Η ανεξαρτησία της γενικευμένης υπόθεσης του συνεχούς από το αξιωματικό σύστημα ZFC

Διπλωματική εργασία

Αλέξανδρος Παπούλιας

Επιβλέπων Καθηγητής : Αλέκος Αρβανιτάκης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αθήνα 2011

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τους καθηγητές που με βοήθησαν σε αυτή την εργασία. Ιδιαίτερα τον κ. Αρβανιτάκη που ήταν πάντα πρόθυμος να μου λύσει όλες τις απορίες που είχα και τον κ. Αργυρό για τη βοήθεια του στην επιλογή του θέματος και την υπόδειξη μέρους της βιβλιογραφίας. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τον συμφοιτητές μου Νίκο Παληκαράκη και Μαρίνα Κωνσταντάτου που με βοήθησαν στη χρήση των προγράμματων LATEX και PowerPoint.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες της λογικής

Αν και η προσέγγιση αυτής της εργασίας είναι καθαρά συνολοθεωρητική, είναι αδύνατο μια απόδειξη συνέπειας αξιωματικών συστημάτων να αποφύγει εντελώς τη λογική. Για αυτό θα παρουσιάσουμε με συντομία και χωρίς αυστηρότητα ορισμένες έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν σε όλη την έκταση αυτής της εργασίας. Η γλώσσα της θεωρίας συνόλων αποτελείται αποκλειστικά από το σύμβολο σχέσης δύο θέσεων $\in$. Επομένως οι ατομικοί τύποι της γλώσσας της θεωρίας συνόλων θα είναι εκφράσεις της μορφής $x \in y$ ή $x = y$. Ορίζουμε επαγωγικά ποιές εκφράσεις είναι τύποι με βάση τους παρακάτω κανόνες:

1. Κάθε ατομικός τύπος είναι τύπος.
2. Αν φ και ψ είναι τύποι τότε είναι και οι $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$ και $\varphi \leftrightarrow \psi$.
3. Αν ο φ είναι τύπος και η x μεταβλητή τότε οι $\exists x\varphi$ και $\forall x\varphi$ είναι τύποι.

Σημασιολογικά, επειδή οι τύποι $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ και $\forall x\varphi$ μπορούν να γραφούν ισοδύναμα χρησιμοποιώντας μόνο τους προτασιακούς συνδέσμους $\neg$ και $\wedge$ και τον ποσοδείκτη $\exists$, μπορούμε να θεωρήσουμε, και αυτό θα κάνουμε σε όλη την έκταση της εργασίας, ότι οι τύποι έχουν οριστεί με βάση μόνο αυτούς τους κανόνες:

1. Κάθε ατομικός τύπος είναι τύπος.
2. Αν φ και ψ είναι τύποι τότε είναι και οι $\neg\varphi$ και $\varphi \wedge \psi$.
3. Αν ο φ είναι τύπος και η x μεταβλητή τότε ο $\exists x\varphi$ είναι τύπος.

Αυτό θα μας γλυτώσει από αχρείαστο κόπο, κυρίως όταν ελέγχουμε ότι κάτι ισχύει για κάθε τύπο με επαγωγή στο μήκος του.

Πολλές φορές θα θεωρήσουμε συλλογές της μορφής $\{x : \varphi(x)\}$ που θα τις ονομάζουμε κλάσεις και θα τις γράφουμε με έντονα γράμματα. Οι κλάσεις συχνά δεν είναι σύνολα, όπως για παράδειγμα η $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$ ή η $\mathbf{ON} = \{x : \text{ο x είναι διατακτικός}\}$. Για αυτό το λόγο αντιμετωπίζουμε τις κλάσεις ακριβώς όπως του τύπους. Έτσι για παράδειγμα η έκφραση «για κάθε κλάση ισχύει αυτό» δεν μπορεί να είναι μια πρόταση της θεωρίας συνόλων. Θα αναφερόμαστε επίσης και σε σχέσεις ή συναρτήσεις που δεν είναι σύνολα αλλά κλάσεις. Για παράδειγμα η $\in$ ορίζει μια κλάση $\mathbf{E} = \{\langle x, y\rangle : x \in y\}$, ενώ η $\bigcup$ ορίζει μια κλάση $\mathbf{UN} = \{\langle x, y\rangle : y = \bigcup x\}$. Διαισθητικά $\mathbf{UN} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Ονομάζουμε βεληνεκές μιας εμφάνισης ενός ποσοδείκτη σε ένα τύπο τον μοναδικό τύπο που ακολουθεί τον ποσοδείκτη. Για παράδειγμα στον τύπο $(\exists x(x \in y)) \wedge (y \in z)$ το βεληνεκές του ποσοδείκτη $\exists x$ είναι ο τύπος $x \in y$. Μια εμφάνιση μιας μεταβλητής σε έναν τύπο καλείται δεσμευμένη αν βρίσκεται στο βεληνέκες ενός ποσοδείκτη που δρα σε αυτή τη μεταβλητή, διαφορετικά καλείται ελεύθερη. Στο προηγούμενο παράδειγμα η εμφάνιση της x είναι δεσμευμένη ενώ και οι δύο εμφανίσεις της y είναι ελεύθερες. Διαισθητικά ένας τύπος εκφράζει μια ιδιότητα των ελεύθερων μεταβλητών του, δηλαδή των μεταβλητών του που τουλάχιστον μια εμφάνισή τους είναι ελεύθερη, καθώς μια δεσμευμένη μεταβλητή μπορεί να αντικατασταθεί από μια καινούρια μεταβλητή χωρίς να μεταβάλλει το νόημα του τύπου. Για παράδειγμα ο τύπος $(\exists w(w \in y)) \wedge (y \in z)$ είναι ισοδύναμος με αυτόν που είδαμε παραπάνω. Συχνά θα γράφουμε έναν τύπο στη μορφή $\varphi(x_1, ..., x_n)$ και θα εννοούμε ότι όλες οι ελεύθερες μεταβλητές του φ περιλαμβάνονται στο σύνολο $\{x_1, ..., x_n\}$, χωρίς όμως να είναι απαραίτητο ότι κάθε x_i είναι ελεύθερη μεταβλητή του φ. Ένας τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές καλείται πρόταση.

Αν S σύνολο προτάσεων και φ πρόταση τότε γράφουμε $S \vdash \varphi$ αν η φ αποδεικνύεται από το S, δηλαδή αν υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία τύπων $\varphi_1, ..., \varphi_n$ τέτοια ώστε ο φ_n να είναι ο φ και κάθε τύπος της ακολουθίας είτε να ανήκει στο S, είτε να είναι λογικό αξίωμα, είτε να είναι το συμπέρασμα ενός κανόνα απαγωγής με υποθέσεις τους τύπους με μικρότερο δείκτη. Ένα σύνολο προτάσεων S καλείται συνεπές και γράφουμε $Con(S)$ αν δεν υπάρχει πρόταση φ τέτοια ώστε $S \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Από το γεγονός ότι η απόδειξη είναι μια πεπερασμένη διαδικασία προκύπτει το παρακάτω θεώρημα, που είναι μια μορφή του θεωρήματος συμπάγειας.

Θεώρημα 1.1.1 *Αν $S \vdash \varphi$, τότε υπάρχει $S_0 \subset S$ πεπερασμένο τέτοιο ώστε $S_0 \vdash \varphi$.*

Πόρισμα 1.1.1 *Αν το S είναι ασυνεπές τότε υπάρχει $S_0 \subset S$ πεπερασμένο που είναι ασυνεπές.*

Η γλώσσα της θεωρίας συνόλων είναι κάτι το τυπικό αν δεν της δοθεί μια ερμηνεία. Μια δομή $\mathfrak{M}$ για τη γλώσσα της θεωρίας συνόλων είναι ένα ζεύγος $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R}\rangle$ που περιλαμβάνει μια μη κενή κλάση $\mathbf{A}$ και μια σχέση $\mathbf{R}$ σε αυτή την κλάση. Δεδομένης μιας δομής θεωρούμε ότι η $\mathbf{A}$ είναι το σύμπαν των αντικειμένων στα οποία αναφερόμαστε και η $\mathbf{R}$ μας δίνει έναν τρόπο ερμηνείας του συμβόλου $\in$ στους τύπους της γλώσσας της θεωρίας συνόλων. Ένα απλοϊκό παράδειγμα δομής είναι η $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$. Προφανώς δεν είναι μια δομή που συμφωνεί με τη διαίσθησή μας μιας και $\forall x(x \in x)$. Σε όλη την έκταση της εργασίας στις δομές που θα χρησιμοποιηθούν η ερμηνεία του σύμβολο $\in$ θα είναι η διαισθητικά φυσιολογική, δηλάδη $x \in y$ θα ερμηνεύεται ως το x ανήκει στο y.

1.2 Το αξιωματικό σύστημα ZFC

Η θεωρία συνόλων αποτελεί τη βάση όλων των μαθηματικών. Στην προσπάθεια η βάση αυτή να είναι στέρεα, αναπτύχθηκε στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ου αιώνα η αξιωματική συνολοθεωρία. Σκόπος της είναι μέσω λίγων και απλών αξιωμάτων να εκφράσει τις κοινώς αποδεκτές μαθηματικές αλήθειες και να αποκλείσει αντιφάσεις όπως για παράδειγμα το παράδοξο του Russell. Αν και υπάρχουν και άλλα αξιωματικά συστήματα (π.χ. von Neumman-Bernays-Godel ή Morse-Kelley), αυτό που χρησιμοποιείται ευρύτερα και αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτή την εργασία είναι το αξιωματικό σύστημα Zermelo-Frankel μαζί με το Αξίωμα της Επιλογής ή συντομότερα ZFC. Μια παρουσίαση του ZFC είναι η παρακάτω:

1. **Αξίωμα της Έκτασης**

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

2. **Αξίωμα της Θεμελίωσης**

$$\forall x [\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists (z \in x \wedge z \in y))]$$

3. **Αξιωματικό Σχήμα του Διαχωρισμού**

$$\text{Για κάθε τύπο } \varphi(x, z, w_1, ..., w_n),\ \forall z \forall w_1, ..., w_n \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$$

4. **Αξίωμα του Ζεύγους**

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

5. **Αξίωμα της Ένωσης**

$$\forall w \exists z \forall y \forall x (x \in y \wedge y \in w \rightarrow x \in z)$$

6. **Αξιωματικό Σχήμα της Αντικατάστασης**

$$\text{Για κάθε τύπο } \varphi(x, y, A, w_1, ..., w_n),\ \forall A \forall w_1, ..., w_n [\forall x \in A \exists ! y \varphi \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi]$$

7. **Αξίωμα του Απέιρου**

$$\exists x (0 \in x \wedge \forall y \in x (S(y) \in x))$$

8. **Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου**

$$\forall x \exists y \forall z (z \subset x \rightarrow z \in y)$$

9. **Αξίωμα της Επιλογής** (AC)

$$\forall A \exists R (\text{η } \langle A, R \rangle \text{ είναι καλή διάταξη}) \quad (\text{βλέπε ορισμό 1.3.2})$$

Τα αξιώματα 7,8,9 είναι καλώς ορισμένα μιας και οι έννοιες του υποσυνόλου, του κενού συνόλου, του $S(x) = x \cup \{x\}$ και της καλής διάταξης μπορόυν να οριστούν στη βάση των αξιωμάτων 1-6. Υπάρχουν πολλές ισοδύναμες παρουσιάσεις του ZFC. Παρατηρούμε ότι τα αξιωματικά σχήματα του Διαχωρισμού και της Αντικατάστασης είναι εκφράσεις της μεταγλώσσας και εκφράζουν όχι ένα, αλλά άπειρα αξιώματα. Μερικές φορές θα είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι κάποια αποτελέσματα μπορούν να αποδειχθούν και σε ένα υποσύνολο του ZFC. Για αυτό θα γράφουμε ZF και θα αναφερόμαστε στο σύνολο όλων των παραπάνω αξιωμάτων εκτός από το αξίωμα της επιλογής, ZFC^- και θα αναφερόμαστε στο σύνολο όλων των παραπάνω αξιωμάτων εκτός από το αξίωμα της θεμελίωσης, $ZFC - P$ και θα αναφερόμαστε στο σύνολο όλων των παραπάνω αξιωμάτων εκτός από το αξίωμα του δυναμοσυνόλου και $ZFC - Inf$ και θα αναφερόμαστε στο σύνολο όλων των παραπάνω αξιωμάτων εκτός από το αξίωμα του απείρου.

1.3 Βασικές έννοιες της θεωρίας συνόλων

Θα παρουσιάσουμε συνοπτικά ορισμένες πρωταρχικές έννοιες και αποτελέσματα της θεωρίας συνόλων.

Ορισμός 1.3.1 *Μια σχέση R καλείται καλά θεμελιωμένη σε ένα σύνολο A αν*

$$\forall X \subset A[X \neq 0 \to \exists y \in X(\neg \exists z \in X(zRy))].$$

Το στοιχείο y καλείται R-ελαχιστικό του X.

Ορισμός 1.3.2 *Μια καλή διάταξη είναι ένα ζεύγος $\langle A, R\rangle$ όπου το A είναι σύνολο και η R είναι μια καλά θεμελιωμένη σχέση στο A τέτοια ώστε $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$, $\forall x, y \in A(xRy \vee yRx \vee x = y)$ και $\forall x \in A(\neg(xRx))$.*

Ορισμός 1.3.3 *Ένα σύνολο είναι μεταβατικό αν κάθε στοιχείο του είναι και υποσύνολο του.*

Ορισμός 1.3.4 *Ένα σύνολο είναι διατακτικός αν είναι μεταβατικό και διατάσσεται καλά από τη σχέση $\in$.*

Χρησιμοποιούμε συνήθως για τους διατακτικούς τα μικρά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Αν ο α είναι διατακτικός θέτουμε $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ που είναι επίσης διατακτικός. Ένας διατακτικός α καλέιται επόμενος διατακτικός αν $\exists \beta(\alpha = S(\beta))$. Ένας διατακτικός α καλέιται οριακός διατακτικός αν $\alpha \neq 0$ και ο α δεν είναι επόμενος. Ο μικρότερος οριακός διατακτικός συμβολίζεται με το ω.

Θεώρημα 1.3.1 *Κάθε καλή διάταξη είναι ισομορφική με ένα μοναδικό διατακτικό.*

Ορισμός 1.3.5 *Αν το A μπορεί να διαταχθεί καλά ορίζουμε $|A|$ να είναι ο ελάχιστος διατακτικός με τον οποίο το A είναι ισομορφικό.*

Από το αξίωμα της επιλογής κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλά άρα για κάθε σύνολο A υπάρχει η πληθικότητα του $|A|$.

Θεώρημα 1.3.2 *(Schroder-Bernstein) Αν υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση από το A στο B και μια από το B στο A τότε $|A| = |B|$.*

$|A| \leq |B|$ αν και μόνο αν υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση από το A στο B ή αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση από το B επί του A.

Ορισμός 1.3.6 *Ένας διατακτικός $\varkappa$ είναι πληθάριθμος αν $|\varkappa| = \varkappa$.*

Συμβολίζουμε με α^+ τον ελάχιστο πληθάριθμο που είναι μεγαλυτερος του α. Κάθε άπειρος πληθάριθμος είναι οριακός διατακτικός.

Ορισμός 1.3.7 *Για κάθε διατακτικό α ορίζεται αναδρομικά το σύνολο $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής:*

1. $\omega_0 = \omega$.
2. $\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+$.
3. $\omega_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \omega_\xi$ *όταν ο α είναι οριακός διατακτικός.*

Κάθε ω_α είναι πληθάριθμος και κάθε άπειρος πληθάριθμος είναι ίσος με ω_α για κάποιο διατακτικό α.

Ορισμός 1.3.8 *Έστω $\varkappa$, λ πληθάριθμοι. Ορίζουμε $\varkappa^\lambda$ να είναι η πληθικότητα του συνόλου $\{f : \eta\ f$ είναι συνάρτηση από το λ στο $\varkappa\}$.*

Οι δυνάμεις πληθαρίθμων δεν είναι ισοδύναμες με τις δυνάμεις διατακτικών.

Θεώρημα 1.3.3 *(Cantor) Για κάθε πληθάριθμο $\varkappa$, $\varkappa < 2^\varkappa = |\mathcal{P}(\varkappa)|$.*

Ορισμός 1.3.9 *Η υπόθεση του συνεχούς (CH) είναι η πρόταση $\omega_1 = 2^{\omega_0}$. Η γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς (GCH) είναι η πρόταση $\forall\alpha(\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha})$.*

Τελειώνουμε την εισαγωγή αποδεικνύοντας δύο λήμματα που αφορούν τους άπειρους πληθαρίθμους και θα μας φανούν χρήσιμα στη συνέχεια.

Λήμμα 1.3.1 *Αν ο $\varkappa$ είναι άπειρος πληθάριθμος $|\varkappa \times \varkappa| = \varkappa$.*

Απόδειξη.

Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο $\varkappa$. Έστω ότι ισχύει για κάθε άπειρο πληθάριθμο μικρότερο του $\varkappa$. Τότε για κάθε διατακτικό $\alpha < \varkappa$, $|\alpha \times \alpha| = ||\alpha| \times |\alpha|| < \varkappa$. Λαμβάνουμε υπόψη πως για πεπερασμένους πληθαρίθμους λ, $|\lambda \times \lambda| < \omega \leq \varkappa$. Η ισότητα $|\alpha \times \alpha| = ||\alpha| \times |\alpha||$ ισχύει γιατί αν $f : \alpha \to |\alpha|$ 1-1 τότε η $g : \alpha \times \alpha \to |\alpha| \times |\alpha|$ τέτοια ώστε $g(\langle \beta, \gamma \rangle) = \langle f(\beta), f(\gamma) \rangle$ είναι 1-1. Ορίζουμε μια καλή διάταξη $\lhd$ στο $\varkappa \times \varkappa$ ως εξής: $\langle \alpha, \beta \rangle \lhd \langle \gamma, \delta \rangle$ αν

$$max(\alpha, \beta) < max(\gamma, \delta) \vee [max(\alpha, \beta) = max(\gamma, \delta) \wedge (\alpha < \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta))].$$

Για κάθε $\langle \alpha, \beta \rangle \in \varkappa \times \varkappa$, επειδή ο $\varkappa$ είναι οριακός διατακτικός $max(\alpha, \beta) + 1 < \varkappa$. Άρα κάθε $\langle \alpha, \beta \rangle \in \varkappa \times \varkappa$ έχει το πολύ $|(max(\alpha, \beta) + 1) \times (max(\alpha, \beta) + 1)| < \varkappa$ προηγούμενους στη διάταξη $\lhd$. Επομένως η διάταξη $\langle \varkappa \times \varkappa, \lhd \rangle$ είναι ισομορφική με ένα διατακτικό μικρότερο ή ίσο του $\varkappa$, άρα $|\varkappa \times \varkappa| \leq \varkappa$. Επειδή προφανώς $|\varkappa \times \varkappa| \geq \varkappa$, $|\varkappa \times \varkappa| = \varkappa$. □

Με βάση το παραπάνω λήμμα και με χρήση του αξιώματος της επιλογής προκύπτει εύκολα ότι για κάθε σύνολο A με $|A| \geq \omega$ ισχύει $|A \times A| = |A|$ ή $|A^n| = |A|$.

Λήμμα 1.3.2 *Αν $\varkappa \geq \omega$ και $|X_\alpha| \leq \varkappa$ για κάθε $\alpha < \varkappa$ τότε $|\bigcup_{\alpha<\varkappa} X_\alpha| \leq \varkappa$.*

Απόδειξη.

Για κάθε α επιλέγουμε μια 1-1 συνάρτηση f_α από το X_α στο $\varkappa$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \bigcup_{\alpha<\varkappa} X_\alpha \to \varkappa \times \varkappa$ με $g(x) = \langle \alpha, f_\alpha(x) \rangle$ όπου α είναι ο ελάχιστος διατακτικός για τον οποίο $x \in X_\alpha$. Η g είναι 1-1 άρα $|\bigcup_{\alpha<\varkappa} X_\alpha| \leq |\varkappa \times \varkappa| = \varkappa$. □

Κεφάλαιο 2

Τα καλά θεμελιωμένα σύνολα

2.1 Επαγωγή και αναδρομή σε καλά θεμελιωμένες σχέσεις

Όπως στους φυσικούς αριθμούς αποδεικνύουμε ιδιότητες επαγωγικά και ορίζουμε αναδρομικά ακολουθίες, μπορούμε να κάνουμε κάτι αντίστοιχο σε οποιαδήποτε κλάση που είναι εφοδιασμένη με μια σχέση που ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες. Σε όλη την πρώτη ενότητα θα δουλεύουμε στο $ZF^- - P$. Καταρχάς επεκτείνουμε την έννοια της καλά θεμελιωμένης σχέσης και σε κλάσεις.

Ορισμός 2.1.1 *Η $\mathbf{R}$ καλείται καλά θεμελιωμένη σε μια κλάση $\mathbf{A}$ αν*

$$\forall X \subset \mathbf{A}[X \neq 0 \rightarrow \exists y \in X(\neg \exists z \in X(z\mathbf{R}y))].$$

Παρότι ο ορισμός μοιάζει ακριβώς ο ίδιος με αυτόν που αναφερόταν σε σύνολα υπάρχει μια ουσιώδης διαφορά. Ο ορισμός που αναφερόταν σε σύνολα ορίζει έναν τύπο με δύο μεταβλητές R και A, ενώ αυτός στην πραγματικότητα εκφράζει άπειρους ορισμούς. Για κάθε τύπο που ορίζει τις κλάσεις $\mathbf{R}$ και $\mathbf{A}$, ορίζει έναν άλλο τύπο. Για παράδειγμα η «η $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στην $\mathbf{V}$» είναι μια πρόταση στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων που μάλιστα είναι ισοδύναμη με το αξίωμα της θεμελίωσης.

Ορισμός 2.1.2 *Η $\mathbf{R}$ καλείται set-like σε μια κλάση $\mathbf{A}$ αν $\forall x \in \mathbf{A}$, το $\{y \in \mathbf{A} : y\mathbf{R}x\}$ είναι σύνολο.*

Για παράδειγμα η $\in$ είναι set-like σε κάθε κλάση και κάθε σχέση σε ένα σύνολο είναι set-like.

Ορισμός 2.1.3 *Αν η $\mathbf{R}$ είναι set-like στην $\mathbf{A}$ και $x \in \mathbf{A}$ τότε:*

1. $pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{A} : y\mathbf{R}x\}$
2. $pred^0(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$
   $pred^{n+1}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup\{pred(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) : y \in pred^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})\}$
3. $cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup\{pred^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) : n \in \omega\}$

Παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω είναι σύνολα.

Λήμμα 2.1.1 *Αν η* $\mathbf{R}$ *είναι set-like στην* $\mathbf{A}$ *και* $x \in \mathbf{A}$ *τότε για κάθε* $y \in cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, $pred(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \subset cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$.

Απόδειξη.

Έστω $y \in cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$. Θα υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $y \in pred^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})\}$. $pred(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \subset pred^{n+1}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subset cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$. □

Θεώρημα 2.1.1 *(Υπερπεπερασμένη επαγωγή). Αν η* $\mathbf{R}$ *είναι καλά θεμελιωμένη και set-like στην* $\mathbf{A}$*, τότε κάθε μη κενή υποκλάση* $\mathbf{X}$ *της* $\mathbf{A}$ *έχει ένα* $\mathbf{R}$*-ελαχιστικό στοιχείο.*

Απόδειξη.

Σταθεροποιούμε $x \in \mathbf{X}$. Αν το x δεν είναι $\mathbf{R}$-ελαχιστικό στη $\mathbf{X}$ τότε το $\mathbf{X} \cap cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο της $\mathbf{A}$ και επομένως έχει ένα $\mathbf{R}$-ελαχιστικό στοιχείο y. Έστω ότι το y δεν είναι $\mathbf{R}$-ελαχιστικό στοιχείο της $\mathbf{X}$, δηλαδή ότι υπάρχει $z \in \mathbf{X}$ με $z\mathbf{R}y$. Τότε $z \in pred(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \subset cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ και άρα $z \in \mathbf{X} \cap cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ πράγμα που αντιφάσκει με το γεγονός ότι το y είναι ένα $\mathbf{R}$-ελαχιστικό στοιχείο του $\mathbf{X} \cap cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$. Άρα το y είναι ένα $\mathbf{R}$-ελαχιστικό στοιχείο της $\mathbf{X}$. □

Παρατηρούμε ότι και στην περίπτωση αυτού του θεωρήματος πρόκειται στην πραγματικότητα για ένα σχήμα που εκφράζει άπειρα θεωρήματα της $ZF^- - P$. Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι δικαιολογούνται αποδείξεις με υπερπεπερασμένη επαγωγή σε καλά θεμελιωμένες set-like σχέσεις. Πράγματι αν έχουμε δείξει ότι $[\forall y \in \mathbf{A}(y\mathbf{R}x \to \varphi(y))] \to \varphi(x)$, τότε ισχύει $\forall x \in \mathbf{A}\varphi(x)$, μιας και αν η κλάση $\{x \in \mathbf{A} : \neg\varphi(x)\}$ ήταν μη κενή θα είχε ένα $\mathbf{R}$-ελαχιστικό στοιχείο πράγμα που οδηγεί σε άτοπο.

Το θεώρημα που ακολουθεί μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε συναρτήσεις με αναδρομή σε καλά θεμελιωμένες set-like σχέσεις.

Θεώρημα 2.1.2 *(Υπερπεπερασμένη αναδρομή). Έστω* $\mathbf{R}$ *είναι καλά θεμελιωμένη και set-like στην κλάση* $\mathbf{A}$*. Αν* $\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *τότε υπάρχει μια μοναδική* $\mathbf{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ *τέτοια ώστε* $\forall x \in \mathbf{A}[\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \restriction pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))]$.

Απόδειξη.

Για την απόδειξη της μοναδικότητας θα χρησιμοποιήσουμε υπερπεπερασμένη επαγωγή στο x. Έστω $\mathbf{G}$ και $\mathbf{G}'$ που ικανοποιούν την υπόθεση και για κάθε $y \in \mathbf{A}$ με $y\mathbf{R}x$, $\mathbf{G}(y) = \mathbf{G}'(y)$. Επομένως $\mathbf{G} \restriction pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \mathbf{G}' \restriction pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ άρα $\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \restriction pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}' \restriction pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})) = \mathbf{G}'(x)$. Επομένως $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$.

Ένα υποσύνολο d της $\mathbf{A}$ καλείται κλειστό αν $\forall x \in d(pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subset d)$. Κάθε $x \in \mathbf{A}$ ανήκει σε κάποιο κλειστό σύνολο, συγκεκριμένα στο $\{x\} \cup cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$. Αν το d είναι κλειστό η g καλείται d-προσέγγιση αν είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το d και $\forall x \in d[g(x) =$

$\mathbf{F}(x, g \upharpoonright pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))]$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στην απόδειξη της μοναδικότητας προκύπτει ότι αν g είναι μια d-προσέγγιση και g' είναι μια d'-προσέγγιση τότε $g \upharpoonright (d \cap d') = g' \upharpoonright (d \cap d')$.

Έστω $x \in \mathbf{A}$. Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο x θα δείξουμε ότι υπάρχει μια $\{x\} \cup cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$-προσέγγιση. Έστω ότι υπάρχει μια $\{y\} \cup cl(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$-προσέγγιση, g_y, για κάθε $y \in \mathbf{A}$ με $y\mathbf{R}x$. Τότε η $h = \bigcup\{g_y : y\mathbf{R}x\}$ είναι μια $cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$-προσέγγιση και η $h \cup \{\langle x, \mathbf{F}(x, h)\rangle\}$ είναι μια $\{x\} \cup cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$-προσέγγιση. Ορίζουμε $\mathbf{G}(x)$ να είναι η τιμή $g(x)$ όπου g είναι μια d-προσέγγιση για κάποιο κλειστό d που περιέχει το x.

□

2.2 Η κλάση των καλά θεμελιωμένων συνόλων

Θα ορίσουμε στο ZF^- την κλάση των καλά θεμελιωμένων συνόλων WF και θα δείξουμε ότι το Αξίωμα της Θεμελίωσης επιβάλλει να περιορίσουμε το σύμπαν μας σε αυτή.

Ορισμός 2.2.1 *Για κάθε διατακτικό α ορίζεται αναδρομικά το σύνολο $V(\alpha)$ ως εξής:*

1. $V(0) = 0$.
2. $V(\alpha + 1) = \mathcal{P}(V(\alpha))$.
3. $V(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} V(\xi)$ *όταν ο α είναι οριακός διατακτικός.*

Πιο αυστηρά ορίζουμε μια $\mathbf{G} : \mathbf{ON} \to \mathbf{V}$ με υπερπεπερασμένη αναδρομή στην καλά θεμελιωμένη και set-like σχέση $\in$ και θέτουμε $V(\alpha) = \mathbf{G}(\alpha)$.

Ορισμός 2.2.2 $\mathbf{WF} = \bigcup\{V(\alpha) : \alpha \in \mathbf{ON}\}$.

Λήμμα 2.2.1 *Για καθε διατακτικό α:*

1. *το $V(\alpha)$ είναι μεταβατικό.*
2. $\forall\xi \leq \alpha\ (V(\xi) \subset V(\alpha))$

Απόδειξη.

Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο α. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $\beta < \alpha$ και δείχνουμε οτι ισχύει για το α.
Αν $\alpha = 0$ είναι τετριμμένο.
Αν $\alpha = \beta + 1$ έστω $x \in V(\beta)$. Επειδή το $V(\beta)$ είναι μεταβατικό $x \subset V(\beta)$ άρα $x \in V(\alpha) = \mathcal{P}(V(\beta))$. Επομένως $V(\beta) \subset V(\alpha)$ και άρα απο επαγωγική υπόθεση $\forall\xi \leq \alpha\ (V(\xi) \subset V(\alpha))$. Για να δειχθεί ότι το $V(\alpha)$ ειναι μεταβατικό έστω $x \in V(\alpha) = \mathcal{P}(V(\beta))$. Τότε $x \subset V(\beta) \subset V(\alpha)$.
Αν α είναι οριάκος διατακτικός το $V(\alpha)$ είναι μεταβατικό ως ένωση μεταβατικών συνόλων και,

εξ ορισμού του $V(\alpha)$, $\forall \xi \leq \alpha$ $(V(\xi) \subset V(\alpha))$. □

Μπόρουμε να ορίσουμε μια ιεραρχία στα καλά θεμελιωμένα σύνολα. Από τον ορισμό των $V(\alpha)$ για οριακούς διατακτικούς, για κάθε $x \in \mathbf{WF}$ ο ελάχιστος διατακτικός για τον οποίο $x \in V(\alpha)$ θα πρέπει να είναι επόμενος. Άρα δικαιολογείται ο ακόλουθος ορισμος.

Ορισμός 2.2.3 *Αν $x \in \mathbf{WF}$ ορίζουμε rank(x) να είναι ο ελάχιστος διατακτικός β τέτοιος ώστε $x \in V(\beta + 1)$.*

Λήμμα 2.2.2 *Για καθε διατακτικό α, $V(\alpha) = \{x \in \mathbf{WF} : rank(x) < \alpha\}$.*

Απόδειξη.

Για $x \in \mathbf{WF}$, $rank(x) < \alpha \Leftrightarrow \exists \beta < \alpha(x \in V(\beta + 1)) \Leftrightarrow x \in V(\alpha)$. □

Λήμμα 2.2.3 *Αν $y \in \mathbf{WF}$ τότε*

1. $\forall x \in y(x \in \mathbf{WF} \wedge rank(x) < rank(y))$
2. $rank(y) = sup\{rank(x) + 1 : x \in y\}$

Απόδειξη.

1. Έστω $\alpha = rank(y)$. Τότε $y \in V(\alpha + 1) = \mathcal{P}(V(\alpha))$ δηλαδή $y \subset V(\alpha)$. Άρα αν $x \in y$ τότε $x \in V(\alpha)$. Επομένως $x \in \mathbf{WF}$ και από το προηγούμενο λήμμα $rank(x) < \alpha$.
2. Έστω $\alpha = sup\{rank(x) + 1 : x \in y\}$. Από το 1., $\alpha \leq rank(y)$. Επιπλέον κάθε $x \in y$ έχει $rank(x) < \alpha$ άρα $y \subset V(\alpha)$. Επομένως $y \in V(\alpha + 1)$ άρα $rank(y) \leq \alpha$.

□

Λήμμα 2.2.4 *$\forall x(x \in \mathbf{WF} \Leftrightarrow x \subset \mathbf{WF})$.*

Απόδειξη.

Έστω $x \in \mathbf{WF}$. Θα υπάρχει διατακτικός α τετοιως ώστε $x \in V(\alpha)$ και, λόγω μεταβατικότητας του $V(\alpha)$, $x \subset V(\alpha) \subset \mathbf{WF}$.
Έστω $x \subset \mathbf{WF}$. Άρα $\forall y \in x$ $(y \in \mathbf{WF})$ και επομένως μπορούμε να ορίσουμε τον $\alpha = sup\{rank(y) + 1 : y \in x\}$. Τότε $x \subset V(\alpha)$ άρα $x \in V(\alpha) \subset \mathbf{WF}$. □

Η **WF** περιέχει τους διατακτικούς και είναι κλειστή ως προς όλες τις συνολοθεωρητικές κατασκευές που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά.

Λήμμα 2.2.5

1. *$\forall \alpha \in \mathbf{ON}(\alpha \in \mathbf{WF} \wedge rank(\alpha) = \alpha)$.*
2. *$\forall \alpha \in \mathbf{ON}(V(\alpha) \cap \mathbf{ON} = \alpha)$.*

Απόδειξη.

1. Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο α. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $\beta < \alpha$ και δείχνουμε οτι ισχύει για το α. Για $\beta < \alpha$ από επαγωγική υπόθεση $\beta \in V(\beta+1) \subset V(\alpha)$, άρα $\alpha \subset V(\alpha)$, άρα $\alpha \in V(\alpha+1)$. Επομένως $\alpha \in \mathbf{WF}$ και $rank(\alpha) = sup\{\beta + 1 : \beta < \alpha\} = \alpha$.

2. $\forall \alpha \in \mathbf{ON}[V(\alpha) \cap \mathbf{ON} = \{\beta \in \mathbf{ON} : rank(\beta) < \alpha\} = \{\beta \in \mathbf{ON} : \beta < \alpha\} = \alpha]$.

□

Λήμμα 2.2.6 *1. Αν $x \in \mathbf{WF}$ τότε τα σύνολα $\mathcal{P}(x)$, $\{x\}$ και $\bigcup x$ είναι καλά θεμελιωμένα.*

2. Αν $x, y \in \mathbf{WF}$ τότε τα σύνολα

(a) $x \cup y$

(b) $x \cap y$

(c) $\{x, y\}$

(d) $\langle x, y \rangle$

(e) $x \times y$

(f) ${}^y x$

είναι καλά θεμελιωμένα.

Απόδειξη.

1. Έστω $\alpha = rank(x)$. Τότε $x \subset V(\alpha)$ άρα $\mathcal{P}(x) \subset \mathcal{P}(V(\alpha)) = V(\alpha+1)$ άρα $\mathcal{P}(x) \in V(\alpha+2)$. Επίσης $x \in \mathcal{P}(x)$ άρα $\{x\} \subset \mathcal{P}(x) \subset V(\alpha+1)$ άρα $\{x\} \in V(\alpha+2)$. Τέλος $\forall y \in x(y \in V(\alpha))$ και λόγω μεταβατικότητας του V(α) $y \subset V(\alpha)$. Έστω $z \in \bigcup x$. Τότε $\exists y \in x$ τέτοιο ώστε $z \in y \subset V(\alpha)$. Άρα $\bigcup x \subset V(\alpha)$ άρα $\bigcup x \in V(\alpha+1)$.

2. Έστω $\alpha = max(rank(x), rank(y))$.

   (a) $x, y \subset V(\alpha) \Rightarrow x \cup y \subset V(\alpha) \Rightarrow x \cup y \in V(\alpha+1)$

   (b) $x, y \subset V(\alpha) \Rightarrow x \cap y \subset V(\alpha) \Rightarrow x \cap y \in V(\alpha+1)$

   (c) $\{x, y\} \subset \mathcal{P}(x \cup y) \subset V(\alpha+1) \Rightarrow \{x, y\} \in V(\alpha+2)$

   (d) $\langle x, y \rangle = \{x, \{x, y\}\}$. Χρησιμοποιώντας το (c) $\langle x, y \rangle \in V(\alpha+3)$.

   (e) Κάθε $z \in x \times y$ είναι της μορφής $z = \langle v, w \rangle$ όπου $v \in x$ και $w \in y$. $v, w \in V(\alpha)$ άρα από (d) $z \in V(\alpha+2)$. Επομένως $x \times y \subset V(\alpha+2) \Rightarrow x \times y \in V(\alpha+3)$.

   (f) Κάθε $z \in {}^y x$ είναι συνάρτηση από το y στο x, άρα κάθε στοιχείο του z είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $\langle v, w \rangle$ όπου $v \in y$ και $w \in x$. $\langle v, w \rangle \in V(\alpha+2) \Rightarrow z \subset V(\alpha+2) \Rightarrow z \in V(\alpha+3) \Rightarrow {}^y x \subset V(\alpha+3) \Rightarrow {}^y x \in V(\alpha+4)$.

□

Είναι εύκολο να δούμε από τον τρόπο που ορίζονται ότι τα σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ είναι καλά θεμελιωμένα. Επιπλέον μπορεί να δειχθεί ότι όλα τα μαθηματικά συμβαίνουν μέσα στη **WF**.

Τα επόμενα δύο λήμματα δείχνουν τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα καλά θεμελιωμένα σύνολα και τις καλά θεμελιωμένες σχέσεις.

Λήμμα 2.2.7 *Αν $A \in \mathbf{WF}$, η σχέση $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στο A.*

Απόδειξη.

Έστω X μη κενό υποσύνολο του A και $\alpha = min\{rank(y) : y \in X\}$. Επιλέγουμε ένα $y \in X$ με $rank(y) = \alpha$. Τότε από Λήμμα 2.2.3 το y είναι $\in$-ελαχιστικό στο X. □

Λήμμα 2.2.8 *Αν το A είναι μεταβατικό και η σχέση $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στο A, τότε $A \in \mathbf{WF}$.*

Απόδειξη.

Αρκεί να δείξω ότι $A \subset \mathbf{WF}$. Αν όχι τότε $X = A \setminus \mathbf{WF} \neq 0$ και έστω y να είναι $\in$-ελαχιστικό στο X. Για κάθε $z \in y$, $z \notin X$ αλλά $z \in A$ μιας και το A είναι μεταβατικό, άρα $z \in \mathbf{WF}$. Επομένως $y \subset \mathbf{WF}$ άρα $y \in \mathbf{WF}$ που είναι άτοπο. □

Ορισμός 2.2.4 *Έστω συνολο A. Ορίζουμε $\bigcup^0 A = A$ και για κάθε $n \neq 0$ φυσικό $\bigcup^{n+1} A = \bigcup(\bigcup^n A)$. Η μεταβατική κλειστότητα του A είναι το σύνολο $trcl(A) = \bigcup\{\bigcup^n A : n \in \omega\}$.*

Η μεταβατική κλειστότητα του A είναι το μικρότερο μεταβατικό σύνολο που περιέχει το A. Παρατηρούμε ότι $trcl(A) = cl(\mathbf{V}, A, \in)$.

Λήμμα 2.2.9

1. *$A \subset trcl(A)$.*
2. *Η μεταβατική κλειστότητα είναι μεταβατική.*
3. *Αν $A \subset T$ και το T είναι μεταβατικό τότε $trcl(A) \subset T$.*
4. *Αν A μεταβατικό τότε $trcl(A) = A$.*
5. *Αν $x \in A$ τότε $trcl(x) \subset trcl(A)$.*

Απόδειξη.

1. Εξ ορισμού της $trcl(A)$.
2. Έστω $x \in trcl(A)$. Τότε υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $x \in \bigcup^n A$. Άρα $x \subset \bigcup(\bigcup^n A) = \bigcup^{n+1} A$ άρα $x \subset trcl(A)$.

3. Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι $\bigcup^n A \subset T$ για κάθε $n \in \omega$ και άρα $trcl(A) \subset T$. Για $n = 0$ ίσχυει από υπόθεση. Έστω ότι $\bigcup^m A \subset T$. Επομένως $\forall x \in \bigcup^m A$ $(x \in T)$ και λόγω μεταβατικότητας του T $x \subset T$. Έστω $y \in \bigcup^{m+1} A = \bigcup(\bigcup^m A)$. Τότε $\exists x \in \bigcup^m A$ τέτοιο ώστε $y \in x \subset T$. Άρα $\bigcup^{m+1} A \subset T$.

4. Προκύπτει άμεσα από το 1. και το 3. θέτοντας $T = A$.

5. $x \in A \Rightarrow x \in trcl(A) \Rightarrow x \subset trcl(A)$ και από 3. $trcl(x) \subset trcl(A)$.

□

Θεώρημα 2.2.1 *Για κάθε σύνολο A τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. $A \in \mathbf{WF}$.

2. $trcl(A) \in \mathbf{WF}$.

3. *Η σχέση $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στην $trcl(A)$.*

Απόδειξη.

1. $\to$ 2.: Αν $A \in \mathbf{WF}$ τότε με επαγωγή στο n $\bigcup^n A \in \mathbf{WF}$ μιας και η **WF** είναι κλειστή στις ενώσεις. Επομένως για κάθε n $\bigcup^n A \subset \mathbf{WF}$ άρα $trcl(A) \subset \mathbf{WF}$ άρα $trcl(A) \in \mathbf{WF}$.
2. $\to$ 3.: Είναι το Λήμμα 2.2.7.
3. $\to$ 1.: Από 3. και επειδή η $trcl(A)$ είναι μεταβατική, $trcl(A) \in \mathbf{WF}$, άρα $A \subset trcl(A) \subset \mathbf{WF}$, άρα $A \in \mathbf{WF}$. □

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε ισοδύναμα την κλάση των καλά θεμελιωμένων συνόλων χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το αξίωμα του δυναμοσυνόλου ως την κλάση όλων των συνόλων A που η σχέση $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στην $trcl(A)$.

Τελειώνουμε αυτήν την ενότητα δείχνοντας ότι το να υιοθετήσουμε το αξίωμα της θεμελίωσης είναι ισοδύναμο με το να περιορίσουμε το σύμπαν μας στα καλά θεμελιωμένα σύνολα. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτός ο περιορισμός δεν έρχεται σε αντίθεση με τα άλλα αξιώματα ούτε έχει κάποια επίπτωση στα μαθηματικά που γνωρίζουμε. Αυτό το οποίο κάνει όμως είναι να αποκλείει ορισμένες παθογένειες μιας και αποκλείει την αυτοαναφορά. Για παράδειγμα δεν υπάρχει καλά θεμελιωμένο σύνολο A τέτοιο ώστε $A \in A$.

Θεώρημα 2.2.2 *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Το Αξίωμα της Θεμελίωσης.*

2. *Για κάθε σύνολο A η σχέση $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στο A.*

3. $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$

Απόδειξη.

Το 1. $\leftrightarrow$ 2. προκύπτει απευθείας από τον ορισμό της καλά θεμελιωμένης σχέσης. Για το 2. $\to$ 3., από το 2. συνεπάγεται ότι για κάθε σύνολο A η $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στο $trcl(A)$, άρα $A \in \mathbf{WF}$, άρα $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$. Τέλος για το 3. $\to$ 2. εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.2.7. □

Κεφάλαιο 3

Απόλυτες Έννοιες

3.1 Μοντέλα

Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε τη συνέπεια κάποιοων συνόλων προτάσεων πρέπει να εισάγουμε την έννοια του μοντέλου. Καταρχάς πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να εκφράζουμε κάθε τύπο ανάλογα με τη δομή που χρησιμοποιούμε. Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε σε μία κλάση $\mathbf{M}$ όταν πιο αυστηρά θα έπρεπε να αναφερθούμε σε μια δομή $\mathfrak{M} = \langle \mathbf{M}, \in \rangle$.

Ορισμός 3.1.1 *Έστω $\mathbf{M}$ μια κλάση. Για κάθε τύπο φ ορίζουμε με επαγωγή στο μήκος του τη σχετικοποίησή του στην $\mathbf{M}$, $\varphi^{\mathbf{M}}$ με βάση τους παρακάτω κανόνες:*

1. $(x = y)^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow x = y$
2. $(x \in y)^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow x \in y$
3. $(\varphi \wedge \psi)^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow \varphi^{\mathbf{M}} \wedge \psi^{\mathbf{M}}$
4. $(\neg\varphi)^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow \neg(\varphi^{\mathbf{M}})$
5. $(\exists x\ \varphi)^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow \exists x(x \in \mathbf{M} \wedge \varphi^{\mathbf{M}})$

Η έννοια της σχετικοποίησης δεν αφορά μόνο τη θεωρία συνόλων αλλά είναι μια πολύ γενικότερη έννοια της λογικής.

Ορισμός 3.1.2 *Έστω $\mathbf{M}$ μια κλάση και T ένα σύνολο αξιωμάτων. Για μια πρόταση φ, «η φ είναι αληθής στην $\mathbf{M}$» σημαίνει ότι $T \vdash \varphi^{\mathbf{M}}$. Για ένα σύνολο προτάσεων S, «η $\mathbf{M}$ ικανοποιεί το S» ή «η $\mathbf{M}$ είναι ένα μοντέλο του S» σημαίνει ότι κάθε πρόταση του S είναι αληθής στην $\mathbf{M}$.*

Ο παραπάνω ορισμός προϋποθέτει την ύπαρξη ένος συνόλου αξιωμάτων T για να μπορέσουμε να αποδείξουμε μια πρόταση. Συμβολίζουμε $\mathbf{M} \models S$ για να πούμε ότι η $\mathbf{M}$ είναι ένα μοντέλο του S.

Το παράκατω λήμμα είναι ένα άμεσο πόρισμα του εύκολου σκέλους του θεωρήματος πληρότητας του Godel. Θα μας φανεί πολύ χρήσιμο για να μπορέσουμε να αποδείξουμε τη συνέπεια ενός συνόλο προτάσεων δεδομένης της συνέπειας ενός άλλου.

Λήμμα 3.1.1 *Έστω S και T δύο σύνολα προτάσεων και έστω ότι για κάποια κλάση $\mathbf{M}$ μπορούμε να αποδείξουμε από το T ότι $\mathbf{M} \neq 0$ και ότι η $\mathbf{M}$ είναι ένα μοντέλο του S. Τότε $Con(T) \to Con(S)$.*

Απόδειξη.

Αν το S είναι ασυνεπές τότε μπορούμε να αποδείξουμε από το S μια αντίφαση $\varphi \wedge \neg\varphi$. Επιπλέον υποθέτοντας το T μπορουμε να δείξουμε ότι το S είναι αληθές στην $\mathbf{M}$, άρα $\varphi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\varphi^{\mathbf{M}}$ το οποίο είναι αντιφατικό. Άρα το T είναι ασυνεπές. □

3.2 Απόλυτες Έννοιες

Είναι σημαντικό για την ανάλυσή μας να εντοπίσουμε κάποιες έννοιες που το νόημα τους δεν εξαρτάται από το μοντέλο το οποίο χρησιμοποιούμε.

Ορισμός 3.2.1 *Έστω $\varphi(x_1, ..., x_n)$ ένας τύπος και $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ μοντέλα ενός συνόλου αξιωμάτων S.*

1. *Αν $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$, ο φ είναι απόλυτος για τις κλάσεις $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$ αν*

$$S \vdash \forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{M} \ (\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n)).$$

2. *Ο φ είναι απόλυτος για την $\mathbf{M}$ αν είναι απόλυτος για τις $\mathbf{M}$, $\mathbf{V}$ δηλαδή αν*

$$S \vdash \forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{M} \ (\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, ..., x_n)).$$

Παρατηρούμε ότι αν ο φ είναι απόλυτος για την $\mathbf{M}$ και απόλυτος για την $\mathbf{N}$ και $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$, τότε ο φ είναι απόλυτος για τις $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$.

Το αν ένας τύπος είναι απόλυτος εξαρτάται από το νόημα του και όχι από τον τρόπο με τον οποίο έχει γραφεί, όπως φαίνεται και από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.2.1 *Αν $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ και οι $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$ είναι και οι δύο μοντέλα για ένα σύνολο προτάσεων S τέτοιο ώστε $S \vdash \forall x_1, ..., x_n(\varphi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, ..., x_n))$, τότε ο φ είναι απόλυτος για τις $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$ ανν είναι ο ψ.*

Απόδειξη.

Επειδή η $\mathbf{M}$ είναι μοντέλο για το S και $S \vdash \forall x_1, ..., x_n(\varphi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, ..., x_n))$ συνεπάγεται ότι $[\forall x_1, ..., x_n(\varphi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, ..., x_n))]^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow \forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{M}(\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{M}}(x_1, ..., x_n))$. Ομοίως $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{N}(\varphi^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n))$ και επειδή $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ ισχύει το ασθενέστερο $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{M}(\varphi^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n))$. Επόμένως $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{M}\ (\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n)) \Leftrightarrow \forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{M}\ (\psi^{\mathbf{M}}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n))$. $\square$

Πολλές από τις έννοιες που θα ελέγξουμε αν είναι απόλυτες θα είναι συναρτήσεις με το νόημα που έχει αυτή η λέξη στη μεταγλώσσα. Τέτοιες θα είναι για παράδειγμα η $\bigcup x$ ή η $dom(x)$.

Ορισμός 3.2.2 *Έστω $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ και $\varphi(x_1, ..., x_n, y)$ είναι ένας τύπος για τον οποίο η πρόταση $\forall x_1, ..., x_n \exists! y \varphi(x_1, ..., x_n, y)$ είναι αληθής και στη $\mathbf{M}$ και στη $\mathbf{N}$. Αν $\mathbf{F}(x_1, ..., x_n)$ έχει οριστεί να είναι το μοναδικό y τέτοιο ώστε $\varphi(x_1, ..., x_n, y)$ θα λέμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{F}$ είναι απόλυτη για τις $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$ αν είναι η απόλυτη η φ.*

Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε μεθόδους για να δείξουμε ότι αρκετές έννοιες είναι απόλυτες για πολλά από τα μοντέλα που θα χρησιμοποιήσουμε.

Λήμμα 3.2.2 *Αν $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ και οι φ, ψ είναι απόλυτοι για τις $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ τότε το ίδιο είναι και οι $\neg\varphi$ και $\varphi \wedge \psi$.*

Απόδειξη.

Έστω $x_1, ..., x_n$ οι ελέυθερες μεταβλητές του φ και $y_1, ..., y_m$ οι ελέυθερες μεταβλητές του ψ.
Ο φ είναι απόλυτος για τις $\mathbf{M}$, $\mathbf{N} \Leftrightarrow [\forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{M}\ (\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n))] \Leftrightarrow [\forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{M}\ (\neg(\varphi^{\mathbf{M}})(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \neg(\varphi^{\mathbf{N}})(x_1, ..., x_n))] \Leftrightarrow [\forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{M}\ ((\neg\varphi)^{\mathbf{M}}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow (\neg\varphi)^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n))] \Leftrightarrow$ ο $\neg\varphi$ είναι απόλυτος για τις $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$.
Οι φ και ψ είναι απόλυτοι για τις $\mathbf{M}$, $\mathbf{N} \Leftrightarrow [(\forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{M}\ (\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n))) \wedge (\forall y_1, ..., y_m \in \mathbf{M}\ (\psi^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{N}}(y_1, ..., y_m)))] \Rightarrow [\forall x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in \mathbf{M}\ (\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, ..., x_n) \wedge \psi^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}(x_1, ..., x_n) \wedge \psi^{\mathbf{N}}(y_1, ..., y_m))] \Leftrightarrow [\forall x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in \mathbf{M}\ ((\varphi(x_1, ..., x_n) \wedge \psi(y_1, ..., y_m))^{\mathbf{M}} \leftrightarrow (\varphi(x_1, ..., x_n) \wedge \psi(y_1, ..., y_m))^{\mathbf{N}}] \Leftrightarrow$ ο $\varphi \wedge \psi$ είναι απόλυτος για τις $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$. $\square$

Πόρισμα 3.2.1 *Αν ένας τύπος δεν έχει ποσοδείκτες τότε είναι απόλυτος για οποιαδήποτε κλάση.*

Απόδειξη.

Οι τύποι $x = y$ και $x \in y$ είναι απόλυτοι για κάθε κλάση και κάθε τύπος χωρίς ποσοδείκτες, επειδή κατασκευάζεται από τέτοιους τύπους χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους $\neg$ και $\wedge$, είναι απόλυτος για οποιαδήποτε κλάση. $\square$

Το παρακάτω λήμμα θα μας βοηθήσει να αντιμετωπίσουμε έννοιες που ορίζονται με χρήση ποσοδεικτών.

Λήμμα 3.2.3 *Αν οι κλάσεις $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$ είναι μεταβατικές, $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ και ο φ είναι απόλυτος για τις $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ τότε το ίδιο είναι και ο $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$.*

Απόδειξη.

Γράφουμε τον φ στη μορφή $\varphi(x, y, z_1, ..., z_n)$ έτσι ώστε στη λίστα $x, y, z_1, ..., z_n$ να περιλαμβάνονται όλες οι ελέυθερες μεταβλητές του φ. Τότε στη λίστα $y, z_1, ..., z_n$ περιλαμβάνονται όλες οι ελέυθερες μεταβλητές του $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ γιατί η μεταβλητή x είναι δεσμευμένη. Επομένως για κάθε $y, z_1, ..., z_n \in \mathbf{M}$, $[\exists x(x \in y \wedge \varphi(y, z_1, ..., z_n)]^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{M}(x \in y \wedge \varphi^{\mathbf{M}}(y, z_1, ..., z_n))$. Επειδή η $\mathbf{M}$ είναι μεταβατική και $y \in \mathbf{M}$, $x \in y \to x \in \mathbf{M}$, άρα η προηγούμενη πρόταση γράφεται ισοδύναμα $\exists x(x \in y \wedge \varphi^{\mathbf{M}}(y, z_1, ..., z_n)$ η οποία λόγω της απολυτότητας του φ είναι ισοδύναμη με την $\exists x(x \in y \wedge \varphi^{\mathbf{N}}(y, z_1, ..., z_n)$ που χρησιμοποιώντας κατά τον ίδιο τρόπο τη μεταβατικότητα της $\mathbf{N}$ αποδεικνύεται ισοδύναμη με την $[\exists x(x \in y \wedge \varphi(y, z_1, ..., z_n)]^{\mathbf{N}}$. Επομένως ο $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ είναι απόλυτος για τις $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$. □

Ορισμός 3.2.3 *Οι Δ_0 τύποι είναι αυτοί που κατασκευάζονται επαγωγικά με βάση τους παρακάτω κανόνες:*

1. *Οι $x = y$ και $x \in y$ είναι Δ_0.*
2. *Αν οι φ, ψ είναι Δ_0 τότε το ίδιο είναι και οι $\neg\varphi$ και $\varphi \wedge \psi$.*
3. *Αν ο φ είναι Δ_0 τότε το ίδιο είναι και ο $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$.*

Ουσιαστικά οι Δ_0 τύποι είναι αυτοί στους οποίους κάθε ποσοδείκτης είναι φραγμένος δηλαδή είναι της μορφής $\exists x \in y$ όπου y σύνολο.

Πόρισμα 3.2.2 *Αν η $\mathbf{M}$ είναι μεταβατική και ο φ είναι Δ_0, τότε ο φ είναι απόλυτος για την $\mathbf{M}$.*

Θεώρημα 3.2.1 *Οι παρακάτω έννοιες έχουν οριστεί στο $ZF^- - P - Inf$ απο τύπους που αποδεικνύονται ισοδύναμοι στο $ZF^- - P - Inf$ με Δ_0 τύπους. Επομένως είναι απόλυτες για κάθε μεταβατική κλάση $\mathbf{M}$ που είναι μοντέλο του $ZF^- - P - Inf$.*

1. $x \subset y$
2. $\{x, y\}$
3. $\{x\}$
4. $\langle x, y \rangle$
5. 0
6. $x \cup y$
7. $x \cap y$
8. $x \setminus y$

9. $S(x)$ *δηλαδή* $x \cup \{x\}$

10. $\bigcup x$

11. $\bigcap x$ *όπου ορίζουμε* $\bigcap 0 = 0$

12. *το* x *είναι μεταβατικό*

13. n, *όπου* n *οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός*

Απόδειξη.

1. $x \subset y \leftrightarrow [\neg \exists z \in x(\neg(z \in y))]$ που είναι Δ_0.

2. $z = \{x, y\} \leftrightarrow [x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \in z(w = x \vee w = y)]$ που είναι ισοδύναμος με Δ_0.

3. $z = \{x\} \leftrightarrow [x \in z \wedge \forall w \in z(w = x)]$

4. $z = \langle x, y\rangle \leftrightarrow [\exists w \in z(w = \{x\}) \wedge \exists w \in z(w = \{x, y\}) \wedge \forall w \in z(w = \{x\} \vee w = \{x, y\})]$ που είναι ισοδύναμος με Δ_0 αν αντικαταστήσουμε τα $w = \{x\}$ και $w = \{x, y\}$ με τους αντίστοιχους Δ_0 τύπους με τους οποίους είναι ισοδύναμοι.

5. $z = 0 \leftrightarrow [\forall w \in z(w \neq w)]$

6. $z = x \cup y \leftrightarrow [\forall w \in z(w \in x \vee w \in y) \wedge x \subset z \wedge y \subset z]$

7. $z = x \cap y \leftrightarrow [\forall w \in x(w \in y \rightarrow w \in z) \wedge z \subset x \wedge z \subset y]$

8. $z = x \setminus y \leftrightarrow [\forall w \in x(w \in z \leftrightarrow w \notin y) \wedge z \subset x]$

9. $z = S(x) \leftrightarrow [x \in z \wedge x \subset z \wedge \forall w \in z(w = x \vee w \in y)]$

10. $z = \bigcup x \leftrightarrow [\forall w \in x(w \subset z) \wedge \forall y \in z \exists w \in x(y \in w)]$

11. $z = \bigcap x \leftrightarrow [\forall w \in x(z \subset w) \wedge \forall v \in x \forall y \in v((\forall w \in x\ y \in w) \rightarrow y \in z) \wedge (x = 0 \rightarrow z = 0)]$

12. το x είναι μεταβατικό $\leftrightarrow [\forall w \in x \forall z \in w(z \in x)]$

13. Με επαγωγή στο n. Για $n = 0$ το έχουμε δείξει. Έστω ότι η $z = n$ είναι ισοδύναμη με ένα Δ_0 τύπο. Τότε η $z = n + 1 \leftrightarrow \exists x \in z(x = n \wedge z = S(x))$ είναι ισοδύναμη με Δ_0 τύπο μιας και έχουμε δείξει ότι και η $S(x)$ είναι ισοδύναμη με Δ_0.

□

Λήμμα 3.2.4 *Οι απόλυτες έννοιες είναι κλειστές στη σύνθεση, δηλαδή αν* $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ *και* $\varphi(x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{F}(x_1, ..., x_n)$ *και* $\mathbf{G_i}(y_1, ..., y_m)(i = 1, ..., n)$ *είναι όλες απόλυτες για τις* $\mathbf{M}$ *και* $\mathbf{N}$ *το ίδιο είναι και ο τύπος* $\varphi(\mathbf{G_1}(y_1, ..., y_m), ..., \mathbf{G_n}(y_1, ..., y_m))$ *και η συνάρτηση*

$$\mathbf{F}(\mathbf{G_1}(y_1, ..., y_m), ..., \mathbf{G_n}(y_1, ..., y_m)).$$

Απόδειξη.

