



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Τομέας Μαθηματικών

**Ευστάθεια Αυτόνομων & Χρονικά – Μεταβαλλόμενων
Συστημάτων**

Διπλωματική Εργασία της
Δούρου Μαρίας

Επιβλέπων: Τσινιάς Ιωάννης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2011

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	3
Κεφάλαιο 1: Αυτόνομα συστήματα.....	4
1.1 Αστάθεια & Ευστάθεια των σημείων ισορροπίας στα αυτόνομα συστήματα	4
1.2 Θεώρημα Lyapunov & Εφαρμογές.....	7
1.3 Θεώρημα Barbashin – Krasovskii & Εφαρμογές.....	18
1.4 Ιανές Συνθήκες Αστάθειας & Εφαρμογές.....	19
Κεφάλαιο 2: Η αρχή του Αναλλοίωτου	21
2.1 Αναλλοίωτα σύνολα	21
2.2 Θεώρημα La Salle & Εφαρμογές.....	23
Κεφάλαιο 3: Γραμμικά Συστήματα & Γραμμικοποίηση.....	26
3.1 Αστάθεια & Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων & Εφαρμογές.....	26
3.2 Θεώρημα Γραμμικοποίησης & Εφαρμογές.....	32
Κεφάλαιο 4: Μη αυτόνομα συστήματα.....	39
4.1 Μελέτη Ευστάθειας & Αστάθειας των σημείων ισορροπίας	39
4.2 Λήμμα Σύγκρισης.....	45
4.3 Βασικό Θεώρημα Ευστάθειας & Εφαρμογές.....	45
Κεφάλαιο 5: Γραμμικά Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα και Γραμμικοποίηση.....	52
Κεφάλαιο 6: Αντίστροφα Θεωρήματα	59
Κεφάλαιο 7: Επεκτάσεις στην περίπτωση των Χρονικά Μεταβαλλόμενων Συστημάτων & Σύνδεση με την έννοια της Παρατηρησιμότητας	59
Βιβλιογραφία	72

Εισαγωγή

Η θεωρία της ευστάθειας παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία συστημάτων και τη Μηχανική. Υπάρχουν διαφορετικά είδη προβλημάτων ευστάθειας που προέρχονται από τη μελέτη των δυναμικών συστημάτων, όπως η ευστάθεια των περιοδικών τροχιών και η ευστάθεια εισόδου – εξόδου. Η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας συνήθως περιγράφεται μέσω χρήσης Lyapunov, ενός Ρώσου Μαθηματικού – Μηχανικού, ο οποίος ανέπτυξε αυτή τη θεωρία, η οποία πήρε το όνομά του.

Στο Κεφάλαιο 1 θα μελετήσουμε τα σημεία ευστάθειας, αστάθειας καθώς και θα επισημάνουμε τη διαφορά ευστάθειας και ασυμπτωτικής ευστάθειας. Επίσης, θα παρουσιάσουμε τα βασικά θεωρήματα της μεθόδου Lyapunov για αυτόνομα συστήματα.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται μια επέκταση της θεωρίας με βάση το θεώρημα La Salle.

Στο Κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με την ευστάθεια γραμμικών αυτόνομων συστημάτων και εκμεταλλευόμαστε τ' αποτελέσματα ώστε να εξάγουμε μέσω της γραμμικοποίησης ικανές συνθήκες για την ευστάθεια αυτόνομων μη γραμμικών συστημάτων.

Στο Κεφάλαιο 4 επεκτείνουμε την θεωρία Lyapunov σε μη αυτόνομα συστήματα. Περιγράφουμε την ομοιόμορφη ευστάθεια, την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια και την εκθετική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για ένα μη αυτόνομο σύστημα. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Lyapunov για την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια όπως και την εκθετική ευστάθεια.

Στο Κεφάλαιο 5 μελετάμε τα γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα και την γραμμικοποίησή τους.

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε δυο αντίστροφα θεωρήματα Lyapunov.

Στο Κεφάλαιο 7 μελετάμε κάποιες επεκτάσεις του θεωρήματος La Salle για χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα.

Κεφάλαιο 1: Αυτόνομα συστήματα

1.1 Αστάθεια & Ευστάθεια των σημείων ισορροπίας στα αυτόνομα συστήματα

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

όπου $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι τοπικά Lipschitz σε μια περιοχή $D \subset \mathbb{R}^n$. Με $x(\cdot) = x(\cdot, x_0)$ συμβολίζουμε την μοναδική λύση του (1.1), όπου $x(0, x_0) = x_0$ που ορίζεται ως γνωστό για t κοντά στο μηδέν.

Υποθέτουμε ότι $\bar{x} \in D$ είναι ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.1), τέτοιο ώστε:

$$f(\bar{x}) = 0$$

Θα μελετήσουμε την ευστάθεια του \bar{x} . Γι' αυτό το λόγο θα διατυπώσουμε τους ορισμούς και τα θεωρήματα, για την περίπτωση που το σημείο ισορροπίας είναι η αρχή του \mathbb{R}^n , όπου το σημείο \bar{x} ισούται με μηδέν.

Πράγματι, αν: $\bar{x} \neq 0$ τότε αν $y(\cdot) = x(\cdot) - \bar{x}$ έχουμε:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) \underset{op}{=} g(y), \text{ όπου } g(0) = 0$$

Στην καινούρια μεταβλητή y , το σύστημα έχει σημείο ισορροπίας την αρχή των αξόνων. Άρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε στο εξής ότι η $f(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $f(0) = 0$ και θα μελετήσουμε την ευστάθεια του μηδενός.

Ορισμός 1.1: Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ της εξίσωσης (1.1) είναι:

- ευσταθές αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- ασταθές αν δεν είναι ευσταθές.
- ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και μπορεί να επιλεγεί δ τέτοιο ώστε:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad (1.2)$$

- ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και ισχύει η 1.2, για κάθε $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Ας θεωρησοθμε για παραδειγμα την εξίσωση του ταλαντωτή:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{g}{l}\right)\sin x_1 - \left(\frac{k}{m}\right)x_2\end{aligned}$$

η οποία έχει δυο σημεία ισορροπίας τα: $(x_1 = 0, x_2 = 0)$, $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$. Μπορει να δειχτει ότι για $k = 0$ οι τροχιές στη περιοχή του πρώτου σημείου ισορροπίας είναι κλειστές. Επομένως, ξειινώντας ικανοποιητικά κοντά στο σημείο ισορροπίας, οι τροχιές είναι βέβαιο ότι θα παραμείνουν μέσα σ' οποιαδήποτε συγκεκριμένη μπάλα που έχει κέντρο το σημείο ισορροπίας. Επομένως, η απαίτηση που αφορά το ε και το δ για την ευστάθεια ικανοποιείται. Το σημείο ισορροπίας, ωστόσο, δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, καθώς οι τροχιές που ξειινούν από το σημείο ισορροπίας δεν καταλήγουν σ' αυτό τελικά. Αντίθετα, παραμένουν στην κλειστή τροχιά τους. Όταν η τριβή ληφθει υπόψη, τότε το σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων γίνεται ασυμπτωτικά ευσταθής εστία. Η μελέτη του πορτραίτου φάσεων μιας ευσταθούς εστίας δείχνει ότι η απαίτηση που αφορά το ε και το δ για ευστάθεια, ικανοποιείται. Επιπλέον, οι τροχιές που ξειινούν κοντά στο σημείο ισορροπίας τείνουν σ' αυτό καθώς το t τείνει στο ∞ . Το δεύτερο σημείο ισορροπίας στο $x_1 = \pi$ είναι ασταθές. Συγκεκριμένα, αναμένεται ότι η απαίτηση που αφορά το ε και το δ δεν ικανοποιείται, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πάντα μια τροχιά που βγαίνει έξω από την μπάλα $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon\}$ ακόμα και όταν το $x(0)$ είναι αυθαίρετα κοντά στο σημείο ισορροπίας.

Ο ορισμός (1.1) απαιτεί ότι οι λύσεις του συστήματος (1.1) ορίζονται για όλα τα $t \geq 0$. Θα δείξουμε ότι οι επιπρόσθετες συνθήκες που χρειάζονται στο θεώρημα Lyapunov διασφαλίζουν την γενική ύπαρξη λύσεων.

Εναλλακτικά, μπορούμε να μελετησομε την ευστάθεια και την ασυμπτωτική ευστάθεια των σημείων ισορροπίας, χρησιμοποιώντας «ενεργειακή προσέγγιση». Ας ορίσομε την ενέργεια του ταλαντωτή $E(x)$ ως το άθροισμα των δυναμικών και κινητικών ενεργειών, έχοντας επιλέξει σημείο αναφοράς για την δυναμική ενέργεια τέτοιο ώστε: $E(0) = 0$. Έχουμε λοιπόν:

$$E(x) = \int_0^{x_1} \left(\frac{g}{l} \right) \sin y \, dy + \frac{1}{2} x_2^2 = \left(\frac{g}{l} \right) (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

Όταν η τριβή είναι αμελητέα ($k=0$), το σύστημα είναι συντηρητικό, οπότε δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας. Άρα, η E είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης του συστήματος, δηλαδή:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Αφού, $E(x) = c$ σχηματίζει κλειστή καμπύλη γύρω από το $x=0$ για μικρά c , όπου μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το $x=0$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Όταν η τριβή ληφθεί υπόψιν, τότε θα υπάρξει απώλεια ενέργειας κατά την διάρκεια κίνησης του συστήματος. Δηλαδή:

$$\frac{dE}{dt} \leq 0$$

Λόγω της τριβής, η E δεν μπορεί να παραμείνει σταθερή επ' αόριστον, καθώς το σύστημα βρίσκεται σε κίνηση. Οπότε, συνεχώς μειώνεται μέχρι να γίνει τελικά μηδέν, το οποίο μας δείχνει ότι η τροχιά τείνει στο $x=0$ καθώς το t τείνει στο ∞ . Ωστόσο, εξετάζοντας την παράγωγο της E μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας.

