\|^2\,ds,$$

$$\|u(t)\|^2 + 2\int_0^t \|\nabla u\|^2\,ds + 2\int_0^t \|u\|^4_{L_4(\Omega)}\,ds \;\le\; \|v\|^2 + \int_0^t \|f\|^2\,ds + \frac{3}{2}\int_0^t \|u\|^2\,ds.$$

Από το συνεχές Λήμμα Grönwall 2.1.8 έπεται ότι

$$\|u(t)\|^2 + 2\int_0^t \|\nabla u\|^2\,ds + 2\int_0^t \|u\|^4_{L_4(\Omega)}\,ds \;\le\; e^{3t}\left(\|v\|^2 + \int_0^t \|f\|^2\,ds\right)$$

παίρνουμε το *supremum* σε όλα τα $t \in [0,T]$ και έχουμε

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2 + 2\int_0^T \|\nabla u\|^2\, ds + 2\int_0^T \|u\|^4_{L_4(\Omega)}\, ds \;\le\; e^{3T}\left(\|v\|^2 + \int_0^T \|f\|^2\, ds\right),$$

δηλαδή

$$\|u\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + 2\|u\|^2_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 2\|u\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega))} \;\le\; e^{3T}\left(\|v\|^2 + \|f\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\right).$$

∎

Παρατήρηση 7 *Δείξαμε την ευστάθεια στην ιδανική περίπτωση που το* $\varepsilon = 1$. *Στο πρόβλημα* (2.1) *όταν* $0 < \varepsilon << 1$, *η απόδειξη ευστάθειας δεν είναι αυτονόητη. Για πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου* ε, *ο εκθέτης της ποσότητας* $e^{\frac{T}{2}+\frac{T}{\varepsilon^2}}$ *θα τείνει στο άπειρο καθώς το* $\varepsilon \to 0$.

2.3 Πλήρως διακριτό πρόβλημα

Για να διακριτοποιήσουμε το μοντελοποιημένο πρόβλημα της εξίσωσης Allen-Cahn, θα χρησιμοποιήσουμε την ασυνέχη μέθοδο Galerkin στον χρόνο σε συνδυασμό με την κλασσική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων στον χώρο.
Θα αναζητήσουμε προσεγγιστικές λύσεις σε μία διαμέριση της μορφής $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ του δοθέντος χρονικού διαστήματος $[0, T]$. Συνεπώς, δημιουργούμε χρονικά υποδιαστήματα $J_n = (t_{n-1}, t_n]$, μήκους $k_n = t_n - t_{n-1}$, για κάθε $n = 1, \ldots, N$.
Υποθέτουμε ότι η διαμέριση που επιλέξαμε είναι σχεδόν ομοιόμορφη, δηλάδη υπάρχει$C_k > 1$ τέτοια ώστε $\max\limits_{1\le n\le N} k_n < C_k \cdot \min\limits_{1\le n\le N} k_n$.

Σχετικά με την διακριτοποίηση του χωρίου Ω, οπώς και στην περίπτωση του παραβολικού προβλήματος, θεωρούμε μια κανονική και σχεδόν ομοιόμορφη τριγωνοποίηση T_h. Άρα, θα ασχοληθούμε με τον γραμμικό υπόχωρο πεπρασμένης διάστασης $S_h \subset H_0^1(\Omega)$, σε κάθε χρονικό υποδιάστημα J_n.

Θα προσεγγίσουμε την λύση, u, του συνεχούς προβλήματος, (2.2), με γραμμικές και κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις ως προς τον χώρο και τον χρόνο αντίστοιχα. Ορίζουμε τον ακόλουθο χώρο συναρτήσεων:

$$S_{kh} = \{X : [0, T] \to S_h : X|_{J_n} = X_1,\ X_1 \in S_h\}.$$

Το πλήρως διακριτό σχήμα μπορεί να αναπαρασταθεί σε κάθε υποδιάστημα J_n ως εξής :

Βρες $U_h \in S_{kh}^n$ ώστε $\forall X \in S_{kh}^n, 1 \le n \le N$

$$\begin{aligned}\int_{J_n} ((U_{h,t}, X) + (\nabla U_h, \nabla X))\, dt + ([U_h]_{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (U_h^3 - U_h, X)\, dt = \int_{J_n} (f, X)\, dt,\\ U_h(0) = v_h.\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.3.1 Ανάλυση ευστάθειας

Σε αυτό το σημείο θα ελέγξουμε την ευστάθεια του σχήματος. Αρκεί να δείξουμε ότι η προσεγγιστική λύση U_h ικανοποιεί κάποιου είδους εκ των προτέρων ενεργειακής εκτίμησης (*a priori energy estimate*).

Θεώρημα 2.3.1 *Υποθέτουμε ότι* $\frac{\max k_n}{\min k_n} < C_k$, $1 \le n \le N$. *Τότε, για τη λύση* U_h *του διακριτού προβλήματος* (2.4) *ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση*

$$\begin{aligned}\|U_h^N\|^2 + 2\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} e^{3(T-t_n)} \left(\|\nabla U_h\|^2 + \|U_h\|_{L_4(\Omega)}^4\right) dt + \sum_{n=1}^{N} e^{3(T-t_n)} \|[U_h]_{n-1}\|^2 \\ \le\ e^{\frac{3C_k T}{1-3k}} \left(\|v_h\|^2 + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|f\|^2\, dt\right).\end{aligned}$$

Απόδειξη: Ξεκινώντας από την σχέση (1.36) για $X = U_h \in S_h$, έπεται ότι

$$\int_{J_n} (U_{h,t}, U_h)\, dt + \int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \big([U_h]_{n-1}, U_{h,+}^{n-1}\big) + \int_{J_n} \|U_h\|^4_{L_4(\Omega)}\, dt = \int_{J_n} (f, U_h)\, dt + \int_{J_n} \|U_h\|^2\, dt,$$

$$\int_{J_n} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_h\|^2\, dt + \int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \big([U_h]_{n-1}, U_{h,+}^{n-1}\big) + \int_{J_n} \|U_h\|^4_{L_4(\Omega)}\, dt = \int_{J_n} (f, U_h)\, dt + \int_{J_n} \|U_h\|^2\, dt.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Shwarz και επειδή ήδη έχουμε δείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι $2\left([U_h]_{n-1}, U_{h,+}^{n-1}\right) = \|[U_h]_{n-1}\|^2 + \|U_{h,+}^{n-1}\|^2 - \|U_h^{n-1}\|^2$, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\|U_h^n\|^2 - \frac{1}{2}\|U_{h,+}^{n-1}\|^2 + \int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \frac{1}{2}\|[U_h]_{n-1}\|^2 + \frac{1}{2}\|U_{h,+}^{n-1}\|^2 - \frac{1}{2}\|U_h^{n-1}\|^2 + \int_{J_n} \|U_h\|^4_{L_4(\Omega)}\, dt$$
$$\leq \int_{J_n} \|f\|\|U_h\|\, dt + \int_{J_n} \|U_h\|^2\, dt.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Young στο δεξί μέλος

$$\frac{1}{2}\|U_h^n\|^2 + \int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \frac{1}{2}\|[U_h]_{n-1}\|^2 + \int_{J_n} \|U_h\|^4_{L_4(\Omega)}\, dt$$
$$\leq \frac{1}{2}\|U_h^{n-1}\|^2 + \frac{1}{2}\int_{J_n} \|f\|^2\, dt + \frac{1}{2}\int_{J_n} \|U_h\|^2\, dt + \int_{J_n} \|U_h\|^2\, dt,$$

