

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα: Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Γραμμικά και μη γραμμικά υδάτινα κύματα

Διπλωματική Εργασία

Μπουκουβάλα Αγγέλα

Επιβλέπων Καθηγητής: Χαραλαμπίδης Αντώνιος

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2017

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα: Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Γραμμικά και μη γραμμικά υδάτινα κύματα

Διπλωματική Εργασία

Μπουκουβάλα Αγγέλα

Τριμελής επιτροπή

Χαραλαμπόπουλος Αντώνιος, Επιβλέπων

Αρβανιτάκης Αλέξανδρος

Δούκα Ευανθία

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2017

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, κ. Αντώνιο Χαραλαμπίδου, Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, τόσο για την υπόδειξη του θέματος όσο και για την βοήθεια και την καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της σύνταξης της εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και του φίλους μου για την ηθική υποστήριξη που μου παρείχαν όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε το θέμα των υδάτινων κυμάτων, τόσο γραμμικών όσο και μη γραμμικών, και θα παρουσιάσουμε τη δημιουργία και τη διάδοση τους σε διάφορες καταστάσεις, μέσω διαφορετικών εξισώσεων.

Αρχικά θα ξεκινήσουμε με κάποιες βασικές έννοιες σχετικά με το μονοδιάστατο κύμα. Θα εισάγουμε βασικά μεγέθη των κυματικών διαταραχών, όπως η περίοδος, η συχνότητα, το μήκος κύματος και ο κυματάριθμος, καθώς και την έννοια της ταχύτητας ομάδας και ταχύτητας φάσης.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη γραμμική θεωρία κυμάτων ελεύθερης επιφάνειας. Θα μελετήσουμε κύματα βαρύτητας, οδεύοντα και στάσιμα, καθώς και την διάδοση ενέργειας σε αυτά. Θα εξετάσουμε κάποια φαινόμενα που οδηγούν στη διάδοση των κυμάτων νερού. Για παράδειγμα, την παραγωγή κυμάτων από ένα κινούμενο πλοίο, την διάθλαση των κυμάτων από αλλαγές στην τοπογραφία του βυθού (bed topography), τις επιπτώσεις της επιφανειακής τάσης, καθώς και την αξιοποίηση της ισχύος των κυμάτων χρησιμοποιώντας μια απλή μηχανική συσκευή.

Τέλος, θα ασχοληθούμε με τα μη γραμμικά κύματα που διαδίδονται σε υδάτινο περιβάλλον. Θα μελετήσουμε τις μη γραμμικές εξισώσεις κυμάτων σε ρηχά ύδατα, πιο συγκεκριμένα το πρόβλημα θραύσης φράγματος και το φαινόμενο δημιουργίας επιφανειακού κρουστικού κύματος. Θα δούμε πως η ταχύτητα και η κυματομορφή κυμάτων σε βαθύ νερό εξαρτώνται από το μικρό πλάτος κύματος. Επίσης θα δούμε ότι οι εξισώσεις Korteweg-de Vries περιγράφουν τη συμπεριφορά κυμάτων με γραμμική διασπορά και μη γραμμική κυματική βάρθρωση. Στην τελευταία ενότητα θα κοιτάξουμε τα τριχοειδή κύματα σε βαθύ νερό και θα χρησιμοποιήσουμε θεωρία complex μεταβλητών για την εξαγωγή αναλυτικών λύσεων.

Περιεχόμενα

| | |
|--|----|
| Εισαγωγή | 7 |
| Κεφάλαιο 1 Γραμμικά υδάτινα κύματα | 11 |
| 1.1 Παραγωγή των εξισώσεων | 11 |
| 1.2 Γραμμικά κύματα βαρύτητας | 14 |
| 1.2.1 Οδεύον κύμα βαρύτητας | 14 |
| 1.2.2 Στάσιμο κύμα βαρύτητας | 19 |
| 1.2.3 Παραγωγός κυμάτων (wavemaker) | 21 |
| 1.2.4 Εξαγωγή ενέργειας από υδάτινα κύματα | 25 |
| 1.3 Η επίδραση της επιφανειακής τάσης: τριχοειδή κύματα βαρύτητας | 27 |
| 1.4 Κύματα ακμής | 30 |
| 1.5 Ship waves | 31 |
| 1.6 Λύση προβλήματος αρχικών τιμών | 36 |
| 1.7 Ρηχά υδάτινα κύματα: γραμμική θεωρία | 41 |
| 1.7.1 Η αντανάκλαση του φουσκώματος της θάλασσας από ένα σκαλοπάτι | 42 |
| 1.7.2 Ενίσχυση κύματος σε ελαφρώς επικλινή πυθμένα | 44 |
| 1.8 Διάθλαση κύματος | 46 |
| 1.8.1 Η κινηματική των αργά μεταβαλλόμενων κυμάτων | 47 |
| 1.8.2 Διάθλαση κύματος σε ελαφρώς επικλινή πυθμένα | 48 |
| 1.9 Η επίδραση του ιξώδους | 51 |
| Κεφάλαιο 2 Μη γραμμικά υδάτινα κύματα | 53 |
| 2.1 Μη γραμμικά ρηχά υδάτινα κύματα | 53 |
| 2.1.1 Το πρόβλημα θραύσης φράγματος | 54 |
| 2.1.2 Κρουστικό επιφανειακό κύμα (bore) | 57 |
| 2.2 Η επίδραση της μη γραμμικότητας σε βαθιά υδάτινα κύματα βαρύτητας: η επέκταση του Stokes | 62 |
| 2.3 Οι εξισώσεις Korteweg-de Vries για κύματα ρηχού νερού: η αλληλεπίδραση μη γραμμικής κλίσης και γραμμικής διασποράς | 66 |
| 2.3.1 Παραγωγή της εξίσωσης Korteweg-de Vries | 67 |
| 2.3.2 Λύσεις της KdV εξίσωσης για το οδεύον κύμα | 70 |
| 2.4 Μη γραμμικά τριχοειδή κύματα | 75 |
| Βιβλιογραφία | 83 |

Εισαγωγή

Η ύπαρξη κυμάτων είναι η αιτία που ακούμε και βλέπουμε το οτιδήποτε. Ο ήχος διαδίδεται στον αέρα ως κύμα και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα καλύπτουν ένα φάσμα από ραδιοκύματα χαμηλής συχνότητας, μέχρι ορατό φως και ακτίνες Χ. Τα κύματα διαδίδονται τόσο στην επιφάνεια στερεών σωμάτων όσο και στον όγκο ενός στερεού. Το πιο προφανές και απλό παράδειγμα μέσου που φέρει κύματα είναι η επιφάνεια της θάλασσας. Για αυτό κιάλας εάν κάποιος κοιτάξει σε ένα λεξικό την ετυμολογία της λέξης κύμα θα βρει ότι κύμα είναι μια διατάραξη που διαδίδεται στο νερό με πεπερασμένη ταχύτητα. Τα υδάτινα κύματα μπορεί να ποικίλλουν σε μέγεθος, από μικρούς κυματισμούς που προκαλεί η βροχόπτωση, σε κρουστικά κύματα όπως το περίφημο επιφανειακό κρουστικό κύμα του ποταμού Severn, μέχρι και γιγάντια ωκεάνια κύματα που μπορούν να ανατρέψουν μεγάλα πλοία.

Τα κύματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τη μαθηματική τους διατύπωση. Τα γραμμικά κύματα χρησιμοποιούν τις αναλυτικές τεχνικές των μαθηματικών του 19ου αιώνα, όπως χωρισμός μεταβλητών, σειρές Fourier, μετασχηματισμοί Fourier για να εξάγουν τις εξισώσεις που τα περιγράφουν. Για τα μη γραμμικά κύματα θα χρειαστεί κάποιος να περάσει το κατώφλι του 20ου αιώνα για να τα μελετήσει.

Ας ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας πρώτα κάποιες γενικές ιδέες και σύμβολα που χρειάζονται για την μελέτη των κυμάτων. Θα θεωρήσουμε κάποιες γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με λύσεις μορφής κύματος, και θα αναλύσουμε κάποια ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά τους. Μια μερική διαφορική εξίσωση είναι γραμμική εάν όλες οι εξαρτημένες μεταβλητές εμφανίζονται γραμμικά.

Θεωρούμε, λοιπόν, την εξίσωση μονοδιάστατου κύματος,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Περιγράφει, μεταξύ άλλων, την διάδοση κύματος με μικρό πλάτος σε μία τεντωμένη χορδή. Με φ συμβολίζουμε το πλάτος της μετατόπισης της χορδής, x την θέση κατά μήκος της χορδής και t τον χρόνο. Πρόκειται για μία γραμμική εξίσωση, καθώς το $\varphi(x,t)$

παρουσιάζεται μόνο γραμμικά.

Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό των λύσεων των γραμμικών εξισώσεων είναι ότι υπάρχει μια αρχή υπέρθεσης (superposition). Εάν $\varphi = \varphi_1$ και $\varphi = \varphi_2$ είναι λύσεις γραμμικής εξίσωσης, τότε η $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$ είναι επίσης λύση, για αυθαίρετα α_1, α_2 . Επιπλέον, αν $\varphi(x, t; K)$ είναι λύση για κάθε τιμή της σταθεράς K τότε το

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t; K) dK$$

είναι επίσης λύση. Το χαρακτηριστικό αυτό μας επιτρέπει να συγκεντρώσουμε τις λύσεις ενός προβλήματος συνοριακών τιμών.

Η λύση της μονοδιάστατης εξίσωσης κύματος είναι της μορφής

$$\varphi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

για αυθαίρετες συναρτήσεις f και g . Εάν θεωρήσουμε $g = 0$ τότε $\varphi = f(x - ct)$. Για

$t = 0$, $\varphi = f(x)$, άρα $f(x)$ είναι η αρχική τιμή του φ . Θεωρούμε το σημείο $x = x_0$ στο οποίο η μετατόπιση είναι $\varphi = \varphi_0 = f(x_0)$ την χρονική στιγμή $t = 0$. Έστω ότι μετά από

χρονικό διάστημα t το σημείο $x = x_1$ θα έχει μετατόπιση $f(x_1 - ct) = \varphi_0 = f(x_0)$, άρα

$x_1 = x_0 + ct$. Δηλαδή βλέπουμε ότι το σημείο που είχε $\varphi = \varphi_0$ έχει μετακινηθεί απόσταση

ct προς τη θετική κατεύθυνση του x . Η αρχική μορφή του φ έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά ct , άρα διαδίδεται προς τα δεξιά με ταχύτητα c . Η λύση είναι ένα οδεύον κύμα (travelling, progressive wave). Όμοια, η λύση $\varphi = g(x + ct)$ είναι ένα οδεύον κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα c . Η γενική λύση της εξίσωσης μονοδιάστατου κύματος λοιπόν, είναι απλά το άθροισμα των δύο αυτών κυμάτων.

Θα ορίσουμε κάποιους όρους που σχετίζονται με περιοδικά ή αρμονικά κύματα, οι οποίοι μας χρειάζονται για τη μελέτη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων με λύσεις μορφής κύματος. Γενικά, η λύση για κάθε μερική διαφορική εξίσωση έχει την μορφή

$$\varphi = \text{Re}[A \exp\{i(kx - \omega t)\}] = \text{Re}(A) \cos(kx - \omega t) - \text{Im}(A) \sin(kx - \omega t),$$

ή, πιο απλά γραμμένη

$$\varphi = A \exp\{i(kx - \omega t)\}.$$

Αυτό είναι ένα οδεύον κύμα που διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση του x άξονα, για

$k\omega > 0$. Ονομάζουμε k τον κυματικό αριθμό και ω την γωνιακή συχνότητα. Για να ικανοποιεί την εξίσωση του μονοδιάστατου κύματος πρέπει $k = \omega/c$. Ορίζουμε την συχνότητα $f = \omega/2\pi$, ως τον αριθμό των ολοκληρωμένων ταλαντώσεων του κύματος σε ένα δευτερόλεπτο σε μια σταθερή θέση, και μήκος κύματος $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega = c/f$, ως

την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων ή ελαχίστων της κυματομορφής. Τα μέγιστα αυτά ονομάζονται κορυφές των κυμάτων (wave crests) και τα ελάχιστα σημεία ελαχίστου (wave troughs). Το μέγεθος του φ στα σημεία αυτά είναι το πλάτος $|A|$. Παρατηρούμε ότι αν ενώσουμε δύο αρμονικά κύματα, με ίδιο πλάτος, αλλά με αντίθετες κατευθύνσεις διάδοσης, έχουμε ένα στάσιμο κύμα. Πράγματι,

$$\varphi = A \cos(kx - \omega t) + A \cos(kx + \omega t) = 2A \cos kx \cos \omega t.$$

Σε ένα τέτοιο στάσιμο κύμα, η λύση έχει μια περιβάλλουσα σταθερή στο χώρο, στην περίπτωση μας $\cos kx$, η οποία διαμορφώνεται από μια χρόνο-εξαρτώμενη κίνηση, στην περίπτωση μας $\cos \omega t$.

Στο μονοδιάστατο κύμα, η γωνιακή συχνότητα είναι μια γνωστή συνάρτηση του κυματικού αριθμού, $\omega = ck$, και οι κορυφογραμμές κινούνται με ταχύτητα c , ανεξάρτητη από το k . Ωστόσο στα περισσότερα συστήματα το ω δεν είναι ανάλογο με το k , και η κορυφογραμμές κινούνται με ταχύτητα $c_p(k) = \omega(k)/k$, γνωστή ως ταχύτητα φάσης. Η ταχύτητα φάσης εξαρτάται από το k , δηλαδή οι κορυφογραμμές κινούνται με διαφορετική ταχύτητα για διαφορετικούς κυματικούς αριθμούς, άρα και για διαφορετικά μήκη κύματος. Σε λύσεις που είναι συνδυασμός αρμονικών κυμάτων διαφορετικού μήκους κύματος, αυτό τελικά οδηγεί σε διαχωρισμό ή διασπορά των διαφόρων συνιστωσών. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται ότι είναι σύστημα με διασπορά (dispersive), και η σχέση $\omega = \omega(k)$ είναι η σχέση διασποράς.

Ως παράδειγμα, ας κοιτάξουμε την γραμμικοποιημένη εξίσωση Korteweg-de Vries, ή αλλιώς KdV

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Όπως θα δούμε σε παρακάτω κεφάλαιο, η εξίσωση αυτή περιγράφει την διάδοση κυμάτων με μεγάλο μήκος κύματος σε ρηχό νερό. Αναζητώντας αρμονική λύση μορφής

$u = A \exp\{i(kx - \omega t)\}$, βρίσκουμε ότι η σχέση διασποράς είναι

$$\omega = \alpha k + \beta k^3,$$

δηλαδή $\omega = \omega(k)$. Η ταχύτητα φάσης είναι $c_p = \alpha + \beta k^2$, το οποίο σημαίνει ότι η ταχύτητα διάδοσης των βραχέων κυμάτων είναι μεγαλύτερη από αυτή των μακρών κυμάτων.

Σε συστήματα με διασπορά, η ταχύτητα φάσης δεν είναι ίση με την ταχύτητα ομάδας (group velocity), δηλαδή την ταχύτητα που διαδίδεται στο χώρο η περιβάλλουσα του κύματος. Αυτό μπορούμε να δούμε και για την εξίσωση KdV, όπου

$$c_p = \omega/k = \alpha + \beta k^2 \neq c_g = d\omega/dk = \alpha + 3\beta k^2.$$

Κεφάλαιο 1

Γραμμικά υδάτινα κύματα

Τα κύματα νερού εκδηλώνονται ως διαταραχές στην ελεύθερη επιφάνεια ενός ασυμπίεστου υγρού με μέσο βάθος h και σταθερή, ομοιόμορφη πυκνότητα ρ . Η διαταραχή αυτή μπορεί να δημιουργηθεί από τον άνεμο, το πέρασμα ενός πλοίου, έναν υποθαλάσσιο σεισμό. Ανεξάρτητα από την πηγή, η βαρύτητα ή και η επιφανειακή τάση θα λειτουργήσουν ως δύναμη αποκατάστασης που τείνει να επαναφέρει το ρευστό στην κατάσταση ισορροπίας του. Αυτή η ισορροπία μεταξύ της αδράνειας του ρευστού και των δυνάμεων αποκατάστασης είναι που δημιουργεί τα κύματα ελεύθερης επιφάνειας.

Θα αναπτύξουμε, λοιπόν, μια γραμμική θεωρία για τέτοια κύματα. Υποθέτουμε ότι το πλάτος κύματος είναι πολύ μικρότερο από το μήκος τους. Επίσης θεωρούμε ότι η ροή τους είναι στρωτή, και δεν υπάρχουν στρόβιλοι. Αρχικά θα μελετήσουμε τα βασικά γραμμικά κύματα βαρύτητας (gravity waves), οδεύοντα και στάσιμα, και θα αναπτύξουμε τις εξισώσεις που διέπουν φαινόμενα όπως η αντανάκλαση της θάλασσας σε ένα σκαλοπάτι, η ενίσχυση του κύματος λόγω ελαφρώς επικλινή πυθμένα και η παραγωγή κυμάτων από ένα κινούμενο πλοίο.

1.1 Παραγωγή των εξισώσεων

Οι εξισώσεις για τη διατήρηση της μάζας και της ορμής για ένα ασυμπίεστο υγρό χωρίς ιξώδες (inviscid) είναι:

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g$$

όπου το g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Για απλοποίηση, θεωρούμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη (irrotational), άρα το πεδίο ταχυτήτων, u , μπορεί να γραφθεί ως το ανάδελτα συναρτήσεως φ ,

$$u = \nabla \varphi$$

άρα η εξίσωση διατήρησης μάζας γίνεται η εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι

$$u \times (\nabla \times u) = \nabla \left(\frac{1}{2} u \cdot u \right) - u \cdot \nabla u$$

και επειδή η ροή είναι αστρόβιλη, δηλαδή $\nabla \times u = 0$,

άρα

$$u \cdot \nabla u = \nabla \left(\frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \right).$$

Η βαρύτητα δρα στην αρνητική κατεύθυνση του y -άξονα, άρα γράφουμε $g = \nabla(-gy)$.

Η εξίσωση διατήρησης ορμής γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) + \nabla \left(\frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla(gy).$$

Θεωρώντας ότι η εξίσωση $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ είναι λεία, τότε έχουμε

$$\nabla \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \frac{p}{\rho} + gy \right\} = 0$$

άρα

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \frac{p}{\rho} + gy = C(t)$$

για κάποια συνάρτηση $C(t)$.

Κάνοντας τον απλό μετασχηματισμό $\varphi \rightarrow \varphi + \int_0^t C(s) ds$,

μπορούμε να πάρουμε ότι $C(t) = 0$, κάτι το οποίο δεν επηρεάζει το πεδίο ταχυτήτων.

Καταλήγουμε λοιπόν στην εξίσωση του Bernoulli

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \frac{p}{\rho} + gy = 0$$

όπου όταν προσδιορίσουμε την φ , η εξίσωση του Bernoulli θα μας δώσει την πίεση p .

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στην επιφάνεια του υγρού. Υποθέτουμε ότι η ροή είναι δισδιάστατη, έτσι ώστε η επιφάνεια να είναι στο σημείο $y = \eta(x, t)$, όπου η συντεταγμένη

x μετρά την απόσταση. Για την ώρα θα αγνοήσουμε την επίδραση της επιφανειακής τάσης, ώστε η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια να είναι η ατμοσφαιρική $p = p_{atm}$. Κάνοντας τον μετασχηματισμό $p \rightarrow p - p_{atm}$ μπορούμε να έχουμε $p = 0$ κάτι που δεν επηρεάζει τα αποτελέσματά μας.

Η εξίσωση Bernoulli στην ελεύθερη επιφάνεια μας δίνει την εξής συνοριακή συνθήκη,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + g\eta = 0 \quad \text{για } y = \eta(x, t),$$

γνωστή και ως δυναμική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (dynamic boundary condition)

Για να βρούμε την άλλη συνοριακή συνθήκη που χρειαζόμαστε, παρατηρούμε ότι ένα σωματίδιο που βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού θα παραμείνει εκεί. Δηλαδή,

$$\frac{D}{Dt} [y - \eta(x, t)] = \frac{\partial}{\partial t} [y - \eta(x, t)] + u \cdot \nabla [y - \eta(x, t)] = 0$$

το οποίο μας δίνει

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{στο } y = \eta(x, t),$$

γνωστή και ως κινητική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (kinematic boundary condition).

Τέλος, το υγρό φράσσεται από μία άκαμπτη επιφάνεια στο $y = -h(x)$. Δεν υπάρχει κάθετη ταχύτητα στην επιφάνεια αυτή, άρα έχουμε την συνθήκη του βυθού (bed condition),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{στο } y = -h(x).$$

Προκειμένου να αποκτήσουμε το πρόβλημα οριακών τιμών για γραμμικά υδάτινα κύματα υποθέτουμε ότι το πλάτος της διατάραξης είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος της.

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα που βρήκαμε, έχουμε το πρόβλημα οριακών συνθηκών για τα γραμμικά δισδιάστατα υδάτινα κύματα πάνω σε μια επίπεδη, άκαμπτη κλίση:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{για } -\infty < x < \infty, -h \leq y \leq 0, \quad (1.1)$$

που ικανοποιεί την γραμμικοποιημένη συνθήκη Bernoulli,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{στο } y = 0, \quad (1.2)$$

την γραμμικοποιημένη κινηματική συνθήκη,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{στο } y=0, \quad (1.3)$$

και την συνθήκη βυθού,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{στο } y=-h. \quad (1.4)$$

Θα χρειαστούμε επιπλέον αρχικές συνθήκες για τα φ και η , και κατάλληλες συνθήκες για την ακτινοβολία. Γενικότερα, για δοθέν βάθος, h , και πυκνότητα ρευστού ρ , χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε την σχέση ανάμεσα στο μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης ενός αρμονικού κύματος. Η σχέση αυτή είναι γνωστή και ως σχέση διασποράς (dispersion relation).

1.2 Γραμμικά Κύματα Βαρύτητας

1.2.1 Οδεύον κύμα βαρύτητας (progressive gravity wave)

Ξεκινάμε την ανάλυση των γραμμικών κυμάτων βαρύτητας αναζητώντας λύση με της εξής μορφή

$$\varphi(x, y, t) = F(x-ct)Y(y)$$

Πρόκειται για ένα κύμα με σταθερή μορφή που διαδίδεται προς την θετική διεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα φάσης c . Η συνάρτηση $Y(y)$ καθορίζει την μεταβολή της ταχύτητας ανάλογα το βάθος. Αντικαθιστώντας την λύση στην εξίσωση Laplace, αποκτούμε

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F''Y + FY'' = 0,$$

και

$$\frac{F''}{F} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2.$$

Λύνουμε με μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών και έχουμε

$$F'' + k^2 F = 0 \quad \text{και} \quad Y'' - k^2 Y = 0$$

$$F = A \cos k(x-ct) + B \sin k(x-ct) \quad \text{και} \quad Y = C e^{ky} + D e^{-ky},$$

δηλαδή εκθετική συμπεριφορά στην y -κατεύθυνση και περιοδική συμπεριφορά στην x -κατεύθυνση.

Θέλουμε να ικανοποιείται η συνθήκη $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ στο $y = -h$. άρα πρέπει

$$k(C e^{-kh} - D e^{kh}) = 0,$$

και συνεπώς $Y = \bar{D} \cosh k(y+h)$, όπου $\bar{D} = 2D e^{kh}$.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την λύση ως εξής

$$\varphi(x, y, t) = \cosh k(y+h) [\bar{A} \cosh k(x-ct) + \bar{B} \sin k(x-ct)], \quad (1.5)$$

όπου $\bar{A} = 2A \bar{D}$ και $\bar{B} = 2B \bar{D}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας. Αρχικά διαφοροποιούμε την (1.2) προς τον χρόνο t , κ έχουμε

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{για } y=0.$$

Με την βοήθεια της συνθήκης (1.3) εξαλείφουμε τον όρο $\partial \eta / \partial t$ και έχουμε

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{για } y=0. \quad (1.6)$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση αυτή την λύση όπως την βρήκαμε στην σχέση (1.5) και παίρνουμε

$$(-k^2 c^2 \cosh kh + gk \sinh kh) [\bar{A} \cos k(x-ct) + \bar{B} \sin k(x-ct)] = 0.$$

Αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή του $x-ct$, άρα

$$-k^2 c^2 \cosh kh + gk \sinh kh = 0,$$

συνεπώς

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh kh.$$

Αυτή είναι η σχέση διασποράς που μας δείχνει ότι αρμονικά κύματα με διαφορετικούς κυματικούς αριθμούς, και συνεπώς με διαφορετικά μήκη κύματος, διαδίδονται με διαφορετική ταχύτητα.

Ως προς το μήκος κύματος ($\lambda = 2\pi/k$) η σχέση διασποράς είναι

$$c = \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$$

και ως προς τη γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega^2 = gk \tanh kh.$$

Οι δύο πιθανές τιμές του c δείχνουν ότι τα κύματα μπορούν να διαδοθούν προς οποιαδήποτε οριζόντια κατεύθυνση.

Σε ρηχό νερό, ισχύει ότι $h \ll \lambda$, $\tanh(2\pi h/\lambda) \sim 2\pi h/\lambda$, άρα

$$c^2 \sim gh \quad \text{για} \quad h \ll \lambda$$

Βλέπουμε ότι η ταχύτητα του κύματος, c , είναι ανεξάρτητη από το μήκος κύματος, λ , δηλαδή ότι τα γραμμικά ρηχά υδάτινα κύματα δεν είναι κύματα με διασπορά.

Αντίστοιχα, σε βαθιά κύματα, ισχύει ότι $h \gg \lambda$, $\tanh(2\pi h/\lambda) \sim 1$, άρα

$$c^2 \sim \frac{g\lambda}{2\pi} \quad \text{για} \quad h \gg \lambda.$$

Από τη σχέση αυτή καταλαβαίνουμε ότι τα γραμμικά βαθέα υδάτινα είναι κύματα με διασπορά, και το τετράγωνο της ταχύτητας αυξάνεται γραμμικά με το μήκος κύματος.

Χρειάζεται να προσδιορίσουμε το πλάτος του κύματος, υπολογίζοντας την θέση της επιφάνειας $\eta(x, t)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα πάρουμε $\bar{A}=0$ στην λύση (1.5), ώστε

$$\varphi(x, y, t) = \bar{B} \cosh k(y+h) \sin k(x-ct). \quad (1.7)$$

Αντικαθιστούμε την λύση (1.7) στη συνθήκη (1.2), και παίρνουμε

$$\eta(x, t) = \bar{B} \frac{kc}{g} \cosh kh \cos k(x-ct).$$

Επιλέγοντας κατάλληλο \bar{B} έτσι ώστε

$$\bar{B} \frac{kc}{g} \cosh kh = a,$$

καταλήγουμε στη γενική λύση

$$\eta(x, t) = a \cos k(x-ct), \quad c^2 = \frac{g}{k} \tanh kh. \quad (1.8)$$

$$\varphi(x, y, t) = \frac{ag}{kc \cosh kh} \cosh k(y+h) \sin k(x-ct).$$

Έχοντας βρει αυτή τη λύση, εξετάζουμε ποιοι περιορισμοί στη ροή είναι απαραίτητοι για να είναι η λύση μια ακριβής προσέγγιση. Στην κινηματική οριακή συνθήκη διατηρήσαμε τον όρο $\eta_t = O(ack)$, και παραμελήσαμε τον όρο $\varphi_x \eta_x = O(a^2 gk/c)$. Για να είναι έγκυρο αυτό, θα πρέπει $a^2 gk/c \ll ack$, ισοδύναμα $ak \ll \tanh kh$. Σε βαθιά νερά ισχύει ότι $\tanh kh \sim 1$ άρα χρειαζόμαστε $ak \ll 1$, ή ισοδύναμα $a/\lambda \ll 1$, ώστε το πλάτος του κύματος να είναι πολύ μικρότερο από το μήκος του. Αντίστοιχα σε ρηχό νερό ισχύει $\tanh kh \sim kh$ και χρειαζόμαστε $a/h \ll 1$ ώστε το πλάτος να είναι κατά πολύ μικρότερο από το βάθος. Άρα τελικά χρειαζόμαστε να έχουμε $a \ll \lambda$ και $a \ll h$.

