



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
« ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ »

**ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ
ΣΕ ΕΞΕΛΙΓΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BOUSSINESQ**

Γεώργιος Κλωνάρης



**«ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ
ΠΟΡΩΝ»**

Επιβλέπων: Καθηγητής Κ. Μέμος

Αθήνα, Ιούνιος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
« ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ »

**ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ
ΣΕ ΕΞΕΛΙΓΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BOUSSINESQ**

Γεώργιος Κλωνάρης



«ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ
ΠΟΡΩΝ»

Επιβλέπων: Καθηγητής Κ. Μέμος

Αθήνα, Ιούνιος 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε κατά τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους 2010-11 στα πλαίσια του Διατμηματικού - Διεπιστημονικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων». Εντάσσεται στη γενικότερη έρευνα σχετικά με τα μαθηματικά μοντέλα διάδοσης κυματισμών τύπου Boussinesq. Εκπονήθηκε με προσωπικό μεράκι και προσήλωση, προσπαθώντας όσο το δυνατόν να παραμείνει εντός των ορίων και των στόχων ενός μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, κ. Κωνσταντίνο Μέμο για την ανάθεση της εργασίας στα πλαίσια ενός πολύ ενδιαφέροντος αντικειμένου, καθώς και για την εμπιστοσύνη, την καθοδήγηση και τη διαρκή επίβλεψη της εξέλιξής της.

Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τον αναπληρωτή καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Α.Π.Θ., κ. Θεοφάνη Καραμπά για τις πολύ χρήσιμες συζητήσεις και υποδείξεις κατά τη διάρκεια της εν λόγω έρευνας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα του Ε.Μ.Π., κ. Μιχάλη Χονδρό για την παροχή επιστημονικού υλικού και τις χρήσιμες συζητήσεις που κάναμε, καθώς και τον υποψήφιο διδάκτορα του Α.Π.Θ., κ. Χρήστο Μακρή για την παροχή επιστημονικού υλικού.

Αθήνα, 2011

Κλωνάρης Γεώργιος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	iii
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	v
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	ix
EXTENDED ABSTRACT.....	xi
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1. ΘΕΩΡΙΕΣ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ.....	5
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	5
1.2 ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.....	7
1.3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ.....	9
1.3.1 ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ (Airy ή Stokes 1 ^{ης} τάξης).....	9
1.3.2 ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ.....	13
1.3.2.1 Θεωρίες Stokes ανώτερης τάξης.....	13
1.3.2.2 Θεωρία κυματισμών ελλειπτικού σνημιτόνου (Cnoidal waves).....	17
1.3.2.3 Θεωρία μοναχικού κύματος (solitary wave).....	21
1.3.2.4 Θεωρία ροϊκής συνάρτησης (stream function theory).....	24
1.3.3 ΠΕΡΙΟΧΗ ΙΣΧΥΟΣ ΤΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ.....	26
1.4 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ.....	29
1.4.1 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ.....	31
1.4.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ.....	32
1.4.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ - ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....	34
1.5 ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ.....	37
1.5.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ) ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ.....	37
1.5.1.1 Φασματικά μοντέλα ακτίνων (Spectral ray models).....	38
1.5.1.2 Μαθηματικά μοντέλα τύπου Boussinesq.....	38
1.5.1.3 Μαθηματικά μοντέλα ήπιας κλίσης.....	39
1.5.2 ΦΥΣΙΚΑ (ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΑ) ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ.....	40
2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΤΥΠΟΥ BOUSSINESQ.....	42
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	42
2.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΚΑΤΑ PEREGRINE (1967, 1972).....	43
2.3 ΜΟΝΤΕΛΑ BOUSSINESQ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ.....	45
2.3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΩΝ MADSEN ET AL. (1991).....	46
2.3.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΟΥ NWOGU (1993).....	50
2.3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΟΥ KARAMBAS (1999).....	52
2.3.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΟΥ ΖΟΥ (1999).....	55
2.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΥΨΗΛΗΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΑΞΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ.....	58

2.4.1 ΠΛΗΡΩΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ WEI ET AL. (1995).....	59
2.4.2 ΠΛΗΡΩΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ GOBBI, KIRBY ΚΑΙ WEI (2000).....	60
2.4.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΤΩΝ MADSEN ET AL. (2002,2003,2006).....	62
2.4.4 ΜΕΘΟΔΟΣ FOURIER-BOUSSINESQ ΓΙΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΥΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΤΩΝ BINGHAM ΚΑΙ AGNON (2005).....	68
2.4.5 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΥΨΗΛΗΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΥΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΤΟΥ LI (2008).....	71
2.5 ΠΡΟΣΘΗΚΕΣ ΣΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ BOUSSINESQ.....	72
2.5.1 Η ΘΡΑΥΞΗ ΣΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ BOUSSINESQ.....	72
2.5.2 Η ΤΡΙΒΗ ΠΥΘΜΕΝΑ.....	72
2.5.3 Η ΑΝΑΡΡΙΧΗΣΗ ΣΤΗΝ ΑΚΤΗ.....	77
2.5.4 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.....	78
2.5.4.1 Όρια γένεσης κύματος.....	78
2.5.4.2 Όρια ακτινοβολίας ή απορροφητικά όρια.....	83

3. ΕΞΕΛΙΓΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BOUSSINESQ ΤΩΝ KARAMBAS

ΚΑΙ MEMOS (2009).....	88
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	88
3.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΩΝ TSUTSUI ET AL. (1998).....	89
3.3 ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ BOUSSINESQ ΤΩΝ KARAMBAS ΚΑΙ MEMOS (2009).....	94
3.3.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (1 DH).....	94
3.3.2 ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (2 DH).....	100
3.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ.....	102
3.5 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.....	104
3.5.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ.....	104
3.5.2 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.....	106
3.5.3 ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ.....	107
3.5.3.1 Σύγκλιση (Convergence).....	108
3.5.3.2 Συνέπεια (Consistency).....	109
3.5.3.3 Ευστάθεια (Stability).....	111
3.5.3.4 Ακρίβεια (Accuracy).....	115
3.5.3.5 Υπολογιστική απόδοση (Computational efficiency).....	117
3.5.4 ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ-ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ (PREDICTOR-CORRECTOR).....	119
3.6 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΩΝ KARAMBAS ΚΑΙ MEMOS (2009).....	122
3.6.1 (1 DH) ΣΤΑΘΕΡΟ ΒΑΘΟΣ: ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ.....	122
3.6.2 (1 DH) ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΒΑΘΟΣ: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΡΗΧΩΣΗ, ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΟΣΗ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΥΦΑΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟ ΚΑΙ ΡΗΧΩΣΗ ΜΟΝΑΧΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΠΥΘΜΕΝΑ.....	126
3.6.3 (2 DH) ΣΤΑΘΕΡΟ ΒΑΘΟΣ: ΠΟΛΥΚΑΤΕΥΘΥΝΤΙΚΟΙ ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ.....	129

3.6.4 (2 DH) ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΒΑΘΟΣ: ΔΙΑΔΟΣΗ ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΥΦΑΛΟ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.....	130
3.6.5 (2 DH) ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΒΑΘΟΣ: ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΑΘΛΑΣΗ-ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΥΦΑΛΟ ΕΜΠΟΔΙΟ.....	133
3.6.6 (2 DH) ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΒΑΘΟΣ: ΛΟΞΩΣ ΠΡΟΣΠΙΠΤΟΝΤΕΣ ΜΟΝΟΚΑΤΕΥΘΥΝΤΙΚΟΙ (LONG-CRESTED) ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ.....	135
3.7 ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΤΗΣ ΤΡΙΒΗΣ ΠΥΘΜΕΝΑ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ ΜΕΜΟΣ (2009).....	138
4. Η ΘΡΑΥΣΗ ΣΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ BOUSSINESQ.....	141
4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΡΑΥΣΗ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ.....	141
4.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΘΡΑΥΣΗΣ.....	147
4.3 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΕΝΤΟΣ ΤΗΣ ΖΩΝΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ.....	150
4.4 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΡΑΥΣΗΣ ΤΟΥ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ (SURFACE ROLLER MODEL).....	153
4.5 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΡΑΥΣΗΣ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ (EDDY VISCOSITY MODEL).....	160
4.6 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΡΑΥΣΗΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΤΗΤΑΣ (VORTICITY WAVE-BREAKING MODEL).....	166
5. ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ ΜΕΜΟΣ (2009) ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΜΙΑ ΝΕΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ.....	170
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	170
5.2 ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.....	173
5.3 Η ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΘΡΑΥΣΗΣ.....	176
5.4 ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ.....	179
6. ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΙΚΕ 21 BOUSSINESQ WAVES (BW).....	185
6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	185
6.2 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ.....	186
6.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.....	189
6.4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ.....	191
6.5 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.....	192
6.6 ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.....	193
6.7 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΜΙΚΕ 21 BW (1DH) ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ WALLINGFORD (1997).....	195
7. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ BOUSSINESQ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ ΜΕΜΟΣ (2009) ΜΕ ΤΗ ΝΕΑ ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ.....	203
7.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	203
7.2 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ WALLINGFORD (1997).....	204
7.2.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ.....	204

7.2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ ΜΕΜΟΣ (2009).....	207
7.2.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ.....	208
7.3 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ ΤΙΝΓ ΚΑΙ ΚΙΡΒΥ (1994).....	212
7.4 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ ΗΑΝΣΕΝ ΚΑΙ ΣΒΕΝΔΣΕΝ (1979).....	217
7.5 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ ΒΕΪ ΚΑΙ ΒΑΤΤΪΕΣ (1993) - ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ.....	223
7.6 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΑΚΙΣ (1987).....	233
7.7 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ ΜΑΣΕ ΚΑΙ ΚΙΡΒΥ (1992).....	237
7.8 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ ΒΕΪ ΚΑΙ ΒΑΤΤΪΕΣ (1993) - ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ.....	245
8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.....	253
8.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	253
8.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ ΜΕΜΟΣ (2009).....	255
8.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΙΚΕ 21 ΒΩ (1 ΔΗ).....	259
8.4 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΥΠΟΥ ΒΟΥΣΣΙΝΕΣΚ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ ΜΕΜΟΣ (2009).....	261
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	265
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΣΕ FORTRAN 90.....	281
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ ΣΕ FORTRAN 90.....	339
ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΥΜΒΟΛΩΝ.....	343

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα μαθηματικά μοντέλα αποτελούν πλέον τον καθιερωμένο τρόπο μελέτης της διάδοσης κυματισμών στην παράκτια ζώνη. Ανάμεσα σε αυτά, τα μοντέλα τύπου Boussinesq κατέχουν εξέχουσα θέση. Βασίζονται στις ολοκληρωμένες στο βάθος εξισώσεις συνέχειας και ορμής και περιλαμβάνουν χαρακτηριστικά διασποράς και μη-γραμμικότητας. Ένα πλήθος εργασιών έχει εκπονηθεί με στόχο τη βελτίωση της απόδοσης των χαρακτηριστικών αυτών.

Οι Karambas και Memos (2009) παρουσίασαν ένα εξελιγμένο μοντέλο τύπου Boussinesq που περιγράφει τη διάδοση πλήρως διασπειρόμενων και ελαφρώς μη-γραμμικών κυματισμών σε οποιοδήποτε βάθος. Το μοντέλο εφαρμόζεται για απλούς και σύνθετους κυματισμούς σε περιοχές σταθερού βάθους ή ήπια μεταβαλλόμενης βυθομετρίας. Αποτελείται από ένα σύστημα εξισώσεων σε δύο (2D) ή μία (1D) οριζόντιες διαστάσεις.

Η προσομοίωση της θραύσης κυματισμών στα μοντέλα τύπου Boussinesq αποτελεί πεδίο επιστημονικής έρευνας. Η προσθήκη της στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) έχει γίνει κατά το παρελθόν τόσο βάσει της τεχνικής του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller breaker), όσο και βάσει της τεχνικής της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity breaking model).

Ακολουθώντας την πρόταση των Cienfuegos et al. (2010), το μονοδιάστατο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) επεκτείνεται ώστε να συμπεριλάβει την επίδραση της θραύσης τόσο στην εξίσωση ορμής, όσο και στην εξίσωση συνέχειας προσθέτοντας επιπλέον όρους θραύσης. Το 1D μοντέλο περιλαμβάνει όρους της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ζ και της μέσης κατά το βάθος ταχύτητας U . Στην περιοχή της θραύσης γίνεται ένας ξεκάθαρος διαχωρισμός μεταξύ της περιοχής όπου μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία δυναμικού και της τυρβώδους περιοχής του επιφανειακού κυλίνδρου από πάνω της. Οι όροι θραύσης ενεργοποιούνται όταν η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας ξεπεράσει μία οριακή τιμή και απενεργοποιούνται όταν γίνει μικρότερη από μία άλλη χαμηλότερη οριακή τιμή. Η μορφή των όρων θραύσης είναι τέτοια ώστε να διασφαλίζεται η συνολική διατήρηση της μάζας και της ορμής σε ένα γεγονός θραύσης, σε αντίθεση με τις προηγούμενες προσεγγίσεις προσομοίωσης της θραύσης.

Στα πλαίσια της εργασίας έγινε διερεύνηση του απλού ρητού σχήματος πεπερασμένων διαφορών (FTCS) που προτάθηκε αρχικά. Το σχήμα αυτό εξασφαλίζει μικρούς υπολογιστικούς χρόνους και αποδίδει ικανοποιητικά για μικρούς χρόνους προσομοίωσης, αλλά δεν παρουσιάζει σύγκλιση και για μεγαλύτερους χρόνους εμφανίζει προβλήματα αριθμητικής αστάθειας, ιδίως όταν συμπεριληφθεί και η θραύση. Έτσι, η αριθμητική επίλυση έγινε με ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών (3^{ns} τάξης) πρόβλεψης- (4^{ns} τάξης) διόρθωσης Adams- Bashforth- Moulton. Το στάδιο διόρθωσης περιλαμβάνει επαναληπτική διαδικασία ώστε το μοντέλο να συγκλίνει με επιθυμητή ακρίβεια.

Το μοντέλο επαληθεύτηκε σε σχέση με αρκετά σετ πειραμάτων για θραυόμενους κυματισμούς. Τα πειράματα αφορούσαν σε απλούς μονοχρωματικούς κυματισμούς, κύματα cnoidal, μοναχικό κύμα και σύνθετους κυματισμούς. Εκτός των πειραματικών καταγραφών, γίνεται σύγκριση και με τα αποτελέσματα του εμπορικού μοντέλου MIKE 21 BW. Το μοντέλο αυτό είναι επίσης ήπιας μη-γραμμικότητας με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς. Για λόγους πληρότητας γίνεται μία σύντομη περιγραφή του προγράμματος. Επίσης, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου

συγκρίνονται με τα αντίστοιχα των προηγούμενων εκδόσεων του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με προσομοίωση της θραύσης βάσει της τεχνικής του επιφανειακού κυλίνδρου και της τυρβώδους συνεκτικότητας. Τέλος, έγινε διερεύνηση σε σχέση με την ευαισθησία ως προς κάποιες παραμέτρους που υπεισέρχονται στο μοντέλο.

Το προτεινόμενο μοντέλο έδειξε γενικά βελτιωμένη απόκριση, ενώ το σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector) εξασφάλισε την αριθμητική ευστάθεια της λύσης. Βέβαια, υπάρχουν αρκετές προοπτικές επέκτασης του μοντέλου, όπως η αύξηση της τάξης μη-γραμμικότητας, η προσομοίωση των μη-γραμμικών κυματικών αλληλεπιδράσεων (wave-wave interactions), η προσομοίωση της αναρρίχησης στην ακτή και η επέκταση της θραύσης σε δύο διαστάσεις. Τελικός σκοπός είναι η σύνδεση του μοντέλου με κάποιο μοντέλο παράκτιας στερεομεταφοράς και διάβρωσης του πυθμένα και των ακτών. Αυτές οι κατευθύνσεις μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

EXTENDED ABSTRACT

1. INTRODUCTION

Mathematical wave models have been a field of intense scientific research during the last twenty years. The most commonly used among them are the Boussinesq-type models. These models rely on the solution of Boussinesq equations with the standard form given by Peregrine (1967). These equations describe the propagation of weakly dispersive waves in contrary to shallow water equations which don't contain any characteristics of dispersion. Since then the main research subject has concerned the improvement of the characteristics of dispersion and non-linearity so that these models be able to accurately simulate wave transformations during their propagation in the offshore region as well as in shallow waters.

Boussinesq models normally lack any wave breaking formulation and so the resulting energy dissipation is not described. This is considered as a major drawback since wave breaking is the phenomenon dominating wave transformation, especially in the surf zone.

Numerous attempts were carried out in order to incorporate wave breaking in Boussinesq models. Two methods have been the most important for simulating wave breaking. The first one relies on an eddy viscosity formulation of the breaking phenomenon and can be attributed to Zelt (1991) and Karambas and Koutitas (1992). Kennedy et al. (2000) further developed this model by providing a more realistic description of the beginning and cessation of wave breaking.

A different approach was successfully implemented by Schäffer et al. (1993), namely the surface roller criterion. The roller corresponded to an extra momentum term linked to the surface roller's thickness that was related to the front slope of the waves. This model was expanded by Madsen et al. (1997) for 2-dimensional cases and irregular wave conditions.

Cienfuegos et al. (2010) presented a new approach to wave breaking simulation. They included the breaker effects in both the continuity and momentum equations by adding extra dissipative terms. The main concept is based on a clear distinction between the organized layer where potential flow theory can be applied and the turbulent roller region above it in the vicinity of the breaker.

Karambas and Memos (2009) presented a post-Boussinesq model for fully dispersive and weakly non-linear regular and irregular waves at any water depth. The significant advantage of this model is the small number of terms involved in both the mass and the momentum conservation equations that significantly reduce the required computational load, without compromising the accuracy in describing the dispersive conditions. In the present work the formulation by Cienfuegos et al. (2010) is followed in order to incorporate wave breaking in Karambas and Memos's (2009) model. The first chapters refer to the various works on Boussinesq models and also describe in detail the present model and wave breaking simulation techniques. The improved model is calibrated and verified by comparing its results with experimental measurements and those of MIKE 21 BW, one of the most advanced commercial wave models. The tests refer to breaking monochromatic waves, cnoidal waves, solitary wave and irregular waves.

2. THEORETICAL BACKGROUND

2.1 BASIC EQUATIONS OF BOUSSINESQ MODEL

The model by Karambas and Memos (2009) consists of a system of equations in two (2D) or one (1D) horizontal dimensions. The one-dimensional model is expressed in terms of surface elevation ζ and depth-averaged horizontal velocity U and includes the mass conservation equation (1) and the momentum equation (2):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial[(d+\zeta)U]}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

where d is the still water depth. The above equation is an exact relation valid in any water depth without restrictions in non-linearity.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{g}{\pi d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(x - \xi, t) - \zeta(x, t)] \ln \tanh\left(\frac{\pi|\xi|}{4d}\right) d\xi \quad (2)$$

where (g) is the gravity acceleration. The above momentum equation is derived by retaining terms of $O(1, \varepsilon, \sigma^2)$, where ε is a non-linearity parameter (the ratio of a characteristic wave height to a depth of reference) and σ is a dispersion parameter (the ratio of a depth of reference to a characteristic wavelength). The model satisfies exactly the linear dispersion equation with no practical limitation to water depth. It can be applied to constant or slowly varying water depth. In addition, it contains only four terms in the momentum equation in contrast to other Boussinesq-type models containing complex terms with high order derivatives.

2.2 WAVE BREAKING

In the present work wave breaking is incorporated to the Karambas and Memos's (2009) model following the formulation by Cienfuegos et al. (2010). By including the wave-breaking terms into the model equations, the latter are written:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} - D_h = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{g}{\pi d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(x - \xi, t) - \zeta(x, t)] \ln \tanh\left(\frac{\pi|\xi|}{4d}\right) d\xi - \frac{1}{h} D_{hu} = 0 \quad (4)$$

where h is the local depth of the organized or potential bulk flow (Fig. 1), U is the depth-averaged velocity in the potential layer, D_h and D_{hu} are terms representing breaking-induced contributions. It is important to emphasize that in the present definition a clear distinction is made between the organized layer where potential flow theory can be applied and the turbulent roller region that develops above it when wave-breaking is taking place.

It is worth pointing out that when the eddy viscosity analogy (Kennedy et al. (2000), Zelt (1991)) is used, only the breaking-induced momentum term D_{hu} is included. The term D_h in the continuity equation appears because the latter equation is not integrated all the way to the free surface, but only over the potential flow layer. Therefore, the turbulent roller region is excluded

from the depth-averaged equations. So the extra breaking terms represent respectively, for the continuity and momentum equations:

- (1) A local mass exchange between the turbulent and potential flow regions
- (2) A local momentum deficit produced by the presence of the roller (Fig. 1)

In Fig. 1 ($O.X.Z$) is a frame of reference moving with wave celerity c and so it follows each breaking wave with $X = 0$ at the wave crest.

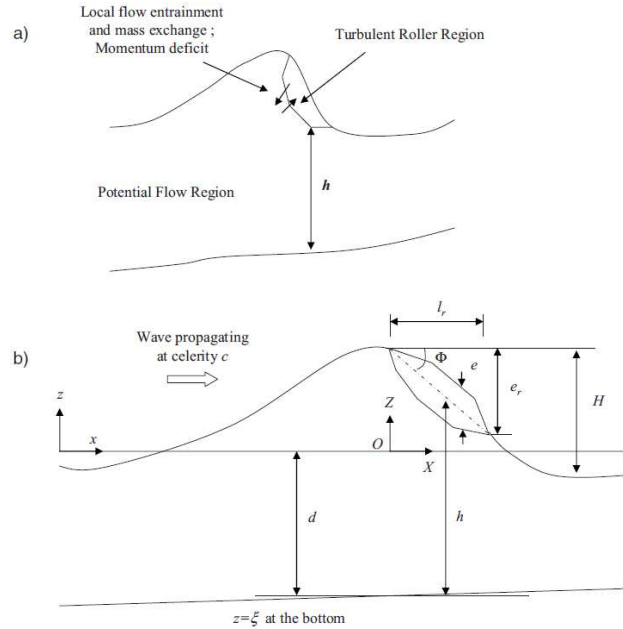


Figure 1. Definition sketch for a breaking wave. (a) Potential and turbulent flow regions, (b) definition of related variables (Cienfuegos et al. (2010))

Cienfuegos et al. (2010) presented an analysis based on energy considerations and the nonlinear shallow water shock theory. They proposed the following form for the breaking terms:

$$D_h = \frac{d}{dX} \left(v_h \frac{dh}{dX} \right) \quad (5)$$

$$D_{hu} = \frac{d}{dX} \left[v_{hu} \frac{d(hU)}{dX} \right] \quad (6)$$

where the mass and momentum diffusivity coefficients are of the form:

$$v_h = -K_h \exp \left(\frac{X}{l_r} - 1 \right) \left[\left(\frac{X}{l_r} - 1 \right) + \left(\frac{X}{l_r} - 1 \right)^2 \right] \quad \text{where } 0 \leq X \leq l_r \quad (7)$$

$$v_{hu} = -K_{hu} \exp \left(\frac{X}{l_r} - 1 \right) \left[\left(\frac{X}{l_r} - 1 \right) + \left(\frac{X}{l_r} - 1 \right)^2 \right] \quad \text{where } 0 \leq X \leq l_r \quad (8)$$

In the above equations l_r is the finite distance over which energy dissipation takes place (Fig. 1) and K_h, K_{hu} are slowly varying functions of X of a complex form given by Cienfuegos et al. (2010). Following their simplifications and after calibration for the present model the following values were used:

$$K_h = 0.2cd \quad \text{and} \quad K_{hu} = 2cd \quad (9)$$

The functional form of equations (7) and (8) yields $v_h = v_{hu} = 0$ for $X = 0$ and $X = l_r$. Thus after integration of equations (5) and (6) over the finite distance l_r , overall mass and momentum conservation is ensured and only a local redistribution of these quantities takes place.

The breaking terms are activated when $\frac{\partial \zeta}{\partial X} \leq -\tan \Phi_b$. The critical value of the slope of the free surface for the continuation or cessation of breaking varies according to the exponential temporal law of equation (10) with final value $\tan \Phi_o$.

$$\Phi = \Phi_o + (\Phi_b - \Phi_o) \exp \left[-\frac{(t-t_b)}{T_b} \ln 2 \right] \quad \forall t \geq t_b \quad (10)$$

where t_b is the time of inception breaking and T_b is a characteristic transitional time scale that was set $T_b = 0.1T$ with T the wave period. For spilling breaking the angles $(\Phi_b, \Phi_o) = (30^\circ, 7^\circ)$ were used, while for plunging breaking the angle Φ_b had a greater value that reached as high as $35^\circ - 36^\circ$.

3. NUMERICAL SOLUTION

3.1 NUMERICAL SCHEME

The numerical solution was accomplished by a finite difference scheme. The spatial derivatives were approximated through central differences and the time derivatives through forward differences on a staggered grid. The discrete continuity equation was centered at the level points and the momentum equation at the flux points. The convolution integral of the momentum equation was calculated numerically, using higher order accurate methods, such as the Newton's 3/8 rule or the complex Simpson's rule. The infinite limits of the integral were set finite at $\pm 4d$.

The numerical scheme is a predictor-corrector scheme proposed by Wei and Kirby (1995). The predictor stage is of 3rd order Adams-Bashforth and the corrector stage is of 4th order Adams-Moulton. The corrector stage was iterated until the error between two successive results reaches a set limit. In particular:

$$\Delta f = \frac{\sum |f_i^{n+1} - f_i^{(n+1)*}|}{\sum |f_i^{n+1}|} \quad (11)$$

where f is either of the two variables ζ and U and $()^*$ denotes the previous estimate. The iteration limit Δf was set 0.001.

3.2 BOUNDARY CONDITIONS

The waves were generated inside the computational domain using the source function technique proposed by Wei et al. (1999). In order to absorb the waves at the open boundaries the sponge layer scheme by Yoon and Choi (2001) was applied.

4. MODEL VERIFICATION

4.1 CNOIDAL WAVES

The first experiment for verification of the proposed model is the one performed by Ting and Kirby (1994). It refers to the propagation and breaking of cnoidal waves over mildly sloping bed. The generated waves had height $H = 0.125 \text{ m}$ and period $T = 2 \text{ sec}$. Wave breaking was of spilling type. The experimental setup is shown in Fig. 2.

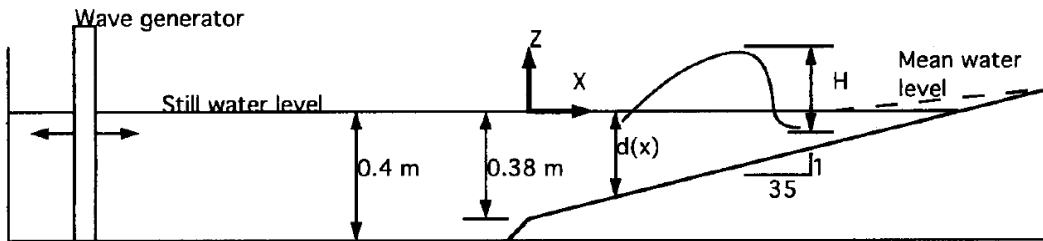


Figure 2. Experimental setup in Ting and Kirby (1994)

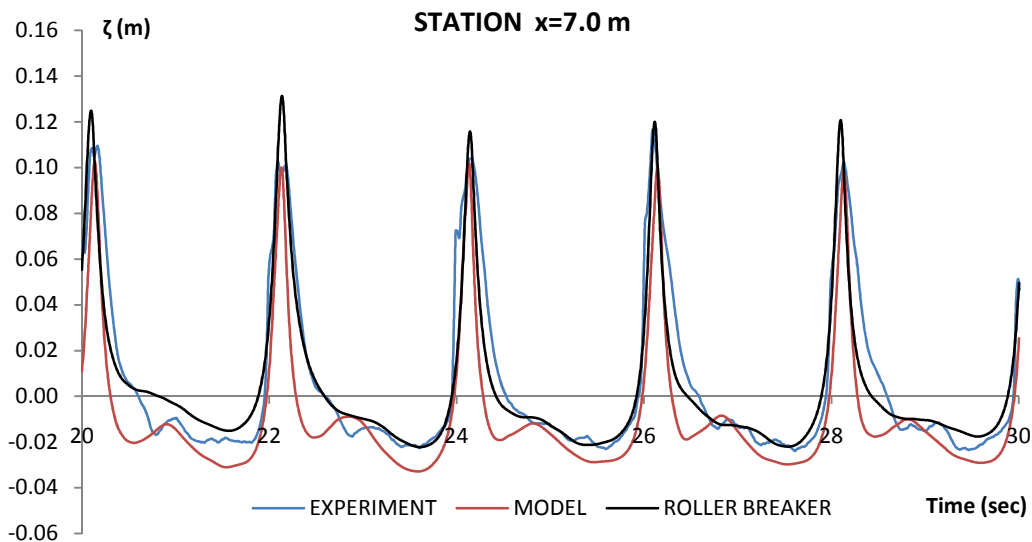


Figure 3. Comparison of timeseries of surface elevation at station $x = 7 \text{ m}$ in Ting and Kirby's experiment (1994)

The surface elevation at station $x = 7 \text{ m}$ (the axis origin is shown in Fig. 2) is shown in Fig. 3. The station is downstream of the incipient breaking point. Results of the proposed model (referred as model) are compared to experimental measurements and the results of Karambas and Memos's (2009) model including the surface roller technique (referred as roller breaker).

The proposed model computes with accuracy the wave crests after the breaking initiation in contrast to the surface roller breaker model which overestimates them. However the proposed model computes slightly narrower wave forms, while the surface roller model describes a little better the wave troughs.

4.2 LINEAR REGULAR WAVES

Another case that was investigated was the propagation and breaking of linear regular waves over a submerged trapezoid bar. The verification refers to Beji and Battjes's (1993) experiment. Here are presented the results for long waves of period $T = 2.5 \text{ sec}$ and height $H = 0.044 \text{ m}$. Breaking is of spilling type and the experiment setup is depicted in Fig. 4.

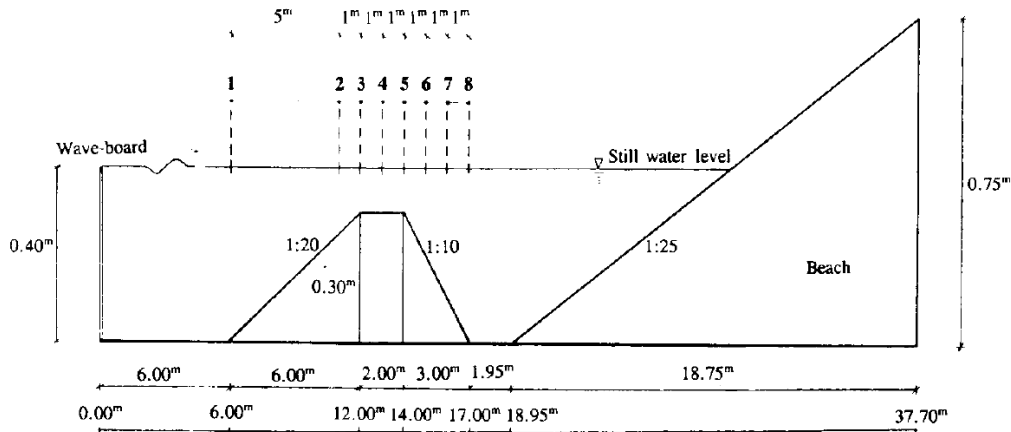
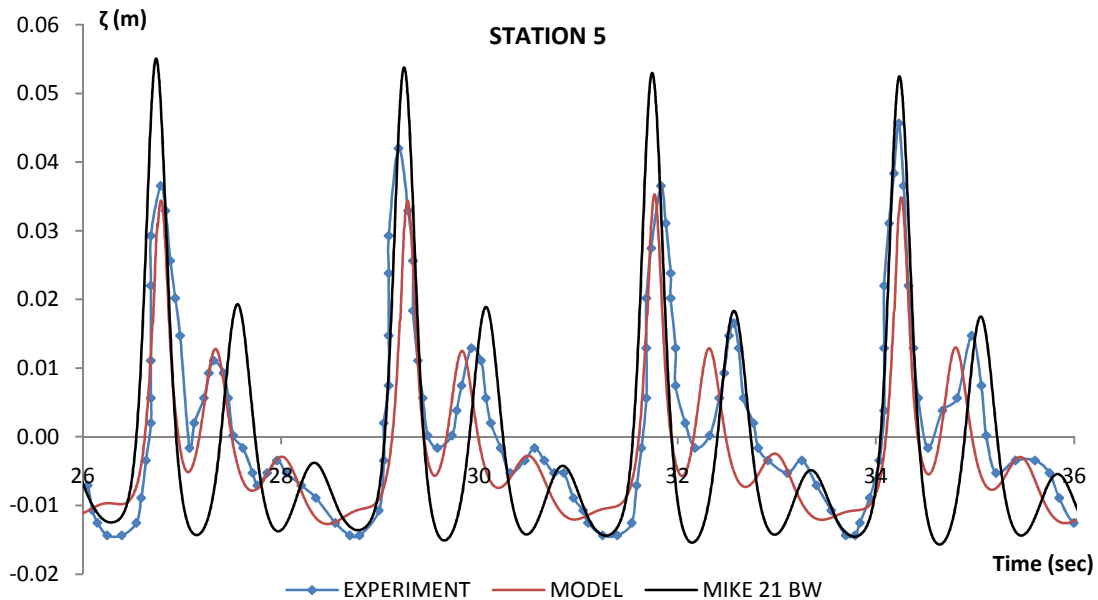


Figure 4. Experimental setup in Beji and Battjes (1993)

Fig. 5 shows the surface elevation at stations 5 and 7 at the bar crest and the downstream slope respectively. Results of the proposed model (referred as model) are compared to experimental measurements and the results of the commercial wave model MIKE 21 BW.



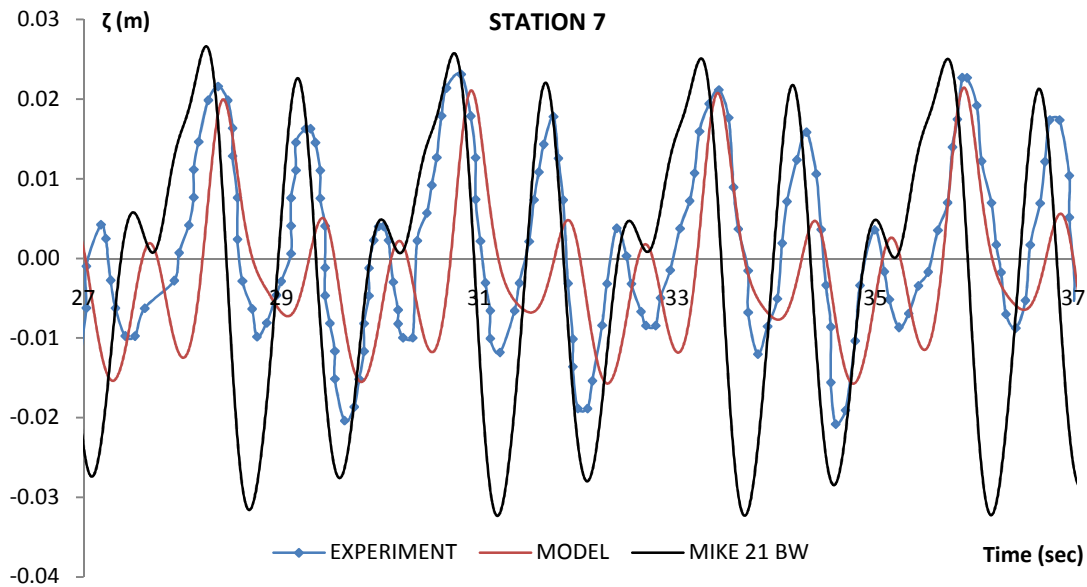


Figure 5. Comparison of timeseries of surface elevation at station 5 (up) and station 7 (down) in Beji and Battjes's experiment (1993)

The results of the proposed model are very satisfactory. On the other hand MIKE 21 BW tends to underestimate energy dissipation due to breaking and so it overestimates wave crests and troughs. Some differences in the free surface form can be observed in both models, especially in the case of station 7. This can be attributed to the fact that conditions after the reef crest become strongly non-linear with energy transfer to higher harmonics and the release of the latter, especially in the case of long waves. Since both models incorporate weakly non-linear effects some deviations of the free surface are expected. However the proposed model shows better response than MIKE 21 BW.

4.3 IRREGULAR WAVES

The model was also verified for the propagation of irregular waves. Here is presented indicatively the verification with Mase and Kirby's (1992) experiment which refers to random waves of Pierson-Moskowitz spectrum with peak period $T_p = 1 \text{ sec}$. The dominant breaking type is spilling and the experimental setup is depicted in Fig. 6.

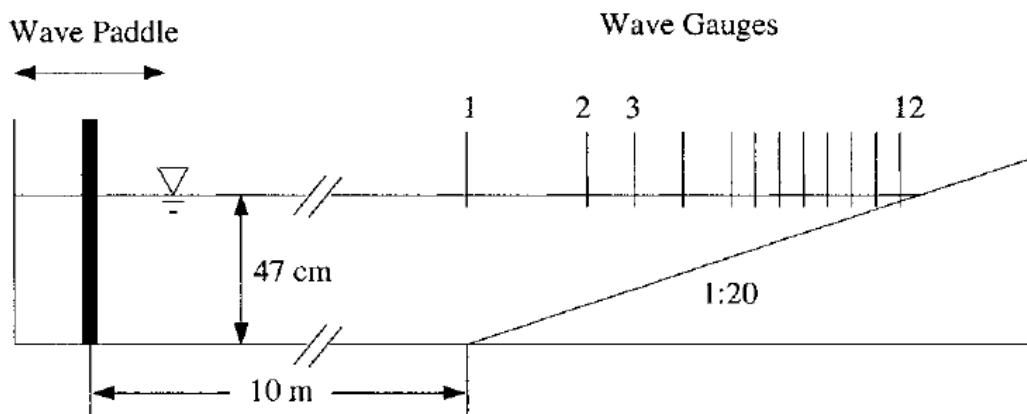


Figure 6. Experimental setup in Mase and Kirby (1992)

Fig. 7 shows the surface elevation at stations 4 and 6. Results of the proposed model (referred as model) are compared to experimental measurements and the results of the commercial wave model MIKE 21 BW. Both models show satisfactory accuracy even though they are weakly non-linear. The proposed model shows slightly better response as concerned the computation of wave crests.

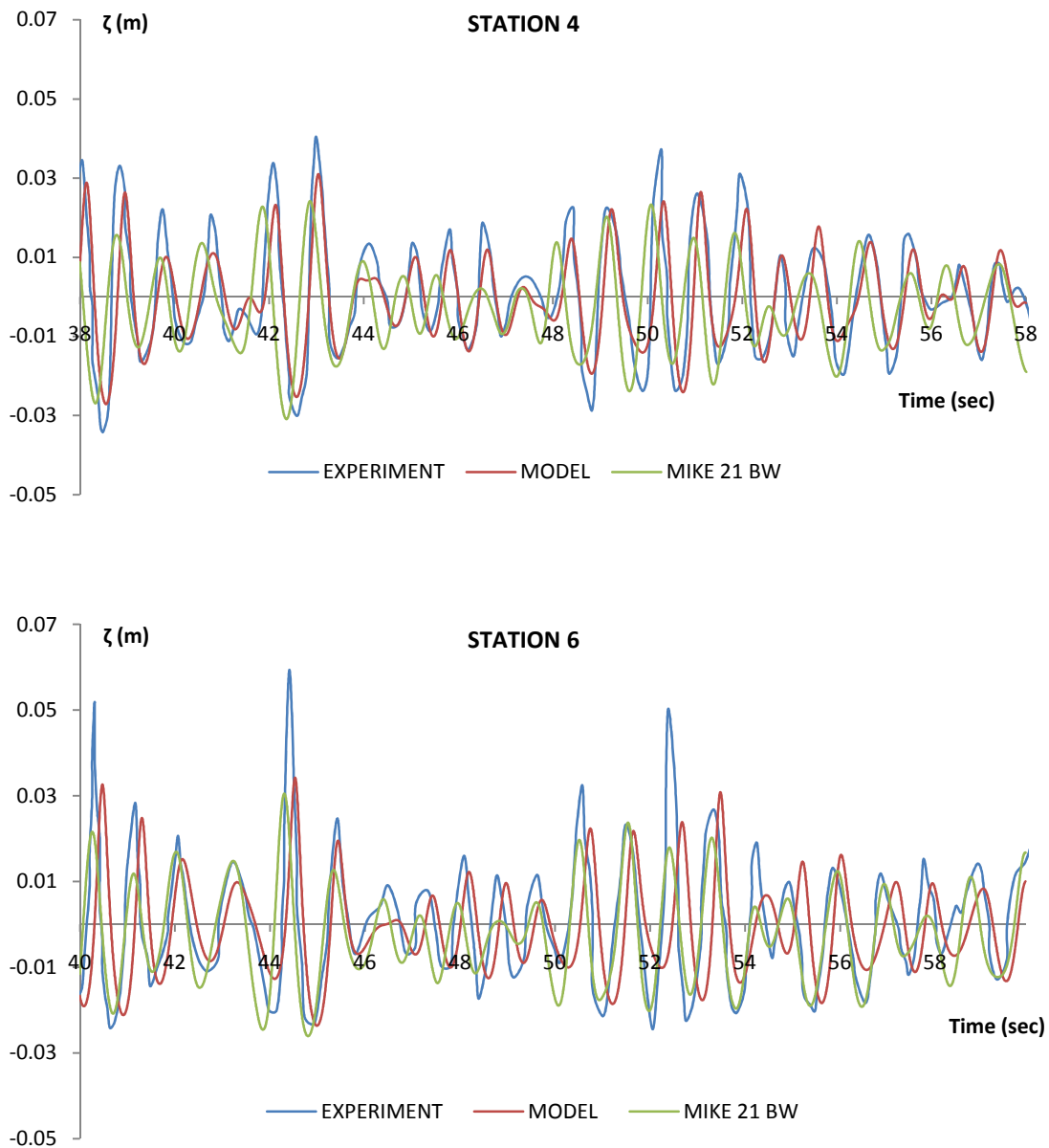


Figure 7. Comparison of timeseries of surface elevation at station 4 (left) and station 6 (right) in Mase and Kirby's experiment (1992)

5. CONCLUSIONS

An extension to Karambas and Memos's (2009) Boussinesq-type model was developed in order to describe the wave-breaking process in one dimension according to a newly presented method. The proposed model ensures overall mass and momentum conservation over a breaking event in contrast to previously proposed breaking models. It was tested for regular and

irregular waves and in general showed improved response when compared to both its previous wave-breaking versions and MIKE 21 BW. The predictor-corrector numerical scheme ensured stability of the solution. Some objectives of a future investigation may be the following:

- Incorporation of higher order non-linear terms in order to simulate more accurately strongly non-linear wave conditions
- Expansion of the aforementioned model for two dimensional (2D) cases
- Incorporation of run-up and run-down simulation
- Combination of the proposed model with a coastal sediment transport model

6. REFERENCES

- Beji, S., Battjes, J.A. (1993). Experimental investigation of wave propagation over a bar. *Coastal Engineering* 19 (1-2), 151-162.
- Cienfuegos R., Barthélemy E. and Bonneton P. (2010). Wave-Breaking Model for Boussinesq-Type Equations Including Roller Effects in the Mass Conservation Equation. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 136(1), 10-26.
- Karambas, Th. V., Koutitas, C., 1992. A breaking wave propagation model based on the Boussinesq equations. *Coastal Engineering* 18 (1-2), 1-19.
- Karambas T.V. and Memos C.D. (2009). Boussinesq Model for Weakly Nonlinear Fully Dispersive Water Waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 135(5), 187-199.
- Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. (2000). "Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. I: 1D". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 126, No. 1, 39-47.
- Mase H. and Kirby J.T. (1992). Hybrid frequency-domain KdV equation for random wave transformation. *Proceedings of the 23rd International Conference of Coastal Engineering, ASCE, Venice*, 474-487.
- Peregrine, D.H., 1967. Long waves on a beach. *Journal of Fluid Mechanics* 27 (4), 815-827.
- Schäffer, H.A., Madsen, P.A., Deigaard, R., 1993. A Boussinesq model for waves breaking in shallow water. *Coastal Engineering* 20 (3-4), 185-202.
- Ting F.C.K. and Kirby J.T. (1994). Observation of undertow and turbulence in a laboratory surf zone. *Coastal Engineering*, 24(1-2), 51-80.
- Wei, G., Kirby, J.T. (1995). Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 121, No. 5, 251-261.
- Wei, G., Kirby, J.T., Sinha, A. (1999). Generation of waves in Boussinesq models using a source function method. *Coastal Engineering* 36 (4), 271-299.
- Yoon, S.-B., Choi, J.-W. (2001). A note on extension of fully dispersive weakly nonlinear wave equations for rapidly varying topography. *Coastal Engineering Journal*, vol. 43 (3), 143-160.
- Zelt, J.A., 1991. The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves. *Coastal Engineering* 15 (3), 205-246.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παράκτια μηχανική και η θαλάσσια υδροδυναμική αποτελούν επιστημονικούς τομείς άμεσου ενδιαφέροντος για το μηχανικό καθότι αποτελούν το γνωστικό υπόβαθρο για το σχεδιασμό και την κατασκευή των λιμενικών έργων, των έργων προστασίας των ακτών και γενικά των θαλάσσιων κατασκευών. Υπό το πρίσμα αυτό η επιστήμη της θαλάσσιας μηχανικής έχει γνωρίσει ραγδαία ανάπτυξη τα τελευταία εξήντα χρόνια, με αποτέλεσμα να αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στην προσπάθεια κατανόησης και περιγραφής των θαλάσσιων φαινομένων που μέχρι τότε αντιμετωπίζονταν με τρόπο εμπειρικό, βάσει της συσσωρευμένης πείρας και των παρατηρήσεων αιώνων.

Οι κυματισμοί που γεννώνται στην ανοιχτή θάλασσα υφίστανται ένα πλήθος φυσικών διεργασιών κατά τη διάδοσή τους, με αποτέλεσμα την έντονη παραμόρφωσή τους, κυρίως στον παράκτιο χώρο. Φαινόμενα όπως η ρήγωση, η διάθλαση, η περίθλαση, η θραύση και η αναρρίχηση στις ακτές καθιστούν απαραίτητη, αλλά και ελκυστική τη συστηματική μελέτη της κυματομηχανικής.

Μέχρι σήμερα έχει αναπτυχθεί ένα πλήθος αναλυτικών θεωριών για την περιγραφή των κυματισμών. Κάθε μία από αυτές βασίζεται σε κάποιες παραδοχές και απλοποιήσεις και συνεπώς έχει ένα συγκεκριμένο πεδίο ισχύος. Οι θεωρίες αυτές αποτέλεσαν για πολλά χρόνια το μοναδικό εργαλείο επιστημονικής προσέγγισης των θαλάσσιων φαινομένων.

Ωστόσο, τα τελευταία τριάντα χρόνια οι σύγχρονες απαιτήσεις και η ραγδαία εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχουν οδηγήσει στην ανάπτυξη και ευρεία εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων διάδοσης κυματισμών. Υπάρχει πληθώρα υπολογιστικών μοντέλων που βασίζονται σε διαφορετικό φυσικό, μαθηματικό και αριθμητικό υπόβαθρο, όπως τα φασματικά μοντέλα, RANS, LES, SPH κλπ. Ίσως τα πιο ευρέως διαδεδομένα με τη μεγαλύτερη πρακτική εφαρμογή είναι τα μοντέλα τύπου Boussinesq. Τα μοντέλα αυτά βασίζονται στην επίλυση των εξισώσεων του Boussinesq (1872), η κλασική μορφή των οποίων είναι αυτή που δόθηκε από τον Peregrine (1967). Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν τη διάδοση μερικώς διασπειρόμενων κυματισμών, σε αντίθεση με τις εξισώσεις ρηχών νερών που δεν περιλαμβάνουν χαρακτηριστικά διασποράς. Από τότε τα μοντέλα Boussinesq έχουν γνωρίσει έντονη ανάπτυξη με κύριες κατευθύνσεις έρευνας τη βελτίωση των χαρακτηριστικών διασποράς και μη-γραμμικότητας. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι αυτό των Karambas και Memos (2009) με χαρακτηριστικά πλήρους διασποράς και ήπιας μη-γραμμικότητας.

Ένα άλλο πεδίο έρευνας σχετικά με τα μοντέλα Boussinesq αφορά στην προσθήκη σε αυτά της προσομοίωσης της θραύσης κυματισμών. Η θραύση είναι ίσως η σημαντικότερη για το μηχανικό φυσική διεργασία, καθότι καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τις υδροδυναμικές φορτίσεις και έμμεσα το σχεδιασμό των τεχνικών έργων. Η θέση εκδήλωσής της ορίζει τις εξής θαλάσσιες ζώνες ιδιαίτερου ενδιαφέροντος: ζώνη πριν τη θραύση, ζώνη θραύσης (surf zone) και ζώνη διαβροχής (swash zone). Η προσομοίωση της θραύσης επιτρέπει στα μοντέλα Boussinesq να περιγράφουν τη διάδοση κυματισμών και εντός της ζώνης θραύσης. Επιπλέον, η προσομοίωση της αναρρίχησης στην ακτή προσφέρει ένα πλήρες και ισχυρό εργαλείο για μια ενιαία αντιμετώπιση της διάδοσης κυματισμών από τα βαθιά ως την ακτή. Αντίθετα με την εφαρμογή των μοντέλων, τα ημι-εμπειρικά κριτήρια θραύσης και οι μέθοδοι μετασχηματισμού και

περιγραφής των κυματισμών εντός της ζώνης θραύσης και διαβροχής σε συνδυασμό με τις αναλυτικές θεωρίες στη ζώνη πριν τη θραύση προσφέρουν μια μερική και τμηματική αντιμετώπιση των φαινομένων.

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές προσομοίωσης της θραύσης με κυριότερες αυτές του επιφανειακού κυλίνδρου και της τυρβώδους συνεκτικότητας. Οι τεχνικές αυτές έχουν ενσωματωθεί στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) από τον Koutsourelakis (2009) και Chondros (2008 (στην αρχική δημοσίευση του μοντέλου), 2010). Οι Cienfuegos et al. (2010) παρουσίασαν μια νέα τεχνική για την προσομοίωση της θραύσης κυματισμών που λαμβάνει υπόψη την επιρροή της και στην εξίσωση συνέχειας, εκτός της εξίσωσης ορμής. Η μέθοδος αυτή συνδυάζει κατά κάποιο τρόπο τις δύο προαναφερθείσες τεχνικές, αλλά βασίζεται σε καλύτερο φυσικό υπόβαθρο από αυτές.

Αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας αποτελεί η εφαρμογή της νέας αυτής προσέγγισης προσομοίωσης της θραύσης στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009). Η εργασία αυτή εντάσσεται στη γενικότερη έρευνα σχετικά με τα μοντέλα τύπου Boussinesq που φαίνεται να αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο με εφαρμογή στο παρόν και στο μέλλον.

Ο στόχος της εργασίας είναι πολλαπλός. Καταρχάς, διερευνάται η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης τεχνικής προσομοίωσης της θραύσης. Ερευνάται δηλαδή η ακρίβεια του μοντέλου μέσω σύγκρισης με πειραματικές καταγραφές. Επιπλέον, εξετάζεται η συμπεριφορά της προσθήκης της θραύσης στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) μελετώντας έννοιες όπως η σύγκλιση και η ευστάθεια του τροποποιημένου μοντέλου. Επίσης, γίνεται σύγκριση με τις προηγούμενες εκδόσεις του μοντέλου με τις άλλες τεχνικές προσομοίωσης της θραύσης ώστε να ελεγχθεί κατά πόσο η προτεινόμενη τεχνική δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα. Σύγκριση του προτεινόμενου μοντέλου επιχειρείται και με το εμπορικό μοντέλο MIKE 21 BW ώστε να βγουν συμπεράσματα σε σχέση και με ένα κοινώς αποδεκτό και ευρέως χρησιμοποιούμενο πρόγραμμα. Ένας άλλος στόχος της εργασίας είναι η διερεύνηση και βαθμονόμηση των εμπλεκόμενων στην προσομοίωση παραμέτρων με σκοπό τη βελτίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων. Τέλος, η εργασία στοχεύει στο να διαπιστωθούν τα όρια εφαρμογής του μοντέλου, να εξαχθούν συμπεράσματα και να διατυπωθούν προτάσεις σχετικά με την περαιτέρω επέκταση του μοντέλου των Karambas και Memos (2009). Αξίζει πάντως να σημειωθεί ότι η εν λόγω εργασία εκπονείται σε επίπεδο μεταπτυχιακού προγράμματος, προδιαγράφοντας έτσι τα όρια και το επίπεδο εμβάθυνσης της αντίστοιχης έρευνας.

Η εργασία διαρθρώνεται σε οκτώ κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό και αναφέρεται αρχικά στις διάφορες θεωρίες απλών κυματισμών. Επιχειρείται μία περιγραφή των κυριότερων εξ αυτών και παρουσιάζονται τα όρια ισχύος της κάθε μίας. Επίσης, παρουσιάζεται σύντομα η φασματική και στατιστική περιγραφή των σύνθετων κυματισμών. Επιπλέον, γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των κυριότερων τύπων μαθηματικών μοντέλων και το κεφάλαιο κλείνει με μια μικρή αναφορά στα φυσικά μοντέλα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια εμβάθυνση στα μοντέλα τύπου Boussinesq. Επιχειρείται μια σύντομη περιγραφή των κυριότερων εργασιών σχετικά με αυτά τα μοντέλα, κυρίως όσον αφορά στα χαρακτηριστικά διασποράς και μη-γραμμικότητας. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια αναφορά στις κυριότερες προσθήκες στα μοντέλα Boussinesq, όπως η τριβή πυθμένα, η αναρρίχηση στην ακτή και οι οριακές συνθήκες.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται αρχικά το μοντέλο των Tsutsui et al. (1998) που είναι παρεμφερές με το παρόν μοντέλο. Στην συνέχεια αναπτύσσεται το μοντέλο των Karambas και

Memos (2009) που αποτελεί τη βάση της μεταπτυχιακής εργασίας. Γίνεται επιπλέον μία διερεύνηση των ιδιοτήτων του μοντέλου, καθώς μελετώνται έννοιες όπως η ευστάθεια, η ακρίβεια, η σύγκλιση, η συνέπεια και ο υπολογιστικός χρόνος. Επίσης, παρουσιάζεται η επαλήθευση της βασικής μορφής του μοντέλου, όπως έγινε από τους Karambas και Memos κατά τη δημοσίευση του το 2009. Τέλος, παρουσιάζεται η προσθήκη της τριβής πυθμένα, όπως έγινε από τον Koutsourelakis (2009), χωρίς αυτή όμως να εφαρμόζεται στην παρούσα εργασία.

Το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στη θραύση των κυματισμών. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγική περιγραφή του φαινομένου της θραύσης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικές σχέσεις και κριτήρια θραύσης για απλούς και σύνθετους κυματισμούς, καθώς και οι διάφορες μέθοδοι μετασχηματισμού εντός της ζώνης θραύσης. Στις επόμενες παραγράφους περιγράφονται οι κυριότερες τεχνικές προσομοίωσης της θραύσης στα μοντέλα Boussinesq. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται το μοντέλο του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller model) και της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity model) που έχουν ενσωματωθεί παλαιότερα στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009), καθώς και το μοντέλο θραύσης της στροβιλότητας (vorticity wave-breaking model).

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά η προτεινόμενη τεχνική προσομοίωσης της θραύσης σύμφωνα με την εργασία των Cienfuegos et al. (2010). Μέσα από ενεργειακούς συλλογισμούς προκύπτουν οι όροι θραύσης και γίνεται βαθμονόμηση των σχετιζόμενων παραμέτρων.

Στο έκτο κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση του εμπορικού μοντέλου MIKE 21 BW που εφαρμόστηκε στην εργασία για συγκριτικούς λόγους. Αρχικά γίνεται μια γενική περιγραφή του προγράμματος και στη συνέχεια παρουσιάζονται οι γενικές εξισώσεις, η προσομοίωση της θραύσης, οι οριακές συνθήκες και το αριθμητικό σχήμα επίλυσης. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την περιγραφή της εφαρμογής του MIKE 21 BW ενδεικτικά για το πείραμα του Wallingford (1997) που είναι ένα από τα πειράματα επαλήθευσης που χρησιμοποιούνται στην εργασία. Η εφαρμογή του προγράμματος για τα υπόλοιπα πειράματα γίνεται κατά παρόμοιο τρόπο.

Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου. Γίνεται σύγκριση με πειραματικές καταγραφές, το MIKE 21 BW (1DH) και τις προηγούμενες εκδόσεις του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου και της τυρβώδους συνεκτικότητας. Τα πειράματα επαλήθευσης περιλαμβάνουν απλούς μονοχρωματικούς κυματισμούς, κυματισμούς cnoidal, μοναχικό κύμα, σύνθετους κυματισμούς φάσματος Pierson-Moskowitz και σύνθετους κυματισμούς φάσματος Jonswap.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας. Αρχικά αναφέρονται κάποια γενικά συμπεράσματα για τις κυματικές θεωρίες και τα μοντέλα Boussinesq. Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια συμπεράσματα σχετικά με το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) και το πρόγραμμα MIKE 21 BW (1DH). Το κεφάλαιο κλείνει με κάποιες προτάσεις για μελλοντική έρευνα και επέκταση του παρουσιαζόμενου μοντέλου.

Τα πρόσφατα δυσάρεστα γεγονότα με το καταστροφικό tsunami στην Ιαπωνία το 2011 και στην Ινδονησία το 2004 καθιστούν προφανή την ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση και κατανόηση του θαλάσσιου περιβάλλοντος και της κυματομηχανικής. Τα μαθηματικά μοντέλα τύπου Boussinesq αποτελούν ένα δυναμικό πεδίο έρευνας της θαλάσσιας υδροδυναμικής. Βρίσκουν ολοένα και μεγαλύτερη εφαρμογή και αποτελεί επιστημονική πρόκληση η τελειοποίησή τους. Στην κατεύθυνση αυτή εντάσσεται και η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΘΕΩΡΙΕΣ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

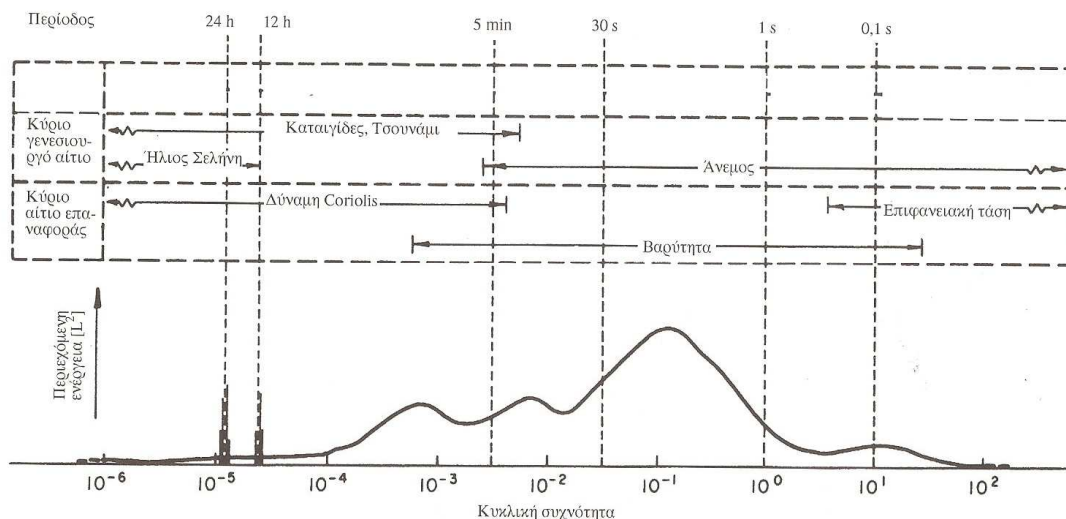
Σε κάθε συνεχές παραμορφώσιμο μέσο ως κυματισμοί μπορεί να οριστούν όλες οι μη μόνιμες περιοδικές διαταραχές της θέσεως των μορίων του γύρω από μια θέση ισορροπίας στο εσωτερικό ή την επιφάνειά του.

Η ταυτόχρονη δράση δυνάμεων απομακρύνσεως των υδάτινων σωματιδίων της θαλάσσιας μάζας από τη θέση ηρεμίας τους (γενεσιουργές δυνάμεις) και δυνάμεων επαναφοράς στις αρχικές θέσεις τους (επαναφέρουσες δυνάμεις), σε συνδυασμό με τη μεγάλη κινητικότητα των σωματιδίων, προκαλεί κάτω από ορισμένες συνθήκες τη δημιουργία κινήσεων ταλαντώσεως. Η συνισταμένη διαταραχή της θαλάσσιας μάζας από τις ταλαντώσεις των σωματιδίων οδηγεί στο θαλάσσιο κυματισμό.

Τα κυριότερα γενεσιουργά αίτια των ταλαντώσεων είναι ο άνεμος (ανεμογενείς κυματισμοί), οι σεισμικές δονήσεις ή υποθαλάσσιες κατολισθήσεις (tsunamis), οι γρήγορες μεταβολές της ατμοσφαιρικής πίεσης (seiches), η έλξη των ουράνιων σωμάτων (αστρονομική παλίρροια) κλπ. Οι κυριότερες επαναφέρουσες δυνάμεις προέρχονται από τη βαρύτητα, τη δύναμη Coriolis και την επιφανειακή τάση. Η δύναμη Coriolis υπεισέρχεται στους κυματισμούς μεγάλης κλίμακας, ενώ η επιφανειακή τάση υπεισέρχεται στους κυματισμούς μικρής κλίμακας με μήκος κύματος μερικά μόνο εκατοστά.

Μπορεί οι μηχανισμοί πρόκλησης των θαλάσσιων κυματισμών να ποικίλουν, όμως η χωροχρονική εξέλιξή τους καθορίζεται από την επίδραση της μαζικής δύναμης της βαρύτητας. Για το λόγο αυτό από φυσική άποψη κατατάσσονται όλοι στην κατηγορία των κυματισμών βαρύτητας. Ειδικότερα στις παράκτιες θαλάσσιες μάζες ιδιαίτερα σημαντικές για τα θαλάσσια τεχνικά έργα είναι οι διαταραχές της επιφάνειάς τους που διέπονται από τη δύναμη της βαρύτητας. Είναι γνωστές ως επιφανειακοί θαλάσσιοι κυματισμοί και το μηχανικό ενεργειακό περιεχόμενό τους είναι ο σημαντικότερος παράγων φορτίσεως των τεχνικών έργων που σχεδιάζουν και υπολογίζουν οι πολιτικοί μηχανικοί.

Στο σχήμα 1.1 φαίνεται η κατανομή του ενεργειακού περιεχομένου (ανάλογου του H^2 , όπου H το ύψος κύματος) στις διάφορες περιόδους κυματισμών. Η κατανομή αναφέρεται στο σύνολο των θαλάσσιων περιοχών της γης. Φαίνεται ότι τα μεγαλύτερα ποσοστά μηχανικής ενέργειας συγκεντρώνονται στους ανεμογενείς κυματισμούς (περίοδος ως 15 sec) και στους παλίρροιακούς κυματισμούς ($T=40000-80000$ sec). Τέλος, στον πίνακα 1.1 αναφέρονται τα διάφορα φυσικά φαινόμενα του θαλάσσιου χώρου με τα γενεσιουργά τους αίτια κατά σειρά ανάλογη προς τη χρονική τους κλίμακα.



Σχήμα 1.1: Κατανομή ενεργειακού περιεχομένου στις διάφορες περιόδους (πηγή: [93])

Φαινόμενα	Γενεσιουργό αίτιο	Χρονική κλίμακα (περίοδος)
Ανεμογενείς κυματισμοί Βουβός κυματισμός (swell)	Διάτμηση-πίεση ανέμου στην επιφ. Ανεμογενείς κυματισμοί μακρουλής προέλευσης	1 ÷ 15 sec 15 ÷ 30 sec
Διακροτήματα ζώνης θραύσεως Seiche	Ομαδοποίηση θραυόμενων κυματισμών	1 ÷ 5 min
Συντονισμός λεκανών Tsunami	Διακυμάνσεις ταχύτητας-ανέμου, ατμοσφαιρικής πίεσεως Tsunami κλπ. Υποθαλάσσιοι σεισμοί κλπ.	2 ÷ 40 min 2 ÷ 40 min 15 ÷ 60 min
Παλίρροια Φουσκοθαλασσιά λόγω θύελλας	Επίδραση σελήνης ηλίου στο πεδίο βαρύτητας της γης Διάτμηση ανέμου και ατμοσφαιρικές υποπίεσεις στην επιφάνεια της θάλασσας	12 ÷ 24 hrs 1 ÷ 30 μέρες

Πίνακας 1.1: Γενεσιουργά αίτια κυματισμών και αντίστοιχη χρονική κλίμακα (πηγή: [92])

1.2 ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ- ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Κατά την ανάπτυξη των μαθηματικών θεωριών περιγραφής των κυματισμών, όπως εξετάζονται στο παρόν κεφάλαιο, θεωρείται ότι οι ταλαντώσεις των σωματιδίων είναι μόνιμες χωρίς απόσβεση. Κατά συνέπεια, θεωρείται ότι τα κύματα μεταδίδονται εκτός της περιοχής γένεσης, ανάπτυξης ή απόσβεσής τους. Έστω, στη γενική περίπτωση ενός τυχαίου ρευστού χωρίς τριβές με ελεύθερη επιφάνεια, ένας ορισμένος όγκος του V , μάζας M , με μηδενική συνεκτικότητα, στον καρτεσιανό χώρο και εμβαδόν περιβάλλουσας επιφάνειας S . Έστω ακόμη, ότι \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην S , $\rho=\rho(x,y,z,t)$ η πυκνότητα του ρευστού και ότι ο όγκος κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = (u, v, w)$. Αν υποθεθεί ότι δε λαμβάνει χώρα δημιουργία ή απώλεια μάζας, η αρχή διατήρησης της μάζας οδηγεί στην εξίσωση:

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1.1)$$

Στη συνέχεια γίνονται οι παρακάτω παραδοχές:

- Ρευστό ομοιογενές
- Ρευστό ασυμπύεστο
- Αστρόβιλη ροή
- Σταθερό βάθος και αδιαπέρατος πυθμένας

Βάσει των παραπάνω παραδοχών προκύπτει από τη διανυσματική ανάλυση ότι η ταχύτητα προέρχεται από βαθμωτό δυναμικό:

$$\vec{v} = \text{grad}\Phi = \nabla\Phi \quad (1.2)$$

Λόγω των παραδοχών και της (1.2), η εξίσωση (1.1) τελικά γράφεται:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.3\alpha)$$

ή

$$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.3\beta)$$

όπου ∇ ο τελεστής βαθμίδας $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ στις τρεις διευθύνσεις. Η εξίσωση (1.3β) είναι η εξίσωση Laplace και ισχύει σε ολόκληρο το πεδίο ροής.

Από την εξίσωση διατήρησης της ορμής για δισδιάστατη ροή στο κατακόρυφο επίπεδο x-z, θεωρώντας μόνο την επίδραση των δυνάμεων βαρύτητας, προκύπτουν οι εξισώσεις Euler:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.4\alpha)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.4\beta)$$

όπου $p=p(x,z,t)$ η πίεση.

Ολοκληρώνοντας τις (1.4α),(1.4β) και χρησιμοποιώντας την περιορισμένη στο επίπεδο x-z (1.3β), προκύπτει η εξίσωση Bernoulli:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz + \frac{p}{\rho} = C(t) \quad (1.5)$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης $C(t)$ μπορεί να ληφθεί ίση με μηδέν.

Οριακή συνθήκη πυθμένα

Επειδή ο πυθμένας θεωρείται αδιαπέρατος, ισχύει η συνθήκη μηδενικής ροής:

$$w=0 \text{ στο } z=-h \quad (1.6\alpha) \quad (\text{όπου } h \text{ το σταθερό βάθος του πεδίου})$$

ή

$$\frac{d\Phi}{dz} = 0 \text{ στο } z=-h \quad (1.6\beta)$$

Οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας

Στην ελεύθερη επιφάνεια πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής δύο συνθήκες:

- Κινηματική οριακή συνθήκη: ένα σωματίδιο της ελεύθερης επιφάνειας παραμένει διαρκώς εκεί, δηλαδή:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial x} \text{ στο } z=n(x,t) \quad (1.7\alpha)$$

- Δυναμική οριακή συνθήκη: η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι ίση με μηδέν (ατμοσφαιρική πίεση):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gn = C(t) = 0 \text{ στο } z=n(x,t) \quad (1.7\beta)$$

Οριακές συνθήκες περιοδικότητας

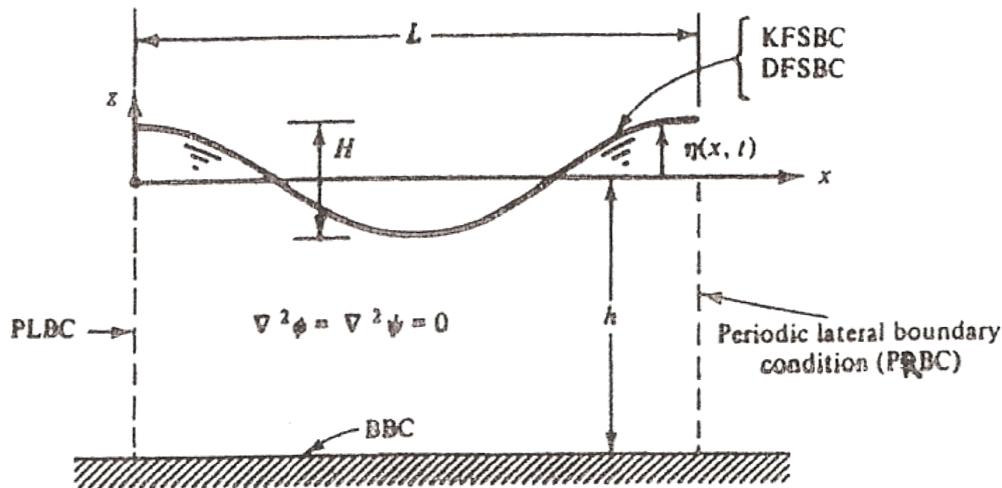
Αν ο διαδιδόμενος κυματισμός είναι περιοδικός ως προς το χρόνο και το χώρο, ισχύουν οι επιπλέον οριακές συνθήκες:

$$\Phi(x,z,t) = \Phi(x+L,z,t) \quad (1.8\alpha)$$

$$\Phi(x,z,t) = \Phi(x,z,t+T) \quad (1.8\beta)$$

όπου L το μήκος κύματος και T η περίοδος του κύματος.

Στο σχήμα 1.2 απεικονίζονται όλες οι χρησιμοποιούμενες μεταβλητές της παραπάνω ανάλυσης.



Σχήμα 1.2: Χρησιμοποιούμενες μεταβλητές (πηγή: [43])

1.3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

Ένας βασικός διαχωρισμός των κυματισμών είναι σε απλούς και σύνθετους (random waves). Οι απλοί κυματισμοί μπορούν επιπλέον να διαχωριστούν σε γραμμικούς και μη γραμμικούς κυματισμούς. Όπως αναφέρεται παρακάτω, ο όρος γραμμικός κυματισμός αναφέρεται στη δυνατότητα γραμμικοποίησης των οριακών συνθηκών (1.7α) και (1.7β) με αποτέλεσμα οι κυματισμοί αυτής της κατηγορίας να περιγράφονται από μία απλή αρμονική (ημιτονοειδή) συνάρτηση. Ιδιότητά τους είναι η συμμετρία τόσο στον κατακόρυφο (Oz), όσο και στον οριζόντιο (Ox) άξονα. Αντίθετα, οι μη γραμμικοί κυματισμοί εμφανίζουν ασυμμετρία κατά τις δύο διευθύνσεις και δεν περιγράφονται από μία απλή αρμονική συνάρτηση. Οι σύνθετοι ή πραγματικοί κυματισμοί μπορεί να είναι τρισδιάστατοι και προέρχονται από την επαλληλία πολλών απλών κυματισμών με διαφορετικά χαρακτηριστικά (ύψη, περίοδοι, διευθύνσεις διάδοσης). Οι σύνθετοι κυματισμοί είναι αυτοί που συναντώνται κατά κανόνα στη φύση και η μελέτη τους γίνεται με στατιστικές μεθόδους και όχι με αναλυτικές.

1.3.1 ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ (Airy ή Stokes 1^{ης} τάξης)

Η κλασική θεωρία γραμμικών κυματισμών απειροστού πλάτους βασίζεται στις παραδοχές μικρών τιμών των λόγων $\varepsilon = H/d$ και H/L ($\ll 1$) και αμελητέων δυνάμεων ιξώδους (και κατά δυνατότητα αστρόβιλης ροής).

Οι παραδοχές αυτές επιτρέπουν τη γραμμικοποίηση των οριακών συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας (1.7α) και (1.7β) διατηρώντας μόνο όρους πρώτης τάξης. Έτσι, οι νέες αυτές οριακές συνθήκες σε συνδυασμό με την οριακή συνθήκη πυθμένα, τις συνθήκες περιοδικότητας και την εξίσωση Laplace αποτελούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει στη θεωρία

Airy τη διάδοση των κυματισμών. Η επίλυση γίνεται με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών και οδηγεί στις αναλυτικές σχέσεις [43]:

$$\Phi = \frac{Hg}{2\omega} \cdot \frac{\cosh[k(d+z)]}{\cosh(kd)} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (1.9)$$

και

$$\zeta = \frac{H}{2} \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (1.10)$$

όπου ζ η διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, H το ύψος κύματος, $\omega=2\pi/T$ η γωνιακή συχνότητα, d το βάθος και $k=2\pi/L$ ο κυματαριθμός (wavenumber).

Με αντικατάσταση των (1.9) και (1.10) στην κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας προκύπτει η εξίσωση:

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (1.11)$$

που είναι γνωστή ως εξίσωση διασποράς γιατί στην παράγωγη μορφή

$$c = \frac{gT}{2\pi} \cdot \tanh(kd) \quad (1.12)$$

υποδηλώνει ότι η φασική ταχύτητα είναι αύξουσα συνάρτηση της περιόδου του κύματος και κατά συνέπεια ένας κυματισμός που συντίθεται από μία σειρά ημιτονοειδών κυμάτων με διαφορετικές περιόδους T_1, T_2, \dots κατά τη διάδοσή του διασπείρεται καθώς οι συνιστώσες με τις μεγαλύτερες περιόδους διαδίδονται ταχύτερα από ότι αυτές με τις μικρότερες περιόδους. Από την εξίσωση διασποράς προκύπτει και η σχέση (1.13) για το μήκος κύματος:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \cdot \tanh(kd) \quad (1.13)$$

Από τη συνάρτηση δυναμικού Φ προκύπτουν οι συνιστώσες (u, w) της ταχύτητας των μορίων του νερού και τα ολοκληρώματά τους γύρω από τη θέση ισορροπίας, δηλαδή οι συνιστώσες μετατοπίσεως ξ και ζ .

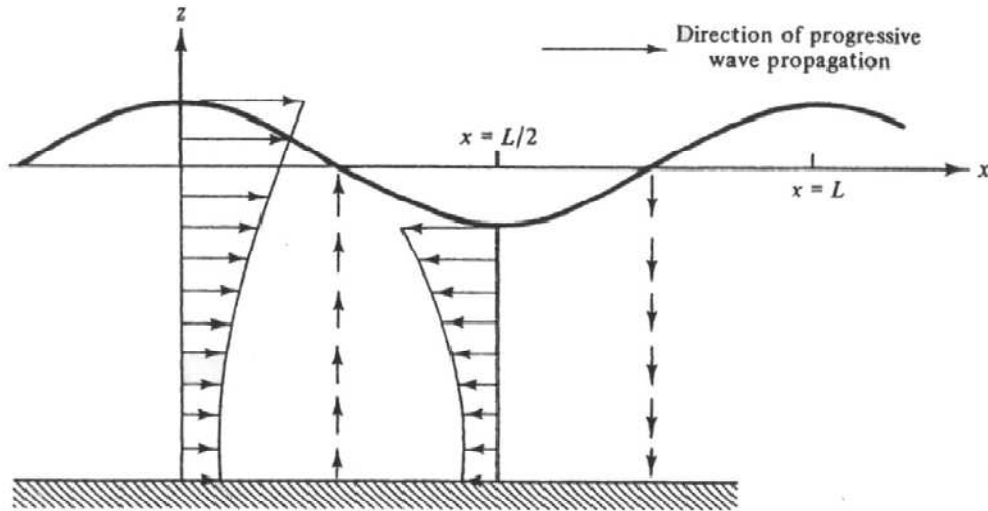
$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (1.14)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\sinh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (1.15)$$

$$\xi = \int u dt = -\frac{H}{2} \cdot \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (1.16)$$

$$\zeta = \int w dt = \frac{H}{2} \cdot \frac{\sinh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (1.17)$$

Στο σχήμα 1.4 φαίνεται η κατανομή της ταχύτητας συναρτήσει του βάθους σε τέσσερις χαρακτηριστικές φάσεις.



Σχήμα 1.4: Κατανομή ταχυτήτων μορίων νερού συναρτήσει του βάθους (πηγή: [43])

Οι εξισώσεις (1.14),(1.15),(1.16) και (1.17) ισχύουν γενικά στο πεδίο ροής. Ωστόσο, επειδή η τιμή του $\tanh(kd)$ τείνει ασυμπτωτικά προς τη μονάδα στην περίπτωση των βαθιών νερών και προς το όρισμα (kd) στην περίπτωση των ρηχών νερών, οι εξισώσεις απλοποιούνται παίρνοντας τις εξισώσεις "βαθιών" ($\frac{d}{L} > 0.5$) και "ρηχών" ($\frac{d}{L} < 0.05$) νερών αντίστοιχα (πίνακας 1.2).

Με αντικατάσταση της συνάρτησης δυναμικού και των συνιστωσών της ταχύτητας στην εξίσωση Bernoulli προκύπτει η κατανομή της πίεσης στο βάθος. Η πίεση συντίθεται από δύο συνιστώσες την υδροστατική και την υδροδυναμική. Η υδροδυναμική συνιστώσα είναι φθίνουσα συνάρτηση του βάθους και γίνεται ανεπαίσθητη σε βάθος $d > \frac{L}{2}$.

$$p = \underbrace{-\rho g z}_{\text{υδροστατική}} + \underbrace{\frac{\rho g H}{2} \cdot \frac{\cosh[k(d+z)]}{\cosh(kd)} \cdot \cos(kx - \omega t)}_{\text{υδροδυναμική}} \quad (1.18)$$

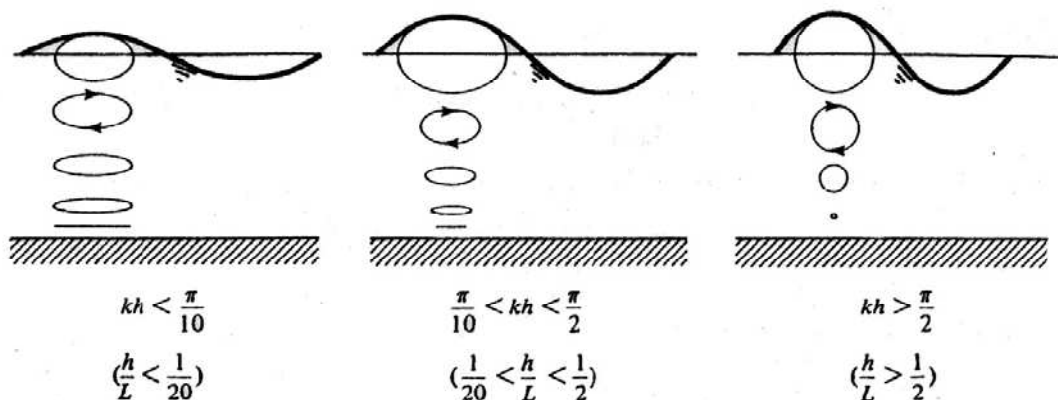
Τέλος, σημαντικό μέγεθος είναι η πυκνότητα ενέργειας \bar{E} που ορίζεται ως το ενεργειακό περιεχόμενο στήλης νερού με κάτοψη ίση προς 1 m^2 και κατά μέσο όρο κατά την περίοδο του κύματος βρίσκεται ίσο προς:

$$\bar{E} = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (1.19)$$

ΣΧΕΤΙΚΟ ΒΑΘΟΣ $\frac{d}{L}$	ΡΗΧΑ ΝΕΡΑ $\frac{d}{L} \leq \frac{1}{20}$	ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ ΝΕΡΑ $\frac{1}{20} < \frac{d}{L} < \frac{1}{2}$	ΒΑΘΙΑ ΝΕΡΑ $\frac{d}{L} \geq \frac{1}{2}$
ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΦΑΣΗΣ	$c = \sqrt{gd}$	$c = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kd)$	$c = c_0 = \frac{gT}{2\pi}$
ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ	$L = T\sqrt{gd}$	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kd)$	$L = L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$
ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΟΜΑΔΑΣ	$c_g = c = \sqrt{gd}$	$c_g = n \cdot c = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)}\right) \cdot c$	$c_g = \frac{c}{2}$
ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ	$u = \frac{\pi H}{T} \frac{1}{kd} \cos(kx - \omega t)$	$u = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \omega t)$	$u = \frac{\pi H}{T} e^{kz} \cos(kx - \omega t)$
ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ	$w = \frac{\pi H}{T} \left(1 + \frac{z}{d}\right) \sin(kx - \omega t)$	$w = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\sinh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \omega t)$	$w = \frac{\pi H}{T} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$
ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ	$\xi = \frac{H}{2} \frac{1}{kd} \sin(kx - \omega t)$	$\xi = \frac{H}{2} \cdot \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \omega t)$	$\xi = \frac{H}{2} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$
ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ	$\zeta = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{z}{d}\right) \cos(kx - \omega t)$	$\zeta = \frac{H}{2} \cdot \frac{\sinh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \omega t)$	$\zeta = \frac{H}{2} e^{kz} \cos(kx - \omega t)$

Πίνακας 1.2: Εξισώσεις χαρακτηριστικών μεγεθών κυματισμών

Παρατηρώντας τις εξισώσεις του πίνακα 1.2 προκύπτει ότι σύμφωνα με τη θεωρία γραμμικών κυματισμών απειροστού πλάτους, οι τροχιές των υγρών σωματιδίων είναι κλειστές με περίοδο επαναφοράς την περίοδο κυματισμού T . Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.5, στα βαθιά νερά οι τροχιές είναι κυκλικές, ενώ στα νερά ενδιάμεσου βάθους και στα ρηχά νερά είναι ελλειπτικές. Επομένως, μπορεί να γίνει δεκτό ότι δεν εμφανίζεται μεταφορά μάζας κατά την κίνηση των κυματισμών.



Σχήμα 1.5: Σχηματική αναπαράσταση τροχιών σωματιδίων νερού (πηγή: [43])

1.3.2 ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ

Για τη συμπερίληψη των μη-γραμμικών όρων της δυναμικής και κινηματικής συνθήκης επιφανείας και για την περιγραφή των κυματισμών στα ρηχά νερά όπου το πλάτος του κύματος (το μισό του ύψους κύματος) είναι μη αμελητέο ποσοστό του βάθους του νερού έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες. Οι πιο σημαντικές είναι οι θεωρίες Stokes ανώτερης τάξης (κυρίως δεύτερης, τρίτης και πέμπτης τάξης), η θεωρία κυματισμών ελλειπτικού συνημιτόνου (cnoidal waves), η θεωρία μοναχικού κύματος (solitary wave) και η πιο πρόσφατη θεωρία της ροϊκής συνάρτησης (stream function). Οι μη-γραμμικές θεωρίες περιγράφουν καλύτερα από τη θεωρία Airy το μη συμμετρικό προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας κατά την οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση.

Οι θεωρίες Stokes ανώτερης τάξης αναπτύχθηκαν και εφαρμόζονταν κυρίως σε σχέση με τις κατασκευές στην ανοιχτή θάλασσα. Η γραμμική θεωρία Airy συμπίπτει με τη θεωρία Stokes πρώτης τάξης. Η θεωρία κυματισμών ελλειπτικού συνημιτόνου εφαρμόζεται για την περιγραφή της διάδοσης στα ρηχά νερά κυματισμών πεπερασμένου πλάτους και η θεωρία μοναχικού κύματος για την περιγραφή της διάδοσης σεισμογενών κυματισμών (μοναχικών παλμών που προκαλούνται από μετατοπίσεις ορίων ακτής ή πυθμένα) και τη θραύση των κυματισμών στις ακτές.

1.3.2.1 Θεωρίες Stokes ανώτερης τάξης

Παρά τη γραμμικοποίηση των οριακών συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας (αμελώντας τους διαφορικούς όρους ανώτερης από την πρώτη τάξης), δεν είναι δυνατή η εξεύρεση αναλυτικής λύσης του προβλήματος. Έτσι, γίνεται μια δεύτερη απλοποίηση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μικρών διαταραχών (perturbation method). Συγκεκριμένα, η αδιάστατη συνάρτηση δυναμικού φ και η αδιάστατη συνάρτηση της ελεύθερης επιφάνειας Π αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές μιας μικρής παραμέτρου ε . Κατά την ανάλυση αυτή του Stokes συνήθως επιλέγεται η αδιάστατη παράμετρος $\varepsilon = \alpha k < 1$ ($k = \frac{2\pi}{L}$ και $\alpha = \frac{H}{2}$), οπότε $\varepsilon = \frac{H}{L}$. Συνεπώς:

$$\varphi = \varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (\varepsilon^{i-1} \cdot \varphi_i) \tag{1.20}$$

$$\Pi = \Pi_1 + \varepsilon\Pi_2 + \varepsilon^2\Pi_3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (\varepsilon^{i-1} \cdot \Pi_i) \tag{1.21}$$

όπου $\varphi = \frac{k\Phi}{\alpha\sqrt{gk}}$ και $\Pi = \frac{\zeta}{\alpha}$.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.20) και (1.21) στις μη γραμμικές αδιαστατοποιημένες συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας, διαχωρίζοντας τους όρους ίδιας τάξης ως προς την παράμετρο ανάπτυξης σε σειρά ε και επειδή κάθε ένα από τα δυναμικά ($\varepsilon^{i-1}\varphi_i$) πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, προκύπτουν οι συντελεστές των όρων 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} κλπ. τάξης. Οι θεωρίες Stokes δίνουν ακριβέστερα αποτελέσματα κυρίως σε νερά ενδιαμέσου βάθους, ενώ οι θεωρίες μοναχικού κύματος και ελλειπτικού συνημιτόνου εφαρμόζονται κυρίως σε ρηχά νερά.

Θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης

Στη θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης (1847) διατηρούνται στις δυναμοσειρές (1.20) και (1.21) οι όροι:

$$\varphi = \varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 \quad (1.22)$$

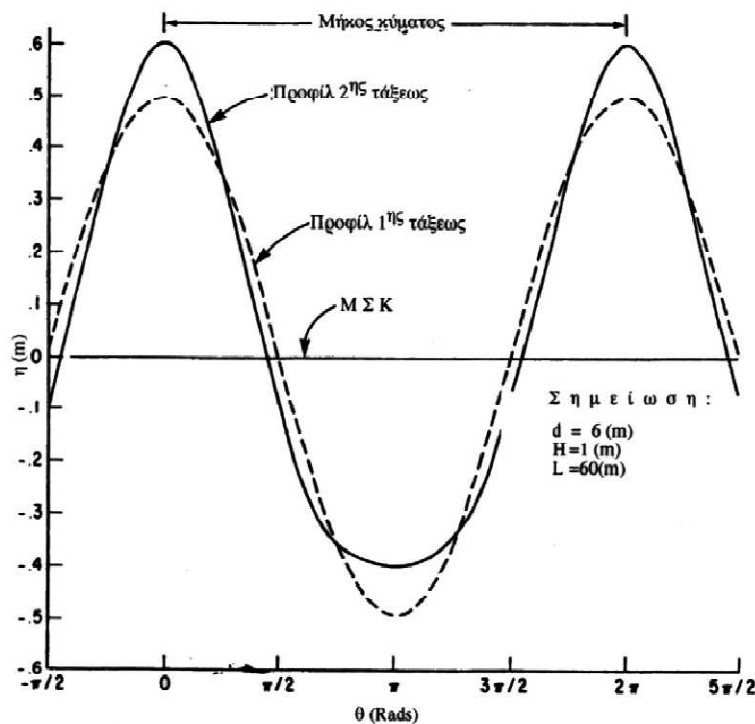
$$\Pi = \Pi_1 + \varepsilon\Pi_2 \quad (1.23)$$

Οπότε επιλύοντας την εξίσωση Laplace προκύπτουν το δυναμικό και η διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας 1^{ης} και 2^{ης} τάξης και τελικά:

$$\Phi = \frac{Hg}{2\omega} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \omega t) + \frac{3\pi H^2}{16T} \frac{\cosh[2k(d+z)]}{\sinh^4(kd)} \sin[2(kx - \omega t)] \quad (1.22)$$

$$\zeta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{\pi H^2}{8L} \frac{\cosh(kd)}{\sinh^3(kd)} [2 + \cos(2kd)] \cos[2(kx - \omega t)] \quad (1.23)$$

Στο σχήμα 1.6 γίνεται συγκριτική γραφική παράσταση της ελεύθερης επιφάνειας βάσει των θεωριών πρώτης και δεύτερης τάξης. Στη θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης οι κυματοκορυφές γίνονται οξύτερες και οι κοιλίες ρηχαίνουν. Έτσι, το κύμα αποκτά ασυμμετρία ως προς τη μέση στάθμη κυματισμών (ΜΣΚ).



Σχήμα 1.6: Ελεύθερη επιφάνεια σύμφωνα με τις θεωρίες Stokes 1^{ης} και 2^{ης} τάξης (πηγή:[93])

Η σχέση διασποράς παραμένει όμοια με την αντίστοιχη της γραμμικής θεωρίας (1.11). Οι συνιστώσες της ταχύτητας των υγρών σωματιδίων δίνονται από τις σχέσεις:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \omega t) + \frac{3\pi^2 H^2}{4TL} \frac{\cosh[2k(d+z)]}{\sinh^4(kd)} \cos[2(kx - \omega t)] \quad (1.24)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\pi H}{T} \frac{\sinh [k(d+z)]}{\sinh (kd)} \sin(kx - \omega t) + \frac{3 \pi^2 H^2}{4 TL} \frac{\sinh [2k(d+z)]}{\sinh^4(kd)} \sin [2(kx - \omega t)] \quad (1.25)$$

Μία σημαντική διαφορά της θεωρίας 2^{ης} τάξης από τη γραμμική θεωρία είναι ότι η συνάρτηση οριζόντιας μετατόπισης ξ των μορίων του νερού δεν είναι περιοδική αλλά περιέχει ένα γραμμικά αυξανόμενο κατά το χρόνο όρο, ο οποίος διαιρούμενος με την περίοδο του κύματος, δίνει τη μέση ταχύτητα μετατόπισης (drift) των μορίων κατά τη διεύθυνση του κύματος:

$$\bar{U}(z) = \frac{\pi^2 H^2}{2TL} \frac{\cosh [2k(d+z)]}{\sinh^2(kd)} \quad (1.26)$$

Λόγω αυτής της μεταφοράς μάζας οι τροχιές των μορίων δεν είναι πλέον κλειστές.

Θεωρία Stokes 3^{ης} τάξης

Η θεωρία Stokes 3^{ης} τάξης αναπτύχθηκε από τους Borgman και Chappellear (1958) και τον Skjelbreia (1959). Η ανάλυση που ακολουθεί παρουσιάζεται από τον Wiegel (1964). Οι εξισώσεις (1.20) και (1.21) γράφονται:

$$\Phi = \Phi_1 + \varepsilon \Phi_2 + \varepsilon^2 \Phi_3 \quad (1.27)$$

$$\Pi = \Pi_1 + \varepsilon \Pi_2 + \varepsilon^2 \Pi_3 \quad (1.28)$$

Στη θεωρία Stokes 3^{ης} τάξης η εξίσωση διασποράς διαφοροποιείται και γράφεται:

$$\omega^2 = \frac{g}{k} \tanh(kd) \left[1 + \frac{k^2 H^2}{4} \frac{14 + 4 \cosh^2(2kd)}{16 \sinh^4(kd)} \right] \quad (1.29)$$

Ακολουθώντας την ανάλυση που παρουσιάστηκε παραπάνω προκύπτει η συνάρτηση της ελεύθερης επιφάνειας:

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{H}{2} \cdot \cos(kx - \omega t) + \frac{\pi H^2}{8L} \cdot \frac{\cosh(kd) [2 + \cosh(2kd)]}{\sinh^3(kd)} \cos[2(kx - \omega t)] + \\ & + \frac{3\pi^2 H^3}{128L^2} \cdot \frac{1 + 8 \cosh^6(kd)}{\sinh^6(kd)} \cos [3(kx - \omega t)] \end{aligned} \quad (1.30)$$

Η συνάρτηση δυναμικού και οι συνιστώσες της ταχύτητας των υγρών σωματιδίων δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Phi = \frac{cL}{2\pi} \cdot \{F_1 \cosh[k(z+d)] \sin \theta + \frac{1}{2} F_2 \cosh[2k(z+d)] \sin(2\theta) + \frac{1}{3} F_3 \cosh[3k(d+z)] \sin(3\theta)\} \quad (1.31)$$

$$\frac{u}{c} = F_1 \cosh[k(z+d)] \cos \theta + F_2 \cosh[2k(z+d)] \cos(2\theta) + F_3 \cosh[3k(d+z)] \cos(3\theta) \quad (1.32)$$

$$\frac{w}{c} = F_1 \sinh[k(z+d)] \sin \theta + F_2 \sinh[2k(z+d)] \sin(2\theta) + F_3 \sinh[3k(d+z)] \sin(3\theta) \quad (1.33)$$

όπου $\theta = kx - \omega t$ (1.34) και

$$F_1 = \frac{\pi H}{L} \cdot \frac{1}{\sinh(kd)} \quad (1.35)$$

$$F_2 = \frac{3\pi^2 H^2}{4L^2} \cdot \frac{1}{\sinh^4(kd)} \quad (1.36)$$

$$F_3 = \frac{3\pi^3 H^3}{64L^3} \cdot \frac{11-2\cosh(2kd)}{\sinh^7(kd)} \quad (1.37)$$

Παρατηρώντας τη σχέση (1.29) προκύπτει ότι στη θεωρία Stokes 3^{ης} τάξης εμφανίζεται διασπορά τόσο ως προς την περίοδο, όσο και ως προς το ύψος κύματος. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται και από πειράματα των Wiegel (1950), Morison (1951), Suquet και Wallet (1953), Savage (1954), όπου προέκυψε ότι τα κύματα με μεγάλο ύψος ταξιδεύουν ταχύτερα από κύματα μικρού ύψους.

Θεωρία Stokes 5^{ης} τάξης

Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με την ανάλυση πέμπτης τάξης ήταν οι De (1955), Chappellear (1961), Skjelbreia και Hendrickson (1960). Πιο πρόσφατη και ακριβής είναι η ανάλυση πέμπτης τάξης του Fenton (1985). Θεωρείται σύστημα αξόνων που κινείται με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κύματος, οπότε μονιμοποιείται η ροή. Το δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(x, z) = -\bar{u}x + C_0 \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^5 \left\{ \varepsilon^i \sum_{j=1}^i [A_{ij} \cosh(jkz) \cdot \sin(jkx)] \right\} + O(\varepsilon^6) \quad (1.38)$$

όπου \bar{u} η μέση οριζόντια ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού με:

$$\bar{u} \left(\frac{k}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = C_0 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^4 C_4 + O(\varepsilon^6) \quad (1.39)$$

Η ελεύθερη επιφάνεια δίνεται από την πολύπλοκη σχέση:

$$k \cdot \zeta(x) = kd + \varepsilon \cdot \cos(kx) + \varepsilon^2 \cdot B_{22} \cdot \cos(2kx) + \varepsilon^3 \cdot B_{31} \cdot [\cos(kx) - \cos(3kx)] + \\ + \varepsilon^4 \cdot [B_{42} \cdot \cos(2kx) + B_{44} \cdot \cos(4kx)] + \varepsilon^5 \cdot [-(B_{53} + B_{55}) \cdot \cos(kx) + B_{53} \cdot \cos(3kx) + \\ + B_{55} \cdot \cos(5kx)] + O(\varepsilon^6) \quad (1.40)$$

Η ειδική παροχή όγκου κάτω από τον κυματισμό δίνεται από τη σχέση:

$$Q \cdot \left(\frac{k^3}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = C_0 kd + \varepsilon^2 (C_2 kd + D_2) + \varepsilon^4 (C_4 kd + D_4) + O(\varepsilon^6) = \bar{u} \cdot \left(\frac{k^3}{g}\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^2 D_2 + \varepsilon^4 D_4 + O(\varepsilon^6) \quad (1.41)$$

Στις παραπάνω σχέσεις είναι $\varepsilon = k \frac{H}{2}$ και οι A_{ij} , B_{ij} , C_i , D_i είναι αδιάστατες συναρτήσεις του kd με τιμές που δίνονται στην εργασία του Fenton (1985). Η ταχύτητα διάδοσης του κυματισμού δίνεται από τη σχέση:

$$c = \bar{u} + c_E = \frac{Q}{d} + c_s \quad (1.42)$$

όπου c_E είναι η μέση κατά το χρόνο ταχύτητα του ρευστού σε συντεταγμένες Euler, \bar{u} η μέση ταχύτητα των μορίων του ρευστού ως προς το κινούμενο σύστημα αξόνων (έστω κατά την αρνητική κατεύθυνση), c_S είναι η μέση κατά το βάθος ταχύτητα μεταφοράς μάζας και Q η ειδική παροχή όγκου. Η ταχύτητα \bar{u} είναι ίση με c σε ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η ταχύτητα του ρεύματος είναι μηδέν. Για τους γραμμικούς κυματισμούς $\bar{u} = \frac{Q}{d}$.

Η προσέγγιση του Fenton έχει επιβεβαιωθεί ως θεωρητικά ορθή για ακρίβεια 5^{ης} τάξης της δυναμικής συνθήκης ελεύθερης επιφάνειας. Η θεωρία αυτή παρουσιάζει ικανοποιητική συμφωνία με πειραματικά αποτελέσματα (Huang (1990), Sobey (1990) [174]).

Στα βαθιά νερά η παράμετρος ϵ παίρνει μικρές σχετικά τιμές. Ο Fenton στην αρχική του εργασία (1985) αναφέρει ότι η ανάλυση του 5^{ης} τάξης εμφανίζει ικανοποιητική ακρίβεια για σχετικά βραχέα κύματα με μήκος $L < 10d$. Για μακρά κύματα (ρηχά νερά) η ακρίβεια, άρα και η εφαρμογή της μεθόδου, περιορίζεται από τον αδιάστατο αριθμό Ursell $U = \frac{HL^2}{d^3}$. Ο Hedges (1995) έδειξε ότι το όριο εφαρμογής της θεωρίας Fenton 5^{ης} τάξης και θεωρίας Cnoidal κυμάτων είναι $U=40$. Ένα άλλο όριο της ισχύος της θεωρίας Stokes 5^{ης} τάξης για μακρά κύματα δίνεται από τον Ebbesmeyer (1974) $U < \frac{8\pi^2}{3}$. Ακόμη όμως και εντός του πεδίου εφαρμογής της θεωρίας Fenton 5^{ης} τάξης, για μεγάλα κύματα (κοντά στο ύψος θραύσης) εμφανίζονται κάποιες ανακρίβειες. Συγκεκριμένα, στις κοιλίες του κύματος εμφανίζονται σημεία καμπής (δευτερεύουσες κορυφές). Οι μορφές αυτές είναι ορθές μαθηματικά, αλλά όχι από φυσική άποψη. Οι Karambas και Koutitas (1998) προτείνουν μια προσεγγιστική μέθοδο που βελτιώνει τη μη αποδεκτή αυτή λύση.

1.3.2.2 Θεωρία κυματισμών ελλειπτικού συνημιτόνου (Cnoidal waves)

Η διαμόρφωση στα ρηχά νερά μακρών κυματισμών πεπερασμένου πλάτους και σταθερής μορφής με εξισορρόπηση της τάσης για θραύση (από τους μη γραμμικούς όρους) και της διασποράς πλάτους πρωτοερευνήθηκε από τους Boussinesq (1877) και Korteweg και De Vries (1895). Σύμφωνα με τους Keulegan (1950) και De (1955), η θεωρία Stokes μπορεί να εφαρμοστεί επιτυχώς για λόγους $\frac{d}{L} \geq \left(\frac{1}{8} \div \frac{1}{10}\right)$. Για πιο ρηχά νερά πιο ικανοποιητική είναι η θεωρία των cnoidal κυμάτων [185]. Τα κύματα αυτά έχουν τη μοναδική ιδιότητα να μεταπίπτουν σε μοναχικούς κυματισμούς (παρ. 1.3.2.3) στη μία ακραία τους περίπτωση και στην άλλη σε προφίλ ελεύθερης επιφάνειας που εκφράζεται με συνημιτονοειδείς όρους. Η ιδιότητά τους αυτή γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ της γραμμικής θεωρίας και της θεωρίας μοναχικού κύματος. Το προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας αναπτύσσεται σε όρους ενός Ιακωβιανού ελλειπτικού ολοκληρώματος, $cn(u)$, εξ' ου και η διεθνής ονομασία "cnoidal" των κυματισμών αυτών.

Οι cnoidal κυματισμοί μελετήθηκαν εκτενώς από διάφορους ερευνητές (Patterson και Keulegan 1940, Laitone 1963, Keller 1948, Littman 1957 κλπ.). Οι μελέτες αυτές αφορούσαν σε προσεγγίσεις πρώτης και τρίτης τάξης. Το 1979 ο Fenton ανέπτυξε μία μεθοδολογία κάθε τάξης για τη λύση της εξίσωσης Korteweg- De Vries. Οι λύσεις 5^{ης} και 9^{ης} τάξης είναι οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες στην πράξη.

Στα πολύ ρηχά νερά (ασυμπτωτικά $kd \rightarrow 0$) η ελεύθερη επιφάνεια των κυμάτων Stokes παίρνει τη μορφή:

$$\zeta = \alpha \cdot \cos(kx - \omega t) + \frac{3ka^2}{4(kd)^3} \cdot \cos[2(kx - \omega t)] + \dots \quad (1.43)$$

με $\alpha = \frac{H}{2}$. Η ανάπτυξη αυτή απαιτεί παράμετρο Ursell πολύ μικρότερη της μονάδας ($U \ll 1$). Αν η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται και αναζητείται κύμα σταθερής μορφής (σταθερή ταχύτητα c), οδηγούμαστε στην αδιάστατη εξίσωση Korteweg-De Vries (1895) υπό μόνιμες συνθήκες:

$$\frac{1}{3} \frac{d^3 \Pi}{dX^3} + \frac{3a\Pi}{\beta} \frac{d\Pi}{dX} + \frac{d\Pi}{dX} \left(\frac{g\alpha}{a\beta c^2} - \frac{1}{\beta} \right) = 0 \quad (1.44) \quad \text{όπου:}$$

$\alpha = \frac{H}{2}$, $a = \frac{\alpha}{d}$, $\beta = \frac{d^2}{L^2}$, $\Pi = \frac{\zeta}{\alpha}$, $X = \frac{x}{L}$ και αρχικά η ταχύτητα c δίνεται από τη σχέση:

$$c \approx \sqrt{gd} \cdot \left(1 - \frac{2\pi^2\beta}{3} \right) \quad (1.45)$$

Αναζητώντας μία περιοδική λύση της (1.44) προκύπτει το προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας:

$$\zeta = \alpha \cdot cn^2 \left(x \cdot \sqrt{\frac{3a}{4d^3k^2}} \right) \quad (1.46) \quad \text{όπου:}$$

α : το ύψος κύματος H

$$a = \frac{\alpha}{d}$$

cn : η Ιακωβιανή συνάρτηση ελλειπτικού συνημιτόνου

$$k = \frac{1}{\sqrt{1+S}} \quad (1.47)$$

$$S = 1 - F \frac{\beta}{a} \quad (1.48)$$

$$F = \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{g\alpha}{ac^2} \right) \quad (1.49)$$

Τελικά για μη μόνιμες συνθήκες, η ελεύθερη επιφάνεια συναρτήσει και του χρόνου για σταθερό σύστημα αξόνων δίνεται από τη σχέση:

$$\zeta = \zeta_{min} + H \cdot cn^2 \left[2K(k) \left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right), k \right] \quad (1.50)$$

όπου:

ζ_{min} : η μέγιστη αρνητική μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας κάτω από τη μέση στάθμη

H : το ύψος κύματος

$K(k)$: το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους

k : το όρισμα του ελλειπτικού ολοκληρώματος κυμαινόμενο από 0 ως 1

Το ζ_{min} δίνεται από τη σχέση:

$$\zeta_{min} = H \cdot \left\{ -1 + \frac{1}{k^2} \cdot \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \right\} \quad (1.51)$$

όπου $K(k)$ το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους και $E(k)$ το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους που δίνονται από τις σχέσεις:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1.52)$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (1.53)$$

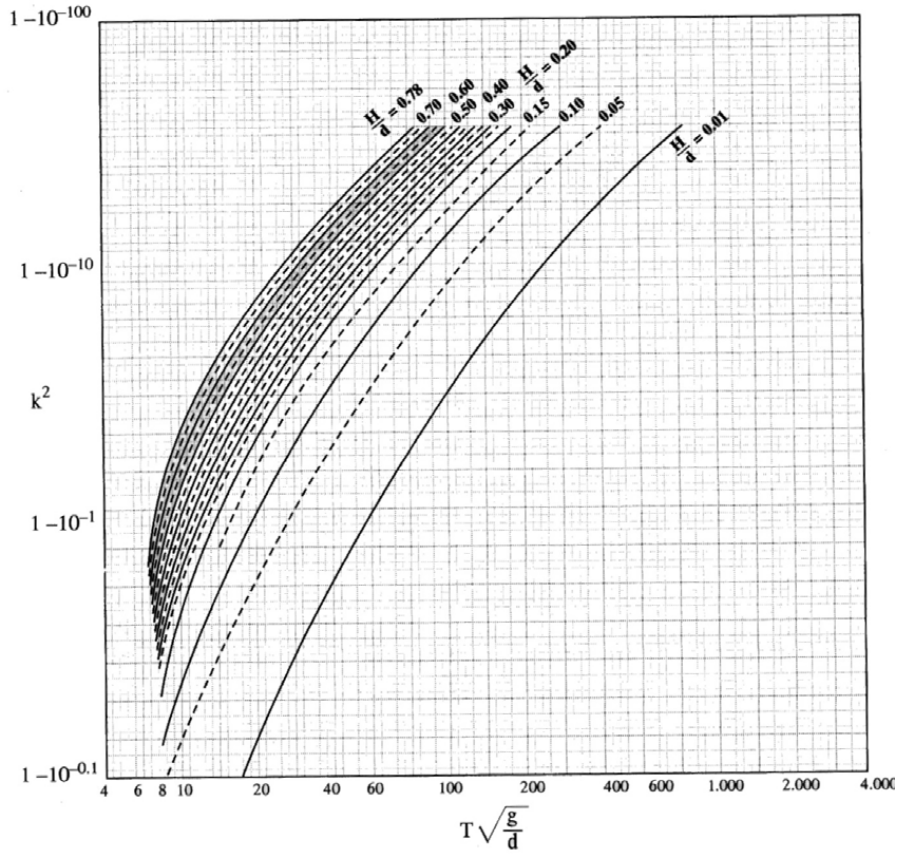
Οι cnoidal κυματισμοί χαρακτηρίζονται από πολύ οξύτερες κορυφές και πεπλατυσμένες κοιλίες που απέχουν λίγο από τη ΜΣΚ. Η κωδικοποιημένη από τον Wiegel (1960) θεωρία των κυματισμών ελλειπτικού συνημιτόνου έχει εφαρμογή για λόγο $\frac{d}{L} < \frac{1}{8}$ και τιμή της παραμέτρου Ursell > 25 . Ο όρος $cn^2[2K(k)\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right), k]$ έχει μέγιστο 1. Όπως προαναφέρθηκε, το όρισμα k παίρνει τιμές από 0 ως 1. Όταν $k \rightarrow 0$ ο λόγος ύψους κύματος προς βάθος νερού γίνεται πάρα πολύ μικρός και το κυματικό προφίλ μεταπίπτει στο ημιτονοειδές της γραμμικής θεωρίας Airy. Στο άνω όριο $k \rightarrow 1$, το μήκος κύματος τείνει στο άπειρο και όπως αναφέρεται παρακάτω (παρ. 1.3.2.3) το κυματικό προφίλ τείνει σε αυτό του μοναχικού κύματος ($cn^2(x) \rightarrow \text{sech}^2(x)$ για $k \rightarrow 1$). Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι ο Iwagaki (1968) χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά για όρισμα κοντά στη μονάδα (πρακτικά $k > 0.98$) και $K \geq 3$, ανέπτυξε τη θεωρία των υπερβολικών κυματισμών που συνδυάζει τα μαθηματικά προτερήματα της θεωρίας μοναχικού κύματος και κάποιες ιδιότητες των cnoidal κυματισμών. Στη θεωρία των cnoidal κυμάτων η περίοδος δίνεται από τη σχέση:

$$T = \frac{L}{c} = \sqrt{\frac{16 [K(k)]^2 k^2 d^2}{3 g H} \left[1 + \frac{H}{d} \left(\frac{1}{k^2} - 2\right)\right]} \quad (1.54)$$

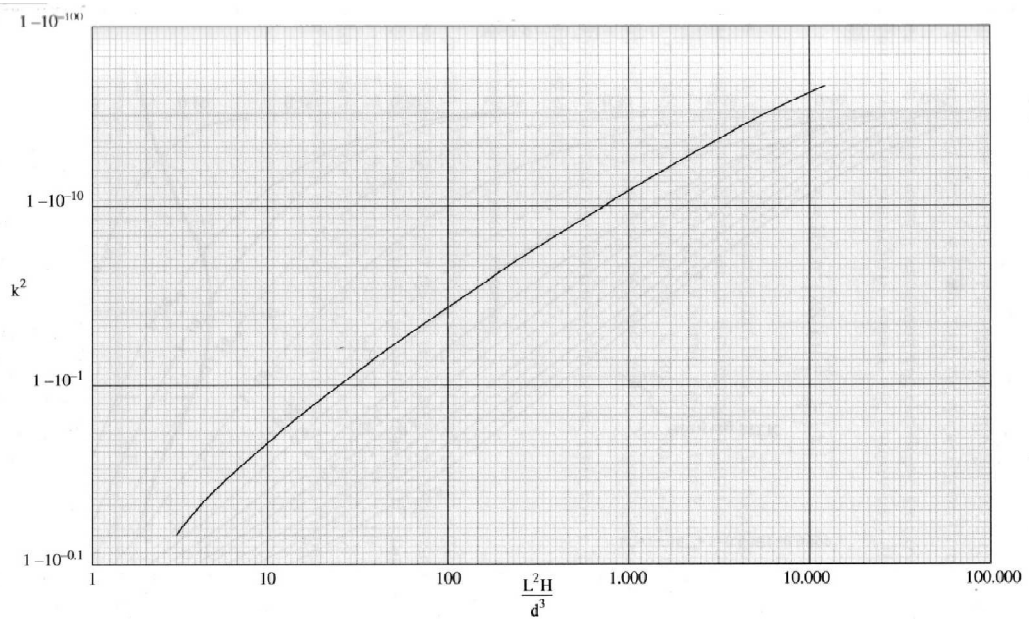
Τελικά η ταχύτητα φάσης στη θεωρία των cnoidal κυμάτων δίνεται από τη σχέση:

$$C = \sqrt{\frac{gd}{1 + \frac{H}{d} \left(\frac{1}{k^2} - 2\right)}} \quad (1.55)$$

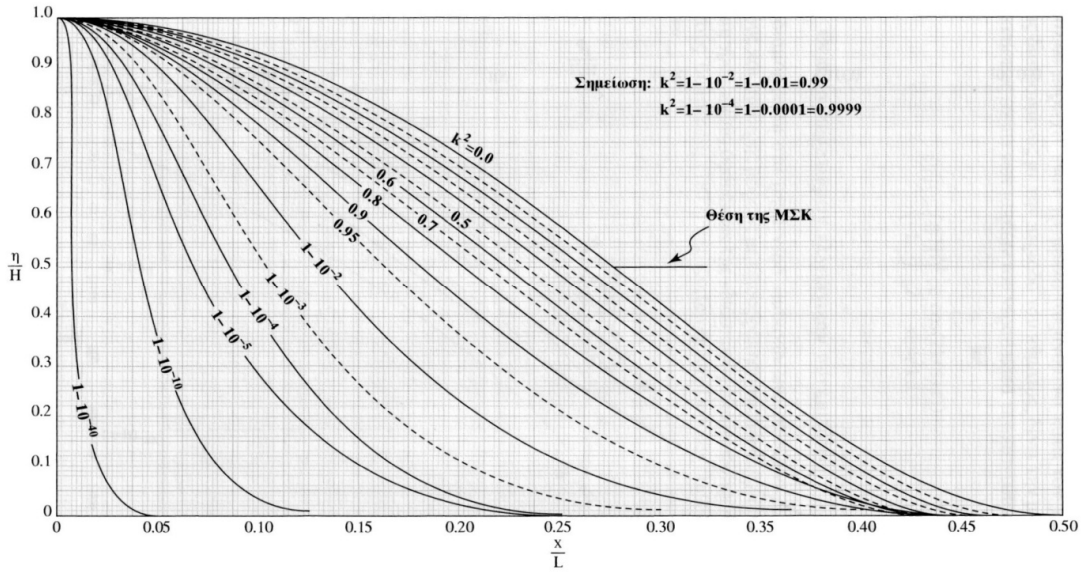
Στο σχήμα 1.7 φαίνεται η σχέση του ορίσματος k με τα στοιχεία H , T , d του κυματισμού. Στο σχήμα 1.8 φαίνεται η σχέση του ορίσματος k με τα στοιχεία H , L , d του κυματισμού. Τέλος, στο σχήμα 1.9 προκύπτει η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας $\frac{\zeta}{H} \left(\frac{x}{L}\right)$ για διάφορες τιμές του k . Χαρακτηριστική είναι η κατακόρυφη ασυμμετρία του κύματος για αύξουσες τιμές του k (ελάττωση του βάθους του νερού).



Σχήμα 1.7: Σχέση k με τα στοιχεία T, H και d (πηγή: [93])



Σχήμα 1.8: Σχέση k με τα στοιχεία L, H και d (πηγή: [93])

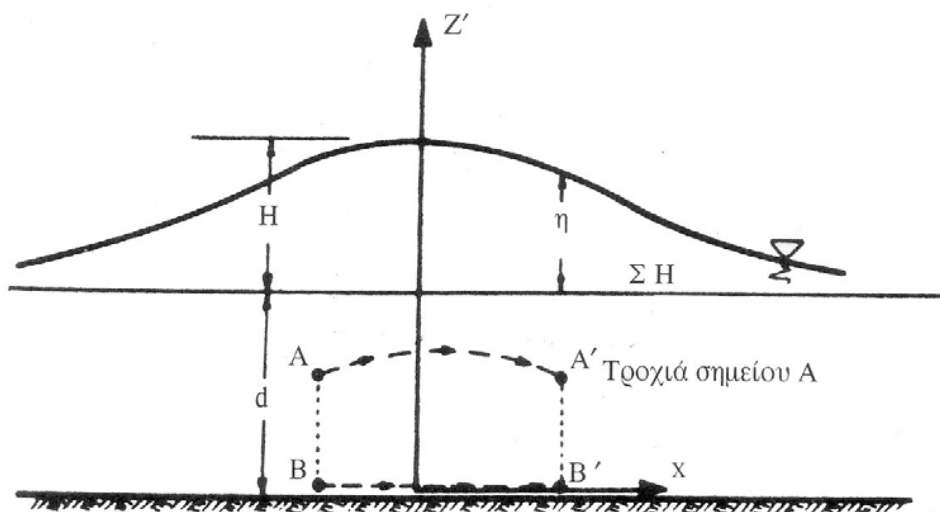


Σχήμα 1.9: Μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορες τιμές του k (πηγή: [93])

1.3.2.3 Θεωρία μοναχικού κύματος (solitary wave)

Η θεωρία μοναχικού κύματος διερευνήθηκε αρχικά από τον Russell (1844) και στη συνέχεια από τον Boussinesq (1872). Ο Munk (1949) χρησιμοποίησε τη θεωρία για την περιγραφή κυματισμών στη ζώνη θραύσης. Τα μοναχικά κύματα προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης (1.44) Korteweg- De Vries. Ουσιαστικά αναζητείται λύση μη-γραμμικού μεμονωμένου κύματος που δεν επηρεάζει την ελεύθερη επιφάνεια στο άπειρο, δηλαδή $\Pi = \frac{d\Pi}{dx} = 0$ για $X \rightarrow \infty$.

Η μόνιμη πλευρική μετατόπιση ενός στερεού ορίου κατά ένα πεπερασμένο διάστημα προκαλεί μια ύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και τη διαμόρφωση ενός μοναχικού κύματος με όλα τα σημεία της επιφάνειας πάνω από τη στάθμη ηρεμίας και θεωρητικά άπειρο μήκος.



Σχήμα 1.10: Προφίλ ελεύθερης επιφάνειας και τροχιά μορίου νερού στη θεωρία μοναχικού κύματος (πηγή: [93])

Στη φύση σπάνια εμφανίζονται καθαρά μοναχικά κύματα. Συνήθως ακολουθούνται από συρμούς κυματισμών μεγαλύτερης συχνότητας μετά τον κύριο παλμό (λόγω διασποράς). Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι μακροί κυματισμοί (π.χ. tsunamis) που δημιουργούνται από μετατοπίσεις μεγάλων υδάτινων μαζών, οφειλόμενοι σε φαινόμενα όπως σεισμούς ή κατολισθήσεις, να συμπεριφέρονται σαν μοναχικοί.

Θεωρητικά η περίοδος και το μήκος ενός μοναχικού κύματος τείνουν στο άπειρο. Συνεπώς, χρησιμοποιείται μόνο μία παράμετρος H/d για να προσδιορίσει το κύμα. Όπως προαναφέρθηκε, το μοναχικό κύμα είναι μία οριακή περίπτωση των cnoidal κυματισμών για τιμή του ορίσματος $k=1$ οπότε $K(k) = K(1) \rightarrow \infty$. Στην περίπτωση αυτή το ελλειπτικό συνημίτονο μετατρέπεται στην υπερβολική τέμνουσα. Δηλαδή το κυματικό προφίλ δίνεται από τη σχέση:

$$\zeta = H \cdot \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} \cdot (x - ct) \right] \quad (1.56)$$

και η ταχύτητα φάσης δίνεται από τη σχέση: $c = \sqrt{g(H + d)}$ (1.57)

Εργαστηριακά πειράματα έχουν δείξει ότι η απλή αυτή έκφραση δίνει πολύ καλά αποτελέσματα στον υπολογισμό της ταχύτητας του μοναχικού κυματισμού. Σύμφωνα με τον Munk (1949) οι συνιστώσες της ταχύτητας των υγρών σωματιδίων δίνονται από τις σχέσεις:

$$u = c \cdot N \cdot \frac{1 + \cos\left(M \cdot \frac{z}{d}\right) \cdot \cosh\left(M \cdot \frac{x}{d}\right)}{[\cos\left(M \cdot \frac{z}{d}\right) + \cosh\left(M \cdot \frac{x}{d}\right)]^2} \quad (1.58)$$

$$w = c \cdot N \cdot \frac{\sin\left(M \cdot \frac{z}{d}\right) \cdot \sinh\left(M \cdot \frac{x}{d}\right)}{[\cos\left(M \cdot \frac{z}{d}\right) + \cosh\left(M \cdot \frac{x}{d}\right)]^2} \quad (1.59)$$

όπου M, N συναρτήσεις του λόγου $\frac{H}{d}$ που απεικονίζονται στο διάγραμμα του σχήματος 1.11. Η ενέργεια που περιλαμβάνεται στο μέτρο πλάτους στο σύνολο του μήκους κύματος δίνεται από τη σχέση:

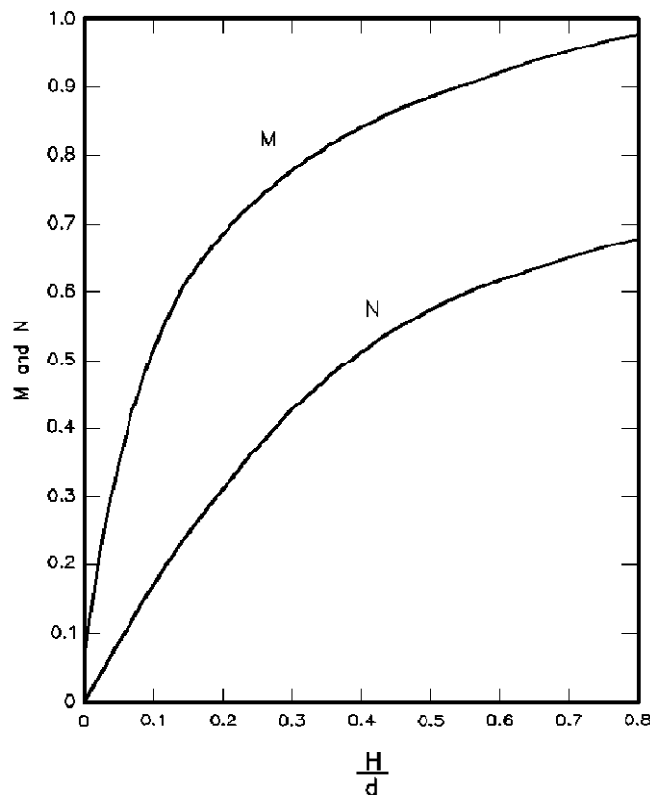
$$E = \frac{8}{3\sqrt{3}} \rho g H^{1.5} d^{1.5} \quad (1.60)$$

και ο όγκος του νερού που περιέχεται πάνω από τη στάθμη ηρεμίας δίνεται από τη σχέση:

$$V = \sqrt{\frac{16}{3} \cdot d^3 \cdot H} \quad (1.61)$$

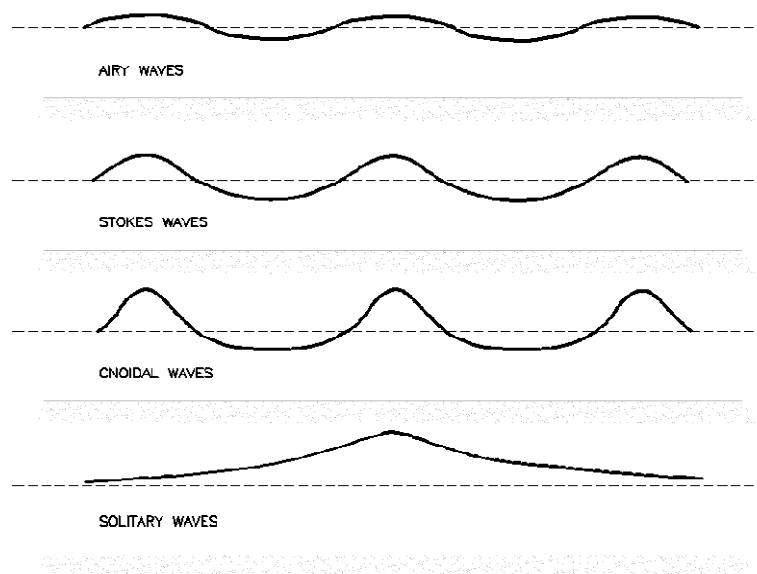
Η μορφή του μοναχικού κύματος γίνεται ασταθής και προκαλείται η θραύση του σε νερό του οποίου το βάθος είναι μικρότερο από την κρίσιμη τιμή που ορίζεται από τη σχέση:

$$\left(\frac{H}{d}\right)_{min} = 0.78 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{d}{H}\right)_{max} = 1.2 \quad (1.62)$$



Σχήμα 1.11: Συντελεστές M και N συναρτήσει του λόγου H/d (πηγή: [93])

Στο σχήμα 1.12 φαίνονται συγκριτικά τα προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας για τις διάφορες θεωρίες που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Η γραμμική θεωρία (Airy) εκφράζεται από ένα συμμετρικό και στις δύο διευθύνσεις, ημιτονοειδές προφίλ. Στις θεωρίες Stokes ανώτερης τάξης οι κορυφές των κυματισμών γίνονται πιο απότομες και οι κοιλίες πιο πλατιές από το ημιτονοειδές προφίλ εξαιτίας της παρουσίας των όρων με συχνότητα πολλαπλάσια της συχνότητας της γραμμικής θεωρίας. Στους κυματισμούς ελλειπτικού συνημιτόνου (cnoidal) το προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας έχει ακόμη πιο απότομες κορυφές και ευρείς επίπεδες κοιλίες. Τέλος, στο μοναχικό κυματισμό δεν υπάρχει κοιλία, η ελεύθερη επιφάνεια είναι ολόκληρη πάνω από τη μέση στάθμη ηρεμίας και το μήκος του τείνει στο άπειρο.



Σχήμα 1.12: Προφίλ ελεύθερης επιφάνειας κύματος με βάσει διάφορες θεωρίες (πηγή: [174])

1.3.2.4 Θεωρία ροϊκής συνάρτησης (stream function theory)

Λόγω της μεγάλης υπολογιστικής δυσκολίας για την ανάπτυξη των θεωριών Stokes ανώτερης τάξης, προέκυψε η ανάγκη για την ανάπτυξη μιας θεωρίας που θα μπορούσε εύκολα, με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, να επεκταθεί σε οποιαδήποτε τάξη. Η πρώτη θεωρία αυτού του είδους αναπτύχθηκε από τον Chappellear (1961) και χρησιμοποιούσε τη συνάρτηση δυναμικού της ταχύτητας. Ο Dean (1965) πρότεινε τη χρήση της ροϊκής συνάρτησης Ψ ώστε να αναπτύξει μία θεωρία υπολογιστικά απλούστερη από αυτή του Chappellear. Ο Cokelet (1977) επέκτεινε μία μέθοδο που αρχικά προτάθηκε από τον Schwartz (1974) και πρόκυψε η πιο ακριβής θεωρία ως και λίγο πριν τη θραύση. Ωστόσο, η μέθοδος της ροϊκής συνάρτησης του Dean (1965) και Dalrymple (1974) είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη.

Η ροϊκή συνάρτηση Ψ ορίζεται σε δισδιάστατο πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού από τις σχέσεις:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad \text{και} \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.63)$$

Από τη συνθήκη δισδιάστατης αστρόβιλης ροής $\left(\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}\right)$ προκύπτει η εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.64)$$

ενώ η οριακή συνθήκη αδιαπέρατου πυθμένα γράφεται:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad \text{για } z=-d \quad (1.65)$$

Η δυναμική οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας γράφεται:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\zeta = Q_B \quad \text{για } z=\zeta(x) \text{ με } Q_B: \text{ σταθερά} \quad (1.66)$$

ενώ η κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας γράφεται:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{για } z=\zeta(x) \quad (1.67)$$

Τέλος η συνθήκη χωρικής περιοδικότητας γράφεται:

$$\Psi(x, z) = \Psi(x + L, z) \quad (1.68)$$

Θεωρώντας κινούμενο σύστημα αξόνων με ταχύτητα c ώστε να εξασφαλιστούν μόνιμες συνθήκες, η ροϊκή συνάρτηση N τάξης γράφεται:

$$\Psi(x, z) = c \cdot z + \sum_{n=1}^N \{X(n) \cdot \sinh[nk(d + z)] \cdot \cos(nkx)\} \quad (1.69)$$

με $X(n)$ συντελεστές που πρέπει να προσδιοριστούν. Η (1.69) ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (1.64), την κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (1.67) και την οριακή συνθήκη πυθμένα (1.65). Με αντικατάσταση της (1.69) στην δυναμική συνθήκη (1.66) και διακριτοποίηση της ελεύθερης επιφάνειας από $x=0$ ως $x=L/2$, το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό της Ψ για $z=\zeta(x)$, του Q_B και των συντελεστών $X(n)$, $n=1,2,\dots,N$.

Οι Dean και Dalrymple (1984) πρότειναν μία επαναληπτική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για την επίλυση του προβλήματος. Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με αυτή που ανέπτυξαν οι Charpelear (1961) και Dean (1965). Αργότερα οι Rienecker και Fenton (1981) πρότειναν μία διαφορετική προσέγγιση, όπως περιγράφεται παρακάτω [147].

Η κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας γράφεται:

$$\Psi(x, \zeta(x)) = -Q \quad \text{για } z=\zeta(x) \quad (1.70)$$

όπου Q θετική σταθερά. Η ελεύθερη επιφάνεια διακριτοποιείται σε $M+1$ ίσα μέρη, από την κορυφή ως την κοιλία και έτσι οι οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας γράφονται:

$$\Psi(x_m, \zeta_m) = -Q \quad \text{για } m=0,1,2,\dots,M \quad (1.71)$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right]_{(x,\zeta)=(x_m,\zeta_m)} + g\zeta_m = Q_B \quad \text{για } m=0,1,2,\dots,M \quad (1.72)$$

$$\text{Το ύψος κύματος δίνεται από τη σχέση: } H = \zeta_0 - \zeta_m \quad (1.73)$$

$$\text{Η ταχύτητα φάσης: } c = c_E - \bar{u} = \frac{Q}{d} + c_S \quad (1.74)$$

$$\text{Η περίοδος: } T = \frac{L}{c} \quad (1.75)$$

όπου τα σύμβολα c_E και c_S ορίστηκαν παραπάνω στη θεωρία Stokes 5^{ης} τάξης του Fenton και

$$d = \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2} \zeta_0 + \sum_{m=1}^{M-1} \zeta_m + \frac{1}{2} \zeta_M \right] \quad (1.76)$$

$$\text{με } x_m = m \frac{L}{2M} \text{ και } \zeta_m = \zeta(x_m) \quad (1.77)$$

Οι εξισώσεις (1.71) ως (1.76) αποτελούν ένα μη-γραμμικό σύστημα $2M+6$ εξισώσεων με $M+N+6$ αγνώστους:

- L, \bar{u}, c, Q και Q_B
- $M+1$ τιμές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας ζ
- N συντελεστές $X(1), X(2), \dots, X(N)$

Για $M=N$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, ενώ για $M>N$ είναι υπέρ-ορισμένο. Οι Rienecker και Fenton (1981) πρότειναν για την επίλυση του συστήματος την επαναληπτική μέθοδο του Newton. Η εκλογή της τάξης της θεωρίας εξαρτάται από την περιοχή εφαρμογής της. Μικρές τιμές του N (π.χ. $N=5$) μπορεί να δημιουργήσουν στα ρηχά νερά μη ρεαλιστικά μικρού μήκους παρασιτικά κύματα, τα οποία δεν εμφανίζονται για μεγαλύτερες τιμές (π.χ. $N=18$). Από την αριθμητική επίλυση του συστήματος υπολογίζονται τελικά οι τιμές $\Psi(x,z), \zeta(x), u(x,z)$ και $w(x,z)$.

1.3.3 ΠΕΡΙΟΧΗ ΙΣΧΥΟΣ ΤΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ

Η γνώση του πεδίου εφαρμογής των παραπάνω θεωριών είναι ύψιστης σημασίας για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος με γνωστά κυματικά χαρακτηριστικά (ύψος κύματος, περίοδος, μήκος κύματος) και βάθος νερού. Η ισχύς των διαφόρων θεωριών αναλύεται σε δύο συνιστώσες: μαθηματική ισχύς και φυσική ισχύς. Η πρώτη αναφέρεται στη δυνατότητα της εκάστοτε θεωρίας να ικανοποιεί το πρόβλημα όπως εκφράζεται μαθηματικά από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων και οριακών συνθηκών. Για παράδειγμα, όλες οι παραπάνω θεωρίες ικανοποιούν την οριακή συνθήκη πυθμένα, αλλά η θεωρία των cnoidal κυματισμών και του μοναχικού κύματος ικανοποιούν μόνο προσεγγιστικά την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό του ρευστού. Επίσης, όλες οι θεωρίες ικανοποιούν προσεγγιστικά τη δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, ενώ η κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας ικανοποιείται (με ακρίβεια εξαρτώμενη από την υπολογιστική ικανότητα του ηλεκτρονικού υπολογιστή) από τη θεωρία της ροϊκής συνάρτησης. Η φυσική ισχύς αναφέρεται στο κατά πόσο οι προγνώσεις της εκάστοτε θεωρίας συμφωνούν ή όχι με πραγματικές μετρήσεις.

Theory	Exactly Satisfies			
	DE	BBC	KFSBC	DFSBC
Linear wave theory	X	X	-	-
Third-order Stokes	X	X	-	-
Fifth-order Stokes	X	X	-	-
First-order cnoidal	-	X	-	-
Second-order cnoidal	-	X	-	-
Stream function theory	X	X	X	-
numerical wave theory				

DE = Differential equation.
 BBC = Bottom boundary condition.
 KFSBC = Kinematic free surface boundary condition.
 DFSBC = Dynamic free surface boundary condition.
 X = Exactly satisfies.

Πίνακας 1.3: Μαθηματική ισχύς διαφόρων θεωριών (πηγή: [174])

Σε γενικές γραμμές οι μη-γραμμικές θεωρίες περιγράφουν αποτελεσματικότερα τη μεταφορά μάζας, τη θραύση των κυματισμών, τη ρήγωση, την ανάκλαση και άλλα μη γραμμικά χαρακτηριστικά. Για το λόγο αυτό η χρήση τους προτείνεται σε περιπτώσεις όπου τα φαινόμενα αυτά είναι εντονότερα.

Αρχικά η ταξινόμηση των θεωριών γίνεται βάσει δύο αδιάστατων παραμέτρων, του σχετικού βάθους $\varepsilon = \frac{d}{L}$ και του σχετικού ύψους $\delta = \frac{H}{d}$. Επίσης, χρησιμοποιείται και η κλίση του κύματος $\frac{H}{L}$. Η παράμετρος ε καθορίζει κατά πόσο οι κυματισμοί είναι πλήρους, μερικής ή καθόλου διασποράς διακρίνοντας τρεις περιοχές βαθών:

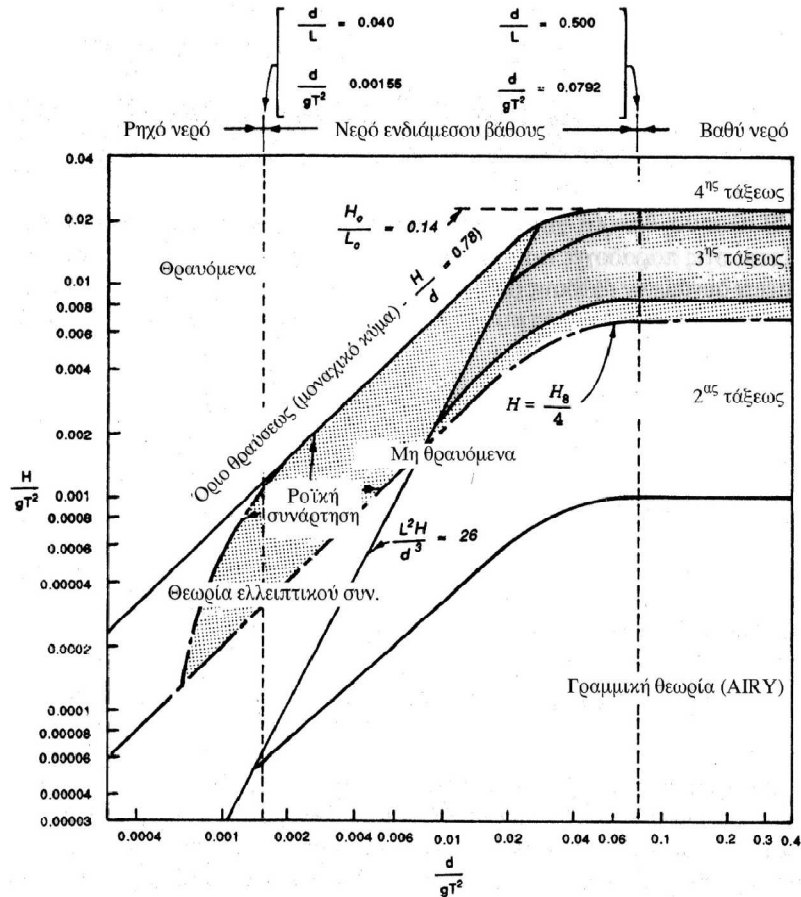
- $\varepsilon < 0.05 \rightarrow$ ρηχά νερά
- $0.05 \leq \varepsilon \leq 0.5 \rightarrow$ νερά ενδιάμεσου βάθους
- $0.5 < \varepsilon \rightarrow$ βαθιά νερά

Μικρές τιμές των ε και δ αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή της γραμμικής θεωρίας Airy. Σε αντίθετη περίπτωση είναι απαραίτητη η εφαρμογή θεωριών πεπερασμένου πλάτους (θεωρίες Stokes ανώτερης τάξης, cnoidal κυματισμών κλπ.). Όπως παρατηρεί ο Dean, η θεωρία των cnoidal κυματισμών εφαρμόζεται επιτυχώς στα ρηχά νερά, ενώ στα βαθιά νερά η θεωρία Stokes 5^{ης} τάξης είναι πιο ρεαλιστική. Στα νερά ενδιάμεσου βάθους η γραμμική θεωρία περιγράφει αρκετά ικανοποιητικά τους κυματισμούς, αλλά η θεωρία ροϊκής συνάρτησης, ειδικά υψηλής τάξης (τουλάχιστον 20^{ης} τάξης), δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα ακόμη και για ρηχά νερά.

Η ταξινόμηση ανάλογα με το σύνολο των μεγεθών d , L και H οδηγεί στην εμφάνιση της παραμέτρου Ursell $U = \frac{HL^2}{d^3} = \frac{\delta}{\varepsilon^2}$. Για μικρές τιμές του U οι θεωρίες διάφορων τάξεων είναι δυνατό να εφαρμοστούν. Για μεγάλες τιμές, όπως στην περίπτωση μακρών κυματισμών ή κυματισμών μεγάλου εύρους, εφαρμόσιμη είναι η θεωρία κυματισμών ελλειπτικού συνημιτόνου. Στο σχήμα 1.13 φαίνεται το πεδίο εφαρμογής των διαφόρων θεωριών.

Η επέκταση της θεωρίας Stokes ανώτερης τάξης ισχύει τυπικά υπό τις συνθήκες $\frac{H}{a} \ll (kd)^2$ με $kd < 1$ και $\frac{H}{L} \ll 1$ όπως αναφέρει ο Peregrine (1972). Οι περιορισμοί αυτοί οδηγούν σε ένα αριθμό Ursell $U < 79$. Το γεγονός αυτό περιορίζει το ύψος κύματος στα ρηχά και γι' αυτό η θεωρία Stokes δεν είναι γενικά εφαρμόσιμη στα ρηχά νερά (πρέπει $d/L > 1/8$ ή $kd > 0.78$). Για

παράδειγμα, όπως αναφέρει ο Fenton (1985), στα ρηχά νερά το μέγιστο ύψος κύματος που μπορεί να περιγράψει η θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης είναι περίπου ίσο με το μισό του βάθους. Το πεδίο ισχύος της θεωρίας των cnoidal κυματισμών είναι $d/L < 1/8$ και παράμετρος Ursell $U > 20$. [174]



Σχήμα 1.13: Περιοχή ισχύος διάφορων θεωριών (πηγή: [93])

Ο Dean (1968,1974) παρουσίασε μία ανάλυση όπου όριζε τις περιοχές ισχύος των διάφορων θεωριών συναρτήσει των παραμέτρων $\frac{H}{T^2}$ και $\frac{d}{T^2}$. Αργότερα ο Méhauté (1976) παρουσίασε μία ελαφρώς διαφορετική ανάλυση για να υποδείξει τα κατάλληλα όρια εφαρμογής των διαφόρων θεωριών, συμπεριλαμβανομένων και των θεωριών Stokes 3^{ης} και 4^{ης} τάξης. Η θεωρία 4^{ης} τάξης αντικαθίσταται από τη θεωρία 5^{ης} τάξης που ακολουθείται πιο συχνά στις εφαρμογές. Τόσο ο Dean, όσο και ο Méhauté πρότειναν την εφαρμογή της θεωρίας των cnoidal για ρηχά νερά και κύματα μικρής κλίσης, ενώ τις θεωρίες Stokes ανώτερης τάξης για κυματισμούς μεγάλης κλίσης στα βαθιά νερά. Επίσης, πρότειναν τη χρήση της γραμμικής θεωρίας για κυματισμούς μικρής κλίσης και μικρές τιμές της παραμέτρου Ursell. Για κυματισμούς μικρής κλίσης σε νερά ενδιάμεσου βάθους και βαθιά νερά η γραμμική θεωρία είναι επαρκής, ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιηθούν ικανοποιητικά και άλλες θεωρίες. Τέλος, η θεωρία του Fenton (1988) είναι κατάλληλη για ευρεία περιοχή κυματικών παραμέτρων.

Για να καθοριστεί η καταλληλότητα της κάθε θεωρίας που χρησιμοποιεί την ανάπτυξη της θεωρίας Stokes είναι απαραίτητο να είναι γνωστές οι οριακές τιμές του ύψους και της κλίσης κύματος στα διάφορα βάθη. Αυτό επιτυγχάνεται συγκρίνοντας τους διαδοχικούς όρους της

ανάπτυξης Stokes. Κάθε όρος πρέπει να είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του. Για παράδειγμα αν ο δεύτερος όρος πρέπει να είναι μικρότερος του 1% του πρώτου όρου στη θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης, η οριακή κλίση κύματος είναι:

$$\frac{H}{L} \leq \frac{1}{80} \cdot \frac{\sinh^3(kd)}{\cosh(kd) \cdot [3 + 2\sinh^2(kd)]} \quad (1.78)$$

Αντίστοιχα, αν ο όρος τρίτης τάξης πρέπει να είναι μικρότερος του όρου δεύτερης τάξης, η οριακή κλίση είναι:

$$\frac{H}{L} \leq \frac{1}{7} \cdot \frac{\sinh^3(kd)}{\sqrt{1 + 8\cosh^3(kd)}} \quad (1.79)$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας ανάπτυξη 5^{ης} τάξης, οι ασύμπτωτες στη θεωρία Stokes 3^{ης} τάξης είναι $\frac{H}{L_0} < 0.1$ και $\frac{H}{d} < \frac{3}{4}(kd)^2$ για βαθιά και ρηχά νερά αντίστοιχα. Έτσι, επιτρέπεται στη θεωρία Stokes να επεκτείνεται προσθέτοντας διαδοχικά μικρότερες περιοχές ισχύος στο πεδίο εφαρμογής της γραμμικής θεωρίας (σχήμα 1.13) μέχρι να προσεγγιστεί το όριο θραύσης. Η θεωρία Stokes 5^{ης} τάξης προσεγγίζει πολύ το όριο θραύσης και πιθανόν ανάλυση μεγαλύτερης τάξης να μη δικαιολογείται. Ο Laitone (1962) πρότεινε ένα όριο στα ρηχά νερά στη θεωρία Stokes θέτοντας αριθμό Ursell $U=20$. Κοντά στο όριο αυτό η θεωρία Stokes προσεγγίζει τη θεωρία των cnoidal κυματισμών.

1.4 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

Στις προηγούμενες παραγράφους οι κυματισμοί αντιμετωπίστηκαν σαν μονοχρωματικοί, δηλαδή σαν κύματα μίας μόνο συχνότητας, με μοναδική διεύθυνση διάδοσης. Στην πραγματικότητα όμως η επιφάνεια της θάλασσας, ή άλλη μεγάλη υδάτινη επιφάνεια συντίθεται από ποικίλους κυματισμούς διαφόρων υψών και περιόδων που διαδίδονται σε διάφορες διευθύνσεις (εικόνες 1.1 και 1.2). Λόγω της πολύ μεγάλης μεταβλητότητας των μεγεθών αυτών στο χώρο και στο χρόνο, η θαλάσσια επιφάνεια δεν περιγράφεται με ντετερμινιστικές προσεγγίσεις, αλλά απαιτούνται στατιστικοί όροι. Η προσέγγιση αυτή καθιστά την ανάλυση πολύ περίπλοκη, αλλά περιγράφει την πραγματική κατάσταση πιο ρεαλιστικά, αφού μονοχρωματικοί κυματισμοί με σταθερές ιδιότητες παράγονται μεν στα εργαστήρια, αλλά στη φύση εμφανίζονται πολύ σπάνια. Στους κυματισμούς που έχουν ταξιδέψει σε μεγάλες αποστάσεις από την περιοχή γένεσης τους αποδίδεται ο όρος αποθάλασσα (swell) και εμφανίζουν συχνά ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των μονοχρωματικών κυμάτων στα βαθιά. Η επιφάνεια όμως της θάλασσας κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας αποτελείται από σύνθετους κυματισμούς (irregular ή random waves). Τελικά, η πραγματική εικόνα της θαλάσσιας επιφάνειας διαμορφώνεται από τη σύνθεση κυματισμών διαφόρων χαρακτηριστικών και προέλευσης.



Εικόνες 1.1 και 1.2: Στιγμιότυπα πραγματικής θαλάσσιας επιφάνειας στα βαθιά (αριστερά) και ρηχά νερά (δεξιά) αντίστοιχα

Οι μετρήσεις των κυματισμών στη φύση γίνονται με ειδικές διατάξεις. Ο πρώτος τρόπος μετρήσεων είναι η απευθείας ανάγνωση των ενδείξεων ύστερα από διαβροχή σε σταθερές κατακόρυφες σταδίες κοντά στην ακτή ή στα έργα ανοιχτής θάλασσας. Πολλές φορές γίνεται απευθείας καταγραφή με χρήση ηλεκτρικού κυκλώματος. Η μέθοδος αυτή δε δίνει πληροφορίες για τη διεύθυνση των κυμάτων. Δεύτερος τρόπος μετρήσεων είναι η χρήση κυματογράφου πίεσης που σταθεροποιείται σε βάθος d και μέσω αισθητήρων πίεσης καταγράφει τις υψομετρικές διαφορές στην επιφάνεια. Σύγχρονη μέθοδος καταγραφής είναι οι πλωτήρες (wave buoy) οι οποίοι αγκυροβολούνται σε κάποιο σταθερό σημείο και με ενσωματωμένα επιταχυνσιόμετρα καταγράφουν τις τρισδιάστατες επιταχύνσεις. Οι επιταχύνσεις αυτές ολοκληρώνονται δύο φορές ως προς το χρόνο και προκύπτουν οι μετακινήσεις της θαλάσσιας επιφάνειας. Προκύπτει έτσι μια πολύ καλή καταγραφή ακόμη και των κατευθύνσεων των κυματισμών. Άλλες μέθοδοι καταγραφής είναι με τη χρήση μετρητών τοποθετημένων στα ύφαλα πλοίων, με χρήση οπτικών μεθόδων (φωτογράφιση, στερεογράφιση, κινηματογράφιση) ή με τη χρησιμοποίηση μετρητών υπερήχων. Τέλος, τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούνται και καταγραφές από ειδικές διατάξεις πάνω σε δορυφόρους (altimeters).

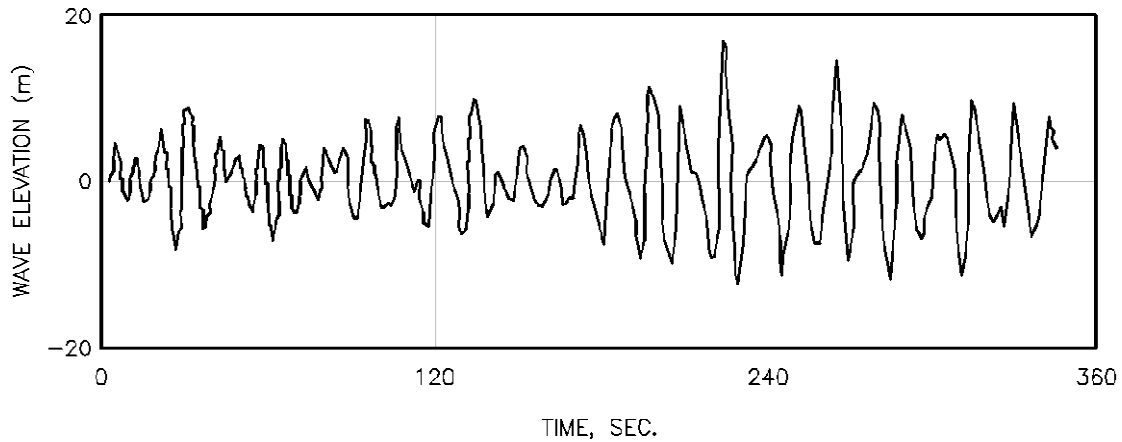


Εικόνα 1.3: Πλωτήρας τρισδιάστατης καταγραφής κυματισμών

Η ανάλυση των κυμάτων, όπως αυτά εμφανίζονται και καταγράφονται σε ένα ορισμένο σημείο, σε συνάρτηση με το χρόνο ονομάζεται εξέταση στην "περιοχή χρόνου" (time-domain). Η διερεύνηση της κατανομής σε συνάρτηση με τις συχνότητες είναι στην "περιοχή συχνοτήτων" (frequency domain) ή φασματική ανάλυση (spectral analysis).

Η φασματική ανάλυση βασίζεται στο μετασχηματισμό Fourier της θαλάσσιας επιφάνειας. Εξαιτίας της έντονης πολυπλοκότητας και της έλλειψης μετρήσεων, χρησιμοποιείται συχνά μία άλλη μέθοδος, της ανάλυσης κατά ομάδες κυματισμών (wave trains ή wave-by-wave analysis). Στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιούνται σημειακές μετρήσεις των διαταραχών της επιφάνειας οι οποίες αντιμετωπίζονται ως κυματισμοί και αναλύονται στατιστικά. Το μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι δεν παρέχει πληροφορίες για την κατεύθυνση των κυματισμών, καθώς αυτό που παρουσιάζεται ως μεμονωμένο κύμα σε ένα σημείο καταγραφής, μπορεί στην

πραγματικότητα να προέρχεται από την επαλληλία δύο ή περισσότερων κυμάτων διαφορετικού ύψους και κατεύθυνσης. Αντίστοιχα, το μειονέκτημα της φασματικής ανάλυσης είναι ο γραμμικός της χαρακτήρας που μπορεί να μην αποδίδει πιστά της μη-γραμμικές ιδιότητες των κυματισμών. Στο σχήμα 1.14 φαίνεται ενδεικτικά μία χρονοσειρά ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας από επιτόπου μετρήσεις.



Σχήμα 1.14: Χρονοσειρά ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας από επιτόπου μετρήσεις (πηγή: [174])

1.4.1 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

Η IAHR (1986) δίνει μια λεπτομερή περιγραφή των κύριων παραμέτρων περιγραφής των πραγματικών κυματισμών. Βασικότερες παράμετροι περιγραφής μιας κατάστασης θαλάσσιας διαταραχής είναι τα διάφορα ύψη κύματος, πραγματικά ή στατιστικά, οι διάφορες περίοδοι (κορυφής, μέση και χαρακτηριστική) και η κύρια κατεύθυνση κύματος (principal ή central wave direction). Πραγματικά ύψη είναι:

- H_{max} το μέγιστο ύψος κύματος στην καταγραφή
- H_{min} το ελάχιστο ύψος κύματος στην καταγραφή

Στατιστικά ύψη κύματος είναι τα εξής:

- \bar{H} ή H_m ή H_{av} το μέσο στατιστικά ύψος κύματος της καταγραφής
- $H_{1/n}$ το μέσο ύψος του υψηλότερου $\frac{100}{n}$ % των υψών των κυμάτων της καταγραφής.

Ιδιαίτερης σημασίας είναι το χαρακτηριστικό κύμα της διαταραχής, στο οποίο αντιστοιχεί το σημαντικό ύψος κύματος που συμβολίζεται με H_s και έχει επικρατήσει σαν το αντιπροσωπευτικό ύψος του συνόλου των κυμάτων. Το σημαντικό ύψος κύματος είναι το μέσο ύψος του υψηλότερου 33% των κυμάτων, δηλαδή $H_s = H_{1/3}$.

- H_{rms} το μέσο τετραγωνικό ύψος (root mean squares height) ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα του μέσου όρου των τετραγώνων των υψών κύματος της καταγραφής.

Το σημαντικό ύψος κύματος προσεγγίζεται στη φασματική ανάλυση ως $H_{m_0} \approx 4\sqrt{m_0}$ (1.80), όπου m_0 η ροπή μηδενικής τάξης του φάσματος κυμάτων (παρ. 1.4.3). Στην περιοχή του χρόνου προσεγγίζεται από τη σχέση $H_s \approx 4\sigma$ (1.81), όπου σ είναι η τυπική απόκλιση της καταγραφής της ελεύθερης επιφάνειας $\zeta(t)$.