είτε

$$\|U_h^n\|^2 + 2\int_{J_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + 2\int_{J_n} \|U_h\|^4_{L_4(\Omega)}\, dt + \|[U_h]_{n-1}\|^2$$
$$\leq \|U_h^{n-1}\|^2 + \int_{J_n} \|f\|^2\, dt + 3\int_{J_n} \|U_h\|^2\, dt.$$

Η U_h είναι σταθερή ως προς τον χρόνο σε κάθε διάστημα J_n. Οπότε

$$\|U_h(t)\| = \|U_h(t_n)\| \;\; \forall t \in J_n,$$

δηλαδή

$$\int_{J_n} \|U_h(t)\|^2\, dt = k_n \|U_h^n\|^2.$$

και προκύπτει ότι

$$(1-3k_n)\|U_h^n\|^2+2\int_{J_n}\|\nabla U_h\|^2\,dt+2\int_{J_n}\|U_h\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt+\|[U_h]_{n-1}\|^2 \le \|U_h^{n-1}\|^2+\int_{J_n}\|f\|^2\,dt. \tag{2.5}$$

Προκειμένου να καταλήξουμε στο ζητούμενο θα εφαρμόσουμε το Διακριτό Λήμμα Grönwall 2.1.9.

Από το Λήμμα 2.1.10 για

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \|U_h^n\|^2\\
b_n &= 2\int_{J_n}\left(\|\nabla U_h\|^2+\|U_h\|^4_{L_4(\Omega)}\right)\,dt+\|[U_h]_{n-1}\|^2\\
\alpha_{n-1} &= \|U_h^{n-1}\|^2\\
f_n &= \int_{J_n}\|f\|^2\,dt\\
c &= 3,
\end{aligned}$$

εφαρμοσμένο στην σχέση (2.5), έπεται το ακόλουθο αποτέλεσμα ευστάθειας

$$\begin{aligned}
\|U_h^N\|^2+2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}e^{3(T-t_n)}\left(\|\nabla U_h\|^2+\|U_h\|^4_{L_4(\Omega)}\right)\,dt+\sum_{n=1}^{N}e^{3(T-t_n)}\|[U_h]_{n-1}\|^2\\
\le\ e^{\frac{3kN}{1-3k}}\left(\|v_h\|^2+\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|f\|^2\,dt\right).
\end{aligned}$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η διαμέριση του χρονικού διαστήματος $[0,T]$ είναι σχεδόν ομοιόμορφη, ισχύει $k\cdot N<C_k\ N\cdot\min k_n<C_kT$, και καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|U_h^N\|^2+2\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}e^{3(T-t_n)}\left(\|\nabla U_h\|^2+\|U_h\|^4_{L_4(\Omega)}\right)\,dt+\sum_{n=1}^{N}e^{3(T-t_n)}\|[U_h]_{n-1}\|^2\\
\le\ e^{\frac{3C_kT}{1-3k}}\left(\|v_h\|^2+\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|f\|^2\,dt\right).
\end{aligned}$$

∎

2.3.2 Ανάλυση σφάλματος

Θεώρημα 2.3.2 *Υποθέτουμε ότι* $\frac{\max k_n}{\min k_n} < C_k$, $1 \le n \le N$. *Τότε για τις λύσεις* u, U_h *του συνεχούς προβλήματος* (2.2) *και του πλήρως διακριτού* (2.4) *αντίστοιχα, αποδεικνύουμε την ακόλουθη βέλτιστη εκτίμηση σφάλματος*

$$\|U_h - u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \le \mathcal{O}(h^2 + k_n).$$

Απόδειξη: Αναλύουμε το σφάλμα ως εξής

$$e = U_h - u = (U_h - R_h\tilde{u}) + (R_h\tilde{u} - u) = \theta + \rho,$$

όπου $\tilde{u}$ είναι η κατά τμήματα πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού το πολύ $q-1$ ως προς την μεταβλητή του χρόνου t με τις εξής ιδιότητες:

$$\tilde{u}(t_n) = u(t_n)\ ,\ n \ge 0$$
$$\int_{J_n} (\tilde{u} - u)t^l = 0\ ,\ \forall l \le q-2\ ,\ n \ge 1.$$

Ακόμη, R_h είναι η γνωστή ελλειπτική προβολή. Επομένως, $R_h\tilde{u} \in P_{q-1}(J_n) \times S_h$.

Υποθέτουμε ότι η λύση u είναι τετραγωνική στον χώρο και γραμμική στον χρόνο. Θα ξεκινήσουμε εκτιμώντας την ποσότητα θ, οπότε έχουμε

$$\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\ dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (\theta^3 - \theta, X)\, dt = \int_{J_n} ((U_{h,t}, X) + (\nabla U_h, \nabla X))\ dt$$
$$+ (U_{h,+}^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (U_h^3 - U_h, X)\, dt - \int_{J_n} (((R_h\tilde{u})_t, X) + (\nabla R_h\tilde{u}, \nabla X))\ dt$$
$$-((R_h\tilde{u})_+^{n-1}, X_+^{n-1}) - \int_{J_n} ((R_h\tilde{u})^3 - R_h\tilde{u}, X)\, dt - \int_{J_n} (3U_hR_h\tilde{u}(U_h - R_h\tilde{u}), X)\ dt.$$

Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\int_{J_n} ((U_{h,t}, X) + (\nabla U_h, \nabla X))\ dt + (U_{h,+}^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (U_h^3 - U_h, X)\, dt = (U_h^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (f, X)\, dt,$$

