



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

## ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ



Διπλωματική Εργασία  
Μαρία Ι. Κατσιδονιωτάκη

ΕΜΚ ΔΕ 2017 30

Επιβλέπων: Καθηγητής Χάρης Ι. Γαντές  
Συνεπιβλέπουσα: Μαρία Α. Λιβανού, Υποψήφια Διδάκτωρ

Αθήνα, Οκτώβριος 2017





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

## ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ



Διπλωματική Εργασία  
Μαρία Ι. Κατσιδονιωτάκη

ΕΜΚ ΔΕ 2017 30

Επιβλέπων: Καθηγητής Χάρης Ι. Γαντές  
Συνεπιβλέπουσα: Μαρία Α. Λιβανού, Υποψήφια Διδάκτωρ

Αθήνα, Οκτώβριος 2017





Copyright © Μαρία Ι. Κατσιδωνιωτάκη, 2017  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση σε αρχείο πληροφοριών, διανομή, αναπαραγωγή, μετάφραση ή μετάδοση της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό, υπό οποιαδήποτε μορφή και με οποιοδήποτε μέσο επικοινωνίας, ηλεκτρονικό ή μηχανικό, χωρίς την προηγούμενη έγγραφη άδεια της συγγραφέως. Επιτρέπεται η αναπαραγωγή, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς την συγγραφέα.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από τη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων της συγγραφέως (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).

Copyright © Maria J. Katsidoniotaki, 2017  
All Rights Reserved

Neither the whole nor any part of this diploma thesis may be copied, stored in a retrieval system, distributed, reproduced, translated, or transmitted for commercial purposes, in any form or by any means now or hereafter known, electronic or mechanical, without the written permission from the author. Reproducing, storing and distributing this thesis for non-profitable, educational or research purposes is allowed, without prejudice to reference to its source and to inclusion of the present text. Any queries in relation to the use of the present thesis for commercial purposes must be addressed to its author.

Approval of this diploma thesis by the School of Civil Engineering of the National Technical University of Athens (NTUA) does not constitute in any way an acceptance of the views of the author contained herein by the said academic organisation (L. 5343/1932, art. 202).

Μαρία Ι. Κατσιδονιωτάκη (2017)  
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ  
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2017 30  
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Maria J. Katsidoniotaki (2017)  
Diploma Thesis ΕΜΚ ΔΕ 2017 30  
ANALYTICAL AND NUMERICAL INVESTIGATION OF BUCKLING OF MEMBERS IN DOUBLE-PITCHED  
PLANE STEEL FRAMES  
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece

## Ευχαριστίες

Με την παρούσα διπλωματική εργασία, ολοκληρώνεται ο πενταετής κύκλος σπουδών μου στο τμήμα των Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ. Οι δυσκολίες ήταν αρκετές, αλλά οι γνώσεις και οι εμπειρίες που απέκτησα πάνω στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού είναι πολύτιμες. Με συγκίνηση λοιπόν, θα εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους ανθρώπους εκείνους που συνέβαλαν στην προσπάθεια αυτή, ως μια ελάχιστη ένδειξη ευγνωμοσύνης.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω κατ' αρχάς τον Δάσκαλό μου κ. Χάρη Γαντέ, Καθηγητή ΕΜΠ και αναγνωρισμένο επιστήμονα, τόσο για την έμπνευση κατά τη διάρκεια των διαλέξεών του όσο και για την ευκαιρία που μου έδωσε να εκπονήσω υπό την επίβλεψή του την παρούσα διπλωματική εργασία. Η μετάδοση βαθιάς γνώσης και η καθοδήγησή του σαν Καθηγητής αλλά και σαν Άνθρωπος ήταν καίριες.

Ευχαριστώ θερμά την κα. Μ. Λιβανού, Υποψήφια Διδάκτωρ ΕΜΠ και πολλά υποσχόμενη νέα μηχανικό, για την συνεχή βοήθεια που μου προσέφερε επί έναν ολόκληρο χρόνο, την ευστροφία της με την οποία με απάλλασσε από κάθε δυσκολία που αντιμετώπιζα και το φόρτο εργασίας που κλήθηκε να αναλάβει μέσα σε αυτό το διάστημα.

Ευχαριστώ επίσης θερμά τον κ. Τάσο Αβραάμ, Καθηγητή ΕΜΠ, για την σημαντική βοήθεια που προσέφερε σε κρίσιμο σημείο της διπλωματικής μου εργασίας, καθώς και για τη συμμετοχή του στη τριμελή εξεταστική επιτροπή. Ευχαριστώ ακόμη τον κ. Ιωάννη Ραυτογιάννη, Καθηγητή ΕΜΠ, και για την δική του συμμετοχή στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Τέλος, εκφράζω τις απεριόριστες ευχαριστίες μου στην οικογένειά μου, πηγή δύναμης και υπομονής όλα αυτά τα χρόνια.



Αφιέρωση

Στην Οικογένειά μου,





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΕΜΚ ΔΕ 2017 30

## **ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ**

**Μαρία Ι. Κατσιδονιωτάκη**

Επιβλέπων: Καθηγητής Χάρης Ι. Γαντές  
Συνεπιβλέπουσα: Μαρία Α. Λιβανού, Υποψήφια Διδάκτωρ  
Οκτώβριος 2017

### **ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Κίνητρο της παρούσας εργασίας αποτελεί το κενό της βιβλιογραφίας του Πολιτικού Μηχανικού σε ότι αφορά στον υπολογισμό του μήκους λυγισμού των μελών πλαισίων με αμφικλινή ζυγώματα και κατ'επέκταση στον σχεδιασμό τους έναντι καμπτικού λυγισμού. Για τον λόγο αυτόν, διατυπώνονται εκ νέου οι ακριβείς αναλυτικές σχέσεις που περιγράφουν τον γραμμικό λυγισμό τους και μέσω αυτών υπολογίζουν τελικά τα μήκη λυγισμού των μελών πλαισίων με αμφικλινή ζυγώματα, για δυο συνθήκες στήριξης στη βάση τους, αρθρώσεις και πακτώσεις.

Για τα υποστυλώματα των πλαισίων αυτών, διατυπώνονται οι συνοριακές συνθήκες οι οποίες οδηγούν στις ακριβείς αναλυτικές σχέσεις, η ορθότητα των οποίων ελέγχεται αριθμητικά. Ομοίως γίνεται και για τα ζυγώματα των πλαισίων, με την προσθήκη όμως αριθμητικής διερεύνησης σε περιπτώσεις όπου γεωμετρία τους δεν επιτρέπει τη διατύπωση εύχρηστων αναλυτικών σχέσεων. Ακολουθούν παραμετρικές αναλύσεις για μεγάλο εύρος τιμών που αφορούν την κλίση του ζυγώματος, τις δυσκαμψίες των μελών και τον λόγο του ύψους του υποστυλώματος προς το άνοιγμα του πλαισίου. Έτσι, προκύπτουν τα αντίστοιχα διαγράμματα μέσω των οποίων υπολογίζεται το ισοδύναμο μήκος λυγισμού μελών πλαισίων με αμφικλινή ζυγώματα, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά τον σχεδιασμό τους, τουλάχιστον σε στάδιο προμελέτης. Μάλιστα, προτείνεται και ένας τρόπος χρήσης των υπάρχουσών διατάξεων του Ευρωκώδικα 3 (διαγράμματα Wood), ο οποίος αναφέρεται σε πλαίσια με οριζόντια ζυγώματα μόνο, ώστε τελικά να καλύπτει και την περίπτωση των αμφικλινών ζυγωμάτων. Τέλος, γίνεται η αξιολόγηση της σημασίας της μη γραμμικότητας της γεωμετρίας και του υλικού σε ρηχές αμφικλινείς στέγες.







NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

DIPLOMA THESIS  
EMK ΔΕ 2017 30

## **ANALYTICAL AND NUMERICAL INVESTIGATION OF BUCKLING OF MEMBERS IN DOUBLE-PITCHED PLANE STEEL FRAMES**

**Maria J. Katsidoniotaki**

Supervisor: Professor Charis J. Gantes  
Co-supervisor: Maria A. Livanou, PhD Candidate  
October 2017

### **ABSTRACT**

The motivation of this paper comes from the literature gap in the Civil Engineer field regarding the calculation of buckling length of members in double-pitched plane steel frames and hence, their design against flexural buckling. Therefore, the exact analytical relationships describing the linear buckling phenomenon are presented in order to calculate the buckling length of members in double-pitched plane steel frames, with pinned or fixed support at their base.

Concerning the columns of these frames, the boundary conditions that lead to the exact analytical relationships are formulated and their accuracy is numerically investigated. The same methodology is followed for frame weights, but additional numerical analyses are performed in cases where their geometry does not lead to flexible analytical relationships. Subsequently, parametric analyses are performed for a wide range of values regarding the gradient, the stiffness of the members and the ratio of column's height to frame's span. Thus, the corresponding charts calculating the equivalent buckling length of members in double-pitched plane steel frames can be used for their design, at least at a preliminary stage. Additionally, a way of using the existing Eurocode 3 charts (Wood charts) which refers to frames with horizontal weights only, is proposed so that it eventually covers the case of double-pitched ones. Finally, the significance of geometric and material non-linearity in shallow amphiline roofs is assessed.



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	<b>1</b>
1.1	ΜΟΝΩΡΟΦΑ ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΚΤΙΡΙΑ .....	1
1.2	ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΠΛΑΙΣΙΑ .....	4
1.1	ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ .....	5
<b>2</b>	<b>ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΕΝΑΝΤΙ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ</b> .....	<b>7</b>
2.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΛΥΓΙΣΜΟ .....	7
2.2	ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΕΥΡΩΚΩΔΙΚΑ 3 .....	8
<b>3</b>	<b>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ</b> .....	<b>11</b>
3.1	ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΑΣΤΑΘΕΙΑΣ .....	11
3.2	ΕΥΡΕΣΗ ΜΗΚΟΥΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ .....	12
3.2.1	ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ .....	13
3.2.2	ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ & ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ .....	14
3.2.3	ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ .....	15
3.2.4	ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ & ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ .....	16
3.3	ΕΥΡΕΣΗ ΜΗΚΟΥΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ .....	17
3.3.1	ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ .....	18
3.3.2	ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ .....	19
3.3.3	ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ .....	20
3.3.4	ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ .....	21
3.4	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ .....	22
<b>4</b>	<b>ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ</b> .....	<b>23</b>
4.1	ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ADINA [10] .....	23
4.2	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ .....	25
<b>5</b>	<b>ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ</b> .....	<b>27</b>
5.1	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΛΕΓΧΟΥ .....	27

5.2	ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ .....	27
5.3	ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΖΥΓΩΜΑΤΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ .....	36
5.4	ΣΥΝΙΣΤΩΜΕΝΗ ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ WOOD ΓΙΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ .	45
<b>6</b>	<b>ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΛΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ .....</b>	<b>49</b>
6.1	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ .....	49
6.2	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΑΡΧΙΚΩΝ ΑΤΕΛΕΙΩΝ ΣΤΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ .....	52
6.3	ΣΗΜΑΣΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΟΥ ΣΤΙΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΔΙΡΡΙΧΤΕΣ ΣΤΕΓΕΣ ΜΙΚΡΗΣ ΚΛΙΣΕΩΣ .....	53
6.3.1	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ADINA [10] .....	54
6.3.2	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΕ ΔΙΡΡΙΧΤΕΣ ΣΤΕΓΕΣ.....	57
<b>7</b>	<b>ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ .....</b>	<b>61</b>
7.1	ΦΟΡΤΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ .....	61
7.2	ΔΙΑΣΤΑΣΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΤΩΝ ΜΕΛΩΝ.....	63
7.2.1	Έλεγχος σε καμπτικό λυγισμό.....	63
7.2.2	Έλεγχος σε στρεπτοκαμπικό λυγισμό .....	64
7.3	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ .....	66
<b>8</b>	<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>69</b>
8.1	ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ .....	69
8.2	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ .....	70
<b>9</b>	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>71</b>

# 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 ΜΟΝΩΡΟΦΑ ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΚΤΙΡΙΑ

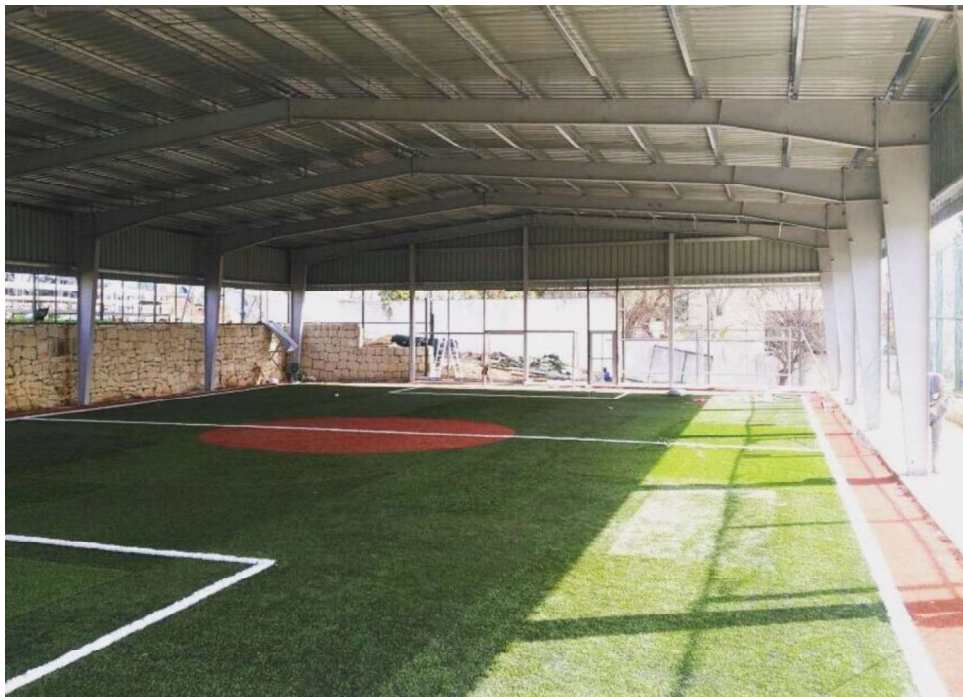
Τα μονώροφα κτίρια μεγάλων ανοιγμάτων, όπως είναι τα βιομηχανικά και αποθηκευτικά κτίρια ή οι παραγωγικές, εμπορικές και αθλητικές εγκαταστάσεις, κατασκευάζονται συνήθως από χάλυβα λόγω της προνομιακής συμπεριφοράς τους σε μεγάλα ανοίγματα. Τα κατασκευαστικά πλεονεκτήματα των μονώροφων μεταλλικών κτιρίων από χάλυβα είναι αρκετά. Η θεμελίωσή τους διευκολύνεται λόγω του μικρού ιδίου βάρους τους σε σχέση με τα αντίστοιχα από σκυρόδεμα. Η κατασκευή τους είναι σαφώς ταχύτερη λόγω της βιομηχανικής διεργασίας και δυνατότητας προκατασκευής τους και της τυποποιημένης πλέον συναρμολόγησής τους. Ταυτόχρονα, τα μονώροφα χαλύβδινα κτίρια έχουν και πολλά λειτουργικά πλεονεκτήματα μιας και συμπεριφέρονται ικανοποιητικά στον σεισμό λόγω της ολκιμότητας του χάλυβα καθώς επίσης, επισκευάζονται και ενισχύονται εύκολα. Ωστόσο, απαιτείται προσεκτική μελέτη εφαρμογής και διαμόρφωσης της κατασκευής τους καθώς επίσης και ικανοποίηση των προδιαγραφών που αφορούν τις συγκολλήσεις, τις κοχλιώσεις, τις αρχικές ατέλειες και στην επιφανειακή προστασία.



Εικόνα 1-1: Τυπικό βιομηχανικό κτίριο



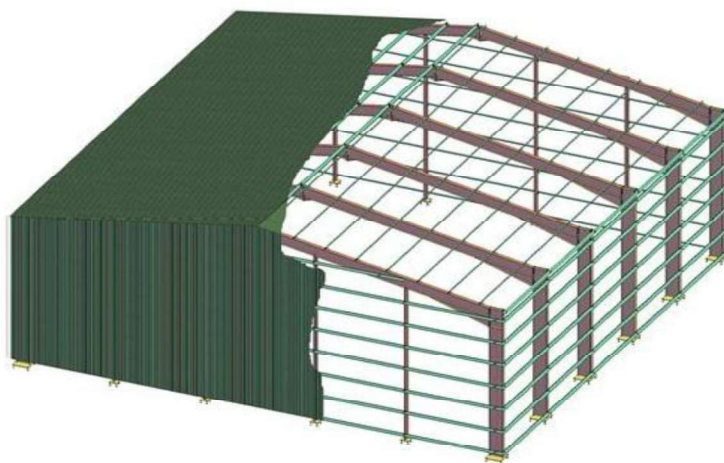
Εικόνα 1-2: Εγκατάσταση αποθηκευτικού χώρου



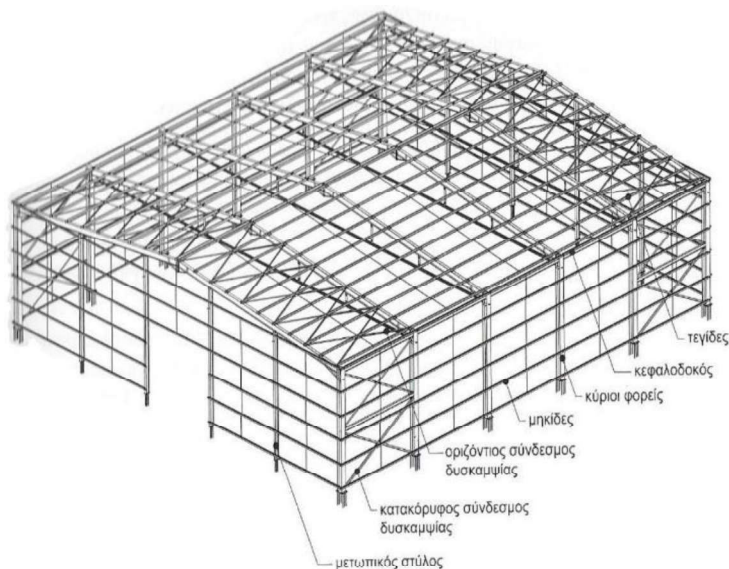
Εικόνα 1-3: Αθλητική εγκατάσταση

Τα μονώροφα κτίρια, μπορεί να μην απαιτείται να παραλάβουν σημαντικά ωφέλιμα φορτία και να κατασκευάζονται από ελαφρά υλικά, ωστόσο καλούνται να παραλάβουν μαζί με το ίδιο βάρος τους και κάποια στοιχειώδη πρόσθετα μόνιμα και κινητά όπως φορτία χιονιού (κατακόρυφα φορτία). Επίσης καλούνται να αναλάβουν φορτία σεισμού και ανέμου (οριζόντια φορτία). Τέλος, μπορεί να αναλαμβάνουν σημαντικά σημειακά φορτία (π.χ. λειτουργία γερανογεφυρών) φορτίσεις λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών καθώς και δυναμικές φορτίσεις (π.χ. λειτουργία μηχανημάτων βιομηχανικών κτιρίων ή έντονη ανεμοπίεση). Ένα τυπικό μεταλλικό μονώροφο κτίριο αποτελείται από τα εξής στοιχεία:





Εικόνα 1-4: Άποψη εσωτερικών στοιχείων τυπικού μεταλλικού μονώροφου κτιρίου



Εικόνα 1-5: Στοιχεία μεταλλικού φέροντος οργανισμού τυπικού μονώροφου κτιρίου

Οι **κύριοι φορείς**, που συνήθως είναι πλαίσια, αναλαμβάνουν τα κατακόρυφα και οριζόντια φορτία εντός του επιπέδου τους. Είναι απαραίτητη η δυνατότητα μεταφοράς ροπής από κάποιους κόμβους τους.

Οι **τεγίδες** είναι οι εγκάρσιες δοκοί μεταξύ των κύριων φορέων. Μεταφέρουν σε αυτούς τα φορτία ίδιου βάρους της στέγης, του χιονιού, της ανεμοπίεσης, τα ωφέλιμα φορτία και πιθανόν φορτία από την κρέμαση μηχανολογικού εξοπλισμού.

Οι **οριζόντιοι σύνδεσμοι δυσκαμψίας** είναι συνήθως δικτυωτοί φορείς, επί του επιπέδου των ζυγωμάτων διαδοχικών πλαισίων, και παραλαμβάνουν κυρίως τις οριζόντιες δυνάμεις, οι οποίες δρουν κάθετα προς το επίπεδο των πλαισίων. Τα ζυγώματα, οι τεγίδες και οι διαγώνιοι ράβδοι συγκροτούν τα στοιχεία των οριζόντιων συνδέσμων δυσκαμψίας οι οποίοι μεταφέρουν οριζόντιες δυνάμεις προς τους κατακόρυφους συνδέσμους δυσκαμψίας.

Η **κεφαλοδοκός** είναι το οριζόντιο γραμμικό στοιχείο που συνδέει τις κεφαλές των υποστυλωμάτων και βρίσκεται περιμετρικά του κτιρίου, σε διεύθυνση κάθετη προς τα επίπεδα των κύριων φορέων, παραλαμβάνει τα οριζόντια φορτία, όπως ο σεισμός, από τους οριζόντιους συνδέσμους δυσκαμψίας και τα ισοκατανέμει στους κατακόρυφους συνδέσμους δυσκαμψίας. Κατ' επέκταση τα φορτία καταλήγουν ομοιόμορφα στα θεμέλια για την όσο το δυνατόν καλύτερη απορρόφησή τους.

Οι **κατακόρυφοι σύνδεσμοι δυσκαμψίας** είναι συνήθως δικτυωτοί φορείς, επί του επιπέδου δυο διαδοχικών υποστυλωμάτων. Η κεφαλοδοκός, τα υποστυλώματα και οι διαγώνιοι ράβδοι συγκροτούν τα στοιχεία των κατακόρυφων συνδέσμων δυσκαμψίας οι οποίοι μεταφέρουν τις οριζόντιες δυνάμεις που έχουν αναλάβει από τους οριζόντιους συνδέσμους, προς τα θεμέλια.

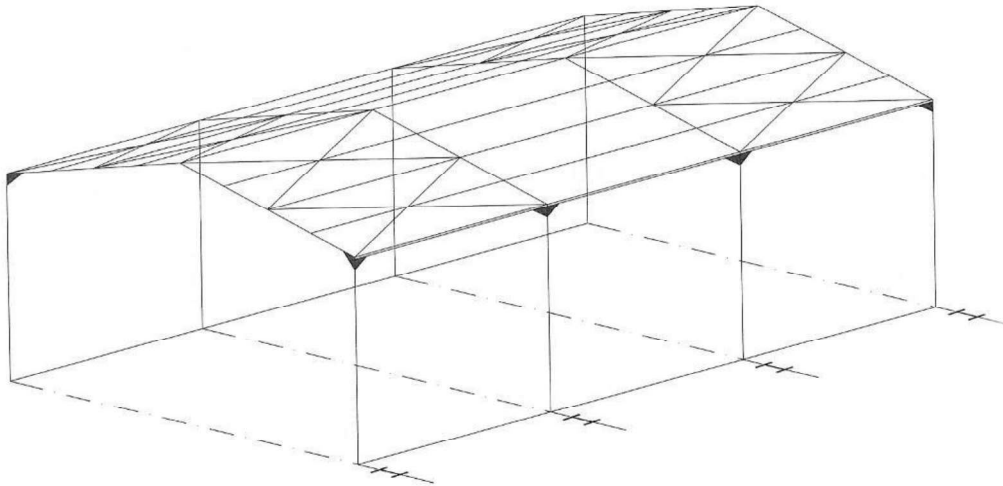
Τα **μετωπικά υποστυλώματα** ανήκουν στα ακραία πλαίσια, εδράζονται επί των θεμελίων και αναλαμβάνουν κατά κύριο λόγο την ανεμοπίεση.

Οι **μηκίδες** είναι οριζόντιες δοκοί σε όλες τις όψεις του κτιρίου και τοποθετούνται μεταξύ των υποστυλωμάτων κατανεμημένες σε στάθμες. Παραλαμβάνουν μέσω των φύλλων πλευρικής επένδυσης που στηρίζουν, τα φορτία της ανεμοπίεσης.

Τα **φύλλα** επενδύουν το κτίριο και μεταφέρουν σε φέροντα στοιχεία τα φορτία της ανεμοπίεσης.

## 1.2 ΜΕΤΑΛΛΙΚΑ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΠΛΑΙΣΙΑ

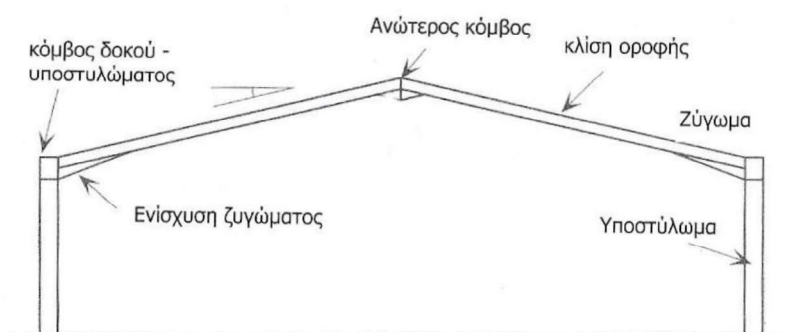
Από τα παραπάνω στοιχεία, τα οποία συναρτούν ένα μεταλλικό κτίριο, στην παρούσα εργασία εξετάζονται τα πλαίσια, και ειδικά αυτά των οποίων τα ζυγώματα είναι αμφικλινή. Καθοριστικό στοιχείο της συμπεριφοράς των πλαισίων είναι η διαμόρφωση των κόμβων δοκών υποστυλωμάτων. Αν οι κόμβοι έχουν την δυνατότητα παραλαβής ροπών τότε τα πλαίσια είναι πλευρικός ευσταθή και ονομάζονται μεταθετά πλαίσια. Αν οι συνδέσεις είναι οιονεί αρθρώσεις και δεν παραλαμβάνουν ροπές, όπως είναι οι λειτουργία των πλαισίων που σχηματίζονται στην εγκάρσια διεύθυνση ενός τυπικού μονώροφου κτιρίου, τοποθετούνται οι κατακόρυφοι σύνδεσμοι που εξηγήθηκαν. Τα τελευταία ονομάζονται αμετάθετα πλαίσια. Τα αμφικλινή πλαίσια, στα οποία επικεντρώνεται η παρούσα εργασία, λειτουργούν σαν μεταθετά αφού κατασκευαστικά δεν συνηθίζεται να περιορίζονται από κάποιο στοιχείο δυσκαμψίας στην διεύθυνση τους.



Εικόνα 1-6: Πλαισιακή λειτουργία κατά τις δυο διευθύνσεις

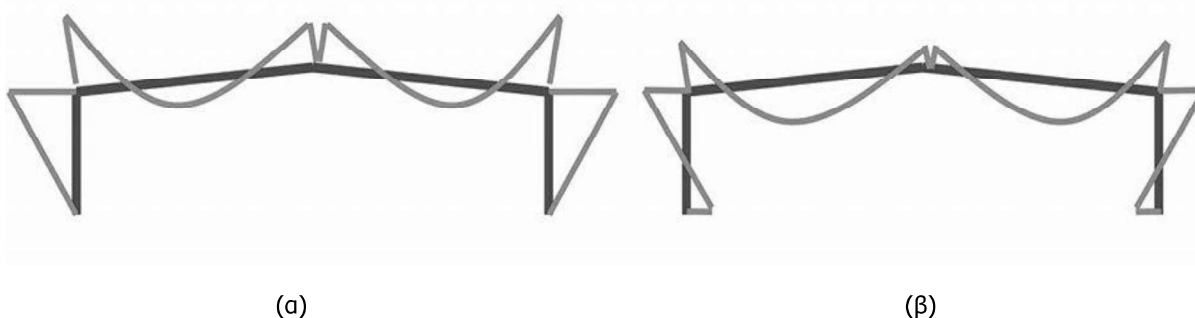
Ένα τυπικό δίστηλο αμφικλινές πλαίσιο, που αποτελεί συνήθη φέροντα οργανισμό των μεταλλικών κτιρίων, έχει συνήθως κλίση από 6-20% αναλόγως του ανοίγματος, του ύψους του και των αναγκών που εξυπηρετεί (πχ. απορροή όμβριων υδάτων ή αρχιτεκτονικές απαιτήσεις). Η ένταση που αναπτύσσεται στα μεταλλικά πλαίσια λόγω των κατακόρυφων φορτίσεων που δέχονται, όπως εξηγήθηκε αναλυτικά παραπάνω, είναι κατά κύριο λόγο η θλιπτική και η καμπτική ένταση και σε συνδυασμό με τα μεγάλα ανοίγματα και ύψη που καλύπτουν, είναι επιρρεπή σε φαινόμενα ελαστικής αστάθειας, εκτενής αναφορά στα οποία θα γίνει παρακάτω.





Εικόνα 1-7: Τυπικό δίστυλο αμφικλινές πλαίσιο

Τα μεταλλικά πλαίσια διαμορφώνονται ως αμφιαρθρωτά ή αμφίπακτα. Τα αμφίπακτα πλαίσια έχουν συνθετότερη σύνδεση επί θεμελίου αλλά ευνοϊκότερη κατανομή καμπτικών ροπών και μειωμένη παραμορφωσιμότητα, στοιχείο που ευνοεί την ικανοποίηση των ελέγχων για οριακή κατάσταση λειτουργικότητας. Τα αμφιαρθρωτά επιλέγονται σε περιπτώσεις κακής ποιότητας εδαφών όπου η ενδοσημότητα του εδάφους δεν εξασφαλίζει συνθήκες πλήρους πάκτωσης. Ωστόσο, οι κόμβοι μεταξύ υποστυλωμάτων - ζυγμάτων μπορεί να έχουν συνθετότερη σύνδεση καθώς μεταφέρουν μεγαλύτερες καμπτικές ροπές. Συχνά τοποθετείται ελκυστήρας στη στάθμη συμβολής υποστυλωμάτων ζυγμάτων για μείωση των καμπτικών ροπών λόγω των κατακόρυφων φορτίων και των πλευρικών ωθήσεων λόγω της θεμελίωσης. Ο ελκυστήρας, λειτουργεί για να παραλαμβάνει εφελκυσμό, προσθέτει ωστόσο θλιπτική δύναμη στο ζύγωμα.



Εικόνα 1-8: Ροπές κάμψεως (α) αμφιαρθρωτών πλαισίων (β) αμφίπακτων πλαισίων

Η ανάλυση και η διαστασιολόγηση των μεταλλικών πλαισίων με οριζόντια ζυγώματα γίνεται κατά κύριο λόγο ελαστική με τη θεωρία 1<sup>ης</sup> τάξεως και ο έλεγχος του λυγισμού (ελαστική αστάθεια) σύμφωνα με τις διατάξεις του Ευρωκώδικα 3, εκτενής αναφορά στον οποίο γίνεται παρακάτω. Εάν το μέγεθος των κατακόρυφων φορτίων είναι μεγάλο και τα πλαίσια εύκαμπτα γίνεται ελαστική ανάλυση με θεωρία 2<sup>ης</sup> τάξεως, η οποία περιέχει αυτομάτως και ελέγχους ευστάθειας. Η ποιότητα του χάλυβα που χρησιμοποιείται θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να έχει επαρκή ολκιμότητα και να προσφέρει την απαραίτητη δυνατότητα στροφής των κόμβων και δημιουργία μηχανισμού αστοχίας. Μάλιστα για κατηγορίες διατομής 1 και 2 είναι δυνατή και η πλαστική ανάλυση του φορέα.

## 1.1 ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Με αφορμή των κενών που υπάρχουν στη βιβλιογραφία για τον σχεδιασμό πλαισίων με αμφικλινή ζυγώματα, στη συγκεκριμένη εργασία διατυπώνονται οι ακριβείς αναλυτικές σχέσεις που περιγράφουν τον γραμμικό λυγισμό και κατ' επέκταση, υπολογίζουν τα μήκη λυγισμού των μελών πλαισίων με αμφικλινή ζυγώματα, με στήριξη άρθρωσης ή πάκτωσης στην βάση τους.

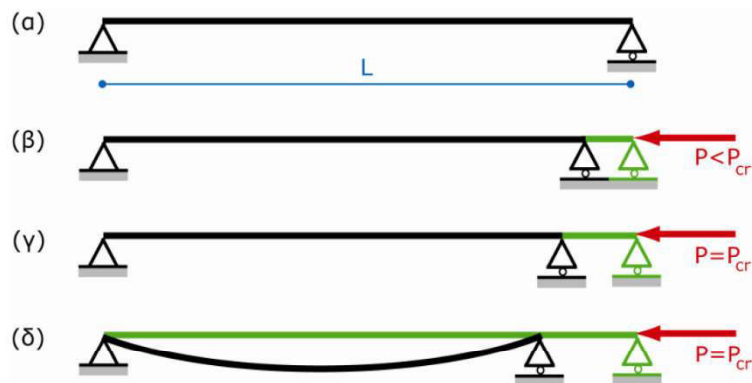
Για τα υποστυλώματα, οι αναλυτικές σχέσεις προκύπτουν από την επίλυση συστημάτων εξισώσεων που περιγράφουν τις συνοριακές συνθήκες των πλαισίων, με τη βοήθεια του προγράμματος αριθμητικής ανάλυσης MATLAB [9]. Στη συνέχεια, αυτές επιλύονται για διάφορες τιμές των παραμέτρων ελέγχου των πλαισίων, οι οποίες επιλέγεται να είναι η κλίση του ζυγώματος, οι δυσκαμψίες των μελών και ο λόγος του ύψους του υποστυλώματος προς το άνοιγμα του πλαισίου. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά που βγαίνουν αριθμητικά, χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA [10], ώστε να επιβεβαιωθεί η ορθότητά τους. Γίνεται, στη συνέχεια, επίλυση των αναλυτικών σχέσεων για μεγάλο εύρος των παραμέτρων ελέγχου και τα αποτελέσματα αξιολογούνται αναλόγως. Έτσι, αναλόγως του τρόπου φόρτισης και τις δυσκαμψίες των μελών, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για τον υπολογισμό ισοδύναμου μήκους λυγισμού των υποστυλωμάτων. Μάλιστα, προτείνεται ένας τρόπος χρήσης των υπάρχουσών διατάξεων του Ευρωκώδικα, ο οποίος αναφέρεται σε πλαίσια με οριζόντια ζυγώματα μόνο, ώστε τελικά να καλύπτει και την περίπτωση των αμφικλινών ζυγωμάτων.

Για τα ζυγώματα, οι αναλυτικές σχέσεις που διατυπώνονται, δεν καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις κλίσεως και φόρτισης. Επειδή η γεωμετρία τους δεν επιτρέπει την διατύπωση απλών και εύχρηστων αναλυτικών σχέσεων για την εύρεση του ισοδύναμου μήκους λυγισμού τους, γίνεται συμπληρωματική αριθμητική διερεύνηση όπου είναι απαραίτητο, μέσω του προγράμματος ADINA [10]. Ομοίως, παρατίθενται τα αντίστοιχα διαγράμματα που προέκυψαν από τη διερεύνηση. Σε συνέχεια της αριθμητικής επίλυσής τους, γίνεται η αξιολόγηση της μη γραμμικότητας γεωμετρίας και υλικού σε αμφικλινείς στέγες, πάλι με τη χρήση του προγράμματος ADINA [10]

## 2 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΕΝΑΝΤΙ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

### 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΛΥΓΙΣΜΟ

Ο καμπτικός λυγισμός είναι μια από τις περιπτώσεις Ελαστικής Αστάθειας και μελετήθηκε αρχικά από τον Euler. Οι αξονικά θλιβόμενες ευθύγραμμες λυγηρές ράβδοι είναι επιρρεπείς στον καμπτικό λυγισμό, λόγω του οποίου χάνουν την αρχική μορφή τους και δημιουργούν βέλος κάμψης. Οι δυσανάλογα μεγαλύτερες ροπές κάμψης που συμβαίνουν στον παραμορφωμένο πλέον φορέα επικφέρουν τελικά την αστοχία του. Η μέγιστη τιμή του φορτίου στην οποία η ράβδος διατηρεί την αρχική ευθύγραμμη μορφή της αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού ή φορτίο Euler (Εξ. (2-1)), όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού,  $I$  η ροπή αδρανείας της διατομής και  $L_{cr}$  το μήκος λυγισμού του μέλους.



Εικόνα 2-1: Αμφιέριστη ράβδος υπό αξονική κάμψη

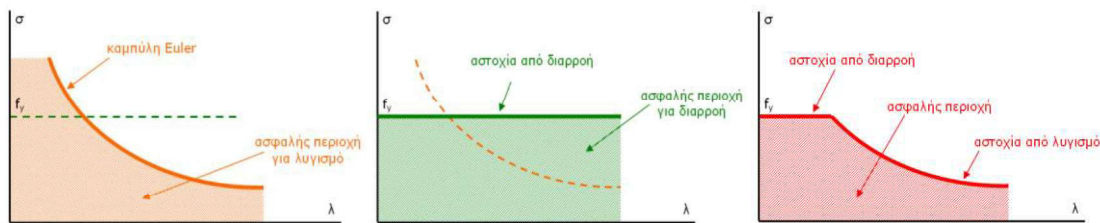
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2} \quad (2-1)$$

Ομοίως, υπάρχουν και άλλες μορφές λυγισμού όπως ο πλευρικός, ο στρεπτικός και ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός που εμφανίζονται σε ράβδους υπό κάμψη, στρέψη ή ταυτόχρονη θλίψη και κάμψη, αντίστοιχα. Η λυγηρότητα  $\lambda$  Εξ. (2-2) είναι το μέγεθος που εκφράζει πόσο επιρρεπές είναι ένα μέλος στον λυγισμό. Είναι πηλίκο του μήκους λυγισμού  $L_{cr}$  και της ακτίνας αδρανείας  $i$  όπου  $L_{cr} = \beta \cdot L$  και  $i = \sqrt{I/A}$ . Η ακτίνα αδρανείας  $i$  είναι χαρακτηριστικό της διατομής του μέλους ενώ το μήκος λυγισμού εξαρτάται από τις

συνοριακές συνθήκες του μέλους και εκφράζει την απόσταση δύο διαδοχικών σημείων καμπής του καμπυλωμένου φορέα μετά το λυγισμό (ιδιομορφή).