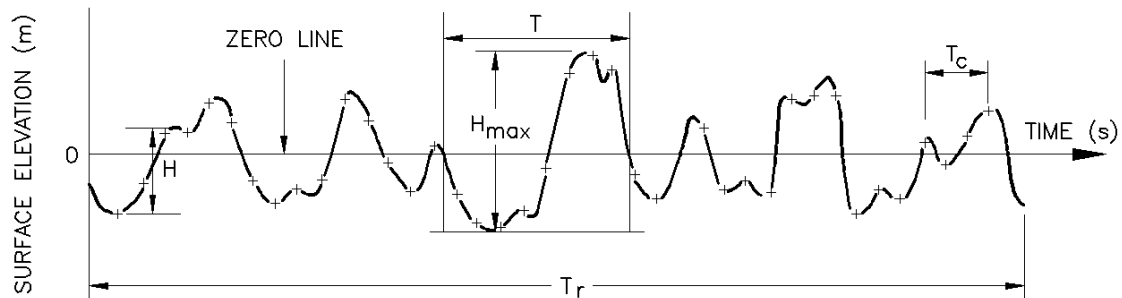
Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες περίοδοι είναι:

- \bar{T} ή T_m ή T_{av} η μέση στατιστικά περίοδος της καταγραφής
- T_s η χαρακτηριστική περίοδος, που ορίζεται σαν η μέση τιμή των περιόδων των κυμάτων που αντιστοιχούν στο υψηλότερο 33% των υψών της καταγραφής.
- Στη φασματική ανάλυση, σημαντική παράμετρος είναι η συχνότητα αιχμής f_p (peak frequency), η οποία ορίζεται ως η συχνότητα στην οποία αντιστοιχεί η μέγιστη τιμή του φάσματος (παρ. 1.4.3). Η περίοδος αιχμής T_p ορίζεται ως $T_p = \frac{1}{f_p}$.

1.4.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Στην ανάλυση στην περιοχή του χρόνου προσδιορίζονται οι χρονικές μεταβολές της θαλάσσιας επιφάνειας, όπως είναι το ύψος και το μήκος κύματος, με τη βασική παραδοχή, ότι το ένα ορισμένο κύμα είναι ανεξάρτητο από οποιοδήποτε άλλο. Κατά τη στατιστική ανάλυση μίας καταγραφής με διακεκριμένες τιμές του ύψους κύματος, ορίζεται το ύψος H_{rms} ως εξής:

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N H_i^2} \quad (1.82)$$



Σχήμα 1.15: Χαρακτηριστικά μεγέθη τυχαίου κυματισμού (πηγή: [174])

Σε ένα τμήμα χρονοσειράς $\zeta(t)$ καταγραμμένων κυματισμών, όπως του σχήματος 1.15, η εφαρμογή των μεθόδων της στατιστικής κατέδειξε τα εξής:

- Οι ανά χρονικές αποστάσεις Δt τιμές του ζ αποτελούν ένα στοχαστικό μέγεθος που ακολουθεί κατανομή Gauss
- Η εφαρμογή της τεχνικής "zero upcrossing", δηλαδή της αποτίμησης ύψους κύματος σαν διαφοράς διαδοχικών ελαχίστων και μεγίστων τιμών του ζ , δίνει μία σειρά H_i που επίσης είναι στοχαστικό μέγεθος. Αν η χρονοσειρά $\zeta(t)$ είναι μια διαδικασία μικρού εύρους διακυμάνσεως περιόδων, η κατανομή των H_i είναι κατανομή Rayleigh.

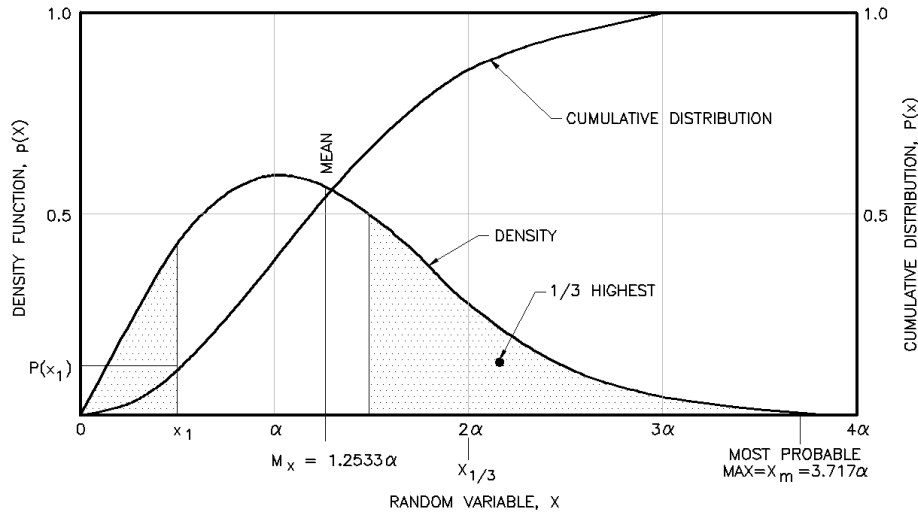
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$p(H) = \frac{2H}{H_{rms}^2} \cdot \exp \left[- \left(\frac{H}{H_{rms}} \right)^2 \right] \quad (1.83)$$

και η πιθανότητα υπέρβασης μιας τιμής H_* δίνεται από τη σχέση:

$$P(H \geq H_*) = \exp \left[- \left(\frac{H_*}{H_{rms}} \right)^2 \right] \quad (1.84)$$

Στο σχήμα 1.16 φαίνονται γραφικά η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η αθροιστική κατανομή πιθανότητας.



Σχήμα 1.16: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και αθροιστική κατανομή πιθανότητας (πηγή: [174])

Σε μία καταγραφή κυματικού επεισοδίου που περιέχει N ύψη κύματος και έχει διάρκεια T_L , η μέση περίοδος κυματισμού δίνεται από τη σχέση:

$$T_m = \frac{T_L}{N} \quad (1.85)$$

ενώ το μέσο ύψος του ανώτερου $\frac{100}{N}$ % των υψών δίνεται από τη σχέση:

$$H_{1/N} = H_{rms} \cdot \{ \sqrt{\ln N} + N \cdot \sqrt{\pi} \cdot [1 - \Phi(\sqrt{2 \ln N})] \} \quad (1.86)$$

$$\text{με } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (1.87)$$

που για πολύ μεγάλες τιμές του N οδηγεί στο μέγιστο πιθανό ύψος:

$$H_{max} = H_{rms} \cdot \sqrt{\ln N} \quad (1.88)$$

Επίσης, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H_{rms} \quad (1.89)$$

$$H_{1/3} = H_s = \sqrt{2} H_{rms} \quad (1.90)$$

1.4.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ - ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στους σύνθετους κυματισμούς γίνεται η υπόθεση ότι η ελεύθερη επιφάνεια προκύπτει από την επαλληλία πολλών μονοχρωματικών κυματισμών απειροστού ύψους και ποικίλων κατευθύνσεων:

$$\zeta(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - 2\pi f_i t + \varepsilon_i)] \quad (1.91)$$

Σε κάθε συνιστώσα αντιστοιχεί πυκνότητα ενέργειας:

$$E_i = \frac{1}{2} g \rho \alpha_i^2 \quad (1.92)$$

Οπότε κατ' επέκταση, αγνοώντας σε πρώτη φάση την κατευθυντικότητα, μπορεί να οριστεί η (ανηγγμένη) συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας:

$$S(f)df = \frac{1}{2} \sum_f^{f+df} \alpha_i^2 \quad (1.93)$$

Η συνάρτηση $S(f)$ αποτελεί το ενεργειακό φάσμα και μπορεί να υπολογιστεί από μία ψηφιακή (ή ψηφιοποιημένη) καταγραφή $\zeta(t)$ με τη μέθοδο αναλύσεως Fourier (FFT). Στη γενική περίπτωση η πυκνότητα ενέργειας κατανέμεται στις διάφορες κατευθύνσεις (ενώ ακόμη γενικότερα μεταβάλλεται και με το χρόνο), ορίζοντας το κατευθυντικό φάσμα:

$$S(f, \theta)df d\theta = \frac{1}{2} \sum_f^{f+df} \sum_{\theta}^{\theta+d\theta} \alpha_i^2 \quad (1.94)$$

με

$$S(f, \theta) = G(f, \theta) \cdot S(f) \quad (1.95)$$

όπου $G(f, \theta)$ η συνάρτηση κατευθυντικότητας με:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(f, \theta) d\theta = 1 \quad (1.96)$$

Σημαντικά μεγέθη του ενεργειακού φάσματος είναι οι ροπές n τάξεως:

$$m_n = \int_0^{\infty} S(f) \cdot f^n df \quad (1.97) \quad n=0,1,2,\dots$$

Φάσμα Pierson-Moskowitz (1964)

Το φάσμα Pierson-Moskowitz προέκυψε από μετρήσεις ανεμολογικών και κυματικών δεδομένων βρετανικών πλοίων στο βόρειο Ατλαντικό. Αφορά στις πλήρως ανεπτυγμένες θάλασσες (συνήθως μεγάλες θαλάσσιες εκτάσεις). Το φάσμα δίνεται από τον τύπο:

$$S(f) = \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4 f^5} \cdot \exp\left[-1.25 \left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right] \quad (1.98)$$

όπου $\alpha=0.0081$ και τα χαρακτηριστικά μεγέθη δίνονται από τη σχέση:

$$H_{m_0} = \frac{0.21 U_{19.5}^2}{g} \quad (1.99) \quad \text{και} \quad f_p = \frac{0.87g}{2\pi U_{19.5}} \quad (1.100)$$

$U_{19.5}$ είναι η ταχύτητα του ανέμου 19.5m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

Φάσμα Jonswap (Hasselmann et al., 1973)

Εκτεταμένες μετρήσεις και αναλύσεις κατά τη διάρκεια της δεκαετίας 1970-80 στη Βόρεια θάλασσα, έδειξαν ότι για ανάπτυξη κυματισμών με περιορισμό μήκους (πιο συνηθισμένη κατάσταση για παράκτιες λεκάνες), το ενεργειακό φάσμα μπορεί να παραμετροποιηθεί σε μία ενιαία μορφή:

$$S(f) = \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4 f^5} \cdot \exp\left[-1.25 \left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right] \cdot \gamma \cdot \exp\left[\frac{\left(\frac{f}{f_p}-1\right)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.101)$$

όπου:

$$\alpha = 0.076 \left(\frac{gF}{U_{10}^2}\right)^{-0.22} \quad (1.102) \quad \text{ο συντελεστής Phillips}$$

$$f_p = \frac{3.5g}{U_{10}} \left(\frac{gF}{U_{10}^2}\right)^{-0.33} \quad (1.103)$$

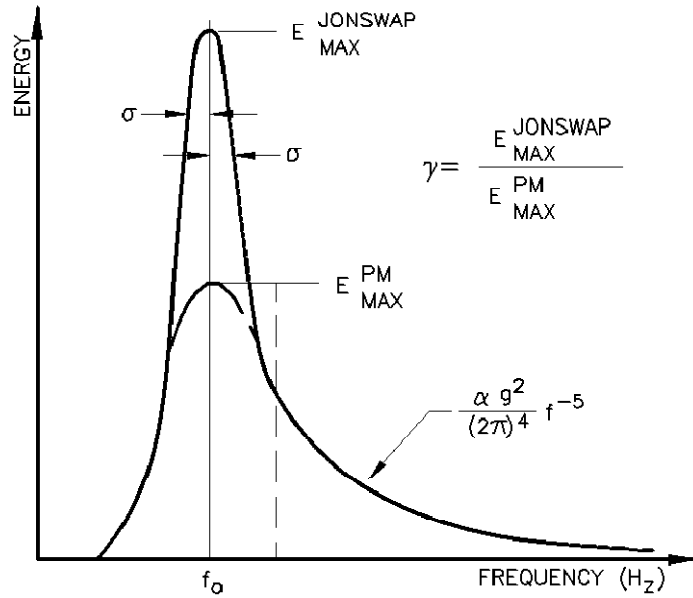
$\gamma=1 \div 7$ παράγων εξέλιξης της κορυφής με μέση τιμή 3.3
ο Mitsuyasu (1980) πρότεινε τη σχέση:

$$\gamma = 7 \cdot \left(\frac{gF}{U_{10}^2}\right)^{-\frac{1}{7}} \quad (1.104)$$

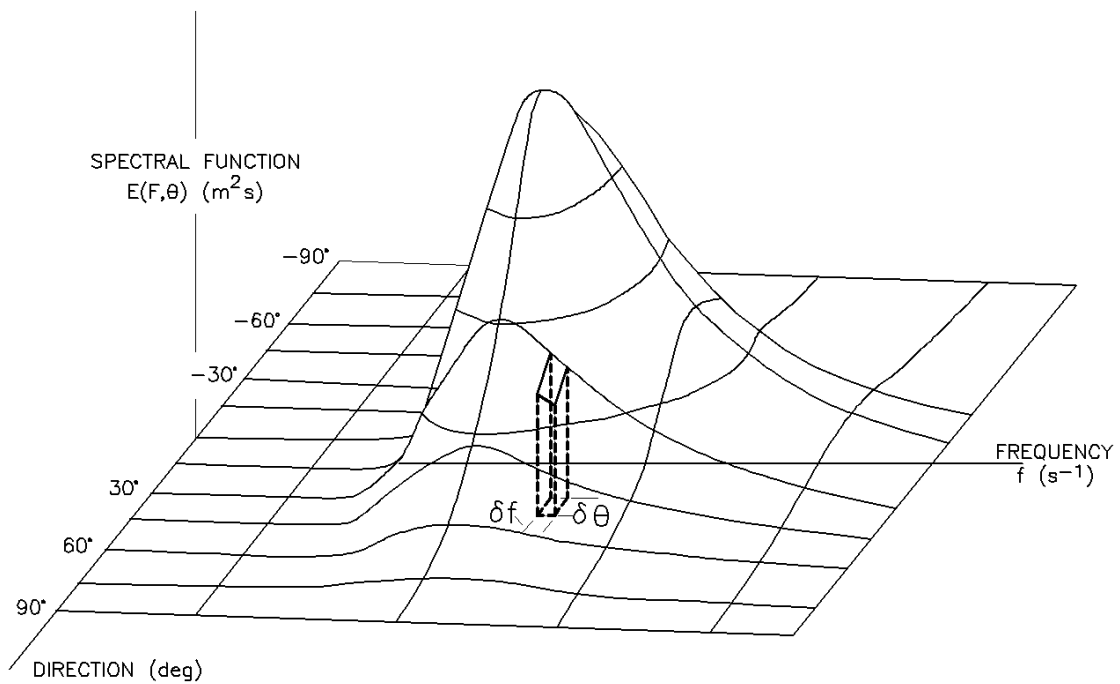
$$\sigma = \begin{cases} 0.07 & f \leq f_p \\ 0.09 & f > f_p \end{cases} \quad (1.105)$$

με F (fetch) το ανάπτυγμα πελάγους και U_{10} την ταχύτητα ανέμου σε ύψος 10m από την επιφάνεια της θάλασσας.

Άλλα γνωστά φάσματα είναι το Bretschneider (1959), το ISSC, το τροποποιημένο Wallops, το τροποποιημένο Jonswap, Ochi-Hubble (1976), Mitsuyasu (1968) κλπ.



Σχήμα 1.17: Σύγκριση ενεργειακών φασμάτων P-M και Jonswap (πηγή: [174])



Σχήμα 1.18: Κατευθυντικό φάσμα (πηγή: [174])

Φάσμα TMA (1985)

Τα παραπάνω φάσματα συνήθως αναφέρονται σε βαθιά νερά. Καθώς τα κύματα εισέρχονται σε νερά ενδιάμεσου βάθους και ρηχά νερά υφίστανται αλλαγές στο σχήμα του φάσματος λόγω ρήχωσης, διάθλασης και θραύσης. Για το λόγο αυτό οι Bouws et al. (1985) ανέπτυξαν το φάσμα TMA που ουσιαστικά μετατρέπει ένα φάσμα από τα βαθιά νερά, στο τυχαίο βάθος d . Η μέθοδος αναπτύχθηκε για φάσμα Jonswap αλλά επεκτείνεται και σε άλλα φάσματα. Είναι:

$$S_{TMA}(f, d) = S_{JONSWAP}(f) \cdot \Theta(\omega, d) \quad (1.106)$$

όπου το $S_{JONSWAP}$ προκύπτει από την 1.101 με τροποποιημένες τιμές:

$$\alpha = 0.0078 \left(\frac{2\pi U_{10}^2}{gL_p} \right)^{0.49} \quad (1.107) \quad \text{και} \quad \gamma = 2.47 \left(\frac{2\pi U_{10}^2}{gL_p} \right)^{0.39} \quad (1.108)$$

με L_p το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα f_p . Μία καλή προσέγγιση του Θ (σφάλμα ως 4%) δίνεται από τη σχέση:

$$\Theta(\omega, d) = \begin{cases} \frac{\omega_h^2}{2} & \omega_h \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(2 - \omega_h)^2 & \omega_h > 1 \end{cases} \quad (1.109)$$

$$\text{με } \omega_h = 2\pi f \sqrt{\frac{d}{g}} \quad (1.110)$$

1.5 ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

Οι αναλυτικές μέθοδοι περιγραφής της διάδοσης των κυματισμών που περιγράφηκαν παραπάνω χαρακτηρίζονται από απλοποιητικές παραδοχές ως προς τη γεωμετρία του πεδίου (δισδιάστατα φαινόμενα, σταθερό βάθος κλπ.) και ξεχωριστή επί μέρους ανάλυση των διεργασιών (διάθλαση, περίθλαση, ανάκλαση κλπ.). Όταν το θαλάσσιο πεδίο έχει καθαρά τρισδιάστατη μορφή και οι διεργασίες αναμιγνύονται και αλληλεπιδρούν στο χώρο και στο χρόνο, όπως συνήθως συμβαίνει και πρέπει να ληφθεί υπ' όψη στην ανάλυση των παράκτιων τεχνικών έργων, τότε η σύγχρονη τεχνική διαθέτει σα μόνη διέξοδο τη σύνθεση και λειτουργία μοντέλων (μοντέλων) του φυσικού φαινομένου. Τα μοντέλα διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες, τα φυσικά (εργαστηριακά) και τα υπολογιστικά (μαθηματικά μοντέλα που επιλύονται λόγω πολυπλοκότητας σε ηλεκτρονικό υπολογιστή).

1.5.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ) ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

Τα μαθηματικά μοντέλα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τα μη ολοκληρωμένα ως προς την περίοδο του κύματος (non phase averaged) και τα ολοκληρωμένα ως προς την περίοδο του κύματος (phase averaged). Στα μοντέλα της πρώτης κατηγορίας περιέχεται σαν ανεξάρτητη

μεταβλητή και ο χρόνος. Η κυματική διαταραχή εισάγεται στο πεδίο με τη μορφή οριακής συνθήκης ταλάντωσης της ελεύθερης επιφάνειας και προωθείται προς το όριο όπου υπάρχουν κατασκευές που περιγράφονται από τις κατάλληλες οριακές συνθήκες (όριο ανάκλασης, απορροφητικό όριο κλπ.). Στα μοντέλα της δεύτερης κατηγορίας γίνεται η παραδοχή της ολοκλήρωσης ως προς την περίοδο του κύματος με αποτέλεσμα το ύψος κύματος H να αποτελεί το επιχειρησιακό άγνωστο μέγεθος. Τα μοντέλα αυτά βρίσκουν εφαρμογή σε θαλάσσιες εκτάσεις μεγάλων διαστάσεων.

Τέλος, υπάρχουν μαθηματικά μοντέλα που βασίζονται στη 2D ή 3D επίλυση των πλήρων εξισώσεων Navier-Stokes περιγράφοντας και τα τυρβώδη μεγέθη με μεθόδους όπως RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes), LES (Large Eddy Simulation), SPH (Smoothed Particle Hydro-dynamics) κλπ. Γνωστά εμπορικά υδροδυναμικά μοντέλα είναι το DELFT3D, MIKE 21, LIMWAVE, ShoreCirc, COBRAS κλπ.

1.5.1.1 Φασματικά μοντέλα ακτίνων (Spectral ray models)

Αριθμητικά μοντέλα κυματικών ακτίνων έχουν αναπτυχθεί από τη δεκαετία του 1970 (π.χ. Abernethy και Gilbert, 1975). Τα μοντέλα αυτά επιτύγχαναν το μετασχηματισμό των φασμάτων από τα βαθιά νερά στην παράκτια ζώνη λαμβάνοντας υπόψη τη ρήχωση και τη διάθλαση. Το φάσμα στα βαθιά διακριτοποιείται ως προς τη διεύθυνση και τη συχνότητα και κάθε συνιστώσα-συνδυασμός των τιμών αυτών των δύο παραμέτρων υπόκειται σε ρήχωση και διάθλαση. Στη συνέχεια οι νέες τιμές ξανασυνθέτουν το φάσμα στο βάθος d . Η ανάπτυξη του φάσματος TMA επέτρεψε την συμπερίληψη της θραύσης στα μοντέλα με εμπειρικό τρόπο, θέτοντας ένα άνω όριο στην ενέργεια.

Πιο αναλυτικά, μικρές ανωμαλίες στη βυθομετρία εκτρέπουν τις ακτίνες, που δεν μπορούν να επανέλθουν στη θέση τους επειδή δεν περιλαμβάνεται μηχανισμός περίθλασης (όπως στα παραβολικά μοντέλα ή στα μοντέλα ήπιας κλίσης). Για το λόγο αυτό η διακριτοποίηση πρέπει να είναι της τάξης του τοπικού μήκους κύματος, κατά μήκος του οποίου υποτίθεται ότι δε μεταβάλλεται το ύψος κύματος. Τεμνόμενες ακτίνες (καυστικές) αντιμετωπίζονται με ειδικές τεχνικές (averaging techniques) που ουσιαστικά υποκαθιστούν την περίθλαση. Γενικά, τα μοντέλα αυτά είναι κατάλληλα για βαθιά νερά (μικρή επίδραση διάθλασης) και για μεγάλες θαλάσσιες περιοχές.

1.5.1.2 Μαθηματικά μοντέλα τύπου Boussinesq

Τα μοντέλα αυτά επιλύουν τις εξισώσεις τύπου Boussinesq που προκύπτουν με ολοκλήρωση κατά βάθος των εξισώσεων Euler (συνέχειας και ορμής) και περιλαμβάνουν μη γραμμικούς όρους πίεσης και ταχύτητας ανώτερης τάξης. Τα μοντέλα Boussinesq περιγράφουν εν μέρει μη γραμμικά φαινόμενα (π.χ θραύση, γέννηση αρμονικών, μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις) και έχουν εμφανιστεί σε διάφορες εκδοχές. Αναλυτική παρουσίασή τους γίνεται στο δεύτερο κεφάλαιο.

1.5.1.3 Μαθηματικά μοντέλα ήπιας κλίσης

Τα μοντέλα αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της διάδοσης κυματισμών με δυνατότητα περιγραφής διάθλασης, περίθλασης, ανάκλασης και θραύσης. Εφαρμόζονται για περιπτώσεις μονοχρωματικών κυματισμών αφού στηρίζονται στη γραμμική θεωρία, ενώ η περιγραφή τυχαίων κυματισμών γίνεται με επαλληλία πολλών μονοχρωματικών με διαφορετικές συχνότητες και διευθύνσεις. Επομένως, το βασικό μειονέκτημά τους είναι η αδυναμία περιγραφής των μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων. Τα μαθηματικά αυτά μοντέλα στηρίζονται στην επίλυση της εξίσωσης ήπιας κλίσης (mild slope equation) στις διάφορες μορφές της. Η εξίσωση αυτή στη χρονικά εξαρτώμενη μορφή της είναι:

$$-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \nabla(cc_g \nabla \zeta) - (\omega^2 - k^2 cc_g)\zeta = 0 \quad (1.111)$$

με c τη ταχύτητα φάσης και c_g τη ταχύτητα ομάδας

Ο Berkhoff (1972) με την παραδοχή πλήρως αρμονικού κύματος οδηγήθηκε στην ελλειπτικού τύπου διαφορική εξίσωση τύπου Helmholtz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(cc_g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(cc_g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{c_g}{c} \omega^2 \zeta = 0 \quad (1.112)$$

Βάσει των εργασιών των Ito Tanimoto (1972), Berkhoff (1972) και Booij (1981), η εξίσωση ήπιας κλίσης μπορεί να πάρει την υπερβολική μορφή 2^{ης} τάξης:

$$\frac{c_g}{c} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(cc_g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(cc_g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \quad (1.113)$$

Ο Copeland (1985) εξέφρασε την 1.113 ως ζεύγος υπερβολικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\nabla Q + \frac{c_g}{c} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (1.114)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c_g c \nabla \zeta = 0 \quad (1.115)$$

όπου Q είναι μία ολοκληρωμένη κατά το βάθος συνάρτηση της ταχύτητας των μορίων του νερού. Το σύστημα των (1.114) και (1.115) αποτελεί συνήθως τη βάση των μοντέλων ήπιας κλίσης που επιλύονται με μεθόδους πεπερασμένων διαφορών και επιτρέπουν και την περιγραφή των ανακλώμενων κυματισμών.

Για την περίπτωση που εμφανίζεται έντονη περίθλαση ή είναι εμφανής η κύρια διεύθυνση του κυματισμού και η ανάκλαση είναι αμελητέα, ο Radder (1979) ανέπτυξε μία παραβολική μορφή της εξίσωσης ήπιας κλίσης που αποτελεί τη βάση των λεγόμενων παραβολικών αριθμητικών μοντέλων.

Σε όλες τις παραπάνω προσεγγίσεις γίνεται η παραδοχή της μικρής μεταβολής του βάθους, αμελώντας όρους ανώτερης τάξης ανάλογους των $(|\nabla d|)^2$ και $|\nabla^2 d|$. Ωστόσο, μεταγενέστερα μοντέλα όπως των Massel (1993), Chamberlain και Porter (1995), Suh et al.(1997), Lee et al.

(1998) κλπ. προσομοιώνουν τη διάδοση κυματισμών και σε έντονα μεταβαλλόμενες βυθομετρίες χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη εξίσωση ήπιας κλίσης.

1.5.2 ΦΥΣΙΚΑ (ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΑ) ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

Η αξιοπιστία και απόδοση ενός φυσικού μοντέλου διάδοσης κυματισμών επιβάλλει την ισχύ της θεωρίας ομοιότητας. Συγκεκριμένα επιχειρείται να εξασφαλιστεί:

- Γεωμετρική ομοιότητα
- Κινηματική ομοιότητα
- Δυναμική ομοιότητα

Στα παρακάτω ο δείκτης p αναφέρεται στο πρωτότυπο και ο δείκτης m στο μοντέλο. Η γεωμετρική ομοιότητα επιβάλλει σταθερό λόγο αντίστοιχων μηκών πρωτότυπου και μοντέλου και η κινηματική ομοιότητα σταθερό λόγο ταχυτήτων:

$$\lambda_L = \frac{L_m}{L_p} \rightarrow \text{σταθερά} \quad (1.116)$$

$$\lambda_V = \frac{V_m}{V_p} \rightarrow \text{σταθερά} \quad (1.117)$$

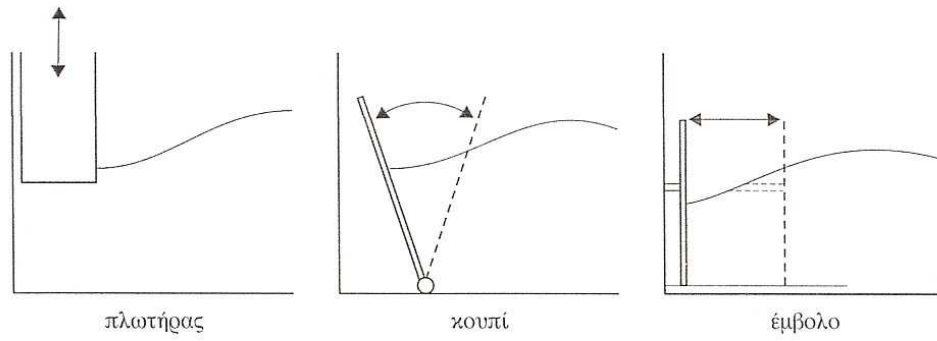
Η δυναμική ομοιότητα επιβάλλει ισότητα των αριθμών Froude $Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$ και Reynolds $Re = \frac{VL}{\nu}$ με V χαρακτηριστική ταχύτητα, L χαρακτηριστικό μήκος και ν το κινηματικό ιξώδες του ρευστού. Πρέπει δηλαδή:

$$Fr_m = Fr_p \rightarrow \frac{\lambda_V}{\sqrt{\lambda_L}} = 1 \quad (1.118) \quad \text{και} \quad Re_m = Re_p \rightarrow \frac{\lambda_V \lambda_L}{\lambda_\nu} = 1 \quad (1.119)$$

όπου λ_ν ο λόγος των τιμών του κινηματικού ιξώδους στο μοντέλο και στο πρωτότυπο αντίστοιχα. Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι το ιξώδες του ρευστού στο μοντέλο θα πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερο του ιξώδους του πραγματικού ρευστού. Η απαίτηση αυτή είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί και γι' αυτό οι (1.118) και (1.119) είναι ασυμβίβαστες. Η τήρηση του αριθμού Froude συνεπάγεται μείωση του αριθμού Reynolds του μοντέλου με εμφάνιση του κινδύνου επιδράσεως της κλίμακας (scale effect), δηλαδή της μείωσης του Re σε επίπεδα στρωτής ροής και μη πλήρους ανάπτυξης της τύρβης όπως στη φύση. Για το λόγο αυτό στα μοντέλου τύπου Froude γίνεται συνήθως μια τεχνητή αύξηση της τραχύτητας του πυθμένα σε μη πραγματικά επίπεδα για την υποστήριξη της ανάπτυξης τυρβώδους ροής. Από τη σχέση (1.118) προκύπτει η κλίμακα χρόνου ενώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί στρεβλή κλίμακα ως προς το βάθος:

$$\lambda_T = \sqrt{\lambda_L} \quad (1.120) \quad \text{και} \quad \lambda_D = \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_T}\right)^2 \quad (1.121)$$

Οι μετρητικές διατάξεις είναι σταθμηγράφοι επιφάνειας, φωτογραφήσεις, βιντεοσκοπήσεις, διαλύσεις χρωστικών, μετρήσεις ταχύτητας με κλασικές μεθόδους ή ανεμόμετρα Doppler. Οι κυματογεννήτριες μπορεί να είναι τύπου πλωτήρα (plunger), τύπου κουπιού (flap ή paddle) ή τύπου εμβόλου (piston).



Σχήμα 1.19: Τύποι κυματογεννητριών (πηγή: [93])

Πρόβλημα στα φυσικά μοντέλα αποτελεί η ανεξέλεγκτη ανάκλαση στα όρια που προκαλεί τη δημιουργία στάσιμων μακρών κυμάτων. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται περιμετρικά στοιχεία απορρόφησης των κυματισμών (πλέγματα και χαλίκόστρωτες ακτές) ή γίνεται προγραμματισμός των κυματογεννητριών ώστε να απορροφούν τα επιστρέφοντα εξ ανακλάσεως κύματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΤΥΠΟΥ BOUSSINESQ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά τη διάδοση των κυματισμών από τα βαθιά νερά στον παράκτιο χώρο, σε περιοχές τυχαίας πολύπλοκης βυθομετρίας με την παρουσία τεχνικών έργων και λόγω των στερεών ορίων των ακτών (με μικρή ή μεγάλη κλίση πρανών), οι κυματισμοί διαμορφώνονται πολύ διαφορετικά από τις δισδιάστατες αναλυτικά περιγράψιμες μορφές του πρώτου κεφαλαίου. Οι υδροδυναμικές διεργασίες, κυρίως στη ζώνη θραύσης και στην περιοχή αναρρίχησης στις ακτές, εμφανίζουν μεγάλο επιστημονικό και τεχνικό ενδιαφέρον διότι επιδρούν στο σχεδιασμό των θαλάσσιων κατασκευών και στην εξέλιξη της ακτογραμμής. Έτσι, άμεσα και έμμεσα επηρεάζουν την ανθρώπινη δραστηριότητα στην παράκτια ζώνη.

Η διάθλαση, η ρήχωση, η περίθλαση, η ανάκλαση, η αναρρίχηση, η τριβή πυθμένα και κυρίως η θραύση, που αποτελεί τον κύριο μηχανισμό διάχυσης της κυματικής ενέργειας, προσδίδουν έντονη πολυπλοκότητα στην παράκτια διάδοση των κυμάτων. Τα φαινόμενα αυτά προσεγγίζονται προκαταρκτικά με απλές ποσοτικές μεθόδους (νόμος Snell, πίνακες Wiegell, απλές σχέσεις θραύσης κλπ.), αλλά για τη λεπτομερή και ακριβέστερη περιγραφή τους απαιτείται η εφαρμογή κάποιου μοντέλου.

Ένας από τους πιο αποδοτικούς τρόπους προσομοίωσης των φαινομένων αυτών έχει αποδειχθεί τα τελευταία χρόνια ότι είναι τα μαθηματικά μοντέλα τύπου Boussinesq. Τα μοντέλα αυτά βασίζονται στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων τύπου Boussinesq. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από την ολοκλήρωση κατά βάθος των εξισώσεων Euler, θεωρώντας αστρόβιλη ροή και σε πρώτο στάδιο σχετικά μακρούς κυματισμούς. Η αρχική προσέγγιση του Boussinesq (1872) για επίπεδο πυθμένα σταθερού βάθους συνοψίζεται στη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gd \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - gd \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{3}{2} \frac{\zeta^2}{d} + \frac{d^2}{3} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (2.1)$$

Η (2.1) αποτελεί την πρωταρχική εξίσωση Boussinesq, ωστόσο η μορφή που έδωσε ο Peregrine (1967,1972) αποτελεί ουσιαστικά τη βάση των γνωστών μοντέλων Boussinesq. Βαθμιαία τα μοντέλα αυτά επεκτάθηκαν για (ελαφρώς) μη γραμμικούς κυματισμούς και για (πλήρως) διασπειρόμενους κυματισμούς. Δύο αδιάστατες παράμετροι ποσοτικοποιούν τις ιδιότητες αυτές. Η πρώτη είναι η $\varepsilon = \frac{H}{d}$ (ύψος κύματος προς τοπικό βάθος) και εκφράζει τη μη-

γραμμικότητα (non-linearity parameter). Η δεύτερη παράμετρος είναι η $\sigma^2 = \left(\frac{d}{L}\right)^2$ (το τετράγωνο του λόγου του βάθους προς ένα χαρακτηριστικό οριζόντιο μήκος, συνήθως το μήκος κύματος) και εκφράζει τη διασπορά συχνοτήτων (dispersion parameter).

Από υπολογιστικής άποψης τα μοντέλα Boussinesq θεωρούνται αποδοτικότερα σε σύγκριση με τις πιο περίπλοκες πλήρεις εξισώσεις Navier-Stokes (fully Navier-Stokes 2D/3D models) και πιο ακριβή από τις εξισώσεις ρηχών νερών. Τα πλεονεκτήματα αυτά οδήγησαν τα τελευταία χρόνια σε αρκετές επιστημονικές προσπάθειες για την υπέρβαση των αρχικών μειονεκτημάτων των μοντέλων Boussinesq. Ενώ λοιπόν οι αρχικές εξισώσεις Peregrine (1967) βασίζονται στην παραδοχή μικρών τιμών των παραμέτρων ϵ και σ^2 , βαθμιαία έχουν γίνει προσπάθειες για επέκταση του πεδίου εφαρμογής των μοντέλων. Έτσι, βελτιωμένες εκδόσεις μοντέλων Boussinesq επιτρέπουν την εφαρμογή τους σε βαθύτερα νερά (Witting (1984), Murray (1989), Madsen et al. (1991), Nwogu (1993), Karambas (1999), Zou (1999), Gobbi and Kirby (2000) κλπ.) βελτιώνοντας τα χαρακτηριστικά διασποράς τους. Βελτιώσεις των μοντέλων έχουν επιτευχθεί και όσον αφορά στην υπέρβαση της αρχικής υπόθεσης της ήπιας μη γραμμικότητας (Madsen et al. (2002,2003), Bingham and Agnon (2005), Schäffer (2004), Wei et al. (1995), Beji and Nadaoka (1996) κλπ.) μέχρι και λίγο πριν τη θραύση.

Γενικά οι διάφορες κατευθύνσεις επέκτασης των μοντέλων Boussinesq είναι η μεταβαλλόμενη βυθομετρία, η βελτιωμένη διασπορά συχνοτήτων, η βελτιωμένη μη-γραμμική συμπεριφορά, η ανάπτυξη σε σειρά Taylor των όρων των εξισώσεων γύρω από διαφορετικές κατά βάθος θέσεις, η συμπερίληψη της θραύσης, η συμπερίληψη της τριβής πυθμένα, η συμπερίληψη της επιφανειακής τάσης, η ύπαρξη εσωτερικών κυματισμών κλπ. Οι κυριότερες διαφορές μεταξύ των διαφόρων μορφών των μοντέλων αφορούν κυρίως στη διαφορετική επιλογή (θεώρηση) της οριζόντιας ταχύτητας και στις διαφορετικές εκφράσεις των όρων ανώτερης τάξης που διατηρούνται κατά την κατάστρωση των εξισώσεων. Ως προς την επιλογή της οριζόντιας ταχύτητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέση ως προς το βάθος ταχύτητα, η ταχύτητα στην ελεύθερη επιφάνεια, η ταχύτητα σε τυχαίο βάθος ή η ταχύτητα στον πυθμένα.

2.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΚΑΤΑ PEREGRINE (1967,1972)

Τα σημερινά μοντέλα Boussinesq βασίζονται στην αρχική μορφή των εξισώσεων Boussinesq, όπως δόθηκε από τον Peregrine στις εργασίες του (1967,1972). Πρόκειται για το σύστημα εξισώσεων διατήρησης της μάζας και της ορμής, όπως προκύπτει από τις εξισώσεις κίνησης του Euler και την εξίσωση συνέχειας για ιδεατό ρευστό:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) w + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla \vec{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.4}$$

όπου $\vec{u}(t) = (u(t), v(t))$ το διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας, p η πίεση και w η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, ρ η πυκνότητα του ρευστού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ ο οριζόντιος τελεστής βαθμίδας.

Βασιζόμενος στην παραδοχή ότι οι παράμετροι $\varepsilon = \frac{H}{d}$ και $\sigma^2 = (\frac{d}{L})^2$ είναι μικρές ($O(\varepsilon) \ll 1$ και $O(\sigma^2) \ll 1$) και της ίδιας τάξης ($\varepsilon = O(\sigma^2)$) και ύστερα από ολοκλήρωση κατά βάθος προκύπτουν οι:

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(d + \zeta)\vec{U}] = 0 \quad (2.5)$$

$$\vec{U}_t + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} + g\nabla\zeta = \frac{d}{2}\nabla[\nabla(d\vec{U}_t)] - \frac{d^2}{6}\nabla(\nabla\vec{U}_t) \quad (2.6)$$

όπου $\vec{U}(t) = (U(t), V(t))$ το διάνυσμα της μέσης κατά το βάθος οριζόντιας ταχύτητας (από τον πυθμένα ως την ελεύθερη επιφάνεια), $d=d(x,y)$ το μεταβαλλόμενο βάθος (ως τη στάθμη ηρεμίας), ζ η διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας και ο δείκτης t δείχνει παραγωγή ως προς το χρόνο.

Η παραπάνω εξίσωση διατήρησης της μάζας και της ορμής για μονοδιάστατη ροή γράφονται:

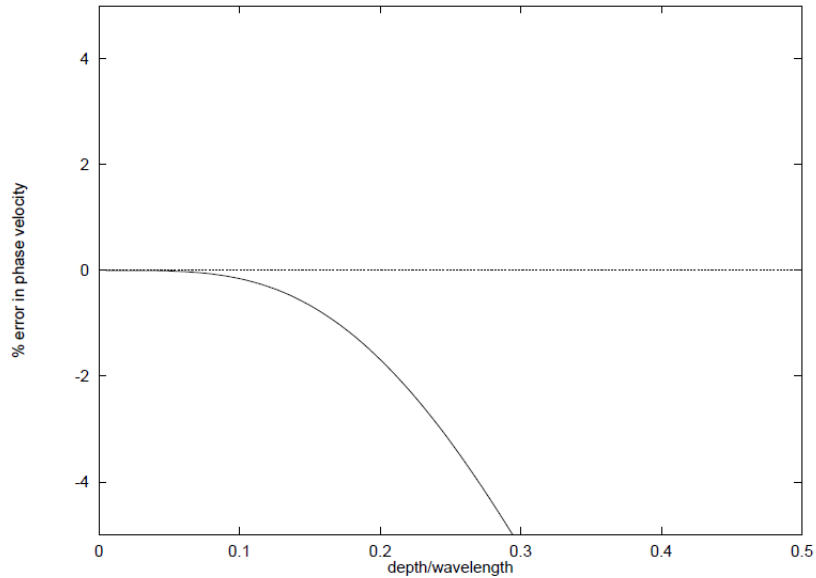
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(d + \zeta)U] = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{d}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(d \frac{\partial U}{\partial t} \right) - \frac{d^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \quad (2.8)$$

Στα βαθιά νερά η παράμετρος σ^2 γίνεται σημαντική και συνεπώς οι αρχικές εξισώσεις Boussinesq του Peregrine δεν έχουν ισχύ. Θεωρώντας σταθερό βάθος, αμελώντας όρους ανάλογους του ε και μεγαλύτερης τάξης και για απλό αρμονικό κυματισμό προκύπτει η σχέση διασποράς:

$$\omega^2 = gdk^2 \frac{1}{1 + \frac{1}{3}(kd)^2} \quad (2.9)$$

Η εξίσωση αυτή για μικρές τιμές του kd συμπίπτει με την αναλυτική σχέση της ταχύτητας φάσης από τη γραμμική θεωρία Airy για ρηχά νερά ($\omega^2 = gdk^2$). Για μεγαλύτερες τιμές του kd , οι αποκλίσεις από τη γραμμική θεωρία είναι σημαντικές. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1, για βάθη μεγαλύτερα του 0.3 του μήκους κύματος, το σχετικό σφάλμα (ως προς την ταχύτητα φάσης της γραμμικής θεωρίας) ξεπερνά το 5%. Οι Madsen και Sørensen (1992) δίνουν σαν όριο εφαρμογής των κλασικών εξισώσεων Peregrine το $\frac{d}{L_0} = 0.22$ (L_0 το μήκος κύματος στα βαθιά) για σταθερό βάθος και το $\frac{d}{L_0} = 0.12$ για μεταβλητή βυθομετρία.



Σχήμα 2.1: Σχετικό σφάλμα της ταχύτητας φάσης των εξισώσεων Peregrine ως προς την αντίστοιχη της γραμμικής θεωρίας Airy (πηγή: [177])

2.3 ΜΟΝΤΕΛΑ BOUSSINESQ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Το βασικό μειονέκτημα των αρχικών εξισώσεων Peregrine είναι η δυνατότητα περιγραφής κυματισμών με ακρίβεια μόνο στα ρηχά νερά. Επομένως, οι προσπάθειες γενίκευσης αφορούσαν καταρχάς στην επέκταση του πεδίου εφαρμογής των εξισώσεων τύπου Boussinesq σε βαθύτερα νερά.

Η πρώτη σοβαρή προσπάθεια γίνεται από τον Witting (1984) που προσθέτει όρους στην εξίσωση ορμής ανάλογους μίας παραμέτρου διασποράς. Χρησιμοποιώντας αναπτύγματα Padé τάξεως [N,N] και [N-1,N] επεκτείνει τη σχέση διασποράς (2.9) που αντιστοιχεί σε ανάπτυγμα Padé τάξης [0,2]. Έτσι, για ανάπτυγμα [2,2] προκύπτει η σχέση:

$$\frac{c^2}{gd} = \frac{1 + \frac{1}{15}(kd)^2}{1 + \frac{2}{5}(kd)^2} \tag{2.10}$$

Η μέθοδος των αναπτυγμάτων Padé χρησιμοποιήθηκε σε πολλές μεταγενέστερες εργασίες. Η εργασία των Schäffer και Madsen (1995) είναι ίσως η γενικότερη όλων. Οι συγγραφείς εισάγουν δύο συντελεστές (B_1, B_2) που βελτιώνουν τη σχέση διασποράς και την περιγραφή της ρήχωσης. Για τους διάφορους συνδυασμούς τιμών των συντελεστών αυτών, προκύπτουν οι σχέσεις διασποράς των άλλων εργασιών. Μάλιστα συνδυάζοντας τις προγενέστερες προσεγγίσεις των Madsen-Sørensen (1992) και Nwogu (1993) κατέληξαν σε εξισώσεις με χαρακτηριστικά διασποράς που αντιστοιχούν σε ανάπτυγμα Padé [4,4] της σχέσης γραμμικής διασποράς.

Οι κυριότερες εργασίες που ανήκουν στην κατηγορία των μοντέλων με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς είναι με χρονολογική σειρά:

- 1) Madsen et al. (1991)
- 2) Madsen και Sørensen (1992)
- 3) Nwogu (1993)
- 4) Beji και Battjes (1994)
- 5) Beji και Nadaoka (1996)
- 6) Madsen και Schäffer (1998)
- 7) Karambas (1999)
- 8) Zou (1999)

Στις παρακάτω παραγράφους θα γίνει εκτενέστερη αναφορά στις εργασίες των Madsen et al. (1991), Nwogu (1993), Karambas (1999) και Zou (1999).

2.3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΩΝ MADSEN ET AL. (1991)

Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε μία άλλη μορφή των εξισώσεων Boussinesq με σκοπό τη βελτίωση των χαρακτηριστικών διασποράς. Έτσι, επεκτείνεται το πεδίο εφαρμογής σε βαθύτερα νερά. Το μοντέλο αυτό των Madsen, Murray και Sørensen έχει τη δυνατότητα περιγραφής της διάδοσης σύνθετων κυματισμών από τα βαθιά προς τα ρηχά σε δύο διαστάσεις. Στα βαθιά νερά το μοντέλο αποκτά έντονα γραμμικό χαρακτήρα δίνοντας ταχύτητες φάσης που συμφωνούν με τις αντίστοιχες της γραμμικής θεωρίας Stokes. Στα ρηχά νερά συγκλίνει προς τις κλασικές εξισώσεις Boussinesq δίνοντας ικανοποιητικά αποτελέσματα για κύματα με ύψος ως και 75% του ύψους θραύσης.

Για τη διασπορά οι συγγραφείς πρότειναν τη σχέση:

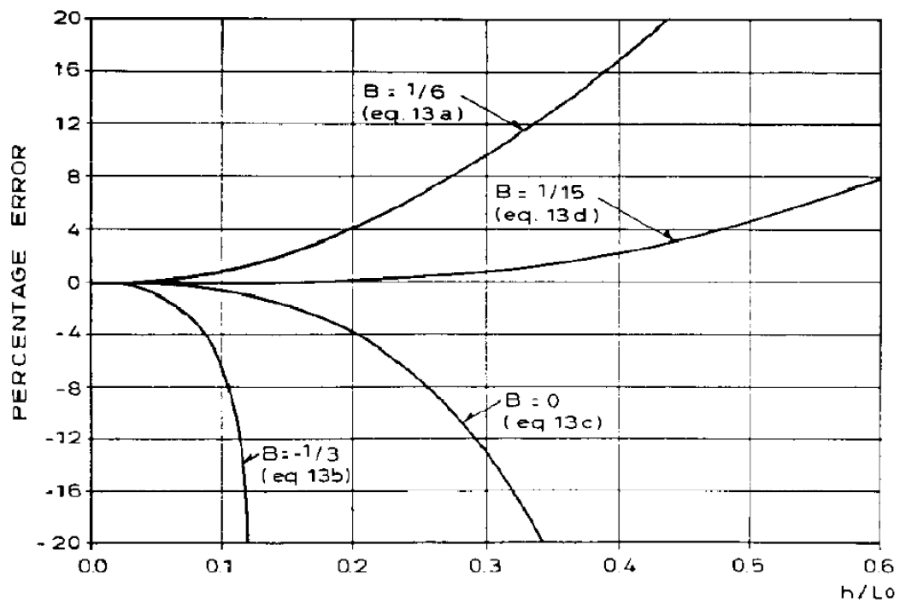
$$\frac{c^2}{gd} = \frac{1+Bk^2d^2}{1+(B+\frac{1}{3})k^2d^2} \tag{2.11}$$

όπου η παράμετρος B παίρνει διάφορες τιμές ανάλογα με το ποια οριζόντια ταχύτητα χρησιμοποιείται:

$$B = \begin{cases} 1/6 & \text{κάνον ταχύτητας πηχθμένα } U_b \\ -1/3 & \text{κάνον ταχύτητας επιφάνειας } U_s \\ 0 & \text{κάνον μέσης κατά βάθος ταχύτητας } \bar{U} \\ 1/15 & \text{κάνον προσέγγιστος Padé} \end{cases}$$

Η τιμή B=1/6 προκύπτει από τη χρησιμοποίηση της ταχύτητας πυθμένα ως χαρακτηριστικής οριζόντιας ταχύτητας στην ανάλυση των Svendsen (1974) και Witting (1984). Η τιμή B=-1/3 προκύπτει από την εργασία του Svendsen (1974) με τη χρήση της επιφανειακής ταχύτητας. Με τη χρήση της μέσης κατά βάθος ταχύτητας το B παίρνει την τιμή 0 και η εξίσωση διασποράς τη μορφή της (2.9) των κλασικών εξισώσεων Boussinesq. Τέλος, η τιμή B=1/15 προκύπτει από την ανάλυση Padé τάξης [2,2] που ακολούθησε ο Witting (1984), όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Στο σχήμα 2.2 φαίνεται το σχετικό σφάλμα της ταχύτητας φάσης όπως προκύπτει από τις

διάφορες μορφές των εξισώσεων Boussinesq σε σχέση με τη ταχύτητα φάσης της γραμμικής θεωρίας Airy (δηλαδή $100 \cdot (c - c_{\text{STOKES}}) / c_{\text{STOKES}}$) συναρτήσει του λόγου d/L_0 , όπου L_0 το μήκος κύματος στα βαθιά.



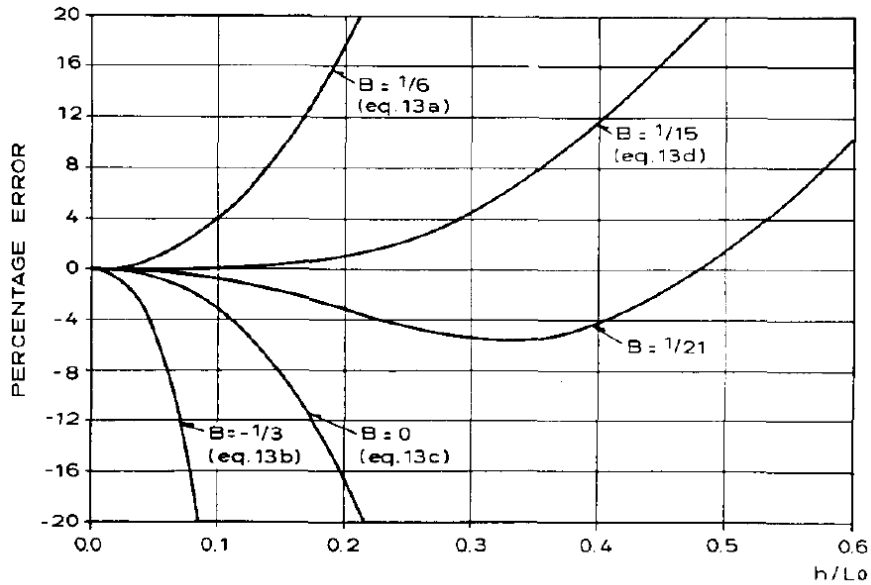
Σχήμα 2.2: Ποσοστιαίο σφάλμα της ταχύτητας φάσης $100 \cdot (c - c_{\text{STOKES}}) / c_{\text{STOKES}}$ για διάφορες μορφές των εξισώσεων Boussinesq σε σχέση με τη γραμμική θεωρία Stokes συναρτήσει του λόγου d/L_0 (πηγή: [109])

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι αν περιοριστεί το ανεκτό σφάλμα στο 5%, οι κλασικές εξισώσεις Boussinesq δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα μέχρι το όριο $d/L_0 < 0.22$, ενώ με την ανάλυση Padé του Witting ($B=1/15$) ο περιορισμός βάρους γίνεται $d/L_0 < 0.5$. Αντίστοιχα συμπεράσματα (σχήμα 2.3) προκύπτουν και για τη ταχύτητα ομάδας c_g :

$$c_g = c + k \frac{dc}{dk} \tag{2.12}$$

Από τα διαγράμματα των σχημάτων 2.2 και 2.3, προκύπτει ότι η μέθοδος του Witting δίνει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τις κλασικές εξισώσεις Boussinesq. Ωστόσο, εξαιτίας της δυσκολίας επέκτασης της προσέγγισης Witting σε δύο διαστάσεις, οι Madsen et al. πρότειναν ένα νέο σετ εξισώσεων Boussinesq έχοντας διπλό στόχο:

- οι εξισώσεις να εκφραστούν σε δύο οριζόντιες διαστάσεις με αγνώστους την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και τις ολοκληρωμένες στο βάθος οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας
- η διασπορά πρέπει να έχει γραμμικό χαρακτήρα και να περιγράφεται από τη σχέση (2.11)



Σχήμα 2.3: Ποσοστιαίο σφάλμα της ταχύτητας ομάδας $100 \cdot (c_g - c_{g,STOKES}) / c_{g,STOKES}$ για διάφορες μορφές των εξισώσεων Boussinesq σε σχέση με τη γραμμική θεωρία Stokes συναρτήσει του λόγου d/L_0 (πηγή: [109])

Οι συγγραφείς ξεκίνησαν από την κλασική μορφή των εξισώσεων Boussinesq, όπως επιλύθηκαν από τους Abbott et al. (1984):

$$S_t + P_x + Q_y = 0 \quad (2.13)$$

$$P_t + \left(\frac{P^2}{d}\right)_x + \left(\frac{PQ}{d}\right)_y + gdS_x - \frac{1}{3}h^2(P_{xxt} + Q_{xyt}) = 0 \quad (2.14)$$

$$Q_t + \left(\frac{Q^2}{d}\right)_y + \left(\frac{PQ}{d}\right)_x + gdS_y - \frac{1}{3}h^2(Q_{yyt} + P_{xyt}) = 0 \quad (2.15)$$

όπου d είναι το συνολικό βάθος του νερού, h το βάθος νερού ως τη στάθμη ηρεμίας, S η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και P και Q οι ολοκληρωμένες ως προς το βάθος οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας κατά x και y αντίστοιχα και οι δείκτες υποδηλώνουν παραγωγή ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή. Η γραμμική σχέση διασποράς των εξισώσεων αυτών αντιστοιχεί στην τιμή $B=0$ στη (2.11).

Μία συνηθισμένη απλοποίηση όρων υψηλότερης τάξης έγκειται σε πρώτη φάση στη χρήση των εξισώσεων μακρών κυμάτων (Mei, 1989). Για πυθμένα ήπιας κλίσης οι χωρικές παράγωγοι του βάθους h (ως τη στάθμη ηρεμίας) μπορούν να αμεληθούν. Οπότε ως πρώτη προσέγγιση ισχύει:

$$(P_{xxt} + Q_{xyt}) \approx -gh(S_{xxx} + S_{xyy}) \quad (2.16)$$

$$(Q_{yyt} + P_{xyt}) \approx -gh(S_{yyy} + S_{yxx}) \quad (2.17)$$

Επομένως, μία μορφή των εξισώσεων (2.13), (2.14), (2.15) προκύπτει χρησιμοποιώντας τις (2.16) και (2.17). Στα ρηχά νερά αυτή η προσέγγιση δεν επιφέρει σημαντικές αλλαγές στην αριθμητική λύση. Στα βαθιά νερά όμως τα χαρακτηριστικά διασποράς είναι πολύ περιορισμένα, αντίστοιχα με αυτά που προκύπτουν για $B=-1/3$ στη (2.11). Για το λόγο αυτό οι Madsen et al. θεώρησαν τις ποσότητες:

$$\varepsilon_1 = -Bh^2[P_{xxt} + Q_{xyt} + gh(S_{xxx} + S_{xyy})] \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_2 = -Bh^2[Q_{yyt} + P_{xyt} + gh(S_{yyy} + S_{yxx})] \quad (2.19)$$

Στα ρηχά νερά η προσεγγιστική ισχύς των (2.16) και (2.17) δηλώνει ότι οι όροι ε_1 και ε_2 είναι ασήμαντοι στην περιοχή αυτή και επομένως μπορούν να προστεθούν στις προηγούμενες εξισώσεις Boussinesq χωρίς να επηρεάσουν την ακρίβεια του μοντέλου. Επομένως, οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$S_t + P_x + Q_y = 0 \quad (2.20)$$

$$P_t + \left(\frac{P^2}{d}\right)_x + \left(\frac{PQ}{d}\right)_y + gdS_x - \left(B + \frac{1}{3}\right)h^2(P_{xxt} + Q_{xyt}) - Bgh^3(S_{xxx} + S_{xyy}) = 0 \quad (2.21)$$

$$Q_t + \left(\frac{Q^2}{d}\right)_y + \left(\frac{PQ}{d}\right)_x + gdS_y - \left(B + \frac{1}{3}\right)h^2(Q_{yyt} + P_{xyt}) - Bgh^3(S_{yyy} + S_{yxx}) = 0 \quad (2.22)$$

Αυτές οι εξισώσεις ικανοποιούν την απαίτηση της εξίσωσης (2.11) για τη φασική ταχύτητα, αλλά και την αντίστοιχη σχέση για την ταχύτητα ομάδας:

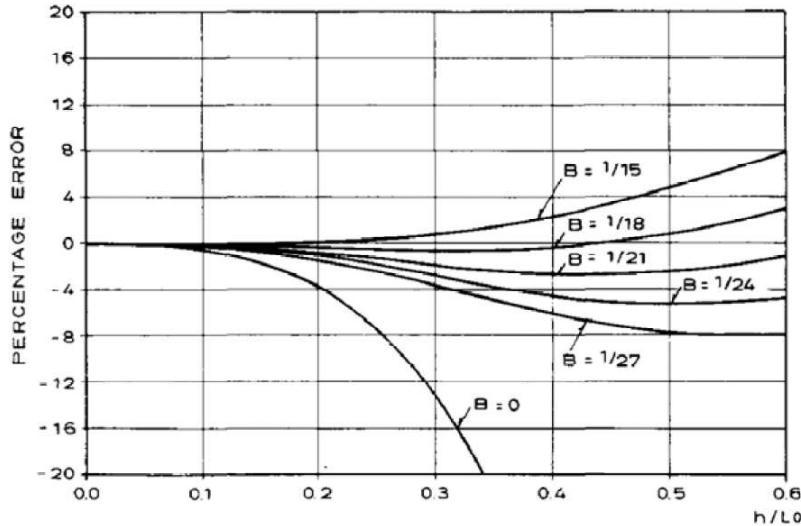
$$c_g = c \left[1 + \frac{Bk^2h^2}{1+Bk^2h^2} - \frac{(B+\frac{1}{3})k^2h^2}{1+(B+\frac{1}{3})k^2h^2} \right] \quad (2.23)$$

Οι τιμές του συντελεστή B δεν περιορίζονται στις προαναφερθείσες. Αντίθετα, ο B μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της ελαχιστοποίησης του σφάλματος της ταχύτητας φάσης (ή ομάδας) σε σχέση με την αντίστοιχη της γραμμικής θεωρίας Airy. Για παράδειγμα στο σχήμα 2.4 φαίνεται ότι επιλέγοντας $B=1/21$ το σφάλμα της ταχύτητας φάσης είναι μικρότερο από 3% για όλο το πεδίο τιμών $0 < h/L_0 < 0.75$.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι προσθέτοντας επιπλέον όρους του τύπου S_{xxxx} και P_{xxxxt} στις (2.20), (2.21) και (2.22), καθίσταται δυνατή η εισαγωγή όρων τέταρτης τάξης στη σχέση διασποράς κατά Witting:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1 + \frac{1}{9}k^2h^2 + \frac{1}{945}k^4h^4}{1 + \frac{4}{9}k^2h^2 + \frac{1}{63}k^4h^4} \quad (2.24)$$

Η προσθήκη αυτή δίνει ακόμη καλύτερα αποτελέσματα. Το σφάλμα για την ταχύτητα φάσης είναι λιγότερο από 0.05% στο όριο $h/L_0=0.5$. Ωστόσο, η εισαγωγή των όρων αυτών κάνει το μαθηματικό αυτό μοντέλο μη ελκυστικό από πρακτικής άποψης.



Σχήμα 2.4: Ποσοστιαίο σφάλμα της ταχύτητας φάσης $100 \cdot (c - c_{\text{STOKES}}) / c_{\text{STOKES}}$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου B σε σχέση με τη γραμμική θεωρία Stokes συναρτήσει του λόγου h/L_0 (πηγή: [109])

2.3.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΟΥ NWOGU (1993)

Για τη βελτίωση των χαρακτηριστικών διασποράς των εξισώσεων Boussinesq ο Nwogu (1993) ακολούθησε μία διαφορετική προσέγγιση από τους Madsen et al. (1991). Οι εξισώσεις του Nwogu προκύπτουν με ανάπτυξη της ταχύτητας σε σειρά Taylor και αντικατάστασής της στις ολοκληρωμένες κατά βάθος εξισώσεις κίνησης Euler και στην εξίσωση συνέχειας. Βασική διαφοροποίηση είναι ότι χρησιμοποιείται αρχικά ως εξαρτημένη μεταβλητή στην κατάστρωση των εξισώσεων η οριζόντια ταχύτητα σε μία αυθαίρετη κατακόρυφη θέση z_α . Το βάθος στο οποίο λαμβάνεται η ταχύτητα καθορίζεται στη συνέχεια από την προκύπτουσα σχέση διασποράς σε σύγκριση με τη σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας. Έτσι, οι προκύπτουσες εξισώσεις περιγράφουν καλύτερα τη διάδοση κυματισμών σε βαθύτερα νερά σε σχέση με την κλασική μορφή των εξισώσεων Boussinesq. Οι εξισώσεις Nwogu γράφονται:

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(d + \zeta)\vec{u}_\alpha] + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{d^2}{6} \right) d \nabla (\nabla \cdot \vec{u}_\alpha) + \left(z_\alpha + \frac{d}{2} \right) d \nabla [\nabla \cdot (d \vec{u}_\alpha)] \right\} = 0 \tag{2.25}$$

$$\vec{u}_{\alpha t} + g \nabla \zeta + \vec{u}_\alpha \nabla \vec{u}_\alpha + z_\alpha \left\{ \frac{z_\alpha}{2} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}_{\alpha t}) + \nabla [\nabla \cdot (d \vec{u}_{\alpha t})] \right\} = 0 \tag{2.26}$$

όπου $\vec{u}_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha)$ το διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας στην αυθαίρετη θέση $z=z_\alpha$. Η μορφή αυτή των εξισώσεων εν συγκρίσει με τις κλασικές μορφές των εξισώσεων Boussinesq περιέχει

έναν επιπλέον όρο διασποράς στην εξίσωση συνέχειας. Έτσι, τα χαρακτηριστικά της γραμμικής διασποράς διαφοροποιούνται σημαντικά από ότι στις κλασικές μορφές εξισώσεων, ειδικά στα νερά ενδιάμεσου βάθους και βαθιά νερά. Στην περίπτωση διάδοσης κυματισμών σε μία διεύθυνση (1D) με σταθερό βάθος, οι εξισώσεις (2.25) και (2.26) παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + d \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta u_\alpha)}{\partial x} + \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) d^3 \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} = 0 \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha d^2 \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^2 \partial t} = 0 \tag{2.28}$$

όπου: $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{z_\alpha}{d}\right)^2 + \frac{z_\alpha}{d}$ (2.29)

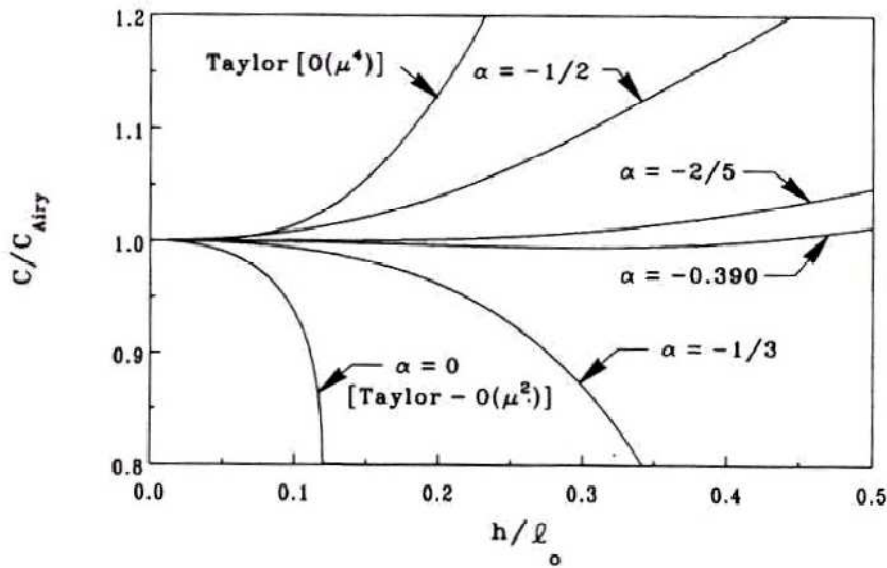
Με γραμμικοποίηση των (2.27),(2.28) και για ένα περιοδικό κύμα μικρού ύψους με συχνότητα ω και κυματαριθμό k της μορφής

$$\zeta = \alpha_0 \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \tag{2.30} \quad \text{και} \quad u_\alpha = u_0 \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \tag{2.31}$$

προκύπτει η σχέση διασποράς:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gd \left[\frac{1 - (\alpha + \frac{1}{3})(kd)^2}{1 - \alpha(kd)^2} \right] \tag{2.32}$$

Στο σχήμα 2.5 γίνεται σύγκριση της σχέσης (2.32) με τη σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας Airy $\omega^2 = gk \tanh(kd)$ για διάφορες τιμές του α .



Σχήμα 2.5: Κανονικοποιημένη ταχύτητα φάσης για διάφορες τιμές του α στην ανάλυση Nwogu (1993) (πηγή: [130])

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η κλασική μορφή των εξισώσεων Boussinesq αντιστοιχεί στην τιμή $\alpha=-1/3$. Στα ρηχά νερά ($kd \rightarrow 0$) όλες οι σχέσεις διασποράς συγκλίνουν ασυμπτωτικά. Ωστόσο, σε μεγαλύτερα βάθη η σχέση διασποράς αποκλίνει σημαντικά από την αντίστοιχη της γραμμικής θεωρίας.

Οι εξισώσεις Nwogu έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι δυνατόν να προσδιοριστεί μία βέλτιστη τιμή για την παράμετρο α , τέτοια ώστε η σχέση διασποράς σε μια καθορισμένη περιοχή τιμών kd να προσεγγίζει αυτή της γραμμικής θεωρίας. Για την τιμή $\alpha = -2/5$ προκύπτει η σχέση διασποράς στην οποία κατέληξε και ο Witting (1984) ακολουθώντας ανάλυση Padé (1,1). Ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των σχετικών σφαλμάτων της ταχύτητας φάσης σε ολόκληρο το διάστημα $0 < d/L_0 < 0.5$, προκύπτει η βέλτιστη τιμή του $\alpha = -0.39$ που αντιστοιχεί στη θέση $z_\alpha = -0.53d$. Η τιμή αυτή δίνει μέγιστη διαφορά στο προαναφερθέν διάστημα μικρότερη του 2% από την ταχύτητα φάσης της γραμμικής θεωρίας (σχήμα 2.5). Αντίθετα, η κλασική μορφή της εξίσωσης Boussinesq ($\alpha = -1/3$) δίνει σχετικό σφάλμα 85% στο μέγιστο σχετικό βάθος $d/L_0 = 0.48$. Γενικά το σετ εξισώσεων του Nwogu επεκτείνει το πεδίο εφαρμογής σε βάθη από τρεις μέχρι πέντε φορές μεγαλύτερα από τις προηγούμενες μορφές των εξισώσεων για δεδομένο επίπεδο ακρίβειας της διασποράς.

Για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ο Nwogu χρησιμοποίησε τη μέθοδο Crank-Nicolson σε σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης. Συμπεριλήφθηκαν όροι με παραγώγους τρίτης τάξης λόγω της αριθμητικής διασποράς.

Τέλος, με την αριθμητική επίλυση του μοντέλου του Nwogu (1993) ασχολήθηκαν οι Wei και Kirby (1995). Όπως αναφέρεται στην εργασία τους, οι πρόσθετοι όροι για τη βελτίωση της διασποράς στις εξισώσεις Boussinesq προσφέρουν διόρθωση $O(\sigma^2)$ αλλά η αντίστοιχη σχέση διασποράς μέσω της ανάλυσης Padé εμφανίζει ακρίβεια $O(\sigma^4)$. Οι συγγραφείς πρότειναν ένα ακόμη ακριβέστερο σχήμα πρόγνωσης-διόρθωσης (predictor-corrector) 4^{ης} τάξης. Η διακριτοποίηση του σχήματος απαλείφει αυτόματα σφάλματα που θα ήταν ίδιου τύπου με τους όρους διασποράς και θα έπρεπε να υπόκεινται σε διόρθωση αν χρησιμοποιούταν σχήμα χαμηλότερης τάξης.

2.3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΟΥ KARAMBAS (1999)

Οι κλασικές εξισώσεις του Peregrine (1967) (2.7), (2.8) για σταθερό βάθος και μία διάσταση γράφονται:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh) = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{d^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \tag{2.34}$$

όπου $h=d+\zeta$ το συνολικό βάθος ως την ελεύθερη επιφάνεια. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν πολύ ικανοποιητικά τη διάδοση των κυμάτων στα ρηχά νερά. Ωστόσο, στα βαθιά νερά η παράμετρος διασποράς σ^2 γίνεται σημαντική καθιστώντας μη ρεαλιστική τη χρήση τους. Ο Karambas (1999) επέκτεινε το πεδίο εφαρμογής των εξισώσεων Boussinesq σε νερά ενδιάμεσου βάθους για μονοχρωματικούς, μη-γραμμικούς διασπειρόμενους κυματισμούς. Αποτέλεσμα της ανάλυσής του ήταν η σταθερά $1/3$ στην εξίσωση (2.34) να αντικατασταθεί από

ένα συντελεστή A , ο οποίος είναι συνάρτηση της περιόδου κύματος και του συνολικού βάθους h .

Το φυσικό πρόβλημα περιγράφεται για αστρόβιλη ροή από την εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.35)$$

όπου Φ το δυναμικό της ταχύτητας, την οριακή συνθήκη πυθμένα, τη δυναμική και κινηματική οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (κεφ.1^ο). Οι εξισώσεις των Peregrine (1967) και Nwogu (1993) βασίζονται στην παραδοχή ότι η κατανομή της κατακόρυφης ταχύτητας με το βάθος είναι γραμμική (ρηγά νερά). Η υπόθεση αυτή δεν είναι ρεαλιστική για ενδιάμεσα νερά, όπου πρέπει να χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις υπερβολικού συνημιτόνου. Αν U είναι η μέση ως προς το βάθος οριζόντια ταχύτητα ο Karambas ανέπτυξε την κατακόρυφη ταχύτητα w σε δυναμοσειρά του $d+z$:

$$w = - \left[A_1(d+z) + A_2 \frac{(d+z)^2}{h} + A_3 \frac{(d+z)^3}{h^2} + \dots \right] \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.36)$$

$$\text{με } A_1 + A_2 + A_3 + \dots = 1 \quad (2.37)$$

Από την εξίσωση συνέχειας, την κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας και κάνοντας την παραδοχή ότι:

$$U \frac{\partial \zeta}{\partial x} \approx u_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (2.38)$$

με u_s την ταχύτητα στην ελεύθερη επιφάνεια, προκύπτει η σχέση:

$$w = -h \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{για } z=\zeta \quad (2.39)$$

Ακολουθώντας την αναλυτική επίλυση της εξίσωσης Laplace με χωρισμό μεταβλητών και χρησιμοποιώντας τις (2.36), (2.37) και (2.39) ο Karambas καταλήγει στις σχέσεις:

$$A_n = \frac{(kh)^n}{n! \sinh(kh)} \quad n=1,3,5,7,\dots \rightarrow \text{περιττός} \quad (2.40)$$

$$A_n = 0 \quad n=2,4,6,8,\dots \rightarrow \text{άρτιος} \quad (2.41)$$

και όντως $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + \dots = 1$

Οπότε τελικά η εξίσωση ορμής Boussinesq παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = Ah^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + Ah^2 \left(U \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \quad (2.42)$$

με $A=A_1/3+A_3/5+A_5/7+\dots$ (2.43). Επομένως, η παράμετρος A είναι συνάρτηση του συνολικού βάθους h και της περιόδου T του κύματος. Για βάθη με $d/L_0 < 0.5$ απαιτούνται λιγότεροι από επτά όροι στο άθροισμα (2.43). Στα ρηχά νερά με $kd \rightarrow 0$ προκύπτει $A \rightarrow 1/3$, όπως και στην εξίσωση Serre (1953).

Ανάλογη ανάλυση ακολούθησε ο Karambas και για ήπια κεκλιμένο πυθμένα. Η εξίσωση ορμής στο μοντέλο Boussinesq παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = h^2 \frac{\partial^2 (A \frac{\partial U}{\partial x})}{\partial x \partial t} + Ah^2 \left(U \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + d \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + d_x h \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \left(A_1 \frac{1}{2} + A_3 \frac{3}{4} + \dots \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} \right] + d_x h U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \left[\left(A_1 \frac{1}{2} + A_3 \frac{3}{4} + \dots \right) + \frac{1}{2} \right] + d_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.44)$$

με u_0 την ταχύτητα πυθμένα. Η σχέση γραμμικής διασποράς γράφεται:

$$\omega^2 = \frac{gdk^2}{1+A(kd)^2} \quad (2.45)$$

Οπότε αντικαθιστώντας προκύπτει:

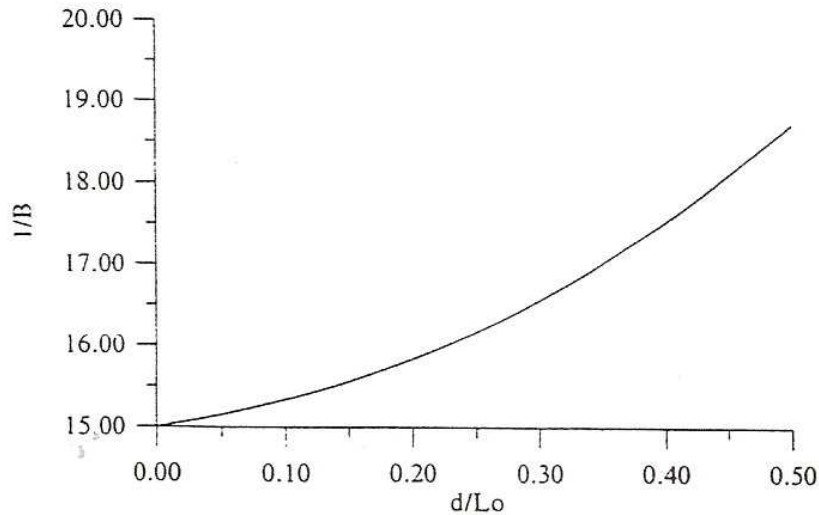
$$\omega^2 = \frac{gk \cdot kd \cdot \sinh(kd)}{\sinh(kd) + \left(\frac{kd}{3 \cdot 1!} + \frac{(kd)^3}{5 \cdot 3!} + \frac{(kd)^5}{7 \cdot 5!} + \dots \right) (kd)^2} = gk \frac{\sinh(kd)}{\cosh(kd)} = gk \tanh(kd) \quad (2.46)$$

Η (2.46) είναι η εξίσωση διασποράς της γραμμικής θεωρίας Airy και συνεπώς όσον αφορά στη διασπορά οι προταθείσες εξισώσεις είναι ακριβείς. Εκτός των παραπάνω, ο Karambas (1999) ανέπτυξε και ένα μη γραμμικό μοντέλο Boussinesq με παρόμοια ανάλυση με των Madsen et al. (1991). Η εξίσωση ορμής που έδωσε είναι:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = h^2 \frac{\partial^2 (A \frac{\partial U}{\partial x})}{\partial x \partial t} + Ah^2 \left(U \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + d \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + d_x h \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \left(A_1 \frac{1}{2} + A_3 \frac{3}{4} + \dots \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} \right] + d_x h U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \left[\left(A_1 \frac{1}{2} + A_3 \frac{3}{4} + \dots \right) + \frac{1}{2} \right] + d_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} + Bd^2 \left[\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + g \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 (U \frac{\partial U}{\partial x})}{\partial x^2} \right] \quad (2.47)$$

με την παράμετρο B να δίνεται από τη σχέση: $B = -\frac{A^{-\frac{1}{3}}}{A(kd)^2}$ (2.48)

και γραφικά από το σχήμα (2.6). Στο μη-γραμμικό μοντέλο η εξίσωση συνέχειας είναι ακριβής σε όλο το φάσμα βαθών, αλλά στην εξίσωση ορμής διατηρούνται όροι ως $O(\varepsilon^2)$. Για κύματα κοντά στη θραύση και για νερά ενδιάμεσου βάθους (π.χ. κοντά στο όριο βαθιών νερών $d/L=0.5$ και θεωρώντας κριτήριο θραύσης $H/L=0.14$) το $\varepsilon=H/d$ έχει τιμή περίπου 0.28 και άρα το γινόμενο $\varepsilon^2=0.07$ είναι όντως μικρό. Συνεπώς, εξισώσεις μπορούν να προσομοιώσουν μη-γραμμικά διασπειρόμενα κύματα σε ρηχά νερά και νερά ενδιάμεσου βάθους.



Σχήμα 2.6: Διάγραμμα της ποσότητας 1/B συναρτήσει του σχετικού βάθους d/L₀ για γραμμικά κύματα (πηγή: [80])

2.3.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΟΥ ΖΟΥ (1999)

Ο Ζου (1999) στην εργασία του παρουσίασε ένα σύνολο εξισώσεων Boussinesq που εμφανίζει ακρίβεια τρίτης τάξης. Οι χωρικές παράγωγοι τέταρτης τάξης που εμφανίζονται στους τριτοβάθμιους όρους, μετασχηματίζονται σε χωρικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Εκτός των βελτιωμένων χαρακτηριστικών διασποράς και η μη-γραμμική συμπεριφορά εμφανίζεται καλύτερη, με αποτέλεσμα η ακρίβεια των αποτελεσμάτων να είναι κατά μία τάξη ανώτερη από αυτή των κλασικών εξισώσεων Boussinesq. Αξίζει να σημειωθεί ότι το κατακόρυφο προφίλ της οριζόντιας ταχύτητας προκύπτει πολυώνυμο τέταρτου βαθμού και της κατακόρυφης ταχύτητας πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Οι εξισώσεις ανταποκρίνονται σε οριζόντιο πυθμένα αλλά και σε μεταβαλλόμενο βάθος με την υπόθεση ήπιας κλίσης. Στην περίπτωση οριζόντιου πυθμένα οι εξισώσεις Boussinesq του Ζου έχουν τη μορφή:

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(d + \zeta)\vec{U}] = 0 \tag{2.49}$$

$$\vec{U}_t + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} + g\nabla\zeta + \vec{G} = \frac{1}{3}(d + \zeta)^2\nabla(\nabla \cdot \vec{U}_t) + \frac{1}{15}d^2\nabla[\nabla \cdot (\vec{U}_t + g\nabla\zeta)] \tag{2.50}$$

όπου:

$$\vec{G} = \frac{1}{3}\nabla \left\{ d^2 \left[(\nabla \cdot \vec{U})^2 - \vec{U} \cdot \nabla^2 \vec{U} - \frac{1}{10} \nabla^2 (\vec{U} \cdot \vec{U}) \right] \right\} - d \cdot \nabla \zeta \cdot (\nabla \cdot \vec{U}) \tag{2.51}$$

με d το βάθος ως τη στάθμη ηρεμίας, \vec{U} η μέση κατά βάθος οριζόντια ταχύτητα και ζ η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.

Για την περίπτωση μεταβλητού βάθους με πυθμένα ήπιας κλίσης ($O(\nabla d) \leq O(\sigma)$) οι εξισώσεις Boussinesq παίρνουν τη μορφή:

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(d + \zeta)\vec{U}] = 0 \quad (2.52)$$

$$\vec{U}_t + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} + g\nabla\zeta + \vec{F} = \frac{1}{2}(d + \zeta)\nabla[\nabla \cdot (d \cdot \vec{U}_t)] - \frac{1}{6}(d + \zeta)^2\nabla(\nabla \cdot \vec{U}_t) + \frac{1}{15}d^2\nabla[\nabla \cdot (\vec{U}_t + g\nabla\zeta)] \quad (2.53)$$

όπου:

$$\vec{F} = \frac{1}{3}\nabla\left\{d^2\left[(\nabla \cdot \vec{U})^2 - \vec{U} \cdot \nabla^2\vec{U} - \frac{1}{10}\nabla^2(\vec{U} \cdot \vec{U})\right]\right\} - d \cdot \nabla\zeta \cdot (\nabla \cdot \vec{U}) - \frac{1}{2}\zeta\nabla[\nabla \cdot (d \cdot \vec{U}_t)] \quad (2.54)$$

Ο Ζου βελτίωσε την προσομοίωση της ρήχωσης προσθέτοντας έναν όρο πηγής στην εξίσωση συνέχειας που αντιστοιχεί στους όρους δεύτερης τάξης των αναπτυγμάτων των μεταβλητών σε σειρά δυνάμεων της παραμέτρου $\varepsilon=H/d$. Έτσι η εξίσωση συνέχειας παραμένει ίδια με την (2.52), όμως η εξίσωση ορμής παίρνει τη μορφή:

$$\vec{U}_t + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} + g\nabla\zeta + \vec{K} = \frac{1}{2}(d + \zeta)\nabla[\nabla \cdot (d \cdot \vec{U}_t)] - \frac{1}{6}(d + \zeta)^2\nabla(\nabla \cdot \vec{U}_t) + B_1d^2\nabla[\nabla \cdot (\vec{U}_t + g\nabla\zeta)] + B_2\nabla[\nabla \cdot (d^2\vec{U}_t + gd^2\nabla\zeta)] \quad (2.55)$$

$$\mu\varepsilon \quad \vec{K} = \frac{1}{3}\nabla\left\{d^2\left[(\nabla \cdot \vec{U})^2 - \vec{U} \cdot \nabla^2\vec{U} - \frac{1}{10}\nabla^2(\vec{U} \cdot \vec{U})\right]\right\} - \frac{1}{2}\zeta\nabla[\nabla \cdot (d \cdot \vec{U}_t)] \quad (2.56)$$

Αν παραληφθεί στις εξισώσεις Ζου με τις παραμέτρους B_1, B_2 ο ανώτερης τάξης μη-γραμμικός όρος \vec{K} και αμεληθούν οι δεύτερης τάξης χωρικές παράγωγοι του d προκύπτει μορφή που παραπέμπει στις εξισώσεις των Schäffer και Madsen (1995). Αν ληφθεί $B_1=B_2=1/30$ προκύπτει μορφή παρόμοια με αυτή των Madsen και Sørensen (1992).

Στην περίπτωση που η παράμετρος ε είναι μικρότερη του σ^2 ο Ζου αναπτύσσει τις σειρές:

$$\zeta = \varepsilon\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.57) \quad \text{και} \quad \vec{U} = \varepsilon\vec{U}_1 + \varepsilon^2\vec{U}_2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.58)$$

και θεωρώντας μονοχρωματικό κύμα για τους όρους πρώτης τάξης (σε μία διάσταση):

$$\zeta_1 = \zeta_\alpha \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.59) \quad \text{και} \quad U_1 = U_\alpha \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.60)$$

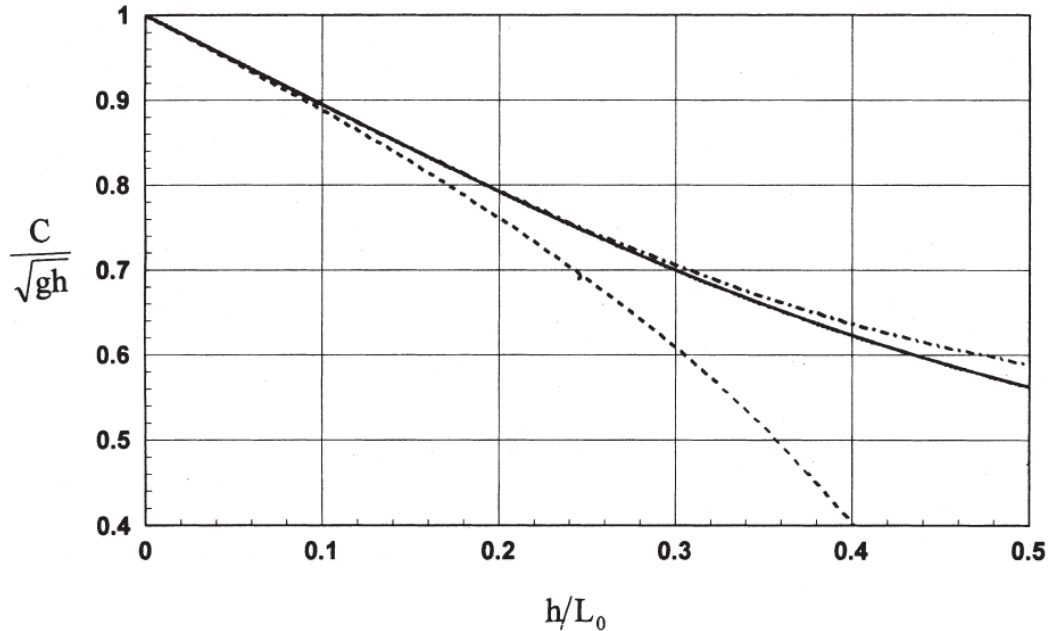
προκύπτει η σχέση διασποράς:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gd \left[1 - \frac{1}{3}k^2d^2 + \frac{2}{15}k^4d^4 + O(k^6d^6) \right] \quad (2.61)$$

ενώ για στη γραμμική θεωρία ισχύει:

$$c^2 = gd \frac{\tanh(kd)}{kd} = gd \left[1 - \frac{1}{3}k^2d^2 + \frac{2}{15}k^4d^4 - \frac{17}{315}k^6d^6 + O(k^8d^8) \right] \quad (2.62)$$

Στο σχήμα 2.7 γίνεται σύγκριση των χαρακτηριστικών διασποράς των εξισώσεων του Zou (2.61) με τη γραμμική θεωρία Airy (2.62) και τις κλασικές εξισώσεις Peregrine (1967). Όπως διαπιστώνεται, για ανεκτό σχετικό σφάλμα < 5% (ως προς Airy) οι κλασικές εξισώσεις Peregrine έχουν πεδίο εφαρμογής $d < 0.22L_0$, ενώ οι εξισώσεις Zou $d < 0.5L_0$.



Σχήμα 2.7: Σύγκριση αδιάστατης ταχύτητας φάσης μεταξύ θεωρίας Stokes 1^{ης} τάξης (συνεχής γραμμή), εξισώσεων Zou (διακεκομμένη-τελείες) και κλασικών εξισώσεων Boussinesq (διακεκομμένη) (πηγή: [191])

Η ταχύτητα ομάδας δίνεται από τη σχέση:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c \left[1 + \frac{k^2 d^2}{15 + k^2 d^2} \cdot \frac{2k^2 d^2}{5 + 2k^2 d^2} \right] \tag{2.63}$$

Από τη σύγκριση της ταχύτητας ομάδας που προκύπτει από τη γραμμική θεωρία, τις κλασικές εξισώσεις Boussinesq και εξισώσεις Zou (σχήμα 2.8) προκύπτει ότι το πεδίο εφαρμογής των κλασικών εξισώσεων περιορίζεται στο $d < 0.13L_0$, ενώ των εξισώσεων Zou είναι $d < 0.3L_0$.

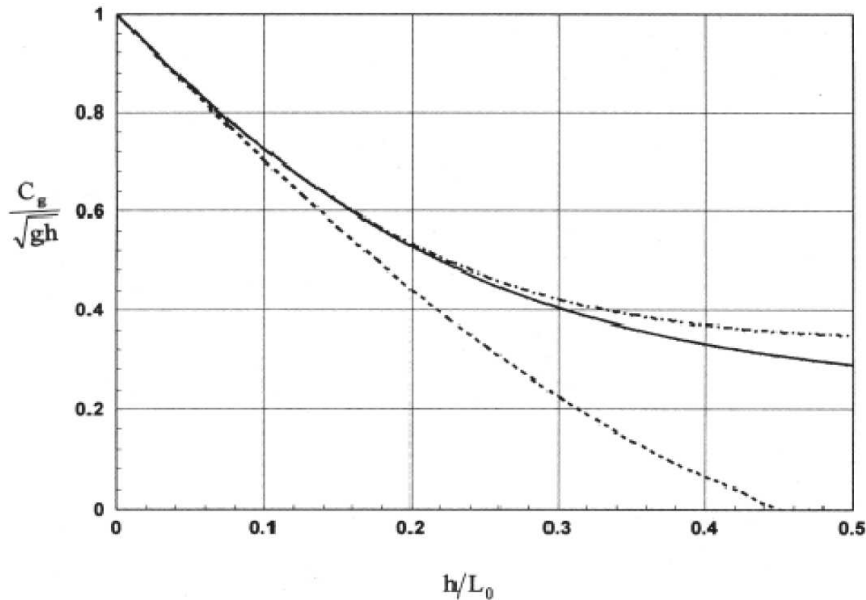
Η ακρίβεια στον υπολογισμό της φασικής ταχύτητας και της ταχύτητας ομάδας από τις εξισώσεις Zou είναι πανομοιότυπη με αυτή των εργασιών των Madsen et al. (1991), Madsen και Sørensen (1992) και Nwogu (1993). Ωστόσο, οι τρεις τελευταίες εργασίες εμφανίζουν ακρίβεια δεύτερης τάξης όσον αφορά στις κατανομές κατά βάθος της ταχύτητας και της πίεσης. Οπότε δεν παρουσιάζουν βελτίωση σε σχέση με τις κλασικές εξισώσεις Boussinesq. Αντίθετα, οι εξισώσεις Zou εμφανίζουν ακρίβεια 3^{ης} τάξης ως προς τις κατανομές ταχύτητας και πίεσης. Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι:

$$\vec{u}(z) = \vec{U} - \frac{1}{2}\sigma^2 \left[(z+1)^2 - \frac{1}{3}(d+\zeta)^2 \right] \nabla^2 \vec{U} + \frac{1}{4}\sigma^4 [(z+1)^4 - 2(d+\zeta)^4] \nabla^2 \nabla^2 \vec{U} + O(\sigma^6) \tag{2.64}$$

$$w(z) = -\sigma(z+1)\nabla \cdot \vec{U} + \frac{1}{6}\sigma^3(z+1)[(z+1)^2 - (d+\zeta)^2] \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) + O(\sigma^5) \tag{2.65}$$

$$p(z) = p_0 - (z - \varepsilon\zeta) + \frac{1}{2}\sigma^2[(z + 1)^2 - (d + \zeta)^2] \left[\nabla \cdot \vec{U}_t + \varepsilon\vec{U} \cdot \nabla^2 \vec{U} - \varepsilon(\nabla \cdot \vec{U})^2 \right] - \frac{1}{4!}\sigma^4[(z + 1)^2 - (d + \zeta)^2]^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{U}_t) + O(\sigma^6) \tag{2.66}$$

όπου p_0 η σταθερή πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια, $\varepsilon=H/d$ και $\sigma=d/L$.



Σχήμα 2.8: Σύγκριση αδιάστατης ταχύτητας ομάδας μεταξύ θεωρίας Stokes 1^{ης} τάξης (συνεχής γραμμή), εξισώσεων Zou (διακεκομμένη-τελείες) και κλασικών εξισώσεων Boussinesq (διακεκομμένη) (πηγή: [191])

2.4 ΕΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΥΨΗΛΗΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΑΞΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Οι πιο πρόσφατες εξελίξεις στον τομέα των μοντέλων Boussinesq κινήθηκαν στην κατεύθυνση της αύξησης της τάξης ακρίβειας της μη-γραμμικότητας και της διασποράς με σκοπό την επέκταση του πεδίου εφαρμογής των μοντέλων αυτών.

Όπως αναφέρουν οι Madsen et al. (2002) το πεδίο εφαρμογής των αρχικών μοντέλων Boussinesq που βασίζονται στις εξισώσεις Peregrine (1967) περιορίζεται στο $kd < 0.75$. Τα μεταγενέστερα μοντέλα με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς και μη-γραμμικότητας φτάνουν ως $kd \leq 40$, ενώ ακόμη πιο σύγχρονα μοντέλα επεκτείνουν αυτό το όριο καταργώντας ουσιαστικά τον περιορισμό του βάθους του πεδίου εφαρμογής τους.

Οι κυριότερες εργασίες στην κατεύθυνση της βελτίωσης της μη-γραμμικής συμπεριφοράς των μοντέλων τύπου Boussinesq με χρονολογική σειρά είναι:

- Wei et al. (1995)
- Madsen και Schäffer (1998)
- Agnon, Madsen και Schäffer (1999)

- Gobbi, Kirby και Wei (2000)
- Madsen et al. (2002,2003)
- Lynett et al. (2002)
- Schäffer (2004)
- Bingham και Agnon (2005)
- Madsen, Fuhrman και Wang (2006,2009)
- Li (2008)

Στις παρακάτω παραγράφους θα γίνει εκτενέστερη αναφορά στις εργασίες των Wei et al. (1995), Gobbi, Kirby και Wei (2000), Madsen et al. (2002,2003,2006), Bingham και Agnon (2005) και Li (2008).

2.4.1 ΠΛΗΡΩΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΩΝ WEI ET AL. (1995)

Η αρχή των μοντέλων Boussinesq πλήρους μη-γραμμικότητας έγινε από τους Wei, Kirby, Grilli και Subramanya (1995). Η ανάλυσή τους ακολουθεί την προσέγγιση του Nwogu (1993) και οδηγεί στην κατάστρωση ενός πλήρους μη-γραμμικού μοντέλου Boussinesq στο οποίο διατηρούνται όροι διασποράς τάξης $O(\sigma^2)$ και όλων των τάξεων της μη-γραμμικής παραμέτρου ε . Έτσι, το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων παίρνει τη μορφή:

$$\zeta_t + \nabla \cdot \vec{M} = 0 \quad (2.67)$$

$$\vec{u}_{at} + \varepsilon(\vec{u}_\alpha \cdot \nabla)\vec{u}_\alpha + \nabla\zeta + \sigma^2\vec{V}_1 + \varepsilon\sigma^2\vec{V}_2 = O(\sigma^4) \quad (2.68)$$

όπου:

$$\vec{M} = (d + \varepsilon\zeta) \left\{ \vec{u}_\alpha + \sigma^2 \left\{ \frac{1}{2}z_\alpha^2 - \frac{1}{6}[d^2 - d\varepsilon\zeta + (\varepsilon\zeta)^2] \right\} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}_\alpha) + \left[z_\alpha + \frac{1}{2}(d - \varepsilon\zeta) \right] \nabla[\nabla \cdot (d\vec{u}_\alpha)] \right\} + O(\sigma^4) \quad (2.69)$$

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{2}z_\alpha^2 \nabla(\nabla \cdot \vec{u}_{at}) + z_\alpha \nabla[\nabla \cdot (d\vec{u}_{at})] - \nabla \left[\frac{1}{2}(\varepsilon\zeta)^2 \nabla \cdot \vec{u}_{at} + \varepsilon\zeta \nabla \cdot (d\vec{u}_{at}) \right] \quad (2.70)$$

$$\vec{V}_2 = \nabla \left\{ (z_\alpha - \varepsilon\zeta)(\vec{u}_\alpha \cdot \nabla)[\nabla \cdot (d\vec{u}_\alpha)] + \frac{1}{2}[z_\alpha^2 - (\varepsilon\zeta)^2](\vec{u}_\alpha \cdot \nabla)(\nabla \cdot \vec{u}_\alpha) + \frac{1}{2}\nabla\{[\nabla \cdot (d\vec{u}_\alpha) + \varepsilon\zeta \nabla \cdot \vec{u}_\alpha]^2\} \right\} \quad (2.71)$$

Στην ανάλυση των Wei et al. (1995) αίρεται η υπόθεση $\varepsilon=O(\sigma^2)$. Επίσης, από τη σχέση (2.69) προκύπτει ότι η ροή μάζας τείνει στο μηδέν ($\vec{M} \rightarrow \vec{0}$) στην ακτογραμμή, όπου $d+\varepsilon\zeta \rightarrow 0$. Το αποτέλεσμα αυτό έχει φυσική ερμηνεία και εμφανίζεται στα μη-γραμμικά μοντέλα ρηχών νερών αλλά και σε όλα τα μοντέλα Boussinesq όταν χρησιμοποιείται ως ανεξάρτητη μεταβλητή η μέση κατά βάθος ταχύτητα. Αντίθετα, η οριακή αυτή συνθήκη δεν ικανοποιείται αυτόματα στις εξισώσεις του Nwogu ή σε άλλα ελαφρώς μη-γραμμικά μοντέλα που δε χρησιμοποιούν τις μέσες κατά βάθος ταχύτητες. Οι εξισώσεις Nwogu προκύπτουν από τις (2.67) - (2.71) παραλείποντας όρους $O(\sigma^4, \varepsilon\sigma^2)$. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι συγγραφείς για την αριθμητική

επίλυση του μη-γραμμικού μοντέλου πρότειναν τη χρήση ενός ρητού σχήματος πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector).

2.4.2 ΠΛΗΡΩΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ GOBBI, KIRBY ΚΑΙ WEI (2000)

Στην εργασία τους οι Gobbi, Kirby και Wei (2000) παρουσίασαν ένα πλήρως μη γραμμικό μοντέλο Boussinesq με ακρίβεια τέταρτης τάξης $O((kd)^4)$. Το μοντέλο ικανοποιεί επακριβώς τη μη-γραμμική κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας και εξήχθη για οριζόντιο πυθμένα (ξεχωριστή εργασία των Gobbi και Kirby το 1999 το επέκτεινε σε πυθμένα μεταβλητού βάθους). Βασική υπόθεση είναι η προσέγγιση της συνάρτησης δυναμικού με ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού ως προς το βάθος. Για την ανάλυση ορίστηκε μία νέα εξαρτημένη μεταβλητή ως ο σταθμισμένος μέσος του δυναμικού της ταχύτητας σε δύο διαφορετικά βάθη. Οι θέσεις και οι συντελεστές βαρύτητας επιλέχθηκαν έτσι ώστε η ανάλυση Padé (4,4) κατά Witting (1984) να δίνει πολύ ακριβή προσέγγιση της σχέσης γραμμικής διασποράς. Το μοντέλο ελέγχθηκε ως προς την ικανότητά του να περιγράφει πιστά ελαφρώς μη-γραμμικές κυματικές ιδιότητες σε νερά ενδιάμεσου βάθους χρησιμοποιώντας αναπτύγματα Stokes σε δυνάμεις του ϵ για τυχαίες τιμές του σ .

Η εξαρτημένη μεταβλητή που ορίζεται είναι:

$$\tilde{\varphi} = \beta\varphi_\alpha + (1 - \beta)\varphi_b \tag{2.72}$$

με φ_α και φ_b το αδιάστατο δυναμικό της ταχύτητας στις θέσεις $z=z_\alpha$ και $z=z_b$ αντίστοιχα και β ένας συντελεστής βαρύτητας. Στη συνέχεια το δυναμικό προσεγγίζεται με ένα πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού του οποίου οι συντελεστές είναι τέτοιοι ώστε να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη πυθμένα και η εξίσωση Laplace και λόγω της (2.72) προκύπτει:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\sigma^2\{1 - (1 + z)^2\}\nabla^2\tilde{\varphi} + \frac{1}{4}\sigma^4\left\{B - B(1 + z)^2 - \frac{1}{6}D + \frac{1}{6}(1 + z)^4\right\}\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi} + O(\sigma^6) \tag{2.73}$$

με:

$$B = \beta(1 + z_\alpha)^2 + (1 - \beta)(1 + z_b)^2 \tag{2.74}$$

$$D = \beta(1 + z_\alpha)^4 + (1 - \beta)(1 + z_b)^4 \tag{2.75}$$

Ορίζοντας το συνολικό αδιάστατο βάθος ως $H=1+\epsilon\zeta$ (ζ αδιαστατοποιημένο με το ύψος κύματος) και αντικαθιστώντας στη σχέση διατήρησης της μάζας, προκύπτει:

$$\zeta_t + \nabla \cdot \left\{ H \left[\nabla\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(B - \frac{1}{3}H^2 \right) \nabla(\nabla^2\tilde{\varphi}) + \frac{1}{4}\sigma^4 \left(B^2 - \frac{1}{3}BH^2 - \frac{1}{6}D + \frac{1}{30}H^4 \right) \nabla(\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}) \right] \right\} = O(\sigma^6) \tag{2.76}$$

και λόγω της (2.73) η εξίσωση Bernoulli γράφεται προσεγγιστικά:

$$\begin{aligned} \zeta + \tilde{\varphi}_t + \frac{1}{2}\sigma^2(B - H^2)\nabla^2\tilde{\varphi}_t + \frac{1}{4}\sigma^4\left\{B^2 - BH^2 - \frac{1}{6}D + \frac{1}{6}H^4\right\}\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}_t + \frac{1}{2}\varepsilon\left\{(\nabla\tilde{\varphi})^2 + \sigma^2(B - H^2)\nabla\tilde{\varphi} \cdot \right. \\ \left. \nabla(\nabla^2\tilde{\varphi}) + \sigma^2H^2(\nabla^2\tilde{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\sigma^4\left(B^2 - BH^2 - \frac{1}{6}D + \frac{1}{6}H^4\right)\nabla\tilde{\varphi} \cdot \nabla(\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}) + \frac{1}{4}\sigma^4(B^2 - 2BH^2 + \right. \\ \left. H^4)[\nabla(\nabla^2\tilde{\varphi})]^2 + \sigma^4\left(BH^2 - \frac{1}{3}H^4\right)(\nabla^2\tilde{\varphi})(\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi})\right\} = O(\sigma^6) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Οι εξισώσεις (2.76) και (2.77) αποτελούν ένα πλήρως μη-γραμμικό σύστημα 4^{ης} τάξης στο οποίο αν αμεληθούν οι όροι $O(\sigma^4)$ και τεθεί $\beta=1$ με κατάλληλη επιλογή του z_α προκύπτει το μοντέλο Boussinesq των Wei et al. (1995). Αν επιπλέον αμεληθούν όροι τάξης $O(\varepsilon^2)$ ή και μεγαλύτερης προκύπτει το μοντέλο του Nwogu όπως εκφράστηκε με τη χρήση συνάρτησης δυναμικού από τους Chen και Liu (1995). Τέλος, κάνοντας την κλασική παραδοχή των μοντέλων Boussinesq $\varepsilon=O(\sigma^2)$ και διατηρώντας όρους $O(\varepsilon^2, \sigma^4)$, προκύπτει μια κλασική μορφή του μη γραμμικού μοντέλου ανώτερης τάξης των Gobbi, Kirby και Wei:

$$\zeta_t + \nabla \cdot \left\{ H\nabla\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left[BH - \frac{1}{3}(1 + 3\varepsilon\zeta) \right] \nabla(\nabla^2\tilde{\varphi}) + \frac{1}{4}\sigma^4 \left(B^2 - \frac{1}{3}B - \frac{1}{6}D + \frac{1}{30} \right) \nabla(\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}) \right\} = O(\sigma^6) \quad (2.78)$$

$$\zeta + \tilde{\varphi}_t + \frac{1}{2}\sigma^2[B - (1 + \varepsilon\zeta)]\nabla^2\tilde{\varphi}_t + \frac{1}{4}\sigma^4\left(B^2 - B - \frac{1}{6}D + \frac{1}{6}\right)\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}_t + \frac{1}{2}\varepsilon[(\nabla\tilde{\varphi})^2 + \sigma^2(B - 1)\nabla\tilde{\varphi} \cdot \nabla(\nabla^2\tilde{\varphi}) + \sigma^2(\nabla\tilde{\varphi})^2] = O(\sigma^6, \varepsilon\sigma^4) \quad (2.79)$$

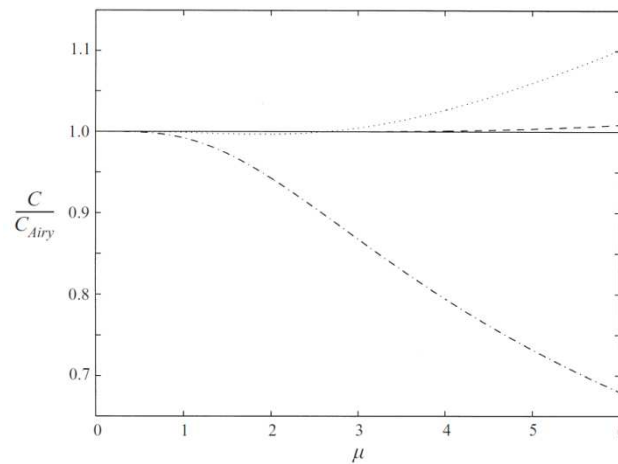
Από την ανάλυση Padé (4,4) προκύπτουν:

$$z_\alpha = \left\{ \frac{1}{9} - \left[\frac{8\beta}{567(1-\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{8}{567\beta(1-\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (2.80)$$

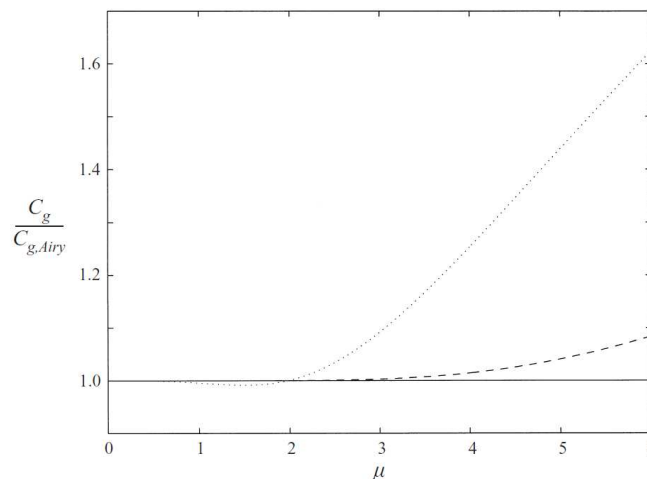
$$z_b = \left\{ \frac{1}{9} - \left[\frac{8\beta}{567(1-\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (2.81)$$

Για να είναι τα z_α, z_b πραγματικοί μη θετικοί αριθμοί, άρα να έχουν φυσική ερμηνεία, θα πρέπει $0.018 \leq \beta \leq 0.467$. Ωστόσο όπως βρέθηκε (ακόμη για την περίπτωση μεταβλητού βάρους) το μοντέλο δεν εμφανίζει σημαντική ευαισθησία ως προς την παράμετρο β (εντός του πεδίου ορισμού της).

Στο σχήμα 2.9 φαίνεται η σύγκριση του ποσοστού φασικής ταχύτητας των μοντέλων ως προς την ακριβή λύση της γραμμικής θεωρίας Airy για την περίπτωση των κλασικών εξισώσεων Boussinesq $O(\sigma^2)$, των εξισώσεων Nwogu (1993) και του παρόντος μοντέλου Gobbi και Kirby (2000). Είναι φανερό ότι το μοντέλο εμφανίζει βελτιωμένες ιδιότητες γραμμικής διασποράς σε σχέση με το μοντέλο του Nwogu και προσεγγίζει ικανοποιητικά την ακριβή λύση στα νερά ενδιάμεσου βάθους και στα βαθιά νερά. Η βελτίωση είναι ακόμη πιο εμφανής όσον αφορά στην ταχύτητα ομάδας $c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$, όπως προκύπτει από το σχήμα 2.10.



Σχήμα 2.9: Ποσοστό της φασικής ταχύτητας προς την αντίστοιχη της ακριβής λύσης Airy συναρτήσει της παραμέτρου διασποράς $\mu=\sigma$. Κλασικές εξισώσεις Boussinesq (παύλες-τελείες), Nwogu με $\alpha=-0.39$ (τελείες) Gobbi-Kirby (4,4) Padé (παύλες) (πηγή: [61])



Σχήμα 2.10: Ποσοστό της ταχύτητας ομάδας προς την αντίστοιχη της ακριβής λύσης Airy συναρτήσει της παραμέτρου διασποράς $\mu=\sigma$. Nwogu με $\alpha=-0.39$ (τελείες) και Gobbi-Kirby (4,4) Padé (παύλες) (πηγή: [61])

2.4.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΤΩΝ MADSEN ET AL. (2002,2003,2006)

Όπως αναφέρουν οι Madsen, Bingham και Liu στην εργασία τους (2002), οι προγενέστερες έρευνες έχουν επεκτείνει το πεδίο εφαρμογής των μοντέλων Boussinesq όσον αφορά στη διασπορά το πολύ ως $kd \approx 6$, ενώ τα μη-γραμμικά κυματικά χαρακτηριστικά δεν έχουν αναπαρασταθεί επαρκώς. Ωστόσο, μία σημαντική καινοτομία στην αντιμετώπιση της μη-γραμμικότητας εισήχθη από τους Agnon, Madsen και Schäffer (1999). Συγκεκριμένα, πέτυχαν την ίδια ακρίβεια στις μη-γραμμικές και στις γραμμικές ιδιότητες εκφράζοντας επακριβώς τις

οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας και πυθμένα συνδυάζοντάς τες με μία προσεγγιστική λύση της εξίσωσης Laplace αναπτυσσόμενης σε σειρά.

Το πεδίο ταχυτήτων που προκύπτει εκφράζεται συναρτήσει της οριζόντιας και κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας. Προκύπτει ένα σύστημα από έξι ζεύγη εξισώσεων με αγνώστους την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, την οριζόντια βαθμίδα του δυναμικού στην ελεύθερη επιφάνεια και τις συνιστώσες (οριζόντιες και κατακόρυφη) της ταχύτητας στην ελεύθερη επιφάνεια και στη στάθμη ηρεμίας. Η προσέγγιση αυτή περιγράφει επαρκώς τη διασπορά μη γραμμικών κυμάτων ως $kd \approx 6$.

Βασικό μειονέκτημα της παραπάνω μεθόδου είναι ότι δεν παρέχει ακριβές κατακόρυφο προφίλ του δυναμικού της ταχύτητας. Οι Madsen et al. (2002) επεκτείνουν την έρευνα των Agnon et al. (1999) και καταφέρνουν να αποδώσουν τα γραμμικά και μη-γραμμικά χαρακτηριστικά ως $kd=40$ και περιγράφουν επαρκώς το κατακόρυφο προφίλ του δυναμικού μέχρι $kd=12$. Ο στόχος επιτυγχάνεται με ανάπτυξη της εξίσωσης Laplace σε σειρά στο επιλεγμένο ύψος z που είναι τέτοιο ώστε να μηδενίζεται το σφάλμα της υπολογιζόμενης μέσης καθ' ύψος ταχύτητας σε σχέση με αυτή που προκύπτει από το γραμμικό προφίλ. Επίσης, ελέγχεται και η ελαχιστοποίηση του σφάλματος στη σχέση διασποράς και στον υπολογισμό της ρήχωσης. Στις προκύπτουσες σειρές διατηρούνται όροι με παραγώγους ως και πέμπτης τάξης.

Η συγκεκριμένη εργασία επεκτάθηκε και παρουσιάστηκε ολοκληρωμένη από τους Madsen, Bingham και Schäffer (2003). Αρχικά η εξίσωση Laplace αναπτύχθηκε σε σειρά άπειρων όρων στη στάθμη ηρεμίας. Στη συνέχεια οι σειρές αυτές αναπτύχθηκαν σε τυχαίο βάθος. Τελικά, για την αριθμητική αντιμετώπιση του προβλήματος οι άπειρες σειρές αντικαταστάθηκαν από πεπερασμένες σειρές στο τυχαίο \hat{z} διατηρώντας όρους ως και 5^{ης} τάξης.

Η επιλογή της στάθμης \hat{z} δεν έχει σημασία στην περίπτωση της ανάπτυξης σε σειρά άπειρων όρων. Στην περίπτωση όμως των πεπερασμένων σειρών η επιλογή αυτή είναι μείζονος σημασίας καθότι επηρεάζει τη μορφή των όρων αποκοπής. Έτσι, επιδρά έμμεσα στις γραμμικές και μη-γραμμικές ιδιότητες του συστήματος εξισώσεων. Οι Madsen et al. (2003) εφάρμοσαν τρεις μεθόδους αποκοπής (truncation methods):

- I. Μία απλή αποκοπή όρων αναπτυγμάτων Taylor όλων των χρησιμοποιούμενων συναρτήσεων και τελεστών
 - II. Εφαρμογή προσέγγισης Padé στην οριακή συνθήκη πυθμένα σε συνδυασμό με βελτιστοποίηση όρων κλίσης
 - III. Εφαρμογή προσέγγισης Padé και στη στάθμη ηρεμίας εκτός της οριακής συνθήκης πυθμένα
- Σε όλες τις παραπάνω μεθόδους το \hat{z} υπολογίζεται από την ελαχιστοποίηση του μέσου κατά βάθους σχετικού σφάλματος της ταχύτητας σε σχέση με την αντίστοιχη της γραμμικής προσέγγισης. Ορίζοντας $k=kd$ και για πεδίο εφαρμογής ως $k_0=6$, επιδιώκεται ελαχιστοποίηση της παράστασης:

$$F_2(\sigma, kd) = \frac{1}{k_0} \int_0^{k_0} \left[\frac{1}{d} \int_{-d}^0 \left(\frac{u(z) - u_s(z)}{u_s(0)} \right)^2 dz \right] dk \tag{2.82}$$

όπου σ το ζητούμενο ποσοστό του βάθους που ορίζει τη στάθμη $\tilde{z} = \sigma d$ και u_s η ταχύτητα που προσεγγίζεται. Από τη διαδικασία αυτή προκύπτει $\sigma \approx -0.5$. Η τρίτη μέθοδος προτείνει και μία άλλη προσέγγιση για τον προσδιορισμό του σ . Συγκεκριμένα, προτείνει την ελαχιστοποίηση του

σχετικού σφάλματος της ταχύτητας φάσης σε σχέση με την αντίστοιχη της σχέσης γραμμικής διασποράς:

$$F_3(\sigma, kd) = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0} \left(\frac{c - c_{Stokes}}{c_{Stokes}} \right)^2 d\kappa \quad (2.83)$$

με $\kappa_0=25$ προκύπτει $\sigma \approx -0.2$. Διατηρώντας μόνο όρους χαμηλής τάξης προκύπτει η σχέση διασποράς:

$$\frac{\omega^2}{gdk^2} = \frac{1}{kd} \left\{ \frac{sh[k(d+\bar{z})]ch(k\bar{z}) - ch[k(d+\bar{z})]sh(k\bar{z})}{ch[k(d+\bar{z})]ch(k\bar{z}) - sh[k(d+\bar{z})]sh(k\bar{z})} \right\} \quad (2.84)$$

όπου:

$$ch(\lambda) = 1 + \frac{4}{9}\lambda^2 + \frac{1}{63}\lambda^4 \quad \text{και} \quad sh(\lambda) = 1 + \frac{1}{9}\lambda^3 + \frac{1}{945}\lambda^5 \quad (2.85)$$

Αν διατηρηθούν άπειροι όροι προκύπτει η ακριβής σχέση γραμμικής διασποράς:

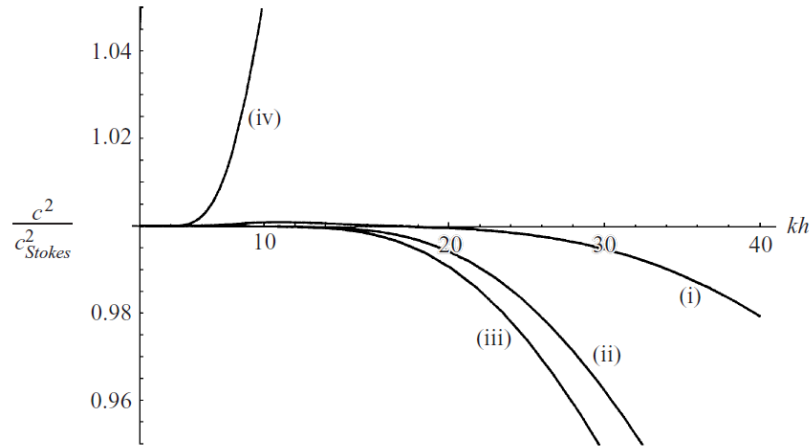
$$\frac{\omega^2}{gdk^2} = \frac{1}{kd} \left\{ \frac{\sinh[k(d+\bar{z})]\cosh(k\bar{z}) - \cosh[k(d+\bar{z})]\sinh(k\bar{z})}{\cosh[k(d+\bar{z})]\cosh(k\bar{z}) - \sinh[k(d+\bar{z})]\sinh(k\bar{z})} \right\} = \frac{\tanh(kd)}{kd} \quad (2.86)$$

Με την εφαρμογή μεθόδων αποκοπής εισάγονται σφάλματα, η μορφή και η τάξη των οποίων εξαρτάται από την εφαρμοζόμενη μέθοδο. Στο σχήμα 2.11 φαίνεται η ακρίβεια της σχέσης γραμμικής διασποράς για $\sigma=-0.5$, $\sigma=-0.2$, για ανάλυση Padé (4,4) με $\sigma=0$ και ανάλυση Padé (8,10) της πρότυπης λύσης (target solution).

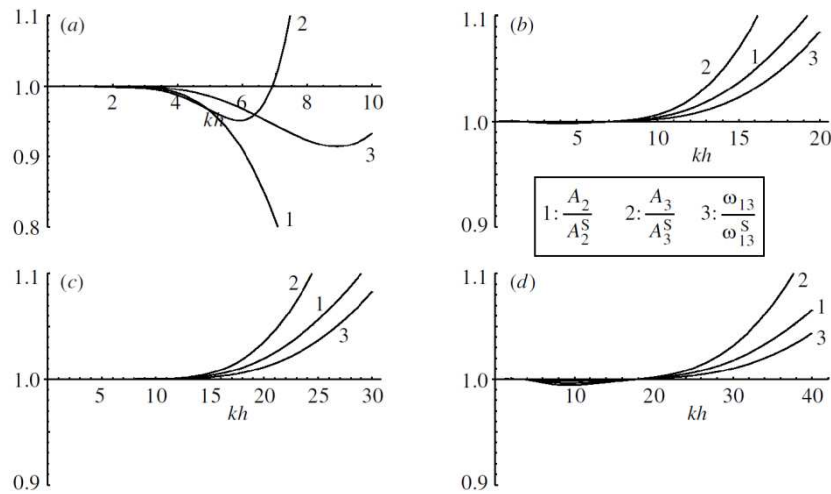
Όσον αφορά στις μη-γραμμικές ιδιότητες του μοντέλου, οι Madsen et al. (2003) αρχικά χρησιμοποίησαν τη θεωρία μικρών διαταραχών αναπτύσσοντας την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας θεωρώντας υψηλές αρμονικές ως τρίτης τάξης:

$$\zeta = \varepsilon A_1 \cos\theta + \varepsilon^2 A_2 \cos 2\theta + \varepsilon^3 A_3 \cos 3\theta \quad (2.87)$$

με $\theta = \omega t - kx$. Αντίστοιχα αναπτύχθηκαν οι συνιστώσες της ταχύτητας. Χρησιμοποιώντας σαν πρότυπη λύση αυτή των Skjelbreia και Hendrickson (1960) προκύπτουν τα διαγράμματα διασποράς των υψών των υψηλότερων αρμονικών του σχήματος 2.12 με ω_{13} συνάρτηση των A_1 , k , kd που δίνουν οι συγγραφείς [113].



Σχήμα 2.11: Η ακρίβεια του τετραγώνου της ταχύτητας φάσης χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.84)-(2.85) με (i) $\sigma=-0.2$ (ii) $\sigma=-0.5$ (iii) Padé (8,10) ακριβούς λύσης (iv) $\sigma=0$ και Padé (4,4) (πηγή: [113])

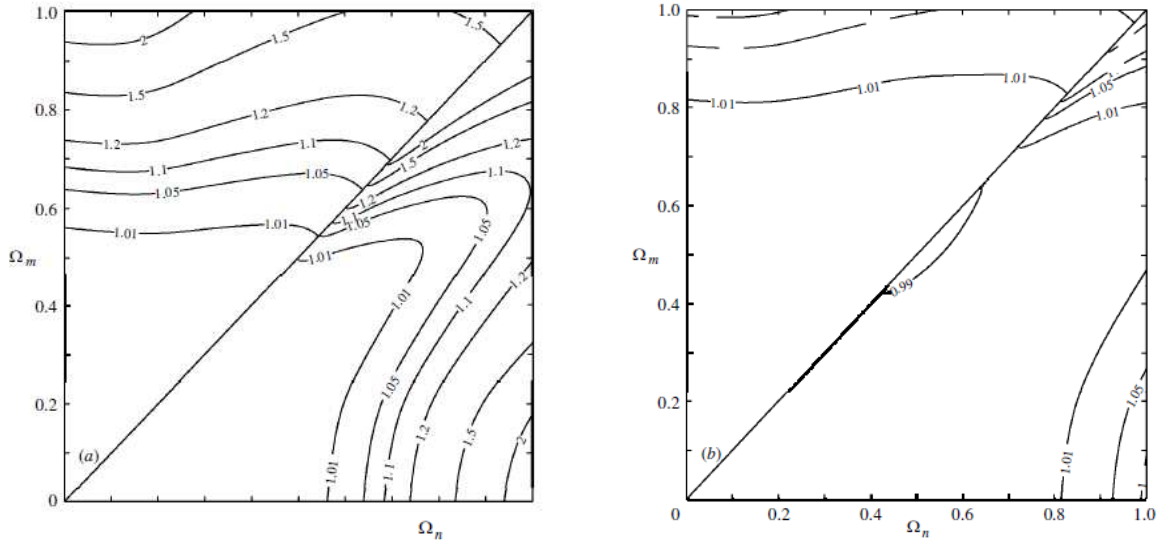


Σχήμα 2.12: Η ακρίβεια της δεύτερης και τρίτης αρμονικής και η διασπορά των υψών κύματος με (α) μέθοδος II με $\sigma=0$ (b) μέθοδος II με $\sigma=-0.5$ (c) μέθοδος III με $\sigma=-0.5$ (d) μέθοδος III με $\sigma=-0.2$ (πηγή: [113])

Μία δεύτερη ανάλυση της μη-γραμμικής συμπεριφοράς του μοντέλου έγκειται στις μη-γραμμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των κυμάτων. Οι συγγραφείς θεώρησαν μία ομάδα (wave group) που αποτελείται από κύματα δύο συχνοτήτων ω_n και ω_m . Τα κύματα αλληλεπιδρούν σχηματίζοντας συρμούς αποτελούμενους από μία υπο-αρμονική (subharmonic) $\omega_p=\omega_n-\omega_m$ και τρεις υπερ-αρμονικές (superharmonics) $\omega_p=\omega_n+\omega_m$, $\omega_p=2\omega_n$ και $\omega_p=2\omega_m$. Έτσι, η συνάρτηση της ελεύθερης επιφάνειας με ανάλυση 2^{ης} τάξης καθορίζεται από τις συναρτήσεις μεταφοράς G_n^\pm μεταξύ των αρμονικών. Αδιαστατοποιώντας τις συχνότητες μέσω των σχέσεων:

$$\Omega_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{g}} \quad \text{και} \quad \Omega_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{g}} \tag{2.88}$$

οι Madsen et al. (2003) κατέληξαν στα διαγράμματα του σχήματος 2.13 που συγκρίνουν τη συνάρτηση μεταφοράς G_n με την αντίστοιχη της θεωρίας Stokes ($\Omega=1$ για $kd=39.5$).



Σχήμα 2.13: Η ακρίβεια των συναρτήσεων μεταφοράς δεύτερης τάξης G_n/G_n^{Stokes} . Η συνάρτηση G_n^+ για την υπερ-αρμονική απεικονίζεται πάνω από τη διαγώνιο και η $-G_n^-$ για τις υπο-αρμονικές κάτω από τη διαγώνιο. Αριστερά: μέθοδος II με $\sigma=-0.5$ και δεξιά: μέθοδος III με $\sigma=-0.2$ (πηγή: [113])

Η ακρίβεια των τριών μεθόδων συνοψίζεται στους πίνακες 2.1 και 2.2. Η 3^η και 4^η στήλη βασίζονται στην ανάλυση των γραμμικών ιδιοτήτων του μοντέλου ενώ η 5^η στήλη παρουσιάζει το σφάλμα της τρίτης αρμονικής της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας. Η τελευταία στήλη περιέχει το σφάλμα της οριζόντιας ταχύτητας της ελεύθερης επιφάνειας για ένα σταθερό μη-γραμμικό κύμα κλίσης $H/L=0.12$. Προφανώς, οι τρεις μέθοδοι I, II και III μπορούν να εφαρμοστούν για ανάλυση με παραγώγους χαμηλότερης τάξης της πέμπτης (πίνακας 2.1) π.χ. παράγωγοι τρίτης τάξης (πίνακας 2.2). Από τους πίνακες προκύπτει ότι η μέθοδος III με $\sigma=-0.5d$ ή $\sigma=-0.2d$ είναι μακράν η ακριβέστερη.

method	formal accuracy	error < 2% in c^2	error < 1% in $\sqrt{F_1}$	error < 5% in A_3	error < 2% in \tilde{u}_c
I ($\sigma = -0.5$)	$k^4 h^4$	$kh < 8.8$	$kh < 4.7$	—	—
II ($\sigma = -0.5$)	$k^4 h^4$	$kh < 17$	$kh < 5.2$	$kh < 14$	$kh < 16.5$
III ($\sigma = -0.5$)	$k^8 h^8$	$kh < 25$	$kh < 9.5$	$kh < 21$	$kh < 25$
III ($\sigma = -0.2$)	$k^8 h^8$	$kh < 40$	$kh < 10$	$kh < 32$	$kh < 39$

Πίνακας 2.1: Ακρίβεια μεθόδων περιλαμβάνοντας παραγώγους μέχρι 5^{ης} τάξης (πηγή: [113])

method	formal accuracy	error < 2% in c^2	error < 1% in $\sqrt{F_1}$	error < 5% in A_3	error < 2% in \tilde{u}_c
II ($\sigma = -0.5$)	$k^2 h^2$	$kh < 7.5$	$kh < 2.2$	$kh < 6.5$	$kh < 7.5$
III ($\sigma = -0.5$)	$k^4 h^4$	$kh < 10$	$kh < 3.5$	$kh < 8.3$	$kh < 10$

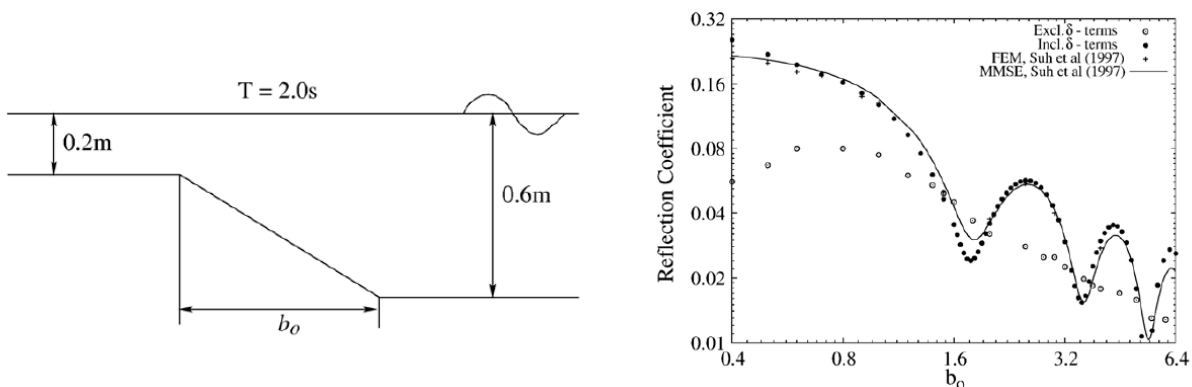
Πίνακας 2.2: Ακρίβεια μεθόδων περιλαμβάνοντας παραγώγους μέχρι 3^{ης} τάξης (πηγή: [113])

Πρέπει να σημειωθεί ότι στους παραπάνω πίνακες είναι:

$$F_1(\sigma, kd) = \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \left(\frac{u(z) - u_s(z)}{u_s(0)} \right)^2 dz \tag{2.89}$$

Οι εργασίες των Madsen et al. (2002,2003) αναφέρονται σε οριζόντιο πυθμένα ή πυθμένα ήπιας κλίσης. Οι Madsen, Fuhrman και Wang (2006) επέκτειναν το μοντέλο για πλήρως μη γραμμικά κύματα σε απότομα μεταβαλλόμενη βυθομετρία. Οι Madsen et al. (2003) παρατήρησαν ότι για ήπιες κλίσεις η παράλειψη όρων ανάλογων του $\nabla^2 \hat{z}$ δεν επηρεάζει σημαντικά τη μεταβολή του ύψους κύματος λόγω ρήχωσης, αλλά επιδρά εν μέρει στον υπολογισμό του προφίλ της ταχύτητας και εισάγει ένα σφάλμα φάσης (phase shift) σε σχέση με την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.

Οι Madsen et al. (2006) επεκτείνουν το μοντέλο διατηρώντας όρους ανάλογους των $\nabla \hat{z}$, $\nabla^2 \hat{z}$ και $\nabla \hat{z} \cdot \nabla \hat{z}$. Εισάγουν τους τελεστές J_1 και J_2 που αποτελούν αναπτύγματα σειρών της αδιάστατης μικρής παραμέτρου δ ($\delta \ll 1$) και τελεστών κλίσης ως και 5^{ης} τάξης. Έτσι, μετασχηματίζουν την εξίσωση Laplace και τις οριακές συνθήκες πυθμένα και ελεύθερης επιφάνειας, επιτυγχάνοντας ακρίβεια $O(\delta^3)$. Με τη μέθοδο αυτή αίρουν τη βασική παραδοχή της ήπια μεταβαλλόμενης βυθομετρίας και υπολογίζουν ακριβέστερα τους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης και τη μεταβολή φάσης (downshift / upshift). Οι συγγραφείς δίνουν ως όρια εφαρμογής του μοντέλου τις συντηρητικές τιμές $|\nabla d| < 0.25$, $|\nabla \hat{z}| < 0.10$, $|\hat{z} \nabla^2 \hat{z}| < 0.030$ και $|\hat{z}^2 \nabla^3 \hat{z}| < 0.015$. Στο σχήμα 2.14 φαίνεται για την πειραματική διάταξη του Booij (1983) η σύγκριση του μοντέλου για απότομα μεταβαλλόμενες βυθομετρίες (περιλαμβάνει όρους δ) και του μοντέλου για ήπια μεταβαλλόμενες βυθομετρίες (χωρίς δ όρους) με τις πρότυπες λύσεις των Suh et al. (1997) με μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και Suh et al. (1997) με τη διευρυμένη γραμμική εξίσωση ήπιας κλίσης (MMSE). Παρατηρείται ότι το νέο μοντέλο δίνει με πολύ καλή ακρίβεια τον συντελεστή ανάκλασης, ακόμη και για κλίσεις πυθμένα ως 1:1.



Σχήμα 2.14: Αριστερά: πειραματική διάταξη του Booij (1983). Δεξιά: σύγκριση συντελεστή ανάκλασης υπολογισμένου από μοντέλο με δ -όρους (γεμάτοι κύκλοι) και μοντέλο χωρίς δ -όρους (ανοιχτοί κύκλοι) σε σχέση με πρότυπες λύσεις των Suh et al. (1997) (πηγή: [115])

2.4.4 ΜΕΘΟΔΟΣ FOURIER-BOUSSINESQ ΓΙΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΥΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΤΩΝ BINGHAM ΚΑΙ AGNON (2005)

Στην προηγούμενη παράγραφο παρατέθηκαν οι εργασίες των Madsen et al. (2002,2003) που αποτελούν μεθόδους πολύ υψηλής ακρίβειας με παραγώγους ως και 5^{ης} τάξης. Το μοντέλο τους απαιτεί την επίλυση τριών εξισώσεων σε κάθε υπολογιστικό κόμβο και εφαρμόζεται ικανοποιητικά ως $kd \approx 25$ (ή $kd \approx 40$). Οι Bingham και Agnon (2005) παρουσίασαν μία νέα μέθοδο για υψηλής μη-γραμμικότητας πλήρως διασπειρόμενα κύματα. Το σφάλμα προσέγγισης είναι μικρό για όλο το εύρος $0 \leq kd < \infty$, απαλείφοντας ουσιαστικά τον περιορισμό του βάρους.

Η μέθοδος που παρουσίασαν οι συγγραφείς είναι βασικά τύπου Boussinesq, αλλά περιλαμβάνει ένα γενικευμένο μετασχηματισμό Hilbert για να απαλείψει περιορισμούς στο σχετικό βάθος. Ο μετασχηματισμός Hilbert υπολογίζεται μέσω ενός μετασχηματισμού Fourier (FFT) και γι' αυτό το υπολογιστικό πεδίο περιορίζεται μόνο σε ορθογωνικές γεωμετρίες. Για την ακρίβεια της μεθόδου συμπεριλήφθηκαν όροι με παραγώγους ως και 6^{ης} τάξης με αποτέλεσμα η πολυπλοκότητα του σχήματος να είναι αντίστοιχη με άλλες μεθόδους Boussinesq υψηλής μη-γραμμικότητας ή μεθόδους τοπικών πολυωνύμων (LPA) 7^{ου} βαθμού. Σε αντίθεση με άλλες πολυωνυμικές μεθόδους, η μέθοδος Fourier-Boussinesq των Bingham και Agnon προσεγγίζει τον όρο διασποράς $\tanh(kd)/kd$ με μία ρητή συνάρτηση του kd αντί του $k^2 d^2$. Έτσι, η σχέση διασποράς γίνεται ακριβής ασυμπτωτικά και στα δύο όρια του kd ($kd \rightarrow 0$ και ∞). Ο γενικευμένος μετασχηματισμός Hilbert μετατρέπει τις περιττές δυνάμεις σε άρτιες καθιστώντας τις κατάλληλες για εκτίμηση με τοπικές μεθόδους πεπερασμένων διαφορών. Έτσι, τα σφάλματα διασποράς γίνονται πολύ μικρά για $0 \leq kd < \infty$.

Οι συγγραφείς θεώρησαν το ρευστό ασυμπύεστο, με αμελητέο ιξώδες και τη ροή αστρόβιλη. Έτσι, η ταχύτητα περιγράφεται με βαθμωτό δυναμικό $\varphi(\vec{x}, z, t)$, η ελεύθερη επιφάνεια είναι $z = \zeta(\vec{x}, t)$ και ο πυθμένας $z = -d(\vec{x})$. Προκύπτει το ακόλουθο πρόβλημα οριακών τιμών:

$$\nabla^2 \varphi + \varphi_{zz} = 0 \quad \text{στον όγκο ρευστού } V(\vec{x}, z, t) \tag{2.90}$$

$$\varphi_z + \nabla \varphi \cdot \nabla d = 0, \quad z = -d(\vec{x}) \tag{2.91}$$

$$\zeta_t + \nabla \tilde{\varphi} \cdot \nabla \zeta - (1 + \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta) \tilde{\varphi}_z = 0 \tag{2.92}$$

$$\tilde{\varphi}_t + \frac{1}{2} \nabla \tilde{\varphi} \cdot \nabla \tilde{\varphi} - \frac{1}{2} (1 + \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta) \tilde{\varphi}_z^2 + g \zeta = 0 \tag{2.93}$$

Οι οριακές συνθήκες της ελεύθερης επιφάνειας εκφράζονται σε όρους του δυναμικού στην ελεύθερη επιφάνεια $\tilde{\varphi} = \varphi(\vec{x}, \zeta(\vec{x}, t), t)$ (Zakharov, 1968). Απαιτούνται αρχικές συνθήκες για τα $\tilde{\varphi}$ και ζ .

Οι Bingham και Agnon χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των σειρών Taylor κατά Dommermuth και Yue (1987) για την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας, επειδή οδηγεί σε ένα σταθερό στο χρόνο $N \times N$ σύστημα γραμμικών εξισώσεων που μπορεί να επιλυθεί με άμεσες μεθόδους μητρώων. Το δυναμικό προσεγγίζεται με αποκοπή όρων από σειρές της μη-γραμμικής παραμέτρου $\epsilon = ka \ll 1$, με a ένα ενδεικτικό μέτρο του ύψους κύματος. Συνεπώς:

$$\varphi = \sum_{m=1}^M \varphi^{(m)} \quad \text{με } \varphi^{(m)} = O(\varepsilon^m) \quad (2.94)$$

Η τιμή του $\varphi^{(m)}$ στην ελεύθερη επιφάνεια προσδιορίζεται με ανάπτυγμα Taylor στο $z=0$ δίνοντας:

$$\tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{M-m} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \hat{\varphi}^{(m)} \quad (2.95)$$

όπου $\hat{\varphi} = \varphi(\vec{x}, 0, t)$. Συλλέγοντας όρους κάθε τάξης της παραμέτρου ε προκύπτει μία ρητή ακολουθία για τον υπολογισμό των όρων δυναμικού κάθε τάξης:

$$\hat{\varphi}^{(1)} = \tilde{\varphi} \quad (2.96)$$

$$\hat{\varphi}^{(m)} = - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \hat{\varphi}^{(m-n)} \quad , m = 2, 3, \dots, M \quad (2.97)$$

Εκφράζοντας τις εξισώσεις με αυτό τον τρόπο, το πρόβλημα μεταπίπτει στον υπολογισμό του $\hat{\varphi}_z^{(m)}$ από το $\hat{\varphi}^{(m)}$. Οι παράγωγοι ανώτερης τάξης ως προς z προκύπτουν με εφαρμογή της αρνητικής Λαπλασιανής σε αυτά τα δύο μεγέθη. Τέλος, παραγωγίζοντας την (2.95) ως προς z προκύπτει η τιμή $\tilde{\varphi}_z$ και προωθείται η επίλυση.

Η μεθοδολογία αυτή των μικρών διαταραχών προϋποθέτει ελαφρά μη γραμμικότητα, αλλά δε θέτει περιορισμό στο kd . Το χρησιμοποιούμενο σχήμα συγκλίνει για μη γραμμικούς κυματισμούς σταθερής μορφής με κλίση ελεύθερης επιφάνειας ως και 80% της οριακής σταθερής κλίσης για κάθε kd .

Η επίλυση του προβλήματος επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας στη στάθμη ηρεμίας από το δυναμικό στην ίδια θέση. Η μέθοδος Boussinesq που προτείνουν οι συγγραφείς είναι ασυμπτωτικά ακριβής και στα δύο όρια του kd . Όλες οι προγενέστερες μέθοδοι Boussinesq προσεγγίζουν την αδιάστατη ταχύτητα c^2/gd με ρητές συναρτήσεις του $(kd)^2$. Το γεγονός αυτό τις καθιστά εφαρμόσιμες σε προβλήματα μεταβλητού βάθους. Ωστόσο, η ακριβής σχέση γραμμικής διασποράς είναι υπερβατική $\frac{c^2}{gd} = \frac{\tanh(kd)}{kd}$ και τείνει στο $1/(kd)$ στα βαθιά νερά. Επομένως, η προγενέστερες μέθοδοι Boussinesq αποκλίνουν από την ακριβή λύση σε αυτό το όριο. Για να διορθωθεί η ακρίβεια για $kd \rightarrow \infty$ εισάγονται περιπτές δυνάμεις του kd στην προσέγγιση και χρησιμοποιείται ένας γενικευμένος (2D) μετασχηματισμός Hilbert \mathcal{H} που εκφράζει τις δυνάμεις αυτές στο φυσικό χώρο. Ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως εξής:

$$\mathcal{H}\nabla\varphi = \mathcal{F}^{-1}\{k \mathcal{F}\{\varphi\}\} \quad (2.98)$$

όπου \mathcal{F} ο συνήθης 2D $(\vec{x}; \vec{k})$ μετασχηματισμός Fourier και \mathcal{F}^{-1} ο αντίστροφος μετασχηματισμός.

Για την περίπτωση σταθερού βάθους, ένας συνηθισμένος έλεγχος για την ακρίβεια των μοντέλων Boussinesq αφορά στο κατά πόσο προσεγγίζουν τη σχέση γραμμικής διασποράς:

$$\frac{c^2}{gd} = \frac{\tanh(kd)}{kd} \quad (2.99)$$

Προσεγγίζοντας τη (2.99) με τη μέθοδο Fourier-Boussinesq χαμηλότερης τάξης προκύπτει η αντίστοιχη ρητή προσέγγιση χαμηλότερης τάξης:

$$\frac{c^2}{gd} \approx \frac{1}{1+kd} \quad (2.100)$$

Στο χώρο Fourier και για αρμονική γραμμική λύση ισχύει $\nabla = i\vec{k}$. Επιπλέον, ορίζοντας τον τελεστή εφαπτομένης ως:

$$\tan(d\nabla) = \frac{\sin(d\nabla)}{\cos(d\nabla)} = \frac{d\nabla - \frac{d^3\nabla^3}{6} + \frac{d^5\nabla^5}{120} + \dots}{1 - \frac{d^2\nabla^2}{2} + \frac{d^4\nabla^4}{24} + \dots} \quad (2.101)$$

$$\text{προκύπτει: } \tan(d\nabla) = i \tanh(kd) \approx \frac{ikd}{1+kd} = \frac{d\nabla}{1+d\mathcal{H}\nabla} \quad (2.102)$$

Οπότε λόγω της εξίσωσης Laplace θέτοντας $\vec{u} = \nabla\varphi(x, 0, t)$ και $\hat{w} = \varphi_z(x, 0, t)$ προκύπτει:

$$[1 + d\mathcal{H}\nabla]\hat{w} = -d\nabla \cdot \vec{u} \quad (2.103)$$

Η εξίσωση αυτή ως προς \hat{w} επιλύεται με επαναληπτική διαδικασία λόγω της ύπαρξης του μετασχηματισμού Hilbert. Σχηματίζοντας το ανάπτυγμα του φ ως προς την ελεύθερη επιφάνεια $z=\zeta$ και για ανάλυση της χαμηλότερης δυνατής τάξης, προκύπτει το σύστημα:

$$\hat{\varphi} + \zeta\hat{w} = \tilde{\varphi} \quad (2.104)$$

$$d\nabla^2\hat{\varphi} + [1 + d\mathcal{H}\nabla]\hat{w} = 0 \quad (2.105)$$

$$\text{και τελικά: } \tilde{w} = \hat{w} - \zeta\nabla^2\hat{\varphi} \quad (2.106)$$

Η λύση αυτή αντιστοιχεί στη χαμηλότερη δυνατή τάξη και εμφανίζει ενδιαφέρον για πολύ μακρά ή πολύ βραχέα κύματα. Οι συγγραφείς παρουσίασαν λύσεις ανώτερης τάξης με ρητές (τροποποιημένες ή μη) προσεγγίσεις Padé. Επίσης, μελέτησαν και την περίπτωση μεταβαλλόμενης βυθομετρίας.

2.4.5 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΥΨΗΛΗΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΥΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΤΟΥ LI (2008)

Ο Li (2008) πρότεινε ένα νέο σετ εξισώσεων που συνδυάζει τα πλεονεκτήματα της εξίσωσης ήπιας κλίσης και των μοντέλων Boussinesq. Η εξίσωση ήπιας κλίσης (mild slope equation) περιγράφει ικανοποιητικά τη διάδοση απλών γραμμικών κυματισμών στα βαθιά νερά (π.χ. $kd > 10$). Αντίθετα, τα μοντέλα Boussinesq παρέχουν τη δυνατότητα περιγραφής της διάδοσης και σύνθετων κυματισμών με έντονα μη-γραμμικό χαρακτήρα στα ρηχότερα νερά. Ο Li εξήγαγε ένα νέο σετ εξισώσεων, που συνδυάζοντας τις δύο μεθόδους περιγράφει πλήρως διασπειρόμενους, απλούς και σύνθετους μη-γραμμικούς κυματισμούς σε όλα τα βάθη.

Ως πρώτη προσέγγιση για τη συνάρτηση δυναμικού χρησιμοποιούνται συναρτήσεις υπερβολικού συνημιτόνου κατ' αναλογία με τη θεωρία Stokes 1^{ης} τάξης. Στη συνέχεια, από την εξίσωση Laplace προκύπτει μία νέα συνάρτηση δυναμικού. Αν επαναληφθεί αυτή η διαδικασία μπορούν να προκύψουν προσεγγίσεις κάθε τάξης, οι οποίες οδηγούν σε νέες εξισώσεις τύπου Boussinesq με ακρίβεια μεγαλύτερη των κλασικών εξισώσεων. Η μεθοδολογία αναπτύχθηκε τόσο για σταθερό βάθος, όσο και για μεταβαλλόμενη βυθομετρία.

Για δισδιάστατη ροή, ο Li κατέληξε στις εξισώσεις:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot [(d + \zeta)\vec{u}_\alpha] + \nabla \cdot \left\{ \nabla \nabla \cdot [(F_1 - dF_2)\vec{u}_\alpha] + d\nabla \nabla \cdot \left[(F_2 - z_\alpha F_4 + \frac{1}{2}z_\alpha^2)\vec{u}_\alpha \right] + dz_\alpha \nabla \nabla \cdot [(F_4 - z_\alpha)\vec{u}_\alpha] + \frac{1}{2}dz_\alpha^2 \nabla \nabla \cdot \vec{u}_\alpha \right\} = 0 \tag{2.107}$$

$$\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla \vec{u}_\alpha + g\nabla \zeta + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \nabla \cdot \left[(F_3 - z_\alpha F_4 + \frac{1}{2}z_\alpha^2)\vec{u}_\alpha \right] + z_\alpha \nabla \nabla \cdot [(F_4 - z_\alpha)\vec{u}_\alpha] + \frac{1}{2}z_\alpha^2 \nabla \nabla \cdot \vec{u}_\alpha \right\} = 0 \tag{2.108}$$

όπου:

$$F_1 = \frac{1}{k^3} \left[kd - \frac{\sinh(kd)}{\cosh(kd+kz_\alpha)} \right] \tag{2.109} \quad F_2 = \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{1}{\cosh(kd+kz_\alpha)} \right] \tag{2.110}$$

$$F_3 = \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{\cosh(kd)}{\cosh(kd+kz_\alpha)} \right] \tag{2.111} \quad F_4 = \frac{1}{k} \tanh(kd + kz_\alpha) \tag{2.112}$$

και $\vec{u}_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha)$ η οριζόντια ταχύτητα στη θέση $z=z_\alpha=-0.66d$ (regular waves) ή $z=z_\alpha=-0.544d$ (irregular waves).

Βασικό μειονέκτημα της προσέγγισης του Li είναι ότι απαιτείται ο προσδιορισμός του κυματαριθμού k . Για μονοχρωματικούς κυματισμούς το k υπολογίζεται από την ακριβή σχέση διασποράς, αλλά για σύνθετους υπεισέρχεται σφάλμα στον υπολογισμό του και έτσι το μοντέλο καθίσταται μη ακριβές στα βαθιά νερά.

2.5 ΠΡΟΣΘΗΚΕΣ ΣΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ BOUSSINESQ

Στις παραπάνω παραγράφους παρουσιάστηκαν συνοπτικά οι κυριότερες εργασίες που αφορούσαν στη βασική μορφή των εξισώσεων των διαφόρων μοντέλων τύπου Boussinesq. Οι προαναφερθείσες μελέτες απέβλεπαν στη βελτίωση των χαρακτηριστικών διασποράς και μη-γραμμικότητας των διαφόρων μοντέλων. Ωστόσο, για την πιο πιστή αναπαράσταση της πραγματικής διάδοσης κυμάτων στη φύση ή το εργαστήριο απαιτείται και η προσομοίωση διαφόρων παράλληλων φυσικών διεργασιών, όπως η θραύση των κυματισμών, η αναρρίχηση στις ακτές, η τριβή πυθμένα, η επιφανειακή τάση του ανέμου, η ανάκλαση των κυμάτων, το wave setup και setdown σε συνδυασμό με μοντέλα κυκλοφορίας, αλλά και υπολογιστικής φύσης διεργασιών, όπως οι τεχνικές και τα όρια γένεσης των κυματισμών και οι οριακές και αρχικές συνθήκες. Βέβαια, μπορεί θεωρητικά η προσπάθεια προσέγγισης αυτών των φαινομένων να είναι στην κατεύθυνση της πληρέστερης προσομοίωσης των φυσικών διεργασιών, όμως πολλές φορές η υπολογιστική διαδικασία καθίσταται ιδιαίτερα σύνθετη με απαιτήσεις βαθμονόμησης πολλών παραμέτρων και ζητήματα ευστάθειας των αριθμητικών σχημάτων που είναι δύσκολο να διερευνηθούν.

2.5.1 Η ΘΡΑΥΣΗ ΣΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ BOUSSINESQ

Η θραύση των κυματισμών είναι ίσως η πιο ενδιαφέρουσα φυσική διεργασία που συντελείται κατά τη διάδοση των κυμάτων. Αποτελεί το σημαντικότερο μηχανισμό μεταβολής της δυναμικής κατάστασης και της στερεομεταφοράς κυρίως στην παράκτια ζώνη. Η προσομοίωση της θραύσης και της διάδοσης κυμάτων εντός της ζώνης θραύσης (surf zone) αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης πολλών εργασιών πάνω στα μοντέλα Boussinesq. Πλήθος ερευνητών όπως οι Schäffer, Madsen, Karambas και Koutitas, Zelt, Kennedy, Veeramony και Svendsen κλπ. έχουν ασχοληθεί με το ζήτημα της θραύσης και πρότειναν διάφορες τεχνικές προσέγγισης. Η προσομοίωση της θραύσης αποτελεί κύριο αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας και για το λόγο αυτό εξετάζεται αναλυτικά στο τέταρτο και πέμπτο κεφάλαιο.

2.5.2 Η ΤΡΙΒΗ ΠΥΘΜΕΝΑ

Η μαθηματική ανάπτυξη των διάφορων κυματικών θεωριών που παρουσιάστηκαν στο πρώτο κεφάλαιο προϋποθέτει άκαμπτο, σταθερό, αδιαπέρατο και οριζόντιο πυθμένα. Ωστόσο, στη φύση υπάρχει ένα τεράστιο εύρος από είδη πυθμένων, από λασπώδεις όπου η ιλύς συμπεριφέρεται σαν παχύρευστο υγρό μεγάλου ιξώδους, μέχρι αμμώδεις με πορώδη αμμοκυμάτια και σκληρούς και τραχείς βραχώδεις πυθμένες. Η ακαμψία του πυθμένα, το πορώδες του και η τραχύτητά του είναι παράγοντες που επηρεάζουν τα κυματικά χαρακτηριστικά. Σε γενικές γραμμές η αλληλεπίδραση του κυματισμού και του πυθμένα οδηγεί σε απόσβεση ποσού της κυματικής ενέργειας και τοπική αλλαγή της κινηματικής των υγρών μορίων. Η σημαντικότερη απόσβεση ενέργειας εμφανίζεται όταν ο πυθμένας είναι πολύ μαλακός (εύκαμπτος) ή όταν τα κύματα προωθούνται σε μεγάλες αποστάσεις. Η παρακάτω συνοπτική παρουσίαση του υπολογισμού της τριβής πυθμένα ακολουθεί την ανάπτυξη των Dean και Dalrymple (1984). Η εισαγωγή της τριβής στο μοντέλο των Karambas και Memos

(2009) βασίζεται στην εργασία των Memos et al. (2005), εξετάστηκε από τον I. Koutsourelakis (2009) και παρουσιάζεται στο τρίτο κεφάλαιο. Ωστόσο, εξαιτίας της έλλειψης επαρκών στοιχείων στη βιβλιογραφία σχετικών με τα πραγματοποιηθέντα πειράματα, στην παρούσα εργασία η τριβή δε λαμβάνεται υπόψη.

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις Navier-Stokes σε δύο διαστάσεις για ένα ιξώδες ρευστό είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.114)$$

όπου ν το κινηματικό ιξώδες.

Στην περίπτωση δημιουργίας οριακής στοιβάδας στρωτής ροής, η επίδραση του ιξώδους είναι σημαντική πολύ κοντά στον πυθμένα. Έτσι, είναι βολικό να χωριστεί το πεδίο ροής σε αστρόβιλο (u_p) και στροβιλό (u_r) με: $u = u_p + u_r$.