άρα έπεται ότι

$$\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\, dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (\theta^3 - \theta, X)\, dt$$
$$= (U_h^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (f, X)\, dt - \int_{J_n} (((R_h\tilde{u})_t, X) + (\nabla R_h\tilde{u}, \nabla X))\, dt$$
$$-((R_h\tilde{u})_+^{n-1}, X_+^{n-1}) - \int_{J_n} ((R_h\tilde{u})^3 - R_h\tilde{u}, X)\, dt - \int_{J_n} (3U_hR_h\tilde{u}(U_h - R_h\tilde{u}), X)\, dt.$$

Σύμφωνα με το συνεχές πρόβλημα

$$\int_{J_n} ((u_t, X) + (\nabla u, \nabla X))\, dt + \int_{J_n} (u^3 - u, X)\, dt = \int_{J_n} (f, X)\, dt,$$

οπότε έχουμε

$$\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\, dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (\theta^3 - \theta, X)\, dt$$
$$= (U_h^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} ((u_t, X) + (\nabla u, \nabla X))\, dt + \int_{J_n} (u^3 - u, X)\, dt$$
$$- \int_{J_n} ((R_h\tilde{u})_t, X)\, dt - \int_{J_n} (\nabla R_h\tilde{u}, \nabla X)\, dt - ((R_h\tilde{u})_+^{n-1}, X_+^{n-1})$$
$$- \int_{J_n} ((R_h\tilde{u})^3 - R_h\tilde{u}, X)\, dt - \int_{J_n} (3U_hR_h\tilde{u}(U_h - R_h\tilde{u}), X)\, dt.$$

και από τον ορισμό που δώσαμε στην αρχή της απόδειξης για τον όρο ρ, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\, dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (\theta^3 - \theta, X)\, dt$$
$$= (U_h^{n-1}, X_+^{n-1}) - \int_{J_n} (\rho_t, X)\, dt - \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla X)\, dt + \int_{J_n} (\rho, X)\, dt$$
$$-((R_h\tilde{u})_+^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} ((u^3 - (R_h\tilde{u})^3, X)\, dt - \int_{J_n} (3U_hR_h\tilde{u}(U_h - R_h\tilde{u}), X)\, dt.$$

Προσθαφαιροντας από το δεύτερο μέλος την ποσότητα $(R_h\tilde{u}^{n-1} - u_+^{n-1}, X_+^{n-1})$, και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $u^{n-1} = u_+^{n-1}$ αφού $u \in C([0, t_N]; L_2(\Omega))$, προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\int_{J_n} ((\theta_t, X) + (\nabla\theta, \nabla X))\, dt + (\theta_+^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (\theta^3 - \theta, X)\, dt$$
$$= (\theta^{n-1}, X_+^{n-1}) - (\rho_+^{n-1}, X_+^{n-1}) - \int_{J_n} (\rho_t, X)\, dt + (\rho^{n-1}, X_+^{n-1}) - \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla X)\, dt$$

$$+\int_{J_n}(\rho,X)\,dt+\int_{J_n}((u^3-(R_h\tilde{u})^3,X)\,dt-\int_{J_n}(3U_hR_h\tilde{u}(U_h-R_h\tilde{u}),X)\;dt.$$

Μετά από ολοκλήρωση κατά παράγοντες και αφού $\int_{J_n}(\rho,X_t)\,dt=0\ \forall n\le N$, έχουμε

$$\begin{aligned}&\int_{J_n}((\theta_t,X)+(\nabla\theta,\nabla X))\;dt+(\theta_+^{n-1},X_+^{n-1})+\int_{J_n}(\theta^3-\theta,X)\,dt\\&=(\theta^{n-1},X_+^{n-1})-(\rho^n,X^n)+(\rho^{n-1},X_+^{n-1})-\int_{J_n}(\nabla\rho,\nabla X)\,dt+\int_{J_n}(\rho,X)\,dt\\&\quad+\int_{J_n}((u^3-(R_h\tilde{u})^3,X)\,dt-\int_{J_n}(3U_hR_h\tilde{u}(U_h-R_h\tilde{u}),X)\;dt.\end{aligned}$$

Για $X=\theta\in S_{kh}^n$, έχουμε

$$\begin{aligned}&\int_{J_n}((\theta_t,\theta)+(\nabla\theta,\nabla\theta))\;dt+(\theta_+^{n-1},\theta_+^{n-1})+\int_{J_n}(\theta^3-\theta,\theta)\,dt\\&=(\theta^{n-1},\theta_+^{n-1})-(\rho^n,\theta^n)+(\rho^{n-1},\theta_+^{n-1})-\int_{J_n}(\nabla\rho,\nabla\theta)\,dt+\int_{J_n}(\rho,\theta)\,dt\\&\quad+\int_{J_n}((u^3-(R_h\tilde{u})^3,\theta)\,dt-\int_{J_n}(3U_hR_h\tilde{u}(U_h-R_h\tilde{u}),\theta)\;dt.\end{aligned}$$

Αθροίζοντας για $j=1,\dots,n\in\{1\dots N\}$ με $t_N=T$, έπεται ότι

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^n\int_{J_j}((\theta_t,\theta)+(\nabla\theta,\nabla\theta))\;dt+\sum_{j=1}^n\left([\theta]_{j-1},\theta_+^{j-1}\right)+\sum_{j=1}^n\int_{J_j}(\theta^3-\theta,\theta)\,dt\\&=-\sum_{j=1}^n(\rho^j,\theta^j)+\sum_{j=1}^n(\rho^{j-1},\theta_+^{j-1})-\sum_{j=1}^n\int_{J_j}(\nabla\rho,\nabla\theta)\,dt+\sum_{j=1}^n\int_{J_j}(\rho,\theta)\,dt\\&\quad+\sum_{j=1}^n\int_{J_j}((u^3-(R_h\tilde{u})^3,\theta)\,dt-\sum_{j=1}^n\int_{J_j}(3U_hR_h\tilde{u}(U_h-R_h\tilde{u}),\theta)\;dt.\end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες της ελλειπτικής προβολής,έχουμε

$$\sum_{j=1}^n\int_{J_j}(\nabla\rho,\nabla\theta)\,dt=\sum_{j=1}^n\int_{J_j}(\nabla(\tilde{u}-u),\nabla\theta)\;dt,$$

και άρα προκύπτει ότι

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2\,dt+\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\nabla\theta\|^2\,dt+\sum_{j=1}^{n}\big([\theta]_{j-1},\theta_+^{j-1}\big)+\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\theta\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\theta\|^2\,dt+\sum_{j=1}^{n}(\rho^{j-1},[\theta]_{j-1})-(\rho^0,\theta^0)-(\rho^n,\theta^n)-\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}(\nabla(\tilde{u}-u),\nabla\theta)\;dt$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}(\rho,\theta)\,dt+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}((u^3-(R_h\tilde{u})^3,\theta)\,dt}_{(\gamma)}-\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}(3U_hR_h\tilde{u}(U_h-R_h\tilde{u}),\theta)\;dt}_{(\delta)}. \quad (2.6)$$

Σε αυτό το σημείο θα εκτιμήσουμε ξεχώριστα τις ολοκληρωτέες ποσότητες (γ), (δ) της ισοτήτας (2.7) προκειμένου να καταλήξουμε σε ένα επιθυμητό φράγμα του όρου θ.

