



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

Αδρομερή Μοντέλα Υψηλής Απόδοσης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΤΣΙΑΛΙΑΜΑΝΗ ΓΙΩΡΓΟΥ

Επιβλέπων: Βησσαρίων Παπαδόπουλος

Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2017

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Κατ' αρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων της παρούσας διπλωματικής εργασίας, τον κύριο Βησσαρίωνα Παπαδόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Τον ευχαριστώ θερμά για την επιλογή του συγκεκριμένου θέματος, το οποίο αποδείχτηκε εξαιρετικά ενδιαφέρον, και για την συμβολή του σε αυτό με επιστημονικές προτάσεις καθ' όλη τη διάρκεια της έρευνάς μου αλλά και για την ηθική υποστήριξη.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Λάμπρο Ρόρρη, ο οποίος έδωσε το έναυσμα για το συγκεκριμένο θέμα και ήταν υπεύθυνος της πρακτικής μου άσκησης στην εταιρεία BETA-CAE systems βοηθώντας με στην εφαρμογή των μεθόδων που αναπτύχθηκαν σε πρακτικά προβλήματα.

Ακόμα, οφείλω να ευχαριστήσω τον Δημήτρη Γιοβάνη για την βοήθειά του στην έρευνα της διπλωματικής μου και για την ώθησή του στο να προχωρήσω την έρευνά μου σε υψηλότερο επίπεδο.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου, η συμπαράσταση των οποίων ήταν καθοριστική σε όλη την μέχρι τώρα πορεία μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται η μελέτη κατασκευής αδρομερών μοντέλων υψηλής απόδοσης για την προσέγγιση των λύσεων μοντέλων στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων στο πλαίσιο της προσομοίωσης Monte Carlo. Τα αριθμητικά προσομοιώματα κατασκευάστηκαν με τη βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού Matlab και έγιναν συγκρίσεις των προσεγγιστικών λύσεων σε σχέση με τις λύσεις των πλήρων μοντέλων.

Επειδή οι κατασκευές πολιτικού μηχανικού αντιμετωπίζουν πολλές αβεβαιότητες και εισάγονται νέα υλικά στην κατασκευή τα οποία έχουν αρκετές αβέβαιες παραμέτρους εισάγεται η ανάγκη μοντελοποίησης αυτών των παραμέτρων. Ακόμα, για να εξάγονται ακριβέστερα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις σε συμβατικές κατασκευές αλλά και σε σύγχρονα υλικά που απαιτούν προσομοίωση σε επίπεδο μικροσκοπικής δομής, το μέγεθος των μοντέλων και του υπολογιστικού χρόνου επίλυσής τους αυξάνεται ραγδαία. Αυτά σε συνδυασμό με την ανάγκη επίλυσης μεγάλου αριθμού μοντέλων, για την προσομοίωση Monte Carlo, η οποία θεωρείται μέθοδος αναφοράς δημιουργεί την ανάγκη εύρεσης προσεγγιστικών μοντέλων για την επίλυση των φορέων σε λογικά χρονικά πλαίσια.

Σε αυτή την εργασία θα ερευνηθεί η ακρίβεια της μεθόδου POD (Proper Orthogonal Decomposition) και μίας περεταίρω προσέγγισης της POD, της ECSW (Energy Conserving and Sample Weighting Method). Οι δύο μέθοδοι βασίζονται στην επίλυση μερικών μοντέλων πλήρως και χρήση των λύσεών τους για την προσέγγιση των υπόλοιπων λύσεων σύμφωνα με την μέθοδο Monte Carlo. Η πρώτη επιχειρεί την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων σε έναν μικρότερο διανυσματικό χώρο απ' ότι ο πλήρης χώρος των μετατοπίσεων του φορέα, ενώ η δεύτερη επιχειρεί την ακόμα μεγαλύτερου επιπέδου προσέγγιση, χρησιμοποιώντας μονάχα μερικά πεπερασμένα στοιχεία του μοντέλου.

Επιπρόσθετα, χρησιμοποιήθηκαν τεχνητά νευρωνικά δίκτυα για την προσέγγιση των λύσεων. Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα, ακριβώς όπως οι παραπάνω μέθοδοι, χρησιμοποιούν ένα πλήθος επιλυμένων μοντέλων και τις τιμές των τυχαίων παραμέτρων τους για να δημιουργήσουν έναν τρόπο σύνδεσης των παραμέτρων αυτών με τις λύσεις. Αν και είναι μία μέθοδος το θεωρητικό υπόβαθρο της οποίας έχει

αναπτυχθεί εδώ και αρκετές δεκαετίες, η εφαρμογή τους γνωρίζει ιδιαίτερη ανάπτυξη στη δεδομένη χρονική στιγμή και φαίνεται οι δυνατότητές τους στην επίλυση προβλημάτων μηχανικού να είναι μεγάλες λόγω της δυνατότητας προσομοίωσης εντόνως μη γραμμικών σχέσεων.

Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα εφαρμογής των παραπάνω μεθόδων σε απλά μοντέλα που αναπτύχθηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab, καθώς και κώδικας σε φυσική γλώσσα για τον προγραμματισμό των δύο πρώτων μεθόδων. Τέλος, εξάγονται συμπεράσματα σχετικά με την ακρίβεια των μεθόδων και την αποτελεσματικότητά τους όσον αφορά την μείωση του χρόνου προσομοίωσης.

ABSTRACT

In this work, the use of surrogate models to approximate the solutions of stochastic finite element models according to the Monte Carlo Simulation is studied. The numerical models were constructed and solved using the Matlab programming language and the solutions of the approximate models were compared with the solution of the full models.

In Civil Engineering the structures have many uncertainties and, due to the use of new materials, which have uncertain behavior, quantifying these uncertainties is becoming crucial. Moreover, in order to have greater accuracy about the behavior of the construction itself, on account of the new materials, the models are becoming more detailed even in microscopic scale. According to these, the simulation time of the models is increasing considerably. Considering also the Monte Carlo Simulation, that requires solving many models for different values of the random parameters, the simulation time is highly increased.

The scope of this work is to study the accuracy of the POD (Proper Orthogonal Decomposition) method and an extension of it, the ECSW (Energy Conserving and Sample Weighting) method. The first method is implemented in the framework of the Monte Carlo Simulation, using only a few full model solutions to approximate the solutions of the remaining models, while the second method approximates the solutions of POD using only a small set of finite elements, instead of all of them.

Furthermore, artificial neural networks were used to predict the response of the structures. Just like the aforementioned methods, the neural networks use some fully solved models and the values of the random parameters in these models to compute the solutions of the remaining models. The neural networks were widely studied in the past decades but only recently they are being the state of the art research. They have very big potential in solving Engineering due to their ability to simulate highly non-linear behavior.

In the last chapter of this thesis, the results of using these methods with Matlab programming language are being presented. Also, a pseudocode in human language is described. Finally, conclusions are being drawn.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	7
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ	8
1.1.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	8
1.1.2 ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ.....	10
1.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	11
1.2.1 ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ	11
1.2.2 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ	13
1.2.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ.....	14
1.2.4 ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ	16
1.2.5 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ	17
1.2.6 ΜΗΤΡΩΟ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ	19
1.2.7 ΕΞΙΣΩΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ.....	19
2. ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ	23
2.1 ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ.....	24
2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	24
2.2.1 ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION - CDF).....	24
2.2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (PROBABILITY DENSITY FUNCTION-PDF)	25
2.3 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΔΙΑ.....	27
2.4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ – ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ KARHUNEN-LOEVE	30
2.5 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO	33
3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ.....	35
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ	36
3.2 ΤΕΧΝΗΤΑ ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ (ANN).....	36
3.2.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	36

3.2.2	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΕΡΓΟΠΟΙΗΣΗΣ	37
3.2.3	ΚΡΥΜΜΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΑ	38
3.2.4	ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΝΕΥΡΩΝΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ	39
3.2.5	ΟΡΜΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	43
3.3	PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION (POD)	44
3.4	ENERGY CONSERVING AND SAMPLE WEIGHTING METHOD (ECSW).	46
4.	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....	51
4.1	ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.....	52
4.1.1	POD ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.....	53
4.1.2	ECSW ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ	55
4.1.3	ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ	58
4.2	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ	61
4.2.1	ECSW ΓΙΑ ΤΟ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.....	63
4.2.2	ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.....	63
4.3	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	64

1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εύρεση προσεγγιστικών λύσεων των μετατοπίσεων των κόμβων του πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων ενός προβόλου και μίας πλάκας πακτωμένης στις τέσσερις πλευρές, με στοχαστικό μέτρο ελαστικότητας και στοχαστικά κατακόρυφα φορτία. Για την ανάλυση του προβόλου χρησιμοποιήθηκαν γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης ενώ για την πλάκα, μη γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία κελύφους. Η αριθμητική προσομοίωση των παραπάνω καθώς και η διαδικασία επίλυσης μεγάλου αριθμού μοντέλων με στοχαστικά δεδομένα, όπως καθορίζει η μέθοδος Monte Carlo προγραμματίστηκε σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab.

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ

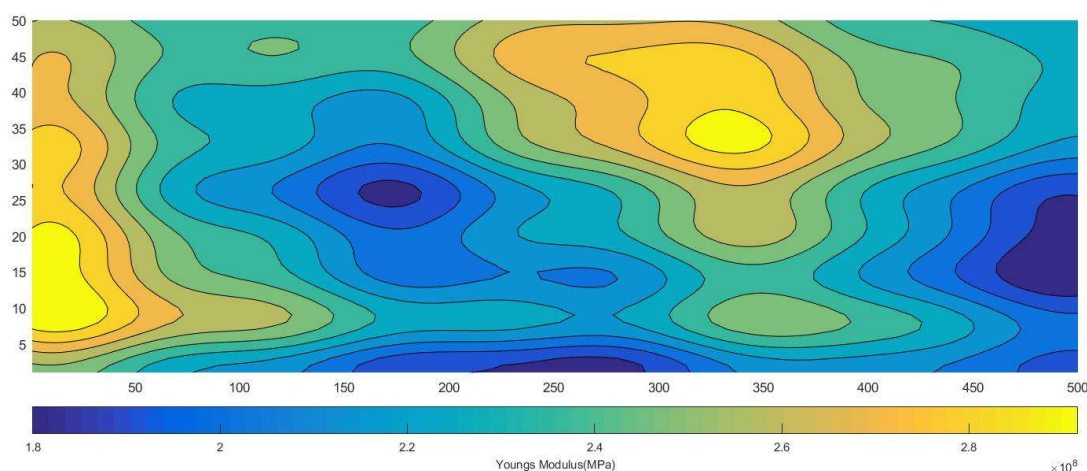
1.1.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Η μέθοδος που επικρατεί για την ανάλυση των διαφόρων κατασκευών είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων. Αυτό συμβαίνει λόγω της ικανότητάς της να προβλέπει με επαρκή ακρίβεια τα φυσικά φαινόμενα. Σύμφωνα με την μέθοδο τα συνεχή προβλήματα που περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις και συνοριακές συνθήκες ανάγονται σε διακριτά προβλήματα αλγεβρικών εξισώσεων μέσα από την ελαχιστοποίηση του σφάλματος της προσεγγιστικής λύσης σε σχέση με την πραγματική. Οπότε το πρόβλημα χωρίζεται σε μικρότερα κομμάτια που ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία και η τελική λύση του προβλήματος εκφράζεται μέσα από τις μετατοπίσεις (ή την θερμοκρασία ή και άλλα χαρακτηριστικά) κάποιων διακριτών σημείων της κατασκευής.

Η αύξηση της ακρίβειας των προσομοιωμάτων πεπερασμένων στοιχείων επιτυγχάνεται με πολλούς τρόπους και ένας από αυτούς είναι η πυκνότερη διακριτοποίηση της κατασκευής ή η αύξηση της τάξης των πεπερασμένων στοιχείων. Με τους τρόπους αυτούς η συμπεριφορά του μοντέλου προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια πραγματική συμπεριφορά της κατασκευής. Έτσι, αυξάνεται σημαντικά και το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης.

Όμως, ακόμα και με πολύ πυκνή διακριτοποίηση ή με αρκετά μεγάλη τάξη πεπερασμένων στοιχείων πολύ συχνά τα πειραματικά αποτελέσματα ή οι παρατηρήσεις στην πραγματική κατασκευή δεν ανταποκρίνονται πλήρως στα αποτελέσματα των

αναλύσεων. Για αυτό ευθύνονται οι παραδοχές που μπορεί να έχουν γίνει για την μοντελοποίηση της κατασκευής. Ένα τέτοιο είδος παραδοχών που πολύ συχνά είναι εσφαλμένες είναι η παραδοχή ενιαίου μέτρου ελαστικότητας ή σταθερής ορισμένης φόρτισης στην κατασκευή. Αυτό όμως στη πραγματικότητα δεν μπορεί να συμβεί. Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το μέτρο ελαστικότητας του σκυροδέματος το οποίο εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από παραμέτρους κατά την κατασκευή του όπως η θερμοκρασία και η υγρασία που είναι πολύ δύσκολο να προβλεφθούν. Προκύπτει συνεπώς ότι το υλικό δεν έχει σταθερό μέτρο ελαστικότητας μέσα στον φορέα αλλά αυξομειώνεται στον όγκο του (Εικόνα 1).



ΕΙΚΟΝΑ 1: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΟΛΟΥ.

Γίνεται φανερό, λοιπόν, ότι όσο και να πυκνώσουμε το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων και να αυξηθεί η τάξη των πεπερασμένων, εάν δεν έχουμε λάβει σωστά ως δεδομένα τις τιμές των παραμέτρων, τα αποτελέσματα δεν θα συμπίπτουν με αυτά των παρατηρήσεων στην πραγματική κατασκευή. Επομένως είναι πολύ σημαντικό να μοντελοποιηθούν οι αβεβαιότητες που υπάρχουν στις κατασκευές μέσα από τα αριθμητικά μοντέλα. Η στοχαστική ανάλυση, εν γένει, ασχολείται με τον χειρισμό τέτοιων αβέβαιων παραμέτρων στις κατασκευές.

1.1.2 ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Τις αβεβαιότητες αυτές που προκύπτουν στα συνήθη έργα Πολιτικού Μηχανικού οι διάφοροι κώδικες που υπάρχουν τις αντιμετωπίζουν με την χρήση συντελεστών ασφαλείας. Οι συντελεστές ασφαλείας εκφράζουν το πόσο μεγαλύτερο ή μικρότερο πρέπει να είναι ένα μέγεθος ώστε να επέλθει η αστοχία. Με τον τρόπο αυτό διαστασιολογούνται οι κατασκευές για το χειρότερο δυνατό σενάριο και έτσι αποφεύγεται η καταστροφή τους.

Η διαδικασία όμως αυτή οδηγεί συνήθως σε οικονομικά ασύμφορες κατασκευές, δηλαδή υπερδιαστασιολόγηση. Σε συμβατικές κατασκευές πολιτικού μηχανικού αυτό δεν έχει πολύ μεγάλο αντίκτυπο στο κόστος, αλλά σε πιο εξεζητημένες κατασκευές το κόστος αυξάνεται ραγδαία με την υπερδιαστασιολόγησή τους.

Επίσης με τις νέες τεχνολογίες και τα νέα υλικά που παράγονται (όπως σκυρόδεμα με νανοσωλήνες άνθρακα ή διάφορα πορώδη υλικά) οι αβεβαιότητες αυξάνονται ακόμα περισσότερο και είναι δύσκολο να αντιμετωπιστούν με τη χρήση συντελεστών ασφαλείας. Έτσι πρέπει να χρησιμοποιηθούν κάποιες πιθανοτικές μέθοδοι ώστε να μπορέσουμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα για την απόκριση της κατασκευής την οποία μελετάμε.

