



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

***ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΙΝΩΔΟΥΣ  
ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ  
ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ***

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΙΜΙΛΙΟΣ Π. ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΗ: ΡΑΥΤΟΠΟΥΛΟΥ ΝΙΚΟΛΕΤΑ

ΑΘΗΝΑ 2017



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

***ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΙΝΩΔΟΥΣ  
ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ  
ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ***

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΙΜΙΛΙΟΣ Π. ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ**

**ΣΥΓΓΡΑΦΗ: ΡΑΥΤΟΠΟΥΛΟΥ ΝΙΚΟΛΕΤΑ**

**ΑΘΗΝΑ 2017**



## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με βοήθησαν και με στήριξαν καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, συμβάλλοντας στην επιτυχή ολοκλήρωσή της.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στον κ. Ε. Ε. Θεοτόκογλου Καθηγητή ΕΜΠ για την αμέριστη συμβολή του, τις επιστημονικές του συμβουλές και την συνεχή υποστήριξη του στην συντέλεση της εν λόγω εργασίας.

Επιπλέον, ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Αιμίλιο Σιδερίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή ΕΜΠ, για την αμέριστη συμπαράστασή του.

Και τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τους γονείς και τα αδέρφια μου καθώς και τον σύζυγό μου Κωνσταντίνο για την στήριξη, εμπιστοσύνη και κατανόηση που δείχνουν στις προσπάθειές μου.

**Με τιμή,**  
Νικολέτα Ραυτοπούλου  
Αθήνα, Οκτώμβρης 2017



## Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	10
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	
1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ.....	12
1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	12
1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	20
1.4 ΠΟΛΥΜΕΡΗ.....	24
1.4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ.....	24
1.4.2 ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ.....	24
1.5 ΟΡΓΑΝΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ.....	26
1.6 ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΥΤΙΝΕΣ.....	27
1.6.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	27
1.6.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΥΤΙΝΩΝ.....	27
1.6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΓΡΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΥΤΙΝΩΝ.....	28
1.6.4 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΥΤΙΝΕΣ.....	29
1.7 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ.....	30
1.7.1 ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ.....	30
1.7.2 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΕΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΥΤΙΝΩΝ.....	30
1.8 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	31
1.9 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	32
1.9.1 ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ.....	32
1.9.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΙΝΩΝ.....	32
1.9.3 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΙΝΩΝ.....	33
1.9.4 Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	35
1.9.5 Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΑΙΤΙΕΣ ΤΩΝ ΚΕΝΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ.....	37
1.9.6 ΠΟΙΟΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	38
1.9.7 ΤΑ ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	39
1.9.8 ΙΝΕΣ ΓΥΑΛΙΟΥ.....	41
1.10 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	42
1.11 ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	44

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ**

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.....	45
2.1.1 ΣΥΝΤΟΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ.....	45
2.1.2 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ,ΣΤΕΡΡΟΤΗΤΑ.....	49
2.1.3 Η ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ.....	50
2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	50
2.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΑΛΩΔΟΥΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ $T_g$ .....	50
2.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	51
2.2.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΧΟΥΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	52
2.2.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΑΤ'ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	55

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ**

3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ.....	58
3.1.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΩΝ.....	58
3.1.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΙ.....	61
3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	62

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΙ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ**

4.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΩΝ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	68
4.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ.....	70
4.2 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	74
4.2.1.A ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ 1 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	75
4.2.1.B ΤΙΜΗ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ 2 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	76
4.2.2.A ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ 1 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	77
4.2.2.B ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ 2 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	78
4.2.3.A ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΛΟΓΟΥ POISSON 1 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	79
4.2.3.B ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΛΟΓΟΥ POISSON 2 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	80

4.2.4.A ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ 1 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	81
4.2.4.B ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ 2 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	82
4.2.5.A ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ 1 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	83
4.2.5.B ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ 2 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	84
4.2.6.A ΛΟΓΟΣ POISSON 1 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	85
4.2.6.B ΛΟΓΟΣ POISSON 2 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	86
4.2.7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	87
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5:ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ</b>	
5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	88
5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$ .....	89
5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON $\nu_{LT}$ .....	102
5.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_T$ .....	104
5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON $\nu_{TT}$ .....	117
5.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ $G_{LT}$ .....	118
5.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $E_{\theta}, \nu_{\theta}$ & $G_{\theta}$ .....	131
5.8 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ POISSON ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	132
5.8.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$ .....	132
5.8.2 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON $\nu_{LT}$ .....	133
5.8.3 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_T$ .....	134
5.8.4 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ $G_{LT}$ .....	136
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6:ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b>	
6.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ,ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.....	138
6.2 ΠΙΝΑΚΕΣ.....	139
6.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ.....	144
6.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	153
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΙΝΩΔΟΥΣ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ</b>	
7.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $\alpha_L$ .....	156
7.2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $\alpha_T$ (ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΥΛΙΚΩΝ).....	159



7.2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $\alpha_T$ (ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ).....	162
7.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ $\theta$ $\alpha_\theta$ .....	176
7.4 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	177
7.4.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $\alpha_L$ .....	177
7.4.2 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $\alpha_T$ .....	177
7.4.3 ΤΥΠΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ $\alpha_\theta$ .....	178
7.5 ΠΙΝΑΚΕΣ.....	178
7.6 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ.....	181
7.7 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ, ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ.....	184
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ</b>	
8.1 ΕΛΑΣΤΟ-ΣΤΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	186
8.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	189
8.3 Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	190
8.3.1 ΟΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΙΩΝ.....	190
8.3.2 Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	192
8.3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$ .....	194
8.3.4 Ο ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΛΟΓΟΣ ΤΟΥ POISSON $\nu_{TT}$ .....	200
8.3.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_T$ .....	201
8.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ.....	205
8.5 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	206
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	208



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την διπλωματική εργασία, ένα απλοποιημένο θεωρητικό μοντέλο αναπτύχθηκε για την πρόβλεψη των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson ενός ινώδους σύνθετου υλικού. Βάσει της μεθόδου αυτής, η οποία και χρησιμοποιήθηκε για την ανάπτυξη του μοντέλου μας, θεωρείται ότι ένας κύριος παράγοντας που επηρεάζει την μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού είναι η ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης μεταξύ του εγκλείσματος και της μήτρας, η οποία και έχει διαφορετικές φυσικοχημικές ιδιότητες σε σχέση με τις άλλες φάσεις που αποτελούν το υλικό. Ωστόσο, για να εκτιμηθούν οι σταθερές του σύνθετου υλικού συνολικά, έγινε προσπάθεια να καθοριστεί η μεταβολή των μηχανικών ιδιοτήτων της ενδιάμεσης φάσης λαμβάνοντας υπόψη κάποια παραβολική μεταβολή. Αυτή η μεταβολή εφαρμόστηκε σε πενταφασικό αντιπροσωπευτικό στοιχείο-ελέγχου ενός ινώδους σύνθετου υλικού και έγινε σύγκριση με διάφορα θεωρητικά μοντέλα άλλων ερευνητών καθώς και με πειραματικά δεδομένα της βιβλιογραφίας.

Εκτός από τα παραπάνω, που είναι και ο κύριος πυρήνας αυτής της διπλωματικής εργασίας, παρατίθενται πολλά θεωρητικά στοιχεία για τα σύνθετα υλικά, γενικότερα όπως επίσης και πολλές εικόνες, διαγράμματα και πίνακες που κάνουν την όλη προσπάθεια πιο κατανοητή στον ερευνητή-αναγνώστη.

## ABSTRACT

In this thesis, a simplified theoretical model has been developed for the prediction of elastic moduli and Poisson's ratio in fiber-reinforced composites. The method that has been used for the development of our model, considers that a main fact affecting the mechanical behavior of composite materials, is the existence of the mesophase layer, between fiber and matrix, which possesses different physic-chemical properties than those of the constituent phases. In order to evaluate the overall moduli of the composite, we try to determine the variation of the mechanical properties of the mesophase layer, taking into account a parabolic law of variation. This law of variation has been applied to a 5-phases representative volume element of the fiber reinforced composite and is compared favorably with other researchers theoretical models as well as with respective experimental data existing in literature.

Apart from these, which are the main core of this thesis, they are cited plenty of theoretical data about the composite materials in general as well as many pictures, diagrams and charts that make the whole effort more comprehensible for the researcher-reader.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

## 1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Ο ορισμός του σύνθετου υλικού μπορεί να δοθεί ως εξής: *Ένα υλικό, εξεταζόμενο μακροσκοπικώς, χαρακτηρίζεται ως σύνθετο όταν σχηματίζεται από το συνδυασμό δύο ή περισσότερων υλικών και έχει ιδιότητες διάφορες των αρχικών υλικών που το δημιούργησαν.* Συνήθως τα υλικά αυτά παρουσιάζουν βελτίωση των ιδιοτήτων τους σε σχέση με τα επί μέρους υλικά που τα αποτελούν ή και εντελώς διαφορετικές ιδιότητες από αυτά.

Τις περισσότερες φορές το ένα εκ' των δύο διακρινόμενων υλικών «παίζει» το ρόλο της ενίσχυσης και καλείται **έγκλεισμα** και προσδίδει στο σύνθετο υλικό βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες ενώ το άλλο υλικό «παίζει» συνδετικό ρόλο και καλείται **μήτρα**, συνήθως είναι χαμηλής πυκνότητας και η συμμετοχή του στο σύνθετο εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων του εγκλείσματος.

## 1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό θα αναφέρουμε τη σταδιακή εξέλιξη των υλικών αυτών και τη χρήση τους από τον άνθρωπο δια μέσου των αιώνων. Από τη Βίβλο φαίνεται ότι οι Εβραίοι χρησιμοποίησαν άχυρο για να δώσουν μεγαλύτερη αντοχή στα λασπότουβλα. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν ένα είδος «κόντρα πλακέ» όταν κατάλαβαν ότι στρώματα ξύλου έχουν τη δυνατότητα να συνδυαστούν καταλλήλως ώστε να παρουσιάσουν ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις και να είναι ανθεκτικά στη διόγκωση και στη στρέβλωση, οι οποίες προκαλούνται από την υγρασία. Επίσης, στην Αίγυπτο και στη Μεσοποταμία εμφανίστηκαν σχεδίες από καλάμι παπύρου με προσθήκη ασφάλτου. Οι Ασύριοι κατασκεύασαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη ασφαλτο. Το Μεσαίωνα κατασκευάστηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων. Στις μέρες μας ανακαλύφθηκαν τα ινώδη σύνθετα υλικά στα οποία ο λόγος αντοχής/βάρους και ακαμψίας/βάρους είναι αρκετά μεγάλος πράγμα πολύ σημαντικό για τις σύγχρονες κατασκευές όπως η αεροναυπηγική. Αυτό είναι, εν ολίγοις, το ιστορικό των σύνθετων υλικών. Είναι εμφανές με όσα αναφέραμε παραπάνω ότι ο άνθρωπος από τα

πρώτα χρόνια της ύπαρξης του στη Γη είχε ενστικτωδώς αντιληφθεί την έννοια του σύνθετου υλικού, δηλαδή ότι ο συνδυασμός δυο ή περισσότερων υλικών, από μακροσκοπική άποψη, έδινε τη δυνατότητα κατασκευής ενός τρίτου, σύνθετου υλικού, το οποίο ικανοποιούσε ορισμένες «ποιοτικές απαιτήσεις» της κατασκευής στην οποία επρόκειτο να χρησιμοποιηθεί.

Η ταχύτητα με την οποία εξελίχθηκαν τα σύνθετα υλικά δεν είναι η ίδια δια μέσου της ιστορίας τους. Μέχρι και τον 19ο αιώνα η εξέλιξη αυτή είναι πολύ μικρή και τα σύνθετα υλικά του 19ου αιώνα δεν απέχουν και πάρα πολύ, από αυτά των αρχαίων Αιγυπτίων, Ελλήνων κλπ., ούτε από άποψη ποιότητας, ούτε από άποψη μεθόδου κατασκευής. Η ουσιαστική εξέλιξη των σύνθετων υλικών σημειώνεται τον 20ο αιώνα και μάλιστα τα τελευταία 30-35 έτη.

Οι ταχέως αναπτυσσόμενες εφαρμογές των σύνθετων υλικών, τα τελευταία χρόνια, δημιούργησαν μεγάλη αισιοδοξία για τη χρήση τους στο μέλλον. Αν και πολλά σύνθετα υλικά κατασκευάζονταν από τον άνθρωπο, εδώ και χιλιάδες χρόνια, η εφαρμογή τους στην υψηλή τεχνολογία, όπως στην αεροδιαστημική βιομηχανία, παρατηρείται μόνον τα τελευταία τριάντα χρόνια. Τα σύνθετα υλικά, τα πλαστικά και τα κεραμικά έχουν αναδειχθεί πολύ και τείνουν να επικρατήσουν σε καθημερινές εφαρμογές από τη δεκαετία του '80 και μετά. Ο όγκος και ο αριθμός των εφαρμογών των σύνθετων υλικών έχει σταθερή ανάπτυξη και πρόσφατα τα υλικά αυτά έχουν κατακτήσει τις νέες αγορές. Οι περισσότεροι γνωρίζουν τα θαλάσσια σκάφη από «fiberglass» (Εικ.2) και τα αθλητικά είδη από ίνες γραφίτη(Εικ. 1). Οι πιθανές εφαρμογές των σύνθετων υλικών περιορίζονται μόνο από τη φαντασία του ανθρώπινου είδους.



Εικόνα 1(Ίνες γραφίτη)



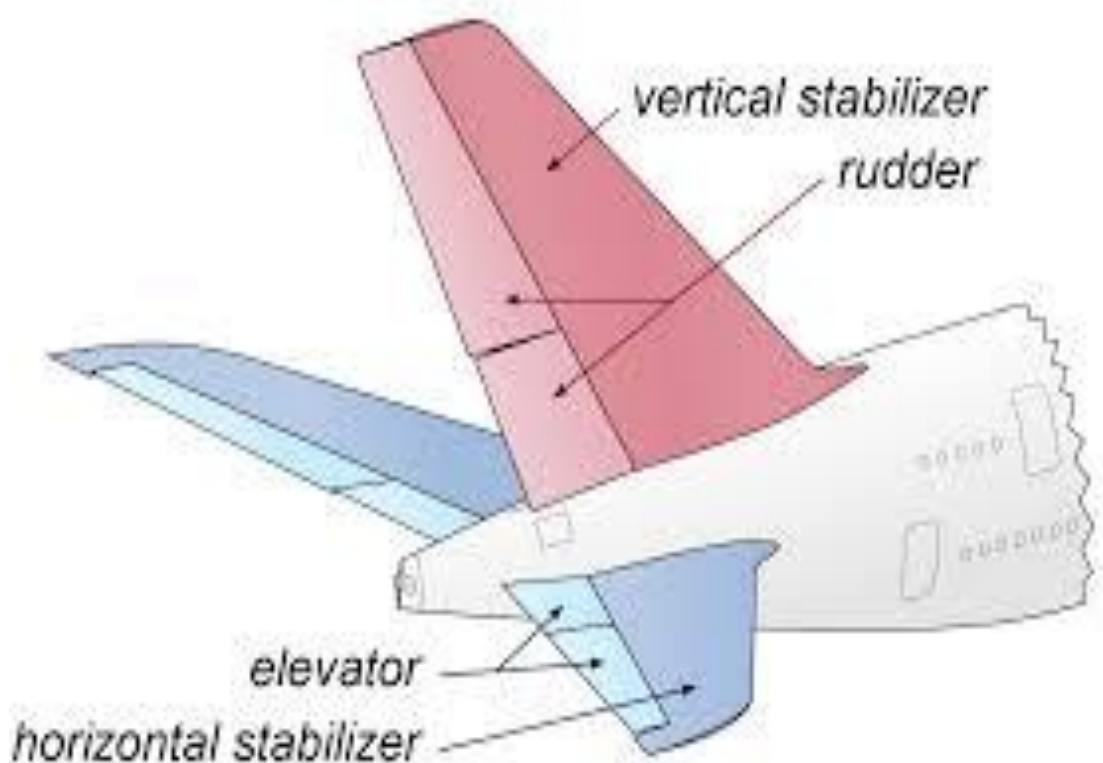
Εικόνα 2



Εικόνα 3



Οι δεξαμενές και τα μεγάλα δοχεία, τα οποία κατασκευάζονται με τη μέθοδο της περιτυλίξεως ινών υάλου, υπήρξαν η πρώτη εφαρμογή των μοντέρνων σύνθετων υλικών που χρησιμοποιήθηκε. Στη συνέχεια, στη δεκαετία του '60 ήρθαν οι ίνες βορίου, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν από την αεροπορία των Η.Π.Α για την κατασκευή αεροσκαφών, και σηματοδότησαν την ευρεία χρήση των σύνθετων υλικών σε αυτόν τον τομέα. Ο οριζόντιος σταθεροποιητής (horizontal stabilizer) (Εικ. 4) των αεροσκαφών F-111 υπήρξε το πρώτο τεμάχιο αεροσκάφους που κατασκευάστηκε από σύνθετο υλικό. Η παραγωγή σταθεροποιητών από σύνθετα υλικά για τα αεροσκάφη F-14 στην αρχή της δεκαετίας του '70 ήταν ένα άλλο σημαντικό βήμα. Ακολούθησε ο σταθεροποιητής των F-15 και το πηδάλιο (rudder) και ο σταθεροποιητής για τα F-16.



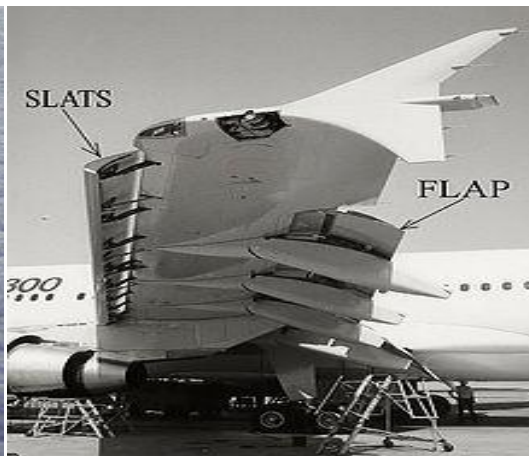
Εικόνα 4



Στην αρχή της δεκαετίας του '80 το νεοεισερχόμενο Boeing767(Εικ. 5α) περιείχε σχεδόν δύο τόνους σύνθετου υλικού στις δοκούς δαπέδου και σε όλες τις επιφάνειες ελέγχου. Το γιγαντιαίο Σοβιετικό μεταγωγικό Antonov124, έχει συνολικά 5500Kg σύνθετου υλικού από τα οποία τα 2500Kg περιέχουν ίνες γραφίτη. Το πτερύγιο(flap) των AirbusA310-A300(Εικ. 5β) κατασκευασμένο όλο από σύνθετο υλικό, είναι μια εντυπωσιακή κατασκευή παρά την απλότητα του.



Εικόνα 5α



Εικόνα5β

Σχεδόν όλα τα εμφανιζόμενα αεροσκάφη κάνουν εκτεταμένη χρήση των σύνθετων υλικών. Παραδείγματα είναι το αεροσκάφος Rafale της Dassault-Brequet, το Lavi της Ισραηλινής αεροπορικής βιομηχανίας, το JAS-39 Gripen της Σουηδικής Saab-Scania και το μαχητικό αεροσκάφος (European Fighter Aircraft) (Εικ. 6) της Βρετανίας, Γερμανίας, Ιταλίας και Ισπανίας.



Εικόνα 6

Το 1986, το Voyager(Εικ. 7), ένα άλλο αεροπλάνο κατασκευασμένο εξολοκλήρου από σύνθετα υλικά δημιούργησε ένα παγκόσμιο ρεκόρ ταξιδεύοντας άνευ στάσεως. Το αεροπλάνο ήταν πολύ ελαφρύ και παρουσίασε καταπληκτική ελαστικότητα και ανθεκτικότητα έναντι των καταιγίδων που συνάντησε.



Εικόνα 7

Σύνθετα υλικά υψηλής αντοχής από ίνες γραφίτη χρησιμοποιούνται επίσης για την κατασκευή των διπλών πηδαλίων μιας νέας επαναστατικού τύπου θαλαμηγού, μήκους 12 μέτρων, η οποία όπως και το Voyager καθιέρωσαν τη χρήση υλικών υψηλής τεχνολογίας σε καθημερινής χρήσης κατασκευές. Τα σύνθετα υλικά και η εξέλιξη του τρόπου επεξεργασίας τους, αποτέλεσαν έναν από τους βασικότερους παράγοντες για την ανάπτυξη της σύγχρονης τεχνολογίας.

Εκτός της αεροναυπηγικής βιομηχανίας, τα υψηλής τεχνολογίας σύνθετα υλικά βρίσκουν εφαρμογές και σε άλλους τομείς της σύγχρονης βιομηχανίας. Ναυτικά σκάφη, κουπιά, ποδήλατα(Εικ. 8), παντός είδους αθλητικά είδη (ρακέτες τένις, κοντάρια γκόλφ κλπ.) και σχεδόν κάθε εξάρτημα όπου το βάρος, η ακαμψία και η αντοχή παίζουν σημαντικό ρόλο στη λειτουργικότητα του, είναι κατασκευασμένα από σύνθετα υλικά.



Εικόνα 8

Οι ίνες αραμιδίου όπως το «Kevlar» και το «Nomex» χρησιμοποιούνται σήμερα σε δεκάδες εφαρμογές όπως π.χ. στα αλεξίσφαιρα(Εικ. 9α), στα ναυτικά σκοινιά(Εικ. 9β) στα κράνη (Εικ.11β) ακόμα και σε γάντια υψηλών θερμοκρασιών(Εικ. 9γ).



Εικόνα 9α



Εικόνα 9β

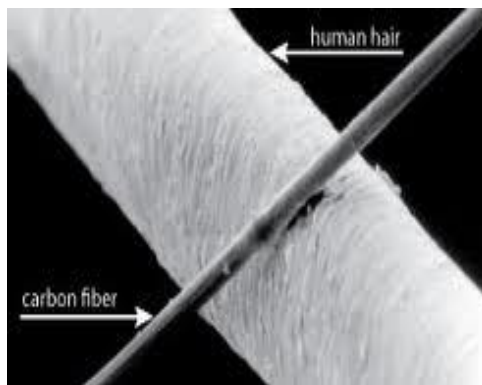


Εικόνα 9γ

Εκατοντάδες τόνοι σύνθετων υλικών με ίνες άνθρακα(carbon fiber) χρησιμοποιήθηκαν ως πρώτη ύλη, από το 1993, για την κατασκευή ρακετών του τένις(Εικ. 3) με αποτέλεσμα ρακέτες και σύνθετα υλικά να θεωρούνται έννοιες ταυτόσημες. Το 1985 στη διάσκεψη της Εταιρείας Μηχανικών, που έλαβε χώρα στο Detroit των Η.Π.Α., εκφράστηκε η άποψη ότι η χρήση των σύνθετων υλικών στη βιομηχανία αυτοκινήτων(Εικ.11α-καμπίνα αυτοκινήτου από ανθρακονήματα) θα είναι τόσο μεγάλη όσο και των ηλεκτρονικών συστημάτων. Σήμερα παρατηρούμε ότι αυτή η άποψη επαληθεύεται.



Εικόνα 10α



Εικόνα 10β



Εικόνα 11α



Εικόνα 11β



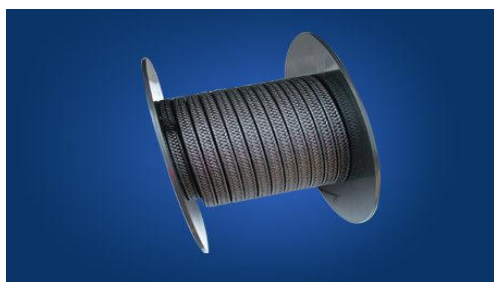
### 1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Οι ιδιότητες κάθε υλικού συμβατικού ή σύνθετου οι οποίες είναι σημαντικές από δομικής απόψεως μπορούν να διακριθούν σε μηχανικές και μη. Μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού είναι η ακαμψία, η αντοχή, η ολκιμότητα, η σκληρότητα και η συμπεριφορά του υλικού σε κόπωση, ερπυσμό και χαλάρωση. Οι μη μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού περιλαμβάνουν κυρίως την πυκνότητα, την θερμική συμπεριφορά και την αντίσταση σε διάβρωση του υλικού.

Τα σύνθετα υλικά, συνήθως διαθέτουν τις καλύτερες ιδιότητες των υλικών από τα οποία αποτελούνται, ενώ επιπλέον διαθέτουν και ιδιότητες τις οποίες κανένα από τα αρχικά υλικά δεν διαθέτει. Έτσι οι γενικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών οι οποίες τα καθιστούν ανώτερα από τα συμβατικά υλικά μπορεί να είναι οι εξής :

1. *Αντοχή.*
2. *Ακαμψία.*
3. *Αντίσταση σε διάβρωση.*
4. *Αντίσταση σε παντός είδους φθορά κατά τη χρήση τους.*
5. *Κόστος.*
6. *Βάρος.*
7. *Συμπεριφορά σε κόπωση.*
8. *Θερμική μόνωση.*
9. *Θερμική αγωγιμότητα.*
10. *Ακουστική μόνωση.*

Είναι όμως προφανές ότι ένα σύνθετο υλικό δεν διαθέτει όλες τις παραπάνω ιδιότητες ταυτοχρόνως, αφού δεν υπάρχει ποτέ τέτοια απαίτηση στην πράξη και αφού ορισμένες από τις ιδιότητες αυτές είναι ασυμβίβαστες μεταξύ τους (π.χ. θερμική μόνωση, θερμική αγωγιμότητα). Άρα κάθε σύνθετο υλικό κατασκευάζεται έτσι ώστε να διαθέτει μερικές από αυτές τις ιδιότητες.



Εικόνα 12α( Ίνες Γραφίτη)



Εικόνα 12β(Ίνες γυαλιού GFRP)

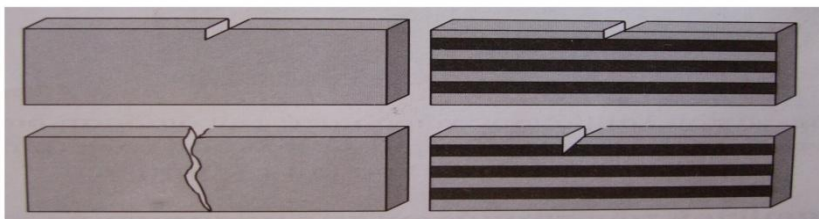
Παρακάτω θα δούμε πιο διεξοδικά τα πλεονεκτήματα των σύνθετων υλικών.

### 1) Άριστες μηχανικές ιδιότητες

Το πρώτο μεγάλο πλεονέκτημα των σύνθετων υλικών είναι οι άριστες μηχανικές τους ιδιότητες. Αρκετοί τύποι ινών επειδή διαθέτουν την προαπαιτούμενη αντοχή και δυσκαμψία έχουν αποτελέσει υλικά κατασκευής σε αεροδιαστημικές εφαρμογές και εντάσσονται στην κατηγορία των προηγμένων ινών. Οι ίνες βορίου και γραφίτη(Εικ.12α) με την μορφή λεπτών νημάτων χαίρουν από τους ερευνητές μεγάλης εκτίμησης χάριν στην μεγάλη αντοχή και δυσκαμψία τους. **Το λεπτό νήμα του βορίου έχει έξι φορές μεγαλύτερη αντοχή και δυσκαμψία από το αλουμίνιο** και για αυτό είναι ευρύτατα διαδεδομένο στις αεροναυπηγικές κατασκευές. Τέλος να πούμε ότι το βόριο υπερίσχυσε στις εφαρμογές του γραφίτη εξαιτίας κάποιων μειονεκτημάτων του τελευταίου όπως μικρή διαστρωματική διατμητική αντοχή και χαμηλή αντοχή σε θλίψη. Οι δύο παραπάνω ιδιότητες οφείλονται στη χαμηλή αντοχή του υλικού στην κάθετη διεύθυνση των ινών του καθώς και στην δυσκολία επίτευξης ενός ισχυρού δεσμού στην διεπιφάνεια.

### 2) Ανάληψη φορτίου μετά την αστοχία

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των σύνθετων υλικών είναι τα μεγάλα φορτία που εξακολουθούν να αναλαμβάνουν μετά από κάποια πιθανή αστοχία τους. Το παραπάνω χαρακτηριστικό παρατηρήθηκε αρκετές φορές σε στατικές δοκιμές σύνθετων υλικών. Για παράδειγμα παρατηρήθηκε ότι τα ινώδη σύνθετα που είναι ενισχυμένα με ίνες γυαλιού (GFRP)(Εικ.12β) μετά την διαρροή τους **εξακολουθούν να αναλαμβάνουν φορτία που φτάνουν το 85%** της τάσης αστοχίας τους. Σε άλλες περιπτώσεις, το παραπάνω ποσοστό μπορεί να φτάσει στο 110% ή και 150% του ορίου διαρροής. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μετά την αστοχία του υλικού συμβαίνει θραύση των ινών και έτσι η τάση μεταβιβάζεται σε πολλαπλές κατευθύνσεις μέσα στη μάζα του υλικού.



Εικόνα 13(μικρή ευαισθησία σύνθετων υλικών σε εγκοπές)

3) **Μικρή ευαισθησία σε εγκοπές**

Τα ινώδη σύνθετα υλικά παρουσιάζουν σχετικά μικρή ευαισθησία στην ύπαρξη εγκοπών ενώ η διάδοση των ρωγμών είναι περιορισμένη. Το γεγονός αυτό βελτιώνει την αντοχή του υλικού σε κόπωση. Αυτό επιβεβαιώθηκε και σε δοκιμές κόπωσης που έγιναν σε πραγματικές κατασκευές από σύνθετα υλικά όπου παρατηρήθηκε σημαντική αύξηση της διάρκειας ζωής σε σχέση με αυτή των αντίστοιχων μεταλλικών κατασκευών. Τέλος αν συγκρίνουμε την ανά μονάδα βάρους διάρκεια ζωής σε κόπωση των ινωδών σύνθετων υλικών με εκείνη των παραδοσιακών υλικών θα παρατηρήσουμε ότι τα ινώδη σύνθετα υλικά παρουσιάζουν πολύ αυξημένες τιμές σε σχέση με το τιτάνιο που είναι το ανθεκτικότερο από όλα τα μέταλλα σε κόπωση.

4) **Μείωση αριθμού των τμημάτων της κατασκευής**

Ένα άλλο πλεονέκτημα των σύνθετων υλικών είναι ο ελάχιστος αριθμός τμημάτων που απαιτούνται για μια κατασκευή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την ανάδειξη παράλληλων πλεονεκτημάτων, όπως χαμηλότερο κόστος επισκευής, παραγωγής και κατεργασίας, ενώ η κατασκευή παρέχει μεγαλύτερη αξιοπιστία η οποία και αποτελεί έναν πολύ σημαντικό παράγοντα στην αεροδιαστημική.

5) **Βέλτιστες αεροδυναμικές επιφάνειες**

Με την χρήση σύνθετων υλικών τύπου *sandwich* μπορούν εύκολα να κατασκευαστούν βέλτιστες αεροδυναμικές επιφάνειες που χαρακτηρίζονται από την διατήρηση του σχήματός τους ακόμα και κάτω από την επίδραση υψηλών φορτίων.

6) **Αντίσταση στην διάβρωση**

Η απόλυτη αντίσταση στην διάβρωση είναι ένα ασυνήθιστο χαρακτηριστικό των μεταλλικών κατασκευών. Αντίθετα, στα ενισχυμένα πλαστικά δεν παρατηρούνται φαινόμενα ηλεκτροχημικής διάβρωσης. Μόνο η ηλιακή ακτινοβολία μπορεί να προκαλέσει μια υποβάθμιση των ιδιοτήτων τους που όμως μπορεί να ελεγχθεί με την κατάλληλη προστασία του υλικού.

7) **Απόσβεση σε ταλαντώσεις**

Τα σύνθετα υλικά και ειδικά οι τύποι *sandwich* παρουσιάζουν μεγάλη απορρόφηση ενέργειας με αποτέλεσμα να αποσβαίνουν τις μηχανικές ταλαντώσεις, ενώ παράλληλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σαν ηχομονωτικά υλικά.

8) **Αντοχή σε κρούσεις υψηλής ενέργειας**

Η υψηλή αντοχή των ινωδών σύνθετων υλικών σε κρουστικά φορτία υψηλής ενέργειας έχει σαν αποτέλεσμα την περιορισμένη καταστροφή της κατασκευής και την διατήρηση του περιγράμματος στις περιοχές γύρω από την καταστροφή. Η διάτρηση που προκύπτει από την βαλλιστική κρούση περιορίζεται σε μία περιοχή του υλικού που είναι λίγο μεγαλύτερη από αυτή του βλήματος. Η συγκέντρωση των τάσεων γύρω από την περιοχή της καταστροφής στα μέταλλα είναι εξαιρετικά υψηλή ενώ αντίθετα στα ινώδη υλικά είναι σχετικά μικρή και στην περιοχή της διάτρησης δεν εμφανίζονται φαινόμενα ρωγμών.

9) **Χαμηλό κόστος κατασκευής**

Από τις διάφορες εφαρμογές των σύνθετων υλικών και ιδιαίτερα τις αεροναυπηγικές, έχει υπολογισθεί μια σημαντική μείωση του κόστους των κατασκευών. Μεγαλύτερη μείωση κόστους παρατηρείται σε περιπτώσεις που απαιτείται υψηλή δυσκαμψία.

10) **Μείωση του βάρους της κατασκευής**

Από τις πρώτες εφαρμογές των σύνθετων υλικών, προέκυψαν σημαντικές μειώσεις στο βάρος των κατασκευών. Οι μειώσεις αυτές μπορούν να φτάσουν ως και το 50% ενώ στις περισσότερες εφαρμογές κυμαίνονται μεταξύ 20-80%. Η μεγαλύτερη μείωση βάρους παρατηρείται στα πιο απλά κατασκευαστικά στοιχεία, όπως είναι οι άξονες, οι άτρακτοι, τα πλαίσια κ.α. Με την πρόοδο της έρευνας γύρω από την εξοικονόμηση βάρους αποδείχθηκε ότι σημαντική μείωση βάρους μπορούμε να πετύχουμε στις πτέρυγες των αεροσκαφών. Λόγω της υψηλής τιμής των ειδικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών, μπορούν να κατασκευασθούν πτέρυγες με πολύ μικρότερο πάχος από εκείνο των παραδοσιακών από αλουμίνιο χωρίς επιπρόσθετα σχεδιαστικά σφάλματα.

Από τα παραπάνω πλεονεκτήματα που αναφέραμε είναι προφανές ότι τα σύνθετα υλικά πράγματι αποτελούν μια επανάσταση και οι προοπτικές που διαγράφονται για την εφαρμογή και παρά πέρα ανάπτυξή τους στο άμεσο και απώτερο μέλλον είναι λαμπρές.



Εικόνα 14(Σύνθετο υλικό τύπου sandwich)



## 1.4 ΠΟΛΥΜΕΡΗ

### 1.4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Η λέξη πολυμερές είναι σύνθετη και προέρχεται από το «πολύς» και το «μέρος». *Τα πολυμερή είναι φυσικά ή τεχνητά παρασκευασμένα υλικά που αποτελούνται από μόρια μεγάλων διαστάσεων, τα μακρομόρια. Δομικά συστατικά των μακρομορίων είναι τα μονομερή τα οποία ενώνονται μεταξύ τους και σχηματίζουν την μακρομοριακή αλυσίδα των πολυμερών. Επίσης τα πολυμερή κατά βάση αποτελούνται κυρίως από C και H και έχουν χαμηλά σημεία τήξης. Τα πιο πολλά δεν είναι αγωγοί της θερμότητας και του ηλεκτρισμού.*

Οι όροι «πολυμερή» και «πλαστικά» συνήθως θεωρούνται συνώνυμοι. Στην πράξη όμως υπάρχει διαφορά μεταξύ τους. Το πολυμερές είναι ένα υλικό καθαρό που προκύπτει από την διαδικασία του πολυμερισμού και συνήθως εκπροσωπεί την οικογένεια των υλικών που χαρακτηρίζονται από μακρομοριακή δομή ενώ τα πλαστικά είναι πολυμερή υλικά που εμπεριέχουν και διάφορες πρόσθετες ουσίες. Καθαρά πολυμερή σπανίως χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές.

### 1.4.2 ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ

A. Με κριτήριο **την αρχιτεκτονική της αλυσίδας τους**, τα πολυμερή διακρίνονται σε:

1. *Γραμμικά*
2. *Διακλαδωμένα*
3. *Διασταυρωμένα*
4. *Δικτυωμένα*

B. Με κριτήριο **την μηχανική συμπεριφορά τους κατά την θέρμανση**, τα πολυμερή κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες:

1. *Θερμοπλαστικά*
2. *Θερμοσκληρυνόμενα*
3. *Ελαστομερή*

Τα **θερμοπλαστικά**(thermoplastic) πολυμερή μαλακώνουν όταν θερμαίνονται και σκληραίνουν όταν ψύχονται. Οι διαδικασίες αυτές είναι αντιστρεπτές. Τα υλικά αυτά μορφοποιούνται με εφαρμογή θερμότητας και πίεσης. Τα θερμοπλαστικά είναι μαλακά και όλκιμα υλικά. Τα περισσότερα γραμμικά πολυμερή είναι θερμοπλαστικά.

Τα **θερμοσκληρυνόμενα**(thermosetting) πολυμερή σκληραίνουν μόνιμα όταν θερμαίνονται, εφαρμόζεται σε αυτά τάση και δεν μαλακώνουν με θέρμανση. Είναι σκληρότερα και ισχυρότερα και πιο ψαθυρά από τα θερμοπλαστικά.

Τα **ελαστομερή** κατά την φόρτισή τους μπορούν να υποστούν μεγάλες παραμορφώσεις και να επανέλθουν στο αρχικό τους σχήμα όταν το φορτίο σταματήσει να υφίσταται. Έχουν μικρά μέτρα ελαστικότητας ενώ η ελαστική περιοχή στην καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης δεν είναι γραμμική.

Γ. Με κριτήριο την προέλευση τα πολυμερή διακρίνονται:

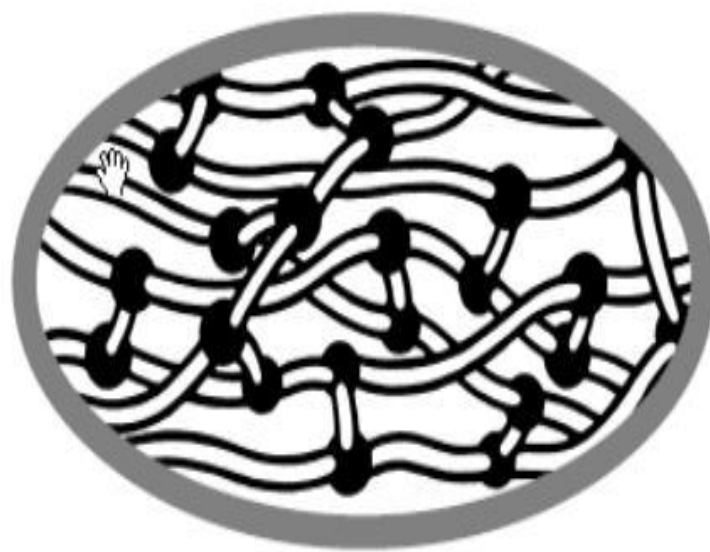
1. Φυσικά πολυμερή
2. Ημισυνθετικά πολυμερή
3. Συνθετικά πολυμερή

Those which soften on heating and then harden again on cooling



THERMOPLASTIC

Those which never soften once they have been moulded



THERMOSETTING

Εικόνα 15

## 1.5 ΟΡΓΑΝΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Οι οργανικές μήτρες διακρίνονται σε:

### 1. Θερμοπλαστικές

Πρόκειται για πολυμερή με γραμμικές αλυσίδες. Λόγω του χαμηλού τους κόστους, χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές ευρείας κατανάλωσης. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν οι μήτρες πολυαιθυλενίου και πολυστερενίου.

### 2. Θερμοσκληρυνόμενες

Χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις που απαιτούνται καλύτερες μηχανικές ιδιότητες. Τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή παρουσιάζουν τρισδιάστατη δομή πλέγματος από πρωτογενείς ισχυρούς δεσμούς μεταξύ των μοριακών αλυσίδων. Με την αύξηση της θερμοκρασίας, αυξάνεται και το πλήθος των διαμοριακών δεσμών καθιστώντας τα υλικά αυτά σκληρότερα καθώς και ψαθυρότερα. Τέτοιες μήτρες είναι:

- **Πολυεστερικές ρητίνες**, οι οποίες ενισχύονται με ίνες γυαλιού και δίνουν υαλονήματα
- **Εποξειδικές ρητίνες** με μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους 200°C, με καλύτερες μηχανικές ιδιότητες από τις προηγούμενες και ευρεία χρήση στην αεροναυπηγική.
- **Φαινολικές ρητίνες** οι οποίες έχουν χαμηλή πλαστικότητα και μέτριες μηχανικές ιδιότητες. Η μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους ωστόσο, φτάνει τους 400°C.



Εικόνα 16(Πολυεστερική ρητίνη)

## 1.6 ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

### 1.6.1 ΓΕΝΙΚΑ

Εποξειδικό ή πολυεποξειδικό είναι ένα **θερμοσκληρυνόμενο πολυμερές**. Οι εποξειδικές ρητίνες αποτελούνται από αλυσίδες που έχουν τουλάχιστον δύο εποξυομάδες. Μελετώντας την δομή των εποξειδικών ρητινών με κάποιο πρόσθετο όπως σκληρυντής ή πλαστικοποιητής με την βοήθεια ηλεκτρονικών μικροσκοπίων παρατηρούμε ότι οι ρητίνες αποτελούνται από σχεδόν μικρού μεγέθους μακρομόρια, τρισδιάστατα διακλαδωμένα δίκτυα ή συσσωματώματα μετρίου μοριακού βάρους, τοποθετημένα σε ένα πλαίσιο από μόρια μικρού μοριακού βάρους. Από πλευράς σύστασης οι εποξειδικές ρητίνες χωρίζονται σε **στερεές και υγρές**.

### 1.6.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες είναι άκαμπτα άμορφα στερεά που μοιάζουν με γυαλί. Επίσης οι στερεές εποξειδικές ρητίνες παρέχουν σκληρή και αμετάβλητη αντίσταση τριβής και πολύ καλή χημική αντίσταση.

Τα σημαντικότερα **πλεονεκτήματα** των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σχέση με τις υγρές ρητίνες είναι η **εύκολη επεξεργασία** τους, η **μηχανική αντοχή**, η **υψηλή χημική αντίσταση** και το **άριστο κολλώδες**.



Εικόνα 17(Στερεά εποξειδική ρητίνη)

### 1.6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΓΡΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Οι κυριότερες ιδιότητες των υγρών εποξειδικών ρητινών είναι οι παρακάτω:

- Χαμηλή υγροσκοπικότητα, καλή διαστατική σταθερότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση ύδατος, οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών.
- Είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες, όπως και τα μίγματά τους με πρόσθετα(πλαστικοποιητές, σκληρυντές), με αποτέλεσμα την εύκολη κατεργασία τους.
- Η επεξεργασία των ρητινών είναι εύκολη και γρήγορη για θερμοκρασίες από 5° C μέχρι 150° C και εξαρτάται από την εκλογή του πρόσθετου.
- Υψηλές μηχανικές ιδιότητες που μπορεί να οφείλονται στη μικρή συστολή τους, έτσι μειώνεται η παρουσία τάσεων.
- Άριστη ηλεκτρική μόνωση.
- Υψηλή δύναμη συγκόλλησης.(Στην σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί). Αυτή η ιδιότητα αποτελεί έναν σημαντικό παράγοντα για πάρα πολλές εφαρμογές.
- Ποικιλία εφαρμογών. Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής.(Ανάμειξη με κάποιο πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και συνθέσεων).
- Καλή χημική αντίσταση που εξαρτάται από το πρόσθετο που χρησιμοποιείται.
- Συνολικά οι εποξειδικές ρητίνες έχουν πολύ υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.
- Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό και κατά την διάρκεια της επεξεργασίας τους.

Ένας σημαντικός αριθμός ιδιοτήτων των εποξειδικών ρητινών είχε ως αποτέλεσμα το γρήγορο ρυθμό ανάπτυξής τους και την ευρεία σε έκταση χρήση τους. Έτσι **αποτελούν σχεδόν πάντα το ένα από τα δύο ή περισσότερα προϊόντα που συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό σύνθετο υλικό**. Σε πάρα πολλές περιπτώσεις δε, χρησιμοποιούνται και τελείως μόνες τους.

#### **1.6.4 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ**

Μερικές από τις σημαντικότερες εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών αναφέρονται παρακάτω:

- Στην κατασκευή κτιρίων και αυτοκινητοδρόμων και γενικά σε κατασκευές όπου υπάρχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντίσταση.
- Σαν βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος.
- Σαν συγκολλητικά σε δομικά μέρη της ατράκτου αεροσκαφών.
- Σαν συγκολλητικό πλαστικών και μεταλλικών κομματιών σε βάρκες και αυτοκίνητα, ώστε να υπάρχει τέλεια στεγανότητα.
- Σαν φυλλώδεις ρητίνες για την κατασκευή πλαισίων και τελειωμάτων αεροσκαφών και πυραύλων.
- Σαν διαλύματα επίστρωσης που έχουν βασικό συστατικό την ρητίνη και είναι πολύ χρήσιμα για την συντήρηση και την κατασκευή τελειωμάτων, όπως τελειώματα θαλάσσιας υφής, τελειώματα λιθοδομής ή τελειώματα αεροσκαφών.
- Επίσης χρησιμοποιούνται για επαλείψεις κατασκευαστικού χάλυβα, επαλείψεις δεξαμενών, επαλείψεις πτυσσόμενων αγωγών και για επαλείψεις σε πλάκες από σκυρόδεμα.
- Στην κατασκευή τριχών για πινέλα.
- Σαν συγκολλητικά, επικαλυπτικά και σαν μέσα ενσωμάτωσης ηλεκτρικών εξαρτημάτων.
- Τυπικές εφαρμογές χυτών εποξειδικών ρητινών αποτελούν οι ανθεκτικές σε χημικά κατασκευές, αντλιών και σωλήνων, μήτρων καθώς και ηλεκτρικών μονωτικών ειδών.
- Για τη συγκόλληση με ενέσεις μικρορωγμών και μικρών κενών σε σκυρόδεμα(εποξειδικές ρητίνες χωρίς διαλύτες).
- Κατάλληλες για χρήση σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή δομικό χάλυβα, εξασφαλίζοντας πρόσφυση.
- Για υγρομόνωση, για προστασία και διακόσμηση δαπέδων, τοίχων και ορόφων σε οικοδομικούς, βιομηχανικούς, αγροτικούς κ.α. χώρους(«wetcome» εποξειδικές ρητίνες).
- Για την σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος κυρίως σε υγρούς χώρους.

## 1.7 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ

### 1.7.1 ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

Τα εγκλείσματα είναι **ανόργανα υλικά** που περικλείονται μέσα σε μία μήτρα. Υπάρχουν τρεις κύριες κατηγορίες εγκλεισμάτων βάσει του σχήματός τους:

- Εγκλείσματα σε μορφή **κόκκων**.
- Εγκλείσματα σε μορφή **ινών**.
- Εγκλείσματα σε μορφή **νιφάδων**.

Τα εγκλείσματα έχουν αρκετά μικρές διαστάσεις της τάξης του «Μίκρο». Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των εγκλεισμάτων είναι ότι ελαττώνουν το κόστος του σύνθετου υλικού ενώ παράλληλα βελτιώνουν τις ποιοτικές του ιδιότητες.

### 1.7.2 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Η επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των ρητινών και δη, των εποξειδικών, που είναι και οι συνηθέστερες ως προς την χρήση, είναι ιδιαίτερα σημαντική για την συνολική εικόνα του σύνθετου υλικού μας. Γενικά παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η κατά όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσμα στο υλικό μας, τόσο αυξάνει το ιξώδες σε αυτό και η ρητίνη μετατρέπεται από υγρή σε μια πιο στερεή μορφή. Τα εγκλείσματα ως επί το πλείστον, ρυθμίζουν το ιξώδες των ρητινών, ελαττώνουν το ποσοστό συστολής τους και τον συντελεστή θερμικής διαστολής τους, ενώ ταυτόχρονα χρωματίζουν το σύνθετο. Επίσης τα εγκλείσματα πρέπει να είναι από χημικής άποψης ουδέτερα ή ελαφρά βασικά και να μην αντιδρούν με την ρητίνη ή το μέσο σκλήρυνσης.

Για καλύτερα αποτελέσματα στη δημιουργία του σύνθετου, τα εγκλείσματα πρέπει να θερμαίνονται για την απομάκρυνση της υγρασίας και του αέρα, που τυχόν απορροφήθηκε από αυτά, και μετά να ενσωματώνονται στη ρητίνη. Τέλος είναι σημαντική και η χρήση αναδευτήρα για την πλήρη ανάμειξη και την σωστότερη κατανομή των εγκλεισμάτων μέσα στην ρητίνη.



## 1.8 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Κατά τον πλέον γενικό τρόπο, τα σύνθετα υλικά δύνανται να ταξινομηθούν αναλόγως με τις ιδιότητες της μήτρας ή του εγκλείσματος. Έτσι **ως προς την μήτρα** διακρίνονται σε :

- α. Σύνθετα υλικά με μεταλλική μήτρα*
- β. Σύνθετα υλικά με μη μεταλλική μήτρα*

ενώ **ως προς το έγκλεισμα** σε :

- α. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή κόκκων (κοκκώδη σύνθετα υλικά)*
- β. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή νιφάδων*
- γ. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή ινών (ινώδη σύνθετα υλικά)*



Εικόνα 18(Νιφάδες γραφίτη στο μικροσκόπιο)



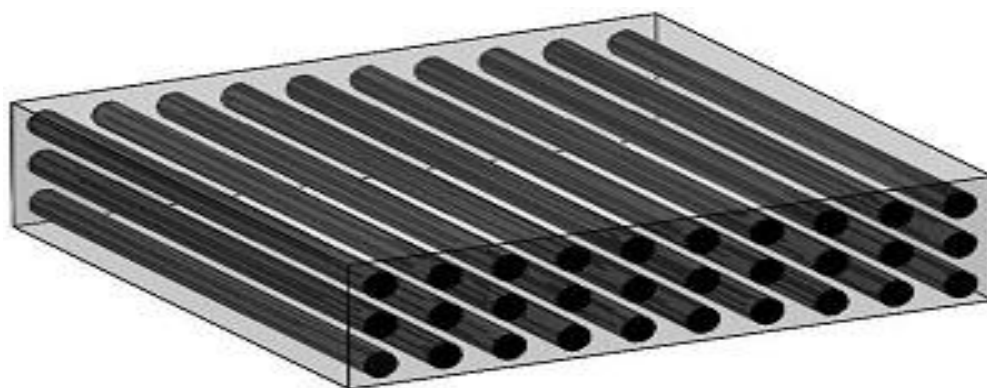
## 1.9 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

### 1.9.1 ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

Τα ινώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από έγκλεισμα υπό μορφή ινών μέσα σε μια μήτρα, η οποία δύναται να είναι ένα οποιοδήποτε υλικό από την μεγάλη ποικιλία που χρησιμοποιείται.

### 1.9.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΙΝΩΝ

Μια ίνα χαρακτηρίζεται από τον πολύ μεγάλο λόγο μήκους/διαμέτρου που έχει. Οι ίνες διαφόρων υλικών είναι σε γενικές γραμμές αρκετά πιο ανθεκτικές από τα αντίστοιχα υλικά στη συνήθη μορφή τους. Για παράδειγμα, τα συνηθισμένα φύλλα υάλου θραύονται σε τάσεις μόνο μερικών MPa, ενώ οι ίνες υάλου δύνανται να έχουν αντοχή θραύσεως η οποία ανέρχεται από 2.8GPa έως 4.8GPa όταν αυτές διατίθενται στο εμπόριο, ενώ μέχρι 7.0GPa όταν αυτές έχουν παρασκευασθεί στο εργαστήριο. Αυτό προφανώς δείχνει ότι η γεωμετρία και η δομή μιας ίνας είναι αποφασιστικής σημασίας για τον υπολογισμό της αντοχής της και θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη στις σχετικές εφαρμογές. Το παράδοξο της ίνας, η οποία έχει διαφορετικές ιδιότητες από αυτές τις οποίες έχει το υλικό όταν δεν είναι διαμορφωμένο σε μορφή ίνας, οφείλεται στην πλέον τέλεια δομή της. Έτσι, εντός της ίνας οι κρύσταλλοι του υλικού είναι ευθυγραμμισμένοι κατά τον διαμήκη άξονα της ίνας. Επιπλέον υπάρχουν λιγότερες εσωτερικές ατέλειες στην ίνα σε σχέση με το σύννηθες υλικό το οποίο έχει άλλη τυχαία διαμόρφωση.



Εικόνα 19(Ινώδες υλικό με συνεχείς ίνες)

### 1.9.3 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΙΝΩΝ

Οι ίνες διακρίνονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες:

- Η **πρώτη κατηγορία** περιλαμβάνει ίνες με πολύ μεγάλο λόγο μήκους/διαμέτρου (*συνεχείς ίνες*) και με διάμετρο της τάξεως του μεγέθους των κρυστάλλων. Στον **Πίνακα Α**, δίνεται η αντοχή και η ακαμψία διαφόρων υλικών που χρησιμοποιούνται σε μορφή μακρών ινών. Σημειώνεται επίσης η πυκνότητα κάθε υλικού και οι λόγοι ακαμψίας/πυκνότητας και αντοχής/πυκνότητας, οι οποίοι είναι ενδεικτικοί της αποτελεσματικότητας της ίνας κυρίως σε κατασκευές «ευαίσθητες» στο θέμα βάρους όπως π.χ. αεροσκάφη και διαστημόπλοια.
- Η **δεύτερη κατηγορία** περιλαμβάνει ίνες οι οποίες έχουν διαμέτρους της ίδιας τάξης μεγέθους με τις πρώτες ύλες τους (*βραχείες ίνες*), δηλαδή της τάξης μεγέθους των κρυστάλλων. Επίσης έχουν πολύ μικρότερο μήκος σε σχέση με τις συνεχείς ίνες παρ' όλο που ο λόγος μήκους/διαμέτρου τους, δύναται να φθάσει σε μερικές εκατοντάδες. Τέλος ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά τους είναι οι ελάχιστες ασυνέχειες που έχουν λόγω της πολύ καλής γεωμετρικής κρυσταλλικής κατανομής τους (κρυσταλλική ευθυγράμμιση). Ως συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι παρουσιάζουν ανώτερες μηχανικές ιδιότητες από αυτές που παρουσιάζουν οι τυχαίες διαμορφώσεις των αντίστοιχων υλικών.

Υλικό ίνας	Ειδικό Βάρος $\rho$ (kN/m <sup>3</sup> )	Εφελκυστική Αντοχή S(GPa)	Λόγος S/ $\rho$ (Αντοχής/Ειδ.Β) (x10 <sup>6</sup> m)	Εφελκυστικό Μέτρο ελ/τος E(GPa)	Λόγος E/ $\rho$ (Ακαμψίας/Ειδ.Β) (x10 <sup>6</sup> m)
Αργίλιο	26.3	0.62	24	73	2.8
Τιτάνιο	46.1	1.9	41	115	2.5
Χάλυβας	76.6	4.1	54	207	2.7
Ε-γυαλί	25.0	3.4	136	72	2.9
S-γυαλί	24.4	4.8	197	86	3.5
Άνθρακας	13.8	1.7	123	190	14.0
Βηρύλλιο	18.2	1.7	93	300	16.0
Βόριο	25.2	3.4	137	400	16.0
Γραφίτης	13.8	1.7	123	250	18.0

Πίνακας Α(Ιδιότητες ινών 1<sup>ης</sup> κατηγορίας)

Υλικό ίνας	Ειδικό Βάρος $\rho$ (kN/m <sup>3</sup> )	Θεωρητική αντοχή S(t) (GPa)	Πειραματική αντοχή S(e) (GPa)	Λόγος S/ $\rho$ (Αντοχής/Ε.Β.) (x10 <sup>6</sup> m)	Μέτρο ελ/τας E (GN/m <sup>2</sup> )	Λόγος E/ $\rho$ (Ακαμψίας/Ε.Β.) (x10 <sup>6</sup> m)
Χαλκός	87.4	12	3.0	34	124	1.4
Νικέλιο	87.9	21	3.9	44	215	2.4
Χάλυβας	76.8	20	13.0	170	200	2.6
B <sub>4</sub> C	24.7	45	6.7	270	450	18.0
SiC	31.2	83	11.0	350	840	27.0
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	38.8	41	19.0	490	410	11.0
C	16.3	98	21.0	1300	980	60.0

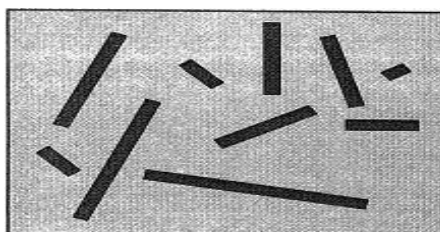
Πίνακας Β(Ιδιότητες ινών 2<sup>ης</sup> κατηγορίας)

Για παράδειγμα ο κοινός δομικός χάλυβας έχει αντοχή που κυμαίνεται μεταξύ 0.52GPa και 0.69GPa ενώ η θεωρητική αντοχή του φτάνει τα 20GPa. Η ασυμφωνία αυτή οφείλεται στις ατέλειες που παρουσιάζει η κρυσταλλική δομή του χάλυβος οι οποίες εμφανίζουν ασυνέχειες και από τις οποίες αρχίζει η διαρροή του χάλυβα σε τάσεις πολύ μικρότερες των θεωρητικών. Με την βέλτιστη διαμόρφωση του, δηλαδή σε μορφή βραχέων ινών, η αντοχή του χάλυβα μπορεί να φτάσει μέχρι και τα 13 GPa. Παραδείγματα της 2<sup>ης</sup> κατηγορίας των ινών δίνονται στον **Πίνακα Β**.

Μία εναλλακτική ταξινόμηση των ινών θα ήταν εάν τις χωρίζαμε στις παρακάτω κατηγορίες:

- Ανόργανες ίνες
- Οργανικές ίνες

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ίνες υάλου, άνθρακα, γραφίτη, βορίου, κ.α., ενώ στην δεύτερη, οι νεοεισερχόμενες ίνες αραμιδίου τύπου Kevlar, οι οποίες και εξελίσσονται συνεχώς στις μέρες μας.



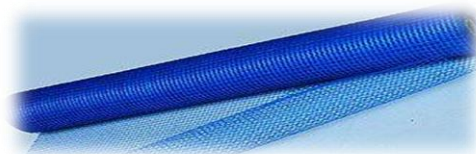
Εικόνα 20(Βραχείες ίνες σε τυχαία διεύθυνση)

*Να σημειώσουμε εδώ* ότι όποια και να είναι τα χαρακτηριστικά των ινών και σε όποια κατηγορία και να ανήκουν αυτές είναι πρακτικά άχρηστες εάν δεν είναι «δεμένες» μέσα σε μια μήτρα. Ωστόσο η μήτρα χρησιμεύει για την προστασία των ινών, για την συγκράτηση τους, για την μεταφορά των τάσεων κ.α. Τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται ως μήτρες έχουν συνήθως σημαντικά μικρότερη πυκνότητα, αντοχή και ακαμψία από τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται ως ίνες.

#### **1.9.4 Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ**

Τα υλικά των ινών και της μήτρας διατίθενται στο εμπόριο ξεχωριστά το καθένα ή ενωμένα υπό μορφή στρώματος. Οι ίνες μπορούν να βρεθούν είτε μεμονωμένες είτε πολλές μαζί υπό μορφή μη στριμμένων δεσμών. Αυτές μπορεί να είναι προσανατολισμένες κατά την αυτή διεύθυνση ή και κατά διαφορετικές διευθύνσεις υπό μορφή υφάνσεως. Συνήθως κυκλοφορούν στο εμπόριο διαβρεγμένες με ρητινώδες υλικό όπως πολυεστερική ρητίνη η οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί μετά και ως μήτρα. Αυτή η διαδικασία αναφέρεται ως **προεμποτισμός** και η μορφή των προεμποτισμένων ινών καλείται «**prepreg**». Για παράδειγμα, ίνες μιας διεύθυνσης μέσα σε εποξειδική ρητίνη διατίθενται υπό τη μορφή ταινίας(Εικ.21α), όπου οι ίνες βρίσκονται κατά μήκος της ταινίας. Ομοίως, διατίθενται προεμποτισμένα πλέγματα(Εικ.21β) στα οποία οι ίνες υφαίνονται και μετά εμποτίζονται με ρητίνη. Υπάρχουν και άλλες παραλλαγές στις δυο αυτές βασικές μορφές της ίνας και της μήτρας. Το προαναφερθέν προεμποτισμένο πλέγμα ινών αποτελεί το ακατέργαστο υλικό για μερικές από τις μεθόδους παρασκευής των ινωδών σύνθετων υλικών. Σ' αυτό συνδυάζονται, οι με μερικό πολυμερισμό θερμοσκληρυνόμενες ρητίνες, με τις ίνες υψηλής αντοχής (βόριο, γραφίτη, κλπ).