- Ξεκινάμε από τον όρο (δ).

Από την ανισότητα Hölder προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\int_{J_j}(3U_hR_h\tilde{u}(U_h-R_h\tilde{u}),\theta)\;dt &\le \Big|\int_{J_j}(3U_hR_h\tilde{u}\theta,\theta)\;dt\Big| \le \int_{J_j}\big|\,(3U_hR_h\tilde{u}\theta,\theta)\,\big|\,dt\\ &=3\int_{J_j}\int_{\Omega}|U_hR_h\tilde{u}\theta^2|\,dx\,dt\\ &\le\;3\int_{J_j}\|U_h\|\|R_h\tilde{u}\theta^2\|\,dt.\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}\|R_h\tilde{u}\theta^2\| &= \left(\int_{\Omega}|R_h\tilde{u}\theta^2|^2\,dx\right)^{1/2}=\left(\int_{\Omega}|R_h\tilde{u}|^2|\theta^2|^2\,dx\right)^{1/2}\\ &\le\;\big(\|(R_h\tilde{u})^2\|_{L_\infty(\Omega)}\;\|(\theta^2)^2\|_{L_1(\Omega)}\big)^{1/2}\\ &=\|R_h\tilde{u}\|_{L_\infty(\Omega)}\;\|\theta^2\|,\end{aligned}$$

και επομένως έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{J_j}(3U_hR_h\tilde{u}(U_h-R_h\tilde{u}),\theta)\;dt &\le\;3\int_{J_j}\|U_h\|\|R_h\tilde{u}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\theta^2\|\,dt\\ &=3\int_{J_j}\|U_h\|\|R_h\tilde{u}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\theta\|^2_{L_4(\Omega)}\,dt.\end{aligned}$$

Η $\tilde{u}$ είναι σταθερή κατά διαστήματα $J_j = (t_{j-1}, t_j]$, άρα το πολυώνυμο $R_h\tilde{u}$ είναι σταθερό ως προς την μεταβλητή του χρόνου. Εφαρμόζοντας ξανά την ανισότητα Hölder στο δεύτερο μέλος της παραπάνω ανισοτικής σχέσης προκύπτει

$$\int_{J_j} (3U_h R_h\tilde{u}(U_h - R_h\tilde{u}), \theta)\, dt \;\leq\; 3\|U_h\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\|R_h\tilde{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \int_{J_j} \|\theta\|^2_{L_4(\Omega)}\, dt$$

Από τις ανισότητες Ladyszeshkayka-Gagliardo-Nirenberg 2.1.5 ($d = 2$) και Young, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{J_j} (3U_h R_h\tilde{u}(U_h - R_h\tilde{u}), \theta)\, dt \;&\leq\; 3\|U_h\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\|R_h\tilde{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \int_{J_j} C_1\|\theta\|\|\nabla\theta\|\, dt \\
&\leq\; 3C_1\|U_h\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\|R_h\tilde{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \int_{J_j} \sqrt{2}\|\theta\|\frac{1}{\sqrt{2}}\|\nabla\theta\|\, dt \\
&\leq\; 9C_1^2 \underbrace{\|U_h\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}}_{(\zeta)} \underbrace{\|R_h\tilde{u}\|^2_{L_\infty(\Omega)}}_{(\eta)} \int_{J_j} \|\theta\|^2\, dt + \frac{1}{4}\int_{J_j} \|\nabla\theta\|^2\, dt.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Στο σημείο αυτό θα φράξουμε τους όρους (ζ), (η) από γνωστές σε μας ποσότητες.

- Ξεκινάμε με τον όρο (ζ): Σύμφωνα με την ανάλυση ευστάθειας του πλήρως διακριτοποιημένου σχήματος στην προηγούμενη ενότητα έχουμε ότι

$$\|U_h\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \leq C_{stab\{v_h,f\}}.$$

- Για τον όρο (η): Αρχικά από την αντίστροφη ανισότητα (Θεώρημα 2.1.6) για $n = 2$ έπεται ότι

$$\|R_h\tilde{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \;\leq\; C|\log h|\|R_h\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

  Ακόμη λόγω της ευστάθειας της ελλειπτικής προβολής στον χώρο $H^1(\Omega)$, προκύπτει ότι

$$\|R_h\tilde{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \;\leq\; C|\log h|\|R_h\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \;\leq\; CC_2|\log h|\|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Συνεπώς, η σχέση (2.7) γίνεται

$$\begin{aligned}
\int_{J_j} (3U_h R_h\tilde{u}(U_h - R_h\tilde{u}), \theta)\, dt \;&\leq\; 9C_1^2C^2C_2^2C_{stab\{v_h,f\}}|logh|^2\|\tilde{u}\|^2_{H^1(\Omega)} \int_{J_j} \|\theta\|^2\, dt + \frac{1}{4}\int_{J_j} \|\nabla\theta\|^2\, dt \\
&= \alpha\int_{J_j} \|\theta\|^2\, dt + \frac{1}{4}\int_{J_j} \|\nabla\theta\|^2\, dt,
\end{aligned}$$

όπου $\alpha = 9C_1^2C^2C_2^2C_{stab\{v_h,f\}}|\log h|^2\|\tilde{u}\|^2_{H^1(\Omega)}$.

