

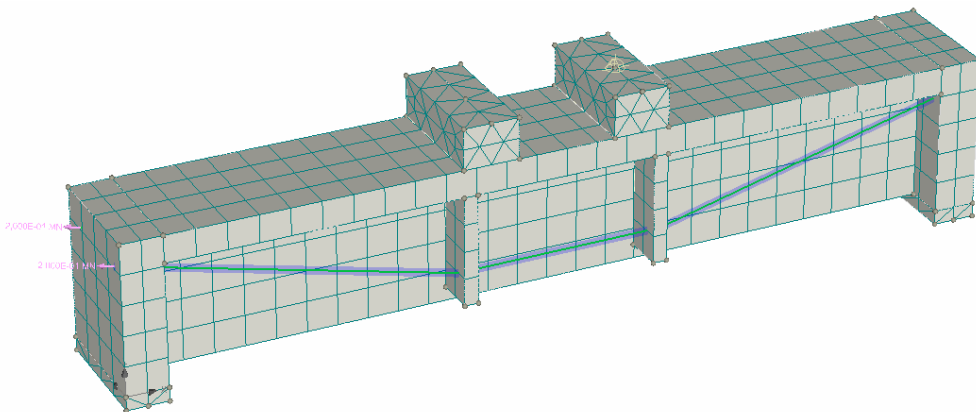


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μη Γραμμική Ανάλυση Κατασκευών από Ωπλισμένο Σκυρόδεμα με Τρισδιάστατα Πεπερασμένα Στοιχεία



ΙΩΑΝΝΙΔΟΥ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Κ. ΣΠΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ

Ακαδημαϊκό Έτος 2010-2011

Περιεχόμενα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	5
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3
ΜΕΡΟΣ Α: ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	5
1 Καταστατικά Μοντέλα	5
1.1 Καταστατικό Μοντέλο SBETA (CCSbetaMaterial)	5
1.1.1 Βασικές Παραδοχές	5
1.1.2 Σχέσεις Τάσεων – Παραμορφώσεων για το Σκυρόδεμα	9
1.1.3 Τοπικά Όρια.....	17
1.1.4 Διαδικασία Θραύσης, Εύρος Ρωγμής	18
1.1.5 Διαξονική Ένταση Κριτήριο Αστοχίας του Σκυροδέματος	19
1.1.6 Ρωγμές	21
1.1.7 Διατμητικές Τάσεις και Δυσκαμψία στο Ρηγματωμένο Σκυρόδεμα.....	22
1.1.8 Θλιπτική Αντοχή του Ρηγματωμένου Σκυροδέματος	23
1.1.9 Εφελκυστική Αντοχή του Ρηγματωμένου Σκυροδέματος	24
1.1.10 Σύνοψη των Τάσεων στο Μοντέλο SBETA	25
1.1.11 Μητρώα Δυσκαμψίας του Υλικού	25
1.1.12 Ανάλυση των Τάσεων	27
1.1.13 Παράμετροι του Καταστατικού Μοντέλου	28
1.2 Καταστατικό Μοντέλο CC3DNonLinCementitious2	29
1.2.1 Εισαγωγή	29
1.2.2 Rankine – Μοντέλο Θραύσης για τη Ρηγμάτωση του Σκυροδέματος	29
1.2.3 Πλαστικό Μοντέλο Σύθλιψης Σκυροδέματος	32
1.2.4 Συνδυασμός Πλαστικού Μοντέλου και Μοντέλου Θραύσης.....	36
1.2.5 Δυσκαμψία Εφελκυσμού	40
1.2.6 Απόσταση Ρωγμών	40
2 Επίλυση Μη Γραμμικών Εξισώσεων.....	41
2.1 Γραμμική Επίλυση.....	41
2.1.1 Άμεση Επίλυση	42
2.1.2 Λύση με Επαναλήψεις	43
2.2 Πλήρης Μέθοδος Newton – Raphson	43
2.3 Τροποποιημένη Μέθοδος Newton – Raphson	45
2.4 Μέθοδος Arc - Length.....	46
2.4.1 Κάθετη Μέθοδος Ενημέρωσης	50
2.4.2 Μέθοδος Συνεχούς Γραμμικοποίησης	50

2.4.3	Λεπτομερής Ορθογωνική Μέθοδος	51
2.4.4	Μέθοδος Crisfield	52
2.4.5	Βήμα της Arc Length	53
2.5	Μέθοδος Line – search	54
2.6	Η Παράμετρος β	55
ΜΕΡΟΣ Β: ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ		59
3	Προσομοίωση Φορέων και Ανάλυση με το Πρόγραμμα ATENA	59
3.1	Αμφιέριστη Προεντεταμένη Δοκός από Ωπλισμένο Σκυρόδεμα – FE 0,25 cm	59
3.1.1	Προσομοίωση	61
3.1.2	Αποτελέσματα	84
3.2	Αμφιέριστη Προεντεταμένη Δοκός από Ωπλισμένο Σκυρόδεμα – FE 0,15 cm	87
3.2.1	Προσομοίωση	87
3.2.2	Αποτελέσματα	87
3.3	Αμφιέριστη Δοκός με Εξωτερική Προένταση	90
3.3.1	Προσομοίωση	92
3.3.2	Αποτελέσματα	95
ΜΕΡΟΣ Γ: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ		97
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		98
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ		100

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή μου **κ. Κωνσταντίνο Σπηλιόπουλο**, αλλά και τον Καθηγητή μου **κ. Λεωνίδα Σταυρίδη** για την αμέριστη συμπαράσταση τους και για τις συμβουλές που μου έδωσαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της Μεταπτυχιακής αυτής εργασίας.

Ακόμη θέλω να ευχαριστήσω την υποψήφια Διδάκτορα **Χρύσα Στάθη**, που με την εμπειρία της πάνω στο πρόγραμμα με βοήθησε πολλές φορές να υπερκεράσω τις όποιες δυσκολίες αντιμετώπισα.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την **οικογένειά μου** και ιδιαίτερα το συνάδερφο και αδερφό μου **Κωνσταντίνο Ιωαννίδη**, που βρίσκονται πάντα στο πλευρό μου και στηρίζουν τη μέχρι τώρα πορεία μου.

*Αφιερώνω τη Μεταπτυχιακή
αυτή εργασία στους γονείς μου,
Θεολόγο & Ασπασία*

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΑΠΟ ΩΠΛΙΣΜΕΝΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ ΜΕ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα Μεταπτυχιακή εργασία, γίνεται μία προσπάθεια προσομοίωσης προεντεταμένων δοκών από ωπλισμένο σκυρόδεμα, με χρήση μη γραμμικής ανάλυσης και τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Για το σκοπό αυτό έγινε χρήση του προγράμματος ATENA της εταιρείας Cervenka Consulting.

Το Α' μέρος της εργασίας, αποτελείται από ορισμένα θεωρητικά στοιχεία, νόμους και παραδοχές τα οποία το πρόγραμμα ATENA χρησιμοποιεί. Γίνεται αναλυτική περιγραφή των νόμων και των χαρακτηριστικών του υλικού του σκυροδέματος, μέσω δύο καταστατικών μοντέλων υλικού, όπως αυτά προσομοιώνονται στο πρόγραμμα. Περιγράφονται επίσης και οι δύο μέθοδοι ανάλυσης που χρησιμοποιήθηκαν, η μέθοδος Newton – Raphson και η μέθοδος Arc Length.

Στο Β' μέρος της εργασίας, παρουσιάζονται τρία μοντέλα, στα οποία έγινε ανάλυση. Το πρώτο και το δεύτερο μοντέλο, αφορούν μία προεντεταμένη, αμφιέριστη δοκό από ωπλισμένο σκυρόδεμα, ανοίγματος 20 m. Το πρώτο προσομοίωμα αναλύθηκε με σχετικά μεγάλο μέγεθος πεπερασμένων στοιχείων για να τονιστεί πόσο σημαντικός είναι ο ρόλος του μεγέθους των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνται. Η τελική σύγκριση γίνεται τόσο με το δεύτερο προσομοίωμα, στο οποίο χρησιμοποιήθηκαν σαφώς μικρότερα (άρα και περισσότερα) πεπερασμένα στοιχεία, όσο και με το φορτίο κατάρρευσης που προκύπτει για αυτή τη δοκό, σύμφωνα με απλούς υπολογισμούς, βάσει της πλαστικής ροπής της δοκού. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε και για τα δύο προσομοιώματα, είναι η Arc Length, με εφαρμογή ομοιόμορφου κατανεμημένου φορτίου στο άνω μέρος της δοκού.

Τέλος εξετάζεται ένα τρίτο προσομοίωμα, μία αμφιέριστη δοκός, προεντεταμένη, αλλά με εξωτερικά καλώδια αυτή τη φορά. Η δοκός έχει άνοιγμα 3 m. Στη δοκό εφαρμόζεται επιβαλλόμενη μετατόπιση στο άνω μέρος της δοκού, σε δύο κόμβους εκατέρωθεν της μεσαίας διατομής. Η μέθοδος ανάλυσης που χρησιμοποιήθηκε για αυτό το πρόβλημα είναι η μέθοδος Newton – Raphson. Γίνεται σύγκριση του προσομοιώματος αυτού με το αντίστοιχο προσομοίωμα που χρησιμοποιείται στο παράδειγμα της Cervenka Consulting.

ΜΕΡΟΣ Α: ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

1 Καταστατικά Μοντέλα

1.1 Καταστατικό Μοντέλο SBETA (CCSbetaMaterial)

1.1.1 Βασικές Παραδοχές

1.1.1.1 Τάση, Παραμόρφωση, Δυσκαμψία Υλικού

Η διαμόρφωση καταστατικών σχέσεων πραγματοποιείται μέσω τάσεων. Οι ιδιότητες του υλικού, καθώς και οι ρωγμές και ο σπλισμός, που ορίζονται σε ένα σημείο του υλικού, ισχύουν για ένα δεδομένο όγκο υλικού, ο οποίος σε αυτή την περίπτωση συσχετίζεται με ολόκληρο το πεπερασμένο στοιχείο. Το καταστατικό μοντέλο βασίζεται στη δυσκαμψία και περιγράφεται από την εξίσωση ισορροπίας ενός σημείου στο υλικό:

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{e} \quad (1.1)$$

όπου \mathbf{s} , \mathbf{D} και \mathbf{e} είναι το διάνυσμα των τάσεων, η δυσκαμψία του υλικού και το διάνυσμα των παραμορφώσεων, αντίστοιχα.

$$\mathbf{s} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$$

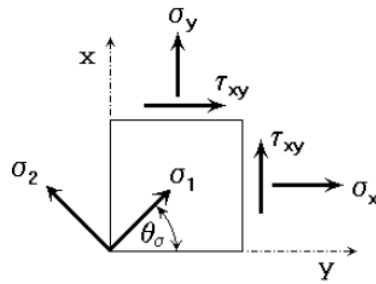
$$\mathbf{e} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

Το διάνυσμα των τάσεων \mathbf{s} και η δυσκαμψία του υλικού \mathbf{D} εμπεριέχουν τα αντίστοιχα διανύσματα και μητρώα για το σκυρόδεμα και για τον σπλισμό. Είναι δηλαδή:

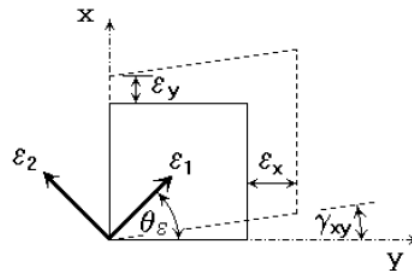
$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_c + \mathbf{s}_s$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c + \mathbf{D}_s \quad (1.2)$$

Το διάνυσμα των τάσεων \mathbf{s} , όπως και τα συνθετικά του \mathbf{s}_c και \mathbf{s}_s συσχετίζονται με τη συνολική επιφάνεια της διατομής. Η τάση του σκυροδέματος \mathbf{s}_c , ενεργεί στην επιφάνεια του σκυροδέματος A_c , η οποία είναι περίπου ίση με τη συνολική επιφάνεια της διατομής $A_c = A$, εάν αγνοήσουμε την επιφάνεια του σπλισμού στη διατομή αυτή. Το μητρώο \mathbf{D} εκφράζει το νόμο του Hooke είτε για ισότροπα, είτε για ορθότροπα υλικά. Στα **Σχήμα 1.1** και **Σχήμα 1.2** παρουσιάζονται οι τάσεις και οι παραμορφώσεις στο επίπεδο, αντίστοιχα.



Σχήμα 1.1: Οι τάσεις στο επίπεδο



Σχήμα 1.2: Οι παραμορφώσεις στο επίπεδο

Το διάνυσμα των τάσεων του οπλισμού \mathbf{s}_s είναι το άθροισμα των τάσεων όλων των στοιχείων του διανεμημένου οπλισμού, δηλαδή:

$$\mathbf{s}_s = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_{si} \quad (1.3)$$

όπου n είναι το πλήθος των στοιχείων του διανεμημένου οπλισμού. Για τον i -στο οπλισμό, το η ολική τάση του στοιχείου του οπλισμού \mathbf{s}_{si} συνδέεται με την τοπική τάση του οπλισμού σ'_{si} με τον μετασχηματισμό:

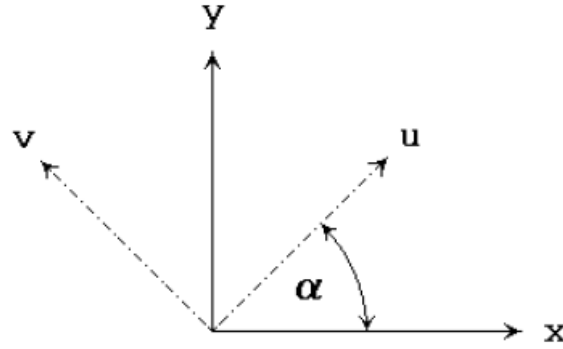
$$\mathbf{s}_{si} = \mathbf{T}_\sigma p_i \sigma'_{si} \quad (1.4)$$

όπου p_i είναι ο λόγος του οπλισμού:

$$p_i = \frac{A_{si}}{A_c}$$

όπου A_{si} η επιφάνεια της διατομής του οπλισμού. Η τοπική τάση σ'_{si} ενεργεί στη διατομή του οπλισμού A_{si} .

Τα διανύσματα των τάσεων και των παραμορφώσεων μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις που ακολουθούν σε νέους άξονες u, v οι οποίοι έχουν στραφεί κατά γωνία α σε σχέση με τους καθολικούς άξονες x, y . Η γωνία α είναι θετική κατά την αντιωρολογιακή φορά, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.3**.



Σχήμα 1.3: Περιστροφή των αξόνων αναφοράς

Μετασχηματισμός των τάσεων:

$$\mathbf{s}_{(u)} = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{s}_{(x)} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \cos(a)^2 & \sin(a)^2 & 2 \cos(a) \sin(a) \\ \sin(a)^2 & \cos(a)^2 & -2 \cos(a) \sin(a) \\ -\cos(a) \sin(a) & \cos(a) \sin(a) & \cos(a)^2 - \sin(a)^2 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

με:

$$\mathbf{s}_{(u)} = \{\sigma_u, \sigma_v, \tau_{uv}\}^T$$

$$\mathbf{s}_{(x)} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$$

Μετασχηματισμός παραμορφώσεων:

$$\mathbf{e}_{(u)} = \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{e}_{(x)} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos(a)^2 & \sin(a)^2 & \cos(a) \sin(a) \\ \sin(a)^2 & \cos(a)^2 & -\cos(a) \sin(a) \\ -2 \cos(a) \sin(a) & 2 \cos(a) \sin(a) & \cos(a)^2 - \sin(a)^2 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

με:

$$\mathbf{e}_{(u)} = \{\varepsilon_u, \varepsilon_v, \gamma_{uv}\}^T$$

$$\mathbf{e}_{(x)} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

Οι γωνίες των κύριων αξόνων των τάσεων και των παραμορφώσεων, **Σχήμα 1.1: Οι τάσεις στο επίπεδο** και **Σχήμα 1.2**, υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$\tan(2\theta_\sigma) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{και} \quad \tan(2\theta_\varepsilon) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (1.9)$$

όπου θ_σ είναι η γωνία του πρώτου κύριου άξονα των τάσεων και θ_ε η γωνία του πρώτου κύριου άξονα των παραμορφώσεων.

Στην περίπτωση ισότροπου υλικού (μη ρηγματωμένο σκυρόδεμα) οι κύριες διευθύνσεις των τάσεων και των παραμορφώσεων ταυτίζονται, ενώ στην περίπτωση ανισότροπου υλικού

(ρηγματωμένο σκυρόδεμα) μπορεί και να διαφέρουν. Στο πρόγραμμα **ATENA** θεωρούνται θετικές οι εφελκυστικές τάσεις και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις, ενώ αρνητικές είναι οι θλιπτικές τάσεις και παραμορφώσεις. Η διατμητική τάση και η αντίστοιχη διατμητική παραμόρφωση, θεωρείται θετική όταν ενεργεί στη διατομή κατά τη φορά που φαίνεται στο **Σχήμα 1.1**.

1.1.1.2 Περιγραφή του Υλικού Μοντέλου SBETA

Η ονομασία SBETA προκύπτει από τη σύντμηση της γερμανικής λέξης **StahIBETonAnalyse**, που σημαίνει ανάλυση οπλισμένου σκυροδέματος.

Το υλικό μοντέλο SBETA περιλαμβάνει τα εξής χαρακτηριστικά συμπεριφοράς σκυροδέματος:

- ✓ μη γραμμική συμπεριφορά στη θλίψη, λαμβάνοντας υπόψη τη σκλήρυνση και τη χαλάρωση
- ✓ η θραύση του σκυροδέματος στον εφελκυσμό βασίζεται στις αρχές της Θραυστομηχανικής
- ✓ κριτήρια αστοχίας σε διαξονική καταπόνηση
- ✓ μείωση θλιπτικής αντοχής μετά τη ρηγμάτωση
- ✓ επιρροή του εφελκυσμού στη δυσκαμψία
- ✓ μείωση της διατμητικής αντοχής μετά τη ρηγμάτωση
- ✓ δύο μοντέλα ρηγμάτωσης: σταθερό μοντέλο ρηγμάτωσης και εστραμμένο μοντέλο ρηγμάτωσης

Μεταξύ σκυροδέματος και οπλισμού θεωρείται ότι υπάρχει πλήρης συνάφεια. Δεν μπορεί να προσομοιωθεί ολίσθηση του οπλισμού απευθείας, εκτός από αυτή που συμπεριλαμβάνεται εγγενώς στη δυσκαμψία. Ωστόσο, σε μακροσκοπικό επίπεδο μπορεί να προκύψει σχετική ολίσθηση του οπλισμού σε σχέση με το σκυρόδεμα, εάν αυτό είναι ρηγματωμένο ή εάν έχει αστοχήσει σε θραύση. Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί σε πραγματικό μηχανισμό αστοχίας στη σύνδεση των δύο υλικών, στην περίπτωση ράβδων οπλισμού από νευροχάλυβα.

Ο οπλισμός και στις δύο του μορφές, διανεμημένος ή διακριτός, καταπονείται σε μονοαξονική ένταση και ο καταστατικός νόμος στον οποίο υπόκειται είναι ένα πολυγραμμικό διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων.

Για το υλικό εφαρμόζεται μη γραμμική ελαστική ανάλυση. Κατά την προσέγγιση αυτή, οι ελαστικές σταθερές προκύπτουν από μία συνάρτηση τάσεων – παραμορφώσεων, η οποία στο πρόγραμμα **ATENA** αποκαλείται “ισοδύναμος μονοαξονικός νόμος” (*equivalent uniaxial law*). Η προσέγγιση αυτή είναι παρόμοια με το μη-γραμμικό υποελαστικό καταστατικό μοντέλο, με τη διαφορά ότι εδώ χρησιμοποιούνται διαφορετικοί νόμοι για τη φόρτιση και την αποφόρτιση, προκαλώντας τη σκέδαση της ενέργειας που δαπανάται για την καταστροφή του υλικού.

1.1.2 Σχέσεις Τάσεων – Παραμορφώσεων για το Σκυρόδεμα

1.1.2.1 Ισοδύναμος Μονοαξονικός Νόμος

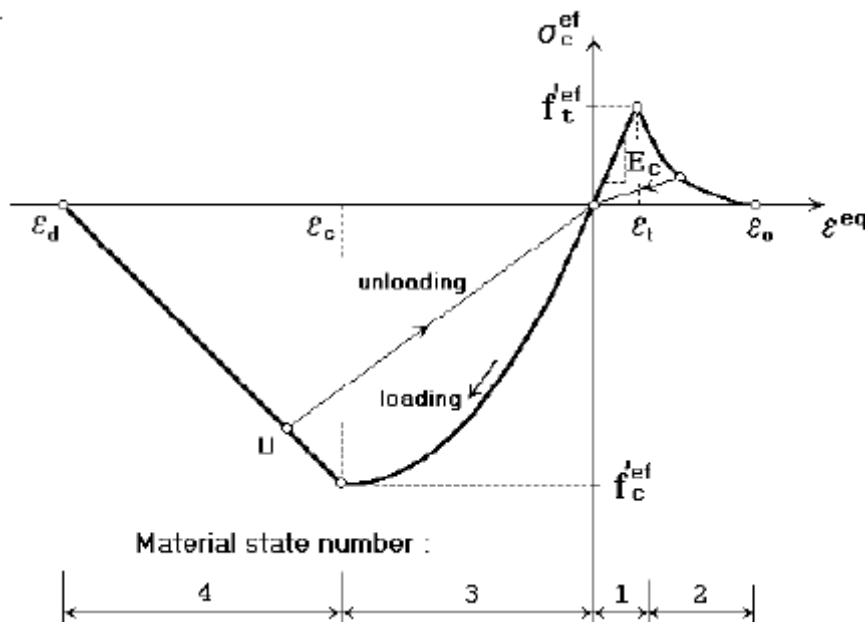
Η μη γραμμική συμπεριφορά του σκυροδέματος σε διαξονική ένταση περιγράφεται με όρους ενεργών τάσεων σ_c^{ef} , και ισοδύναμων μονοαξονικών παραμορφώσεων ε^{eq} . Η ενεργός τάση είναι στις περισσότερες των περιπτώσεων και κύρια τάση.

Η ισοδύναμη μονοαξονική παραμόρφωση εισάγεται με στόχο την απαλοιφή της επίδρασης του φαινομένου του Poisson σε κατάσταση πλήρους έντασης.

$$\varepsilon^{eq} = \frac{\sigma_{ci}}{E_{ci}} \quad (1.10)$$

Η ισοδύναμη μονοαξονική παραμόρφωση μπορεί να θεωρηθεί ως η παραμόρφωση που προκαλείται από την τάση σ_{ci} σε δοκιμή μονοαξονικής αντοχής με μέτρο ελαστικότητας E_{ci} κατά την κατεύθυνση i . Με αυτή την υπόθεση, η μη-γραμμικότητα που παρουσιάζεται κατά τη ρηγμάτωση οφείλεται αποκλειστικά στην κυρίαρχη τάση σ_{ci} .

Το πλήρες διάγραμμα ισοδύναμου μονοαξονικού νόμου τάσης – παραμόρφωσης για το σκυρόδεμα παρουσιάζεται στο **Σχήμα 1.4**.



Σχήμα 1.4: Νόμος τάσης – παραμόρφωσης για το σκυρόδεμα σε μονοαξονική ένταση

Οι αριθμοί 1 έως 4 που αντιστοιχούν στα διάφορα μέρη του διαγράμματος του **Σχήμα 1.4** (material state numbers), χρησιμοποιούνται στην ανάλυση για να προσδιοριστεί η κατάσταση της βλάβης του σκυροδέματος.

Η αποφόρτιση είναι μία γραμμική συνάρτηση προς το σημείο (0,0). Στο **Σχήμα 1.4** παρουσιάζεται ένα σημείο αποφόρτισης U . Επομένως η σχέση μεταξύ της ενεργούς τάσης σ_c^{ef} και της παραμόρφωσης ε^{eq} δεν είναι μοναδική και εξαρτάται από την ιστορία της φόρτισης. Μετάβαση από τη φόρτιση στην αποφόρτιση πραγματοποιείται, όταν η αύξηση της ενεργούς παραμόρφωσης αλλάζει πρόσημο. Εάν διαδραματιστεί μεταγενέστερη επαναφόρτιση, ακολουθείται το ίδιο γραμμικό μονοπάτι της αποφόρτισης, έως ότου προσεγγιστεί ξανά το τελευταίο σημείο φόρτισης U . Τότε, επαναλαμβάνεται η συνάρτηση φόρτισης.

Τα σημεία αιχμής της τάσης στη θλίψη $f_c'^{ef}$ και στον εφελκυσμό $f_t'^{ef}$ υπολογίζονται σύμφωνα με τη διαξονική κατάσταση αστοχίας όπως εξηγείται στην **παράγραφο 1.1.5**. Έτσι, ο ισοδύναμος νόμος μονοαξονικής τάσης – παραμόρφωσης αντικατοπτρίζει τη διαξονική εντατική κατάσταση.

Το τέμνον μέτρο ελαστικότητας υπολογίζεται ως εξής:

$$E_c^s = \frac{\sigma_c}{\varepsilon^{eq}} \quad (1.11)$$

και χρησιμοποιείται στην καταστατική εξίσωση για τον υπολογισμό των τάσεων, για δεδομένη παραμόρφωση, όπως αναφέρεται στην **παράγραφο 1.1.12**.

Το εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας E_c^t χρησιμοποιείται στο μητρώο του υλικού \mathbf{D}_c για τη δημιουργία ενός μητρώου δυσκαμψίας ενός στοιχείου για την επαναληπτική λύση. Το εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας είναι η κλίση της καμπύλης τάσεων – παραμορφώσεων για μία δεδομένη παραμόρφωση και είναι πάντα θετικό. Στην περίπτωση που το εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας είναι μικρότερο από την ελάχιστη τιμή E_{min}^t , τότε λαμβάνεται $E_c^t = E_{min}^t$. Αυτό συμβαίνει στο πεδίο όπου πραγματοποιείται χαλάρωση κοντά στο σημείο αιχμής της θλίψης.

Στις επόμενες υποενότητες παρουσιάζεται αναλυτική περιγραφή του νόμου τάσεων – παραμορφώσεων.

1.1.2.2 Αντοχή σε εφελκυσμό πριν τη ρηγμάτωση

Η συμπεριφορά του σκυροδέματος σε εφελκυσμό, χωρίς την ύπαρξη ρωγμών, θεωρείται γραμμική ελαστική. Το αρχικό μέτρο ελαστικότητας του σκυροδέματος είναι E_c , ενώ $f_t'^{ef}$ είναι η ενεργός αντοχή σε εφελκυσμό, η οποία προκύπτει από τη συνάρτηση διαξονικής αστοχίας, **παράγραφος 1.1.5.2**.

$$\sigma_c^{ef} = E_c \varepsilon^{eq} \quad , \quad 0 \leq \sigma_c \leq f_t'^{ef} \quad (1.12)$$

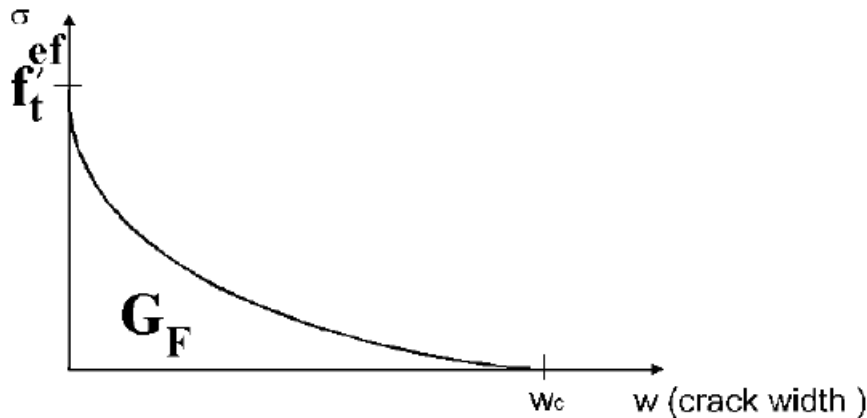
1.1.2.3 Αντοχή σε εφελκυσμό μετά τη ρηγμάτωση

Χρησιμοποιούνται δύο διατυπώσεις για το άνοιγμα της ρωγμής:

- ✓ Ένα πλασματικό μοντέλο ρηγμάτωσης, που βασίζεται στο νόμο ανοίγματος ρωγμής και στην ενέργεια θραύσης. Η διατύπωση αυτή είναι κατάλληλη για την προσομοίωση της αναπαραγωγής των ρωγμών στο σκυρόδεμα. Χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τη ζώνη ρηγματώσεως, βλέπε **παράγραφο 1.1.3**.
- ✓ Μία σχέση τάσεων – παραμορφώσεων σε ένα σημείο του υλικού. Αυτή η διατύπωση δεν είναι κατάλληλη για τις συνήθεις περιπτώσεις εξέλιξης των ρωγμών στο σκυρόδεμα, αλλά πρέπει να χρησιμοποιείται μόνον σε εξαιρετικές περιπτώσεις.

Περιγράφονται ακολούθως, πέντε προσομοιώσεις χαλάρωσης που περιλαμβάνονται στο μοντέλο υλικού SBETA.

1. Εκθετικός Νόμος Ανοίγματος Ρωγμής



Σχήμα 1.5: Εκθετικός Νόμος Ανοίγματος Ρωγμής

Η συνάρτηση ανοίγματος της ρωγμής, προέρχεται από πειραματικά αποτελέσματα (HORDIJK – 1991).

$$\frac{\sigma}{f_t^{'ef}} = \left\{ 1 + \left(c_1 \frac{w}{w_c} \right)^3 \right\} \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2), \quad (1.13)$$

$$w_c = 5,14 \frac{G_f}{f_t^{'ef}}$$

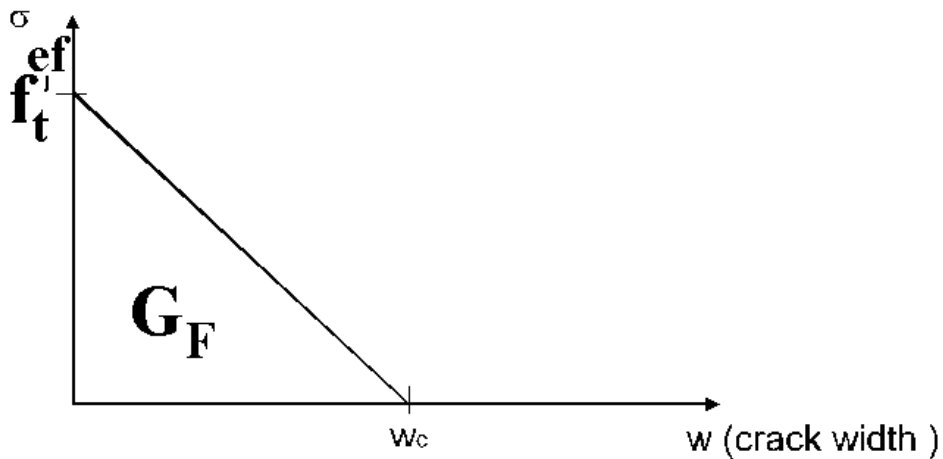
όπου:

- | | |
|--------------|---|
| w | το άνοιγμα της ρωγμής |
| w_c | το άνοιγμα της ρωγμής με πλήρη απελευθέρωση των τάσεων |
| σ | η κανονική τάση στη ρωγμή (συνοχή ρωγμής) |
| $c_1 = 3$ | σταθερά |
| $c_2 = 6,93$ | σταθερά |
| G_f | ενέργεια θραύσης: η ενέργεια που απαιτείται για να δημιουργηθεί μια ρωγμή |

$f_t^{'ef}$ χωρίς εσωτερικές τάσεις
 η ενεργός εφελκυστική αντοχή, που προκύπτει από τη συνάρτηση αστοχίας,
 εξ. (1.22)

Το άνοιγμα της ρωγμής w , προκύπτει από τις παραμορφώσεις (εξ. (1.18)), σύμφωνα με τη θεωρία ανοίγματος ρωγμής.

2. Γραμμικός Νόμος Ανοίγματος Ρωγμής

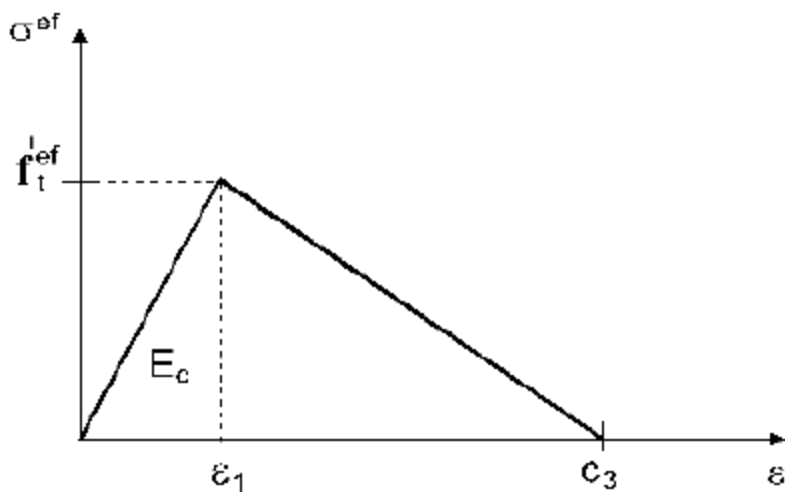


Σχήμα 1.6: Γραμμικός Νόμος Ανοίγματος Ρωγμής

$$\frac{\sigma_c^{ef}}{f_t^{'ef}} = \frac{f_t'}{w_c} (w_c - w), \quad (1.14)$$

$$w_c = \frac{2G_f}{f_t'}$$

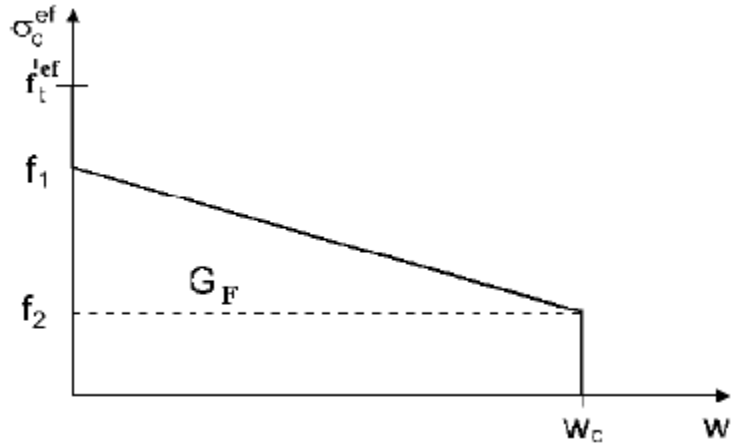
3. Γραμμική Χαλάρωση λόγω Τοπικής Παραμόρφωσης



Σχήμα 1.7: Γραμμική Χαλάρωση λόγω Τοπικής Παραμόρφωσης

Ο καθοδικός κλάδος του διαγράμματος τάσεων – παραμορφώσεων καθορίζεται από την παραμόρφωση c_3 , η οποία αντιστοιχεί σε μηδενική τάση (πλήρης απελευθέρωση της τάσης).

4. SFRC (Steel Fiber Reinforced Concrete) – Ινοπλισμένο Σκυρόδεμα, βάσει της Ενέργειας Θραύσης



Σχήμα 1.8: SFRC – βάσει της Ενέργειας Θραύσης

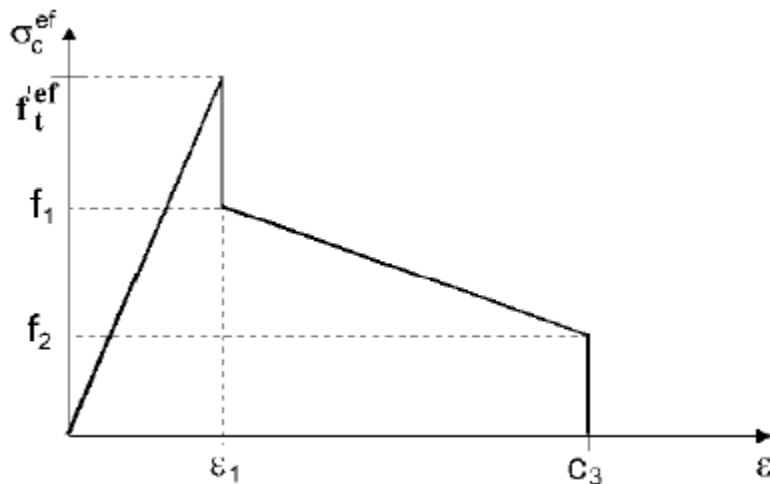
Παράμετροι:

$$c_1 = \frac{f_1}{f_t^{'ef}}$$

$$c_2 = \frac{f_2}{f_t^{'ef}}$$

$$w_c = \frac{2G_f}{f_1 + f_2}$$

5. SFRC (Steel Fiber Reinforced Concrete) – Ινοπλισμένο Σκυρόδεμα, βάσει της Παραμόρφωσης



Σχήμα 1.9: SFRC – βάσει της Παραμόρφωσης

Παράμετροι:

$$c_1 = \frac{f_1}{f_t'^{ef}}$$

$$c_2 = \frac{f_2}{f_t'^{ef}}$$

Οι παράμετροι c_1 και c_2 είναι σχετικές τιμές παραμόρφωσης, ενώ η c_3 είναι η τελική τιμή παραμόρφωσης.

1.1.2.4 Θλίψη πριν τη Μέγιστη Τάση

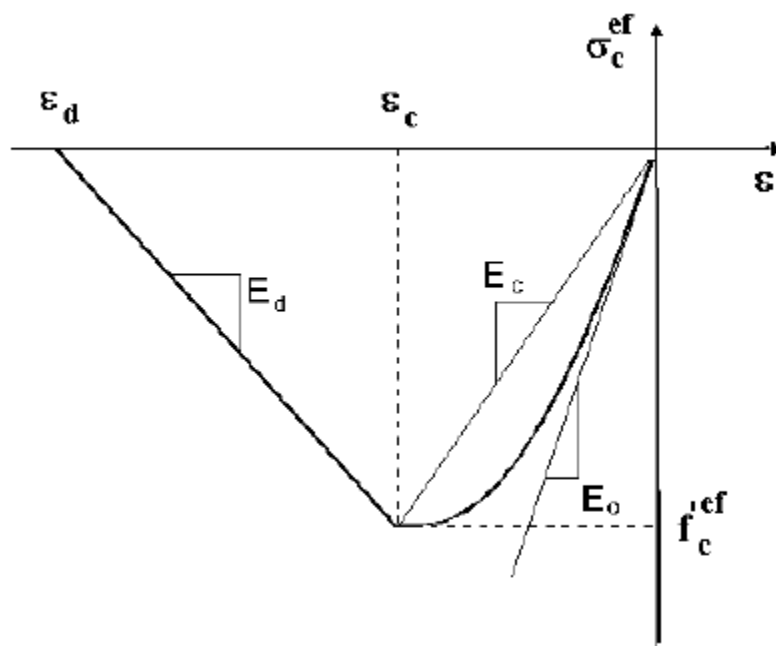
Η εξίσωση που συνιστά ο **CEB – FIP Model Code 90** υιοθετείται για τον ανοδικό κλάδο της συνάρτησης τάσεων – παραμορφώσεων του σκυροδέματος υπό θλίψη, **Σχήμα 1.10**. Η εξίσωση αυτή είναι κατάλληλη για κανονικά, αλλά και για υψηλής αντοχής σκυροδέματα.

$$\sigma_c^{ef} = f_c'^{ef} \frac{kx - x^2}{1 + (k - 2)x} \quad (1.15)$$

όπου:

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}$$

$$k = \frac{E_o}{E_c}$$



Σχήμα 1.10: Διάγραμμα Θλιπτικών Τάσεων - Παραμορφώσεων

σ_c^{ef}	θλιπτική τάση σκυροδέματος
$f_c^{'ef}$	ενεργός θλιπτική αντοχή σκυροδέματος
x	κανονικοποιημένη παραμόρφωση
ε	παραμόρφωση
ε_c	παραμόρφωση στο σημείο καμπής $f_c^{'ef}$
k	παράμετρος μορφής ($k \geq 1$)
E_o	επιβατικό μέτρο ελαστικότητας
E_c	τέμνον μέτρο ελαστικότητας στη μέγιστη τάση,

$$E_c = \frac{f_c^{'ef}}{\varepsilon_c}$$

Η παράμετρος k μπορεί να έχει οποιαδήποτε θετική τιμή μεγαλύτερη ή ίση με τη μονάδα. Για παράδειγμα: $k = 1$, γραμμικό. $k = 2$, παραβολικό.

Ως συνέπεια της παραπάνω θεώρησης, μέχρι το σημείο καμπής θεωρείται κατανεμημένη ρηγμάτωση, ενώ μετά από τη μέγιστη τάση θεωρείται τοπική ρηγμάτωση.

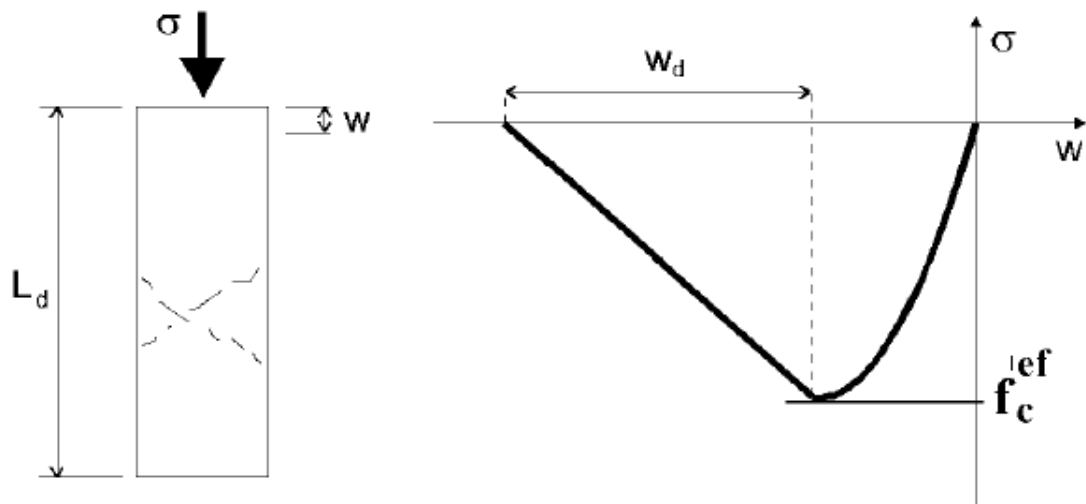
1.1.2.5 Θλίψη μετά τη Μέγιστη Τάση

Ο νόμος χαλάρωσης στη θλίψη, διαθέτει γραμμικό καθοδικό κλάδο. Υπάρχουν δύο μοντέλα σχετικά με τις παραμορφώσεις κατά τη χαλάρωση στη θλίψη. Το πρώτο βασίζεται στη δαπανώμενη ενέργεια, ενώ το δεύτερο στη χαλάρωση των τοπικών παραμορφώσεων.