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος είναι η προσομοίωση Monte Carlo. Η μέθοδος "γεννήθηκε" το 1949, σε άρθρο των Von Neumann and S. Ulam [2] με τίτλο "Η μέθοδος Monte Carlo" στο Journal of the American Statistics Association που τη χρησιμοποίησαν στην εργασία τους πάνω στη διάχυση νετρονίων για την κατασκευή της ατομικής βόμβας κατά τη διάρκεια του δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου. Παρόλα αυτά η θεωρητική βάση της μεθόδου ήταν γνωστή πριν από το 1949, αφού αρκετά προβλήματα στατιστικής λύνονταν μέσω τυχαίας δειγματοληψίας, που είναι στην ουσία η μέθοδος Monte Carlo. Λόγω του γεγονότος ότι η προσομοίωση τυχαίων μεταβλητών είναι μία δύσκολη διαδικασία για να γίνει χειρωνακτικά, η γενική αριθμητική χρήση της μεθόδου έγινε πρακτική μόνο με την εμφάνιση και εξέλιξη των υπολογιστών. Η μέθοδος δανείστηκε το όνομα της πόλης του Πριγκιπάτου του Monaco, που είναι γνωστό για τα καζίνο του, γιατί μια από τις απλούστερες συσκευές παραγωγής τυχαίων αριθμών είναι η ρουλέτα. Έκτοτε, η MCS έχει χρησιμοποιηθεί για την επίλυση πολυδιάστατων ολοκληρωμάτων σε αόριστα πεδία, ολοκληρωτικές

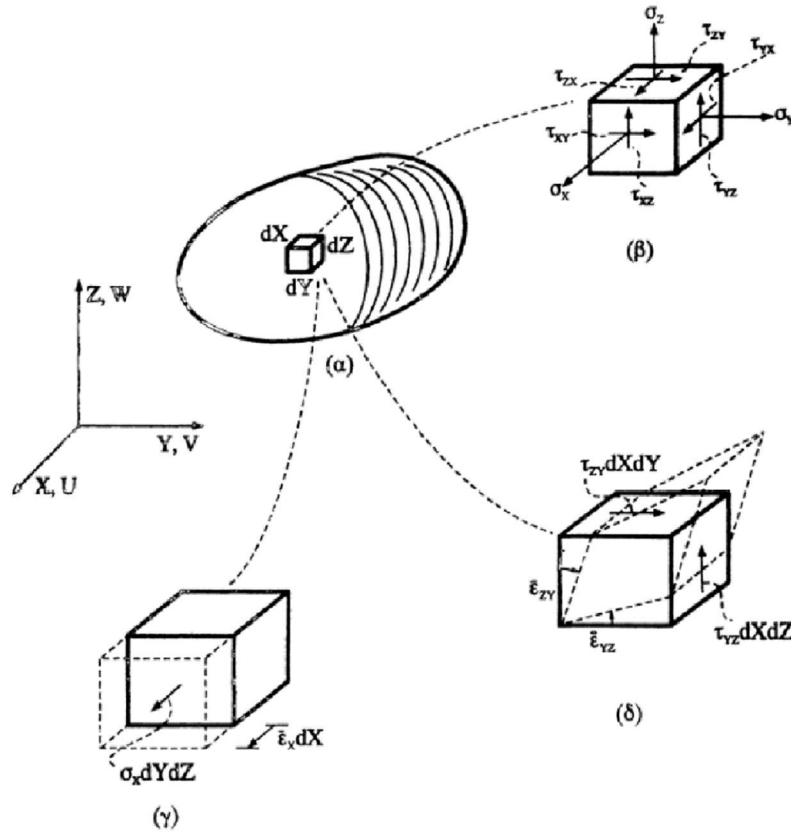
εξισώσεις και διαφορικά συστήματα όταν οι αναλυτικές μέθοδοι αδυνατούν να δώσουν λύση.

Η έκφραση «μέθοδος Monte Carlo» είναι πολύ γενική. Περιλαμβάνει κυρίως στοχαστικές διαδικασίες, εκείνες δηλαδή που βασίζονται στην χρήση των τυχαίων αριθμών και της στατιστικής για τη λύση προβλημάτων. Γενικά, η μέθοδος Monte Carlo είναι μια αριθμητική μέθοδος για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων μέσω προσομοίωσης τυχαίων αριθμών. Χρησιμοποιείται δε στην προσομοίωση και στην ολοκλήρωση [1]. Με άλλα λόγια, η μέθοδος MCS είναι μια στοχαστική διαδικασία όπου με χρήση τυχαίων αριθμών και τη στατιστική προσπαθούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα. Σε ένα πείραμα Monte Carlo χρησιμοποιείται προσομοίωση με μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών [14]. Μέθοδοι Monte Carlo εφαρμόζονται σε πάρα πολλούς επιστημονικούς τομείς, από την οικονομία έως την πυρηνική φυσική και τη χημεία και ακόμη ως τη ρύθμιση της κυκλοφορίας. Το απλούστερο είδος Monte Carlo είναι η ολοκλήρωση με την Επιτυχία ή Αστοχία (Hit or Miss).

1.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

1.2.1 ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων οι εξισώσεις ισορροπίας εξάγονται με τη χρήση της αρχής των δυνατών έργων η οποία διατυπώνεται ως εξής [5]: Όταν ένας φορέας φορτίζεται με εξωτερικά φορτία και ισορροπεί τότε για οποιαδήποτε μικρή δυνατή παραμόρφωση του φορέα, συμβιβαστή με τις συνθήκες στήριξής του, το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων.



ΕΙΚΟΝΑ 2: ΦΟΡΕΑΣ ΜΕ ΤΟ ΣΤΕΡΕΟ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΛΟΓΩ ΟΡΘΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

Έτσι, όπως φαίνεται στο σχήμα το δυνατό έργο της ορθής δύναμης $\sigma_x dY dZ$ για μία δυνατή μετατόπιση $\epsilon_x dX$ είναι:

$$\overline{\epsilon_x} dX \sigma_x dY dZ = \overline{\epsilon_x} \sigma_x dV \quad (1)$$

Αντίστοιχα για τις διατμητικές τάσεις και παραμορφώσεις θα ισχύει:

$$\overline{\epsilon_{YZ}} dY \tau_{YZ} dX dZ + \overline{\epsilon_{ZY}} dZ \tau_{ZY} dX dZ = 2 \overline{\epsilon_{YZ}} \tau_{YZ} dV = \overline{\gamma_{YZ}} \tau_{YZ} dV \quad (2)$$

Επομένως το συνολικό έργο των δυνάμεων που δρουν στο στοιχειώδες σώμα είναι:

$$dW_{int} = (\overline{\epsilon_x} \sigma_x + \overline{\epsilon_y} \sigma_y + \overline{\epsilon_z} \sigma_z + \overline{\gamma_{XY}} \tau_{XY} + \overline{\gamma_{YZ}} \tau_{YZ} + \overline{\gamma_{ZX}} \tau_{ZX}) dV \quad (3)$$

Ή αλλιώς:

$$dW_{int} = \{\overline{\epsilon}\}^T \{\sigma\} dV \quad (4)$$

Για όλον τον φορέα συνεπώς το έργο των δυνατών εσωτερικών δυνάμεων ισούται με:

$$W_{int} = \int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV \quad (5)$$

Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων αποτελείται από των επιφανειακών δυνάμεων, το έργο των μαζικών δυνάμεων και το έργο των επικόμβιων δυνάμεων:

$$W_{ext} = \int_V \{\bar{U}\}^T \{f^V\} dV + \int_S \{\bar{U}^S\}^T \{f^S\} dS + \{\bar{D}\}^T \{R_C\} \quad (6)$$

Όπου $\{\bar{U}\}$ είναι το διάνυσμα των δυνατών μετατοπίσεων ενός τυχαίου σημείου P(X,Y,Z) του φορέα, $\{\bar{U}^S\}$ είναι το διάνυσμα των δυνατών μετατοπίσεων ενός σημείου της φορτιζόμενης επιφάνειας S και $\{\bar{D}\}, \{R_C\}$ είναι τα διανύσματα των δυνατών επικόμβιων μετατοπίσεων και το διάνυσμα των επικόμβιων δράσεων του φορέα.

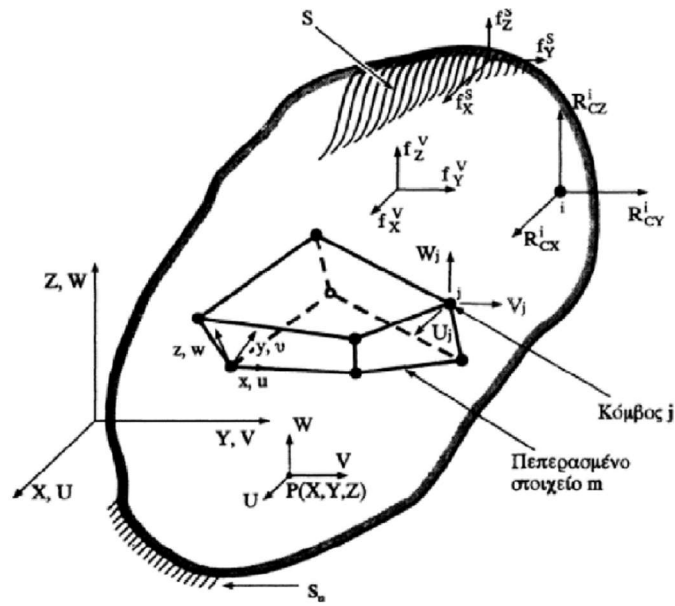
Τελικά, σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων θα πρέπει να ισχύει:

$$W_{int} = W_{ext} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\bar{U}\}^T \{f^V\} dV + \int_S \{\bar{U}^S\}^T \{f^S\} dS + \{\bar{D}\}^T \{R_C\} \quad (8)$$

1.2.2 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι η επικρατούσα μέθοδος ανάλυσης κατασκευών πολιτικού μηχανικού και όχι μόνο. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημά της είναι ότι είναι μία μέθοδος που προγραμματίζεται και συνεπώς εκμεταλλεύεται τις τεράστιες υπολογιστικές δυνατότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα σώμα με κάποιες συνοριακές συνθήκες κάποιες φορτίσεις και ένα πεπερασμένο στοιχείο από την διακριτοποίηση την οποία έχουμε εφαρμόσει.



ΕΙΚΟΝΑ 3: ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟ ΣΩΜΑ ΜΕ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ S_u , ΦΟΡΤΙΣΗ F ΚΑΙ ΕΝΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ M

Οι μετατοπίσεις σε ένα τυχαίο σημείο $P(X, Y, Z)$ δίνονται από το διάνυσμα:

$$\{U(X, Y, Z)\} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (9)$$

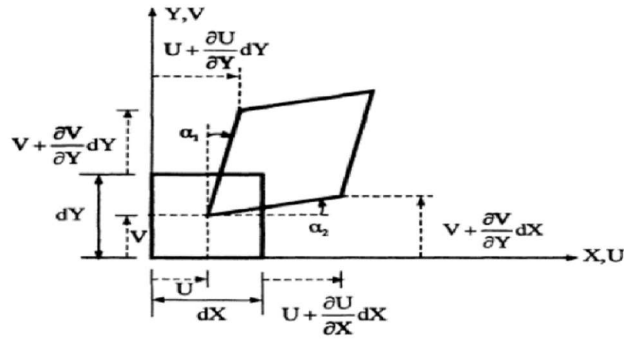
Άρα οι επικόμβιες μετατοπίσεις στον φορέα εκφράζονται από το διάνυσμα:

$$\{D\} = [U_1 \ V_1 \ W_1 \ U_2 \ V_2 \ W_2 \ \dots \ U_n \ V_n \ W_n] \quad (10)$$

όπου n ο αριθμός όλων των κόμβων του σώματος.

1.2.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Έχοντας ορίσει τις μετατοπίσεις του φορέα με τον παραπάνω τρόπο θα ορίσουμε το διάνυσμα των τάσεων συναρτήσει του διανύσματος των μετατοπίσεων. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα στοιχειώδες ορθογώνιο επίπεδο σώμα πριν και μετά την παραμόρφωση.



ΕΙΚΟΝΑ 4: ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

Οι μετατοπίσεις είναι συνάρτηση των συντεταγμένων X , Y . Επομένως με την παραδοχή μικρών παραμορφώσεων η ανηγμένη παραμόρφωση στη διεύθυνση X δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_X = \frac{\left[dX + \left(U + \frac{\partial U}{\partial X} dX \right) - U \right] - dX}{dX} = \frac{\partial U}{\partial X} \quad (11)$$

ομοίως:

$$\varepsilon_Y = \frac{\left[dY + \left(V + \frac{\partial V}{\partial Y} dY \right) - V \right] - dY}{dY} = \frac{\partial V}{\partial Y} \quad (12)$$

Η διαμητική παραμόρφωση ορίζεται ως η αλλαγή της ορθής γωνίας του στοιχειώδους σώματος. Κάνοντας την παραδοχή μικρών παραμορφώσεων ($\alpha_1 \approx \tan \alpha_1$ και $\alpha_2 \approx \tan \alpha_2$) έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma_{XY} = \alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{\left(U + \frac{\partial U}{\partial Y} dY \right) - U}{dY} + \frac{\left(V + \frac{\partial V}{\partial X} dX \right) - V}{dX} \\ &= \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \end{aligned} \quad (13)$$

Άρα οι σχέσεις για τις τρεις διαστάσεις γράφονται:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_X &= \frac{\partial U}{\partial X} & \gamma_{XY} &= \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \\
\varepsilon_Y &= \frac{\partial V}{\partial Y} & \gamma_{YZ} &= \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X} \\
\varepsilon_Z &= \frac{\partial W}{\partial Z} & \gamma_{ZX} &= \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z}
\end{aligned}
\tag{12}$$

Γράφοντας την παραπάνω σχέση σε μητρική μορφή προκύπτει το εξής:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial X & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial Y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial Z \\ \partial/\partial Y & \partial/\partial X & 0 \\ 0 & \partial/\partial Z & \partial/\partial Y \\ \partial/\partial Z & 0 & \partial/\partial X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}
\tag{15}$$

ή

$$\{\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon]\{U\}
\tag{16}$$

Όπου $[\partial_\varepsilon]$ είναι ο διαφορικός τελεστής της σχέσης (6) και $\{U\} = [U \ V \ W]^T$.

1.2.4 ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Για τις τάσεις σε ένα σε ένα σημείο στη διεύθυνση X ισχύει ότι:

$$\varepsilon_X = E(\varepsilon_X - \nu\varepsilon_Y - \nu\varepsilon_Z)
\tag{17}$$

όπου ν ο λόγος του Poisson.

Ομοίως

$$\begin{aligned}
\varepsilon_Y &= E(\nu\varepsilon_X - \varepsilon_Y - \nu\varepsilon_Z) \\
\varepsilon_Z &= E(\nu\varepsilon_X - \nu\varepsilon_Y - \varepsilon_Z)
\end{aligned}
\tag{18}$$

Και για τις διατμητικές παραμορφώσεις ισχύει:

$$\tau_{XY} = G\gamma_{XY} \quad , \quad \tau_{YZ} = G\gamma_{YZ} \quad , \quad \tau_{ZX} = G\gamma_{ZX} \quad (19)$$

όπου $G = E/2(1+\nu)$ το μέτρο διατμήσεως.

Τελικά γράφοντάς τα σε μητρική μορφή παίρνουμε την σχέση:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (20)$$

όπου

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (21)$$

Άρα είναι:

$$\{\sigma\} = [C]^{-1}\{\varepsilon\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (22)$$

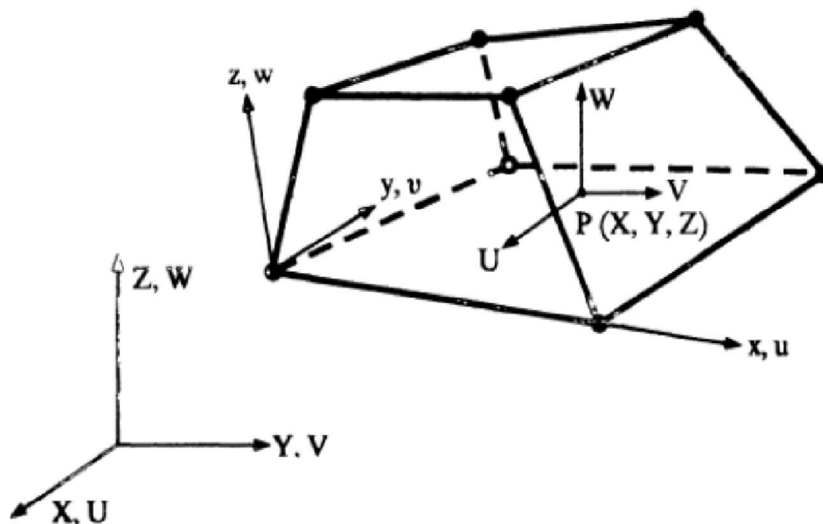
όπου

$$[E] = [C]^{-1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

1.2.5 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Η βασική παραδοχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι ότι οι μετατοπίσεις των τυχαίων σημείων εντός του όγκου κάθε πεπερασμένου στοιχείου

εκφράζονται ως συνάρτηση των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου. Αυτή είναι και η παραδοχή που επηρεάζει την αξιοπιστία της μεθόδου.



ΕΙΚΟΝΑ 5: ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Στην εικόνα 5 φαίνεται ένα πεπερασμένο στοιχείο με 8 κόμβους και ένα τυχαίο σημείο $P(X, Y, Z)$ μέσα στον όγκο του στοιχείου. Σύμφωνα με την παραπάνω παραδοχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων οι μετατοπίσεις του P θα δίνονται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{bmatrix} = [N(X, Y, Z)]\{d\} \quad (24)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το διάνυσμα $[u_P \ v_P \ w_P]^T$ είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων του σημείου P κατά τους τρεις άξονες του καθολικού συστήματος συντεταγμένων, το διάνυσμα $\{d\}$ είναι το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων των 8 κόμβων του πεπερασμένου στοιχείου και το μητρώο $[N(X, Y, Z)]$ είναι το μητρώο των συναρτήσεων σχήματος σύμφωνα με το οποίο υπολογίζονται οι μετατοπίσεις εντός του πεπερασμένου στοιχείου συναρτήσεως των επικόμβιων μετατοπίσεών του. Το μητρώο των συναρτήσεων σχήματος εξαρτάται από το είδος του στοιχείου που χρησιμοποιείται. Επίσης, η επιλογή των συναρτήσεων σχήματος παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Ανάλογα την περίπτωση και το είδος του στοιχείου γίνεται και η επιλογή των συναρτήσεων σχήματος.