Μια συνήθης διαδικασία παρασκευής ενός ινώδους σύνθετου υλικού είναι συνοπτικά η εξής: Στρώματα «prepreg» τοποθετούνται το ένα πάνω στο άλλο υπό μορφή τεμαχίου εντός κατάλληλων τύπων (καλουπιών) έως ότου σχηματιστεί το επιθυμητό πάχος. Μετά γίνεται πολυμερισμός της ρητίνης κάτω από κατάλληλες συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης με αποτέλεσμα το «δέσιμο» των ινών σε ένα συμπαγές ανομοιογενές υλικό.



Εικόνα 21α(prepeg ινών βορίου υπό μορφή ταινίας) Εικόνα 21β(prepeg πλέγμα ινών γυαλιού)

Υπάρχουν πέντε βασικές μέθοδοι παρασκευής ινωδών σύνθετων υλικών:

- Η αυτόκλαστη μέθοδος.
- Η μέθοδος της υπό συμπίεση προσαρμοσμένης μεταλλικής μήτρας.
- Η μέθοδος της περιτύλιξης νήματος.
- Η μέθοδος της επιστρώσεως σε ταινία.
- Η μέθοδος της εξώθησης με έλξη.

Μέθοδος	Προϊόντα παραγωγής	Διαμόρφωση υλικού	Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
<b>Αυτόκλαστη</b>	Πολυστρώματα	Επίπεδα και περίπλοκα περιγράμματα  Πολυστρώματα με μεταβλητό πάχος  Συνδεδεμένες κυψελοειδείς κατασκευές	Προσανατολισμένες ίνες  Ομοιόμορφη πίεση  Συμπολυμερισμός κολλοειδών και προεμποτισμένων ρητίνων  Βιομηχανική εμπειρία	Μέγεθος αυτοκλάστου συσκευής  Χαρακτηριστικά αυτοκλάστου Ρυθμός θερμάνσεως, ρυθμός πίεσεως, όρια θερμοκρασίας και πίεσεως
<b>Η υπό συμπίεση προσαρμοσμένη μεταλλική μήτρα</b>	Πολυστρώματα υψηλής παραγωγής με ελεγχόμενες διαστάσεις και με ελάχιστη δευτερεύουσα κατεργασία σε εργαλειομηχανές	Πολυστρώματα περίπλοκων σχημάτων	Προσανατολισμένα στρώματα (οι ίνες δύνανται να προσανατολισθούν κατά βούληση)  Κομμένες ίνες δυνατότητα υψηλής παραγωγής	Ακριβά εργαλεία Απαιτείται επίστρωσης προσχηματισμού με το χέρι Απαιτείται ακριβής πλήρωσης του τύπου(καλούπι) Χαμηλότερη αντοχή από την αυτόκλαστη μέθοδο
<b>Η περιτύλιξη νήματος</b>	Πολυστρώματα περιτυλιγμένα σε κυλινδρικούς άξονες	Κατασκευή επιφανειών εκ περιστροφής	Ταχεία κάλυψης των επιφανειών Ομοιομορφία στις τάσεις ινών	Δυσκολία στη διατήρηση του προσανατολισμού των ινών σε τεμάχια μεταβλητού περιγράμματος
<b>Η επίστρωση σε ταινία</b>	Πολυστρώματα υψηλής παραγωγής	Επίπεδα, απλού περιγράμματος τεμάχια σταθερού ή μεταβλητού πάχους	Χαμηλό κόστος εργασίας, επιστρώσεως Χαμηλός συντελεστής παραμένουτος ακατέργαστου υλικού	Περιορισμένη δυνατότητα περίπλοκων περιγραμμάτων Υψηλό εργατικό κόστος λειτουργίας
<b>Η εξώθηση με έλξη</b>	Υλικά δομικών εφαρμογών	Γωνίες, διάλοιοι, ράβδοι σταθεράς διατομής	Αυτοματοποιημένη συνεχής διαδικασία επίστρωσης	Περιορίζεται σε κατασκευές σταθερής διατομής

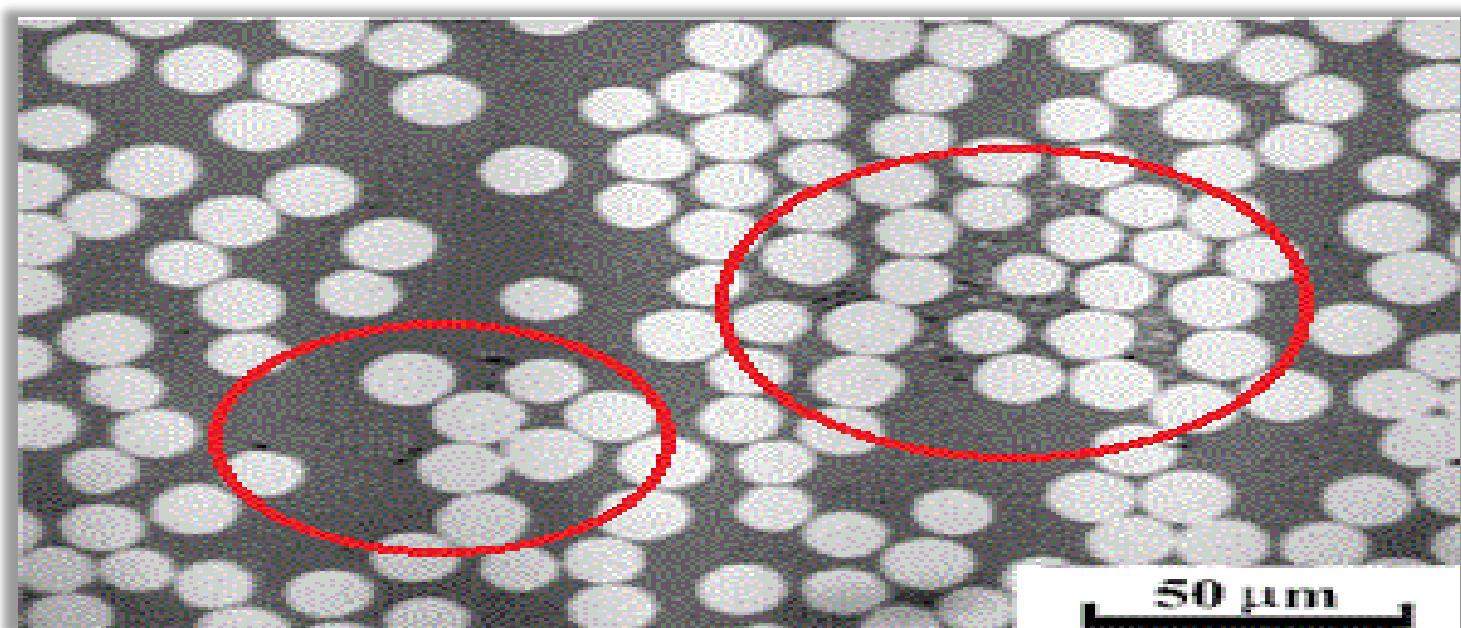
Πίνακας C

Όπως φαίνεται και από τον *Πίνακα C* κάθε μέθοδος έχει τα δικά της πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς της. Το ποια μέθοδος είναι η καλύτερη εξαρτάται από την διαμόρφωση των υπό κατασκευή τεμαχίων και τις απαιτήσεις της παραγωγής.

### **1.9.5 Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΑΙΤΙΕΣ ΤΩΝ ΚΕΝΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ**

Κατά την φάση της παραγωγής του σύνθετου υλικού, δημιουργούνται κάποια κενά, τα οποία και έχουν εξαιρετική σημασία γιατί, ανάλογα με την περιεκτικότητά τους, εκφυλίζουν το σύνθετο υλικό επηρεάζοντας σε σημαντικό βαθμό τις μηχανικές ιδιότητές του. Δύο από τους βασικότερους τύπους κενών που αναπτύσσονται στα σύνθετα υλικά είναι:

- Κενά που αναπτύσσονται κατά μήκος της επιφάνειας των ινών και τα οποία μπορεί να είναι σφαιρικά ή ελλειψοειδή. Η διάμετρος αυτών των κενών εξαρτάται από την σχετική απόσταση των ινών και κυμαίνεται στην περιοχή 5-20μm.
- Κενά τα οποία αναπτύσσονται μεταξύ των στρώσεων και σε περιοχές πλούσιες σε ρητίνη.



Εικόνα 22(Διάφορα κενά που δημιουργούνται σε ινώδες σύνθετο υλικό)

Μια από τις συνήθεις **αιτίες** που δημιουργούνται αυτά τα κενά στο σύνθετο υλικό είναι η κακή διαβροχή των ινών από την ρητίνη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον εγκλωβισμό αέρα, πράγμα το οποίο συμβαίνει συνήθως σε συστήματα όπου οι ξηρές ίνες βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη και το ιξώδες της ρητίνης είναι πολύ υψηλό. Ένας άλλος λόγος είναι η παρουσία πτητικών αερίων που παράγονται κατά το στάδιο της παραγωγής και ιδιαίτερα κατά το στάδιο του «curing» στις θερμοσκληρυνόμενες ρητίνες ή κατά το στάδιο της τήξης στις θερμοπλαστικές μήτρες. Τα πτητικά αέρια μπορεί να είναι τα κατάλοιπα διαλυτών, προϊόντων χημικών αντιδράσεων ή κλάσματα μικρού μοριακού βάρους.

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε κενά του σύνθετου υλικού καθώς και η κατανομή αυτών, εξαρτώνται από την κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών, την κατανομή αυτών, τις ιδιότητες της ρητίνης και τις συνθήκες παραγωγής.

#### **1.9.6 ΠΟΙΟΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ**

Η φύση των σύνθετων υλικών και δε, των ινωδών, υποχρεώνει τον παρασκευαστή να είναι ενήμερος επί ορισμένων ατελειών τους, οι οποίες λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια της παρασκευής του σύνθετου υλικού. Τέτοιες ατέλειες συνδέονται στενά με την επίτευξη της προβλεπόμενης αντοχής και ακαμψίας του υλικού, διότι όσο περισσότερες είναι οι ατέλειες τόσο περισσότερο φθίνουν οι μηχανικές ιδιότητες του υλικού και άρα δεν επιτυγχάνεται η προβλεπόμενη αντοχή και ακαμψία.

Μερικές από τις συνηθισμένες ατέλειες οι οποίες πρέπει να ελέγχονται και οι οποίες σχετίζονται με την απόδοση του σύνθετου υλικού είναι οι εξής:

1. Ενδιάμεσα κενά τα οποία οφείλονται στην παγίδευση αέρος, αποκόλληση στρωμάτων, έλλειψη ρητίνης κλπ.
2. Ατελής πολυμερισμός της ρητίνης.
3. Υπερβολική ύπαρξη ρητίνης μεταξύ των στρωμάτων.
4. Κενά μήτρας και πόρωση.
5. Κατεστραμμένες ίνες.
6. Λάθος διεύθυνση ινών στις στρώσεις.
7. Εγκλείσματα από ξένα σώματα.
8. Μεταβολή στο πάχος.
9. Μη αποδεκτές συνδέσεις στα στρώματα.
10. Ρυτίδες-ζαρώματα και εξογκώματα τα οποία δημιουργούνται από την περιτύλιξη των ινών και την κακή ευθυγράμμιση των στρώσεων.



*Να σημειώσουμε εδώ* ότι η εκτίμηση της φύσεως των ατελειών αυτών γίνεται κατά την διάρκεια της παρασκευής των ινωδών σύνθετων υλικών μέσω της απλής παρατήρησης ή μετά την παρασκευή τους, με άλλους σύγχρονους τρόπους όπως με τις διάφορες μεθόδους των «μη καταστροφικών ελέγχων».

### **1.9.7 ΤΑ ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ**

Οι ιδιότητες οι οποίες καθιστούν πολύ σημαντικά τα ινώδη σύνθετα υλικά είναι η ακαμψία, η αντοχή, το βάρος και το κόστος τους. Ένας από τους πλέον κοινούς τρόπους οι οποίοι χρησιμοποιούνται για να εκφραστεί η αποτελεσματικότητα ενός υλικού είναι οι λόγοι ακαμψίας/πυκνότητας και αντοχής/πυκνότητας. Μια τέτοια έκφραση παρόλα αυτά δεν περιλαμβάνει καμία πληροφορία σχετικά με το κόστος της επιτεύξης ενός τέτοιου λόγου. Επειδή όμως το κόστος επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες, δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί από μόνο του ως κριτήριο και έτσι οι προαναφερθέντες λόγοι αποτελούν σπουδαία κριτήρια, μαζί με το κόστος, για τον προσδιορισμό της αποτελεσματικότητας των ινωδών σύνθετων υλικών.

Στους *Πίνακες Α και Β* (σελ. 31, σελ. 32) έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι **οι λόγοι αντοχής/πυκνότητας και ακαμψίας/πυκνότητας** φθάνουν σε σχετικά πολύ υψηλές τιμές για ίνες διαφόρων υλικών. Έτσι, τα ινώδη σύνθετα υλικά τα οποία έχουν ως έγκλεισμα τέτοιες ίνες, παρουσιάζουν ανάλογα πλεονεκτήματα. Έχουν δηλαδή τους δυο παραπάνω λόγους σημαντικά μεγαλύτερους από τους αντίστοιχους λόγους των κοινών υλικών. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η πλέον σημαντική ιδιότητα των ινωδών σύνθετων υλικών.

Επίσης τα υλικά αυτά απαιτούν **απλή τοποθέτηση**, τις περισσότερες φορές, εκεί που χρησιμοποιούνται. Συνέπεια αυτής της απλής τοποθέτησης είναι η αυξημένη ταχύτητα κατασκευής η οποία γίνεται ακόμα μεγαλύτερη όταν τα υλικά έχουν ως μήτρα ρητίνη, η οποία μπορεί να πολυμερισθεί στον τόπο κατασκευής.

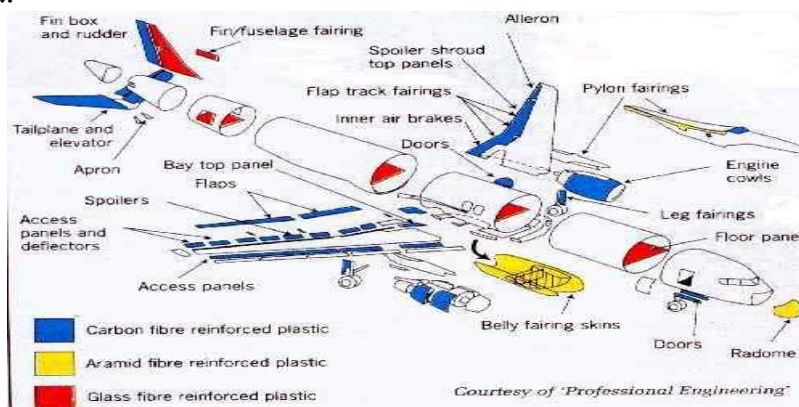
Ο **λόγος κόστους/πυκνότητας** ενός υλικού εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως π.χ. την εμπειρία στη μέθοδο κατασκευής του υλικού, την μέθοδο κατασκευής κλπ. Εκτός από αυτά ο λόγος αυτός δεν δύναται από μόνος του να αποτελέσει κριτήριο για την αποτελεσματικότητα ενός υλικού από άποψη κόστους, επειδή πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι ποσότητες των αποβλήτων που παράγονται κατά την χρήση του υλικού. **Απόβλητα** είναι το μέρος του υλικού, το οποίο περισσεύει μετά από την κατεργασία για την



διαμόρφωση του τελικού προϊόντος. Για τα περισσότερα κοινά υλικά το ποσοστό των αποβλήτων σε βάρος κατά την διάρκεια της παραγωγής τους είναι αρκετά μεγάλο και παρά την δυνατότητα ανακύκλωσης και χρήσης εκ νέου αυτών των αποβλήτων, η ωφελιμότητα αυτή αντισταθμίζεται πολλές φορές από το κόστος κατεργασίας τους για να ξαναγίνουν πρώτη ύλη.

Τα ινώδη σύνθετα υλικά από την άλλη, παρά την δυσκολία ανακύκλωσης των αποβλήτων τους, παρουσιάζουν πολύ μειωμένο ποσοστό αποβλήτων εξαρχής επειδή δύνανται με ευκολία να διαμορφωθούν όσο το δυνατόν πλησιέστερα στην τελική τους μορφή. Ένα απλό παράδειγμα επί του θέματος των αποβλήτων είναι το εξής: Οι δοκοί και γενικότερα πολλά στοιχεία των πλαισίων των αεροσκαφών διαμορφώνονται με μεγάλες οπές για λόγους ελάττωσης βάρους. Όταν λοιπόν το πλαίσιο κατασκευάζεται από συμβατικό υλικό π.χ. κράματα αλουμινίου, οι οπές αυτές έχουν ως αποτέλεσμα την δημιουργία αποβλήτων τα οποία μπορεί να φθάσουν και μέχρι 600% (κατά βάρος). Εν τούτοις, στη περίπτωση κατασκευής του πλαισίου από ινώδες σύνθετο υλικό, το ποσοστό των αποβλήτων μπορεί να μειωθεί μέχρι και 10% εξαιτίας των παραπάνω λόγων. Το γεγονός αυτό δεν είναι θεωρητικό αλλά έχει επιτευχθεί στην πράξη σε πολλές περιπτώσεις κατασκευής τμημάτων πλαισίων αεροσκαφών και δείχνει φανερά την ανωτερότητα των ινωδών σύνθετων υλικών σε σχέση με τα συμβατικά υλικά, σε ορισμένες περιπτώσεις.

Συνοπτικά μπορεί να λεχθεί ότι ο λόγος κόστους/πυκνότητας πολλών κοινών υλικών δύναται σε πολλές περιπτώσεις να είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο των ινωδών υλικών. Το γεγονός όμως ότι τα συμβατικά υλικά γενικώς παρουσιάζουν μεγάλο ποσοστό αποβλήτων, αυξάνει την ποσότητα των υλικών αυτών η οποία πρέπει να χρησιμοποιηθεί για μια συγκεκριμένη κατασκευή και κατά συνέπεια το συνολικό κόστος της κατασκευής. Με κριτήριο, τώρα, το συνολικό κόστος μπορούμε να πούμε ότι τα ινώδη υλικά έχουν αποδειχτεί σε πολλές περιπτώσεις περισσότερο αποτελεσματικά από τα συμβατικά.



Εικόνα 23

**1.9.8 ΙΝΕΣ ΓΥΑΛΙΟΥ**

Οι ίνες γυαλιού (fiberglass) είναι ένα από τα πιο συνηθισμένα εγκλείσματα των ινωδών σύνθετων υλικών και χρησιμοποιούνται σε πολλές αλλά και σημαντικές εφαρμογές. Οι ίνες γυαλιού παράγονται από λειωμένο γυαλί εφελκύνοντας το μέσα από συστήματα οπών, τα οποία έχουν, κανονικά, 102 ή 204 οπές, με μέγιστη ταχύτητα 3000 έως 4000 μέτρων ανά λεπτό. Έτσι τα νήματα εκτείνονται και μειώνεται η διάμετρός τους. Τα νήματα αυτά ψύχονται πολύ γρήγορα με ακτινοβολία και με αγωγή, πριν επικαλυφτούν με την ζωική κόλλα, η οποία εμποδίζει τα νήματα να τριφτούν μεταξύ τους, όταν τοποθετούνται μαζί για να δημιουργήσουν μια πλεξούδα. Ανάλογα με την χρήση για την οποία προορίζεται η ίνα γυαλιού, μια «πλαστική» ή μια «υφαντή» ζωική κόλλα μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Το σύνολο των ινών τυλίγεται σε έναν κύλινδρο στεγνό και θερμό.

Διάφοροι συνδυασμοί ορυκτών γυαλιών έχουν δοκιμαστεί για την κατασκευή ινών. Η συνήθης σύσταση των ινών γυαλιού βασίζεται στο διοξείδιο του πυριτίου με προσθήκη οξειδίων του Ασβεστίου, Βορίου, Νατρίου, Σιδήρου και Αλουμινίου. Τα γυαλιά αυτά είναι συνήθως άμορφα ενώ αν θερμανθούν σε υψηλές θερμοκρασίες επί πολύ διάστημα αποκτούν κάποια κρυσταλλικότητα. Αυτό συνήθως οδηγεί σε κάποια μείωση της αντοχής τους.

Η αντοχή και το μέτρο ελαστικότητας του γυαλιού καθορίζεται καταρχήν από την τρισδιάστατη δομή των οξειδίων από τα οποία συνίσταται και τα οποία σχηματίζουν ένα πλέγμα. Η δομή του πλέγματος καθώς και η αντοχή των δεσμών μεταβάλλεται με την προσθήκη οξειδίων οπότε και είναι δυνατόν να παράγουμε ίνες γυαλιού με διαφορετικές φυσικές και χημικές ιδιότητες. Σε αντίθεση με τις ίνες άνθρακα και Kevlar 49, **οι ιδιότητες των ινών γυαλιού είναι ισότροπες**, έτσι π.χ το μέτρο του Young κατά μήκος και εγκάρσια προς τον άξονα της ίνας είναι το ίδιο. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της τρισδιάστατης δομής του γυαλιού. Επίσης να σημειώσουμε ότι η αντοχή των ινών γυαλιού εξαρτάται και από τις συνθήκες παραγωγής τους αλλά και από το περιβάλλον ελέγχου.

Τέλος να πούμε ότι υπάρχουν αρκετοί τύποι γυαλιών στο εμπόριο όπως ο τύπος E, ο τύπος C και ο τύπος S. Ο πιο κοινός τύπος γυαλιού που συνήθως χρησιμοποιείται είναι ο τύπος E. Ο τύπος αυτός έχει μεγάλη αντοχή και μέτρο ελαστικότητας, καλές ηλεκτρικές ιδιότητες, έχει μικρότερο κόστος από τους άλλους τύπους και δεν επηρεάζεται από τις καιρικές συνθήκες.

## 1.10 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά έχουν ως ενίσχυση σωματίδια(κόκκους) τα οποία είναι διασκορπισμένα στο εσωτερικό του υλικού της μήτρας. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικής φύσεως ή όχι και μπορούν να συνδυαστούν με διαφόρων τύπων μήτρες. Το μέγεθος των κόκκων ποικίλει και μπορεί να είναι από μερικά nm μέχρι κάποια  $\mu\text{m}$ . Για παράδειγμα οι μεγάλοι κόκκοι δεν ξεπερνούν σε διάμετρο τα  $300\mu\text{m}$  ενώ οι μικροί κόκκοι έχουν διάμετρο μικρότερη από  $100\text{nm}$ .

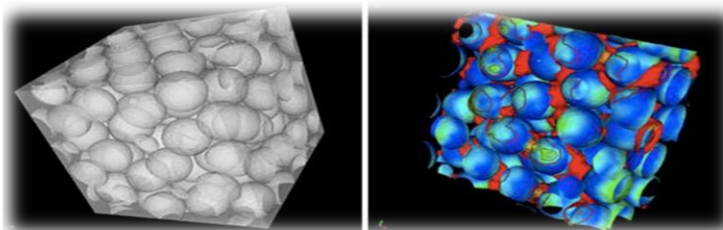
Οι διάφοροι συνδυασμοί μήτρας/κόκκων που μπορούν να επιτευχθούν, αναφέρονται παρακάτω. Έτσι, από αυτήν την άποψη έχουμε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς:

### 1. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Το μη οπλισμένο σκυρόδεμα αποτελεί το πιο κοινό παράδειγμα ενός τέτοιου υλικού. Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας «δεμένους» με ένα μείγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδεται στην ύπαρξη κόκκων πέτρας. Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως ο μαρμαρυγίας ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες εγκλείσμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας.

### 2. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το εγκλείσμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με εγκλείσμα από το μέταλλο αυτό, υπό μορφή φλούδας. Σκοπός της παρασκευής τέτοιων σύνθετων υλικών είναι η δημιουργία ενός υλικού με βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες(αντοχή, μέτρο ελαστικότητας, όριο διαρροής), η αύξηση της ηλεκτρικής και θερμικής αγωγιμότητας καθώς και η μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και της φθοράς της μήτρας.



Εικόνα 24(Μοντελοποιημένη κοκκώδης κατανομή σε μήτρα)

**3. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας**

Τα υλικά αυτού του τύπου δεν είναι κράματα. Το μεταλλικό εγκλείσμα έχει μορφή κόκκων μέσα στη μήτρα και δεν είναι διαλυμένο μέσα σε αυτήν, όπως είναι στα κράματα. Σαν παράδειγμα γι' αυτήν την κατηγορία μπορούμε να αναφέρουμε τους κόκκους μολύβδου εντός κραμάτων χαλκού και χάλυβα, που σκοπό έχουν τη βελτίωση του χειρισμού του κράματος στις εργαλειομηχανές. Επίσης, πολλά μέταλλα που έχουν πολύτιμες ιδιότητες αλλά είναι εύθραυστα σε θερμοκρασία περιβάλλοντος, όπως είναι το χρώμιο, το βολφράμιο και το μολυβδαίνιο, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες εγκλείσμα άλλων μετάλλων τα οποία παρουσιάζουν όλκιμη συμπεριφορά σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Το σύνθετο υλικό που προκύπτει είναι όλκιμο στη θερμοκρασία αυτή και διαθέτει παράλληλα και κάποιες από τις ιδιότητες του εύθραυστου εγκλείσματος.

**4. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας**

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα υλικά που προκύπτουν ονομάζονται **κεραμομέταλλα**. Τα κεραμομέταλλα μπορούν να είναι δυο ειδών ανάλογα με το εγκλείσμα. Το πρώτο είδος είναι **κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα**, τα οποία χρησιμοποιούνται στην κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το δεύτερο είδος είναι τα **κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα**. Έτσι, το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξείδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα και έτσι είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κ.α. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα.

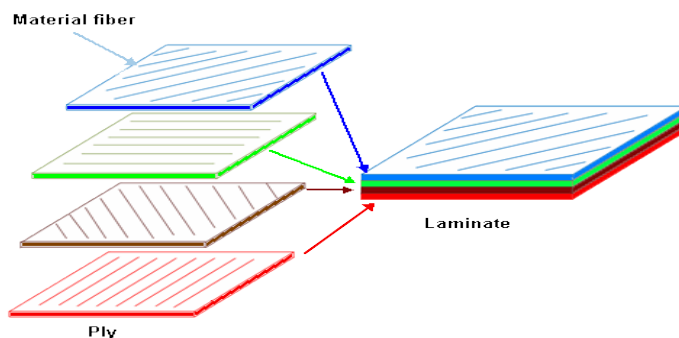
## 1.11 ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Τα πολύστρωτα (laminates) ή στρωματικά σύνθετα υλικά είναι μια κατηγορία σύνθετων υλικών στην οποία τα υλικά της μήτρας και της ενίσχυσης είναι υπό τη μορφή στρώσεων και φύλλων. Διάφορα υλικά μπορούν να συνδυαστούν ή και να αποτελέσουν τα φύλλα (ply) που συνθέτουν τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά. Τα σύνθετα αυτού του τύπου μπορεί να έχουν πολύ καλές ιδιότητες, όπως δυσκαμψία, αντοχή, αντίσταση στη διάβρωση και στη φθορά, ακουστική και θερμική μόνωση κ.α.

Οι επιμέρους στρώσεις αποτελούνται από ίνες υψηλής αντοχής και υψηλές τιμές μέτρου ελαστικότητας, «δεμένες» με ένα πολυμερές, μεταλλικό ή κεραμικό συνδετικό υλικό. Να πούμε εδώ ότι οι ίνες των στρώσεων μπορούν να είναι και διαφορετικά προσανατολισμένες (Εικ.25), πράγμα το οποίο βελτιώνει τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού σε πολλές διευθύνσεις. Ίνες που χρησιμοποιούνται συνήθως, περιλαμβάνουν γραφίτη, γυαλί, βόριο, και καρβίδιο του πυριτίου. Μερικά συνδετικά υλικά είναι εποξειδικές ρητίνες, οι πολυϊμίδες, το αλουμίνιο, το τιτάνιο και η αλουμίνα. Επίσης οι επιμέρους στρώσεις γενικά είναι ορθότροπες (δηλαδή, με κύριες ιδιότητες σε ορθογώνιες κατευθύνσεις) ή εγκάρσιως ισότροπες (με ισότροπες ιδιότητες στο εγκάρσιο επίπεδο). Ωστόσο οι επιμέρους στρώσεις μπορούν να παρουσιάζουν και ανισότροπες (με μεταβλητή κατεύθυνση των κύριων ιδιοτήτων), ορθότροπες, ή ημι-ισότροπες ιδιότητες. Τα ημι-ισοτροπικά ελάσματα εμφανίζουν ισότροπη (δηλαδή, ανεξάρτητη από την κατεύθυνση) απόκριση εντός του επιπέδου αλλά δεν περιορίζονται σε ισοτροπική (καμπτική) απόκριση εκτός αυτού.

Τα κυριότερα είδη των πολύστρωτων σύνθετων υλικών είναι:

1. τα διμέταλλα
2. τα επιμεταλλωμένα μέταλλα
3. η ύαλος ασφαλείας
4. τα υλικά με επίστρωση πλαστικού



Εικόνα 25

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

---

### 2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

#### 2.1.1 ΣΥΝΤΟΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

##### Νόμος του Hooke:

Επειδή τα σύνθετα υλικά είναι από την κατασκευή τους **ανισότροπα** μέσα, είναι καλό να αναφερθούμε στην γενίκευση του νόμου του Hooke για να καταλήξουμε σε εκείνη την μορφή ανισοτροπίας που μας εξυπηρετεί για την μελέτη των υλικών αυτών. Γνωρίζουμε ότι σε μια διάσταση ή στο επίπεδο η ορθή και η διατμητική τάση συσχετίζονται (στην γραμμική περιοχή) με την αντίστοιχη τους ορθή και διατμητική παραμόρφωση μέσω των σχέσεων του νόμου του Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.1.1)$$

και

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2.1.2)$$

όπου  $E$  ονομάζουμε το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young και  $G$  το μέτρο διάτμησης. Στο γενικευμένο νόμο του Hooke και θεωρώντας ότι βρισκόμαστε στο πλαίσιο της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε τάση συνδέεται γραμμικά με κάθε παραμόρφωση μέσω μιας σειράς από γραμμικά ανεξάρτητες σταθερές αλλά και αντίστροφα κάθε παραμόρφωση συνδέεται γραμμικά με κάθε τάση μέσω μιας σειράς σταθερών που είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Στην πρώτη περίπτωση οι σταθεροί συντελεστές θα λέγονται **ελαστικές σταθερές** ή **σταθερές δυσκαμψίας** ενώ στη δεύτερη θα λέγονται **σταθερές ενδοτικότητας**.

**Λόγος Poisson:**

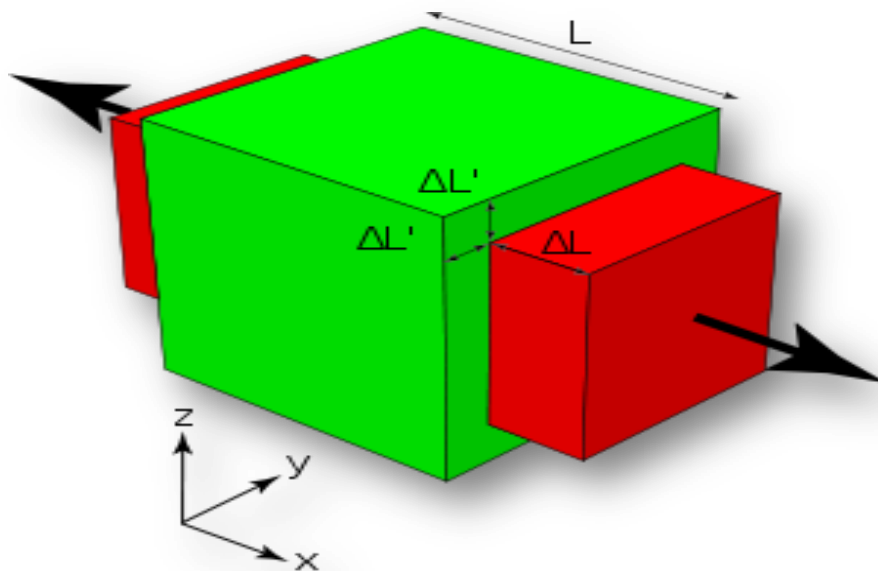
Όπως ήδη γνωρίζουμε η αρχική επιμήκυνση μιας ράβδου που π.χ εφελκύεται, συνοδεύεται πάντοτε από κάποια πλευρική συστολή. Έχει αποδειχθεί ότι τα πηλίκα των ανηγμένων πλευρικών βραχύνσεων  $\varepsilon_y$  και  $\varepsilon_z$  κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  αντίστοιχα, προς την ανηγμένη αξονική επιμήκυνση είναι ίσα προς έναν αριθμό  $\nu$ , σταθερό για κάθε υλικό που καταπονείται με φορτία τέτοια ώστε να ισχύει ο νόμος του Hooke. Η σταθερά αυτή ονομάζεται **λόγος του Poisson** ή **συντελεστής εγκάρσιας παραμόρφωσης**.

Έτσι ισχύει η σχέση:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (2.1.3)$$

Δεδομένου ότι οι ανηγμένες βραχύνσεις είναι αρνητικοί αριθμοί, το αρνητικό πρόσημο στη σχέση(2.1.3), δικαιολογείται. Ο λόγος Poisson είναι «καθαρός» αριθμός, ο οποίος πάντοτε είναι μικρότερος ή ίσος από 0.5 και μεγαλύτερος ή ίσος του 0. Για τα μέταλλα για παράδειγμα ισχύει ότι

$0.25 \leq \nu \leq 0.35$ . Ο λόγος Poisson παίρνει την μεγαλύτερή του τιμή για κάποιο υλικό, στο όριο ανάμεσα στην «ελαστική» και «πλαστική» περιοχή, όπου και σταματά να ισχύει ο νόμος του Hooke.



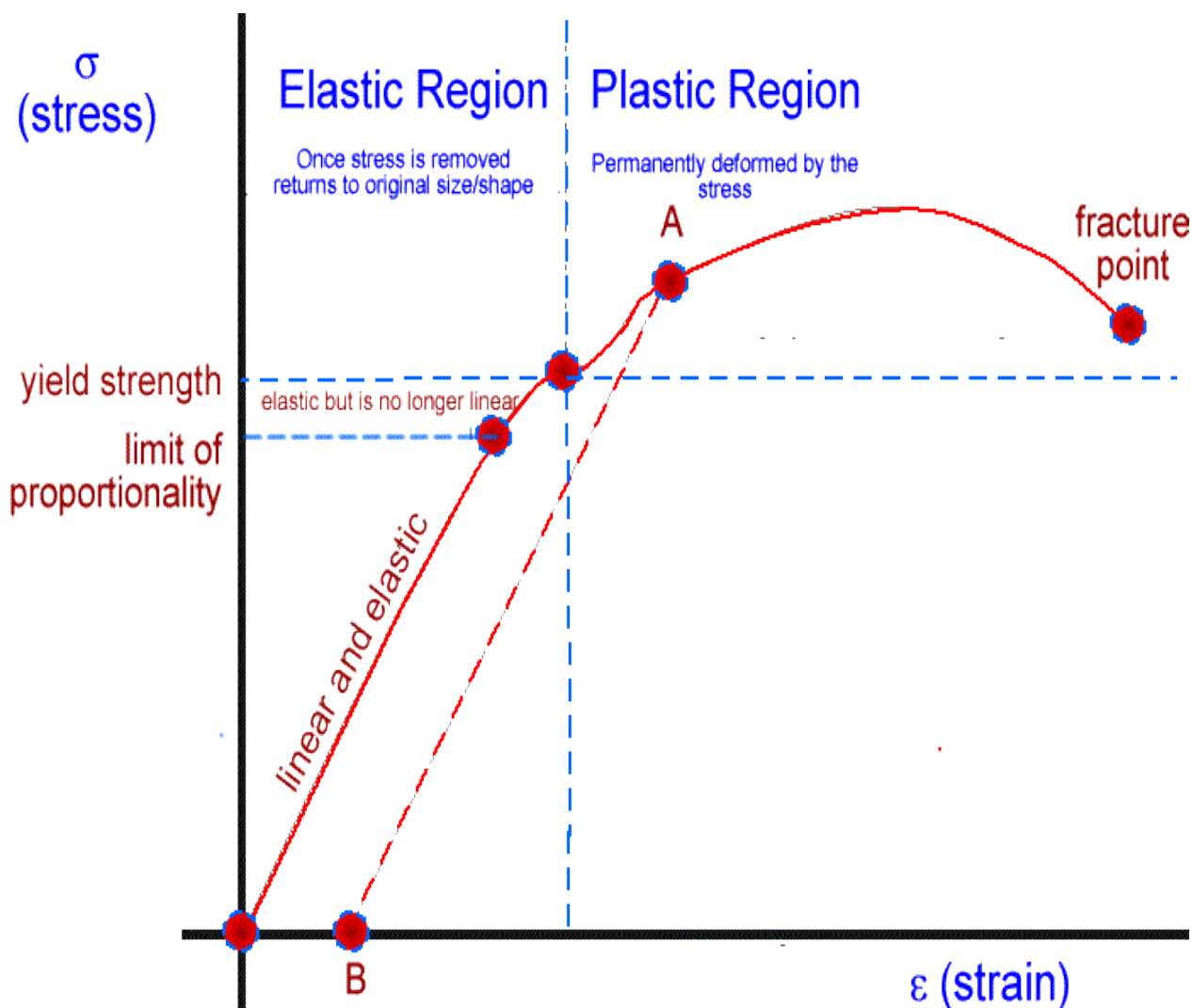
Εικόνα 26



**Ομοιογενές υλικό:** ονομάζεται εκείνο το υλικό που παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες σε όλα τα σημεία της μάζας του. Διαφορετικά λέγεται **ανομοιογενές**.

**«Τελείως ελαστικό» σώμα:** ονομάζεται το σώμα εκείνο, το οποίο επανέρχεται ακριβώς στο αρχικό του σχήμα και όγκο μετά την αποφόρτιση. Οι δε, προκαλούμενες παραμορφώσεις, ονομάζονται τότε **«ελαστικές»**.

**«Τελείως πλαστικό» σώμα:** χαρακτηρίζεται το σώμα εκείνο, το οποίο παραμένει απολύτως στη παραμορφωμένη κατάσταση που έφτασε και μετά την αποφόρτιση. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το σώμα έχει υποστεί μόνιμη ή πλαστική παραμόρφωση.



Εικόνα 27(Διάγραμμα  $\sigma$ - $\epsilon$ )



**Ανηγμένη διόγκωση:**

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x(1 - 2\nu) \quad (2.1.4)$$

Όπου  $\nu$  ο λόγος Poisson και  $V'$  ο τελικά διαμορφωμένος όγκος

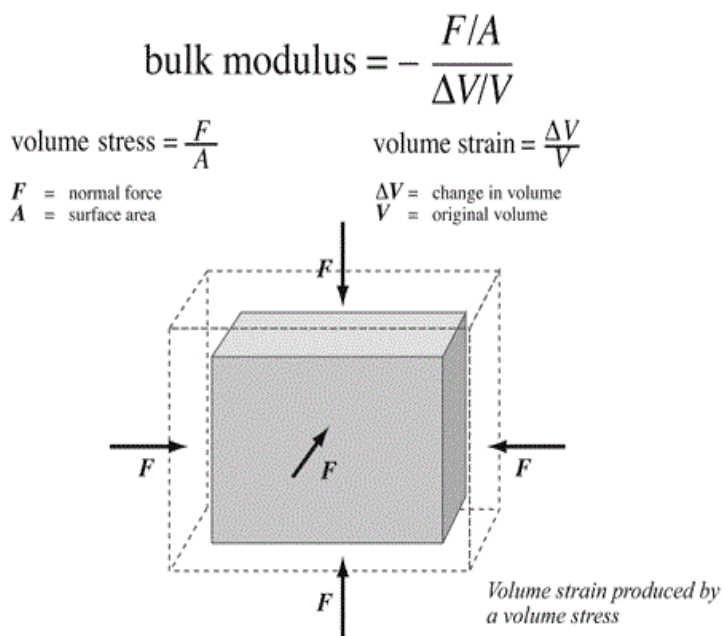
Επίσης η ανηγμένη διόγκωση  $\theta$  (εφόσον ισχύει ο νόμος του Hooke) μπορεί να γραφτεί:

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.1.5)$$

**Μέτρο διόγκωσης:** Είναι το μέτρο που εκφράζει την αντίσταση του υλικού στη μεταβολή του όγκου του και εκφράζεται από την σχέση:

$$K = \frac{p}{\theta} \quad (2.1.6)$$

Όπου  $p$  είναι η ομοιόμορφη πίεση που ασκείται στο σώμα και  $\theta$  η ανηγμένη διόγκωση.



Εικόνα 28

**2.1.2 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ, ΣΤΕΡΡΟΤΗΤΑ**

Οι δύο θεμελιώδεις τρόποι με τους οποίους τα υλικά αντιδρούν στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων είναι η αλλαγή του όγκου τους και η αλλαγή του σχήματός τους.

*Η αλλαγή του όγκου* ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να γίνει με ομοιόθετη αλλαγή όλων των γραμμικών του διαστάσεων και προφανώς θα πρέπει να εξαρτάται μόνον από τις ορθές παραμορφώσεις. Στην περίπτωση αυτή ο στοιχειώδης κύβος διατηρεί το σχήμα του, αλλά με διαφορετικές διαστάσεις των ακμών του.

*Η αλλαγή σχήματος* ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να επιτευχθεί με δυο τρόπους:

*a) Με αλλαγή των γωνιών του κύβου χωρίς αισθητή αλλαγή των γραμμικών του διαστάσεων (π.χ. περίπτωση καθαρής διατμήσεως).*

*b) Με μη ομοιόθετη αλλαγή των γραμμικών διαστάσεών του, οπότε αυτός μετατρέπεται σε στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.*

Αυτό βεβαία σημαίνει ότι μερικές γωνίες, θα αλλάξουν τιμή, όπως εκείνες των διαγωνίων του. Επομένως, η αλλαγή του σχήματός του επιτυγχάνεται και από ορθές και από διατμητικές παραμορφώσεις.

Για τις αλλαγές αυτές απαιτείται η καταβολή εξωτερικού έργου που επιτυγχάνεται από την επιβολή φορτίων. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο δοκίμιο ως **ενέργεια παραμόρφωσης**, η οποία αποτελείται από δυο προσθετέους, έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου και ονομάζεται **ενέργεια μεταβολής όγκου** και έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή σχήματος ή αλλιώς στρέβλωση του υλικού και καλείται **στροφική ενέργεια**. Προφανώς το άθροισμα των δυο αυτών όρων παριστά το σύνολο της ενέργειας παραμόρφωσης που αποθηκεύθηκε στο υλικό και ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δαπανήθηκε για τη φόρτιση του δοκιμίου. Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην καμπύλη σ-ε και τον άξονα των παραμορφώσεων (Εικ.27) παριστάνει τη συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης που έχει αποθηκευθεί στο υλικό ή καταναλωθεί από αυτό από την αρχή της φόρτισης του μέχρι τη στιγμή που η τάση είναι σ(τυχαίο) και η αντίστοιχη παραμόρφωση ε(τυχαίο). Όταν το ζεύγος (σ,ε) αντιστοιχεί στο σημείο θραύσεως θ του υλικού τότε η συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης καλείται **στερρότητα** του υλικού και αποτελεί μέτρο της απαιτούμενης από το υλικό ενέργειας για τη θραύση.

### **2.1.3 Η ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ**

**Ανισότροπο τρικλινές μέσο:** το μέσο το οποίο δεν παρουσιάζει συμμετρίες και έχει 21 ελαστικές σταθερές ανεξάρτητες.

**Μονοκλινές μέσο:** το μέσο αυτό έχει ένα επίπεδο συμμετρίας και κάθε διεύθυνση έχει ίδιες ιδιότητες με την συμμετρική της ως προς το επίπεδο αυτό. Αποδεικνύεται ότι το μέσο αυτό έχει 13 ελαστικές σταθερές.

**Ορθότροπο μέσο:** όταν το υλικό παρουσιάζει συνολικά δύο κάθετα επίπεδα συμμετρίας τότε λέγεται ορθότροπο. Το μέσο αυτό έχει 9 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές.

**Εγκαρσίως ισότροπο μέσο:** μια ακόμα ανώτερη τάξη ελαστικής συμμετρίας από αυτή του ορθότροπου μέσου. Το μέσο σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζει έναν άξονα συμμετρίας ως προς τον οποίο όλες οι κάθετες διευθύνσεις είναι συμμετρικές ως προς τις μηχανικές ιδιότητες. Οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι 5.

**Ισότροπο μέσο:** τα μέσα στα οποία κάθε διεύθυνση είναι διεύθυνση υλικής συμμετρίας. Αρκούν μόνο 2 ελαστικές σταθερές για την περιγραφή του μέσου (το μέτρο ελαστικότητας  $E$  και ο λόγος Poisson  $\nu$ ).

## **2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ**

### **2.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΑΛΩΔΟΥΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ $T_g$**

Στα άμορφα στερεά, όπως το γυαλί και κάποια άμορφα πολυμερή, δεν υπάρχει ένα καλά καθορισμένο σημείο πήξης, αλλά υφίστανται ένα εύρος θερμοκρασιών στο οποίο γίνεται η μετάβαση από συμπεριφορά ρευστού σε συμπεριφορά στερεού, σε μια **διαδικασία** που ονομάζεται **υαλώδης μετάπτωση ή μετάβαση**. Προσδιορίζεται (συμβατικά) μια **θερμοκρασία υαλώδους μετάβασης  $T_g$** , ως το σημείο τομής των καμπυλών θερμοκρασίας-πυκνότητας που χαρακτηρίζουν τη ρευστή και στερεή κατάσταση του σχετικού υλικού, αντίστοιχα[52].

### 2.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Μεταξύ των σπουδαιότερων παραγόντων οι οποίοι προσδιορίζουν την βισκοελαστική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών με πολυμερική μήτρα, είναι:

- a) η προσρόφηση πολυμερικών μακρομορίων εντός των εγκλεισμάτων.
- b) η πρόσφυση μεταξύ μήτρας και εγκλεισμάτος.

**Η προσρόφηση** των πολυμερικών μακρομορίων από το έγκλεισμα, είναι η **κυρία αιτία** για την διαφορετική διαμόρφωση των μακρομορίων γύρω από το έγκλεισμα σε σχέση με την διαμόρφωσή τους στην μήτρα γενικότερα. Η αλλαγή της κατάστασης των μακρομορίων γύρω από το έγκλεισμα, προσδιορίζει την περιοχή **της ενδιάμεσης φάσης**, η οποία έχει διαφορετική δομή και ιδιότητες από την μήτρα. Έτσι, καταλήγουμε ότι η παρουσία εγκλείσματος μέσα στην πολυμερική μήτρα δημιουργεί μια ατέλεια στο πολυμερικό δομικό δίκτυό της.

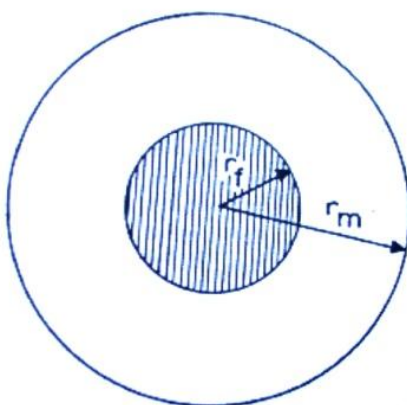
Είναι γνωστό ότι οι ιδιότητες των πολυμερικών σύνθετων υλικών κατά την χαλάρωση, επηρεάζονται σημαντικά από την ύπαρξη της ενδιάμεσης φάσης [7]-[13]. Από αυτή την άποψη είναι πολύ σημαντική η μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς αυτών των σύνθετων υλικών [1]-[5] και η συλλογή πληροφοριών για την δομή και τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης καθώς επίσης και την επίδρασή της στην βισκοελαστική συμπεριφορά του σύνθετου συστήματος μας.

Ωστόσο, η δομή και οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται, σε σημαντικό βαθμό, από την **μεθοδολογία** που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται χαρακτηρίζεται από τους δικούς της ιδιαίτερους περιορισμούς. Ως συνέπεια των παραπάνω, τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται από τις διαφορετικές μεθόδους προσδιορισμού της ενδιάμεσης φάσης είναι συχνά διαφορετικά μεταξύ τους. Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι ο προσδιορισμός της ενδιάμεσης φάσης είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως  $T_g$ . Ωστόσο, ενώ υπάρχουν αρκετές πειραματικές μέθοδοι για την εύρεση τιμών για την  $T_g$ , όπως η θερμιδομετρία, η διαστολομετρία, οι δυναμικές μετρήσεις κ.α., αυτές εξάγουν διαφορετικά αποτελέσματα μεταξύ τους [14],[15].

Λόγω της παραπάνω δυσκολίας, δημιουργήθηκε ένα χάσμα ανάμεσα στα ευρήματα διαφόρων ερευνητών για την επίδραση της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος  $U_f$ , στην υαλώδη μεταβατική θερμοκρασία  $T_g$  [16]. Για παράδειγμα, αρκετοί ερευνητές βρήκαν ότι όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα ενός σύνθετου υλικού, αυξάνεται και η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως  $T_g$  και ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική. Άλλοι ερευνητές βρήκαν ότι η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως  $T_g$  δεν επηρεάζεται σημαντικά από την κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος [17],[18],[19]. Τέλος υπήρχαν και ερευνητές που βρήκαν ότι οι τιμές της

υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας  $T_g$  εξαρτώνται πολύ από την κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, και σε πολλές περιπτώσεις η  $T_g$  ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα [20].

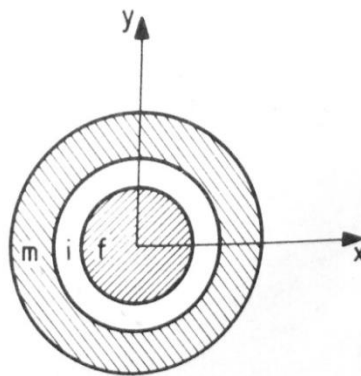
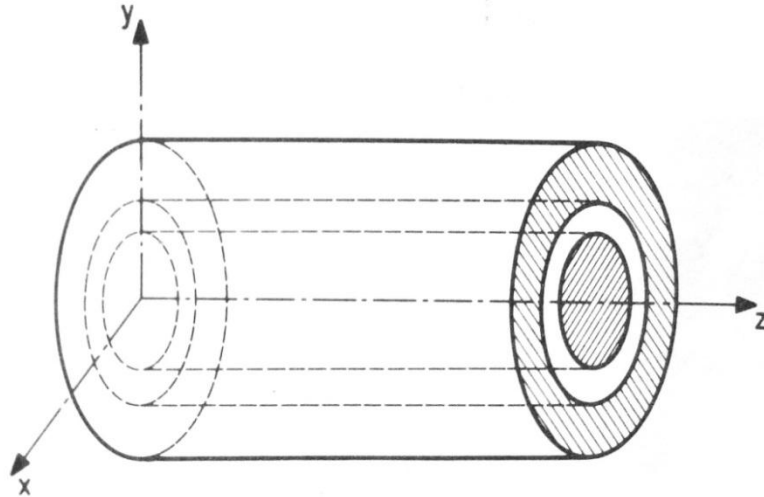
Στην περίπτωση μετρήσεων με την μέθοδο της θερμιδομετρίας μια παράμετρος η οποία επιδρά στον προσδιορισμό των υαλωδών μεταβατικών θερμοκρασιών  $T_g$ , είναι ο ρυθμός θέρμανσης ανά μάζα ή αλλιώς ειδική θερμότητα. Έχει παρατηρηθεί ότι, σε D.S.C μετρήσεις που έγιναν με την βοήθεια ενός θερμικού αναλυτή, η εξάρτηση της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας από την ειδική θερμότητα  $H_r$ , είναι τέτοια ώστε διαφορές της τάξεως των  $15^\circ\text{C}$  να μπορούν να παρατηρηθούν για διαφορετικούς ρυθμούς θέρμανσης [21],[22],[23].



Εικόνα 29(Διφασικό μοντέλο)

### 2.2.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΧΟΥΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Πιο αναλυτικά παρακάτω θα περιγραφεί η διαδικασία εύρεσης του πάχους της ενδιάμεσης φάσης. Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο ελέγχου κάνοντας χρήση του τριφασικού μοντέλου(Εικ. 30), το οποίο προκύπτει ουσιαστικά από το διφασικό μοντέλο(Εικ.29) με την προσθήκη της ενδιάμεσης φάσης, και είναι το δομικό «κύτταρο» για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, το οποίο αποτελείται από μέσα προς τα έξω, από εγκλείσμα, ενδιάμεση φάση και μήτρα αντίστοιχα.



Εικόνα 30(Τριφασικό μοντέλο)

Αν ορίσουμε ως  $r_f$ ,  $r_i$ , και  $r_m$  τις ακτίνες των περιοχών των φάσεων του παραπάνω μοντέλου, με τους δείκτες  $f$ ,  $i$ ,  $m$  να συμβολίζουν το έγκλεισμα, την ενδιάμεση φάση και την μήτρα αντιστοίχως, τότε οι αντίστοιχες κατ' όγκο περιεκτικότητες θα γράφονται ως:

$$U_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}, \quad U_i = \frac{r_i^2 - r_f^2}{r_m^2}, \quad U_m = \frac{r_m^2 - r_i^2}{r_m^2} \quad (2.2.1)$$

Και επίσης θα ισχύει:

$$U_m = (1 - U_f - U_i) \quad (2.2.2)$$

Καθώς η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων της μήτρας, τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα, επίσης **αυξάνεται**. Αυτό ισοδυναμεί με αύξηση της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης και οδηγεί στο συμπέρασμα το οποίο υπάρχει στην αναφορά [25] ότι δηλαδή υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο  $\Delta C_p$ , το οποίο εκφράζει την απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας στην υαλώδη μεταβατική περιοχή μιας ουσίας, και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης. Η σχέση αυτή για τα ινώδη υλικά εκφράζεται από τον παρακάτω τύπο [5],[26]:

$$\frac{(r_f + \Delta r)^2}{r_f^2} - 1 = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \quad (2.2.3)$$

Όπου  $\Delta r$  εκφράζει το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και η παράμετρος  $\mu$  δίνεται βάσει της αναφοράς [25] από τον τύπο:

$$\mu = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0} \quad (2.2.4)$$

Όπου  $\Delta C_p^f$  είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα με έγκλεισμα, ενώ  $\Delta C_p^0$  είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα «σκέτη», χωρίς έγκλεισμα, στις αντίστοιχες υαλώδεις μεταβατικές θερμοκρασίες τους.

Η σχέση (2.2.3), αφού  $r_f + \Delta r$  ισούται ουσιαστικά με  $r_i$ , με την βοήθεια των σχέσεων (2.2.1), μπορεί να γραφτεί και σαν:

$$\frac{U_i}{U_f} = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \quad (2.2.5)$$

Η σχέση (2.2.5) μαζί με την (2.2.1) και την (2.2.2) εξάγουν την εξής σχέση:

$$constant = \frac{r_f^2}{r_i^2} = \frac{U_f}{U_f + U_i} = \frac{1 - U_f}{1 - U_f(1 - \mu)} \quad (2.2.6)$$

Τέλος υπολογίζοντας με την βοήθεια των DSC(differential scanning calorimetry) μετρήσεων, τα άλματα της ειδικής θερμότητας  $\Delta C_p$  στην υαλώδη μετάβαση ενός ινώδους σύνθετου υλικού και του αντίστοιχου πολυμερούς του, από το οποίο είναι αποκλειστικά φτιαγμένη η μήτρα του σύνθετου υλικού, **μπορούμε να εκτιμήσουμε τον παράγοντα  $\mu$**  και άρα και το πάχος της ενδιάμεσης φάσης αφού μας είναι γνωστή η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

#### **2.2.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ**

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του ΕΜΠ έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμίων εποξειδικής ρητίνης και ιών γυαλιού. Παρακάτω θα περιγράψουμε μία από τις πειραματικές έρευνες [28],[29],[30] που έγιναν για την μέτρηση του πάχους και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης.

Στην συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιήθηκαν ιώδη σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης αποτελούμενα από μία εποξειδική μήτρα(Permaglass XE5/1, Permali Ltd., U.K) ενισχυμένη με συνεχείς ίνες γυαλιού τύπου-E. Το υλικό της μήτρας βασίστηκε σε διγλυκυδιλαιθέρα της δισφαινόλης A, συνδυασμένο με σκληρυντή από αρωματική αμίνη(Araldite My 750/HT972, Ciba-Geigy, U.K). Οι ίνες γυαλιού είχαν διάμετρο  $1,2 \times 10^{-5}$  m και η κατ' όγκο περιεκτικότητά τους ήταν 0.65.

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ιών γυαλιού προσδιορίστηκε με το συνήθη τρόπο, δηλαδή καίγοντας δείγματα του ιώδους σύνθετου υλικού και ζυγίζοντας το υπόλοιπο. Έτσι η κατά μάζα περιεκτικότητα του γυαλιού υπολογίστηκε 79.6% (+/- 0.28%). Με την χρήση του αποτελέσματος αυτού και των τιμών των ειδικών πυκνοτήτων του γυαλιού ( $\rho_g = 2.55 \text{ gr/cm}^3$ ) και της εποξειδικής μήτρας( $\rho_e = 1.20 \text{ gr/cm}^3$ ), και κάνοντας και κάποιους εύκολους υπολογισμούς, υπολογίζεται ότι η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ιών γυαλιού του πειράματος μας είναι 0.65.



Από την άλλη μεριά, δοκίμια με διάμετρο 0.004m και πάχους που ποικίλει από 0.001m μέχρι 0.0015m, φτιαγμένα είτε από ινώδες σύνθετο υλικό σε διάφορες κατ' όγκο περιεκτικότητες είτε φτιαγμένα από το υλικό της μήτρας υποβλήθηκαν σε δοκιμές DSC, με θερμικό αναλυτή στην περιοχή της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας τους, έτσι ώστε να προσδιορισθούν οι τιμές της ειδικής θερμότητάς τους.

Οι τιμές του παράγοντα  $\mu$  (σχέση 2.2.4) εξήχθησαν από τις τιμές των αλμάτων των ειδικών θερμοτήτων της μήτρας ενισχυμένης με ίνες γυαλιού και της μη ενισχυμένης μήτρας, δηλαδή των  $\Delta C_p^f$  και  $\Delta C_p^0$  αντίστοιχα, που υπολογίστηκαν από τα  $\Delta C_p = f(T)$  διαγράμματα σύμφωνα με το διάγραμμα της **Εικόνας 31**. Οι τιμές του  $\mu$  που προσδιορίστηκαν από τα DSC τεστ, επέτρεψαν και την εκτίμηση του πάχους της ενδιάμεσης φάσης για κάθε σύνθετο υλικό (για κάθε διαφορετική κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα).

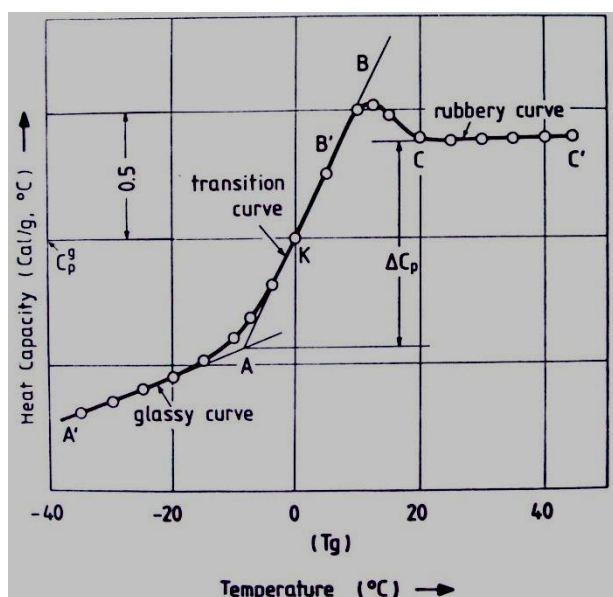
Έχει δειχθεί [26] ότι για της μια κατεύθυνσης ινώδη σύνθετα υλικά, υπάρχει μια παραβολική σχέση ανάμεσα στην κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και στην κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

Αυτή η σχέση είναι η εξής:

$$U_i = C U_f^2 \quad (2.2.7)$$

Όπου με  $U_i$  και  $U_f$  συμβολίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και του εγκλείσματος αντίστοιχα.

Η σταθερά  $C$  στην περίπτωση μας είναι ίση με 0.123 [40].