✓ Πλασματικό Μοντέλο Θλίψης

Το μοντέλο αυτό βασίζεται στη θεώρηση ότι η θλιπτική αστοχία, εμφανίζεται σε ένα επίπεδο κάθετο ως προς την κύρια τάση. Όλες οι θλιπτικές μετατοπίσεις και η διάχυση ενέργειας εντοπίζονται στο επίπεδο αυτό. Υποτίθεται ότι η μετατόπιση αυτή είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος της κατασκευής. Η υπόθεση αυτή, βασίζεται σε πειράματα του Van MIER (1986).

Η παραπάνω υπόθεση είναι ανάλογη με την Πλασματική Θεωρία Ρωγμών για τον εφελκυσμό, όπου η μορφή του διαγράμματος ανοίγματος ρωγμής και η ενέργεια θραύσης ορίζονται και αντιμετωπίζονται ως ιδιότητες του υλικού.



Σχήμα 1.11: Νόμος χαλάρωσης στη θλίψη

Στην περίπτωση της θλίψης, το σημείο καμψής της καμπύλης χαλάρωσης ορίζεται από την πλαστική μετατόπιση w_d . Με αυτό τον τρόπο, η ενέργεια που απαιτείται για τη δημιουργία μίας επιφάνειας του επιπέδου αστοχίας, καθορίζεται έμμεσα. Από τα πειράματα του Van MIER (1986), έχει προκύψει για το κανονικό σκυρόδεμα η τιμή $w_d = 0,5 \text{ mm}$. Αυτή η τιμή χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της χαλάρωσης στη θλίψη.

Ο νόμος της χαλάρωσης μετατρέπεται από το πλασματικό επίπεδο αστοχίας, **Σχήμα 1.11**, στη σχέση τάσεων – παραμορφώσεων για τον αντίστοιχο όγκο συνεχούς υλικού, **Σχήμα 1.10**. Η κλίση του τμήματος χαλάρωσης του διαγράμματος τάσεων – παραμορφώσεων προσδιορίζεται από δύο σημεία: από το σημείο καμψής του διαγράμματος στη μέγιστη τάση και από την οριακή θλιπτική παραμόρφωση ε_d που αντιστοιχεί σε μηδενική τάση. Η παραμόρφωση αυτή υπολογίζεται από την πλαστική μετατόπιση w_d και το εύρος L'_d (βλ. **παράγραφο 1.1.3**) σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

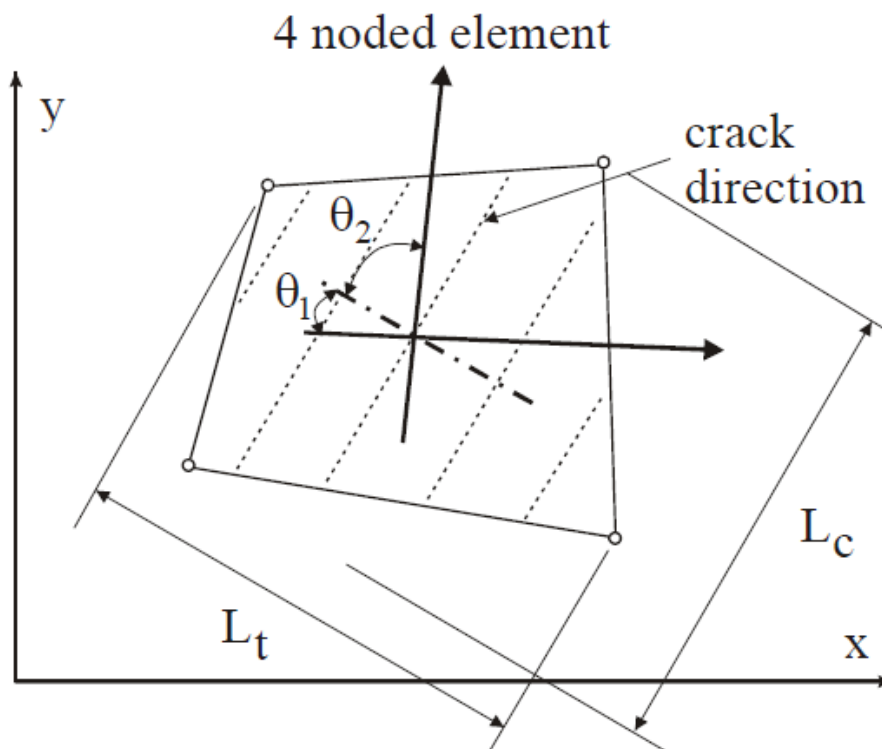
$$\varepsilon_d = \varepsilon_c + \frac{w_d}{L'_d} \quad (1.16)$$

✓ Νόμος Θλιπτικών Παραμορφώσεων Βάσει Παραμόρφωσης

Η κλίση του διαγράμματος του νόμου χαλάρωσης ορίζεται από το μέτρο ελαστικότητας E_d και εξαρτάται από το μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων.

1.1.3 Τοπικά Όρια

Υπάρχει μία περιοχή (ένα εύρος) του υλικού, που αντιστοιχεί σε ένα διακριτό επίπεδο αστοχίας στην ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων. Στον εφελκυσμό η περιοχή αυτή είναι μία ρωγμή, στη θλίψη είναι ένα επίπεδο θλίψης. Στην πραγματικότητα αυτές οι περιοχές αστοχίας έχουν κάποιες διαστάσεις. Ωστόσο, επειδή στα πειράματα οι διαστάσεις των περιοχών αστοχίας είναι ανεξάρτητες από το μέγεθος του δομικού στοιχείου, αντιμετωπίζονται ως πλασματικά επίπεδα. Στην περίπτωση των εφελκυστικών ρωγμών, η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως “θεωρία εύρους ρωγμής”, BAZANT OH (1983). Η ίδια θεώρηση εφαρμόζεται και για τη θλιπτική αστοχία. Ο στόχος του εύρους αστοχίας είναι να εξαλειφθούν δύο ελαττώματα που προκύπτουν από το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων: η επιρροή του μεγέθους του στοιχείου και η επιρροή του προσανατολισμού του.



Σχήμα 1.12: Προσδιορισμός τοπικών ορίων

1.1.3.1 Επιρροή του μεγέθους του στοιχείου

Η διεύθυνση των επιπέδων αστοχίας, θεωρείται ότι είναι κάθετη ως προς τις κύριες τάσεις εφελκυσμού και θλίψης. Το εύρος αστοχίας για τον εφελκυσμό L_t και αντίστοιχα το εύρος αστοχίας για τη θλίψη L_c , ορίζονται ως προβολές των διαστάσεων του πεπερασμένου στοιχείου στα επίπεδα αστοχίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.12.

1.1.3.2 Επιρροή του προσανατολισμού του στοιχείου

Η επιρροή του προσανατολισμού του στοιχείου, μειώνεται με περεταίρω αύξηση του εύρους αστοχίας για λοξά πεπερασμένα στοιχεία, σύμφωνα με τη σχέση που προτείνεται από τον CERVENCA et al. (1995):

$$L'_t = \gamma L_t$$

$$L'_d = \gamma L_d$$

$$\gamma = 1 + (\gamma^{\max} - 1) \frac{\theta}{45} \quad , \quad \theta \in (0, 45) \quad (1.17)$$

Η γωνία θ είναι η ελάχιστη γωνία $\theta = \min(\theta_1, \theta_2)$ μεταξύ της διεύθυνσης του επιπέδου του κάθετου με το επίπεδο αστοχίας και τις πλευρές του πεπερασμένου στοιχείου. Στην περίπτωση τετραγωνικών στοιχείων, οι διευθύνσεις των πλευρών του στοιχείου υπολογίζονται ως η μέση διεύθυνση δύο απέναντι άκρων. Γίνεται μία γραμμική παρεμβολή μεταξύ του συντελεστή $\gamma = 1,0$ για τη διεύθυνση την παράλληλη με τις πλευρές του στοιχείου και της τιμής $\gamma = \gamma^{\max}$ για τη διεύθυνση των 45° . Συνιστάται η τιμή $\gamma^{\max} = 1,5$.

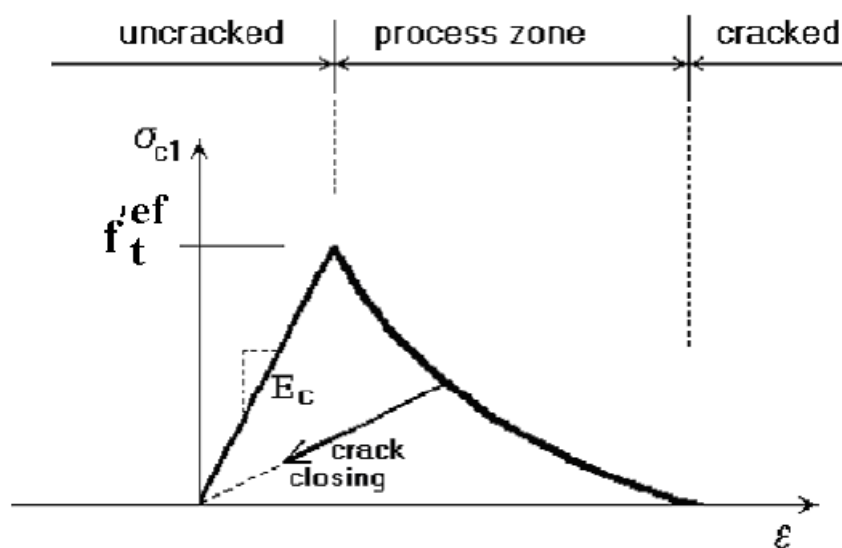
1.1.4 Διαδικασία Θραύσης, Εύρος Ρωγμής

Η διαδικασία σχηματισμού ρωγμών χωρίζεται σε τρία στάδια, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.13**. Το πρώτο στάδιο, είναι το στάδιο της μη ρηγματωμένης διατομής, το οποίο ισχύει πριν το σκυρόδεμα φτάσει την εφελκυστική του αντοχή. Κατόπιν ξεκινάει ο σχηματισμός ρωγμών, με ταυτόχρονη απομείωση των εφελκυστικών τάσεων. Τέλος μετά από την πλήρη απελευθέρωση των τάσεων, το άνοιγμα της ρωγμής συνεχίζεται χωρίς να απαιτείται επιπλέον τάση.

Το εύρος ρωγμής w υπολογίζεται ως συνολική μετατόπιση μέσα στη ζώνη της ρωγμής, ως:

$$w = \varepsilon_{cr} L'_t \quad (1.18)$$

όπου ε_{cr} είναι η παραμόρφωση στο σημείο της ρωγμής, κατά τη διεύθυνση αυτής, στην κατάσταση της ρηγμάτωσης, μετά την πλήρη απελευθέρωση των τάσεων.



Σχήμα 1.13: Στάδια ανοίγματος ρωγμών

1.1.5 Διαξονική Ένταση Κριτήριο Αστοχίας του Σκυροδέματος

1.1.5.1 Θλιπτική αστοχία

Για την αστοχία σε θλίψη, χρησιμοποιείται το κριτήριο αστοχίας σε διαξονική ένταση, που έχει προταθεί από τον KUPFER et al. (1969), και το οποίο φαίνεται στο **Σχήμα 1.14**. Στην εντατική κατάσταση θλίψης – θλίψης, η συνάρτηση αστοχίας είναι:

$$f_c^{'ef} = \frac{1 + 3,65\alpha}{(1 + \alpha)^2} f_c' \quad (1.19)$$

όπου,

$$\alpha = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}}$$

και σ_{c1} , σ_{c2} είναι οι κύριες τάσεις στο σκυρόδεμα, ενώ f_c' είναι η μονοαξονική κυλινδρική αντοχή. Στην διαξονική εντατική κατάσταση, η αντοχή του σκυροδέματος προκύπτει ανάλογα με το συνδυασμό των τάσεων.

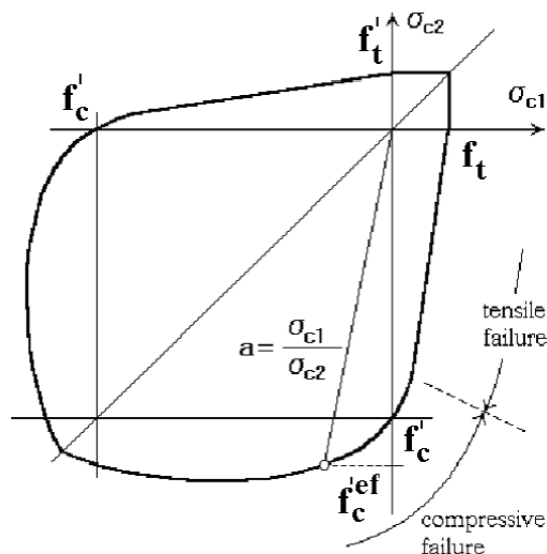
Στην κατάσταση εφελκυσμού – θλίψης, η συνάρτηση αστοχίας συνεχίζει γραμμικά από το σημείο ($\sigma_{c1} = 0, \sigma_{c2} = f_c'$), εντός της περιοχής εφελκυσμού – θλίψης του διαγράμματος, με γραμμικώς απομειούμενη αντοχή:

$$f_c^{'ef} = f_c' r_{ec} \quad (1.20)$$

όπου,

$$r_{ec} = \left(1 + 5,3278 \frac{\sigma_{c1}}{f_c'}\right), \quad 0,9 \leq r_{ec} \leq 1,0$$

r_{ec} : είναι ο συντελεστής μείωσης της θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος στην κατεύθυνση των κύριων τάσεων σ_{c2} , λόγω εφελκυστικών τάσεων στην κύρια διεύθυνση των σ_{c1} .



Σχήμα 1.14: Διάγραμμα διαξονικής έντασης για το σκυρόδεμα

1.1.5.2 Εφελκυστική αστοχία

Στην κατάσταση εφελκυσμού – εφελκυσμού, η εφελκυστική αντοχή είναι σταθερή και ίση με τη μονοαξονική εφελκυστική αντοχή f'_t . Στην κατάσταση εφελκυσμού – θλίψης, η εφελκυστική αντοχή μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$f'_t{}^{ef} = f'_t r_{et} \quad (1.21)$$

όπου r_{et} είναι ο μειωτικός συντελεστής της εφελκυστικής αντοχής στη διεύθυνση των κύριων τάσεων σ_{c1} , λόγω των θλιπτικών τάσεων στη διεύθυνση των σ_{c2} και δίνεται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$r_{et} = 1 - 0,8 \frac{\sigma_{c2}}{f'_c} \quad (1.22)$$

$$r_{et} = \frac{A + (A - 1)B}{AB} \quad (1.23)$$

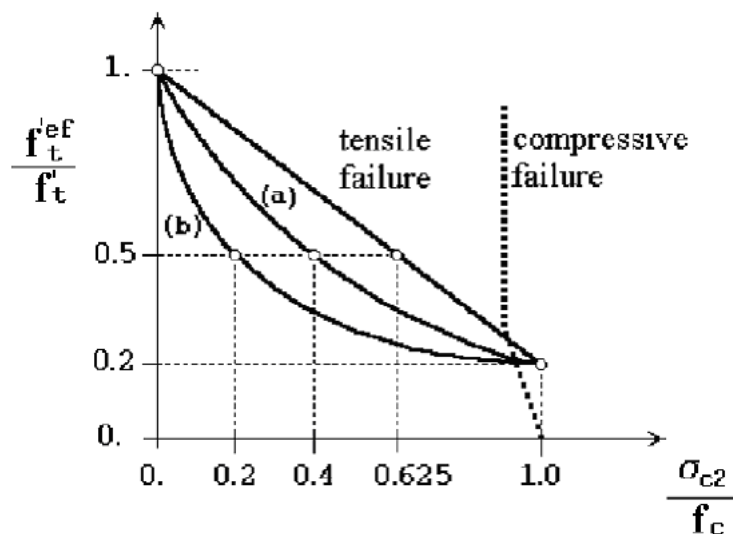
$$B = Kx + A$$

$$x = \frac{\sigma_{c2}}{f'_c}$$

Η Εξ. (1.22) παριστάνει τη γραμμική απομείωση της εφελκυστικής αντοχής, ενώ η Εξ. (1.23) δίνει την υπερβολική μείωση αυτής.

Δύο τύποι υπερβολής δίνονται με βάση το ενδιάμεσο σημείο (r, x) . Οι σταθερές K και A , καθορίζουν το σχήμα της υπερβολής. Οι τιμές των σταθερών για τις δύο θέσεις του ενδιάμεσου σημείου δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

τύπος υπερβολής	σημείο		παράμετροι	
	r	x	A	K
a	0,5	0,4	0,75	1,125
b	0,5	0,2	1,0625	6,0208



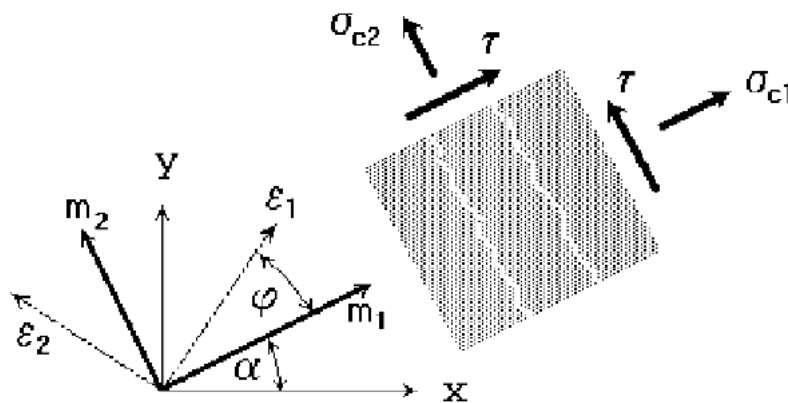
Σχήμα 1.15: Συνάρτηση αστοχίας εφελκυσμού – θλίψης για το σκυρόδεμα

1.1.6 Ρωγμές

Για την περιγραφή της κατανομής των ρωγμών στο σκυρόδεμα, ακολουθούνται δύο τύποι μοντέλων: το σταθερό μοντέλο και το εστραμμένο μοντέλο. Και στις δύο περιπτώσεις η ρωγμή εμφανίζεται όταν η κύρια τάση ξεπεράσει την εφελκυστική αντοχή. Υποτίθεται ότι οι ρωγμές κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στον όγκο του υλικού. Στο καταστατικό μοντέλο αυτό αντικατοπτρίζεται μέσω ενός ορθότροπου υλικού.

1.1.6.1 Σταθερό μοντέλο ρηγμάτωσης

Στο σταθερό μοντέλο ρηγμάτωσης (CERVENKA 1985, DARWIN 1974) η διεύθυνση της ρωγμής δίνεται από τη διεύθυνση της κύριας τάσης κατά την έναρξη της ρηγμάτωσης. Κατά την αύξηση του φορτίου, η διεύθυνση αυτή παραμένει αμετάβλητη και αντιπροσωπεύει την ορθότροπη συμπεριφορά του υλικού.



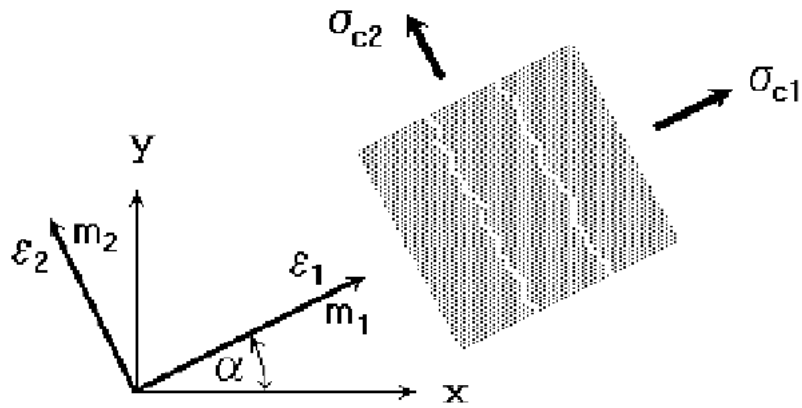
Σχήμα 1.16: Σταθερό μοντέλο ρηγμάτωσης, τάσεις – παραμορφώσεις

Οι διευθύνσεις των κύριων τάσεων και παραμορφώσεων συμπίπτουν στο αρηγμάτωτο σκυρόδεμα, λόγω του ότι το αρηγμάτωτο σκυρόδεμα θεωρείται ισότροπο. Μετά τη ρηγμάτωση το σκυρόδεμα είναι ορθότροπο.

Στη γενική περίπτωση οι άξονες των κύριων παραμορφώσεων ϵ_1 και ϵ_2 είναι εστραμμένοι και δε συμπίπτουν κατ' ανάγκη με τους άξονες του ορθότροπου υλικού m_1 και m_2 . Αυτό δημιουργεί διατμητική τάση κάθετα στη ρωγμή, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.16**. Τα διανύσματα των τάσεων σ_{c1} και σ_{c2} δεν αντιστοιχούν σε κύριες τάσεις λόγω της ύπαρξης των διατμητικών τάσεων.

1.1.6.2 Εστραμμένο μοντέλο ρηγμάτωσης

Στο εστραμμένο μοντέλο ρηγμάτωσης (VECCHIO 1986, CRISFIELD 1989) η διεύθυνση των κύριων τάσεων συμπίπτει με τη διεύθυνση των κύριων παραμορφώσεων. Έτσι, δεν εμφανίζεται διατμητική τάση στο επίπεδο της ρηγμάτωσης, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.17**.



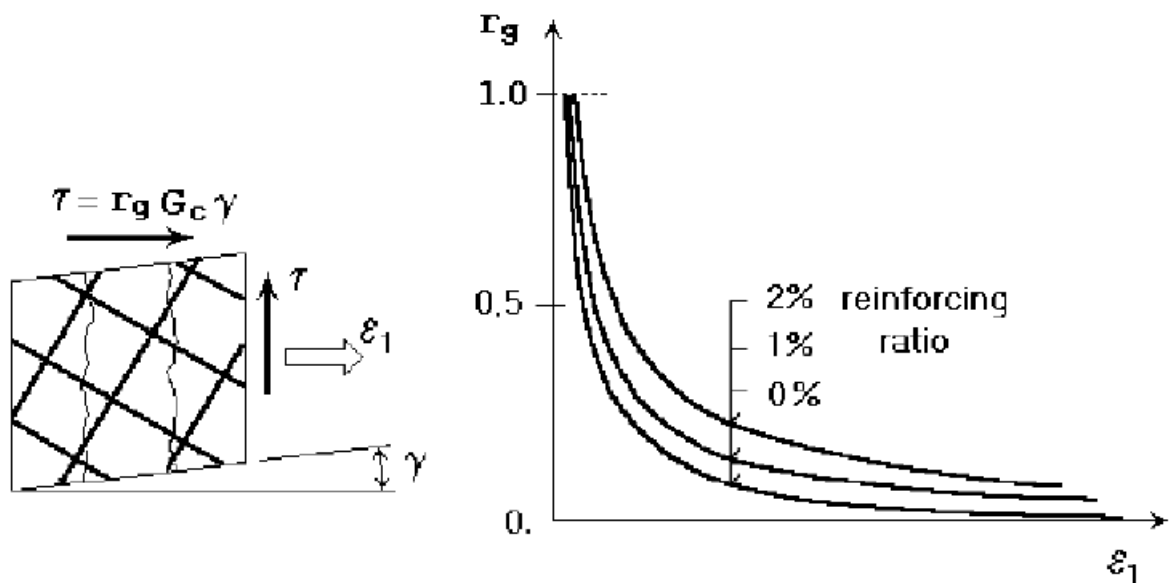
Σχήμα 1.17: Εστραμμένο μοντέλο ρηγμάτωσης, τάσεις – παραμορφώσεις

Κατά την αύξηση του φορτίου περιστρέφονται τόσο οι άξονες των κύριων τάσεων, όσο και αυτοί των ρωγμών. Προκειμένου να εξασφαλιστεί η ταύτιση των αξόνων των κύριων παραμορφώσεων με τους άξονες του υλικού, το μέτρο διάτμησης υπολογίζεται σύμφωνα με τον CRISFIELD (1989) ως:

$$G_t = \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{c2}}{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \quad (1.24)$$

1.1.7 Διατμητικές Τάσεις και Δυσκαμψία στο Ρηγματωμένο Σκυρόδεμα

Στην περίπτωση του σταθερού μοντέλου ρηγμάτωσης, το μέτρο διάτμησης μειώνεται σύμφωνα με το νόμο που προτείνεται από τον KOLMAR (1986) μετά τη ρηγμάτωση. Το μέτρο διάτμησης μειώνεται με την αύξηση της παραμόρφωσης κάθετης στη ρωγμή, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.18** και η μείωση αυτή αναπαριστά τη μείωση της διατμητικής δυσκαμψίας λόγω του ανοίγματος της ρωγμής.



Σχήμα 1.18: Διατμητικός συντελεστής r_g

$$G = \mathbf{r}_g G_c \quad (1.25)$$

όπου \mathbf{r}_g είναι μειωτικός συντελεστής διάτμησης:

$$\mathbf{r}_g = c_3 \frac{-\ln\left(\frac{1000\varepsilon_u}{c_1}\right)}{c_2}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= 7 + 333(p - 0,005) \\ c_2 &= 10 - 167(p - 0,005) \\ 0 &\leq p \leq 0,02 \end{aligned}$$

G είναι το απομειωμένο μέτρο διάτμησης και G_c είναι το αρχικό μέτρο διάτμησης του σκυροδέματος:

$$G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu)} \quad (1.26)$$

E_c είναι το αρχικό μέτρο ελαστικότητας και ν είναι ο λόγος Poisson. Η παραμόρφωση ε_u είναι κάθετη στη διεύθυνση της ρωγμής και τα c_1, c_2 είναι παράμετροι που εξαρτώνται από τον οπλισμό που διασταυρώνει τη ρωγή. Το p είναι το μετασηματισμένο ποσοστό οπλισμού στο επίπεδο της ρωγμής, ενώ c_3 είναι ο παράγοντας της κλίμακας και εξαρτάται από το χρήστη, με προκαθορισμένη τιμή $c_3 = 1$. Στο πρόγραμμα **ATENA** αμελείται η επιρροή του οπλισμού κι έτσι το ποσοστό του οπλισμού θεωρείται $p = 0$.

Ένας ακόμη περιορισμός όσον αφορά το μέτρο διάτμησης είναι ότι η διατμητική τάση στη ρωγή $\tau_{uv} = G\gamma$ περιορίζεται από την εφελκυστική αντοχή f'_t . Το δευτερεύον και το επαπτόμενο μέτρο διάτμησης του ρηγματωμένου σκυροδέματος, ταυτίζονται.

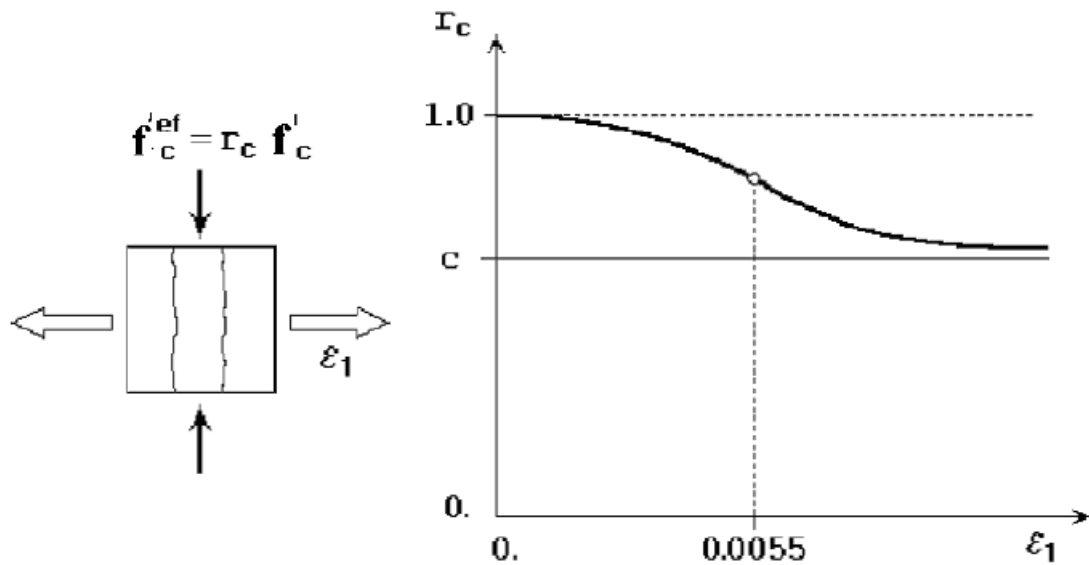
1.1.8 Θλιπτική Αντοχή του Ρηγματωμένου Σκυροδέματος

Μετά τη ρηγμάτωση, θεωρείται μείωση της θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος κατά τη διεύθυνση των ρωγμών, όπως προκύπτει και στα πειράματα των VECCHIO και COLLINS 1982 και όπως διατυπώνεται στη θεωρία της θλίψης. Ωστόσο χρησιμοποιείται μία διαφορετική συνάρτηση στο πρόγραμμα **ATENA**, με σκοπό να επιτρέπεται στο χρήστη η ρύθμιση της μείωσης της θλιπτικής αντοχής. Η συνάρτηση αυτή έχει τη μορφή συνάρτησης Gauss, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.19**. Οι παράμετροι της συνάρτησης αυτής προκύπτουν από πειραματικά αποτελέσματα που δημοσιεύτηκαν από τον KOLLEGER et al. 1988 και τα οποία περιλαμβάνουν επίσης και στοιχεία από τους Collins και Vecchio (VECCHIO et al. 1982).

$$f_c^{'ef} = r_c f'_c \quad (1.27)$$

όπου $r_c = c + (1 - c)e^{-(128\varepsilon_u)^2}$

Για μηδενική ορθή παραμόρφωση ε_u , δεν πραγματοποιείται μείωση της αντοχής, ενώ για μεγάλες τιμές παραμορφώσεων, η αντοχή πλησιάζει ασυμπτωτικά την ελάχιστη τιμή, $f_c'^{ef} = c f_c'$.



Σχήμα 1.19: Απομείωση της θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος, λόγω ρηγμάτωσης

Η σταθερά c εκφράζει τη μέγιστη απομείωση της θλιπτικής αντοχής υπό μεγάλη εγκάρσια παραμόρφωση. Από τα πειράματα του KOLLEGER et al. 1988, προέκυψε για οπλισμένο σκυρόδεμα η τιμή $c = 0,45$. Άλλοι ερευνητές (DYNGELAND 1989) βρήκαν ως ελάχιστη τιμή του μειωτικού συντελεστή $c = 0,8$. Η τιμή του συντελεστή c μπορεί να προσαρμοστεί στα δεδομένα του μοντέλου ανάλογα με τον πραγματικό τύπο του οπλισμού.

Ωστόσο η μείωση της θλιπτικής αντοχής του ρηγματωμένου σκυροδέματος, δεν επηρεάζεται απαραίτητα μόνο από τον οπλισμό. Στο σκυρόδεμα, όταν η παραμόρφωση συγκεντρώνεται σε μία κύρια ρωγμή, θλιπτικές λωρίδες σκυροδέματος, μπορεί να διαπερνούν τη ρωγμή αυτή, προκαλώντας το λεγόμενο “**φαινόμενο γεφύρωσης**” (bridging effect). Με το παραπάνω μοντέλο, προσομοιάζεται και η μείωση της θλιπτικής αντοχής των λωρίδων αυτών.

1.1.9 Εφελκυστική Αντοχή του Ρηγματωμένου Σκυροδέματος

Η εφελκυστική αντοχή του ρηγματωμένου σκυροδέματος περιγράφεται ως η συνεισφορά του ρηγματωμένου σκυροδέματος στην εφελκυστική αντοχή των ράβδων οπλισμού. Η δυσκαμψία αυτή προσφέρεται από το αρηγματώτο ή από το μη πλήρως ρηγματωμένο σκυρόδεμα και γεννάται από τη διαδικασία συγκέντρωσης παραμορφώσεων. Αυτό βεβαιώθηκε από πειράματα προσομοίωσης του HARTL, G 1977 και δημοσιεύτηκε από τον MARGOLDOVA et al. 1998.

Ένας συντελεστής για την εφελκυστική δυσκαμψία, θα είχε ως αποτέλεσμα μία υπερεκτίμηση του φαινομένου αυτού. Για το λόγο αυτό στις νεότερες εκδόσεις του **ATENA** μετά την 1.2.0 δεν υπάρχει η επιλογή ενός τέτοιου συντελεστή στα δεδομένα του μοντέλου.

1.1.10 Σύνοψη των Τάσεων στο Μοντέλο SBETA

Στην περίπτωση του αρηγμάτωτου σκυροδέματος, τα σύμβολα των τάσεων μεταφράζονται ως εξής:

σ_{c1} : μέγιστη κύρια τάση
 σ_{c2} : ελάχιστη κύρια τάση
 (θλίψη αρνητική, εφελκυσμός θετικός)

Στην περίπτωση του ρηγματωμένου σκυροδέματος, **Σχήμα 1.16**, οι τάσεις ορίζονται στο επίπεδο της ρηγμάτωσης:

σ_{c1} : τάση κάθετη στη διεύθυνση των ρωγμών
 σ_{c2} : τάση παράλληλη στη διεύθυνση των ρωγμών
 τ_c : διατμητική τάση στο επίπεδο της ρηγμάτωσης

1.1.11 Μητρώα Δυσκαμψίας του Υλικού

1. Αρηγμάτωτο Σκυρόδεμα

Το μητρώο δυσκαμψίας του υλικού του αρηγμάτωτου σκυροδέματος έχει τη μορφή ελαστικού μητρώου ισότροπου υλικού. Στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων x και y , έχει τη μορφή:

$$\mathbf{D}_c = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας που προκύπτει από τον ισοδύναμο μονοαξονικό νόμο. Ο δείκτης Poisson ν είναι σταθερός.

2. Ρηγματωμένο Σκυρόδεμα

Για το ρηγματωμένο σκυρόδεμα το μητρώο δυσκαμψίας του υλικού, έχει τη μορφή ενός ελαστικού μητρώου για ορθότροπο υλικό. Το μητρώο διατυπώνεται για το σύστημα συντεταγμένων m_1, m_2 , **Σχήμα 1.16** και **Σχήμα 1.17**, το οποίο συσχετίζεται με τη διεύθυνση των ρωγμών. Το τοπικό αυτό σύστημα συντεταγμένων αναφέρεται με το δείκτη L . Η διεύθυνση 1 είναι η διεύθυνση κάθετα στη ρωγμή, ενώ η διεύθυνση 2 είναι η παράλληλη στη ρωγμή. Ο ορισμός των ελαστικών σταθερών του ορθότροπου υλικού προκύπτει από τη σχέση:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau \end{Bmatrix} \quad (1.29)$$

Πρώτα απαλείφονται οι δείκτες Poisson του ρηγματωμένου σκυροδέματος, διότι είναι άγνωστοι. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η σχέση συμμετρίας: $\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1$. Έτσι στην **εξίσωση 1.29** μένουν μόνο τρεις ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές: E_1 , E_2 και ν_{21} . Υποθέτοντας ότι $\nu_{21} = \nu$ είναι ο δείκτης Poisson για το ρηγματωμένο σκυρόδεμα και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση συμμετρίας, προκύπτει:

$$\nu_{12} = \frac{E_1}{E_2} \nu \quad (1.30)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{D}_c^L τότε είναι:

$$\mathbf{D}_c^L = H \begin{bmatrix} \xi & \nu\xi & 0 \\ \nu\xi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

όπου:

$$\xi = \frac{E_1}{E_2}$$

$$H = E_1(1 - \xi\nu^2)$$

$$E_2 \neq 0$$

Εάν $E_2 = 0$ και $E_1 \neq 0$, τότε χρησιμοποιείται μια εναλλακτική έκφραση με την αντίστροφη παράμετρο:

$$\frac{1}{\xi} = \frac{E_2}{E_1}$$

Σε περίπτωση όπου $E_1 = E_2 = 0$, το μητρώο \mathbf{D}_c^L ορίζεται ίσο με το μηδέν.

Το μητρώο \mathbf{D}_c^L μετασχηματίζεται στο καθολικό σύστημα αξόνων, με τη χρήση του μητρώου μετασχηματισμού \mathbf{T}_ε από την **εξ. 1.8**:

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{D}_c^L \mathbf{T}_\varepsilon \quad (1.32)$$

Μεταξύ του καθολικού άξονα x και του άξονα του υλικού m_1 , θεωρείται η γωνία α , **Σχήμα 1.16**.

3. Διανεμημένος Οπλισμός

Το μητρώο δυσκαμψίας της i διανομής οπλισμού είναι:

$$\mathbf{D}_{si} = p_i E_{si} \begin{bmatrix} \cos(\beta_i)^4 & \cos(\beta_i)^2 \sin(\beta_i)^2 & \cos(\beta_i)^3 \sin(\beta_i) \\ \cos(\beta_i)^2 \sin(\beta_i)^2 & \sin(\beta_i)^4 & \cos(\beta_i) \sin(\beta_i)^3 \\ \cos(\beta_i)^3 \sin(\beta_i) & \cos(\beta_i) \sin(\beta_i)^3 & \cos(\beta_i)^2 \sin(\beta_i)^2 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Η γωνία β είναι μεταξύ του καθολικού άξονα x και της i διεύθυνσης του οπλισμού. Ακόμη E_{si} είναι το μέτρο ελαστικότητας του οπλισμού, ενώ $p_i = A_s/A_c$, είναι το ποσοστό οπλισμού.

4. Μητρώο Δυσκαμψίας Σύνθετου Υλικού

Το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας του οπλισμένου σκυροδέματος, είναι το άθροισμα των μητρώων δυσκαμψίας του σκυροδέματος και του οπλισμού:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c + \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_{si} \quad (1.34)$$

Στο πρόγραμμα **ATENA** ο διανεμημένος οπλισμός προσομοιάζεται από ξεχωριστά επίπεδα στοιχείων, των οποίων οι κόμβοι συνδέονται με τους αντίστοιχους κόμβους των στοιχείων του σκυροδέματος. Αυτό ανταποκρίνεται στη θεώρηση της πλήρους συνάφειας μεταξύ του διανεμημένου οπλισμού και του σκυροδέματος.

5. Δευτερεύον και Εφαπτόμενο Μέτρο Ελαστικότητας

Τα παραπάνω μητρώα δυσκαμψίας εμπεριέχουν είτε το δευτερεύον, είτε το εφαπτόμενο μέτρο ελαστικότητας.

Το δευτερεύον μέτρο ελαστικότητας χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των τάσεων για δεδομένες παραμορφώσεις, όπως παρουσιάζεται στην παράγραφο που ακολουθεί.

Το εφαπτόμενο μέτρο ελαστικότητας χρησιμοποιείται για τη μόρφωση του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου.

1.1.12 Ανάλυση των Τάσεων

Οι τάσεις στο σκυρόδεμα προκύπτουν χρησιμοποιώντας το δευτερεύον μητρώο δυσκαμψίας

$$\mathbf{s}_c = \mathbf{D}_c^s \mathbf{e} \quad (1.35)$$

όπου \mathbf{D}_c^s είναι το δευτερεύον μέτρο δυσκαμψίας όπως περιγράφηκε στην **παράγραφο 1.1.11**, για αρηγμάτωτο ή για το ρηγματωμένο σκυρόδεμα. Τα διανύσματα των τάσεων υπολογίζονται τόσο στο καθολικό, όσο και στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, οι κύριες τάσεις στο αρηγμάτωτο σκυρόδεμα και οι ορθές στο ρηγματωμένο.

Οι τάσεις στον οπλισμό και το αντίστοιχο μητρώο δυσκαμψίας για τον εφελκυσμό υπολογίζονται άμεσα από την παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση του οπλισμού.

1.1.13 Παράμετροι του Καταστατικού Μοντέλου

Στον πίνακα που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι αρχικές τιμές των παραμέτρων του υλικού:

Παράμετρος	Τύπος
Κυλινδρική αντοχή	$f'_c = -0,85f'_{cu}$
Εφελκυστική αντοχή	$f'_t = 0,24f'_{cu}{}^{\frac{2}{3}}$
Αρχικό μέτρο ελαστικότητας	$E_c = (6000 - 15,5f'_{cu})\sqrt{f'_{cu}}$
Δείκτης Poisson	$\nu = 0,2$
Παραμόρφωση λόγω χαλάρωσης στη θλίψη	$w_d = -0,0005mm$
Τύπος εφελκυστικής χαλάρωσης	1 – exponential, βάσει του G_f
Θλιπτική αντοχή στο ρηγματωμένο σκυρόδεμα	$c = 0,8$
Εφελκυστική τάση	$\sigma_{st} = 0$
Μειωτικός συντελεστής διάτμησης	μεταβλητό (1.1.7)
Τύπος συνάρτησης εφελκυσμού – θλίψης	γραμμικός
Ενέργεια θραύσης G_f , σύμφωνα με τον VOS 1983	$G_f = 0,000025f'_{t}{}^{ef} [MN/m]$
Γωνιακή παραμόρφωση	$\gamma_{max} = 1,5$ (1.1.3)

Οι τιμές των παραμέτρων του υλικού επηρεάζονται από τους συντελεστές ασφαλείας στην περίπτωση του σχεδιασμού. Για το λόγο αυτό, η επιλογή των παραμέτρων του υλικού εξαρτάται από το είδος και το σκοπό της ανάλυσης, καθώς και από το πεδίο εφαρμογής. Τυπικά παραδείγματα της εφαρμογής είναι ο σχεδιασμός, η προσομοίωση της αστοχίας και η έρευνα.

Στην περίπτωση του σχεδιασμού, σύμφωνα με τα περισσότερα πρότυπα, οι ιδιότητες του υλικού λαμβάνονται για τον υπολογισμό της αντοχής και του φορτίου αστοχίας, με μειωμένες τιμές, με τη χρήση μερικών συντελεστών ασφαλείας.

Στην περίπτωση της προσομοίωσης της πραγματικής συμπεριφοράς, οι παράμετροι του υλικού θα πρέπει να επιλέγονται κοντά στις πραγματικές ιδιότητες του υλικού. Ο καλύτερος τρόπος είναι να προσδιορίζονται οι ιδιότητες αυτές από δειγματοληψίες και πειραματικά δεδομένα.

1.2 Καταστατικό Μοντέλο CC3DNonLinCementitious2

1.2.1 Εισαγωγή

Στο καταστατικό αυτό μοντέλο συνδυάζεται συμπεριφορά σε θλίψη αλλά και σε εφελκυσμό. Το μοντέλο εφελκυσμού βασίζεται στη θεώρηση του ορθότροπου υλικού, όπου οι ρωγμές διανέμονται μέσα στο υλικό. Περιλαμβάνει κριτήρια αστοχίας Rankine, εκθετική χαλάρωση, καθώς και εστραμμένο ή σταθερό μοντέλο ρηγμάτωσης.

Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο αλγόριθμο για την ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων. Δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στην ανάπτυξη ενός αλγορίθμου για το συνδυασμό των δύο τύπων αστοχίας. Ο συνδυαστικός αλγόριθμος βασίζεται σε αναδρομική αντικατάσταση και επιτρέπει στους δύο τρόπους αστοχίας να αναπτυχθούν ξεχωριστά. Ο αλγόριθμος μπορεί να λάβει υπόψη του περιπτώσεις όπου οι επιφάνειες αστοχίας και των δύο τρόπων αστοχίας είναι ενεργές, αλλά και άλλα φαινόμενα, όπως το κλείσιμο των ρωγμών. Με το μοντέλο αυτό προσομοιώνεται η ρηγμάτωση του σκυροδέματος, η θραύση κ.ά.