1.2.6 ΜΗΤΡΩΟ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Χρειάζεται να οριστεί η σχέση των παραμορφώσεων με τις επικόμβιες μετατοπίσεις του στοιχείου. Για να γίνει αυτό συνδυάζονται οι εξισώσεις (16) και (24) για το m στοιχείο προκύπτει

$$\{\varepsilon^{(m)}\} = [\partial_\varepsilon][N^{(m)}(X, Y, Z)]\{d^{(m)}\} = [B^{(m)}]\{d^{(m)}\} \quad (25)$$

Το $[B^{(m)}]$ ονομάζεται μητρώο παραμόρφωσης του στοιχείου m προκύπτει από την εφαρμογή του τελεστή $[\partial_\varepsilon]$ στο μητρώο των συναρτήσεων σχήματος.

Επίσης αν θεωρήσουμε ότι οι επικόμβιες μετατοπίσεις ενός στοιχείου m σε σχέση με τις επικόμβιες μετατοπίσεις ολόκληρου του φορέα ορίζονται μέσω ενός μητρώου συμβατότητας $[t^{(m)}]$ τότε ισχύει:

$$\{d^{(m)}\} = [t^{(m)}]\{D\} \quad (26)$$

Το μητρώο $[t^{(m)}]$ είναι ένα μητρώο Boolean με στοιχεία 0 και 1 το οποίο αντιστοιχίζει τις μετατοπίσεις των κόμβων του στοιχείου m στις αντίστοιχες θέσεις τους στο καθολικό διάνυσμα μετατοπίσεων του φορέα. Με τον αντίστροφο του ίδιου μητρώου αντιστοιχίζονται και οι όροι του διανύσματος των επικόμβιων δράσεων του στοιχείου $\{r^{(m)}\}$ στο καθολικό διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του φορέα $\{R^{(m)}\}$.

$$\{r^{(m)}\} = [t^{(m)}]^T \{R^{(m)}\} \quad (27)$$

Επομένως οι παραμορφώσεις του στοιχείου m στο καθολικό σύστημα βαθμών ελευθερίας γράφονται:

$$\{\bar{\varepsilon}^{(m)}\} = [B^{(m)}][t^{(m)}]\{\bar{D}\} \quad (28)$$

1.2.7 ΕΞΙΣΩΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Σύμφωνα με την εξίσωση της αρχής των δυνατών έργων ισχύει για την περίπτωση μόνο επικόμβιας φόρτισης:

$$\int_V [\varepsilon]^T \{\sigma\} dV = \{\bar{D}\}^T \{R_C\} \quad (29)$$

Το ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα των δυνατών έργων όλων των στοιχείων m με τα οποία έχει διακριτοποιηθεί ο φορέας:

$$\sum_m \int_{V_e} \{\bar{\varepsilon}^{(m)}\}^T \{\sigma^{(m)}\} dV_e = \{\bar{D}\}^T \{R_C\} \quad (30)$$

όπου V_e είναι ο όγκος του στοιχείου m.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (13) και (19) και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\{\bar{D}\}^T \left[\sum_m \int_{V_e} [t^{(m)}]^T [B^{(m)}]^T [E][B^{(m)}][t^{(m)}] dV_e^{(m)} \right] \{\bar{D}\} = \{\bar{D}\}^T \{R_C\} \quad (31)$$

Το διάνυσμα δυνατών επικόμβιων μετατοπίσεων είναι κοινό για όλα τα στοιχεία του φορέα και άρα ανεξάρτητο του m. Για αυτό και βγαίνει εκτός του ολοκληρώματος και του αθροίσματος. Επίσης οι επικόμβιες μετατοπίσεις που αναζητούμε είναι μη μηδενικές και επομένως η σχέση (31) απλοποιείται σε:

$$\left[\sum_m \int_{V_e} [t^{(m)}]^T [B^{(m)}]^T [E][B^{(m)}][t^{(m)}] dV_e^{(m)} \right] \{\bar{D}\} = \{R_C\} \quad (32)$$

Ή

$$[K]\{D\} = \{R_C\} \quad (33)$$

Στην περίπτωση που δεν έχουμε μόνο επικόμβιες δράσεις αλλά και μαζικές και επιφανειακές δυνάμεις πρέπει να τις μετατρέψουμε και αυτές σε ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις. Αυτό επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση των σχέσεων (25) και (26) στη σχέση (8). Και έτσι παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \{\bar{D}\}^T \sum_m [t^{(m)}]^T \int_{V_e} [N^{(m)}]^T \{f^{V(m)}\} dV_e^{(m)} \\ + \{\bar{D}\}^T \sum_m [t^{(m)}]^T \int_{S_e} [N^{S(m)}]^T \{f^{S(m)}\} dS_e^{(m)} \end{aligned} \quad (33)$$

Όπου S_e είναι η επιφάνεια στην οποία ασκούνται οι δυνάμεις $\{f^S\}$.

Έτσι για ολόκληρο τον φορέα και μετά την απαλοιφή των μετατοπίσεων $\{\bar{D}\}^T$:

$$\sum_m [t^{(m)}]^T \left[\int_{V_e} [N^{(m)}]^T \{f^{V(m)}\} dV_e^{(m)} + \int_{S_e} [N^{S(m)}]^T \{f^{S(m)}\} dS_e^{(m)} \right] \quad (34)$$

$$\{R_V\} = \sum_m [t^{(m)}]^T \int_{V_e} [N^{(m)}]^T \{f^{V(m)}\} dV_e^{(m)} \quad (35)$$

$$\{R_C\} = \sum_m [t^{(m)}]^T \int_{S_e} [N^{S(m)}]^T \{f^{S(m)}\} dS_e^{(m)} \quad (36)$$

Όπου $\{R_V\}$ είναι οι ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις των δυνάμεων που δρουν επί του όγκου του φορέα και $\{R_C\}$ είναι οι ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις των επιφανειακών δυνάμεων που δρουν στο φορέα.

Τελικά η εξίσωση ισορροπίας του φορέα είναι:

$$[K]\{D\} = \{R\} = \{R_C\} + \{R_V\} + \{R_S\} \quad (37)$$

2

ΘΕΩΡΙΑ
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ
ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ

2.1 ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Η τυχαία μεταβλητή αποτελεί μία απεικόνιση από τον δειγματοχώρο Ω των πιθανών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} ή κάποιο υποσύνολό του. Απλούστερα, μία τυχαία μεταβλητή είναι η αντιστοίχιση του αποτελέσματος ενός τυχαίου πειράματος σε έναν αριθμό.

Υπάρχουν διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές παίρνουν τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο αριθμών, όπως για παράδειγμα το αποτέλεσμα της ρίψη ενός ζαριού παίρνει τιμές μόνο ακέραιους αριθμούς στο διάστημα 1-6 δηλαδή $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Αντίθετα οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή από ένα διάστημα πραγματικών αριθμών. Ένα παράδειγμα συνεχούς τυχαίας μεταβλητής είναι το ύψος ενός ανθρώπου.

2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

2.2.1 ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION - CDF)

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας ορίζεται ως:

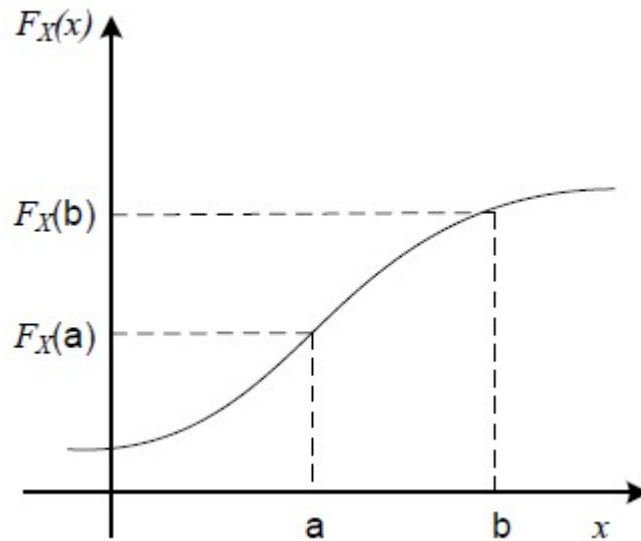
$$F_x = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}) \quad (38)$$

Εκφράζει δηλαδή την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να είναι μικρότερη από έναν αριθμό x ο οποίος ανήκει στον δειγματοχώρο Ω της τυχαίας μεταβλητής X .

Μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας έχει τις εξής ιδιότητες:

- Είναι αύξουσα, δηλαδή για $a \leq b$ τότε $F_x(a) \leq F_x(b)$
- Είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_x(a + \varepsilon) = F_x(a^+)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x) = 1$
- $P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F_x(b) - F_x(a)$

Η μορφή της φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



ΕΙΚΟΝΑ 6: ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΙΑΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

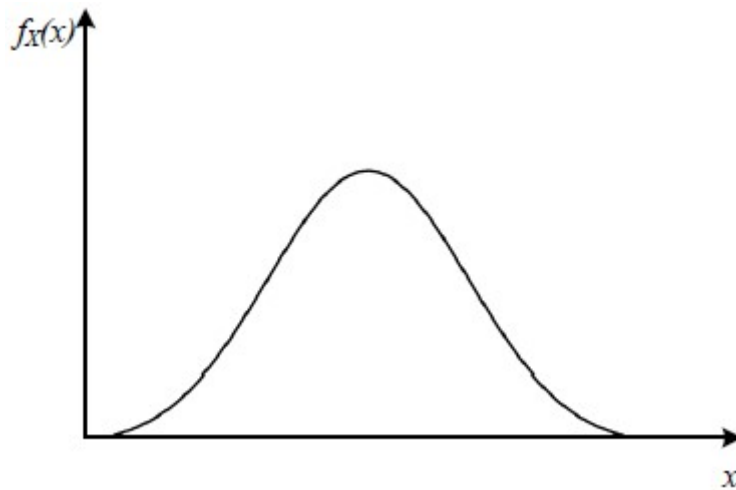
2.2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (PROBABILITY DENSITY FUNCTION-PDF)

Αν η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής είναι συνεχώς διαφορίσιμη, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως η παράγωγος της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) \Rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (39)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$
- $\int_{-\infty}^x f_X(x) dx = F_X(x)$

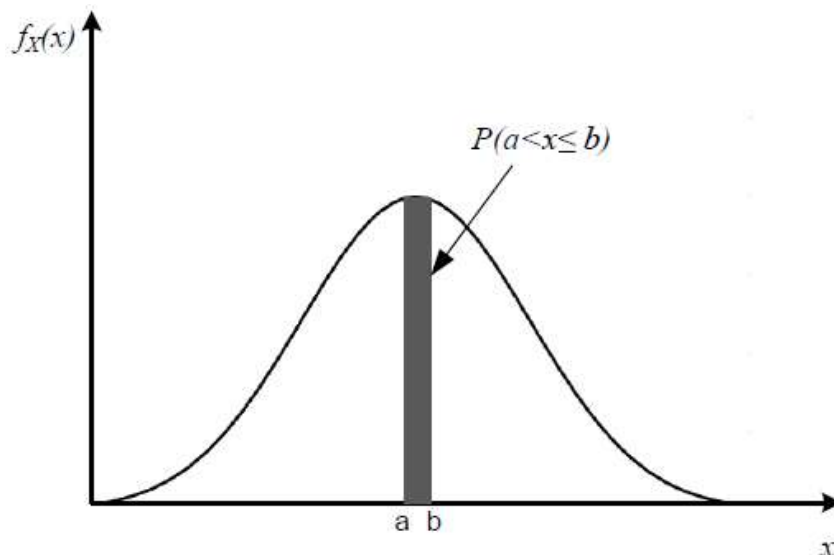


ΕΙΚΟΝΑ 7: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Αν μία συνάρτηση ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες τότε ορίζει ένα μέτρο πιθανότητας:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (40)$$

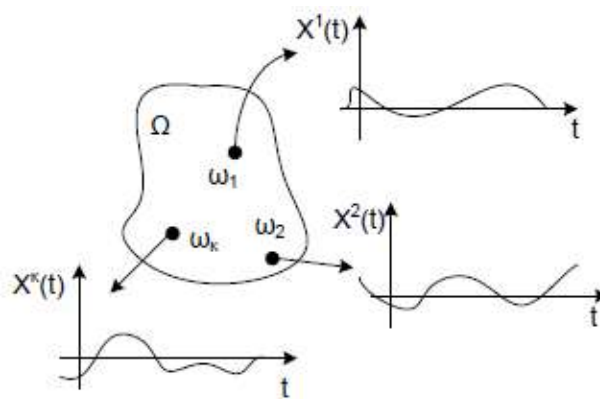
Η πιθανότητα αυτή είναι ίση με το εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης της f_X και του άξονα x μεταξύ των ευθειών $x=a$ και $x=b$.



ΕΙΚΟΝΑ 8: ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ $P(A < X < B)$

2.3 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΔΙΑ

Κάθε συνάρτηση της οποίας η οι τιμές είναι τυχαίες μεταβλητές ονομάζεται στοχαστική διαδικασία. Η διαφορά των στοχαστικών διαδικασιών από τις κλασικές συναρτήσεις των μαθηματικών είναι ότι οι στοχαστικές συναρτήσεις δεν αποτελούν μία μονοσήμαντη απεικόνιση από ένα σύνολο σε ένα άλλο, αλλά αποτελούνται από ένα σύνολο δειγματοσυναρτήσεων. Παράδειγμα τέτοιων συναρτήσεων είναι το επιταχυνσιογράφημα μίας σεισμικής δόνησης ή το πάχος μίας πλάκας σκυροδέματος. Η στοχαστική διαδικασία (ή σήμα) αναφέρεται σε στοχαστική συνάρτηση του χρόνου (t) ενώ τα στοχαστικά πεδία είναι στοχαστικές συναρτήσεις της θέσης στο χώρο (x, y, z).



ΕΙΚΟΝΑ 9: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Η στοχαστική διαδικασία περιγράφεται από τη μέση τιμή της και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισής της (autocorrelation function).

Η συνάρτηση της μέσης τιμής μίας στοχαστικής διαδικασίας ορίζεται ως:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] \quad (13)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ορίζεται ως:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (14)$$

και περιγράφει την συσχέτιση των τιμών της συνάρτησης για δύο χρονικές στιγμές (ή για δυο θέσεις στο χώρο αν πρόκειται για στοχαστικό πεδίο).

Για $t_1=t_2$ η παίρνουμε:

$$R_X(t, t) = E[X^2] \quad (15)$$

που είναι η μέση τετραγωνική τιμή της στοχαστικής διαδικασίας στη θέση t .