Η u_p ικανοποιεί την εξίσωση Euler:

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.115)$$

και η u_r ικανοποιεί την προσεγγιστική εξίσωση στροβιλότητας:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \quad (2.116)$$

Συνδυάζοντας τη λύση από τη γραμμική θεωρία για την u_p και τη λύση της (2.116) για την u_r προκύπτει η συνολική οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας:

$$u = \frac{g\alpha k}{\omega \cosh(kd)} \left\{ \cosh[k(d+z)] \cos(kx - \omega t) - e^{-\sqrt{\omega/2\nu} \cdot (z+d)} \cos \left[kx - \omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (z+d) \right] \right\} \quad (2.117)$$

και από την εξίσωση συνέχειας προκύπτει η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας:

$$w = -\frac{g\alpha k}{\omega \cosh(kd)} \left\{ \sinh[k(d+z)] e^{i(\psi + \frac{\pi}{2})} - k \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \left[e^{-(1+i)\sqrt{\omega/2\nu} \cdot (z+d)} - 1 \right] e^{i(\psi + \frac{3\pi}{4})} \right\} \quad (2.118)$$

με $\psi = kx - \omega t$ και α το πλάτος κυματισμού. Η στιγμιαία διαμητική τάση που ασκείται στον πυθμένα δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_{xz} = \rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{z=-d} \approx \rho \nu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \Big|_{z=-d} \quad (2.119)$$

και λόγω της λύσης της (2.116) προκύπτει:

$$\tau_{xz} \approx \rho \sqrt{\frac{v}{\omega}} \frac{g\alpha k}{\cosh(kd)} \cos\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.120)$$

Από την (2.120) προκύπτει ότι η διατμητική τάση πυθμένα είναι αρμονική συνάρτηση και εμφανίζει διαφορά φάσης 45° ως προς την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας. Η μέση διατμητική τάση πυθμένα σε μία περίοδο κύματος είναι μηδενική. Μία συμβατική μορφή της διατμητικής τάσης πυθμένα για ταλαντευόμενη ροή δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_{xz} = \frac{\rho f}{8} u_b |u_b| \quad (2.121)$$

όπου u_b η ταχύτητα (θεωρούμενη συμβατικά) στον πυθμένα όπως δίνεται από τη θεωρία συνάρτησης δυναμικού έξω από το οριακό στρώμα πυθμένα και f είναι ένας συντελεστής τριβής. Η μέγιστη ταχύτητα πυθμένα από την (2.117) προκύπτει:

$$(u_b)_{max} = \frac{g\alpha k}{\omega \cosh(kd)} = \zeta_b \omega \quad (2.122)$$

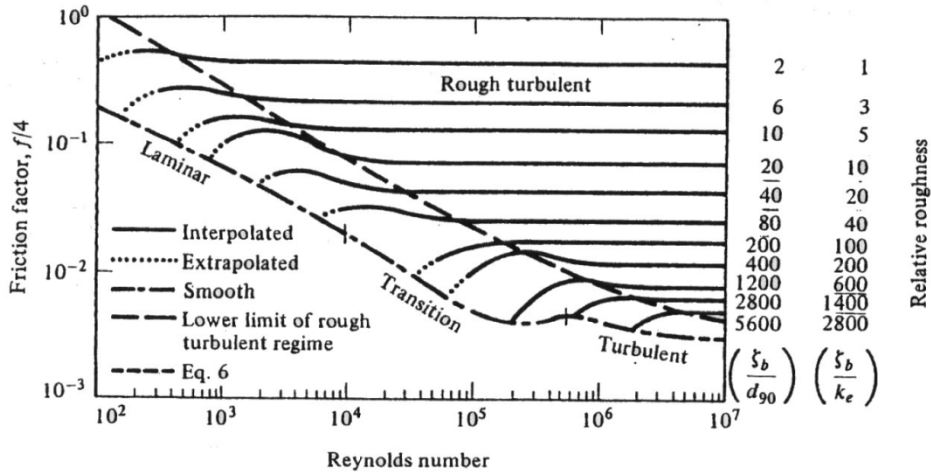
όπου ζ_b η μέγιστη οριζόντια μετακίνηση των υγρών μορίων στον πυθμένα (λόγω κυματισμού) για ροή υγρού αμελητέου ιξώδους. Αν θεωρηθεί ότι η μέγιστη ταχύτητα πυθμένα αντιστοιχεί στη μέγιστη διατμητική τάση πυθμένα, τότε λόγω των (2.120) και (2.121) προκύπτει:

$$\rho \sqrt{\frac{v}{\omega}} \frac{g\alpha k}{\cosh(kd)} = \frac{\rho f (u_b)_{max}^2}{8} \quad (2.123)$$

και λόγω της (2.122) προκύπτει:

$$f = \frac{8}{R_b^{1/2}} \quad (2.124) \quad \text{όπου } R_b \text{ είναι ο αριθμός Reynolds με: } R_b = \frac{u_b \zeta_b}{\nu} \quad (2.125)$$

Στο διάγραμμα του σχήματος (2.15) φαίνεται ο συντελεστής τριβής f συναρτήσει του R_b . Ως d_{90} ορίζεται η διάμετρος του κόκκου της άμμου από τον οποίο το 90% των υπόλοιπων κόκκων είναι λεπτότερο. Ο Kamphuis (1975), με κάποια επιφύλαξη, για να προσδιορίσει τη σχετική τραχύτητα πυθμένα όρισε ένα ισοδύναμο μέγεθος κόκκου άμμου ως $k_e = 2d_{90}$.



Σχήμα 2.15: Συντελεστής τριβής f συναρτήσει του αριθμού Reynolds R_b και της σχετικής τραχύτητας (πηγή: [43])

Οι παραπάνω σχέσεις προέκυψαν για οριακό στρώμα πυθμένα στρωτής ροής πάνω από λείο, άκαμπτο και αδιαπέρατο πυθμένα. Ωστόσο, όταν το ύψος κύματος γίνεται μεγάλο ή ο πυθμένας είναι τραχύς, η ροή στην οριακή στοιβάδα γίνεται τυρβώδης. Η περίπτωση αυτή είναι η πιο συνηθισμένη στη φύση. Οι πειραματικές εργασίες των Jonsson (1966), Kamphuis (1975), Jonsson και Carlsen (1976) και οι θεωρητικές μελέτες του Kajiwara (1968) απέδειξαν την εξάρτηση της τυρβώδους ροής στην οριακή στοιβάδα από τη σχετική τραχύτητα πυθμένα που ορίζεται ως k_e/ζ_b .

Όπως στην περίπτωση της τραχείας τυρβώδους ροής σε αγωγό, η τιμή του συντελεστή τριβής f είναι ανεξάρτητη του αριθμού Reynolds R_b . Συγκεκριμένα, ο Kamphuis πρότεινε:

$$f \approx 0.1 \left(\frac{k_e}{\zeta_b}\right)^{3/4} \quad \text{για} \quad \frac{k_e}{\zeta_b} > 0.02 \tag{2.126}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{f}} + \ln \frac{1}{2\sqrt{f}} = -0.35 - \frac{4}{3} \ln \frac{k_e}{\zeta_b} \quad \text{για} \quad \frac{k_e}{\zeta_b} < 0.02 \tag{2.127}$$

Οι (2.126) και (2.127) ισχύουν όταν: $\frac{k_e}{\zeta_b} \geq \frac{2200}{R_b}$ και $R_b > 5 \cdot 10^4$. Η σχέση (2.121) ισχύει και στην περίπτωση της τυρβώδους οριακής στοιβάδας. Η απόσβεση ενέργειας λόγω τριβής δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_D = \overline{\tau_{xz} u_b} \tag{2.128}$$

ή

$$\varepsilon_D = \frac{\rho f}{8} (u_{bmax})^3 \cos^2(kx - \omega t) |\cos(kx - \omega t)| \tag{2.129}$$

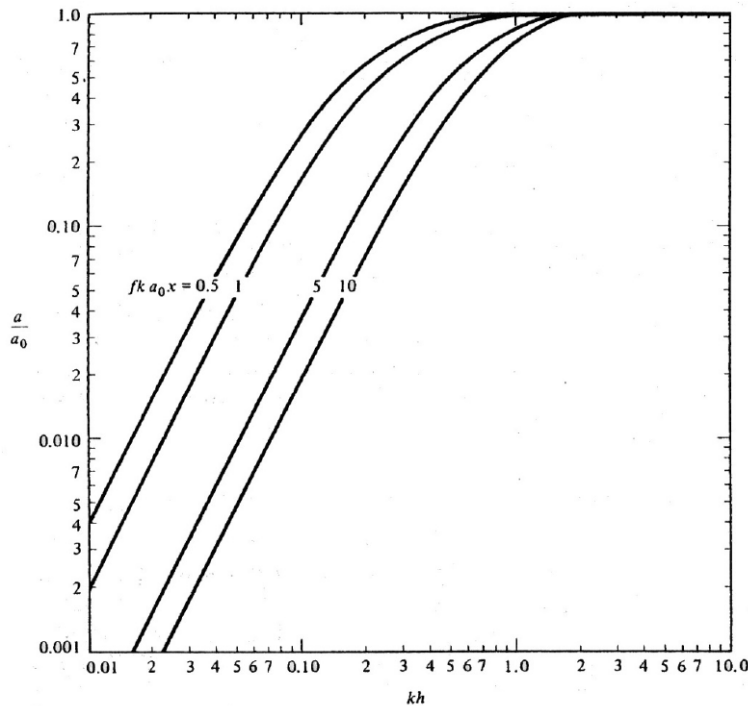
Οπότε η μέση απόσβεση ενέργειας στην περίοδο του κύματος είναι:

$$\varepsilon_D = \frac{\rho f}{8} (u_{bmax})^3 = \frac{\rho f}{6\pi} \left[\frac{a\omega}{\sinh(kd)} \right]^3 \tag{2.130}$$

Από την εξίσωση ενέργειας προκύπτει ότι η μείωση του ύψους κύματος συναρτήσει της απόστασης πάνω από έναν επίπεδο πυθμένα δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha(x) = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{2f}{3\pi[2kd + \sinh(2kd)]\sinh(kd)} k^2 \alpha_0 x} \tag{2.131}$$

όπου α_0 το ύψος κύματος στην αρχική θέση μελέτης όπου πρακτικά η τριβή είναι αμελητέα. Η σχέση αυτή παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 2.16.



Σχήμα 2.16: Μείωση του ύψους κύματος εξαιτίας της απόσβεσης ενέργειας λόγω τριβής με σχηματισμό τυρβώδους οριακής στοιβάδας πυθμένα (πηγή: [43])

Η μείωση του ύψους κύματος αυξάνεται με την αύξηση του συντελεστή τριβής f και εξαρτάται από το βάθος. Στα βαθιά νερά, ο λόγος α/α_0 τείνει στη μονάδα καθώς η τριβή πυθμένα γίνεται αμελητέα, ενώ στα ρηχά νερά τείνει ασυμπτωτικά στη σχέση:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{1}{1 + \frac{f}{6\pi} \frac{\alpha_0 x}{d^2}} \tag{2.132}$$

Τα παραπάνω ισχύουν για άκαμπτους και αδιαπέρατους πυθμένες. Στις περιπτώσεις λασπώδους πυθμένα υψηλού ιξώδους ή πορώδους πυθμένα, απαιτείται τροποποίηση των σχέσεων υπολογισμού της ενεργειακής απόσβεσης.

2.5.3 Η ΑΝΑΡΡΙΧΗΣΗ ΣΤΗΝ ΑΚΤΗ

Η προσομοίωση της αναρρίχησης των κυματισμών στην ακτή δεν εισάγει νέες φυσικές έννοιες στα μοντέλα. Τα προβλήματα που παρουσιάζονται είναι κυρίως αριθμητικά και σχετίζονται με τη μετακίνηση του κατάντη ορίου του πεδίου σε ένα σταθερό οριζόντιο σύστημα συντεταγμένων. Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία αρκετές τεχνικές, οι οποίες σε γενικές γραμμές μπορούν να διακριθούν σε τρεις κατηγορίες:

- τεχνικές μετασχηματισμού των συντεταγμένων
- τεχνικές στράγγισης και πλήρωσης του κανάβου
- τεχνικές που χειρίζονται ολόκληρη την υπολογιστική περιοχή σαν ένα τμήμα της ενεργής περιοχής του ρευστού

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει μοντέλα που αναπτύσσονται σε συντεταγμένες Lagrange. Στην περίπτωση κίνησης του ρευστού κάθετα στην ακτή, η χρησιμοποίηση συντεταγμένων Lagrange αναιρεί τη μονιμότητα της θέσης της ακτογραμμής και επομένως είναι εφικτή η επίλυση της αναρρίχησης. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους Pedersen και Gjevik (1983) για τον υπολογισμό της αναρρίχησης μοναχικών κυμάτων. Ο Zelt (1991) εξέλιξε τη χρήση της μεθόδου των συντεταγμένων Lagrange ενσωματώνοντας ένα μοντέλο θραύσης ώστε τελικά να μελετήσει την αναρρίχηση θραυόμενων και μη θραυόμενων μοναχικών κυματισμών. Η τεχνική των συντεταγμένων Lagrange μπορεί κατά βάση να επεκταθεί σε δύο οριζόντιες διαστάσεις, ώστε να περιλαμβάνει και κίνηση παράλληλη στην ακτή. Ωστόσο, η χρήση αποκλειστικά ενός σχήματος Lagrange για εφαρμογές στη ζώνη θραύσης είναι προβληματική από την άποψη ότι η μέση ροή που αναπτύσσεται από τα θραυόμενα κύματα στη ζώνη αυτή παραμορφώνει τον κανάβο στην παράλληλη προς την ακτή διεύθυνση. Είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν σχήματα ημί-Lagrange στα οποία μόνο η κίνηση κάθετα στην ακτή αντιμετωπίζεται στα πλαίσια των συντεταγμένων Lagrange. Εναλλακτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν απλές τεχνικές επιμήκυνσης των συντεταγμένων, οι οποίες επεκτείνουν τον κανάβο του μοντέλου στην κάθετη στην ακτή διεύθυνση ώστε να παρακολουθείται η μετακινούμενη ακτογραμμή. Οι Özkan-Haller και Kirby (1997) χρησιμοποίησαν την προσέγγιση αυτή σε σχήματα που βασίζονται στις μη-γραμμικές εξισώσεις των ρηχών νερών για να περιγράψουν την αναρρίχηση κατά μήκος της ακτής.

Η δεύτερη κατηγορία τεχνικών έχει μακρά ιστορία εφαρμογής στα πλαίσια υπολογισμών που αφορούν στην αναρρίχηση tsunamis. Σε αυτά τα μοντέλα ελέγχεται η στάθμη του ρευστού στον πλησιέστερο στην ακτή ενεργό κόμβο της υπολογιστικής περιοχής. Η θέση της ακτογραμμής μετακινείται κατάντη αν η στάθμη του ρευστού υπερβεί μια κρίσιμη τιμή, ενώ ο κόμβος στραγγίζεται και απενεργοποιείται αν η στάθμη πέσει κάτω από μία δεύτερη κρίσιμη τιμή. Η μεθοδολογία αυτή εφαρμόζεται καλύτερα στην περίπτωση ρητών αριθμητικών σχημάτων, τα οποία δεν επηρεάζονται από αλλαγές στη διάσταση του κανάβου.

Την προσέγγιση του Zelt (1991) σε συνδυασμό με τη δεύτερη τεχνική υιοθέτησαν στο μοντέλο τους και οι Karambas και Koutitas (2002). Οι συγγραφείς για να προσεγγίσουν την απώλεια ενέργειας λόγω τύρβης στη ζώνη διαβροχής (swash zone) πρόσθεσαν στο δεξί μέλος της εξίσωσης ορμής τον όρο:

$$\frac{1}{d+\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left[v_s (d + \zeta) \frac{\partial U}{\partial x} \right] \quad (2.133)$$

όπου v_s είναι ένας συντελεστής ιξώδους στη ζώνη διαβροχής (swash zone eddy viscosity coefficient) που δίνεται από τη σχέση:

$$v_s = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \quad (2.134)$$

με $l = 2(d + \zeta)$ ένα χαρακτηριστικό μήκος. Κοντά στην ακτή όπου το l είναι μικρότερο από το βήμα χωρικής διακριτοποίησης, τίθεται $l = 2dx$. Η οριακή συνθήκη "στεγνού πυθμένα" (dry bed) χρησιμοποιείται για την προσομοίωση της αναρρίχησης. Έτσι, σε ένα κόμβο i :

- Αν $(d+\zeta)_{i-1} < 0.00001$ και $U_i > 0$ τίθεται $\zeta_i = -d$ και $U_i = 0$
- Αν $(d+\zeta)_{i-1} < 0.00001$ και $U_i < 0$ τίθεται $\zeta_i = -d$ και $U_i = 0$

Τέλος, έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες που στοχεύουν στη διατήρηση ενός ενεργού υπολογιστικά κανάβου πάνω από μία ολόκληρη προκαθορισμένη έκταση του μοντέλου η οποία περιλαμβάνει επιμέρους περιοχές. Στην κατηγορία αυτή ανήκει η τεχνική των Kennedy et al. (2000) που προτείνει μία διαφοροποίηση της μεθόδου των σχισμών του Tao (1983,1984). Στην περιοχή με ελάχιστο ή καθόλου νερό, επιλύονται τροποποιημένες εξισώσεις με την παραδοχή ότι η ακτή είναι πορώδης ή περιέχει στενές σχισμές και έτσι είναι δυνατόν η στάθμη του νερού να βρίσκεται κάτω από το επίπεδο της ακτής. Εναλλακτικά, μπορεί να θεωρηθεί ότι πρόκειται για μία μέθοδο λεπτού "φιλμ" με έναν τροποποιημένο όρο βαρύτητας, στην οποία ένα πολύ λεπτό στρώμα νερού καλύπτει στεγνές περιοχές. Μία παραλλαγή της τεχνικής αυτής χρησιμοποιήθηκε από τους Madsen et al. (1997 parts I,II) και κατέδειξε ότι η τυπική μέθοδος των σχισμών υποεκτιμά την κυματική αναρρίχηση κατά περίπου 10% σε σχέση με την αναλυτική λύση των Carrier και Greenspan (1958).

Πρέπει να σημειωθεί ότι το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία δεν προσομοιώνει την αναρρίχηση (run-up) και καταρρίχηση (run-down) του κύματος στην ακτή καθότι χρησιμοποιούνται απορροφητικές στοιβάδες και στα κατάντη όρια.

2.5.4 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Τα αριθμητικά σχήματα επίλυσης των μοντέλων Boussinesq συμπληρώνονται από κατάλληλες οριακές συνθήκες. Οι οριακές συνθήκες που κατά κανόνα συναντώνται στη βιβλιογραφία αναφέρονται σε:

- όρια γένεσης κύματος (wave generation)
- όρια ακτινοβολίας ή απορροφητικά όρια (transmitting or absorbing boundaries)

2.5.4.1 Όρια γένεσης κύματος

Η απλούστερη μέθοδος για την εισαγωγή κυματικής διαταραχής στο υπολογιστικό πεδίο συνίσταται στον καθορισμό σε κάποιο όριο του κανάβου (συνήθως στο ανάντη) των τιμών των συναρτήσεων $\zeta(t)$, $u(t)$ και $v(t)$ σε κάθε χρονικό βήμα εφαρμογής του αριθμητικού σχήματος

επίλυσης. Η προσέγγιση αυτή εμφανίζει το μειονέκτημα ότι δεν επιτρέπει τη διαχείριση των ανακλώμενων κυματισμών που επιστρέφουν στο όριο.

Συνήθως στο όριο γένεσης του κύματος είναι διαθέσιμη μόνο η χρονοσειρά ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\zeta(t)$. Αν το ύψος κύματος είναι μικρό συγκρινόμενο με το βάθος στη θέση αυτή, μπορεί να εφαρμοστεί η γραμμική θεωρία και οι Wei και Kirby (1995) πρότειναν για των υπολογισμό των συνιστωσών της οριζόντιας ταχύτητας τις σχέσεις:

$$u = \frac{\omega}{kd_0 \left[1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (kd_0)^2 \right]} \cdot \zeta \cdot \cos\theta \quad (2.135)$$

$$v = \frac{\omega}{kd_0 \left[1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (kd_0)^2 \right]} \cdot \zeta \cdot \sin\theta \quad (2.136)$$

όπου θ η γωνία διάδοσης των κυματισμών σε σχέση με τον άξονα των x και $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{z\alpha}{d} \right)^2 + \frac{z\alpha}{d}$, με z_α στάθμη αναφοράς σύμφωνα με την ανάλυση του Nwogu (1993).

Μία σχετικά πρόσφατη εξέλιξη αποτελεί η τεχνική της συνάρτησης πηγής για την παραγωγή του κύματος στο εσωτερικό της υπολογιστικής περιοχής. Η εφαρμογή στοιβάδων απορρόφησης (sponge layers) κοντά στα όρια του πεδίου αφαιρεί τη δυνατότητα γένεσης κυμάτων σε αυτά. Συνεπώς, τα κύματα που γεννώνται στο εσωτερικό του πεδίου λόγω της συνάρτησης πηγής απορροφώνται όταν προσπίπτουν στα όρια απορρόφησης.

Η πρώτη προσπάθεια να συμπεριληφθεί ένας τέτοιος όρος πηγής στις εξισώσεις Boussinesq έγινε από τους Larsen και Dancy (1983), οι οποίοι πρόσθεταν και αφαιρούσαν μάζα από την υπολογιστική περιοχή κατά μήκος μίας γραμμής (δισδιάστατο μοντέλο) ή σε ένα σημείο (μονοδιάστατο μοντέλο). Οι συγγραφείς προσπάθησαν να παράγουν έναν αρχικό κυματισμό με ταχύτητα διάδοσης c και ανύψωσης ζ^1 , ο οποίος διαδίδεται με μία γωνία θ ως προς τη γραμμή γένεσης l . Αυτός ο κυματισμός έχει ταχύτητα διάδοσης $c \sin\theta$ κάθετα στην l . Έστω ότι η l περνάει από κόμβους του κανάβου και Δs η απόσταση μεταξύ διαδοχικών σημείων επί της l , τότε η παροχή ρευστού κατά την l είναι $\zeta^1 c \sin\theta \Delta s$ και στις δύο διευθύνσεις. Αυτή η ποσότητα πρέπει να εξισορροπηθεί προσθέτοντας όγκο στο σύστημα. Κάθε κόμβος του κανάβου αντιστοιχεί σε περιοχή εμβαδού $\Delta x \Delta y$, όπου Δx και Δy τα βήματα χωρικής διακριτοποίησης του πεδίου στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα. Επομένως, η ανύψωση που πρέπει να προστεθεί στο ζ σε κάθε σημείο της l είναι:

$$\zeta^* = 2\zeta^1 c \Delta t \frac{\Delta s}{\Delta x \Delta y} \sin\theta \quad (2.137)$$

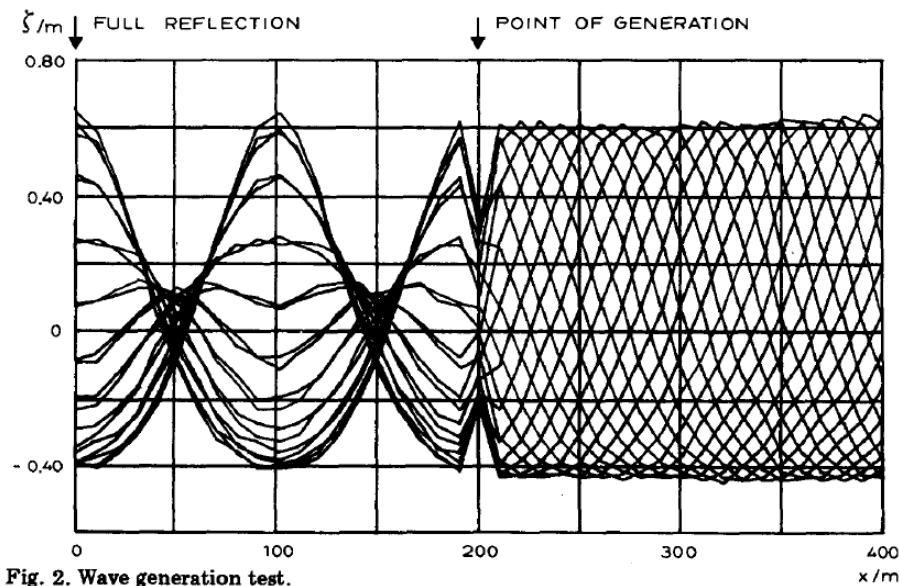
Σε μία διάσταση η (2.137) γίνεται:

$$\zeta^* = 2\zeta^1 Cr \quad (2.138)$$

όπου $Cr = c\Delta t/\Delta x$ ο αριθμός Courant.

Στο σχήμα 2.17 φαίνεται η γένεση cnoidal κυματισμών σε μία διάσταση με ύψος 0.5 m στη θέση $x=200$ m. Το βάθος του νερού είναι 10 m. Αριστερά της πηγής φαίνεται ένα στάσιμο κύμα που προκύπτει από πλήρη ανάκλαση στο αριστερό όριο του πεδίου και δεξιά το διαδιδόμενο

κύμα. Όπως προκύπτει, το ανακλώμενο κύμα διέρχεται από τη θέση της πηγής χωρίς παραμόρφωση. Λόγω της μη γραμμικότητας των κυματισμών δεν εμφανίζονται τέλειοι κόμβοι.



Σχήμα 2.17: Δοκιμή γένεσης κυματισμών εσωτερικά του υπολογιστικού πεδίου (πηγή: [97])

Ο Wei (1997) διαπίστωσε ότι ενώ αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται με επιτυχία στον έκκεντρο κανάβο των Larsen και Dancy (1983), στην περίπτωση μη έκκεντρου κανάβου εμφανίζεται θόρυβος γύρω από το σημείο της πηγής. Για το λόγο αυτό οι Gobbi και Kirby (1999) ακολουθώντας την προσέγγιση των Wei et al. (1999), έκαναν την υπόθεση ότι η συνάρτηση πηγής κατανέμεται γύρω από τη θέση της πηγής με τη μορφή γκαουσιανού προφίλ (Gaussian shape).

Αν το τοπικό βάθος στην περιοχή της πηγής είναι σταθερό d και απαιτείται η παραγωγή μονοχρωματικών κυματισμών γωνιακής συχνότητας ω , η συνάρτηση πηγής για μονοδιάστατα προβλήματα γράφεται:

$$f_s(x, t) = D_s \exp[-\beta_s(x - x_s)^2] \sin(\omega t) \tag{2.139}$$

όπου:

x_s το κέντρο της συνάρτησης πηγής

β_s παράμετρος που καθορίζει πόσο επικεντρωμένη είναι η πηγή

D_s το μέτρο της συνάρτησης πηγής

Υποθέτοντας ότι το παραγόμενο κύμα έχει μικρό εύρος, είναι δυνατόν να βρεθεί αναλυτική έκφραση για το D_s . Συγκεκριμένα, γραμμικοποιώντας το πλήρως μη γραμμικό μοντέλο τους τέταρτης τάξης (FN4), οι Gobbi και Kirby (1999) κατέληξαν στη μορφή:

$$D_s = \frac{i\zeta_0}{\omega A_G I_1 [1 + C_3(kd)^2 + C_4(kd)^4]} \tag{2.140}$$

όπου $\zeta_0=H/2$ το πλάτος του επιθυμητού κύματος και I_1, A_G, C_3 και C_4 παράμετροι που δίνονται αναλυτικά από τους Gobbi και Kirby (1999).

Οι Wei et al. (1999) δίνουν μία ελαφρώς διαφορετική μορφή:

$$D_s = \frac{2\zeta_0(\omega^2 - \alpha_1 g k^4 d^3) \cos \theta}{\omega I_1 k [1 - \alpha(kd)^2]} \quad (2.141)$$

όπου α_1 , α συντελεστές που προκύπτουν από το μοντέλο του Nwogu (1993), θ η διεύθυνση διάδοσης του κυματισμού και I_1 παράμετρος που δίνεται αναλυτικά από τους συγγραφείς [184]. Έναν παρόμοιο τύπο για το D_s δίνουν και οι Memos et al. (2005) με αφετηρία τα μοντέλα των Madsen et al. (1991) και Zou (1999).

Οι Gobbi και Kirby (1999) επισημαίνουν πως παρότι η παράμετρος β_s (Gaussian shape parameter) είναι τυχαία, στην πράξη η τιμή της έχει μεγάλη επιρροή στο πόσο καλά η συνάρτηση πηγής παράγει το επιθυμητό κύμα. Θεωρητικά η τιμή αυτή θα έπρεπε να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη, ώστε η συνάρτηση πηγής να είναι πιο επικεντρωμένη. Ωστόσο, από εφαρμογές προκύπτει πως αν η περιοχή της πηγής είναι πολύ στενή (μεγάλες τιμές β_s), τα παραγόμενα κύματα μπορεί να παραμορφωθούν αρκετά και να εμφανιστεί θόρυβος στην περίπτωση κυμάτων πεπερασμένου ύψους. Οι συγγραφείς καθόρισαν το πλάτος W_s της περιοχής γένεσης των κυματισμών ως την απόσταση δύο σημείων που ισαπέχουν από το κέντρο της συνάρτησης πηγής και οι συντεταγμένες τους προκύπτουν ως λύση της εξίσωσης:

$$e^{-\beta_s(x-x_s)^2} = e^{-5} \quad (2.142)$$

$$\text{και τελικά: } W_s = 2 \sqrt{\frac{5}{\beta_s}} \quad (2.143)$$

Οι Gobbi και Kirby (1999) αναφέρουν ότι μετά από δοκιμές, ένα πλάτος W_s περίπου ίσο με το μήκος κύματος δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για μονοχρωματικούς κυματισμούς και ένα σημαντικό εύρος υψών κύματος και κυματαριθμών. Οι Wei et al. (1999) σχετίζουν το πλάτος της συνάρτησης πηγής με το μήκος κύματος μέσω της σχέσης:

$$W_s = \delta \left(\frac{L}{2}\right) \quad \text{και άρα} \quad \beta_s = \frac{80}{\delta^2 L^2} \quad (2.144)$$

όπου δ παράμετρος με τυπικές τιμές 0.3-0.5 και συνεπώς το πλάτος της συνάρτησης πηγής είναι περίπου 0.15-0.25 του μήκους κύματος. Για την παραγωγή τυχαίων κυματισμών επιλέγεται ένα αντιπροσωπευτικό κύμα με περίοδο την περίοδο αιχμής του αντίστοιχου φάσματος, ώστε να προσδιοριστεί ένα μοναδικό β_s για όλες τις φασματικές συνιστώσες.

Όταν οι επιθυμητοί κυματισμοί είναι έντονα μη γραμμικοί ($O(1)$) η μέθοδος της συνάρτησης πηγής δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Οι Lee και Suh (1998) παρουσίασαν μία μέθοδο παραγωγής κυματισμών παρόμοια με αυτή των Larsen και Dancy (1983). Οι συγγραφείς μελέτησαν τη γένεση κυματισμών για δύο χρόνο-εξαρτώμενα μοντέλα εξίσωσης ήπιας κλίσης των Copeland (1985) και Radder και Dingemans (1985). Προσέγγισαν την εσωτερική παραγωγή κυμάτων από δύο οπτικές γωνίες, της

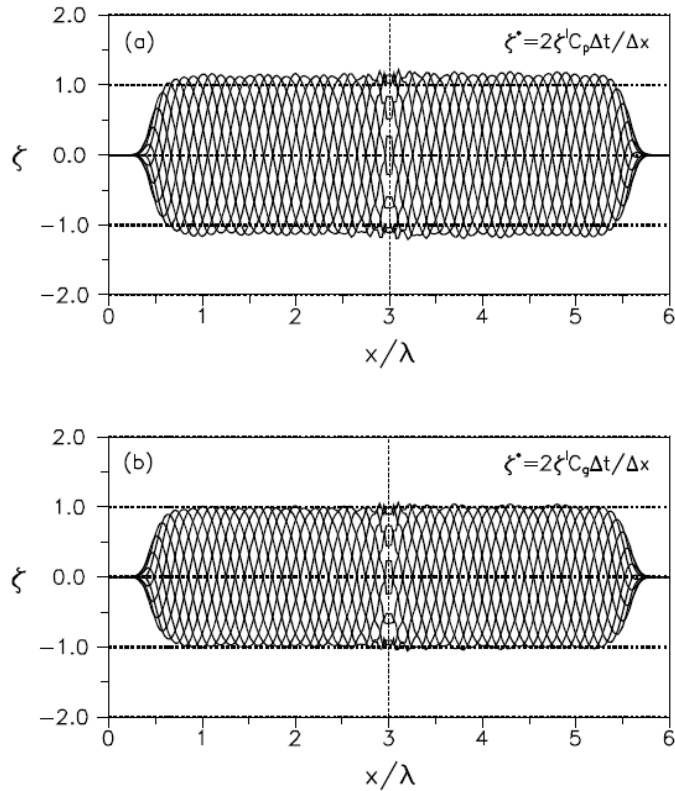
μεταφοράς μάζας και της μεταφοράς ενέργειας. Για τις δύο προσεγγίσεις έκαναν χρήση της ταχύτητας φάσης και της ταχύτητας μεταφοράς της ενέργειας αντίστοιχα. Απέδειξαν ότι η μέθοδος της μεταφοράς μάζας που χρησιμοποιήθηκε από τους Larsen και Dancy (1983) για τις εξισώσεις Boussinesq του Peregrine (1967) και από τους Madsen και Larsen (1987) για τις εξισώσεις Copeland (1985), δεν μπορεί καταλλήλως να παράγει κύματα στις εξισώσεις των Radder και Dingemans (1985). Οι χρόνο-εξαρτώμενες εξισώσεις προβλέπουν την εξέλιξη της ενέργειας των κυματισμών καθώς και την αλλαγή της ταχύτητας φάσης. Η χρήση της προσέγγισης της γεωμετρικής οπτικής δίνει κατ' αναλογία ένα ζεύγος εξισώσεων από το οποίο προκύπτει η ταχύτητα μεταφοράς της ενέργειας. Στο μοντέλο Copeland η ταχύτητα ενέργειας ταυτίζεται με την ταχύτητα φάσης. Άλλωστε, το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να αποδώσει τη συμπεριφορά ομάδας τυχαίων κυματισμών. Όπως όμως αναφέρουν οι Lee και Suh η ενεργειακή προσέγγιση δεν είναι σίγουρο πως δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για άλλες χρόνο-εξαρτώμενες εξισώσεις, όπως τα μοντέλα Boussinesq, εκτός αυτών που ελέγχθηκαν στην εργασία τους.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την ταχύτητα μεταφοράς ενέργειας C_e αντί της ταχύτητας φάσης C_p προκύπτει σχέση παρόμοια με την (2.138):

$$\zeta^* = 2\zeta^1 C_e \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (2.145)$$

με $\zeta^1 = a e^{i\omega t}$, όπου a το εύρος των εισερχόμενων κυματισμών. Η ταχύτητα μεταφοράς ενέργειας C_e υπολογίζεται μοναδικά και εξαρτάται από τον τύπο των κυματικών εξισώσεων του εκάστοτε μοντέλου. Για το μοντέλο Copeland (1985) είναι η ταχύτητα φάσης, ενώ για το μοντέλο Radder και Dingemans (1985) είναι η ταχύτητα ομάδας C_g .

Στο σχήμα 2.18 φαίνεται συγκριτικά η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας με χρήση των δύο διαφορετικών ορισμών της ταχύτητας ενέργειας C_e (ταχύτητα φάσης και ταχύτητα ομάδας) και με χρήση των βελτιωμένων εξισώσεων στοιβάδων απορρόφησης των Yoon και Choi (2001) που περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο. Με τη χρήση της ταχύτητας ομάδας C_g ως ταχύτητας ενέργειας προκύπτει η ακριβής γένεση κυμάτων.



Σχήμα 2.18: Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας όπως προκύπτει με τη χρήση δύο διαφορετικών ταχυτήτων ενέργειας C_e . (α) $C_e=C_p$ και (β) $C_e=C_g$ (πηγή: [188])

2.5.4.2 Όρια ακτινοβολίας ή απορροφητικά όρια

Η απορρόφηση της κυματικής ενέργειας, η διέλευσή της χωρίς μεταβολές και η μερική ή ολική ανάκλασή της από τα ανοιχτά όρια ή εσωτερικές περιοχές του πεδίου εφαρμογής ενός μοντέλου Boussinesq είναι ζήτημα που έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές.

Η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld (ή συνθήκη ελεύθερης διάβασης), η οποία υποδηλώνει ότι οι κυματικές διαταραχές πρέπει απλά να εξέρχονται προς το άπειρο, χρησιμοποιείται συχνά. Η συνθήκη αυτή εκφράζεται μαθηματικά:

$$\zeta_t + c \cos \theta \zeta_x = 0 \tag{2.146}$$

όπου c η ταχύτητα φάσης και θ η διεύθυνση διάδοσης του κύματος στο όριο.

Ωστόσο, στην περίπτωση διασπειρόμενων κυματισμών δεν υπάρχει συγκεκριμένη φασική ταχύτητα που να χαρακτηρίζει το σύστημα. Επιπλέον, στην περίπτωση διδιάστατων εφαρμογών δεν είναι συνήθως γνωστή εκ των προτέρων η διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό γίνονται προσεγγίσεις στη συνθήκη ακτινοβολίας. Στην περίπτωση που η κύρια διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων βρίσκεται κοντά στον άξονα x , η προσεγγιστική οριακή συνθήκη ακτινοβολίας κατά τους Engquist και Majda (1977) γράφεται:

$$\zeta_{tt} + c\zeta_{xt} - \frac{c^2}{2}\zeta_{yy} = 0 \quad (2.147)$$

που αντιστοιχεί στην επιβολή μιας παραβολικής προσέγγισης στο εξερχόμενο κύμα. Το πρόβλημα της μη ύπαρξης μοναδικής ταχύτητας φάσης για όλο το σύστημα λόγω διασποράς, αντιμετωπίζεται κατά τους Wei και Kirby (1995) με θεώρηση της ταχύτητας μακρών κυματισμών $c = \sqrt{gd}$.

Η προαναφερθείσα σχέση ακτινοβολίας εισάγει αναπόφευκτα κυματική ανάκλαση κατά μήκος των ορίων που μπορεί να οδηγήσει το μοντέλο σε αστάθεια. Για τη μείωση της ανάκλασης οι Israeli και Orszag (1981) προτείνουν την εφαρμογή μιας στοιβάδας απορρόφησης (sponge layer) στην περιοχή του ορίου και μιας συνθήκης ακτινοβολίας ανώτερης τάξης. Με πρόσθεση των όρων απορρόφησης, οι Wei και Kirby (1995) δίνουν τις εξισώσεις ορμής:

$$U_t = F(\zeta, u, v) + [F_1(v)]_t - w_1(x)u - w_2(x)(u_{xx} + u_{yy}) \quad (2.148)$$

$$V_t = G(\zeta, u, v) + [G_1(u)]_t - w_1(x)v - w_2(x)(v_{xx} + v_{yy}) \quad (2.149)$$

όπου F, G, F_1, G_1 οι υπόλοιποι όροι των εξισώσεων ορμής και u, v οι οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας. Οι συντελεστές απόσβεσης δίνονται από τις σχέσεις:

$$w_1(x) = \begin{cases} 0, & x < x_s \\ \alpha_1 \omega f(x), & x > x_s \end{cases} \quad (2.150)$$

$$w_2(x) = \begin{cases} 0, & x < x_s \\ \alpha_2 \nu f(x), & x > x_s \end{cases} \quad (2.151)$$

όπου α_1, α_2 σταθερές που προσδιορίζονται κατά την εκτέλεση του μοντέλου, ω η γωνιακή συχνότητα του κυματισμού που αποσβένεται, x_s η τετμημένη της αρχής της στοιβάδας απορρόφησης (το υπολογιστικό πεδίο εκτείνεται από $x=0$ ως $x=x_m$) και ν το κινηματικό ιξώδες. Η f είναι συνάρτηση εκθετικής μορφής:

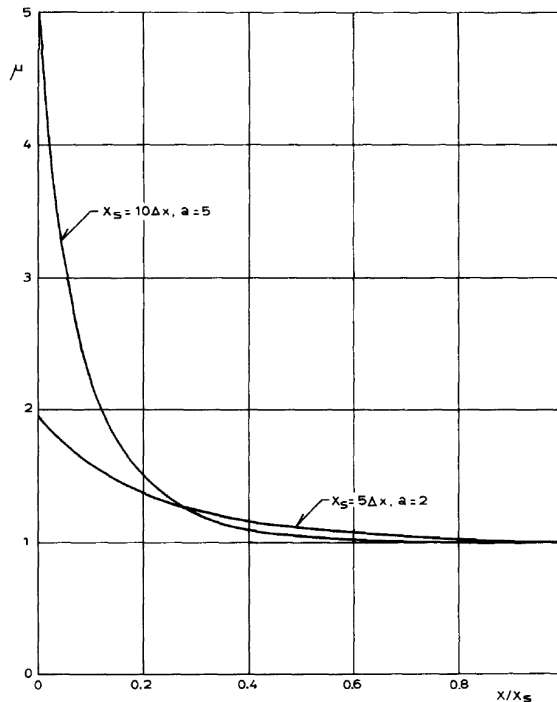
$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x-x_s}{x_m-x_s}\right)^n - 1}{\exp(1) - 1} \quad (2.152)$$

Οι Wei και Kirby (1995) προτείνουν ως πλάτος στοιβάδας απορρόφησης να λαμβάνεται δύο με τρεις φορές το μήκος κύματος.

Οι Larsen και Dancy (1983) χρησιμοποίησαν επίσης την τεχνική της στοιβάδας απορρόφησης (sponge layer) στα ανοιχτά όρια για την απορρόφηση των κυματισμών. Σύμφωνα με την τεχνική τους, οι στοιβάδες αυτές απορροφούν βαθμιαία την ενέργεια του κύματος διαιρώντας τα ζ, u και v με μία συνάρτηση $\mu(x)$. Αν οι στοιβάδες απορρόφησης είναι στο διάστημα $0 \leq x \leq x_s$, τότε:

$$\mu(x) = \begin{cases} \exp\left[\left(2^{-x/\Delta x} - 2^{-x_s/\Delta x}\right) \ln \alpha\right], & 0 \leq x \leq x_s \\ 1, & x_s < x \end{cases} \quad (2.153)$$

όπου a είναι μία σταθερά που εξαρτάται από τον αριθμό των γραμμών του κανάβου στη στοιβάδα. Η συνάρτηση $\mu(x)$ είναι συνεχής στο $x=x_s$ απεικονίζεται γραφικά στο διάγραμμα του σχήματος 2.19 για δύο διαφορετικά σεί τιμών των $x_s/\Delta x$ και a .



Σχήμα 2.19: Η $\mu(x)$ συναρτήσεϊ της αδιάστατης απόστασης για δύο διαφορετικές στοιβάδες απορρόφησης (πηγή: [97])

Για να αποτυπώσουν τα αποτελέσματα αυτής της τεχνικής, οι συγγραφείς δημιούργησαν ένα πεδίο στο αριστερό άκρο του οποίου παρήγαγαν cnoidal κυματισμούς ύψους ενός μέτρου. Το βήμα διακριτοποίησης είναι $\Delta x=10m$ και έχουν τοποθετηθεί δύο στοιβάδες απορρόφησης πλάτους $5\Delta x$ περίπου συμμετρικά ως προς την ευθεία $x=250$. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.20 η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας δύσκολα διακρίνεται μετά το διπλό πέρασμα από τις στοιβάδες απορρόφησης. Η απόδοση της στοιβάδας απορρόφησης εξαρτάται από την ανάλυση του πλέγματος του κανάβου πεπερασμένων διαφορών. Για δεδομένο εύρος στοιβάδας $x_s=5\Delta x$ ή $10\Delta x$, το σχετικό πλάτος της στοιβάδας σε σχέση με το μήκος κύματος αλλάζει. Η απόδοση της απορροφητικής στοιβάδας πέφτει καθώς αυξάνει η ανάλυση του κανάβου, με συνέπεια η ανάκλαση των κυματισμών να είναι ισχυρή.

Οι Yoon και Choi (2001) παρουσίασαν ένα βελτιωμένο σχήμα. Η συνάρτηση απόσβεσης v πολλαπλασιάζεται με τα ζ , u και v και δίνεται από τη σχέση:

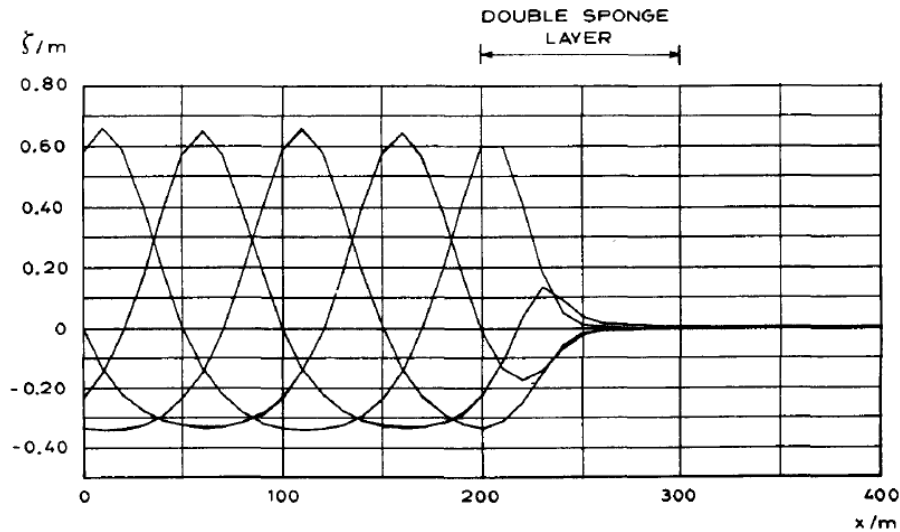
$$\begin{aligned}
 v(x_*) &= \exp\left[-\left(b^{-x_*/\Delta x} - b^{-x_s/\Delta x}\right)\ln A\right] && \text{για } 0 \leq x_* \leq x_s \\
 v(x_*) &= 1 && \text{για } x_s < x_*
 \end{aligned}
 \tag{2.154}$$

όπου:

$$b = [1 + r_s + \exp(-1/r_s)] \tag{2.155}$$

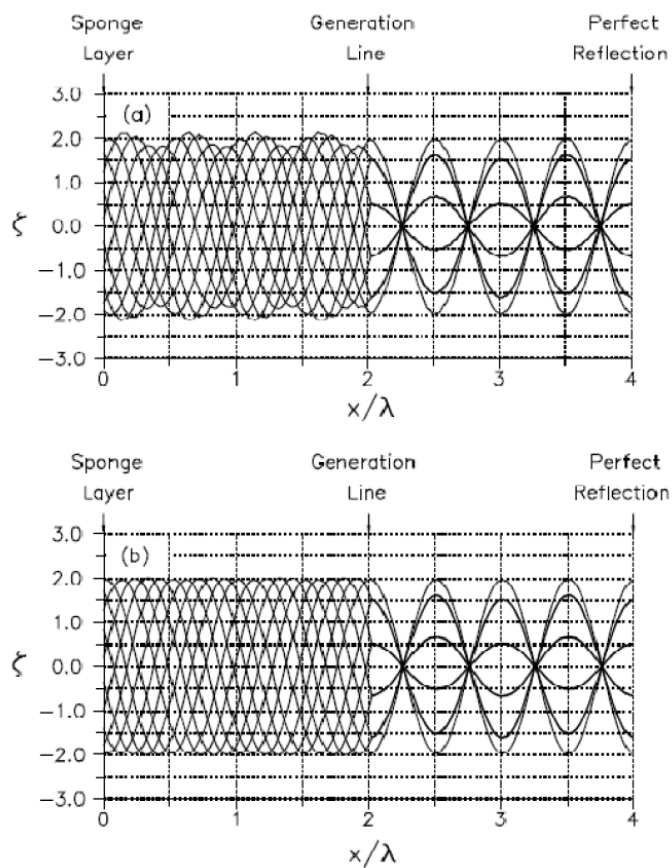
$$r_s = 10/t_s \tag{2.156}$$

όπου x_s το πλάτος της στοιβάδας απορρόφησης, t_s ο αριθμός των σημείων του κανάβου εντός της στοιβάδας και Λ παράμετρος ίση με 2.



Σχήμα 2.20: Δοκιμή αποτελεσματικότητας στοιβάδων απορρόφησης Larsen και Dancy (1983) (πηγή: [97])

Οι Yoon και Choi (2001) πρότειναν το πλάτος της στοιβάδας απορρόφησης να είναι ίσο με το μήκος κύματος, ώστε η ανάκλαση να είναι αμελητέα. Στο σχήμα 2.21 γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της τεχνικής της στοιβάδας απορρόφησης των Larsen και Dancy (1983) με αυτής των Yoon και Choi (2001). Στην περιοχή $0 < x < L/2$ φαίνεται ότι η μέθοδος των Larsen και Dancy προκαλεί μερική ανάκλαση των κυμάτων στη στοιβάδα απορρόφησης και τελικά ήπια επαναδιαμόρφωση. Αντίθετα, η μέθοδος των Yoon και Choi αποδεικνύεται πιο αποτελεσματική καθώς δίνει περίπου ομοιόμορφους κυματισμούς στην ίδια περιοχή.



Σχήμα 2.21: Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας με εφαρμογή δύο διαφορετικών τεχνικών στοιβάδων απορρόφησης πάνω: Larsen και Dancy (1983) κάτω: Yoon και Choi (2001) (πηγή: [188])

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

ΕΞΕΛΙΓΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BOUSSINESQ ΤΩΝ KARAMBAS ΚΑΙ MEMOS (2009)

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως αναφέρθηκε στο 2^ο κεφάλαιο, τα μαθηματικά μοντέλα που βασίζονται στις κλασικές εξισώσεις Boussinesq του Peregrine (1967) περιγράφουν τη διάδοση ήπια μη γραμμικών και ελαφρώς διασπειρόμενων κυματισμών. Τα κύρια μειονεκτήματά τους είναι η αδυναμία περιγραφής θραυόμενων κυματισμών και το περιορισμένο πεδίο εφαρμογής τους σε βάθη το πολύ 20% του μήκους κύματος. Πλήθος εργασιών, όπως των Madsen et al. (1991), Nwogu (1993), Wei et al. (1995), Madsen και Schäffer (1998), Karambas (1999), Zou (1999) κλπ. βελτίωσαν τα χαρακτηριστικά διασποράς των εξισώσεων επεκτείνοντας το πεδίο εφαρμογής των αντίστοιχων μοντέλων σε βαθύτερα νερά. Πιο πρόσφατες εργασίες, όπως των Madsen et al. (2002,2003,2006), Bingham και Agnon (2005) κλπ. πέτυχαν πρακτικά την άρση του περιορισμού του βάθους, περιγράφοντας τη διάδοση πλήρως διασπειρόμενων και υψηλής μη-γραμμικότητας κυματισμών.

Ωστόσο, προκύπτουν πολλά πρακτικά προβλήματα σχετικά με την εφαρμογή, την ευστάθεια και την ακρίβεια των αριθμητικών σχημάτων που προτείνονται στις εργασίες αυτές. Πολλές από αυτές τις δυσκολίες προκύπτουν από την έντονη πολυπλοκότητα των συστημάτων των μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDEs) που εμπεριέχουν σημαντικό αριθμό όρων, οι περισσότεροι των οποίων περιλαμβάνουν παραγώγους υψηλής τάξης. Έτσι, τα αριθμητικά σχήματα είναι γενικά σύνθετα και περιλαμβάνουν συστήματα με μεγάλο αριθμό διακριτών εξισώσεων.

Η παρούσα διπλωματική εργασία βασίζεται στο εξελιγμένο μοντέλο τύπου Boussinesq των Karambas και Memos (2009). Το μοντέλο αυτό περιλαμβάνει εξισώσεις παρόμοιες με αυτές των Chester (1968) και Tsutsui et al. (1998) και βασίζεται σε ένα σύστημα εξισώσεων σε δύο (2DH) ή μία (1DH) οριζόντιες διευθύνσεις. Περιγράφει τη διάδοση πλήρως διασπειρόμενων ελαφρώς μη γραμμικών σύνθετων και μονοχρωματικών κυματισμών σε οποιοδήποτε πεπερασμένο βάθος νερού. Στη δισδιάστατη μορφή του το μοντέλο περιέχει πέντε όρους σε κάθε μία από τις εξισώσεις ορμής, περιλαμβάνοντας τους όρους της εξίσωσης μακρών κυματισμών και μόνο έναν όρο διασποράς συχνότητας. Το αριθμητικό σχήμα επίλυσης που προτάθηκε από τους συγγραφείς είναι ένα απλό ρητό σχήμα πεπερασμένων διαφορών και απαιτείται ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος συνέλιξης. Συνεπώς, δεν απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος με μεγάλο πλήθος αλγεβρικών εξισώσεων όπως σε προηγούμενες εργασίες.

Το μοντέλο επεκτάθηκε από τον Chondros ώστε να συμπεριλάβει τη θραύση μονοχρωματικών (2008) και σύνθετων (2010) κυματισμών σύμφωνα με το κριτήριο θραύσης των Kennedy et al.

(2000) και από τον Koutsourelakis (2009) ώστε να προσομοιώσει τη θραύση μονοχρωματικών κυματισμών σύμφωνα με το κριτήριο του επιφανειακού κυλίνδρου και να συμπεριλάβει την τριβή πυθμένα. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να αναπροσαρμοστεί το μοντέλο ώστε να συμπεριλάβει τη θραύση με μία διαφορετική προσέγγιση που εισάγει όρους θραύσης τόσο στην εξίσωση ορμής, όσο και στην εξίσωση συνέχειας. Εκτενής αναφορά στην εισαγωγή της θραύσης γίνεται στο τέταρτο κεφάλαιο. Επίσης, προτείνεται ένα σχήμα επίλυσης πρόγνωσης-διόρθωσης (predictor-corrector) αντί του απλού ρητού σχήματος πεπερασμένων διαφορών, που βελτιώνει την ευστάθεια και ακρίβεια του μοντέλου.

Στον παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η αρχική μορφή του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) και τα αντίστοιχα αριθμητικά σχήματα επίλυσης. Επίσης, παρουσιάζεται η σύγκριση της αρχικής αυτής μορφής με αναλυτικές λύσεις της μη-γραμμικής και γραμμικής θεωρίας και με πειραματικά δεδομένα, όπως αυτή παρουσιάστηκε στη δημοσίευση του μοντέλου από τους συγγραφείς το 2009.

3.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BOUSSINESQ ΤΩΝ TSUTSUI ET AL. (1998)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η εργασία των Tsutsui, Suzuyama και Ohki (1998) καθότι είναι συναφής με το μοντέλο των Karambas και Memos (2009). Οι Tsutsui et al. (1998) παρήγαγαν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει τη διάδοση ελαφρώς μη γραμμικών κυματισμών πλήρους διασποράς σε όρους της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας και της ολοκληρωμένης ως προς το βάθος οριζόντιας ταχύτητας. Το σύστημα αυτό είναι παρόμοιο τα αντίστοιχα των γραμμικών εξισώσεων ήπιας κλίσης υπερβολικού τύπου των Copeland (1985) και Watanabe και Maruyama (1986), με τη διαφορά ότι οι όροι της ταχύτητας φάσης στις εξισώσεις ορμής αντικαταστάθηκαν από ένα ολοκλήρωμα με τον πυρήνα (kernel) του μετασχηματισμού Fourier της ταχύτητας φάσης. Με τον τρόπο αυτό το μοντέλο των Tsutsui et al. (1998) γίνεται ανεξάρτητο του κυματαριθμού και μπορεί να περιγράψει τη διάδοση σύνθετων κυματισμών σε οποιοδήποτε πεπερασμένο βάθος.

Οι συγγραφείς όρισαν (x_1^*, x_2^*) τις οριζόντιες συντεταγμένες, z^* την κατακόρυφη συντεταγμένη με αρχή αξόνων στη στάθμη ηρεμίας και θετική φορά του z^* προς τα πάνω, t^* το χρόνο, $-d^*(x_1^*, x_2^*)$ το βάθος στην τυχαία θέση (x_1^*, x_2^*) και $\zeta^*(x_1^*, x_2^*, t^*)$ την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας. Έστω (u_1^*, u_2^*, w^*) η ταχύτητα των υγρών σωματιδίων, $(\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*)$ η μέση κατά το βάθος οριζόντια ταχύτητα, p^* η πίεση του νερού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και ρ η πυκνότητα του νερού. Επίσης, ορίζονται $c_0^* = \sqrt{gd_0^*}$ και $\omega^* = \frac{2\pi}{T^*}$, όπου T^* η περίοδος του κύματος. Ως οριζόντια κλίμακα μήκους χρησιμοποιείται το χαρακτηριστικό μήκος κύματος $(k_0^*)^{-1} = \frac{c_0^*}{\omega^*}$, το χαρακτηριστικό βάθος d_0^* ως κατακόρυφη κλίμακα μήκους και $\frac{1}{\omega^*}$ ως κλίμακα χρόνου. Τέλος, χρησιμοποιείται το χαρακτηριστικό ύψος κύματος α_0^* και ορίζονται η παράμετρος μη γραμμικότητας $\varepsilon = \frac{\alpha_0^*}{d_0^*}$ και η παράμετρος διασποράς $\sigma = k_0^* d_0^* = \omega^* \sqrt{\frac{d_0^*}{g}}$. Υπό αυτούς τους ορισμούς γίνεται η αδιαστατοποίηση:

$$\left. \begin{aligned} t &= \omega^* t^*, x_i = k_0^* x_i^*, z = \frac{z^*}{d_0^*}, d = \frac{d^*}{d_0^*}, \zeta = \frac{\zeta^*}{\alpha_0^*} \\ p &= \frac{p^*}{\rho g d_0^*}, \varepsilon u_i = \frac{u_i^*}{c_0^*}, \varepsilon \bar{u}_i = \frac{\bar{u}_i^*}{c_0^*}, \varepsilon w = \frac{\sigma w^*}{c_0^*} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

με $i=1,2$. Η ολοκληρωμένη ως προς το βάθος εξίσωση συνέχειας σε καρτεσιανή ταυυστική μορφή γράφεται:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial [(d+\varepsilon \zeta) \bar{u}_i]}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2)$$

και οι ολοκληρωμένες ως προς το βάθος εξισώσεις κίνησης του Euler:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \varepsilon \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon}{d + \varepsilon \zeta} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-d}^{\varepsilon \zeta} \Delta u_i \Delta u_j dz = - \frac{\varepsilon}{d + \varepsilon \zeta} \int_{-d}^{\varepsilon \zeta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\varepsilon} \right) dz \quad (3.3)$$

$$p - p_0 = -z + \varepsilon \left(\zeta + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\varepsilon \zeta} w dz \right) + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \int_z^{\varepsilon \zeta} u_j w dz - \left(\frac{w}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

με $i,j=1,2$, p_0 η ατμοσφαιρική πίεση και:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{d + \varepsilon \zeta} \int_{-d}^{\varepsilon \zeta} u_i dz \quad \text{και} \quad \Delta u_i = u_i - \bar{u}_i \quad (3.5)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση συνέχειας κατά z προκύπτει η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας:

$$w = -\sigma^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-d}^z u_j dz \quad (3.6)$$

Η εργασία εστίασε στον υπολογισμό του όρου πίεσης στο δεξί μέλος της εξίσωσης (3.3) κάνοντας την παραδοχή ότι $\varepsilon \ll 1$ και $\sigma^2 \ll 1$. Ο όρος αυτός μπορεί να υπολογιστεί ακολουθώντας τη διαδικασία που προτείνει ο Chester (1968). Από τη γραμμική προσέγγιση με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες προκύπτουν:

$$\sigma^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

$$\varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (3.8)$$

$$\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - 1 \quad (3.9)$$

$$\text{και } \sigma^2 \frac{\partial \zeta}{\partial t} - w = 0 \text{ και } p=p_0 \text{ για } z=\varepsilon\zeta \quad (3.10)$$

$$\sigma^2 u_j \frac{\partial d}{\partial x_j} + w = 0 \quad \text{για } z=-d \quad (3.11)$$

Στις εξισώσεις (3.8) και (3.9) οι στροβιλισμοί εξαφανίζονται σε ολόκληρο το πεδίο και επομένως η ταχύτητα των μορίων του νερού μπορεί να περιγραφεί με μία βαθμωτή συνάρτηση δυναμικού, οριζόμενη σε αδιάστατη μορφή από τη σχέση $\varphi(x_1, x_2, z, t) = \frac{k_0^*}{\varepsilon c_0^*} \varphi^*(x_1^*, x_2^*, z^*, t^*)$. Λόγω της εξίσωσης συνέχειας (3.7), το δυναμικό φ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και συνεπώς μπορεί να εκφραστεί μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\Phi(k, t) = \frac{k_0^3}{\varepsilon c_0^*} \Phi^*(k^*, t^*)$ και τελικά:

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_j x_j} \cosh[\sigma k(d+z)] \Phi(k, t) dk_1 dk_2 \quad (3.12)$$

όπου $k = k^*/k_0^*$ είναι ο αδιάστατος κυματαριθμός και k_j ($j=1,2$) οι δύο συνιστώσες του κυματαριθμού k . Η οριακή συνθήκη πυθμένα εκφράζεται $w \approx 0$, όπως και στην κατάστρωση της εξίσωσης ήπιας κλίσης. Λόγω της (3.12) οι εξισώσεις (3.8) και (3.9) γράφονται:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} ik_i e^{ik_j x_j} \cosh[\sigma k(d+z)] \frac{\partial \Phi}{\partial t} dk_1 dk_2 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} ik_i e^{ik_j x_j} \cosh(\sigma kd) \frac{\partial \Phi}{\partial t} dk_1 dk_2 \quad (3.14)$$

Σημειώνεται ότι η συνάρτηση $\Phi(k, t)$ μπορεί να προσδιοριστεί από την κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας. Λόγω της (3.13), ο όρος πίεσης της εξίσωσης κίνησης (3.3) μπορεί να γραφτεί προσεγγιστικά:

$$-\frac{\varepsilon}{d + \varepsilon\zeta} \int_{-d}^{\varepsilon\zeta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\varepsilon} \right) dz \approx \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} ik_i e^{ik_j x_j} \cosh(\sigma kd) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\tanh(\sigma kd)}{\sigma kd} dk_1 dk_2 \quad (3.15)$$

Αν ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier:

$$K(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_j x_j} \frac{\tanh(\sigma kd)}{\sigma kd} dk_1 dk_2 \quad (3.16)$$

υπάρχει, συνδυάζοντας τον με την εξίσωση (3.14), ο όρος πίεσης της (3.15) καταλήγει στη συνέλιξη των συναρτήσεων $K(x_1, x_2)$ και $\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$. Τελικά, η εξίσωση κίνησης (3.3) με ακρίβεια τάξης $O(\varepsilon, \sigma^2)$ γράφεται:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \varepsilon \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} (x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, t) K(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.17)$$

Αν οι μεταβολές του ύψους κύματος εντός του πεδίου επιρροής του kernel είναι πολύ μικρές, η εξίσωση (3.17) γράφεται:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \varepsilon \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\tanh(\sigma kd)}{\sigma kd} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \quad (3.18)$$

Στην περίπτωση μονοδιάστατης ροής (ροή κατά x και ολοκληρωμένες εξισώσεις κατά z) το παραπάνω διςδιάστατο μοντέλο των (3.2) και (3.17) ή (3.18) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial[(d+\varepsilon \zeta)\bar{u}]}{\partial x_i} = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \zeta}{\partial x} (x - \xi, t) K(\xi) d\xi \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = - \frac{\tanh(\sigma kd)}{\sigma kd} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (3.21)$$

με μονοδιάστατο kernel:

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tanh(\sigma kd)}{\sigma kd} e^{ikx} dk \quad (3.22)$$

Ο όρος με το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (3.20) είναι παρόμοιας μορφής με αυτόν που παρουσίασε ο Chester (1968). Οι Tsutsui et al. (1998) υπολόγισαν τους πυρήνες (kernel) για τη μονοδιάστατη και τη διςδιάστατη περίπτωση (σε διαστατική μορφή):

$$K(x) = \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tanh(kd)}{kd} e^{ikx} dk = -\frac{g}{\pi d} \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi|x|}{4d} \right) \right] \quad (3.23)$$

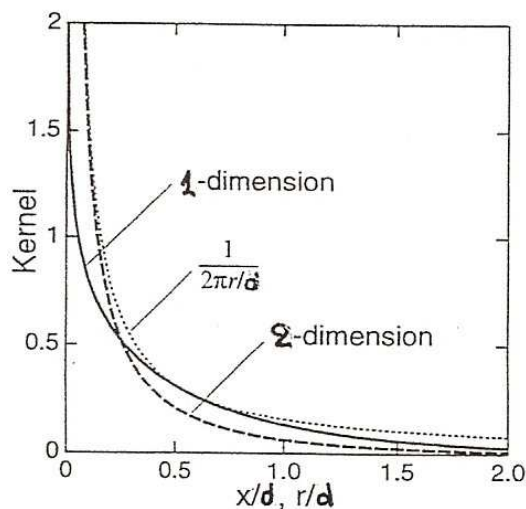
$$K(x_1, x_2) = \frac{g}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_j x_j} \frac{\tanh(\sigma k d)}{\sigma k d} dk_1 dk_2 = \frac{g}{2\pi d^2} \left\{ \frac{1}{r/d} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2 + \frac{(r/d)^2}{4}}} \right\} \quad (3.24)$$

όπου το r προκύπτει από τη χρήση πολικών συντεταγμένων για τον υπολογισμό του kernel και ορίζεται από τη σχέση $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Το μονοδιάστατο kernel της (3.23) έχει τις ιδιότητες:

$$K(x) = \begin{cases} -\frac{g}{\pi d} \ln\left(\frac{\pi}{4} \left|\frac{x}{d}\right|\right) & \text{για } \left|\frac{x}{d}\right| \rightarrow 0 \\ \frac{2g}{\pi d} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \left|\frac{x}{d}\right|\right) & \text{για } \left|\frac{x}{d}\right| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.25)$$

Στο σχήμα 3.1 αναπαρίστανται γραφικά τα kernel $\frac{d}{g}K(x)$ και $\frac{d^2}{g}K(x_1, x_2)$. Η γραμμή με τις τελείες αναπαριστά τη δισδιάστατη συνάρτηση δυναμικού $\frac{d}{2\pi r}$. Όπως προκύπτει και από τη σχέση (3.25) το $K(x)$ συμπεριφέρεται ως λογαριθμικό δυναμικό κοντά στο μηδέν και μειώνεται εκθετικά ώστε $K(x) \approx 0$ στην περιοχή $\left|\frac{x}{d}\right| > 4$. Επίσης, οι τιμές του δισδιάστατου kernel $\frac{d^2}{g}K(x_1, x_2)$ είναι μικρότερες στην περιοχή $\left|\frac{r}{d}\right| > \frac{1}{4}$ από τις αντίστοιχες του μονοδιάστατου $\frac{d}{g}K(x)$. Για το λόγο αυτό, οι Tsutsui et al. (1998) αναφέρουν ότι το πεδίο επιρροής του μονοδιάστατου και του δισδιάστατου kernel περιορίζονται στις περιοχές $\left|\frac{x}{d}\right| < 4$ και $\left|\frac{r}{d}\right| < 4$ αντίστοιχα.



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση του μονοδιάστατου και του δισδιάστατου kernel (πηγή: [173])

3.3 ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ BOUSSINESQ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ MEMOS (2009)

Στην παράγραφο αυτή εξάγονται οι εξισώσεις τύπου Boussinesq των Karambas και Memos (2009) που είναι κατάλληλες για ελαφρώς μη-γραμμικούς σύνθετους ή απλούς κυματισμούς πλήρους διασποράς που διαδίδονται σε νερό σταθερού βάθους ή ήπια μεταβαλλόμενη βυθομετρία. Γίνεται η υπόθεση του ασυμπίεστου ρευστού αμελητέου ιξώδους, συνεπώς εφαρμόζονται οι συνήθεις εξισώσεις Navier-Stokes.

3.3.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (1DH)

Η εξίσωση συνέχειας, οι εξισώσεις ορμής, η κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας και η οριακή συνθήκη αδιαπέρατου πυθμένα για μεταβαλλόμενη βυθομετρία γράφονται:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \quad (3.26a)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'} \quad (3.26b)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t'} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z'} - g \quad (3.26c)$$

$$w' = \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} \quad \text{για } z' = \zeta'(x', t') \quad (3.26d)$$

$$w' = -u' \frac{\partial d'}{\partial x'} \quad \text{για } z' = -d' \quad (3.26e)$$

όπου u' και w' η οριζόντια και η κατακόρυφη ταχύτητα των υγρών σωματιδίων, ζ' η διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, x' και z' η οριζόντια και κατακόρυφη συντεταγμένη αντίστοιχα (με την αρχή των αξόνων στη στάθμη ηρεμίας και θετική φορά του z' προς τα πάνω), p' η πίεση, ρ η πυκνότητα του νερού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, d' το βάθος του νερού και t' ο χρόνος. Ο τόνος υποδηλώνει μεταβλητές με διαστάσεις.

Γίνεται η επιπλέον παραδοχή της αστρόβιλης ροής, συνεπώς υπάρχει συνάρτηση δυναμικού της ταχύτητας $F'(x', z', t')$ που περιγράφει τη ροή. Εξ ορισμού ισχύουν οι σχέσεις:

$$u' = \frac{\partial F'}{\partial x'} \quad \text{και} \quad w' = \frac{\partial F'}{\partial z'} \quad (3.27)$$

Στη συνέχεια οι ανεξάρτητες μεταβλητές αδιαστατοποιούνται σύμφωνα με τις εργασίες των Veeramony και Svendsen (2000) και Karambas και Koutitas (2002):

$$x = \frac{x'}{L'}, \quad z = \frac{z'}{d'_0}, \quad t = \frac{\sqrt{gd'_0}}{L'} t' \quad (3.28)$$

όπου L' και d'_0 συμβολίζουν ένα χαρακτηριστικό μήκος κύματος και ένα χαρακτηριστικό βάθος αναφοράς αντίστοιχα. Οι εξαρτημένες μεταβλητές αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$d = \frac{d'}{d'_0}, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{H'}, \quad u = \frac{u'}{\varepsilon \sqrt{gd'_0}}, \quad w = \frac{\sigma w'}{\varepsilon \sqrt{gd'_0}} \quad \text{και} \quad F = \frac{F'}{\varepsilon L' \sqrt{gd'_0}} \quad (3.29)$$

όπου H' ένα χαρακτηριστικό ύψος κύματος, $\varepsilon = \frac{H'}{d'_0}$ η παράμετρος μη-γραμμικότητας (nonlinearity parameter) και $\sigma^2 = \left(\frac{d'_0}{L'}\right)^2$ η παράμετρος διασποράς (dispersion parameter). Σημειώνεται ότι η συνάρτηση F είναι συνάρτηση δυναμικού στον αδιάστατο χώρο, καθότι $u = \frac{\partial F}{\partial x}$ και $w = \frac{\partial F}{\partial z}$.

Η εξίσωση συνέχειας (3.26α) και οι οριακές συνθήκες (3.26d) και (3.26e) γράφονται σε αδιάστατη μορφή:

$$\sigma^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.30\alpha)$$

$$w = \sigma^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \quad \text{για } z = \varepsilon \zeta(x, t) \quad (3.30\beta)$$

$$w = -\sigma^2 u \frac{\partial d}{\partial x} \quad \text{για } z = -d \quad (3.30\gamma)$$

Ολοκληρώνοντας την (3.30α) κατά βάθος και χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες (3.30β) και (3.30γ) προκύπτει η εξίσωση συνέχειας σε αδιάστατη μορφή:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial [(d + \varepsilon \zeta)U]}{\partial x} = 0 \quad (3.31)$$

όπου $U = \frac{1}{d + \varepsilon \zeta} \int_{-d}^{\varepsilon \zeta} u dz$ η αδιάστατη μέση κατά βάθος οριζόντια ταχύτητα.

Η σχέση (3.31) είναι ακριβής σε οποιοδήποτε βάθος, χωρίς περιορισμούς στη μη-γραμμικότητα. Ολοκληρώνοντας κατά βάθος τις εξισώσεις οριζόντιας (3.26β) και κατακόρυφης (3.26γ) ορμής και χρησιμοποιώντας τις (3.30α), (3.30β) και (3.30γ) προκύπτουν:

$$\frac{\partial [U(d + \varepsilon \zeta)]}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\varepsilon \zeta} u^2 dz = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\varepsilon \zeta} \left(\frac{p}{\varepsilon} \right) dz + \frac{p}{\varepsilon} \Big|_{z=-d} \frac{\partial d}{\partial x} \quad (3.32)$$

$$p(x, z, t) = (\varepsilon \zeta - z) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\varepsilon \zeta} w dz - \varepsilon^2 \frac{w^2}{\sigma^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\varepsilon \zeta} u w dz \quad (3.33)$$

όπου $p = p' / \rho g d_0'$ η αδιαστατοποιημένη πίεση.

Αντικαθιστώντας την (3.33) στην (3.32) και λόγω της εξίσωσης συνέχειας, προκύπτει η ολοκληρωμένη κατά βάθος εξίσωση ορμής κατά x , παρόμοια με αυτή των Veeramony και Svendsen (2000) και Karambas και Koutitas (2002):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \sigma^2 \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_z^0 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^z u dz dz \right) dz + O(\varepsilon \sigma^2, \varepsilon^2, \dots) \quad (3.34)$$

όπου έχουν διατηρηθεί μόνο όροι της τάξης $O(1, \varepsilon, \sigma^2)$. Για αυτό το επίπεδο προσέγγισης είναι δυνατόν να γίνει η παραδοχή ότι $\varepsilon \zeta \approx 0$ στα όρια των ολοκληρωμάτων που πολλαπλασιάζονται με σ^2 .

Επειδή θα διατηρηθούν μόνο όροι πρώτης τάξης ως προς την παράμετρο μη-γραμμικότητας ε , το μοντέλο πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ελαφρώς μη-γραμμικό και επομένως δε δικαιολογείται η πλήρης ανάλυση των μη-γραμμικών όρων. Επομένως, τα μη-γραμμικά χαρακτηριστικά του μοντέλου δε θα αποδίδονται πολύ ικανοποιητικά στα βαθύτερα νερά όπου $\varepsilon \sigma^2 \sim \varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση δυναμικού F , η αδιάστατη εξίσωση συνέχειας (3.30α) παίρνει τη μορφή:

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \quad (3.35)$$

Από τους διάφορους ορισμούς του μετασχηματισμού Fourier και του αντίστροφού του, επιλέγεται το εξής ζεύγος:

$$\Phi\{f\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx = \hat{f} \quad (3.36)$$

$$\Phi^{-1}\{\hat{f}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk = f \quad (3.37)$$

όπου k ο αδιάστατος κυμαριθμός $k = k'/k_0$ με k' ο κυμαριθμός και $k_0 = 2\pi/L'$.

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier στην ισοδύναμη μορφή (3.35) της εξίσωσης Laplace, προκύπτει η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (Radder (1992), Kervella et al. (2007)):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \sigma^2 k^2 \Phi = 0 \quad (3.38)$$

όπου $\Phi(k, z, t) = \Phi\{F(x, z, t), x \rightarrow k\}$. Μία γενική λύση της (3.38) είναι:

$$\Phi = A \cosh[\sigma k(d+z)] + B \sinh[\sigma k(d+z)] \quad (3.39)$$

με A,B συναρτήσεις των k και t.

Θεωρώντας σταθερό βάθος και χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη πυθμένα (3.30c) εκφρασμένη ως $w = \frac{\partial \Phi^{-1}\{\Phi\}}{\partial z} = 0$ για $z=-d$, προκύπτει η λύση:

$$\Phi(k, z, t) = f \cosh[\sigma k(d + z)] \quad (3.40)$$

όπου f είναι συνάρτηση μόνο των k και t. Επομένως, η αδιάστατη συνάρτηση δυναμικού F εκφράζεται ως ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης f(k,t):

$$F(x, z, t) = \Phi^{-1}\{\Phi(k, z, t), k \rightarrow x\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \cosh[\sigma k(d + z)] f(k, t) dk \quad (3.41)$$

Συνεπώς ισχύουν:

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ike^{ikx} \cosh[\sigma k(d + z)] f(k, t) dk \quad (3.42)$$

$$w = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma ke^{ikx} \sinh[\sigma k(d + z)] f(k, t) dk \quad (3.43)$$

Λόγω της (3.42) ο όρος με τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (3.34) γράφεται:

$$\begin{aligned} D &= \sigma^2 \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_z^0 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^z \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ike^{ikx} \cosh[\sigma k(d + z)] f(k, t) dk dz dz \right\} dz \\ &= -\sigma \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_z^0 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{ikx} \sinh[\sigma k(d + z)] f(k, t) dk \right\} dz \right\} dz \\ &= -\frac{1}{d} \int_{-d}^0 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \{ \cosh(\sigma kd) - \cosh[\sigma k(d + z)] \} f(k, t) dk \right\} \right\} dz \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ike^{ikx} \cosh(\sigma kd) \left[1 - \frac{\tanh(\sigma kd)}{\sigma kd} \right] \frac{\partial f(k, t)}{\partial t} dk \quad (3.44) \end{aligned}$$

Η (3.26b) σε αδιάστατη μορφή γράφεται:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\sigma^2} w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.45)$$

οπότε χρησιμοποιώντας την (3.42) προκύπτει:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ike^{ikx} \cosh[\sigma k(d+z)] \frac{\partial f(k,t)}{\partial t} dk + O(\varepsilon^2, \dots) \quad (3.46)$$

Συνδυάζοντας την (3.46) και την (3.33) και για την ακρίβεια που θεωρήθηκε παραπάνω, προκύπτει η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ike^{ikx} \cosh(\sigma kd) \frac{\partial f(k,t)}{\partial t} dk \quad (3.47)$$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{\tanh(\sigma kd)}{\sigma kd}$ είναι άρτια ισχύει:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} \frac{\tanh(\sigma kd)}{\sigma kd} dk &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ij\xi} \frac{\tanh(\sigma jd)}{\sigma jd} dj \\ &= -\frac{2}{\sigma d} \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi |\xi|}{4\sigma d} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

και επιπλέον μπορεί να δειχθεί ότι:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi |\xi|}{4\sigma d} \right) \right] d\xi \\ = -\sigma \pi d \end{aligned} \quad (3.49)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιείται η ταυτότητα συνέλιξης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)G(\xi)e^{i\xi t} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du \quad (3.50)$$

με $\Phi\{f\} = F(\xi)$ και $\Phi\{g\} = G(\xi)$. Οπότε, λόγω των εξισώσεων (3.47), (3.48) και (3.49), η εξίσωση (3.44) γράφεται:

$$D = \frac{1}{\sigma \pi d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(x-\xi, t) - \zeta(x, t)] \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi |\xi|}{4\sigma d} \right) \right] d\xi \quad (3.51)$$

Όπως αναφέρουν και οι Chester (1968) και Tsutsui et al. (1998), αν γίνει η προσέγγιση μακρών κυματισμών η (3.51) μπορεί να γραφτεί:

$$D = -\sigma^2 \frac{1}{3} d^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \quad (3.52)$$

και έτσι η (3.34) παίρνει τη μορφή των κλασικών εξισώσεων Boussinesq. Ξαναγράφοντας την (3.34) σε διαστατική μορφή λόγω της (3.51) προκύπτει:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{g}{\pi d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(x - \xi, t) - \zeta(x, t)] \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi |\xi|}{4d} \right) \right] d\xi \quad (3.53)$$

Η εξίσωση (3.53) είναι η εξίσωση ορμής κατά x τύπου Boussinesq και δεν προϋποθέτει περιορισμένη διασπορά. Το δεξί μέλος είναι τάξης $O(\sigma^2)$ και περιγράφει τα μη υδροστατικά χαρακτηριστικά της πίεσης. Η εξίσωση αυτή παρήχθη και από τον Chester (1968) ακολουθώντας μια διαφορετική διαδικασία.

Όπως παρουσιάστηκε στην παράγραφο 3.2 οι Tsutsui et al. (1998) κατέληξαν στην αδιάστατη εξίσωση (3.20), η οποία σε διαστατική μορφή γράφεται:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \zeta}{\partial x} (x - \xi, t) K(\xi) d\xi \quad (3.54)$$

με τον πυρήνα (kernel) να δίνεται από τη σχέση:

$$K(\xi) = - \frac{g}{\pi d} \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi |\xi|}{4d} \right) \right] \quad (3.55)$$

Η εξίσωση (3.54) είναι ισοδύναμη με την (3.53). Ωστόσο, προτείνεται η χρήση της (3.53) διότι διευκολύνει την αριθμητική λύση του μοντέλου. Όπως αναφέρουν οι Karambas και Memos (2009), εφαρμογές της (3.54) με το απλό ρητό σχήμα επίλυσης που προτείνεται παρακάτω είχαν ως αποτέλεσμα μη σταθερές μορφές της ελεύθερης επιφάνειας ζ και της ταχύτητας U , στην περίπτωση ενός γραμμικού περιοδικού κύματος που διαδίδεται σε σταθερό βάθος.

Η εξίσωση συνέχειας σε διαστατική μορφή γράφεται:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial [(d+\zeta)U]}{\partial x} = 0 \quad (3.56)$$

Οι εξισώσεις (3.53) και (3.56) αποτελούν το σύστημα του μονοδιάστατου μοντέλου. Όπως παρατηρείται το μοντέλο είναι ανεξάρτητο κυματαριθμού. Οι μόνες υποθέσεις που έγιναν κατά την ανάπτυξη είναι η θεώρηση ροής που περιγράφεται από συνάρτηση δυναμικού, σταθερού βάθους και ήπιας μη-γραμμικότητας κυματισμών. Είναι προφανές ότι η παραπάνω ανάλυση βρίσκεται σε συμφωνία με τη γραμμική θεωρία Stokes και περιγράφει ακριβώς τη διάδοση γραμμικών περιοδικών κυμάτων σε σταθερό βάθος. Έτσι, όσον αφορά στη γραμμική σχέση διασποράς, η παραπάνω ανάλυση είναι ακριβής και επομένως δεν τίθεται κανένας περιορισμός βάθους. Βέβαια, όπως αναφέρθηκε, τα μη-γραμμικά χαρακτηριστικά δεν αποδίδονται επακριβώς στα βαθιά νερά.

3.3.2 ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (2DH)

Για τη δισδιάστατη διάδοση κυματισμών μπορεί να ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία με τη μονοδιάστατη ανάπτυξη της προηγούμενης παραγράφου. Ωστόσο, για λόγους απλότητας, οι Karambas και Memos (2009) προτείνουν για δύο οριζόντιες διαστάσεις την ανάλυση των Tsutsui et al. (1998). Έτσι, οι δύο εξισώσεις ορμής γράφονται σε διαστατική μορφή:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \zeta}{\partial x} (x - \xi_1, y - \xi_2, t) K(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \zeta}{\partial y} (x - \xi_1, y - \xi_2, t) K(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.58)$$

όπου V η μέση κατά βάθος οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση y .

Όπως αναπτύχθηκε στην παράγραφο 3.2, το kernel σε αδιάστατη μορφή δίνεται από τη σχέση (3.16) ή ισοδύναμα στη διαστατική μορφή των εξισώσεων ορμής:

$$K(x, y) = \frac{g}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \frac{\tanh(kd)}{kd} dk_x dk_y \quad (3.59)$$

όπου $\vec{k} = (k_x, k_y)$ ο κυμαριθμός και $k = |\vec{k}|$. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= k \cos \varphi, \quad k_y = k \sin \varphi, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 \\ x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

η (3.59) γράφεται:

$$K(r, \theta) = \frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(kd)}{d} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr \cos(\varphi - \theta)} d\varphi dk \quad (3.61)$$

Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα Bessel μηδενικής τάξης:

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos x} dx \quad (3.62)$$

και αναπτύσσοντας σε σειρά Fourier:

$$\tanh(kd) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2nkd} \quad , kd > 0 \quad (3.63)$$

η (3.61) γράφεται:

$$K(r) = \frac{g}{2\pi d} \int_0^{+\infty} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2nkd} \right] J_0(kr) dk \quad (3.64)$$

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω ιδιότητες της συνάρτησης Bessel:

$$\int_0^{+\infty} J_0(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \quad \mu\epsilon \alpha > 0 \quad (3.65)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}} \quad \mu\epsilon \operatorname{Re}(\alpha \pm bi) > 0 \quad (3.66)$$

προκύπτει τελικά το kernel:

$$K(x, y) = \frac{g}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \frac{\tanh(\sigma kd)}{\sigma kd} dk_x dk_y = \frac{g}{2\pi d^2} \left[\frac{1}{r/d} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2 + \frac{(r/d)^2}{4}}} \right] \quad (3.67)$$

Με τη βοήθεια κάποιου μαθηματικού λογισμικού υπολογίζεται:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g}{2\pi d^2} \left[\frac{1}{r/d} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2 + \frac{(r/d)^2}{4}}} \right] dx dy = g \quad (3.68)$$

Οπότε προσθέτοντας $g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ και στα δύο μέλη της (3.57) και $g \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ και στα δύο μέλη της (3.58), προκύπτουν:

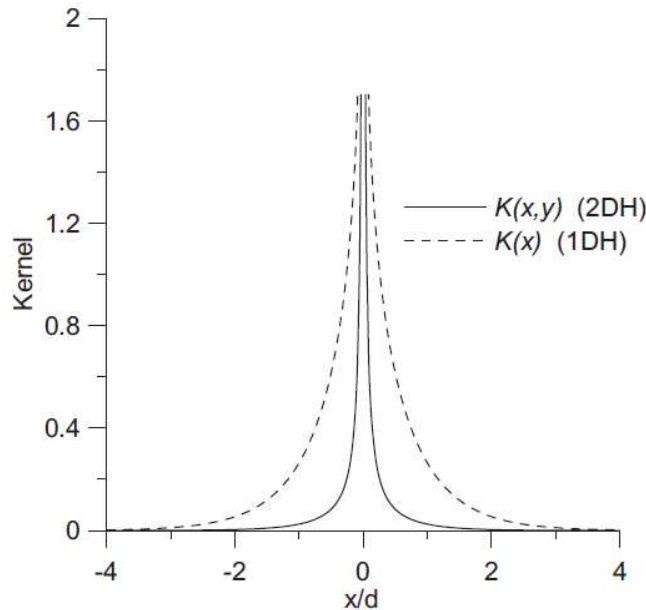
$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} (x - \xi_1, y - \xi_2, t) - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] K(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial y} (x - \xi_1, y - \xi_2, t) - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] K(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.70)$$

Η εξίσωση συνέχειας γράφεται:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial[(d + \zeta)U]}{\partial x} + \frac{\partial[(d + \zeta)V]}{\partial y} = 0 \quad (3.71)$$

Οι (3.69), (3.70) και (3.71) αποτελούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων του μοντέλου Karambas και Memos (2009) για τη δισδιάστατη διάδοση κυματισμών. Ο πυρήνας (kernel) δόθηκε γραφικά και από τους Karambas και Memos (2009) όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση του μονοδιάστατου και του δισδιάστατου kernel (πηγή: [85])

3.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ

Στην παράγραφο αυτή διερευνώνται οι εξισώσεις συνέχειας (3.56) και ορμής (3.53) όσον αφορά στην ποσοτικοποίηση των χαρακτηριστικών μη γραμμικότητας και διασποράς των κυματισμών του μονοδιάστατου μοντέλου των Karambas και Memos (2009).

Γίνεται η υπόθεση του οριζόντιου πυθμένα και της ήπιας μη γραμμικότητας των κυματισμών $\varepsilon \ll 1$. Εφαρμόζοντας ανάλυση Fourier τύπου Stokes, αναζητούνται λύσεις πρώτης και δεύτερης τάξης της μορφής (μεταβλητές με διαστάσεις):

$$\zeta = \alpha_1 \cos\theta + \varepsilon \alpha_2 \cos 2\theta \quad \text{και} \quad U = U_1 \cos\theta + \varepsilon U_2 \cos 2\theta \quad (3.72)$$

όπου $\theta = kx - \omega t$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ και T η περίοδος του κύματος.

Αντικαθιστώντας την (3.72) στις εξισώσεις (3.53) και (3.56) και για ανάλυση τάξης $O(\varepsilon^0)$ προκύπτει:

$$U_1 = \frac{\omega \alpha_1}{kd} \quad (3.73)$$

και λόγω των (3.48) και (3.49) προκύπτει η σχέση διασποράς:

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (3.74)$$

η οποία είναι η ακριβής γραμμική σχέση διασποράς του Stokes.

Προχωρώντας σε ανάλυση δεύτερης τάξης, εισάγεται πάλι η (3.72) στις (3.53) και (3.56) και διαχωρίζονται όροι τάξης $O(\varepsilon)$. Έτσι, προκύπτει η λύση δεύτερης τάξης:

$$\alpha_2 = \left(\frac{\alpha_1^2}{d}\right) \frac{3 \tanh(kd)}{4 \tanh(kd) - 2 \tanh(2kd)} \quad (3.75)$$

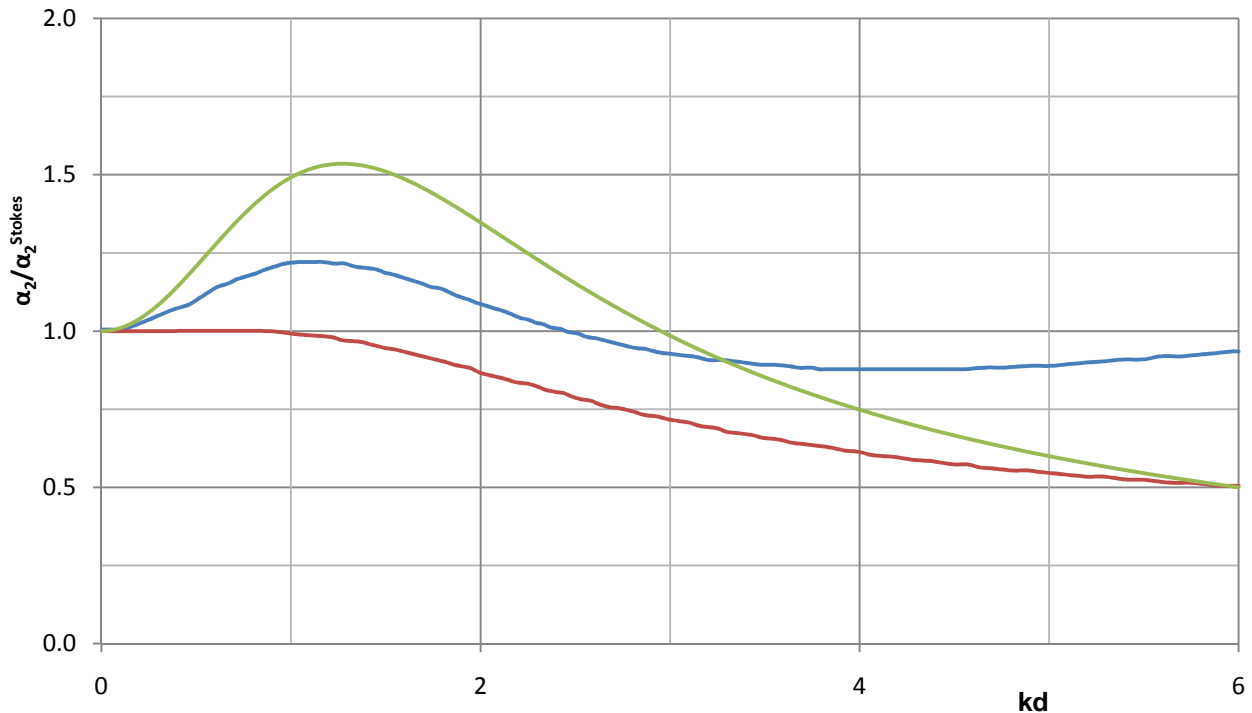
Στον πίνακα 3.1 φαίνεται η σύγκριση της σχέσης αυτής με την αντίστοιχη της θεωρίας Stokes που εξήχθη από διάφορους ερευνητές, όπως οι Skjelbreia και Hendrickson (1960) και προτείνεται ως σχέση αναφοράς και από τους Madsen και Schäffer (1998):

$$\alpha_2^{\text{Stokes}} = \left(\frac{\alpha_1^2}{d}\right) \frac{1}{4} kd \coth(kd) [3 \coth^2(kd) - 1] \quad (3.76)$$

kd	0.1	0.5	1	2	3	4	5
$\alpha_2/\alpha_2^{\text{Stokes}}$	1.01	1.207	1.492	1.347	0.985	0.748	0.599

Πίνακας 3.1: Λόγος των δεύτερων αρμονικών για διάφορες τιμές του kd (πηγή: [85])

Σημειώνεται ότι η απόκλιση της δεύτερης αρμονικής του παρόντος μοντέλου από την αναλυτική σχέση (3.76) οφείλεται στην υπόθεση των ελαφρώς μη-γραμμικών κυματισμών. Παρόμοια συμπεριφορά εμφανίζουν και άλλα ελαφρώς μη-γραμμικά μοντέλα τύπου Boussinesq. Στο σχήμα (3.3) φαίνεται συγκριτικά ο λόγος $\alpha_2/\alpha_2^{\text{Stokes}}$ συναρτήσει της αδιάστατης ποσότητας kd όπως υπολογίζεται από το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) και από τις διάφορες μορφές (διαφορετική τάξη ακρίβειας) του μοντέλου των Madsen και Schäffer (1998). Τέλος, όπως αναμενόταν, συγκρίνοντας τα σχήματα (2.12) και (3.3) φαίνεται ότι το πλήρως μη-γραμμικό μοντέλο των Madsen et al. (2003) αποδίδει καλύτερα τις υψηλές αρμονικές.

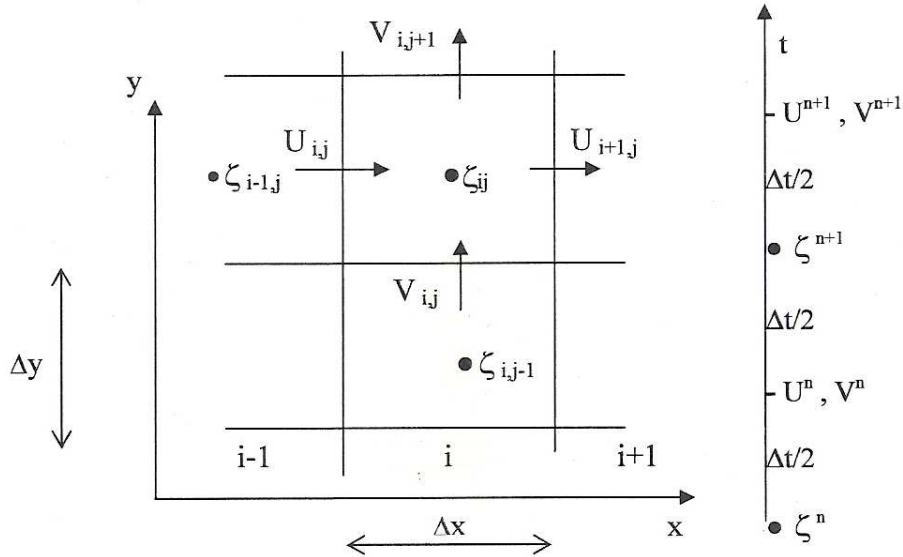


Σχήμα 3.3: Ο λόγος των δεύτερων αρμονικών $\alpha_2/\alpha_2^{\text{Stokes}}$. Πράσινο: Karambas-Memos $O(\sigma^2, \epsilon)$ (2009)
 Μπλε: Madsen-Schäffer $O(\sigma^2, \epsilon)$ (1998) Κόκκινο: Madsen-Schäffer $O(\sigma^4, \epsilon\sigma^4)$ (1998)
 (πηγές: [85],[151])

3.5 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

3.5.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Για την αριθμητική επίλυση του συστήματος των (3.69), (3.70) και (3.71) οι Karambas και Memos (2009) πρότειναν τη χρήση ενός απλού και ευρέως χρησιμοποιούμενου ρητού σχήματος πεπερασμένων διαφορών $2^{\text{ης}}$ τάξης. Το σχήμα χρησιμοποιεί κεντρικές διαφορές ως προς το χώρο (εκτός από τις οπίσθιες διαφορές στους όρους πίεσης της εξίσωσης ορμής) και εμπρόσθιες διαφορές ως προς το χρόνο (forward in time, centered in space ή (τροποποιημένο) FTCS) στον έκκεντρο κানাβο που απεικονίζεται στο σχήμα 3.4. Το αριθμητικό σχήμα διασφαλίζει σε ικανοποιητικό βαθμό τη διατήρηση μάζας και ενέργειας για μη θραυόμενους κυματισμούς. Η διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας εφαρμόζεται στο κέντρο των κελιών που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση (level points), ενώ οι εξισώσεις ορμής στις πλευρές των κελιών, δηλαδή στα σημεία ροής (flux points).



Σχήμα 3.4: Ο εκκεντρός κάναβος του αριθμητικού σχήματος (πηγή: [85])

Για δύο οριζόντιες διαστάσεις, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (3.69), (3.70) και (3.71) διακριτοποιείται βάσει του ρητού σχήματος πεπερασμένων διαφορών που αναφέρθηκε (Koutitas, 1985) ως εξής:

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{[u(\overline{d+\zeta})]_{i+1,j}^n - [u(\overline{d+\zeta})]_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{[v(\overline{d+\zeta})]_{i,j+1}^n - [v(\overline{d+\zeta})]_{i,j}^n}{\Delta y} = 0 \quad (3.77)$$

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \bar{V}_{i,j}^n \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + g \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} = I_i^{n+1} \quad (3.78)$$

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + \bar{U}_{i,j}^n \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + V_{i,j}^n \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + g \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = I_j^{n+1} \quad (3.79)$$

όπου I_i και I_j είναι οι όροι των ολοκληρωμάτων συνέλιξης, Δt και $\Delta x, \Delta y$ είναι το χρονικό και τα χωρικά βήματα διακριτοποίησης των εξισώσεων. Η παύλα δηλώνει μέση τιμή ως προς το χώρο. Σύμφωνα με το σχήμα (3.4):

$$(\overline{d+\zeta})_{i+1,j}^n = \frac{[(d+\zeta)_{i+1,j}^n + (d+\zeta)_{i,j}^n]}{2} \quad (3.80)$$

$$[U(\overline{d+\zeta})]_{i,j}^n = U_{i,j} \frac{[(d+\zeta)_{i,j}^n + (d+\zeta)_{i-1,j}^n]}{2} \quad (3.81)$$

$$(\overline{d+\zeta})_{i,j+1}^n = \frac{[(d+\zeta)_{i,j}^n + (d+\zeta)_{i,j+1}^n]}{2} \quad (3.82)$$

$$[V(\overline{d+\zeta})]_{i,j}^n = V_{i,j} \frac{[(d+\zeta)_{i,j}^n + (d+\zeta)_{i,j-1}^n]}{2} \quad (3.83)$$

$$\bar{U}_{i,j}^n = \frac{U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n + U_{i,j-1}^n + U_{i+1,j-1}^n}{4} \quad (3.84)$$

$$\bar{V}_{i,j}^n = \frac{V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n + V_{i-1,j}^n + V_{i-1,j+1}^n}{4} \quad (3.85)$$

Τα συνελικτικά ολοκληρώματα των εξίσωσεων (3.69) και (3.70) υπολογίζονται αριθμητικά. Αριθμητικά πειράματα έδειξαν ότι είναι μεγάλης σημασίας για αυτούς τους υπολογισμούς η χρήση μεθόδων ακρίβειας υψηλότερης τάξης, όπως ο σύνθετος τύπος του Simpson ή η μέθοδος Newton 3/8. Επειδή τα kernel των ολοκληρωμάτων εμπλέκουν συναρτήσεις παλμού που υφίστανται εκθετική απόσβεση, τα όρια των ολοκληρωμάτων τίθενται $\pm 4d$ αντί για $\pm \infty$. Η παρατήρηση αυτή προκύπτει και από τα σχήματα 3.1 και 3.2, όπου φαίνεται η απόσβεση των kernel και σχολιάστηκε στην παράγραφο 3.2 σύμφωνα με τις εργασίες των Tsutsui et al. (1998) και του Schäffer (2004b).

Οι όροι του αθροίσματος της εξίσωσης (3.67) είναι εναλλασσόμενου πρόσημου και συνεπώς η σύγκλιση είναι αργή. Για να επιταχυνθεί ο ρυθμός σύγκλισης, η σειρά στην εξίσωση (3.67) υπολογίζεται με τη χρήση του μετασχηματισμού Euler του van Wijngaarden (Press et al., 1986). Με τον τρόπο αυτό δεν απαιτούνται περισσότεροι από 25 όροι αθροίσματος. Η διαδικασία αυτή για τον αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων συνέλιξης αυξάνει σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο του μοντέλου.

Τέλος, επειδή στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία μελετήθηκε το μονοδιάστατο μοντέλο των Karambas και Memos (2009), αναφέρεται η διακριτοποίηση σύμφωνα με το απλό ρητό σχήμα που παρουσιάστηκε παραπάνω:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} + \frac{[u(\bar{a} + \bar{\zeta})]_{i+1}^n - [u(\bar{a} + \bar{\zeta})]_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.86)$$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + U_i^n \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + g \frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = I^{n+1} \quad (3.87)$$

όπου I ο όρος του ολοκληρώματος συνέλιξης της μονοδιάστατης περίπτωσης.

3.5.2 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Στην παράγραφο 2.5.4 έγινε εκτενής αναφορά στις οριακές συνθήκες των μοντέλων Boussinesq. Συγκεκριμένα, αναφέρθηκαν οι διάφορες τεχνικές για τα όρια γένεσης κυματισμών και τα απορροφητικά όρια ή όρια ακτινοβολίας.

Στην αρχική μορφή του παρόντος μοντέλου, όπως δημοσιεύτηκε από τους Karambas και Memos (2009), οι κυματισμοί παράγονταν εντός του υπολογιστικού πεδίου προσθέτοντας απλώς μία γραμμική πηγή (σημειακή πηγή στη μονοδιάστατη περίπτωση) στην εξίσωση συνέχειας σύμφωνα με τις τεχνικές των Larsen και Dancy (1983) ή των Lee και Suh (1998). Οι τεχνικές αυτές παρουσιάστηκαν εκτενώς στην παράγραφο 2.5.4.1. Ωστόσο, κατά την επέκταση του μοντέλου για την εισαγωγή της θραύσης κυματισμών από τους Chondros (2008,2010) και Koutsourelakis (2009) χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της συνάρτησης πηγής που επίσης περιγράφηκε στην παράγραφο 2.5.4.1. Η τεχνική αυτή υιοθετείται και στην παρούσα εργασία.

Οι Gobbi και Kirby (1999) και οι Wei et al. (1999) κατέληξαν στις γενικές σχέσεις (2.139), (2.140) και (2.141) για τη συνάρτηση πηγής. Ωστόσο, οι σχέσεις αυτές έχουν εξαχθεί βασιζόμενες σε μοντέλα Boussinesq μορφής παρόμοιας με αυτή του Nwogu (1993) που διαφέρουν αρκετά από το μοντέλο πλήρους διασποράς των Karambas και Memos (2009). Έτσι, κατά την επέκταση του μοντέλου για τη συμπερίληψη της θραύσης από τους Chondros (2008,2010) και Koutsourelakis (2009) χρησιμοποιήθηκε ως μέτρο της συνάρτησης πηγής η απλή σχέση $D_s = 0.039 \frac{H}{2}$ για μονοχρωματικούς κυματισμούς, όπου H το ύψος κύματος. Για σύνθετους κυματισμούς η ψηφιοποιημένη χρονοσειρά εισαγωγής πολλαπλασιάζεται πάλι με την τιμή $0.039 \exp[-\beta_s(x - x_s)^2]$, όπου το β_s δίνεται από τη σχέση (2.144) με μήκος κύματος αυτό που αντιστοιχεί στην περίοδο αιχμής. Η μέθοδος αυτή υιοθετήθηκε και στην παρούσα διπλωματική, με τη διαφορά ότι ο συντελεστής στο μέτρο της συνάρτησης πηγής δε θεωρήθηκε σε όλες τις πειραματικές διατάξεις ίσος με 0.039 καθώς, όπως προκύπτει και από τη θεωρία της παραγράφου 2.5.4.1, εξαρτάται από την περίοδο των κυματισμών, το βάθος του νερού και την παράμετρο β_s . Πρακτικά η διαδικασία που ακολουθήθηκε περιλάμβανε βαθμονόμηση του συντελεστή ώστε να παραχθεί η επιθυμητή χρονοσειρά στη θέση της πηγής για κάθε πειραματική διάταξη επαλήθευσης του μοντέλου. Έτσι, η τιμή του κυμαίνεται από 0.039 ως 0.075 (στις διατάξεις που ελέγχθηκαν). Η παράμετρος δ παίρνει τιμές 0.3-0.5.

Για την απορρόφηση των κυματισμών στα ανοιχτά όρια του υπολογιστικού πεδίου χρησιμοποιείται η τεχνική των στοιβάδων απορρόφησης. Εκτενής αναφορά στη μέθοδο αυτή γίνεται στην παράγραφο 2.5.4.2. Οι Karambas και Memos (2009) προτείνουν τη χρήση του βελτιωμένου σχήματος των Yoon και Choi (2001), όπου οι μεταβλητές ζ , U και V πολλαπλασιάζονται με το συντελεστή απορρόφησης ν που ορίζεται από τις σχέσεις (2.154) και (2.155). Το πλάτος της στοιβάδας απορρόφησης θεωρείται γενικά ίσο με ένα μήκος κύματος. Ωστόσο κατά την επέκταση του μοντέλου για τη συμπερίληψη της θραύσης χρησιμοποιήθηκαν διπλές οριακές στοιβάδες (πλάτους $10\Delta x + 10\Delta x = 20\Delta x$) στα ανοιχτά όρια του πεδίου. Κάθε μία από τις διπλές αυτές στοιβάδες έχει $8+8=16$ εσωτερικούς κόμβους ($t_s = 16$) και επομένως προκύπτει $b \approx 1.8$. Κατά τους Larsen και Dancy (1983) για $x_s = 10\Delta x$ προκύπτει $a=5$ και άρα $\ln a \approx 1.6$. Οπότε χρησιμοποιήθηκε η σχέση:

$$v(x_*) = \exp[-(1.8^{-x_*/\Delta x} - 1.8^{-x_s/\Delta x}) \cdot 1.6] \quad \text{για } 0 \leq x_* \leq x_s$$

$$v(x_*) = 1 \quad \text{για } x_s < x_* \quad (3.88)$$

Στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιήθηκε τόσο η σχέση (3.88), όσο και αυτές των Yoon και Choi (2001) και των Larsen και Dancy (1983) ώστε να διερευνηθεί η επίδραση των στοιβάδων απορρόφησης στην ακρίβεια του μοντέλου.

3.5.3 ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Στην ενότητα αυτή επιχειρείται μία αδρομερής διερεύνηση των χαρακτηριστικών του μονοδιάστατου απλού ρητού αριθμητικού σχήματος που προτάθηκε παραπάνω. Συγκεκριμένα, εξετάζονται η σύγκλιση (convergence), η συνέπεια (consistency), η ευστάθεια (stability), η ακρίβεια (accuracy) και η υπολογιστική απόδοση (computational efficiency) του μοντέλου.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι ιδιότητες αυτές μελετώνται προσεγγιστικά και εν μέρει επιφανειακά, καθότι η αριθμητική συμπεριφορά του μοντέλου είναι σχεδόν χασοκλή λόγω της μη-γραμμικότητας που εισάγουν οι όροι των χωρικών παραγώγων των σχέσεων (3.86), (3.87) και ο όρος του συνελκτικού ολοκληρώματος. Επίσης, οι πειραματικές διατάξεις επαλήθευσης που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία αποτελούνται από ένα τμήμα μεταβαλλόμενης βυθομετρίας που κάνει το πρόβλημα ακόμη πιο σύνθετο. Τέλος, η χρήση του έκκεντρου κανάβου, αλλά και το γεγονός ότι ουσιαστικά οι υπολογισμοί εκτελούνται σε δύο χρονικά βήματα, αφού αρχικά υπολογίζονται οι ανυψώσεις ζ_i από την εξίσωση συνέχειας και στη συνέχεια αντικαθιστώνται στην εξίσωση ορμής για τον υπολογισμό των ταχυτήτων U_i (σχήμα 3.4), καθιστούν αδύνατη την ακριβή ανάλυση των ιδιοτήτων του μοντέλου. Ωστόσο, έστω και μία διερευνητική προσέγγιση των χαρακτηριστικών αυτών εμφανίζει ενδιαφέρον, ακόμη και αν εξασφαλίζει μόνο αναγκαίες και όχι απαραίτητα ικανές συνθήκες σύγκλισης, ευστάθειας και συνέπειας.

Στην ενότητα αυτή οι παραπάνω ιδιότητες (που εξαρτώνται από το εκάστοτε πρόβλημα) μελετώνται για το πείραμα του Wallingford (1997) που περιγράφεται στο έκτο κεφάλαιο και συγκεκριμένα για το τμήμα της διάταξης που έχει σταθερό βάθος $d=0.8\text{m}$. Στο τμήμα αυτό παράγονται κυματισμοί ύψους $H=0.1\text{m}$ και περιόδου $T=1\text{sec}$. Το πείραμα περιλαμβάνει αμελητέο ποσοστό θραυόμενων κυματισμών.

3.5.3.1 Σύγκλιση (Convergence)

Η λύση του αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων (3.86)-(3.87) $\vec{q}_i^n = \begin{pmatrix} \zeta_i^n \\ U_i^n \end{pmatrix}$ συγκλίνει αν τείνει στην ακριβή λύση $\vec{q}(x_i, t_n) = \begin{pmatrix} \zeta(x_i, t_n) \\ U(x_i, t_n) \end{pmatrix}$ του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (3.56)-(3.53) καθώς τα βήματα χωρικής και χρονικής διακριτοποίησης τείνουν στο μηδέν $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Το σφάλμα της αριθμητικής λύσης σε σχέση με την ακριβή γράφεται:

$$\vec{e}_i^n = \begin{pmatrix} \xi_i^n \\ \psi_i^n \end{pmatrix} = \vec{q}(x_i, t_n) - \vec{q}_i^n = \begin{pmatrix} \zeta(x_i, t_n) - \zeta_i^n \\ U(x_i, t_n) - U_i^n \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

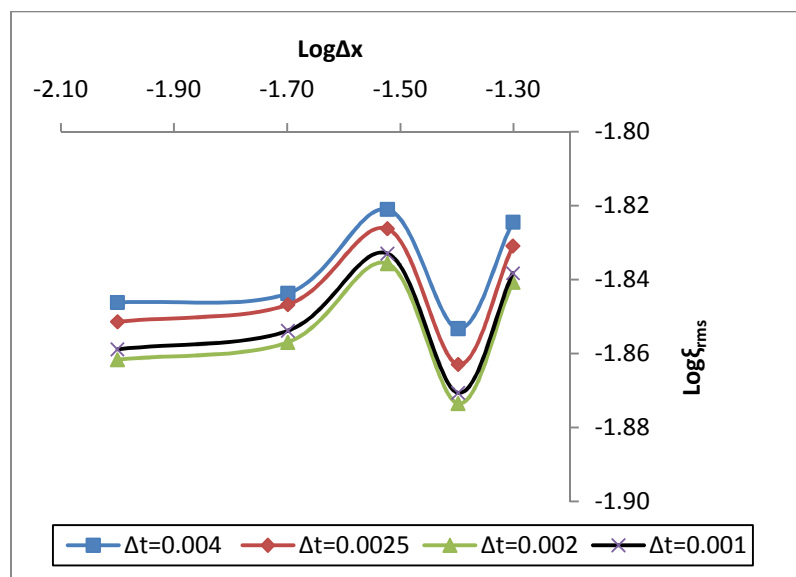
Η ακριβής λύση του αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων προκύπτει όταν δεν εισάγονται αριθμητικά σφάλματα κανενός είδους, όπως π.χ. σφάλματα στρογγυλοποιήσεων. Το σφάλμα \vec{e}_i^n στον κόμβο i και στο χρονικό βήμα n εξαρτάται γενικά από τα βήματα διακριτοποίησης Δx και Δt και από την τιμή των παραγώγων ανώτερης τάξης στο συγκεκριμένο κόμβο που παραλείπονται κατά τη χρήση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών. Επειδή σπάνια είναι γνωστή η αναλυτική λύση ενός προβλήματος η αναλυτική απόδειξη της σύγκλισης ή μη ενός μοντέλου είναι τις περισσότερες φορές αδύνατη. Σε ένα καλώς ορισμένο γραμμικό πρόβλημα αρχικών συνθηκών μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα ισοδυναμίας του Lax που αναφέρει ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης ενός σχήματος πεπερασμένων διαφορών είναι η ευστάθεια και η συνέπεια του σχήματος. Ωστόσο, το σχήμα των Karambas και Memos (2009) είναι μη-γραμμικό και άρα το θεώρημα του Lax μπορεί να παρέχει μία αναγκαία, αλλά όχι απαραίτητα ικανή, συνθήκη σύγκλισης.

Μπορεί συνήθως να είναι αδύνατη η θεωρητική απόδειξη της σύγκλισης ή μη ενός μοντέλου, ωστόσο είναι δυνατόν να ληφθούν αριθμητικές ενδείξεις για τη συμπεριφορά του. Έτσι, στην

προκειμένη περίπτωση του πειράματος του Wallingford (1997) ελέγχθηκαν διαφορετικά βήματα διακριτοποίησης $\Delta x, \Delta t$ και υπολογίστηκε το rms (root mean square) σφάλμα ξ_{rms} της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας όπως προκύπτει από διαθέσιμες μετρήσεις σε διακεκριμένους σταθμούς και σε συγκεκριμένο χρόνο ($t=20$ sec):

$$\xi_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [\zeta(x_i) - \zeta_i]^2} \quad (3.90)$$

όπου N ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων σταθμών. Το ξ_{rms} συναρτήσε των βημάτων διακριτοποίησης Δx και Δt φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 3.5.



Σχήμα 3.5: Σφάλμα ξ_{rms} συναρτήσε των βημάτων διακριτοποίησης Δx και Δt για το πείραμα του Wallingford (1997)

Η σύγκλιση του μοντέλου απαιτεί το σφάλμα να τείνει στο μηδέν καθώς τα βήματα διακριτοποίησης τείνουν στο μηδέν $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Ωστόσο, από το σχήμα προκύπτει ότι το σφάλμα εμφανίζει ταλαντώσεις και ως προς τη χωρική και ως προς τη χρονική διακριτοποίηση. Το γεγονός αυτό δεν αποτελεί απόδειξη μη σύγκλισης καθώς δεν αποκλείει την περίπτωση το σφάλμα να τείνει στο μηδέν, αλλά αποτελεί ένδειξη μη σύγκλισης. Όμως, όπως θα δειχθεί παρακάτω, το απλό ρητό σχήμα των Karambas και Memos (2009) είναι μη ευσταθές και αρά όντως το μοντέλο δεν συγκλίνει.

3.5.3.2 Συνέπεια (Consistency)

Ένα αριθμητικό μοντέλο καλείται συνεπές αν το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτει από τη διακριτοποίηση είναι ισοδύναμο σε κάθε κόμβο με το αρχικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων καθώς τα βήματα διακριτοποίησης τείνουν στο μηδέν. Η συνέπεια είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη σύγκλισης καθότι απαιτείται και η ευστάθεια του σχήματος.

Για τη μονοδιάστατη περίπτωση το αριθμητικό σχήμα επίλυσης αποτελείται από τις εξισώσεις (3.86) και (3.87). Όπως αναφέρθηκε, τα άπειρα όρια στο συνελκτικό ολοκλήρωμα

αντικαθίστανται από τα πεπερασμένα όρια $\pm 4d$. Στο τμήμα της διάταξης με σταθερό βάθος $d=0.8m$ υπάρχουν 160 κόμβοι στο διάστημα $4d$. Οπότε στον κόμβο i και στο χρονικό βήμα n χρησιμοποιώντας το σύνθετο κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης του Simpson προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{g}{\pi d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(x - \xi, t) - \zeta(x, t)] \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi |\xi|}{4d} \right) \right] d\xi \right]_i^n \\ & \approx \frac{g}{\pi d} \frac{\Delta x}{3} \left\{ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^n - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{i-160}^n \right\} \ln \tanh \left(\frac{160\pi \Delta x}{4d} \right) + \\ & + \sum_{i-159 \leq j \leq i+159, 2} \left\{ 4 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_j^n - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^n \right\} \ln \tanh \left(\frac{\pi |i-j| \Delta x}{4d} \right) + \\ & + 2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{j+1}^n - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^n \left\} \ln \tanh \left(\frac{\pi |i-j-1| \Delta x}{4d} \right) \right\} + \\ & + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{i+160}^n - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^n \left\} \ln \tanh \left(\frac{160\pi \Delta x}{4d} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρές Taylor προκύπτουν:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_i^n \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (3.92)$$

$$\zeta_{i+1}^n = \zeta_i^n + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_i^n \frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^3) \quad (3.93)$$

$$\zeta_{i-1}^n = \zeta_i^n - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_i^n \frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^3) \quad (3.94)$$

$$U_{i+1}^n = U_i^n + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n \frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^3) \quad (3.95)$$

$$U_{i-1}^n = U_i^n - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n \Delta x + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n \frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^3) \quad (3.96)$$

και άρα μετά από πράξεις προκύπτει στην εξίσωση συνέχειας:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_i^n + \left\{ \frac{\partial [U(d+\zeta)]}{\partial x} \right\}_i^n = \frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} + \frac{[U(\bar{d}+\zeta)]_{i+1}^n - [U(\bar{d}+\zeta)]_i^n}{\Delta x} + E_{1,i}^n = 0 \quad (3.97)$$

με σφάλμα αποκοπής (truncation error):

$$E_{1,i}^n = -0.5\Delta x \left[d \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n + \zeta_i^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^n \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n \right] + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad (3.98)$$

αντίστοιχα στην εξίσωση ορμής προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i^n + U_i^n \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n + g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^{n+1} - \left[\frac{g}{\pi d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(x - \xi, t) - \zeta(x, t)] \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi |\xi|}{4d} \right) \right] d\xi \right]_i^{n+1} = \\ & = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + U_i^n \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + g \frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} - I^{n+1} + E_{2,i}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.99)$$

με σφάλμα αποκοπής:

$$\begin{aligned} E_{2,i}^{n+1} &= 0.5g\Delta x \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \frac{g\Delta x}{3\pi d} \left\{ 0.5\Delta x \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{i-160}^{n+1} - 2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{i+160}^{n+1} \right] \ln \left[\tanh \left(\frac{160\pi\Delta x}{4d} \right) \right] \right\} - \\ & - \frac{g\Delta x}{3\pi d} \left\{ \sum_{i-159 \leq j \leq i+159,2} \left\{ 4\Delta x \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_j^{n+1} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} \right] \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi|i-j|\Delta x}{4d} \right) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. 2\Delta x \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{j+1}^{n+1} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} \right] \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi|i-j-1|\Delta x}{4d} \right) \right] + 4 \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi|i-j|\Delta x}{4d} \right) \right] O(\Delta x^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. 2 \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi|i-j-1|\Delta x}{4d} \right) \right] O(\Delta x^2) \right\} + \ln \left[\tanh \left(\frac{160\pi\Delta x}{4d} \right) \right] O(\Delta x^2) \right\} + O(\Delta t, \Delta x^2) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Το σφάλμα $E_{1,i}^n$ τείνει στο μηδέν καθώς $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Επίσης, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του De L' Hôpital η παράσταση $\Delta x^m \cdot \ln[\tanh(\alpha\Delta x)]$ για α σταθερά και m θετικό ακέραιο τείνει στο μηδέν για $\Delta x \rightarrow 0$. Συνεπώς και το σφάλμα $E_{2,i}^{n+1}$ τείνει στο μηδέν καθώς $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Επομένως, το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων είναι ισοδύναμο με το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων καθώς τα βήματα χωρικής και χρονικής διακριτοποίησης τείνουν στο μηδέν. Άρα το αριθμητικό σχήμα που προτείνουν οι Karambas και Memos (2009) είναι συνεπές.

3.5.3.3 Ευστάθεια (Stability)

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (3.53)-(3.56) που αποτελεί τη βάση του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) είναι μη-γραμμικό. Όσον αφορά στην εξίσωση συνέχειας, η μη-γραμμικότητα έγκειται στον όρο της χωρικής παραγώγου $\frac{\partial[(d+\zeta)U]}{\partial x}$ καθότι τόσο η βυθομετρία όσο και η ταχύτητα U (αλλά και η ανύψωση ζ) μεταβάλλονται στο χώρο. Όσον αφορά στην εξίσωση ορμής, η μη-γραμμικότητα οφείλεται στον όρο $U \frac{\partial U}{\partial x}$, ενώ μη-γραμμικού χαρακτήρα είναι και το συνελικτικό ολοκλήρωμα. Τα χαρακτηριστικά αυτά του μοντέλου καθιστούν αδύνατη την ακριβή ανάλυση ευστάθειας. Η υπολογιστική δυσκολία επιτείνεται με τη χρήση του έκκεντρου κανάβου αλλά και εξαιτίας του γεγονότος ότι οι άγνωστες μεταβλητές ζ και U δεν

υπολογίζονται ταυτοχρόνως, αλλά διαδοχικά ως $\zeta_i^{n+\frac{1}{2}}$ (επιλύοντας την εξίσωση συνέχειας με χρήση της U_i^n) και εν συνεχεία U_i^{n+1} (επιλύοντας την εξίσωση ορμής με χρήση της $\zeta_i^{n+\frac{1}{2}}$). Επομένως, το αριθμητικό σχήμα επίλυσης δεν μπορεί να γραφτεί στη διανυσματική μορφή $\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + L_x \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \vec{0}$ με $\vec{q} = (\zeta)$, $\vec{F} = \vec{F}(\zeta, U)$ και L_x ένας ενιαίος τελεστής παραγωγίσιμης και για τις δύο εξισώσεις, μορφή που θα διευκόλυνε υπολογιστικά την ανάλυση ευστάθειας. Άρα κάθε εξίσωση πρέπει να διερευνηθεί ως προς την ευστάθεια της ξεχωριστά. Λόγω των παραπάνω η διεξοδική ανάλυση ευστάθειας δεν είναι δυνατή παρά μόνο διερευνητικά προσφέροντας κάποιες αναγκαίες συνθήκες.

Οι εξισώσεις (3.53)-(3.56) λόγω της χωροχρονικής μεταβλητότητας της ταχύτητας U προσομοιάζουν στη γνωστή μη-γραμμική εξίσωση Burger και όχι στην απλή εξίσωση μετάθεσης. Τέτοιες μη-γραμμικές εξισώσεις μπορούν να προσεγγιστούν ως προς την ευστάθεια τους με τοπικό "πάγωμα" της μη-γραμμικότητας. Άλλωστε, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο αυτή μελετάται ενδεικτικά για λόγους ευκολίας το τμήμα της πειραματικής διάταξης του Wallingford (1997) με σταθερό βάθος $d=0.8m$ (άρα η μέγιστη ως προς το χρόνο ταχύτητα U_{max} είναι θεωρητικά αμετάβλητη ως προς το χώρο). Λόγω τη σταθερότητας του βάθους εισάγεται η βοηθητική μεταβλητή $h = d + \zeta$ και άρα: $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}$ και $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$.

Ο Koutitas (1985), που προτείνει το αριθμητικό σχήμα επίλυσης το οποίο υιοθετούν οι Karambas και Memos (2009), δίνει το απλό κριτήριο ευστάθειας CFL:

$$\sqrt{gd} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.101)$$

το οποίο για $\Delta x = 0.02 m$ οδηγεί στον περιορισμό $\Delta t \leq 0.007 sec$. Επειδή το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) είναι ακριβές ως προς τη διασπορά, ίσως ακριβέστερη της (3.101) είναι η σχέση:

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.102) \quad \text{με} \quad c = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kd) \quad (3.103)$$

που οδηγεί στον περιορισμό $\Delta t \leq 0.013 sec$. Ωστόσο, ενδεικτικότερη ανάλυση ευστάθειας είναι η παρακάτω. Η διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας (3.86) γράφεται:

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{U_{i+1}^n (h_{i+1} + h_i) - U_i^n (h_i + h_{i-1})}{2\Delta x} = 0 \quad (3.104)$$

"Παγώνοντας" τοπικά τους μη γραμμικούς όρους, δηλαδή θέτοντας προσεγγιστικά $U_{i+1}^n \approx U_i^n = U$, προκύπτει το γνωστό σχήμα FTCS:

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + U \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (3.105)$$

Θεωρώντας προσεγγιστικά ότι το σφάλμα $\xi_i^n = h(x_i, t) - h_i^n$ ικανοποιεί τη σχέση (3.105) (ο χαρακτηρισμός προσεγγιστικά αναφέρεται στο γεγονός ότι η ακριβής λύση δεν ικανοποιεί τη

γραμμικοποιημένη εξίσωση $\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ αλλά τη μη-γραμμική ($\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} = 0$) μπορεί να εφαρμοστεί μία γραμμική ανάλυση ευστάθειας Von Neumann. Εκφράζοντας το αρχικό σφάλμα σε σειρά Fourier:

$$\xi_j^0 = \sum_{m=1}^N \alpha_m e^{i\theta_m j} \quad (3.106)$$

με $\theta_m = m\pi\Delta x$ και επειδή λόγω της γραμμικοποίησης του σχήματος οι συνιστώσες του σφάλματος δεν αλληλεπιδρούν, αρκεί η μελέτη της συμπεριφοράς της μιας συνιστώσας η οποία στο n-ιοστό χρονικό βήμα γράφεται:

$$\xi_j^n = G^n e^{i\theta j} \quad (3.107)$$

όπου G είναι ο παράγοντας ενίσχυσης του σφάλματος (amplification factor). Αντικαθιστώντας την (3.107) στην (3.105) και ύστερα από πράξεις προκύπτει:

$$G = 1 - iU \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\theta \quad (3.108)$$

Για να υπάρχει ευστάθεια θα πρέπει $|G| \leq 1$ για κάθε θ . Ωστόσο ισχύει:

$$|G| = \sqrt{1 + \left(-U \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\theta\right)^2} > 1 \quad (3.109) \quad \text{π.χ. για } U=U_{\max} \text{ και } \theta \neq k\pi, \kappa \text{ ακέραιος.}$$

Άρα το αριθμητικό σχήμα επίλυσης είναι ασταθές.

Η εξίσωση ορμής είναι εκφρασμένη ως προς τα σημεία ροής (flux points). Εκφράζοντας την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ως προς τα σημεία αυτά μέσω της σχέσης:

$$\zeta_{i'}^{n+1} = \frac{1}{2} (\zeta_{i+1}^{n+1} + \zeta_i^{n+1}) \quad (3.110)$$

και αμελώντας τον τονισμό προκύπτει η διακριτοποιημένη εξίσωση:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + U_i^n \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + g \frac{\zeta_{i+1}^{n+1} - \zeta_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = K^{n+1} \quad (3.111)$$

όπου K ο όρος αθροίσματος της σχέσης (3.91) που προσεγγίζει το συνελικτικό ολοκλήρωμα και στον οποίο οι παράγωγοι της ελεύθερης επιφάνειας ζ εκφράζονται επίσης με κεντρικές διαφορές. Η (3.111) μπορεί ελαφρώς να τροποποιηθεί αντικαθιστώντας $U_i^n = 0.5(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n)$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{(U_{i+1}^n)^2 - (U_{i-1}^n)^2}{2\Delta x} + g \frac{\zeta_{i+1}^{n+1} - \zeta_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = K^{n+1} \quad (3.112)$$

ώστε να προσεγγίζει αριθμητικά τη γραμμικοποιημένη διαφορική μορφή:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3.113)$$

με τελεστή χωρικής παραγώγισης αυτόν των κεντρικών διαφορών και:

$$F = \frac{1}{2}U^2 + g\zeta + B \quad (3.114)$$

όπου B ο όρος που αντιστοιχεί στο άθροισμα που προσεγγίζει το συνελκτικό ολοκλήρωμα. Η (3.113) γράφεται:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.115)$$

όπου $A = \frac{\partial F}{\partial U}$. Κάνοντας παρόμοιες παραδοχές με παραπάνω και εφαρμόζοντας γραμμική ανάλυση ευστάθειας Von Neumann προκύπτει:

$$G = 1 - iA \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\theta \quad (3.116)$$

και άρα

$$|G| = \sqrt{1 + \left(-A \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\theta\right)^2} > 1 \quad (3.117) \text{ για } A, \sin\theta \neq 0$$

επομένως και το αριθμητικό σχήμα επίλυσης της εξίσωσης ορμής είναι ασταθές. Αξίζει να σημειωθεί ότι ακόμη και αν η παραπάνω ανάλυση Von Neumann έδινε κάποιες ικανές συνθήκες ευστάθειας, η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος δεν θα ήταν εξασφαλισμένη καθότι αστάθειες θα μπορούσαν να προκληθούν από την επίδραση των οριακών συνθηκών ή των μη-γραμμικών όρων. Επιπλέον, μελετήθηκε η περίπτωση του σταθερού βάθους. Στις περισσότερες εφαρμογές όμως τα κύρια προβλήματα ασταθειών προκύπτουν στις περιοχές μειούμενου βάθους.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) είναι ασταθές και άρα δεν συγκλίνει. Ωστόσο, για σχετικά περιορισμένους χρόνους μελέτης επιλέγοντας ένα μικρό χρονικό βήμα (π.χ. $\Delta t \sim 0.0025$ sec) εισάγει μικρό σφάλμα και είναι αρκετά αξιόπιστο. Επιπλέον, εν μέρει προβλήματα αστάθειας αντιμετωπίζονται με τη χρήση αριθμητικών φίλτρων μετά από ένα συγκεκριμένο αριθμό χρονικών βημάτων υπολογισμών. Ένα τέτοιο φίλτρο χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία και συνδέει τρεις γειτονικούς κόμβους:

$$\zeta_i^{n'} = 0.005\zeta_{i-1}^n + 0.99\zeta_i^n + 0.005\zeta_{i+1}^n \quad (3.118)$$

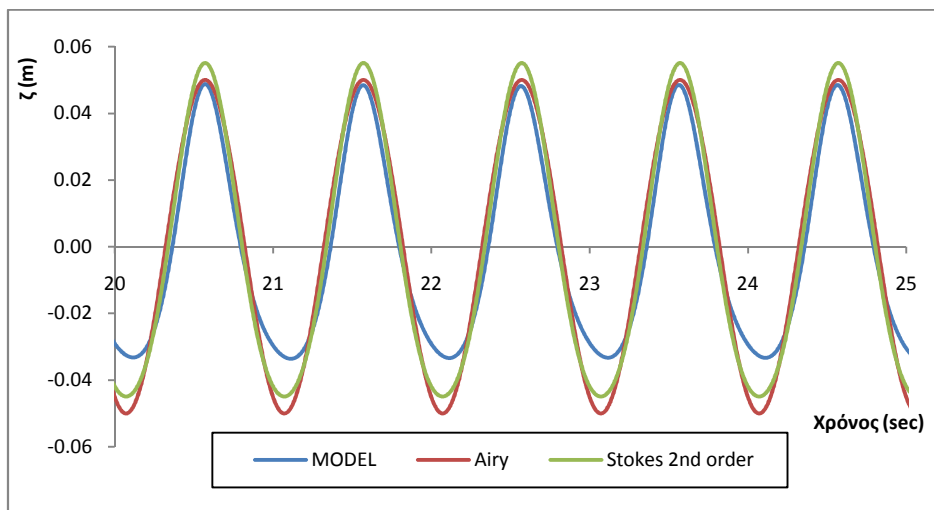
$$U_i^{n'} = 0.005U_{i-1}^n + 0.99U_i^n + 0.005U_{i+1}^n \quad (3.119)$$

3.5.3.4 Ακρίβεια (Accuracy)

Οι παραπάνω ιδιότητες της σύγκλισης, συνέπειας και ευστάθειας αναφέρονται στη συμπεριφορά του μοντέλου καθώς $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Ωστόσο, στην πράξη η λύση παρέχεται σε έναν πεπερασμένο κানাβο και επομένως η ακρίβεια που επιτυγχάνεται είναι μεγάλης σημασίας.

Ο έλεγχος της συνέπειας του μοντέλου παρήγαγε τις αναλυτικές εκφράσεις (3.98) και (3.100) για το σφάλμα αποκοπής. Ο κορυφαίος όρος του σφάλματος αποκοπής (truncation error) παρέχει μία καλή προσέγγιση του τελικού σφάλματος υπολογισμού (error). Συνήθως οι τάξεις των δύο αυτών σφαλμάτων συμπίπτουν για αρκετά πυκνό κানাβο και ομαλές αρχικές και οριακές συνθήκες.

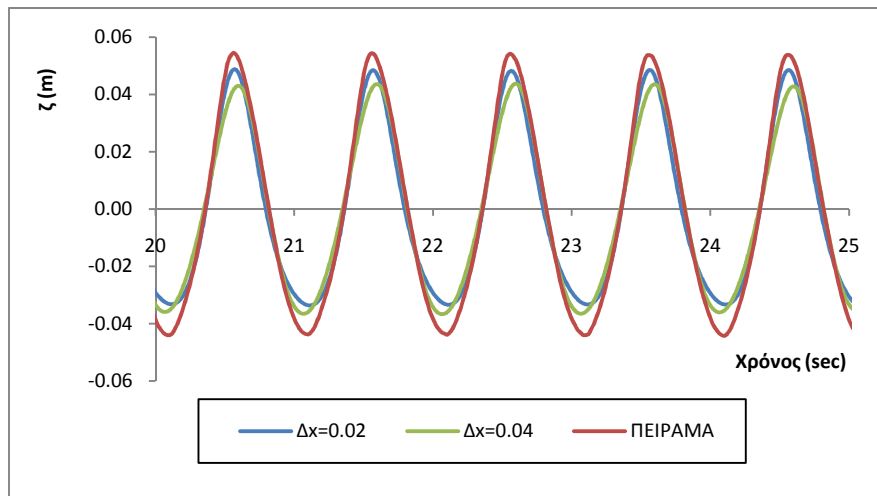
Ένας τρόπος να ελεγχθεί η ακρίβεια του μοντέλου είναι να συγκριθούν τα αποτελέσματά του με μία συναφή θεωρητική λύση. Ωστόσο, η ακρίβεια του μοντέλου εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα. Στο σχήμα 3.6 φαίνεται ενδεικτικά η σύγκριση της χρονοσειράς του μοντέλου με τη γραμμική θεωρία Airy και τη θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης στο σταθμό 2 του πειράματος του Wallingford (1997). Το πείραμα περιγράφεται αναλυτικά στο έβδομο κεφάλαιο. Το μοντέλο εμφανίζει ικανοποιητική ακρίβεια στην περιγραφή των κορυφών του κύματος αλλά υστερεί στην προσομοίωση των κοιλιών.



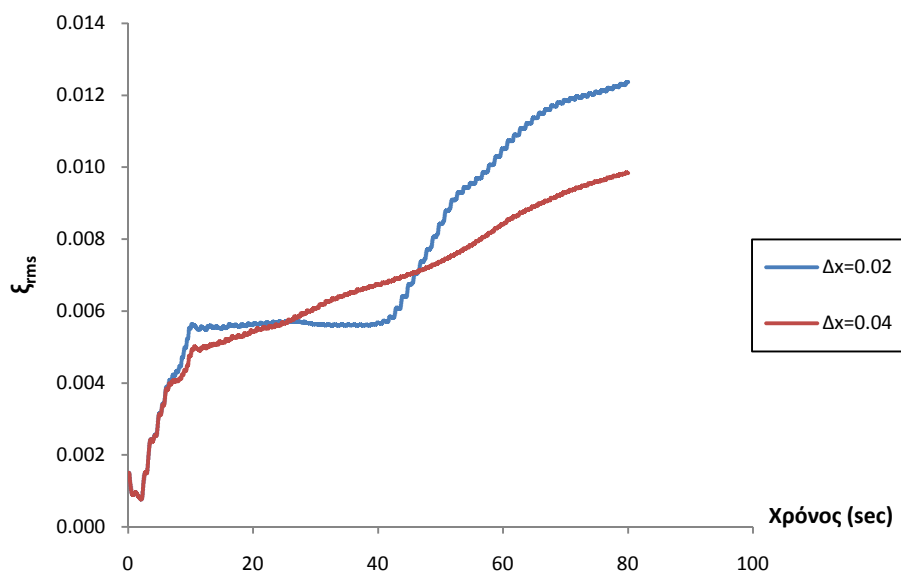
Σχήμα 3.6: Σύγκριση χρονοσειράς μοντέλου με γραμμική θεωρία Airy και θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης

Ένας δεύτερος τρόπος μελέτης της ακρίβειας του μοντέλου είναι η επίλυση σε διαδοχικά πιο πυκνό κানাβο και ο έλεγχος του κατά πόσο μεταβάλλεται η λύση σε σχέση με μία προδιαγεγραμμένη ακρίβεια. Βέβαια, η τεχνική αυτή προϋποθέτει τη σύγκλιση του μοντέλου που εν προκειμένω δεν ισχύει. Εναλλακτικά γίνεται σύγκριση των υπολογιστικών λύσεων με αξιόπιστα πειραματικά δεδομένα γνωστής ακρίβειας. Αναλυτικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο έβδομο κεφάλαιο. Ενδεικτικά στο σχήμα 3.7 φαίνεται η σύγκριση του μοντέλου με τη χρήση δύο διαφορετικών κανάβων σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα για το σταθμό 2 στο πείραμα του Wallingford (1997). Στο σχήμα 3.8 φαίνεται το rms ως προς το χρόνο σφάλμα ξ_{rms} της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για βήματα $\Delta x = 0.02 m$ και $\Delta x = 0.04 m$ συναρτήσει του χρόνου. Παρατηρείται ότι το ξ_{rms} αυξάνει γενικά με το χρόνο, γεγονός που αποτελεί ένδειξη μη

σύγκλισης του μοντέλου. Αντίστοιχη ανάλυση γίνεται για $\Delta x = 0.02 \text{ m}$ και διαφορετικά χρονικά βήματα $\Delta t = 0.0025 \text{ sec}$ και $\Delta t = 0.004 \text{ sec}$. Προκύπτει το σχήμα 3.9.



Σχήμα 3.7: Χρονοσειρά ζ στο σταθμό 2 για διαφορετικό βήμα χωρικής διακριτοποίησης

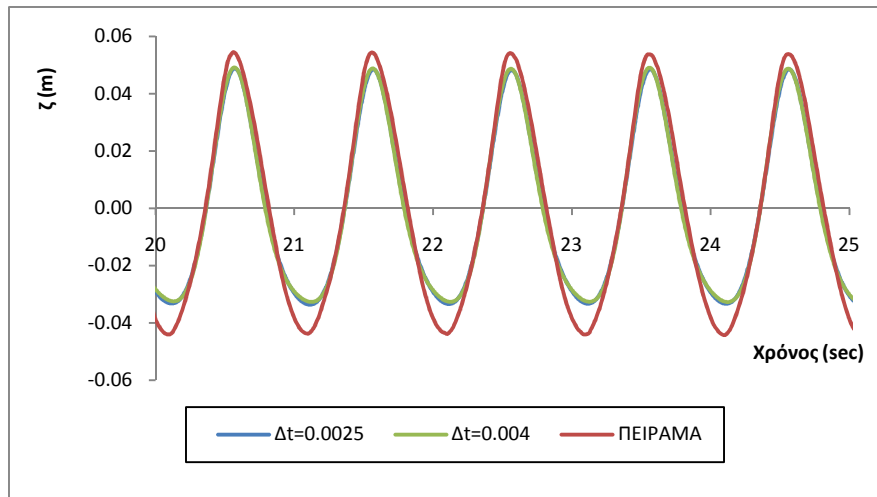


Σχήμα 3.8: Σφάλμα ξ_{rms} ως προς το χρόνο της ανύψωσης ζ συναρτήσει του χρόνου εφαρμογής του μοντέλου στο σταθμό 2 για διαφορετικό βήμα Δx

Παραδόξως το σφάλμα είναι μεγαλύτερο (σχήμα 3.8) για την πυκνότερη διακριτοποίηση. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι το μοντέλο δεν εμφανίζει σύγκλιση. Επιπλέον, η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται στο σταθμό 2 χωρίς να σημαίνει ότι παρόμοια είναι και στα άλλα σημεία του κανάβου. Άλλωστε, το σφάλμα ξ_{rms} ως προς το χρόνο δεν είναι απόλυτα αντιπροσωπευτικός δείκτης αλλά χρησιμοποιείται εδώ ενδεικτικά λόγω έλλειψης πειραματικών δεδομένων σε όλο το μήκος της διάταξης (υπάρχουν μόνο σε διακεκριμένους σταθμούς). Βέβαια, συγκεκριμένα για αυτή την επιλογή $\Delta x = 0.02 \text{ m}$ και $\Delta x = 0.04 \text{ m}$ και το ξ_{rms} ως προς το χώρο για δεδομένο

χρόνο είναι μεγαλύτερο για τον πιο πυκνό κάναβο (σχήμα 3.5). Ωστόσο, ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων σταθμών μέτρησης είναι ιδιαίτερα μικρός.

Το μοντέλο δεν εμφανίζει αντίστοιχη ευαισθησία ως προς το χρονικό βήμα διακριτοποίησης όπως προκύπτει και από το σχήμα 3.9. Η συμπεριφορά αυτή εξηγείται και από το γεγονός ότι τα σφάλματα αποκοπής (σχέσεις (3.98) και (3.100)) έχουν κορυφαίο όρο ως προς το χρόνο $O(\Delta t)$, ενώ ως προς το χώρο περιλαμβάνουν και όρους της μορφής $\Delta x^2 \ln[\tanh(a\Delta x)]$ που είναι μεταβαλλόμενης μονοτονίας.



Σχήμα 3.9: Χρονοσειρά ζ στο σταθμό 2 για διαφορετικό βήμα χρονικής διακριτοποίησης

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, το ερώτημα της ακρίβειας δεν απαντιέται μονοσήμαντα. Θεωρητικά η χρησιμοποίηση ενός αριθμητικού σχήματος ανώτερης τάξης βελτιώνει την ακρίβεια. Ωστόσο, από υπολογιστικής άποψης μπορεί να μη συμφέρει η εφαρμογή ενός τέτοιου σχήματος. Όπως αναφέρεται παρακάτω, στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε ένα σχήμα πρόγνωσης-διόρθωσης που εν γένει βελτιώνει την ακρίβεια και την ευστάθεια του μοντέλου.

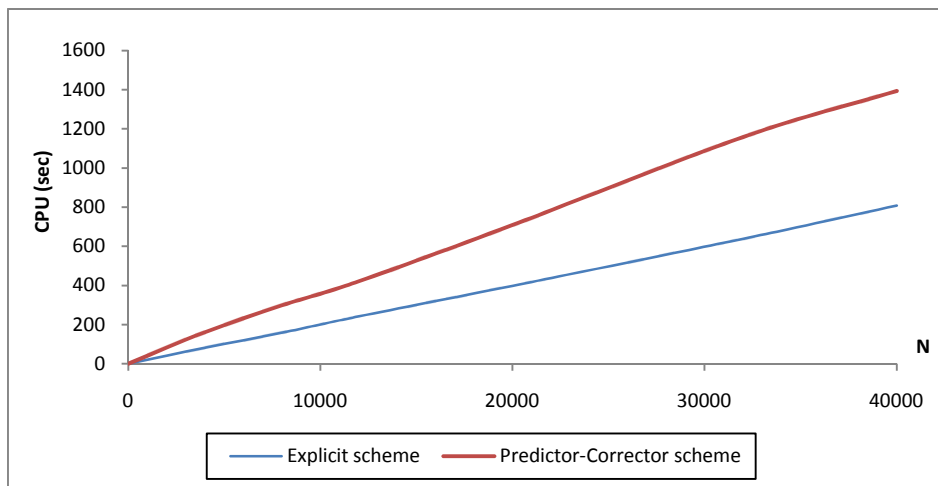
3.5.3.5 Υπολογιστική απόδοση (Computational efficiency)

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η χρήση ενός αριθμητικού σχήματος ανώτερης τάξης συνήθως αυξάνει την ακρίβεια ενός μοντέλου. Ωστόσο, δεν είναι πάντα συμφέρουσα η υιοθέτηση ενός τέτοιου σχήματος καθότι μπορεί η αύξηση του υπολογιστικού φόρτου να είναι πολύ πιο σημαντική από μια ενδεχομένως μικρή βελτίωση της ακρίβειας. Για το λόγο αυτό ένας αξιόπιστος δείκτης επιλογής ενός αριθμητικού σχήματος είναι η υπολογιστική απόδοση (computational efficiency) που ορίζεται ως η ακρίβεια που επιτυγχάνεται ανά μονάδα υπολογιστικού χρόνου. Δηλαδή:

$$CE = \frac{k}{\varepsilon_{CPU}} \quad (3.120)$$

όπου CE η υπολογιστική απόδοση, ε ένα χαρακτηριστικό σφάλμα που αντιπροσωπεύει την ακρίβεια του μοντέλου, CPU ο υπολογιστικός χρόνος και k μία σταθερά αναλογίας.

Στην επόμενη παράγραφο αναφέρεται ότι στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε ένα αριθμητικό σχήμα πρόγνωσης-διόρθωσης (predictor-corrector) αντί του απλού ρητού σχήματος που πρότειναν οι Karambas και Memos (2009). Στο σχήμα 3.10 φαίνεται ο υπολογιστικός χρόνος CPU συναρτήσει του αριθμού N των χρονικών βημάτων τρεξίματος του μοντέλου για τα δύο αυτά αριθμητικά σχήματα. Πρέπει να σημειωθεί ότι το μοντέλο προγραμματίστηκε σε γλώσσα Fortran 90 και χρησιμοποιήθηκε επεξεργαστής Intel Core 2 Duo. Ο υπολογιστικός χρόνος εξαρτάται και από τον τύπο του επεξεργαστή.

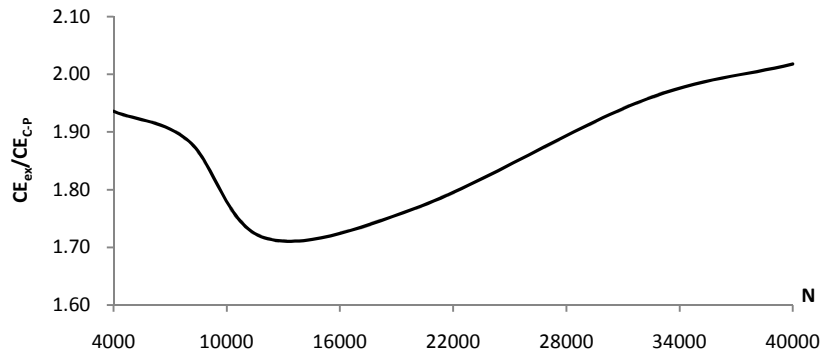


Σχήμα 3.10: Υπολογιστικός χρόνος CPU συναρτήσει του αριθμού των χρονικών βημάτων για τα δύο αριθμητικά σχήματα στο πείραμα του Wallingford (1997)

Είναι προτιμότερο δύο αριθμητικά σχήματα να συγκρίνονται ως προς την υπολογιστική απόδοσή τους παρά μόνο ως προς την ακρίβεια ή τον υπολογιστικό χρόνο. Ως ένα ενδεικτικό μέτρο της ακρίβειας ϵ στην παράγραφο αυτή ελήφθη ο μέσος όρος του rms σφάλματος ως προς το χρόνο της ανύψωσης ζ στους διαθέσιμους σταθμούς μέτρησης του πειράματος του Wallingford (1997). Στον πίνακα 3.2 φαίνεται για τα δύο αριθμητικά σχήματα το σφάλμα αυτό και ο υπολογιστικός χρόνος CPU για διαφορετικό αριθμό χρονικών βημάτων εφαρμογής του μοντέλου. Στο σχήμα 3.11 φαίνεται ο λόγος της υπολογιστικής απόδοσης του απλού ρητού σχήματος προς την αντίστοιχη του σχήματος πρόγνωσης-διόρθωσης συναρτήσει του αριθμού των χρονικών βημάτων N.

N	ΑΠΛΟ ΡΗΤΟ ΣΧΗΜΑ		ΣΧΗΜΑ PREDICTOR-CORRECTOR	
	CPU (sec)	ϵ (m)	CPU (sec)	ϵ (m)
4000	82.0	0.00282	161.5	0.00277
8000	158.3	0.00443	298.2	0.00443
12000	241.9	0.00867	421.5	0.00854
20000	398.1	0.01134	709.0	0.01126
32000	638.6	0.01379	1158.8	0.01485
40000	808.3	0.01435	1394.2	0.01678

Πίνακας 3.2: Ακρίβεια και υπολογιστικός χρόνος για τα δύο αριθμητικά σχήματα



Σχήμα 3.11: Σχέση της υπολογιστικής απόδοσης των δύο σχημάτων συναρτήσει του αριθμού των χρονικών βημάτων

Όπως προκύπτει από το σχήμα 3.11 είναι υπολογιστικά συμφέρουσα η χρήση του απλού ρητού σχήματος. Ωστόσο σε αυτή την εργασία εφαρμόζεται το σχήμα πρόγνωσης-διόρθωσης (corrector-predictor) που περιγράφεται παρακάτω διότι στις περισσότερες εφαρμογές βελτιώνει αισθητά την ευστάθεια της λύσης. Επιπλέον, η ακρίβεια του μοντέλου, άρα και η υπολογιστική απόδοσή του, δεν ορίζεται μονοσήμαντα και εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα και τη χρήση των διάφορων μέτρων του σφάλματος.

3.5.4 ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ-ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ (PREDICTOR-CORRECTOR)

Η εφαρμογή του απλού ρητού σχήματος των Karambas και Memos (2009) προκαλεί αριθμητικές αστάθειες όπως αποδείχθηκε παραπάνω. Τα προβλήματα είναι έντονα στην περίπτωση των μακρών κυματισμών. Ιδιαίτερα στις εφαρμογές για θραυόμενους κυματισμούς απαιτείται αυξημένη ανάλυση (μικρό Δx) για την καλύτερη γεωμετρική περιγραφή του επιφανειακού κυλίνδρου (κεφάλαιο 4). Η απαίτηση αυτή δημιουργεί μεγάλους αριθμούς Courant που δημιουργούν αστάθειες (σχέση (3.109)). Για το λόγο αυτό στην παρούσα διπλωματική υιοθετήθηκε το αριθμητικό σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector) που προτείνουν και οι Wei και Kirby (1995). Το στάδιο πρόβλεψης πραγματοποιείται από ένα ρητό σχήμα Adams-Bashforth 3^{ης} τάξης, ενώ το στάδιο διόρθωσης από ένα σχήμα Adams-Moulton 4^{ης} τάξης.

Για τη μονοδιάστατη περίπτωση που μελετήθηκε στην εργασία αυτή το στάδιο πρόβλεψης (predictor) περιλαμβάνει τις εξισώσεις:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \frac{\Delta t}{12} [23E_i^n - 16E_i^{n-1} + 5E_i^{n-2}] \quad (3.121)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{12} [23F_i^n - 16F_i^{n-1} + 5F_i^{n-2}] \quad (3.122)$$

ενώ το στάδιο διόρθωσης περιλαμβάνει τις εξισώσεις:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \frac{\Delta t}{24} [9E_i^{n+1} + 19E_i^n - 5E_i^{n-1} + E_i^{n-2}] \quad (3.123)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{24} [9F_i^{n+1} + 19F_i^n - 5F_i^{n-1} + F_i^{n-2}] \quad (3.124)$$

όπου οι όροι E και F δίνονται σε διαφορική μορφή από τις σχέσεις:

$$E = E(\zeta, d, U) = -(d + \zeta)U_x - (d + \zeta)_x U \quad (3.125)$$

$$F = F(\zeta, d, U) = -g\zeta_x - UU_x + I \quad (3.126)$$

όπου I ο όρος που αντιστοιχεί στο συνελικτικό ολοκλήρωμα και ο δείκτης x δηλώνει παραγωγή ως προς x . Στο δεξί μέλος των εξισώσεων (3.125) και (3.126) μπορούν να προστεθούν όροι θραύσης (κεφάλαιο 4^ο) και στο δεξί μέλος της (3.126) όρος τριβής πυθμένα. Εν προκειμένω οι όροι E και F εφαρμόστηκαν στην αριθμητική μορφή:

$$E_i^n = -(d_i + \zeta_i^n) \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x} - \frac{U_{i+1}^n + U_i^n}{2} \frac{(d_{i+1} + \zeta_{i+1}^n) - (d_{i-1} + \zeta_{i-1}^n)}{2\Delta x} \quad (3.127)$$

$$F_i^n = -g \frac{\zeta_i^n - \zeta_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + I_i^n \quad (3.128)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις συνέχειας (3.121)-(3.123) των σταδίων πρόβλεψης-διόρθωσης και κάνοντας παραδοχές όμοιες με αυτές της παραγράφου 3.5.3.3, δηλαδή "παγώνοντας" τοπικά τους μη γραμμικούς όρους θεωρώντας την ταχύτητα περίπου σταθερή U και μελετώντας την περιοχή σταθερού βάθους του πειράματος του Wallingford, μπορεί να εφαρμοστεί μία γραμμική ανάλυση ευστάθειας Von Neumann. Έτσι, για κάθε ολοκληρωμένο χρονικό βήμα ακολουθείται ανάπτυξη παρόμοια με αυτή της παραγράφου 3.5.3.3 και χωρίς επαναληπτική διαδικασία προκύπτει η εξίσωση ευστάθειας όπου G ο παράγοντας ενίσχυσης του σφάλματος (amplification factor):

$$384G^3 - G^2 \left[384 - 276 \left(\frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin\theta \right)^2 + 448 \left(\frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin\theta \right) i \right] - G \left[192 \left(\frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin\theta \right)^2 - 80 \left(\frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin\theta \right) i \right] + 60 \left(\frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin\theta \right)^2 - 16 \left(\frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin\theta \right) i = 0 \quad (3.129)$$

Η εξίσωση (3.129) έχει τρεις μιγαδικές ρίζες, αλλά μόνο μία έχει φυσική ερμηνεία σύμφωνα και με τον Durran (1991). Στον παρακάτω πίνακα 3.3 φαίνεται η τιμή του $|G|$ για διάφορες τιμές του αριθμού $\frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin\theta = Cr \cdot \sin\theta$.