Στη συνέχεια θα καθορίσουμε πως κινείται ένα σωματίδιο του υγρού υπό ένα οδεύον κύμα βαρύτητας. Θεωρούμε ένα σωματίδιο αρχικά στην θέση $(x, y) = (X_0, Y_0)$. Σε μια

γραμμική θεωρία, η κίνησή του μακριά από την αρχική του θέση είναι μικρή σε σχέση με την αρχική του μετατόπιση. Περιγράφουμε λοιπόν την κίνησή του ως εξής

$$(x, y) = (X_0 + X_1(t), Y_0 + Y_1(t)), \quad \text{με } |X_1| \ll |X_0| \text{ και } |Y_1| \ll |Y_0|.$$

Θεωρώντας μόνο τον κυρίαρχο όρο παίρνουμε:

$$\frac{dX_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_0, Y_0) = \frac{ag}{c \cosh kh} \cosh k(Y_0 + h) \cos k(X_0 - ct),$$

$$\frac{dY_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(X_0, Y_0) = \frac{ag}{c \cosh kh} \sinh k(Y_0 + h) \sin k(X_0 - ct),$$

$$\text{με } X_1(0) = Y_1(0) = 0.$$

Ολοκληρώνουμε μια φορά και εξαλείφουμε το t , και βρίσκουμε,

$$\left(\frac{X_1}{\cosh k(Y_0 + h)} - \frac{ag}{kc^2 \cosh kh} \sin kX_0 \right)^2 + \left(\frac{Y_1}{\sinh k(Y_0 + h)} + \frac{ag}{kc^2 \cosh kh} \cos kX_0 \right)^2 = \left(\frac{ag}{kc^2 \cosh kh} \right)^2.$$

Τα σωματίδια του ρευστού κινούνται δεξιόστροφα γύρω από μια μικρή έλλειψη, με την ίδια περίοδο με το οδεύον κύμα που τα κινεί. Η έλλειψη έχει τους άξονές της κάθετους και οριζόντιους, με μήκη ανάλογα με $\sinh k(Y_0 + h)/\cosh kh$ και $\cosh k(Y_0 + h)/\cosh kh$ αντίστοιχα. Πλησιάζοντας το βυθό, $Y_0 \rightarrow -h$, οι ελλείψεις γίνονται προοδευτικά λεπτότερες στην κατακόρυφη κατεύθυνση, καθώς η κίνηση πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη μη ύπαρξης κάθετης ταχύτητας. Στον βυθό τα σωματίδια κινούνται οριζόντια μπρος πίσω. Σημειώνουμε ότι οι διαδρομές των σωματιδίων είναι κλειστοί βρόγχοι, και δεν υπάρχει μαζική μεταφορά από κύμα με μικρό πλάτος.

Θα μελετήσουμε τώρα πόσο γρήγορα διαδίδεται η ενέργεια που σχετίζεται με ένα οδεύον κύμα βαρύτητας. Θα ορίσουμε τα δυναμικά κινητικής και βαρυτικής ενέργειας μιας στοιχειώδους περιοχής $dxdy$ με άμεση αναλογία με τη δυναμική των σωματιδίων.

Μας ενδιαφέρει η πυκνότητα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας, που ορίζουμε ως

$$\text{πυκνότητα κινητικής ενέργειας} = \int_{-h}^0 \frac{1}{2} \rho |\nabla \varphi|^2 dy,$$

$$\text{πυκνότητα δυναμικής ενέργειας} = \int_0^{\eta} \rho g y dy = \frac{1}{2} \rho g \eta^2.$$

Το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας έχει ως ανώτερο όριο το σημείο της ελεύθερης επιφάνειας που δεν έχει διαταραχθεί, ενώ η βαρυτική δυναμική ενέργεια δίνεται από την μετατόπιση του αδιατάρακτου επιπέδου $y=0$.

Βρίσκουμε τον μέσο όρο τους ως προς το μήκος κύματος

$$\text{μέση πυκνότητα κινητικής ενέργειας} = \frac{\rho}{2\lambda} \int_0^\lambda \int_{-h}^0 \frac{1}{2} \rho |\nabla \varphi|^2 dy dx = \bar{K},$$

$$\text{μέση πυκνότητα δυναμικής ενέργειας} = \frac{\rho g}{2\lambda} \int_0^\lambda \eta^2 dx = \bar{V}$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα αυτά και βρίσκουμε ότι

$$\bar{K} = \bar{V} = \frac{1}{4} \rho g a^2,$$

άρα η συνολική μέση πυκνότητα ενέργειας σε ένα μήκος κύματος είναι

$$H = \frac{1}{2} \rho g a^2.$$

Η ροή της κινητικής ενέργειας είναι αμελητέα μικρή, άρα η μέση ενεργειακή ροή, E_F , διαμέσου ενός κατακόρυφου επιπέδου, είναι ίση με το ρυθμό μέσου χρόνου λειτουργίας των δυνάμεων πίεσης στο επίπεδο αυτό, κατά τη διάρκεια μιας περιόδου της κίνησης. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \int_{-h}^0 p \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \int_{-h}^0 (p_{atm} - \rho g y - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy dt. \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει ότι

$$\int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt \propto \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \cos k(x - ct) dt = 0$$

άρα έχουμε

$$E_F = -\rho \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \int_{-h}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy dt.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αυτό λαμβάνοντας υπόψιν ότι η μέση τιμή του $\sin^2 X$ σε μια περίοδο είναι ίση με 1/2, άρα

$$E_F = \frac{\rho a^2 k^2 c^3}{4 \sinh^2 kh} \left(h + \frac{\sinh 2kh}{2k} \right).$$

Η ενέργεια που περνά μέσα από ένα κατακόρυφο επίπεδο κατά τη διάρκεια ενός χρόνου τ είναι $E_F \tau$. Αν ορίσουμε U την ταχύτητα με την οποία η ενέργεια ρέει οριζόντια, τότε η ενέργεια που περιέχεται σε ένα οριζόντιο μήκος $U\tau$ είναι $U\tau H$, όπου H είναι η πυκνότητα ενέργειας. Άρα από $E_F \tau = U\tau H$, έχουμε $U = E_F / H$.

Χρησιμοποιώντας και την σχέση διασποράς $k^2 c^2 = gk \tanh kh$, προκύπτει

$$U = \frac{2 E_F}{\rho g a^2} = \frac{1}{2} c \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) = c_g.$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η ενέργεια του κύματος διαδίδεται με την ταχύτητα ομάδας (group velocity).

Ας δούμε ένα παράδειγμα πάνω σε αυτά που βρήκαμε. Έστω ένας κολυμβητής βρίσκεται σε βάθος 4 m, και έρχεται κατά πάνω του κύμα ύψους 25 cm. Το πλάτος του κύματος είναι δηλαδή 12,5 cm. Το κύμα αυτό έχει μήκος κύματος ίσο με 10 m και πλευρική έκταση 50 m. Η υπερυψωμένη περιοχή του κύματος είναι

$$\int_{-\pi/2k}^{\pi/2k} a \cos kx \, dx = \frac{2a}{k} = \frac{a\lambda}{\pi} \approx 0.40 \, m^2.$$

Η μάζα του νερού που βρίσκεται στο υπερυψωμένο κομμάτι θα είναι

$$\rho L = \frac{a\lambda}{\pi} \approx 20 \cdot 10^3 \, kg.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε και τη μέση ενέργεια ανά μήκος κύματος,

$$\frac{1}{2} \rho g a^2 L \approx 3.9 \cdot 10^3 \, kg \, m \, s^{-2},$$

καθώς και την ταχύτητα κύματος,

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \approx 3.96 \, m \, s^{-1}.$$

1.2.2 Στάσιμο κύμα βαρύτητας

Τα στάσιμα κύματα προκύπτουν από λύσεις της μορφής $\varphi = X(x)Y(y)T(t)$. Αν την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση Laplace $\nabla^2 \varphi = 0$ θα έχουμε

$$X''YT + XY''T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \text{και} \quad Y'' - k^2 Y = 0.$$

Η λύση που ικανοποιεί την συνθήκη $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ όταν $y = -h$ είναι η

$$Y = B \cosh k(y+h)$$

Η γενική λύση για το X θα είναι

$$X = C \cos kx + D \sin kx,$$

άρα τελικά έχουμε

$$\varphi(x, y, t) = \cosh k(y+h) (\bar{C} \cos kx + \bar{D} \sin kx) T(t).$$

Μένει να βρούμε το $T(t)$. Αντικαθιστώντας την λύση αυτή στη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (1.6), παίρνουμε

$$(\cosh kh T'' + gk \sinh kh T) (\bar{C} \cos kx + \bar{D} \sin kx) = 0,$$

κι επειδή πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή του x , άρα έχουμε

$$T'' + \omega^2 T = 0,$$

όπου ω είναι η σχέση διασποράς $\omega^2 = gk \tanh kh$.

Η γενική λύση για το T είναι

$$T = F \cos \omega t + G \sin \omega t.$$

Μετά από κατάλληλες μετατοπίσεις της χωρικής και χρονικής αρχικής θέσης καταλήγουμε στο παρακάτω

$$\varphi(x, y, t) = L \cosh k(y+h) \cos kx \cos \omega t.$$

Τέλος, αντικαθιστούμε το παραπάνω στην δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (1.2), για να βρούμε

$$\eta(x, t) = \frac{L\omega}{g} \cosh kh \cos kx \sin \omega t.$$

Αν ορίσουμε $a = L\omega \cosh(kh)/g$ καταλήγουμε στην συνολική λύση

$$\eta(x, t) = a \cos kx \sin \omega t, \quad \omega^2 = gk \tanh kh,$$

$$\varphi(x, y, t) = \frac{ag}{\omega \cosh kh} \cosh k(y+h) \cos kx \sin \omega t.$$

Η περιβάλλουσα (envelope) του στατικού κύματος είναι $\eta = a \cos kx$, η συχνότητά του δίνεται από την παραπάνω σχέση διασποράς και η διαδρομή των σωματιδίων είναι ευθείες.

1.2.3 Παραγωγός Κυμάτων (Wavemaker)

Ένας εύκολος τρόπος να δημιουργήσουμε κύματα στο εργαστήριο, είναι με την χρήση του wavemaker. Αποτελείται από μία μεγάλη δεξαμενή, γεμάτη με νερό, κλειστή από την μια μεριά, και ένα έμβολο ή κουπί από την άλλη. Τα τοιχώματα της δεξαμενής είναι συνήθως από πλέξιγκλας έτσι ώστε να είναι εμφανή τα κύματα. Το έμβολο/κουπί κάνει ημιτονοειδή ταλάντωση με μικρό πλάτος, και παράγει κύματα που ταξιδεύουν κατά μήκος της δεξαμενής. Συνήθως τοποθετείται μια αμμουδιά στο άλλο άκρο της δεξαμενής για να απορροφάει την κυματική ενέργεια και να σταματάει τις αντανakλάσεις.

Το νερό βρίσκεται στην περιοχή $0 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq -h$ και είναι σε κατάσταση ηρεμίας. Το επίπεδο $y=0$ είναι η ελεύθερη επιφάνεια. Τα κύματα αρχίζουν να παράγονται την χρονική στιγμή $t=0$ όπου ξεκινάει να λειτουργεί ο παραγωγός κυμάτων. Το έμβολο ή κουπί βρίσκεται στην θέση

$$x = X(y, t) = \frac{1}{2} s(y) \cos \sigma t,$$

όπου s είναι η σταθερά για το έμβολο, και $s = s_0(y+h)$ είναι η σταθερά του κουπιού.

Εμείς πρέπει να λύσουμε την εξίσωση του Laplace $\nabla^2 \varphi = 0$, ενώ ικανοποιούνται οι

$$\text{συνθήκες βυθού } \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ στο } y = -h(x).$$

και οι τροποποιημένες συνοριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας (combined free surface

$$\text{condition) (1.6) } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ για } y = 0.$$

Στην επιφάνεια του εμβόλου/κουπιού η ταχύτητα είναι συνεχής. Υποθέτουμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι αρκετά μικρό ώστε να θεωρούμε την κάθετη ταχύτητα οριζόντια, και να μπορούμε να εφαρμόσουμε την συνθήκη στο $x=0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{dX}{dt} = -\frac{1}{2} \sigma s(y) \sin \sigma t, \text{ στο σημείο } x=0 \quad (1.9)$$

Λύνουμε το πρόβλημα με μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών.

Ξεκινάμε αναζητώντας λύση οδεύοντος κύματος με μορφή όπως στη σχέση (1.5), για $k > 0$. Για να αποκτήσουμε την χρονική εξάρτηση που δίνεται στην συνθήκη του παραγωγού κυμάτων (1.9), χρειαζόμαστε

$$\varphi = A \cosh k(y+h) \cos k(x-ct) \quad (1.10)$$

με $kc = \sigma$. Η σχέση διασποράς $c^2 = \frac{g}{k} \tanh kh$ δείχνει ότι το k πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\sigma^2 = gk \tanh kh.$$

και μπορούμε να δούμε ότι οι καμπύλες $f(k) = \sigma^2 / gk$ και $g(k) = \tanh kh$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο, $k = k_0$.

Όμως, από την (1.9) βλέπουμε ότι

$$-kA \sin \sigma t \cosh k(y+h) = \frac{1}{2} s(y) \sigma \sin \sigma t$$

το οποίο δεν μπορεί να ικανοποιηθεί. Παρατηρούμε ότι η λύση θα έχει πιο περίπλοκη κατασκευή.

Ας δοκιμάσουμε να κατασκευάσουμε λύση σε μια γειτονιά του εμβόλου/κουπιού, με μορφή $\varphi = X(x)Y(y)T(t)$. Επιλέγουμε $T(t) = \sin \sigma t$ ώστε να ισχύει η (1.9), άρα έχουμε

$$Y'' = -k^2 Y, \quad X'' = k^2 X,$$

ως εκ τούτου

$$Y = A \cos ky + B \sin ky, \quad X = C e^{kx} + D e^{-kx}.$$

Επιλέξαμε τα πρόσημα διαφορετικά από την προηγούμενη ενότητα, έτσι ώστε να υπάρχει εκθετική απόσβεση στην διεύθυνση του x -άξονα, και περιοδική συμπεριφορά στον y -άξονα.

Από την συνθήκη βυθού, παίρνουμε ότι $Y = F \cos k(y+h)$.

Η λύση μας θα πρέπει να είναι πεπερασμένη καθώς $x \rightarrow \infty$, άρα πρέπει $C = 0$, άρα το δυναμικό της ταχύτητας προκύπτει

$$\varphi(x, y, t) = A e^{-kx} \cos k(y+h) \sin \sigma t.$$

Αντικαθιστούμε στην τροποποιημένη συνοριακή συνθήκη και έχουμε

$$-A e^{-kx} [\sigma^2 \sin \sigma t \cos kh + gk \sin kh \sin \sigma t] = 0,$$

δηλαδή $\sigma^2 = -gk \tan kh$. Θέτοντας $\zeta = kh$ έχουμε

$$\tan \zeta = -\frac{h\sigma^2}{g\zeta}.$$

Αν θεωρήσουμε ότι $\sigma^2 h / g = 1$, βλέπουμε ότι υπάρχουν άπειρες τιμές του ζ για τις οποίες οι καμπύλες $-1/\zeta$ και $\tan \zeta$ τέμνονται, άρα υπάρχει μια άπειρα αριθμήσιμη ακολουθία κατάλληλων κυματικών αριθμών, $k = k_1, \dots, k_n, \dots$. Η πιο γενικευμένη λύση που είναι περιορισμένη στην γειτονιά του $x=0$ είναι

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n x} \cos k_n (y+h) \sin \sigma t.$$

Ωστόσο, η λύση αυτή δεν επαρκεί, διότι καθώς τείνει προς το 0 όσο μεγαλώνει το x , ενώ εμείς θα περιμέναμε το κύμα να διαδοθεί μακριά από το $x=0$.

Για το λόγο αυτό συνδυάζουμε την λύση (1.10) με την παραπάνω περιορισμένη στη γειτονιά του $x=0$ και παίρνουμε

$$\varphi(x, y, t) = A_0 \cosh k_0 (y+h) \cos(k_0 x - \sigma t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n x} \cos k_n (y+h) \sin \sigma t, \quad (1.11)$$

όπου k_n για $n \geq 1$ είναι οι θετικές ρίζες της $\sigma^2 = -gk \tan kh$ και k_0 είναι η μοναδική θετική ρίζα της $\sigma^2 = gk \tan kh$.

Μένει να ικανοποιηθεί και η συνθήκη (1.9). Πρέπει να ισχύει

$$-\frac{1}{2} \sigma s(y) = k_0 A_0 \cosh k_0 (y+h) - \sum_{n=1}^{\infty} k_n A_n \cos k_n (y+h), \quad \text{για } -h \leq y \leq 0. \quad (1.12)$$

Οι συναρτήσεις $\cosh k_0 (y+h)$, $\cos k_n (y+h)$ σχηματίζουν ένα πλήρες ορθογώνιο σύνολο, και κάθε καλώς συμπεριφερούμενη (well-behaved) συνάρτηση $s(y)$ μπορεί να αναπαρασταθεί με αυτή τη μορφή.

Για να βρούμε το A_0 πολλαπλασιάζουμε την (1.12) με $\cosh k_0 (y+h)$ και ολοκληρώνουμε από $-h$ μέχρι 0 :

$$\int_{-h}^0 -\frac{1}{2} \sigma s(y) \cosh k_0 (y+h) dy = A_0 k_0 \int_{-h}^0 \cosh^2 k_0 (y+h) dy.$$

Όμοια, για να βρούμε τα A_n πολλαπλασιάζουμε με $\cos k_n (y+h)$ και ολοκληρώνουμε από $-h$ μέχρι 0 :

$$\int_{-h}^0 \frac{1}{2} \sigma s(y) \cos k_n (y+h) dy = A_n k_n \int_{-h}^0 \cos^2 k_n (y+h) dy.$$

Για το έμβολο, με $s(y) = s_0$,

$$A_0 = \frac{-\sigma s_0 \sinh k_0 h}{k_0 (k_0 h + \frac{1}{2} \sinh 2k_0 h)}, \quad A_n = \frac{\sigma s_0 \sin k_n h}{k_n (k_n h + \frac{1}{2} k_n h)}, \quad \text{για } n \geq 1.$$

Μπορούμε πλέον να βρούμε την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, η , από την συνθήκη (1.2).

Καθώς αυξάνεται το x , το εκθετικό κομμάτι της λύσης (1.11) μειώνεται ταχέως, με τον κυρίαρχο όρο να είναι $O(e^{-k_1 x})$. Επειδή $k_1 x > \pi x / 2h$, μπορούμε να αγνοήσουμε το κομμάτι της λύσης που ελαττώνεται εκθετικά όταν $\pi x / 2h \gg 1$. Για πρακτικούς σκοπούς $x = 2h$ θα είναι αρκετό ώστε τα στατικά κύματα να έχουν γίνει μικρά, και να υπολογίσουμε το η από την οδεύουσα συνιστώσα του κύματος ως εξής

$$\eta \approx -\frac{\sigma A_0 \cosh k_0 h}{g} \sin(kx - \sigma t).$$

Μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε το πλάτος του κύματος αυτού, $a = \sigma A_0 \cosh k_0 h / g$, με το πλάτος της ταλάντωσης του εμβόλου, s_0 :

$$\frac{a}{s_0} = \frac{2 \sinh^2 k_0 h}{2k_0 h + \sinh 2k_0 h}.$$

Όταν είμαστε σε βαθύ νερό ισχύει ότι $a/s_0 \sim 1$, ενώ σε ρηχό νερό $a/s_0 \sim \frac{1}{2} k_0 h \ll 1$.

Έχει ενδιαφέρον να υπολογίσουμε την υδροδυναμική φόρτιση στο έμβολο. Αγνοώντας την υδροστατική πίεση $-\rho g y$, η γραμμική συνθήκη Bernoulli είναι $p = -\rho \partial \varphi / \partial t$, και η συνολική υδροδυναμική δύναμη στο έμβολο είναι

$$F_h = -\rho \int_{-h}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy \quad \text{για } x=0.$$

Αντικαθιστούμε το φ από την (1.11),

$$F_h = \frac{-\rho \sigma^2 s_0 \sinh^2 k_0 h \sin \sigma t}{k_0^2 (k_0 h + \frac{1}{2} \sinh 2k_0 h)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho \sigma^2 s_0 \sin^2 k_n h \cos \sigma t}{k_n^2 (k_n h + \frac{1}{2} \sin 2k_n h)}.$$

Το παραπάνω μπορεί να εκφραστεί και ως προς την ταχύτητα \dot{x}_p και επιτάχυνση \ddot{x}_p του εμβόλου ως εξής

$$\begin{aligned} F_h &= \frac{2\rho \sigma \sinh^2 k_0 h}{k_0^2 (k_0 h + \frac{1}{2} \sinh 2k_0 h)} \dot{x}_p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\rho \sin^2 k_n h}{k_n^2 (k_n h + \frac{1}{2} \sin 2k_n h)} \ddot{x}_p \\ &= D_p \dot{x}_p + M_p \ddot{x}_p. \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε όλες τις δυνάμεις και επιταχύνσεις στο έμβολο, το οποίο έχει μάζα m . Αν η κινητήρια δύναμη είναι η F_p τότε από τον δεύτερο νόμο του

Νεύτωνα, και υπολογίζοντας ότι η υδροδυναμική δύναμη αντιτίθεται στην κίνηση του εμβόλου, έχουμε

$$m \ddot{x}_p = F_p - (D_p \dot{x}_p + M_p \ddot{x}_p)$$

$$\Leftrightarrow (m + M_p) \ddot{x}_p + D_p \dot{x}_p = F_p.$$

Η ποσότητα M_p καλείται η προστιθέμενη (added) μάζα του εμβόλου, και D_p είναι η προστιθέμενη απόσβεση. Η προστιθέμενη μάζα αντιπροσωπεύει το έργο που πραγματοποιείται από το έμβολο κατά τη μετακίνηση του υγρού μπροστά του. Η προστιθέμενη απόσβεση αντιπροσωπεύει το έργο για την παραγωγή των κυμάτων που διασκορπίζονται στο ρευστό.

1.2.4 Εξαγωγή ενέργειας από υδάτινα κύματα

Γνωρίζουμε ότι τα κύματα φέρουν ενέργεια καθώς διαδίδονται. Η αξιοποίηση της υδροδυναμικής αυτής ενέργειας και η μετατροπή της σε μια πιο ωφέλιμη μορφή, όπως η ηλεκτρική ενέργεια, είναι μια ελκυστική πρόταση.

Θα εξετάσουμε έναν απλό μηχανισμό όμοιο με το wavemaker, και θα δούμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί πιο αποτελεσματικά για να παράγει κυματική ενέργεια. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια δεξαμενή νερού με ένα έμβολο στο ένα της άκρο. Τα κύματα προσπίπτουν πάνω στο έμβολο, το οποίο είναι συνδεδεμένο με το μηχανισμό που εξάγει την ενέργεια με μια σύνδεση ισοδύναμη με ένα ελατήριο και έναν αποσβεστήρα. Το ελατήριο αντιπροσωπεύει την συνολική ακαμψία και ο αποσβεστήρας το σύνολο των αποτελεσμάτων τριβής. Το έμβολο κινείται ως απόκριση στο προσπίπτον κύμα και κάποια από την προσπίπτουσα ενέργεια αντανακλάται πίσω στη δεξαμενή.

Η κατάλληλη μορφή του δυναμικού ταχύτητας, λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα προσπίπτοντα και ανακλώμενα κύματα, είναι

$$\varphi = A_I \cosh k_0(y+h) e^{-i(k_0 x + \sigma t)} + A_R \cosh k_0(y+h) e^{-i(k_0 x - \sigma t)}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n(y+h) e^{-k_n x - i \sigma t},$$

όπου A_I είναι το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος, το οποίο διαδίδεται από τα δεξιά προς τα αριστερά, και A_R είναι το πλάτος του ανακλώμενου κύματος που διαδίδεται από τα αριστερά προς τα δεξιά, και οι συντελεστές A_n που είναι μιγαδικοί, καθορίζουν το στατικό κύμα που θα πρέπει να ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στο έμβολο.

Η μετατόπιση του εμβόλου είναι

$$x_p = -\frac{1}{2} S e^{i\sigma t}. \quad (1.13)$$

Χρησιμοποιώντας την ορθογωνικότητα των \cosh, \cos έχουμε ότι

$$\frac{1}{4} i (A_R - A_I) (\sinh 2k_0 h + 2k_0 h) = \frac{i\sigma S}{2k_0} \sinh k_0 h, \quad (1.14)$$

$$-\frac{1}{4} A_n (\sin 2k_n h + 2k_n h) = \frac{i\sigma S}{2k_n} \sin k_n h, \quad \text{για } n=1,2,\dots$$

Θεωρούμε ότι οι ιδιότητες του προσπίπτοντος κύματος A_I, k_0 είναι γνωστές, και υπολογίζοντας το σ από την σχέση διασποράς, μπορούμε να βρούμε τα A_R, A_n από τις 2 παραπάνω σχέσεις. Η τιμή του S υπολογίζεται από την εξίσωση κίνησης του εμβόλου.

Η υδροδυναμική δύναμη στο έμβολο είναι

$$F_h = -D_p \dot{x}_p - M_p \ddot{x}_p - \frac{2i\rho\sigma A_I}{k_0} \sinh k_0 h e^{-i\sigma t}.$$

Βλέπουμε ότι σε σχέση με το πρόβλημα του wavemaker έχει έναν παραπάνω όρο, εξαιτίας του προσπίπτοντος κύματος.

Η εξίσωση κίνησης του εμβόλου είναι

$$m \ddot{x}_p + D \dot{x}_p + \kappa x_p = F_h,$$

όπου m είναι η μάζα του εμβόλου, D είναι παράγοντας τριβής λόγω του αποσβεστήρα, κ είναι η δυσκαμψία του ελατηρίου. Ενώνοντας τις σχέσεις προκύπτει:

$$(m + M_p) \ddot{x}_p + (D + D_p) \dot{x}_p + \kappa x_p = -\frac{2i\rho\sigma A_I}{k_0} \sinh k_0 h e^{-i\sigma t}.$$

Αντικαθιστώντας το x_p από την (1.13), μπορούμε να υπολογίσουμε το S . Εάν το S είναι πραγματικός αριθμός τότε το έμβολο είναι στην ίδια φάση με το εισερχόμενο κύμα, ενώ αν είναι φανταστικός τότε είναι εκτός φάσης.

Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε ένα έμβολο που θα απορροφάει όσο το δυνατόν περισσότερη ενέργεια από το προσπίπτον κύμα, και έτσι θα ελαχιστοποιείται το ανακλώμενο κύμα. Έστω λοιπόν ότι $A_R = 0$ και από την (1.14) παίρνουμε

$$A_I = \frac{-2\sigma S \sinh k_0 h}{k_0 (\sinh k_0 h + 2k_0 h)},$$

και αντικαθιστώντας την (1.13) στην εξίσωση κίνησης του εμβόλου

$$-\sigma^2 (m + M_p) - i\sigma (D + D_p) + \kappa = -2i\sigma D_p,$$

απ' όπου προκύπτει

$$\kappa = \sigma^2(m + M_p), \quad D = D_p.$$

Με αυτές τις παραμέτρους θα έχουμε ένα τέλεια συντονισμένο σύστημα.