Έστω $\psi_i(y_1, ..., y_m, z)(i = 1, ..., n)$ οι τύποι με βάση τους οποίους ορίζονται οι $\mathbf{G_i}$.

$\varphi(\mathbf{G_1}(y_1, ..., y_m), ..., \mathbf{G_n}(y_1, ..., y_m)) \leftrightarrow \exists z_1, ..., z_n[\psi_1(y_1, ..., y_m, z_1)\wedge...\wedge\psi_n(y_1, ..., y_m, z_n)\wedge\varphi(z_1, ..., z_n)]$.

Άρα για κάθε $y_1, ..., y_m \in \mathbf{M}$,

$$[\varphi(\mathbf{G_1}(y_1, ..., y_m), ..., \mathbf{G_n}(y_1, ..., y_m))]^{\mathbf{M}} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists z_1, ..., z_n \in \mathbf{M}[\psi_1^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m, z_1) \wedge ... \wedge \psi_n^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m, z_n) \wedge \varphi^{\mathbf{M}}(z_1, ..., z_n)] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \varphi^{\mathbf{M}}({\mathbf{G_1}}^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m), ..., {\mathbf{G_n}}^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m)).$$

Επειδή όμως οι $\mathbf{G_i}$ είναι απόλυτες για τις $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$ δηλαδή ${\mathbf{G_i}}^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m) = {\mathbf{G_i}}^{\mathbf{N}}(y_1, ..., y_m)$ και η φ είναι επίσης απόλυτη για τις $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$, $\varphi^{\mathbf{M}}({\mathbf{G_1}}^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m), ..., {\mathbf{G_n}}^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m)) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}({\mathbf{G_1}}^{\mathbf{N}}(y_1, ..., y_m), ..., {\mathbf{G_n}}^{\mathbf{N}}(y_1, ..., y_m)) \leftrightarrow [\varphi(\mathbf{G_1}(y_1, ..., y_m), ..., \mathbf{G_n}(y_1, ..., y_m))]^{\mathbf{N}}$. Ομοίως

$$[\mathbf{F}(\mathbf{G_1}(y_1, ..., y_m), ..., \mathbf{G_n}(y_1, ..., y_m))]^{\mathbf{M}} = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}({\mathbf{G_1}}^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m), ..., {\mathbf{G_n}}^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_m)) =$$

$$= \mathbf{F}^{\mathbf{N}}({\mathbf{G_1}}^{\mathbf{N}}(y_1, ..., y_m), ..., {\mathbf{G_n}}^{\mathbf{N}}(y_1, ..., y_m)) = [\mathbf{F}(\mathbf{G_1}(y_1, ..., y_m), ..., \mathbf{G_n}(y_1, ..., y_m))]^{\mathbf{N}}.$$

□

Θεώρημα 3.2.2 *Οι παρακάτω έννοιες είναι απόλυτες για κάθε μεταβατική κλάση* $\mathbf{M}$ *που είναι μοντέλο του* $ZF^- - P - Inf$.

1. *το* z *είναι διατεταγμένο ζεύγος*
2. $A \times B$
3. *η* R *είναι διμελής σχέση*
4. *η* $\langle A, R\rangle$ *είναι ολική διάταξη*
5. $dom(R)$
6. $ran(R)$
7. *η* f *είναι συνάρτηση*
8. $f(x)$
9. *η* f *είναι 1-1 συνάρτηση*

Απόδειξη.

1. το z είναι διατεταγμένο ζεύγος $\leftrightarrow [\exists x \in \bigcup z\, \exists y \in \bigcup z\, (z = \langle x, y\rangle)] \leftrightarrow \varphi(G_1(z), G_2(z), G_3(z))$ όπου $G_1(z) = G_2(z) = \bigcup z$, $G_3(z) = z$ και $\varphi(a, b, c)$ είναι $\exists x \in a\ \exists y \in b\ (z = \langle x, y\rangle)$. Οι $G_1(z)$, $G_2(z)$ και $G_3(z)$ είναι απόλυτες όπως και ο $\varphi(a, b, c)$ μιας και ο προτασιακός τύπος $z = \langle x, y\rangle$ είναι απόλυτος και οι ποσοδείκτες του φ είναι φραγμένοι. Άρα απο Λήμμα ο $\varphi(G_1(z), G_2(z), G_3(z))$ είναι απόλυτος.

2. $C = A \times B \leftrightarrow [(\forall x \in A \forall y \in B(\langle x, y\rangle \in C)) \wedge (\forall z \in C \exists x \in A \exists y \in B(z = \langle x, y\rangle))]$

3. η R είναι διμελής σχέση $\leftrightarrow [\forall z \in R($το z είναι διατεταγμένο ζεύγος$)]$

4. η $\langle A, R\rangle$ είναι ολική διάταξη $\leftrightarrow [(\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)) \wedge (\forall x, y \in A(x = y \vee xRy \vee yRx)) \wedge (\forall x \in A(\neg(xRx)))]$

5. $A = dom(R) \leftrightarrow [(\forall x \in A \exists y \in \bigcup\bigcup R(\langle x, y\rangle \in R)) \wedge (\forall x \in \bigcup\bigcup R \forall y \in \bigcup\bigcup R(\langle x, y\rangle \in R \to x \in A))]$

6. $A = ran(R) \leftrightarrow [(\forall y \in A \exists x \in \bigcup\bigcup R(\langle x, y\rangle \in R)) \wedge (\forall x \in \bigcup\bigcup R \forall y \in \bigcup\bigcup R(\langle x, y\rangle \in R \to y \in A))]$

7. η f είναι συνάρτηση $\leftrightarrow$ [η f είναι διμελής σχέση $\wedge(\forall x \in \bigcup\bigcup f \forall y \in \bigcup\bigcup f \forall y' \in \bigcup\bigcup f((\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, y'\rangle \in f) \to y = y'))]$

8. $y = f(x) \leftrightarrow [(\varphi(x) \wedge \langle x, y\rangle \in f) \vee (\neg\varphi(x) \wedge y = 0)]$ όπου $\varphi(x)$ είναι $\exists v \in \bigcup\bigcup f(\langle x, v\rangle \in f \wedge \forall w \in \bigcup\bigcup f(\langle x, w\rangle \in f \to v = w))$

9. η f είναι 1-1 συνάρτηση $\leftrightarrow$ [η f είναι συνάρτηση $\wedge(\forall x \in dom(f) \forall x' \in dom(f)(f(x) = f(x') \to x = x'))]$

□

Λήμμα 3.2.5 *Έστω* $\mathbf{M}$ *μεταβατικό μοντέλο του* $ZF^- - P - Inf$. *Αν* $\omega \in \mathbf{M}$ *τότε το Αξίωμα του Απείρου είναι αληθές στην* $\mathbf{M}$.

Απόδειξη.

Επειδή το 0 και η $S(x)$ είναι απόλυτες έννοιες η σχετικοποίηση του Αξιώματος του Απείρου στη $\mathbf{M}$ είναι ισοδύναμη με $\exists x \in \mathbf{M}(0 \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))$ που ικανοποιείται για $x = \omega$. □

Περισσότερες έννοιες είναι απόλυτες για μοντέλα που ικανοποιούν το αξίωμα της θεμελίωσης.

Λήμμα 3.2.6 *Το σύνολο* A *είναι διατακτικός ανν είναι μεταβατικό και η* $\in$ *είναι ολική διάταξη στο* A.

Απόδειξη.

Για να δείξουμε ότι η $\in$ είναι καλή διάταξη στο A, έστω X μη κενό υποσύνολο του A και εφαρμόζουμε το Αξίωμα της Θεμελίωσης στο X για να παράξουμε ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο του X. □

Θεώρημα 3.2.3 *Οι παρακάτω έννοιες έχουν οριστεί στο $ZF-P$ απο τύπους που αποδεικνύονται ισοδύναμοι στο $ZF-P$ με Δ_0 τύπους. Επομένως είναι απόλυτες για κάθε μεταβατική κλάση* $\mathbf{M}$ *που είναι μοντέλο του $ZF-P$.*

1. *ο x είναι διατακτικός*
2. *ο x είναι οριακός διατακτικός*
3. *ο x είναι επόμενος διατακτικός*
4. *ο x είναι πεπερασμένος διατακτικός*
5. *ω*

Απόδειξη.

1. Στο $ZF-P$ ο x είναι διατακτικός ανν είναι μεταβατικός και η $\langle x, \in\rangle$ είναι ολική διάταξη το οποίο είναι ισοδύναμο στο $ZF-P$ με το [ο x είναι μεταβατικός $\wedge \forall y \in x \forall z \in x(y \in z \vee y = z \vee z \in y)$] που είναι ισοδύναμο με Δ_0.
2. Ο x είναι οριακός διατακτικός $\leftrightarrow$ [ο x είναι διατακτικός $\wedge(\forall y \in x \exists z \in x(y \in z)) \wedge (x \neq 0)$]
3. Ο x είναι επόμενος διατακτικός $\leftrightarrow$ [ο x είναι διατακτικός $\wedge$ ο x δεν είναι οριακός διατακτικός $\wedge(x \neq 0)$]
4. Ο x είναι πεπερασμένος διατακτικός $\leftrightarrow$ [ο x είναι διατακτικός $\wedge$ ο x δεν είναι οριακός διατακτικός $\wedge \forall y \in x$(ο y δεν είναι οριακός διατακτικός)]
5. $x = \omega \leftrightarrow$ [ο x είναι οριακός διατακτικός $\wedge \forall y \in x$(ο y δεν είναι οριακός διατακτικός)]

□

Λήμμα 3.2.7 *Αν* $\mathbf{M}$ *είναι μεταβατικό μοντέλο για το $ZF-P$ τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο της* $\mathbf{M}$ *ανήκει στη* $\mathbf{M}$.

Απόδειξη.

Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι $\forall x \subset \mathbf{M}(|x| = n \to x \in \mathbf{M})$. Για $n = 0$ είναι προφανές γιατί το 0 είναι απόλυτο. Έστω ότι ισχύει για n και το $x \subset \mathbf{M}$ έχει $n+1$ στοιχεία. Επιλέγουμε $y \in x$ που επειδή η $\mathbf{M}$ είναι μεταβατική $y \in \mathbf{M}$. Τότε $x \setminus \{y\} \in \mathbf{M}$ και $x = \{y\} \cup (x \setminus \{y\}) \in \mathbf{M}$ μιας και η ένωση, η $\{y\}$ και η $\setminus$ είναι απόλυτες. □

Θεώρημα 3.2.4 *Τα παρακάτω είναι απόλυτα για κάθε μεταβατική κλάση* $\mathbf{M}$ *που είναι μοντέλο του* $ZF - P$.

1. *το* x *είναι πεπερασμένο*

2. A^n

Απόδειξη.

1. Το x είναι πεπερασμένο ανν $\exists f \varphi(x, f)$ όπου $\varphi(x, f) \leftrightarrow$ [η f είναι 1-1 συνάρτηση $\wedge dom(f) = x \wedge ran(f) \in \omega$]. Ο $\varphi(x, f)$ είναι απόλυτος για την $\mathbf{M}$ άρα αρκεί να δείξουμε ότι για $x \in \mathbf{M}$, $\exists f \varphi(x, f) \leftrightarrow \exists f \in \mathbf{M} \varphi(x, f)$. Η συνεπαγωγή από τα δεξιά προς τα αριστερά είναι προφανής. Για το αντίστροφο θα δείξουμε ότι $\varphi(x, f) \rightarrow f \in \mathbf{M}$. Παρατηρούμε ότι ο $\varphi(x, f)$ συνεπάγεται ότι η f είναι ένα πεπερασμένο σύνολο διατεταγμένων ζευγών της μορφής $\langle y, \alpha \rangle$ όπου $y \in x$ και $\alpha < ran(f) < \omega$. Επομένως, λόγω μεταβατικότητας της $\mathbf{M}$, $y \in \mathbf{M}$ και, επειδή οι πεπερασμένοι διατακτικοί είναι απόλυτοι για μεταβατικά μοντέλα του $ZF - P$, $\alpha \in \mathbf{M}$. Άρα $\langle y, \alpha \rangle \in \mathbf{M}$ μιας και τα διατεταγμένα ζεύγη είναι απόλυτα, άρα $f \in \mathbf{M}$ από το προηγούμενο λήμμα.

2. Θεωρούμε το A^n ως μια απεικόνιση δυο μεταβλητών $F(A, n)$, όπου $F(A, n) = 0$ αν $x \notin \omega$. Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι για $A, x \in \mathbf{M}$, $F(A, x) = F^{\mathbf{M}}(A, x)$. Επειδή το ω είναι απόλυτο $F^{\mathbf{M}}(A, x) = 0$ αν $x \notin \omega$. Αν $n \in \omega$, $F^{\mathbf{M}}(A, x) = \{f \in \mathbf{M} : \varphi^{\mathbf{M}}(f, n, A)\}$ όπου $\varphi(f, n, A) \leftrightarrow$ [η f είναι συνάρτηση $\wedge dom(f) = n \wedge ran(f) \subset A$]. Ο φ είναι απόλυτος για την $\mathbf{M}$ άρα $F^{\mathbf{M}}(A, x) = \{f \in \mathbf{M} : \varphi(f, n, A)\}$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi(f, n, A) \rightarrow f \in \mathbf{M}$. Παρατηρούμε ότι ο $\varphi(f, n, A)$ συνεπάγεται ότι η f είναι ένα πεπερασμένο σύνολο διατεταγμένων ζευγών της μορφής $\langle \alpha, y \rangle$ όπου $y \in A$ και $\alpha < n < \omega$. Επομένως, λόγω μεταβατικότητας της $\mathbf{M}$, $y \in \mathbf{M}$ και, επειδή οι πεπερασμένοι διατακτικοί είναι απόλυτοι για μεταβατικά μοντέλα του $ZF - P$, $\alpha \in \mathbf{M}$. Άρα $\langle \alpha, y \rangle \in \mathbf{M}$ μιας και τα διατεταγμένα ζεύγη είναι απόλυτα, άρα $f \in \mathbf{M}$ από το προηγούμενο λήμμα.

□

Θεώρημα 3.2.5 *Η σχέση «η* $\langle A, R \rangle$ *είναι καλή διάταξη» είναι απόλυτη για κάθε μεταβατική κλάση* $\mathbf{M}$ *που είναι μοντέλο του* $ZF - P$.

Απόδειξη.

Πρέπει να δείξουμε ότι (η $\langle A, R \rangle$ είναι καλή διάταξη) $\leftrightarrow$ (η $\langle A, R \rangle$ είναι καλή διάταξη)$^{\mathbf{M}}$.
Για να δείξουμε το ευθύ αρχικά παρατηρούμε ότι (η $\langle A, R \rangle$ είναι ολική διάταξη)$^{\mathbf{M}}$ μιας και η σχέση «η $\langle A, R \rangle$ είναι ολική διάταξη» είναι απόλυτη. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $(\forall X \varphi(X, A, R))^{\mathbf{M}}$ όπου $\varphi(X, A, R) \leftrightarrow [X \subset A \wedge X \neq 0 \rightarrow \exists y \in X \forall z \in X (\langle z, y \rangle \notin R)]$. Ο φ είναι απόλυτος για την $\mathbf{M}$, άρα αρκεί να δείξουμε $\forall X \in \mathbf{M} \varphi(X, A, R)$, το οποίο ισχύει καθώς $\forall X \varphi(X, A, R)$.
Για να δείξουμε το αντίστροφο χρησιμοποιούμε το θεώρημα του $ZF - P$ που λέει ότι η $\langle A, R \rangle$

είναι καλή διάταξη ανν $\exists\alpha \in \mathbf{ON}(\langle A, R\rangle \cong \langle\alpha, <\rangle)$. Επομένως αν (η $\langle A, R\rangle$ είναι καλή διάταξη)$^{\mathbf{M}}$ τότε $\exists f, \alpha \in \mathbf{M}\varphi^{\mathbf{M}}(f, \alpha, A, R)$ όπου $\varphi(f, \alpha, A, R) \leftrightarrow [(\alpha \in \mathbf{ON}) \wedge$ (η f είναι 1-1 συνάρτηση) $\wedge (dom(f) = A) \wedge (ran(f) = \alpha) \wedge (\forall x, y \in A(xRy \leftrightarrow f(x) < f(y)))]$. Ο φ είναι απόλυτος για την $\mathbf{M}$, άρα $\exists f, \alpha \in \mathbf{M}\varphi(f, \alpha, A, R)$. Επομένως $\exists f, \alpha\ \varphi(f, \alpha, A, R)$ άρα η $\langle A, R\rangle$ είναι καλή διάταξη. □

3.3 Συναρτήσεις που ορίζονται αναδρομικά

Θεώρημα 3.3.1 *Έστω $\mathbf{R}$ είναι καλά θεμελιωμένη και set-like στην κλάση $\mathbf{A}$, $\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $\mathbf{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ τέτοια ώστε $\forall x \in \mathbf{A}[\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \restriction pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))]$ και $\mathbf{M}$ μεταβατικό μοντέλο του $ZF - P$. Αν οι $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}$ και $\mathbf{F}$ είναι απόλυτες για την $\mathbf{M}$, (η $\mathbf{R}$ είναι set-like στην $\mathbf{A}$)$^{\mathbf{M}}$ και $\forall x \in \mathbf{M}(pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subset \mathbf{M})$ τότε η $\mathbf{G}$ είναι απόλυτη για την $\mathbf{M}$.*

Απόδειξη.

Καταρχάς παρατηρούμε ότι (η $\mathbf{R}$ είναι καλά θεμελιωμένη στην $\mathbf{A}$)$^{\mathbf{M}}$. Πράγματι έστω X μη κενό υποσύνολο της $\mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M} \subset \mathbf{A}$. Τότε από υπόθεση $\exists y \in X(\neg\exists z \in X(z\mathbf{R}y))$. Επομένως επειδή $\mathbf{R}^{\mathbf{M}} = \mathbf{R} \cap (\mathbf{M} \times \mathbf{M}) \subset \mathbf{R}$, $\neg\exists z \in X(z\mathbf{R}^{\mathbf{M}}y)$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε υπερπεπερασμένη αναδρομή μέσα στην $\mathbf{M}$ και να ορίσουμε την $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} : \mathbf{A}^{\mathbf{M}} \to \mathbf{M}$ έτσι ώστε

$$\forall x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}[\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x, \mathbf{G}^{\mathbf{M}} \restriction pred^{\mathbf{M}}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}}))].$$

Όμως για κάθε $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$, $pred^{\mathbf{M}}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}}) = \{y \in \mathbf{A} \cap \mathbf{M} : \langle y, x\rangle \in \mathbf{R} \cap (\mathbf{M} \times \mathbf{M})\} = \{y \in \mathbf{A} : \langle y, x\rangle \in \mathbf{R}\} \cap \mathbf{M} = pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \cap \mathbf{M} = pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ μιας και $\forall x \in \mathbf{M}(pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subset \mathbf{M})$. Άρα, επειδή επιπλέον η $\mathbf{F}$ είναι απόλυτη,

$$\forall x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}[\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}^{\mathbf{M}} \restriction pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))].$$

Για να δείξουμε ότι η $\mathbf{G}$ είναι απόλυτη για την $\mathbf{M}$ πρέπει να δείξουμε ότι $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} = \mathbf{G} \restriction \mathbf{A}^{\mathbf{M}}$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\{z \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}} : \mathbf{G}^{\mathbf{M}}(z) \neq \mathbf{G}(z)\}$ είναι μη κενό. Τότε θα έχει ένα $\mathbf{R}$-ελαχιστικό στοιχείο x. Επομένως $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} \restriction pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \mathbf{G} \restriction pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$. Άρα $\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) = \mathbf{G}(x)$ που είναι άτοπο. □

Θα δώσουμε έναν ισοδύναμο αναδρομικό ορισμό του $rank(x)$ που δε χρησιμοποιεί το αξίωμα του δυναμοσυνόλου και θα δείξουμε ότι η $rank$ είναι απόλυτη.

Ορισμός 3.3.1 *Αν η $\mathbf{R}$ καλά θεμελιωμένη και set-like στην κλάση $\mathbf{A}$, ορίζουμε αναδρομικά $rank(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = sup\{rank(y, \mathbf{A}, \mathbf{R}) + 1 : y\mathbf{R}x \wedge y \in \mathbf{A}\}$.*

Λήμμα 3.3.1 *Αν η $\mathbf{A}$ είναι μεταβατική και η $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στην $\mathbf{A}$ τότε $\mathbf{A} \subset \mathbf{WF}$ και $rank(x, \mathbf{A}, \in) = rank(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{A}$.*

Απόδειξη.

Αν $\mathbf{A} \setminus \mathbf{WF} \neq 0$ έστω x ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο της. Για κάθε $y \in x$, $y \notin \mathbf{A} \setminus \mathbf{WF}$ και επειδή η $\mathbf{A}$ είναι μεταβατική, $y \in \mathbf{WF}$. Άρα $x \subset \mathbf{WF}$, άρα $x \in \mathbf{WF}$ που είναι άτοπο. Επειδή η $\in$ είναι προφανώς set-like, θα δείξουμε με επαγωγή στο x ότι $rank(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = rank(x)$. Υποθέτουμε ότι $\forall y \in x\ rank(y, \mathbf{A}, \in) = rank(y)$. Τότε $rank(x, \mathbf{A}, \in) = sup\{rank(y, \mathbf{A}, \in) + 1 : y \in x \wedge y \in \mathbf{A}\} = sup\{rank(y) + 1 : y \in x\} = rank(x)$ λόγω της μεταβατικότητας της $\mathbf{A}$ και του Λήμματος 2.2.3. □

Θεώρημα 3.3.2 *Τα παρακάτω είναι απόλυτα για κάθε μεταβατική κλάση* $\mathbf{M}$ *που είναι μοντέλο του* $ZF - P$.

1. $rank(x)$
2. $trcl(x)$

Απόδειξη.

1. Έχουμε δείξει ότι $rank(x) = rank(x, \mathbf{V}, \in)$. Προφανώς η $\mathbf{V}$ και η $\in$ είναι απόλυτες, (η $\in$ είναι set-like στην $\mathbf{V})^{\mathbf{M}}$ και $\forall x \in \mathbf{M}(pred(\mathbf{V}, x, \in) \subset \mathbf{M})$. Έστω $\mathbf{F} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ τέτοια ώστε $F(x, h) = sup\{\alpha + 1 : \alpha \in ran(h)\}$ αν η h είναι συνάρτηση με $ran(h) \subset \mathbf{ON}$ και $F(x, h) = 0$ διαφορετικά. Όλες οι έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν στον ορισμό της $\mathbf{F}$ είναι απόλυτες άρα η $\mathbf{F}$ είναι απόλυτη. Επομένως επειδή $rank(x) = \mathbf{F}(x, rank \restriction pred(\mathbf{V}, x, \in))$ η $rank$ είναι απόλυτη.
2. Η $\bigcup^n(x)$ έχει οριστεί αναδρομικά και με παρόμοια επιχειρήματα αποδεικνύεται ότι είναι απόλυτη. Άρα η $trcl(x) = \bigcup\{\bigcup^n(x) : n \in \omega\}$ είναι απόλυτη.

Ορισμός 3.3.2 *Για κάθε διατακτικό* α *ορίζουμε* $\alpha - 1$ *να είναι ο* α *αν ο* α *είναι οριακός ή* 0 *και να είναι ο* β *αν* $\alpha = S(\beta)$.

Από τον ορισμό της $\alpha - 1$ παρατηρούμε ότι είναι απόλυτη για μεταβατικά μοντέλα του $ZF - P$.

Θεώρημα 3.3.3 *Τα παρακάτω είναι απόλυτα για κάθε μεταβατική κλάση* $\mathbf{M}$ *που είναι μοντέλο του* $ZF - P$.

1. $\alpha + \beta$
2. $\alpha \cdot \beta$
3. α^β

Απόδειξη.

Η πρόσθεση διατακτικών ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

- $\alpha + 0 = \alpha$.

- $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$.
- $\alpha + \beta = sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\}$ όταν ο β είναι οριακός διατακτικός.

Πιο αυστηρά έστω $\mathbf{F} : \mathbf{ON} \times \mathbf{ON} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ τέτοια ώστε $\mathbf{F}(\alpha, \beta, h) = 0$ αν η h δεν είναι συνάρτηση με $dom(h) = \beta$ και $ran(h) \subset \mathbf{ON}$, ενώ αν είναι, $\mathbf{F}(\alpha, \beta, h) = \alpha$ αν $\beta = 0$, $\mathbf{F}(\alpha, \beta, h) = S(h(\beta - 1))$ αν ο β είναι επόμενος διατακτικός και $\mathbf{F}(\alpha, \beta, h) = sup\{h(\xi) : \xi < \beta\}$ αν ο β είναι οριακός. Έστω $\mathbf{R}$ σχέση στο $\mathbf{ON} \times \mathbf{ON}$ τέτοια ώστε $\langle \alpha, \beta \rangle \mathbf{R} \langle \gamma, \delta \rangle \leftrightarrow (\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta)$. Η $\mathbf{R}$ είναι καλά θεμελιωμένη και set-like στην $\mathbf{ON} \times \mathbf{ON}$. Τότε αν $\mathbf{G} : \mathbf{ON} \times \mathbf{ON} \to \mathbf{V}$ τέτοια ώστε

$$\forall \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbf{ON} \times \mathbf{ON}[\mathbf{G}(\alpha, \beta) = \mathbf{F}(\alpha, \beta, \mathbf{G} \restriction pred(\mathbf{ON} \times \mathbf{ON}, \langle \alpha, \beta \rangle, \mathbf{R}))],$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{ON}(\mathbf{G}(\alpha, \beta) = \alpha + \beta)$. Όλες οι έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν στον ορισμό της $\mathbf{F}$ είναι απόλυτες άρα η $\mathbf{F}$ είναι απόλυτη. Η $\mathbf{ON} \times \mathbf{ON}$ και η $\mathbf{R}$ είναι απόλυτες, (η $\mathbf{R}$ είναι set-like στην $\mathbf{ON} \times \mathbf{ON})^{\mathbf{M}}$ και $\forall \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbf{M}(pred(\mathbf{ON} \times \mathbf{ON}, \langle \alpha, \beta \rangle, \mathbf{R}) \subset \mathbf{M})$. Επομέμως η $\alpha + \beta$ είναι απόλυτη.
Ο πολλαπλασιασμός διατακτικών ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

- $\alpha \cdot 0 = \alpha$.
- $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$.
- $\alpha \cdot \beta = sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\}$ όταν ο β είναι οριακός διατακτικός.

Οι δυνάμεις διατακτικών ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

- $\alpha_0 = 1$.
- $\alpha_{\beta+1} = \alpha_\beta \cdot \alpha$.
- $\alpha_\beta = sup\{\alpha_\xi : \xi < \beta\}$ όταν ο β είναι οριακός διατακτικός.

Με παρόμοια επιχειρήματα με την πρόσθεση αποδεικνύεται ότι και ο πολλαπλασιασμός και οι δυνάμεις είναι απόλυτες. $\square$

Κεφάλαιο 4

Αριθμήσιμα μεταβατικά μοντέλα του ZFC

4.1 Θεώρημα Mostowski

Έχει ήδη φανεί πόσο σημαντικό είναι ένα μοντέλο να είναι μεταβατικό. Θα δείξουμε έναν τρόπο κατασκευής ενός τέτοιου μοντέλου, υποθέτοντας την ύπαρξη ενός μοντέλου $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ που ικανοποιεί ορισμένες απλές ιδιότητες.

Ορισμός 4.1.1 *Έστω $\mathbf{R}$ καλά θεμελιωμένη και set-like στην κλάση $\mathbf{A}$. Η συνάρτηση Mostowski των $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$ είναι η απεικόνιση $\mathbf{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ που ορίζεται αναδρομικά ως $\mathbf{G}(x) = \{\mathbf{G}(y) : y \in \mathbf{A} \wedge y\mathbf{R}x\}$.*

Λήμμα 4.1.1 *Αν $\mathbf{M}$ είναι το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης Mostowski τότε η $\mathbf{M}$ είναι μεταβατική και $\mathbf{M} \subset \mathbf{WF}$.*

Απόδειξη.

Έστω $\mathbf{G}(x) \in \mathbf{M}$. Για κάθε $z \in \mathbf{G}(x)$ υπάρχει $y \in \mathbf{A} \wedge y\mathbf{R}x$ τέτοιο ώστε $z = \mathbf{G}(y)$ άρα $z \in \mathbf{M}$. Επομένως η $\mathbf{M}$ είναι μεταβατική. Για την απόδειξη του $\mathbf{M} \subset \mathbf{WF}$ θα δείξουμε με επαγωγή στο x ότι $\forall x \in \mathbf{A}(\mathbf{G}(x) \in \mathbf{WF})$. Έστω ότι ισχύει για κάθε $y \in \mathbf{A} \wedge y\mathbf{R}x$. Τότε $\mathbf{G}(x) \subset \mathbf{WF}$ που συνεπάγεται $\mathbf{G}(x) \in \mathbf{WF}$. □

Σε πολλές περιπτώσεις η συνάρτηση Mostowski είναι ισομορφισμός. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει το μοντέλο $\mathfrak{A}$ να ικανοποιεί το Αξίωμα της Έκτασης, δηλαδή

$$\forall x, y \in \mathbf{A}(\forall z \in \mathbf{A}(z\mathbf{R}x \leftrightarrow z\mathbf{R}y) \to x = y).$$

Ισοδύναμα το μοντέλο $\mathfrak{A}$ ικανοποιεί το Αξίωμα της Έκτασης αν

$$\forall x, y \in \mathbf{A}(x \neq y \to pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \neq pred(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})).$$

Από αυτή την παρατήρηση προκύπτει άμεσα το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.1.2 *Αν η $\mathbf{N}$ είναι μεταβατική τότε το αξίωμα της έκτασης ικανοποιείται για τη σχέση $\in$ στην $\mathbf{N}$.*

Απόδειξη.