Παρατηρείται ότι $|G| < 1$, γεγονός που υποδηλώνει γραμμική ευστάθεια. Ωστόσο, μέσα από εφαρμογές προκύπτει ότι και αυτό το σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης είναι ασταθές. Οι αστάθειες εμφανίζονται στα τμήματα μεταβαλλόμενης βυθομετρίας όπου είναι ιδιαίτερα δύσκολο να μελετηθούν αναλυτικά και κυρίως για πολύ μακρά κύματα. Οφείλονται κυρίως στις μη-γραμμικότητες της εξίσωσης ορμής, για την οποία η ανάλυση γραμμικής ευστάθειας στο σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης εμφανίζει φοβερές υπολογιστικές δυσκολίες κυρίως λόγω του μη-γραμμικού (και δη μη πολυωνυμικής μορφής) όρου του συνελικτικού ολοκληρώματος. Άλλωστε, το γεγονός ότι οι τιμές του πίνακα 3.3 δείχνουν ότι $|G| < 1$ για την ανύψωση της ελεύθερης

επιφάνειας δεν αποτελεί απόδειξη ευστάθειας, αλλά ένδειξη παρά μόνο γραμμικής ευστάθειας, η οποία στην πράξη διαψεύδεται. Βέβαια, αυτό που πρακτικά έχει ενδιαφέρον είναι ότι οι τιμές του συντελεστή ενίσχυσης για το σχήμα predictor-corrector είναι σημαντικά μικρότερες από τις αντίστοιχες του απλού ρητού σχήματος και συνεπώς η ευστάθεια αν και δεν εξασφαλίζεται ολοκληρωτικά, βελτιώνεται σημαντικά επιτρέποντας την προσομοίωση για αρκετά μεγαλύτερους υπολογιστικούς χρόνους και για εφαρμογές σε πολύ ρηχά νερά.

Το συγκεκριμένο σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης προτάθηκε από τους Wei και Kirby (1995), οι οποίοι αναφέρουν ότι έχει σφάλμα αποκοπής (truncation error) $O(\Delta x^4/\sigma^2)$. Ωστόσο, το αποτέλεσμα αυτό δεν ισχύει για το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) καθότι κατά την αριθμητική προσομοίωση ο όρος του συνελκτικού ολοκληρώματος εισάγει σφάλματα υπερβατικής μορφής.

Στην παραπάνω θεώρηση στο στάδιο διόρθωσης, οι όροι που αναφέρονται στο n-ιοστό χρονικό βήμα προκύπτουν απευθείας από το στάδιο πρόβλεψης χωρίς επαναληπτική διαδικασία. Ωστόσο, στην παρούσα διπλωματική εργασία, σύμφωνα και με τους Wei και Kirby (1995), στο στάδιο διόρθωσης εκτελείται επαναληπτική διαδικασία, ώσπου το σφάλμα μεταξύ δύο διαδοχικών αποτελεσμάτων να γίνει μικρότερο από ένα προκαθορισμένο όριο. Το σφάλμα υπολογίζεται και για τις δύο μεταβλητές ζ και U και ορίζεται ως:

$$\Delta f = \left(\sum_{i,j} |f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{(n+1)*}| \right) / \sum_{i,j} |f_{i,j}^{n+1}| \quad (3.130)$$

όπου f είναι κάποια από τις δύο μεταβλητές ζ ή U και $()^*$ δηλώνει τον προηγούμενο υπολογισμό. Το στάδιο διόρθωσης επαναλαμβάνεται αν κάποιο από τα Δf υπερβεί την τιμή 0.001. Όπως αναφέρουν οι Wei και Kirby (1995) το σχήμα συνήθως δεν απαιτεί καμία επανάληψη, εκτός αν προκύψουν προβλήματα στα όρια. Στη συνέχεια η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται στο επόμενο χρονικό βήμα. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι η υιοθέτηση ενός πεπλεγμένου αριθμητικού σχήματος δεν εξασφαλίζει σίγουρα την ευστάθεια καθότι τα πεπλεγμένα σχήματα δεν είναι de facto ευσταθή για συστήματα διαφορικών εξισώσεων σε αντίθεση με ότι ισχύει για μεμονωμένες εξισώσεις. Ωστόσο, η υιοθέτηση του ημι-πεπλεγμένου σχήματος με τις επαναλήψεις βελτίωσε αισθητά την ευστάθεια και κυρίως την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

$Cr \cdot \sin\theta$	Amplification factor $ G $	
	Σχήμα predictor-corrector	Απλό ρητό σχήμα
0.1	1.0000	1.0050
0.2	1.0000	1.0198
0.3	0.9999	1.0440
0.4	0.9994	1.0770
0.5	0.9977	1.1180
0.6	0.9937	1.1662
0.7	0.9854	1.2207
0.8	0.9705	1.2806
0.9	0.9461	1.3454
1.0	0.9090	1.4142

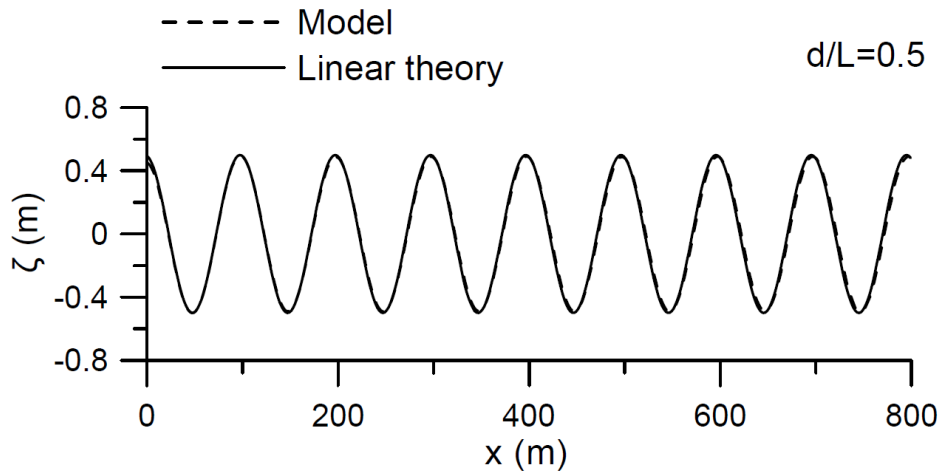
Πίνακας 3.3: Παράγοντας ενίσχυσης σφάλματος (amplification factor) $|G|$ για το απλό ρητό σχήμα και το σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector) χωρίς επαναλήψεις

3.6 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΩΝ KARAMBAS ΚΑΙ MEMOS (2009)

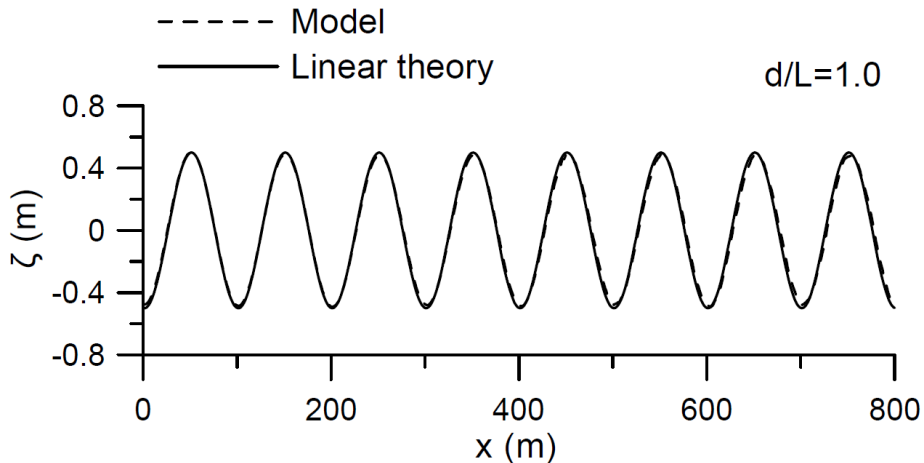
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η επαλήθευση του μοντέλου Boussinesq των Karambas και Memos (2009) όπως παρουσιάστηκε από τους συγγραφείς κατά τη δημοσίευση του μοντέλου το 2009. Για την επαλήθευση εφαρμόστηκε τόσο η μονοδιάστατη, όσο και η δισδιάστατη έκδοση του μοντέλου για την προσομοίωση της διάδοσης μη θραυόμενων μονοχρωματικών και σύνθετων κυματισμών. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης συγκρίνονται με πειραματικά δεδομένα και τη μη-γραμμική θεωρία. Επίσης, επαληθεύεται με τη γραμμική θεωρία η γραμμική έκδοση του μοντέλου ύστερα από απενεργοποίηση των μη γραμμικών όρων του μοντέλου. Μελετώνται περιπτώσεις σταθερού βάθους και ήπια μεταβαλλόμενης βυθομετρίας. Τέλος, εξετάζεται και η περίπτωση διάδοσης κυματισμών πάνω από ύφαλο τραπέζιο και ύφαλο ελλειπτικής γεωμετρίας.

3.6.1 (1 ΔΗ) ΣΤΑΘΕΡΟ ΒΑΘΟΣ: ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

Η πρώτη περίπτωση αφορά στη διάδοση ενός γραμμικού κυματισμού σε βαθιά νερά σταθερού βάθους ($\frac{d}{L} = 0.5$). Το ύψος κύματος είναι $H = 1m$, η περίοδος $T = 8sec$ και το βάθος $d = 50m$. Για την προσομοίωση της διάδοσης χρησιμοποιείται η γραμμική έκδοση του μοντέλου, δηλαδή απενεργοποιούνται οι μη γραμμικοί όροι στις εξισώσεις (3.53) και (3.56). Το βήμα χωρικής διακριτοποίησης τίθεται $\Delta x = 2.5m$ και το βήμα χρονικής διακριτοποίησης $\Delta t = 0.125sec$. Στο σχήμα 3.12 φαίνεται η σύγκριση της υπολογισμένης ελεύθερης επιφάνειας με το θεωρητικό προφίλ που προκύπτει από τη γραμμική θεωρία Stokes 1^{ης} τάξης. Στο σχήμα 3.13 εφαρμόστηκαν τα ίδια κυματικά χαρακτηριστικά αλλά σε βαθύτερο νερό με $d = 100m$ ($\frac{d}{L} = 1$). Και στις δύο περιπτώσεις οι προβλέψεις του μοντέλου και της γραμμικής θεωρίας βρίσκονται σε πολύ ικανοποιητική συμφωνία. Οι εφαρμογές αυτές αποδεικνύουν ότι το παρόν μοντέλο, που είναι ανεξάρτητο του κυματαριθμού, μπορεί να περιγράψει με ικανοποιητική ακρίβεια τη διάδοση γραμμικών κυματισμών χωρίς κανένα πρακτικό περιορισμό του βάθους.

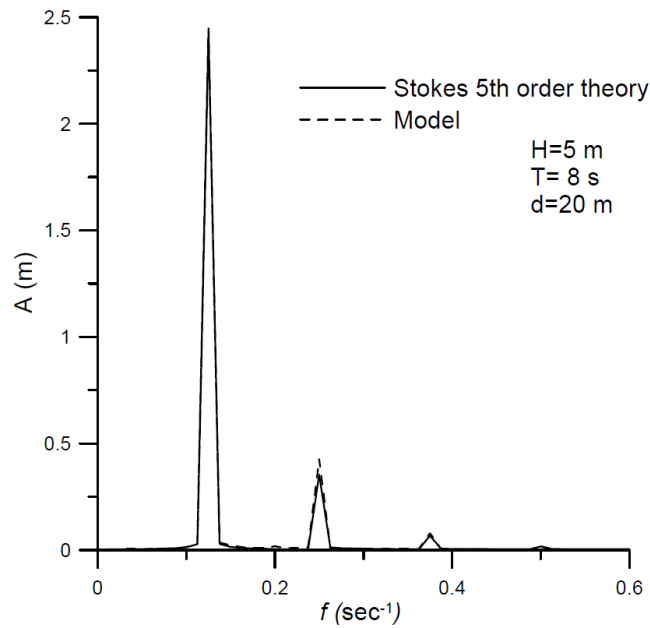


Σχήμα 3.12: Σύγκριση μεταξύ υπολογισμένου και θεωρητικού προφίλ ελεύθερης επιφάνειας ($H = 1m, T = 8sec, d = 50m$) (πηγή:[85])

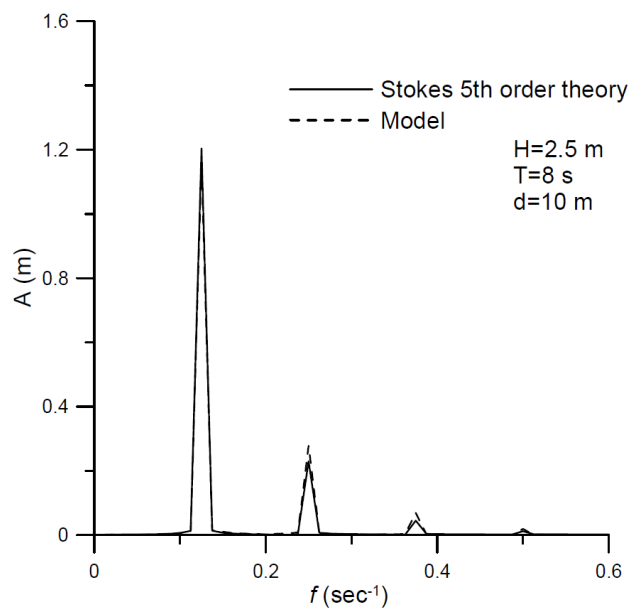


Σχήμα 3.13: Σύγκριση μεταξύ υπολογισμένου και θεωρητικού προφίλ ελεύθερης επιφάνειας ($H = 1m, T = 8sec, d = 100m$) (πηγή:[85])

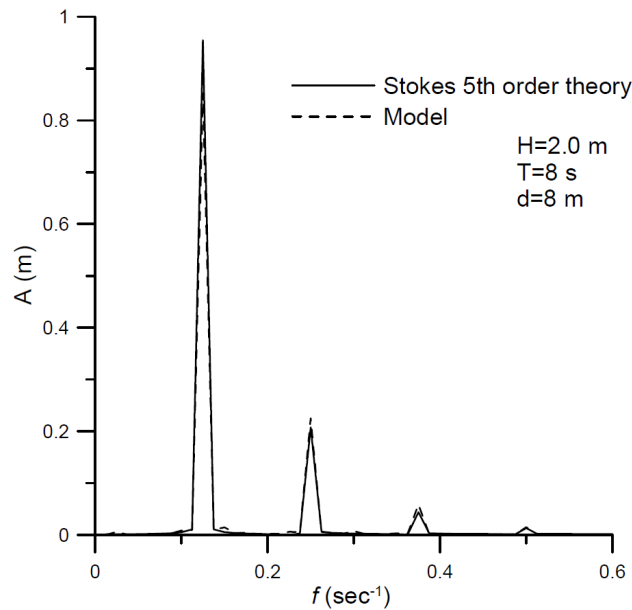
Το μοντέλο στη συνέχεια εφαρμόζεται για την πρόβλεψη της προώθησης ελαφρώς μη γραμμικών κυματισμών σε νερό ενδιάμεσου βάρους. Η παράμετρος μη γραμμικότητας είναι $\epsilon = \frac{H}{d} = 0.25$ και εξετάζονται τρεις διαφορετικές τιμές του $\frac{d}{L}$, $\frac{d}{L} = 0.22$, $\frac{d}{L} = 0.14$ και $\frac{d}{L} = 0.12$. Η ανάλυση Fourier εφαρμόζεται στην υπολογισμένη χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ώστε να παραχθεί το αντίστοιχο φάσμα και να αντληθούν οι απαραίτητες πληροφορίες για τις συχνότητες των κυματικών συνιστωσών. Για τη σύγκριση με τις θεωρητικές αρμονικές χρησιμοποιήθηκε η θεωρία Stokes 5^{ης} τάξης κατά τον Fenton (1985). Όπως φαίνεται στα σχήματα 3.14, 3.15 και 3.16 προκύπτει αρκετά καλή συμφωνία του μοντέλου και της αναλυτικής λύσης.



Σχήμα 3.14: Σύγκριση ύψους A από ανάλυση Fourier μεταξύ μοντέλου και θεωρίας Stokes 5^{ης} τάξης ($\frac{d}{L} = 0.22$, $\frac{H}{d} = 0.25$) (πηγή: [85])



Σχήμα 3.15: Σύγκριση ύψους A από ανάλυση Fourier μεταξύ μοντέλου και θεωρίας Stokes 5^{ης} τάξης ($\frac{d}{L} = 0.14$, $\frac{H}{d} = 0.25$) (πηγή: [85])



Σχήμα 3.15: Σύγκριση ύψους A από ανάλυση Fourier μεταξύ μοντέλου και θεωρίας Stokes 5^{ης} τάξης ($\frac{d}{L} = 0.12$, $\frac{H}{d} = 0.25$) (πηγή: [85])

Κατόπιν εφαρμόζεται η γραμμική έκδοση του μοντέλου για την περιγραφή της διάδοσης σύνθετων κυματισμών. Σαν δεδομένα εισάγεται μια σειρά από τρεις συνημιτονοειδείς κυματισμούς:

- $H_1 = 1.7 \text{ m}$ και $T_1 = 9 \text{ sec}$
- $H_2 = 1.9 \text{ m}$ και $T_2 = 12 \text{ sec}$
- $H_3 = 1.0 \text{ m}$ και $T_3 = 6 \text{ sec}$

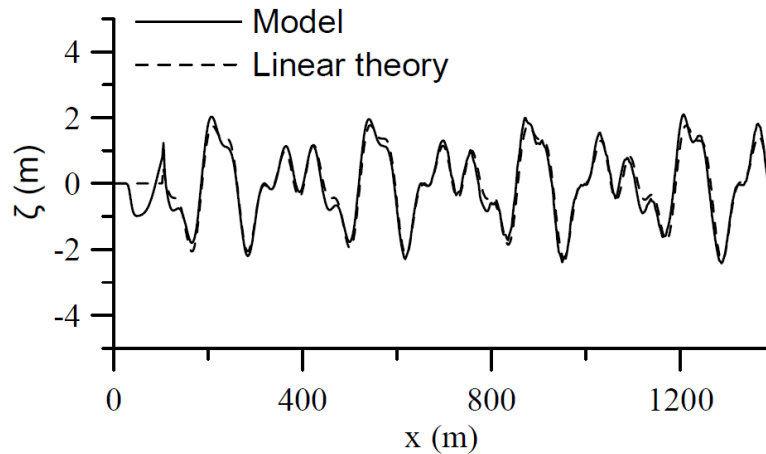
οι οποίοι διαδίδονται σε σταθερό βάθος $d=25\text{m}$.

Το βήμα χωρικής διακριτοποίησης τίθεται $\Delta x = 2.5\text{m}$ και το χρονικό βήμα $\Delta t = 0.125\text{sec}$. Τα αποτελέσματα του μοντέλου συγκρίνονται με την αναλυτική λύση που προκύπτει από τη γραμμική υπέρθεση των προφίλ των παραπάνω τριών γραμμικών κυματισμών. Δηλαδή:

$$\zeta(x, t) = \frac{H_1}{2} \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \frac{H_2}{2} \cos(k_2 x - \omega_2 t) + \frac{H_3}{2} \cos(k_3 x - \omega_3 t) \quad (3.131)$$

όπου ω_i είναι η γωνιακή συχνότητα και k_i ο κυματαριθμός του i -στού κυματισμού αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 3.16 όπου τα κύματα διαδόθηκαν για πάνω από 1.2 km και παρατηρείται αρκετά καλή συμφωνία μεταξύ του γραμμικοποιημένου μοντέλου και της αναλυτικής γραμμικής υπέρθεσης των κυματισμών. Έτσι, φαίνεται η ικανότητα του μοντέλου να προσομοιώνει ικανοποιητικά την προώθηση γραμμικών σύνθετων κυματισμών με αρκετά ακριβή πρόβλεψη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.



Σχήμα 3.16: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με την αναλυτική λύση για τη διάδοση γραμμικών σύνθετων κυματισμών (υπέρθυση τριών κυματισμών: $H_1 = 1.7m$ και $T_1 = 9sec$, $H_2 = 1.9m$ και $T_2 = 12sec$, $H_3 = 1.0m$ και $T_3 = 6sec$ σε σταθερό βάθος $d = 25m$ (πηγή: [85])

3.6.2 (1 ΔΗ) ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΒΑΘΟΣ: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΡΗΧΩΣΗ, ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΟΣΗ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΥΦΑΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟ ΚΑΙ ΡΗΧΩΣΗ ΜΟΝΑΧΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΠΥΘΜΕΝΑ

Το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί και για τη διάδοση κυματισμών σε ήπια μεταβαλλόμενη βυθομετρία. Η εξίσωση (3.53) του μονοδιάστατου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) είναι μαθηματικά ισοδύναμη με την (3.54) των Tsutsui et al. (1998) στην οποία εφαρμόστηκε επιτυχημένα η υπόθεση της ήπια μεταβαλλόμενης βυθομετρίας. Επίσης, η μορφή του πυρήνα (kernel) $K(x)$ είναι τέτοια που αποσβένεται με την απόσταση x γρηγορότερα από οποιαδήποτε ήπια μεταβολή του βάθους $d(x)$. Τυπικά το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί οπουδήποτε το $d(x)$ μπορεί να θεωρηθεί σταθερό εντός του πεδίου επιρροής του σχετικού kernel.

Όπως αναφέρθηκε, για τη μονοδιάστατη περίπτωση το kernel του συνελκτικού ολοκληρώματος απαιτεί ένα υπολογιστικό πεδίο μέχρι 4 φορές το βάθος του νερού εκατέρωθεν του σημείου ενδιαφέροντος, ενώ για τη δισδιάστατη περίπτωση απαιτείται δύο φορές το βάθος του νερού. Συνήθως οι διαστάσεις αυτές είναι μεγαλύτερες από τον κήναβο που προτείνουν οι υπολογιστικοί κώδικες και έτσι το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί σε ήπια μεταβαλλόμενες βυθομετρίες, ειδικά στα ρηχά νερά όπου βελτιώνει αισθητά την απόδοση των μη γραμμικών χαρακτηριστικών των κυματισμών.

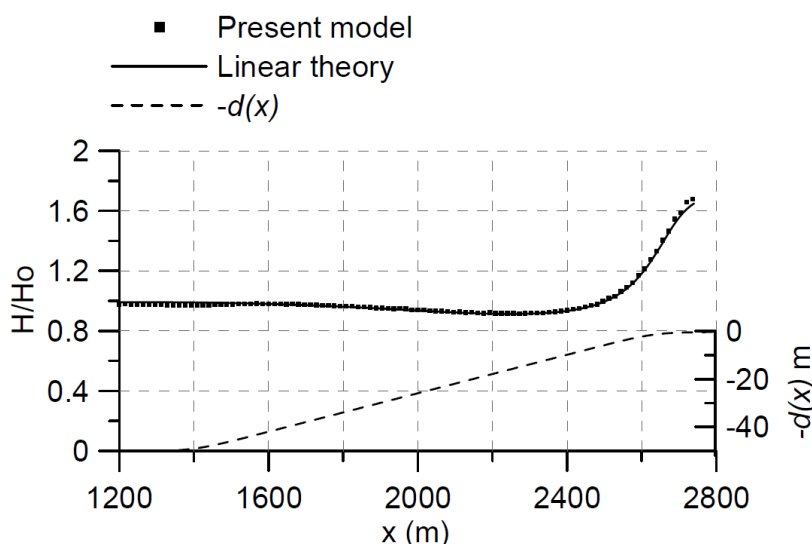
Αυτή η επέκταση του μοντέλου σε εφαρμογές ήπιας κλίσης πυθμένα υιοθετήθηκε από τους Tsutsui et al. (1998) και Radder (1992) οι οποίοι αναφέρθηκαν στα αριθμητικά πειράματα του Zwartkruis (1991). Κάνοντας την υπόθεση αυτή η τιμή του βάθους d στην εξίσωση (3.53) μπορεί να θεωρηθεί ως η μέση τιμή του ελαφρώς μεταβαλλόμενου βάθους στο διάστημα μεταξύ των σημείων με τετμημένη $x-\xi$ και x .

Για να μελετηθούν οι γραμμικές ιδιότητες ρήχωσης του μοντέλου και να επαληθευτεί η συμπεριφορά του σε μεταβαλλόμενο βάθος προσομοιώθηκε η διάδοση κυματισμών σε κανάλι ήπιας κλίσης $1/25$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.17. Το βάθος στο αριστερό άκρο του πεδίου τίθεται $d_0 = 50m$ ενώ στο δεξιό άκρο των ρηχών νερών $d_s = 0.5m$. Στο αριστερό άκρο γεννιέται

γραμμικός κυματισμός ύψους $H_0 = 0.25 \text{ m}$ και περιόδου $T = 8 \text{ sec}$ και προωθείται μέχρι να επιτευχθούν μόνιμες συνθήκες (steady state) σε ολόκληρο το κανάλι. Με τον τρόπο αυτό αναπαράγεται όλο το εύρος συνθηκών από βαθιά νερά σε νερά ενδιάμεσου βάθους και ρηχά νερά. Το μήκος κύματος στα βαθιά L_0 είναι κατά προσέγγιση $L_0 = 2d_0$. Και στα δύο άκρα του πεδίου εφαρμόζεται η τεχνική των στοιβάδων απορρόφησης. Στο σχήμα 3.17 φαίνεται σε αδιαστατοποιημένη μορφή η περιβάλλουσα του ύψος κύματος που υπολογίζεται από το μοντέλο σε σύγκριση με αυτό που προκύπτει από τη ρήχωση που προβλέπει η γραμμική θεωρία Stokes 1^{ης} τάξης:

$$\frac{H(x)}{H_0} = \left[\frac{k(x) \left[1 + \frac{2k_0 d_0}{\sinh(2k_0 d_0)} \right]}{k_0 \left\{ 1 + \frac{2k(x)d(x)}{\sinh[2k(x)d(x)]} \right\}} \right]^{1/2} \quad (3.132)$$

όπου $k_0 = \frac{2\pi}{L_0}$ ο κυματαριθμός στα βαθιά.



Σχήμα 3.17: Αδιαστατοποιημένη περιβάλλουσα του ύψους κύματος που υπολογίζεται από το μοντέλο σε σύγκριση με τη γραμμική θεωρία στην περίπτωση ρήχωσης γραμμικού κυματισμού (πηγή: [85])

Η καμπύλη ρήχωσης που υπολογίζει το μοντέλο βρίσκεται πολύ κοντά στη γραμμική θεωρία, παρότι τα αποτελέσματα δεν είναι ταυτόσημα. Ο Schäffer (2004b) κατέστρωσε ένα παρόμοιο με το παρόν μοντέλο για την περίπτωση μονοδιάστατης διάδοσης γραμμικών κυματισμών σε πυθμένα ήπιας κλίσης που δίνει αποτελέσματα σχεδόν ταυτόσημα με αυτά της σχέσης (3.132).

Στη συνέχεια το αριθμητικό μοντέλο εφαρμόστηκε για την προσομοίωση της διάδοσης απλών μονοχρωματικών κυματισμών πάνω από τραπεζοειδή ύφαλο αναβαθμό σύμφωνα με το πείραμα του Dingemans (1994). Η πειραματική διάταξη έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

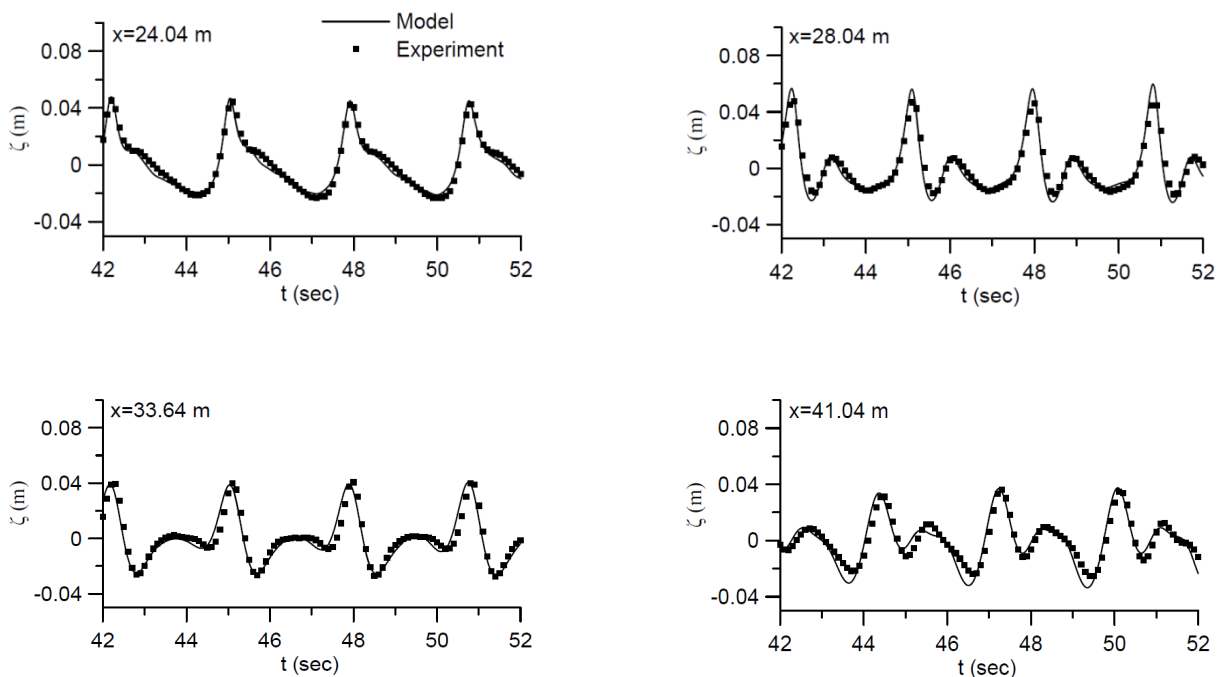
- Ένα κανάλι μήκους 50 m και βάθους 80 cm
- Ένα ύφαλο τραπέζιο τοποθετημένο στο κέντρο του καναλιού με ανάντη κλίση παρειάς 1:20 (ο πόδας βρίσκεται στη θέση $x=11.01 \text{ m}$), μία οριζόντια στέψη μήκους 4 m (από $x=23.04 \text{ m}$ ως $x=27.04 \text{ m}$) στη στάθμη -0.20 m και κατόντη κλίση 1:10 (από $x=27.04 \text{ m}$ ως $x=33.07 \text{ m}$)

Όταν μία σειρά κυματισμών διαδίδεται πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη, συνήθως υφίσταται μεγάλες μεταβολές στη μορφή της και λαμβάνει χώρα σημαντική μη-γραμμική μεταφορά ενέργειας μέσω διαφόρων διεργασιών. Λόγω ρήχωσης το κύμα γίνεται έντονα μη-γραμμικό μέσω της γένεσης δεσμευμένων ανώτερων αρμονικών στην ανάντη παρειά του ύφαλου. Όταν το βάθος αυξάνει μετά τη στέψη προς τα κατάντη, οι αρμονικές αυτές απελευθερώνονται και επειδή μειώνεται η μη-γραμμικότητα αυξάνει η διαφορά μεταξύ της ταχύτητας φάσης των ελεύθερων και δεσμευμένων αρμονικών. Αυτή η απελευθέρωση των υψηλότερων αρμονικών στην κατάντη παρειά του ύφαλου έχει ως αποτέλεσμα μία σύνθετη (irregular) κυματοσειρά, η οποία περιγράφεται με δυσκολία από τα αριθμητικά μοντέλα τύπου Boussinesq.

Για τη συγκεκριμένη πειραματική διάταξη υπάρχουν διαθέσιμες μετρήσεις σε 11 σταθμούς κατά μήκος του καναλιού. Το πείραμα επαλήθευσης που χρησιμοποιήθηκε από τους συγγραφείς είναι το τεστ A των Beji και Battjes (1993) που περιλαμβάνει κυματισμούς ύψους $H = 4 \text{ cm}$ και περιόδου $T = 2.86 \text{ sec}$. Το χρονικό βήμα ανάλυσης επιλέχθηκε $\Delta x = 0.025 \text{ m}$ και το χρονικό $\Delta t = 0.0025 \text{ sec}$.

Στο σχήμα 3.18 παρουσιάζεται η σύγκριση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας μεταξύ του μοντέλου και των πειραματικών μετρήσεων σε τέσσερις σταθμούς:

- $x = 24.04 \text{ m}$ (στέψη ύφαλου αναβαθμού)
- $x = 28.04 \text{ m}$ (κατάντη καθοδική παρειά)
- $x = 33.64 \text{ m}$ (περιοχή σταθερού βάθους δίπλα στον πόδα της κατάντη παρειάς)
- $x = 41.04 \text{ m}$ (περιοχή σταθερού βάθους στα κατάντη)



Σχήμα 3.18: Σύγκριση μοντέλου με πειραματικές μετρήσεις της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για διάδοση κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη (πηγή: [85])

Η σύγκριση είναι αρκετά ικανοποιητική, ακόμη και κατάντη του ύφαλου εμποδίου, όπου απελευθερώνονται οι υψηλότερες αρμονικές, παρά τον ελαφρώς μη γραμμικό χαρακτήρα του μοντέλου. Τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με τα αντίστοιχα μοντέλων Boussinesq υψηλότερης

τάξης (π.χ. Bingham και Agnon (2005)) αποδεικνύοντας την ακρίβεια υπολογισμού της διασποράς συχνοτήτων.

Το μοντέλο επαληθεύτηκε από τους Karambas και Memos (2009) και για την περίπτωση της ρήχωσης μοναχικού κύματος σύμφωνα με το πείραμα του Synolakis (1987). Ωστόσο, επειδή η επαλήθευση αυτή έγινε και στην παρούσα διπλωματική τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο έβδομο κεφάλαιο.

3.6.3 (2 ΔΗ) ΣΤΑΘΕΡΟ ΒΑΘΟΣ: ΠΟΛΥΚΑΤΕΥΘΥΝΤΙΚΟΙ ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ

Στην παράγραφο αυτή χρησιμοποιείται η δισδιάστατη γραμμικοποιημένη έκδοση του μοντέλου για να προσομοιωθεί η διάδοση πολυκατευθυντικών σύνθετων (irregular) κυματισμών. Η αριθμητική προσομοίωση έγινε σε ένα υπολογιστικό πεδίο με απορροφητικές στοιβάδες στα τέσσερα περιμετρικά όρια. Το βάθος του νερού θεωρήθηκε ομοιόμορφο $d=35$ m.

Το κύμα παράγεται με γραμμική επαλληλία πέντε ημιτονοειδών κυματισμών με διαφορετικά ύψη, περιόδους και διευθύνσεις διάδοσης θ . Τα κύματα έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

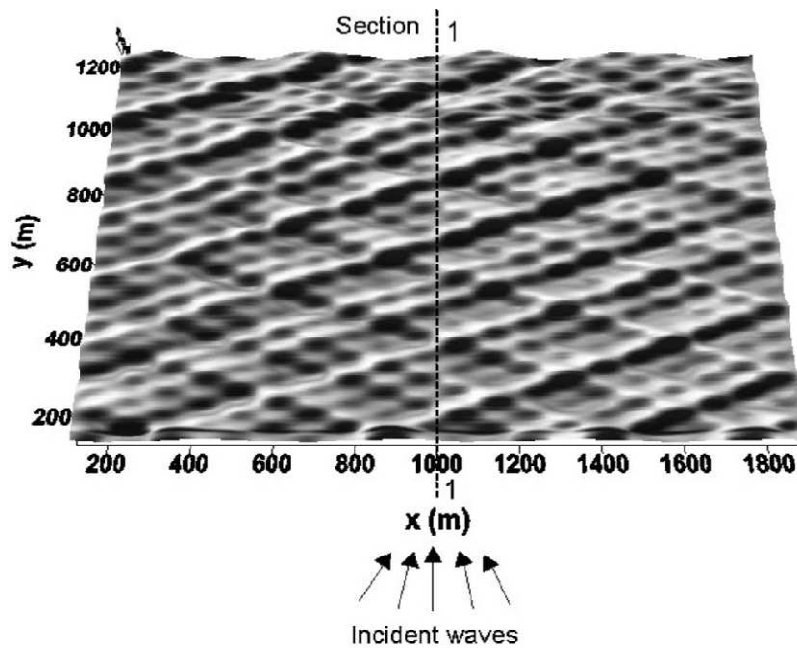
- $H_1 = H_2 = 2$ m, $T_1 = T_2 = 12$ sec, $\theta_1 = 15^\circ, \theta_2 = -15^\circ$ (πλάγια αρχική πρόσπτωση)
- $H_3 = H_4 = 1$ m, $T_3 = T_4 = 6$ sec, $\theta_3 = 25^\circ, \theta_4 = -25^\circ$ (πλάγια αρχική πρόσπτωση)
- $H_5 = 2$ m, $T_5 = 8$ sec, $\theta_5 = 0^\circ$ (κάθετη αρχική πρόσπτωση)

Έτσι, η εισαγόμενη χρονοσειρά ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\zeta(t)$ δίνεται από τη σχέση:

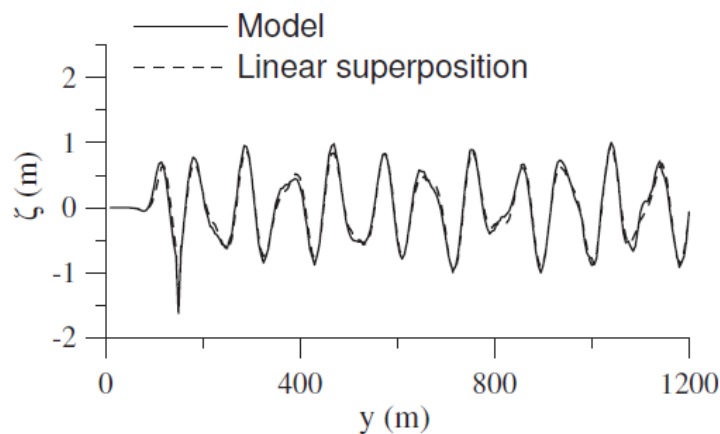
$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^5 \frac{H_i}{2} \sin[k_i \sin(\theta_i)x - \omega_i t] \quad (3.133)$$

όπου η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση διάδοσης με τον άξονα y .

Στο σχήμα 3.19 φαίνεται ένα στιγμιότυπο της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, υποδεικνύοντας ένα συμμετρικό αλλά πολύπλοκο κυματικό πεδίο. Στο σχήμα 3.20 απεικονίζεται η σύγκριση μεταξύ της υπολογισμένης από το μοντέλο ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος της διατομής 1-1 του σχήματος 3.19 και της προκύπτουσας από γραμμική επαλληλία των πέντε μονοχρωματικών κυμάτων. Παρατηρείται πολύ καλή συμφωνία που αποδεικνύει την ικανότητα του μοντέλου να αποδίδει τη σχέση γραμμικής διασποράς σε δύο διαστάσεις στην περίπτωση γραμμικών κυματισμών.



Σχήμα 3.19: Στιγμιότυπο ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για πολυκατευθυντικούς σύνθετους κυματισμούς (πηγή: [85])

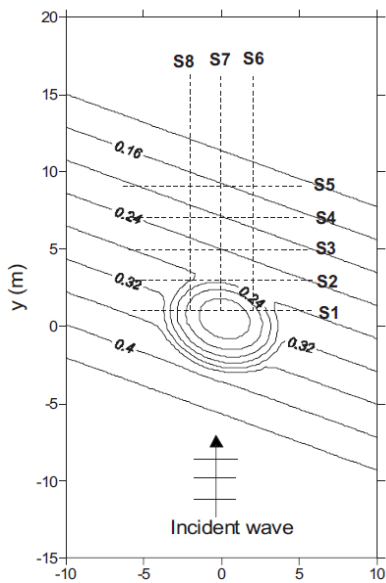


Σχήμα 3.20: Προφίλ ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος της διατομής 1-1 του σχήματος 3.19. Σύγκριση αποτελεσμάτων μοντέλου και θεωρίας (πηγή: [85])

3.6.4 (2 DH) ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΒΑΘΟΣ: ΔΙΑΔΟΣΗ ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΥΦΑΛΟ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Για να καταδειχθεί η σημασία των φαινομένων της ρήγωσης, της περίθλασης, της διάθλασης και της μη-γραμμικής διασποράς, το προτεινόμενο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) εφαρμόστηκε για τη διάδοση μονοχρωματικών κυματισμών πάνω από ανώμαλο πυθμένα σε δισδιάστατη διάταξη. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τις μετρήσεις των Berkhoff et al. (1982). Η βυθομετρία αποτελείται από ένα ελλειπτικό ύφαλο εμπόδιο στηριζόμενο σε

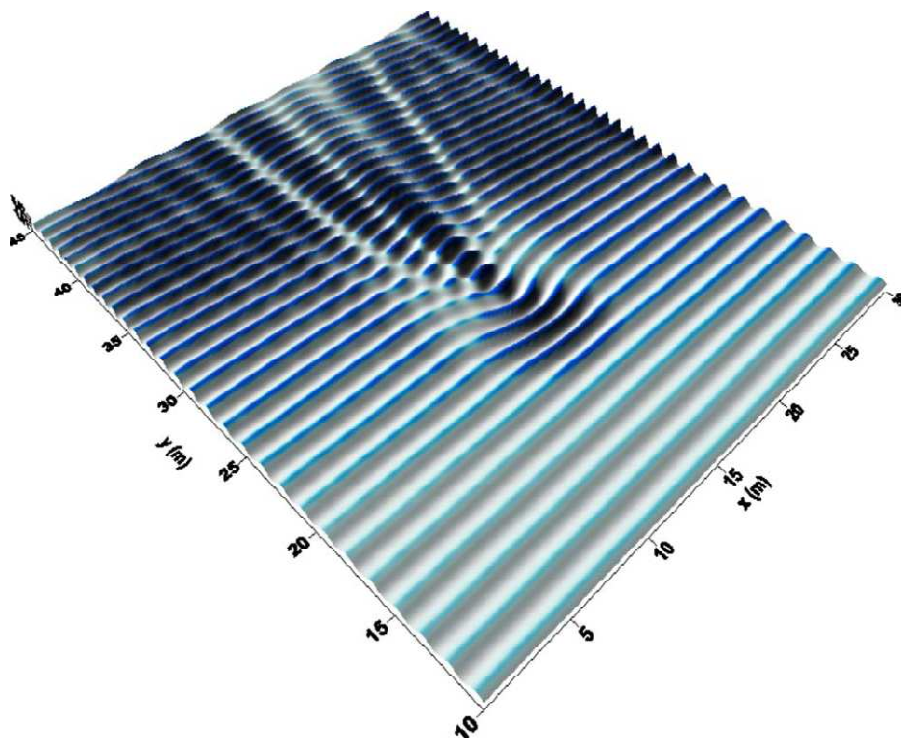
επίπεδο πυθμένα κλίσης 1:50. Ο κεκλιμένος πυθμένας σχηματίζει γωνία -20° με τις κυματογεννήτριες (wave paddles).



Σχήμα 3.21: Πειραματική διάταξη και βυθομετρία για το πείραμα των Berkhoff et al. (1982) (ισοϋψείς σε m) (πηγή: [85])

Η πειραματική διάταξη και η βυθομετρία απεικονίζονται στο σχήμα 3.21. Το ύψος κύματος μετρήθηκε κατά μήκος των οκτώ τομών (S_1 - S_8). Το αντίστοιχο υπολογιστικό πεδίο είναι παρόμοιο με αυτό του σχήματος 3.21 με μοναδική διαφορά ότι στα άκρα του υπάρχουν στοιβάδες απορρόφησης (sponge layers). Θεωρήθηκαν μόνο μη θραυόμενοι κυματισμοί και το ελάχιστο βάθος τέθηκε 0.1 m. Το βήμα του κανάβου είναι $\Delta x = \Delta y = 0.05 \text{ m}$ και το χρονικό βήμα $\Delta t = 0.0025 \text{ sec}$. Το αρχικό ύψος κύματος ήταν $H_0 = 0.0464 \text{ m}$ και η περίοδος $T = 1.0 \text{ sec}$. Το υπολογιζόμενο κυματικό πεδίο έφτασε σε μόνιμες συνθήκες μετά από 30 sec. Στο σχήμα 3.22 απεικονίζεται ένα στιγμιότυπο της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο τελευταίο χρονικό βήμα υπολογισμού. Τα προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας υποδεικνύουν σημαντική συγκέντρωση ενέργειας κατάντη της ρήξης.

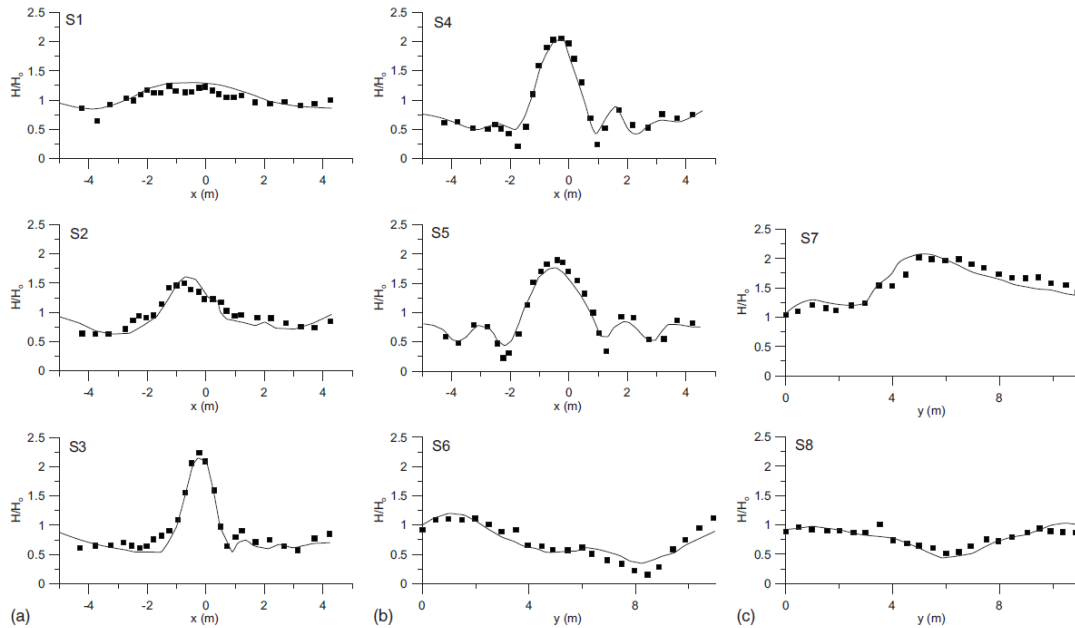
Στα διαγράμματα του σχήματος 3.23 φαίνεται η σύγκριση μεταξύ των υπολογιζόμενων από το μοντέλο και των μετρημένων υψών κύματος σε αδιαστατοποιημένη μορφή κατά μήκος των διατομών S_1 ως S_8 . Λόγω της διάθλασης, συμβαίνει συγκέντρωση κυματικής ενέργειας στα κατάντη του ύφαλου με μέγιστο ύψος κύματος περίπου 2.2 φορές το αρχικό ύψος κύματος (διατομή S_3). Τα αποτελέσματα του αριθμητικού μοντέλου αποτυπώνουν ικανοποιητικά τη γενική τάση των πειραματικών δεδομένων κατά μήκος και των δύο διευθύνσεων, παράλληλα και κάθετα στη διεύθυνση πρόσπτωσης των κυματισμών. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικό για ένα ελαφρώς μη γραμμικό μοντέλο, αφού δεν υπάρχουν υψηλές αξιώσεις όσον αφορά στα χαρακτηριστικά της μη γραμμικής διασποράς, ειδικά στα βαθιά νερά που συναντώνται σε κάποιες περιοχές αυτού του πειράματος.



Σχήμα 3.22: Διάδοση κυματισμού πάνω από ύφαλο εμπόδιο. Στιγμιότυπο της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας κατά το τελευταίο χρονικό βήμα (πηγή: [85])

Όπως αναφέρουν οι Karambas και Memos (2009), τα σχήματα 3.22 και 3.23 καταδεικνύουν ότι το μοντέλο είναι ικανό να προσομοιώσει ικανοποιητικά τους κυματικούς μετασχηματισμούς πάνω από πολύπλοκες βυθομετρίες, αναπαράγοντας επαρκώς την τάση των συνδυασμένων φαινομένων της ρήχωσης, διάθλασης, περίθλασης και μη-γραμμικής διασποράς. Έτσι, ενισχύεται και η πεποίθηση ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε ήπια μεταβαλλόμενες βυθομετρίες.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η γραμμικοποιημένη έκδοση του μοντέλου έδωσε επίσης ικανοποιητικά αποτελέσματα, σε συμφωνία με τα αντίστοιχα άλλων μοντέλων που βασίζονται σε γραμμικές εξισώσεις ήπιας κλίσης. Ωστόσο, η εφαρμογή ενός μη-γραμμικού μοντέλου διασπειρόμενων κυματισμών έδειξε καλύτερη συμφωνία με πειραματικές μετρήσεις, αποδεικνύοντας τη σημασία της μη-γραμμικότητας στην ακρίβεια της προσομοίωσης (Kirby et al. (1998), Karambas (1999)).



Σχήμα 3.23: Σύγκριση αδιαστατοποιημένου ύψους κύματος κατά μήκος των τομών S_1 - S_8 μεταξύ μετρήσεων (τελείες) και όπως υπολογίστηκε από το μοντέλο (συνεχής γραμμή) στο πείραμα των Berkhoff et al. (1982) (πηγή: [85])

(3.6.5) (2 DH) ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΒΑΘΟΣ: ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΑΘΛΑΣΗ-ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΥΦΑΛΟ ΕΜΠΟΔΙΟ

Η περίπτωση αυτή επαλήθευσης του δισδιάστατου μοντέλου αφορά στη μη γραμμική διάθλαση-περίθλαση απλών μονοχρωματικών κυματισμών πάνω από ύφαλο εμπόδιο ημικυκλικού σχήματος. Η περίπτωση αυτή εξετάστηκε πειραματικά από τον Whalin (1971). Η πειραματική διάταξη καλύπτει περιοχή $6.096m \times 36.576m$ και η μεταβολή του βάθους δίνεται (σε m) από τη συνάρτηση:

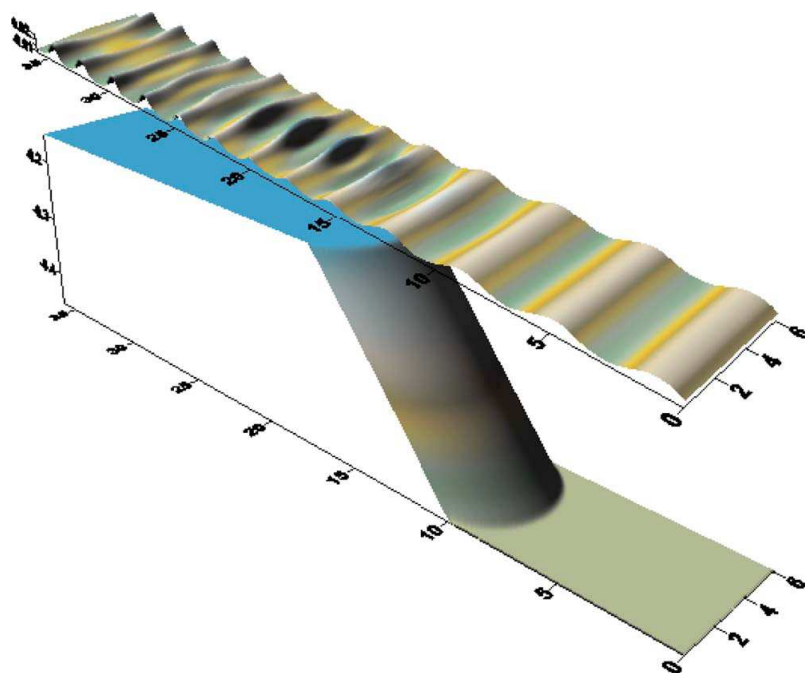
$$d(x, y) = \begin{cases} 0.4572, & 0 \leq x \leq 10.67 - G \\ 0.4572 + \frac{1}{25}(10.67 - G - x), & 10.67 - G \leq x \leq 18.29 - G \\ 0.1524, & 18.29 - G \leq x \leq 36.576 \end{cases} \quad (3.134)$$

όπου

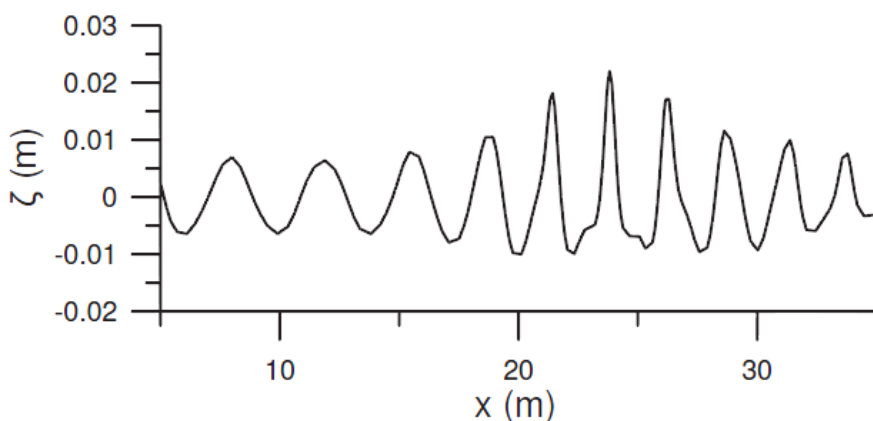
$$G(y) = [y(6.096 - y)]^{1/2} \quad \text{με} \quad 0 \leq y \leq 6.096 \text{ m} \quad (3.135)$$

Οι εισερχόμενοι κυματισμοί είναι γραμμικοί, αλλά μετά τη συγκέντρωση ενέργειας στη ρήχωση, οι υψηλότερες αρμονικές γίνονται σημαντικές λόγω μη γραμμικών φαινομένων. Αυτή η συγκέντρωση κυματικής ενέργειας φαίνεται στο σχήμα 3.24 όπου αποτυπώνεται ένα στιγμιότυπο της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας όπως υπολογίστηκε από το παρόν μοντέλο.

Στο σχήμα 3.25 φαίνεται η διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος της κεντρικής γραμμής (άξονας συμμετρίας) σε κάποια χρονική στιγμή.

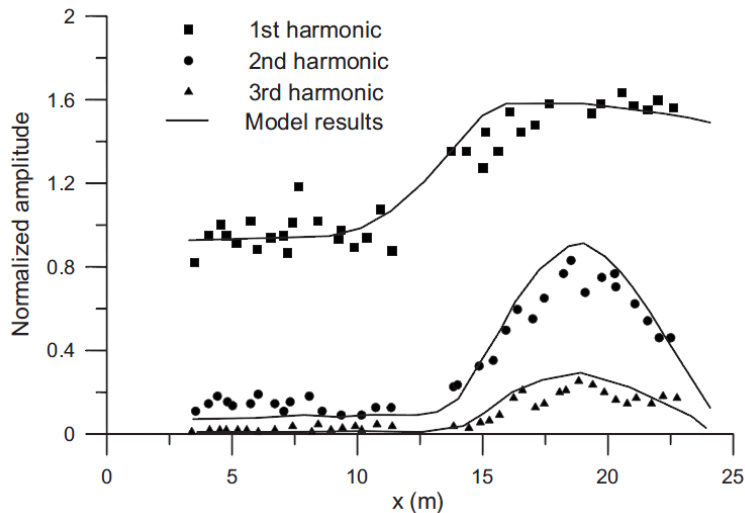


Σχήμα 3.24: Προώθηση μονοχρωματικών κυματισμών πάνω από ρήχωση ημικυκλικής γεωμετρίας: στιγμιότυπο της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας υπολογισμένο από το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) (πηγή: [85])



Σχήμα 3.25: Διακύμανση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος της κεντρικής γραμμής (άξονας συμμετρίας). Αποτελέσματα μοντέλου Karambas και Memos (2009) για μονοχρωματικούς κυματισμούς ($T = 2 \text{ sec}$ και $H = 0.015 \text{ m}$) (πηγή: [85])

Η μεταφορά ενέργειας στις υψηλότερες αρμονικές αποτυπώνεται στο σχήμα 3.26. Βάσει της ανάλυσης Fourier της χρονοσειράς της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας σε κάθε σημείο του κανάβου κατά μήκος της κεντρικής γραμμής, η χωρική εξέλιξη της πρώτης, της δεύτερης και της τρίτης αρμονικής της αριθμητικής προσομοίωσης συγκρίνεται με πειραματικά δεδομένα. Η συμφωνία των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τα πειράματα κρίνεται ικανοποιητική.



Σχήμα 3.26: Σύγκριση αδιαστατοποιημένου ύψους πρώτης, δεύτερης και τρίτης αρμονικής μεταξύ πειραμάτων και αποτελεσμάτων μοντέλου για μονοχρωματικούς κυματισμούς ($T = 2 \text{ sec}$ και $H = 0.015 \text{ m}$) (πηγή: [85])

3.6.6 (2DH) ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΒΑΘΟΣ: ΛΟΞΩΣ ΠΡΟΣΠΙΠΤΟΝΤΕΣ ΜΟΝΟΚΑΤΕΥΘΥΝΤΙΚΟΙ (LONG-CRESTED) ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ

Πειραματικές δοκιμές διεξήχθησαν στο U.K. Coastal Research Facility στο HR Wallingford (Memos et al. 2005) με σκοπό τη μελέτη διαφόρων πτυχών της διάδοσης τυχαίων κυματισμών στα ρηχά νερά, όπως της εξέλιξης της συνάρτησης πυκνότητας της από κοινού πιθανότητας των H-T και της συσχέτισής της με τα φάσματα, της κατευθυντικότητας και της κινηματικής των σωματιδίων στη ζώνη θραύσης. Κάποια από αυτά τα πειραματικά δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν και στην παρούσα εργασία για την επαλήθευση του μοντέλου (κεφάλαιο 7).

Η δεξαμενή των εγκαταστάσεων έχει διαστάσεις $27\text{m} \times 54\text{m}$ και περιλαμβάνει μια στενή λωρίδα οριζόντιου πυθμένα και μια άκαμπτη κεκλιμένη ακτή με ομοιόμορφη κλίση 5%. Το βάθος στην περιοχή ομοιόμορφου πυθμένα ήταν 0.8 m .

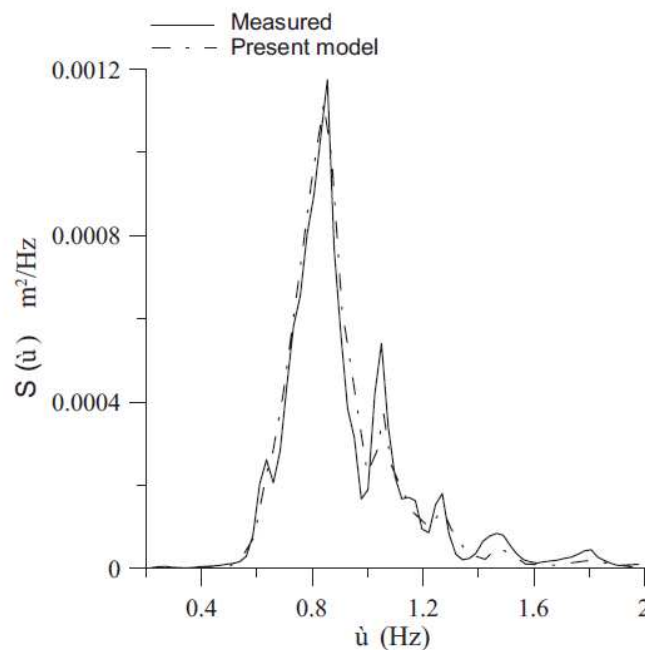
Διεξήχθησαν 175 επιτυχή πειράματα και οι συγγραφείς παρουσίασαν τα αποτελέσματα δύο εξ αυτών (OB-3 και OB-10). Τα πειράματα αυτά αφορούσαν σε σύνθετους κυματισμούς με κορυφές μεγάλου πλάτους (long-crested random waves) που διαδίδονται λοξά.

Το φάσμα εισόδου ήταν τύπου Jonswar με συντελεστή ενίσχυσης $\gamma = 3.3$. Η αρχική γωνία πρόσπτωσης ήταν $\theta = 15^\circ$. Στη δοκιμή OB-3 η περίοδος αιχμής ήταν $T_p = 1.2 \text{ sec}$ και το

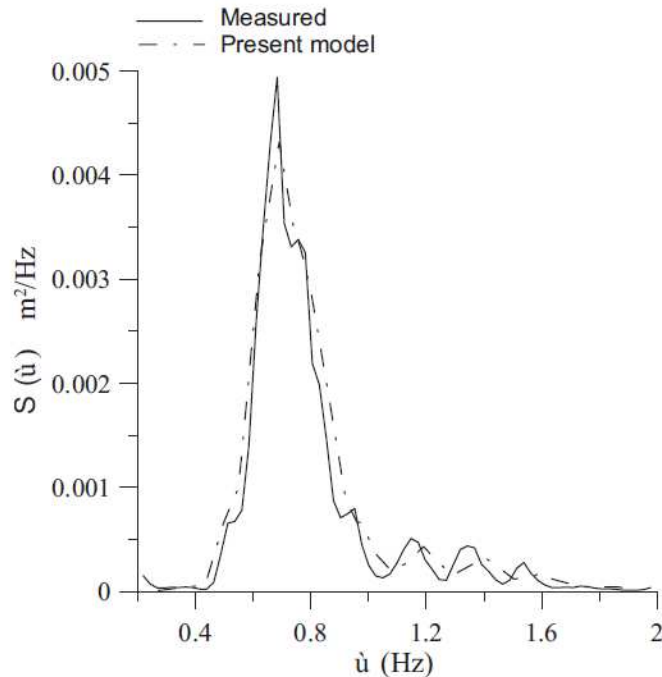
σημαντικό ύψος κύματος $H_s = 0.09 \text{ m}$, ενώ στη δοκιμή OB-10 ήταν $T_p = 1.4 \text{ sec}$ και $H_s = 0.15 \text{ m}$.

Το μοντέλο Boussinesq των Karambas και Memos (2009) επαληθεύτηκε από τους συγγραφείς βάσει των δύο αυτών πειραμάτων. Το χωρικό βήμα επιλέχθηκε $\Delta x = 0.03125 \text{ m}$ και το χρονικό βήμα $\Delta t = 0.0025 \text{ sec}$. Το αντίστοιχο φάσμα εισόδου υπολογίστηκε από τη μετρημένη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας κοντά στην κυματογεννήτρια και διαιρέθηκε σε $N = 80$ τμήματα (components) στο πεδίο συχνοτήτων. Η αρχική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\zeta_{0,i}$ ελήφθη από κάθε τμήμα με συχνότητα ω_i με χρήση της σχέσης: $\zeta_{0,i} = \sqrt{2S(\omega_i)\Delta\omega_i}$ όπου $S(\omega)$ είναι το φάσμα συχνοτήτων.

Η υπολογιζόμενη ανύψωση της επιφάνειας στο σημείο της κεκλιμένης ακτής με βάθος $d = 0.312 \text{ m}$ καταγράφηκε από τη χρονική στιγμή $t = 40.96 \text{ sec}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 327.68 \text{ sec}$. Το φάσμα που ελήφθη για διάφορες δοκιμές φαίνεται στα σχήματα 3.27 και 3.28.



Σχήμα 3.27: Δοκιμή OB-3 (Memos et al. 2005): σύγκριση μετρημένου και υπολογισμένου από το μοντέλο φάσματος ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας. Μονοκατευθυντικοί (long-crested) κυματισμοί, αρχική γωνία πρόσπτωσης $\theta = 15^\circ$, φάσμα εισόδου: Jonswap ($\gamma = 3.3$), περίοδος αιχμής $T_p = 1.2 \text{ sec}$, σημαντικό ύψος κύματος $H_s = 0.09 \text{ m}$ (πηγή: [85])



Σχήμα 3.28: Δοκιμή OB-10 (Memos et al. 2005): σύγκριση μετρημένου και υπολογισμένου από το μοντέλο φάσματος ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας. Μονοκατευθυντικοί (long-crested) κυματισμοί, αρχική γωνία πρόσπτωσης $\theta = 15^\circ$, φάσμα εισόδου: Jonswap ($\gamma = 3.3$), περίοδος αιχμής $T_p = 1.4 \text{ sec}$, σημαντικό ύψος κύματος $H_s = 0.15 \text{ m}$ (πηγή: [85])

Στα δύο αυτά σχήματα φαίνονται συγκριτικά τα υπολογισμένα και τα μετρημένα φάσματα. Τα αποτελέσματα του μοντέλου συμφωνούν αρκετά καλά με τις μετρήσεις. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει την ικανότητα του μοντέλου να προσομοιώνει ικανοποιητικά δισδιάστατα πεδία σύνθετων κυματισμών. Το φαινόμενο της μεταφοράς ενέργειας σε υψηλότερες συχνότητες είναι εμφανές και προσομοιώνεται πολύ ικανοποιητικά από το μοντέλο των Karambas και Memos (2009).

Οι Memos et al. (2005) εφάρμοσαν ένα μοντέλο Boussinesq ανώτερης τάξης και σύγκριναν τα αριθμητικά του αποτελέσματα με τα παραπάνω πειραματικά δεδομένα. Το μοντέλο αυτό (2005) βασιζόταν σε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα. Όπως αναφέρουν οι Karambas και Memos (2009) το νέο τους μοντέλο, παρά την υιοθέτηση ενός απλού ρητού αριθμητικού σχήματος και το μικρό αριθμό όρων στις εξισώσεις, δεν εξασφαλίζει σημαντικά μικρότερο υπολογιστικό κόστος, αφού η νέα προσέγγιση απαιτεί τον αριθμητικό υπολογισμό ενός συνελκτικού ολοκληρώματος, ο οποίος αυξάνει σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο. Επιπλέον, απαιτείται μικρότερο χρονικό βήμα από ότι στο πεπλεγμένο σχήμα των Memos et al. (2005).

3.7 ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΤΗΣ ΤΡΙΒΗΣ ΠΥΘΜΕΝΑ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ MEMOS (2009)

Στην παράγραφο 2.5.2 περιγράφηκε το θεωρητικό υπόβαθρο υπολογισμού της τριβής πυθμένα σύμφωνα με την ανάπτυξη των Dean και Dalrymple (1984). Οι Memos et al. (2005) ακολούθησαν μία διαφορετική προσέγγιση για τον υπολογισμό της τριβής πυθμένα. Βασιζόμενος σε αυτή την εργασία ο Koutsourelakis (2009) εισήγαγε την τριβή πυθμένα στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009). Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται συνοπτικά η ανάλυση των Memos et al. (2005) αφού αναφερθεί ότι η τριβή πυθμένα δε συμπεριλήφθηκε στην παρούσα εργασία λόγω έλλειψης στοιχείων στα πειράματα επαλήθευσης του μοντέλου.

Όπως αναφέρθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο, ο κυριότερος τρόπος μαθηματικής αντιμετώπισης της τριβής πυθμένα βασίζεται στη θεώρηση της διατμητικής τάσης που ασκείται στον πυθμένα από το υπερκείμενο νερό. Οι Memos et al. (2005) θεωρούν ότι οι στιγμιαίες διατμητικές τάσεις στον πυθμένα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\tau_{bx} = \frac{1}{2} f_{cw} u_o |\vec{u}_o| \quad \text{και} \quad \tau_{by} = \frac{1}{2} f_{cw} v_o |\vec{u}_o| \quad (3.136)$$

όπου $\vec{u}_o = (u_o, v_o)$ είναι μία ταχύτητα των μορίων του νερού κοντά στον πυθμένα (near bottom velocity) η οποία ορίζεται παρακάτω, $|\vec{u}_o| = \sqrt{u_o^2 + v_o^2}$ και f_{cw} ο παράγοντας τριβής πυθμένα λόγω ρεύματος-κύματος για τον οποίο ο Ribberink (1998) προτείνει:

$$f_{cw} = \left(\frac{|\vec{u}_{oc}|}{|\vec{u}_{oc}| + u_{ow-max}} \right) f_c + \left(1 - \frac{|\vec{u}_{oc}|}{|\vec{u}_{oc}| + u_{ow-max}} \right) f_w \quad (3.137)$$

όπου f_c και f_w είναι οι συντελεστές τριβής για ρεύμα και κύμα αντίστοιχα, u_{ow-max} είναι το πλάτος του τμήματος της ταχύτητας κοντά στον πυθμένα που ακολουθεί νόμο ταλάντωσης $\vec{u}_{ow} = (u_{ow}, v_{ow})$, $|\vec{u}_{oc}| = \sqrt{\bar{u}_o^2 + \bar{v}_o^2}$ όπου \bar{u}_o και \bar{v}_o είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας πυθμένα του μέσου στο χρόνο πεδίου των ρευμάτων και λαμβάνονται ως μέσος όρος των στιγμιαίων ταχυτήτων σε διάστημα τριών περιόδων κύματος για μονοχρωματικά κύματα ή σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα για σύνθετους κυματισμούς (Rakha et al. (1997)).

Το πλάτος u_{ow-max} του τμήματος της ταχύτητας κοντά στον πυθμένα που ακολουθεί ταλάντωση (δηλαδή του τμήματος που οφείλεται στα κύματα) προκύπτει ως μέσος όρος των πλατών των αυξομειούμενων τιμών των ταχυτήτων κοντά στον πυθμένα των προηγούμενων κυματισμών. Για θραυόμενους κυματισμούς η ταχύτητα κοντά στον πυθμένα \vec{u}_o στην περιοχή του επιφανειακού κυλίνδρου λαμβάνεται από τη σχέση ορισμού της μέσης κατά βάθος ταχύτητας \vec{U} :

$$\vec{U} = \frac{1}{h} \int_{-d}^{\zeta} \vec{u} dz \quad \text{με } h=d+\zeta \quad (3.138)$$

και είναι:

$$\vec{u}_o = \vec{U} \frac{h}{h-\delta} - \vec{c} \frac{\delta}{h-\delta} \quad (3.139)$$

όπου δ το πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου και \vec{c} η ταχύτητα μεταφοράς του επιφανειακού κυλίνδρου που κατά τους Sørensen et al. (1998) δίνεται από τις σχέσεις:

$$c_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1.3\sqrt{gd}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{και} \quad c_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{1.3\sqrt{gd}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{με} \quad \vec{c} = (c_x, c_y) \quad (3.140)$$

Εκτενής αναφορά στη θραύση γίνεται στο τέταρτο κεφάλαιο. Για μη θραυόμενους κυματισμούς (ή έξω από την περιοχή του επιφανειακού κυλίνδρου) μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κατακόρυφο προφίλ $\vec{u}(z)$ του Dingemans (1997) που στον πυθμένα ($z=-d$) δίνει:

$$u_o = U + \left(\frac{d}{2}\right) \frac{\partial^2 (dU)}{\partial x^2} - \left(\frac{d^2}{3}\right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.141)$$

$$v_o = V + \left(\frac{d}{2}\right) \frac{\partial^2 (dV)}{\partial y^2} - \left(\frac{d^2}{3}\right) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (3.142)$$

Οι συνιστώσες u_{ow}, v_{ow} του τμήματος της ταχύτητας κοντά στον πυθμένα που ακολουθεί ταλάντωση υπολογίζονται από τις συνιστώσες u_o, v_o της συνολικής ταχύτητας, αφού αφαιρεθούν από αυτές οι συνιστώσες \bar{u}_o, \bar{v}_o της μέσης ως προς το χρόνο ταχύτητας ρευμάτων. Δηλαδή:

$$u_{ow} = u_o - \bar{u}_o \quad \text{και} \quad v_{ow} = v_o - \bar{v}_o \quad (3.143)$$

Ο συντελεστής τριβής λόγω κυματισμού f_w υπολογίζεται βάσει της πεπλεγμένης σχέσης του Jonsson (1966):

$$f_w = \exp\left[-5.977 + 5.213\left(\frac{K_N}{A_b}\right)^{0.194}\right] \quad \text{για} \quad \frac{K_N}{A_b} < 0.63 \quad (3.144)$$

$$f_w = 0.3 \quad \text{για} \quad \frac{K_N}{A_b} \geq 0.63$$

όπου A_b είναι το πλάτος ταλάντωσης των υγρών σωματιδίων ($A_b = \frac{u_{ow-max}}{\omega}$, ω η γωνιακή συχνότητα (στην αιχμή για σύνθετους κυματισμούς)) και K_N είναι η τραχύτητα του πυθμένα.

Για την τραχύτητα K_N (παράμετρος Nikuradse) μπορούν να χρησιμοποιηθούν αρκετές εκφράσεις συναρτήσει χαρακτηριστικών διαμέτρων των κόκκων του υλικού του πυθμένα π.χ. d_{50}, d_{90} κλπ.

Κατά την προσθήκη της τριβής πυθμένα στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία: αρχικά θεωρείται μία τραχύτητα $K'_N = 2.5d_{50}$ ενός υποθετικού πυθμένα (d_{50} είναι η διάμετρος των κόκκων του υλικού πυθμένα από την οποία έχει μικρότερη διάμετρο το 50% των κόκκων) και βάσει αυτής υπολογίζεται από την πάνω εξίσωση της σχέσης (3.144) ένας θεωρητικός συντελεστής $f_{2.5}$. Στη συνέχεια υπολογίζεται μία παράμετρος Shields από τη σχέση:

$$\theta_{2.5} = \frac{1}{2} f_{2.5} \Psi \quad (3.145)$$

$$\mu \epsilon \Psi = \frac{u_{ow-max}^2}{g(s-1)d_{50}} \quad (3.146)$$

όπου $s = \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \approx 1.6$ και ρ_s η πυκνότητα του υλικού του πυθμένα και ρ η πυκνότητα του νερού. Τελικά η πραγματική τραχύτητα για πυθμένα χωρίς αμμοκυμάτια υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K_N = \begin{cases} 170d_{50}(\theta_{2.5} - 0.05)^{0.5}, & \theta_{2.5} > 0.05 \\ 2.5d_{50} & , \theta_{2.5} \leq 0.05 \end{cases} \quad (3.147)$$

και τελικά από τη σχέση (3.144) υπολογίζεται ο συντελεστής f_w .

Τέλος, ο συντελεστής τριβής λόγω ρεύματος f_c υπολογίζεται κατά τον Ribberink (1998) από τη σχέση:

$$f_c = \frac{2g}{C_c^2} \quad (3.148)$$

όπου C_c είναι ο συντελεστής τριβής Chezy που δίνεται από τη σχέση:

$$C_c = 18 \log_{10} \left[\frac{12(d+\bar{\zeta})}{K_N} \right] \quad (3.149)$$

όπου $\bar{\zeta}$ η μέση τιμή (ως προς το χρόνο) της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ζ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

Η ΘΡΑΥΣΗ ΣΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ BOUSSINESQ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΡΑΥΣΗ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

Ένα θαλάσσιο κύμα, που μεταδίδεται σε οριζόντιο ή κεκλιμένο πυθμένα με βάθη νερού μεγάλα σε σχέση με το μήκος κύματος και δεν υφίσταται την επίδραση εξωτερικών παραγόντων, όπως ο άνεμος, το θαλάσσιο ρεύμα κλπ., παραμένει σε γενικές γραμμές αμετάβλητο. Μόνο η συνεκτικότητα του νερού προκαλεί μια σχετικά μικρή μείωση του ύψους του, σε συνάρτηση με τη διανυόμενη απόσταση. Η σταθερότητα αυτή της ροής στα μεγάλα σχετικά βάθη του νερού αντανακλά την ελάχιστη επίδραση του πυθμένα στο κύμα, δεδομένου ότι το παρεμβαλλόμενο υψηλό υδάτινο στρώμα αποσβήνει την επίδραση. Η διατομή του ίδιου κύματος εμφανίζει παραμορφώσεις στις περιοχές μειούμενου σχετικού βάρους. Οι παραμορφώσεις αυτές οφείλονται στην επίδραση του πυθμένα και αρχίζουν να εμφανίζονται στη ζώνη πριν τη θραύση.

Σε περιοχές με σχετικό βάθος $\frac{d}{L}$ μικρότερο από μια κρίσιμη τιμή, που εξαρτάται από την αρχική καμπυλότητα του κύματος και την κλίση του πυθμένα, οι παραμορφώσεις αυξάνουν σημαντικά. Στις παραμορφώσεις περιλαμβάνονται η αύξηση του ύψους κύματος, η μείωση του μήκους, η αύξηση της καμπυλότητας και η εμφάνιση ασυμμετριών και υψηλών αρμονικών στη διατομή του. Επίσης, εμφανίζεται στροβιλότητα στην οριακή στοιβάδα κοντά στον πυθμένα. Μακροσκοπικά οι εμφανέστερες παραμορφώσεις είναι η αύξηση του ύψους και η μείωση του μήκους, με αποτέλεσμα την οφθαλμοφανή αύξηση της καμπυλότητας του κύματος.

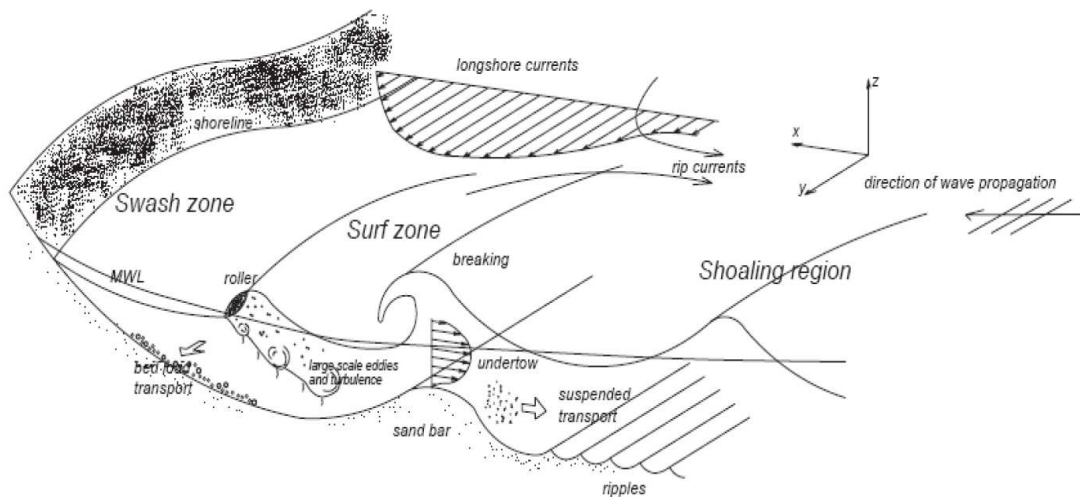
Η διατομή του κύματος αρχίζει να εμφανίζει σημεία αστάθειας, όταν οι αυξανόμενες παραμορφώσεις προσεγγίσουν ορισμένες οριακές τιμές. Η αστάθεια της διατομής σύντομα οδηγεί στη θραύση, που εμφανίζεται στη ζώνη θραύσης. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η θραύση εμφανίζεται και σε κυματισμούς σε βαθιά νερά αλλά τα γενεσιουργά της αίτια είναι διαφορετικά από την αλληλεπίδραση της ροής με τον πυθμένα. Το φαινόμενο της θραύσης είναι η κύρια εκδήλωση της υδροδυναμικής αστάθειας ενός κυματισμού.

Η θραύση συνοδεύεται από μετατροπή μέρους της κινητικής ενέργειας του κύματος σε ενέργεια τύρβης (turbulence) με ταυτόχρονη εμφάνιση αφρού (foam). Σε πολλές περιπτώσεις ένα λεπτό στρώμα νερού εκτινάσσεται από την κορυφή του κύματος. Εφ' όσον η εκτινασσόμενη μάζα περιέχει το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του κύματος, η θραύση είναι ολική και η καταστροφή του κύματος πλήρης. Διαφορετικά, το λεπτό στρώμα νερού κινείται με την επίδραση της βαρύτητας και προσκρούει στο υδάτινο στρώμα προς την ακτή. Μεταξύ της εκτινασσόμενης μάζας νερού και του εμπρόσθιου μετώπου της διατομής εγκλωβίζεται και συμπαρασύρεται αέρας (air bubbles), η ποσότητα του οποίου αυξάνει με την τύρβη. Πάντως, τα αίτια εμφάνισης της τύρβης δεν είναι σήμερα απόλυτα κατανοητά.

Στην περιοχή της θραύσης δημιουργείται έντονη τυρβώδης ροή. Στη ζώνη μετά τη θραύση (surf zone) η ροή διαφέρει ριζικά από την προηγούμενη κυματική ροή. Σε γενικές γραμμές η ροή στη ζώνη αυτή παρουσιάζει σε μία περίοδο κύματος δύο χαρακτηριστικές φάσεις: τη φάση ανόδου και τη φάση καθόδου. Για να περιγραφούν οι δύο αυτές φάσεις θα πρέπει να γίνουν αντιληπτοί οι φυσικοί μηχανισμοί που ενεργοποιούνται.

Κατά τη διάρκεια της θραύσης μεταβάλλεται σημαντικά η ορμή των υγρών σωματιδίων. Οι μεταβολές αυτές προκαλούνται από την εμφάνιση δυνάμεων που μπορούν να αναλυθούν σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη στην ακτογραμμή και μία κάθετη σε αυτή. Λόγω της διατήρησης της ορμής, οι δυνάμεις αυτές συνοδεύονται από τη δημιουργία ενός ρεύματος παράλληλου στην ακτή (longshore current) και ενός κάθετου στην ακτή (cross-shore current) ακολουθούμενου από μία ανύψωση της μέσης στάθμης κυματισμού (wave setup) μετά τη θέση θραύσης προς την ακτή. Αντίθετα, λίγο πριν τη θραύση η αντίδραση του κεκλιμένου πυθμένα προκαλεί μία πτώση της μέσης στάθμης κυματισμού (wave setdown). Εκτός της μετατροπής της κινητικής ενέργειας σε ενέργεια τύρβης, απώλεια ενέργειας συμβαίνει και λόγω της τριβής πυθμένα.

Αμέσως μετά τη θραύση του κύματος, το υδάτινο στρώμα στη ζώνη απόσβεσης αρχίζει να κινείται προς την ακτή λόγω της ορμής που αποκτά από το θραυόμενο κύμα. Η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη κάτω από την επίδραση της βαρύτητας και της τριβής στον πυθμένα. Η φάση ανόδου τερματίζεται όταν η κινητική ενέργεια του στρώματος μετατραπεί σε δυναμική ενέργεια, οπότε μηδενίζονται οι ταχύτητες ανόδου των υγρών σωματιδίων. Μετά το τέλος της φάσης ανόδου το υδάτινο στρώμα κινείται προς τα ανοιχτά λόγω της επίδρασης της βαρύτητας. Η κίνηση στη φάση καθόδου είναι επιταχυνόμενη ως τη χρονική στιγμή της επόμενης θραύσης.



Σχήμα 4.1: Οι κυριότερες φυσικές διεργασίες στις ζώνες θραύσης (surf zone) και διαβροχής (swash zone). Η περιοχή ρήχωσης (shoaling region), τα αμμοκυμάτια (ripples), το αντίρρευμα κάτω από θραυόμενους κυματισμούς (undertow), τα ρεύματα κατά μήκος της ακτής (longshore currents) και τα βελοειδή ρεύματα (rip currents) (πηγή: [128])

Στο σχήμα 4.1 φαίνονται οι κυριότερες φυσικές διεργασίες στη ζώνη πριν τη θραύση, στη ζώνη θραύσης (surf zone) και στη ζώνη διαβροχής (swash zone). Σε αντίθεση με τη ζώνη πριν από τη θραύση, για την οποία έχουν διατυπωθεί ορισμένες θεωρίες, παρατηρείται μία χαρακτηριστική

έλλειψη θεωρητικών μελετών για τη μετάδοση του κύματος στη ζώνη θραύσης και ιδιαίτερα στη γραμμή θραύσης. Η έλλειψη ξεκινάει κατά κύριο λόγο από την αδυναμία μίας ολοκληρωμένης ρεαλιστικής διατύπωσης του προβλήματος. Αλλά ακόμη και σε περιπτώσεις μερικής διατύπωσής του δεν είναι εφικτή η επίτευξη αναλυτικών λύσεων. Η αδυναμία διατύπωσης του προβλήματος οφείλεται στο γεγονός ότι η θραύση έχει ελάχιστα κατανοηθεί από φυσικής άποψης. Στις πολύ λίγες υφιστάμενες θεωρητικές μελέτες του κύματος στη ζώνη θραύσης μπορούν να διακριθούν δύο τάσεις, που είναι απόρροια της αδυναμίας αντιμετώπισης του καθ' αυτού προβλήματος:

- Εξομοίωση-παραλληλισμός της θραύσης με άλλα φαινόμενα της ρευστομηχανικής
- Παρακολούθηση της κίνησης της ελεύθερης επιφάνειας

Η πρώτη σκέψη εξομοίωσης έγινε από θεωρητικούς της κυματομηχανικής με τον παραλληλισμό της εμφάνισης της θραύσης σε ρηχό νερό με την εμφάνιση ασυνεχών κυμάτων shock στην αεροδυναμική. Παρά την αρχική αυτή σύλληψη, δε συναντάται στη βιβλιογραφία κάποια πρακτική εφαρμογή της στη ζώνη θραύσης. Αντίθετα, κάποιοι ερευνητές την εφάρμοσαν στη μελέτη της ροής στη ζώνη μετά τη θραύση. Ο Peregrine (1978) θεωρεί ότι στις περισσότερες θραύσεις εκτινάσσεται ένα λεπτό στρώμα νερού από την κορυφή του κύματος. Το στρώμα κινείται με οριζόντια ταχύτητα και προσκρούει στην υπόλοιπη υδάτινη μάζα. Η ροή του στρώματος προσομοιάζεται με την κίνηση υδάτινης φλέβας. Στη δεύτερη φάση της θραύσης, οπότε η κυματική κίνηση αποδιοργανώνεται πλήρως, ο ίδιος συγγραφέας προτείνει την εξομοίωση της ροής με τη ροή σε ένα τυρβώδες στρώμα μίξης.

Στα πλαίσια της δεύτερης τάσης, η πρώτη απόπειρα έγινε από τους Harlow και Welch (1965). Χρησιμοποίησαν τις εξισώσεις Navier-Stokes και προσπάθησαν να παρακολουθήσουν τις παραμορφώσεις της ελεύθερης επιφάνειας στη ζώνη θραύσης με αριθμητική ανάλυση. Ο Burger (1967) προσπάθησε να προσεγγίσει τη θραύση με τις εξισώσεις κύματος σε ρηχό νερό. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή και λόγω του υπερβολικού χαρακτήρα των διαφορικών εξισώσεων, η θραύση εμφανίζεται όταν το μέτωπο του κύματος γίνει κατακόρυφο. Στην ίδια τάση εγγράφονται και οι θεωρήσεις των Longuet-Higgins και Cokelet (1976) και Cokelet (1978), στις οποίες περιγράφεται και διερευνάται η δυναμική συμπεριφορά του στάσιμου σημείου, που σχηματίζεται στην ελεύθερη επιφάνεια του κύματος και ορίζει το θραυόμενο από το μη θραυόμενο τμήμα της διατομής. Η εμφάνιση του στάσιμου σημείου στη θραύση βρίσκει τη φυσική εξήγησή της στην εμπειρική παρατήρηση ότι η κορυφή του κύματος στη θραύση κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα. Αποτέλεσμα της διαφορετικής ταχύτητας κίνησης της κορυφής και του υπόλοιπου τμήματος της διατομής είναι η αναστροφή της φοράς του διανύσματος ταχύτητας μεταξύ των δύο αυτών τμημάτων, που αντιστοιχεί σε μία αναστροφή φοράς κίνησης της μέσης ροής στα δύο τμήματα της διατομής. Η αναστροφή της φοράς ροής προϋποθέτει την εμφάνιση στάσιμου σημείου. Οι συγγραφείς θεωρούν ότι το κρίσιμο τμήμα της διατομής του κύματος στη ζώνη θραύσης είναι η κορυφή. Η επιφάνεια παραμένει λεία ως τη θραύση, όπου μια απότομη αύξηση στην πυκνότητα ενέργειας τείνει να κρατήσει το εμπρόσθιο μέτωπο της διατομής του κύματος κατακόρυφο. Η διατομή με κατακόρυφο μέτωπο είναι οριακή και χαρακτηρίζεται ως διατομή θραύσης. Καθώς αυξάνει η ενέργεια του κύματος, η μορφή της θραύσης μεταβάλλεται από θραύση στο μέτωπο σε θραύση στην κορυφή, ενώ αυξάνει η ταχύτητα των υγρών σωματιδίων στην κορυφή, η οποία τείνει να κινηθεί ταχύτερα από τον κορμό της διατομής και να αποχωρισθεί. Η ακτίνα καμπυλότητας του τμήματος της διατομής που αποχωρίζεται, αυξάνει με

την ενέργεια του κύματος και ταυτόχρονα μεγαλύτερο μέρος της ορμής του κύματος περιέχεται σε αυτό.

Η θραύση εκδηλώνεται αρχικά σε μία από τις παρακάτω τρεις ζώνες της διατομής του κύματος (σχήμα 4.2):

- άνω μέρος της διατομής
- κορμός της διατομής
- βάση της διατομής

Και οι τρεις ζώνες βρίσκονται στο εμπρόσθιο τμήμα της διατομής. Η θεαματικότητα της θραύσης διαφέρει ανάλογα με τη ζώνη εκδήλωσής της. Θεαματικότερη και ταυτόχρονα καταστροφικότερη είναι η θραύση στο άνω μέρος της διατομής. Λιγότερο θεαματική είναι η θραύση στη βάση της διατομής.



Σχήμα 4.2: Ζώνες εκδήλωσης θραύσης (πηγή [125])

Η περισσότερη σχετική έρευνα έχει αφιερωθεί στη θραύση στο άνω μέρος της διατομής. Πρόκειται για τον πιο ενδιαφέροντα τύπο θραύσης για το μηχανικό, δεδομένου ότι οι μεγαλύτερες φορτίσεις προκαλούνται από θραύσεις τέτοιας μορφής. Η εμφάνιση της θραύσης σε μία από τις παραπάνω τρεις ζώνες της διατομής του κύματος εξαρτάται από τις παραμέτρους: κλίση του πυθμένα, αρχικό ύψος και μήκος κύματος στα βαθιά και βάθος νερού στη θέση θραύσης. Οι τρεις πρώτες παράμετροι συνοψίζονται στον αριθμό Iribaren:

$$\xi_0 = \frac{\tan\theta}{\sqrt{\frac{H_0}{L_0}}} \quad (4.1)$$

όπου $\tan\theta$ είναι η κλίση της ακτής, H_0 το ύψος κύματος στα βαθιά και L_0 το μήκος κύματος στα βαθιά. Η θραύση των κυματισμών στην ανοιχτή θάλασσα και στις ακτές αποτελεί το μηχανισμό περιορισμού του ύψους κύματος με δεδομένη περίοδο T (άρα και L) και τον κύριο μηχανισμό ανάμιξης των επιφανειακών νερών. Ειδικότερα στις ακτές, ανάλογα με την τιμή του αριθμού Iribaren ξ_0 , διαμορφώνονται οι ακόλουθοι τύποι θραυόμενων κυματισμών και κατ' επέκταση ρυθμών απόσβεσης της ενέργειας του κύματος από τη γραμμή θραύσης ως την ακτογραμμή:

- I. **Θραύση κύλισης (spilling):** η αστάθεια εμφανίζεται στο άνω μέρος της διατομής του κύματος. Η κορυφή κυλά στο εμπρόσθιο μέτωπο και ταυτόχρονα εμφανίζεται χαρακτηριστικός αφρός στην επιφάνεια του νερού. Η θραύση ολοκληρώνεται σε μία σχετικά επιμήκη ζώνη και εμφανίζεται σε κύματα υψηλής αρχικής καμπυλότητας σε ελαφρά κεκλιμένους πυθμένες.
- II. **Θραύση κατάδυσης (plunging):** η κορυφή του κύματος κινείται προς την ακτή ταχύτερα από τον κορμό του κύματος κάτω από την επίδραση μιας οριζόντιας ταχύτητας και της βαρύτητας. Η κυματική μορφή καταστρέφεται σε πολύ κεκλιμένους πυθμένες και σε κύματα μέτριας αρχικής καμπυλότητας. Η θραύση ολοκληρώνεται σε μια σχετικά μικρού μήκους ζώνη θραύσης.

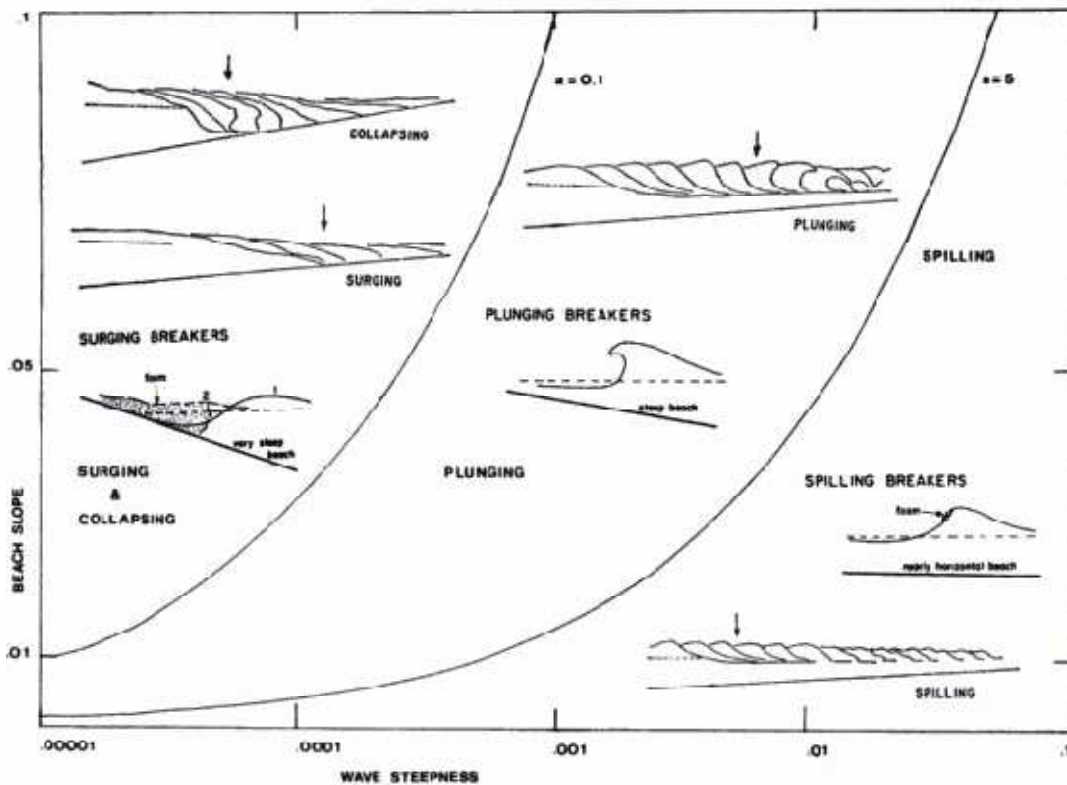
III. **Θραύση εφόρμησης (surging):** η θραύση εμφανίζεται στη βάση της διατομής. Το σύνολο του κύματος συνεχίζει τη μετάδοσή του προς την ακτή και μετά την εμφάνιση της θραύσης.

IV. **Θραύση κατάρρευσης (collapsing):** Εμφανίζεται σε κύματα με χαρακτηριστικά ανάλογα εκείνων στα οποία εμφανίζεται θραύση εφόρμησης. Κατατάσσεται ενδιάμεσα των τύπων κατάδυσης και εφόρμησης και χαρακτηρίζεται από το απαραμόρφωτο της κορυφής της διατομής. Το εμπρόσθιο μέτωπο της διατομής τείνει να γίνει κατακόρυφο στη βάση της διατομής και στη συνέχεια να καταρρεύσει.

Σε ακτή ομοιόμορφης κλίσης ο τύπος θραύσης καθορίζεται ως εξής:

- Εφόρμησης / κατάρρευσης (surging / collapsing) $\xi_0 > 3.3$
- Κατάδυσης (plunging) $0.5 < \xi_0 < 3.3$
- Κύλισης (spilling) $\xi_0 < 0.5$

Πρέπει να σημειωθεί ότι κύματα εξαιρετικά μικρής καμπυλότητας (δηλαδή συνήθως μακρά κύματα) δεν θραύονται συνήθως στις ακτές, αλλά ανακλώνται από αυτές. Στο σχήμα 4.3 φαίνονται οι διάφοροι τύποι θραύσης κυματισμών συναρτήσει της καμπυλότητας στα βαθιά και της κλίσης του πυθμένα.



Σχήμα 4.3: Τύποι θραύσης κυματισμών συναρτήσει της καμπυλότητας στα βαθιά (οριζόντιος άξονας) και της κλίσης του πυθμένα (κατακόρυφος άξονας) (πηγή: [94])



(α)



(β)



(γ)



(δ)

Εικόνα 4.1: Θραύση κυματισμών στη φύση (α) τύπου plunging (β) τύπου spilling (γ) τύπου surging (δ) τύπου collapsing



Εικόνα 4.2: Θραύση κυματισμών στο εργαστήριο

4.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΘΡΑΥΣΗΣ

Αν δεν ξεπεραστούν κάποιες οριακές τιμές των βασικών γεωμετρικών χαρακτηριστικών των κυματισμών H, L, d , οι κυματισμοί είναι υδροδυναμικά ευσταθείς και τα γενεσιουργά αίτια κίνησης των μορίων του νερού συνεπάγονται τροχιές που είναι ομαλές καμπύλες. Το φαινόμενο της θραύσης είναι η κύρια εκδήλωση υδροδυναμικής αστάθειας στη διάδοση των κυματισμών. Η καμπύλη της επιφάνειας του νερού γίνεται υδροδυναμικά ασταθής στην ανοιχτή θάλασσα όταν η καμπυλότητα H/L ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή. Συγκεκριμένα, για νερά ενδιάμεσου βάθους η θεωρία υδροδυναμικής ευστάθειας δίνει το όριο:

$$\frac{H}{L} = \frac{1}{7} \tanh(kd) \quad (4.2)$$

η οποία για βαθιά νερά γίνεται οριακά: $\frac{H_0}{L_0} < \frac{1}{7}$ (4.3)

Στα ρηχά νερά η καμπύλη της επιφάνειας του νερού γίνεται υδροδυναμικά ασταθής όταν ο λόγος H/d ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή. Στη ζώνη αυτή ο κυματισμός έχει προσεγγίσει μορφολογικά μια σειρά μοναχικών κυμάτων. Επομένως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ανάλυση του McCowan (1891) για μοναχικά κύματα, ο οποίος προτείνει ένα όριο πέρα από το οποίο η υπέρβαση της φασικής ταχύτητας από την ταχύτητα των μορίων οδηγεί σε θραύση. Συγκεκριμένα:

$$\gamma_b = \frac{H_b}{d_b} = 0.78 \quad (4.4)$$

όπου ο δείκτης b υποδηλώνει θραύση. Τη θεωρία του μοναχικού κύματος εφάρμοσε και ο Munk (1949) κάνοντας την παραδοχή της διατήρησης της ροής ενέργειας στον κεκλιμένο πυθμένα (απουσία ανάκλασης ενέργειας) και κατέληξε στη σχέση:

$$H_b = 0.3H_0 \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^{-1/3} \quad (4.5)$$

Στην περίπτωση επενέργειας ενδιάμεσης διάθλασης, στη θέση του ύψους κύματος στα βαθιά H_0 στη σχέση (4.5) πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα ισοδύναμο ύψος στα βαθιά αφού έχει επενεργήσει θεωρητικά σε αυτό η διάθλαση ($H'_0 = H_0 k_R$, με k_R το συντελεστή διάθλασης).

Οι Komar και Gaughan (1972) χρησιμοποίησαν τη γραμμική θεωρία του Airy για να υπολογίσουν τη ροή ενέργειας στη ζώνη ανοιχτής θάλασσας και στη ζώνη θραύσης. Εξίσωσαν τις δύο σχέσεις και αφού χρησιμοποίησαν και υφιστάμενα πειραματικά δεδομένα κατέληξαν στη σχέση θραύσης:

$$H_b = 0.56H_0 \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^{-1/5} \quad (4.6)$$

όπου αντίστοιχα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το (unrefracted) ύψος κύματος στα βαθιά H'_0 αντί του H_0 στην περίπτωση επενέργειας ενδιάμεσης διάθλασης. Οι σχέσεις (4.5) και (4.6) είναι ποιοτικά όμοιες και οι αριθμητικοί συντελεστές διαφέρουν λόγω των διαφορετικών θεωριών μετάδοσης κύματος που χρησιμοποιήθηκαν στις δύο προσεγγίσεις.

Αρκετές μελέτες έχουν δείξει πως η έναρξη της θραύσης εξαρτάται και από την κλίση του πυθμένα εκτός της καμπυλότητας του κύματος. Χρησιμοποιώντας πειραματικά δεδομένα για τη θραύση μονοχρωματικών κυματισμών, ο Weggel (1972) κατέληξε στη σχέση:

$$\gamma_b = \frac{H_b}{d_b} = b - a \frac{H_b}{gT^2} \quad (4.7)$$

που ισχύει για κλίσεις πυθμένα $\tan\beta \leq 0.1$ και ισοδύναμη καμπυλότητα στα βαθιά $H'_0/L_0 \leq 0.06$. Οι παράμετροι a και b προσδιορίστηκαν εμπειρικά ως:

$$a = 43.8(1 - e^{-19\tan\beta}) \quad (4.8)$$

$$b = \frac{1.56}{1 + e^{-19.5\tan\beta}} \quad (4.9)$$

Την επίδραση της κλίσης του πυθμένα κατέδειξαν και οι Le Méhauté και Koh (1967) που μελέτησαν πειραματικά δεδομένα για μονοχρωματικά κύματα και κατέληξαν στη σχέση θραύσης:

$$\frac{H_b}{H_0} = 0.76(\tan\beta)^{1/7} \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^{-1/4} \quad (4.10)$$

που ισχύει για κλίσεις πυθμένα $0.02 \leq \tan\beta \leq 0.2$ και $0.002 \leq H_0/L_0 \leq 0.09$ (αντίστοιχα με παραπάνω χρήση του H'_0 αντί του H_0).

Για κλίσεις πυθμένα $\tan\beta \leq 0.01$ ο Nelson (1994) προτείνει τη σχέση θραύσης:

$$\left(\frac{H}{d}\right)_{max} = 0.55 + \exp(-0.012\cot\beta) \quad (4.11)$$

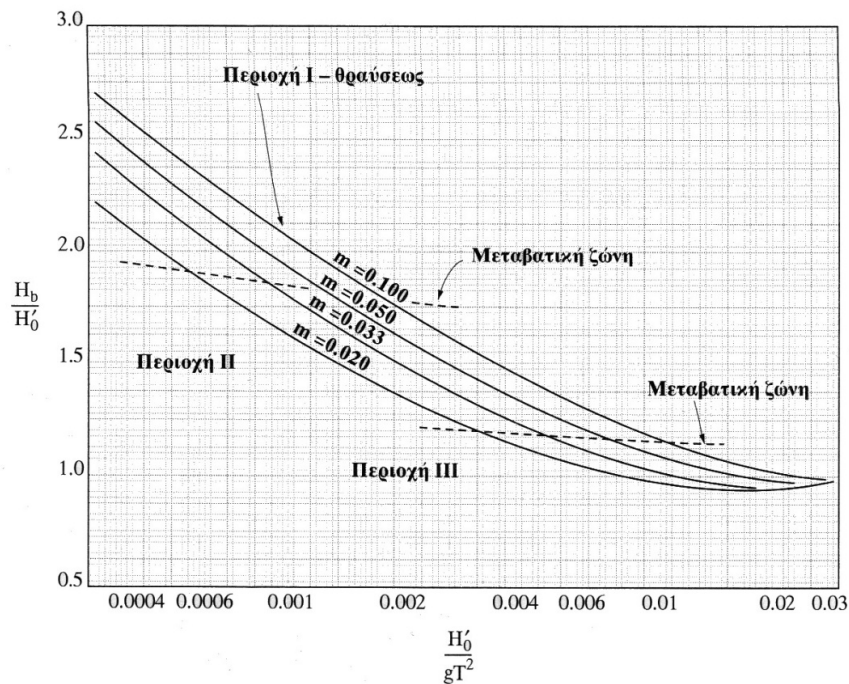
Τέλος, για την περίπτωση πυθμένα σταθερού βάθους d_o που ακολουθείται από κεκλιμένο πυθμένα, οι Moutzouris και Marcou (1978) κατέληξαν πειραματικά στην εμπειρική σχέση:

$$\frac{H_b}{H_0} = 1.8 \left(\frac{H_0}{L_0}\right)^{-0.5(d_o/L_0)^{0.7}} \quad (4.12)$$

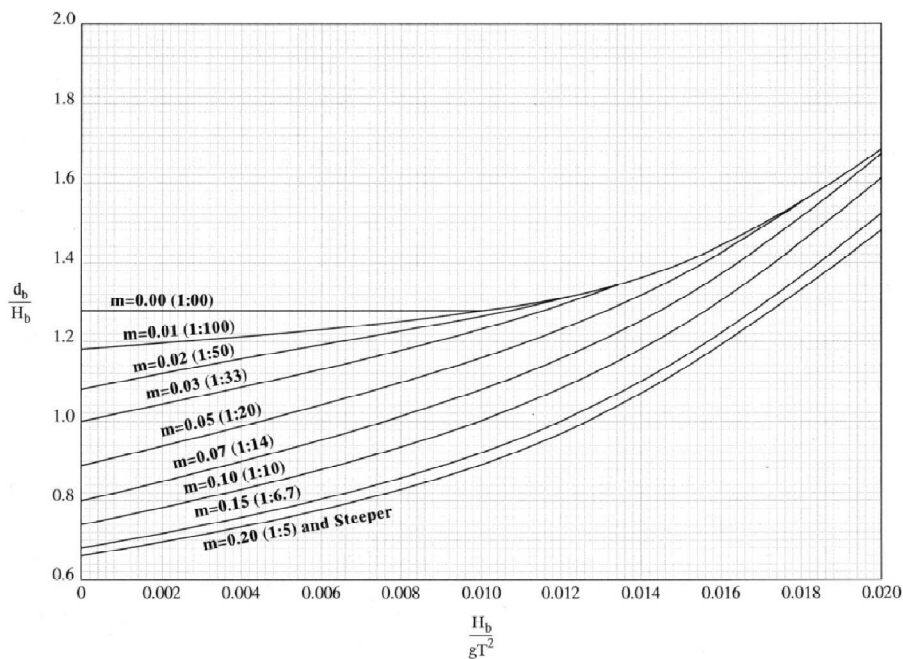
όπου ο δείκτης ο αναφέρεται στα χαρακτηριστικά του κύματος στο τμήμα σταθερού βάθους.

Εκτός των παραπάνω αναλυτικών κριτηρίων θραύσης για μονοχρωματικούς κυματισμούς, αρκετοί ερευνητές έχουν καταλήξει μέσα από πειραματικές μελέτες στη σύνταξη διαγραμμάτων για τον υπολογισμό των κυματικών χαρακτηριστικών στη γραμμή θραύσης. Ενδεικτικά αναφέρονται ο Iversen (1952) και τα διαγράμματα της International Commission for the study of

Waves της PIANC (1973) που βασίζονται σε πειράματα του Goda (1970). Στα σχήματα 4.4 και 4.5 παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποια τέτοια διαγράμματα.



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα υπολογισμού του ύψους κύματος θραύσεως H_b συναρτήσεως του (unrefracted) ύψους κύματος στα βαθιά H'_0 , της περιόδου του κύματος T και της κλίσης του πυθμένα m (πηγή: [93])



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα υπολογισμού του βάθους θραύσεως d_b συναρτήσεως του ύψους κύματος θραύσεως H_b , της περιόδου του κύματος T και της κλίσης του πυθμένα m (πηγή: [93])

Τα παραπάνω κριτήρια θραύσης ισχύουν για την περίπτωση διάδοσης μονοχρωματικών κυματισμών. Στην περίπτωση διάδοσης σύνθετων κυματισμών δεν εμφανίζεται μοναδική γραμμή θραύσης, αλλά η εκκίνηση της θραύσης συμβαίνει μέσα σε μία πλατιά ζώνη λόγω των πολλών κυματικών συνιστωσών. Μέσα στη ζώνη αυτή (saturated breaking zone) το ύψος κύματος συνδέεται με το τοπικό βάθος μέσω της σχέσης των Thornton και Guza (1983):

$$H_{rms,b} = 0.42d \quad (4.13)$$

ή προσεγγιστικά

$$H_{m_0,b} = 0.6d \quad (4.14)$$

Παρότι αναμένεται κάποια μεταβλητότητα των $H_{rms,b}$ και $H_{m_0,b}$ με την καμπυλότητα του κύματος και την κλίση του πυθμένα, δεν έχει διερευνηθεί πλήρως η εξάρτηση αυτή. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι το φασματικό αριθμητικό μοντέλο STWAVE των Smith et al. (2001) χρησιμοποιεί ένα τροποποιημένο κριτήριο θραύσης του Miche (1951) ώστε να συμπεριλάβει την επίδραση του βάθους και της καμπυλότητας του κύματος:

$$H_{m_0,b} = 0.1L \tanh(kd) \quad (4.15)$$

4.3 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΕΝΤΟΣ ΤΗΣ ΖΩΝΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ

Το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) με την εισαγωγή της θραύσης περιγράφει τη διάδοση κυματισμών και εντός της ζώνης θραύσης (surf zone). Για αυτό το λόγο στην παράγραφο αυτή επιχειρείται μία συνοπτική περιγραφή της θεωρητικής προσέγγισης στη διάδοση των κυμάτων στη ζώνη θραύσης.

Μετά την έναρξη της θραύσης στη γραμμή θραύσης, το κυματικό προφίλ μεταβάλλεται απότομα και η διαταραχή παίρνει τη μορφή ενός περιοδικού κινηματικού κύματος (bore). Το κύμα αυτό έχει χαρακτηριστικό πριονωτό (sawtooth) σχήμα και το μέτωπο του γίνεται σχεδόν κάθετο. Η απώλεια ενέργειας συνεχίζεται μέχρι την ακτογραμμή, ενώ σε περίπτωση μεταβολής του βάθους το κύμα ενδεχομένως αναδιοργανώνεται και θραύεται ξανά σε μικρότερο βάθος. Ο μετασχηματισμός του ύψους κύματος εντός της ζώνης θραύσης επιδρά στο setup, την αναρρίχηση του κύματος στην ακτή, στα παράκτια ρεύματα και στην παράκτια στερεομεταφορά. Συνεπώς, σημαντικό θέμα είναι η αναδιοργάνωση των κυματισμών μετά την πρώτη θραύση στη γραμμή θραύσης, μέσα στη ζώνη θραύσης ως το υψηλότερο σημείο της ακτής όπου αναρριχώνται. Για τον υπολογισμό του ύψους κύματος μονοχρωματικών κυματισμών εντός της ζώνης θραύσης εφαρμόζονται δύο μέθοδοι:

- ◆ Μέθοδος της ομοιότητας (similarity method)
- ◆ Μέθοδος της ροής ενέργειας (energy flux method)

Η μέθοδος της ομοιότητας είναι η πιο απλή και βασίζεται στην υπόθεση ότι ο λόγος του ύψους κύματος προς το βάθος διατηρείται σταθερός από τη γραμμή θραύσης ως την ακτογραμμή. Δηλαδή:

$$H_b = \gamma_b d_b \quad (4.16)$$

Η μέθοδος της ομοιότητας μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε ακτές με μονοτονικά μειούμενο βάθος και δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα για κλίσεις πυθμένα περίπου 1/30. Σε πιο απότομες κλίσεις υποεκτιμά το H_b , ενώ σε πιο ήπιες το υπερεκτιμά. Στη θέση της ακτογραμμής ο Camfield (1991) δίνει μια συντηρητική εκτίμηση (για ήρεμη θάλασσα) $0.2H_b$ για $0.01 \leq \tan\beta \leq 0.1$. Ο Koutitas (1994) για θραύσεις τύπου spilling ή ελαφρώς plunging ($0.05 < \xi < 2$) δίνει:

$$\gamma = \xi^{0.17} + 0.08 \quad (4.17)$$

Η μέθοδος της ροής ενέργειας είναι πιο γενική. Για μόνιμες συνθήκες η διατήρηση της ενέργειας γράφεται:

$$\frac{d(EC_g)}{dx} = -\delta \quad (4.18)$$

όπου δ είναι ο ρυθμός απώλειας ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας (όπως και η E) εξαιτίας της θραύσης. Η παράμετρος δ μπορεί να εκφραστεί σύμφωνα με τη θεωρία του υδραυλικού άλματος κατά τον Le Méhauté (1962) ή σύμφωνα με τους Dally et al. (1985):

$$\delta = \frac{\kappa}{d} (EC_g - EC_{g,s}) \quad (4.19)$$

όπου $\kappa \approx 0.15$ είναι ένα εμπειρικός συντελεστής απόσβεσης και $EC_{g,s}$ η ροή ενέργειας που αναφέρεται σε ένα σταθερό ύψος κύματος:

$$H_{stable} = \Gamma d \quad (4.20)$$

όπου Γ ένας εμπειρικός συντελεστής με τιμή περίπου 0.4. Το H_{stable} είναι το ύψος κύματος στο οποίο σταματάει η θραύση και μετά αναδιοργανώνεται το κύμα. Εφαρμόζοντας τη γραμμική θεωρία ρηχών νερών προκύπτει:

$$\frac{d(H^2 d^{1/2})}{dx} = \begin{cases} -\frac{\kappa}{d} (H^2 d^{1/2} - \Gamma^2 d^{5/2}), & H > H_{stable} \\ 0, & H < H_{stable} \end{cases} \quad (4.21)$$

Σύνθετοι κυματισμοί με στατιστική απεικόνιση εκτός της ζώνης θραύσης (π.χ. κατανομή υψών Rayleigh) μπορούν να αναλυθούν στις συνιστώσες τους και αυτές να "διοδευθούν" εντός της ζώνης θραύσης μέχρι το σημείο ενδιαφέροντος. Εκεί γίνεται ανασύνταξη της στατιστικής απεικόνισης με σύνθεση των διαφόρων συνιστωσών.

Άλλος τρόπος είναι να θεωρηθεί κάποια κατανομή υψών μέσα στη ζώνη θραύσης. Συνήθως χρησιμοποιείται η αποκομμένη (truncated) κατανομή Rayleigh σύμφωνα με τη μέγιστη τιμή του ύψους κύματος θραύσης στην υπόψη θέση. Η διαδικασία φαίνεται ενδεικτικά στο σχήμα 4.6 κατά τον Goda (1999), ο οποίος αναφέρει ότι η truncated Rayleigh κατανομή εφαρμόζεται καλύτερα στο μεσαίο τμήμα της ζώνης θραύσης, ενώ τόσο στην περιοχή της ακτογραμμής, όσο

και στο εξωτερικό όριο της ζώνης θραύσης η συνήθης κατανομή Rayleigh δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

Για την ποσότητα δ της σχέσης (4.18) οι Battjes και Janssen (1978) θεώρησαν:

$$\delta = \frac{1}{4} \rho g Q_b f_m H_{max}^2 \quad (4.22)$$

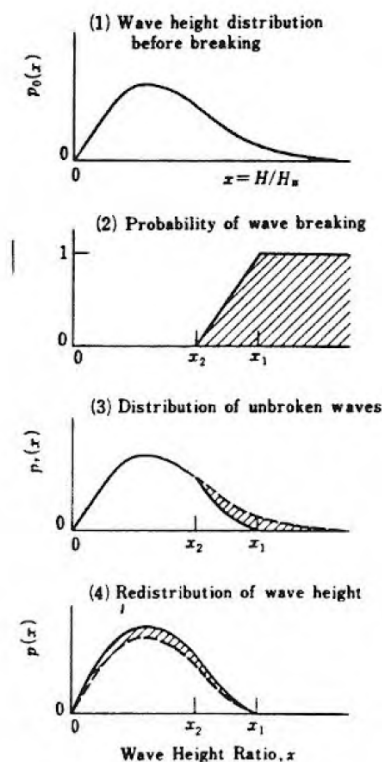
όπου H_{max} η μέγιστη τιμή του H_b που αναφέρθηκε παραπάνω, f_m η μέση συχνότητα κυματισμών και Q_b το ποσοστό των θραυόμενων κυματισμών. Θεωρώντας ότι τα ύψη κύματος ακολουθούν κατανομή Rayleigh και θέτοντας $b = \frac{H_{rms}}{H_{max}}$ προκύπτει:

$$Q_b = \exp\left(-\frac{1-Q_b}{b^2}\right) \quad (4.23)$$

Η περιγραφή της εκκίνησης και της εξέλιξης της θραύσης και η προσομοίωση της διάδοσης των κυματισμών εντός της ζώνης θραύσης και διαβροχής, αποτελούν αντικείμενο έρευνας σχετικής με τα μοντέλα Boussinesq. Μάλιστα, τις τελευταίες δύο δεκαετίες έχει συντελεστεί σημαντική πρόοδος σε θεωρητικό και πειραματικό επίπεδο. Για το λόγο αυτό υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία σχετικά με την εισαγωγή της θραύσης σε μοντέλα Boussinesq. Οι τρεις κύριοι τρόποι προσομοίωσης της θραύσης είναι:

- Το μοντέλο του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller model)
- Το μοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity model)
- Το μοντέλο στροβιλότητας (vorticity model)

Επίσης, έχουν προταθεί μέθοδοι προσομοίωσης που συνδυάζουν τα δύο πρώτα μοντέλα (Karambas και Tozer (2003)). Στην παρούσα διπλωματική η προσθήκη της θραύσης στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) επιχειρείται ακολουθώντας την πρόταση των Cienfuegos et al. (2006, 2010) που ουσιαστικά συνδυάζει τα μοντέλα του επιφανειακού κυλίνδρου και της τυρβώδους συνεκτικότητας λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή του επιφανειακού κυλίνδρου και στην εξίσωση συνέχειας με έναν επιπλέον όρο θραύσης. Στις επόμενες δύο παραγράφους περιγράφονται τα μοντέλα θραύσης του επιφανειακού κυλίνδρου και της τυρβώδους συνεκτικότητας, καθώς και οι προσθήκες τους στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009). Για λόγους πληρότητας γίνεται και μια συνοπτική περιγραφή του μοντέλου στροβιλότητας.



Σχήμα 4.6: Αποκομμένη κατανομή υψών εντός της ζώνης θραύσης (πηγή: [62])

4.4 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΡΑΥΣΗΣ ΤΟΥ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ (SURFACE ROLLER MODEL)

Ο Engelund (1981) περιέγραψε ένα ελαφρύ υδραυλικό άλμα θεωρώντας ένα επιπλέον όρο πίεσης στην ολοκληρωμένη στο βάθος εξίσωση ορμής που προέρχεται από την παρουσία ενός επιφανειακού υδάτινου κυλίνδρου (surface roller). Χρησιμοποιώντας την αναλογία μιας ξεχωριστής ροής διαχυτήρων η γωνία της διεπιφάνειας ανάμεσα στον κύλινδρο και την υποκείμενη οργανωμένη ροή εκτιμήθηκε περίπου ίση με 10° .

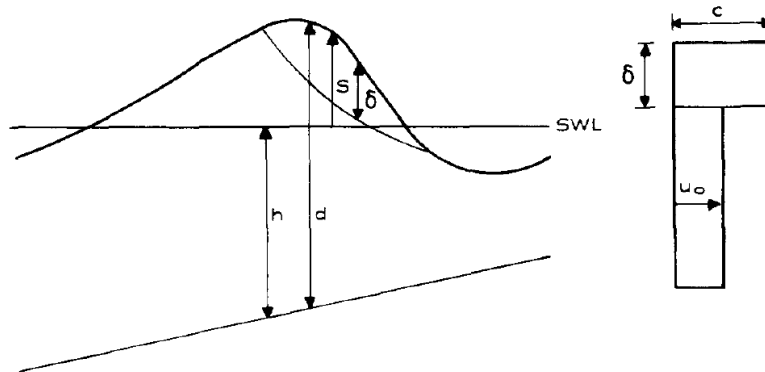
Ο Deigaard (1989) ακολούθησε τις ιδέες του Engelund και εισήγαγε τη θεώρηση του επιφανειακού κυλίνδρου σε ένα μοντέλο Boussinesq που βασιζόταν αρχικά στις εξισώσεις των Abbott et al. (1978). Έγινε η υπόθεση ότι ο επιφανειακός κύλινδρος είναι μια μάζα νερού που κινείται με την ταχύτητα του κύματος. Η θραύση του κύματος ξεκινούσε όταν η τοπική κλίση του μετώπου του κύματος ξεπερνούσε την οριακή τιμή που προσδιόρισε ο Engelund. Η θραύση σταματούσε όταν η κλίση του μετώπου του κύματος γινόταν μικρότερη της τιμής $\tan 10^\circ$.

Οι Brocchini et al. (1991,1992) ποσοτικοποίησαν τη διατμητική τάση στη διεπιφάνεια του επιφανειακού κυλίνδρου και της υποκείμενης ροής κάνοντας την υπόθεση ότι η πίεση μέσα στον κύλινδρο είναι υδροστατική. Το αποτέλεσμα αυτό συμπεριλήφθηκε στις εξισώσεις τύπου Boussinesq και συνδυάστηκε με μία εμπειρική σχέση για τον εντοπισμό και την ανάπτυξη του επιφανειακού κυλίνδρου. Η εφαρμογή αυτού του μοντέλου θραύσης έδειξε ικανοποιητική συμφωνία με πειραματικά δεδομένα.

Οι Madsen και Svendsen (1983) και οι Svendsen και Madsen (1984) ανέπτυξαν ένα θεωρητικό μοντέλο για την περιγραφή του μετώπου ενός τυρβώδους κυματικού τμήματος που κινείται σε οριζόντιο ή κεκλιμένο πυθμένα. Σε αυτή την προσέγγιση, μια πλήρως τυρβώδης ροή διάτμησης θεωρήθηκε στο ανώτερο τμήμα της υδάτινης στήλης, ενώ στο κατώτερο στρώμα θεωρήθηκε μία πρακτικά αστρόβιλη ροή. Οι ολοκληρωμένες ως προς το βάθος εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας επιλύονταν ταυτόχρονα με μία ολοκληρωμένη μόνο στην τυρβώδη περιοχή εξίσωση ορμής. Χωρίς τη θεώρηση της τύρβης, το σύστημα των εξισώσεων που προτείνουν οι συγγραφείς μεταπίπτει στο σύστημα των μη-γραμμικών εξισώσεων ρηχών νερών. Ένα σημαντικό συμπέρασμα από τις δύο αυτές μελέτες είναι το γεγονός ότι το απλοποιημένο φαινόμενο της θραύσης μπορεί να συμπεριληφθεί στις εξισώσεις ορμής με την υπόθεση της αναδιανομής της οριζόντιας ταχύτητας σε σχέση με την κατακόρυφη. Αυτό οδηγεί σε πρόσθετους όρους συναγωγής στις ολοκληρωμένες στο βάθος εξισώσεις ορμής.

Οι ιδέες που περιγράφηκαν παραπάνω ακολουθήθηκαν από τους Schäffer et al. (1993), οι οποίοι συμπεριέλαβαν το φαινόμενο της θραύσης τύπου spilling σε ένα σετ εξισώσεων τύπου Boussinesq παρόμοιο με αυτό του Peregrine (1967). Οι υπολογισμοί έγιναν σε μία οριζόντια διάσταση χρησιμοποιώντας τη θεώρηση του επιφανειακού κυλίνδρου. Βασιζόμενοι στην υπόθεση της ομοιόμορφης κατακόρυφης κατανομής της οριζόντιας ταχύτητας σε ένα μη θραυόμενο κύμα, πρόσθεσαν έναν επιπλέον συναγωγικό όρο ορμής λόγω θραύσης στην ολοκληρωμένη στο βάθος εξίσωση ορμής υιοθετώντας το ανομοιόμορφο προφίλ ταχύτητας που πρότεινε ο Svendsen (1984) (σχήμα 4.7). Συμφωνώντας με τα πειραματικά αποτελέσματα του Stive (1980), η ταχύτητα του επιφανειακού κυλίνδρου εισήχθη στο μοντέλο ως 1.3 φορές η ταχύτητα διάδοσης γραμμικού κυματισμού σε ρηχά νερά. Η θραύση του κύματος ξεκινούσε όταν η μέγιστη κλίση του μετώπου του κυματισμού ξεπερνούσε μια αρχική οριακή τιμή. Παρόμοια, η

θραύση τερματιζόταν όταν η μέγιστη κλίση του μετώπου του κύματος γινόταν μικρότερη από μία άλλη τελική οριακή τιμή μικρότερη της οριακής τιμής έναρξης της θραύσης.



Σχήμα 4.7: Προσομοίωση της θραύσης με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (πηγή: [149])

Η χρονική εξέλιξη του πάχους του επιφανειακού κυλίνδρου προσδιορίζεται γεωμετρικά προδιαγράφοντας ένα νόμο χρονικής εξέλιξης της κλίσης της διεπιφάνειας του επιφανειακού κυλίνδρου με το υποκείμενο στρώμα οργανωμένης ροής. Εκτός από τις παραμέτρους που περιγράφουν την έναρξη και τη λήξη της θραύσης, το μοντέλο ενσωματώνει και μία χρονική κλίμακα για την ανάπτυξη του επιφανειακού κυλίνδρου, όπως επίσης και μία παράμετρο σχήματος που αναφέρεται στο θεμελιώδη τρόπο διαχωρισμού του επιφανειακού κυλίνδρου από την υποκείμενη ροή. Μετά από επαλήθευση με πειραματικά δεδομένα, πιστοποιήθηκε ότι το μοντέλο των Schäffer et al. (1993) προβλέπει ικανοποιητικά τη διαφοροποίηση της μέσης στάθμης ύδατος και του ύψους κύματος πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την έναρξη της θραύσης. Ιδιαίτερα, δόθηκε έμφαση στο γεγονός ότι το μοντέλο αποδείχθηκε ικανό να εκτιμήσει το σημείο στο οποίο η μέση στάθμη κυματισμών αρχίζει να ανυψώνεται. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι το μοντέλο αναπαράγει σωστά το φαινόμενο της ραγδαίας μετατροπής της δυναμικής ενέργειας σε κινητική στην εξωτερική μεταβατική περιοχή λίγο πριν τη θραύση. Εν τω μεταξύ, οι Schäffer et al. (1992) είχαν επεκτείνει το μοντέλο για τη ζώνη θραύσης σε δύο οριζόντιες διαστάσεις, παρουσιάζοντας και ένα προκαταρκτικό παράδειγμα.

Από το σχήμα 4.7 προκύπτει ότι το προφίλ της ταχύτητας που θεώρησαν οι Schäffer et al. (1993) κατά τη θραύση στη μονοδιάστατη περίπτωση, έχει εξίσωση:

$$u = \begin{cases} c, & \zeta - \delta \leq z \leq \zeta \\ u_0, & -d \leq z \leq \zeta - \delta \end{cases} \quad (4.24)$$

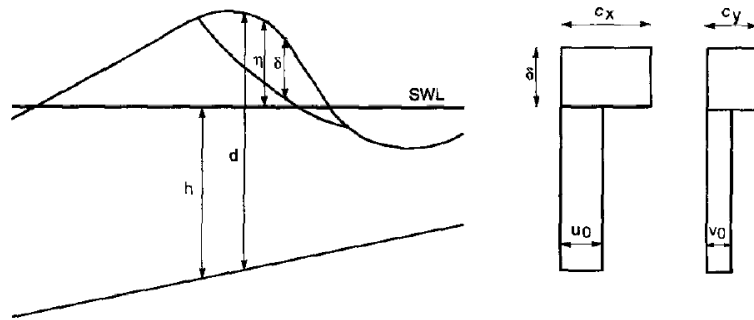
οπότε ολοκληρώνοντας την εξίσωση ορμής στο βάθος και θέτοντας:

$$P = \int_{-d}^{\zeta} u dz \quad (4.25)$$

την ολοκληρωμένη στο βάθος οριζόντια ταχύτητα, ο επιπλέον όρος ορμής που οφείλεται στην ύπαρξη του επιφανειακού κυλίνδρου γράφεται:

$$R = \delta \left(c - \frac{P}{d} \right)^2 \left(1 - \frac{\delta}{d} \right)^{-1} \quad (4.26)$$

Οι Madsen et al. (1997) επέκτειναν επίσης την εφαρμογή του μοντέλου του επιφανειακού κυλίνδρου σε δύο διαστάσεις. Στο σχήμα 4.8 φαίνεται το προφίλ της ταχύτητας που θεώρησαν.



Σχήμα 4.8: Προσομοίωση της θραύσης με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (πηγή: [111])

Κατ' αναλογία με την εργασία των Schäffer et al. (1993), οι όροι που προσθέτουν οι Madsen et al. (1997a) R_{xx}, R_{xy}, R_{yy} στις εξισώσεις ορμής αντιστοιχούν στην επιπρόσθετη ορμή, η οποία προκύπτει από την ανομοιόμορφη κατανομή της ταχύτητας λόγω της παρουσίας του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller) και δίνονται από τις σχέσεις:

$$R_{xx} = \frac{\delta}{1-\delta/d} \left(c_x - \frac{P}{d} \right)^2 \quad (4.27)$$

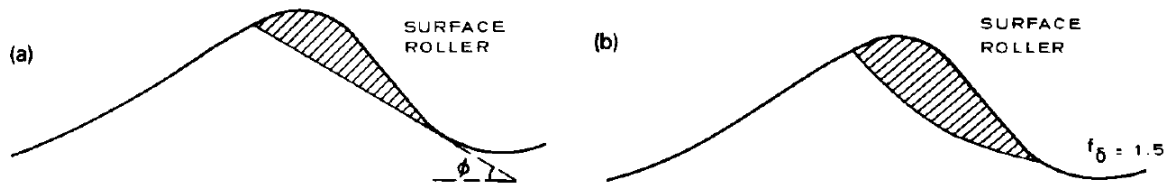
$$R_{xy} = \frac{\delta}{1-\delta/d} \left(c_x - \frac{P}{d} \right) \left(c_y - \frac{Q}{d} \right) \quad (4.28)$$

$$R_{yy} = \frac{\delta}{1-\delta/d} \left(c_y - \frac{Q}{d} \right)^2 \quad (4.29)$$

όπου $\delta = \delta(x, y, t)$ είναι το πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου, c_x και c_y οι συνιστώσες της ταχύτητας φάσης και P, Q οι ολοκληρωμένες στο βάθος συνιστώσες της οριζόντιας ταχύτητας κατά x και y αντίστοιχα.

Ο χρονικός και χωρικός προσδιορισμός των επιφανειακών κυλίνδρων βασίζονται σε μια γεωμετρική προσέγγιση, όπως προτείνεται από τους Schäffer et al. (1993). Καθώς ένας κυματισμός προωθείται προς την ακτογραμμή υφιστάμενος τη ρήχωση, η τοπική κλίση του μετώπου του αυξάνει, γίνεται ασταθής και ξεκινάει η θραύση του. Υποθέτοντας ότι για ένα μη θραυόμενο κυματισμό, η μέγιστη τοπική κλίση του μετώπου του είναι $\tan\phi$, τότε θεωρείται ότι η θραύση ξεκινά όταν η κλίση του μετώπου ξεπεράσει τη μέγιστη αυτή τιμή. Επιπλέον, οι Schäffer et al. (1993) θεωρούν ότι η υδάτινη περιοχή πάνω από την κρίσιμη αυτή κλίση ανήκει στον

επιφανειακό κύλινδρο (σχήμα 4.9). Η θραύση σταματάει όταν η τοπική κλίση γίνει μικρότερη από $\tan\varphi$.



Σχήμα 4.9: (a) Γεωμετρικός προσδιορισμός του επιφανειακού κυλίνδρου
(b) ο ίδιος κύλινδρος με συντελεστή σχήματος $f_\delta = 1.5$ (πηγή:
[149])

Η έναρξη της θραύσης συμβαίνει όταν $\varphi = \varphi_B$ και βαθμιαία η κρίσιμη γωνία φ μεταβάλλεται ως την τιμή λήξης της θραύσης $\varphi = \varphi_0$ ($\varphi_0 < \varphi_B$). Επειδή συχνά οι μεταβολές λόγω θραύσης είναι αρκετά απότομες, οι Schäffer et al. (1993) προτείνουν έναν εκθετικό νόμο μείωσης της $\tan\varphi$ με το χρόνο:

$$\tan\varphi(t) = \tan\varphi_0 + (\tan\varphi_B - \tan\varphi_0) \exp\left(-\ln 2 \frac{t-t_B}{t^*}\right) \quad (4.30)$$

όπου t^* είναι η χρονική κλίμακα για την ανάπτυξη του επιφανειακού κυλίνδρου και t_B είναι ο χρόνος έναρξης της θραύσης. Τοπικά, ο επιφανειακός κύλινδρος ορίζεται ως το υδάτινο τμήμα πάνω από την κλίση $\tan\varphi$ και η θραύση τερματίζεται όταν η μέγιστη τοπική κλίση γίνει μικρότερη από $\tan\varphi$. Μετά τον προσδιορισμό του κυλίνδρου σε κάθε χρονικό βήμα, το πάχος του (roller thickness) δ πολλαπλασιάζεται με ένα συντελεστή σχήματος f_δ πριν την εισαγωγή του στην εξίσωση (4.26) (μονοδιάστατη περίπτωση). Στη δισδιάστατη περίπτωση ο πόδας του κυλίνδρου είναι καμπύλη και όχι μεμονωμένο σημείο. Επομένως, η κρίσιμη κλίση $\tan\varphi(t)$ μεταβάλλεται κατά πλάτος, σε αντίθεση με τη μονοδιάστατη περίπτωση που είναι σταθερή σε κάθε κύλινδρο. Το γεγονός αυτό κάνει τον προσδιορισμό του κυλίνδρου πολύπλοκο υπολογιστικά.

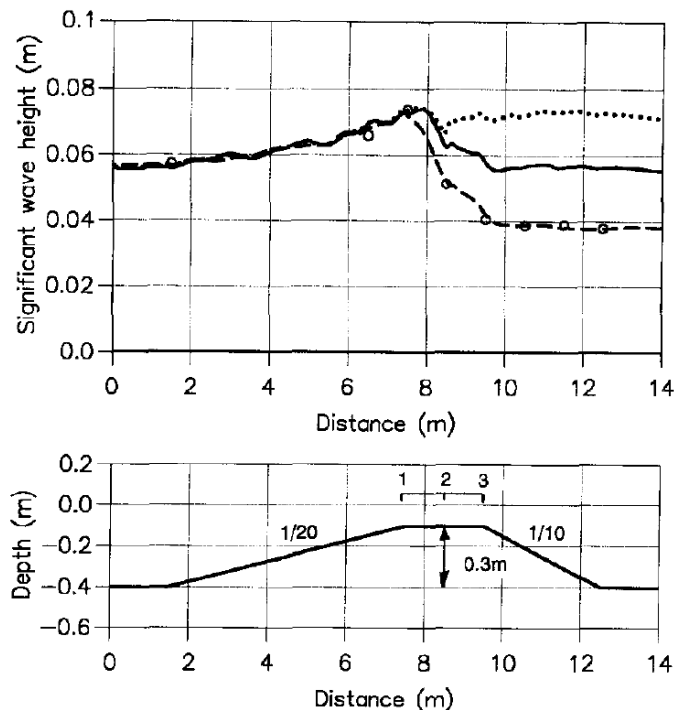
Ένα μειονέκτημα αυτού του προσδιορισμού των επιφανειακών κυλίνδρων είναι ότι εκτός της γωνίας φ_B , εξαρτάται και από τις τρεις παραμέτρους φ_0, t^* (αναφέρεται και ως $t_{1/2}$) και f_δ . Οι Madsen et al. (1997a) ύστερα από διερεύνηση κατέληξαν στα εξής συμπεράσματα:

- Η τιμή της γωνίας φ_0 δεν είναι κρίσιμη σε εφαρμογές όπου η θραύση συνεχίζεται ως την ακτογραμμή. Βασιζόμενος στην αναλογία με το υδραυλικό άλμα, ο Deigaard (1989) εκτίμησε ότι το φ_0 είναι της τάξης των 10° , τιμή την οποία υιοθέτησαν οι συγγραφείς αν και σε ορισμένες περιπτώσεις (π.χ. θραύση πάνω από το οριζόντιο τμήμα ύφαλου τραπεζίου) η τιμή του φ_0 μειώνεται σε 7° - 8° με ανάλογη μείωση του φ_B .
- Η παράμετρος $t_{1/2}$ καθορίζει το χρονικό διάστημα μετάβασης μεταξύ των γωνιών έναρξης και λήξης της θραύσης. Ελέγχθηκε η επιρροή της παραμέτρου αυτής όταν λαμβάνει τιμές από $T/10$ ως $T/2$, όπου T η περίοδος μονοχρωματικών κυματισμών ή μια χαρακτηριστική περίοδος για σύνθετους κυματισμούς. Μία αύξηση του $t_{1/2}$ επηρεάζει την περιοχή του

επιφανειακού κυλίνδρου με δύο τρόπους: αυξάνει η μέγιστη τιμή του δ και μειώνεται η αρχική ανάπτυξη του κυλίνδρου. Επομένως, προκύπτει μία ελαφρώς ηπιότερη μείωση του ύψους κύματος. Οι συγγραφείς υιοθέτησαν την τιμή $T/5$.

- Ελέγχθηκαν τιμές της παραμέτρου σχήματος f_δ από 1.0 ως 2.0. Παρότι μία μεγάλη τιμή του f_δ δίνει στιγμιαία ένα παχύ επιφανειακό κύλινδρο, η συνολική επιρροή μέσα στο χρόνο είναι μικρή. Μία εξήγηση αυτού του αποτελέσματος είναι το γεγονός ότι ένα μεγάλο f_δ (άρα μεγάλο δ) αυξάνει την απώλεια ενέργειας και επομένως το δ μειώνεται στα επόμενα χρονικά βήματα. Οι συγγραφείς θεώρησαν την τιμή $f_\delta = 1.5$. Οι Schäffer et al. (1993) υιοθετούν αυτή την τιμή για θραύσεις τύπου spilling. Οι Ozanne et al. (2000) συμφωνούν με την άποψη αυτή, αλλά για θραύσεις τύπου plunging προτείνουν $f_\delta = 2.0$.

Οι Schäffer et al. (1993) και οι Madsen et al. (1997a) ύστερα από πολλές δοκιμές θραύσης τύπου spilling σε ακτές με επίπεδη κλίση πυθμένα, κατέληξαν ότι προκύπτουν αποδεκτά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας την τιμή $\varphi_B = 20^\circ$. Όπως όμως αναφέρουν, η τιμή αυτή δεν είναι κατάλληλη για θραύση τύπου plunging. Βασιζόμενοι στις μετρήσεις τους, σημείωσαν ότι η θραύση τύπου κατάδυσης (plunging) απαιτεί μια ελαφρά αύξηση στις γωνίες θραύσης, ενώ η θραύση πάνω από ύφαλο τραπέζιο απαιτεί μείωση των γωνιών. Στο σχήμα 4.10 παρουσιάζεται από τους Madsen et al. (1997a) η χωρική μεταβολή του σημαντικού ύψους κύματος για το πείραμα των Beji και Battjes (1993) για τρεις διαφορετικές ομάδες τιμών των παραμέτρων του μοντέλου τους. Από τη σύγκριση είναι εμφανές ότι η περίπτωση (α) δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα, ενώ το σετ τιμών της περίπτωσης (β) υποεκτιμά το ύψος κύματος στη ζώνη θραύσης και μετά από αυτή.



Σχήμα 4.10: Χωρική μεταβολή του σημαντικού ύψους κύματος και βυθομετρία του πειράματος των Beji και Battjes (1993) (α) μοντέλο των Madsen et al. (1997a) με τιμές $(\varphi_B, \varphi_0) = (20^\circ, 10^\circ)$ (συνεχής γραμμή) (β) μοντέλο των Madsen et al. (1997a) με τιμές $(\varphi_B, \varphi_0) = (14^\circ, 7^\circ)$ (διακεκομμένη γραμμή) (γ) μοντέλο των Madsen et al. (1997a) χωρίς θραύση (τελείες) (δ) πειραματικές τιμές (κύκλοι) (πηγή: [111])

Προφανώς, η επιλογή της παραμέτρου φ_B είναι στενά συνδεδεμένη με την τελική ακρίβεια των υπολογισμών της ελεύθερης επιφάνειας πριν ξεκινήσει η θραύση. Επίσης, αξίζει να αναφερθεί η παρατήρηση των Schäffer et al. (1993), οι οποίοι αναφέρουν ότι κοντά στο σημείο θραύσης οι συνθήκες είναι ισχυρά μη-γραμμικές ενώ τα συνήθη μοντέλα τύπου Boussinesq είναι ήπιας μη-γραμμικότητας και πιθανόν να υποεκτιμούν τη μέγιστη τοπική κλίση της ελεύθερης επιφάνειας. Οπότε, για τη ρεαλιστική περιγραφή του σημείου θραύσης αποδεικνύεται συχνά αποτελεσματική μία μικρότερη τιμή της $\tan\varphi$.

Το μοντέλο θραύσης των Schäffer et al. (1993) υιοθετήθηκε και από τους Karambas και Koutitas (2002), οι οποίοι θεώρησαν τις τιμές: $\varphi_B = 23^\circ$, $\varphi_0 = 10^\circ$ και $t_{1/2} = T/10$. Οι Memos et al. (2005) δίνουν ένα διαφορετικό τρόπο υπολογισμού του όρου ορμής του επιφανειακού κυλίνδρου:

$$M_u = (d + \zeta)\vec{u}_0^2 + \delta(\vec{c}^2 - \vec{u}_0^2) \quad (4.31)$$

όπου $\vec{u}_0 = (u_0, v_0)$ είναι μία ταχύτητα των μορίων του νερού κοντά στον πυθμένα (near bottom velocity) (παράγραφος 3.7) που υπολογίζεται από τη σχέση (3.139) και $\vec{c} = (c_x, c_y)$ το διάνυσμα της ταχύτητας μεταφοράς του επιφανειακού κυλίνδρου, οι συνιστώσες του οποίου υπολογίζονται από τη σχέση (3.140). Οι Memos et al. (2005) υιοθέτησαν τις τιμές: $\varphi_B = 20^\circ$, $\varphi_0 = 10^\circ$, $f_\delta = 1.5$ και $t_{1/2} = T_p/5$ με T_p την περίοδο αιχμής για σύνθετους κυματισμούς.

Ουσιαστική παράμετρος στη μέθοδο θραύσης του επιφανειακού κυλίνδρου είναι η ταχύτητα μεταφοράς του κυλίνδρου \vec{c} . Οι Schäffer et al. (1993) χρησιμοποιούν για τη μονοδιάστατη περίπτωση τη σχέση:

$$c = 1.3\sqrt{gd} \quad (4.32)$$

Η πρότασή τους αυτή επαληθεύεται από τα πειράματα του Stive (1980) όπου προκύπτει ότι ένα χαρακτηριστικό σημείο στο μέτωπο ενός θραυόμενου κυματισμού (π.χ. η κορυφή ή η κοιλία) κινείται με ταχύτητα 20-30% υψηλότερη από την ταχύτητα διάδοσης γραμμικών κυματισμών σε ρηγά νερά. Οι συγγραφείς αναφέρουν ότι ένας πιο προχωρημένος υπολογισμός της ταχύτητας c απευθείας από την αριθμητική λύση και η επανατροφοδότηση του μοντέλου με αυτή, ως εκείνη τη χρονική στιγμή (1993) δεν είχε επιτευχθεί, καθότι οδηγούσε σε αστάθειες. Βέβαια, η άποψη αυτή ανατράπηκε από μετέπειτα μελέτες.

Όπως αναφέρουν οι Madsen et al. (1997a), η ταχύτητα c από τη σχέση (4.32) δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για απλούς κυματισμούς, εκτός από τη ζώνη διαβροχής (swash zone). Αντίθετα, για ομάδες κυματισμών ή σύνθετους κυματισμούς, η απλή αυτή προσέγγιση είναι ανεπαρκής καθότι δεν μπορεί να ενσωματώσει φαινόμενα όπως π.χ. η αλληλεπίδραση μακρών και βραχέων κυματισμών στις ζώνες απόσβεσης και διαβροχής.

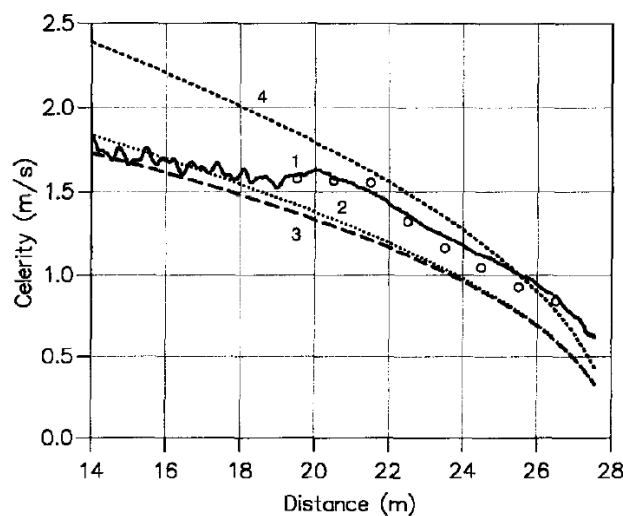
Για το λόγο αυτό οι συγγραφείς πρότειναν μια καινούργια προσέγγιση προσδιορίζοντας την ταχύτητα \vec{c} από το στιγμιαίο κυματικό πεδίο και επανατροφοδοτώντας το με αυτή. Τοπικά, έκαναν την υπόθεση ότι η ελεύθερη επιφάνεια μπορεί να εκφραστεί ως $\zeta = \zeta(\omega t - k_x x - k_y y)$ που αντιστοιχεί στη διάδοση απλού κυματικού πεδίου, οπότε εξ ορισμού:

$$(c_x, c_y) = (k_x, k_y) \frac{\omega}{k^2} \quad (4.33)$$

και σε όρους ελεύθερης επιφάνειας προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{pmatrix} \frac{-\frac{\partial \zeta}{\partial t}}{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2} \quad (4.34)$$

η οποία εφαρμόζεται στο σημείο κάθε κυματικού μετώπου που έχει την πιο απότομη κλίση. Η μέθοδος αυτή δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα τόσο για απλούς, όσο και για σύνθετους κυματισμούς. Ωστόσο, οι συγγραφείς αναφέρουν ότι αυτός ο προσδιορισμός της \vec{c} από το μοντέλο και η εκ νέου εισαγωγή της σε αυτό, μπορεί να οδηγήσει σε αστάθειες και θόρυβο, καθιστώντας απαραίτητη τη χρήση κατάλληλων αριθμητικών φίλτρων. Οι Madsen et al. (1997a) παρουσίασαν μια σύγκριση μεταξύ της ταχύτητας του κύματος από διάφορες θεωρίες και όπως προκύπτει από εφαρμογή του αμφίδρομου υπολογισμού της ταχύτητας του κυλίνδρου στο μοντέλο τους σε σχέση με το πείραμα που παρουσιάστηκε από τον Stive (1984) για απλούς θραυόμενους κυματισμούς σε ακτή κλίσης 1/40 (σχήμα 4.11). Στην ίδια λογική του αμφίδρομου υπολογισμού της \vec{c} από το κυματικό πεδίο και της εν συνεχεία ανανέωσης του μοντέλου με αυτή, βρίσκεται και η πρόταση των Memos et al. (2005) που βασίζεται στην εργασία των Sørensen et al. (1998).



Σχήμα 4.11: Χωρική μεταβολή της ταχύτητας διάδοσης του κύματος για το πείραμα του Stive (1980) (1) αμφίδρομος υπολογισμός ταχύτητας κυλίνδρου από το μοντέλο των Madsen et al. (1997a) (2) ταχύτητα κυματισμών γραμμικής θεωρίας Stokes (3) $c = \sqrt{gd}$ (4) $c = 1.3\sqrt{gd}$ (o) πειραματικά δεδομένα (πηγή: [111])

Ο Koutsourelakis (2009) εισήγαγε τη θραύση στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) σύμφωνα με το κριτήριο του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller). Για τους επιπλέον όρους ορμής λόγω του κυλίνδρου χρησιμοποίησε την ανάπτυξη των Schäffer et al. (1993), ενώ ως ταχύτητα μεταφοράς του επιφανειακού κυλίνδρου χρησιμοποιήθηκε αυτή που προκύπτει από τη γραμμική θεωρία κυματισμών. Το μοντέλο επαληθεύτηκε για μονοχρωματικούς απλούς

κυματισμούς (2009) σύμφωνα με το πείραμα των Beji και Battjes (1993) και όσον αφορά στις γωνίες θραύσης ελέγχθηκαν τα ζεύγη τιμών $(\varphi_B, \varphi_0) = (20^\circ, 10^\circ)$, $(\varphi_B, \varphi_0) = (14^\circ, 7^\circ)$ και $(\varphi_B, \varphi_0) = (18^\circ, 9^\circ)$. Για το μεταβατικό χρόνο $t_{1/2}$ ελέγχθηκαν οι τιμές $0.2T$ και $0.1T$. Ο συγγραφέας αναφέρει ότι για θραύση τύπου spilling εφαρμόστηκε συντελεστής σχήματος $f_\delta = 1.5$, ενώ για θραύση τύπου plunging $f_\delta = 2.0$.

Επίσης, το μοντέλο επαληθεύτηκε από τους Koutsourelakis και Memos (2011) για θραυόμενους σύνθετους κυματισμούς σύμφωνα με το πείραμα των Luth et al. (1993) και χρησιμοποιήθηκε το ζεύγος τιμών $(\varphi_B, \varphi_0) = (20^\circ, 10^\circ)$.

4.5 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΡΑΥΣΗΣ ΤΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ (EDDY VISCOSITY MODEL)

Η θραύση των κυματισμών συμπεριλήφθηκε αρχικά στις εξισώσεις τύπου Boussinesq από τους Tao (1983) και Abbott et al. (1983), οι οποίοι εισήγαγαν ένα όρο τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity term) στην ολοκληρωμένη στο βάθος εξίσωση ορμής (Hamm et al. (1993)). Ο όρος αυτός εκφράστηκε ως το γινόμενο των οριζόντιων βαθμίδων της θεωρούμενης ροϊκής μεταβλητής και ενός τοπικού συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας, σχετιζόμενου με το βάθος του νερού και την τυρβώδη κινητική ενέργεια. Για τον προσδιορισμό του όρου αυτού ορίστηκε ένα μήκος ανάμιξης, σχετιζόμενου με το βάθος και μία κλίμακα ταχύτητας, σχετιζόμενη με τη στιγμιαία τυρβώδη κινητική ενέργεια. Η διακύμανση της ενέργειας αυτής προέκυπτε από την επίλυση μίας εξαρτώμενης από το χρόνο εξίσωσης μεταφοράς. Ωστόσο, το μειονέκτημα της μεθόδου τους ήταν ότι δεν υπήρχε πρόβλεψη ή κριτήρια έναρξης της θραύσης.

Την ίδια τεχνική ακολούθησαν και οι Karambas et al. (1990,1991), όμως ο τοπικός συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας προσδιορίστηκε χρησιμοποιώντας ένα απλό αλγεβρικό κλείσιμο (closure) ανάλογο της ταχύτητας διάδοσης κυματισμών σε ρηχά νερά σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία και του βάθους:

$$v_h = \beta s^{1/3} \sqrt{gd} \quad (4.35)$$

όπου s η κλίση της ακτής και β παράμετρος τάξης $O(1)$.

Ο Zelt (1991) πρότεινε επίσης ένα μοντέλο θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας βασιζόμενος στην εργασία των Heitner και Housner (1970) που συμπεριέλαβαν όρους τεχνητής διάχυσης για την περιγραφή της διάδοσης tsunami. Το μοντέλο του περιέγραφε τη θραύση και αναρρίχηση μοναχικών κυματισμών με τη βοήθεια ενός μοντέλου τύπου Boussinesq σε συντεταγμένες Lagrange. Ωστόσο, κατά τη μετατροπή του όρου συνεκτικότητας σε συντεταγμένες Euler χάνει τη συντηρητική μορφή του. Συγκεκριμένα, ο όρος τυρβώδους συνεκτικότητας στο μοντέλο του γραφόταν:

$$F_{break} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[v_\alpha \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right] \quad (4.36)$$

όπου α είναι η τετμημένη Lagrange και ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας προτάθηκε:

$$v_{\alpha} = -B\delta^2 h^2(\alpha) \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^{-3} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \quad (4.37)$$

με την παράμετρο $\delta \sim 2$, $h(\alpha)$ το τοπικό βάθος και B παράγοντας που εισάγει ένα κριτήριο θραύσης:

$$B = \begin{cases} 1 & , u_{\alpha} \leq 2u_{\alpha}^* \\ \left(\frac{u_{\alpha}}{u_{\alpha}^*} - 1\right)^p & , 2u_{\alpha}^* < u_{\alpha} \leq u_{\alpha}^* \\ 0 & , u_{\alpha} > u_{\alpha}^* \end{cases} \quad (4.38)$$

όπου $u_{\alpha} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $p = 1$ και u_{α}^* η οριακή ταχύτητα κατά τη θραύση μοναχικού κύματος:

$$u_{\alpha}^* = -0.3 \sqrt{\frac{g}{h(\alpha)}} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^{3/2} \quad (4.39)$$

Οι Karambas και Koutitas (1992) πρότειναν μια πιο εξελιγμένη και πολύπλοκη μεθοδολογία στην οποία η τυρβώδης συνεκτικότητα προσδιορίστηκε βάσει της υπόθεσης ότι η τύρβη παράγεται στο μέτωπο του θραυόμενου κύματος και στα απόνερα του προηγθέντος κύματος. Η θέση της έναρξης της θραύσης και το πλάτος της ζώνης θραύσης προσδιορίστηκαν βάσει εμπειρικών σχέσεων. Το μοντέλο τους επαληθεύτηκε με πειραματικά δεδομένα για θραυόμενους απλούς μονοχρωματικούς κυματισμούς σε ακτή σταθερής κλίσης και αποδείχθηκε ότι προβλέπει επακριβώς τη διακύμανση του ύψους κύματος πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την έναρξη της θραύσης. Ωστόσο, δεν περιγράφει ικανοποιητικά το wave setup και υπάρχουν ενδείξεις ότι δεν ικανοποιεί τη διατήρηση της μάζας και της ορμής.