Οι στοχαστικές διαδικασίες που ακολουθούν την κανονική κατανομή (διαδικασίες Gauss) περιγράφονται πλήρως από τη μέση τιμή και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης τους. Έχουν επίσης τη χρήσιμη ιδιότητα ότι μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα μιας διαδικασίας με μηδενική μέση τιμή (zero mean) και της συνάρτησης μέσης τιμής της. Η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης (autocovariance function) μιας στοχαστικής διαδικασίας $X(t)$ ορίζεται ως:

$$C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} \quad (44)$$

Για $t_1 = t_2 = t$, η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης $C_X(t, t)$ ισούται με τη διακύμανση της $X(t)$, $\text{Var}(X(t))$ τη χρονική στιγμή t :

$$\text{Var}[X(t)] = C_X(t, t) = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\} \quad (45)$$

Η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης σχετίζεται με τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης με τον ακόλουθο τύπο:

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \quad (46)$$

Έτσι, για μια στοχαστική διαδικασία μηδενικής μέσης τιμής η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης και αυτοσυσχέτισης είναι ίσες:

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) \quad (47)$$

Ο συντελεστής συσχέτισης (autocorrelation coefficient) δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)}\sqrt{C_X(t_2, t_2)}} \quad \mu\epsilon \quad |\rho_X(t_1, t_2)| \leq 1 \quad (48)$$

ΣΤΑΣΙΜΕΣ (STATIONARY) ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ Η ΟΜΟΓΕΝΗ (HOMOGENEOUS) ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

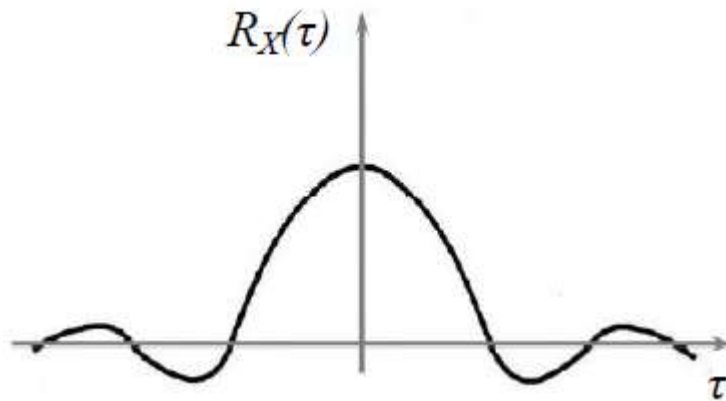
Η σπουδαιότερη κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών είναι οι στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες. Ως στάσιμες, ορίζονται οι στοχαστικές διαδικασίες για τις οποίες η αθροιστική συνάρτηση κατανομής που τις περιγράφει δεν αλλάζει με τον χρόνο t και αντίστοιχα τα ομογενή στοχαστικά πεδία δεν αλλάζουν με τη θέση x . Επομένως, τόσο η μέση τιμή όσο και η τυπική απόκλισή τους είναι σταθερές και ανεξάρτητες από την μεταβλητή χρόνου ή θέσης:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \mu_X \quad (49)$$

$$\text{Var}[X(t)] = \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2 \quad (50)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας (Εικόνα 8) εξαρτάται, όπως είναι αναμενόμενο, μόνο από τη σχετική απόσταση (διαφορά) των δύο χρονικών στιγμών στον άξονα των τ ($\tau = t_2 - t_1$) και όχι από τις μεμονωμένες χρονικές στιγμές t_1, t_2 . Επομένως:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau) \quad (51)$$



ΕΙΚΟΝΑ 10: ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ – **ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΚΑΡΗΥΝΕΝ-LOEVE**

Η προσομοίωση των στοχαστικών πεδίων μπορεί να διακριθεί σε τρεις κύριες μεθόδους, της σημειακής διακριτοποίησης (point discretization methods), της διακριτοποίησης μέσου όρου (average discretization methods), και του αναπτύγματος σε σειρά (series expansion methods). Στη μέθοδο σημειακής διακριτοποίησης οι τυχαίες μεταβλητές $\{f_i\}$ επιλέγονται σαν τιμές του στοχαστικού πεδίου $H(x)$ σε κάποια συγκεκριμένα σημεία x_i , ενώ στη μέθοδο διακριτοποίησης μέσου όρου τα $\{f_i\}$ είναι σταθμικά υπόλοιπα του $H(x)$ σε ένα πεδίο Ω_e . Στη μέθοδο αναπτύγματος σε σειρά το πεδίο αναπαρίσταται ως μια σειρά που περιλαμβάνει τυχαίες μεταβλητές και ντετερμινιστικές χωρικές συναρτήσεις. Η προσέγγιση λαμβάνεται σαν αποκοπή (truncation) της σειράς. Οι πιο γνωστές μέθοδοι αναπτύγματος σε σειρά είναι η Karhunen-Loeve και η μέθοδος φασματικής απεικόνισης (Spectral Representation Method).

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ (MIDPOINT METHOD-MP)

Στη μέθοδο σημειακής διακριτοποίησης περιλαμβάνεται η μέθοδος κεντρικού σημείου. Η μέθοδος αυτή προσεγγίζει το στοχαστικό πεδίο $H(x)$ σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο Ω_e από μια μοναδική τυχαία μεταβλητή, ορισμένη σαν την τιμή του πεδίου στο κέντρο x_c του στοιχείου :

$$H(x) = \hat{H}(x_c), x_c \in \Omega_e \quad (52)$$

Η μέση τιμή μ και το μητρώο συνδιακύμανσης K_H του $\hat{H}(\cdot)$ λαμβάνονται από τη μέση τιμή, τη διακύμανση και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του $H(\cdot)$ υπολογισμένες στα κέντρα των στοιχείων. Η μέθοδος του κεντρικού σημείου τείνει να υπερεκτιμά τη διακύμανση του στοχαστικού πεδίου εντός κάθε στοιχείου.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ ΚΑΡΗΥΝΕΝ-LOEVE (KARHUNEN-LOEVE EXPANSION METHOD-KL)

Το ανάπτυγμα Karhunen-Loeve [3,4] είναι ένα στοχαστικό πεδίο $H(x,\theta)$ μηδενικής μέσης τιμής βασισμένο στη φασματική αποσύνδεση (spectral

decomposition) της συνάρτησης αυτοδιακύμανσης (autocovariance function). Θεωρούμε το στοχαστικό πεδίο $H(x, \theta)$ ορισμένο στο φραγμένο χωρίο Ω και υποθέτουμε ότι έχει μέση τιμή $\mu(x)$ και πεπερασμένη διακύμανση $E[f(x) - \mu(x)]^2$. Το στοχαστικό πεδίο μπορεί να αναπτυχθεί υπό τη μορφή σειράς τύπου Fourier ως εξής:

$$H(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x) \xi_i(\theta) \quad (53)$$

όπου η παράμετρος θ συμβολίζει ένα στοιχείο από τον χώρο των τυχαίων γεγονότων και $\xi_i(\theta)$ είναι ένα σύνολο ορθοκανονικών ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν κανονική κατανομή $N(0,1)$ (δηλ. μεταβλητών με μέση τιμή $\mu = 0$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1$). Επιπλέον, λ_i είναι οι ιδιοτιμές και $\varphi_i(x)$ οι ιδιοσυναρτήσεις της συνάρτησης αυτοδιακύμανσης $C_H(x, x')$ του πεδίου, οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν με τη λύση της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm 2^{ου} βαθμού [9,10]:

$$\int_{\Omega} C_H(x, x') \varphi_i(x') dx' = \lambda_i \varphi_i(x) \quad (54)$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά μόνο σε πολύ συγκεκριμένες περιπτώσεις. Τις περισσότερες φορές, η αναλυτική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης δεν είναι εφικτή με αποτέλεσμα την εφαρμογή μιας αριθμητικής λύσης. Η συνήθης διαδικασία αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης (54) είναι τύπου Galerkin. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ιδιοτιμές λ_i αντιπροσωπεύουν τη συμβολή της κάθε ιδιοσυναρτήσης στη συνολική τυχαία διακύμανση του πεδίου.

Εξ' ορισμού η συνάρτηση αυτοδιακύμανσης $C_H(x, x')$ είναι οριοθετημένη, συμμετρική, θετικά ορισμένη και έχει την ακόλουθη φασματική ή ιδιοσυστατική αποσύνδεση-eigen-decomposition [11] :

$$C_H(x, x') = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(x') \quad (55)$$

Η εξίσωση (54) προκύπτει από το γεγονός ότι οι ιδιοσυναρτήσεις της αποτελούν ένα πλήρες ορθογωνικό σύνολο που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (56)$$

όπου δ_{ij} είναι η συνάρτηση Kronecker-delta.

Αποδεικνύεται ότι οι ορθοκανονικές και ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές $\xi_i(\theta)$ μπορούν να εκφραστούν από τη σχέση:

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{\Omega} [\hat{H}(x, \theta) - \mu(x)] \varphi_i(x) dx \quad (57)$$

και έχουν μέση τιμή και συνδιακύμανση $E[\xi_i(\theta)] = 0$ και $E[\xi_i(\theta) \cdot \xi_j(\theta)] = \delta_{ij}$ αντίστοιχα. Το ανάπτυγμα σε σειρά της Εξ. (53), είναι γνωστό ως ανάπτυγμα Karhunen-Loeve (KL expansion) και παρέχει τη δυνατότητα προσομοίωσης ενός στοχαστικού πεδίου με χρήση ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών και ντετερμινιστικών ορθογωνικών συναρτήσεων. Αποδεικνύεται ότι η σειρά συγκλίνει κατά τη μέση τετραγωνική έννοια για οποιαδήποτε κατανομή του πεδίου $H(x, \theta)$ [11]. Για πρακτικές εφαρμογές, χρησιμοποιείται μια προσέγγιση της σειράς που αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό όρων M :

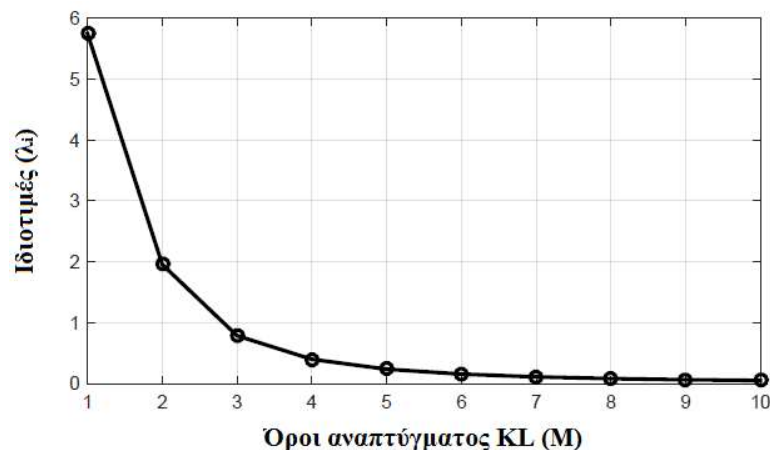
$$\hat{H}(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x) \xi_i(\theta) \quad (58)$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση αυτοδιακύμανσης είναι:

$$\hat{C}(x, x') = \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(x') \quad (16)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ KARHUNEN-LOEVE

- Λόγω της μη συσσώρευσης των ιδιοτιμών λ_i γύρω από μια μη μηδενική τιμή μπορούν να περιγραφούν βάσει μιας φθίνουσας σειράς που συγκλίνει στο μηδέν. Στην Εικόνα 11 φαίνεται η φθίνουσα μορφή των 10 ιδιοτιμών λ_i για $M=10$ όρους του αναπτύγματος KL.



ΕΙΚΟΝΑ 11: ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΜΟΡΦΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΑΠΟ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ FREDHOLM 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

- Η βάση των ιδιοσυναρτήσεων $\varphi_i(x)$ της συνάρτησης αυτοδιακύμανσης $C_H(x, x')$ είναι βέλτιστη με την έννοια ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα που προέρχεται από την αποκοπή μετά τον M -οστό όρο μέχρι το ∞ ελαχιστοποιείται.
- Όταν η $H(x, \theta)$ είναι ένα Γκαουσιανό στοχαστικό πεδίο, κάθε τυχαία μεταβλητή $\xi_i(\theta)$ θα ακολουθεί την κατανομή Gauss. Επομένως στην περίπτωση αυτή οι $\xi_i(\theta)$ σχηματίζουν ένα διάνυσμα ασυσχέτιστων Γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών μηδενικής μέσης τιμής.
- Η διακύμανση του σφάλματος e_{var} που λαμβάνεται με την αποκοπή του αναπτύγματος μετά τους M όρους αποδεικνύεται από βασική άλγεβρα ότι είναι:

$$e_{var} = var[H(x, \theta) - \hat{H}(x, \theta)] = \sigma(x)^2 - \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi_i(x)^2 \quad (60)$$

Το δεξί μέρος της Εξ. (60) είναι πάντα θετικό επειδή είναι η διακύμανση κάποιας ποσότητας. Αυτό σημαίνει ότι το ανάπτυγμα KL υποεκτιμάται πάντα σε σχέση με την πραγματική διακύμανση του πεδίου.

2.5 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO

Γενικά, οι μέθοδοι προσομοίωσης χρησιμοποιούνται σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών που επεκτείνονται από την προσομοίωση μιας πτήσης μέχρι τη συμπεριφορά μιας κατασκευής υπό την επιβολή στατικών ή δυναμικών φορτίων. Η προσομοίωση είναι μια αριθμητική τεχνική, η οποία χρησιμοποιείται προκειμένου να διεξάγει πειράματα σε έναν υπολογιστή υπό τη συνθήκη ότι η συμπεριφορά του συστήματος για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο μπορεί να περιγραφεί με λογικά ή μαθηματικά μοντέλα [12].

Η χρήση των μεθόδων Monte Carlo στη μοντελοποίηση φυσικών προβλημάτων μας επιτρέπει να εξετάσουμε πολύπλοκα συστήματα που αλλιώς θα ήταν από δύσκολο έως και αδύνατο. Η επίλυση εξισώσεων που περιγράφουν την αλληλεπίδραση δύο ατόμων είναι σχετικά εύκολη. Η λύση όμως των ίδιων εξισώσεων για εκατοντάδες ή χιλιάδες άτομα είναι αδύνατη. Με τη μέθοδο Monte Carlo, ένα μεγάλο σύστημα μπορεί να δειγματιστεί σε έναν αριθμό τυχαίων ρυθμίσεων, και αυτά τα δεδομένα μπορούν να

χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουμε το σύστημα σαν σύνολο. Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η μέθοδος αυτή είναι η μόνη ικανή να χειριστεί στοχαστικά προβλήματα στα οποία εμπλέκονται μη γραμμικότητες, δυναμικές φορτίσεις, προβλήματα αστάθειας, παραμετρικές διεγέρσεις κ.ά. Γι' αυτό και χρησιμοποιείται ως μέθοδος αναφοράς (χρησιμοποιείται δηλαδή, για τον έλεγχο της ποιότητας των αποτελεσμάτων όλων των άλλων μεθόδων) και αντικαθιστά την αναλυτική λύση σε προβλήματα που αυτή είναι αδύνατο ή εξαιρετικά δύσκολο να εφαρμοστεί.

ΤΑ ΚΥΡΙΟΤΕΡΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ MONTE CARLO

Η Monte Carlo είναι πολύ απλή. Ένα στοιχείο που τη χαρακτηρίζει είναι η απλή δομή του υπολογιστικού αλγορίθμου. Σαν κανόνας, το πρόγραμμα πρέπει να διεκπεραιώσει μια τυχαία δοκιμή. Αυτή η δοκιμή επαναλαμβάνεται N φορές, με κάθε δοκιμή ανεξάρτητη από τις προηγούμενες, και μετά τα αποτελέσματα των δοκιμών λαμβάνονται κατά μέσο όρο.

Η μέθοδος μπορεί να είναι εξαιρετικά αργή. Για παράδειγμα στην ολοκλήρωση, το λάθος των υπολογισμών είναι ανάλογο με $\sqrt{(D/N)}$, όπου D είναι κάποια σταθερά και N ο αριθμός των δοκιμών. Γίνεται προφανές έτσι ότι για να μειώσει κανείς το λάθος κατά ένα παράγοντα 10 (δηλαδή να αποκτήσει ακόμη ένα δεκαδικό ψηφίο) απαιτείται να αυξήσει το N κατά 100 και άρα και την ποσότητα εργασίας αντίστοιχα.

Η μέθοδος είναι πολύ δυνατή στα πολυδιάστατα προβλήματα, όπου και χρησιμοποιείται κυρίως, γιατί γενικά η ακρίβειά της εξαρτάται μόνο από την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Στην ολοκλήρωση, συγκλίνει με ρυθμό ανεξάρτητο των διαστάσεων του ολοκληρώματος. Για το λόγο αυτό, η MCS είναι η μόνη βιώσιμη μέθοδος σε ένα μεγάλο πεδίο προβλημάτων πολλών διαστάσεων σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους.

Με λίγα λόγια, αν και η MCS είναι μια πολύ ευέλικτη μέθοδος στοχαστικής ανάλυσης, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε τύπο προβλήματος έχει το μειονέκτημα ότι προκειμένου να επιτύχει υψηλά επίπεδα ακρίβειας απαιτείται τεράστιο υπολογιστικό κόστος.

3

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ
ΜΕΘΟΔΟΙ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Οι σύγχρονες κατασκευές γίνονται ολοένα και μεγαλύτερες και πιο σύνθετες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να απαιτείται η επίλυση όλο και μεγαλύτερων και πιο αναλυτικών μοντέλων για την εξαγωγή ακριβέστερων αποτελεσμάτων. Έτσι ο χρόνος προσομοίωσης αυξάνεται σε συνδυασμό με την ανάγκη επίλυσης μεγάλου αριθμού μοντέλων λόγω των αβεβαιοτήτων που υπάρχουν στις ιδιότητες των υλικών και στις φορτίσεις.

Για αυτόν το λόγο προκύπτει η ανάγκη να βρεθούν τρόποι μείωσης του χρόνου προσομοίωσης των μοντέλων. Αυτοί οι τρόποι μπορεί να είναι η χρήση υπολογιστών με μεγαλύτερες υπολογιστικές δυνατότητες, χρήση συστημάτων παράλληλης επεξεργασίας ή και η επίλυσή τους με προσεγγιστικές μεθόδους.

Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσει η ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων για την επίλυση γειτονικών προβλημάτων στο πλαίσιο της προσομοίωσης Monte Carlo. Οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό ότι χρησιμοποιούν τις λύσεις κάποιων μη προσεγγιστικών μοντέλων, από το σύνολο των προς επίλυση περιπτώσεων, προκειμένου να προσεγγίσουν τις λύσεις των υπόλοιπων.

Η προσέγγιση γίνεται είτε με τη δημιουργία αδρομερών μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων με πολύ λιγότερους βαθμούς ελευθερίας απ'ότι το πλήρες μοντέλο είτε με τη χρήση συστημάτων τεχνητής νοημοσύνης, τα οποία καλούνται να προβλέψουν τη συμπεριφορά των μοντέλων.