Το 1892, ο Lyapunov απέδειξε ότι υπάρχουν και άλλες συναρτήσεις πέραν της ενέργειας, μέσω των οποίων μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας.

Έστω: $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη σ' έναν τόπο $D \subset \mathbb{R}^n$, το οποίο περιέχει την αρχή των αξόνων. Η παράγωγος της V του συστήματος (1.1), η οποία συμβολίζεται ως $\dot{V}(x)$ είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned}$$

Η παράγωγος της V εξαρτάται από την εξίσωση του συστήματος. Συνεπώς, η $\dot{V}(x)$ είναι διαφορετική για διαφορετικά συστήματα. Αν, $\varphi(t, x)$ είναι λύση του συστήματος (1.1), η οποία ξεκινά έχοντας αρχική θέση x τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε η $\dot{V}(x)$ είναι:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\varphi(t, x)) \Big|_{t=0}$$

Επομένως, αν η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητική τότε η $V(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση για το σύστημα (1.1).

Το επόμενο θεώρημα είναι απόρροια της προηγούμενης προσέγγισης:

1.2 Θεώρημα Lyapunov & Εφαρμογές

Θεώρημα 1.1: Lyapunov

Έστω $x = 0$ να είναι σημείο ισορροπίας του (1.1) με $D \subset \mathbb{R}^n$ το πεδίο ορισμού με το $x = 0$. Έστω $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση έτσι ώστε:

$$V(0) = 0, V(x) > 0 \text{ στο } D \setminus \{0\} \quad (1.3)$$

$$\dot{V}(x) \stackrel{op}{=} (\nabla V f)(x) \leq 0 \text{ στο } D \quad (1.4)$$

τότε το $x = 0$ είναι ευσταθές. Επιπλέον, αν

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ στο } D \setminus \{0\} \quad (1.5)$$

τότε το $x = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: 1° Για $\varepsilon > 0$ θέτουμε $r \in (0, \varepsilon]$ έτσι ώστε:

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\} \subset D$$

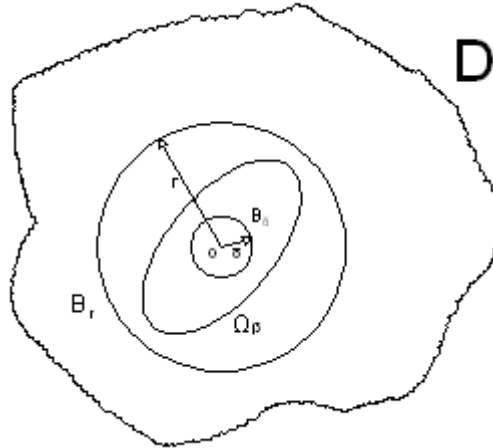
2° Έστω $a = \min_{\|x\|=r} V(x)$ και η υπόθεση (1.3) μάς εξασφαλίζει ότι $a > 0$.

3° Έστω $\beta \in (0, a)$ και

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r : V(x) \leq \beta\}$$

όπου το Ω_β είναι στο εσωτερικό του B_r . Τότε από την σχέση (1.5) οποιαδήποτε τροχιά ξεκινά στο Ω_β για $t=0$ θα παραμείνει σ' αυτό για όλο το χρονικό διάστημα. Συγκεκριμένα:

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \quad \forall t \geq 0$$



Σχήμα (1.1): Γεωμετρική αναπαράσταση των υποθέσεων του Θεωρήματος

Το Ω_β είναι προφανώς συμπαγές αφού το σύνολο είναι κλειστό λόγω συνέχειας της V και περικλειόμενο από το B_r . Επομένως, το σύστημα (1.1) έχει μοναδική λύση ορισμένη για όλα τα $t \geq 0$, δηλαδή $x(0) \in \Omega_\beta$. Τώρα, αφού $V(x)$ - συνεχής και $V(0) = 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε:

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$$

Επομένως, έχουμε:

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

και

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r$$

Άρα καταλήγουμε:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

το οποίο μας δείχνει ότι το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι ευσταθές.

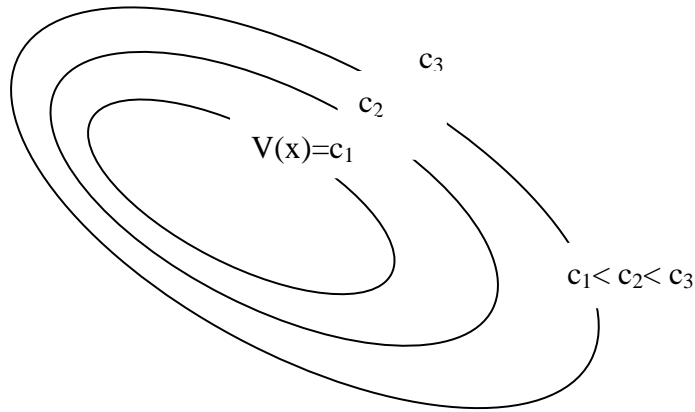
4° Τώρα υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση (1.4). Για να δείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια, χρειάζεται να δείξουμε ότι: $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, δηλαδή: $\forall a > 0, \exists T > 0$ έτσι ώστε $\|x(t)\| < a$ για όλα τα $t > T$. Τώρα από επανάληψη των προηγούμενων ισχυρισμών, γνωρίζουμε ότι:

$\forall a > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $b > 0$ έτσι ώστε: $\Omega_b \subset B_a$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι: $V(x(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Επειδή, η $V(x(t))$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0 έχουμε:

$$V(x(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} c \geq 0$$

Δείχνουμε ότι $c = 0$. Έστω αντίθετα ότι $c > 0$. Αφού η $V(x)$ είναι συνεχής υπάρχει $d > 0$ έτσι ώστε $B_d \subset \Omega_c$ και συνεπώς η τροχιά $x(t)$ περνά έξω από την μπάλα B_d για όλα τα $t \geq 0$.

Έστω, $-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$ το οποίο υπάρχει λόγω συνέχειας της συνάρτησης $\dot{V}(x)$ και έχει μέγιστο στην περιοχή $\{d \leq \|x\| \leq r\}$.



Σχήμα 1.2: Επιφάνειες κατά επίπεδο μιας συνάρτησης Lyapunov.

Τώρα, από την σχέση (1.5) και το γεγονός ότι $x(t)$ δεν ανήκει στη μπάλα B_d για κάθε $t \geq 0$ συνεπάγεται ότι:

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t, \quad \forall t \geq 0$$

Έτσι, το δεξί μέλος θα γίνει τελικά αρνητικό και αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $c > 0$, άτοπο. Άρα, $c = 0$ και συνεπώς το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. ■

Όταν μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $V(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες (1.3) και (1.4) ονομάζεται συνάρτηση Lyapunov. Η επιφάνεια $V(x) = c$, για κάποια $c > 0$, ονομάζεται Lyapunov επιφάνεια ή ισοδυναμική επιφάνεια. Χρησιμοποιώντας Lyapunov επιφάνειες, το σχήμα 1.2 αποτελεί διαισθητική απεικόνιση του θεωρήματος. Αποτελούν Lyapunov επιφάνειες, καθώς οι τιμές των μεταβλητών c μειώνονται. Η συνθήκη $\dot{V} \leq 0$ δηλώνει ότι,

όταν μια τροχιά διασταυρωθεί με μια Lyapunov επιφάνεια $V(x) = c$, τότε κινείται μέσα στο σύνολο $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$ και παραμένει μέσα σ' αυτό. Όταν $\dot{V} < 0$, τότε η τροχιά κινείται από μια επιφάνεια Lyapunov σε μια εσωτερική επιφάνεια Lyapunov με μικρότερη τιμή c . Καθώς το c μειώνεται, η επιφάνεια Lyapunov $V(x) = c$ εκφυλίζεται στην αρχή των αξόνων $(0,0)$, δείχνοντας ότι πλησιάζει το $(0,0)$ με το πέρασ του χρόνου. Εάν γνωρίζουμε μόνο ότι, $\dot{V} \leq 0$ τότε δεν είμαστε σίγουροι ότι η τροχιά μπορεί να πλησιάσει το $(0,0)$, αλλά μπορούμε να καταλήξουμε ότι το $(0,0)$ είναι ευσταθές αφού η τροχιά μπορεί να περικλείεται μέσα σ' οποιαδήποτε μπάλα B_ε , απαιτώντας ότι η αρχική θέση $x(0)$ βρίσκεται μέσα σε μια επιφάνεια Lyapunov που περιέχεται στη μπάλα.

Όταν μια συνάρτηση $V(x)$ ικανοποιεί τη συνθήκη (1.3) έτσι ώστε: $V(0) = 0$ και $V(x) > 0$ για $x \neq 0$, τότε λέμε ότι είναι θετικά ημιορισμένη. Μια συνάρτηση $V(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη ή αρνητικά ημιορισμένη εάν η $-V(x)$ είναι θετικά ορισμένη ή θετικά ημιορισμένη, αντίστοιχα.

Μ' αυτή την ορολογία, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το θεώρημα Lyapunov ως: η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι ευσταθής αν υπάρχει μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $V(x)$ τέτοια ώστε η $\dot{V}(x)$ να είναι αρνητικά ημιορισμένη, και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη.