Επειδή η $\mathbf{N}$ είναι μεταβατική, $pred(\mathbf{N}, x, \in) = x$. □

Επομένως επειδή το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης Mostowski είναι μεταβατικό θα ικανοποιεί το αξίωμα της έκτασης. Άρα αν μια συνάρτηση Mostowski είναι ισομορφισμός θα πρέπει και το πεδίο ορισμού της να ικανοποιεί το αξίωμα της έκτασης. Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Λήμμα 4.1.3 *Αν η $\mathbf{R}$ είναι καλά θεμελιωμένη, set-like και ικανοποιεί το αξίωμα της έκτασης στην κλάση $\mathbf{A}$, η συνάρτηση Mostowski των $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$ είναι ισομορφισμός δηλαδή είναι 1-1 και $\forall x, y \in \mathbf{A}(x\mathbf{R}y \leftrightarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$.*

Απόδειξη.

Θα δείξουμε αρχικά ότι είναι 1-1. Αν όχι έστω x $\mathbf{R}$-ελαχιστικό στοιχείο της μη κενής υποκλάσης της $\mathbf{A}$, $\{x \in \mathbf{A} : \exists y \in \mathbf{A}(x \neq y \wedge \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y))\}$ και επιλέγουμε $y \neq x$ τέτοιο ώστε $\mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)$. Επειδή ικανοποιείται το αξίωμα της έκτασης ισχύει μια από τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

1. $\exists z \in \mathbf{A}$ τέτοιο ώστε $z\mathbf{R}x$ και $\neg(z\mathbf{R}y)$. Επειδή $\mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)$, $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$ για κάποιο w με $w\mathbf{R}y$. Τότε $w \neq z$ και άρα $z \in \{x \in \mathbf{A} : \exists y \in \mathbf{A}(x \neq y \wedge \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y))\}$ και $z\mathbf{R}x$ που είναι άτοπο μιας και το x είναι ελαχιστικό.

2. $\exists w \in \mathbf{A}$ τέτοιο ώστε $w\mathbf{R}y$ και $\neg(w\mathbf{R}x)$. Επειδή $\mathbf{G}(w) \in \mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(x)$, $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$ για κάποιο z με $z\mathbf{R}x$. Τότε $w \neq z$ και άρα $z \in \{x \in \mathbf{A} : \exists y \in \mathbf{A}(x \neq y \wedge \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y))\}$ και $z\mathbf{R}x$ που είναι άτοπο μιας και το x είναι ελαχιστικό.

Άρα η $\mathbf{G}$ είναι 1-1. Το $\forall x, y \in \mathbf{A}(x\mathbf{R}y \rightarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$ είναι προφανές από τον ορισμό της $\mathbf{G}$. Για το $\forall x, y \in \mathbf{A}(x\mathbf{R}y \leftarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$, έστω $x, y \in \mathbf{A}$ με $\mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y)$. Τότε $\mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(z)$ για κάποιο z με $z\mathbf{R}y$. Επειδή όμως η $\mathbf{G}$ είναι 1-1, $x = z$ άρα $x\mathbf{R}y$. Επομένως η $\mathbf{G}$ είναι ισομορφισμός. □

Θεώρημα 4.1.1 *(Θεώρημα Mostowski). Έστω $\mathbf{R}$ καλά θεμελιωμένη, set-like και ικανοποιεί το αξίωμα της έκτασης στην κλάση $\mathbf{A}$. Τότε υπάρχει μια μεταβατική κλάση $\mathbf{M}$ και μια 1-1 απεικόνιση $\mathbf{G}$ από την $\mathbf{A}$ επί της $\mathbf{M}$ τέτοια ώστε η $\mathbf{G}$ να είναι ισομορφισμός ανάμεσα στις $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ και $\langle \mathbf{M}, \in \rangle$. Επιπλέον οι $\mathbf{M}$ και $\mathbf{G}$ είναι μοναδικές.*

Απόδειξη.

Η ύπαρξη προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα. Για την απόδειξη της μοναδικότητας θα χρησιμοποιήσουμε υπερπεπερασμένη επαγωγή στο x. Έστω $\mathbf{G}'$ και $\mathbf{M}'$ που επίσης ικανοποιούν το θεώρημα και για κάθε $y \in \mathbf{A}$ με $y\mathbf{R}x$, $\mathbf{G}(y) = \mathbf{G}'(y)$. Επειδή οι $\mathbf{G}'$ και $\mathbf{G}$ είναι ισομορφισμοί ανάμεσα στις $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ και $\langle \mathbf{M}, \in \rangle$, $\mathbf{G}'(x) = \{\mathbf{G}'(y) : y \in \mathbf{A} \wedge y\mathbf{R}x\} = \{\mathbf{G}(y) : y \in \mathbf{A} \wedge y\mathbf{R}x\} = \mathbf{G}(x)$. Επομένως $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$ και $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$. □

Πόρισμα 4.1.1 *Αν η $\in$ ικανοποιεί το αξίωμα της έκτασης στην $\mathbf{A}$ τότε υπάρχει μια μεταβατική κλάση $\mathbf{M}$ και μια 1-1 απεικόνιση $\mathbf{G}$ από την $\mathbf{A}$ επί της $\mathbf{M}$ τέτοια ώστε η $\mathbf{G}$ να είναι ισομορφισμός για τη σχέση $\in$ δηλαδή $\forall x, y \in \mathbf{A}(x \in y \leftrightarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$.*

Απόδειξη.

Από το Αξίωμα της Θεμελίωσης προκύπτει ότι η $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στην $\mathbf{V}$ άρα και σε κάθε υποκλάση της. Επίσης η $\in$ είναι set-like. Άρα η $\in$ πληρεί της προϋποθέσεις του Θεωρήματος Mostowski άρα υπάρχει μια μεταβατική κλάση $\mathbf{M}$ και μια 1-1 απεικόνιση $\mathbf{G}$ από την $\mathbf{A}$ επί της $\mathbf{M}$ τέτοια ώστε η $\mathbf{G}$ να είναι ισομορφισμός για τη σχέση $\in$. □

Όπως αναμένεται οι ισομορφισμοί διατηρούν όλες τις ιδιότητες.

Λήμμα 4.1.4 *Έστω G 1-1 συνάρτηση από το A επί του M που είναι ισομορφισμός για τη σχέση $\in$. Για κάθε τύπο $\varphi(x_1, ..., x_n)$, $\forall x_1, ..., x_n \in A[\varphi^A(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi^M(G(x_1), ..., G(x_n))]$.*

Απόδειξη.

Με επαγωγή στο μήκος του φ. Αν ο φ είναι της μορφής $x = y$ τότε το λήμμα ισχύει επειδή η G είναι 1-1. Αν ο φ είναι της μορφής $x \in y$ τότε το λήμμα ισχύει επειδή η G είναι ισομορφισμός για τη σχέση $\in$. Αν ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$ τότε $[\psi^A \leftrightarrow \psi^M] \Rightarrow [\neg\psi^A \leftrightarrow \neg\psi^M] \Rightarrow [(\neg\psi)^A \leftrightarrow (\neg\psi)^M]$. Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \wedge \psi'$ τότε $[(\psi^A \leftrightarrow \psi^M) \wedge (\psi'^A \leftrightarrow \psi'^M)] \Rightarrow [(\psi^A \wedge \psi'^A) \leftrightarrow (\psi^M \wedge \psi'^M)] \Rightarrow [(\psi \wedge \psi')^A \leftrightarrow (\psi \wedge \psi')^M]$. Τέλος αν ο φ είναι της μορφής $\exists y \psi(y, x_1, ..., x_n)$ και γνωρίζουμε ότι $\forall y, x_1, ..., x_n \in A[\psi^A(y, x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi^M(G(y), G(x_1), ..., G(x_n))]$ έστω $x_1, ..., x_n \in A$. $\varphi^A(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow [\exists y \in A \psi^A(y, x_1, ..., x_n)] \leftrightarrow [\exists y \in A \psi^M(G(y), G(x_1), ..., G(x_n))]$. Επειδή η G είναι επί του M αυτό είναι ισοδύναμο με $[\exists y \in M \psi^M(y, G(x_1), ..., G(x_n))] \leftrightarrow \varphi^M(G(x_1), ..., G(x_n))$. □

4.2 Θεωρήματα Ανάκλασης

Τα μοντέλα που χρησιμοποιούμε, εκτός από μεταβατικά, τις περισσότερες φορές χρειαζόμαστε να είναι σύνολα. Από το θεώρημα της Μη Πληρότητας του Godel δεν υπάρχει σύνολο που να είναι μοντέλο όλου του ZFC. Ωστόσο θα δείξουμε ότι για κάθε πεπερασμένη λίστα αξιωμάτων του ZFC υπάρχει κάποιο σύνολο που τα ικανοποιεί. Αυτό τελικά μας είναι αρκετό, όπως φαίνεται και από το θεώρημα συμπάγειας. Πράγματι αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα του ZFC ή μια έννοια που έχει οριστεί στο ZFC, αρκεί να επιβάλλουμε να ικανοποιούνται στο μοντέλο μας τα πεπερασμένα αξιώματα που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη του θεωρήματος ή στον ορισμό της έννοιας.

Ξεκίναμε δίνοντας ένα κριτήριο για το πότε μια λίστα τύπων είναι απόλυτη για μια κλάση $\mathbf{M}$.

Ορισμός 4.2.1 *Μια λίστα από τύπους $\varphi_1, ..., \varphi_n$ καλείται κλειστή αν κάθε τύπος φ_i είναι είτε ατομικός δηλαδή της μορφής $x \in y$ ή $x = y$, είτε της μορφής $\neg\varphi_j$ για κάποιο $j \in \{1, ..., n\}$, είτε της μορφής $\varphi_j \wedge \varphi_k$ για κάποια $j, k \in \{1, ..., n\}$, είτε της μορφής $\exists x \varphi_j$ για κάποιο $j \in \{1, ..., n\}$.*

Λήμμα 4.2.1 *Έστω $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ και $\varphi_1, ..., \varphi_n$ μια κλειστή λίστα από τύπους. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι $\varphi_1, ..., \varphi_n$ είναι απόλυτοι για τις $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$.*
2. *Αν φ_i είναι της μορφής $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_l)$ τότε $\forall y_1, ..., y_l \in \mathbf{M}[\exists x \in \mathbf{N} \varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, ..., y_l) \rightarrow \exists x \in \mathbf{M} \varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, ..., y_l)]$*

Απόδειξη.

1. $\rightarrow$ 2.: Έστω $y_1, ..., y_l \in \mathbf{M}$ και υποθέτουμε ότι $\exists x \in \mathbf{N} \varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, ..., y_l)$. Τότε $\varphi_i^{\mathbf{N}}(y_1, ..., y_l)$ άρα, επειδή ο φ_i είναι απόλυτος, $\varphi_i^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_l)$ δηλαδή $\exists x \in \mathbf{M} \varphi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, ..., y_l)$ άρα, επειδή ο φ_j είναι απόλυτος, $\exists x \in \mathbf{M} \varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, ..., y_l)$.
2. $\rightarrow$ 1.: Θα δείξουμε με επαγωγή στο μήκος του φ_i ότι είναι απόλυτος για τις $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$. Έστω ότι ισχύει για κάθε τύπο μικρότερο του φ_i. Αν ο φ_i είναι ατομικός είναι προφανώς απόλυτος. Αν ο φ_i είναι της μορφής $\neg\varphi_j$ είναι απόλυτος επειδή είναι απόλυτος ο φ_j. Ομοίως αν ο φ_i είναι της μορφής $\varphi_j \wedge \varphi_k$. Τέλος αν ο φ_i είναι της μορφής $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_l)$ έστω $y_1, ..., y_l \in \mathbf{M}$. Τότε $\varphi_i^{\mathbf{M}}(y_1, ..., y_l) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{M} \varphi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, ..., y_l)$ είναι ισοδύναμο, επειδή είναι απόλυτος ο φ_j, με $\exists x \in \mathbf{M} \varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, ..., y_l)$. Όμως από υπόθεση και επειδή $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ αυτό ειναι ισοδύναμο με $\exists x \in \mathbf{N} \varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, ..., y_l) \leftrightarrow \varphi_i^{\mathbf{N}}(y_1, ..., y_l)$. Άρα ο φ_i είναι απόλυτος για τις $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$. □

Το παραπάνω κριτήριο είναι πολύ χρήσιμο μιας και μας δίνει τη δυνατότητα να ελέγξουμε αν ένας τύπος είναι απόλυτος, κοιτάζοντας τη σχετικοποίηση του μόνο στη μεγαλύτερη κλάση. Με βάση αυτό αποδεικνύουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.1 *Έστω μια κλάση $\mathbf{Z}$ και, για κάθε διατακτικό α, ένα σύνολο $Z(\alpha)$ τέτοια ώστε*

1. *$\alpha < \beta \rightarrow Z(\alpha) \subset Z(\beta)$.*
2. *Αν ο β είναι οριακός διατακτικός $Z(\beta) = \bigcup_{\alpha<\beta} Z(\alpha)$.*
3. *$\mathbf{Z} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} Z(\alpha)$.*

Τότε για κάθε τύπους $\varphi_1, ..., \varphi_n$, $\forall\alpha\exists\beta > \alpha$(οι $\varphi_1, ..., \varphi_n$ είναι απόλυτοι για το $Z(\beta)$ και την $\mathbf{Z}$).

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η λίστα $\varphi_1, ..., \varphi_n$ είναι κλειστή. Αν δεν είναι την επεκτείνουμε σε μια κλειστή. Για κάθε $i = 1, ..., n$ ορίζουμε μια συνάρτηση $\mathbf{F}_i : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ ως εξής. Αν ο φ_i είναι της μορφής $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_l)$ τότε θέτουμε $\mathbf{G}_i(y_1, ..., y_l)$ να είναι ίσο με 0 αν $\neg\exists x \in \mathbf{Z}\varphi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$ και ίσο με το μικρότερο διατακτικό η τέτοιο ώστε $\exists x \in Z(\eta)\varphi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$ αν $\exists x \in \mathbf{Z}\varphi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$. Θέτουμε $\mathbf{F}_i(\xi) = sup\{\mathbf{G}_i(y_1, ..., y_l) : y_1, ..., y_l \in Z(\xi)\}$. Από το αξίωμα της αντικατάστασης το $\{\mathbf{G}_i(y_1, ..., y_l) : y_1, ..., y_l \in Z(\xi)\}$ είναι σύνολο διατακτικών άρα το supremum υπάρχει. Αν ο φ_i δεν είναι της μορφής $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_l)$ τότε θέτουμε $\mathbf{F}_i(\xi) = 0$.
Έστω β οριακός διατακτικός τέτοιος ώστε, για κάθε $i = 1, ..., n$, $\forall\xi < \beta(\mathbf{F}_i(\xi) < \beta)$. Έστω $y_1, ..., y_l \in Z(\beta)$. Επειδή $Z(\beta) = \bigcup_{\xi<\beta} Z(\xi)$ και $\xi_1 < \xi_2 \to Z(\xi_1) \subset Z(\xi_2)$, $\exists\gamma < \beta(y_1, ..., y_l \in Z(\gamma))$. Εξ ορισμού της $\mathbf{F}_i$ για κάθε φ_i της μορφής $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_l)$ αν $\exists x \in \mathbf{Z}\varphi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$ τότε $\exists x \in Z(\mathbf{F}_i(\gamma))\varphi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$. Επιπλέον επειδή $\mathbf{F}_i(\gamma) < \beta \to Z(\mathbf{F}_i(\gamma)) \subset Z(\beta)$, $\exists x \in Z(\beta)\varphi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$. Επομένως αν φ_i είναι της μορφής $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_l)$ τότε $\forall y_1, ..., y_l \in Z(\beta)[\exists x \in \mathbf{Z}\varphi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, ..., y_l) \to \exists x \in Z(\beta)\varphi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, ..., y_l)]$. Άρα από το προηγούμενο λήμμα οι $\varphi_1, ..., \varphi_n$ είναι απόλυτοι για το $Z(\beta)$ και την $\mathbf{Z}$.
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε διατακτικό α υπάρχει οριακός διατακτικός $\beta > \alpha$ τέτοιος ώστε, για κάθε $i = 1, ..., n$, $\forall\xi < \beta(\mathbf{F}_i(\xi) < \beta)$. Ορίζουμε αναδρομικά μια ακολουθία β_p με $p \in \omega$ ως εξής: $\beta_0 = \alpha$ και $\beta_{p+1} = sup\{\beta_p + 1, \mathbf{F}_1(\beta_p), ..., \mathbf{F}_n(\beta_p)\}$. Θέτουμε $\beta = sup\{\beta_p : p \in \omega\}$. Ο β είναι οριακός διατακτικός ως supremum μιας άπειρης γνησίως αύξουσας ακολουθίας διατακτικών και προφανώς μεγαλύτερος του α. Αν $\xi < \xi'$ τότε $Z(\xi) \subset Z(\xi')$ άρα $\{\mathbf{G}_i(y_1, ..., y_l) : y_1, ..., y_l \in Z(\xi)\} \subset \{\mathbf{G}_i(y_1, ..., y_l) : y_1, ..., y_l \in Z(\xi')\}$ και επομένως $\mathbf{F}_i(\xi) \leq \mathbf{F}_i(\xi')$. Αν $\xi < \beta$ τότε $\xi < \beta_p$ για κάποιο p άρα $\mathbf{F}_i(\xi) \leq \mathbf{F}_i(\beta_p) \leq \beta_{p+1} < \beta$. □

Εύκολα παρατηρούμε ότι η $\mathbf{V}$ και τα σύνολα $V(\alpha)$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος. Άρα για κάθε πεπερασμένο τμήμα του ZFC υπάρχει ένα σύνολο $V(\beta)$ που το ικανοποιεί, όπως προκύπτει και από το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 4.2.1 *Έστω S ένα σύνολο αξιωμάτων που επεκτείνει το ZF και $\varphi_1, ..., \varphi_n$ αξιώματα του S. Τότε*

$$S \vdash \forall\alpha\exists\beta > \alpha(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i^{V(\beta)}).$$

Απόδειξη.

$\forall\alpha\exists\beta > \alpha$(τα $\varphi_1, ..., \varphi_n$ είναι απόλυτα για το $V(\beta)$ και την $\mathbf{V}$) και για κάθε $i = 1, ..., n$, $S \vdash \varphi_i$.
□

Υποθέτοντας το αξίωμα της επιλογής μπορούμε για κάθε πεπερασμένο τμήμα του ZFC να πάρουμε αριθμήσιμα σύνολα που να το ικανοποιούν. Αυτό θα μας φανεί χρήσιμο όταν θα αναπτύξουμε τη μέθοδο forcing.

Θα χρειαστούμε την έννοια της κλειστότητας ενός συνόλου ως προς ένα σύνολο συναρτήσεων.

Ορισμός 4.2.2 *Μια συνάρτηση n θέσεων στο A είναι μια $f : A^n \to A$ αν $n > 0$ ή ενα στοιχείο του A αν $n = 0$. Αν $B \subset A$ το B καλείται κλειστό ως προς την f αν $\{f(x) : x \in B^n\} \subset B$ όταν $n > 0$ και αν $f \in B$ όταν $n = 0$. Μια συνάρτηση πεπερασμένων θέσεων στο A είναι μια συνάρτηση n θέσεων στο A για κάποιο $n \in \omega$. Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα σύνολο συναρτήσεων πεπερασμένων θέσεων στο A και $B \subset A$, η κλειστότητα του B ως προς το $\mathcal{F}$ είναι το ελάχιστο $C \subset A$ τέτοιο ώστε $B \subset C$ και το C είναι κλειστό ως προς όλες τις συναρτήσεις στο $\mathcal{F}$.*

Θεώρημα 4.2.2 *Έστω $\varkappa$ άπειρος πληθάριθμος, $B \subset A$, $|B| \leq \varkappa$ και $\mathcal{F}$ ένα σύνολο συναρτήσεων πεπερασμένων θέσεων στο A με $|\mathcal{F}| \leq \varkappa$. Η κλειστότητα του B ως προς το $\mathcal{F}$ έχει πληθικότητα μικρότερη ή ίση του $\varkappa$.*

Απόδειξη.

Αν $f \in \mathcal{F}$ και $D \subset A$ θέτουμε $f * D$ να είναι $\{f(x) : x \in D^n\}$ αν η f είναι n θέσεων ή $\{f\}$ αν η f είναι 0 θέσεων. Αν $|D| \leq \varkappa$ τότε, επειδή η f είναι επί του $f * D$, $|f * D| \leq \varkappa$. Έστω $C_0 = B$ και $C_{n+1} = C_n \cup \bigcup\{f * C_n : f \in \mathcal{F}\}$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι $|C_n| \leq \varkappa$ για κάθε n. Για $n = 0$ ισχύει από υπόθεση. Έστω ότι ισχύει για $n = m$. Τότε $|f * C_m| \leq \varkappa$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$ και επειδή $|\mathcal{F}| \leq \varkappa$ από Λήμμα 1.3.2. $|\bigcup\{f * C_m : f \in \mathcal{F}\}| \leq \varkappa$. Άρα $|C_{m+1}| = |C_m \cup \bigcup\{f * C_m : f \in \mathcal{F}\}| \leq \varkappa$. Έστω $C_\omega = \bigcup_{n\in\omega} C_n$. Το C_ω είναι η κλειστότητα του B ως προς το $\mathcal{F}$ και, πάλι από το Λήμμα 1.3.2, $|C_\omega| \leq \varkappa$. □

Θεώρημα 4.2.3 *Έστω μια κλάση $\mathbf{Z}$ και $\varphi_1, ..., \varphi_n$ τύποι. Τότε $\forall X \subset \mathbf{Z} \exists A[X \subset A \subset \mathbf{Z} \wedge ($οι $\varphi_1, ..., \varphi_n$ είναι απόλυτοι για το A και τη $\mathbf{Z}) \wedge |A| \leq max(\omega, |X|)]$.*

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η λίστα $\varphi_1, ..., \varphi_n$ είναι κλειστή. Έστω $Z(\alpha) = \mathbf{Z} \cap V(\alpha)$ και παρατηρούμε ότι η $\mathbf{Z}$ και τα $Z(\alpha)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.1. Επιλέγουμε ένα α τέτοιο ώστε $X \subset Z(\alpha)$ και από το Θεώρημα 4.2.1 σταθεροποιούμε ένα $\beta > \alpha$ τέτοιο ώστε οι $\varphi_1, ..., \varphi_n$ να είναι απόλυτοι για το $Z(\beta)$ και τη $\mathbf{Z}$. Χρησιμοποιώντας το Αξίωμα της Επιλογής επιλέγουμε μια καλή διάταξη $\lhd$ του $Z(\beta)$.
Αν ο φ_i έχει $l_i > 0$ ελεύθερες μεταβλητές ορίζουμε συναρτήσεις $H_i : Z(\beta)^{l_i} \to Z(\beta)$ ως εξής. Αν ο φ_i είναι της μορφής $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_{l_i})$ και $\exists x \in Z(\beta) \varphi_j^{Z(\beta)}(x, y_1, ..., y_{l_i})$ τότε θέτουμε $H_i(y_1, ..., y_{l_i})$ να είναι το $\lhd$-μικρότερο τέτοιο x. Αν ο φ_i δεν είναι της μορφής $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_{l_i})$ ή $\neg\exists x \in Z(\beta) \varphi_j^{Z(\beta)}(x, y_1, ..., y_{l_i})$ τότε θέτουμε $H_i(y_1, ..., y_{l_i})$ να είναι το $\lhd$-μικρότερο στοιχείο του $Z(\beta)$. Αν $l_i = 0$ τότε αν ο φ_i είναι της μορφής $\exists x \varphi_j(x)$ και $\exists x \in Z(\beta) \varphi_j^{Z(\beta)}(x)$ θέτουμε H_i να είναι το $\lhd$-μικρότερο τέτοιο x ενώ διαφορετικά θέτουμε H_i να είναι το $\lhd$-μικρότερο στοιχείο του $Z(\beta)$.

Έστω A να είναι η κλειστότητα του X ως προς τις $H_1, ..., H_n$. Τότε αν φ_i είναι της μορφής $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_l)$ τότε $\forall y_1, ..., y_l \in A[\exists x \in Z(\beta)\varphi_j^{Z(\beta)}(x, y_1, ..., y_l) \rightarrow \exists x \in A\varphi_j^{Z(\beta)}(x, y_1, ..., y_l)]$. Άρα από το Λήμμα 4.2.1 οι $\varphi_1, ..., \varphi_n$ είναι απόλυτοι για το A και το $Z(\beta)$ και επομένως είναι απόλυτοι για το A και τη $\mathbf{Z}$. Το $|A| \leq max(\omega, |X|)$ προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα. □

Οι συναρτήσεις H_i που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη καλούνται συναρτήσεις Skolem.

Πόρισμα 4.2.2 *Έστω* $\mathbf{Z}$ *μια μεταβατική κλάση και* $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *προτάσεις. Τότε για κάθε μεταβατικό* $X \subset \mathbf{Z}$,

$$\exists M[X \subset M \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}(\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i^{\mathbf{Z}}) \wedge \text{το } M \text{ είναι μεταβατικό} \wedge |M| \leq max(\omega, |X|)].$$

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι στη λίστα των προτάσεων ανήκει το Αξίωμα της Έκτασης. Αν όχι το προσθέτουμε. Έστω ένα σύνολο A όπως στο συμπέρασμα του προηγούμενου θεωρήματος. Τότε $\varphi_i^A \leftrightarrow \varphi_i^{\mathbf{Z}}$. Επειδή η $\mathbf{Z}$ είναι μεταβατική, το Αξίωμα της Έκτασης ισχύει στη $\mathbf{Z}$ άρα και στο A. Άρα υπάρχει ένας $\in$-ισομορφισμός, G, από το A επί ενός μεταβατικού συνόλου M. Για $x \in X$, $G(x) = \{G(y) : y \in A \wedge y \in x\} = \{G(y) : y \in x\}$ μιας και το X είναι μεταβατικό. Επομένως, με $\in$-επαγωγή στο x, $G(x) = x$ για κάθε $x \in X$. Άρα $X \subset M$. □

Θέτοντας $\mathbf{Z} = \mathbf{V}$ και $X = \omega$ προκύπτει το παρακάτω.

Πόρισμα 4.2.3 *Έστω S ένα σύνολο αξιωμάτων που επεκτείνει το ZFC. Αν* $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *αξιώματα του S τότε*

$$S \vdash \exists M(|M| = \omega \wedge \text{το } M \text{ είναι μεταβατικό} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i^M).$$

Επομένως αποδείξαμε, για οποιοδήποτε πεπερασμένο τμήμα του ZFC, την ύπαρξη ενός αριθμήσιμου μεταβατικού συνόλου M που το ικανοποιεί. Αυτό με την πρώτη ματιά φαίνεται παράδοξο μιας και μπορούμε να παραθέσουμε πεπερασμένα αξιώματα του ZFC ώστε να ορίζεται ο πληθάριθμος $\aleph_1$. Όμως ο $\aleph_1$ δεν είναι απόλυτος. Ο $\aleph_1^M$ είναι ένας αριθμήσιμος διατακτικός, που από την σκοπιά του M είναι ένας υπεραριθμήσιμος πληθάριθμος, δηλαδή δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση στο M από το $\aleph_1^M$ στο ω. Το γεγονός ότι κάποια σύνολα του M είναι αριθμήσιμα αλλά υπεραριθμήσιμα από τη σκοπιά του M είναι γνωστό σαν παράδοξο του Skolem. Στο εξής θα λέμε καταχρηστικά ότι ένα σύνολο είναι μοντέλο του ZF και θα εννοούμε ότι το σύνολο ικανοποιεί την πεπερασμένη λίστα αξιωμάτων του ZF που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Κεφάλαιο 5

Η κλάση L

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε την κλάση των κατασκευάσιμων συνόλων **L** και θα δείξουμε ότι είναι μοντέλο του $ZFC + GCH$.

5.1 Ορίσιμα σύνολα

Ένα σύνολο x θα λέγεται ορίσιμο αν υπάρχει κάποιος τύπος φ τέτοιος ώστε $\varphi(z) \leftrightarrow z = x$. Ωστόσο η προηγούμενη πρόταση δεν είναι νόμιμος ορισμός στο ZFC μιας και η έκφραση «υπάρχει κάποιος τύπος φ» είναι έκφραση της μεταγλώσσας. Για να αποφύγουμε αυτόν το σκόπελο ξεκινάμε ορίζοντας το $Df(A, n)$, που θα είναι διαισθητικά το σύνολο όλων των σχέσεων n θέσεων στο A που είναι ορίσιμες από τη σχετικοποίηση ενός τύπου με n ελεύθερες μεταβλητές στο A. Επομένως ένα στοιχείο x του A θα είναι ορίσιμο από τη σχετικοποίηση ενός τύπου στο A αν $\{x\} \in Df(A, 1)$.