1.2.2 Rankine – Μοντέλο Θραύσης για τη Ρηγμάτωση του Σκυροδέματος

Για τη ρηγμάτωση του σκυροδέματος χρησιμοποιείται το κριτήριο του Rankine:

$$F_i^f = \sigma_{ii}^t - f_{ti}' \leq 0 \quad (1.36)$$

Θεωρείται ότι οι παραμορφώσεις και οι τάσεις προσαρμόζονται στις κύριες διευθύνσεις του υλικού, οι οποίες στην περίπτωση του εστραμμένου μοντέλου ρηγμάτωσης, αντιστοιχούν στις διευθύνσεις των κύριων παραμορφώσεων, ενώ στην περίπτωση του σταθερού μοντέλου ρηγμάτωσης, δίνονται από τις κύριες διευθύνσεις που προκύπτουν από την έναρξη της ρηγμάτωσης. Έτσι ο όρος σ_{ii}^t αναφέρεται σε δοκιμαστική τάση, ενώ ο όρος f_{ti}' είναι η εφελκυστική αντοχή κατά τη διεύθυνση του υλικού i . Η δοκιμαστική τάση υπολογίζεται με την ελαστική θεώρηση:

$$\sigma_{ij}^t = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}' \quad (1.37)$$

Εάν η δοκιμαστική τάση δεν ικανοποιεί την **εξ. 1.36**, η αύξηση της παραμόρφωσης κατά τη θραύση στη διεύθυνση i , μπορεί να υπολογιστεί με τη θεώρηση ότι η τελική τάση πρέπει να ικανοποιεί την:

$$F_i^f = \sigma_{ii}^n - f_{ti}' = \sigma_{ii}^t - E_{iikl} \Delta \varepsilon_{kl}' - f_{ti}' = 0 \quad (1.38)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να απολοποιηθεί περεταίρω με τη θεώρηση ότι η αύξηση της παραμόρφωσης θραύσης είναι κάθετη στο επίπεδο αστοχίας και κάθε φορά ελέγχεται ένα μόνο επίπεδο αστοχίας. Για την επιφάνεια αστοχίας k , η αύξηση της παραμόρφωσης θραύσης έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\Delta \varepsilon_{ij}' = \Delta \lambda \frac{\partial F_k^f}{\partial \sigma_{ij}} = \Delta \lambda \delta_{ik} \quad (1.39)$$

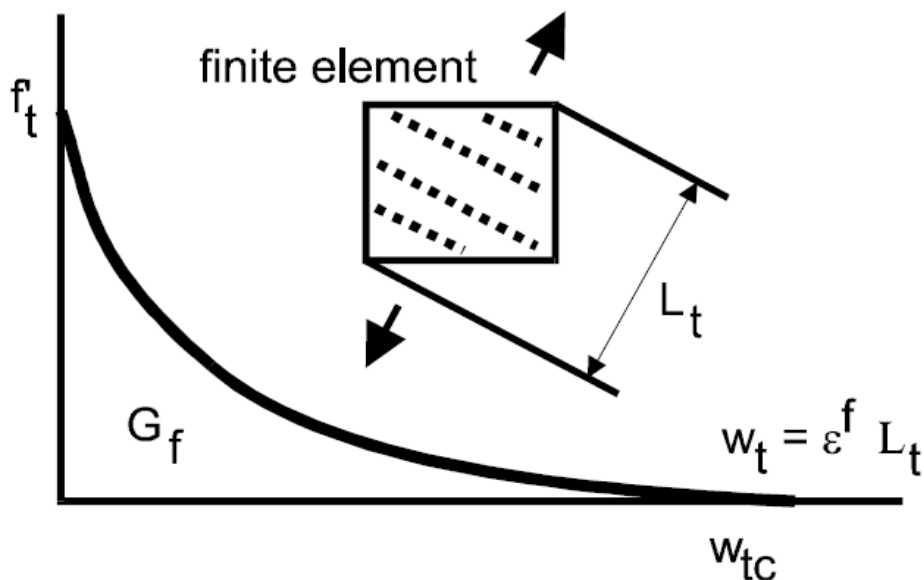
Μετά από αντικατάσταση στην **εξ. 1.38** προκύπτει η παρακάτω σχέση για την αύξηση του πολλαπλασιαστή θραύσης λ :

$$\Delta\lambda = \frac{\sigma_{kk}^{t'} - f_{tk}'}{E_{kkkk}} = \frac{\sigma_{kk}^{t'} - f_t'(w_k^{\max})}{E_{kkkk}} \quad (1.40)$$

$$w_k^{\max} = L_t(\hat{\varepsilon}_{kk}^f + \Delta\lambda)$$

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται με επαναλήψεις αφού για τα υλικά που υπόκεινται σε χαλάρωση, η τιμή της τρέχουσας εφελκυστικής αντοχής $f_t'(w_k^{\max})$ είναι συνάρτηση του ανοίγματος ρωγμής w και βασίζεται στην εξίσωση του Hordijk (**εξ. 1.13**) όπως προσδιορίστηκε για το καταστατικό μοντέλο SBETA.

Το άνοιγμα ρωγμής w υπολογίζεται από τη συνολική τιμή της παραμόρφωσης θραύσης $\hat{\varepsilon}_{kk}^f$ στη διεύθυνση k , συν την τρέχουσα αύξηση της παραμόρφωσης θραύσης $\Delta\lambda$ και το άθροισμα αυτό πολλαπλασιάζεται με το χαρακτηριστικό μήκος L_t . Το χαρακτηριστικό μήκος ορίζεται ως εύρος ρωγμής από τους BAZANT και OH. Προτείνονται διάφορες μέθοδοι για τον υπολογισμό του μεγέθους του εύρους ρωγμής στο πλαίσιο της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Ο FEENSTRA (1993) προτείνει μία μέθοδο, που βασίζεται στον όγκο του σημείου ολοκλήρωσης, ο οποίος δεν είναι καλώς ορισμένος για παραμορφωμένα στοιχεία. Μία σταθερή και μάλλον πολύπλοκη προσέγγιση προτείνεται από τον OLIVIER. Το εύρος ρωγμής L_t υπολογίζεται ως το μέγεθος της προβολής του πεπερασμένου στοιχείου στη διεύθυνση των ρωγμών, **Σχήμα 1.20**. Ο CERVENKA V. et al. (1995) έδειξε ότι αυτή η προσέγγιση είναι ικανοποιητική για μικρής τάξης γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία. Προτείνεται ακόμη μια τροποποίηση, η οποία λαμβάνει υπόψη τις ρωγμές τις μη παράλληλες με τις πλευρές του πεπερασμένου στοιχείου.



Σχήμα 1.20: Εφελκυστική χαλάρωση και χαρακτηριστικό μήκος L_t

Η **εξ. 1.40** μπορεί να λυθεί με επαναλαμβανόμενες αντικαταστάσεις. Μπορεί να δειχθεί με ανάπτυξη του όρου $f_t'(w_k^{\max})$ σε σειρές Taylor ότι αυτή η επανάληψη συγκλίνει, όταν:

$$\left| -\frac{\partial f'_t(w_k^{\max})}{\partial w} \right| < \frac{E_{kkkk}}{L_t} \quad (1.41)$$

Η **εξ. 1.41** δεν ικανοποιείται για υλικά που εμφανίζουν το φαινόμενο της χαλάρωσης, μόνο όταν πραγματοποιείται “πίσω-γύρισμα” (*snap back*) στη σχέση τάσεων – παραμορφώσεων, το οποίο μπορεί να εμφανιστεί όταν χρησιμοποιούνται μεγάλα πεπερασμένα στοιχεία. Στην κανονική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, που βασίζεται στις μετατοπίσεις, η αύξηση της παραμόρφωσης είναι δεδομένη, επομένως ένα πίσω-γύρισμα δεν μπορεί να συλληφθεί. Αυτό σημαίνει ότι η κρίσιμη περιοχή, που περιλαμβάνει το πίσω-γύρισμα στην καμπύλη χαλάρωσης, παρακάμπτεται κατά τον υπολογισμό, με αποτέλεσμα η σκέδαση της ενέργειας από το σύστημα να υπερεκτιμάται. Αυτό είναι βέβαια μη επιθυμητό, επομένως θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν πεπερασμένα στοιχεία με μέγεθος:

$$L < \frac{E_{kkkk}}{\left| \frac{\partial f'_t(0)}{\partial w} \right|}$$

όπου: $\frac{\partial f'_t(0)}{\partial w}$ δηλώνει την αρχική κλίση της καμπύλης χαλάρωσης της ρωγμής

Σημαντικός είναι ο διαχωρισμός μεταξύ της συνολικής παραμόρφωσης θραύσης $\varepsilon'_{kk}{}^f$, η οποία αντιστοιχεί στη μέγιστη παραμόρφωση θραύσης, που πραγματοποιείται κατά τη διάρκεια της φόρτισης, και της τρέχουσας παραμόρφωσης θραύσης $\varepsilon'_{ij}{}^f$, η οποία μπορεί να είναι μικρότερη, λόγω κλεισίματος των ρωγμών και η οποία υπολογίζεται σύμφωνα με την **εξ. 1.42** των ROTS και BLAUWENDRAAD:

$$\varepsilon'_{kl}{}^f = (E_{ijkl} + E'_{ijkl}{}^{cr})^{-1} E_{klmn} \varepsilon'_{mn} \quad (1.42)$$

και ο όρος $E'_{ijkl}{}^{cr}$ ορίζεται από:

$$\sigma'_{ij} = E'_{ijkl}{}^{cr} \varepsilon'_{kl}{}^f$$

Ο τανυστής τέταρτης τάξης $E'_{ijkl}{}^{cr}$ παριστάνει τη δυσκαμψία της ρηγμάτωσης στις τοπικές διευθύνσεις του υλικού. Στην παρούσα σχέση θεωρείται ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ ορθών και διατμητικών τάσεων. Έτσι ο τανυστής της ρωγμής δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$E'_{ijkl}{}^{cr} = 0, \text{ για } i \neq k \text{ και } j \neq l \quad (1.43)$$

Για τον Τρόπο I η δυσκαμψία της ρηγμάτωσης είναι:

$$E'_{iii}{}^{cr} = \frac{f'_t(w_i^{\max})}{\varepsilon'_{ii}{}^f}, \text{ (όχι άθροιση των δεικτών)} \quad (1.44)$$

και οι τρόποι II και III υπολογίζονται ως:

$$E'_{ijij}{}^{cr} = s_F \min(E'_{iii}{}^{cr}, E'_{jjjj}{}^{cr}), \text{ (όχι άθροιση των δεικτών)} \quad (1.45)$$

όπου $i \neq j$ και s_F είναι διατμητικός συντελεστής που καθορίζει τη σχέση μεταξύ της ορθής και της διατμητικής δυσκαμψίας της ρωγμής. Η αρχική τιμή του s_F στο πρόγραμμα είναι 20.

Η διατμητική αντοχή του ρηγματωμένου σκυροδέματος υπολογίζεται με την “Τροποποιημένη Θεωρία της Θλίψης” (*Modified Compression Field Theory*) των VECCHIO και COLLINS (1986).

$$\sigma_{ij} \leq \frac{0,18\sqrt{f'_c}}{0,31 + \frac{24w}{a_g + 16}}, \quad i \neq j \quad (1.46)$$

Όπου f'_c είναι η θλιπτική αντοχή σε MPa, a_g είναι το μέγεθος του μεγαλύτερου κόκκου αδρανών σε mm και w είναι το μέγιστο άνοιγμα ρωγμής σε mm στη δεδομένη περιοχή. Το μοντέλο αυτό ενεργοποιείται με τον ορισμό του μεγέθους του μέγιστου κόκκου αδρανών a_g , αλλιώς χρησιμοποιείται η προεπιλεγμένη συμπεριφορά, όπου η διατμητική τάση σε μία ρηγματωμένη επιφάνεια, δεν μπορεί να ξεπερνά την εφελκυστική αντοχή.

Το τέμνον καταστατικό μητρώο στη διεύθυνση του υλικού διαμορφώθηκε από τους ROTS και BLAUWENDRAAD ως:

$$\mathbf{E}'^s = \mathbf{E} - \mathbf{E}(\mathbf{E}'^{cr} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{E} \quad (1.47)$$

Το μητρώο μετασχηματισμού του διανύσματος των παραμορφώσεων \mathbf{T}^ε , δηλαδή το μητρώο μετασχηματισμού των καθολικών παραμορφώσεων σε τοπικές, χρησιμοποιείται για να μετασχηματίσει το τοπικό τέμνον μητρώο δυσκαμψίας στο καθολικό σύστημα.

$$\mathbf{E}^s = \mathbf{T}^{\varepsilon T} \mathbf{E}'^s \mathbf{T}^\varepsilon \quad (1.48)$$

Είναι απαραίτητος ο χειρισμός των ειδικών περιπτώσεων πριν την έναρξη των ρωγμών, όπου το μητρώο δυσκαμψίας της ρηγμάτωσης τείνει να γίνει άπειρο. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται πολύ μεγάλες τιμές για τη δυσκαμψία της ρηγμάτωσης.

1.2.3 Πλαστικό Μοντέλο Σύνθλιψης Σκυροδέματος

Η νέα εντατική κατάσταση στο πλαστικό μοντέλο υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl}(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^p) = \sigma_{ij}^t - E_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}^p = \sigma_{ij}^t - \sigma_{ij}^p \quad (1.49)$$

Ο πλαστικός “διορθωτής” σ_{ij}^p υπολογίζεται άμεσα από τη συνάρτηση διαρροής με τον αλγόριθμο:

$$F^p(\sigma_{ij}^t - \sigma_{ij}^p) = F^p(\sigma_{ij}^t - \Delta\lambda l_{ij}) = 0 \quad (1.50)$$

Ζωτικής σημασίας είναι ο ορισμός του διανύσματος επιστροφής l_{ij} , το οποίο ορίζεται ως:

$$l_{ij} = E_{ijkl} \frac{\partial G^p(\sigma_{kl}^t)}{\partial \sigma_{kl}} \quad \text{τότε} \quad \Delta\varepsilon_{ij}^p = \Delta\lambda \frac{\partial G^p(\sigma_{ij}^t)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.51)$$

όπου $G(\sigma_{ij})$ είναι η πλαστική ενδεχόμενη συνάρτηση, της οποίας η παράγωγος εκτιμάται στην προβλεπόμενη εντατική κατάσταση σ_{ij}^t για τον προσδιορισμό της διεύθυνσης επιστροφής.

Χρησιμοποιείται η επιφάνεια αστοχίας των MENETREY και WILLAM:

$$F_{3P}^p = \left[\sqrt{1,5} \frac{\rho}{f_c'} \right]^2 + m \left[\frac{\rho}{\sqrt{6}f_c'} r(\theta, e) + \frac{\xi}{\sqrt{3}f_c'} \right] - c = 0 \quad (1.52)$$

όπου:

$$m = 3 \frac{f_c'^2 - f_t'^2}{f_c' f_t'} \frac{e}{e + 1}, \quad r(\theta, e) = \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1)[4(1 - e^2) \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e]^{\frac{1}{2}}}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις (ξ, ρ, θ) είναι Haigh-Vestergaard συντεταγμένες, f_c' και f_t' είναι η θλιπτική και η εφελκυστική αντοχή αντίστοιχα. Η παράμετρος $e \in (0,5, 1,0)$ ορίζει την καμπυλότητα της επιφάνειας αστοχίας. Η επιφάνεια αστοχίας έχει οξείες γωνίες εάν $e = 0,5$, και είναι πλήρως κυκλική για την τιμή $e = 1,0$.

Η θέση της επιφάνειας αστοχίας δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με την τιμή των παραμέτρων σκλήρυνσης/χαλάρωσης της παραμόρφωσης. Η παραμόρφωση σκλήρυνσης βασίζεται στην ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση η οποία υπολογίζεται σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

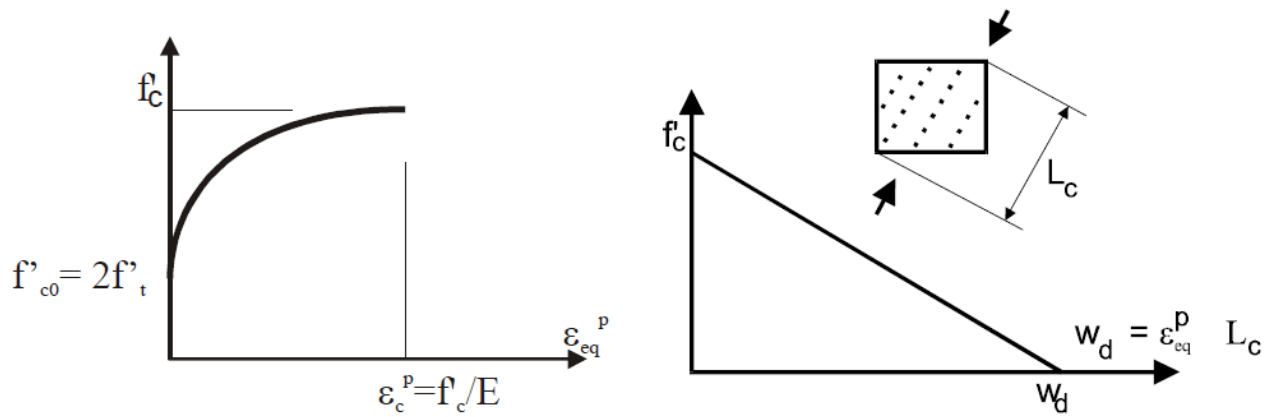
$$\Delta \varepsilon_{eq}^p = \min(\Delta \varepsilon_{ij}^p) \quad (1.53)$$

Για την επιφάνεια αστοχίας των MENETREY και WILLAM η σκλήρυνση/χαλάρωση ελέγχεται από την παράμετρο $c \in (0,1)$, η οποία ορίζεται κατά τη διαδικασία διαρροής/σύνθλιψης από την ακόλουθη σχέση:

$$c = \left(\frac{f_c'(\varepsilon_{eq}^p)}{f_c'} \right)^2 \quad (1.54)$$

Στις παραπάνω δύο εξισώσεις η έκφραση $f_c'(\varepsilon_{eq}^p)$ υποδεικνύει το νόμο σκλήρυνσης/χαλάρωσης, ο οποίος βασίζεται σε δοκιμές μονοαξονικής αντοχής. Ο νόμος φαίνεται στο **Σχήμα 1.21**, όπου η καμπύλη της χαλάρωσης είναι γραμμική και ο ελλειπτικός ανοδικός κλάδος δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\sigma = f_{co} + (f_c - f_{co}) \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_c} \right)^2} \quad (1.55)$$



Σχήμα 1.21: Θλιπτική σκλήρυνση/χαλάρωση και θλιπτικό χαρακτηριστικό μήκος, βάσει πειραμάτων του VAN MIER

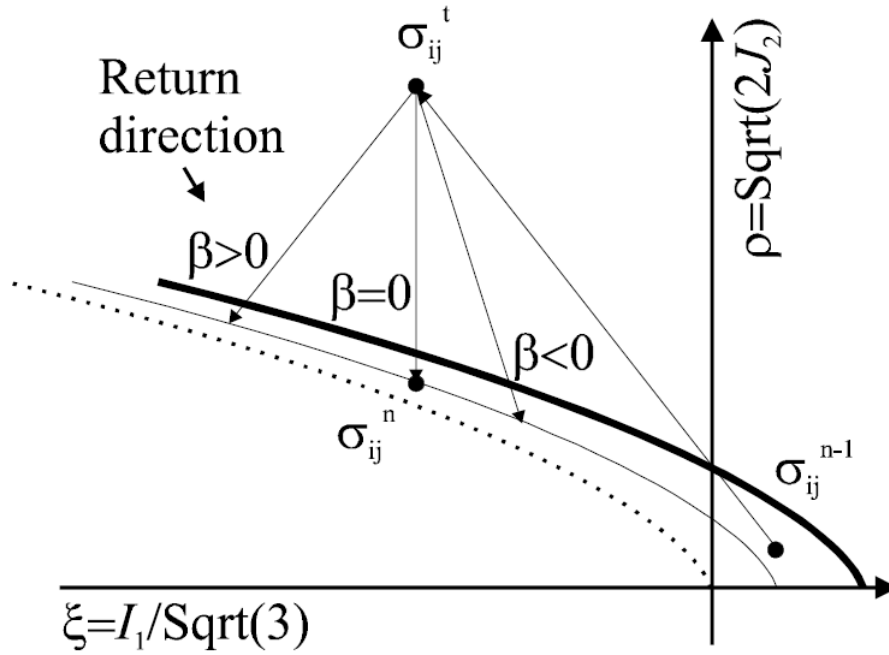
Ο νόμος του ανοδικού κλάδου βασίζεται στις παραμορφώσεις, ενώ ο καθοδικός κλάδος βασίζεται σε μετατοπίσεις για να εισάγει την αντικειμενικότητα της διακριτοποίησης στη λύση των πεπερασμένων στοιχείων. Η μορφή του νόμου αυτού βασίζεται στο έργο του VAN MIER. Η έναρξη της μη γραμμικής συμπεριφοράς f'_{co} είναι μία παράμετρος που εισάγεται, όπως επίσης και η πλαστική παραμόρφωση στη θλιπτική αντοχή ε_c^p . Το **Σχήμα 1.21** δείχνει τυπικές τιμές των παραμέτρων αυτών. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην επιλογή της παραμέτρου f'_{co} , προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι οι επιφάνειες θραύσης και πλαστικότητας τέμνονται σε όλα τα στάδια του υλικού. Στον καθοδικό κλάδο η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση μετασχηματίζεται σε μετατοπίσεις μέσω της παραμέτρου L_c . Η παράμετρος αυτή ορίζεται όμοια με την παράμετρο του εύρους ρωγμής στο μοντέλο θραύσης, **παράγραφος 1.2.2** και αντιστοιχεί στην προβολή του μεγέθους του πεπερασμένου στοιχείου, κατά τη διεύθυνση της ελάχιστης κύριας τάσης. Το τετράγωνο στην **εξ. 1.54** οφείλεται στην παραβολική μορφή της επιφάνειας των MENETREY και WILLAM.

Η διεύθυνση επιστροφής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$G^P(\sigma_{ij}) = \beta \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 + \sqrt{2J_2} \quad (1.56)$$

όπου β καθορίζει τη διεύθυνση επιστροφής. Εάν $\beta < 0$ το υλικό συμπιέζεται, εάν $\beta = 0$ ο όγκος του υλικού παραμένει σταθερός, και εάν $\beta > 0$ το υλικό διογκώνεται. Γενικά το πλαστικό μοντέλο είναι μη-συνεχές, εφόσον η πλαστική ροή δεν είναι κάθετη στην επιφάνεια αστοχίας.

Ο αλγόριθμος επιστροφής για το πλαστικό μοντέλο, βασίζεται στην προσέγγιση της πρόβλεψης-διόρθωσης, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.22**. Κατά τη φάση της διόρθωσης του αλγορίθμου η επιφάνεια αστοχίας κινείται κατά μήκος του στατικού άξονα για να προσομοιωθεί η σκλήρυνση και η χαλάρωση. Η τελική επιφάνεια αστοχίας έχει την κορυφή της στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων Haigh-Vestergaard. Για τον προσδιορισμό της τάσης στην επιφάνεια χρησιμοποιείται ο Αλγόριθμος 1, που ακολουθεί, ο οποίος ικανοποιεί τη διαρροή αλλά και το νόμο σκλήρυνσης/χαλάρωσης.



Σχήμα 1.22: Αλγόριθμος πλαστικής πρόβλεψης-διόρθωσης

Αλγόριθμος 1: εισάγονται $\sigma_{ij}^{n-1}, \varepsilon_{ij}^p, \Delta \varepsilon_{ij}^n$

Ελαστική πρόβλεψη:
$$\sigma_{ij}^t = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^n \quad (1.57)$$

Εκτίμηση κριτηρίου αστοχίας:
$$f_A^p = F^P(\sigma_{ij}^t, \varepsilon_{ij}^{p, n-1}), \Delta \lambda_A = 0 \quad (1.58)$$

Εάν παραβιάζεται το κριτήριο αστοχίας, δηλ:

$$f_A^p > 0$$

Εκτίμηση διεύθυνσης επιστροφής:

$$m_{ij} = \frac{\partial G^P(\sigma_{ij}^t)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.59)$$

Επιστροφή:

$$F^p(\sigma_{ij}^t - \Delta \lambda_B E m_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p, n-1}) = 0 \Rightarrow \Delta \lambda_B \quad (1.60)$$

Εκτίμηση κριτηρίου αστοχίας:

$$f_B^p = F^P(\sigma_{ij}^t - \Delta \lambda_B E m_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p, n-1} + \Delta \lambda_B m_{ij}) \quad (1.61)$$

Επαναλήψεις (i) εφόσον:

$$|\Delta \lambda_A - \Delta \lambda_B| > e \quad (1.62)$$

Νέα αύξηση πλαστικού πολλαπλασιαστή:

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda_A - f_A^p \frac{\Delta \lambda_B - \Delta \lambda_A}{f_B^p - f_A^p} \quad (1.63)$$

Νέα διεύθυνση επιστροφής:

$$m_{ij}^{(i)} = \frac{\partial G^P (\sigma_{ij}^t - \Delta\lambda E m_{ij}^{(i-1)})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.64)$$

Εκτίμηση κριτηρίου αστοχίας:

$$f^p = F^P (\sigma_{ij}^t - \Delta\lambda E m_{ij}^{(i)}, \varepsilon_{ij}^p + \Delta\lambda m_{ij}^{(i)}) \quad (1.65)$$

Νέες αρχικές τιμές για επαναλήψεις:

$$f_B^p < 0 \Rightarrow f_B^p = f^p, \quad \Delta\lambda_B = \Delta\lambda \quad (1.66)$$

$$f_B^p \geq 0 \Rightarrow f_A^p = f_B^p, \Delta\lambda_A = \Delta\lambda_B, f_B^p = f^p, \quad \Delta\lambda_B = \Delta\lambda \quad (1.67)$$

Τέλος κύκλου επανάληψης

Τέλος ανανέωσης τάσεων και πλαστικών παραμορφώσεων:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{p\ n} &= \varepsilon_{ij}^{p\ n-1} + \Delta\lambda_B m_{ij}^{(i)} \\ \sigma_{ij}^n &= \sigma_{ij}^t - \Delta\lambda_B E m_{ij}^{(i)} \end{aligned} \quad (1.68)$$

1.2.4 Συνδυασμός Πλαστικού Μοντέλου και Μοντέλου Θραύσης

Ο σκοπός είναι να συνδυαστούν τα δύο μοντέλα που περιγράφηκαν παραπάνω σε ένα μόνο μοντέλο έτσι ώστε να χρησιμοποιείται η πλαστικότητα για τη σύνθλιψη και το μοντέλο θραύσης του Rankine για τη ρηγμάτωση. Το πρόβλημα αυτό μπορεί γενικά να τεθεί ως ταυτόχρονη λύση των δύο ακόλουθων ανισοτήτων:

Λύση ως προς $\Delta\varepsilon_{kl}^p$

$$F^P (\sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} (\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^f - \Delta\varepsilon_{kl}^p)) \leq 0 \quad (1.69)$$

Λύση ως προς $\Delta\varepsilon_{kl}^f$

$$F^P (\sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} (\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^p - \Delta\varepsilon_{kl}^f)) \leq 0 \quad (1.70)$$

Η μία ανισότητα εξαρτάται από το αποτέλεσμα της άλλης, συνεπώς χρησιμοποιείται ο Αλγόριθμος 2 που ακολουθεί:

Αλγόριθμος 2:

Βήμα 1: λύση ως προς $\Delta\varepsilon_{kl}^{p(i)}$

$$F^P (\sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} (\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^{f(i-1)} + b\Delta\varepsilon_{kl}^{cor(i-1)} - \Delta\varepsilon_{kl}^{p(i)})) \leq 0$$

Βήμα 2: λύση ως προς $\Delta\varepsilon_{kl}^{f(i)}$

$$F^f (\sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} (\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^{p(i)} - \Delta\varepsilon_{kl}^{f(i)})) \leq 0$$

Βήμα 3:

$$\Delta\varepsilon_{kl}^{cor(i)} = \Delta\varepsilon_{ij}^{f(i)} - \Delta\varepsilon_{ij}^{f(i-1)} \quad (1.71)$$

Η επαναληπτική διόρθωση της νόρμας της παραμόρφωσης μεταξύ δύο συνεχόμενων επαναλήψεων εκφράζεται ως:

$$\|\Delta \varepsilon_{ij}^{cor(i)}\| = (1 - b) a^f a^p \|\Delta \varepsilon_{ij}^{cor(i-1)}\| \quad (1.72)$$

$$\text{όπου: } a^f = \frac{\|\Delta \varepsilon_{ij}^{f(i)} - \Delta \varepsilon_{ij}^{f(i-1)}\|}{\|\Delta \varepsilon_{ij}^{p(i)} - \Delta \varepsilon_{ij}^{p(i-1)}\|}, \quad a^p = \frac{\|\Delta \varepsilon_{ij}^{p(i)} - \Delta \varepsilon_{ij}^{p(i-1)}\|}{\|\Delta \varepsilon_{ij}^{cor}\|}$$

και b είναι η επαναληπτική διόρθωση ή συντελεστής χαλάρωσης, ο οποίος εισάγεται με σκοπό να εξασφαλιστεί η σύγκλιση. Θα καθοριστεί σύμφωνα με το χρόνο ανάλυσης των a^f και a^p , έτσι ώστε η σύγκλιση των επαναλήψεων να είναι βέβαιη. Οι παράμετροι a^f και a^p χαρακτηρίζουν τις ιδιότητες κάθε μοντέλου, δηλ. την πλαστικότητα και τη θραύση. Η απαραίτητη συνθήκη για τη σύγκλιση είναι:

$$|(1 - b) a^f a^p| < 1 \quad (1.73)$$

Εάν $b = 0$, τότε πραγματοποιείται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος με αναδρομική αντικατάσταση. Η σύγκλιση μπορεί να επιτευχθεί μόνο σε δύο περιπτώσεις:

Ένα από τα μοντέλα παραμένει ανενεργό, δηλ. είτε $a^f = 0$ είτε $a^p = 0$, δεν υπάρχει χαλάρωση σε κανένα από τα δύο μοντέλα και στο πλαστικό μέρος δεν χρησιμοποιείται διογκούμενο υλικό, κάτι το οποίο σημαίνει ότι $\beta \leq 0$ για την **εξ. 1.56**. Αυτή είναι ικανή αλλά μη αναγκαία συνθήκη για να διασφαλιστεί ότι a^f και $a^p < 1$.

Αποδεικνύεται ότι οι τιμές των a^f και a^p είναι ανάλογες με το εύρος χαλάρωσης σε κάθε μοντέλο. Εφόσον για δεδομένο υλικό και για δεδομένο μέγεθος πεπερασμένων στοιχείων το μοντέλο χαλάρωσης παραμένει συνήθως σταθερό, οι τιμές των a^f και a^p δεν αλλάζουν σημαντικά κατά τις επαναλήψεις. Είναι πιθανό να επιλεγεί η παράμετρος b έτσι ώστε η **ανίσωση 1.73** να ικανοποιείται πάντα στο τέλος κάθε επανάληψης σύμφωνα με τις τρέχουσες τιμές των a^f και a^p . Υπάρχουν τρία πιθανά σενάρια, τα οποία πρέπει να ληφθούν υπ' όψη για σωστό υπολογισμό του b :

1^η περίπτωση:

$|a^f a^p| \leq \chi$, όπου χ συσχετίζεται με το ζητούμενο εύρος σύγκλισης. Για γραμμικό εύρος

μπορεί να τεθεί $\chi = 1/2$. Στην περίπτωση αυτή η σύγκλιση πραγματοποιείται και $b = 0$

2^η περίπτωση:

$\chi < |a^f a^p| < 1$, τότε η σύγκλιση θα είναι πολύ αργή. Στην περίπτωση αυτή το b μπορεί να

εκτιμηθεί ως $b = 1 - \frac{|a^f a^p|}{\chi}$, με στόχο την αύξηση του εύρους σύγκλισης.

3^η περίπτωση:

$1 \leq |a^f a^p|$, τότε ο αλγόριθμος δε συγκλίνει. Στην περίπτωση αυτή το b πρέπει να εκτιμηθεί ως

$$b = 1 - \frac{\chi}{|a^f a^p|} \text{ για να σταθεροποιήσει τις επαναλήψεις.}$$

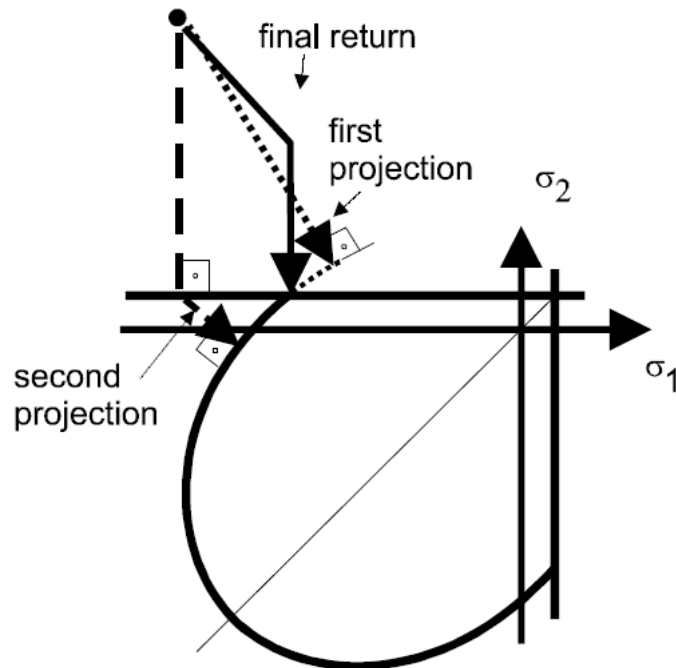
Η προσέγγιση αυτή εγγυάται τη σύγκλιση εφόσον οι παράμετροι a^f και a^p δεν μεταβάλλονται δραστικά κατά τις επαναλήψεις, όπως συμβαίνει σε ομαλά και σωστά διαμορφωμένα μοντέλα. Το εύρος της σύγκλισης εξαρτάται από τη θραυστότητα του υλικού, την παράμετρο διόγκωσης β και το μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων. Ένα μεγαλύτερο πλεονέκτημα θα είναι η σταθεροποίηση του αλγορίθμου με εξομάλυνση της παραμέτρου b κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων:

$$b = \frac{(b^{(i)} + b^{(i-1)})}{2} \quad (1.74)$$

όπου ο δείκτης i δηλώνει τιμές δύο συνεχόμενων επαναλήψεων. Πολύ σημαντικό για τη σύγκλιση του Αλγορίθμου 2 είναι οι επιφάνειες αστοχίας των δύο μοντέλων να τέμνουν η μία την άλλη σε κάθε πιθανή θέση, ακόμη και κατά τη σκλήρυνση ή τη χαλάρωση.

Στον επαναληπτικό αλγόριθμο χρησιμοποιούνται πρόσθετοι περιορισμοί. Εάν η εντατική κατάσταση στο τέλος του πρώτου βήματος παραβιάζει το κριτήριο του Rankine, η σειρά των δύο πρώτων βημάτων του Αλγορίθμου 2 αντιστρέφεται. Επίσης στην πραγματικότητα, η σύνθλιψη του σκυροδέματος στη μία διεύθυνση έχει ως επίπτωση ρηγματώσεις στις άλλες διευθύνσεις. Υποτίθεται ότι μετά την παραβίαση του πλαστικού κριτηρίου διαρροής, η εφελκυστική αντοχή σε όλες τις διευθύνσεις του υλικού μηδενίζεται.

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος για το συνδυασμό των μοντέλων πλαστικότητας και θραύσης παρουσιάζεται γραφικά στο **Σχήμα 1.23**. Όταν και οι δύο επιφάνειες ενεργοποιούνται, η συμπεριφορά είναι παρόμοια με την πλαστικότητα πολλαπλών επιφανειών (SIMO et al. 1988). Αντίθετα με τον αλγόριθμο της πλαστικότητας πολλαπλών επιφανειών, η προτεινόμενη μέθοδος είναι πιο γενική, με την έννοια ότι καλύπτει όλες τις φορτίσεις περιλαμβάνοντας και φυσικά φαινόμενα, όπως είναι το κλείσιμο των ρωγμών.



Σχήμα 1.23: Σχηματική απεικόνιση της επαναληπτικής διαδικασίας του Αλγορίθμου 2 (εξ. 1.71), για ευκρίνεια στο σχήμα απεικονίζονται μόνο οι δύο διαστάσεις

Υπάρχουν δύο πρόσθετες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο αυτών μοντέλων που πρέπει να ληφθούν υπ' όψη, έτσι ώστε να περιγραφεί καλύτερα η συμπεριφορά του υλικού του σκυροδέματος:

- (α) Μετά τη σύνθλιψη του σκυροδέματος, πρέπει να μειωθεί και η εφελκυστική αντοχή.
- (β) Σύμφωνα με έρευνα των VECCHIO και COLLINS (1986) όταν πραγματοποιείται ρηγμάτωση, η θλιπτική αντοχή πρέπει να μειωθεί στην κάθετη διεύθυνση. Η θεωρία αυτή καλείται Θεωρία Θλίψης και χρησιμοποιείται για την περιγραφή της διατμητικής αστοχίας δοκών και τοιχείων.

Η αλληλεπίδραση (α) λαμβάνεται υπ' όψη με την προσθήκη της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης στη μέγιστη παραμόρφωση θραύσης στο μοντέλο θραύσης, έτσι ώστε να αυξάνεται αυτόματα η εφελκυστική βλάβη λόγω θλίψης σε άλλη κατεύθυνση. Πρέπει να ισχύει η παρακάτω συνθήκη:

$$\varepsilon_{kk}^f \geq \frac{f_t'}{f_c'} \varepsilon_{eq}^p \quad (1.75)$$

Η μείωση της θλιπτικής αντοχής (β) βασίζεται στην ακόλουθη εξίσωση, που προτείνεται από τον COLLINS:

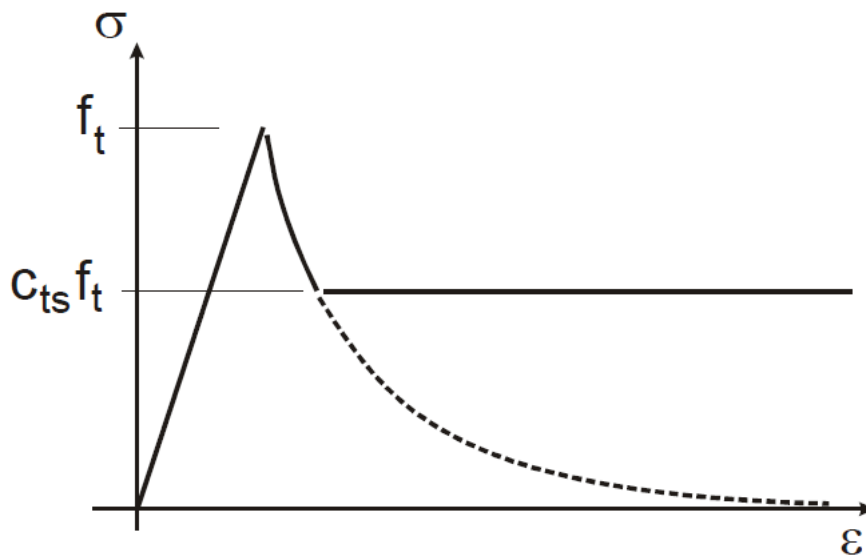
$$\sigma_c = r_c f_c' \quad (1.76)$$

$$r_c = \frac{1}{0,8 + 170\varepsilon_1}, r_c^{\text{lim}} \leq r_c \leq 1$$

όπου ε_1 είναι η παραμόρφωση λόγω εφελκυσμού στη ρωγμή. Στο πρόγραμμα ATENA η μέγιστη παραμόρφωση θραύσης χρησιμοποιείται ως ε_1 και η θλιπτική αντοχή μειώνεται με το συντελεστή r_c^{lim} . Εάν r_c^{lim} δεν προσδιορίζεται, τότε δεν πραγματοποιείται μείωση της θλιπτικής αντοχής.

1.2.5 Δυσκαμψία Εφελκυσμού

Σε φορείς από ωπλισμένο σκυρόδεμα με ισχυρό οπλισμό, οι ρωγμές δεν μπορούν να αναπτυχθούν πλήρως και το σκυρόδεμα συνεισφέρει στη δυσκαμψία του χάλυβα. Το φαινόμενο αυτό καλείται δυσκαμψία εφελκυσμού και μπορεί να προσομοιωθεί στο μοντέλο υλικού CC3DNonLinCementitious2 με τον προσδιορισμό ενός συντελεστή εφελκυστικής δυσκαμψίας c_{ts} . Ο συντελεστής αυτός αναπαριστά τη σχετική οριακή τιμή της εφελκυστικής αντοχής στο διάγραμμα εφελκυστικής χαλάρωσης. Η εφελκυστική αντοχή δεν μπορεί να μειωθεί κάτω από την τιμή $c_{ts}f_t$ (Σχήμα 1.24). Η προτεινόμενη αρχική τιμή είναι $c_{ts} = 0,4$ όπως προτείνεται από τον CEB-FIP Model Code 1990.



Σχήμα 1.24: Δυσκαμψία εφελκυσμού

1.2.6 Απόσταση Ρωγμών

Σε φορείς ωπλισμένου σκυροδέματος με ισχυρό οπλισμό, ή σε φορείς με μεγάλα πεπερασμένα στοιχεία, όπου από κάθε πεπερασμένο στοιχείο περνούν πολλές ράβδοι οπλισμού, η προσέγγιση του εύρους ρωγμής που περιγράφηκε στην παράγραφο 1.1.3 θα παράγει πολύ συντηρητικά αποτελέσματα και το εύρος των ρωγμών θα υπερεκτιμάται. Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι η θεωρία εύρους ρωγμής υποθέτει ότι οι αποστάσεις των ρωγμών είναι μεγαλύτερες από το μέγεθος του πεπερασμένου στοιχείου. Αντίθετα όταν ο φορέας έχει βαρύ οπλισμό ή είναι διακριτοποιημένος με μεγάλα πεπερασμένα στοιχεία, είναι πιθανό η απόσταση των ρωγμών να είναι μικρότερη από το μέγεθος του πεπερασμένου στοιχείου. Αυτό ισχύει ειδικότερα όταν χρησιμοποιούνται shell/plate πεπερασμένα στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή είναι χρήσιμο να προσδιορίζεται η απόσταση των ρωγμών από τον χρήστη, αλλιώς το πρόγραμμα θα υπερεκτιμήσει τη ρηγμάτωση, άρα θα επηρεαστούν και οι παραμορφώσεις. Ο ορισμός από το χρήστη γίνεται μέσω του εύρους ρωγμής L_t .