Η κλάση των βαθμωτών συναρτήσεων $V(x)$, τις οποίες μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε σε ποιά από τις παραπάνω τέσσερις κατηγορίες ανήκουν, είναι η κλάση των συναρτήσεων που γράφονται στην τετραγωνική μορφή:

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j$$

όπου ο P είναι ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας. Σ' αυτή την περίπτωση, η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη (θετικά ημιορισμένη) εάν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του P είναι θετικές, το οποίο αληθεύει αν και μόνο αν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του P είναι θετικές. Εάν η $V(x) = x^T P x$ είναι θετικά ορισμένη (θετικά ημιορισμένη) τότε μπορούμε να πούμε ότι ο P είναι θετικά ορισμένος (θετικά ημιορισμένος) και γράφουμε $P > 0$ ($P \geq 0$).

Παράδειγμα 1.1: Έστω

$$V(x) = ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2$$

η οποία γράφεται στη μορφή:

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T P x.$$

Λύση: Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi(a)$ του πίνακα P είναι οι: $a, a^2, a(a^2 - 5)$. Άρα, η $V(x)$ ορίζεται θετικά αν $a > \sqrt{5}$. Τώρα, για αρνητικά ορίσματα, οι ρίζες του πίνακα P θα πρέπει να είναι θετικές διότι οι ρίζες του P πρέπει να έχουν εναλλακτικά σημεία ώστε να γίνονται αρνητικές και θετικές. Άρα, η $V(x)$ ορίζεται αρνητικά αν $a < -\sqrt{5}$.

Από τον υπολογισμό όλων των λύσεων μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: $V(x) \geq 0$ (θετικά ημιορισμένο) αν $a \geq \sqrt{5}$ και $V(x) \leq 0$ (αρνητικά ημιορισμένο) αν $a \leq -\sqrt{5}$ και για $a \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ η $V(x)$ δεν ορίζεται. ■

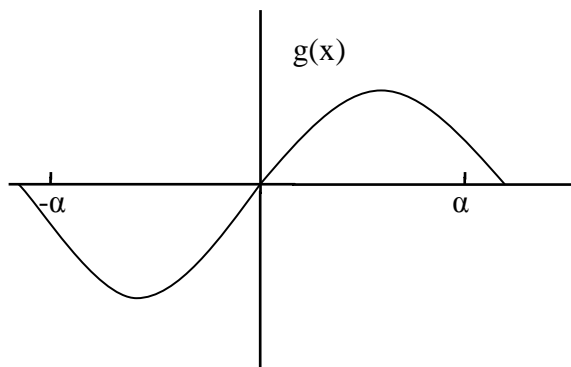
Παράδειγμα 1.2: Έστω η διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης

$$\dot{x} = -g(x)$$

με την $g(x)$ - τοπικά Lipschitz στο διάστημα $(-a, a)$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ xg(x) &> 0, \quad \forall x \neq 0, x \in (-a, a) \end{aligned}$$

Λύση: Ένα πιθανό σχεδιάγραμμα της $g(x)$ δίνεται στην ακόλουθη εικόνα



Σχήμα 1.3: Πιθανή μη γραμμική συνάρτηση για το παράδειγμα 1.2

Το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας την αρχή συντεταγμένων $(0,0)$ και διαισθητικά μπορούμε να δούμε ότι το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές διότι οι λύσεις ξεκινούν και από τις δύο πλευρές του $(0,0)$ και θα κινηθούν προς την κατεύθυνση του $(0,0)$ λόγω της παραγώγου \dot{x} . Για να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Lyapunov, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$V(x) = \int_0^x g(y) dy$$

Η $V(x)$ με $x \in D := (-\alpha, \alpha)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη όπου $V(0) = 0$, $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$. Τώρα, για να διαπιστώσουμε αν είναι συνάρτηση Lyapunov, αρκεί να υπολογίσουμε τις παραγώγους των τροχιών του συστήματος. Έχουμε:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} [-g(x)] = -g^2(x) < 0, \quad \forall x \in D - \{0\}$$

Τελικά, από το θεώρημα (1.1) συμπεραίνουμε ότι η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Παράδειγμα 1.3: Δίνεται η ακόλουθη εξίσωση εκκρεμούς χωρίς τριβή:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{g}{l}\right) \sin x_1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

μελετώντας την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $(0,0)$. Μια υποψήφια συνάρτηση Lyapunov είναι η συνάρτηση της ενέργειας, δηλαδή:

$$V(x) = \left(\frac{g}{l}\right)(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

Τώρα, $V(0) = 0$ και $V(x)$ θετικά ορισμένη εκτός του διαστήματος $-2\pi < x_1 < 2\pi$. Η παράγωγος της $V(x)$ είναι:

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{g}{l}\right) \dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = \left(\frac{g}{l}\right) x_2 \sin x_1 - \left(\frac{g}{l}\right) x_2 \sin x_1 = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = 0$$

και από τις σχέσεις (1.3), (1.4) οι οποίες ικανοποιούνται, καταλήγουμε ότι το $(0,0)$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Επειδή $\dot{V}(x) \equiv 0$ μπορούμε να πούμε ότι το $(0,0)$ δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και για τροχιές που ξεκινούν στην περιοχή Lyapunov $V(x) = c$ παραμένουν στην ίδια περιοχή για όλες τις μελλοντικές στιγμές.

Παράδειγμα 1.4: Θεωρούμε την εξίσωση εκκρεμούς με τριβή αυτή τη φορά:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{g}{l}\right)\sin x_1 - \left(\frac{k}{m}\right)x_2\end{aligned}\quad (1.7)$$

Θεωρούμε την ενεργειακή συνάρτηση $V(x) = \left(\frac{g}{l}\right)(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$ ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov. Έχουμε:

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{g}{l}\right)\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = -\left(\frac{k}{m}\right)x_2^2 \leq 0$$

η οποία είναι αρνητικά ημιορισμένη. Δεν είναι αρνητικά ορισμένη διότι $\dot{V}(x) = 0$ για $x_2 = 0$, μη εξαρτώμενη από την μεταβλητή x_1 , όπου έχουμε $\dot{V}(x) = 0$ κατά μήκος του x_1 -άξονα. Άρα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $(0,0)$ είναι ευσταθές.

Ωστόσο, λόγω τριβής αναμένουμε ότι το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Όμως, η παραπάνω συνάρτηση Lyapunov αποτυγχάνει να το δείξει.

Σημείωση: Θα δούμε αργότερα στο 2^ο κεφάλαιο ότι το θεώρημα La Salle μας δίνει την δυνατότητα να φτάσουμε σε ένα θετικό συμπέρασμα με χρήση της ενεργειακής συνάρτησης Lyapunov.

Στην συνέχεια εντοπίζουμε μια συνάρτηση Lyapunov $V(x)$ για το σύστημα (1.7) που

πληροί την (1.5). Θεωρούμε ένα 2×2 πίνακα $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} > 0$ και ορίζουμε:

$$V(x) \stackrel{op}{=} \frac{1}{2}x^T P x + \left(\frac{g}{l}\right)(1 - \cos x_1)$$

όπου τα στοιχεία του πίνακα P να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}p_{11} &> 0 \\ p_{22} &> 0 \\ p_{11}p_{22} - p_{12}^2 &> 0\end{aligned}$$

Η παράγωγος $\dot{V}(x)$ δίνεται από την σχέση:

$$\dot{V}(x) = \left[p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \left(\frac{g}{l}\right)\sin x_1 \right]x_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2) \left[-\left(\frac{g}{l}\right)\sin x_1 - \left(\frac{k}{m}\right)x_2 \right]$$

Τώρα, πρέπει να επιλέξουμε τα p_{11} , p_{12} , p_{22} έτσι ώστε η $\dot{V}(x)$ να είναι αρνητικά ορισμένη. Επιλέγουμε πρώτα

$$p_{22} = 1 \text{ και } p_{11} = \left(\frac{k}{m}\right) p_{12}$$

με

$$0 < p_{12} < \frac{k}{m}$$

ώστε η $V(x)$ να είναι θετικά ορισμένη. Στη συνέχεια, επιλέγουμε $p_{12} = 0.5\left(\frac{k}{m}\right)$ και υπολογίζουμε:

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{g}{l}\right)\left(\frac{k}{m}\right)x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)x_2^2$$

Παίρνοντας, $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \pi\}$ βλέπουμε ότι η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη στο D και η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη στο $D \setminus \{0\}$, αντίστοιχα. Συνεπώς, βάσει του θεωρήματος (1.1) καταλήγουμε στο ότι το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Μονο σε οριμενες περιπτωσεις ο προδιορισμος συνάρτησης Lyapunov είναι εφικτος. Ας εξετασουμε την ακολουθη περιπτωση ευρεσης μιας θετικα ορισμενης $V(x)$, έτσι ώστε η $\dot{V}(x)$ να ορίζεται αρνητικά. Η αντιστοιχη διαδικασία ονομάζεται μέθοδος βαθμωτής μεταβλητής. Περιγράφουμε τη διαδικασία. Έστω $V(x)$ μια συνάρτηση του x και

$$g(x) = \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T$$

Η παράγωγος $\dot{V}(x)$ είναι:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = g^T(x) f(x)$$

Η ιδέα τώρα είναι να επιλέξουμε την $g(x)$ έτσι ώστε να παράγεται από μια θετικά ορισμένη συνάρτηση $V(x)$ ενώ ταυτόχρονα η $\dot{V}(x)$ να είναι αρνητικά ορισμένη. Δεν είναι δύσκολο (παράδειγμα 1.5) να επαληθεύσουμε ότι η $g(x)$ προκύπτει από την παραπάνω σχέση, εάν ο Ιακωβιανός πίνακας $[\partial g / \partial x]$ είναι συμμετρικός, έτσι ώστε:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Βάσει του παραπάνω περιορισμού, επιλέγουμε την $g(x)$ τέτοια ώστε η $g^T(x)f(x)$ να είναι αρνητικά ορισμένη. Η $V(x)$ υπολογίζεται από το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$V(x) = \int_0^x g^T(y) dy = \int_0^x \sum_{i=1}^n g_i(y) dy_i$$

Η ολοκλήρωση ορίζεται απ' οποιαδήποτε διαδρομή επιλέξουμε μ' έναρξη το 0 και τέλος το x , έτσι ώστε:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \dots, 0) dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2, 0, \dots, 0) dy_2 \\ + \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_n) dy_n$$

Αγνοώντας μερικές παραμέτρους της $g(x)$, τις οποίες προσπαθούμε να επιλέξουμε έτσι ώστε να μας εξασφαλίζουν την $V(x)$ θετικά ορισμένη. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να φτάσουμε στη συνάρτηση Lyapunov του παραδείγματος (1.4). Αντί όμως, να επαναλάβουμε το παράδειγμα, επεξηγούμε τη μέθοδο μ' ένα πιο γενικό σύστημα, ως ακολούθως.