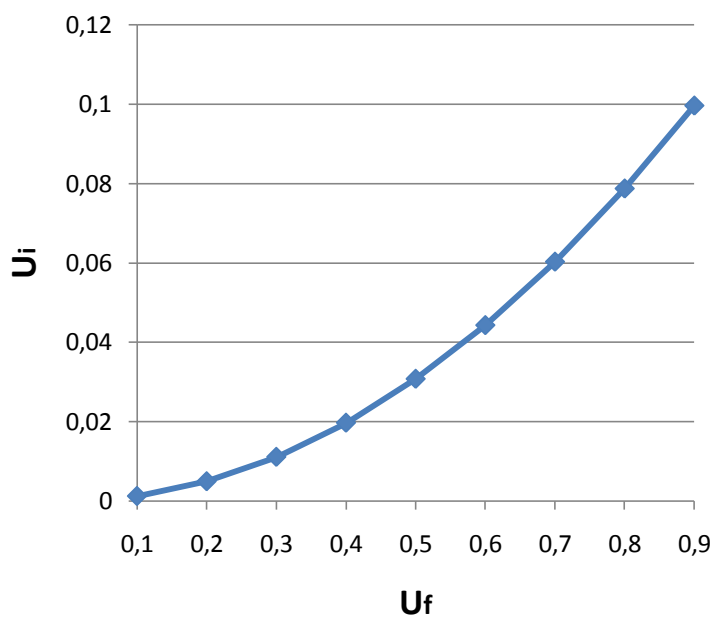


Εικόνα 31

*Να σημειώσουμε εδώ* ότι ύστερα από τον υπολογισμό της σχέσης (2.2.7) και με την βοήθεια της σχέσης (2.2.3) εξάγεται ο παρακάτω πίνακας τιμών για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση και παρατηρούμε από το ακόλουθο διάγραμμα ότι η μεταβολή της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος είναι περίπου παραβολική:

$U_f$	$U_i$	$r_i(\mu\text{m})$
0.10	0.0012	6.036
0.20	0.00492	6.073
0.30	0.01107	6.110
0.40	0.01968	6.146
0.50	0.03075	6.182
0.60	0.04428	6.217
0.65	0.052	6.235
0.70	0.06027	6.254
0.80	0.07872	6.288
0.90	0.09963	6.323

Πίνακας D

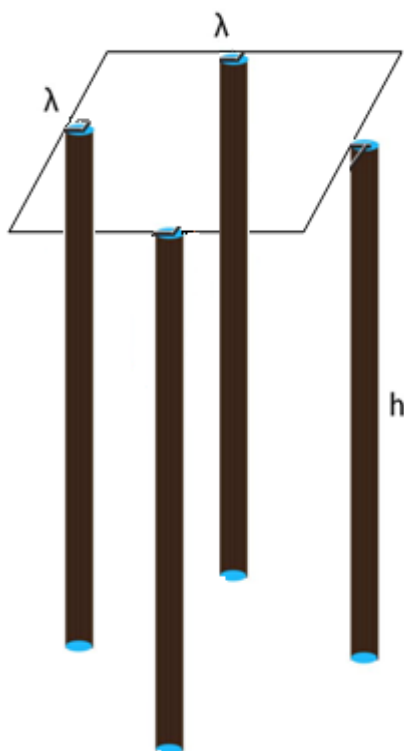


## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

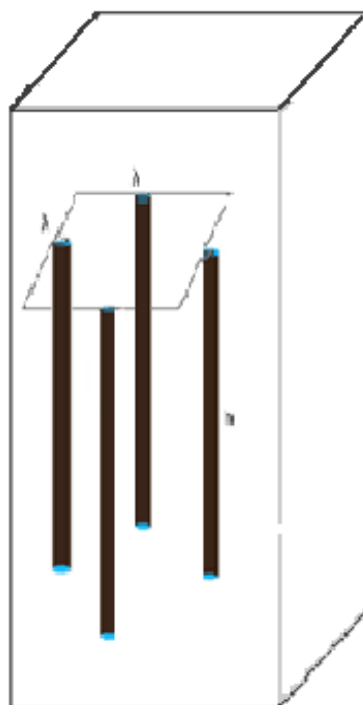
### 3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

#### 3.1.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΝΩΝ

Σε αυτήν την υποενότητα, θα θεωρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται οι ίνες γυαλιού(ινώδη εγκλείσματα) μέσα στη μάζα της μήτρας ενός ινώδους σύνθετου υλικού έτσι ώστε να μπορέσουμε ύστερα να προσδιορίσουμε τις ακτίνες του κυλινδρικού μοντέλου που θα προκύψει μέσα από αυτήν την μελέτη.



Εικόνα 32α



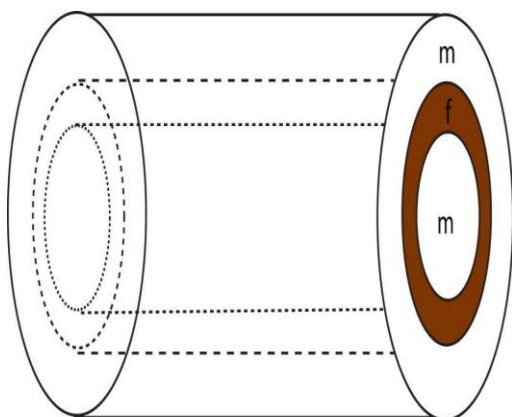
Εικόνα 33β

Θεωρούμε λοιπόν ότι οι ίνες καταλαμβάνουν τα μέσα των πλευρών ενός τυχαίου τετραγωνικού πρίσματος ακμής  $\lambda$  και πεπερασμένου μήκους  $h$ , το οποίο περικλείεται σε ένα δεύτερο τετραγωνικό πρίσμα ακμής  $2\lambda$  και ίδιου μήκους(Εικ.32α, Εικ.32β). Το πρίσμα αυτό επαναλαμβάνεται συμμετρικά σε

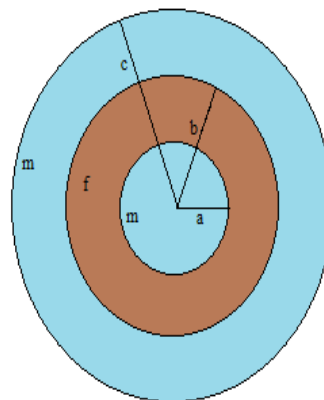
όλη την μάζα του σύνθετου υλικού και το ορίζουμε ως το στοιχειώδες δομικό «κύτταρο» του υλικού. Το τμήμα μεταξύ των ινών αλλά και το τμήμα ανάμεσα στο αρχικό τετραγωνικό πρίσμα και το δομικό «κύτταρο» του υλικού, αντιπροσωπεύει την μήτρα του σύνθετου υλικού.

Το πρίσμα ακμής  $2\lambda$  θα το αναγάγουμε τώρα, σε ένα «ισοδύναμο» κυλινδρικό μοντέλο με ίδιο μήκος  $h$  για να εκμεταλλευτούμε έτσι την κυλινδρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτήν, σε ένα τριφασικό μοντέλο.

Το τριφασικό μοντέλο μας, θα αποτελείται από τρεις ομόκεντρους κυλίνδρους ακτίνας  $a, b, c$  ( $a < b < c$ ) (Εικ.34, Εικ.35). Σε αυτό το μοντέλο, η πρώτη και η τρίτη φάση, που τις αποτελούν ο κύλινδρος ακτίνας  $a$ , και ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $b$  και εξωτερική ακτίνα  $c$ , αντιπροσωπεύουν το υλικό της μήτρας και θα την συμβολίζουμε με  $m$ . Την δεύτερη φάση την αποτελεί ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $a$  και εξωτερική ακτίνα  $b$ , αντιπροσωπεύει το σύνολο των ινών του δομικού μας «κυττάρου» και την συμβολίζουμε με  $f$ .



Εικόνα 34 (Τριφασικό κυλινδρικό μοντέλο)



Εικόνα 35(Κάτοψη μοντέλου)

Για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, ξέρουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών του  $U_f$ , όπως επίσης και την ακτίνα των ινών του  $r_f$ . Για το πρίσμα ακμής  $2\lambda$  η  $U_f$  θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των τεσσάρων ινών του, προς τον όγκο ολόκληρου του πρίσματος, δηλαδή:

$$U_f = \frac{4\pi h r_f^2}{h(2\lambda)^2} = \frac{\pi r_f^2}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt{\frac{\pi}{U_f}} \quad (3.1.1)$$

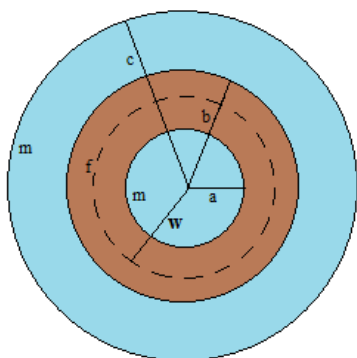
Επίσης ο όγκος του πρίσματος με ακμή  $2\lambda$  αντιπροσωπεύεται από τον όγκο του κυλίνδρου ακτίνας  $c$  στο κυλινδρικό μοντέλο. Έτσι θα έχουμε:

$$(2\lambda)^2 h = \pi h c^2 \Rightarrow c = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \quad (3.1.2)$$

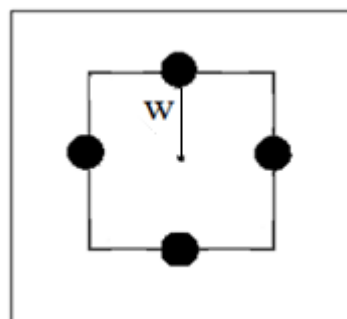
Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των ακτινών  $a, b$ .

Θεωρούμε το τετραγωνικό πρίσμα ακμής  $\lambda$  όπως πριν. Η απόσταση από τον κεντρικό άξονα του, έως μία εκ του μέσου των πλευρών του, όπως προκύπτει από εφαρμογή γεωμετρικών υπολογισμών, έχει μήκος  $\frac{\lambda}{2}$ . Αν ονομάσουμε αυτήν την απόσταση  $w$ , το  $w$  θα αντιπροσωπεύει την απόσταση του άξονα του πρίσματος από τα κέντρα των ινών και ισχύει ότι (Εικ. 36β):

$$w = \frac{\lambda}{2} \quad (3.1.3)$$



Εικόνα 36α



Εικόνα 36β

Θεωρούμε επίσης ότι ο κυλινδρικός φλοιός με ακτίνες  $a, b$  κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της κυλινδρικής επιφάνειας (Εικ. 36α) που ορίζει η ακτίνα  $w$ , προσαρμοσμένη στο τριφασικό μοντέλο. Θα ισχύει λοιπόν:

$$\pi(b^2 - w^2)h = \pi(w^2 - a^2)h \Rightarrow b^2 + a^2 = 2w^2 \quad (3.1.4)$$

Ο όγκος της δεύτερης φάσης ισούται όμως με τον όγκο των τεσσάρων ινών και άρα θα πρέπει:

$$\pi(b^2 - a^2)h = 4\pi h r_f^2 \Rightarrow b^2 - a^2 = 4r_f^2 \quad (3.1.5)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.1.4), (3.1.5) προκύπτουν οι εκφράσεις των  $a, b$  ως εξής:

$$a = \sqrt{w^2 - 2r_f^2} \quad (3.1.6)$$

$$b = \sqrt{w^2 + 2r_f^2} \quad (3.1.7)$$

Και άρα από τις σχέσεις (3.1.1) και (3.1.3) θα έχουμε:

$$a = \sqrt{\frac{\pi r_f^2}{2U_f} - 2r_f^2} \quad (3.1.8)$$

$$b = \sqrt{\frac{\pi r_f^2}{2U_f} + 2r_f^2} \quad (3.1.9)$$

$$c = \frac{2r_f}{\sqrt{U_f}} \quad (3.1.10)$$

Καταφέραμε έτσι λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες  $a, b, c$  συναρτήσει των γνωστών μεγεθών  $U_f$  και  $r_f$ .

### 3.1.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Σε αυτή την υποενότητα θα εξετάσουμε τους γεωμετρικούς περιορισμούς που προκύπτουν για το κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο μας χωρίς ενδιάμεση φάση, βάσει της κατανομής των ιών γυαλιού που έχουμε θεωρήσει. Να σημειώσουμε εδώ ότι η θεώρηση ύπαρξης ενδιάμεσης φάσης στο συγκεκριμένο μοντέλο, δεν επηρεάζει τις σχέσεις των γεωμετρικών περιορισμών και αυτό διότι η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα και είναι μέρος της μήτρας μας. Άρα θα έχουμε:

$$\alpha > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi r_f^2}{4U_f} - 2r_f^2} > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4U_f} r_f^2 - 2r_f^2 > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4U_f} > 2 \Rightarrow U_f < \frac{\pi}{8} \approx 0.3925 \quad (3.1.11)$$

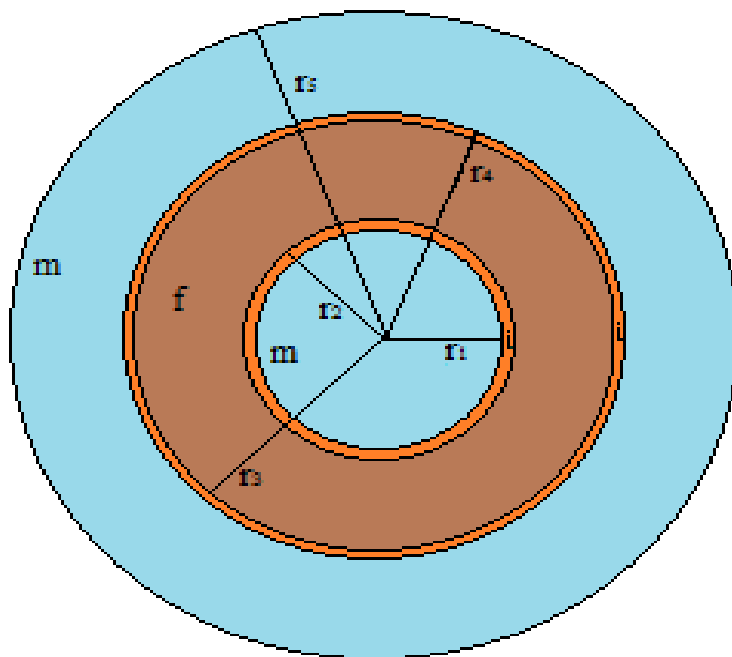
Και

$$b < c \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi r_f^2}{4U_f} + 2r_f^2} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \frac{\pi}{4U_f} r_f^2 + 2r_f^2 < \frac{4\lambda^2}{\pi} \Rightarrow \frac{\pi}{4U_f} r_f^2 - \frac{4}{\pi} \frac{\pi}{U_f} r_f^2 < -2r_f^2 \Rightarrow \frac{4}{U_f} - \frac{\pi}{4U_f} > 2 \Rightarrow U_f \lesssim 1.6 \quad (3.1.12)$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι η **μέγιστη επιτρεπτή κατ' όγκο περιεκτικότητα σε ινώδες έγκλεισμα** θα είναι  $U_f < 0.3925$ .

### **3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

Για να αναπτύξουμε το *πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο* το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να θεωρήσουμε την προσθήκη ενδιάμεσης φάσης στο τριφασικό μοντέλο που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Η ενδιάμεση φάση σχηματίζει δύο κυλινδρικούς φλοιούς γύρω από την φάση του εγκλείσματος στο τριφασικό μοντέλο και άρα προσθέτονται δύο ακόμα φάσεις σε αυτό(Εικ.37). Άρα το νέο κυλινδρικό μας μοντέλο θα έχει πέντε φάσεις. Η πρώτη φάση, από μέσα προς τα έξω, με ακτίνα  $r_1$  αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή της μήτρας. Η δεύτερη φάση, είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την  $r_1$  και εξωτερική ακτίνα την  $r_2$  και αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης. Η τρίτη φάση, είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την  $r_2$  και εξωτερική ακτίνα την  $r_3$  και αντιπροσωπεύει την περιοχή του εγκλείσματος. Η τέταρτη φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την  $r_3$  και εξωτερική ακτίνα την  $r_4$  και αντιπροσωπεύει την δεύτερη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης. Η πέμπτη και τελευταία φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την  $r_4$  και εξωτερική ακτίνα την  $r_5$  και αντιπροσωπεύει την δεύτερη περιοχή της μήτρας.



Εικόνα 37(Εγκάρσια τομή κυλινδρικού πενταφασικού μοντέλου)

Αρχικά πρέπει να προσδιορίσουμε τις ακτίνες στις περιοχές της ενδιάμεσης φάσης, την  $r_1$  και την  $r_4$  (Εικ.37), καθώς και την κατ' όγκο περιεκτικότητά της, σε κάθε περιοχή ξεχωριστά.

Οι κατ' όγκο περιεκτικότητες στο πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο ορίζονται ως εξής:

1.  $U_1$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής της μήτρας (της πρώτης φάσης).
2.  $U_2$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής της ενδιάμεσης φάσης (της δεύτερης φάσης).
3.  $U_3$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της περιοχής του εγκλείσματος (της τρίτης φάσης) και άρα  $U_f = U_3$
4.  $U_4$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής της ενδιάμεσης φάσης (της τέταρτης φάσης).
5.  $U_5$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής της μήτρας (της πέμπτης φάσης).



Θεωρούμε επίσης ότι  $U_m = U_1 + U_5$  δηλαδή ότι η  $U_m$  είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της μήτρας στο μοντέλο μας και αντίστοιχα,  $U_i = U_2 + U_4$  δηλαδή ότι η  $U_i$  είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης στο μοντέλο μας. Τέλος συμβολίζουμε ως  $U_1 = U_{m,1}$  και  $U_5 = U_{m,2}$  και αντίστοιχα  $U_2 = U_{i,1}$  και  $U_4 = U_{i,2}$ .

Κάνοντας την παραδοχή τώρα, ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί ως αλλοιωμένη μήτρα και ότι η αναλογία της θα είναι σταθερή και στις δύο περιοχές εμφάνισής της θα ισχύει ότι:

$$\frac{U_{i,1}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,2}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,1} + U_{i,2}}{U_{m,1} + U_{m,2}} = \frac{U_i}{U_m} = \frac{U_i}{1 - U_f - U_i} = k \quad (3.2.1)$$

Γνωρίζοντας βέβαια ότι γενικά ισχύει:

$$U_m = 1 - U_f - U_i \quad (3.2.2)$$

Άρα από τις σχέσεις (3.2.1), (3.2.2) προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} U_{i,1} = kU_{m,1} &\Rightarrow \frac{\pi h(r_2^2 - r_1^2)}{\pi h r_5^2} = k \frac{\pi h r_1^2}{\pi h r_5^2} \Rightarrow r_2^2 = r_1^2(k + 1) \\ &\Rightarrow r_2 = r_1 \sqrt{k + 1} \Rightarrow r_1 = \frac{r_2}{\sqrt{k + 1}} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} U_{i,2} = kU_{m,2} &\Rightarrow \frac{\pi h(r_4^2 - r_3^2)}{\pi h r_5^2} = k \frac{\pi h(r_5^2 - r_4^2)}{\pi h r_5^2} \Rightarrow r_4^2 - r_3^2 = k(r_5^2 - r_4^2) \Rightarrow \\ r_4 &= \sqrt{\frac{kr_5^2 + r_3^2}{k+1}} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Σε αυτό το σημείο **να σημειώσουμε** ότι οι σχέσεις των ακτινών του τριφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, που συμβολίζονταν στη προηγούμενη ενότητα (βλ. Εικ.35, σελ. 57) με  $a, b, c$  χρησιμοποιούνται και

στην θεωρητική ανάπτυξη του πενταφασικού μοντέλου με ενδιάμεση φάση. Για την ανάπτυξη του πενταφασικού μοντέλου οι ακτίνες  $a$ ,  $b$ ,  $c$  του τριφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, απλώς μετονομάζονται σε  $r_2$ ,  $r_3$  και  $r_5$  αντίστοιχα και ορίζουν τις εξωτερικές ακτίνες των περιοχών της 2<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup>, και 5<sup>ης</sup> φάσης του πενταφασικού μας μοντέλου. Αυτό συμβαίνει γιατί η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα και άρα δεν υπάρχει προσθήκη άλλου υλικού στο μοντέλο μας. Αυτό έχει ως συνέπεια, πρώτον, να μην αλλάξει η εξωτερική ακτίνα του τριφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, κατά την θεώρηση της εισαγωγής της ενδιάμεσης φάσης γύρω από το έγκλεισμα και άρα την ανάπτυξη του πενταφασικού μοντέλου μας και δεύτερον, να παραμείνει όμοια και η εξωτερική και εσωτερική ακτίνα της φάσης του εγκλείσματος από το τριφασικό μοντέλο χωρίς ενδιάμεση φάση, στο πενταφασικό μας μοντέλο. Το τελευταίο συμβαίνει γιατί ουσιαστικά η θεώρηση της ενδιάμεσης φάσης δεν επηρεάζει την κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, παρά μόνο την κατ' όγκο περιεκτικότητα σε μήτρα.

Από προηγούμενη μελέτη (βλέπε Κεφ.2, σελ. 54), για κάθε τιμή της κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα υπάρχει μία συγκεκριμένη τιμή της κατ' όγκο περιεκτικότητα σε ενδιάμεση φάση. Τα ζευγάρια των τιμών των παραπάνω περιεκτικότητων παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ε**.

$U_f$	$U_i$
0.10	0.0012
0.20	0.00492
0.30	0.01107
0.40	0.01968
0.50	0.03075
0.60	0.04428
0.65	0.052
0.70	0.06027
0.80	0.07872
0.90	0.09963

Πίνακας Ε

Χρησιμοποιώντας τώρα, τις σχέσεις (3.1.8), (3.1.9), (3.1.10), (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4) για κάθε ζεύγος τιμών ( $U_f$ ,  $U_i$ ) του **Πίνακα Ε**, υπολογίζονται οι ακτίνες για όλες τις φάσεις του πενταφασικού μας μοντέλου και

παρουσιάζονται αναλυτικά στο **Πίνακα F**. Εδώ να αναφέρουμε ότι η

διάμετρος των εγκλεισμάτων θεωρείται γνωστή, και έχει τιμή 12μm. Άρα και η ακτίνα τους,  $r_f$  θα είναι ίση με 6μm.

$U_f$	$U_i$	$r_1(\mu\text{m})$	$r_2(\mu\text{m})$	$r_3(\mu\text{m})$	$r_4(\mu\text{m})$	$r_5(\mu\text{m})$
<b>0.10</b>	0.0012	14.502	14.512	18.830	18.867	37.947
<b>0.20</b>	0.00492	8.2989	8.3246	14.604	14.710	26.832
<b>0.30</b>	0.01107	4.6679	4.7116	12.891	12.980	21.908
<b>0.39</b>	0.018708	0.6688	0.6793	12.019	12.302	19.215

Πίνακας F

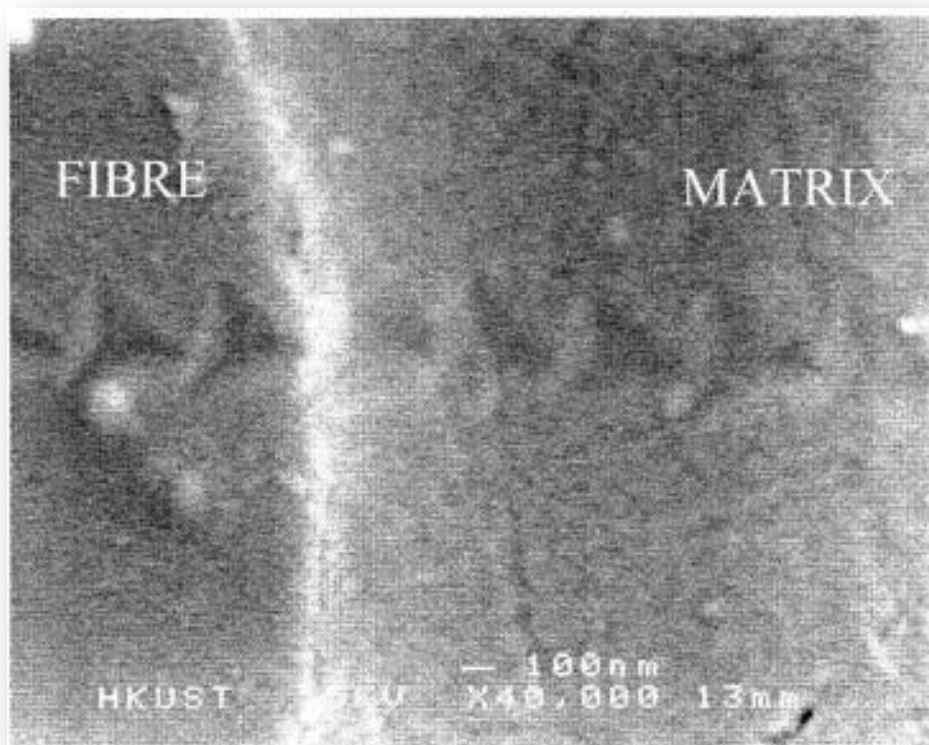
Έχοντας υπολογίσει τις ακτίνες του πενταφασικού κυλινδρικού μας μοντέλου θα είναι εύκολος και ο υπολογισμός των κατ' όγκο περιεκτικότητων των πέντε φάσεων. Για τις κατ' όγκο περιεκτικότητες και των πέντε φάσεων θα ισχύει κατά τα γνωστά:

- $U_{m,1} = U_1 = \frac{\pi h r_1^2}{\pi h r_5^2} = \frac{r_1^2}{r_5^2}$
- $U_{i,1} = U_2 = \frac{\pi h (r_2^2 - r_1^2)}{\pi h r_5^2} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_5^2}$
- $U_f = U_3 = \frac{\pi h (r_3^2 - r_2^2)}{\pi h r_5^2} = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_5^2}$
- $U_{i,2} = U_4 = \frac{\pi h (r_4^2 - r_3^2)}{\pi h r_5^2} = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_5^2}$
- $U_{m,2} = U_5 = \frac{\pi h (r_5^2 - r_4^2)}{\pi h r_5^2} = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_5^2}$

Παρακάτω παραθέτουμε τον **Πίνακα G** με συγκεντρωμένες τις τιμές των κατ' όγκο περιεκτικότητων των πέντε φάσεων για διάφορες τιμές της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα. Επίσης στους **Πίνακες G** και **F** έχουμε λάβει υπόψιν και τους γεωμετρικούς περιορισμούς που μελετήθηκαν στην υποενότητα 3.1.2.

<b>U<sub>1</sub></b>	0.14604	0.09565	0.04539	0.00121
<b>U<sub>2</sub></b>	0.00020	0.00059	0.00085	0.00003
<b>U<sub>3</sub></b>	0.09998	0.19996	0.29991	0.39000
<b>U<sub>4</sub></b>	0.00096	0.00431	0.00479	0.01864
<b>U<sub>5</sub></b>	0.75279	0.69946	0.64897	0.59010

Πίνακας G



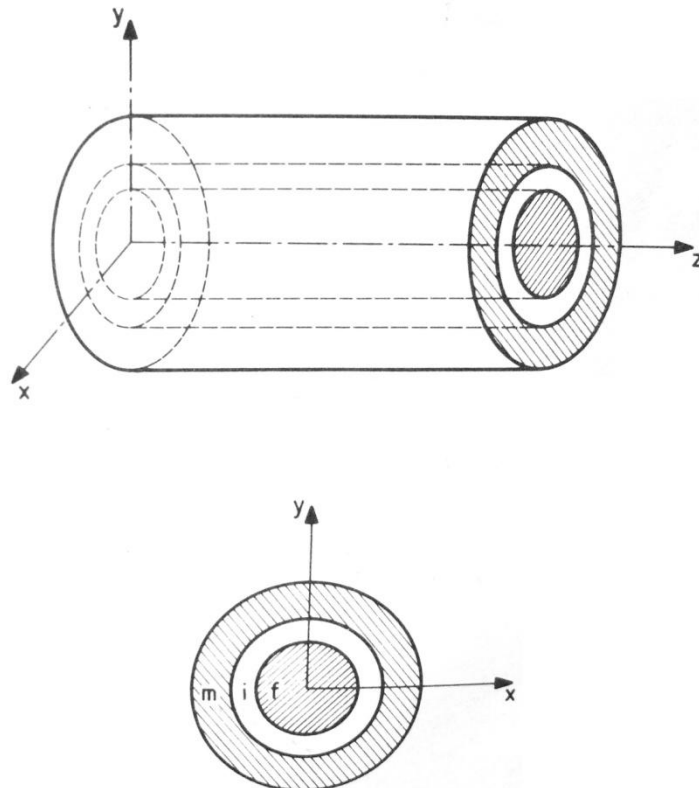
Εικόνα 38(Ενδιάμεση φάση σύνθετου υλικού)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΙ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

---

## 4.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΩΝ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα, κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού, λόγω της αλληλεπίδρασης του εγκλείσματος με την μήτρα, δημιουργείται η ενδιάμεση φάση η οποία και παίζει σημαντικό ρόλο στην γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου. Στην παρακάτω μελέτη θεωρούμε το τριφασικό κυλινδρικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση(Εικ. 39).



Εικόνα 39(Τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση)

Με  $i, m, f$  θα συμβολίζουμε την ενδιάμεση φάση, την μήτρα και το έγκλεισμα αντίστοιχα.

Γενικά θεωρούμε ότι οι μηχανικές ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης είναι μεταβλητές, μέσα στην περιοχή εμφάνισής της στο σύνθετο υλικό. Στο κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο η μεταβλητότητα των μηχανικών ιδιοτήτων της ενδιάμεσης φάσης εξαρτάται κυρίως από την ακτίνα της. Έτσι λοιπόν και οι ελαστικές σταθερές και οι λόγοι Poisson της ενδιάμεσης φάσης σε ένα σύνθετο υλικό μπορούν να εκφραστούν με ένα πολυώνυμο  $n$ -βαθμού με μεταβλητή την ακτίνα  $r$ . Άρα θα έχουμε ότι:

$$E_i(r) = Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} + \dots$$

Και

$$\nu_i(r) = A'r^n + B'r^{n-1} + C'r^{n-2} + \dots$$

Όπου  $r_f \leq r \leq r_i$

Στην παρούσα μελέτη θα διερευνήσουμε την παραβολική μεταβολή των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson της ενδιάμεσης φάσης καθώς αυτή η μεταβολή έχει παρατηρηθεί ότι είναι η καταλληλότερη για την βελτιστοποίηση του δικού μας πενταφασικού κυλινδρικού μοντέλου με ενδιάμεσο φάση.

Θεωρούμε ότι  $M_m \leq M_i(r) \leq M_f$  όταν  $r_f \leq r \leq r_i$  και όταν το  $M$  συμβολίζει το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας  $E_L$ , το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας  $E_T$  και το διάμηκες μέτρο διατμήσεως  $G_{LT}$  ενώ θεωρούμε ότι  $M_f \leq M_i(r) \leq M_m$  όταν  $r_f \leq r \leq r_i$  και όταν το  $M$  συμβολίζει τον διαμήκη λόγο Poisson  $\nu_{LT}$  και τον εγκάρσιο λόγο Poisson  $\nu_{TT}$ . Να σημειώσουμε εδώ ότι η μελέτη της συνάρτησης  $M_i(r)$  είναι πλήρως αντιπροσωπευτική της μελέτης της παραβολικής συνάρτησης των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson που θέλουμε να προσδιορίσουμε στην περιοχή της ενδιάμεσης φάσης. Οι οριακές συνθήκες οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν θα είναι:

$$\text{Για } r = r_f : M_i(r) = nM_f \quad (4.1.1)$$

$$\text{Για } r = r_i : M_i(r) = M_m \quad (4.1.2)$$

Δεχόμαστε δηλαδή ότι στο όριο με την μήτρα η ενδιάμεση φάση συμπεριφέρεται μηχανικά ακριβώς το ίδιο με την μήτρα. Αυτό σημαίνει ότι η επίδραση της μήτρας στην ενδιάμεση φάση είναι η μέγιστη, που είναι και λογικό αν αναλογιστεί κανείς ότι η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα. Από την άλλη μεριά, στο όριο με το έγκλεισμα, υπάρχει και εκεί αλληλεπίδραση ανάμεσα στην ενδιάμεση φάση και το έγκλεισμα. Το μέγεθος αυτής της αλληλεπίδρασης καθορίζεται από τον συντελεστή  $n$ . Όσο μεγαλύτερη η αλληλεπίδραση τόσο μεγαλύτερος και ο συντελεστής. Για την μέγιστη αλληλεπίδραση ανάμεσα στο έγκλεισμα και την ενδιάμεση φάση θα πρέπει ο συντελεστής να παίρνει την τιμή 1 και άρα  $M_i(r) = M_f$  για  $r = r_f$ . Στο πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο στο επόμενο κεφάλαιο θα θεωρήσουμε σε πολλές περιπτώσεις την μέγιστη αλληλεπίδραση και στις δύο οριακές θέσεις δηλαδή ότι  $n=1$ . Τέλος ανάμεσα στα όρια αυτά δηλαδή ανάμεσα στο έγκλεισμα και στη μήτρα, η  $M_i(r)$  μεταβάλλεται σύμφωνα με την παραβολική μεταβολή. **Να σημειώσουμε ότι** οι μετρήσεις και οι υπολογισμοί για την παρακάτω υποενότητα έγιναν με βάση τις τιμές της μελέτης για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση [27],[28],[29] και παρουσιάζονται στον **Πίνακα Η**.

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E(GPa)	Λόγος Poisson $\nu$	Μέτρο διατμήσεως G(GPa)
Εποξ. Ρητίνη	3.5	0.35	1.29
Υαλος	72	0.20	30

Πίνακας Η

#### 4.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Σύμφωνα με αυτή την μεταβολή η  $M_i(r)$  μεταβάλλεται ως εξής:

$$M_i(r) = Ar^2 + Br + C \quad \text{με } r_f \leq r \leq r_i$$

Για τον υπολογισμό των  $A, B, C$  εκτός από τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες (4.1.1), (4.1.2) θα θεωρήσουμε ότι η  $M_i(r)$  για  $r=r_i$  θα

παρουσιάζει:

α) Ελάχιστο όταν θα συμβολίζει το διάμηκες και το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας καθώς και το διάμηκες μέτρο διατμήσεως.

β) Μέγιστο όταν θα συμβολίζει τον διαμήκη και εγκάρσιο λόγο Poisson.

Και άρα:

$$\text{Για } r = r_i : \text{ για α): } \frac{dM_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με } \frac{d^2M_i(r)}{dr^2} > 0$$

$$\text{για β): } \frac{dM_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με } \frac{d^2M_i(r)}{dr^2} < 0$$

Έτσι βρίσκουμε ότι:

$$A = \frac{nM_f - M_m}{(r_i - r_f)^2}$$

$$B = -\frac{(nM_f - M_m)2r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

$$C = M_m + \frac{nM_f - M_m}{(r_i - r_f)^2} r_i^2$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της συνάρτησης  $M_i(r)$  στην ενδιάμεση φάση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \overline{M}_i &= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} M_i(r) dV_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ar^2 + Br + C) 2\pi h r dr \\ &= \frac{1}{\pi h (r_i^2 - r_f^2)} 2\pi h \left[ \frac{A}{4} (r_i^4 - r_f^4) + \frac{B}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{C}{2} (r_i^2 - r_f^2) \right] \end{aligned}$$

Και άρα:

$$\overline{M}_i = \frac{2}{(r_i^2 - r_f^2)} \left[ \frac{A}{4} (r_i^4 - r_f^4) + \frac{B}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{C}{2} (r_i^2 - r_f^2) \right] \quad (4.1.3)$$



Παρακάτω παρουσιάζουμε σε μορφή πινάκων τους μέσους όρους των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την πρώτη ενδιάμεση φάση και την δεύτερη ενδιάμεση φάση στο πενταφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση στην **παραβολική μεταβολή** για διάφορα n.

ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E$ 1 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ (GPa)						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$U_f$						
<b>0.10</b>		7.13	11.93	16.73	21.53	26.32
<b>0.20</b>		7.13	11.92	16.72	21.51	26.31
<b>0.30</b>		7.12	11.91	16.70	21.49	2.,28
<b>0.39</b>		7.11	11.90	16.68	21.46	26.24

Πίνακας Ι

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ $G$ 1 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ (GPa)						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$U_f$						
<b>0.10</b>		2.8597	4.8594	6.8590	8.8587	10.8584
<b>0.20</b>		2.8588	4.8572	6.8557	8.8541	10.8526
<b>0.30</b>		2.8563	4.8517	6.8470	8.8424	10.8377
<b>0.39</b>		2.8539	4.8461	6.8383	8.8305	10.8227

Πίνακας J

ΛΟΓΟΣ POISSON $\nu$ 1 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$U_f$						
<b>0.10</b>		0.2467	0.2600	0.2733	0.2867	0.3000
<b>0.20</b>		0.2467	0.2601	0.2734	0.2867	0.3000
<b>0.30</b>		0.2469	0.2602	0.2735	0.2868	0.3001
<b>0.39</b>		0.2471	0.2604	0.2736	0.2869	0.3002

Πίνακας K

ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ Ε 2 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ (GPa)						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
U <sub>f</sub>						
0.10		7.1316	11.9292	16.7268	21.5245	26.3221
0.20		7.1268	11.9181	16.7094	21.5007	26.2921
0.30		7.1271	11.9188	16.7106	21.5023	26.2941
0.39		7.1122	11.8843	16.6563	21.4284	26.2005

Πίνακας L

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G 2 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ (GPa)						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
U <sub>f</sub>						
0.10		2.8592	4.8582	6.8573	8.8563	10.8553
0.20		2.8572	4.8535	6.8499	8.8463	10.8427
0.30		2.8573	4.8539	6.8504	8.8470	10.8435
0.39		2.8509	4.8392	6.8276	8.8160	10.8043

Πίνακας Μ

ΛΟΓΟΣ POISSON ν 2 <sup>ης</sup> ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
U <sub>f</sub>						
0.10		0.2467	0.2600	0.2734	0.2867	0.3000
0.20		0.2469	0.2602	0.2735	0.2868	0.3001
0.30		0.2468	0.2602	0.2735	0.2868	0.3001
0.39		0.2473	0.2605	0.2738	0.2870	0.3003

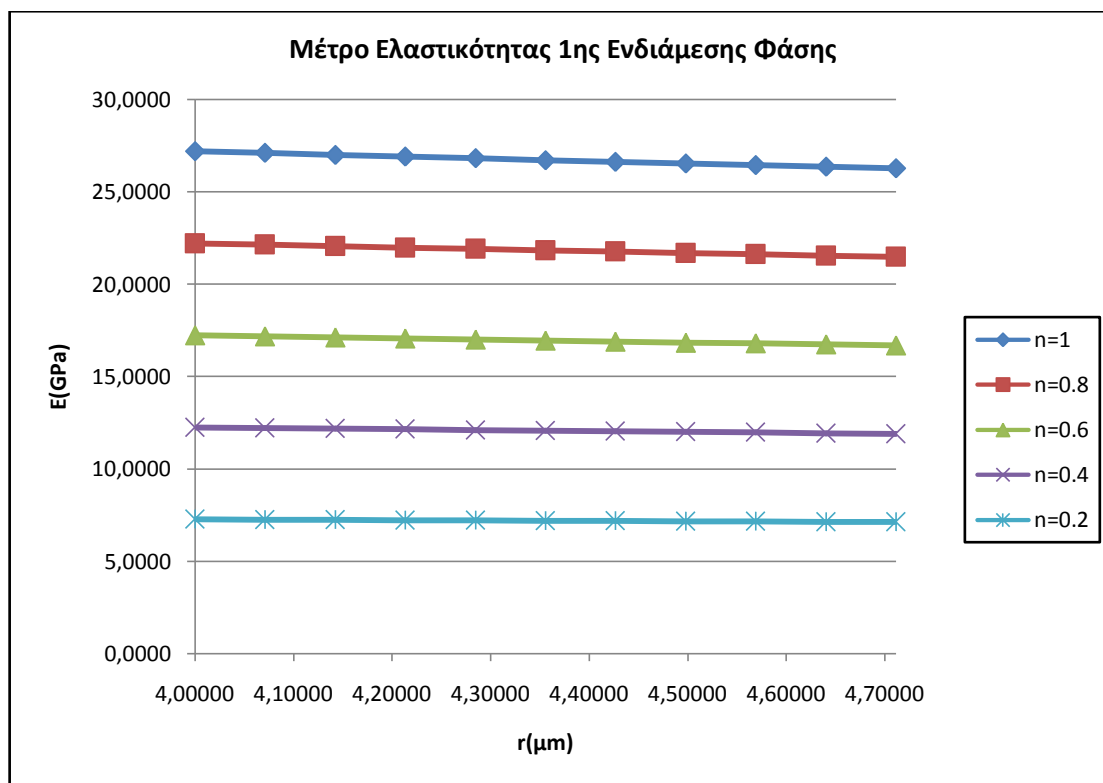
Πίνακας Ν

## 4.2 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στους παρακάτω πίνακες και διαγράμματα παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για μια συγκεκριμένη κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, για την παραβολική μεταβολή. Η κατ' όγκο περιεκτικότητα που επιλέχθηκε είναι η  $U_f = 0.39$ .

Στη παρουσίαση που ακολουθεί έχουμε ενεργήσει ως εξής: Για την παραπάνω κατ' όγκο περιεκτικότητα γνωρίζουμε την ακτίνα  $r$  της ενδιάμεσης φάσης που αντιστοιχεί σε αυτήν, στο τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση [27],[28],[29]. Αυτήν την ακτίνα την χωρίζουμε σε 11 ίσα διαστήματα. Σε αυτά τα διαστήματα, δηλαδή στη περιοχή της ενδιάμεση φάσης για κατ' όγκο περιεκτικότητα 0.39, υπολογίζουμε τις ελαστικές σταθερές μας και τους λόγους Poisson για διάφορα  $n$  που όπως είπαμε και προηγούμενα δηλώνουν την επίδραση του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. Τέλος να πούμε ότι για κάθε πίνακα παρακάτω ακολουθεί και ένα διάγραμμα για την καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων.

**4.2.1.A. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ  
1ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

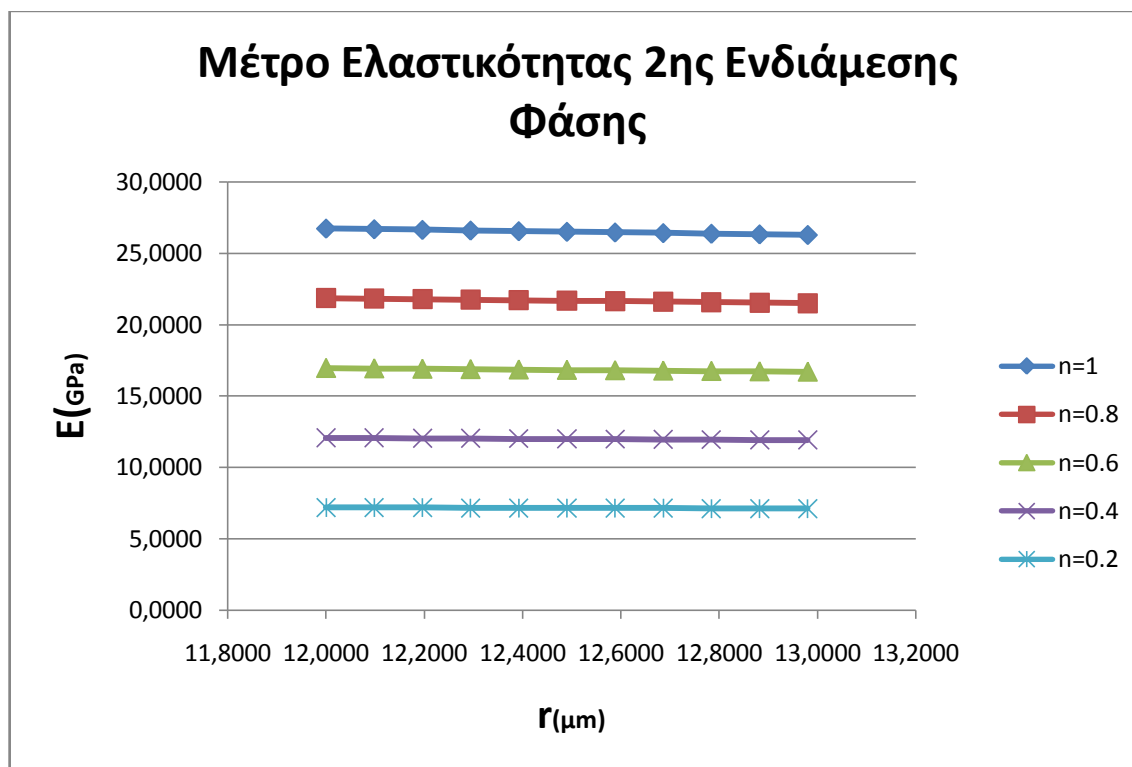


Διάγραμμα I

Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης E(Gpa)					
r(μm)	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
4.00000	27.2130	22.2281	17.2432	12.2582	7.2733
4.07116	27.1129	22.1490	17.1851	12.2213	7.2574
4.14232	27.0144	22.0712	17.1281	12.1849	7.2417
4.21348	26.9175	21.9947	17.0719	12.1491	7.2263
4.28464	26.8221	21.9193	17.0166	12.1138	7.2111
4.35580	26.7282	21.8452	16.9622	12.0792	7.1962
4.42696	26.6358	21.7722	16.9086	12.0450	7.1815
4.49812	26.5448	21.7003	16.8559	12.0114	7.1670
4.56928	26.4552	21.6296	16.8040	11.9784	7.1527
4.64044	26.3670	21.5599	16.7529	11.9458	7.1387
4.71160	26.2801	21.4913	16.7025	11.9137	7.1249

Πίνακας Ο

**4.2.1.B. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ  
2ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

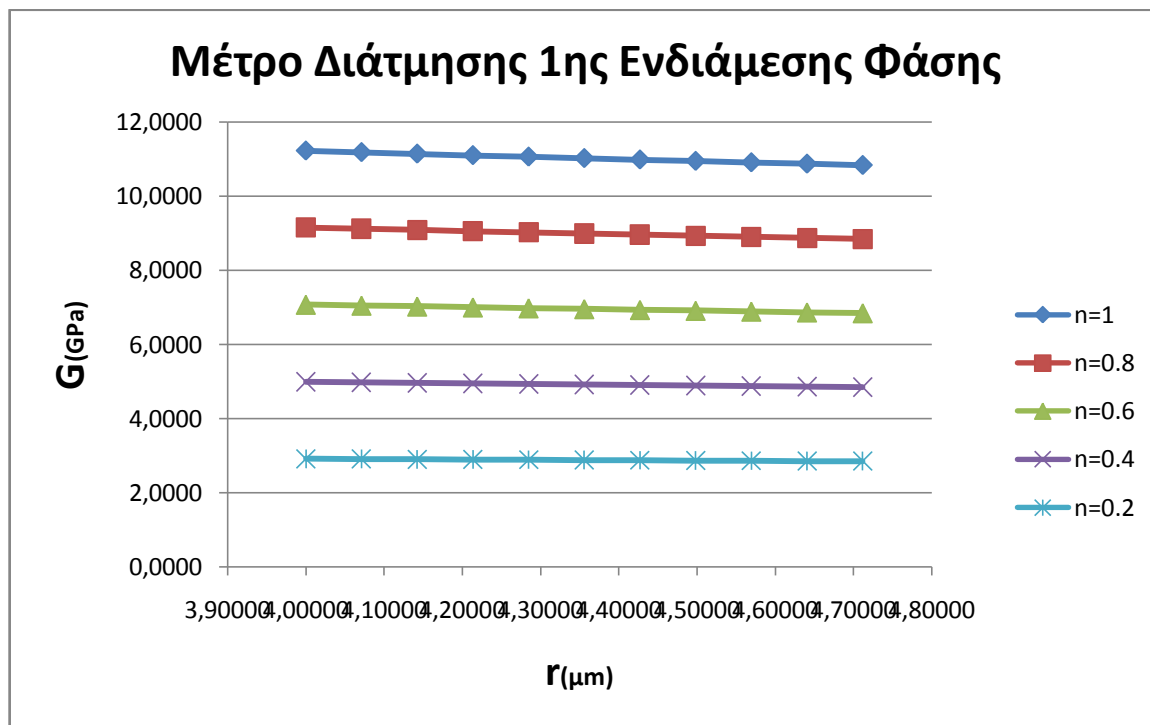


Διάγραμμα Π

Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης E(Gra)					
r( $\mu\text{m}$ )	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
12.0000	26.7420	21.8561	16.9702	12.0843	7.1984
12.0980	26.6956	21.8195	16.9433	12.0671	7.1910
12.1960	26.6496	21.7831	16.9166	12.0502	7.1837
12.2940	26.6040	21.7471	16.8902	12.0333	7.1764
12.3920	26.5587	21.7113	16.8639	12.0166	7.1692
12.4900	26.5137	21.6758	16.8379	12.0000	7.1620
12.5880	26.4691	21.6406	16.8120	11.9835	7.1549
12.6860	26.4248	21.6056	16.7864	11.9671	7.1479
12.7840	26.3809	21.5709	16.7609	11.9509	7.1409
12.8820	26.3373	21.5365	16.7356	11.9348	7.1340
12.9800	26.2941	21.5023	16.7106	11.9188	7.1271

Πίνακας Ρ

**4.2.2.Α ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ  
1ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

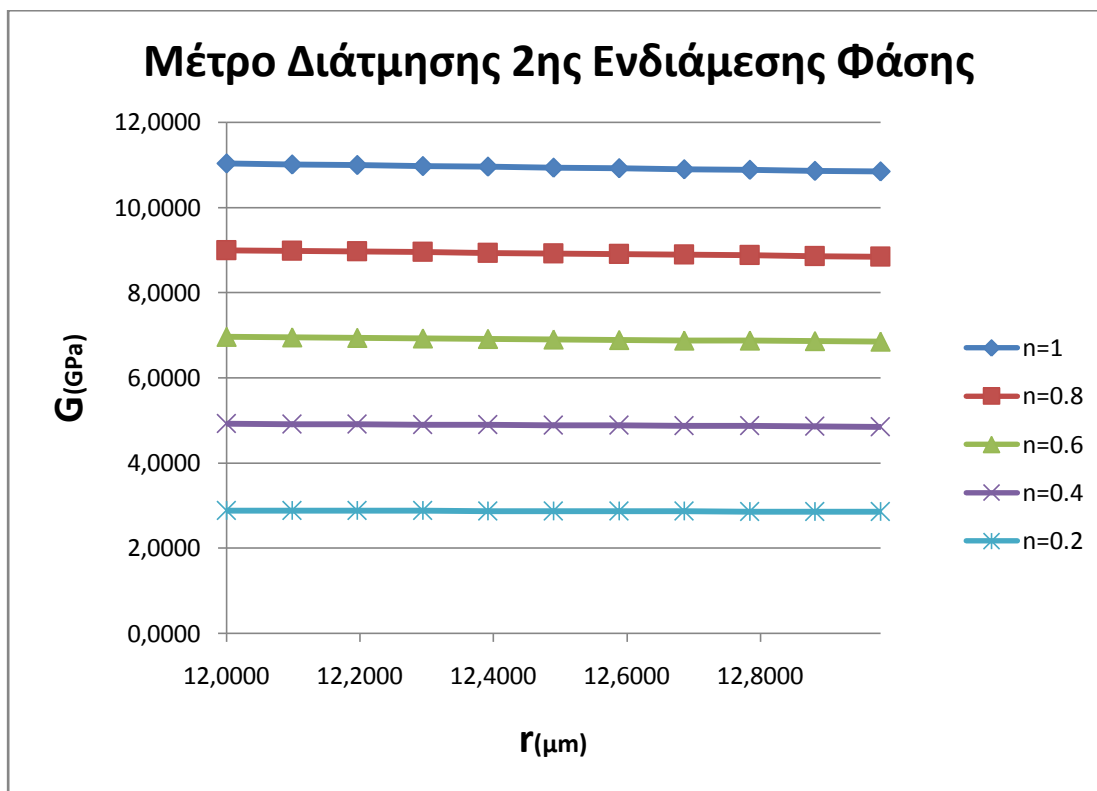


Διάγραμμα III

Μέτρο Διάτμησης 1ης Ενδιάμεσης Φάσης G(Gra)					
r( $\mu\text{m}$ )	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
4.00000	11.2287	9.1517	7.0746	4.9975	2.9205
4.07116	11.1867	9.1185	7.0502	4.9819	2.9136
4.14232	11.1455	9.0858	7.0261	4.9665	2.9068
4.21348	11.1048	9.0537	7.0025	4.9513	2.9002
4.28464	11.0648	9.0220	6.9792	4.9364	2.8936
4.35580	11.0255	8.9909	6.9563	4.9217	2.8872
4.42696	10.9868	8.9603	6.9338	4.9073	2.8808
4.49812	10.9486	8.9301	6.9116	4.8931	2.8745
4.56928	10.9111	8.9004	6.8897	4.8791	2.8684
4.64044	10.8741	8.8712	6.8682	4.8653	2.8623
4.71160	10.8377	8.8424	6.8470	4.8517	2.8563

Πίνακας Q

**4.2.2.B. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ  
2ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

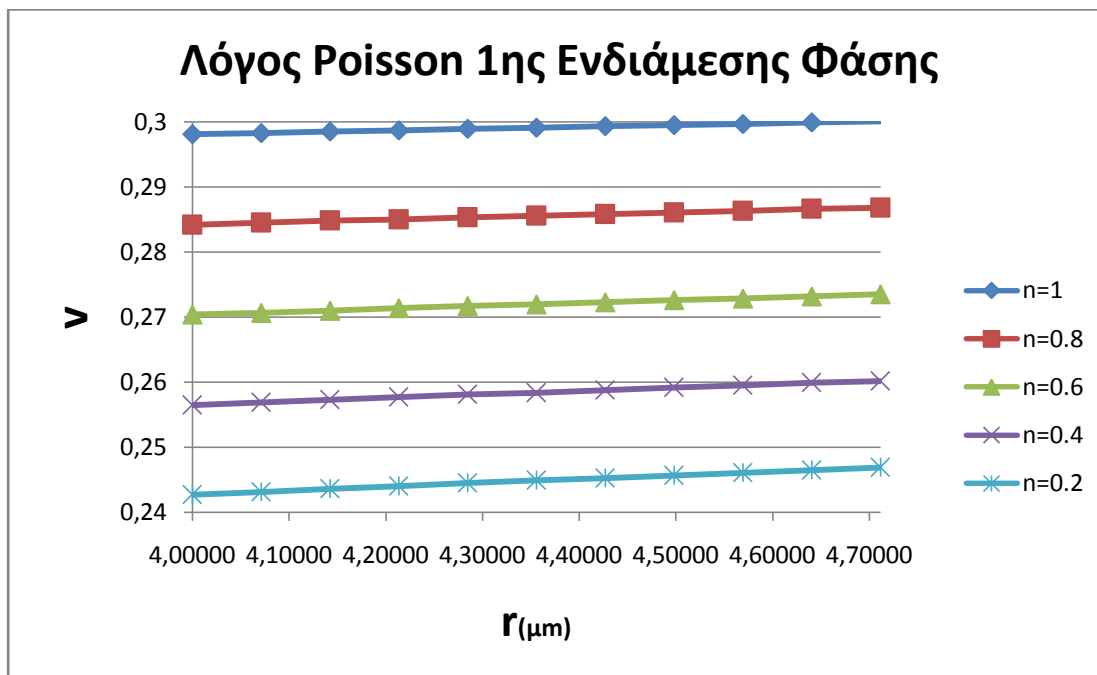


Διάγραμμα IV

Μέτρο Διάτμησης 2ης Ενδιάμεσης Φάσης G(Gra)					
$r(\mu\text{m})$	$n=1$	$n=0.8$	$n=0.6$	$n=0.4$	$n=0.2$
12.0000	11.0313	8.9955	6.9597	4.9239	2.8881
12.0980	11.0118	8.9801	6.9484	4.9166	2.8849
12.1960	10.9926	8.9649	6.9372	4.9095	2.8817
12.2940	10.9734	8.9497	6.9260	4.9023	2.8786
12.3920	10.9544	8.9347	6.9150	4.8952	2.8755
12.4900	10.9356	8.9198	6.9040	4.8882	2.8724
12.5880	10.9169	8.9050	6.8931	4.8812	2.8693
12.6860	10.8984	8.8903	6.8823	4.8743	2.8663
12.7840	10.8799	8.8758	6.8716	4.8674	2.8633
12.8820	10.8617	8.8613	6.8610	4.8606	2.8603
12.9800	10.8435	8.8470	6.8504	4.8539	2.8573

Πίνακας R

**4.2.3.Α. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΛΟΓΟΥ POISSON  
1ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**



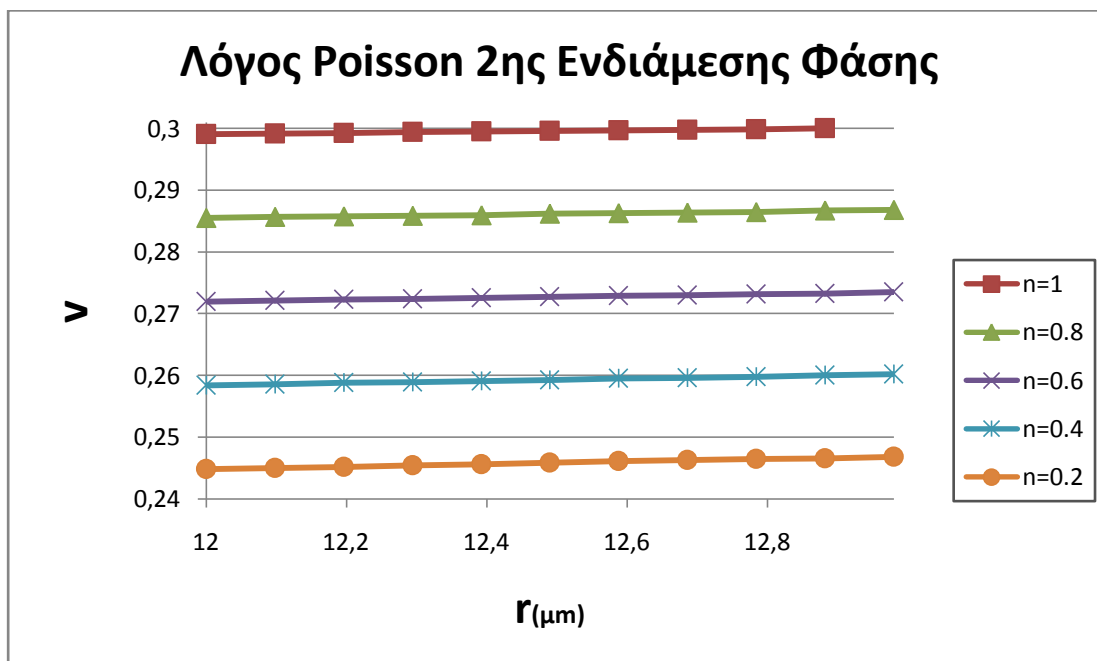
Διάγραμμα V

Λόγος Poisson ( $\nu$ ) 1ης Ενδιάμεσης Φάσης					
$r(\mu\text{m})$	$n=1$	$n=0.8$	$n=0.6$	$n=0.4$	$n=0.2$
4.00000	0.2981	0.2842	0.2704	0.2565	0.2427
4.07116	0.2983	0.2845	0.2707	0.2569	0.2431
4.14232	0.2985	0.2848	0.271	0.2573	0.2436
4.21348	0.2987	0.285	0.2714	0.2577	0.244
4.28464	0.2989	0.2853	0.2717	0.2581	0.2445
4.35580	0.2991	0.2856	0.272	0.2584	0.2449
4.42696	0.2993	0.2858	0.2723	0.2588	0.2453
4.49812	0.2995	0.2861	0.2726	0.2592	0.2457
4.56928	0.2997	0.2863	0.2729	0.2595	0.2461
4.64044	0.2999	0.2866	0.2732	0.2599	0.2465
4.71160	0.3001	0.2868	0.2735	0.2602	0.2469

Πίνακας S



**4.2.3.B. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΛΟΓΟΥ POISSON  
2ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