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} \quad (2-2)$$

Τα επίπεδα ή χωρικά μεταλλικά πλαίσια, τα οποία αποτελούν συνηθισμένο στατικό σύστημα μεταλλικών κτιρίων όπως αναφέρθηκε, αναπτύσσουν κατά κύριο λόγο θλιπτική και καμπτική ένταση και σε συνδυασμό με τα μεγάλα ανοίγματα και ύψη που καλύπτουν, είναι επιρρεπή στα φαινόμενα του λυγισμού. Επειδή ο λυγισμός στα λυγηρά μέλη λαμβάνει χώρα πριν την διαρροή του υλικού τους, έχει σαν αποτέλεσμα η αντοχή των μελών τους να απομειώνεται, γι' αυτό και είναι σημαντικό να ληφθεί υπόψιν κατά τον σχεδιασμό τους.



Εικόνα 2-2: Αλληλεπίδραση λυγισμού ράβδου και διαρροής υλικού

Ωστόσο, η δυσκολία να ληφθεί υπόψιν ο λυγισμός έγκειται στον προσδιορισμό των συνοριακών συνθηκών κάθε περίπτωσης προκειμένου να υπολογιστεί το μήκος λυγισμού  $L_{cr}$ . Εκτός από ορισμένες συνθήκες περιπτώσεις, στις οποίες το μήκος λυγισμού είναι πλέον γνωστό, στις υπόλοιπες περιπτώσεις χρειάζεται εκ νέου αναλυτική λύση με θεωρία 2<sup>ας</sup> τάξεως. Αυτή η διαδικασία συχνά παραλείπεται και χρησιμοποιούνται ανεπίσημα εμπειρικοί συντελεστές. Τα πλαίσια με αμφικλινή ζυγώματα αποτελούν τέτοιες ειδικές περιπτώσεις καθώς το μήκος λυγισμού των υποστυλωμάτων υπολογίζεται στις διατάξεις του Ευρωκώδικα 3 από διαγράμματα που αφορούν μόνο τις περιπτώσεις όπου το ζύγωμα είναι οριζόντιο ενώ για το ζύγωμα δεν υπάρχει κάποια αναφορά. Παρακάτω ακολουθεί αναλυτική παρουσίαση των διατάξεων περί μήκους λυγισμού του Ευρωκώδικα 3.

## 2.2 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΕΥΡΩΚΩΔΙΚΑ 3

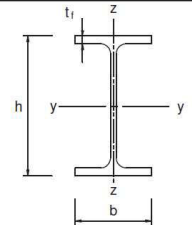
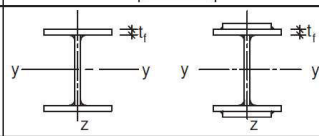
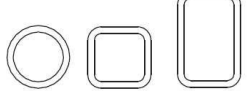
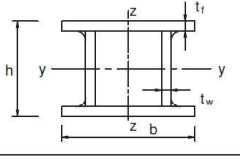
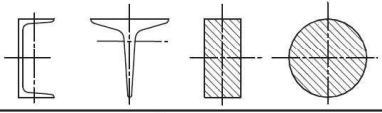
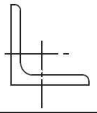
Ο σχεδιασμός των μεταλλικών πλαισίων, γίνεται με τη χρήση των διατάξεων που προτείνει ο Ευρωκώδικας 3 [11], ο οποίος λαμβάνει υπόψιν του τα φαινόμενα ελαστικής αστάθειας. Συγκεκριμένα, ο Ευρωκώδικας 3 προκειμένου να λάβει υπόψιν τον καμπτικό και τον στρεπτοκαμπτικό λυγισμό των θλιβόμενων και καμπτόμενων μελών, κάνει χρήση κατάλληλου μειωτικού συντελεστή στην αρχική αντοχή τους, ο οποίος μετατρέπει τον λυγισμό από πρόβλημα μέλους σε πρόβλημα αντοχής της διατομής. Για τον υπολογισμό του μειωτικού συντελεστή  $\chi$  κάθε μέλους, υπολογίζεται ένας συντελεστής ατελειών (Πίνακας 2-1), ο οποίος εξαρτάται από τη διατομή του μέλους. Υπολογίζεται ακόμη, η ανηγμένη λυγηρότητα  $\lambda^*$  Εξ. (2-3) και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, αναλόγως του υλικού και του μήκους λυγισμού του μέλους, όπου  $\lambda_1 = \pi \sqrt{E/f_y}$  και  $i = \sqrt{I/A}$ .

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \quad (2-3)$$

Πίνακας 2-1: Επιλογή συντελεστή ατελειών  $\alpha$  (EN1993-1-1 [11] Πίν. 6.1)

Καμπύλη λυγισμού	$a_0$	$a$	$b$	$c$	$d$
Συντελεστής ατελειών $\alpha$	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

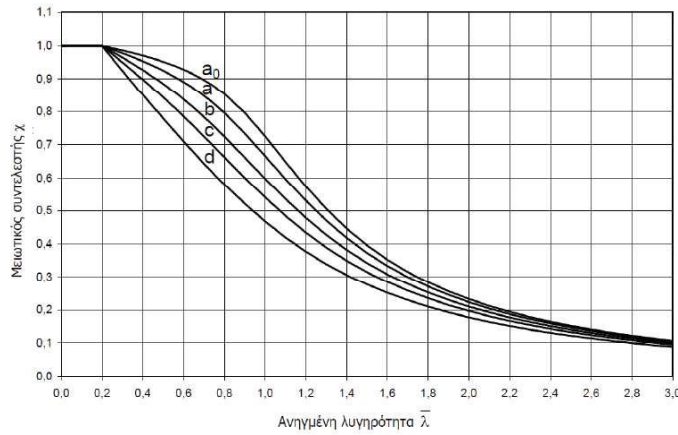
Πίνακας 2-2: Επιλογή καμπύλης λυγισμού (EN1993-1-1 [11] Πίν. 6.2)

Διατομή		Όρια	Λυγισμός περί τον άξονα	Καμπύλη λυγισμού	
				S235 S275 S355 S420	S460
Ελαττές διατομές		$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y - y z - z	a a <sub>0</sub>
			$t_f > 40 \text{ mm}$ $t_f \leq 100 \text{ mm}$	y - y z - z	b c
		$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	y - y z - z	b c
			$t_f > 100 \text{ mm}$	y - y z - z	d c
Συγκολλητές I-διατομές		$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y - y z - z	b c	
		$t_f > 40 \text{ mm}$	y - y z - z	c d	
Κοίλες Διατομές		Εν θερμώ έλαση	Κάθε	a	a <sub>0</sub>
		Ψυχρή έλαση	Κάθε	c	c
Συγκολλητές κιβωτοειδείς διατομές		Γενικά (εκτός των κατωτέρω)	Κάθε	b	b
		Μεγάλα πάχη ραφής: $a > 0,5 \cdot t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	Κάθε	c	c
U-, T- και συμπαγείς διατομές			Κάθε	c	c
L-διατομές			Κάθε	b	b

Για τον υπολογισμό του μήκους λυγισμού πρέπει να είναι γνωστές οι συνθήκες στήριξης. Εκτός από τις συνήθεις περιπτώσεις, ο Ευρωκώδικας 3, σε παλαιότερη έκδοσή του (ENV [12]), προτείνει και κατάλληλα διαγράμματα για μεμονωμένα υποστυλώματα που ανήκουν σε πλαίσια, ανάλογα με την αμεταθετότητα τους και τις στροφικές δεσμεύσεις που δέχονται. Για τον υπολογισμό του συντελεστή απομείωσης της αντοχής των μελών έναντι καμπικού λυγισμού, όπως αναφέρθηκε συνοπτικά και παραπάνω, ο Ευρωκώδικας 3 προτείνει την παρακάτω διαδικασία. Ανάλογα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής του, το μέλος κατατάσσεται σε μια από τις καμπύλες λυγισμού (Πίνακας 2-2) ώστε να ληφθούν υπόψη οι αρχικές ατέλειες. Σε συνδυασμό με την ανηγμένη λυγηρότητα  $\lambda^*$ , για τον υπολογισμό της οποίας απαιτείται το μήκος λυγισμού του μέλους  $L_{cr}$ , προκύπτει τελικά ο μειωτικός συντελεστής  $\chi$ , βάσει του οποίου υπολογίζεται η αντοχή του μέλους σε θλίψη (Σχήμα 2-1). Ο μειωτικός συντελεστής υπολογίζεται και από την σχέση Perry – Robertson Εξ. (2-4):

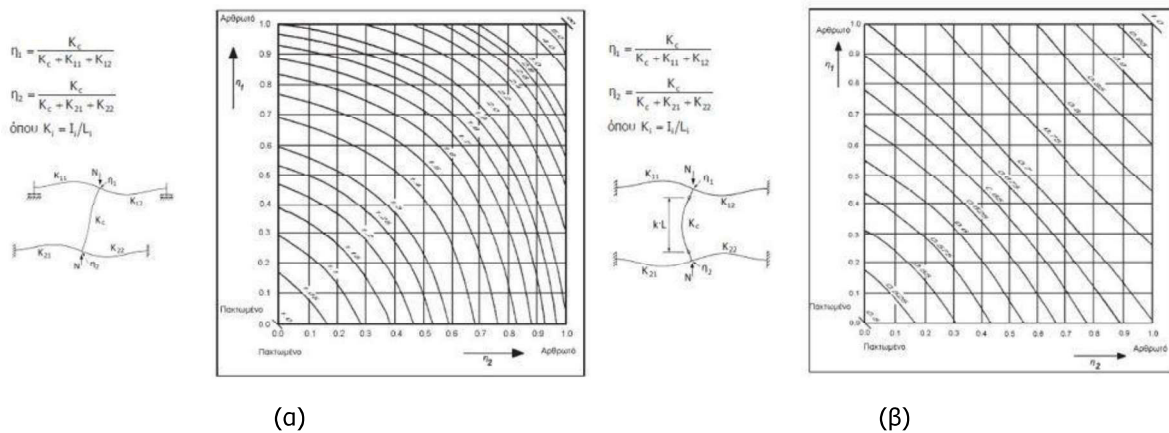
$$\chi = \frac{1}{\Phi^2 + \sqrt{\Phi^2 - \lambda^{*2}}} \quad (2-4)$$

$$\text{όπου } \Phi = 0.5[1 + a(\lambda^* - 0,2) + \lambda^{*2}]$$



Σχήμα 2-1: Καμπύλες λυγισμού (EN 1993-1-1 [11] Σχ. 6.4)

Για να υπολογιστούν όλα τα παραπάνω, πρέπει να είναι γνωστό το μήκος λυγισμού  $L_{cr}$  το οποίο αντιστοιχεί σε ένα ποσοστό  $\beta$  του συνολικού μήκους του μέλους. Στις περιπτώσεις σαφών συνοριακών συνθηκών, όπως είναι η άρθρωση, η πάκτωση, η κύλιση ή το ελεύθερο άκρο, ο προσδιορισμός του συντελεστή  $\beta$  είναι γνωστός. Στην περίπτωση των πλαισίων όμως, οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι σαφείς, και υπολογίζονται βάσει των στροφικών και μετακινησιακών δεσμεύσεων που επιβάλλουν τα γειτονικά μέλη στο μέλος υπό εξέταση. Στο Σχήμα 2-2 φαίνεται ο τρόπος υπολογισμού του μήκους λυγισμού μεμονωμένων υποστυλωμάτων ανάλογα με τη μεταθετότητα ή μη των άκρων τους, και τις δυσκαμψίες των ζυγωμάτων τους.



Σχήμα 2-2: (Διαγράμματα Wood) Λόγος μήκους λυγισμού προς γεωμετρικό μήκος για (α) μεταθετά άκρα (β) αμετάθετα άκρα (ENV1993-1-1/1992 [12] (α) Σχ. E.2.2 & E.2.3b (β) Σχ. E.2.1 & E.2.3a)

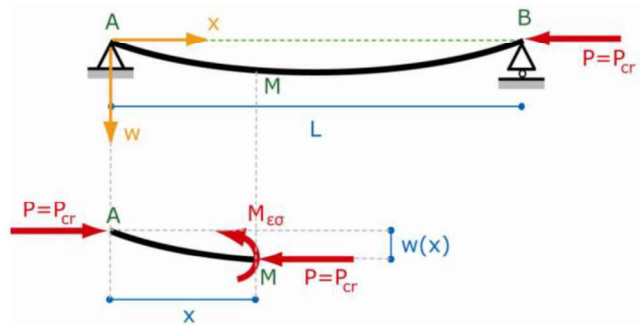
Σημειώνεται ότι τα παραπάνω διαγράμματα ισχύουν μόνο όταν η συμπεριφορά των υποστυλωμάτων είναι ελαστική, με σταθερή διατομή ενώ οι κόμβοι θεωρούνται άκαμπτοι. Ο δείκτης ράβδου ( $\rho = I\sqrt{N_{sd}/EI}$ ) θεωρείται σταθερός, η δέσμευση που προσφέρουν οι κόμβοι κατανέμεται στο άνω και κάτω άκρο των υποστυλωμάτων ανάλογα με τους λόγους  $I/L$  και όλα τα υποστυλώματα λυγίζουν ταυτόχρονα.

Ωστόσο, η κατάταξη των υποστυλωμάτων σε μεταθετά ή αμετάθετα δεν είναι πάντα σαφής ενώ το εύρος των περιπτώσεων πιο σύνθετων στροφικών δεσμεύσεων του μέλους δεν είναι επαρκές. Επιπλέον, ο Ευρωκώδικας 3 επικεντρώνεται στα πλαίσια με οριζόντια ζυγώματα, αμελώντας την συνήθη περίπτωση των αμφικλινών ζυγωμάτων που συναντάται στις μεταλλικές κατασκευές. Τέλος, δεν γίνεται πουθενά λόγος για το μήκος λυγισμού του ζυγώματος.

### 3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ

#### 3.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΑΣΤΑΘΕΙΑΣ

Η γραμμική ανάλυση λυγισμού (Στατική 2<sup>ος</sup> τάξεως) είναι απαραίτητη κατά τον σχεδιασμό σιδηρών κατασκευών για λόγους Ελαστικής Ευστάθειας. Η ανάλυση σε ευστάθεια ή λυγισμό ενός φορέα γίνεται με την διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας επί της παραμορφωμένης κατάστασής του. Για μια ράβδο με σταθερή διατομή, γραμμικά ελαστικό υλικό, υπό αξονικό φορτίο P και εγκάρσιο κατανεμημένο φορτίο q(x), η διαφορική εξίσωση λυγισμού, ανεξάρτητα από τον τρόπο στήριξης στα άκρα, σύμφωνα με τη Εξ. (3-1) είναι:



Εικόνα 3-1: Διάγραμμα ελευθέρου σώματος αμφιέριστης ράβδου μετά τον λυγισμό

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = q(x) \quad (3-1)$$

Η εξίσωση είναι μη ομογενής συνήθης διαφορική εξίσωση 4<sup>ης</sup> τάξης με σταθερούς συντελεστές. Για q(x) = 0 και k<sup>2</sup> = P/EI, η εξίσωση γράφεται σύμφωνα με την Εξ. (3-2):

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0 \quad (3-2)$$

Επομένως η λύση της ομογενούς εξίσωσης έχει τη μορφή της Εξ. (3-3):

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + \Gamma x + \Delta \quad (3-3)$$



όπου A, B, Γ και Δ οι σταθερές ολοκλήρωσης που προσδιορίζονται από τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στήριξης του μέλους και έτσι το  $w(x)$  αντιπροσωπεύει την παραμόρφωση του μέλους στη θέση  $x$ .

Στην παρούσα εργασία έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της ορίζουσας ευστάθειας. Οι συνοριακές συνθήκες που χρειάζονται για τον προσδιορισμό των άγνωστων σταθερών ολοκλήρωσης A, B, Γ, Δ, διατυπώνονται μέσω κατάλληλων εξισώσεων ισορροπίας μετακινήσεων, στροφών, ροπών και τεμνουσών δυνάμεων. Η ορίζουσα του συστήματος των εξισώσεων αυτών πρέπει να ισούται με μηδέν ώστε να έχουμε μη τετριμμένη λύση και μηδενίζεται ως προς  $k$  για άπειρο αριθμό θετικών ριζών. Η ύπαρξη μη μηδενικής λύσης της ορίζουσας ως προς  $k$  σημαίνει ότι είναι δυνατή η ισορροπία της ράβδου στην παραμορφωμένη κατάσταση. Η μικρότερη ρίζα αντιστοιχεί στο πρώτο κρίσιμο φορτίο λυγισμού της πρώτης ιδιομορφής του φορέα που ενδιαφέρει από πρακτική άποψη.

Αναφέρεται ότι για τα μέλη τα οποία δεν δέχονται θλιπτικό φορτίο, η παραμορφωμένη κατάσταση περιγράφεται από την εξής γραμμική εξίσωση Εξ. (3-4):

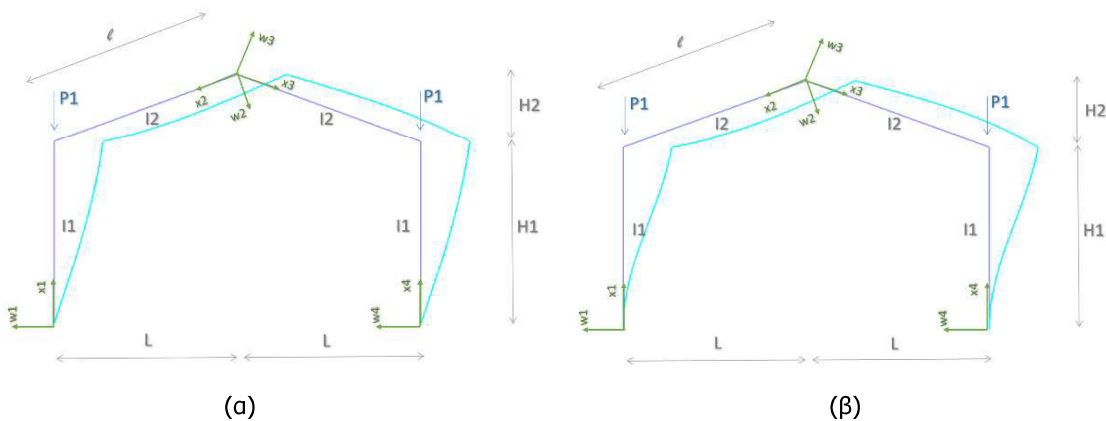
$$w(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (3-4)$$

### 3.2 ΕΥΡΕΣΗ ΜΗΚΟΥΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ

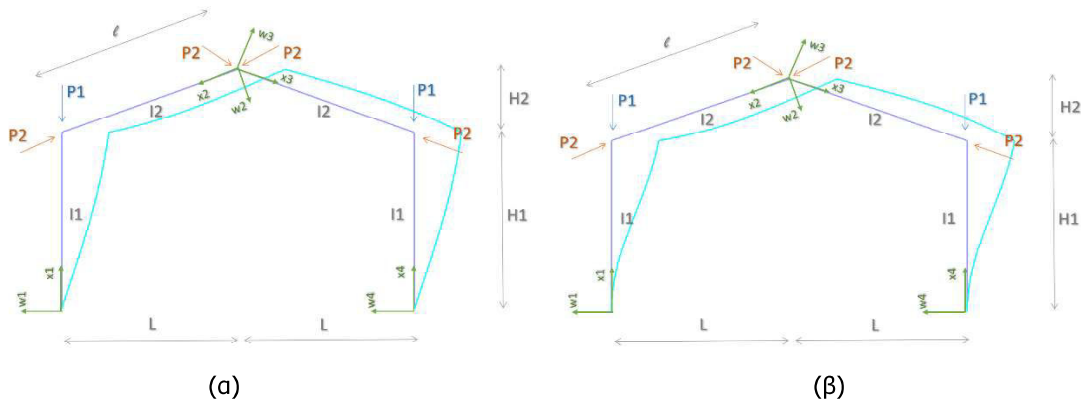
Παρακάτω παρατίθενται οι αναλυτικές εξισώσεις γραμμικού λυγισμού πλαισίων με αμφικλινή ζυγώματα για τις εξής περιπτώσεις:

- (1) Άρθρωση στη βάση και θλιπτικό φορτίο μόνο στα υποστυλώματα
- (2) Άρθρωση στη βάση και θλιπτικό φορτίο σε υποστυλώματα και ζυγώματα
- (3) Πάκτωση στη βάση και θλιπτικό φορτίο μόνο στα υποστυλώματα
- (4) Πάκτωση στη βάση και θλιπτικό φορτίο σε υποστυλώματα και ζυγώματα

#### ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ



Εικόνα 3-2: Πλαίσια με θλιπτικό φορτίο επί υποστυλωμάτων για (α) αρθρώσεις και (β) πακτώσεις στη βάση





Εικόνα 3-3: Πλαίσια με θλιπτικό φορτίο επί υποστυλωμάτων και ζυγωμάτων για (α) αρθρώσεις και (β) πακτώσεις στη βάση

Για τα θλιβόμενα μέλη  $i$  ισχύει η Εξ. (3-5), όπου  $k_i^2 = P_i / (EI_i)$ :

$$w_i(x_i) = A_i \sin(k_i x_i) + B_i \cos(k_i x_i) + \Gamma_i x_i + \Delta_i \quad (3-5)$$

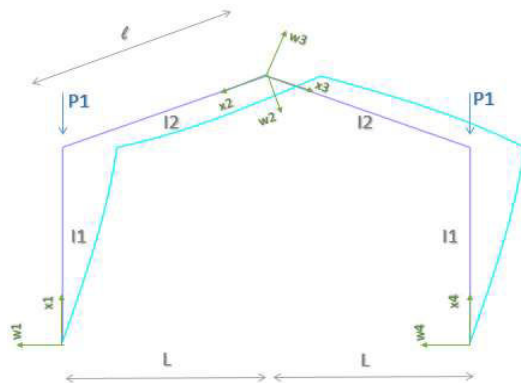
Για τα μέλη  $j$ , τα οποία δεν δέχονται θλιπτικό φορτίο, ισχύει η Εξ. (3-6):

$$w_j(x_j) = A_j x_j^3 + B_j x_j^2 + \Gamma_j x_j + \Delta_j \quad (3-6)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις με τις συνοριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος, προκύπτει για κάθε περίπτωση η εξίσωση λυγισμού του πλαισίου, η λύση της οποίας αποτελεί το φορτίο στο οποίο λυγίζει ο φορέας. Οι συνοριακές συνθήκες αποτελούνται από ισορροπίες μετακινήσεων, στρωφών, ροπών και τεμνουσών δυνάμεων στους κόμβους του πλαισίου.

Εκτελώντας μια σειρά παραμετρικών αναλύσεων στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA [10], απεδείχθη ότι στην περίπτωση φορτίου μόνο επί υποστυλωμάτων, κρίσιμη είναι πάντοτε η αντισυμμετρική ιδιομορφή λυγισμού με μετάθεση. Στην περίπτωση ταυτόχρονου φορτίου επί υποστυλωμάτων και ζυγωμάτων, κρίσιμη είναι είτε η συμμετρική είτε η αντισυμμετρική, ανάλογα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τους λόγους φόρτισης των πλαισίων. Για τις τιμές των παραμέτρων ωστόσο που εξετάσαμε, κρίσιμη έβγαινε πάντα η αντισυμμετρική.

### 3.2.1 ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ



$$k_1^2 = \frac{P_1}{EI_1}$$

$$W_1(x_1) = A_1 \sin(k_1 x_1) + B_1 \cos(k_1 x_1) + \Gamma_1 x_1 + \Delta_1$$

ομοίως και  $W_4(x_4)$

$$W_2(x_2) = A_2 x_2^3 + B_2 x_2^2 + \Gamma_2 x_2 + \Delta_2$$

ομοίως και  $W_3(x_3)$

Εικόνα 3-4

1.  $W_1''(0) = 0 \Rightarrow -A_1 k_1^2 \sin(k_1 0) - B_1 k_1^2 \cos(k_1 0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0$
2.  $W_1(0) = 0 \Rightarrow A_1 \sin(k_1 0) + B_1 \cos(k_1 0) + \Gamma_1 0 + \Delta_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$
3.  $W_4''(0) = 0 \Rightarrow -A_4 k_1^2 \sin(k_1 0) - B_4 k_1^2 \cos(k_1 0) = 0 \Rightarrow B_4 = 0$
4.  $W_4(0) = 0 \Rightarrow A_4 \sin(k_1 0) + B_4 \cos(k_1 0) + \Gamma_4 0 + \Delta_4 = 0 \Rightarrow \Delta_4 = 0$
5.  $W_2(0) = 0 \Rightarrow A_2 0^3 + B_2 0^2 + \Gamma_2 0 + \Delta_2 = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 0$
6.  $W_3(0) = 0 \Rightarrow A_3 0^3 + B_3 0^2 + \Gamma_3 0 + \Delta_3 = 0 \Rightarrow \Delta_3 = 0$
9.  $W_1'(H_1) = W_2'(l) \Rightarrow A_1 k_1 \cos(k_1 H_1) - A_2 3l^2 - B_2 2l - \Gamma_2 = 0$
10.  $W_4'(H_1) = W_3'(l) \Rightarrow A_4 k_1 \cos(k_1 H_1) - A_3 3l^2 - B_3 2l - \Gamma_3 = 0$
11.  $W_2'(0) = W_3'(0) \Rightarrow 3A_2 0^2 + 2B_2 0 + \Gamma_2 = 3A_3 0^2 + 2B_3 0 + \Gamma_3 \Rightarrow \Gamma_2 = \Gamma_3$
12.  $W_2(l) = -W_3(l) \Rightarrow A_2 l^2 + B_2 l + \Gamma_2 + A_3 l^2 + B_3 l + \Gamma_3 = 0$
13.  $M_1(H_1) + M_2(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1''(H_1) - EI_2 W_2''(l) = 0 \Rightarrow -A_1 I_1 k_1^2 \sin(k_1 H_1) + A_2 6I_2 l + B_2 2I_2 = 0$
14.  $M_4(H_1) + M_3(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_4''(H_1) - EI_2 W_3''(l) = 0 \Rightarrow -A_4 I_1 k_1^2 \sin(k_1 H_1) + A_3 6I_2 l + B_3 2I_2 = 0$

$$7. V_1(0) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1'''(0) - P_1 W_1'(0) = 0 \\ \Rightarrow -P_1 \Gamma_1 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = 0$$

$$8. V_4(0) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_4'''(0) - P_1 W_4'(0) = 0 \\ \Rightarrow -P_1 \Gamma_4 = 0 \Rightarrow \Gamma_4 = 0$$

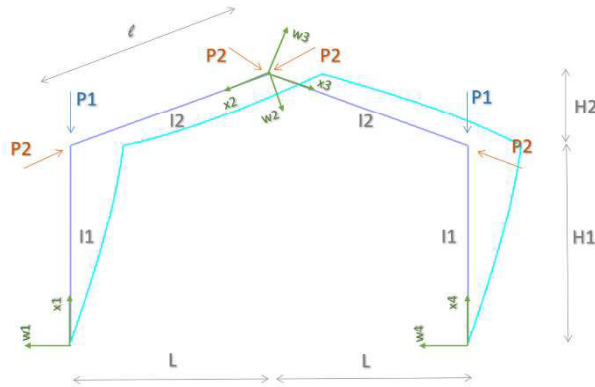
$$15. M_2(0) + M_3(0) = 0 \Rightarrow -EI_2 W_2''(0) - \\ EI_2 W_3''(0) = 0 \Rightarrow B_2 + B_3 = 0$$

$$16. W_1(H_1) = W_4(H_1) \Rightarrow A_1 \sin(k_1 H_1) - \\ A_4 \sin(k_1 H_1) = 0$$

η εξίσωση με τις μικρότερες ρίζες για μηδενισμό της οριζουσας προκύπτουν από την Εξ. (3-7):

$$f(k_1 \cdot H_1) = 3I_2^2 k_1^3 \cos(k_1 \cdot H_1) - I_1 I_2 k_1^2 l^4 \sin(k_1 \cdot H_1), \text{ ή} \\ f(x) = 3I_2 \cos x - I_1 x \frac{1}{H_1} \sin x, \text{ για } x = k_1 \cdot H_1 \quad (3-7)$$

### 3.2.2 ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ & ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ



$$k_1^2 = \frac{P_1}{EI_1} \quad \& \quad k_2^2 = \frac{P_2}{EI_2}$$

$$W_1(x_1) = A_1 \sin(k_1 x_1) + B_1 \cos(k_1 x_1) + \Gamma_1 x_1 + \Delta_1 \\ \text{ομοίως και } W_4(x_4)$$

$$W_2(x_2) = A_2 \sin(k_2 x_2) + B_2 \cos(k_2 x_2) + \Gamma_2 x_2 + \Delta_2 \\ \text{ομοίως και } W_3(x_3)$$

Εικόνα 3-5

$$1. W_1(0) = 0 \Rightarrow A_1 \sin(k_1 0) + B_1 \cos(k_1 0) + \Gamma_1 0 \\ + \Delta_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$$

$$2. W_1'''(0) = 0 \Rightarrow -A_1 k_1^2 \sin(k_1 0) - B_1 k_1^2 \cos(k_1 0) \\ = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$3. W_4(0) = 0 \Rightarrow A_4 \sin(k_1 0) + B_1 \cos(k_1 0) + \Gamma_4 0 \\ + \Delta_4 = 0 \Rightarrow \Delta_4 = 0$$

$$4. W_4'''(0) = 0 \Rightarrow -A_4 k_1^2 \sin(k_1 0) - B_4 k_1^2 \\ \cos(k_1 0) = 0 \Rightarrow B_4 = 0$$

$$5. W_2(0) = 0 \Rightarrow A_2 \sin(k_2 0) + B_2 \cos(k_2 0) + \Gamma_2 0 + \\ \Delta_2 = 0 \Rightarrow B_2 + \Delta_2 = 0$$

$$6. W_3(0) = 0 \Rightarrow A_3 \sin(k_2 0) + B_3 \cos(k_2 0) + \Gamma_3 0 \\ + \Delta_3 = 0 \Rightarrow B_3 + \Delta_3 = 0$$

$$7. V_1(0) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1'''(0) - P_1 W_1'(0) = 0 \Rightarrow -P_1 \Gamma_1 \\ = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = 0$$

$$8. V_4(0) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_4'''(0) - P_1 W_4'(0) = 0 \Rightarrow -P_1 \Gamma_4 \\ = 0 \Rightarrow \Gamma_4 = 0$$

$$9. W_1'(H_1) = W_2'(l) \Rightarrow A_1 k_1 \cos(k_1 H_1) - A_2 \\ k_2 \cos(k_2 l) + B_2 k_2 \sin(k_2 l) - \Gamma_2 = 0$$

$$10. W_4'(H_1) = W_3'(l) \Rightarrow A_4 k_1 \cos(k_1 H_1) - \\ A_3 k_2 \cos(k_2 l) + B_3 k_2 \sin(k_2 l) - \Gamma_3 = 0$$

$$11. W_2''(0) = W_3''(0) \Rightarrow A_2 k_2 + \Gamma_2 = A_3 k_2 + \Gamma_3$$

$$12. W_1(H_1) = W_4(H_1) \Rightarrow A_1 \sin(k_1 H_1) - A_4 \sin(k_1 H_1) \\ = 0$$

$$13. W_2(l) = -W_3(l) \Rightarrow A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \\ \Gamma_2 l + \Delta_2 + A_3 \sin(k_2 l) + B_3 \cos(k_2 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = 0$$

$$14. M_1(H_1) + M_2(l) = 0 \Rightarrow A_1 I_1 k_1^2 \sin(k_1 H_1) + \\ A_2 k_2^2 \sin(k_2 l) + B_2 k_2^2 \cos(k_2 l) = 0$$

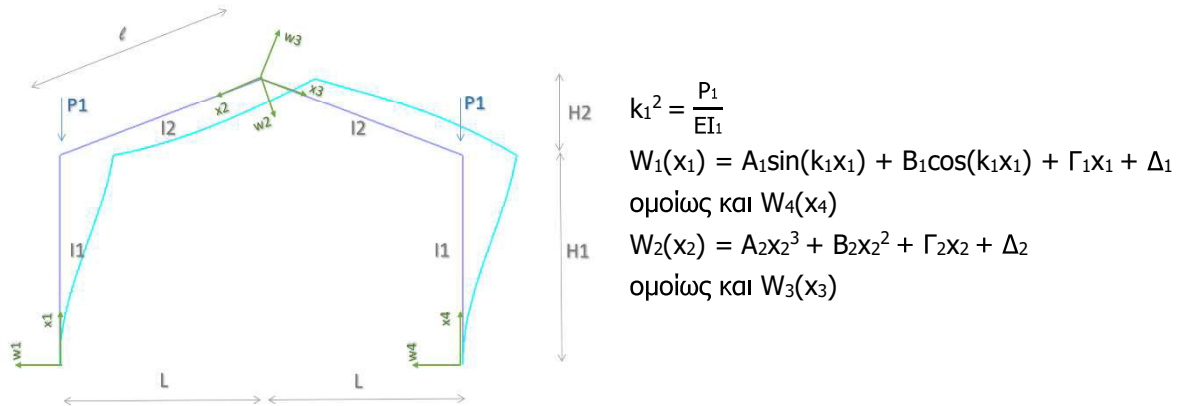
$$15. M_4(H_1) + M_3(l) = 0 \Rightarrow A_4 I_1 k_1^2 \sin(k_1 H_1) + \\ A_3 k_2^2 \sin(k_2 l) + B_3 k_2^2 \cos(k_2 l) = 0$$

$$16. M_2(0) + M_3(0) = 0 \Rightarrow B_2 + B_3 = 0$$

η εξίσωση με τις μικρότερες ρίζες για μηδενισμό της οριζουσας προκύπτουν από την Εξ. (3-8):

$$f(k_1 \cdot H_1, k_2 \cdot l) = I_2 k_2^2 l \cos(H_1 k_1) \sin(k_2 l) - I_1 k_1 \sin(H_1 k_1) \sin(k_2 l) + I_1 k_1 k_2 l \sin(H_1 k_1) \cos(k_2 l), \text{ ή} \\ f(x, y) = I_2 y^2 \frac{1}{l} \cos x \sin y - I_1 x \frac{1}{H_1} \sin x \sin y + I_1 y x \frac{1}{H_1} \sin x \cos y, \text{ για } x = k_1 \cdot H_1 \text{ και } y = k_2 l = x \frac{1}{H_1} \sqrt{\frac{I_1 P_2}{I_2 P_1}} \quad (3-8)$$

### 3.2.3 ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ



Εικόνα 3-6

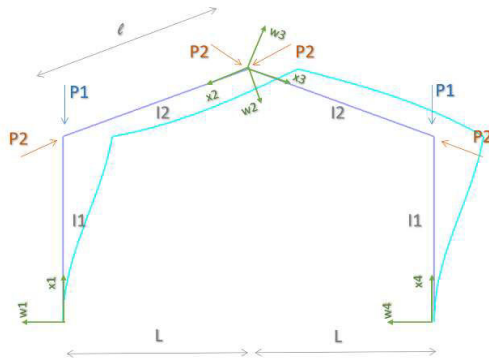
1.  $W_1(0) = 0 \Rightarrow A_1 \sin(k_1 0) + B_1 \cos(k_1 0) + \Gamma_1 0 + \Delta_1 = 0 \Rightarrow B_1 + \Delta_1 = 0$
2.  $W_1'(0) = 0 \Rightarrow A_1 k_1 \sin(k_1 0) - B_1 k_1 \cos(k_1 0) + \Gamma_1 = 0 \Rightarrow A_1 k_1 + \Gamma_1 = 0$
3.  $W_4(0) = 0 \Rightarrow A_4 \sin(k_1 0) + B_4 \cos(k_1 0) + \Gamma_4 0 + \Delta_4 = 0 \Rightarrow B_4 + \Delta_4 = 0$
4.  $W_4'(0) = 0 \Rightarrow A_4 k_1 \sin(k_1 0) - B_4 k_1 \cos(k_1 0) + \Gamma_4 = 0 \Rightarrow A_4 k_1 + \Gamma_4 = 0$
5.  $W_2(0) = 0 \Rightarrow A_2 0^3 + B_2 0^2 + \Gamma_2 0 + \Delta_2 = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 0$
6.  $W_3(0) = 0 \Rightarrow A_3 0^3 + B_3 0^2 + \Gamma_3 0 + \Delta_3 = 0 \Rightarrow \Delta_3 = 0$
7.  $W_1'(H_1) = W_2'(l) \Rightarrow A_1 k_1 \cos(k_1 H_1) - B_1 k_1 \cos(k_1 H_1) + \Gamma_1 - A_2 3l^2 - B_2 2l - \Gamma_2 = 0$
8.  $W_4'(H_1) = W_3'(l) \Rightarrow A_4 k_1 \cos(k_1 H_1) - B_4 k_1 \cos(k_1 H_1) + \Gamma_4 - A_3 3l^2 - B_3 2l - \Gamma_3 = 0$
9.  $W_2'(0) = W_3'(0) \Rightarrow \Gamma_2 = \Gamma_3$
10.  $V_1(H_1) + V_4(H_1) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1'''(H_1) - P_1 W_1'(H_1) - EI_1 W_4'''(H_1) - P_1 W_4'(H_1) \Rightarrow -P_1 \Gamma_1 - P_1 \Gamma_4 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_4 = 0$
11.  $W_2(l) = -W_3(l) \Rightarrow A_2 l^2 + B_2 l + \Gamma_2 + A_3 l^2 + B_3 l + \Gamma_3 = 0$
12.  $M_1(H_1) + M_2(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1''(H_1) - EI_2 W_2''(l) = 0 \Rightarrow -A_1 I_1 k_1^2 \sin(k_1 H_1) - B_1 I_1 k_1^2 \sin(k_1 H_1) + A_2 6I_2 l + B_2 2I_2 = 0$
13.  $M_4(H_1) + M_3(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_4''(H_1) - EI_2 W_3''(l) = 0 \Rightarrow -A_4 I_1 k_1^2 \sin(k_1 H_1) - B_4 I_1 k_1^2 \sin(k_1 H_1) + A_3 6I_2 l + B_3 2I_2 = 0$
14.  $M_2(0) + M_3(0) = 0 \Rightarrow -EI_2 W_2''(0) - EI_2 W_3''(0) = 0 \Rightarrow B_2 + B_3 = 0$
15.  $W_1(H_1) = W_4(H_1) \Rightarrow A_1 \sin(k_1 H_1) + B_1 \cos(k_1 H_1) + \Gamma_1 H_1 + \Delta_1 - A_4 \sin(k_1 H_1) - B_4 \cos(k_1 H_1) - \Gamma_4 H_1 - \Delta_4 = 0$
16.  $W_1'(H_1) = W_4'(H_1) \Rightarrow A_1 k_1 \cos(k_1 H_1) - B_1 k_1 \cos(k_1 H_1) + \Gamma_1 - A_4 k_1 \cos(k_1 H_1) + B_4 k_1 \cos(k_1 H_1) - \Gamma_4 = 0$