• Τώρα θα συνεχίσουμε με την εκτίμηση του όρου (γ). Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder (τριών όρων με $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$)

$$\begin{aligned}\int_{J_j}(u^3-(R_h\tilde{u})^3,\theta)\,dt &\le \int_{J_j}\left|(u^3-(R_h\tilde{u})^3,\theta)\right|dt\\ &= \int_{J_j}\int_\Omega\left|\rho(u^2+(R_h\tilde{u})^2+uR_h\tilde{u})\theta\right|dx\,dt\\ &\le \int_{J_j}\|\rho\|\;\|u^2+(R_h\tilde{u})^2+uR_h\tilde{u}\|_{L_4(\Omega)}\;\|\theta\|_{L_4(\Omega)}\,dt.\end{aligned}$$

Εφόσον

$$\begin{aligned}\|u^2+(R_h\tilde{u})^2+uR_h\tilde{u}\|_{L_4(\Omega)} &\le \|u^2\|_{L_4(\Omega)}+\|(R_h\tilde{u})^2\|_{L_4(\Omega)}+\|uR_h\tilde{u}\|_{L_4(\Omega)}\\ &\le \|u\|^2_{L_8(\Omega)}+\|R_h\tilde{u}\|^2_{L_8(\Omega)}+\|u\|_{L_8(\Omega)}\|R_h\tilde{u}\|_{L_8(\Omega)}\\ &\le \|u\|^2_{L_8(\Omega)}+\|R_h\tilde{u}\|^2_{L_8(\Omega)}+\frac{1}{2}(\|u\|^2_{L_8(\Omega)}+\|R_h\tilde{u}\|^2_{L_8(\Omega)})\\ &\le C_3(\|u\|^2_{L_8(\Omega)}+\|R_h\tilde{u}\|^2_{L_8(\Omega)}),\end{aligned}$$

έπεται ότι

$$\int_{J_j}(u^3-(R_h\tilde{u})^3,\theta)\,dt \le \left|\int_{J_j}(u^3-(R_h\tilde{u})^3,\theta)\,dt\right| \le C_3\int_{J_j}\|\rho\|(\|u\|^2_{L_8(\Omega)}+\|R_h\tilde{u}\|^2_{L_8(\Omega)})\|\theta\|_{L_4(\Omega)}\,dt. \tag{2.8}$$

Από το θεώρημα συνεχούς ενσφήνωσης για χώρους Sobolev $W^{1,p}$, όταν $p=n=2$, προκύπτει ότι $H^1(\Omega)\hookrightarrow L_8(\Omega)$ και σε συνδιασμό με την ευστάθεια της ελλειπτικής προβολής στον χώρο $H^1(\Omega)$,

$$\|R_h\tilde{u}\|_{L_8(\Omega)} \le C_4\|R_h\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \le C_4C_5\|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Εφαρμόζοντας τις ανισότητες Ladyszeshkayka-Gagliardo-Nirenberg 2.1.5 ($d=2$) και Young

$$\begin{aligned}\int_{J_j}(u^3-(R_h\tilde{u})^3,\theta)\,dt &\le \int_{J_j}\|\rho\|\left(\|u\|^2_{L_8(\Omega)}+C_4C_5\|\tilde{u}\|^2_{H^1(\Omega)}\right)\|\theta\|_{L_4(\Omega)}\,dt\\ &\le \left(\|u\|^2_{L_\infty(0,T;L_8(\Omega))}+C_4C_5\|\tilde{u}\|^2_{L_\infty(0,T;H^1(\Omega))}\right)\int_{J_j}\|\rho\|\ \|\nabla\theta\|^{1/2}\ \|\theta\|^{1/2}\,dt\\ &\le \beta\int_{J_j}\|\theta\|^2\,dt+\frac{1}{4}\int_{J_j}\|\nabla\theta\|^2\,dt+\frac{1}{2}\int_{J_j}\|\rho\|^2\,dt\end{aligned}$$

όπου $\beta=\frac{1}{4}\left(\|u\|^2_{L_\infty(0,T;L_8(\Omega))}+C_4C_5\|\tilde{u}\|^2_{L_\infty(0,T;H^1(\Omega))}\right)^2$

Επιστρέφουμε στην σχέση (2.6),

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2\,dt}_{(\kappa)}+\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\nabla\theta\|^2\,dt+\underbrace{\sum_{j=1}^n\left([\theta]_{j-1},\theta_+^{j-1}\right)}_{(\lambda)}+\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\theta\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt$$

$$\le\ \sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\theta\|^2\,dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\|\rho^{j-1}\|^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\|[\theta]_{j-1}\|^2+\frac{1}{2}\|\rho^0\|^2+\frac{1}{2}\|\theta^0\|^2+\|\rho^n\|^2+\frac{1}{4}\|\theta^n\|^2$$

$$+\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\nabla(\tilde{u}-u)\|^2\,dt+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\nabla\theta\|^2\,dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\rho\|^2\,dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\theta\|^2\,dt$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\nabla\theta\|^2\,dt+\alpha\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\theta\|^2\,dt+\beta\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\theta\|^2\,dt+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\nabla\theta\|^2\,dt+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\|\rho\|^2\,dt.$$

Αναπτύσσουμε ξεχωριστά τα δύο παρακάτω αθροίσματα (κ) και (λ) ώστε να είναι πιο ευδιάκριτη η απλοποίηση

$$\sum_{j=1}^n\int_{J_j}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2\,dt=\frac{1}{2}\|\theta^n\|^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\|\theta^j\|^2-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\|\theta_+^{j-1}\|^2$$

$$\sum_{j=1}^n\left([\theta]_{j-1},\theta_+^{j-1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\|[\theta]_{j-1}\|^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\|\theta_+^{j-1}\|^2-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\|\theta^{j-1}\|^2$$

θέτουμε $\varepsilon=\alpha+\beta+\frac{1}{2}+1$,

$$\frac{1}{4}\|\theta^n\|^2 + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\nabla\theta\|^2\,dt + \sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\theta\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt$$

$$\leq \|\theta^0\|^2 + \|\rho^0\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\|\rho^j\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\rho\|^2\,dt + \sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\nabla(\tilde{u}-u)\|^2\,dt + \varepsilon\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\theta\|^2\,dt.$$

Αφού $\theta \in S_{kh}$, είναι σταθερό πολυώνυμο ως προς την μεταβλητή του χρόνου σε κάθε υποδιάστημα $J_j = (t_{j-1}, t_j]$. Δηλαδή, για κάθε $\in J_j$, $1 \leq j \leq n$ ισχύει

$$\varepsilon\int_{J_j}\|\theta\|^2\,dt = \varepsilon k_j\|\theta^j\|^2,$$

και προκύπτει ότι

$$\|\theta^n\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\nabla\theta\|^2\,dt + 4\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\theta\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt$$

$$\leq 4\|\theta^0\|^2 + 4\|\rho^0\|^2 + \sum_{j=1}^{n}4\varepsilon k_j\|\theta_j\|^2 + 4\sum_{j=1}^{n}\|\rho^j\|^2 + 4\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\rho\|^2\,dt + 4\sum_{j=1}^{n}\int_{J_j}\|\nabla(\tilde{u}-u)\|^2\,dt$$

Στο σημείο αυτό θα εφαρμόσουμε κάποια μορφή διακριτού λήμματος Grönwall που εξυπηρετεί την συγκεκριμένη περίπτωση. Αρχικά, υποθέτουμε ότι $4\varepsilon k < 1$, όπου $k = \max\limits_{1\leq j\leq n} k_j$. Θέτοντας