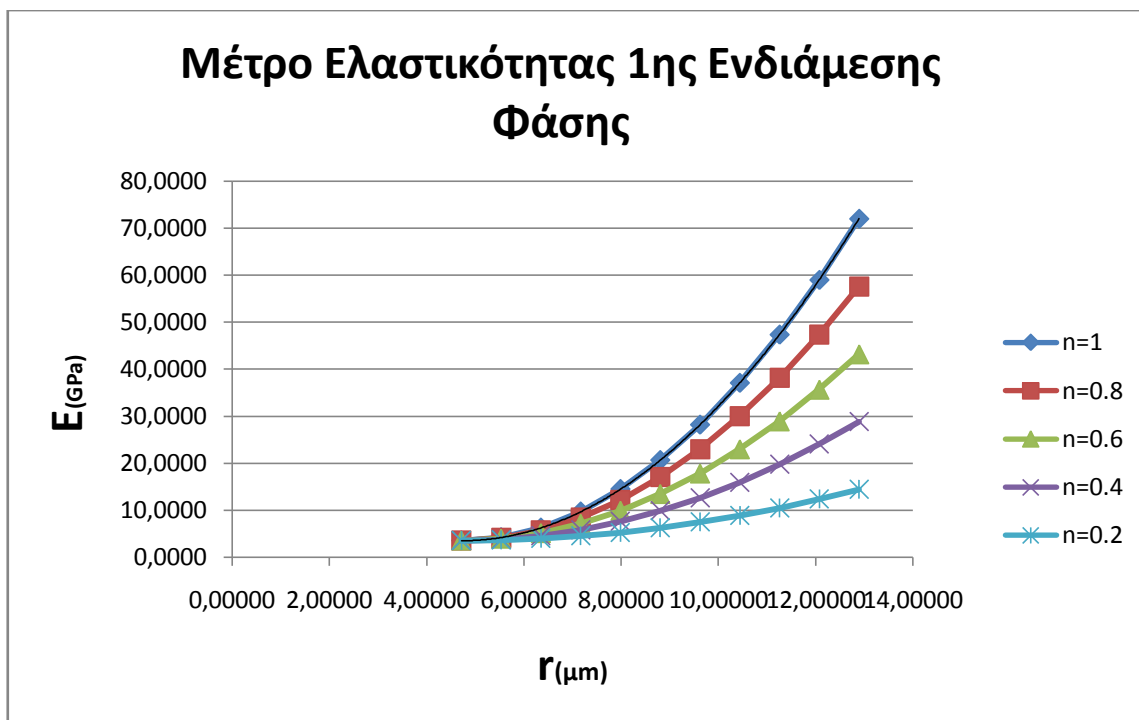


Διάγραμμα VI

Λόγος Poisson ( $\nu$ ) 2ης Ενδιάμεσης Φάσης					
$r(\mu\text{m})$	$n=1$	$n=0.8$	$n=0.6$	$n=0.4$	$n=0.2$
12.0000	0.2991	0.2855	0.272	0.2584	0.2448
12.0980	0.2992	0.2857	0.2721	0.2586	0.245
12.1960	0.2993	0.2858	0.2723	0.2588	0.2452
12.2940	0.2994	0.2859	0.2724	0.2589	0.2454
12.3920	0.2995	0.286	0.2726	0.2591	0.2456
12.4900	0.2996	0.2862	0.2727	0.2593	0.2459
12.5880	0.2997	0.2863	0.2729	0.2595	0.2461
12.6860	0.2998	0.2864	0.273	0.2596	0.2463
12.7840	0.2999	0.2865	0.2732	0.2598	0.2465
12.8820	0.3	0.2867	0.2733	0.26	0.2466
12.9800	0.3001	0.2868	0.2735	0.2602	0.2468

Πίνακας T

**4.2.4.A. ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ 1ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ  
ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**



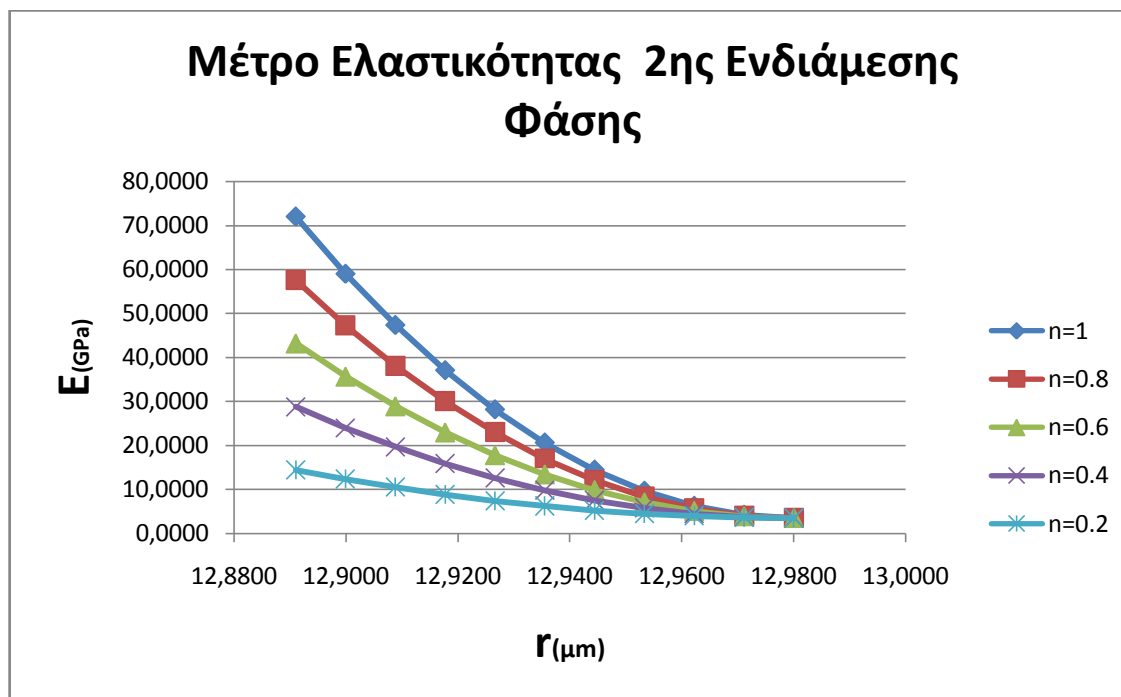
Διάγραμμα VII

Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)					
r(μm)	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
4.71160	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000
5.52954	4.1850	4.0410	3.8970	3.7530	3.6090
6.34748	6.2400	5.6640	5.0880	4.5120	3.9360
7.16542	9.6650	8.3690	7.0730	5.7770	4.4810
7.98336	14.4600	12.1560	9.8520	7.5480	5.2440
8.80130	20.6250	17.0250	13.4250	9.8250	6.2250
9.61924	28.1600	22.9760	17.7920	12.6080	7.4240
10.43718	37.0650	30.0090	22.9530	15.8970	8.8410
11.25512	47.3400	38.1240	28.9080	19.6920	10.4760
12.07306	58.9850	47.3210	35.6570	23.9930	12.3290
12.89100	72.0000	57.6000	43.2000	28.8000	14.4000

Πίνακας U

**4.2.4.B. ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ 2ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ**

**ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

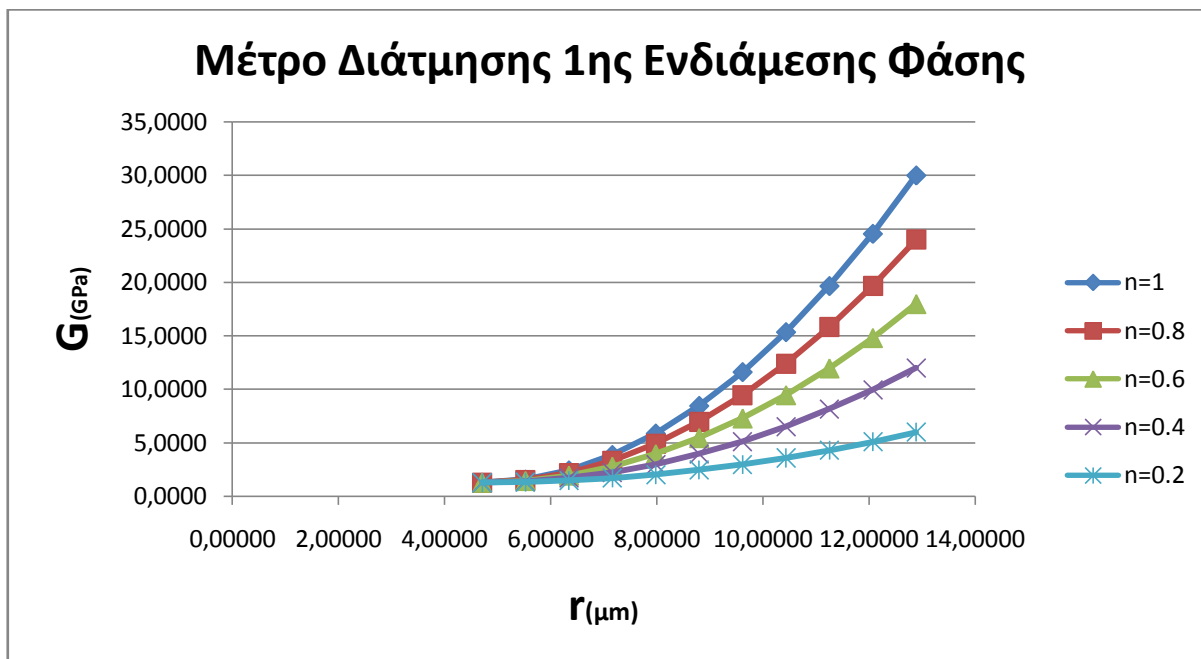


Διάγραμμα VIII

Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης E(Gpa)					
r( $\mu\text{m}$ )	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
12.8910	72.0000	57.6000	43.2000	28.8000	14.4000
12.8999	58.9850	47.3210	35.6570	23.9930	12.3290
12.9088	47.3400	38.1240	28.9080	19.6920	10.4760
12.9177	37.0650	30.0090	22.9530	15.8970	8.8410
12.9266	28.1600	22.9760	17.7920	12.6080	7.4240
12.9355	20.6250	17.0250	13.4250	9.8250	6.2250
12.9444	14.4600	12.1560	9.8520	7.5480	5.2440
12.9533	9.6650	8.3690	7.0730	5.7770	4.4810
12.9622	6.2400	5.6640	5.0880	4.5120	3.9360
12.9711	4.1850	4.0410	3.8970	3.7530	3.6090
12.9800	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000

Πίνακας V

**4.2.5.Α. ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ 1ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

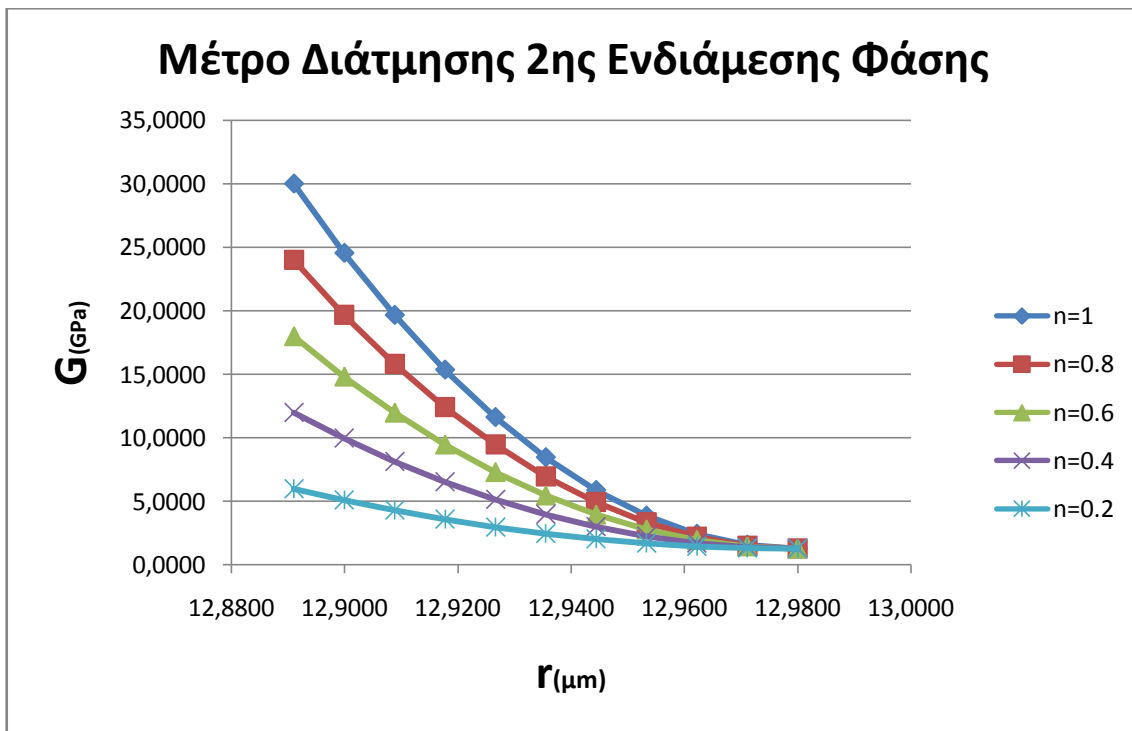


Διάγραμμα ΙΧ

Μέτρο Διάτμησης 1ης Ενδιάμεσης Φάσης G(Gra)					
r(μm)	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
4.71160	1.2900	1.2900	1.2900	1.2900	1.2900
5.52954	1.5771	1.5171	1.4571	1.3971	1.3371
6.34748	2.4384	2.1984	1.9584	1.7184	1.4784
7.16542	3.8739	3.3339	2.7939	2.2539	1.7139
7.98336	5.8836	4.9236	3.9636	3.0036	2.0436
8.80130	8.4675	6.9675	5.4675	3.9675	2.4675
9.61924	11.6256	9.4656	7.3056	5.1456	2.9856
10.43718	15.3579	12.4179	9.4779	6.5379	3.5979
11.25512	19.6644	15.8244	11.9844	8.1444	4.3044
12.07306	24.5451	19.6851	14.8251	9.9651	5.1051
12.89100	30.0000	24.0000	18.0000	12.0000	6.0000

Πίνακας W

**4.2.5.B. ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ 2ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

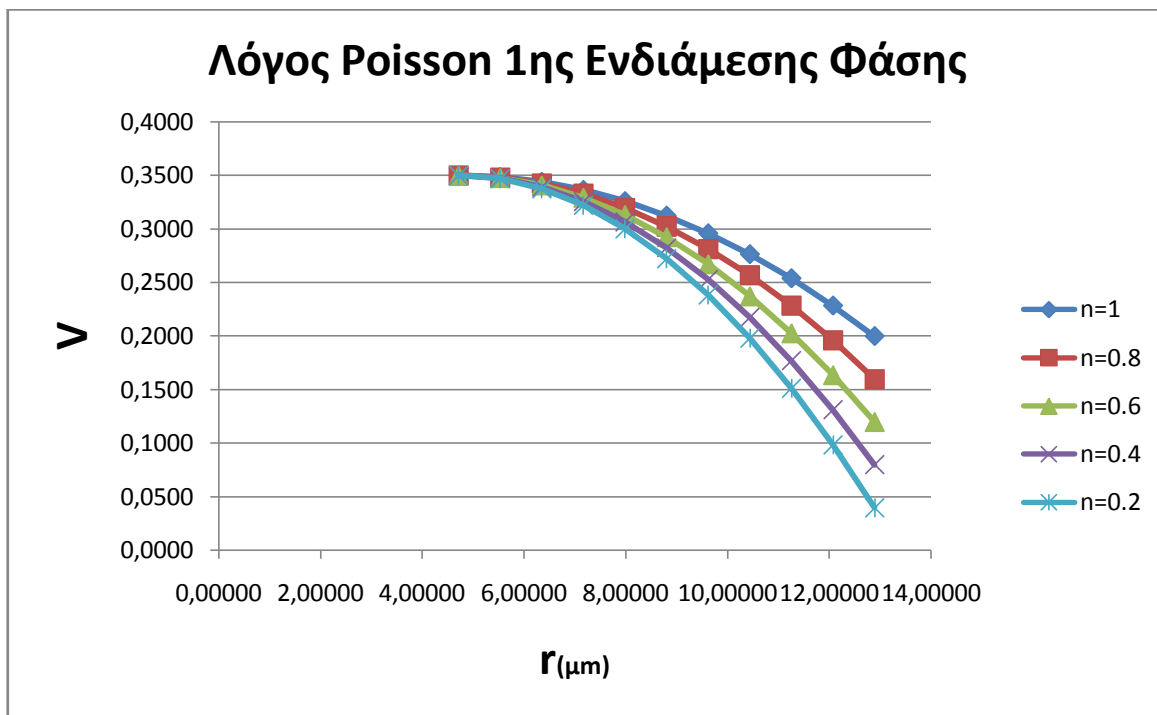


Διάγραμμα X

Μέτρο Διάτμησης 2ης Ενδιάμεσης Φάσης G(Gra)					
r(μm)	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
12.8910	30.0000	24.0000	18.0000	12.0000	6.0000
12.8999	24.5451	19.6851	14.8251	9.9651	5.1051
12.9088	19.6644	15.8244	11.9844	8.1444	4.3044
12.9177	15.3579	12.4179	9.4779	6.5379	3.5979
12.9266	11.6256	9.4656	7.3056	5.1456	2.9856
12.9355	8.4675	6.9675	5.4675	3.9675	2.4675
12.9444	5.8836	4.9236	3.9636	3.0036	2.0436
12.9533	3.8739	3.3339	2.7939	2.2539	1.7139
12.9622	2.4384	2.1984	1.9584	1.7184	1.4784
12.9711	1.5771	1.5171	1.4571	1.3971	1.3371
12.9800	1.2900	1.2900	1.2900	1.2900	1.2900

Πίνακας X

**4.2.6.A. ΛΟΓΟΣ POISSON 1ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ  
ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**

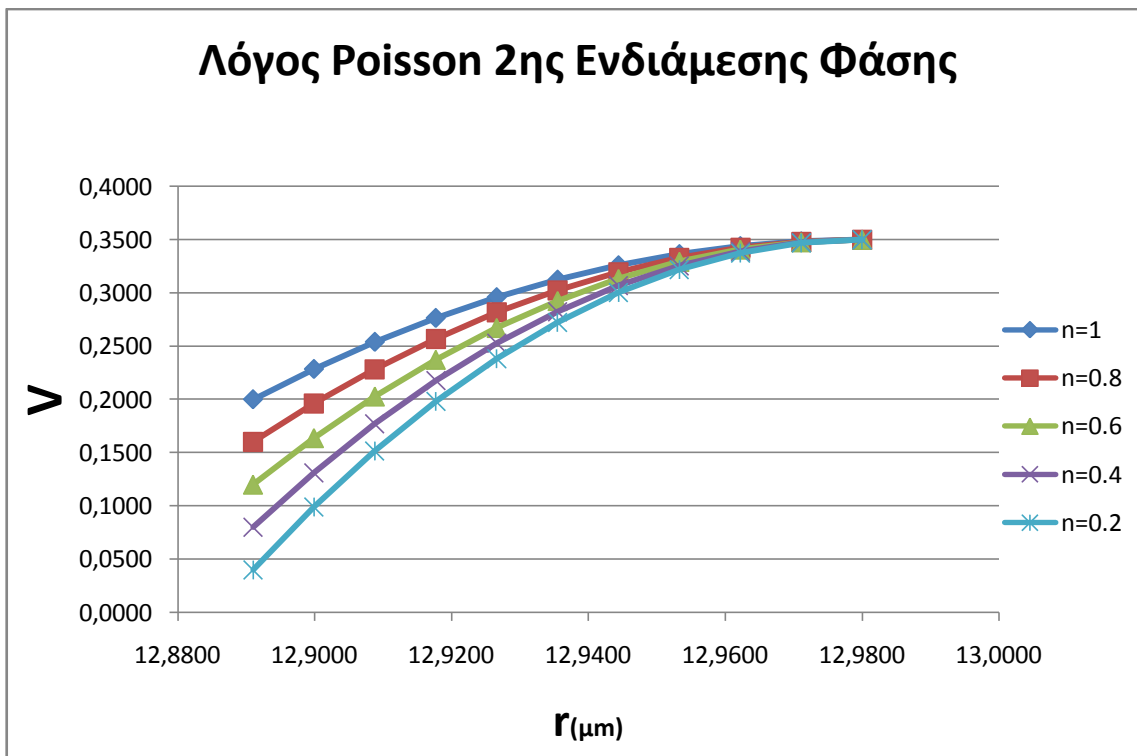


Διάγραμμα XI

Λόγος Poisson (ν) 1ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r(μm)	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
4.71160	0.3500	0.3500	0.3500	0.3500	0.3500
5.52954	0.3485	0.3481	0.3477	0.3473	0.3469
6.34748	0.3440	0.3424	0.3408	0.3392	0.3376
7.16542	0.3365	0.3329	0.3293	0.3257	0.3221
7.98336	0.3260	0.3196	0.3132	0.3068	0.3004
8.80130	0.3125	0.3025	0.2925	0.2825	0.2725
9.61924	0.2960	0.2816	0.2672	0.2528	0.2384
10.43718	0.2765	0.2569	0.2373	0.2177	0.1981
11.25512	0.2540	0.2284	0.2028	0.1772	0.1516
12.07306	0.2285	0.1961	0.1637	0.1313	0.0989
12.89100	0.2000	0.1600	0.1200	0.0800	0.0400

Πίνακας Y

**4.2.6.B. ΛΟΓΟΣ POISSON 2ης ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ  
ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**



Διάγραμμα XII

Λόγος Poisson (ν) 2ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r(μm)	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
12.8910	0.2000	0.1600	0.1200	0.0800	0.0400
12.8999	0.2285	0.1961	0.1637	0.1313	0.0989
12.9088	0.2540	0.2284	0.2028	0.1772	0.1516
12.9177	0.2765	0.2569	0.2373	0.2177	0.1981
12.9266	0.2960	0.2816	0.2672	0.2528	0.2384
12.9355	0.3125	0.3025	0.2925	0.2825	0.2725
12.9444	0.3260	0.3196	0.3132	0.3068	0.3004
12.9533	0.3365	0.3329	0.3293	0.3257	0.3221
12.9622	0.3440	0.3424	0.3408	0.3392	0.3376
12.9711	0.3485	0.3481	0.3477	0.3473	0.3469
12.9800	0.3500	0.3500	0.3500	0.3500	0.3500

Πίνακας Z

### 4.2.7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα γενικά συμπεράσματα είναι ότι για τα διαγράμματα των λόγων Poisson στην περιοχή της πρώτης ενδιάμεσης φάσης παρατηρούμε μια μείωση των τιμών του λόγου Poisson κατά την αύξηση του  $r$  της πρώτης ενδιάμεσης φάσης διότι φθάνουμε πιο κοντά στο έγκλεισμα που έχει μεγαλύτερο λόγο Poisson ενώ στην περιοχή της δεύτερης ενδιάμεσης φάσης παρατηρούμε μια αύξηση των τιμών του λόγου Poisson κατά την αύξηση του  $r$  και αυτό είναι λογικό αν σκεφτεί κανείς ότι κατά την αύξηση του  $r$ , φθάνουμε πιο κοντά στην μήτρα του πενταφασικού μοντέλου, που έχει μεγαλύτερο λόγο Poisson από το έγκλεισμα σύμφωνα με τα δεδομένα μας. Στο διάγραμμα του μέτρου ελαστικότητας  $E$  της πρώτης ενδιάμεσης φάσης όπως επίσης και στο διάγραμμα του μέτρου διατμήσεως  $G$  της πρώτης ενδιάμεσης φάσης παρατηρούμε μια αύξηση των τιμών τους κατά την αύξηση του  $r$  της πρώτης ενδιάμεσης φάσης το οποίο είναι λογικό γιατί καθώς τείνουμε προς το έγκλεισμα οι τιμές τους επηρεάζονται περισσότερο από αυτό και άρα αυξάνονται ενώ στα διαγράμματα του μέτρου ελαστικότητας  $E$  της δεύτερης ενδιάμεσης φάσης καθώς και του μέτρου διατμήσεως  $G$  παρατηρούμε μια μείωση των τιμών τους κατά την αύξηση του  $r$  της ενδιάμεσης φάσης το οποίο είναι λογικό γιατί καθώς τείνουμε προς την μήτρα, οι τιμές τους επηρεάζονται περισσότερο από αυτήν και άρα μειώνονται, αφού η μήτρα έχει χαμηλότερο μέτρο ελαστικότητας και διατμήσεως από το έγκλεισμα.

Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μειώνονται οι τιμές του  $n$  οι καμπύλες δίνουν μικρότερες τιμές για τις αρχικές τιμές του  $r$  και για την πρώτη και για την δεύτερη ενδιάμεση φάση ενώ παρατηρούμε στην δεύτερη ενδιάμεση φάση ότι όσο αυξάνεται το  $r$  τείνουν να συγκλίνουν σε μια μόνο τιμή. Αυτό συμβαίνει γιατί όσο βρισκόμαστε κοντά στο έγκλεισμα το  $n$  είναι ο συντελεστής που δείχνει πόσο επηρεάζεται η ενδιάμεση φάση από αυτό και άρα όσο μειώνεται το  $n$  τόσο μειώνεται και η επίδραση του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. Από την άλλη πλευρά, έχουμε αρχικά θεωρήσει ότι η μήτρα επηρεάζει την ενδιάμεση φάση στο 100% και άρα στο όριο της μήτρας με την ενδιάμεση φάση θα έχουμε μια συγκλίνουσα τιμή, την τιμή που προσδιορίζει την τιμή της εκάστοτε μηχανικής σταθεράς της μήτρας.

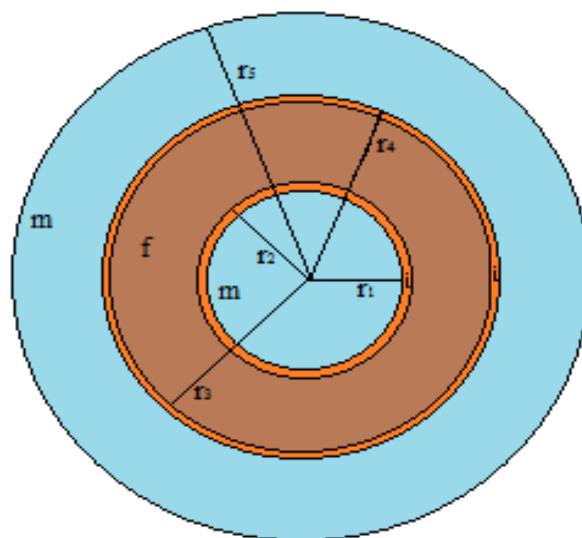


# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

## 5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Η θεωρητική ανάπτυξη του κυλινδρικού πενταφασικού μοντέλου που θα χρησιμοποιήσουμε για την παρακάτω μελέτη βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- Το έγκλεισμα αποτελείται από ίνες που έχουν τέλειο κυλινδρικό σχήμα
- Οι φάσεις του σύνθετου υλικού θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων



Εικόνα 40(Εγκάρσια τομή κυλινδρικού πενταφασικού μοντέλου)

Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι:

- $Q_{m,1} = Q_1$  το «1» συμβολίζει την 1<sup>η</sup> φάση(περιοχή με μήτρα)
- $Q_{i,1} = Q_2$  το «2» συμβολίζει την 2<sup>η</sup> φάση(περιοχή με αλλοιωμένη μήτρα\*)
- $Q_f = Q_3$  το «3» συμβολίζει την 3<sup>η</sup> φάση(περιοχή με έγκλεισμα)
- $Q_{i,2} = Q_4$  το «4» συμβολίζει την 4<sup>η</sup> φάση(περιοχή με αλλοιωμένη μήτρα\*)
- $Q_{m,2} = Q_5$  το «5» συμβολίζει την 5<sup>η</sup> φάση(περιοχή με μήτρα)

Και  $Q_2 = Q_4$  ,  $Q_1 = Q_5$

Όπου  $Q$  μπορεί να συμβολίζει είτε το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , είτε το λόγο Poisson  $\nu$ , είτε το μέτρο διατμήσεως  $G$ .

Στις ενότητες που θα ακολουθήσουν, θα εξάγουμε θεωρητικούς τύπους για τον υπολογισμό, του διαμήκους και του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, του διαμήκους και εγκάρσιου λόγου Poisson, του διαμήκους μέτρου διατμήσεως, του σύνθετου υλικού με βάση το κυλινδρικό πενταφασικό μοντέλο και με την βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας. Στο τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε τους θεωρητικούς τύπους για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διατμήσεως και τον λόγο Poisson ενός σύνθετου υλικού που δέχεται φόρτιση υπό γωνία σε συγκεκριμένη κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

\*Περιοχή ενδιάμεσης φάσης

## 5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$

Θεωρούμε το πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο όπως το περιγράψαμε στην **ενότητα 5.1**. Με την χρήση αυτού του μοντέλου θα εξάγουμε έναν θεωρητικό τύπο για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας στο σύνθετο υλικό.

Έστω τώρα ότι ασκούμε εξωτερικά μια σταθερή αξονική παραμόρφωση  $\varepsilon$ , η οποία βέβαια είναι η ίδια και για τις πέντε φάσεις του υλικού(Εικ.42). Η ανάλυση έχει ως εξής:

## ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θεωρούμε την τασική συνάρτηση  $\Phi$  που περιγράφει το πρόβλημά μας εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η γενική μορφή της τασικής συνάρτησης είναι:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (5.2.1)$$

Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση είναι τύπου Euler της οποίας η γενική λύση έχει τη μορφή:

$$\Phi = J_1 \ln r + J_2 r^2 \ln r + J_3 r^2 + J_4 \quad (5.2.2)$$

Όπου  $J_1, J_2, J_3$  και  $J_4$  είναι σταθερές.

Η κάθε μία από τις πέντε φάσεις έχει την δική της τασική συνάρτηση που την χαρακτηρίζει και άρα θα έχουμε:

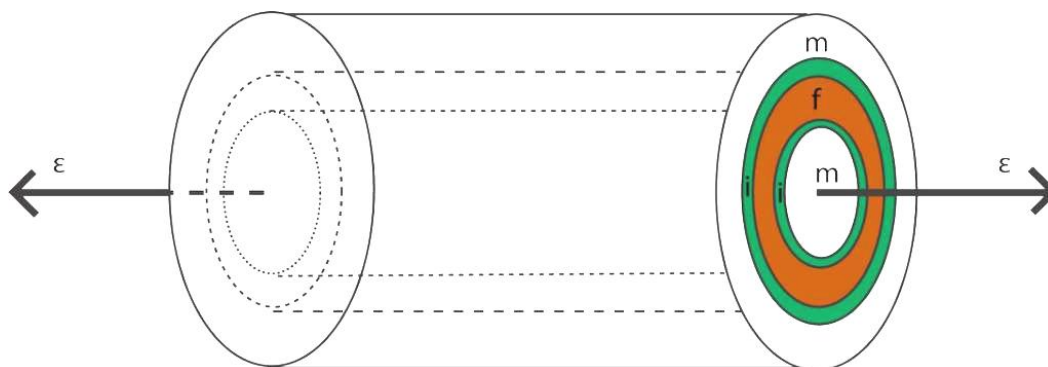
$$\Phi_1 = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 \quad (5.2.3)$$

$$\Phi_2 = B_1 \ln r + B_2 r^2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 \quad (5.2.4)$$

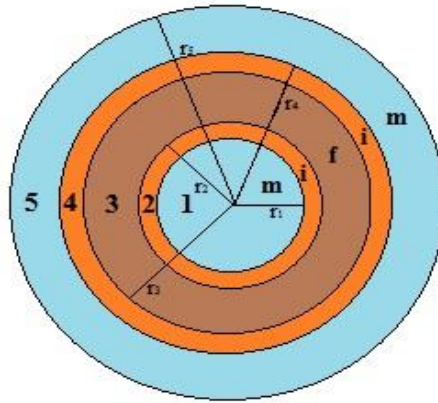
$$\Phi_3 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad (5.2.5)$$

$$\Phi_4 = D_1 \ln r + D_2 r^2 \ln r + D_3 r^2 + D_4 \quad (5.2.6)$$

$$\Phi_5 = F_1 \ln r + F_2 r^2 \ln r + F_3 r^2 + F_4 \quad (5.2.7)$$



Εικόνα 41



Εικόνα 412

**ΤΑΣΕΙΣ**

Αρχικά υπολογίζουμε τις τάσεις  $\sigma_r$  και  $\sigma_\theta$  με την βοήθεια των τασικών συναρτήσεων και από τις σχέσεις:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \text{ και } \sigma_\theta = \frac{d^2\phi}{dr^2}$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\sigma_{r,1} = \frac{A_1}{r^2} + A_2(2 \ln r + 1) + 2A_3 \quad (5.2.8)$$

$$\sigma_{\theta,1} = -\frac{A_1}{r^2} + A_2(3 + 2 \ln r) + 2A_3 \quad (5.2.9)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + B_2(2 \ln r + 1) + 2B_3 \quad (5.2.10)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + B_2(3 + 2 \ln r) + 2B_3 \quad (5.2.11)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + C_2(2 \ln r + 1) + 2C_3 \quad (5.2.12)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + C_2(3 + 2 \ln r) + 2C_3 \quad (5.2.13)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + D_2(2 \ln r + 1) + 2D_3 \quad (5.2.14)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + D_2(3 + 2 \ln r) + 2D_3 \quad (5.2.15)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + F_2(2 \ln r + 1) + 2F_3 \quad (5.2.16)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + F_2(3 + 2 \ln r) + 2F_3 \quad (5.2.17)$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στην θέση  $r = 0$  θα πρέπει οι σταθερές  $A_1$  και  $A_2$  να ισούνται με το μηδέν. Δηλαδή  $A_1=A_2=0$ . Επίσης μπορεί να δειχθεί εξισώνοντας τις εκφράσεις των μετατοπίσεων για την 2<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> φάση, για την 3<sup>η</sup> και 4<sup>η</sup> φάση και για την 4<sup>η</sup> και 5<sup>η</sup> φάση, ότι  $B_2=C_2=D_2=F_2=0$ . Οι σχέσεις (5.2.8)- (5.2.17) μετασχηματίζονται σε:

$$\sigma_{r,1} = 2A_3 \quad (5.2.18)$$

$$\sigma_{\theta,1} = 2A_3 \quad (5.2.19)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.2.20)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.2.21)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.2.22)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.2.23)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.2.24)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.2.25)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.2.26)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.2.27)$$

Οι αξονικές τάσεις  $\sigma_{z,1}, \sigma_{z,2}, \sigma_{z,3}, \sigma_{z,4}, \sigma_{z,5}$  θα υπολογισθούν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων και την συνθήκη  $\varepsilon_{z,1} = \varepsilon_{z,2} = \varepsilon_{z,3} = \varepsilon_{z,4} = \varepsilon_{z,5} = \varepsilon$

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{\sigma_{z,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})}{E_1} = \varepsilon \quad (5.2.28)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{\sigma_{z,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})}{E_2} = \varepsilon \quad (5.2.29)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{\sigma_{z,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})}{E_3} = \varepsilon \quad (5.2.30)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{\sigma_{z,4} - \nu_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})}{E_4} = \varepsilon \quad (5.2.31)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{\sigma_{z,5} - \nu_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})}{E_5} = \varepsilon \quad (5.2.32)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (5.2.28)-(5.2.32) και κάνοντας χρήση των εξισώσεων (5.2.18)-(5.2.27) καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τις αξονικές τάσεις:

$$\sigma_{z,1} = \varepsilon E_1 + 4\nu_1 A_3 \quad (5.2.33)$$

$$\sigma_{z,2} = \varepsilon E_2 + 4\nu_2 B_3 \quad (5.2.34)$$

$$\sigma_{z,3} = \varepsilon E_3 + 4\nu_3 C_3 \quad (5.2.35)$$

$$\sigma_{z,4} = \varepsilon E_4 + 4\nu_4 D_3 \quad (5.2.36)$$

$$\sigma_{z,5} = \varepsilon E_5 + 4\nu_5 F_3 \quad (5.2.37)$$

### **ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΕΙΣ**

Οι ακτινικές μετατοπίσεις δίνονται από τις εξισώσεις:

$$u_{r,1} = \frac{r}{E_1} [2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - \nu_1 E_1 \varepsilon] \quad (5.2.38)$$

$$u_{r,2} = \frac{r}{E_2} \left[ -(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - \nu_2 E_2 \varepsilon \right] \quad (5.2.39)$$

$$u_{r,3} = \frac{r}{E_3} \left[ -(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - \nu_3 E_3 \varepsilon \right] \quad (5.2.40)$$

$$u_{r,4} = \frac{r}{E_4} \left[ -(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) - \nu_4 E_4 \varepsilon \right] \quad (5.2.41)$$

$$u_{r,5} = \frac{r}{E_5} \left[ -(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) - \nu_5 E_5 \varepsilon \right] \quad (5.2.42)$$

**ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ**

Οι εκφράσεις για τις παραμορφώσεις  $\varepsilon_r$  και  $\varepsilon_\theta$  των τριών φάσεων προκύπτουν από τις σχέσεις (5.2.38)-(5.2.42) και τις παρακάτω σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \text{και} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{r,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1^2)-v_1E_1\varepsilon}{E_1} \quad (5.2.43)$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1^2)-v_1E_1\varepsilon}{E_1} \quad (5.2.44)$$

$$\varepsilon_{z,1} = \varepsilon \quad (5.2.45)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{\left[ (1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2^2) - v_2E_2\varepsilon \right]}{E_2} \quad (5.2.46)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[ -(1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2^2) - v_2E_2\varepsilon \right]}{E_2} \quad (5.2.47)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \varepsilon \quad (5.2.48)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{\left[ (1+v_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2v_3^2) - v_3E_3\varepsilon \right]}{E_3} \quad (5.2.49)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[ -(1+v_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2v_3^2) - v_3E_3\varepsilon \right]}{E_3} \quad (5.2.50)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \varepsilon \quad (5.2.51)$$

$$\varepsilon_{r,4} = \frac{\left[ (1+\nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2) - \nu_4 E_4 \varepsilon \right]}{E_4} \quad (5.2.52)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[ -(1+\nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2) - \nu_4 E_4 \varepsilon \right]}{E_4} \quad (5.2.53)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \varepsilon \quad (5.2.54)$$

$$\varepsilon_{r,5} = \frac{\left[ (1+\nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2) - \nu_5 E_5 \varepsilon \right]}{E_5} \quad (5.2.55)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[ -(1+\nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2) - \nu_5 E_5 \varepsilon \right]}{E_5} \quad (5.2.56)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \varepsilon \quad (5.2.57)$$

### **ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ**

$$\text{Για } r = r_1 : \sigma_{r,1} = \sigma_{r,2} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha A_3 = \frac{B_1}{2r_1^2} + B_3 \quad (5.2.58)$$

$$\text{Για } r = r_2 : \sigma_{r,2} = \sigma_{r,3} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \frac{B_1}{r_2^2} + 2B_3 = \frac{C_1}{r_2^2} + 2C_3 \quad (5.2.59)$$

$$\text{Για } r = r_3 : \sigma_{r,3} = \sigma_{r,4} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \frac{C_1}{r_3^2} + 2C_3 = \frac{D_1}{r_3^2} + 2D_3 \quad (5.2.60)$$

$$\text{Για } r = r_4 : \sigma_{r,4} = \sigma_{r,5} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \frac{D_1}{r_3^2} + 2D_3 = \frac{F_1}{r_3^2} + 2F_3 \quad (5.2.61)$$

$$\text{Για } r = r_5 : \sigma_{r,5} = 0 \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha F_3 = -\frac{F_1}{2r_5^2} \quad (5.2.62)$$



## ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Οι συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις θα είναι:

Για  $r = r_1 : u_{r,1} = u_{r,2}$  και άρα από τις σχέσεις (5.2.38), (5.2.39) θα έχουμε

$$\begin{aligned} E_2[2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - \nu_1 E_1 \varepsilon] \\ = E_1 \left[ -(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - \nu_2 E_2 \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.63)$$

Για  $r = r_2 : u_{r,2} = u_{r,3}$  και άρα από τις σχέσεις (5.2.39), (5.2.40) θα έχουμε

$$\begin{aligned} E_3 \left[ -(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - \nu_2 E_2 \varepsilon \right] \\ = E_2 \left[ -(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - \nu_3 E_3 \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.64)$$

Για  $r = r_3 : u_{r,3} = u_{r,4}$  και άρα από τις σχέσεις (5.2.40), (5.2.41) θα έχουμε

$$\begin{aligned} E_4 \left[ -(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - \nu_3 E_3 \varepsilon \right] \\ = E_3 \left[ -(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) - \nu_4 E_4 \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.65)$$

Για  $r = r_4 : u_{r,4} = u_{r,5}$  και άρα από τις σχέσεις (5.2.41), (5.2.42) θα έχουμε

$$\begin{aligned} E_5 \left[ -(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) - \nu_4 E_4 \varepsilon \right] \\ = E_4 \left[ -(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) - \nu_5 E_5 \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.66)$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι η μήτρα αλλά και το έγκλεισμα επιδρούν τα μέγιστα στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση και άρα θα έχουμε ότι  $n = 1$  (Βλέπε Κεφ.4, σελ. 68) και άρα θα έχουμε τις επιπλέον συνοριακές συνθήκες:

$$\text{Για } r = r_1 : E_1 = E_2 \text{ και } \nu_1 = \nu_2 \quad (5.2.67)$$

$$\text{Για } r = r_2 : E_2 = E_3 \text{ και } \nu_2 = \nu_3 \quad (5.2.68)$$

$$\text{Για } r = r_3 : E_3 = E_4 \text{ και } \nu_3 = \nu_4 \quad (5.2.69)$$

$$\text{Για } r = r_4 : E_4 = E_5 \text{ και } \nu_4 = \nu_5 \quad (5.2.70)$$

Διαμορφώνοντας τώρα τις εξισώσεις (5.2.63)-(5.2.66) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.2.67)-(5.2.70) θα έχουμε ότι:

Για  $r = r_1 : u_{r,1} = u_{r,2}$  και άρα θα έχουμε:

$$2(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)(B_3 - A_3) = (1 + \nu_1) \frac{B_1}{r_1^2} \quad (5.2.71)$$

Για  $r = r_2 : u_{r,2} = u_{r,3}$  και άρα θα έχουμε:

$$2(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)(B_3 - C_3) = (1 + \nu_3) \frac{(B_1 - C_1)}{r_2^2} \quad (5.2.72)$$

Για  $r = r_3 : u_{r,3} = u_{r,4}$  και άρα θα έχουμε:

$$2(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)(C_3 - D_3) = (1 + \nu_3) \frac{(C_1 - D_1)}{r_3^2} \quad (5.2.73)$$

Για  $r = r_4 : u_{r,4} = u_{r,5}$  και άρα θα έχουμε:

$$2(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)(D_3 - F_3) = (1 + \nu_5) \frac{(D_1 - F_1)}{r_4^2} \quad (5.2.74)$$

Οι εξισώσεις (5.2.58)-(5.2.62) και (5.2.71)-(5.2.74) αποτελούν ένα **σύστημα 9 εξισώσεων με 9 αγνώστους**. Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει τις τιμές των σταθερών  $A_3, B_1, B_3, C_1, C_2, D_1, D_3, F_1, F_3$ . Οι τιμές των σταθερών αυτών λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα είναι:  $A_3 = B_1 = B_3 = C_1 = C_3 = D_1 = D_3 = F_1 = F_3 = 0$ .

Οι τιμές των σταθερών μετά την λύση του συστήματος ήταν αναμενόμενες και άκρως επιθυμητές γιατί έτσι απλουστεύεται αρκετά η εύρεση του θεωρητικού τύπου του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $E_L$  και του διαμήκους λόγου

Poisson  $\nu_{LT}$  ενώ παράλληλα ,όπως θα δούμε στο παρακάτω κεφάλαιο, οι τιμές που θα βρούμε για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας και λόγο Poisson συνεχίζουν να είναι πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές.

Για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $E_L$  του σύνθετου υλικού , θεωρούμε ότι η **ενέργεια παραμόρφωσης** του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των πέντε φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{V_c} E_L \varepsilon^2 dV_c &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) dV_1 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) dV_2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) dV_3 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) dV_4 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) dV_5
 \end{aligned}
 \tag{5.2.75}$$

Όπου  $dV=2\pi r h dr$

Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται σε:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^{r_5} E_L \varepsilon^2 2\pi r h dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{r_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) 2\pi r h dr
 \end{aligned}
 \tag{5.2.76}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.2.76) τις εκφράσεις των τάσεων από τις σχέσεις (5.2.18)-(5.2.27) και (5.2.33)-(5.2.37) αλλά και των παραμορφώσεων από τις σχέσεις (5.2.43)-(5.2.57) και αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών  $A_3, B_1, B_3, C_1, C_2, D_1, D_3, F_1, F_3$  που εξαγάγαμε από την λύση του συστήματος παραπάνω και τέλος κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned}
 E_L \int_0^{r_5} dr &= E_1 \int_0^{r_1} r dr + \int_{r_1}^{r_2} r E_2(r) dr + E_3 \int_{r_2}^{r_3} r dr + \int_{r_3}^{r_4} r E_4(r) dr \\
 &+ E_5 \int_{r_4}^{r_5} r dr
 \end{aligned}
 \tag{5.2.77}$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_5^2}$
- $U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_5^2}$
- $U_3 = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_5^2}$
- $U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_5^2}$
- $U_5 = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_5^2}$

Θα έχουμε ότι:

$$E_L = E_1 U_1 + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_1}^{r_2} E_2(r) r dr + E_3 U_3 + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_3}^{r_4} E_4(r) r dr + E_5 U_5 \quad (5.2.78)$$

Θεωρούμε τώρα ότι οι συναρτήσεις  $E_2(r)$  και  $E_4(r)$  ακολουθούν την παραβολική μεταβολή γιατί έχει αποδειχθεί ότι η μεταβολή αυτή είναι καλύτερη και πιο ρεαλιστική από την γραμμική και την υπερβολική μεταβολή δίνοντας καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα [27].

Άρα εκτελώντας τις ολοκληρώσεις κάνοντας χρήση της παραβολικής μεταβολής (βλέπε Κεφ.4, σελ. 69)θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 E_L = E_1 U_1 + & \frac{(E_3 - E_1)(r_2 + r_1)(r_2^2 + r_1^2)}{2r_5^2(r_2 - r_1)} \\
 & - \frac{4r_1(E_3 - E_1)(r_2^2 + r_1r_2 + r_1^2)}{3r_5^2(r_2 - r_1)} \\
 & + \frac{(E_1r_2^2 + E_3r_1^2 - 2E_1r_1r_2)(r_2 + r_1)}{r_5^2(r_2 - r_1)} + E_3 U_3 \\
 & + \frac{(E_3 - E_5)(r_4 + r_3)(r_4^2 + r_3^2)}{2r_5^2(r_4 - r_3)} \\
 & - \frac{4r_4(E_3 - E_5)(r_4^2 + r_3r_4 + r_3^2)}{3r_5^2(r_4 - r_3)} \\
 & + \frac{(E_5r_3^2 + E_3r_4^2 - 2E_5r_3r_4)(r_4 + r_3)}{r_5^2(r_4 - r_3)} + E_5 U_5
 \end{aligned} \tag{5.2.79}$$

Κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας τις ακτίνες με τις κατ' όγκο περιεκτικότητες της μήτρα, του εγκλείσματος και της ενδιαμέσου φάσεως θα έχουμε τον τελικό τύπο για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού:

$$\begin{aligned}
 E_L & = E_1 U_1 + \frac{(E_3 - E_1)(\sqrt{U_1} + \sqrt{U_1 + U_2})(U_2 + U_1)}{2(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} \\
 & - \frac{4(\sqrt{U_1})(E_3 - E_1)(2U_1 + \sqrt{U_1}\sqrt{U_1 + U_2} + U_2)}{3(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} \\
 & + \frac{(E_1(U_1 + U_2) + E_3U_1 - 2E_1\sqrt{U_1}\sqrt{U_1 + U_2})(\sqrt{U_1} + \sqrt{U_1 + U_2})}{\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1}} + E_3 U_3 \\
 & + \frac{(E_3 - E_5)(\sqrt{1 - U_5} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})(2 - U_4 - 2U_5)}{2(\sqrt{1 - U_5} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} \\
 & - \frac{4(\sqrt{1 - U_5})(E_3 - E_5)(2 - U_4 - 2U_5 + \sqrt{1 - U_5}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{3(\sqrt{1 - U_5} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} \\
 & + \frac{[E_5(U_1 + U_2 + U_3) + E_3(1 - U_5) - 2E_5\sqrt{1 - U_5}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3}](\sqrt{1 - U_5} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{\sqrt{1 - U_5} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3}} \\
 & + E_5 U_5
 \end{aligned} \tag{5.2.80}$$

### 5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON $\nu_{LT}$

Ο διαμήκης λόγος Poisson του σύνθετου υλικού με βάση το πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο ορίζεται ως:

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon} \quad (5.3.1)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί επίσης να γραφτεί στην παρακάτω μορφή:

$$\nu_{LT} = -\frac{1}{\varepsilon V_c} \int_{V_c} \varepsilon_r dV_c = -\frac{1}{\varepsilon V_c} \left[ \int_{V_1} \varepsilon_{r,1} dV_1 + \int_{V_2} \varepsilon_{r,2} dV_2 + \int_{V_3} \varepsilon_{r,3} dV_3 + \int_{V_4} \varepsilon_{r,4} dV_4 + \int_{V_5} \varepsilon_{r,5} dV_5 \right] \quad (5.3.2)$$

Όπου  $V = \pi r h^2$  και άρα  $dV = 2\pi r h dr$  και άρα θα έχουμε:

$$\nu_{LT} = -\frac{1}{\varepsilon \pi h r_5^2} \left[ \int_0^{r_1} 2\pi r h \varepsilon_{r,1} dr + \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r h \varepsilon_{r,2} dr + \int_{r_2}^{r_3} 2\pi r h \varepsilon_{r,3} dr + \int_{r_3}^{r_4} 2\pi r h \varepsilon_{r,4} dr + \int_{r_4}^{r_5} 2\pi r h \varepsilon_{r,5} dr \right] \quad (5.3.3)$$

Αν στην εξίσωση (5.3.3) αντικαταστήσουμε τις ακτινικές παραμορφώσεις με τις σχέσεις (5.2.43), (5.2.46), (5.2.49), (5.2.52), (5.2.55) και λάβουμε υπόψη τη λύση του συστήματος (σελ. 91), κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις και εκτελέσουμε τις ολοκληρώσεις γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_5^2}$
- $U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_5^2}$
- $U_3 = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_5^2}$
- $U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_5^2}$
- $U_5 = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_5^2}$

Θα έχουμε ότι:

$$v_{LT} = v_1 U_1 + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_1}^{r_2} v_2(r) r dr + v_3 U_3 + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_3}^{r_4} v_4(r) r dr + v_5 U_5 \quad (5.3.4)$$

Θεωρούμε τώρα, όπως και πριν στον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $E_L$ , ότι οι συναρτήσεις  $v_2(r)$  και  $v_4(r)$  ακολουθούν την παραβολική μεταβολή. Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις εφαρμόζοντας τους τύπους της παραβολικής μεταβολής (βλέπε Κεφ.4, σελ. 69) θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} v_{LT} = v_1 U_1 &+ \frac{(v_3 - v E_1)(r_2 + r_1)(r_2^2 + r_1^2)}{2r_5^2(r_2 - r_1)} \\ &- \frac{4r_1(v_3 - v_1)(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)}{3r_5^2(r_2 - r_1)} \\ &+ \frac{(v_1 r_2^2 + v_3 r_1^2 - 2v_1 r_1 r_2)(r_2 + r_1)}{r_5^2(r_2 - r_1)} + v_3 U_3 \\ &+ \frac{(v_3 - v_5)(r_4 + r_3)(r_4^2 + r_3^2)}{2r_5^2(r_4 - r_3)} \\ &- \frac{4r_4(v_3 - v_5)(r_4^2 + r_3 r_4 + r_3^2)}{3r_5^2(r_4 - r_3)} \\ &+ \frac{(v_5 r_3^2 + v_3 r_4^2 - 2v_5 r_3 r_4)(r_4 + r_3)}{r_5^2(r_4 - r_3)} + v_5 U_5 \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας τις ακτίνες με τις κατ' όγκο περιεκτικότητες της μήτρα, του εγκλείσματος και της ενδιάμεσου φάσεως θα έχουμε τον τελικό θεωρητικό τύπο για τον διαμήκη λόγο Poisson:

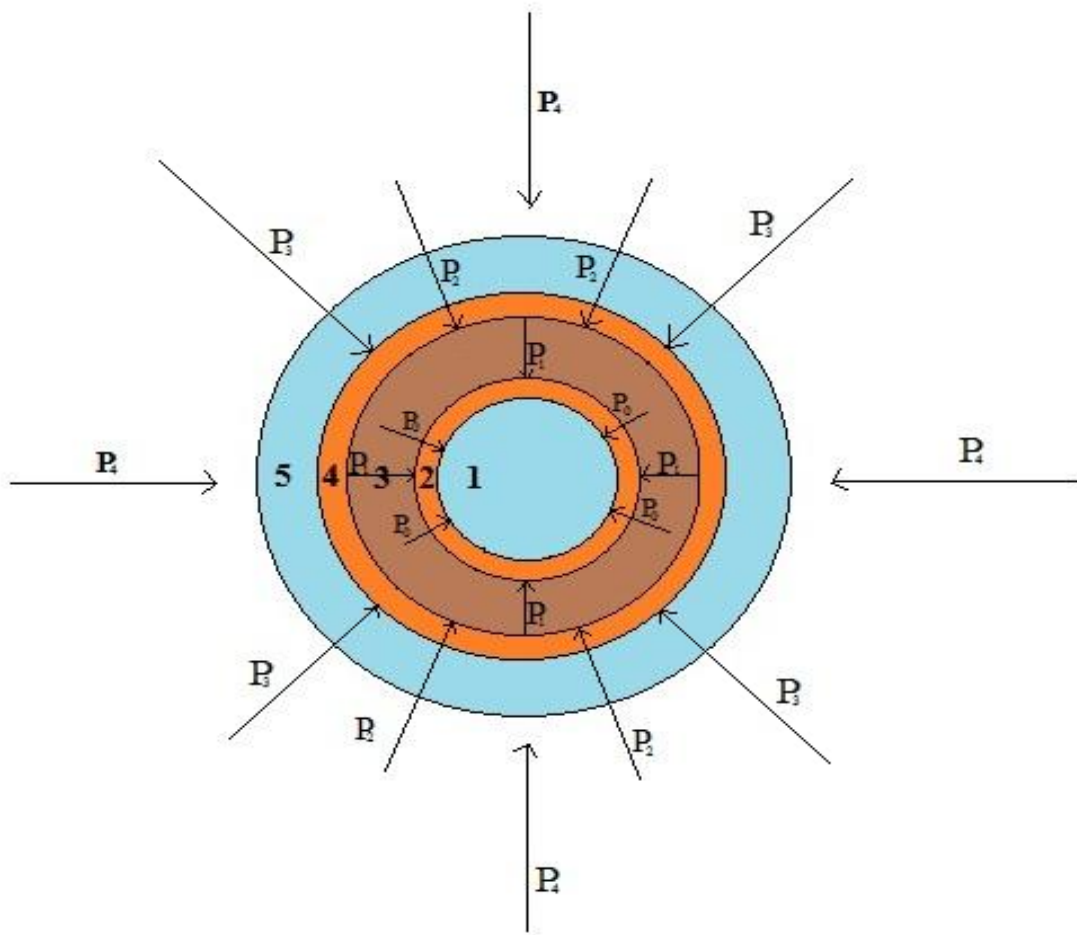


$$\begin{aligned}
 & v_{LT} \\
 &= v_1 U_1 + \frac{(v_3 - v_1)(\sqrt{U_1} + \sqrt{U_1 + U_2})(U_2 + U_1)}{2(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} \\
 & - \frac{4(\sqrt{U_1})(v_3 - v_1)(2U_1 + \sqrt{U_1}\sqrt{U_1 + U_2} + U_2)}{3(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} \\
 & + \frac{[v_1(U_1 + U_2) + v_3 U_1 - 2v_1\sqrt{U_1}\sqrt{U_1 + U_2}](\sqrt{U_1} + \sqrt{U_1 + U_2})}{\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1}} + v_3 U_3 \\
 & + \frac{(v_3 - v_5)(\sqrt{1 - U_5} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})(2 - U_4 - 2U_5)}{2(\sqrt{1 - U_5} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} \\
 & - \frac{4(\sqrt{1 - U_5})(v_3 - v_5)(2 - U_4 - 2U_5 + \sqrt{1 - U_5}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{3(\sqrt{1 - U_5} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} \\
 & + \frac{[v_5(U_1 + U_2 + U_3) + v_3(1 - U_5) - 2v_5\sqrt{1 - U_5}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3}](\sqrt{1 - U_5} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{\sqrt{1 - U_5} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3}} \\
 & + v_5 U_5
 \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

## 5.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ Ε<sub>T</sub>

Θεωρούμε το πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο όπως το περιγράψαμε στην **ενότητα 5.1**. Με την χρήση αυτού του μοντέλου θα εξάγουμε έναν θεωρητικό τύπο για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας στο σύνθετο υλικό.

Έστω ότι στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου ακτίνας  $r_5$  ασκούμε ομοιόμορφα ακτινική πίεση  $P_4$ . Λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ 4<sup>ης</sup> και 5<sup>ης</sup> φάσης στα σύνορά τους, θα ασκείται τώρα μια πίεση  $P_3$ . Αντίστοιχα στα σύνορα της 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> φάσης, 2<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> φάσης και 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> φάσης, θα ασκούνται πιέσεις  $P_2, P_1, P_0$ , αντίστοιχα(Εικ.42).



Εικόνα 42

### ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η τασική συνάρτηση Airy που περιγράφει το πρόβλημα καθώς και η λύση της είναι ίδιες με αυτές της ενότητας 5.2, δηλαδή θα έχουμε:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (5.4.1)$$

Η ως άνω συνάρτηση είναι εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες και είναι διαφορική εξίσωση τύπου Euler και άρα θα έχει γενική λύση:

$$\Phi = J_1 \ln r + J_2 r^2 \ln r + J_3 r^2 + J_4 \quad (5.4.2)$$

Όπου  $J_1, J_2, J_3$  και  $J_4$  είναι σταθερές.

Η κάθε μία από τις πέντε φάσεις όπως και στην ενότητα 5.2, έχει την δική της τασική συνάρτηση που την χαρακτηρίζει και άρα θα έχουμε:

$$\Phi_1 = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 \quad (5.4.3)$$

$$\Phi_2 = B_1 \ln r + B_2 r^2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 \quad (5.4.4)$$

$$\Phi_3 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad (5.4.5)$$

$$\Phi_4 = D_1 \ln r + D_2 r^2 \ln r + D_3 r^2 + D_4 \quad (5.4.6)$$

$$\Phi_5 = F_1 \ln r + F_2 r^2 \ln r + F_3 r^2 + F_4 \quad (5.4.7)$$

### **ΤΑΣΕΙΣ**

Επειδή η τασική συνάρτηση παραμένει η ίδια με την ενότητα 5.2, έπεται πως και οι τάσεις  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  θα προκύπτουν οι ίδιες και για λόγους πληρότητας θα παρατεθούν ξανά: (βλέπε σελ. 89, σελ. 90)

$$\sigma_{r,1} = 2A_3 \quad (5.4.8)$$

$$\sigma_{\theta,1} = 2A_3 \quad (5.4.9)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.4.10)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.4.11)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.4.12)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.4.13)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.4.14)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.4.15)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.4.16)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.4.17)$$

Οι αξονικές τάσεις  $\sigma_{z,1}$ ,  $\sigma_{z,2}$ ,  $\sigma_{z,3}$ ,  $\sigma_{z,4}$ ,  $\sigma_{z,5}$  θα υπολογισθούν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων, δηλαδή μέσω των σχέσεων:

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{\sigma_{z,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})}{E_1} = 0 \quad (5.4.18)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{\sigma_{z,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})}{E_2} = 0 \quad (5.4.19)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{\sigma_{z,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})}{E_3} = 0 \quad (5.4.20)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{\sigma_{z,4} - \nu_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})}{E_4} = 0 \quad (5.4.21)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{\sigma_{z,5} - \nu_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})}{E_5} = 0 \quad (5.4.22)$$

Οι παραπάνω αξονικές παραμορφώσεις θεωρούμε ότι ισούνται με το μηδέν διότι το μήκος του κυλινδρικού μοντέλου είναι αναλογικά απείρως μεγαλύτερο σε σχέση με την επιμήκυνση που δέχεται ο άξονάς του.

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (5.4.18)-(5.4.22) και κάνοντας χρήση και των εξισώσεων (5.4.8)-(5.4.17) καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τις αξονικές τάσεις:

$$\sigma_{z,1} = 4\nu_1 A_3 \quad (5.4.23)$$

$$\sigma_{z,2} = 4\nu_2 B_3 \quad (5.4.24)$$

$$\sigma_{z,3} = 4\nu_3 C_3 \quad (5.4.25)$$

$$\sigma_{z,4} = 4\nu_4 D_3 \quad (5.4.26)$$

$$\sigma_{z,5} = 4\nu_5 F_3 \quad (5.4.27)$$

**ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΕΙΣ**

Γνωρίζουμε γενικά ότι ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \quad (5.4.28)$$

Λόγω όμως της κυλινδρικής συμμετρίας η γωνιακή μετατόπιση  $u_{\theta}$  δεν εξαρτάται από το  $\theta$  και άρα θα ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \Rightarrow u_r = r\varepsilon_{\theta} \quad (5.4.29)$$

Άρα ξεχωριστά για τις πέντε φάσεις θα έχουμε:

$$u_{r,1} = r\varepsilon_{\theta,1} \quad (5.4.30)$$

$$u_{r,2} = r\varepsilon_{\theta,2} \quad (5.4.31)$$

$$u_{r,3} = r\varepsilon_{\theta,3} \quad (5.4.32)$$

$$u_{r,4} = r\varepsilon_{\theta,4} \quad (5.4.33)$$

$$u_{r,5} = r\varepsilon_{\theta,5} \quad (5.4.34)$$

Επίσης από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων γνωρίζουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{\sigma_{\theta,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{z,1})}{E_1} \quad (5.4.35)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\sigma_{\theta,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{z,2})}{E_2} \quad (5.4.36)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\sigma_{\theta,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{z,3})}{E_3} \quad (5.4.37)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\sigma_{\theta,4} - \nu_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{z,4})}{E_4} \quad (5.4.38)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\sigma_{\theta,5} - \nu_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{z,5})}{E_5} \quad (5.4.39)$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (5.4.35)-( 5.4.39), τις σχέσεις των τάσεων (5.4.8)-( 5.4.17) και (5.4.23)-( 5.4.27) θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1^2)}{E_1} \quad (5.4.40)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{[-(1+v_2)\frac{B_1}{r^2}+2B_3(1-v_2-2v_2^2)]}{E_2} \quad (5.4.41)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{[-(1+v_3)\frac{C_1}{r^2}+2C_3(1-v_3-2v_3^2)]}{E_3} \quad (5.4.42)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{[-(1+v_4)\frac{D_1}{r^2}+2D_3(1-v_4-2v_4^2)]}{E_4} \quad (5.4.43)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{[-(1+v_5)\frac{F_1}{r^2}+2F_3(1-v_5-2v_5^2)]}{E_5} \quad (5.4.44)$$

Και άρα αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.4.40)-( 5.4.44) στις σχέσεις (5.4.30)-( 5.4.34) των μετατοπίσεων οι ακτινικές μετατοπίσεις θα γίνουν:

$$u_{r,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1^2)r}{E_1} \quad (5.4.45)$$

$$u_{r,2} = \frac{[-(1+v_2)\frac{B_1}{r^2}+2B_3(1-v_2-2v_2^2)]r}{E_2} \quad (5.4.46)$$

$$u_{r,3} = \frac{[-(1+v_3)\frac{C_1}{r^2}+2C_3(1-v_3-2v_3^2)]r}{E_3} \quad (5.4.47)$$

$$u_{r,4} = \frac{[-(1+v_4)\frac{D_1}{r^2}+2D_3(1-v_4-2v_4^2)]r}{E_4} \quad (5.4.48)$$

$$u_{r,5} = \frac{[-(1+v_5)\frac{F_1}{r^2}+2F_3(1-v_5-2v_5^2)]r}{E_5} \quad (5.4.49)$$

### ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ακτινικές παραμορφώσεις και ύστερα θα παρουσιάσουμε και τις ήδη υπολογισμένες αξονικές και γωνιακές παραμορφώσεις συγκεντρωτικά.