1.3 Η επίδραση της επιφανειακής τάσης: τριχοειδή κύματα βαρύτητας

Τα μόρια σε ένα ρευστό δέχονται μια δύναμη εξαιτίας των τριγύρω μορίων. Σε κατάσταση ισορροπίας, εντός του όγκου του ρευστού οι δυνάμεις αυτές ισορροπούν και η συνολική δύναμη είναι μηδέν. Ωστόσο, στην επιφάνεια υπάρχει μια ανισορροπία στις διαμοριακές δυνάμεις, και αυτό οδηγεί στο να ασκείται μια μη-μηδενική δύναμη σε κάθε μόριο από τον όγκο του υγρού. Αυτή η δύναμη μπορεί, για παράδειγμα, να στηρίξει μια βελόνα που τοποθετείται προσεκτικά πάνω στην επιφάνεια του νερού, ή να επιτρέψει σε ένα έντομο να περπατήσει σε μια λίμνη. Η δύναμη αυτή είναι γνωστή ως επιφανειακή τάση. Όταν το ρευστό έρχεται σε επαφή με τα τοιχώματα ενός δοχείου, υπάρχει μια μεταβολή στη στάθμη του ρευστού στα τοιχώματα εξαιτίας της επιφανειακής τάσης. Αν η βαρύτητα δρα στο ρευστό έτσι ώστε η επιφάνεια του να είναι σε κατάσταση ισορροπίας, ονομάζεται διεπιφάνεια (capillary surface), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις φυσικές ποσότητες, όπως την πυκνότητα του ρευστού ρ , την βαρύτητα g , την επιφανειακή τάση σ , για να δημιουργήσουμε μια ποσότητα μήκους του τριχοειδούς κύματος (capillary length), $(\sigma/\rho g)^{1/2}$.

Ας θεωρήσουμε ένα μικρό στοιχείο της ελεύθερης επιφάνειας, όπως φαίνεται στην εικόνα 1.1.

Η ισορροπία δυνάμεων δίνει

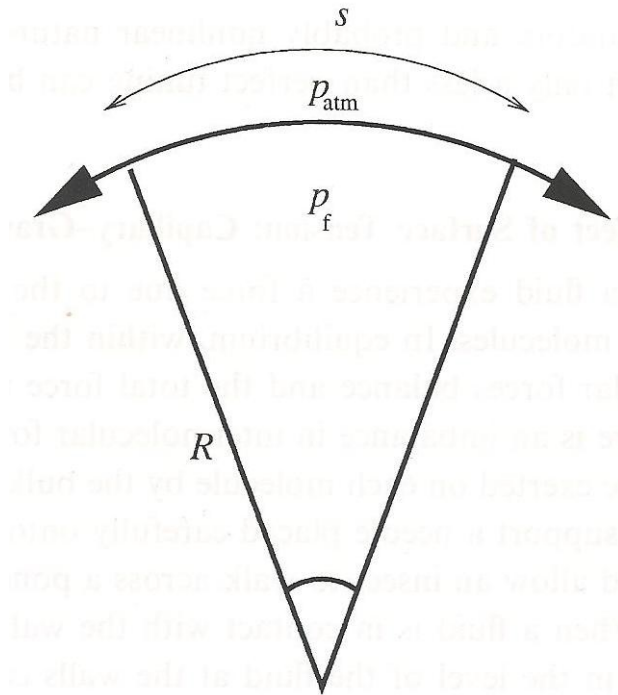
$$p_f \delta s = p_{atm} \delta s + 2\sigma \sin(\delta\theta/2).$$

Επειδή $\delta s \sim R \delta\theta$ καθώς $\delta\theta \rightarrow 0$, θα έχουμε

$$p_f - p_{atm} = \frac{\sigma}{R},$$

όπου R είναι η ακτίνα καμπυλότητας. Για δισδιάστατες παραμορφώσεις

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 \eta / \partial x^2}{\{1 + (\partial \eta / \partial x)^2\}^{3/2}}.$$



Εικόνα 1.1. Τριχοειδείς δυνάμεις σε μικρό στοιχείο της ελεύθερης επιφάνειας. [1]

Για γραμμικά κύματα, μπορούμε να αγνοήσουμε τον τετραγωνικό όρο στον παρονομαστή, και ως εκ τούτου

$$p_f - p_{atm} = -\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Θα εντάξουμε την επίδραση της επιφανειακής τάσης στην γραμμική θεωρία των υδάτινων κυμάτων.

Από την γραμμική εξίσωση Bernoulli

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gy + \frac{p}{\rho} = 0,$$

και γνωρίζοντας ότι $p = p_f + p_{atm}$ όταν $y = \eta$, προκύπτει η δυναμική οριακή συνθήκη

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{για } y = \eta(x, t).$$

Η κινητική συνθήκη (1.3) δεν επηρεάζεται από την επιφανειακή τάση. Συνδυάζοντας τις δύο αυτές συνθήκες προκύπτει

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad \text{για } y = \eta(x, t).$$

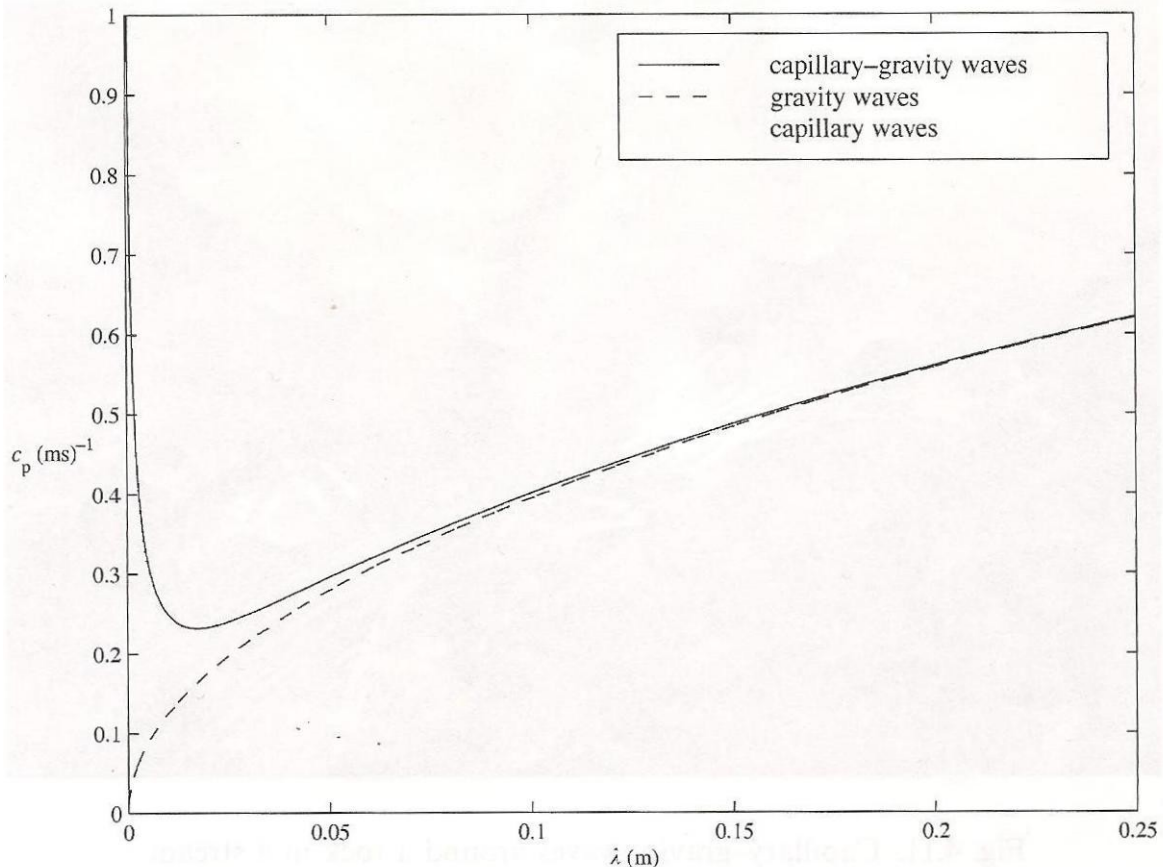
Η φ ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, άρα $\partial^2 \phi / \partial x^2 = -\partial^2 \phi / \partial y^2$, και ως εκ τούτου

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} = 0 \quad \text{για } y = \eta(x, t).$$

Εάν το μήκος κύματος, λ , είναι πολύ μικρότερο από το capillary length, $\sigma \gg \rho g \lambda^2$, τότε η βαρύτητα είναι αμελητέα σε σχέση με την επίδραση της επιφανειακής τάσης, έτσι μπορούμε να θέσουμε $g=0$ και να μελετήσουμε τα τριχοειδή κύματα. Απ' την άλλη μεριά, εάν $\lambda \gg (\sigma / \rho g)^{1/2}$, τότε η δράση της επιφανειακής τάσης είναι αμελητέα και έχουμε κύματα βαρύτητας.

Και για τα δύο κύματα η σχέση διασποράς είναι

$$\omega^2 = \left(g + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right) k \tanh kh.$$



Εικόνα 1.2. Η ταχύτητα φάσης για τριχοειδή, για κύματα βαρύτητας και τριχοειδή κύματα βαρύτητας σε νερό 10cm. [1]

Στην εικόνα 1.2 φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας φάσης, $c_p = \omega / k$, για

τριχοειδή κύματα βαρύτητας, καθώς και η ταχύτητα φάσης για τριχοειδή κύματα ($g=0$) και κύματα βαρύτητας ($\sigma=0$), σε νερό 10cm, συναρτήσει του μήκους κύματος λ .

Στα τριχοειδή κύματα βαρύτητας υπάρχει ελάχιστη ταχύτητα φάσης, c_{pmin} για $\lambda = \lambda_{min}$. Η ταχύτητα ομάδας δεν είναι ίση με την ταχύτητα φάσης, αλλά εξαρτάται από το μήκος κύματος. Μια διαφορά ανάμεσα στα τριχοειδή και στα κύματα βαρύτητας είναι ότι σε βαθύ νερό η ταχύτητα ομάδας είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα φάσης, ενώ το ανάποδο ισχύει για τα κύματα βαρύτητας.

1.4 Κύματα ακμής

Θα εξετάσουμε τι συμβαίνει στην διάδοση κυμάτων ακμής σε διαφορετική τοπογραφία βυθού, συγκεκριμένα σε μια παραλία. Έστω λοιπόν, ότι ο σταθερός, άκαμπτος βυθός σχηματίζει γωνία β με το οριζόντιο, και έχει εξίσωση $y = -x \tan \beta$, όπου x και y είναι καρτεσιανές συντεταγμένες. Θα χρησιμοποιήσουμε τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Η θέση ισορροπίας της επιφάνειας του υγρού είναι $y=0$, για $x>0$. Η μονάδα που είναι κάθετη στον κεκλιμένο βυθό είναι $n = (\sin \beta, \cos \beta, 0)$, άρα η συνθήκη μη ύπαρξης κάθετης ταχύτητας στον βυθό γίνεται

$$\sin \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{για } y = -x \tan \beta. \quad (1.15)$$

Οι συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας (1.2), (1.3) παραμένουν ίδιες, και μένει να λύσουμε την τρισδιάστατη έκδοση της εξίσωσης Laplace για το φ . Αναζητούμε λύση που διαδίδεται κατά μήκος της παραλίας, στην z -διεύθυνση, με μορφή $\varphi = f(z-ct)F(x, y)$.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση Laplace και παίρνουμε

$$f F_{xx} + f F_{yy} + f'' F = 0,$$

και συνεπώς

$$\frac{F_{xx} + F_{yy}}{F} = -\frac{f''}{f} = k^2.$$

Από τη στιγμή που η f ικανοποιεί την σχέση $f'' + k^2 f = 0$, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να την γράψουμε ως:

$$f = A \cos k(z-ct).$$

Η συνάρτηση $F(x, y)$ ικανοποιεί την τροποποιημένη εξίσωση Helmholtz

$$F_{xx} + F_{yy} = k^2 F.$$

Αναζητούμε λύση με μορφή $F = B e^{-bx+dy}$. Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση Helmholtz

θα πάρουμε

$$b^2 + d^2 = k^2.$$

Όμοια, από την συνθήκη βυθού (1.15) παίρνουμε

$$-b \sin \beta + d \cos \beta = 0.$$

Συνεπώς $b = k \cos \beta$, $d = k \sin \beta$,

και η λύση γίνεται

$$\varphi(x, y, t) = C \exp(-kx \cos \beta + ky \sin \beta) \cos k(z - ct).$$

Καθώς $x \rightarrow \infty$ το $\varphi \rightarrow 0$ εκθετικά, και το κύμα περιορίζεται σε μια γειτονιά της παραλίας λόγω του κεκλιμένου βυθού. Όσο η γωνία β μεγαλώνει, το κύμα περιορίζεται σε μια ευρύτερη περιοχή, μέχρι να γίνει κύμα βαθύ νερού όταν $\beta = \pi/2$. Αντικαθιστούμε την παραπάνω λύση στην συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (1.6),

$$C \exp(-kx \cos \beta) (-k^2 c^2 + gk \sin \beta) \cos k(z - ct) = 0.$$

Αυτό πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή του x και z , άρα η σχέση διασποράς είναι η εξής:

$$c^2 = \frac{g \sin \beta}{k}.$$

Παρατηρούμε ότι όταν $\beta = \pi/2$ παίρνουμε την σχέση διασποράς για κύματα βαθύ νερού.

1.5 Ship waves

Θα μελετήσουμε τώρα πως επηρεάζει η διασπορά την κυματομορφή ενός κινούμενου αντικείμενου. Ένα απλό παράδειγμα αυτού είναι τα μοτίβα που δημιουργούνται από ένα αντικείμενο, όπως ένα πλοίο ή μια πάπια, που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε βαθύ νερό. Τα μοτίβα των κυμάτων περιορίζονται σε μια σφήνα και είναι σχεδόν πανομοιότυπα, παρά τα διαφορετικά μεγέθη τους. Αυτά τα κύματα συνήθως αναφέρονται ως ship waves, και μελετήθηκαν από τον Kelvin το 1887. Ο Kelvin ανέπτυξε μια αναλυτική λύση θεωρώντας ένα σημείο ώθησης κινούμενο στην επιφάνεια ενός μη διαταραγμένου σώματος νερού, και στη συνέχεια χρησιμοποίησε την μέθοδο στατικής φάσης για να υπολογίσει τα σημεία που το πλάτος της διατάραξης είναι μεγαλύτερο.

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε γεωμετρικά επιχειρήματα για να κατασκευάσουμε τις γραμμές των κορυφογραμμών. Θεωρούμε ότι το πλοίο είναι η πηγή ομόκεντρων κυμάτων όλων των μηκών, και θεωρούμε ότι κινείται με σταθερή ταχύτητα V σε ευθεία γραμμή.

Όπως έχουμε δει, η σχέση διασποράς για κύματα βαρύτητας σε βαθύ νερό είναι

$$\omega = \sqrt{gk},$$

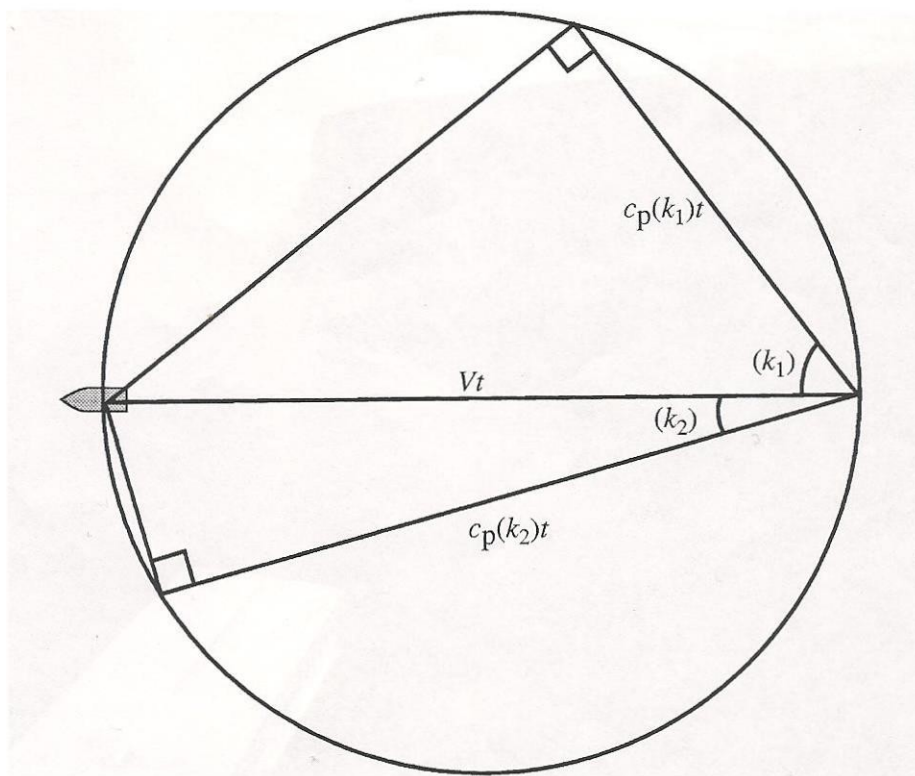
και ως τούτου η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας συνδέονται ως

$$c_p = 2c_g = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Τα κύματα που παράγονται από το πλοίο ταξιδεύουν με διαφορετικές ταχύτητες, ανάλογα με το μήκος κύματός του, και οι κορυφογραμμές ταξιδεύουν δύο φορές πιο γρήγορα από την ενέργεια. Αν υποθέσουμε ότι το πλοίο παράγει κύματα κάθε μήκους, τότε υπάρχει μια συνιστώσα της διαταραχής που αντιστοιχεί σε κάθε θετική ταχύτητα κύματος.

Εξετάζουμε τώρα την κυματομορφή που φαίνεται σταθερή από την οπτική ενός παρατηρητή στο πλοίο. Η συνιστώσα της ταχύτητας του πλοίου που είναι στην κατεύθυνση της κίνησης της κορυφής πρέπει να είναι ίση με c_p . Τα κύματα αυτά διαδίδονται με γωνία $\theta(k)$ από την ευθεία κίνησης του πλοίου, με

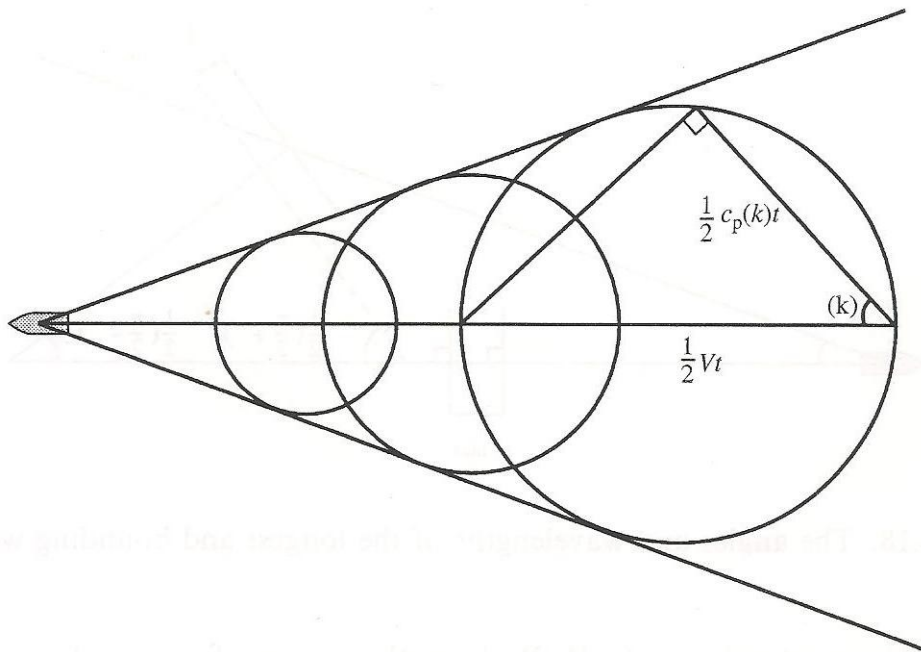
$$\cos \theta(k) = \frac{c_p(k)}{V}.$$



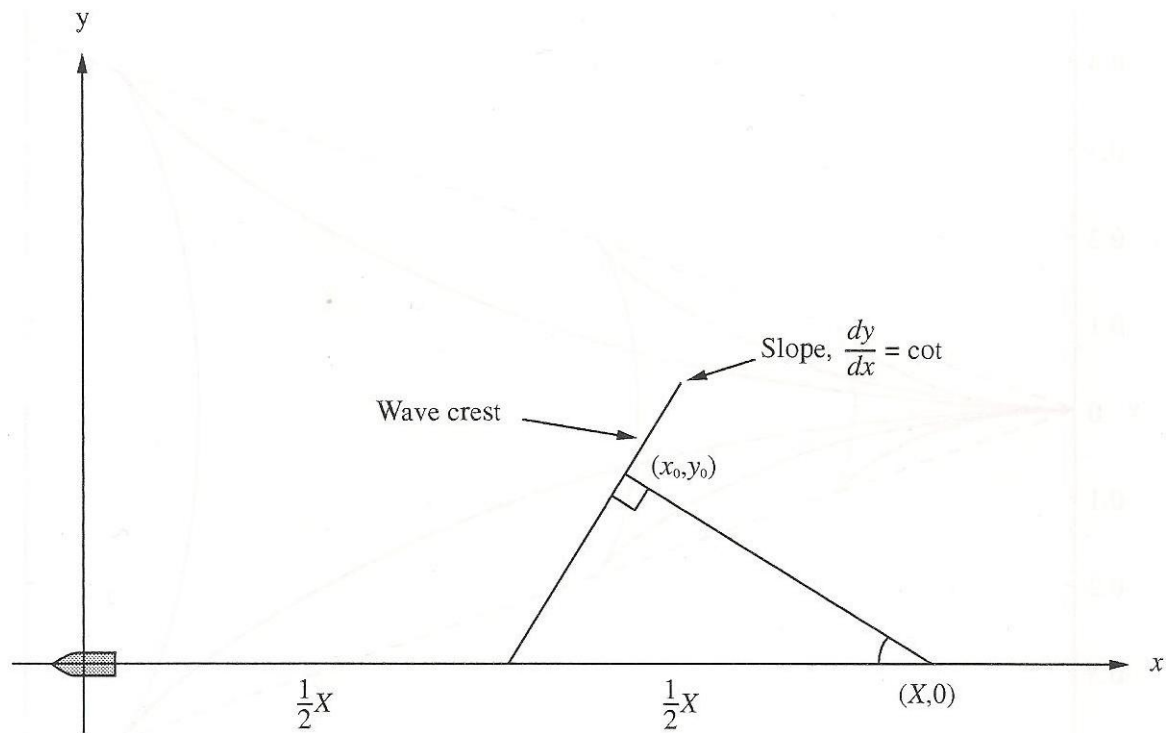
Εικόνα 1.3. Η γωνία ως προς την ευθεία κίνησης, $\theta(k)$, που σχηματίζεται από κύματα κυματικού αριθμού k των οποίων οι κορυφές φαίνονται στάσιμες στον παρατηρητή στο πλοίο. [1]

Απεικονίζεται και στην εικόνα (1.3) για δύο διαφορετικούς κυματικούς αριθμούς, k_1, k_2 . Από απλή τριγωνομετρία, βλέπουμε ότι για κάθε τιμή του k τα τρίγωνα είναι ορθογώνια, και έτσι ο τόπος των σημείων που οι κορυφογραμμές φαίνονται ακίνητες είναι ένας κύκλος ακτίνας $\frac{1}{2}Vt$.

Στο επιχείρημα αυτό υπάρχει ένα ελάττωμα. Η προπορευόμενη ακμή της περιοχής που διαταράχθηκε την στιγμή $t=0$, διαδίδεται με την ταχύτητα ομάδας, $c_g(k)=\frac{1}{2}c_p(k)$, διότι αυτή είναι η ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι η κορυφή κινείται πιο γρήγορα από την προπορευόμενη ακμή. Θέλουμε να τροποποιήσουμε το επιχείρημα, ώστε οι κορυφές που φαίνονται ακίνητες να περιέχονται μέσα σε κύκλο ακτίνας $\frac{1}{4}Vt$, όπως βλέπουμε στην εικόνα 1.4. Οι κύκλοι που εκπέμπονται αργότερα φράσσονται από μια σφήνα (wedge) με γωνία α , γνωστή και ως Kelvin wedge. Η γωνία α είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα του πλοίου V .



Εικόνα 1.4. Η γωνία ως προς την ευθεία κίνησης, $\theta(k)$, που σχηματίζεται από κύματα κυματικού αριθμού k των οποίων οι κορυφές φαίνονται στάσιμες στον παρατηρητή στο πλοίο, λαμβάνοντας υπ' όψιν τη διάδοση της ενέργειας με την ταχύτητα ομάδας, $c_g(k)=\frac{1}{2}c_p(k)$. [1]



Εικόνα 1.5. Η κορυφή στάσιμου κύματος σε σύστημα συντεταγμένων για τον υπολογισμό της κίνησης του κύματος. [1]

Το μήκος κύματος των κυμάτων που διαδίδονται με γωνία θ προς της κατεύθυνση της κίνησης είναι ίσο με

$$\lambda = 2\pi V^2 \cos^2 \theta / g.$$

Αυτό σημαίνει ότι παίρνουμε μέγιστο μήκος κύματος $\lambda_{max} = 2\pi V^2 / g$, όταν το κύμα διαδίδεται στην ίδια κατεύθυνση με το πλοίο $\theta = 0$.

Έστω, λοιπόν, ένα πλοίο που κινείται με ταχύτητα $(-V, 0)$ κατά μήκος του x-άξονα, και βρίσκεται στιγμιαία στην αρχή των αξόνων. Τα κύματα που παράχθηκαν όταν το πλοίο ήταν στη θέση $(X, 0)$ διαδίδονται με κλίση θ προς τον x-άξονα. Έστω ότι η κορυφή που φαίνεται στατική από το πλοίο βρίσκεται στο σημείο (x_0, y_0) . Από την εικόνα (1.5) με τη βοήθεια τριγωνομετρίας, υπολογίζουμε ότι

$$x_0 = X(\theta) \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right), \quad y_0 = \frac{1}{2} X(\theta) \cos \theta \sin \theta. \quad (1.16)$$

Αντιμετωπίζουμε το X ως συνάρτηση του θ , καθώς διαφορετικά τμήματα της κορυφής θα είναι λόγω κυμάτων που εκπέμπονται διαφορετικές χρονικές στιγμές, άρα θα είναι διαφορετική η τιμή του X .