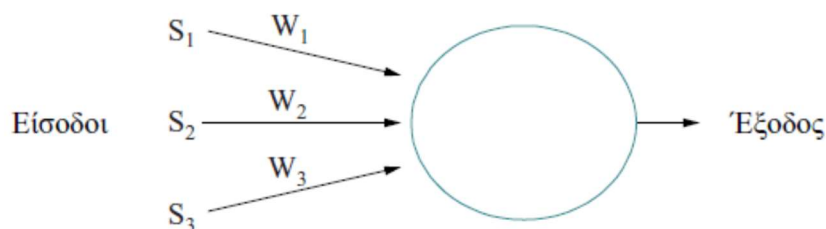
3.2 ΤΕΧΝΗΤΑ ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ (ANN)

3.2.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

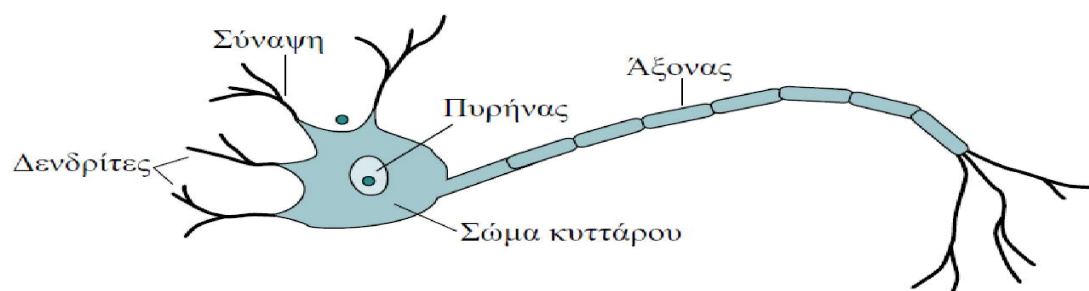
Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα (Artificial Neural Networks) αποτελούν μία δομή μέσα από την οποία επιχειρείται η προσομοίωση της λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφάλου[8]. Όπως ο ανθρώπινος εγκέφαλος δέχεται ερεθίσματα από το περιβάλλον,

τα επεξεργάζεται και αντιδρά ανάλογα έτσι και τα νευρωνικά δίκτυα δέχονται σήματα ως εισόδους και μετά από κάποια επεξεργασία αυτών των σημάτων προκύπτει κάποια(-ες) έξοδος(-ες).

Τα νευρωνικά δίκτυα αποτελούνται από στοιχεία που ονομάζονται νευρώνες. Σε κάθε νευρώνα εισέρχεται ένας αριθμός σημάτων και εξέρχεται μία και μόνο έξοδος. Σε κάθε σήμα που μεταδίδεται από έναν νευρώνα σε έναν άλλο εντός του νευρωνικού δικτύου αντιστοιχεί μία τιμή βάρους w , η οποία δηλώνει πόσο συνδεδεμένοι είναι μεταξύ τους οι δύο αυτοί νευρώνες. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται ένα πάρα πολύ απλό νευρωνικό δίκτυο και ένας τυπικός νευρώνας ενός ανθρώπινου εγκεφάλου, ο οποίος δέχεται κάποιο ερέθισμα και παράγει ένα σήμα μέσω του άξονά του στους παρακάτω νευρώνες. Γίνεται φανερή έτσι η ομοιότητα των δύο συστημάτων.



ΕΙΚΟΝΑ 12: ΈΝΑΣ ΝΕΥΡΩΝΑΣ (ΚΥΚΛΟΣ) ΜΕ ΕΙΣΟΔΟΥΣ (S_1, S_2, S_3) ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΒΑΡΗ (W_1, W_2, W_3) ΚΑΙ ΜΙΑ ΕΞΟΔΟ



ΕΙΚΟΝΑ 13: ΤΥΠΙΚΟΣ ΝΕΥΡΩΝΑΣ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟΥ ΝΕΥΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

3.2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΝΕΡΓΟΠΟΙΗΣΗΣ

Σε κάθε νευρώνα τα σήματα τα οποία καταφθάνουν πολλαπλασιάζονται με τα αντίστοιχα βάρη τους και στη συνέχεια αθροίζονται και υπόκεινται στην συνάρτηση

ενεργοποίησης του νευρώνα (activation function). Αυτή η συνάρτηση μπορεί να είναι η δυαδική πύλη:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } x > \theta \\ 0 & \text{εάν } x < \theta \end{cases} \quad \text{για } \theta \in \mathbb{R} \quad (61)$$

Αρκετά συχνά χρησιμοποιείται η σιγμοειδής συνάρτηση λόγω της μη-γραμμικότητάς της, διότι οι συναρτήσεις οι οποίες επιχειρείται να προσεγγιστούν είναι εντόνως μη-γραμμικές.

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (62)$$

Επομένως η έξοδος ενός νευρώνα δίνεται από τη σχέση:

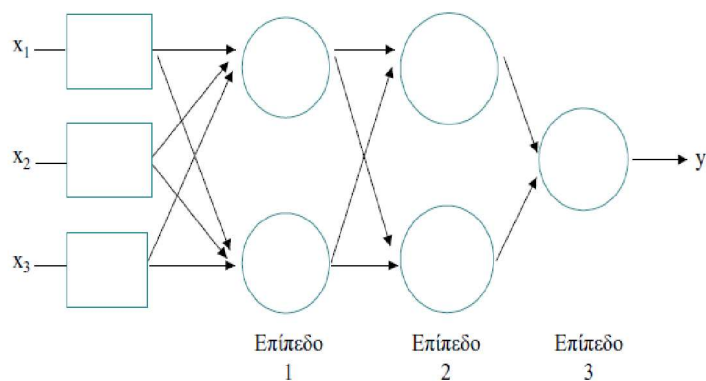
$$output = \sum_{i=1}^n S_i w_i \quad (63)$$

Όπου: n ο αριθμός των εισόδων, S οι είσοδοι και w τα αντίστοιχα βάρη τους

3.2.3 ΚΡΥΜΜΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

Τα νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη τιμών εξόδων αρκετά πολύπλοκων προβλημάτων και συνεπώς η δομή τους πρέπει να είναι πολύπλοκη και όχι τόσο απλή όσο της Εικόνας 12. Έτσι έχουν περισσότερους από έναν νευρώνες οι οποίοι είναι διατεταγμένοι σε επίπεδα. Πρώτα υπάρχει το επίπεδο εισόδου, στο οποίο εισέρχονται οι ανεξάρτητες μεταβλητές ως μεταβλητές εισόδου του προβλήματος. Στο τέλος του νευρωνικού δικτύου υπάρχει το επίπεδο εξόδου το οποίο περιλαμβάνει τόσους νευρώνες όσες εξόδους έχει το μοντέλο. Ενδιάμεσα υπάρχουν κρυμμένα επίπεδα (hidden layers) από νευρώνες οι οποίοι δέχονται εισόδους από το προηγούμενο από αυτούς επίπεδο και δίνουν, ως εξόδους, τιμές εισόδου στο επόμενο επίπεδο. Μία τέτοια δομή φαίνεται στην Εικόνα 14. Όσο πιο πολύπλοκη η δομή του νευρωνικού

δικτύου τόσο πιο πολύπλοκες σχέσεις μεταξύ εισόδων και εξόδων μπορεί να προσομοιάσει.



ΕΙΚΟΝΑ 14: ΝΕΥΡΩΝΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΜΕ 3 ΕΙΣΟΔΟΥΣ (X_1, X_2, X_3), 2 ΚΡΥΜΜΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΝΕΥΡΩΝΩΝ ΜΕ 2 ΝΕΥΡΩΝΕΣ ΤΟ ΚΑΘΕ ΕΝΑ ΚΑΙ ΜΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΕΞΟΔΟΥ (Y)

Ο αριθμός των κρυμμένων επιπέδων και των νευρώνων σε κάθε κρυμμένο επίπεδο μπορεί να είναι οποιοσδήποτε, χωρίς όμως να ισχύει ότι όσο περισσότεροι χρησιμοποιούνται τόσο καλύτερα αποτελέσματα θα έχει το νευρωνικό δίκτυο.

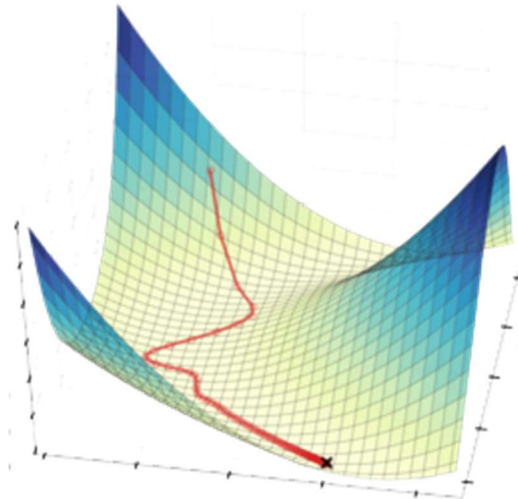
3.2.4 ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΝΕΥΡΩΝΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ

Το νευρωνικό δίκτυο δημιουργείται με σκοπό να δέχεται κάποιες συγκεκριμένες εισόδους και να παράγει κάποιες συγκεκριμένες εξόδους. Αυτά τα ζεύγη εισόδων και των εξόδων που τους αντιστοιχούν ονομάζονται δεδομένα εκπαίδευσης (training data). Το νευρωνικό πρέπει να 'μάθει' για τις εισόδους των δεδομένων εκπαίδευσης να δίνει τις αντίστοιχες εξόδους των δεδομένων εκπαίδευσης. Αυτό ονομάζεται εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου (training) και γίνεται διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι η οπισθοδιάδοση του σφάλματος (Error Backpropagation).

Ένα νευρωνικό δίκτυο έχει στα δεδομένα εκπαίδευσής του κάποια πρότυπα (ζευγάρια δεδομένων εισόδου και εξόδου). Επίσης έχει βάρη w_{ij} από τον i νευρώνα στον j νευρώνα, t_{pj} είναι ο στόχος του p πρότυπου στον j νευρώνα εξόδου, o_{pj} είναι η

έξοδος του νευρωνικού του p πρότυπου στον j νευρώνα εξόδου και x_{pj} είναι η είσοδος του νευρωνικού του p πρότυπου στον i νευρώνα εξόδου.

Η οπισθοδιάδοση του σφάλματος βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του σφάλματος των εξόδων του νευρωνικού σε σχέση με τους αντίστοιχους στόχους. Αυτό αποτελεί ένα πρόβλημα της γενικότερης κατηγορίας προβλημάτων επικλινούς καθόδου (gradient descent) σύμφωνα με την οποία ορίζεται ένα σφάλμα και για την μείωσή του σε κάθε βήμα της μεθόδου θα αλλάζουν οι τιμές των βαρών σύμφωνα με την παράγωγο της συνάρτησης του σφάλματος. Δηλαδή, θα κινούνται οι τιμές των βαρών προς τα χαμηλότερα σημεία της συνάρτησης σφάλματος, χωρίς να ξέρουμε την ακριβή συνάρτηση σφάλματος, αλλά μόνο την κλίση της.



ΕΙΚΟΝΑ 15: ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΕΠΙΚΛΙΝΟΥΣ ΚΑΘΟΔΟΥ

Χρειάζεται συνεπώς να οριστεί μία συνάρτηση σφάλματος. Αυτή θα είναι η συνάρτηση E_p :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_j (t_{pj} - o_{pj})^2 \quad (64)$$

Όπου E_p το σφάλμα στο πρότυπο p . Άρα το συνολικό σφάλμα θα είναι:

$$E = \sum_p E_p \quad (65)$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει το τετράγωνο της διαφοράς ούτως ώστε να πάρουμε την απόλυτη τιμή του σφάλματος. Το $\frac{1}{2}$ είναι αυθαίρετο και δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Το σήμα εισόδου σε έναν νευρώνα j ορίζεται ως $S_{pj} = \sum_i w_{ji} o_{pi}$ όπου o_{pi} είναι το σήμα εισόδου από τον νευρώνα i στον νευρώνα j άρα $o_{pj} = f_j(S_{pj})$ όπου f_j η συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα j .

Αρχικά θεωρούμε ότι η μεταβολή του βάρους w_{ji} , για την εκπαίδευση του νευρωνικού, λόγω του σφάλματος του προτύπου p θα είναι $\Delta_p w_{ji}$ και θα ισχύει:

$$\Delta w_{ij} \sim - \frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}} \quad (66)$$

Και συνεπώς με τον κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε:

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial E_p}{\partial S_{pj}} \frac{\partial S_{pj}}{\partial w_{ji}}, \quad S_{pj} = \sum_i w_{ji} o_{pi} \quad (67)$$

Όπου S_{pj} είναι η έξοδος του j νευρώνα για το p πρότυπο.

Άρα θα ισχύει:

$$\frac{\partial S_{pj}}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial}{\partial w_{ji}} \sum_k w_{jk} o_{pk} = o_{pj} \quad (68)$$

Ορίζουμε:

$$\delta_{pj} = - \frac{\partial E_p}{\partial S_{pj}} \quad (69)$$

$$\Leftrightarrow \delta_{pj} = \frac{\partial E_p}{\partial o_{pj}} \frac{\partial o_{pj}}{\partial S_{pj}} \quad (70)$$

Αλλά επειδή:

$$o_{pi} = f(S_{pi}) \quad (7117)$$

Είναι:

$$\frac{\partial o_{pj}}{\partial S_{pj}} = f'(S_{pi}) \quad (72)$$

Για τους νευρώνες εξόδου ορίζεται το $\frac{\partial E_p}{\partial o_{pj}}$ ως:

$$\frac{\partial E_p}{\partial o_{pj}} = \frac{\partial}{\partial o_{pj}} \left[\frac{1}{2} (t_{pj} - o_{pj})^2 \right] = -(t_{pj} - o_{pj}) \quad (73)$$

Αρα αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\delta_{pj} = (t_{pj} - o_{pj}) f'(S_{pi}) \quad (74)$$

Για νευρώνες που δεν βρίσκονται στο επίπεδο εξόδου υπάρχει το πρόβλημα ότι δεν έχουμε κάποιον στόχο t_{pj} οπότε χρησιμοποιούμε πάλι τον κανόνα της αλυσίδας και έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial E_p}{\partial S_{pk}} \frac{\partial S_{pk}}{\partial o_{pj}} &= \sum_k \frac{\partial E_p}{\partial S_{pk}} \frac{\partial}{\partial o_{pj}} \sum w_{ki} o_{pi} = \\ &= \sum_k \frac{\partial E_p}{\partial S_{pk}} w_{kj} = \sum_k \delta_{pk} w_{pj} \end{aligned} \quad (75)$$

Τελικά έχουμε:

$$\Delta_p w_{ji} = \eta \delta_{pj} o_{pi} \quad (76)$$

Το δ_{ij} ορίζεται όπως παραπάνω ανάλογα αν ο νευρώνας j είναι νευρώνας εξόδου ή εσωτερικός και το η ονομάζεται ρυθμός εκμάθησης και ορίζει το πόσο γρήγορα ή αργά

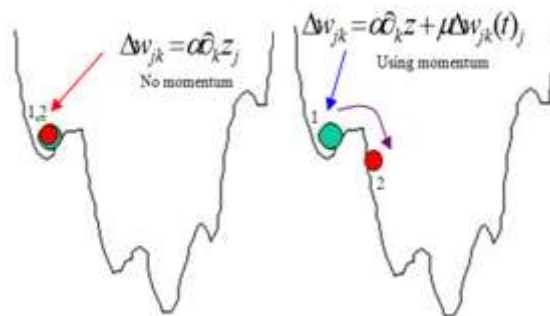
θα κινηθεί η μεταβολή του βάρους w_{ij} σύμφωνα με την παράγωγο του σφάλματος. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να υπάρξει σύγκλιση και το νευρωνικό να αποδίδει ικανοποιητικά τα πρότυπα των δεδομένων εκπαίδευσης.

3.2.5 ΟΡΜΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Για να αποφευχθεί η στάση της διαδικασίας της οπισθοδιάδοσης σε κάποιο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης του σφάλματος ορίζεται η νέα εξίσωση ανανέωσης του βάρους w_{ji} ως:

$$\Delta w_{ji}(n+1) = \eta \delta_{pj} o_{pj} + a \Delta w_{ji}(n) \quad (77)$$

Όπου a είναι η ορμή του συστήματος. Με τον τρόπο αυτό για κάποια μεταβολή του βάρους Δw_{ji} λαμβάνεται υπόψη και η προηγούμενη μεταβολή που υπέστη το συγκεκριμένο βάρος. Έτσι σε περιπτώσεις τοπικών ελαχίστων που θα υπήρχε παλινδρόμηση του βάρους αυτού γύρω από το τοπικό ελάχιστο, με τον όρο της ορμής θα ξεφύγει η οπισθοδιάδοση από το σημείο αυτό και μόνο σε πραγματικά ελάχιστα θα υπάρξει η παλινδρόμηση και τελικά η σύγκλιση.