Οι ακτινικές παραμορφώσεις θα εξαχθούν από τον γενικό τύπο:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

Άρα θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{r,1} = \frac{2A_3(1-\nu_1-2\nu_1^2)}{E_1} \quad (5.4.50)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{[(1+\nu_2)\frac{B_1}{r^2}+2B_3(1-\nu_2-2\nu_2^2)]}{E_2} \quad (5.4.51)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{[(1+\nu_3)\frac{C_1}{r^2}+2C_3(1-\nu_3-2\nu_3^2)]}{E_3} \quad (5.4.52)$$

$$\varepsilon_{r,4} = \frac{[(1+\nu_4)\frac{D_1}{r^2}+2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2)]}{E_4} \quad (5.4.53)$$

$$\varepsilon_{r,5} = \frac{[(1+\nu_5)\frac{F_1}{r^2}+2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2)]}{E_5} \quad (5.4.54)$$

Επίσης υπολογισμένες από πριν οι αξονικές και γωνιακές παραμορφώσεις θα είναι:

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{\sigma_{z,1}-\nu_1(\sigma_{r,1}+\sigma_{\theta,1})}{E_1} = 0 \quad (5.4.55)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{\sigma_{z,2}-\nu_2(\sigma_{r,2}+\sigma_{\theta,2})}{E_2} = 0 \quad (5.4.56)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{\sigma_{z,3}-\nu_3(\sigma_{r,3}+\sigma_{\theta,3})}{E_3} = 0 \quad (5.4.57)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{\sigma_{z,4}-\nu_4(\sigma_{r,4}+\sigma_{\theta,4})}{E_4} = 0 \quad (5.4.58)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{\sigma_{z,5}-\nu_5(\sigma_{r,5}+\sigma_{\theta,5})}{E_5} = 0 \quad (5.4.59)$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1-\nu_1-2\nu_1^2)}{E_1} \quad (5.4.60)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[-(1+\nu_2)\frac{B_1}{r_2^2}+2B_3(1-\nu_2-2\nu_2^2)\right]}{E_2} \quad (5.4.61)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[-(1+\nu_3)\frac{C_1}{r_3^2}+2C_3(1-\nu_3-2\nu_3^2)\right]}{E_3} \quad (5.4.62)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[-(1+\nu_4)\frac{D_1}{r_4^2}+2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2)\right]}{E_4} \quad (5.4.63)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[-(1+\nu_5)\frac{F_1}{r_5^2}+2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2)\right]}{E_5} \quad (5.4.64)$$

### **ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ**

Για  $r = r_1$  :  $\sigma_{r,1} = \sigma_{r,2}$  και άρα  $A_3 = \frac{B_1}{2r_1^2} + B_3$  (5.4.65)

Για  $r = r_2$  :  $\sigma_{r,2} = \sigma_{r,3}$  και άρα  $\frac{B_1}{r_2^2} + 2B_3 = \frac{C_1}{r_2^2} + 2C_3$  (5.4.66)

Για  $r = r_3$  :  $\sigma_{r,3} = \sigma_{r,4}$  και άρα  $\frac{C_1}{r_3^2} + 2C_3 = \frac{D_1}{r_3^2} + 2D_3$  (5.4.67)

Για  $r = r_4$  :  $\sigma_{r,4} = \sigma_{r,5}$  και άρα  $\frac{D_1}{r_4^2} + 2D_3 = \frac{F_1}{r_4^2} + 2F_3$  (5.4.68)

Για  $r = r_5$  :  $\sigma_{r,5} = P_4$  και άρα  $F_3 = -\frac{F_1}{2r_5^2} - \frac{P_4}{2}$  (5.4.69)

### **ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ**

Οι συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις θα είναι:



Για  $r = r_1 : u_{r,1} = u_{r,2}$  και άρα από (5.4.45) , (5.4.46) θα έχουμε

$$E_2[2A_3(1 - v_1 - 2v_1^2)] = E_1 \left[ -(1 + v_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - v_2 - 2v_2^2) \right] \quad (5.4.70)$$

Για  $r = r_2 : u_{r,2} = u_{r,3}$  και άρα από (5.4.46) , (5.4.47) θα έχουμε

$$\begin{aligned} E_3 \left[ -(1 + v_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - v_2 - 2v_2^2) \right] \\ = E_2 \left[ -(1 + v_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - v_3 - 2v_3^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.71)$$

Για  $r = r_3 : u_{r,3} = u_{r,4}$  και άρα από (5.4.47) , (5.4.48) θα έχουμε

$$\begin{aligned} E_4 \left[ -(1 + v_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - v_3 - 2v_3^2) \right] \\ = E_3 \left[ -(1 + v_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - v_4 - 2v_4^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.72)$$

Για  $r = r_4 : u_{r,4} = u_{r,5}$  και άρα από (5.4.48) , (5.4.49) θα έχουμε

$$\begin{aligned} E_5 \left[ -(1 + v_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - v_4 - 2v_4^2) \right] \\ = E_4 \left[ -(1 + v_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - v_5 - 2v_5^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.73)$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι η μήτρα αλλά και το έγκλεισμα επιδρούν τα μέγιστα στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση και άρα θα έχουμε ότι  $n = 1$  (Βλέπε Κεφ.4, σελ. 68) και άρα θα έχουμε τις επιπλέον συνοριακές συνθήκες:

$$\text{Για } r = r_1 : E_1 = E_2 \text{ και } v_1 = v_2 \quad (5.4.74)$$

$$\text{Για } r = r_2 : E_2 = E_3 \text{ και } v_2 = v_3 \quad (5.4.75)$$

$$\text{Για } r = r_3 : E_3 = E_4 \text{ και } v_3 = v_4 \quad (5.4.76)$$

$$\text{Για } r = r_4 : E_4 = E_5 \text{ και } v_4 = v_5 \quad (5.4.77)$$

Διαμορφώνοντας τώρα τις εξισώσεις (5.4.70)-( 5.4.73) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.4.74)-( 5.4.77) θα έχουμε:

Για  $r = r_1 : u_{r,1} = u_{r,2}$  και άρα θα έχουμε:

$$2(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)(B_3 - A_3) = (1 + \nu_1) \frac{B_1}{r_1^2} \quad (5.4.78)$$

Για  $r = r_2 : u_{r,2} = u_{r,3}$  και άρα θα έχουμε:

$$2(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)(B_3 - C_3) = (1 + \nu_3) \frac{(B_1 - C_1)}{r_2^2} \quad (5.4.79)$$

Για  $r = r_3 : u_{r,3} = u_{r,4}$  και άρα θα έχουμε:

$$2(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)(C_3 - D_3) = (1 + \nu_3) \frac{(C_1 - D_1)}{r_3^2} \quad (5.4.80)$$

Για  $r = r_4 : u_{r,4} = u_{r,5}$  και άρα θα έχουμε:

$$2(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)(D_3 - F_3) = (1 + \nu_5) \frac{(D_1 - F_1)}{r_4^2} \quad (5.4.81)$$

Οι εξισώσεις (5.4.65)-( 5.4.69) και (5.4.78)-( 5.4.81) αποτελούν ένα σύστημα 9 εξισώσεων με 9 αγνώστους. Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει τις τιμές των σταθερών  $A_3, B_1, B_3, C_1, C_2, D_1, D_3, F_1, F_3$ . Οι τιμές των σταθερών αυτών λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα είναι:  $A_3 = B_3 = C_3 = D_3 = F_3 = (-1/2)P_4$  και  $B_1 = C_1 = D_1 = F_1 = 0$ .

Οι τιμές των σταθερών μετά την λύση του συστήματος ήταν αναμενόμενες και άκρως επιθυμητές γιατί έτσι απλουστεύεται αρκετά η εύρεση του θεωρητικού τύπου του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$  και του εγκάρσιου λόγου Poisson  $\nu_{TT}$  ενώ παράλληλα, όπως θα δούμε στο παρακάτω κεφάλαιο, οι τιμές που θα βρούμε για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας και λόγο Poisson συνεχίζουν να είναι πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές.

Για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$  του σύνθετου υλικού, θεωρούμε ότι η **ενέργεια παραμόρφωσης** του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των πέντε φάσεων από τις οποίες

αποτελείται. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P_4^2}{K_c} dV_c \\
 &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) dV_1 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) dV_2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) dV_3 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) dV_4 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) dV_5
 \end{aligned} \tag{5.4.82}$$

Όπου  $dV=2\pi r h dr$  και  $K_c$  το μέτρο διόγκωσης

Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται σε:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{P_4^2}{K_c} \int_0^{r_5} 2\pi r h dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{r_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) 2\pi r h dr
 \end{aligned} \tag{5.4.83}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.4.83) τις εκφράσεις των τάσεων από τις σχέσεις (5.4.8)-( 5.4.17) και (5.4.23)-( 5.4.27) αλλά και των παραμορφώσεων από τις σχέσεις (5.4.50)-( 5.4.64) και αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών  $A_3, B_1, B_3, C_1, C_2, D_1, D_3, F_1, F_3$  που εξαγάγαμε από την λύση του συστήματος παραπάνω και τέλος κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K_c} \int_0^{r_5} r dr &= \frac{2(1 - v_1 - 2v_1^2)}{E_1} \int_0^{r_1} r dr + 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - v_2(r) - 2(v_2(r))^2] r}{E_2(r)} dr \\ &+ \frac{2(1 - v_3 - 2v_3^2)}{E_3} \int_{r_2}^{r_3} r dr + 2 \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - v_4(r) - 2(v_4(r))^2] r}{E_4(r)} dr \\ &+ \frac{2(1 - v_5 - 2v_5^2)}{E_5} \int_{r_4}^{r_5} r dr \end{aligned} \quad (5.4.84)$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_5^2}$
- $U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_5^2}$
- $U_3 = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_5^2}$
- $U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_5^2}$
- $U_5 = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_5^2}$

Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K_c} = & \frac{U_1(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - \nu_{2(r)} - 2(\nu_{2(r)})^2]r}{E_2(r)} dr \\ & + \frac{U_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)}{E_3} + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - \nu_{4(r)} - 2(\nu_{4(r)})^2]r}{E_4(r)} dr \\ & + \frac{U_5(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5} \end{aligned} \quad (5.4.85)$$

Το μέτρο διόγκωσης για το σύνθετο υλικό μας γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με [28]:

$$K_c = \frac{P_4}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{1}{2 \left[ \frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} \right]} \quad (5.4.86)$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (5.4.86) , η σχέση (5.4.85) θα γίνει:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} &= \frac{U_1(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - \nu_{2(r)} - 2(\nu_{2(r)})^2]r}{E_2(r)} dr \\ &+ \frac{U_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)}{E_3} + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - \nu_{4(r)} - 2(\nu_{4(r)})^2]r}{E_4(r)} dr \\ &+ \frac{U_5(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5} \end{aligned} \quad (5.4.87)$$

Η σχέση (5.4.87) μας δίνει το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας  $E_T$ . Οι συναρτήσεις  $\nu_2(r)$  ,  $\nu_4(r)$  ,  $E_2(r)$  και  $E_4(r)$  θεωρούμε ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή που έχει βρεθεί ότι δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την υπερβολική και την γραμμική μεταβολή [28]. Οι θεωρητικοί τύποι του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $E_L$  και του διαμήκους λόγου Poisson  $\nu_{LT}$  έχουν υπολογιστεί στις προηγούμενες ενότητες ενώ ο εγκάρσιος λόγος Poisson θα υπολογιστεί στην επόμενη ενότητα.

## 5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON $\nu_{TT}$

Τον εγκάρσιο λόγο Poisson  $\nu_{TT}$  του σύνθετου υλικού θα τον υπολογίσουμε από τον αντίστροφο νόμο των φάσεων με την χρήση του πενταφασικού κυλινδρικού μοντέλου με ενδιάμεση φάση, από την σχέση:

$$\frac{1}{\nu_{TT}} = \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{U_2}{\nu_2(r)} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{U_4}{\nu_4(r)} + \frac{U_5}{\nu_5} \quad (5.5.1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

- $U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_5^2}$
- $U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_5^2}$

Η σχέση (5.5.1) μπορεί να γραφτεί τώρα ως:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_{TT}} &= \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_5^2} \frac{1}{\nu_2(r)} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_5^2} \frac{1}{\nu_4(r)} + \frac{U_5}{\nu_5} \\ \Rightarrow \frac{1}{\nu_{TT}} &= \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{1}{r_5^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]dr}{\nu_2(r)} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{1}{r_5^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]dr}{\nu_4(r)} + \frac{U_5}{\nu_5} \\ \Rightarrow \frac{1}{\nu_{TT}} &= \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{rdr}{\nu_2(r)} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{rdr}{\nu_4(r)} + \frac{U_5}{\nu_5} \end{aligned}$$

Και άρα θα έχουμε τελικά:

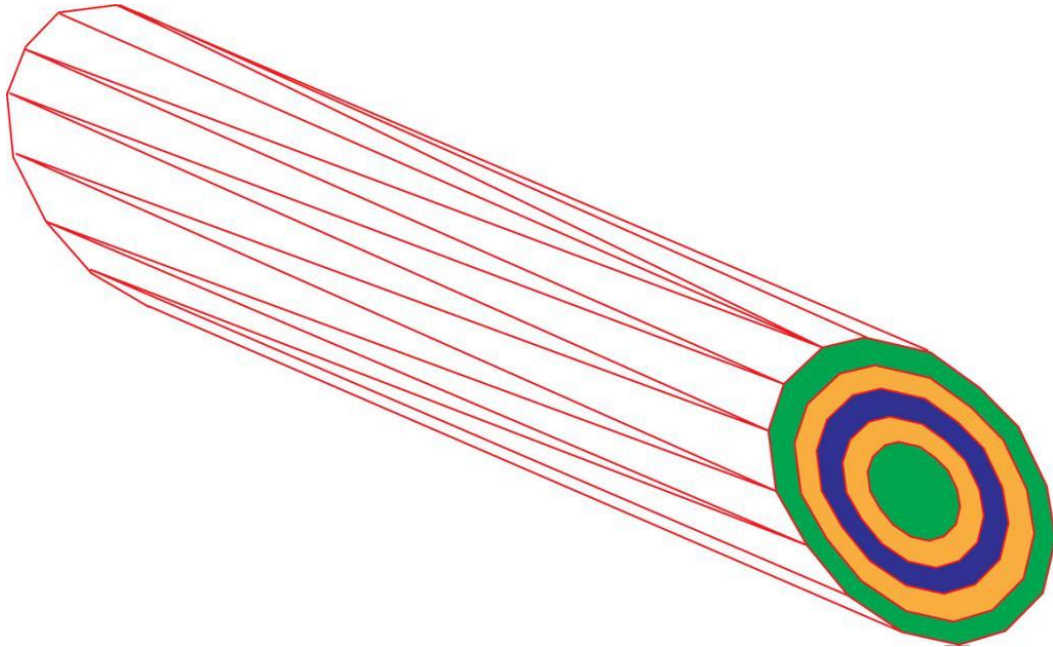
$$\frac{1}{\nu_{TT}} = \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{rdr}{\nu_2(r)} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{2}{r_5^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{rdr}{\nu_4(r)} + \frac{U_5}{\nu_5} \quad (5.5.2)$$

Οι συναρτήσεις  $\nu_2(r)$ ,  $\nu_4(r)$ , όπως και στις προηγούμενες ενότητες, θεωρούμε ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή.

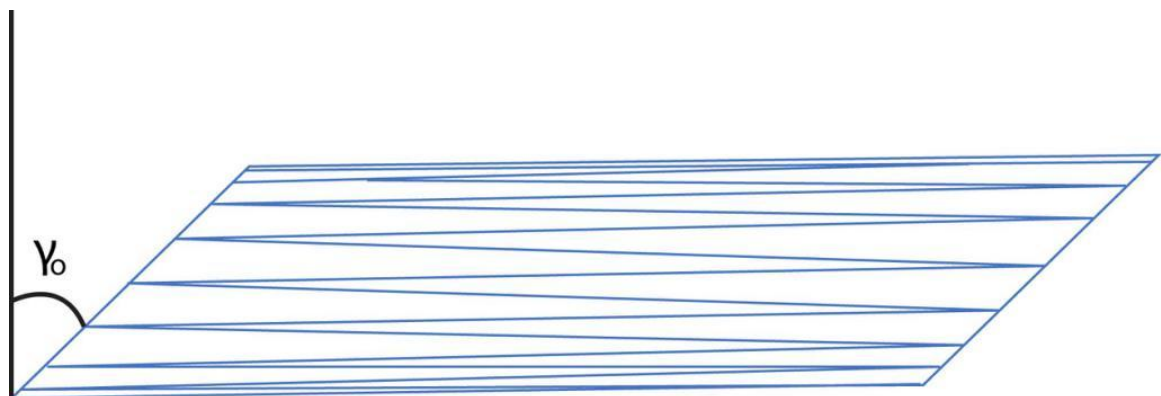
## 5.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ $G_{LT}$

Θεωρούμε το πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο μας με ενδιάμεση φάση και έστω ότι ασκούμε μια διάτμηση  $\gamma_0$  (Εικ.43, Εικ.44).

Από την θεωρία της ελαστικότητας, οι μετατοπίσεις και οι τάσεις για το κυλινδρικό μοντέλο μας όταν υφίστανται μια διάτμηση  $\gamma_0$  θα είναι [29]:



Εικόνα 43



Εικόνα 44

**ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΕΙΣ**

$$u_{z,1} = \left( A_1 r + \frac{A_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.1)$$

$$u_{r,1} = A_3 z \cos \theta \quad (5.6.2)$$

$$u_{\theta,1} = -A_3 z \sin \theta \quad (5.6.3)$$

$$u_{z,2} = \left( B_1 r + \frac{B_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.4)$$

$$u_{r,2} = B_3 z \cos \theta \quad (5.6.5)$$

$$u_{\theta,2} = -B_3 z \sin \theta \quad (5.6.6)$$

$$u_{z,3} = \left( C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.7)$$

$$u_{r,3} = C_3 z \cos \theta \quad (5.6.8)$$

$$u_{\theta,3} = -C_3 z \sin \theta \quad (5.6.9)$$

$$u_{z,4} = \left( D_1 r + \frac{D_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.10)$$

$$u_{r,4} = D_3 z \cos \theta \quad (5.6.11)$$

$$u_{\theta,4} = -D_3 z \sin \theta \quad (5.6.12)$$



$$u_{z,5} = \left( F_1 r + \frac{F_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.13)$$

$$u_{r,5} = F_3 z \cos \theta \quad (5.6.14)$$

$$u_{\theta,5} = -F_3 z \sin \theta \quad (5.6.15)$$

### ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Οι παραμορφώσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right],$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right], \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]$$

Άρα θα έχουμε:

$$\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{\theta,1} = \varepsilon_{z,1} = \varepsilon_{r\theta,1} = 0, \quad \varepsilon_{rz,1} = \frac{1}{2} \left[ A_1 + A_3 - \frac{A_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,1} = -\frac{1}{2} \left[ A_1 + A_3 + \frac{A_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.16a,b,c)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \varepsilon_{\theta,2} = \varepsilon_{z,2} = \varepsilon_{r\theta,2} = 0, \quad \varepsilon_{rz,2} = \frac{1}{2} \left[ B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,2} = -\frac{1}{2} \left[ B_1 + B_3 + \frac{B_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.17a,b,c)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \varepsilon_{\theta,3} = \varepsilon_{z,3} = \varepsilon_{r\theta,3} = 0, \quad \varepsilon_{rz,3} = \frac{1}{2} \left[ C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,3} = -\frac{1}{2} \left[ C_1 + C_3 + \frac{C_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.18a,b,c)$$

$$\varepsilon_{r,4} = \varepsilon_{\theta,4} = \varepsilon_{z,4} = \varepsilon_{r\theta,4} = 0, \quad \varepsilon_{rz,4} = \frac{1}{2} \left[ D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,4} = -\frac{1}{2} \left[ D_1 + D_3 + \frac{D_2}{r^2} \right] \sin \theta$$

(5.6.19a,b,c)

$$\varepsilon_{r,5} = \varepsilon_{\theta,5} = \varepsilon_{z,5} = \varepsilon_{r\theta,5} = 0, \quad \varepsilon_{rz,5} = \frac{1}{2} \left[ F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,5} = -\frac{1}{2} \left[ F_1 + F_3 + \frac{F_2}{r^2} \right] \sin \theta$$

(5.6.20a,b,c)

### ΤΑΣΕΙΣ

Οι τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων:

$$\sigma_{rz} = 2G\varepsilon_{rz} \quad \sigma_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta} \quad \sigma_{\theta z} = 2G\varepsilon_{\theta z}$$

$$\sigma_{rz,1} = G_1 \left( A_1 + A_3 - \frac{A_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.21)$$

$$\sigma_{\theta z,1} = -G_1 \left( A_1 + A_3 + \frac{A_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.22)$$

$$\sigma_{rz,2} = G_2 \left( B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.23)$$

$$\sigma_{\theta z,2} = -G_2 \left( B_1 + B_3 + \frac{B_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.24)$$

$$\sigma_{rz,3} = G_3 \left( C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.25)$$

$$\sigma_{\theta z,3} = -G_3 \left( C_1 + C_3 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.26)$$

$$\sigma_{rz,4} = G_4 \left( D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.27)$$

$$\sigma_{\theta z,4} = -G_4 \left( D_1 + D_3 + \frac{D_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.28)$$

$$\sigma_{rz,5} = G_5 \left( F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.29)$$

$$\sigma_{\theta z,5} = -G_5 \left( F_1 + F_3 + \frac{F_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.30)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\sigma_{rr,i} = \sigma_{\theta\theta,i} = \sigma_{zz,i} = 0 \quad \forall i = 1,2,3,4,5 \quad (5.6.31)$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στην θέση  $r = 0$  θα πρέπει η σταθερά  $A_2$  να είναι ίση με το μηδέν δηλαδή  $A_2 = 0$ . Επίσης στο σύνορο της πέμπτης φάσης, εκεί δηλαδή που επιδρά η διάτμηση  $\gamma_o$ , η ακτινική μετατόπιση ισούται με  $\gamma_o z \cos \theta$ . Άρα από την σχέση (5.6.14) προκύπτει ότι:

$$F_3 z \cos \theta = \gamma_o z \cos \theta \Rightarrow F_3 = \gamma_o \quad (5.6.32)$$

**ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ**

Οι συνοριακές συνθήκες για τις τάσεις είναι:

Για  $r = r_1$  :  $\sigma_{rz,1} = \sigma_{rz,2}$  και άρα

$$G_1(A_1 + A_3) = G_2 \left( B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r_1^2} \right) \quad (5.6.33)$$

Για  $r = r_2$  :  $\sigma_{rz,2} = \sigma_{rz,3}$  και άρα

$$G_2 \left( B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r_2^2} \right) = G_3 \left( C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r_2^2} \right) \quad (5.6.34)$$

Για  $r = r_3$  :  $\sigma_{rz,3} = \sigma_{rz,4}$  και άρα

$$G_3 \left( C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r_3^2} \right) = G_4 \left( D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r_3^2} \right) \quad (5.6.35)$$

Για  $r = r_4$  :  $\sigma_{rz,4} = \sigma_{rz,5}$  και άρα

$$G_4 \left( D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r_4^2} \right) = G_5 \left( F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r_4^2} \right) \quad (5.6.36)$$

Όπου  $G_2$  και  $G_4$  θεωρούμε τους μέσους όρους των συναρτήσεων  $G_2(r)$  και  $G_4(r)$  αντίστοιχα, θεωρώντας ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή με την μέγιστη επίδραση της μήτρα και του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση (βλέπε Κεφ.4, σελ. 68, σελ.69).

**ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ**

Οι συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις θα είναι:

Για  $r = r_1$  :  $u_{r,1} = u_{r,2}$  και  $u_{z,1} = u_{z,2}$  και άρα

$$A_3 = B_3 \quad (5.6.37)$$

$$A_1 = B_1 + \frac{B_2}{r_1^2} \quad (5.6.38)$$

Για  $r = r_2$  :  $u_{r,2} = u_{r,3}$  και  $u_{z,2} = u_{z,3}$  και άρα

$$B_3 = C_3 \quad (5.6.39)$$

$$B_1 + \frac{B_2}{r_2^2} = C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} \quad (5.6.40)$$

Για  $r = r_3$  :  $u_{r,3} = u_{r,4}$  και  $u_{z,3} = u_{z,4}$  και άρα

$$C_3 = D_3 \quad (5.6.41)$$

$$C_1 + \frac{C_2}{r_3^2} = D_1 + \frac{D_2}{r_3^2} \quad (5.6.42)$$

Για  $r = r_4$  :  $u_{r,4} = u_{r,5}$  και  $u_{z,4} = u_{z,5}$  και άρα

$$D_3 = F_3 \quad (5.6.43)$$

$$D_1 + \frac{D_2}{r_4^2} = F_1 + \frac{F_2}{r_4^2} \quad (5.6.44)$$

Για  $r = r_5$  :  $u_{r,5} = \gamma_0 z \cos \theta$  και  $u_{z,5} = 0$  και άρα

$$F_3 = \gamma_0 \quad (5.6.45)$$

$$F_1 + \frac{F_2}{r_5^2} = 0 \quad (5.6.46)$$

Οι εξισώσεις (5.6.33)-( 5.6.46) αποτελούν ένα σύστημα 14 εξισώσεων με 14 αγνώστους του οποίου η λύση δίνει τις τιμές των σταθερών  $A_1, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, F_1, F_2, F_3$ . Οι τιμές αυτές θα προκύψουν ως συνάρτηση των σταθερών μεγεθών  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, \gamma_0$ , και των ακτινών  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ . Επειδή όμως με την αλλαγή της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος αλλάζουν και οι τιμές των ακτινών αλλά και των μέσων όρων των συναρτήσεων  $G_2(r)$  και  $G_4(r)$ , έπεται ότι και οι σταθερές  $A_1, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, F_1, F_2, F_3$  θα αλλάζουν επίσης.

Αρχικά, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι  $A_3=B_3= C_3= D_3= F_3=\gamma_0$

Λύνοντας το υπόλοιπο σύστημα βρίσκουμε ότι:

$$B_2 = -\gamma_0 \left( \frac{1-\gamma_3^*}{B_2^*+\alpha\mu_1} \right) \quad (5.6.47)$$

$$B_1 = B_2^* \left[ -\gamma_0 \left( \frac{1-\gamma_3^*}{B_2^*+\alpha\mu_1} \right) \right] - \gamma_0 \gamma_3^* \quad (5.6.48)$$

$$C_2 = \frac{\lambda_2\beta}{C_2^*+\beta\mu_2} \left[ -\gamma_0 \left( \frac{1-\gamma_3^*}{B_2^*+\alpha\mu_1} \right) \right] - \gamma_0 \left( \frac{1-\gamma_2^*}{C_2^*+\beta\mu_2} \right) \quad (5.6.49)$$

$$C_1 = C_2^* \left[ \frac{\lambda_2\beta}{C_2^*+\beta\mu_2} \left[ -\gamma_0 \left( \frac{1-\gamma_3^*}{B_2^*+\alpha\mu_1} \right) \right] - \gamma_0 \left( \frac{1-\gamma_2^*}{C_2^*+\beta\mu_2} \right) \right] - \gamma_0 \gamma_2^* \quad (5.6.50)$$

$$D_2 = \frac{\lambda_3 \gamma}{D_2^* + \gamma \mu_3} \left[ \frac{\lambda_2 \beta}{C_2^* + \beta \mu_2} \left[ -\gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_3^*}{B_2^* + \alpha \mu_1} \right) \right] - \gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_2^*}{C_2^* + \beta \mu_2} \right) \right] - \gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_1^*}{D_2^* + \gamma \mu_3} \right)$$

(5.6.51)

$$D_1 = D_2^* \left[ \frac{\lambda_3 \gamma}{D_2^* + \gamma \mu_3} \left[ \frac{\lambda_2 \beta}{C_2^* + \beta \mu_2} \left[ -\gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_3^*}{B_2^* + \alpha \mu_1} \right) \right] - \gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_2^*}{C_2^* + \beta \mu_2} \right) \right] - \gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_1^*}{D_2^* + \gamma \mu_3} \right) \right] - \gamma_o \gamma_1^*$$

(5.6.52)

$$F_2 = \frac{\lambda_4 \delta}{\delta \mu_4 - \varepsilon} \left[ \frac{\lambda_3 \gamma}{D_2^* + \gamma \mu_3} \left[ \frac{\lambda_2 \beta}{C_2^* + \beta \mu_2} \left[ -\gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_3^*}{B_2^* + \alpha \mu_1} \right) \right] - \gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_2^*}{C_2^* + \beta \mu_2} \right) \right] - \gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_1^*}{D_2^* + \gamma \mu_3} \right) \right] - \frac{\gamma_o}{\delta \mu_4 - \varepsilon}$$

(5.6.53)

$$F_1 = -\varepsilon \left[ \frac{\lambda_4 \delta}{\delta \mu_4 - \varepsilon} \left[ \frac{\lambda_3 \gamma}{D_2^* + \gamma \mu_3} \left[ \frac{\lambda_2 \beta}{C_2^* + \beta \mu_2} \left[ -\gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_3^*}{B_2^* + \alpha \mu_1} \right) \right] - \gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_2^*}{C_2^* + \beta \mu_2} \right) \right] - \gamma_o \left( \frac{1 - \gamma_1^*}{D_2^* + \gamma \mu_3} \right) \right] - \frac{\gamma_o}{\delta \mu_4 - \varepsilon} \right]$$

(5.6.54)

Όπου:

$$D_2^* = \frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}$$

και

$$\gamma_1^* = \frac{(\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>0</sup>

$$C_2^* = \frac{\lambda_3 \gamma \frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} + \frac{\lambda_3 \gamma^2}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} - \gamma$$

και

$$\gamma_2^* = \frac{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} \left[ 1 - \frac{(\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} \right]}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} + \gamma \left[ \frac{\left[ 1 - \frac{(\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} \right]}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} \right] + \frac{(\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}$$

$$B_2^* = \frac{\left[ \frac{\lambda_3 \gamma \frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} + \frac{\lambda_3 \gamma^2}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} - \gamma \right] \lambda_2 \beta}{\left[ \frac{\lambda_3 \gamma \frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} + \frac{\lambda_3 \gamma^2}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} - \gamma \right] + \beta \mu_2} + \frac{\lambda_2 \beta^2}{\left[ \frac{\lambda_3 \gamma \frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} + \frac{\lambda_3 \gamma^2}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} - \gamma \right] + \beta \mu_2}$$

$\beta$

και

$$\gamma_3^* = \frac{\left[ \frac{\lambda_3 \gamma \frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} + \frac{\lambda_3 \gamma^2}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} - \gamma \right] [1 - \gamma_2^*]}{\left[ \frac{\lambda_3 \gamma \frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} + \frac{\lambda_3 \gamma^2}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} - \gamma \right] + \beta \mu_2} + \frac{\beta [1 - \gamma_2^*]}{\left[ \frac{\lambda_3 \gamma \frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} + \frac{\lambda_3 \gamma^2}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} - \gamma \right] + \beta \mu_2} +$$

$$\frac{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} \left[ 1 - \frac{(\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} \right]}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} + \gamma \left[ \frac{\left[ 1 - \frac{(\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} \right]}{\frac{\lambda_4 \delta (\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon} + \gamma \mu_3} \right] + \frac{(\delta - \varepsilon)}{\delta \mu_4 - \varepsilon}$$

Οπου:

$$\alpha = \frac{1}{r_1^2}, \quad \beta = \frac{1}{r_2^2}, \quad \gamma = \frac{1}{r_3^2}, \quad \delta = \frac{1}{r_4^2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{r_5^2}$$

$$\text{και } \mu_1 = \frac{1 + \kappa_1}{1 - \kappa_1}, \quad \mu_2 = \frac{1 + \kappa_2}{1 - \kappa_2}, \quad \mu_3 = \frac{1 + \kappa_3}{1 - \kappa_3}, \quad \mu_4 = \frac{1 + \kappa_4}{1 - \kappa_4}$$

$$\text{και } \lambda_2 = \frac{2}{1 - \kappa_2}, \quad \lambda_3 = \frac{2}{1 - \kappa_3}, \quad \lambda_4 = \frac{2}{1 - \kappa_4}$$

$$\text{και } \kappa_1 = \frac{G_2}{G_1}, \quad \kappa_2 = \frac{G_3}{G_2}, \quad \kappa_3 = \frac{G_4}{G_3}, \quad \kappa_4 = \frac{G_5}{G_4}$$



Για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου διατμήσεως  $G_{LT}$  του σύνθετου υλικού, θεωρούμε ότι η **ενέργεια παραμόρφωσης** του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης και των πέντε φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Λαμβάνοντας υπόψη και την σχέση (5.6.31) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{V_c} G_{LT} \gamma_o^2 dV_c \\
 &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{rz,1} \gamma_{rz,1} + \sigma_{\theta z,1} \gamma_{\theta z,1}) dV_1 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{rz,2} \gamma_{rz,2} + \sigma_{\theta z,2} \gamma_{\theta z,2}) dV_2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{rz,3} \gamma_{rz,3} + \sigma_{\theta z,3} \gamma_{\theta z,3}) dV_3 + \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{rz,4} \gamma_{rz,4} + \sigma_{\theta z,4} \gamma_{\theta z,4}) dV_4 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{rz,5} \gamma_{rz,5} + \sigma_{\theta z,5} \gamma_{\theta z,5}) dV_5
 \end{aligned}
 \tag{5.6.55}$$

Όπου  $dV=2\pi r h dr d\theta$

Η παραπάνω σχέση (5.6.55) μετατρέπεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r_5} \int_0^{2\pi r_1} G_{LT} \gamma_o^2 2\pi r h dr d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r_1} \int_0^{2\pi r_2} (\sigma_{rz,1} \gamma_{rz,1} + \sigma_{\theta z,1} \gamma_{\theta z,1}) 2\pi r h dr d\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r_2} \int_0^{2\pi r_3} (\sigma_{rz,2} \gamma_{rz,2} + \sigma_{\theta z,2} \gamma_{\theta z,2}) 2\pi r h dr d\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r_3} \int_0^{2\pi r_4} (\sigma_{rz,3} \gamma_{rz,3} + \sigma_{\theta z,3} \gamma_{\theta z,3}) 2\pi r h dr d\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r_4} \int_0^{2\pi r_5} (\sigma_{rz,4} \gamma_{rz,4} + \sigma_{\theta z,4} \gamma_{\theta z,4}) 2\pi r h dr d\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r_5} \int_0^{2\pi r_5} (\sigma_{rz,5} \gamma_{rz,5} + \sigma_{\theta z,5} \gamma_{\theta z,5}) 2\pi r h dr d\theta
 \end{aligned}
 \tag{5.6.56}$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι  $\gamma = \sigma/G$  και αντικαθιστώντας στην σχέση (5.6.56) τις εκφράσεις των τάσεων  $\sigma_{rz}$  και  $\sigma_{\theta z}$  από τις σχέσεις (5.6.21)-(5.6.31) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi r_5} \int_0^{\theta} G_{LT} \gamma_o^2 r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi r_1} \int_0^{\theta} [G_1 (A_1 + \gamma_o)^2 (\cos \theta)^2 \\
 &+ G_2 (A_1 + \gamma_o)^2 (\sin \theta)^2] r dr d\theta \\
 &+ \int_0^{2\pi r_2} \int_{0r_1}^{\theta} \left[ G_2 \left( B_1 + \gamma_o - \frac{B_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 \right. \\
 &+ \left. G_2 \left( B_1 + \gamma_o + \frac{B_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
 &+ \int_0^{2\pi r_3} \int_{0r_2}^{\theta} \left[ G_3 \left( C_1 + \gamma_o - \frac{C_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 \right. \\
 &+ \left. G_3 \left( C_1 + \gamma_o + \frac{C_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
 &+ \int_0^{2\pi r_4} \int_{0r_3}^{\theta} \left[ G_4 \left( D_1 + \gamma_o - \frac{D_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 \right. \\
 &+ \left. G_4 \left( D_1 + \gamma_o + \frac{D_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
 &+ \int_0^{2\pi r_5} \int_{0r_4}^{\theta} \left[ G_5 \left( F_1 + \gamma_o - \frac{F_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 \right. \\
 &+ \left. G_5 \left( F_1 + \gamma_o + \frac{F_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta
 \end{aligned}$$

(5.6.57)

Εκτελώντας τις διπλές ολοκληρώσεις θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 G_{LT}\gamma_0^2 r_5^2 = & G_1 r_1^2 (A_1 + \gamma_0)^2 + G_2 (r_2^2 - r_1^2) \left[ (B_1 + \gamma_0)^2 + \frac{B_2^2}{r_1 r_2} \right] \\
 & + G_3 (r_3^2 - r_2^2) \left[ (C_1 + \gamma_0)^2 + \frac{C_2^2}{r_2 r_3} \right] \\
 & + G_4 (r_4^2 - r_3^2) \left[ (D_1 + \gamma_0)^2 + \frac{D_2^2}{r_4 r_3} \right] \\
 & + G_5 (r_5^2 - r_4^2) \left[ (F_1 + \gamma_0)^2 + \frac{F_2^2}{r_5 r_4} \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.6.58}$$

Διαιρούμε τέλος και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με  $r_5^2$  και  $\gamma_0$  (το  $\gamma_0$  απλοποιείται από όλες τις σταθερές  $A_1, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, F_1, F_2$ ) και προκύπτει η τελική έκφραση για το  $G_{LT}$  ως εξής:

$$\begin{aligned}
 G_{LT} = & G_1 U_1 (A_1 + 1)^2 + G_2 U_2 \left[ (B_1 + 1)^2 + \frac{B_2^2}{r_1 r_2} \right] \\
 & + G_3 U_3 \left[ (C_1 + 1)^2 + \frac{C_2^2}{r_2 r_3} \right] + G_4 U_4 \left[ (D_1 + 1)^2 + \frac{D_2^2}{r_4 r_3} \right] \\
 & + G_5 U_5 \left[ (F_1 + 1)^2 + \frac{F_2^2}{r_5 r_4} \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.6.59}$$

Όπου:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_5^2}$
- $U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_5^2}$
- $U_3 = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_5^2}$
- $U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_5^2}$
- $U_5 = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_5^2}$

## 5.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $E_\theta$ , $\nu_\theta$ & $G_\theta$ .

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τους θεωρητικούς τύπους για το μέτρο ελαστικότητας, το μέτρο διατμήσεως και το λόγο Poisson, υπό γωνία φόρτισης  $\theta$ . Η γωνία  $\theta$ , είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας φορτίσεως με την διεύθυνση των ινών. Οι σχέσεις που χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθες [30]:

Για το μέτρο ελαστικότητας  $E_\theta$  υπό γωνία φόρτισης  $\theta$  θα έχουμε:

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{1}{E_L} (\cos \theta)^4 + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) (\sin \theta)^2 (\cos \theta)^2 + \frac{1}{E_T} (\sin \theta)^4 \quad (5.7.1)$$

Για το μέτρο διατμήσεως  $G_\theta$  υπό γωνία φόρτισης  $\theta$  θα έχουμε:

$$\frac{1}{G_\theta} = 2 \left( \frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + \frac{4\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) (\sin \theta)^2 (\cos \theta)^2 + \frac{1}{G_{LT}} [ (\sin \theta)^4 + (\cos \theta)^4 ] \quad (5.7.2)$$

Για τον λόγο Poisson  $\nu_\theta$  υπό γωνία φόρτισης  $\theta$  θα έχουμε:

$$\nu_\theta = E_\theta \left[ \frac{\nu_{LT}}{E_L} [ (\sin \theta)^4 + (\cos \theta)^4 ] - \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) (\sin \theta)^2 (\cos \theta)^2 \right] \quad (5.7.3)$$

Στο επόμενο κεφάλαιο η εφαρμογή των εκφράσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω για τα  $E_\theta$ ,  $\nu_\theta$  και  $G_\theta$  θα γίνει για κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 0.39 [6] και άρα και τα μεγέθη  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  θα είναι υπολογισμένα στην συγκεκριμένη περιεκτικότητα.

## 5.8 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ POISSON ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Στη συνέχεια παραθέτουμε θεωρητικές σχέσεις που κατά καιρούς έχουν εκφράσει διάφοροι ερευνητές για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $E_L$ , του διαμήκη λόγου Poisson  $\nu_L$ , του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$  και του διαμήκους μέτρου διάτμησης  $G_{LT}$ . Να αναφέρουμε κατά τα γνωστά πως ο δείκτης  $f$  δηλώνει το έγκλεισμα (filler) ενώ ο δείκτης  $m$  δηλώνει την μήτρα (matrix).

### 5.8.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$

#### Εξίσωση Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου[27]:

Οι παραπάνω ερευνητές θεώρησαν την ύπαρξη μιας ενδιάμεσης φάσης η οποία δημιουργείται ανάμεσα στην μήτρα και στο έγκλεισμα. Το μοντέλο τους είναι κυλινδρικό τριφασικό και η κατανομή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης φάσης στον παρακάτω τύπο επιλέχθηκε να είναι η παραβολική.

$$\begin{aligned}
 E_L = E_f U_f + E_m U_m + & \frac{3(E_f + E_m)(1 - U_m)^{\frac{3}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}(1 - U_m) + U_f(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{3}{2}}}{6 \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \\
 & + \frac{8(E_f - E_m)(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - U_m + U_f + [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \right\}}{6 \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \\
 & + \frac{6 \left\{ E_f(1 - U_m) + E_m U_f - 2E_m [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}} \right] \right\}}{\left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]}
 \end{aligned}$$

(5.8.1)

Όπου εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης  $U_m = 1 - U_f - U_i$

**Νόμος των φάσεων(mixture law):**

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m \quad (5.8.2)$$

**Εξίσωση Ekvall [31]:**

$$E_L = E_f U_f + E_{m'} U_m \quad (5.8.3)$$

Όπου:  $E_{m'} = \frac{E_m}{(1-2\nu_m^2)}$

**5.8.2 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON  $\nu_{LT}$**

**Εξίσωση Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27]:**

Θεωρώντας και πάλι το κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση και χρησιμοποιώντας την παραβολική μεταβολή, οι παραπάνω ερευνητές δείξαν ότι ισχύει η εξής σχέση:

$$\begin{aligned} \nu_{LT} = \nu_f U_f + \nu_m U_m + & \frac{3(\nu_f + \nu_m)(1 - U_m)^{\frac{3}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}(1 - U_m) + U_f(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{3}{2}}}{6 \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \\ & + \frac{8(\nu_f - \nu_m)(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - U_m + U_f + [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \right\}}{6 \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \\ & + \frac{6 \left\{ \nu_f(1 - U_m) + \nu_m U_f - 2\nu_m [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}} \right] \right\}}{\left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

Όπου εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης  $U_m = 1 - U_f - U_i$

**Νόμος των φάσεων(mixture law):**

$$v_{LT} = v_f U_f + v_m U_m \quad (5.8.5)$$

**Εξίσωση Rosen [32]:**

$$v_{LT} = \frac{U_f E_f L_1 + U_m E_m L_2 v_m}{U_f E_f L_3 + U_m E_m L_2} \quad (5.8.6)$$

Όπου:

$$L_1 = 2v_f(1 - v_m^2)U_f + v_m(1 + v_m)U_m$$

$$L_2 = U_f(1 - v_f - 2v_f^2)$$

$$L_3 = 2(1 - v_m^2)U_f + (1 + v_m)U_m$$

**5.8.3 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ  $E_T$**

**Εξίσωση Σιδερίδη [28]:**

Θεωρώντας την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης στο κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο και έστω ότι  $E_i(r)$  και  $v_i(r)$  οι συναρτήσεις που περιγράφουν το μέτρο ελαστικότητας και τον λόγο Poisson της ενδιάμεσης φάσης αντίστοιχα με βάση την παραβολική μεταβολή, τότε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του μοντέλου  $E_T$  θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1 - v_{TT}}{E_T} - \frac{2v_{LT}^2}{E_L} &= \frac{1}{E_f}(1 - v_f - 2v_f^2)U_f + \frac{1}{E_m}(1 - v_m - 2v_m^2)U_m \\ &+ \frac{2U_f}{a^2} \int_a^b \frac{(1 - v_i(r) - 2v_i^2(r))}{E_i(r)} r dr \end{aligned} \quad (5.8.7)$$

Όπου τα  $E_L$  και τα  $\nu_{LT}$  δίνονται από τις σχέσεις (5.8.1) και (5.8.4). Και εδώ πάλι λόγω της ενδιάμεσης φάσης θα ισχύει ότι  $U_m = 1 - U_f - U_i$

**Εξίσωση Paul [33]:**

Η εξίσωση του Paul αποτελεί ένα ελάχιστο όριο για το  $E_T$  και είναι η εξής:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{U_f}{E_f} + \frac{U_m}{E_m} \quad (5.8.8)$$

**Εξίσωση Whitney-Riley [34]:**

$$E_T = \frac{2K_c(1-\nu_T)E_L}{E_L + 4K_c\nu_L^2} \quad (5.8.9)$$

Όπου  $K_c$  το μέτρο διογκώσεως του σύνθετου και ισχύει η σχέση:

$$K_c = \frac{(k_f + G_m)k_m - (k_f - k_m)G_m U_f}{(k_f + G_m) - (k_f - k_m)U_f}$$

με

$$k_f = \frac{E_f}{(1-\nu_f-2\nu_f^2)} \quad , \quad k_m = \frac{E_m}{(1-\nu_m-2\nu_m^2)}$$

**Εξίσωση Ekvall [35]:**

$$E_T = \frac{E_f E_m'}{U_f E_m' + U_m E_f (1-\nu_m^2)} \quad (5.8.10)$$

Όπου  $E_m' = \frac{E_m}{1-2\nu_m^2}$



**5.8.4 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ  $G_{LT}$** **Εξίσωση Σιδερίδη [29]:**

Θεωρείται από τον ερευνητή το τριφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση, όπου με  $G_i(r)$  συμβολίζεται το διάμηκες μέτρο διατμήσεως της ενδιάμεσης φάσης το οποίο περιγράφεται με την παραβολική μεταβολή. Το διάμηκες μέτρο διατμήσεως  $G_{LT}$  θα είναι:

$$\begin{aligned}
 G_{LT}\gamma_o &= G_f(A + \gamma_o)^2 U_f \\
 &+ \frac{2U_f}{a^2} \int_a^b G_i(r)(D + \gamma_o)^2 r dr \\
 &+ G_m \left[ (K + \gamma_o)^2 + \frac{K^2}{1 - U_m} \right] U_m
 \end{aligned}
 \tag{5.8.11}$$

Όπου

$$A = D = \frac{(G_m - G_i)(c^2 - b^2)}{(G_m + G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2} \gamma_o, \quad K = \frac{(G_i - G_m)b^2}{(G_m + G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2} \gamma_o$$

$$\text{και } U_m = 1 - U_f - U_i$$

**Νόμος των φάσεων(mixture law):**

$$G_{LT} = \frac{G_f G_m}{G_f U_m + G_m U_f}
 \tag{5.8.12}$$

**Εξίσωση Hashin-Rosen [38]:**

Οι Hashin και Rosen έδωσαν μια έκφραση η οποία αποτελεί ένα κάτω όριο για το  $G_{LT}$  και είναι η εξής:

$$G_{LT} = G_m \frac{(1+U_f)G_f + G_m U_m}{(1+U_f)G_m + G_f U_m} \quad (5.8.13)$$

**Εξίσωση Hashin [39]:**

Ο Hashin έδωσε επίσης μια έκφραση που αποτελεί ένα άνω όριο για το  $G_{LT}$ :

$$G_{LT} = G_f \frac{(1+U_m)G_m + G_f U_f}{(1+U_m)G_f + G_m U_f} \quad (5.8.14)$$

**Εξίσωση Ekvall-Greszczuk [36],[37]:**

$$G_{LT} = \frac{G_m G_f}{G_f U_m + G_m U_f} \quad (5.8.15)$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6:ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

---

## 6.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ, ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson, μέσω των θεωρητικών σχέσεων που εξήχθησαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα “*Microsoft Excel 2007*”. Στο υπολογιστικό φύλλο του “*Microsoft Excel*” δημιουργήθηκε μια κύρια γραμμή με τις επιτρεπτές κατ’ όγκο περιεκτικότητες  $U_f$  του εγκλείσματος και με βάση αυτή την γραμμή υπολογίστηκαν οι υπόλοιποι τύποι με την χρήση συναρτήσεων και την δυνατότητα συσχέτισης μεταξύ των κελιών από το πρόγραμμα. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και λόγων Poisson του σύνθετου υλικού, με βάση το κυλινδρικό πενταφασικό μοντέλο, για κάθε διαφορετική περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

Οι υπολογισμοί των ορισμένων ολοκληρωμάτων, της θεωρητικής σχέσης (5.4.87) (σελ.114) για την εύρεση του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$ , και της θεωρητικής σχέσης (5.5.2) (σελ.115) για τον προσδιορισμό του εγκάρσιου λόγου Poisson  $\nu_{TT}$ , έγιναν μέσω του προγράμματος “*Matlab 2010*”.

Τα υλικά των οποίων τα στοιχεία έχουν χρησιμοποιηθεί σ’ αυτήν την μελέτη για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson από τους θεωρητικούς τύπους που εξήχθησαν στο κεφάλαιο 5, είναι ινώδη σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης τα οποία κατασκευάστηκαν στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. Τα υλικά αυτά αποτελούνται από μία εποξειδική μήτρα(Permaglass XE5/1, Permali Ltd., U.K) ενισχυμένη με συνεχείς ίνες γυαλιού τύπου-E. Το υλικό της μήτρας βασίστηκε σε διγλυκιδυλαιθέρα της δισφαινόλης A, συνδυασμένο με σκληρυντή από αρωματική αμίνη(Araldite My 750/HT972, Ciba-Geigy, U.K). Οι ίνες γυαλιού είχαν διάμετρο  $1,2 \times 10^{-5}$  m . Οι τιμές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson της μήτρας αλλά και των ινών γυαλιού που χρησιμοποιήθηκαν δίνονται στον **Πίνακα ΑΑ**.

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E(GPa)	Λόγος Poisson $\nu$	Μέτρο διατμήσεως G(GPa)
Εποξ. Ρητίνη	3.5	0.35	1.29
Υαλος	72	0.20	30

Πίνακας ΑΑ

## 6.2 ΠΙΝΑΚΕΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα παραθέσουμε τις τιμές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα, έτσι όπως υπολογίστηκαν από την εφαρμογή των τύπων, τους οποίους εξαγάγαμε εμείς βάσει του πενταφασικού κυλινδρικού μοντέλου μας. Επίσης θα παραθέσουμε τιμές που υπολογίστηκαν από άλλους ερευνητές βάσει των δικών τους μοντέλων(Πίνακες ΕΕ,FF,GG,ΗΗ), όπως επίσης και πειραματικές τιμές δεδομένων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία.(Πίνακες ΙΙ,ΙΙ,ΚΚ,ΛΛ).

Πιο συγκεκριμένα, στο **Πίνακα ΒΒ** παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι τιμές των ελαστικών σταθερών, των λόγων Poisson, των κατ' όγκο περιεκτικοτήτων όλων των φάσεων καθώς και των ακτίνων τους, που εξήχθησαν βάσει του κυλινδρικού πενταφασικού μοντέλου. Να σημειώσουμε εδώ ότι στο **Πίνακα ΒΒ** παραθέτεται και το  $\lambda$  που είναι το μήκος της πλευράς του εσωτερικού τετραγωνικού πρίσματος του δομικού «κυττάρου» μας, πριν το αναγάγουμε σε κυλινδρικό(βλέπε σελ. 56).

Στο **Πίνακα CC** παραθέτουμε τις τιμές των σταθερών(συναρτήσσει του  $\gamma_o$ ) που υπολογίσαμε κατά την λύση του συστήματος για την εύρεση του θεωρητικού τύπου του διαμήκους μέτρου διατμήσεως  $G_L$  βάσει του πενταφασικού μοντέλου μας(βλέπε σελ. 123, σελ. 124).

Στο **Πίνακα DD** παραθέτουμε τις τιμές του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διατμήσεως και του λόγο Poisson, υπό γωνία φόρτισης  $\theta$ (από  $0^\circ$  μέχρι  $90^\circ$ ), σε 0.39 κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Οι τιμές υπολογίστηκαν από τους θεωρητικούς τύπους στην ενότητα 5.7 του προηγούμενου κεφαλαίου.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το  $E_L$ , που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα ΙΙ** και έχουν αντληθεί από τις πηγές [40],[41],[42] της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε αυτόν ως ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ Ι.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το  $\nu_{LT}$ , που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα ΙΙ** και έχουν αντληθεί από τις πηγές [41],[43] της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε αυτόν ως ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ Ι, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΙ αντίστοιχα.

Και τέλος τα πειραματικά αποτελέσματα για το  $E_\theta$ ,  $\nu_\theta$ ,  $G_\theta$  που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα DD** και έχουν αντληθεί από την πηγή [6] της βιβλιογραφίας, για περιεκτικότητα εγκλείσματος 39%, αναφέρονται σε αυτόν ως  $E_\theta$  ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ,  $\nu_\theta$  ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ,  $G_\theta$  ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.