Ορισμός 5.1.1 *Αν $n \in \omega$, $i, j < n$ και $R \subset A^{n+1}$,*

1. $Proj(A, R, n) = \{s \in A^n : \exists t \in R(t \restriction n = s)\}$.
2. $Diag_{\in}(A, n, i, j) = \{s \in A^n : s(i) \in s(j)\}$.
3. $Diag_{=}(A, n, i, j) = \{s \in A^n : s(i) = s(j)\}$.
4. *Με επαγωγή στο $k \in \omega$ ορίζουμε το $Df'(k, A, n)$ ως εξής:*
   (a) $Df'(0, A, n) = \{Diag_{\in}(A, n, i, j) : i, j < n\} \cup \{Diag_{=}(A, n, i, j) : i, j < n\}$.
   (b) $Df'(k+1, A, n) = Df'(k, A, n) \cup \{A^n \setminus R : R \in Df'(k, A, n)\} \cup \{R \cap S : R, S \in Df'(k, A, n)\} \cup \{Proj(A, R, n) : R \in Df'(k, A, n+1)\}$.
5. $Df(A, n) = \bigcup\{Df'(k, A, n) : k \in \omega\}$.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι αν $R, S \in Df(A,n)$ τότε $A^n \setminus R \in Df(A,n)$ και$R \cap S \in Df(A,n)$. Επίσης αν $R \in Df(A, n+1)$ τότε $Proj(A,R,n) \in Df(A,n)$. Παρατηρούμε ότι οι συνολοθεωρητικές πράξεις του συμπληρώματος, της τομής και της προβολής αντιστοιχούν στους λογικούς συνδέσμους και ποσοδείκτες $\neg$, $\wedge$ και $\exists$. Σε αυτό βασίζεται το επόμενο λήμμα, που στη πραγματικότητα είναι μια έκφραση της μεταγλώσσας που εκφράζει άπειρα λήμματα και δείχνει ότι το $Df(A,n)$ περιέχει όλες τις σχέσεις στο A που ορίζονται από τη σχετικοποίηση ενός τύπου στο A, όπως επιδιώκαμε.

Λήμμα 5.1.1 *Για κάθε τύπο* $\varphi(x_0,...,x_{n-1})$,

$$\forall A[\{s \in A^n : \varphi^A(s(0),...,s(n-1))\} \in Df(A,n)].$$

Απόδειξη.

Με επαγωγή στο μήκος του φ. Αν ο φ είναι της μορφής $x_i \in x_j$ τότε το συμπέρασμα ισχύει μιας και $Diag_{\in}(A,n,i,j) \in Df(A,n)$. Αν ο φ είναι της μορφής $x_i = x_j$ τότε το συμπέρασμα ισχύει μιας και $Diag_{=}(A,n,i,j) \in Df(A,n)$. Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \wedge \chi$ και το συμπέρασμα ισχύει για τους ψ και χ, τότε ισχύει και για το φ καθώς το $Df(A,n)$ είναι κλειστό στις πεπερασμένες τομές. Αν ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$ και το συμπέρασμα ισχύει για το ψ, τότε ισχύει και για το φ καθώς το $Df(A,n)$ είναι κλειστό στα συμπληρώματα. Τέλος έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\exists y\psi$ και το συμπέρασμα ισχύει για το ψ. Αν η y δεν είναι μια από τις μεταβλητές $x_0,...,x_{n-1}$ τότε $\{s \in A^n : \varphi^A(s(0),...,s(n-1))\} = Proj(A, \{t \in A^{n+1} : \psi^A(t(0),...,t(n-1))\}, n) \in Df(A,n)$ μιας και $\{t \in A^{n+1} : \psi^A(t(0),...,t(n-1))\} \in Df(A, n+1)$. Αν η y είναι μια x_j τότε ο φ είναι ο $\exists x_j \psi(x_0,...,x_{n-1})$ άρα η x_j είναι δεσμευμένη στο φ. Έστω z μια μεταβλητή η οποία δεν εμφανίζεται πουθενά στο φ. Έστω $\psi'(x_0,...,x_{n-1},z)$ να είναι ο $\psi(x_0,...,x_{j-1},z,x_{j+1},...,x_{n-1})$ και φ' να είναι $\exists z\psi'$. Τότε οι φ' και φ είναι ισοδύναμοι και το συμπέρασμα ισχύει για το φ' άρα και για το φ. □

Το παραπάνω λήμμα δε μας εξασφαλίζει ότι το $Df(A,n)$ είναι το σύνολο όλων των σχέσεων n θέσεων στο A που ορίζονται από τη σχετικοποίηση ενός τύπου στο A, αλλά μόνο ότι τις περιέχει. Επομένως θα πρέπει να δείξουμε και το αντίστροφο του παραπάνω λήμματος, δηλαδή ότι για κάθε στοιχείο R του $Df(A,n)$ υπάρχει τύπος φ τέτοιος ώστε $R = \{s \in A^n : \varphi^A(s(0),...,s(n-1))\}$. Αν $R \in Df(A,n)$ τότε, για κάποιο k, $R \in Df'(k,A,n)$. Επομένως το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο k. Το επαγωγικό βήμα βασίζεται στο ότι οι τρόποι με τους οποίους κατασκευάζονται οι σχέσεις του $Df'(k,A,n)$ χρησιμοποιώντας τις συνολοθεωρητικές πράξεις του συμπληρώματος, της τομής και της προβολής αντιστοιχούν στους τρόπους με τους οποίους κατασκευάζονται οι τύποι χρησιμοποιώντας τους λογικούς συνδέσμους και ποσοδείκτες $\neg$, $\wedge$ και $\exists$. Όμως το αντίστροφο του λήμματος δεν μπορεί να είναι μια πρόταση στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων καθώς αναφέρεται σε όλους τους τύπους ταυτόχρονα. Επομένως δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σα βάση για να αποδείξουμε κάποια ιδιότητα του $Df(A,n)$. Μπορεί όμως να μας υποδείξει ιδιότητες που θα πρέπει να ισχύουν και τις οποίες θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε με άλλους τρόπους. Για παράδειγμα το $Df(A,n)$ θα πρέπει να είναι αριθμήσιμο, μιας και οι τύποι είναι αριθμήσιμοι. Επίσης το $Df(A,n)$ θα πρέπει να είναι απόλυτο για μεταβατικά μοντέλα του $ZF - P$ μιας και αν $A \in \mathbf{M}$ και η $\mathbf{M}$ είναι μεταβατική κάθε στοιχείο του A ανήκει στη $\mathbf{M}$, άρα η σχετικοποίηση ενός τύπου στο A έχει το ίδιο νόημα είτε στη $\mathbf{M}$ είτε στη $\mathbf{V}$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τα παραπάνω αυστηρά. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας μια συνάρτηση που αριθμεί το $Df(A, n)$, η οποία θα μας χρειαστεί και στη συνέχεια.

Ορισμός 5.1.2 *Με επαγωγή στο $m \in \omega$ ορίζουμε το $En(m, A, n)$ ως εξής:*

1. *Αν $m = 2^i \cdot 3^j$ και $i, j < n$, τότε $En(m, A, n) = Diag_{\in}(A, n, i, j)$.*
2. *Αν $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ και $i, j < n$, τότε $En(m, A, n) = Diag_{=}(A, n, i, j)$.*
3. *Αν $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^2$, τότε $En(m, A, n) = A^n \setminus En(i, A, n)$.*
4. *Αν $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$, τότε $En(m, A, n) = En(i, A, n) \cap En(j, A, n)$.*
5. *Αν $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$, τότε $En(m, A, n) = Proj(A, En(i, A, n + 1), n)$.*
6. *Αν το m δεν έχει καμία από τις παραπάνω μορφές τότε $En(m, A, n) = 0$.*

Λήμμα 5.1.2 *Για κάθε n και A, $Df(A, n) = \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$.*

Απόδειξη.

Αρχικά δείχνουμε με επαγωγή στο m ότι $\forall n[En(m, A, n) \in Df(A, n)]$ και στη συνέχεια με επαγωγή στο k ότι $\forall n[Df'(k, A, n) \subset \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$. □

Πόρισμα 5.1.1 $|Df(A, n)| \leq \omega$.

Λήμμα 5.1.3 *Οι συναρτήσεις Df και En είναι απόλυτες για μεταβατικά μοντέλα του $ZF - P$.*

Απόδειξη.

Οι συναρτήσεις $Proj$, $Diag_{=}$ και $Diag_{\in}$ αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι απόλυτες. Η Df' είναι απόλυτη γιατί ορίζεται αναδρομικά χρησιμοποιώντας απόλυτες έννοιες. Επομένως η Df είναι απόλυτη μιας και $Df(A, n) = \bigcup\{Df'(k, A, n) : k \in \omega\}$. Τέλος λαμβάνοντας υπόψη πως ο πολλαπλασιασμός και οι δυνάμεις διατακτικών είναι απόλυτες, η En είναι απόλυτη γιατί ορίζεται αναδρομικά χρησιμοποιώντας απόλυτες έννοιες. □

Θα ορίσουμε την πράξη του ορίσιμου δυναμοσυνόλου $\mathcal{D}$. Διαισθητικά το $\mathcal{D}(A)$ είναι το σύνολο των υποσυνόλων του A που είναι ορίσιμα από πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία του A μέσω της σχετικοποίησης ενός τύπου στο A. Παρεμβάλλουμε τον ορισμό της συνάρτησης $s \frown t$.

Ορισμός 5.1.3 *Αν οι s και t είναι συναρτήσεις με $dom(s) = \alpha$ και $dom(t) = \beta$, ορίζουμε τη συνάρτηση $s \frown t$ με πεδίο ορισμού το $\alpha + \beta$ ως εξής: $(s \frown t) \restriction \alpha = s$ και $(s \frown t)(\alpha + \xi) = t(\xi)$ για κάθε $\xi < \beta$.*

Συμβολίζουμε με $\langle x_0, ..., x_{n-1} \rangle$ τη συνάρτηση s με $dom(s) = n$ και $s(0) = x_0$, ..., $s(n-1) = x_{n-1}$.

Ορισμός 5.1.4

$$\mathcal{D}(A) = \{X \subset A : \exists n \in \omega \exists s \in A^n \exists R \in Df(A, n+1)[X = \{x \in A : s \frown \langle x \rangle \in R\}]\}.$$

Λήμμα 5.1.4 *Αν $\varphi(x_0, ..., x_{n-1}, y)$ τύπος τότε*

$$\forall A \forall x_0, ..., x_{n-1} \in A[\{y \in A : \varphi^A(x_0, ..., x_{n-1}, y)\} \in \mathcal{D}(A)].$$

Απόδειξη.

Έστω A και $x_0, ..., x_{n-1} \in A$. Από Λήμμα 5.1.1 $R = \{t \in A^{n+1} : \varphi^A(t(0), ..., t(n))\} \in Df(A, n+1)$. Έστω $s = \langle x_0, ..., x_{n-1} \rangle$. Επομένως $\{y \in A : \varphi^A(x_0, ..., x_{n-1}, y)\} = \{y \in A : s \frown \langle y \rangle \in R\} \in \mathcal{D}(A)$. □

Όπως και στην περίπτωση του $Df(A, n)$ το αντίστροφο του προηγούμενου λήμματος ισχύει αλλά δε μπορεί να είναι μια πρόταση στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων.

Λήμμα 5.1.5 *Για κάθε σύνολο A,*

1. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{P}(A)$
2. *Αν το A είναι μεταβατικό, $A \subset \mathcal{D}(A)$.*
3. $\forall X \subset A[|X| < \omega \to X \in \mathcal{D}(A)]$.
4. *(AC)* $|A| \geq \omega \to |\mathcal{D}(A)| = |A|$.

Απόδειξη.

1. Είναι προφανές από τον ορισμό του $\mathcal{D}(A)$.
2. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα με τον τύπο $y \in x$, $\forall x \in A[\{y \in A : y \in x\} \in \mathcal{D}(A)]$. Όμως αν το A είναι μεταβατικό $\{y \in A : y \in x\} = x$, άρα $\forall x \in A[x \in \mathcal{D}(A)]$, άρα $A \subset \mathcal{D}(A)$.
3. Αρκεί να δείξουμε ότι $\forall n < \omega \forall s \in A^n(ran(s) \in \mathcal{D}(A))$. Παρατηρούμε ότι αν $R, S \in Df(A, n+1)$ τότε $R \cup S = A^{n+1} \setminus ((A^{n+1} \setminus R) \cap (A^{n+1} \setminus S)) \in Df(A, n+1)$. Έστω $E_n^m = \{t \in A^{n+1} : \exists i < m(t(n) = t(i))\}$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο $m \leq n$ ότι $E_n^m \in Df(A, n+1)$. Για $m = 1$, $E_n^1 = Diag_=(A, n+1, n, 0) \in Df(A, n+1)$. Αν ισχύει για m τότε $E_n^{m+1} = E_n^m \cup Diag_=(A, n+1, n, m) \in Df(A, n+1)$. Επομένως για κάθε $s \in A^n$, $ran(s) = \{x \in A : s \frown \langle x \rangle \in E_n^n\} \in \mathcal{D}(A)$.

4. Αν υποθέσουμε το Αξίωμα της Επιλογής και $|A| \geq \omega$ τότε, για κάθε $n \in \omega$, $|A^n| = |A|$. Επίσης έχουμε δείξει ότι $|Df(A, n+1)| \leq \omega$. Επομένως $|\mathcal{D}(A)| \leq |A|$. Ως ειδική περίπτωση του 3. ισχύει ότι $\forall x \in A(\{x\} \in \mathcal{D}(A))$ άρα $|\mathcal{D}(A)| \geq |A|$.

$\square$

5.2 Ιδιότητες της L

Κατα αναλογία με τη **WF** θα ορίσουμε την κλάση **L**.

Ορισμός 5.2.1 *Για κάθε διατακτικό α ορίζεται αναδρομικά το σύνολο $L(\alpha)$ ως εξής:*

1. $L(0) = 0$.
2. $L(\alpha + 1) = \mathcal{D}(L(\alpha))$.
3. $L(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi)$ *όταν ο α είναι οριακός διατακτικός.*

Η διαφορά των συνόλων $L(\alpha)$ από τα $V(\alpha)$ είναι ότι το $L(\alpha+1)$ περιέχει μόνο τα ορίσιμα υποσύνολα του $L(\alpha)$.

Ορισμός 5.2.2 $\mathbf{L} = \bigcup\{L(\alpha) : \alpha \in \mathbf{ON}\}$.

Πολλές ιδιότητες που ισχύουν για τα $V(\alpha)$ ισχύουν και για τα $L(\alpha)$.

Λήμμα 5.2.1 *Για καθε διατακτικό α:*

1. *το $L(\alpha)$ είναι μεταβατικό.*
2. $\forall \xi \leq \alpha \ (L(\xi) \subset L(\alpha))$

Απόδειξη.

Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο α. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $\beta < \alpha$ και δείχνουμε οτι ισχύει για το α.
Αν $\alpha = 0$ είναι τετριμμένο.
Αν $\alpha = \beta + 1$, επειδή το $L(\beta)$ είναι μεταβατικό και $L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\beta))$, $L(\beta) \subset L(\alpha)$ και άρα απο επαγωγική υπόθεση $\forall \xi \leq \alpha \ (L(\xi) \subset L(\alpha))$. Για να δειχθεί ότι το $L(\alpha)$ ειναι μεταβατικό έστω $x \in L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\beta))$. Τότε $x \subset L(\beta) \subset L(\alpha)$.
Αν α είναι οριάκος διατακτικός το $L(\alpha)$ είναι μεταβατικό ως ένωση μεταβατικών συνόλων και εξ ορισμού του L(α) $\forall \xi \leq \alpha \ (L(\xi) \subset L(\alpha))$. $\square$

Ορισμός 5.2.3 *Αν $x \in \mathbf{L}$ ορίζουμε $\rho(x)$ να είναι ο ελάχιστος διατακτικός β τέτοιος ώστε $x \in L(\beta + 1)$.*

Λήμμα 5.2.2 *Για καθε διατακτικό α,* $L(\alpha) = \{x \in \mathbf{L} : \rho(x) < \alpha\}$.

Απόδειξη.

Για $x \in \mathbf{L}$, $\rho(x) < \alpha \Leftrightarrow \exists\beta < \alpha(x \in L(\beta + 1)) \Leftrightarrow x \in L(\alpha)$. □

Λήμμα 5.2.3 *Για καθε διατακτικό α,* $L(\alpha) \subset V(\alpha)$.

Απόδειξη.

Με επαγωγή στο α. Για $\alpha = 0$ είναι τετριμμένο. Αν $\alpha = \beta + 1$ και $L(\beta) \subset V(\beta)$ τότε $L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\beta)) \subset \mathcal{P}(L(\beta)) \subset \mathcal{P}(V(\beta)) = V(\alpha)$. Αν α οριακός και $\forall\xi < \alpha[L(\xi) \subset V(\xi)]$, τότε $L(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi) \subset \bigcup_{\xi<\alpha} V(\xi) = V(\alpha)$. □

Λήμμα 5.2.4 $\forall\alpha \in \mathbf{ON}(L(\alpha) \cap \mathbf{ON} = \alpha)$.

Απόδειξη.

Με επαγωγή στο α. Για $\alpha = 0$ είναι τετριμμένο. Έστω $\alpha = \beta + 1$. Επειδή $L(\beta) \subset L(\alpha)$, $\beta = L(\beta) \cap \mathbf{ON} \subset L(\alpha) \cap \mathbf{ON}$ και επειδή $L(\alpha) \subset V(\alpha)$, $L(\alpha) \cap \mathbf{ON} \subset V(\alpha) \cap \mathbf{ON} = \alpha$. Επομένως αρκεί να δειχθεί ότι $\beta \in L(\alpha)$. Έστω $\varphi(x)$ ένας Δ_0 τύπος που είναι ισοδύναμος με τον $x \in \mathbf{ON}$. Επειδή οι Δ_0 τύποι είναι απόλυτοι για μεταβατικά σύνολα, $\beta = L(\beta) \cap \mathbf{ON} = \{x \in L(\beta) : \varphi^{L(\beta)}(x)\}$, άρα $\beta \in \mathcal{D}(L(\beta)) = L(\alpha)$. Αν ο α είναι οριακός $L(\alpha) \cap \mathbf{ON} = (\bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi)) \cap \mathbf{ON} = \bigcup_{\xi<\alpha}(L(\xi) \cap \mathbf{ON}) = \bigcup_{\xi<\alpha} \xi = \alpha$. □

Λήμμα 5.2.5 $L(\alpha) \in L(\alpha + 1)$.

Απόδειξη.

$L(\alpha) = \{x \in L(\alpha) : (x = x)^{L(\alpha)}\}$ το οποίο ανήκει στο $L(\alpha + 1) = \mathcal{D}(L(\alpha))$. □

Λήμμα 5.2.6 *Η συνάρτηση* $L(\alpha)$ *είναι απόλυτη για μεταβατικά μοντέλα του* $ZF - P$.

Απόδειξη.

Έχοντας δείξει ότι η Df είναι απόλυτη προκύπτει εύκολα ότι και η $\mathcal{D}$ είναι απόλυτη. Επομένως και η $L(\alpha)$ είναι απόλυτη μιας και έχει οριστεί αναδρομικά χρησιμοποιώντας απόλυτες έννοιες. □

Λήμμα 5.2.7 *(AC) Για κάθε* $\alpha \geq \omega$, $|L(\alpha)| = |\alpha|$.

Απόδειξη.

Επειδή $\alpha \subset L(\alpha)$, $|\alpha| \leq |L(\alpha)|$. Θα δείξουμε ότι $|L(\alpha)| = |\alpha|$ με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο α. Υποθέτουμε ότι $\alpha \geq \omega$ και $\forall \beta < \alpha(\beta \geq \omega \to |L(\beta)| = |\beta|)$. Τότε $\forall \beta < \alpha(|L(\beta)| \leq |\alpha|)$ μιας και $|L(n)| \leq |V(n)| < \omega$ για $n < \omega$. Αν ο α είναι οριακός τότε το $L(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} L(\beta)$ είναι μια ένωση $|\alpha|$ συνόλων με πληθικότητα $\leq |\alpha|$ άρα έχει πληθικότητα $\leq |\alpha|$. Αν $\alpha = \beta + 1$ τότε $|L(\beta)| = |\beta| = |\alpha|$ και $L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\beta))$ άρα $|L(\alpha)| = |\alpha|$ από το Λήμμα 5.1.5. □

Η αξία της κλάσης **L** βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.1 *Η* **L** *είναι μοντέλο του ZF.*

Απόδειξη.

Το Αξίωμα της Έκτασης ισχύει στην **L**, γιατί η **L** είναι μεταβατική, και το Αξίωμα της Θεμελίωσης ισχύει σε κάθε κλάση.

Για να δείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα του Διαχωρισμού αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε τύπο $\psi(x, z, v_1, ..., v_n)$, $\forall z, v_1, ..., v_n \in \mathbf{L}[\{x \in z : \psi^{\mathbf{L}}(x, z, v_1, ..., v_n)\} \in \mathbf{L}]$. Έστω $z, v_1, ..., v_n \in \mathbf{L}$. Έστω α τέτοιος ώστε $z, v_1, ..., v_n \in L(\alpha)$. Από Θεώρημα 4.2.1 υπάρχει $\beta > \alpha$ τέτοιος ώστε η ψ να είναι απόλυτη για το $L(\beta)$ και την **L**. Τότε $\{x \in z : \psi^{\mathbf{L}}(x, z, v_1, ..., v_n)\} = \{x \in L(\beta) : \varphi^{L(\beta)}(x, z, v_1, ..., v_n)\}$ όπου $\varphi \leftrightarrow [x \in z \wedge \psi]$. Επομένως αυτό το σύνολο ανήκει στο $\mathcal{D}(L(\beta)) = L(\beta + 1) \subset \mathbf{L}$.

Για να δείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα του Ζεύγους αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x, y \in \mathbf{L} \exists z \in \mathbf{L}(x \in z \wedge y \in z)$. Έστω $\alpha = sup\{\rho(x) + 1, \rho(y) + 1\}$. Τότε για $z = L(\alpha) \in L(\alpha + 1) \subset \mathbf{L}$ το ζητούμενο ικανοποιείται.

Για να δείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα της Ένωσης αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x \in \mathbf{L} \exists z \in \mathbf{L}(\bigcup x \subset z)$. Για $z = L(\rho(x)) \in \mathbf{L}$ το ζητούμενο ικανοποιείται.

Για να δείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα της Αντικατάστασης αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε τύπο $\psi(x, y, A, v_1, ..., v_n)$ και $\forall A, v_1, ..., v_n \in \mathbf{L}$ αν $\forall x \in A \exists! y \in \mathbf{L} \psi^{\mathbf{L}}(x, y, A, v_1, ..., v_n)$ τότε $\exists Y \in \mathbf{L}[\{y : \exists x \in A \psi^{\mathbf{L}}(x, y, A, v_1, ..., v_n)\} \subset Y]$. Έστω $\alpha = sup\{\rho(x) + 1 : \exists x \in A \psi^{\mathbf{L}}(x, y, A, v_1, ..., v_n)\}$. Τότε για $Y = L(\alpha) \in \mathbf{L}$ το ζητούμενο ικανοποιείται.

Το Αξίωμα του Απείρου ισχύει στην **L** γιατί $\omega \in \mathbf{L}$.

Για να δείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x \in \mathbf{L} \exists y \in \mathbf{L} \forall z \in \mathbf{L}[z \subset x \to z \in y)$. Έστω $\alpha = sup\{\rho(z) + 1 : z \subset x \wedge z \in \mathbf{L}\}$. Τότε για $y = L(\alpha) \in \mathbf{L}$ το ζητούμενο ικανοποιείται. □

Η **L** είναι η ελάχιστη κλάση που είναι μοντέλο ολόκληρου του ZF.

Θεώρημα 5.2.2 *Αν η κλάση* **M** *είναι μεταβατικό μοντέλο του ZF, τότε* $\mathbf{L} \subset \mathbf{M}$.

Απόδειξη.

Αρχικά θα δείξουμε ότι $\mathbf{ON} \subset \mathbf{M}$. Έστω $\alpha \in \mathbf{ON}$. Υπάρχει $x \in \mathbf{M}$ με $rank(x) \geq \alpha$, γιατί διαφορετικά θα ίσχυε $\mathbf{M} \subset V(\alpha)$ δηλαδή η **M** θα ήταν σύνολο. Επειδή όμως η rank είναι απόλυτη για την **M**, $rank(x) \in \mathbf{M}$. Επομένως $\alpha \in \mathbf{M}$ μιας και η **M** είναι μεταβατική. Επιπλέον επειδή η $L(\alpha)$ είναι απόλυτη, $\mathbf{L^M} = \{x \in \mathbf{M} : [\exists\alpha \in \mathbf{ON}(x \in L(\alpha))]^{\mathbf{M}}\} = \{x \in \mathbf{M} : \exists\alpha \in \mathbf{ON}(x \in L(\alpha))\} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}}\{x \in \mathbf{M} : x \in L(\alpha)\} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}}\{x \in L(\alpha)\} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} L(\alpha) = \mathbf{L}$. Επομένως $\mathbf{L} = \mathbf{L^M} \subset \mathbf{M}$. □

Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για σύνολα.

Ορισμός 5.2.4 $o(M) = M \cap \mathbf{ON}$.

Λήμμα 5.2.8 *Αν το M είναι ένα μεταβατικό σύνολο τότε $o(M) \in \mathbf{ON}$.*

Απόδειξη.

Επειδή το M και η $\mathbf{ON}$ είναι μεταβατικά το $o(M) = M \cap \mathbf{ON}$ είναι μεταβατικό και διατάσσεται καλώς από την $\in$ μιας και $o(M) \subset \mathbf{ON}$. □

Θεώρημα 5.2.3 *Αν το σύνολο M είναι μεταβατικό μοντέλο του $ZF - P$, τότε $L(o(M)) = \mathbf{L}^M \subset M$.*

Απόδειξη.

Αν $\alpha \in M$ τότε $S(\alpha) = \alpha + 1 \in M$ μιας και η S είναι απόλυτη για το M. Άρα ο $o(M)$ είναι οριακός διατακτικός, άρα $L(o(M)) = \bigcup_{\alpha\in M} L(\alpha)$. Επιπλέον επειδή η $L(\alpha)$ είναι απόλυτη, $\mathbf{L}^M = \{x \in M : [\exists\alpha \in \mathbf{ON}(x \in L(\alpha))]^M\} = \{x \in M : \exists\alpha \in o(M)(x \in L(\alpha))\} = \bigcup_{\alpha\in o(M)} L(\alpha) = L(o(M))$. Επομένως $L(o(M)) = \mathbf{L}^M \subset M$. □

5.3 Το Αξίωμα της Κατασκευασιμότητας

Στη μέχρι τώρα ανάλυση μας δεν έχουμε αποδείξει την ύπαρξη κάποιου σύνολου που να μην ανήκει στην $\mathbf{L}$. Θα δείξουμε ότι η πρόταση $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ είναι συνεπής με το ZF.

Ορισμός 5.3.1 *Το Αξίωμα της Κατασκευασιμότητας είναι η πρόταση $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ δηλαδή $\forall x \exists\alpha(x \in L(\alpha))$.*

Θεώρημα 5.3.1 *Η $\mathbf{L}$ είναι μοντέλο του $ZF + \mathbf{V} = \mathbf{L}$.*

Απόδειξη.

Ότι είναι μοντέλο του ZF έχει δειχθεί. Για να δείξουμε ότι $(\mathbf{V} = \mathbf{L})^{\mathbf{L}}$ πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x \in \mathbf{L}\exists\alpha \in \mathbf{L}(x \in L(\alpha))^{\mathbf{L}}$. Έστω $x \in \mathbf{L}$. Έστω α τέτοιος ώστε $x \in L(\alpha)$. $\alpha \in \mathbf{L}$ μιας και $\mathbf{ON} \subset \mathbf{L}$ και $(x \in L(\alpha))^{\mathbf{L}}$ μιας και η $L(\alpha)$ είναι απόλυτη. □

Πόρισμα 5.3.1 $Con(ZF) \to Con(ZF + \mathbf{V} = \mathbf{L})$.

Θα ορίσουμε μια καλή διάταξη σε κάθε $L(\alpha)$. Επομένως θα δείξουμε ότι το αξίωμα της κατασκευασιμότητας συνεπάγεται το αξίωμα της επιλογής και άρα ότι η $\mathbf{L}$ είναι μοντέλο του ZFC.

Ορισμός 5.3.2 *Έστω $\lhd$ μια διμελής σχέση στο A. Ορίζουμε*

$$\lhd^n = \{\langle s,t\rangle \in A^n \times A^n : \exists k < n(s \restriction k = t \restriction k \wedge s(k) \lhd t(k))\}.$$

Λήμμα 5.3.1 *Αν η $\langle A, \lhd\rangle$ είναι καλή διάταξη τότε και η $\langle A^n, \lhd^n\rangle$ είναι καλή διάταξη.*

Απόδειξη.

- $\forall s \in A^n \neg(s \lhd^n s)$ γιατί, για κάθε $k < n$, $\neg(s(k) \lhd s(k))$ μιας και η $\langle A, \lhd\rangle$ είναι καλή διάταξη.
- Έστω $s \lhd^n t$ και $t \lhd^n v$. Επομένως $\exists k < n(s \restriction k = t \restriction k \wedge s(k) \lhd t(k))$ και $\exists m < n(t \restriction k = v \restriction k \wedge t(m) \lhd v(m))$. Έστω $l = min(k, m)$. Τότε $s \restriction l = v \restriction l \wedge s(l) \lhd v(l)$, άρα $s \lhd^n v$.
- Έστω $s, t \in A^n$. Αν $s \neq t$ τότε $\exists k < n(s \restriction k = t \restriction k \wedge s(k) \neq t(k))$. Επειδή η $\langle A, \lhd\rangle$ είναι ολική διάταξη, είτε $s(k) \lhd t(k)$ που συνεπάγεται $s \lhd^n t$, είτε $t(k) \lhd s(k)$ που συνεπάγεται $t \lhd^n s$.
- Θα δείξουμε ότι είναι καλώς θεμελιωμένη με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ είναι τετριμμένο γιατί $\lhd^1 = \lhd$. Έστω ότι ισχύει για n και $X \subset A^{n+1}$ με $X \neq 0$. Έστω t το $\lhd^n$-ελάχιστο στοιχείο του $\{s \restriction n : s \in X\}$ και x το $\lhd$-ελάχιστο στοιχείο του $\{s(n) : s \in X \wedge s \restriction n = t\}$. Τότε $t \frown \langle x\rangle \in X$ και είναι το $\lhd^{n+1}$-ελάχιστο στοιχείο του.