ΕΙΚΟΝΑ 16: ΑΡΙΣΤΕΡΑ: ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΧΩΡΙΣ ΟΡΜΗ ΚΑΙ Η ΣΤΑΣΗ ΣΕ ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ, ΔΕΞΙΑ: ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΟΡΟΥ ΟΡΜΗΣ ΜΕ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟ Η ΞΕΦΕΥΓΟΥΜΕ ΑΠΟ ΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

3.3 PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION (POD)

Σύμφωνα με την μέθοδο Proper Orthogonal Decomposition, επιλέγεται ένας αριθμός n_{pod} μοντέλων για τα οποία καθορίζονται οι τυχαίες παράμετροι. Στη συνέχεια κατασκευάζονται τα πλήρη μητρώα δυσκαμψίας και τα πλήρη διανύσματα φορτίσεως και επιλύονται τα συστήματα που προκύπτουν:

$$[K] \cdot [u] = [F] \quad (78)$$

Οι λύσεις των n_{pod} αυτών συστημάτων δίνουν ισάριθμα διανύσματα λύσεων $u_1, u_2, \dots, u_{n_{pod}}$. Τα διανύσματα αυτά συνθέτουν την βάση V του διανυσματικού χώρου των λύσεων αυτών.

$$[V] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{n_{pod}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Η μέθοδος POD κάνει την παραδοχή ότι όλες οι λύσεις του μοντέλου με τις τυχαίες παραμέτρους θα ανήκουν στον διανυσματικό χώρο αυτόν, που έχει ως βάση την βάση που συνθέτουν τα n_{pod} διανύσματα. Δηλαδή ότι κάθε νέα λύση που θα αναζητηθεί θα είναι γραμμικός συνδυασμός των n_{pod} πρώτων λύσεων. Δηλαδή:

$$[u] = [V] \cdot [u_{POD}] \quad (19)$$

Όπου $[u_{POD}] = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{POD}]^T$ είναι το διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων και άρα:

$$[u] = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_{n_{pod}} \cdot u_{n_{pod}} \quad (20)$$

Επομένως:

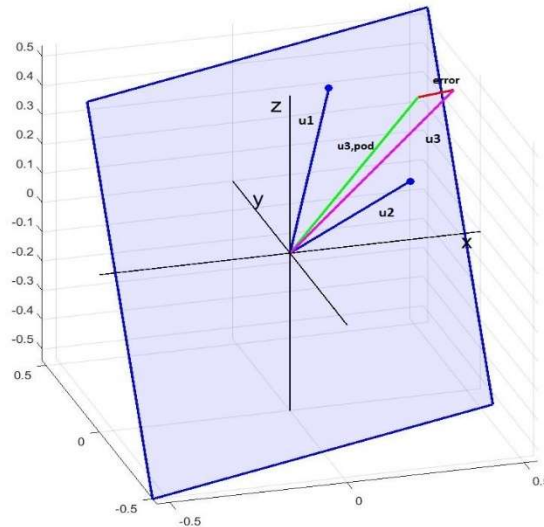
$$[K] \cdot [V][u_{POD}] = [F] \quad (21)$$

$$\Rightarrow [V]^T [K] \cdot [V][u_{POD}] = [V]^T [F] \quad (22)$$

$$\Rightarrow [K_{POD}][u_{POD}] = [F_{POD}] \quad (23)$$

όπου $[K_{POD}] = [V]^T [K] \cdot [V]$ και $[F_{POD}] = [V]^T [F]$

Έτσι έχουμε ανάγει το σύστημα $n_{dof} \times n_{dof}$ (όπου n_{dof} οι αρχικοί βαθμοί ελευθερίας του μοντέλου) σε ένα σύστημα $n_{POD} \times n_{POD}$ με $n_{POD} \ll n_{dof}$. Με αυτόν τον τρόπο μειώνεται πολύ η διάσταση του συστήματος προς επίλυση αλλά υπάρχει ένα σφάλμα. Μια σχηματική απεικόνιση στις 3 διαστάσεις της παραπάνω μεθόδου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με $n_{POD} = 2$.



ΕΙΚΟΝΑ 17: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕΘΟΔΟΥ POD ΣΤΙΣ 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Σύμφωνα με το σχήμα βρίσκουμε 2 λύσεις, τις u_1 και u_2 (μπλε διανύσματα) και θεωρούμε ότι η τρίτη λύση θα βρίσκεται στον διανυσματικό χώρο που έχει ως βάση του τα δύο αυτά διανύσματα (το μπλε επίπεδο). Έτσι την λύση u_3 θα την αναζητήσουμε σε αυτόν τον υποχώρο και θα καταλήξουμε στη λύση $u_{3,POD}$ (πράσινο διάνυσμα) που είναι η προβολή της πραγματικής λύσης u_3 (μωβ διάνυσμα). Έτσι υπάρχει ένα σφάλμα (το κόκκινο διάνυσμα), το οποίο, επειδή τα διανύσματα αποτελούν λύσεις γειτονικών προβλημάτων, θα είναι μικρό.

3.4 ENERGY CONSERVING AND SAMPLE WEIGHTING METHOD (ECSW)

Επειδή, σύμφωνα με την POD, απαιτείται η κατασκευή του πλήρους μητρώου δυσκαμψίας $[K]$ και του διανύσματος εξωτερικών φορτίσεων $[F]$ και στη συνέχεια η προβολή τους στο τοπικό σύστημα με τις πράξεις $[K_{POD}] = [V]^T[K] \cdot [V]$ και $[F_{POD}] = [V]^T[F]$, το υπολογιστικό κόστος μειώνεται μόνο στην επίλυση του συστήματος. Έτσι προκύπτει η ανάγκη να μειώσουμε το κόστος και στην κατασκευή των μητρώων. Να κατασκευάσουμε δηλαδή ένα περαιτέρω μειωμένο μοντέλο (Hyper Reduced Model).

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $[F]$ είναι διάνυσμα δυνάμεων και το μητρώο $[V]^T$ είναι μητρώο μετατοπίσεων. Άρα το διάνυσμα $[F_{POD}]$ είναι διάνυσμα έργων, αφού είναι το εσωτερικό διάνυσμα των δύο αυτών στοιχείων. Αντίστοιχα, το εσωτερικό γινόμενο $[K] \cdot [V]$ είναι ένα διάνυσμα δυνάμεων άρα από την πράξη $[K_{POD}] = [V]^T[K] \cdot [V]$ προκύπτει, ομοίως, μητρώο έργων. Επομένως στα $[F_{POD}]$ και $[K_{POD}]$ περιέχονται βαθμωτά μεγέθη. Άρα υπάρχει η δυνατότητα να τα προσεγγίσουμε δίνοντας σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο τη δυνατότητα να συμμετάσχει λιγότερο ή περισσότερο στην κατασκευή αυτών των στοιχείων μέσα από συντελεστές. Δηλαδή θα θεωρηθεί ότι [6]:

$$[F_{POD}] \approx [F_{HR}] = \sum_{i=1}^{n_{el}} w_{if} [V]^T [F_i] \quad (24)$$

$$[K_{POD}] \approx [K_{HR}] = \sum_{i=1}^{n_{el}} w_{ik} [V]^T [K_i] [V] \quad (25)$$

όπου:

- n_{el} ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων του μοντέλου.
- $[V]$ η βάση του διανυσματικού χώρου σύμφωνα με την μέθοδο POD.
- $[F_i]$ το διάνυσμα εξωτερικών δράσεων του i -οστού πεπερασμένου στοιχείου, στους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας.

- $[K_i]$ το μητρώο δυσκαμψίας του i -οστού πεπερασμένου στοιχείου, στους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας.
- w_{if} ένας συντελεστής που αναθέτεται στο i -οστό πεπερασμένο στοιχείο για την προσέγγιση του διανύσματος εξωτερικών δράσεων $[F_{POD}]$
- w_{iK} ένας συντελεστής που αναθέτεται στο i -οστό πεπερασμένο στοιχείο για την προσέγγιση του μητρώου δυσκαμψίας $[K_{POD}]$

Η επιλογή των συντελεστών w_i γίνεται με την εξής διαδικασία:

- Κατασκευάζεται το μητρώο

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n_e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n_{pod}1} & \cdots & g_{n_{pod}n_e} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Όπου:

$g_{ij} = [V]^T [F_{ij}]$, όπου $[V]$ η διανυσματική βάση της μεθόδου POD και $[F_{ij}]$ το διάνυσμα εξωτερικών δράσεων του j -οστού πεπερασμένου στοιχείου στο i -οστό πρόβλημα που έχει λυθεί πλήρως για την κατασκευή της βάσης $[V]$ σύμφωνα με την μέθοδο POD. Προσοχή χρειάζεται στο ότι το $[F_{ij}]$ αναφέρεται στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων και όχι στο τοπικό του κάθε στοιχείου

- Κατασκευάζεται το διάνυσμα

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_{pod}} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Όπου: b_i διάνυσμα που προκύπτει ως το άθροισμα κατά σειρά των στοιχείων g_{i1} - g_{in_e} του πίνακα G . Είναι δηλαδή το διάνυσμα εξωτερικών δράσεων του i -οστού προβλήματος που έχει λυθεί πλήρως για την κατασκευή της βάσης $[V]$ σύμφωνα με την μέθοδο POD.

Επιλύεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αντικειμενική συνάρτηση

$$\|G \cdot w - b\| \leq \varepsilon \|b\| \quad (28)$$

με περιορισμό $w \geq 0$

Το πρόβλημα λύνεται με τη χρήση του αλγορίθμου NNLS(Non-negative least squares) [7], ο οποίος λόγω του τρόπου που επιλύει το πρόβλημα, καταλήγει σε λύση για το w έχοντας αρκετά $w_i = 0$.

Επομένως, προσεγγίζοντας το διάνυσμα $[F_{POD}]$ με το διάνυσμα $[F_{HR}]$, σύμφωνα με την εξίσωση (8) θα υπάρχουν πολλά στοιχεία με $w_i = 0$ και επομένως ο υπολογισμός των διανυσμάτων εξωτερικών δράσεων για αυτά τα στοιχεία μπορεί να παραληφθεί.

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών w για την προσέγγιση του μητρώου $[K_{POD}]$ ακολουθείται η ίδια διαδικασία με:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n_e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n_{pod}1} & \cdots & g_{n_{pod}n_e} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Όπου: $g_{ij} = [V]^T [K_{ij}] [u_i]$, όπου $[V]$ η διανυσματική βάση της μεθόδου POD και $[K_{ij}]$ το μητρώο δυσκαμψίας του j -οστού πεπερασμένου στοιχείου στο i -οστό πρόβλημα που έχει λυθεί πλήρως για την κατασκευή της βάσης $[V]$ σύμφωνα με την μέθοδο POD και $[u_i]$ οι μετατοπίσεις του i -οστού προβλήματος. Άρα το g_{ij} είναι οι εσωτερικές δυνάμεις του j -οστού πεπερασμένου στοιχείου του i -οστού επιλυμένου προβλήματος, προβεβλημένες στην βάση $[V]$.

Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η προσέγγιση του μητρώου δυσκαμψίας στο μειωμένο σύστημα $[K_{POD}][u_{POD}] = [F_{POD}]$ χωρίς να χρειάζεται ο υπολογισμός των μητρώων δυσκαμψίας ή των διανυσμάτων εξωτερικών δράσεων όλων των στοιχείων, αλλά μόνο αυτών που έχουν w_{Fi} ή $w_{Ki} > 0$. Έτσι όταν συσταθεί το πλήρες μητρώο δυσκαμψίας θα είναι αδρομερές (δηλαδή θα λείπουν αρκετά στοιχεία του και από την διαγώνιο). Προβάλλοντάς το, όμως, στην βάση του διανυσματικού υποχώρου στον

οποίο θεωρείται ότι θα βρίσκονται οι λύσεις μας, το μειωμένο μητρώο που θα προκύψει θα είναι μια πολύ καλή προσέγγιση του μητρώου $[K_{POD}]$.

Όσον αφορά τον υπολογιστικό χρόνο των μοντέλων, το κέρδος είναι πολύ μεγάλο, διότι παραβλέπεται ο υπολογισμός των διανυσμάτων εξωτερικών δράσεων και των μητρώων δυσκαμψίας πολλών πεπερασμένων στοιχείων. Επομένως μειώνεται ο χρόνος προσομοίωσης όχι μόνο μειώνοντας την χρόνο επίλυσης του συστήματος (όπως η POD) αλλά και τον χρόνο κατασκευής των μητρώων που συμμετέχουν στο σύστημα.

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ – ΤΟΠΙΚΕΣ ΒΑΣΕΙΣ

Στο μη γραμμικό πρόβλημα η διαδικασία διαφοροποιείται στο ότι σε κάθε επανάληψη της επίλυσης με τον αλγόριθμο Newton-Raphson προκύπτει ένα διάνυσμα $\{\Delta u\}$ το οποίο προστίθεται στο συνολικό διάνυσμα μετατοπίσεων $\{u\}$ μέχρι εκείνο το σημείο της επίλυσης. Έτσι για την προσέγγιση του μητρώου δυσκαμψίας $[K]$ χρησιμοποιούνται όλα τα διανύσματα $\{u\}$ που προκύπτουν στη διάρκεια της διαδικασίας Newton-Raphson, ενώ για την προσέγγιση του μητρώου εφαπτομενικής δυσκαμψίας $[K_t]$ χρησιμοποιούνται όλα τα διανύσματα $\{\Delta u\}$ της επαναληπτικής διαδικασίας.

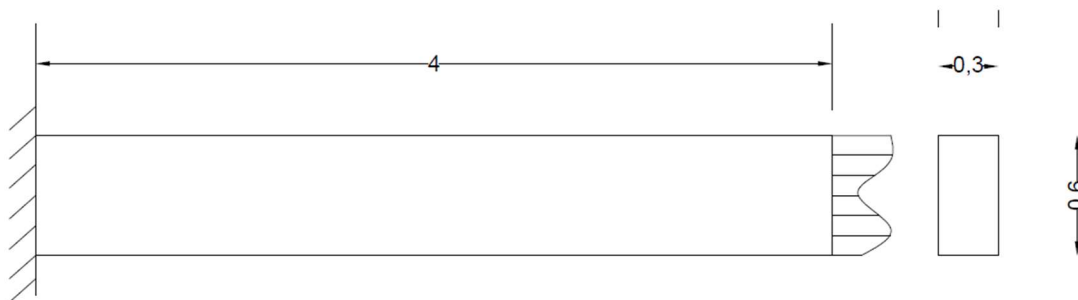
Επίσης, επειδή με τον παραπάνω τρόπο θα προκύψουν διανυσματικές βάσεις μεγάλης διάστασης είναι αρκετά αποτελεσματική τεχνική να δημιουργούνται τοπικές βάσεις [13] για κάθε loadstep της διαδικασίας επίλυσης των μη γραμμικών μοντέλων. Έτσι σε κάθε loadstep θα προκύψουν διαφορετικοί συντελεστές για την προσέγγιση των μητρώων $[K]$, $[K_t]$ και του διανύσματος $\{f\}$.

4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

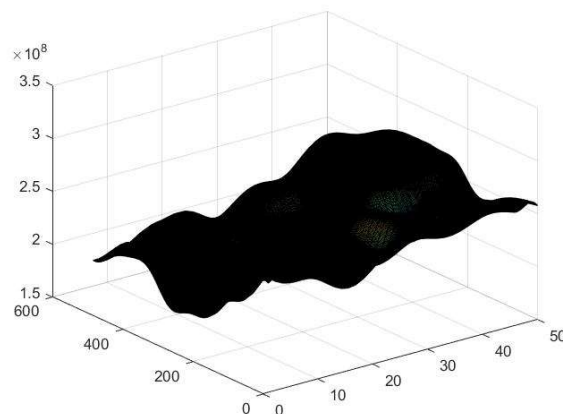
4.1 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Το γραμμικό στατικό πρόβλημα που αντιμετωπίστηκε με τις παραπάνω μεθόδους είναι ο πρόβλος του παρακάτω σχήματος ο οποίος έχει στοχαστικό μέτρο ελαστικότητας κατά μήκος και καθ' ύψος. Επίσης σε αυτόν ασκείται στοχαστικό φορτίο καθ' ύψος στο άκρο του.