κατ' όγκο περιεκτικότη τα εγκλείσματο ς $U_f$	ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ			
	10%	20%	30%	39%
$U_1$	0.14604	0.09565	0.04539	0.00121
$U_2$	0.00020	0.00059	0.00085	0.00003
$U_3$	0.09998	0.19996	0.29991	0.39000
$U_4$	0.00096	0.00431	0.00479	0.01864
$U_5$	0.75279	0.69946	0.64897	0.59010
$\lambda(\mu m)$	33.630	23.780	19.416	17.025
$r_1(\mu m)$	14.502	8.2989	4.6679	0.6688
$r_2(\mu m)$	14.512	8.3246	4.7116	0.6793
$r_3(\mu m)$	18.830	14.604	12.891	12.019
$r_4(\mu m)$	18.867	14.710	12.980	12.302
$r_5(\mu m)$	37.947	26.832	21.908	19.215
$E_L(GPa)$	10.37	17.20	24.03	30.15
$\nu_{LT}$	0.333	0.320	0.300	0.283
$\nu_{TT}$	0.331	0.305	0.287	0.274
$E_T(GPa)$	5.30	6.71	7.92	9.50
$G_{LT}(GPa)$	1.80	2.13	2.47	2.90

Πίνακας BB

<b>ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ <math>G_{LT}</math></b>				
$U_f$	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>39%</b>
$A_1(x \gamma_0)$	-0.48369	-0.68849	-0.49013	-0.53629
$B_1(x \gamma_0)$	-0.75525	-0.90948	-0.6928	-0.7363
$B_2(x \gamma_0)$	1.44E-10	4.82E-11	2.27E-11	1.33E-11
$C_1(x \gamma_0)$	-0.68871	-0.9289	-0.7112	-0.75548
$C_2(x \gamma_0)$	1.46E-10	5.23E-11	2.49E-11	1.47E-11
$D_1(x \gamma_0)$	-0.60965	-0.82384	-0.58634	-0.60917
$D_2(x \gamma_0)$	9.4E-11	1.50E-11	-7.05E-12	-1.59E-11
$F_1(x \gamma_0)$	0.369224	0.777215	0.760609	1.058681
$F_2(x \gamma_0)$	-5.3E-10	-4.39E-10	-3.85E-10	-3.79E-10

Πίνακας G

<b>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΧΕΣΕΩΝ <math>E_\theta, \nu_\theta, G_\theta</math></b>			
$(\theta^\circ)$	$E_\theta$	$\nu_\theta$	$G_\theta$
0	30.12	0.2907	2.90
5	28.49	0.3152	2,94
10	24.50	0.3707	3.09
15	20.12	0.4297	3.35
20	16.42	0.4762	3.73
25	13.60	0.5050	4.25
30	11.58	0.5185	4.89
35	10.18	0.5192	5.57
40	9.23	0.5083	6.12
45	8.62	0.4869	6.34
50	8.27	0.4554	6.12
55	8.15	0.4157	5.57
60	8.18	0.3662	4.89
65	8.35	0.3101	4.25
70	8.62	0.2500	3.73
75	8.93	0.1907	3.35
80	9.22	0.1395	3.09
85	9.44	0.1044	2.94
90	9.52	0.0919	2.90

Πίνακας H

<b>ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ <math>E_L</math> (GPa)</b>					
<b><math>U_f</math></b> (ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΕ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑ)	<b>0%</b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>39%</b>
<b>ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚ. σχ.(5.8.1)</b>	3.50	10.37	17.20	24.03	30.15
<b>ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ σχ.(5.8.2)</b>	3.50	10.34	17.18	24.01	30.14
<b>ΕΚΒΑΛΛ σχ.(5.8.3)</b>	4.64	11.36	18.08	24.79	30.82
<b>ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ σχ(5.2.80)</b>	<b>3.50</b>	<b>10.37</b>	<b>17.20</b>	<b>24.03</b>	<b>30.15</b>

Πίνακας ΕΕ

<b>ΛΟΓΟΣ POISSON <math>\nu_{LT}</math></b>					
<b><math>U_f</math></b> (ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ Α ΣΕ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑ)	<b>0%</b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>39%</b>
<b>ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚ. σχ.(5.8.4)</b>	0.350	0.333	0.320	0.300	0.283
<b>ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ σχ.(5.8.5)</b>	0,350	0.334	0.318	0.301	0.285
<b>ROSEN σχ.(5.8.6)</b>	0,350	0.331	0.313	0.296	0.281
<b>ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ σχ(5.3.6)</b>	<b>0.350</b>	<b>0.333</b>	<b>0.320</b>	<b>0.300</b>	<b>0.283</b>

Πίνακας FF

<b>ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ <math>E_T</math> (GPa)</b>					
<b><math>U_f</math></b> <i>(ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤ Α ΣΕ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑ)</i>	<b>0%</b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>39%</b>
<b>ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ</b> σχ.(5.8.7)	3.50	5.30	6.52	7.88	9.47
<b>PAUL-LOWER BOUND</b> σχ.(5.8.8)	3.50	3.87	4.32	4.90	5.73
<b>WHITNEY-RILEY</b> σχ.(5.8.9)	3.50	5.13	6.08	6.98	8.1
<b>ΕΚVALL</b> σχ.(5.8.10)	4.64	5.12	5.70	6.45	7.49
<b>ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ</b> σχ(5.4.87)	<b>3.50</b>	<b>5.30</b>	<b>6.71</b>	<b>7.92</b>	<b>9.50</b>

Πίνακας GG

<b>ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ <math>G_{LT}</math> (GPa)</b>					
<b><math>U_f</math></b> <i>(ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤ Α ΣΕ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑ)</i>	<b>0%</b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>39%</b>
<b>ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ</b> σχ.(5.8.11)	1.30	1.55	1.92	2.30	2.90
<b>ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ</b> σχ.(5.8.12)	1.30	4.16	7.03	9.90	12.77
<b>ΕΚVALL-GRESZCZUK</b> σχ.(5.8.15)	1.30	1.43	1.60	1.81	2.10
<b>HASHIN-ROSEN</b> σχ.(5.8.13)	1.30	1.55	1.87	2.28	2.80
<b>HASHIN</b> σχ(5.8.14)	1.30	2.86	4.60	6.53	8.70
<b>ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ</b> σχ.(5.6.54)	<b>1.29</b>	<b>1.80</b>	<b>2.13</b>	<b>2.47</b>	<b>2.90</b>

Πίνακας ΗΗ



<b>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ <math>E_L</math> (GPa)</b>					
<b><math>U_f</math> (ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗ ΤΑ ΣΕ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑ)</b>	<b>0%</b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>40%</b>
<b>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I</b>	3.50	10.36	17.22	26.07	30.92

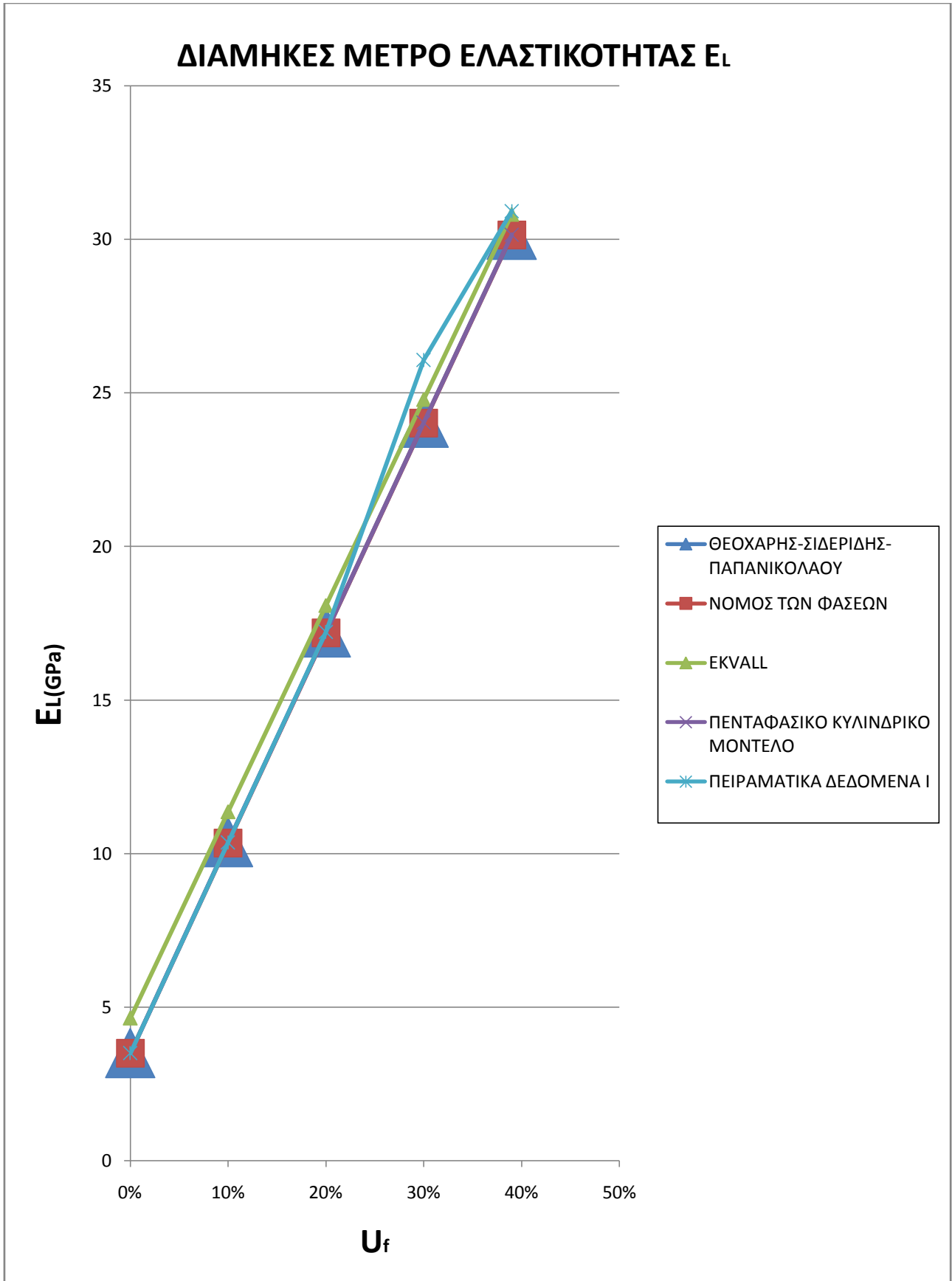
Πίνακας II

<b>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ <math>\nu_{LT}</math> (GPa)</b>					
<b><math>U_f</math> (ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗ ΤΑ ΣΕ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑ)</b>	<b>0%</b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>40%</b>
<b>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I</b>	0.350	0.332	0.315	0.300	0.286
<b>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II</b>	0.350	0.330	0.320	-	-

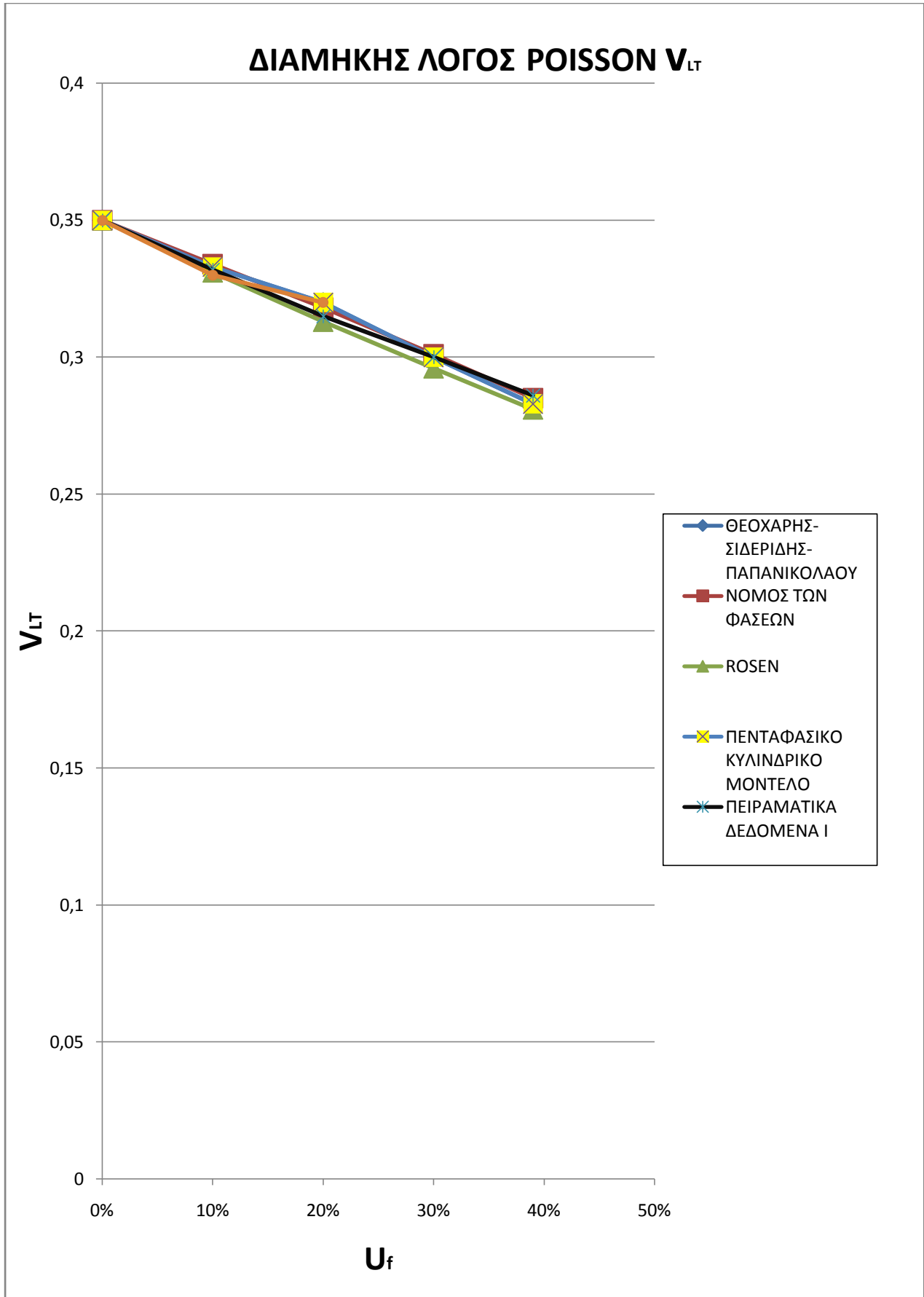
Πίνακας JJ

### 6.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

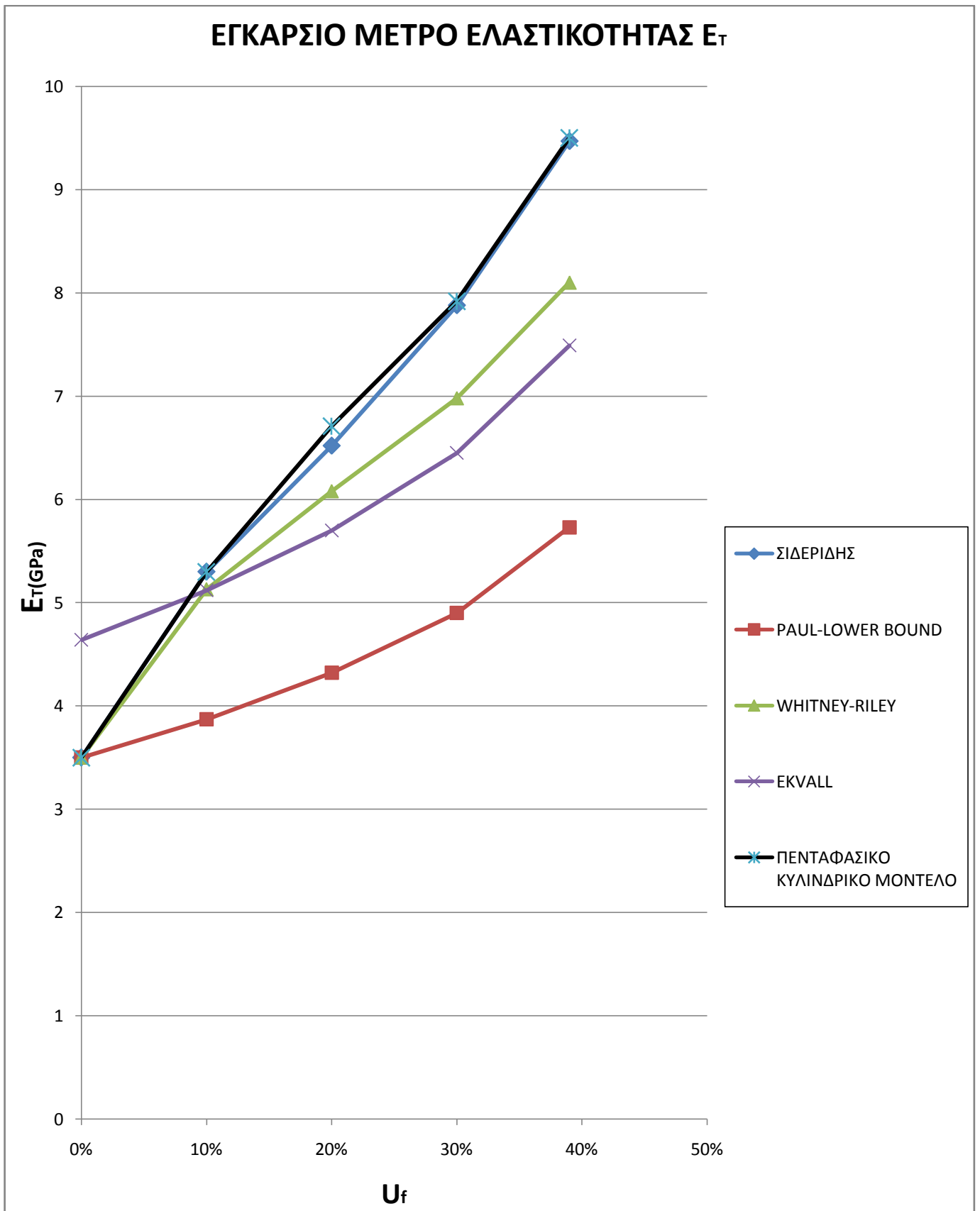
Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα με τις τιμές των διάφορων μοντέλων για τις ελαστικές σταθερές και τους λόγους Poisson. Κάθε μοντέλο απεικονίζεται με μία γραμμή διαφορετικού χρώματος. Στο τέλος της ενότητας ακολουθούν, ένας συγκεντρωτικός πίνακας με τις τιμές που εξήχθησαν από το πενταφασικό μας μοντέλο των  $E_\theta$ ,  $G_\theta$ ,  $\nu_\theta$  και τις πειραματικές τιμές αυτών, και τα τρία διαγράμματα των  $E_\theta$ ,  $G_\theta$ ,  $\nu_\theta$ , για κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 39%, και οι πειραματικές τιμές αυτών. Τέλος με την βοήθεια των διαγραμμάτων, η σύγκριση των μοντέλων μεταξύ τους αλλά και με τις πειραματικές τιμές θα είναι πιο εύκολη και περισσότερο κατανοητή.



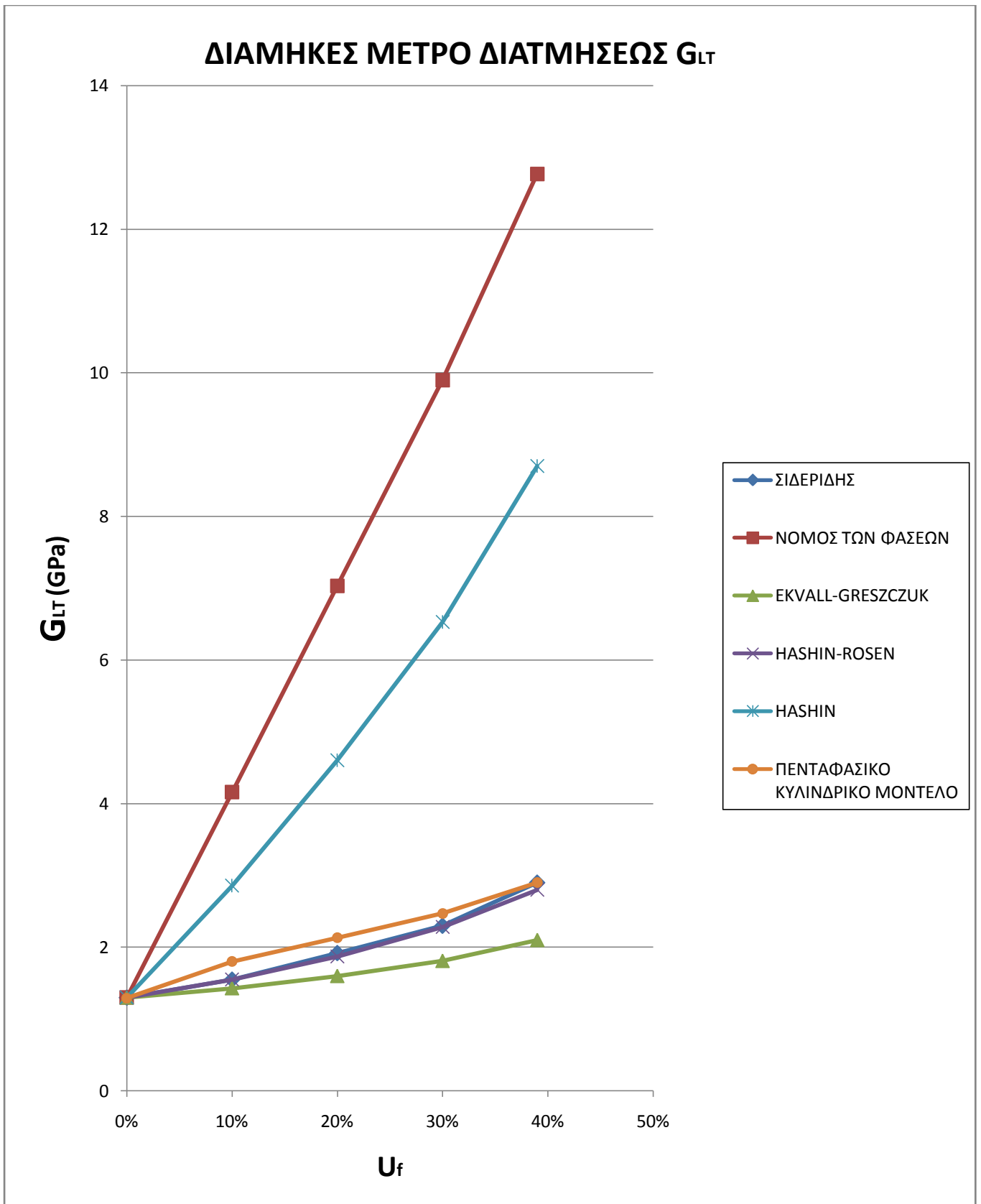
Διάγραμμα Ι



Διάγραμμα Π



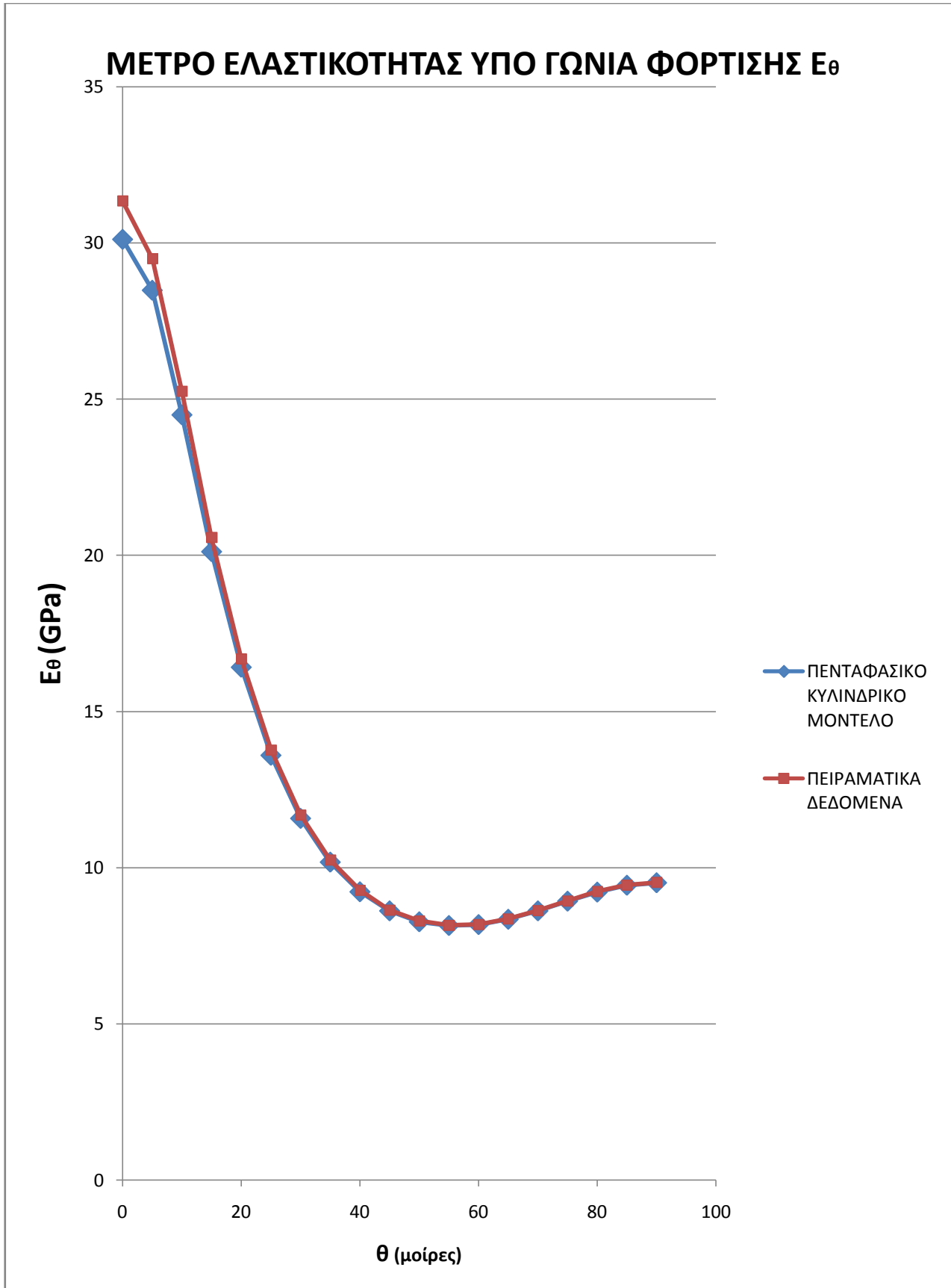
Διάγραμμα III



Διάγραμμα IV

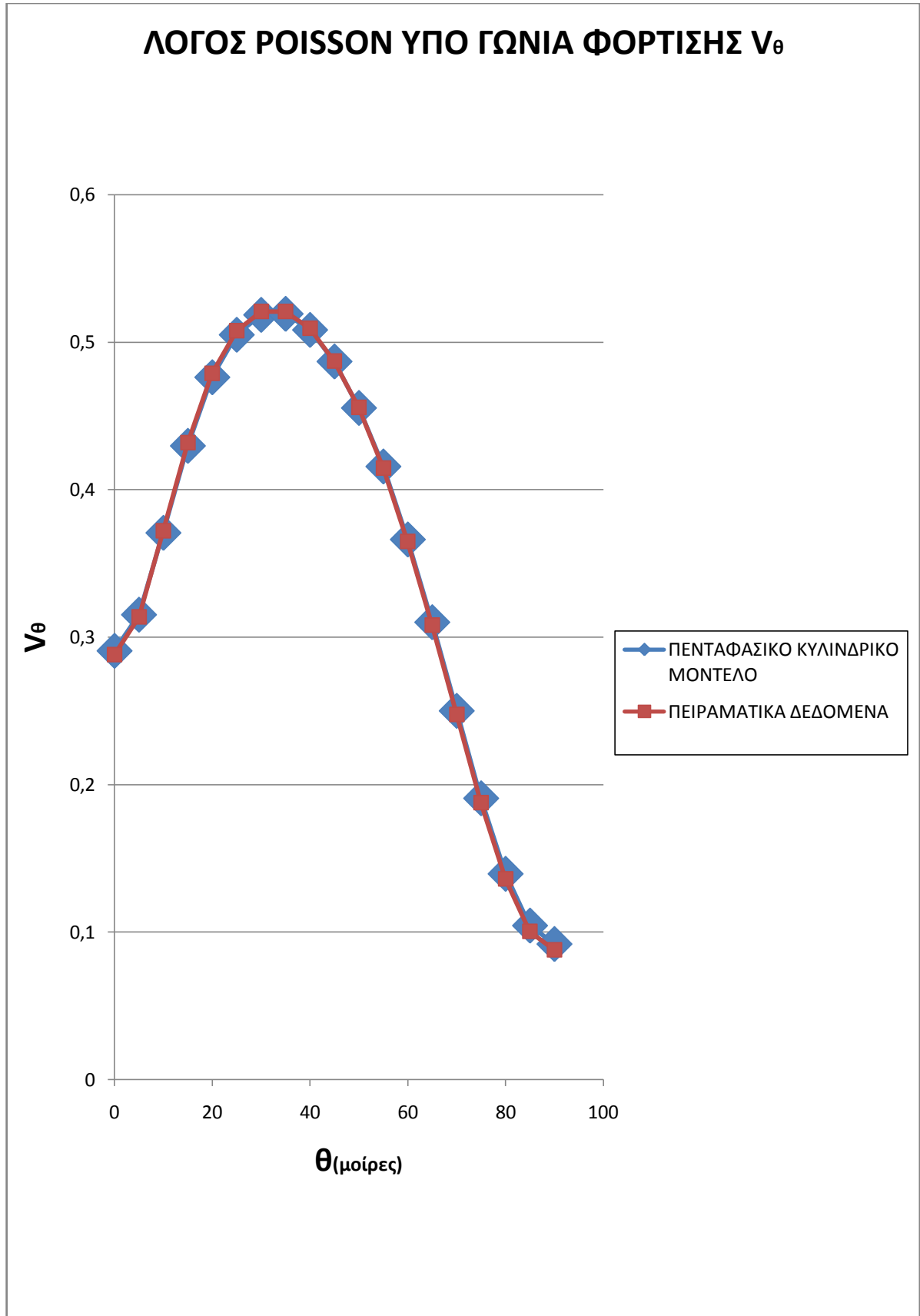
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΧΕΣΕΩΝ $E_{\theta}$ , $\nu_{\theta}$ , $G_{\theta}$						
$(\theta^{\circ})$	$E_{\theta}$	$\nu_{\theta}$	$G_{\theta}$	$E_{\theta}$ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ	$\nu_{\theta}$ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ	$G_L$ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ
0	30.12	0.2907	2.90	31.34	0.2885	2.91
5	28.49	0.3152	2,94	29.49	0.3137	2.95
10	24.50	0.3707	3.09	25.25	0.3719	3.10
15	20.12	0.4297	3.35	20.57	0.4318	3.37
20	16.42	0.4762	3.73	16.69	0.4786	3.76
25	13.60	0.5050	4.25	13.77	0.5075	4.29
30	11.58	0.5185	4.89	11.69	0.5207	4.94
35	10.18	0.5192	5.57	10.25	0.5207	6.00
40	9.23	0.5083	6.12	9.28	0.5094	6.21
45	8.62	0.4869	6.34	8.65	0.4871	6.43
50	8.27	0.4554	6.12	8.30	0.4556	6.21
55	8.15	0.4157	5.57	8.16	0.4146	5.64
60	8.18	0.3662	4.89	8.19	0.3648	4.94
65	8.35	0.3101	4.25	8.36	0.3081	4.29
70	8.62	0.2500	3.73	8.63	0.2475	3.76
75	8.93	0.1907	3.35	8.94	0.1877	3.37
80	9.22	0.1395	3.09	9.24	0.1361	3.10
85	9.44	0.1044	2.94	9.45	0.1005	2.95
90	9.52	0.0919	2.90	9.53	0.0879	2.91

Πίνακας ΚΚ



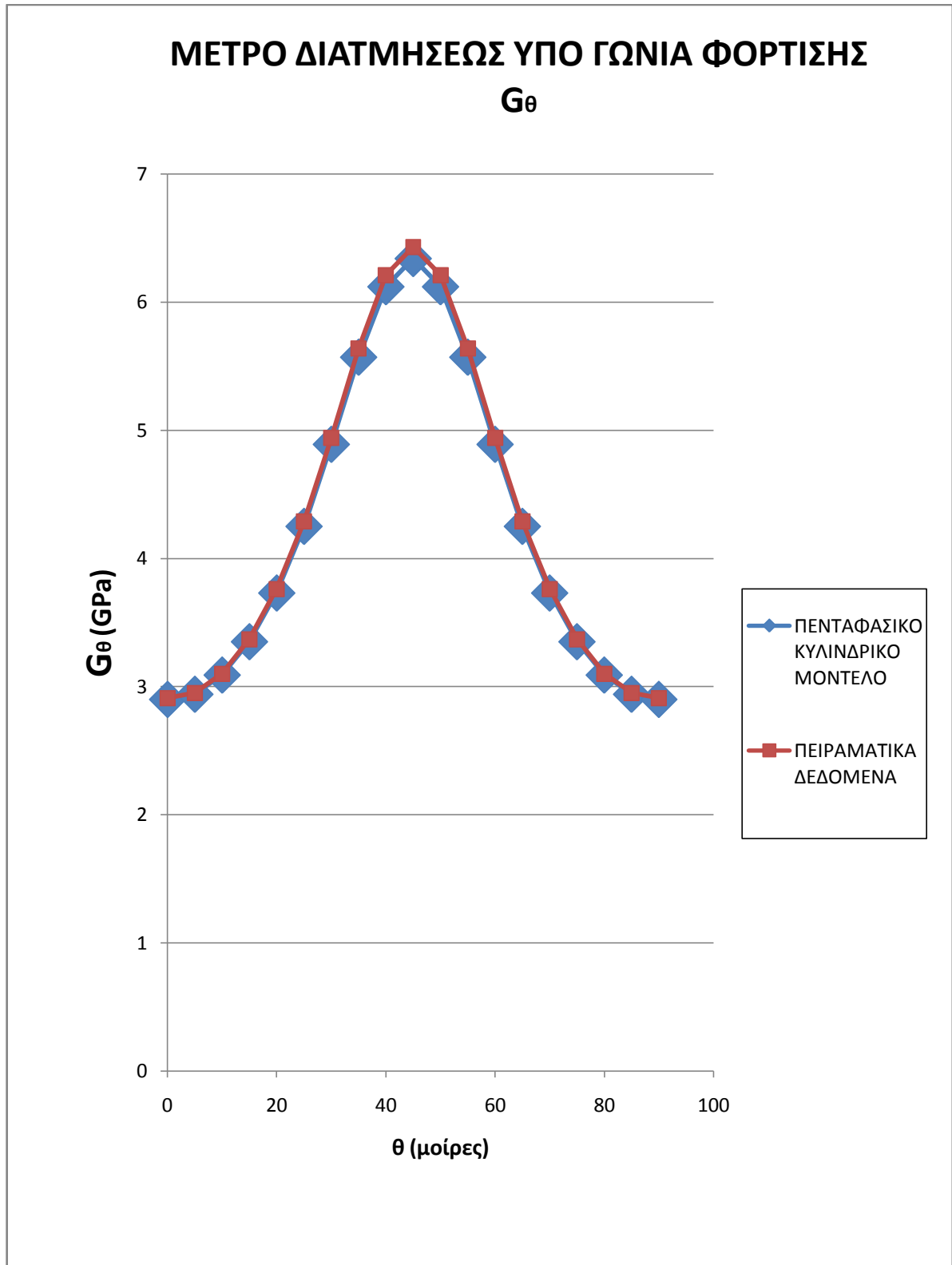
Διάγραμμα V

CC



Διάγραμμα VI





Διάγραμμα VII

## 6.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αρχικά να αναφέρουμε ότι η απόκλιση των τιμών των ελαστικών σταθερών αλλά και των λόγων Poisson, που εξήχθησαν από το πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο μας, σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των εγκλεισμάτων μέσα στη ρητίνη στην πραγματικότητα είναι ανομοιογενής και τυχαία και όχι ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει.
2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φουσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ.)
3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.
4. Το θεωρητικό μοντέλο μας προβλέπει τέλεια γεωμετρικά σχήματα (κυλινδρικές ίνες) ενώ στην πραγματικότητα η επιφάνεια των εγκλεισμάτων είναι ανώμαλη και τραχεία και το μέγεθος τους διαφορετικό.
5. Η ευθυγράμμιση των ινών που είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί κατά την διάρκεια του υλικού των δοκιμίων.

Κατά τα άλλα παρατηρούμε ότι σε γενικά πλαίσια το μοντέλο μας ανταποκρίνεται αρκετά καλά στην πραγματικότητα και οι τιμές που εξήχθησαν από αυτό, προσεγγίζουν ιδανικά τα πειραματικά δεδομένα στις περισσότερες των περιπτώσεων. Πιο αναλυτικά έχουμε:

### ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$

Από το **Διάγραμμα X** διαπιστώνουμε μια ταύτιση της καμπύλης του πενταφασικού κυλινδρικού μοντέλου μας με τις άλλες θεωρητικές καμπύλες.

Τα αποτελέσματα που εξάγονται από το πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο μας μπορούν να χαρακτηριστούν ιδιαίτερα ικανοποιητικά, αφού τα πειραματικά σημεία προσεγγίζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τα αποτελέσματα των θεωρητικών τύπων του μοντέλου μας σε όλο το εύρος των διαφόρων περιεκτικότητων.

**ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΛΟΓΟΣ POISSON  $\nu_{LT}$** 

Τα αποτελέσματα της εφαρμογής του πενταφασικού κυλινδρικού μοντέλου μας για τον υπολογισμό του  $\nu_{LT}$  ταυτίζονται με τις θεωρητικές καμπύλες του νόμου των φάσεων και των ερευνητών Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου, όπως φαίνεται και στο **Διάγραμμα XI**, για περιεκτικότητα σε έγκλεισμα μέχρι 20%. Για μεγαλύτερες περιεκτικότητες το μοντέλο μας δίνει ελάχιστα μεγαλύτερες τιμές από τις υπόλοιπες θεωρητικές καμπύλες. Σε γενικά πλαίσια το μοντέλο μας πετυχαίνει πολύ καλή προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων και μπορούμε να πούμε ότι τα πειραματικά δεδομένα προσεγγίζονται ίσως ελάχιστα καλύτερα από το δικό μας μοντέλο από ότι με τις υπόλοιπες θεωρητικές καμπύλες.

**ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ  $E_T$** 

Από το **Διάγραμμα XII** παρατηρούμε ότι η θεωρητική καμπύλη του μοντέλου μας μέχρι και 39% της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα αποκλίνει ελάχιστα από την θεωρητική καμπύλη του ερευνητού Σιδερίδη. Σε σχέση με τις θεωρητικές καμπύλες των υπόλοιπων ερευνητών παρατηρούμε αυξημένες τιμές της θεωρητικής μας καμπύλης κυρίως από το 10% της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα και πέρα.

**ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ  $G_{LT}$** 

Σε ό,τι αφορά το  $G_{LT}$ , από την μελέτη του **Διαγράμματος XIII** διαπιστώνουμε μερική ταύτιση των θεωρητικών καμπυλών των ερευνητών Hashin-Rosen και Σιδερίδη με την θεωρητική καμπύλη του δικού μας μοντέλου μέχρι και τις περιεκτικότητες 39% σε έγκλεισμα. Η θεωρητική καμπύλη του Hashin και του νόμου των φάσεων αποκλίνουν αρκετά από τις άλλες καμπύλες, το οποίο σημαίνει (κυρίως για τον νόμο των φάσεων) μη ρεαλιστική προσέγγιση και προσδιορισμός του μέτρου διατμήσεως  $G_{LT}$ .

**ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ  $E_\theta$** 

Αρχικά να πούμε ότι η καμπύλη του **Διαγράμματος XIV** είναι σχεδιασμένη για περιεκτικότητα εγκλείσματος 39%. Από το διάγραμμα αυτό διαπιστώνουμε μια ραγδαία πτώση της τιμής του μέτρου ελαστικότητας στο διάστημα από 0° μέχρι 30° για να ακολουθήσει μετά μια ομαλή πτώση μέχρι την τιμή των 50° περίπου. Ύστερα η καμπύλη σταθεροποιείται μέχρι και τις 60° για να κλείσει με μια μικρή άνοδο μέχρι και τις 90°. Να αναφέρουμε εδώ ότι οι ακραίες τιμές της καμπύλης που λαμβάνονται για τις τιμές 0° και 90° αντιστοιχούν, όπως ήταν αναμενόμενο, στις τιμές του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $E_L$ , και εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$  αντίστοιχα. Τέλος τα πειραματικά δεδομένα μας προσεγγίζονται αρκετά καλά με την θεωρητική καμπύλη του πενταφασικού μας μοντέλου σε όλο το φάσμα των μοιρών.

**ΛΟΓΟΣ POISSON ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ  $v_{\theta}$**

Ο λόγος Poisson , όπως προκύπτει από το **Διάγραμμα XV** παρουσιάζει αρχική αύξηση μέχρι τις  $35^{\circ}$  περίπου. Σε αυτό το σημείο η καμπύλη παρουσιάζει μέγιστο και έπειτα ακολουθεί μια συνεχής μείωση της τιμής του  $v_{\theta}$  μέχρι που ελαχιστοποιείται στην τιμή των  $90^{\circ}$ . Τα πειραματικά σημεία παρουσιάζουν μια ομοιομορφία στην πορεία τους σε σχέση με την θεωρητική καμπύλη μας .

**ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ  $G_{\theta}$**

Από το **Διάγραμμα XVI** παρατηρούμε αρχικά μια πλήρη συμμετρία της θεωρητικής καμπύλης μας ως προς τον άξονα  $x = 45^{\circ}$ . Από  $0^{\circ}$  έως  $45^{\circ}$  η καμπύλη μας είναι αύξουσα με μέγιστο στο σημείο  $x=45^{\circ}$  και από  $45^{\circ}$  μέχρι και τις  $90^{\circ}$  η καμπύλη μας φθίνει. Τα πειραματικά μας σημεία ακολουθούν και αυτά μια συμμετρία παράλληλη με αυτήν της καμπύλης μας.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΙΝΩΔΟΥΣ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

## 7.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $a_L$

Θεωρούμε το πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο όπως το περιγράψαμε στην **ενότητα 5.1**. Με την χρήση της θεωρίας της αντοχής των υλικών θα εξάγουμε έναν θεωρητικό τύπο για τον υπολογισμό του διαμήκους συντελεστού θερμικής διαστολής  $a_L$ .

Από τη βιβλιογραφία [53] γνωρίζουμε τις τιμές των συντελεστών θερμικής διαστολής ανάλογα το υλικό του εγκλείσματος και της μήτρας που θα χρησιμοποιήσουμε. Έχουμε λοιπόν:

Υλικό	Ύαλος	Εποξ. Ρητίνη
Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha \times 10^{-6} (^{\circ}\text{C}^{-1})$	5,0	52,5

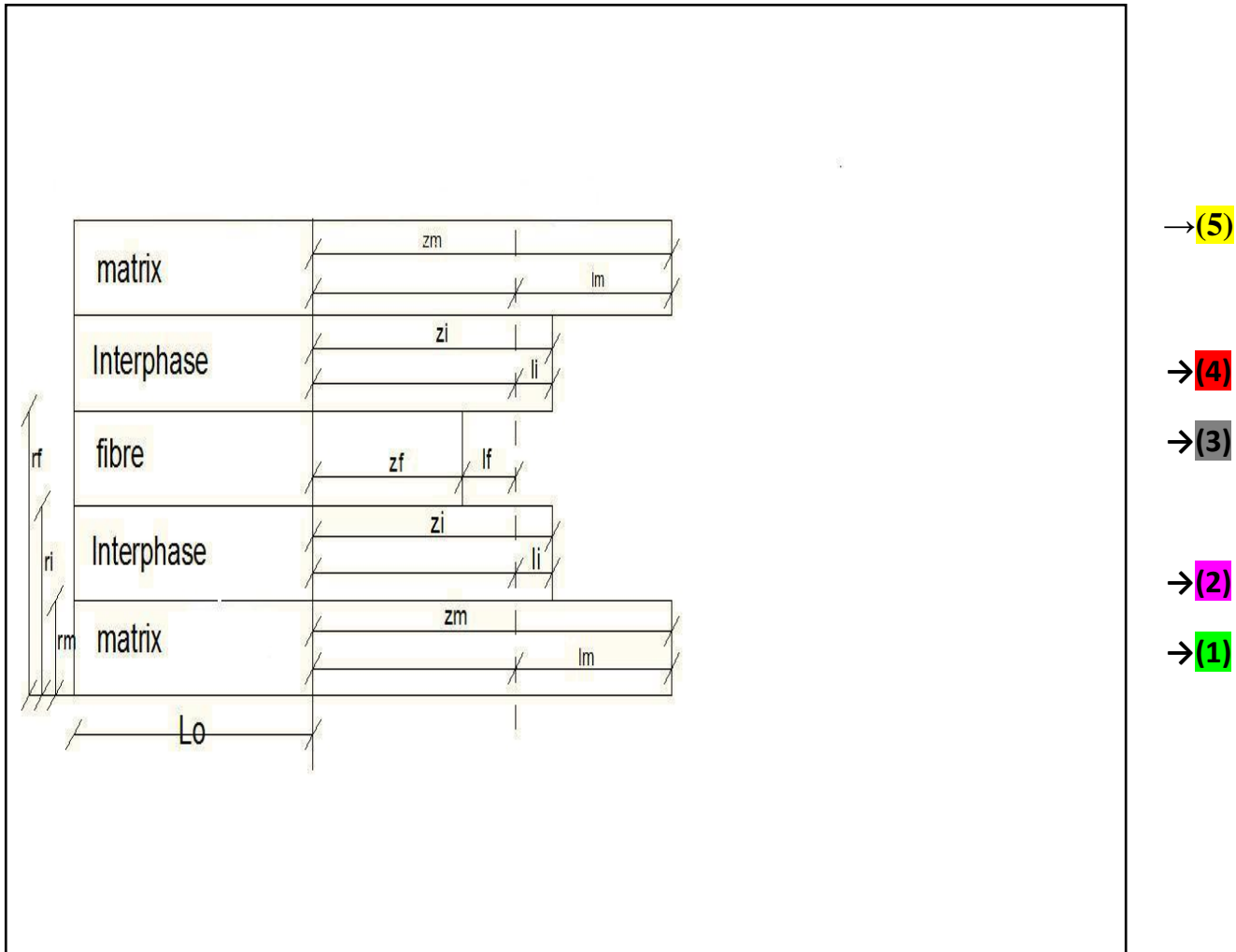
Πίνακας LL

Έστω τώρα ότι έχουμε τη διάταξη των φάσεων όπως φαίνεται στην (Εικ.7.1). Εάν οι κατά μήκος μεταβολές του μήκους του εγκλείσματος, της μήτρας και της ενδιάμεσου φάσεως, που οφείλονται σε τυχαία αύξηση θερμοκρασίας  $\Delta T$ , συμβολίζονται ως  $z_f, z_m$  και  $z_i$  αντιστοίχως τότε θα έχουμε:

$$z_f = L_0 a_f \Delta T, \quad z_i = L_0 a_i \Delta T \quad \text{και} \quad z_m = L_0 a_m \Delta T \quad (7.1.1)$$

Επειδή όμως εμείς αναπτύσσουμε περιορισμούς, το πραγματικό όριο της συνολικής διαστολής σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή στην Εικ.47. Η περιορισμένη διαστολή (ή συστολή) του εγκλείσματος, της μήτρας και της ενδιάμεσου φάσεως συμβολίζονται ως  $l_f, l_m$  και  $l_i$  αντίστοιχα. Οι αξονικές παραμορφώσεις των φάσεων αυτών θα είναι:

$$\varepsilon_{z,f} = \frac{l_f}{L_0}, \quad \varepsilon_{z,m} = \frac{l_m}{L_0} \quad \text{και} \quad \varepsilon_{z,i} = \frac{l_i}{L_0} \quad (7.1.2)$$



Εικόνα 47

Επίσης έχουμε:

$$z_4 - z_3 = l_4 + l_3, \quad z_5 - z_4 = l_5 + l_4, \quad z_2 - z_1 = l_1 + l_2 \quad (7.1.3) \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Το εφελκυστικό φορτίο στο έγκλεισμα είναι ίσο με το θλιπτικό φορτίο της μήτρας και της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι έχουμε:

$$\frac{l_f}{L_o} E_f A_f = \frac{l_i}{L_o} E_i(r) A_i + \frac{l_m}{L_o} E_m A_m \quad (7.1.4)$$

Η επίλυση από το σύστημα των σχέσεων (7.1.1), (7.1.3) και (7.1.4) μας δίνει τα  $l_f, l_m, l_i$ .

$$l_f = L_o \Delta T \times \frac{[a_i(r) E_i(r) A_i + a_m E_m A_m - a_f (E_i(r) A_i + E_m A_m)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i} \quad (7.1.5)$$

$$l_m = L_o \Delta T \times \frac{[a_i(r) (E_i(r) A_i + E_f A_f) - (a_i(r) E_i(r) A_i + a_f E_f A_f)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i} \quad (7.1.6)$$

$$l_i = L_o \Delta T \times \frac{[a_i(r) (E_f A_f + E_m A_m) - (a_f E_f A_f + a_m E_m A_m)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i} \quad (7.1.7)$$

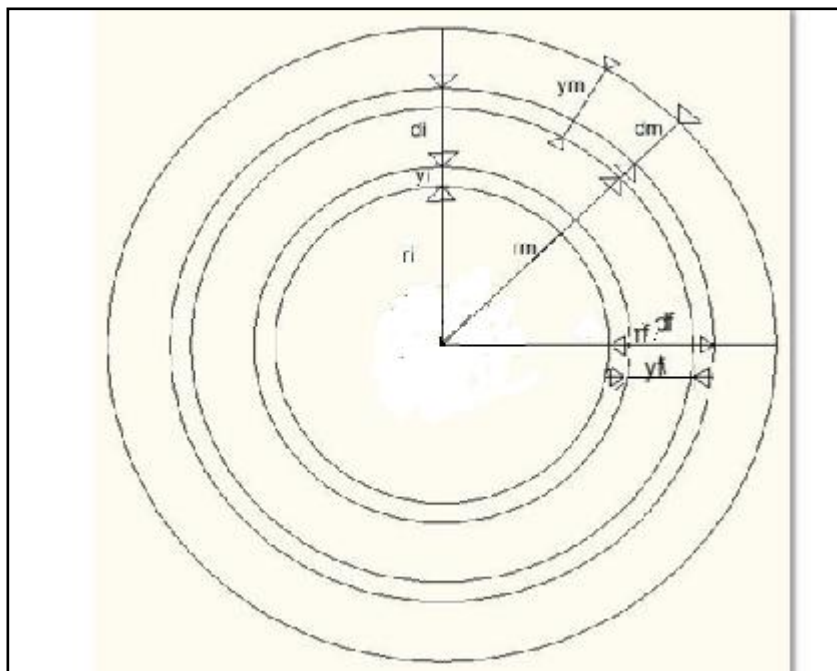
Ο διαμήκης συντελεστής θερμικής διαστολής μπορεί να βρεθεί από τη σχέση :  $l_f + z_f = a_L L_o \Delta T$  αντικαθιστώντας τα  $z_f$  και  $l_f$  από τις προηγούμενες σχέσεις. Έτσι θα έχουμε:

$$a_L = \frac{a_f E_f U_f + a_m E_m U_m + a_i(r) E_i(r) U_i}{E_f U_f + E_m U_m + E_i(r) U_i} \quad (7.1.8)$$

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή:

$$a_L = \frac{a_f E_f U_3 + a_m E_m (U_1 + U_5) + \frac{2}{r_5 r_1} \int_{r_5}^{r_2} a_2(r) E_2(r) r dr + \frac{2}{r_5 r_3} \int_{r_5}^{r_4} a_4(r) E_4(r) r dr}{E_f U_3 + E_m (U_1 + U_5) + \frac{2}{r_5 r_1} \int_{r_5}^{r_2} E_2(r) r dr + \frac{2}{r_5 r_3} \int_{r_5}^{r_4} E_4(r) r dr} \quad (7.1.9)$$

**7.2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ  $a_T$ . (ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ)**



Εικόνα 48

Ας παρατηρήσουμε την (Εικ.48). Η εξαναγκασμένη διαστολή του εγκλείσματος, της μήτρας και της ενδιάμεσου φάσεως κατά την εγκάρσια διεύθυνση είναι η  $y_f, y_m$  και  $y_i$  αντίστοιχα και η διαστολή τους (ή συστολή) με περιορισμούς συμβολίζονται με  $d_f, d_m$  και  $d_i$  αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y,f} &= -\nu_f \varepsilon_{z,f} = -\nu_f \frac{[a_i(r)E_i(r)A_i + a_m E_m A_m - a_f (E_i(r)A_i + E_m a_m)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r)A_i} \Delta T \\ &= \nu_f (a_L - a_f) \Delta T \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y,mf} &= -\nu_m \varepsilon_{z,m} = -\nu_m \frac{[a_m (E_i(r)A_i + E_f A_f) - (a_i(r)E_i(r)A_i + a_f E_f A_f)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r)A_i} \Delta T \\ &= \nu_m (a_m - a_L) \Delta T \end{aligned} \tag{7.2.2}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_{y,i} &= -v_i(r)\varepsilon_{z,i} = -v_i(r) \frac{[a_i(r)(E_f A_f + E_m A_m) - (a_f E_f A_f + a_m E_m A_m)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r)A_i} \Delta T \\ &= v_i(r)(a_i(r) - a_L) \Delta T\end{aligned}\tag{7.2.3}$$

Οι τιμές των  $\varepsilon_{z,f}, \varepsilon_{z,m}$  και  $\varepsilon_{z,i}$  έχουν υπολογισθεί από τις σχέσεις (7.1.12)- (7.1.14) ως εξής:  $\varepsilon_{z,f} = L_f/L_o$ ,  $\varepsilon_{z,m} = L_m/L_o$  και  $\varepsilon_{z,i} = L_i/L_o$ .

Οι ολικές παραμορφώσεις των τριών φάσεων είναι:

$$\varepsilon_{y,f}^t = a_f \Delta T + \varepsilon_{y,f} = a_f \Delta T - v_f (a_L - a_f) \Delta T\tag{7.2.4}$$

$$\varepsilon_{y,mf}^t = a_m \Delta T - \varepsilon_{y,m} = a_m \Delta T - v_m (a_m - a_L) \Delta T\tag{7.2.5}$$

$$\varepsilon_{y,i}^t = a_i(r) \Delta T - \varepsilon_{y,i} = a_i(r) \Delta T + v_i(r)(a_i(r) - a_L) \Delta T\tag{7.2.6}$$

Η ολική παραμόρφωση του συνθέτου υλικού είναι ίση με:

$$\varepsilon_{y,c}^t = \varepsilon_{y,f}^t U_f + \varepsilon_{y,m}^t U_m + \varepsilon_{y,i}^t U_i\tag{7.2.7}$$

Αντικαθιστώντας τις παραμορφώσεις που υπολογίσαμε παραπάνω και την ολική παραμόρφωση με  $\varepsilon_{y,c}^t = a_T \Delta T$  καταλήγουμε εν τέλει στη σχέση:

$$a_T = (1 + v_f) a_f U_f + (1 + v_m) a_m U_m + (1 + v_i(r)) a_i(r) U_i - a_L (v_f U_f + v_m U_m + v_i(r) U_i)\tag{7.2.8}$$

Η οποία σχέση μπορεί να γραφεί και με την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}a_T &= (1 + v_f) a_f U_f + (1 + v_m) a_m U_m + \frac{2}{r_m} \int_{r_f}^{r_i} (1 + v_i(r)) a_i(r) dr - \\ &- a_L (v_f U_f + v_m U_m + \frac{2}{r_m} \int_{r_f}^{r_i} v_i(r) r dr)\end{aligned}\tag{7.2.9}$$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε μία περιοχή εγκλείσματος, δύο περιοχές μήτρας και δύο περιοχές ενδιάμεσης φάσεως. Εξαιτίας αυτού ο τύπος θα είναι:

$$a_T = (1+v_f)a_f U_f + (1+v_m)a_m U_m + \frac{2}{2} \int_{r_{m,2}}^{r_{i,1}} (1+v_{i,1}(r))a_{i,1}(r)dr +$$

$$\frac{2}{2} \int_{r_{m,2}}^{r_f} (1+v_{i,2}(r))a_{i,2}(r)dr - a_L[v_f U_f + v_m U_m + \frac{2}{2} \int_{r_{m,2}}^{r_{i,1}} v_{i,1}(r)rdr + \frac{2}{2} \int_{r_{m,2}}^{r_f} v_{i,2}(r)dr]$$

(7.2.10a)

Γνωρίζοντας όμως ότι  $U_1 = U_{m,1}$ ,  $U_3 = U_f$  και  $U_5 = U_{m,2}$  και αντιστοίχως

$a_{m,1} = a_{m,2} = a_m$  και  $v_{m,1} = v_{m,2} = v_m$  και  $r_1 = r_{m,1}$ ,  $r_2 = r_{i,1}$ ,  $r_3 = r_f$ ,  $r_4 = r_{i,2}$ ,  $r_5 = r_{m,2}$

. Ισχύει όμως ότι  $U_{m,1} + U_{m,2} = U_m$  άρα θα έχουμε:

$$a_T = (1+v_f)a_f U_f + (1+v_m)a_m (U_{m,1} + U_{m,2}) + \frac{2}{2} \int_{r_{m,2}}^{r_{i,1}} (1+v_{i,1}(r))a_{i,1}(r)dr +$$

$$\frac{2}{2} \int_{r_{m,2}}^{r_f} (1+v_{i,2}(r))a_{i,2}(r)dr - a_L[v_f U_f + v_m (U_{m,1} + U_{m,2}) + \frac{2}{2} \int_{r_{m,2}}^{r_{i,1}} v_{i,1}(r)rdr + \frac{2}{2} \int_{r_{m,2}}^{r_f} v_{i,2}(r)dr]$$

(7.2.10b)

Επίσης  $a_{i,1} = a_2$ ,  $a_{i,2} = a_4$ , και  $v_{i,1} = v_2$ ,  $v_{i,2} = v_4$ . Επομένως ο τελικός τύπος θα είναι:

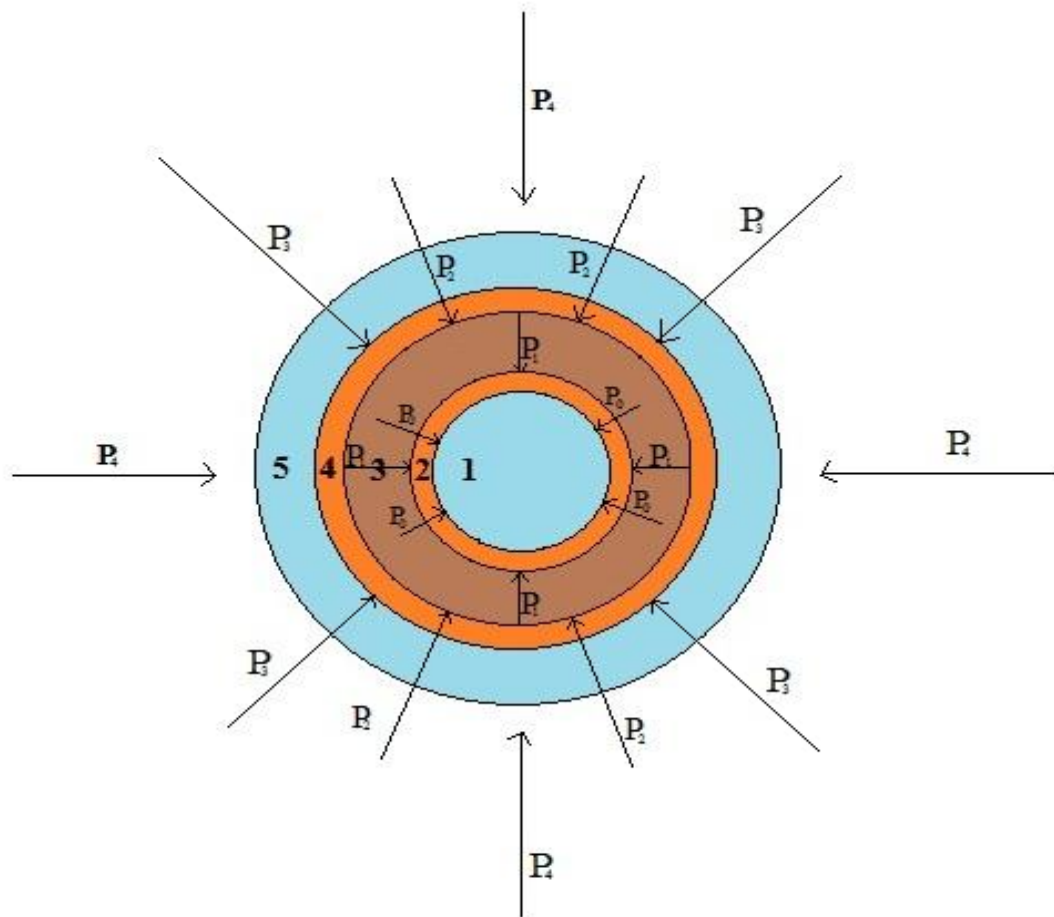
$$a_T = (1 + v_f)a_f U_3 + (1 + v_m)a_m(U_1 + U_5) + \frac{2}{r_5} \int_{r_1}^{r_2} (1 + v_2(r))a_2(r)dr + \frac{2}{r_5} \int_{r_3}^{r_4} (1 + v_4(r))a_4(r)dr - a_L[v_f U_3 + v_m(U_1 + U_5) + \frac{2}{r_5} \int_{r_1}^{r_2} v_2(r)rdr + \frac{2}{r_5} \int_{r_3}^{r_4} v_4(r)dr]$$

(7.2.10c)

### 7.2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $a_T$ . (ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ)

Θεωρούμε λοιπόν το πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο, όπως αυτό προκύπτει από την ανάλυση των προηγούμενων παραγράφων.

Έστω ότι μεταβάλλουμε τη θερμοκρασία του σύνθετου υλικού κατά  $\Delta T$ . Εξαιτίας της θερμοκρασιακής μεταβολής εμφανίζονται εσωτερικές τάσεις στο υλικό. Στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου ακτίνας  $r_5$  η ακτινική πίεση  $P_4=0$ . Λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ 4<sup>ης</sup> και 5<sup>ης</sup> φάσης στα σύνορά τους και ητ πίεση  $P_3=0$ . Αντίστοιχα στα σύνορα της 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> φάσης, 2<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> φάσης και 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> φάσης, θα έχουμε τις πιέσεις  $P_2$ ,  $P_1$ ,  $P_0$ , αντίστοιχα. Οι πιέσεις που ασκούνται στα σύνορα των φάσεων ασκούνται ομοιόμορφα και ακτινικά προς την επιφάνεια των κυλινδρικών φλοιών όπως δείχνει η (Εικ.49).



Εικόνα 49

### ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η τασική συνάρτηση Airy που περιγράφει το πρόβλημα καθώς και η λύση της είναι ίδιες με αυτές της ενότητας 5.2, δηλαδή θα έχουμε:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (7.2.2.1)$$

Η ως άνω συνάρτηση είναι εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες και είναι διαφορική εξίσωση τύπου Euler και άρα θα έχει γενική λύση:

$$\Phi = J_1 \ln r + J_2 r^2 \ln r + J_3 r^2 + J_4 \quad (7.2.2.2)$$

Όπου  $J_1, J_2, J_3$  και  $J_4$  είναι σταθερές.

Η κάθε μία από τις πέντε φάσεις όπως και στην ενότητα 5.2, έχει την δική της τασική συνάρτηση που την χαρακτηρίζει και άρα θα έχουμε:

$$\Phi_1 = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 \quad (7.2.2.3)$$

$$\Phi_2 = B_1 \ln r + B_2 r^2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 \quad (7.2.2.4)$$

$$\Phi_3 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad (7.2.2.5)$$

$$\Phi_4 = D_1 \ln r + D_2 r^2 \ln r + D_3 r^2 + D_4 \quad (7.2.2.6)$$

$$\Phi_5 = F_1 \ln r + F_2 r^2 \ln r + F_3 r^2 + F_4 \quad (7.2.2.7)$$

### ΤΑΣΕΙΣ

Αρχικά υπολογίζουμε τις τάσεις  $\sigma_r$  και  $\sigma_\theta$  με την βοήθεια των τασικών συναρτήσεων και από τις σχέσεις:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \quad \text{και} \quad \sigma_\theta = \frac{d^2\Phi}{dr^2}$$

Έτσι έχουμε λοιπόν:

$$\sigma_{r,1} = \frac{A_1}{r^2} + A_2(2 \ln r + 1) + 2A_3 \quad (7.2.2.8)$$

$$\sigma_{\theta,1} = -\frac{A_1}{r^2} + A_2(3 + 2 \ln r) + 2A_3 \quad (7.2.2.9)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + B_2(2 \ln r + 1) + 2B_3 \quad (7.2.2.10)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + B_2(3 + 2 \ln r) + 2B_3 \quad (7.2.2.11)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + C_2(2 \ln r + 1) + 2C_3 \quad (7.2.2.12)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + C_2(3 + 2 \ln r) + 2C_3 \quad (7.2.2.13)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + D_2(2 \ln r + 1) + 2D_3 \quad (7.2.2.14)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + D_2(3 + 2 \ln r) + 2D_3 \quad (7.2.2.15)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + F_2(2 \ln r + 1) + 2F_3 \quad (7.2.2.16)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + F_2(3 + 2 \ln r) + 2F_3 \quad (7.2.2.17)$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στην θέση  $r = 0$  θα πρέπει οι σταθερές  $A_1$  και  $A_2$  να ισούνται με το μηδέν. Δηλαδή  $A_1=A_2=0$ . Επίσης μπορεί να δειχθεί εξισώνοντας τις εκφράσεις των μετατοπίσεων για την 2<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> φάση, για την 3<sup>η</sup> και 4<sup>η</sup> φάση και για την 4<sup>η</sup> και 5<sup>η</sup> φάση, ότι  $B_2=C_2=D_2=F_2=0$ . Οι σχέσεις (7.2.2.8)- (7.2.2.17) μετασχηματίζονται σε:

$$\sigma_{r,1} = 2A_3 \quad (7.2.2.18)$$

$$\sigma_{\theta,1} = 2A_3 \quad (7.2.2.19)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (7.2.2.20)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (7.2.2.21)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (7.2.2.22)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (7.2.2.23)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (7.2.2.24)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (7.2.2.25)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (7.2.2.26)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (7.2.2.27)$$

Οι αξονικές τάσεις  $\sigma_{z,1}, \sigma_{z,2}, \sigma_{z,3}, \sigma_{z,4}, \sigma_{z,5}$  θα υπολογισθούν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων, δηλαδή μέσω των σχέσεων:

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{\sigma_{z,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})}{E_1} = 0 \quad (7.2.2.28)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{\sigma_{z,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})}{E_2} = 0 \quad (7.2.2.29)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{\sigma_{z,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})}{E_3} = 0 \quad (7.2.2.30)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{\sigma_{z,4} - \nu_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})}{E_4} = 0 \quad (7.2.2.31)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{\sigma_{z,5} - \nu_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})}{E_5} = 0 \quad (7.2.2.32)$$

Οι παραπάνω αξονικές παραμορφώσεις θεωρούμε ότι ισούνται με το μηδέν διότι το μήκος του κυλινδρικού μοντέλου είναι αναλογικά απείρως μεγαλύτερο σε σχέση με την επιμήκυνση που δέχεται ο άξονάς του.