Επομένως η $\langle A^n, \lhd^n\rangle$ είναι καλή διάταξη. □

Ορισμός 5.3.3 *Έστω $\langle A, \lhd\rangle$ μια καλή διάταξη. Αν $X \in \mathcal{D}(A)$, ορίζουμε n_X να είναι ο ελάχιστος n τέτοιος ώστε*

$$\exists s \in A^n \exists R \in Df(A, n+1)(X = \{x \in A : s \frown \langle x\rangle \in R\}).$$

Ορίζουμε s_X να είναι η $\lhd^{n_X}$-ελάχιστη $s \in A^{n_X}$ τέτοια ώστε

$$\exists R \in Df(A, n_X + 1)(X = \{x \in A : s \frown \langle x\rangle \in R\})$$

και m_X να είναι ο ελάχιστος $m \in \omega$ τέτοιος ώστε $X = \{x \in A : s_X \frown \langle x\rangle \in En(m, A, n_X)\}$.

Ορισμός 5.3.4 *Για κάθε διατακτικό α ορίζεται αναδρομικά η διμελής σχέση $\lhd_\alpha$ ως εξής:*

1. $\lhd_0 = 0$.
2. *Αν $\langle L(\alpha), \lhd_\alpha\rangle$ δεν είναι καλή διάταξη τότε $\lhd_{\alpha+1} = 0$.*
   Αν $\langle L(\alpha), \lhd_\alpha\rangle$ είναι καλή διάταξη τότε, για $X, Y \in L(\alpha+1)$, $X \lhd_{\alpha+1} Y$ αν

(a) $X, Y \in L(\alpha) \wedge X \lhd_\alpha Y$ *ή*

(b) $X \in L(\alpha) \wedge Y \notin L(\alpha)$ *ή*

(c) $X, Y \notin L(\alpha) \wedge [(n_X < n_Y) \vee (n_X = n_Y \wedge s_X \lhd_\alpha^{n_X} s_Y) \vee (n_X = n_Y \wedge s_X = s_Y \wedge m_X < m_Y)]$.

3. $\lhd_\alpha = \{\langle x, y\rangle \in L(\alpha) \times L(\alpha) : \rho(x) < \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge \langle x, y\rangle \in \lhd_{\rho(x)+1})\}$ *όταν ο α είναι οριακός διατακτικός.*

Λήμμα 5.3.2 *Για κάθε διατακτικό α η $\langle L(\alpha), \lhd_\alpha\rangle$ είναι καλή διάταξη.*

Απόδειξη.

Με επαγωγή στο α. Για $\alpha = 0$ είναι τετριμμένο.
Έστω $\alpha = \beta + 1$ και η $\left\langle L(\beta), \lhd_\beta\right\rangle$ είναι καλή διάταξη.

- Έστω $X \in L(\alpha)$. Αν $X \in L(\beta)$, $\neg(X \lhd_\beta X)$ μιας και η $\left\langle L(\beta), \lhd_\beta\right\rangle$ είναι καλή διάταξη. Αν $X \notin L(\beta)$, $\neg(s_X \lhd_\beta^{n_X} s_X)$ μιας και η $\left\langle L(\beta)^{n_X}, \lhd_\beta^{n_X}\right\rangle$ είναι καλή διάταξη. Άρα $\neg(X \lhd_\alpha X)$.

- Έστω $X \lhd_\alpha Y$ και $Y \lhd_\alpha Z$. Αν $X, Y, Z \in L(\beta)$ τότε $X \lhd_\beta Z$, γιατί η $\lhd_\beta$ είναι μεταβατική, άρα $X \lhd_\alpha Z$. Αν $X \in L(\beta)$ και $Z \notin L(\beta)$ τότε $X \lhd_\alpha Z$ εξ ορισμού της $\lhd_\alpha$. Τέλος αν $X, Y, Z \notin L(\beta)$, επειδή οι σχέσεις $<$ και $\lhd_\beta^{n_X}$ είναι μεταβατικές, $X \lhd_\alpha Z$.

- Έστω $X, Y \in L(\alpha)$. Αν $X, Y \in L(\beta)$ τότε $(X = Y) \vee (X \lhd_\beta Y) \vee (Y \lhd_\beta X)$ μιας και η $\left\langle L(\beta), \lhd_\beta\right\rangle$ είναι ολική διάταξη, άρα $(X = Y) \vee (X \lhd_\alpha Y) \vee (Y \lhd_\alpha X)$. Αν $X \in L(\beta)$ και $Y \notin L(\beta)$ τότε $X \lhd_\alpha Y$ εξ ορισμού της $\lhd_\alpha$. Τέλος έστω $X, Y \notin L(\beta)$. Αν $n_X = n_Y = n$, $s_X = s_Y = s$ και $m_X = m_Y = m$, τότε $X = \{x \in L(\beta) : s \frown \langle x\rangle \in En(m, A, n)\} = Y$. Άρα αν $X \neq Y$, είτε $X \lhd_\alpha Y$, είτε $Y \lhd_\alpha X$.

- Έστω $A \subset L(\alpha)$ με $A \neq 0$. Αν $A \cap L(\beta) \neq 0$ έστω X το $\lhd_\beta$-ελάχιστο στοιχείο του $A \cap L(\beta)$. Το X θα είναι και το $\lhd_\alpha$-ελάχιστο στοιχείο του A. Αν $A \cap L(\beta) = 0$ έστω $n_{min} = min\{n_X : X \in A\}$, s_{min} το $\lhd_\beta^{n_X}$-ελάχιστο στοιχείο του $\{s_X : X \in A\}$ και $m_{min} = min\{m_X : X \in A\}$. Το $X = \{x \in L(\beta) : s_{min} \frown \langle x\rangle \in En(m_{min}, A, n_{min})\}$ θα είναι και το $\lhd_\alpha$-ελάχιστο στοιχείο του A.

Επομένως η $\langle L(\alpha), \lhd_\alpha\rangle$ είναι καλή διάταξη.
Έστω α οριακός διατακτικός και για κάθε $\xi < \alpha$ η $\left\langle L(\xi), \lhd_\xi\right\rangle$ είναι καλή διάταξη.

- Έστω $X \in L(\alpha)$. $\langle X, X\rangle \notin \lhd_{\rho(X)+1}$ μιας και η $\lhd_{\rho(X)+1}$ είναι καλή διάταξη άρα $\neg(X \lhd_\alpha X)$.

- Έστω $X \lhd_\alpha Y$ και $Y \lhd_\alpha Z$. Αν $\rho(X) < \rho(Z)$ τότε $X \lhd_\alpha Z$. Αν $\rho(X) = \rho(Y) = \rho(Z) = \beta$ τότε $X \lhd_{\beta+1} Y$ και $Y \lhd_{\beta+1} Z$ άρα $X \lhd_{\beta+1} Z$ μιας και η $\lhd_{\beta+1}$ είναι μεταβατική. Επομένως $X \lhd_\alpha Z$.

- Έστω $X, Y \in L(\alpha)$. Αν $\rho(X) < \rho(Y)$ τότε $X \lhd_\alpha Y$. Αν $\rho(X) = \rho(Y) = \beta$ τότε $(X = Y) \vee (X \lhd_{\beta+1} Y) \vee (Y \lhd_{\beta+1} X)$ μιας και η $\left\langle L(\beta + 1), \lhd_{\beta+1}\right\rangle$ είναι ολική διάταξη, άρα $(X = Y) \vee (X \lhd_\alpha Y) \vee (Y \lhd_\alpha X)$.

- Έστω $A \subset L(\alpha)$ με $A \neq 0$. Έστω $\beta = min\{\rho(X) : X \in A\}$ και $B = \{X \in A : \rho(X) = \beta\}$. Επειδή $B \subset L(\beta+1)$ και $B \neq 0$ έχει ένα $\lhd_{\beta+1}$-ελάχιστο στοιχείο. Αυτό θα είναι και το $\lhd_\alpha$-ελάχιστο στοιχείο του A.

Επομένως η $\langle L(\alpha), \lhd_\alpha \rangle$ είναι καλή διάταξη. □

Θεώρημα 5.3.2 $\mathbf{V} = \mathbf{L} \to AC$

Απόδειξη.

Αν $x \in \mathbf{L}$ τότε, για κάποιο α, $x \subset L(\alpha)$ και η $\lhd_\alpha$ διατάσσει καλώς το x. □

Ερχόμαστε τώρα στη γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς.

Θεώρημα 5.3.3 *Αν* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ *για κάθε άπειρο διατακτικό α,* $\mathcal{P}(L(\alpha)) \subset L(\alpha^+)$.

Απόδειξη.

Έστω $\varphi_1, ..., \varphi_n$ μια πεπερασμένη λίστα αξιωμάτων του $ZF + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ που περιλαμβάνει όλα τα αξιωματα που χρησιμοποιιήθηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.3 και το αξίωμα της κατασκευασιμότητας. Τότε για κάθε μεταβατικό σύνολο M,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i^M \to L(o(M)) = \mathbf{L}^M = M.$$

Έστω $A \in \mathcal{P}(L(\alpha))$. Θέτουμε $X = L(\alpha) \cup \{A\}$. Επειδή $\mathbf{V} = \mathbf{L} \to AC$, $|X| = |L(\alpha)| = |\alpha|$ από το Λήμμα 5.2.7. Από το Πόρισμα 4.2.2, υπάρχει ένα μεταβατικό σύνολο M τέτοιο ώστε

$$|M| \leq |\alpha| \wedge X \subset M \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i^{\mathbf{V}}).$$

Επειδή τα φ_i είναι αξιώματα του $ZF + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ και έχουμε υποθέσει $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, για κάθε $i = 1, ..., n$ η $\varphi_i^{\mathbf{V}}$ είναι αληθής, άρα και η φ_i^M είναι αληθής. Επομένως $M = L(o(M))$. Επειδή $|M| \leq |\alpha|$ και $o(M) \subset M$, $|o(M)| < \alpha^+$. Επομένως $A \in L(o(M)) \subset L(\alpha^+)$. □

Πόρισμα 5.3.2 $\mathbf{V} = \mathbf{L} \to GCH$.

Απόδειξη.

Για κάθε άπειρο πληθάριθμο ϰ, $\mathcal{P}(\varkappa) \subset \mathcal{P}(L(\varkappa)) \subset L(\varkappa^+)$, άρα $2^\varkappa \leq |L(\varkappa^+)| = \varkappa^+$. □

Πόρισμα 5.3.3 $Con(ZF) \to Con(ZFC + GCH)$.

Κεφάλαιο 6

Forcing

Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε τη συνέπεια της άρνησης της υπόθεσης του συνεχούς θα πρέπει να βρούμε ένα μοντέλο στο οποίο το αξίωμα της κατασκευασιμότητας δεν ισχύει. Ο πιο άμεσος τρόπος να επιδιώξουμε κάτι τέτοιο θα ήταν να ορίσουμε μια μεταβατική κλάση $\mathbf{N}$ και να αποδείξουμε ότι όλα τα αξιώματα του $ZFC + \mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ ισχύουν στην $\mathbf{N}$. Τότε όμως θα είχαμε από το Θεώρημα 5.2.2 ότι $\mathbf{L} \subset \mathbf{N}$. Επίσης $\mathbf{L} \neq \mathbf{N}$ μιας και το αξίωμα της κατασκευασιμότητας ισχύει στην $\mathbf{L}$ αλλά όχι στη $\mathbf{N}$. Άρα θα είχαμε δείξει στο ZFC ότι υπάρχει μια γνήσια υπερκλάση της $\mathbf{L}$, άρα $ZFC \vdash \mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ που είναι άτοπο μιας και έχουμε δείξει τη συνέπεια του $ZFC + \mathbf{V} = \mathbf{L}$. Επομένως θα πρέπει να βρούμε κάποιον άλλο τρόπο.

Θα ξεκινήσουμε με ένα αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο του ZFC και θα το επεκτείνουμε κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί τις ιδιότητες που θέλουμε.

6.1 Μερικές διατάξεις

Υπάρχουν πολλοί ισοδύναμοι τρόποι να επεκτείνουμε το αρχικό μοντέλο. Σε αυτή την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε μερικές διατάξεις. Παραθέτουμε μια σειρά από ορισμούς.

Ορισμός 6.1.1 *Μια μερική διάταξη είναι ένα ζεύγος $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P} \neq 0$ και η $\leq$ είναι μια μεταβατική και ανακλαστική διμελής σχέση στο $\mathbb{P}$. Θα λέμε ότι το p επεκτείνει το q αν $p \leq q$.*

Συχνά για λόγους συντομίας θα γράφουμε για μια μερική διάταξη $\mathbb{P}$ και θα εννοούμε $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, όταν δεν προκαλείται σύγχυση. Επίσης θα γράφουμε $\mathbb{P} \in M$ και θα εννοούμε ότι και $\leq \in M$.

Ορισμός 6.1.2 *Έστω $\mathbb{P}$ μερική διάταξη. Τα $p, q \in \mathbb{P}$ καλούνται συμβατά αν $\exists r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$. Διαφορετικά καλούνται ασύμβατα και γράφουμε $p \perp q$.*

Ορισμός 6.1.3 *Έστω $\mathbb{P}$ μερική διάταξη. Το $D \subset \mathbb{P}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{P}$ αν $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D(q \leq p)$.*

Ορισμός 6.1.4 *Έστω $\mathbb{P}$ μερική διάταξη. Το $G \subset \mathbb{P}$ είναι φίλτρο στο $\mathbb{P}$ αν $\forall p, q \in G \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$ και $\forall p \in G \forall q \in \mathbb{P}(q \geq p \to q \in G)$.*

Ορισμός 6.1.5 *Έστω $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ μερική διάταξη και M ένα σύνολο. Το G καλείται $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$-generic πάνω στο M αν είναι φίλτρο στο $\mathbb{P}$ και για κάθε πυκνό $D \subset \mathbb{P}$, $D \in M \to G \cap D \neq 0$.*

Το σύνολο M του προηγούμενου ορισμού θα είναι στις εφαρμογές μας το αρχικό αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι όλες οι έννοιες που ορίσαμε είναι απόλυτες για μεταβατικά μοντέλα του ZFC.

Λέμε ότι το p επεκτείνει το q αν $p \leq q$ γιατί διαισθητικά το p μας δίνει περισσότερες πληροφορίες για ένα σύνολο που είναι $\mathbb{P}$-generic πάνω στο μοντέλο M. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.1.1

$$\mathbb{P} = Fn(\omega, 2) = \{p : p \subset \omega \times 2 \wedge |p| < \omega \wedge \eta\ p\ \textit{είναι συνάρτηση}\}$$

Θέτουμε $p \leq q$ αν $q \subset p$. Παρατηρούμε ότι $\forall p \in Fn(\omega, 2)(p \leq 0)$ άρα η κενή συνάρτηση είναι μέγιστο στοιχείο της $Fn(\omega, 2)$. Τα p και q είναι συμβατά αν $p \restriction (dom(p) \cap dom(q)) = q \restriction (dom(p) \cap dom(q))$. Τότε η $p \cup q$ είναι μια κοινή επέκταση των p και q. Αν το G είναι φίλτρο τότε τα στοιχεία του είναι συμβατά άρα αν θέσουμε $f_G = \bigcup G$ η f_G είναι συνάρτηση με $dom(f_G) \subset \omega$. Αν $p \in G$ μπορούμε να θεωρήσουμε την p σα μια πεπερασμένη προσέγγιση της f_G, γιατί $p \subset f_G$ άρα $f_G \restriction dom(p) = p$. Αν $q \leq p$ τότε το q περιγράφει την f_G σε ένα μεγαλύτερο σύνολο από ότι το p. Έστω $D_n = \{p \in Fn(\omega, 2) : n \in dom(p)\}$ για $n \in \omega$. Κάθε D_n είναι πυκνό γιατί κάθε συνάρτηση στο $Fn(\omega, 2)$ μπορεί να επεκταθεί σε μία που το n ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Έστω $E_0 = \{p \in Fn(\omega, 2) : 0 \in ran(p)\}$ και $E_1 = \{p \in Fn(\omega, 2) : 1 \in ran(p)\}$. Τα E_0 και E_1 είναι και αυτά πυκνά γιατί κάθε συνάρτηση στο $Fn(\omega, 2)$ μπορεί να επεκταθεί σε μία που το 0 ή το 1 ανήκει στο πεδίο τιμών της. Έστω M μεταβατικό μοντέλο του ZFC. Από τον τρόπο που ορίστηκαν τα D_n και E_n είναι απόλυτα για μεταβατικά μοντέλα του ZFC, άρα ανήκουν στο M. Αν το G είναι $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M χτυπάει όλα αυτά τα σύνολα, άρα $dom(f_G) = \omega$ και $ran(f_G) = 2$.

Το επόμενο λήμμα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $\mathbb{P}$-generic συνόλου πάνω σε ένα αριθμήσιμο σύνολο.

Λήμμα 6.1.1 *Αν το M είναι αριθμήσιμο και $p \in \mathbb{P}$ τότε υπάρχει ένα G που είναι $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M τέτοιο ώστε $p \in G$.*

Απόδειξη.

Έστω D_n μια αρίθμηση όλων των πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{P}$ που ανήκουν στο M. Ορίζουμε επαγωγικά μια ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{P}$ ως εξής: $p_0 = p$ και p_{n+1} είναι μια οποιαδήποτε επέκταση του p_n τέτοια ώστε $p_{n+1} \in D_n$. Αυτό είναι εφικτό μιας και κάθε D_n είναι πυκνό.

Έστω $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n(q \geq p_n)\}$. Το G είναι $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M και $p \in G$. $\square$

Για να μπορέσουμε να επεκτείνουμε το αρχικό μοντέλο θα πρέπει το σύνολο που είναι $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M να μας δίνει κάτι παραπάνω, να μην είναι δηλαδή μέσα στο αρχικό μοντέλο.

Λήμμα 6.1.2 *Αν το M είναι ένα μεταβατικό μοντέλο του $ZF - P$, η $\mathbb{P} \in M$ είναι μερική διάταξη τέτοια ώστε $\forall p \in \mathbb{P} \exists q, r \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$ και το G είναι $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M, τότε $G \notin M$.*

Απόδειξη.

Αν $G \in M$ τότε $D = \mathbb{P} \setminus G \in M$ μιας και η συνολοθεωρητική διαφορά είναι απόλυτη. Έστω $p \in \mathbb{P}$. Τότε $\exists q, r \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$. Επειδή $q \perp r$, δε μπορούν και τα δύο να ανήκουν στο G, καθώς το G είναι φίλτρο. Άρα ένα από τα δύο ανήκει στο D, άρα το p έχει μια επέκταση στο D. Επομένως το D είναι πυκνό. Όμως $G \cap D = 0$ που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το G είναι $\mathbb{P}$-generic. $\square$

Παρατηρούμε ότι για την μερική διάταξη $Fn(\omega, 2)$ ισχύει η υπόθεση του παραπάνω λήμματος. Πράγματι έστω $p \in Fn(\omega, 2)$. Επιλέγουμε $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $n \notin dom(p)$ και θέτουμε $q = p \cup \{\langle n, 0 \rangle\}$ και $r = p \cup \{\langle n, 1 \rangle\}$. Τότε $q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r$.

6.2 Generic επεκτάσεις

Πλέον διαθέτουμε όλα τα εργαλεία που χρειαζόμαστε για να επεκτείνουμε το αρχικό αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο M. Δεδομένης μιας μερικής διάταξης $\mathbb{P}$ και ενός συνόλου G που να είναι $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M θα ορίσουμε το μοντέλο $M[G]$ που θα είναι το ελάχιστο μοντέλο του ZFC που θα επεκτείνει το M και θα περιέχει το G. Οι άνθρωποι που ζουν μέσα στο μοντέλο M δε θα μπορούν να έχουν πλήρη εικόνα του $M[G]$ αν $G \notin M$. Ωστόσο όλα τα εργαλεία για την κατασκεύη του $M[G]$ υπάρχουν μέσα στο M και το μόνο που χρειάζονται είναι να τους δοθεί το σύνολο G. Επομένως κάθε στοιχείο του $M[G]$ θα έχει ένα όνομα στο M που θα εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε από το G.

Ορισμός 6.2.1 *Το τ καλείται $\mathbb{P}$-όνομα αν είναι μια διμελής σχέση και*

$$\forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau \; [\text{το } \sigma \text{ είναι } \mathbb{P}\text{-όνομα} \wedge p \in \mathbb{P}].$$

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός χρησιμοποιεί μόνο το σύνολο $\mathbb{P}$ και όχι κάποιο μοντέλο ή κάποια διάταξη στο $\mathbb{P}$. Ορίζουμε $dom(\tau) = \{\sigma : \exists p \in \mathbb{P}(\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\}$ αν και συνήθως το τ δεν είναι συνάρτηση.

Λήμμα 6.2.1 *Η έννοια του $\mathbb{P}$-ονόματος είναι απόλυτη για μεταβατικά μοντέλα του $ZF - P$.*

Απόδειξη.

Η έννοια του $\mathbb{P}$-ονόματος ορίστηκε αναδρομικά. Πιο αυστηρά για δεδομένο $\mathbb{P}$ θα έπρεπε να είχαμε ορίσει τη χαρακτηριστική συνάρτηση των $\mathbb{P}$-ονομάτων, $\mathbf{H}_{\mathbb{P}}$ ως εξής:

$$\mathbf{H}_{\mathbb{P}}(x) = 1 \text{ αν η x είναι διμελής σχέση } \wedge \forall \langle \sigma, p \rangle \in x[\mathbf{H}_{\mathbb{P}}(\sigma) = 1 \wedge p \in \mathbb{P}]$$

$$\mathbf{H}_{\mathbb{P}}(x) = 0 \text{ διαφορετικά}$$

Επομένως το τ είναι $\mathbb{P}$-όνομα αν $\mathbf{H}_{\mathbb{P}}(\tau) = 1$. Η $\mathbf{H}_{\mathbb{P}}$ έχει οριστεί αναδρομικά και η σχέση που χρησιμοποιήθηκε στην αναδρομή είναι η $x \in trcl(y)$. Όλες οι έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν στον ορισμό της είναι απόλυτες άρα και η $\mathbf{H}_{\mathbb{P}}$ είναι απόλυτη άρα το ίδιο είναι και η έννοια του $\mathbb{P}$-ονόματος. □

Ορισμός 6.2.2 *Η $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ είναι η κλάση των $\mathbb{P}$-ονομάτων. Αν το M είναι ένα μεταβατικό μοντέλο του ZFC και $\mathbb{P} \in M$ τότε $M^{\mathbb{P}} = \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \cap M$ ή ισοδύναμα $M^{\mathbb{P}} = \{\tau \in M : (\text{το } \tau \text{ είναι } \mathbb{P}\text{-όνομα})^M\}$.*

Για $\mathbb{P} \neq 0$ η $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ δεν είναι ποτέ σύνολο. Αυτό για μας δε θα είναι πρόβλημα επειδή θα δουλέψουμε μόνο στο $M^{\mathbb{P}}$. Για κάθε $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ ορίζουμε μέσω του G ένα σύνολο $\tau[G]$. Το νέο μοντέλο $M[G]$ θα είναι το σύνολο όλων αυτών των συνόλων.

Ορισμός 6.2.3 $\tau[G] = \{\sigma[G] : \exists p \in G(\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\}$.

Ορισμός 6.2.4 *Αν το M είναι ένα μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ και $G \subset \mathbb{P}$ τότε $M[G] = \{\tau[G] : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$.*

Παρατηρούμε ότι αν το M είναι αριθμήσιμο το ίδιο θα είναι και $M[G]$. Το $\tau[G]$ ορίστηκε αναδρομικά χρησιμοποιώντας απόλυτες έννοιες άρα είναι απόλυτο για μεταβατικά μοντέλα του $ZF - P$. Επομένως ισχύει το παρακάτω.

Λήμμα 6.2.2 *Αν M,N είναι μεταβατικά μοντέλα του ZFC, $M \subset N$, $\mathbb{P} \in M$, $G \subset \mathbb{P}$ και $G \in N$ τότε $M[G] \subset N$.*

Απόδειξη.

Για κάθε $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, $\tau \in N$. Επιπλέον $G \in N$, άρα, επειδή η $\tau[G]$ είναι απόλυτη, $\tau[G] = (\tau[G])^N \in N$. □

Επομένως αν δείξουμε ότι το $M[G]$ είναι ένα μεταβατικό μοντέλο του ZFC που επεκτείνει το M και περιέχει το G, θα είναι το ελάχιστο τέτοιο μοντέλο.

Στο εξής υποθέτουμε ότι η $\mathbb{P}$ έχει κάποιο μέγιστο στοιχείο $1_{\mathbb{P}}$, δηλαδή $\forall p \in \mathbb{P}(p \leq 1_{\mathbb{P}})$. Τότε για κάθε για κάθε μη κενό φίλτρο G, $1_{\mathbb{P}} \in G$. Με βάση αυτή την παρατήρηση θα δούμε ότι κάθε στοιχείο του M έχει ένα $\mathbb{P}$-όνομα ανεξάρτητα από το $\mathbb{P}$-generic G.

Ορισμός 6.2.5 *Έστω $\mathbb{P}$ μερική διάταξη και $x \in M$. Ορίζουμε αναδρομικά το $\mathbb{P}$-όνομα $\breve{x} = \{\langle \breve{y}, 1_{\mathbb{P}} \rangle : y \in x\}$.*

Λήμμα 6.2.3 *Αν το M είναι ένα μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη και G μη κενό φίλτρο στο $\mathbb{P}$ τότε για κάθε $x \in M$ $\breve{x} \in M^{\mathbb{P}}$ και $\breve{x}[G] = x$.*

Απόδειξη.

Έστω $x \in M$. Επειδή η $\breve{}$ είναι απόλυτη, $\breve{x} \in M^{\mathbb{P}}$. Κάθε μη κενό φίλτρο στο $\mathbb{P}$ περιέχει το $1_{\mathbb{P}}$ άρα $\breve{x}[G] = \{\breve{y}[G] : y \in x\}$. Με επαγωγή στο x, $\breve{x}[G] = x$. □

Θεώρημα 6.2.1 *Αν το M είναι ένα μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη και G μη κενό φίλτρο στο $\mathbb{P}$ τότε*

1. *$M \subset M[G]$.*
2. *το $M[G]$ είναι μεταβατικό.*
3. *$G \in M[G]$.*

Απόδειξη.

1. Προκύπτει απευθείας από το προηγούμενο λήμμα.
2. Έστω $x \in M[G]$ και $y \in x$. Τότε $x = \tau[G]$ για κάποιο $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ και $y = \sigma[G]$ για κάποιο σ για το οποίο $\exists p \in G(\langle \sigma, p \rangle \in \tau)$. Επειδή το M είναι μεταβατικό $\sigma \in M$ άρα $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ άρα $y = \sigma[G] \in M[G]$.
3. Έστω $\Gamma = \{\langle \breve{p}, p \rangle : p \in \mathbb{P}\}$. Επειδή $\mathbb{P} \in M$ και οι έννοιες που χρησιμοποιούνται στον ορισμό του Γ είναι απόλυτες $\Gamma \in M$. Το Γ είναι προφανώς $\mathbb{P}$-όνομα άρα $\Gamma \in M^{\mathbb{P}}$. $\Gamma[G] = \{\breve{p}[G] : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$. Άρα $G \in M[G]$.

□

Λήμμα 6.2.4 *Αν το M είναι ένα μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη και G μη κενό φίλτρο στο $\mathbb{P}$ τότε*

1. *$\forall \tau \in M^{\mathbb{P}}(rank(\tau[G]) \leq rank(\tau))$.*
2. *$o(M[G]) = o(M)$.*

Απόδειξη.

1. Με επαγωγή στο τ. Έστω ότι ισχύει για κάθε $\sigma \in dom(\tau)$. Προφανώς $rank(\sigma) < rank(\tau)$ για κάθε $\sigma \in dom(\tau)$. Άρα από επαγωγική υπόθεση $rank(\sigma[G]) < rank(\tau)$. Όμως $\tau[G] \subset \{\sigma[G] : \sigma \in dom(\tau)\}$. Επομένως, επειδή $rank(\tau[G]) = sup\{rank(x) + 1 : x \in \tau[G]\}$ και $rank(x) + 1 \leq rank(\tau)$ για κάθε $x \in \tau[G]$, $rank(\tau[G]) \leq rank(\tau)$.

2. Επειδή $M \subset M[G]$ προφανώς $o(M) \subset o(M[G])$. Άρα αρκεί να δειχθεί ότι $o(M[G]) \subset o(M)$. Έστω $\alpha \in o(M[G])$. Θα υπάρχει $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ τέτοιο ώστε $\alpha = \tau[G]$. Τότε $\alpha = rank(\alpha) = rank(\tau[G]) \leq rank(\tau)$. Επειδή το M είναι ένα μεταβατικό μοντέλο του ZFC η $rank$ είναι απόλυτη άρα $rank(\tau) \in M$. Επομένως λόγω μεταβατικότητας $\alpha \in M$.

□

Ορίζοντας ορισμένα ονόματα ακόμα θα δείξουμε ότι το $M[G]$ ικανοποιεί κάποια από τα αξιώματα του ZFC.

Ορισμός 6.2.6 *1.* $up(\sigma, \tau) = \{\langle \sigma, 1_{\mathbb{P}} \rangle, \langle \tau, 1_{\mathbb{P}} \rangle\}$.

2. $op(\sigma, \tau) = up(up(\sigma, \sigma), up(\sigma, \tau))$.

Λήμμα 6.2.5 *Αν το M είναι ένα μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη, G μη κενό φίλτρο στο $\mathbb{P}$ και $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ τότε*

1. $up(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$ *και* $up(\sigma, \tau)[G] = \{\sigma[G], \tau[G]\}$.