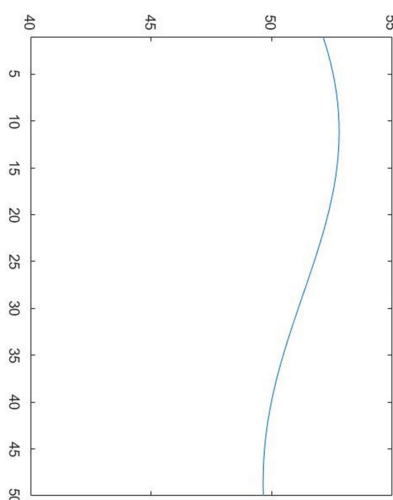
ΕΙΚΟΝΑ 18: Ο ΠΡΟΒΛΟΣ ΚΑΙ Η ΔΙΑΤΟΜΗ ΤΟΥ

Ο πρόβλος διακριτοποιήθηκε σε 500 πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης κατά μήκος και 50 πεπερασμένα στοιχεία καθ' ύψος, δηλαδή σε συνολικά 25000 πεπερασμένα στοιχεία. Έτσι προέκυψαν 51102 βαθμοί ελευθερίας. Σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο ανατέθηκε ένα τυχαίο μέτρο ελαστικότητας σύμφωνα με στοχαστικά πεδία που κατασκευάστηκαν με τη χρήση του αναπτύγματος Karhunen-Loeve. Χρησιμοποιήθηκε αυτή η μέθοδος για την παραγωγή των στοχαστικών πεδίων και όχι απλές ασυσχέτιστες τιμές, διότι αναθέτοντας ασυσχέτιστες τιμές μέτρου ελαστικότητας σε κάθε πεπερασμένο προκύπτουν λύσεις με πολύ μικρή μεταξύ τους διαφοροποίηση. Ένα από αυτά τα πεδία φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



ΕΙΚΟΝΑ 19: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ $M=2.1 \cdot 10^8$ ΚΡΑ ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ $\Sigma=20\% M$

Αντίστοιχα χρησιμοποιήθηκε στοχαστικό πεδίο για το φορτίο στο άκρο του προβόλου



ΕΙΚΟΝΑ 20: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΤΗΝ ΑΚΡΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΟΛΟΥ ΜΕ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ $M = 50\text{KN/M}$ ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ $\Sigma=20\%M$

Για την προσομοίωση Monte Carlo θεωρήθηκε αναγκαία η επίλυση 100 μοντέλων με διαφορετικό πεδίο μέτρου ελαστικότητας και φορτίου στην άκρη του προβόλου. Η μοντελοποίηση έγινε σε λογισμικό Matlab. Η επίλυση του πλήρους μοντέλου, δηλαδή χωρίς την εφαρμογή κάποιας προσεγγιστικής μεθόδου ήταν 115 δευτερόλεπτα για κάθε ένα από τα 100 μοντέλα.

4.1.1 POD ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Αρχικά δοκιμάστηκε η μέθοδος POD χρησιμοποιώντας τις λύσεις 20 τυχαίων μοντέλα από τα 100 που τέθηκαν προς επίλυση. Παρακάτω φαίνεται ο ψευδοκώδικας που ακολουθήθηκε για την επίλυση με την μέθοδο και την εξαγωγή των σφαλμάτων. Τα σφάλματα e_i για κάθε μοντέλο i ορίζονται ως:

$$e_i = \frac{\|u_{i,pod} - u_{i,full}\|}{\|u_{i,full}\|} \quad (30)$$

όπου $u_{i,pod}$ το διάνυσμα λύσης που προκύπτει από την επίλυση του i μοντέλου με την μέθοδο POD και $u_{i,full}$ το διάνυσμα λύσης που προκύπτει από την επίλυση του i πλήρους μοντέλου.

ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ 1: ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ POD ΚΑΙ ΕΞΑΓΩΓΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Παραγωγή 100 στοχαστικών πεδίων μέτρου ελαστικότητας και φορτίου

Για τα 100 μοντέλα

Κατασκεύασε το μητρώο δυσκαμψίας K

Κατασκεύασε το διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων F

Λύσε το σύστημα $K * u = F$

Αποθήκευσε την λύση στο μητρώο των πραγματικών λύσεων REAL_DISPS

Για 20 τυχαία μοντέλα

Αποθήκευσε την πραγματική λύση τους στο μητρώο βάσης V

Για τα υπόλοιπα 80 μοντέλα

Κατασκεύασε το μητρώο δυσκαμψίας K

Κατασκεύασε το διάνυσμα εξωτερικών δράσεων F

Κατασκεύασε το μειωμένο μητρώο $K_{pod} = V.T * K * V$

Κατασκεύασε το μειωμένο διάνυσμα $F_{pod} = V.T * F$

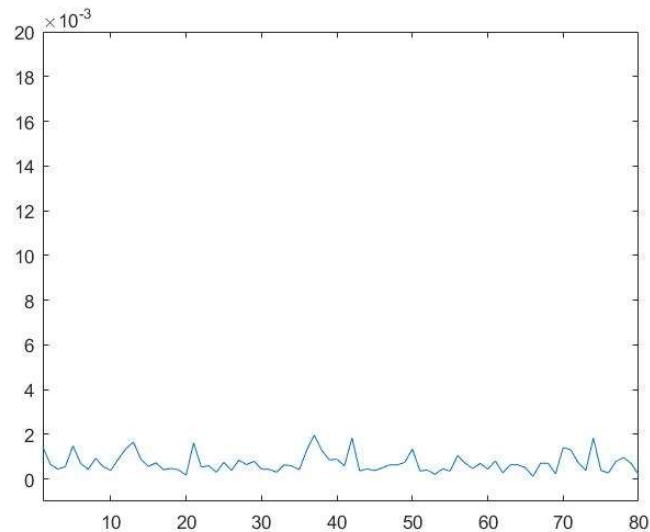
Λύσε το μειωμένο σύστημα $K_{pod} * u_{pod} = F_{pod}$

Επέστρεψε τη λύση στις φυσικές συντεταγμένες $U_{nat} = V * U_{pod}$

Αποθήκευσε τη λύση στο μητρώο των προσεγγιστικών λύσεων POD_DISPS

Αποθήκευσε το σφάλμα e_i στο διάνυσμα των σφαλμάτων errors_POD

Η διαδικασία επίλυσης του κάθε μοντέλου με την μέθοδο POD ήταν 115 δευτερόλεπτα. Δηλαδή δεν επιταχύνθηκε η επίλυση σε σχέση με την επίλυση του πλήρους μοντέλου. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται τα σφάλματα των 80 λύσεων που λύθηκαν με την μέθοδο σε σχέση με τις πραγματικές λύσεις.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1: ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΚΑΘΕ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΠΟΥ ΕΠΙΛΥΘΗΚΕ ΜΕ ΤΗΝ POD

Η μέθοδος έχει πολύ καλή ακρίβεια καθώς το μέσο σφάλμα είναι 0.07% αλλά δεν υπάρχει μείωση του χρόνου προσομοίωσης.

4.1.2 ECSW ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στη συνέχεια δοκιμάστηκε η μέθοδος ECSW στο ίδιο γραμμικό πρόβλημα με τη χρήση 20 διανυσμάτων βάσης όπως και στην POD. Παρακάτω παρατίθεται ο ψευδοκώδικας που ακολουθήθηκε για την επίλυση με την μέθοδο και τη σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Παραγωγή 100 στοχαστικών πεδίων μέτρου ελαστικότητας και φορτίου

Για 20 τυχαία μοντέλα

Κατασκεύασε το μητρώο δυσκαμψίας K_{el} κάθε πεπερασμένου και αποθήκευσέ το

Κατασκεύασε το διάνυσμα εξωτερικών δράσεων f_{ext} κάθε πεπερασμένου και αποθήκευσέ το

Κατασκεύασε το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας του φορέα K

Κατασκεύασε το καθολικό διάνυσμα εξωτερικών δράσεων του φορέα F

Λύσε το σύστημα $K * u = F$

Αποθήκευσε την λύση στο μητρώο των πραγματικών λύσεων `REAL_DISPS`

Αποθήκευσε την πραγματική λύση τους στο μητρώο βάσης V

Αποθήκευσε το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων κάθε πεπερασμένου $f_{el} = K_{el} * u_{el}$ όπου u_{el} οι επικόμβιες μετατοπίσεις του πεπερασμένου στοιχείου

Για κάθε πεπερασμένο στοιχείο

Για κάθε επιλυμένο πλήρες μοντέλο

Μετέφερε τις εξωτερικές δυνάμεις του f_{ext} στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων

Πρόβαλε τις εξωτερικές δυνάμεις του στη διανυσματική βάση V, $f_{ext_proj_el} = V.T * f_{ext}$

Θέσε στον πίνακα $G_{external}$ στην στήλη του πεπερασμένου στην γραμμή του επιλυμένου προβλήματος το $f_{ext_proj_el}$

Μετέφερε τις εσωτερικές δυνάμεις του f_{int} στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων

Πρόβαλε τις εσωτερικές δυνάμεις του στη διανυσματική βάση V $f_{int_proj_el} = V.T * f_{int}$

Θέσε στον πίνακα $G_{internal}$ στην στήλη του πεπερασμένου στην γραμμή του επιλυμένου προβλήματος το $f_{int_proj_el}$

Κατασκεύασε τον πίνακα $b_{external}$ ως το άθροισμα κατά γραμμή του πίνακα $G_{external}$

Κατασκεύασε τον πίνακα $b_{internal}$ ως το άθροισμα κατά γραμμή του πίνακα $G_{internal}$

Λύσε τα προβλήματα non negative least squares για την αντικειμενική συνάρτηση $\|G*\xi=b\| = \text{minimum}$

Θέσε $x_{internal}$ τους συντελεστές $\xi_{internal}$

Θέσε $x_{external}$ τους συντελεστές $\xi_{external}$

Για τα υπόλοιπα 80 μοντέλα

Κατασκεύασε το μητρώο δυσκαμψίας K

Κατασκεύασε το διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων F

Λύσε το σύστημα $K * u = F$

Αποθήκευσε την λύση στο μητρώο των πραγματικών λύσεων REAL_DISPS

Για τα υπόλοιπα 80 μοντέλα

Κατασκεύασε το μητρώο δυσκαμψίας K μόνο για τα στοιχεία με $\xi_{internal} \neq 0$

Κατασκεύασε το διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων F μόνο για τα στοιχεία με $\xi_{external} \neq 0$

Κατασκεύασε το μειωμένο μητρώο $K_{csw} = V.T * K * V$

Κατασκεύασε το μειωμένο διάνυσμα $F_{ecsw} = V.T * F$

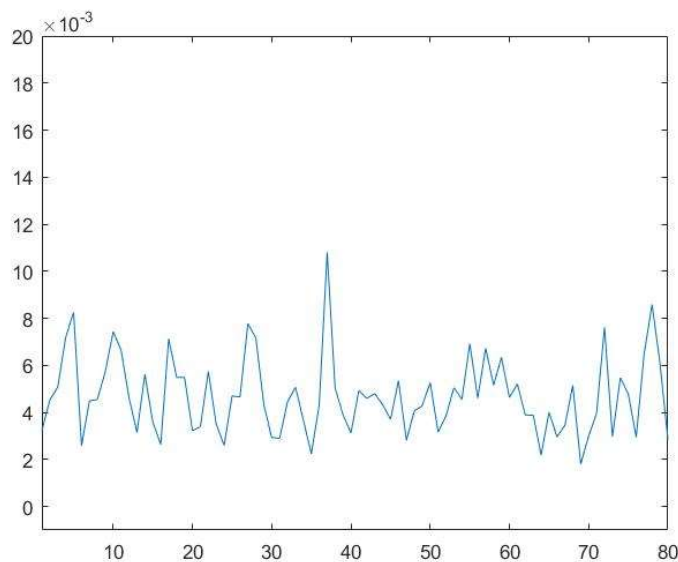
Λύσε το μειωμένο σύστημα $K_{ecsw} * u_{ecsw} = F_{ecsw}$

Επέστρεψε τη λύση στις φυσικές συντεταγμένες $U_{nat} = V * U_{ecsw}$

Αποθήκευσε τη λύση στο μητρώο των προσεγγιστικών λύσεων $ECSW_DISPS$

Αποθήκευσε το σφάλμα ει στο διάνυσμα των σφαλμάτων $errors_POD$

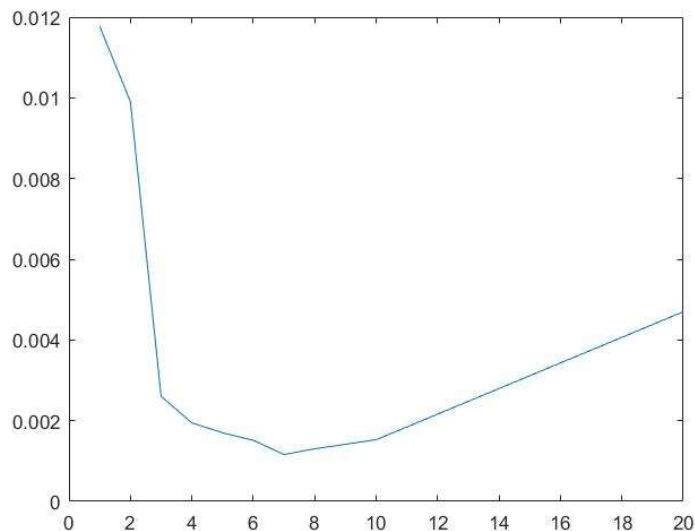
Η διαδικασία επίλυσης του κάθε μοντέλου με την μέθοδο ECSW ήταν 2 δευτερόλεπτα. Από την επίλυση του αλγορίθμου non-negative least squares προέκυψαν 39 στοιχεία με μη μηδενικό συντελεστή για τον υπολογισμό του μητρώου δυσκαμψίας και 8 στοιχεία με μη μηδενικό συντελεστή για τον υπολογισμό των εξωτερικών δράσεων. Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα των σφαλμάτων των 80 μοντέλων που επιλύθηκαν με τη μέθοδο.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2: ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΚΑΘΕ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΠΟΥ ΕΠΙΛΥΘΗΚΕ ΜΕ ΤΗΝ ECSW

Η ακρίβεια και σε αυτή την περίπτωση είναι πολύ καλή καθώς το μέσο σφάλμα είναι 0.47% και επίσης η μέθοδος επιτάχυνε αρκετά τη διαδικασία.

Η διαδικασία επαναλήφθηκε με διαφορετικό αριθμό διανυσμάτων βάσης και καταγράφηκε το μέσο σφάλμα που προέκυψε από την επίλυση των προσεγγιστικών μοντέλων στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται τα μέσα σφάλματα συναρτήσει του αριθμού των λύσεων που χρησιμοποιήθηκαν ως βάση.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3: ΣΦΑΛΜΑΤΑ ECSW ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΒΑΣΗΣ

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι με μικρό αριθμό λύσεων ως βάση επιτυγχάνονται πολύ μικρά σφάλματα.

4.1.3 ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Για το ίδιο πρόβλημα επιχειρήθηκε η προσέγγιση των λύσεων με τη χρήση τεχνητών νευρωνικών δικτύων. Τα νευρωνικά δίκτυα που χρησιμοποιήθηκαν ανήκουν στην βιβλιοθήκη του λογισμικού Matlab.

Αρχικά ορίστηκαν ως μεταβλητές εξόδου του νευρωνικού δικτύου όλες οι επικόμβιες μετατοπίσεις του φορέα και ως μεταβλητές εισόδου οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας κάθε πεπερασμένου και οι τιμές του φορτίου στους κόμβους του άκρου του προβόλου. Επειδή, όμως αυτές οι μεταβλητές εισόδου είναι πάρα πολλές και η εκπαίδευση του νευρωνικού θα χρειαζόταν πολλή χρόνο, πρέπει να οριστούν κάποιες μειωμένες μεταβλητές εισόδου. Για αυτό το σκοπό, για κάθε μοντέλο κατασκευάστηκαν τα διανύσματα των μέτρων ελαστικότητας κάθε στοιχείου. Και στη συνέχεια το μητρώο βάσης αυτών.

$$E_b = [E_1 \ E_2 \ \dots \ E_{Nmc}] \quad (31)$$

όπου E_b είναι το μητρώο βάσης και E_i είναι το διάνυσμα που περιέχει το μέτρο ελαστικότητας κάθε πεπερασμένου στοιχείου στο i μοντέλο προς επίλυση.

Ομοίως κατασκευάστηκε το μητρώο βάσης των εξωτερικών δυνάμεων

$$F_b = [F_1 F_2 \dots F_{Nmc}] \quad (32)$$

όπου F_b είναι το μητρώο βάσης και F_i είναι το διάνυσμα που περιέχει τις επικόμβιες δυνάμεις κάθε πεπερασμένου στοιχείου στο i μοντέλο προς επίλυση.

Για την μείωση των μεταβλητών εισόδου πραγματοποιήθηκε singular value decomposition (SVD) σε αυτά τα διανύσματα βάσης και από τα διανύσματα U , S , V που προκύπτουν από την SVD κρατήθηκαν ως διανύσματα της νέα βάσης τα διανύσματα του U μέχρι τη θέση όπου οι όροι του διαγώνιου S φτάνουν το 95% του αθροίσματος του S .