Βλέπουμε επίσης από την εικόνα (1.5) ότι η κλίση της κορυφής στο (x_0, y_0) είναι

$$\frac{dy}{dx} = \cot \theta.$$

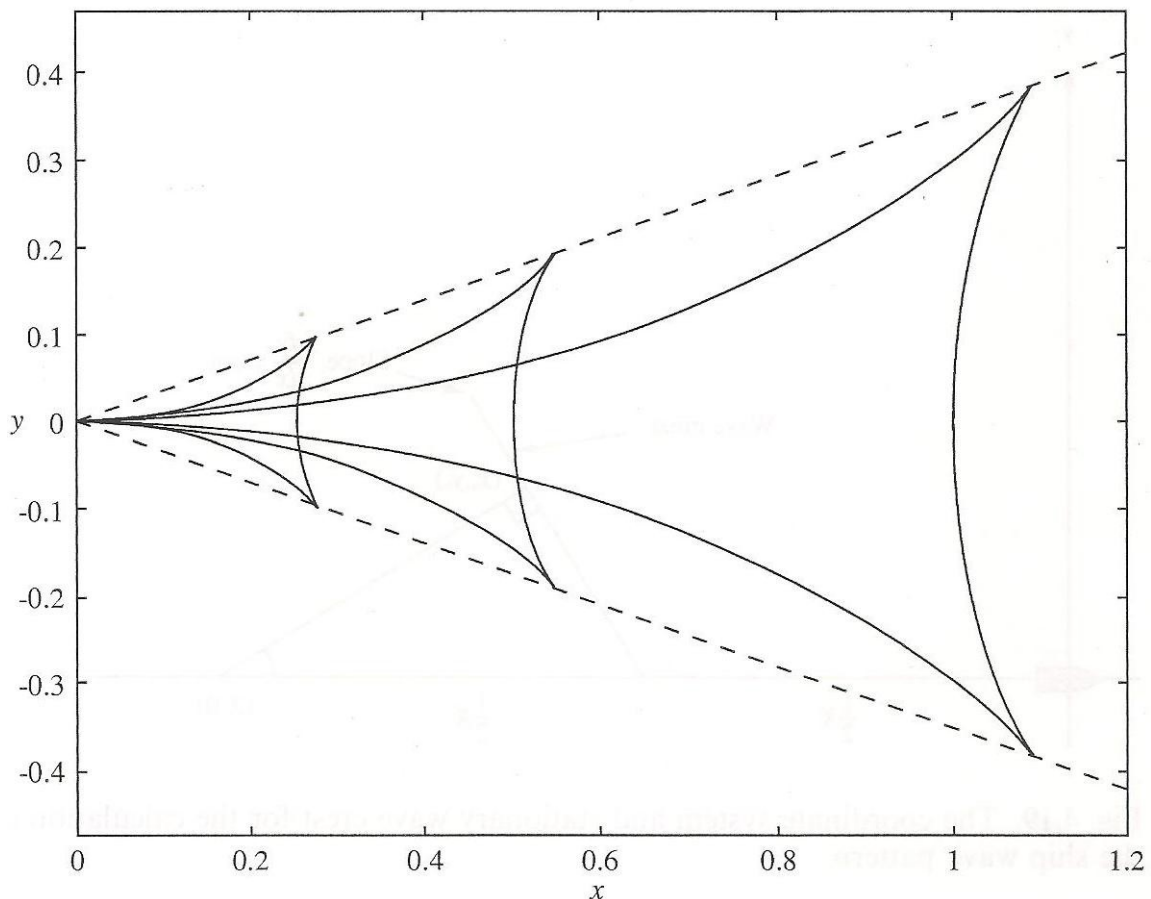
Από τον κανόνα αλυσίδας $dy/dx = (dy_0/d\theta)/(dx_0/d\theta)$, τα οποία τα υπολογίζουμε από την (1.16), και αντικαθιστούμε στην σχέση της κλίσης:

$$\frac{dX}{d\theta} = -X \tan \theta.$$

Λύνουμε την διαφορική και βρίσκουμε $X = A \cos \theta$, όπου A είναι μια σταθερά.

Αντικαθιστούμε το X στις (1.16) και έχουμε την γραμμή της κορυφής

$$x_0 = A \cos \theta \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right), \quad y_0 = \frac{1}{2} A \cos^2 \theta \sin \theta.$$



Εικόνα 1.6. Η κορυφογραμμές της κυματομορφής Kelvin, για διάφορες τιμές του A . Βλέπουμε ότι είναι φραγμένες από την σφήνα Kelvin (η διακεκομμένη γραμμή). [1]

Η γραμμή αυτή φαίνεται στη γραφική παράσταση (εικόνα 1.6) για διάφορες τιμές του

A. Παρατηρούμε ότι φράσσονται από τη σφήνα Kelvin, όπου υπάρχει μια ακμή (cusp) στη γραμμή των κορυφογραμμών. Το πλάτος του κύματος είναι συνήθως μεγαλύτερο κοντά στις άκρες της σφήνας Kelvin, όπως επιβεβαιώνει και η γραφική παράσταση.

1.6 Λύση προβλήματος αρχικών τιμών

Ας θεωρήσουμε ένα πρόβλημα όπου το ρευστό αρχικά είναι σε κατάσταση ηρεμίας, αλλά η ελεύθερη επιφάνεια είναι μετατοπισμένη από την κατάσταση ισορροπίας της, έτσι ώστε

$$\varphi=0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}=0 \quad \text{και} \quad \eta=\eta_0(x) \quad \text{όταν} \quad t=0.$$

Επιπλέον λαμβάνουμε υπ' όψιν μόνο το όριο για βαθύ νερό, και η συνθήκη βυθού γίνεται

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad y \rightarrow -\infty. \quad (1.17)$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς Fourier, που ορίζονται ως εξής

$$\tilde{\varphi}(k, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \varphi(x, y, t) dx \quad \text{και} \quad \tilde{\eta}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \eta(x, t) dx.$$

Οι μετασχηματισμοί είναι καλά ορισμένοι, καθώς θεωρούμε ότι η αρχική διαταραχή είναι επαρκώς περιορισμένη, ώστε καθώς $x \rightarrow \pm\infty$ να $\eta \rightarrow 0, \varphi \rightarrow 0$ αρκετά γρήγορα. Στην πραγματικότητα, λέμε ότι δεν υπάρχουν κύματα που εισέρχονται από το άπειρο.

Να σημειωθεί ότι

$$\overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = [e^{ikx} \varphi]_{-\infty}^{\infty} - ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \varphi dx = -ik \tilde{\varphi},$$

και όμοια,

$$\overline{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)} = -k^2 \tilde{\varphi}, \quad \overline{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)} = \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2}.$$

Για αρχή θα μετασχηματίσουμε την εξίσωση Laplace,

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} - k^2 \tilde{\varphi} = 0.$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής, που ικανοποιεί και την συνθήκη (1.17) είναι

$$\tilde{\varphi} = A(k, t) e^{|k|y}. \quad (1.18)$$

Το επόμενο βήμα είναι να μετασχηματίσουμε την συνθήκη (1.6),

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} = 0 \quad \text{για } y=0,$$

και αντικαθιστώντας στη συνθήκη αυτή το φ από την σχέση (1.18)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + g|k|A = 0.$$

Η γενική λύση του είναι

$$A = a(k)e^{i\omega t} + b(k)e^{-i\omega t},$$

όπου

$$\omega = \sqrt{g|k|},$$

συνεπώς

$$\tilde{\varphi} = \left[a(k)e^{i\omega t} + b(k)e^{-i\omega t} \right] e^{|k|y}.$$

Το τρίτο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τα $a(k), b(k)$ από τις αρχικές συνθήκες.

Μετασχηματίζουμε την δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (1.2)

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + g\tilde{\eta} = 0 \quad \text{για } y=0.$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση αυτή τη λύση που βρήκαμε παραπάνω

$$i\omega \left[a(k)e^{i\omega t} - b(k)e^{-i\omega t} \right] + g\tilde{\eta} = 0,$$

και για $t=0$

$$i\omega \left[a(k) - b(k) \right] + g\tilde{\eta}_0 = 0,$$

όπου $\tilde{\eta}_0 = \tilde{\eta}(k, 0)$.

Όμοια, ο μετασχηματισμός Fourier της κινηματικής συνθήκης είναι

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \quad \text{για } y=0,$$

άρα

$$a(k) + b(k) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(k) = -b(k) = \frac{ig\tilde{\eta}_0}{2\omega},$$

άρα τα αντικαθιστούμε και προκύπτει

$$\tilde{\varphi}(k, y, t) = \frac{g}{\omega} \frac{1}{2} i (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{|k|y} \tilde{\eta}_0(k).$$

Το τέταρτο και τελευταίο στάδιο είναι να προσδιορίσουμε την ανύψωση της ελεύθερης

επιφάνειας, αντικαθιστώντας την λύση στη δυναμική συνθήκη

$$\tilde{\eta}(k, t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \tilde{\eta}_0(k).$$

Αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό κι γράφουμε,

$$\eta(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}_0(k) \{e^{-i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx+\omega t)}\} dk. \quad (1.19)$$

Αυτή είναι λύση μορφής κυματοπακέτου. Κάθε συνιστώσα Fourier της αρχικής ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας διαδίδεται στην θετική και αρνητική x -κατεύθυνση με ταχύτητα $\omega/k = \sqrt{g/|k|}$.

Γενικότερα, εάν θέλουμε να ερμηνεύσουμε τι μας λέει για την επιφάνεια αυτή η ολοκληρωτική αναπαράσταση, πρέπει να την προσεγγίσουμε. Θα εξετάσουμε την ασυμπτωτική προσέγγιση του ολοκληρώματος στη (1.19), για $t \gg 1$ και x/t σταθερό. Με άλλα λόγια, μελετάμε τι συμβαίνει σε ένα σημείο που κινείται με ταχύτητα x/t , αρκετή ώρα μετά την αρχική διατάραξη.

Γράφουμε την (1.19) ως εξής

$$\eta(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}_0(k) \cdot [\exp\left\{-it\left(k\frac{x}{t} - \omega\right)\right\} + \exp\left\{-it\left(k\frac{x}{t} + \omega\right)\right\}] dk.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με την μέθοδο στατικής φάσης. Αν έχουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\lambda g(s)} ds,$$

τότε η ολοκληρωτέα ταλαντώνεται γρήγορα, και τα θετικά και αρνητικά μέρη της αλληλοαναιρούνται, εκτός από την γειτονιά των σημείων της στατικής φάσης, όπου $g'(s) = 0$. Μπορούμε να την προσεγγίσουμε χρησιμοποιώντας αναπτύγματα Taylor για τις f, g σε μια περιοχή των σημείων αυτών. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνο ένα τέτοιο σημείο, $s = s_0$,

$$I(\lambda) \sim f(s_0) e^{i\lambda g(s_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\lambda}{2} g''(s_0)(s-s_0)^2} ds, \quad \text{για } \lambda \gg 1.$$

Υποθέτουμε ότι δεν είναι εκφυλισμένη περίπτωση, και $g'(s_0) \neq 0$.

Κάνουμε την αντικατάσταση $z = (s - s_0) \sqrt{\frac{1}{2} \lambda |g''(s_0)|}$,

και γίνεται

$$I(\lambda) \sim f(s_0) e^{i\lambda g(s_0)} \left(\frac{2}{\lambda |g''(s_0)|} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i z^2 \operatorname{sgn}\{g''(s_0)\}} ds, \quad \text{για } \lambda \gg 1.$$

Αλλάζουμε μεταβλητή $z = e^{\pm i\pi/4} Z$, και μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i z^2} dz = 2 e^{\pm i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-Z^2} dZ = e^{\pm i\pi/4} \sqrt{\pi},$$

άρα

$$I(\lambda) \sim f(s_0) e^{i\lambda g(s_0)} \left(\frac{2\pi}{\lambda |g''(s_0)|} \right)^{1/2} e^{i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}\{g''(s_0)\}}, \quad \text{για } \lambda \gg 1. \quad (1.20)$$

Στην περίπτωση μας, $f(k) = \tilde{\eta}_0(k)$, $g(k) = -\left\{ k \frac{x}{t} - \omega(k) \right\}$, με x/t σταθερό.

Υπολογίζουμε

$$g'(k) = -\left\{ \frac{x}{t} - \omega'(k) \right\},$$

άρα τα σημεία στατικής φάσης είναι για $x/t = d\omega/dk$.

Σε βαθιά υδάτινα κύματα ισχύει $\omega^2 = g|k|$, άρα

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = g \operatorname{sgn}(k) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{g \operatorname{sgn}(k)}{2\sqrt{g|k|}}.$$

Αν περιοριστούμε στα σημεία που κινούνται στην θετική κατεύθυνση, δηλαδή x/t και $x > 0$, σημαίνει ότι $k > 0$ στα σημεία στατικής φάσης, άρα

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Αυτό δίνει ένα μοναδικό σημείο στατικής φάσης με $k = k_0$, όπου

$$k_0 = \frac{g t^2}{4x^2}.$$

Να σημειώσουμε ότι για $x/t < 0$ και $x < 0$ υπάρχει μοναδικό σημείο στατικής φάσης για $k = -k_0$.

Για $k=k_0$, $g(k_0)=\frac{gt}{4x}$ και $g''(k_0)=-\frac{2x^3}{gt^3}$,

άρα από τη σχέση (1.20) έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}_0(k) \exp\left\{-it\left(k\frac{x}{t}-\omega\right)\right\} dk$$

$$\sim \tilde{\eta}_0\left(\frac{gt^2}{4x^2}\right) \left\{\frac{2\pi}{t(2x^3/gt^3)}\right\}^{1/2} \exp\left\{i\left(\frac{gt^2}{4x}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}, \quad \text{για } t \gg 1.$$

Όμοια

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}_0(k) \exp\left\{-it\left(k\frac{x}{t}+\omega\right)\right\} dk$$

$$\sim \tilde{\eta}_0\left(\frac{gt^2}{4x^2}\right) \left\{\frac{2\pi}{t(2x^3/gt^3)}\right\}^{1/2} \exp\left\{-i\left(\frac{gt^2}{4x}-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad \text{για } t \gg 1.$$

Έτσι, καθώς $t \rightarrow \infty$ με $x/t=O(1)$,

$$\eta(x,t) \sim \tilde{\eta}_0\left(\frac{gt^2}{4x^2}\right) \left\{\frac{1}{2\pi t(2x^3/gt^3)}\right\}^{1/2} \cos\left(\frac{gt^2}{4x}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Το πλάτος της μετατόπισης της ελεύθερης επιφάνειας φθίνει όμοια με το $t^{-1/2}$ καθώς $t \rightarrow \infty$ ενώ το μήκος κύματος είναι $8\pi x^2/gt^2$, μια σταθερά $O(1)$.

Αυτό σημαίνει ότι εάν κάποιος κάθεται σε σημείο που κινείται με ταχύτητα x/t , ο κυματικός αριθμός των κυρίαρχων κυμάτων που μπορεί να παρατηρήσει είναι k_0 , ώστε $x/t=d\omega/dk$. Η ενέργεια που σχετίζεται με την συνιστώσα Fourier της αρχικής διατάραξης με κυματικό αριθμό k διαδίδεται με την ταχύτητα ομάδας $c_g=d\omega/dk$, όπως έχουμε δει και σε προηγούμενες ενότητες. Η ταχύτητα c_g είναι συνάρτηση του k , έτσι οι διαφορετικές συνιστώσες Fourier εξαπλώνονται με το πέρασμα του χρόνου. Γι' αυτό το λόγο το πλάτος της διαταραχής τείνει προς το 0 καθώς $t \rightarrow \infty$. Επίσης βλέπουμε ότι οι κορυφογραμμές μετακινούνται με την ταχύτητα φάσης, $c_p=\omega/k \neq c_g$. Για κύματα σε βαθύ νερό $c_g=\frac{1}{2}c_p$. Με άλλα λόγια, η ενέργεια ταξιδεύει με την μισή ταχύτητα της κορυφής του κύματος.

Το φαινόμενο αυτό μπορεί να παρατηρηθεί σε μια δεξαμενή νερού, όπου η κορυφή φαίνεται να κινείται στην προπορευόμενη ακμή της διαταραχής και να εξαφανίζεται εκεί.

Αντίθετα στα τριχοειδή κύματα η ταχύτητα ομάδας είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα

φάσης. Σε κάθε κύμα που έχει φυσικό σύστημα, την ταχύτητα διάδοσης της προπορευόμενης ακμής την καθορίζει η ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας, δηλαδή η ταχύτητα ομάδας, και όχι η ταχύτητα φάσης.

1.7 Ρηχά υδάτινα κύματα: γραμμική θεωρία

Θα μελετήσουμε τη θεωρία δισδιάστατων κυμάτων όταν το βάθος είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος της διαταραχής της ελεύθερης επιφάνειας. Θεωρούμε ότι το βάθος του νερού κάτω από την αδιατάρακτη ελεύθερη επιφάνεια είναι μια συνάρτηση $h_0(x)$, και το βάθος του νερού σε κάθε σημείο είναι $h(x, t)$.

Υποθέτουμε ότι η κατακόρυφη επιτάχυνση του ρευστού είναι πολύ μικρότερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας g , και η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού είναι κατά προσέγγιση ομοιόμορφη κατά μήκος κάθε κατακόρυφου τμήματος του ρευστού.

Η εξίσωση διατήρησης της κάθετης ορμής είναι

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g,$$

όπου η οριζόντια και κάθετη συνιστώσα του πεδίου ταχυτήτων είναι u και v αντίστοιχα. Αν αγνοήσουμε την κάθετη επιτάχυνση του ρευστού, τότε η πίεση είναι καθαρά υδροστατική, με

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g,$$

και συνεπώς

$$p = p_{am} + \rho g(h - h_0 - y).$$

Η εξίσωση διατήρησης της οριζόντιας ορμής είναι

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Αν το γράψουμε στη μορφή $Du/Dt = -(1/\rho)\partial p/\partial x$ τότε, καθώς το δεξί μέλος είναι ανεξάρτητο του y , το Du/Dt πρέπει να είναι επίσης ανεξάρτητο του y . Αν λοιπόν το u είναι ανεξάρτητο του y αρχικά, θα παραμείνει ανεξάρτητο καθ' όλη την κίνηση, άρα η εξίσωση οριζόντιας ορμής γίνεται

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} [h - h_0(x)] = 0. \quad (1.21)$$

Η εξίσωση διατήρησης μάζας θα είναι

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0. \quad (1.22)$$

Οι εξισώσεις (1.21),(1.22) είναι μη γραμμικές, και είναι γνωστές ως εξισώσεις ρηχού νερού, και θα μελετήσουμε τη λύση τους σε παρακάτω κεφάλαιο.

Για την ώρα θα εξετάσουμε την θεωρία γραμμικών ρηχών υδάτινων κυμάτων, όπου

$$u \ll 1, \quad h - h_0 = \eta(x, t) \ll 1.$$

Οι εξισώσεις (1.21),(1.22) γίνονται

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_0 u) = 0.$$

Μπορούμε να εξαλείψουμε το u βλέποντας ότι

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}(h_0 u) = -g \frac{\partial}{\partial x}(h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x}) = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},$$

δηλαδή το η ικανοποιεί την τροποποιημένη εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x}(h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x}). \quad (1.23)$$

Προφανώς αν το h_0 είναι σταθερό τότε

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ικανοποιεί την εξίσωση του μονοδιάστατου κύματος με ταχύτητα $\sqrt{g h_0}$ και δεν υπάρχει διασπορά.

Οι εξισώσεις ρηχών υδάτινων κυμάτων εφαρμόζονται συχνά για την εκτίμηση των φαινομένων της παλίρροιας σε εμβολές ποταμών και σε λιμάνια.

1.7.1 Η αντανάκλαση του φουσκώματος της θάλασσας από ένα σκαλοπάτι

Τα κύματα που πλησιάζουν την ακτογραμμή από την ανοιχτή θάλασσα, φέρνουν μαζί τους και απομακρύνουν την άμμο και άλλα συντρίμια. Αυτό μπορεί να είναι μια ενόχληση για ένα λιμάνι, όπου μπορεί να φράσσονται σταδιακά με λάσπη τα κανάλια νερού. Ένας τρόπος για να εμποδιστεί αυτό, είναι η τοποθέτηση ενός σκαλοπατιού στην είσοδο του λιμανιού. Έτσι θα εμποδίζεται το πέρασμα της άμμου, που κυρίως μεταφέρεται κοντά στο

βυθό.

Θα ελέγξουμε τι επίδραση θα έχει στα προσπίπτοντα κύματα. Θεωρούμε ένα γραμμικό ρηχό κύμα με ορθογώνια πρόσπτωση στο σκαλοπάτι.

Έστω το σκαλοπάτι είναι στη θέση $x=0$, η ανοιχτή θάλασσα είναι στο $x<0$ και το λιμάνι στο $x>0$. Θα ασχοληθούμε με την ροή κοντά στο σκαλοπάτι. Αν το βάθος στην ανοιχτή θάλασσα είναι h_1 και το βάθος στο λιμάνι είναι $h_2<h_1$, πρέπει να λύσουμε τη μονοδιάστατη εξίσωση κύματος με ταχύτητα $c_1=\sqrt{gh_1}$ για $x<0$ και $c_2=\sqrt{gh_2}$ για $x>0$. Τα κύματα που προσπίπτουν με πλάτος a θα αντανακλώνται και θα μεταδίδονται, άρα θέλουμε λύση με μορφή

$$\eta = \begin{cases} a \exp\{i(k_1 x - k_1 c_1 t)\} + R a \exp\{i(-k_2 x - k_2 c_1 t)\} & \text{για } x < 0, \\ T a \exp\{i(k_3 x - k_3 c_2 t)\} & \text{για } x > 0, \end{cases}$$

όπου $R a$ και $T a$ είναι το πλάτος του ανακλώμενου και του μεταδιδόμενου κύματος αντίστοιχα. Στο σημείο $x=0$ η πίεση του ρευστού, άρα και η ανύψωση της επιφάνειας πρέπει να είναι συνεχής, δηλαδή

$$a \exp(-i k_1 c_1 t) + R a \exp(-i k_2 c_1 t) = T a \exp(-i k_3 c_2 t),$$

το οποίο ισχύει για κάθε t όταν $k_1 c_1 = k_2 c_1 = k_3 c_2$, άρα τα κύματα έχουν ίδια συχνότητα, και $T = R + 1$. Επιπλέον θα πρέπει να είναι συνεχής η ροή του ρευστού στο $x=0$.

Υπολογίζουμε την οριζόντια ταχύτητα, ολοκληρώνοντας την σχέση $\partial u / \partial t = -g \partial \eta / \partial x$:

$$u = \begin{cases} \frac{g a}{c_1} \exp\{i(k_1 x - k_1 c_1 t)\} - \frac{g R a}{c_1} \exp\{i(-k_2 x - k_2 c_1 t)\} & \text{για } x < 0, \\ \frac{g T a}{c_2} \exp\{i(k_3 x - k_3 c_2 t)\} & \text{για } x > 0. \end{cases}$$

Η ροή του ρευστού είναι $u h$, και έχουμε

$$\frac{1-R}{c_1} h_1 = \frac{T}{c_2} h_2,$$

άρα

$$R = \frac{1 - \sqrt{h_2/h_1}}{1 + \sqrt{h_2/h_1}} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad T = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}} = \frac{2c_1}{c_1 + c_2}.$$

Βλέπουμε ότι τα μεταδιδόμενα κύματα που μπαίνουν στο λιμάνι, έχουν μεγαλύτερο πλάτος από τα προσπίπτοντα, ενώ τα ανακλώμενα κύματα έχουν μικρότερο πλάτος. Το γεγονός αυτό δεν μας προκαλεί έκπληξη διότι τα μεταδιδόμενα κύματα ταξιδεύουν σε ρηχό

νερό, και λόγω διατήρησης ενέργειας θα πρέπει να αυξάνεται το πλάτος.

1.7.2 Ενίσχυση κύματος σε ελαφρώς επικλινή πυθμένα

Θα εξετάσουμε την επίδραση ενός ελαφρώς επικλινή πυθμένα, που σχηματίζει γωνία β με το οριζόντιο, σε κύμα που πλησιάζει από την ανοιχτή θάλασσα με μικρό πλάτος. Η εξίσωση του βυθού είναι

$$h_0(x) = \begin{cases} \frac{H_\infty}{L} x & \text{για } 0 \leq x \leq L, \\ H_\infty & \text{για } x \geq L. \end{cases}$$

Θα υποθέσουμε ότι $H_\infty \ll L$, ώστε $H_\infty/L = \tan \beta \sim \beta$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γραμμική θεωρία ρηχών υδάτων και θα ψάξουμε λύση για την τροποποιημένη εξίσωση κύματος (1.23). Βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \beta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g \beta \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα προσπίπτον κύμα, που προκαλείται από παλίρροια ή μια μακρινή καταιγίδα, με μορφή

$$\eta(L, t) = a \cos(\omega t + \varepsilon).$$

Αν ψάξουμε περιοδική λύση μορφής $\eta = \cos(\omega t + \varepsilon) H(x)$, τότε

$$x \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{dH}{dx} + \frac{\omega^2}{g\beta} H = 0, \quad (1.24)$$

που υπακούει στο $H(L) = a$. Καταλήγουμε σχεδόν στην εξίσωση Bessel.

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = 2s^2$, έχουμε

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{4s} \frac{dH}{ds} \quad \text{και} \quad \frac{d^2 H}{dx^2} = \frac{1}{16s^2} \frac{d^2 H}{ds^2} - \frac{1}{16s^3} \frac{dH}{ds},$$

και καταλήγουμε στο

$$\frac{d^2 H}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dH}{ds} + \frac{8\omega^2}{g\beta} H = 0.$$

Η εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης, $y'' + y'/x + y = 0$, έχει λύσεις με μορφή

$y = AJ_0(x) + BY_0(x)$, και το $Y_0(x)$ δεν είναι φραγμένο στο $x=0$, άρα η κατάλληλη λύση της παραπάνω είναι

$$H(s) = A J_0\left(\sqrt{\frac{8\omega^2}{g\beta}} s\right).$$

Η σταθερά A καθορίζεται από το ότι $H = a$ στο $x = L$ και έτσι, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται από τη σχέση

$$\eta(x, t) = a J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}} x^{1/2}\right) / J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}} L^{1/2}\right) \cos(\omega t + \varepsilon).$$

Το πλάτος της διαταραχής αυξάνεται και το μήκος κύματος μειώνεται καθώς το κύμα πλησιάζει την ακτή στο $x = 0$. Αυτό μπορεί να παρατηρηθεί σε κύματα που προσεγγίζουν μια παραλία, οι υποθέσεις όμως της θεωρίας ρηχών υδάτων σταματάνε να ισχύουν για x πολύ μικρό, όπου η μη γραμμικότητα προκαλεί τα κύματα να σπάσουν. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι τα τσουνάμι, διαταραχές της επιφάνειας των ωκεανών που παράγονται από υποθαλάσσιους σεισμούς. Στην ανοιχτή θάλασσα μπορούν να έχουν μήκος εκατοντάδες χιλιόμετρα και ύψος μόλις λίγα μέτρα και είναι σχεδόν αδύνατο να εντοπιστούν με γυμνό μάτι. Ωστόσο, καθώς πλησιάζουν την ακτή, η επίδραση του κεκλιμένου στρώματος βυθού μειώνει το μήκος κύματος και παράγει ένα καταστρεπτικό τοίχο νερού που μπορεί να είναι δεκάδες μέτρα ψηλός.

Τέλος, στην ανοιχτή θάλασσα, η τριγωνομετρική μορφή της λύσης δείχνει ότι η μέση ανύψωση της επιφάνειας είναι ίση με μηδέν και ότι $H = O(a)$. Πάνω από την ακρογιαλιά όμως είναι μη μηδενική.

Ορίζουμε ως μέση ανύψωση να είναι

$$\bar{H} = \frac{1}{L} \int_0^L H(x) dx.$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση (1.24) και παίρνουμε

$$\int_0^L x H'' dx + \int_0^L H' dx + \frac{\omega^2}{g\beta} \int_0^L H dx = 0.$$

Από τη στιγμή που ισχύει

$$\int_0^L x H'' dx = [x H']_0^L - \int_0^L H' dx,$$

τότε έχουμε

$$\int_0^L H dx = -\frac{L g \beta}{\omega^2} H'(L),$$

και συνεπώς

$$\bar{H} = -\frac{a}{L^{1/2}} \sqrt{\frac{g\beta}{\omega^2}} J'_0\left(2\omega\sqrt{\frac{L}{g\beta}}\right) / J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{L}{g\beta}}\right).$$

Άρα βλέπουμε ότι αν η συχνότητα του προσπίπτοντος κύματος δεν είναι ίδια με την ιδιοσυχνότητα, δεν έχουμε συντονισμό,

$$\frac{\bar{H}}{L} = O\left(\frac{a}{L} \sqrt{\frac{gH_\infty}{\omega^2 L^2}}\right).$$

Η γραμμική θεωρία ρηχού ύδατος βασίζεται στο $H/L = O(a/L) \ll 1$. Αλλά εδώ βλέπουμε ότι οι αλλαγές στην μέση ανύψωση είναι μικρότερες από τις αλλαγές που οφείλονται στην γραμμική θεωρία και μπορούν να παραληφθούν εάν $\omega L \gg \sqrt{gH_\infty}$.