2. $op(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$ *και* $op(\sigma, \tau)[G] = \langle \sigma[G], \tau[G] \rangle$.

Απόδειξη.

Η up είναι απόλυτη και προφανώς το $up(\sigma, \tau)$ είναι $\mathbb{P}$-όνομα άρα $up(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$. Κάθε μη κενό φίλτρο στο $\mathbb{P}$ περιέχει το $1_{\mathbb{P}}$ άρα $up(\sigma, \tau)[G] = \{\sigma[G], \tau[G]\}$. Από αυτά προκύπτει και το αποτέλεσμα για το $op(\sigma, \tau)$. □

Λήμμα 6.2.6 *Αν το M είναι ένα μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη και G μη κενό φίλτρο στο $\mathbb{P}$ τότε το $M[G]$ ικανοποιεί τα αξιώματα της Έκτασης, της Θεμελίωσης, του Ζεύγους και της Ένωσης.*

Απόδειξη.

Το Αξίωμα της Έκτασης ισχύει στο $M[G]$, γιατί το $M[G]$ είναι μεταβατικό, και το Αξίωμα της Θεμελίωσης ισχύει σε κάθε κλάση. Το Αξίωμα του Ζεύγους ισχύει γιατί αν $\sigma[G], \tau[G] \in M[G]$ τότε $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ άρα $up(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$ άρα $\{\sigma[G], \tau[G]\} = up(\sigma, \tau)[G] \in M[G]$. Τέλος για το Αξίωμα της Ένωσης πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\sigma[G] \in M[G]$ υπάρχει $\tau[G] \in M[G]$ τέτοιο ώστε $\bigcup \sigma[G] \subset \tau[G]$. Έστω $\tau = \bigcup dom(\sigma)$. $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ άρα $\tau[G] \in M[G]$. Αν το $\pi[G]$ είναι στοιχείο του $\sigma[G]$ τότε $\pi \in dom(\sigma)$. Επομένως $\pi \subset \tau$ άρα $\pi[G] \subset \tau[G]$. Επομένως $\bigcup \sigma[G] \subset \tau[G]$. □

Μέχρι στιγμής έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο ότι το G περιέχει το $1_{\mathbb{P}}$ αλλά όχι ότι είναι $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M. Η σημασία της ιδιότητας του αυτής θα φανεί όταν θα αναπτύξουμε την έννοια της forcing.

6.3 Forcing

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε κάποιες προτάσεις που ισχύουν στο $M[G]$ ανεξάρτητα από το G, όπως το αξίωμα του ζεύγους. Γενικά όμως η αλήθεια μιας πρότασης στο $M[G]$ θα εξαρτάται απο το συγκεκριμένο G.

Ορισμός 6.3.1 *Έστω $\varphi(x_1, ..., x_n)$ τύπος, M αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη, $\tau_1, ..., \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ και $p \in \mathbb{P}$. Θα γράφουμε $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ αν για κάθε G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M με $p \in G$ η $\varphi^{M[G]}(\tau_1[G], ..., \tau_n[G])$ είναι αληθής.*

Θα γράφουμε $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ αντί για $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ αν δε δημιουργείται σύγχυση.

Παράδειγμα 6.3.1 *Ας επιστρέψουμε για λίγο στο παράδειγμα της $Fn(\omega, 2)$. Αν δείξουμε ότι το $M[G]$ είναι μεταβατικό μοντέλο του ZFC τότε προκύπτει άμεσα ότι $f_G = \bigcup G \in M[G]$ μιας και η ένωση είναι απόλυτη. Ωστόσο μπορούμε να δείξουμε ότι $f_G \in M[G]$ και απευθείας. Έστω*

$$\tau = \{\left\langle \langle n, m\rangle\check{}, p \right\rangle : p \in Fn(\omega, 2) \wedge n \in dom(p) \wedge p(n) = m\}.$$

Τότε

$$\tau[G] = \{\langle n, m\rangle : \exists p \in G(n \in dom(p) \wedge p(n) = m)\} = f_G.$$

Άρα $f_G \in M[G]$. Έχουμε δείξει ότι για κάθε G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M η f_G είναι συνάρτηση με $dom(f_G) = \omega$ και $ran(f_G) = 2$. Άρα

$$0 \Vdash \text{ η } \tau \text{ είναι συνάρτηση με } dom(\tau) = \check{\omega} \text{ και } ran(\tau) = \check{2}$$

αφού το 0 είναι μέγιστο στοιχείο και ανήκει σε κάθε G. Έστω p η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το 1 τέτοια ώστε $p(0) = 0$. Τότε $p \Vdash \tau(\check{0}) = \check{0}$. Αν όμως q μια συνάρτηση με $q(0) = 1$ τότε $q \Vdash \tau(\check{0}) = \check{1}$.

Η ιδέα ότι αν το q επεκτείνει το p τότε μας προσφέρει περισσότερες πληροφορίες γίνεται συγκεκριμένη με το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 6.3.1 *Αν $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ και $q \leq p$ τότε $q \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$.*

Απόδειξη.

Έστω G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M με $q \in G$. Επειδή το G είναι φίλτρο $p \in G$. Άρα επειδή $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ η $\varphi^{M[G]}(\tau_1[G], ..., \tau_n[G])$ είναι αληθής. □

Η $\Vdash$ ικανοποιεί δύο πολυ σημαντικές ιδιότητες. Η πρώτη είναι ότι οι άνθρωποι που ζουν στο M ξέρουν αν η $p \Vdash \varphi$ είναι αληθής ή όχι και η δεύτερη ότι για κάθε φ που είναι αληθής στο $M[G]$ υπάρχει $p \in \mathbb{P}$ τέτοιο ώστε $p \Vdash \varphi$. Η πρώτη ιδιότητα φαίνεται παράξενη αφού ο ορισμός της $\Vdash$ έγινε στο $\mathbf{V}$ και όχι στο M και αναφέρεται σε όλα τα πιθανά $\mathbb{P}$-generic G. Για αυτό θα ορίσουμε μια άλλη σχέση $\Vdash^*$ και θα δείξουμε ότι για κάθε τύπο φ, $(p \Vdash \varphi) \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi)^M$.

Ορισμός 6.3.2 *Έστω $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ μερική διάταξη. Αν $E \subset \mathbb{P}$ και $p \in \mathbb{P}$ το E καλείται πυκνό κάτω από το p αν $\forall q \leq p \exists r \leq q (r \in E)$.*

Είναι εύκολο να δούμε ότι και αυτή η έννοια είναι απόλυτη για μεταβατικά μοντέλα του ZFC.

Λήμμα 6.3.2 *Έστω M μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$, $E \subset \mathbb{P}$, $E \in M$ και G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M. Τότε*

1. *Αν $G \cap E = 0$, $\exists q \in G \forall r \in E (r \perp q)$.*

2. *Αν $p \in G$ και το E είναι πυκνό κάτω από το p, $G \cap E \neq 0$.*

Απόδειξη.

1. Έστω $A = \{p : \exists r \in E(p \leq r)\}$, $B = \{q : \forall r \in E(r \perp q)\}$ και $D = A \cup B$. Για κάθε $q \in \mathbb{P}$ με $q \notin D$ υπάρχει $r \in E$ τέτοιο ώστε $\neg(r \perp q)$. Άρα υπάρχει p τέτοιο ώστε $p \leq q \wedge p \leq r$ άρα το p είναι επέκταση του q στο D. Επομένως το D είναι πυκνό. Άρα $G \cap D \neq 0$. Αν $G \cap A \neq 0$, επειδή το G είναι φίλτρο, $G \cap E \neq 0$ που είναι άτοπο. Άρα $G \cap B \neq 0$.

2. Αν $G \cap E = 0$ έστω $q \in G$ τέτοιο ώστε $\forall r \in E(r \perp q)$. Επειδή το G είναι φίλτρο, έστω q' τέτοιο ώστε $q' \leq q$ και $q' \leq p$. Επειδή το E είναι πυκνό κάτω από το p, έστω $r \in E$ τέτοιο ώστε $r \leq q'$. Τότε $r \leq q$ που είναι άτοπο μιας και έχουμε υποθέσει ότι $r \perp q$.

□

Ορισμός 6.3.3 *Έστω $\varphi(x_1, ..., x_n)$ τύπος, $\mathbb{P}$ μερική διάταξη, $\tau_1, ..., \tau_n \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ και $p \in \mathbb{P}$. Με αναδρομή στο μήκος της φ ορίζουμε $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ ως εξής:*

1. *$p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ αν για κάθε $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$ το σύνολο*

$$\{q \leq p : q \leq s_1 \to \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 (q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

είναι πυκνό κάτω από το p και για κάθε $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$ το σύνολο

$$\{q \leq p : q \leq s_2 \to \exists \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 (q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

είναι πυκνό κάτω από το p.

2. *$p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ αν το σύνολο*

$$\{q : \exists \langle \pi, s \rangle \in \tau_2 (q \leq s \wedge q \Vdash^* \tau_1 = \pi)\}$$

είναι πυκνό κάτω από το p.

3. *$p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$ αν $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ και $p \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$.*

4. *$p \Vdash^* \neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ αν δεν υπάρχει $q \leq p$ τέτοιο ώστε $q \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$.*

5. *$p \Vdash^* \exists x \varphi(x, \tau_1, ..., \tau_n)$ αν το σύνολο*

$$\{r : \exists \sigma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}(r \Vdash^* \varphi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n))\}$$

είναι πυκνό κάτω από το p.

Λήμμα 6.3.3 *Αν ο $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ είναι ατομικός τύπος τότε η $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \tau_2)$ είναι απόλυτη για μεταβατικά μοντέλα του ZFC.*

Απόδειξη.

Ο ορισμός του $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ είναι αναδρομικός. Πιο αυστηρά ορίζουμε μια συνάρτηση $\mathbf{F} : \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \times \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \to \mathcal{P}(\mathbb{P})$ τέτοια ώστε $\mathbf{F}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle) = \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2\}$. Η $\mathbf{F}$ ορίζεται με αναδρομή στη σχέση $\mathbf{R}$ όπου

$$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \, \mathbf{R} \, \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \leftrightarrow [\pi_1 \in dom(\tau_1) \wedge \pi_2 \in dom(\tau_2)].$$

Η $\mathbf{R}$ είναι καλώς θεμελιωμένη, set-like και απόλυτη άρα για τον ορισμό της $\mathbf{F}$ όπως φαίνεται και από το 1. του προήγουμενου ορισμού χρησιμοποιούνται απόλυτες έννοιες και επομένως είναι απόλυτη. Το γεγονός ότι η $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ είναι απόλυτη είναι προφανές μιας και $(p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2) \leftrightarrow (p \in \mathbf{F}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle))$. Τώρα που δείξαμε ότι η $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ είναι απόλυτη το ότι η $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ είναι απόλυτη προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της. □

Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει το ίδιο για έναν οποιοδήποτε τύπο. Στο σκέλος 5. του ορισμού της $\Vdash^*$ το $\exists \sigma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ γινεται $\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}$ αν σχετικοποιηθεί σε ένα μοντέλο M.

Λήμμα 6.3.4 *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *$p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$.*

2. *$\forall r \leq p(r \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))$.*

3. *το σύνολο $\{r : r \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)\}$ είναι πυκνό κάτω από το p.*

Απόδειξη.

Είναι προφανές ότι $(2) \to (1)$ και $(2) \to (3)$.
Υποθέτουμε αρχικά ότι ο φ είναι ατομικός. Για να δείξουμε ότι $(1) \to (2)$ απλά παρατηρούμε ότι αν ένα σύνολο είναι πυκνό κάτω από το p και $r \leq p$ τότε είναι και πυκνό κάτω από το r. Για να δείξουμε ότι $(3) \to (1)$ αρκεί να δείξουμε ότι αν $D \subset \mathbb{P}$ και το $\{r :$ το D είναι πυκνό κάτω από το r$\}$ είναι πυκνό κάτω απ το p τότε το D είναι πυκνό κάτω από το p. Πράγματι έστω $q \leq p$. Επειδή το $\{r :$ το D είναι πυκνό κάτω από το r$\}$ είναι πυκνό κάτω από το p υπάρχει $r \leq q$ τέτοιο ώστε το D να είναι πυκνό κάτω από το r. Άρα υπάρχει $s \leq r$ με $s \in D$. Τώρα που η ισοδυναμία έχει αποδειχθεί για ατομικούς τύπους την αποδεικνύουμε για κάθε

τύπο με επαγωγή στο μήκος του.
Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\chi \wedge \psi$. Για να δείξουμε ότι (1) $\rightarrow$ (2) υποθέτουμε ότι $p \Vdash^* \varphi$ άρα $p \Vdash^* \chi$ και $p \Vdash^* \psi$. Από επαγωγική υπόθεση $\forall r \leq p(r \Vdash^* \chi)$ και $\forall r \leq p(r \Vdash^* \psi)$. Επομένως $\forall r \leq p(r \Vdash^* \chi \wedge r \Vdash^* \psi)$ που είναι εξ ορισμού $\forall r \leq p(r \Vdash^* \varphi)$. Για να δείξουμε ότι (3) $\rightarrow$ (1) υποθέτουμε ότι το $D = \{r : r \Vdash^* \varphi\} = \{r : r \Vdash^* \chi \wedge r \Vdash^* \psi\}$ είναι πυκνό κάτω από το p. Έστω $D_1 = \{r : r \Vdash^* \chi\}$ και $D_2 = \{r : r \Vdash^* \psi\}$. Τα D_1, D_2 είναι πυκνά κάτω από το p μιας και $D \subset D_1$ και $D \subset D_2$. Άρα από επαγωγική υπόθεση $p \Vdash^* \chi$ και $p \Vdash^* \psi$. Επομένως $p \Vdash^* \varphi$.
Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$. Για να δείξουμε ότι (1) $\rightarrow$ (2) απλά παρατηρούμε ότι αν δεν υπάρχει $q \leq p$ τέτοιο ώστε $q \Vdash^* \psi$ τότε για κάθε $r \leq p$ δεν υπάρχει $q \leq r$ τέτοιο ώστε $q \Vdash^* \psi$. Για να δείξουμε ότι (3) $\rightarrow$ (1) υποθέτουμε ότι το $D = \{r : r \Vdash^* \varphi\}$ είναι πυκνό κάτω από το p και δεν ισχύει η $p \Vdash^* \varphi$. Άρα υπάρχει $q \leq p$ τέτοιο ώστε $q \Vdash^* \psi$. Επειδή απο επαγωγική υπόθεση (1) $\rightarrow$ (2) για τον ψ, για κάθε $r \leq q$, $r \Vdash^* \psi$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το $D = \{r : r \Vdash^* \varphi\}$ είναι πυκνό κάτω από το p και αν το $r \leq q$ ανήκει στο D τότε $r \not\Vdash^* \psi$.
Τέλος έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\exists x\psi$. Η απόδειξη δε χρησιμοποιεί την επαγωγική υπόθεση και είναι όμοια με την περίπτωση των ατομικών τύπων. □

Θεώρημα 6.3.1 *Έστω M μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη, $\tau_1, ..., \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ και G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M.*

1. *Αν $p \in G$ και $(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))^M$ τότε $(\varphi(\tau_1[G], ..., \tau_n[G]))^{M[G]}$.*
2. *Αν $(\varphi(\tau_1[G], ..., \tau_n[G]))^{M[G]}$ τότε $\exists p \in G(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))^M$.*

Απόδειξη.

Η απόδειξη θα γίνει αρχικά για ατομικούς τύπους. Για ατομικούς τύπους ο $p \Vdash^* \varphi$ είναι απόλυτος για το M άρα μπορούμε να αγνοήσουμε τη σχετικοποίηση.
Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\tau_1 = \tau_2$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στα τ_1 και τ_2 χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$.

1. Έστω ότι $p \in G$ και $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\tau_1[G] = \tau_2[G]$. Θα δείξουμε ότι $\tau_1[G] \subset \tau_2[G]$. Η απόδειξη του $\tau_2[G] \subset \tau_1[G]$ είναι όμοια. Κάθε στοιχείο του $\tau_1[G]$ είναι της μορφής $\pi_1[G]$, όπου $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$ για κάποιο $s_1 \in G$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\pi_1[G] \in \tau_2[G]$. Επειδή το G είναι φίλτρο υπάρχει $r \in G$ με $r \leq p$ και $r \leq s_1$. Επειδή $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ και $r \leq p$, $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Επομένως εξ ορισμού το σύνολο

   $$D = \{q \leq r : q \leq s_1 \rightarrow \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

   είναι πυκνό κάτω από το r. Από το Λήμμα 6.3.2 $G \cap D \neq 0$. Έστω $q \in G \cap D$. $q \leq r$ και $r \leq s_1$ άρα $q \leq s_1$. Επομένως $\exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)$. Επειδή $q \leq s_2$ και το G είναι φίλτρο, $s_2 \in G$. Άρα $\pi_2[G] \in \tau_2[G]$. Επιπλέον από επαγωγική υπόθεση $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ συνεπάγεται $\pi_1[G] = \pi_2[G]$. Επομένως $\pi_1[G] \in \tau_2[G]$.

2. Υποθέτουμε ότι $\tau_1[G] = \tau_2[G]$. Έστω D το σύνολο όλων των $r \in \mathbb{P}$ που ικανοποιούν κάποιο από τα παρακάτω:

   (a) $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$

   (b) $\exists \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1[r \leq s_1 \wedge \forall \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \forall q \in \mathbb{P}((q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \to q \perp r)]$

   (c) $\exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2[r \leq s_2 \wedge \forall \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 \forall q \in \mathbb{P}((q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \to q \perp r)]$

   Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει $r \in G$ που να ικανοποιεί το (b) ή το (c). Άρκεί να το δείξουμε για το (b). Η απόδειξη για το (c) θα είναι ακριβώς η ίδια. Έστω ότι υπάρχει $r \in G$ και $\langle \pi_1, s_1 \rangle$ όπως στο (b). Τότε, επειδή $r \leq s_1$, $s_1 \in G$ άρα $\pi_1[G] \in \tau_1[G] = \tau_2[G]$. Έστω $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$ με $s_2 \in G$ και $\pi_1[G] = \pi_2[G]$. Από επαγωγική υπόθεση υπάρχει $q_0 \in G$ με $q_0 \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$. Επιλέγουμε $q \in G$ με $q \leq q_0$ και $q \leq s_2$. Επειδή $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ από το (b) έχουμε $q \perp r$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $q, r \in G$ και το G είναι φίλτρο.
   Επομένως αν $\neg \exists r \in G(r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2)$ τότε $G \cap D = 0$. Το D έχει οριστεί χρησιμοποιώντας έννοιες απόλυτες για το M άρα $D \in M$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το D είναι πυκνό.
   Έστω $p \in \mathbb{P}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $r \in D$ με $r \leq p$. Αν $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ τότε είναι τετριμμένο γιατί $p \in D$. Αν όχι από τον ορισμό του $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ ισχύει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω:

   (a) $\exists \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 \exists r \leq p \forall q \leq r[q \leq s_1 \wedge \forall \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2(\neg(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))]$

   (b) $\exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \exists r \leq p \forall q \leq r[q \leq s_2 \wedge \forall \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1(\neg(q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))]$

   Έστω ότι ισχύει το (a). Επιλέγουμε $\langle \pi_1, s_1 \rangle$ και r που να το ικανοποιούν. Εφόσον $\forall q \leq r(q \leq s_1)$, $r \leq s_1$. Αν υπάρχουν $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$ και $q \leq s_2$ τέτοια ώστε $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ τότε $q \perp r$, γιατί διαφορετικά θα υπήρχε μια κοινή επέκταση των q και r πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το (a). Επομένως $r \leq p$ και $r \in D$ μιας και ικανοποιεί το δεύτερο σκέλος του ορισμού του D. Ομοίως αν ισχύει το (b) υπάρχει ένα $r \leq p$ που ικανοποιεί το τρίτο σκέλος του ορισμού του D.

Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\tau_1 \in \tau_2$. Θα χρησιμοποιήσουμε ότι το Θέωρημα έχει αποδειχθεί για τύπους της μορφής $\tau_1 = \tau_2$.

1. Έστω ότι $p \in G$ και $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$. Εξ ορισμού το σύνολο

$$D = \{q : \exists \langle \pi, s \rangle \in \tau_2(q \leq s \wedge q \Vdash^* \tau_1 = \pi)\}$$

   είναι πυκνό κάτω από το p. Επομένως $G \cap D \neq 0$. Έστω $q \in G$ και $\langle \pi, s \rangle \in \tau_2$ τέτοια ώστε $q \leq s$ και $q \Vdash^* \tau_1 = \pi$. $s \in G$ μιας και $q \leq s$ άρα $\pi[G] \in \tau_2[G]$ εξ ορισμού του $\tau_2[G]$. Εφαρμόζοντας το πρώτο σκέλος του Θεωρήματος για τον τύπο $\tau_1 = \pi$, επειδή $q \in G$ και $q \Vdash^* \tau_1 = \pi$, $\tau_1[G] = \pi[G]$. Επομένως $\tau_1[G] \in \tau_2[G]$.

2. Υποθέτουμε ότι $\tau_1[G] \in \tau_2[G]$. Επομένως υπάρχει $\langle \pi, s \rangle \in \tau_2$ τέτοιο ώστε $s \in G$ και $\tau_1[G] = \pi[G]$. Εφαρμόζοντας το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος για τον τύπο $\tau_1 = \pi$

υπάρχει $r \in G$ τέτοιο ώστε $r \Vdash^* \tau_1 = \pi$. Έστω $p \in G$ με $p \leq s$ και $p \leq r$. Τότε $\forall q \leq p(q \leq s \wedge q \Vdash^* \tau_1 = \pi)$ άρα προφανώς το σύνολο

$$\{q : \exists \langle \pi, s\rangle \in \tau_2(q \leq s \wedge q \Vdash^* \tau_1 = \pi)\}$$

είναι πυκνό κάτω από το p, άρα $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$.

Τώρα που το Θεώρημα έχει αποδειχθεί για ατομικούς τύπους θα αποδείξουμε τη γενική περίπτωση με επαγωγή στο μήκος της φ. Η επαγωγή θα γίνει ταυτόχρονα και για τα δύο σκέλη του Θεωρήματος. Πλέον δε μπορούμε να αγνοήσουμε τις σχετικοποιήσεις γιατί ο $p \Vdash^* \varphi$ δεν είναι απόλυτος αν ο φ έχει ποσοδείκτες. Για λόγους συντομίας οι ελεύθερες μεταβλητές των τύπων εννοούνται και παραλείπονται.
Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$.

1. Έστω ότι $p \in G$ και $(p \Vdash^* \neg\psi)^M$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\neg\psi^{M[G]}$. Έστω ότι $\psi^{M[G]}$. Εφαρμόζοντας το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος για τον ψ υπάρχει $q \in G$ με $(q \Vdash^* \psi)^M$. Έστω $r \in G$ με $r \leq p$ και $r \leq q$. Τότε $(r \Vdash^* \psi)^M$ που είναι άτοπο μιας και από τον ορισμό του $(p \Vdash^* \neg\psi)^M$ δεν υπάρχει $r \leq p$ τέτοιο ώστε $(r \Vdash^* \psi)^M$.

2. Υποθέτουμε ότι $\neg\psi^{M[G]}$. Έστω

$$D = \{p : (p \Vdash^* \psi)^M \vee (p \Vdash^* \neg\psi)^M\}.$$

Από τον ορισμό του, $D \in M$. Επιπλέον το D είναι πυκνό. Πράγματι για κάθε $p \in \mathbb{P}$ είτε υπάρχει $q \leq p$ τέτοιο ώστε $(q \Vdash^* \psi)^M$, είτε δεν υπάρχει και $(p \Vdash^* \neg\psi)^M$. Επομένως $G \cap D \neq 0$. Έστω $p \in G \cap D$. Αν $(p \Vdash^* \psi)^M$ τότε εφαρμόζοντας το πρώτο σκέλος του Θεωρήματος για τον ψ, έχουμε $\psi^{M[G]}$ που είναι άτοπο. Επομένως $(p \Vdash^* \neg\psi)^M$.

Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\chi \wedge \psi$.

1. Έστω ότι $p \in G$ και $(p \Vdash^* \chi \wedge \psi)^M$. Τότε $(p \Vdash^* \chi)^M$ και $(p \Vdash^* \psi)^M$. Άρα $\chi^{M[G]}$ και $\psi^{M[G]}$, άρα $(\chi \wedge \psi)^{M[G]}$.

2. Υποθέτουμε ότι $(\chi \wedge \psi)^{M[G]}$. Επομένως $\chi^{M[G]}$ και $\psi^{M[G]}$. Άρα υπάρχουν $p, q \in G$ τέτοια ώστε $(p \Vdash^* \chi)^M$ και $(q \Vdash^* \psi)^M$. Έστω $r \in G$ με $r \leq p$ και $r \leq q$. Τότε $(r \Vdash^* \chi)^M$ και $(r \Vdash^* \psi)^M$ άρα $(r \Vdash^* \chi \wedge \psi)^M$.

Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\exists x\psi(x)$.

1. Έστω ότι $p \in G$ και $(p \Vdash^* \exists x\psi(x))^M$. Επομένως το

$$D = \{r : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash^* \psi(\sigma))^M\}$$

είναι πυκνό κάτω από το p. Από τον ορισμό του, $D \in M$. Επομένως $G \cap D \neq 0$. Επιλέγουμε $r \in G$ και $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ τέτοια ώστε $(r \Vdash^* \varphi(\sigma))^M$. Εφαρμόζοντας το πρώτο σκέλος του Θεωρήματος για τον ψ, $(\psi(\sigma[G]))^{M[G]}$. Επομένως $(\exists x\psi(x))^{M[G]}$.

2. Υποθέτουμε ότι $(\exists x\psi(x))^{M[G]}$. Επιλέγουμε ένα $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ τέτοιο ώστε $(\psi(\sigma[G]))^{M[G]}$. Εφαρμόζοντας το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος για τον ψ, υπάρχει $p \in G$ τέτοιο ώστε $(p \Vdash^* \psi(\sigma))^M$. Τότε $\forall r \leq p(r \Vdash^* \psi(\sigma))^M$ άρα προφανώς το σύνολο

$$\{r : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash^* \psi(\sigma))^M\}$$

είναι πυκνό κάτω από το p άρα $(p \Vdash^* \exists x\psi(x))^M$.

□

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε τις δύο ιδιότητες της $\Vdash$.

Θεώρημα 6.3.2 *Έστω M αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη και $\tau_1, ..., \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$. Για κάθε $p \in \mathbb{P}$,*

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))^M.$$

Απόδειξη.

Η συνεπαγωγή από τα δεξιά προς τα αριστερά προκύπτει απευθείας από το πρώτο σκέλος του προηγούμενου Θεωρήματος και τον ορισμό του $\Vdash$. Για τη συνεπαγωγή από τα αριστερά προς τα δεξιά υποθέτουμε ότι $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Για να δείξουμε ότι $(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))^M$, αρκεί από το Λήμμα 6.3.4 να δείξουμε ότι το $D = \{r : (r \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))^M\}$ είναι πυκνό κάτω από το p. Έστω ότι δεν είναι. Τότε υπάρχει $q \leq p$ τέτοιο ώστε $\neg\exists r \leq q(r \in D)$. Επομένως $(q \Vdash^* \neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n))^M$. Άρα από τη συνεπαγωγή από τα δεξιά προς τα αριστερά που έχει αποδειχθεί, $q \Vdash \neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Επειδή το M είναι αριθμήσιμο από το Λήμμα 6.1.1 υπάρχει G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M με $q \in G$. Τότε $\neg(\varphi(\tau_1[G], ..., \tau_n[G]))^{M[G]}$. Επίσης $p \in G$ μιας και $q \leq p$ άρα $(\varphi(\tau_1[G], ..., \tau_n[G]))^{M[G]}$ που είναι άτοπο. □

Το προηγούμενο θεώρημα θα χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι διάφορα σύνολα που ορίζονται χρησιμοποιώντας την $\Vdash$ βρίσκονται στο M. Για παράδειγμα για δεδομένα $\tau_1, ..., \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ το σύνολο $\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)\}$ βρίσκεται στο M γιατί είναι ίσο με το $\{p \in \mathbb{P} : (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))^M\}$ που βρίσκεται στο M από το αξίωμα του διαχωρισμού στο M.

Άμεσα από τα δύο προηγούμενα θεωρήματα προκύπτει και η δεύτερη ιδιότητα της $\Vdash$.

Πόρισμα 6.3.1 *Έστω M αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη, $\tau_1, ..., \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ και G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M.*

$$(\varphi(\tau_1[G], ..., \tau_n[G]))^{M[G]} \leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)).$$

Η $\Vdash^*$ δε θα μας χρειαστεί ξανά.

6.4 Το $M[G]$ ως μοντέλο του ZFC

Θα χρησιμοποιήσουμε τη forcing για να δείξουμε ότι το $M[G]$ είναι μοντέλο του ZFC. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας μια ενισχυμένη μορφή του αξιώματος της αντικατάστασης και μια ισοδύναμη του αξιώματος της επιλογής.

Λήμμα 6.4.1 *Στο ZF για κάθε τύπο $\varphi(x, y, A, z_1, ..., z_n)$,*

$$\forall A \forall z_1, ..., z_n[\forall x \in A \exists y \varphi(x, y, A, z_1, ..., z_n) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y, A, z_1, ..., z_n)].$$

Απόδειξη.