Οι Schäffer et al. (1993) σημείωσαν ότι το κύριο μειονέκτημα των μοντέλων θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας είναι ότι προϋποθέτουν τη μορφή της σχέσης μεταξύ της σκέδασης της ενέργειας και των οριζόντιων βαθμίδων της οριζόντιας ροϊκής μεταβλητής. Η απόσβεση της ενέργειας εξαρτάται γενικά από τις κατακόρυφες βαθμίδες του προφίλ της οριζόντιας ταχύτητας σύμφωνα με τον Madsen (1981) και γι' αυτό οι μεθοδολογίες θραύσης της τυρβώδους συνεκτικότητας διαφοροποιούνται οριακά μόνο στη χρησιμοποίηση μιας διεπιφάνειας σκέδασης.

Ο Nwogu (1996) χρησιμοποίησε το σετ πλήρως μη-γραμμικών εξισώσεων Boussinesq των Wei και Kirby (1994) ώστε να προσομοιώσει το μετασχηματισμό θραυόμενων κυματισμών σε δύο διαστάσεις. Η θραύση ξεκινούσε όταν η οριζόντια ταχύτητα στην κορυφή του κύματος ξεπερνούσε την ταχύτητα διάδοσης του. Το φαινόμενο της θραύσης ενσωματώθηκε στις εξισώσεις ορμής με τη χρήση ενός όρου τυρβώδους συνεκτικότητας ανάλογου της κατακόρυφης βαθμίδας της οριζόντιας ταχύτητας της κορυφής. Σε κάθε χρονικό βήμα υπολογισμού, η τυρβώδης συνεκτικότητα προσδιοριζόταν επιλύοντας μια πρόσθετη εξίσωση μεταφοράς για την τυρβώδη κινητική ενέργεια που παρήγαγε η θραύση του κύματος.

Σημαντική εργασία όσον αφορά στην εξέλιξη του μοντέλου θραύσης της τυρβώδους συνεκτικότητας είναι αυτή των Kennedy et al. (2000). Η μελέτη τους βασίζεται στις εργασίες των

Heitner και Housner (1970) και κυρίως σε αυτή του Zelt (1991), αλλά περιλαμβάνει κάποιες επεκτάσεις ώστε να αποδοθεί πιο ρεαλιστικά η έναρξη και η λήξη της θραύσης. Οι όροι τυρβώδους συνεκτικότητας εισήχθησαν στις εξισώσεις ορμής τόσο του Nwogu (1993), όσο και των Wei et al. (1995). Τα δύο αυτά μοντέλα έχουν καταστρωθεί σε όρους μιας ταχύτητας αναφοράς $\vec{u}_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha)$ σε μία επιλεγμένη στάθμη z_α , για την οποία ο Nwogu (1993) ύστερα από βελτιστοποίηση ως προς τη σχέση γραμμικής διασποράς, προτείνει $z_\alpha = -0.531d$. Τα δύο μοντέλα είναι κατάλληλα μόνο για μη θραυόμενους κυματισμούς και έτσι τροποποιήθηκαν από τους Kennedy et al. (2000) ώστε να συμπεριλάβουν τη θραύση κυματισμών. Οι συγγραφείς εισάγουν απλούς όρους τυρβώδους συνεκτικότητας $\vec{R}_b = (R_{bx}, R_{by})$ στις δύο εξισώσεις ορμής ώστε να προσομοιώσουν την τυρβώδη μίξη και τη διάχυση που συμβαίνει λόγω θραύσης. Αντίθετα, η εξίσωση διατήρησης της μάζας παραμένει αμετάβλητη. Οι επιπλέον όροι δίνονται από τις σχέσεις:

$$R_{bx} = \frac{1}{d+\zeta} \left\{ [v[(d+\zeta)u_\alpha]_x]_x + \frac{1}{2} [v[(d+\zeta)u_\alpha]_y + v[(d+\zeta)v_\alpha]_x]_y \right\} \quad (4.40)$$

$$R_{by} = \frac{1}{d+\zeta} \left\{ [v[(d+\zeta)v_\alpha]_y]_y + \frac{1}{2} [v[(d+\zeta)u_\alpha]_y + v[(d+\zeta)v_\alpha]_x]_x \right\} \quad (4.41)$$

όπου οι δείκτες x, y στα δεξιά μέλη δηλώνουν παραγωγή ως προς τις αντίστοιχες μεταβλητές.

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις ορμής με $d + \zeta$ και ολοκληρώνοντας σε ένα περιστατικό θραύσης, μπορεί ναδειχθεί, σύμφωνα με τους Kennedy et al. (2000), ότι οι επιπλέον όροι διατηρούν τη συνολική ορμή. Επομένως, το μοντέλο είναι συνεπές (στην περιοχή μιας θραυόμενης κορυφής) ως προς τις διαδικασίες διατήρησης της ορμής κατά τη διάδοση κύματος σε ανοιχτό πειραματικό κανάλι.

Η τυρβώδης συνεκτικότητα v είναι συνάρτηση του χώρου και του χρόνου και προσδιορίζεται κατά τρόπο παρόμοιο με αυτόν του Zelt (1991), αλλά με αρκετές διαφορές. Ο συντελεστής v δίνεται από τον τύπο:

$$v = B\delta_b^2(d + \zeta)\zeta_t \quad (4.42)$$

όπου ο δείκτης t δηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο και δ_b είναι ένας συντελεστής μήκους μίξης. Από τα αποτελέσματα πολλών εργαστηριακών δοκιμών οι Kennedy et al, (2000) θέτουν την αδιάστατη τιμή $\delta_b = 1.2$. Ωστόσο όπως έλεγξαν, το μοντέλο δεν είναι ευαίσθητο στο δ_b και έτσι τιμές από 0.9 ως 1.5 δίνουν παρόμοια αποτελέσματα. Η ποσότητα B μεταβάλλεται ομαλά από 0 ως 1, ώστε να αποφευχθεί μια απότομη εκκίνηση της θραύσης και η συνεπαγόμενη αστάθεια. Θεωρείται λοιπόν:

$$B = \begin{cases} 1 & , \zeta_t \geq 2\zeta_t^* \\ \frac{\zeta_t}{\zeta_t^*} - 1 & , \zeta_t^* < \zeta_t \leq 2\zeta_t^* \\ 0 & , \zeta_t \leq \zeta_t^* \end{cases} \quad (4.43)$$

Η παράμετρος ζ_t^* καθορίζει την αρχή και τη διακοπή της θραύσης. Η χρήση της ζ_t σαν παραμέτρου έναρξης, διασφαλίζει με απλό τρόπο ότι η σκέδαση της ενέργειας συγκεντρώνεται

στο εμπρόσθιο μέτωπο του κύματος, όπως συμβαίνει και στη φύση. Ο Zelt (1991) υπέθεσε ότι οι παράμετροι αυτού του είδους έχουν σταθερή τιμή, κάτι που όμως δε συνάδει με την πραγματικότητα. Για παράδειγμα στη φύση, θραύσεις κυματισμών τύπου spilling ή plunging δεν ξεκινούν παρά μόνο όταν το κύμα ανατραπεί, αλλά όταν ξεκινήσει η θραύση, συνεχίζεται είτε μέχρι την ακτή, είτε μέχρι να φτάσει το κύμα σε ένα μικρότερο βάθος όπου γίνεται πιο σταθερό και αναδιοργανώνεται (Horikawa και Kuo (1966)). Παρόμοια ήταν και η υπόθεση στο μοντέλο θραύσης του επιφανειακού κυλίνδρου των Schäffer et al. (1993) που περιγράφηκε παραπάνω.

Στο μοντέλο των Kennedy et al. (2000), ένα γεγονός θραύσης ξεκινάει όταν το ζ_t ξεπεράσει μια αρχική οριακή τιμή, αλλά καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται η θραύση συνεχίζεται ακόμη και αν το ζ_t γίνει μικρότερο από αυτή την τιμή. Επομένως, το ζ_t^* μειώνεται με το χρόνο από μια αρχική τιμή $\zeta_t^{(I)}$ σε μία τελική τιμή $\zeta_t^{(F)}$. Επειδή δεν υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για το μαθηματικό τύπο αυτής της μείωσης με το χρόνο, υιοθετείται η ακόλουθη γραμμική σχέση για τη μοντελοποίηση της χρονικής εξέλιξης του ζ_t^* :

$$\zeta_t^* = \begin{cases} \zeta_t^{(F)} & , t - t_0 \geq T^* \\ \zeta_t^{(I)} + \frac{t-t_0}{T^*} (\zeta_t^{(F)} - \zeta_t^{(I)}) & , 0 \leq t - t_0 < T^* \end{cases} \quad (4.44)$$

όπου T^* είναι ο μεταβατικός χρόνος, t_0 είναι ο χρόνος έναρξης της θραύσης και $t - t_0$ είναι η ηλικία (χρονική διάρκεια) του γεγονότος θραύσης που είναι μη αρνητικό μέγεθος. Οι Kennedy et al. (2000) προτείνουν τις τιμές $0.65\sqrt{gd}$ και $0.15\sqrt{gd}$ για τα $\zeta_t^{(I)}$ και $\zeta_t^{(F)}$ αντίστοιχα. Για το μεταβατικό χρόνο πρότειναν $T^* = 5\sqrt{d/g}$. Ωστόσο, όπως τονίζουν οι συγγραφείς, οι τιμές αυτές δεν είναι απόλυτες και εξαρτώνται από το εκάστοτε χρησιμοποιούμενο μοντέλο Boussinesq και τις γραμμικές και μη γραμμικές του ιδιότητες. Εν προκειμένω, όπως τονίστηκε, οι τιμές προέκυψαν από επαλήθευση των μοντέλων του Nwogu (1993) και των Wei et al. (1995).

Στην πραγματικότητα, ακόμη και η μορφή του κριτηρίου έναρξης της θραύσης είναι κατά μία έννοια αυθαίρετη. Η θραύση θαλάσσιων κυματισμών τύπου spilling και plunging ξεκινάει όταν η κορυφή ανατραπεί, μια συνθήκη που δεν μπορεί ποτέ να εμφανιστεί σε ένα μοντέλο Boussinesq. Επομένως, μπορεί οι Kennedy et al. (2000) να επέλεξαν το προσεγγιστικό κριτήριο του ζ_t^* , ωστόσο θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και άλλα κριτήρια, όπως της κλίσης της ελεύθερης επιφάνειας που χρησιμοποιήθηκε στο μοντέλο του επιφανειακού κυλίνδρου των Schäffer et al. (1993) ή της κλίσης ή κυρτότητας της ταχύτητας αναφοράς \vec{u}_α . Κάθε ένα από τα κριτήρια έχει τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά του. Τα δύο βασικά πλεονεκτήματα του κριτηρίου του ζ_t^* είναι:

- ♦ η ποσότητα ζ_t είναι ήδη γνωστή από τους υπολογισμούς των εξισώσεων Boussinesq
- ♦ το αριθμητικό σχήμα είναι πιο ευσταθές σε σχέση με άλλα μοντέλα θραύσης

Το βασικό μειονέκτημα είναι ότι σε κάποιες περιπτώσεις, όπως στα στάσιμα υδραυλικά άλματα, το κριτήριο μπορεί να αναχθεί σε φαινόμενο Doppler σε βαθμό που να μην αναγνωρίζεται η έναρξη της θραύσης.

Κατά την προσομοίωση της διάδοσης κυματισμών σε μία οριζόντια διάσταση (1DH), τα γεγονότα της θραύσης προσδιορίζονται σε ικανοποιητικό βαθμό. Η χρονική στιγμή εκκίνησης της θραύσης t_0 ποικίλει γενικά (μέσα σε ένα σύστημα) για τα διάφορα γεγονότα θραύσης, αλλά είναι απλό ζήτημα να ακολουθεί κάθε συγκεκριμένο γεγονός καθώς αυτό προωθείται προς την

ακτή και έτσι να είναι γνωστή η ηλικία κάθε γεγονότος. Για παράδειγμα, μπορεί στην εξωτερική ζώνη θραύσης ένα κύμα να έχει ξεκινήσει να θραύεται στο κοντινό παρελθόν και αφού η ηλικία $t - t_0$ του γεγονότος είναι μικρή, το ζ_t^* είναι λίγο μικρότερο του $\zeta_t^{(I)}$. Ωστόσο, μπορεί την ίδια στιγμή να συμβαίνει ένα άλλο γεγονός θραύσης στην εσωτερική ζώνη θραύσης για το οποίο ισχύει $t - t_0 > T^*$ και επομένως $\zeta_t^* = \zeta_t^{(F)}$.

Οι Kennedy et al. (2000) πρότειναν για όλα τα γεγονότα θραύσης, ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας ν να φιλτράρεται για λόγους ευστάθειας με ένα φίλτρο 3-σημείων πριν εισαχθεί στις εξισώσεις (4.40) και (4.41).

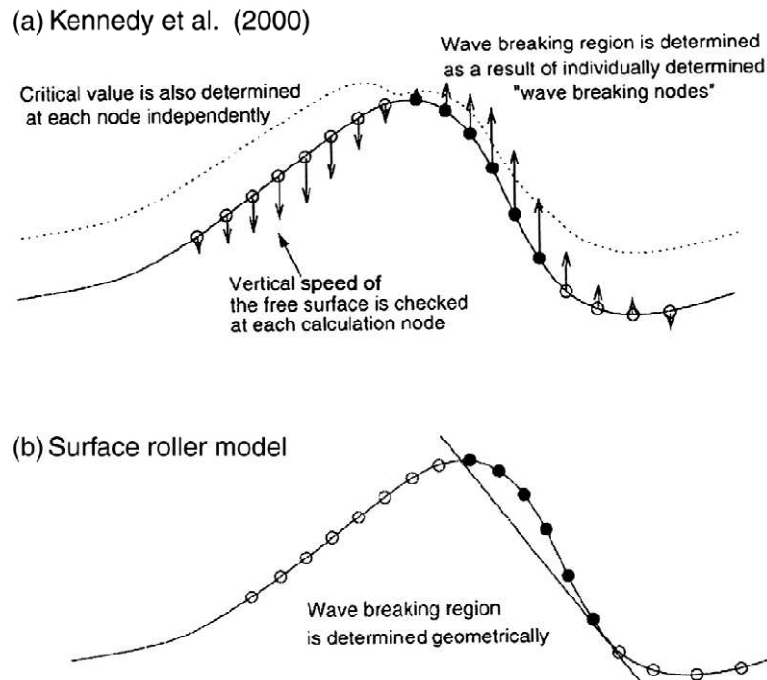
Η επέκταση της εργασίας των Kennedy et al. (2000) σε δύο οριζόντιες διαστάσεις (2DH) από τους Chen et al. (2000) είναι ελαφρώς πιο πολύπλοκη, καθότι απαιτείται γνώση της διεύθυνσης διάδοσης θ του κυματισμού. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος \bar{c} δίνεται όμοια με την εργασία των Madsen et al. (1997a) από τη σχέση (4.34) και συνεπώς η γωνία διάδοσης είναι:

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{\zeta_y}{\zeta_x}\right) \quad (4.45)$$

Γνωρίζοντας τη διεύθυνση διάδοσης το μοντέλο μπορεί να υπολογίσει την ηλικία ενός γεγονότος θραύσης σε ένα συγκεκριμένο σημείο, ακολουθώντας το ιστορικό της θραύσης στα σημεία του κανάβου κατά μήκος των κυματικών ακτίνων. Από εκεί και πέρα η διαδικασία είναι όμοια με τη μονοδιάστατη περίπτωση. Για την παράμετρο $\zeta_t^{(I)}$ προτείνονται τιμές από $0.35\sqrt{gd}$ ως $0.65\sqrt{gd}$, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι παίρνουν τιμές ίδιες με αυτές της μονοδιάστατης περίπτωσης. Οι χαμηλότερες τιμές του $\zeta_t^{(I)}$ είναι πιο κατάλληλες για ακτές με ύφαλα εμπόδια ή τάφρους και αραιή χωρική διακριτοποίηση, ενώ οι υψηλότερες τιμές για ακτές μονοτονικά μειούμενου βάθους. Άλλωστε και οι Madsen et al. (1997a) σημείωσαν την ανάγκη μείωσης των οριακών τιμών στο κριτήριο έναρξης της θραύσης στη στέψη ύφαλων εμποδίων.

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 4.3, οι Karambas και Tozer (2003) πρότειναν μια μεθοδολογία που συνδυάζει το μοντέλο θραύσης του επιφανειακού κυλίνδρου με αυτό της τυρβώδους συνεκτικότητας. Οι συγγραφείς αναφέρουν (βασιζόμενοι βέβαια στην ανάλυση των Karambas και Koutitas (1992)) ότι το μοντέλο θραύσης της τυρβώδους συνεκτικότητας απαιτεί μέσο στην κυματική περίοδο συντελεστή συνεκτικότητας αρκετά μεγαλύτερο από το άνω φράγμα που θέτει η βαθμονόμηση του μοντέλου τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Επιπλέον, το μοντέλο θραύσης της τυρβώδους συνεκτικότητας δε λαμβάνει υπόψη την παρουσία του επιφανειακού κυλίνδρου.

Από την άλλη πλευρά, η τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου οδηγεί σε έναν πρόσθετο όρο συναγωγής στην εξίσωση ορμής που εκφράζει είτε την πίεση που ασκεί στο κύμα ο κύλινδρος κατά τους Deigaard (1989) και Brocchini et al. (1991), είτε την ανομοιόμορφη κατακόρυφη κατανομή της οριζόντιας ταχύτητας κατά τους Schäffer et al. (1993) και Madsen et al. (1997). Τα μοντέλα αυτού του τύπου αγνοούν την επίδραση των τυρβωδών διακυμάνσεων στο μέσο πεδίο ροής, η οποία εκφράζεται με τις τάσεις Reynolds. Μάλιστα στα μοντέλα τύπου RANS οι όροι των τάσεων Reynolds είναι οι μόνοι όροι σκέδασης της ενέργειας που εισάγονται στις εξισώσεις ορμής. Μία παραστατική, συνοπτική σύγκριση των δύο μοντέλων θραύσης φαίνεται στο σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.12: Σχηματική σύγκριση των μοντέλων θραύσης της τυρβώδους συνεκτικότητας (Kennedy et al. (2000)) και του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller) (πηγή: [42])

Ο Chondros (2008) εισήγαγε τη θραύση στο μοντέλο των Karambas και Memos (2008) (στην αρχική μορφή του πριν τη δημοσίευση το 2009) σύμφωνα με το μοντέλο της τυρβώδους συνεκτικότητας και βάσει της εργασίας των Kennedy et al. (2000). Το μοντέλο επαληθεύτηκε για θραύση απλών μονοχρωματικών κυματισμών τύπου spilling και plunging σύμφωνα με το πείραμα των Beji και Battjes (1993). Αρχικά χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές: $\zeta_t^{(I)} = 0.65\sqrt{gd}$, $\zeta_t^{(F)} = 0.15\sqrt{gd}$, $\delta_b = 1.2$ και $T^* = 5\sqrt{d/g}$. Ωστόσο, για το $\zeta_t^{(I)}$ ελέγχθηκαν επιπλέον οι τιμές $0.35\sqrt{gd}$ και $0.25\sqrt{gd}$, ενώ για το δ_b ελέγχθηκαν και οι τιμές 2.5 και 3.5.

Επίσης, το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) με την προσθήκη την παραπάνω προσθήκη της θραύσης επαληθεύτηκε από τον Chondros (2010) για θραυόμενους σύνθετους κυματισμούς φάσματος Jonswap, σύμφωνα με το πείραμα των Luth et al. (1993) και των Beji και Battjes (1993). Εφαρμόστηκαν οι ίδιες τιμές με παραπάνω για τις παραμέτρους και έγινε η ίδια διερεύνηση.

4.6 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΡΑΥΣΗΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΒΙΛΟΤΗΤΑΣ (VORTICITY WAVE-BREAKING MODEL)

Στην τελευταία αυτή παράγραφο του κεφαλαίου γίνεται μια συνοπτική αναφορά σε μια διαφορετική μέθοδο προσομοίωσης της θραύσης που λαμβάνει υπόψη τη δημιουργία στροβιλισμών (vorticity) στο μέτωπο των θραυόμενων κυματισμών. Το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου εμφανίζει κοινά σημεία με αυτό της προσέγγισης του επιφανειακού κυλίνδρου. Παρότι δεν τονίζεται ξεκάθαρα, τα μοντέλα θραύσης αυτού του τύπου περιλαμβάνουν εν μέρει την επίδραση της θραύσης και στην εξίσωση διατήρησης της μάζας. Η προσομοίωση της θραύσης με την τεχνική της περιγραφής του στροβιλισμού δεν έχει εισαχθεί στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009), ωστόσο αναφέρεται για λόγους θεωρητικής πληρότητας.

Οι Yu και Svendsen (1996) ανέπτυξαν ένα μαθηματικά συνεπές μοντέλο θραύσης, στο οποίο δε γινόταν η υπόθεση της αστρόβιλης ροής. Εξήχθη ένα σετ εξισώσεων τύπου Boussinesq χωρίζοντας την υδάτινη στήλη σε μία στροβιλή περιοχή κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια και ένα υποκείμενο στρώμα αστρόβιλης ροής. Το στροβιλό τμήμα, που ήταν άμεσα συνδεδεμένο με τον επιφανειακό κύλινδρο, λειτουργούσε σαν μια πηγή στροβιλισμών και τύρβης. Οι στροβιλισμοί προσδιορίζονταν από την επίλυση μιας πρόσθετης εξίσωσης μεταφοράς.

Οι Veeramony και Svendsen (2000) εξέφρασαν την ταχύτητα ως άθροισμα μιας ταχύτητας προερχόμενης από δυναμικό u_p και μιας ταχύτητας u_r που αντιστοιχεί στη στροβιλή ροή (σε αδιάστατη μορφή):

$$u = u_p + u_r \quad (4.46)$$

και αντίστοιχα οι μέσες στο βάθος ταχύτητες U, U_p και U_r . Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν τα αδιάστατα μεγέθη $\delta = \alpha_0/d_0$ και $\mu = k_0 d_0$ με α_0 ένα ύψος κύματος αναφοράς, d_0 ένα βάθος αναφοράς και k_0 ένα κυματαριθμό αναφοράς για να εκφράσουν τις εξισώσεις σε αδιάστατη μορφή. Ο στροβιλισμός $\hat{\omega}$ (ο συμβολισμός " $\hat{\omega}$ " δηλώνει διαστατική μορφή) είναι:

$$\hat{\omega} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} = \frac{\delta \sqrt{g d_0}}{d_0} \omega \quad (4.47)$$

Οπότε οι συγγραφείς παρήγαγαν ένα σύστημα τριών εξισώσεων που αποτελούσαν από την εξίσωση συνέχειας, την εξίσωση ορμής, στην οποία προστίθενται όροι λόγω στροβιλισμών που περιέχουν παραγώγους των παραστάσεων

$$\Delta M = \int_{-d}^{\delta z} (u_r^2 - U_r^2) dz \quad (4.48)$$

$$\Delta P = \int_{-d}^{\delta z} \int_z^{\delta z} \int_{-d}^z (u_r - U_r) dz dz dz \quad (4.49)$$

με d, ζ και z αδιάστατα μεγέθη και την εξίσωση μεταφοράς των στροβιλισμών σε αδιάστατη μορφή:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \omega}{\partial \sigma^2} + O(\delta, \mu^2) \quad (4.50)$$

όπου t είναι ο αδιάστατος χρόνος, το σ προκύπτει από το μετασχηματισμό του z :

$$\sigma = \frac{d + \zeta}{d + \delta \zeta_e} \quad (4.51)$$

όπου ζ_e είναι η στάθμη του πόδα του επιφανειακού κυλίνδρου σε αδιάστατη μορφή και:

$$\kappa = \frac{v_t}{d^2} \quad (4.52)$$

με v_t το συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας.

Οι πρόσθετοι όροι στην εξίσωση ορμής που περιλαμβάνουν τα μεγέθη ΔM και ΔP , εξαρτώνται εξ ολοκλήρου από το πεδίο στροβιλισμών. Έτσι, στην περιοχή ρήχωσης όπου δεν υπάρχει γένεση στροβιλισμών, οι όροι αυτοί εξαφανίζονται και ανακτώνται οι συνήθεις εξισώσεις τύπου Boussinesq. Αντίθετα, εντός της ζώνης θραύσης οι όροι αυτοί αποκτούν μη μηδενικές τιμές οφειλόμενες στην ύπαρξη στροβιλισμών λόγω θραύσης.

Κατ' αναλογία με τα υδραυλικά άλματα, το πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου $\hat{\zeta}_e$ σε διαστατική μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\hat{\zeta}_e}{d_2 \sqrt{\xi}} = 0.78 e^{\hat{x}/l_r} \left(\frac{\hat{x}}{l_r} - \frac{\hat{x}^2}{l_r^2} \right) \quad (4.53)$$

όπου l_r είναι το μήκος του επιφανειακού κυλίνδρου, $\hat{x} = 0$ είναι η θέση του πόδα του κυλίνδρου, d_2 είναι το βάθος κατόντη του κυλίνδρου, $\xi = d_2/d_1$ και d_1 είναι το βάθος ανάντη του κυλίνδρου. Ο στροβιλισμός στην κάτω επιφάνεια του κυλίνδρου (σε διαστατική μορφή) προκύπτει πάλι από την αναλογία με το υδραυλικό άλμα ως:

$$\frac{\hat{\omega}_s d_2 \xi}{U_1} = 15.75 \left(1 - \frac{\hat{x}}{l_r} \right) \quad (4.54)$$

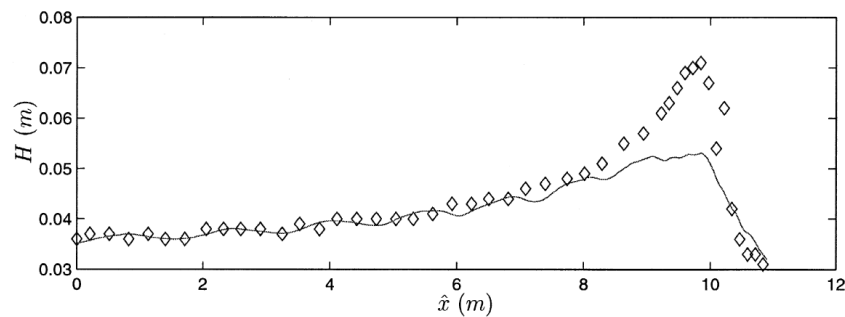
όπου U_1 η μέση ταχύτητα κατά βάθος ανάντη του κυλίνδρου. Τελικά, από την εξίσωση μεταφοράς του στροβιλισμού προκύπτει σε αδιάστατη μορφή:

$$\omega = \sigma \omega_s + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin n \pi \sigma \quad (4.55)$$

όπου

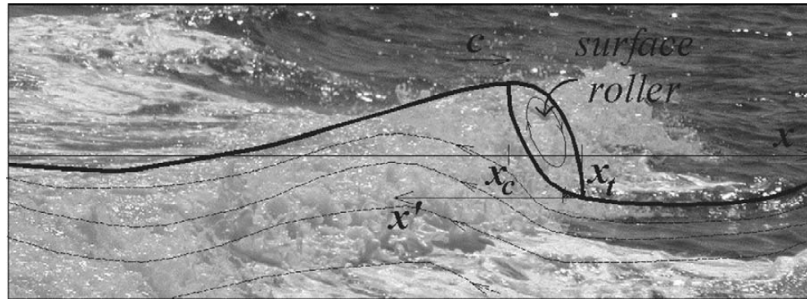
$$G_n(t) = (-1)^n \frac{2}{n\pi} \int_0^t \frac{\partial \omega_s}{\partial \tau} e^{n^2 \pi^2 \kappa (\tau - t)} d\tau \quad (4.56)$$

Το μοντέλο των Veeramony και Svendsen (2000) επαληθεύτηκε με μια σειρά πειραμάτων σχετικών με θραυόμενους κυματισμούς. Στο σχήμα 4.13 φαίνεται η επαλήθευση του μοντέλου με το πείραμα των Hansen και Svendsen (1979) για θραύση μονοχρωματικών κυματισμών τύπου spilling. Το πείραμα αυτό χρησιμοποιείται για επαλήθευση και στην παρούσα εργασία και περιγράφεται στο έβδομο κεφάλαιο.



Σχήμα 4.13: Ύψος κύματος συναρτήσει της απόστασης για το πείραμα των Hansen και Svendsen (1979). Σύγκριση πειραματικών δεδομένων (ρόμβοι) και αποτελεσμάτων μοντέλου Veeramony και Svendsen (2000) (συνεχής γραμμή) (πηγή: [175])

Οι Briganti et al. (2004) διερεύνησαν διάφορες τεχνικές κλεισίματος της τύρβης και κατανομές του συντελεστή ιξώδους σε μοντέλα Boussinesq που προσομοιώνουν τη θραύση με περιγραφή των στροβιλισμών. Οι Musumeci et al. (2005) προσομοίωσαν τη ροή εντός της ζώνης θραύσης με ένα πλήρως μη-γραμμικό μοντέλο Boussinesq ελαφριάς διασποράς. Η μεθοδολογία που ακολούθησαν ήταν παρόμοια με αυτή των Veeramony και Svendsen (2000). Η εξίσωση συνέχειας εκφράστηκε στην ακριβή της μορφή, όπως και στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009). Η εξίσωση ορμής περιλάμβανε επιπλέον όρους στροβιλότητας ανώτερης τάξης από αυτούς του μοντέλου των Veeramony και Svendsen (2000). Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη θεωρία διαταραχών και την ανάπτυξη σε σειρά Taylor ανώτερης τάξης, προέκυψε αναλυτική λύση δεύτερης τάξης της εξίσωσης μεταφοράς των στροβιλισμών. Το πλήρως μη-γραμμικό μοντέλο των Musumeci et al. (2005) ήταν πιο ακριβές από αυτό των Veeramony και Svendsen (2000) κατά την προσομοίωση διάδοσης θραυόμενων κυματισμών, όπως προέκυψε από την επαλήθευση με πειραματικά δεδομένα. Η ομοιότητα με το υδραυλικό άλμα χρησιμοποιήθηκε και από τους Musumeci et al. (2005) και εφαρμόστηκαν οι σχέσεις (4.53) και (4.54). Στο σχήμα 4.14 η τετμημένη x' (ή \hat{x} στη σχέση (4.53)) αναφέρεται ως προς τον πόδα του επιφανειακού κυλίνδρου που κινείται στο μέτωπο του θραυόμενου κυματισμού με ταχύτητα c . Για το λόγο αυτό θεωρείται ένα κινούμενο σύστημα αξόνων με ταχύτητα c ώστε $x' = x_t - x$ (σχήμα 4.14).

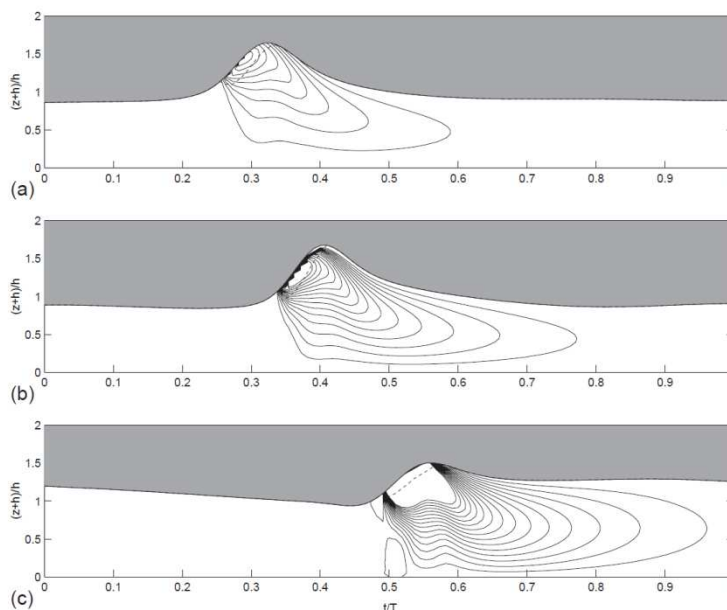


Σχήμα 4.14: Κινούμενο σύστημα αναφοράς ενσωματωμένο στον κινούμενο επιφανειακό κύλινδρο με ταχύτητα c (πηγή:[128])

Ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας που προτείνουν οι συγγραφείς είναι (διαστατική μορφή):

$$\hat{v}_t = C_v \hat{d} \sqrt{g \hat{d}} \tag{4.57}$$

όπου C_v σταθερά που ύστερα από πειραματική βαθμονόμηση παίρνει τιμές από 0.01 ως 0.03. Ως κριτήριο θραύσης οι Musumeci et al. (2005) υιοθέτησαν αυτό της κλίσης της ελεύθερης επιφάνειας των Schäffer et al. (1993) με $(\varphi_B, \varphi_0) = (30^\circ, 10^\circ)$. Τέλος, στο σχήμα 4.15 φαίνεται ενδεικτικά η εξέλιξη των στροβιλισμών κατά τη διάρκεια ενός γεγονότος θραύσης.



Σχήμα 4.15: Ενδεικτική αναπαράσταση της εξέλιξης των στροβιλισμών μέσω καμπυλών ίσων τιμών της στροβιλότητας ω κατά τη διάρκεια ενός γεγονότος θραύσης (α) κατά την εκκίνηση της θραύσης (b) στη μεταβατική περιοχή (c) στην εσωτερική ζώνη θραύσης (πηγή: [128])

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ ΜΕΜΟΣ (2009) ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΜΙΑ ΝΕΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως παρουσιάστηκε στο 2^ο και στο 4^ο κεφάλαιο, την τελευταία εικοσαετία έχει επιτευχθεί σημαντική πρόοδος στην επέκταση των εξισώσεων τύπου Boussinesq τόσο στα βαθιά νερά, όσο και εντός των ζωνών θραύσης και διαβροχής. Παρότι το ζήτημα της συμπερίληψης της θραύσης κυματισμών σε μοντέλα βασιζόμενα στη θεωρία δυναμικού τέθηκε πολύ νωρίς, σημαντικές προσπάθειες για την παραμετροποίηση του φαινομένου έγιναν τη δεκαετία του '90 με σχετική επιτυχία (Schäffer et al. (1993), Zelt (1991) κλπ.). Σε γενικές γραμμές, οι διάφορες προσεγγίσεις στην προσομοίωση της θραύσης βασίζονται στη συμπερίληψη ενός επιπλέον όρου σκέδασης της ενέργειας στην εξίσωση ορμής κατά τη διάρκεια της θραύσης. Αυτοί οι επιπλέον όροι μπορούν να λογιστούν σαν πρόσθετες δυνάμεις που δρουν στο εμπρόσθιο μέτωπο του θραυόμενου τμήματος του κυματισμού. Για την προσομοίωση απαιτούνται:

- ένα ρητό κριτήριο θραύσης για την ενεργοποίηση των επιπλέον όρων
- κάποιες ενεργειακές θεωρήσεις ώστε να συσχετιστούν οι παράμετροι του μοντέλου με τη σκέδαση της ενέργειας στη ζώνη θραύσης

Επίσης, οι πρόσθετοι όροι λόγω θραύσης πρέπει να διασφαλίζουν τη συνολική διατήρηση της μάζας και της ορμής, αλλά και τη διατήρηση των μη-γραμμικών ιδιοτήτων των κυματισμών, όπως η ασυμμετρία (asymmetry) και η λοξότητα (skewness).

Όπως αναφέρθηκε στο 4^ο κεφάλαιο, οι Zelt (1991) και Karambas και Koutitas (1992) προσομοίωσαν τη θραύση με το μοντέλο της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity breaking model). Ωστόσο, ο Zelt (1991) μελέτησε μόνο τη θραύση μοναχικών κυμάτων, ενώ το μοντέλο των Karambas και Koutitas (1992) παρότι προέβλεπε ορθά το ύψος κύματος, δε διατηρούσε την ορμή και δεν προέβλεπε σωστά το setup στην εσωτερική ζώνη θραύσης. Το αποτέλεσμα αυτό καταδεικνύει την ανάγκη οι επιπλέον όροι θραύσης να εισάγουν μόνο τοπικό έλλειμμα ορμής, χωρίς να επηρεάζουν το συνολικό ισοζύγιο στη ζώνη θραύσης. Οι Kennedy et al. (2000), χρησιμοποιώντας το μοντέλο της τυρβώδους συνεκτικότητας κατάφεραν να προβλέψουν σωστά τόσο το ύψος κύματος, όσο και την ανύψωση της μέσης στάθμης (setup) για θραύση μονοχρωματικών κυματισμών σε επίπεδες ακτές.

Η προσέγγιση του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller model) των Schäffer et al. (1993), Madsen et al. (1997a) κλπ. βασίζεται σε πολύ διαφορετικές υποθέσεις, αλλά η συνολική επιρροή στην εξίσωση ορμής είναι παρόμοια με αυτή των μοντέλων τυρβώδους συνεκτικότητας, δημιουργώντας ελλείμματα ορμής στο μέτωπο των θραυόμενων κυμάτων. Η προσέγγιση του

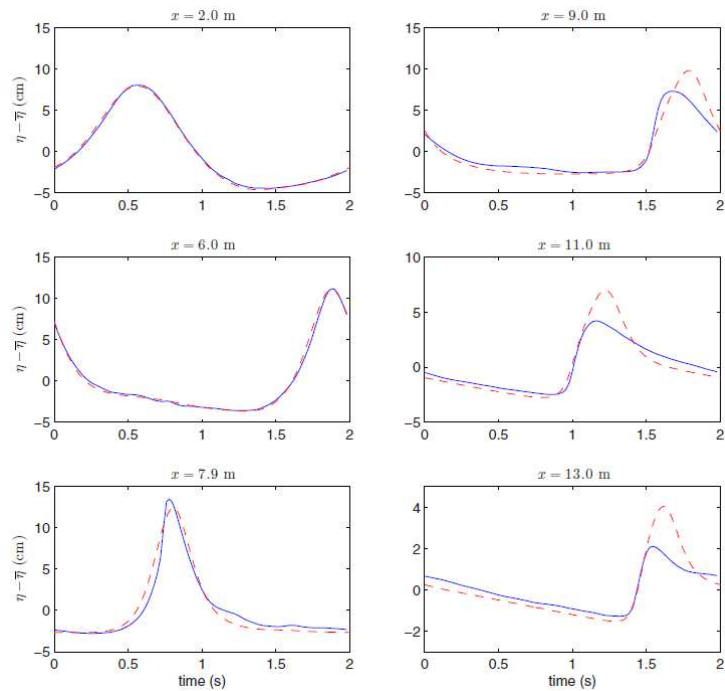
επιφανειακού κυλίνδρου προσφέρει μια θεωρητική βάση και για τα μοντέλα θραύσης στροβιλότητας (vorticity breaking models). Αν και δεν αναφέρεται ρητά, τα μοντέλα αυτά περιλαμβάνουν εν μέρει την επιρροή της θραύσης και στην εξίσωση διατήρησης της μάζας.

Η προσέγγιση του επιφανειακού κυλίνδρου είναι πιο ελκυστική, καθώς βασίζεται σε ακριβέστερο θεωρητικό υπόβαθρο από φυσικής άποψης. Ωστόσο, η αριθμητική εφαρμογή της είναι αρκετά πολύπλοκη αφού απαιτεί τη βαθμονόμηση τουλάχιστον πέντε παραμέτρων. Από την άλλη πλευρά, τα μοντέλα τυρβώδους συνεκτικότητας είναι απλούστερα, αλλά οι χρησιμοποιούμενοι συντελεστές δεν έχουν άμεση φυσική ερμηνεία. Οι ελλειπείς γνώσεις πάνω στο φαινόμενο της θραύσης καθιστούν τη διαδικασία παραμετροποίησης ιδιαίτερα δύσκολη, καθώς δεν έχουν βρεθεί μονοσήμαντοι και παγκόσμιοι νόμοι για τις τιμές των εμπλεκόμενων παραμέτρων. Συνεπώς, κανένα από τα μαθηματικά μοντέλα που έχουν προταθεί δεν υπερτερεί αισθητά των υπολοίπων.

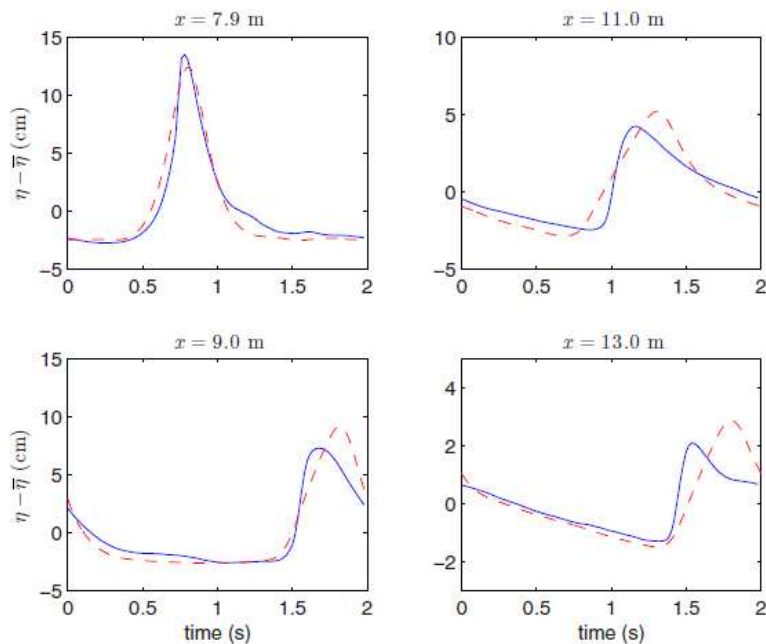
Οι Cienfuegos et al. (2005, 2006b και 2010) πρότειναν ένα μοντέλο προσομοίωσης της θραύσης που ουσιαστικά αποτελεί επέκταση του μοντέλου τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity) και είναι απλούστερο από αυτό του επιφανειακού κυλίνδρου. Επίσης, το μοντέλο αυτό διορθώνει κάποιους από τους πρακτικούς περιορισμούς των προηγούμενων τεχνικών.

Για να καταδείξουν τα μειονεκτήματα του μοντέλου των Kennedy et al. (2000), οι Cienfuegos et al. (2010) εφάρμοσαν το κριτήριο θραύσης των πρώτων στο πλήρως μη γραμμικό μοντέλο Boussinesq βασισμένο στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων των Cienfuegos et al. (2006a, 2007). Για την επαλήθευση του μοντέλου χρησιμοποίησαν το πείραμα των Ting και Kirby (1994) με εφαρμογή της προτεινόμενης από τους Kennedy et al. (2000) τιμής $\delta_b = 1.2$. Το πείραμα αυτό χρησιμοποιήθηκε και στην παρούσα διπλωματική και περιγράφεται αναλυτικά στο έβδομο κεφάλαιο. Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1, το μοντέλο περιγράφει άριστα τη διάδοση των κυματισμών στην περιοχή ρήχωσης πριν τη θραύση ($x < 7.9$), αλλά υπερεκτιμά αισθητά το ύψος κύματος εντός της περιοχής θραύσης ($x > 7.9$). Στη συνέχεια οι συγγραφείς αύξησαν αισθητά την τιμή του συντελεστή μήκους μίξης $\delta_b = 5.5$, τιμή που βρίσκεται εκτός των ορίων που προτείνουν οι Kennedy et al. (2000). Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2, η πρόβλεψη του ύψους κύματος εντός της ζώνης θραύσης βελτιώνεται αισθητά, ωστόσο χειροτερεύει η πρόβλεψη της δεξιάς-αριστερής ασυμμετρίας. Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο εμπρόσθιο μέτωπο του θραυόμενου κύματος ώστε να προσομοιωθεί σωστά η σκέδαση της ενέργειας, πιθανόν να είναι μη ρεαλιστικά μεγάλη ή να πρέπει να ασκηθεί σε πολύ μεγάλο τμήμα του κυματισμού. Επομένως, το μοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας των Kennedy et al. (2000) εμφανίζει κάποιες δυσκολίες στην αξιόπιστη πρόβλεψη του ύψους κύματος και της οριζόντιας ασυμμετρίας στο εσωτερικό της ζώνης θραύσης. Αυτός ο σημαντικός πρακτικός περιορισμός αποτέλεσε το κίνητρο για την εργασία των Cienfuegos et al. (2005) όπως αναφέρουν οι συγγραφείς (2010).

Η νέα αυτή προσέγγιση στη θραύση βασίζεται σε απλές ενεργειακές αρχές και μπορεί να θεωρηθεί ως μία επέκταση της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας των Zelt (1991) και Kennedy et al. (2000). Η βασική διαφορά της νέας μεθοδολογίας έγκειται στη συμπερίληψη ενός επιπλέον όρου διάχυσης στην εξίσωση διατήρησης της μάζας. Βασικό αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η προσθήκη της θραύσης στο μονοδιάστατο μοντέλο των Karambas και Memos (2009), ακολουθώντας την προσέγγιση των Cienfuegos et al. (2005, 2006b και 2010).



Σχήμα 5.1: Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του χρόνου για θραυόμενους κυματισμούς τύπου spilling στο πείραμα των Ting και Kirby (1994). Σύγκριση μεταξύ: (α) μοντέλου των Cienfuegos et al. (2006a) βάσει του κριτηρίου των Kennedy et al. (2000) με $\delta_b = 1.2$ (κόκκινη γραμμή) (b) πειραματικών δεδομένων (πηγή: [34])



Σχήμα 5.2: Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του χρόνου για θραυόμενους κυματισμούς τύπου spilling στο πείραμα των Ting και Kirby (1994). Σύγκριση μεταξύ: (α) μοντέλου των Cienfuegos et al. (2006a) βάσει του κριτηρίου των Kennedy et al. (2000) με $\delta_b = 5.5$ (κόκκινη γραμμή) (b) πειραματικών δεδομένων (πηγή: [34])

5.2 ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στα μοντέλα τύπου Boussinesq γίνεται η θεώρηση του ιδεατού (μη-συνεκτικού) ρευστού. Για το λόγο αυτό, τα σχετιζόμενα με τη θραύση φαινόμενα πρέπει να εισαχθούν με τρόπο εξωτερικό προς τις βασικές εξισώσεις. Επίσης, πρέπει να υιοθετηθεί ένα κριτήριο θραύσης που θα ενεργοποιεί τους επιπλέον όρους και θα πρέπει να ακολουθείται κάθε κυματική κορυφή μετά την έναρξη της θραύσης (wave-by-wave προσέγγιση). Επιπλέον, οι παράμετροι του μοντέλου θα πρέπει να βαθμονομηθούν, ώστε να διασφαλίζεται ότι η συνολική σκέδαση της ενέργειας συμφωνεί με την αντίστοιχη για πραγματικά κύματα στη ζώνη θραύσης ή με πειραματικά δεδομένα.

Συμπεριλαμβάνοντας τους όρους θραύσης, οι εξισώσεις του μονοδιάστατου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) γράφονται:

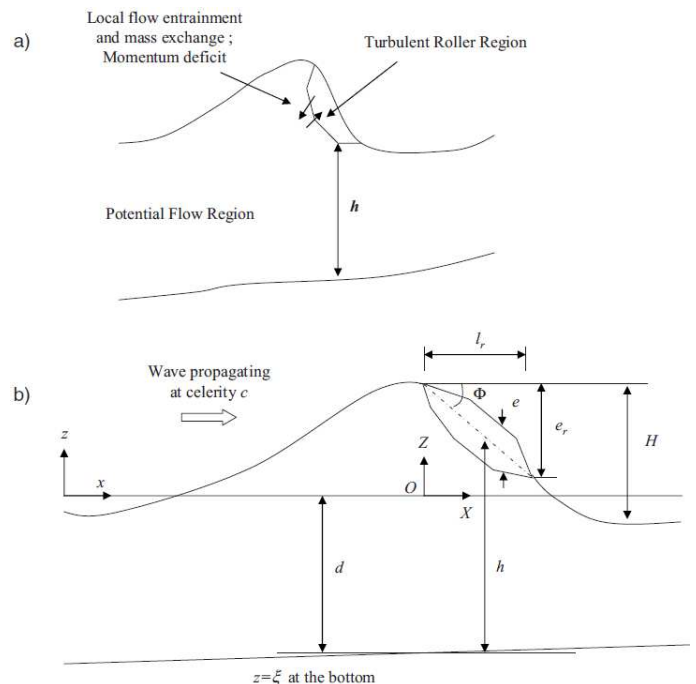
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} - D_h = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{g}{\pi d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(x - \xi, t) - \zeta(x, t)] \ln \left[\tanh \left(\frac{\pi |\xi|}{4d} \right) \right] d\xi - \frac{1}{h} D_{hu} = 0 \quad (5.2)$$

όπου h το τοπικό βάθος νερού στην οργανωμένη περιοχή όπου μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία δυναμικού (σχήμα 5.3), D_h και D_{hu} οι όροι που εκφράζουν την επιρροή της θραύσης στις εξισώσεις συνέχειας και ορμής αντίστοιχα. Οι μεταβλητές x και t είναι οι απόλυτες

συντεταγμένες στο χώρο και στο χρόνο αντίστοιχα. Πρέπει να τονιστεί ότι στην προσέγγιση αυτή της θραύσης γίνεται ένας ξεκάθαρος διαχωρισμός μεταξύ του οργανωμένου στρώματος όπου μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία δυναμικού και του τυρβώδους επιφανειακού κυλίνδρου που αναπτύσσεται από πάνω του κατά τη διάρκεια της θραύσης.

Αξίζει να τονιστεί ότι όταν χρησιμοποιείται η αναλογία της τυρβώδους συνεκτικότητας (Kennedy et al. (2000), Zelt (1991)), περιλαμβάνεται στις εξισώσεις μόνο ο όρος θραύσης D_{hu} . Ο επιπλέον όρος D_h εμφανίζεται επειδή η εξίσωση συνέχειας δεν ολοκληρώνεται μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια, αλλά μόνο στο στρώμα οργανωμένης ροής όπου εφαρμόζεται η θεωρία δυναμικού. Επομένως, η τυρβώδης περιοχή του επιφανειακού κυλίνδρου αποκλείεται από τον



Σχήμα 5.3: Σχηματικές επεξηγήσεις για ένα θραυόμενο κύμα (a) περιοχή δυναμικού και τυρβώδης περιοχή ροής (b) επεξήγηση σχετικών μεταβλητών (πηγή: [34])

ορισμό των μέσων ως προς το βάθος εξισώσεων και άρα οι επιπλέον όροι εκφράζουν για τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής αντίστοιχα:

(1) μία τοπική ανταλλαγή μάζας μεταξύ τυρβώδους περιοχής και περιοχής δυναμικού

(2) ένα τοπικό έλλειμμα ορμής εξαιτίας της παρουσίας του κυλίνδρου (σχήμα 5.3)

Πολλαπλασιάζοντας την (5.1) με $gh + \frac{1}{2}U^2$ και την (5.2) με hU και με πρόσθεση αφού αμεληθούν τα φαινόμενα διασποράς που εκφράζονται με τον όρο συνελικτικού ολοκληρώματος, προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} h (gh + U^2) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[hU \left(gh + \frac{1}{2} U^2 \right) \right] = -\frac{\Delta_b}{\rho} \quad (5.3)$$

όπου ο όρος:

$$-\Delta_b = \rho \left[gh + \frac{1}{2} U^2 \right] D_h + \rho U D_{hu} \quad (\Delta_b \geq 0) \quad (5.4)$$

ορίζεται ως ο τοπικός ρυθμός σκέδασης της ενέργειας (ανά μονάδα πλάτους) λόγω θραύσης και ρ είναι η πυκνότητα του νερού. Στα πλαίσια της θεωρίας της ροής από δυναμικό, μπορεί ναδειχθεί πως αν οι όροι θραύσης είναι μηδενικοί, η ενέργεια συντηρείται ακόμη και αν δεν παραληφθούν οι επιδράσεις της διασποράς.

Κάνοντας την υπόθεση της ήπιας κλίσης πυθμένα, κατά μέσο όρο η συνολική σκέδαση ενέργειας της μέσης ροής λόγω θραύσης, μπορεί να υπολογιστεί ικανοποιητικά από τη μη γραμμική θεωρία απότομης ασυνέχειας (shock theory) σε ρηχά νερά. Στο κινούμενο σύστημα αναφοράς ($O.X.Z$) του προωθούμενου κυματισμού απότομου μετώπου του σχήματος 5.3, μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά σύμφωνα με τους Bonneton (2001) και Svendsen et al. (1978) από τον τύπο:

$$\int_{shock} \frac{\Delta_b}{\rho} dX \approx \frac{1}{4} g c \gamma^3 d^2 \quad (5.5)$$

όπου d το βάθος ηρεμίας του νερού, $\gamma = H/d$ με H το ύψος κύματος και $c = \sqrt{gd}$ η τοπική ταχύτητα διάδοσης του θραυόμενου κύματος (ρηχά νερά).

Όπως αναφέρθηκε, έχουν προταθεί αρκετά κριτήρια έναρξης της θραύσης σε μοντέλα τύπου Boussinesq. Τα σημαντικότερα από αυτά αφορούν σε μία κρίσιμη κλίση του εμπρόσθιου μετώπου του κυματισμού σύμφωνα με τους Schäffer et al. (1993), σε μία οριακή βαθμίδα της ταχύτητας ενός μοναχικού κύματος σύμφωνα με τον Zelt (1991) ή σε μία παρόμοια προσέγγιση από τους Kennedy et al. (2000) όπου η κρίσιμη χωρική βαθμίδα της ταχύτητας εκφράζεται μέσω της χρονικής παραγώγου της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας. Εναλλακτικά, οι Okamoto και Basco (2006) πρότειναν ένα κριτήριο έναρξης της θραύσης βασισμένο σε ένα σχετικό αριθμό Froude στην κοιλία του κύματος (RTFN). Επίσης, απαιτείται ένα πρόσθετο κριτήριο βάσει του οποίου το εκάστοτε μοντέλο αποφασίζει τη λήξη της διαδικασίας της θραύσης.

Η κλίση του εμπρόσθιου μετώπου κατά τη θραύση (breaker slope), η χρονική παράγωγος της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας και το κριτήριο RTFN περιλαμβάνουν ρητή, εξωτερική

αντιμετώπιση της διαδικασίας της θραύσης. Για παράδειγμα στο μοντέλο του επιφανειακού κυλίνδρου οι Schäffer et al. (1993) πρότειναν το χρονικό νόμο εξέλιξης (4.30) της μέσης γωνίας Φ του θραυόμενου μετώπου (mean breaker angle) που με διαφορετικούς συμβολισμούς γράφεται:

$$\Phi = \Phi_t + (\Phi_i - \Phi_t) \exp \left[-\frac{(t-t_b)}{T_b} \ln 2 \right] \quad \text{για } t \geq t_b \quad (5.6)$$

όπου Φ_i η γωνία κατά την έναρξη της θραύσης, Φ_t η γωνία στην κατάσταση της περίπου σταθερής μορφής του κυματισμού (borelike), t_b η χρονική στιγμή έναρξης της θραύσης και T_b μία χαρακτηριστική μεταβατική κλίμακα χρόνου. Οι Schäffer et al. (1993) πρότειναν τις τιμές: $\Phi_i = 20^\circ$, $\Phi_t = 8^\circ$ και $T_b = T/10$ στο ελαφρώς μη-γραμμικό μοντέλο Boussinesq τους.

Από την άλλη πλευρά, το κριτήριο θραύσης των Kennedy et al. (2000) βασίζεται σε μια οριακή τιμή της χρονικής παραγώγου της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας που δίνεται από τη σχέση (4.44). Οι συγγραφείς στο πλήρως μη γραμμικό μοντέλο Boussinesq τους εφάρμοσαν τις τιμές: $\zeta_t^{(I)} = 0.65\sqrt{gd}$, $\zeta_t^{(F)} = 0.15\sqrt{gd}$ και $T^* = 5\sqrt{d/g}$ για τη μεταβατική κλίμακα χρόνου.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι και τα δύο κριτήρια θραύσης είναι στην ουσία παρόμοια, καθότι για έναν προωθούμενο κυματισμό σταθερής μορφής ισχύει η εξίσωση:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (5.7)$$

που δείχνει ότι η χρονική παράγωγος της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί να συσχετιστεί σε πρώτη τάξη με τη μέση κλίση του εμπρόσθιου μετώπου του θραυόμενου κυματισμού, αφού ισχύει $\frac{\partial \zeta}{\partial x} \approx -\tan \Phi$. Οπότε, ουσιαστικά οι τιμές που πρότειναν οι συγγραφείς στο κριτήριο των Kennedy et al. (2000) είναι $\Phi_i = 33^\circ$ και $\Phi_t = 8.5^\circ$.

Οι οριακές τιμές των παραμέτρων για την έναρξη της θραύσης εξαρτώνται σημαντικά από το εκάστοτε σετ των εξισώσεων Boussinesq που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την κίνηση των κυματισμών. Αυτό εξηγεί γιατί η γωνία $\Phi_i = 20^\circ$ στο ελαφρώς μη γραμμικό μοντέλο των Schäffer et al. (1993) είναι σημαντικά μικρότερη από την αντίστοιχη $\Phi_i = 33^\circ$ στο πλήρως μη γραμμικό μοντέλο των Kennedy et al. (2000). Επίσης, και οι δύο προσεγγίσεις λαμβάνουν υπόψη το ιστορικό κάθε γεγονότος θραύσης ορίζοντας μία συνάρτηση χρονικής εξέλιξης των Φ και $\frac{\partial \zeta^*}{\partial t}$. Αυτή η χρονική εξάρτηση υποδηλώνει ότι κάθε γεγονός θραύσης πρέπει να σημειώνεται και να ακολουθείται καθώς ο θραυόμενος κυματισμός προωθείται προς την ακτή.

5.3 Η ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΘΡΑΥΣΗΣ

Το μοντέλο θραύσης των Cienfuegos et al. (2005) έχει ως θεωρητικό υπόβαθρο τη θεωρία κυμάτων απότομης ασυνέχειας (shock wave theory) σε ρηχά νερά, κατ' αναλογία με το υδραυλικό άλμα και την προσέγγιση του επιφανειακού κυλίνδρου. Κάνοντας την προσέγγιση των μακρών κυματισμών (η θραύση λόγω ρήχωσης συμβαίνει συνήθως στα ρηχά) και της ήπια μεταβαλλόμενης βυθομετρίας, παρέχεται η δυνατότητα βαθμονόμησης των παραμέτρων που υπεισέρχονται στους όρους θραύσης. Με αυτές τις απλοποιήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν κάποια σημαντικά αποτελέσματα που ισχύουν για ψευδο-σταθερά θραυόμενα τμήμα των κυμάτων (quasi-steady breakers) ή (κινηματικά) κύματα απότομου μετώπου (bores).

Επικαλούμενοι τη θεωρία shock στα ρηχά νερά, η σχέση (5.5) προσφέρει έναν υπολογισμό της συνολικής σκέδασης της ενέργειας κατά μήκος του shock στη ζώνη θραύσης. Ενώ στη θεωρία shock η σκέδαση της ενέργειας συγκεντρώνεται στην ασυνέχεια (σε μια απειροελάχιστη οριζόντια απόσταση), στην πραγματική ζώνη θραύσης των κυματισμών λαμβάνει χώρα σε μια πεπερασμένη απόσταση l_r . Επομένως, οι αριθμητικές λύσεις που βασίζονται στη μέθοδο shock capturing εξαρτώνται σημαντικά από τη χωρική διακριτοποίηση Δx που υπεισέρχεται στον προσδιορισμό του πεπερασμένου μήκους της ασυνέχειας. Επομένως, στο όριο $\Delta x \rightarrow 0$ θα πρέπει επίσης $l_r \rightarrow 0$. Παρόλα αυτά, τα πραγματικά θραυόμενα μέτωπα δεν είναι ποτέ απολύτως κατακόρυφα και επομένως πρέπει να επιλεγθεί ένα Δx που να αποδίδει σωστά την κυματική ασυμμετρία.

Παρότι έχουν παρουσιαστεί χρήσιμα αποτελέσματα για την εφαρμογή της μεθόδου shock capturing στη θραύση κυματισμών στην εσωτερική ζώνη θραύσης από τους Bonneton (2007), Kobayashi et al. (1989) και Vincent et al. (2001), η επιτυχημένη εφαρμογή των μεθόδων αυτών απαιτεί την πεπλεγμένη απόκτηση πληροφοριών σχετικών με το πεπερασμένο μήκος l_r . Εξαιτίας της εξάρτησης από τη χωρική διακριτοποίηση, οι Cienfuegos et al. (2010) πρότειναν μία μεθοδολογία ρητής, εξωτερικής εκτίμησης του οριζόντιου μήκους l_r , η οποία παρουσιάζεται παρακάτω. Στην παρούσα εργασία ελέγχθηκε τόσο η μέθοδος των Cienfuegos et al. (2010), όσο και ένας γεωμετρικός προσδιορισμός του l_r εσωτερικά στο μοντέλο βάσει της προσέγγισης του επιφανειακού κυλίνδρου. Η δεύτερη περίπτωση έδωσε γενικά πιο ακριβή αποτελέσματα.

Συνδυάζοντας την εξίσωση ενέργειας (5.3) με τη θεωρητική σχέση (5.5), προκύπτει σε ένα κινούμενο σύστημα αναφοράς η παρακάτω σχέση για τους όρους θραύσης:

$$-\int_0^{l_r} \left\{ \left[gh + \frac{1}{2} (U_{rel} + c)^2 \right] D_h + (U_{rel} + c) D_{hu} \right\} dX \approx \frac{1}{4} gc\gamma^3 d^2 \quad (5.8)$$

όπου l_r συμβολίζει πλέον την οριζόντια απόσταση στην οποία οι επιπλέον όροι είναι μη μηδενικοί και $U_{rel} = U - c$ είναι η ολοκληρωμένη ως προς το βάθος ταχύτητα ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς (το $(O.X.Z)$ κινείται με ταχύτητα c). Γίνεται η υπόθεση ότι οι όροι θραύσης έχουν τη μορφή όρων διάχυσης σύμφωνα με το μοντέλο του Zelt (1991). Ωστόσο, ενσωματώνεται και ένας επιπλέον όρος στην εξίσωση συνέχειας που στοχεύει στο να συμπεριληφθούν οι επιδράσεις του επιφανειακού κυλίνδρου που δε λαμβάνονται υπόψη από τη θεωρία της ροής από δυναμικό.

Επομένως, οι όροι θραύσης στο κινούμενο σύστημα αναφοράς γράφονται:

$$D_h = \frac{d}{dX} \left(v_h \frac{dh}{dX} \right) \quad (5.9)$$

$$D_{hu} = \frac{d}{dX} \left\{ v_{hu} \frac{d}{dX} [h(U_{rel} + c)] \right\} \quad (5.10)$$

όπου v_h και v_{hu} είναι συναρτήσεις διάχυσης που πρέπει να προσδιοριστούν. Επομένως, για να γίνει η ολοκλήρωση στο αριστερό μέλος της (5.8) θα πρέπει να εκτιμηθούν το l_r και οι τοπικές συναρτήσεις v_h και v_{hu} .

Επειδή η σκέδαση της ενέργειας μπορεί να συνδεθεί με τις διατμητικές τάσεις στην κάτω ακμή του κυλίνδρου σύμφωνα με τους Dally και Brown (1995) και τους Deigaard και Fredsøe (1989), ως l_r θεωρείται το μήκος του επιφανειακού κυλίνδρου. Επίσης, πειραματικά αποτελέσματα σε υδραυλικά άλματα με αριθμούς Froude κοντά σε αυτούς που προέκυψαν στην εσωτερική ζώνη θραύσης και παρατηρήθηκαν από τους Svendsen et al. (2000), δείχνουν ότι η χωρική κατανομή του τοπικού πάχους του επιφανειακού κυλίνδρου είναι όμοια με την κατανομή της μέγιστης διατμητικής τάσης. Γίνεται η υπόθεση ότι οι συντελεστές διάχυσης της μάζας και της ορμής είναι συναρτήσεις ίδιας μορφής και σύμφωνα και με τους Veeramony και Svendsen (2000) γράφονται:

$$v_h(X) = -K_h \exp\left(\frac{X}{l_r} - 1\right) \left[\left(\frac{X}{l_r} - 1\right) + \left(\frac{X}{l_r} - 1\right)^2 \right] \quad \text{με } 0 \leq X \leq l_r \quad (5.11)$$

$$v_{hu}(X) = -K_{hu} \exp\left(\frac{X}{l_r} - 1\right) \left[\left(\frac{X}{l_r} - 1\right) + \left(\frac{X}{l_r} - 1\right)^2 \right] \quad \text{με } 0 \leq X \leq l_r \quad (5.12)$$

όπου K_h και K_{hu} είναι συναρτήσεις που μεταβάλλονται ελαφρώς με το X και βαθμονομούνται από την ολοκληρωματική εξίσωση (5.8). Οι σχέσεις (5.11) και (5.12) παρέχουν μία τοπική χωρική κατανομή των συντελεστών διάχυσης και είναι σημαντικό ότι η συγκεκριμένη συναρτησιακή μορφή εξασφαλίζει τη συνολική διατήρηση της μάζας και της ορμής σε ένα γεγονός θραύσης επειδή $v_h = v_{hu} = 0$ στα εξωτερικά όρια της περιοχής ενεργοποίησης των επιπλέον όρων θραύσης. Επειδή δηλαδή είναι $v_h(0) = v_h(l_r) = v_{hu}(0) = v_{hu}(l_r) = 0$ ισχύει:

$$\int_0^{l_r} D_h dX = \int_0^{l_r} D_{hu} dX = 0 \quad (5.13)$$

Επομένως, οι επιπλέον όροι θραύσης παράγουν μόνο μια τοπική ανακατανομή της μάζας και της ορμής κατά τη θραύση, χωρίς πρόσθεση ή αφαίρεση ποσοτήτων των μεγεθών αυτών από το σύστημα.

Σύμφωνα με τη θεωρία των Cointe και Tulin (1994) για steady breakers, αλλά προσαρμόζοντας την εμπειρική παράμετρο β σύμφωνα με τα πειράματα του Cienfuegos (2005) σε ρηγά νερά, προκύπτει η εξίσωση (5.14) σύμφωνα με τους συμβολισμούς του σχήματος 5.3:

$$\frac{e_r}{d} = \frac{l_r \tan \Phi}{d} = \frac{\beta^2}{2(1-\beta^2)}(1-\gamma) \approx 0.865(1-\gamma) \quad (5.14)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η τιμή $\beta = 0.796$. Τέλος, για γίνει η ολοκλήρωση στο αριστερό μέλος της (5.8) χρησιμοποιείται η προσέγγιση μακρών κυματισμών:

$$(U_{rel} + c)h = c(h - d) \quad (5.15)$$

και γίνεται η υπόθεση ότι η μέση θέση του κυματικού μετώπου όπου εφαρμόζονται οι όροι θραύσης (σχήμα 5.3) περιγράφεται από μία απλή γραμμική συνάρτηση:

$$h = \left(1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{X}{d} \tan \Phi\right) d \quad \text{για } 0 \leq X \leq l_r \quad (5.16)$$

Επομένως, η εξίσωση (5.8) εισάγει δύο παραμέτρους που ορίζουν τα τοπικά χαρακτηριστικά της ζώνης θραύσης. Αυτές είναι: η παράμετρος θραύσης γ και η μέση γωνία κλίσης του θραυόμενου εμπρόσθιου μετώπου Φ .

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.9) ως (5.12) και (5.14) ως (5.16) στην (5.8), προκύπτει η εξίσωση:

$$(I_h K_h + I_{hu} K_{hu}) c^2 \tan \Phi = \frac{1}{4} g c \gamma^3 d^2 \quad (5.17)$$

όπου I_h και I_{hu} είναι ολοκληρώματα που μεταβάλλονται ελαφρώς με την παράμετρο γ και ορίζονται ως:

$$I_h = - \int_0^1 \left\{ \left(1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{e_r}{d} \tau\right) + \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{e_r}{d} \tau\right)^{-1}\right]^2 \right\} \psi(\tau) d\tau \quad (5.18)$$

$$I_{hu} = - \int_0^1 \left[1 - \left(1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{e_r}{d} \tau\right)^{-1}\right] \psi(\tau) d\tau \quad (5.19)$$

όπου:

$$\psi(\tau) = \exp(\tau - 1)(\tau^2 + \tau - 1) \quad \text{για } 0 \leq \tau \leq 1 \quad (5.20)$$

και $\tau = \frac{X}{l_r}$. Ο λόγος $\frac{e_r}{d}$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (5.14) και μία αριθμητική ολοκλήρωση μπορεί να εφαρμοστεί για να υπολογιστούν τα I_h και I_{hu} για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου γ . Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 5.1, από όπου προκύπτει ότι στη ζώνη θραύσης τα I_h και I_{hu} είναι της ίδιας τάξης και οι τιμές τους κυμαίνονται από 0.01 ως 0.05.

Η εξίσωση (5.17) προκύπτει απευθείας από ενεργειακούς υπολογισμούς και έχει το προτέρημα ότι εκφράζει ρητά, εξωτερικά προς τις εξισώσεις του μοντέλου, τη σχέση μεταξύ των τυρβωδών συντελεστών K_h και K_{hu} , των τοπικών κυματικών παραμέτρων γ και Φ και των

σχετιζόμενων μεγεθών c και d . Ωστόσο, για πρακτικές εφαρμογές οι Cienfuegos et al. (2010) προτείνουν $I_h = I_{hu}$ και σταθερό λόγο $\kappa = K_h/K_{hu}$ ($0 \leq \kappa \leq 1$). Με αυτές τις παραδοχές οι τυρβώδεις συντελεστές προκύπτουν:

$$K_{hu} = \delta \frac{cd}{\tan\Phi} \quad (5.21)$$

$$K_h = \kappa\delta \frac{cd}{\tan\Phi} \quad (5.22)$$

με

$$\delta = \frac{\alpha_b}{1+\kappa} \quad \text{και} \quad \alpha_b = \frac{\gamma^3}{4I_{hu}} \quad (5.23)$$

Αριθμητικοί υπολογισμοί του α_b φαίνονται στην τελευταία σειρά του πίνακα 5.1. Όπως προκύπτει, το α_b παίρνει τιμές $O(1) - O(10)$ στη ζώνη θραύσης.

γ	0.5	0.6	0.7	0.8
I_h	0.044	0.038	0.030	0.020
I_{hu}	0.045	0.030	0.019	0.011
α_b	0.70	1.83	4.62	12.1

Πίνακας 5.1: Αριθμητικός υπολογισμός των I_h, I_{hu} και α_b για τυπικές τιμές της παραμέτρου γ στη ζώνη θραύσης (πηγή: [34])

5.4 ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Το νέο μοντέλο θραύσης, ύστερα από τις παραπάνω απλοποιήσεις, περιλαμβάνει δύο κύριες φυσικές παραμέτρους, τις γ και Φ , αλλά πρέπει να προδιαγραφούν επιπλέον και οι τιμές των συντελεστών κ και α_b . Επειδή δεν υπάρχει ξεκάθαρη γνώση της εξέλιξης αυτών των ποσοτήτων μέσα στη ζώνη θραύσης, η διαδικασία της βαθμονόμησης πρέπει να αντιμετωπίζεται με ρεαλισμό, ώστε το μοντέλο να διατηρείται όσο το δυνατόν πιο απλό.

Όπως αναφέρουν οι Cienfuegos et al. (2010), εφάρμοσαν τα προαναφερθέντα κριτήρια έναρξης της θραύσης στο μοντέλο τους πεπερασμένων όγκων για πλήρως μη-γραμμικούς και ελαφρώς διασπειρόμενους κυματισμούς και κατέληξαν σε συμπεράσματα παρόμοια με του Lynett (2006), ότι δηλαδή το κριτήριο που βασίζεται στη μέση κλίση του εμπρόσθιου μετώπου είναι το λιγότερο ευαίσθητο για θραύση τύπου spilling και για το λόγο αυτό το υιοθέτησαν. Έτσι, λοιπόν στο κινούμενο σύστημα αναφοράς που σχετίζεται με κάθε μεμονωμένο κύμα, η θραύση ξεκινάει και τελειώνει όταν:

$$\text{έναρξη θραύσης αν} \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| \geq \tan\Phi_b$$

λήξη θραύσης αν $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| \leq \tan \Phi_f$

όπου Φ_b η απαιτούμενη οριακά κλίση του μετώπου για την έναρξη της θραύσης και Φ_f η οριακή κλίση για τη λήξη της θραύσης. Η τοπικά μέγιστη κλίση $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|$ του μετώπου λογίζεται ως κλίση αναφοράς για κάθε θραυόμενο κύμα. Όπως αναφέρθηκε, στην παρούσα εργασία εφαρμόστηκε τόσο το παραπάνω κριτήριο θραύσης με θεώρηση μιας σταθερής μέσης κλίσης $\tan \Phi$ κατά τη διάρκεια της θραύσης για την εκτίμηση των όρων θραύσης, όσο και το κριτήριο των Schäffer et al. (1993) με τον εκθετικό χρονικό νόμο για την εξέλιξη της κρίσιμης κλίσης του κυλίνδρου. Γενικά η δεύτερη περίπτωση έδωσε ακριβέστερα αποτελέσματα.

Οι Cienfuegos et al. (2010) αναφέρουν πως επειδή η παραμετροποίηση της θραύσης στο μοντέλο τους εφαρμόζεται σε wave-by-wave βάση, πρέπει να ακολουθείται κάθε κυματική κορυφή, ενώ οι όροι θραύσης εφαρμόζονται στο εμπρόσθιο μέτωπο σε μήκος l_r ξεκινώντας από την κορυφή του κύματος. Κατά την εφαρμογή του κριτηρίου θραύσης των Schäffer et al. (1993) στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009), κάθε θραυόμενος κυματισμός πρέπει να ακολουθείται κατά τη διάδοσή του προς την ακτή, ώστε να εφαρμόζεται σε αυτόν η χρονική εξέλιξη του επιφανειακού κυλίνδρου.

Η βαθμονόμηση των παραμέτρων του μοντέλου θραύσης είναι μια δύσκολη διαδικασία εξαιτίας των πολλών βαθμών ελευθερίας και των πολλών πιθανών συνδυασμών τιμών των παραμέτρων. Αν θεωρηθεί μία σταθερή (ως προς το χρόνο και το χώρο) μέση γωνία κλίσης εμπρόσθιου θραυόμενου μετώπου Φ , τότε η τιμή αυτή, όπως και τα γ, α_b, κ πρέπει να προδιαγραφούν εξ αρχής. Στην παρούσα εργασία το μήκος του κυλίνδρου υπολογίζεται γεωμετρικά από το μοντέλο σε κάθε χρονικό βήμα σε ένα γεγονός θραύσης.

Ωστόσο, σύμφωνα με τους Cienfuegos et al. (2010) το l_r υπολογίζεται από τη σχέση (5.14) και το γεγονός αυτό αποτελεί βασική ιδιότητα του προταθέντος μοντέλου. Αριθμητικά πειράματα έχουν δείξει ότι η οριζόντια ασυμμετρία των κυματισμών εντός της ζώνης θραύσης εξαρτάται σημαντικά από την τιμή του l_r . Οι συγγραφείς αναφέρουν ότι πολύ μεγάλες τιμές του μήκους αυτού σε συνδυασμό με μεγάλες τιμές των συντελεστών τυρβώδους συνεκτικότητας μπορεί να προκαλέσουν σημαντικές ανακρίβειες στον υπολογισμό της δεξιάς-αριστερής ασυμμετρίας. Από την άλλη πλευρά, το μήκος l_r περιορίζεται προς τα κάτω από τη διακριτοποίηση Δx και συγκεκριμένα η ελάχιστη τιμή είναι $l_r = 2\Delta x$. Επομένως, πρέπει να γίνει ένας συμβιβασμός μεταξύ μιας καλής αναπαράστασης της κυματικής ασυμμετρίας και πρακτικών θεμάτων στους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Όσον αφορά στη σχέση μεταξύ των συντελεστών διάχυσης της μάζας και της ορμής, όπως αυτή εκφράζεται από το λόγο κ , αριθμητικά πειράματα έχουν δείξει ότι η τιμή αυτού του συντελεστή πρέπει να προσδιοριστεί με προσοχή, καθότι τιμές μεγαλύτερες του 0.3 οδηγούν σε υποεκτίμηση του setup. Υπάρχουν εμπειρικές ενδείξεις σύμφωνα με τους Andersen και Fredsøe που υποδεικνύουν ότι στις περισσότερες ζώνες θραύσης ισχύει $0.4 \leq \gamma \leq 0.8$, αλλά στη ζώνη διαβροχής (swash zone) ο συντελεστής γ μπορεί να πάρει υψηλότερες τιμές σύμφωνα με τους Raubenheimer et al. (1996). Οι Cienfuegos et al. (2010) κατά τη βαθμονόμηση του μοντέλου τους σύμφωνα με το πείραμα των Ting και Kirby (1994) για θραύση τύπου spilling, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το γ είχε τιμή 0.8 κοντά στο σημείο εκκίνησης της θραύσης και μεταβαλλόταν ως την περίπτωση σταθερή τιμή 0.5 στην εσωτερική ζώνη θραύσης.

Παρόμοια η μέση γωνία κλίσης του θραυόμενου μετώπου Φ πρέπει μεταβάλλεται από μία ανώτερη οριακή τιμή κοντά στο σημείο εκκίνησης της θραύσης ως μία κατώτερη περίπτωση σταθερή τιμή ισορροπίας στην εσωτερική ζώνη θραύσης σύμφωνα με τους Govender et al. (2002) και Schäffer et al. (1993). Ωστόσο, δεν υπάρχει ξεκάθαρη εικόνα για τη χρονική εξέλιξη των μεγεθών αυτών. Για το λόγο αυτό και χάριν απλότητας οι Cienfuegos et al. (2010) προτείνουν οι παράμετροι γ, Φ, κ και α_b να θεωρούνται σταθερές σε ολόκληρη τη ζώνη θραύσης και να προκύπτει ύστερα από βαθμονόμηση ένα φυσικό εύρος τιμών. Επίσης, οι τιμές των οριακών γωνιών Φ_b και Φ_f θα πρέπει να προδιαγράφονται εξαρχής. Οι συγγραφείς εκτέλεσαν μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων ώστε να προσδιορίσουν τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων αυτών και κατέληξαν στα εξής βασικά συμπεράσματα:

- Θεωρώντας λόγο $\kappa = K_h/K_{hu}$ μεγαλύτερο του 0.3 υποεκτιμάται το setup στην εσωτερική ζώνη θραύσης
- Ένας συνδυασμός μεγάλων τιμών του l_r/d και των συντελεστών διάχυσης παράγει ανεπιθύμητες μικρές ταλαντώσεις πίσω από τα θραυόμενα μέτωπα που μπορεί να οδηγήσουν σε αριθμητικές αστάθειες
- Η οριακή γωνία κλίσης του εμπρόσθιου μετώπου για την έναρξη της θραύσης τύπου spilling πρέπει να τίθεται στο διάστημα $\Phi_b \sim 28^\circ - 32^\circ$ ή ακόμη και να φτάνει στις τιμές $35^\circ - 36^\circ$ για ισχυρή θραύση τύπου plunging
- Το μοντέλο δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο στην οριακή γωνία για τη λήξη της θραύσης, αρκεί να ισχύει $\Phi_f < 10^\circ$
- Οι Cienfuegos et al. (2007) προτείνουν τη χρήση ενός πυκνού πεπλεγμένου αριθμητικού φίλτρου 8^{ης} τάξης των Gaitonde et al. (1999) με $\alpha_f = 0.4$. Το φίλτρο, που εφαρμόζεται μία φορά σε κάθε χρονικό βήμα, βελτιώνει την αριθμητική απόδοση του σχήματος χωρίς να απομακρύνει σημαντικά ενέργεια από το σύστημα. Ωστόσο, στην παρούσα εργασία εφαρμόστηκε και κατά την επέκταση του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) το αριθμητικό φίλτρο που προτείνεται στην παράγραφο 3.5.3.3

Αριθμητικά πειράματα έχουν δείξει ότι η συγκέντρωση των όρων θραύσης σε ένα μικρότερο οριζόντιο μήκος κοντά στην κορυφή του θραυόμενου κύματος, έχει ως αποτέλεσμα την καλύτερη απόδοση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας και της κυματικής ασυμμετρίας. Κατά τη βαθμονόμηση του μοντέλου τους με το πείραμα των Ting και Kirby (1994) για θραύση τύπου spilling, οι Cienfuegos et al. (2010) πρότειναν τις τιμές $\gamma = 0.8, \Phi = 13^\circ, \kappa = 0.1$ και $\alpha_b = 5.0$, τις οποίες και θεωρούν σταθερές σε ολόκληρη τη ζώνη θραύσης, αφού κατά την ανάλυσή τους δεν απαιτείται μεταβατική κλίμακα χρόνου. Επίσης, θεώρησαν $\Phi_b = 30^\circ$ και $\Phi_f = 8^\circ$. Αντικαθιστώντας τις βέλτιστες αυτές τιμές στις σχέσεις (5.21) ως (5.23) προκύπτουν:

$$K_{hu} = 20cd \quad (5.24)$$

$$K_h = 2cd \quad (5.25)$$

$$\frac{l_r}{d} = 0.82 \quad (5.26)$$

Οι Mignot και Cienfuegos (2009) πρότειναν τις διαφορετικές τιμές $K_{hu} = 34cd$ και $K_h = 3.4cd$, ενώ οι Cienfuegos et al. (2006b) προτείνουν $K_{hu} = 16cd$ και $K_h = 1.6cd$.

Αν εφαρμοστεί η σταθερή ως προς το χρόνο (και το χώρο) μέση γωνία κλίσης Φ και όχι ο εκθετικός νόμος, τότε δεν απαιτείται μεταβατική κλίμακα χρόνου, σε αντίθεση με τα μοντέλα των Schäffer et al. (1993) και Kennedy et al. (2000) που απαιτούν να σημαδευτεί και να ακολουθηθεί κάθε γεγονός θραύσης. Ωστόσο, απαιτείται και πάλι γνώση της τοπικής κλίσης του μετώπου και της θέσης της κορυφής κύματος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει μία σύγκριση μεταξύ των αντίστοιχων όρων θραύσης στην εξίσωση ορμής στα μοντέλα των Kennedy et al. (2000) και Cienfuegos et al. (2005). Δεχόμενοι τις παραπάνω απλοποιήσεις, στο σημείο έναρξης της θραύσης είναι $\gamma = \frac{H}{d} \approx \frac{2\zeta_{max}}{d} \approx 0.8 \rightarrow \zeta_{max} \approx 0.4d$ και βάσει της εξίσωσης μακρών κυματισμών: $\zeta_t = -c\zeta_x \approx -ctan\Phi \approx -ctan33^\circ \approx -0.65c$. Οπότε θεωρώντας $B \sim 1$ και $\delta_b \sim 1.2$, από τη σχέση (4.42) προκύπτει: $v_{Ken} \approx -1.31cd$. Συνδυάζοντας τις (5.12) και (5.24) προκύπτει: $v_{hu,Cien}^{min} \approx -3.22cd$. Η διαφορά αυτή στις δύο τιμές οφείλεται εν μέρει στη διαδικασία βαθμονόμησης των μοντέλων, αλλά και στην ύπαρξη του επιπλέον όρου θραύσης στην εξίσωση συνέχειας στο μοντέλο των Cienfuegos et al. (2005). Άλλωστε, όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, οι Cienfuegos et al. (2010) αμφισβητούν την καταλληλότητα της τιμής $\delta_b \sim 1.2$ που προτάθηκε από τους Kennedy et al. (2000).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι η υιοθέτηση των τιμών $K_{hu} = 20cd$ και $K_h = 2cd$ στο τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) οδηγεί σε αριθμητικές αστάθειες. Ύστερα από αρκετές δοκιμές εφαρμόστηκε τελικά η τιμή $K_{hu} = 2cd$ και όπως αναφέρεται στο 7^ο κεφάλαιο το μοντέλο δεν είναι ευαίσθητο στο λόγο K_{hu}/K_h , επομένως επιλέχθηκε $K_{hu}/K_h = 10$ και άρα $K_h = 0.2cd$. Η επιλογή αυτή μπορεί να δικαιολογηθεί αφενός από το γεγονός ότι εξασφαλίζει την αριθμητική ευστάθεια του σχήματος, όπως προέκυψε με δοκιμές, αλλά και αφετέρου από το γεγονός ότι οδηγεί σε όρο θραύσης D_{hu} με τιμές παρόμοιες με αυτές του όρου θραύσης R_b του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με προσομοίωση της θραύσης με την τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας και βάσει του κριτηρίου των Kennedy et al. (2000). Ενδεικτικά, στο πείραμα των Hansen και Svendsen (1979) η θραύση (τύπου spilling) (πίνακας 7.3) εκδηλώνεται στη θέση με βάθος $d_b = 0.073 m$ στην ακτή κλίσης 1:34.26 και $H_b/d_b = 0.979$. Επομένως, στη θέση θραύσης είναι:

$$c \approx \sqrt{gd_b} \approx 0.8445 m/sec \quad (5.27)$$

$$\frac{dd}{dx} = \frac{1}{34.26} \approx 0.0292 \quad (5.28)$$

$$\frac{dc}{dx} = \sqrt{g} \frac{1}{2\sqrt{d}} \frac{dd}{dx} \approx 0.1692 \quad (5.29)$$

Ο όρος θραύσης (αφού πολλαπλασιαστεί με το συνολικό βάθος) βάσει του μοντέλου των Kennedy et al. (2000) (σχέση (4.40)) γράφεται:

$$R_b = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial(Uh)}{\partial x} + v \frac{\partial^2(Uh)}{\partial x^2} \quad (5.30)$$

Είναι $H_b/d_b \approx \frac{2\zeta_{max}}{d_b} = 0.979$ άρα $\zeta_{max} \approx 0.49d_b$ και $\zeta_t = -c\zeta_x \approx -ctan\Phi \approx -ctan33^\circ \approx -0.65c$. Συνεπώς, λόγω της (4.42) είναι $v_{KEN} \approx -1.394cd$ και λόγω των (5.27) ως (5.29) είναι $\frac{\partial v_{KEN}}{\partial x} \approx -0.861$. Αν θεωρηθεί ότι $\frac{\partial^2(Uh)}{\partial x^2} \sim 3 \frac{\partial(Uh)}{\partial x}$ (επαληθεύεται προσεγγιστικά κατά την εφαρμογή του μοντέλου), τότε από την (5.30) προκύπτει ότι $R_b \sim -1.119 \frac{\partial(Uh)}{\partial x}$.

Αν τεθεί στο προτεινόμενο μοντέλο θραύσης $K_{hu} = a \cdot cd$ με a σταθερά, λόγω της (5.12) στην παράγωγο $\frac{\partial v}{\partial x}$ προκύπτει ένας επιπλέον όρος λόγω της συνάρτησης αναδιανομής της ορμής. Ο όρος θραύσης στην εξίσωση ορμής του προτεινόμενου μοντέλου (αφού πολλαπλασιαστεί με το συνολικό βάθος) γράφεται:

$$D_{hu} = \frac{\partial v_{hu}}{\partial x} \frac{\partial(Uh)}{\partial x} + v_{hu} \frac{\partial^2(Uh)}{\partial x^2} \quad (5.31)$$

Λόγω των (5.27) ως (5.29) είναι:

$$\frac{\partial v_{hu}}{\partial x} = -\alpha \cdot \left\{ 0.037 \exp\left(\frac{x}{l_r} - 1\right) \left[\left(\frac{x}{l_r} - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{l_r} - 1\right) \right] + \frac{0.0616}{l_r} \exp\left(\frac{x}{l_r} - 1\right) \left[\left(\frac{x}{l_r}\right)^2 + \frac{x}{l_r} - 1 \right] \right\} \quad (5.32)$$

Θεωρώντας ότι $l_r \approx 0.82d_b \approx 0.06 m$ (επιβεβαιώνεται κατά την εφαρμογή του μοντέλου), η ελάχιστη τιμή του $\frac{\partial v_{hu}}{\partial x}$ είναι -1.027α . Επίσης είναι $v_{hu}^{min} \approx -0.01\alpha$. Επομένως, θεωρώντας πάλι προσεγγιστικά $\frac{\partial^2(Uh)}{\partial x^2} \sim 3 \frac{\partial(Uh)}{\partial x}$ στη θέση θραύσης προκύπτει ότι $D_{hu} \sim -1.057\alpha \frac{\partial(Uh)}{\partial x}$. Απαιτώντας λοιπόν $D_{hu} \approx R_b$ προκύπτει $\alpha \approx 1.06$.

Η ανάλυση αυτή έγινε ενδεικτικά για το πείραμα των Hansen και Svendsen (1979). Είναι αρκετά επιδερμική, ωστόσο καταδεικνύει την τάξη μεγέθους των απαιτούμενων συντελεστών διάχυσης κατά τη θραύση. Η προτεινόμενη από τους Cienfuegos et al. (2010) τιμή $\alpha = 20$ οδηγεί σε μεγάλες τιμές των όρων θραύσης και τελικά σε αριθμητικές αστάθειες. Άλλωστε, οι ερευνητές αναφέρουν ότι η τιμή του συντελεστή εξαρτάται από τις χρησιμοποιούμενες εξισώσεις Boussinesq. Λόγω των προσεγγίσεων που έγιναν και εξαιτίας του γεγονότος ότι στο προτεινόμενο μοντέλο οι εξισώσεις δεν ολοκληρώνονται ως την ελεύθερη επιφάνεια στη θέση της θραύσης και λόγω της παρουσίας του επιπλέον όρου θραύσης στην εξίσωση συνέχειας, υιοθετήθηκε η τιμή $\alpha = 2$. Η τιμή προέκυψε ύστερα από αρκετές δοκιμές και σύγκριση των τιμών των όρων θραύσης μεταξύ του προτεινόμενου μοντέλου, του μοντέλου θραύσης της τυρβώδους συνεκτικότητας και του μοντέλου του επιφανειακού κυλίνδρου. Έτσι, εφαρμόστηκαν οι συντελεστές $K_{hu} = 2cd$ και $K_h = 0.2cd$.

Η ανάπτυξη του νέου μοντέλου θραύσης αποσκοπεί στη βελτίωση της αριθμητικής αναπαράστασης κυματικών ιδιοτήτων, όπως η ασυμμετρία και η κύρτωση με απώτερο σκοπό την ακριβέστερη περιγραφή της μεταφοράς των φερτών υλών και την πρόβλεψη της εξέλιξης της μορφολογίας των ακτών. Οι παραπάνω τιμές των σχετιζόμενων παραμέτρων που προτείνουν οι Cienfuegos et al. (2010) για θραύση τύπου spilling δεν είναι κατάλληλες για θραύση τύπου plunging. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι κατά τη θραύση τύπου plunging τα

μακρά κύματα μπορεί να έχουν πιο απότομη ελεύθερη επιφάνεια και άρα να απαιτείται μια μεγαλύτερη οριακή τιμή γωνίας κλίσης για την έναρξη της θραύσης. Επιπλέον, σε θραύσεις τύπου plunging συμβαίνει έντονη σκέδαση ενέργειας σε ένα μικρότερο οριζόντιο μήκος σε σχέση με τις θραύσεις τύπου spilling και άρα η μεταβατική συμπεριφορά είναι πιο γρήγορη. Ωστόσο, στην εσωτερική ζώνη θραύσης η προσομοίωση της θραύσης τύπου plunging είναι σχετικά ικανοποιητική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ MIKE 21 BOUSSINESQ WAVES (BW)

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου, εκτός της επαλήθευσής τους με πειραματικά δεδομένα, συγκρίνονται και με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του προγράμματος MIKE 21 BW. Για αυτό το λόγο παρουσιάζεται συνοπτικά το θεωρητικό και μαθηματικό υπόβαθρο του MIKE 21 Boussinesq Waves Module ή εν συντομία MIKE 21 BW.

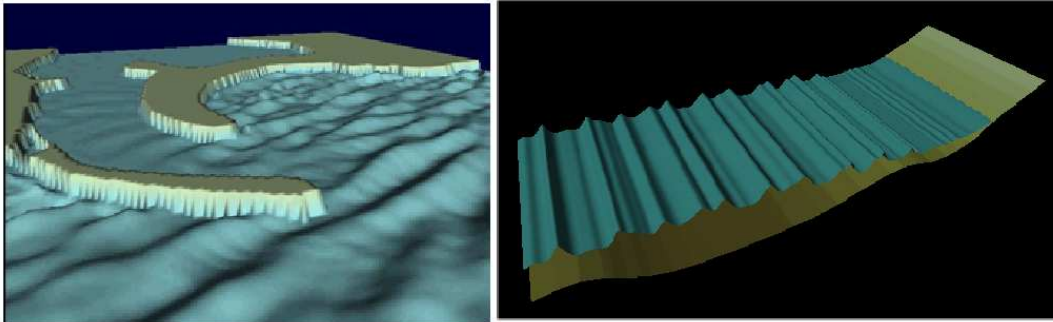
Το MIKE 21 BW είναι ένα μοντέλο του λογισμικού MIKE 21 του Danish Hydraulic Institute (DHI). Είναι ένα προηγμένης τεχνολογίας πακέτο για την αριθμητική προσομοίωση της διάδοσης βραχέων και μακρών κυματισμών κοντά και εντός λιμενικών εγκαταστάσεων, καθώς και σε παράκτιες περιοχές. Αποτελεί μία από τις δημοφιλέστερες εμπορικές προτάσεις της αγοράς.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι εξισώσεις ορμής και συνέχειας (Madsen et al. (1997a,b)) στις οποίες βασίζονται το δισδιάστατο (2DH) και το μονοδιάστατο μοντέλο, η προσομοίωση της θραύσης και το αντίστοιχο κριτήριο, οι οριακές συνθήκες και το αριθμητικό σχήμα επίλυσης που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα.

Στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιήθηκε η έκδοση του 2007 του MIKE 21 BW και η περιγραφή αυτού του κεφαλαίου βασίζεται στο εγχειρίδιο του προγράμματος. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής του φαίνονται συγκριτικά με τα αντίστοιχα του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) στο 7^ο κεφάλαιο.

6.2 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Το πρόγραμμα MIKE 21 BW περιλαμβάνει δύο υποπρογράμματα, το μονοδιάστατο (1DH) και το δισδιάστατο (2DH) (σχήμα 6.1). Τα δύο αυτά μοντέλα βασίζονται στην επίλυση στο πεδίο του χρόνου των εξισώσεων τύπου Boussinesq. Οι χρησιμοποιούμενες εξισώσεις περιλαμβάνουν μη-γραμμικά χαρακτηριστικά και διασπορά συχνοτήτων. Βασικά, η διασπορά των συχνοτήτων εισάγεται στις εξισώσεις ορμής λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση των κατακόρυφων επιταχύνσεων στην κατανομή των πιέσεων.



Σχήμα 6.1: Το MIKE 21 BW περιλαμβάνει δύο μοντέλα. Αριστερά: το (2DH) εφαρμόζεται για τον υπολογισμό της κυματικής διαταραχής σε λιμένες. Δεξιά: το (1DH) εφαρμόζεται συνήθως για την προσομοίωση της διάδοσης κυματισμών από την ανοιχτή θάλασσα στα ρηχά νερά και ιδίως στις ζώνες θραύσης και διαβροχής (πηγή: [40])

Τα δύο μοντέλα επιλύουν τις εξισώσεις τύπου Boussinesq χρησιμοποιώντας μια έκφραση ροής (flux-formulation) με βελτιωμένα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς. Οι αρχικές εξισώσεις προτάθηκαν από τους Madsen et al. (1991) και τους Madsen και Sørensen (1992). Με τη βελτιωμένη μορφή των εξισώσεων, τα μοντέλα είναι ικανά να περιγράψουν την κατευθυντική διάδοση μιας ομάδας κυματισμών από τα βαθιά στα ρηχά νερά. Οι εξισώσεις έχουν εφαρμογή για μέγιστο λόγο βάρους προς μήκος κύματος στα βαθιά $d/L_0 \approx 0.5$ (ή $kd \approx 3.1$), ενώ για τις κλασικές εξισώσεις του Peregrine (1967) ο μέγιστος λόγος είναι $d/L_0 \approx 0.22$ (ή $kd \approx 1.4$).

Οι εξισώσεις του μοντέλου έχουν επεκταθεί για να λάβουν υπόψη τη θραύση των κυματισμών και τη μετακίνηση της ακτογραμμής κατά την αναρρίχηση των κυμάτων, σύμφωνα με τις εργασίες των Madsen et al. (1997a,b) και Sørensen et al. (1998,2004).

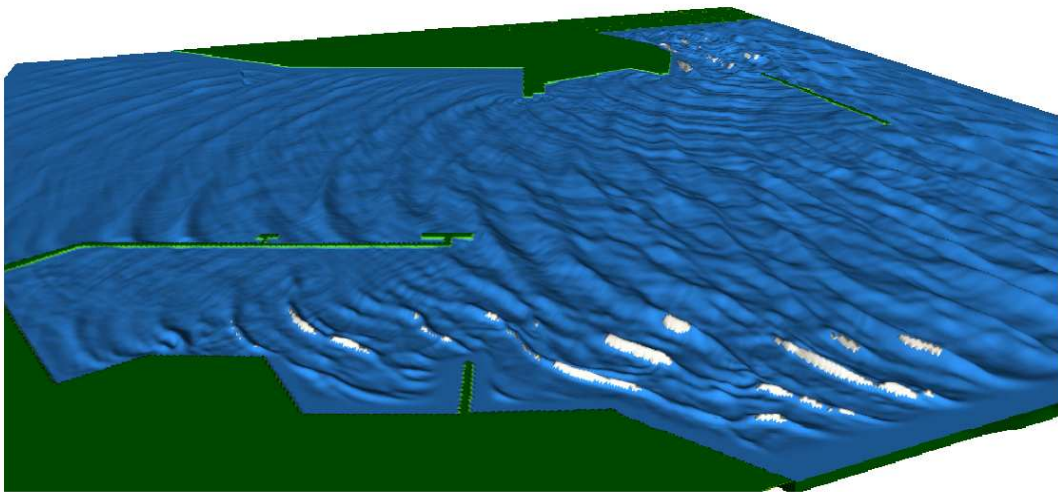
Το δισδιάστατο μοντέλο (2DH) BW επιλύει τις βελτιωμένες εξισώσεις τύπου Boussinesq μέσω ενός πεπλεγμένου αριθμητικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών σε έναν έκκεντρο ορθογωνικό κάναβο. Το μοντέλο είναι ικανό να αναπαράγει τα περισσότερα συνδυαστικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα σε λιμενικές εγκαταστάσεις και παράκτιες ζώνες, δηλαδή:

- Ρήχωση (shoaling)
- Διάθλαση (refraction)
- Περίθλαση (diffraction)
- Θραύση κυματισμών (wave breaking)
- Τριβή πυθμένα (bottom friction)
- Μεταβολή της ακτογραμμής (moving shoreline)

- Μερική ανάκλαση (partial reflection)
- Μερική διάδοση (partial transmission)
- Μη γραμμική αλληλεπίδραση κυμάτων (non-linear wave-wave interaction)
- Διασπορά συχνοτήτων (frequency spreading)
- Κατευθυντική διασπορά (directional spreading)

Το MIKE 21 BW μπορεί επίσης να προσομοιώσει φαινόμενα όπως η ομαδοποίηση κυματισμών (wave grouping), το surf beat, η δημιουργία δεσμευμένων χαμηλών και υψηλών αρμονικών (generation of bound sub-harmonics and super-harmonics) και η αλληλεπίδραση κυματικών τριάδων κοντά στο συντονισμό (near-resonant triad interactions). Επομένως, μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά λεπτομέρειες όπως η γένεση και απελευθέρωση ταλαντώσεων χαμηλών συχνοτήτων λόγω μετασχηματισμών του αρχικού κύματος, φαινόμενο σημαντικό για το συντονισμό εντός των λιμένων και τις παράκτιες διεργασίες.

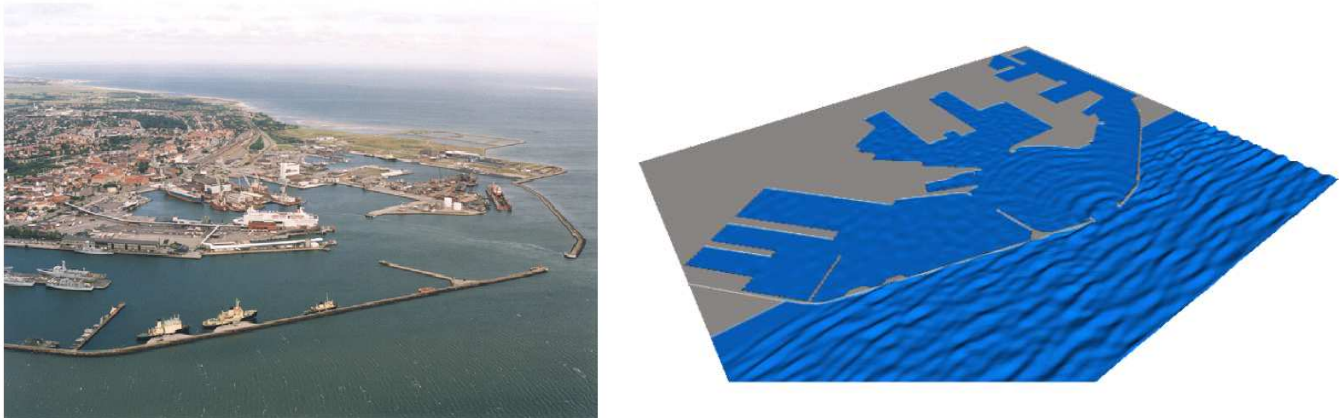
Η θραύση των κυματισμών τύπου spilling εφαρμόζεται βάσει της προσέγγισης του επιφανειακού κυλίνδρου. Η επιρροή στην κυματική διάδοση προσομοιώνεται με την εισαγωγή επιπλέον συναγωγικών όρων στις εξισώσεις ορμής και ο προσδιορισμός των επιφανειακών κυλίνδρων γίνεται γεωμετρικά. Ο κύλινδρος λογίζεται ως ένα υδάτινο τμήμα που απομονώνεται από την υπόλοιπη κίνηση και μεταφέρεται με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Η θραύση ξεκινάει όταν η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας ξεπεράσει μια οριακή τιμή.



Σχήμα 6.2: Εικόνα από την εφαρμογή του μοντέλου MIKE 21 BW (2DH) για τη διάδοση θραυόμενων κυματισμών στην περιοχή λιμένα. Οι επιφανειακοί κύλινδροι (surface rollers) διακρίνονται με το λευκό αφρό (πηγή: [40])

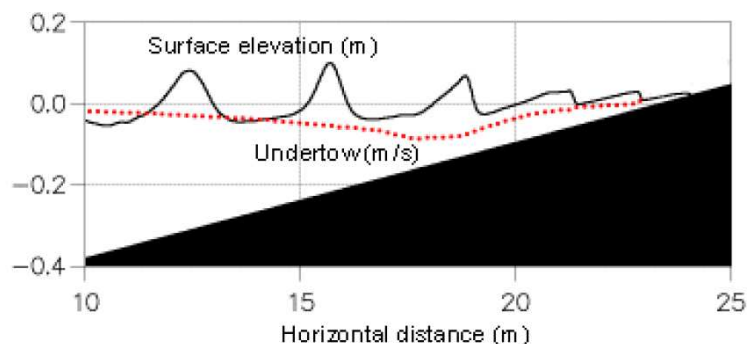
Η μετακίνηση της ακτογραμμής (moving shoreline) προσομοιώνεται βάσει της ακόλουθης προσέγγισης: το υπολογιστικό πεδίο επεκτείνεται τεχνητά με την αντικατάσταση του στερεού ορίου της ακτής από μία διαπερατή παραλία με πολύ μικρό πορώδες. Κοντά στην κινούμενη ακτογραμμή, η θαλάσσια επιφάνεια αλληλεπιδρά με τον πυθμένα και συνεχίζει στην πορώδη παραλία. Έτσι, η στιγμιαία θέση της ακτογραμμής καθορίζεται απλά από αυτή την αλληλεπίδραση.

Με τη συμπερίληψη της θραύσης κυματισμών και της μετακινούμενης ακτογραμμής, το MIKE 21 BW μπορεί να περιγράψει σύνθετα παράκτια φαινόμενα, όπως η κυματογενής κυκλοφορία σε συνδυασμό με παράκτια τεχνικά έργα.



Σχήμα 6.3: Προσομοίωση της διάδοσης κυματισμών με το μοντέλο MIKE 21 BW (2DH) στην περιοχή του λιμανιού Frederikshavn της Δανίας (πηγή: [40])

Το μονοδιάστατο μοντέλο (1DH) BW επιλύει τις βελτιωμένες εξισώσεις τύπου Boussinesq των Madsen et al. (1997) μέσω μιας τυπικής μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων Galerkin με πεπλεγμένη παρεμβολή των μεταβλητών που ορίζονται σε έναν ακανόνιστο (ή κανονικό) κάναβο. Έτσι, το μοντέλο προσομοιώνει τη δυναμική στη ζώνη θραύσης (surf zone) και τις ταλαντώσεις στη ζώνη διαβροχής (swash zone) για οποιοδήποτε παράκτιο προφίλ βυθομετρίας.



Σχήμα 6.4: Παράδειγμα προσομοίωσης της διάδοσης κυματισμών με το μοντέλο MIKE 21 BW (1DH) σε ακτή σταθερής κλίσης. Φαίνεται η υπολογισμένη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και το undertow στην περίπτωση απλών μονοχρωματικών κυματισμών (πηγή: [40])

Κατά την επίλυση των εξισώσεων τύπου Boussinesq με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, το κύριο πρόβλημα είναι η παρουσία των χωρικών παραγώγων ανώτερης τάξης. Το μοντέλο MIKE 21 BW (1DH) αντιμετωπίζει αυτό το πρόβλημα γράφοντας τις εξισώσεις σε μορφή κατώτερης τάξης εισάγοντας μια βοηθητική μεταβλητή w και μια βοηθητική αλγεβρική εξίσωση, όπως παρουσιάζεται στην παράγραφο 6.3. Το μονοδιάστατο μοντέλο, όπως και η δισδιάστατη έκδοση, αναπαράγει ικανοποιητικά τις περισσότερες συνδυαστικές παράκτιες διεργασίες.

6.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Το ΜΙΚΕ 21 BW επιλύει τις τροποποιημένες εξισώσεις τύπου Boussinesq σε μία ή δύο οριζόντιες διαστάσεις ως προς την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ζ και τις ολοκληρωμένες κατά βάθος συνιστώσες τις οριζόντιας ταχύτητας P και Q .

Το σύστημα εξισώσεων του δισδιάστατου μοντέλου (2DH) BW είναι:

Εξίσωση συνέχειας:

$$n \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (6.1)$$

Εξίσωση ορμής κατά x :

$$\begin{aligned} n \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{PQ}{h} \right) + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} + F_x n^2 g h \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \\ + n^2 P \left[\alpha + \beta \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{h} \right] + \frac{gP\sqrt{P^2+Q^2}}{h^2 c^2} + n\Psi_1 = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Εξίσωση ορμής κατά y :

$$\begin{aligned} n \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{PQ}{h} \right) + \frac{\partial R_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} + F_y n^2 g h \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \\ + n^2 Q \left[\alpha + \beta \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{h} \right] + \frac{gQ\sqrt{P^2+Q^2}}{h^2 c^2} + n\Psi_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

όπου οι όροι διασποράς Boussinesq Ψ_1 και Ψ_2 δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\begin{aligned} \Psi_1 = - \left(B + \frac{1}{3} \right) d^2 (P_{xxt} + Q_{xyt}) - nBgd^3 (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) - \\ - dd_x \left[\frac{1}{3} P_{xt} + \frac{1}{6} Q_{yt} + nBgd(2\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) \right] - dd_y \left(\frac{1}{6} Q_{xt} + nBgd\zeta_{xy} \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = - \left(B + \frac{1}{3} \right) d^2 (P_{xyt} + Q_{yyt}) - nBgd^3 (\zeta_{yyy} + \zeta_{yxx}) - \\ - dd_y \left[\frac{1}{3} Q_{yt} + \frac{1}{6} P_{xt} + nBgd(2\zeta_{yy} + \zeta_{xx}) \right] - dd_x \left(\frac{1}{6} P_{yt} + nBgd\zeta_{xy} \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

όπου οι δείκτες x, y και t υποδηλώνουν μερική διαφορίση ως προς το χώρο και το χρόνο αντίστοιχα.

Λίστα συμβόλων:

P : πυκνότητα ροής κατά x σε $m^3/(m \cdot sec)$

Q : πυκνότητα ροής κατά y σε $m^3/(m \cdot sec)$

B : Boussinesq όρος διασποράς

F_x : όρος οριζόντιας τάσης κατά x

F_y : όρος οριζόντιας τάσης κατά y

x, y : οριζόντιες καρτεσιανές συντεταγμένες σε m

t : χρόνος σε sec

h : συνολικό βάθος ($h = d + \zeta$) σε m

d : βάθος στη μέση στάθμη ηρεμίας σε m

g : επιτάχυνση της βαρύτητας ($g = 9.81 m/sec^2$)

n : πορώδες

C : συντελεστής αντίστασης Chezy σε $m^{1/2}/sec$

α : συντελεστής αντίστασης για στρωτή ροή σε πορώδες μέσο

β : συντελεστής αντίστασης για τυρβώδη ροή σε πορώδες μέσο

ζ : διακύμανση ελεύθερης επιφάνειας ως προς τη στάθμη αναφοράς σε m

Οι όροι οριζόντιας τάσης δίνονται από σχέσεις που περιέχουν τις οριζόντιες βαθμίδες των ολοκληρωμένων ως προς το βάθος ταχυτήτων:

$$F_x = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(v_t \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[v_t \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (6.6)$$

$$F_y = - \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[v_t \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \right\} \quad (6.7)$$

όπου v_t είναι ο οριζόντιος συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας.

Οι όροι R_{xx} , R_{xy} και R_{yy} αναφέρονται στην επίδραση του επιφανειακού κυλίνδρου και της συνεπαγόμενης ανομοιομορφίας της κατακόρυφης κατανομής της οριζόντιας ταχύτητας στην εξίσωση ορμής. Η προσομοίωση της θραύσης αναλύεται διεξοδικότερα στην παράγραφο 6.4. Αντίστοιχα, το σύστημα εξισώσεων του μονοδιάστατου μοντέλου (1DH) BW είναι:

Εξίσωση συνέχειας:

$$n \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (6.8)$$

Εξίσωση ορμής κατά x :

$$n \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{h} \right) + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + n^2 g h \frac{\partial \zeta}{\partial x} - n \left(B + \frac{1}{3} \right) d^2 \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial x \partial t} - \frac{1}{3} d \frac{\partial d}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} - n^2 B g d^2 \frac{\partial w}{\partial x} + n^2 P \left[\alpha + \beta \frac{|P|}{h} \right] + \frac{g P |P|}{h^2 C^2} = 0 \quad (6.9)$$

$$w = \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \quad (6.10)$$

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 6.2, η εξίσωση (6.10) είναι η βοηθητική αλγεβρική εξίσωση που εισάγεται και αναφέρεται στη βοηθητική μεταβλητή w . Οι εξισώσεις (6.8), (6.9) και

(6.10) περιλαμβάνουν όρους με χωρικές παραγώγους το πολύ δεύτερης τάξης. Χρησιμοποιώντας την τυπική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Galerkin και εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης του Gauss στους όρους διασποράς Boussinesq, οι εξισώσεις γράφονται σε μορφή που απαιτεί μόνο τη συνέχεια των συναρτήσεων παρεμβολής. Τη μεθοδολογία αυτή περιγράφουν αναλυτικά οι Sørensen et al. (2004).

6.4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

Το πρόγραμμα MIKE 21 BW προσομοιώνει τη θραύση κυματισμών βάσει του μοντέλου θραύσης του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller). Η προσομοίωση αυτή βασίζεται στην ανάλυση των Madsen et al. (1997) που παρουσιάστηκε διεξοδικά στην παράγραφο 4.4. Η τεχνική αυτή υποθέτει την ανομοιόμορφη κατακόρυφη κατανομή των συνιστωσών της οριζόντιας ταχύτητας του σχήματος 4.8. Το προφίλ αυτό ενεργοποιείται κατά τη θραύση των κυματισμών και υποδηλώνει ότι ο επιφανειακός κύλινδρος μετακινείται με την ταχύτητα διάδοσης του κυματισμού $\vec{c} = (c_x, c_y)$.

Οι όροι θραύσης στις εξισώσεις ορμής περιλαμβάνουν τις οριζόντιες βαθμίδες των μεγεθών R_{xx} , R_{xy} και R_{yy} και αντιστοιχούν στην επιπρόσθετη ορμή λόγω της παρουσίας του επιφανειακού κυλίνδρου. Τα μεγέθη αυτά δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις που παρουσιάστηκαν και στην παράγραφο 4.4:

$$R_{xx} = \frac{\delta}{1-\delta/d} \left(c_x - \frac{P}{d} \right)^2 \quad (6.11)$$

$$R_{xy} = \frac{\delta}{1-\delta/d} \left(c_x - \frac{P}{d} \right) \left(c_y - \frac{Q}{d} \right) \quad (6.12)$$

$$R_{yy} = \frac{\delta}{1-\delta/d} \left(c_y - \frac{Q}{d} \right)^2 \quad (6.13)$$

όπου $\delta = \delta(x, y, t)$ είναι το πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου.

Η ταχύτητα μετακίνησης του επιφανειακού κυλίνδρου βασίζεται στην εργασία των Sørensen et al. (2004) και δίνεται από τις σχέσεις:

$$(c_x, c_y) = (c \cdot \cos\theta, c \cdot \sin\theta) \quad (6.14)$$

$$c = f_v \sqrt{gh} \quad (6.15)$$

Χρησιμοποιώντας την τιμή $f_v = 1.0$ λαμβάνεται η σχέση της γραμμικής θεωρίας για ρηχά νερά. Η τιμή αυτή είναι ικανοποιητικά για την ταχύτητα διάδοσης των κυματισμών λίγο πριν τη ζώνη θραύσης. Ωστόσο σύμφωνα και με τους Madsen et al. (1997a), το MIKE 21 BW έχει ως προεπιλεγμένη τιμή του συντελεστή για την ταχύτητα διάδοσης του κυλίνδρου εντός της ζώνης θραύσης $f_v = 1.3$. Η μετάβαση από $f_v = 1.0$ σε $f_v = 1.3$ γίνεται βάσει μιας εκθετικής συνάρτησης

του χρόνου, σύμφωνα με τους Sørensen et al. (2004). Η μεταβατική κλίμακα χρόνου είναι η ίδια που υπεισέρχεται και στον εκθετικό νόμο εξέλιξης της γωνίας θραύσης ϕ (σχέση (4.30)).

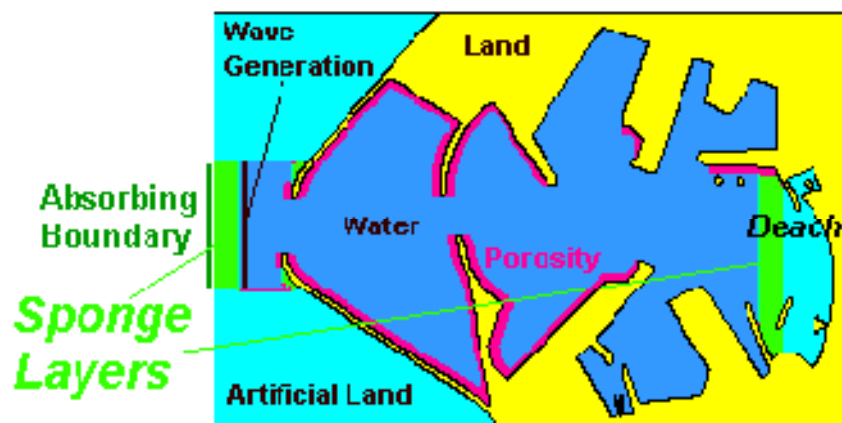
Για τη διεύθυνση θ της ταχύτητας του επιφανειακού κυλίνδρου, το MIKE 21 BW παρέχει δύο επιλογές:

- Τύπος ταχύτητας 1: η διεύθυνση της ταχύτητας προσδιορίζεται διαδραστικά από το στιγμιαίο κυματικό πεδίο. Η διαδικασία αυτή ορισμένες φορές μπορεί να προκαλέσει αριθμητικές αστάθειες.
- Τύπος ταχύτητας 3: η διεύθυνση της ταχύτητας του επιφανειακού κυλίνδρου τίθεται βάσει μιας προδιαγεγραμμένης διεύθυνσης διάδοσης κυματισμού.

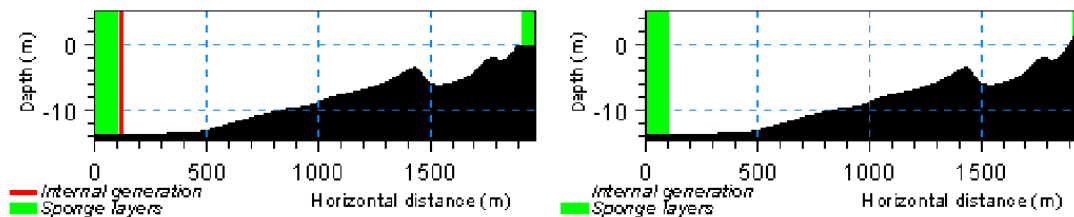
6.5 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Το MIKE 21 BW παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού της μετακίνησης της ακτογραμμής (moving shoreline) με τη μέθοδο των σχισμών που αναπτύσσουν οι Madsen et al. (1997a). Επίσης, μπορεί να προσομοιώσει τη ροή πάνω και μέσα από πορώδη όρια, η οποία δεν ακολουθεί υποχρεωτικά το νόμο του Darcy. Η επιρροή των πόρων εκφράζεται με την συμπερίληψη επιπλέον όρων τριβής με συνιστώσες στρωτής και τυρβώδους ροής στις εξισώσεις Boussinesq. Έτσι, μπορεί να περιγραφεί η ανάκλαση, η απορρόφηση και η διάδοση της κυματικής ενέργειας σε πορώδη μέσα, όπως οι ύφαλοι κυματοθραύστες.

Επίσης, το MIKE 21 BW μπορεί να εφαρμόσει στα όρια του υπολογιστικού πεδίου στοιβάδες απορρόφησης ενέργειας (sponge/absorbing layers). Η χρήση των στοιβάδων αυτών εξασφαλίζει στα όρια τις κατάλληλες συνθήκες ακτινοβολίας, οι οποίες απομειώνουν σταδιακά μέρος ή όλη την ενέργεια του κυματικού πεδίου που διαδίδεται προς τα έξω από το υπολογιστικό πεδίο, ενώ ταυτόχρονα εξασφαλίζουν μικρή ή μηδενική ανάκλαση.



Σχήμα 6.5: Παράδειγμα εφαρμογής απορροφητικών στοιβάδων (sponge layers) σε κάποια περιοχή δισδιάστατης προσομοίωσης (πηγή: [40])



Σχήμα 6.6: Παράδειγμα εφαρμογής στοιβάδων απορρόφησης (sponge layers) στο μονοδιάστατο μοντέλο (1DH) MIKE 21 BW. Αριστερά: χωρίς την πρόβλεψη της μετακινούμενης ακτογραμμής δεξιά: με πρόβλεψη της μετακινούμενης ακτογραμμής (moving shoreline) (πηγή: [40])

Βάσει της εργασίας των Larsen και Dancy (1983), στο εγχειρίδιο του προγράμματος προτείνεται η σχέση για το συντελεστή απορρόφησης των στοιβάδων:

$$C_{sponge} = \alpha r^{i-1} \quad \text{με } i = 1, N_{sponge} \quad (6.16)$$

όπου α, r είναι σταθερές προς προσδιορισμό και N_{sponge} είναι ο αριθμός των κόμβων εντός της στοιβάδας απορρόφησης.

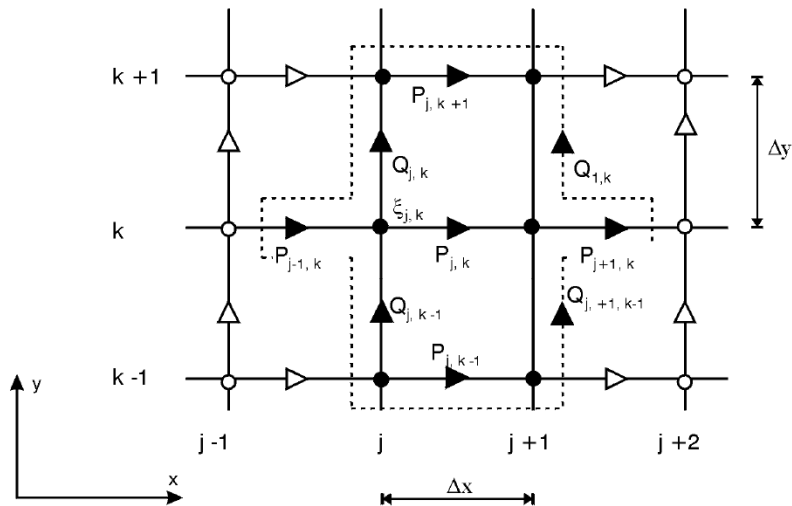
Η γραμμή γένεσης των κυματισμών τοποθετείται συνήθως μπροστά από απορροφητικές στοιβάδες στο όριο από το οποίο θεωρείται ότι εισάγεται το κυματικό πεδίο σε οποιαδήποτε κατεύθυνση ως προς το χώρο προσομοίωσης, όπως φαίνεται στα σχήματα 6.5 και 6.6.

6.6 ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται στο (2DH) MIKE 21 BW βασίζεται στο αποκαλούμενο SYSTEM 21 σχήμα, το οποίο προτάθηκε από τους Abbott et al. (1973) και επεκτάθηκε από τους Abbott et al. (1978) για την προσομοίωση της διάδοσης βραχέων κυματισμών. Από τότε το δημοφιλές αυτό αριθμητικό σχήμα βελτιώνεται συνεχώς π.χ. από τους Madsen et al. (1991) και Madsen και Sørensen (1992).

Οι διαφορικές εξισώσεις διακριτοποιούνται χωρικά στον ορθογώνιο έκκεντρο κανάβο του σχήματος 6.7. Τα βαθμωτά μεγέθη, όπως η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, ορίζονται στους κόμβους του κανάβου, ενώ οι συνιστώσες της ροής ορίζονται στο μέσο γειτονικών κόμβων (επί των πλευρών των βρόχων) στις αντίστοιχες διευθύνσεις. Οι χωρικές παράγωγοι προσεγγίζονται με μέσους όρους εμπρόσθιων πεπερασμένων διαφορών, εκτός από τους συναγωγικούς όρους των εξισώσεων ορμής που διακριτοποιούνται κατά τρόπο που περιγράφουν αναλυτικά οι Madsen και Sørensen (1992). Η ολοκλήρωση ως προς το χρόνο επιτυγχάνεται με ένα πεπλεγμένο κεντρικό σχήμα.

Ο αλγόριθμος που εφαρμόζεται είναι μη επαναληπτικός πεπλεγμένος εναλλασσόμενης διεύθυνσης (Alternating Direction Implicit-ADI) και εφαρμόζονται οι τεχνικές "fractional step" και "side-feeding" (ημι-γραμμικοποίηση των μη γραμμικών όρων). Προκύπτει τελικά ένα τριδιαγώνιο σύστημα εξισώσεων που επιλύεται με το διαδεδομένο αλγόριθμο διπλής σάρωσης (double sweep).



Σχήμα 6.7: Έκκεντρος κάναβος στο επίπεδο x - y κατά την εφαρμογή του αριθμητικού σχήματος του μοντέλου (2DH) MIKE 21 BW (πηγή: [40])

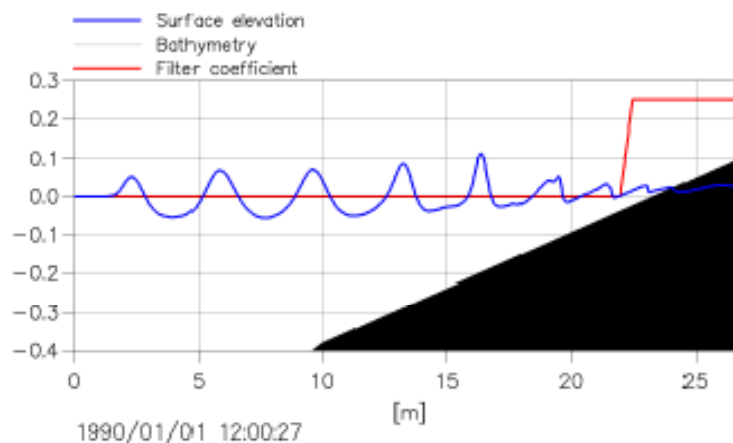
Η χρήση στο μοντέλο (1DH) MIKE 21 BW μιας πρωταρχικής μορφής μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να επιφέρει σοβαρά σφάλματα, ειδικά όταν εφαρμόζονται συναρτήσεις παρεμβολής ίδιας τάξης για τον υπολογισμό των παροχών και της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας. Για να επιτευχθούν σταθερές λύσεις χωρίς διακυμάνσεις χρησιμοποιείται μικτή παρεμβολή. Πεπερασμένα στοιχεία με παροχές τετραγωνικής μορφής και γραμμική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας εφαρμόζονται σε συνδυασμό με μια βοηθητική μεταβλητή.

Η ολοκλήρωση ως προς το χρόνο εκτελείται είτε μέσω ενός ρητού σχήματος Taylor-Galerkin τριών βημάτων, είτε μέσω μιας μεθόδου πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector) 4^{ης} τάξης Adams-Bashforth-Moulton.

Ένα σετ τριών γραμμικών εξισώσεων πρέπει να επιλυθεί. Για μικρά συστήματα η επίλυση μπορεί να γίνει με απαλοιφή κατά Gauss. Για μεγάλα συστήματα εφαρμόζονται πιο χρονοβόρες μέθοδοι, όπως η επαναληπτική μέθοδος Krylov (generalized minimum residual-GMRES) σε συνδυασμό με μια επαρκή προεργασία (μη ολοκληρωμένη LU παραγοντοποίηση). Η αριθμητική επίλυση περιγράφεται αναλυτικά από τους Sørensen et al. (2004).

Η χρησιμοποιούμενη έκδοση του MIKE 21 BW υποστηρίζει τόσο κανονικό, όσο και ακανόνιστο πλέγμα (mesh). Το ακανόνιστο πλέγμα εξασφαλίζει το μέγιστο βαθμό προσαρμοστικότητας σε οποιοδήποτε πρόβλημα.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι κάποιες φορές απαιτείται η χρήση ενός αριθμητικού φίλτρου ώστε να αντιμετωπιστούν αστάθειες οφειλόμενες σε υψηλές συχνότητες κατά την αναρρίχηση και καταρρίχηση των κυματισμών στην ακτή ή ώστε να σκεδαστεί ενέργεια σε περιπτώσεις όπου δεν μπορεί να αναπτυχθεί ο επιφανειακός κύλινδρος. Όταν συμπεριλαμβάνεται στην προσομοίωση η θραύση κυματισμών και η πρόβλεψη της μετακίνησης της ακτογραμμής, κάποιες φορές απαιτείται ένα αρχείο εισόδου με τους συντελεστές του αριθμητικού φίλτρου. Κοντά στην περιοχή της ακτογραμμής ηρεμίας, οι συντελεστές αυτοί πρέπει να πάρουν τιμές μεταξύ 0 και 1 π.χ. 0.25 ή 0.5, ενώ έξω από τη ζώνη διαβροχής πρέπει να είναι μηδενικοί. Καλό είναι στη μεταβατική ζώνη να χρησιμοποιείται (γραμμική) παρεμβολή και να μη γίνεται απότομη μετάβαση από τις μηδενικές τιμές των συντελεστών στις μεγαλύτερες τιμές. Ενδεικτικά, ένα παράδειγμα εφαρμογής αριθμητικού φίλτρου φαίνεται στο σχήμα 6.8.



Σχήμα 6.8: Παράδειγμα εφαρμογής αριθμητικού φίλτρου με μεταβαλλόμενους χωρικά συντελεστές στη ζώνη αναρρίχησης/καταρρίχησης (πηγή: [40])

6.7 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ MIKE 21 BW (1DH) ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ WALLINGFORD (1997)

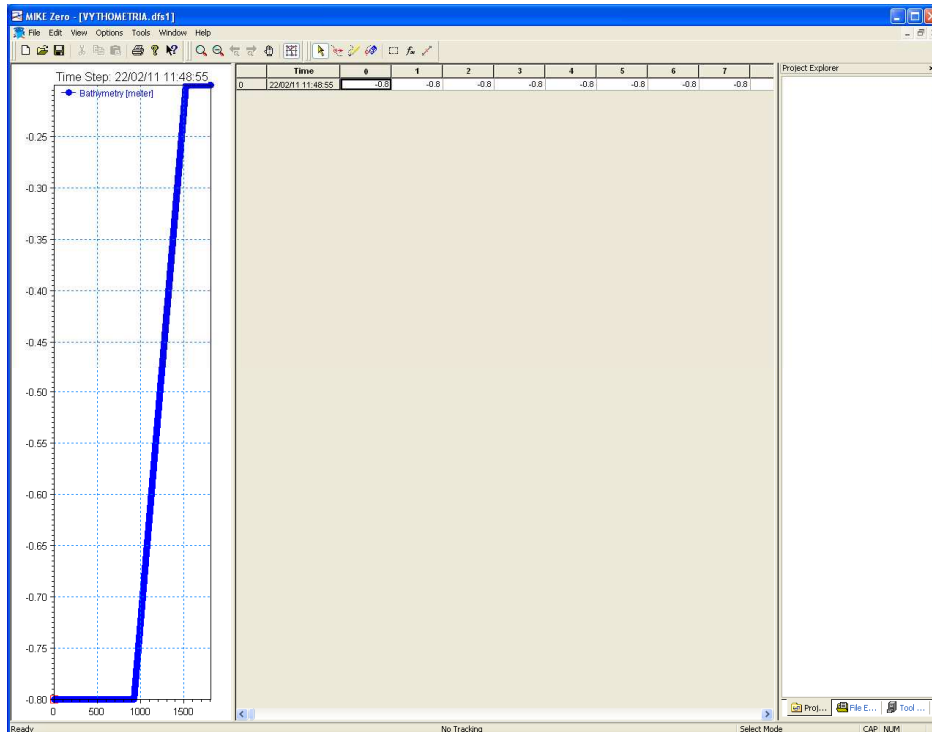
Όπως αναφέρθηκε, τα αποτελέσματα του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα του προγράμματος MIKE 21 BW (1DH). Οι εφαρμογές των δύο μοντέλων αφορούσαν στα πειράματα επαλήθευσης που παρουσιάζονται αναλυτικά στο 7^ο κεφάλαιο. Στην παράγραφο αυτή αναπτύσσονται ενδεικτικά υπό μορφή παραδείγματος τα βήματα εφαρμογής του MIKE 21 BW για το πείραμα του Wallingford (1997). Η εφαρμογή του για τις υπόλοιπες πειραματικές διατάξεις είναι παρόμοια.

Για την προσομοίωση του πειράματος διατηρήθηκαν τα ίδια δεδομένα με το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009), όσον αφορά στα βήματα διακριτοποίησης Δx και Δt , μιας και απαιτείται ο αριθμός Courant να είναι μικρότερος από 0.5 για μονοδιάστατες εφαρμογές του MIKE 21 BW. Κατά τα λοιπά ακολουθούνται οι οδηγίες που προβλέπονται στο εγχειρίδιο χρήσης του προγράμματος. Η πορεία μοντελοποίησης του πειράματος ακολουθεί τη σειρά:

- 1) Δημιουργία βυθομετρίας (μονοδιάστατο προφίλ)
- 2) Δημιουργία απορροφητικών στοιβάδων (sponge layers)
- 3) Δημιουργία κυματογεννήτριας μονοχρωματικών κυματισμών (regular wave generator)
- 4) Εφαρμογή υποπρογράμματος BW, όπου επιλέγονται οι διάφορες παράμετροι επίλυσης (εξισώσεις που εφαρμόζονται, χρονικό βήμα, διάρκεια προσομοίωσης, εφαρμογή τριβής πυθμένα κλπ.)

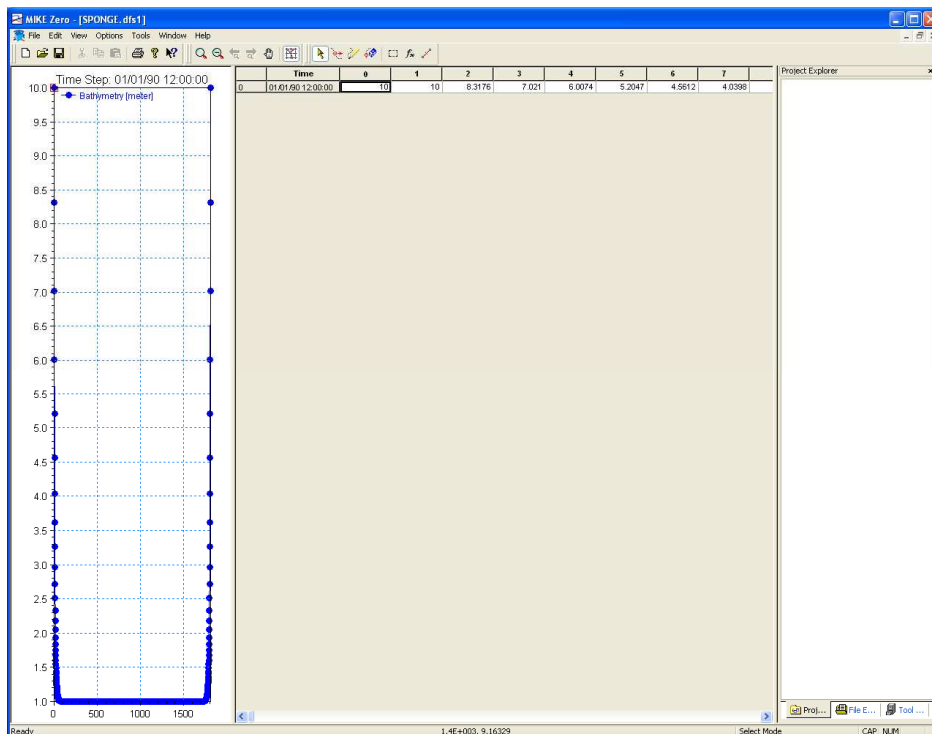
Αναλυτικότερα, τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής:

Βήμα 1^ο: Δημιουργείται μονοδιάστατη βυθομετρία (cross-shore profile) από το MIKE Zero (σχήμα 6.9). Βήμα διακριτοποίησης επιλέγεται το ίδιο με το μοντέλο των Karambas και Memos (2009), δηλαδή $\Delta x = 0.02 \text{ m}$, το οποίο διατηρείται σε όλη την εφαρμογή.



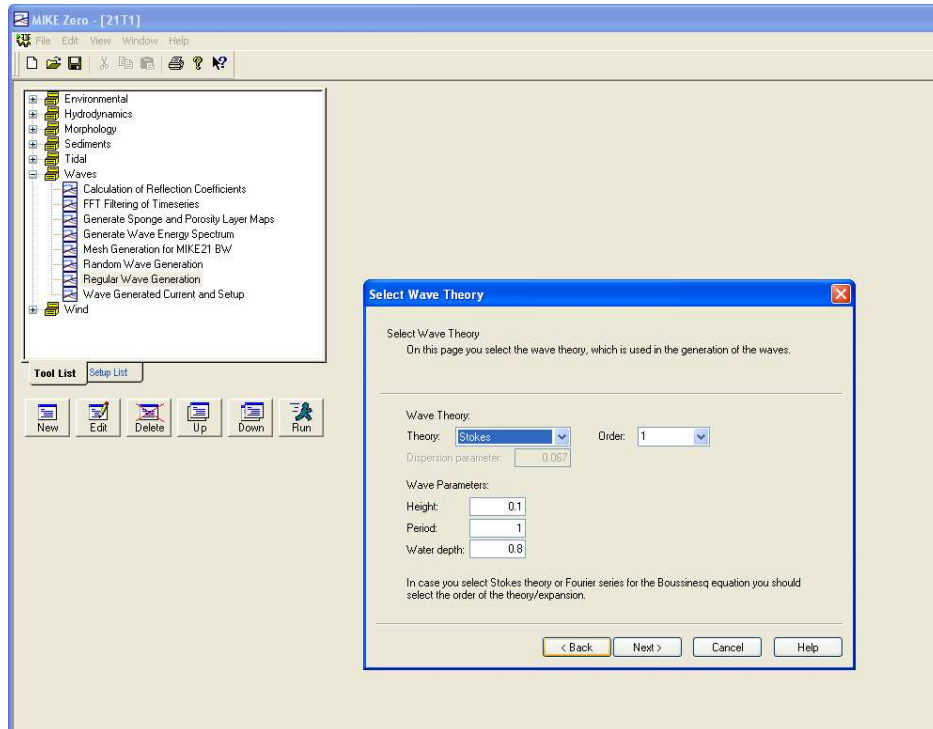
Σχήμα 6.9: Δημιουργία μονοδιάστατης βυθομετρίας (cross-shore profile) στο MIKE Zero

Βήμα 2^ο: Δημιουργία απορροφητικών στοιβάδων σύμφωνα με τη σχέση που προτείνεται από το πρόγραμμα: $C_{sponge} = \alpha r^{i-1}$, $i = 1, N_{sponge}$. Επιλέγεται αριθμός απορροφητικών στοιβάδων $N_{sponge} = 100$, οπότε το βιβλίο οδηγιών του MIKE 21 προτείνει τις τιμές $\alpha = 10$ και $r = 0.92$. Το αρχείο με τις απορροφητικές στοιβάδες φαίνεται στο σχήμα 6.10.



Σχήμα 6.10: Δημιουργία αρχείου απορροφητικών στοιβάδων (sponge layers)

Βήμα 3^ο: Παράγεται η κυματική διαταραχή (κυματογεννήτρια) με το εργαλείο MIKE 21 TOOLS → Regular Wave Generation. Επιλέγεται θεωρία κυματισμών Stokes 1^{ης} τάξης (η κυματογεννήτρια τοποθετείται σε βαθιά νερά), ύψος κύματος $H = 0.1\text{ m}$, περίοδος κύματος $T = 1\text{ sec}$ και βάθος νερού $d = 0.8\text{ m}$ στη θέση της γεννήτριας των κυματισμών. Η παραγωγή κυματισμών φαίνεται στο σχήμα 6.11.



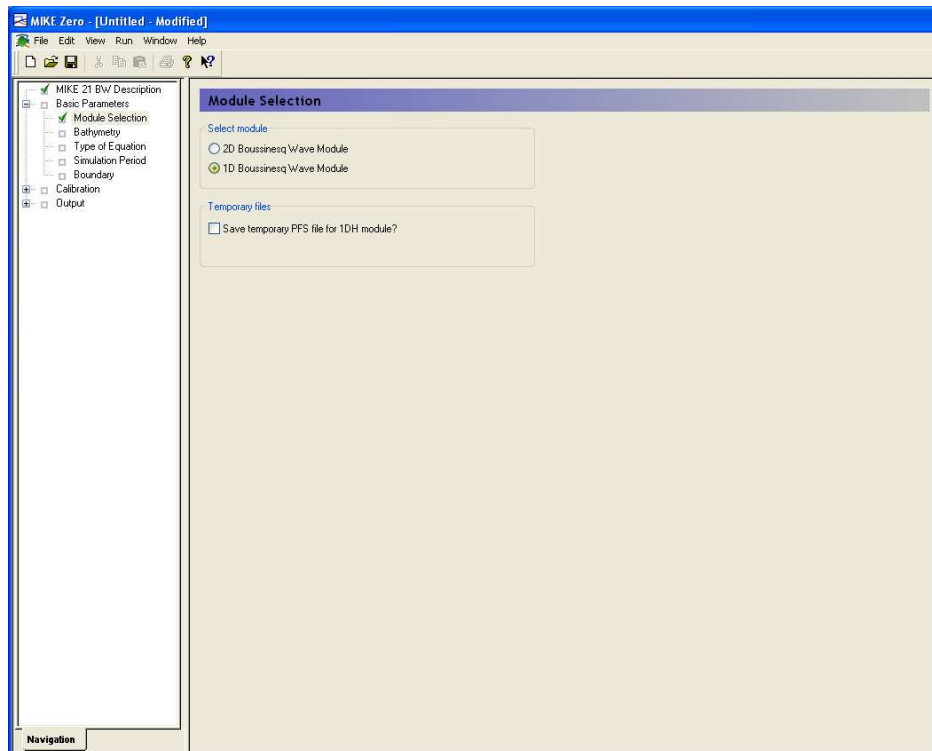
Σχήμα 6.11: Γένεση απλών κυματισμών (regular wave generation)

Βήμα 4^ο: Επιλογή και εφαρμογή του προγράμματος MIKE 21 BW που περιλαμβάνει τα τρία σετ παραμέτρων: "Basic parameters", "Calibration" και "Output" (σχήμα 6.12).

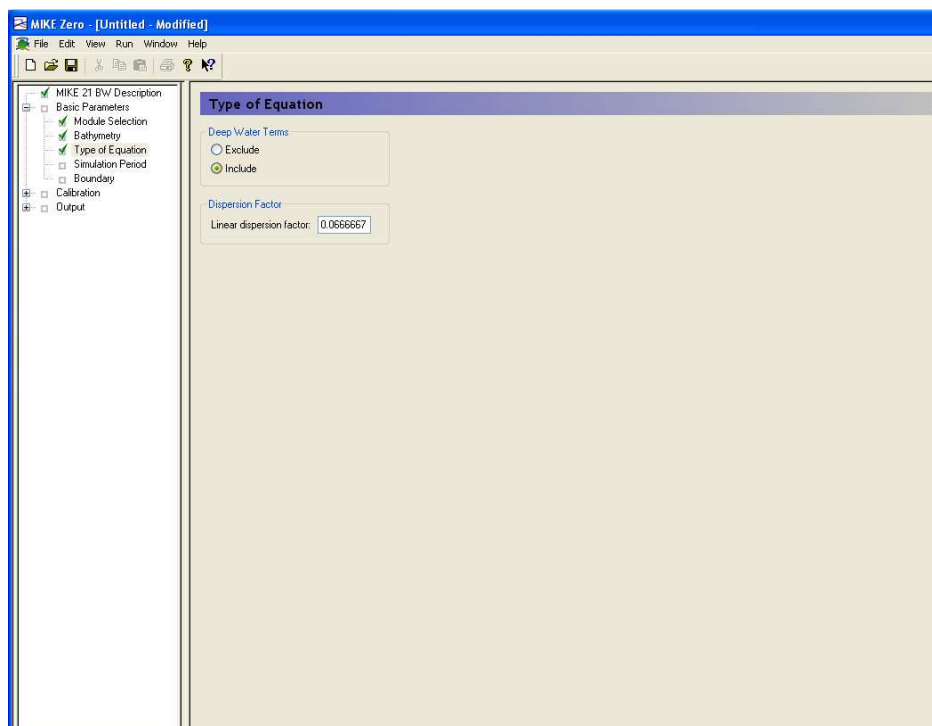


Σχήμα 6.12: Εκκίνηση MIKE 21 BW

Βήμα 5^ο: Συμπληρώνονται ένα-ένα τα πεδία του menu "basic parameters". Αρχικά στο πεδίο "Module Selection" επιλέγεται το μονοδιάστατο μοντέλο "1D Boussinesq Wave Module" (σχήμα 6.13). Στη συνέχεια στην επιλογή "Bathymetry" εισάγεται το αρχείο της βυθομετρίας και στο "Type of Equation" επιλέγεται η συμπερίληψη των όρων βαθιών νερών των εξελιγμένων εξισώσεων Boussinesq (σχήμα 6.14).

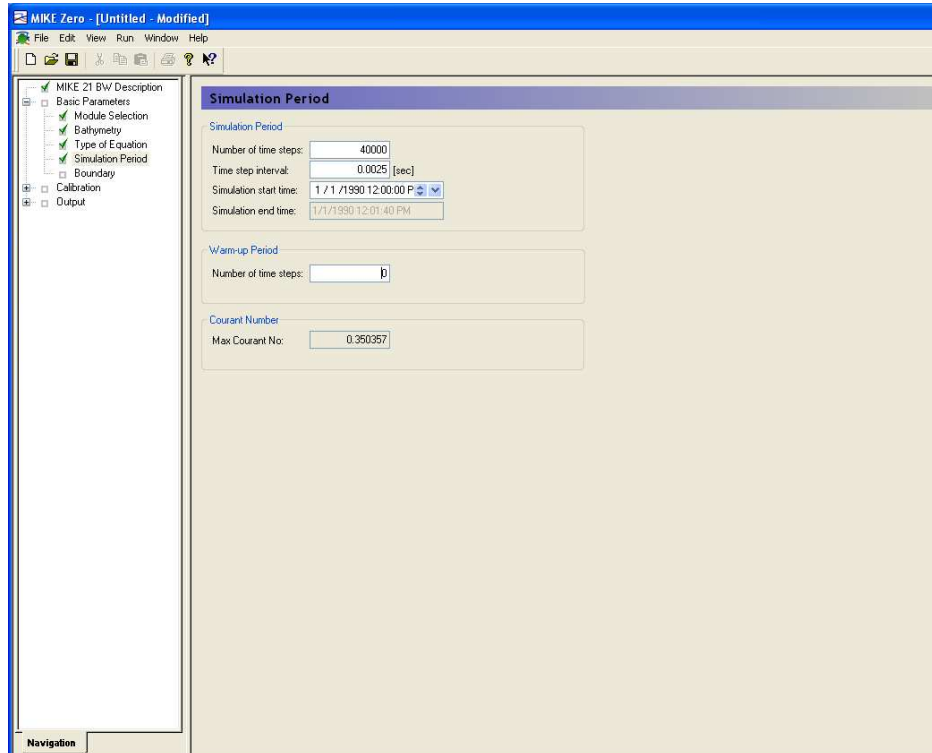


Σχήμα 6.13: Επιλογή μονοδιάστατου μοντέλου Boussinesq



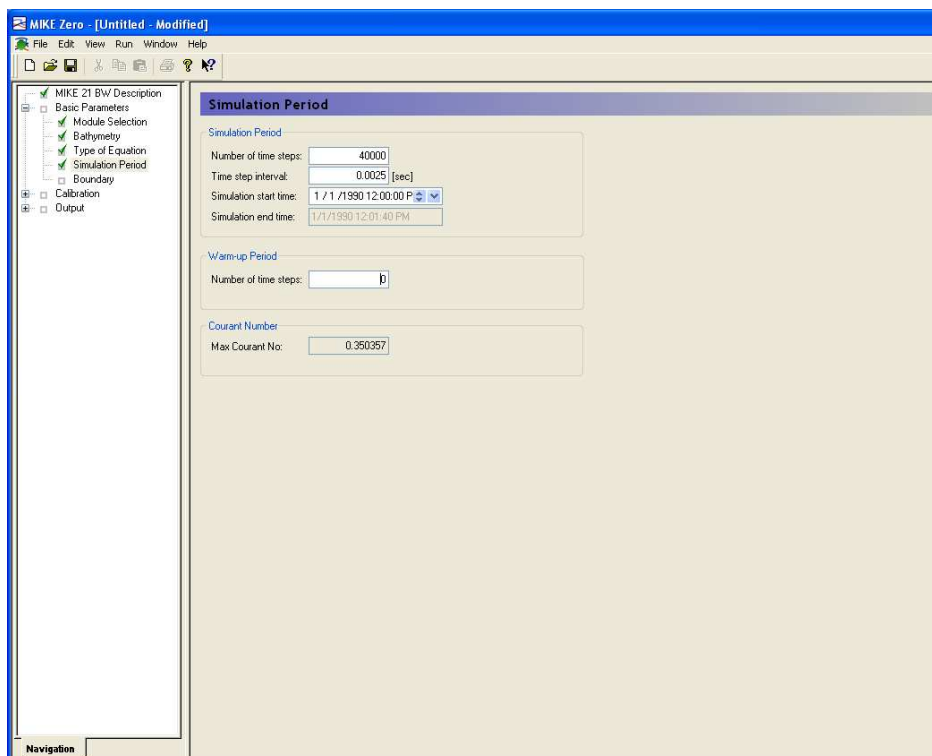
Σχήμα 6.14: Συμπερίληψη όρων βαθιών νερών (βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς)

Στη συνέχεια στο πεδίο "simulation period" επιλέγεται το χρονικό βήμα διακριτοποίησης $\Delta T = 0.0025 \text{ sec}$ και ο αριθμός των χρονικών βημάτων $N = 40000$ ώστε να υπάρχει αρκετή διάρκεια προσομοίωσης ($N \cdot \Delta t = 100 \text{ sec}$) (σχήμα 6.15). Το MIKE21 BW υπολογίζει αυτόματα το μέγιστο αριθμό Courant, που εν προκειμένω είναι 0.35, δηλαδή μικρότερος από 0.5 που απαιτείται για τις μονοδιάστατες προσομοιώσεις. Τέλος, στο πεδίο "Boundary" επιλέγεται η μη θεώρηση οριακών συνθηκών.

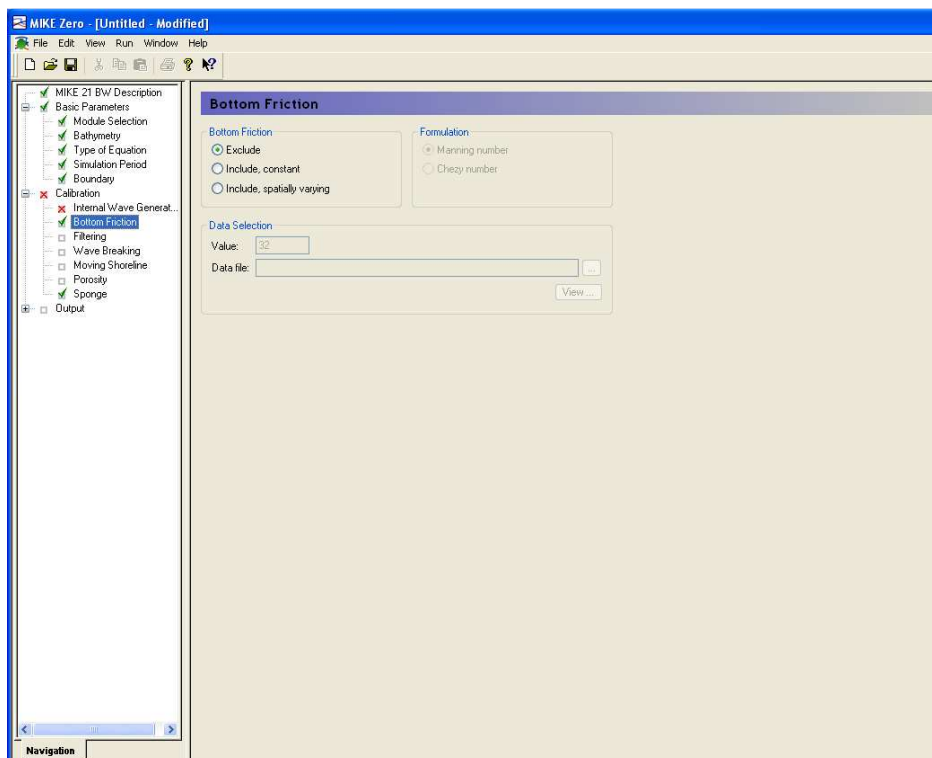


Σχήμα 6.15: Επιλογή χρονικού βήματος προσομοίωσης Δt , αριθμού χρονικών βημάτων και υπολογισμός μέγιστου αριθμού Courant

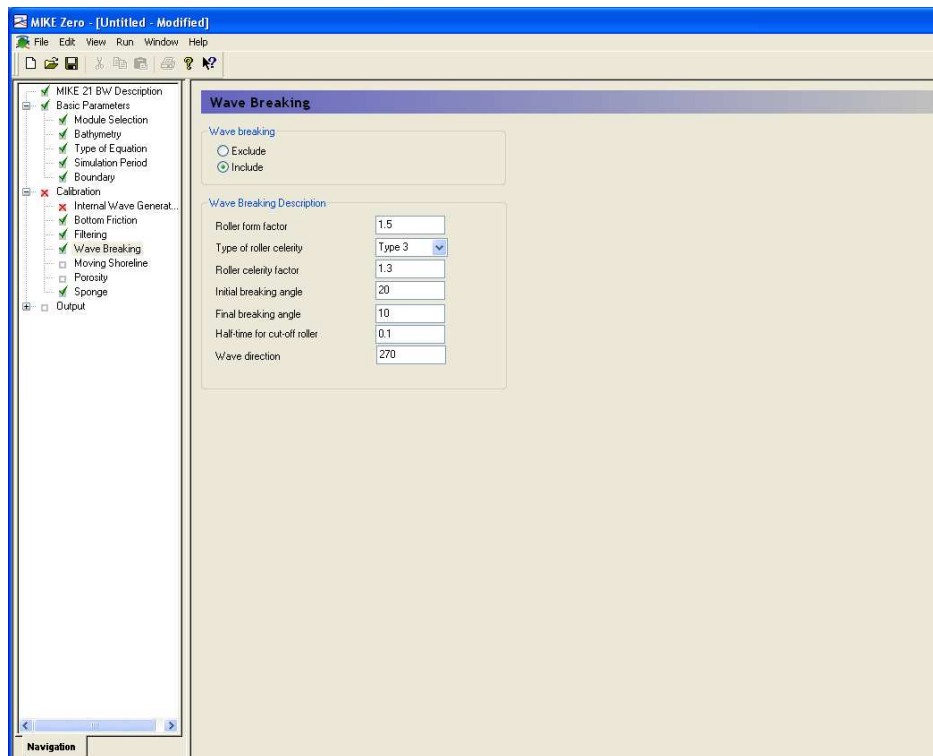
Βήμα 6^ο: Συμπληρώνονται ένα-ένα τα πεδία του menu "Calibration". Αρχικά στο πεδίο "Internal Wave Generation" εισάγεται η κυματογεννήτρια στη θέση $499 \cdot \Delta x$ (σχήμα 6.16). Στη συνέχεια επιλέγεται να μη συμπεριληφθεί η τριβή πυθμένα στο πεδίο "Bottom Friction" (σχήμα 6.17) αλλά και η μη εφαρμογή αριθμητικού φίλτρου στην επιλογή "Filtering". Παρότι το πείραμα του Wallingford δεν περιλαμβάνει θραυόμενους κυματισμούς, επιλέγεται να συμπεριληφθεί η θραύση στο πεδίο "Wave Breaking" (σχήμα 6.18), όπως και στην εφαρμογή του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009), ώστε να ελεγχθεί η σωστή ή μη ενεργοποίηση της θραύσης. Επιλέγεται παράγοντας σχήματος του κυλίνδρου "Roller form factor" ίσος με 1.5, τύπος ταχύτητας κυλίνδρου 3 (σταθερή επιλεγμένη διεύθυνση κυλίνδρου 270) και παράγοντας ταχύτητας κυλίνδρου 1.3. Επίσης, επιλέγονται οι προτεινόμενες από τους Schäffer et al. (1993) και Madsen et al. (1997a) τιμές της γωνίας έναρξης της θραύσης $\varphi_b = 20^\circ$ και λήξης $\varphi_o = 10^\circ$, καθώς και χρονική κλίμακα ανάπτυξης του κυλίνδρου "Half-time for cut-off roller" ίση με $0.1 \cdot T = 0.1 \text{ sec}$.