1.8 Διάθλαση Κύματος

Όταν κύματα από τη θάλασσα προσπίπτουν στην ακτογραμμή, υπάρχει μια κύρτωση της κορυφής τους. Αυτή η κάμψη σχετίζεται με την αλλαγή του μέσου βάθους του νερού, και συνεπώς και με τις αλλαγές στην ταχύτητα φάσης και στην ταχύτητα ομάδας. Σε ρηχά νερά, η κορυφή ταξιδεύει πιο αργά από ότι στα βαθιά, προσαρμόζεται με το προφίλ του βυθού, και γίνεται σχεδόν παράλληλη με την ακτογραμμή, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε σε κάθε παραλία. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται διάθλαση.

Για να το μελετήσουμε, θα χρειαστεί να γενικεύσουμε την λύση του οδεύοντος κύματος βαρύτητας που είχαμε βρει. Έστω ένα ομοιόμορφο, τρισδιάστατο, υδάτινο κύμα που διαδίδεται με γωνία a ως προς το οριζόντιο. Θα πάρουμε x, y τις συντεταγμένες στην επιφάνεια του κύματος, και z την κατακόρυφη. Αναζητώντας δυναμικό με μορφή $\varphi = Z(z) \exp\{i(kx + ly - \omega t)\}$, καταλήγουμε στο εξής:

$$\varphi = \frac{a\omega \cosh|k|(z+h)}{|k| \sinh|k|h} \sin \chi, \quad \eta = a \cos \chi \quad (1.25)$$

όπου a είναι το πλάτος, h είναι το μέσο βάθος και ω είναι η συχνότητα, με $\omega^2 = g|k| \tanh(|k|h)$. Το διάνυσμα του κυματικού αριθμού είναι

$$k = (k, l) = |k|(-\cos a, \sin a),$$

και μας δίνει την κατεύθυνση διάδοσης της κορυφής. Η συνάρτηση φάσης είναι

$$\chi = kx + ly - \omega t,$$

και είναι μια σταθερά στις γραμμές σταθερής ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

1.8.1 Η κινηματική των αργά μεταβαλλόμενων κυμάτων

Για να επεξηγεί επαρκώς η λύση (1.25) ένα διαθλασμένο κύμα, θα πρέπει να τροποποιηθεί ελαφρώς. Αρχικά, το πεδίο του διαθλασμένου κύματος πρέπει να έχει μια μη μηδενική μέση ανύψωση, \bar{a} . Ξαναγράφουμε λοιπόν την λύση ως εξής:

$$\varphi = \frac{a\omega}{|k|} \frac{\cosh|k|(z+h)}{\sinh|k|d} \sin \chi, \quad \eta = \bar{a} + a \cos \chi, \quad (1.26)$$

όπου $d = \bar{a} + h$ είναι το συνολικό μέσο βάθος. Ωστόσο, όπως είδαμε και πριν, αυτή η μέση ανύψωση θα είναι πολύ μικρή για κύματα που περνάνε πάνω από τοπογραφίες που αλλάζουν σταδιακά.

Τα μεγέθη k, l, ω, χ μεταβάλλονται λίγο από ένα μήκος κύματος, ή μια περίοδο, αλλά ποικίλλουν σημαντικά σε κλίμακες μεγαλύτερου μήκους, όπως είναι μια ακτογραμμή. Θεωρούμε το χ την κύρια μεταβλητή, και αναζητούμε λύση μορφής (1.26), με

$$k = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad l = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \omega = -\frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Για να ισχύει η θεωρία ότι το κύμα μεταβάλλεται σταδιακά, πρέπει να έχουμε ομαλή διακύμανση του χ . Οι μικτές δεύτερες παράγωγοι του θα πρέπει να είναι ανεξάρτητες από της σειρά διαφορίσης, δηλαδή

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial l}{\partial x}, \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Θα θεωρήσουμε το ω ως συνάρτηση του διανύσματος του κυματικού αριθμού, του χρόνου, του χώρου:

$$\omega \equiv \Omega(k, l, x, y, t),$$

άρα

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x}.$$

Αντικαθιστώντας αυτά που γνωρίζουμε, έχουμε

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial l} \frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad (1.27)$$

και όμοια

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial k} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial k} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial l} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (1.29)$$

Ορίζουμε μια καμπύλη $x = X(k, l), y = Y(k, l)$, που ονομάζεται ακτίνα (ray), ώστε να ικανοποιεί

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial k}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial l}. \quad (1.30)$$

Πάνω στις ακτίνες, οι (1.27),(1.28),(1.29) παίρνουν την απλή μορφή

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t}, \quad (1.31)$$

καθώς το αριστερό μέλος είναι ολική παράγωγος. Θα γράψουμε τις (1.30),(1.31) στην διανυσματική μορφή τους,

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\nabla_x \Omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad \text{στις ακτίνες} \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \nabla_k \Omega, \quad (1.32)$$

όπου $\mathbf{X} = (X, Y)$. Βλέπουμε ότι οι αλλαγές στον κυματικό αριθμό και στη συχνότητα μεταβιβάζονται κατά μήκος των ακτίνων. Η κλίση των ακτίνων καθορίζεται από την ακόλουθη τιμή,

$$\nabla_k \Omega = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial k}, \frac{\partial \Omega}{\partial l} \right) = c_g.$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας ομάδας, c_g , καθορίζει τη τροχιά της ακτίνας, και είναι γενίκευση του μονοδιάστατου ορισμού ταχύτητας ομάδας που είχαμε δει νωρίτερα.

1.8.2 Διάθλαση κύματος σε ελαφρώς επικλινή πυθμένα

Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση των ακτίνων της προηγούμενης ενότητας σε ένα κύμα μικρού πλάτους που πλησιάζει μια ελαφρώς επικλινή παραλία. Θεωρούμε μια παραλία με ευθεία ακρογιαλιά που απορροφάει τα κύματα στο $x=0$. Η θάλασσα βρίσκεται στο $x>0$. Για $x \geq L$ η θάλασσα έχει ομοιόμορφο βάθος H_∞ . Για $0 \leq x \leq L$ έχει βάθος $h = H_\infty x/L = \beta x$. Το κύμα έχει περίοδο $2\pi/\omega$ και διάνυσμα κυματικού αριθμού $k_\infty = |k_\infty|(-\cos a_\infty, \sin a_\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\beta \ll 1$, έτσι ώστε η παραλία να κλίνει ομαλά στον βυθό, και υποθέτουμε ότι η σχέση διασποράς είναι $\omega^2 = \Omega^2 = g|k| \tanh|k|h$. Η κατάλληλη μορφή της (1.32) στην περίπτωση μας είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \\ \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = -\beta \frac{\partial \Omega}{\partial h}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

με τις ακτίνες να ορίζονται από τα παρακάτω

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial l} = \frac{\partial \Omega}{\partial |k|} \frac{\partial |k|}{\partial l} = \frac{\partial \Omega}{\partial |k|} \frac{l}{|k|},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial k} = \frac{\partial \Omega}{\partial |k|} \frac{\partial |k|}{\partial k} = \frac{\partial \Omega}{\partial |k|} \frac{k}{|k|}.$$

Από την εξίσωση (1.33) βλέπουμε ότι το l είναι μια σταθερά, άρα $|k| \sin a = |k_\infty| \sin a_\infty$. Και επειδή το ω είναι σταθερά, χρησιμοποιούμε το ότι $c_p = \omega/|k|$ για να γράψουμε

$$\frac{c_p}{\sin a} = \frac{c_{p\infty}}{\sin a_\infty}.$$

Αυτή είναι μια πρώτη συνάντηση με τον νόμο του Snell, που συνδέει την ταχύτητα φάσης με την γωνία που σχηματίζει η κορυφή του κύματος με τον άξονα y .

Διαιρούμε τις εξισώσεις που ορίζουν τις ακτίνες για να βρούμε την καρτεσιανή εξίσωση τους

$$\frac{dx}{dy} = \frac{k}{l} = \frac{k}{l_\infty}.$$

Το k το βρίσκουμε από $\omega^2 = g|k| \tanh(|k| \beta x)$.

Γενικά, η εξίσωση αυτή δεν έχει αναλυτική λύση. Ωστόσο, κοντά στην ακτή ισχύει ότι $\tanh(|k| \beta x) \approx |k| \beta x$, άρα $k^2 + l_\infty^2 \approx \omega^2 / g \beta x$, συνεπώς έχουμε

$$\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{g \beta l_\infty^2 x} - 1} \approx \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{g \beta l_\infty^2 x}}.$$

Επιλέγουμε το αρνητικό πρόσημο ώστε οι ακτίνες να έρχονται προς την παραλία. Η λύση της είναι

$$y + A = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{g \beta l_\infty^2}{\omega^2}} x^{3/2}.$$

Για να βρούμε την εξίσωση για τις κορυφές των κυμάτων, παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη των ακτίνων είναι στην διεύθυνση (k, l) , κάθετα στις κορυφές, ώστε η κορυφή και οι ακτίνες να είναι κάθετες. Οι γραμμές των κορυφογραμμών ικανοποιούν λοιπόν της εξίσωση:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{l_\infty}{k} = \mp \left(\frac{\omega^2}{g \beta l_\infty^2 x} - 1 \right)^{-1/2} \approx \sqrt{\frac{g \beta l_\infty^2 x}{\omega^2}}.$$

Ολοκληρώνουμε, χρησιμοποιώντας την ίδια σταθερά ολοκλήρωσης για να διασφαλίσουμε

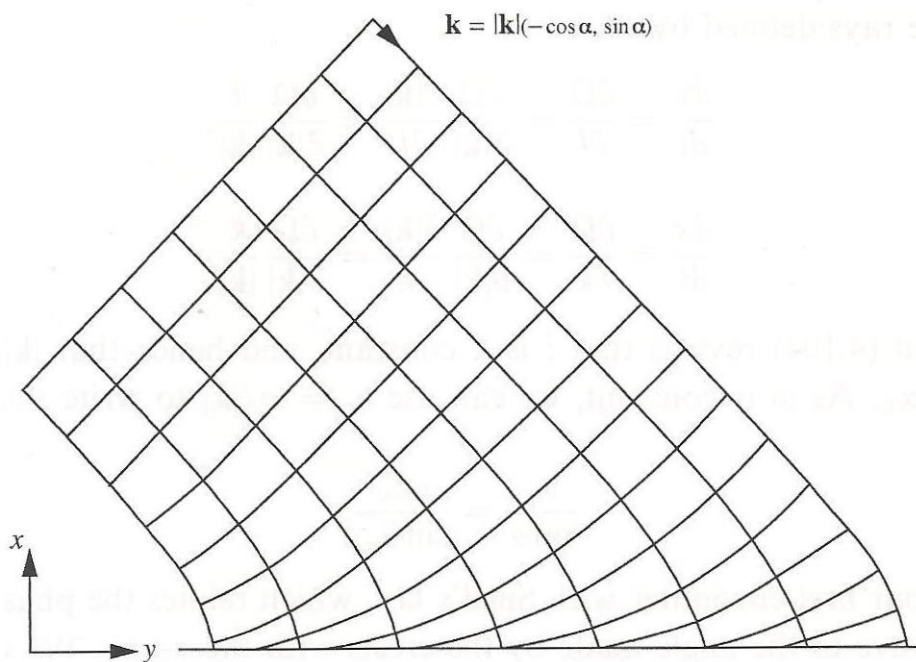
ότι η κορυφή και οι ακτίνες περνάνε από το ίδιο σημείο, έχουμε ότι η εξίσωση της κορυφής είναι

$$y + A = 2\sqrt{\frac{\omega^2 x}{g \beta l_\infty^2}},$$

και συνεπώς

$$x = \frac{g \beta l_\infty^2 (y + A)^2}{\omega^2 4}.$$

Οι γραμμές των κορυφογραμμών είναι, λοιπόν, παραβολές. Για την ώρα, έχουμε αγνοήσει τα μη-γραμμικά αποτελέσματα που παίζουν σημαντικό ρόλο στο ρηχό νερό κοντά στην ακτή. Οι γραμμές των κορυφογραμμών και των ακτίνων φαίνονται στην εικόνα 1.7.



Εικόνα 1.7. Κορυφογραμμές και ακτίνες κυμάτων που πλησιάζουν ελαφρώς επικλινή παραλία. Οι κορυφογραμμές έχουν θετική κλίση, ενώ οι ακτίνες αρνητική κλίση. [1]

1.9 Η επίδραση του ιξώδους

Μέχρι στιγμής κάναμε μια μαθηματική απλοποίηση, αγνοώντας το φαινόμενο του ιξώδους. Θα αναλογιστούμε σε ποιο χρονικό διάστημα το ιξώδες θα οδηγήσει στην απόσβεση των κυμάτων.

Οι γραμμικές, δισδιάστατες εξισώσεις Navier-Stokes, κατάλληλες για κινήσεις κυμάτων μικρού πλάτους σε βαθιά νερά, είναι

$$u_t = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad v_t = -\frac{1}{\rho} p_y - g + \nu(v_{xx} + v_{yy}).$$

Το μέγεθος ενός τυπικού όρου που διατηρούμε στην θεωρία ιξώδους είναι $u_t = O(UT)$, ενώ ένας τυπικός όρος ιξώδους είναι $\nu u_{xx} = O(\nu U/\lambda^2)$, με λ το τυπικό μήκος κύματος, U η ταχύτητα και T ο χρόνος κατά τον οποίο το ιξώδες γίνεται σημαντικό.

Εξισώνοντας τις σχέσεις, έχουμε ότι $T = O(\lambda^2/\nu)$ είναι η κλίμακα χρόνου του ιξώδους.

Στην περίπτωση των τριχοειδών κυμάτων, έχουμε ότι $\sigma \gg \rho g \lambda^2$, ώστε

$\lambda \ll (\sigma/\rho g)^{1/2} \approx 10^{-3} \text{ m}$ για το νερό. Το ιξώδες του νερού είναι $\nu \approx 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, άρα για $\lambda \approx 10^{-3} \text{ m}$ ισχύει $T = O(1 \text{ s})$. Τα τριχοειδή κύματα αποσβένονται λόγω του ιξώδους.

Για τα κύματα βαρύτητας, με ένα τυπικό μήκος κύματος $\lambda \approx 1 \text{ m}$, θα ισχύει $T = O(10^6 \text{ s})$ άρα αυτού του είδους τα κύματα μένουν ανεπηρέαστα από το ιξώδες για αρκετές μέρες.

Αν υπάρχει μια επιπλέον χαρακτηριστική διάσταση σε ένα πρόβλημα διάδοσης κύματος, όπως το μέσο βάθος του ρευστού, h , σε μια ρηχή θάλασσα ή μια κοίτη ποταμού, θα υπάρξει διάχυση της επίδρασης του ιξώδους από τον βυθό στην επιφάνεια. Τροποποιούμε τη χρονική κλίμακα του ιξώδους ως εξής:

$$T = O\left(\min\left(\frac{\lambda^2}{\nu}, \frac{h^2}{\nu}\right)\right).$$

Για ρηχά κύματα, $h \ll \lambda$, συνεπώς αναμένουμε τις επιπτώσεις του βυθού της θάλασσας ή ποταμού να γίνουν σημαντικές πριν τις επιπτώσεις της διαμητρικής κίνησης του όγκου του υγρού.

Κεφάλαιο 2

Μη γραμμικά υδάτινα κύματα

Ξεκινάμε την μελέτη των μη γραμμικών κυμάτων εξετάζοντας τις μη γραμμικές εξισώσεις κυμάτων ρηχών υδάτων, των οποίων την γραμμική μορφή είχαμε κοιτάξει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις επιδράσεις της μη γραμμικότητας σε βαθύ νερό, στα οδεύοντα κύματα βαρύτητας. Όταν οι επιδράσεις της γραμμικής διασποράς και της μη γραμμικής απότομης κλίσης δρουν σε ροή ρηχού νερού, θα δείξουμε ότι οι εξισώσεις Korteweg-de Vries ελέγχουν την κυρίαρχη συμπεριφορά των κυμάτων. Στην τελευταία ενότητα θα ασχοληθούμε με τα τριχοειδή κύματα σε βαθύ νερό, και θα δείξουμε πως η θεωρία complex μεταβλητών χρησιμοποιείται για την εξαγωγή αναλυτικών λύσεων.

2.1 Μη γραμμικά ρηχά υδάτινα κύματα

Σε προηγούμενη ενότητα καταλήξαμε στις σχέσεις (1.21),(1.22) οι οποίες διέπουν την ροή ρηχών νερών, όπου το οριζόντιο μήκος κύματος είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το κατακόρυφο βάθος. Για ρηχό νερό που ρέει πάνω από οριζόντιο βυθό, με $h_0(x)$ σταθερό, οι εξισώσεις γίνονται

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

όπου u είναι η οριζόντια ταχύτητα και h το κατακόρυφο βάθος.

Υπάρχουν χαρακτηριστικές καμπύλες, με αναλλοίωτες Riemann. Η ταχύτητα κύματος είναι $c = \sqrt{gh}$, και ως εκ τούτου οι παραπάνω σχέσεις ξαναγράφονται ως

$$2 \frac{\partial c}{\partial t} + 2u \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + 2c \frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

Προσθαφαιρώντας τις δύο αυτές εξισώσεις παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm 2c) + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x}(u \pm 2c) = 0.$$

Η συνάρτηση $R_{\pm}(u, h) = u \pm 2c$ είναι η αναλλοίωτη Riemann του συστήματος.

Συνοψίζοντας,

- στη χαρακτηριστική καμπύλη C_+ , που δίνεται από τη σχέση $dX_+/dt = u + \sqrt{gh}$, η C_+ αναλλοίωτη $R_+ = u + 2\sqrt{gh}$, είναι σταθερή
- στη χαρακτηριστική καμπύλη C_- , που δίνεται από τη σχέση $dX_-/dt = u - \sqrt{gh}$, η C_- αναλλοίωτη $R_- = u - 2\sqrt{gh}$, είναι σταθερή.

Θα εξετάσουμε δύο παραδείγματα μη γραμμικής ροής ρηχών υδάτων, το πρόβλημα θραύσης φράγματος, και το επιφανειακό κρουστικό κύμα.

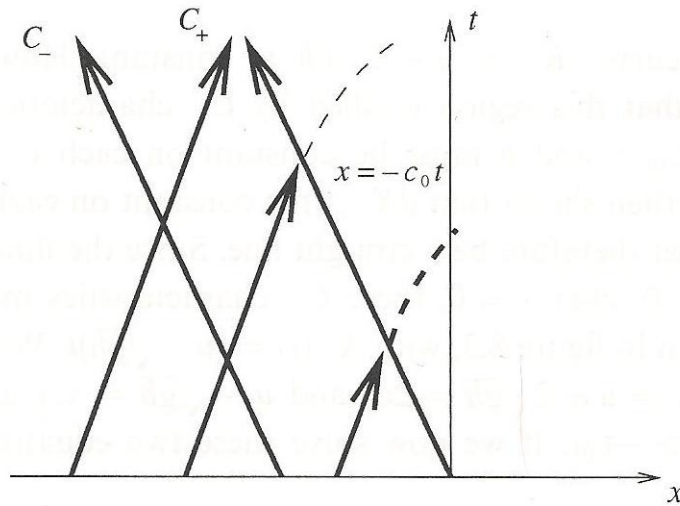
2.1.1 Το πρόβλημα θραύσης φράγματος

Έστω μια ημι-άπειρη έκταση ρηχού νερού με αρχικό βάθος h_0 , βρίσκεται ακίνητη στον τομέα $x < 0$, και συγκρατείται από ένα φράγμα στη θέση $x = 0$. Δεν υπάρχει νερό στην άλλη μεριά του φράγματος, για $x > 0$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το φράγμα σπάει. Για να βρούμε το ύψος του νερού ως συνάρτηση του x για χρόνο $t > 0$, θα λύσουμε τις (2.1), (2.2) με αρχικές συνθήκες

$$h(x, 0) = h_0 H(-x), \quad u(x, 0) = 0.$$

Για τις χαρακτηριστικές που πηγάζουν την στιγμή $t = 0$ για $x < 0$, έχουμε ότι $R_{\pm} = u \pm 2\sqrt{gh} = \pm 2\sqrt{gh_0} = \pm 2c_0$, όπου $c_0 = \sqrt{gh_0}$ είναι η αρχική γραμμική ταχύτητα κύματος.

Αν λοιπόν μια C_+ χαρακτηριστική τέμνεται με μία C_- από την περιοχή αυτή, θα ισχύει $u + 2\sqrt{gh} = 2c_0$, $u - 2\sqrt{gh} = -2c_0$, άρα $u = 0, h = h_0$. Με άλλα λόγια το νερό θα είναι αδιατάρακτο στο σημείο αυτό. Επιπλέον, $dX_{\pm}/dt = u \pm \sqrt{gh} = \pm c_0$, δηλαδή οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες γραμμές. Τέτοιες χαρακτηριστικές βρίσκονται στην περιοχή



Εικόνα 2.1. Οι χαρακτηριστικές στην αδιατάρακτη περιοχή του προβλήματος θραύσης φράγματος. [1]

$x < -c_0 t$, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.1, άρα στην περιοχή αυτή ισχύει $h = h_0, u = 0$. Οι C_+ χαρακτηριστικές ξεκινούν από την περιοχή αυτή και εισέρχονται στην περιοχή $x > -c_0 t$. Θα υποθέσουμε ότι οι χαρακτηριστικές αυτές γεμίζουν τον τομέα και θα το αποδείξουμε αργότερα.

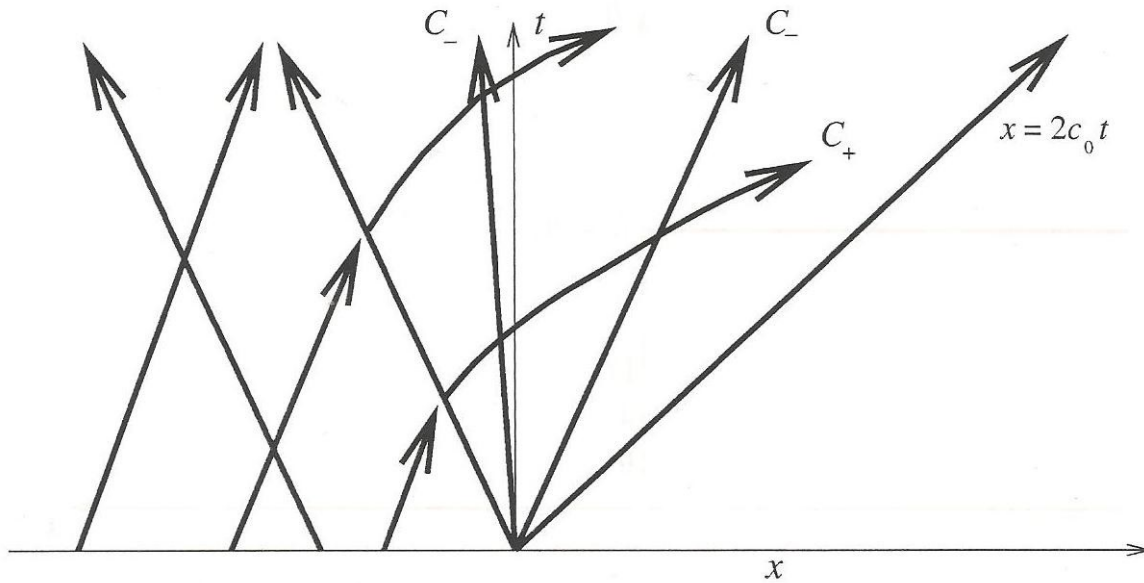
Για $x > -c_0 t$, οι C_- χαρακτηριστικές ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{dX_-}{dt} = u - \sqrt{gh}, \quad (2.3)$$

και σε κάθε καμπύλη το $R_- = u - 2\sqrt{gh}$ είναι σταθερό. Από τη στιγμή που θεωρήσαμε ότι η περιοχή αυτή είναι γεμάτη με C_+ χαρακτηριστικές, με $R_+ = u + 2\sqrt{gh} = 2c_0$, τότε u και h θα πρέπει να είναι σταθερά σε κάθε C_- χαρακτηριστική. Η εξίσωση (2.3) δείχνει ότι dX_-/dt είναι σταθερό σε κάθε C_- χαρακτηριστική, και συνεπώς είναι ευθεία γραμμή. Από τη στιγμή που το υγρό καταλαμβάνει μόνο την περιοχή $x < 0$ την στιγμή $t = 0$, οι C_- χαρακτηριστικές θα ξεκινούν από την αρχή, όπως βλέπουμε στην εικόνα 2.2, με $X_-(t) = (u - \sqrt{gh})t$. Δείξαμε, λοιπόν, ότι $R_+ = u + 2\sqrt{gh} = 2c_0$, και $u - \sqrt{gh} = x/t$ σε κάθε σημείο του τομέα $x > -c_0 t$.

Αν λύσουμε τις δύο εξισώσεις ως προς u και h έχουμε

$$h = \frac{h_0}{9} \left(2 - \frac{x}{c_0 t}\right)^2, \quad u = \frac{2}{3} \left(c_0 + \frac{x}{t}\right). \quad (2.4)$$



Εικόνα 2.2. Οι χαρακτηριστικές για το πρόβλημα θραύσης φράγματος. Στην περιοχή $x > 2c_0t$ δεν φτάνει καμία πληροφορία από την περιοχή $x < 0$. [1]

Παρατηρούμε ότι για $x = 2c_0t$ παίρνουμε $h = 0$, δηλαδή καμία C_+ χαρακτηριστική δεν φτάνει την περιοχή $x > 2c_0t$, άρα $u = h = 0$ εκεί. Να σημειώσουμε ότι η προπορευόμενη ακμή του κύματος ταξιδεύει προς τα εμπρός δύο φορές πιο γρήγορα από την επίδραση της θραύσης του φράγματος που ταξιδεύει πίσω στο μη διαταραγμένο νερό.

Θα ορίσουμε τώρα την εξίσωση των C_+ χαρακτηριστικών που ξεκινούν τη στιγμή $t = 0$ στο $x < 0$, και θα δείξουμε ότι γεμίζουν τον τομέα $x < 2c_0t$, αλλά δεν φτάνουν μέχρι τον τομέα $x > 2c_0t$. Για $x < -c_0t$, οι C_+ χαρακτηριστικές είναι ευθείες γραμμές με κλίση c_0 , και δίνονται από:

$$X_+ = -x_0 + c_0t, \quad \text{για } x_0 > 0, t < x_0/2c_0.$$

Τη χρονική στιγμή $t = x_0/2c_0$ έχουμε ότι $X_+ = -c_0t$, ώστε για $t > x_0/2c_0$ να ισχύει $dX_+/dt = u + \sqrt{gh}$, και συνεπώς από τη λύση (2.4) να προκύπτει

$$\frac{dX_+}{dt} = \frac{4}{3}c_0 + \frac{X_+}{3t}.$$

Ολοκληρώνουμε αυτή τη γραμμική πρώτης τάξης εξίσωση, και η λύση που ικανοποιεί $X_+ = -x_0/2$ όταν $t = x_0/2c_0$ είναι

$$X_+(t) = 2c_0t - 3\left(\frac{1}{2}x_0\right)^{2/3} (c_0t)^{1/3}.$$

Οι καμπύλες αυτές γεμίζουν τον τομέα $x < 2c_0t$, και ικανοποιούν $X_+ < 2c_0t$. Άρα είναι δικαιολογημένη η υπόθεση που κάναμε.