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (7.2.2.28)-( 7.2.2.32) και κάνοντας χρήση και των εξισώσεων (7.2.2.18)-( 7.2.2.27) καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τις αξονικές τάσεις:

$$\sigma_{z,1} = 4\nu_1 A_3 \quad (7.2.2.33)$$

$$\sigma_{z,2} = 4\nu_2 B_3 \quad (7.2.2.34)$$

$$\sigma_{z,3} = 4\nu_3 C_3 \quad (7.2.2.35)$$

$$\sigma_{z,4} = 4\nu_4 D_3 \quad (7.2.2.36)$$

$$\sigma_{z,5} = 4\nu_5 F_3 \quad (7.2.2.37)$$

### **ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ**

Γνωρίζουμε γενικά ότι ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \quad (7.2.2.38)$$

Λόγω όμως της κυλινδρικής συμμετρίας η γωνιακή μετατόπιση  $u_{\theta}$  δεν εξαρτάται από το  $\theta$  και άρα θα ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \Rightarrow u_r = r\varepsilon_{\theta} \quad (7.2.2.39)$$

Άρα ξεχωριστά για τις πέντε φάσεις θα έχουμε:

$$u_{r,1} = r\varepsilon_{\theta,1} \quad (7.2.2.40)$$

$$u_{r,2} = r\varepsilon_{\theta,2} \quad (7.2.2.41)$$

$$u_{r,3} = r\varepsilon_{\theta,3} \quad (7.2.2.42)$$

$$u_{r,4} = r\varepsilon_{\theta,4} \quad (7.2.2.43)$$

$$u_{r,5} = r\varepsilon_{\theta,5} \quad (7.2.2.44)$$

Επίσης από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων γνωρίζουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{\sigma_{\theta,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{z,1})}{E_1} \quad (7.2.2.45)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\sigma_{\theta,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{z,2})}{E_2} \quad (7.2.2.46)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\sigma_{\theta,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{z,3})}{E_3} \quad (7.2.2.47)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\sigma_{\theta,4} - \nu_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{z,4})}{E_4} \quad (7.2.2.48)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\sigma_{\theta,5} - \nu_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{z,5})}{E_5} \quad (7.2.2.49)$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (7.2.2.45)-(7.2.2.49), τις σχέσεις των τάσεων (7.2.2.18)-(7.2.2.27) και (7.2.2.33)-(7.2.2.37) θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1-\nu_1-2\nu_1^2)}{E_1} \quad (7.2.2.50)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[-(1+\nu_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-\nu_2-2\nu_2^2)\right]}{E_2} \quad (7.2.2.51)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[-(1+\nu_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-\nu_3-2\nu_3^2)\right]}{E_3} \quad (7.2.2.52)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[-(1+\nu_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2)\right]}{E_4} \quad (7.2.2.53)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[-(1+\nu_5)\frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2)\right]}{E_5} \quad (7.2.2.54)$$

Και άρα αντικαθιστώντας τις σχέσεις (7.2.2.50)-(7.2.2.54) στις σχέσεις (7.2.2.40)-(7.2.2.44) των μετατοπίσεων οι ακτινικές μετατοπίσεις θα γίνουν:

$$u_{r,1} = \frac{2A_3(1-\nu_1-2\nu_1^2)r}{E_1} \quad (7.2.2.55)$$



$$u_{r,2} = \frac{\left[-(1+v_2)\frac{B_1}{r^2}+2B_3(1-v_2-2v_2^2)\right]r}{E_2} \quad (7.2.2.56)$$

$$u_{r,3} = \frac{\left[-(1+v_3)\frac{C_1}{r^2}+2C_3(1-v_3-2v_3^2)\right]r}{E_3} \quad (7.2.2.57)$$

$$u_{r,4} = \frac{\left[-(1+v_4)\frac{D_1}{r^2}+2D_3(1-v_4-2v_4^2)\right]r}{E_4} \quad (7.2.2.58)$$

$$u_{r,5} = \frac{\left[-(1+v_5)\frac{F_1}{r^2}+2F_3(1-v_5-2v_5^2)\right]r}{E_5} \quad (7.2.2.59)$$

### ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ακτινικές παραμορφώσεις και ύστερα θα παρουσιάσουμε και τις ήδη υπολογισμένες αξονικές και γωνιακές παραμορφώσεις συγκεντρωτικά.

Οι ακτινικές παραμορφώσεις θα εξαχθούν από τον γενικό τύπο:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

Άρα θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{r,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1^2)}{E_1} \quad (7.2.2.60)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{\left[(1+v_2)\frac{B_1}{r^2}+2B_3(1-v_2-2v_2^2)\right]}{E_2} \quad (7.2.2.61)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{\left[(1+v_3)\frac{C_1}{r^2}+2C_3(1-v_3-2v_3^2)\right]}{E_3} \quad (7.2.2.62)$$

$$\varepsilon_{r,4} = \frac{\left[(1+v_4)\frac{D_1}{r^2}+2D_3(1-v_4-2v_4^2)\right]}{E_4} \quad (7.2.2.63)$$

$$\varepsilon_{r,5} = \frac{\left[(1+v_5)\frac{F_1}{r^2}+2F_3(1-v_5-2v_5^2)\right]}{E_5} \quad (7.2.2.64)$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1^2)}{E_1} \quad (7.2.2.65)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[ -(1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2^2) \right]}{E_2} \quad (7.2.2.66)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[ -(1+v_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2v_3^2) \right]}{E_3} \quad (7.2.2.67)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[ -(1+v_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-v_4-2v_4^2) \right]}{E_4} \quad (7.2.2.68)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[ -(1+v_5)\frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2v_5^2) \right]}{E_5} \quad (7.2.2.69)$$

### ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ

$$\text{Για } r = r_1 : \sigma_{r,1} = -P_0 \text{ και } \sigma_{r,2} = -P_0 \quad (7.2.2.70)$$

$$\text{Για } r = r_2 : \sigma_{r,2} = -P_1 \text{ και } \sigma_{r,3} = -P_1 \quad (7.2.2.71)$$

$$\text{Για } r = r_3 : \sigma_{r,3} = -P_2 \text{ και } \sigma_{r,4} = -P_2 \quad (7.2.2.72)$$

$$\text{Για } r = r_4 : \sigma_{r,4} = -P_3 \text{ και } \sigma_{r,5} = -P_3 \quad (7.2.2.73)$$

$$\text{Για } r = r_5 : \sigma_{r,5} = -P_4 \quad (7.2.2.74)$$

$$\text{Για } r = r_5 : \sigma_{r,5} = 0 \quad (7.2.2.75)$$

Οι εξισώσεις (7.2.2.18,19,20,21,22,23,24,25,26) μετασχηματίζονται αντίστοιχα:

$$2A_3 = -P_0 \quad (7.2.2.76)$$

$$\text{Για } r = r_1 \text{ θα έχω } \frac{B_1}{r_1^2} + 2B_3 = -P_0 \quad (7.2.2.77)$$

$$\text{Για } r = r_2 \text{ θα έχω } \frac{B_1}{r_2^2} + 2B_3 = -P_1 \quad (7.2.2.78)$$

$$\text{Για } r = r_2 \text{ θα έχω } \frac{C_1}{r_2^2} + 2C_3 = -P_1 \quad (7.2.2.79)$$

$$\text{Για } r = r_3 \text{ θα έχω } \frac{C_1}{r_3^2} + 2C_3 = -P_2 \quad (7.2.2.80)$$

(7.2.2.80)

$$\text{Για } r = r_3 \text{ θα έχω } \frac{D_1}{r_3^2} + 2D_3 = -P_2 \quad (7.2.2.81)$$

$$\text{Για } r = r_4 \text{ θα έχω } \frac{D_1}{r_4^2} + 2D_3 = -P_3 \quad (7.2.2.82)$$

$$\text{Για } r = r_4 \text{ θα έχω } \frac{F_1}{r_4^2} + 2F_3 = -P_3 \quad (7.2.2.83)$$

$$\text{Για } r = r_5 \text{ θα έχω } \frac{F_1}{r_5^2} + 2F_3 = -P_4 \quad (7.2.2.84)$$

$$\text{Για } r = r_5 \text{ θα έχω } \frac{F_1}{r_5^2} + 2F_3 = 0 \quad (7.2.2.85)$$

Από τη λύση της εξίσωσης (7.2.2.76) προκύπτει η τιμή της σταθεράς  $A_3$  ενώ από τις εξισώσεις (7.2.2.77),(7.2.2.78), (7.2.2.79),( 7.2.2.80), (7.2.2.81),(7.2.2.82),( 7.2.2.83),( 7.2.2.84),( 7.2.2.85) προκύπτουν οι τιμές των σταθερών  $B_1 - B_3$ ,  $C_1 - C_3$ ,  $D_1 - D_3$ ,  $F_1 - F_3$ .

Οι τιμές που προκύπτουν είναι:

$$A_3 = -\frac{P_0}{2} \quad (7.2.2.86)$$

$$B_1 = \frac{(P_1 - P_0)r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \quad (7.2.2.87)$$

$$B_3 = \frac{P_0 r_1^2 - P_1 r_2^2}{2(r_2^2 - r_1^2)} \quad (7.2.2.88)$$

$$C_1 = \frac{(P_2 - P_1)r_2^2 r_3^2}{(r_3^2 - r_2^2)} \quad (7.2.2.89)$$

$$C_3 = \frac{P_1 r_2^2 - P_2 r_3^2}{2(r_3^2 - r_2^2)} \quad (7.2.2.90)$$

$$D_1 = \frac{(P_3 - P_2)r_3^2 r_4^2}{(r_4^2 - r_3^2)} \quad (7.2.2.91)$$

$$D_3 = \frac{P_2 r_3^2 - P_3 r_4^2}{2(r_4^2 - r_3^2)} \quad (7.2.2.92)$$

$$F_1 = \frac{(P_4 - P_3)r_4^2 r_5^2}{(r_5^2 - r_4^2)} \quad (7.2.2.93)$$

$$F_3 = \frac{P_3 r_4^2 - P_4 r_5^2}{2(r_5^2 - r_4^2)} \quad (7.2.2.94)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.2.2.65), (7.2.2.66), (7.2.2.67), (7.2.2.68), (7.2.2.69) έχουμε:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{1}{E_1} 2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) = -\frac{P_0}{E_1}(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) \quad (7.2.2.95)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,2} &= \frac{1}{E_2} \left[ -(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) \right] = \\ &= \frac{1}{E_2} \left[ -(1 + \nu_2) \frac{(P_1 - P_0)r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)r^2} + \frac{(P_0 r_1^2 - P_1 r_2^2)(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} \right] \end{aligned} \quad (7.2.2.96)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{1}{E_3} \left[ -(1 + \nu_3) \frac{(P_2 - P_1)r_2^2 r_3^2}{(r_3^2 - r_2^2)r^2} + \frac{(P_1 r_2^2 - P_2 r_3^2)(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)}{(r_3^2 - r_2^2)} \right] \quad (7.2.2.97)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{1}{E_4} \left[ -(1 + \nu_4) \frac{(P_3 - P_2)r_3^2 r_4^2}{(r_4^2 - r_3^2)r^2} + \frac{(P_2 r_3^2 - P_3 r_4^2)(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2)}{(r_4^2 - r_3^2)} \right] \quad (7.2.2.98)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{1}{E_5} \left[ -(1 + \nu_5) \frac{(P_4 - P_3)r_4^2 r_5^2}{(r_5^2 - r_4^2)r^2} + \frac{(P_3 r_4^2 - P_4 r_5^2)(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{(r_5^2 - r_4^2)} \right] \quad (7.2.2.99)$$

Η διαστολή του κυλινδρικού σώματος λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής  $\Delta T$  δίνεται από τη σχέση  $\varepsilon_{\theta,i} = a_i \Delta T$ , όπου  $a_i$  ο συντελεστής θερμικής διαστολής της  $i$  φάσης ( $i=1,2,3,4,5$ ).

**ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ**

- Για  $r = r_1$  ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta,1} = a_1 \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = a_2 \Delta T$$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχω :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,2} - \varepsilon_{\theta,1} &= (a_2 - a_1) \Delta T = \\ &= \left[ \frac{(1+\nu_2)(P_0 - P_1)r_1^2 r_2^2}{E_2 (r_2^2 - r_1^2)r_1^2} + \frac{1}{E_2} \frac{(P_0 r_1^2 - P_1 r_2^2)(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} \right] + \frac{P_0}{E_1} (1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) = \\ &= \frac{(1+\nu_2)}{E_2 (r_2^2 - r_1^2)} \left[ (P_0 - P_1)r_2^2 + (1 - 2\nu_2)(P_0 r_1^2 - P_1 r_2^2) \right] + \frac{P_0}{E_1} (1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) = \\ &= \frac{(1+\nu_2)r_2^2}{E_2 (r_2^2 - r_1^2)} P_0 - \frac{(1+\nu_2)r_2^2}{E_2 (r_2^2 - r_1^2)} P_1 + \frac{(1+\nu_2)(1 - 2\nu_2)r_1^2}{E_2 (r_2^2 - r_1^2)} P_0 - \frac{(1+\nu_2)(1 - 2\nu_2)r_2^2}{E_2 (r_2^2 - r_1^2)} P_1 + \\ &+ \frac{(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} P_0 = P_0 \left[ \frac{(1+\nu_2)r_2^2}{E_2 (r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_1^2 (1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)}{E_2 (r_2^2 - r_1^2)} + \frac{(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} \right] - \\ &- P_1 \left[ \frac{(1+\nu_2)r_2^2}{E_2 (r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_2^2 (1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)}{E_2 (r_2^2 - r_1^2)} \right] \end{aligned} \tag{7.2.2.100}$$

- Για  $r = r_2$  ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta,2} = a_2 \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = a_3 \Delta T$$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχω :

$$\varepsilon_{\theta,3} - \varepsilon_{\theta,2} = (a_3 - a_2) \Delta T =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \frac{(1+v_3)(P_1-P_2)r_2^2 r_3^2}{E_3(r_3^2-r_2^2)r_2^2} + \frac{1}{E_3} \frac{(P_1r_2^2-P_2r_3^2)(1-v_3-2v_3^2)}{(r_3^2-r_2^2)} \right] - \\
 &- \frac{(1+v_2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)} \left[ (P_0-P_1)r_1^2 + (1-2v_2)(P_0r_1^2-P_1r_2^2) \right] = \frac{(1+v_3)}{E_3(r_3^2-r_2^2)} \left[ (P_1-P_2)r_3^2 + (1-2v_3)(P_1r_2^2-P_2r_3^2) \right] - \\
 &- \frac{(1+v_2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)} \left[ (P_0-P_1)r_1^2 + (1-2v_2)(P_0r_1^2-P_1r_2^2) \right] = \frac{(1+v_3)r_3^2}{E_3(r_3^2-r_2^2)} P_1 - \frac{(1+v_3)r_3^2}{E_3(r_3^2-r_2^2)} P_2 + \\
 &+ \frac{r_2^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)} P_1 - \frac{r_3^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)} P_2 - \frac{r_1^2(1+v_2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)} P_0 + \frac{r_1^2(1+v_2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)} P_1 - \frac{r_1^2(1-v_2-2v_2^2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)} P_0 + \\
 &+ \frac{r_2^2(1-v_2-2v_2^2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)} P_1 = -P_0 \left[ \frac{(1+v_2)r_1^2}{E_2(r_2^2-r_1^2)} + \frac{r_1^2(1-v_2-2v_2^2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)} \right] - P_2 \left[ \frac{r_3^2(1+v_3)}{E_3(r_3^2-r_2^2)} + \frac{r_3^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)} \right] + \\
 &+ P_1 \left[ \frac{r_3^2(1+v_3)}{E_3(r_3^2-r_2^2)} + \frac{r_2^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)} + \frac{r_1^2(1+v_2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)} + \frac{r_2^2(1-v_2-2v_2^2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)} \right]
 \end{aligned}$$

(7.2.2.101)

- Για  $r = r_3$  ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta,3} = a_3 \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = a_4 \Delta T$$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχω αντιστοίχως :

$$\varepsilon_{\theta,4} - \varepsilon_{\theta,3} = (a_4 - a_3) \Delta T =$$

$$\begin{aligned}
 &= -P_1 \left[ \frac{(1+v_3)r_2^2}{E_3(r_3^2-r_2^2)} + \frac{r_2^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)} \right] - P_3 \left[ \frac{r_4^2(1+v_4)}{E_4(r_4^2-r_3^2)} + \frac{r_4^2(1-v_4-2v_4^2)}{E_4(r_4^2-r_3^2)} \right] + \\
 &+ P_2 \left[ \frac{r_4^2(1+v_4)}{E_4(r_4^2-r_3^2)} + \frac{r_3^2(1-v_4-2v_4^2)}{E_4(r_4^2-r_3^2)} + \frac{r_2^2(1+v_3)}{E_3(r_3^2-r_2^2)} + \frac{r_3^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)} \right]
 \end{aligned}$$

(7.2.2.102)

- Για  $r = r_4$  ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta,4} = a_4 \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = a_5 \Delta T$$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχω αντιστοίχως :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\theta,5} - \varepsilon_{\theta,4} &= (a_5 - a_4)\Delta T = \\
 &= -P_2 \left[ \frac{(1+v_4)r_3^2}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} + \frac{r_3^2(1-v_4 - 2v_4^2)}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} \right] - P_4 \left[ \frac{r_5^2(1+v_5)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{r_5^2(1-v_5 - 2v_5^2)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} \right] + \\
 &+ P_3 \left[ \frac{r_5^2(1+v_5)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{r_4^2(1-v_5 - 2v_5^2)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{r_3^2(1+v_4)}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} + \frac{r_4^2(1-v_4 - 2v_4^2)}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} \right]
 \end{aligned} \tag{7.2.2.103}$$

- Για  $r = r_5$  ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta,5} = \alpha_5 \Delta T = -P_4 \left[ \frac{r_5^2(1+v_5)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{r_5^2(1-v_5 - 2v_5^2)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} \right] + P_3 \left[ \frac{r_4^2(1+v_5)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{r_4^2(1-v_5 - 2v_5^2)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} \right] \tag{7.2.2.104}$$

Για διευκόλυνση των πράξεων θέτουμε τα παρακάτω :

$$A = \left[ \frac{(1+v_2)r_2^2}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_1^2(1-v_2 - 2v_2^2)}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{(1-v_1 - 2v_1^2)}{E_1} \right] \tag{7.2.2.105}$$

$$B = \left[ \frac{(1+v_2)r_2^2}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_2^2(1-v_2 - 2v_2^2)}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} \right] \tag{7.2.2.106}$$

$$\Gamma = \left[ \frac{(1+v_2)r_1^2}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_1^2(1-v_2 - 2v_2^2)}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} \right] \tag{7.2.2.107}$$

$$\Delta = \left[ \frac{r_3^2(1+v_3)}{E_3(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{r_2^2(1-v_3 - 2v_3^2)}{E_3(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{r_1^2(1+v_2)}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_2^2(1-v_2 - 2v_2^2)}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} \right] \tag{7.2.2.108}$$

$$Z = \left[ \frac{r_3^2(1+v_3)}{E_3(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{r_3^2(1-v_3 - 2v_3^2)}{E_3(r_3^2 - r_2^2)} \right] \tag{7.2.2.109}$$

$$H = \left[ \frac{(1+v_3)r_2^2}{E_3(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{r_2^2(1-v_3 - 2v_3^2)}{E_3(r_3^2 - r_2^2)} \right] \tag{7.2.2.110}$$

$$\Theta = \left[ \frac{r_4^2(1+\nu_4)}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} + \frac{r_3^2(1-\nu_4 - 2\nu_4^2)}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} + \frac{r_2^2(1+\nu_3)}{E_3(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{r_3^2(1-\nu_3 - 2\nu_3^2)}{E_3(r_3^2 - r_2^2)} \right] \quad (7.2.2.111)$$

$$I = \left[ \frac{r_4^2(1+\nu_4)}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} + \frac{r_4^2(1-\nu_4 - 2\nu_4^2)}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} \right] \quad (7.2.2.112)$$

$$K = \left[ \frac{(1+\nu_4)r_3^2}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} + \frac{r_3^2(1-\nu_4 - 2\nu_4^2)}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} \right] \quad (7.2.2.113)$$

$$\Lambda = \left[ \frac{r_5^2(1+\nu_5)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{r_4^2(1-\nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{r_3^2(1+\nu_4)}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} + \frac{r_4^2(1-\nu_4 - 2\nu_4^2)}{E_4(r_4^2 - r_3^2)} \right] \quad (7.2.2.114)$$

$$M = \left[ \frac{r_5^2(1+\nu_5)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{r_5^2(1-\nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} \right] \quad (7.2.2.115)$$

$$N = \left[ \frac{(1+\nu_5)r_4^2}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{r_4^2(1-\nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5(r_5^2 - r_4^2)} \right] \quad (7.2.2.116)$$

Επομένως θα έχουμε ένα σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους τις εσωτερικές πιέσεις  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$  άρα :

$$AP_0 - BP_1 = (a_2 - a_1)\Delta T \quad (7.2.2.117)$$

$$-GP_0 + \Delta P_1 - ZP_2 = (a_3 - a_2)\Delta T \quad (7.2.2.118)$$

$$-HP_1 + \Theta P_2 - IP_3 = (a_4 - a_3)\Delta T \quad (7.2.2.119)$$

$$-KP_2 + \Lambda P_3 - MP_4 = (a_5 - a_4)\Delta T \quad (7.2.2.120)$$

$$-P_4M + P_3N = a_5\Delta T \quad (7.2.2.121)$$

Γνωρίζοντας τις ακτίνες, τα μέτρα ελαστικότητας, τους συντελεστές θερμικής διαστολής και τους λόγους Poisson για κάθε φάση και για κάθε περιεκτικότητα  $U_f$  επιλύουμε το παραπάνω σύστημα με τη βοήθεια του



προγράμματος Matlab 2010 και προκύπτουν οι τιμές των εσωτερικών πιέσεων.

- Για  $r = r_5$  ισχύει :

$$\mathcal{E}_{\theta,5} \Big|_{r=r_5} = (a_5 - a_T) \Delta T \quad (7.2.2.122)$$

Όπου αντικαθιστώντας στη σχέση (7.2.2.99) για  $r = r_5$  θα έχουμε :

$$\mathcal{E}_{\theta,5} \Big|_{r=r_5} = \frac{1}{E_5} \left[ -(1 + \nu_5) \frac{(P_4 - P_3)r_4^2}{(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{(P_3r_4^2 - P_4r_5^2)(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{(r_5^2 - r_4^2)} \right] \quad (7.2.2.123)$$

Άρα η σχέση (7.2.2.122) μέσω της σχέσης (7.2.2.123) γίνεται :

$$\mathcal{E}_{\theta,5} \Big|_{r=r_5} = \frac{1}{E_5} \left[ -(1 + \nu_5) \frac{(P_4 - P_3)r_4^2}{(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{(P_3r_4^2 - P_4r_5^2)(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{(r_5^2 - r_4^2)} \right] = (a_5 - a_T) \Delta T \Rightarrow$$

$$\boxed{a_T = \frac{1}{E_5} \left[ (1 + \nu_5) \frac{(P_4 - P_3)r_4^2}{(r_5^2 - r_4^2)} + \frac{(P_3r_4^2 - P_4r_5^2)(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{(r_5^2 - r_4^2)} \right]} \quad (7.2.2.124)$$

### 7.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ $\theta$ $a_\theta$

Οι τιμές που προέκυψαν από πριν για τον διαμήκη συντελεστή θερμικής διαστολής  $a_L$  και τον εγκάρσιο συντελεστή θερμικής διαστολής  $a_T$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του γραμμικού συντελεστή θερμικής διαστολής  $a_\theta$  που αφορά τη γωνία που σχηματίζει ο άξονας φορτίσεως με τη διεύθυνση των ινών του εγκλείσματος. Ισχύει η εξής σχέση:

$$\boxed{a_\theta = a_L \cos^2 \Theta + a_T \sin^2 \Theta} \quad (7.2.2.125)$$

## 7.4 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Στη συνέχεια παραθέτουμε θεωρητικές σχέσεις που κατά καιρούς έχουν εκφράσει διάφοροι ερευνητές για τον υπολογισμό του διαμήκου συντελεστού θερμικής διαστολής  $a_L$ , του εγκάρσιου συντελεστού θερμικής διαστολής  $a_T$  και του συντελεστού θερμικής διαστολής υπό γωνία φόρτισης  $a_\theta$ . Να αναφέρουμε κατά τα γνωστά πως ο δείκτης f δηλώνει το έγκλεισμα (filler) ενώ ο δείκτης m δηλώνει την μήτρα(matrix).

### 7.4.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $a_L$

#### Εξίσωση Schapery [53]:

$$a_L = \frac{E_f a_f u_f + E_m a_m u_m}{E_f u_f + E_m u_m} \quad (7.2.2.126)$$

#### Εξίσωση Van Fo Fy [53]:

$$a_L = a_m - (a_m - a_f) \times \frac{(1 + \nu_m) E_f u_f - (1 + \nu_f)(E_L - E_m u_m)}{(\nu_m - \nu_f) E_L} \quad (7.2.2.127)$$

### 7.4.2 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $a_T$

#### Εξίσωση Schapery [53]:

$$a_T = (1 + \nu_f) a_f u_f + (1 + \nu_m) a_m u_m - a_L (\nu_f u_f + \nu_m u_m) \quad (7.2.2.128)$$

#### Εξίσωση Van Fo Fy [53]:

$$a_T = a_m + (a_m - a_L) \nu_{LT} - (a_m - a_f) (1 + \nu_f) \frac{\nu_m - \nu_{LT}}{\nu_m - \nu_f} \quad (7.2.2.129)$$

#### Εξίσωση Chamberlain [53]:

$$a_T = a_m + \frac{2(a_f - a_m) u_f}{\nu_m (F - 1 + u_m) + (F + u_f) + E_m (1 - \nu_{LT})(F - 1 + u_m) / E_f} \quad (7.2.2.130)$$

όπου  $F = 0,9096$  για εξαγωνικό μοντέλο και  $F = 0,7854$  για τετραγωνικό μοντέλο.

**Εξίσωση Schneider [53]:**

$$a_T = a_m - (a_m - a_f) \times \left[ \frac{2(1 + \nu_m)(\nu_m^2 - 1)C}{(1 + 1.1u_f)/(1.1u_f - 1) - \nu_m + 2\nu_m^2 C} - \frac{\nu_m \frac{E_f}{E_m}}{\frac{1}{C} + \frac{E_f}{E_m}} \right] \quad (7.2.2.131)$$

όπου  $C = \frac{1.1u_f}{(1 - 1.1u_f)}$

**7.4.3 ΤΥΠΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ  $a_\Theta$**

**Εξίσωση Schapery [53]:**

$$a_\Theta = a_L \cos^2 \Theta + a_T \sin^2 \Theta \quad (7.2.2.132)$$

Όπου  $a_L$  και  $a_T$  θεωρούμε τις τιμές του διαμήκη και εγκάρσιου συντελεστού θερμικής διαστολής που προέκυψαν από τις αντίστοιχες εξισώσεις του ερευνητή Schapery [53].

**7.5 ΠΙΝΑΚΕΣ**

Σε αυτήν την ενότητα θα παραθέσουμε τις τιμές των θερμοελαστικών σταθερών για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα, έτσι όπως υπολογίστηκαν από την εφαρμογή των τύπων, τους οποίους εξαγάγαμε εμείς βάσει του πενταφασικού κυλινδρικού μοντέλου μας. Επίσης θα παραθέσουμε τιμές που υπολογίστηκαν από άλλους ερευνητές βάσει των δικών τους μοντέλων (**Πίνακες MM, NN**). Στον Πίνακα **OO** παραθέτονται οι τιμές του συντελεστού θερμικής διαστολής  $a_\Theta$  που προέκυψαν από την ανάπτυξη του πενταφασικού μοντέλου.

<b><u>ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ</u> <math>\alpha_L \times 10^{-6} (C^{-1})</math></b>					
<b>U<sub>f</sub> κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα</b>	<b>0%</b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>39%</b>
<b>SIDERIDIS</b>	52.5	19.44	12.78	9.95	8.40
<b>SCHAPERY</b>	52.5	19.45	12.72	9.83	8.21
<b>VAN FO FY</b>	52.5	19.45	12.72	9.83	8.21
<b>INTERPHASE MODEL</b>	52.2	19.21	12.81	9.99	8.47

**Πίνακας MM**

<b><u>ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ</u> <math>\alpha_T \times 10^{-6} (C^{-1})</math></b>					
<b>U<sub>f</sub> κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα</b>	<b>0%</b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>39%</b>
<b>SIDERIDIS</b>	52.5	57.83	53.67	48.13	41.01
<b>SCHAPERY</b>	52.5	57.89	53.78	48.41	41.44
<b>CHAMBERLAIN(F=0,91)</b>	52.5	45.20	38.58	32.61	26.05
<b>CHAMBERLAIN(F=0,79)</b>	52.5	44.11	36.54	29.95	22.75
<b>VAN FO FY</b>	52.5	57.89	53.78	48.41	41.44
<b>SCHNEIDER</b>	68.35	55.,51	48.38	42.60	34.55
<b>INTERPHASE MODEL (ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΤΟΧΗΣ ΥΛΙΚΩΝ)</b>	52.5	57.80	53.19	47.33	39.60
<b>INTERPHASE MODEL (ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ)</b>	52.5	51.01	44.28	39.09	33.59

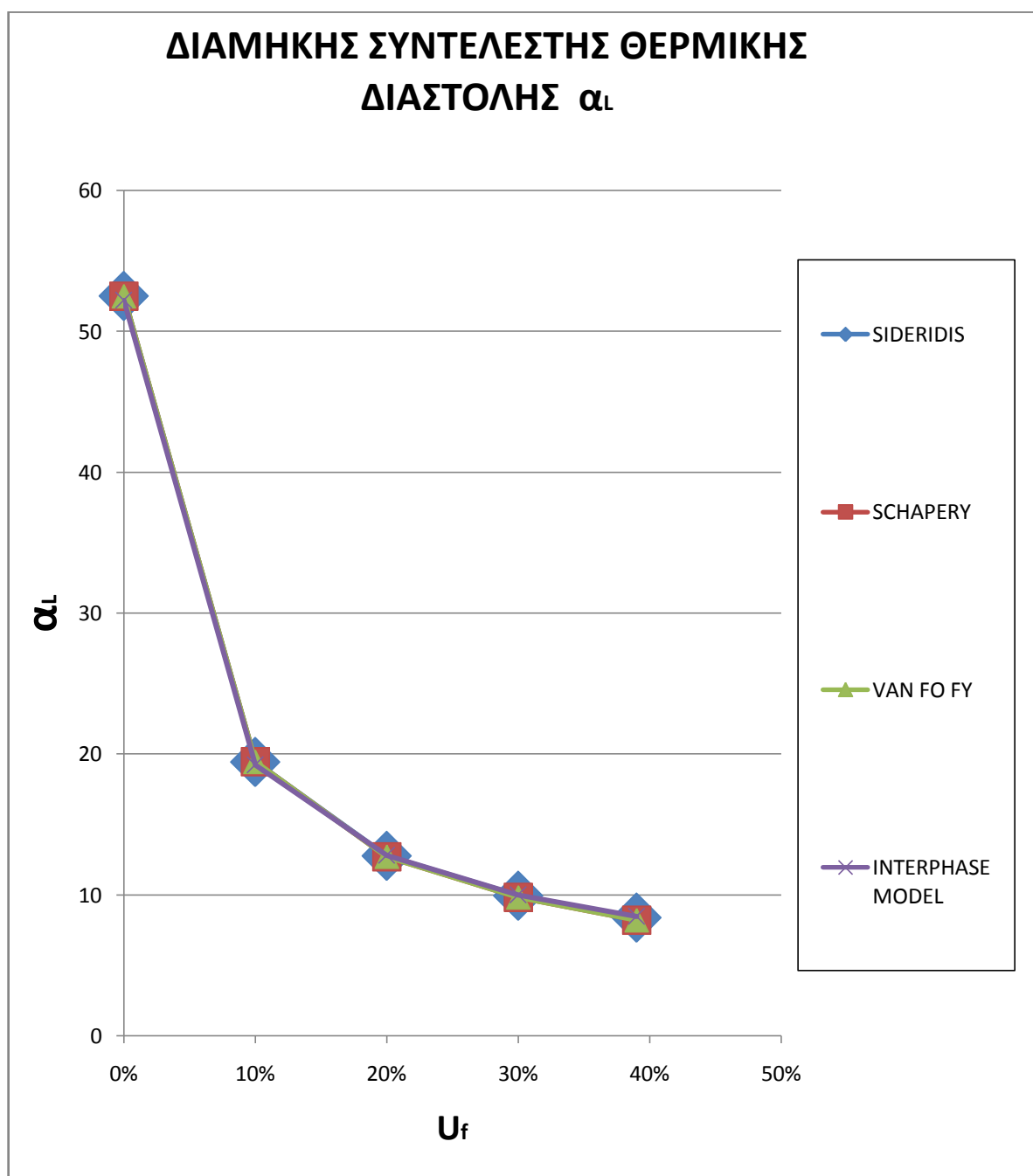
**Πίνακας NN**

<b>(θ°)</b>	<b><math>\alpha_0 \times 10^{-6} (C^{0-1})</math></b>	<b>Schapery</b>
0	8.47	8,21
5	8.66	8.46
10	9.22	9.21
15	10.15	10.43
20	11.40	12.09
25	12.95	14.14
30	14.75	16.51
35	16.73	19.14
40	18.84	21.93
45	21.03	24.82
50	23.21	27.71
55	25.32	30.50
60	27.31	33.13
65	29.10	35.50
70	30.65	37.55
75	31.90	39.21
80	32.83	40.43
85	33.39	41.18
90	33.59	41.44

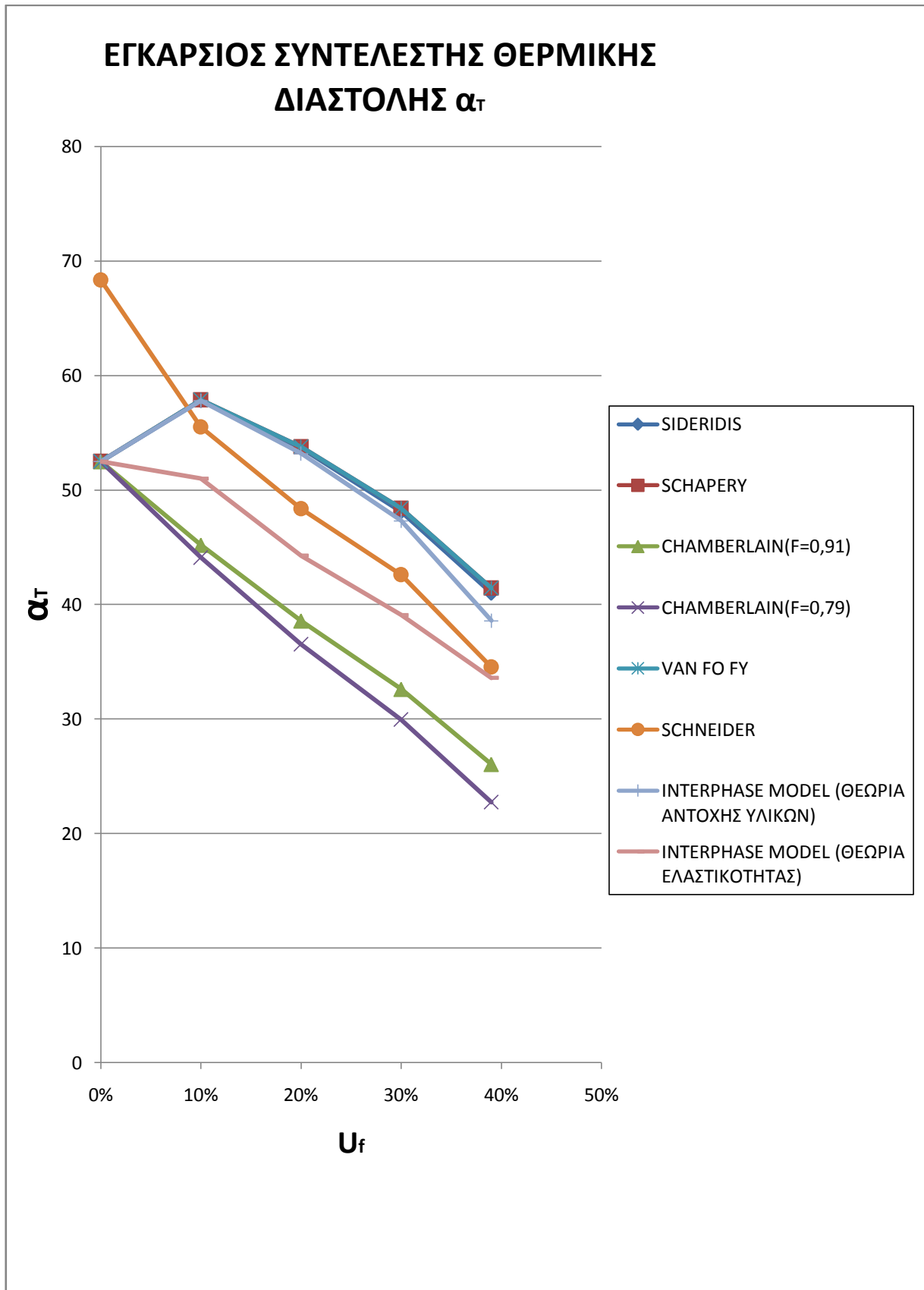
**Πίνακας 00**

## 7.6 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

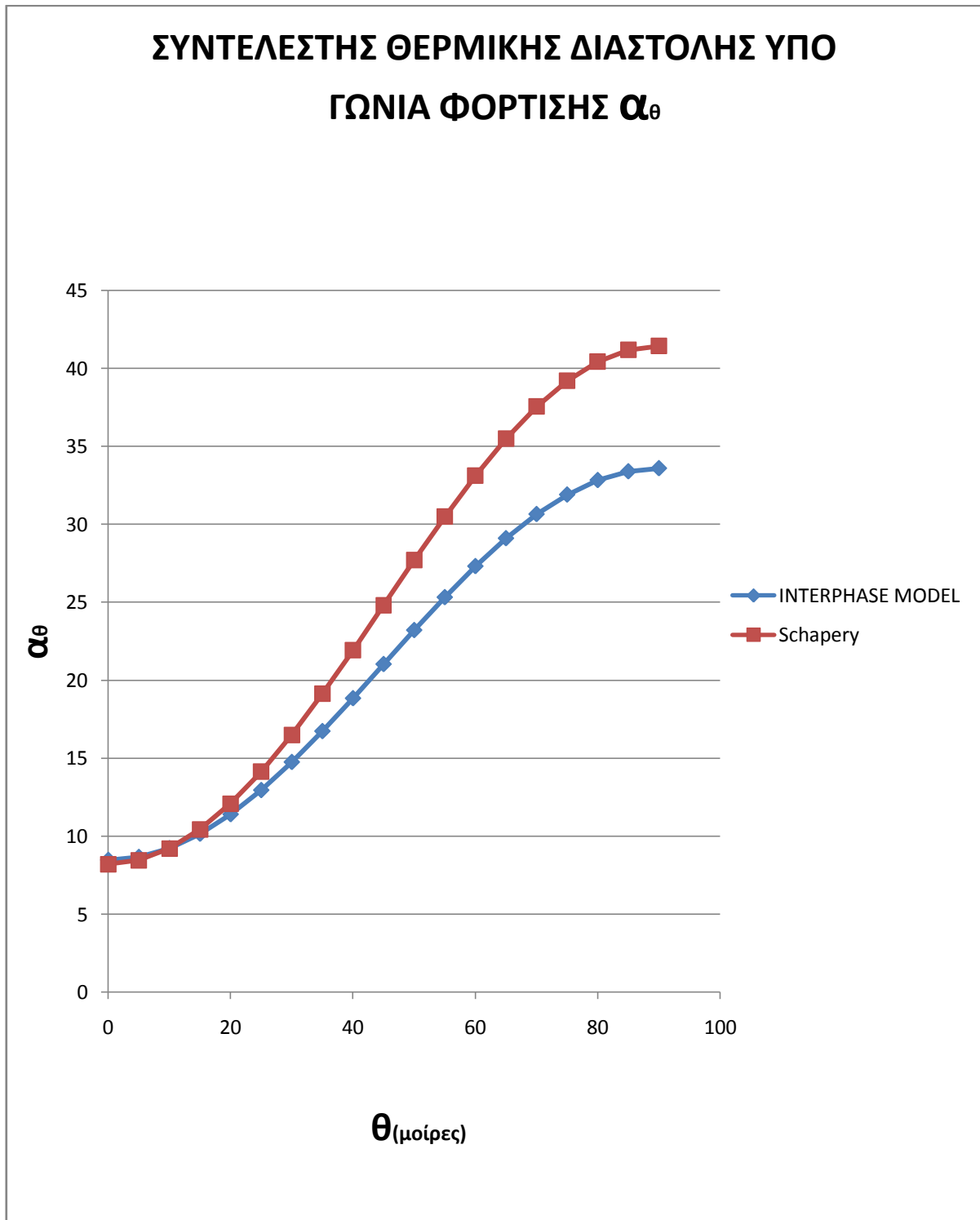
Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα με τις τιμές των διάφορων μοντέλων για τις θερμοελαστικές σταθερές. Κάθε μοντέλο απεικονίζεται με μία γραμμή διαφορετικού χρώματος. Τέλος με την βοήθεια των διαγραμμάτων, η σύγκριση των μοντέλων μεταξύ τους αλλά και με τις πειραματικές τιμές θα είναι πιο εύκολη και περισσότερο κατανοητή.



Διάγραμμα XVII



Διάγραμμα XVIII



Διάγραμμα XIX



## 7.7 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ, ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

### I. ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $a_L$

Στο διάγραμμα XVII απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκους συντελεστού θερμικής διαστολής  $a_L$  συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ιών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκους συντελεστού θερμικής διαστολής που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Schapery [53], Van Fo Fy [53] και Σιδερίδη [53].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των ιών ο διαμήκης συντελεστής θερμικής διαστολής ελαττώνεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη [53], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιάμεσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ιών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τον ερευνητή Schapery [53] και τον Van Fo Fy [53] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

### II. ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ $a_T$

Στο διάγραμμα XVIII απεικονίζεται η μεταβολή του εγκάρσιου συντελεστού θερμικής διαστολής  $a_T$  συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ιών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του εγκάρσιου συντελεστού θερμικής διαστολής που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο με χρήση της θεωρίας της αντοχής των υλικών, με χρήση της θεωρίας ελαστικότητας, από τους ερευνητές Schapery [53], Schneider [53], Chamberlain [53], από τον Van Fo Fy [53] και τον Σιδερίδη [53].

Όσον αφορά την επίλυση με τη θεωρία αντοχής των υλικών παρατηρούμε ότι αρχικά για περιεκτικότητα ιών μέχρι 0,10 έχουμε μια αύξηση του συντελεστού αλλά στη συνέχεια όσο μεγαλώνει η περιεκτικότητα των ιών τόσο πιο μικρός γίνεται ο εγκάρσιος συντελεστής θερμικής διαστολής.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη [27], συγκλίνουν με τις τιμές του

προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιάμεσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ιών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τους ερευνητές Van Fo Fy [53] και Schapery [53] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου αλλά λιγότερο συγκριτικά με τις τιμές του ερευνητή Σιδερίδη [53]. Ακόμη όσον αφορά τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τους ερευνητές Chamberlain [53] και Schneider [53] υπάρχει σύγκλιση με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου αλλά δεν είναι αρκετά μεγάλη.

Όσον αφορά την επίλυση με τη θεωρία ελαστικότητας παρατηρούμε πως υπάρχει απόκλιση ανάμεσα στις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν και τις τιμές των ερευνητών Σιδερίδη [53], Van Fo Fy [53], Chamberlain [53] και Schapery [53]. Αντιθέτως μπορούμε να ισχυριστούμε πως υπάρχει κάποια σύγκλιση με τον ερευνητή Schneider [53].

### **III. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ $a_\theta$**

Στο διάγραμμα XIX απεικονίζεται η μεταβολή του συντελεστού θερμικής διαστολής υπό γωνία  $\theta$   $a_\theta$  του ινώδους υλικού συναρτήσει της γωνίας ιών ( $\theta$ ). Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του συντελεστού θερμικής διαστολής υπό γωνία που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, η οποία συγκρίνεται με τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τον ερευνητή Schapery [53].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η γωνία  $\theta$  τόσο αυξάνεται και ο συντελεστής ενώ όσον αφορά την σύγκλιση των τιμών του προταθέντος μοντέλου με τις τιμές του ερευνητή Schapery, θα λέγαμε πως αρχικά για γωνία  $\theta$  από  $0^\circ$  έως περίπου  $30-35^\circ$  υπάρχει μεγάλη σύγκλιση η οποία όμως ελαττώνεται όσο μεγαλώνει η γωνία  $\theta$ .

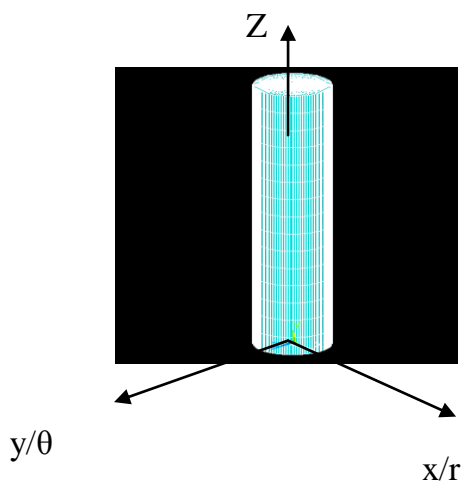
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

## 8.1 ΕΛΑΣΤΟ-ΣΤΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

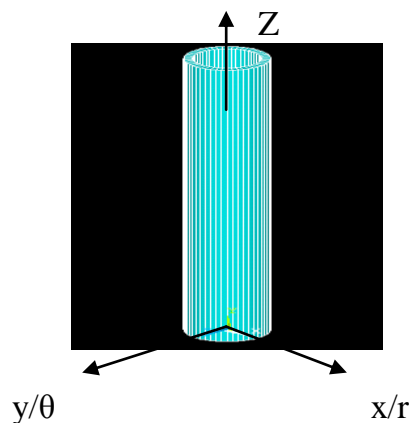
Το πρόβλημά μας είναι ο υπολογισμός των ελαστο-στατικών μηχανικών ιδιοτήτων του πενταφασικού κυλινδρικού μοντέλου μακροσκοπικά, το οποίο απαρτίζεται από πέντε (5) ισότροπες και ομογενείς φάσεις με διαφορετικές επιμέρους μηχανικές ιδιότητες. Με βάση την ανωτέρω θεώρηση θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων τα ακόλουθα ισοδύναμα μεγέθη:

- α) Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας  $E_L$  (longitudinal modulus of elasticity)
- β) Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας  $E_T$  (transverse modulus of elasticity)

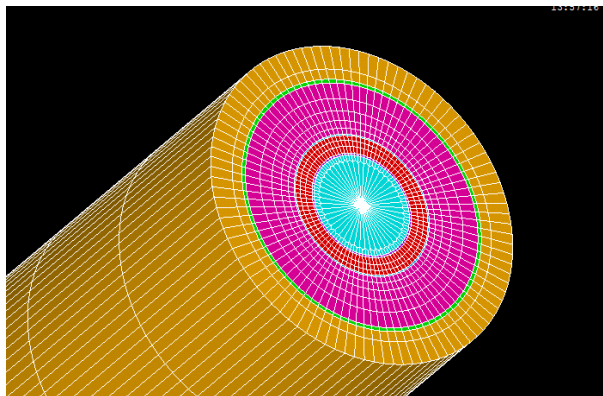
Το ελαστο-στατικό πρόβλημα που καλούμαστε να προσεγγίσουμε με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, απεικονίζεται στην Εικ 8.1. Στις Εικ 8.2 και Εικ 8.3 επεξηγούμε την συλλογιστική διαδοχή που θα ακολουθηθεί για την υπολογιστική διερεύνηση του προβλήματος μας.



Εικόνα 8.1



Εικόνα 8.2



Εικόνα 8.3

Στην εικόνα 8.1, απεικονίζεται ένα κυλινδρικό χωρίο, το οποίο θεωρούμε ότι αποτελείται από ομογενές ισότροπο υλικό. Αυτό το χωρίο μοντελοποιεί την  $Q_{m,1} = Q_1$  το «1» συμβολίζει την 1<sup>η</sup> φάση (περιοχή με μήτρα). Στην εικόνα 8.2 απεικονίζεται ένα σωληνοειδές χωρίο, επίσης από ομογενές ισότροπο υλικό με διαφορετικές στατικές ελαστικές ιδιότητες από αυτό της εικόνας 8.1. Αυτό το χωρίο μοντελοποιεί τις ακόλουθες περιοχές (Q):

$Q_{i,1} = Q_2$  το «2» συμβολίζει την 2<sup>η</sup> φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$Q_f = Q_3$  το «3» συμβολίζει την 3<sup>η</sup> φάση (περιοχή με έγκλεισμα)

$Q_{i,2} = Q_4$  το «4» συμβολίζει την 4<sup>η</sup> φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$Q_{m,2} = Q_5$  το «5» συμβολίζει την 5<sup>η</sup> φάση (περιοχή με μήτρα)

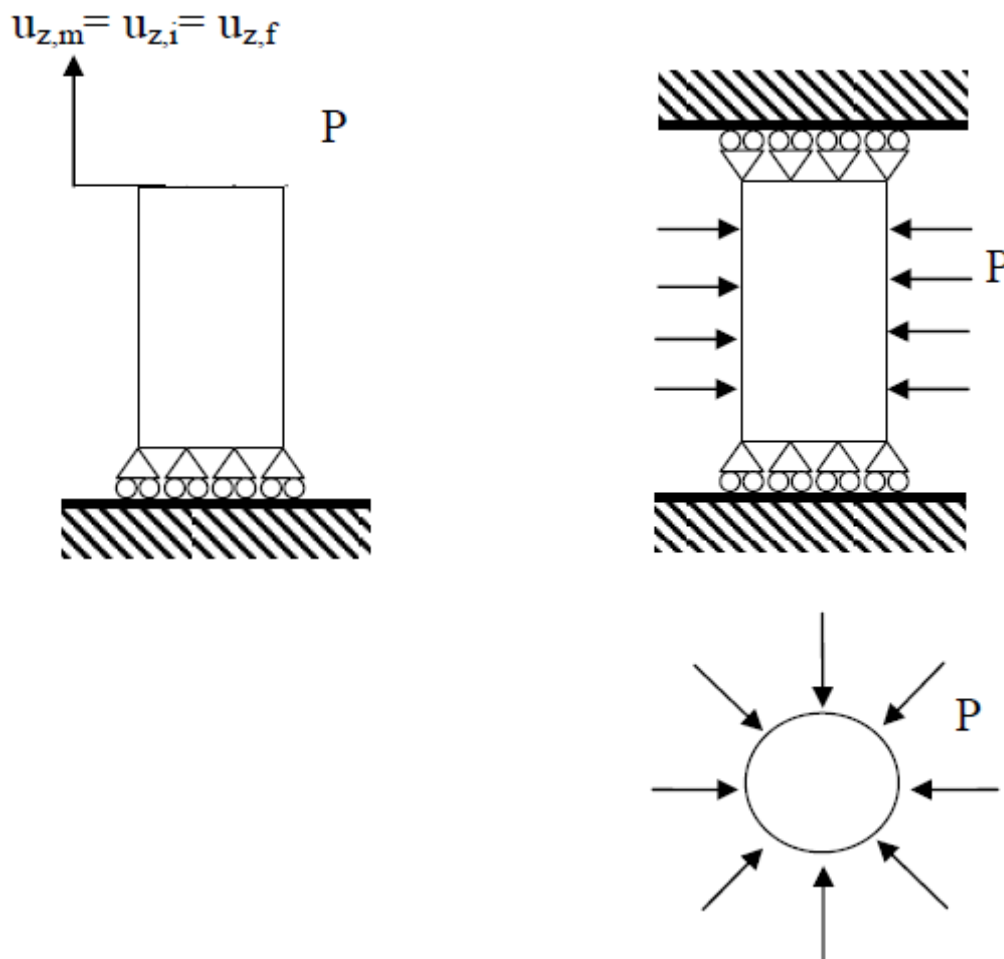
Οι δείκτες των ελαστικών μεγεθών που φέρουν:

- τον δείκτη “m” από την συντομογραφία “m = matrix” σχετίζονται με τη μήτρα.
- τον δείκτη “f” από την συντομογραφία “f = fiber” σχετίζονται με το έγκλεισμα (ένα γυαλιού).
- τον δείκτη “i” από την συντομογραφία “i = interphaseregion” σχετίζονται με την ενδιάμεσο φάση.)

Στην Εικ.8.3, απεικονίζεται το μοντελοποιημένο πενταφασικό κυλινδρικό μοντέλο με τις πέντε (5) φάσεις. Τα σωληνοειδές ενδιάμεσα χιτώνια που δρουν ως ‘ενδιάμεση φάση’ στα δύο υλικά έχουμε υπόθεση ότι έχουν ελαστικές ιδιότητες τις μέσες τιμές που έχουμε εξάγει υπό μορφή πινάκων στο κεφάλαιο ‘4’ της παρούσης εργασίας.

Οι οριακές συνθήκες των άνωθεν χωρίων της εικόνας 8.1 οι

οποίες θα μας οδηγήσουν στον υπολογισμό στατικών ελαστικών μεγεθών του συνολικού σώματος θεωρώντας το μακροσκοπικά ως ομογενές σώμα, είναι οι ακόλουθες:



α) Οριακές συνθήκες  $E_L$

β) Οριακές συνθήκες  $E_T$

Εικόνα 8.4 (Οριακές συνθήκες και φόρτιση επί του μικρομηχανικού μοντέλου)

Με  $u$  συμβολίζουμε την μετατόπιση του συνόρου γενικά, και ειδικότερα με  $u_f$ ,  $u_i$ ,  $u_m$ , τις μετατοπίσεις των άνω συνόρων της ίνας, της ενδιάμεσης φάσης και της μήτρας αντίστοιχα.

Στην **Εικ. 8.4.α** παρουσιάζονται οι οριακές συνθήκες και η φόρτιση για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας ( $E_L$ , longitudinal modulus of elasticity). Η μετατόπιση του ελεύθερου άκρου θα είναι η ίδια για όλα τα υλικά του συνθέτου κυλίνδρου.

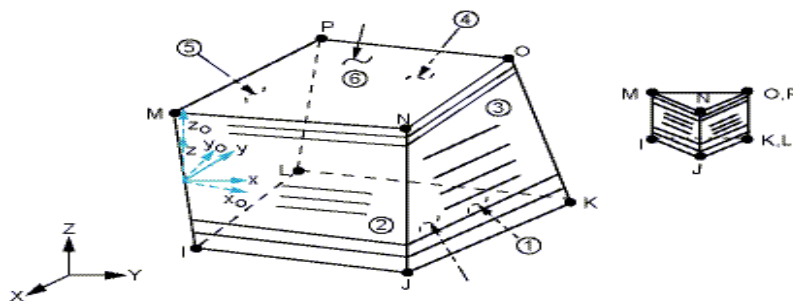
Ενώ στην **Εικ. 8.4.β** παρουσιάζονται οι οριακές συνθήκες και η φόρτιση για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας ( $E_T$ , transverse modulus of elasticity) του συνθέτου υλικού.

Επιπρόσθετα στην Εικ.8.4.α οι οριακές συνθήκες οι οποίες έχουν απεικονιστεί στα κάτω άκρα του κυλίνδρου, είναι ουσιαστικά πάκτωση, δηλαδή δεν επιτρέπουν στον κύλινδρο να αποχωριστεί από το επίπεδο, ενώ στην Εικ.8.4.β οι οριακές συνθήκες του άνω και κάτω άκρου, δεν επιτρέπουν στον σύνθετο κύλινδρο να παρουσιάσει μετατοπίσεις σε κανέναν άξονα των  $x$ ,  $y$  και  $z$ .

## 8.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Η μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία έλαβε χώρα χρησιμοποιώντας το εμπορικό πακέτο “ANSYS”, βλέπε αναφορές [53], [54]. Τα δύο αριθμητικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν για την υπολογιστική προσομοίωση στη πρώτη περίπτωση εφελκυσμού του κυλίνδρου και στη δεύτερη περίπτωση εφαρμόζοντας υδροστατική πίεση στο κυλινδρικό μας μοντέλο βασίζονται στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Επειδή στα περισσότερα δομικά στοιχεία από σύνθετα υλικά αναπτύσσονται τρισδιάστατα τασικά πεδία, λόγω της πολυπλοκότητας του υλικού αλλά και πολλές φορές της γεωμετρίας, είναι απαραίτητη η ανάπτυξη ενός τρισδιάστατου μοντέλου. Για την ανάπτυξη του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε ο εμπορικός κώδικας πεπερασμένων στοιχείων ANSYSMECHANICALAPDL17.0 [53]. Για την διακριτοποίηση του σύνθετου υλικού χρησιμοποιήθηκε το 3D οκτακομβικό στοιχείο του ANSYS SOLID 185, του οποίου η σχηματική αναπαράσταση φαίνεται στην Εικόνα 8.5. Το στοιχείο αυτό έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Τρεις βαθμούς ελευθερίας μετατόπισης ανά κόμβο.
- Ορθότροπες μηχανικές ιδιότητες
- Δέχεται ως παραμέτρους εισόδου τον αριθμό, το πάχος και τον προσανατολισμό των στρώσεων.



Εικόνα 8.5

Για την μοντελοποίηση γενικά με τα πεπερασμένα στοιχεία θα αναφερθούμε σε μερικές πρακτικές που βοηθούν στην ορθολογικότερη προσέγγιση των προβλημάτων:

α. Προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε όσο πιο μικρά μοντέλα μπορούμε, δηλαδή πιο λίγα στοιχεία με όσο πιο απλές συναρτήσεις

σχήματος γίνεται. Δεν είναι δυνατό να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το μέγεθος του στοιχείου για την ικανοποιητική προσέγγιση του πεδίου μετατοπίσεων του προβλήματός μας. Παρόλα αυτά, με προηγούμενη αποκτηθείσα εμπειρία του χρήστη, ή με την βοήθεια επαναληπτικών δοκιμών επί του μοντέλου, είτε με την προσομοίωση ή κατά προσέγγιση προσομοίωση της μορφής μιας αναλυτικής λύσης, μπορούμε να μαντέψουμε την διακύμανση του πεδίου μετατοπίσεων που περιμένουμε να επιδείξει το μοντέλο μας.

β. Σε συμμετρικά προβλήματα, μπορούμε να περιορίσουμε το χωρίο επίλυσης, θέτοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στα επίπεδα συμμετρίας.

γ. Σε αξονοσυμμετρικά προβλήματα, αντίστοιχα με την παραπάνω σημείωση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τομέα μόνο του χωρίου μας. Εναλλακτικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ειδικά επίπεδα ‘αξονοσυμμετρικά’ στοιχεία. Τα προβλήματα αυτά πρέπει να επιδεικνύουν συμμετρία και ως προς την γεωμετρία και ως προς την φόρτιση και τις οριακές συνθήκες.

### 8.3 Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Σκοπός της παρούσης ανάλυσης είναι να μπορέσουμε να εξάγουμε τα αποτελέσματα των μηχανικών ιδιοτήτων του πενταφασικού κυλινδρικού μοντέλου πιο συγκεκριμένα:

- Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας  $E_L$
- Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας  $E_T$

Το πρόβλημα του πενταφασικού κυλινδρικού μας μοντέλου θα αναλυθεί με τη μοντελοποίηση πέντε (5) δοκιμίων τα οποία θα αποτελούνται το καθένα από πέντε ομόκεντρους σωληνοειδής κυλίνδρους, οι οποίοι θα προσομοιάζουν τις πέντε φάσεις του μοντέλου μας.

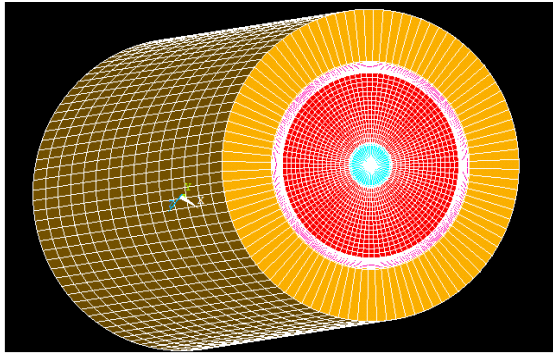
#### 8.3.1 ΟΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΙΩΝ

Στην ακόλουθο εικόνα 8.6, αποτυπώνονται τέσσερις κυλινδρικές διατομές (υπολογιστικά χωρία) με πέντε ομόκεντρους κυλίνδρους η καθεμία από αυτές, οι οποίες αντιπροσωπεύουν διαφορετικές κατ’ όγκο συγκεντρώσεις σε υλικό ίνας, μήτρας και ενδιάμεσης φάσης.