Παράδειγμα 1.5: Έστω το ακόλουθο σύστημα 2^{ης} τάξης:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - a x_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

όπου $a > 0$, $h(\cdot)$ - τοπικά Lipschitz, $h(0) = 0$, $yh(y) > 0 \quad \forall y \neq 0, y \in (-b, c)$ με b, c θετικές σταθερές. Η εξίσωση εκκρεμούς είναι μια ειδική περίπτωση της (1.8).

Λύση: Επιλέγουμε ένα διάνυσμα 2^{ης} τάξης ώστε να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$$

όπου

$$\dot{V}(x) = g_1(x)x_2 - g_2(x)[h(x_1) + a x_2] < 0, \text{ για } x \neq 0 \quad (1.9)$$

και

$$V(x) = \int_0^x g^T(y) dy > 0, \text{ για } x \neq 0$$

Ας ορίσουμε την $g(x)$, ως:

$$g(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2 \end{bmatrix}$$

όπου οι συναρτήσεις $a(\cdot), \beta(\cdot), \gamma(\cdot), \delta(\cdot)$ μπορούν να προσδιοριστούν. Τώρα, για να ικανοποιείται η συμμετρία, θα πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$\beta(x) + \frac{\partial a}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial \beta}{\partial x_2} x_2 = \gamma(x) + \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \delta}{\partial x_1} x_2$$

Τώρα, η παράγωγος $\dot{V}(x)$ είναι:

$$\dot{V}(x) = a(x)x_1x_2 + \beta(x)x_2^2 - a\gamma(x)x_1x_2 - a\delta(x)x_2^2 - \delta(x)x_2h(x_1) - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

και απαλείφοντας τον όρο $a(x)x_1 - a\gamma(x)x_1 - \delta(x)h(x_1)$ επιλέγουμε να ισούται με μηδέν. Άρα:

$$\dot{V}(x) = -[a\delta(x) - \beta(x)]x_2^2 - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

Τώρα, για την απλοποίηση των πράξεων θεωρούμε:

$$\left. \begin{array}{l} \delta(x) = \delta \\ \gamma(x) = \gamma \\ \beta(x) = \beta \end{array} \right\} \text{ Constants}$$

και το $a(x)$ εξαρτάται μόνο από το x_1 και η συμμετρία ικανοποιείται αν $\beta = \gamma$. Άρα, η παράσταση του $g(x)$ ανάγεται στη σχέση:

$$g(x) = \begin{bmatrix} a\gamma x_1 + \delta h(x_1) + \gamma x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{bmatrix}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1.9) έχουμε:

$$V(x) = \int_0^{x_1} [a\gamma y_1 + \delta h(y_1)] dy_1 + \int_0^{x_2} (\gamma x_1 + \delta y_2) dy_2 \Rightarrow$$

$$V(x) = \frac{1}{2} a\gamma x_1^2 + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy + \gamma x_1 x_2 + \frac{1}{2} \delta x_2^2 \Rightarrow$$

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy$$

όπου ο πίνακας P είναι

$$P = \begin{bmatrix} a\gamma & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Επιλέγοντας, $\delta > 0$ και $0 < \gamma < a\delta$ εξασφαλίζουμε ότι η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη και η $\dot{V}(x)$ αρνητικά ορισμένη.

Για παράδειγμα, παίρνοντας $\gamma = ak\delta$ με $0 < k < 1$ μεταπίπτουμε στη συνάρτηση Lyapunov όπου:

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy \quad (1.10)$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (1.3), (1.4) εκτός του $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : -b < x_1 < c\}$. Άρα, το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

1.3 Θεώρημα Barbashin – Krasovskii & Εφαρμογές

Θεώρημα 1.2: Barbashin – Krasovskii

Έστω $x=0$ σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης (1.1). Έστω $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

$$V(0) = 0 \text{ και } V(x) > 0, \forall x \neq 0 \quad (1.11)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (1.12)$$

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0 \quad (1.13)$$

τότε το $x=0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: Δοθέντος κάποιου σημείου $p \in \mathbb{R}^n$ έστω $c = V(p)$. Από υπόθεση (1.12) συνεπάγεται ότι $\forall c > 0, \exists r > 0$ τέτοιο ώστε: $V(x) > c$ για $\|x\| > r$. Άρα: $\Omega_c \subset B_r$, δηλαδή το Ω_c είναι φραγμένο. Η συνέχεια της απόδειξης είναι παρόμοια με αυτήν του θεωρήματος (1.1). ■

Παράδειγμα 1.6: Θεωρούμε την περίπτωση (1.8) με $a > 0, h(\cdot)$ - τοπικά Lipschitz, $h(0) = 0, y h(y) > 0 \forall y \neq 0$ (σε όλο το διάστημα) με b, c θετικές σταθερές. Δείχνουμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Όπως στην περίπτωση προηγούμενου παραδείγματος, ορίζουμε:

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy, \quad x = (x_1, x_2)$$

η οποία θετικά ορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ και ικανοποιεί την (1.12) λόγω των υποθέσεων. Η παράγωγος $\dot{V}(x)$ είναι:

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1-k)x_2^2 - a\delta k x_1 h(x_1)$$

είναι αρνητικά ορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, με $0 < k < 1$. Άρα, το $(0,0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

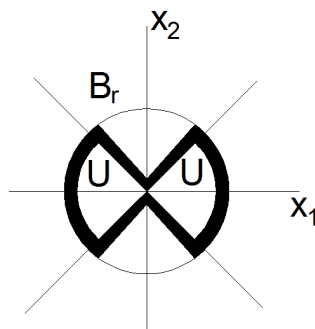
Σημείωση: Εάν η αρχή των αξόνων $x=0$ είναι ένα ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος, τότε αυτό σημαίνει ότι είναι μοναδικό σημείο ισορροπίας του. Διότι, αν υπήρχε ένα άλλο σημείο ισορροπίας \bar{x} θα έπρεπε να παραμείνει στο \bar{x} για όλα τα $t \geq 0$. Έτσι, γι' αυτό το λόγο δε θα μπορούσε να προσεγγίσει την αρχή των αξόνων $(0,0)$. Αυτό, έρχεται σε αντιπαράθεση με τον ισχυρισμό ότι η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

1.4 Ικανές Συνθήκες Αστάθειας και Εφαρμογές

Έστω $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $D \subset \mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει την αρχή αξόνων $(0,0)$. Υποθέτουμε ότι: $V(0) = 0$ και ότι υπάρχει x_0 - αυθαίρετο κοντά στο $(0,0)$ τέτοιο ώστε $V(x_0) > 0$. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε η σφαίρα $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ να περιέχεται στο D και έστω

$$U = \{x \in B_r : V(x) > 0\} \quad (1.14)$$

με $U \neq \emptyset$ ορισμένο ώστε να περιέχει τη σφαίρα B_r . Το σύνολο δίνεται από την επιφάνεια $V(x) = 0$ και τη σφαίρα $\|x\| = r$. Τώρα, αφού $V(0) = 0$ συνεπάγεται ότι το $(0,0)$ βρίσκεται στο σύνολο του U μέσα στη B_r . Για παράδειγμα, το σχήμα (1.4) μάς δείχνει ότι το U μπορεί πάντα να κατασκευάζεται από την προϋπόθεση $V(0) = 0$ και $V(x_0) > 0$ για κάποια x_0 - αυθαίρετα κοντά στην αρχή των αξόνων.



Σχήμα 1.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης

Θεώρημα 1.3: Έστω $x=0$ είναι ένα σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης (1.1). Έστω $V:D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε: $V(0)=0$ και $V(x_o) > 0$ για κάποια x_o - αυθαίρετα με μικρή νόρμα $\|x_o\|$. Ορίζουμε U από τη σχέση (1.14) και υποθέτουμε ότι $\dot{V}(x) > 0$ στο U . Τότε το $x=0$ είναι ασταθές.

Απόδειξη: Το σημείο x_o είναι στο εσωτερικό του U και $V(x_o) = a > 0$. Τώρα, η τροχιά $x(t)$ ξεκινώντας από το $x(0) = x_o$ θα πρέπει να φύγει από το U . Τώρα, για το σημείο x_o παρατηρούμε ότι αφού η $x(t)$ είναι μέσα στο U και $V(x(t)) \geq a$, αφού $\dot{V}(x) > 0$ στο U . Έστω:

$$\gamma = \min\{\dot{V}(x) : x \in U, V(x) \geq a\}$$

το οποίο υπάρχει λόγω συνέχειας της $\dot{V}(x)$ και επιπλέον $\gamma > 0$. Προκύπτει ότι:

$$V(x(t)) = V(x_o) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \geq a + \int_0^t \gamma ds = a + \gamma t$$

όπου αυτή η ανισότητα μάς δείχνει ότι η τροχιά $x(t)$ δεν μπορεί να παραμείνει για πάντα μέσα στο U επειδή η $V(x)$ περιλείεται από το U . Όμως, η $x(t)$ δεν μπορεί να φύγει από το U μέσω της επιφάνειας $V(x) = a$ αφού $V(x(t)) \geq a$. Οπότε, πρέπει να φύγει από το U μέσω της σφαιρας $\|x\| = r$. Αφού αυτό μπορεί να συμβεί για κάποιο αυθαίρετο μικρό $\|x_o\|$, τότε το $(0,0)$ είναι ασταθές. ■

Παράδειγμα 1.7: Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα 2^{ης} τάξης όπου:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + g_1(x) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + g_2(x) \end{aligned}$$

με τις $g_1(x), g_2(x)$ να ικανοποιούν τη σχέση

$$\|g_i(x)\| \leq k \|x\|_2^2 \tag{1.15}$$

στο D - κοντά στο $(0,0)$.