Σχήμα 6.16: Εισαγωγή κυματισμού (κυματογεννήτριας) στο πεδίο

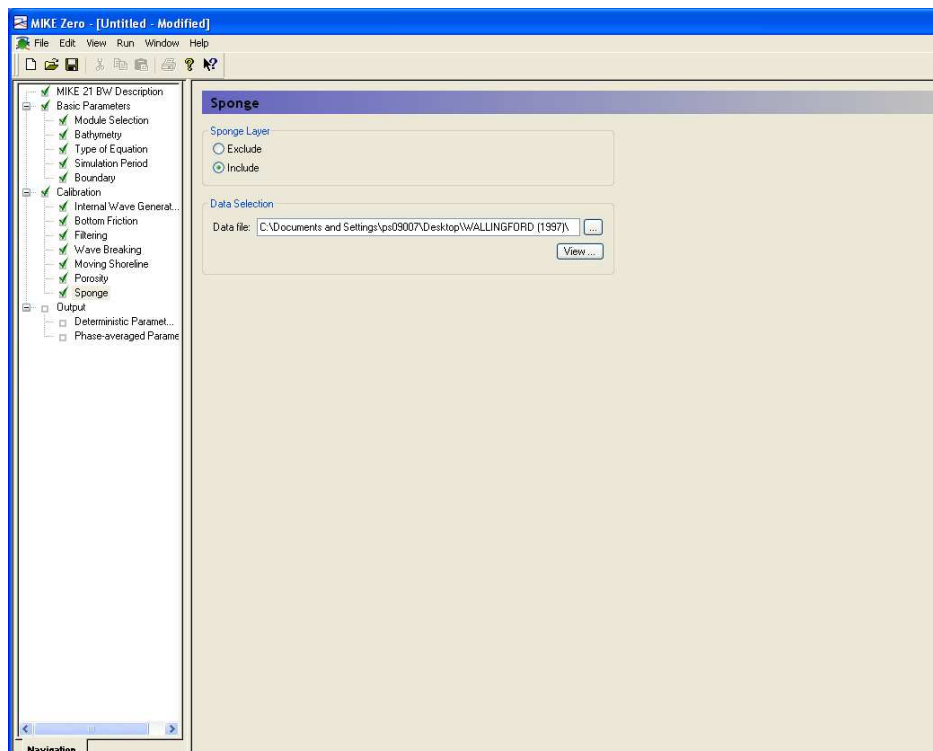


Σχήμα 6.17: Μη συμπερίληψη της τριβής πυθμένα στην προσομοίωση



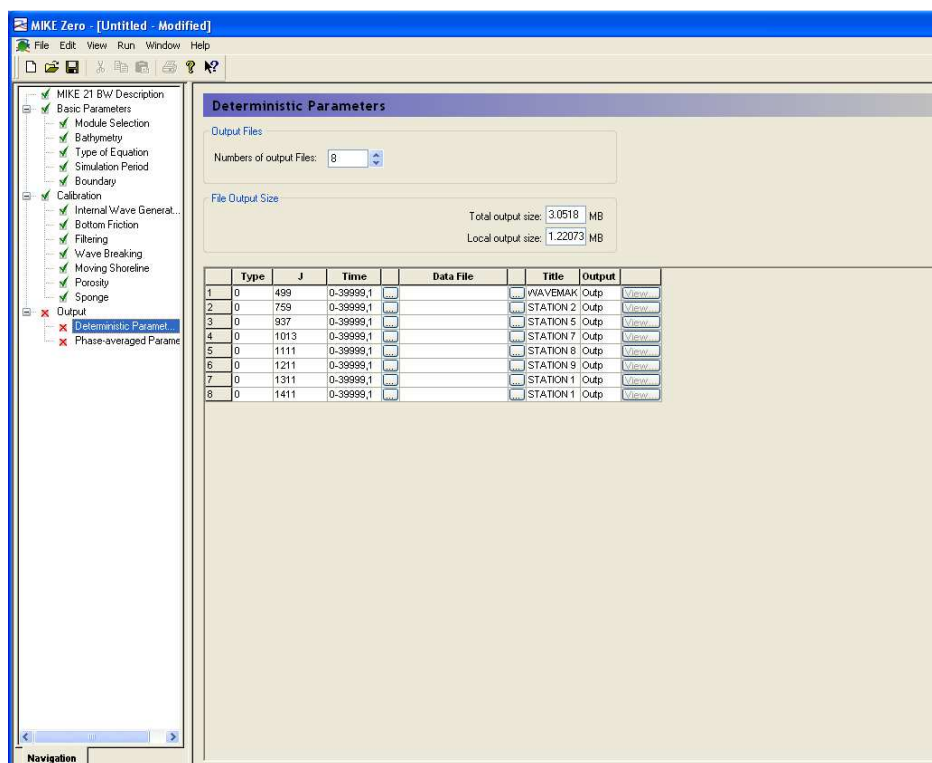
Σχήμα 6.18: Συμπλήρωση του πεδίου επιλογών της θραύσης

Στη συνέχεια επιλέγεται η μη προσομοίωση της μετακίνησης της ακτογραμμής και του πορώδους. Τέλος, στο πεδίο "Sponge" εισάγεται το αρχείο των απορροφητικών στοιβάδων που δημιουργήθηκε παραπάνω (σχήμα 6.19).



Σχήμα 6.19: Εισαγωγή αρχείου απορροφητικών στοιβάδων

Βήμα 7^ο: Συμπληρώνονται τα πεδία του menu των αποτελεσμάτων "Output". Υπάρχουν δύο υποπεδία, το "Deterministic Parameters" και το "Phase-averaged Parameters". Το πρώτο περιλαμβάνει αποτελέσματα συναρτήσεως του χρόνου π.χ. χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ή της ταχύτητας κλπ. και το δεύτερο μέσα αποτελέσματα ως προς τη φάση κυματισμού π.χ. ύψος κύματος, ασυμμετρία, κύρτωση, setup κλπ. Για το πείραμα του Wallingford (1997) επιλέχθηκε να υπολογιστούν στο πεδίο "Deterministic Parameters" μόνο οι χρονοσειρές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στους σταθμούς μέτρησης (σχήμα 6.20).



Σχήμα 6.20: Επιλογή τύπου αποτελεσμάτων στο πεδίο "Output"

Βήμα 8^ο: Αφού ολοκληρωθεί η επιλογή των παραμέτρων προσομοίωσης, από το menu "Run" γίνεται η επιλογή "Start Simulation" και το MIKE 21 BW αρχίζει την προσομοίωση της διάδοσης των κυματισμών. Τα αποτελέσματα για το πείραμα του Wallingford (1997) και τα υπόλοιπα πειράματα επαλήθευσης παρουσιάζονται στο έβδομο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^ο

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ BOUSSINESQ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ MEMOS (2009) ΜΕ ΤΗ ΝΕΑ ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΤΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ

7.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η επαλήθευση του τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq των Karambas και Memos (2009), όπως διαμορφώθηκε ύστερα από την προσθήκη της θραύσης σύμφωνα με τη νέα προσέγγιση που προτείνεται στο 5^ο κεφάλαιο. Ουσιαστικά ελέγχεται η ικανότητα του τροποποιημένου μοντέλου να περιγράψει τη διάδοση κυματισμών στη ζώνη πριν τη θραύση, αλλά και εντός της ζώνης θραύσης. Επίσης, ελέγχεται το κατά πόσο μπορεί να συλλάβει επακριβώς τη θέση εκκίνησης της θραύσης. Αντίθετα, δεν αποτέλεσε αντικείμενο της εργασίας η περιγραφή την αναρρίχησης των κυματισμών στις ακτές και επομένως η επέκταση του μοντέλου στη ζώνη διαβροχής (swash zone) εναπόκειται στους μελλοντικούς στόχους, όπως αναφέρεται στο 8^ο κεφάλαιο. Έτσι, στα κατάντη των υπολογιστικών πεδίων τέθηκαν απορροφητικές στοιβάδες και άρα δεν συμπεριλήφθηκε η μετακίνηση της ακτογραμμής (moving shoreline). Η επαλήθευση του μοντέλου γίνεται βάσει διεθνώς αναγνωρισμένων πειραματικών δεδομένων. Επίσης, έγινε σύγκριση με τα αποτελέσματα του υπολογιστικού πακέτου MIKE 21 BW (1DH) αλλά και με τις προηγούμενες τροποποιημένες εκδόσεις του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) που περιλάμβαναν τη θραύση βάσει άλλων προσεγγίσεων. Τα πειράματα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν τα εξής:

- Πείραμα Wallingford (1997): απλοί μονοχρωματικοί, βραχείς, μη θραυόμενοι κυματισμοί, διαδιδόμενοι σε πυθμένα ήπιας κλίσης
- Πείραμα των Ting και Kirby (1994): θραυόμενοι cnoidal κυματισμοί σε πυθμένα ήπιας κλίσης
- Πείραμα των Beji και Battjes (1993) (α): θραυόμενα απλά μονοχρωματικά, βραχέα και μακρά κύματα πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη
- Πείραμα των Beji και Battjes (1993) (β): θραυόμενοι σύνθετοι κυματισμοί φάσματος Jonswap πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη
- Πείραμα των Hansen και Svendsen (1979): θραυόμενοι απλοί μονοχρωματικοί, βραχείς και μακροί κυματισμοί σε πυθμένα ήπιας κλίσης
- Πείραμα των Mase και Kirby (1992): θραυόμενοι σύνθετοι κυματισμοί φάσματος Pierson-Moskowitz σε πυθμένα ήπιας κλίσης
- Πείραμα του Synolakis (1987): μοναχικό κύμα σε πυθμένα ήπιας κλίσης

Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις δίνεται ακριβής περιγραφή των πειραματικών διατάξεων, αλλά και του υπολογιστικού πεδίου του αριθμητικού μοντέλου. Η σύγκριση γίνεται μέσω της

παρουσίασης των διαγραμμάτων μεταβολής της ελεύθερης επιφάνειας με το χρόνο. Επίσης, παρότι το μοντέλο δεν είναι phase-averaged, υπολογίζεται το ύψος κύματος και στατιστικά μεγέθη, όπως η ασυμμετρία (asymmetry) και η λοξότητα (skewness). Η διαδικασία εισαγωγής των δεδομένων και η εφαρμογή για την επαλήθευση του MIKE 21 BW με το πείραμα του Wallingford (1997) παρουσιάστηκε στην τελευταία παράγραφο του 6^{ου} κεφαλαίου. Η διαδικασία είναι παρόμοια και για τα υπόλοιπα πειράματα και δεν παρουσιάζεται αναλυτικά, παρά μόνο τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) προγραμματίστηκε σε γλώσσα Fortran 90 και οι κώδικες των πειραμάτων παρουσιάζονται αναλυτικά στο παράρτημα Α. Οι βοηθητικοί κώδικες που αναφέρονται παρακάτω παρουσιάζονται στο παράρτημα Β.

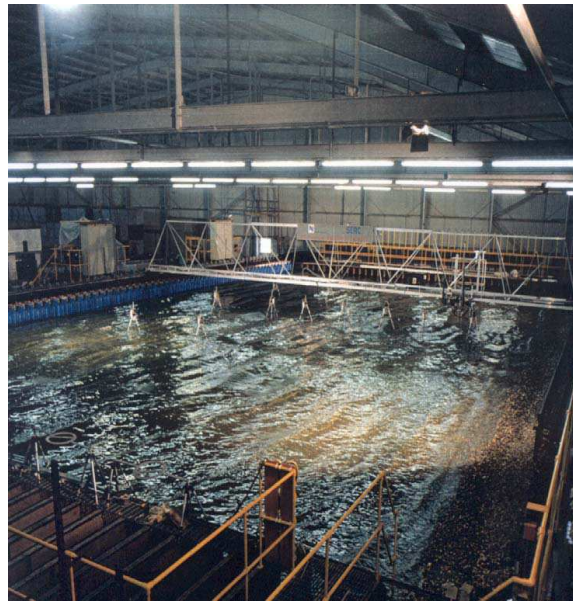
7.2 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ WALLINGFORD (1997)

Τα πειράματα διεξήχθησαν στις εγκαταστάσεις UKCRF (UK Coastal Research Facility) του εργαστηρίου HR Wallingford σε διάστημα 12 εβδομάδων το 1997, ενώ λίγα συμπληρωματικά έγιναν στις αρχές του 1998. Εξετάστηκε ένα σύνολο διαφορετικών περιπτώσεων διάδοσης κυματισμών. Συγκεκριμένα ελέγχθηκαν: (1) κάθετη και υπό γωνία προς την ακτή διάδοση απλών μονοχρωματικών κυματισμών, (2) κάθετη προς την ακτή διάδοση μονοκατευθυντικών (long-crested) και πολυκατευθυντικών (short-crested) σύνθετων κυματισμών, (3) πλάγια πρόσπτωση διχρωματικών (bichromatic) κυματισμών, (4) κάθετη προς την ακτή διάδοση μονοκατευθυντικών (long-crested) και πολυκατευθυντικών (short-crested) σύνθετων κυματισμών με παρουσία εγκάρσιου ρεύματος, (5) πλάγια πρόσπτωση μονοκατευθυντικών (long-crested) σύνθετων κυματισμών, (6) πλάγια πρόσπτωση απλών και σύνθετων κυματισμών με παρουσία εγκάρσιου ρεύματος. Στόχος των πειραμάτων ήταν η μελέτη των χαρακτηριστικών των κυμάτων καθώς προωθούνται προς τα ρηχά νερά, όπως η εξέλιξη της από κοινού πυκνότητας πιθανότητας του ύψους και της περιόδου σύνθετων κυματισμών και η συσχέτισή της με το αντίστοιχο φάσμα, η κατευθυντικότητα των κυματισμών και η κινηματική των υγρών μορίων στη ζώνη θραύσης.

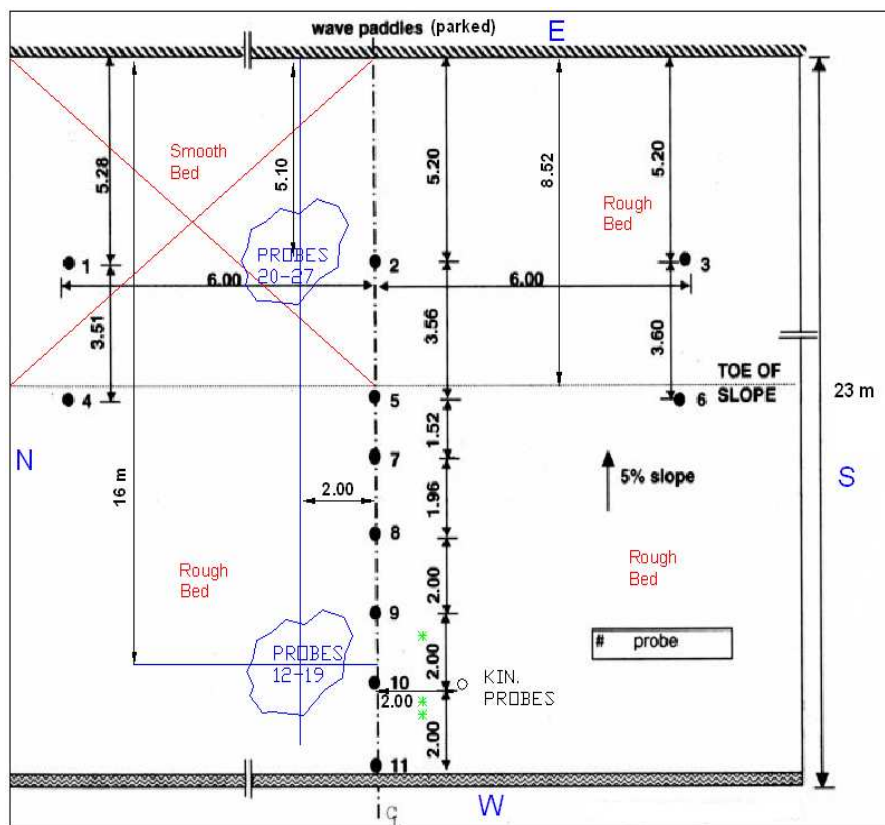
Από όλα τα πειράματα που εκτελέστηκαν, στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν αυτά που αφορούσαν στην κάθετη διάδοση βραχέων μονοχρωματικών κυματισμών.

7.2.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Η πειραματική διάταξη του εργαστηρίου HR Wallingford φαίνεται στην εικόνα 7.1. Οι εγκαταστάσεις UKCRF περιλαμβάνουν μια πειραματική δεξαμενή, σχεδιάγραμμα της οποίας φαίνεται στο σχήμα 7.1. Η κυματογεννήτρια αποτελείται από 72 ηλεκτρονικά ελεγχόμενα επίπεδα πηδάλια, πλάτους 0.50m. Έχει την ικανότητα να παράγει απλούς μονοχρωματικούς (regular) και τυχαίους (random) μονοκατευθυντικούς (long-crested) ή πολυκατευθυντικούς (short-crested) κυματισμούς με γωνία πρόσπτωσης στην ακτή από 0° ως 30°. Η όλη εγκατάσταση μπορεί επίσης να παράγει, παράλληλα με τους κυματισμούς, ρεύματα παράλληλα προς την ακτογραμμή, είτε παλιρροιακής, είτε κυματογενούς προέλευσης. Η μέγιστη επιφανειακή ταχύτητα ρεύματος που μπορεί να παραχθεί για βάθος 0.5 m είναι 0.14 m/sec.



Εικόνα 7.1: Γενική άποψη των πειραματικών διατάξεων στο εργαστήριο HR Wallingford (πηγή: [72])

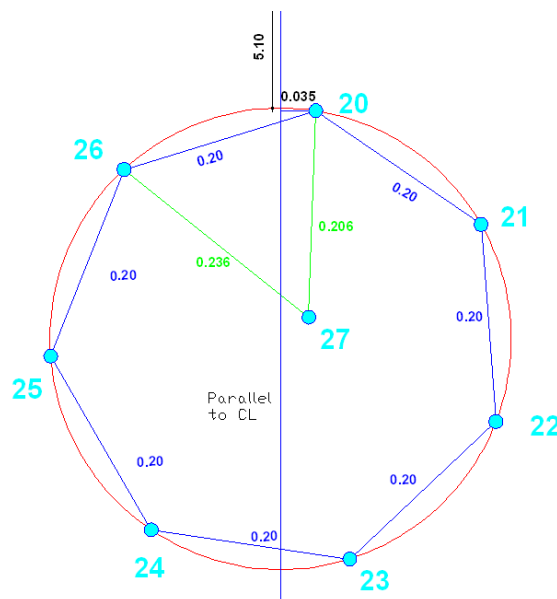


Σχήμα 7.1: Σχεδιάγραμμα της δεξαμενής του πειράματος του Wallingford (1997) (πηγή: [72])

Η δεξαμενή έχει συνολικές διαστάσεις $27m \times 54m$. Διαχωρίζεται σε μια περιοχή σταθερού βάθους που ξεκινάει αμέσως μετά τις κυματογεννήτριες και σε μια περιοχή με πυθμένα σταθερής κλίσης 1:20. Το βάθος του νερού στην περιοχή οριζόντιου πυθμένα καθορίστηκε για το σύνολο σχεδόν των πειραμάτων σε 0.8 m.

Οι μετρήσεις της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας έγιναν με τη βοήθεια 27 αισθητήρων ηλεκτρικού τύπου (μετρητών) (capacitance-resistance probes). Η μεταβολή της αντίστασης των αισθητήρων στη διέλευση του ηλεκτρικού ρεύματος καταγράφεται και μετατρέπεται σε χρονοσειρά της μεταβολής της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας. Εκτός από τους αισθητήρες στάθμης χρησιμοποιήθηκε σε ορισμένα από τα πειράματα και ένας μετρητής τύπου Nortek 3D ADV για την καταγραφή των τροχιακών ταχυτήτων και στις τρεις διευθύνσεις. Η συγκεκριμένη συσκευή τοποθετήθηκε σε μόνιμη θέση μέσα στην περιοχή των ρηχών νερών και λάμβανε μετρήσεις σε βάθος 15 cm.

Ο συνολικός αριθμός των αισθητήρων στάθμης που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εκτέλεση των πειραμάτων ήταν είτε 11 (αισθητήρες 1-11, διάταξη 1), είτε 27 (αισθητήρες 1-27, διάταξη 2). Όπως φαίνεται στο σχήμα 7.1, οι αισθητήρες 2,5,7,8,9,10 και 11 σχημάτιζαν μία γραμμική διάταξη μετρητών, μέσω της οποίας ήταν δυνατή η ταυτόχρονη μέτρηση των υπερυψώσεων της ελεύθερης επιφάνειας σε μια περιοχή που εκτεινόταν από τα βαθιά μέχρι τα ρηχά νερά. Παράλληλα, οι αισθητήρες 12-19 και 20-27 τοποθετήθηκαν έτσι ώστε να διαμορφώνουν στα ρηχά και στα βαθιά νερά αντίστοιχα, δύο όμοιες κυκλικές διατάξεις (probes) με 7 μετρητές στην περιφέρεια και έναν αισθητήρα στο κέντρο, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.2. Από την επεξεργασία των μετρήσεων των διατάξεων αυτών μπορεί να γίνει εκτίμηση των κατευθυντικών χαρακτηριστικών του κυματικού πεδίου.



Σχήμα 7.2: Διάταξη αισθητήρων 20-27 (πηγή: [72])

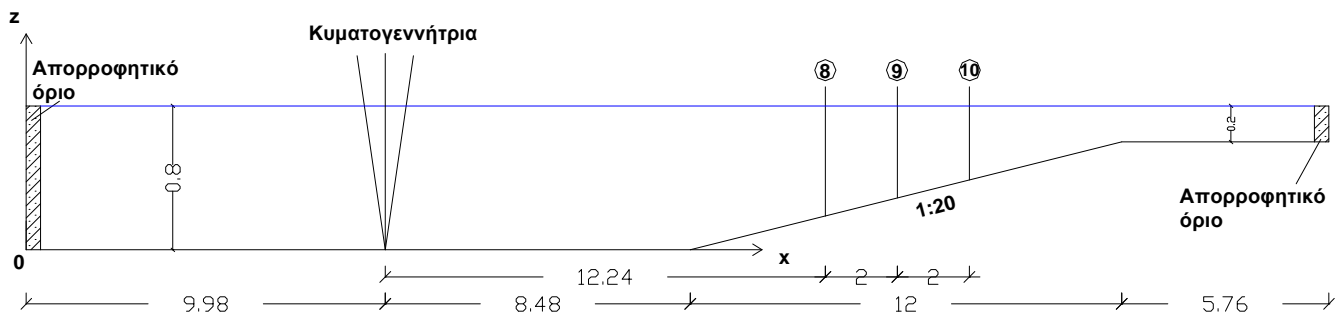
Για την επαλήθευση της παρούσας εργασίας χρησιμοποιείται το πείραμα με κωδικό RE-08. Τα χαρακτηριστικά του κυματισμού που μελετάται από το πείραμα αυτό είναι τα ακόλουθα:

- Απλός μονοχρωματικός κυματισμός
- Περίοδος κύματος $T = 1 \text{ sec}$
- Ύψος κύματος $H = 0.1 \text{ m}$
- Γωνία πρόσπτωσης στην ακτή 0°

Για τη σύγκριση των πειραματικών δεδομένων με τα αποτελέσματα του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) και του MIKE 21 BW χρησιμοποιούνται οι μετρήσεις της μεταβολής της ελεύθερης επιφάνειας στους αισθητήρες 8,9 και 10.

7.2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΩΝ ΚΑΡΑΜΒΑΣ ΚΑΙ ΜΕΜΟΣ (2009)

Το πείραμα του Wallingford (1997) αποτέλεσε την πρώτη περίπτωση επαλήθευσης του τροποποιημένου μοντέλου των Καραμβας και Μemos (2009). Όπως αναφέρθηκε, το τεστ επαλήθευσης αφορούσε σε μη θραυόμενους κυματισμούς. Ωστόσο, στον υπολογιστικό κώδικα του μοντέλου συμπεριλήφθηκε η θραύση ώστε να ελεγχθεί το κατά πόσο ενεργοποιούνται ή όχι σωστά οι όροι θραύσης. Η γεωμετρική διάταξη του υπολογιστικού πεδίου φαίνεται στο σχήμα 7.3 και προέκυψε από την τομή κατά μήκος της κεντρικής γραμμής C_L του σχήματος 7.1.



Σχήμα 7.3: Γεωμετρική διάταξη υπολογιστικού πεδίου εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου των Καραμβας και Μemos (2009) για το πείραμα του Wallingford (1997)

Η θέση των τριών αισθητήρων 8,9 και 10, στους οποίους υπολογίζονται τα διαγράμματα των σχημάτων της επόμενης παραγράφου καθώς και το βάθος ηρεμίας στις θέσεις αυτές, φαίνονται στον πίνακα 7.1.

Αισθητήρες	Απόσταση από κυματογεννήτρια (m)	Βάθος νερού σε κατάσταση ηρεμίας (m)
8	12.24	0.612
9	14.24	0.512
10	16.24	0.412

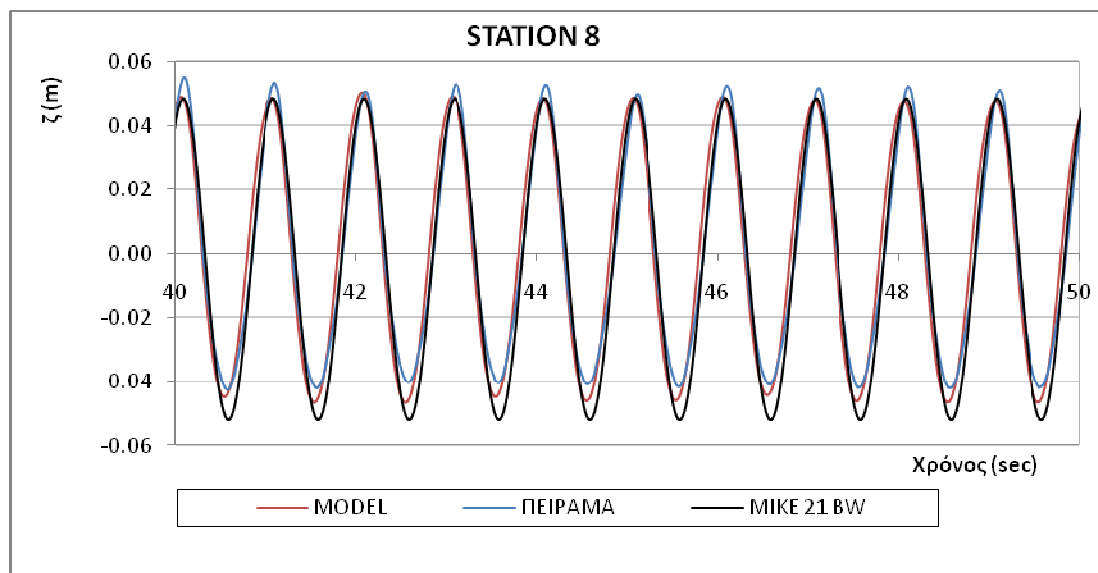
Πίνακας 7.1: Θέση αισθητήρων και αντίστοιχο βάθος ηρεμίας στο πείραμα του Wallingford (1997)

Το χωρικό και το χρονικό βήμα διακριτοποίησης Δx και Δt επιλέχθηκαν έτσι ώστε να διασφαλίζεται η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος για επαρκείς χρόνους ανάλυσης. Λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση του κεφαλαίου 3 και ότι πρέπει $Cr < 1$, γίνεται επιλογή των βημάτων διακριτοποίησης. Στο εγχειρίδιο του MIKE 21 BW αναφέρεται ότι για το μονοδιάστατο μοντέλο θα πρέπει $Cr = c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 0.5$. Τελικά, ύστερα από δοκιμές επιλέχθηκαν $\Delta x = 0.02 \text{ m}$ και $\Delta t = 0.0025 \text{ sec}$.

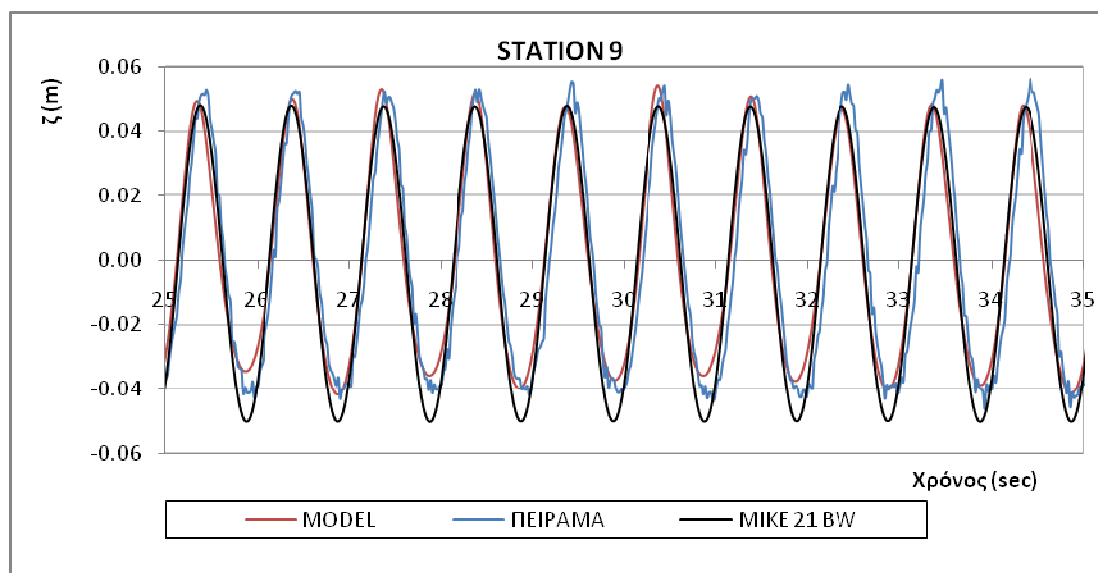
Όπως αναφέρθηκε το τροποποιημένο μοντέλο των Καραμβας και είναι προγραμματισμένο σε γλώσσα Fortran 90. Ο κώδικας για το πείραμα του Wallingford (1997) παρουσιάζεται στο παράρτημα Α. Η εφαρμογή του MIKE 21 BW (1DH) για το πείραμα του Wallingford (1997) αναπτύχθηκε στην παράγραφο 6.7 και η εφαρμογή για τις υπόλοιπες πειραματικές διατάξεις επαλήθευσης γίνεται κατά παρόμοιο τρόπο.

7.2.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ

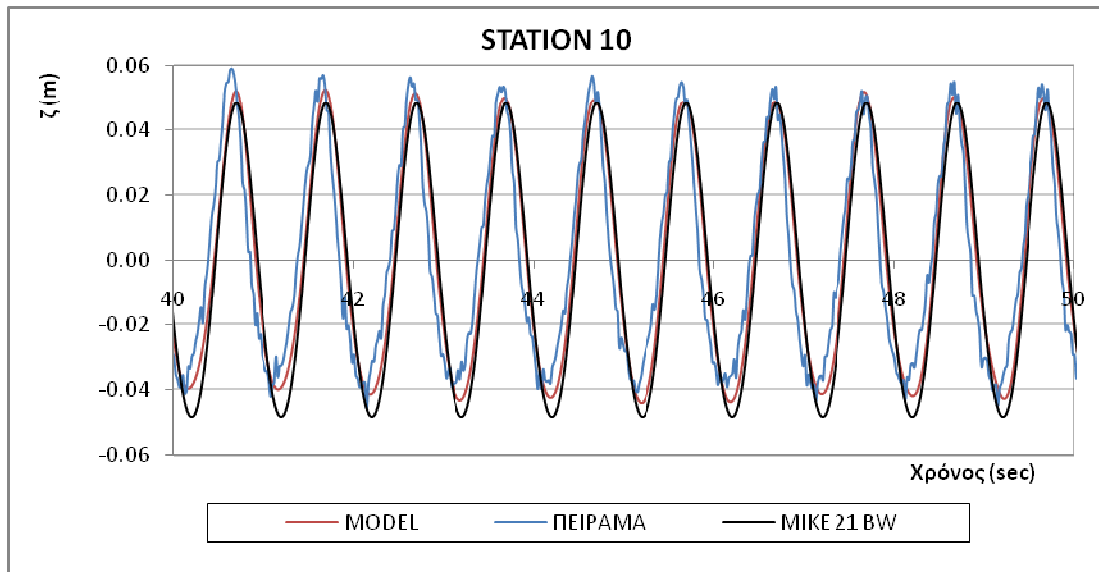
Η σύγκριση μεταξύ των πειραματικών δεδομένων, των αποτελεσμάτων του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) και των αντίστοιχων του MIKE 21 BW φαίνεται στα σχήματα 7.4, 7.5 και 7.6. Στα διαγράμματα αυτά παρουσιάζονται οι χρονοσειρές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στους σταθμούς μέτρησης 8,9 και 10 (σχήμα 7.3).



Σχήμα 7.4: Σύγκριση χρονοσειράς ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 8 του πειράματος του Wallingford (1997)



Σχήμα 7.5: Σύγκριση χρονοσειράς ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 9 του πειράματος του Wallingford (1997)



Σχήμα 7.6: Σύγκριση χρονοσειράς ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 10 του πειράματος του Wallingford (1997)

Για την πληρέστερη ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω στατιστικά μεγέθη (Hughes (1993)) και τα συγκριτικά αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 7.2:

➤ Μέση ανύψωση (setup):

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta_i \quad (7.1)$$

➤ Τυπική απόκλιση:

$$\zeta_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\zeta_i - \bar{\zeta})^2} \quad (7.2)$$

➤ Λοξότητα (skewness):

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\zeta_{rms}^3} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\zeta_i - \bar{\zeta})^3 \quad (7.3)$$

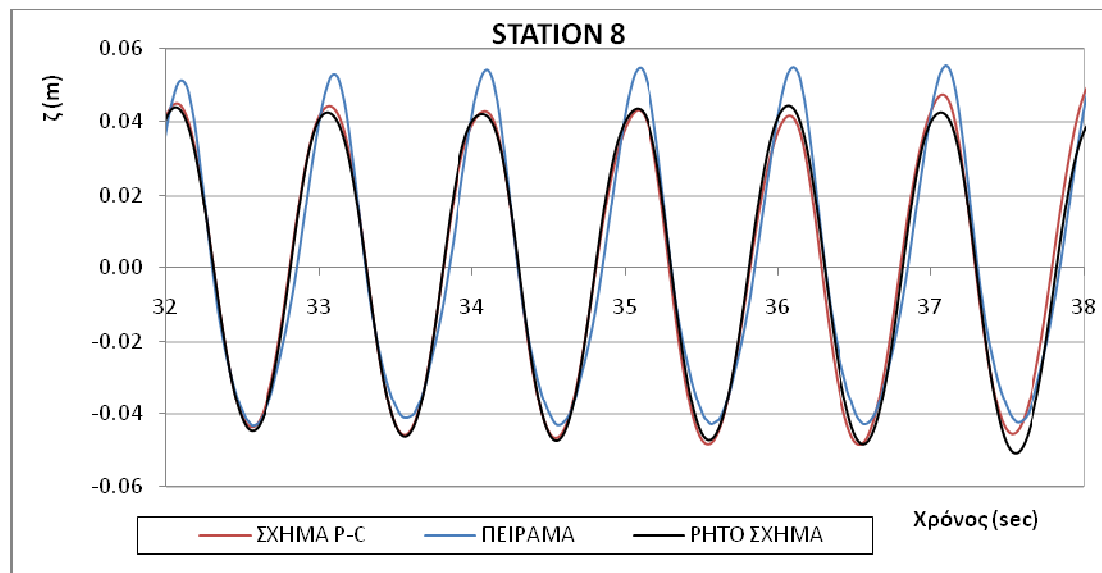
➤ Κύρτωση (kurtosis):

$$\beta_2 = \frac{1}{\zeta_{rms}^4} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\zeta_i - \bar{\zeta})^4 \quad (7.4)$$

Παράμετροι/Αισθητήρες		Μέση ανύψωση	Τυπική απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή
Αισθητήρας 8	Πείραμα	0.0000	0.0319	0.2487	-1.0971	-0.0497	0.0605
	μοντέλο	0.0001	0.0307	0.0262	-1.2435	-0.0510	0.0617
	MIKE 21 BW	-0.0016	0.0331	0.0250	-1.4654	-0.0519	0.0494
Αισθητήρας 9	Πείραμα	0.0000	0.0319	0.2384	-1.0775	-0.0508	0.0633
	μοντέλο	0.0001	0.0293	0.5642	-0.7856	-0.0455	0.0631
	MIKE 21 BW	-0.0018	0.0318	0.0250	-1.4654	-0.0503	0.0487
Αισθητήρας 10	Πείραμα	0.0000	0.0288	0.2986	-0.9371	-0.0522	0.0701
	μοντέλο	0.0001	0.0291	0.2378	-1.0701	-0.0459	0.0641
	MIKE 21 BW	-0.0018	0.0311	0.0900	-1.4401	-0.0484	0.0491

Πίνακας 7.2: Σύγκριση στατιστικών παραμέτρων μεταξύ πειραματικών καταγραφών, μοντέλου και MIKE 21 BW

Στο σχήμα 7.7 φαίνεται ενδεικτικά στο σταθμό 8 η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του χρόνου όταν εφαρμόζεται το σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector) και όταν εφαρμόζεται το απλό ρητό σχήμα που αναφέρθηκε στο 3^ο κεφάλαιο.



Σχήμα 7.7: Σύγκριση χρονοσειράς ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας μεταξύ πειραματικών καταγραφών, μοντέλου με εφαρμογή σχήματος πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector) και με εφαρμογή απλού ρητού σχήματος

Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος $L = 1.556 \text{ m}$ σε βάθος $d = 0.8 \text{ m}$. Συνεπώς είναι $\frac{d}{L} \approx 0.51 > 0.5$ και άρα το πείραμα αφορά στη διάδοση αρχικά βραχέων, μη θραυόμενων μονοχρωματικών κυματισμών. Όπως προκύπτει από τα διαγράμματα 7.4, 7.5 και 7.6 υπάρχει γενικά καλή συμφωνία ανάμεσα στις χρονοσειρές του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009), του MIKE 21 BW και των πειραματικών καταγραφών. Οι σχετικά μικρές αποκλίσεις μπορούν να αποδοθούν σε διάφορους επιμέρους παράγοντες. Γενικά, η ακρίβεια προσομοίωσης των μοντέλων τύπου Boussinesq σχετίζεται κυρίως με τα χαρακτηριστικά διασποράς και την τάξη των μη-γραμμικών όρων που διατηρούνται στις εξισώσεις.

Οι εξισώσεις του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) έχουν χαρακτηριστικά πλήρους διασποράς και γι' αυτό έχουν εφαρμογή σε όλο του εύρος βαθών σε αντίθεση με τις κλασικές εξισώσεις Boussinesq. Έτσι, η σχέση γραμμικής διασποράς ικανοποιείται επακριβώς και στα βαθιά νερά όπου $\frac{d}{L} > 0.5$ ή $(kd > 3.14)$. Τέτοιες περιοχές υπάρχουν στην πειραματική διάταξη

του Wallingford (1997). Από την άλλη πλευρά, η επίδραση των μη-γραμμικών όρων γίνεται ιδιαίτερα έντονη στα ρηχά νερά και κυρίως λίγο πριν την πιθανή θραύση. Το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) μπορεί να περιγράψει τη διάδοση ελαφρώς μη-γραμμικών κυματισμών, αφού στις εξισώσεις διατηρούνται όροι τάξης $O(1, \varepsilon, \sigma^2)$. Επίσης, όπως αναφέρθηκε στο 3^ο κεφάλαιο, τα μη-γραμμικά χαρακτηριστικά των κυματισμών δεν αποδίδονται επαρκώς από το μοντέλο στα βαθιά νερά. Παρατηρώντας τα διαγράμματα και τις τιμές του πίνακα 7.2 προκύπτει ότι το τροποποιημένο μοντέλο περιγράφει ικανοποιητικά τις κυματικές κορυφές στην περιοχή ρήχωσης, αλλά υποεκτιμά ή υπερεκτιμά της κοιλίες. Ωστόσο, υπολογίζει πολύ ικανοποιητικά το setup, σε αντίθεση με το MIKE 21 BW που το υπερεκτιμά ελαφρώς. Τέλος, εμφανίζει μια ανακρίβεια όσον αφορά στην κυματική ασυμμετρία, κυρίως για μεγάλους χρόνους προσομοίωσης, αλλά αναπαριστά επαρκώς την κύρτωση των κυματισμών.

Παρατηρώντας το σχήμα 7.7, προκύπτει γενικά ότι το αριθμητικό σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector) βελτιώνει ελαφρώς την ακρίβεια του μοντέλου σε σχέση με το απλό ρητό σχήμα που πρότειναν αρχικά οι Karambas και Memos (2009). Ωστόσο, το βασικό πλεονέκτημα του ημι-πεπλεγμένου σχήματος είναι ότι βελτιώνει αισθητά την αριθμητική ευστάθεια, ιδιαίτερα κατά την προσομοίωση μακρών κυματισμών (ρηχά νερά).

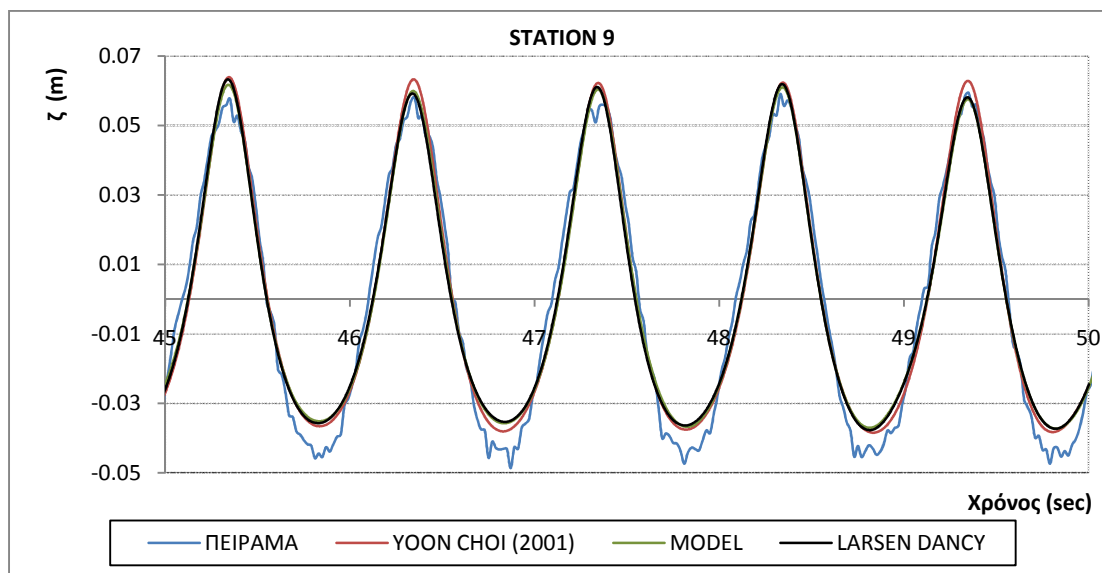
Αντίστοιχα, το πρόγραμμα MIKE 21 BW εμφανίζει βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς και περιγράφει σχετικά ικανοποιητικά τη διάδοση κυματισμών σε νερά ενδιάμεσου βάθους και ρηχά νερά ($\frac{d}{L} < 0.5$). Επιπλέον, περιλαμβάνει όρους ήπιας μη-γραμμικότητας. Περιγράφει ικανοποιητικά τις κυματικές κορυφές, αλλά υπερεκτιμά αισθητά τις κοιλίες στην περιοχή ρήχωσης.

Τα χαρακτηριστικά διασποράς και μη-γραμμικότητας περιλαμβάνονται στην αδιάστατη παράμετρο Ursell: $U_r = \frac{L^2 H}{d^3} = \frac{\varepsilon}{\sigma^2}$. Η παράμετρος αυτή υποδεικνύει την καταλληλότητα των διάφορων κυματικών θεωριών. Στο συγκεκριμένο πείραμα η τιμή της παραμέτρου παραμένει μικρή μέχρι και των αισθητήρα 10, οπότε τα μη-γραμμικά χαρακτηριστικά δεν είναι έντονα, γεγονός που αποδεικνύει την αποτελεσματικότητα των δύο μοντέλων.

Παρατηρώντας το σχήμα 7.1, προκύπτει ότι στη δεξαμενή των πειραμάτων ο κεκλιμένος πυθμένας ήταν τραχύς. Αντίθετα, τόσο στο τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009), όσο και στο MIKE 21 BW δε συμπεριλήφθηκε η τριβή πυθμένα. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια επιπλέον πηγή σφαλμάτων. Το αποτέλεσμα αυτό ενισχύεται από τον Koutsourelakis (2009), ο οποίος κατά την τροποποίηση του μοντέλου θεώρησε τραχύ πυθμένα και συμπεριέλαβε την τριβή, με αποτέλεσμα τη βελτίωση της ακρίβειας.

Ο μονοδιάστατος χαρακτήρας των χρησιμοποιούμενων μοντέλων σε σχέση με τα χαρακτηριστικά του κυματικού πεδίου στο πείραμα, αποτέλεσε έναν ακόμη παράγοντα που επηρέασε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Η εφαρμογή του μονοδιάστατου μοντέλου βασίστηκε στην υπόθεση ότι κατά τη διεξαγωγή του πειράματος, η διάδοση των κυματισμών εξελισσόταν σε μία διεύθυνση. Ωστόσο, πιθανολογείται ότι εκδηλώθηκαν στη δεξαμενή διεργασίες εγκάρσια στην κύρια διεύθυνση μετάδοσης των κυματισμών, οι οποίες προσέδωσαν στο πεδίο εν μέρει δισδιάστατο χαρακτήρα. Τέτοιες διεργασίες διευκολύνονται από το ότι το μήκος και το πλάτος της δεξαμενής ήταν της ίδιας τάξης. Αντίθετα, στη σχετική βιβλιογραφία, στην πλειονότητα των περιπτώσεων τα αποτελέσματα των μονοδιάστατων μοντέλων συγκρίνονται με πειραματικές μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν σε κυματικά κανάλια (wave flumes). Ενδεικτικό του δισδιάστατου χαρακτήρα του πεδίου είναι ότι καταγράφηκε στα

πειράματα συνιστώσα της οριζόντιας ταχύτητας κατά τη διεύθυνση της ακτογραμμής, η οποία στη μονοδιάστατη περίπτωση θα ήταν μηδενική. Επίσης, οι πειραματικές καταγραφές στους παράπλευρους αισθητήρες 2 και 3 δεν ταυτίζονται διότι ο πυθμένας έχει διαμορφωθεί εν μέρει λείος και εν μέρει τραχύς, γεγονός που ενισχύει το δισδιάστατο χαρακτήρα του φαινομένου.

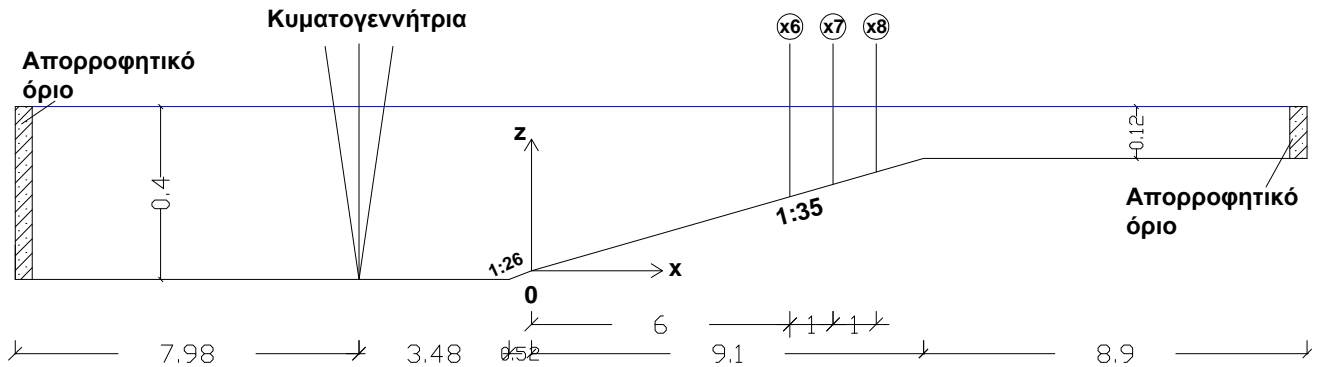


Σχήμα 7.8: Σύγκριση διαφορετικών στοιβάδων απορρόφησης στο υπολογιστικό πεδίο

Όπως αναφέρθηκε στο 3^ο κεφάλαιο έγινε μία διερεύνηση όσον αφορά στη χρήση διαφορετικών στοιβάδων απορρόφησης στο υπολογιστικό πεδίο του μοντέλου. Στο σχήμα 7.8 φαίνονται ενδεικτικά για το σταθμό 9 οι χρονοσειρές του ζ όπως προκύπτουν από τις πειραματικές καταγραφές, την εφαρμογή των απορροφητικών στοιβάδων κατά Yoon και Choi (2001) (σχέσεις (2.154) και (2.155)), την εφαρμογή των στοιβάδων βάσει της σχέσης (3.88) (model) και την εφαρμογή των στοιβάδων κατά Larsen και Dancy (1983) (σχέση (2.153)). Όπως προκύπτει, η επιρροή των διαφορετικών στοιβάδων είναι ανεπαίσθητη, με μια ελάχιστη βελτίωση με τη χρήση της σχέσης των Yoon και Choi (2001) ως προς τις κυματικές κοιλίες.

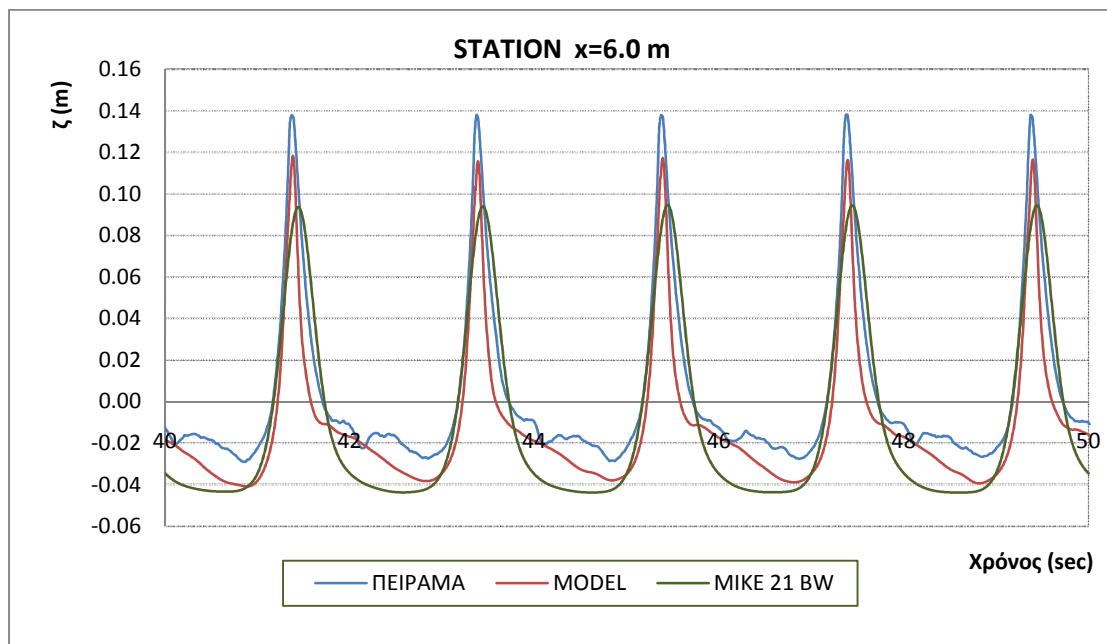
7.3 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ TING ΚΑΙ KIRBY (1994)

Η δεύτερη περίπτωση επαλήθευσης του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) αναφέρεται στο πείραμα των Ting και Kirby (1994). Το πείραμα περιλαμβάνει τη διάδοση και θραύση cnoidal κυματισμών. Οι ερευνητές μελέτησαν τόσο τη θραύση τύπου spilling, όσο και τη θραύση τύπου plunging. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η πρώτη περίπτωση που αφορά στη διάδοση cnoidal κυματισμών ύψους $H = 0.125 \text{ m}$ και περιόδου $T = 2 \text{ sec}$. Στο σχήμα 7.9 φαίνεται η γεωμετρική διάταξη του υπολογιστικού πεδίου.

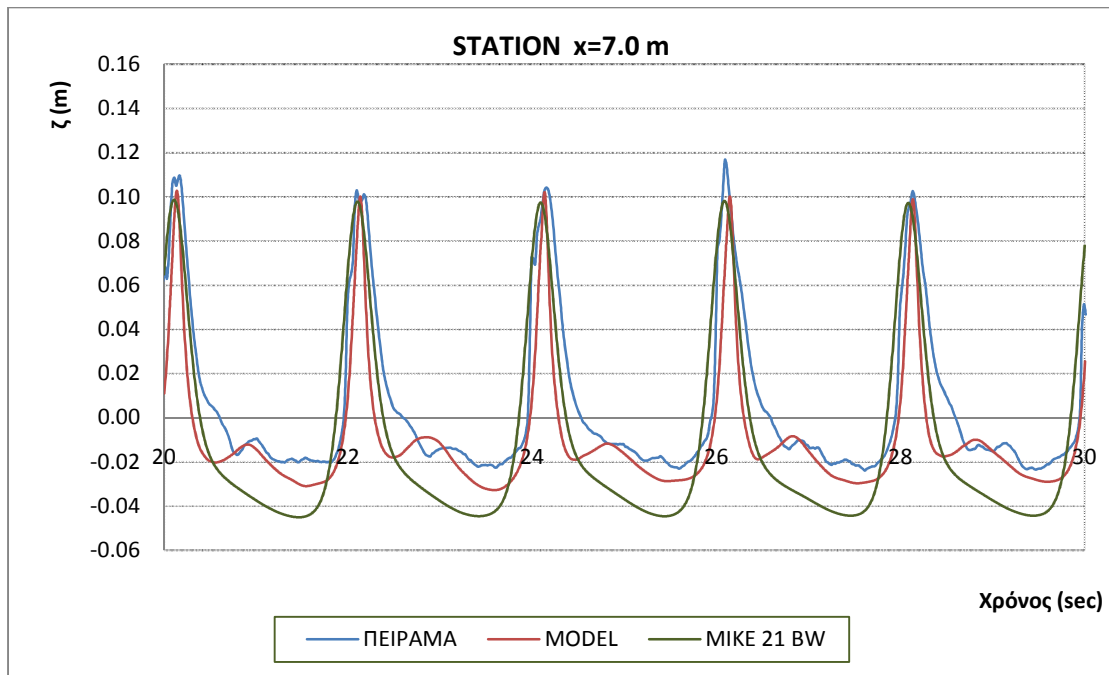


Σχήμα 7.9: Γεωμετρική διάταξη υπολογιστικού πεδίου εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) για το πείραμα των Ting και Kirby (1994)

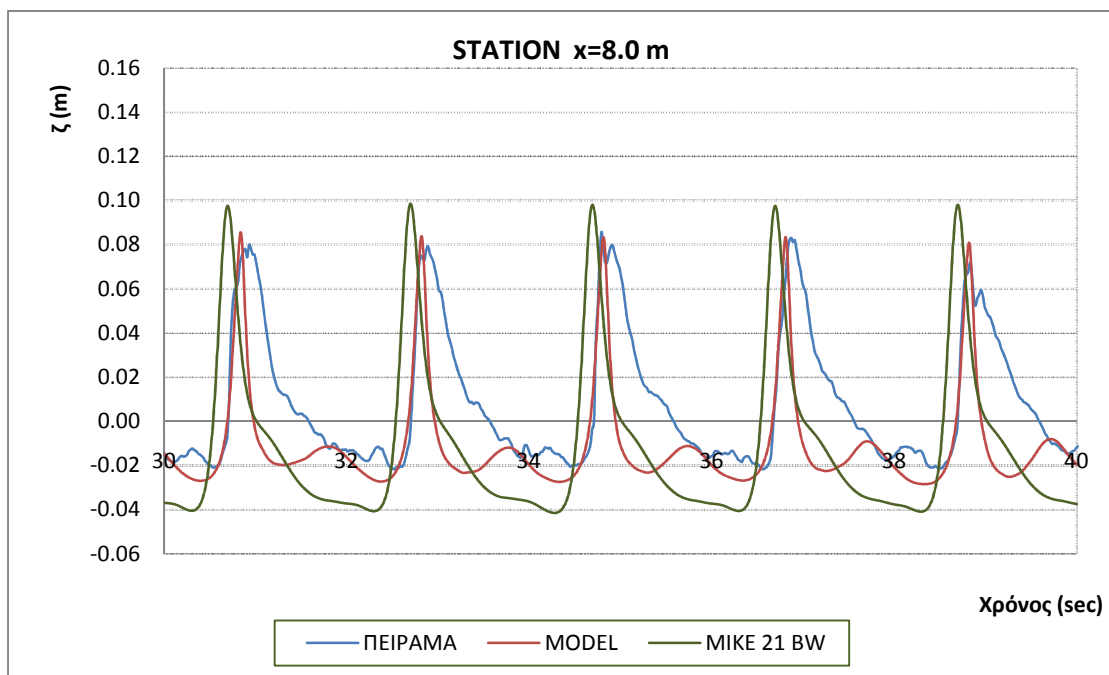
Το χωρικό βήμα διακριτοποίησης επιλέχθηκε $\Delta x = 0.02 \text{ m}$ και το χρονικό βήμα $\Delta t = 0.004 \text{ sec}$. Εξετάστηκε η υπολογιζόμενη χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στους σταθμούς με $x = 6.0 \text{ m}$, $x = 7.0 \text{ m}$ και $x = 8.0 \text{ m}$ (σχήμα 7.9). Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται συγκριτικά τα αποτελέσματα των πειραματικών καταγραφών, του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με όρους θραύσης στις εξισώσεις ορμής και συνέχειας (αναφέρεται ως model), της έκδοσης του μοντέλου που προσομοιώνει τη θραύση με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (αναφέρεται ως roller breaker) και του MIKE 21 BW. Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση διασποράς για cnoidal κυματισμούς δεν είναι η γνωστή σχέση γραμμικής διασποράς ως προς την οποία το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) είναι ακριβές. Αυτή η μη-γραμμικότητα εισάγει κάποιες ανακρίβειες στα αποτελέσματα.



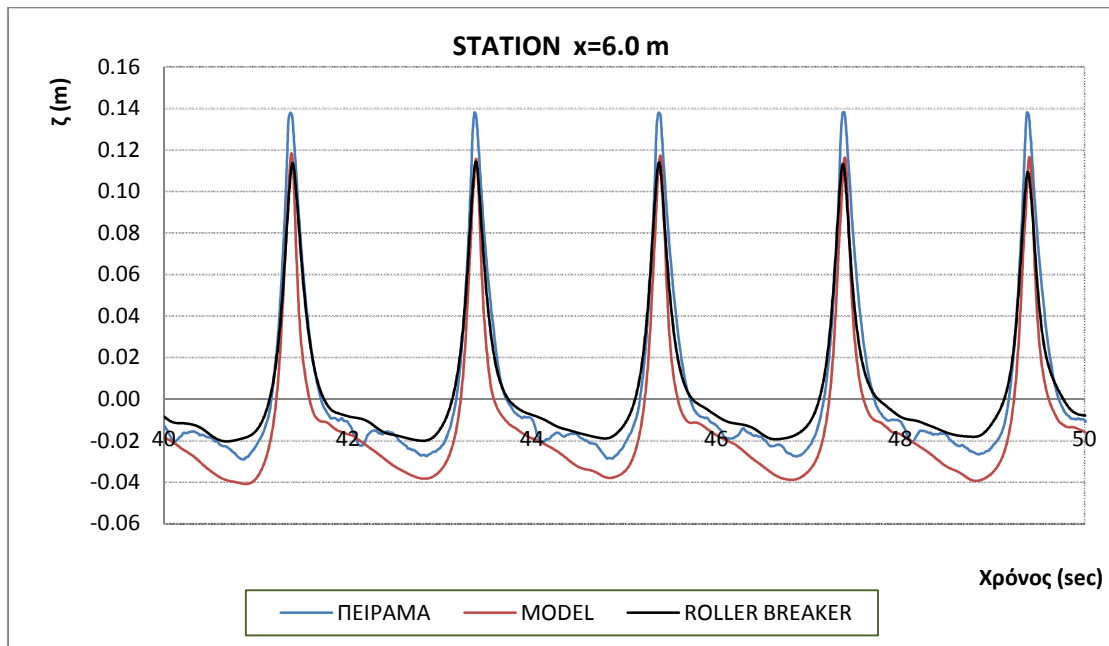
Σχήμα 7.10: Χρονοσειρές ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό με $x = 6.0 \text{ m}$ στο πείραμα των Ting και Kirby (1994). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων μοντέλου και MIKE 21 BW



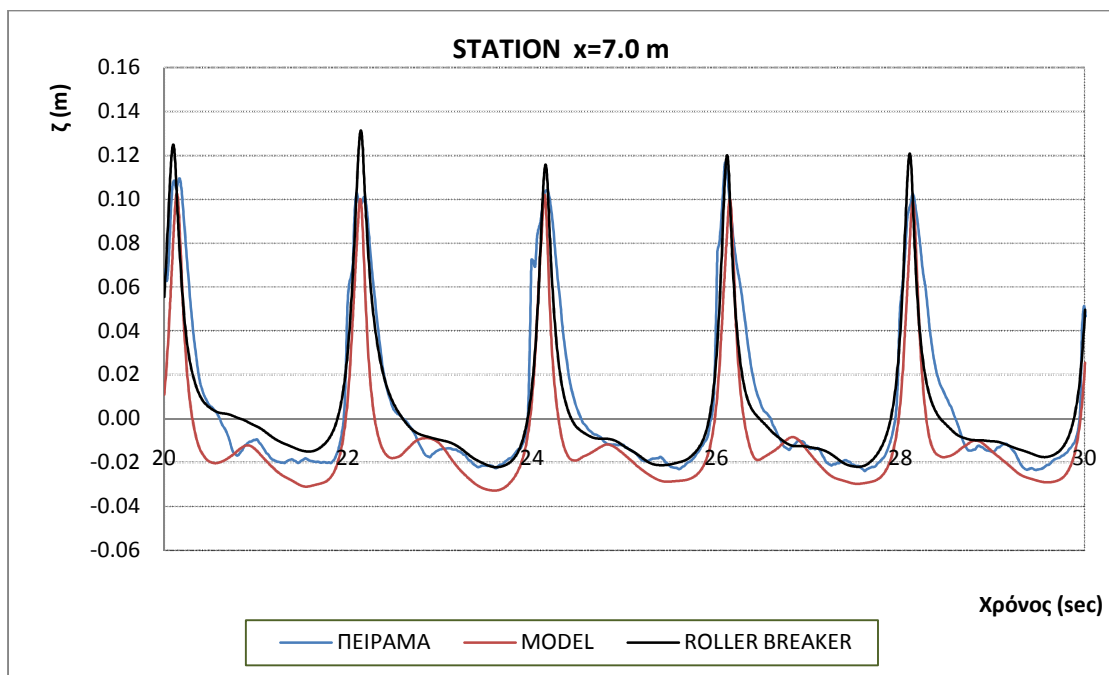
Σχήμα 7.11: Χρονοσειρές ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό με $x = 7.0$ m στο πείραμα των Ting και Kirby (1994). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων μοντέλου και MIKE 21 BW



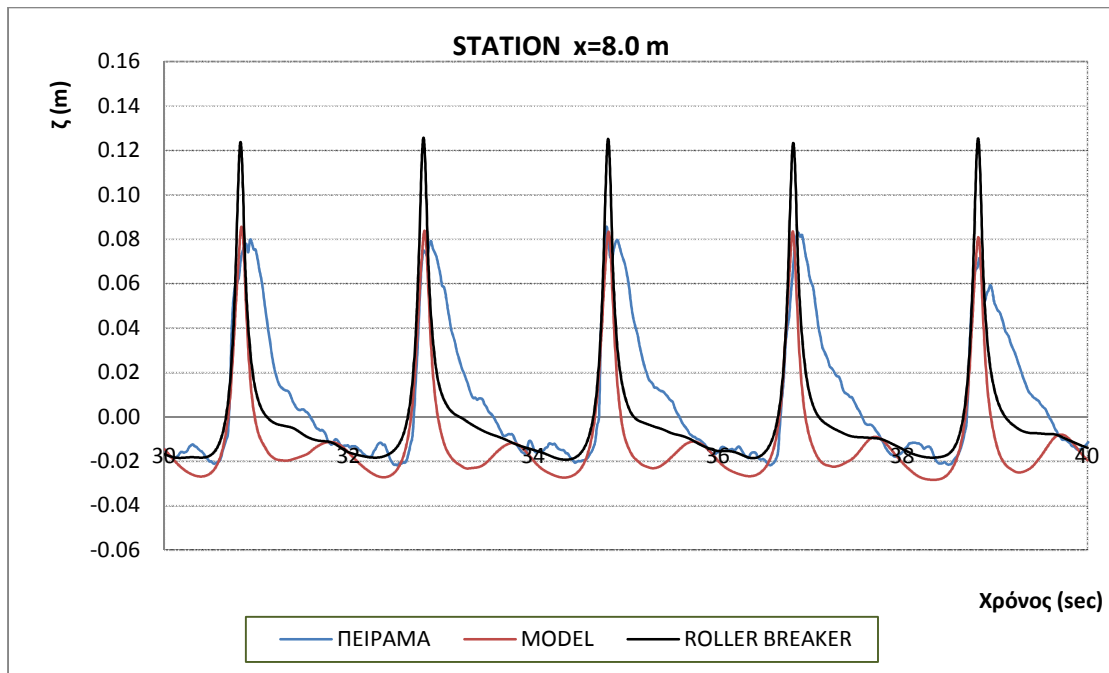
Σχήμα 7.12: Χρονοσειρές ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό με $x = 8.0$ m στο πείραμα των Ting και Kirby (1994). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων μοντέλου και MIKE 21 BW



Σχήμα 7.13: Χρονοσειρές ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό με $x = 6.0$ m στο πείραμα των Ting και Kirby (1994). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου (model) και μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (roller breaker)



Σχήμα 7.14: Χρονοσειρές ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό με $x = 7.0$ m στο πείραμα των Ting και Kirby (1994). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου (model) και μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (roller breaker)



Σχήμα 7.15: Χρονοσειρές ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό με $x = 8.0 \text{ m}$ στο πείραμα των Ting και Kirby (1994). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου (model) και μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (roller breaker)

Στο πείραμα των Ting και Kirby (1994) η θραύση εμφανιζόταν στη θέση $x_b = 6.4 \text{ m}$ με ύψος κύματος θραύσης $H_b = 0.163 \text{ m}$, οπότε προκύπτει ο λόγος $\frac{H_b}{d_b} = 0.82$. Εφαρμόζοντας το προτεινόμενο μοντέλο η θραύση εμφανίζεται στη θέση $x_b = 6.6 \text{ m}$ με ύψος κύματος $H_b = 0.161 \text{ m}$ και άρα $\frac{H_b}{d_b} = 0.84$. Αντίστοιχα με εφαρμογή του MIKE 21 BW προκύπτει $x_b = 7.1 \text{ m}$ με ύψος κύματος $H_b = 0.12 \text{ m}$ και άρα $\frac{H_b}{d_b} = 0.68$. Τέλος, εφαρμόζοντας το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) με προσομοίωση της θραύσης με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου προκύπτει $x_b = 6.3 \text{ m}$ με ύψος κύματος $H_b = 0.162 \text{ m}$ και άρα $\frac{H_b}{d_b} = 0.81$. Επομένως, το νέο μοντέλο προσδιορίζει με μεγάλη ακρίβεια το ύψος θραύσης (σφάλμα $\sim -1.2 \%$) και με ικανοποιητική ακρίβεια τη θέση εκκίνησης της θραύσης και άρα το σφάλμα υπολογισμού του λόγου θραύσης $\frac{H_b}{d_b}$ είναι περίπου 2.4 %. Αντίστοιχα, το μοντέλο με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου υπολογίζει ακριβέστερα τη θέση εκκίνησης της θραύσης, αλλά και το ύψος θραύσης (σφάλμα $\sim -0.6 \%$) και άρα το σφάλμα υπολογισμού του λόγου θραύσης $\frac{H_b}{d_b}$ είναι περίπου -1.2%. Από την εφαρμογή και του MIKE 21 BW το σφάλμα στο ύψος θραύσης περίπου -26.3% και σημαντική ανακρίβεια στον προσδιορισμό της θέσης εκκίνησης της θραύσης. Στην τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου εφαρμόστηκε η προτεινόμενη τιμή από τους Schäffer et al. (1993) και Madsen et al. (1997a) για τη γωνία εκκίνησης της θραύσης $\varphi_b = 20^\circ$, ενώ πιθανόν η τιμή αυτή να επιδέχεται βελτιστοποίηση για το συγκεκριμένο πείραμα. Για το προτεινόμενο μοντέλο εφαρμόστηκε η τιμή $\varphi_b = 30^\circ$ που προτείνουν οι Cienfuegos et al. (2005) για θραύση τύπου spilling.

Παρατηρώντας το διάγραμμα 7.10 προκύπτει ότι λίγο πριν τη γραμμή θραύσης, το προτεινόμενο μοντέλο υποεκτιμά ελαφρώς τις κυματικές κορυφές και υπολογίζει λίγο μεγαλύτερες κοιλίες. Βέβαια, υπερτερεί σαφώς των αποτελεσμάτων του MIKE 21 BW. Λίγο μετά τη θραύση (σχήμα 7.11) και τα δύο μοντέλα περιγράφουν ικανοποιητικά τις κυματικές κορυφές. Το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) προσεγγίζει σε επαρκή βαθμό τις κυματικές κοιλίες και εν μέρει τις κύριες μη-γραμμικότητες. Βέβαια, αρχίζει να διαφαίνεται μια τάση να αποδίδει λεπτότερες από τις πειραματικές κυματομορφές εντός της ζώνης θραύσης. Αντίθετα, το MIKE 21 BW αποδίδει και λίγο μετά τη θραύση σημαντικά μεγαλύτερες κοιλίες. Τέλος, στην εσωτερική ζώνη θραύσης (σχήμα 7.12) το μοντέλο εξακολουθεί να αποδίδει ικανοποιητικά τις κυματικές κορυφές και κοιλίες, αλλά οι κυματομορφές είναι έντονα λεπτότερες των πειραματικών. Επίσης, αρχίζει να παρατηρείται κάποια υστέρηση που πιθανώς να οφείλεται στο μη γραμμικό χαρακτήρα της σχέσης διασποράς των cnoidal κυματισμών σε ρηχά νερά, ως προς τον οποίο το μοντέλο δεν είναι ακριβές. Η υστέρηση αυτή εκδηλώνεται ακόμη πιο έντονα στα αποτελέσματα του MIKE 21 BW, η ακρίβεια του οποίου ως προς των προσδιορισμό των κυματικών κορυφών στην εσωτερική ζώνη θραύσης είναι περιορισμένη.

Από το σχήμα 7.13 προκύπτει ότι και οι δύο τεχνικές προσομοίωσης της θραύσης στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) είναι αρκετά αποτελεσματικές ως προς την εκτίμηση των κορυφών λίγο πριν τη θραύση. Μάλιστα, η τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου περιγράφει πιο ικανοποιητικά από το προτεινόμενο μοντέλο τις κυματικές κοιλίες. Αντίθετα, μετά τη θραύση το μοντέλο roller breaker υπερεκτιμά αισθητά τις κορυφές, ενώ συνεχίζει να υπερτερεί ως προς την περιγραφή των κοιλιών. Βέβαια, το προτεινόμενο μοντέλο προσεγγίζει πιο ικανοποιητικά τις δευτερεύουσες μικρές κορυφές που αναπτύσσονται αμέσως μετά τις κύριες μορφές. Γενικά, μπορεί το μοντέλο του επιφανειακού κυλίνδρου να υπολογίζει ακριβέστερα τη θέση εκκίνησης της θραύσης και το ύψος κύματος κατά την έναρξή της, αλλά το προτεινόμενο μοντέλο με τον όρο θραύσης στην εξίσωση συνέχειας υπερτερεί στην περιγραφή της διάδοσης εντός της ζώνης θραύσης.

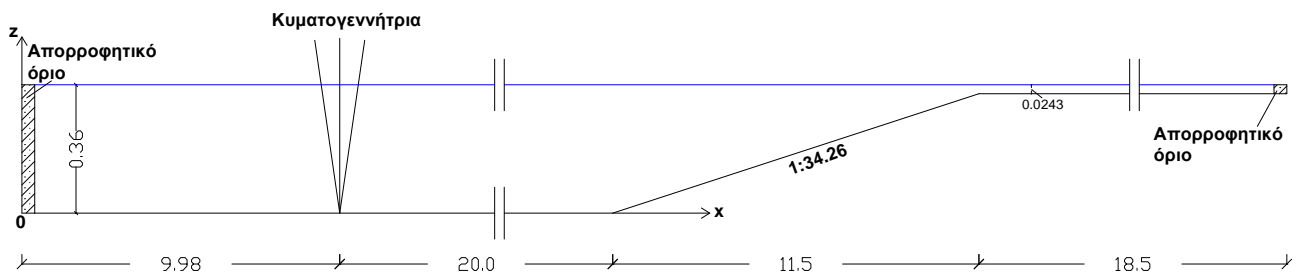
Βέβαια, πρέπει να τονιστεί ότι σημαντική επιρροή στα αποτελέσματα ασκεί το γεγονός ότι στα κατάντη, εντός της ζώνης θραύσης θεωρήθηκε πυθμένας μικρού σταθερού βάθους με απορροφητικές στοιβάδες και δεν προσομοιώθηκε η αναρρίχηση/ καταρρίχηση στην ακτή που θα έδινε ακριβέστερα αποτελέσματα. Ο κώδικας του μοντέλου για το πείραμα των Ting και Kirby (1994) παρουσιάζεται στο παράρτημα Α.

7.4 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ HANSEN ΚΑΙ SVENDSEN (1979)

Οι Hansen και Svendsen (1979) πραγματοποίησαν ένα σειτ πειραμάτων που αφορούσε στη θραύση βραχέων και μακρών κυματισμών σε πυθμένα ήπιας κλίσης. Τα πειράματα περιλάμβαναν τόσο θραύση τύπου spilling, όσο και τύπου plunging και από το σύνολο τους χρησιμοποιήθηκαν ως επαλήθευση του μοντέλου οι παρακάτω περιπτώσεις:

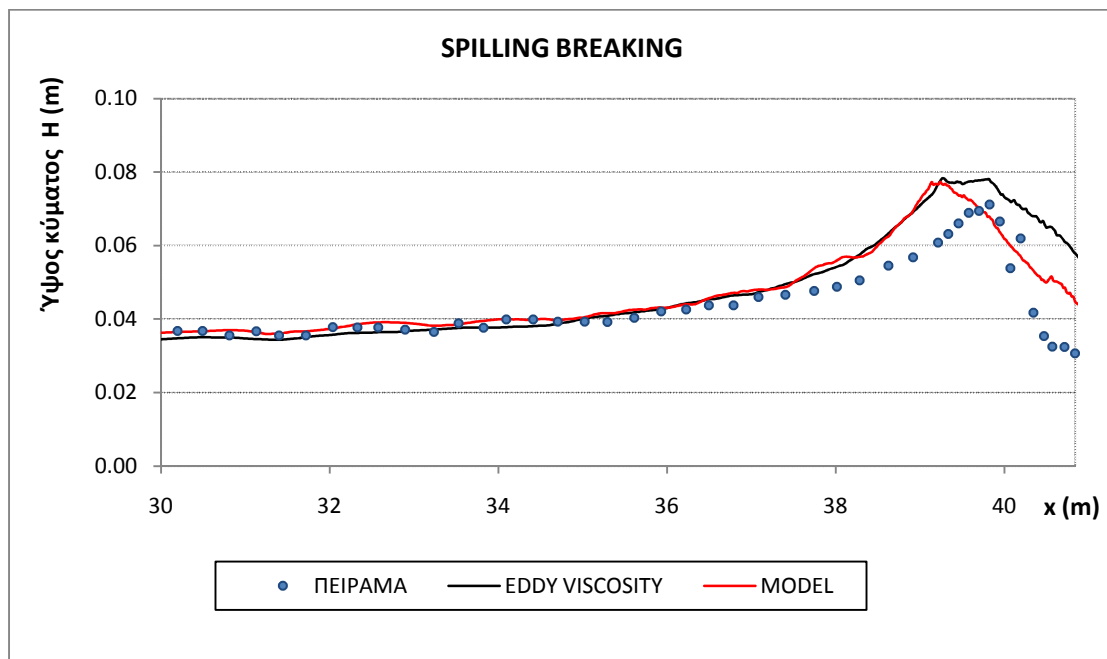
- ♦ Θραύση τύπου spilling: ύψος κύματος $H = 0.036 \text{ m}$ και περίοδος κύματος $T = 2.0 \text{ sec}$
- ♦ Θραύση τύπου spilling-plunging: ύψος κύματος $H = 0.039 \text{ m}$ και περίοδος κύματος $T = 2.5 \text{ sec}$

- ♦ Θραύση τύπου plunging: ύψος κύματος $H = 0.043 \text{ m}$ και περίοδος κύματος $T = 3.33 \text{ sec}$
 Στο σχήμα 7.16 φαίνεται η γεωμετρική διάταξη του υπολογιστικού πεδίου. Το βήμα χωρικής διακριτοποίησης επιλέχθηκε $\Delta x = 0.02 \text{ m}$ και το βήμα χρονικής διακριτοποίησης $\Delta t = 0.004 \text{ sec}$.

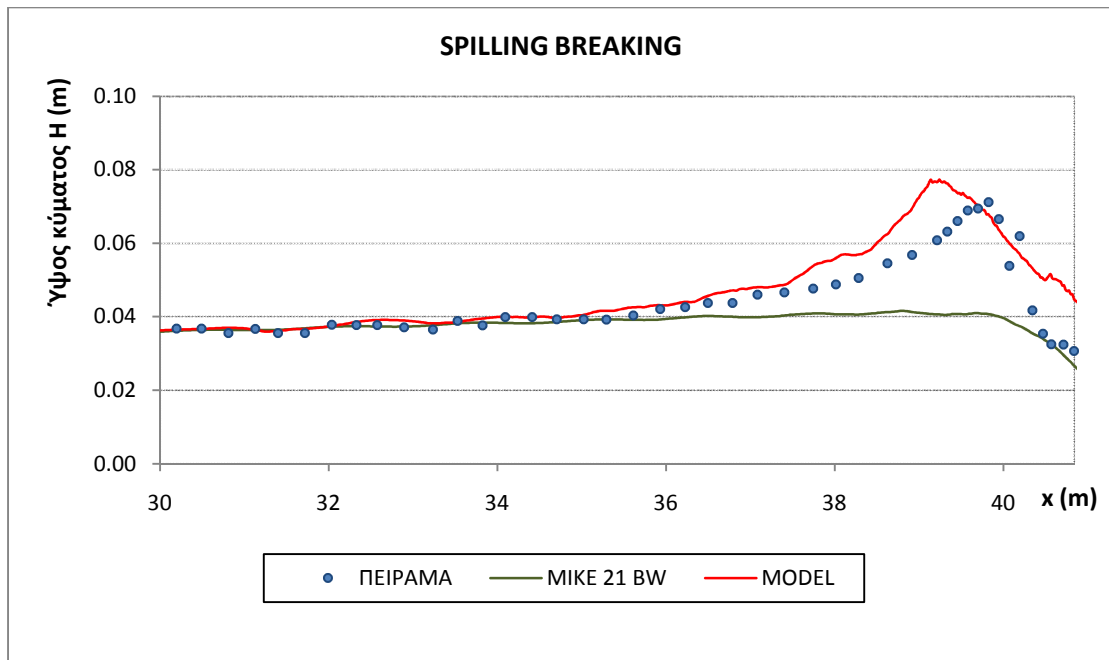


Σχήμα 7.16: Γεωμετρική διάταξη υπολογιστικού πεδίου εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) για το πείραμα των Hansen και Svendsen (1979)

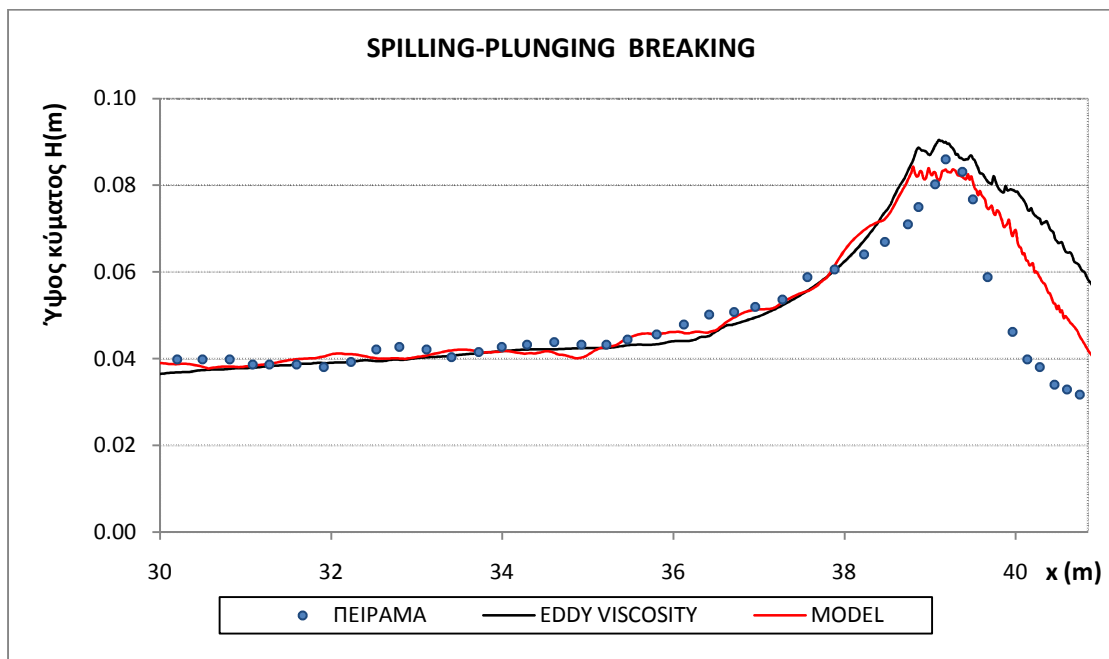
Παρότι το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) δεν είναι phase-averaged, η επαλήθευσή του με το δεδομένο πείραμα γίνεται βάσει του υπολογισμού του ύψους κύματος, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Γίνεται σύγκριση μεταξύ των πειραματικών καταγραφών, των αποτελεσμάτων του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) που προτείνεται στην παρούσα διπλωματική (σημειώνεται ως model), του ίδιου μοντέλου με προσομοίωση της θραύσης με το μοντέλο της τυρβώδους συνεκτικότητας και βάσει του κριτηρίου των Kennedy et al. (2000) (σημειώνεται ως eddy viscosity) και του MIKE 21 BW.



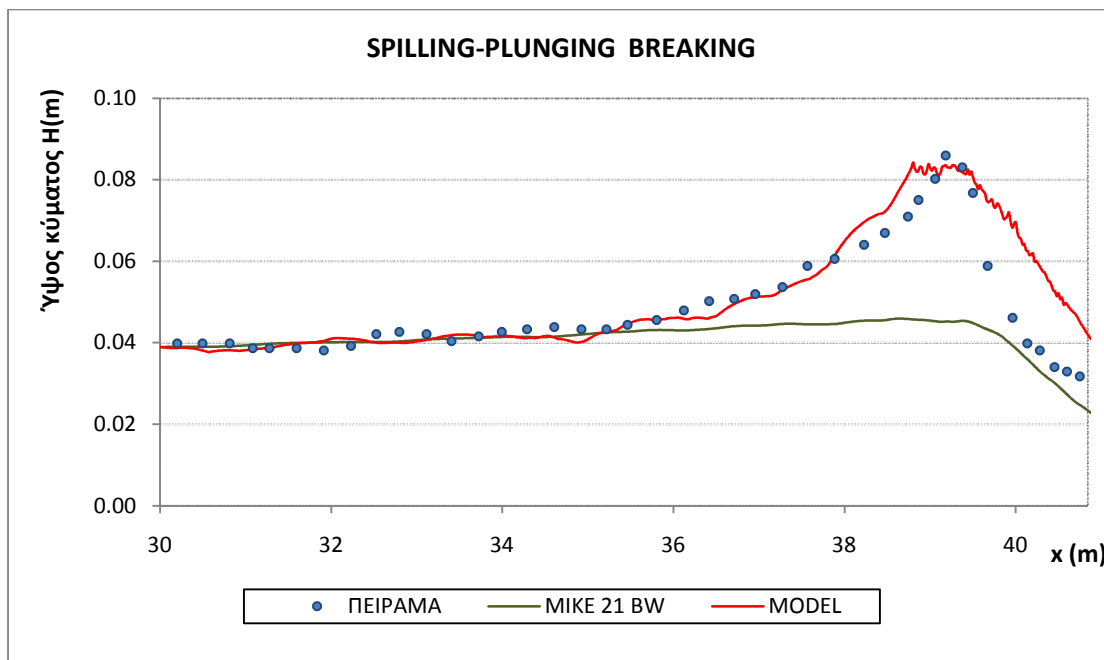
Σχήμα 7.17: Ύψος κύματος για θραύση τύπου spilling στο πείραμα των Hansen και Svendsen (1979). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου (model) και μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity)



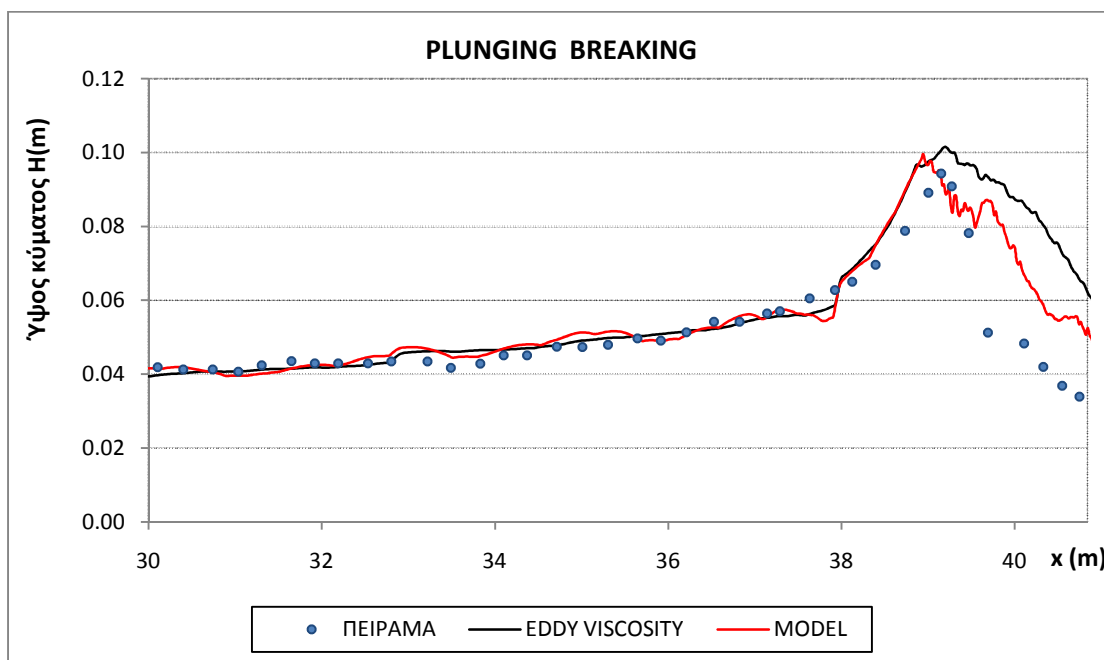
Σχήμα 7.18: Ύψος κύματος για θραύση τύπου spilling στο πείραμα των Hansen και Svendsen (1979). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου (model) και MIKE 21 BW



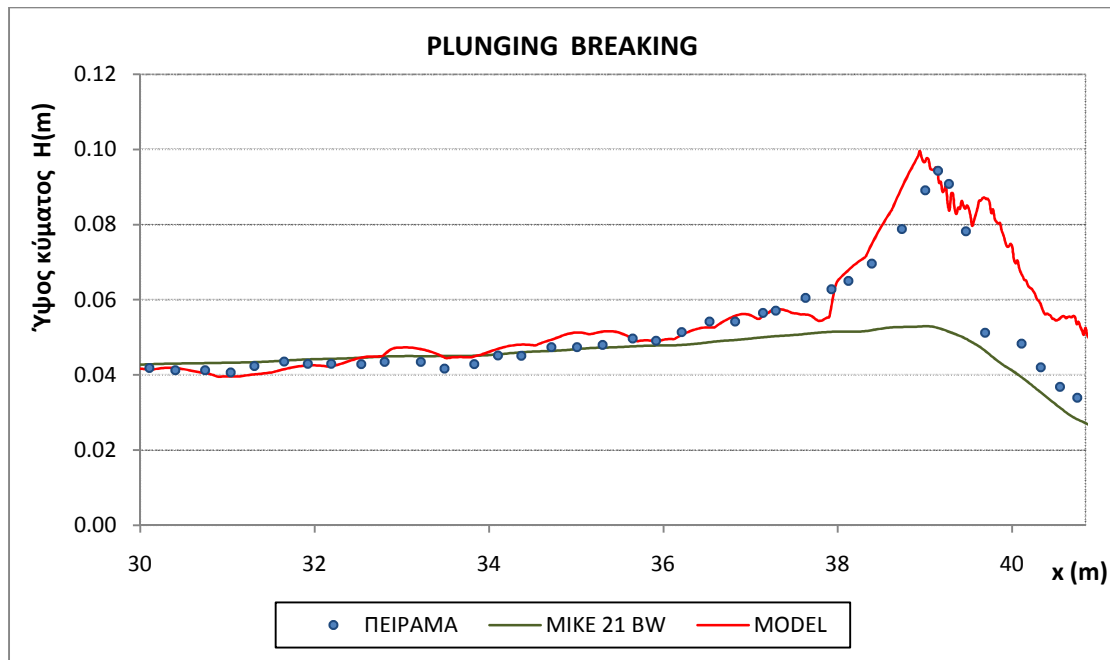
Σχήμα 7.19: Ύψος κύματος για θραύση τύπου spilling-plunging στο πείραμα των Hansen και Svendsen (1979). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου (model) και μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity)



Σχήμα 7.20: Ύψος κύματος για θραύση τύπου spilling-plunging στο πείραμα των Hansen και Svendsen (1979). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου (model) και MIKE 21 BW



Σχήμα 7.21: Ύψος κύματος για θραύση τύπου plunging στο πείραμα των Hansen και Svendsen (1979). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου (model) και μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity)



Σχήμα 7.22: Ύψος κύματος για θραύση τύπου plunging στο πείραμα των Hansen και Svendsen (1979). Σύγκριση μεταξύ πειραματικών καταγραφών, αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου (model) και MIKE 21 BW

Στον παρακάτω πίνακα 7.3 φαίνεται η θέση εκκίνησης της θραύσης, το ύψος κύματος κατά την έναρξη της θραύσης και ο λόγος του ύψους κύματος θραύσης προς το βάθος του νερού για τους τρεις διαφορετικούς τύπους θραύσης όπως προκύπτουν από τις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου, τα αποτελέσματα του μοντέλου με προσομοίωση της θραύσης με την τεχνική της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας και τα αποτελέσματα του MIKE 21 BW.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΘΡΑΥΣΗΣ		ΠΕΙΡΑΜΑ	MODEL	EDDY VISCOSITY MODEL	MIKE 21 BW
SPILLING	x_b (m)	39.823	39.14	39.78	39.64
	H_b (m)	0.0712	0.0773	0.078	0.0410
	H_b / d_b	0.979	0.834	1.055	0.525
SPILLING-PLUNGING	x_b (m)	39.181	38.82	39.04	39.30
	H_b (m)	0.086	0.0828	0.0885	0.0452
	H_b / d_b	0.940	0.812	0.926	0.419
PLUNGING	x_b (m)	39.151	38.96	39.12	39.00
	H_b (m)	0.0943	0.0979	0.0998	0.0529
	H_b / d_b	1.022	1.000	1.071	0.547

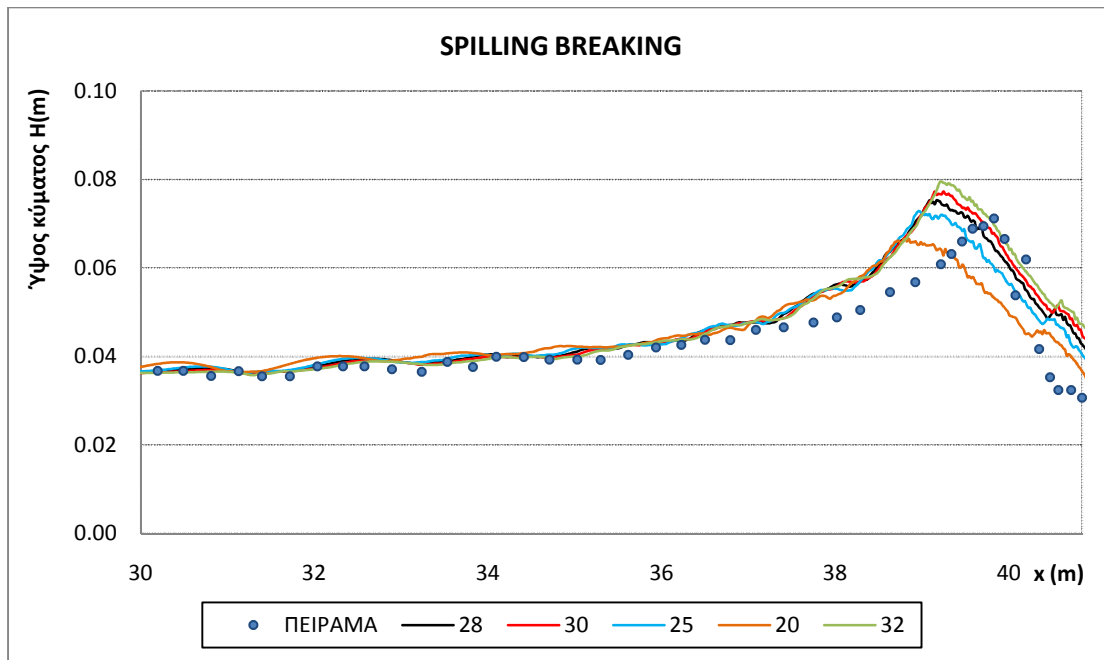
Πίνακας 7.3: Θέση εκκίνησης της θραύσης, ύψος κύματος θραύσης και λόγος ύψους θραύσης προς βάθος θραύσης στο πείραμα των Hansen και Svendsen (1979)

Από τα παραπάνω διαγράμματα και τις τιμές του πίνακα προκύπτει ότι για θραύση τύπου spilling το προτεινόμενο μοντέλο υπερεκτιμά ελαφρώς το ύψος θραύσης (σφάλμα 8.5%) και υποεκτιμά το λόγο H_b / d_b (σφάλμα -14.8%). Για θραύση τύπου spilling-plunging το σφάλμα στον υπολογισμό του ύψους θραύσης είναι -3.7% και του λόγου θραύσης -13.6%, ενώ για θραύση τύπου plunging 3.8% και -2.1% αντίστοιχα. Όσον αφορά στη θέση εκκίνησης της θραύσης, γενικά το μοντέλο την υπολογίζει ανάντη της πειραματικής.

Το μοντέλο της τυρβώδους συνεκτικότητας υπολογίζει με σφάλμα 9.6% το ύψος κύματος θραύσης τύπου spilling, 2.9% για θραύση τύπου spilling-plunging και 5.8% για θραύση τύπου plunging. Όσον αφορά στο λόγο H_b/d_b τα αντίστοιχα σφάλματα είναι 7.7%, -1.4% και 4.8%. Και τα δύο μοντέλα με τις διαφορετικές τεχνικές προσομοίωσης της θραύσης υπολογίζουν αρκετά ικανοποιητικά το ύψος κύματος στο τμήμα σταθερού βάθους της πειραματικής διάταξης. Το προτεινόμενο μοντέλο υπολογίζει γενικά ακριβέστερα το ύψος κύματος στην εκκίνηση της θραύσης από το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική θραύσης της τυρβώδους συνεκτικότητας, ωστόσο στη δεύτερη αυτή περίπτωση υπολογίζεται ακριβέστερα η θέση εκκίνησης της θραύσης. Επίσης, το προτεινόμενο μοντέλο περιγράφει ικανοποιητικά τη διακύμανση του ύψους κύματος στην εξωτερική (προς τα ανοιχτά) ζώνη θραύσης αλλά το υπερεκτιμά αισθητά στην εσωτερική ζώνη θραύσης. Τα αποτελέσματα στη ζώνη αυτή για το μοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας είναι ακόμη χειρότερα. Οι ανακρίβειες αυτές οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στο γεγονός ότι στα κατάντη δεν υπολογίζεται η αναρρίχηση στην ακτή αλλά θεωρείται ένα τμήμα σταθερού βάθους με απορροφητικές στοιβάδες. Επειδή το τμήμα αυτό βρίσκεται εντός της ζώνης θραύσης, τα αποτελέσματα επηρεάζονται αισθητά.

Το MIKE 21 BW περιγράφει ικανοποιητικά τη διακύμανση του ύψους κύματος στην εσωτερική ζώνη θραύσης και τη θέση εκκίνησης της θραύσης. Ωστόσο, υποεκτιμά σημαντικά το ύψος κύματος θραύσης με σφάλματα -42.4%, -47.4% και -43.9% αντίστοιχα για τους τρεις τύπους θραύσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με το εγχειρίδιο του MIKE 21 BW, για μονοχρωματικούς κυματισμούς το ύψος κύματος προκύπτει με διαίρεση των αποτελεσμάτων του υπολογισμού του σημαντικού ύψους κύματος με $\sqrt{2}$.

Τέλος, όσον αφορά στο προτεινόμενο μοντέλο, έγινε κάποια διερεύνηση σχετικά με τις παραμέτρους που υπεισέρχονται στην προσομοίωση της θραύσης ενδεικτικά για την περίπτωση του spilling breaking. Τα αποτελέσματα είναι ευαίσθητα ως προς τη γωνία εκκίνησης της θραύσης φ_b , όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.23. Στα παραπάνω διαγράμματα για θραύση τύπου spilling θεωρήθηκε $\varphi_b = 30^\circ$, για θραύση τύπου spilling-plunging $\varphi_b = 32^\circ$ και για θραύση τύπου plunging $\varphi_b = 35^\circ$. Διερεύνηση έγινε και ως προς τις παραμέτρους φ_o (γωνία λήξης της θραύσης), T_{12} (χρόνος ανάπτυξης κυλίνδρου) και K_{hu}/K_h (ελέγχθηκαν τιμές από 1 ως 10), αλλά σε καμία περίπτωση δεν παρατηρήθηκε ανάλογη με της γωνίας φ_b ευαισθησία.



Σχήμα 7.23: Ύψος κύματος όπως υπολογίζεται από το προτεινόμενο τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) για διάφορες γωνίες εκκίνησης της θραύσης φ_b . Σύγκριση με πειραματικές καταγραφές

7.5 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ ΒΕJΙ ΚΑΙ ΒΑΤΤJΕS (1993) - ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ

Το επόμενο πείραμα επαλήθευσης του τροποποιημένου μοντέλου είναι αυτό των Beji και Battjes που πραγματοποιήθηκε το 1992 και τα αποτελέσματά του δημοσιεύτηκαν το 1993. Το πείραμα αφορούσε στη διάδοση και στη θραύση απλών μονοχρωματικών κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη. Το πείραμα περιλάμβανε τη διάδοση βραχέων και μακρών κυματισμών. Επίσης, περιλάμβανε μη θραυόμενους κυματισμούς αλλά και θραύση τύπου spilling και τύπου plunging. Συγκεκριμένα, εξετάστηκαν πειραματικά οι εξής περιπτώσεις:

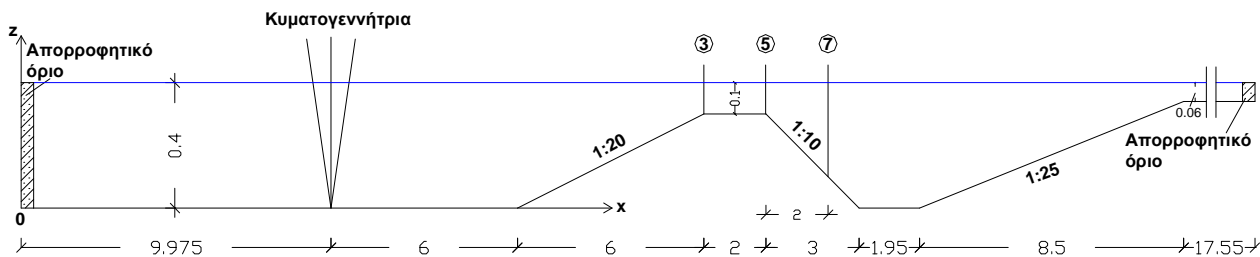
Βραχείς κυματισμοί με $f = 1.0 \text{ Hz}$ και αρχικό ύψος κύματος:

- $H = 0.041 \text{ m}$ → μη θραυόμενοι κυματισμοί
- $H = 0.059 \text{ m}$ → θραύση τύπου spilling
- $H = 0.069 \text{ m}$ → θραύση τύπου plunging

Μακροί κυματισμοί με $f = 0.4 \text{ Hz}$ και αρχικό ύψος κύματος:

- $H = 0.029 \text{ m}$ → μη θραυόμενοι κυματισμοί
- $H = 0.044 \text{ m}$ → θραύση τύπου spilling
- $H = 0.054 \text{ m}$ → θραύση τύπου plunging

Ενδεικτικά, στη συγκεκριμένη παράγραφο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για θραύση τύπου spilling μακρών κυματισμών με $H = 0.044 \text{ m}$ και για θραύση τύπου plunging βραχέων κυματισμών με $H = 0.069 \text{ m}$. Το υπολογιστικό πεδίο εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) φαίνεται στο σχήμα 7.24.

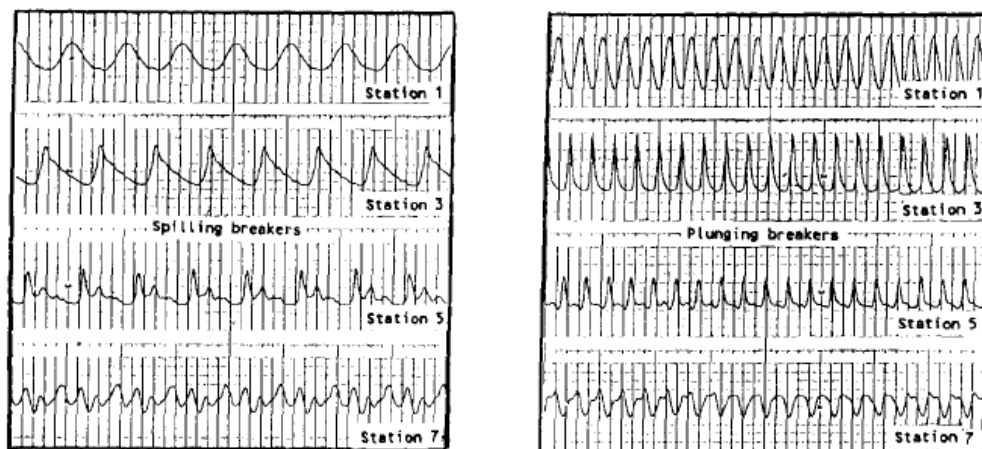


Σχήμα 7.24: Γεωμετρική διάταξη υπολογιστικού πεδίου εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) για το πείραμα των Beji και Battjes (1993)

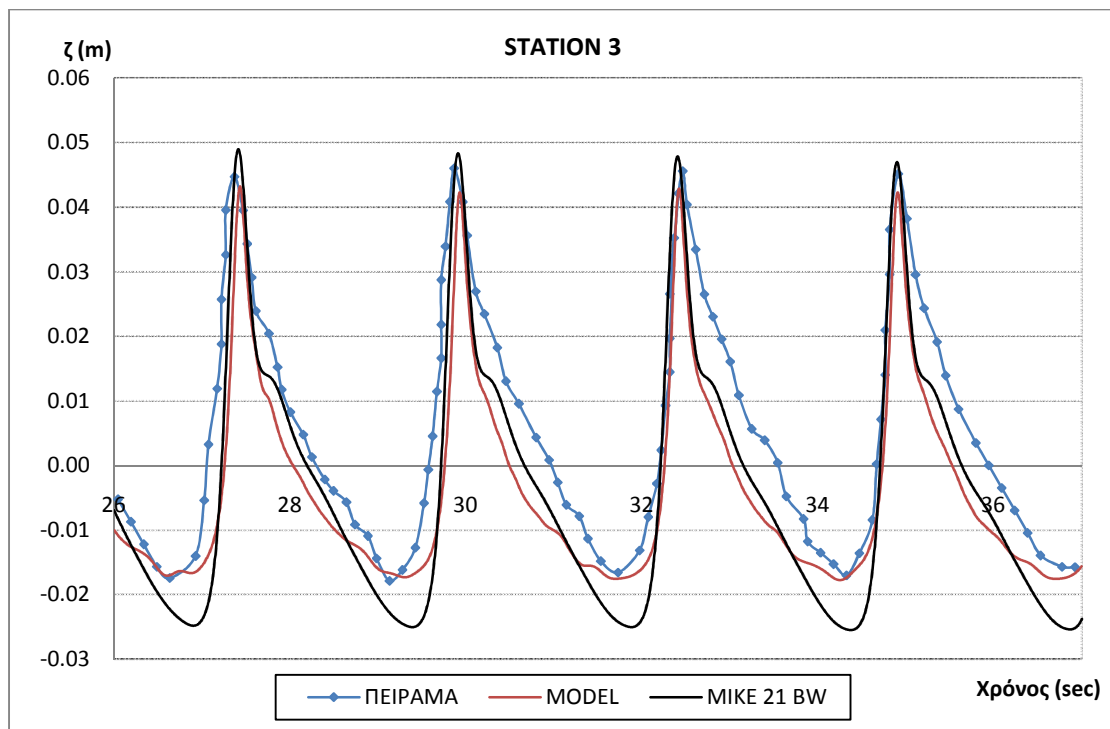
Το χωρικό βήμα διακριτοποίησης επιλέχθηκε $\Delta x = 0.025 \text{ m}$ και το χρονικό βήμα $\Delta t = 0.004 \text{ m}$ για λόγους ευστάθειας. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω αναφέρονται στις χρονοσειρές ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στους σταθμούς μέτρησης 3,5 και 7 (σχήμα 7.24). Συγκεκριμένα, συγκρίνονται οι πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (αναφέρεται ως model), τα αποτελέσματα του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με εφαρμογή της τεχνικής του επιφανειακού κυλίνδρου (αναφέρεται ως roller breaker) και τα αποτελέσματα του MIKE 21 BW.

Θα πρέπει να τονιστεί, όπως αναφέρουν οι Madsen et al. (1997a), ότι η θραύση των κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη ξεκινάει για αρχική γωνία μικρότερη των 20° και ολοκληρώνεται για γωνία μικρότερη των 10° που είναι οι προτεινόμενες τιμές στην τεχνική προσομοίωσης του επιφανειακού κυλίνδρου. Για το λόγο αυτό και ύστερα από διερεύνηση χρησιμοποιήθηκε στο προτεινόμενο μοντέλο το ζεύγος $(\varphi_b, \varphi_0) = (18^\circ, 7^\circ)$, στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου το ζεύγος $(\varphi_b, \varphi_0) = (18^\circ, 10^\circ)$ και στο MIKE 21 BW οι τυπικές τιμές $(\varphi_b, \varphi_0) = (20^\circ, 10^\circ)$.

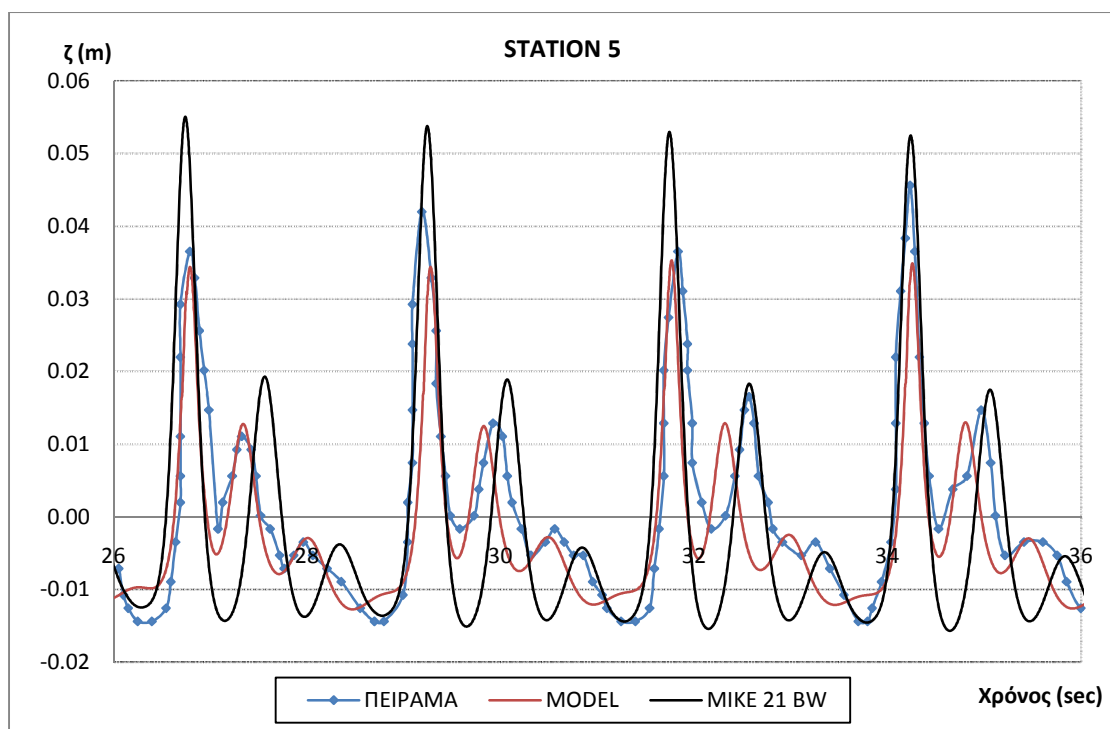
Επειδή οι πειραματικές καταγραφές δεν υπάρχουν στη βιβλιογραφία σε αναλυτική μορφή, τα αποτελέσματα ελήφθησαν ύστερα από ψηφιοποίηση των διαγραμμάτων που δίνουν οι Beji και Battjes (1993) με τη βοήθεια του προγράμματος GetData Graph Digitizer. Τα διαγράμματα φαίνονται στο σχήμα 7.25.



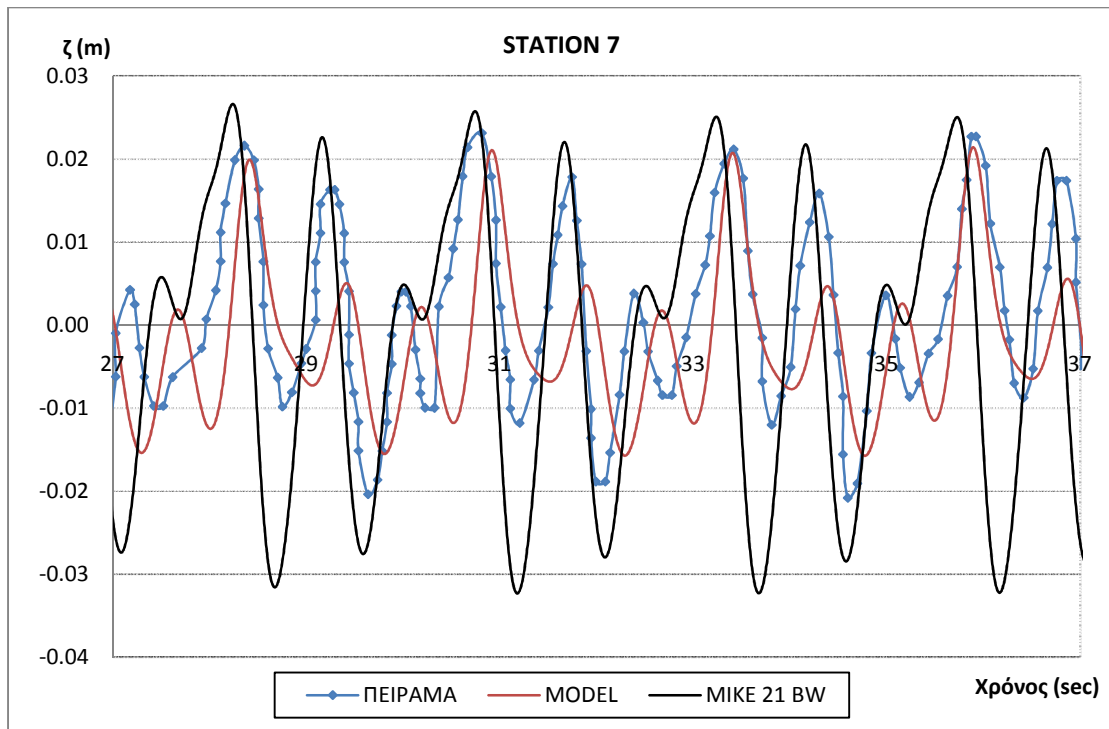
Σχήμα 7.25: Χρονοσειρά ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για θραύση τύπου spilling μακρών μονοχρωματικών κυματισμών (αριστερά) και για θραύση τύπου plunging βραχέων μονοχρωματικών κυματισμών (δεξιά) (πηγή: [9])



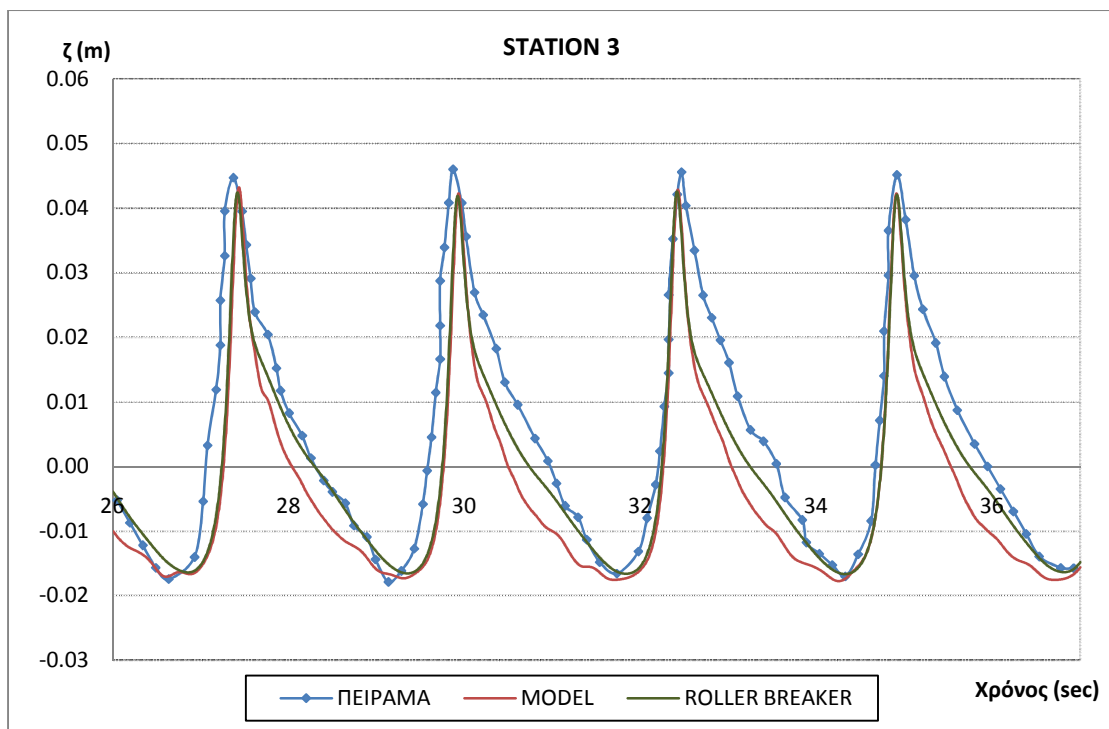
Σχήμα 7.26: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 3 για θραύση τύπου spilling μακρών κυματισμών ($H = 0.044\text{ m}$ και $f = 0.4\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



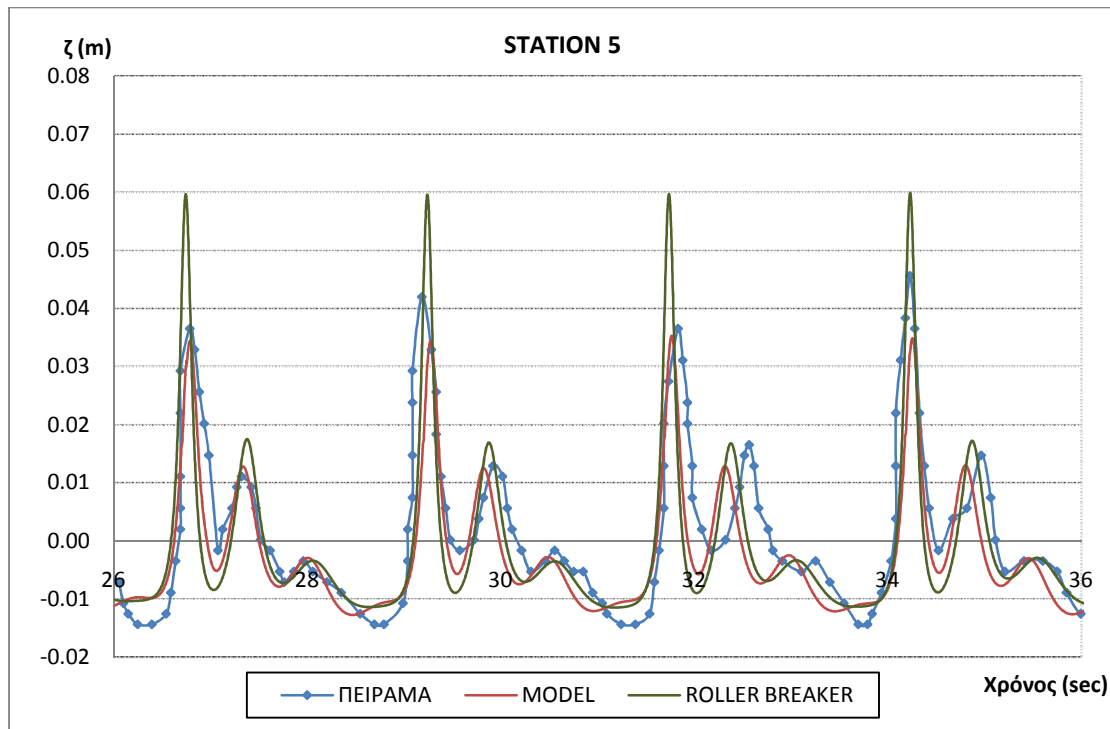
Σχήμα 7.27: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 5 για θραύση τύπου spilling μακρών κυματισμών ($H = 0.044\text{ m}$ και $f = 0.4\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



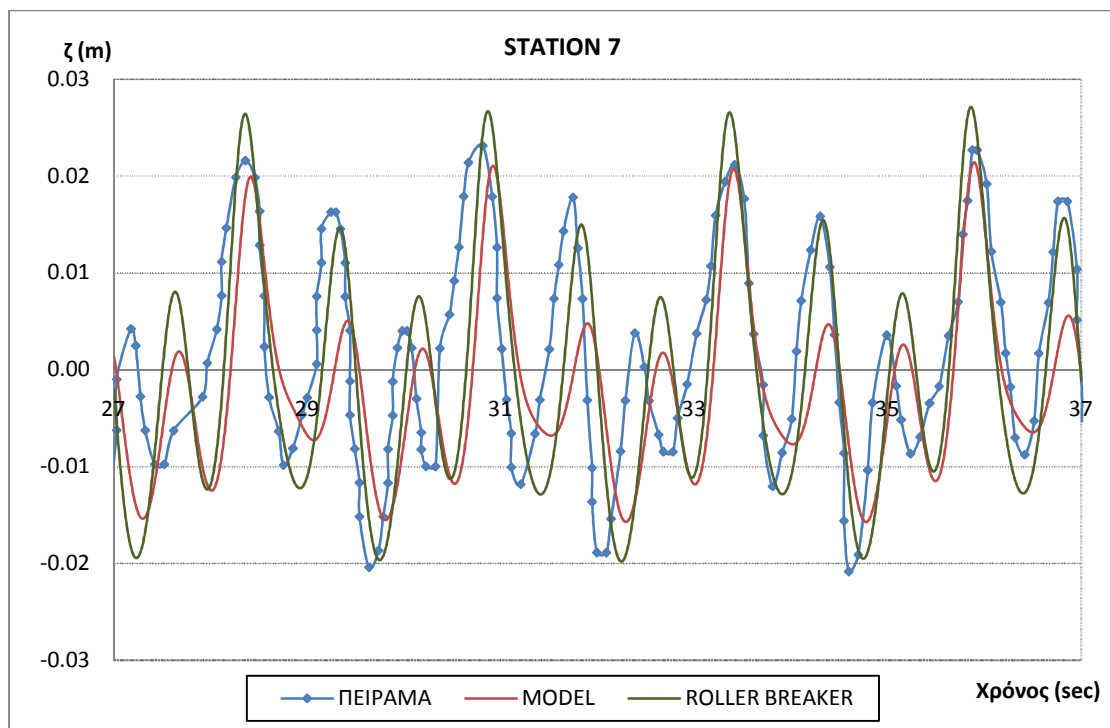
Σχήμα 7.28: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 7 για θραύση τύπου spilling μακρών κυματισμών ($H = 0.044\text{ m}$ και $f = 0.4\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



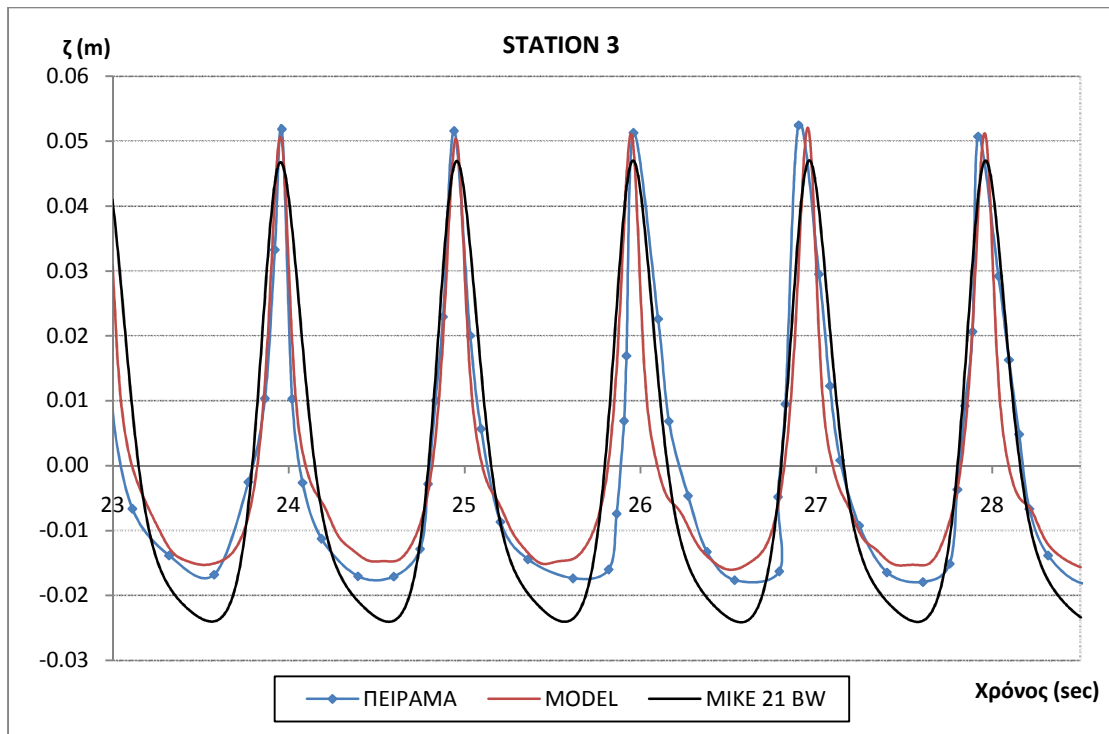
Σχήμα 7.29: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 3 για θραύση τύπου spilling μακρών κυματισμών ($H = 0.044\text{ m}$ και $f = 0.4\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (roller breaker)



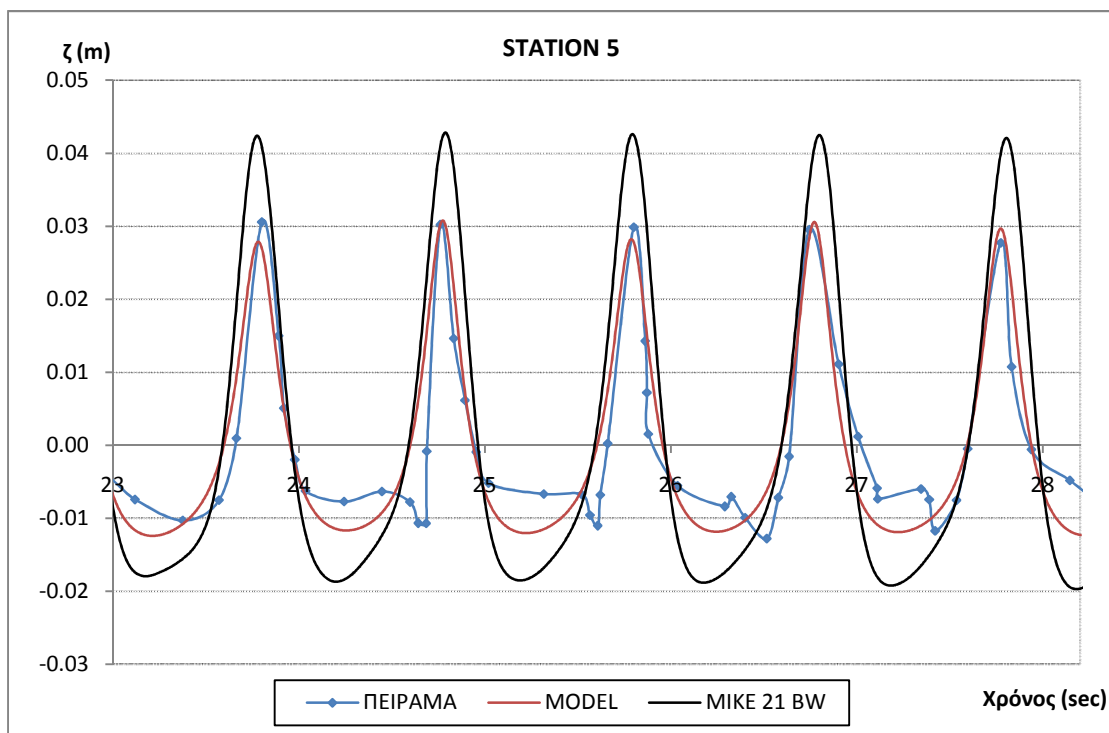
Σχήμα 7.30: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 5 για θραύση τύπου spilling μακρών κυματισμών ($H = 0.044\text{ m}$ και $f = 0.4\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (roller breaker)



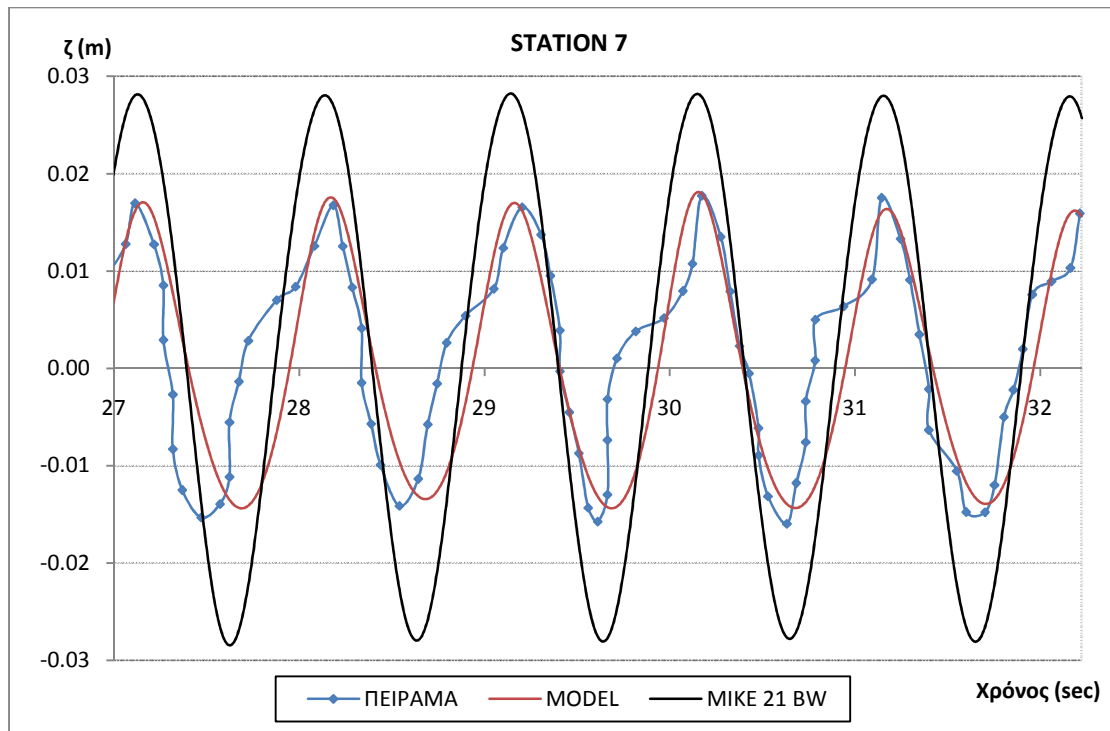
Σχήμα 7.31: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 7 για θραύση τύπου spilling μακρών κυματισμών ($H = 0.044\text{ m}$ και $f = 0.4\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (roller breaker)



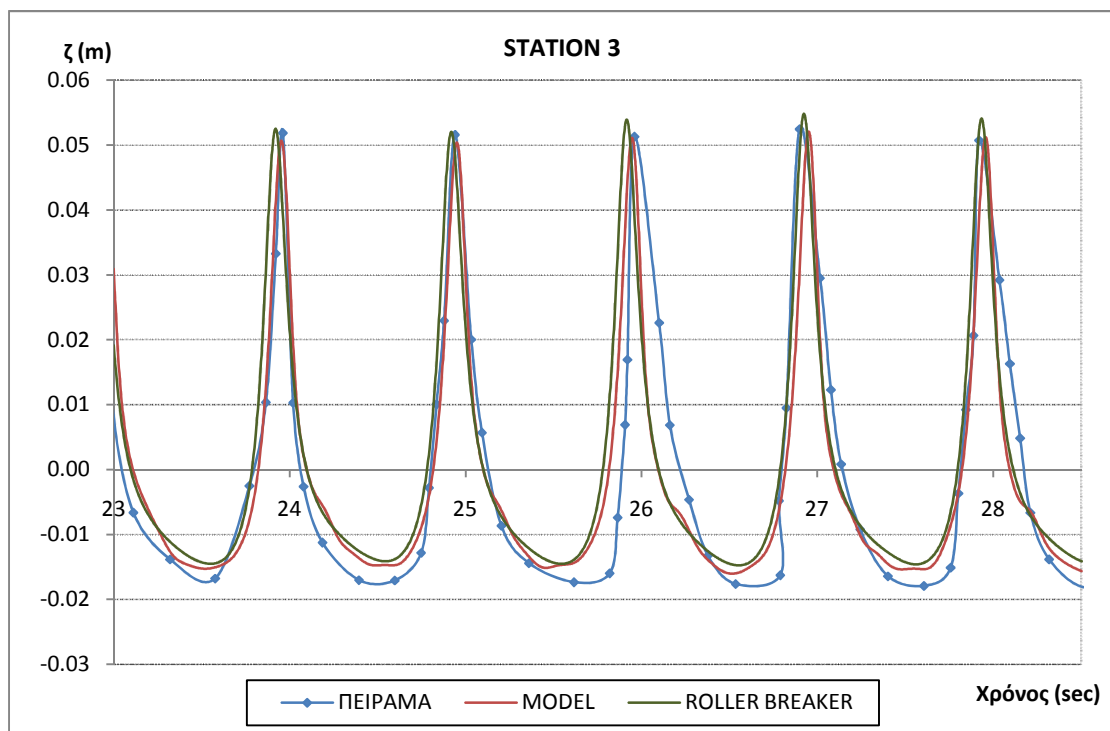
Σχήμα 7.32: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 3 για θραύση τύπου plunging βραχέων κυματισμών ($H = 0.069\text{ m}$ και $f = 1.0\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



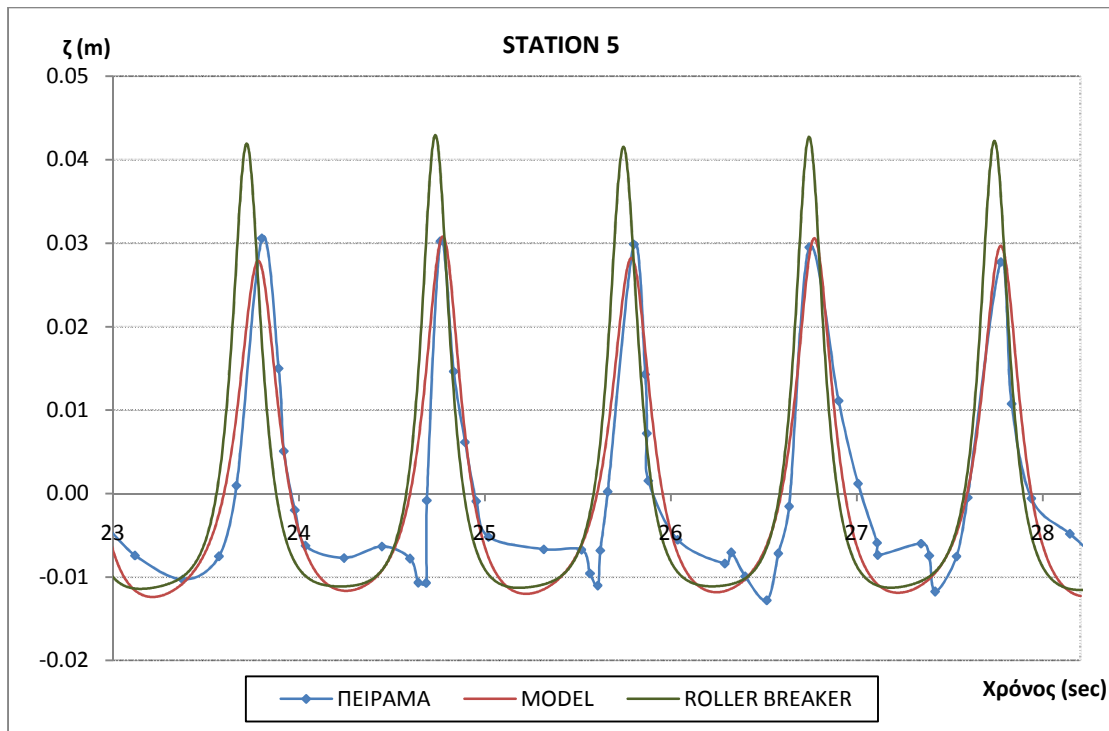
Σχήμα 7.33: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 5 για θραύση τύπου plunging βραχέων κυματισμών ($H = 0.069\text{ m}$ και $f = 1.0\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



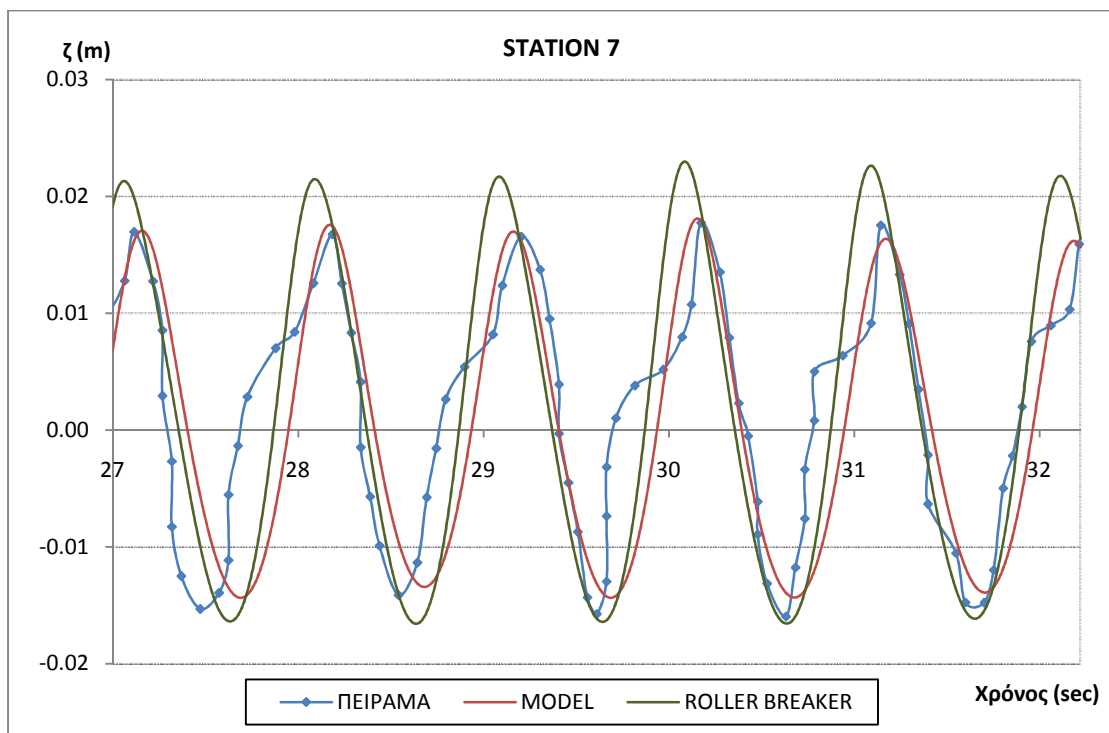
Σχήμα 7.34: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 7 για θραύση τύπου plunging βραχέων κυματισμών ($H = 0.069\text{ m}$ και $f = 1.0\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



Σχήμα 7.35: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 3 για θραύση τύπου plunging βραχέων κυματισμών ($H = 0.069\text{ m}$ και $f = 1.0\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (roller breaker)



Σχήμα 7.36: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 5 για θραύση τύπου plunging βραχέων κυματισμών ($H = 0.069\text{ m}$ και $f = 1.0\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (roller breaker)



Σχήμα 7.37: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 7 για θραύση τύπου plunging βραχέων κυματισμών ($H = 0.069\text{ m}$ και $f = 1.0\text{ Hz}$). Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (roller breaker)

Καθώς τα μακρά κύματα διαδίδονται στην ανωφέρεια του ύφαλου χάνουν βαθμιαία την κατακόρυφη συμμετρία τους και αποκτούν ένα πριονωτό (saw-toothed) σχήμα (σχήματα 7.26 και 7.29). Σε αυτή τη φάση γεννιούνται υψηλότερες αρμονικές (κυρίως 2^{ης} τάξης) λόγω των κυματικών αλληλεπιδράσεων. Πάνω από το οριζόντιο τμήμα, όπου τα κύματα είναι συνήθως μη διασπειρόμενα (ρηχά νερά), δημιουργούνται συνθήκες που ευνοούν το συντονισμό των κυματικών τριάδων και ξεκινάει μια απότομη μεταφορά ενέργειας από το βασικό κύμα στις υψηλότερες αρμονικές. Αυτή η απότομη μεταφορά ενέργειας, σε συνδυασμό με τη διασπορά των υψών κύματος παράγουν κυματικές "ουρές" που αυτονομούνται από το βασικό κύμα. Αρχικά ταξιδεύουν με ίδια ταχύτητα φάσης με το κυρίως κύμα, αλλά στη συνέχεια η ταχύτητα τους διαφοροποιείται καθώς ταξιδεύουν αυτόνομα, με συνέπεια η διαφορά φάσης από το βασικό κύμα να αυξάνει (phase lag) (σχήματα 7.27 και 7.30). Καθώς τα μακρά κύματα πεπερασμένου πλάτους και οι διασπειρόμενες κυματικές "ουρές" διαδίδονται σε μεγαλύτερα βάθη στην κατωφέρεια του ύφαλου, αποσυντίθενται σε πολλές μικρότερου ύψους, σχεδόν αρμονικές συνιστώσες (σχήματα 7.28 και 7.31). Παρότι αυτή η αποσύνθεση λόγω της αύξησης του βάρους φαίνεται να ξεκινάει απότομα, στην πραγματικότητα η ανταλλαγή ενέργειας ανάμεσα στις κυματικές συνιστώσες συνεχίζεται με αυξημένο ρυθμό για πολλά μήκη κύματος. Τελικά επιτυγχάνεται μια εξισορρόπηση, καθώς το αρχικά στενό φάσμα (narrow-banded) γίνεται πλέον ευρύ (broad-banded).

Σε αντίθεση με τα μακρά κύματα, κατά τη διάδοση βραχέων κυμάτων δεν αναπτύσσονται κυματικές "ουρές" και διατηρείται η κατακόρυφη συμμετρία. Έτσι, οι κυματισμοί συμπεριφέρονται ως κύματα Stokes ανώτερης τάξης. Συνεπώς, στην κατωφέρεια η αποσύνθεση δεν είναι το ίδιο δραστική με την περίπτωση των μακρών κυμάτων και απελευθερώνονται μόνο κάποιες αρμονικές 2^{ης} τάξης και μικρότερου ύψους.

Το φαινόμενο της γένεσης και απελευθέρωσης των υψηλότερων αρμονικών που περιγράφηκε παραπάνω έχει έντονα μη-γραμμικό χαρακτήρα και βασίζεται στις κυματικές αλληλεπιδράσεις (wave-wave interactions). Τόσο το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009), όσο και το MIKE 21 BW είναι μοντέλα ήπιας μη-γραμμικότητας και συνεπώς αδυνατούν να περιγράψουν επακριβώς το φαινόμενο. Ωστόσο, παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα και τηρουμένων των αναλογιών, τα τρία μοντέλα περιγράφουν σχετικά ικανοποιητικά κυρίως τη γένεση και όχι τόσο την απελευθέρωση των ανώτερων αρμονικών.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι η μορφή του φάσματος πάνω από τη στέψη του ύφαλου και στην κατωφέρεια καθορίζεται κυρίως από τις μη-γραμμικές κυματικές αλληλεπιδράσεις και δευτερευόντως από τη θραύση των κυματισμών.

Από τα διαγράμματα για θραύση τύπου spilling μακρών κυματισμών, φαίνεται ότι το προτεινόμενο μοντέλο είναι πιο ακριβές από το MIKE 21 BW. Στο σταθμό 3, το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) περιγράφει πολύ καλά τις κυματικές κορυφές και κοιλίες, ενώ το MIKE 21 BW υπολογίζει μεγαλύτερες κοιλίες. Στο σταθμό 5 (ανάντη του οποίου έχει ήδη ξεκινήσει η θραύση) και τα δύο μοντέλα περιγράφουν τη μορφή των ανώτερων αρμονικών, αλλά γενικά το MIKE 21 BW τις υπερεκτιμά. Αυτό ίσως οφείλεται (έκτος από τον ήπια μη-γραμμικό χαρακτήρα των μοντέλων) στο γεγονός ότι στο προτεινόμενο μοντέλο επιλέχθηκε ύστερα από βελτιστοποίηση το ζεύγος γωνιών θραύσης $(\varphi_b, \varphi_0) = (18^\circ, 7^\circ)$, ενώ κατά την εφαρμογή του MIKE 21 BW θεωρήθηκε το κλασικό ζεύγος $(\varphi_b, \varphi_0) = (20^\circ, 10^\circ)$. Τέλος, στο σταθμό 7 της κατωφέρειας το προτεινόμενο μοντέλο υπολογίζει ακριβέστερα τη διάδοση

των κυματισμών, καθότι το MIKE 21 BW υπερεκτιμά σαφώς τις κοιλίες. Πάντως και τα δύο μοντέλα περιγράφουν εν μέρει την απελευθέρωση των ανώτερων αρμονικών.

Συγκρίνοντας το προτεινόμενο μοντέλο με το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου προκύπτει ότι στο σταθμό 3 και τα δύο μοντέλα περιγράφουν πολύ καλά τις κορυφές και τις κοιλίες, αλλά το μοντέλο με την τεχνική του roller breaker αποδίδει ακριβέστερα την ασυμμετρία. Στο σταθμό 5, εντός δηλαδή της ζώνης θραύσης, και τα δύο μοντέλα περιγράφουν τη γένεση των υψηλότερων αρμονικών, αλλά το μοντέλο με την τεχνική του roller breaker υπερεκτιμά τις κυματικές κορυφές σε αντίθεση με το προτεινόμενο μοντέλο που τις αποδίδει ικανοποιητικά. Τέλος, στο σταθμό 7 και οι δύο εκδόσεις του μοντέλου αποδίδουν εν μέρει την απελευθέρωση των αρμονικών, με το προτεινόμενο μοντέλο να περιγράφει ακριβέστερα τις κύριες μορφές και το μοντέλο με το roller breaker τις δευτερεύουσες μορφές.

Η προσομοίωση της θραύσης τύπου plunging είναι γενικά δύσκολη, καθότι συμβαίνει αποκόλληση, έντονη δημιουργία αφρού και γενικά μεγαλύτερες παραμορφώσεις της ελεύθερης επιφάνειας. Αυτό προκύπτει και από τα παραπάνω διαγράμματα για θραύση τύπου plunging βραχέων κυματισμών. Στο σταθμό 3 το προτεινόμενο μοντέλο περιγράφει ικανοποιητικά τις κυματικές κορυφές, αλλά υποεκτιμά ελαφρώς τις κυματικές κοιλίες. Αντίθετα, το MIKE 21 BW υπερεκτιμά τις κοιλίες και υποεκτιμά ελαφρώς τις κορυφές. Επίσης, τα δύο μοντέλα αποδίδουν σχετικά ικανοποιητικά την ασυμμετρία. Στο σταθμό 5 που βρίσκεται στο κατάντη άκρο της στέψης και εντός της ζώνης θραύσης το MIKE 21 BW υπερεκτιμά αισθητά κορυφές και κοιλίες, ενώ το προτεινόμενο μοντέλο εμφανίζει ικανοποιητική ακρίβεια. Αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω της ιδιαιτερότητας της παρουσίας του ύφαλου, ύστερα από διερεύνηση χρησιμοποιήθηκε πάλι το ζεύγος γωνιών $(\varphi_b, \varphi_0) = (18^\circ, 7^\circ)$ παρότι οι Cienfuegos et al. (2010) προτείνουν για θραύση τύπου plunging αυξημένες τιμές της γωνίας φ_b , ενώ κατά την εφαρμογή του MIKE 21 BW χρησιμοποιήθηκε πάλι το ζεύγος $(\varphi_b, \varphi_0) = (20^\circ, 10^\circ)$ και συντελεστής σχήματος του κυλίνδρου $f_\delta = 2.0$. Κανένα από τα δύο μοντέλα δεν περιγράφει την ήπια γένεση υψηλότερων αρμονικών. Στο σταθμό 7 στην κατωφέρεια το MIKE 21 BW υπερεκτιμά σαφώς τις κορυφές και τις κοιλίες, ενώ το προτεινόμενο μοντέλο τις υπολογίζει με ακρίβεια, αλλά δεν αποδίδει (όπως και το MIKE 21 BW) την ασυμμετρία και την πεπλατυσμένη ιδιόμορφη κυματομορφή, διατηρώντας ένα σχετικά μη ρεαλιστικό αρμονικό σχήμα.

Συγκρίνοντας το προτεινόμενο μοντέλο με το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου, προκύπτει παρόμοια συμπεριφορά στο σταθμό 3 με ακρίβεια ως προς τις κορυφές και ελαφρά υποεκτίμηση των κοιλιών. Στο σταθμό 5 το μοντέλο roller breaker υπερεκτιμά τις κορυφές και εμφανίζει παρόμοια ικανοποιητική συμπεριφορά με το προτεινόμενο μοντέλο ως προς τις κοιλίες. Ωστόσο, κανένα από τα δύο μοντέλα δεν αποδίδει την ελαφρά γένεση και δέσμευση ανώτερων αρμονικών. Στο σταθμό 7 της κατωφέρειας το μοντέλο με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου υπερεκτιμά τις κορυφές αλλά αποδίδει ακριβέστερα τις κοιλίες σε σχέση με το προτεινόμενο μοντέλο. Επίσης, το μοντέλο roller breaker αποδίδει ελαφρώς καλύτερα την ασυμμετρία υπολογίζοντας γενικά πλατύτερες κυματομορφές σε σχέση με το προτεινόμενο μοντέλο, χωρίς ωστόσο να αποδίδεται και πάλι η ιδιότυπη οδοντωτή μορφή.

Γενικά η προτεινόμενη τεχνική προσομοίωσης της θραύσης περιγράφει ικανοποιητικά τη θραύση πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη παρά τον ήπια μη γραμμικό χαρακτήρα του μοντέλου

των Karambas και Memos (2009). Το μοντέλο έχει εφαρμογή για ήπια μεταβαλλόμενη βυθομετρία και κάποιες ανακλάσεις στην ανωφέρεια του ύφαλου πιθανόν να αποτελούν πηγή ανακρίβειών. Επίσης, τα πειραματικά δεδομένα ελήφθησαν με ψηφιοποίηση των δημοσιευμένων διαγραμμάτων, γεγονός που ίσως εισάγει επιπλέον ανακρίβειες. Το μοντέλο για το πείραμα των Beji και Battjes (1993) για μονοχρωματικούς κυματισμούς προγραμματίστηκε σε γλώσσα Fortran 90 και ο κώδικας παρουσιάζεται στο παράρτημα Α.

7.6 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ SYNOLAKIS (1987)

Το επόμενο πείραμα επαλήθευσης του προτεινόμενου μοντέλου είναι αυτό του Synolakis (1987). Το πείραμα αφορά στη γένεση και διάδοση μοναχικού κυματισμού σε αρχικά οριζόντιο και στη συνέχεια κεκλιμένο πυθμένα. Πραγματοποιήθηκε από τον ερευνητή το 1987 για να μελετηθεί η θραύση και η αναρρίχηση στην ακτή του μοναχικού κύματος. Τα αποτελέσματά του χρησιμοποιήθηκαν ως επαλήθευση στη δημοσίευση της βασικής μορφής του μοντέλου των Karambas και Memos (2009), αλλά επειδή δεν είχε συμπεριληφθεί στο μοντέλο η θραύση παρουσιάστηκαν μόνο αποτελέσματα στη ζώνη αρκετά πριν τη θραύση. Στη συγκεκριμένη παράγραφο παρουσιάζεται η επαλήθευση του προτεινόμενου μοντέλου ως και λίγο μετά την έναρξη της θραύσης, καθότι αυτή συμβαίνει πολύ κοντά στην ακτογραμμή και σχεδόν άμεσα εκδηλώνεται η αναρρίχηση και καταρρίχηση του κύματος, φαινόμενα τα οποία δεν έχουν προσομοιωθεί στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας. Αντίθετα, κατά τα παραπάνω στα κατάντη θεωρήθηκαν και πάλι απορροφητικές στοιβάδες.