Για λόγους συντομίας τα $z_1, ..., z_n$ παραλείπονται. Έστω A και υποθέτουμε ότι $\forall x \in A \exists y \varphi(x, y, A)$. Έστω $\psi(x, A, \alpha)$ να είναι ο τύπος που περιγράφει ότι ο α είναι ο μικρότερος διατακτικός τέτοιος ώστε $\exists y \in R(\alpha)\varphi(x, y, A)$. Από υπόθεση και επειδή $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$, $\forall x \in A \exists! \alpha \psi(x, A, \alpha)$. Άρα απο το Αξίωμα της Αντικατάστασης $\exists C \forall x \in A \exists \alpha \in C \psi(x, A, \alpha)$. Έστω $\beta = sup(C)$ μιας και το C είναι σύνολο διατακτικών. Τότε το $R(\beta)$ είναι το ζητούμενο σύνολο B. □

Λήμμα 6.4.2 *Στο ZF το Αξίωμα της Επιλογής ισχύει αν και μόνο αν*

$$\forall x \exists \alpha \in \mathbf{ON} \exists f (\textit{η } f \textit{ είναι συνάρτηση} \wedge dom(f) = \alpha \wedge x \subset ran(f)).$$

Απόδειξη.

Η μια κατεύθυνση προκύπτει από το ότι κάθε καλή διάταξη είναι ισομορφική με ένα διατακτικό. Για την άλλη κατεύθυνση έστω $g(z) = min(f^{-1}\{z\})$ για κάθε $z \in x$. Τότε η g είναι 1-1 από το x στο α. Επομένως αν $yRz \leftrightarrow g(y) < g(z)$, η R διατάσσει καλώς το x. □

Θεώρημα 6.4.1 *Έστω M αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη και G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M. Το $M[G]$ είναι μοντέλο του ZFC.*

Απόδειξη.

Έχουμε ήδη δείξει ότι το $M[G]$ ικανοποιεί τα αξιώματα της Έκτασης, της Θεμελίωσης, του Ζεύγους και της Ένωσης.
Για να δείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα του Διαχωρισμού πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε τύπο $\varphi(x, v, y_1, ..., y_n)$ και για κάθε $\sigma, \tau_1, ..., \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$,

$$X = \{a \in \sigma[G] : (\varphi(a, \sigma[G], \tau_1[G], ..., \tau_n[G]))^{M[G]}\} \in M[G].$$

Έστω

$$\rho = \{\langle \pi, p \rangle \in dom(\sigma) \times \mathbb{P} : p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi, \sigma, \tau_1, ..., \tau_n))\}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.3.2 και το Αξίωμα του Διαχωρισμού στο M, $\rho \in M$. Άρα, επειδή προφανώς ειναι $\mathbb{P}$-όνομα, $\rho \in M^{\mathbb{P}}$. Επομένως αρκέι να δειχθεί ότι $\rho[G] = X$. Κάθε στοιχείο του $\rho[G]$ είναι της μορφής $\pi[G]$ όπου $\langle \pi, p \rangle \in \rho$ για κάποιο $p \in G$. Από τον ορισμό του ρ

$p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi, \sigma, \tau_1, ..., \tau_n))$ άρα $\pi[G] \in \sigma[G]$ και $(\varphi(\pi[G], \sigma[G], \tau_1[G], ..., \tau_n[G]))^{M[G]}$. Άρα $\pi[G] \in X$ άρα $\rho[G] \subset X$. Για να δείξουμε την ισότητα έστω $a \in X$. Τότε $a \in \sigma[G]$ άρα υπάρχει $\pi \in dom(\sigma)$ τέτοιο ώστε $a = \pi[G]$. Επομένως $(\pi[G] \in \sigma[G] \wedge \varphi(\pi[G], \sigma[G], \tau_1[G], ..., \tau_n[G]))^{M[G]}$. Από το Πόρισμα 6.3.1 υπάρχει $p \in G$ τέτοιο ώστε $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi, \sigma, \tau_1, ..., \tau_n))$. Τότε $\langle \pi, p \rangle \in \rho$, άρα $\pi[G] \in \rho[G]$. Επομένως $\rho[G] = X$.
Για να δείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα της Αντικατάστασης έστω $\varphi(x, v, r, z_1, ..., z_n)$ τύπος και $\sigma, \tau_1, ..., \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ και υποθέτουμε ότι

$$(\forall x \in \sigma[G] \exists! y \varphi(x, y, \sigma[G], \tau_1[G], ..., \tau_n[G]))^{M[G]}.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $\rho \in M^{\mathbb{P}}$ τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \sigma[G] \exists y \in \rho[G] \varphi(x, y, \sigma[G], \tau_1[G], ..., \tau_n[G])^{M[G]}.$$

Επειδή ο $p \Vdash \varphi(\pi, \mu, \sigma, \tau_1, ..., \tau_n)$ για $\pi, \mu \in M$ ορίζεται από τη σχετικοποίηση ενός τύπου στο Μ, εφαρμόζοντας την ενισχυμένη μορφή του Αξιώματος της Αντικατάστασης μέσα στο Μ υπάρχει $S \in M$ τέτοιο ώστε

$$\forall \pi \in dom(\sigma) \forall p \in \mathbb{P}[\exists \mu \in M^{\mathbb{P}}(p \Vdash \varphi(\pi, \mu, \sigma, \tau_1, ..., \tau_n)) \rightarrow \exists \mu \in S(p \Vdash \varphi(\pi, \mu, \sigma, \tau_1, ..., \tau_n))].$$

Προφανώς $S \subset M^{\mathbb{P}}$. Έστω $\rho = S \times \{1_{\mathbb{P}}\}$, άρα $\rho[G] = \{\mu[G] : \mu \in S\}$. Θα δείξουμε ότι το ρ ικανοποιεί το ζητούμενο. Έστω $x \in \sigma[G]$. Τότε για κάποιο $\pi \in dom(\sigma)$, $x = \pi[G]$. Από υπόθεση $\exists y \varphi(\pi[G], y, \sigma[G], \tau_1[G], ..., \tau_n[G])^{M[G]}$ άρα για κάποιο $\nu \in M^{\mathbb{P}}$,

$$\varphi(\pi[G], \nu[G], \sigma[G], \tau_1[G], ..., \tau_n[G])^{M[G]}.$$

Επομένως υπάρχει $p \in G$ τέτοιο ώστε $p \Vdash \varphi(\pi, \nu, \sigma, \tau_1, ..., \tau_n)$. Άρα από τον ορισμό του S υπάρχει $\mu \in S$ τέτοιο ώστε $p \Vdash \varphi(\pi, \mu, \sigma, \tau_1, ..., \tau_n)$. Επομένως $\mu[G] \in \rho[G]$ και

$$\varphi(\pi[G], \mu[G], \sigma[G], \tau_1[G], ..., \tau_n[G])^{M[G]}.$$

Για να δείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα του Απείρου αρκεί να δείξουμε ότι $\omega \in M[G]$. Όμως $\omega \in M$ άρα $\breve{\omega} \in M^{\mathbb{P}}$ άρα $\omega = \breve{\omega}[G] \in M[G]$.
Για το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου έστω $\sigma[G] \in M[G]$. Πρέπει να βρούμε ένα $\rho \in M^{\mathbb{P}}$ τέτοιο ώστε $\forall x \in M[G](x \subset \sigma[G] \rightarrow x \in \rho[G])$. Έστω $S = \{\tau \in M^{\mathbb{P}} : dom(\tau) \subset dom(\sigma)\}$. Παρατηρούμε ότι το S είναι το $\mathcal{P}(dom(\sigma) \times \mathbb{P})$ σχετικοποιημένο στο Μ. Έστω $\rho = S \times \{1_{\mathbb{P}}\}$. Θα δείξουμε ότι το ρ ικανοποιεί το ζητούμενο. Έστω $\mu \in M^{\mathbb{P}}$ τέτοιο ώστε $\mu[G] \subset \sigma[G]$. Έστω

$$\tau = \{\langle \pi, p \rangle : \pi \in dom(\sigma) \wedge p \Vdash \pi \in \mu\}.$$

$\tau \in S$ άρα $\tau[G] \in \rho[G]$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mu[G] = \tau[G]$. Για να δείξουμε ότι $\mu[G] \subset \tau[G]$, παρατηρούμε, μιας και $\mu[G] \subset \sigma[G]$, ότι κάθε στοιχείο του $\mu[G]$ είναι της μορφής $\pi[G]$ για κάποιο $\pi \in dom(\sigma)$. Επειδή $\pi[G] \in \mu[G]$ υπάρχει $p \in G$ τέτοιο ώστε $p \Vdash \pi \in \mu$, άρα $\langle \pi, p \rangle \in \tau$ άρα $\pi[G] \in \tau[G]$. Για να δείξουμε ότι $\tau[G] \subset \mu[G]$, παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του $\tau[G]$ είναι της μορφής $\pi[G]$ όπου $\langle \pi, p \rangle \in \tau$ για κάποιο $p \in G$. Τότε $p \Vdash \pi \in \mu$ άρα

$\pi[G] \in \mu[G]$.
Έχουμε δείξει ότι το $M[G]$ είναι μοντέλο του ZF. Για να δείξουμε το Αξίωμα της Επιλογής αρκεί να δείξουμε την ισοδύναμη μορφή του που παρουσιάστηκε παραπάνω. Έστω $x = \sigma[G] \in M[G]$. Από την ισοδύναμη μορφή του AC^M υπάρχει διατακτικός α και συνάρτηση $f : \alpha \to dom(\sigma)$ στο M. Επομένως $dom(\sigma) = \{\pi_\gamma : \gamma < \alpha\}$ όπου $\pi_\gamma = f(\gamma)$. Έστω $\tau = \{op(\check{\gamma}, \pi_\gamma) : \gamma < \alpha\} \times \{1_{\mathbb{P}}\}$. Τότε $\tau \in M$ και $\tau[G] = \{\langle \gamma, \pi_\gamma[G] \rangle : \gamma < \alpha\}$, άρα η $\tau[G]$ είναι συνάρτηση με $dom(\tau[G]) = \alpha$ και $\sigma[G] \subset ran(\tau[G])$. □

Πόρισμα 6.4.1 $Con(ZFC) \to Con(ZFC + \mathbf{V} \neq \mathbf{L})$

Απόδειξη.

Έστω M αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη και G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M τέτοιο ώστε $G \notin M$. Αυτό έχει δειχθεί ότι ισχύει για κάθε G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M αν το $\mathbb{P}$ είναι τέτοιο ώστε $\forall p \in \mathbb{P} \exists q, r \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$. Για παράδειγμα το $\mathbb{P} = Fn(\omega, 2)$ ικανοποιεί τη συνθήκη. Επειδή $G \notin M$, $M \subsetneqq M[G]$. Επιπλέον επειδή $o(M[G]) = o(M)$, $\mathbf{L}^{M[G]} = \mathbf{L}^M \subset M$. Επομένως το $M[G]$ είναι μοντέλο του $ZFC + \mathbf{V} \neq \mathbf{L}$.
□

Κεφάλαιο 7

Η συνέπεια της άρνησης της GCH

Για να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο στο οποίο να μην ισχύει η γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς θα χρησιμοποιήσουμε τις πεπερασμένες μερικές συναρτήσεις από ένα σύνολο I σε ένα άλλο J. Ουσιαστικά πρόκειται για μια γενίκευση της μερικής διάταξης $Fn(\omega, 2)$. Σε όλο το κεφάλαιο το M θα είναι ένα αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο του ZFC.

Ορισμός 7.0.1

$$Fn(I, J) = \{p : |p| < \omega \wedge \eta\ p\ \textit{είναι συνάρτηση} \wedge dom(p) \subset I \wedge ran(p) \subset J\}.$$

Διατάσσουμε το $Fn(I, J)$ *ως εξής:* $p \leq q \leftrightarrow p \supset q$.

Λήμμα 7.0.3 *Αν* $I, J \in M$ *τότε* $Fn(I, J) \in M$.

Απόδειξη.

Επειδή η έννοιες του πεπερασμένου, της συνάρτησης, του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών είναι απόλυτες και το $Fn(I, J)$ θα είναι απόλυτο. Άρα αν $I, J \in M$ τότε $Fn(I, J) = Fn(I, J)^M \in M$. Η $\leq$ είναι η σχέση του υποσυνόλου περιορισμένη στο $Fn(I, J)$ άρα ανήκει στο M. □

Λήμμα 7.0.4 *Αν* $I, J \in M$*, το* I *είναι άπειρο και το* G *είναι* $\mathbb{P}$*-generic πάνω στο* M *τότε η* $\bigcup G$ *είναι συνάρτηση από το* I *επί του* J*.*

Απόδειξη.

Επειδή το G είναι φίλτρο τα στοιχεία του είναι συμβατά άρα αν θέσουμε $f_G = \bigcup G$ η f_G είναι συνάρτηση με $dom(f_G) \subset I$ και $ran(f_G) \subset J$. Έστω $D_i = \{p \in Fn(I, J) : i \in dom(p)\}$ για $i \in I$. Κάθε D_i είναι πυκνό γιατί κάθε συνάρτηση στο $Fn(I, J)$ μπορεί να επεκταθεί σε μία που το i ανήκει στο πεδίο ορισμού της μιας και το I είναι άπειρο. Έστω $E_j = \{p \in Fn(I, J) : j \in ran(p)\}$ για $j \in J$. Τα E_j είναι και αυτά πυκνά γιατί κάθε συνάρτηση στο $Fn(I, J)$ μπορεί να επεκταθεί σε μία που το j ανήκει στο πεδίο τιμών της. Από τον τρόπο που ορίστηκαν τα D_i

και E_i είναι απόλυτα για μεταβατικά μοντέλα του ZFC, άρα ανήκουν στο M. Αν το G είναι $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M χτυπάει όλα αυτά τα σύνολα, άρα $dom(f_G) = I$ και $ran(f_G) = J$. $\square$

Ας εξετάσουμε τώρα τι συμβαίνει για μια συγκεκριμένη μερική διάταξη.

Λήμμα 7.0.5 *Αν $\varkappa \in M$ και το G είναι $Fn(\varkappa \times \omega, 2)$-generic πάνω στο M τότε $(2^\omega \geq |\varkappa|)^{M[G]}$.*

Απόδειξη.

Η $\bigcup G$ είναι συνάρτηση από το $\varkappa \times \omega$ στο 2. Θέτουμε για κάθε $\alpha \in \varkappa$, $g_\alpha(n) = (\bigcup G)(\alpha, n)$. Έστω $f : \varkappa \to 2^\omega$ τέτοια ώστε $f(\alpha) = g_\alpha$. Η f είναι απόλυτη και $G \in M[G]$ άρα η f ανήκει στο $M[G]$. Επιπλέον η f είναι 1-1. Πράγματι αν $\alpha, \beta \in \varkappa$ με $\alpha \neq \beta$ έστω

$$D_{\alpha\beta} = \{p \in Fn(\varkappa \times \omega, 2) : \exists n \in \omega(\langle \alpha, n\rangle \in dom(p) \wedge \langle \beta, n\rangle \in dom(p) \wedge p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\}.$$

Το $D_{\alpha\beta}$ είναι πυκνό. Επίσης είναι απόλυτο άρα ανήκει στο M. Επομένως $G \cap D_{\alpha\beta} \neq 0$ που συνεπάγεται $g_\alpha \neq g_\beta$. Άρα υπάρχει στο $M[G]$ μια 1-1 συνάρτηση από το $\varkappa$ στο 2^ω επομένως $(2^\omega \geq |\varkappa|)^{M[G]}$. $\square$

Επομένως για $\varkappa = \omega_2^M$ έχουμε $(2^\omega \geq |\omega_2^M|)^{M[G]}$. Αυτό από μόνο του δε μας εξασφαλίζει ότι δεν ισχύει η υπόθεση του συνεχούς γιατί η έννοια του πληθαρίθμου δεν είναι απόλυτη. Άρα χρειάζεται να δείξουμε ότι $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$. Στην πραγματικότητα θα δείξουμε μια πολύ γενικότερη ιδιότητα της μερικής διάταξης που εξετάζουμε.

Ορισμός 7.0.2 *Έστω M αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο του ZFC και $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη. Θα λέμε ότι η $\mathbb{P}$ διατηρεί τους πληθαρίθμους αν για κάθε G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M,*

$$\forall \beta \in o(M)[(\text{ο } \beta \text{ είναι πληθάριθμος})^M \leftrightarrow (\text{ο } \beta \text{ είναι πληθάριθμος})^{M[G]}].$$

Αν η μερική διάταξή μας διατηρεί τους πληθαρίθμους τότε $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$. Για να το δούμε απλά παρατηρούμε ότι ο ω_2 ορίζεται ως ο τρίτος άπειρος πληθάριθμος.

Ξεκινάμε με ένα συνδυαστικό λήμμα που έχει γενικότερο ενδιαφέρον.

Ορισμός 7.0.3 *Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια συνόλων. Η $\mathcal{A}$ καλείται Δ-σύστημα αν υπάρχει ένα σύνολο r τέτοιο ώστε για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \neq B$, $A \cap B = r$. Το r ονομάζεται ρίζα του συστήματος.*

Λήμμα 7.0.6 *Έστω $\mathcal{A}$ υπεραριθμήσιμη οικογένεια πεπερασμένων συνόλων. Τότε υπάρχει υπεραριθμήσιμη $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ που είναι Δ-σύστημα.*

Απόδειξη.

Για κάθε $n \in \omega$ έστω $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : |A| = n\}$. Προφανώς $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n$ και επειδή οι αριθμήσιμες ενώσεις αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμες, υπάρχει τουλάχιστον ένα $n \in \omega$ τέτοιο ώστε η $\mathcal{A}_n$ να είναι υπεραριθμήσιμη. Επομένως, επιλέγοντας μια κατάλληλη υποοικογένεια, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι όλα τα $A \in \mathcal{A}$ έχουν την ίδια πληθικότητα n.
Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο n ότι αν η $\mathcal{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη οικογένεια n-συνόλων, υπάρχει υπεραριθμήσιμη $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ που είναι Δ-σύστημα. Για $n = 1$ είναι τετριμμένο γιατί τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ είναι μονοσύνολα άρα ξένα ανά δύο και επομένως η $\mathcal{A}$ είναι η ίδια Δ-σύστημα με ρίζα το κενό σύνολο. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = m$. Έστω $\mathcal{A}$ υπεραριθμήσιμη οικογένεια συνόλων πληθικότητας $m+1$. Επιλέγουμε μια μεγιστική οικογένεια, $\mathcal{B}$, ξένων ανά δυο στοιχείων της $\mathcal{A}$, δηλαδή μια $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\forall X, Y \in \mathcal{B}(X \neq Y \to X \cap Y = 0)$ και $\forall X \in \mathcal{A} \exists Y \in \mathcal{B}(X \cap Y \neq 0)$. Αν η $\mathcal{B}$ είναι υπεραριθμήσιμη τότε ικανοποιεί το ζητούμενο μιας και είναι Δ-σύστημα με ρίζα το κενό σύνολο. Αν όχι υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο δεικτών I τέτοιο ώστε $\mathcal{B} = \{X_i : i \in I\}$. Για κάθε $X_i = \{x_i^1, ..., x_i^{m+1}\} \in \mathcal{B}$ έστω $\mathcal{C}_i^j = \{Y \in \mathcal{A} : x_i^j \in Y\}$ όπου $j = 1, ..., m+1$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $\forall X \in \mathcal{A} \exists Y \in \mathcal{B}(X \cap Y \neq 0)$, $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i\in I} \mathcal{C}_i^j$. Επειδή το I είναι αριθμήσιμο και η $\mathcal{A}$ υπεραριθμήσιμη, υπάρχουν $i_0 \in I$ και $j_0 \in \{1, ..., m+1\}$ τέτοια ώστε η $\mathcal{C}_{i_0}^{j_0}$ να είναι υπεραριθμήσιμη. Έστω $\mathcal{E} = \{X \setminus \{x_{i_0}^{j_0}\} : X \in \mathcal{C}_{i_0}^{j_0}\}$. Η $\mathcal{E}$ είναι υπεραριθμήσιμη οικογένεια συνόλων πληθικότητας m άρα υπάρχει υπεραριθμήσιμη $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ που είναι Δ-σύστημα με ρίζα r. Έστω $\mathcal{G} = \{X \cup \{x_{i_0}^{j_0}\} : X \in \mathcal{F}\}$. Τότε $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ και είναι υπεραριθμήσιμο Δ-σύστημα με ρίζα $r \cup \{x_{i_0}^{j_0}\}$. □

Η μερική διάταξή μας θα ικανοποεί τη συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας.

Ορισμός 7.0.4 *Μια αντιαλυσίδα στη $\mathbb{P}$ είναι ένα $A \subset \mathbb{P}$ τέτοιο ώστε $\forall p, q \in A(p \neq q \to p \perp q)$. Μια μερική διάταξη $\mathbb{P}$ έχει τη συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας αν κάθε αντιαλυσίδα του $\mathbb{P}$ είναι αριθμήσιμη.*

Λήμμα 7.0.7 *Για κάθε σύνολο I, αν το J είναι αριθμήσιμο τότε η $Fn(I, J)$ έχει τη συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας.*

Απόδειξη.

Έστω X ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $Fn(I, J)$. Αρκεί να βρούμε δύο διακριτά $p, q \in X$ που να είναι συμβατά. Έστω $D = \{dom(p) : p \in X\}$. Το D είναι υπεραριθμήσιμο. Πράγματι αν ήταν αριθμήσιμο για κάθε $a \in D$ έστω $Y_a = \{p \in X : dom(p) = a\}$. Επειδή $|a| = n < \omega$ και το J είναι αριθμήσιμο, το J^a είναι επίσης αριθμήσιμο άρα και το Y_a είναι αριθμήσιμο. Επομένως το $X = \bigcup_{a\in D} Y_a$ είναι αριθμήσιμο που είναι άτοπο. Από το λήμμα των Δ-συστημάτων, υπάρχει υπεραριθμήσιμο $E \subset D$ που αποτελεί Δ-σύστημα με κάποια ρίζα d. Έστω $Y = \{p \in X : dom(p) \in E\}$. Το Y είναι προφανώς υπεραριθμήσιμο. Επειδή το J^d είναι αριθμήσιμο, το $Z = \{p \restriction d : p \in Y\}$ είναι επίσης αριθμήσιμο. Άρα υπάρχουν διακριτά $p, q \in Y$ τέτοια ώστε $p \restriction d = q \restriction d$. Επειδή $p, q \in Y$, $dom(p) \cap dom(q) = d$. Άρα η $p \cup q$ είναι μια καλώς ορισμένη συνάρτηση στο $Fn(I, J)$ και είναι μια κοινή επέκταση των p και q. □

Λήμμα 7.0.8 *Έστω M αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο του ZFC, $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη που έχει τη συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας στο M και G $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M. Αν $A, B \in M$ και $f \in M[G]$ με $f : A \to B$ τότε υπάρχει μια συνάρτηση $F : A \to \mathcal{P}(B)$ με $F \in M$ τέτοια ώστε $\forall a \in A(f(a) \in F(a))$ και $\forall a \in A(|F(a)| \leq \omega)^M$.*

Απόδειξη.

Μιας και $f \in M[G]$ υπάρχει $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ με $f = \tau[G]$. Επομένως υπάρχει $p \in G$ τέτοιο ώστε

$$p \Vdash \text{η } \tau \text{ είναι συνάρτηση από το } \breve{A} \text{ στο } \breve{B}.$$

Έστω $F(a) = \{b \in B : \exists q \leq p(q \Vdash \tau(\breve{a}) = \tau(\breve{b}))\}$. Επειδή ο $q \Vdash \tau(\breve{a}) = \tau(\breve{b})$ ορίζεται από τη σχετικοποίηση ενός τύπου στο M, $F \in M$.
Έστω $a \in A$. Για να δείξουμε ότι $f(a) \in F(a)$ έστω $b = f(a)$. Τότε υπάρχει $r \in G$ τέτοιο ώστε $r \Vdash \tau(\breve{a}) = \tau(\breve{b})$. Έστω q μια κοινή επέκταση των r και p. Τότε $q \leq p$ και $q \Vdash \tau(\breve{a}) = \tau(\breve{b})$ άρα $b \in F(a)$.
Για να δείξουμε ότι $(|F(a)| \leq \omega)^M$ καταρχάς παρατηρούμε ότι από τον ορισμό του $F(a)$ για κάθε $b \in F(a)$ το σύνολο

$$Q_b = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p \wedge q \Vdash \tau(\breve{a}) = \tau(\breve{b})\}$$

είναι μη κενό. Άρα από το Αξίωμα της Επιλογής στο M υπάρχει μια συνάρτηση επιλογής $g : F(a) \to \mathbb{P}$ στο M τέτοια ώστε για κάθε $b \in F(a)$, $g(b) \in Q_b$. Αν $b, c \in F(a)$ και $b \neq c$, τότε $g(b) \perp g(c)$. Πράγματι αν όχι θα υπήρχε ένα σύνολο H $\mathbb{P}$-generic πάνω στο M που θα περιείχε και τα δύο και στο $M(H)$ η $\tau[H]$ θα ήταν συνάρτηση από το A στο B με $\tau[H](a) = b$ και $\tau[H](a) = c$ που είναι άτοπο. Επομένως το σύνολο $C = \{g(b) : b \in F(a)\}$ είναι μια αντιαλυσίδα στο $\mathbb{P}$ και άρα αριθμήσιμο στο M. Επειδή $g \in M$ και η g είναι συνάρτηση από το $F(a)$ επί του C, $(|F(a)| \leq \omega)^M$. □

Θεώρημα 7.0.2 *Έστω M αριθμήσιμο μεταβατικό μοντέλο του ZFC και $\mathbb{P} \in M$ μερική διάταξη. Αν το $\mathbb{P}$ έχει τη συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας στο M τότε διατηρεί τους πληθαρίθμους.*

Απόδειξη.

Καταρχάς παρατηρούμε ότι οι πεπερασμένοι διατακτικοί και ο ω είναι απόλυτοι για μεταβατικά μοντέλα του ZFC και αποδεικνύεται στο ZFC ότι είναι πληθάριθμοι. Επιπλέον ανεξάρτητα από τις ιδιότητες του $\mathbb{P}$, αν ο $\varkappa \in o(M)$ είναι πλήθάριθμος στο $M[G]$ τότε είναι και στο M. Πράγματι αν δεν είναι πληθάριθμος στο M υπάρχει κάποιος διατακτικός $\alpha < \varkappa$ και μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : \alpha \to \varkappa$ με $f \in M$. Όμως $M \subset M[G]$, άρα $f \in M[G]$ και, επειδή όλες οι έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη πρόταση και αφορούν την f και τον α είναι απόλυτες για μεταβατικά μοντέλα του ZFC, ο $\varkappa$ δεν είναι πληθάριθμος ούτε στο $M[G]$.
Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall \beta \in o(M)[(\beta > \omega \wedge (\text{ο } \beta \text{ είναι πληθάριθμος})^M) \to (\text{ο } \beta \text{ είναι πληθάριθμος})^{M[G]}].$$

Υποθέτουμε ότι ο $\varkappa \in o(M)$ με $\varkappa > \omega$ είναι πληθάριθμος στο M αλλά όχι στο $M[G]$. Επομένως υπάρχει κάποιος διατακτικός $\alpha < \varkappa$ και μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : \alpha \to \varkappa$ με $f \in M[G]$. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο λήμμα για να πάρουμε μια συνάρτηση $F : \alpha \to \mathcal{P}(\varkappa)$ με $F \in M$ τέτοια ώστε $\forall \beta < \alpha (f(\beta) \in F(\beta))$ και $\forall \beta < \alpha(|F(\beta)| \leq \omega)^M$. Παρατηρούμε ότι $\varkappa = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)$. Πράγματι επειδή η f είναι επί του $\varkappa$ για κάθε $\gamma < \varkappa$ υπάρχει $\beta < \alpha$ τέτοιο ώστε $\gamma = f(\beta) \in F(\beta)$. Επειδή $F \in M$, η παραπάνω ένωση ορίζεται μέσα στο M, άρα $(\varkappa = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta))^M$. Επομένως από Λήμμα 1.3.2, $(|\varkappa| \leq |\alpha|)^M$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $\alpha < \varkappa$ και έχουμε υποθέσει ότι ο $\varkappa$ είναι πληθάριθμος στο M. □

Επομένως πλέον δείξαμε ότι $(2^\omega \geq \omega_2)^{M[G]}$ άρα ότι στο $M[G]$ δεν ισχύει η υπόθεση του συνεχούς.

Πόρισμα 7.0.2 $Con(ZFC) \to Con(ZFC + \neg GCH)$

Θέτοντας στο Λήμμα 7.0.5 οποιονδήποτε πληθάριθμο $\varkappa$ μπορούμε να δείξουμε ότι είναι συνεπές το συνεχές να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τον $\varkappa$. Επιπλέον μπορούμε να δείξουμε ότι είναι συνεπές το συνεχές να είναι ακριβώς ίσο με οποιονδήποτε πληθάριθμο που δεν είναι cofinal με το ω ή ότι είναι συνεπές να ισχύει η υπόθεση του συνεχούς και να μην ισχύει η γενικευμένη, όμως αυτά ξεφεύγουν από τον σκοπό αυτής της εργασίας.

Βιβλιογραφία

[1] Barwise Jon (επιμέλεια), Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam, 1977

[2] Cohen Paul, The independence of the continuum hypothesis I, Proceedings of the National Academy of Sciences USA 50, 1963

[3] Cohen Paul, The independence of the continuum hypothesis II, Proceedings of the National Academy of Sciences USA 51, 1964

[4] Cohen Paul, Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, New York, 1966

[5] Chow Timothy, A beginner's guide to forcing, Contempory Mathematics 479, 2009

[6] Halmos Paul, Naive Set Theory, Van Nostrand Reinhold, New York, 1960

[7] Κολέτσος Γιώργος, Εισαγωγή στη μαθηματική λογική, Εκρεμμές, Αθήνα, 2009

[8] Kunen Kenneth, Set theory, North-Holland, Amsterdam, 1980

[9] Palumbo Justin, Notes, UCLA Logic Center 2009 Summer School for Undergraduates

Ευρετήριο