η εξίσωση με τις μικρότερες ρίζες για μηδενισμό της οριζουσας προκύπτουν από την Εξ. (3-9):

$$f(k_1 \cdot H_1) = 3I_2 \sin(H_1 k_1) + I_1 k_1 \cos(H_1 k_1), \quad \dot{\eta}$$

$$f(x) = 3I_2 \sin x - I_1 x \frac{1}{H_1} \cos x, \quad \text{για } x = k_1 \cdot H_1 \quad (3-9)$$

### 3.2.4 ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ & ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ



$$k_1^2 = \frac{P_1}{EI_1} \quad \& \quad k_2^2 = \frac{P_2}{EI_2}$$

$$W_1(x_1) = A_1 \sin(k_1 x_1) + B_1 \cos(k_1 x_1) + \Gamma_1 x_1 + \Delta_1$$

ομοίως και  $W_4(x_4)$

$$W_2(x_2) = A_2 \sin(k_2 x_2) + B_2 \cos(k_2 x_2) + \Gamma_2 x_2 + \Delta_2$$

ομοίως και  $W_3(x_3)$

Εικόνα 3-7

1.  $W_1(0) = 0 \Rightarrow A_1 \sin(k_1 0) + B_1 \cos(k_1 0) + \Gamma_1 0 + \Delta_1 = 0 \Rightarrow B_1 + \Delta_1 = 0$
2.  $W_1'(0) = 0 \Rightarrow A_1 k_1 \sin(k_1 0) - B_1 k_1 \cos(k_1 0) + \Gamma_1 = 0 \Rightarrow A_1 k_1 + \Gamma_1 = 0$
3.  $W_4(0) = 0 \Rightarrow A_4 \sin(k_1 0) + B_4 \cos(k_1 0) + \Gamma_4 0 + \Delta_4 = 0 \Rightarrow B_4 + \Delta_4 = 0$
4.  $W_4'(0) = 0 \Rightarrow A_4 k_1 \sin(k_1 0) - B_4 k_1 \cos(k_1 0) + \Gamma_4 = 0 \Rightarrow A_4 k_1 + \Gamma_4 = 0$
5.  $W_2(0) = 0 \Rightarrow A_2 \sin(k_2 0) + B_2 \cos(k_2 0) + \Gamma_2 0 + \Delta_2 = 0 \Rightarrow B_2 + \Delta_2 = 0$
6.  $W_3(0) = 0 \Rightarrow A_3 \sin(k_2 0) + B_3 \cos(k_2 0) + \Gamma_3 0 + \Delta_3 = 0 \Rightarrow B_3 + \Delta_3 = 0$
7.  $W_1'(H_1) = W_2'(l) \Rightarrow A_1 k_1 \cos(k_1 H_1) - B_1 k_1 \sin(k_1 H_1) + \Gamma_1 - A_2 k_2 \cos(k_2 l) + B_2 k_2 \sin(k_2 l) - \Gamma_2 = 0$
8.  $W_4'(H_1) = W_3'(l) \Rightarrow A_4 k_1 \cos(k_1 H_1) - B_4 k_1 \sin(k_1 H_1) + \Gamma_4 - A_3 k_2 \cos(k_2 l) + B_3 k_2 \sin(k_2 l) - \Gamma_3 = 0$
9.  $W_2'(0) = W_3'(0) \Rightarrow A_2 k_2 + \Gamma_2 - A_3 k_2 - \Gamma_3 = 0$
10.  $V_1(H_1) + V_4(H_1) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1''''(H_1) - P_1 W_1'(H_1) - EI_1 W_4''''(H_1) - P_1 W_4'(H_1) \Rightarrow -P_1 \Gamma_1 - P_1 \Gamma_4 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_4 = 0$
11.  $W_2(l) = -W_3(l) \Rightarrow A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 + A_3 \sin(k_2 l) + B_3 \cos(k_2 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = 0$
12.  $M_1(H_1) + M_2(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1''(H_1) - EI_2 W_2''(l) = 0 \Rightarrow A_1 I_1 k_1^2 \sin(k_1 H_1) + B_1 I_1 k_1^2 \cos(k_1 H_1) + A_2 k_2^2 \sin(k_2 l) + B_2 k_2^2 \cos(k_2 l) = 0$
13.  $M_4(H_1) + M_3(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_4''(H_1) - EI_2 W_3''(l) = 0 \Rightarrow A_4 I_1 k_1^2 \sin(k_1 H_1) + B_4 I_1 k_1^2 \cos(k_1 H_1) + A_3 I_2 k_2^2 \sin(k_2 l) + B_3 I_2 k_2^2 \cos(k_2 l) = 0$
14.  $M_2(0) + M_3(0) = 0 \Rightarrow -EI_2 W_2''(0) - EI_2 W_3''(0) = 0 \Rightarrow B_2 + B_3 = 0$
15.  $W_1(H_1) = W_4(H_1) \Rightarrow A_1 \sin(k_1 H_1) + B_1 \cos(k_1 H_1) + \Gamma_1 H_1 + \Delta_1 - A_4 \sin(k_1 H_1) - B_4 \cos(k_1 H_1) - \Gamma_4 H_1 - \Delta_4 = 0$
16.  $W_1'(H_1) = W_4'(H_1) \Rightarrow A_1 k_1 \cos(k_1 H_1) - B_1 k_1 \sin(k_1 H_1) + \Gamma_1 - A_4 k_1 \cos(k_1 H_1) + B_4 k_1 \sin(k_1 H_1) - \Gamma_4 = 0$

η εξίσωση με τις μικρότερες ρίζες για μηδενισμό της οριζουσας προκύπτουν από την Εξ. (3-10):

$$f(k_1 \cdot H_1, k_2 \cdot l) = I_1 k_1 k_2 \cos(H_1 k_1) \cos(k_2 l) - I_2 k_2^2 l \sin(H_1 k_1) \sin(k_2 l) - I_1 k_1 \cos(H_1 k_1) \sin(k_2 l), \quad \eta$$

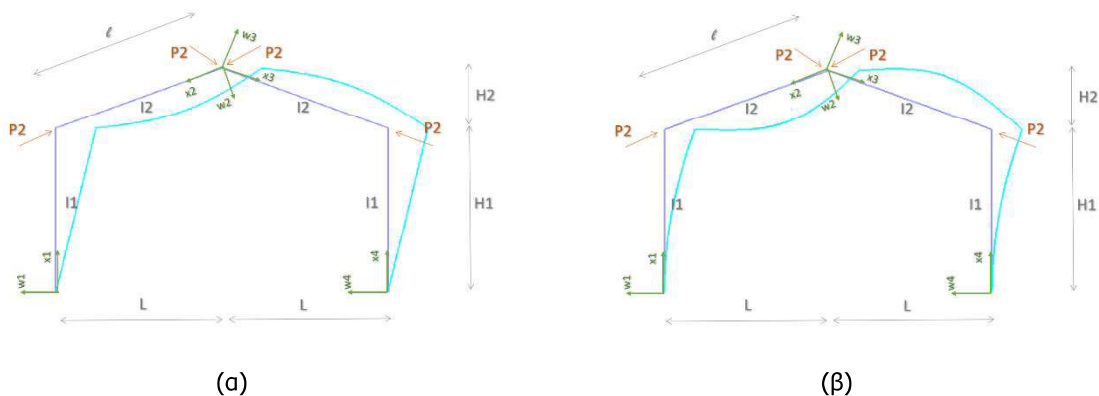
$$f(x, y) = I_1 y x \frac{1}{H_1} \cos x \cos y - I_2 y^2 \frac{1}{l} \sin x \sin y - I_1 x \frac{1}{H_1} \cos x \sin y, \quad \text{για } x = k_1 \cdot H_1 \text{ και } y = k_2 l = x \frac{1}{H_1} \sqrt{\frac{I_1 P_2}{I_2 P_1}} \quad (3-10)$$

### 3.3 ΕΥΡΕΣΗ ΜΗΚΟΥΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ

Παρακάτω διερευνάται ο γραμμικός λυγισμός πλαισίων με αμφικλίνη ζυγώματα για τις εξής περιπτώσεις:

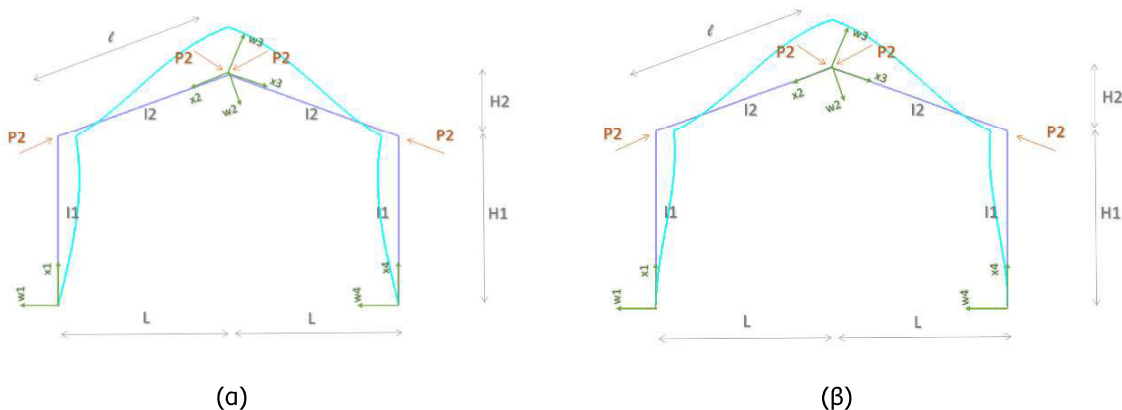
- (1) Άρθρωση στη βάση και θλιπτικό φορτίο μόνο στα ζυγώματα
- (2) Πάκτωση στη βάση και θλιπτικό φορτίο μόνο στα ζυγώματα

#### ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ



Εικόνα 3-8: Πλαίσια με θλιπτικό φορτίο επί ζυγωμάτων για (α) αρθρώσεις και (β) πακτώσεις στη βάση

#### ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ

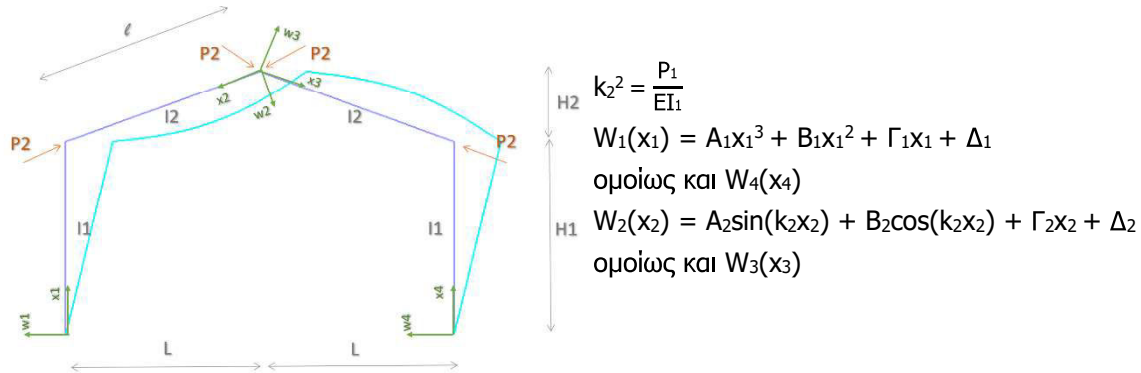


Εικόνα 3-9: Πλαίσια με θλιπτικό φορτίο επί ζυγωμάτων για (α) αρθρώσεις και (β) πακτώσεις στη βάση

Ισχύουν και εδώ οι εξισώσεις του Κεφαλαίου 3.2 (Εξ. (3-5) και Εξ. (3-6) για θλιβόμενα και μη θλιβόμενα μέλη, αντίστοιχα). Οι αναλυτικές λύσεις που βρέθηκαν αφορούν την αντισυμμετρική ιδιομορφή των εν λόγω πλαισίων. Η αναλυτική λύση που βρέθηκε για τη συμμετρική ιδιομορφή στην παρούσα εργασία, αφορά μόνο στην περίπτωση οριζόντων ζυγωμάτων ( $\varphi=0$ ). Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, έγιναν αριθμητικές αναλύσεις με τη βοήθεια του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ADINA [10] προκειμένου να επιτευχθεί η πληρότητα των παραμετρικών αναλύσεων που ακολουθούν σε επόμενο κεφάλαιο.

Εκτελώντας μια σειρά παραμετρικών αναλύσεων στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA [10], απεδείχθη ότι στην περίπτωση φορτίου μόνο επί ζυγωμάτων, κρίσιμη είναι είτε η συμμετρική είτε η αντισυμμετρική ιδιομορφή, ανάλογα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των πλαισίων.

### 3.3.1 ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ



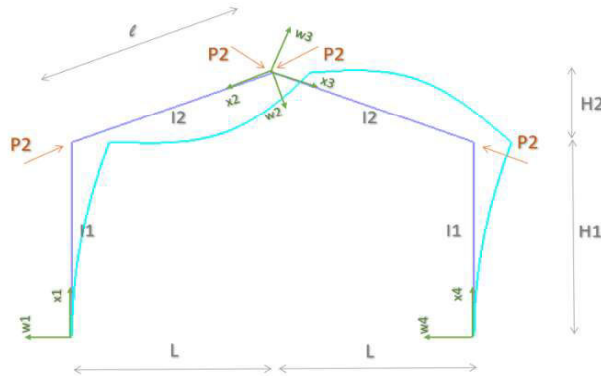
Εικόνα 3-10

1.  $W_1''(0) = 0 \Rightarrow 6A_10 + 2B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0$
2.  $W_1(0) = 0 \Rightarrow A_10^3 + \Gamma_10 + \Delta_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$
3.  $W_4''(0) = 0 \Rightarrow 6A_40 + 2B_4 = 0 \Rightarrow B_4 = 0$
4.  $W_4(0) = 0 \Rightarrow A_40^3 + \Gamma_40 + \Delta_4 = 0 \Rightarrow \Delta_4 = 0$
5.  $W_2(0) = 0 \Rightarrow A_2\sin(k_20) + B_2\cos(k_20) + \Gamma_20 + \Delta_2 = 0 \Rightarrow B_2 + \Delta_2 = 0$
6.  $W_3(0) = 0 \Rightarrow A_3\sin(k_20) + B_3\cos(k_20) + \Gamma_30 + \Delta_3 = 0 + B_3 + \Delta_3 = 0 \Rightarrow B_3 + \Delta_3 = 0$
7.  $W_2'(0) = W_3'(0) \Rightarrow A_2k_2 + \Gamma_2 = A_3k_2 + \Gamma_3$
8.  $W_1'(H_1) = W_2'(L) \Rightarrow 3A_1H_1^2 + \Gamma_1 - A_2k_2\cos(k_2L) + B_2k_2\sin(k_2L) - \Gamma_2 = 0$
9.  $W_4'(H_1) = W_3'(L) \Rightarrow 3A_4H_1^2 + \Gamma_4 - A_3k_2\cos(k_2L) + B_3k_2\sin(k_2L) - \Gamma_3 = 0$
10.  $W_1(H_1) = W_4(H_1) \Rightarrow A_1H_1^3 + \Gamma_1H_1 - A_4H_1^3 + \Gamma_4H_1 = 0$
11.  $W_2(L) = -W_3(L) \Rightarrow A_2\sin(k_2L) + B_2\cos(k_2L) + \Gamma_2L + \Delta_2 + A_3\sin(k_2L) + B_3\cos(k_2L) + \Gamma_3L + \Delta_3 = 0$
12.  $M_1(H_1) + M_2(L) = 0 \Rightarrow -EI_1W_1''(H_1) - EI_2W_2''(L) \Rightarrow -6A_1H_1I_1 + A_2I_2k_2^2\sin(k_2L) + B_2I_2k_2^2\cos(k_2L) = 0$
13.  $M_4(H_1) + M_3(L) = 0 \Rightarrow -EI_1W_4''(H_1) - EI_2W_3''(L) \Rightarrow -6A_4H_1I_1 + A_3I_2k_2^2\sin(k_2L) + B_3I_2k_2^2\cos(k_2L) = 0$
14.  $M_2(0) + M_3(0) = 0 \Rightarrow -EI_2W_2''(0) - EI_2W_3''(0) = 0 \Rightarrow B_2I_2k_2^2\cos(k_20) + B_3I_2k_2^2\cos(k_20) = 0 \Rightarrow B_2 + B_3 = 0$
15.  $V_1(0) = 0 \Rightarrow -EI_1W_1'''(0) \Rightarrow A_1 = 0$
16.  $V_4(0) = 0 \Rightarrow -EI_1W_4'''(0) \Rightarrow A_4 = 0$

η εξίσωση με τις μικρότερες ρίζες για μηδενισμό της οριζουσας προκύπτουν από την Εξ. (3-11):

$$\begin{aligned} f(k_2 \cdot l) &= \sin(k_2 \cdot l), \text{ ή} \\ f(y) &= \sin y, \text{ για } y = k_2 l \end{aligned} \quad (3-11)$$

### 3.3.2 ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ



$$k_2^2 = \frac{P_1}{EI_1}$$

$$W_1(x_1) = A_1x_1^3 + B_1x_1^2 + \Gamma_1x_1 + \Delta_1$$

ομοίως και  $W_4(x_4)$

$$W_2(x_2) = A_2\sin(k_2x_2) + B_2\cos(k_2x_2) + \Gamma_2x_2 + \Delta_2$$

ομοίως και  $W_3(x_3)$

Εικόνα 3-11

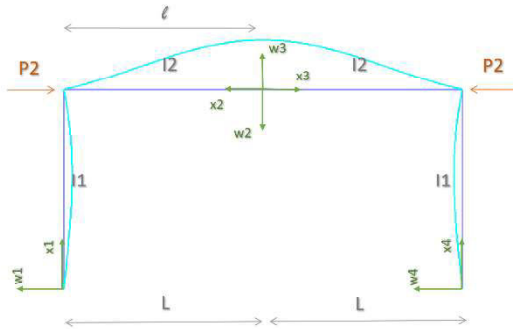
1.  $W_1(0) = 0 \Rightarrow A_1 \cdot 0^3 + B_1 \cdot 0^2 + \Gamma_1 \cdot 0 + \Delta_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$
2.  $W_1'(0) = 0 \Rightarrow 3A_1 \cdot 0^2 + 2B_1 \cdot 0 + \Gamma_1 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = 0$
3.  $W_4(0) = 0 \Rightarrow A_4 \cdot 0^3 + B_4 \cdot 0^2 + \Gamma_4 \cdot 0 + \Delta_4 = 0 \Rightarrow \Delta_4 = 0$
4.  $W_4'(0) = 0 \Rightarrow 3A_4 \cdot 0^2 + 2B_4 \cdot 0 + \Gamma_4 = 0 \Rightarrow \Gamma_4 = 0$
5.  $W_2(0) = 0 \Rightarrow A_2 \sin(k_2 \cdot 0) + B_2 \cos(k_2 \cdot 0) + \Gamma_2 \cdot 0 + \Delta_2 = 0 \Rightarrow B_2 + \Delta_2 = 0$
6.  $W_3(0) = 0 \Rightarrow A_3 \sin(k_2 \cdot 0) + B_3 \cos(k_2 \cdot 0) + \Gamma_3 \cdot 0 + \Delta_3 = 0 \Rightarrow B_3 + \Delta_3 = 0$
7.  $W_1'(H_1) = W_2'(l) \Rightarrow 3A_1 H_1^2 + 2B_1 H_1 - A_2 k_2 \cos(k_2 l) + B_2 k_2 \sin(k_2 l) - \Gamma_2 = 0$
8.  $W_4'(H_1) = W_3'(l) \Rightarrow 3A_4 H_1^2 + 2B_4 H_1 - A_3 k_2 \cos(k_2 l) + B_3 k_2 \sin(k_2 l) - \Gamma_3 = 0$
9.  $W_2'(0) = W_3'(0) \Rightarrow A_2 k_2 + \Gamma_2 - A_3 k_2 - \Gamma_3 = 0$
10.  $V_1(H_1) + V_4(H_4) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1'''(H_1) - EI_1 W_4'''(H_1) = 0 \Rightarrow A_1 + A_4 = 0$
11.  $W_2(l) = -W_3(l) \Rightarrow A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + 1 + A_3 \sin(k_2 l) + B_3 \cos(k_2 l) + \Gamma_3 l + 1 = 0$
12.  $M_2(0) + M_3(0) = 0 \Rightarrow -EI_2 W_2''(0) - EI_2 W_3''(0) = 0 \Rightarrow B_2 + B_3 = 0$
13.  $M_1(H_1) + M_2(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1''(H_1) - EI_2 W_2''(l) = 0 \Rightarrow 6A_1 H_1 I_1 + 2B_1 I_1 - A_2 I_2 k_2^2 \sin(k_2 l) - B_2 I_2 k_2^2 \cos(k_2 l) = 0$
14.  $M_4(H_1) + M_3(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_4''(H_1) - EI_2 W_3''(l) = 0 \Rightarrow 6A_4 H_1 I_1 + 2B_4 I_1 - A_3 I_2 k_2^2 \sin(k_2 l) - B_3 I_2 k_2^2 \cos(k_2 l) = 0$
15.  $W_1(H_1) = W_4(H_1) \Rightarrow A_1 H_1^3 + B_1 H_1^2 = A_4 H_1^3 + B_4 H_1^2$
16.  $W_1'(H_1) = W_4'(H_1) \Rightarrow 3A_1 H_1^2 + 2B_1 H_1 = 3A_4 H_1^2 + 2B_4 H_1$

η εξίσωση με τις μικρότερες ρίζες για μηδενισμό της ορίζουσας προκύπτουν από την Εξ. (3-12):

$$f(k_2 \cdot l) = I_1 \sin(k_2 l) - I_1 k_2 l \cos(k_2 l) + H_1 I_2 k_2^2 l \sin(k_2 l), \quad \dot{\eta}$$

$$f(y) = I_1 \sin(y) - I_1 y \cos(y) + H_1 I_2 \frac{y^2}{l} \sin(y), \quad \text{για } y = k_2 l \quad (3-12)$$

### 3.3.3 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ



$$k_2^2 = \frac{P_2}{EI_2}$$

$$W_1(x_1) = A_1x_1^3 + B_1x_1^2 + \Gamma_1x_1 + \Delta_1$$

ομοίως και  $W_4(x_4)$

$$W_2(x_2) = A_2\sin(k_2x_2) + B_2\cos(k_2x_2) + \Gamma_2x_2 + \Delta_2$$

ομοίως και  $W_3(x_3)$

Εικόνα 3-12

1.  $W_1''(0) = 0 \Rightarrow 6A_1 \cdot 0 + 2B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0$
2.  $W_1(0) = 0 \Rightarrow A_1 \cdot 0^3 + \Gamma_1 \cdot 0 + \Delta_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$
3.  $W_4''(0) = 0 \Rightarrow 6A_4 \cdot 0 + 2B_4 = 0 \Rightarrow B_4 = 0$
4.  $W_4(0) = 0 \Rightarrow A_4 \cdot 0^3 + \Gamma_4 \cdot 0 + \Delta_4 = 0 \Rightarrow \Delta_4 = 0$
5.  $W_2'(0) = 0 \Rightarrow A_2 k_2 \cos(k_2 \cdot 0) - B_2 k_2 \sin(k_2 \cdot 0) + \Gamma_2 = 0 \Rightarrow A_2 k_2 + \Gamma_2 = 0$
6.  $W_3'(0) = 0 \Rightarrow A_3 k_2 \cos(k_2 \cdot 0) - B_3 k_2 \sin(k_2 \cdot 0) + \Gamma_3 = 0 \Rightarrow A_3 k_2 + \Gamma_3 = 0$
7.  $W_1'(H_1) = W_2'(l) \Rightarrow 3A_1 H_1^2 + \Gamma_1 - A_2 k_2 \cos(k_2 l) + B_2 k_2 \sin(k_2 l) - \Gamma_2 = 0$
8.  $W_4'(H_1) = W_3'(l) \Rightarrow 3A_4 H_1^2 + \Gamma_4 - A_3 k_2 \cos(k_2 l) + B_3 k_2 \sin(k_2 l) - \Gamma_3 = 0$
9.  $W_1(H_1) = -W_4(H_1) \Rightarrow A_1 H_1^3 + \Gamma_1 H_1 + A_4 H_1^3 + \Gamma_4 H_1 = 0$
10.  $W_1(H_1) = W_2(l) \Rightarrow A_1 H_1^3 + \Gamma_1 H_1 + A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 = 0$
11.  $W_4(H_1) = W_3(l) \Rightarrow A_4 H_1^3 + \Gamma_4 H_1 + A_3 \sin(k_2 l) + B_3 \cos(k_2 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = 0$
12.  $M_1(H_1) + M_2(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1''(H_1) - EI_2 W_2''(l) = 0 \Rightarrow -6A_1 H_1 I_1 + A_2 I_2 k_2^2 \sin(k_2 l) + B_2 I_2 k_2^2 \cos(k_2 l) = 0$
13.  $M_4(H_1) + M_3(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_4''(H_1) - EI_2 W_3''(l) = 0 \Rightarrow -6A_4 H_1 I_1 + A_3 I_2 k_2^2 \sin(k_2 l) + B_3 I_2 k_2^2 \cos(k_2 l) = 0$
14.  $M_2(0) - M_3(0) = 0 \Rightarrow -EI_2 W_2''(0) + EI_2 W_3''(0) = 0 \Rightarrow -B_2 I_2 k_2^2 \cos(k_2 \cdot 0) - B_3 I_2 k_2^2 \cos(k_2 \cdot 0) = 0 \Rightarrow B_2 - B_3 = 0$
15.  $V_2(0) = 0 \Rightarrow -EI_2 W_2'''(0) - P_2 W_2'(0) = 0 \Rightarrow \Gamma_2 = 0$
16.  $V_3(0) = 0 \Rightarrow -EI_2 W_3'''(0) - P_2 W_3'(0) = 0 \Rightarrow \Gamma_3 = 0$

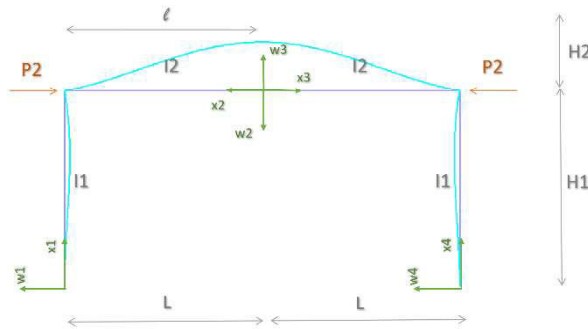
η εξίσωση με τις μικρότερες ρίζες για μηδενισμό της οριζουσας προκύπτουν από την Εξ.(3-13):

$$f(k_2 \cdot l) = 3I_1 \sin(k_2 \cdot l) + H_1 I_2 k_2 \cos(k_2 \cdot l), \quad \dot{\eta}$$

$$f(y) = 3I_1 \sin(y) + H_1 I_2 \frac{y}{l} \cos(y), \quad \text{για } y = k_2 l \quad (3-13)$$



### 3.3.4 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΤΙΟ ΕΠΙ ΖΥΓΩΜΑΤΩΝ



$$k_2^2 = \frac{P_2}{EI_2}$$

$$W_1(x_1) = A_1x_1^3 + B_1x_1^2 + \Gamma_1x_1 + \Delta_1$$

ομοίως και  $W_4(x_4)$

$$W_2(x_2) = A_2\sin(k_2x_2) + B_2\cos(k_2x_2) + \Gamma_2x_2 + \Delta_2$$

ομοίως και  $W_3(x_3)$

Εικόνα 3-13

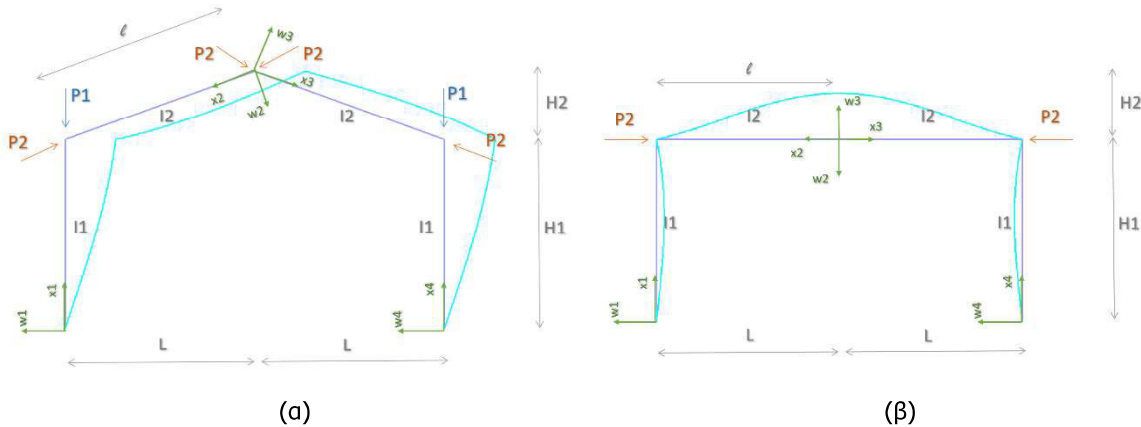
1.  $W_1(0) = 0 \Rightarrow A_1 \cdot 0^3 + B_1 \cdot 0^2 + \Gamma_1 \cdot 0 + \Delta_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$
2.  $W_1'(0) = 0 \Rightarrow 3A_1 \cdot 0^2 + 2B_1 \cdot 0 + \Gamma_1 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = 0$
3.  $W_4(0) = 0 \Rightarrow A_4 \cdot 0^3 + B_4 \cdot 0^2 + \Gamma_4 \cdot 0 + \Delta_4 = 0 \Rightarrow \Delta_4 = 0$
4.  $W_4'(0) = 0 \Rightarrow 3A_4 \cdot 0^2 + 2B_4 \cdot 0 + \Gamma_4 = 0 \Rightarrow \Gamma_4 = 0$
5.  $W_2'(0) = 0 \Rightarrow A_2 k_2 \cos(k_2 \cdot 0) - B_2 k_2 \sin(k_2 \cdot 0) + \Gamma_2 \Rightarrow A_2 k_2 + \Gamma_2 = 0$
6.  $W_3'(0) = 0 \Rightarrow A_3 k_2 \cos(k_2 \cdot 0) - B_3 k_2 \sin(k_2 \cdot 0) + \Gamma_3 \Rightarrow A_3 k_2 + \Gamma_3 = 0$
7.  $W_1'(H_1) = W_2'(l) \Rightarrow 3A_1 H_1^2 + 2B_1 H_1 - A_2 k_2 \cos(k_2 l) + B_2 k_2 \sin(k_2 l) - \Gamma_2 = 0$
8.  $W_4'(H_1) = W_3'(l) \Rightarrow 3A_4 H_1^2 + 2B_4 H_1 - A_3 k_2 \cos(k_2 l) + B_3 k_2 \sin(k_2 l) - \Gamma_3 = 0$
9.  $W_1(H_1) = -W_4(H_1) \Rightarrow A_1 H_1^3 + B_1 H_1^2 + A_4 H_1^3 + B_4 H_1^2 = 0$
10.  $W_1(H_1) = W_2(l) \Rightarrow A_1 H_1^3 + B_1 H_1^2 + A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 = 0$
11.  $W_4(H_1) = W_3(l) \Rightarrow A_4 H_1^3 + B_4 H_1^2 + A_3 \sin(k_2 l) + B_3 \cos(k_2 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = 0$
12.  $M_1(H_1) + M_2(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_1''(H_1) - EI_2 W_2''(l) \Rightarrow -6A_1 H_1 I_1 - 2B_1 I_1 + A_2 I_2 k_2^2 \sin(k_2 l) + B_2 I_2 k_2^2 \cos(k_2 l) = 0$
13.  $M_4(H_1) + M_3(l) = 0 \Rightarrow -EI_1 W_4''(H_1) - EI_2 W_3''(l) \Rightarrow -6A_4 H_1 I_1 - 2B_4 I_1 + A_3 I_2 k_2^2 \sin(k_2 l) + B_3 I_2 k_2^2 \cos(k_2 l) = 0$
14.  $M_2(0) - M_3(0) = 0 \Rightarrow -EI_2 W_2''(0) + EI_2 W_3''(0) = 0 \Rightarrow B_2 I_2 k_2^2 \cos(k_2 \cdot 0) - B_3 I_2 k_2^2 \cos(k_2 \cdot 0) = 0 \Rightarrow B_2 - B_3 = 0$
15.  $V_2(0) = 0 \Rightarrow -EI_2 W_2'''(0) - P_2 W_2'(0) = 0 \Rightarrow \Gamma_2 = 0$
16.  $V_3(0) = 0 \Rightarrow -EI_2 W_3'''(0) - P_2 W_3'(0) = 0 \Rightarrow \Gamma_3 = 0$

η εξίσωση με τις μικρότερες ρίζες για μηδενισμό της οριζουσας προκύπτουν από την Εξ. (3-14):

$$f(k_2 \cdot l) = 4I_1 \sin(k_2 \cdot l) + H_1 I_2 k_2 \cos(k_2 \cdot l), \quad \eta$$

$$f(y) = 4I_1 \sin(y) + H_1 I_2 \frac{y}{l} \cos(y), \quad \text{για } y = k_2 l \quad (3-14)$$

**3.4 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ**



Εικόνα 3-14: (α) Αντισυμμετρική Ιδιομορφή (β) Συμμετρική Ιδιομορφή

Θεωρώντας ως  $x = k_1 H_1$  και  $y = k_2 l = x \frac{1}{H_1} \sqrt{\frac{I_1 P_2}{I_2 P_1}}$ , παρατίθενται οι εξισώσεις λυγισμού κάθε περίπτωσης (Πίνακας 3-1):

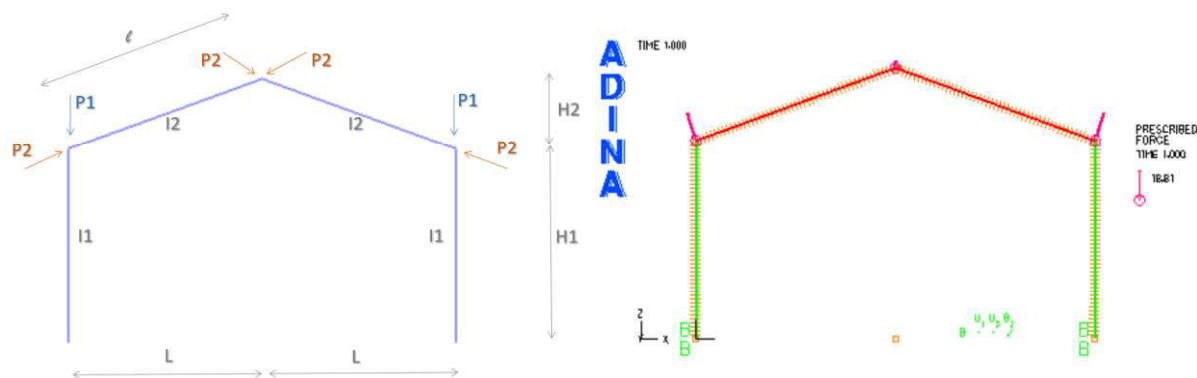
Πίνακας 3-1: Αναλυτικές εξισώσεις λυγισμού

Πλαίσια	Εξίσωση λυγισμού
	(α) Αντισυμμετρική Ιδιομορφή
P1 & αρθρώσεις	$f(x) = 3I_2 \cos x - I_1 x \frac{1}{H_1} \sin x$
P1 & P2 αρθρώσεις	$f(x,y) = I_2 y^2 \frac{1}{l} \cos x \sin y - I_1 x \frac{1}{H_1} \sin x \sin y + I_1 y x \frac{1}{H_1} \sin x \cos y$
P2 & αρθρώσεις	$f(y) = \sin y$
P1 & πακτώσεις	$f(x) = 3I_2 \sin x - I_1 x \frac{1}{H_1} \cos x$
P1 & P2 πακτώσεις	$f(x,y) = I_1 y x \frac{1}{H_1} \cos x \cos y - I_2 y^2 \frac{1}{l} \sin x \sin y - I_1 x \frac{1}{H_1} \cos x \sin y$
P2 & πακτώσεις	$f(y) = I_1 \sin(y) - I_1 y \cos(y) + H_1 I_2 \frac{y^2}{l} \sin(y)$
	(β) Συμμετρική Ιδιομορφή - $\varphi=0$ (degrees)
P2 & αρθρώσεις	$f(y) = 3I_1 \sin(y) + H_1 I_2 \frac{y}{l} \cos(y)$
P2 & πακτώσεις	$f(y) = 4I_1 \sin(y) + H_1 I_2 \frac{y}{l} \cos(y)$

## 4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

### 4.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ADINA [10]

Προκειμένου να επιβεβαιωθεί η ορθότητα των ανωτέρω αναλυτικών, ακολουθεί η σύγκρισή τους με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα, όπως προκύπτουν από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA[10]. Το εν λόγω πρόγραμμα έχει δυνατότητα γραμμικής ανάλυσης λυγισμού (Linearized Buckling Analysis) για τον προσδιορισμό των ιδιομορφών και των φορτίων λυγισμού του φορέα. Πρόκειται στην πραγματικότητα για Στατική 2<sup>α</sup> τάξεως όπου οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται στην παραμορφωμένη θέση, χωρίς οι παραμορφώσεις να είναι πολύ μεγάλες, ενώ το υλικό θεωρείται ελαστικό.