2.1.2 Λύση με Επαναλήψεις

Κάθε τρόπος επίλυσης με επαναλήψεις αποτελείται τυπικά από δύο ρουτίνες, μία για την “προετοιμασία” της λύσης και μία για τη λύση αυτή καθαυτή, δηλαδή τη φάση της “εκτέλεσης”. Οι ρουτίνες είναι ιδιαίτερα σημαντικές για την περίπτωση λύσεων με επαναλήψεις με συνοριακές συνθήκες. Στην περίπτωση αυτή δημιουργείται ένα μητρώο συνοριακών συνθηκών.

Η πιο αποτελεσματική ρουτίνα συνοριακών συνθηκών βασίζεται στην ατελή διάσπαση του Cholesky (RECTORYS 1995). Το μητρώο συνοριακών συνθηκών A' διαχωρίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην **εξ. 2.6** δηλαδή:

$$A' = L'D'U' \quad (1.9)$$

Συγκρίνοντας το A και το A' , μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} \text{για } \alpha_{ij} \neq 0 & \quad \alpha'_{ij} = \alpha_{ij} \\ \text{για } \alpha_{ij} = 0 & \quad \alpha'_{ij} \neq \alpha_{ij} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Η ατελής μέθοδος του Cholesky χρησιμοποιείται με τον ίδιο τρόπο όπως και η πλήρης μέθοδος του Cholesky της **εξ. 2.6**, ωστόσο τα δεδομένα του μητρώου A , τα οποία είναι αρχικά μηδενικά και στη συνέχεια μετατρέπονται σε μη μηδενικά κατά την παραγοντοποίηση αγνοούνται, δηλαδή παραμένουν μηδενικά, ακόμη και μετά την παραγοντοποίηση. Αυτή η ανακρίβεια είναι το κόστος για την μικρότερη απαίτηση μνήμης των λύσεων με επαναλήψεις.

2.2 Πλήρης Μέθοδος Newton – Raphson

Με βήμα προς βήμα ανάλυση και με ταυτόχρονη αύξηση του φορτίου, προκύπτει το ακόλουθο σύνολο μη γραμμικών εξισώσεων:

$$K(\underline{p}) \Delta \underline{p} = \underline{q} - f(\underline{p}) \quad (1.11)$$

όπου:

\underline{q} είναι το διάνυσμα όλων των εφαρμοζόμενων σημειακών φορτίων

$f(\underline{p})$ είναι το διάνυσμα των εσωτερικών επικόμβιων δυνάμεων

$\Delta \underline{p}$ είναι η αύξηση της παραμόρφωσης, λόγω αύξησης των φορτίων

\underline{p} είναι οι παραμορφώσεις του φορέα, πριν από την αύξηση του φορτίου

$K(\underline{p})$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας που συνδέει την αύξηση του φορτίου με τις παραμορφώσεις

Η **εξ. 2.11** αντιπροσωπεύει τις μη ισόρροπες δυνάμεις κατά την αύξηση του φορτίου, δηλαδή είναι η διαφορά του συνολικού φορτίου μετά την εφαρμογή της αύξησης του φορτίου, μείον τις εσωτερικές δυνάμεις που προέκυψαν από το προηγούμενο βήμα φόρτισης. Γενικότερα το μητρώο δυσκαμψίας εξαρτάται από τις παραμορφώσεις, είναι δηλαδή συνάρτηση του \underline{p} , συνήθως όμως αυτό αμελείται κατά την αύξηση του φορτίου, προκειμένου να διατηρηθεί η γραμμικότητα. Στην περίπτωση αυτή το μητρώο δυσκαμψίας υπολογίζεται βασιζόμενο στην τιμή του \underline{p} που λαμβάνεται από το βήμα πριν την αύξηση του φορτίου.

Το σύνολο των **εξ. 2.11** είναι μη γραμμικό, λόγω της μη γραμμικότητας των συναρτήσεων των εσωτερικών δυνάμεων:

$$f(k\underline{p}) \neq kf(\underline{p}) \quad (1.12)$$

και της μη γραμμικότητας του μητρώου δυσκαμψίας:

$$\mathbf{K}(\underline{p}) \neq \mathbf{K}(\underline{p} + \Delta\underline{p}) \quad (1.13)$$

Όπου k είναι ακέραια σταθερά.

Το σύνολο των εξισώσεων είναι η μαθηματική περιγραφή της συμπεριφοράς του φορέα κατά τη διάρκεια ενός βήματος. Εάν επαναγραφεί η **εξ. 4.12** για την i επανάληψη της φόρτισης, λαμβάνεται:

$$\mathbf{K}(\underline{p}_{i-1}) \Delta\underline{p}_i = \underline{q} - f(\underline{p}_{i-1}) \quad (1.14)$$

Όλες οι ποσότητες της $(i-1)$ επανάληψης, έχουν ήδη υπολογισθεί κατά τη διάρκεια του προηγούμενου βήματος. Τώρα επιλύεται η εξίσωση για το \underline{p}_i με φορτίο \underline{q} , με τη βοήθεια της σχέσης:

$$\underline{p}_i = \underline{p}_{i-1} + \Delta\underline{p}_i \quad (1.15)$$

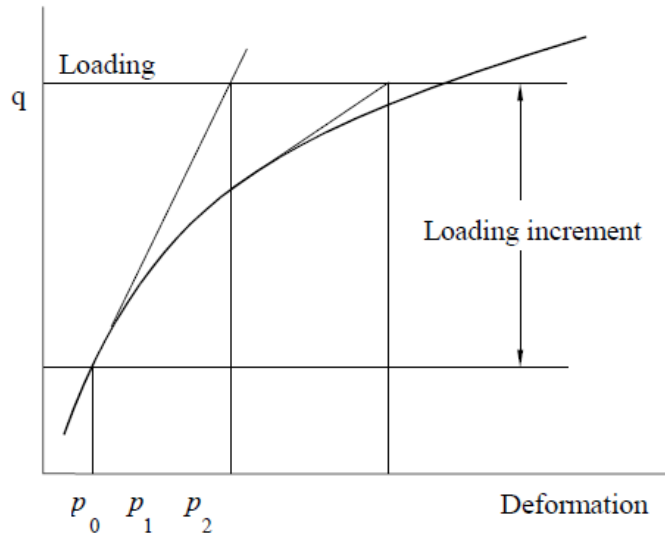
Όπως επισημάνθηκε και παραπάνω, η **εξ. 2.14** είναι μη γραμμική και για αυτό το λόγο είναι απαραίτητο να γίνει ολοκλήρωση μέχρι να ικανοποιούνται ορισμένα κριτήρια σύγκλισης. Στο πρόγραμμα **ATENA** υποστηρίζονται τα εξής:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\Delta\underline{p}_i^T \Delta\underline{p}_i}{\underline{p}_i^T \underline{p}_i}} &\leq \varepsilon_{rel.disp} \\ \sqrt{\frac{(\underline{q} - f(\underline{p}_{i-1}))^T (\underline{q} - f(\underline{p}_{i-1}))}{f(\underline{p}_i)^T f(\underline{p}_i)}} &\leq \varepsilon_{rel.force} \\ \sqrt{\frac{\Delta\underline{p}_i^T (\underline{q} - f(\underline{p}_{i-1}))}{\underline{p}_i^T f(\underline{p}_i)}} &\leq \varepsilon_{rel.energy} \\ \sqrt{\frac{\max(\underline{q}^k - f^k(\underline{p}_{i-1})) \max(\underline{q}^k - f^k(\underline{p}_{i-1}))}{\max(f^k(\underline{p}_i)) \max(f^k(\underline{p}_i))}} &\leq \varepsilon_{abs.force} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Όπου ο εκθέτης k συμβολίζει το k στοιχείο του αντίστοιχου διανύσματος.

Το πρώτο κριτήριο σύγκλισης εξετάζει τις παραμορφώσεις κατά την τελευταία επανάληψη, ενώ το δεύτερο κριτήριο εξετάζει τις μη ισόρροπες δυνάμεις. Το τρίτο κριτήριο σύγκλισης εξετάζει τη μη ισόρροπη ενέργεια, ενώ τέλος το τέταρτο κριτήριο εξετάζει τις μη ισόρροπες δυνάμεις σε όρους μεγίστων. Οι τιμές των ορίων σύγκλισης ε είναι αρχικά στο πρόγραμμα 0,01 και μπορούν να προσαρμοσθούν ανάλογα με τις ανάγκες του κάθε χρήστη.

Η λογική της επίλυσης των μη γραμμικών εξισώσεων με την πλήρη μέθοδο Newton – Raphson απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 2.1: Πλήρης μέθοδος Newton - Raphson

2.3 Τροποποιημένη Μέθοδος Newton – Raphson

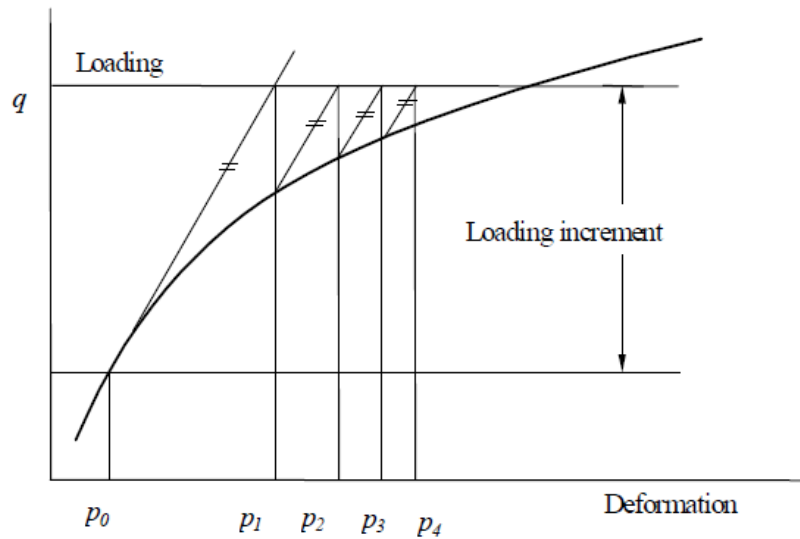
Κατά την επίλυση της **εξ. 2.14**, καταναλώνεται πολύς χρόνος στον υπολογισμό εκ νέου του μητρώου δυσκαμψίας $\mathbf{K}(\underline{p}_{i-1})$ σε κάθε επανάληψη. Σε πολλές περιπτώσεις αυτό δεν είναι απαραίτητο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μητρώο $\mathbf{K}(\underline{p}_0)$ της πρώτης επανάληψης του βήματος. Αυτή είναι η βασική ιδέα της τροποποιημένης μεθόδου Newton – Raphson. Με τη μέθοδο αυτή μειώνεται σημαντικά ο απαιτούμενος χρόνος επίλυσης, ωστόσο η σύγκλιση γίνεται δυσκολότερα.

Η απλοποίηση που γίνεται κατά την τροποποιημένη μέθοδο Newton – Raphson, αποτυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$\mathbf{K}(\underline{p}_{i-1}) \cong \mathbf{K}(\underline{p}_0) \quad (1.17)$$

Η τροποποιημένη μέθοδος Newton – Raphson παριστάνεται διαγραμματικά στο **Σχήμα 2.2** που ακολουθεί. Συγκρίνοντας το **Σχήμα 2.1** και το **Σχήμα 2.2**, φαίνεται ότι η τροποποιημένη μέθοδος Newton – Raphson συγκλίνει με πιο αργό ρυθμό σε σχέση με την πλήρη μέθοδο. Από την άλλη πλευρά όμως μία επανάληψη απαιτεί λιγότερο υπολογιστικό χρόνο, διότι το μητρώο δυσκαμψίας μορφώνεται και απαλείφεται μόνο μία φορά. Στην πράξη υιοθετείται ένας προσεκτικός συνδυασμός και των δύο μεθόδων για την καλύτερη και αποδοτικότερη λύση. Συνήθως συνιστάται η αρχή της επίλυσης να γίνεται με την πλήρη μέθοδο Newton – Raphson και κατά τη

διάρκεια της επίλυσης, δηλαδή κοντά σε μέγιστες τιμές, να γίνεται χρήση της τροποποιημένης μεθόδου για την αποφυγή αποκλίσεων.



Σχήμα 2.2: Τροποποιημένη μέθοδος Newton - Raphson

2.4 Μέθοδος Arc - Length

Εκτός από την τροποποιημένη μέθοδο Newton – Raphson, μία ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδος είναι η μέθοδος Arc – Length. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε για πρώτη φορά πριν δεκαπέντε περίπου χρόνια, προκειμένου να λυθούν φορείς γεωμετρικά μη γραμμικοί. Λόγω της εξαιρετικής προσέγγισης του προβλήματος, η μέθοδος αυτή καθιερώθηκε τόσο για γεωμετρικά μη γραμμικά προβλήματα, όσο και για προβλήματα όπου υπάρχει μη γραμμικότητα υλικού.

Ο κύριος λόγος που καθιστά αυτή τη μέθοδο δημοφιλή, είναι η υπολογιστική αξιοπιστία που εξασφαλίζει σωστά αποτελέσματα, ακόμη και σε περιπτώσεις όπου η πλήρης μέθοδος Newton – Raphson αποτυγχάνει. Με τη χρήση της μεθόδου Arc – Length, μπορούν να μελετηθούν προβλήματα σταθερότητας, όπως επίσης και προβλήματα με μη γραμμικότητα υλικού με διαγράμματα τάσεων – παραμορφώσεων μη ομαλά ή/και ασυνεχή. Αυτό επιτυγχάνεται χάρη στην αλλαγή των συνθηκών φόρτισης κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων μέσα στο ίδιο βήμα.

Η βασική ιδέα της μεθόδου αυτής εξηγείται καταρχάς από το ίδιο το όνομά της, “μήκος τόξου”. Η βασική αρχή είναι η παρακολούθηση της σχέσης μεταξύ φορτίου – μετατόπισης και όχι η εφαρμογή σταθερής αύξησης φορτίου όπως γίνεται στη μέθοδο Newton – Raphson. Έτσι η μέθοδος Arc – Length προσαρμόζει τόσο τις συνθήκες φόρτισης, όσο και τις συνθήκες μετατόπισης στο τέλος κάθε βήματος. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για την προσαρμογή αυτή. Ο πιο συνηθισμένος είναι να μεταβάλλεται η μετατόπιση σε κάθε βήμα για καθορισμένο μέγεθος διανύσματος φορτίου.

Από μαθηματικής σκοπιάς, πρέπει να εισαχθεί ένας πρόσθετος βαθμός ελευθερίας που έχει να κάνει με το βαθμό φόρτισης (δηλ. το πρόβλημα έχει n βαθμούς ελευθερίας για τη μετατόπιση και 1 βαθμό ελευθερίας για το φορτίο). Χρειάζεται ακόμη να προστεθεί ένας περιορισμός για τη νέα άγνωστη μεταβλητή. Ο νέος βαθμός ελευθερίας ονομάζεται συνήθως λ (φορτιστικός συντελεστής). Υπάρχουν πολλές δυνατότητες στο να καθοριστούν οι συνοριακές συνθήκες για το

λ. Αυτές που χρησιμοποιούνται στο πρόγραμμα **ATENA** παρουσιάζονται συνοπτικά στις ακόλουθες παραγράφους.

Η **εξ. 2.11**, προσαρμοσμένη στη μέθοδο Arc – Length γράφεται ως εξής:

$$K(\underline{p}) \Delta \underline{p} = \lambda \underline{q} - f(\underline{p}) \quad (1.18)$$

Γράφοντας τώρα την **εξ. 2.18** σε μορφή που αρμόζει για επαναληπτική λύση, λαμβάνεται:

$$K(\underline{p}_{i-1}) \Delta \underline{p}_i = \lambda \underline{q} - f(\underline{p}_{i-1}) = \lambda \underline{q} - f_{i-1} \quad (1.19)$$

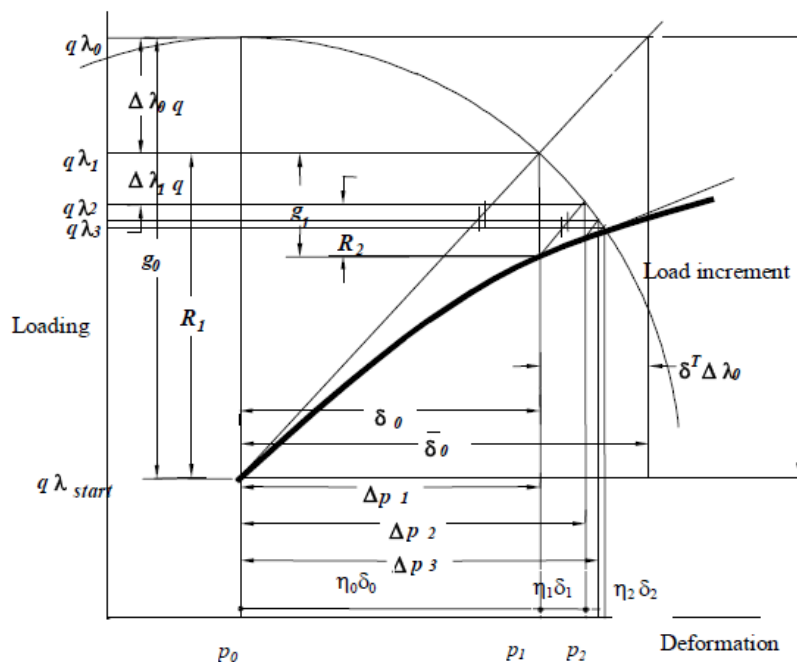
$$\underline{p}_i = \underline{p}_{i-1} + \Delta \underline{p}_i = \underline{p}_{i-1} + \eta_{i-1} \delta_{i-1} \quad (1.20)$$

$$\Delta \underline{p}_i = \Delta \underline{p}_{i-1} + \eta_{i-1} \delta_{i-1} \quad (1.21)$$

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \Delta \lambda_{i-1} \quad (1.22)$$

Οι συμβολισμοί εξηγούνται στο **Σχήμα 2.3**. Το μητρώο **K** μπορεί να υπολογιστεί για κάθε επανάληψη, με παρόμοιο τρόπο όπως και στην πλήρη μέθοδο Newton – Raphson, ή μπορεί να μορφωθεί βάσει της πρώτης επανάληψης για όλες τις επακόλουθες επαναλήψεις, όπως γίνεται και στην τροποποιημένη μέθοδο Newton – Raphson. Το διάνυσμα **q** δε συμβολίζει πλέον το σύνολο του φορτίου στο τέλος του βήματος, αλλά μόνο μία φόρτιση αναφοράς. Το πραγματικό φορτίο είναι πολλαπλάσιο αυτού.

Το **η** είναι μία πρόσθετη μεταβλητή που εισάγεται για τη μέθοδο Line – search, και θα επεξηγηθεί αργότερα. Το **η** χρησιμοποιείται για να επιταχύνεται η επίλυση σε περίπτωση που η σχέση φορτίου – παραμόρφωσης εξελίσσεται ομαλά, ή για να ξεπεράσει πιθανά προβλήματα μη σύγκλισης, που μπορεί να προκύψουν κοντά σε διακλαδώσεις και σε τοπικά μέγιστα.



Σχήμα 2.3: Η μέθοδος Arc - Length

Επιπρόσθετα, οι μη ισόρροπες δυνάμεις κατά την i επανάληψη, είναι:

$$g(\underline{p}_i) = \underline{g}_i = \underline{f}_i - \lambda_i \underline{q} = \underline{f} - (\lambda_{i-1} + \Delta\lambda_{i-1}) \underline{q}_i \quad (1.23)$$

και το διάνυσμα R.H.S στην i επανάληψη:

$$\underline{RHS}_i = \lambda_i \underline{q} - \underline{f}_{i-1} = \Delta\lambda_{i-1} \underline{q} - \underline{g}_{i-1} \quad (1.24)$$

Με αντικατάσταση της **εξ. 2.20** στην **εξ. 2.19** και με χρήση της **εξ. 2.24**, η αύξηση της μετατόπισης $\underline{\delta}_{i-1}$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\mathbf{K} \underline{\delta}_{i-1} = \underline{RHS}_{i-1} = \Delta\lambda_{i-1} \underline{q} - \underline{g}_{i-1} \quad (1.25)$$

Επομένως,

$$\underline{\delta}_{i-1} = \bar{\underline{\delta}}_{i-1} + \Delta\lambda_{i-1} \underline{\delta}_T \quad (1.26)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\delta}}_{i-1} &= -\mathbf{K}^{-1} \underline{g}_{i-1} \\ \underline{\delta}_T &= \mathbf{K}^{-1} \underline{q} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Για τον πλήρη καθορισμό του αλγορίθμου μένει να ορισθούν οι πρόσθετοι περιορισμοί για τα $\Delta\lambda_{i-1}$ και η_{i-1} . Έτσι συγκριτικά και με τις μεθόδους Newton – Raphson όπου γίνεται επίλυση n μη γραμμικών μεταβλητών, για τη μέθοδο Arc – Length απαιτείται η επίλυση $(n + 2)$ εξισώσεων, όπου οι n μεταβλητές αντιστοιχούν στις παραμορφώσεις και οι 2 πρόσθετες είναι οι $\Delta\lambda_{i-1}$ και η_{i-1} .

Εάν τεθεί $\eta_{i-1} = 1$, τότε το πρόβλημα μεταπίπτει σε πρόβλημα $(n + 1)$ εξισώσεων που αντιστοιχεί καθαρά στη μέθοδο Arc – Length, αλλιώς χρησιμοποιείται ένας συνδυασμός της μεθόδου Arc – Length και της μεθόδου Line – search, η οποία εξηγείται σε επόμενη παράγραφο. Σημειώνεται ότι όλα τα διανύσματα συμπεριλαμβανομένων και των $\underline{\delta}_{i-1}$, $\underline{\delta}_T$ είναι $(n + 1)$ τάξης. Η $(n + 1)$ συντεταγμένη τους, αντιστοιχεί στο φορτιστικό συντελεστή λ και τίθεται μηδενική.

Εισάγονται τώρα δύο νέα διανύσματα \underline{t}_i και \underline{n}_i , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 2.4**. Ορίζονται ως:

$$\underline{t}_{i-1} = \Delta \underline{p}_{i-1} + \beta \left(\underline{\lambda}_{i-1} + \underline{\lambda}_{start} \right) \quad (1.28)$$

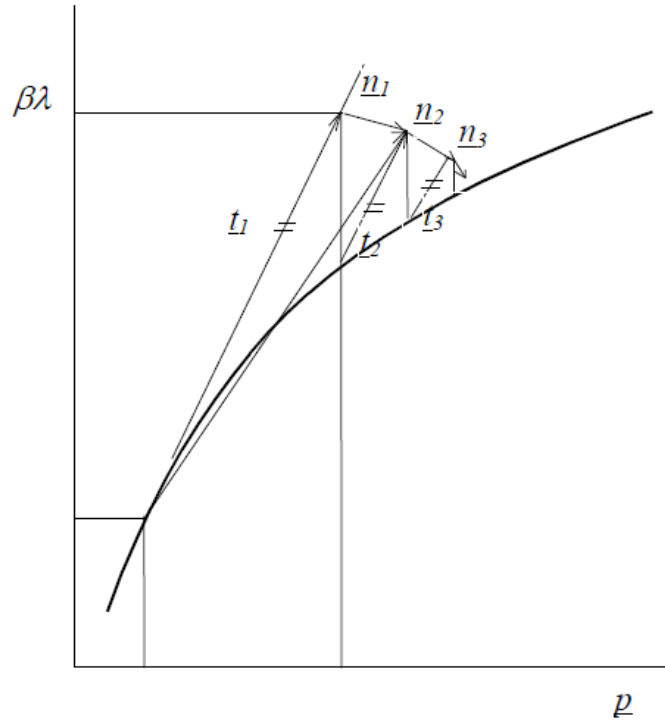
$$\underline{n}_{i-1} = \eta \underline{\delta}_{i-1} + \beta \Delta \lambda_{i-1} \quad (1.29)$$

όπου:

β είναι η κλίση που συνδέει το λ με την παραμόρφωση

$\underline{\lambda}_{i-1}$ είναι το $(n + 1)$ διάνυσμα με τις πρώτες n συντεταγμένες του μηδενικές και τη $(n + 1)$ συντεταγμένη του ίση με $\underline{\lambda}_{i-1}$.

$\underline{\lambda}_{start}$ είναι το $(n + 1)$ διάνυσμα, όμοια με το $\underline{\lambda}_{i-1}$.



Σχήμα 2.4: Τα διανύσματα \underline{t}_i και \underline{n}_i και η κλίση β

Είναι φανερό ότι

$$\underline{t}_i = \underline{t}_{i-1} + \underline{n}_{i-1} \quad (1.30)$$

Ορίζεται έτσι το R :

$$\underline{R}_{i-1} = \underline{t}_{i-1} \underline{n}_{i-1} \quad (1.31)$$

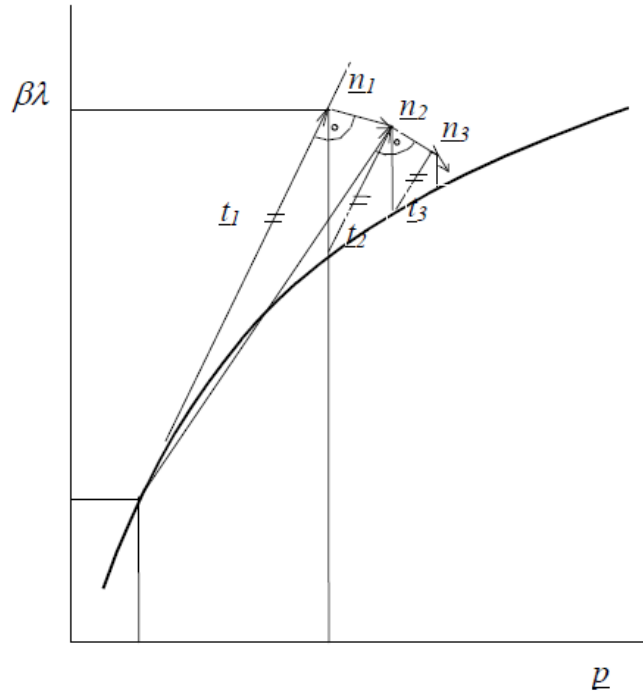
Η **εξ. 2.19** με τη χρήση της **εξ. 2.31** οδηγεί στην τελική έκφραση του άγνωστου $\Delta\lambda_{i-1}$ (σημειωτέον ότι $\Delta p_{i-1}^T \Delta\lambda_{i-1} = \underline{p}_{i-1}^T \underline{\lambda}_{i-1} = 0$):

$$\Delta\lambda_{i-1} = \frac{R_{i-1} - \Delta p_{i-1}^T \bar{\delta}_{i-1}}{\eta \Delta p_{i-1}^T \underline{\delta}_T + \beta^2 (\lambda_{i-1} - \lambda_{start})} \quad (1.32)$$

Το $\Delta\lambda_{i-1}$, λαμβάνεται από την **εξ. 2.32** εφόσον καθοριστεί το R_{i-1} . Στην πραγματικότητα καθορίζει και τον τύπο των περιορισμών της μεθόδου Arc – Length που χρησιμοποιούνται. Οι τύποι που υποστηρίζονται από το πρόγραμμα **ATENA** περιγράφονται παρακάτω.

2.4.1 Κάθετη Μέθοδος Ενημέρωσης

Τα διανύσματα t_{i-1} και n_{i-1} είναι κάθετα στην περίπτωση αυτή, επομένως είναι $R_{i-1} = 0$, βλ. και **Σχήμα 2.5**.



Σχήμα 2.5: Κάθετη Μέθοδος Ενημέρωσης

Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η απλότητά της. Το κάθετο επίπεδο ενημέρωσης είναι σχετικά αξιόπιστο, αλλά μπορεί να αστοχήσει εάν το $1 - p$ διάγραμμα αλλάξει απότομα κλίση ή αν γυρίσει πίσω ή κάτω (snap back και snap through αντίστοιχα). Εκτός τούτου, εάν τέτοιες ειδικές περιπτώσεις αντιμετωπιστούν με τη μέθοδο αυτή, θα πρέπει να μειωθεί σημαντικά το βήμα της μεθόδου.

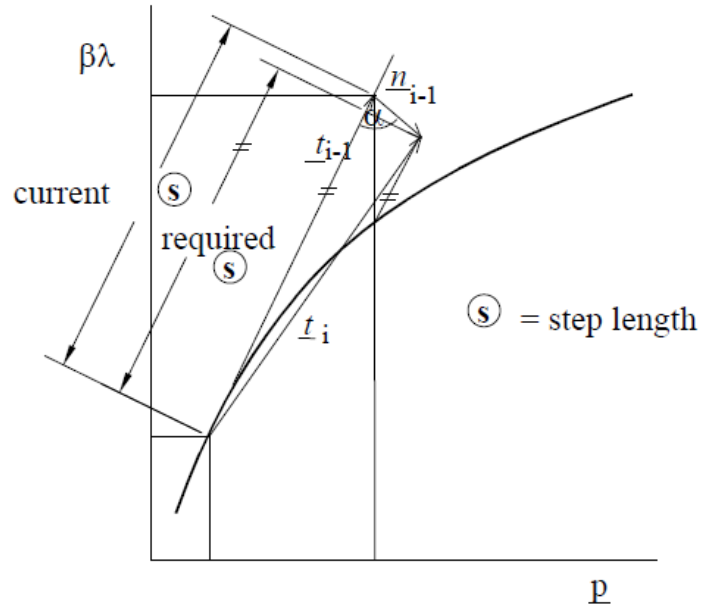
2.4.2 Μέθοδος Συνεχούς Γραμμικοποίησης

Το R_{i-1} ορίζεται σε αυτήν την περίπτωση ως:

$$R_{i-1} = \underline{t}_{i-1}^T \underline{n}_{i-1} = \|\underline{t}_{i-1}\| \|\underline{n}_{i-1}\| \cos(\alpha) = -\|\underline{t}_{i-1}\| (\|\underline{t}_{i-1}\| - s) \quad (1.33)$$

Το μέγεθος του βήματος s και η γωνία α απεικονίζονται στο **Σχήμα 2.6**. Η νόρμα του διανύσματος $\|\underline{t}_{i-1}\|$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την **εξ. 2.28**:

$$\|\underline{t}_{i-1}\|^2 = \Delta p_{-i-1}^T \Delta p_{-i-1} + \beta^2 \left(\lambda_{i-1} - \lambda_{start} \right)^2 \quad (1.34)$$



Σχήμα 2.6: Μέθοδος Συνεχούς Γραμμικοποίησης

Με αντικατάσταση των εξ. 2.33 και 2.34 στην εξ. 2.32 προκύπτει η τελική έκφραση του $\Delta\lambda_{i-1}$. Πρέπει να σημειωθεί ότι η κλίση s έχει ορισθεί από την αρχή και καθορίζει το πραγματικό μέγεθος του βήματος. Αυτό βέβαια καθιστά την επιλογή της παραμέτρου s , πολύ ουσιαστική για τη λύση και για το λόγο αυτό, θα συζητηθεί λεπτομερέστερα σε επόμενη παράγραφο.

Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα βολική για επιλύσεις που περιλαμβάνουν $\lambda - \rho$ διαγράμματα με απότομες διακοπές και ασυνέχειες, δηλαδή στις περιπτώσεις όπου παρουσιάζεται μη γραμμικότητα στο υλικό.

2.4.3 Λεπτομερής Ορθογωνική Μέθοδος

Ο βασικός περιορισμός που τίθεται για το $\Delta\lambda_{i-1}$ στην περίπτωση αυτή είναι ότι $\|t_{i-1}\| = \|t_i\| = s$, όπου s είναι το σαφώς ορισμένο εξ' αρχής μέγεθος του βήματος. Όμοια με την προηγούμενη μέθοδο, εκτιμάται και πάλι το R_{i-1} :

$$R_{i-1} = \underline{t}_{i-1}^T \underline{n}_{i-1} = \|\underline{t}_{i-1}\| \|\underline{n}_{i-1}\| \cos(a) = -\|\underline{t}_{i-1}\| \|\underline{r}_{i-1}\| \quad (1.35)$$

Από τα όμοια τρίγωνα του διαγράμματος του Σχήμα 2.7, προκύπτει:

$$\frac{\|\underline{r}_{i-1}\|}{\|\underline{t}'_{i-1}\| - s} = \frac{\|\underline{t}_{i-1}\|}{\|\underline{t}'_i\|} \quad (1.36)$$

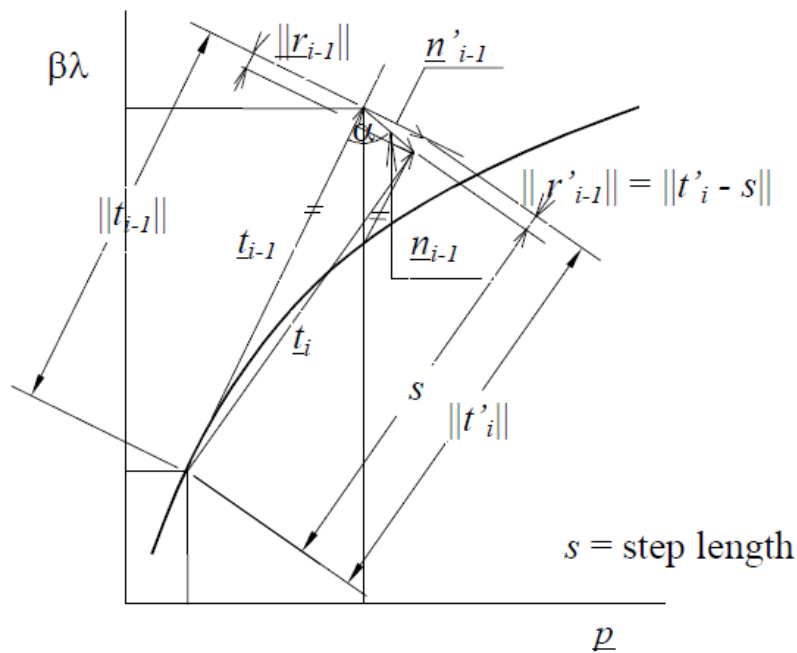
$$R_{i-1} = \frac{-s^2(\|\underline{t}'_i\| - s)}{\|\underline{t}'_i\|} \quad (1.37)$$

$$\underline{t}'_i = \underline{t}_{i-1} + \underline{n}'_{i-1} \quad (1.38)$$

$$\|\underline{t}'_i\|^2 = \|\underline{t}'_{i-1}\|^2 + \beta^2 \Delta\lambda_{i-1}^2 + \eta^2 \|\underline{\delta}_{i-1}\|^2 \quad (1.39)$$

Το διάνυσμα $\|\underline{t}'_{i-1}\|$ υπολογίζεται από την **εξ. 2.34**. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εξισώσεις στην **εξ. 2.32** λαμβάνεται η τελική έκφραση του $\Delta\lambda_{i-1}$.

Από την ανωτέρω προσέγγιση γίνεται αντιληπτό ότι πρώτα εφαρμόζεται η Κάθετη Μέθοδος Ενημέρωσης (**παράγραφος 2.4.1**) για τον υπολογισμό των $\|\underline{t}'_i\|$ και $\|\underline{n}'_{i-1}\|$ και έπειτα γίνεται διόρθωση του $\Delta\lambda_{i-1}$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $\|\underline{t}_{i-1}\| = \|\underline{t}_i\| = s$.



Σχήμα 2.7: Λεπτομερής Ορθογωνική Μέθοδος

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται συνήθως για την ανάλυση φορέων με γεωμετρική μη γραμμικότητα και ειδικά σε προβλήματα ισορροπίας. Συγκριτικά με τη μέθοδο Crisfield, που ακολουθεί, αποφεύγεται το πρόβλημα της επιλογής του κατάλληλου $\Delta\lambda_{i-1}$. Όσον αφορά στη σύγκλιση τέλος, η μέθοδος έχει ως πλεονέκτημα ότι διατηρεί το μέγεθος του βήματος.

2.4.4 Μέθοδος Crisfield

Η μέθοδος Crisfield βασίζεται στον περιορισμό του σταθερού βήματος $\|\underline{t}_{i-1}\| = \|\underline{t}_i\| = s$. Η έκφραση του R_{i-1} δεν χρησιμοποιείται σε αυτήν τη μέθοδο και έτσι γίνεται άμεση αντικατάσταση των **εξ. 2.19** μέσω της **εξ. 2.30** απευθείας στον παραπάνω περιορισμό. Προκύπτει έτσι η ακόλουθη εξίσωση για το $\Delta\lambda_{i-1}$:

$$\alpha_1 \Delta\lambda_{i-1}^2 + \alpha_2 \Delta\lambda_{i-1} + \alpha_3 = 0 \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \eta^2 \underline{\delta}_T^T \underline{\delta}_T + \beta^2 \\ \alpha_2 &= 2\beta^2(\lambda_{i-1} - \lambda_{start}) + 2\underline{\delta}_T^T \overline{\delta}_{i-1} \eta^2 \\ \alpha_3 &= \beta^2(\lambda_{i-1} - \lambda_{start})^2 + \eta^2 \overline{\delta}_{i-1}^T \overline{\delta}_{i-1} - s^2 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Η **εξ. 2.40** έχει γενικά δύο ρίζες $\Delta\lambda_{i-1}$ και επομένως πρέπει να επιλεγεί η μία από τις δύο ως κατάλληλη. Υπάρχουν διάφορες στρατηγικές για την επιλογή αυτή. Το πρόγραμμα **ATENA** επιλέγει τη λύση $\Delta\lambda_{i-1}$, για την οποία ισχύει $\cos(\underline{t}_{i-1}, \underline{t}_i) \geq 0$, δηλαδή η διεύθυνση της νέας αύξησης να είναι όσο το δυνατόν κοντά στη διεύθυνση της προηγούμενης αύξησης, μέσα στο ίδιο βήμα.

2.4.5 Βήμα της Arc Length

Η επιλογή του κατάλληλου βήματος είναι πρωταρχικής σημασίας για σωστή ανάλυση και απόδοση σωστών αποτελεσμάτων. Επηρεάζει άμεσα τη σύγκλιση, αλλά και τον απαιτούμενο αριθμό βημάτων. Το πρόγραμμα **ATENA** ακολουθεί την παρακάτω διαδικασία για τη βέλτιστη επιλογή του βήματος s :

- Ορίζεται το διάνυσμα φόρτισης \underline{q} και έτσι ορίζεται ένα φορτίο αναφοράς (μέσα σε μία αύξηση του φορτίου).
- Η ανάλυση ξεκινάει με αυτό το φορτίο στο 1^ο βήμα και η 1^η επανάληψη καθορίζει το μέγεθος του βήματος s_1 για το 1^ο βήμα. Στα ακόλουθα βήματα, το μέγεθος του βήματος παραμένει σταθερό, ή βελτιστοποιείται, βάσει των ακόλουθων:

$$s_i = s_{i-1} \sqrt{\frac{n_{i-1}}{n}} \quad (1.42)$$

$$s_i = s_{i-1} \sqrt[4]{\frac{n_{i-1}}{n}} \quad (1.43)$$

$$s_i = s_{i-1} \sqrt{\frac{n}{n_{i-1}}} \quad (1.44)$$

όπου:

s_i και s_{i-1} είναι το βήμα της Arc Length στην τρέχουσα και στην προηγούμενη αύξηση του φορτίου αντίστοιχα.

n και n_{i-1} είναι ο επιθυμητός αριθμός επαναλήψεων του τρέχοντος και του προηγούμενου βήματος αντίστοιχα. Συνήθως το n είναι 5 με 6.

2.5 Μέθοδος Line – search

Σκοπός της μεθόδου αυτής είναι ο υπολογισμός της παραμέτρου η , η οποία αναφέρθηκε ήδη στην **παράγραφο 2.4**. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε ανεξάρτητα, είτε σε συνδυασμό με τη μέθοδο Arc Length. Ο βασικός λόγος για τον οποίο εισάγεται μία νέα παράμετρος (δηλ. ένας νέος βαθμός ελευθερίας στις εξισώσεις) είναι για να επιταχυνθεί ή για να σταματήσει η ανάλυση της σχέσης φορτίου – μετατόπισης.

Η βασική ιδέα της παραμέτρου η είναι να ελαχιστοποιηθεί το έργο των ενεργών μη ισόρροπων δυνάμεων κατά την αύξηση της μετατόπισης.

Έστω ότι έχουν ήδη βρεθεί δύο σημεία \underline{p}_0 και $\underline{p}_0 + \eta' \underline{\delta}$ και επομένως έχουν επίσης υπολογιστεί οι μη ισόρροπες δυνάμεις $\underline{g}(\underline{p}_0)$ και $\underline{g}(\underline{p}_0 + \eta' \underline{\delta})$ στα σημεία αυτά. Ο σκοπός αυτής της μεθόδου είναι να τεθεί η παράμετρος η έτσι ώστε, το έργο των μη ισόρροπων δυνάμεων στο σημείο $\underline{p}_0 + \eta \underline{\delta}$ να είναι ελάχιστο.

Το έργο των μη ισόρροπων δυνάμεων είναι:

$$\Phi(\underline{p}) = \Phi(\underline{p}_0) + \int_{\underline{p}_0}^{\underline{p}} \underline{g}(\underline{p})^T d\underline{p} = \min \quad (1.45)$$

Επομένως:

$$\frac{\partial \Phi(\underline{p})}{d\eta} = 0 + \frac{\partial}{\partial \underline{p}} \left(\int_{\underline{p}_0}^{\underline{p}} \underline{g}(\underline{p})^T \right) \frac{\partial \underline{p}}{\partial \eta} = \underline{g}(\underline{p})^T \frac{\partial \underline{p}}{\partial \eta} = 0 \quad (1.46)$$

Με γραμμική ολοκλήρωση των μη ισόρροπων δυνάμεων μεταξύ των σημείων \underline{p}_0 και $\underline{p}_0 + \eta' \underline{\delta}$

$$\begin{aligned} \underline{g}(\underline{p}_0 + \eta \underline{\delta}) &= \underline{g}(\underline{p}_0) + \left(\frac{\underline{g}(\underline{p}_0 + \eta' \underline{\delta}) - \underline{g}(\underline{p}_0)}{\|\underline{p}_0 + \eta' \underline{\delta} - \underline{p}_0\|} \right) \|\underline{p}_0 + \eta \underline{\delta} - \underline{p}_0\| = \\ &= \underline{g}(\underline{p}_0) + \frac{\underline{g}(\underline{p}_0 + \eta' \underline{\delta}) - \underline{g}(\underline{p}_0)}{\eta'} \eta \end{aligned} \quad (1.47)$$

και με χρήση των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \underline{p}_0 + \eta \underline{\delta} \\ \frac{\partial \underline{p}}{\partial \eta} &= \underline{\delta} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Προκύπτει η τελική έκφραση του η' :

$$\eta = \eta' \frac{\underline{g}(\underline{p}_0)^T \underline{\delta}}{\underline{g}(\underline{p}_0)^T \underline{\delta} - \underline{g}(\underline{p}_0 + \eta' \underline{\delta})^T \underline{\delta}} \quad (1.49)$$

Επομένως η μέθοδος Line – search συνοψίζεται στα εξής:

- Χρησιμοποιείται οποιαδήποτε μέθοδος για τον υπολογισμό της αύξησης της μετατόπισης $\underline{\delta}$ (βλ. **Σχήμα 2.3** και **εξ. 2.27**). Η παράμετρος η' μπορεί να τεθεί σύμφωνα με την τελευταία αύξηση του φορτίου, ή απλά ως μονάδα.
- Υπολογίζονται οι μη ισόρροπες δυνάμεις και για το $\underline{g}(\underline{p}_0)$ και για το $\underline{g}(\underline{p}_0 + \eta' \underline{\delta})$.
- Χρησιμοποιείται η **εξ. 2.49** για τον υπολογισμό της νέας τιμής του η .