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \|\theta^n\|^2\\
b_j &= 4\int_{J_j}\|\nabla\theta\|^2\,dt + 4\int_{J_j}\|\theta\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt\\
B &= 4\|\theta^0\|^2 + 4\|\rho^0\|^2\\
a_j &= \|\theta_j\|^2\\
f_j &= 4\|\rho^j\|^2 + 4\int_{J_j}\|\rho\|^2\,dt + 4\int_{J_j}\|\nabla(\tilde{u}-u)\|^2\,dt,
\end{aligned}$$

δείχνουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$\alpha_n + \sum_{j=1}^{n} b_j \;\leq\; B + \sum_{j=1}^{n} 4\varepsilon k_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} f_j.$$

Τότε, για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$\alpha_n + \sum_{j=1}^{n} b_j \;\leq\; e^{4\varepsilon \sum\limits_{j=1}^{n} k_j} \left(B + \sum_{j=1}^{n} f_j \right),$$

οπότε και για $n = N$ ισχύει

$$\alpha_N + \sum_{n=1}^{N} b_j \;\leq\; e^{4\varepsilon \sum\limits_{n=1}^{N} k_j} \left(B + \sum_{n=1}^{N} f_j \right) = e^{4\varepsilon T} \left(B + \sum_{n=1}^{N} f_j \right),$$

δηλαδή

$$\|\theta^N\|^2 + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|\nabla\theta\|^2 \, dt + 4 \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|\theta\|^4_{L_4(\Omega)} \, dt$$
$$\leq\; e^{4\varepsilon T} \Bigg\{ 4\|\theta^0\|^2 + +4\|\rho^0\|^2 + \underbrace{\left(4 \sum_{n=1}^{N} \|\rho^j\|^2 + 4 \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|\rho\|^2 \, dt + 4 \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|\nabla(\tilde{u} - u)\|^2 \, dt \right)}_{(\mu)} \Bigg\}.$$

Για να προσδιορίσουμε την τάξη σύγκλισης της μεθόδου στην $L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$, χρειάζεται να εκτιμήσουμε την ποσότητα (μ). Από τον ορισμό του ρ άμεσα έπονται τα ακόλουθα:

$$\sum_{n=1}^{N} \|\rho^j\| \;\leq\; Ch^2 \sum_{n=1}^{N} \|u^n\|_2,$$

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|\rho\| \, dt \;\leq\; T \max_{n \leq N} \|\rho\|_{2,J_n} \;\leq\; T \max_{n \leq N} \left(Ch^2 \, \|u\|_{2,J_n} + Ck_n \, \|u_t\|_{J_n} \right),$$

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|\nabla(\tilde{u} - u)\|^2 \, dt \;\leq\; \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} Ck_n^2 \|\nabla u_t\|^2 \, dt = TCk_n^2 \|\nabla u_t\|^2.$$

Τώρα, ολοκληρώνουμε την εκτίμηση για τον όρο θ ως εξής

$$\|\theta\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} = \|U_h - R_h \tilde{u}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \;\leq O(h^2 + k_n)$$

και καταλήγουμε ότι από τον ορισμό του σφάλματος στην ανισότητα

$$\|e\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \;\leq\; \|\theta\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|\rho\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))},$$

όπου

$$\|\rho\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} = \max_{t\in[0,T]}\|\rho\| \;\le\; \max_{n\le N}\|\rho\|_{J_n} \;\le\; \max_{n\le N}(Ch^2\|u\|_{2,J_n} + Ck_n\;\|u_t\|_{J_n})$$

Αν επιπλεόν υποθέσουμε ότι $v_h = R_h v$, τότε $\|\theta^0\| = 0$. ∎

Παρατήρηση 8 *Αν είχαμε χρησιμοποιήσει την L_2-προβολή, P_h, αντί της ελλειπτικής, R_h, δεν θα είχαμε καταλήξει σε αποτέλεσμα βέλτιστης σύγκλισης. Συγκεκριμένα, θα είχαμε δείξει ότι*

$$\|U_h - u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \;\le \mathcal{O}(h + k_n).$$

Σχόλιο 5 *Στην παραπάνω ανάλυση σφάλματος δείξαμε έμμεσα τις εξής δύο εκτιμήσεις:*

- $\|\theta\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \;\le \mathcal{O}(h^2 + k_n)$.
- $\|\theta\|_{L_4(0,T;L_4(\Omega))} \;\le \mathcal{O}(h^2 + k_n)$.

Συνεπώς, για να δείξουμε εκτιμήσεις σφάλματος στις παραπάνω νόρμες, αρκεί να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες εκτιμήσεις για τον όρο ρ.

Πόρισμα 2.3.3 *Υποθέτουμε ότι $\frac{\max k_n}{\min k_n} < C_k$, $1 \le n \le N$. Τότε για τις λύσεις u, U_h του συνεχούς προβλήματος (2.2) και του πλήρως διακριτού (2.4) αντίστοιχα, αποδεικνύουμε την ακόλουθη βέλτιστη εκτίμηση σφάλματος*

$$\|U_h - u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \;\le\; \mathcal{O}(h + k_n).$$

Απόδειξη: Αναλύουμε το σφάλμα όπως και πριν

$$e = (U_h - R_h\tilde{u}) + (R_h\tilde{u} - u) = \theta + \rho.$$

Για να εκτιμήσουμε το σφάλμα στην $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$, αρκεί να ασχοληθούμε αποκλειστικά με τον όρο ρ, γιατί από το Θεώρημα 2.3.2 έπεται ότι $\|\theta\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \;\le\; \mathcal{O}(h^2 + k_n)$.

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder (για $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1} = 1$), έπεται ότι

$$\|\rho\|^2_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} = \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\|\nabla\rho\|^2\,dt \;\le\; T\max_{n\le N}\|\nabla\rho\|^2_{J_n},$$

από τον ορισμό της ελλειπτικής προβολής προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\|\nabla\rho\|_{J_n} &\leq \|\nabla R_h\tilde{u} - \nabla\tilde{u}\|_{J_n} + \|\nabla\tilde{u} - \nabla u\|_{J_n}\\ &\leq Ch\|\tilde{u}\|_{2,J_n} + Ck_n\|\nabla u_t\|_{J_n}\\ &= Ch\|u\|_{2,J_n} + Ck_n\|\nabla u_t\|_{J_n}\end{aligned}$$

και καταλήγουμε στην επιθυμητή εκτίμηση

$$\|\rho\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C\, T^{1/2} \max_{n\leq N}(h\|u\|_{2,J_n} + k_n\|\nabla u_t\|_{J_n}).$$