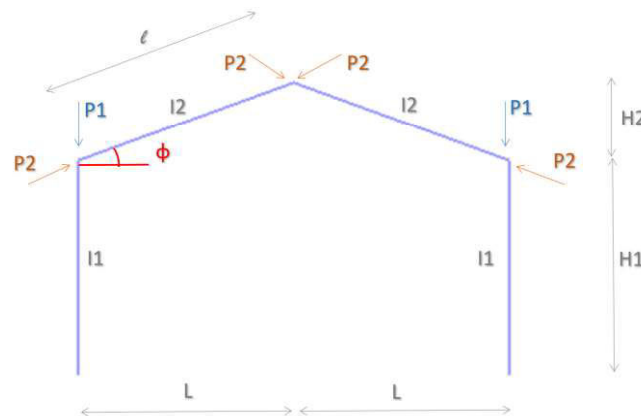
Εικόνα 4-1: Προσομοίωση πλαισίου στο ADINA [10]

Στην παρούσα εργασία, τα πλαίσια προσομοιώνονται με στοιχεία δοκού (beam elements) ώστε να μεταφέρουν ροπές, τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις. Η διατομή επιλέγεται να είναι κοίλη κυκλική (CHS) διότι μόνο αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μη γραμμικές αναλύσεις που ακολουθούν σε επόμενο κεφάλαιο, ενώ το μέτρο ελαστικότητας που χρησιμοποιείται είναι του χάλυβα  $E=210$  GPa. Ασκώντας ένα θλιπτικό φορτίο στο εκάστοτε θλιβόμενο μέλος/μέλη του πλαισίου, με μέτρο περίπου δέκα φορές μικρότερο από το αναμενόμενο φορτίο λυγισμού, το πρόγραμμα υπολογίζει τελικά το φορτίο λυγισμού και διατυπώνει τις πρώτες ιδιομορφές λυγισμού που έχουν ζητηθεί. Στα πλαίσια που εξετάζονται, οι δυο πρώτες ιδιομορφές αντιστοιχούσαν πάντα στην αντισυμμετρική και στην συμμετρική ιδιομορφή, με διαφορετική σειρά ανά περίπτωση, αναλόγως τα χαρακτηριστικά και τον τρόπο φόρτισης του πλαισίου. Με την εύρεση του φορτίου λυγισμού που κάθε περίπτωση, στην συνέχεια υπολογίζεται το ισοδύναμο

μήκος λυγισμού. Με τη χρήση του προγράμματος ADINA [10] επιβεβαιώνονται τα αναλυτικά αποτελέσματα. Επιπλέον, όπου δεν επιτεύχθηκε η διατύπωση αναλυτικής λύσης, χρησιμοποιούνται αποτελέσματα αριθμητικών επιλύσεων στο ADINA [10] ώστε να εξασφαλιστεί η πληρότητα των παραμετρικών αναλύσεων.

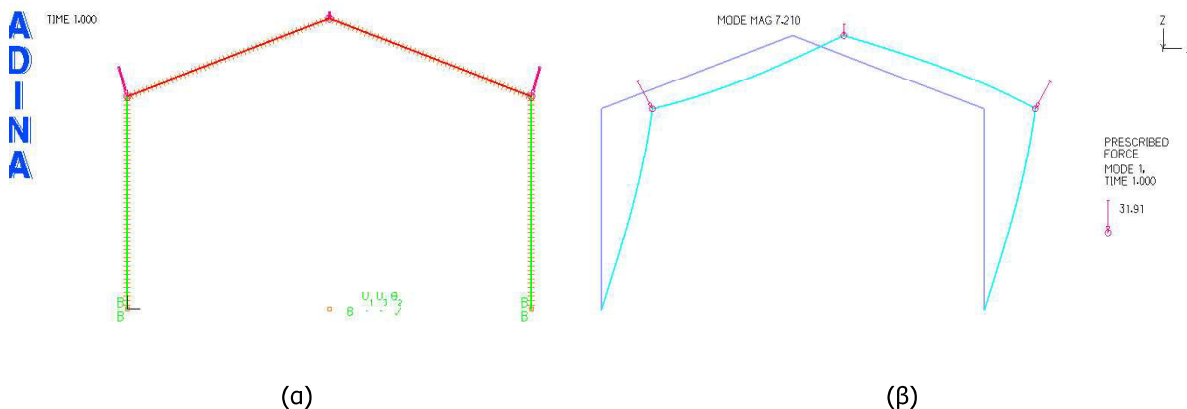
Η σύγκριση των αναλυτικών λύσεων γίνεται για διάφορες τιμές των παραμέτρων ελέγχου, οι οποίες είναι:

- Η γωνία  $\phi$  που σχηματίζει το ζυγώμα με τον οριζόντιο άξονα
- Ο λόγος των ροπών αδράνειας του ζυγώματος προς του υποστυλώματος  $I_2/I_1$
- Ο λόγος του ύψους του υποστυλώματος προς το άνοιγμα του πλαισίου  $H_1/2L$
- Ο λόγος του θλιπτικού φορτίου του ζυγώματος προς αυτό του υποστυλώματος  $P_2/P_1$



Εικόνα 4-2: Παράμετροι πλαισίου

Στην Εικόνα 4-3 (α), φαίνεται ένα ενδεικτικό πλαίσιο στο ADINA [10] με γωνία  $\phi=20^\circ$  και σχέση ύψους υποστυλώματος προς άνοιγμα  $H_1/2L=0.5$ . Οι λόγοι ροπών αδράνειας είναι  $I_2/I_1=1$  και των φορτίων  $P_2/P_1=0.3$ . Η διατομή που χρησιμοποιήθηκε είναι κοίλη κυκλική διαμέτρου  $D=0.2\text{m}$  και πάχους  $t=0.004\text{m}$ . Η πρώτη ιδιομορφή λυγισμού είναι αντισυμμετρική με μετάθεση όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4-3 (β).



Εικόνα 4-3 (α) Προσομοίωση πλαισίου  $\phi=20^\circ$  και  $H_1/2L=0.5$  με πεπερασμένα στοιχεία δοκού και φόρτιση υποστυλωμάτων και ζυγωμάτων (β) Πρώτη ιδιομορφή λυγισμού και φορτίο λυγισμού

Το φορτίο  $P_{cr}=31.91\text{ kN}$  αντιστοιχεί στην συνισταμένη του φορτίου λυγισμού του υποστυλώματος  $P_{cr1}$  με κατακόρυφη διεύθυνση και του φορτίου λυγισμού του ζυγώματος  $P_{cr2}=0.3$

$P_{cr1}$ , με τη διεύθυνση της κλίσης του ζυγώματος. Επομένως μετά από κατάλληλους υπολογισμούς προκύπτει  $P_{cr1}=33.84\text{ kN}$  και  $P_{cr2}=10.15\text{ kN}$ . Με την αναλυτική λύση προκύπτει αντίστοιχα  $P_{cr1}=33.9\text{ kN}$  και  $P_{cr2}=10.17\text{ kN}$ , μια απόκλιση δηλαδή ίση με  $-0.18\%$  του φορτίου της αριθμητικής λύσης από την αναλυτική.

#### 4.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων που επιλέγονται να συγκριθούν με τα αριθμητικά αποτελέσματα. Η σύγκριση έγινε για 208 διαφορετικά πλαίσια στα οποία αντιστοιχούν ορισμένες αντιπροσωπευτικές τιμές των παραμέτρων τους. Η μέγιστη απόκλιση των δύο λύσεων τελικά ανέρχεται στο 4.7% και οφείλεται στην χρήση διατομών στο ADINA [10] που δεν πληρούσαν τον ακριβή λόγο  $I_2/I_1$  που αναγράφεται, επιβεβαιώνοντας έτσι την ορθότητα των αναλυτικών σχέσεων.

Πίνακας 4-1: Αριθμητικά αποτελέσματα και αποκλίσεις από αναλυτικά, για ορισμένες τιμές των παραμέτρων του πλαισίου.

	$I_2/I_1$	$H_1/2L$	$P_2/P_1$	$\varphi(^{\circ})$						
				0		20		60		
				$P_{num}$ (kN)	Απόκλιση %	$P_{num}$ (kN)	Απόκλιση %	$P_{num}$ (kN)	Απόκλιση %	
Αρθρώσεις	1	0.5	0	35.33	0.008	34.35	0.001	24.27	0.003	
			0.3	34.88	0.006	33.84	0.010	23.05	0.006	
			0.5	34.56	0.004	33.49	0.004	22.23	0.001	
			$\infty$	245.33	0.040	216.59	0.020	61.33	0.040	
			$\infty$	149.9	0.045	-	-	-	-	
			0	11.31	0.040	11.12	0.001	8.83	0.017	
	1	1	0.3	11.28	0.035	11.09	0.002	8.72	0.001	
			0.5	11.27	0.000	11.06	0.001	8.64	0.002	
			$\infty$	245.30	0.026	216.59	0.020	61.33	0.040	
			$\infty$	117.5	-0.002	-	-	-	-	
			0	45.77	0.051	45.00	0.055	35.99	0.090	
			0.3	45.53	0.104	44.75	0.055	35.09	0.093	
	2	0.5	0.5	45.40	0.056	44.58	0.055	34.46	0.800	
			$\infty$	511.74	4.330	451.74	4.340	127.93	4.340	
			$\infty$	241.5	2.763	-	-	-	-	
			0	57.38	0.003	57.14	0.001	53.83	0.002	
			0.3	57.36	0.800	57.12	0.002	53.71	0.002	
			0.5	57.35	0.003	57.11	0.003	53.63	0.001	
10	0.5	$\infty$	2426.11	-1.070	2142.3	-1.070	606.5	-1.070		
		$\infty$	746	-0.996	-	-	-	-		
		0	149.86	0.015	146.76	0.012	117.5	0.011		
		0.3	143.43	0.018	139.65	0.021	99.98	0.015		
Πακτώσεις	1	0.5	0.5	138.68	0.016	134.36	0.017	87.38	0.020	
			$\infty$	288.49	0.000	256.70	0.049	80.13	0.041	
			$\infty$	164.2	0.019	-	-	-	-	
			0	45.85	0.014	45.14	0.007	37.46	0.804	
			0.3	45.37	0.093	44.66	0.016	35.85	0.008	
			0.5	45.12	0.009	44.32	0.013	34.67	0.009	
	1	1	$\infty$	268.39	0.000	238.2	0.032	72.04	0.004	
			$\infty$	130.2	0.0133	-	-	-	-	
			0	185.24	0.033	182.48	0.033	151.9	0.057	
			0.3	181.51	0.252	178.64	0.038	138.61	0.069	
			0.5	179.42	0.041	175.78	0.042	128.10	0.082	
			2	0.5	0.3	181.51	0.252	178.64	0.038	138.61
				0.5	179.42	0.041	175.78	0.042	128.10	0.082

		$\infty$	561.35	4.600	498.61	4.688	149.51	3.755
		$\infty$	267.6	0.013	-	-	-	-
		0	229.60	0.024	228.66	0.023	215.62	0.017
		0.3	229.33	0.026	228.32	0.023	213.61	0.017
10	0.5	0.5	229.12	0.022	228.09	0.024	212.06	0.017
		$\infty$	2475.0	-1.053	2188.0	-1.052	630.44	-1.061
		$\infty$	789.8	-0.864	-	-	-	-

# 5 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

## 5.1 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΛΕΓΧΟΥ

Αφού επιβεβαιώθηκε η αξιοπιστία των αναλυτικών σχέσεων μέσω της σύγκρισής τους με τις αριθμητικές, επιλύονται για τις παρακάτω τιμές των παραμέτρων ελέγχου και για δύο συνθήκες στήριξης στη βάση των πλαισίων (άρθρωση και πάκτωση), με χρήση του προγράμματος αριθμητικής ανάλυσης MATLAB [9]:

$\varphi$ : 0, 5, 10, 15, 20, 30, 45, 60

$I_2/I_1$ : 0.5, 1, 2, 10

$H_1/2L$ : 5, 10, 15, 20

$P_2/P_1$ : 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 για υπολογισμό του μήκους λυγισμού του υποστυλώματος

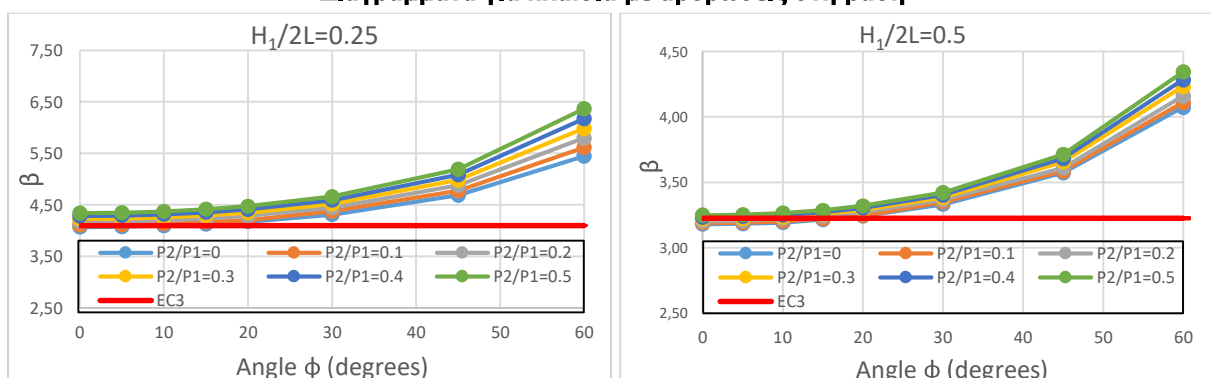
$P_1/P_2$ : 0 για υπολογισμό του μήκους λυγισμού του ζυγώματος

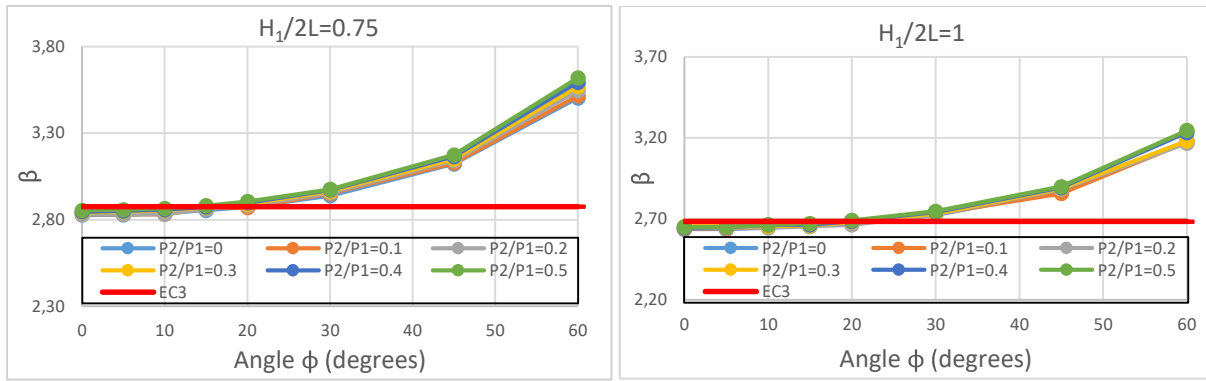
Τα μεγέθη που διατηρούνται σταθερά καθώς μεταβάλλονται οι λόγοι, είναι το άνοιγμα του πλαισίου  $2L=20\text{m}$  και η ροπή αδρανείας του υποστυλώματος  $I_1=1.183 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ .

## 5.2 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

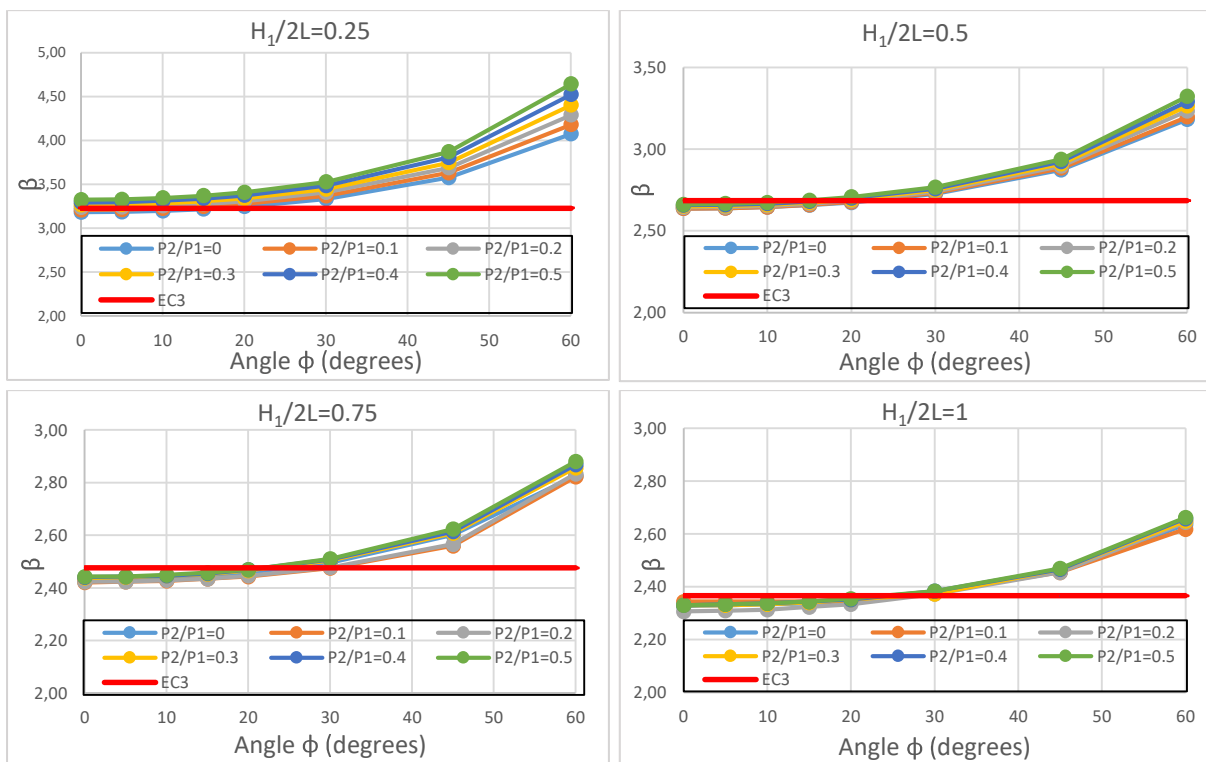
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα που αφορούν στον υπολογισμό του μήκους λυγισμού του υποστυλώματος, όπως προέκυψαν από τις παραμετρικές αναλύσεις με χρήση των αναλυτικών εξισώσεων που διατυπώθηκαν (Κεφ. **Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**).

Διαγράμματα για πλαίσια με αρθρώσεις στη βάση

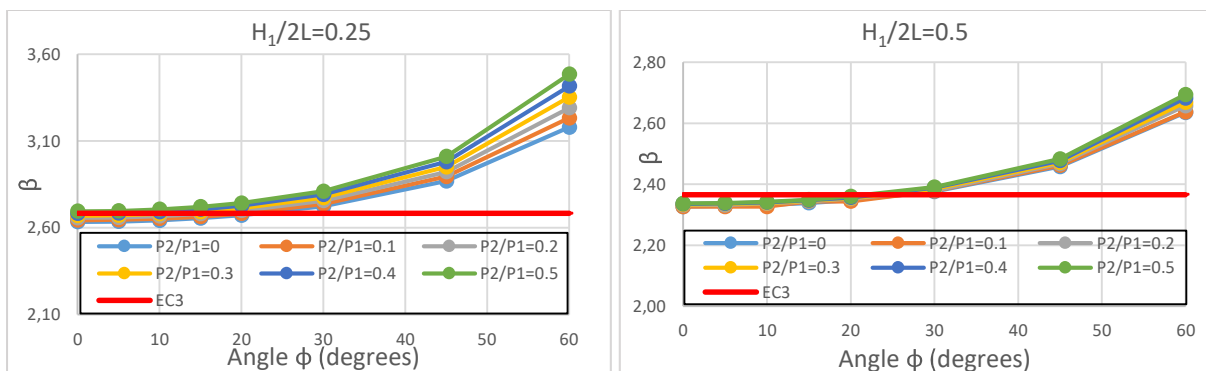




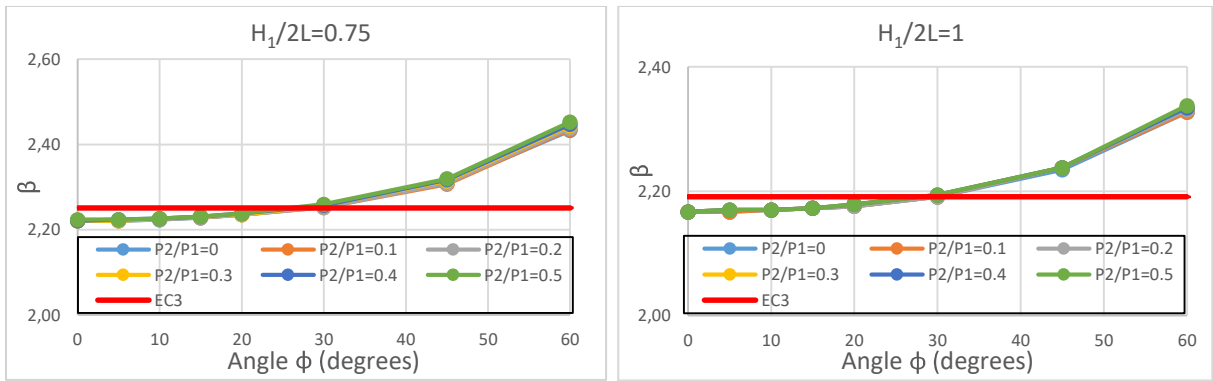
Σχήμα 5-1: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού πλαισίου με αρθρώσεις στη βάση συναρτήσει των  $\phi$ ,  $P_2/P_1$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=0.5$



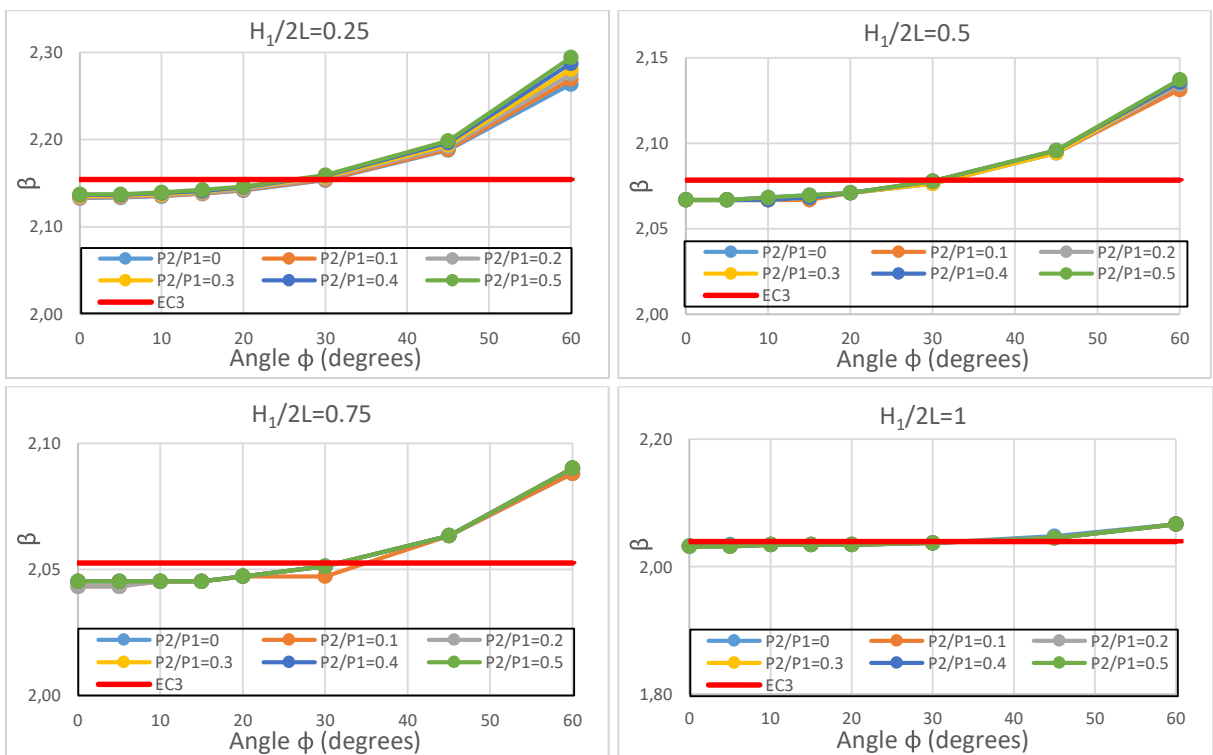
Σχήμα 5-2: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού πλαισίου με αρθρώσεις στη βάση συναρτήσει των  $\phi$ ,  $P_2/P_1$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=1$





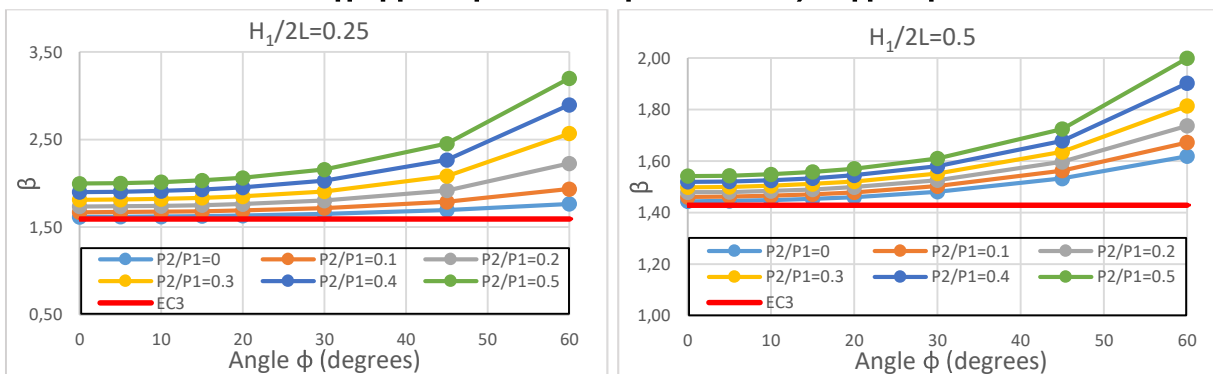


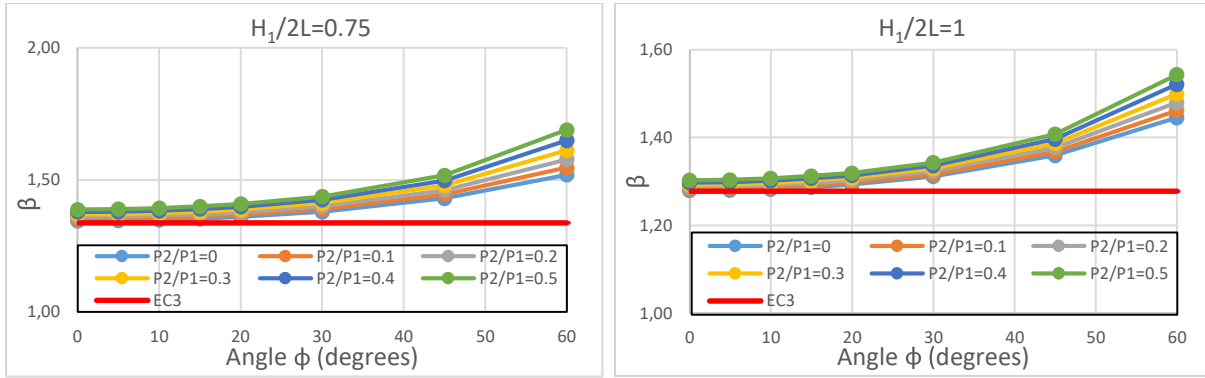
Σχήμα 5-3: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού πλαισίου με αρθρώσεις στη βάση συναρτήσει των  $\phi$ ,  $P_2/P_1$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=2$



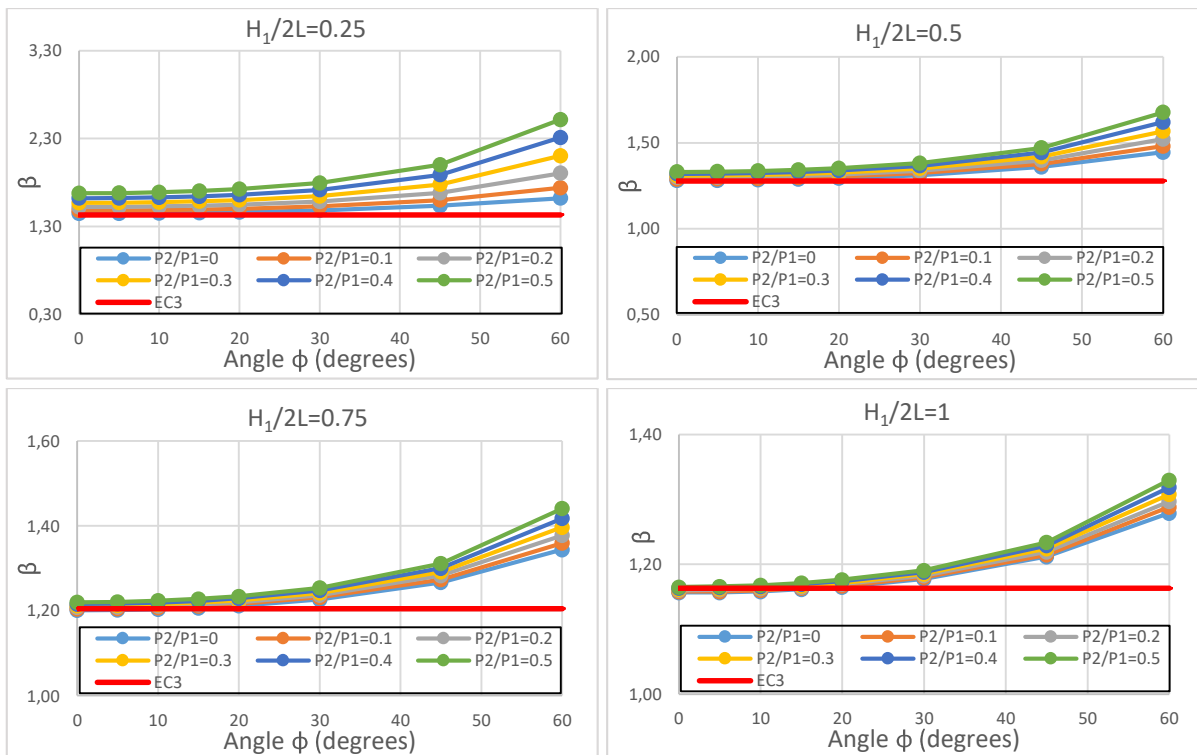
Σχήμα 5-4: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού πλαισίου με αρθρώσεις στη βάση συναρτήσει των  $\phi$ ,  $P_2/P_1$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=10$

**Διαγράμματα για πλαίσια με πακτώσεις στη βάση**

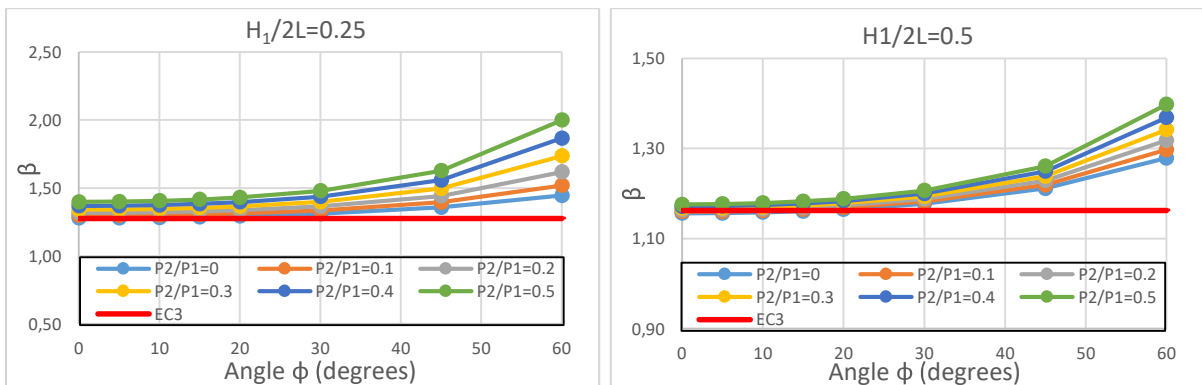


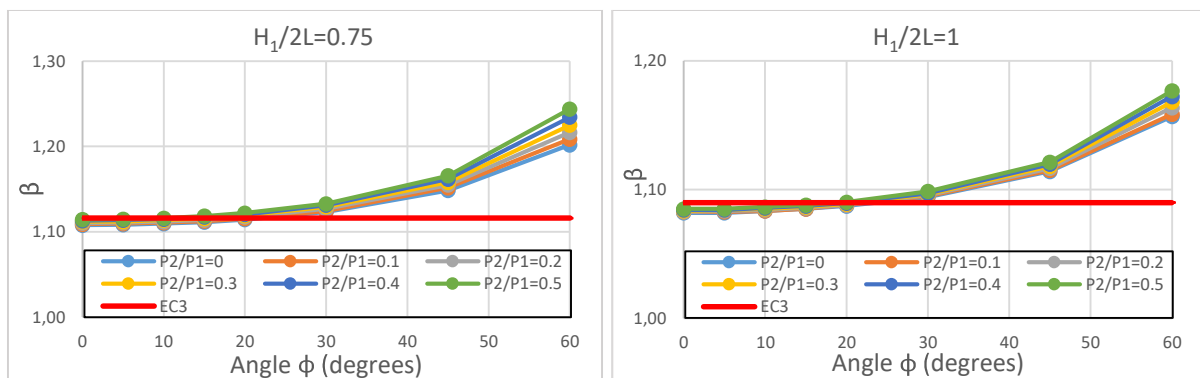


Σχήμα 5-5: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού υποστυλωμάτων πλαισίου με πακτώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$ ,  $P_2/P_1$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=0.5$

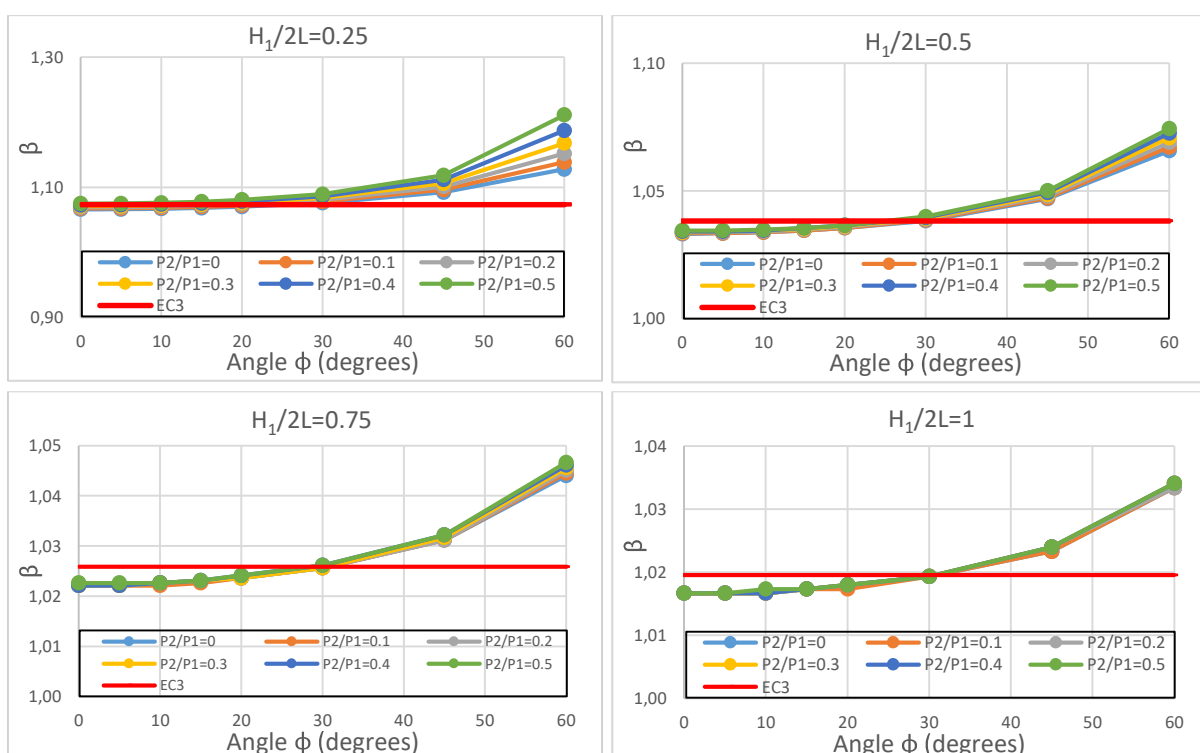


Σχήμα 5-6: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού υποστυλωμάτων πλαισίου με πακτώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$ ,  $P_2/P_1$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=1$