Η ανισότητα (1.15) συνεπάγεται ότι $g_i(0) = 0$, οπότε το $(0,0)$ είναι ένα σημείο ισορροπίας.

Δείχνουμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι ασταθές. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

Στον άξονα $x_2 = 0$ έχω $V(x) > 0$ σε σημεία κοντά στο $(0,0)$. Η παράγωγος της $V(x)$ είναι η:

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$$

όπου η ποσότητα $x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$|x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)| \leq \sum_{i=1}^2 |x_i| |g_i(x)| \leq 2k \|x\|_2^3$$

Άρα:

$$\dot{V}(x) \geq \|x\|_2^2 - 2k \|x\|_2^3 = \|x\|_2^2 (1 - 2k \|x\|_2)$$

Επιλέγοντας r τέτοιο ώστε $B_r \subset D$, δηλαδή $r < \frac{1}{2k}$. Άρα, όλες οι συνθήκες του θεωρήματος (1.3) ικανοποιούνται, οπότε το $(0,0)$ είναι ασταθές.

Κεφάλαιο 2: Η αρχή του Αναλλοίωτου

2.1 Αναλλοίωτα σύνολα

Στη μελέτη της εξίσωσης εκκρεμούς – ταλαντωτή με τριβή στο παράδειγμα (1.4), είδαμε ότι η συνάρτηση Ενέργειας ως συνάρτηση Lyapunov αποτυγχάνει να ικανοποιήσει τη συνθήκη ασυμπτωτικής ευστάθειας του Θεωρήματος (1.1), επειδή:

$$\dot{V}(x) = -\left(\frac{k}{m}\right)x_2^2 \leq 0$$

Με παρατήρηση η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη παντού, εκτός του άξονα $x_2 = 0$, όπου $\dot{V}(x) = 0$. Έτσι λοιπόν, το σύστημα για να διατηρήσει την συνθήκη $\dot{V}(x) = 0$, θα πρέπει το διάνυσμα να παραμείνει στον άξονα $x_2 = 0$, εκτός και αν $x_1 = 0$ το οποίο είναι αδύνατο, διότι από την εξίσωση του ταλαντωτή έχουμε:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \sin x_1(t) = 0$$

Επομένως, στο τμήμα $-\pi < x_1 < \pi$ για $x_2 = 0$ το σύστημα μπορεί να διατηρήσει τη συνθήκη $\dot{V}(x) = 0$ μόνο στην αρχή $x = 0$. Επομένως, γι' αυτό πρέπει $V(x(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{x(t) \rightarrow 0} 0$.

Αυτό έχει ως συνέπεια να καταλάβουμε από φυσικής άποψης ότι κατά τη διάρκεια της τριβής η ενέργεια δεν μπορεί να παραμείνει σταθερή ενώ το σύστημα κινείται.

Αυτή η ιδέα ακολουθείται από την Αρχή Σταθεροποίησης του LaSalle, όπου είναι το θέμα αυτής της παραγράφου.

Για να διατυπώσουμε και ν' αποδείξουμε το θεώρημα LaSalle, χρειαζόμαστε να εισάγουμε μερικές έννοιες. Έστω $x(t, x_0)$ η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.1) και έστω p ένα θετικό όριο της $x(t)$ εάν υπάρχει η ακολουθία $\{t_n\}$ με

$$t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$$

έτσι ώστε

$$x(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$$

όπου το σύνολο x_0 όλων των θετικών ορίων της λύσης $x(\cdot, t)$ καλείται θετικό όριο του x_0 .

Ορισμός 2.1: Ένα σύνολο M καλείται αναλλοίωτο εάν

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν η λύση ανήκει στο M για κάποιο χρόνο t (στιγμιαίο) τότε η λύση θα ανήκει στο M για όλες τις παρελθοντικές και μελλοντικές χρονικές στιγμές.

Ορισμός 2.2: Ένα σύνολο M καλείται θετικά αναλλοίωτο εάν

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \geq 0$$

Λέμε ότι η λύση $x(t)$ προσεγγίζει ένα σύνολο $M \subset \mathbb{R}^n$ καθώς $t \rightarrow \infty$, εάν $\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$ έτσι ώστε:

$$\rho(x(t), M) < \varepsilon, \quad \forall t > T$$

όπου η απόσταση $\rho(p, M)$ υποδηλώνει την απόσταση του p από το σύνολο M , δηλαδή

$$\rho(p, M) = \inf_{x \in M} \|p - x\|$$

όπου $\|\cdot\|$ η συνήθης norm στον \mathbb{R}^n .

Το σημείο ισορροπίας και ο χρόνος είναι αναλλοίωτα μεγέθη, αφού οποιαδήποτε λύση ξεκινήσει είτε στο ένα σύνολο είτε στο άλλο (από τα παραπάνω σύνολα που ορίσαμε), θα παραμείνει σ' αυτό για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα το σύνολο $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$ με $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega_c$ είναι θετικά αναλλοίωτο, όπως είδαμε στην απόδειξη του θεωρήματος (1.1), αφού κάθε λύση που ξεκινά στο Ω_c παραμένει σε αυτό για όλα τα $t \geq 0$.

Μια θεμελιώδης ιδιότητα του συνόλου ορίων διατυπώνεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.1: Εάν μια λύση $x(\cdot) = x(\cdot, x_0)$ της διαφορικής εξίσωσης (1.1) είναι φραγμένη στο $D \subset \mathbb{R}^n$ και παραμένει σ' αυτό για $t \geq 0$, τότε το θετικό σύνολο ορίων $L_{x_0}^+$ είναι διάφορο του μηδενός, συμπαγές και θετικά αναλλοίωτο. Συγκεκριμένα:

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} L_{x_0}^+$$

2.2 Θεώρημα La Salle & Εφαρμογές

Θεώρημα 2.2: La Salle

Έστω $\Omega \subset D$ ένα συμπαγές σύνολο δηλαδή απόλυτα σταθερό που ικανοποιεί τη διαφορική (1.1). Έστω $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση έτσι ώστε $\dot{V}(x) \leq 0$ στο Ω . Έστω E το σύνολο όλων των σημείων στο Ω , όπου $\dot{V}(x) = 0$. Έστω M το μεγαλύτερο θετικά αναλλοίωτο σύνολο στο E . Τότε, κάθε λύση που ξεκινά στο Ω πλησιάζει το M καθώς $t \rightarrow \infty$.

Απόδειξη: Έστω $x(t)$ λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.1) η οποία ξεκινά από το $x_0 \in \Omega$. Αφού $\dot{V}(x) \leq 0$ στο Ω τότε $V(x(t))$ φθίνουσα συνάρτηση του t . Αφού $V(x)$ συνεχής στο συμπαγές σύνολο Ω η $V(x(t))$ έχει όριο το α , καθώς $t \rightarrow \infty$. Σημειώνουμε επίσης ότι $L_{x_0}^+ \in \Omega$, επειδή το Ω είναι κλειστό. Για οποιοδήποτε $p \in L_{x_0}^+$ υπάρχει ακολουθία $\{t_n\}$ με $t_n \rightarrow \infty$ και $x(t_n) \rightarrow p$ και από την συνέχεια της $V(x)$ έχουμε:

$$V(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = \alpha$$

Άρα, $V(x) = \alpha$ στο $L_{x_0}^+$. Αφού, $L_{x_0}^+$ αναλλοίωτο, $L_{x_0}^+ \subset M \subset E \subset \Omega$ και βάσει Λήμματος (2.1) έπεται:

$$x(t) \rightarrow M \quad \blacksquare$$

Πόρισμα 2.3: Έστω $x=0$ σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης (1.1). Έστω $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη, θετικά ορισμένη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού D . Έστω $S = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$ και έστω ότι δεν υπάρχει λύση η οποία μπορεί να παραμείνει σταθερή στο S πέραν της τετριμμένης λύσης. Τότε το $x=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Πόρισμα 2.4: Έστω $x=0$ σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης (1.1). Έστω $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη, μη φραγμένη, θετικά ορισμένη συνάρτηση τέτοια ώστε $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ και έστω ότι δεν υπάρχει λύση η

οποία μπορεί να παραμείνει σταθερή στο S , πέραν της τετριμμένης λύσης. Τότε το $x = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παρατηρούμε ότι: αν $\dot{V}(x) < 0 \Rightarrow S = \{0\}$. Επομένως τα πορίσματα 2.3 και 2.4 συμπίπτουν με τα θεωρήματα (1.1) και (1.2), αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.1: Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) - h(x_2)\end{aligned}$$

όπου $g(\cdot), h(\cdot)$ τοπικά Lipschitz και ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{aligned}g(0) &= 0, & yg(y) &> 0 \quad \forall y \neq 0, y \in (-\alpha, \alpha) \\ h(0) &= 0, & yh(y) &> 0 \quad \forall y \neq 0, y \in (-\alpha, \alpha)\end{aligned}$$

Το σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας στην αρχή συντεταγμένων. Η εξίσωση του συστήματος μπορεί να δοθεί ως μια γενική εξίσωση ταλαντωτή με την $h(x_2)$ να αποτελεί την τριβή. Μια υποψήφια συνάρτηση Lyapunov μπορεί να είναι η συνάρτηση της ενέργειας:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g(y) dy + \frac{1}{2} x_2^2 \quad (2.3)$$

Έστω $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\alpha < x_1 < \alpha\}$, όπου η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη στο D . Επιπλέον, η παράγωγος του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{V}(x) = g(x_1)x_2 + x_2[-g(x_1) - h(x_2)] = -x_2h(x_2) \leq 0 \Rightarrow \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$$

η οποία είναι αρνητικά ημιορισμένη.