Έτσι κάθε διάνυσμα εισόδου E_i και F_i γράφεται:

$$\begin{aligned} \{E_i\} &= \{E_{red,i}\}^T [U_E] \\ \{F_i\} &= \{F_{red,i}\}^T [U_F] \end{aligned} \quad (33)$$

Τα $\{E_{red,i}\}$ και $\{F_{red,i}\}$ είναι τα διανύσματα που αν πολλαπλασιαστούν με τις βάσεις θα μας δώσουν τα E_i και F_i αντίστοιχα. Αυτά βρίσκονται εύκολα ως:

$$\begin{aligned} \{E_{red,i}\} &= ([U_E]^T [U_E])^{-1} [U_E]^T \{E_i\} \\ \{F_{red,i}\} &= ([U_F]^T [U_F])^{-1} [U_F]^T \{F_i\} \end{aligned} \quad (34)$$

Για τις εξόδους ακολουθείται η ίδια διαδικασία έχοντας ως βάση τις μετατοπίσεις των μοντέλων που θα επιλυθούν πλήρως και θα χρησιμοποιηθούν για την εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου. Άρα θα έχουμε ως διανύσματα εξόδου τα μειωμένα διανύσματα

$$\{d_{red,i}\} = ([U_d]^T [U_d])^{-1} [U_d]^T \{D_i\} \quad (35)$$

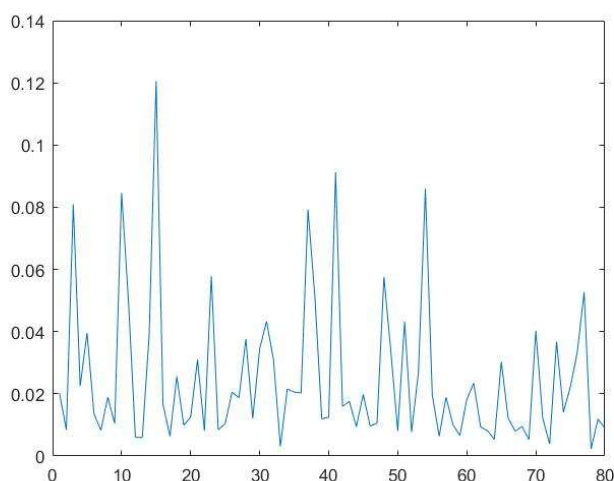
Τελικά τα διανύσματα εισόδου και εξόδου στο νευρωνικό διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} inputs &= \begin{bmatrix} \{E_{red,i}\} \\ \{F_{red,i}\} \end{bmatrix} \\ outputs &= \{d_{red,i}\} \end{aligned} \quad (36)$$

Με τον τρόπο αυτό το μέγεθος των μεταβλητών εισόδου σχετικών με το μέτρο ελαστικότητας ήταν 29 και σχετικά με την δύναμη ήταν 3. Οπότε έχουμε τελικά 32 μεταβλητές εισόδου και 2 μεταβλητές εξόδου αντί για $25000+51=25051$ εισόδου και 51102 εξόδου.

Με αυτές τις μεταβλητές εισόδου και εξόδου πραγματοποιήθηκε εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου με ένα κρυμμένο επίπεδο και για διάφορους αριθμούς νευρώνων σε αυτό. Επίσης για κάθε αριθμό νευρώνων κατασκευάστηκαν και εκπαιδεύτηκαν 30 διαφορετικά νευρωνικά δίκτυα, Το τελευταίο έγινε διότι λόγω της τυχαίας κατανομής των βαρών όταν δημιουργείται ένα δίκτυο μπορεί να μην οδηγηθούμε στο βέλτιστο αποτέλεσμα που θα οδηγηθούμε αν ξεκινούσε το νευρωνικό από άλλα τυχαία βάρη.

Η διαδικασία της εκπαίδευσης διήρκεσε 5 ώρες και το βέλτιστο νευρωνικό δίκτυο είχε 35 νευρώνες στο κρυμμένο επίπεδο και τα σφάλματά του φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



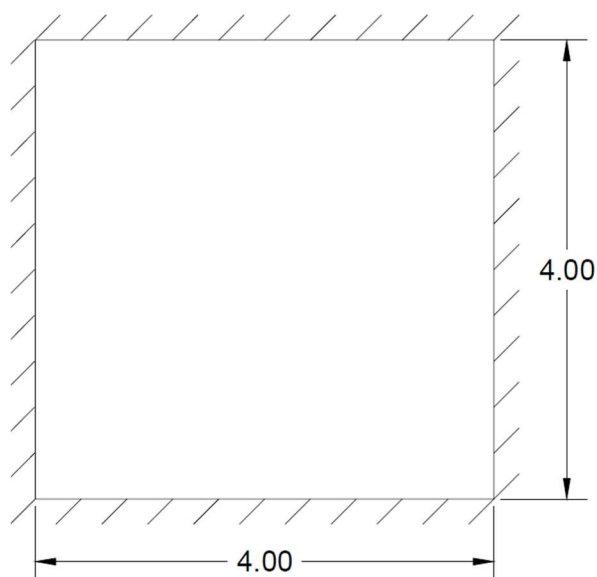
ΕΙΚΟΝΑ 21: ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΛΥΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΝΕΥΡΩΝΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ

Το μέσο σφάλμα είναι 2.5% και ο χρόνος επίλυσης των μοντέλων δεν είναι σημαντικός.

4.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η μέθοδος POD δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον στο παρόν μη γραμμικό πρόβλημα διότι το μέγεθος των προς επίλυση συστημάτων είναι μικρό και συνεπώς δεν θα υπήρχε κάποια επιτάχυνση στην όλη διαδικασία. Οι άλλες μέθοδοι εφαρμόστηκαν και σε μη γραμμικό πρόβλημα, στο οποίο ο χρόνος προσομοίωσης είναι ακόμα μεγαλύτερος και η μείωσή του αποτελεί σημαντικότερο πρόβλημα.

Το μη γραμμικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε ήταν η πλάκα, η κάτοψη της οποίας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η πλάκα έχει στοχαστικό μέτρο ελαστικότητας με μέση τιμή τα 10920 KPa και τυπική απόκλιση το 20% της μέσης τιμής. Το φορτίο που της ασκείται είναι ομοιόμορφο φορτίο με τη φορά της βαρύτητας ίσο με 100 kN σε 25 loadsteps. Η διακριτοποίησή της έγινε με πεπερασμένα στοιχεία πλάκας με 30 στοιχεία κατά τον άξονα x και 30 στοιχεία κατά τον άξονα y. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα συνολικά το μοντέλο να έχει 4805 βαθμούς ελευθερίας. Με την μέθοδο του αναπτύγματος Karhunen-Loeve δημιουργήθηκαν 78 στοχαστικά μέτρα ελαστικότητας στο εμβαδόν της πλάκας, άρα και τέθηκαν 78 μοντέλα για επίλυση.

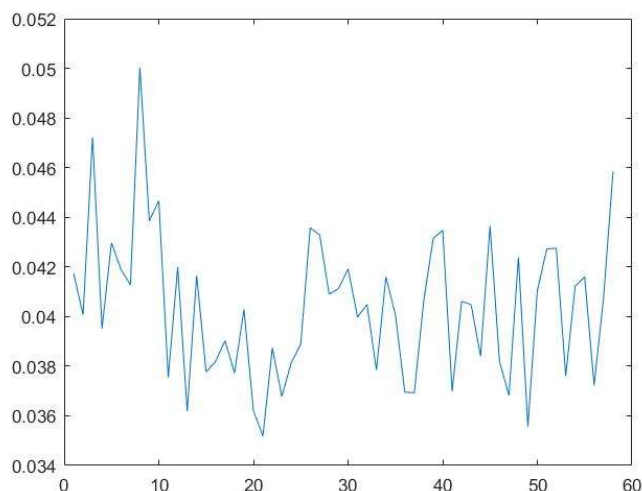


ΕΙΚΟΝΑ 22: ΚΑΤΟΨΗ ΠΛΑΚΑΣ

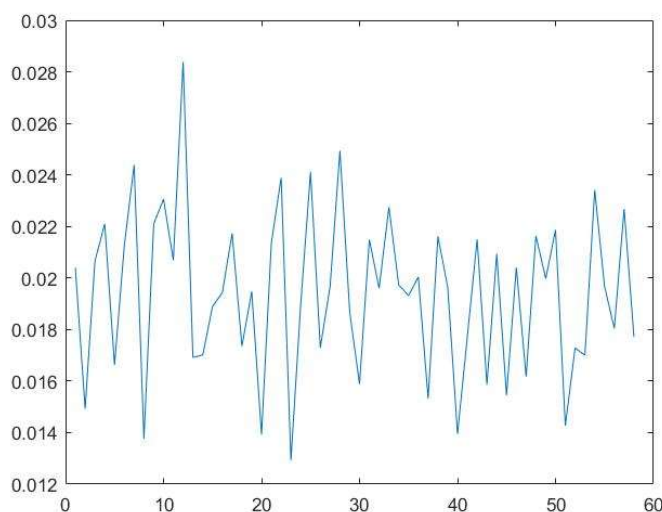
4.2.1 ECSW ΓΙΑ ΤΟ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Για την εφαρμογή της μεθόδου χρησιμοποιήθηκαν οι λύσεις 20 μοντέλων ως βάση και τα υπόλοιπα επιλύθηκαν προσεγγιστικά με τη χρήση της μεθόδου αλλά και τα

πλήρη μοντέλα για την σύγκριση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων. Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των σφαλμάτων όπως ορίζεται από την εξίσωση (91) για όλες τις μετατοπίσεις των κόμβων του φορέα στην τελική κατάσταση, αλλά και για τον δρόμο ισορροπίας ενός κόμβου, για την κατακόρυφη μετατόπισή του, κοντά στο μέσο της πλάκας



ΕΙΚΟΝΑ 23: ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ



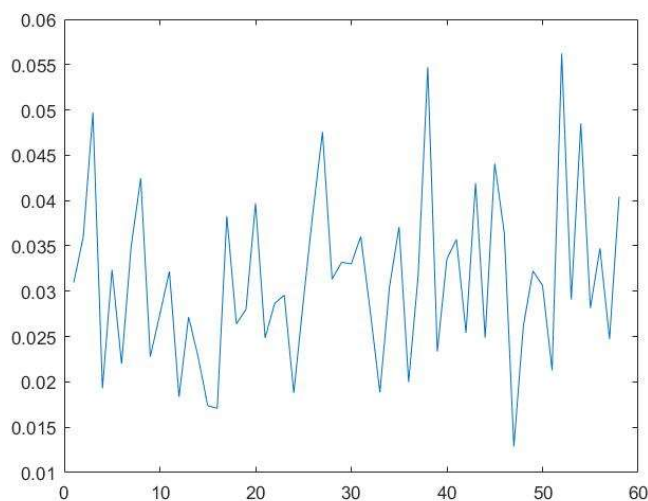
ΕΙΚΟΝΑ 24: ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΤΟΝ ΔΡΟΜΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΤΟΥ ΚΟΜΒΟΥ

Ο χρόνος προσομοίωσης του πλήρους μοντέλου ήταν 1200 δευτερόλεπτα ενώ του προσεγγιστικού 800 δευτερόλεπτα. Το μέσο σφάλμα της μεθόδου είναι 4.04% για όλες

τις μετατοπίσεις του φορέα ενώ το σφάλμα στο equilibrium path του κόμβου στο μέσο ήταν 1.94%.

4.2.2 ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Για την προσέγγιση των λύσεων ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με το γραμμικό πρόβλημα και ως ζητούμενο της προσέγγισης είναι οι τελικές μετατοπίσεις του φορέα. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται τα σφάλματα των μοντέλων που λύθηκαν προσεγγιστικά σε σχέση με τις πλήρεις λύσεις τους.



ΕΙΚΟΝΑ 25: ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΟΥ ΕΠΙΛΥΘΗΚΑΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΕΥΡΩΝΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ

Η διαδικασία αναζήτησης του βέλτιστου αριθμού νευρώνων στο κρυμμένο επίπεδο του δικτύου διήρκησε 5 ώρες και το καλύτερο δίκτυο περιείχε 25 νευρώνες στο κρυμμένο επίπεδο. Το μέσο σφάλμα ήταν 3.12% και οι προσεγγιστικές λύσεις είχαν ελάχιστο χρόνο προσομοίωσης.

4.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- Η μέθοδος POD οδηγεί σε αποτελέσματα με πολύ καλή ακρίβεια, όμως σε τέτοιου μεγέθους μοντέλα δεν επιταχύνει την διαδικασία.
- Η μέθοδος ECSW για το γραμμικό πρόβλημα έχει πολύ καλή ακρίβεια και επιταχύνει την διαδικασία πάρα πολύ.
- Η «εκπαίδευση» ECSW διαρκεί μικρό χρονικό διάστημα.
- Στο μη-γραμμικό πρόβλημα υπάρχει συντόμευση της διαδικασίας επίλυσης του μοντέλου αλλά όχι τόσο μεγάλη όσο στο γραμμικό. Αυτό οφείλεται στο ότι το μη γραμμικό πρόβλημα ήταν αρκετά μικρό με αποτέλεσμα τα επιλεγμένα πεπερασμένα που συμμετείχαν στη λύση με συντελεστή μεγαλύτερο του 0 να είναι σημαντικό ποσοστό επί των συνολικών στοιχείων του μοντέλου.
- Όσον αφορά τον δρόμο ισορροπίας ενός κόμβου η ECSW έχει μεγαλύτερη ακρίβεια στο μη-γραμμικό πρόβλημα απ'ότι στην πρόβλεψη όλων των μετατοπίσεων του φορέα.
- Τα νευρωνικά δίκτυα στο γραμμικό πρόβλημα είχαν μικρότερη ακρίβεια στην πρόβλεψη των μετατοπίσεων του φορέα αλλά η χρήση τους είναι πολύ ευκολότερη δεδομένου του ότι υπάρχει πληθώρα προγραμμάτων για την εύκολη εκτέλεσή τους (Matlab neural network, Keras neural networks, Tensorflow κτλ.) και δεν απαιτούν παρέμβαση στον κώδικα του επιλύτη(solver) πεπερασμένων στοιχείων, σε αντίθεση με τις άλλες μεθόδους.
- Ο χρόνος εύρεσης της καλύτερης δομής του νευρωνικού ήταν αρκετά μεγάλος στο γραμμικό πρόβλημα, θα μπορούσε να μειωθεί όμως με χρήση παράλληλου προγραμματισμού.
- Το μέσο σφάλμα του νευρωνικού στο μη-γραμμικό πρόβλημα ήταν καλύτερο από της μεθόδου ECSW καθώς και ο συνολικός χρόνος εκπαίδευσης και επίλυσης των προσεγγιστικών μοντέλων με τα νευρωνικά ήταν μικρότερος από της άλλης μεθόδου.
- Με την χρήση νευρωνικών δικτύων κατά την διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω μας δίνει προσεγγιστική λύση μόνο για την τελική κατάσταση του φορέα και καμία πληροφορία για το ενδιάμεσο του δρόμου ισορροπίας. Θα μπορούσε όμως με διαφορετική εκτέλεση να προβλέπει και ενδιάμεσες καταστάσεις.

CONCLUSIONS

- The POD method has very high accuracy but, concerning models of the size of the present work, it doesn't accelerate the simulation at all.
- The ECSW for linear problems has high accuracy and it also results in high acceleration of the simulation.
- The "training" of the ECSW method is very fast.
- The ECSW for the non-linear problem has also good accuracy but the simulation time reduction was not as good as in the linear problem. That happens mainly because the size of the non-linear problem studied was not big enough so the elements that had non-zero coefficients were not a small portion of the total elements.
- The ECSW simulates with greater accuracy the equilibrium path of a node rather than the displacements of all the nodes in the model.
- The Neural Networks for the linear problem had smaller accuracy than the other methods, but using them is much simpler than the other methods, mainly because their implementation doesn't require changing the code of the finite element solver and because of the wide range of neural network software (such as Matlab neural networks, Keras neural networks, TensorFlow etc.).
- The training time of the Neural Networks and finding the ideal parameters was considerably big but it could be reduced using parallel processing.
- The Neural Networks had smaller mean error in the non-linear problem and also the total time of training and simulation was less than the simulation time of the ECSW method.
- The use of Neural Nets as described did not give us information about the equilibrium path of the model, but it could be implemented in a different way to take that information too.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1.Καλαμαράς, Δημήτρης (2001-2002), “[Αριθμητική Ανάλυση](#)”
- 2.Eckhardt, Roger (1987). «[Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo method](#)». *Los Alamos Science, Special Issue* (15): 131–137.
- 3.K. Karhunen, (1947), ber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeit-rechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Math.-Phys., Vol.37, 1-79.
- 4.M. Loeve, (1978),Probability theory. Vol. II, Springer-Verlag. ISBN 0-387-90262-7
5. Μ. Παπαδρακάκης (1996), Ανάλυση φορέων με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων
6. Charbel Farhat, Todd Chapman and Philip Avery (2015), Structure-preserving, stability, and accuracy properties of the energy-conserving sampling and weighting method for the hyper reduction of nonlinear finite element dynamic models, International Journal For Numerical Methods In Engineering, Int. J. Numer. Meth. Engng 2015; 102:1077–1110
7. Charles L. Lawson, Richard J. Hanson (1974), Solving Least Squares Problems
8. Πάνος Αργυράκης (2001), Νευρωνικά Δίκτυα και Εφαρμογές
9. E.I. Fredholm, (1903), “Sur une classe d'equations fonctionnelles”, Acta Mathematica Vol.27, 365-390
10. K. E. Atkinson (1976), “A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind”, Philadelphia: S.I.A.M
11. J. Mercer, (1909), “Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations”, Philosophical Transactions of the Royal Society, A 209 (441-458): 415-446
12. R.Y. Rubinstein, (1981), “Simulation and the Monte Carlo Method”, John Wiley & Sons.
13. David Amsallem, Matthew J. Zahr and Charbel Farhat (2012), Nonlinear model order reduction based on local reduced-order bases, International Journal For Numerical Methods In Engineering, Int. J. Numer. Meth. Engng 2012; 92:891–916

14. J. E. Gentle (1998), "Random number generation and Monte Carlo methods", Springer, New York