∎

Πόρισμα 2.3.4 *Υποθέτουμε ότι* $\frac{\max k_n}{\min k_n} < C_k$, $1 \leq n \leq N$. *Τότε για τις λύσεις* u, U_h *του συνεχούς προβλήματος* (2.2) *και του πλήρως διακριτού* (2.4) *αντίστοιχα, αποδεικνύουμε την ακόλουθη βέλτιστη εκτίμηση σφάλματος*

$$\|U_h - u\|_{L_4(0,T;L_4(\Omega))} \leq \mathcal{O}(h^2 + k_n).$$

Απόδειξη: Αναλύουμε το σφάλμα όπως και πριν

$$e = (U_h - R_h\tilde{u}) + (R_h\tilde{u} - u) = \theta + \rho.$$

Για να εκτιμήσουμε το σφάλμα στην $L_4(0,T;L_4(\Omega))$, αρκεί να ασχοληθούμε αποκλειστικά με τον όρο ρ, γιατί από το Θεώρημα 2.3.2 έπεται ότι $\|\theta\|_{L_4(0,T;L_4(\Omega))} \leq \mathcal{O}(h^2 + k_n)$.

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder (για $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1} = 1$), έπεται ότι

$$\|\rho\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega))} = \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|\rho\|^4_{L_4(\Omega)}\, dt \leq T \max_{n\leq N} \|\rho\|^4_{L_4,J_n},$$

όπου $\|\rho\|_{L_4,J_n} = \sup_{t\in J_n} \|\rho\|_{L_4(\Omega)}$.

Αφού

$$\|\rho\|_{L_4,J_n} \leq \underbrace{\|R_h\tilde{u} - \tilde{u}\|_{L_4,J_n}}_{(\alpha)} + \underbrace{\|\tilde{u} - u\|_{L_4,J_n}}_{(\beta)},$$

θα εκτιμήσουμε ξεχωριστά τους όρους (α), (β).

Αρχικά, για τον όρο (α): Από το Λήμμα Bramble-Hilbert [3] (για $k = 1$, $q = 4$, $p = 4$, $m = 0$), για κάθε $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,4}(\Omega)$ ισχύει ότι

$$\|R_h\tilde{u} - \tilde{u}\|_{L_4(\Omega)} \leq Ch^2\|\tilde{u}\|_{W^{2,4}(\Omega)},$$

και, έπεται ότι

$$\|R_h\tilde{u} - \tilde{u}\|_{L_4,J_n} \;\leq\; Ch^2\|\tilde{u}\|_{W^{2,4},J_n} = Ch^2\|u\|_{W^{2,4},J_n}$$

Στην συνέχεια για τον όρο (β), ισχύει

$$\|\tilde{u} - u\|_{L_4,J_n} \;\leq\; Ck_n\|u_t\|_{L_4,J_n}.$$

Άρα, καταλήγουμε στην ζητούμενη εκτίμηση

$$\|\rho\|_{L_4(0,T;L_4(\Omega))} \leq\; CT^{1/4}\max_{n\leq N}(h^2\|u\|_{W^{2,4},J_n} + k_n\|u_t\|_{L_4,J_n}).$$

∎

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικά αποτελέσματα

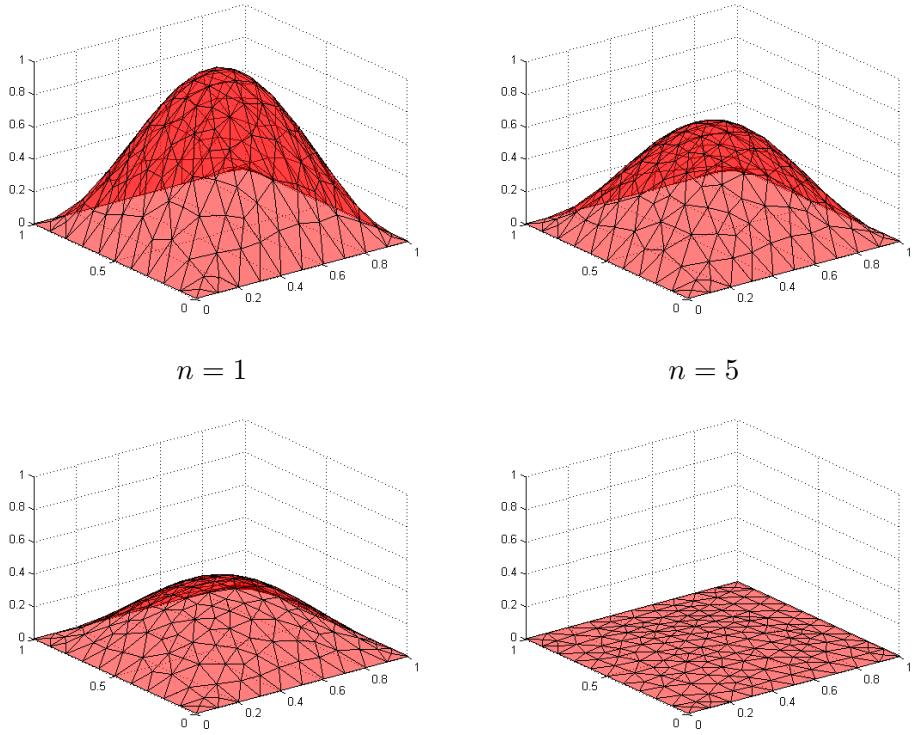
Στο σημέιο αυτό, θα παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα από την ασυνεχή μεθόδο Galerkin στο πρόβλημα (1.1) αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας. Συγκεκριμένα, θεωρούμε $\Omega = (0,1)^2$ και $[0,T] = [0,2]$ το αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Επιλέγουμε, ως αρχική συνθήκη $u(x,y,0) = v(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

Αρχικά, θα ασχοληθούμε με το ομογενές παραβολικό πρόβλημα, όπου οι εξωτερικοί παράγοντες απουσιάζουν ($f = 0$). Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την διαφορετική εξέλιξη της θερμοκρασίας στην πάροδο του χρόνου υπό την επίδραση των εξωτερικών παραγόντων, $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