Η λύση συνοψίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} h &= h_0, \quad u = 0 && \text{για } x \leq -c_0t, \\ h &= \frac{h_0}{9} \left(2 - \frac{x}{c_0t}\right)^2, \quad u = \frac{2}{3} \left(c_0 + \frac{x}{t}\right) && \text{για } -c_0t \leq x \leq 2c_0t, \\ h &= 0, \quad u = 0, && \text{για } x \geq 2c_0t. \end{aligned}$$

Στο παράδειγμα αυτό, ένα σείτ από χαρακτηριστικές που ξεκίνησαν από το μη διαταραγμένο μέρος, γεμίζουν τον τομέα της λύσης. Όλη η πληροφορία διαδίδεται με τις C_- χαρακτηριστικές. Μια τέτοιου είδους λύση ονομάζεται απλό κύμα (simple wave), και είναι όμοια με το κινηματικό κύμα (kinematic wave). Στο παράδειγμά μας λοιπόν, ισχύει παντού ότι $u = 2(c_0 - \sqrt{gh})$, άρα μπορούμε να το αντικαταστήσουμε στην (2.1) κ έχουμε:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (2c_0 - 3\sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

δηλαδή μια εξίσωση κινηματικού κύματος, με ταχύτητα $2c_0 - 3\sqrt{gh}$. Αυτό εξηγεί τον λόγο που όλες οι C_- χαρακτηριστικές είναι ευθείες γραμμές στο πρόβλημα θραύσης κύματος.

Γενικά, ένα ζεύγος απλών κυμάτων δημιουργείται από τοπική διαταραχή σε μια στάσιμη, ομοιόμορφη έκταση ρηχού νερού. Έπειτα από μια αρχική μετάβαση, το νερό κοντά στην διαταραχή επιστρέφει σε μη διαταραγμένη κατάσταση, και τα απλά κύματα διαχωρίζονται, και διαδίδονται προς τα δεξιά με τις C_+ χαρακτηριστικές και προς τα αριστερά με τις C_- χαρακτηριστικές.

2.1.2 Κρουστικό επιφανειακό κύμα (bore)

Bore καλείται ένα κρουστικό κύμα (shock wave), όταν αυτό λαμβάνει χώρα στην επιφάνεια ενός ρευστού. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει συχνά σε ποτάμια όταν μια ασυνήθιστα υψηλή παλίρροια εισέρχεται σε μια στενή εκβολή. Το πιο γνωστό παράδειγμα είναι η bore του ποταμού Σέβερν στην Αγγλία.

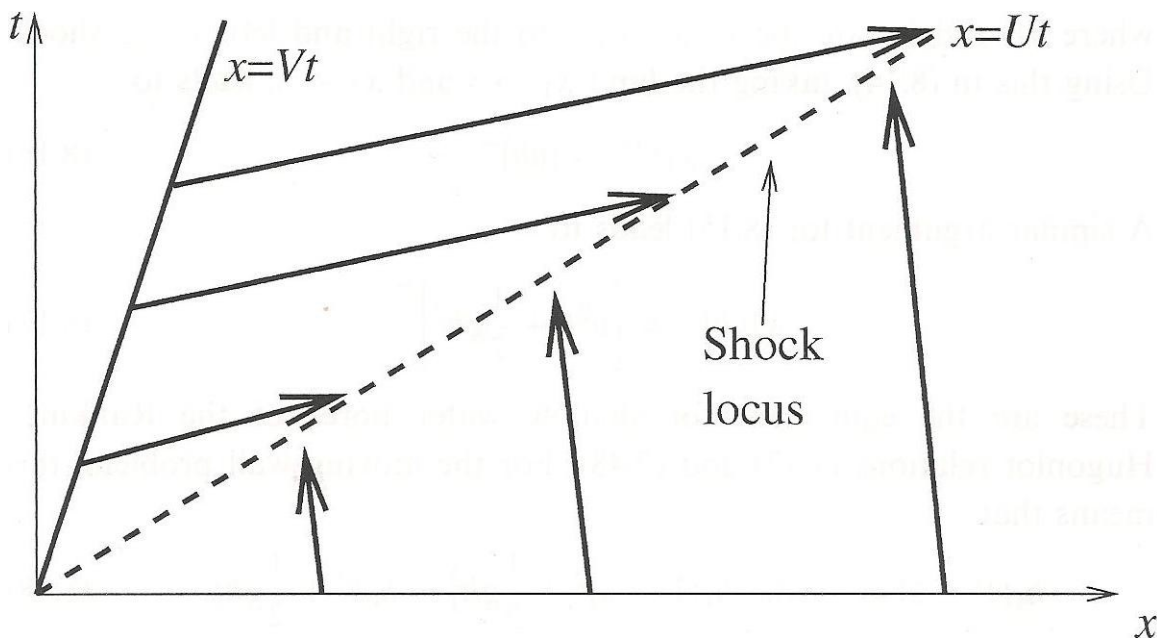
Θα μελετήσουμε ένα συγκεκριμένο μηχανισμό παραγωγής κρουστικού επιφανειακού κύματος. Θεωρούμε μια ημι-άπειρη έκταση ρηχού νερού, αρχικά στατική, στην περιοχή $x > 0$, που συγκρατείται από ένα τοίχο στο $x = 0$. Τη στιγμή $t = 0$ ο τοίχος αρχίζει να κινείται προς το νερό με ταχύτητα V . Θα βρούμε τι γίνεται τη στιγμή $t > 0$ στο τομέα $x > Vt$, λύνοντας τις εξισώσεις (2.1),(2.2) με αρχικές συνθήκες

$$h(x,0)=h_0, \quad u(x,0)=0, \quad \text{για } x>0,$$

και συνοριακές συνθήκες

$$u=V, \quad \text{για } x=Vt.$$

Τη χρονική στιγμή $t=0$, η κλίση των C_+ χαρακτηριστικών που ξεκινούν από το ρευστό είναι $dX_+/dt = u + \sqrt{gh} = \sqrt{gh_0}$, ενώ η κλίση των C_+ χαρακτηριστικών που ξεκινούν από τον κινούμενο τοίχο είναι $dX_+/dt = V + \sqrt{gh_0} > \sqrt{gh_0}$. Αυτό σημαίνει ότι οι χαρακτηριστικές από τον τοίχο τέμνουν αυτές από το ρευστό, και συνεπώς, ένα κρουστικό κύμα δημιουργείται στην επιφάνεια, κινούμενο με ταχύτητα \dot{s} . Οι C_+ χαρακτηριστικές και ο τόπος του κρουστικού κύματος (shock locus) σχεδιάζονται στην εικόνα 2.3.



Εικόνα 2.3. Οι C_+ χαρακτηριστικές για το πρόβλημα κινούμενου τοίχου. [1]

Προκειμένου να προσαρμοστεί το κρουστικό κύμα, πρέπει να θεωρήσουμε τους ολοκληρωτικούς νόμους διατήρησης μάζας και ορμής. Οι εξισώσεις (2.1),(2.2) περιέχουν μόνο δύο εξαρτημένες μεταβλητές, άρα δύο ανεξάρτητες ποσότητες θα διατηρηθούν.

Η διατήρηση μάζας δίνεται από τη σχέση (2.1), ή και από τη σχέση (1.22).

Ολοκληρώνοντας την (1.22) σε πεπερασμένο μήκος του υγρού, καταλήγουμε στον ολοκληρωτικό νόμο διατήρησης

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h dx + [\rho u h]_{x_1}^{x_2} = 0. \quad (2.5)$$

Για να πάρουμε ένα παρόμοιο νόμο για την ορμή, παρατηρούμε ότι ο ρυθμός αλλαγής ορμής σε πεπερασμένο μήκος είναι ίσος με την καθαρή ροή ορμής συν τις δυνάμεις που ασκούνται στο υγρό, δηλαδή

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h u dx = -[\rho u^2 h]_{x_1}^{x_2} + \int_0^{h(x_1)} p(x_1, y, t) dy - \int_0^{h(x_2)} p(x_2, y, t) dy.$$

Η πίεση σε ροή ρηχού νερού είναι υδροστατική, άρα έχουμε $p = \rho g(h - y)$, και συνεπώς

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h u dx + [\rho u^2 h + \frac{1}{2} \rho g h^2]_{x_1}^{x_2} = 0. \quad (2.6)$$

Οι ποσότητες $u h$, $u^2 h + \frac{1}{2} g h^2$ δεν πρέπει να μεταβάλλονται σε ένα πλαίσιο αναφοράς που κινείται μαζί με το κρουστικό κύμα. Αν το κρουστικό κύμα βρίσκεται στη θέση $x = s(t)$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx &= \frac{d}{dt} \left(\int_{x_1}^{s(t)} + \int_{s(t)}^{x_2} \right) h dx \\ &= \left(\int_{x_1}^{s(t)} + \int_{s(t)}^{x_2} \right) \frac{\partial h}{\partial t} dx + h^+ \dot{s} - h^- \dot{s}, \end{aligned}$$

όπου h^+ , h^- είναι οι τιμές του h στα δεξιά και αριστερά του κρουστικού κύματος. Το χρησιμοποιούμε στις (2.5)(2.6) παίρνοντας το όριο $x_1 \rightarrow s$, $x_2 \rightarrow s$ και καταλήγουμε

$$\dot{s} [h]_-^+ = [u h]_-^+,$$

$$\dot{s} [u h]_-^+ = [u^2 h + \frac{1}{2} h g^2]_-^+.$$

Για τον κινούμενο τοίχο, αυτό σημαίνει ότι

$$h_1(V - \dot{s}) = -h_0 \dot{s}, \quad h_1(V - \dot{s})^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 = h_0 \dot{s}^2 + \frac{1}{2} g h_0^2,$$

όπου h_1 είναι το ύψος του νερού πίσω από το κρουστικό κύμα, το οποίο πρέπει να κινείται μαζί με τον τοίχο με ταχύτητα V . Εάν εξαλείψουμε την ταχύτητα \dot{s} , καταλήγουμε στο ότι

$$(1 - H)^2(1 + H) = 2 Fr^2 H, \quad (2.7)$$

όπου

$$H = \frac{h_1}{h_0}, \quad Fr = \frac{V}{\sqrt{g h_0}}.$$

Όπου όταν ο αριθμός Froude, Fr , είναι μεγάλος, οι δυνάμεις βαρύτητας είναι μικρές, και αντίστροφα. Κάνοντας το διάγραμμα της (2.7) (εικόνα 2.4) βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις, μια με $H > 1$, και μια με $H < 1$. Για το πρόβλημα του κινούμενου τοίχου επιλέγουμε $H > 1$, διότι

$$\frac{\dot{s}}{V} = \frac{H}{H-1}, \quad (2.8)$$

και χρειαζόμαστε $\dot{s} > 0$. Όσον αφορά τις φυσικές μεταβλητές, το κρουστικό κύμα είναι στη θέση

$$s(t) = \frac{h_1 V}{h_1 - h_0} t > V t.$$

Για $Fr \ll 0$, έχουμε ότι $H - 1 \ll 1$, άρα αν ο τοίχος έχει μικρή ταχύτητα σε σχέση με την τοπική ταχύτητα ήχου, θα υπάρχει μικρή αλλαγή βάθους στο κρουστικό κύμα, ενώ για $Fr \gg 1$, $H \gg 1$.

Τέλος, θα εξετάσουμε τον ρυθμό με τον οποίο διασκορπίζεται η ενέργεια στο κρουστικό κύμα. Για ένα απομονωμένο bove, δημιουργημένο από ένα μηχανισμό πέρα από τον κινούμενο τοίχο, η απαίτηση η ενέργεια να διασκορπίζεται στο bove, επιλέγει την κατάλληλη λύση της (2.7). Η πυκνότητα της ενέργειας στο ρευστό είναι το σύνολο των

δυναμικών κινητικής και υδροστατικής ενέργειας, $\frac{1}{2} \rho h u^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2$. Ο ρυθμός αλλαγής ενέργειας σε πεπερασμένο μήκος ρευστού είναι ίσος με την καθαρή ροή ενέργειας συν τον ρυθμό λειτουργίας των υδροστατικών δυνάμεων που δρουν στο ρευστό, μείον τον ρυθμό απώλειας ενέργειας, $L(t)$, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα κρουστικό κύμα κατά μήκος του υγρού. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} \rho h u^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right) dx = & - \left[\frac{1}{2} \rho h u^3 + \frac{1}{2} \rho g h^2 u \right]_{x_1}^{x_2} \\ & + \int_0^h (x_1) p(x_1, y, t) u(x_1, y, t) dy - \int_0^{h(x_2)} p(x_2, y, t) u(x_1, y, t) dy - L, \end{aligned}$$

άρα

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} \rho h u^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right) dx + \left[\frac{1}{2} \rho h u^3 + \rho g h^2 u \right]_{x_1}^{x_2} + L = 0.$$

Βρίσκουμε ότι

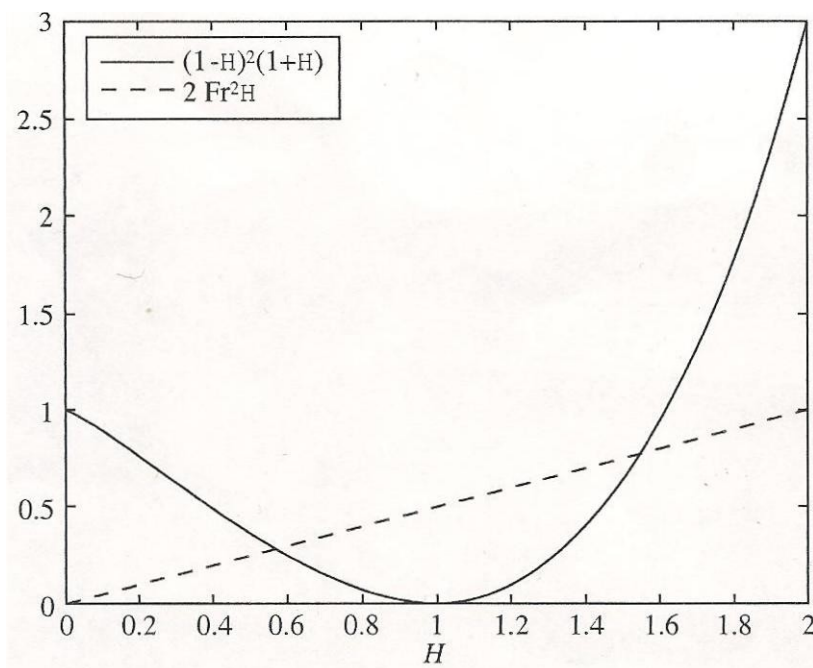
$$L(t) = \dot{s} \left[\frac{1}{2} \rho h u^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right]_+ - \left[\frac{1}{2} \rho u^3 h + g h^2 u \right]_-.$$

Για τον κινούμενο τοίχο έχουμε

$$L = \rho \left\{ \frac{1}{2} (V - \dot{s})^3 h_1 + (V - \dot{s}) g h_1^2 + \frac{1}{2} \dot{s}^3 h_0 + \dot{s} g h_0^2 \right\}.$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.7), (2.8) το μετατρέπουμε σε,

$$L = \frac{1}{4} \rho g \dot{s} \frac{(h_1 - h_0)^3}{h_1}.$$



Εικόνα 2.4. Η αριστερή και δεξιά μεριά της (2.7) για $Fr=1/2$. [1]

Για αδύναμα επιφανειακά κρουστικά κύματα, όπου $(h_1 - h_0)/h_0 \ll 1$, η ταχύτητα διάχυσης ενέργειας είναι κυβικά μικρή. Για μια απομονωμένη επιφανειακό κρουστικό κύμα, η απαίτηση το L να είναι θετικό, σημαίνει ότι χρειαζόμαστε $h_1 > h_0$ για $\dot{s} > 0$. Με άλλα λόγια, το βάθος του υγρού πρέπει πάντα να μεγαλώνει κατά μήκος ενός επιφανειακού κρουστικού κύματος που κινείται σε μη διαταραγμένα νερά.

2.2 Η επίδραση της μη γραμμικότητας σε βαθιά υδάτινα κύματα βαρύτητας: η επέκταση του Stokes

Σε προηγούμενη ενότητα καθορίσαμε την κυρίαρχη λύση για ένα οδεύον κύμα βαρύτητας μικρού πλάτους. Υποθέτοντας ότι το πλάτος είναι κατά πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος, είχαμε γραμμικοποιήσει τις διέπουσες εξισώσεις. Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε μια λύση ως ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, και θα δούμε πως η κυκατομορφή και η ταχύτητα επηρεάζονται από το πλάτος κύματος.

Θεωρούμε ένα περιοδικό κύμα που κινείται από τα δεξιά προς τα αριστερά σε βαθύ νερό, με ύψος H (το διπλάσιο του πλάτους) και μήκος κύματος λ . Η παράμετρος που θα βασίσουμε την ασυμπτωτική επέκταση είναι $\varepsilon = H/\lambda$. Για κύματα που δημιουργούνται από τον άνεμο, έχουμε ότι $\varepsilon \approx 0.05$, ενώ για τα μεγαλύτερα κύματα που παράγονται από καταιγίδα, $\varepsilon \approx 0.13$, με μέγιστη τιμή του ε ώστε να ισχύει η μη περιστροφική θεωρία την $\varepsilon \approx 0.14$. Σε μεγαλύτερες τιμές το κύμα μπορεί να σπάσει ή να υπάρξει στροβιλισμός.

Η ροή μπορεί να γίνει σταθερή, επιλέγοντας οριζόντιο άξονα κινούμενο με την ταχύτητα φάσης. Αυτό προκαλεί μια ομοιόμορφη οριζόντια ροή ταχύτητας c σε βαθιά νερά. Η διέλευση του κύματος από σταθερό σημείο θα προκαλέσει μεταβολή στο μέσο βάθος στο σημείο αυτό. Επιλέγουμε κάθετο άξονα ώστε η ελεύθερη επιφάνεια να είναι στο $y=0$. Υπολογίζουμε την μεταβολή του μέσου βάθους, με κατάλληλες αδιάστατες μεταβλητές,

$$\bar{x} = \frac{x}{\lambda}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\lambda}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{cH}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{H}.$$

Το μη γραμμικό πρόβλημα οριακών τιμών είναι

$$\nabla^2 \bar{\varphi} = 0 \quad \text{για } \bar{y} < \varepsilon \bar{\eta}, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon (\bar{\varphi}_x^2 + \bar{\varphi}_y^2) + K \bar{\eta} = B, \quad \text{για } \bar{y} = \varepsilon \bar{\eta}, \quad (2.10)$$

$$\bar{\varphi}_y^2 = \varepsilon \bar{\varphi}_x \bar{\eta}_x, \quad \text{για } \bar{y} = \varepsilon \bar{\eta}, \quad (2.11)$$

$$\bar{\varphi} \sim \frac{\bar{x}}{\varepsilon}, \quad \text{καθώς } \bar{y} \rightarrow -\infty, \quad (2.12)$$

όπου $K = \lambda g / c^2$. Η σταθερά Bernoulli B μένει να καθοριστεί, η οποία αντιπροσωπεύει την ενέργεια στο ρευστό. Η λύση πρέπει να είναι περιοδική, με περίοδο ίση με 1. Ο ορισμός του ύψους του κύματος ως η διαφορά ανάμεσα στην κορυφή και το σημείο ελαχίστου δίνει

$$\bar{\eta}(0) - \bar{\eta}\left(\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Θεωρώντας μόνο τον κυρίαρχο όρο, το δυναμικό ταχύτητας πρέπει να είναι $\bar{\varphi} = \bar{x}/\varepsilon$, άρα έχουμε $B \sim 1/2\varepsilon$ από τη σχέση (2.10). Έχουμε, λοιπόν, τις ασυμπτωτικές επεκτάσεις,

$$\varphi = \frac{x}{\varepsilon} + \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + O(\varepsilon^3), \quad \eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + O(\varepsilon^3).$$

Για διευκόλυνση συμβολισμού σταματάμε να χρησιμοποιούμε τις μπάρες. Θα θέσουμε επεκτάσεις και για τα B, K ως εξής

$$B = \frac{1}{2\varepsilon} + B_0 + \varepsilon B_1 + O(\varepsilon^2), \quad K = K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + O(\varepsilon^3).$$

Θεωρώντας τον κυρίαρχο όρο, έχουμε

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0 \quad \text{για } y < 0, \quad (2.13)$$

$$\varphi_{0x} + K_0 \eta_0 = B_0, \quad \text{για } y = 0, \quad (2.14)$$

$$\varphi_{0y} = \eta_{0x}, \quad \text{για } y = 0, \quad (2.15)$$

$$\varphi_0 \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } y \rightarrow -\infty, \quad (2.16)$$

$$\eta_0(0) - \eta_0\left(\frac{1}{2}\right) = -1. \quad (2.17)$$

Η αρμονική λύση που φθίνει καθώς $y \rightarrow -\infty$ και έχει περίοδο ίση με 1 είναι

$$\varphi_0 = A e^{2\pi y} \sin 2\pi x.$$

Αν εξαλείψουμε το η_0 από τις συνοριακές συνθήκες, θα βρούμε ότι

$$\varphi_{0xx} + K_0 \varphi_{0y} = 0, \quad \text{για } y = 0,$$

άρα $K_0 = 2\pi$. Παίρνουμε ότι

$$\eta_0 = \frac{B_0}{2\pi} - A \cos 2\pi x.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.17) βρίσκουμε ότι $A = \frac{1}{2}$, άρα

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} e^{2\pi y} \sin 2\pi x, \quad \eta_0 = \frac{B_0}{2\pi} - \frac{1}{2} \cos 2\pi x, \quad K_0 = 2\pi. \quad (2.18)$$

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα οριακών συνθηκών συμπεριλαμβάνοντας επόμενους όρους προσέγγισης. Θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν τη μικρή μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας λόγω της επέκτασης Taylor των συνοριακών συνθηκών, για παράδειγμα

$$\varphi_0(x, \varepsilon \eta_0 + O(\varepsilon^2)) = \varphi_0(x, 0) + \varepsilon \eta_0 \varphi_{0y}(x, 0) + O(\varepsilon^2).$$

Έχουμε, λοιπόν, ότι:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= 0 \quad \text{για } y < 0, \\ \varphi_{1x} + K_0 \eta_1 &= B_1 - \frac{1}{2}(\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2) - \eta_0 \varphi_{0xy} - K_1 \eta_0, \quad \text{για } y = 0, \\ \varphi_{1y} - \eta_{1x} &= \varphi_{0x} \eta_{0x} - \eta_0 \varphi_{0yy}, \quad \text{για } y = 0, \\ \varphi_1 &\rightarrow 0, \quad \text{καθώς } y \rightarrow -\infty, \\ \eta_1(0) - \eta_1\left(\frac{1}{2}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε της λύση (2.18) στις συνοριακές συνθήκες και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\varphi_{1x} + 2\pi \eta_1 &= B_1 + \frac{1}{2} \pi^2 \cos 4\pi x - \frac{1}{2} K_1 \cos 2\pi x, \quad \text{για } y = 0, \\ \varphi_{1y} + \eta_{1x} &= \pi^2 \sin 4\pi x + \pi B_0 \sin 2\pi x, \quad \text{για } y = 0.\end{aligned}$$

Οι όροι που είναι ανάλογοι με $\cos 2\pi x$, $\sin 2\pi x$ στα παραπάνω, θα δώσουν όρους ανάλογους με $x \cos 2\pi x$ στην λύση. Για να είναι η λύση μας όμως ασυμπτωτική, θα πρέπει να τους εξαλείψουμε, θέτοντας $K_1 = 0$ και $B_0 = 0$. Το ομοιογενές πρόβλημα έχει λύσεις ίδιας μορφής με τις λύσεις του προβλήματος (2.13)-(2.17), όμως από τη σχέση

$$\eta_1(0) - \eta_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{βλέπουμε ότι δεν είναι κατάλληλες. Άρα θα πάρουμε λύση από τους}$$

όρους $\sin 4\pi x$, $\cos 4\pi x$, οι οποίοι παράγονται από τους όρους $\sin 2\pi x$, $\cos 2\pi x$.

Η λύση είναι:

$$\varphi_1 = 0, \quad \eta_1 = \frac{B_1}{2\pi} + \frac{\pi}{4} \cos 4\pi x, \quad K_1 = 0.$$

Έχουμε βρει τη μορφή της διόρθωσης της μετατόπισης της ελεύθερης επιφάνειας, και μένει να υπολογίσουμε την σταθερά B_1 . Από τη στιγμή που $K_1 = 0$ καταλαβαίνουμε ότι η διόρθωση της ταχύτητας κύματος, που καθορίζεται από τη σταθερά K_2 , θα είναι τάξης $O(\varepsilon^3)$ και μένει να υπολογιστεί. Συνοψίζοντας:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2} e^{2\pi y} \sin 2\pi x + \varepsilon^2 \varphi_2 + O(\varepsilon^3), \\ \eta &= \frac{1}{2} \cos 2\pi x + \varepsilon \left(\frac{B_1}{2\pi} + \frac{\pi}{4} \cos 4\pi x \right) + \varepsilon^2 \eta_2 + O(\varepsilon^3), \\ B &= \frac{1}{2\varepsilon} + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + O(\varepsilon^3), \quad K = \frac{\lambda g}{c^2} = 2\pi + \varepsilon^2 K_2 + O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ένα μοτίβο στην εύρεση λύσης. Οι σταθερές B_0, K_1 καθορίστηκαν από το ότι δεν πρέπει να εμφανιστεί κανένας διηλεκτικός όρος στις συνοριακές συνθήκες. Αν προσδιορίσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τους επόμενους όρους προσέγγισης, μπορούμε να βρούμε τα B_1, K_2 με τον ίδιο τρόπο. Ο συντελεστής του $\cos 2\pi x$ στη σχέση (2.10), τάξης $O(\varepsilon^2)$, πρέπει να είναι ίσος με 0,

$$-\pi B_2 + \frac{1}{2} K_2 + \frac{3}{8} \pi^3 = 0.$$

Όμοια ο συντελεστής του όρου $\sin 2\pi x$ στην κινηματική συνθήκη (2.11) πρέπει να είναι 0:

$$\pi B_1 + \frac{5}{8} \pi^3 = 0.$$

Άρα βρίσκουμε

$$K_2 = -2\pi^3, \quad B_1 = -\frac{5}{8}\pi^2.$$

Και έτσι έχουμε την διορθωμένη λύση, ως

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{2} e^{2\pi y} \sin 2\pi x + O(\varepsilon^2), \\ \eta &= \frac{1}{2} \cos 2\pi x + \varepsilon \left(\frac{\pi}{4} \cos 4\pi x - \frac{5\pi}{16} \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.19)$$

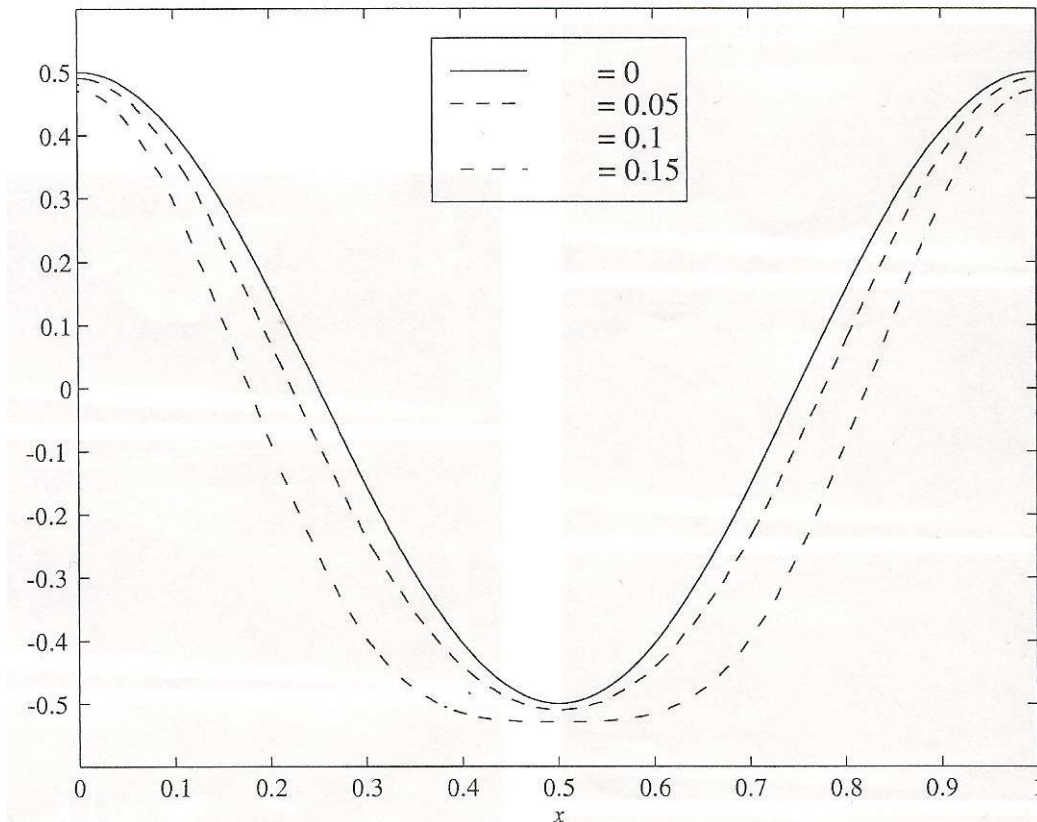
$$K^{-1} = \frac{c^2}{g\lambda} = \frac{1}{2\pi} (1 + \pi^2 \varepsilon^2) + O(\varepsilon^3).$$

Η ασθενής μη γραμμική επίδραση του πεπερασμένου ύψους του κύματος είναι ότι η ταχύτητα κύματος αυξάνεται, με

$$c^2 \sim \frac{g\lambda}{2\pi} \left(1 + \frac{H^2 \pi^2}{\lambda^2} \right),$$

ενώ η λύση για το η δείχνει ότι τα σημεία ελαχίστου (troughs) διευρύνονται και οι κορυφές (crests) στενεύουν όσο το πλάτος αυξάνεται, όπως φαίνεται και στην εικόνα 2.5.