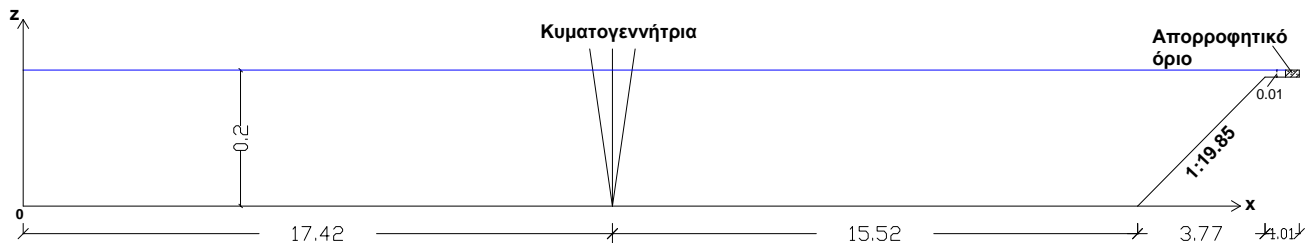
Ο Synolakis (1987) δίνει μια αναλυτική περιγραφή της πειραματικής διάταξης. Τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν στις εγκαταστάσεις των W.M. Keck Laboratories του California Institute of Technology. Η δεξαμενή είχε διαστάσεις $37.73\text{ m} \times 0.61\text{ m} \times 0.39\text{ m}$ και τα τοιχώματα της ήταν από γυαλί. Στα κατάντη διαμορφώθηκε πυθμένας σταθερής κλίσης 1:19.85 από πάνελ αλουμινίου με επιφάνεια υδραυλικά λεία. Τα κύματα παράγονταν στην περιοχή σταθερού βάθους από γεννήτρια τύπου εμβόλου (piston) που ήταν συνδεδεμένη με υπολογιστή. Έτσι παράγονταν σχεδόν τέλεια μοναχικά κύματα που σύμφωνα με τη θεωρία 1^{ης} τάξης είχαν στο χρόνο $t = 0$ την αρχική αδιάστατη μορφή:

$$\zeta(x, 0) = \frac{H}{d_0} \operatorname{sech}^2[\gamma(x - X_1)] \quad (7.5)$$

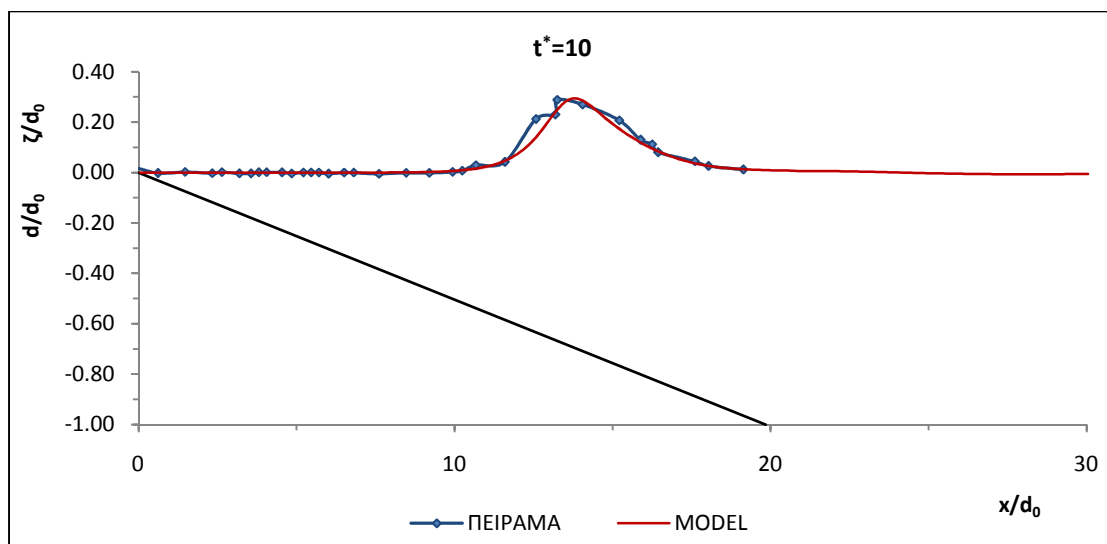
όπου $\gamma = (3H/4d_0)^{1/2}$ και X_1 η αδιάστατη θέση της αρχικής κυματικής κορυφής. Ο χαρακτηρισμός σχεδόν τέλεια αναφέρεται σε κάποιες "ουρές" που ακολουθούσαν το παραγόμενο κύμα και δεν ξεπερνούσαν το 2% του ύψους H .

Στο συγκεκριμένο πείραμα επαλήθευσης το αρχικό βάθος του νερού είναι $d_0 = 0.20\text{ m}$ και ο αρχικός λόγος $\frac{H}{d_0} = 0.28$, δηλαδή το παραγόμενο ύψος κύματος είναι $H = 0.056\text{ m}$. Το υπολογιστικό πεδίο εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) φαίνεται στο σχήμα 7.38. Το χωρικό βήμα διακριτοποίησης επιλέχθηκε $\Delta x = 0.02\text{ m}$ και το χρονικό βήμα $\Delta t = 0.004\text{ sec}$. Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται ο

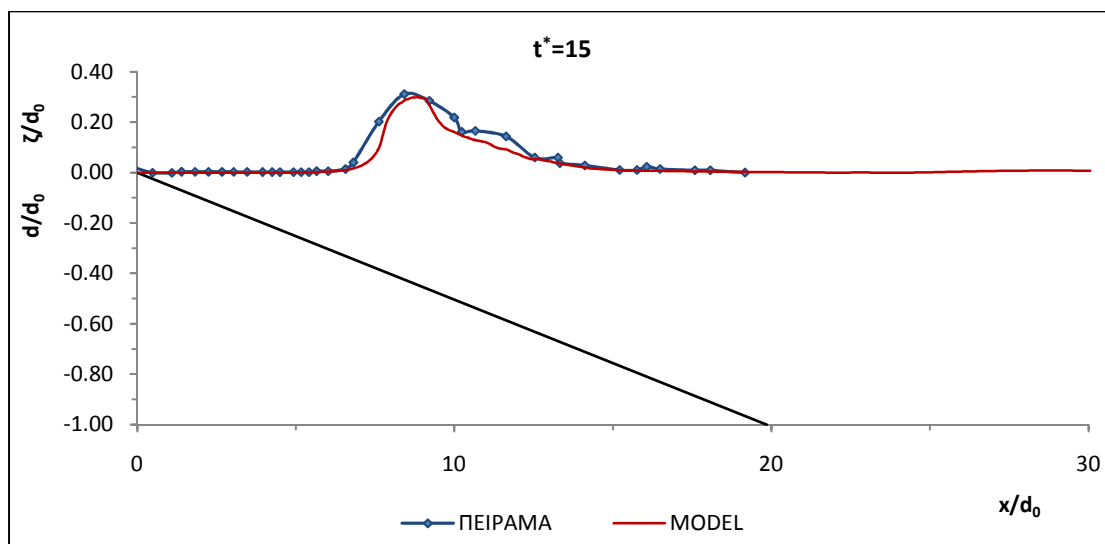
αδιάστατος χρόνος $t^* = t\sqrt{g/d_0}$. Το μοναχικό κύμα παράγεται βάσει των σχέσεων (διαστατική μορφή) (1.56) για την ελεύθερη επιφάνεια ($t = 0$ και όπου x το $x - X_1$) και της μέσης στο βάθος τιμής της ταχύτητας u που ορίζεται από τη σχέση (1.58). Έτσι, ο κυματισμός εισάγεται στο πεδίο ως αρχική συνθήκη και αφήνεται να διαδοθεί. Ο κώδικας για το πείραμα του Synolakis (1987) παρουσιάζεται στο παράρτημα Α.



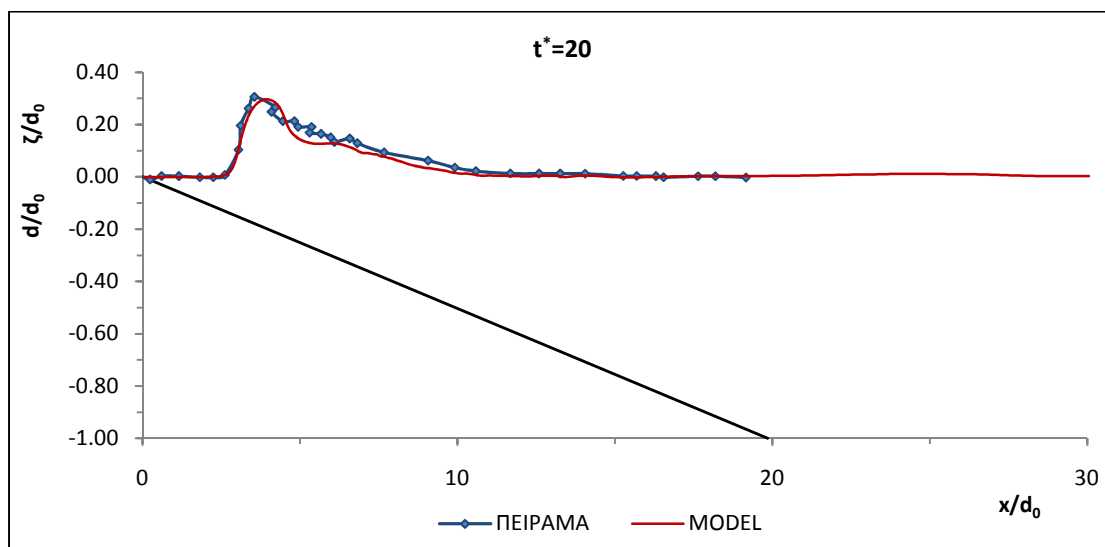
Σχήμα 7.38: Γεωμετρική διάταξη υπολογιστικού πεδίου εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) για το πείραμα του Synolakis (1987)



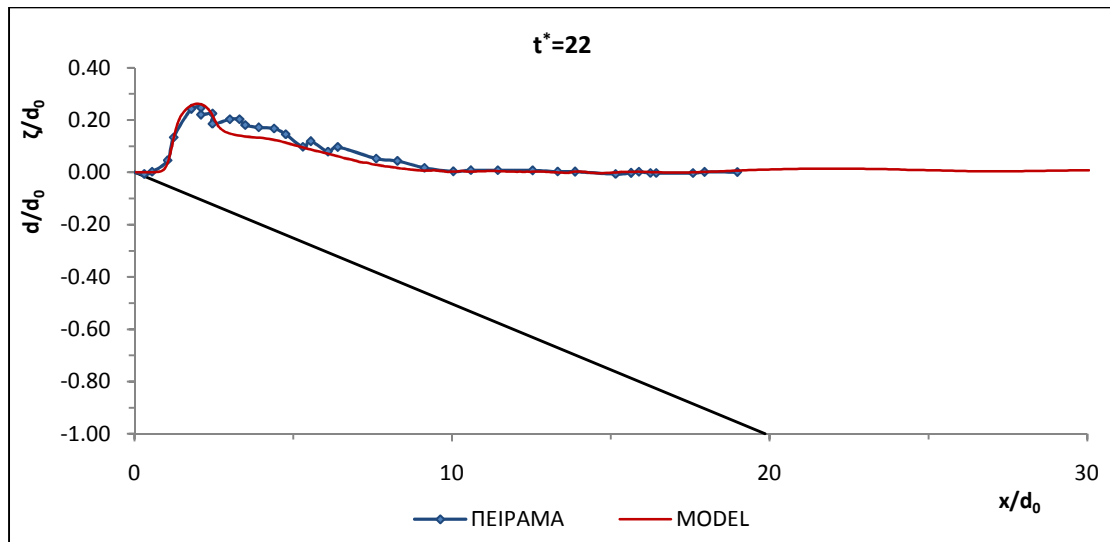
Σχήμα 7.39: Διάδοση μοναχικού κύματος. Σύγκριση αδιάστατης ανύψωσης ζ/d_0 μεταξύ πειραματικών καταγραφών του Synolakis (1987) και αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου στον αδιάστατο χρόνο $t^* = 10$



Σχήμα 7.40: Διάδοση μοναχικού κύματος. Σύγκριση αδιάστατης ανύψωσης z/d_0 μεταξύ πειραματικών καταγραφών του Synolakis (1987) και αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου στον αδιάστατο χρόνο $t^* = 15$



Σχήμα 7.41: Διάδοση μοναχικού κύματος. Σύγκριση αδιάστατης ανύψωσης z/d_0 μεταξύ πειραματικών καταγραφών του Synolakis (1987) και αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου στον αδιάστατο χρόνο $t^* = 20$



Σχήμα 7.42: Διάδοση μοναχικού κύματος. Σύγκριση αδιάστατης ανύψωσης z/d_0 μεταξύ πειραματικών καταγραφών του Synolakis (1987) και αποτελεσμάτων προτεινόμενου μοντέλου στον αδιάστατο χρόνο $t^* = 22$

Παρατηρώντας τα διαγράμματα των σχημάτων 7.39 ως 7.42 προκύπτει ότι λόγω ρήχωσης, το εμπρόσθιο μέτωπο του κύματος γίνεται διαρκώς πιο απότομο από το οπίσθιο και το προφίλ γίνεται έντονα ασύμμετρο. Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν επίσης ξεκάθαρα αυτή την τάση.

Τα σχήματα 7.39 και 7.40 αναφέρονται σε αδιάστατους χρόνους $t^* = 10$ και $t^* = 15$, αρκετά δηλαδή πριν την εκδήλωση της θραύσης που προσδιορίστηκε πειραματικά για $t^* = 21$. Στις δύο αυτές θέσεις η ακρίβεια του μοντέλου είναι αρκετά ικανοποιητική ως προς τον προσδιορισμό του ύψους κύματος. Βέβαια, οι κυματομορφές υπολογίζονται στενότερες των πειραματικά προσδιοριζόμενων. Αξίζει πάντως να σημειωθεί ότι τα πειραματικά αποτελέσματα ελήφθησαν με ψηφιοποίηση των δημοσιευμένων αποτελεσμάτων, γεγονός που ίσως εισάγει κάποια ανακρίβεια.

Το σχήμα 7.41 στο χρόνο $t^* = 20$ αναφέρεται σε στιγμή λίγο πριν την έναρξη της θραύσης. Το ύψος κύματος, η ασυμμετρία και η κλίση του εμπρόσθιου και του οπίσθιου μετώπου προσδιορίζονται με ικανοποιητική ακρίβεια. Στον αδιάστατο χρόνο $t^* = 22$ το κύμα βρίσκεται εντός της ζώνης θραύσης. Η ακρίβεια στον προσδιορισμό του ύψους είναι πολύ καλή, ενώ και οι κλίσεις των μετώπων και η ασυμμετρία υπολογίζονται ικανοποιητικά. Το οπίσθιο μέτωπο υποεκτιμάται ελαφρώς. Όπως φαίνεται στα σχήματα η θραύση συμβαίνει πολύ κοντά στην ακτή και για το λόγο αυτό σε μεγαλύτερους αδιάστατους χρόνους λαμβάνει χώρα αναρρίχηση στην ακτή. Αντί για τη συνθήκη της μετακινούμενης ακτογραμμής θεωρήθηκε ένα τμήμα σταθερού (μικρού μεν) βάθους με απορροφητικές στοιβάδες. Επειδή το τμήμα αυτό βρίσκεται εντός της ζώνης θραύσης και διαβροχής εισάγονται κάποιες ανακρίβειες στα ανάντη.

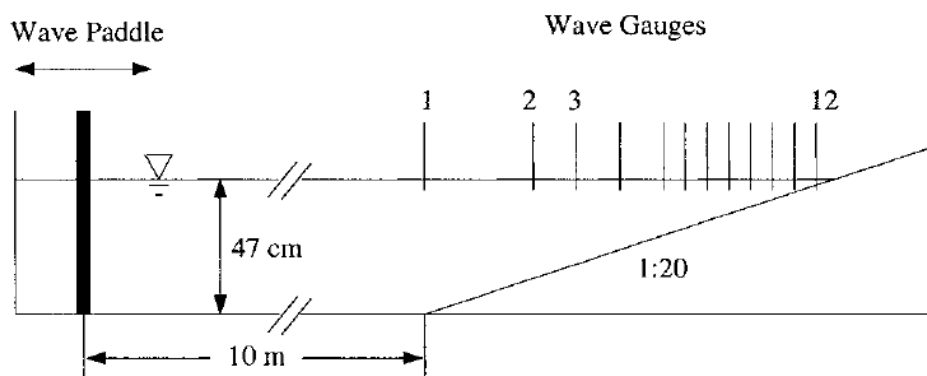
Από τις πειραματικές καταγραφές προκύπτει ότι η θραύση ξεκινάει στη θέση $x_b = 0.711 m$, ενώ το μοντέλο την προσδιορίζει στη θέση $x_b = 0.81 m$ ($x = 0$ στην ακτογραμμή). Το ύψος θραύσης των πειραμάτων είναι $H_b = 0.061 m$ ενώ το μοντέλο υπολογίζει $H_b = 0.059 m$, δηλαδή σφάλμα -3.3%. Τέλος, ο πειραματικός λόγος θραύσης είναι $\frac{H_b}{d_b} = 1.69$, ενώ το μοντέλο

υπολογίζει $\frac{H_b}{d_b} = 1.44$. Αξίζει να σημειωθεί ότι από τη θεωρία μοναχικού κύματος προκύπτει $\frac{H_b}{d_b} = 0.78$.

Επειδή το μήκος κύματος και η περίοδος ενός μοναχικού κύματος είναι θεωρητικά άπειρα δεν ορίζεται κατά τα συνήθη ο χρόνος ανάπτυξης του επιφανειακού κυλίνδρου T_{12} κατά την προσομοίωση της θραύσης. Για το λόγο αυτό η κλίση του επιφανειακού κυλίνδρου θεωρήθηκε σταθερή 10° καθ' όλη τη διάρκεια ενός γεγονότος θραύσης, σύμφωνα και με την πρόταση των Cienfuegos et al. (2010). Ύστερα από διερεύνηση και βαθμονόμηση η γωνία εκκίνησης της θραύσης τέθηκε 12° και η γωνία λήξης 7° .

7.7 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ ΜΑΣΕ ΚΑΙ ΚΙΡΒΥ (1992)

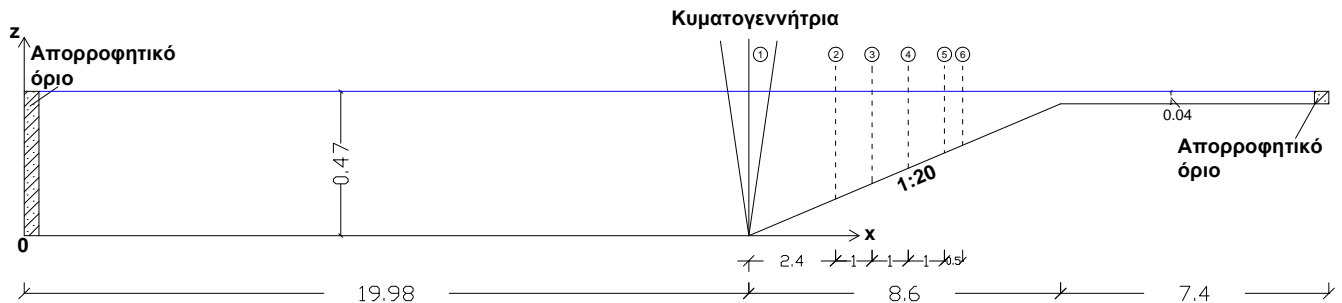
Εκτός των παραπάνω, το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (1992) επαληθεύτηκε και όσον αφορά στη διάδοση σύνθετων κυματισμών. Στη συγκεκριμένη παράγραφο παρουσιάζεται η σύγκριση με τα αποτελέσματα του πειράματος των Mase και Kirby (1992) που περιλαμβάνει σύνθετους κυματισμούς φάσματος Pierson-Moskowitz. Οι ερευνητές πραγματοποίησαν δύο σειρές πειραμάτων με περιόδους αιχμής $T_p = 1.67 \text{ sec}$ και $T_p = 1.0 \text{ sec}$ αντίστοιχα. Στην παρούσα εργασία το μοντέλο επαληθεύτηκε για το δεύτερο σειρά πειραμάτων με $T_p = 1.0 \text{ sec}$. Στην περίπτωση αυτή κυριαρχεί η θραύση τύπου spilling. Η πειραματική διάταξη φαίνεται στο σχήμα 7.43.



Σχήμα 7.43: Πειραματική διάταξη των Mase και Kirby (1992) (πηγή: [87])

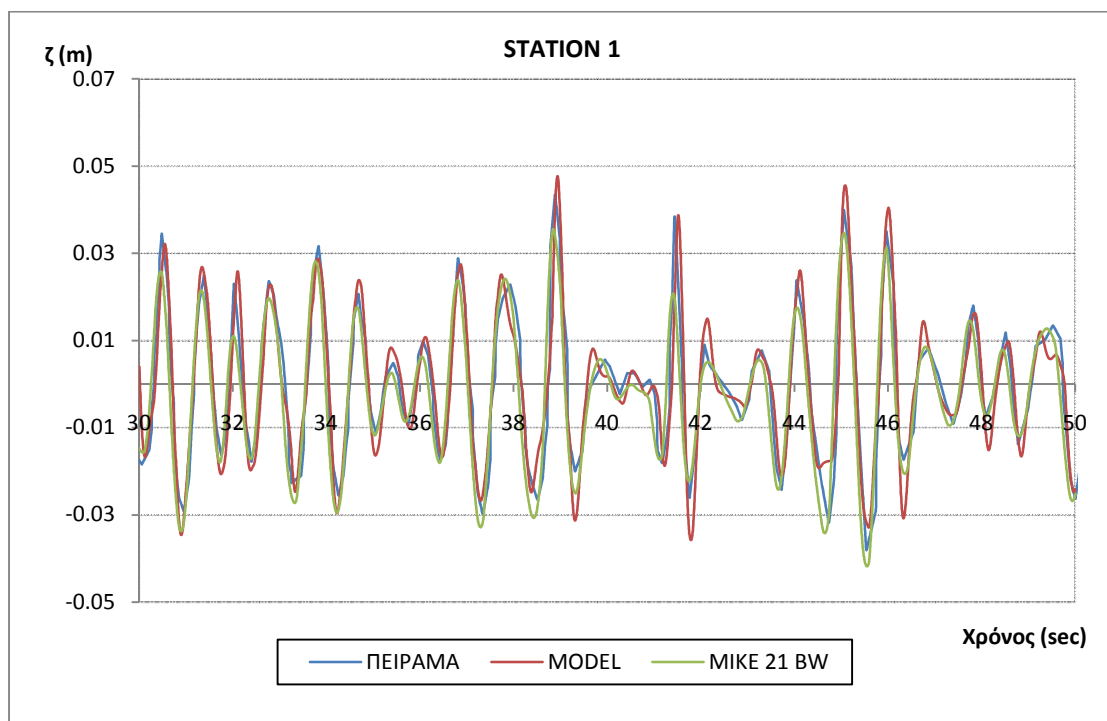
Επειδή δεν υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία στη θέση της πειραματικής κυματογεννήτριας (σχήμα 7.43), ενώ αντίθετα υπάρχει στη βιβλιογραφία η χρονοσειρά στον πρώτο σταθμό καταγραφής (σταθμός 1) και ενδιάμεσα ο πυθμένας έχει σταθερό βάθος, στο υπολογιστικό πεδίο η κυματογεννήτρια θεωρήθηκε στη θέση του σταθμού 1 και ως input εισήχθη η ψηφιοποιημένη χρονοσειρά στη θέση αυτή. Χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση πηγής για τη γένεση των κυματισμών και για το λόγο αυτό απαιτούνταν τιμές της ανύψωσης ανά χρονικά διαστήματα Δt . Έτσι, εφαρμόστηκε βοηθητικός κώδικας χρονικής παρεμβολής που παρήγαγε τις επιθυμητές τιμές από τις ψηφιοποιημένες. Ο κώδικας αυτός "PAREMVOLI.f90" συντάχθηκε σε Fortran 90 και παρατίθεται στο παράρτημα Β. Ο κώδικας για το πείραμα των Mase και Kirby (1992)

παρατίθεται στο παράρτημα Α. Ως βήμα χρονικής διακριτοποίησης επιλέχθηκε $dt = 0.004 \text{ sec}$ και χωρικό βήμα $dx = 0.02 \text{ m}$. Το υπολογιστικό πεδίο εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου των Καραμβας και Memos (2009) φαίνεται στο σχήμα 7.44.

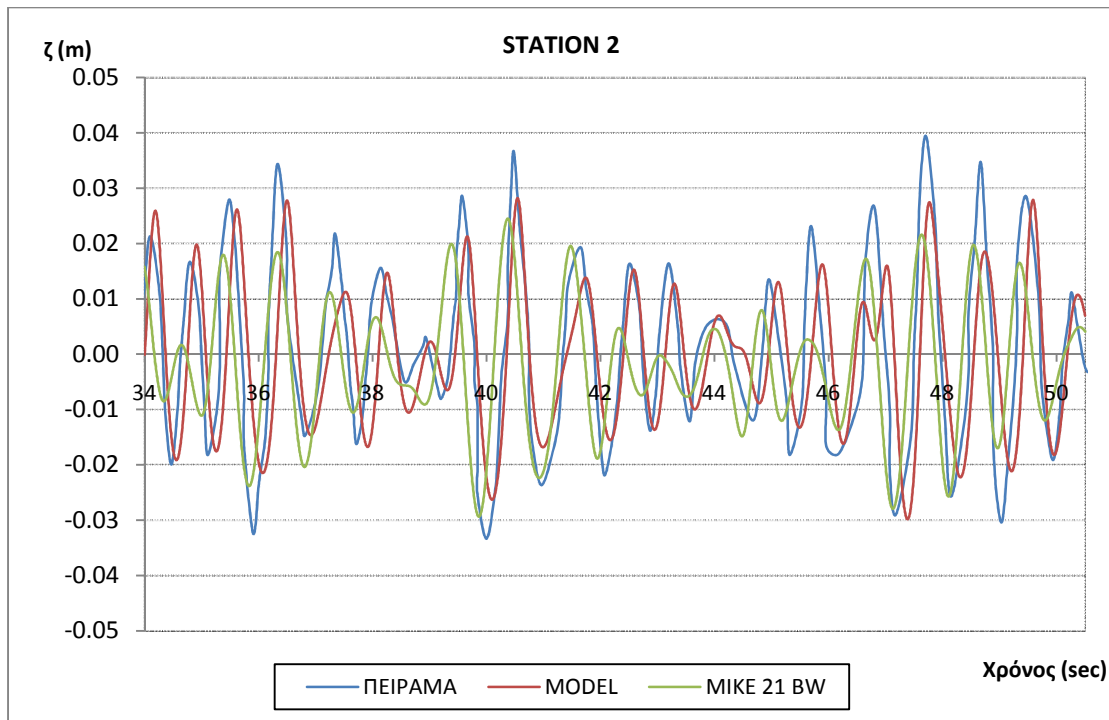


Σχήμα 7.44: Γεωμετρική διάταξη υπολογιστικού πεδίου εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου των Καραμβας και Memos (2009) για το πείραμα των Mase και Kirby (1992)

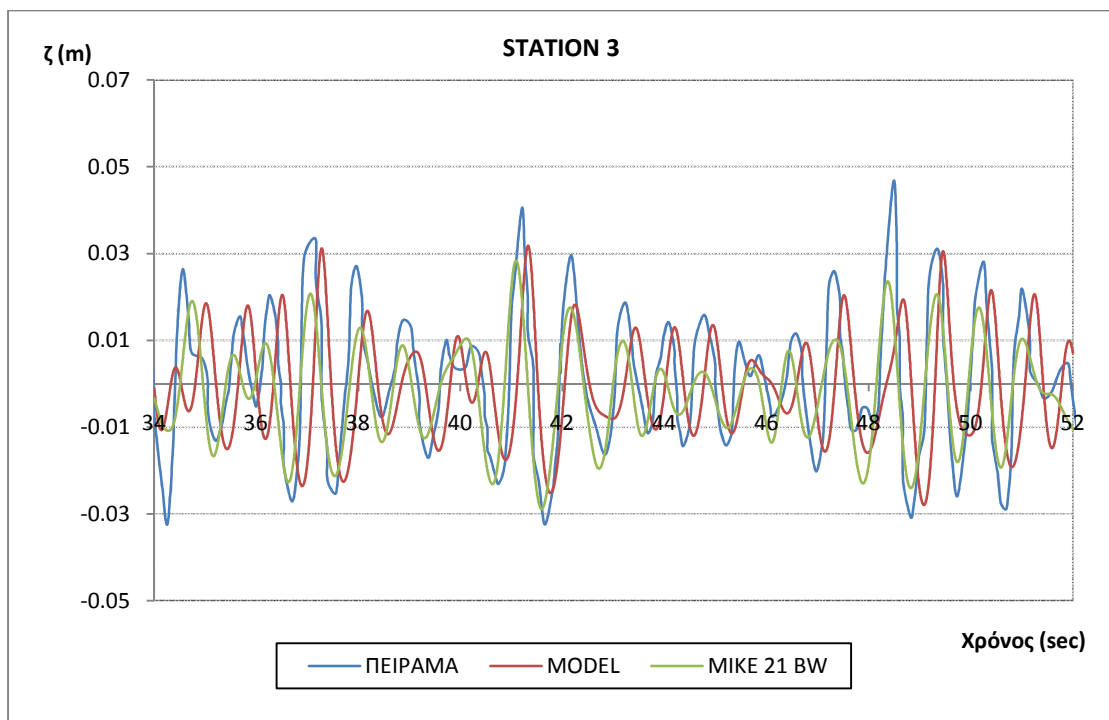
Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω αφορούν στις χρονοσειρές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ενδεικτικά για τους σταθμούς 1 ως 6. Γίνεται σύγκριση μεταξύ των πειραματικών καταγραφών, των αποτελεσμάτων του προτεινόμενου μοντέλου (αναφέρεται ως model), των αποτελεσμάτων του τροποποιημένου μοντέλου των Καραμβας και Memos (2009) με προσομοίωση της θραύσης με την τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας (αναφέρεται ως eddy viscosity) και του MIKE 21 BW.



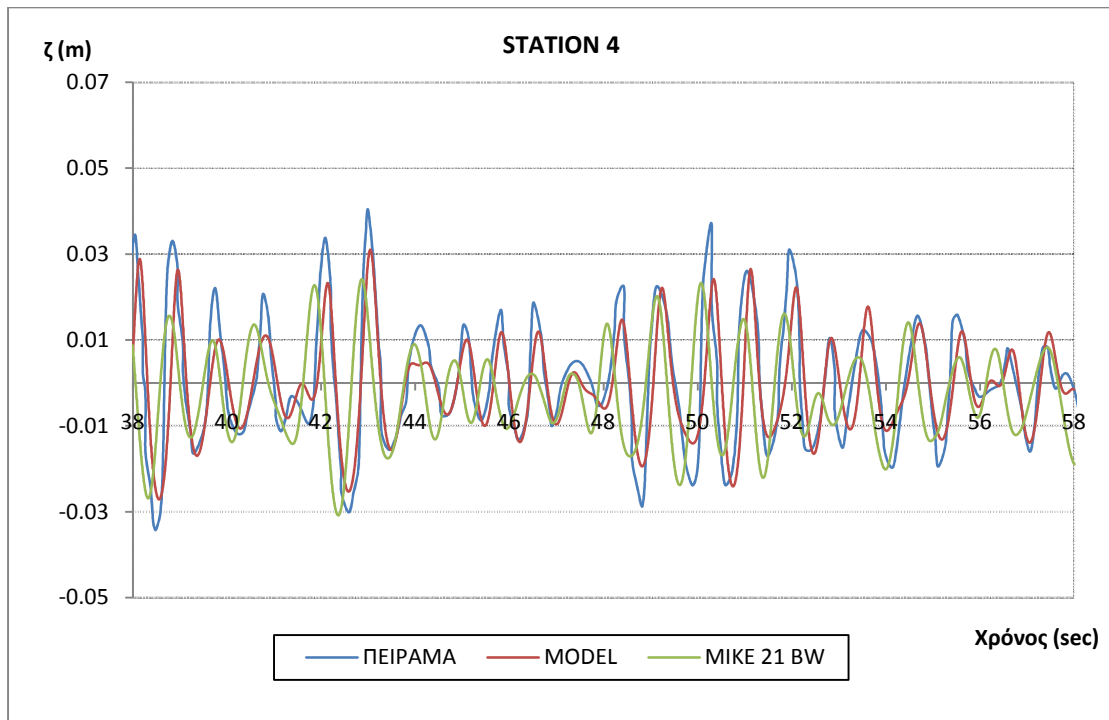
Σχήμα 7.45: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 1. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



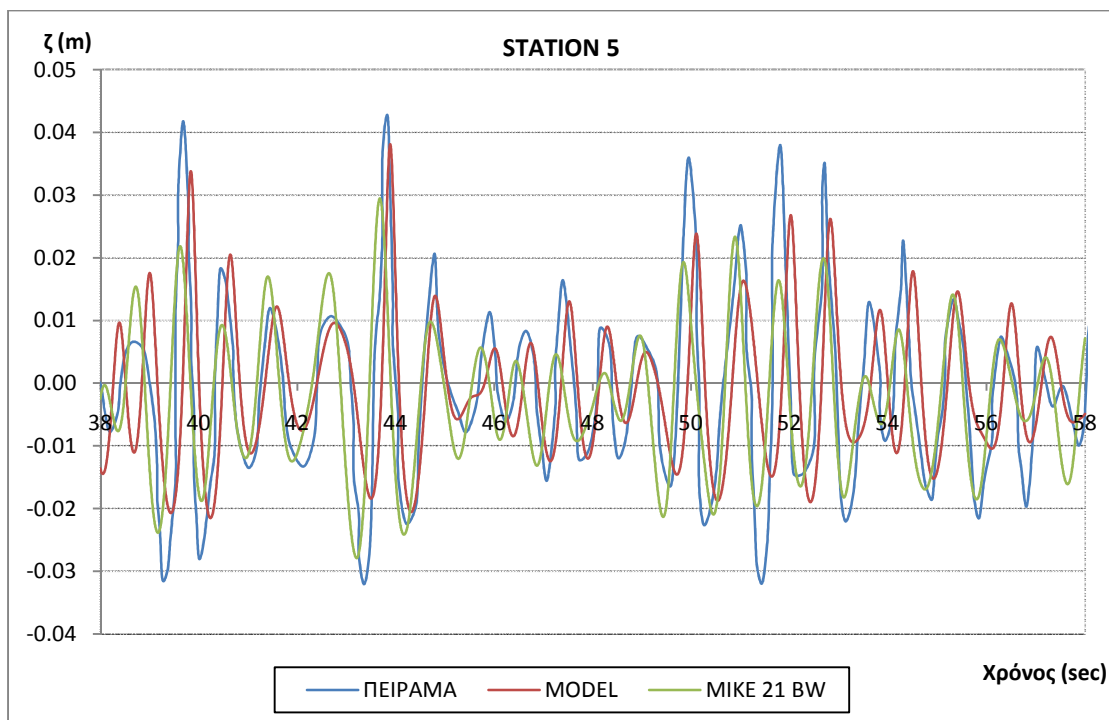
Σχήμα 7.46: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 2. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



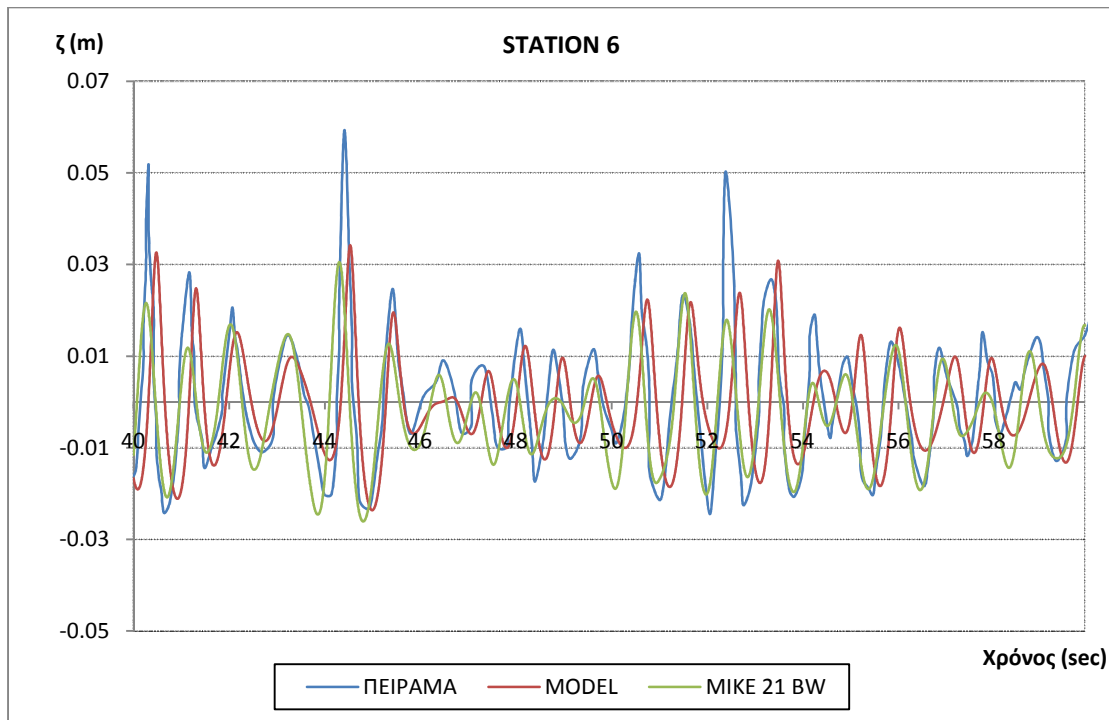
Σχήμα 7.47: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 3. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



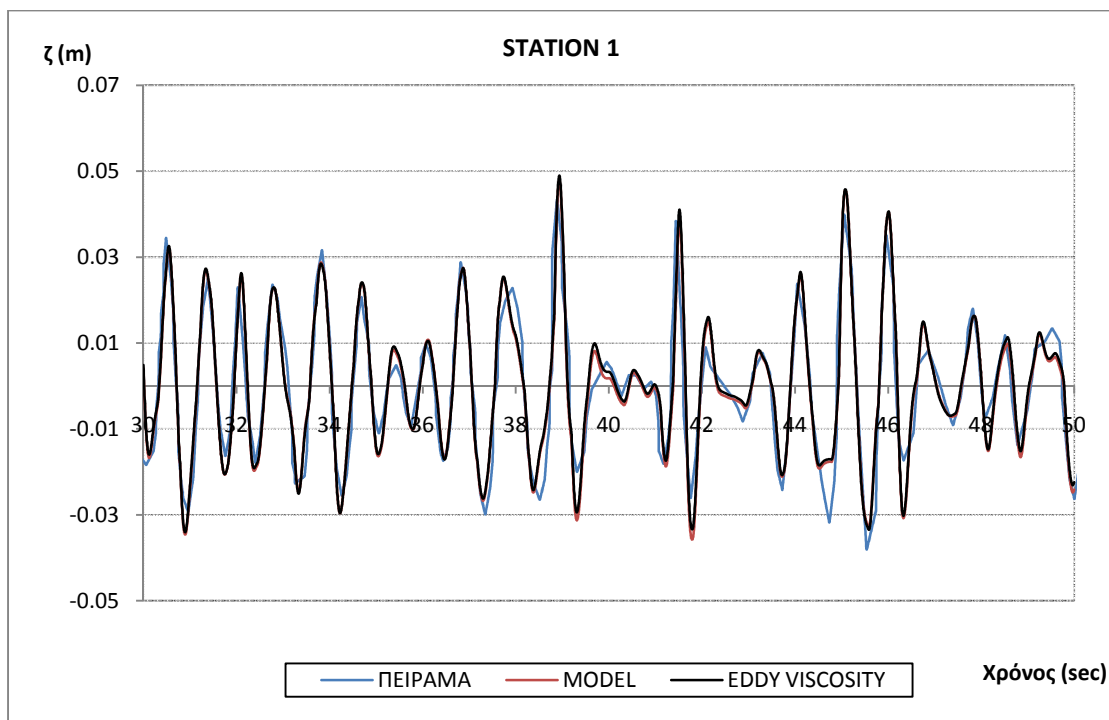
Σχήμα 7.48: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 4. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



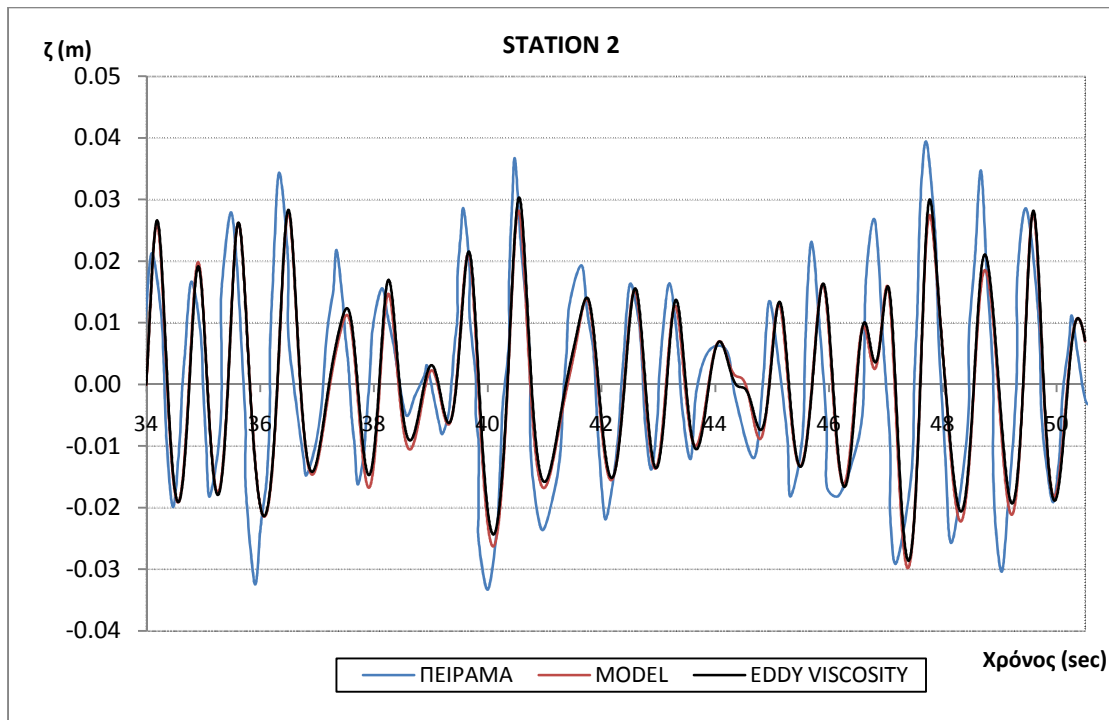
Σχήμα 7.49: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 5. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



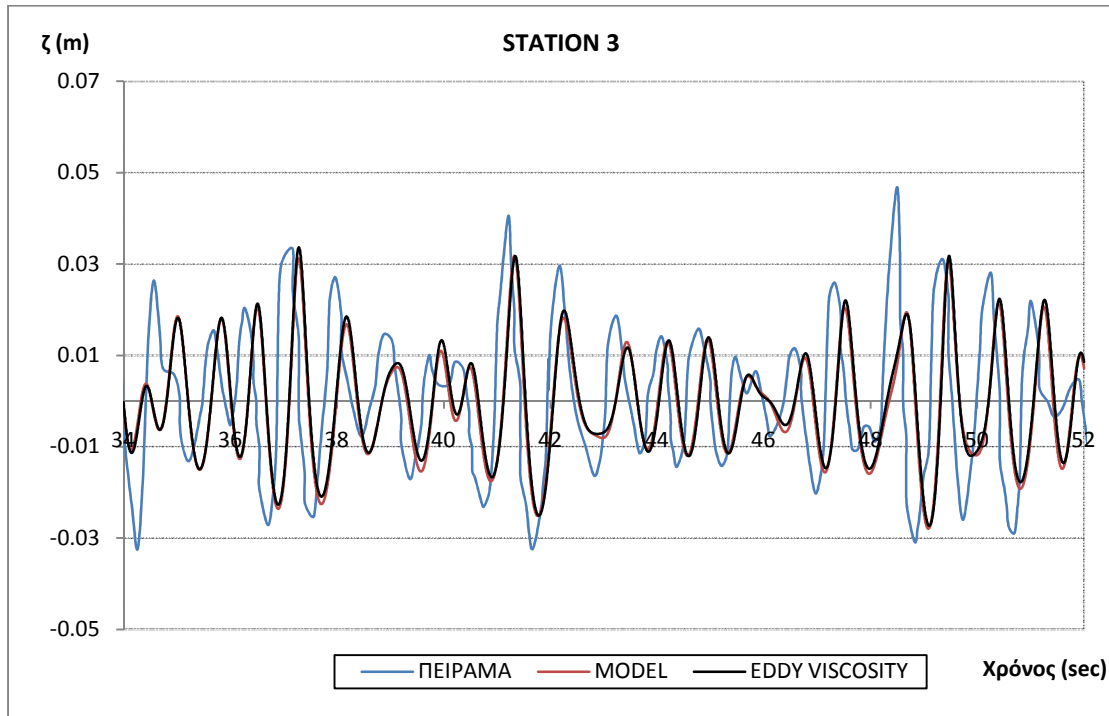
Σχήμα 7.50: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 6. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



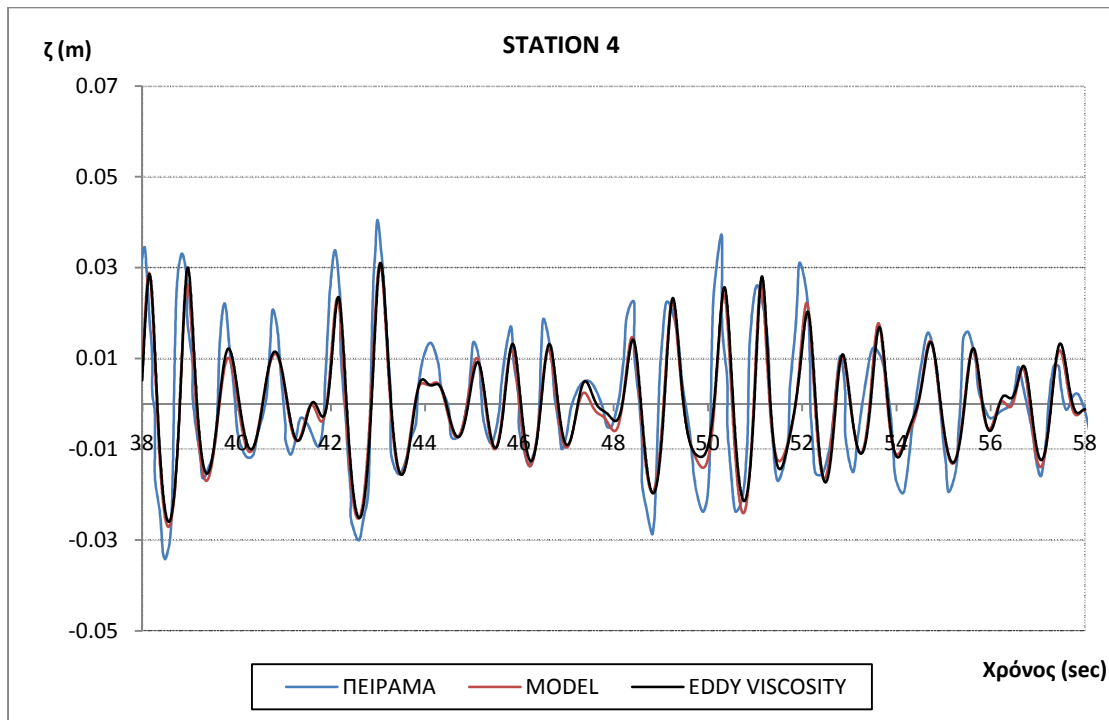
Σχήμα 7.51: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 1. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity)



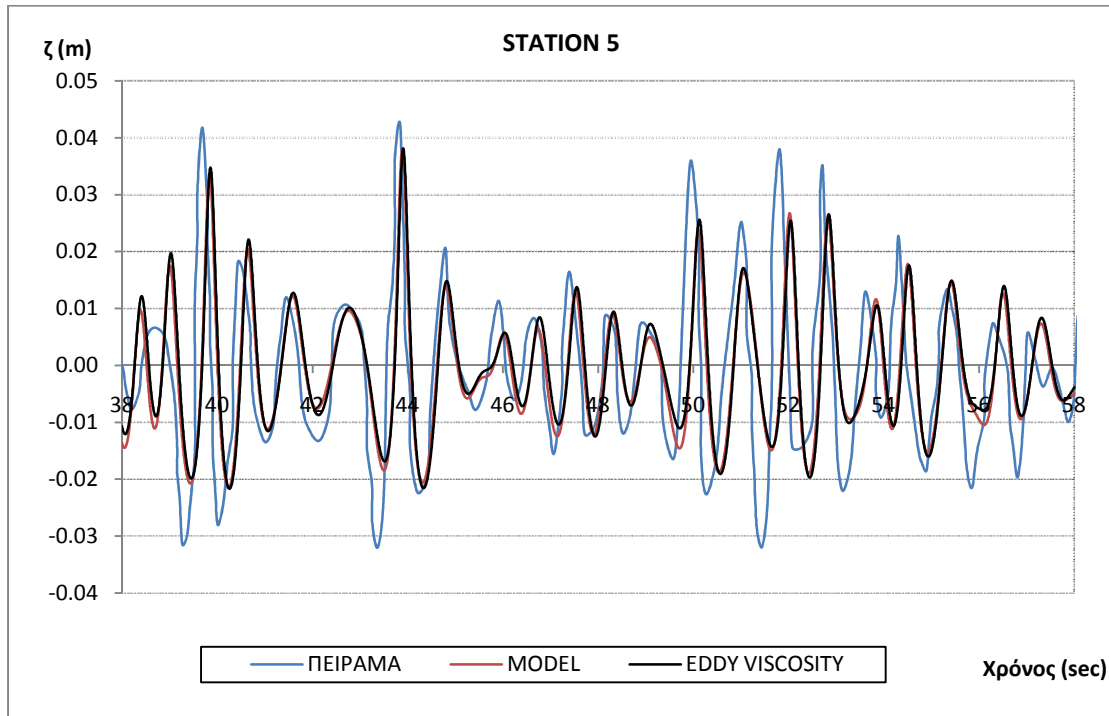
Σχήμα 7.52: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 2. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity)



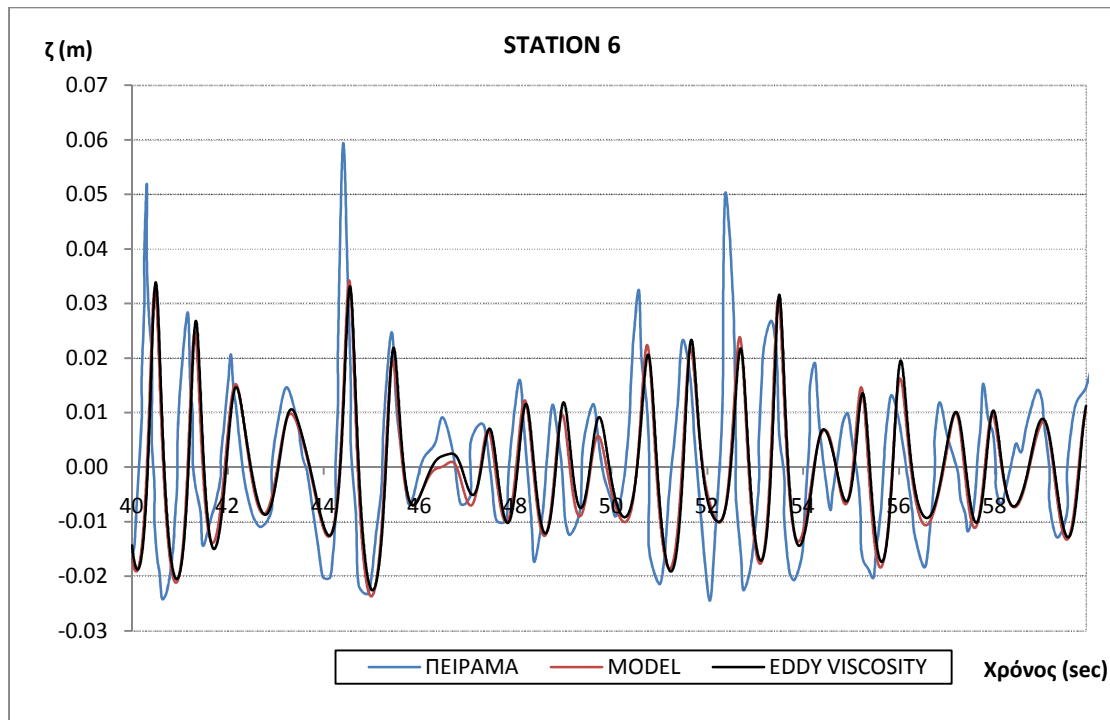
Σχήμα 7.53: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 3. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity)



Σχήμα 7.54: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 4. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity)



Σχήμα 7.55: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 5. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity)



Σχήμα 7.56: Χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στο σταθμό 6. Σύγκριση ανάμεσα στις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου (model) και του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με την τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity)

Από τα διαγράμματα 7.45 και 7.51 προκύπτει ότι στα τρία μοντέλα παράγεται με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια η επιθυμητή χρονοσειρά στο σταθμό 1. Όπως αναφέρθηκε, δεν υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία για το τμήμα σταθερού βάθους και για το λόγο αυτό η κυματογεννήτρια τοποθετείται στον πόδα της κεκλιμένης ακτής. Επειδή λοιπόν το βάθος είναι μεταβαλλόμενο στην περιοχή γένεσης η εφαρμογή της τεχνικής της συνάρτησης πηγής μπορεί να παράγει πολύ ικανοποιητικό αποτέλεσμα στο κέντρο της πηγής, αλλά στα αμέσως κατόπι αρχίζει μια απόκλιση. Η απόκλιση αυτή ενισχύεται από το γεγονός ότι το πείραμα αναφέρεται σε σύνθετους κυματισμούς και άρα οι σταθερές στον παράγοντα κατανομής της πηγής παίρνουν ενδεικτικές τιμές και από φαινόμενα μερικών ανακλάσεων.

Τόσο το μοντέλο των Karambas και Memos (2009), όσο και το MIKE 21 BW είναι ελαφρώς μη γραμμικά μοντέλα και έτσι εμφανίζουν ανακρίβειες κατά την προσομοίωση της διάδοσης τυχαίων κυματισμών φάσματος Pierson-Moskowitz. Η ανακρίβειες αυτές αυξάνουν διαρκώς προς τα κατόπι. Επειδή πρόκειται για σύνθετους κυματισμούς δεν ορίζεται γραμμή θραύσης, αλλά ζώνη εκκίνησης της θραύσης. Οι Mase και Kirby (1992) αναφέρουν ότι στο πείραμα επικρατεί η θραύση τύπου spilling. Έτσι, στο προτεινόμενο μοντέλο εφαρμόστηκε η γωνία εκκίνησης της θραύσης 30° για θραύση τύπου spilling. Στο σταθμό 6 που βρίσκεται στο εσωτερικό της ζώνης θραύσης, το σχετικό σφάλμα του προτεινόμενου μοντέλου φτάνει ως και 59%, ενώ του MIKE 21 BW ως και 73%. Ωστόσο, οι τιμές αυτές είναι ακραίες για κάποιες μεμονωμένες συνιστώσες του φάσματος. Παρατηρώντας τα διαγράμματα και τα δύο μοντέλα παρουσιάζουν ικανοποιητική απόκριση, λαμβάνοντας υπόψη των ήπια μη γραμμικό χαρακτήρα τους. Γενικά το προτεινόμενο μοντέλο παρουσιάζει σχετικά καλύτερη απόκριση από το MIKE 21

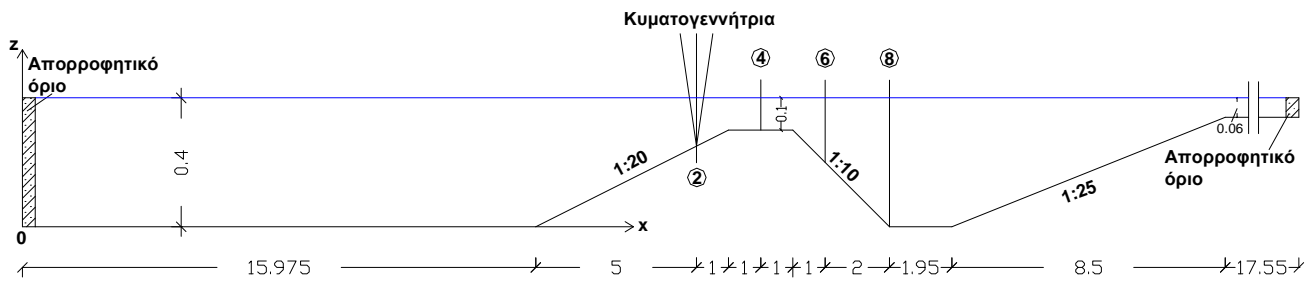
BW, κυρίως ως προς την περιγραφή των κυματικών κορυφών, αλλά υποεκτιμά ελαφρώς τις κοιλίες σε αντίθεση με το MIKE 21 BW που τις περιγράφει ακριβέστερα.

Από τα διαγράμματα των σχημάτων 7.51 ως 7.56 προκύπτει ότι οι δύο τεχνικές προσομοίωσης της θραύσης στο τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) παρουσιάζουν σχεδόν ταυτόσημα αποτελέσματα. Οι μικροδιαφορές αποδεικνύουν ότι ανάντη του σταθμού 6 εμφανίζεται μικρό ποσοστό θραυόμενων κυματισμών.

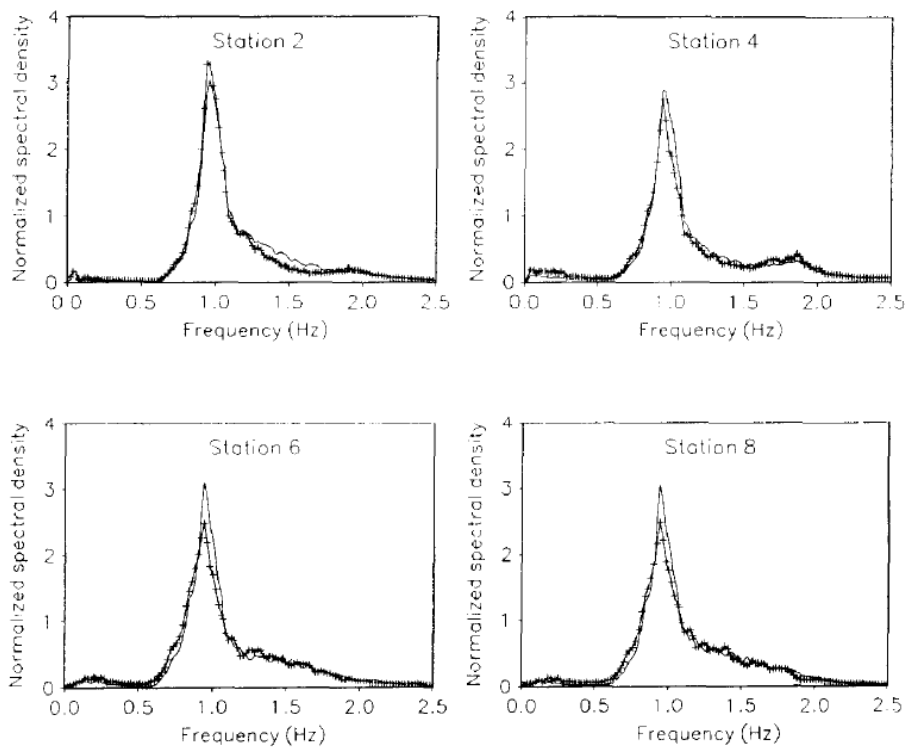
7.8 ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ BEJI ΚΑΙ BATTJES (1993) - ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ

Οι Beji και Battjes (1993) διερεύνησαν πειραματικά τη διέλευση κυματισμών πάνω από ύφαλους κυματοθραύστες. Η επαλήθευση του μοντέλου για τα πειράματα των μονοχρωματικών κυματισμών παρουσιάστηκε στην παράγραφο 7.5. Ωστόσο, οι ερευνητές πραγματοποίησαν και πειράματα για τυχαίους κυματισμούς φάσματος Jonswap αλλά και σύνθετους κυματισμούς τυχαίου, έντονα narrow-banded φάσματος. Τα πειραματικά αποτελέσματα για τους τυχαίους κυματισμούς φάσματος Jonswap χρησιμοποιούνται σε αυτή την παράγραφο για την επαλήθευση του μοντέλου. Η πειραματική διάταξη είναι η ίδια με αυτή της παραγράφου 7.5. Όπως αναφέρουν οι συγγραφείς κάθε καταγεγραμμένη χρονοσειρά αποτελούταν από 9000 σημεία που χωρίστηκαν σε δύο τμήματα των 4096 σημείων αφού αφαιρέθηκαν κάποια δεδομένα από το δείγμα. Στα δείγματα εφαρμόστηκε ένα συνημιτονικό φίλτρο 10% (10% cosine tapering) και στη συνέχεια εφαρμόστηκε μετασχηματισμός Fast Fourier (FFT). Έγινε αναγωγή των αποτελεσμάτων στην κλίμακα του φίλτρου και έτσι προέκυψαν τα φάσματα στους σταθμούς μέτρησης. Τα φάσματα αυτά αδιαστατοποιήθηκαν ως προς τη μηδενική ροπή τους m_0 ώστε το εμβαδό καθενός από αυτά να είναι μονάδα. Το στατιστικό σφάλμα ήταν μικρότερο του 8%. Μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις με συχνότητες αιχμής $f_p = 0.4 \text{ Hz}$ και $f_p = 1.0 \text{ Hz}$. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα της δεύτερης περίπτωσης που περιλάμβανε κυρίως θραύση τύπου plunging. Τα αδιαστατοποιημένα φάσματα από τις πειραματικές μετρήσεις των Beji και Battjes (1993) φαίνονται στο σχήμα 7.58.

Επειδή οι συγγραφείς δε δημοσίευσαν τις χρονοσειρές των μετρήσεων, για την επαλήθευση του μοντέλου ακολουθήθηκε η διαδικασία που περιγράφεται παρακάτω. Από το σχήμα 7.58 προκύπτει ότι ο σταθμός με διαθέσιμες μετρήσεις που συναντάται πρώτος προς τα ανάντη είναι ο σταθμός 2. Επομένως, τα δεδομένα αυτά θα χρησιμοποιηθούν ως input στο μοντέλο. Έτσι, η κυματογεννήτρια στο υπολογιστικό πεδίο τοποθετείται στη θέση του σταθμού 2. Η γεωμετρική διάταξη του υπολογιστικού πεδίου φαίνεται στο σχήμα 7.57. Το βήμα χωρικής διακριτοποίησης επιλέχθηκε $\Delta x = 0.025 \text{ m}$ και το χρονικό βήμα εφαρμογής του μοντέλου $\Delta t = 0.004 \text{ sec}$.

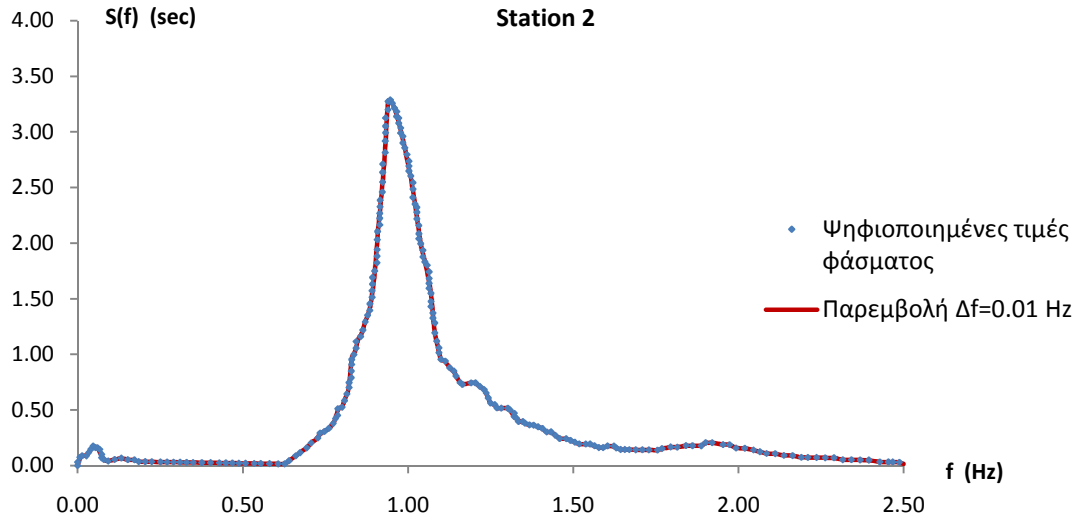


Σχήμα 7.57: Γεωμετρική διάταξη υπολογιστικού πεδίου εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) για το πείραμα των Beji και Battjes (1993) για σύνθετους κυματισμούς



Σχήμα 7.58: Αδιαστατοποιημένα φάσματα από πειραματικές καταγραφές στους σταθμούς 2,4,6 και 8 όπως δημοσιεύτηκαν από τους Beji και Battjes (1993). Συνεχής γραμμή: μη θραυόμενοι κυματισμοί και γραμμή με +: κυματισμοί με θραύση τύπου plunging (πηγή: [9])

Το αδιαστατοποιημένο φάσμα του σταθμού 2 για θραύση τύπου plunging ψηφιοποιείται με τη βοήθεια του προγράμματος GetData Graph Digitizer. Η ροπή m_0 θεωρείται εξ ορισμού ίση με μονάδα. Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο κώδικας γραμμικής παρεμβολής "PAREMVOLI.f90" που παρουσιάζεται στο παράρτημα Β ενδεικτικά για το πείραμα των Mase και Kirby (1992). Έτσι, υπολογίζονται οι τιμές του φάσματος για ίσα διαστήματα $f = 0.01 \text{ Hz}$ (σχήμα 7.59).



Σχήμα 7.59: Απόκτηση τιμών φασματικής πυκνότητας σε ίσα διαστήματα συχνότητων $\Delta f = 0.01 \text{ Hz}$

Στη συνέχεια από το φάσμα του σχήματος 7.59 εξάγεται η επιθυμητή χρονοσειρά με εφαρμογή του βοηθητικού κώδικα "XRONOSEIRA.JONSWAP.f90". Ο κώδικας παρατίθεται στο παράρτημα Β. Με μέγιστη συχνότητα $f_{max} = 2.50 \text{ Hz}$ και ισοδιάστημα $\Delta f = 0.01 \text{ Hz}$ προκύπτουν από την παραπάνω παρεμβολή $N = 251$ συχνότητες f_i και οι αντίστοιχες τιμές της φασματικής πυκνότητας $S(f_i)$. Κάθε τέτοιο ζεύγος θεωρείται ως μία κυματική συνιστώσα, το ύψος της οποίας προκύπτει με εφαρμογή της σχέσης (1.19). Δηλαδή:

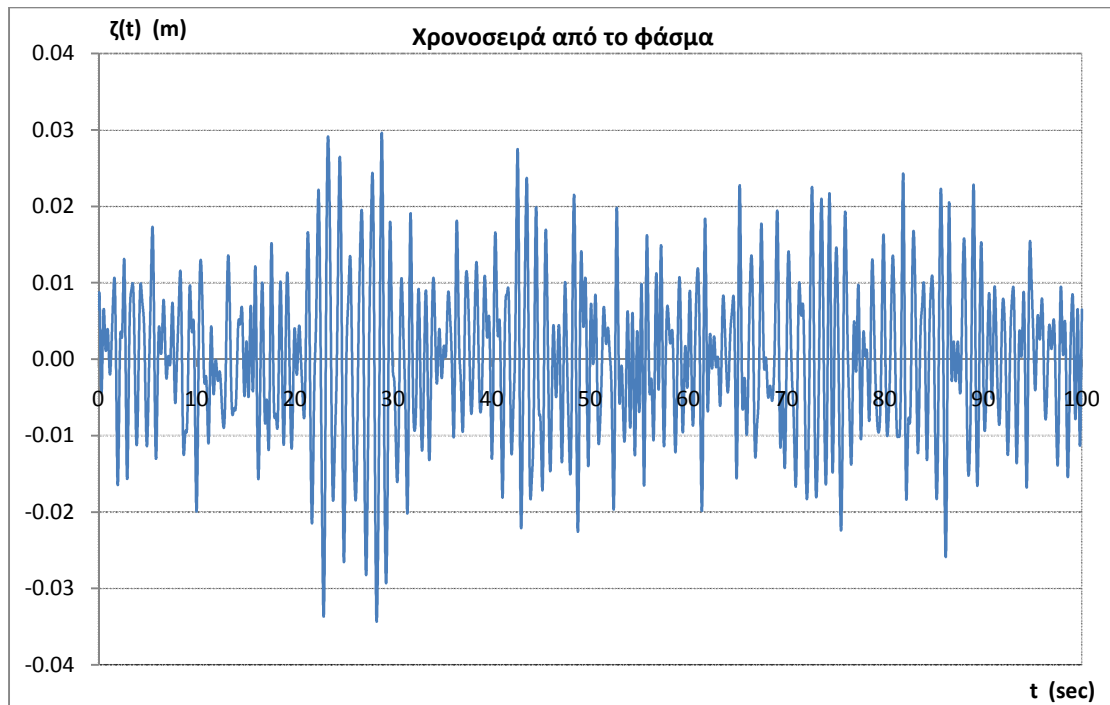
$$H_i = H(f_i) = 2\sqrt{2S(f_i)\Delta f} \quad (7.6)$$

Για κάθε κυματική συνιστώσα πρέπει να υπολογιστεί και μία αυθαίρετη γωνία φάσης $\varepsilon(f_i)$. Αυτό επιτυγχάνεται παράγοντας ψευδο-τυχαίους αριθμούς (r_i) από 0 ως 1. Δηλαδή:

$$\varepsilon_i = \varepsilon(f_i) = 2\pi r_i \quad \varepsilon \in [0, 2\pi] \quad (7.7)$$

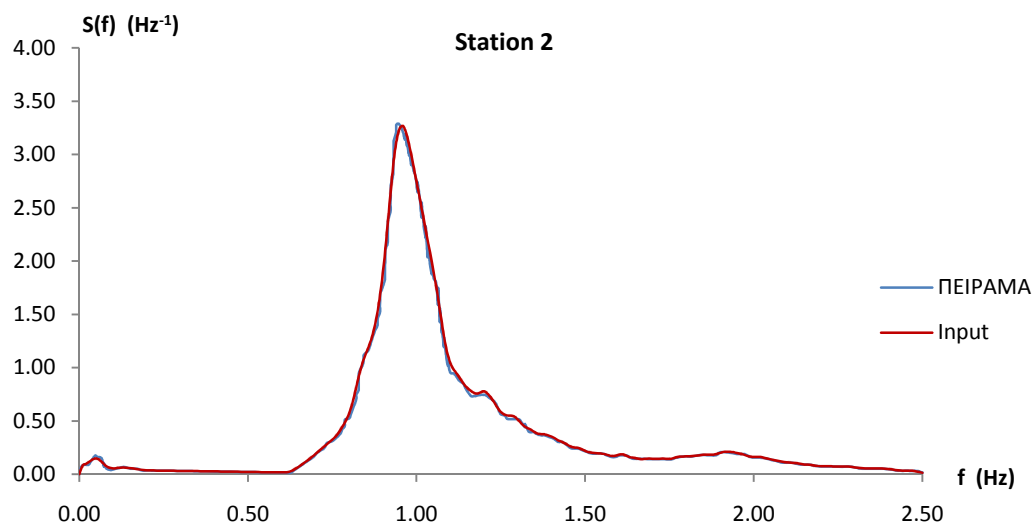
Για να παραχθεί η επιθυμητή χρονοσειρά γίνεται γραμμική επαλληλία των κυματικών συνιστωσών, όπως αναφέρουν και οι Karambas και Memos (2009) στη δημοσίευση του μοντέλου, σύμφωνα με τη σχέση (7.8). Η χρονοσειρά παράγεται στη θέση $x = 0$ και για χρόνο ως και $t = 100 \text{ sec}$ και φαίνεται στο σχήμα 7.60:

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^N H_i \cos(2\pi t f_i + \varepsilon_i) \quad (7.8)$$



Σχήμα 7.60: Χρονοσειρά εξαγόμενη από το ενεργειακό φάσμα στο σταθμό 2 του πειράματος των Beji και Battjes (1993)

Η χρονοσειρά του σχήματος 7.60 θα εισαχθεί ως input στη θέση του σταθμού 2 στο αριθμητικό μοντέλο. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να επαληθευτεί ότι η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι ορθή. Έτσι λοιπόν θα εφαρμοστεί στη χρονοσειρά ένας μετασχηματισμός Fast Fourier (FFT) και το παραγόμενο ενεργειακό φάσμα θα πρέπει να είναι πανομοιότυπο με αυτό του σχήματος 7.59. Για το σκοπό αυτό εφαρμόζεται ο βοηθητικός κώδικας "FOURIER.f90" που παρατίθεται στο παράρτημα Β. Κατά την εφαρμογή του μετασχηματισμού χρησιμοποιήθηκαν $N=25000$ components. Στο σχήμα 7.61 απεικονίζονται συγκριτικά το φάσμα των πειραματικών μετρήσεων και το φάσμα "input" της εξαγόμενης χρονοσειράς που χρησιμοποιείται ως δεδομένο εισόδου στο προτεινόμενο μοντέλο.



Σχήμα 7.61: Σύγκριση φάσματος πειραματικών μετρήσεων και φάσματος "input"

Τα δύο φάσματα είναι σχεδόν ταυτόσημα, άρα η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι ορθή. Η χρονοσειρά του σχήματος 7.60 χρησιμοποιείται ως δεδομένο εισόδου στο σταθμό 2 του μοντέλου. Ο κώδικας του μοντέλου για το πείραμα των Beji και Battjes (1993) για σύνθετους κυματισμούς συντάχθηκε σε γλώσσα Fortran 90 και παρατίθεται στο παράρτημα Α. Οι βοηθητικοί κώδικες του παραρτήματος Β είναι επίσης σε γλώσσα Fortran 90.

Επειδή δεν υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία για την πειραματικά παραγόμενη χρονοσειρά, αλλά απαιτείται στο σταθμό 2 να παράγεται επακριβώς το φάσμα του σχήματος 7.59, στη συγκεκριμένη επαλήθευση του μοντέλου η γένεση των κυματισμών γίνεται με την τεχνική που προτείνουν Beji και Battjes (1994) υπό μορφή οριακών συνθηκών στη θέση της κυματογεννήτριας:

$$\zeta(t) = \zeta_{inp}(t) \quad (7.9)$$

$$U(t) = \frac{c \cdot \zeta_{inp}(t)}{d + \zeta_{inp}(t)} \quad (7.10)$$

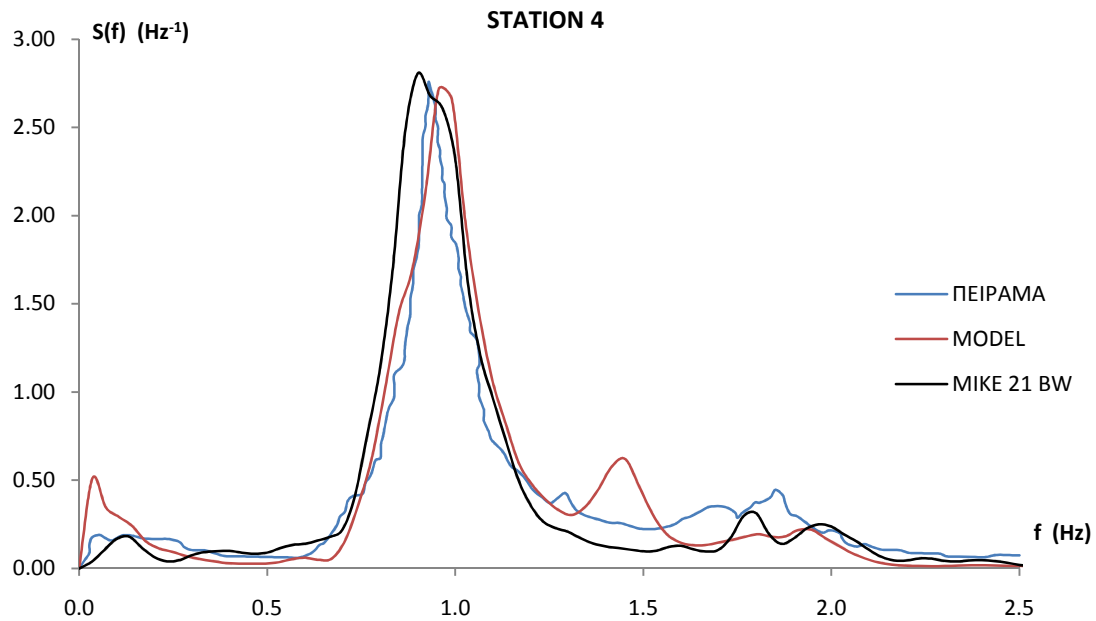
όπου $\zeta_{inp}(t)$ είναι η χρονοσειρά που προέκυψε από τη σχέση (7.8) και φαίνεται στο σχήμα 7.60.

Με την εφαρμογή του μοντέλου υπολογίζονται οι χρονοσειρές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στους σταθμούς 2,4,6 και 8. Σε αυτές τις χρονοσειρές εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός FFT και προκύπτουν τα αντίστοιχα ενεργειακά φάσματα. Όπως αναφέρθηκε, τα φάσματα των πειραματικών δεδομένων είναι κανονικοποιημένα με τρόπο ώστε το εμβαδόν κάτω από κάθε καμπύλη να είναι μονάδα. Επομένως, για να προκύψουν συγκρίσιμα αποτελέσματα τα φάσματα που υπολογίζονται διαιρούνται με το εμβαδόν κάτω από την αντίστοιχη καμπύλη που εκφράζεται μέσω της μηδενικής ροπής του φάσματος m_0 . Για τον υπολογισμό του εμβαδού χρησιμοποιείται ο σύνθετος κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης του Simpson που δίνεται από τη σχέση (7.11):

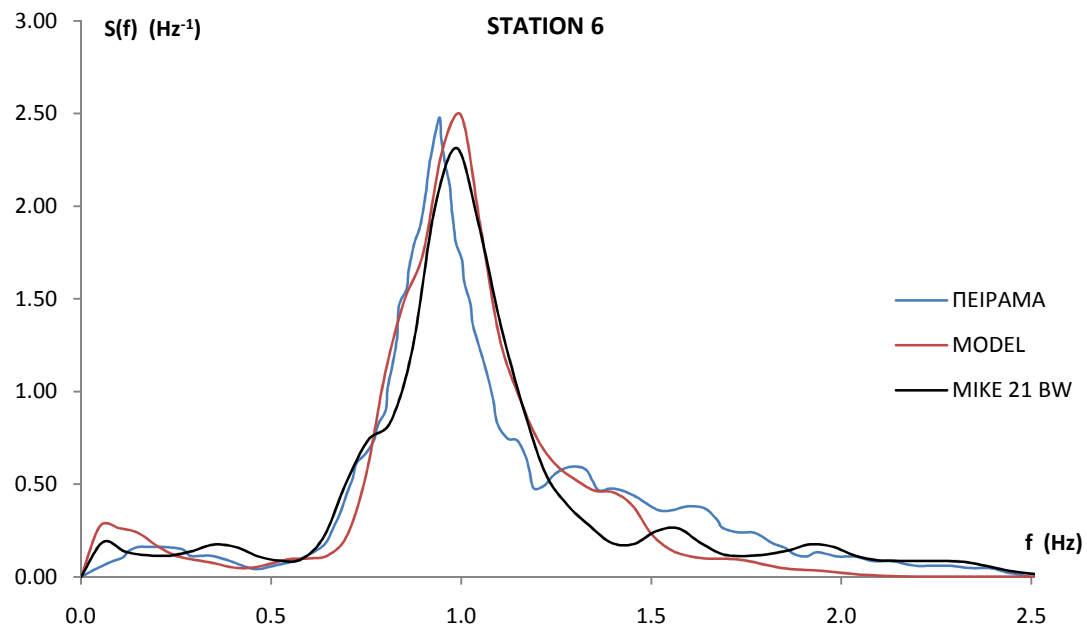
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{48} [17f(x_0) + 59f(x_1) + 43f(x_2) + 49f(x_3) + 48 \sum_{i=4}^{n-4} f(x_i) + 49f(x_{n-3}) + 43f(x_{n-2}) + 59f(x_{n-1}) + 17f(x_n)] \quad (7.11)$$

όπου $f(x)$ εν προκειμένω η συνάρτηση πυκνότητας του φάσματος $S(f)$, a και b η ελάχιστη και η μέγιστη συχνότητα της αριθμητικής ολοκλήρωσης, n το πλήθος των σημείων και $h = b - a$. Η αριθμητική ολοκλήρωση συμπεριλαμβάνεται στον κώδικα "FOURIER.f90" ώστε αυτός να παράγει κανονικοποιημένα φάσματα.

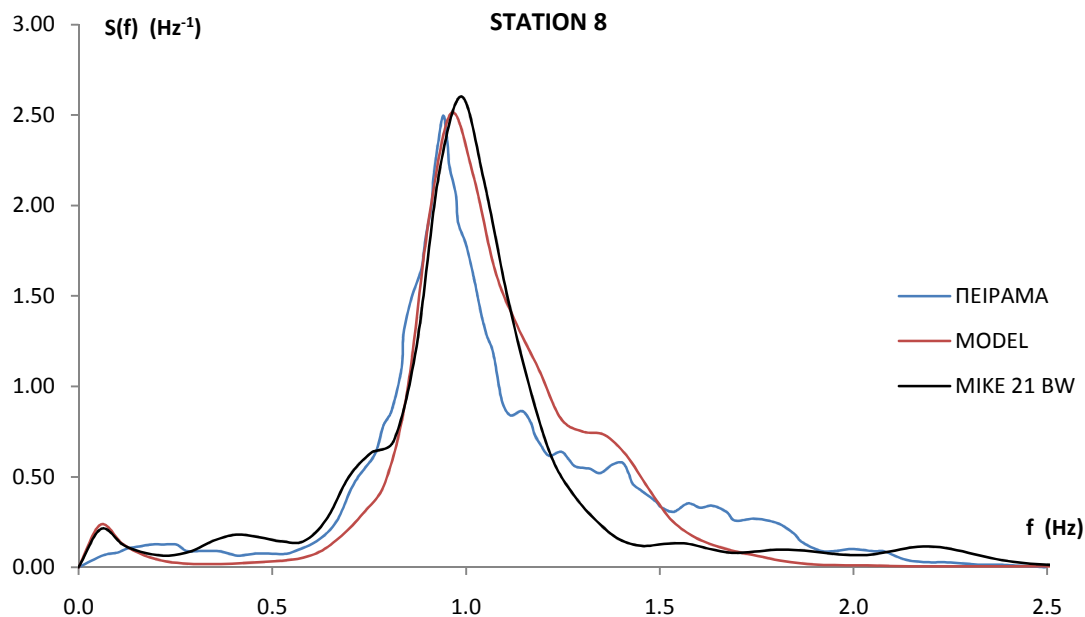
Στα σχήματα 7.62, 7.63 και 7.64 φαίνονται συγκριτικά τα κανονικοποιημένα φάσματα στους σταθμούς 4,6 και 8 αντίστοιχα όπως προκύπτουν από τις πειραματικές καταγραφές, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW. Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενες παραγράφους κατά τη διέλευση πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη η γωνία εκκίνησης της θραύσης είναι μικρότερη των τυπικών και στη συγκεκριμένη εφαρμογή τέθηκε και στα δύο μοντέλα $(\varphi_b, \varphi_0) = (14^\circ, 7^\circ)$ και στο MIKE 21 BW $f_\delta = 2.0$ επειδή κυριαρχεί η θραύση τύπου plunging.



Σχήμα 7.62: Κανονικοποιημένο ενεργειακό φάσμα στο σταθμό 4 του πειράματος των Beji και Battjes (1993). Σύγκριση μεταξύ των πειραματικών καταγραφών, των αποτελεσμάτων του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



Σχήμα 7.63: Κανονικοποιημένο ενεργειακό φάσμα στο σταθμό 6 του πειράματος των Beji και Battjes (1993). Σύγκριση μεταξύ των πειραματικών καταγραφών, των αποτελεσμάτων του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW



Σχήμα 7.64: Κανονικοποιημένο ενεργειακό φάσμα στο σταθμό 8 του πειράματος των Beji και Battjes (1993). Σύγκριση μεταξύ των πειραματικών καταγραφών, των αποτελεσμάτων του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW

Παρατηρώντας τα σχήματα 7.62 ως 7.64 προκύπτει ότι το προτεινόμενο μοντέλο προσομοιώνει γενικά ακριβέστερα από το MIKE 21 BW τη διάδοση θραυόμενων σύνθετων κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη. Ωστόσο, τα αποτελέσματα στην παρούσα παράγραφο είναι γενικά χειρότερα από τις προηγούμενες καθώς στη φασματική απεικόνιση εκδηλώνεται ο ήπια μη-γραμμικός χαρακτήρας των δύο μοντέλων που εισάγει ανακρίβειες.

Στο σταθμό 4 στη στέψη του ύφαλου και τα δύο μοντέλα παρουσιάζουν αρκετά καλή απόκριση. Το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) αποδίδει ακριβέστερα από το MIKE 21 BW το κυρίως τμήμα του κανονικοποιημένου φάσματος και τη μέγιστη πυκνότητα ενέργειας στην περιοχή της συχνότητας αιχμής. Αντίθετα, το MIKE 21 BW υπερεκτιμά τη μέγιστη ενέργεια, αλλά παρουσιάζει καλύτερη απόδοση ως προς τις πειραματικές μετρήσεις στις μικρές συχνότητες. Στις υψηλές συχνότητες και τα δύο μοντέλα υποεκτιμούν ελαφρώς την ενέργεια, με εξαίρεση μια έντονη κορυφή του προτεινόμενου μοντέλου στην περιοχή 1.4-1.5 Hz.

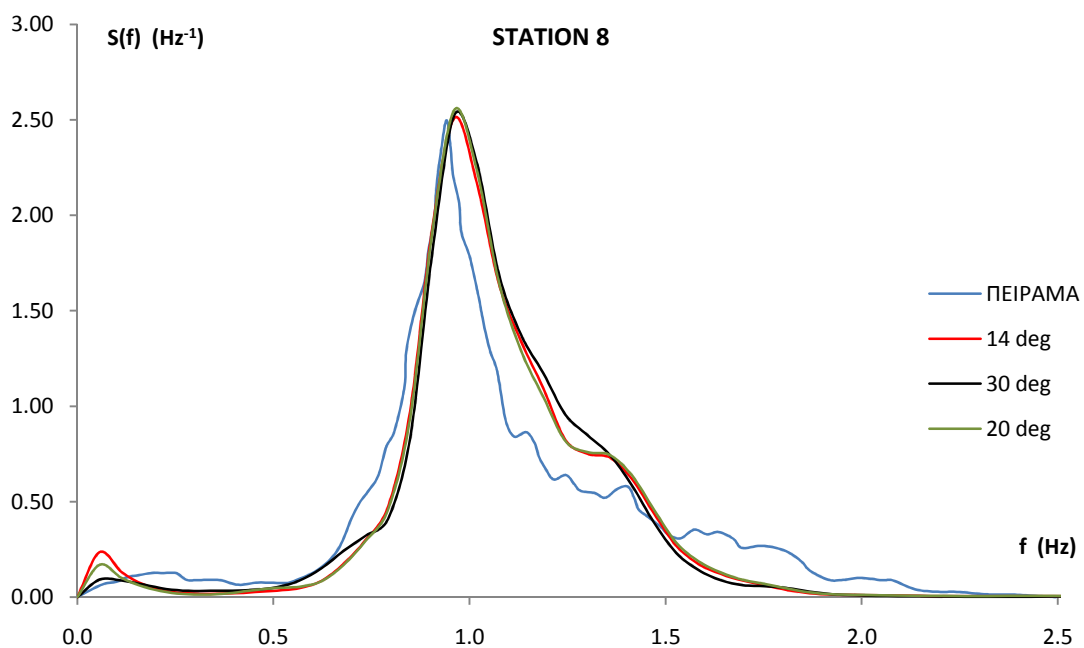
Στο σταθμό 6 που βρίσκεται στην κατάντη παρειά του ύφαλου, το προτεινόμενο μοντέλο υπολογίζει ακριβέστερα τη μέγιστη πυκνότητα ενέργειας, σε αντίθεση με το MIKE 21 BW που την υποεκτιμά. Καλύτερη συμπεριφορά εμφανίζει το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) στο διάστημα των χαμηλών συχνοτήτων 0.3-0.5 Hz, αλλά στις πολύ μικρές συχνότητες πάλι υπερεκτιμά την ενέργεια σε σχέση με το MIKE 21 BW. Στις υψηλές συχνότητες ως 1.5 Hz αποδίδει εν μέρει την μεταφορά ενέργειας στις υψηλότερες αρμονικές, σε αντίθεση με το MIKE 21 BW που την υποεκτιμά. Στις υψηλότερες όμως συχνότητες το MIKE 21 BW εμφανίζει μεγαλύτερη ακρίβεια.

Παρόμοια συμπεριφορά εμφανίζουν τα δύο μοντέλα και στο σταθμό 8 στον πόδα του ύφαλου. Το προτεινόμενο μοντέλο αποδίδει ακριβέστερα τη μέγιστη πυκνότητα ενέργειας, ενώ το MIKE 21 BW την υπερεκτιμά. Στις χαμηλές συχνότητες πάλι το MIKE 21 BW εμφανίζει γενικά

καλύτερη συμπεριφορά. Στις υψηλές συχνότητες ως περίπου 1.5 Hz το προτεινόμενο μοντέλο περιγράφει εν μέρει τη μετάδοση ενέργειας στις υψηλότερες αρμονικές, αλλά την υπερεκτιμά. Αντίθετα, το MIKE 21 BW φαίνεται να μην μπορεί να περιγράψει το φαινόμενο. Πάντως και τα δύο μοντέλα είναι ελαφρώς μη-γραμμικά και έτσι το φαινόμενο της απελευθέρωσης των υψηλότερων αρμονικών στην κατάντη παρειά του ύφαλου δεν περιγράφεται ικανοποιητικά.

Το πείραμα επαλήθευσης του μοντέλου περιλαμβάνει κυρίως βραχείς κυματισμούς ($T_p = 1.0 \text{ sec}$) και για το λόγο αυτό η απελευθέρωση των υψηλότερων αρμονικών δεν είναι έντονη σε σχέση με την περίπτωση του πειράματος των Beji και Battjes (1993) για μακρούς κυματισμούς. Έτσι, στα σχήματα 7.62 ως 7.64 η μορφή του κανονικοποιημένου φάσματος δε μεταβάλλεται σημαντικά κατά τη διέλευση των κυμάτων πάνω από το εμπόδιο.

Ο κυρίαρχος τύπος θραύσης στο πείραμα επαλήθευσης είναι plunging και έτσι η προσομοίωση του φαινομένου είναι σχετικά δύσκολη. Παρότι οι Cienfuegos et al. (2010) για θραύση τύπου plunging προτείνουν γωνία εκκίνησης της θραύσης ως και 36° , οι Madsen et al. (1997a) αναφέρουν ότι η θραύση πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη ξεκινά για τιμές της γωνίας κλίσης της ελεύθερης επιφάνειας μικρότερες των τυπικών. Έγινε διερεύνηση ως προς την τιμή της γωνίας έναρξης της θραύσης φ_b και ενδεικτικά τα αποτελέσματα για το σταθμό 8 φαίνονται στο σχήμα 7.65. Τελικά τόσο στο προτεινόμενο μοντέλο, όσο και στο MIKE 21 BW εφαρμόστηκε η τιμή $\varphi_b = 14^\circ$. Τα μοντέλα δεν παρουσιάζουν αντίστοιχη ευαισθησία ως προς τη γωνία λήξης της θραύσης για την οποία εφαρμόστηκε η τιμή $\varphi_o = 7^\circ$. Ως χρονική κλίμακα ανάπτυξης του επιφανειακού κυλίνδρου εφαρμόστηκε $T_{12} = 0.1T_p = 0.1 \text{ sec}$.



Σχήμα 7.65: Διερεύνηση της επίδρασης της γωνίας έναρξης της θραύσης φ_b στην ακρίβεια του μοντέλου. Κανονικοποιημένα φάσματα στο σταθμό 8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8^ο

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

8.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία βασίζεται στο εξελεγμένο μοντέλο τύπου Boussinesq των Karambas και Memos (2009). Το μοντέλο είναι πλήρους διασποράς και ήπιας μη-γραμμικότητας. Προσομοιώνει τη διάδοση μονοχρωματικών και σύνθετων κυματισμών σε νερό σταθερού βάθους ή ήπια μεταβαλλόμενης βυθομετρίας. Επεκτάθηκε από τον Chondros (2008, 2010) ώστε να συμπεριλάβει τη θραύση σύμφωνα με την τεχνική της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας και βάσει του κριτηρίου των Kennedy et al. (2000) και από τον Koutsourelakis (2009) ώστε να συμπεριλάβει τη θραύση σύμφωνα με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου. Στην παρούσα εργασία εισάγεται η θραύση στο μοντέλο σύμφωνα με την πρόταση των Cienfuegos et al. (2010), η οποία βασίζεται στη θεωρία απότομης ασυνέχειας (shock wave theory) και στην τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου και τροποποιεί, εκτός από την εξίσωση ορμής και την εξίσωση συνέχειας. Το τροποποιημένο μοντέλο επαληθεύεται με πειραματικές καταγραφές και συγκρίνεται με το εμπορικό πακέτο MIKE 21 BW. Η εργασία εντάσσεται στη γενικότερη έρευνα σχετικά με τα μοντέλα τύπου Boussinesq που αποτελεί το κύριο αντικείμενο της σύγχρονης θαλάσσιας και παράκτιας υδροδυναμικής. Έτσι, σε πρώτη φάση εξάγονται τα εξής γενικά συμπεράσματα:

- Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι διάφορες κυματικές θεωρίες και τα φυσικά και μαθηματικά μοντέλα. Η επίτευξη απλών αναλυτικών λύσεων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και μαθηματικά κομψή, αλλά είναι απαραίτητη η γνώση της περιοχής ισχύος της εκάστοτε θεωρίας. Η καταλληλότητα της κάθε θεωρίας εξαρτάται κυρίως από τον αδιάστατο αριθμό Ursell. Οι θεωρίες των cnoidal κυματισμών και του μοναχικού κύματος είναι κατάλληλες για τα ρηχά νερά, ενώ η γραμμική θεωρία Airy και η θεωρία της ροϊκής συνάρτησης για νερά ενδιάμεσου βάθους. Η περιγραφή των πραγματικών κυματισμών γίνεται με τη βοήθεια των ενεργειακών φασμάτων και στατιστικών μεθόδων.
- Αντικείμενο της σύγχρονης θαλάσσιας υδροδυναμικής είναι η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την προσομοίωση της διάδοσης κυματισμών. Έχουν αναπτυχθεί διάφορων ειδών μοντέλα με διαφορετική δομή, παραδοχές και πεδίο ισχύος. Τα μοντέλα τύπου Boussinesq προσφέρουν ίσως το πιο γόνιμο ερευνητικό πεδίο, ενώ τα μοντέλα ήπιας κλίσης είναι πιο απλά στην εφαρμογή αλλά εμφανίζουν μεγαλύτερη ανακρίβεια. Πιο αξιόπιστα μοντέλα είναι τα εργαστηριακά, αλλά υστερούν στο κόστος και δεν προσφέρουν πάντα πλήρη κατανόηση των φυσικών διεργασιών, παρά μόνο για τη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζεται. Επίσης, εμφανίζουν το μειονέκτημα της επίδρασης της κλίμακας (scale effect).

- Από την ιστορική αναδρομή του δεύτερου κεφαλαίου προκύπτει ότι βασικό αντικείμενο της έρευνας σχετικά με τα μοντέλα τύπου Boussinesq είναι η ανάπτυξη ενός μοντέλου πλήρους διασποράς και υψηλής μη-γραμμικότητας κατάλληλου για την προσομοίωση της διάδοσης κυματισμών σε πυθμένα οποιουδήποτε βάθους. Το μοντέλο θα πρέπει να περιγράφει όλα τα φυσικά φαινόμενα, όπως η ρήχωση, η διάθλαση, η περίθλαση, η θραύση, η τριβή πυθμένα, η αναρρίχηση στις ακτές, το setup και το setdown, οι μη-γραμμικές κυματικές αλληλεπιδράσεις, κλπ. Συγχρόνως όμως, θα πρέπει να βασίζεται σε ένα όσο το δυνατόν απλούστερο αριθμητικό σχήμα επίλυσης που θα εξασφαλίζει την ακρίβεια και την ευστάθεια της λύσης σε κάθε περίπτωση. Παράλληλα, ο υπολογιστικός χρόνος (CPU) θα πρέπει να διατηρείται όσο το δυνατόν μικρότερος.
- Η θραύση των κυματισμών αποτελεί πολύ σημαντική διεργασία για την παράκτια μηχανική. Ως φυσικό φαινόμενο δεν έχει κατανοηθεί πλήρως ενώ εμφανίζει υψηλή μη-γραμμικότητα, έτσι η προσομοίωσή της είναι ιδιαίτερα δυσχερής. Η θραύση τύπου spilling (κύλισης) μοντελοποιείται ευκολότερα από τη θραύση τύπου plunging (κατάδυσης), η οποία καταστρέφει ολοκληρωτικά την κυματική μορφή με παράλληλη έντονη εμφάνιση αφρού. Βασικό μειονέκτημα των αριθμητικών μοντέλων είναι ότι δεν μπορεί να επιτευχθεί μία ενιαία βαθμονόμηση των σχετιζόμενων με τη θραύση παραμέτρων, παρά μόνο σε ένα εύρος τιμών. Η προσομοίωση της θραύσης με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller model) έχει ρεαλιστικό φυσικό υπόβαθρο, αλλά πολλές φορές προκαλεί προβλήματα αριθμητικής αστάθειας. Η τεχνική της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity model) είναι πιο απλή στην εφαρμογή, αλλά προϋποθέτει γνωστό το μαθηματικό νόμο σκέδασης της ενέργειας. Το μοντέλο της στροβιλότητας (vorticity breaking model) είναι σχετικά σύνθετο στην εφαρμογή και δεν έχει ακόμη διαδοθεί ευρέως.
- Όσον αφορά στη γένεση των κυματισμών στο υπολογιστικό πεδίο, δεν έχει επιτευχθεί μία απόλυτα ακριβής μέθοδος αντιμετώπισης του προβλήματος. Η τεχνική των Wei και Kirby (1995) βασίζεται στην παραδοχή ισχύος της γραμμικής θεωρίας για τον προσδιορισμό των μέσων κατά βάθος ταχυτήτων στο σημείο γένεσης των κυματισμών. Η τεχνική των Larsen και Dancy (1983) εμφανίζει θόρυβο γύρω από το σημείο της πηγής στην περίπτωση μη έκκεντρου κανάβου. Τέλος, η τεχνική της συνάρτησης πηγής των Gobbi και Kirby (1999) και Wei et al. (1999) βασίζεται σε πολύ καλό φυσικό υπόβαθρο, αλλά στην πράξη οι τιμές που προτείνονται εισάγουν ανακρίβειες και απαιτείται η βαθμονόμηση παραμέτρων. Επίσης, η τεχνική αυτή δεν έχει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα στην παραγωγή σύνθετων κυματισμών. Πολύ σημαντική είναι η χρήση κατάλληλων απορροφητικών στοιβάδων.
- Από την πειραματική εργασία των Beji και Battjes (1993) για τη διάδοση κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη προκύπτει η γένεση υψηλότερων αρμονικών στην ανωφέρεια. Στη στέψη του ύφαλου, κυρίως στην περίπτωση μακρών κυματισμών, μεταφέρεται έντονα ενέργεια από το βασικό κύμα στις δεσμευμένες αυτές υψηλότερες αρμονικές, οι οποίες στη συνέχεια απελευθερώνονται στην κατωφέρεια του εμποδίου. Το φαινόμενο αυτό βασίζεται στην έντονα μη-γραμμική κυματική αλληλεπίδραση, την οποία τα ήπια μη-γραμμικά μοντέλα αδυνατούν να το περιγράψουν.
- Οι Schäffer et al. (1993) και οι Madsen et al. (1997a) προτείνουν ως τυπικές τιμές της γωνίας κλίσης της ελεύθερης επιφάνειας κατά την έναρξη και λήξη της θραύσης τις $\varphi_b = 20^\circ$ και $\varphi_o = 10^\circ$ αντίστοιχα. Ωστόσο, όπως αναφέρουν, κατά τη θραύση πάνω από τη στέψη ύφαλου

κυματοθραύστη οι τιμές αυτές πρέπει να μειωθούν και προτείνουν τις $\varphi_b = 14^\circ$ και $\varphi_o = 7^\circ$. Ενδιάμεσα υιοθετείται ένα εκθετικό προφίλ ως προς το χρόνο.

- Στην τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας οι Kennedy et al. (2000) προτείνουν για την παράγωγο ζ_t κατά την έναρξη της θραύσης την τιμή $0.65\sqrt{gd}$ και για τη λήξη $0.15\sqrt{gd}$. Ενδιάμεσα υιοθετείται ένα γραμμικό προφίλ ως προς το χρόνο.
- Η ακαμψία του πυθμένα, το πορώδες του και η τραχύτητά του είναι παράγοντες που επηρεάζουν τα κυματικά χαρακτηριστικά. Όταν το ύψος κύματος γίνεται μεγάλο ή ο πυθμένας είναι τραχύς, η ροή στην οριακή στοιβάδα γίνεται τυρβώδης. Οι Dean και Dalrymple (1984) δίνουν αναλυτικές εκφράσεις για την τριβή πυθμένα τόσο για την περίπτωση άκαμπτων και αδιαπέρατων πυθμένων, όσο και για λασπώδεις ή πορώδεις πυθμένες. Ωστόσο, στη διεθνή βιβλιογραφία δεν υπάρχει πλήθος διαθέσιμων στοιχείων για την τριβή και για το λόγο αυτό συνήθως αμελείται κατά την αριθμητική προσομοίωση.

8.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ KARAMBAS ΚΑΙ MEMOS (2009)

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε το μαθηματικό μοντέλο των Karambas και Memos (2009) και η επαλήθευσή του από τους συγγραφείς. Οι Chondros (2008, 2010) και Koutsourelakis (2009) συμπεριέλαβαν τη θραύση βάσει της τεχνικής της τυρβώδους συνεκτικότητας και του επιφανειακού κυλίνδρου αντίστοιχα. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε μία νέα πρόταση για την προσομοίωση της θραύσης που συμπεριλαμβάνει την επιρροή του επιφανειακού κυλίνδρου και στην εξίσωση συνέχειας βάσει των εργασιών των Cienfuegos et al. (2005, 2010). Η τεχνική αυτή της προσομοίωσης της θραύσης ενσωματώθηκε στο βασικό μοντέλο των Karambas και Memos (2009) ως αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Το νέο μοντέλο επαληθεύτηκε με πειραματικές καταγραφές και συγκρίθηκε με το MIKE 21 BW στο έβδομο κεφάλαιο. Από τα παραπάνω προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

- Από τη θεωρητική ανάπτυξη του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) του κεφαλαίου 3 προκύπτει ότι το μοντέλο είναι ακριβές ως προς τη σχέση γραμμικής διασποράς. Επομένως, μπορεί να περιγράψει τη διάδοση κυματισμών σε οποιοδήποτε πεπερασμένο βάθος.
- Το μοντέλο είναι ήπιας μη-γραμμικότητας, δηλαδή ισχύει για μικρές τιμές του λόγου $\varepsilon = H/d$. Η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται επακριβώς, χωρίς περιορισμούς στη μη-γραμμικότητα. Ωστόσο, στη μονοδιάστατη εξίσωση ορμής διατηρούνται μόνο όροι τάξης $O(1, \varepsilon, \sigma^2)$, με $\sigma = d/L$ και συνεπώς δεν αποδίδονται ικανοποιητικά τα μη-γραμμικά κυματικά χαρακτηριστικά, ιδιαίτερα στα βαθιά νερά όπου $\varepsilon\sigma^2 \sim \varepsilon$.
- Η βασική μορφή του μοντέλου περιλαμβάνει μόνο τέσσερις όρους στη μονοδιάστατη εξίσωση ορμής και μόνο πέντε όρους σε κάθε μία από τις εξισώσεις ορμής στη δισδιάστατη περίπτωση. Το γεγονός αυτό καθιστά το μοντέλο ελκυστικό σε σχέση με άλλα μοντέλα τύπου Boussinesq που περιλαμβάνουν πολύπλοκες εξισώσεις με πολλούς όρους και παραγώγους υψηλής τάξης. Τα μοντέλα αυτά βασίζονται συνήθως σε πολύπλοκα πεπλεγμένα αριθμητικά σχήματα ή απαιτούν την επίλυση μεγάλου αριθμού γραμμικών συστημάτων.

- Το απλό ρητό αριθμητικό σχήμα που προτάθηκε αρχικά από τους Karambas και Memos (2009) δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για μικρούς χρόνους προσομοίωσης. Το σχήμα αυτό είναι συνεπές, αλλά δεν είναι ευσταθές και δεν συγκλίνει. Αριθμητικές αστάθειες εμφανίζονται κυρίως κατά τη διάδοση μακρών κυματισμών. Η ευστάθεια βελτιώνεται μερικώς με τη χρήση ελαφρών αριθμητικών φίλτρων τριών σημείων.
- Στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόζεται ένα αριθμητικό σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector). Το στάδιο πρόβλεψης πραγματοποιείται από ένα ρητό σχήμα Adams-Bashforth 3^{ης} τάξης, ενώ το στάδιο διόρθωσης από ένα σχήμα Adams-Moulton 4^{ης} τάξης. Στο στάδιο διόρθωσης ακολουθείται επαναληπτική διαδικασία, ώσπου να επιτευχθεί σύγκλιση ως προς και της δύο μεταβλητές ζ και U (μονοδιάστατη περίπτωση) με δεδομένη ακρίβεια. Η υιοθέτηση του σχήματος πρόβλεψης-διόρθωσης βελτιώνει αισθητά την ευστάθεια της λύσης. Ωστόσο, όπως προέκυψε στο τρίτο κεφάλαιο, αυξάνει σημαντικά ο υπολογιστικός χρόνος αν και συνήθως απαιτείται καμία ως μία επανάληψη σε κάθε χρονικό βήμα για την επίτευξη σύγκλισης. Από άποψη υπολογιστικής απόδοσης το απλό ρητό σχήμα υπερτερεί για μικρούς χρόνους προσομοίωσης.
- Όπως προκύπτει από την επαλήθευση της βασικής μορφής του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) που παρουσιάστηκε στο τρίτο κεφάλαιο και από την επαλήθευση του τροποποιημένου - σύμφωνα με την εργασία αυτή - μοντέλου με το πείραμα του Wallingford (1997) του έβδομου κεφαλαίου, το μοντέλο είναι σε θέση να προσομοιώσει επιτυχώς τη διάδοση μη θραυόμενων μονοχρωματικών κυματισμών σε πυθμένα ήπιας κλίσης.
- Η επέκταση του μοντέλου για τη συμπερίληψη της θραύσης με την τεχνική της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity model) έγινε από τον Chondros αρχικά για μονοχρωματικούς κυματισμούς (2008) και στη συνέχεια για σύνθετους φάσματος Jonswar (2010). Η προσομοίωση βασίζεται στο κριτήριο θραύσης των Kennedy et al. (2000). Με διερεύνηση ο Chondros (2008) κατέληξε ότι καλύτερα αποτελέσματα προκύπτουν στην περίπτωση διάδοσης πάνω από ύφαλο για τιμή της παραγώγου ζ_t κατά την έναρξη της θραύσης $0.25\sqrt{gd}$. Επίσης, κατέληξε (2008, 2010) ότι ο συντελεστής μίξης δ_b (αδιάστατος συντελεστής ενδεικτικός του μήκους μίξης) επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα όταν μεταβάλλεται στο διάστημα 0.9 - 1.5, αλλά για μεγαλύτερες τιμές δεν επιφέρει σημαντικές μεταβολές. Το αριθμητικό σχήμα που εφάρμοσε ήταν το απλό ρητό των Karambas και Memos (2009) αντιμετωπίζοντας κάποια προβλήματα ασταθειών. Στην παρούσα διπλωματική, για τους συγκριτικούς λόγους του έβδομου κεφαλαίου το μοντέλο με την τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας αναπροσαρμόστηκε με το σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης που αναφέρθηκε παραπάνω, ξεπερνώντας τα προβλήματα ασταθειών.
- Η επέκταση του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) για τη συμπερίληψη της θραύσης με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller breaker) έγινε από τον Koutsourelakis (2009) για την περίπτωση μονοχρωματικών κυματισμών. Στην παρούσα εργασία η τεχνική αυτή προσομοίωσης της θραύσης ελέγχθηκε και για σύνθετους κυματισμούς εφαρμόζοντας το σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης. Ύστερα από διερεύνηση ο Koutsourelakis (2009) εφάρμοσε τις προτεινόμενες στη βιβλιογραφία τιμές των γωνιών θραύσης $(\varphi_b, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$, αλλά για τη θραύση μακρών μονοχρωματικών κυματισμών αναφέρει ότι ο καλύτερος συνδυασμός είναι $(\varphi_b, \varphi_o) = (18^\circ, 9^\circ)$. Τέλος, αναφέρει ότι ο συντελεστής σχήματος f_δ (συντελεστής που καθορίζει τη μορφή του επιφανειακού κυλίνδρου

- για θραύση τύπου spilling ή plunging) και η χρονική κλίμακα ανάπτυξης του κυλίνδρου T_{12} δεν επηρεάζουν σημαντικά τη σκέδαση της ενέργειας λόγω θραύσης.
- Η τριβή πυθμένα συμπεριλήφθηκε στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) από τον Koutsourelakis (2009) βάσει της εργασίας των Memos et al. (2005) βελτιώνοντας σε κάποιες περιπτώσεις την ακρίβεια προσομοίωσης. Ωστόσο, στην παρούσα εργασία η τριβή πυθμένα αμελήθηκε λόγω έλλειψης επαρκών πληροφοριών σχετικών με την τραχύτητα του πυθμένα των πειραματικών διατάξεων επαλήθευσης του προτεινόμενου μοντέλου.
 - Η προτεινόμενη τεχνική προσομοίωσης της θραύσης με τον επιπλέον όρο στην εξίσωση συνέχειας βασίζεται σε ορθότερο φυσικό υπόβαθρο από της προηγούμενες. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι κατά την ενεργοποίηση και εξέλιξη της θραύσης η περιοχή του επιφανειακού κυλίνδρου είναι μια περιοχή με έντονα τυρβώδη χαρακτήρα και συνεπώς στο τμήμα αυτό η ροή δεν είναι αστρόβιλη και επομένως η ταχύτητα δεν προέρχεται από συνάρτηση δυναμικού. Έτσι, η συνήθης μορφή της εξίσωσης συνέχειας δεν ισχύει σε ολόκληρο το βάθος, παρά μόνο στο τμήμα κάτω του επιφανειακού κυλίνδρου. Για να εκφραστεί η επιρροή της παρουσίας του κυλίνδρου εισάγεται ένας επιπλέον όρος διάχυσης της μάζας στην εξίσωση συνέχειας.
 - Το προτεινόμενο μοντέλο έχει το επιπλέον πλεονέκτημα ότι στο συνολικό μήκος θραύσης μιας κυματοκορυφής διασφαλίζεται η διατήρηση της ορμής (φυσικά και της μάζας) σε αντίθεση με τις προηγούμενες μεθόδους προσομοίωσης της θραύσης. Αυτό επιτυγχάνεται με την προτεινόμενη μορφή των συντελεστών διάχυσης της ορμής και της μάζας. Έτσι, λαμβάνει χώρα μια τοπική ανταλλαγή μάζας και ορμής μεταξύ τυρβώδους περιοχής και περιοχής δυναμικού. Συνολικά όμως και τα δύο μεγέθη διατηρούνται.
 - Η προτεινόμενη τεχνική βασίζεται στη θεωρία shock για ρηχά νερά και εμφανίζει κάποιες αναλογίες με τα υδραυλικά άλματα. Παρότι βασίζεται σε φυσικές ενεργειακές θεωρήσεις, έχει το μειονέκτημα, όπως και η τεχνική της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity breaking), ότι προδιαγράφει το μαθηματικό νόμο μεταβολής της ορμής και της μάζας θεωρώντας εκ των προτέρων μία μορφή όρων διάχυσης. Πρακτικά το προτεινόμενο μοντέλο αποτελεί μία επέκταση του μοντέλου της τυρβώδους συνεκτικότητας, συνδυάζοντάς το με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου.
 - Παρότι οι συντελεστές K_h και K_{hu} είναι συναρτήσεις πολλών παραμέτρων, όπως παρουσιάστηκε στο πέμπτο κεφάλαιο και μεταβάλλονται χωρικά και χρονικά στο εσωτερικό της ζώνης θραύσης, για λόγους απλότητας και αριθμητικής ευστάθειας θεωρήθηκε απλή μορφή τους, σύμφωνα και με την πρόταση των Cienfuegos et al. (2005).
 - Η ενσωμάτωση του προτεινόμενου μοντέλου θραύσης στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) σε συνδυασμό με την εφαρμογή ενός ημι-πεπλεγμένου αριθμητικού σχήματος πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector) επιτρέπει την περιγραφή της διάδοσης θραυόμενων μονοχρωματικών και σύνθετων κυματισμών, χωρίς προβλήματα αριθμητικής αστάθειας.
 - Από το πείραμα των Hansen και Svendsen (1979) προκύπτει ότι το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να περιγράψει ακριβέστερα από αυτό με την τεχνική της τυρβώδους συνεκτικότητας τη θραύση τόσο τύπου spilling, όσο και τύπου plunging απλών μονοχρωματικών κυματισμών. Η διαφορά καταδεικνύεται κυρίως στην εσωτερική ζώνη θραύσης, όπου το μοντέλο eddy viscosity υπερεκτιμά το ύψος κύματος. Το προτεινόμενο μοντέλο υπερισχύει και του MIKE 21 BW ως προς τον προσδιορισμό του ύψους κύματος θραύσης.

- Η θραύση τύπου spilling περιγράφεται με ικανοποιητική ακρίβεια με θεώρηση μιας γωνίας έναρξης της θραύσης περίπου 30° . Η προσομοίωση της θραύσης τύπου plunging είναι εξ ορισμού πολύ δύσκολη. Το μοντέλο απλώς την προσδιορίζει για μεγαλύτερες γωνίες φ_b ως 35° - 36° και δεν αλλάζει την τεχνική προσομοίωσης, παρότι συμβαίνουν πιο έντονα φαινόμενα όπως η σχεδόν ολοκληρωτική καταστροφή της κυματομορφής, η αποκόλληση ροής και ο έντονος αφρισμός.
- Από το πείραμα των Beji και Battjes (1993) προκύπτει ότι το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να προσομοιώσει τη διάδοση και θραύση βραχέων και μακρών κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη ελαφρώς καλύτερα από το μοντέλο surface roller breaker. Στην περίπτωση των μακρών κυματισμών εμφανίζονται αρκετές αποκλίσεις στα κατάντη λόγω της απελευθέρωσης των υψηλών αρμονικών και του ελαφρώς μη-γραμμικού χαρακτήρα του μοντέλου. Ωστόσο, οι αποκλίσεις είναι πολύ μικρότερες από αυτές του MIKE 21 BW.
- Από την επαλήθευση με τα πειράματα των Ting και Kirby (1994) και του Synolakis (1987) προκύπτει ότι το μοντέλο μπορεί να προσομοιώσει με καλή ακρίβεια τη διάδοση θραυόμενων snoidal κυματισμών και μοναχικού κύματος.
- Ορισμένες σημαντικές αποκλίσεις στην εσωτερική ζώνη θραύσης οφείλονται εν μέρει στο γεγονός ότι δεν έχει ενσωματωθεί στο μοντέλο η προσομοίωση της αναρρίχησης στην ακτή, αλλά αντίθετα στα κατάντη του υπολογιστικού πεδίου θεωρείται ένα τμήμα σταθερού μικρού βάθους με απορροφητικές στοιβάδες.
- Η υιοθέτηση της μεθόδου γένεσης κυματισμών σύμφωνα με την τεχνική της συνάρτησης πηγής των Gobbi και Kirby (1999) και Wei et al. (1999) εισάγει κάποιες ανακρίβειες και οι διάφορες παράμετροι προέκυψαν ύστερα από βαθμονόμηση. Ύστερα από διερεύνηση η εφαρμογή διαφορετικών τεχνικών για τις στοιβάδες απορρόφησης, όπως π.χ. των Yoon και Choi (2001) ή Larsen και Dancy (1983) δεν επιφέρει σημαντικές αλλαγές.
- Η εφαρμογή ενός εκθετικού χρονικού νόμου για τη μεταβολή της κρίσιμης γωνίας του επιφανειακού κυλίνδρου είχε σαφώς καλύτερα αποτελέσματα από την υιοθέτηση χάριν απλότητας μιας μέσης κλίσης που πρότειναν οι Cienfuegos et al. (2010).
- Ύστερα από διερεύνηση προέκυψε ότι το μοντέλο είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο στην τιμή της γωνίας εκκίνησης της θραύσης φ_b . Για θραύση τύπου spilling η βέλτιστη τιμή προέκυψε περίπου 30° . Αντίθετα, το μοντέλο δεν είναι ευαίσθητο ως προς την τελική γωνία θραύσης φ_o , η οποία θεωρήθηκε 7° . Για θραύση πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη τα καλύτερα αποτελέσματα προέκυψαν για μικρότερες τιμές της γωνίας φ_b , δηλαδή $14^\circ - 18^\circ$. Το μοντέλο δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο ως προς την τιμή της χρονικής κλίμακας ανάπτυξης του επιφανειακού κυλίνδρου T_{12} , ούτε ως προς το λόγο των συντελεστών διάχυσης μάζας και ορμής K_h/K_{hu} , ο οποίος διατηρήθηκε ίσος με 0.1 κατά πρόταση των Cienfuegos et al. (2010). Το μήκος θραύσης l_r μιας κυματοκορυφής υπολογιζόταν εσωτερικά από το μοντέλο και όχι εξωτερικά όπως πρότειναν οι Cienfuegos et al. (2010). Ωστόσο, οι υπολογιζόμενες τιμές συμφωνούν με την πρόταση των ερευνητών για $l_r \approx 0.8d$.
- Το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να προσομοιώσει τη διάδοση θραυόμενων τυχαίων κυματισμών σε πυθμένα ήπιας κλίσης. Όπως προκύπτει από το πείραμα των Mase και Kirby (1992) για σύνθετους κυματισμούς φάσματος Pierson- Moskowitz, τα αποτελέσματα, όσον αφορά στις υπολογιζόμενες χρονοσειρές ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, είναι αρκετά ικανοποιητικά παρά τον ήπια μη-γραμμικό χαρακτήρα του μοντέλου. Παρόμοια απόκριση

παρουσιάζει και η έκδοση του μοντέλου με την τεχνική θραύσης της τυρβώδους συνεκτικότητας.

- Ο ήπια μη-γραμμικός χαρακτήρας του μοντέλου φανερώνεται στην επαλήθευση του μοντέλου με το πείραμα των Beji και Battjes (1993) που αφορά στη διάδοση θραυόμενων σύνθετων κυματισμών φάσματος Jonswar πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη. Η σύγκριση των υπολογιζόμενων φασμάτων είναι ενδεικτικότερη της ικανότητας ενός μοντέλου να προσομοιώσει τη διάδοση σύνθετων κυματισμών από τη σύγκριση των υπολογιζόμενων χρονοσειρών. Υπό αυτή την έννοια τα αποτελέσματα της επαλήθευσης με το πείραμα των Beji και Battjes (1993) είναι χειρότερα από αυτά του πειράματος των Mase και Kirby (1992). Βέβαια, τηρουμένων των αναλογιών τα αποτελέσματα κρίνονται και πάλι ικανοποιητικά. Η μορφή των κανονικοποιημένων φασμάτων είναι όμοια με την πειραματική και το κύριο μέρος του φάσματος με τη μεγαλύτερη ενεργειακή πυκνότητα αποδίδεται με ικανοποιητική ακρίβεια. Ανακρίβειες εισάγει η ύπαρξη του ύφαλου εμποδίου που λόγω του ήπια μη-γραμμικού χαρακτήρα του μοντέλου δεν επιτρέπει την περιγραφή της μεταφοράς ενέργειας στις υψηλότερες αρμονικές που απελευθερώνονται στην κατάντη παρειά. Δυστυχώς οι πειραματικές καταγραφές δίνονται υπό μορφή κανονικοποιημένων φασμάτων και δεν παρέχεται η δυνατότητα σύγκρισης στατιστικών μεγεθών όπως του σημαντικού ύψους κύματος.
- Τέλος, ύστερα από διερεύνηση και για τη διάδοση σύνθετων κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη τα βέλτιστα αποτελέσματα προκύπτουν για γωνία έναρξης της θραύσης μικρότερης των τυπικών και περίπου ίση με 14° .

8.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ MIKE 21 BW (1 DH)

Το βασικό αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας αφορά στην τροποποίηση του μοντέλου των Karambas και Memos (2009). Ωστόσο, για συγκριτικούς λόγους έγινε εφαρμογή του εμπορικού μοντέλου MIKE 21 BW (1DH) και επομένως μπορούν να εξαχθούν κάποια γενικά συμπεράσματα:

- Οι βασικές εξισώσεις Boussinesq του MIKE 21 BW είναι αυτές των Madsen et al. (1991) και Madsen και Sørensen (1992). Οι εξισώσεις αυτές περιλαμβάνουν βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς, αλλά δεν είναι πλήρους διασποράς. Υπό αυτή την έννοια τα αποτελέσματα του MIKE 21 BW είναι χειρότερα από αυτά του μοντέλου των Karambas και Memos (2009).
- Οι εξισώσεις Boussinesq του MIKE 21 BW είναι ήπιες μη-γραμμικότητας και για το λόγο αυτό, όπως και στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009), όταν αυξάνεται ο αριθμός Ursell U_r , εμφανίζονται κάποιες αποκλίσεις.
- Το αριθμητικό σχήμα που εφαρμόζει το πρόγραμμα MIKE 21 BW (1DH) εξασφαλίζει πολύ ικανοποιητικά την αριθμητική ευστάθεια. Συνήθως αρκεί η ικανοποίηση του κριτηρίου $Cr < 0.5$ για τη μονοδιάστατη περίπτωση. Σε αντίθετη περίπτωση το πρόγραμμα επιτρέπει την εφαρμογή κάποιου αριθμητικού φίλτρου που επιλέγεται από το χρήστη. Σε γενικές γραμμές η εφαρμογή του μονοδιάστατου μοντέλου είναι ιδιαίτερα μεθοδική και απλή.

- Από την επαλήθευση με το πείραμα του Wallingford (1997) προκύπτει ότι και το MIKE 21 BW μπορεί να προσομοιώσει επιτυχώς τη διάδοση μη θραυόμενων απλών μονοχρωματικών κυματισμών σε πυθμένα ήπιας κλίσης.
- Όπως αναφέρουν οι Chondros (2008), Koutsourelakis (2009) και Chondros (2010) το MIKE 21 BW μπορεί να προσομοιώσει με ακρίβεια τη διάδοση μη θραυόμενων μονοχρωματικών μακρών και μη θραυόμενων σύνθετων κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη. Ανακρίβειες προκύπτουν στα κατάντη όσον αφορά στην περιγραφή της μεταφοράς ενέργειας στις υψηλότερες αρμονικές.
- Το MIKE 21 BW μπορεί να προσομοιώσει τη διάδοση θραυόμενων μονοχρωματικών κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη με ικανοποιητική ακρίβεια. Λόγω του ήπια μη γραμμικού χαρακτήρα του, όπως αναφέρθηκε δεν μπορεί να περιγράψει επαρκώς την απελευθέρωση των υψηλότερων αρμονικών στην κατάντη παρειά του εμποδίου.
- Παρόμοια συμπεριφορά με το προτεινόμενο μοντέλο εμφανίζει κατά την προσομοίωση της διάδοσης σύνθετων κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη. Ωστόσο, αποδίδει χειρότερα το κύριο μέρος του φάσματος, αλλά υπερτερεί ελαφρώς στην απόδοση των πολύ χαμηλών αρμονικών. Αξίζει να σημειωθεί πως για τον υπολογισμό των φασμάτων εφαρμόστηκε ο κώδικας "FOURIER.f90" του παραρτήματος Β διότι το αντίστοιχο μοντέλο του MIKE Zero υστερούσε έντονα σε υπολογιστικό χρόνο και σε ποιότητα αποτελεσμάτων.
- Το MIKE 21 BW μπορεί να προσομοιώσει τόσο τη διάδοση θραυόμενων snoidal κυματισμών, όσο και θραυόμενων τυχαίων κυματισμών σε πυθμένα ήπιας κλίσης. Ωστόσο, τα αποτελέσματα είναι υποδεέστερα αυτών του προτεινόμενου μοντέλου. Γενικά, από τις συγκρίσεις της χρονοσειράς ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας του έβδομου κεφαλαίου σε ελάχιστες περιπτώσεις το MIKE 21 BW δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα από το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009).
- Όσον αφορά στα phase-averaged στατιστικά μεγέθη, από το πείραμα των Hansen και Svendsen (1979) για θραυόμενους κυματισμούς προκύπτει ότι το MIKE 21 BW υποεκτιμά εμφανώς το ύψος κύματος θραύσης, αλλά προσεγγίζει καλύτερα από το προτεινόμενο μοντέλο τις πειραματικές καταγραφές στην εσωτερική ζώνη θραύσης.
- Όπως αναφέρεται στο εγχειρίδιο χρήσης του MIKE 21 BW, η τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller breaker) δεν έχει αναπτυχθεί για την προσομοίωση θραύσης τύπου plunging. Ωστόσο και σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν ικανοποιητικά αποτελέσματα θεωρώντας συντελεστή σχήματος $f_{\delta} = 2.0$ αντί για $f_{\delta} = 1.5$ που ισχύει για θραύση τύπου spilling.
- Η προσομοίωση της θραύσης με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου απαιτεί πολλές φορές λεπτομερή χωρική διακριτοποίηση για την καλύτερη απόδοσή της. Το γεγονός αυτό προκαλεί συχνά αριθμητικές αστάθειες κατά την εφαρμογή του MIKE 21 BW. Στην περίπτωση αυτή απαιτείται η εφαρμογή κατάλληλου αριθμητικού φίλτρου.
- Το μοντέλο θραύσης του MIKE 21 BW είναι αυτό των Madsen et al. (1997a,b). Οι προτεινόμενες τυπικές τιμές της γωνίας έναρξης φ_b και λήξης φ_o της θραύσης είναι $(\varphi_b, \varphi_o) = (20^{\circ}, 10^{\circ})$. Η καταλληλότητα των τιμών αυτών προκύπτει και από την επαλήθευση του προγράμματος με τις πειραματικές καταγραφές του έβδομου κεφαλαίου. Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις οι τιμές αυτές κρίνονται μεγάλες, αφού η απομείωση της κυματικής ενέργειας λόγω θραύσης είναι μικρότερη της πειραματικά καταγραφόμενης. Ενδεικτική είναι η

περίπτωση της προσομοίωσης της διάδοσης κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη, όπου τα βέλτιστα αποτελέσματα προκύπτουν για $(\varphi_b, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$.

- Όπως αναφέρθηκε στο προτεινόμενο μοντέλο δεν έχει συμπεριληφθεί η προσομοίωση της αναρρίχησης στην ακτή. Για να γίνει λοιπόν ενδεικτική σύγκριση και στο MIKE 21 BW δεν συμπεριλήφθηκε η επιλογή "moving shoreline" παρότι προσφέρεται ως δυνατότητα. Έτσι, στα κατάντη του υπολογιστικού πεδίου θεωρήθηκε μια περιοχή μικρού βάθους με απορροφητικές στοιβάδες ώστε να είναι πανομοιότυπο με το αντίστοιχο του προτεινόμενου μοντέλου. Αυτή η διαφορά από την πραγματική πειραματική διάταξη εισάγει κάποιες ανακρίβειες στα αποτελέσματα. Βέβαια, όπως αναφέρεται στο εγχειρίδιο του MIKE 21 BW, η συμπερίληψη της μετακίνησης της ακτογραμμής προκαλεί πολύ συχνά αριθμητικές αστάθειες. Τέλος, λόγω έλλειψης πειραματικών στοιχείων και για να είναι ενδεικτική η σύγκριση με το προτεινόμενο μοντέλο, στις εφαρμογές του MIKE 21 BW δεν συμπεριλήφθηκε η τριβή πυθμένα που θα προκαλούσε κάποια επιπλέον διάχυση κυματικής ενέργειας.

8.4 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΥΠΟΥ BOUSSINESQ ΤΩΝ KARAMBAS ΚΑΙ MEMOS (2009)

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εντάσσεται στη γενικότερη έρευνα σχετικά με τα μαθηματικά μοντέλα τύπου Boussinesq. Σκοπός της είναι η επέκταση του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) ώστε να προσομοιώσει τη διάδοση θραυόμενων κυματισμών βάσει μιας προσέγγισης που περιλαμβάνει την επιρροή του επιφανειακού κυλίνδρου τόσο στην εξίσωση συνέχειας, όσο και στην εξίσωση ορμής. Βάσει της ιστορικής εξέλιξης της έρευνας γύρω από τα μοντέλα τύπου Boussinesq, των κατευθύνσεων αυτής και λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας γίνονται οι παρακάτω προτάσεις για την περαιτέρω εξέλιξη του μοντέλου των Karambas και Memos (2009):

- ◆ Ενσωμάτωση της θραύσης στο δισδιάστατο μοντέλο των Karambas και Memos (2009). Αυτό μπορεί να γίνει είτε βάσει της τεχνικής του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller breaker) σε δύο διαστάσεις όπως προτείνουν οι Madsen et al. (1997a,b), είτε βάσει της τεχνικής της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity breaking) σε δύο διαστάσεις όπως προτείνουν οι Kennedy et al. (2000) και Chen et al. (2000), είτε με επέκταση της προτεινόμενης στην παρούσα εργασία τεχνικής. Η τελευταία αυτή περίπτωση δεν έχει μελετηθεί ούτε θεωρητικά στη διεθνή βιβλιογραφία. Στην περίπτωση αυτή κατά το γεωμετρικό προσδιορισμό του επιφανειακού κυλίνδρου η κάτω ακμή του δεν θα είναι καμπύλη αλλά επιφάνεια, ενώ η μορφή των όρων θραύσης θα είναι παρόμοια με αυτή των προτεινόμενων από τους Kennedy et al. (2000). Θα πρέπει όμως να προταθεί μια μορφή των συναρτήσεων αναδιανομής της ορμής και της μάζας (ως επέκταση των (5.11) και (5.12)) που να είναι τέτοια ώστε να διασφαλίζεται η συνολική διατήρηση της μάζας και της ορμής στην επιφάνεια θραύσης. Η επαλήθευση του μοντέλου θα πρέπει να γίνει τόσο για μονοχρωματικούς, όσο και για σύνθετους κυματισμούς. Πάντως, η έκδοση του μοντέλου των Karambas και Memos (2009) απαιτεί πολύ μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους λόγω της ύπαρξης του επιπλέον

όρου αθροίσματος. Συνεπώς, η επιπλέον ενσωμάτωση της θραύσης πιθανόν να καταστήσει την εφαρμογή ιδιαίτερα δύσχερή και να προκαλέσει αριθμητικές αστάθειες.

- ◆ Αύξηση της μη-γραμμικότητας του μοντέλου με συμπερίληψη όρων υψηλότερης τάξης μη-γραμμικότητας στην εξίσωση ορμής.
- ◆ Προσθήκη όρου προσομοίωσης της απώλειας ενέργειας λόγω της τριβής πυθμένα (bottom friction) στην εξίσωση ορμής είτε του προτεινόμενου μοντέλου, είτε του μοντέλου με την τεχνική της αναλογίας της τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity breaking). Η προσθήκη αυτή έχει γίνει από τον Koutsourelakis (2009) για το τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) με προσομοίωση της θραύσης με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller breaker). Η ενσωμάτωση αυτή μπορεί να γίνει βάσει της εργασίας των Memos et al. (2005) σύμφωνα με την περιγραφή της παραγράφου 3.7. Επιπλέον, μπορεί να γίνει προσθήκη της τριβής πυθμένα σε δύο διαστάσεις σύμφωνα με την ίδια εργασία. Σε κάθε περίπτωση απαιτείται η εύρεση πληροφοριών γύρω από την τραχύτητα και το υλικό πυθμένα των διαφόρων πειραματικών διατάξεων ώστε να επιτευχθεί ρεαλιστική επαλήθευση του μοντέλου.
- ◆ Αύξηση της μη-γραμμικότητας του μοντέλου μέσω της προσομοίωσης των μη-γραμμικών κυματικών αλληλεπιδράσεων (wave-wave interactions). Στα ρηχά ο κύριος εκπρόσωπος των αλληλεπιδράσεων αφορά στο συντονισμό των κυματικών τριάδων (near-resonant triad interactions). Ωστόσο, μπορεί να προσομοιωθούν και οι μη-γραμμικές αλληλεπιδράσεις τετράδων ή και περισσότερων κυματικών συνιστωσών. Με την προσθήκη αυτή μπορεί να προσομοιωθεί ακριβέστερα η διάδοση κυματισμών πάνω από ύφαλο κυματοθραύστη και η απελευθέρωση των υψηλότερων αρμονικών στην κατάντη παρειά του εμποδίου.
- ◆ Προσθήκη της αναρρίχησης (run-up) και καταρρίχησης (run-down) κυματισμών στην ακτή. Αυτό αποτελεί μία ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία και μπορεί να επιτευχθεί π.χ. με κάποια από τις τεχνικές που παρουσιάζονται στην παράγραφο 2.5.3. Η προσθήκη αυτή θα αφαιρέσει κάποιες από τις ανακρίβειες του προτεινόμενου μοντέλου, καθότι κατά την επαλήθευσή του στην παρούσα διπλωματική θεωρήθηκε στα κατάντη τμήμα μικρού σταθερού βάθους με απορροφητικές στοιβάδες εισάγοντας κάποια απόκλιση από τις πραγματικές πειραματικές συνθήκες. Ωστόσο, η προσομοίωση της αναρρίχησης στην ακτή ίσως προκαλέσει κάποιες αριθμητικές αστάθειες.
- ◆ Η προσθήκη της αναρρίχησης (run-up) στην ακτή μπορεί να συμπληρωθεί με τη θεώρηση πορώδους ακτής. Στην περίπτωση αυτή απαιτείται η προσομοίωση της ροής σε πορώδες μέσο, είτε της ακτής είτε ενός ύφαλου εμποδίου με πόρους. Παράδειγμα τέτοιας εφαρμογής αποτελεί το μοντέλο τύπου Boussinesq των Avgeris et al. (2004) όπου οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής συμπληρώνονται από την εξίσωση Darcy-Forchheimer για ροή σε πορώδες μέσο.
- ◆ Το μοντέλο των Karambas και Memos (2009) έχει εφαρμογή σε περιοχές με νερό σταθερού βάθους ή σε ήπια μεταβαλλόμενες βυθομετρίας. Μία πιθανή επέκταση του μοντέλου αφορά στη διεύρυνση του πεδίου εφαρμογής και σε απότομα μεταβαλλόμενες βυθομετρίες. Παράδειγμα μπορεί να αποτελέσει το μοντέλο των Madsen et al. (2006).
- ◆ Σύγκριση του μοντέλου με περισσότερες πειραματικές μετρήσεις που θα περιλαμβάνουν και πληροφορίες για την τριβή του εργαστηριακού πυθμένα και θα αφορούν κυρίως σε θραυόμενους τυχαίους κυματισμούς. Ένας από τους επιδιωκόμενους στόχους θα είναι η

βαθμονόμηση όλων των παραμέτρων που υπεισέρχονται σε οποιοδήποτε από τα μοντέλα θραύσης.