Εφόσον όλες οι παραπάνω εξισώσεις είναι μη γραμμικές, η παράμετρος η πρέπει να λυθεί με επαναλήψεις μέχρις ότου

$$\frac{\|\underline{g}(\underline{p}_0 + \eta \underline{\delta})\|}{\underline{g}(\underline{p}_0)} \leq \text{μία καθορισμένη τιμή πτώσης ενέργειας, συνήθως μεταξύ 0,6 και 0,8}$$

Εμπειρικά έχει προκύψει ότι η τιμή της παραμέτρου η πρέπει να κυμαίνεται μεταξύ 0,1 και 5.

2.6 Η Παράμετρος β

Η παράμετρος β συνδέει την παραμόρφωση \underline{p} με το φορτιστικό συντελεστή λ .

Εάν $\beta = 0$, η λύση για το $\Delta \lambda_{i-1}$ αναζητείται σε μία περιοχή κυλινδρικής μορφής με ακτίνα ίση με το μέγεθος του βήματος s (μέθοδος Crisfield) και με άξονα κάθετο στην παραμόρφωση \underline{p} . Η λύση βρίσκεται στο σημείο τομής της επιφάνειας αυτής και της γραμμής, που ορίζεται από την ενέργεια της κατασκευής και από το φορτίο που εφαρμόζεται στο σημείο \underline{p} .

Εάν $\beta > 0$ η λύση βρίσκεται με τον ίδιο τρόπο, αλλά σε περιοχή ελλειψοειδούς ή σφαιρικής μορφής.

Όσο μεγαλύτερη η τιμή του β , τόσο δυσκολότερη η αλλαγή στη φόρτιση, συγκριτικά με την αύξηση της μετατόπισης.

Το πρόγραμμα **ATENA** υποστηρίζει τις παρακάτω εξισώσεις για τον ορισμό και τη βελτιστοποίηση της τιμής του β , για το τρέχον βήμα j .

Με την πρώτη στρατηγική, θεωρείται ότι ο λόγος φορτίου – μετατόπισης της **εξ. 2.50** είναι σταθερός σε όλα τα βήματα και ίσος με την τιμή δεδομένων B_{req} :

$$B = \frac{\beta \Delta \lambda}{\|\Delta(\underline{p})\|} = B_{req} \quad (1.50)$$

Κατόπιν, στο τέλος του βήματος $j - 1$ υπολογίζεται

$${}_{j-1}B = \frac{{}_{j-1}\beta \Delta_{j-1}\lambda}{\|\Delta({}_{j-1}\underline{p})\|} \quad (1.51)$$

Αυτή η τιμή, λόγω μη γραμμικότητας, δεν ταυτίζεται με την τιμή B_{req} . Για το λόγο αυτό στο βήμα j μετασχηματίζεται το ${}_j\beta$ ως εξής:

$${}_jB = B_{req} = {}_{j-1}B\chi$$

$$\chi = \frac{B_{req}}{{}_{j-1}B} \quad (1.52)$$

$${}_j\beta = {}_{j-1}\beta\chi = {}_{j-1}\beta \frac{B_{req}}{{}_{j-1}B} = {}_{j-1}\beta \frac{B_{req}}{\frac{{}_{j-1}\beta \Delta_{j-1}\lambda}{\|\Delta({}_{j-1}\underline{p})\|}} = B_{req} \frac{\|\Delta({}_{j-1}\underline{p})\|}{\Delta_{j-1}\lambda}$$

Η παραπάνω διαδικασία βελτιστοποίησης γίνεται στο πρώτο βήμα, θεωρώντας ότι

$${}_0\beta = 1$$

$${}_0\Delta\lambda = 1$$

$$\|\Delta({}_{j-1}\underline{p})\| = \|\underline{\delta}_T\|$$

όπου $\underline{\delta}_T$ είναι η μετατόπιση που αντιστοιχεί στην κύρια αύξηση του φορτίου κατά τη μέθοδο Arc – Length, όπως ορίστηκε παραπάνω. Έτσι

$${}_1\beta = {}_0\beta\chi = \frac{B_{req}}{{}_{j-1}B} = \frac{B_{req}}{\frac{{}_{j-1}\beta \Delta_{j-1}\lambda}{\|\Delta({}_{j-1}\underline{p})\|}} = \frac{B_{req}}{\frac{1}{\|\underline{\delta}_T\|}} = B_{req} \|\underline{\delta}_T\| \quad (1.53)$$

Οι παράμετροι ${}_jB$ σε όλα τα ακόλουθα βήματα, υπολογίζονται σύμφωνα με την **εξ. 2.52**. Εάν ο λόγος της διαφοράς των μετατοπίσεων $\|\Delta({}_{j-1}\underline{p})\|$ προς τη διαφορά του φορτίου $\Delta({}_{j-1}\lambda)$ αυξηθεί στο τελευταίο βήμα της φόρτισης, τότε το β αυξάνεται στο τρέχον βήμα, και επομένως δίνεται περισσότερη “βαρύτητα” στα φορτία σε σχέση με τις μετατοπίσεις. Αυτό προσπαθεί να αποτρέψει η **εξ. 2.53**.

Η δεύτερη στρατηγική είναι διαφορετική. Γίνεται προσπάθεια να διατηρηθεί σταθερό το β , με κατάλληλη διαχείριση των συντελεστών B. Είναι δηλαδή η αντίστροφη διαδικασία της πρώτης στρατηγικής που αναφέρθηκε παραπάνω.

Από την **εξ. 2.51** μπορεί να γραφεί για τα βήματα $(j - 1)$ και j

$${}_{j-1}\beta = \frac{{}_{j-1}B \left\| \Delta \left({}_{j-1}\underline{p} \right) \right\|}{\Delta_{j-1}\lambda}$$

$${}_j\beta = \frac{{}_jB \left\| \Delta \left({}_j\underline{p} \right) \right\|}{\Delta_j\lambda}$$

Επομένως εάν ${}_{j-1}\beta = {}_j\beta$

$$\frac{{}_jB \left\| \Delta \left({}_j\underline{p} \right) \right\|}{\Delta_j\lambda} = \frac{{}_{j-1}B \left\| \Delta \left({}_{j-1}\underline{p} \right) \right\|}{\Delta_{j-1}\lambda}$$

$$\frac{{}_jB}{{}_{j-1}B} = \frac{\frac{\left\| \Delta \left({}_{j-1}\underline{p} \right) \right\|}{\Delta_{j-1}\lambda}}{\frac{\left\| \Delta \left({}_j\underline{p} \right) \right\|}{\Delta_j\lambda}} \quad (1.54)$$

και εάν υποτεθεί

$$\frac{\Delta_{j-1}\lambda}{\left\| \Delta \left({}_{j-1}\underline{p} \right) \right\|} = \frac{\Delta_j\lambda}{\left\| \Delta \left({}_j\underline{p} \right) \right\|}$$

τότε

$$\frac{{}_jB}{{}_{j-1}B} = \frac{{}_j\beta}{{}_{j-1}\beta}$$

και άρα

$${}_j\beta = {}_{j-1}\beta \frac{\frac{\left\| \Delta \left({}_{j-1}\underline{p} \right) \right\|}{\Delta_{j-1}\lambda}}{\frac{\left\| \Delta \left({}_j\underline{p} \right) \right\|}{\Delta_j\lambda}} \quad (1.55)$$

Εάν ο λόγος

$$\frac{\frac{\left\| \Delta \left({}_{j-1}\underline{p} \right) \right\|}{\Delta_{j-1}\lambda}}{\frac{\left\| \Delta \left({}_j\underline{p} \right) \right\|}{\Delta_j\lambda}}$$

στα επόμενα βήματα αλλάξει, με τη διαδικασία αυτή επιχειρείται να περιοριστεί η αλλαγή αυτή με επανακαθορισμό των συντελεστών β . Με τη διαδικασία αυτή δηλαδή επιχειρείται να παραμείνει ο λόγος

$$\frac{\|\Delta(\underline{p})\|}{\Delta\lambda} = \text{σταθ.}$$

ΜΕΡΟΣ Β: ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

3 Προσομοίωση Φορέων και Ανάλυση με το Πρόγραμμα ATENA

3.1 Αμφιέριστη Προεντεταμένη Δοκός από Ωπλισμένο Σκυρόδεμα – FE 0,25 cm

Εξετάζεται μία προεντεταμένη δοκός από ωπλισμένο σκυρόδεμα, με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί. Η δοκός είναι αμφιέριστη με άνοιγμα $l = 20$ m και διαστάσεις διατομής $b \times h = 1,50 \times 0,90$ m. Χρησιμοποιείται ποιότητα σκυροδέματος C35/45, ενώ ο χάλυβας προέντασης έχει $f_{py} = 1600$ MPa και διατομή καλωδίου $A_s = 86,58$ cm². Η δύναμη προέντασης που εφαρμόζεται στο καλώδιο είναι $P = 9697,0$ kN.

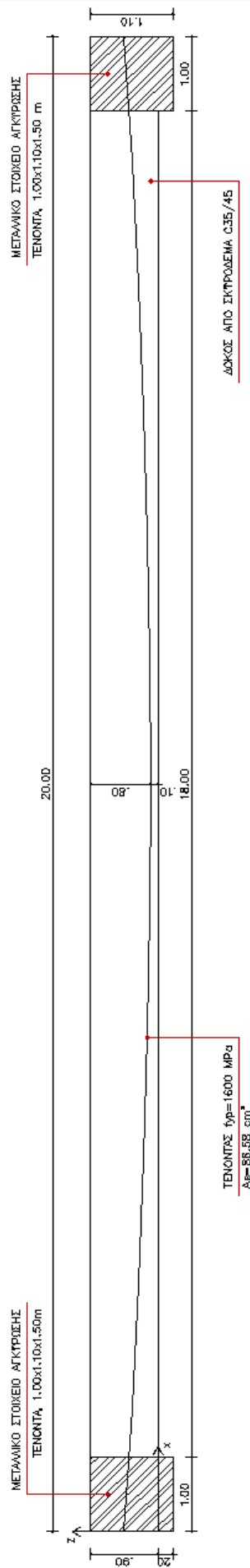
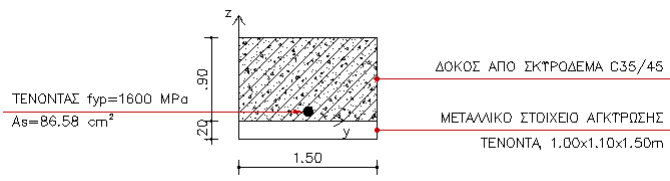
Ο φορέας αυτός έχει πλαστική ροπή $M = 9000$ kNm η οποία αντιστοιχεί σε κατανεμημένο φορτίο q ως εξής:

$$\frac{ql^2}{8} = M \Rightarrow q = M \frac{8}{l^2} \Rightarrow$$

$$q = 9000 \text{ kNm} \frac{8}{20^2 \text{ m}^2} \Rightarrow$$

$$q = 180 \text{ kN/m}$$

Στις παραγράφους που ακολουθούν αναφέρεται η διαδικασία προσομοίωσης αυτού του προβλήματος, ενώ γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την ανάλυση με το πρόγραμμα **ATENA** με την τιμή του φορτίου κατάρρευσης $q = 180$ kN/m.

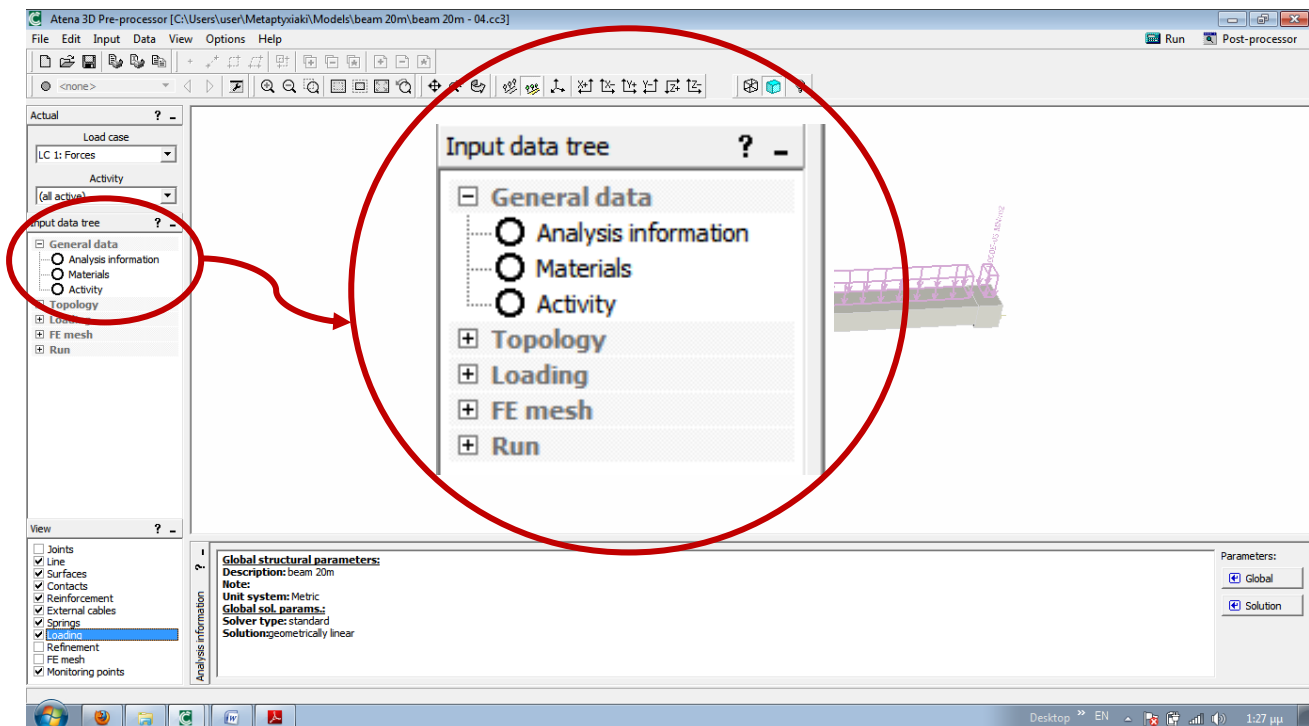


3.1.1 Προσομοίωση

Το πρόγραμμα **ATENA** δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να επιλέξει και να καθορίσει μία πληθώρα παραμέτρων του προβλήματος, έτσι ώστε η προσομοίωση να είναι όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστική. Ενδεικτικά, επιλέγεται ο τύπος ανάλυσης, καθορίζονται τα υλικά και οι γεωμετρία του προβλήματος, η μέθοδος της ανάλυσης και το είδος των πεπερασμένων στοιχείων και άλλες επιλογές.

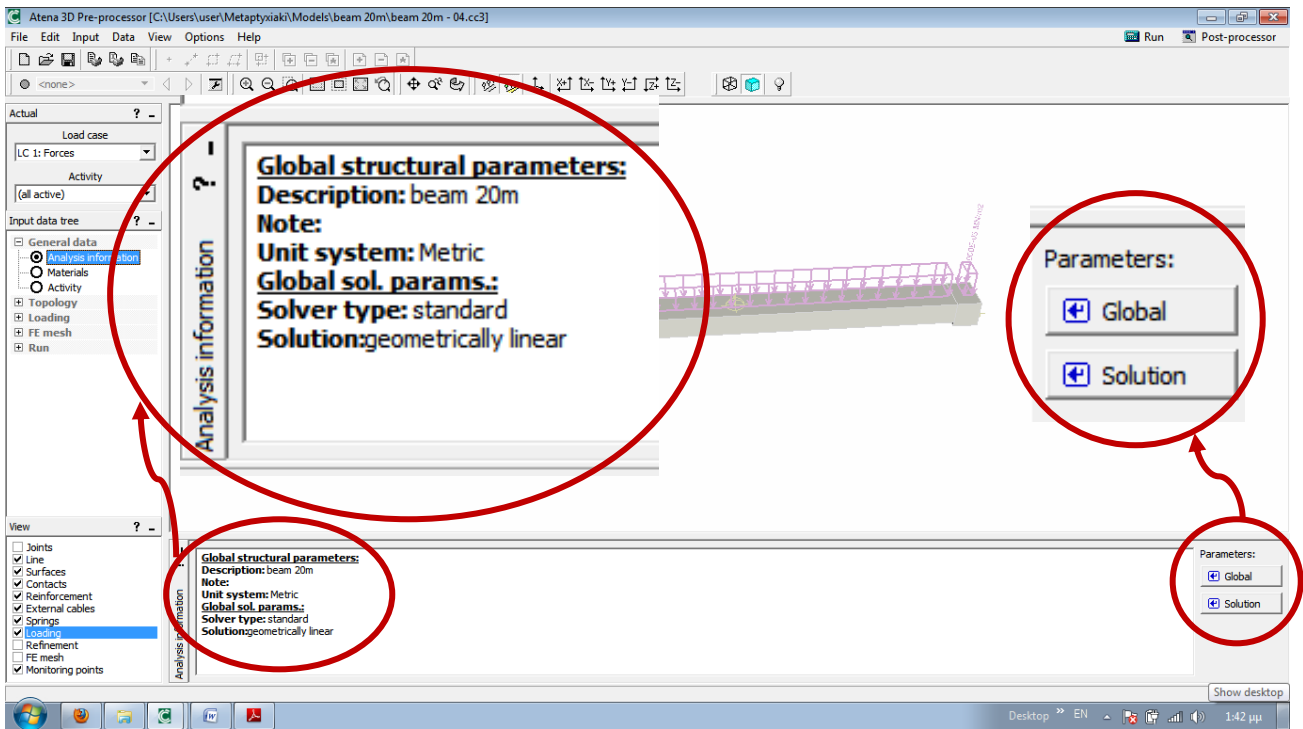
3.1.1.1 Γενικά Δεδομένα – General Data

Η προσομοίωση του προβλήματος ξεκινά με την επιλογή ορισμένων γενικών δεδομένων που αφορούν στον τύπο της ανάλυσης. Στο **Σχήμα 3.1** που ακολουθεί παρουσιάζονται οι επιλογές προσδιορισμού των γενικών δεδομένων του προβλήματος, οι οποίες είναι: Analysis information, Materials, Activity.



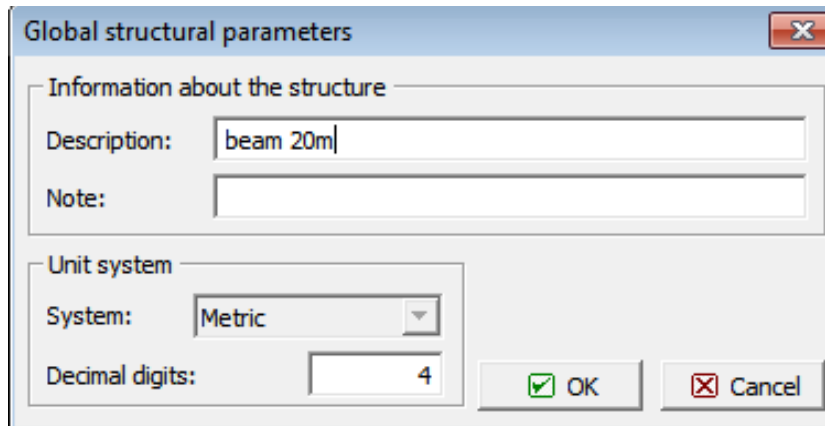
Σχήμα 3.1: Γενικά δεδομένα – General data

- **Analysis information:** με την επιλογή αυτή εμφανίζεται στο παράθυρο πληροφοριών η φόρμα που φαίνεται στο **Σχήμα 3.2**.



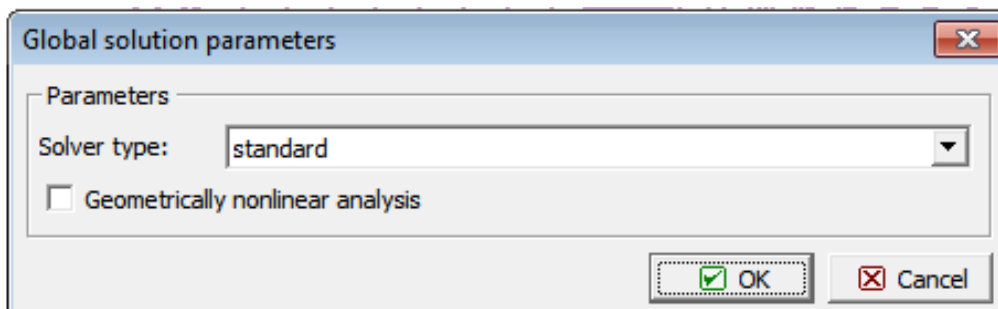
Σχήμα 3.2: Analysis information

Με το κουμπί Global δίνεται η περιγραφή του προβλήματος, δηλαδή ο τίτλος και κάποια σημείωση (Σχήμα 3.3). Ο τίτλος που δίνεται στην περιγραφή θα φαίνεται και στις σελίδες των αποτελεσμάτων.



Σχήμα 3.3: Global structural parameters

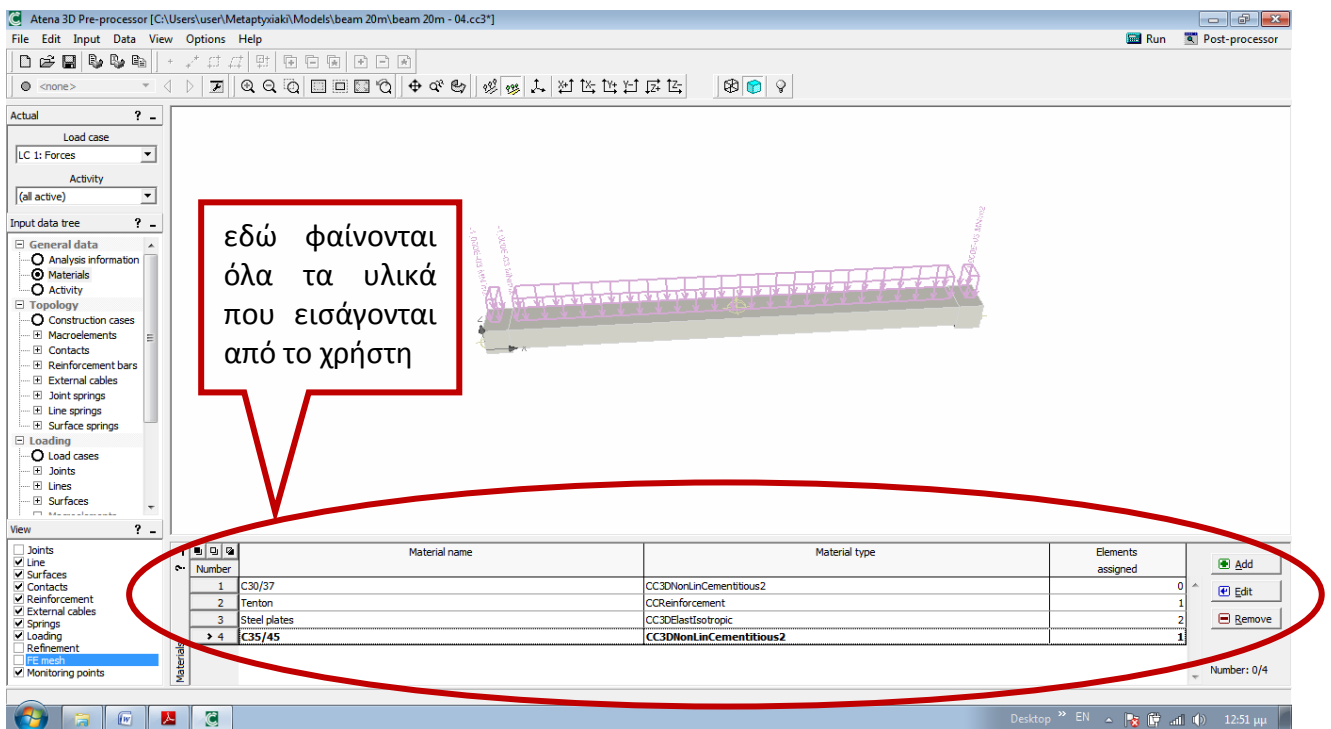
Το κουμπί Solution καθορίζει τον τύπο επίλυσης του προβλήματος, καθώς και το εάν θεωρηθεί γεωμετρική μη γραμμικότητα (Σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.4: Global solution parameters

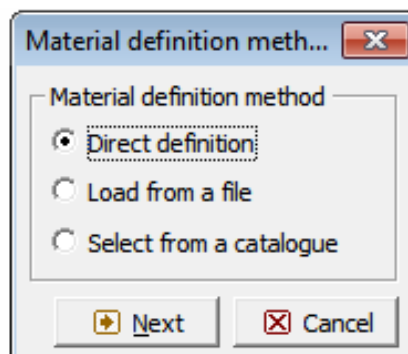
Στους τύπους επίλυσης περιλαμβάνονται οι:

- *standard*: άμεση επίλυση βασισμένη στην απαλοιφή Gauss.
 - *sparse – iterative/ incomplete Cholesky preconditioning (ICCG)*: είναι πιο απαιτητική μέθοδος και ως προς το χρόνο και ως προς τη μνήμη που χρειάζεται για κάθε επανάληψη, ωστόσο χρειάζεται λιγότερες επαναλήψεις για να συγκλίνει, επομένως τελικά απαιτείται λιγότερος χρόνος για το σύνολο της ανάλυσης.
 - *sparse – iterative/diagonal preconditioning (DCG)*: είναι σαν τη μέθοδο ICCG, αλλά χρειάζεται περισσότερες επαναλήψεις για να συγκλίνει.
- **Materials**: με την επιλογή αυτή εμφανίζεται η εικόνα που φαίνεται στο **Σχήμα 3.5**.



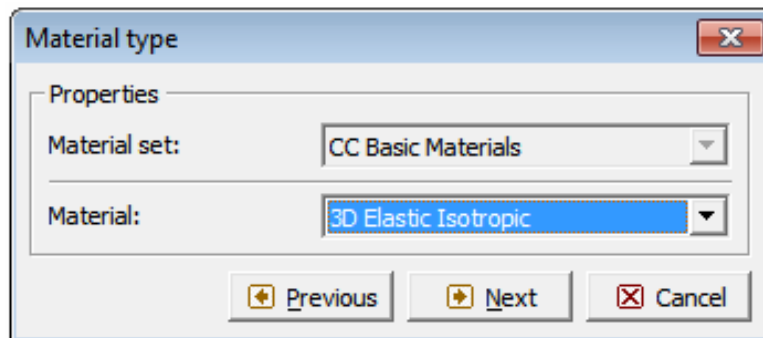
Σχήμα 3.5: Υλικά - Materials

Με το κουμπί **Add** εμφανίζονται οι εξής επιλογές (**Σχήμα 3.6**).



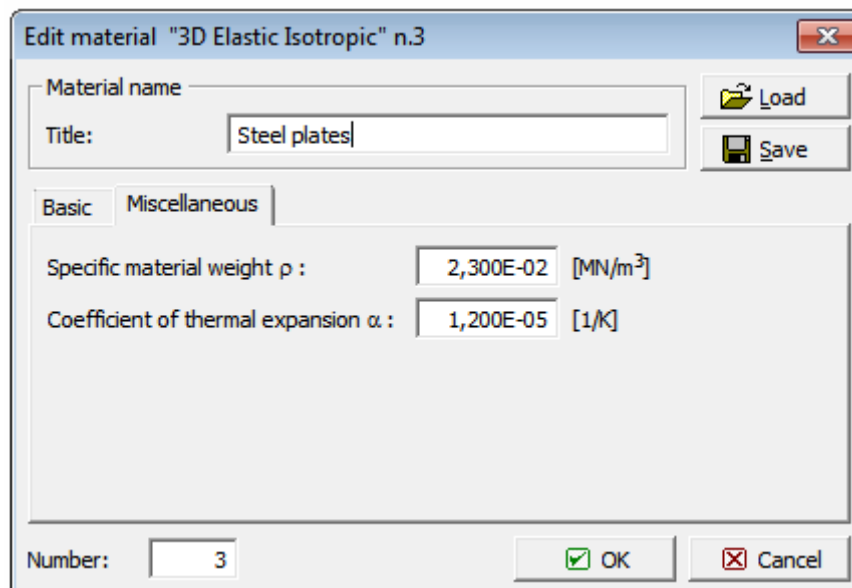
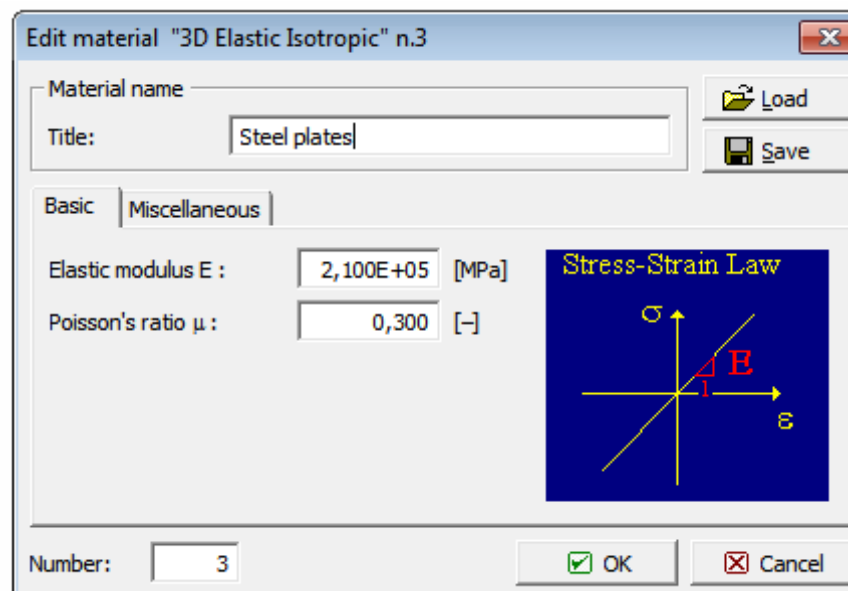
Σχήμα 3.6: Προσδιορισμός των υλικών

Με την επιλογή Direct definition προσδιορίζεται το υλικό για τα μεταλλικά στοιχεία, ως εξής (Σχήμα 3.7)



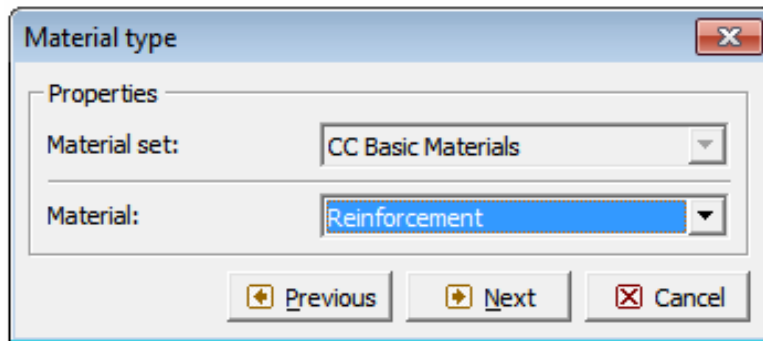
Σχήμα 3.7: Προσδιορισμός των υλικών – Direct definition

Επιλέγεται το είδος του υλικού ως τρισδιάστατο, ελαστικό ισότροπο (*3D Elastic Isotropic*) με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στο Σχήμα 3.8 που ακολουθεί.



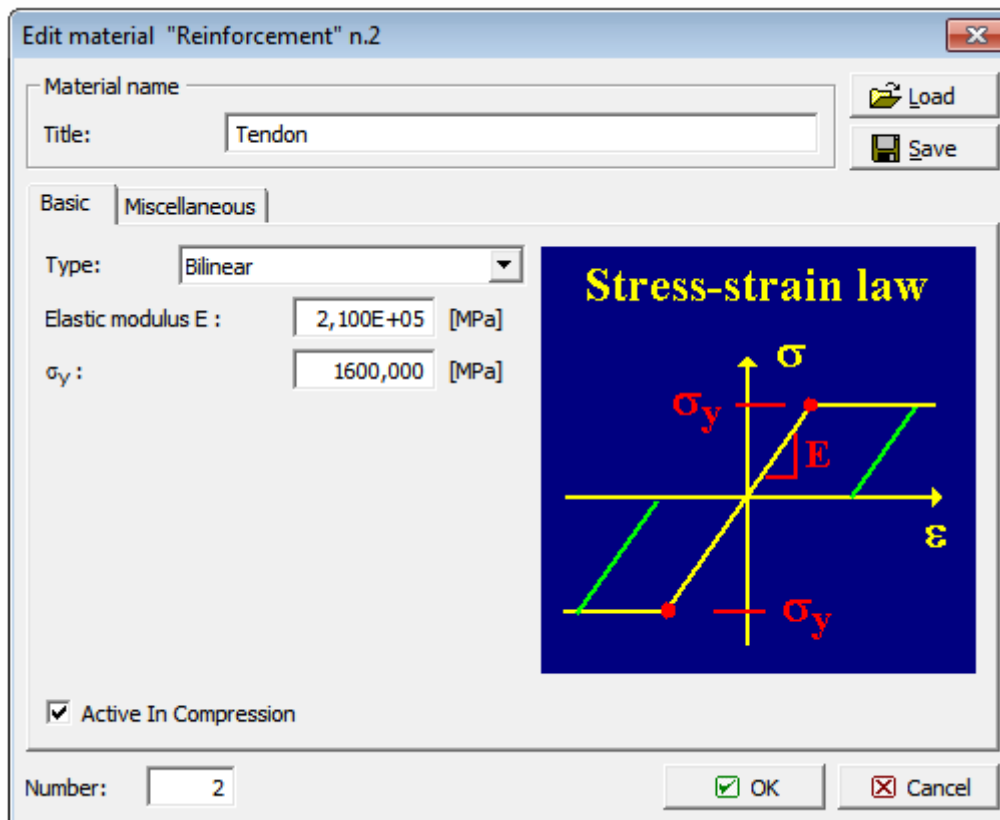
Σχήμα 3.8: Χαρακτηριστικά υλικού 3D Elastic Isotropic

Το επόμενο υλικό που καθορίζεται είναι αυτό του χάλυβα του προεντεταμένου καλωδίου. Και πάλι από την επιλογή Direct definition επιλέγεται το υλικό Reinforcement (**Σχήμα 3.9**),

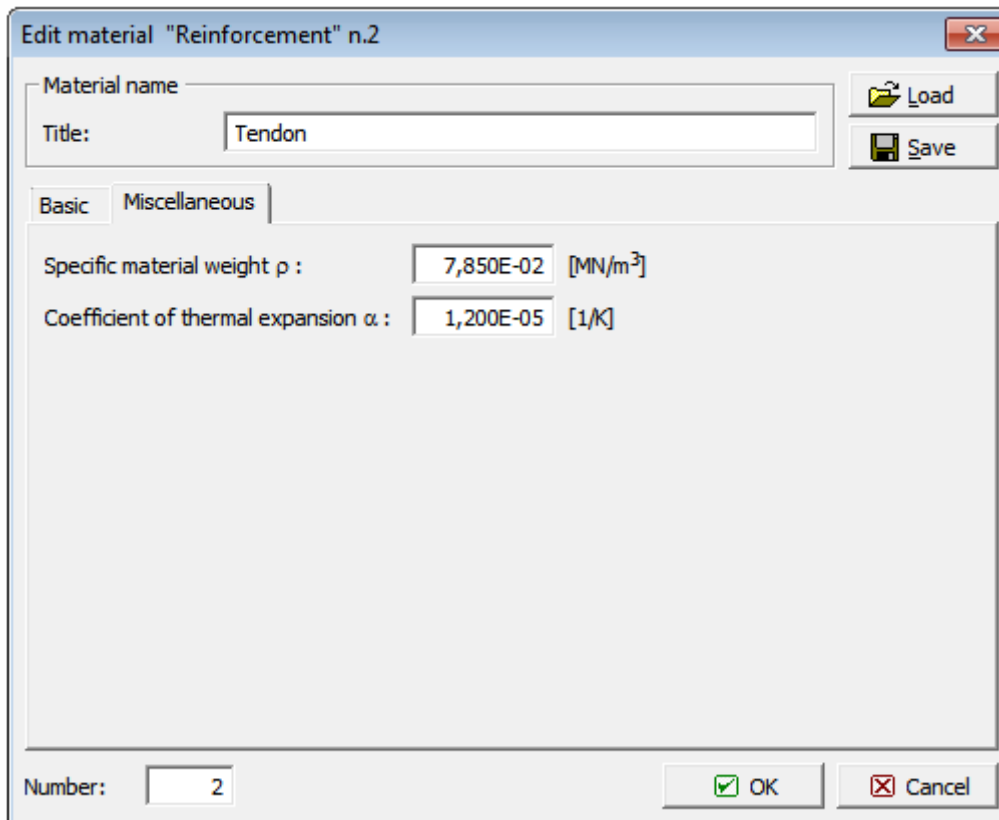


Σχήμα 3.9: Direct definition – τύπος υλικού Reinforcement

με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στα **Σχήμα 3.11** και **Σχήμα 3.11** που ακολουθούν.

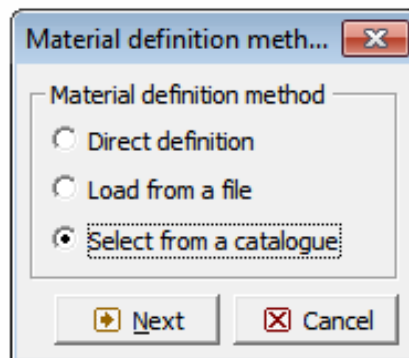


Σχήμα 3.10: Χαρακτηριστικά υλικού Reinforcement

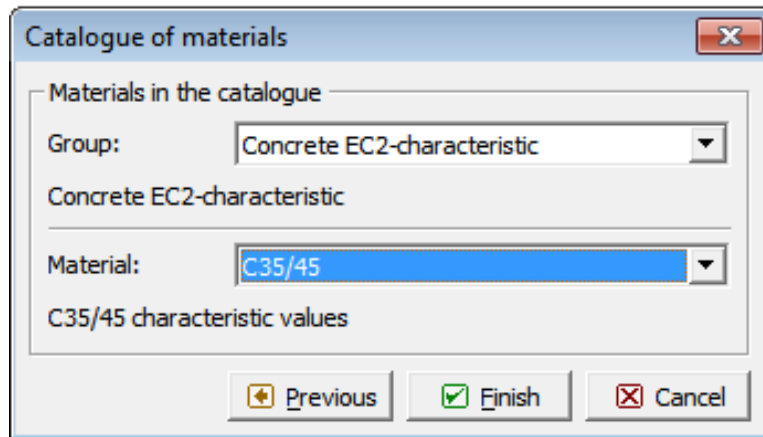


Σχήμα 3.11: Χαρακτηριστικά υλικού Reinforcement

Τέλος με την επιλογή Select from catalogue (Σχήμα 3.12 και) επιλέγεται το υλικό του σκυροδέματος σύμφωνα με τις χαρακτηριστικές τιμές που ορίζει ο Ευρωκώδικας 2.

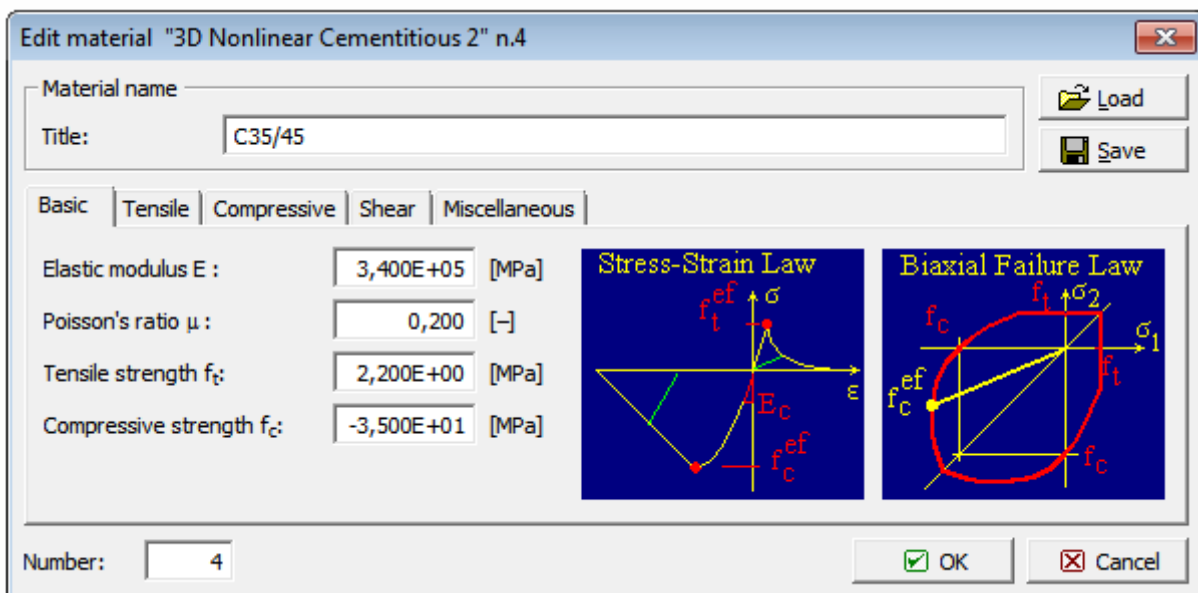


Σχήμα 3.12: Επιλογή από λίστα

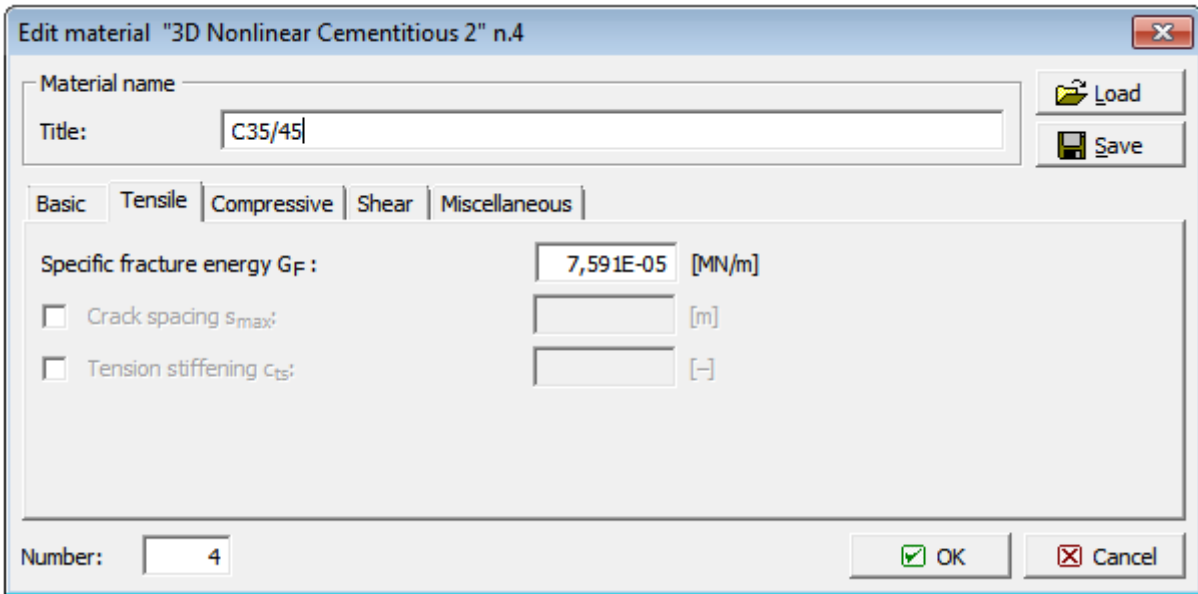


Σχήμα 3.13: Επιλογή του υλικού C35/45 με τις χαρακτηριστικές τιμές του Ευρωκώδικα 2

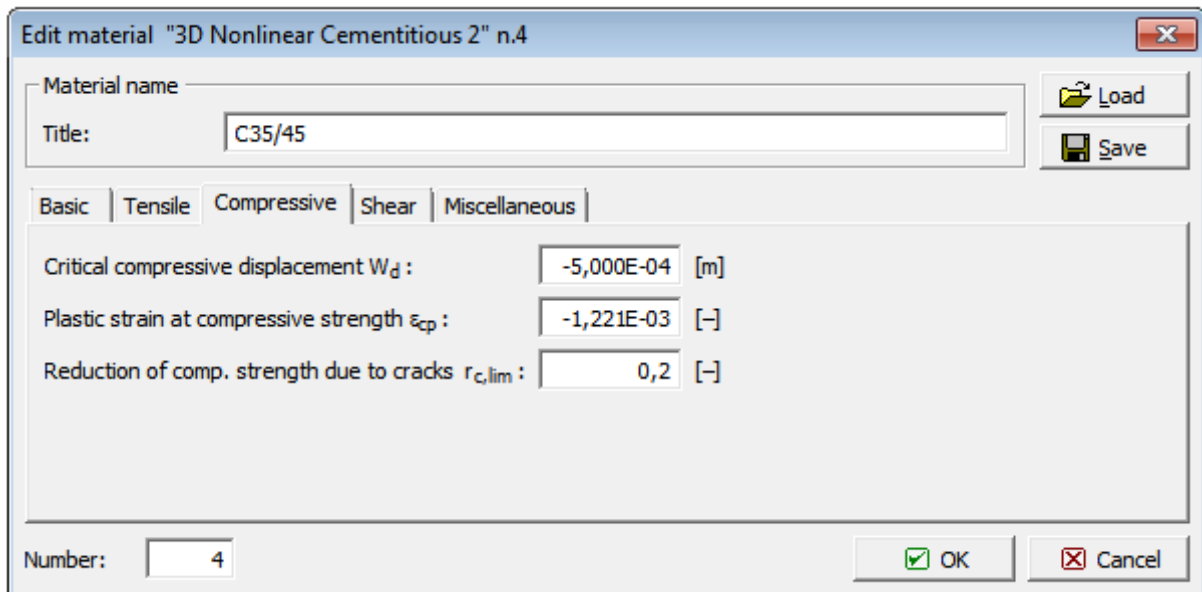
Οι χαρακτηριστικές τιμές που δίνει ο Ευρωκώδικας 2, φαίνονται στα **Σχήμα 3.14**, **Σχήμα 3.15**, **Σχήμα 3.16**, **Σχήμα 3.17** και **Σχήμα 3.18**. Ωστόσο δίνεται η δυνατότητα στο χρήστη να επέμβει και να αλλάξει τις τιμές αυτές.