Από την (2.19) βλέπουμε ότι υπάρχει αλλαγή στο μέσο βάθος, $\frac{5\pi}{16} \frac{H}{\lambda} + O\left(\frac{H^2}{\lambda^2}\right)$ λόγω του περάσματος του κύματος. Εάν υπολογίσουμε τη διαδρομή των σωματιδίων, θα δούμε ότι δεν είναι κλειστή, άρα υπάρχει μια ελαφριά μεταφορά μάζας, ή ώθηση (drift), στην οριζόντια διεύθυνση.



Εικόνα 2.5. Η ασθενής μη-γραμμική λύση (2.19) για διάφορες τιμές του ϵ . [1]

2.3 Οι εξισώσεις Korteweg-de Vries για κύματα ρηχού νερού: Η αλληλεπίδραση μη γραμμικής κλίσης και γραμμικής διασποράς

Η ανάλυση διάδοσης κύματος σε επιφάνεια νερού οδηγεί σε σχέσεις μεταξύ της ταχύτητας κύματος, c , το βάθος νερού, h , πλάτος κύματος, a , μήκος κύματος, λ , βαρύτητα, g , και πιθανών επιφανειακών τάσεων, σ . Στη γραμμική θεωρία κυμάτων, όπως την είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κάναμε τις υποθέσεις απλούστευσης ότι το πλάτος είναι μικρό σε σχέση με το μέσο βάθος, και ότι το μήκος κύματος είναι μεγάλο συγκριτικά με το πλάτος. Αυτό οδηγεί στην σχέση διασποράς:

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

για τα κύματα βαρύτητας. Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι κύματα με διαφορετικό μήκος κύματος διαδίδονται και με διαφορετικές ταχύτητες, αλλά το πλάτος του κύματος δεν επηρεάζει την ταχύτητα. Τα κύματα έχουν διασπορά (dispersive) αλλά είναι γραμμικά. Μια εξαίρεση είναι στα ρηχά νερά, $h \ll \lambda$, όπου $c^2 \sim gh$ και δεν υπάρχει διασπορά. Στη

θεωρία κυμάτων ρηχού νερού, θεωρήσαμε το πλάτος διαταραχής της επιφάνειας να είναι συγκρίσιμο με το βάθος του νερού, και αγνοήσαμε τις κατακόρυφες επιταχύνσεις. Αυτό οδηγεί σε μια θεωρία όπου οι εξισώσεις είναι μη γραμμικές και η ταχύτητα εξαρτάται από το πλάτος του κύματος. Ωστόσο, τα κύματα σε ρηχό νερό δεν έχουν διασπορά. Στις δύο αυτές διαφορετικές αναλύσεις των εξισώσεων που διέπουν τη συμπεριφορά του κύματος υπάρχουν δύο γεωμετρικές παράμετροι: $\varepsilon = h/\lambda$, $\alpha = a/h$. Επιλέγοντας κατάλληλα μεγέθη για τις παραμέτρους, μελετάμε μια θεωρία όπου η διασπορά και η μη γραμμικότητα είναι σε ισορροπία. Η μη γραμμικότητα τείνει να κάνει απόκρημνους του κυματισμούς, ενώ διασπορά τους απλώνει.

2.3.1 Παραγωγή την εξίσωσης Korteweg-de Vries

Οι πλήρεις εξισώσεις που διέπουν τη διάδοση διαταράξεων στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού χωρίς ιξώδες, σε επίπεδο βυθό μέσου βάθους h , είναι

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= 0 & \text{για } -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \eta(x, t), \\ \varphi_y &= \eta_t + \varphi_x \eta_x, & \text{για } y = \eta = h + aH(x, t), \\ \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + g\eta &= B(t), & \text{για } y = \eta = h + aH(x, t), \\ \varphi_y &= 0 & \text{για } y = 0. \end{aligned}$$

Θα κάνουμε τις εξισώσεις αδιαστατοποιημένες με τις κλιμακωτές μεταβλητές:

$$\bar{x} = \frac{x}{\lambda}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{\varphi} = \frac{h\varphi}{\lambda a \sqrt{gh}}, \quad \bar{t} = \frac{t\sqrt{gh}}{\lambda}.$$

Παρατηρούμε ότι \sqrt{gh} είναι η γραμμική ταχύτητα χωρίς διασπορά για κύματα με μικρό πλάτος διαταραχής. Από τη στιγμή που το λ είναι η τυπική οριζόντια κλίμακα μήκους, τότε λ/\sqrt{gh} είναι ο χρόνος κατά τον οποίο ένα σωματίδιο του υγρού κινείται κατά ένα μήκος κύματος στην οριζόντια διεύθυνση. Αντικαθιστούμε τις κλιμακωτές μεταβλητές στις πάνω εξισώσεις και έχουμε:

$$\varepsilon^2 \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}} = 0, \quad \text{για } -\infty < \bar{x} < \infty, \quad 0 \leq \bar{y} \leq 1 + \alpha H(\bar{x}, \bar{t}), \quad (2.20)$$

$$\bar{\varphi}_{\bar{y}} = \varepsilon^2 (H_{\bar{t}} + \alpha \bar{\varphi}_{\bar{x}} H_{\bar{x}}), \quad \text{για } \bar{y} = 1 + \alpha H(\bar{x}, \bar{t}), \quad (2.21)$$

$$\bar{\varphi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \alpha (\bar{\varphi}_{\bar{x}}^2 + \varepsilon^{-2} \bar{\varphi}_{\bar{y}}^2) + H = (B(t) - gh) / \alpha g, \quad \text{για } \bar{y} = 1 + \alpha H(\bar{x}, \bar{t}), \quad (2.22)$$

$$\bar{\varphi}_{\bar{y}} = 0, \quad \text{για } \bar{y} = 0, \quad (2.23)$$

όπου $\varepsilon = h/\lambda$ και $\alpha = a/h$. Είναι βολικό να κάνουμε το δεξί μέλος της (2.22) ίσο με μηδέν με τον μετασχηματισμό

$$\bar{\varphi} \rightarrow \bar{\varphi} + \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{B(s) - gh}{\alpha g} \right) ds,$$

ο οποίος δεν επηρεάζει το πεδίο ταχυτήτων, $\bar{u} = \nabla \bar{\varphi}$.

Πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν και τον διπλό περιορισμό, $\varepsilon \ll 1$, $\alpha \ll 1$. Θα μετατρέψουμε τις εξισώσεις ώστε να αφαιρεθεί το ε και να μπορούμε να αναλύσουμε τις εξισώσεις για $\alpha \ll 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό:

$$z = \frac{\alpha^{1/2}}{\varepsilon} (\bar{x} - \bar{t}), \quad \tau = \frac{\alpha^{3/2}}{\varepsilon} \bar{t}, \quad \Phi = \frac{\alpha^{1/2}}{\varepsilon} \bar{\varphi},$$

όπου z είναι μια συντεταγμένη κεντραρισμένη σε ένα σημείο που κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά με ταχύτητα κύματος, και βρίσκεται αρχικά στην αρχή των αξόνων. Το βαθμωτό δυναμικό ταχύτητας, Φ , και ο βαθμωτός χρόνος, τ , είναι απλά πολλαπλάσια των $\bar{\varphi}$, \bar{t} , ενώ η κάθετη συντεταγμένη δεν είναι κλιμακωτή. Οι εξισώσεις γίνονται, χρησιμοποιώντας τις κλιμακωτές μεταβλητές:

$$\alpha \Phi_{zz} + \Phi_{yy} = 0 \quad \text{για} \quad -\infty < z < \infty, \quad 0 \leq \bar{y} \leq 1 + \alpha H(z, \tau), \quad (2.24)$$

$$\Phi_y = \alpha (-H_z + \alpha H_\tau + \alpha \Phi_z H_z), \quad \text{για} \quad \bar{y} = 1 + \alpha H(z, \tau), \quad (2.25)$$

$$H - \Phi_z + \alpha \Phi_\tau + \frac{1}{2} (\Phi_y^2 + \alpha \Phi_z^2) = 0, \quad \text{για} \quad \bar{y} = 1 + \alpha H(z, \tau), \quad (2.26)$$

$$\Phi_{\bar{y}} = 0, \quad \text{για} \quad \bar{y} = 0. \quad (2.27)$$

Θέτουμε τις ασυμπτωτικές επεκτάσεις για το δυναμικό ταχύτητας και την θέση της επιφάνειας:

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha \Phi_1 + \alpha^2 \Phi_2 + o(\alpha^2),$$

$$H = H_0 + \alpha H_1 + o(\alpha).$$

Αντικαθιστούμε την επέκταση του δυναμικού ταχύτητας στην εξίσωση $\alpha \Phi_{zz} + \Phi_{yy} = 0$ και θεωρώντας μόνο τον κυρίαρχο όρο

$$\Phi_{0,yy} = 0 \Rightarrow \Phi_0 = B_0(z, \tau),$$

για όρους $O(\alpha)$

$$\Phi_{1,yy} = -\Phi_{0,zz} = -B_{0,zz} \Rightarrow \Phi_1 = -\frac{1}{2} \bar{y}^2 B_{0,zz} + B_1(z, \tau),$$

και για $O(\alpha^2)$

$$\Phi_{2,y\bar{y}} = -\Phi_{1,zz} = \frac{1}{2}\bar{y}^2 B_{0,zzzz} - B_{1,zz}$$

$$\Rightarrow \Phi_2 = \frac{1}{24}\bar{y}^4 B_{0,zzzz} - \frac{1}{2}\bar{y}^2 B_{1,zz} + B_2(z, \tau).$$

Να σημειώσουμε ότι για τη λύση των παραπάνω χρειάστηκε η συνθήκη (2.27).

Θεωρώντας τον κυρίαρχο όρο, η συνθήκη (2.26) δίνει

$$H_0(z, \tau) = \Phi_{0,z} = B_{0,z},$$

ένα αποτέλεσμα που μας ικανοποιεί την κινηματική συνθήκη (2.25) και για κυρίαρχο όρο και για όρους $O(\alpha)$. Η (2.26) για $O(\alpha)$ δίνει

$$H_{1,z} - B_{1,z} + \frac{1}{2}B_{0,zzz} + B_{0,\tau} + \frac{1}{2}B_{0,z}^2 = 0, \quad (2.28)$$

ενώ από την (2.25) για $O(\alpha^2)$ παίρνουμε

$$-H_0 B_{0,zz} + \frac{1}{6}B_{0,zzzz} - B_{1,zz} = -H_{1,z} + H_{0,\tau} + B_{0,z} H_{0,z}. \quad (2.29)$$

Αν διαφοροποιήσουμε την (2.28) βρίσκουμε ότι

$$H_{1,z} - B_{1,zz} = -\frac{1}{2}B_{0,zzzz} - B_{0,z\tau} - B_{0,z} B_{0,zz},$$

και έτσι εξαλείφουμε τα $H_{1,z}, B_{1,zz}$ από την (2.29) και καταλήγουμε στο ότι

$$-H_0 B_{0,zz} - \frac{1}{3}B_{0,zzzz} - B_{0,z\tau} - B_{0,z} B_{0,zz} = H_{0,\tau} + B_{0,z} H_{0,z}.$$

Τέλος, έχουμε μια σχέση που μας δίνει το B_0 ως προς το H_0 :

$$H_0(z, \tau) = \Phi_{0,z} = B_{0,z},$$

συνεπώς

$$2H_{0,\tau} + 3H_0 H_{0,z} + \frac{1}{3}H_{0,zzz} = 0.$$

Αυτή είναι η εξίσωση Korteweg-de Vries, που περιέχει αποτελέσματα διασποράς μέσω του όρου $H_{0,zzz}$ και μη γραμμικά αποτελέσματα μέσω του όρου $H_0 H_{0,z}$, και διέπει τη συμπεριφορά κυμάτων μικρού πλάτους, με $\alpha \ll 1$.

Θα εξετάσουμε πότε οι ανεξάρτητες μεταβλητές z, τ είναι $O(1)$, ώστε να προσδιορίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια την φυσική περιοχή που οι KdV εξισώσεις είναι βάσιμες ως προσέγγιση της ροής. Από τις σχέσεις που ορίσαμε τον μετασχηματισμό τους, βρίσκουμε ότι αν $\alpha = O(\varepsilon^2)$ τότε $\bar{t} \gg 1$ και $\bar{x} = \bar{t} + O(1)$. Έτσι, μπορούμε να ερμηνεύσουμε κάθε κυματομορφή ως λύση της KdV εξίσωσης ως το όριο ως προς το

χρόνο του προβλήματος αρχικών τιμών. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, υπάρχουν λύσεις για μη γραμμικά περιοδικά κύματα, και για μοναχικά κύματα. Τα κύματα αυτά πρέπει να κινούνται με ταχύτητα ασυμπτωτικά κοντά στη ταχύτητα γραμμικού κύματος ρηχού νερού, έτσι ώστε να βρίσκονται σε μια $O(1)$ περιοχή του σημείου $\bar{x}=\bar{t}$, ή αντίστοιχα $x=\sqrt{gh}t$.

2.3.2 Λύσεις της KdV εξίσωσης για το οδεύον κύμα

Η KdV εξίσωση έχει δύο ποιοτικά διαφορετικούς τύπους λύσης οδεύοντος κύματος με σταθερή μορφή. Αναφέρονται ως cnoidal (ελαστικά) κύματα και μοναχικά κύματα. Αρχικά θα πρέπει να θεωρήσουμε τι θα βρούμε στον (z,t) -χώρο, έχοντας κάνει τους μετασχηματισμούς που οδήγησαν στην KdV εξίσωση. Ως προς τις φυσικές μεταβλητές, ένα περιοδικό, οδεύον κύμα μόνιμης μορφής μήκους κύματος λ , έχει ανύψωση που ικανοποιεί τη σχέση

$$\eta(x-ct)=\eta(x-ct+\lambda).$$

Μετά την αλλαγή μεταβλητών $\bar{x}=x/\lambda$, $\bar{t}=\sqrt{gh}t/\lambda$, οδηγεί στο εξής

$$H\left(\bar{x}-\frac{c}{\sqrt{gh}}\bar{t}\right)=H\left(\bar{x}-\frac{c}{\sqrt{gh}}\bar{t}+1\right).$$

Προκειμένου να ισχύει η απαίτηση ότι τα κύματα αυτά έχουν ταχύτητα κοντινή στην ταχύτητα γραμμικού κύματος ρηχού νερού, γράφουμε ότι

$$c=\sqrt{gh}(1+V), \text{ όπου } V \ll 1.$$

Άρα παίρνουμε

$$H(\bar{x}-\bar{t}-V\bar{t})=H(\bar{x}-\bar{t}-V\bar{t}+1).$$

Υποθέσαμε επίσης ότι $\alpha=O(\varepsilon^2)$, τότε μπορούμε να γράψουμε $\alpha^{1/2}=\varepsilon_0\varepsilon$, όπου $\varepsilon_0=O(1)$ για $\varepsilon \ll 1$, και συνεπώς, ως προς τις κλιμακωτές μεταβλητές έχουμε

$$H\left(z-\frac{V}{\alpha}\tau\right)=H\left(z-\frac{V}{\alpha}+\varepsilon_0\right).$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι το μήκος κύματος μιας περιοδικής λύσης της KdV εξίσωσης είναι ε_0 , και για να είναι η ταχύτητα $O(1)$ χρειαζόμαστε $V=O(\alpha)$, άρα το γράφουμε ως $V=V_0\alpha$, με $V_0=O(1)$, για $\alpha \ll 1$. Παρόμοιες παρατηρήσεις κάνουμε και για το πλάτος του κύματος, και το γράφουμε ως $\alpha_0=O(1)$ στο επίπεδο (z,τ) .

Αντικαθιστούμε $H=H(z-V_0\tau)$ στην KdV εξίσωση και έχουμε ότι

$$-2V_0 H_\xi + 3H H_\xi + \frac{1}{3} H_{\xi\xi\xi} = 0,$$

όπου $\xi = z - V_0 \tau$ είναι η συντεταγμένη του οδεύοντος κύματος. Ολοκληρώνουμε δύο φορές την εξίσωση αυτή και παίρνουμε

$$\frac{1}{6} H_\xi^2 = V_0 H^2 - \frac{1}{2} H^3 + D_1 H + D_2 = f(H, V_0, D_1, D_2), \quad (2.30)$$

όπου D_1, D_2 είναι σταθερές της ολοκλήρωσης. Η συνάρτηση f είναι ένα κυβικό πολυώνυμο του H και υποθέτουμε ότι έχει τη μορφή

$$f = \frac{1}{2} (H - H_1)(H - H_2)(H_3 - H).$$

Να σημειώσουμε ότι

$$V_0 = \frac{1}{2} (H_1 + H_2 + H_3).$$

Θα θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις, ως προς τις ρίζες H_1, H_2, H_3 της $f=0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει τρεις πραγματικές ρίζες με διάταξη $H_3 \geq H_2 \geq H_1$,

(i) $H_3 > H_2 > H_1$. Τότε, $f \geq 0$, για $H_2 \leq H \leq H_3$.

(ii) $H_2 = H_1 = 0$. Στην περίπτωση αυτή $f \geq 0$ για $0 \leq H \leq H_3$.

Η περίπτωση (ii) είναι υποπερίπτωση της (i). Ενδιαφερόμαστε για την επίλυση της (2.30), για $H_2 \leq H \leq H_3$, όπου η f είναι θετική, όπως βλέπουμε στην εικόνα 2.6. Η επιλογή θετικών και αρνητικών τετραγωνικών λύσεων καθιερώνει την ύπαρξη μιας κλειστής καμπύλης στο (H_ξ, H) - επίπεδο φάσεων, το οποίο μπορούμε να παραμετροποιήσουμε με τις τιμές των V_0, H_2, H_3 . Από τα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι η λύση είναι περιοδική στον (ξ, H) - τόπο, με μήκος κύματος

$$\varepsilon_0 = 2 \int_{H_2}^{H_3} \frac{dH}{\sqrt{3(H - H_1)(H - H_2)(H_3 - H)}},$$

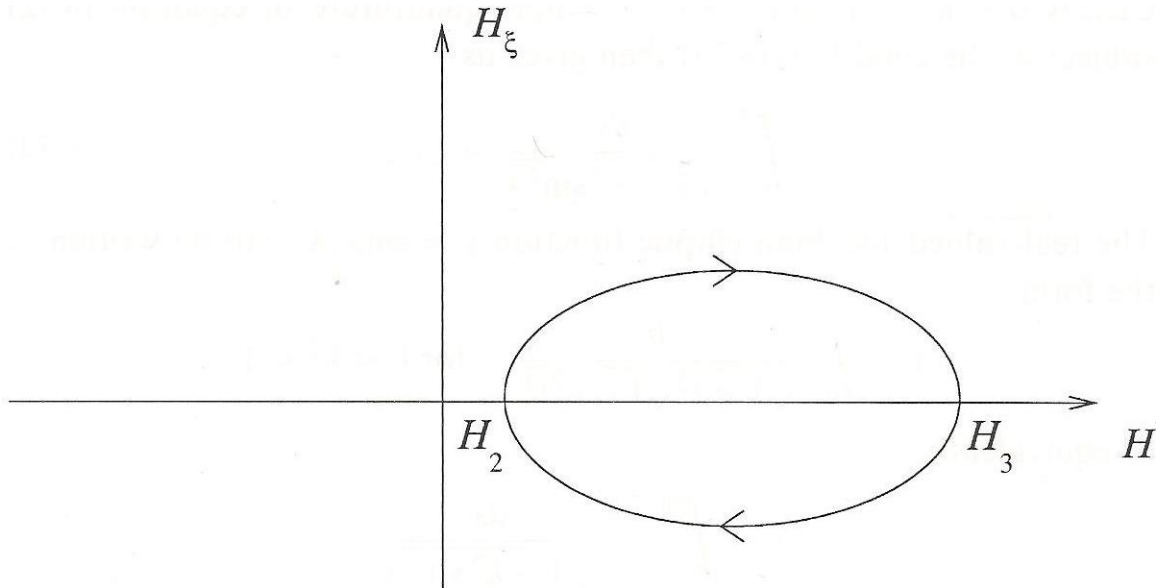
και πλάτος κύματος

$$\alpha_0 = H_3 - H_2.$$

Θα εξετάσουμε την λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.30) πιο αναλυτικά, ώστε να βρούμε αντιπροσώπευση των ριζών από απλές συναρτήσεις.

Ορίζουμε $X = H/H_3$, , και η (2.30) γίνεται

$$X_\xi^3 = 3H_3 (X - X_1)(X - X_2)(1 - X),$$



Εικόνα 2.6. Η λύση της (2.30) για την περίπτωση (i), στο επίπεδο (H, H_ξ) . [1]

όπου $X_i = H_i/H_3$, για $i=1,2$. Θεωρούμε ότι η κορυφή είναι στη θέση $\zeta=0$, ώστε

$$X(0)=1,$$

που καθορίζει τη φάση του κύματος. Εάν ορίσουμε ακόμα μια μεταβλητή Y μέσω της σχέσης:

$$X = 1 + (X_2 - 1) \sin^2 Y,$$

βρίσκουμε ότι

$$Y_\xi^2 = \frac{3}{4} H_3 (1 - X_1) \left\{ 1 - \left(\frac{1 - X_2}{1 - X_1} \right) \sin^2 Y \right\}, \quad (2.31)$$

και

$$Y(0)=0.$$

Προκειμένου να πάρει μια τυποποιημένη μορφή, ορίζουμε τα εξής:

$$k^2 = \frac{1 - X_2}{1 - X_1}, \quad l = \frac{3}{4} H_3 (1 - X_1).$$

Προφανώς ισχύει ότι $0 \leq k^2 \leq 1$, και $l > 0$.

Η επίλυση της εξίσωσης (2.31), υπό τη συνθήκη $Y(0)=0$ θα μας δώσει

$$\int_0^Y \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}} = \sqrt{l} \xi. \quad (2.32)$$

Η Jacobian ελλειπτική συνάρτηση με πραγματικές τιμές $y = sn(x; k)$ γράφεται στη μορφή,

$$x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad \text{για } 0 < k^2 < 1,$$

ή ισοδύναμα

$$x = \int_0^{\sin^{-1}y} \frac{ds}{\sqrt{1-k^2\sin^2s}}.$$

Γράφουμε λοιπόν την (2.32) ως

$$\sin Y = sn(\sqrt{l}\xi; k),$$

άρα

$$X = 1 + (X_2 - 1)sn^2(\sqrt{l}\xi; k).$$

Είναι βολικό να το γράψουμε ως προς την ελλειπτική Jacobian συνάρτηση $cn(x; k)$, απ' όπου βγαίνει ο όρος snoidal κύμα. Χρησιμοποιώντας ότι $cn^2 + sn^2 = 1$, η τελευταία σχέση γίνεται

$$H = H_2 + (H_3 - H_2)cn^2\left(\left\{\frac{3}{4}(H_3 - H_1)\right\}^{1/2}\xi; k\right).$$

Οι τιμές της συνάρτησης $cn(x; k)$ έχουν καταγραφεί σε πίνακα και μπορούν να βρεθούν με τη χρήση απλού λογισμικού.

Παρατηρούμε ότι το μήκος κύματος είναι συνάρτηση του πλάτους. Όσο μεγαλύτερο το πλάτος, όσο απομακρυνόμαστε από την γραμμική περίπτωση μικρού πλάτους, τόσο λιγότερο ημιτονοειδές φαίνεται το κύμα, με τάση προς στενές κορυφές και πλατιά σημεία ελαχίστου. Το αδιάστατο μήκος κύματος μπορεί να πάρει απλή μορφή χρησιμοποιώντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς.

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{\sqrt{3(H_3 - H_1)}} \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}} = \frac{4K(k)}{\sqrt{3(H_3 - H_1)}},$$

όπου $K(k)$ είναι το ένα τέταρτο της περιόδου του $sn(x; k)$.

Η ανάλυση μας έχει δώσει τρεις σχέσεις για το σύστημα του οδεύοντος κύματος:

$$\alpha_0 = H_3 - H_2, \quad \varepsilon_0 = \frac{4K(k)}{\sqrt{3(H_3 - H_1)}}, \quad V_0 = \frac{1}{2}(H_1 + H_2 + H_3).$$

Πρόκειται για μια παραμετρική αναπαράσταση της σχέσης διασποράς του οδεύοντος κύματος. Για γνωστό πλάτος, α_0 , μήκος κύματος, ε_0 , και ομοιόμορφη διατάραξη βάθους H_2 , μπορούμε να δούμε ότι $H_3 = \alpha_0 + H_2$. Το H_1 μπορεί να υπολογιστεί από

την υπερβατική εξίσωση που περιέχει το $K(k)$, ώστε

$$V_0 = \frac{1}{2} \{2H_2 + H_1(\alpha_0, \varepsilon_0) + \alpha_0\}.$$

Παίρνουμε τη σχέση διασποράς ανάμεσα στη ταχύτητα φάσης, το μήκος κύματος, το βάθος και το πλάτος. Αντίθετα με τη γραμμική θεωρία, η ταχύτητα δεν είναι ανεξάρτητη από το πλάτος.

Προκειμένου να συγκριθεί η ανάλυση αυτή με τη γραμμική θεωρία, θεωρούμε τον περιορισμό $(H_3 - H_2) \ll 1$. Στην περίπτωση αυτή, το k είναι μικρό και θετικό, και από τον ορισμό του $sn(x; k)$, θα ισχύει $sn(x; 0^+) \sim \sin x$ και $K(0^+) \sim \pi/2$. Θεωρώντας κυρίαρχο όρο

$$\varepsilon_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{3(H_2 - H_1)}}, \quad V_0 = \frac{1}{2}(H_1 + 2H_2).$$

Αυτό οδηγεί στην έκφραση

$$H = H_2 + \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\varepsilon_0}\xi\right).$$

Το αρμονικό αυτό κύμα είναι η αναμενόμενη λύση του γραμμικού προβλήματος.