Έστω το σύνολο $S = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$. Σημειώνουμε ότι αν:

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x_2h(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \quad \text{για } -\alpha < x_2 < \alpha$$

Άρα:

$$S = \{x \in D : x_2 = 0\}$$

Έστω $x(t) = x(t, x_0)$ μια τροχιά του συστήματος, η οποία παραμένει στο S . Προκύπτει ότι:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow g(x_1(t)) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

Άρα, η μόνη λύση που μπορεί να παραμείνει στο S είναι η τετριμμένη λύση $x(t) = 0$. Άρα, το $x = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα 2.2: Θεωρούμε ξανά το σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος, όπου $\alpha = \infty$ και υποθέτουμε ότι η $g(\cdot)$ ικανοποιεί την πρόσθετη συνθήκη:

$$\int_0^y g(z) dz \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} \infty$$

Τώρα, η συνάρτηση Lyapunov (2.3) είναι μη φραγμένη. Όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα, προκύπτει ότι $\dot{V}(x) \leq 0$ στο \mathbb{R}^2 και το σύνολο

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$$

δεν περιέχει λύσεις εκτός της τετριμμένης. Άρα, το $x = 0$ σύμφωνα με το πόρισμα 2.4 είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα 2.3: Θεωρούμε το σύστημα 1^{ου} βαθμού

$$\dot{y} = \alpha y + u$$

με τον έλεγχο:

$$u = -ky, \quad \dot{k} = \gamma y^2, \quad \gamma > 0$$

1^ο Θεωρούμε $x_1 = y, x_2 = k$ και το σύστημα παίρνει την μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 - \alpha)x_1 \\ \dot{x}_2 &= \gamma x_1^2 \end{aligned}$$

2^ο Ο άξονας $x_1 = 0$ είναι ένα σύνολο σημείων ισορροπίας για το σύστημα. Τώρα, θέλουμε να δείξουμε ότι η τροχιά του συστήματος πλησιάζει το σημείο ισορροπίας καθώς $t \rightarrow \infty$, που αυτό σημαίνει ότι ο έλεγχος u πετυχαίνει την ρύθμιση του y στο 0. Θεωρούμε την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov, να είναι η:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2$$

όπου $b > a$. Η παράγωγος του συστήματος είναι η:

$$V(x) = x_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\dot{x}_2 = -x_1^2(x_2 - \alpha) + x_1^2(x_2 - b) = -x_1^2(b - \alpha) \leq 0 \Rightarrow \dot{V}(x) \leq 0$$

Κεφάλαιο 3: Γραμμικά Συστήματα & Γραμμικοποίηση

3.1 Αστάθεια & Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων & Εφαρμογές

Δίνεται το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = Ax \quad (3.1)$$

με σημείο ισορροπίας την αρχή των αξόνων, το οποίο είναι μοναδικό αν $\det A \neq 0$.

Η ευστάθεια του σημείου $x=0$ μπορεί να δοθεί και από τις χαρακτηριστικές ρίζες του πίνακα A . Έτσι, από την γραμμική θεωρία συστημάτων η λύση του συστήματος με αρχική συνθήκη $x(0)$ δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = \exp(At)x(0) \quad (3.2)$$

όπου υπάρχει P με $\det P \neq 0$ αντιστρέψιμος με τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$P^{-1}AP = J = \text{block diag}[J_1, \dots, J_r]$$

όπου J_i – Jordan block, ο οποίος κατασκευάζεται από τις ιδιοτιμές λ_i του A ως ακολούθως:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Άρα:

$$\exp(At) = P \exp(Jt) P^{-1} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} \exp(\lambda_i t) R_{ik} \quad (3.3)$$

m_i - διάστασης του block Jordan συνδεδεμένο με την πολλαπλότητα της λ_i .

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει τις ιδιότητες ευστάθειας του $x=0$.

Θεώρημα 3.1: Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (3.1) είναι ευσταθές εάν και μόνο αν όλες οι ρίζες του A ικανοποιούν τη συνθήκη $\text{Re } \lambda_i \leq 0$ και κάθε ρίζα με $\text{Re } \lambda_i = 0$ έχει πίνακα Jordan διάστασης 1×1 .

Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν οι ρίζες του A ικανοποιούν την συνθήκη: $\text{Re } \lambda_i < 0$.

Απόδειξη: (1°) Από τη σχέση (3.2) μπορούμε να δούμε ότι το $x = 0$ είναι ευσταθές αν και μόνο αν η $\exp(At)$ είναι φραγμένη συνάρτηση για κάθε $t > 0$. Εάν, μία από τις ιδιοτιμές λ_i του πίνακα A βρίσκεται στη δεξιά πλευρά του επιπέδου τότε η αντίστοιχη εκθετική συνάρτηση θα είναι μη φραγμένη, $\exp(\lambda_i t) \rightarrow \infty$ στην περίπτωση που οι ιδιοτιμές λ_i ανήκουν στο αριστερό επίπεδο. Στον φανταστικό άξονα περιοριζόμαστε στο ότι οι ιδιοτιμές λ_i Jordan block διάστασης 1. Άρα, η συνθήκη για την ευστάθεια είναι απαραίτητα η διάσταση να είναι (1×1) , όπου μας εξασφαλίζει και ότι η $\exp(At)$ φράσσεται.

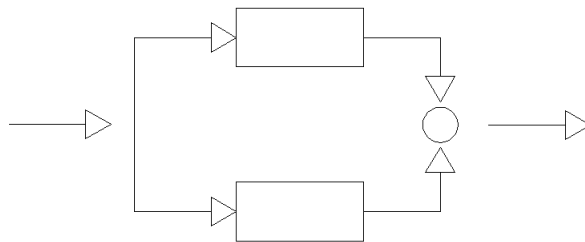
(2°) Για την ασυμπτωτική ευστάθεια του $x = 0$ έχουμε: $\exp(At) \rightarrow 0$ ως $t \rightarrow \infty$. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν $\text{Re } \lambda_i < 0, \forall i$ από την σχέση (3.3). ■

Παράδειγμα 3.1: Το ακόλουθο σχήμα δείχνει μια σύνδεση σε σειρά και μια παράλληλη σύνδεση δύο συστημάτων. Το κάθε σύστημα παριστάνεται από το ακόλουθο μοντέλο.

(α) Σύνδεση σε σειρά:



(β) Παράλληλη σύνδεση:



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

όπου u , y είναι η είσοδος και η έξοδος του συστήματος, αντίστοιχα.

(1^ο) Έστω A_s και A_p , οι πίνακες της σύνδεσης σε σειρά και της παράλληλης, αντίστοιχα, της σχέσης (3.1), χωρίς είσοδο. Έχουμε:

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω J_s, J_p οι αντίστοιχοι Jordan block πίνακες, όπου:

$$J_s = \begin{bmatrix} j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad J_p = \begin{bmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{bmatrix}$$

με $j = \sqrt{-1}$.

(2^ο) Τώρα, οι πίνακες A_s, A_p έχουν τις ίδιες χαρακτηριστικές ρίζες στον φανταστικό άξονα, αλλά ο Jordan block για το σύστημα σε σειρά είναι τάξης 1, ενώ ο Jordan block για το σύστημα σε παράλληλη σύνδεση είναι τάξης 2. Άρα, από το θεώρημα (3.1) το $x=0$ του συστήματος σε παράλληλη σύνδεση είναι ευσταθές, ενώ το $x=0$ του συστήματος σε σειρά είναι ασταθές.

Το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του $x=0$ σε σχέση με τη λύση της εξίσωσης Lyapunov.

Θεώρημα 3.2: Ο πίνακας A είναι Hurwitz δηλαδή, τέτοιος ώστε $\text{Re } \lambda_i < 0$ για όλες τις χαρακτηριστικές ρίζες του A , αν και μόνο αν για οποιοδήποτε δοθέν θετικό συμμετρικό

πίνακα Q υπάρχει $P > 0$ θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας, ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q \quad (3.5)$$

Επιπλέον, αν ο A είναι Hurwitz, τότε ο P είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (3.5).