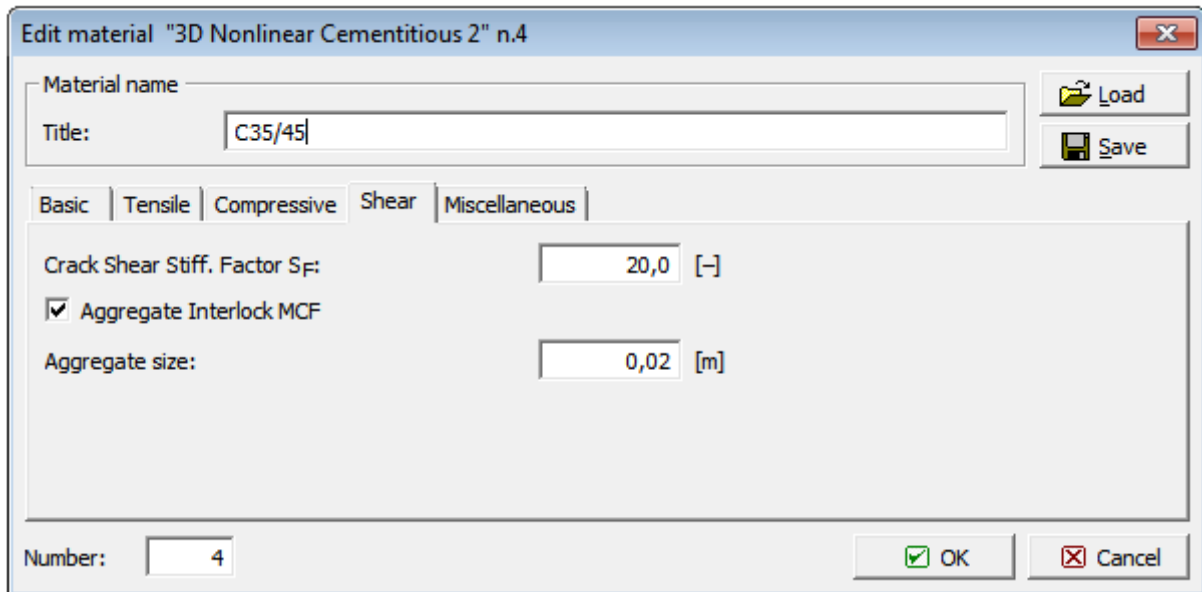
Σχήμα 3.14: Βασικά χαρακτηριστικά του υλικού C35/45 – χαρακτηριστικές τιμές EC2



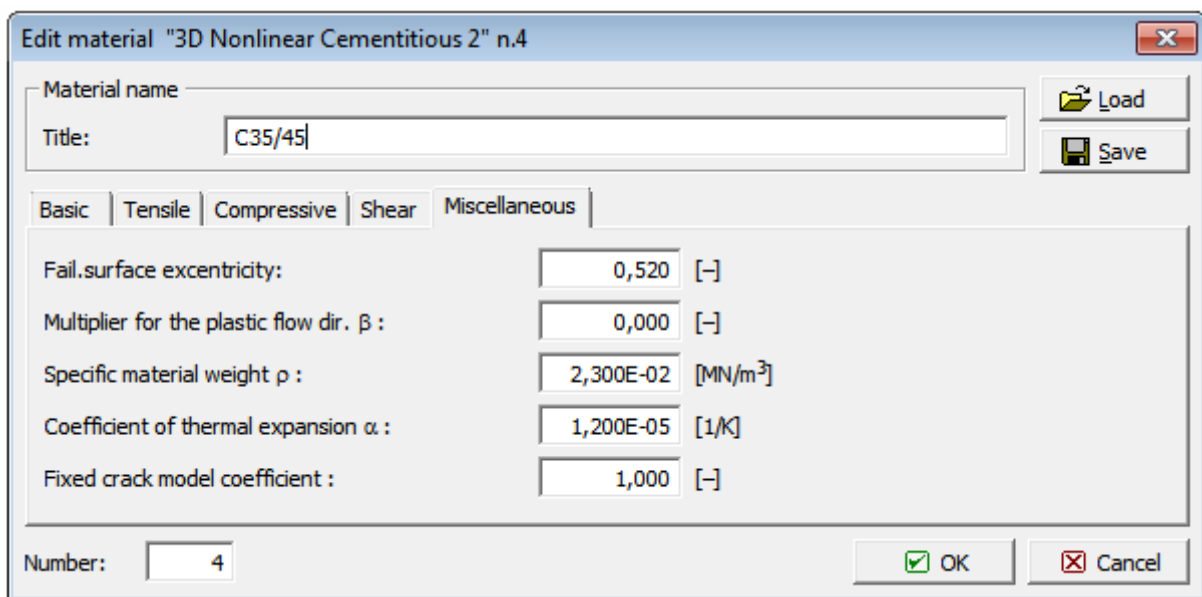
Σχήμα 3.15: Ενέργεια θραύσης του υλικού C35/45 – χαρακτηριστικές τιμές EC2



Σχήμα 3.16: Χαρακτηριστικά που αφορούν στη θλίψη του υλικού C35/45 – χαρακτηριστικές τιμές EC2



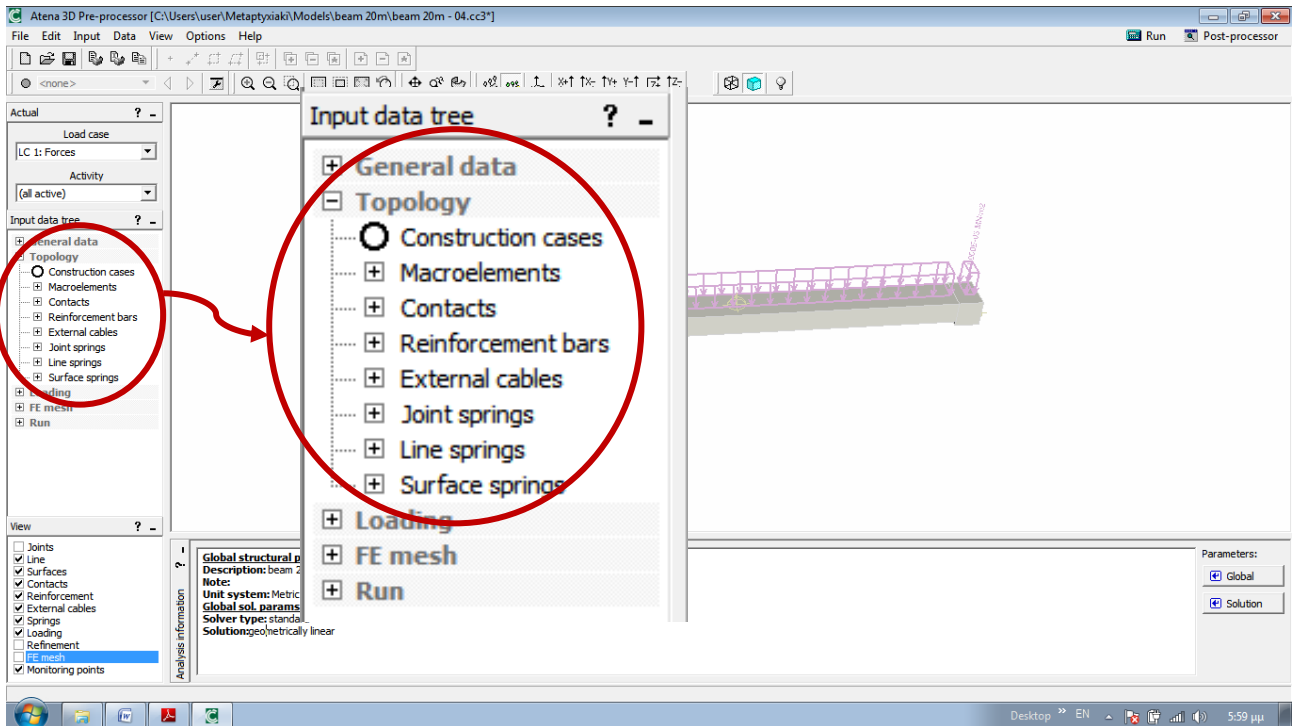
Σχήμα 3.17: Χαρακτηριστικά που αφορούν στη διάτμηση του υλικού C35/45 – χαρακτηριστικές τιμές EC2



Σχήμα 3.18: Διάφορα χαρακτηριστικά του υλικού C35/45 – χαρακτηριστικές τιμές EC2

3.1.1.2 Τοπολογία – Topology

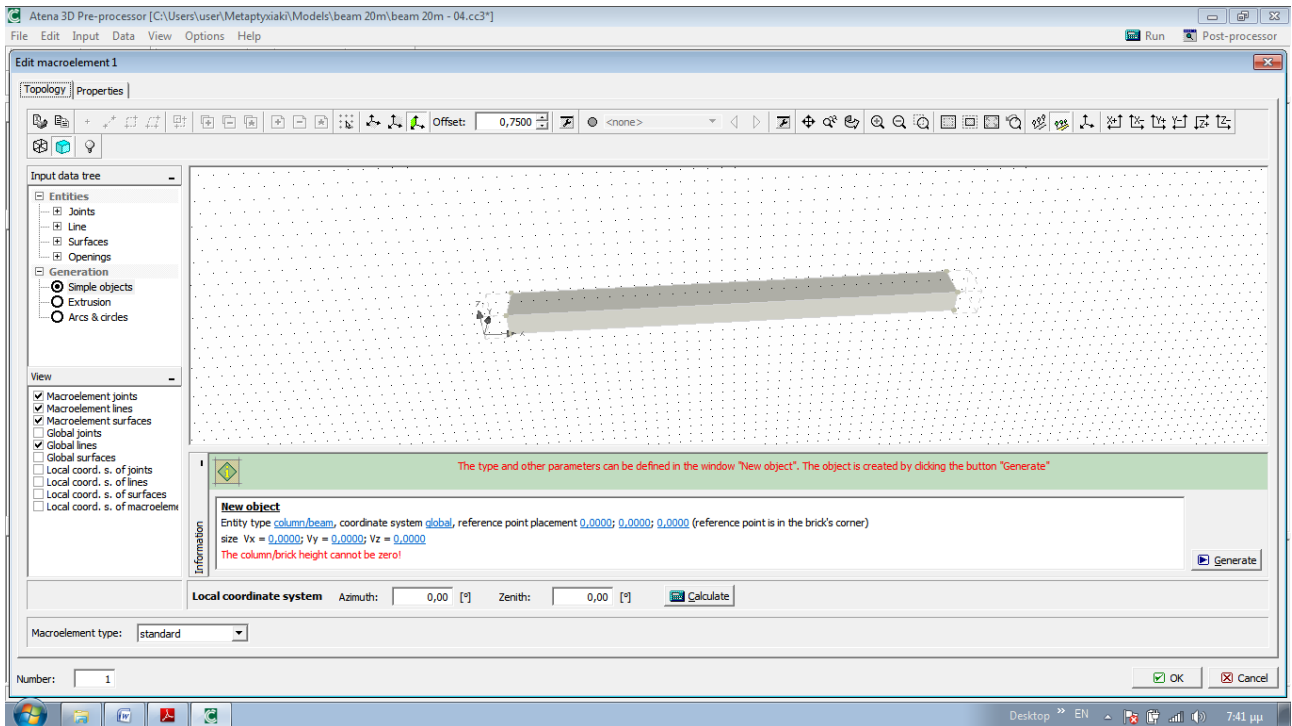
Με τις επιλογές Topology (Σχήμα 3.19) καθορίζεται η γεωμετρία του φορέα με τον ορισμό “μακροστοιχείων” (*macroelements*), ράβδων οπλισμού, εξωτερικών καλωδίων κλπ.



Σχήμα 3.19: Τοπολογία

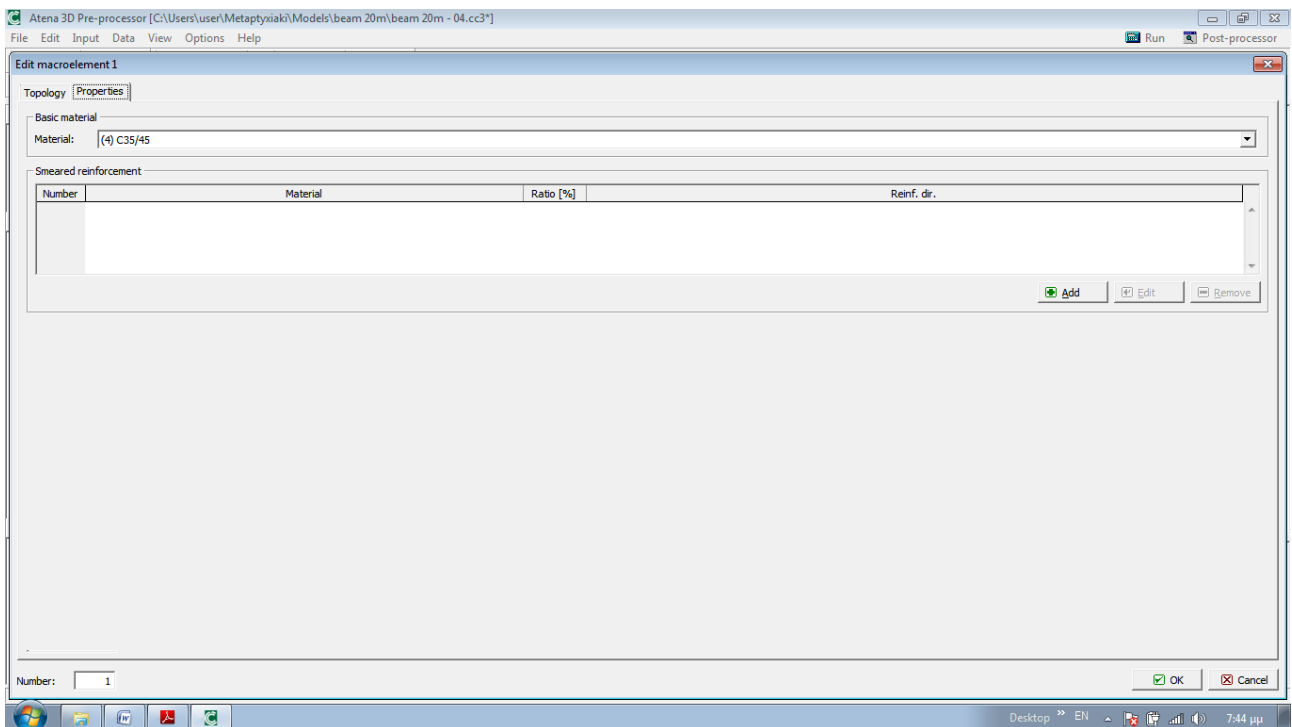
Με την επιλογή Macroelements εισάγονται τα γεωμετρικά στοιχεία των μελών του φορέα, ενώ επίσης προσδιορίζεται και το υλικό που αντιστοιχεί σε κάθε μέλος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για την καλύτερη αγκύρωση του καλωδίου προέντασης, χρησιμοποιούνται δύο μεταλλικά στοιχεία στα άκρα της δοκού μέχρι 1,00 m από τη στήριξη, για την αποφυγή της ρηγματώσης στα άκρα. Έτσι λοιπόν ορίζονται τρία συνολικά μακροστοιχεία, που αποτελούν το φορέα. Τα δύο στοιχεία στα άκρα είναι μεταλλικά, ενώ στο ενδιάμεσο παρεμβάλλεται το σκυρόδεμα. Ο ορισμός της γεωμετρίας των μακροστοιχείων γίνεται με ορισμό του σημείου αναφοράς και των διαστάσεών του V_x , V_y , V_z , με την εντολή Add (Σχήμα 3.20).



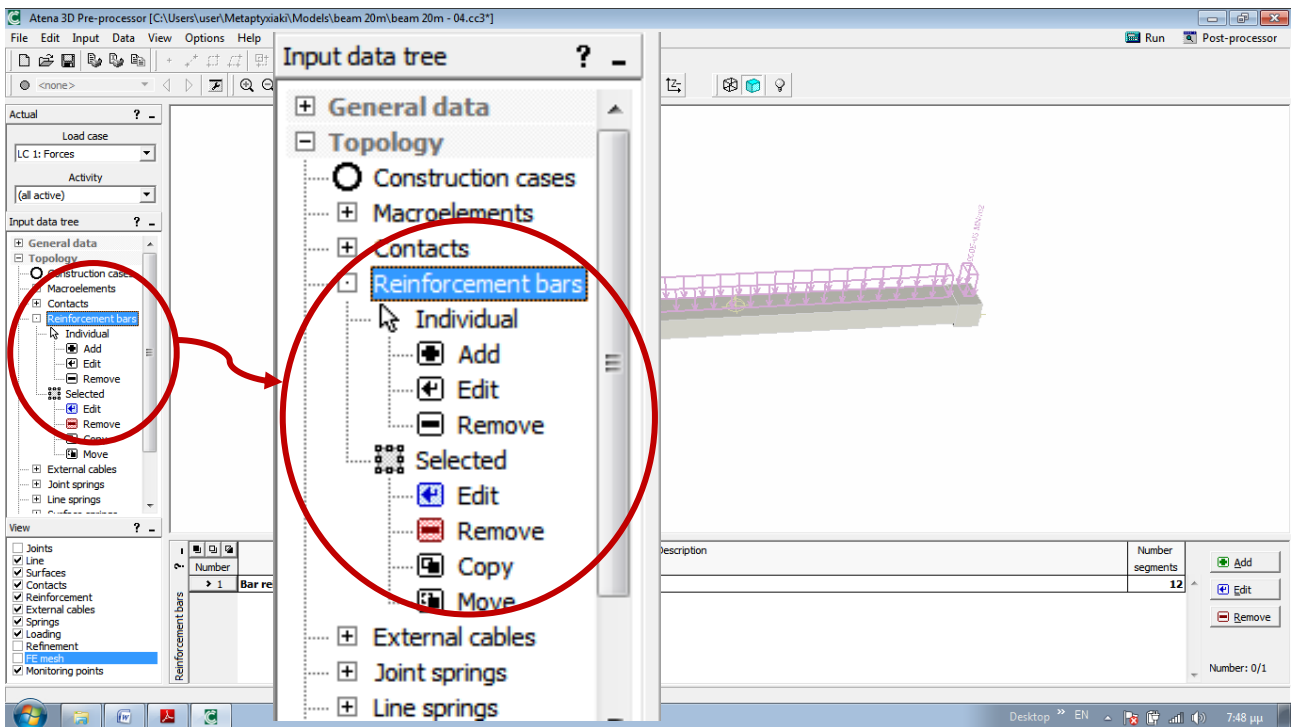
Σχήμα 3.20: Καθορισμός μακροστοιχείου

Εφόσον καθοριστεί η γεωμετρία του μακροστοιχείου με τον τρόπο που προαναφέρθηκε, στην καρτέλα Properties, ορίζονται οι ιδιότητες του μακροστοιχείου, όπως είναι το υλικό, ο διανεμημένος σπλισμός κ.ά. (Σχήμα 3.21).



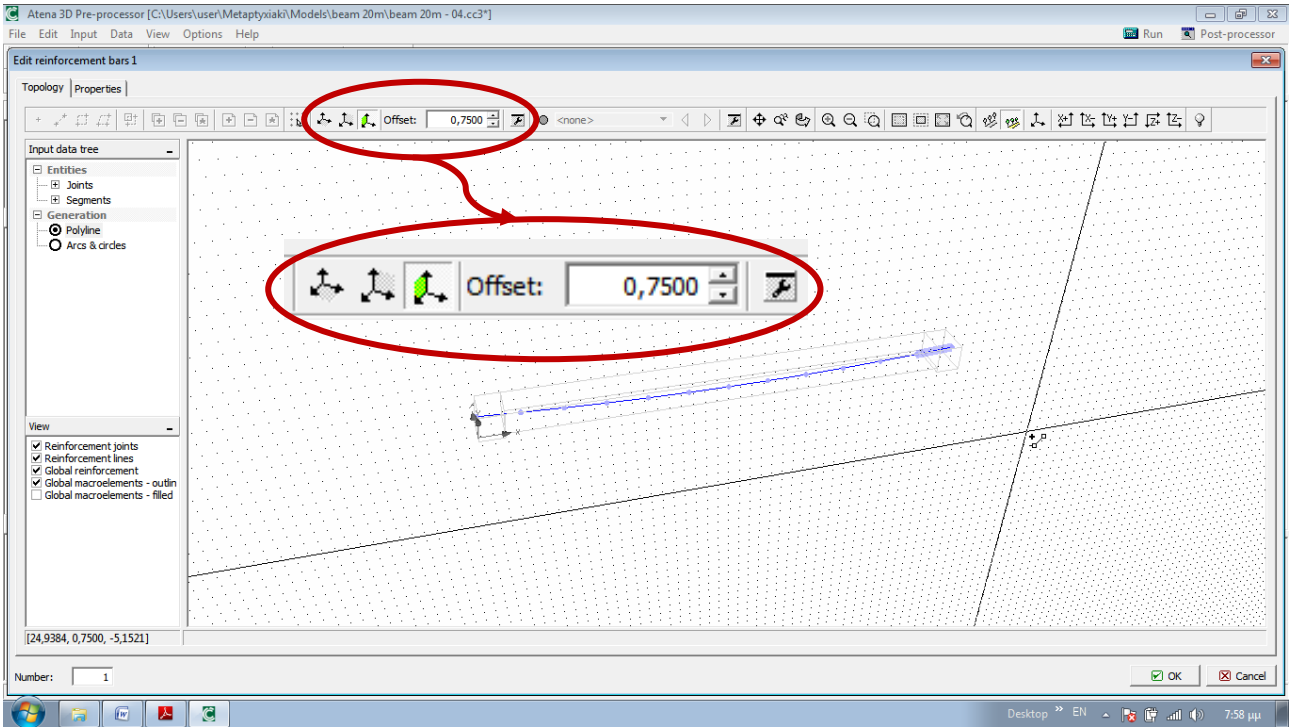
Σχήμα 3.21: Ιδιότητες μακροστοιχείου

Πλέον η δοκός έχει ορισθεί ως προς τη γεωμετρία και το υλικό. Στη συνέχεια προσδιορίζεται η γεωμετρία και το υλικό του καλωδίου προέντασης με παρόμοιο τρόπο, μόνο που τώρα ορίζεται από τις επιλογές του Topology ως Reinforcement bars.



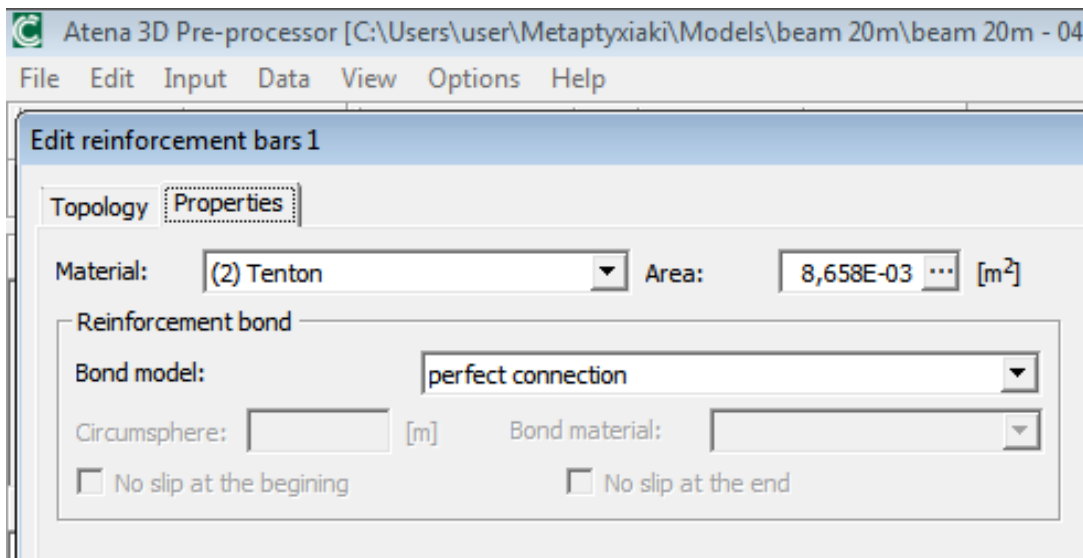
Σχήμα 3.22: Οπλισμός – τένοντα προέντασης

Με την επιλογή Add, ορίζεται η γεωμετρία του τένοντα προέντασης. Για παραβολική χάραξη τένοντα, δίνονται διάφορες επιλογές στο χρήστη. Η πιο γρήγορη και βολική, είναι αυτή του καθορισμού τριών σημείων: σημείο αρχής, σημείο τέλους και ενδιάμεσο σημείο. Σημειώνεται ότι για να είναι εφικτή η παραβολική χάραξη του τένοντα, θα πρέπει να επιλεγεί το κατάλληλο επίπεδο εργασίας (εδώ το επίπεδο XZ). Το επίπεδο αυτό πρέπει να συμπίπτει με το επίπεδο του τένοντα και αυτό επιτυγχάνεται δίνοντας την κατάλληλη τιμή στο offset του επιπέδου (Σχήμα 3.23).



Σχήμα 3.23: Ορισμός της γεωμετρίας του καλωδίου

Στην καρτέλα Properties ορίζεται το υλικό, καθώς και η διατομή του καλωδίου. Επιλέγεται τέλος, η συνάφεια που θα έχει το καλώδιο με το σκυρόδεμα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θεωρείται πλήρης συνάφεια (Σχήμα 3.24).



Σχήμα 3.24: Ορισμός του υλικού, της διατομής και της συνάφειας του καλωδίου με το σκυρόδεμα

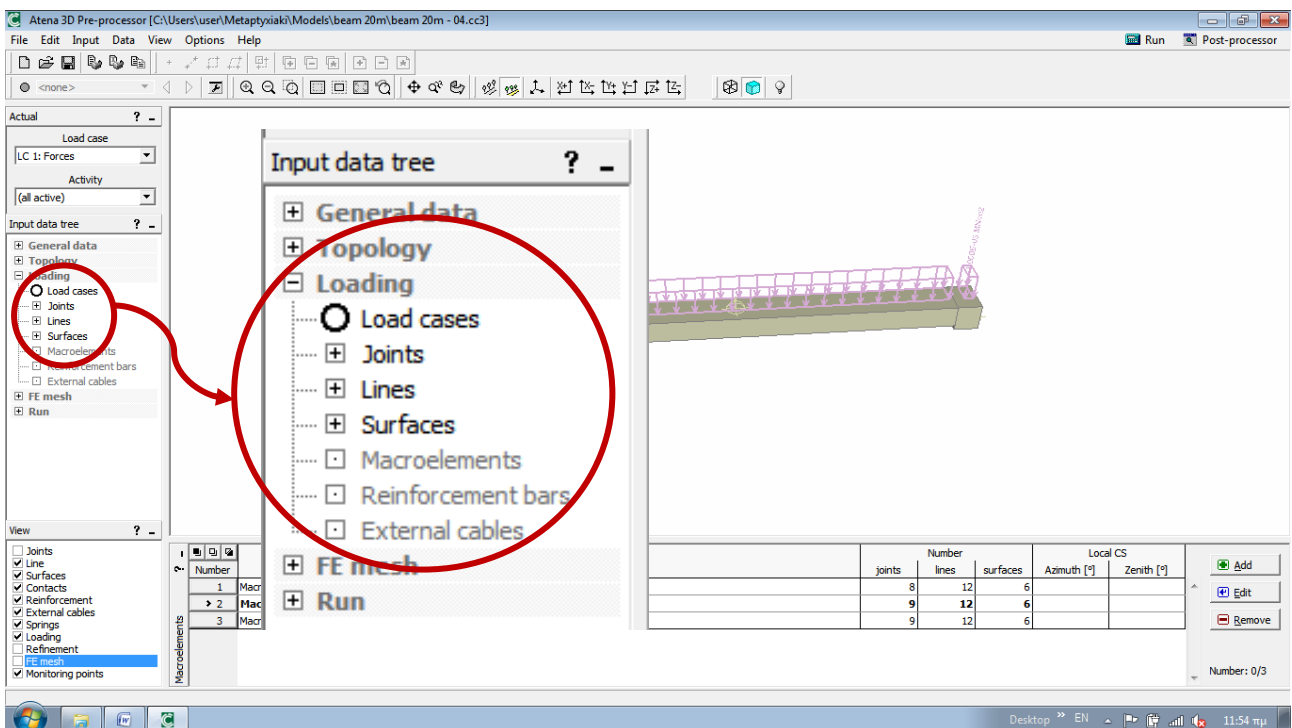
Με τις παραπάνω ενέργειες που περιγράφηκαν, καθορίστηκε πλήρως η γεωμετρία και τα χαρακτηριστικά του υλικού της δοκού και του τένοντα, καθώς και η μεταξύ τους σύνδεση. Στη συνέχεια περιγράφεται ο προσδιορισμός των οριακών συνθηκών και των φορτίσεων του προβλήματος.

3.1.1.3 Φορτίσεις – Load cases

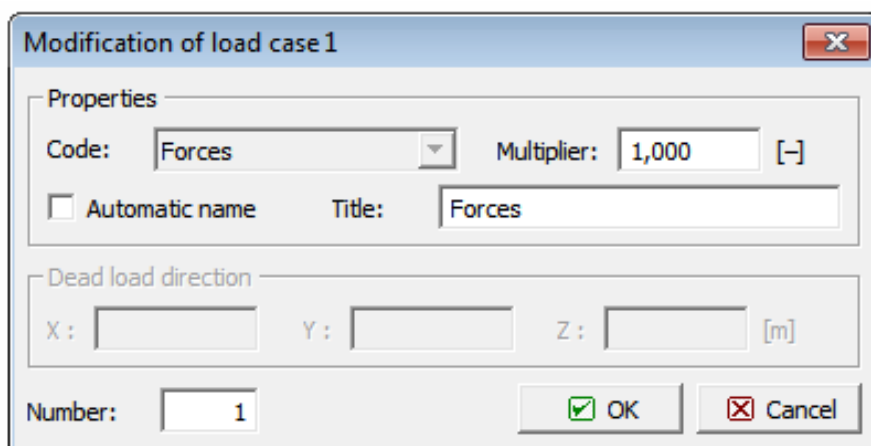
Καταρχάς εισάγονται οι απαραίτητες για την ανάλυση κατηγορίες φορτίσεων, ως ξεχωριστές *load cases*. Για το παράδειγμα αυτό, τρεις είναι οι απαιτούμενες περιπτώσεις φορτίσεων:

1. Φορτία: σε αυτήν την περίπτωση φόρτισης εισάγεται το κατανομημένο φορτίο πάνω στη δοκό.
2. Στηρίξεις: με την περίπτωση φόρτισης αυτή, προσδιορίζονται οι ελευθερίες – δεσμεύσεις στους κόμβους των στηρίξεων.
3. Προένταση: ως ξεχωριστή φόρτιση εισάγεται και η δύναμη προέντασης του καλωδίου.

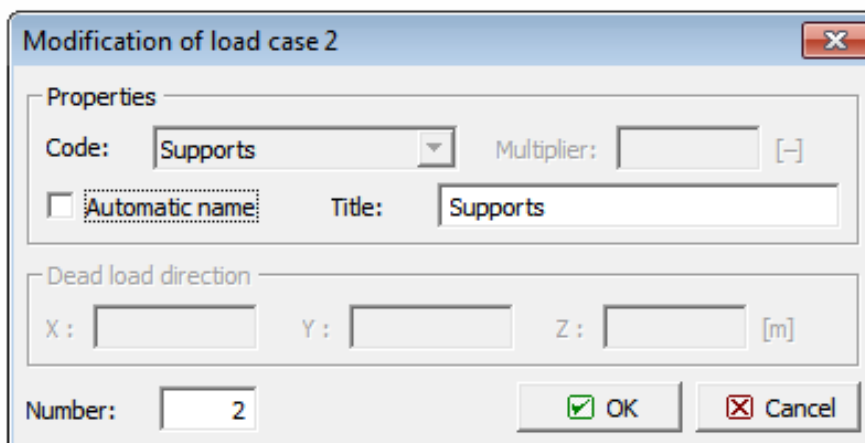
Οι παραπάνω περιπτώσεις φόρτισης, ορίζονται από το Input data tree, με την επιλογή Load cases και Add, όπως φαίνεται στα Σχήμα 3.25, Σχήμα 3.26, Σχήμα 3.27 και Σχήμα 3.28 που ακολουθούν.



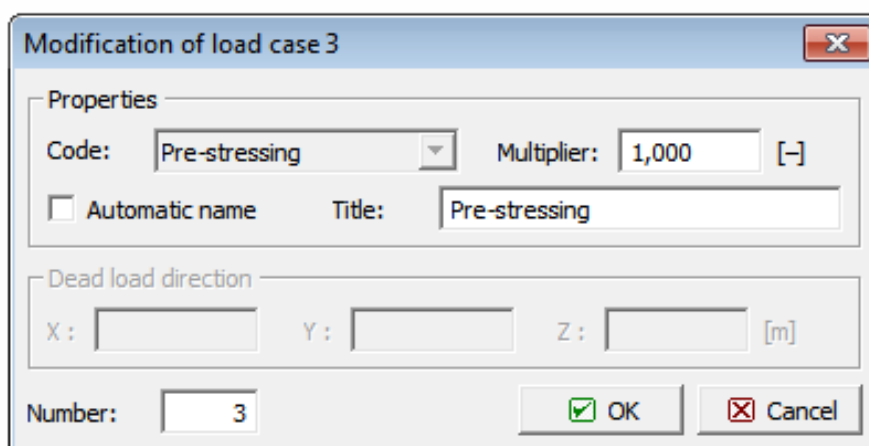
Σχήμα 3.25: Περιπτώσεις φόρτισης



Σχήμα 3.26: Περίπτωση φόρτισης 1 – Δυνάμεις

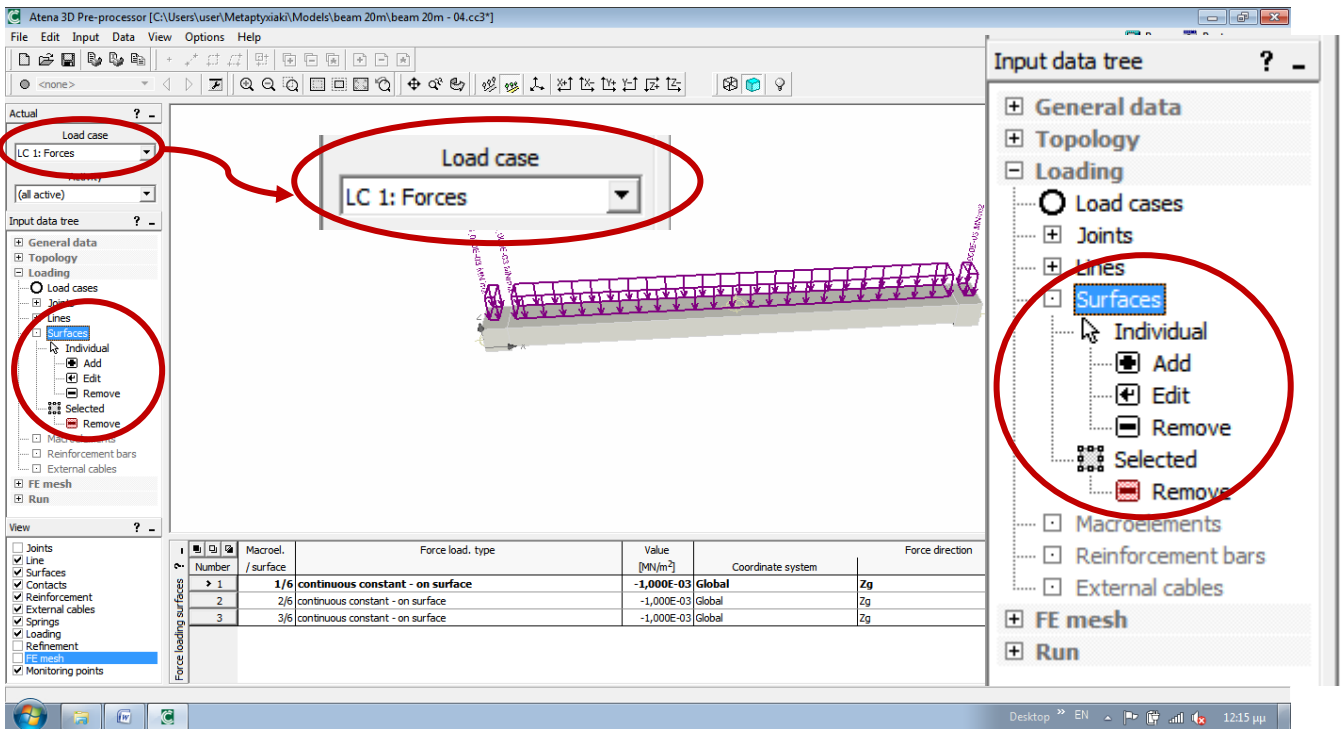


Σχήμα 3.27: Περίπτωση φόρτισης 2 – Στηρίξεις



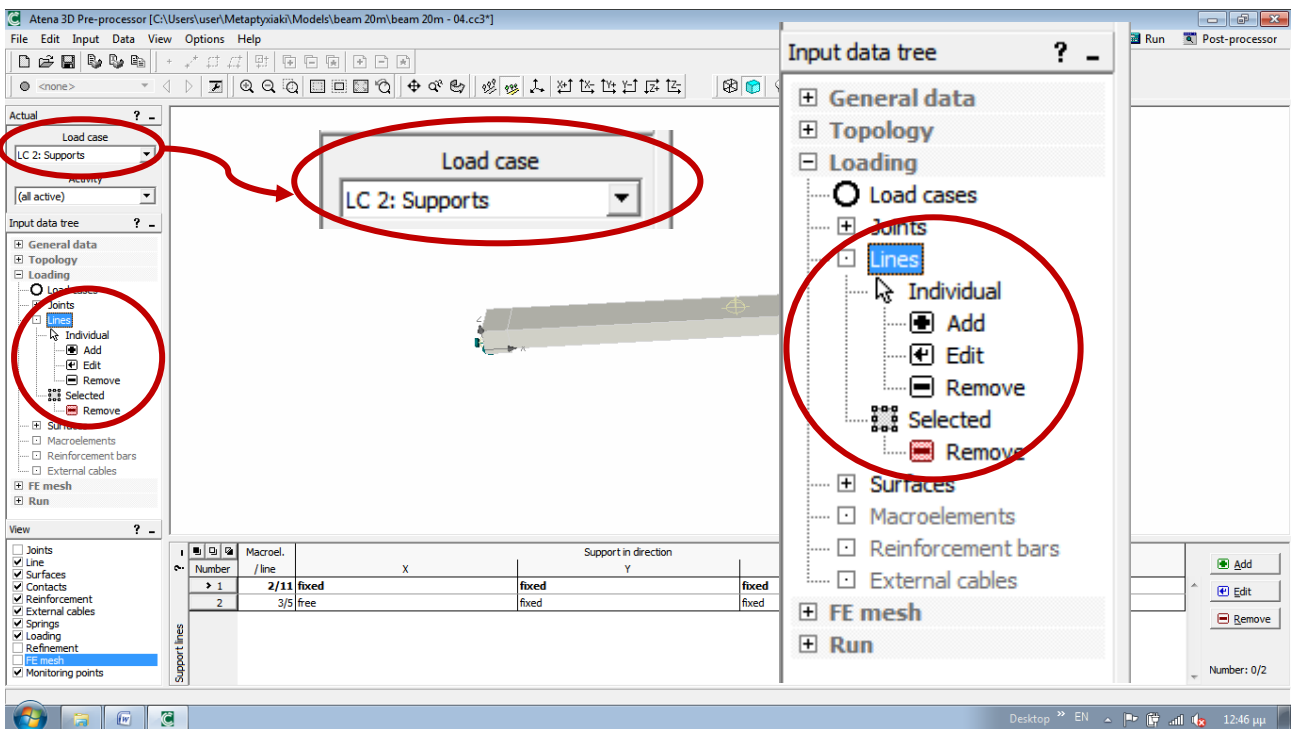
Σχήμα 3.28: Περίπτωση φόρτισης 3 – Προένταση

Εφόσον ορισθούν όλες οι περιπτώσεις φόρτισης, εμφανίζονται με τη μορφή λίστας στην επιλογή Load cases. Εκεί φαίνεται κάθε φορά ποια περίπτωση φόρτισης είναι ενεργή. Κάθε είδος φόρτισης έχει συγκεκριμένη εφαρμογή, για παράδειγμα οι δυνάμεις μπορούν να εφαρμοστούν σε επιφάνεια, γραμμή ή κόμβο μακροστοιχείων. Ομοίως και οι στηρίξεις. Η προένταση όμως, εφαρμόζεται μόνο σε οπλισμό. Άρα επομένως, με επιλογή της πρώτης περίπτωσης φόρτισης (φορτία), εφαρμόζεται στην επιφάνεια της δοκού ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο ίσο με $1,00 \text{ kN/m}^2$ (**Σχήμα 3.29**).