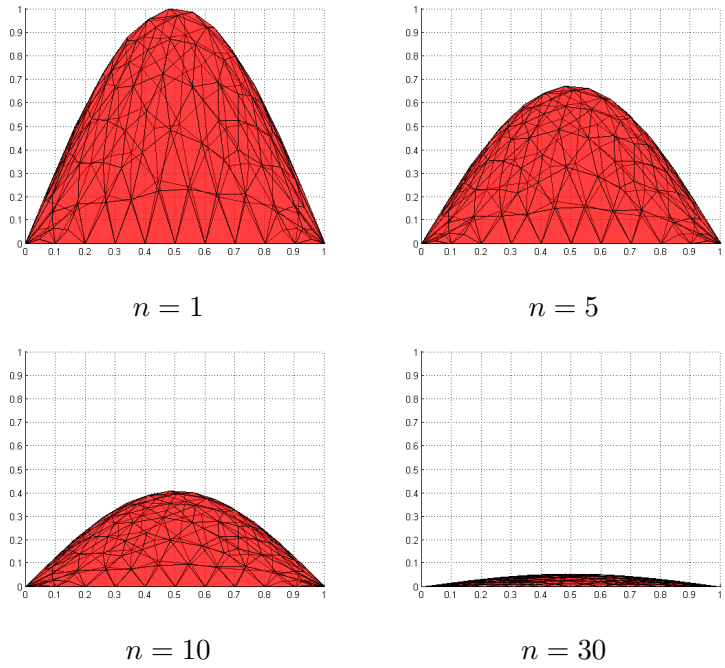
Προσεγγίζουμε την ακριβή λύση, u, του συνεχούς προβλήματος με γραμμικές και κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις ως προς τον χώρο και τον χρόνο αντίστοιχα. Να σημειώσουμε ότι η διακριτοποίηση στο χωρίο Ω, είναι αποτέλεσμα της τριγωνοποίησης Delaunay. Τέλος, η χρονική διαμέριση είναι ομοιόμορφη, δηλαδή τα υποδιαστήματα είναι ισαπέχοντα , μήκους $k = 0.01$.

3.1 Ομογενές παραβολικό πρόβλημα

Στα Σχήματα 3.1 και 3.2, απεικονίζεται η προσεγγιστική λύση U_h για τις επαναλήψεις $n = 1$, $n = 5$, $n = 10$ και $n = 30$. Από την επανάληψη $n = 31$ έως την $n = 200$, η συνάρτηση U_h τείνει στο μηδέν.



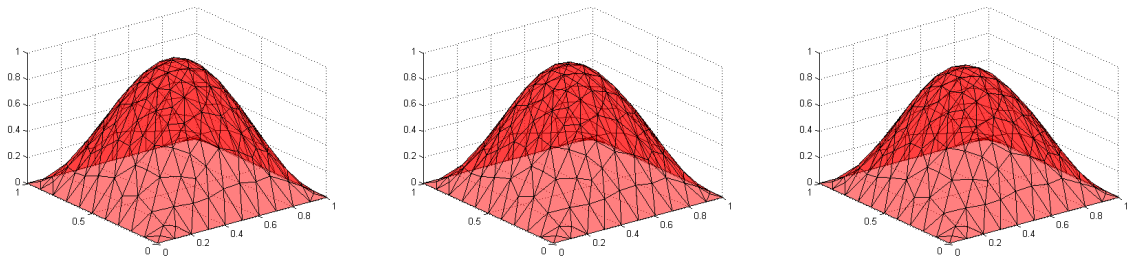
Σχήμα 3.1: Η συνάρτηση U_h για το ομογενές πρόβλημα.



Σχήμα 3.2: Η προβολή της U_h στο xz-επίπεδο, για το ομογενές πρόβλημα.

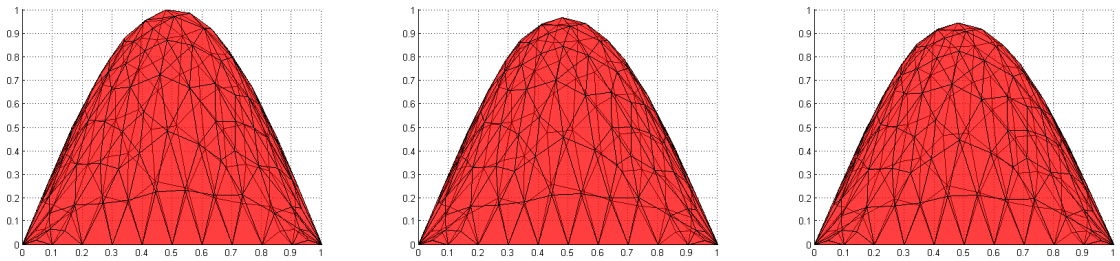
3.2 Μη ομογενές παραβολικό πρόβλημα

Στα Σχήματα 3.3 και 3.4 απεικονίζεται η προσεγγιστική λύση για τις επαναλήψεις $n = 1$, $n = 10$ και $n = 50$. Για $n > 50$, η προσεγγιστική λύση U_h μειώνεται αμελητέα και συγκλίνει σε μια σταθερή τιμή.



$n = 1$ $n = 10$ $n = 50$

Σχήμα 3.3: Η συνάρτηση U_h για το μη-ομογενές πρόβλημα.



$n = 1$ $n = 10$ $n = 50$

Σχήμα 3.4: Η προβολή της U_h στο xz-επίπεδο, για το μη-ομογενές πρόβλημα.

Βιβλιογραφία

[1] D. BRAESS, Finite Elements, Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory, Cambridge University Press, 2007.

[2] S.C. BRENNER and L.R. SCOTT, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer-Verlag, 2002.

[3] P.G. CIARLET, The Finite Element Method for Elliptic Problems, SIAM's Classics in Applied Mathematics, 1978.

[4] L. CHEN, Programming of Finite Elements in Matlab, (lecture notes).

[5] L. CHEN, Introduction to Finite Elements, p 6-7, (lecture notes).

[6] R. COYRANT, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc., **46**, pp 1-23, 1943.

[7] E. EMMRICH, Discrete versions of Grönwall's lemma and their application to the numerical anlysis of parabolic problems, Preprint series of the Institute of Mathematics, Technishe Universität Berlin , 1999.

[8] K. ERIKSSON and C. JOHNSON and V. THOMÉE, Time discretization of parabolic problems by the discontinuous Galerkin method, *Modélisation mathématique et analyse numérique*, **19** (1985), No 4, pp 611-643.

[9] L. EVANS, Partial Differential Equations, AMS,Providence RI, 1998.

[10] C. JOHNSON, Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method, Cambridge University Press, 1987.

[11] B. RIVIÉRE, Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations : Theory and Implementation, SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 2008.

[12] T. ROUBICEK, Nonlinear Partial Differential Equations with Applications, Birkhaüser- Verlag, 2013.

[13] E. SÜLI, Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations, 2012.

[14] V. THOMÉE, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, Springer-Verlag, 1997.

[15] T. WERDER and K. GERDES and D. SCHÖTZAU and C. SCHWAB, hp-discontinuous Galerkin time stepping for parabolic problems, /Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. , **190** (2001), pp 6685-6708.

[16] M. ZLÁMAL, On the finite element method, Numerische Mathematik, **12**, pp 394-402, 1968.