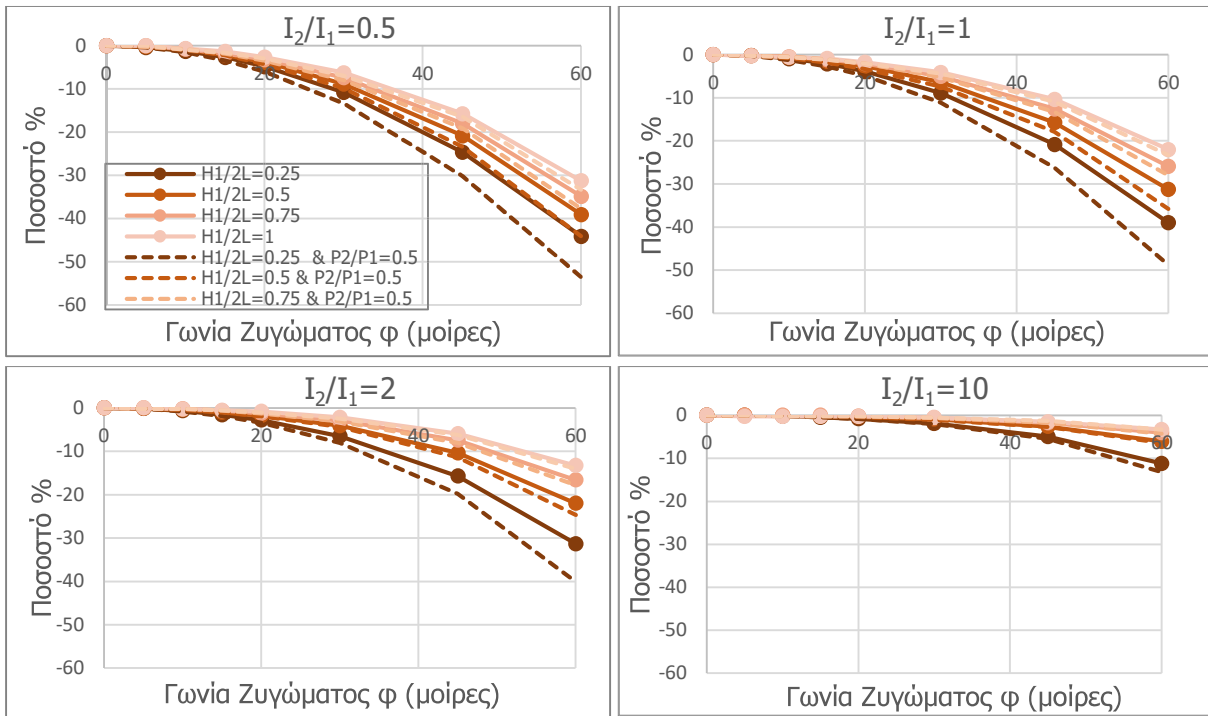
Σχήμα 5-7: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού υποστυλωμάτων πλαισίου με πακτώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$ ,  $P_2/P_1$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=2$



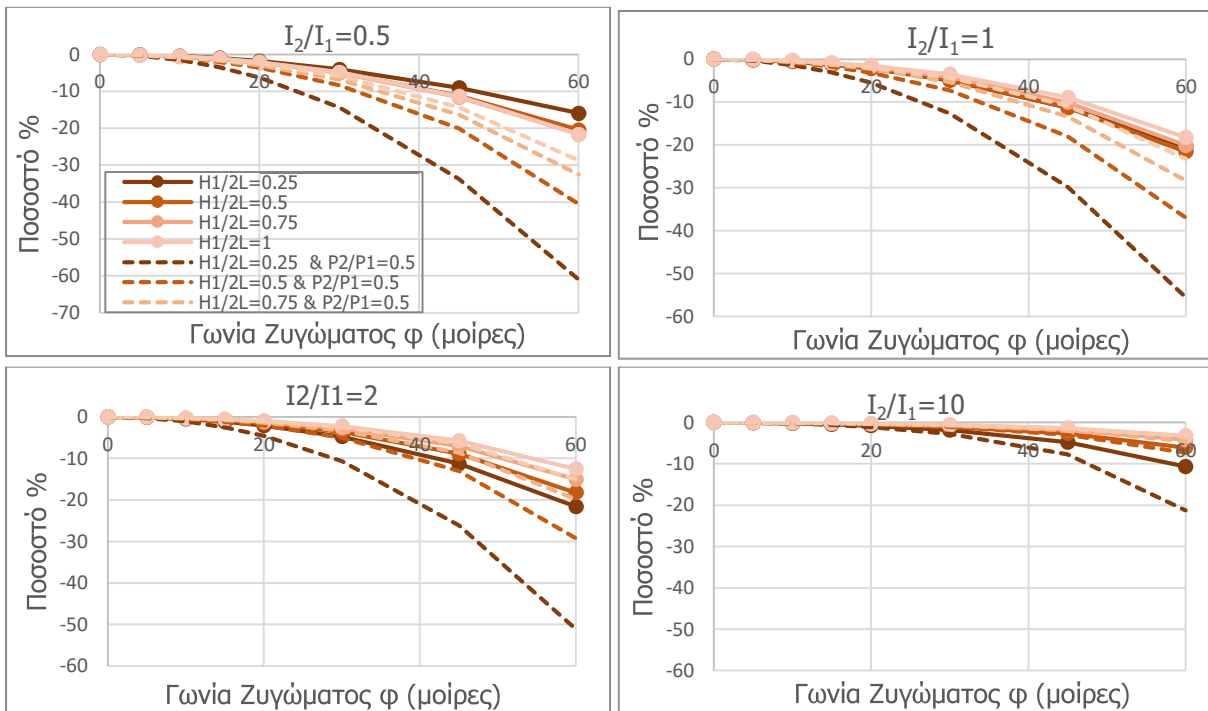
Σχήμα 5-8: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού υποστυλωμάτων πλαισίου με πακτώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$ ,  $P_2/P_1$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=10$

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούνται τα εξής:

- Καθώς αυξάνεται η κλίση του ζυγώματος  $\phi$ , μειώνεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος. Η μείωση αυτή είναι εντονότερη, όσο πιο μικρός είναι ο λόγος ύψους προς άνοιγμα  $H_1/2L$  και ο λόγος των ροπών αδρανείας ζυγώματος προς υποστυλώματος  $I_2/I_1$ .

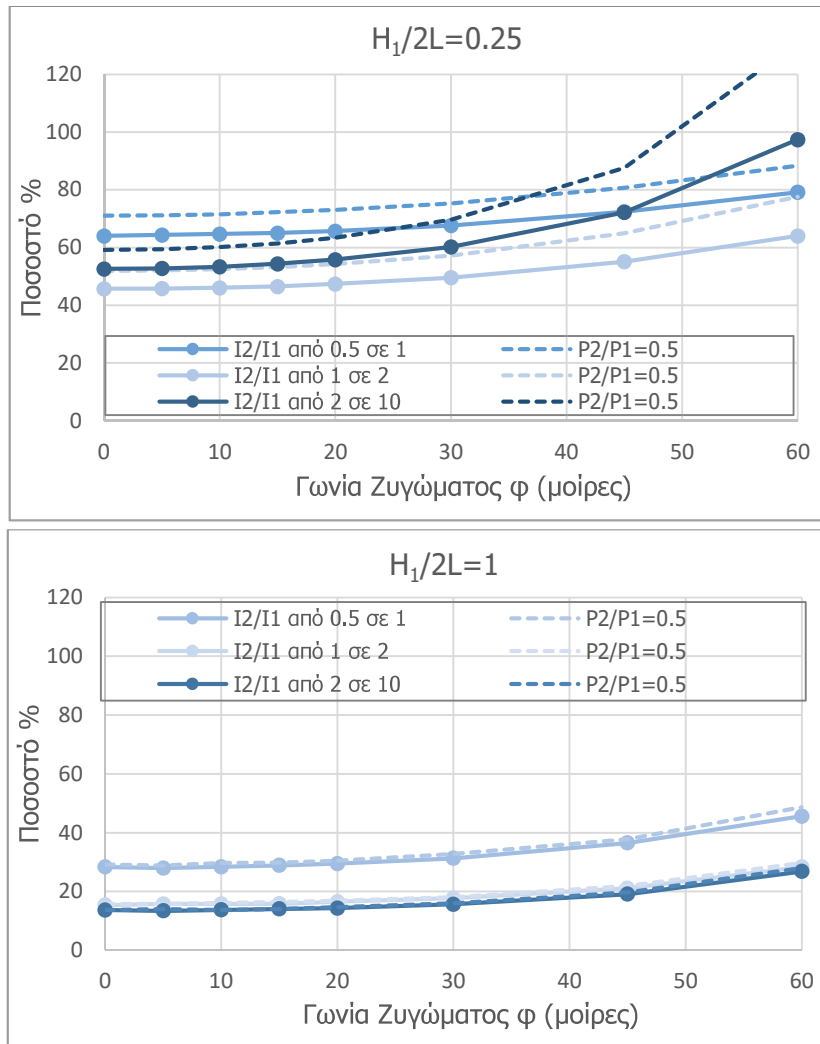


Σχήμα 5-9: Μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος συναρτήσει της γωνίας  $\phi$  του ζυγώματος, για πλαίσια με αρθρώσεις.

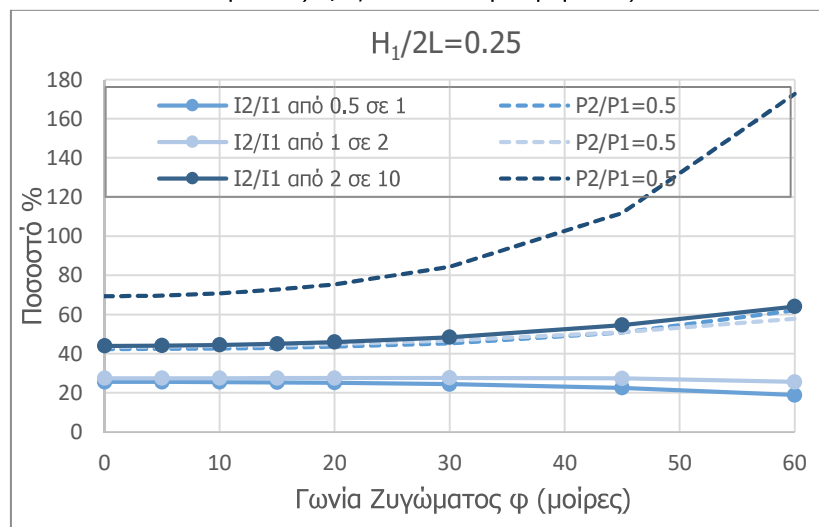


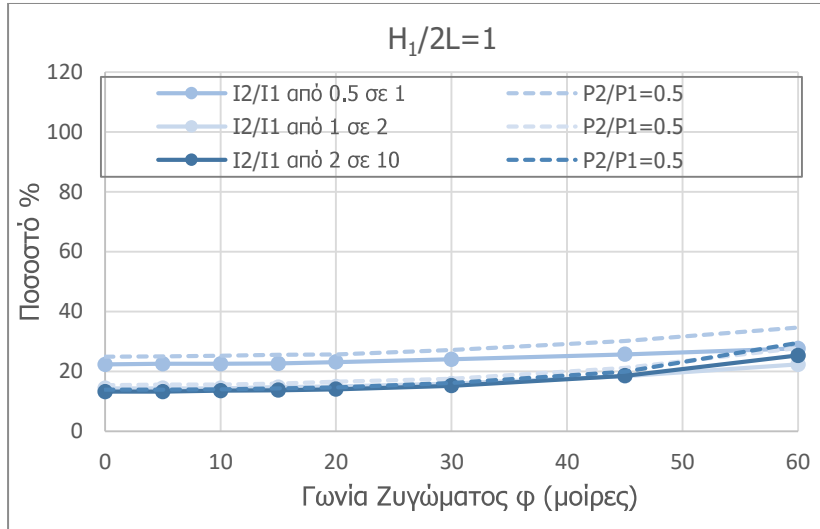
Σχήμα 5-10: Μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος συναρτήσει της γωνίας  $\phi$  του ζυγώματος, για πλαίσια με πακτώσεις.

- Καθώς αυξάνεται η δυσκαμψία του ζυγώματος (με αύξηση του λόγου των ροπών αδρανείας  $I_2/I_1$ ), αυξάνεται και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος.



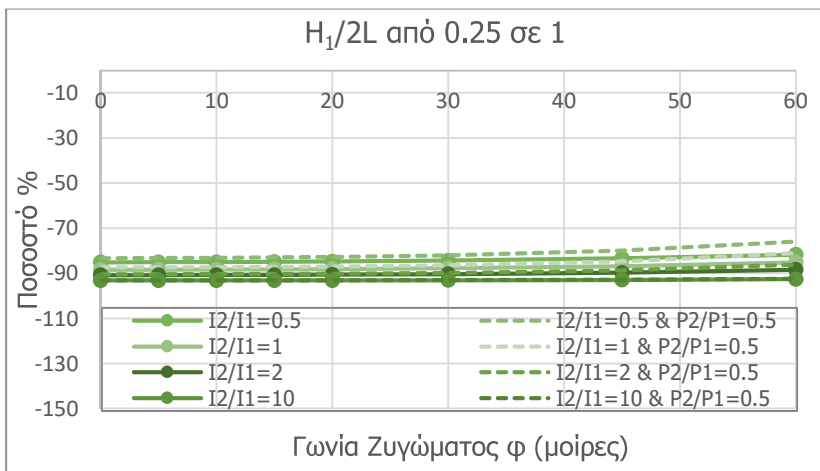
Σχήμα 5-11: Αύξηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος για αύξηση του λόγου των ροπών αδρανείας  $I_2/I_1$ , σε πλαίσια με αρθρώσεις.



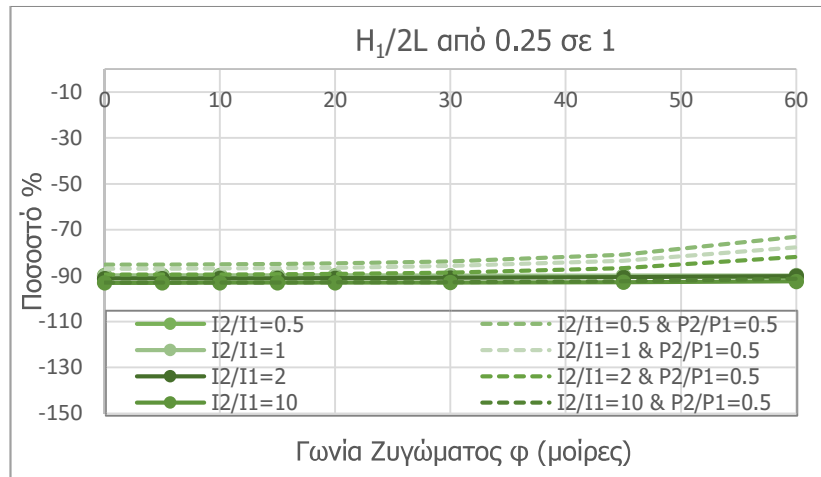


Σχήμα 5-12: Αύξηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος για αύξηση του λόγου των ροπών αδρανείας  $I_2/I_1$ , σε πλαίσια με πακτώσεις.

- Καθώς αυξάνεται ο λόγος ύψους υποστυλώματος προς άνοιγμα του πλαισίου  $H_1/2L$ , μειώνεται το ισοδύναμο μήκος λυγισμού  $\beta$  του υποστυλώματος αλλά λόγω της σχετικής αύξησης του γεωμετρικού μήκους  $H_1$ , μειώνεται τελικά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος.

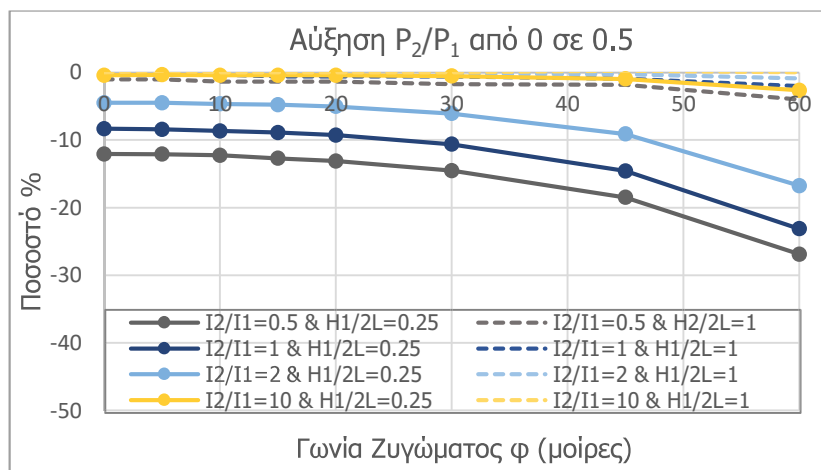


Σχήμα 5-13: Μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος για αύξηση του λόγου ύψους προς άνοιγμα πλαισίου  $H_1/2L$  από 0.25 σε 1, σε πλαίσια με αρθρώσεις

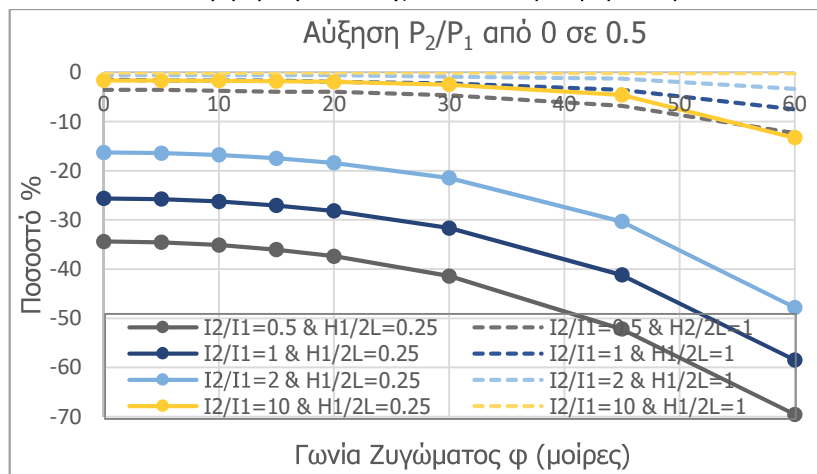


Σχήμα 5-14: Μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος για αύξηση του λόγου ύψους προς άνοιγμα πλαισίου  $H_1/2L$  από 0.25 σε 1, σε πλαίσια με πακτώσεις

- Καθώς αυξάνεται ο λόγος των φορτίων ζυγώματος προς υποστυλώματος  $P_2/P_1$ , μειώνεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος. Για μεγάλους λόγους  $H_1/2L$ , η μείωση αυτή σταδιακά εξαλείφεται και ανεξαρτητοποιείται από τον λόγο  $P_2/P_1$ .



Σχήμα 5-15: Αύξηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος για αύξηση της θλιπτικής δύναμης στο ζύγωμα ( $P_2/P_1 > 0$ ), σε πλαίσια με αρθρώσεις.

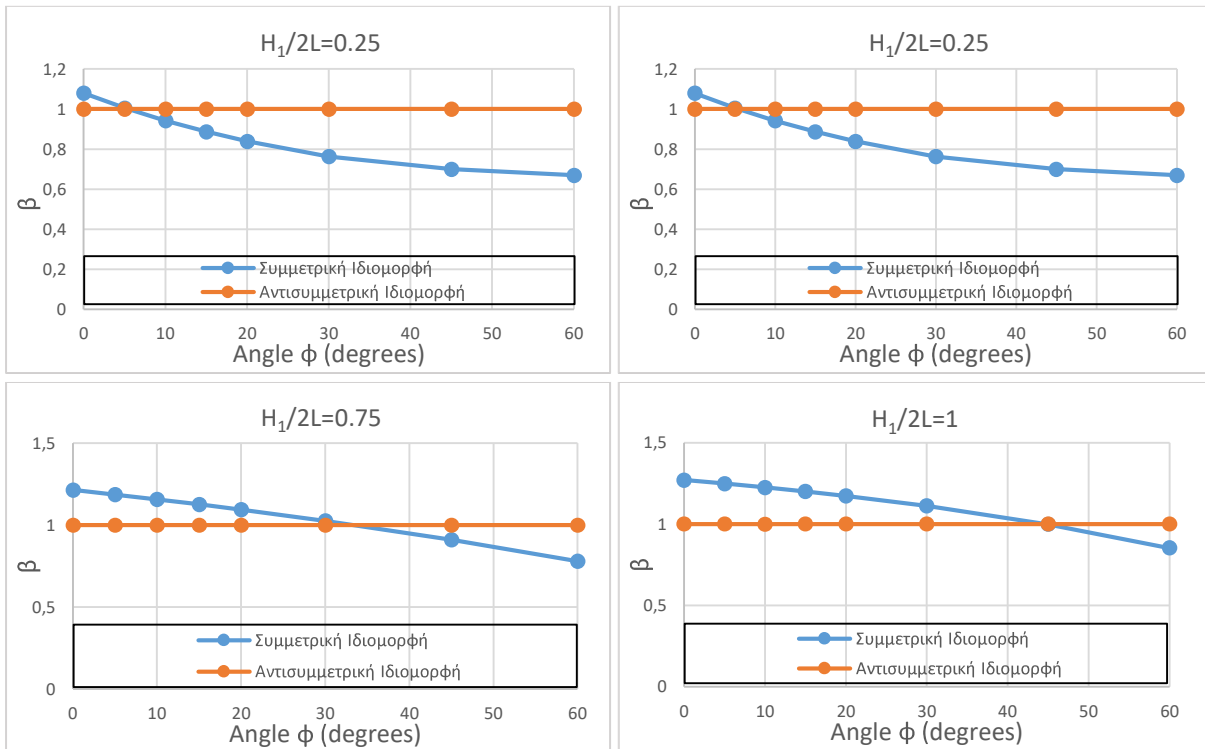


Σχήμα 5-16: Αύξηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του υποστυλώματος για αύξηση της θλιπτικής δύναμης στο ζυγώμα ( $P_2/P_1 > 0$ ), σε πλαίσια με πακτώσεις.

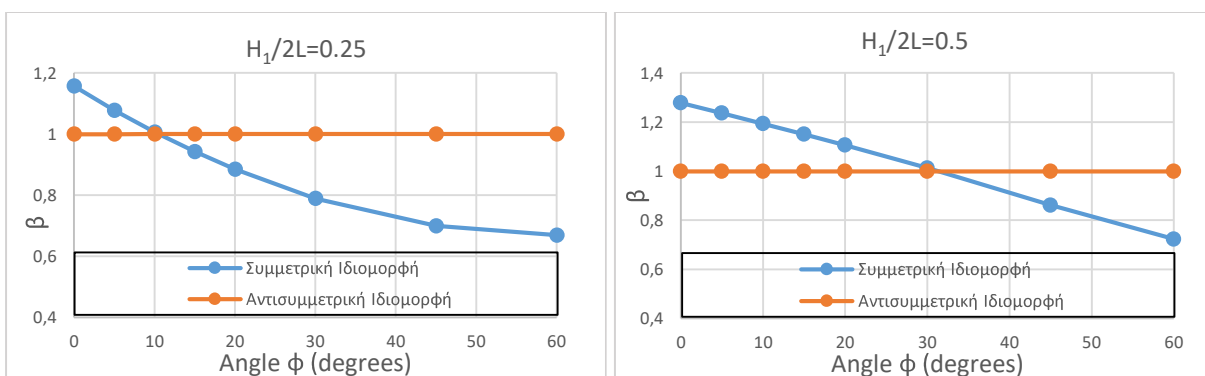
### 5.3 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΖΥΓΩΜΑΤΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα που αφορούν στον υπολογισμό του μήκους λυγισμού του ζυγώματος, όπως προέκυψαν από τις παραμετρικές αναλύσεις με χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ADINA [10]:

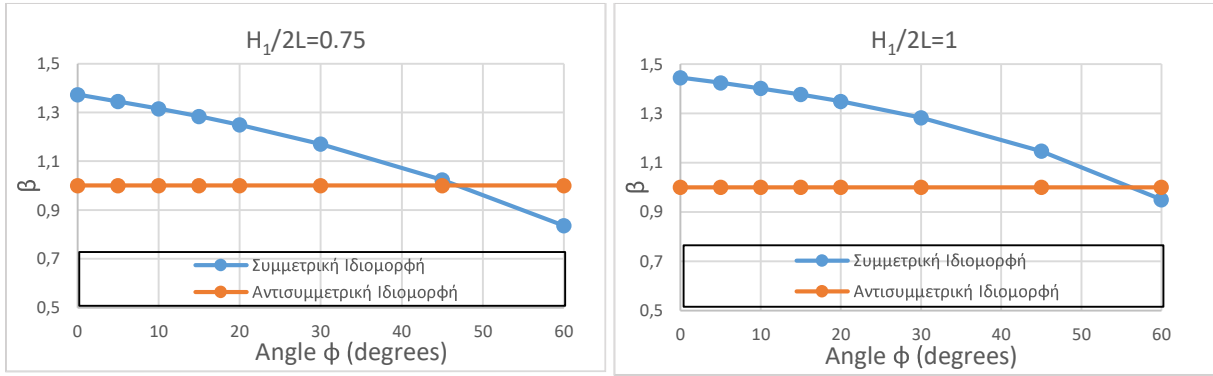
#### Διαγράμματα για πλαίσια με αρθρώσεις στη βάση



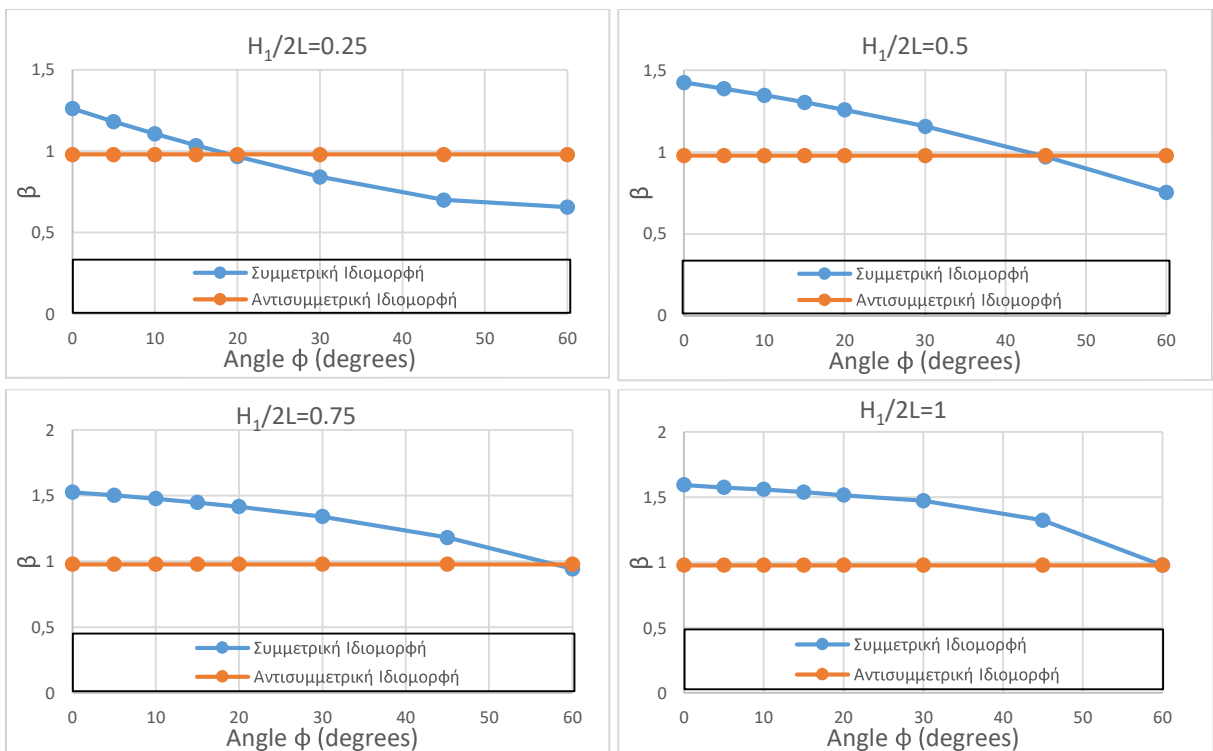
Σχήμα 5-17: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού ζυγώματος πλαισίου με αρθρώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=0.5$



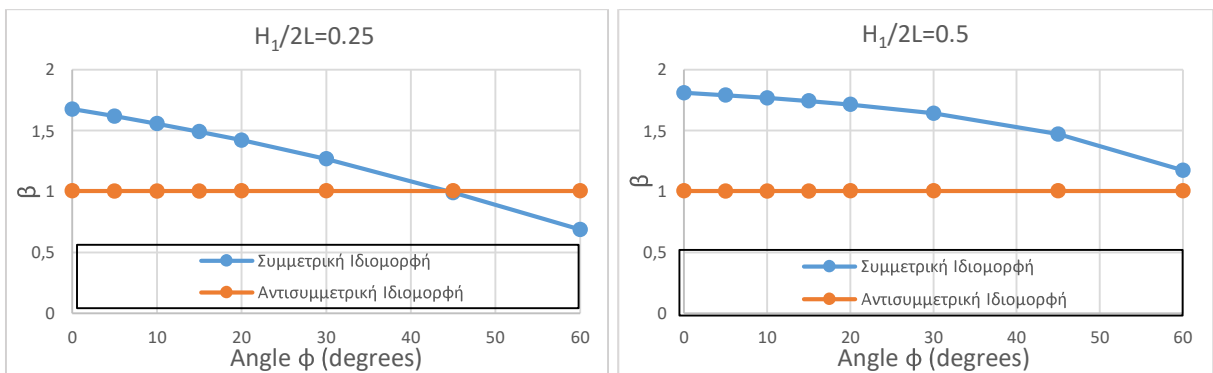


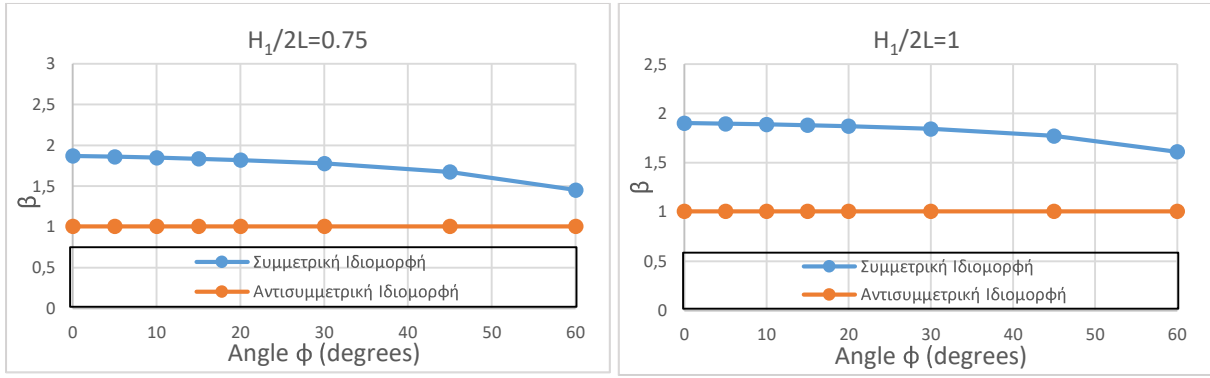


Σχήμα 5-18: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού ζυγώματος πλαισίου με αρθρώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=1$



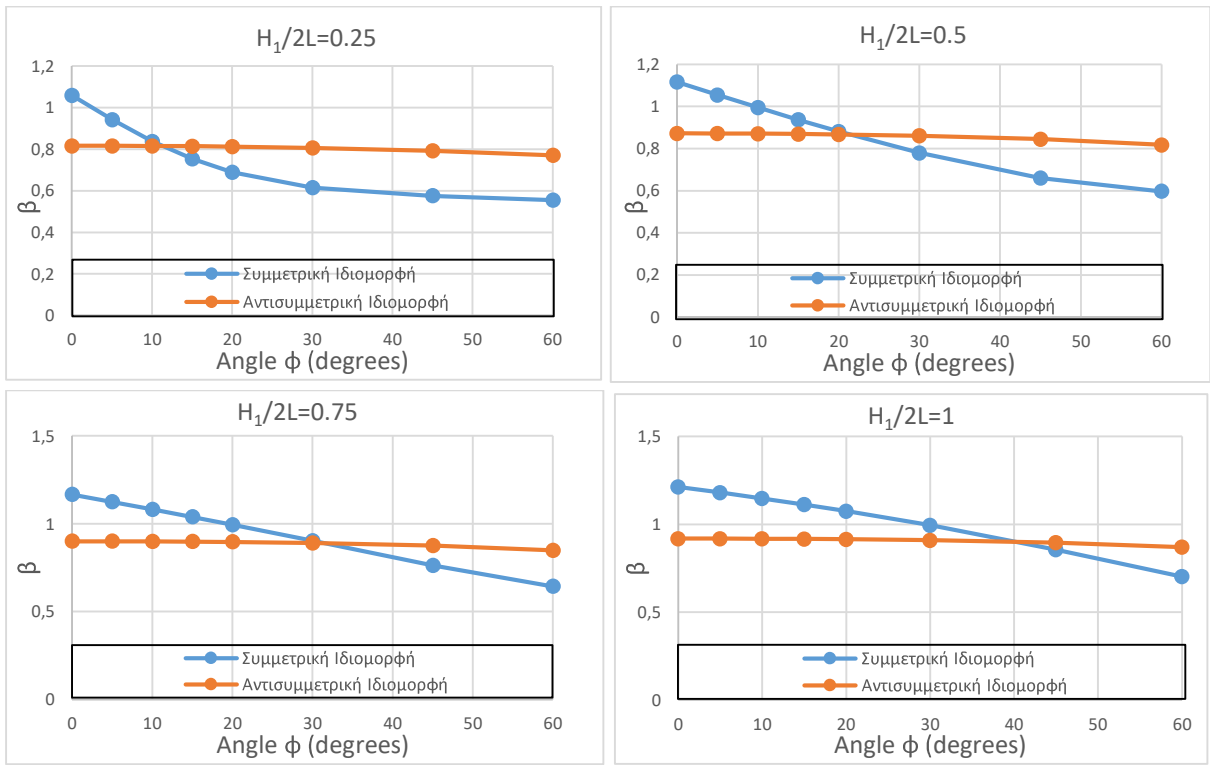
Σχήμα 5-19: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού ζυγώματος πλαισίου με αρθρώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=2$



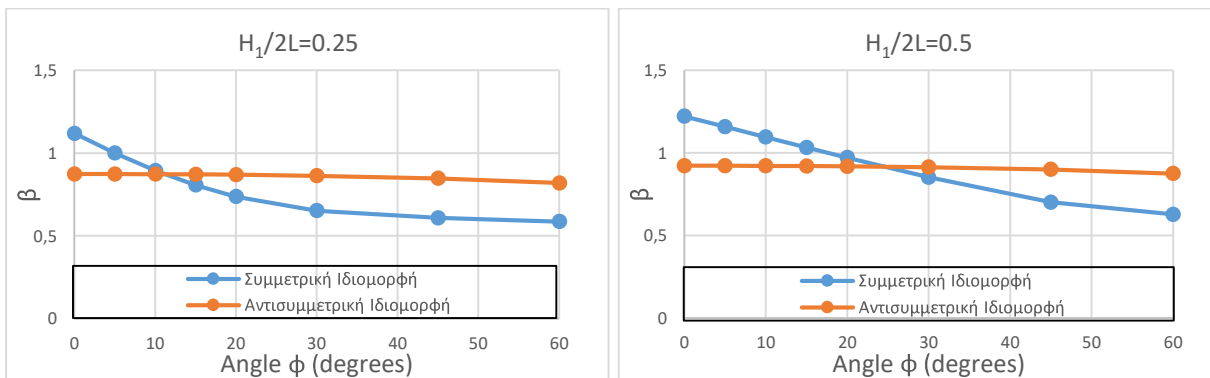


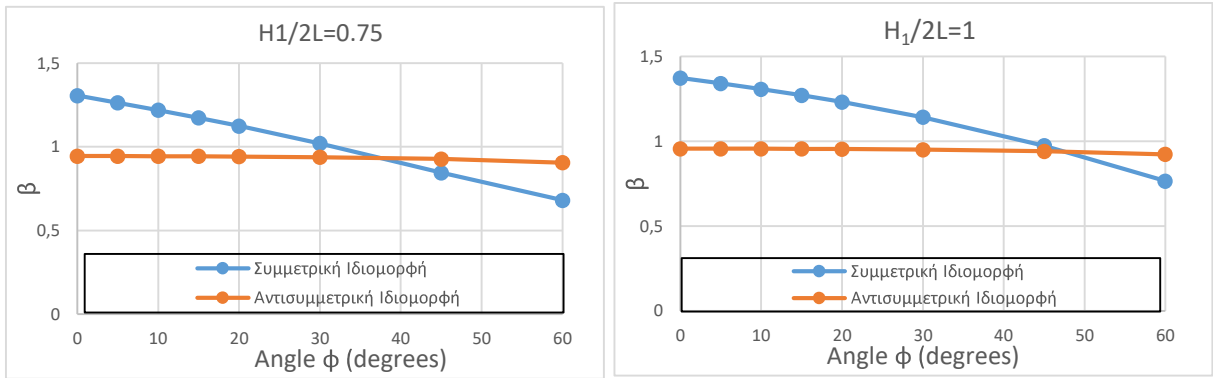
Σχήμα 5-20: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού ζυγώματος πλαισίου με αρθρώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=10$