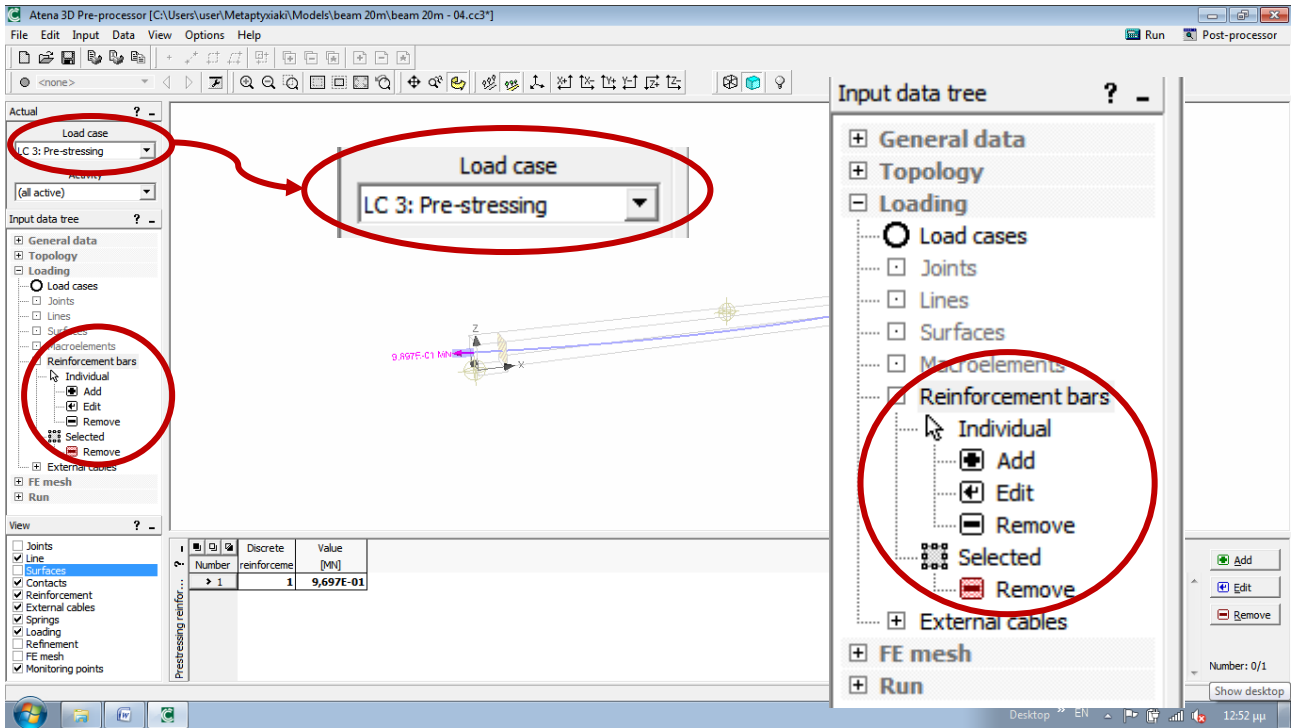
Σχήμα 3.29: Εφαρμογή κατανεμημένου φορτίου στη δοκό

Κατόπιν ορίζονται οι δεσμεύσεις στις δύο ακραίες ακμές της δοκού (Σχήμα 3.30).



Σχήμα 3.30: Στηρίξεις

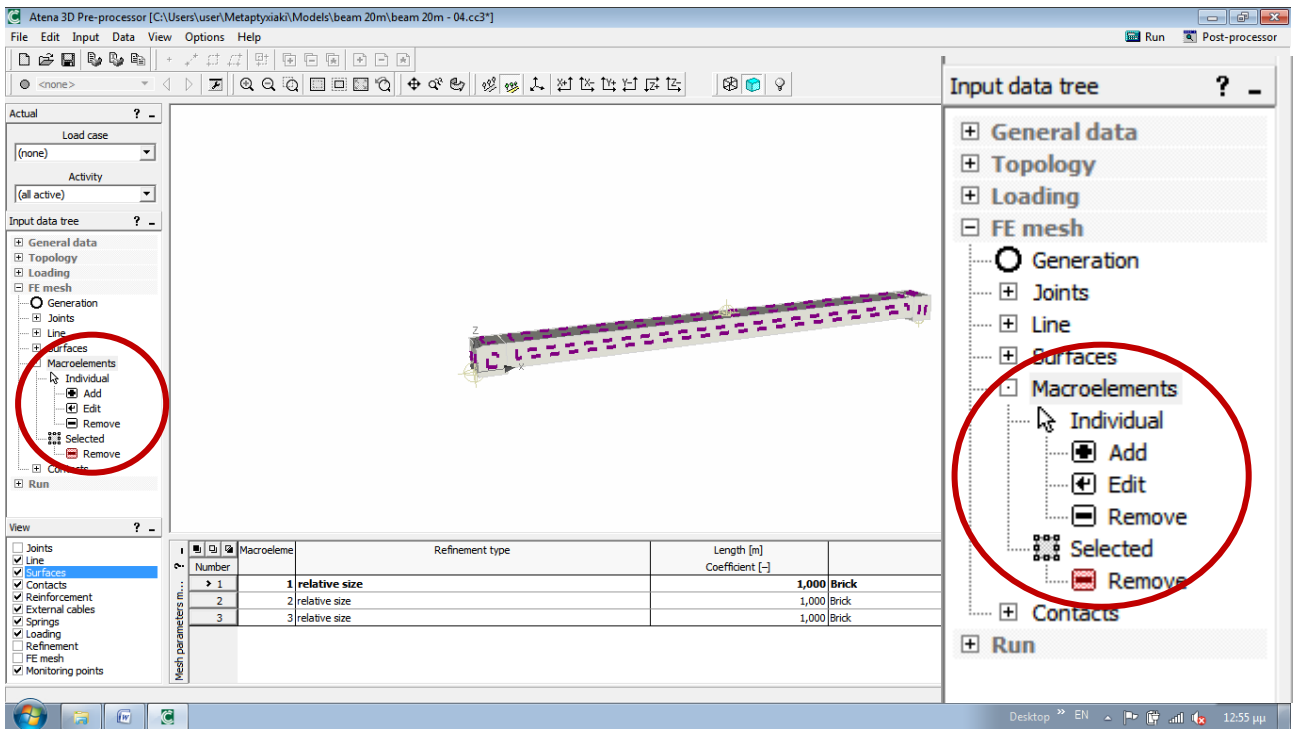
Τέλος ορίζεται η δύναμη προέντασης. Στο πρόγραμμα **ATENA** καλό είναι η προένταση να εισάγεται σταδιακά σε 5 ή σε 10 βήματα της ανάλυσης. Για το λόγο αυτό η αρχική τιμή της προέντασης είναι το 1/10 της τελικής τιμής (για 10 βήματα ανάλυσης) (**Σχήμα 3.31**).



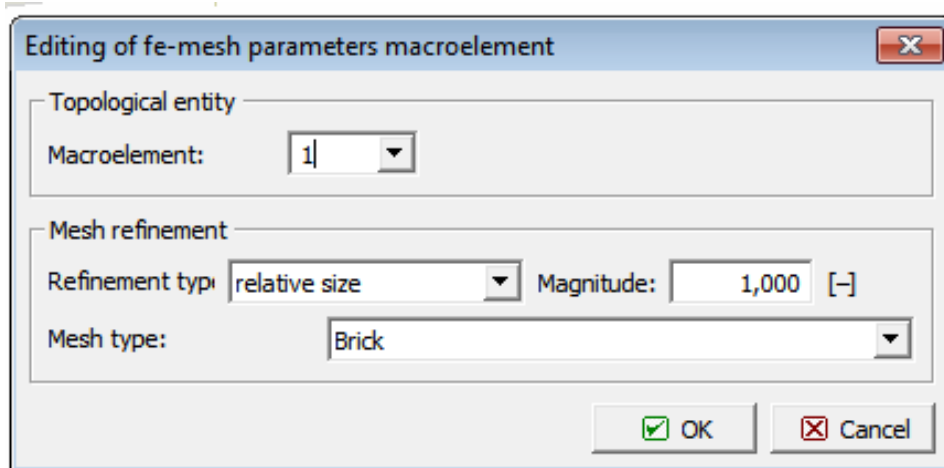
Σχήμα 3.31: Προένταση

3.1.1.4 Διακριτοποίηση σε Πεπερασμένα Στοιχεία – FE Mesh

Πολύ σημαντικό ρόλο για την ανάλυση παίζει η διακριτοποίηση του φορέα σε πεπερασμένα στοιχεία με κατάλληλο μέγεθος. Συνήθως στοιχεία μεγέθους 10 – 15 cm επαρκούν για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιούνται μεγαλύτερα πεπερασμένα στοιχεία (25 cm) για να τονιστεί η διαφορά που προκύπτει στα αποτελέσματα. Επομένως, από το Input data tree, με την επιλογή FE mesh → Macroelements → Add, εισάγονται τα μακροστοιχεία που θα διακριτοποιηθούν (**Σχήμα 3.32**). Επιλέγονται στοιχεία Brick, linear (**Σχήμα 3.33**).

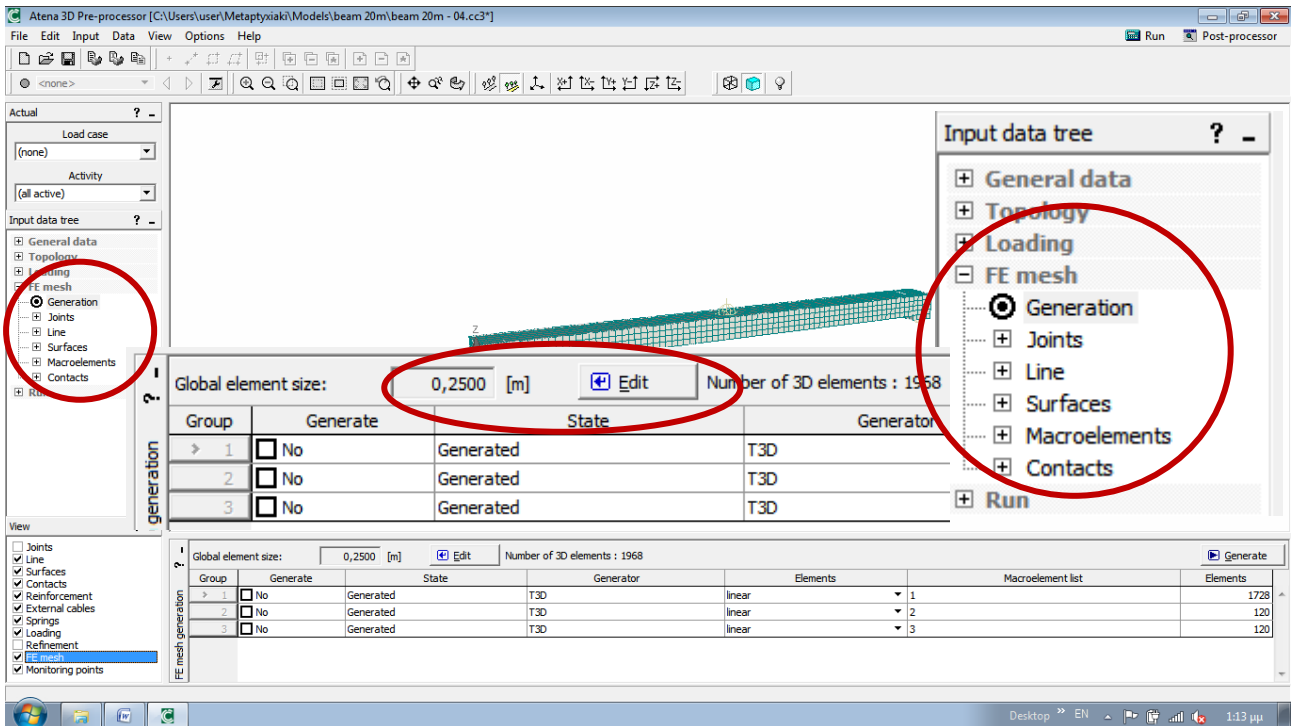


Σχήμα 3.32: FE mesh



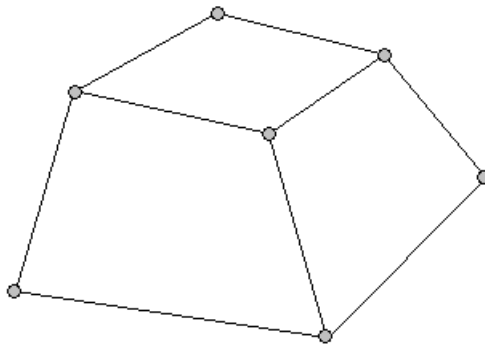
Σχήμα 3.33: Στοιχεία Brick

Κατόπιν γίνεται η διακριτοποίηση του φορέα, με την εντολή Generation και τον καθορισμό του μεγέθους των στοιχείων. Στο παράδειγμα αυτό τα στοιχεία είναι μεγέθους 25 cm, όπως προαναφέρθηκε (Σχήμα 3.34).



Σχήμα 3.34: Διακριτοποίηση φορέα

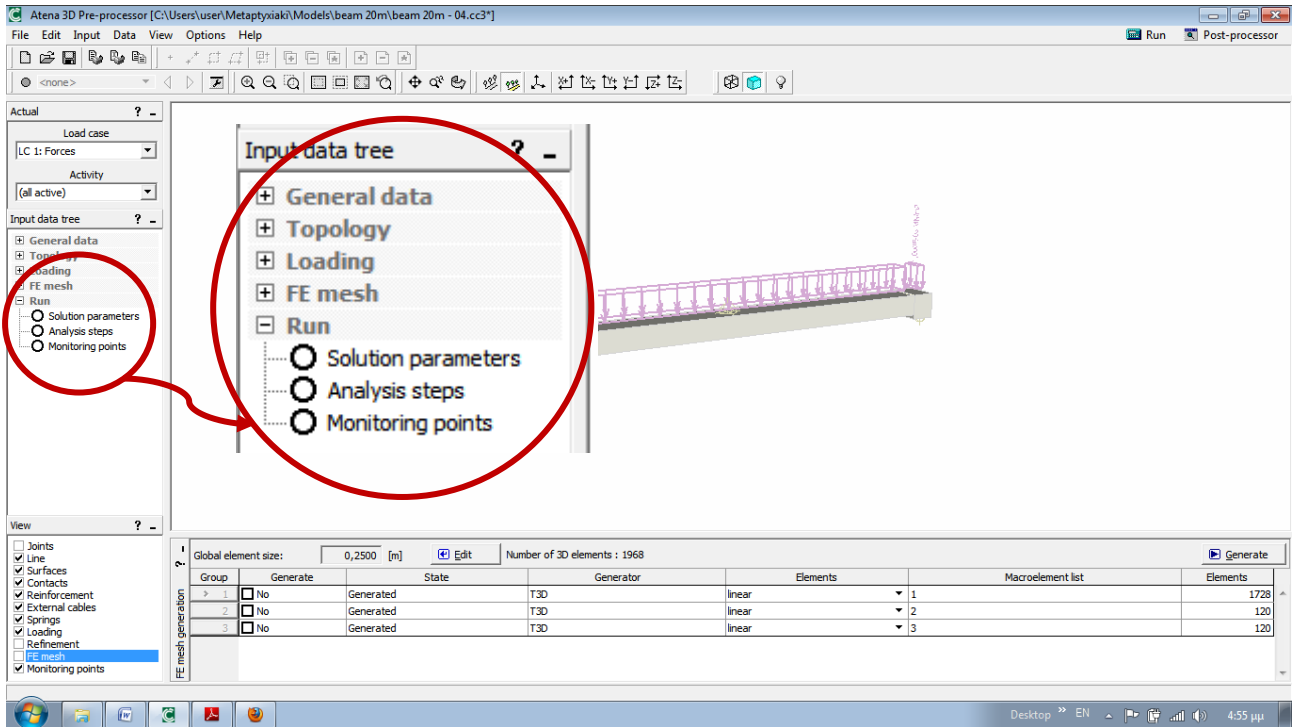
Τα Brick – linear στοιχεία που χρησιμοποιούνται, έχουν 8 κόμβους και 8 σημεία ολοκλήρωσης όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.35.



Σχήμα 3.35: Στοιχείο Brick – linear: 8 κόμβοι, 8 σημεία ολοκλήρωσης

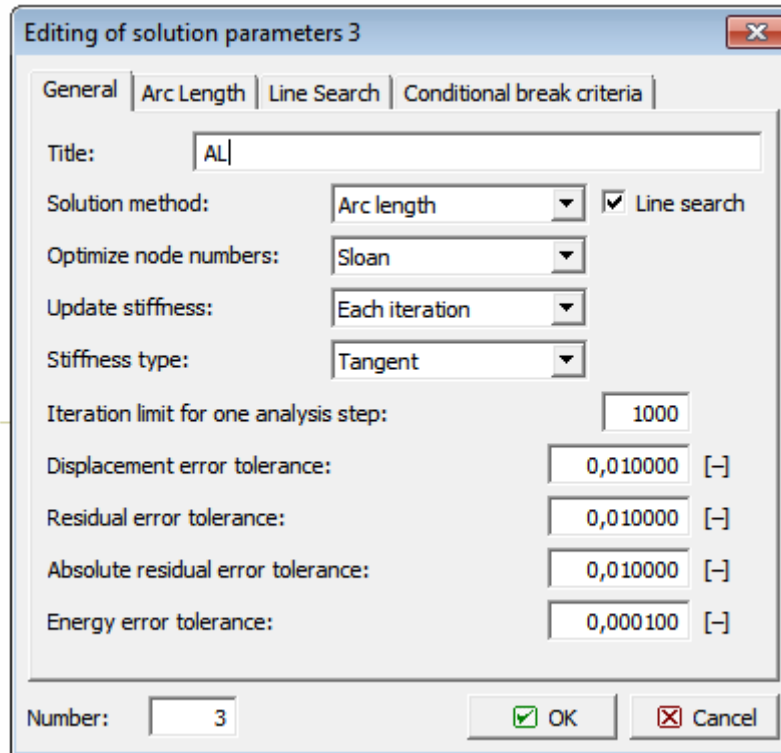
3.1.1.5 Στοιχεία Ανάλυσης

Το τελευταίο βήμα που απαιτείται πριν την έναρξη της ανάλυσης, είναι ο καθορισμός της μεθόδου ανάλυσης, των παραμέτρων της και τα βήματα της ανάλυσης. Αυτό γίνεται με τις επιλογές της εντολής Run, από το Input data tree (Σχήμα 3.36).

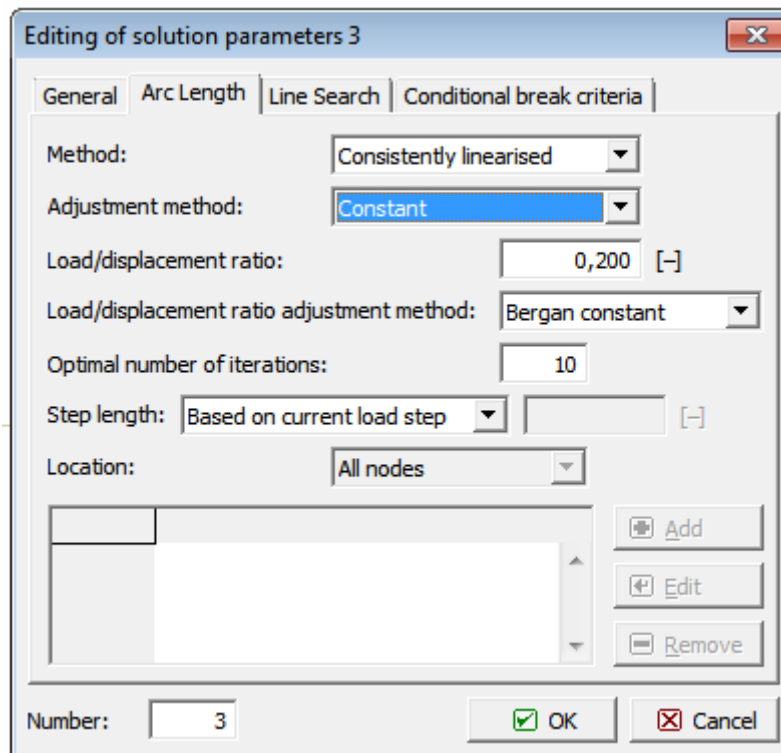


Σχήμα 3.36: Εντολές Run

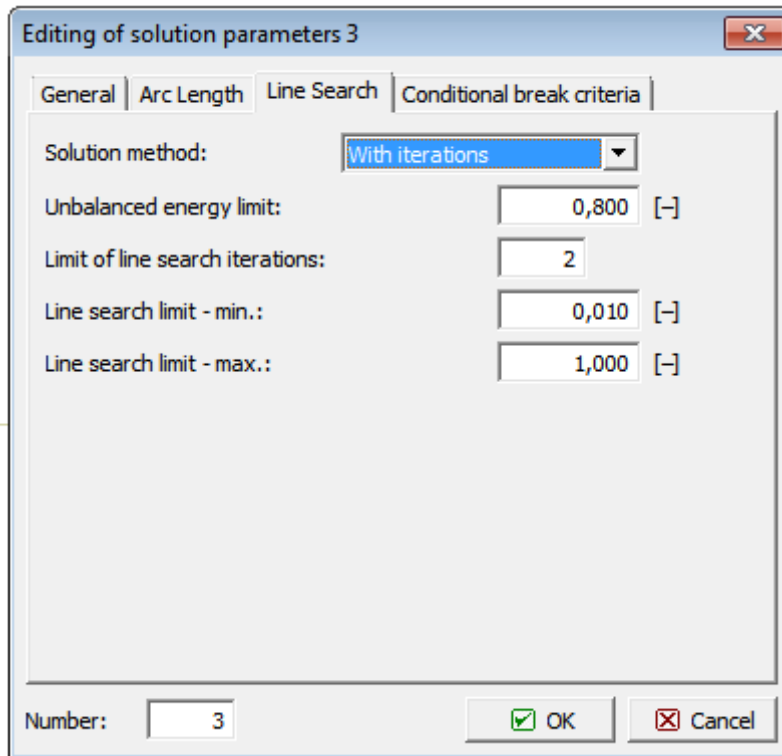
- Solution parameters: εισάγεται μία μέθοδος Arc Length με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στα Σχήμα 3.37, Σχήμα 3.38, Σχήμα 3.39, Σχήμα 3.40 που ακολουθούν.



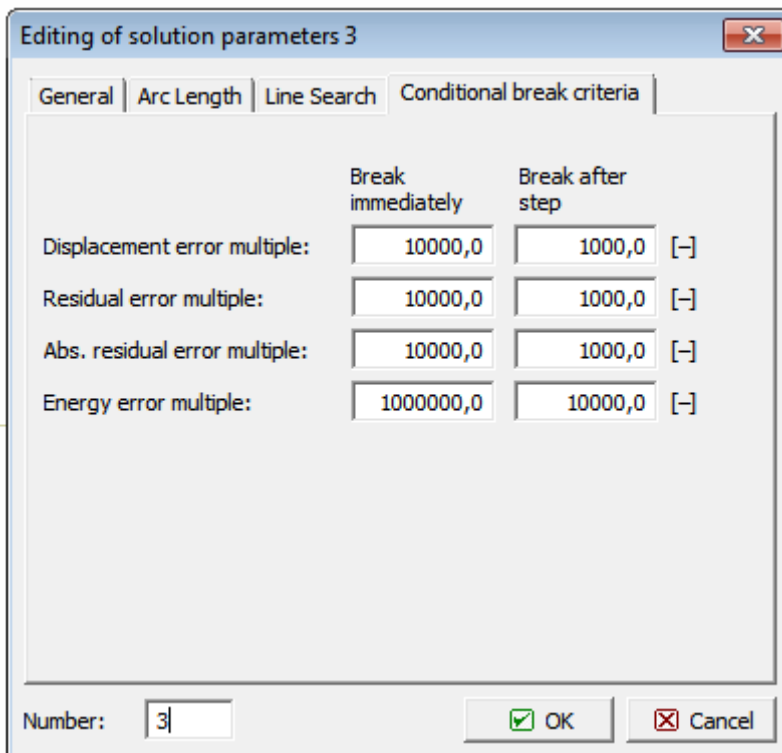
Σχήμα 3.37: Χαρακτηριστικά της μεθόδου Arc Length



Σχήμα 3.38: Χαρακτηριστικά της μεθόδου Arc Length

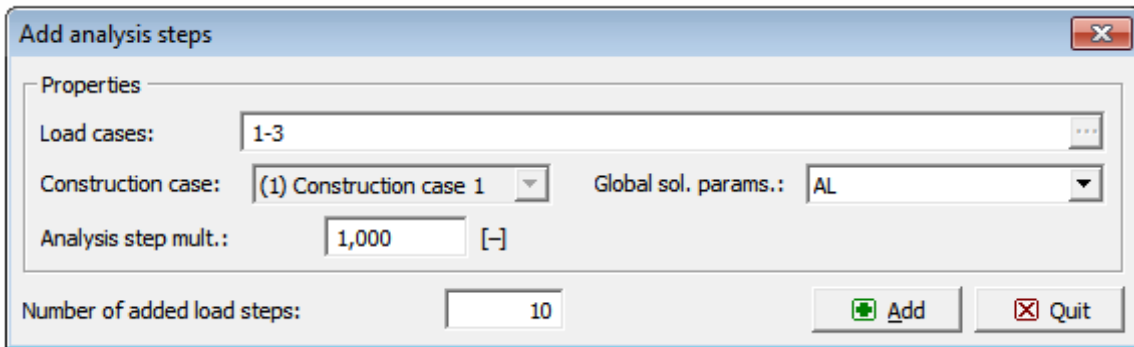


Σχήμα 3.39: Χαρακτηριστικά της μεθόδου Arc Length

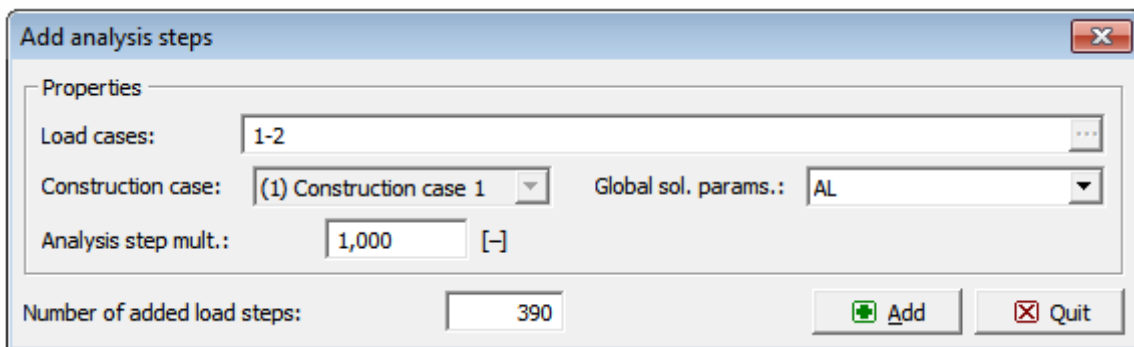


Σχήμα 3.40: Χαρακτηριστικά της μεθόδου Arc Length

- **Analysis steps:** εισάγονται τα βήματα της ανάλυσης, λαμβάνοντας υπόψη και τις περιπτώσεις φόρτισης που αντιστοιχούν σε κάθε βήμα. Έτσι, αρχικά εισάγεται στα 10 πρώτα βήματα η προένταση, μαζί με το εξωτερικό φορτίο (το οποίο αυξάνει σε κάθε βήμα σύμφωνα με τη μέθοδο Arc Length) και φυσικά τις στηρίξεις (**Σχήμα 3.41**). Κατόπιν εισάγονται τα υπόλοιπα βήματα της ανάλυσης, δηλαδή το εξωτερικό φορτίο και οι στηρίξεις (**Σχήμα 3.42**).

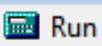
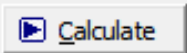


Σχήμα 3.41: Βήματα ανάλυσης, εισαγωγή της προέντασης σταδιακά σε 10 βήματα



Σχήμα 3.42: Λοιπά βήματα ανάλυσης

- **Monitoring points:** τέλος για την καλύτερη απεικόνιση των αποτελεσμάτων κατά τη διάρκεια της ανάλυσης, ορίζονται κάποια σημεία ενδείξεων, τα οποία δείχνουν το φορτίο, ή τη μετατόπιση ή την κύρια τάση, το εύρος ρωγμών, την παραμόρφωση κτλ. σε κάποιον κόμβο. Σημειώνεται ότι ειδικά στη μέθοδο Arc Length, θα πρέπει ο κόμβος στον οποίο ζητείται ένδειξη του φορτίου κατά μία διεύθυνση, να είναι δεσμευμένος κατά τη διεύθυνση αυτή.

Με τα παραπάνω η διαδικασία της προετοιμασίας των δεδομένων για την ανάλυση ολοκληρώνεται κι επομένως ακολουθεί η ανάλυση αυτή καθ' εαυτή με το κουμπί  **Run** και έπειτα το  **Calculate**.

3.1.2 Αποτελέσματα

Αυτό που ενδιαφέρει από τα αποτελέσματα, εκτός των τιμών των μετατοπίσεων, του εύρους των ρωγμών κ.ά., είναι κυρίως η τάση που έχει αναπτύξει ο τένοντας, αλλά και το φορτίο στο οποίο καταρρέει ο φορέας. Αναλυτικά αποτελέσματα για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης παρουσιάζονται στο **Παράρτημα Α**.

Η ανάλυση σταμάτησε στο βήμα 395 (από τα 400 που είχαν οριστεί), γιατί δεν ικανοποιούνταν δύο από τα τέσσερα κριτήρια: αυτό των μη ισόρροπων δυνάμεων και αυτό της μη ισόρροπης ενέργειας. Άρα λοιπόν, εφόσον η ανάλυση δεν μπορεί να συγκλίνει, θεωρείται ότι επέρχεται η κατάρρευση. Η μη σύγκλιση σε σχετικά μικρό αριθμό βημάτων, οφείλεται στο μεγάλο μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων. Στην επόμενη παράγραφο, θα φανεί πόσο σημαντικός είναι ο ρόλος της επιλογής κατάλληλου μεγέθους για τα πεπερασμένα στοιχεία.

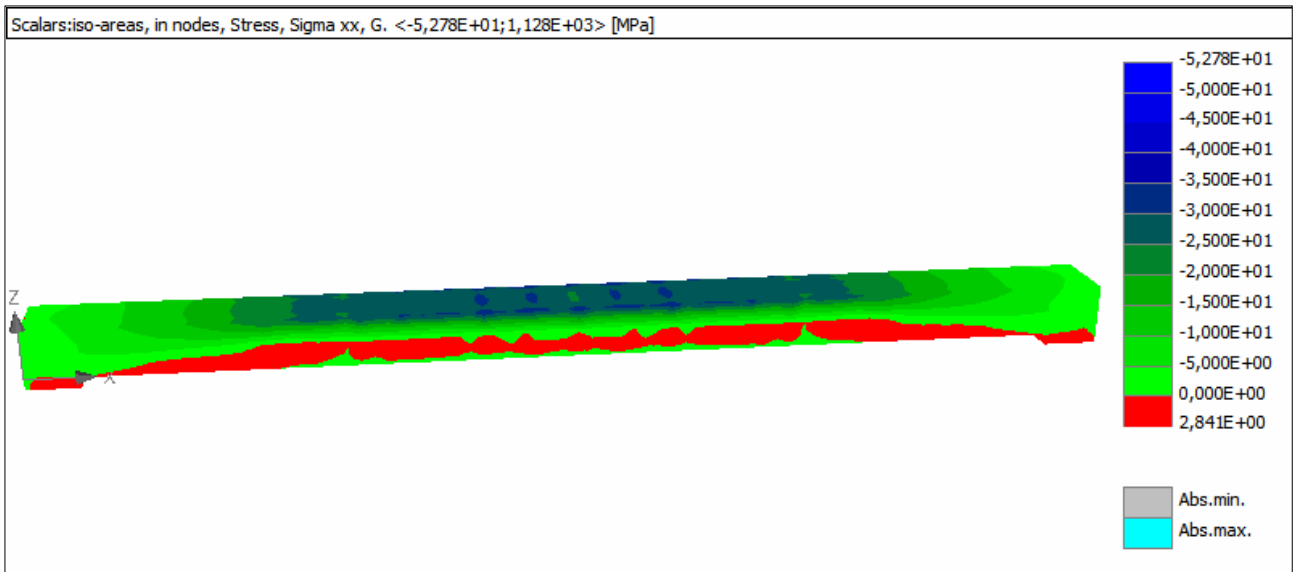
Οι αντιδράσεις στα άκρα της δοκού κατά το βήμα 395 είναι:

Αντιδράσεις Στήριξης 1 - (kN)	Αντιδράσεις Στήριξης 2 - (kN)	Υπολογισμός Φορτίου q (kN/m)
131,3	119,6	Συνολικό κατακόρυφο φορτίο
131,0	119,8	
235,4	227,1	$Q = 1357 + 1357 = 2714 \text{ kN}$
209,8	221,0	
203,8	220,8	Φορτίο ανά μέτρο
209,9	221,1	
235,6	227,4	$q = \frac{Q}{l} = \frac{2714 \text{ kN}}{20 \text{ m}} \Rightarrow$ $q = 135,7 \text{ kN/m}$
Σύνολο	Σύνολο	
1357	1357	

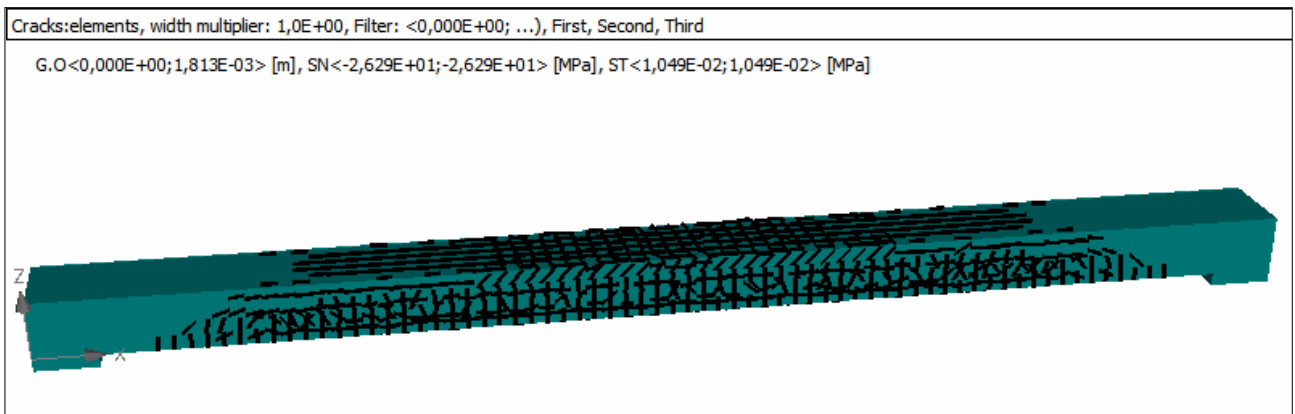
Το φορτίο $q = 135,7 \text{ kN/m}$, είναι αρκετά μικρότερο από το υπολογισμένο φορτίο βάσει της πλαστικής ροπής του φορέα, $q = 180 \text{ kN/m}$, με απόκλιση 23,6%. Η απόκλιση αυτή οφείλεται στο σχετικά μεγάλο μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων.

Στα σχήματα που ακολουθούν, παρουσιάζεται η εικόνα του φορέα στο τελευταίο βήμα της ανάλυσης (ρηγμάτωση, παραμόρφωση, τάση κτλ.)

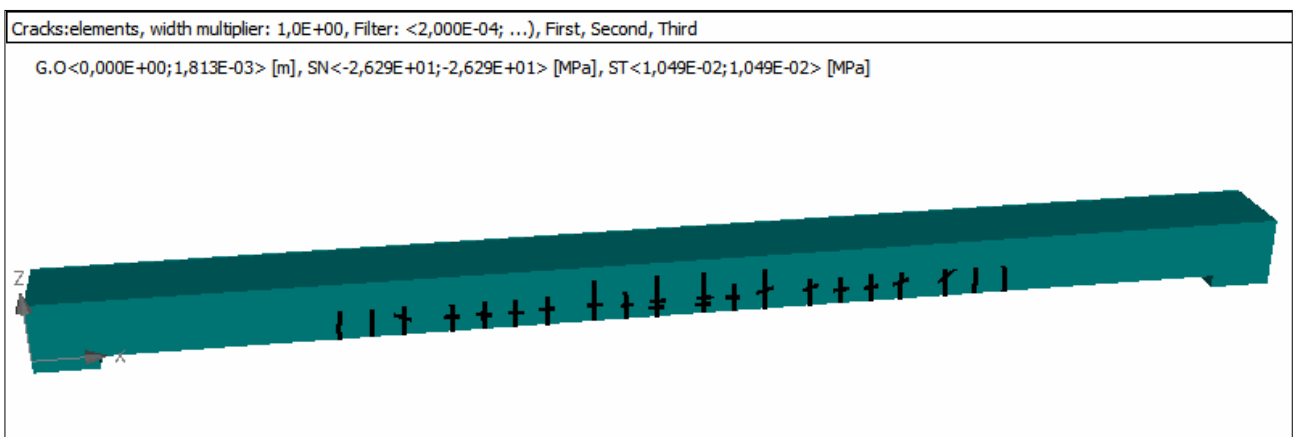
Σημειώνεται τέλος ότι η τάση του τένοντα έχει φτάσει τα 1132 MPa, τιμή αρκετά μικρότερη της τάσης διαρροής (1600 MPa). Η απόκλιση αυτή οφείλεται και πάλι στο μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων, όπως θα φανεί στην επόμενη παράγραφο. Ακόμη, το εύρος ρωγμής κατά τη διεύθυνση x είναι περίπου 2 mm, ενώ η βύθιση στο μέσον της δοκού δεν ξεπερνά τα 13 cm.



Σχήμα 3.43: Ορθές τάσεις σ_x , μέγιστη θλιπτική $-34,15 \text{ MPa}$, μέγιστη εφελκυστική $2,841 \text{ MPa}$

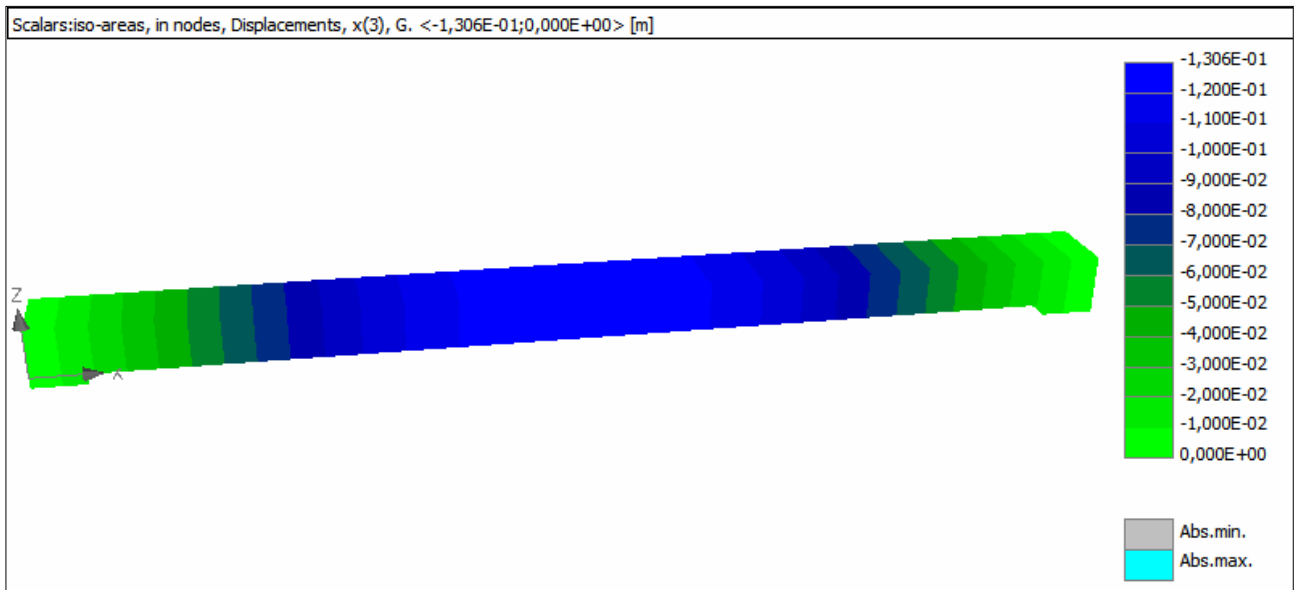


Σχήμα 3.44: Όλες οι ρωγμές



Σχήμα 3.45: Ρωγμές $\geq 0,2 \text{ mm}$

Από το **Σχήμα 3.45** διαπιστώνεται ότι οι κύριες ρωγμές είναι καμπτικές.



Σχήμα 3.46: Βύθιση στο μέσον της δοκού $\cong 13 \text{ cm}$

3.2 Αμφιέριστη Προεντεταμένη Δοκός από Ωπλισμένο Σκυρόδεμα – FE 0,15 cm

3.2.1 Προσομοίωση

Ακριβώς η ίδια δοκός που εξετάστηκε στην **Παράγραφο 3.1**, αναλύεται και πάλι με μόνη διαφορά ότι η διακριτοποίηση γίνεται με τρισδιάστατα, κυβικά πεπερασμένα στοιχεία ακμής 0,15 cm αντί για 0,25 cm.

3.2.2 Αποτελέσματα

Αναλυτικά αποτελέσματα για το τελευταίο βήμα της ανάλυσης παρουσιάζονται στο **Παράρτημα Β**.

Είναι ήδη σαφής η διαφορά της ανάλυσης του μοντέλου αυτού από την ανάλυση που περιγράφηκε στην **Παράγραφο 3.1**, διότι πραγματοποιήθηκαν πολύ περισσότερα βήματα. Επίσης ο τένοντας έφτασε πολύ κοντά στη διαρροή. Τα κριτήρια σύγκλισης σταμάτησαν να ικανοποιούνται στο βήμα 836.