Η γεωμετρία αυτών των αναλογιών σχεδιάστηκαν με βάση τις ακτίνες ( $r$ ) του πίνακα ‘D’ κεφαλαίου ‘3’ και το μήκος το κυλίνδρων είναι 26mm. Αυτά τα μοντελοποιημένα δοκίμια θα υποβληθούν σε φορτίσεις

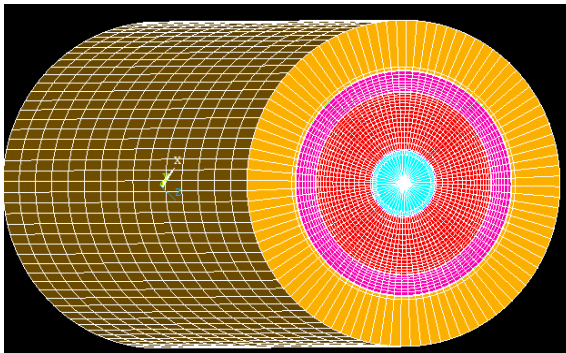
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8<sup>ο</sup>

και τα αποτελέσματα που θα εξάγουμε θα τα συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα των αντίστοιχων αναλυτικών λύσεων (κεφάλαιο 6).



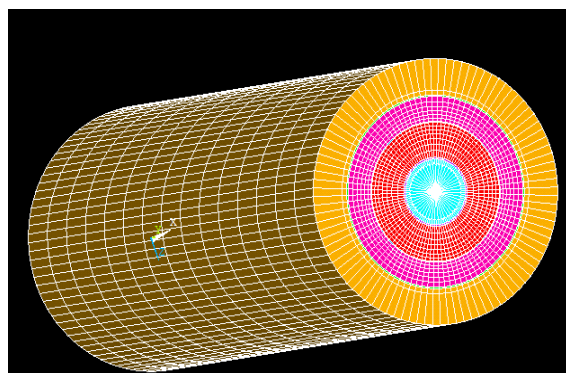
Εικόνα 8.6.α.

$$U_f=10\%$$
$$U_i=0.12\%$$
$$U_m=89.88\%$$



Εικόνα 8.6.β

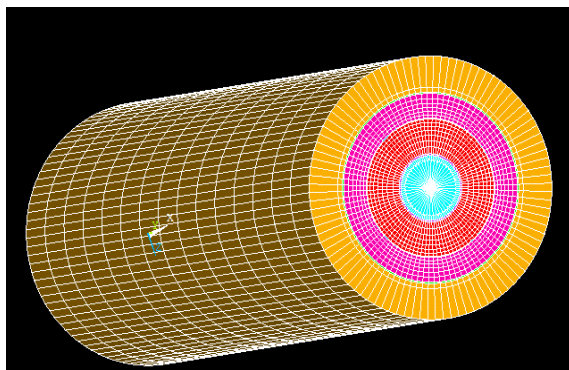
$$U_f=20\%$$
$$U_i=0,492\%$$
$$U_m=79,508\%$$



Εικόνα 8.6.γ

$$U_f=30\%$$
$$U_i=1,107\%$$
$$U_m=68,893\%$$





$$U_f=40\%$$

$$U_i=1,968\%$$

$$U_m=58,032\%$$

Εικόνα 8.6.δ

**Υπόθεση:**

Ιδιότητες Ίνας,  $E_f = 72\text{GPa}$ ,  $\nu_f = 0.2$

Ιδιότητες Μήτρας,  $E_m = 3.5\text{GPa}$ ,  $\nu_m = 0.35$

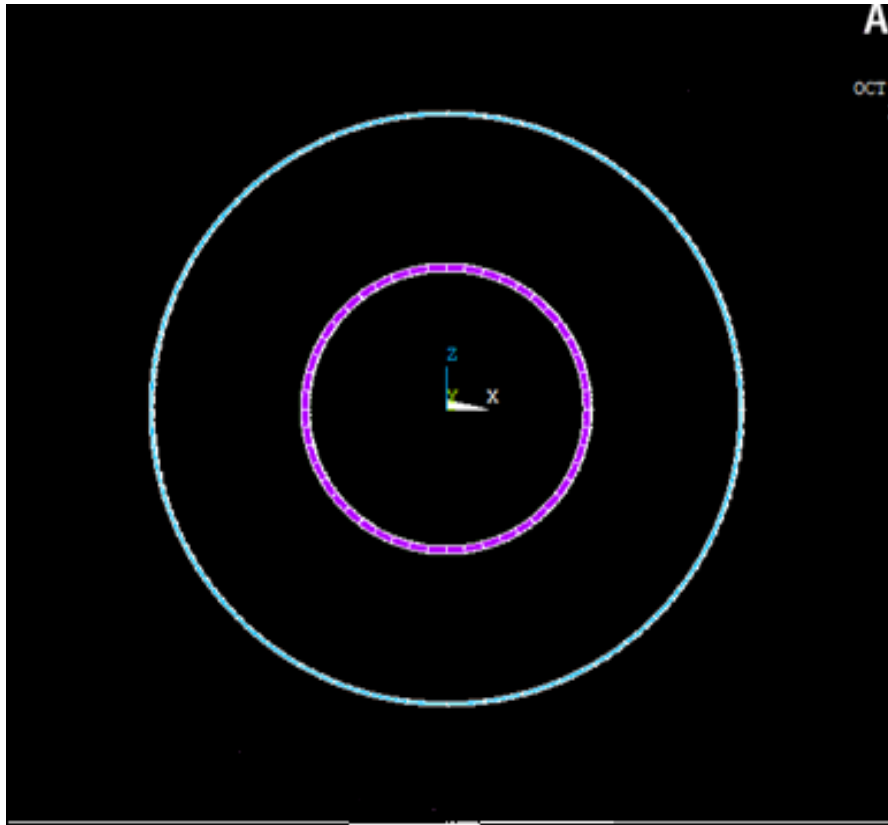
Εικόνα 8.7(Οι κατ' όγκο αναλογίες των αριθμητικών δοκιμίων)

**8.3.2 Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ**

Η ενδιάμεση φάση είναι το σωληνοειδές εκείνο χωρίο μεταξύ των φάσεων αμιγούς ίνας και αμιγούς μήτρας, όπως φαίνεται στην εικόνα '40' του κεφαλαίου '5'. Αυτό το χωρίο δεν έχει σταθερές ιδιότητες κατά την ακτινική του χωρική συντεταγμένη. Μπορεί να υποθεθεί ότι το υλικό που είναι πιο κοντά στην ίνα έχει ελαστικές ιδιότητες παρόμοιες με αυτές της ινώδους φάσεως, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από αυτό το σύνορο και πλησιάζουμε την μήτρα, τότε οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης προσομοιάζουν αυτές της μήτρας. Αυτό αναλύθηκε στο κεφάλαιο '4' καθώς και ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλονται οι ιδιότητες του υλικού στην ενδιάμεση φάση ή αλλιώς η συναρτησιακή σχέση που περιγράφει την μεταβολή των ιδιοτήτων βάσει της ακτίνας, η οποία έχουμε θεωρήσει ότι είναι η παραβολική συνάρτηση. Όμως για τη μοντελοποίηση μας έχουμε δημιουργήσει τρία σωληνοειδές τα οποία ανάλογα με την περιεκτικότητα των ινών λαμβάνουν και συγκεκριμένες τιμές για τα  $E_i$ ,  $G_i$  και  $\nu_i$ . Ποιο συγκεκριμένα στο παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές των ενδιάμεσων φάσεων που έχει το μοντέλο μας σε σχέση με την περιεκτικότητα σε ίνες. Αυτές οι τιμές είναι οι μέσοι όροι των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την 1<sup>η</sup> και 2<sup>η</sup> ενδιάμεση φάση στο κυλινδρικό πενταφασικό μοντέλο στην παραβολική μεταβολή (βλέπε πίνακες I,J,K,L,M και N κεφαλαίου '4').

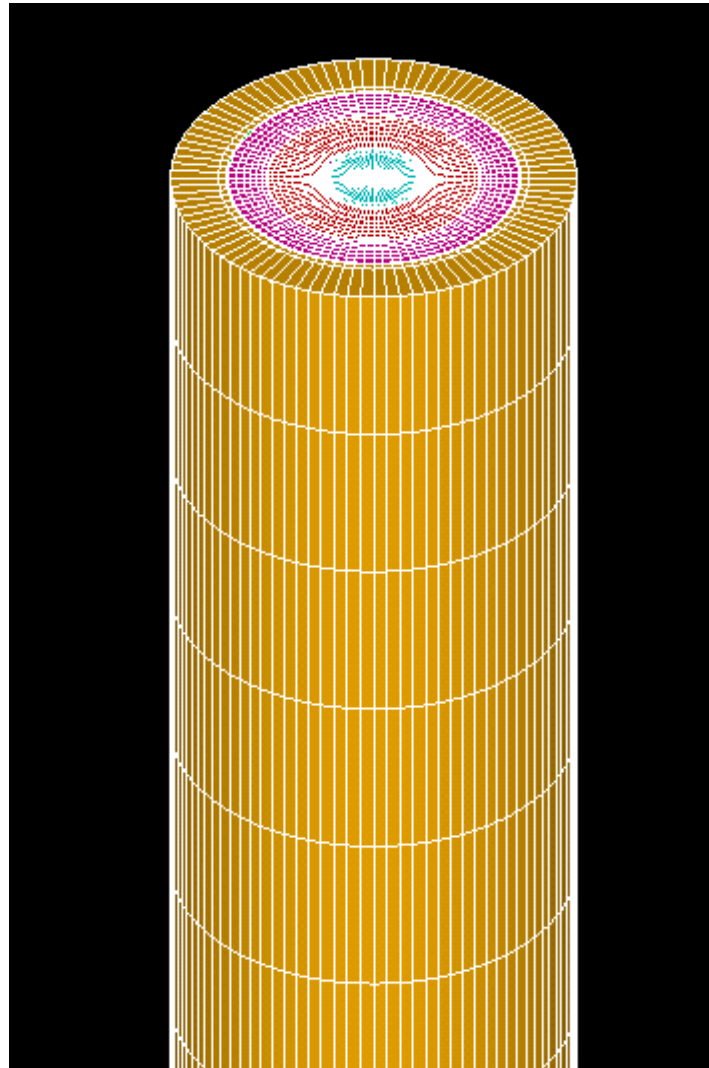
$U_f$	1 <sup>η</sup> ενδιάμεση φάση			2η ενδιάμεση φάση		
	$E_i(\text{Gpa})$	$G_i(\text{Gpa})$	$\nu_i$	$E_i(\text{Gpa})$	$G_i(\text{Gpa})$	$\nu_i$
0.10	21,52	8.8587	0.2867	21.5245	8.8563	0.2867
0.20	21.51	8.8541	0.2867	21.5007	8.8463	0.2868
0.30	21.49	8.8424	0.2868	21.5023	8.8470	0.2868
0.40	21.46	8.8305	0.2869	21.4284	8.8160	0.2870

Πίνακας PP



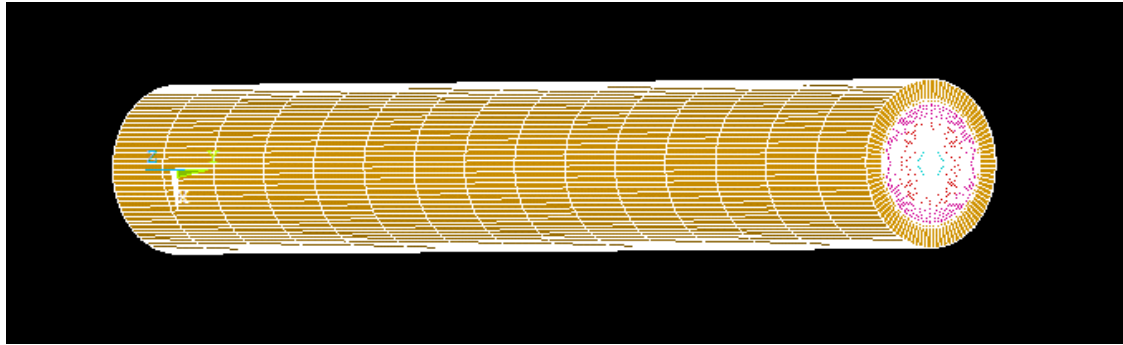
Εικόνα 8.8 (Μοντελοποίηση της ενδιάμεσης φάσης)

### 8.3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$



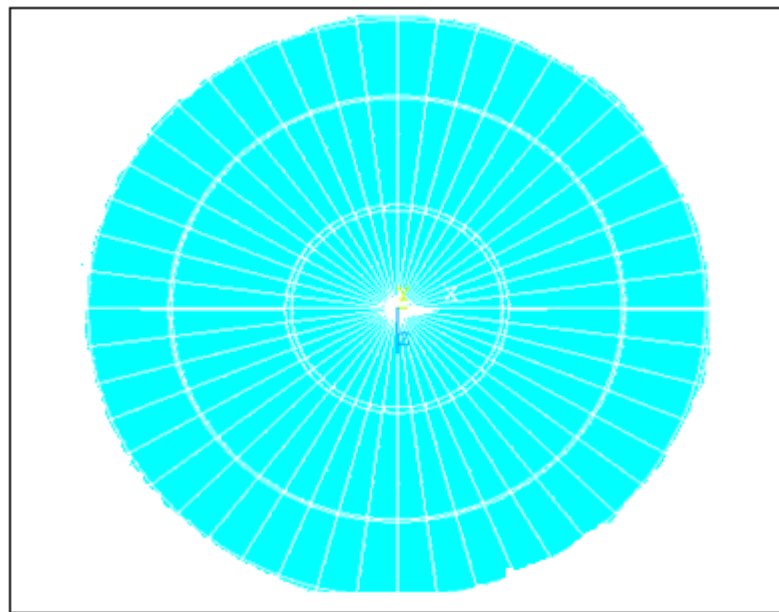
Εικόνα 8.9  
(Μοντελοποίηση του πενταφασικού κυλινδρικού μοντέλου)

Για τον υπολογισμό του διάμηκες μέτρου ελαστικότητας  $E_L$  εργαστήκαμε ως εξής: Με το εμπορικό πρόγραμμα ANSYS Mechanical APDL 17.0 κατασκευάσαμε το ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ. Για την δημιουργία του μοντέλου χρησιμοποιήσαμε τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

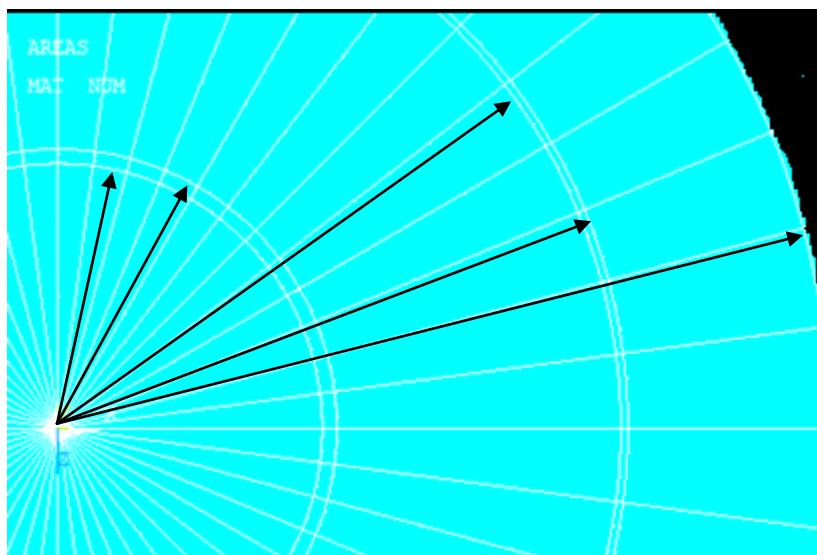


← L(Μήκος) = 260μm →

**Εικόνα 8.10 (Πλάγια όψη του  
Πενταφασικού Κυλινδρικού Μοντέλου)**



**Εικόνα 8.11 (Εγκάρσια Τομή του  
Πενταφασικού Κυλινδρικού Μοντέλου)**



Εικόνα 8.12 (Ακτίνες Πενταφασικού Κυλινδρικού Μοντέλου)

**Υπόθεση:**

Οι ακτίνες  $r_1, r_2, r_3, r_4$  και  $r_5$  παίρνουν τιμές αναλόγως την περιεκτικότητα που θέλουμε να εξετάσουμε (Δες πίνακα F Κεφάλαιο '3').

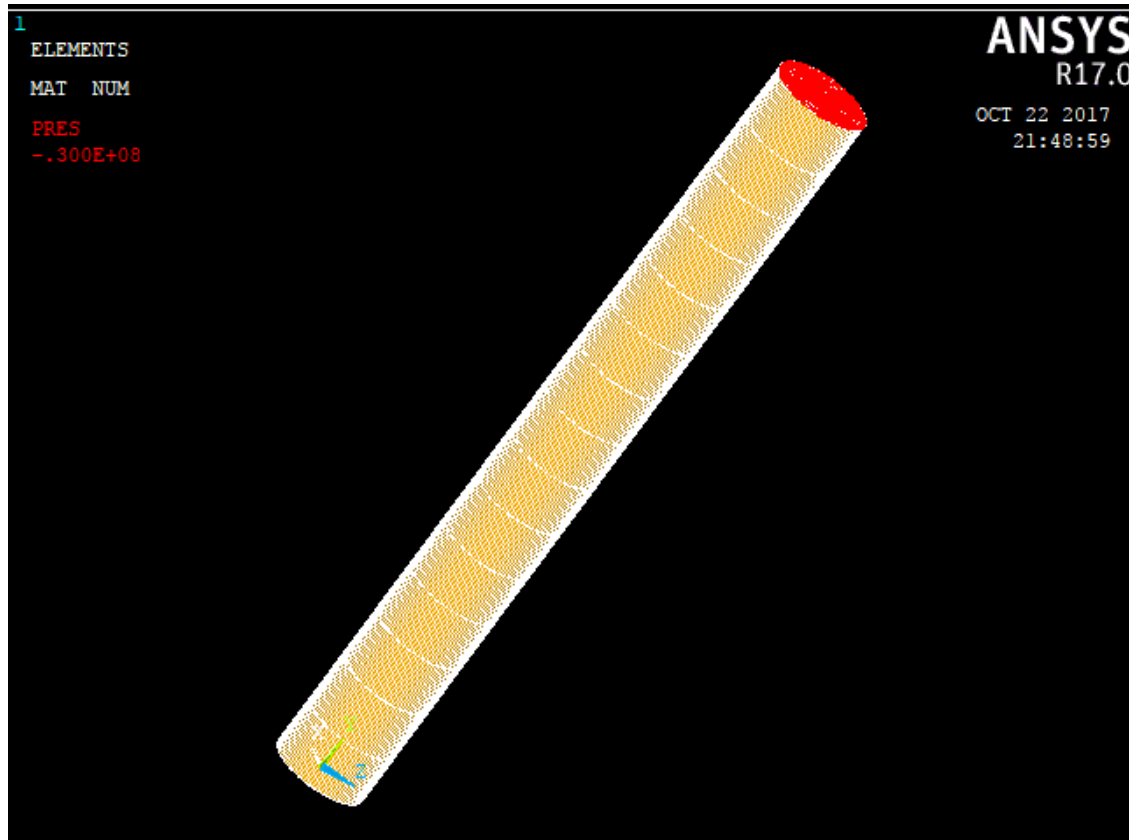
Το μέγεθος του πλέγματος έχει επιλεγεί κατά τρόπο ώστε να προσομοιάζει δοκίμιο εργαστηρίου (Αναλογία ακτίνας/μήκους 1/100 στο οποίο θα ασκηθεί φορτίο εφελκυσμού στο άνω άκρο).

Τα πεπερασμένα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν είναι το 3D οκτακομβικό στοιχείο του ANSYS SOLID 185, του οποίου σχηματική αναπαράσταση φαίνεται στην Εικόνα 8.5.

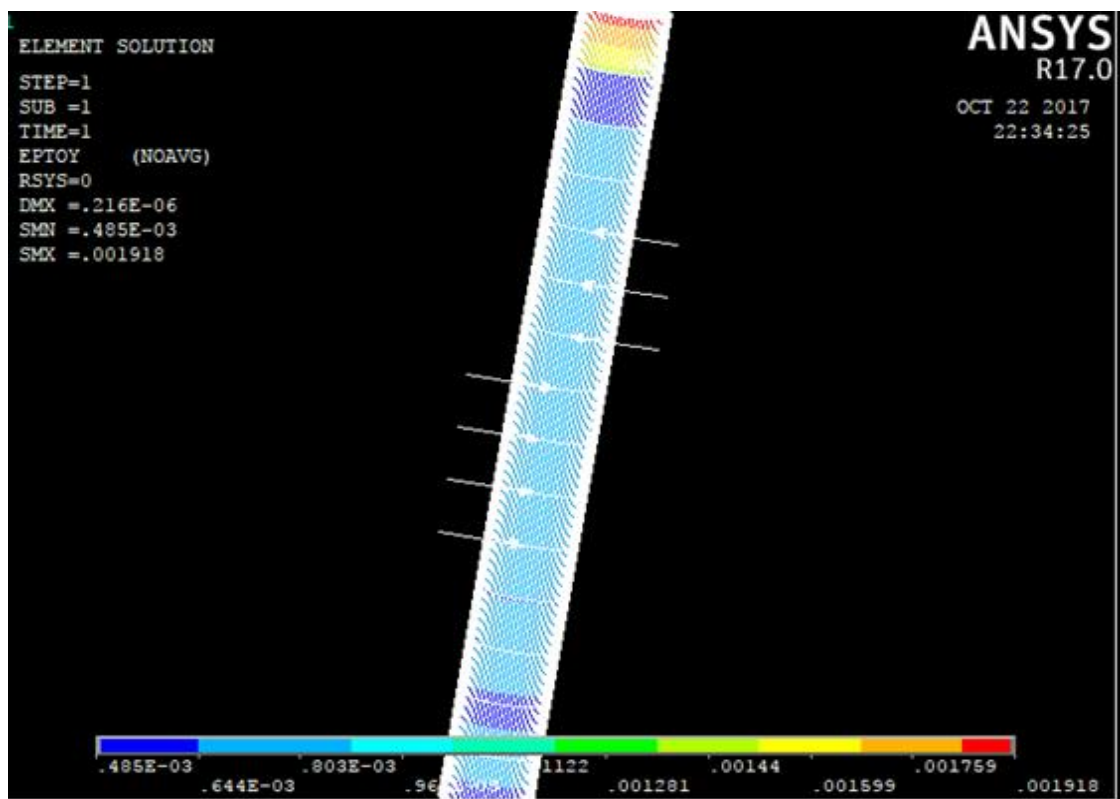
Το μοντέλο προς επίλυση έχει:

- Συνολικό αριθμό των πεπερασμένων στοιχείων: 28080
- Συνολικό αριθμό κόμβων στην υπολογιστική κানাβο: 30736

Στο δοκίμιο Εικ. (8.9) εφαρμόσαμε τις οριακές συνθήκες και φόρτισης με  $P = -30\text{ΜPa}$  για την περίπτωση Εικόνα 8.4.α.



Εικόνα 8.13 ( Πενταφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο Χωρίς Φόρτιση με  $U_f = 39\%$ )



Εικόνα 8.14 ( Πενταφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο Με Φόρτιση με  $U_f = 39\%$ )

Από το παραμορφωμένο μοντέλο λάβαμε πέντε μετρήσεις για την τιμή των τροπών κατά το άξονα των Z.

Ο νόμος του Hooke στις τρεις διαστάσεις, διατυπωμένος ως προς τις τάσεις είναι:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk}) \quad (8.1)$$

Το πρόβλημα παρουσιάζει συμμετρία ως προς την γεωμετρία και την φόρτιση, επομένως:

$$\sigma_{ij}, \epsilon_{ij} = 0, \text{ για } i \neq j \quad (8.2)$$

Στο ελεύθερο άνω άκρο του κυλίνδρου έχουμε πίεση P.

$$\sigma_{zz} = P = -30\text{MPa} \quad (8.3)$$

Στην ελεύθερη κυλινδρική επιφάνεια, δεν ασκείται καμία δύναμη ή πίεση επομένως:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (8.4)$$

Επιλύοντας την (8.1) για  $\sigma_{rr} = 0$ , συνάγεται ότι:  $\epsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}) = 0$

$$(8.5)$$

Επιλύοντας την (8.1) για  $\sigma_{\theta\theta} = 0$ , συνάγεται ότι:

$$\epsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}) = 0$$

$$(8.6)$$

Ο συνδυασμός των (8.5) & (8.6) μας δίνει ότι:  $\epsilon_{rr} = \epsilon_{\theta\theta}$  (8.7)

Από το συνδυασμό των (8.5) & (8.7)  $\Rightarrow \epsilon_{rr} = \epsilon_{\theta\theta} = -\nu \epsilon_{zz}$  (8.8)

Από το συνδυασμό των (8.1) & (8.8)  $\Rightarrow \sigma_{zz} = P = E \epsilon_{zz}$  (8.9)

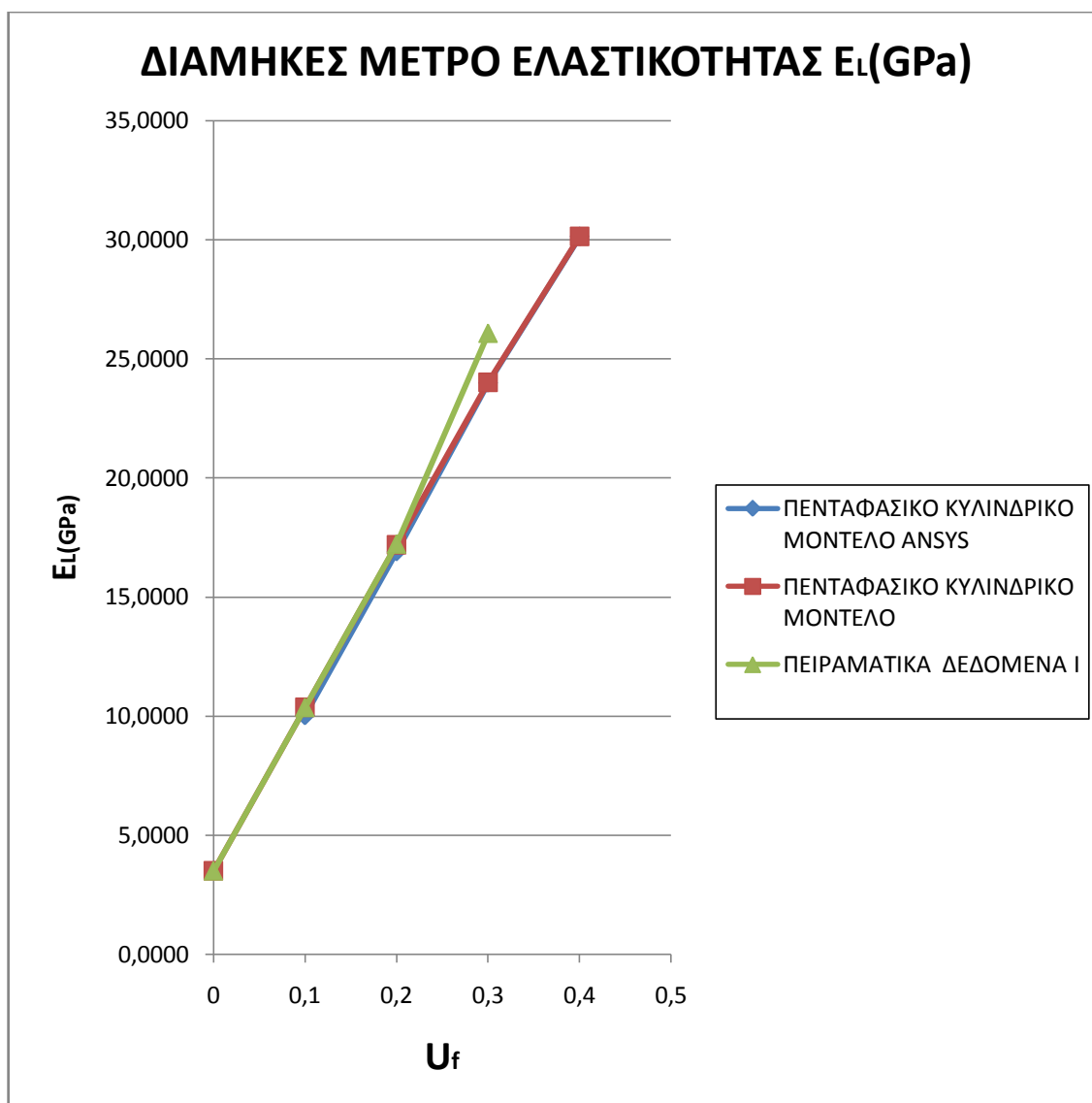
Από τη σχέση (8.9) βρίσκουμε το ισοδύναμο διάμηκες μέτρο ελαστικότητας:

<b><math>E_L = 30.135 \text{ GPa}</math></b>
--

Συνοπτικά, η υπολογιστική λύση με τα πεπερασμένα στοιχεία θα μας οδηγήσει στα ακόλουθα αποτελέσματα, τα οποία συγκρίνονται με αυτά της αναλυτικής προσέγγισης κεφαλαίου '6' καθώς επίσης και με αποτελέσματα πειραμάτων.

U <sub>f</sub>	ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ANSYS E <sub>1</sub> (GPa)	ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ E <sub>1</sub> (GPa)	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I E <sub>1</sub> (GPa)
0,00		3.50	3,50
0.10	10.0303	10.37	10.36
0.20	16.9081	17.20	17.22
0.30	23.9913	24.03	26.07
0.40	30.135	30.15	30.92

Πίνακας QQ



Διάγραμμα XX



**8.3.4 ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON  $V_{TT}$** 

Το σύνθετο μικρο-μηχανικό μας μοντέλο, δεν είναι από ομογενές υλικό. Παρουσιάζει όμως αξονοσυμμετρία και λόγω αυτής της ιδιαιτερότητάς του, μπορούμε να αποδώσουμε τις ακόλουθες εξισώσεις του νόμου του Hooke, με αναφορά σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων στην αρχή των αξόνων των κυλίνδρων, οπότε ακολούθως έχουμε:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E_T} - \nu_{TT} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E_T} - \nu_{LT} \frac{\sigma_{zz}}{E_L} \quad (8.10)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E_T} - \nu_{TT} \frac{\sigma_{rr}}{E_T} - \nu_{LT} \frac{\sigma_{zz}}{E_L} \quad (8.11)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_L} [\sigma_{zz} - \nu_{LT} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] \quad (8.12)$$

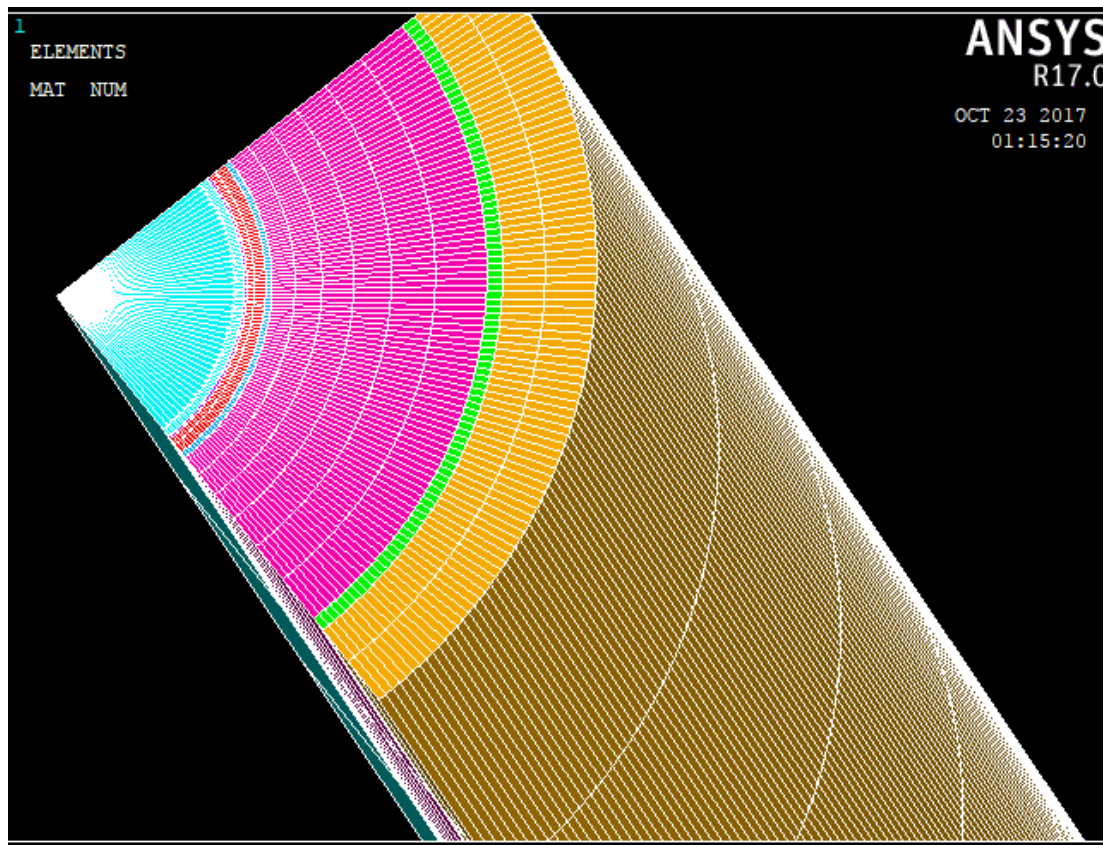
Η εξίσωση (8.12), για μηδενικές τροπές κατά την διεύθυνση z, μας υποδηλώνει το μέτρο των τάσεων που θα αναπτυχθούν στην διεύθυνση z, και πως αυτό εξαρτάται από τις άλλες δύο τάσεις και το λόγο Poisson  $\nu_{LT}$ . Για να βρούμε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας  $E_T$ , θα φορτίσουμε κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Λόγω της συμμετρίας του μοντέλου, ασκώντας μια εξωτερική πίεση P, προκύπτει:  $P = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$  (8.13)

Αυτή η φόρτιση έχει σαν αποτέλεσμα να κάνει τις εξισώσεις (8.10) & (8.11), ταυτόσημες. Επομένως, για το πρόβλημά μας το οποίο έχει ουσιαστικά δύο αγνώστους, το  $E_T$  και το  $\nu_{TT}$ , αλλά μία εξίσωση προς λύση, δεν μπορεί να επιλυθεί μονοσήμαντα. Για την επίλυση του, θα πάρουμε ως δεδομένο τις τιμές του λόγου του Poisson  $\nu_{TT}$ . Οι τιμές του λόγου του Poisson  $\nu_{TT}$  υπολογίστηκαν από το θεωρητικό τύπο (5.5.2) του Κεφαλαίου '5'. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές που παίρνει ο λόγος Poisson  $\nu_{TT}$  για τα διάφορα  $U_f$ .

$U_f$	$V_{TT}$
0.1	0.331
0.2	0.305
0.3	0.287
0.4	0.274

Πίνακας RR

### 8.3.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_T$



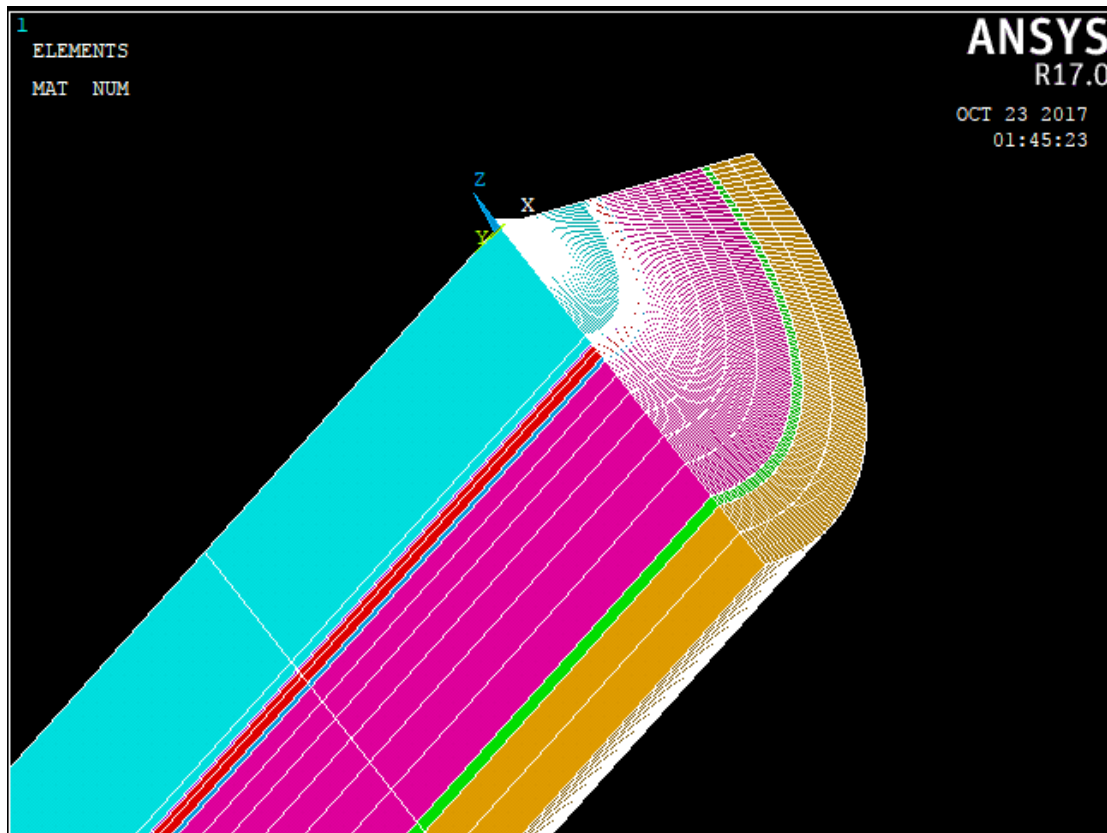
Εικόνα 8.15

(ΤΟ ¼ ΤΟΥ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ  
χωρίς φόρτιση με  $U_f = 39\%$ )

Όπως έχει προαναφερθεί, η λύση μπορεί να λάβει χώρα στο ¼ του κυλίνδρου του συνολικού χωρίου, λόγω του ότι το πρόβλημα παρουσιάζει αξονο-συμμετρία ως προς τη γεωμετρία και την φόρτιση. Αυτό βέβαια θα μπορούσε δυνητικά να επιφέρει αριθμητικά σφάλματα, στην περίπτωση μας όμως είναι απαραίτητο να συμβεί λόγω του υπολογιστικού μεγέθους του μοντέλου. Στην (Εικ.8.15) αποτυπώνεται το ¼ του κυλινδρικού πενταφασικού μοντέλου. Για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$  εργαστήκαμε ως εξής:

Με το εμπορικό πρόγραμμα ANSYS Mechanical APDL 17.0 κατασκευάσαμε το ¼ του Πενταφασικού Κυλινδρικού Μοντέλου. Για την

δημιουργία του μοντέλου τα πεπερασμένα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν είναι το 3D οκτακομβικό στοιχείο του ANSYS SOLID 185, του οποίου η σχηματική αναπαράσταση φαίνεται στην Εικόνα 8.5.



Εικόνα 8.16

(ΤΟ ¼ ΤΟΥ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

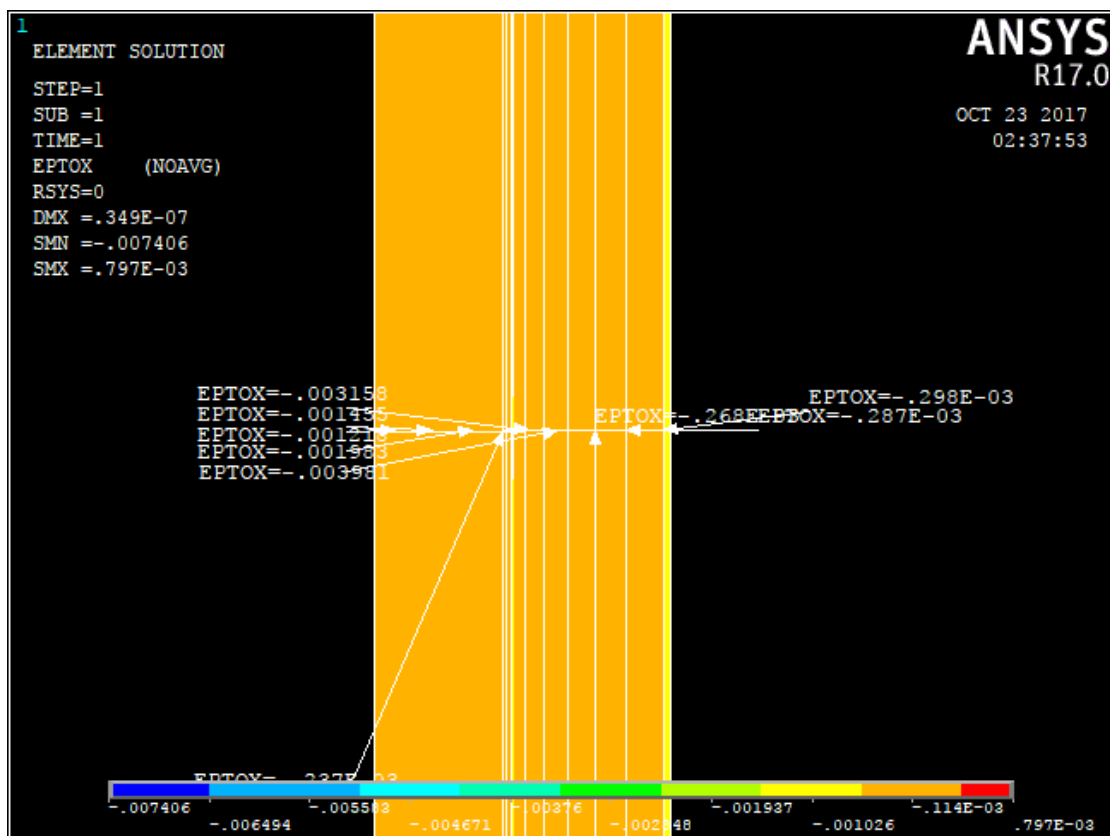
με φόρτιση για  $U_f = 39\%$ )

Στο δοκίμιο Εικ. (8.16) εφαρμόσαμε τις εξής οριακές συνθήκες και φορτίσεις:

- Στα δύο άκρα του δοκιμίου εφαρμόσαμε πάκτωση δηλαδή ( $U_x=U_y=U_z=0$ ).
- Στη κάθετη επιφάνεια ως προς X εφαρμόσαμε για όλη την επιφάνεια οι μετατοπίσεις να μην μπορούν να μετακινηθούν κατά τον Z άξονα δηλαδή ( $U_z=0$ ).

- Στη κάθετη επιφάνεια ως προς Z εφαρμόσαμε για όλη την επιφάνεια οι μετατοπίσεις να μην μπορούν να μετακινηθούν κατά τον X άξονα δηλαδή ( $U_x=0$ ).
- Φορτίσαμε το δοκίμιο με μία εγκάρσια κατανεμημένη τάση **P=30Mpa**

(Με αυτό το τρόπο προσπαθούμε να προσεγγίσουμε μία φορτισμένη εσωτερική κάθετη επιφάνεια ως προς τους άξονες X ή Z εντός του κυλίνδρου με σκοπό να υπολογίσουμε τις εγκάρσιες τροπές του κυλίνδρου κατά τον άξονα X ( $\epsilon_{xx}$ )).



Εικόνα 8.17

(ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

με φόρτιση για  $U_f=39\%$ )

Από το παραμορφωμένο μοντέλο Εικ. 8.17 λάβαμε εννέα μετρήσεις για την τιμή των τροπών κατά το άξονα των X, από τις οποίες πήραμε την μέση τιμή τους.

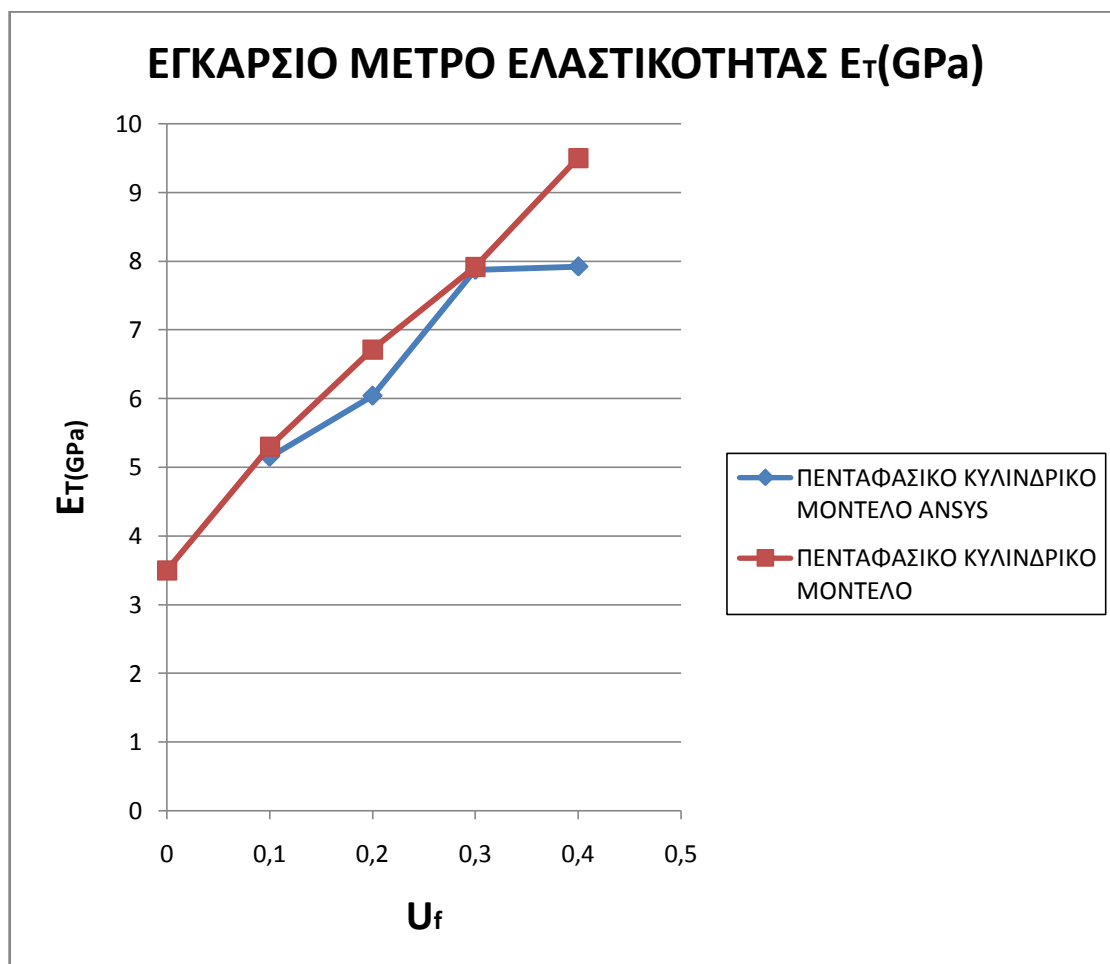
Άρα το ισοδύναμο εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας  $E_T$  από τη λύση των (8.10, 8.11 και 8.12) είναι:

$$E_T = 7.92 \text{Gpa}$$

Συνοπτικά, η υπολογιστική λύση με τα πεπερασμένα στοιχεία θα μας οδηγήσει στα ακόλουθα αποτελέσματα, τα οποία συγκρίνονται με αυτά της αναλυτικής προσέγγισης κεφαλαίου ‘6’ καθώς επίσης και με αποτελέσματα πειραμάτων.

$U_f$	ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ANSYS	ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ
0.00		3.50
0.10	5.15	5.30
0.20	6.04	6.71
0.30	7.87	7.92
0.40	7.92	9.50

Πίνακας SS



Διάγραμμα XXI

## 8.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

Αυτό το Κεφάλαιο συνέκρινε τις αναλυτικές λύσεις των προηγούμενων Κεφαλαίων, τα αποτελέσματα από πειραματικές διατάξεις και τις λύσεις που προέκυψαν με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, με τρόπο που χρησιμοποιήθηκε από την συγγραφέα του παρόντος.

Όλες οι προσεγγίσεις των ελαστοστατικών ιδιοτήτων του συνθέτου υλικού εμπεριέχουν σφάλματα, είτε λόγω θεωρήσεων για την επίτευξη κλειστής λύσης στις μεν αναλυτικές μεθόδους, είτε σε σφάλματα διενέργειας και διασποράς των αποτελεσμάτων στις πειραματικές διατάξεις. Και στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, τα σφάλματα που εμπεριέχονται επί των λύσεων αποτυπώθηκαν και αναλύθηκαν.

Η αριθμητική προσέγγιση του διάμηκες μέτρου Ελαστικότητας  $E_L$  είναι αρκετά σωστή με βάση τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης του Κεφαλαίου '6' και των πειραματικών αποτελεσμάτων που έχουμε, πράγμα το οποίο συμβαίνει ακόμα και με τις πιο απλές μεθόδους υπολογισμού αυτών των μεγεθών.

Ο λόγος του Poisson $_{TT}$  υπολογίζεται από το θεωρητικό τύπο του Κεφαλαίου '5'. Επειδή το πρόβλημα μας δεν μπορεί να επιλυθεί μονοσήμαντα η αυθαίρετη επιλογή του  $\nu_{TT}$ , θα επηρεάσει και τον υπολογισμό του  $E_T$ .

Η αριθμητική προσέγγιση του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$  προβλέπει ικανοποιητικά αποτελέσματα παρά τη χρησιμοποίηση των τιμών του θεωρητικού τύπου του λόγου POISSON  $\nu_{TT}$ .

Η επιλογή της μέσης τιμής των παραβολικών συναρτήσεων  $E_i(r)$ ,  $G_i(r)$  και  $\nu_i(r)$  του Κεφαλαίου '4' ως μηχανικές ιδιότητες της ενδιάμεσου φάσεως αποδείχθηκε καλή τακτική για την προσέγγιση των ισοδύναμων λύσεων  $E_L$  και  $E_{TT}$

Τα αριθμητικά μοντέλα μπορούν να μας φανούν χρήσιμα στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Στον συσχετισμό περιπτώσεων με διαφορετικές παραμέτρους. Μπορούμε να κατανοήσουμε την συμπεριφορά διαφόρων μεταβολών στα δεδομένα, συγκρίνοντας τα μεταξύ τους και όχι απαραίτητα με την πραγματική λύση, εάν αυτή υπάρχει.
- Τα αποτελέσματα των αριθμητικών λύσεων να βρίσκονται εντός του εύρους των πειραματικών αποτελεσμάτων, για όσα πειραματικά αποτελέσματα υπάρχουν διαθέσιμα.

Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση επί της εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση στατικών μικρο-μηχανικών μοντέλων είναι:

- Α) Η δημιουργία ενός ‘ιδιαίτερου’ στοιχείου, το οποίο μακροσκοπικά θα συμπεριφέρεται σαν ένα τμήμα της μεσοφάσης, δηλαδή θα συμπεριλάβει την μέση τιμή της παραβολικής μεταβολής των ιδιοτήτων του εντός των συναρτήσεων σχήματος του.
- Β) Την προσπάθεια μοντελοποίησης του προβλήματος με μεγαλύτερη πύκνωση στοιχείων στην ενδιάμεση φάση με τα 3DSOLID185 στοιχεία.
- Γ) Την συμπεριφορά παρόμοιων μοντέλων σε δυναμική ανάλυση και διερεύνηση των ελαστο-δυναμικών ιδιοτήτων του συνθέτου υλικού.

## 8.5 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα περισσότερα θεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν τις μηχανικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών θεωρούν τις επιφάνειες των εγκλεισμάτων ως τέλειες μαθηματικές επιφάνειες. Αυτό το γεγονός εισάγει υψηλές διατρητικές παραμορφώσεις στα σύνορα, που είναι κάτι το μη ρεαλιστικό.

Για να διορθώσουμε αυτή την μη ρεαλιστική κατάσταση παρουσιάστηκε σε αυτή την μελέτη ένα νέο μοντέλο, το οποίο έχει πέντε φάσεις, δύο από τις οποίες αντιπροσωπεύουν την ενδιάμεση φάση που αναπτύσσεται ως ένα λεπτό συνοριακό στρώμα μεταξύ των φάσεων της μήτρας και της ίνας κατά την διάρκεια του πολυμερισμού της μήτρας. Οι ιδιότητες αυτής της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται από τις ιδιότητες των φάσεων και την ποιότητα της πρόσφυσης μεταξύ αυτών.

Αυτό το είδος της ενδιάμεσου φάσεως, έχει μεταβλητές ιδιότητες οι οποίες κυμαίνονται μεταξύ των ιδιοτήτων της μήτρας και της ίνας.

Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιώντας την θεωρία του Lipaton, (η οποία συσχετίζει τα απότομα άλματα της ειδικής θερμότητας των σύνθετων υλικών στην περιοχή της θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση με τις τιμές του μεγέθους των ενδιάμεσων στρωμάτων) υπολογίσθηκε το πάχος της ενδιάμεσης φάσης.

Έχει παρατηρηθεί ότι η ενδιάμεση φάση η οποία δημιουργείται μεταξύ των ινών και της πολυμερικής μήτρας των σύνθετων υλικών ενισχυμένες με συνεχείς ίνες μονής διεύθυνσης επηρεάζει τις ιδιότητες του σύνθετου υλικού. Σε αυτή την μελέτη εξήχθησαν πέντε σχέσεις, για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας και διατμήσεως, για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας, για τον εγκάρσιο και διαμήκη λόγο Poisson.

Οι νέες αυτές σχέσεις δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν συγκρίνονται με τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα καθώς και με άλλες θεωρητικές σχέσεις της βιβλιογραφίας. Οι θεωρητικές προβλέψεις όπως είδαμε συμφωνούν καλύτερα με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα

σε σχέση με άλλες θεωρητικές τιμές οι οποίες εξήχθησαν από άλλες ερευνητικές εργασίες οι οποίες θεωρούνται «επιτυχημένες» για τον προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με συνεχείς ίνες μονής διεύθυνσης.

Όμως ο περιορισμός του μοντέλου μας ότι έχει μέγιστη επιτρεπτή κατ'όγκο περιεκτικότητα σε ινώδες έγκλεισμα  $U_f = 0,39$  έχει ως αποτέλεσμα να μην έχουμε μεγάλο εύρος τιμών για την μελέτη των ελαστικών σταθερών αλλά και να μην υπάρχουν αρκετά πειραματικά δεδομένα για την συγκεκριμένη περιεκτικότητα.

Τέλος ως μία πιθανή βελτίωση κυρίως του μέτρου διατμήσεως μπορούμε να αναφέρουμε την εξαγωνική κατανομή των ινών αντί της τετραγωνικής, η οποία δύναται να είναι θέμα μελλοντικής εργασίας.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Theocaris P. S., Spathis G. D., Sideridis E.P., *Fibre Sci and Technology*, Vol.17, p.169 (1982)
2. Theocaris P. S., Papanicolaou G. C. and Spathis G. D *Fibre Sci. and Technology*, Vol. 15, p.187(1981)
3. Papanicolaou G. C. Theocaris P. S. and Spathis G. D. *Colloid and Polymer Science*, Vol. 258, 11, p. 1231 (1980)
4. Papanikolaou G. C., Paipetis S. A. and Theocaris P. S. , *Colloid and Polymer Science*, Vol. 256, 7, p. 625(1978)
5. Theocaris P. S. and Papanikolaou G. C. , *Fibre Science and Technology*, Vol.12, 6, p.421(1979)
6. G. A. Papadopoulos, E. Sideridis, *Study of Orthotropic materials: The Interphase Model and the Crack Initiation.*, *Archive of Applied Mechanics* 66 (1995) 111-125
7. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovizky, *J. Appl. Polym. Sci.*, 18, p. 1213 (1974).
8. Yu.S. Lipatov and L.M. Sergeeva, *Adsorption of Polymer*, New York, (1974).
9. Yu.S. Lipatov, *Plaste Kautschuk*, 10, p. 738 (1973).
10. Yu.S. Lipatov and V.F. Babich, *Vysokomol, Soedin, B10*, p. 848 (1968).
11. Yu.S. Lipatov and T.E Geller, *Vysokomol, Soedin*, 8, p. 592, (1966).
12. Yu.S. Lipatov and F.G. Fabulyak, *J. Appl. Polym. Sci.*, 16, p. 2131 (1972).
13. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovozky, *J. Appl. Polymer Sci.*, 20, p. 1787 (1976).
14. G.C. Papanicolaou, P.S. Theocaris, *Colloid and Polymer Sci.*, 257, 3, p. 239 (1979).
15. P.S. Theocaris and G.C. Papanicolaou, *Colloid and Polymer Sci.*, 258, 9, pp. 1044-1051 (1980).
16. R.F. Landel and T.L. Smith, *American Rocket Society Jnl.*, p. 599 (1961).
17. S. Turner, *Appl. Mat. Res.*, p. 10, (1965).
18. C.W. Van Der Wal, H.W. Bree and F.R. Schwarzl, *J. Appl. Pol. Sci.*, 9, p. 2143 (1965).
19. C.A. Kumins and J. Roteman, *J. Pol. Sci.*, 1-A, p. 527 (1963).
20. G.C. Papanicolaou, S.A. Paipetis and P.S. Theocaris, *J. Appl. Pol. Sci.*, 21, p. 689 (1977).
21. S. Strella and P.F. Erhardt, *J. Appl. Pol. Sci.*, 13, p. 1373 (1969).
22. S. Strella, *J. Appl. Pol. Sci.*, 7, p. 569 (1963).
23. S. Strella, *J. Appl. Pol. Sci.*, 7, p. 1281 (1963).
24. Αιμ. Σιδερίδης, “Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιαμέσου φάσεως”, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ (1998).
25. Yu.S. Lipatov, *Physical Chemistry of Filled Polymers*, Originally published “*Khimiya*”(Moscow 1977). Translated from the Russian by R.J. Moseley, *International Polymer Science and Technology Monograph No. 2*
26. Theocaris P. S., “The Interphase and its Influence on the Mechanical Properties of Composites,” *New developments in the Characterization of Polymers in the Solid State*, *Advances in Polymer Science*, H. H. Kausch & H.C. Zachmann Editors, Springer Verlag Publ.(1984); see also P. S. Theocaris, “On the Evaluation of Adhesion Between Phases in Fiber Composites,” *Colloid and Polymer Journal* (1984).
27. P.S. Theocaris, E.P. Sideridis, G.C Papanicolaou, “The Elastic Longitudinal

- Modulus and Poisson 's Ratio of Fiber Composites" Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 4, (October 1985)
28. E. Sideridis, "The Transverse Elastic Modulus of Fiber-Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase" Journal of Applied Polymer Science, Vol. 48, 243-255 (1993)
  29. E. Sideridis, "The In-Plane Shear Modulus of Fiber Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase" Composites Science and Technology 31(1988) 35-53.
  30. E. Sideridis, "The Off-Axis Elastic Constants of Unidirectional Glass Fibre Composites Defined by the Concept of Interphase".
  31. Ekvall J.C. , "ASME" (1961).
  32. Rosen B.W. , "Composites" (1974).
  33. Paul, Trans. Metallurgical Soc. AIME, 21. 8, 36 (1960)
  34. J.M. Whitney and M.B. Riley, AIAA J. , 1537(1966)
  35. J.C Ekvall, "Structural Behaviour of Monofilament Composites", Proc. AIAA 6<sup>th</sup> Structures and Materials Conf. , AIAA, New York (1965)
  36. J.C. Ekvall, ASME Paper No.63-WA-223 (1963)
  37. L.B Greszczuk, "Membrane Analysis Methods for Composites Structures", Douglas Aircraft Co. Inc. , SM-41543 (1962)
  38. Z. Hashin and B.W. Rosen, J. Appl. Mech. , Trans. Asme, 86 (1964), 223.
  39. Z. Hashin, J. Mech. Phys. Solids, 12 (1965), 119.
  40. Theocaris P.S. , "The Unfolding Model for the Representation of the Interphase Layer in Composites", Proc. Nat. Acad. Athens, Vol.59, No. II, pp.87-100 (1984)
  41. Sih G.C. , Hilton P.D. , Badalian R. , Schenberger P.S and Villareal G. , "Fractured Mechanics for Fibrous Composites, ASTM STP 521 , pp. 98-132 (1973).
  42. Clements L.L and Moore R.L. , Composites, 1, p.93 (1978).
  43. Whitney J.M. and Riley M.B. , AIAA Journal, 4(9), p.1537 (1966).
  44. L.B. Gteszczuk, "Theoretical and Experimental Studies on Properties and Behaviour of Filamentary Composites", SPI 21<sup>st</sup> Conference, Chicago, IL, Sect. 5-B (1966).
  45. S.W. Tsai, NASA CR-71 (1964)
  46. R.M. Orgrkiewicz and A.A.M. Sayigh, J. Strain Analysis, 6 (1971), 226.
  47. Z. Hashin, Int. J. Solids Structures, 6 (1970), 797.
  48. Δ.Ι. Παντελής, «Μη Μεταλλικά Τεχνικά Υλικά».
  49. Γ.Ι. Τσαμασφύρος , Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων Ι , Εκδόσεις Συμμετρία 1991
  50. Π. Α. Βουθούνης, «Μηχανική Παραμορφώσιμου Στερεού I-ANTOXH ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ, ασκήσεις», Αθήνα 2002
  51. Γ. Παπανικολάου και Δ. Μουζάκης, «ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ», Εκδόσεις Κλειδάριθμος (2007).
  52. Βικιπαίδεια([el.wikipedia.org/](http://el.wikipedia.org/))
  53. Ansys User Manual Version 17.0
  54. Χαράλαμπος Γ. Γεωργιάδης «Προχωρημένη Μηχανική Των Υλικών»