**Διαγράμματα για πλαίσια με πακτώσεις στη βάση**

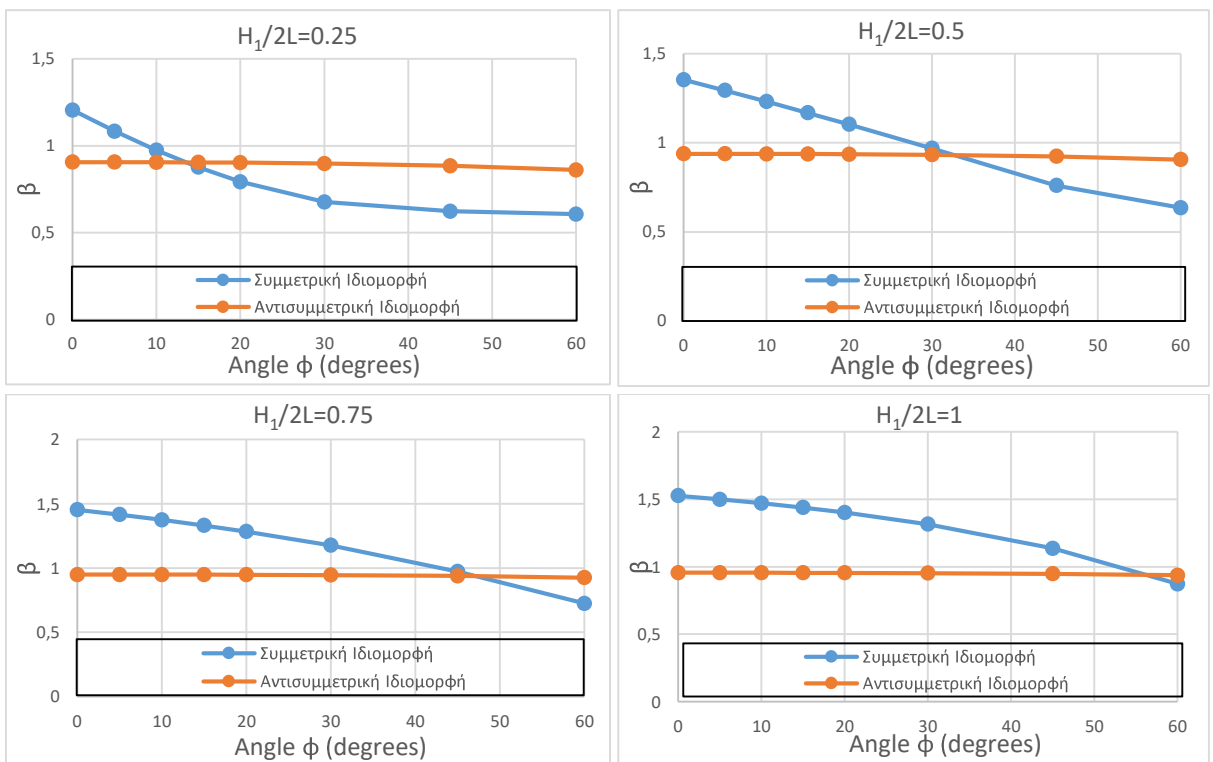


Σχήμα 5-21: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού ζυγώματος πλαισίου με πακτώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=0.5$

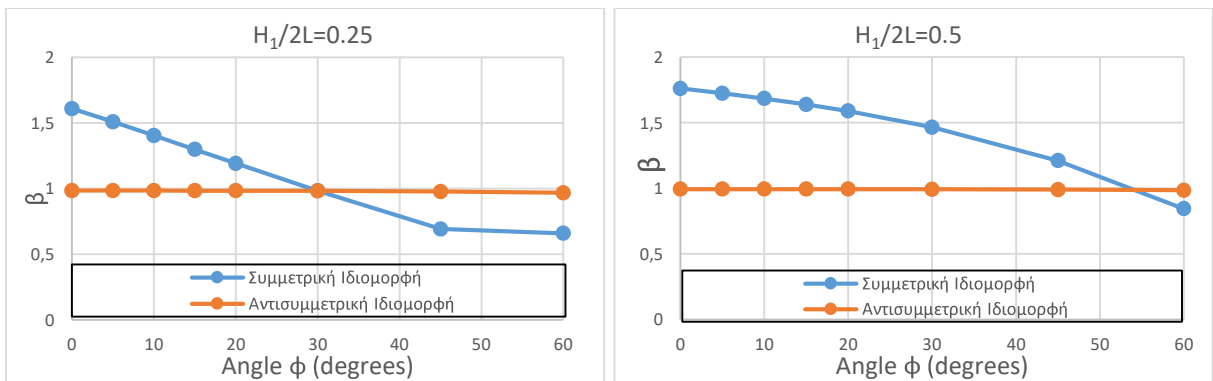


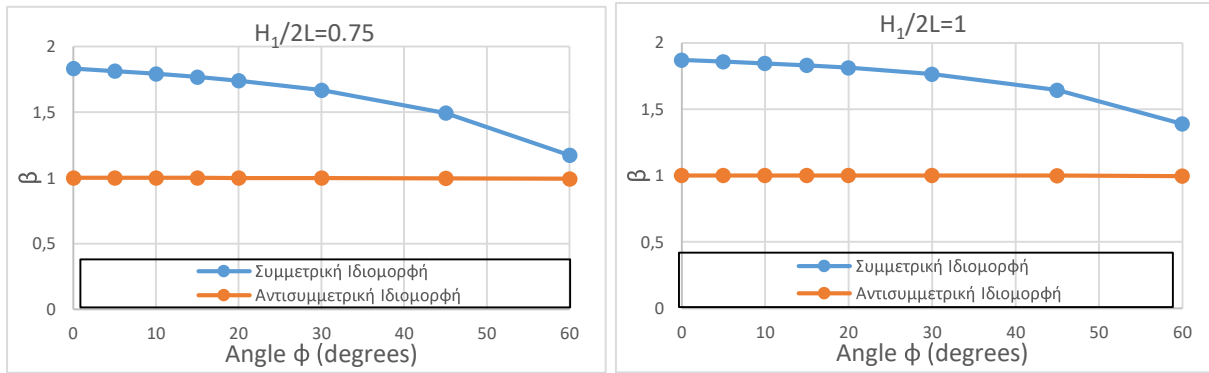


Σχήμα 5-22: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού ζυγώματος πλαισίου με πακτώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=1$



Σχήμα 5-23: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού ζυγώματος πλαισίου με πακτώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=2$





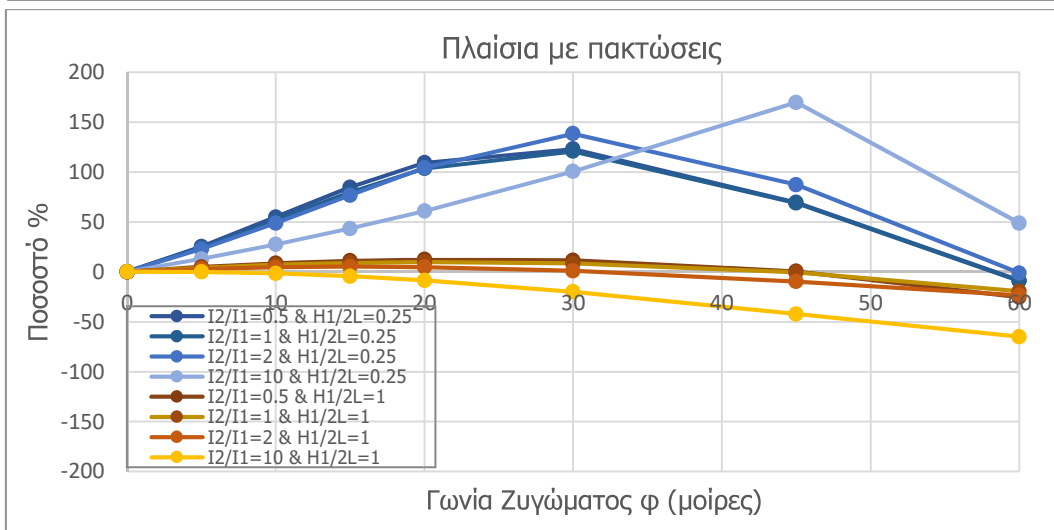
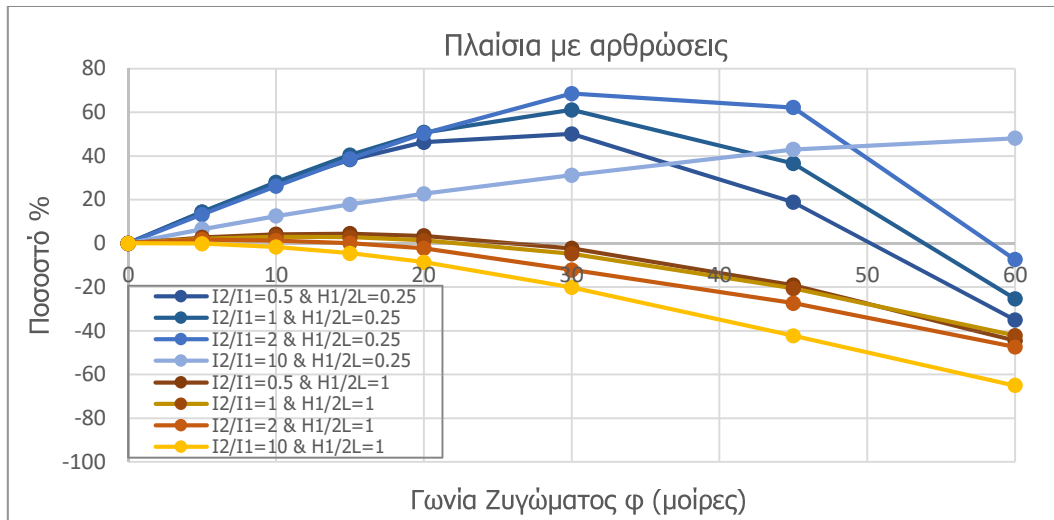
Σχήμα 5-24: Μεταβολή ισοδύναμου μήκους λυγισμού ζυγώματος πλαισίου με πακτώσεις στη βάση, συναρτήσει των  $\phi$  και  $H_1/2L$  για σταθερό λόγο  $I_2/I_1=10$

Από τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνουμε ότι:

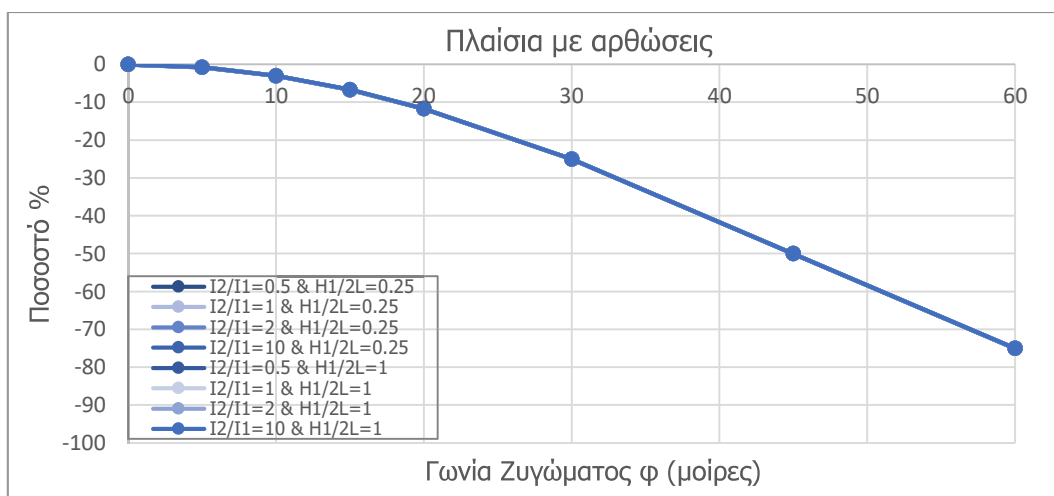
- Καθώς αυξάνεται η κλίση του ζυγώματος  $\phi$ , μειώνεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr1}$  του ζυγώματος της συμμετρικής ιδιομορφής. Η μείωση αυτή εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλαισίου. Επιπλέον, αυξάνεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr2}$  της αντισυμμετρικής ιδιομορφής και μάλιστα με σταθερό τρόπο, ανεξαρτήτως των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των πλαισίων.

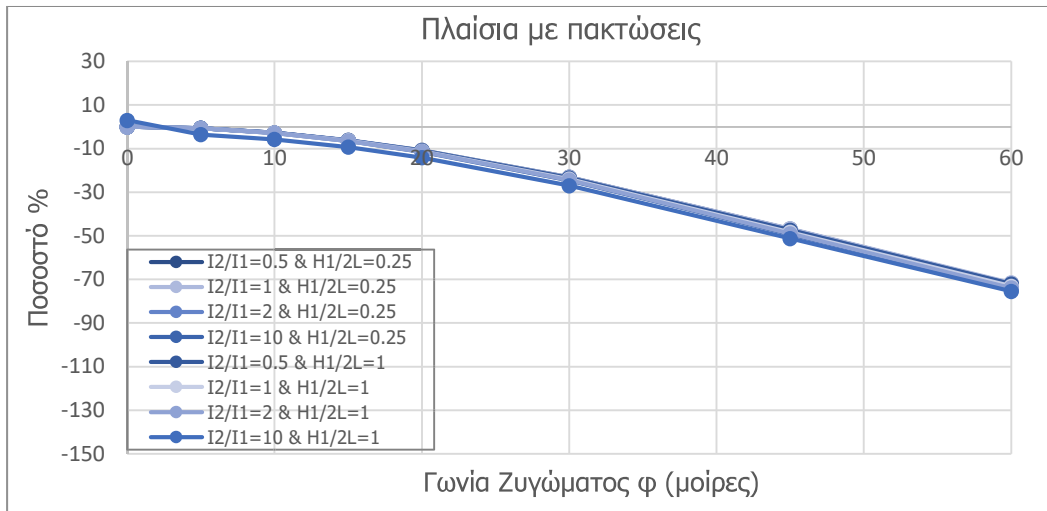
Πίνακας 5-1: Μεταβολή της τιμής των κρίσιμων φορτίων λόγω της κλίσης  $\phi$  στο ζύγωμα σε πλαίσια με αρθρώσεις

	$I_2/I_1 = 0.5$				$I_2/I_1 = 10$			
	$H_1/2L = 0.25$		$H_1/2L = 1$		$H_1/2L = 0.25$		$H_1/2L = 1$	
$\phi$ (degrees)	$\Delta P_1\%$	$\Delta P_2\%$	$\Delta P_1\%$	$\Delta P_2\%$	$\Delta P_1\%$	$\Delta P_2\%$	$\Delta P_1\%$	$\Delta P_2\%$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	14.37	-0.77	2.70	-0.73	6.57	-0.74	-0.18	-0.74
10	27.41	-3.02	4.21	-2.98	12.54	-3.00	-1.65	-3.00
15	38.33	-6.72	4.47	-6.68	17.92	-6.68	-4.52	-6.68
20	46.34	-11.74	3.47	-11.7	22.75	-11.71	-8.65	-11.71
30	50.14	-25.02	-2.24	-24.99	31.24	-25.02	-20.10	-25.02
45	18.85	-50.01	-19.10	-49.99	43.00	-50.00	-42.35	-50.00
60	-35.0	-75.01	-44.55	-74.99	48.15	-75.00	-65.13	-75.00



Σχήμα 5-25: Ποσοστό % αύξησης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του ζυγώματος ισομετρικής ιδιομορφής συναρτήσει της αύξησης της γωνίας  $\phi$





Σχήμα 5-26: Ποσοστό % αύξησης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{cr}$  του ζυγώματος αντισυμμετρικής ιδιομορφής συναρτήσει της αύξησης της γωνίας  $\phi$

- Καθώς αυξάνεται η γωνία του ζυγώματος, ο λόγος του φορτίου της συμμετρικής ιδιομορφής προς το αντίστοιχο της αντισυμμετρικής  $P_{cr2}/P_{cr1}$  αυξάνει. Η τάση αυτή γίνεται λιγότερο έντονη όσο ο λόγος ροπών  $I_2/I_1$  και ύψους προς άνοιγμα  $H_1/2L$  μεγαλώνει. Από τον λόγο  $P_{cr2}/P_{cr1}$  φαίνεται ποιά είναι η κρίσιμη ιδιομορφή λυγισμού.

Πίνακας 5-2: Λόγος φορτίου συμμετρικής και αντισυμμετρικής ιδιομορφής  $P_{cr2}/P_{cr1}$  συναρτήσει της γωνίας  $\phi$ , για διάφορες τιμές των λόγων  $I_2/I_1$  και  $H_1/2L$

#### Αρθρώσεις

Συμμετρική	Αντισυμμετρική	$H_1/2L=0.25$			
		$I_2/I_1=0.5$	$I_2/I_1=1$	$I_2/I_1=2$	$I_2/I_1=10$
$\phi$ (degrees)					
	0	0.86	0.75	0.60	0.36
	5	<b>0.99</b>	0.86	0.69	0.39
	10	1.13	<b>0.99</b>	0.78	0.42
	15	1.27	1.13	0.90	0.45
	20	1.42	1.28	<b>1.03</b>	0.50
	30	1.72	1.61	1.35	0.63
	45	2.04	2.04	1.95	<b>1.03</b>
	60	2.23	2.23	2.23	2.13

Συμμετρική	Αντισυμμετρική	$H_1/2L=1$			
		$I_2/I_1=0.5$	$I_2/I_1=1$	$I_2/I_1=2$	$I_2/I_1=10$
$\phi$ (degrees)					
	0	0.62	0.48	0.38	0.28
	5	0.64	0.49	0.39	0.28

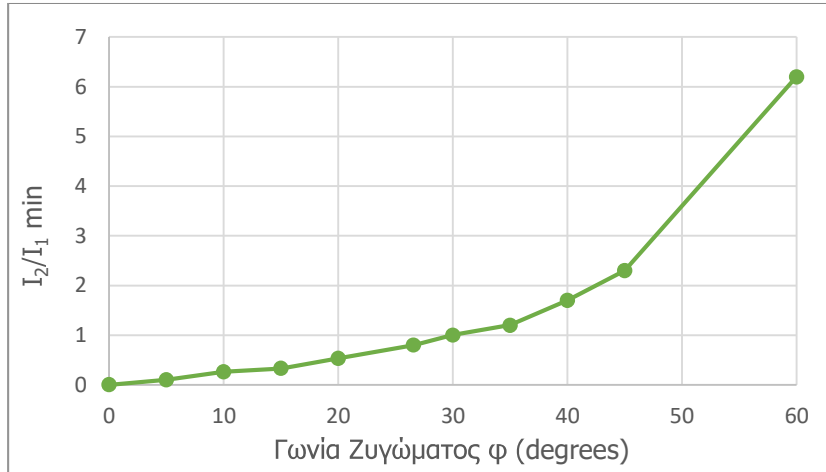
10	0.67	0.51	0.39	0.28
15	0.69	0.53	0.40	0.27
20	0.73	0.55	0.42	0.29
30	0.81	0.61	0.44	0.30
45	<b>1.00</b>	0.76	0.55	0.32
60	1.37	<b>1.11</b>	0.79	0.39

## Πακτώσεις

Συμμετρική	Αντισυμμετρική	$H_1/2L=0.25$			
$\varphi$ (degrees)		$I_2/I_1=0.5$	$I_2/I_1=1$	$I_2/I_1=2$	$I_2/I_1=10$
0		0.59	0.61	0.57	0.37
5		0.75	0.76	0.70	0.43
10		<b>0.95</b>	<b>0.95</b>	0.87	0.49
15		1.17	1.17	<b>1.06</b>	0.58
20		1.39	1.39	1.30	0.68
30		1.73	1.75	1.76	<b>0.99</b>
45		1.90	1.93	2.02	1.99
60		1.94	1.95	2.01	2.16

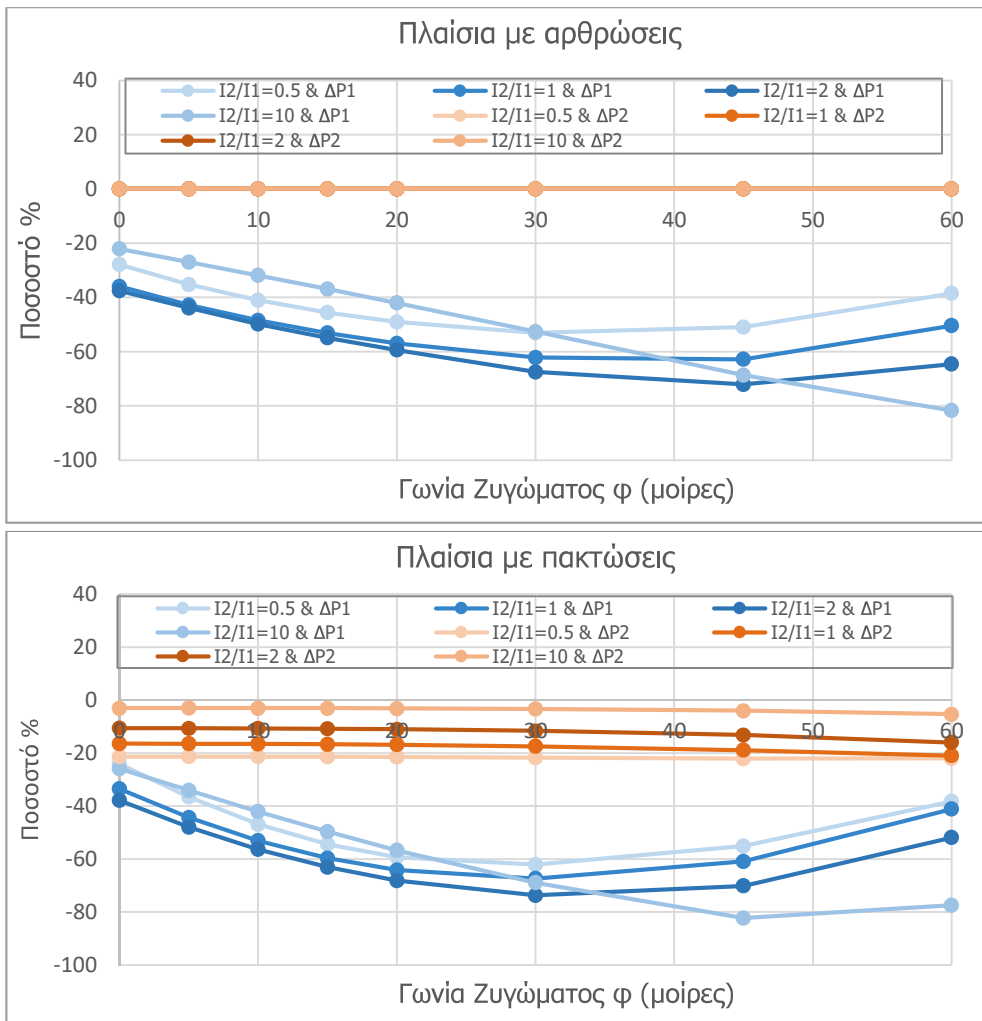
Συμμετρική	Αντισυμμετρική	$H_1/2L=1$			
$\varphi$ (degrees)		$I_2/I_1=0.5$	$I_2/I_1=1$	$I_2/I_1=2$	$I_2/I_1=10$
0		0,57	0,49	0,39	0,29
5		0,61	0,51	0,41	0,29
10		0,64	0,53	0,42	0,299
15		0,68	0,56	0,44	0,30
20		0,724	0,60	0,46	0,30
30		<b>0,84</b>	0,69	0,53	0,32
45		1,10	<b>0,93</b>	<b>0,70</b>	0,37
60		1,53	1,45	1,15	<b>0,51</b>

Μάλιστα παρατηρείται ότι το σημείο αυτό της αλλαγής της κρίσιμης ιδιομορφής από συμμετρική σε αντισυμμετρική εξαρτάται και από τον λόγο των ροπών αδρανείας ζυγώματος προς υποστυλώματος  $I_2/I_1$ . Όσο πιο μεγάλη είναι η κλίση  $\varphi$  του ζυγώματος, τόσο αυξάνεται και το όριο του λόγου  $I_2/I_1$  στον οποίο κρίσιμη είναι η συμμετρική ιδιομορφή. Ενδεικτικά, για πλαίσιο με αρθρώσεις και λόγο  $H_1/2L=0.5$ , παρατείνονται τα κατώτερα όρια  $I_2/I_1$  ανά γωνία  $\varphi$  ώστε κρίσιμη να είναι η συμμετρική ιδιομορφή.



Σχήμα 5-27: Ενδεικτικά όρια λόγων ροπών αδρανείας για πλαίσια με αρθρώσεις και  $H_1/2L=0.5$

- Καθώς αυξάνεται ο λόγος ύψους προς άνοιγμα  $H_1/2L$  του πλαισίου, μειώνεται το κρίσιμο φορτίο συμμετρικής ιδιομορφής  $P_{cr1}$  ενώ μειώνεται ελάχιστα και περισσότερο στα πλαίσια με πακτώσεις, το κρίσιμο φορτίο αντισυμμετρικής ιδιομορφής  $P_{cr2}$ .

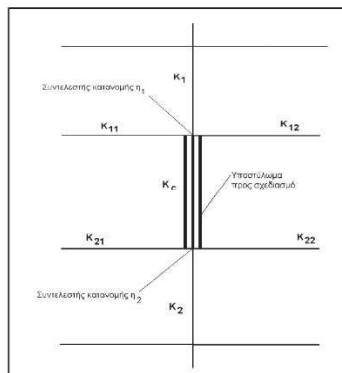




Σχήμα 5-28: Μεταβολή των φορτίων συμμετρικής και αντισυμμετρικής ιδιομορφής,  $P_{cr1}$  και  $P_{cr2}$  αντίστοιχα, για διάφορες τιμές του λόγου των ροπών ζυγώματος προς υποστυλώματος  $I_2/I_1$ , για αύξηση του λόγου ύψος προς άνοιγμα  $H_1/2L$  από 0.25 σε 1.

#### 5.4 ΣΥΝΙΣΤΩΜΕΝΗ ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ WOOD ΓΙΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ

Τα ισοδύναμα μήκη λυγισμού  $\beta$  που προέκυψαν αναλυτικά, συγκρίνονται με αυτά από τα διαγράμματα Wood. Η σύγκριση γίνεται με τις αναλυτικές επιλύσεις που αφορούν μόνο τα υποστυλώματα, αφού δεν αναφέρονται στο ισοδύναμο μήκος λυγισμού του ζυγώματος.



Σχήμα 5-29: Συντελεστές κατανομής για συνεχή υποστυλώματα (ENV1993-1-1/1992 Σχ. E.2.4)

Ο συντελεστής κατανομής της βάσης θεωρείται  $n_1=1$  για αρθρώσεις και  $n_1=0$  για πακτώσεις. Ο συντελεστής κατανομής  $n_2$  Εξ (5-1) της κορυφής υπολογίζεται από τον τύπο του Ευρωκώδικα 3 (Πίνακας 5-3) ο οποίος λαμβάνει υπόψη τη διπλή καμπυλότητα που εμφανίζεται στην δοκό μήκους ίσου με το συνολικό οριζόντιο άνοιγμα  $2L$  του πλαισίου, κατά τη κρίσιμη μεταθετή ιδιομορφή. Εάν υπάρχει αξονική, μπορεί να ληφθεί υπόψη με την χρήση των κατάλληλων συντελεστών (Πίνακας 5-4), αλλά στις παραμετρικές αναλύσεις του Κεφ.5.2 έγινε θεώρηση αφόρτιστων ζυγωμάτων για απλοποίηση.

$$n_2 = \frac{\frac{I_1}{H_1}}{\frac{I_1}{H_1} + 1.5 \frac{I_2}{2L}} \quad (5-1)$$

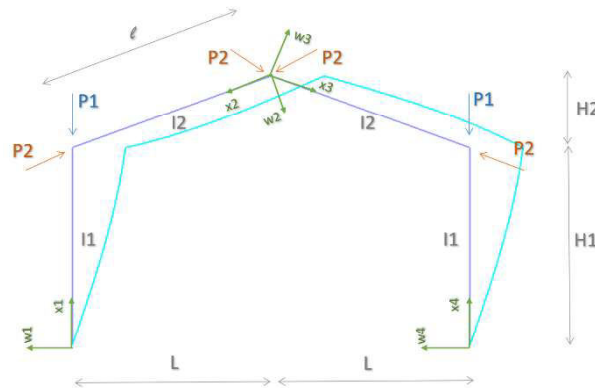
Πίνακας 5-3: Δοκοί που δεν υπόκεινται σε αξονικές δυνάμεις, με την προϋπόθεση ότι παραμένουν ελαστικές (ENV1993-1-1/1992 Πίν. E.1)

Συνθήκες στροφικής δέσμευσης του απομακρυσμένου άκρου της δοκού	Συντελεστής K ενεργού δυσκαμψίας δοκού
Πάκτωση στο απομακρυσμένο άκρο	$1,0 \cdot I/L$
Άρθρωση στο απομακρυσμένο άκρο	$0,75 \cdot I/L$
Στροφή όπως στο πλησιέστερο άκρο (διπλή καμπυλότητα)	$1,5 \cdot I/L$
Στροφή ίση και αντίθετη προς αυτήν του πλησιέστερου άκρου (απλή καμπυλότητα)	$0,5 \cdot I/L$
Γενική περίπτωση. Στροφή $\theta_a$ στο πλησιέστερο άκρο και στροφή $\theta_b$ στο απομακρυσμένο άκρο.	$\left( 1,0 + 0,5 \cdot \frac{\theta_b}{\theta_a} \right) \cdot \frac{I}{L}$

Πίνακας 5-4: Προσεγγιστικές εξισώσεις για δοκούς που υπόκεινται σε σημαντικές αξονικές δυνάμεις, με την προϋπόθεση ότι παραμένουν ελαστικές (ENV1993-1-1/1992 Πίν. E.3)

Συνθήκες στρωφικής δέσμευσης του απομακρυσμένου άκρου της δοκού	Μειωμένος συντελεστής K ενεργού δυσκαμψίας δοκού
Πάκτωση στο απομακρυσμένο άκρο	$1,0 \cdot \frac{I}{L} \cdot \left(1 - 0,4 \cdot \frac{N}{N_E}\right)$
Άρθρωση στο απομακρυσμένο άκρο	$0,75 \cdot \frac{I}{L} \cdot \left(1 - 1,0 \cdot \frac{N}{N_E}\right)$
Στροφή όπως στο πλησιέστερο άκρο (διπλή καμπυλότητα)	$1,5 \cdot \frac{I}{L} \cdot \left(1 - 0,2 \cdot \frac{N}{N_E}\right)$
Στροφή ίση και αντίθετη προς αυτήν του πλησιέστερου άκρου (απλή καμπυλότητα)	$0,5 \cdot \frac{I}{L} \cdot \left(1 - 1,0 \cdot \frac{N}{N_E}\right)$
$N_E = \pi^2 \cdot E \cdot I / L^2$	

Παρατηρήθηκε, ωστόσο, ότι εάν στους συντελεστές του Ευρωκώδικα 3 χρησιμοποιηθούν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των πλαισίων με αμφικλινή ζυγώματα, τότε τα αποτελέσματα ταυτίζονται με τα αναλυτικά με ικανοποιητική ακρίβεια. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση της μεταθετής αντισυμμετρικής ιδιομορφής, ο συντελεστής κατανομής της κορυφής  $n_2$  μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση του συνολικού κεκλιμένου μήκους του ζυγώματος  $2\ell$  για κάθε περίπτωση ((5-2) (α) και (β)).



Εικόνα 5-1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά πλαισίου με αμφικλινή ζυγώματα

$$(a) \quad n_2 = \frac{\frac{I_1}{H_1}}{\frac{I_1}{H_1} + 1,5 \frac{I_2}{2l}} \quad (b) \quad n_2 = \frac{\frac{I_1}{H_1}}{\frac{I_1}{H_1} + 1,5 \frac{I_2}{2l} \left(1 - 0,2 \frac{N}{N_E}\right)} \quad (5-2)$$

Διευκρινίζεται ότι  $N$  είναι η αξονική δύναμη που ασκείται στο ζυγώμα τη στιγμή του λυγισμού και ισούται με τον λόγο  $P_2/P_1$  επί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του υποστυλώματος  $P_{cr}$ , ενώ το  $N_E$  ισούται με το φορτίο Euler ενός ισοδύναμου αμφιέριστου μέλους ζυγώματος μήκους ίσο με το κεκλιμένο μήκος του  $\ell$ . Επειδή σε αυτή τη περίπτωση δεν είναι εξ αρχής γνωστή η τιμή του φορτίου λυγισμού των υποστυλωμάτων  $P_{cr}$ , είναι αναπόφευκτη η χρήση επαναληπτικής διαδικασίας για την εύρεση της ακριβούς τιμής του  $n_2$ .

Ο έλεγχος της άνω παρατήρησης έγινε για όλες τις τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία, για πλαίσια με αρθρώσεις και πακτώσεις. Παρακάτω φαίνονται ενδεικτικά ορισμένες από τις μέγιστες αποκλίσεις που προέκυψαν από τον έλεγχο αυτό. Οι έλεγχοι έγιναν για όλες τις τιμές των παραμέτρων της παρούσας εργασίας. Η μέγιστη απόκλιση της τιμής του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του που μπορεί να προκύψει από τον Ευρωκώδικα 3 με την χρήση του παραπάνω τρόπου από την

αντίστοιχη τιμή που προκύπτει αναλυτικά δεν ξεπερνάει το 4.43% στα πλαίσια με αρθρωτές στηρίξεις και το 5.51% στα πλαίσια με πακτώσεις στη βάση.

Πίνακας 5-5: Σύγκριση αναλυτικών και προτεινόμενων αποτελεσμάτων

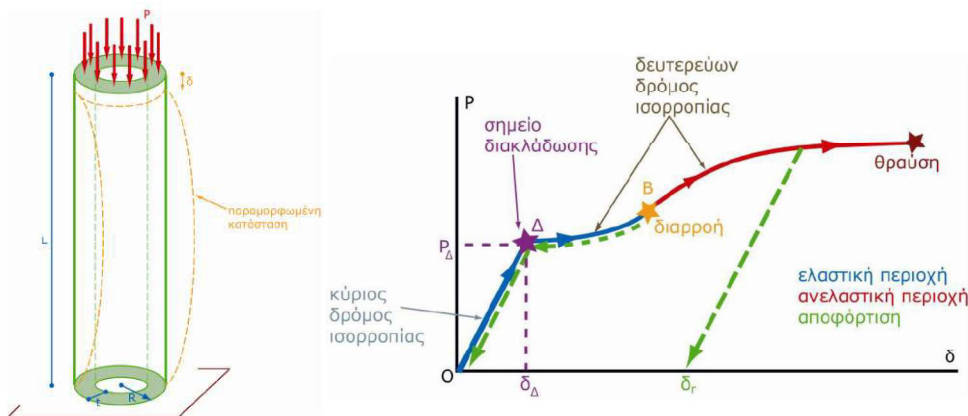
	Ισοδύναμο μήκος λυγισμού β		Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού kN		
	Αναλυτικά	EC3 <i>suggested</i>	Αναλυτικά	EC3 <i>suggested</i>	απόκλιση %
φ (degrees)	I1/I2=1 & H1/2L=0.25 & P2/P1=0				
0	3.18	3.22	97.02	94.32	-2.78
5	3.18	3.23	96.82	94.10	-2.81
10	3.19	3.24	96.14	93.44	-2.81
15	3.21	3.26	94.97	92.32	-2.79
20	3.24	3.29	93.23	90.74	-2.67
30	3.33	3.37	88.38	86.12	-2.56
45	3.57	3.61	76.79	75.16	-2.12
60	4.07	4.10	59.16	58.39	-1.30
	I1/I2=1 & H1/2L=0.25 & P2/P1=0.1				
0	3.21	3.26	95.46	92.49	-3.10
5	3.21	3.26	95.26	92.26	-3.15
10	3.22	3.27	94.48	91.57	-3.08
15	3.24	3.29	93.23	90.42	-3.01
20	3.27	3.32	91.50	88.78	-2.97
30	3.37	3.42	86.61	83.99	-3.03
45	3.63	3.68	74.54	72.59	-2.62
60	4.18	4.22	56.21	55.07	-2.02



# 6 ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΛΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

## 6.1 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

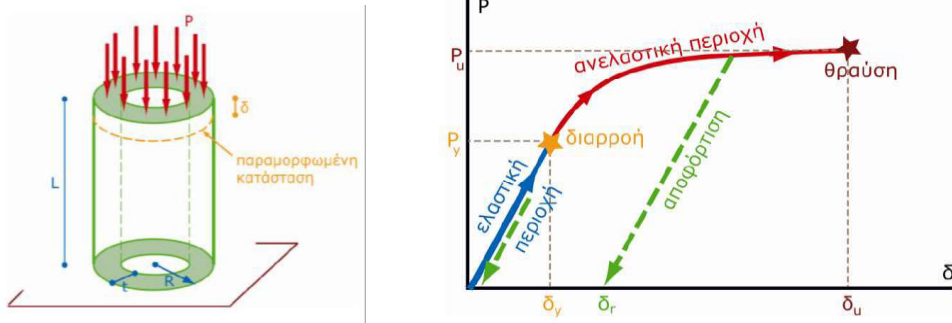
Η μη γραμμοκότητα γεωμετρίας είναι συχνά απαραίτητο να ληφθεί υπόψιν κατά τον σχεδιασμό εύκαμπων ή ελεύθερης γεωμετρίας σιδηρών κατασκευών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η παραμορφωμένη γεωμετρία του φορέα διαφέρει σημαντικά από την αρχική απαραμόρφωτη και οι κλασικές μέθοδοι στατικής ανάλυσης με τη θεώρηση μικρών παραμορφώσεων οδηγούν σε σημαντικά σφάλματα. Η ανάγκη ανάλυσης τέτοιων φορέων στην παραμορφωμένη γεωμετρία τους, η οποία δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων και απαιτεί ιδιαίτερες μεθόδους στατικής ανάλυσης στις οποίες καταργείται η αναλογία μεταξύ επιβαλλόμενων φορτίων και αναπτυσσόμενης έντασης και παραμόρφωσης, είναι γνωστή ως γεωμετρικά μη γραμμική συμπεριφορά. Απλοποιητικό παράδειγμα αποτελεί η αστοχία ενός θλιβόμενου μακρύ κυλίνδρου με χοντρά τοιχώματα, ο οποίος λόγω της λυγηρότητάς του, αστοχεί σε φορτίο μικρότερου του φορτίου διαρροής.