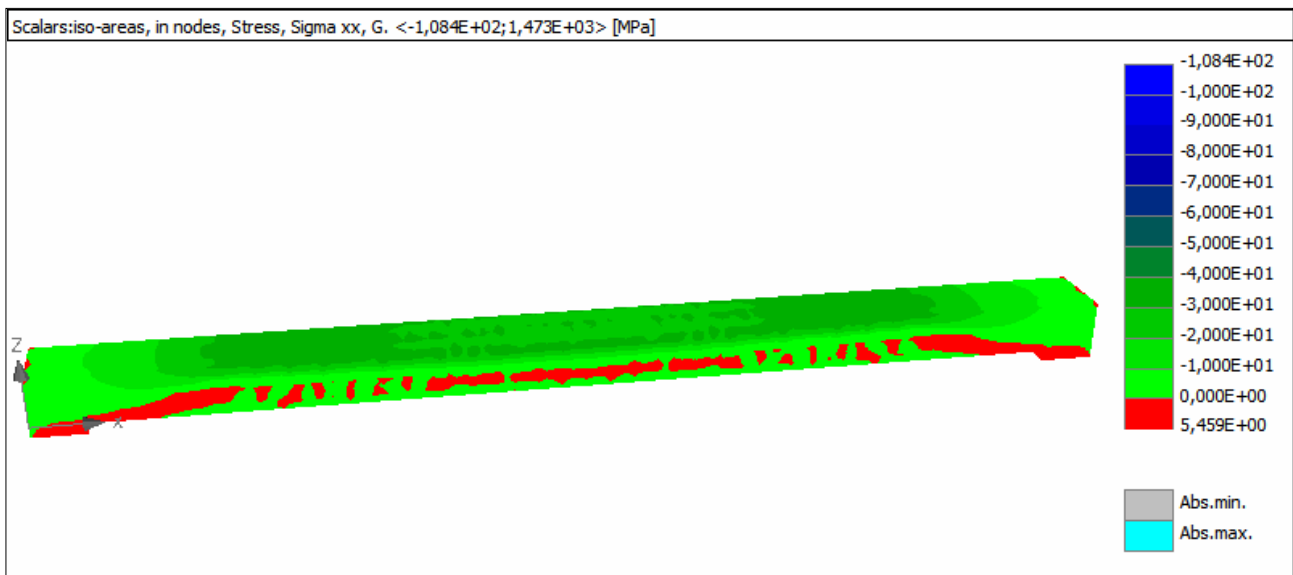
Οι αντιδράσεις στα άκρα της δοκού κατά το βήμα 836 είναι:

Αντιδράσεις Στήριξης 1 - (kN)	Αντιδράσεις Στήριξης 2 - (kN)	Υπολογισμός Φορτίου q (kN/m)
97,18	88,68	Συνολικό κατακόρυφο φορτίο
96,53	89,24	
176,20	164,60	
168,20	164,40	$Q = 1658,41 + 1658,32 = 3316,73 \text{ kN}$
159,60	164,10	
152,90	164,10	
149,10	164,20	
153,10	164,20	
159,90	164,50	Φορτίο ανά μέτρο
168,70	164,90	
177,00	165,40	$q = \frac{Q}{l} = \frac{3316,73 \text{ kN}}{20 \text{ m}} \Rightarrow$ $q = 165,8 \text{ kN/m}$
Σύνολο	Σύνολο	
1658,41	1658,32	

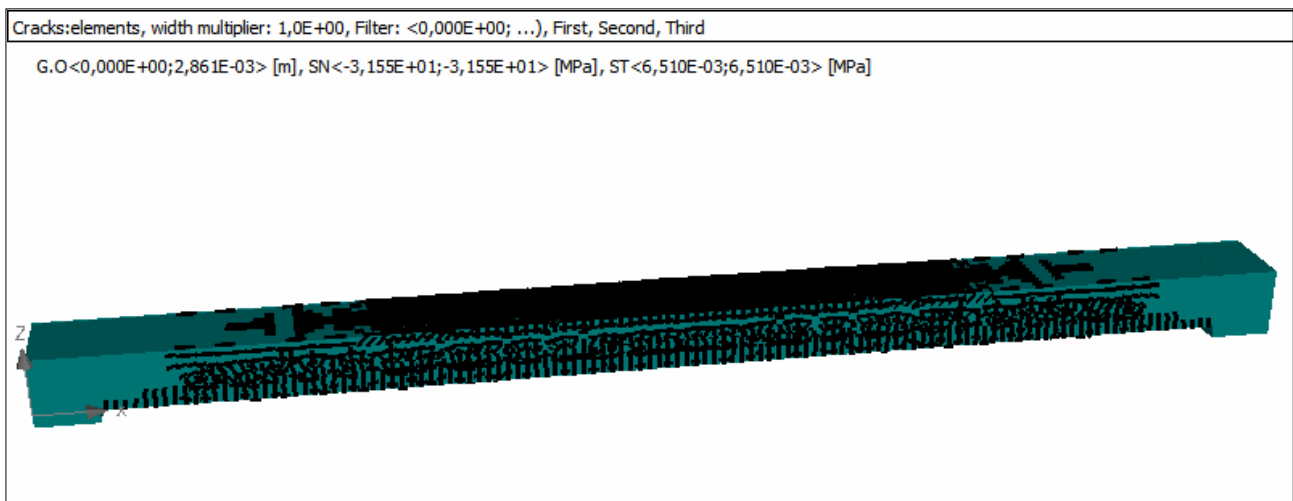
Το φορτίο $q = 165,8 \text{ kN/m}$, είναι αρκετά κοντά στο υπολογισμένο φορτίο βάσει της πλαστικής ροπής του φορέα, $q = 180 \text{ kN/m}$, με απόκλιση περίπου 7,9%.

Στα σχήματα που ακολουθούν, παρουσιάζεται η εικόνα του φορέα στο τελευταίο βήμα της ανάλυσης (ρηγμάτωση, παραμόρφωση, τάση κτλ.)

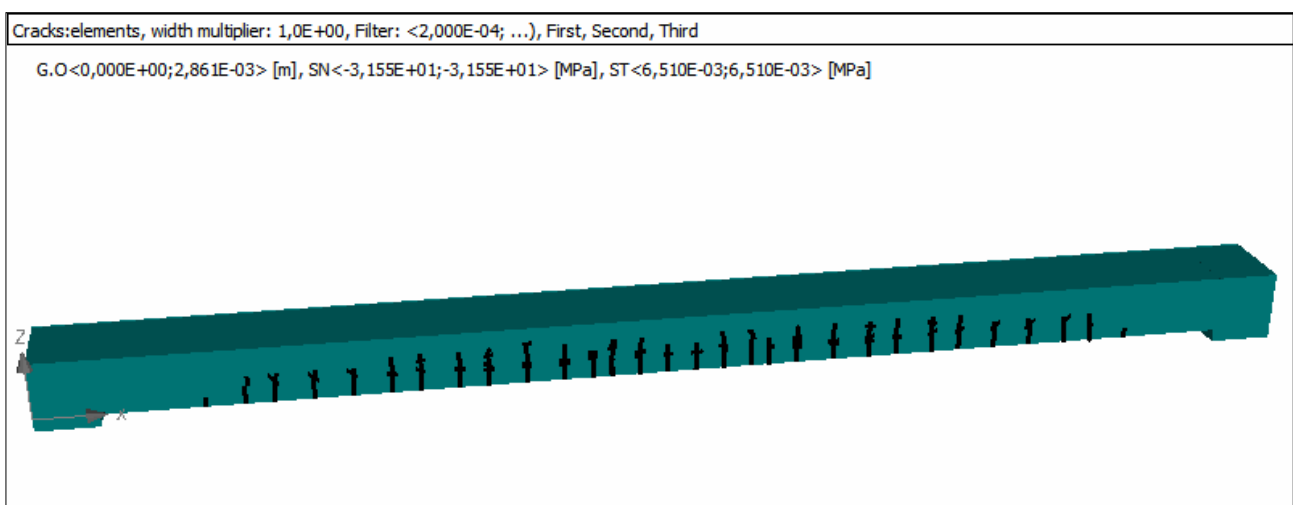
Σημειώνεται τέλος ότι η τάση του τένοντα έχει φτάσει τα 1473 MPa, τιμή κοντά στην τάση διαρροής 1600 MPa (ποσοστό 92% f_y). Ακόμη, το εύρος ρωγμής κατά τη διεύθυνση x είναι περίπου 1,5 mm, ενώ η βύθιση στο μέσον της δοκού είναι περίπου 29 cm.



Σχήμα 3.47: Ορθές τάσεις σ_x , μέγιστη θλιπτική $-38,72 \text{ MPa}$, μέγιστη εφελκυστική $5,459 \text{ MPa}$

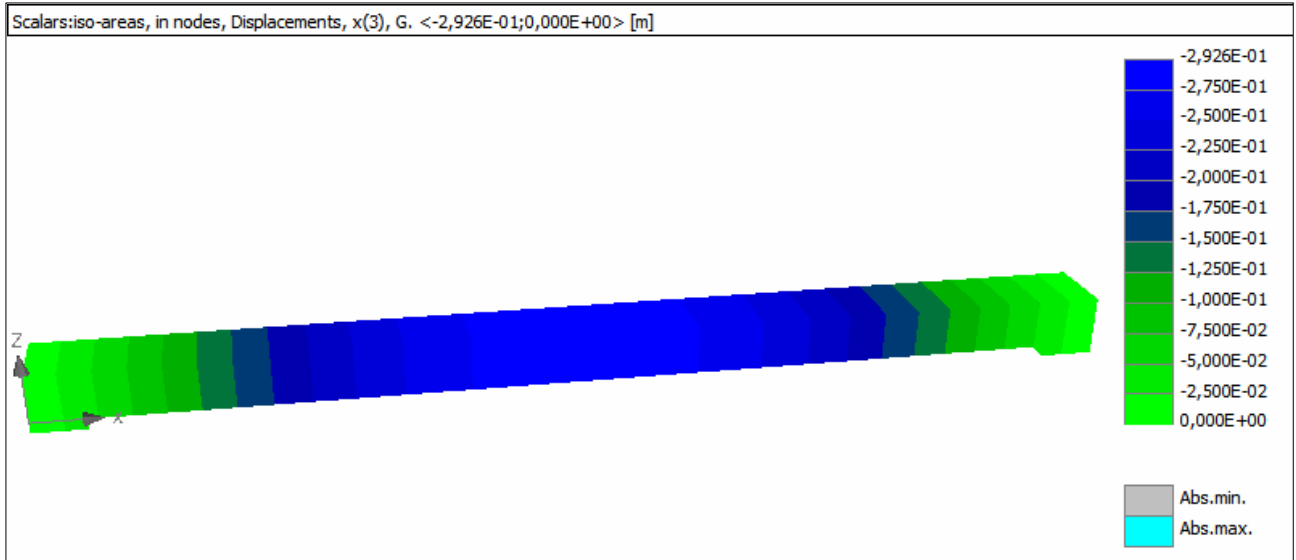


Σχήμα 3.48: Όλες οι ρωγμές



Σχήμα 3.49: Ρωγμές $\geq 0,2 \text{ mm}$

Από το **Σχήμα 3.49** διαπιστώνεται ότι οι κύριες ρωγμές είναι καμπτικές.

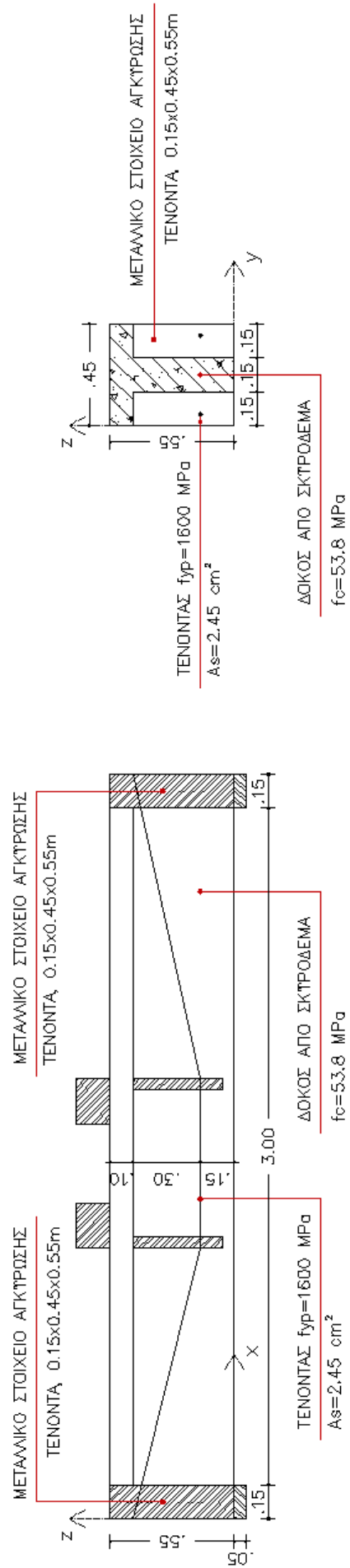


Σχήμα 3.50: Βύθιση στο μέσον της δοκού $\cong 29$ cm

3.3 Αμφιέριστη Δοκός με Εξωτερική Προένταση

Το τελευταίο μοντέλο που εξετάζεται, είναι μία δοκός από ωπλισμένο σκυρόδεμα, με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί. Στη δοκό εφαρμόζονται δύο προεντεταμένα εξωτερικά καλώδια εκατέρωθεν του κορμού της. Η δοκός είναι αμφιέριστη με άνοιγμα $l = 3,0$ m και διαστάσεις διατομής $b \times t_w \times h = 0,45 \times 0,15 \times 0,55$ m. Χρησιμοποιείται σκυρόδεμα με θλιπτική αντοχή $f_c = 53,8$ MPa, ενώ ο χάλυβας προέντασης έχει $f_{py} = 1600$ MPa και η διατομή του κάθε καλωδίου είναι $A_s = 2,45$ cm². Η δύναμη προέντασης που εφαρμόζεται στο καλώδιο είναι $P = 200$ kN.

Στις παραγράφους που ακολουθούν αναφέρεται η διαδικασία προσομοίωσης αυτού του προβλήματος, ενώ γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την ανάλυση με το πρόγραμμα **ATENA** του ίδιου προβλήματος, όπως έχει προσομοιωθεί από τη Cervenka Consulting.

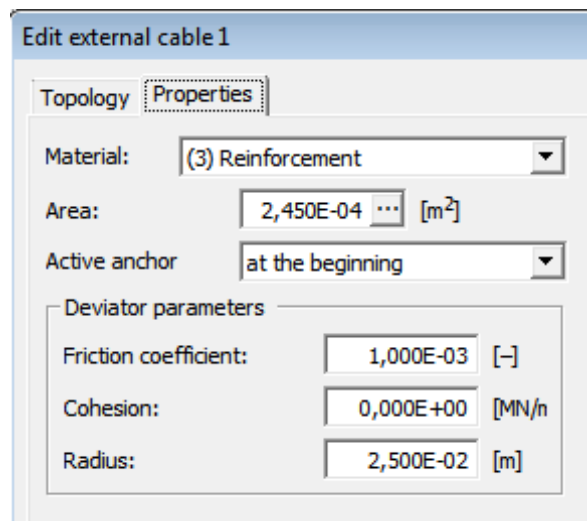


3.3.1 Προσομοίωση

Γενικότερα, ο ορισμός των υλικών της γεωμετρίας κτλ. γίνεται όπως περιγράφηκε στην **Παράγραφο 3.1.1**. Οι δύο βασικές διαφορές στην προσομοίωση είναι τα εξωτερικά καλώδια και η μέθοδος ανάλυσης και περιγράφονται παρακάτω.

3.3.1.1 Εξωτερικά Καλώδια

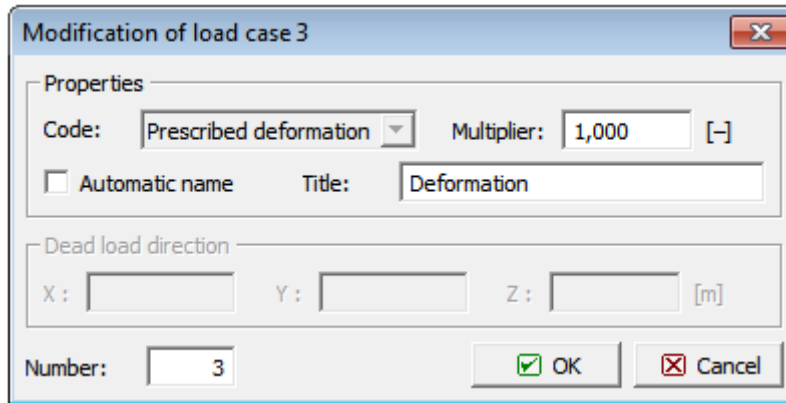
Για την προσομοίωση των εξωτερικών καλωδίων, επιλέγεται από το Input data tree → Topology → External cables. Εισάγονται τότε οι συντεταγμένες των κόμβων, με όμοιο τρόπο όπως και με τα καλώδια των εσωτερικών τενόντων, και στην καρτέλα Properties, εκτός από το υλικό και τη διατομή του καλωδίου, ορίζονται επίσης η διάμετρος του τυμπάνου, ο συντελεστής τριβής και η συνοχή (**Σχήμα 3.51**). Επιλέγεται τέλος, εάν η προένταση θα εφαρμοστεί στον κόμβο αρχής, ή στον κόμβο τέλους.



Σχήμα 3.51: Χαρακτηριστικά εξωτερικού καλωδίου

3.3.1.2 Επιβαλλόμενη μετατόπιση

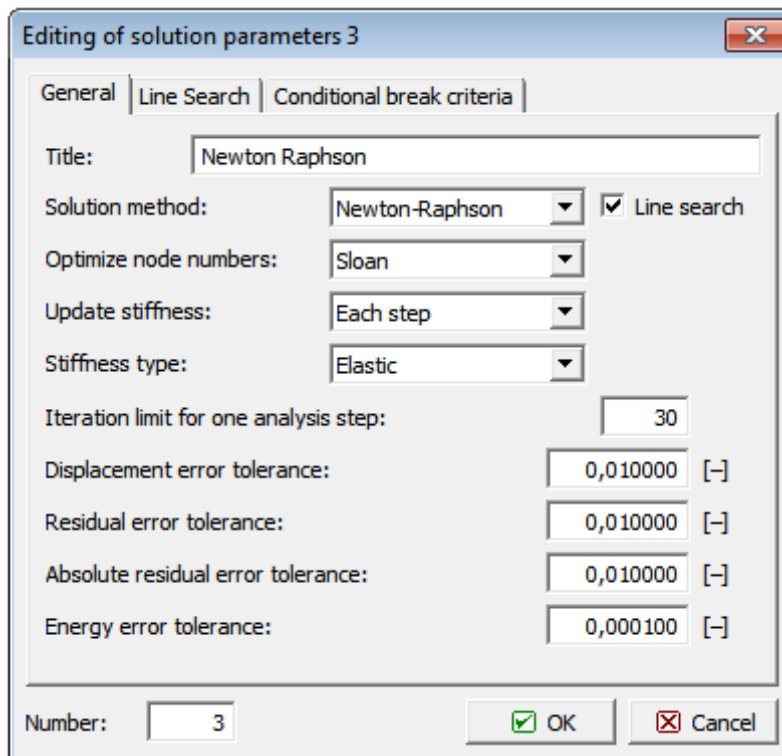
Το παράδειγμα αυτό αναλύεται με τη μέθοδο Newton – Raphson, όπου εισάγεται μία αρχική επιβαλλόμενη μετατόπιση, η οποία αυξάνεται σε κάθε βήμα. Για το λόγο αυτό, στις περιπτώσεις φόρτισης πρέπει να εισαχθεί και αυτή της επιβαλλόμενης μετατόπισης (**Σχήμα 3.52**). Η αρχική τιμή αυτής της φόρτισης είναι βύθιση 0,1 mm και επιβάλλεται στα δύο μεταλλικά στοιχεία στην άνω επιφάνεια της δοκού. Σημειώνεται ότι τα μεταλλικά αυτά στοιχεία είναι απαραίτητα για την αποφυγή συγκέντρωσης τάσεων.



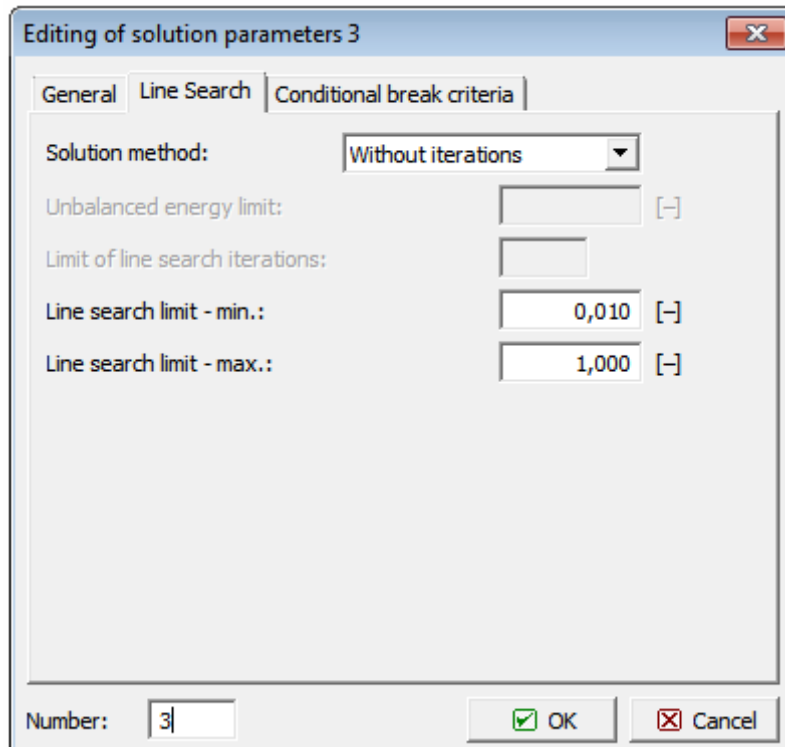
Σχήμα 3.52: Επιβαλλόμενη μετατόπιση

3.3.1.3 Στοιχεία Ανάλυσης

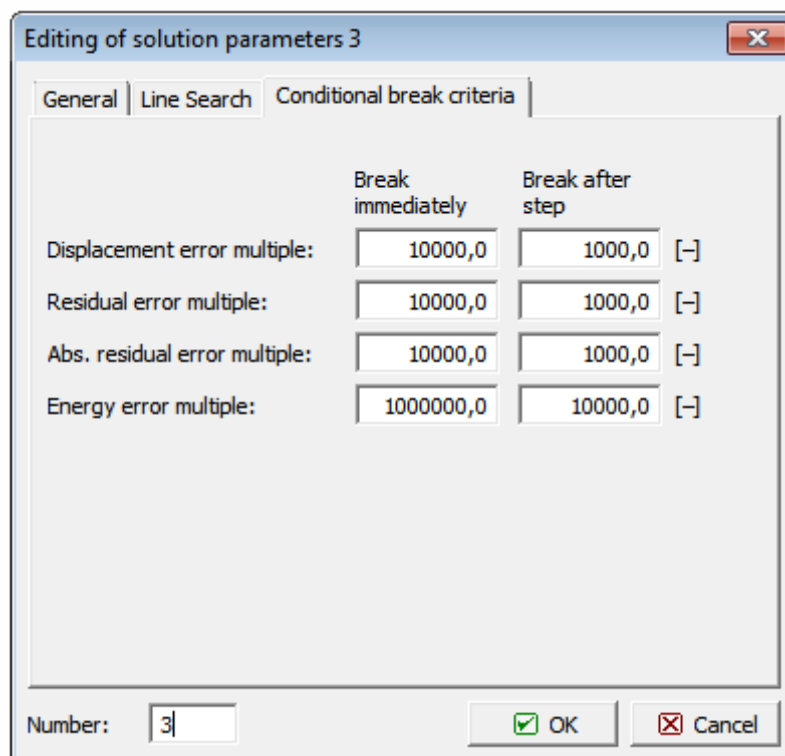
Τέλος, διαφοροποιείται η μέθοδος της ανάλυσης που ακολουθείται, η οποία είναι η Newton Raphson, με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στα σχήματα που ακολουθούν.



Σχήμα 3.53: Γενικά χαρακτηριστικά της μεθόδου Newton – Raphson



Σχήμα 3.54: Χαρακτηριστικά της μεθόδου Newton – Raphson



Σχήμα 3.55: Χαρακτηριστικά της μεθόδου Newton – Raphson

3.3.2 Αποτελέσματα

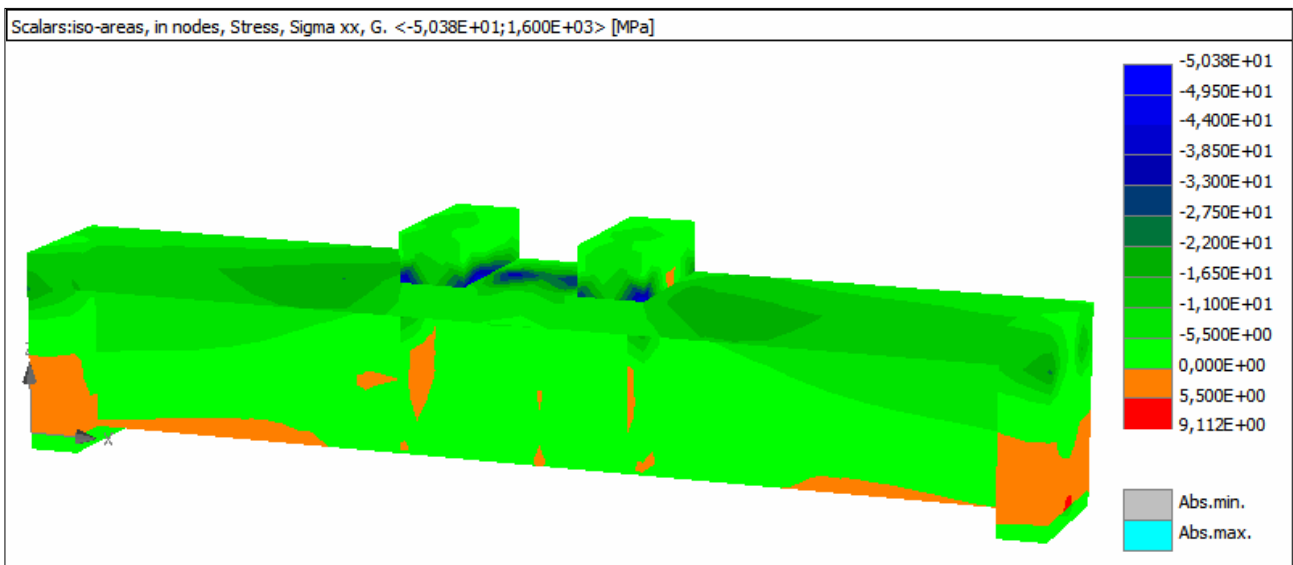
Συγκρίνεται κατ' αρχάς η καμπύλη φορτίου – μετατόπισης, όπως αυτή προκύπτει από την ανάλυση, με αυτήν που προκύπτει από το μοντέλο της Cervenka Consulting. Το μέγιστο φορτίο είναι ικανοποιητικά κοντά, αφού προκύπτει περίπου 243 kN, αντί του 252 kN, απόκλιση δηλαδή περίπου 3,6%. Η μορφή της καμπύλης επίσης, απεικονίζει την πλαστιμότητα του φορέα.

Οι ρωγμές που αναπτύσσονται, είναι επίσης όμοιες στους δύο φορείς, με την κύρια ρηγμάτωση να παρουσιάζεται στο μέσον της δοκού, με τη μορφή καμπτικών ρωγμών.

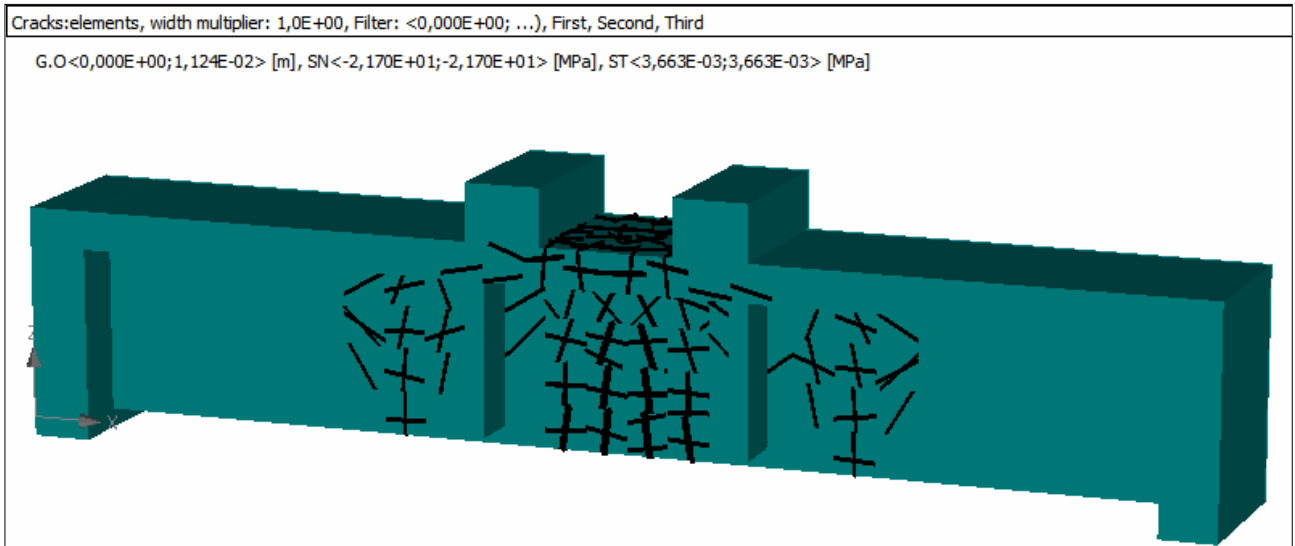
Ακόμη, η μετατόπιση στο μέσον της δοκού είναι περίπου 5,8 cm, αντί των 4,9 cm που προκύπτει από το μοντέλο της Cervenka Consulting. Η απόκλιση δηλαδή που παρουσιάζεται είναι της τάξης του 18,4%.

Τέλος, σημειώνεται ότι και στα δύο μοντέλα ο χάλυβας προέντασης έχει φτάσει το όριο διαρροής του $f_{py} = 1600$ MPa.

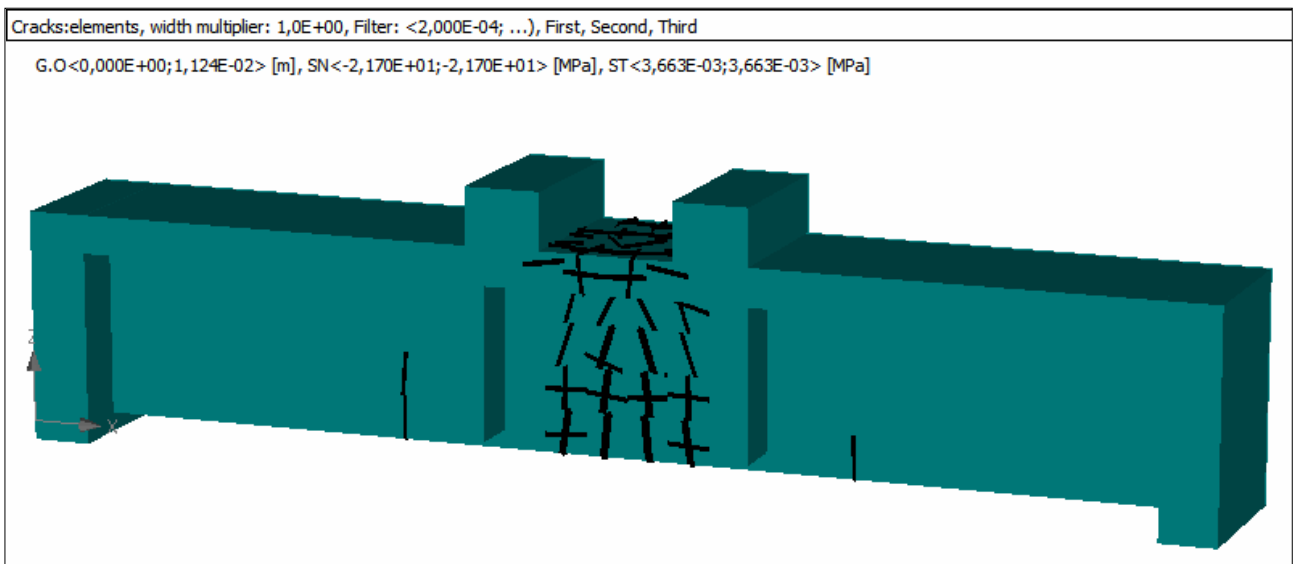
Στα σχήματα που ακολουθούν, παρουσιάζεται η εικόνα του φορέα στο τελευταίο βήμα της ανάλυσης (ρηγμάτωση, παραμόρφωση, τάση κτλ.), ενώ τα γραφήματα και ορισμένα από τα αποτελέσματα συνοψίζονται σε πίνακα στο **Παράρτημα Γ**.



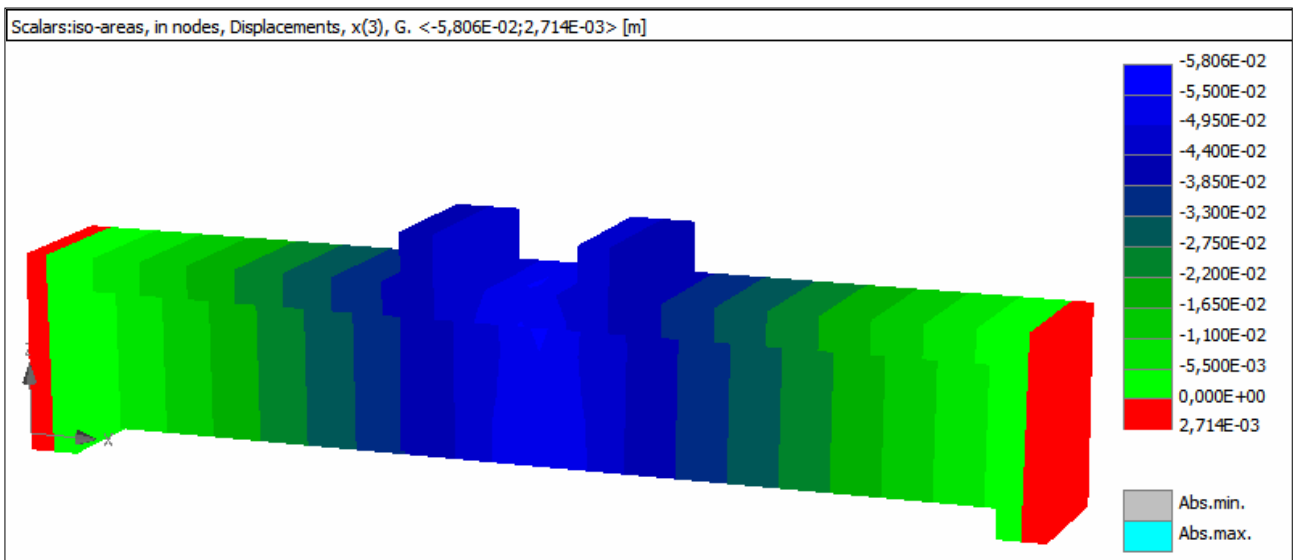
Σχήμα 3.56: Ορθές τάσεις σ_x , μέγιστη θλιπτική – **50,38 MPa**, μέγιστη εφελκυστική **5,50 MPa**



Σχήμα 3.57: Όλες οι ρωγμές



Σχήμα 3.58: Ρωγμές $\geq 0,2$ mm



Σχήμα 3.59: Βύθιση στο μέσον της δοκού $\cong 5,8$ cm

ΜΕΡΟΣ Γ: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με τη Μεταπτυχιακή αυτή εργασία και από την εμπειρία που αποκτήθηκε μέσω του συνόλου των αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν, προκύπτουν ορισμένα συμπεράσματα που αφορούν στην αξιοπιστία και στη λειτουργία του προγράμματος **ATENA**.

Με το πρόγραμμα **ATENA** δίνεται η δυνατότητα πραγματοποίησης μίας ρεαλιστικής προσομοίωσης φορέων, από ένα “δύσκολο” υλικό, όπως είναι το σκυρόδεμα. Τα τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία που παρέχει, δίνουν τη δυνατότητα αυτή, προσφέροντας αρκετά μεγάλη ακρίβεια στα αποτελέσματα.

Εκτός ότι το πρόγραμμα **ATENA** είναι από τα λίγα προγράμματα της αγοράς που επιτρέπουν τη χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, είναι επίσης ένα από τα λίγα προγράμματα που παρέχουν τη δυνατότητα προσομοίωσης καλωδίων τενόντων και ειδικότερα εξωτερικών καλωδίων.

Η ανάλυση τέλος που πραγματοποιείται, βασίζεται σε εξελιγμένες μη γραμμικές μεθόδους, οι οποίες λαμβάνουν υπόψη και τη μείωση της δυσκαμψίας μετά το σχηματισμό ρωγμών.

Είναι ένα πρόγραμμα φιλικό προς το χρήστη, με καλή παρουσίαση των αποτελεσμάτων, τόσο σε επίπεδο απεικόνισης και γραφημάτων, όσο και σε πινακοποιημένη μορφή.

Ωστόσο, παρουσιάζει κάποια προβλήματα που αφορούν κυρίως στον απαιτούμενο χρόνο ανάλυσης, αλλά και στην απαιτούμενη μνήμη και χωρητικότητα του υπολογιστή. Το πρόβλημα αυτό γίνεται εντονότερο σε προσομοιώματα μεγάλης κλίμακας τεχνικών έργων, όπως είναι οι προεντεταμένες γέφυρες, με αποτέλεσμα το πρόγραμμα αυτό, να μη θεωρείται τόσο “ανταγωνιστικό” για περιπτώσεις αναλύσεων πραγματικών τεχνικών έργων, όπου ο χρόνος ολοκλήρωσης της μελέτης είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας, αλλά δεν παύει να είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο, που προσφέρει πολλές δυνατότητες σε επίπεδο ερευνητικής ανάλυσης.

Τέλος πρέπει να υπογραμμιστεί ότι λόγω των πολλαπλών παραμέτρων που υπεισέρχονται στην τρισδιάστατη προσομοίωση και ανάλυση των μοντέλων, απαιτείται μεγάλη προσοχή στην επιλογή του κατάλληλου μεγέθους πεπερασμένων στοιχείων. Ειδικότερη δε προσοχή, πρέπει να δίνεται σε προεντεταμένους φορείς, όπου η ανάλυση είναι πιο “ευαίσθητη” και τα κριτήρια σύγκλισης μπορεί εύκολα να ξεπεράσουν το όριο ανοχής τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- ΣΤΑΥΡΙΔΗΣ Θ.Λ. – Στατική των Δομικών Φορέων ΜΕΡΟΣ Α, εκδ. Κλειδάριθμος
- BATHE K. J. – Finite Elements Procedures
- BATHE, K.J. (1982), Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, ISBN 0-13-317305-4
- BAZANT, Z.P, OH, B.H (1983) – Crack Band Theory for Fracture of Concrete, Materials and Structures, RILEM, Vol. 16, 155-177
- CEB-FIP Model Code 1990, First Draft, Committee Euro-International du Beton, Bulletin d'information No. 195,196, Mars
- CERVENKA V., JENDELE L., CERVENKA J. – ATENA Theory
- CERVENKA, J., BAZANT Z.P., WIERER, M., (2004), Equivalent Localization Element for Crack Band Approach to Mesh Sensitivity in Microplane Model, submitted for publication, Int. J. for Num. Methods in Engineering
- CERVENKA, V. (1985) – Constitutive Model for Cracked Reinforced Concrete, Journal ACI, Proc. V.82, Nov-Dec, No.6,pp.877-882
- CERVENKA, V., PUKL, R. (1992) – Computer Models of Concrete Structures, Structural Engineering International, Vol.2, No.2, May 1992. IABSE Zürich, Switzerland, ISSN 1016-8664, PP.103-107
- CERVENKA, V., PUKL, R., OZBOLT, J., ELIGEHAUSEN, R. (1995), Mesh Sensitivity Effects in Smeared Finite Element Analysis of Concrete Structures, Proc. FRAMCOS 2, 1995, pp 1387-1396
- CHEN, W.F, SALEEB, A.F. (1982) – Constitutive Equations For Engineering Materials, John Willey & Sons, ISBN 0-471-09149-9
- CRISFIELD, M.A. (1983) – An Arc-Length Method Including Line Search and Accelerations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.19, pp.1269-1289
- DE BORST, R. (1986), Non-linear analysis of frictional materials, Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, 1986
- DYNGLAND, T. (1989) – Behavior of Reinforced Concrete Panels, Dissertation, Trondheim University, Norway, BK-report 1989:1
- FEENSTRA, P.H., Computational Aspects of Bi-axial Stress in Plain and Reinforced Concrete. Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, 1993

- HARTL, G. (1977) – Die Arbeitlinie Eingebettete Staehle bei erst und kurz=Belastung, Dissrtation, Universität Innsbruck
- HORDIJK, D.A. (1991) – Local Approach to Fatigue of Concrete, Doctor dissertation, Delft University of Technology, The Netherlands, ISBN 90/9004519-8
- JIRASEK M., BAZANT Z.,P. – Inelastic Analysis of Structures
- KOLLEGER, J. – MEHLHORN, G. (1988) – Experimentelle und Analytische Untersuchungen zur Aufstellung eines Materialmodells für Gerissene Stahbetonscheiben, Nr.6 Forschungsbericht, Massivbau, Gesamthochschule Kassel
- KUPFER, H., HILSDORF, H.K., RÜSCH, H. (1969) – Behavior of Concrete under Biaxial Stress, Journal ACI, Proc. V.66,No.8, Aug., pp.656-666
- MARGOLDOVA, J., CERVENKA V., PUKL R. (1998), Applied Brittle Analysis, Concrete Eng. International, November/December 1998
- MENETREY, P., WILLAM, K.J. (1995), Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. ACI, Structural Journal, 1995, 92(3), pp 311-318
- MIER J.G.M van (1986) – Multiaxial Strain-softening of Concrete, Part I: fracture, Materials and Structures, RILEM, Vol. 19, No.111
- OLIVIER, J., A Consistent Characteristic Length For Smearred Cracking Models, Int. J. Num. Meth. Eng., 1989, **28**, pp 461-474
- RAMM, E. (1981) – Strategies for Tracing Non-linear Responses Near Limit Points, Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, (Eds. W. Wunderlich, E. Stein, K.J. Bathe)
- ROTS, J.G., BLAUWENDRAAD, J., Crack models for concrete: discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating? HERON 1989, 34(1)
- SIMO, J.C., KENNEDY, J.G., GOVINDJEE, S., (1988), Non-smooth Multi-surface Plasticity and Visco-plasticity. Loading/unloading Conditions and Numerical Algorithms, Int. J. Num. Meth. Eng., **26**, pp 2161-2185
- VAN MIER J.G.M. (1986), Multi-axial Strain-softening of Concrete, Part I: fracture, Materials and Structures, RILEM, 1986, **19**(111)
- VECCHIO, F.J., COLLINS, M.P (1986) – Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear, ACI Journal, Proc. V.83, No.2, Mar-Apr., pp 219-231
- VOS, E. (1983) – Influence of Loading Rate and Radial Pressure on Bond in Reinforced Concrete, Dissertation, Delft University, pp. 219-220

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