Απόδειξη: (1^ο) Η ικανή συνθήκη προκύπτει βάσει του θεωρήματος (3.1) και της συνάρτησης Lyapunov

$$V(x) = x^T P x \quad (3.6)$$

Η παράγωγος της $V(x)$ του γραμμικού συστήματος (3.1) δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T [PA + A^T P] x = -x^T Q x$$

(2^ο) Για ν' αποδείξουμε την αναγκαία συνθήκη, υποθέτουμε ότι όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες του A ικανοποιούν την σχέση $\text{Re } \lambda_i < 0$ και θεωρούμε ότι ο P ορίζεται ως:

$$P = \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) dt \quad (3.7)$$

Τώρα, η έκφραση υπό ολοκλήρωση προέρχεται από τη σχέση $t^{k-1} \exp(\lambda_i t)$, όπου $\text{Re } \lambda_i < 0$. Άρα, το ολοκλήρωμα υπάρχει. Τώρα, ο P είναι θετικά ορισμένος και συμμετρικός και αποδεικνύεται ως: υποθέτουμε ότι δεν είναι θετικά ορισμένος, άρα υπάρχει $x \neq 0$ διάνυσμα τέτοιο ώστε $x^T P x = 0$. Όμως,

$$\begin{aligned} x^T P x = 0 &\Rightarrow \int_0^\infty x^T \exp(A^T t) Q \exp(At) x dt = 0 \\ &\Rightarrow \exp(At) x \equiv 0, \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow x = 0 \\ &\quad \text{exp}(At) \neq 0 \\ &\quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Αυτό έρχεται σε αντίθεση, αφού ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος. Τώρα, για να αποδείξουμε ότι ο P αποτελεί λύση της εξίσωσης (3.5), αντικαθιστούμε στην εξίσωση την σχέση (3.7) και έχουμε:

$$\begin{aligned} PA + A^T P = -Q &\Rightarrow \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) A dt + \int_0^\infty A^T \exp(A^T t) Q \exp(At) dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} [\exp(A^T t) Q \exp(At)] dt = -Q \Rightarrow \exp(A^T t) Q \exp(At) \Big|_0^\infty = -Q \end{aligned}$$

Τώρα, για να αποδείξουμε ότι P αποτελεί μοναδική λύση της εξίσωσης (3.5), υποθέτουμε ότι υπάρχει \tilde{P} λύση της εξίσωσης, όπου $\tilde{P} \neq P$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} & (\tilde{P} - P)A + A^T(\tilde{P} - P) = 0 \\ & \begin{matrix} \times(\exp(A^T t)) \\ \Rightarrow \\ \times(\exp(At)) \end{matrix} \exp(A^T t) [(\tilde{P} - P)A + A^T(\tilde{P} - P)] \exp(At) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{d}{dt} \exp(A^T t) (\tilde{P} - P) \exp(At) = 0 \Rightarrow \exp(A^T t) (\tilde{P} - P) \exp(At) = c, \forall t \\ & \Rightarrow_{\Gamma_{At=0} \exp(A \cdot 0) = 1} (\tilde{P} - P) = \exp(A^T t) (\tilde{P} - P) \exp(At) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \tilde{P} = P \end{aligned}$$

Η εξίσωση (3.5) είναι μια γραμμική αλγεβρική εξίσωση, η οποία επιλύεται μέσω της $Mx = y$ όπου x και y οι στήλες των στοιχείων των P και Q . Αυτό φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα και υπάρχουν αριθμητικά ικανές μέθοδοι ώστε να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις, όπως η εξίσωση (3.5) μπορεί να επιλυθεί με χρήση της εξίσωσης Sylvester $PA + BP + C = 0$. ■

Παράδειγμα 3.2: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

όπου $p_{12} = p_{21}$, λόγω συμμετρίας. Η εξίσωση Lyapunov (3.5) μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

όπου η μοναδική της λύση είναι η:

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος, άρα όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες του A βρίσκονται στο μισό αριστερό επίπεδο.

Η εξίσωση Lyapunov μπορεί λοιπόν να χρησιμοποιηθεί για το πότε ή όχι ένας πίνακας είναι Hurwitz, ως μια εναλλακτική να υπολογίζουμε τις χαρακτηριστικές ρίζες του A . Ξεινάμε, λοιπόν επιλέγοντας έναν θετικά ορισμένο πίνακα Q , για παράδειγμα $Q = I$ και λύνουμε την Lyapunov (3.5) ως προς P . Έτσι, εάν η εξίσωση έχει θετικά ορισμένη λύση καταλήγουμε ότι ο A είναι Hurwitz, αλλιώς δεν είναι.

Το ενδιαφέρον λοιπόν στην εξίσωση Lyapunov έγκειται στο γεγονός ότι μας παρέχει μια διαδικασία εύρεσης μιας συνάρτησης Lyapunov για το γραμμικό σύστημα (3.1), όταν A Hurwitz.

Έστω, το μη γραμμικό σύστημα (1.1) όπου $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχής διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού $D \subset \mathbb{R}^n$ στο \mathbb{R}^n . Υποθέτουμε ότι το $x=0$ ανήκει στο σύνολο D και ότι είναι σημείο ισορροπίας για το σύστημα τέτοιο ώστε $f(0)=0$. Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε:

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x$$

όπου z_i είναι ένα σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το x με το 0 , με z_i να ανήκει στο D . Τώρα, αφού $f(0)=0$ μπορούμε να γράψουμε το $f_i(x)$ ως:

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f}{\partial x}(0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right]x$$

και άρα:

$$f(x) = Ax + g(x)$$

όπου:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right]x$$

όπου η συνάρτηση $g_i(x)$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$|g_i(x)| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\|$$

και από τη συνέχεια της $\frac{\partial f}{\partial x}$ έχουμε:

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow 0} 0$$

Αυτό μας λέει ότι, σε μια μικρή περιοχή του 0 μπορούμε να προσεγγίσουμε το μη γραμμικό σύστημα (1.1) με χρήση γραμμικοποίησης για το 0 , όπου:

$$\dot{x} = Ax \quad \text{με} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$$

Το ακόλουθο θεώρημα μάς ξεκαθαρίζει τις συνθήκες από τις οποίες μπορούμε να συμπεράνουμε την ευστάθεια του $x=0$ ως ένα σημείο ισορροπίας για μη γραμμικό σύστημα εξετάζοντας την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας σε γραμμικό σύστημα.

Το θεώρημα είναι γνωστό ως έμμεση μέθοδος Lyapunov.

3.2 Θεώρημα Γραμμικοποίησης & Εφαρμογές

Θεώρημα 3.3: Γραμμικοποίησης

Έστω $x=0$ σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα (1.1) όπου $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχώς παραγωγίσιμη και D μια γειτονιά του 0. Έστω:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0}$$

τότε:

1. Το $x=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν $\text{Re } \lambda_i < 0$ για όλες τις χαρακτηριστικές ρίζες του A .
2. Το $x=0$ είναι ασταθές εάν $\text{Re } \lambda_i > 0$ για μία ή περισσότερες χαρακτηριστικές ρίζες του A .

Απόδειξη: Για το (1) θεωρούμε ότι A – Hurwitz και από το θεώρημα (3.2) γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα Q , η λύση P από την εξίσωση Lyapunov (3.5) είναι θετικά ορισμένη. Χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.6) ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το μη γραμμικό σύστημα. Η παράγωγος του $V(x)$ είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T P f(x) + f^T(x) P x = x^T P [Ax + g(x)] + [x^T A^T + g^T(x)] P x \\ &= x^T [PA + A^T P] x + 2x^T P g(x) = -x^T Q x + 2x^T P g(x) \end{aligned}$$

όπου για την $g(x)$ έχουμε ότι:

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \xrightarrow{\|x\|_2 \rightarrow 0} 0,$$

άρα:

$$\forall \gamma > 0, \exists r > 0: \|g(x)\|_2 < \gamma \|x\|_2 \quad \forall \|x\|_2 < r$$

Οπότε:

$$\dot{V}(x) < -x^T Q x + 2\gamma \|P\|_2 \|x\|_2^2 \quad \forall \|x\|_2 < r,$$

αλλά,

$$x^T Q x \geq \lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2$$

όπου λ_{\min} είναι η μικρότερη χαρακτηριστική ρίζα του πίνακα.

Σημείωση: Η $\lambda_{\min}(Q)$ είναι πραγματική τιμή και θετική αφού ο Q είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

Άρα:

$$\dot{V}(x) < -[\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma \|P\|_2] \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

Επιλέγοντας,

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|P\|_2}$$

επιβεβαιώνεται ότι: $\dot{V}(x) < 0$ και από το θεώρημα (1.1) συνεπάγεται ότι το $x=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Τώρα, για ν' αποδείξουμε το 2^ο σκέλος του θεωρήματος, θεωρούμε περιπτώσεις.

a. Περίπτωση: Έστω ότι ο A δεν έχει ρίζες πάνω στον φανταστικό άξονα. Εάν, οι ρίζες του A αποτελούν μια ομάδα ριζών στο ανοιχτό δεξιό επίπεδο και μια ομάδα ριζών στο αριστερό επίπεδο (ανοιχτό) τότε υπάρχει πίνακας με $\det T \neq 0$ έτσι ώστε:

$$T A T^{-1} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

όπου A_1, A_2 Hurwitz. Έστω:

$$z = T x = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

όπου τη διαμέριση του z είναι συμβατή με τις διαστάσεις των A_1, A_2 . Με αλλαγή των μεταβλητών το σύστημα

$$\dot{x} = A x + g(x)$$

μετατρέπεται στη μορφή:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -A_1 z_1 + g_1(z) \\ \dot{z}_2 &= A_2 z_2 + g_2(z)\end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $g_i(z)$ έχουν την ιδιότητα ότι:

$$\forall \gamma > 0, \exists r > 0: \|g_i(z)\|_2 < \gamma \|z\|_2, \quad \forall \|z\|_2 \leq r, \quad i=1,2$$

Το $z=0$ είναι ένα σημείο ισορροπίας για το σύστημα, στις z συντεταγμένες. Τώρα, σε οποιοδήποτε συμπέρασμα και αν καταλήξουμε, που αφορά τις ιδιότητες της ευστάθειας για το $z=0$ το ίδιο θα ισχύει και για το σημείο ισορροπίας $x=0$ στις x συντεταγμένες. Για να δείξουμε ότι το $z=0$ είναι ασταθές, εφαρμόζουμε το θεώρημα (1.3).