Θα μετατρέψουμε τη σχέση διασποράς σε μια πιο τυποποιημένη μορφή. Έχουμε:

$$H_1 = H_2 - \frac{4\pi^2}{3\varepsilon_0^2},$$

ώστε

$$c = \sqrt{gh} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\alpha \left(3H_2 - \frac{4\pi^2}{3\varepsilon_0^2} \right) \right\}.$$

Είχαμε ορίσει ότι $\varepsilon_0 = \alpha^{1/2}/\varepsilon$, άρα το γράφουμε στη μορφή

$$c = \sqrt{gh} \left\{ 1 - \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 + O(\alpha) \right\}.$$

Αυτό είναι όμως ακριβώς αν πάρουμε την κλασική σχέση διασποράς των γραμμικών κυμάτων βαρύτητας,

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

και την επεκτείνουμε σε μια ασυμπτωτική σειρά για $h \ll \lambda$. Με άλλα λόγια, η μη γραμμική θεωρία είναι συνεπής με τη γραμμική θεωρία περιορισμένη σε κύματα μικρού πλάτους.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση (ii). Καθώς τα H_1, H_2 τείνουν προς το μηδέν,

$k \rightarrow 1^-$. Οι ελλειπτικές συναρτήσεις και οι περίοδοι τους απλοποιούνται στο όριο αυτό, με $sn(x; 1^-) \sim \tanh x$ και $K(k) \rightarrow \infty$ καθώς $k \rightarrow 1^-$. Το cnoidal κύμα χάνει την περιοδικότητά του και γίνεται ένας απλός κώδωνας (hump). Η έκφραση για το προφίλ κύματος γίνεται

$$H = H_3 \operatorname{sech}^2\left(\left(\frac{3}{4} H_3\right)^{1/2} \xi\right),$$

και η ταχύτητα κύματος γίνεται

$$V_0 = \frac{1}{2} H_3 = \frac{1}{2} \alpha_0.$$

Μια τέτοιου είδους λύση ονομάζεται μοναχικό κύμα (solitary wave). Η ταχύτητα ως προς τις φυσικές μεταβλητές γράφεται

$$c = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{1}{2} H_3 \alpha\right).$$

Η σχέση αυτή δείχνει πως η ταχύτητα του solitary κύματος σχετίζεται με το ύψος του κώδωνα.

Οι περιοδικές λύσεις που βρήκαμε υπόκεινται στην αστάθεια Benjamin-Feir, που θα τους οδηγήσει στην αποσύνθεση, σε αντίθεση με το μοναχικό κύμα, το οποίο αναμένεται να διαδίδεται για μεγάλες αποστάσεις.

2.4 Μη γραμμικά τριχοειδή κύματα

Στην ενότητα αυτή μελετάμε το μη γραμμικό δισδιάστατο κύμα, με μοναδική δύναμη αποκατάστασης την επιφανειακή τάση, που διαδίδεται από τα δεξιά προς τα αριστερά με ύψος H , μήκος κύματος λ , και ταχύτητα φάσης c . Θεωρούμε ότι το βάθος του νερού είναι άπειρο, και η επίδραση της διέλευσης του νερού είναι αμελητέα βαθιά μέσα στο νερό. Όπως και προηγουμένως, πρόκειται για πρόβλημα ασταθής ροής που θα μετατρέψουμε σε πρόβλημα σταθερής ροής, χρησιμοποιώντας σύστημα συντεταγμένων που κινείται από τα δεξιά προς τα αριστερά με την ταχύτητα φάσης του κύματος. Στο σύστημα αυτό, το υγρό κοντά στο βυθό κινείται οριζόντια από τα αριστερά στα δεξιά με ταχύτητα c .

Το μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0, & \text{για } -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \eta(x), \\ \varphi &\sim c x, & \text{καθώς } y \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

$$\varphi_y = \eta_x \varphi_x, \quad \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 - \frac{\sigma}{\rho} \kappa = \frac{1}{2} c^2, \quad \text{για } y = \eta(x),$$

όπου κ είναι η καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας στη θέση $y = \eta(x)$. Αναζητούμε μια μη τετριμμένη περιοδική λύση με ύψος κύματος $H = \eta_{crest} - \eta_{trough} \neq 0$.

Αναδιατυπώνοντας το πρόβλημα, μπορούμε να το γράψουμε ως πρόβλημα συνοριακών τιμών με σταθερό πεδίο ορισμού και να βρούμε μια αναλυτική λύση.

Καθώς το πρόβλημα είναι δισδιάστατο, μπορούμε να εισάγουμε μια συνάρτηση ροής, $\psi = \psi(x, y)$, η οποία είναι αρμονική, παίρνει την τιμή μηδέν στην ελεύθερη επιφάνεια και $\psi \rightarrow -\infty$ καθώς $y \rightarrow -\infty$. Από τον ορισμό της συνάρτησης ροής και του δυναμικού ταχύτητας, έχουμε

$$\varphi_x = \psi_y, \quad \varphi_y = -\psi_x.$$

Κάτω από λογικές υποθέσεις σχετικά με την ομαλότητα των ψ, φ , βλέπουμε ότι οι παραπάνω είναι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann, οι οποίες ικανοποιούνται από το πραγματικό και φανταστικό μέρος της αναλυτικής συνάρτησης $w = \varphi + i\psi$. Το w ονομάζεται complex potential, και είναι μια αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$ στον τομέα που καταλαμβάνει το ρευστό.

Θα αναζητήσουμε μια περιοδική λύση συμμετρική στο $x = \lambda/2$, ώστε η ροή να είναι οριζόντια κάτω από τις κορυφογραμμές και τα σημεία ελαχίστου. Αυτό σημαίνει ότι $\varphi_y = 0$ σε ευθείες που επεκτείνονται κατακόρυφα προς τα κάτω. Καθώς αυτές οι κάθετες γραμμές κατευθύνονται προς μια ομοιόμορφη οριζόντια ροή, και $\varphi \sim cx$ για $y \rightarrow -\infty$, βλέπουμε ότι η αλλαγή στο φ σε ένα μήκος κύματος είναι $c\lambda$. Θα επικεντρωθούμε σε ένα μήκος κύματος ABCDE, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.7(a). Αυτό το μήκος κύματος καταλαμβάνει την κατακόρυφη λωρίδα A'B'C'D'E' στο επίπεδο $w = \varphi + i\psi$, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.7(b). Παρατηρούμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε $\varphi = 0$ στο σημείο A διότι το πρόβλημα δεν αλλάζει αν προσθέσουμε μια σταθερά στο φ . Το βήμα-κλειδί στη μέθοδο αυτή είναι η ανταλλαγή ρόλων ανάμεσα στις μεταβλητές $z = x + iy$ και $w = \varphi + i\psi$, και το ότι θεωρούμε τα φ, ψ ως τις ανεξάρτητες μεταβλητές, καθώς η συνάρτηση $w = \varphi + i\psi$ παρέχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα επίπεδα φυσικού και μιγαδικού δυναμικού. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός ονομάζεται hodograph transformation, και μπορεί να προσδιορίσει την άγνωστη ελεύθερη επιφάνεια στη γνωστή θέση $\psi = 0, 0 < \varphi < c\lambda$, στο w -επίπεδο.

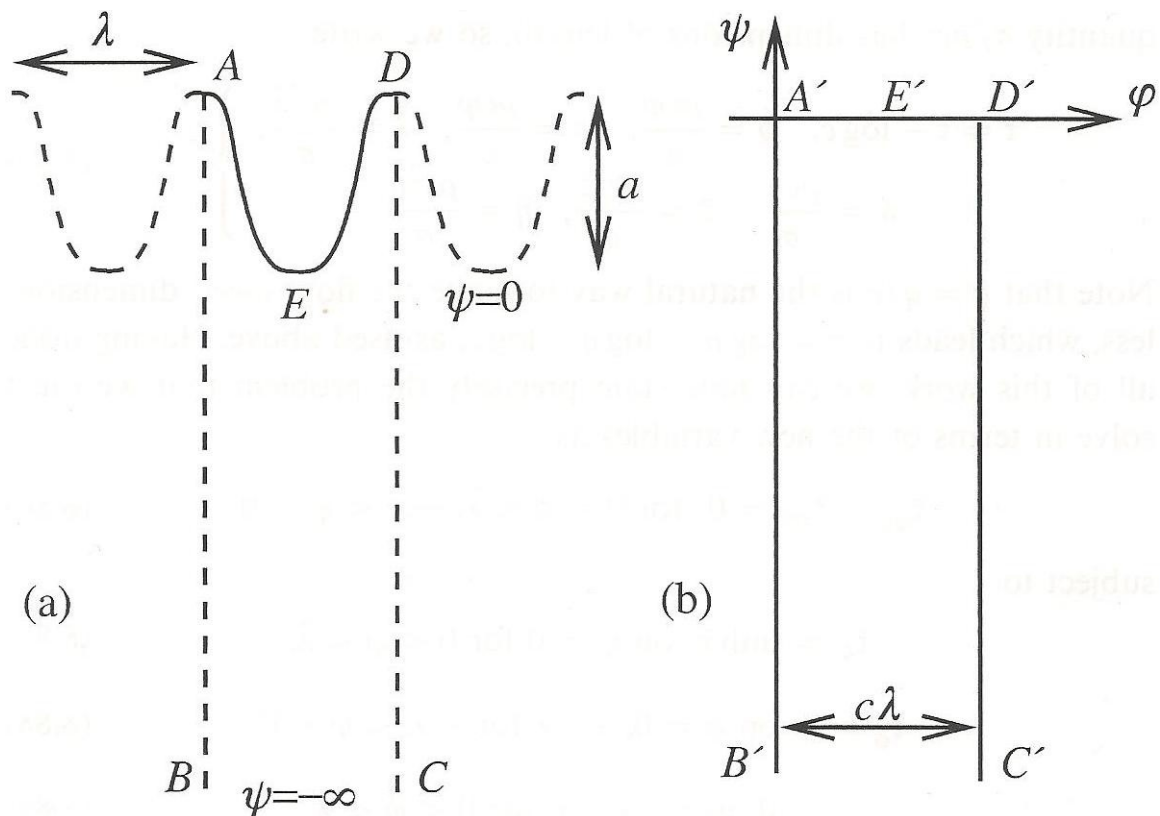
Ορίζουμε την complex ταχύτητα,

$$\frac{dw}{dz} = \varphi_x + i\psi_x = u - iv,$$

όπου (u, v) είναι η οριζόντια και κάθετη συνιστώσα του πεδίου ταχυτήτων. Εάν q είναι η ταχύτητα της ροής και θ η γωνία που κάνει με το οριζόντιο, τότε
 $u = q \cos \theta, v = q \sin \theta$, ώστε

$$\frac{dw}{dz} = q e^{-i\theta}.$$

Η παράγωγος μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι αναλυτική, άρα και η dw/dz είναι αναλυτική. Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν σημεία στασιμότητας στη ροή, τότε όμοια έχουμε ότι $\log(dw/dz) = \log q - i\theta \equiv \tau - i\theta$ είναι αναλυτική. Η ποσότητα $\log(dw/dz)$ είναι



Εικόνα 2.7. (a) Το φυσικό πεδίο που καταλαμβάνει ένα μήκος κύματος.
 (b) Το αντίστοιχο μιγαδικό πεδίο. [1]

μια αναλυτική συνάρτηση της $\varphi + i\psi$, άρα $\tau = \log q$ πρέπει να είναι αρμονικό στη λωρίδα $-\infty < \psi < 0, 0 < \varphi < c\lambda$. Θα γράψουμε τις συνοριακές συνθήκες ως προς τ ώστε να έχουμε πρόβλημα συνοριακών συνθηκών του τ στο επίπεδο (φ, ψ) .

Η κινηματική συνοριακή συνθήκη, $\varphi_y = \eta_x \varphi_x$, παίρνει τη μορφή $q \sin \theta = \eta_x q \cos \theta$, η οποία ικανοποιείται εξίσου, καθώς $\eta_x = \tan \theta$. Για τη μετατροπή της εξίσωσης Bernoulli,

$\frac{1}{2}q^2 - \sigma \kappa / \rho = \frac{1}{2}c^2$, θα χρησιμοποιήσουμε ότι ο ορισμός της καμπυλότητας είναι

$\kappa = d\theta/ds$, όπου s είναι το μήκος τόξου στην επιφάνεια. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε,

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) = q \frac{\partial \theta}{\partial \varphi},$$

διότι $\partial \varphi / \partial x = q \cos \theta$, $\partial \varphi / \partial y = q \sin \theta$, $dx/ds = \cos \theta$, $dy/ds = \sin \theta$.

Οι τ και θ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης, άρα πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann για τις μεταβλητές φ και ψ .

Συγκεκριμένα, $\tau_\psi = \theta_\varphi$, ώστε η εξίσωση Bernoulli για $\psi=0$, είναι

$$\frac{1}{2}e^{2\tau} - \frac{\sigma}{\rho} e^\tau \frac{\partial \tau}{\partial \psi} = \frac{1}{2}c^2,$$

άρα

$$\frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial \psi} = -\frac{1}{2}(c^2 e^{-\tau} - e^\tau).$$

Θα είναι πιο βολικό να γράψουμε το πρόβλημα αδιάστατοποιημένο. Η ποσότητα $\sigma/\rho c^2$ έχει διαστάσεις μήκους, άρα γράφουμε,

$$\bar{\tau} = \tau - \log c, \quad \bar{\varphi} = \frac{\rho c \varphi}{\sigma}, \quad \bar{\psi} = \frac{\rho c \psi}{\sigma}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\rho c^2 \lambda}{\sigma},$$

$$\bar{w} = \frac{\rho c w}{\sigma}, \quad \bar{z} = \frac{\rho c^2 z}{\sigma}, \quad \bar{\eta} = \frac{\rho c^2 \eta}{\sigma}.$$

Ο φυσικός τρόπος να κάνουμε την ταχύτητα ροής αδιάστατη είναι $\bar{q} = q/c$, το οποίο οδηγεί $\bar{\tau} = \log \bar{q} = \log q - \log c$. Άρα το πρόβλημα με τις νέες μεταβλητές είναι:

$$\bar{\tau}_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}} + \bar{\tau}_{\bar{\psi}\bar{\psi}} = 0, \quad \text{για } 0 < \bar{\varphi} < \bar{\lambda}, \quad -\infty < \bar{\psi} < 0,$$

$$\bar{\tau}_{\bar{\psi}} = \sinh \bar{\tau}, \quad \text{για } \bar{\psi} = 0, \quad 0 < \bar{\varphi} < \bar{\lambda},$$

$$\bar{\tau}_{\bar{\varphi}} = 0, \quad \text{για } \bar{\varphi} = 0, \quad \frac{1}{2}\bar{\lambda}, \quad \bar{\lambda}, \quad \text{και } \bar{\psi} < 0, \quad (2.35)$$

$$\bar{\tau} \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } \bar{\psi} \rightarrow -\infty, \quad \text{για } 0 < \bar{\varphi} < \bar{\lambda}.$$

Η άλλη εξίσωση Cauchy-Riemann, $\bar{\tau}_\varphi = -\theta_\psi$, οδηγεί στη σχέση (2.35) καθώς $\theta \equiv 0$ κάτω

από τις κορυφές και τα σημεία ελαχίστου, τα οποία είναι σε $\bar{\varphi} = 0, \frac{1}{2}\bar{\lambda}, \bar{\lambda}$.

Έχουμε τώρα μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση. Η δυσκολία βρίσκεται στη μη γραμμική συνοριακή συνθήκη $\bar{\tau}_{\bar{\psi}} = \sinh \bar{\tau}$. Θα ψάξουμε λύση που να ικανοποιεί την

$$\bar{\tau}_{\bar{\psi}} = f(\bar{\psi}) \sinh \bar{\tau}$$

σε όλο το πεδίο ορισμού, με $f(0)=1$. Ολοκληρώνουμε την εξίσωση και έχουμε

$$\log \tanh \frac{1}{2} \bar{\tau} = F(\bar{\psi}) + G(\bar{\varphi}),$$

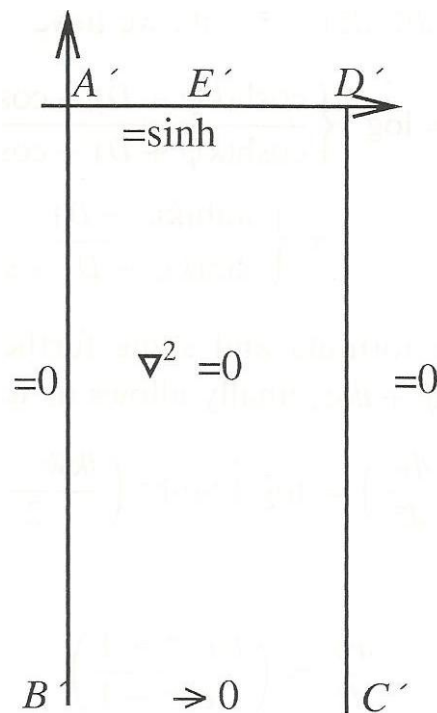
όπου $F'(\bar{\psi})=f(\bar{\psi})$ και $G(\bar{\varphi})$ είναι σταθερά ολοκλήρωσης. Λύνοντας ως προς $\bar{\tau}$ έχουμε

$$\bar{\tau} = \log \left\{ \frac{X(\bar{\psi}) + Y(\bar{\varphi})}{X(\bar{\psi}) - Y(\bar{\varphi})} \right\},$$

όπου $X(\bar{\psi}) = \exp\{-F(\bar{\psi})\}$, $Y(\bar{\varphi}) = \exp\{G(\bar{\varphi})\}$. Αν την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση Laplace, βρίσκουμε

$$X(\bar{\psi}) X'(\bar{\psi}) \left(\frac{Y''(\bar{\varphi})}{Y(\bar{\varphi})} \right)' + Y(\bar{\varphi}) Y'(\bar{\varphi}) \left(\frac{X''(\bar{\psi})}{X(\bar{\psi})} \right)' = 0.$$

Βλέπουμε ότι η εξίσωση αυτή ικανοποιείται για $Y'' = -k^2 Y$, $X'' = k^2 X$, όπου k μια πραγματική σταθερά.



Εικόνα 2.8. Το αδιαστατοποιημένο πρόβλημα συνοριακών τιμών. [1]

Με τη χρήση της λύσης

$$X = A \cosh(k \bar{\psi} + D), \quad Y = A \sin(k \bar{\varphi} + B)$$

λαμβάνουμε μια οικογένεια λύσεων τριών παραμέτρων αρκετή για να μας επιτρέψει την κατασκευή λύσης του μη γραμμικού προβλήματος συνοριακών συνθηκών.

Η συνθήκη $f'(0)=1$ είναι ισοδύναμη με $X'(0)=X(0)$, άρα έχουμε $k=2\pi/\bar{\lambda}$. Η συνθήκη $\bar{\tau}_{\bar{\varphi}}=0$ για $\bar{\varphi}=0, \bar{\lambda}/2$ γίνεται $Y'(0)=Y'(\bar{\lambda}/2)=0$, και ικανοποιείται για $B=-\pi/2$ και $k=2\pi/\bar{\lambda}$. Η λύση παίρνει τη μορφή

$$\bar{\tau} = \log \left\{ \frac{\cosh(k\bar{\psi} + D) - \cos k\bar{\varphi}}{\cosh(k\bar{\psi} + D) + \cos k\bar{\varphi}} \right\},$$

η οποία πράγματι ικανοποιεί τη συνθήκη $\bar{\tau} \rightarrow 0$, καθώς $\bar{\psi} \rightarrow -\infty$.

Υπολογίζουμε και το θ ολοκληρώνοντας τη σχέση $\theta_{\bar{\varphi}} = \bar{\tau}_{\bar{\varphi}}$, και παίρνουμε

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left\{ \frac{\sin k\bar{\varphi}}{\sinh(k\bar{\psi} + D)} \right\} = i \log \left\{ \frac{\sinh(k\bar{\psi} + D) - \sinh ik\bar{\varphi}}{\sinh(k\bar{\psi} + D) + \sinh ik\bar{\varphi}} \right\}^{1/2}.$$

Για να βρούμε τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας χρειαζόμαστε την complex ταχύτητα w .

Χρησιμοποιώντας ότι $\log(d\bar{w}/d\bar{z}) = \bar{\tau} - i\theta$, έχουμε

$$\log\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right) = \log \left[\left\{ \frac{\cosh(k\bar{\psi} + D) - \cos k\bar{\varphi}}{\cosh(k\bar{\psi} + D) + \cos k\bar{\varphi}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\sinh(k\bar{\psi} + D) - \sinh ik\bar{\varphi}}{\sinh(k\bar{\psi} + D) + \sinh ik\bar{\varphi}} \right\}^{1/2} \right]$$

Παρατηρώντας ότι $ik\bar{w} = -k\bar{\psi} + ik\bar{\varphi}$, καταλήγουμε στο

$$\log\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right) = \log \left\{ \tanh^2 \left(\frac{ik\bar{w} - D}{2} \right) \right\},$$

συνεπώς

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \left(\frac{C e^{ik\bar{w}} + 1}{C e^{ik\bar{w}} - 1} \right)^2,$$

όπου $C = -e^{-D}$. Η σχέση είναι εύκολα ολοκληρώσιμη, και δίνει

$$\bar{z} = \bar{w} - \frac{4i}{k} \frac{1}{1 + C e^{ik\bar{w}}} + \frac{4i}{k}.$$

Επιλέξαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης ώστε $\bar{w} = \bar{z}$ όταν $C=0$, το οποίο αντιστοιχεί σε μια επίπεδη επιφάνεια χωρίς κύματα.

Για να πάρουμε την εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας θέτουμε $\bar{\psi}=0$ στην παραπάνω σχέση, και παίρνουμε μια παραμετρική αναπαράσταση ως προς τις φυσικές συντεταγμένες,

$$x + iy = \lambda \left\{ \tilde{\varphi} + \frac{2iC e^{i2\pi\tilde{\varphi}}}{\pi(1 + C e^{i2\pi\tilde{\varphi}})} \right\}, \quad (2.36)$$

όπου $\tilde{\varphi} = \bar{\varphi} / \bar{\lambda} = \varphi / \lambda c$.

Πρέπει τώρα να βρούμε τη σχέση διασποράς, και να καθορίσουμε τυχόν όρια για την παράμετρο C . Επί του παρόντος έχουμε

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k, \quad k = -\coth D, \quad C = -e^{-D}. \quad (2.37)$$

Χρειαζόμαστε και μια σχέση σχετικά με το ύψος κύματος. Στο φυσικό επίπεδο έχουμε ότι $\eta_{crest} - \eta_{trough} = H$. Η μονάδα μήκους μας είναι $\sigma / \rho c^2$, άρα χρειαζόμαστε

$$\bar{\eta}(0) - \bar{\eta}\left(\frac{1}{2}\bar{\lambda}\right) = \frac{\rho c^2 H}{\sigma},$$

παρατηρώντας ότι η υπόθεση ότι το κύμα έχει σημεία καμπής για $x=0, \frac{1}{2}\bar{\lambda}$ απαιτεί το C να είναι πραγματικός αριθμός. Παίρνουμε το φανταστικό μέλος της (2.36) για $\tilde{\varphi}=0, 1$ και βρίσκουμε

$$\frac{\rho c^2 H}{\sigma} = \frac{-8C}{k(C^2 - 1)}.$$

Η σχέση (2.37) δίνει

$$c^2 = \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} \frac{C^2 - 1}{C^2 + 1}. \quad (2.38)$$

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις βλέπουμε ότι χρειαζόμαστε $C < -1$ ώστε τα H, c^2 να είναι θετικά. Επιπλέον, απαλείφοντας το c^2 παίρνουμε

$$\frac{H}{\lambda} = \frac{-4C}{\pi(C^2 - 1)},$$

συνεπώς

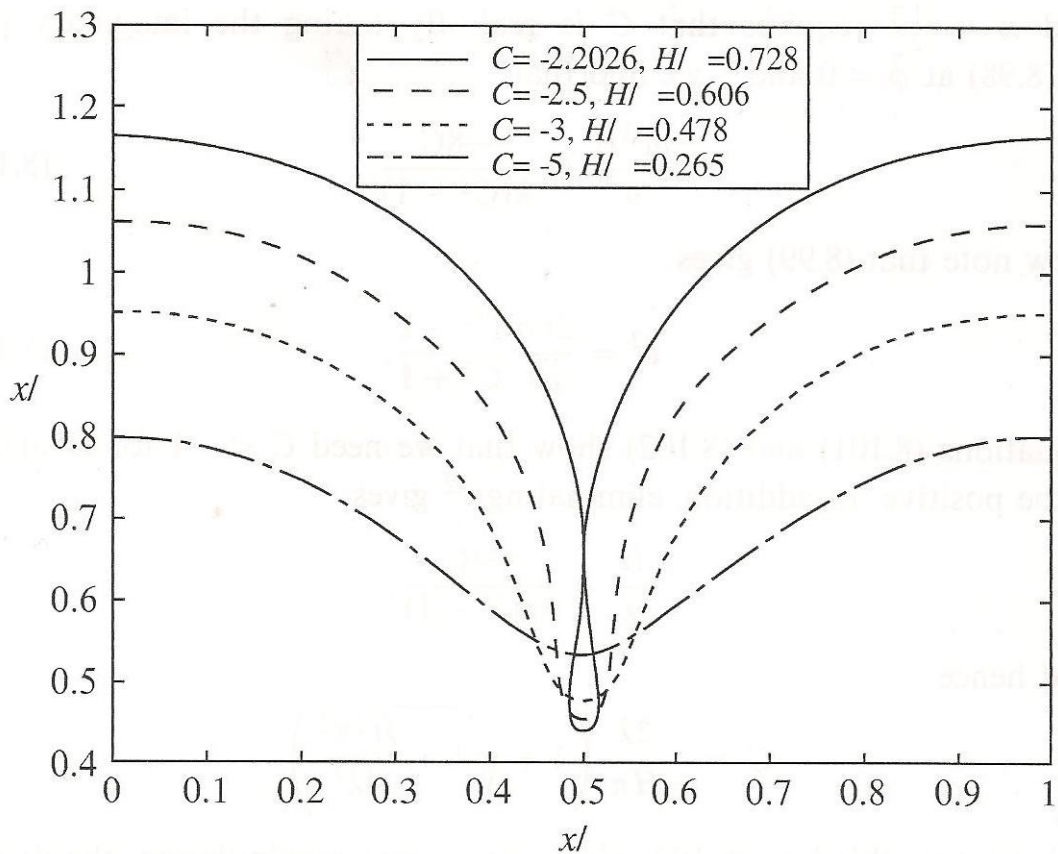
$$C = -\frac{2\lambda}{H\pi} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{H^2 \pi^2}{4\lambda^2}} \right).$$

Αν το αντικαταστήσουμε στη σχέση (2.38) καταλήγουμε στη σχέση διασποράς:

$$c^2 = \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} \left(1 + \frac{H^2 \pi^2}{4\lambda^2} \right)^{-1/2}.$$

Όταν $H \ll \lambda$, καταλήγουμε στη σχέση διασποράς που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή $c^2 = 2\pi\sigma / \rho\lambda$.

Τα προφίλ του μη γραμμικού κύματος απεικονίζονται στην εικόνα 2.9. Καθώς τα κύματα γίνονται όλο και πιο απότομα, εμφανίζεται ένας περιορισμός, $H/\lambda = H_c/\lambda \approx 0.73$, ώστε για $H > H_c$ η ελεύθερη επιφάνεια διασταυρώνεται με τον εαυτό της, κάτι που δεν είναι φυσικό. Όταν $H = H_c$ η ελεύθερη επιφάνεια απλά εφάπτεται στην εαυτό της και δημιουργεί μια φυσαλλίδα αέρα, όπως βλέπουμε και στην εικόνα.



Εικόνα 2.9. Μη γραμμική τριχοειδή κύματα για διάφορες τιμές του πλάτους κύματος. [1]

Βιβλιογραφία

- [1] J. Billingham and A. C. King : 'Wave motion', Cambridge University Press, 2000
- [2] G. B. Whitham : 'Linear and nonlinear waves', Wiley, 1974
- [3] D. H. Peregrine : 'Long waves on a beach', Journal of Fluid Mechanics, 1967
- [4] G. D. Crapper : 'An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude', Journal of Fluid Mechanics, 1957
- [5] N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg : 'Linear water waves: a mathematical approach', Cambridge University Press, 2002
- [6] M.I.G. Bloor : 'Large amplitude surface waves', Journal of Fluid Mechanics, 1978