Εικόνα 6-1: Μακρύς κύλινδρος ως παράδειγμα εύκαμπου φορέα

Η μη γραμμικότητα εμφανίζεται και σε δύσκαμπτους όμως φορείς, όταν ληφθεί υπόψιν η μη γραμμικότητα του υλικού. Η παραδοχή ελαστικού – απολύτως πλαστικού υλικού καταργεί την αναλογία μεταξύ επιβαλλόμενων φορτίων και αναπτυσσόμενης έντασης και παραμόρφωσης όταν η αξονική τάση του μέλους μιας κατασκευής γίνει ίση με την τάση διαρροής. Απλοποιητικό παράδειγμα αποτελεί και εδώ η αστοχία ενός θλιβόμενου κοντού κυλίνδρου με χοντρά τοιχώματα, ο οποίος αστοχεί λόγω διαρροής

του υλικού. Σε φορείς ενδιάμεσης δυσκαμψίας μπορεί να εμφανιστεί συνδυασμένη μη γραμμικότητα υλικού και γεωμετρίας. Στις τελευταίες περιπτώσεις μάλιστα, η αλληλεπίδραση αυτή των μορφών αστοχίας σε συνδυασμό με την ύπαρξη ατελειών μπορεί να μειώσει ακόμη περισσότερο την αρχικά θεωρούμενη αντοχή των φορέων.



Εικόνα 6-2: Κοντός κύλινδρος ως παράδειγμα δύσκαμπτου φορέα

Κατά την ανάλυση της μη γραμμικής συμπεριφοράς των κατασκευών διατυπώνονται εξισώσεις που περιγράφουν την απόκρισή τους τόσο πριν όσο και μετά τον λυγισμό καθώς και τις τιμές των εξωτερικών φορτίων που οδηγούν στον λυγισμό. Ωστόσο, πριν γίνει λόγος περί μη γραμμικής ανάλυσης λυγισμού, πρέπει να γίνει κατανοητό πότε ισχύει η γραμμική ανάλυση λυγισμού. Οι παραδοχές της *γραμμικής ανάλυσης λυγισμού* είναι οι εξής:

1. Ισχύει δηλαδή ο νόμος του Hooke, που συνδέει γραμμικά τις τάσεις με τις ανηγμένες παραμορφώσεις: Το υλικό συμπεριφέρεται ως γραμμικά ελαστικό και οι ανηγμένες παραμορφώσεις  $\varepsilon$  είναι ανάλογες των τάσεων  $\sigma$ . Η κλίση του διαγράμματος τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων είναι το μέτρο ελαστικότητας  $E$  που εκφράζει τη δυσκαμψία του υλικού.
2. Τα διαγράμματα τάσεως είναι ίδια τόσο για θλίψη όσο και για εφελκυσμό.
3. Οι επίπεδες διατομές κάθετες στον απαραμόρφωτο άξονα της ράβδου παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση λόγω κάμψης. (Bernoulli- Navier)
4. Το επίπεδο των εξωτερικών εγκάρσιων φορτίων θεωρείται ότι διέρχεται από το κέντρο διατήσεως της διατομής και παράλληλα από τον κύριο άξονα αδρανείας της. με αποτέλεσμα να μην υφίσταται στρέψη.
5. Υπάρχει θεώρηση μικρών μετατοπίσεων όλων των σημείων του φορέα σε σχέση με τις διαστάσεις της διατομής. Έτσι, κατά τη στατική ανάλυση αγνοείται η παραμόρφωση και οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται στην απαραμόρφωτη κατάσταση. Επομένως, ισχύει και η αρχή της επαλληλίας σε ένταση και παραμόρφωση ενώ όροι  $w^2$  αμελούνται. ο άξονας της ράβδου δεν βραχύνεται ή επιμηκύνεται και η ανηγμένη παραμόρφωση και καμπυλότητα εκφράζονται όπως ορίζουν οι Εξ. (6-1-α) & Εξ. (6-1-β). αντίστοιχα:

$$(a) \varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad (\beta) \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (6-1)$$

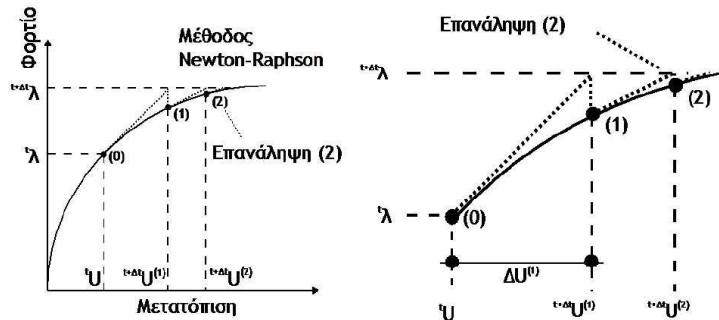
6. Δεν υπάρχει διατμητική παραμόρφωση επί του βέλους,
7. Τα κρίσιμα φορτία θεωρούνται ότι ισχύουν μόνο για κάμψη όχι λόγω αξονικής παραμόρφωσης.

Λόγω ύπαρξης μη γραμμικότητας υλικού είτε γεωμετρίας, στη *μη γραμμική ανάλυση λυγισμού* ισχύουν οι παραδοχές (1)-(4). Οι παραμορφώσεις όμως δεν θεωρούνται μικρές και η ανηγμένη παραμόρφωση και καμπυλότητα εκφράζονται σύμφωνα με την Εξ. (6-2) και Εξ. (6-3), αντίστοιχα:

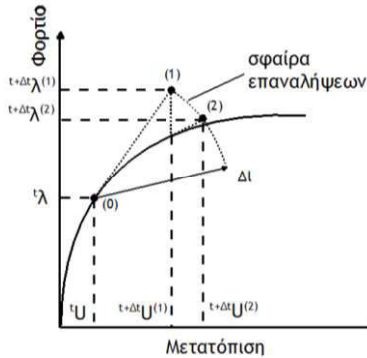
$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \sim \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \quad (6-2)$$

$$K = \frac{-\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{6-3}$$

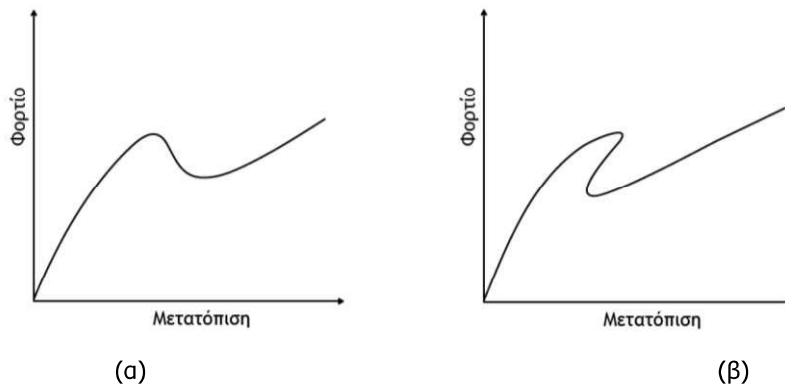
Η μη γραμμική ανάλυση λυγισμού γίνεται με αριθμητικές μεθόδους. Προγράμματα ηλεκτρονικών υπολογιστών με χρήση πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιούν τέτοιες μεθόδους ανάλυσης και διευκολύνουν την όλο και πιο συχνή σχεδίαση κατασκευών χαμηλότερου κόστους λόγω της μείωσης του υλικού που απαιτείται. Προκειμένου να πραγματοποιηθούν μη γραμμικές αναλύσεις στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιείται και εδώ το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA [10]. Το εν λόγω πρόγραμμα χρησιμοποιεί μέσω του αλγόριθμου Collapse Analysis τη μέθοδο arc-length και όχι μεθόδους όπως Newton-Raphson, ώστε να διατυπωθεί ο δρόμος ισορροπίας του φορέα ακόμη και σε περιπτώσεις στις οποίες δεν αρκεί η σταδιακή προσαύξηση φορτίου ή μετατόπισης (Εικόνα 6-5).



Εικόνα 6-3: Η μέθοδος Full Newton-Raphson και η μεγέθυνση στο βήμα



Εικόνα 6-4: Η μέθοδος σφαιρικού τόξου του Crisfield για μη γραμμικά προβλήματα



Εικόνα 6-5: Τυπικοί μη γραμμικοί δρόμοι ισορροπίας (α) snap-through (β) snap-through & snap-back

## 6.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΑΡΧΙΚΩΝ ΑΤΕΛΕΙΩΝ ΣΤΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

Οι ατέλειες των φορέων (γεωμετρικές, κατασκευαστικής, τοποθέτησης φορτίου κλπ) πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν κατά την ανάλυση επειδή μπορεί να μειώσουν σημαντικά την αρχικά θεωρούμενη αντοχή και τον δρόμο ισορροπίας του φορέα. Σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 3, οι ατέλειες μπορούν να λαμβάνονται υπόψιν ως ισοδύναμες γεωμετρικές. Έχει αποδειχθεί ότι ένας φορέας με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, τείνει να παραμορφώνεται έτσι ώστε να προσεγγίζει την κρίσιμη ιδιομορφή λυγισμού. Γι' αυτό και εισάγονται ακολουθώντας το σχήμα της κρίσιμης ιδιομορφής γραμμικού λυγισμού. Το μέγεθος τους υπολογίζεται σύμφωνα με τις διατάξεις του Ευρωκώδικα 3 (EN 1993-1-1).

- Για ατέλειες μετάθεσης (initial sway imperfections) ορίζει την γωνία  $\phi$  από την Εξ. (6-4):

$$\phi = \phi_0 a_h a_m \quad (6-4)$$

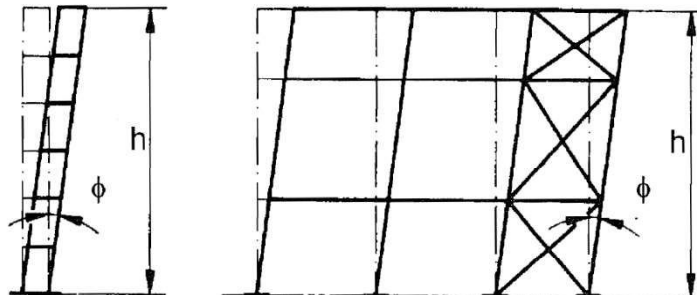
όπου  $\phi_0 = 1/200$

$$a_h = \frac{2}{\sqrt{h}} \cdot \text{αλλά } \frac{2}{3} \leq a_h \leq 1$$

$$a_m = \sqrt{0.5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

$m$  = είναι ο αριθμός των υποστυλωμάτων σε σειρά που δέχονται κατακόρυφο φορτίο φορτίο  $N_{ed}$  όχι μικρότερο από το 50% από τη μέση τιμή των υποστυλωμάτων στο θεωρούμενο κατακόρυφο επίπεδο

Η γωνία  $\phi$  επί το ύψος του σημείου όπου τοποθετείται η ατέλεια δίνει τελικά το μέγεθός της  $e_{sway}$ .



Εικόνα 6-6: Ισοδύναμες ατέλειες μετατόπισης (EN 1993-1-1 Fig. 5.2)

- Για τοπικές ατέλειες αμετάθετης ιδιομορφής (initial bow imperfections) ορίζει το μέγεθος της ατέλειας από την Εξ. (6-5):

$$e_0/L \leq 1/300 \text{ (ελαστική ανάλυση)} \text{ ή } 1/250 \text{ (πλαστική ανάλυση)} \quad (6-5)$$

για κοίλες κυκλικές διατομές θερμής ελάσεως (καμπύλη λυγισμού  $a$ )

Πίνακας 6-1: Τιμή σχεδιασμού της αρχικής τοπικής ατέλειας  $e_0$  για τα μέλη (EN 1993-1-1 Πίν. 5.1)

$\text{AC}_2$ Buckling curve according to Table 6.2 $\text{AC}_2$	elastic analysis $e_0 / L$	plastic analysis $e_0 / L$
$a_0$	1 / 350	1 / 300
a	1 / 300	1 / 250
b	1 / 250	1 / 200
c	1 / 200	1 / 150
d	1 / 150	1 / 100



-Εναλλακτικά, για τις τοπικές ατέλειες χρησιμοποιείται ο τύπος:

$$e_o = a \left( \lambda^* - 0,2 \right) \frac{W_{el}}{A} \quad (6-6)$$

όπου  $a$ : ο συντελεστής ατελειών

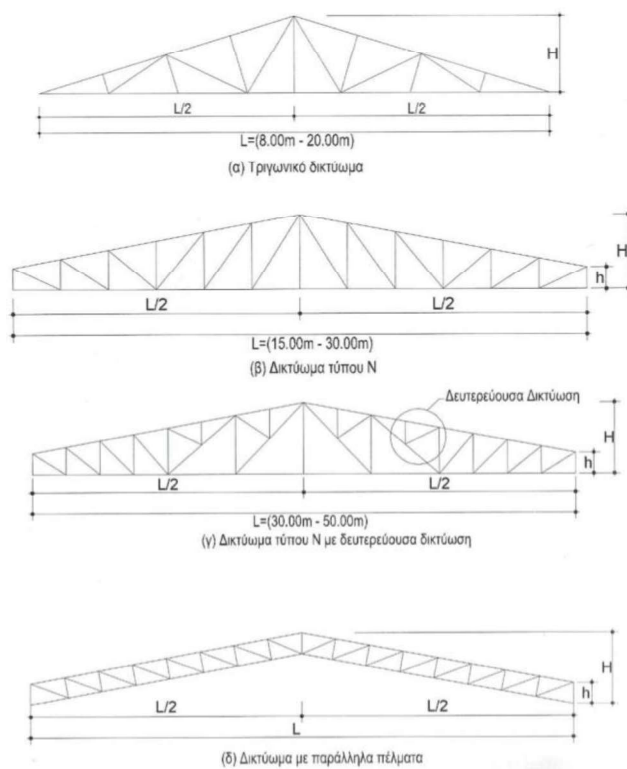
$\lambda^*$ : ανηγμένη λυγηρότητα

$W_{el}$ : ελαστική ροπή αδράνειας

$A$ : το εμβαδόν της διατομής

### 6.3 ΣΗΜΑΣΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΟΥ ΣΤΙΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΔΙΡΡΙΧΤΕΣ ΣΤΕΓΕΣ ΜΙΚΡΗΣ ΚΛΙΣΕΩΣ

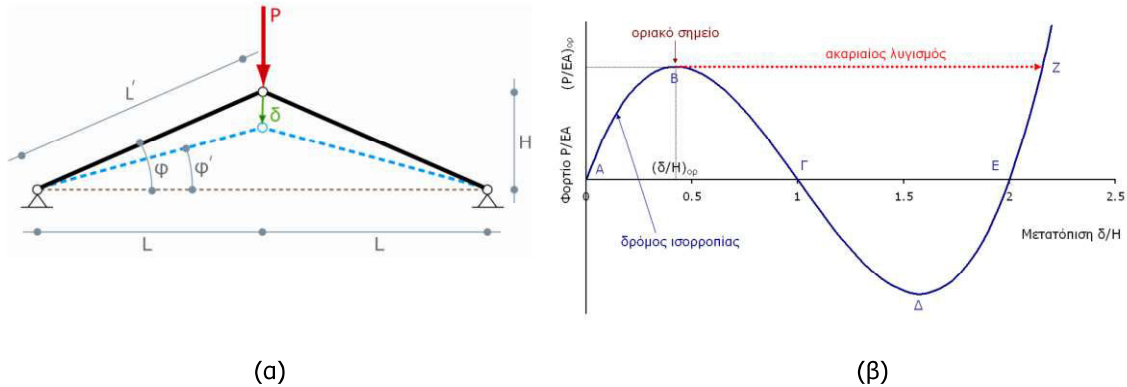
Οι αμφικλινείς στέγες μπορεί να αποτελούν μέρος ολόσωμων πλαισίων, όπως προηγουμένως ή να εδράζονται απευθείας πάνω σε τοιχία σκυροδέματος. Στην δεύτερη περίπτωση, αναλόγως την κλίση και το άνοιγμα που καλύπτουν, συνηθίζουν να διαμορφώνονται από επίπεδα δικτυώματα διαφόρων τύπων. Σε κάθε περίπτωση όμως, όταν η κλίση της στέγης λόγω αρχιτεκτονικών απαιτήσεων είναι σχετικά μικρή και το άνοιγμα που καλύπτει είναι μεγάλο συμπεριφέρεται αρκετά εύκαμπτα και είναι επιρρεπής σε φαινόμενα λυγισμού. Κατ' επέκταση, οι παραμορφώσεις είναι μεγάλες και οι επίλυση με τις μεθόδους Κλασικής Στατικής ή Στατικής 2<sup>ης</sup> τάξεως με τη παραδοχή μικρών μετακινήσεων δεν είναι επαρκής. Επομένως, κρίθηκε σκόπιμη η διερεύνηση της σημασίας μη γραμμικότητας υλικού και γεωμετρίας μεμονωμένων δίρριχτων ζυγμάτων. Η προσομοίωση αυτών των φορέων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της αψίδας von Mises.



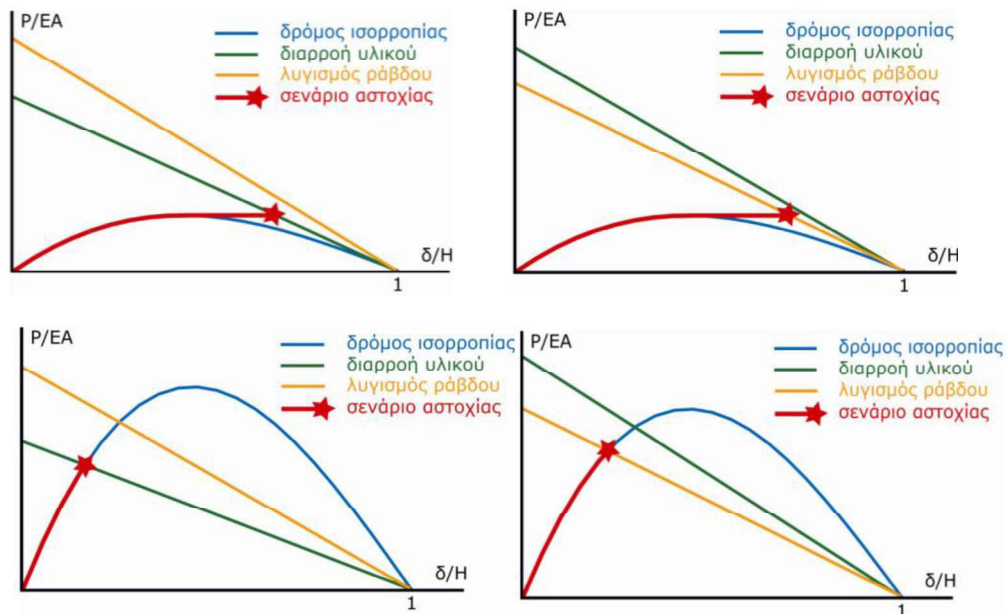
Εικόνα 6-7: Μορφές δίρριχτων στεγών

Ο φορέας τριγωνικής αψίδας ή δικτύωμα von Mises είναι γνωστός για την έντονη μη γραμμική συμπεριφορά της γεωμετρίας του όταν το ύψος του είναι μικρό, με αποτέλεσμα να είναι επιρρεπής στο φαινόμενο του ακαριαίου λυγισμού (snap through buckling) το οποίο αλληλεπιδρά με άλλες μορφές αστοχίας όπως τον λυγισμό του ενός μέλους της αψίδας, τον καθολικό λυγισμό της και την διαρροή του

υλικού. Η αλληλεπίδραση αυτών των μορφών αστοχίας μειώνει την αντοχή φορέων τέτοιας μορφής και γι' αυτό πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά την ανάλυσή τους.



Εικόνα 6-8: (α) Τριγωνική αψίδα ή Δικτύωμα von Mises (β) Δρόμος ισορροπίας κατά τον ακαριαίο λυγισμό της τριγωνικής αψίδας (snap-through buckling)

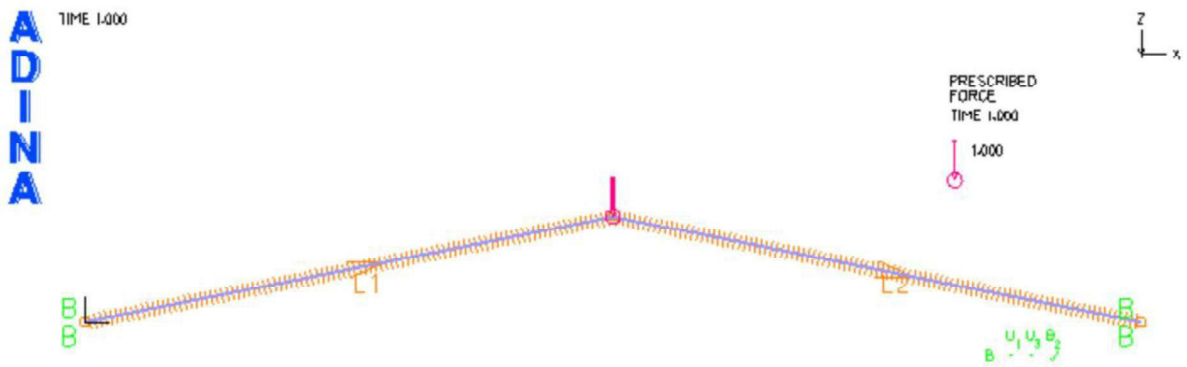


Εικόνα 6-9: Σενάρια αστοχίας της τριγωνικής αψίδας λόγω αλληλεπίδρασης των μορφών αστοχίας

Επομένως ένας ακόμη στόχος της εργασίας είναι η αξιολόγηση της σημασίας της μη γραμμικής ανάλυσης στον σχεδιασμό ρηχών αμφικλινών ζυγμάτων με σύνδεση ροπής στην κορυφή. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αποτελέσματα των αντίστοιχων παραμετρικών αναλύσεων, με απελευθέρωση στροφής στην κορυφή (Maria A. Livanou, Charis J. Gantes [4]).

### 6.3.1 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ADINA [10]

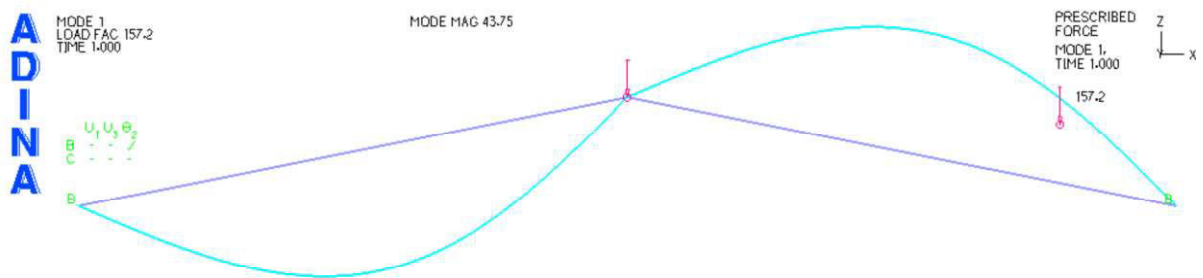
Το πρόβλημα διερευνάται για διάφορες τιμές των παραμέτρων ελέγχου, οι οποίες επιλέγεται να είναι η κλίση του ζυγώματος  $\phi$  και οι λυγηρότητες των μελών  $\lambda$  με θεώρηση ή μη της διαρροής του υλικού. Οι ατέλειες ακολουθούν τις διατάξεις του Ευρωκώδικα 3. Το σχήμα τους, όπως αναφέρθηκε στο Κεφ. 6.2, ακολουθεί την κρίσιμη ιδιομορφή λυγισμού. Για το μέγεθος τους, χρησιμοποιήθηκε ο εναλλακτικός τύπος της Εξ. (6-6) για καθολικές και τοπικές ατέλειες που προτείνει ο Ευρωκώδικας 3.



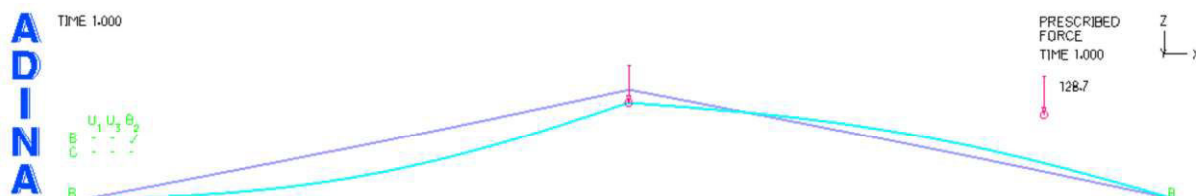
Εικόνα 6-10: Προσομοίωση δίρριχτης στέγης με σύνδεση ροπής στην κορυφή και αρθρώσεις στη βάση

Η αμφικλινή στέγη προσομοιώνεται στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA [10] με στοιχεία δοκού (beam elements) ώστε να μεταφέρουν ροπές, τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις. Η διατομή είναι κοίλη κυκλική (CHS) διότι μόνο αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις μη γραμμικές αναλύσεις, ενώ το μέτρο ελαστικότητας που χρησιμοποιείται είναι του χάλυβα  $E=210$  GPa. Επιλέγεται να τοποθετηθεί ένα κατακόρυφο σημειακό φορτίο στην κορυφή της στέγης.

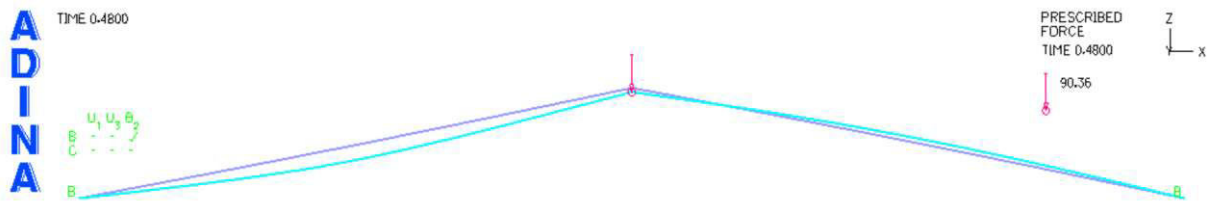
Αρχικά έγιναν γραμμικές αναλύσεις λυγισμού (LBA) για μια πρώτη προσέγγιση του οριακού φορτίου κάθε φορά και για να εξασφαλιστεί το σχήμα των στελειών των επόμενων αναλύσεων. Ακολούθησαν μη γραμμικές αναλύσεις γεωμετρίας με ατέλειες (GNIA) και μη γραμμικές αναλύσεις υλικού και γεωμετρίας με ατέλειες (GMNIA) ώστε να ληφθούν υπόψιν οι μεγάλες μετακινήσεις υπό ελαστικό και μη υλικό κατά την εύρεση αντοχής και μεταλυγισμικής συμπεριφοράς του φορέα. Οι εν λόγω αναλύσεις έγιναν για τις τιμές των παραμέτρων ακολουθούν (Πίνακας 6-2 & Πίνακας 6-3):



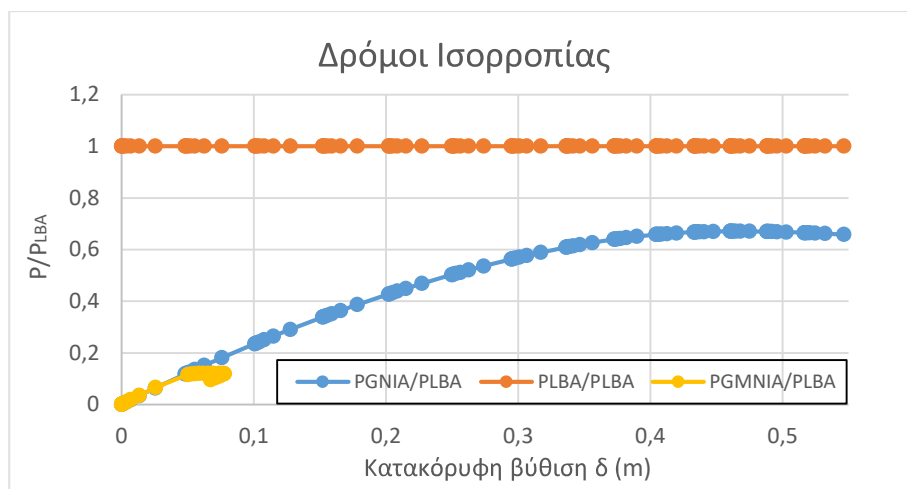
Εικόνα 6-11: 1<sup>η</sup> ιδιομορφή λυγισμού – Γραμμική ανάλυση λυγισμού (LBA)



Εικόνα 6-12: Μη γραμμική ανάλυση λυγισμού με θεώρηση ελαστοπλαστικού υλικού και στελειών (GNIA)



Εικόνα 6-13: Μη γραμμική ανάλυση λυγισμού με θεώρηση ελαστοπλαστικού υλικού, μεγάλων μετακινήσεων και ατελειών (GMNIA)



Σχήμα 6-1: Σύγκριση φορτίων GNIA και GMNIA με LBA για φορέα κλίσης  $H/L = 0.2$ , διαμέτρου  $D=0.8\text{m}$  και πάχους  $t=0.0017\text{m}$

Κατά την επίλυση κάθε δίρριχτης στέγης, προκύπτουν τα οριακά φορτία λυγισμού για τις 3 περιπτώσεις αναλύσεων: (α) Γραμμική ανάλυση (LBA), (β) Μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας με ατέλειες (GNIA), (γ) Μη γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας με ατέλειες (GMNIA). Ενδεικτικά, ακολουθεί η σύγκριση των φορτίων κάθε ανάλυσης για έναν φορέα κλίσης  $H/L = 0.2$  ( $\varphi=11.3^\circ$ ), κοίλης κυκλικής διατομής διαμέτρου  $D=0.8\text{m}$  και πάχους  $t=0.0017\text{m}$  (Σχήμα 6-1).

Πίνακας 6-2:

Τιμές κλίσεως $H/L$
0.05
0.075
0.1
0.15
0.2
0.25

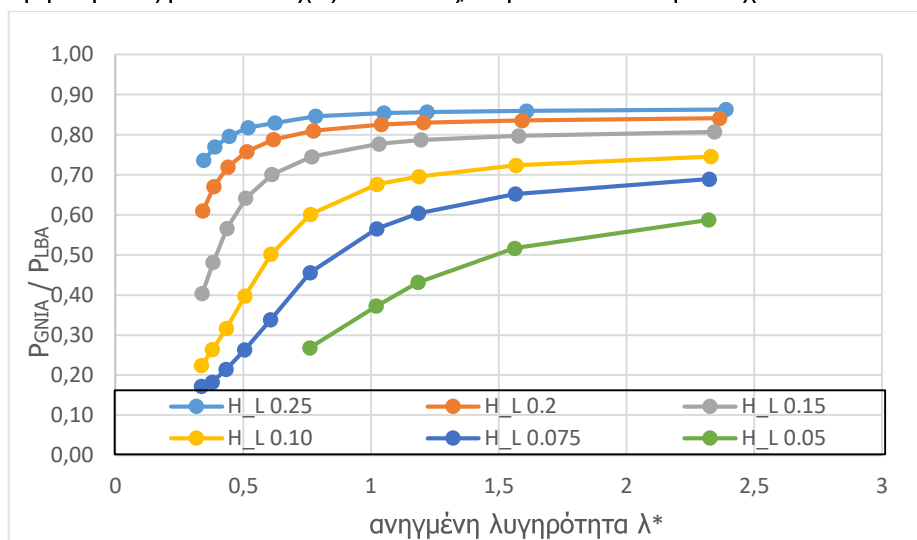
Πίνακας 6-3:

Διατομές	$D$ (m)	$t$ (m)	$A$ ( $\text{m}^2$ )	$\lambda^*$
1	0.14	0.0105	0.004263	2.32
2	0.2	0.0071	0.004263	1.56

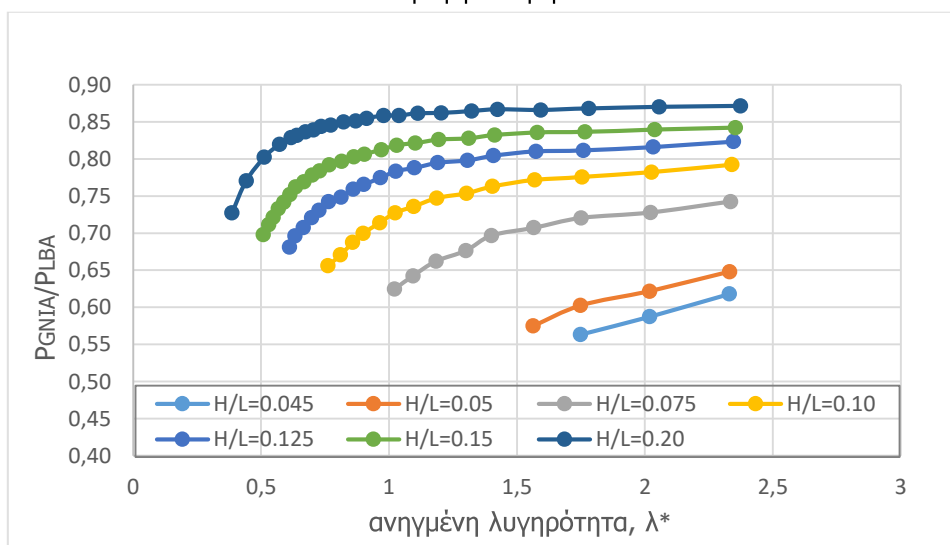
3	0.26	0.0054	0.004263	1.18
4	0.3	0.0046	0.004263	1.02
5	0.4	0.00345	0.004263	0.76
6	0.5	0.00275	0.004263	0.61
7	0.6	0.0023	0.004263	0.51
8	0.7	0.00195	0.004263	0.43
9	0.8	0.0017	0.004263	0.38
10	0.9	0.00153	0.004263	0.34

**6.3.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΕ ΔΙΡΡΙΧΤΕΣ ΣΤΕΓΕΣ**

Τα αποτελέσματα των παραμετρικών αναλύσεων από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA [10] και η σύγκρισή τους με αντίστοιχες αναλύσεις, παρατίθενται στη συνέχεια:



Σχήμα 6-2: Σύγκριση φορτίων γραμμικών (LBA) και μη γραμμικών αναλύσεων (GNIA) για σύνδεση ροπής στην κορυφή του φορέα

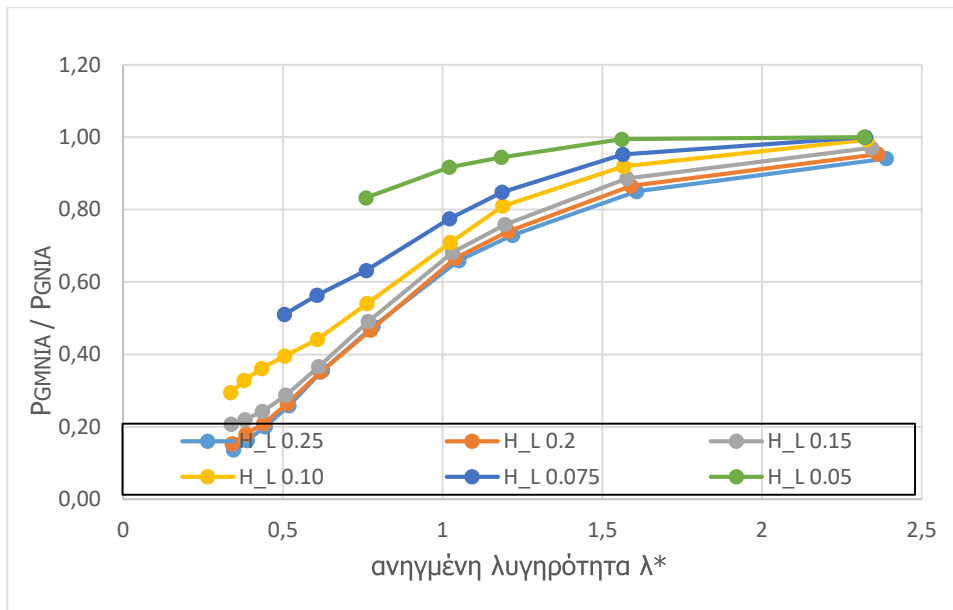


Σχήμα 6-3: Σύγκριση φορτίων γραμμικών (LBA) και μη γραμμικών αναλύσεων (GNIA) για άρθρωση στην κορυφή του φορέα Maria A. Livanou. Charis J. Gantes [4]

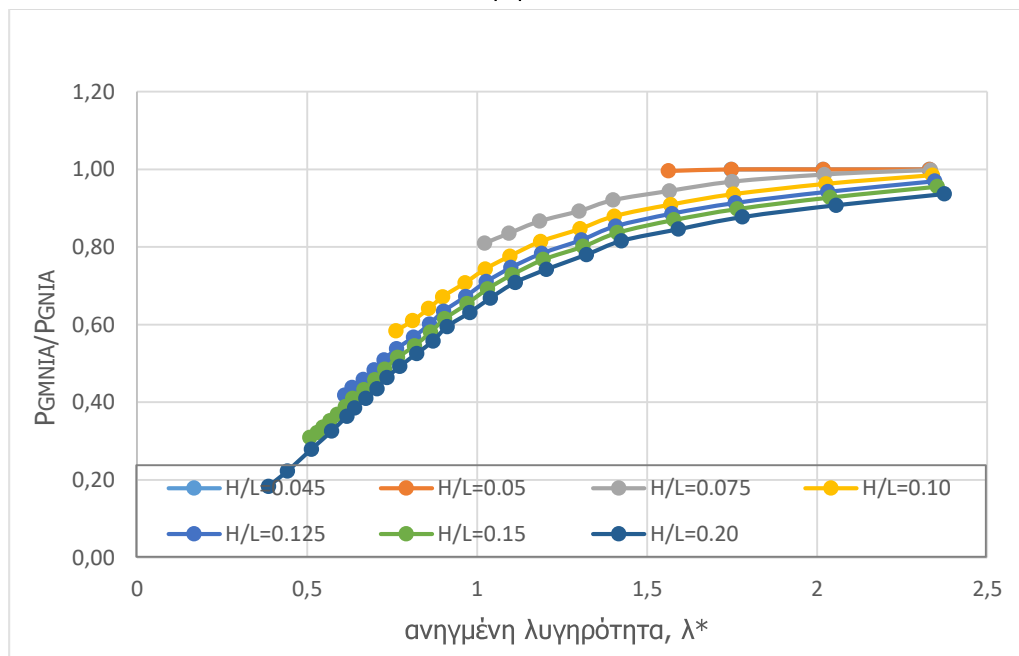
Από το Σχήμα 6-2 φαίνεται ότι το οριακό φορτίο  $P_{GNIA}$  είναι παντού μικρότερο του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P_{LBA}$ .