- ◆ Εφαρμογή μεθόδων τοπικής πύκνωσης του χωρικού πλέγματος που θα αφορά στα μέτωπα των κυματισμών, ώστε να καθορίζεται γεωμετρικά με μεγαλύτερη ακρίβεια ο επιφανειακός κύλινδρος κατά την ενεργοποίηση της θραύσης στο προτεινόμενο μοντέλο. Βέβαια, από τη μία θα βελτιώνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, από την άλλη όμως θα πρέπει να διασφαλίζεται η ευστάθεια της λύσης και ο υπολογιστικός χρόνος να διατηρείται σε αποδεκτά επίπεδα.
- ◆ Έρευνα μπορεί να διενεργηθεί και όσον αφορά τόσο στη μέθοδο γένεσης των κυματισμών στο υπολογιστικό πεδίο, όσο και στην τεχνική των στοιβάδων απορρόφησης. Όπως παρατηρήθηκε, τόσο η μέθοδος της συνάρτησης πηγής των Gobbi και Kirby (1999) και Wei et al. (1999), όσο και των Larsen και Dancy (1983) εισάγουν ανακρίβειες στους παραγόμενους κυματισμούς και το σφάλμα ενισχύεται προς τα κατάντη.
- ◆ Το ρητό σχήμα που προτάθηκε από τους Karambas και Memos (2009) είναι απλό στην εφαρμογή αλλά προκαλεί προβλήματα αριθμητικής αστάθειας. Το σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector) που εφαρμόστηκε στην παρούσα εργασία βελτιώνει αισθητά την ευστάθεια και την ακρίβεια. Ενδιαφέρουσα θα ήταν και η σύγκριση με άλλα αριθμητικά σχήματα, κυρίως πεπλεγμένα.
- ◆ Συνδυασμός του δισδιάστατου μοντέλου Boussinesq των Karambas και Memos (2009) με κάποιο μοντέλο παράκτιας κυματογενούς κυκλοφορίας ώστε να προκύψει ένα ολοκληρωμένο εργαλείο παράκτιας τεχνικής. Η συνήθης διαδικασία που ακολουθείται είναι ο διαχωρισμός και η διαδοχική εφαρμογή των δύο μοντέλων. Πρώτα εφαρμόζεται κάποιο κυματικό μοντέλο π.χ. τύπου Boussinesq, από τα αποτελέσματα αυτού υπολογίζονται οι τάσεις ακτινοβολίας (radiation stresses) και εισάγονται στο μοντέλο κυκλοφορίας. Ωστόσο, μπορεί να γίνει μια ενοποίηση της διαδικασίας και στο τροποποιημένο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) να ενσωματωθεί η παράκτια κυκλοφορία ώστε να λαμβάνεται υπόψη η αλληλεπίδραση ρευμάτων και κυμάτων. Η διαδικασία αυτή ακολουθείται στο εμπορικό πακέτο MIKE 21 σύμφωνα με το άρθρο των Sørensen et al. (1998).
- ◆ Η σημαντικότερη ίσως ερευνητική κατεύθυνση είναι ο συνδυασμός του τροποποιημένου μοντέλου των Karambas και Memos (2009) με κάποιο μαθηματικό μοντέλο παράκτιας στερεομεταφοράς. Αυτό μπορεί να γίνει αφότου επεκταθεί το προτεινόμενο μοντέλο σε δύο διαστάσεις. Πρακτικά ο τελικός σκοπός είναι ο υπολογισμός της κατά μήκος της ακτής στερεομεταφοράς (longshore sediment transport), της εγκάρσιας στερεομεταφοράς (cross-shore sediment transport), της εξέλιξης της μορφολογίας του πυθμένα και της διάβρωσης της ακτής. Τα μεγέθη αυτά ενδιαφέρουν άμεσα το μηχανικό ώστε να μελετήσει ενδεχομένως και την αλληλεπίδραση των τεχνικών έργων και του παράκτιου θαλάσσιου περιβάλλοντος. Ο συνδυασμός του κυματικού μοντέλου τύπου Boussinesq και του μοντέλου στερεομεταφοράς μπορεί να γίνει υπό τη μορφή ενός σύνθετου, ενοποιημένου μοντέλου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Abbott, M.B., Damsgaard, A., Rodenhuis, G.S., 1973. "SYSTEM 21, "Jupiter" (A design system for two-dimensional nearly-horizontal flows)". *Journal of Hydraulic Research* 11(1), 1-28. [1]
- Abbott, M.B., Petersen, H.M., Skovgaard, O., 1978. "On the numerical modeling of short waves in shallow water". *Journal of Hydraulic Research* 16(3), 173-204. [2]
- Abbott, M.B., Larsen, J., Madsen, P.A., Tao, J., 1983. "Simulation of wave breaking and runup". *Seminar on Hydrodynamics of waves in coastal areas, vol. 7. Moscow, 146-149.* [3]
- Agnon, Y., Madsen, P.A., Schäffer, H.A., 1999. "A new approach to high order Boussinesq models". *Journal of Fluid Mechanics* 399, 319-333. [4]
- Andersen, O., Fredsøe, J., 1983. "Transport of suspended sediment along the coast". *Rep. No. 54, 33-46.* Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, ISVA, Technical University of Denmark. [5]
- Avgeris, I., 2001 Διάδοση των κυματισμών στην παράκτια ζώνη - Θεωρητική και πειραματική διερεύνηση. Μεταπτυχιακή εργασία Διατμηματικού - Διεπιστημονικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων». Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. [6]
- Avgeris, I., Karambas, Th., Prinos, P., 2004. "Boussinesq modeling of wave interaction with porous submerged breakwaters". *Proceedings of the 29th International Conference on Coastal Engineering (ICCE 2004), vol. 1, 604-616, Lisbon.* [7]
- Battjes, J.A., Janssen, J.P., 1978. "Energy loss and setup due to breaking of random waves". *Proceedings of the 16th International Conference on Coastal Engineering, 569-587, Hamburg.* [8]
- Beji, S., Battjes, J.A., 1993. "Experimental investigation of wave propagation over a bar". *Coastal Engineering* 19 (1-2), 151-162. [9]
- Beji, S., Battjes, J.A., 1994. "Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar". *Coastal Engineering* 23 (1-2), 1-16. [10]
- Beji, S., Nadaoka, K., 1996. "A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth". *Ocean Engineering* 23 (8), 691-704. [11]
- Berkhoff, J.C.W., Booij, N., Radder, A.C., 1992. "Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves". *Coastal Engineering* 6 (3), 255-279. [12]

- Bingham, H.B., Agnon, Y., 2005. "A Fourier Boussinesq method for nonlinear water waves". *European Journal of Mechanics B/Fluids* 24, 255-274. [13]
- Bonneton, P., 2001. "A note on wave propagation in the inner surf zone". *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 329, Série IIb 27-33. [14]
- Bonneton, P., 2004. "Wave celerity in the inner surf zone". *Proceedings of the 29th International Conference on Coastal Engineering (ICCE 2004)*, vol. 1, 392-401, Lisbon. [15]
- Bonneton, P., 2007. "Modeling of periodic wave transformation in the inner surf zone". *Ocean Engineering* 34, 1459-1471. [16]
- Booij, N., 1983. "A note on the accuracy of the mild-slope equation". *Coastal Engineering* 7(3), 191-203. [17]
- Boussinesq, M.J., 1872. "Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d' un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond". *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Deuxième Série* 17: 55-108. [18]
- Briganti, R., Musumeci, R.E., Bellotti, G., Brocchini, M., Foti, E., 2004. "Boussinesq modeling of breaking waves: description of turbulence". *Journal of Geophysical Research* 109 C07015. [19]
- Brocchini, M., Cherubini, P., Iovenitti, L., 1991. "An extension of Boussinesq type model to the surf zone". In: Arcilla, A.S., Pastor, M., Zienkiewicz, O.C., Schrefler, B.A. (Eds.), *Computer Modeling in Ocean Engineering*. Balkema, Rotterdam, pp. 349-359. [20]
- Brocchini, M., Drago, M., Iovenitti, L., 1992. "The modeling of short waves in shallow waters: comparison of numerical models based on Boussinesq and Serre equations". *Proceedings of the 23rd International Conference on Coastal Engineering*, 76-88, Venice. [21]
- Camfield, F.E., 1991. "Wave forces on wall". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 117, No. 1, 76-79. [22]
- Carrier, G.F., Greenspan, H.P., 1958. "Water waves of finite amplitude on a sloping beach". *Journal of Fluid Mechanics* 4 (1), 97-109. [23]
- Chamberlain, P.G., Porter, D., 1995. "The modified mild-slope equation". *Journal of Fluid Mechanics* 291(1), 393-407. [24]
- Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., Kennedy, A.B., Chawla, A., 2000. " Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. I: 2D". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 126, No. 1, 48-56. [25]

- Chester, W., 1968. "Resonant oscillations of water waves. I. Theory". *Proceedings of the Royal Society of London A* 306, 5-22. [26]
- Chondros, M., 2008. Διάδοση και θραύση κυματισμών στην παράκτια ζώνη. Διπλωματική εργασία Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π. Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. [27]
- Chondros, M., 2010. Διάδοση και θραύση τυχαίων κυματισμών στην παράκτια ζώνη. Μεταπτυχιακή εργασία Διατμηματικού - Διεπιστημονικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων». Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. [28]
- Cienfuegos, R., 2005. "Modélisation numérique des houles bidimensionnelles et du déferlement bathymétrique". Ph. D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France. [29]
- Cienfuegos, R., Barthélemy, E., Bonneton, P., 2005. "A new wave-breaking parametrization for Boussinesq-type equations". *Proceedings of the 5th International Symposium on Ocean Wave Measurements and Analysis, Madrid, Spain (in CD-ROM)*. [30]
- Cienfuegos, R., Barthélemy, E., Bonneton, P., 2006a. "A fourth order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. Part I: Model development and analysis". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 51 (11), 1217-1253. [31]
- Cienfuegos, R., Barthélemy, E., Bonneton, P., 2006b. "Nonlinear surf zone wave properties as estimated from Boussinesq modeling: Random waves and complex bathymetries". *Proceedings of the 28th International Conference on Coastal Engineering*, 360-371, San Diego. [32]
- Cienfuegos, R., Barthélemy, E., Bonneton, P., 2007. "A fourth order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. Part II: Boundary conditions and validation". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53 (9), 1423-1455. [33]
- Cienfuegos, R., Barthélemy, E., Bonneton, P., 2010. "Wave-breaking model for Boussinesq-type equations including roller effects in the mass conservation equation". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 136, No. 1, 10-26. [34]
- Cointe, R., Tulin, M., 1994. "A theory of steady breakers". *Journal of Fluid Mechanics* 276, 1-20. [35]
- Cokelet, E.D., 1978. "Breaking wave- The plunging jet and interior flow field". *Symposium on Mechanics of Wave-Induced Forces on Cylinders, Preprints, vol. I, Bristol*. [36]

- Copeland, G.J.M., 1985. "A practical alternative to the mild-slope wave equation". *Coastal Engineering* 9 (2), 125-149. [37]
- Dally, W.R., Dean, R.G., Dalrymple, R.A., 1985. "Wave height variation across beaches of arbitrary profile". *Journal of Geophysical Research*, vol. 90, No. C6, 11917-11927. [38]
- Dally, W.R., Brown, C., 1995. "A modeling investigation of the breaking wave roller with application to cross-shore currents". *Journal of Geophysical Research*, vol. 100, No. C12, 24873-24883. [39]
- Danish Hydraulic Institute, Water and Environment, DHI Software (2007), MIKE 21 BW, Boussinesq Waves Module, User Guide. [40]
- Daskalakis, M.K., 1982. Λιμάνια, θαλάσσια κύματα, λιμενικά έργα, τόμος 1, Αθήνα. [41]
- D' Alessandro, F., Tomasicchio, G.R., 2008. "The BCI criterion for the initiation of breaking process in Boussinesq-type equations wave models". *Coastal Engineering* 55 (12), 1174-1184. [42]
- Dean, R.G., Dalrymple, R.A., 1984. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. Prentice- Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632. [43]
- Deigaard, R., 1989. "Mathematical modeling of waves in the surf zone". *Progress report No. 69*, pp. 47-59. Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark, Lyngby. [44]
- Deigaard, R., Fredsøe, J., 1989. "Shear stress distribution in dissipative water waves". *Coastal Engineering* 13 (4), 357-378. [45]
- Dingemans, M.W., 1994. "Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements". *MAST G8-M note Rep. No. H1684*, Delft Hydraulics. [46]
- Dingemans, M.W., 1997. *Water wave propagation over uneven bottoms. Part I: Linear wave propagation*. Advanced Series on Ocean Engineering, volume 13. World Scientific. [47]
- Dingemans, M.W., 1997. *Water wave propagation over uneven bottoms. Part II: Non-linear wave propagation*. Advanced Series on Ocean Engineering, volume 13. World Scientific. [48]
- Dommermuth, D., Yue, D.K.P., 1987. "A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves". *Journal of Fluid Mechanics* 184, 267-288. [49]
- Durrant, D.R., 1991. "The third-order Adams-Bashforth method: an attractive alternative to leapfrog time differencing". *Monthly Weather Review*, vol. 119, 702-720. Department of Atmospheric Sciences, University of Washington, Seattle, Washington. [50]

- Ebbesmeyer, C.C, 1974. "Fifth Order Stokes Wave Profiles". *Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division*, vol. 100, No. 3, 264-265. [51]
- Engelund, F., 1981. "A simple theory for weak hydraulic jumps". *Progress report No. 54*, pp. 29-32. Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark, Lyngby. [52]
- Engquist, B., Majda, A., 1977. "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves". *Mathematics of Computation*, vol. 31, No 139, 629-651. [53]
- Fenton, J.D., 1979. "A high-order cnoidal wave theory". *Journal of Fluid Mechanics* 94(1), 129-161. [54]
- Fenton, J.D., 1985. "A fifth-order Stokes theory for steady waves". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 111, No. 2, p. 216. [55]
- Fenton, J.D., 1990. "Nonlinear Wave Theories". *The Sea, Vol.9: Ocean Engineering Science*. Department of Civil Engineering, University of Auckland, Private Bag, Auckland, New Zealand. [56]
- Fletcher, C.A.J., 1990. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, volume 1, Fundamental and General Techniques. Second edition, Springer. [57]
- Fletcher, C.A.J., 1990. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, volume 2, Specific Techniques for Different Flow Categories. Second edition, Springer. [58]
- Fuhrman, D.R., Madsen, P.A., 2009. "Tsunami generation, propagation and run-up with a high-order Boussinesq model". *Coastal Engineering* 56 (7), 747-758. [59]
- Gobbi, M.F., Kirby, J.T., 1999. "Wave evolution over submerged sills: tests of a high-order Boussinesq model". *Coastal Engineering* 37 (1), 57-96. [60]
- Gobbi, M.F., Kirby, J.T., Wei, G.E., 2000. "A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to $O(kh)^4$ ". *Journal of Fluid Mechanics* 405, 181-210. [61]
- Goda, Y., 1999. *Random seas and design of maritime structures*, 2nd Edition. Advanced Series on Ocean Engineering, volume 15. World Scientific. [62]
- Goda, Y., 2002. "A fast numerical scheme for unsaturated random breaking waves in 3-D Bathymetry". *Proceedings of the 28th International Conference on Coastal Engineering*, 508-520, Cardiff. [63]
- Govender, K., Mocke, G.P., Alport, M.J., 2002. "Video-imaged surf zone wave and roller structures and flow fields". *Journal of Geophysical Research*, vol. 107, No. C10, 3177-3198. [64]

- Hamm, L., Madsen, P.A., Peregrine, D.H., 1993. "Wave transformation in the nearshore zone: a review". *Coastal Engineering* 21 (1-3), 5-39. [65]
- Hansen, J.B., Svendsen, I.A., 1979. "Regular waves in shoaling water: Experimental data". *Technical Report, ISVA Series, Paper 21*. [66]
- Harlow, F.H., Welch, J.E., 1965. "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface". *Physics of Fluids*, vol. 8 (12), 2182-2189. [67]
- Hedges, T.S., 1995. "Regions of validity of analytical theories". *Water, Maritime and Energy Journal. Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 112, 111–114. [68]
- Heitner, K.L., Housner, G.W., 1970. "Numerical model for tsunami run-up". *Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division*, vol. 96, No. WW3, 701-719. [69]
- Horikawa, K., Kuo, C.T., 1966. "A study on wave transformation inside surf zone". *Proceedings of the 10th International Conference on Coastal Engineering*, 217-233, Tokyo. [70]
- Hughes, S.A., 1993. *Physical Models and Laboratory Techniques in Coastal Engineering. Advanced Series on Ocean Engineering*, volume 7. World Scientific. [71]
- International Association for Hydro-Environment Engineering and Research (IAHR), 1997. "Random wave propagation in shoaling water" contributed by C.D. Memos. [72]
- Israeli, M., Orszag, S.A., 1981. "Approximation of radiation boundary conditions". *Journal of Computational Physics* 41 (1), 115-135. [73]
- Jonsson, I.G., 1966. "Wave boundary layers and friction factors". *Proceedings of the 10th International Conference on Coastal Engineering*, 127-148, Tokyo. [74]
- Karabut, E.A., 2000. "Higher-order approximations of cnoidal-wave theory". *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 41(1), 84-94. [75]
- Karabas, Th. V., Krestenitis, Y., Koutitas, C., 1990. "A numerical solution of Boussinesq equations in the inshore zone". *Hydrosoft* 3 (1), 34-37. [76]
- Karabas, Th. V., Krestenitis, Y., Koutitas, C., 1991. "Numerical model on tsunami propagation". *International Journal of Tsunami Society* 9 (1), 63-71. [77]
- Karabas, Th. V., Koutitas, C., 1992. "A breaking wave propagation model based on the Boussinesq equations". *Coastal Engineering* 18 (1-2), 1-19. [78]
- Karabas, Th. V., Koutitas, C., 1998. "An Improvement to Stokes Nonlinear Theory for Steady Waves". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 124, No. 1, 36-39. [79]

- Karambas, Th. V., 1999. "A unified model for periodic non-linear dispersive waves in intermediate and shallow water". *Journal of Coastal Research*, vol. 15 (1), 128-139. [80]
- Karambas, Th. V., Koutitas, C., 2002. "Surf and swash zone morphology evolution induced by nonlinear waves". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 128, No. 3, 102-113. [81]
- Karambas, Th. V., Tozer, N.P., 2003. "Breaking waves in the surf and swash zone". *Journal of Coastal Research* 19 (3), 514-528. [82]
- Karambas, Th. V., Memos, C.D., 2007. "A post-Boussinesq model for weakly nonlinear fully dispersive wave propagation over a bar". *Proceedings of the 5th Coastal Structures International Conference*, 1135-1146, Venice. [83]
- Karambas, Th. V., Memos, C.D., 2008. "A 2DH post-Boussinesq model for weakly nonlinear fully dispersive water waves". *Proceedings of the 31st International Conference on Coastal Engineering*, vol. 1, 229-241, Hamburg. [84]
- Karambas, Th. V., Memos, C.D., 2009. "Boussinesq model for weakly nonlinear fully dispersive water waves". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 135, No. 5, 187-199. [85]
- Keller, J.B., 1948. "The solitary wave and periodic waves in shallow water". *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 1(4), 323-339. [86]
- Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., 2000. "Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. I: 1D". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 126, No. 1, 39-47. [87]
- Kervella, Y., Dutykh, D., Dias, F., 2007. "Comparison between three-dimensional linear and nonlinear tsunami generation models". *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 21, 245-269. [88]
- Kirby, J.T., Wei, G., Chen, Q., Kennedy, A.B., Dalrymple, R.A., 1998. "Fully nonlinear Boussinesq wave model; Documentation and user's manual". *Rep. No. CACR-98-06*. Center for Applied Coastal Research, Department of Civil Engineering, University of Delaware. [89]
- Kobayashi, N., De Silva, G., Watson, K., 1989. "Wave transformation and swash oscillation on gentle and steep slopes". *Journal of Geophysical Research* 94, 951-966. [90]
- Komar, P.D., Gaughan, M.K., 1972. "Airy wave theory and breaker height prediction". *Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering*, 405-418, Vancouver. [91]

- Koutitas, C., 1985. Μαθηματικά ομοιώματα στην παράκτια μηχανική (με εφαρμογές των μικρο Η/Υ), Θεσσαλονίκη. [92]
- Koutitas, C., 1994. Εισαγωγή στην παράκτια τεχνική και τα λιμενικά έργα, Θεσσαλονίκη. [93]
- Koutsourelakis, I.G., 2009. Προσομοίωση θραύσης μονοχρωματικών κυματισμών και τριβής πυθμένα σε ένα εξελεγμένο ομοίωμα Boussinesq. Μεταπτυχιακή εργασία Διατμηματικού - Διεπιστημονικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων». Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. [94]
- Koutsourelakis, I.G., Memos, C.D., 2011. "Wave breaking and bottom friction over mildly sloping bed and bar in a new Boussinesq wave model". *Proceedings of the 34th IAHR World Congress*. [95]
- Koutsourelakis, D., 2009. "Οι βυθισμένοι κυματοθραύστες ως ήπια μέθοδος προστασίας της ακτής από διάβρωση". Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Επιστημών της Θάλασσας, Μυτιλήνη. [96]
- Larsen, J., Dancy, H., 1983. "Open boundaries in short wave simulations - A new approach". *Coastal Engineering* 7 (3), 285-297. [97]
- Lee, C., Suh, K.D., 1998. "Internal generation of waves for time-dependent mild-slope equations". *Coastal Engineering* 34 (1-2), 35-57. [98]
- Le Méhauté, B., 1962. "On non-saturated breakers and the wave run-up". *Proceedings of the 8th International Conference on Coastal Engineering, 77-92, Mexico City*. [99]
- Le Méhauté, B., Koh, R.C.Y., 1967. "On the breaking of waves arriving at an angle to the shore". *Journal of Hydraulic Research, vol. 5, Issue 1, 67-88*. [100]
- Li, B., 2008. "Wave equations for regular and irregular water wave propagation". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, vol. 134, No. 2, 121-142*. [101]
- Longuet-Higgins, M.S., Cokelet, E.D., 1976. "The deformation of steep surface waves. A numerical method of computation". *Proceedings of the Royal Society of London A* 350, 1-26. [102]
- Luth, H.R., Klopman, G., Kitou, N., 1993. "Kinematics of waves breaking partially on an offshore bar". *Rep. H1573, 13pp.*, Delft Hydraulics, Delft, Netherlands. [103]
- Lynett, P.J., Wu, T.R., Liu, P. L.-F., 2002. "Modeling wave runup with depth-integrated equations". *Coastal Engineering* 46 (2), 89-107. [104]

- Lynett, P., 2006. "Nearshore wave modeling with high-order Boussinesq-type equations". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 132, No. 5, 348-357. [105]
- Madsen, P.A., 1981. "A model for a turbulent bore". *Series paper No. 28*, Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark, Lyngby. [106]
- Madsen, P.A., Svendsen, I.A., 1983. "Turbulent bores and hydraulic jumps". *Journal of Fluid Mechanics* 129, 1-25. [107]
- Madsen, P.A., Larsen, J., 1987. "An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation". *Coastal Engineering* 11 (4), 329-351. [108]
- Madsen, P.A., Murray, R., Sørensen, O.R., 1991. "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics". *Coastal Engineering* 15 (4), 371-388. [109]
- Madsen, P.A., Sørensen, O.R., 1992. "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry". *Coastal Engineering* 18 (3-4), 183-204. [110]
- Madsen, P.A., Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., 1997a. "Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq-type model. Part I: model description and cross-shore motion of regular waves". *Coastal Engineering* 32 (4), 255-287. [111]
- Madsen, P.A., Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., 1997b. "Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq-type model. Part II: surf beat and swash oscillations for wave groups and irregular waves". *Coastal Engineering* 32 (4), 289-319. [112]
- Madsen, P.A., Bingham, H.B., Hua Liu, 2002. "A new Boussinesq model for fully nonlinear waves from shallow to deep water". *Journal of Fluid Mechanics* 462, 1-30. [113]
- Madsen, P.A., Bingham, H.B., Schäffer, H.A., 2003. "Boussinesq-type formulations for fully nonlinear and extremely dispersive water waves: derivation and analysis". *Proceedings of the Royal Society of London A* 459, 1075-1104. [114]
- Madsen, P.A., Fuhrman, D.R., Wang, B., 2006. "A Boussinesq-type method for fully nonlinear waves interacting with a rapidly varying bathymetry". *Coastal Engineering* 53 (5-6), 487-504. [115]
- Mase, H., Kirby, J.T., 1992. "Hybrid frequency-domain KdV equation for random wave transformation". *Proceedings of the 23rd International Conference on Coastal Engineering*, 474-487, Venice. [116]
- Massel, S.R., 1996 (reprinted in 2005). *Ocean surface waves: their physics and prediction*. Advanced Series on Ocean Engineering, volume 11. World Scientific. [117]

- McCowan, J., 1891. "On the solitary wave". *Philosophical Magazine, 5th Series, vol. 32, Issue 194, 45-58.* [118]
- Mei, C.C., 1989 (reprinted in 2003). The applied dynamics of ocean surface waves. Advanced Series on Ocean Engineering, volume 1. World Scientific. [119]
- Memos, C.D., Karambas, Th. V., Avgeris, I., 2005. "Irregular wave transformation in the nearshore zone: experimental investigations and comparison with a higher order Boussinesq model". *Ocean Engineering 32 (11-12), 1465-1485.* [120]
- Memos, C.D., 2009. Θαλάσσια Υδροδυναμική, πρόχειρες σημειώσεις, Αθήνα. [121]
- Miche, M., 1951. "Le Pouvoir Réfléchissant des Ouvrages Maritimes Exposés à l' Action de la Houle". *Annals des Ponts et Chaussées, 121e Année, pp 285-319.* (translated by Lincoln and Chevron, University of California, Berkeley, Wave Research Laboratory, Series 3, Issue 363, June 1954). [122]
- Mignot, E., Cienfuegos, R., 2009. "On the application of a Boussinesq model to river flows including shocks". *Coastal Engineering 56 (1), 23-31.* [123]
- Moutzouris, C.I., Marcou, C., 1978. "Action d' une structure côtière inclinée sur la houle: description déterministe du déferlement". *Journal La Houille Blanche, No. 6, 443-446.* [124]
- Moutzouris, C.I., 2005. Εισαγωγή στην ακτομηχανική, Αθήνα. [125]
- Moutzouris, C.I., 2006. Θαλάσσια υδραυλική, σημειώσεις για το μάθημα Θαλάσσια υδραυλική και λιμενικά έργα, Αθήνα. [126]
- Munk, W.H., 1949. "The Solitary Wave Theory and Its Applications to Surf Problems". *Annals of the New York Academy of Sciences, vol. 51, Ocean Surface Waves, 376-424.* [127]
- Musumeci, R.E., Svendsen, I.A., Veeramony, J., 2005. "The flow in the surf zone: a fully nonlinear Boussinesq-type approach". *Coastal Engineering 52 (7), 565-598.* [128]
- Nelson, R.C., 1994. "Depth limited design wave heights in very flat regions". *Coastal Engineering 23 (1-2), 43-59.* [129]
- Nwogu, O., 1993. "Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, vol. 119, No. 6, 618-638.* [130]
- Nwogu, O., 1996. "Numerical prediction of breaking waves and currents with a Boussinesq model". *Proceedings of the 25th International Conference on Coastal Engineering, volume 4, 4807-4820, Orlando.* [131]

- Okamoto, T., Basco, D.R., 2006. "The relative trough froude number for initiation of wave breaking: Theory, experiments and numerical model confirmation". *Coastal Engineering* 53 (8), 675-690. [132]
- Ozanne, F., Chadwick, A.J., Huntley, D.A., Simmonds, D.J., Lawrence, J., 2000. "Velocity predictions for shoaling and breaking waves with a Boussinesq-type model". *Coastal Engineering* 41 (4), 361-498. [133]
- Özkan-Haller, H.T., Kirby, J.T., 1997. "A Fourier- Chebyshev collocation method for the shallow water equations including shoreline runup". *Applied Ocean Research* 19, 21-34. [134]
- Patel, M.H., 1989. Dynamics of Offshore Structures. Butterworths. [135]
- Pedersen, G., Gjevik, B., 1983. "Run-up of solitary waves". *Journal of Fluid Mechanics* 135, 283-299. [136]
- Peregrine, D.H., 1967. "Long waves on a beach". *Journal of Fluid Mechanics* 27 (4), 815-827. [137]
- Peregrine, D.H., 1972. "Equations for water waves and the approximation behind them". In: R.E. Meyer, Editor, *Waves on Beaches and Resulting Sediment Transport*, Academic Press, New York. [138]
- Peregrine, D.H., 1978. "Fountains, waterfalls and breaking waves". *EUROMECH 102, ON WAVE BREAKING*, Bristol. [139]
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.S., Vetterling, W.T., 1986. Numerical recipes, Cambridge University Press, Cambridge. [140]
- Radder, A.C., Dingemans, M.W., 1985. "Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves". *Wave Motion* 7 (5), 473-485. [141]
- Radder, A.C., 1992. "An explicit Hamiltonian formulation of surface waves in water of finite depth". *Journal of Fluid Mechanics* 237, 435-455. [142]
- Rakha, K.A., Deigaard, R., Broker, I., 1997. "A phase-resolving cross-shore transport model for beach evolution" *Coastal Engineering* 31 (1-4), 231-261. [143]
- Raubenheimer, B., Guza, R., Elgar, S., 1996. "Wave transformation across the inner surf zone". *Journal of Geophysical Research*, vol. 101, No. C11, 25589-25598. [144]
- Reeve, D., Chadwick, A., Fleming, C., 2004. Coastal engineering processes, theory and design practice. Spon Press. [145]

- Ribberink, J.S., 1998. "Bed-load transport for steady flows and unsteady oscillatory flows". *Coastal Engineering* 34 (1-2), 59-82. [146]
- Rienecker, M.M., Fenton, J.D., 1981. "A Fourier approximation method for steady water waves". *Journal of Fluid Mechanics* 104, 119-137. [147]
- Schäffer, H.A., Deigaard, R., Madsen, P.A., 1992. "A two-dimensional surf zone model based on the Boussinesq equations". *Proceedings of the 23rd International Conference on Coastal Engineering, chapter 43, 576-590, Venice.* [148]
- Schäffer, H.A., Madsen, P.A., Deigaard, R., 1993. "A Boussinesq model for waves breaking in shallow water". *Coastal Engineering* 20 (3-4), 185-202. [149]
- Schäffer, H.A., Madsen, P.A., 1995. "Further enhancements of Boussinesq type equations". *Coastal Engineering* 26 (1-2), 1-14. [150]
- Schäffer, H.A., Madsen, P.A., 1998. "Higher order Boussinesq type equations for surface gravity waves: derivation and analysis". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* 356, 3123-3184. [151]
- Schäffer, H.A., 2004a. "Accurate determination of internal kinematics from numerical wave model results". *Coastal Engineering* 50 (4), 199-211. [152]
- Schäffer, H.A., 2004b. "Another step towards a post-Boussinesq wave model". *Proceedings of the 29th International Conference on Coastal Engineering (ICCE 2004), vol. 1, 132-144, Lisbon.* [153]
- Skjelbreia, L., Hendrickson, J., 1960. "Fifth-order gravity wave theory". *Proceedings of the 7th International Conference on Coastal Engineering, chapter 10, 184-196, The Hague.* [154]
- Skotner, C., Apelt, C.J., 1999. "Application of a Boussinesq model for the computation of breaking waves. Part 1: Development and verification". *Ocean Engineering* 26 (10), 905-925. [155]
- Smith, J.M., Sherlock, A.R., Resio, D.T., 2001. "STWAVE: Steady-State Spectral Wave Model User's Guide for STWAVE Version 3.0". ERDC/CHL SR-01-01, U.S. Army Engineer Research and Development Center, Vicksburg, MS, 80pp. [156]
- Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., Madsen, P.A., 1998. "Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq-type model. Part III: Wave-induced horizontal nearshore circulations". *Coastal Engineering* 33 (2-3), 155-176. [157]
- Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., Sørensen, L.S., 2004. "Boussinesq-type modeling using an unstructured finite element technique". *Coastal Engineering* 50 (4), 181-198. [158]

- Stive, M.J.F., 1980. "Velocity and pressure field of spilling breakers". *Proceedings of the 17th International Conference on Coastal Engineering*, 547-566, Sydney. [159]
- Stive, M.J.F., 1984. "Energy dissipation in waves breaking on gentle slopes". *Coastal Engineering* 8 (2), 99-127. [160]
- Stokes, G.G., 1847. "On the theory of oscillatory waves". *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 8, 441-455. [161]
- Suh, K.D., Lee, C., Park, W.S., 1997. "Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography". *Coastal Engineering* 32 (2-3), 91-117. [162]
- Svendsen, I.A., Madsen, P.A., Hansen, J.B., 1978. "Wave characteristics in the surf zone". *Proceedings of the 16th International Conference on Coastal Engineering*, 520-539, Hamburg. [163]
- Svendsen, I.A., 1984. "Wave heights and set-up in a surf zone". *Coastal Engineering* 8 (4), 303-329. [164]
- Svendsen, I.A., Madsen, P.A., 1984. "A turbulent bore on a beach". *Journal of Fluid Mechanics* 148, 73-96. [165]
- Svendsen, I.A., Yu, K., Veeramony, J., 1996. "A Boussinesq breaking wave model with vorticity". *Proceedings of the 25th International Conference on Coastal Engineering*, 1192-1204, Orlando. [166]
- Svendsen, I.A., Veeramony, J., Bakunin, J., Kirby, J., 2000. "The flow in weak turbulent hydraulic jumps". *Journal of Fluid Mechanics* 418, 25-57. [167]
- Synolakis, C.E., 1987. "The runup of solitary waves". *Journal of Fluid Mechanics* 185, 523-545. [168]
- Tao, J., 1983. "Computation of wave run-up and wave breaking". *Internal Report*, Danish Hydraulics Institute, Hørsholm, Denmark. [169]
- Tao, J., 1984. "Numerical modeling of wave runup and breaking on the beach". *Acta Oceanologica Sinica, Beijing*, 6(5), 692-700 (in Chinese). [170]
- Thornton, E., Guza, R., 1983. "Transformation of wave height distribution". *Journal of Geophysical Research*, vol. 88, No. C10, 5925-5938. [171]
- Ting, F., Kirby, J., 1994. "Observation of undertow and turbulence in a laboratory surf zone". *Coastal Engineering* 24 (1-2), 51-80. [172]

- Tsutsui, S., Suzuyama, K., Ohki, K., 1998. "Model equations of nonlinear dispersive waves in shallow water and an application of its simplified version to wave evolution on the step-type reef". *Coastal Engineering Journal*, vol. 40 (1), 41-60. [173]
- US Army Corps of Engineers (USACE), Engineer Research and Development Center, 2006. Coastal Engineering Manual (CEM). [174]
- Veeramony, J., Svendsen, I.A., 2000. "The flow in surf-zone waves". *Coastal Engineering* 39 (2-4), 93-122. [175]
- Vincent, S., Caltagirone, J.-P., Bonneton, P., 2001. "Numerical modeling of bore propagation and run-up on sloping beaches using a MacCormack TVD scheme". *Journal of Hydraulic Research*, 39 (1), 41-49. [176]
- Walkley, M.A., 1999. A numerical method for extended Boussinesq shallow-water wave equations. University of Leeds, School of Computer Studies. [177]
- Watanabe, A., Maruyama, K., 1986. "Numerical modeling of near-shore wave field under combined refraction, diffraction and breaking". *Coastal Engineering Japan*, 29, 19-39. [178]
- Weggel, J.R., 1972. "Maximum breaker height". *Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division*, vol. 98, No. WW4, 529-548. [179]
- Wei, G., Kirby, J.T., 1994. "A high order time-dependent numerical model for the extended Boussinesq equations". *Proceedings of the International Symposium: Waves-Physical and Numerical Modeling*, 544-553, Vancouver. [180]
- Wei, G., Kirby, J.T., 1995. "Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 121, No. 5, 251-261. [181]
- Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., Subramanya, R., 1995. "A fully non-linear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly non-linear unsteady waves". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 294, 71-92. [182]
- Wei, G., 1997. Simulation of water waves by Boussinesq models. Phd dissertation, University of Delaware, 202 pp. [183]
- Wei, G., Kirby, J.T., Sinha, A., 1999. "Generation of waves in Boussinesq models using a source function method". *Coastal Engineering* 36 (4), 271-299. [184]
- Wiegel, R.L., 1960. "A presentation of cnoidal wave theory for practical application". *Journal of Fluid Mechanics* 7(2), 273-286. [185]

- Wiegel, R.L., 1964. *Oceanographical Engineering*. Prentice- Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. [186]
- Witting, J.M., 1984. "A unified model for the evolution nonlinear water waves". *Journal of Computational Physics*, vol. 56 (2), 203-236. [187]
- Yoon, S.-B., Choi, J.-W., 2001. "A note on extension of fully dispersive weakly nonlinear wave equations for rapidly varying topography". *Coastal Engineering Journal*, vol. 43 (3), 143-160. [188]
- Zakharov, V.E., 1968. "Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid". *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 9 (2), 190-194. [189]
- Zelt, J.A., 1991. "The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves". *Coastal Engineering* 15 (3), 205-246. [190]
- Zou, Z.L., 1999. "Higher order Boussinesq equations". *Ocean Engineering* 26 (8), 767-792. [191]
- Zwartkuis, T.J.G., 1991. "Computation of solitary wave profiles described by a Hamiltonian model for surface waves. Part 1: Final report; Part 2: Appendices". *ECMI-Rep. No 91053*, Eindhoven University of Technology. [192]

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΣΕ FORTRAN 90

A1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ WALLINGFORD (1997)

```

PROGRAM WALLINGFORD
IMPLICIT NONE
REAL DX,DT,tr,PI,g,DEN,PER,h0,da,tend,LENGO,akd,dlen,x,ddd,pxd,t,UX,ZX,dex,ddx,UUX,SUM1,SUM2,diff
REAL UU,delta,bta,alen,z1,chi,chis
REAL fsource,m1,m2,rm,q1,q2,LEN,ZNX,Zxbr,HLC,Hdr,fb,ff,T12,hhzx,hnx,max1,max2
REAL d(10000),zxf(10000),LENG(10000),C(10000),pxdd(10000,10000),h(10000),Z(10000),U(10000)
REAL ZN(10000),ZXK(10000),tbrk(10000),hhz(10000),Dhu1(10000),dvhu(10000)
REAL sumx(10000),zxfn(10000),E(10000),EO(10000),EOO(10000),UN(10000),FN(10000),UNX(10000)
REAL EN(10000),Zb(10000),XX(10000),XL(10000),Dh(10000),Dhu2(10000)
REAL F(10000),FO(10000),FOO(10000),ZNIT(10000),UNIT(10000),ctb(10000),delt(10000),lr(10000)
REAL Khu(10000),Kh(10000),vh(10000),vhu(10000),Dhu(10000),ist(10000)
INTEGER jv1,jv2,IM,iad,nbg,NM,IIS,III,iksi,l,n,jva,jvb,ims,ims1,lbrk,ISR,J,II
DX=0.02
DT=0.0025
tr=4.0
jv1=1
jv2=2
IM=1812
PI=3.141592654
g=9.81
DEN=0.002
iad=338
PER=1.0
h0=0.05
da=0.8
tend=100.0
nbg=3
NM=INT(tend/DT)+1
lbrk=400
fb=32.0
ff=7.0
T12=0.1*PER
DO I=1,IM
ctb(I)=TAND(fb)
ENDDO
IBYTHOMETRIA
DO 10 I=1,IM
d(I)=da
zxf(I)=0.0
10 CONTINUE
DO 11 I=925,IM
d(I)=d(I-1)-DX/20.0
IF(d(I).le.0.2) d(I)=0.2
11 CONTINUE
DO 12 I=IM-10,IM
d(I)=d(IM-10)
12 CONTINUE
!STOIXEIA KYMATISMWN (LINEAR DISPERSION EQUATION)
LENGO=g*(PER**2)/(2.0*PI)
DO 13 I=1,IM
LENG(I)=LENGO
14 LEN=LENG(I)
akd=(2*PI)*d(I)/LEN
LENG(I)=LENGO*TANH(akd)
dlen=ABS(LENG(I)-LEN)

```

```

IF(dlen.gt.0.0001) GOTO 14
C(I)=((g*PER)/(2.0*PI))*TANH(akd)
13 CONTINUE
!OROI BOUSSINESQ
IIS=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
iksi=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO I=III-iksi,III+iksi
x=ABS((I-III)*DX)
ddd=(d(III)+d(I))/2
pxd=PI*x/(4.0*ddd)
IF(pxd.lt.0.001) pxd=0.001
pxdd(III,I)=(g/(PI*d(III)))*LOG(TANH(pxd))
ENDDO
ENDDO
t=0.0
n=0
OPEN(900,file='MAX.txt')
20 t=t+DT
n=n+1
!CONTINUITY EQUATION
IF(n.le.nbg) THEN
DO 100 I=2,IM-1
h(I)=d(I)+Z(I)
UX=h(I)*(U(I+1)-U(I))/DX
ZX=(Z(I+1)-Z(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZX+dex)*0.5*(U(I+1)+U(I))
ZN(I)=Z(I)-DT*UX-DT*ddx
100 CONTINUE
!NEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ELSE
!PREDICTOR CONTINUITY
DO I=3,IM-2
ZN(I)=Z(I)+(DT/12)*(23*E(I)-16*EO(I)+5*EOO(I))
ENDDO
ENDIF
!MOMENTUM EQUATION
IF(n.le.nbg) THEN
DO 120 I=3,IM-2
UU=0.5*(U(I+1)+U(I-1))
UX=(U(I+1)-U(I-1))/(2.0*DX)
UUX=DT*UU*UX

```

```

ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
UN(I)=U(I)-DT*(C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX
FN(I)=-(C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX/DT
ELSE
UN(I)=U(I)-DT*g*ZX-UUX+DT*zxfn(I)
FN(I)=-g*ZX-UUX/DT+zxfn(I)
ENDIF
h(I)=d(I)+ZN(I)
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
ZNX=(ZN(I+1)-ZN(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZNX+dex)*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
EN(I)=-UNX(I)-ddx
120 CONTINUE
ELSE
!PREDICTOR MOMENTUM
DO I=3,IM-2
UN(I)=U(I)+(DT/12)*(23*F(I)-16*FO(I)+5*FOO(I))
ENDDO
ENDIF
!THRAYSH
112 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).ge.0.0) THEN
Zb(I)=ZN(I)
ELSE
Zb(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
I=IM-2
999 IF(I.gt.lbrk) THEN
I=I-1
ZX=(Zb(I+1)-Zb(I-1))/(2.0*DX)
Zxbr=-ctb(I)
IF(ZX.lt.Zxbr) THEN
ISR=I
I=I-1
998 IF(I.le.lbrk) GOTO 997
HLC=Zb(I)+d(I)
Hdr=d(ISR)+Zb(ISR)-Zxbr*(ISR-I)*DX
delt(I)=HLC-Hdr
IF(delt(I).lt.0.0) THEN
delt(I)=0.0
Irr(I)=(ISR-I)*DX
DO 996 J=I+1,ISR
Khu(J)=C(J)*d(J)
Kh(J)=0.1*C(J)*d(J)
XX(J)=(J-1)*DX-(I-1)*DX
XL(J)=XX(J)/Irr(I)-1
vh(J)=-Kh(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
vhu(J)=-Khu(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
996 CONTINUE
delt(ISR)=0.001
GOTO 999
ELSE
I=I-1
GOTO 998
ENDIF

```



```

ELSE
GOTO 999
ENDIF
ELSE
ENDIF
997 CONTINUE
DO I=lbrk,IM-1
IF(delt(I).ne.0.0) THEN
ist(I)=1.0
IF(tbrk(I).eq.0.0) THEN
tbrk(I)=t
ELSE
ENDIF
ELSE
ist(I)=0.0
tbrk(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
IUPDATE CTB
DO I=lbrk,IM
IF(ist(I).eq.1.0) THEN
DO II=I+1,IM
ctb(II)=TAND(ff)+(TAND(fb)-TAND(ff))*EXP(-LOG(2.0)*(t-tbrk(II))/T12)
tbrk(II)=tbrk(II)
ENDDO
ELSE
IF(ist(I).eq.0.0) THEN
ctb(I)=tand(fb)
tbrk(I)=0.0
ELSE
ENDIF
ENDIF
ENDDO
ICORRECTOR CONTINUITY
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
101 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)
Dh(I)=vh(I)*((hhz(I+1)-2*hhz(I)+hhz(I-1))/DX**2)+((vh(I+1)-vh(I-1))/(2.0*DX))*hhzx
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
hnx=(h(I+1)-h(I-1))/(2.0*DX)
ddx=hnx*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
IF(Dh(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dh(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dh(I)=0.0
EN(I)=-UNX(I)-ddx+Dh(I)
ZNIT(I)=Z(I)-delt(I)+(DT/24)*(9*EN(I)+19*E(I)-5*EO(I)+EOO(I))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2

```

```

SUM1=SUM1+ABS(ZN(I)-ZNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(ZNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
GOTO 101
ELSE
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
INEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ICORRECTOR MOMENTUM
102 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)
UU=0.5*(UN(I+1)+UN(I-1))
UX=(UN(I+1)-UN(I-1))/(2.0*DX)
UUX=UU*UX*DT
ZNX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
dvhu(I)=(vhu(I+1)-vhu(I-1))/(2.0*DX)
IF(hhz(I).gt.DEN) THEN
Dhu1(I)=dvhu(I)*hhzx*UN(I)/hhz(I)+dvhu(I)*UX+2*vhu(I)*hhzx*UX/hhz(I)
ELSE
Dhu1(I)=dvhu(I)
ENDIF
Dhu2(I)=vhu(I)*(UN(I+1)-2*UN(I)+UN(I-1))/(DX**2)
Dhu(I)=Dhu1(I)+Dhu2(I)
IF(Dhu(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dhu(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dhu(I)=0.0

```

```

IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
FN(I)=-C(I)**2*ZNX/d(I)-UUX/DT+Dhu(I)
ELSE
FN(I)=-g*ZNX-UUX/DT+zxfn(I)+Dhu(I)
ENDIF
UNIT(I)=U(I)+(DT/24)*(9*FN(I)+19*F(I)-5*FO(I)+FOO(I))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(UN(I)-UNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(UNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
UN(I)=UNIT(I)
ENDDO
GOTO 102
ELSE
DO I=3,IM-2
UN(I)=UNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
DO I=1,IM
IF(Dh(I).lt.max1) max1=Dh(I)
IF(Dhu(I).lt.max2) max2=Dhu(I)
ENDDO
WRITE(900,*) t,max1,max2
jva=jv1+IIS+iad
jvb=jv2+IIS+iad
!PHGH KYMATISMWN
alen=C(jvb)*PER
delta=0.3
bta=80.0/((delta*alen)**2)
z1=0.041*h0*SIN(2*PI*t/PER)
DO I=1,IM
chi=(I-1)*DX
chis=(jvb-1)*DX
fsource=EXP(-bta*(chi-chis)**2)
ZN(I)=ZN(I)+z1*fsource
ENDDO
!ORIAKES SYNTHIKES-APORROFHTIKA ORIA
DO 665 I=1,10
ml1=I-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
665 CONTINUE
DO 675 I=20,10,-1
ml1=10-I
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
675 CONTINUE

```

```

ims=IM-20
DO 667 I=ims,IM-10
ml1=I-IM+10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
667 CONTINUE
ims1=IM-10
DO 677 I=IM,ims1,-1
ml1=IM-I-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
677 CONTINUE
q1=U(IM)
q2=U(IM-1)
ux=(q1-q2)/DX
UN(1)=UN(2)
UN(IM)=U(IM)-DT*C(IM)*ux
IFILTRARISMA
DO I=jv2+IIS-2,IM-IIS-1
ZN(I)=0.999*ZN(I)+0.0005*ZN(I-1)+0.0005*ZN(I+1)
UN(I)=0.999*UN(I)+0.0005*UN(I-1)+0.0005*UN(I+1)
ENDDO
IUPDATE TIMWN
DO I=1,IM
Z(I)=ZN(I)
U(I)=UN(I)
EOO(I)=EO(I)
EO(I)=E(I)
E(I)=EN(I)
FOO(I)=FO(I)
FO(I)=F(I)
F(I)=FN(I)
vh(I)=0.0
vhu(I)=0.0
Kh(I)=0.0
Khu(I)=0.0
Dh(I)=0.0
Dhu(I)=0.0
delt(I)=0.0
ist(I)=0.0
lr(I)=0.0
ENDDO
WRITE(*,*) t
OPEN(1,file='STATION 2.txt')
OPEN(2,file='STATION 5.txt')
OPEN(3,file='STATION 7.txt')
OPEN(4,file='STATION 8.txt')
OPEN(5,file='STATION 9.txt')
OPEN(6,file='STATION 10.txt')
OPEN(7,file='STATION 11.txt')
OPEN(8,file='PHGH.txt')
WRITE(1,*) t,ZN(760),UN(760)
WRITE(2,*) t,ZN(938),UN(938)
WRITE(3,*) t,ZN(1014),UN(1014)

```

```
WRITE(4,*) t,ZN(1112),UN(1112)
WRITE(5,*) t,ZN(1212),UN(1212)
WRITE(6,*) t,ZN(1312),UN(1312)
WRITE(7,*) t,ZN(1412),UN(1412)
WRITE(8,*) t,ZN(500),UN(500)
IF(t.lt.tend) THEN
GOTO 20
ELSE
STOP
ENDIF
CLOSE(1)
CLOSE(2)
CLOSE(3)
CLOSE(4)
CLOSE(5)
CLOSE(6)
CLOSE(7)
CLOSE(8)
CLOSE(900)
END
```

A2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ TING ΚΑΙ KIRBY (1994)

```

PROGRAM TINGKIRBYSPILLING
IMPLICIT NONE
REAL DX,DT,tr,PI,g,DEN,PER,da,tend,LENGO,akd,dlen,x,ddd,pxd,t,UX,ZX,dex,ddx,UUX,SUM1,SUM2,diff,UU,delta,bta
REAL alen,z1,chi,chis
REAL fsource,m1,m2,rm,q1,q2,LEN,ZNX,Zxbr,HLC,Hdr,fb,ff,T12,hhzx,hnx,max1,max2,nt,tim,ntend
REAL d(10000),zxf(10000),LENG(10000),C(10000),pxdd(10000,10000),h(10000),Z(10000),U(10000),ZN(10000)
REAL ZXK(10000),tbrk(10000),hhz(10000),Dhu1(10000),dvhu(10000)
REAL sumx(10000),zxfn(10000),E(10000),EO(10000),EOO(10000),UN(10000),FN(10000),UNX(10000),EN(10000)
REAL Zb(10000),XX(10000),XL(10000),Dh(10000),Dhu2(10000),si(50000)
REAL F(10000),FO(10000),FOO(10000),ZNIT(10000),UNIT(10000),ctb(10000),delt(10000),lr(10000)
REAL Khu(10000),Kh(10000),vh(10000),vhu(10000),Dhu(10000),ist(10000)
INTEGER jv1,jv2,IM,iad,nbg,IIS,III,iksi,l,n,jva,jvb,ims,ims1,lbrk,ISR,J,II,NM
DX=0.02
DT=0.004
tr=4.0
jv1=1
jv2=2
IM=1500
PI=3.141592654
g=9.81
DEN=0.002
iad=318
da=0.4
tend=100.0
lbrk=400
fb=30.0
ff=7.0
f=13.0
nt=25000
ntend=nt-1
PER=2.0
T12=0.1*PER
nbg=3
NM=INT(tend/DT)+1
DO I=1,IM
ctb(I)=TAND(fb)
ENDDO
OPEN(15,file='PHGH.txt')
DO I=1,nt
READ(15,*) tim,si(I)
ENDDO
CLOSE(15)
IBYTHOMETRIA
DO 10 I=1,IM
d(I)=da
zxf(I)=0.0
10 CONTINUE
DO I=575,600
d(I)=d(I-1)-DX/26.0
ENDDO
DO I=601,IM
d(I)=d(I-1)-DX/35.0
IF(d(I).le.0.12) d(I)=0.12
ENDDO
DO 12 I=IM-10,IM

```

```

d(l)=d(IM-10)
12 CONTINUE
!STOIXEIA KYMATISMWN (LINEAR DISPERSION EQUATION)
LENGO=g*(PER**2)/(2.0*PI)
DO 13 l=1,IM
LENG(l)=LENGO
14 LEN=LENG(l)
akd=(2*PI)*d(l)/LEN
LENG(l)=LENGO*TANH(akd)
dlen=ABS(LENG(l)-LEN)
IF(dlen.gt.0.0001) GOTO 14
C(l)=((g*PER)/(2.0*PI))*TANH(akd)
13 CONTINUE
!OROI BOUSSINESQ
IIS=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
iksi=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO l=III-iksi,III+iksi
x=ABS((l-III)*DX)
ddd=(d(III)+d(l))/2
pxd=PI*x/(4.0*ddd)
IF(pxd.lt.0.001) pxd=0.001
pxdd(III,l)=(g/(PI*d(III)))*LOG(TANH(pxd))
ENDDO
ENDDO
t=0.0
n=0
OPEN(900,file='MAX.txt')
20 t=t+DT
n=n+1
nt=n
!CONTINUITY EQUATION
IF(n.le.nbg) THEN
DO 100 l=2,IM-1
h(l)=d(l)+Z(l)
UX=h(l)*(U(l+1)-U(l))/DX
ZX=(Z(l+1)-Z(l-1))/(2.0*DX)
dex=(d(l+1)-d(l-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZX+dex)*0.5*(U(l+1)+U(l))
ZN(l)=Z(l)-DT*UX-DT*ddx
100 CONTINUE
!NEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO l=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(l)-ZN(III)-ZN(l-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(l)=ZX*pxdd(III,l)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO l=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(l)+4.0*ZXK(l+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO l=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(l)-ZN(l-1))/DX
zxfn(l)=sumx(l)
ENDDO
ELSE

```

IPREDICTOR CONTINUITY

```
DO I=3,IM-2
ZN(I)=Z(I)+(DT/12)*(23*E(I)-16*EO(I)+5*EOO(I))
ENDDO
ENDIF
```

!MOMENTUM EQUATION

```
IF(n.le.nbg) THEN
DO 120 I=3,IM-2
UU=0.5*(U(I+1)+U(I-1))
UX=(U(I+1)-U(I-1))/(2.0*DX)
UUX=DT*UU*UX
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
UN(I)=U(I)-DT*(C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX
FN(I)=-C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX/DT
ELSE
UN(I)=U(I)-DT*g*ZX-UUX+DT*zxfn(I)
FN(I)=-g*ZX-UUX/DT+zxfn(I)
ENDIF
h(I)=d(I)+ZN(I)
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
ZNX=(ZN(I+1)-ZN(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZNX+dex)*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
EN(I)=-UNX(I)-ddx
120 CONTINUE
ELSE
```

IPREDICTOR MOMENTUM

```
DO I=3,IM-2
UN(I)=U(I)+(DT/12)*(23*F(I)-16*FO(I)+5*FOO(I))
ENDDO
ENDIF
```

!THRASH

```
112 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).ge.0.0) THEN
Zb(I)=ZN(I)
ELSE
Zb(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
I=IM-2
999 IF(I.gt.lbrk) THEN
I=I-1
ZX=(Zb(I+1)-Zb(I-1))/(2.0*DX)
Zxbr=-ctb(I)
IF(ZX.lt.Zxbr) THEN
ISR=I
I=I-1
998 IF(I.le.lbrk) GOTO 997
HLC=Zb(I)+d(I)
Hdr=d(ISR)+Zb(ISR)-Zxbr*(ISR-I)*DX
delt(I)=HLC-Hdr
IF(delt(I).lt.0.0) THEN
delt(I)=0.0
Ir(I)=(ISR-I)*DX
DO 996 J=I+1,ISR
Khu(J)=0.2*C(J)*d(J)
Kh(J)=0.02*C(J)*d(J)
```



```

XX(J)=(J-1)*DX-(I-1)*DX
XL(J)=XX(J)/lr(I)-1
vh(J)=-Kh(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
vhu(J)=-Khu(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
996 CONTINUE
delt(ISR)=0.001
GOTO 999
ELSE
I=I-1
GOTO 998
ENDIF
ELSE
GOTO 999
ENDIF
ELSE
ENDIF
997 CONTINUE
DO I=lbrk,IM-1
IF(delt(I).ne.0.0) THEN
ist(I)=1.0
IF(tbrk(I).eq.0.0) THEN
tbrk(I)=t
ELSE
ENDIF
ELSE
ist(I)=0.0
tbrk(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
!UPDATE CTB
DO I=lbrk,IM
IF(ist(I).eq.1.0) THEN
DO II=I+1,IM
ctb(II)=TAND(ff)+(TAND(fb)-TAND(ff))*EXP(-LOG(2.0)*(t-tbrk(I))/T12)
tbrk(II)=tbrk(I)
ENDDO
ELSE
IF(ist(I).eq.0.0) THEN
ctb(I)=tand(fb)
tbrk(I)=0.0
ELSE
ENDIF
ENDIF
ENDDO
!CORRECTOR CONTINUITY
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
101 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)
Dh(I)=vh(I)*((hhz(I+1)-2*hhz(I)+hhz(I-1))/DX**2)+((vh(I+1)-vh(I-1))/(2.0*DX))*hhzx

```

```

UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
hnx=(h(I+1)-h(I-1))/(2.0*DX)
ddx=hnx*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
IF(Dh(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dh(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dh(I)=0.0
EN(I)=-UNX(I)-ddx+Dh(I)
ZNIT(I)=Z(I)-delt(I)+(DT/24)*(9*EN(I)+19*E(I)-5*EO(I)+E00(I))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(ZN(I)-ZNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(ZNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(n.gt.100) THEN
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
GOTO 101
ELSE
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ELSE
ENDIF
ENDIF
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
INEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ICORRECTOR MOMENTUM
102 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)

```

```

UU=0.5*(UN(I+1)+UN(I-1))
UX=(UN(I+1)-UN(I-1))/(2.0*DX)
UUX=UU*UX*DT
ZNX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
dvhu(I)=(vhu(I+1)-vhu(I-1))/(2.0*DX)
IF(hhz(I).gt.DEN) THEN
Dhu1(I)=dvhu(I)*hhzx*UN(I)/hhz(I)+dvhu(I)*UX+2*vhu(I)*hhzx*UX/hhz(I)
ELSE
Dhu1(I)=dvhu(I)
ENDIF
Dhu2(I)=vhu(I)*(UN(I+1)-2*UN(I)+UN(I-1))/(DX**2)
Dhu(I)=Dhu1(I)+Dhu2(I)
IF(Dhu(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dhu(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dhu(I)=0.0
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
FN(I)=-C(I)**2*ZNX/d(I)-UUX/DT+Dhu(I)
ELSE
FN(I)=-g*ZNX-UUX/DT+zxfn(I)+Dhu(I)
ENDIF
UNIT(I)=U(I)+(DT/24)*(9*FN(I)+19*F(I)-5*FO(I)+FOO(I))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(UN(I)-UNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(UNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(n.gt.100) THEN
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
UN(I)=UNIT(I)
ENDDO
GOTO 102
ELSE
DO I=3,IM-2
UN(I)=UNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ELSE
ENDIF
ENDIF
DO I=1,IM
IF(Dh(I).lt.max1) max1=Dh(I)
IF(Dhu(I).lt.max2) max2=Dhu(I)
ENDDO
WRITE(900,*) t,max1,max2
jva=jv1+IIS+iad
jvb=jv2+IIS+iad
IPHGH KYMATISMWN
alen=C(jvb)*PER
delta=0.3
bta=200/((delta*alen)**2)
z1=0.075*si(nt+1)
DO I=1,IM
chi=(I-1)*DX
chis=(jvb-1)*DX
fsource=EXP(-bta*(chi-chis)**2)

```

```

ZN(I)=ZN(I)+z1*fsource
ENDDO
!ORIAKES SYNTHIKES-APORROFHITIKA ORIA
DO 665 I=1,10
ml1=I-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
665 CONTINUE
DO 675 I=20,10,-1
ml1=10-I
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
675 CONTINUE
ims=IM-20
DO 667 I=ims,IM-10
ml1=I-IM+10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
667 CONTINUE
ims1=IM-10
DO 677 I=IM,ims1,-1
ml1=IM-I-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
677 CONTINUE
q1=U(IM)
q2=U(IM-1)
ux=(q1-q2)/DX
UN(1)=UN(2)
UN(IM)=U(IM)-DT*C(IM)*ux
!FILTRARISMA
DO I=JV2+IIS-2,IM-IIS-1
ZN(I)=0.99*ZN(I)+0.005*ZN(I-1)+0.005*ZN(I+1)
UN(I)=0.99*UN(I)+0.005*UN(I-1)+0.005*UN(I+1)
ENDDO
!UPDATE TIMWN
DO I=1,IM
Z(I)=ZN(I)
U(I)=UN(I)
EOO(I)=EO(I)
EO(I)=E(I)
E(I)=EN(I)
FOO(I)=FO(I)
FO(I)=F(I)
F(I)=FN(I)
vh(I)=0.0
vhu(I)=0.0
Kh(I)=0.0
Khu(I)=0.0
Dh(I)=0.0

```

```
Dhu(l)=0.0
delt(l)=0.0
ist(l)=0.0
lr(l)=0.0
ENDDO
WRITE(*,*) t
OPEN(1,file='WAVEPHGH.txt')
OPEN(2,file='STATION POS6.txt')
OPEN(3,file='STATION POS7.txt')
OPEN(4,file='STATION POS8.txt')
WRITE(1,*) t,ZN(400),UN(400)
WRITE(2,*) t,ZN(900),UN(900)
WRITE(3,*) t,ZN(950),UN(950)
WRITE(4,*) t,ZN(1000),UN(1000)
IF(t.lt.tend) THEN
GOTO 20
ELSE
STOP
ENDIF
CLOSE(1)
CLOSE(2)
CLOSE(3)
CLOSE(4)
CLOSE(900)
END
```

A3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ HANSEN ΚΑΙ SVENDSEN (1979)

```

PROGRAM HANSENSVENDSENSPILLING
IMPLICIT NONE
REAL DX,DT,tr,PI,g,DEN,PER,h0,da,tend,LENGO,akd,dlen,x,ddd,pxd,t,UX,ZX,dex,ddx,UUX,SUM1,SUM2,diff,UU,delta
REAL bta,alen,z1,chi,chis
REAL fsource,ml1,ml2,rm,q1,q2,LEN,ZNX,Zxbr,HLC,Hdr,fb,ff,T12,hhzx,hnx,max1,max2
REAL d(10000),zxf(10000),LENG(10000),C(10000),pxdd(10000,10000),h(10000),Z(10000),U(10000),ZN(10000)
REAL ZXK(10000),tbrk(10000),hhz(10000),Dhu1(10000),dvhu(10000),ZMIN(10000)
REAL sumx(10000),zxfn(10000),E(10000),EO(10000),EOO(10000),UN(10000),FN(10000),UNX(10000),EN(10000)
REAL Zb(10000),XX(10000),XL(10000),Dh(10000),Dhu2(10000),ZMAX(10000),SETUP(10000)
REAL F(10000),FO(10000),FOO(10000),ZNIT(10000),UNIT(10000),ctb(10000),delt(10000),lr(10000)
REAL Khu(10000),Kh(10000),vh(10000),vhu(10000),Dhu(10000),ist(10000),HEIGHT(10000)
INTEGER jv1,jv2,IM,iad,nbg,NM,IIS,III,iksi,I,n,jva,jvb,ims,ims1,lbrk,ISR,J,II
DX=0.02
DT=0.004
tr=4.0
jv1=1
jv2=2
IM=3000
PI=3.141592654
g=9.81
DEN=0.002
iad=426
PER=2.0
h0=0.018
da=0.36
tend=100.0
nbg=3
NM=INT(tend/DT)+1
lbrk=400
fb=30.0
ff=7.0
T12=0.1*PER
DO I=1,IM
ctb(I)=TAND(fb)
SETUP(I)=0.0
ENDDO
!BYTHOMETRIA
DO 10 I=1,IM
d(I)=da
zxf(I)=0.0
10 CONTINUE
DO I=1501,IM
d(I)=d(I-1)-DX/34.26
IF(d(I).le.0.0243) d(I)=0.0243
ENDDO
DO 12 I=IM-10,IM
d(I)=d(IM-10)
12 CONTINUE
!STOIXEIA KYMATISMWN (LINEAR DISPERSION EQUATION)
LENGO=g*(PER**2)/(2.0*PI)
DO 13 I=1,IM
LENG(I)=LENGO
14 LEN=LENG(I)
akd=(2*PI)*d(I)/LEN

```

```

LENG(I)=LENGO*TANH(akd)
dlen=ABS(LENG(I)-LEN)
IF(dlen.gt.0.0001) GOTO 14
C(I)=((g*PER)/(2.0*PI))*TANH(akd)
13 CONTINUE
!OROI BOUSSINESQ
IIS=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
iksi=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO I=III-iksi,III+iksi
x=ABS((I-III)*DX)
ddd=(d(III)+d(I))/2
pxd=PI*x/(4.0*ddd)
IF(pxd.lt.0.001) pxd=0.001
pxdd(III,I)=(g/(PI*d(III)))*LOG(TANH(pxd))
ENDDO
ENDDO
t=0.0
n=0
OPEN(900,file='MAX.txt')
20 t=t+DT
n=n+1
!CONTINUITY EQUATION
IF(n.le.nbg) THEN
DO 100 I=2,IM-1
h(I)=d(I)+Z(I)
UX=h(I)*(U(I+1)-U(I))/DX
ZX=(Z(I+1)-Z(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZX+dex)*0.5*(U(I+1)+U(I))
ZN(I)=Z(I)-DT*UX-DT*ddx
100 CONTINUE
!NEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ELSE
!PREDICTOR CONTINUITY
DO I=3,IM-2
ZN(I)=Z(I)+(DT/12)*(23*E(I)-16*EO(I)+5*EOO(I))
ENDDO
ENDIF
!MOMENTUM EQUATION
IF(n.le.nbg) THEN
DO 120 I=3,IM-2
UU=0.5*(U(I+1)+U(I-1))

```

```

UX=(U(I+1)-U(I-1))/(2.0*DX)
UUX=DT*UU*UX
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
UN(I)=U(I)-DT*(C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX
FN(I)=-C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX/DT
ELSE
UN(I)=U(I)-DT*g*ZX-UUX+DT*zxfn(I)
FN(I)=-g*ZX-UUX/DT+zxfn(I)
ENDIF
h(I)=d(I)+ZN(I)
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
ZNX=(ZN(I+1)-ZN(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZNX+dex)*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
EN(I)=-UNX(I)-ddx
120 CONTINUE
ELSE
!PREDICTOR MOMENTUM
DO I=3,IM-2
UN(I)=U(I)+(DT/12)*(23*F(I)-16*FO(I)+5*FOO(I))
ENDDO
ENDIF
!THRAYSH
112 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).ge.0.0) THEN
Zb(I)=ZN(I)
ELSE
Zb(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
I=IM-2
999 IF(I.gt.lbrk) THEN
I=I-1
ZX=(Zb(I+1)-Zb(I-1))/(2.0*DX)
Zxbr=-ctb(I)
IF(ZX.lt.Zxbr) THEN
ISR=I
I=I-1
998 IF(I.le.lbrk) GOTO 997
HLC=Zb(I)+d(I)
Hdr=d(ISR)+Zb(ISR)-Zxbr*(ISR-I)*DX
delt(I)=HLC-Hdr
IF(delt(I).lt.0.0) THEN
delt(I)=0.0
Ir(I)=(ISR-I)*DX
DO 996 J=I+1,ISR
Khu(J)=2*C(J)*d(J)
Kh(J)=0.2*C(J)*d(J)
XX(J)=(J-1)*DX-(I-1)*DX
XL(J)=XX(J)/Ir(I)-1
vh(J)=-Kh(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
vhu(J)=-Khu(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
996 CONTINUE
delt(ISR)=0.001
GOTO 999
ELSE
I=I-1

```



```

GOTO 998
ENDIF
ELSE
GOTO 999
ENDIF
ELSE
ENDIF
997 CONTINUE
DO I=lbrk,IM-1
IF(delt(I).ne.0.0) THEN
ist(I)=1.0
IF(tbrk(I).eq.0.0) THEN
tbrk(I)=t
ELSE
ENDIF
ELSE
ist(I)=0.0
tbrk(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
!UPDATE CTB
DO I=lbrk,IM
IF(ist(I).eq.1.0) THEN
DO II=I+1,IM
ctb(II)=TAND(ff)+(TAND(fb)-TAND(ff))*EXP(-LOG(2.0)*(t-tbrk(II))/T12)
tbrk(II)=tbrk(II)
ENDDO
ELSE
IF(ist(I).eq.0.0) THEN
ctb(I)=tand(fb)
tbrk(I)=0.0
ELSE
ENDIF
ENDIF
ENDDO
DO II=1,2
DO I=2,IM-1
vh(I)=0.8*vh(I)+0.1*vh(I+1)+0.1*vh(I-1)
vhu(I)=0.8*vhu(I)+0.1*vhu(I+1)+0.1*vhu(I-1)
ENDDO
ENDDO
!CORRECTOR CONTINUITY
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
101 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)
Dh(I)=vh(I)*((hhz(I+1)-2*hhz(I)+hhz(I-1))/DX**2)+((vh(I+1)-vh(I-1))/(2.0*DX))*hhzx
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
hnx=(h(I+1)-h(I-1))/(2.0*DX)
ddx=hnx*0.5*(UN(I+1)+UN(I))

```

```

IF(Dh(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dh(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dh(I)=0.0
EN(I)=-UNX(I)-ddx+Dh(I)
ZNIT(I)=Z(I)-delt(I)+(DT/24)*(9*EN(I)+19*E(I)-5*EO(I)+EOO(I))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(ZN(I)-ZNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(ZNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
GOTO 101
ELSE
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
!NEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
!CORRECTOR MOMENTUM
102 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)
UU=0.5*(UN(I+1)+UN(I-1))
UX=(UN(I+1)-UN(I-1))/(2.0*DX)
UUX=UU*UX*DT
ZNX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
dvhu(I)=(vhu(I+1)-vhu(I-1))/(2.0*DX)
IF(hhz(I).gt.DEN) THEN

```

```

Dhu1(I)=dvhu(I)*hhzx*UN(I)/hhz(I)+dvhu(I)*UX+2*vhu(I)*hhzx*UX/hhz(I)
ELSE
Dhu1(I)=dvhu(I)
ENDIF
Dhu2(I)=vhu(I)*(UN(I+1)-2*UN(I)+UN(I-1))/(DX**2)
Dhu(I)=Dhu1(I)+Dhu2(I)
IF(Dhu(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dhu(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dhu(I)=0.0
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
FN(I)=-C(I)**2*ZNX/d(I)-UUX/DT+Dhu(I)
ELSE
FN(I)=-g*ZNX-UUX/DT+zxfn(I)+Dhu(I)
ENDIF
UNIT(I)=U(I)+(DT/24)*(9*FN(I)+19*F(I)-5*FO(I)+FOO(I))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(UN(I)-UNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(UNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
UN(I)=UNIT(I)
ENDDO
GOTO 102
ELSE
DO I=3,IM-2
UN(I)=UNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
DO I=1,IM
IF(Dh(I).lt.max1) max1=Dh(I)
IF(Dhu(I).lt.max2) max2=Dhu(I)
ENDDO
WRITE(900,*) t,max1,max2
jva=jv1+IIS+iad
jvb=jv2+IIS+iad
!PHGH KYMATISMWN
alen=C(jvb)*PER
delta=0.3
bta=92.0/((delta*alen)**2)
z1=0.050*h0*SIN(2*PI*t/PER)
DO I=1,IM
chi=(I-1)*DX
chis=(jvb-1)*DX
fsource=EXP(-bta*(chi-chis)**2)
ZN(I)=ZN(I)+z1*fsource
ENDDO
!ORIAKES SYNTHIKES-APORROFHTIKA ORIA
DO 665 I=1,10
ml1=I-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm

```

```
665 CONTINUE
DO 675 I=20,10,-1
ml1=10-I
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
675 CONTINUE
ims=IM-20
DO 667 I=ims,IM-10
ml1=I-IM+10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
667 CONTINUE
ims1=IM-10
DO 677 I=IM,ims1,-1
ml1=IM-I-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
677 CONTINUE
q1=U(IM)
q2=U(IM-1)
ux=(q1-q2)/DX
UN(1)=UN(2)
UN(IM)=U(IM)-DT*C(IM)*ux
!FILTRARISMA
DO I=JV2+IIS-2,IM-IIS-1
ZN(I)=0.99*ZN(I)+0.005*ZN(I-1)+0.005*ZN(I+1)
UN(I)=0.99*UN(I)+0.005*UN(I-1)+0.005*UN(I+1)
ENDDO
OPEN(12345,file='TH.txt')
DO I=1,IM
WRITE(12345,*) I,ist(I)
ENDDO
CLOSE(12345)
!UPDATE TIMWN
DO I=1,IM
Z(I)=ZN(I)
U(I)=UN(I)
EOO(I)=EO(I)
EO(I)=E(I)
E(I)=EN(I)
FOO(I)=FO(I)
FO(I)=F(I)
F(I)=FN(I)
vh(I)=0.0
vhu(I)=0.0
Kh(I)=0.0
Khu(I)=0.0
Dh(I)=0.0
Dhu(I)=0.0
delt(I)=0.0
ist(I)=0.0
lr(I)=0.0
```

```
ENDDO
WRITE(*,*) t
IF(n.ge.5000) THEN
DO I=1,IM
IF(ZN(I).gt.ZMAX(I)) ZMAX(I)=ZN(I)
IF(ZN(I).lt.ZMIN(I)) ZMIN(I)=ZN(I)
HEIGHT(I)=ZMAX(I)-ZMIN(I)
ENDDO
DO I=2,IM-1
HEIGHT(I)=0.99*HEIGHT(I)+0.005*HEIGHT(I-1)+0.005*HEIGHT(I+1)
ENDDO
OPEN(10,file='HEIGHT.txt')
DO I=1,IM
WRITE(10,*) (I-1)*DX,HEIGHT(I)
ENDDO
CLOSE(10)
ELSE
ENDIF
OPEN(800,file='SETUP.txt')
OPEN(1,file='PHGH.txt')
WRITE(1,*) t,ZN(500),UN(500)
IF(n.ge.5000) THEN
DO I=1,IM
SETUP(I)=SETUP(I)+ZN(I)
ENDDO
ELSE
ENDIF
IF(t.lt.tend) THEN
GOTO 20
ELSE
DO I=1,IM
SETUP(I)=SETUP(I)/(n-4999)
WRITE(800,*) (I-1)*DX,SETUP(I)
ENDDO
STOP
ENDIF
CLOSE(1)
CLOSE(800)
CLOSE(900)
END
```

A4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ ΒΕJΙ ΚΑΙ ΒΑΤΤJΕS (1993)- ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ

```

PROGRAM BEJILONGSPILLING
IMPLICIT NONE
REAL DX,DT,tr,PI,g,DEN,PER,h0,da,tend,LENGO,akd,dlen,x,ddd,pxd,t,UX,ZX,dex,ddx,UUX,SUM1,SUM2,diff
REAL UU,delta,bta,alen,z1,chi,chis
REAL fsource,ml1,ml2,rm,q1,q2,LEN,ZNX,Zxbr,HLC,Hdr,fb,ff,T12,hhzx,hnx,max1,max2
REAL d(10000),zxf(10000),LENG(10000),C(10000),pxdd(10000,10000),h(10000),Z(10000),U(10000),ZN(10000)
REAL ZXK(10000),tbrk(10000),hhz(10000),Dhu1(10000),dvhu(10000),ZMIN(10000)
REAL sumx(10000),zxfn(10000),E(10000),EO(10000),EOO(10000),UN(10000),FN(10000),UNX(10000),EN(10000)
REAL Zb(10000),XX(10000),XL(10000),Dh(10000),Dhu2(10000),ZMAX(10000),SETUP(10000)
REAL F(10000),FO(10000),FOO(10000),ZNIT(10000),UNIT(10000),ctb(10000),delt(10000),lr(10000)
REAL Khu(10000),Kh(10000),vh(10000),vhu(10000),Dhu(10000),ist(10000),HEIGHT(10000)
INTEGER jv1,jv2,IM,iad,nbg,NM,IIS,III,iksi,l,n,jva,jvb,ims,ims1,lbrk,ISR,J,II
DX=0.025
DT=0.004
tr=4.0
jv1=1
jv2=2
IM=2200
PI=3.141592654
g=9.81
DEN=0.002
iad=334
PER=2.5
h0=0.022
da=0.4
tend=100.0
nbg=3
NM=INT(tend/DT)+1
lbrk=400
fb=18.0
ff=7.0
T12=0.1*PER
DO I=1,IM
ctb(I)=TAND(fb)
SETUP(I)=0.0
ENDDO
!BYTHOMETRIA
DO 10 I=1,IM
d(I)=da
zxf(I)=0.0
10 CONTINUE
DO 11 I=641,880
d(I)=d(I-1)-DX/20.0
11 CONTINUE
DO I=881,960
d(I)=d(880)
ENDDO
DO I=961,1080
d(I)=d(I-1)+DX/10.0
ENDDO
DO I=1159,IM
d(I)=d(I-1)-DX/25.0
IF(d(I).le.0.06) d(I)=0.06
ENDDO

```

```

DO 12 I=IM-10,IM
d(I)=d(IM-10)
12 CONTINUE
!ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ (LINEAR DISPERSION EQUATION)
LENGO=g*(PER**2)/(2.0*PI)
DO 13 I=1,IM
LENG(I)=LENGO
14 LEN=LENG(I)
akd=(2*PI)*d(I)/LEN
LENG(I)=LENGO*TANH(akd)
dlen=ABS(LENG(I)-LEN)
IF(dlen.gt.0.0001) GOTO 14
C(I)=((g*PER)/(2.0*PI))*TANH(akd)
13 CONTINUE
!ΟΡΟΙ BOUSSINESQ
IIS=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
iksi=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO I=III-iksi,III+iksi
x=ABS((I-III)*DX)
ddd=(d(III)+d(I))/2
pxd=PI*x/(4.0*ddd)
IF(pxd.lt.0.001) pxd=0.001
pxdd(III,I)=(g/(PI*d(III)))*LOG(TANH(pxd))
ENDDO
ENDDO
t=0.0
n=0
OPEN(900,file='MAX.txt')
20 t=t+DT
n=n+1
!CONTINUITY EQUATION
IF(n.le.nbg) THEN
DO 100 I=2,IM-1
h(I)=d(I)+Z(I)
UX=h(I)*(U(I+1)-U(I))/DX
ZX=(Z(I+1)-Z(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZX+dex)*0.5*(U(I+1)+U(I))
ZN(I)=Z(I)-DT*UX-DT*ddx
100 CONTINUE
!ΝΕΟΙ ΟΡΟΙ BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ELSE

```

IPREDICTOR CONTINUITY

```
DO I=3,IM-2
ZN(I)=Z(I)+(DT/12)*(23*E(I)-16*EO(I)+5*EOO(I))
ENDDO
ENDIF
```

!MOMENTUM EQUATION

```
IF(n.le.nbg) THEN
DO 120 I=3,IM-2
UU=0.5*(U(I+1)+U(I-1))
UX=(U(I+1)-U(I-1))/(2.0*DX)
UUX=DT*UU*UX
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
UN(I)=U(I)-DT*(C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX
FN(I)=-C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX/DT
ELSE
UN(I)=U(I)-DT*g*ZX-UUX+DT*zxfn(I)
FN(I)=-g*ZX-UUX/DT+zxfn(I)
ENDIF
h(I)=d(I)+ZN(I)
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
ZNX=(ZN(I+1)-ZN(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZNX+dex)*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
EN(I)=-UNX(I)-ddx
120 CONTINUE
ELSE
```

IPREDICTOR MOMENTUM

```
DO I=3,IM-2
UN(I)=U(I)+(DT/12)*(23*F(I)-16*FO(I)+5*FOO(I))
ENDDO
ENDIF
```

!THRAYSH

```
112 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).ge.0.0) THEN
Zb(I)=ZN(I)
ELSE
Zb(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
I=IM-2
999 IF(I.gt.lbrk) THEN
I=I-1
ZX=(Zb(I+1)-Zb(I-1))/(2.0*DX)
Zxbr=-ctb(I)
IF(ZX.lt.Zxbr) THEN
ISR=I
I=I-1
998 IF(I.le.lbrk) GOTO 997
HLC=Zb(I)+d(I)
Hdr=d(ISR)+Zb(ISR)-Zxbr*(ISR-I)*DX
delt(I)=HLC-Hdr
IF(delt(I).lt.0.0) THEN
delt(I)=0.0
Ir(I)=(ISR-I)*DX
DO 996 J=I+1,ISR
Khu(J)=2*C(J)*d(J)
Kh(J)=0.2*C(J)*d(J)
```



```
XX(J)=(J-1)*DX-(I-1)*DX
XL(J)=XX(J)/lr(I)-1
vh(J)=-Kh(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
vhu(J)=-Khu(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
996 CONTINUE
delt(ISR)=0.001
GOTO 999
ELSE
I=I-1
GOTO 998
ENDIF
ELSE
GOTO 999
ENDIF
ELSE
ENDIF
997 CONTINUE
DO I=lbrk,IM-1
IF(delt(I).ne.0.0) THEN
ist(I)=1.0
IF(tbrk(I).eq.0.0) THEN
tbrk(I)=t
ELSE
ENDIF
ELSE
ist(I)=0.0
tbrk(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
!UPDATE CTB
DO I=lbrk,IM
IF(ist(I).eq.1.0) THEN
DO II=I+1,IM
ctb(II)=TAND(ff)+(TAND(fb)-TAND(ff))*EXP(-LOG(2.0)*(t-tbrk(II))/T12)
tbrk(II)=tbrk(II)
ENDDO
ELSE
IF(ist(I).eq.0.0) THEN
ctb(I)=tand(fb)
tbrk(I)=0.0
ELSE
ENDIF
ENDIF
ENDDO
DO II=1,2
DO I=2,IM-1
vh(I)=0.8*vh(I)+0.1*vh(I+1)+0.1*vh(I-1)
vhu(I)=0.8*vhu(I)+0.1*vhu(I+1)+0.1*vhu(I-1)
ENDDO
ENDDO
!CORRECTOR CONTINUITY
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
101 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
```

```

h(l)=d(l)+ZN(l)-delt(l)
ENDIF
hhz(l)=ZN(l)+d(l)
IF(hhz(l).lt.0.0) hhz(l)=d(l)
hhzx=(hhz(l+1)-hhz(l-1))/(2.0*DX)
Dh(l)=vh(l)*((hhz(l+1)-2*hhz(l)+hhz(l-1))/DX**2)+((vh(l+1)-vh(l-1))/(2.0*DX))*hhzx
UNX(l)=h(l)*(UN(l+1)-UN(l))/DX
hnx=(h(l+1)-h(l-1))/(2.0*DX)
ddx=hnx*0.5*(UN(l+1)+UN(l))
IF(Dh(l).ne.0.0.and.ZN(l).le.0.0) Dh(l)=0.0
IF(ist(l).ne.1.0) Dh(l)=0.0
EN(l)=-UNX(l)-ddx+Dh(l)
ZNIT(l)=Z(l)-delt(l)+(DT/24)*(9*EN(l)+19*E(l)-5*EO(l)+EOO(l))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO l=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(ZN(l)-ZNIT(l))
SUM2=SUM2+ABS(ZNIT(l))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO l=3,IM-2
ZN(l)=ZNIT(l)
ENDDO
GOTO 101
ELSE
DO l=3,IM-2
ZN(l)=ZNIT(l)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
INEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO l=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(l)-ZN(III)-ZN(l-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(l)=ZX*pxdd(III,l)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO l=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(l)+4.0*ZXK(l+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO l=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(l)-ZN(l-1))/DX
zxfn(l)=sumx(l)
ENDDO
ICORRECTOR MOMENTUM
102 DO l=3,IM-2
IF(ZN(l).le.0.0) THEN
h(l)=d(l)+ZN(l)
IF(h(l).le.0.0) h(l)=d(l)
ELSE
h(l)=d(l)+ZN(l)-delt(l)
ENDIF

```

```

hhz(l)=ZN(l)+d(l)
IF(hhz(l).lt.0.0) hhz(l)=d(l)
hhzx=(hhz(l+1)-hhz(l-1))/(2.0*DX)
UU=0.5*(UN(l+1)+UN(l-1))
UX=(UN(l+1)-UN(l-1))/(2.0*DX)
UUX=UU*UX*DT
ZNX=(ZN(l)-ZN(l-1))/DX
dvhu(l)=(vhu(l+1)-vhu(l-1))/(2.0*DX)
IF(hhz(l).gt.DEN) THEN
Dhu1(l)=dvhu(l)*hhzx*UN(l)/hhz(l)+dvhu(l)*UX+2*vhu(l)*hhzx*UX/hhz(l)
ELSE
Dhu1(l)=dvhu(l)
ENDIF
Dhu2(l)=vhu(l)*(UN(l+1)-2*UN(l)+UN(l-1))/(DX**2)
Dhu(l)=Dhu1(l)+Dhu2(l)
IF(Dhu(l).ne.0.0.and.ZN(l).le.0.0) Dhu(l)=0.0
IF(ist(l).ne.1.0) Dhu(l)=0.0
IF(l.lt.jv2+IIS+1.or.l.gt.IM-IIS-1) THEN
FN(l)=-C(l)**2*ZNX/d(l)-UUX/DT+Dhu(l)
ELSE
FN(l)=-g*ZNX-UUX/DT+zxfn(l)+Dhu(l)
ENDIF
UNIT(l)=U(l)+(DT/24)*(9*FN(l)+19*F(l)-5*FO(l)+FOO(l))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO l=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(UN(l)-UNIT(l))
SUM2=SUM2+ABS(UNIT(l))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO l=3,IM-2
UN(l)=UNIT(l)
ENDDO
GOTO 102
ELSE
DO l=3,IM-2
UN(l)=UNIT(l)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
DO l=1,IM
IF(Dh(l).lt.max1) max1=Dh(l)
IF(Dhu(l).lt.max2) max2=Dhu(l)
ENDDO
WRITE(900,*) t,max1,max2
jva=jv1+IIS+iad
jvb=jv2+IIS+iad
IPHGH KYMATISMWN
alen=C(jvb)*PER
delta=0.3
bta=80.0/((delta*alen)**2)
z1=0.041*h0*SIN(2*PI*t/PER)
DO l=1,IM
chi=(l-1)*DX
chis=(jvb-1)*DX
fsource=EXP(-bta*(chi-chis)**2)

```

```

ZN(I)=ZN(I)+z1*fsource
ENDDO
!ORIAKES SYNTHIKES-APORROFHITIKA ORIA
DO 665 I=1,10
ml1=I-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
665 CONTINUE
DO 675 I=20,10,-1
ml1=10-I
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
675 CONTINUE
ims=IM-20
DO 667 I=ims,IM-10
ml1=I-IM+10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
667 CONTINUE
ims1=IM-10
DO 677 I=IM,ims1,-1
ml1=IM-I-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
677 CONTINUE
q1=U(IM)
q2=U(IM-1)
ux=(q1-q2)/DX
UN(1)=UN(2)
UN(IM)=U(IM)-DT*C(IM)*ux
!FILTRARISMA
DO I=JV2+IIS-2,IM-IIS-1
ZN(I)=0.99*ZN(I)+0.005*ZN(I-1)+0.005*ZN(I+1)
UN(I)=0.99*UN(I)+0.005*UN(I-1)+0.005*UN(I+1)
ENDDO
OPEN(12345,file='TH.txt')
DO I=1,IM
WRITE(12345,*) I,Dhu(I)
ENDDO
CLOSE(12345)
!UPDATE TIMWN
DO I=1,IM
Z(I)=ZN(I)
U(I)=UN(I)
EOO(I)=EO(I)
EO(I)=E(I)
E(I)=EN(I)
FOO(I)=FO(I)
FO(I)=F(I)
F(I)=FN(I)

```

```
vh(I)=0.0
vhu(I)=0.0
Kh(I)=0.0
Khu(I)=0.0
Dh(I)=0.0
Dhu(I)=0.0
delt(I)=0.0
ist(I)=0.0
lr(I)=0.0
ENDDO
max1=0.0
max2=0.0
WRITE(*,*) t
IF(n.ge.5000) THEN
DO I=1,IM
IF(ZN(I).gt.ZMAX(I)) ZMAX(I)=ZN(I)
IF(ZN(I).lt.ZMIN(I)) ZMIN(I)=ZN(I)
HEIGHT(I)=ZMAX(I)-ZMIN(I)
ENDDO
DO I=2,IM-1
HEIGHT(I)=0.99*HEIGHT(I)+0.05*HEIGHT(I-1)+0.05*HEIGHT(I+1)
ENDDO
OPEN(10,file='HEIGHT.txt')
DO I=1,IM
WRITE(10,*) (I-1)*DX,HEIGHT(I)
ENDDO
CLOSE(10)
ELSE
ENDIF
OPEN(800,file='SETUP.txt')
OPEN(1,file='PHGH.txt')
OPEN(2,file='STATION3.txt')
OPEN(3,file='STATION5.txt')
OPEN(4,file='STATION7.txt')
WRITE(1,*) t,ZN(400),UN(400)
WRITE(2,*) t,ZN(880),UN(880)
WRITE(3,*) t,ZN(960),UN(960)
WRITE(4,*) t,ZN(1040),UN(1040)
IF(t.lt.tend) THEN
GOTO 20
ELSE
STOP
ENDIF
CLOSE(1)
CLOSE(2)
CLOSE(3)
CLOSE(4)
CLOSE(900)
END
```

A5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΑΚΙΣ (1987)

```

PROGRAM SYNOLAKIS
IMPLICIT NONE
REAL DX,DT,tr,PI,g,DEN,h0,da,tend,x,ddd,pxd,t,UX,ZX,dex,ddx,UUX,SUM1,SUM2,diff,UU
REAL ml1,ml2,rm,q1,q2,ZNX,Zxbr,HLC,Hdr,fb,ff,hhzx,hnx,max1,max2,PAR,fk
REAL d(10000),zxf(10000),C(10000),pxdd(10000,10000),h(10000),Z(10000),U(10000),ZN(10000)
REAL ZXK(10000),hhz(10000),Dhu1(10000),dvhu(10000),ZMIN(10000)
REAL sumx(10000),zxfn(10000),E(10000),EO(10000),EOO(10000),UN(10000),FN(10000),UNX(10000),EN(10000)
REAL Zb(10000),XX(10000),XL(10000),Dh(10000),Dhu2(10000),ZMAX(10000)
REAL F(10000),FO(10000),FOO(10000),ZNIT(10000),UNIT(10000),ctb(10000),delt(10000),lr(10000)
REAL Khu(10000),Kh(10000),vh(10000),vhu(10000),Dhu(10000),ist(10000),HEIGHT(10000)
INTEGER jv1,jv2,IM,iad,nbg,NM,IIS,III,iksi,l,n,jva,jvb,ims,ims1,lbrk,ISR,J,II
DX=0.02
DT=0.004
tr=4.0
jv1=1
jv2=2
IM=1887
PI=3.141592654
g=9.81
DEN=0.002
iad=872
h0=0.056
da=0.2
tend=13.0
nbg=3
NM=INT(tend/DT)+1
lbrk=400
fb=12.0
ff=7.0
fk=10.0
DO I=1,IM
ctb(I)=TAND(fb)
ENDDO
jva=jv1+IIS+iad
jvb=872
IBYTHOMETRIA
DO 10 I=1,IM
d(I)=da
zxf(I)=0.0
10 CONTINUE
DO I=1649,IM
d(I)=d(I-1)-DX/19.85
IF(d(I).le.0.01) d(I)=0.01
ENDDO
DO 12 I=IM-10,IM
d(I)=d(IM-10)
12 CONTINUE
!STOIXEIA KYMATISMWN
DO 13 I=1,IM
C(I)=(g*(h0+d(I)))**0.5
13 CONTINUE
!OROI BOUSSINESQ
IIS=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1

```

```

iksi=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO I=III-iksi,III+iksi
x=ABS((I-III)*DX)
ddd=(d(III)+d(I))/2
pxd=PI*x/(4.0*ddd)
IF(pxd.lt.0.001) pxd=0.001
pxdd(III,I)=(g/(PI*d(III)))*LOG(TANH(pxd))
ENDDO
ENDDO
!ARXIKES SYNTHIKES
PAR=(3*h0/(4*(h0+d(I))))**0.5
DO I=1,1648
Z(I)=h0*Cosh(PAR*(I-jvb)*DX/d(I))**(-2)
U(I)=0.58221/(0.722213+COSH(3.819*(I-jvb)*DX))
ENDDO
OPEN(100,file='ARXIKO.txt')
DO I=1,IM
WRITE(100,*) (I-1)*DX,Z(I)
ENDDO
CLOSE(100)
t=0.0
n=0
OPEN(900,file='MAX.txt')
20 t=t+DT
n=n+1
!CONTINUITY EQUATION
IF(n.le.nbg) THEN
DO 100 I=2,IM-1
h(I)=d(I)+Z(I)
UX=h(I)*(U(I+1)-U(I))/DX
ZX=(Z(I+1)-Z(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZX+dex)*0.5*(U(I+1)+U(I))
ZN(I)=Z(I)-DT*UX-DT*ddx
100 CONTINUE
!NEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ELSE
!PREDICTOR CONTINUITY
DO I=3,IM-2
ZN(I)=Z(I)+(DT/12)*(23*E(I)-16*EO(I)+5*EOO(I))
ENDDO
ENDIF
!MOMENTUM EQUATION

```

```

IF(n.le.nbg) THEN
DO 120 I=3,IM-2
UU=0.5*(U(I+1)+U(I-1))
UX=(U(I+1)-U(I-1))/(2.0*DX)
UUX=DT*UU*UX
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
UN(I)=U(I)-DT*(C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX
FN(I)=-C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX/DT
ELSE
UN(I)=U(I)-DT*g*ZX-UUX+DT*zxfn(I)
FN(I)=-g*ZX-UUX/DT+zxfn(I)
ENDIF
h(I)=d(I)+ZN(I)
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
ZNX=(ZN(I+1)-ZN(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZNX+dex)*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
EN(I)=-UNX(I)-ddx
120 CONTINUE
ELSE
!PREDICTOR MOMENTUM
DO I=3,IM-2
UN(I)=U(I)+(DT/12)*(23*F(I)-16*FO(I)+5*FOO(I))
ENDDO
ENDIF
!THRAYSH
112 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).ge.0.0) THEN
Zb(I)=ZN(I)
ELSE
Zb(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
I=IM-2
999 IF(I.gt.lbrk) THEN
I=I-1
ZX=(Zb(I+1)-Zb(I-1))/(2.0*DX)
Zxbr=-ctb(I)
IF(ZX.lt.Zxbr) THEN
ISR=I
I=I-1
998 IF(I.le.lbrk) GOTO 997
HLC=Zb(I)+d(I)
Hdr=d(ISR)+Zb(ISR)+TAND(fk)*(ISR-I)*DX
delt(I)=HLC-Hdr
IF(delt(I).lt.0.0) THEN
delt(I)=0.0
Ir(I)=(ISR-I)*DX
DO 996 J=I+1,ISR
Khu(J)=2*C(J)*d(J)
Kh(J)=0.2*C(J)*d(J)
XX(J)=(J-1)*DX-(I-1)*DX
XL(J)=XX(J)/Ir(I)-1
vh(J)=-Kh(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
vhu(J)=-Khu(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
996 CONTINUE
delt(ISR)=0.001

```



```

GOTO 999
ELSE
I=I-1
GOTO 998
ENDIF
ELSE
GOTO 999
ENDIF
ELSE
ENDIF
997 CONTINUE
DO I=lbrk,IM-1
IF(delt(I).ne.0.0) THEN
ist(I)=1.0
ELSE
ist(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
IUPDATE CTB
DO I=lbrk,IM
IF(ist(I).eq.1.0) THEN
DO II=I+1,IM
ctb(II)=TAND(ff)
ENDDO
ELSE
IF(ist(I).eq.0.0) THEN
ctb(I)=tand(fb)
ELSE
ENDIF
ENDIF
ENDDO
DO II=1,2
DO I=2,IM-1
vh(I)=0.8*vh(I)+0.1*vh(I+1)+0.1*vh(I-1)
vhu(I)=0.8*vhu(I)+0.1*vhu(I+1)+0.1*vhu(I-1)
ENDDO
ENDDO
ICORRECTOR CONTINUITY
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
101 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)
Dh(I)=vh(I)*((hhz(I+1)-2*hhz(I)+hhz(I-1))/DX**2)+((vh(I+1)-vh(I-1))/(2.0*DX))*hhzx
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
hnx=(h(I+1)-h(I-1))/(2.0*DX)
ddx=hnx*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
IF(Dh(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dh(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dh(I)=0.0
EN(I)=-UNX(I)-ddx+Dh(I)
ZNIT(I)=Z(I)-delt(I)+(DT/24)*(9*EN(I)+19*E(I)-5*EO(I)+EOO(I))

```

```

ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(ZN(I)-ZNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(ZNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
GOTO 101
ELSE
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
INEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ICORRECTOR MOMENTUM
102 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)
UU=0.5*(UN(I+1)+UN(I-1))
UX=(UN(I+1)-UN(I-1))/(2.0*DX)
UUX=UU*UX*DT
ZNX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
dvhu(I)=(vhu(I+1)-vhu(I-1))/(2.0*DX)
IF(hhz(I).gt.DEN) THEN
Dhu1(I)=dvhu(I)*hhzx*UN(I)/hhz(I)+dvhu(I)*UX+2*vhu(I)*hhzx*UX/hhz(I)
ELSE
Dhu1(I)=dvhu(I)
ENDIF

```

```

Dhu2(I)=vhu(I)*(UN(I+1)-2*UN(I)+UN(I-1))/(DX**2)
Dhu(I)=Dhu1(I)+Dhu2(I)
IF(Dhu(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dhu(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dhu(I)=0.0
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
FN(I)=-C(I)**2*ZNX/d(I)-UUX/DT+Dhu(I)
ELSE
FN(I)=-g*ZNX-UUX/DT+zxfn(I)+Dhu(I)
ENDIF
UNIT(I)=U(I)+(DT/24)*(9*FN(I)+19*F(I)-5*FO(I)+FOO(I))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(UN(I)-UNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(UNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
UN(I)=UNIT(I)
ENDDO
GOTO 102
ELSE
DO I=3,IM-2
UN(I)=UNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
DO I=1,IM
IF(Dh(I).lt.max1) max1=Dh(I)
IF(Dhu(I).lt.max2) max2=Dhu(I)
ENDDO
WRITE(900,*) t,max1,max2
!ORIAKES SYNTHIKES-APORROFHTIKA ORIA
ims=IM-20
DO 667 I=ims,IM-10
ml1=I-IM+10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
667 CONTINUE
ims1=IM-10
DO 677 I=IM,ims1,-1
ml1=IM-I-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
677 CONTINUE
q1=U(IM)
q2=U(IM-1)
ux=(q1-q2)/DX
UN(1)=UN(2)
UN(IM)=U(IM)-DT*C(IM)*ux
!FILTRARISMA
DO I=jv2+IIS-2,1780

```

```

ZN(I)=0.999*ZN(I)+0.0005*ZN(I-1)+0.0005*ZN(I+1)
UN(I)=0.999*UN(I)+0.0005*UN(I-1)+0.0005*UN(I+1)
ENDDO
DO I=1781,IM
ZN(I)=0.85*ZN(I)+0.075*ZN(I-1)+0.075*ZN(I+1)
UN(I)=0.85*UN(I)+0.075*UN(I-1)+0.075*UN(I+1)
ENDDO
OPEN(12345,file='TH.txt')
DO I=1,IM
WRITE(12345,*) I,Dhu(I)
ENDDO
CLOSE(12345)
!UPDATE TIMWN
DO I=1,IM
Z(I)=ZN(I)
U(I)=UN(I)
EOO(I)=EO(I)
EO(I)=E(I)
E(I)=EN(I)
FOO(I)=FO(I)
FO(I)=F(I)
F(I)=FN(I)
vh(I)=0.0
vhu(I)=0.0
Kh(I)=0.0
Khu(I)=0.0
Dh(I)=0.0
Dhu(I)=0.0
delt(I)=0.0
ist(I)=0.0
lr(I)=0.0
ENDDO
max1=0.0
max2=0.0
WRITE(*,*) t
DO I=1,IM
IF(ZN(I).gt.ZMAX(I)) ZMAX(I)=ZN(I)
IF(ZN(I).lt.ZMIN(I)) ZMIN(I)=ZN(I)
HEIGHT(I)=ZMAX(I)-ZMIN(I)
ENDDO
WRITE(*,*) t
OPEN(10,file='HEIGHT.txt')
DO I=1,IM
WRITE(10,*) (I-1)*DX,HEIGHT(I)
ENDDO
CLOSE(10)
IF(n.eq.2662) THEN
OPEN(11,file='t10.txt')
DO I=1,IM
WRITE(11,*) (IM-I)*DX,ZN(I)/d(jvb)
ENDDO
CLOSE(11)
ELSE
ENDIF
IF(n.eq.2840) THEN
OPEN(12,file='t15.txt')
DO I=1,IM
WRITE(12,*) (IM-I)*DX,ZN(I)/d(jvb)

```

```
ENDDO
CLOSE(12)
ELSE
ENDIF
IF(n.eq.3033) THEN
OPEN(13,file='t20.txt')
DO I=1,IM
WRITE(13,*) (IM-I)*DX,ZN(I)/d(jvb)
ENDDO
CLOSE(13)
ELSE
ENDIF
IF(n.eq.3127) THEN
OPEN(14,file='t22.txt')
DO I=1,IM
WRITE(14,*) (IM-I)*DX,ZN(I)/d(jvb)
ENDDO
CLOSE(14)
ELSE
ENDIF
IF(t.lt.tend) THEN
GOTO 20
ELSE
STOP
ENDIF
CLOSE(900)
END
```

A6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ MASE ΚΑΙ KIRBY (1992)

```

PROGRAM MASEKIRBY
IMPLICIT NONE
REAL DX,DT,tr,PI,g,DEN,PER,da,LENGO,akd,dlen,x,ddd,pxd,t,UX,ZX,dex,ddx,UUX,SUM1,SUM2,diff
REAL UU,delta,bta,alen,z1,chi,chis
REAL fsource,m1,m2,rm,q1,q2,LEN,ZNX,Zxbr,HLC,Hdr,fb,ff,T12,hhzx,hnx,max1,max2,tim
REAL d(10000),zxf(10000),LENG(10000),C(10000),pxdd(10000,10000),h(10000),Z(10000),U(10000),ZN(10000)
REAL ZXK(10000),tbrk(10000),hhz(10000),Dhu1(10000),dvhu(10000)
REALsumx(10000),zxfn(10000),E(10000),EO(10000),EOO(10000),UN(10000),FN(10000),UNX(10000),EN(10000)
REAL Zb(10000),XX(10000),XL(10000),Dh(10000),Dhu2(10000)
REALF(10000),FO(10000),FOO(10000),ZNIT(10000),UNIT(10000),ctb(10000),delt(10000),lr(10000)
REAL Khu(10000),Kh(10000),vh(10000),vhu(10000),Dhu(10000),ist(10000),si(100000)
INTEGER jv1,jv2,IM,iad,nbg,IIS,III,iksi,l,n,jva,jvb,ims,ims1,lbrk,ISR,J,II,nt,ntend
DX=0.02
DT=0.004
tr=4.0
jv1=1
jv2=2
IM=1800
PI=3.141592654
g=9.81
DEN=0.002
iad=904
da=0.47
PER=1.0
nbg=3
lbrk=400
fb=30.0
ff=7.0
nt=26283
ntend=nt-1
T12=0.1*PER
DO I=1,IM
ctb(I)=TAND(fb)
ENDDO
OPEN(15,file='series.txt')
DO I=1,nt
READ(15,*) tim,si(I)
ENDDO
CLOSE(15)
!BYTHOMETRIA
DO 10 I=1,IM
d(I)=da
zxf(I)=0.0
10 CONTINUE
DO I=1001,IM
d(I)=d(I-1)-DX/20.0
IF(d(I).le.0.04) d(I)=0.04
ENDDO
DO 12 I=IM-10,IM
d(I)=d(IM-10)
12 CONTINUE
!STOIXEIA KYMATISMWN (LINEAR DISPERSION EQUATION)
LENGO=g*(PER**2)/(2.0*PI)
DO 13 I=1,IM
LENG(I)=LENGO

```

```

14 LEN=LENG(I)
akd=(2*PI)*d(I)/LEN
LENG(I)=LENGO*TANH(akd)
dlen=ABS(LENG(I)-LEN)
IF(dlen.gt.0.0001) GOTO 14
C(I)=((g*PER)/(2.0*PI))*TANH(akd)
13 CONTINUE
!OROI BOUSSINESQ
IIS=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
iksi=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO I=III-iksi,III+iksi
x=ABS((I-III)*DX)
ddd=(d(III)+d(I))/2
pxd=PI*x/(4.0*ddd)
IF(pxd.lt.0.001) pxd=0.001
pxdd(III,I)=(g/(PI*d(III)))*LOG(TANH(pxd))
ENDDO
ENDDO
t=0.0
n=0
OPEN(900,file='MAX.txt')
20 t=t+DT
n=n+1
nt=n
!CONTINUITY EQUATION
IF(n.le.nbg) THEN
DO 100 I=2,IM-1
h(I)=d(I)+Z(I)
UX=h(I)*(U(I+1)-U(I))/DX
ZX=(Z(I+1)-Z(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZX+dex)*0.5*(U(I+1)+U(I))
ZN(I)=Z(I)-DT*UX-DT*ddx
100 CONTINUE
!NEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ELSE
!PREDICTOR CONTINUITY
DO I=3,IM-2
ZN(I)=Z(I)+(DT/12)*(23*E(I)-16*EO(I)+5*EOO(I))
ENDDO
ENDIF
!MOMENTUM EQUATION

```

```

IF(n.le.nbg) THEN
DO 120 I=3,IM-2
UU=0.5*(U(I+1)+U(I-1))
UX=(U(I+1)-U(I-1))/(2.0*DX)
UUX=DT*UU*UX
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
UN(I)=U(I)-DT*(C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX
FN(I)=-C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX/DT
ELSE
UN(I)=U(I)-DT*g*ZX-UUX+DT*zxfn(I)
FN(I)=-g*ZX-UUX/DT+zxfn(I)
ENDIF
h(I)=d(I)+ZN(I)
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
ZNX=(ZN(I+1)-ZN(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZNX+dex)*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
EN(I)=-UNX(I)-ddx
120 CONTINUE
ELSE
!PREDICTOR MOMENTUM
DO I=3,IM-2
UN(I)=U(I)+(DT/12)*(23*F(I)-16*FO(I)+5*FOO(I))
ENDDO
ENDIF
!THRAYSH
112 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).ge.0.0) THEN
Zb(I)=ZN(I)
ELSE
Zb(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
I=IM-2
999 IF(I.gt.lbrk) THEN
I=I-1
ZX=(Zb(I+1)-Zb(I-1))/(2.0*DX)
Zxbr=-ctb(I)
IF(ZX.lt.Zxbr) THEN
ISR=I
I=I-1
998 IF(I.le.lbrk) GOTO 997
HLC=Zb(I)+d(I)
Hdr=d(ISR)+Zb(ISR)-Zxbr*(ISR-I)*DX
delt(I)=HLC-Hdr
IF(delt(I).lt.0.0) THEN
delt(I)=0.0
Ir(I)=(ISR-I)*DX
DO 996 J=I+1,ISR
Khu(J)=2*C(J)*d(J)
Kh(J)=0.2*C(J)*d(J)
XX(J)=(J-1)*DX-(I-1)*DX
XL(J)=XX(J)/Ir(I)-1
vh(J)=-Kh(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
vhu(J)=-Khu(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
996 CONTINUE
delt(ISR)=0.001

```



```

GOTO 999
ELSE
I=I-1
GOTO 998
ENDIF
ELSE
GOTO 999
ENDIF
ELSE
ENDIF
997 CONTINUE
DO I=Ibrk,IM-1
IF(delt(I).ne.0.0) THEN
ist(I)=1.0
IF(tbrk(I).eq.0.0) THEN
tbrk(I)=t
ELSE
ENDIF
ELSE
ist(I)=0.0
tbrk(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
IUPDATE CTB
DO I=Ibrk,IM
IF(ist(I).eq.1.0) THEN
DO II=I+1,IM
ctb(II)=TAND(ff)+(TAND(fb)-TAND(ff))*EXP(-LOG(2.0)*(t-tbrk(II))/T12)
tbrk(II)=tbrk(II)
ENDDO
ELSE
IF(ist(I).eq.0.0) THEN
ctb(I)=tand(fb)
tbrk(I)=0.0
ELSE
ENDIF
ENDIF
ENDDO
DO II=1,2
DO I=2,IM-1
vh(I)=0.8*vh(I)+0.1*vh(I+1)+0.1*vh(I-1)
vhu(I)=0.8*vhu(I)+0.1*vhu(I+1)+0.1*vhu(I-1)
ENDDO
ENDDO
ICORRECTOR CONTINUITY
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
101 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)
Dh(I)=vh(I)*((hhz(I+1)-2*hhz(I)+hhz(I-1))/DX**2)+((vh(I+1)-vh(I-1))/(2.0*DX))*hhzx

```

```

UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
hnx=(h(I+1)-h(I-1))/(2.0*DX)
ddx=hnx*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
IF(Dh(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dh(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dh(I)=0.0
EN(I)=-UNX(I)-ddx+Dh(I)
ZNIT(I)=Z(I)-delt(I)+(DT/24)*(9*EN(I)+19*E(I)-5*EO(I)+E00(I))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(ZN(I)-ZNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(ZNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
GOTO 101
ELSE
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
INEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ICORRECTOR MOMENTUM
102 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)
UU=0.5*(UN(I+1)+UN(I-1))
UX=(UN(I+1)-UN(I-1))/(2.0*DX)
UUX=UU*UX*DT

```

```

ZNX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
dvhu(I)=(vhu(I+1)-vhu(I-1))/(2.0*DX)
IF(hhz(I).gt.DEN) THEN
Dhu1(I)=dvhu(I)*hhzx*UN(I)/hhz(I)+dvhu(I)*UX+2*vhu(I)*hhzx*UX/hhz(I)
ELSE
Dhu1(I)=dvhu(I)
ENDIF
Dhu2(I)=vhu(I)*(UN(I+1)-2*UN(I)+UN(I-1))/(DX**2)
Dhu(I)=Dhu1(I)+Dhu2(I)
IF(Dhu(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dhu(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dhu(I)=0.0
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
FN(I)=-C(I)**2*ZNX/d(I)-UUX/DT+Dhu(I)
ELSE
FN(I)=-g*ZNX-UUX/DT+zxfn(I)+Dhu(I)
ENDIF
UNIT(I)=U(I)+(DT/24)*(9*FN(I)+19*F(I)-5*FO(I)+FOO(I))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(UN(I)-UNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(UNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
UN(I)=UNIT(I)
ENDDO
GOTO 102
ELSE
DO I=3,IM-2
UN(I)=UNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
DO I=1,IM
IF(Dh(I).lt.max1) max1=Dh(I)
IF(Dhu(I).lt.max2) max2=Dhu(I)
ENDDO
WRITE(900,*) t,max1,max2
jva=jv1+IIS+iad
jvb=jv2+IIS+iad
IPHGH KYMATISMWN
alen=C(jvb)*PER
delta=0.3
bta=80.0/((delta*alen)**2)
z1=0.060*si(n+1)
DO I=1,IM
chi=(I-1)*DX
chis=(jvb-1)*DX
fsource=EXP(-bta*(chi-chis)**2)
ZN(I)=ZN(I)+z1*fsource
ENDDO
IORIAKES SYNTHIKES-APORROFHTIKA ORIA
DO 665 I=1,10
ml1=-I-10
ml2=-10.0

```

```

rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
665 CONTINUE
DO 675 I=20,10,-1
ml1=10-I
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
675 CONTINUE
ims=IM-20
DO 667 I=ims,IM-10
ml1=I-IM+10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
667 CONTINUE
ims1=IM-10
DO 677 I=IM,ims1,-1
ml1=IM-I-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(I)=ZN(I)/rm
UN(I)=UN(I)/rm
677 CONTINUE
q1=U(IM)
q2=U(IM-1)
ux=(q1-q2)/DX
UN(1)=UN(2)
UN(IM)=U(IM)-DT*C(IM)*ux
!FILTRARISMA
DO I=JV2+IIS-2,IM-IIS-1
ZN(I)=0.99*ZN(I)+0.005*ZN(I-1)+0.005*ZN(I+1)
UN(I)=0.99*UN(I)+0.005*UN(I-1)+0.005*UN(I+1)
ENDDO
OPEN(12345,file='TH.txt')
DO I=1,IM
WRITE(12345,*) I,Dhu(I)
ENDDO
CLOSE(12345)
!UPDATE TIMWN
DO I=1,IM
Z(I)=ZN(I)
U(I)=UN(I)
EOO(I)=EO(I)
EO(I)=E(I)
E(I)=EN(I)
FOO(I)=FO(I)
FO(I)=F(I)
F(I)=FN(I)
vh(I)=0.0
vhu(I)=0.0
Kh(I)=0.0
Khu(I)=0.0
Dh(I)=0.0
Dhu(I)=0.0

```

```
delt(l)=0.0
ist(l)=0.0
lr(l)=0.0
ENDDO
max1=0.0
max2=0.0
WRITE(*,*) t
OPEN(1,file='STATION 1.txt')
OPEN(2,file='STATION 2.txt')
OPEN(3,file='STATION 3.txt')
OPEN(4,file='STATION 4.txt')
OPEN(5,file='STATION 5.txt')
OPEN(6,file='STATION 6.txt')
OPEN(7,file='STATION 7.txt')
OPEN(8,file='STATION 8.txt')
OPEN(9,file='STATION 9.txt')
OPEN(10,file='STATION 10.txt')
OPEN(11,file='STATION 11.txt')
OPEN(12,file='STATION 12.txt')
WRITE(1,*) t,ZN(1000),UN(1000)
WRITE(2,*) t,ZN(1120),UN(1120)
WRITE(3,*) t,ZN(1170),UN(1170)
WRITE(4,*) t,ZN(1220),UN(1220)
WRITE(5,*) t,ZN(1270),UN(1270)
WRITE(6,*) t,ZN(1295),UN(1295)
WRITE(7,*) t,ZN(1320),UN(1320)
WRITE(8,*) t,ZN(1345),UN(1345)
WRITE(9,*) t,ZN(1370),UN(1370)
WRITE(10,*) t,ZN(1395),UN(1395)
WRITE(11,*) t,ZN(1420),UN(1420)
WRITE(12,*) t,ZN(1445),UN(1445)
IF(n.lt.ntend) THEN
GOTO 20
ELSE
STOP
ENDIF
CLOSE(1)
CLOSE(2)
CLOSE(3)
CLOSE(4)
CLOSE(5)
CLOSE(6)
CLOSE(7)
CLOSE(8)
CLOSE(9)
CLOSE(10)
CLOSE(11)
CLOSE(12)
CLOSE(900)
END
```

A7. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ ΒΕJΙ ΚΑΙ ΒΑΤΤJΕS (1993)- ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ

```

PROGRAM BEJIRANDOM
IMPLICIT NONE
REAL DX,DT,tr,PI,g,DEN,PER,da,LENGO,akd,dlen,x,ddd,pxd,t,UX,ZX,dex,ddx,UUX,SUM1,SUM2,diff,UU
REAL ml1,ml2,rm,q1,q2,LEN,ZNX,Zxbr,HLC,Hdr,fb,ff,T12,hhzx,hnx,max1,max2,tim
REAL d(10000),zxf(10000),LENG(10000),C(10000),pxdd(10000,10000),h(10000),Z(10000),U(10000),ZN(10000)
REAL ZXK(10000),tbrk(10000),hhz(10000),Dhu1(10000),dvhu(10000)
REAL sumx(10000),zxfn(10000),E(10000),EO(10000),EOO(10000),UN(10000),FN(10000),UNX(10000),EN(10000)
REAL Zb(10000),XX(10000),XL(10000),Dh(10000),Dhu2(10000)
REAL F(10000),FO(10000),FOO(10000),ZNIT(10000),UNIT(10000),ctb(10000),delt(10000),lr(10000)
REAL Khu(10000),Kh(10000),vh(10000),vhu(10000),Dhu(10000),ist(10000),si(100000)
INTEGER jv1,jv2,IM,iad,nbg,IIS,III,iksi,l,n,jva,jvb,ims,ims1,lbrk,ISR,J,II,nt,ntend
DX=0.025
DT=0.004
tr=4.0
jv1=1
jv2=2
IM=2200
PI=3.141592654
g=9.81
DEN=0.002
iad=774
da=0.4
PER=1.0
nbg=3
lbrk=400
fb=14.0
ff=7.0
nt=25003
ntend=nt-1
T12=0.1*PER
DO I=1,IM
ctb(I)=TAND(fb)
ENDDO
OPEN(15,file='SERIES.txt')
DO I=1,nt
READ(15,*) tim,si(I)
ENDDO
CLOSE(15)
!BYTHOMETRIA
DO 10 I=1,IM
d(I)=da
zxf(I)=0.0
10 CONTINUE
DO 11 I=641,880
d(I)=d(I-1)-DX/20.0
11 CONTINUE
DO I=881,960
d(I)=d(880)
ENDDO
DO I=961,1080
d(I)=d(I-1)+DX/10.0
ENDDO
DO I=1159,IM

```

```

d(l)=d(l-1)-DX/25.0
IF(d(l).le.0.06) d(l)=0.06
ENDDO
DO 12 l=IM-10,IM
d(l)=d(IM-10)
12 CONTINUE
!STOIXEIA KYMATISMWN (LINEAR DISPERSION EQUATION)
LENGO=g*(PER**2)/(2.0*PI)
DO 13 l=1,IM
LENG(l)=LENGO
14 LEN=LENG(l)
akd=(2*PI)*d(l)/LEN
LENG(l)=LENGO*TANH(akd)
dlen=ABS(LENG(l)-LEN)
IF(dlen.gt.0.0001) GOTO 14
C(l)=((g*PER)/(2.0*PI))*TANH(akd)
13 CONTINUE
!OROI BOUSSINESQ
IIS=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
iksi=INT(tr*d(jv2)/DX)
DO l=III-iksi,III+iksi
x=ABS((l-III)*DX)
ddd=(d(III)+d(l))/2
pxd=PI*x/(4.0*ddd)
IF(pxd.lt.0.001) pxd=0.001
pxdd(III,l)=(g/(PI*d(III)))*LOG(TANH(pxd))
ENDDO
ENDDO
t=0.0
n=0
OPEN(900,file='MAX.txt')
20 t=t+DT
n=n+1
nt=n
!CONTINUITY EQUATION
IF(n.le.nbg) THEN
DO 100 l=2,IM-1
h(l)=d(l)+Z(l)
UX=h(l)*(U(l+1)-U(l))/DX
ZX=(Z(l+1)-Z(l-1))/(2.0*DX)
dex=(d(l+1)-d(l-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZX+dex)*0.5*(U(l+1)+U(l))
ZN(l)=Z(l)-DT*UX-DT*ddx
100 CONTINUE
!NEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO l=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(l)-ZN(III)-ZN(l-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(l)=ZX*pxdd(III,l)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO l=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(l)+4.0*ZXK(l+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO l=jv2+IIS+1,IM-IIS-1

```

```

ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ELSE
!PREDICTOR CONTINUITY
DO I=3,IM-2
ZN(I)=Z(I)+(DT/12)*(23*E(I)-16*EO(I)+5*EOO(I))
ENDDO
ENDIF
!MOMENTUM EQUATION
IF(n.le.nbg) THEN
DO 120 I=3,IM-2
UU=0.5*(U(I+1)+U(I-1))
UX=(U(I+1)-U(I-1))/(2.0*DX)
UUX=DT*UU*UX
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
IF(I.lt.jv2+IIS+1.or.I.gt.IM-IIS-1) THEN
UN(I)=U(I)-DT*(C(I)**2)*ZX/d(I)-UUX
FN(I)=-C(I)**2*ZX/d(I)-UUX/DT
ELSE
UN(I)=U(I)-DT*g*ZX-UUX+DT*zxfn(I)
FN(I)=-g*ZX-UUX/DT+zxfn(I)
ENDIF
h(I)=d(I)+ZN(I)
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
ZNX=(ZN(I+1)-ZN(I-1))/(2.0*DX)
dex=(d(I+1)-d(I-1))/(2.0*DX)
ddx=(ZNX+dex)*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
EN(I)=-UNX(I)-ddx
120 CONTINUE
ELSE
!PREDICTOR MOMENTUM
DO I=3,IM-2
UN(I)=U(I)+(DT/12)*(23*F(I)-16*FO(I)+5*FOO(I))
ENDDO
ENDIF
!THRAYSH
112 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).ge.0.0) THEN
Zb(I)=ZN(I)
ELSE
Zb(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
I=IM-2
999 IF(I.gt.lbrk) THEN
I=I-1
ZX=(Zb(I+1)-Zb(I-1))/(2.0*DX)
Zxbr=-ctb(I)
IF(ZX.lt.Zxbr) THEN
ISR=I
I=I-1
998 IF(I.le.lbrk) GOTO 997
HLC=Zb(I)+d(I)
Hdr=d(ISR)+Zb(ISR)-Zxbr*(ISR-I)*DX
delt(I)=HLC-Hdr
IF(delt(I).lt.0.0) THEN
delt(I)=0.0

```



```

Ir(I)=(ISR-I)*DX
DO 996 J=I+1,ISR
Khu(J)=2*C(J)*d(J)
Kh(J)=0.2*C(J)*d(J)
XX(J)=(J-1)*DX-(I-1)*DX
XL(J)=XX(J)/Ir(I)-1
vh(J)=-Kh(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
vhu(J)=-Khu(J)*EXP(XL(J))*(XL(J)+XL(J)**2)
996 CONTINUE
delt(ISR)=0.001
GOTO 999
ELSE
I=I-1
GOTO 998
ENDIF
ELSE
GOTO 999
ENDIF
ELSE
ENDIF
997 CONTINUE
DO I=lbrk,IM-1
IF(delt(I).ne.0.0) THEN
ist(I)=1.0
IF(tbrk(I).eq.0.0) THEN
tbrk(I)=t
ELSE
ENDIF
ELSE
ist(I)=0.0
tbrk(I)=0.0
ENDIF
ENDDO
IUPDATE CTB
DO I=lbrk,IM
IF(ist(I).eq.1.0) THEN
DO II=I+1,IM
ctb(II)=TAND(ff)+(TAND(fb)-TAND(ff))*EXP(-LOG(2.0)*(t-tbrk(II))/T12)
tbrk(II)=tbrk(II)
ENDDO
ELSE
IF(ist(I).eq.0.0) THEN
ctb(I)=tand(fb)
tbrk(I)=0.0
ELSE
ENDIF
ENDIF
ENDDO
DO II=1,2
DO I=2,IM-1
vh(I)=0.8*vh(I)+0.1*vh(I+1)+0.1*vh(I-1)
vhu(I)=0.8*vhu(I)+0.1*vhu(I+1)+0.1*vhu(I-1)
ENDDO
ENDDO
ICORRECTOR CONTINUITY
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
101 DO I=3,IM-2

```

```

IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)
IF(h(I).le.0.0) h(I)=d(I)
ELSE
h(I)=d(I)+ZN(I)-delt(I)
ENDIF
hhz(I)=ZN(I)+d(I)
IF(hhz(I).lt.0.0) hhz(I)=d(I)
hhzx=(hhz(I+1)-hhz(I-1))/(2.0*DX)
Dh(I)=vh(I)*((hhz(I+1)-2*hhz(I)+hhz(I-1))/DX**2)+((vh(I+1)-vh(I-1))/(2.0*DX))*hhzx
UNX(I)=h(I)*(UN(I+1)-UN(I))/DX
hnx=(h(I+1)-h(I-1))/(2.0*DX)
ddx=hnx*0.5*(UN(I+1)+UN(I))
IF(Dh(I).ne.0.0.and.ZN(I).le.0.0) Dh(I)=0.0
IF(ist(I).ne.1.0) Dh(I)=0.0
EN(I)=-UNX(I)-ddx+Dh(I)
ZNIT(I)=Z(I)-delt(I)+(DT/24)*(9*EN(I)+19*E(I)-5*EO(I)+EOO(I))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO I=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(ZN(I)-ZNIT(I))
SUM2=SUM2+ABS(ZNIT(I))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
GOTO 101
ELSE
DO I=3,IM-2
ZN(I)=ZNIT(I)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
IF(n.le.nbg) THEN
ELSE
INEOI OROI BOUSSINESQ
DO III=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
DO I=III-iksi,III+iksi
ZX=(ZN(I)-ZN(III)-ZN(I-1)+ZN(III-1))/DX
ZXK(I)=ZX*pxdd(III,I)
ENDDO
sumx(III)=ZXK(III-iksi)+ZXK(III+iksi)+4.0*ZXK(III-iksi+1)
DO I=III-iksi+1,III+iksi-1,2
sumx(III)=sumx(III)+2.0*ZXK(I)+4.0*ZXK(I+1)
ENDDO
sumx(III)=sumx(III)*DX/3
ENDDO
DO I=jv2+IIS+1,IM-IIS-1
ZX=(ZN(I)-ZN(I-1))/DX
zxfn(I)=sumx(I)
ENDDO
ICORRECTOR MOMENTUM
102 DO I=3,IM-2
IF(ZN(I).le.0.0) THEN
h(I)=d(I)+ZN(I)

```

```

IF(h(l).le.0.0) h(l)=d(l)
ELSE
h(l)=d(l)+ZN(l)-delt(l)
ENDIF
hhz(l)=ZN(l)+d(l)
IF(hhz(l).lt.0.0) hhz(l)=d(l)
hhzx=(hhz(l+1)-hhz(l-1))/(2.0*DX)
UU=0.5*(UN(l+1)+UN(l-1))
UX=(UN(l+1)-UN(l-1))/(2.0*DX)
UUX=UU*UX*DT
ZNX=(ZN(l)-ZN(l-1))/DX
dvhu(l)=(vhu(l+1)-vhu(l-1))/(2.0*DX)
IF(hhz(l).gt.DEN) THEN
Dhu1(l)=dvhu(l)*hhzx*UN(l)/hhz(l)+dvhu(l)*UX+2*vhu(l)*hhzx*UX/hhz(l)
ELSE
Dhu1(l)=dvhu(l)
ENDIF
Dhu2(l)=vhu(l)*(UN(l+1)-2*UN(l)+UN(l-1))/(DX**2)
Dhu(l)=Dhu1(l)+Dhu2(l)
IF(Dhu(l).ne.0.0.and.ZN(l).le.0.0) Dhu(l)=0.0
IF(ist(l).ne.1.0) Dhu(l)=0.0
IF(l.lt.jv2+IIS+1.or.l.gt.IM-IIS-1) THEN
FN(l)=-C(l)**2*ZNX/d(l)-UUX/DT+Dhu(l)
ELSE
FN(l)=-g*ZNX-UUX/DT+zxfn(l)+Dhu(l)
ENDIF
UNIT(l)=U(l)+(DT/24)*(9*FN(l)+19*F(l)-5*FO(l)+FOO(l))
ENDDO
SUM1=0.0
SUM2=0.0
DO l=3,IM-2
SUM1=SUM1+ABS(UN(l)-UNIT(l))
SUM2=SUM2+ABS(UNIT(l))
ENDDO
diff=SUM1/SUM2
IF(diff.ge.0.001) THEN
DO l=3,IM-2
UN(l)=UNIT(l)
ENDDO
GOTO 102
ELSE
DO l=3,IM-2
UN(l)=UNIT(l)
ENDDO
ENDIF
ENDIF
DO l=1,IM
IF(Dh(l).lt.max1) max1=Dh(l)
IF(Dhu(l).lt.max2) max2=Dhu(l)
ENDDO
WRITE(900,*) t,max1,max2
jva=jv1+IIS+iad
jvb=jv2+IIS+iad
IPHGH KYMATISMWN
ZN(jvb)=si(nt+1)
UN(jvb)=C(jvb)*si(nt+1)/(d(jvb)+si(nt+1))
!ORIAKES SYNTHIKES-APORROFHTIKA ORIA
DO 665 l=1,10

```

```

ml1=l-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(l)=ZN(l)/rm
UN(l)=UN(l)/rm
665 CONTINUE
DO 675 l=20,10,-1
ml1=10-l
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(l)=ZN(l)/rm
UN(l)=UN(l)/rm
675 CONTINUE
ims=IM-20
DO 667 l=ims,IM-10
ml1=l-IM+10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(l)=ZN(l)/rm
UN(l)=UN(l)/rm
667 CONTINUE
ims1=IM-10
DO 677 l=IM,ims1,-1
ml1=IM-l-10
ml2=-10.0
rm=EXP((1.8**(ml1)-1.8**(ml2))*1.6)
ZN(l)=ZN(l)/rm
UN(l)=UN(l)/rm
677 CONTINUE
q1=U(IM)
q2=U(IM-1)
ux=(q1-q2)/DX
UN(1)=UN(2)
UN(IM)=U(IM)-DT*C(IM)*ux
!FILTRARISMA
DO l=jv2+IIS-2,IM-IIS-1
ZN(l)=0.99*ZN(l)+0.005*ZN(l-1)+0.005*ZN(l+1)
UN(l)=0.99*UN(l)+0.005*UN(l-1)+0.005*UN(l+1)
ENDDO
OPEN(12345,file='TH.txt')
DO l=1,IM
WRITE(12345,*) l,Dhu(l)
ENDDO
CLOSE(12345)
!UPDATE TIMWN
DO l=1,IM
Z(l)=ZN(l)
U(l)=UN(l)
EOO(l)=EO(l)
EO(l)=E(l)
E(l)=EN(l)
FOO(l)=FO(l)
FO(l)=F(l)
F(l)=FN(l)
vh(l)=0.0
vhu(l)=0.0
Kh(l)=0.0
Khu(l)=0.0

```

```
Dh(l)=0.0
Dhu(l)=0.0
delt(l)=0.0
ist(l)=0.0
lr(l)=0.0
ENDDO
max1=0.0
max2=0.0
WRITE(*,*) t
OPEN(1,file='STATION 1.txt')
OPEN(2,file='STATION 2.txt')
OPEN(3,file='STATION 3.txt')
OPEN(4,file='STATION 4.txt')
OPEN(5,file='STATION 5.txt')
OPEN(6,file='STATION 6.txt')
OPEN(7,file='STATION 7.txt')
OPEN(8,file='STATION 8.txt')
WRITE(1,*) t,ZN(640),UN(640)
WRITE(2,*) t,100*ZN(840)
WRITE(3,*) t,ZN(880),UN(880)
WRITE(4,*) t,100*ZN(920)
WRITE(5,*) t,ZN(960),UN(960)
WRITE(6,*) t,100*ZN(1000)
WRITE(7,*) t,ZN(1040),UN(1040)
WRITE(8,*) t,100*ZN(1080)
IF(nt.lt.ntend) THEN
GOTO 20
ELSE
STOP
ENDIF
CLOSE(1)
CLOSE(2)
CLOSE(3)
CLOSE(4)
CLOSE(5)
CLOSE(6)
CLOSE(7)
CLOSE(8)
CLOSE(900)
END
```


ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ ΣΕ FORTRAN 90

B1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

```
PROGRAM PAREMVOLI
IMPLICIT NONE
REAL t(100000),Z(100000),U(100000),x(100000)
REAL DT
INTEGER n,I,J
DT=0.004
OPEN(1,file='series.txt')
DO I=1,15000
READ(1,*) t(I),Z(I)
ENDDO
CLOSE(1)
U(1)=Z(1)
x(1)=t(1)
n=INT(t(15000)/DT)
DO I=2,n+1
x(I)=x(I-1)+DT
ENDDO
DO I=1,n+1
DO J=1,14999
IF(t(J).lt.x(I).and.t(J+1).ge.x(I)) THEN
U(I)=((Z(J+1)-Z(J))/(t(J+1)-t(J)))*(x(I)-t(J))+Z(J)
ELSE
ENDIF
ENDDO
ENDDO
OPEN(2,file='PHGH.txt')
DO I=1,n+1
WRITE(2,*) x(I),U(I)
ENDDO
CLOSE(2)
STOP
END
```

**B2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΑΣ ΤΥΧΑΙΩΝ
ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΑΠΟ ΦΑΣΜΑ JONSWAP**

```
PROGRAM XRONOSEIRAJONSWAP
IMPLICIT NONE
REAL f(100000),Spec(100000),H(100000),RND(100000),phi(100000)
REAL df,PI,dt,t,Z,tend
INTEGER M,I,IS
PI=3.14159265
IS=531
M=251
df=0.01
dt=0.004
tend=100.0
OPEN(1,file='PHGH.txt')
DO I=1,M
READ(1,*) f(I),Spec(I)
ENDDO
CLOSE(1)
```



```

DO I=1,M
H(I)=2.0*(2.0*Spec(I)*df)**0.5
ENDDO
DO I=1,M
IS=MOD(193*IS,37447)
RND(I)=FLOAT(IS)/37447.0
phi(I)=2*PI*RND(I)
ENDDO
t=-dt
100 t=t+dt
Z=0.0
DO I=1,M
Z=Z+0.5*H(I)*Cos(2*PI*f(I)*t+phi(I))
ENDDO
OPEN(2,file='SERIES.txt')
IF(t.lt.tend) THEN
WRITE(*,*) t
WRITE(2,*) t,0.01*Z
GOTO 100
ELSE
ENDIF
STOP
END

```

B3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FAST FOURIER (FFT)

Ο παρακάτω υπολογιστικός κώδικας υπολογίζει κανονικοποιημένα φάσματα. Αρχικά εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Fast Fourier (FFT) ώστε να παραχθεί το ενεργειακό φάσμα. Στη συνέχεια το φάσμα διαιρείται με τη μηδενική ροπή m_0 που υπολογίζεται από το σύνθετο τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης του Simpson που δίνεται από τη σχέση (7.11).

```

PROGRAM FOURIER
REAL tt
PARAMETER (JJM=40000)
! FINITE FOURIER SERIES ANALYSIS
DIMENSION F(JJM),A(JJM),B(JJM),AMPL(JJM),PHI(JJM),RND(JJM),ff(JJM),SS(JJM)
open (3,file='series.txt')
open (11,file='spectf1.dat')
NN=25000
DT=0.004
tt=0.0
do 87 i=1,NN
87  READ (3,*) abcd,F(i)
CLOSE(3)
NNN=NN-1
N=NN/2
IS=531
DO I=1,N
IS=MOD(193*IS,37447)
RND(I)=FLOAT(IS)/37447.0
phi(I)=0.0
ENDDO
DO 5 I=1,N
write (*,*) i

```

```
A(I)=0
DO 10 K=1,NN
10 A(I)=A(I)+F(K)*SIN(6.2832*I*(K-1)/NNN)
5 A(I)=2*A(I)/NN
DO 15 I=1,N
write (*,*) i
B(I)=0
DO 20 K=1,NNN
20 B(I)=B(I)+F(K)*COS(6.2832*I*(K-1)/NNN)
15 B(I)=2*B(I)/NN
AMAX=0
DO 30 I=1,N
write (*,*) i
AMPL(I)=(A(I)**2+B(I)**2)
30 continue
do i=2,n-1
ampl(i)=(.5*ampl(i)+.25*ampl(i-1)+.25*ampl(i+1))
end do
do i=2,n-1
ampl(i)=(.5*ampl(i)+.25*ampl(i-1)+.25*ampl(i+1))
end do
do i=2,n-1
ampl(i)=(.5*ampl(i)+.25*ampl(i-1)+.25*ampl(i+1))
end do
DO K=1,N
ff(K)=K/(NN*DT)
SS(K)=0.5*AMPL(K)*NN*DT
ENDDO
tt=17*SS(1)+59*SS(2)+43*SS(3)+49*SS(4)+49*SS(N-3)+43*SS(N-2)+59*SS(N-1)+17*SS(N)
DO I=5,N-4
tt=tt+48*SS(I)
ENDDO
tt=(tt/48)*(ff(N)-ff(1))/(N-1)+0.5*SS(1)*ff(1)
WRITE(*,*) "tt=",tt
WRITE(11,50) 0.0,0.0
50 FORMAT(2F12.6)
do 871 k=1,N
871 WRITE(11,40) K/(NN*DT),SS(K)/tt
40 FORMAT(2F12.6)
STOP
END
```

ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο κατάλογος όλων των χρησιμοποιούμενων συμβόλων στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία. Κάθε σύμβολο συνοδεύεται από τον ορισμό του και τη σελίδα στην οποία εμφανίζεται για πρώτη φορά. Η ταξινόμηση γίνεται βάσει της σειράς εμφάνισης των συμβόλων. Σε περίπτωση που κάποιο σύμβολο έχει διαφορετικές ερμηνείες αναφέρονται όλες ακολουθώντας πάντα τη σειρά εμφάνισής τους.

T	Περίοδος κυματισμών	σελ. 4
\bar{n}	Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε επιφάνεια	σελ. 6
\bar{v}	Ταχύτητα τυχαίου όγκου ρευστού	σελ. 6
Δ	Τελεστής Laplace	σελ. 6
grad	Τελεστής βαθμίδας	σελ. 6
M	Τυχαία μάζα ρευστού	σελ. 6
p	Πίεση	σελ. 6
S	Εμβαδό περιβάλλουσας επιφάνειας ρευστού τυχαίου όγκου και μάζας	σελ. 6
t	Χρόνος	σελ. 6
u	Συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα x	σελ. 6
V	Τυχαίος όγκος ρευστού	σελ. 6
v	Συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα y	σελ. 6
w	Συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα z	σελ. 6
x	Τετμημένη σημείου	σελ. 6
y	Τεταγμένη σημείου	σελ. 6
z	Κατηγμένη σημείου	σελ. 6
ρ	Πυκνότητα ρευστού	σελ. 6
Φ	Συνάρτηση βαθμωτού δυναμικού	σελ. 6
∇	Τελεστής βαθμίδας	σελ. 6
C(t)	Σταθερά χωρικής ολοκλήρωσης (συνάρτηση του χρόνου)	σελ. 7
g	Επιτάχυνση της βαρύτητας	σελ. 7
h	Βάθος ηρεμίας νερού	σελ. 7
L	Μήκος κύματος	σελ. 7
n(x,t)	Συνάρτηση ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας	σελ. 7
d	Βάθος ηρεμίας νερού	σελ. 8
H	Ύψος κύματος	σελ. 8
ϵ	Παράμετρος μη-γραμμικότητας ίση με H/d	σελ. 8
c	Ταχύτητα φάσης κυματισμών	σελ. 9
k	Κυματαριθμός. Στη μονοδιάστατη περίπτωση ίσος με $2\pi/L$	σελ. 9
ζ	Συνάρτηση ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας	σελ. 9
ξ	Συνάρτηση μετατόπισης της ελεύθερης επιφάνειας κατά τον άξονα x	σελ. 9
ω	Γωνιακή συχνότητα	σελ. 9
\bar{E}	Πυκνότητα ενέργειας	σελ. 10
c_0	Ταχύτητα φάσης στα βαθιά	σελ. 11
c_g	Ταχύτητα ομάδας κυματισμών	σελ. 11
L_0	Μήκος κύματος στα βαθιά	σελ. 11
n	Παράμετρος ρήχωσης	σελ. 11
α	Πλάτος κύματος ίσο με το μισό του ύψους	σελ. 12
ϵ	Παράμετρος ανάπτυξης δυναμοσειράς	σελ. 12
Π	Αδιάστατη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας	σελ. 12
Φ	Αδιάστατο δυναμικό	σελ. 12
$\bar{U}(z)$	Μέση ως προς το χρόνο ταχύτητα μετατόπισης μορίων νερού κατά τη διεύθυνση του κύματος στη θεωρία Stokes 2 ^{ης} τάξης (Stokes drift)	σελ. 14
F_1, F_2, F_3	Παράμετροι στη θεωρία Stokes 3 ^{ης} τάξης	σελ. 14
\bar{u}	Μέση ως προς το χρόνο οριζόντια ταχύτητα σωματιδίων ρευστού κατά τη διεύθυνση x στη θεωρία Stokes 5 ^{ης} τάξης	σελ. 15
A_{ij}, B_{ij}, C_i, D_i	Αδιάστατες συναρτήσεις στη θεωρία Stokes 5 ^{ης} τάξης κατά Fenton (1985)	σελ. 15

C_E	Μέση ως προς το χρόνο οριζόντια ταχύτητα σωματιδίων ρευστού κατά τη διεύθυνση x σε συντεταγμένες Euler	σελ. 15
C_s	Μέση κατά το βάθος ταχύτητα μεταφοράς μάζας κατά τη διεύθυνση x στη θεωρία Stokes 5 ^{ης} τάξης	σελ. 15
Q	Ειδική παροχή όγκου κάτω από τον κυματισμό στη θεωρία Stokes 5 ^{ης} τάξης	σελ. 15
U, U_r	Αδιάστατη παράμετρος Ursell	σελ. 16, 210
a	Αδιάστατη παράμετρος στη θεωρία των cnoidal κυματισμών	σελ. 17
F	Αδιάστατη παράμετρος στη θεωρία των cnoidal κυματισμών	σελ. 17
k	Αδιάστατη παράμετρος στη θεωρία των cnoidal κυματισμών	σελ. 17
k	Το όρισμα του ελλειπτικού ολοκληρώματος	σελ. 17
$K(k)$	Το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους	σελ. 17
S	Αδιάστατη παράμετρος στη θεωρία των cnoidal κυματισμών	σελ. 17
X	Αδιάστατη παράμετρος στη θεωρία των cnoidal κυματισμών	σελ. 17
β	Αδιάστατη παράμετρος στη θεωρία των cnoidal κυματισμών	σελ. 17
ζ_{min}	Η μέγιστη αρνητική μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας κάτω από τη μέση στάθμη	σελ. 17
$E(k)$	Το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους	σελ. 18
E	Ενέργεια στο μέτρο πλάτους στο σύνολο του μήκους κύματος	σελ. 21
M	Συνάρτηση του λόγου H/d στη θεωρία μοναχικού κύματος	σελ. 21
N	Συνάρτηση του λόγου H/d στη θεωρία μοναχικού κύματος	σελ. 21
V	Όγκος νερού πάνω από τη στάθμη ηρεμίας στη θεωρία μοναχικού κύματος	σελ. 21
Ψ	Ροϊκή συνάρτηση	σελ. 23
Q	Σταθερά στη θεωρία ροϊκής συνάρτησης	σελ. 24
Q_B	Σταθερά στη θεωρία ροϊκής συνάρτησης	σελ. 24
$X(n)$	Συντελεστές κατά την ανάπτυξη της ροϊκής συνάρτησης σε σειρά	σελ. 24
d	Παράμετρος στη θεωρία ροϊκής συνάρτησης	σελ. 25
δ	Παράμετρος μη-γραμμικότητας ίση με H/d	σελ. 26
ε	Παράμετρος διασποράς ίση με d/L	σελ. 26
H_{m_0}	Σημαντικό ύψος κύματος υπολογισμένο από το ενεργειακό φάσμα	σελ. 30
\bar{H}, H_m, H_{av}	Μέσο ύψος κύματος σε μια καταγραφή κυματισμών	σελ. 30
$H_{1/n}$	Μέσο ύψος του υψηλότερου 100/n % των υψών κύματος σε μια καταγραφή	σελ. 30
H_{max}	Μέγιστο ύψος κύματος σε μια καταγραφή κυματισμών	σελ. 30
H_{min}	Ελάχιστο ύψος κύματος σε μια καταγραφή κυματισμών	σελ. 30
H_{rms}	Μέσο τετραγωνικό ύψος κύματος σε μια καταγραφή	σελ. 30
H_s	Σημαντικό ύψος κύματος υπολογισμένο από τη χρονοσειρά	σελ. 30
m_0	Ροπή μηδενικής τάξης φάσματος	σελ. 30
σ	Τυπική απόκλιση της καταγραφής της ελεύθερης επιφάνειας	σελ. 30
\bar{T}, T_m, T_{av}	Μέση περίοδος κύματος σε μια καταγραφή κυματισμών	σελ. 31
f_p	Συχνότητα αιχμής φάσματος	σελ. 31
ρ	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ύψους κύματος	σελ. 31
T_p	Περίοδος αιχμής φάσματος	σελ. 31
T_s	Χαρακτηριστική περίοδος σε μια καταγραφή κυματισμών	σελ. 31
P	Πιθανότητα υπέρβασης μιας τιμής του ύψους κύματος	σελ. 32
T_L	Χρονική διάρκεια μιας καταγραφής κυματισμών	σελ. 32
$\Phi(x)$	Συνάρτηση σφάλματος	σελ. 32
\bar{k}	Διάνυσμα αριθμού κύματος	σελ. 33
\bar{x}	Διάνυσμα θέσης (x,y) στο επίπεδο	σελ. 33
f	Συχνότητα κυματισμού	σελ. 33
f_i	Συχνότητα i -συνιστώσας σε μια σειρά ημιτονοειδών κυματισμών	σελ. 33
$G(f,\theta)$	Συνάρτηση κατευθυντικότητας	σελ. 33
m_n	Ροπή n τάξης φάσματος	σελ. 33
$S(f)df$	Ανηγμένη συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας φάσματος	σελ. 33
$S(f,\theta)dfd\theta$	Ανηγμένη συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας σε κατευθυντικό φάσμα	σελ. 33
ε_i	Γωνία διαφοράς φάσης i -συνιστώσας σε μια σειρά ημιτονοειδών κυματισμών	σελ. 33
θ	Γωνία διάδοσης κυματισμού	σελ. 33
F	Ανάπτυγμα πελάγους (fetch)	σελ. 34
U_{10}	Ταχύτητα ανέμου 10 m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας	σελ. 34
$U_{19.5}$	Ταχύτητα ανέμου 19.5 m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας	σελ. 34
α	Παράμετρος φάσματος Pierson-Moskowitz ίση με 0.0081	σελ. 34
α	Συντελεστής Phillips στο φάσμα Jonswap	σελ. 34

γ	Παράγων εξέλιξης κορυφής στα φάσμα Jonswap	σελ. 34
σ	Παράμετρος φάσματος Jonswap	σελ. 34
L_p	Μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα αιχμής φάσματος	σελ. 36
$\Theta(\omega, d)$	Συνάρτηση μετατροπής φάσματος TMA	σελ. 36
ω_h	Αδιάστατη γωνιακή συχνότητα στο φάσμα TMA	σελ. 36
Q	Ολοκληρωμένη κατά το βάθος συνάρτηση της ταχύτητας των μορίων νερού	σελ. 38
Fr	Αδιάστατος αριθμός Froude	σελ. 39
Re	Αδιάστατος αριθμός Reynolds	σελ. 39
v	Κινηματικό ιξώδες	σελ. 39
λ_D	Στρεβλή κλίμακα βάθους σε φυσικό μοντέλο	σελ. 39
λ_L	Λόγος γεωμετρική ομοιότητας φυσικού μοντέλου και πρωτότυπου	σελ. 39
λ_v	Λόγος κινηματικής ομοιότητας φυσικού μοντέλου και πρωτότυπου	σελ. 39
λ_T	Λόγος κινηματικού ιξώδους φυσικού μοντέλου και πρωτότυπου	σελ. 39
λ_T	Κλίμακα χρόνου σε φυσικό μοντέλο	σελ. 39
\bar{u}	Διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας των μορίων του νερού	σελ. 42
σ	Παράμετρος διασποράς	σελ. 42
\vec{U}	Διάνυσμα της μέσης κατά το βάθος οριζόντιας ταχύτητας των μορίων του νερού	σελ. 43
U	Συνιστώσα κατά τον άξονα x της μέσης κατά το βάθος οριζόντιας ταχύτητας	σελ. 43
V	Συνιστώσα κατά τον άξονα y της μέσης κατά το βάθος οριζόντιας ταχύτητας	σελ. 43
\bar{U}	Μέση κατά το βάθος ταχύτητα στην εργασία των Madsen et al. (1991)	σελ. 45
B	Παράμετρος στη σχέση διασποράς στην εργασία των Madsen et al. (1991)	σελ. 45
U_b	Ταχύτητα πυθμένα στην εργασία των Madsen et al. (1991)	σελ. 45
U_s	Ταχύτητα στην ελεύθερη επιφάνεια στην εργασία των Madsen et al. (1991)	σελ. 45
P, Q	Ολοκληρωμένες ως προς το βάθος οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας κατά x και y αντίστοιχα	σελ. 47
S	Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στην εργασία των Madsen et al. (1991)	σελ. 47
ϵ_1, ϵ_2	Παράμετροι στην εργασία των Madsen et al. (1991)	σελ. 48
\bar{u}_α	Οριζόντια ταχύτητα στη στάθμη $z=z_\alpha$ στην εργασία του Nwogu (1993)	σελ. 49
u_α, v_α	Συνιστώσες της οριζόντιας ταχύτητας κατά x και y αντίστοιχα στη στάθμη $z=z_\alpha$ στην εργασία του Nwogu (1993)	σελ. 49
z_α	Στάθμη αναφοράς στην εργασία του Nwogu (1993)	σελ. 49
α	Παράμετρος στην εργασία του Nwogu (1993)	σελ. 50
u_s	Ταχύτητα στην ελεύθερη επιφάνεια στην εργασία του Karambas (1999)	σελ. 52
A, A_i, B	Συντελεστές στην εργασία του Karambas (1999)	σελ. 52, 53
$\vec{G}, \vec{F}, \vec{K}$	Βοηθητικές μεταβλητές στην εργασία του Ζου (1999)	σελ. 54, 55
B_1, B_2	Παράμετροι στην εργασία του Ζου (1999)	σελ. 55
p_0	Πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια	σελ. 57
$\vec{M}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$	Βοηθητικές μεταβλητές στην εργασία των Wei et al. (1995)	σελ. 58
φ	Αδιάστατο δυναμικό στην εργασία των Gobbi et al. (2000)	σελ. 59
H	Συνολικό αδιάστατο βάθος στην εργασία των Gobbi et al. (2000)	σελ. 59
β, B, D	Παράμετροι στην εργασία των Gobbi et al. (2000)	σελ. 59
Φ_α, Φ_b	Αδιάστατο δυναμικό στις στάθμες $z=z_\alpha$ και $z=z_b$ στην εργασία των Gobbi et al. (2000)	σελ. 59
\hat{z}, \hat{z}	Χαρακτηριστικές τιμές της συντεταγμένης z στην εργασία των Madsen et al. (2003)	σελ. 62
F_1, F_2, F_3, ch, sh	Συναρτήσεις στην εργασία των Madsen et al. (2003)	σελ. 62, 63, 66
A_i, ω_{13}	Παράμετροι στην εργασία των Madsen et al. (2003)	σελ. 63
G_n	Συνάρτηση μεταφοράς ενέργειας στην εργασία των Madsen et al. (2003)	σελ. 64
Ω	Αδιάστατη γωνιακή συχνότητα στην εργασία των Madsen et al. (2003)	σελ. 64
J_1, J_2	Τελεστές στην εργασία των Madsen et al. (2006)	σελ. 66
\mathcal{F}	Ο συνήθης μετασχηματισμός Fourier	σελ. 68
\mathcal{F}^{-1}	Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier	σελ. 68
\mathcal{H}	Ο μετασχηματισμός Hilbert	σελ. 68
F_i	Βοηθητικές μεταβλητές στην εργασία του Li (2008)	σελ. 70
u_p	Συνιστώσα της οριζόντιας ταχύτητας κατά x λόγω της αστρόβιλης ροής	σελ. 72
u_r	Συνιστώσα της οριζόντιας ταχύτητας κατά x λόγω της στροβιλής ροής	σελ. 72
T_{xz}	Στιγμιαία διατμητική τάση στον πυθμένα κατά τον άξονα x	σελ. 72
$(u_b)_{max}$	Μέγιστη ταχύτητα στον πυθμένα	σελ. 73

d_{90}	Διάμετρος κόκκου άμμου από τον οποίο το 90% των κόκκων είναι λεπτότερο	σελ. 73
f	Συντελεστής τριβής πυθμένα	σελ. 73
k_e	Ισοδύναμο μέγεθος κόκκου άμμου	σελ. 73
R_b	Αριθμός Reynolds στον πυθμένα	σελ. 73
u_b	Ταχύτητα στον πυθμένα	σελ. 73
ζ_b	Μέγιστη οριζόντια μετακίνηση υγρών μορίων στον πυθμένα λόγω κύματος	σελ. 73
ϵ_D	Μέση απόσβεση ενέργειας λόγω τριβής στην περίοδο κύματος	σελ. 74
$\alpha(x)$	Συντελεστής μείωσης ύψους κύματος συναρτήσει της απόστασης	σελ. 75
v_s	Συντελεστής ιξώδους στη ζώνη διαβροχής	σελ. 76
l	Χαρακτηριστικό μήκος για το συντελεστή ιξώδους στη ζώνη διαβροχής	σελ. 77
ζ^*	Προστιθέμενη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας κατά τη μέθοδο γένεσης κυματισμών των Larsen και Dancy (1983)	σελ. 78
Cr	Αριθμός Courant	σελ. 78
Δs	Απόσταση δύο διαδοχικών σημείων επί της γραμμής γένεσης κυματισμών στη μέθοδο των Larsen και Dancy (1983)	σελ. 78
Δt	Βήμα χρονικής διακριτοποίησης	σελ. 78
$\Delta x, \Delta y$	Βήματα χωρικής διακριτοποίησης κατά x και y αντίστοιχα	σελ. 78
ζ'	Επιθυμητή ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στη μέθοδο γένεσης κυματισμών των Larsen και Dancy (1983)	σελ. 78
$f_s(x, t)$	Συνάρτηση πηγής των Gobbi και Kirby (1999) και Wei et al. (1999)	σελ. 79
x_s	Το κέντρο της συνάρτησης πηγής	σελ. 79
β_s	Παράμετρος της συνάρτησης πηγής	σελ. 79
D_s	Το μέτρο της συνάρτησης πηγής	σελ. 79, 80
$I_1, A_G, C_3,$ C_4	Παράμετροι της συνάρτησης πηγής των Gobbi και Kirby (1999)	σελ. 80
W_s	Πλάτος περιοχής γένεσης κυματισμών	σελ. 80
δ	Παράμετρος της συνάρτησης πηγής	σελ. 80
ζ_0	Το πλάτος κύματος ίσο με το μισό του ύψους κύματος	σελ. 80
C_e	Ταχύτητα μεταφοράς ενέργειας στη μέθοδο γένεσης κυματισμών των Lee και Suh (1998)	σελ. 81
$f(x)$	Συνάρτηση απορρόφησης στην εργασία των Wei και Kirby (1995)	σελ. 83
F, G, F_1, G_1	Όροι της εξίσωσης ορμής στην εργασία των Wei και Kirby (1995)	σελ. 83
$w_1(x), w_2(x)$	Συντελεστές απόσβεσης στην εργασία των Wei και Kirby (1995)	σελ. 83
α, x_s	Παράμετροι των απορροφητικών στοιβάδων στην εργασία των Larsen και Dancy (1983)	σελ. 83
α_1, α_2	Παράμετροι στην εργασία των Wei και Kirby (1995)	σελ. 83
$\mu(x)$	Συνάρτηση απορρόφησης στην εργασία των Larsen και Dancy (1983)	σελ. 83
$v(x)$	Συνάρτηση απορρόφησης στην εργασία των Yoon και Choi (2001)	σελ. 84
$b, \Lambda, r_s, t_s,$ x_s	Παράμετροι των απορροφητικών στοιβάδων στην εργασία των Yoon και Choi (2001)	σελ. 84, 85
\bar{u}_1, \bar{u}_2	Μέσες κατά το βάθος συνιστώσες της οριζόντιας ταχύτητας κατά x και y αντίστοιχα στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
$c_0^*, \omega^*, k_0^*, k^*$	Ταχύτητα φάσης, γωνιακή συχνότητα, κυματαριθμός αναφοράς και κυματαριθμός στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
d^*	Βάθος ηρεμίας στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
d_0^*	Βάθος ηρεμίας αναφοράς στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
t^*	Χρόνος στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
u_1^*, u_2^*, w^*	Συνιστώσες της ταχύτητας κατά x, y και z αντίστοιχα στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
x_1^*, x_2^*	Οριζόντιες συντεταγμένες στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
z^*	Κατηγμένη στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
α_0^*	Ύψος κύματος αναφοράς στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
ρ	Η πίεση στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
T	Περίοδος κύματος στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
ζ^*	Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 88
Φ	Συνάρτηση δυναμικού στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 90
Φ^*	Εικόνα της συνάρτησης δυναμικού μέσω του μετασχηματισμού Fourier στην εργασία των Tsutsui et al. (1998)	σελ. 90
$K(x_i)$	Πυρήνας (kernel) μετασχηματισμού Fourier	σελ. 91, 92
r, θ	Πολικές συντεταγμένες	σελ. 92, 99

d'	Βάθος ηρεμίας στην εργασία των Karambas και Memos (2009)	σελ. 93
F'	Συνάρτηση δυναμικού της ταχύτητας στην εργασία των Karambas και Memos (2009)	σελ. 93
L', d_0', H'	Μήκος κύματος αναφοράς, βάθος αναφοράς και ύψος κύματος αναφοράς στην εργασία των Karambas και Memos (2009)	σελ. 93
p'	Πίεση στην εργασία των Karambas και Memos (2009)	σελ. 93
u', w'	Ταχύτητα των μορίων του νερού κατά τους άξονες x και z αντίστοιχα στην εργασία των Karambas και Memos (2009)	σελ. 93
x', z', t'	Ανεξάρτητες μεταβλητές στην εργασία των Karambas και Memos (2009)	σελ. 93
ζ'	Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στην εργασία των Karambas και Memos (2009)	σελ. 93
J_0	Ολοκλήρωμα Bessel μηδενικής τάξης	σελ. 99
k_x, k_y	Συνοστώσεις κυματαριθμού κατά x και y αντίστοιχα	σελ. 99
α_1, α_2	Ύψος πρώτης και δεύτερης αρμονικής στην εργασία των Karambas και Memos (2009)	σελ. 101
l_i, l_j	Όροι συνελικτικών ολοκληρωμάτων κατά x και y αντίστοιχα στην εργασία των Karambas και Memos (2009)	σελ. 104
ξ_{rms}	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας ως προς το χρόνο	σελ. 108
L_x	Τελεστής παραγωγίσιης	σελ. 111
G	Παράγοντας ενίσχυσης σφάλματος (amplification factor)	σελ. 112
CE	Υπολογιστική απόδοση μοντέλου	σελ. 116
CPU	Υπολογιστικός χρόνος μοντέλου	σελ. 116
E_i, F_i	Όροι του σχήματος πρόβλεψης-διόρθωσης	σελ. 118
\bar{u}_o	Οριζόντια ταχύτητα μορίων νερού κοντά στον πυθμένα	σελ. 137
\bar{u}_o, \bar{v}_o	Συνοστώσεις κατά x και y αντίστοιχα της ταχύτητας πυθμένα του μέσου στο χρόνο πεδίου ρευμάτων	σελ. 137
\bar{u}_{oc}	Οριζόντια ταχύτητα μορίων νερού κοντά στον πυθμένα λόγω ρεύματος	σελ. 137
\bar{u}_{ow}	Οριζόντια ταχύτητα μορίων νερού κοντά στον πυθμένα λόγω κύματος	σελ. 137
\bar{c}	Ταχύτητα μεταφοράς του επιφανειακού κυλίνδρου	σελ. 137
u_o, v_o	Συνοστώσεις της οριζόντιας ταχύτητας κοντά στον πυθμένα κατά x και y αντίστοιχα	σελ. 137
u_{ow}, v_{ow}	Συνοστώσεις της οριζόντιας ταχύτητας κοντά στον πυθμένα λόγω κύματος κατά x και y αντίστοιχα	σελ. 137
u_{ow-max}	Το πλάτος του τμήματος της ταχύτητας κοντά στον πυθμένα που ακολουθεί νόμο ταλάντωσης	σελ. 137
f_c, f_w	Συντελεστές τριβή πυθμένα λόγω ρεύματος και κύματος αντίστοιχα	σελ. 137
f_{cw}	Παράγοντας τριβής πυθμένα λόγω ρεύματος-κύματος	σελ. 137
h	Συνολικό βάθος ίσο με $d+\zeta$	σελ. 137
δ	Πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου	σελ. 137
T_{bx}, T_{by}	Στιγμιαίες διατμητικές τάσεις πυθμένα κατά x και y αντίστοιχα	σελ. 137
c_x, c_y	Συνοστώσεις της ταχύτητας μεταφοράς του επιφανειακού κυλίνδρου κατά x και y αντίστοιχα	σελ. 138
A_b	Πλάτος ταλάντωσης υγρών σωματιδίων στον πυθμένα	σελ. 138
d_{50}	Διάμετρος κόκκου άμμου από τον οποίο το 50% των κόκκων είναι λεπτότερο	σελ. 138
$f_{2.5}$	Θεωρητικός συντελεστής τριβής λόγω κύματος	σελ. 138
K_N	Τραχύτητα πυθμένα κατά Nikuradse	σελ. 138
$\theta_{2.5}$	Παράμετρος Shields	σελ. 138
$\bar{\zeta}$	Μέση ως προς το χρόνο ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας	σελ. 139
s	Παράμετρος σχετιζόμενη με το λόγο πυκνοτήτων του υλικού πυθμένα και του νερού ίση με 1.6	σελ. 139
ρ_s	Πυκνότητα υλικού πυθμένα	σελ. 139
Ψ	Βοηθητική μεταβλητή για τον υπολογισμό της τραχύτητας	σελ. 139
C_c, C	Συντελεστής τριβής Chezy	σελ. 139, 188
H_0	Ύψος κύματος στα βαθιά	σελ. 143
θ	Κλίση πυθμένα	σελ. 143
ξ_0	Αριθμός Irribaren	σελ. 143
d_b	Βάθος ηρεμίας στη θέση έναρξης της θραύσης	σελ. 146
H_0'	Ύψος κύματος ίσο με το ύψος κύματος στα βαθιά αφού έχει διενεργήσει σε αυτό θεωρητικά η διάθλαση	σελ. 146

H_b	Ύψος κύματος κατά την έναρξη της θραύσης	σελ. 146
k_R	Συντελεστής διάθλασης	σελ. 146
γ_b	Λόγος θραύσης ίσος με το λόγο του ύψους κύματος κατά τη θραύση προς το βάθος θραύσης	σελ. 146
α, β	Παράμετροι θραύσης στη σχέση του Weggel (1972)	σελ. 147
β	Κλίση πυθμένα	σελ. 147
$C_{g,s}$	Ταχύτητα μετάδοσης της ενέργειας που αναφέρεται στο ύψος κύματος κατά τη λήξη της θραύσης	σελ. 150
H_{stable}	Ύψος κύματος κατά τη λήξη της θραύσης	σελ. 150
δ	Ρυθμός απώλειας ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας εντός της ζώνης θραύσης	σελ. 150
κ, Γ	Εμπειρικοί συντελεστές στη μέθοδο ροής ενέργειας	σελ. 150
b	Ο λόγος του μέσου τετραγωνικού ύψους κύματος H_{rms} προς τη μέγιστη τιμή του ύψους θραύσης H_{max}	σελ. 151
f_m	Μέση συχνότητα σύνθετων κυματισμών	σελ. 151
H_{max}	Η μέγιστη τιμή του ύψους κύματος θραύσης H_b για σύνθετους κυματισμούς	σελ. 151
Q_b	Ποσοστό θραυόμενων κυματισμών	σελ. 151
R	Ο επιπλέον όρος ορμής στη μονοδιάστατη εξίσωση ορμής λόγω της παρουσίας του επιφανειακού κυλίνδρου στην εργασία των Schäffer et al. (1993)	σελ. 154
R_{xx}, R_{xy}, R_{yy}	Οι επιπλέον όροι ορμής στις δισδιάστατες εξισώσεις ορμής λόγω της παρουσίας του επιφανειακού κυλίνδρου στην εργασία των Madsen et al. (1997a)	σελ. 154
φ	Η γωνία κλίσης του μετώπου του κύματος	σελ. 154
f_δ	Συντελεστής σχήματος του επιφανειακού κυλίνδρου	σελ. 155
t_B, t_b	Η χρονική στιγμή έναρξης της θραύσης	σελ. 155, 174
$\varphi_0, \varphi_t, \varphi_f$	Η τελική τιμή της κρίσιμης γωνία του επιφανειακού κυλίνδρου	σελ. 155, 174
$\varphi_B, \varphi_i, \varphi_b$	Η αρχική κρίσιμη γωνία κλίσης της ελεύθερης επιφάνειας για έναρξη της θραύσης	σελ. 155, 174
$\tilde{t}, \tilde{t}_{1/2}, T_b, T_{12}$	Χρονική κλίμακα ανάπτυξης του επιφανειακού κυλίνδρου	σελ. 155, 174, 251
M_u	Όρος ορμής λόγω του επιφανειακού κυλίνδρου στην εργασία των Memos et al. (2005)	σελ. 157
ν_h	Συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας στις εργασίες των Karambas et al. (1990,1991)	σελ. 159
ν_α	Συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας στην εργασία του Zelt (1991)	σελ. 159
F_{break}	Ο όρος ορμής λόγω τυρβώδους συνεκτικότητας στο μοντέλο του Zelt (1991)	σελ. 159
s	Κλίση της ακτής	σελ. 159
α	Η τετμημένη Lagrange	σελ. 159
β	Παράμετρος στο μοντέλο θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας των Karambas et al. (1990,1991)	σελ. 159
u_α^*	Οριακή ταχύτητα κατά τη θραύση μοναχικού κύματος	σελ. 160
δ, B, p	Παράμετροι στο μοντέλο θραύσης του Zelt (1991)	σελ. 160
\vec{R}_b	Όρος τυρβώδους συνεκτικότητας στις δισδιάστατες εξισώσεις ορμής στην εργασία των Kennedy et al. (2000)	σελ. 161
ζ_t^*	Κρίσιμη παράμετρος για την έναρξη και διακοπή της θραύσης στο μοντέλο των Kennedy et al. (2000)	σελ. 161
B	Παράμετρος στο μοντέλο θραύσης των Kennedy et al. (2000)	σελ. 161
R_{bx}, R_{by}	Οι όροι ορμής τυρβώδους συνεκτικότητας στις εξισώσεις κατά x και y αντίστοιχα στην εργασία των Kennedy et al. (2000)	σελ. 161
δ_b	Συντελεστής μήκους μίξης στο μοντέλο των Kennedy et al. (2000)	σελ. 161
ν	Συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας στο μοντέλο των Kennedy et al. (2000)	σελ. 161
$\zeta_t^{(I)}, \zeta_t^{(F)}$	Αρχική και τελική τιμή της κρίσιμης παραμέτρου ζ_t^* στο μοντέλο θραύσης των Kennedy et al. (2000)	σελ. 162
T^*	Μεταβατική χρονική κλίμακα στο μοντέλο θραύσης των Kennedy et al. (2000)	σελ. 162
t_0	Χρονική στιγμή έναρξης της θραύσης στο μοντέλο των Kennedy et al. (2000)	σελ. 162
$\hat{\omega}$	Στροβιλισμός στο μοντέλο των Veeramony και Svendsen (2000)	σελ. 165
$\Delta M, \Delta P, \mu, \kappa, \sigma, C_v$	Παράμετροι στο μοντέλο θραύσης των Veeramony και Svendsen (2000)	σελ. 165, 166

$\hat{\zeta}_e$	Το πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου στο μοντέλο των Veeramony και Svendsen (2000)	σελ. 166
$\hat{\omega}_s$	Ο στροβιλισμός στην κάτω επιφάνεια του επιφανειακού κυλίνδρου στην εργασία των Veeramony και Svendsen (2000)	σελ. 166
l_r	Το οριζόντιο μήκος του επιφανειακού κυλίνδρου	σελ. 166
ν_t	Συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας στο μοντέλο των Veeramony και Svendsen (2000)	σελ. 166
G_n	Συντελεστές κατά την ανάπτυξη της στροβιλότητας σε σειρά στο μοντέλο των Veeramony και Svendsen (2000)	σελ. 166
ξ	Λόγος των βαθών ηρεμίας κατόπη και ανάνη του επιφανειακού κυλίνδρου στην εργασία των Veeramony και Svendsen (2000)	σελ. 166
D_h	Όρος θραύσης στην εξίσωση συνέχειας	σελ. 172
D_{hu}	Όρος θραύσης στην εξίσωση ορμής	σελ. 172
h	Το βάθος της οργανωμένης περιοχής όπου μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία δυναμικού	σελ. 172
X	Τετμημένη ως προς κινούμενο σύστημα αξόνων	σελ. 173
Δ_b	Τοπικός ρυθμός σκέδασης της ενέργειας λόγω θραύσης ανά μονάδα πλάτους	σελ. 173
Φ	Μέση γωνία θραυόμενου μετώπου	σελ. 174
U_{rel}	Μέση ως προς το βάθος ταχύτητα ως προς κινούμενο σύστημα αναφοράς	σελ. 175
ν_h	Συνάρτηση διάχυσης της μάζας κατά τη θραύση	σελ. 176
ν_{hu}	Συνάρτηση διάχυσης της ορμής κατά τη θραύση	σελ. 176
K_h, K_{hu}	Ελαφρώς μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του X	σελ. 176
I_h, I_{hu}	Παράμετροι υπό μορφή ολοκληρωμάτων	σελ. 177
e_r	Κατακόρυφη απόσταση πόδα και κορυφής επιφανειακού κυλίνδρου	σελ. 177
β	Παράμετρος ίση με 0.796	σελ. 177
ψ	Συνάρτηση του λόγου τ	σελ. 177
τ	Ο λόγος του X προς το l_r	σελ. 177
κ, δ, α_b	Παράμετροι	σελ. 178
B	Συντελεστής στους όρους Boussinesq των εξισώσεων του MIKE 21 BW	σελ. 188
F_x, F_y	Όροι οριζόντιας τάσης κατά x και y αντίστοιχα στις εξισώσεις του MIKE 21 BW (2DH)	σελ. 188
n	Πορώδες	σελ. 188
α	Συντελεστής αντίστασης για στρωτή ροή σε πορώδες μέσο	σελ. 188
β	Συντελεστής αντίστασης για τυρβώδη ροή σε πορώδες μέσο	σελ. 188
Ψ_1, Ψ_2	Όροι ορμής στις εξισώσεις του MIKE 21 BW (2DH)	σελ. 188
f_v	Συντελεστής ταχύτητας διάδοσης επιφανειακού κυλίνδρου	σελ. 190
C_{sponge}	Συντελεστής απορροφητικών στοιβάδων του MIKE 21 BW	σελ. 192
N_{sponge}	Αριθμός κόμβων εντός της στοιβάδας απορρόφησης του MIKE 21 BW	σελ. 192
α, r	Σταθερές απορροφητικών στοιβάδων του MIKE 21 BW	σελ. 192
β_1	Το τετράγωνο της λοξότητας (skewness) σε μία καταγραφή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας	σελ. 208
β_2	Κύρτωση (kurtosis) σε μία καταγραφή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας	σελ. 208
ζ_{rms}	Τυπική απόκλιση σε μία καταγραφή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας	σελ. 208
γ	Παράμετρος στην εξίσωση μοναχικού κύματος	σελ. 232
r_i	Τυχαίοι αριθμοί μεταξύ 0 και 1	σελ. 246