- Όσο μειώνεται ο λόγος  $H/L$ , μειώνεται και ο λόγος  $P_{GNIA}/P_{LBA}$ .
- Όσο μειώνεται η λυγηρότητα  $\lambda$  του μέλους, μειώνεται και ο λόγος  $P_{GNIA}/P_{LBA}$ .

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των δύο περιπτώσεων σύνδεσης της κορυφής (Σχήμα 6-2 & Σχήμα 6-3), παρατηρείται ανάλογη μείωση του φορτίου  $P_{GNIA}$  σε σχέση με τη κλίση  $H/L$  και τη λυγηρότητα  $\lambda$ , με ελαφρώς μικρότερες τιμές στην πρώτη περίπτωση.



Σχήμα 6-4: Σύγκριση φορτίων μη γραμμικών αναλύσεων (GNIA και GMNIA) για σύνδεση ροπής στην κορυφή του φορέα



Σχήμα 6-5: Σύγκριση φορτίων μη γραμμικών αναλύσεων (GNIA και GMNIA) για άρθρωση στην κορυφή του φορέα  
Maria A. Livanou. Charis J. Gantes [4]

Από το Σχήμα 6-4 φαίνεται ότι το οριακό φορτίο  $P_{GMNIA}$  είναι κατά κύριο λόγο μικρότερο ή ίσο του οριακού φορτίου  $P_{GNIA}$ .

- Όσο μεγαλώνει ο λόγος  $H/L$ , μειώνεται ο λόγος  $P_{GMNIA}/P_{GNIA}$ .
- Όσο μειώνεται η λυγηρότητα  $\lambda$  του μέλους, μειώνεται και ο λόγος  $P_{GMNIA}/P_{GNIA}$ .

Συγκρίνοντας και εδώ τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα των φορέων με απελευθέρωση στροφής στην κορυφή, φαίνεται η ομοιότητα της μείωσης του φορτίου  $P_{GNIA}$  σε σχέση με τη ρηχότητα  $H/L$  και τη λυγηρότητα  $\lambda$ .

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των δύο περιπτώσεων σύνδεσης της κορυφής (Σχήμα 6-4 & Σχήμα 6-5), παρατηρείται ανάλογη μείωση του λόγου φορτίων  $P_{GMNIA}/P_{GNIA}$  σε σχέση με τη κλίση  $H/L$  και τη λυγηρότητα  $\lambda$ .





## 7 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ

Στο παρόν κεφάλαιο ακολουθεί η διαστασιολόγηση ενός πλαισίου με αμφικλινή ζυγώματα, γωνίας  $\varphi=30$  και  $H_1/2L=0.25$ , που αποτελεί ένα από τα 10 συνολικά πλαίσια του φέροντος οργανισμού βιομηχανικού κτιρίου, κατασκευασμένου από χάλυβα ποιότητας S235 χωρίς κράτυνση.

### 7.1 ΦΟΡΤΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ο φορέας διαστασιολογείται στην Οριακή Κατάσταση Αστοχίας (ΟΚΑ) με τη παραδοχή ρεαλιστικών συνθηκών φόρτισης. Σύμφωνα με τις διατάξεις του EN1990 [13], ο συνδυασμός σχεδιασμού για ΟΚΑ δίνεται από τον Τύπο (7-1):

$$\Sigma \gamma_{G,j} G_{k,j} + \gamma_p P + \gamma_{Q,1} Q_{k,1} + \Sigma \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i} \quad (7-1)$$

Όπου G οι μόνιμες δράσεις

Q οι μεταβλητές δράσεις

P η προένταση

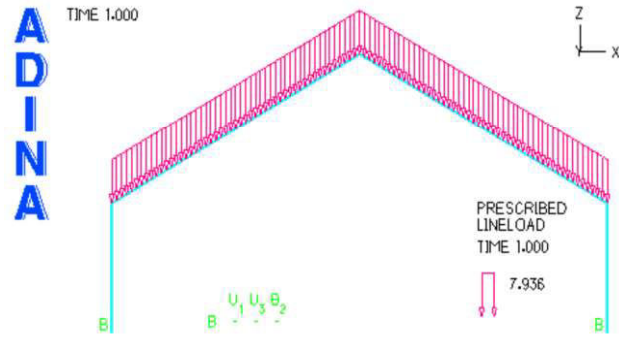
Στην παρούσα εργασία ο συνδυασμός σχεδιασμού δίνεται από τον Τύπο (7-2):

$$\Sigma \gamma_{G,j} G_{k,j} + \gamma_{Q,i} Q_{k,i} = 1.35G + 1.5Q \quad (7-2)$$

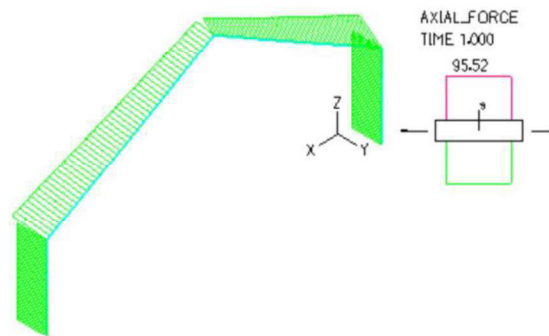
Κάνοντας τη θεώρηση πλάτους επιρροής  $b=5\text{m}$  και θεωρώντας μόνιμο φορτίο  $g=1\text{ kN/m}^2$  και φορτίο χιονιού  $s = \mu_s s_k = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32\text{ kN/m}^2$  όπως ορίζεται από EN1991 [14] για την περιοχή της Αττικής, ενώ το ίδιο βάρος του φορέα αμελείται. Επομένως η τιμή  $p$  του οριζόντια κατανεμημένου φορτίου επί του ζυγώματος του πλαισίου υπολογίζεται από τον Τύπο (7-3):

$$p = 1.35G + 1.5Q = 1.35 \cdot g \cdot b + 1.5 \cdot q \cdot b = 1.35 \cdot 1 \cdot 5 + 1.5 \cdot 0.32 \cdot 5 = 9.15\text{ kN/m} \quad (7-3)$$

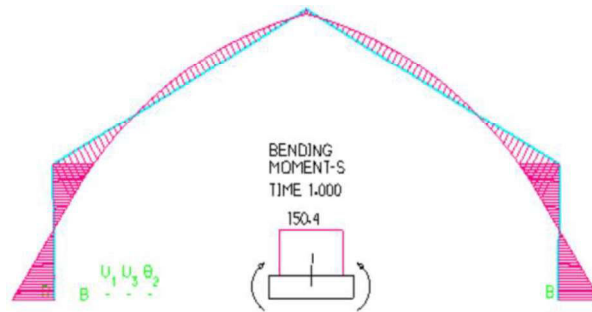
Για την στατική ανάλυση του φορέα και την εξαγωγή των εντατικών μεγεθών, χρησιμοποιείται το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA [10]. Το πλαίσιο αποτελείται από διατομή διπλού «Τ». Η επίλυση γίνεται εντός του επιπέδου του πλαισίου ενώ οι μετακινήσεις εκτός του επιπέδου θεωρούνται δεσμευόμενες. Παρακάτω, παρατίθενται τα εντατικά μεγέθη που προέκυψαν.



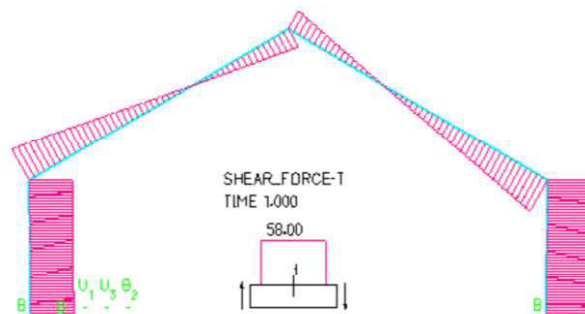
Εικόνα 7-1: Προσομοίωση πλαισίου στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA



Εικόνα 7-2: Διάγραμμα αξονικής έντασης [N]



Εικόνα 7-3: Διάγραμμα καμπτικής έντασης [M]



Εικόνα 7-4: Διάγραμμα διατμητικής έντασης [V]

## 7.2 ΔΙΑΣΤΑΣΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΤΩΝ ΜΕΛΩΝ

Τα εντατικά μεγέθη είναι  $N_{Ed}=95.5$  kN,  $M_{Ed}=150.4$  kNm και  $V_{Ed}=58$  kN, όπως προέκυψαν από τη στατική ανάλυση. Επιλέγεται να γίνει πλαστική ανάλυση και επομένως επιλέγεται διατομή κατηγορίας 1 ή 2, με κριτήριο την καμπτική αντοχή των μελών:

$$M_{C,Rd} = M_{pl, Rd} = W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{MO}} \Rightarrow W_{pl} = \frac{\gamma_{MO} M_{pl, Rd}}{f_y} \geq \frac{1.00 \cdot 150.4 \text{ kNm}}{235 \text{ MPa}} \Rightarrow W_{pl} \geq 640 \text{ cm}^3$$

Επιλέγεται η διατομή HEA 240 για υποστυλώματα και ζυγώματα, με τα εξής χαρακτηριστικά:

$$W_{pl} = 745 \text{ cm}^3, A = 78.6 \text{ cm}^2, I_y = 7760 \text{ cm}^4, I_z = 231 \text{ cm}^4$$

Η διατομή είναι Κατηγορίας 1 και ακολουθεί πλαστική ανάλυση, διότι πληροί τους παρακάτω ελέγχους:

- Εσωτερικό θλιβόμενο τμήμα:  $c/t = 164/7.5 = 21.87 \leq 72\varepsilon = 72$
- Προεξέχοντα πέλματα:  $c/t = 95.25/12 = 7.94 \leq 9\varepsilon = 9$

όπου  $\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$

Επομένως, η αντοχές των μελών είναι:

$$M_{C,Rd} = M_{pl, Rd} = W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{MO}} = \frac{745 \text{ cm}^3 \cdot 23.5 \text{ kN/cm}^2}{1.00} = 17507.5 \text{ kNcm} = 175.08 \text{ kNm}$$

$$N_{C,Rd} = N_{pl, Rd} = A \frac{f_y}{\gamma_{MO}} = \frac{76.8 \text{ cm}^2 \cdot 23.5 \text{ kN/cm}^2}{1.00} = 1804.8 \text{ kN}$$

$$V_{C,Rd} = V_{pl, Rd} = A_v \frac{f_y/\sqrt{3}}{\gamma_{MO}} = \frac{12.3 \text{ cm}^2 \cdot 23.5/\sqrt{3} \text{ kN/cm}^2}{1.00} = 166.9 \text{ kN}$$

Τα οποία αντιστοιχούν σε κατανεμημένο φορτίο  $r_{Rd}=10.7$  kN/m. Επειδή  $V_{Ed} \leq 0.5 V_{pl, Rd} = 85$  kN για όλα τα μέλη, δεν απομειώνεται η καμπτική αντοχή και επομένως  $M_{V,Rd} = M_{pl, Rd}$ . Ακόμη,  $N_{Ed} \leq 0.25 N_{pl, Rd} = 451$  kN και  $N_{Ed} \leq 0.5 \frac{h_w \cdot t_w \cdot f_y}{\gamma_{MO}} = 144.5$  kN άρα η καμπτική αντοχή δεν απομειώνεται ούτε λόγω αξονικής δύναμης και άρα  $M_{N,Rd} = M_{pl, Rd}$ . Ακολουθούν οι έλεγχοι ευστάθειας εντός του επιπέδου.

### 7.2.1 Έλεγχος σε καμπτικό λυγισμό

α) Υποστυλώματα

1ος Τρόπος – Χρήση των προτεινόμενων διαγραμμάτων:

Από τα προτεινόμενα διαγράμματα για πλαίσια με πακτώσεις προκύπτει η τιμή του ισοδύναμου μήκους λυγισμού των υποστυλωμάτων ως προς τον ισχυρό άξονα ίση με  $\beta_y = 1.8$  και επομένως  $L_{cr} = \beta_y \cdot L = 1.8 \cdot 5 = 9$  m

$$\lambda_y^* = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{Cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{1}{\lambda_1} = \frac{900}{10.1 \cdot 93.9} = 0.95$$

Για διατομή διπλού «Τ» με πάχος πέλματος μικρότερο των 40mm προκύπτει καμπύλη διατομής α ( $a=0.21$ ) για λυγισμό ως προς τον ισχυρό άξονα:

$$\Phi_y = 0.5[1+a(\lambda_y^*-0.2)+\lambda_y^{*2}] = 0.5[1+0.21(0.95-0.2)+0.95^2] = 1.03$$

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y^2 + \sqrt{\Phi_y^2 - \lambda_y^{*2}}} = \frac{1}{1.03 + \sqrt{1.03^2 - 0.95^2}} = 0.7$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 0.7 \cdot 1804.8 = 1262.8 \text{ kN} \geq N_{Ed} = 95.5 \text{ kN}$$

2<sup>ος</sup> Τρόπος - Χρήση των διαγραμμάτων Wood:

$$K_c = \frac{I_c}{L_c} = \frac{7760}{500} = 15.52 \text{ cm}^2$$

$$K_1 = 1.5 \frac{I_c}{L_c} \left(1 - 0.2 \frac{N}{N_E}\right) = 1.5 \frac{7760}{2000} \left(1 - 0.2 \frac{95.52}{402.1}\right) = 5.54 \text{ cm}^2 \text{ (με θεώρηση οριζόντιου ζυγώματος)}$$

$$\text{όπου } N_E = \pi^2 \frac{EI}{L^2} = \pi^2 \frac{210000000 \cdot 7760 \cdot 10^{-8}}{20^2} = 402.1 \text{ kN}$$

$$n_1 = \frac{K_c}{K_c + K_1} = \frac{15.52}{15.52 + 5.54} = 0.74 \text{ \& } n_2 = 0 \text{ λόγω πάκτωσης}$$

Από τα διαγράμματα Wood για μεταθετά πλαίσια προκύπτει η τιμή του ισοδύναμου μήκους λυγισμού των υποστυλωμάτων ίση με  $\beta_y = 1.44$  και επομένως  $L_{cr} = \beta_y \cdot L = 1.44 \cdot 5 = 7.2 \text{ m}$

$$\lambda_y^* = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{1}{\lambda_1} = \frac{720}{10.1 \cdot 93.9} = 0.76$$

$$\Phi_y = 0.5[1 + a(\lambda^* - 0.2) + \lambda^{*2}] = 0.5[1 + 0.21(0.76 - 0.2) + 0.76^2] = 0.85$$

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y^2 + \sqrt{\Phi_y^2 - \lambda_y^{*2}}} = \frac{1}{0.85 + \sqrt{0.85^2 - 0.76^2}} = 0.81$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 0.81 \cdot 1804.8 = 1461.24 \text{ kN} \geq N_{Ed} = 95.5 \text{ kN}$$

Δηλαδή, υπάρχει μια υπερεκτίμηση της τάξεως του 13.6% της χρήσης διαγραμμάτων Wood σε σχέση με τα προτεινόμενα.

β) Ζυγώματα

Από τα προτεινόμενα διαγράμματα για πλαίσια με πακτώσεις, προκύπτει η τιμή του ισοδύναμου μήκους λυγισμού των ζυγωμάτων ίση με  $\beta_y = 0.85$  και επομένως  $L_{cr} = \beta_y \cdot L = 0.85 \cdot 10 / \cos(30) = 9.81 \text{ m}$

$$\lambda_y^* = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{1}{\lambda_1} = \frac{981}{10.1 \cdot 93.9} = 1.03$$

Για διατομή διπλού «Τ» με πάχος πέλματος μικρότερο των 40mm προκύπτει καμπύλη διατομής  $a$  ( $a=0.21$ ) για λυγισμό ως προς τον ισχυρό άξονα:

$$\Phi_y = 0.5[1 + a(\lambda_y^* - 0.2) + \lambda_y^{*2}] = 0.5[1 + 0.21(1.03 - 0.2) + 1.03^2] = 1.1$$

$$\chi_y = \frac{1}{\Phi_y^2 + \sqrt{\Phi_y^2 - \lambda_y^{*2}}} = \frac{1}{1.1 + \sqrt{1.1^2 - 1.03^2}} = 0.67$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = 0.67 \cdot 1804.8 = 1209.2 \text{ kN} \geq N_{Ed} = 95.5 \text{ kN}$$

### 7.2.2 Έλεγχος σε στρεπτοκαμπικό λυγισμό

Λόγω ταυτόχρονης θλίψης και κάμψης, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής σχέσεις αλληλεπίδρασης για επίπεδο πρόβλημα, έναντι στρεπτοκαμπτικού λυγισμού παρουσιάζονται παρακάτω. Ισχύει ότι για διατομή I υπό αξονική θλίψη και μονοαξονική κάμψη,  $k_{yz}=0$ .

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1.00 \Rightarrow \frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1.00$$

(α) Υποστυλώματα:

Για περίπτωση διατομής με δυο άξονες συμμετρίας και φορτία που δρουν στο κέντρο βάρους της, ισχύει ο παρακάτω τύπος κρίσιμος ελαστικής ροπής:

$$M_{cr} = C_1 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot \frac{I_z}{(k \cdot L)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k \cdot L)^2 \cdot G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z} \right] \right\}^{0.5} = 2.752 \cdot \pi^2 \cdot 21000 \cdot \frac{2770}{(1 \cdot 500)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{1} \right)^2 \frac{328500}{2770} + \frac{(1 \cdot 500)^2 \cdot 8077 \cdot 41.7}{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 2770} \right] \right\}^{0.5} = 102929.75 \text{ kNcm}$$

$$\text{Όπου } G = \frac{E}{2(v+1)} = \frac{21000 \text{ kN/cm}^2}{2(0.3+1)} = 8077 \text{ kN/cm}^2$$

$$I_t = 41.7 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 2770 \text{ cm}^4$$

$$I_w = 328500 \text{ cm}^4$$

$$L = 500 \text{ cm}$$

$k=1.00$  με θεώρηση απλών στρεπτικών στηρίξεων στα άκρα

$k_w=1.00$  με θεώρηση στηρίξεων στα άκρα ελεύθερων σε στρέβλωση

$C_1=2.752$  συντελεστής εξαρτώμενος από το διάγραμμα ροπών (για  $k_1=1.00$ )

$$\lambda_{LT}^* = \sqrt{W_y \cdot f_y / M_{cr}} = \sqrt{675 \cdot 23.5 / 102929.75} = 0.39 > 0.2$$

$$\Phi_{LT} = 0.5[1 + a(\lambda_{LT}^* - 0.2) + \lambda_{LT}^{*2}] = 0.5[1 + 0.21(0.39 - 0.2) + 0.39^2] = 0.6$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT}^2 + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^{*2}}} = \frac{1}{0.6^2 + \sqrt{0.6^2 - 0.39^2}} = 0.95$$

Ο υπολογισμός του συντελεστή αλληλεπίδρασης  $k_{yy}$  γίνεται με βάση την εναλλακτική μέθοδο 2 του Ευρωκώδικα 3 (EN1993-1-1, Παράρτημα Β):

$$k_{yy} = C_{my} \left[ 1 + (\lambda_y^* - 0.2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} \right] \leq C_{my} \left[ 1 + 0.8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} \right] \Rightarrow k_{yy} = 0.9 \left[ 1 + (0.95 - 0.2) \frac{95.52}{0.7 \frac{1804.8}{1.00}} \right] \leq 0.9 \left[ 1 + 0.8 \frac{95.52}{0.7 \frac{1804.8}{1.00}} \right]$$

$$\Rightarrow 0.95 \leq 0.97$$

όπου  $C_{my} = C_{mz} = 0.9$  για λυγισμό με μετάθεση.

Επομένως ικανοποιείται η σχέση αλληλεπίδρασης:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} = \frac{95.5}{0.7 \frac{1804.8}{1.00}} + 0.95 \frac{150.4}{0.95 \frac{175.08}{1.00}} = 0.93 \leq 1.00$$

(β) Ζυγώματα:

$$M_{cr} = C_1 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot \frac{I_z}{(k \cdot L)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k \cdot L)^2 \cdot G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z} \right] \right\}^{0.5} = 2.752 \cdot \pi^2 \cdot 21000 \cdot \frac{2770}{(1 \cdot 1155)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{1} \right)^2 \frac{328500}{2770} + \frac{(1 \cdot 1155)^2 \cdot 8077 \cdot 41.7}{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 2770} \right] \right\}^{0.5} = 35554.7 \text{ kNcm}$$

$$\text{Όπου } G = \frac{E}{2(v+1)} = \frac{21000 \text{ kN/cm}^2}{2(0.3+1)} = 8077 \text{ kN/cm}^2$$

$$I_t = 41.7 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 2770 \text{ cm}^4$$

$$I_w = 328500 \text{ cm}^4$$

$$L = 1155 \text{ cm}$$

$k=1.00$  με θεώρηση απλών στρεπτικών στηρίξεων στα άκρα

$k_w=1.00$  με θεώρηση στηρίξεων στα άκρα ελεύθερων σε στρέβλωση

$C_1=2.752$  συντελεστής εξαρτώμενος από το διάγραμμα ροπών (για  $k_1=1.00$ )

$$\lambda_{LT}^* = \sqrt{W_y \cdot f_y / M_{cr}} = \sqrt{675 \cdot 23.5 / 35554.7} = 0.67$$

$$\Phi_{LT} = 0.5[1 + a(\lambda_{LT}^* - 0.2) + \lambda_{LT}^{*2}] = 0.5[1 + 0.21(0.67 - 0.2) + 0.67^2] = 0.73$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT}^2 + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^{*2}}} = \frac{1}{0.73^2 + \sqrt{0.73^2 - 0.67^2}} = 0.9$$

Ο υπολογισμός του συντελεστή αλληλεπίδρασης  $k_{yy}$  γίνεται με βάση την εναλλακτική μέθοδο 2 του Ευρωκώδικα 3 (EN1993-1-1, Παράρτημα Β):

$$k_{yy} = C_{my} \left[ 1 + (\lambda_y^* - 0.2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} \right] \leq C_{my} \left[ 1 + 0.8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} \right] \Rightarrow k_{yy} = 0.9 \left[ 1 + (0.95 - 0.2) \frac{95.52}{0.67 \frac{1804.8}{1.00}} \right] \leq 0.9 \left[ 1 + 0.8 \frac{95.52}{0.67 \frac{1804.8}{1.00}} \right]$$

$$\Rightarrow 0.95 \leq 0.96$$

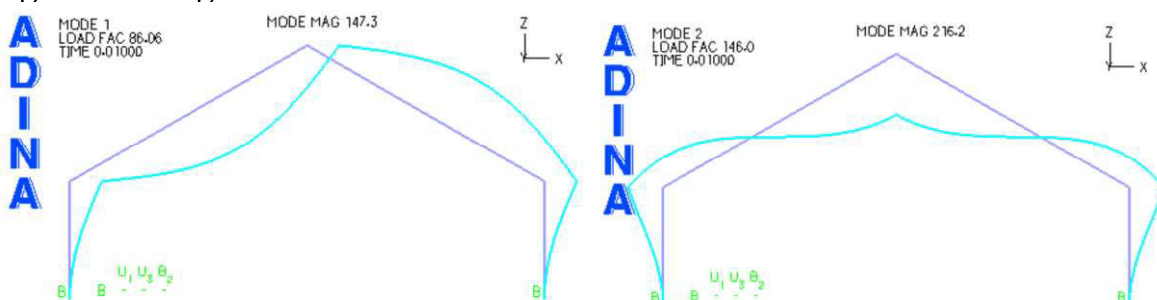
όπου  $C_{my} = C_{mz} = 0.9$  για λυγισμό με μετάθεση.

Επομένως ικανοποιείται η σχέση αλληλεπίδρασης:

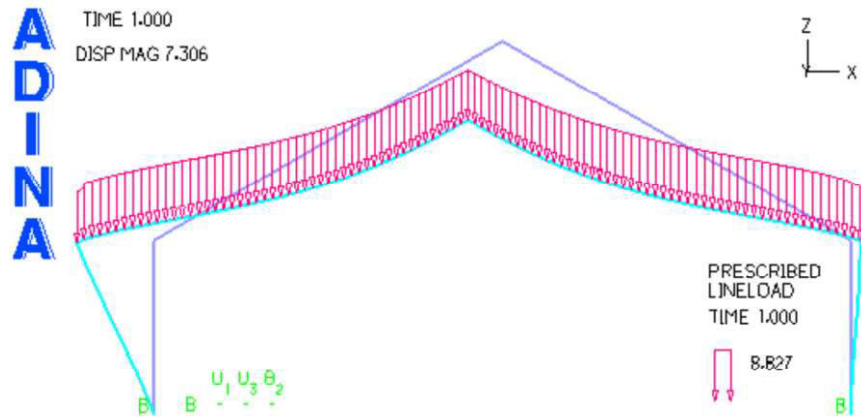
$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} = \frac{95.5}{0.7 \frac{1804.8}{1.00}} + 0.96 \frac{150.4}{0.9 \frac{175.08}{1.00}} = 0.98 \leq 1.00$$

### 7.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΑΜΦΙΚΛΙΝΗ ΖΥΓΩΜΑΤΑ

Παρακάτω παρατείνονται μη γραμμικές αναλύσεις πλαισίων με αμφικλίνη ζυγώματα οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τις μεγάλες μετατοπίσεις και τη διαρροή του υλικού που εμφανίζονται στο πλαίσιο, καθώς και τις αρχικές στέλειες (GMNIA). Χρησιμοποιήθηκε και εδώ το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA [10]. Προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι αρχικές στέλειες, γίνεται πρώτα γραμμική ανάλυση λυγισμού (LBA) ώστε να εξαχθούν οι ιδιομορφές λυγισμού. Τοποθετούνται στον φορέα οι αρχικές στέλειες οι οποίες έχουν το σχήμα των ιδιομορφών και το μέγεθος που ορίζουν οι διατάξεις του Ευρωκώδικα 3 [11]. Από τη μη γραμμική ανάλυση προκύπτει ότι το πλαίσιο αστοχεί σε κατανεμημένο φορτίο  $p_{Rd,GMNIA} = 10.1$  kN/m. Υπενθυμίζεται ότι σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 3 το φορτίο αστοχίας αντιστοιχεί σε  $p_{Rd,EC3} = 10.7$  kN/m ενώ το φορτίο σχεδιασμού θεωρείται ίσο με  $p_{Ed} = 9.15$  kN/m και έτσι επιβεβαιώνεται η αξιοπιστία της άνω ανάλυσης.



Εικόνα 7-5: Ιδιομορφική ανάλυση (LBA) και διατύπωση δύο πρώτων ιδιομορφών



Εικόνα 7-6: Μη γραμμική ανάλυση υλικού κα γεωμετρίας (GMNIA)





## 8 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

### 8.1 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

Όσον αφορά στον υπολογισμό του ισοδύναμου μήκους λυγισμού των υποστυλωμάτων πλαισίων με αμφικλινή ζυγώματα, παρατηρείται ότι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλαισίου επηρεάζουν σημαντικά τα αποτελέσματα. Οι μεγάλες γωνίες ζυγώματος μειώνουν το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του υποστυλώματος, ειδικά όταν τα πλαίσια έχουν σχετικά μικρό ύψος σε σχέση με άνοιγμα και το ζύγωμα είναι σχετικά εύκαμπτο ή θλίβεται, περιπτώσεις δηλαδή όπου η στροφική δέσμευση που προσφέρει το ζύγωμα στο άνω άκρο του υποστυλώματος είναι περιορισμένη. Ενδεικτικά, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μπορεί να μειωθεί έως και 50% ή 60% σε πλαίσια με αρθρώσεις και πακτώσεις, αντίστοιχα. Σε αυτές τις περιπτώσεις μάλιστα, αύξηση της ροπής αδρανείας του ζυγώματος μπορεί να αυξήσει αρκετά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του υποστυλώματος έως και 120% για  $I_2/I_1$  από 2 σε 10, ενώ μικρή αύξηση της θλίψης στο ζύγωμα μπορεί να το μειώσει έως και κατά 20% και 70% για αρθρώσεις και πακτώσεις αντίστοιχα, για λόγο ζυγώματος προς υποστυλώμα  $P_2/P_1$  από 0 σε 0.5. Δηλαδή, το υποστυλώμα είναι πιο ευαίσθητο σε περαιτέρω δυσκαμψία ή ευκαμψία του ζυγώματος. Επιπλέον, η αύξηση του σχετικού ύψους προς το άνοιγμα του πλαισίου, μειώνει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του ζυγώματος σχεδόν ανεξάρτητα από την κλίση ή την δυσκαμψία του ζυγώματος, έως -90% για  $H_1/2L$  από 0.25 σε 1. Επομένως, η θεώρηση πάντοτε οριζώντιου, δηλαδή η χρήση των διαγραμμάτων Wood (ENV [12]), οδηγεί σε σφάλματα κατά τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του υποστυλώματος.

Για τον υπολογισμό του ισοδύναμου μήκους λυγισμού των ζυγωμάτων, είναι βασικό να καθοριστεί ποια θα είναι η κρίσιμη ιδιομορφή λυγισμού, καθώς το ζύγωμα σε αντίθεση με το υποστυλώμα που προκαλεί μόνο αντισυμμετρική ιδιομορφή λυγισμού στο πλαίσιο, μπορεί να προκαλέσει και συμμετρική ιδιομορφή λυγισμού. Οι μεγάλες γωνίες ζυγώματος εδώ, τείνουν να αυξάνουν το κρίσιμο φορτίο λυγισμού συμμετρικής ιδιομορφής, κυρίως για γωνίες  $\varphi=30^\circ$ , έως 60% και 150% για αρθρώσεις και πακτώσεις αντίστοιχα, ή όταν το πλαίσιο έχει μικρό ύψος σε σχέση με το άνοιγμά του, ενώ στην αντισυμμετρική ιδιομορφή, το φορτίο λυγισμού μειώνεται, έως και 70% για  $\varphi=60^\circ$ . Αυτή η αντίστροφη τάση, έχει σαν αποτέλεσμα να μην είναι πάντα σαφές ποια από τις δυο είναι η κρίσιμη ιδιομορφή. Για μικρές γωνίες είναι η συμμετρική ιδιομορφή η κρίσιμη. Για πιο μεγάλες, δίνει τη θέση της στην αντισυμμετρική. Το πότε θα γίνει αυτό εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλαισίου, αλλά ειδικά σε σχετικά χαμηλά πλαίσια σε σχέση με το ύψος τους ή σχετικά εύκαμπτα ζυγώματα, αυτή η εναλλαγή γίνεται σε χαμηλές γωνίες, όπως  $\varphi=6^\circ$ . Σε πολύ δύσκαμπτα ζυγώματα, τα πλαίσια μπορεί να μην εμφανίσουν ποτέ την αντισυμμετρική ιδιομορφή ως κρίσιμη. Ακόμη, η αύξηση του σχετικού ύψους των πλαισίων σε σχέση με το άνοιγμά τους προκαλεί μείωση του φορτίου λυγισμού της συμμετρικής ιδιομορφής έως και κατά 80% αλλά δεν επηρεάζει πολύ το φορτίο της αντισυμμετρικής. Επομένως και στα ζυγώματα, η παραδοχή

οριζώντιου ζυγώματος και χρήση προσεγγιστικού ισοδύναμου μήκους λυγισμού ίσου με τη μονάδα για απλοποίηση, οδηγεί σε σφάλματα.

Στην περίπτωση των υποστυλωμάτων, ενδείκνυται η χρήση είτε των διαγραμμάτων που παρουσιάστηκαν παραπάνω, είτε των διαγραμμάτων Wood με τέτοιο τρόπο όμως, ώστε να λαμβάνονται υπόψιν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλαισίου και να δίνουν ακριβή αποτελέσματα, όπως αναλύθηκε παραπάνω. Για τα ζυγώματα, ενδείκνυται η χρήση των αντίστοιχων διαγραμμάτων που παρουσιάστηκαν παραπάνω, μιας και τα διαγράμματα Wood αφορούν μόνο τα υποστυλώματα.

## 8.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

Η έντονα παραμορφωμένη γεωμετρία ρηχών αμφικλινών ζυγμάτων σε συνδυασμό με τον ακαριαίο λυγισμό που μπορεί να παρουσιαστεί σε αυτά, προκαλεί έντονη μη γραμμικότητα γεωμετρίας και υλικού κατά τη φόρτισή τους, με σημαντικό υποβιβασμό της αρχικά θεωρούμενης αντοχής τους. Από την αντίστοιχη διερεύνηση προκύπτει ότι ρηχά αμφικλινή ζυγώματα με σύνδεση ροπής στην κορυφή, παρουσιάζουν έντονη μη γραμμική γεωμετρική συμπεριφορά και μάλιστα υπό μικρή λυγηρότητα, που μπορεί να μειώσει το φορτίο λυγισμού κατά 25% σε ζυγώματα γωνίας  $\varphi=14^\circ$  και κατά 75% σε ζυγώματα γωνίας  $\varphi=6^\circ$ . Ωστόσο, η μη γραμμική συμπεριφορά γεωμετρίας επιταχύνει την διαρροή του υλικού, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην μείωση της αντοχής κυρίως για λιγότερο ρηχά αμφικλινή ζυγώματα, στα οποία υπάρχει σχετικά μικρότερη επίδραση της μη γραμμικότητας της γεωμετρίας. Έτσι, μειώνουν κατά 20% και 80% τα φορτία λυγισμού αμφικλινών στεγών κλίσεως  $\varphi=6^\circ$  και  $\varphi=14^\circ$  αντίστοιχα, σε σχέση με το εάν υπήρχε θεώρηση ελαστικού υλικού. Οι άνω αποκλείσεις είναι όμοιες με αυτές των αμφικλινών ζυγμάτων με σύνδεση άρθρωσης στην κορυφή (M. A. Livanou, Charis. J. Gantes [4]). Επομένως, κατά τον σχεδιασμό δίρριχτων ζυγμάτων, ενδείκνυται η μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας σε πολύ ρηχές αμφικλινείς στέγες ( $\varphi \leq 10^\circ$ ) ή μικρής λυγηρότητας ( $\lambda^* \leq 1$  και ειδικά 0.5 σε πολύ ρηχές) και η μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας και υλικού, σε λιγότερο ρηχές στέγες ( $\varphi \geq 10^\circ$ ) με μικρή λυγηρότητα ( $\lambda^* \leq 1$  ή και 1.5 σε πιο ψηλές). Για λυγηρότητες  $\lambda^* \geq 2$  η μη γραμμικότητα υλικού δεν παίζει τόσο ρόλο όσο η μη γραμμικότητα γεωμετρίας, για όλες τις κλίσεις ζυγμάτων.

## 9 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Χ. Ι. Γαντές, Σημειώσεις του μαθήματος 7<sup>ου</sup> εξαμήνου Ε.Μ.Π «ΣΙΔΗΡΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ Ι»
- [2] Χ. Ι. Γαντές, Σημειώσεις του μαθήματος 8<sup>ου</sup> εξαμήνου Ε.Μ.Π «ΣΙΔΗΡΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΙΙ»
- [3] Χ. Ι. Γαντές, Σημειώσεις του μαθήματος 9<sup>ου</sup> εξαμήνου Ε.Μ.Π «ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ»
- [4] Maria A. Livanou, Charis J. Gantes (2016): *Assessing the necessity to account for geometric nonlinearity in von Mises trusses representing simple shallow roofs*. Shell and Spatial structures (IASS) Symposium 2016
- [5] Α. Ν. Κουνάδης *Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας*. Β' Έκδοση. Συμμεών. 1997
- [6] Α. Ν. Κουνάδης *Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας*. Β' Έκδοση. Συμμεών. 2004
- [7] Ι. Κ. Βάγιας, Ι. Χ. Ερμόπουλος, Γ. Ι. Ιωαννίδης *Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα με Παραδείγματα Εφαρμογής*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. 2013
- [8] Ι. Κ. Βάγιας. *Σιδηρές Κατασκευές - Ανάλυση και Διαστασιολόγηση*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. 2013
- [9] MATLAB R2016b. the MathWorks Inc.. 2016
- [10] ADINA system 9.2.1. Release Notes. ADINA R&D Inc. 2014
- [11] EN 1993: Design of Steel structures
- [12] ENV 1993: European pre-Standard
- [13] EN 1990: Basis of structural design
- [14] EN 1991: Actions on structures