Έστω, Q_1, Q_2 θετικά ορισμένοι – συμμετρικοί πίνακες ίδιας διάστασης με τους A_1, A_2 , αντίστοιχα. Επειδή A_1, A_2 - Hurwitz, από το θεώρημα (3.2) έχουμε τις εξισώσεις Lyapunov:

$$P_i A_i + A_i^T P_i = -Q_i, \quad i=1,2$$

με μοναδικές θετικές λύσεις $P_1, P_2 > 0$. Έστω:

$$V(z) = z_1^T P_1 z_1 - z_2^T P_2 z_2 = z^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} z$$

Για $z_2=0$ έχουμε $V(z) > 0$ για αυθαίρετα σημεία κοντά στο 0. Έστω:

$$U = \{z \in \mathbb{R}^n / \|z\|_2 \leq r, V(z) > 0\}$$

όπου στο U έχουμε:

$$\begin{aligned}\dot{V}(z) &= -z_1^T (P_1 A_1 + A_1^T P_1) z_1 + 2z_1^T P_1 g_1(z) \\ &\quad - z_2^T (P_2 A_2 + A_2^T P_2) z_2 - 2z_2^T P_2 g_2(z) \\ &= z_1^T Q_1 z_1 + z_2^T Q_2 z_2 + 2z^T \begin{bmatrix} P_1 g_1(z) \\ -P_2 g_2(z) \end{bmatrix} \\ &\geq \lambda_{\min}(Q_1) \|z_1\|_2^2 + \lambda_{\min}(Q_2) \|z_2\|_2^2 - 2 \|z\|_2 \sqrt{\|P_1\|_2^2 \|g_1(z)\|_2^2 + \|P_2\|_2^2 \|g_2(z)\|_2^2} \\ &> (\alpha - 2\sqrt{2}\beta\gamma) \|z\|_2^2\end{aligned}$$

με $\alpha = \min\{\lambda_{\min}(Q_1), \lambda_{\min}(Q_2)\}$, $\beta = \max\{\|P_1\|_2, \|P_2\|_2\}$. Άρα, επιλέγοντας:

$$\gamma < \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\beta}$$

προκύπτει ότι: $\dot{V}(z) > 0$ στο U . Άρα, από το θεώρημα (1.3) προκύπτει ότι το $z = 0$ είναι ασταθές σημείο.

Σημείωση: μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα (1.3) στην αρχή των αξόνων ορίζοντας τους πίνακες:

$$P = T^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} T, \quad Q = T^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} T$$

οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση:

$$PA + A^T P = Q$$

με τον πίνακα Q να είναι θετικά ορισμένος και $V(x) = x^T P x > 0$ για αυθαίρετα σημεία κοντά στο $x = 0$.

b. Περίπτωση: Ας θεωρήσουμε τώρα την γενική περίπτωση, όπου ο A έχει ρίζες πάνω στον φανταστικό άξονα, στο ανοιχτό δεξιό μιγαδικό επίπεδο. Μπορούμε να μετατρέψουμε την περίπτωση σε ειδική, αλλάζοντας κατεύθυνση του φανταστικού άξονα.

Υποθέτουμε ότι: ο A έχει m – ρίζες με $\text{Re } \lambda_i > \delta > 0$ και ο πίνακας

$$\left[A - \left(\frac{\delta}{2} \right) I \right]$$

έχει m – ρίζες στο ανοιχτό δεξιό επίπεδο (αλλά όχι ρίζες πάνω στον φανταστικό άξονα) και από προηγούμενες υποθέσεις, υπάρχουν πίνακες $P = P^T, Q = Q^T > 0$ τέτοιοι ώστε:

$$P \left[A - \left(\frac{\delta}{2} \right) I \right] + \left[A - \left(\frac{\delta}{2} \right) I \right]^T P = Q$$

όπου $V(x) = x^T P x > 0$ για αυθαίρετα σημεία κοντά στο $x = 0$. Τώρα, η παράγωγος $\dot{V}(x)$ είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (PA + A^T P)x + 2x^T P g(x) \\ &= x^T \left[P \left(A - \frac{\delta}{2} I \right) + \left(A - \frac{\delta}{2} I \right)^T P \right] x + \delta x^T P x + 2x^T P g(x) \\ &= x^T Q x + \delta V(x) + 2x^T P g(x) \end{aligned}$$

Όπου:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_2 \leq r, V(x) > 0\}$$

με r επιλεγμένο έτσι ώστε $\|g(x)\|_2 \leq \gamma \|x\|_2$ και η παράγωγος $\dot{V}(x)$ ικανοποιεί την σχέση:

$$\dot{V}(x) \geq \lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2 - 2\|P\|_2 \|x\|_2 \|g(x)\|_2 \geq [\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma \|P\|_2] \|x\|_2^2$$

όπου:

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|P\|_2}$$

και με εφαρμογή του θεωρήματος chetaen κλείνει η απόδειξη. ■

Παρατήρηση: Το θεώρημα (3.3) παρέχει με μια απλή διαδικασία την ευστάθεια για ένα σημείο ισορροπίας υπολογίζοντας τον πίνακα Jordan στην αρχή των αξόνων, όπου:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Μελετώντας τις ρίζες. Εάν, $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ για κάθε i ή $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ για κάποια i τότε καταλήγουμε ότι το $x = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές ή ασταθές, αντίστοιχα.

Επιπλέον, η απόδειξη του θεωρήματος μάς δείχνει ότι αν $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ για κάθε i μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα, η οποία μπορεί να δουλέψει τοπικά σε κάποια γειτονιά του 0. Η συνάρτηση Lyapunov είναι της μορφής: $V(x) = x^T P x$ (2^{ου} βαθμού) με την P – λύση της εξίσωσης Lyapunov (3.3) για κάθε Q θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα.

Να σημειώσουμε ότι το θεώρημα (3.7) δε μας λέει τίποτα για την περίπτωση όταν: $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ για κάθε i με $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ για κάποια i . Σε αυτή την περίπτωση η γραμμικοποίηση αποτυγχάνει να προσδιορίσει την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας.

Παράδειγμα 3.3: Θεωρούμε το ακόλουθο βαθμωτό σύστημα:

$$\dot{x} = \alpha x^3$$

Η γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από το $x = 0$ δίνει:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = 3\alpha x^2 \Big|_{x=0} = 0$$

Υπάρχει μια χαρακτηριστική ρίζα η οποία ανήκει στον φανταστικό άξονα. Έτσι η γραμμικοποίηση αποτυγχάνει να προσδιορίσει την ευστάθεια του 0, λόγω του ότι η ρίζα κείται στον φανταστικό άξονα. Εάν, $\alpha < 0$ τότε το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, όπως φαίνεται από την συνάρτηση Lyapunov $V(x) = x^4$, με παράγωγο $\dot{V}(x) = 4\alpha x^6 < 0$. Εάν, $\alpha = 0$ τότε το σύστημα είναι γραμμικό και το 0 είναι ευσταθές βάσει του θεωρήματος (3.1). Εάν, $\alpha > 0$ τότε το 0 είναι ασταθές όπως φαίνεται από το θεώρημα (1.3) και τη συνάρτηση $V(x) = x^4$, με παράγωγο $\dot{V}(x) = 4\alpha x^6 > 0$.

Παράδειγμα 3.4: Δίνουμε την εξίσωση του ταλαντωτή, όπου:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{g}{l}\right) \sin x_1 - \left(\frac{k}{m}\right) x_2 \end{aligned}$$

η οποία έχει δύο σημεία ισορροπίας $x_1 = 0, x_2 = 0$ και $x_1 = \pi, x_2 = 0$. Εξετάζουμε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας με χρήση της γραμμικοποίησης. Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{g}{l}\right) \cos x_1 & -\left(\frac{k}{m}\right) \end{bmatrix}$$

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια του 0, υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα στο $x = 0$.

Άρα:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{g}{l}\right) & -\left(\frac{k}{m}\right) \end{bmatrix}$$

όπου οι ρίζες του A είναι:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}}$$

Για όλα τα $g, l, m, k > 0$ οι ρίζες ικανοποιούν τη σχέση $\text{Re } \lambda_i < 0$ και άρα το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Με την απουσία της τριβής, δηλαδή όταν $k = 0$ συνεπάγεται ότι και οι δύο ρίζες ανήκουν στον φανταστικό άξονα, όπου σ' αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την ευστάθεια του 0 μέσω της γραμμικοποίησης. Έχουμε δει στο παράδειγμα (1.3) ότι σ' αυτή την περίπτωση το 0 είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας όπως προσδιορίστηκε από την συνάρτηση ενέργειας Lyapunov.

Τώρα, για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας στο $x_1 = \pi, x_2 = 0$ υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα σ' αυτό το σημείο. Αυτό είναι ισοδύναμο με την αλλαγή συντεταγμένων: $z_1 = x_1 - \pi, z_2 = x_2$ στο 0 και υπολογίζοντας τον Ιακωβιανό πίνακα έχουμε:

$$\tilde{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x_1=\pi \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\left(\frac{k}{m}\right) \end{bmatrix}$$

όπου οι ρίζες του \tilde{A} είναι:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \frac{4g}{l}}$$

όπου για όλα τα $g, l, m > 0$ και για όλα τα $k \geq 0$ υπάρχει μια ρίζα που ανήκει στο δεξί ανοιχτό επίπεδο και άρα το σημείο ισορροπίας $x_1 = \pi, x_2 = 0$ είναι ασταθές.

Κεφάλαιο 4: Μη αυτόνομα συστήματα

4.1 Μελέτη Ευστάθειας & Αστάθειας των σημείων ισορροπίας

Θεωρούμε το ακόλουθο μη αυτόνομο σύστημα:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (4.1)$$

όπου $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής ως προς t και τοπικά Lipschitz ως προς x στο $[0, \infty) \times D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ είναι το πεδίο ορισμού το οποίο περιέχει το $x = 0$. Το $x = 0$ είναι σημείο ισορροπίας της (4.1) στο $t = 0$ όπου:

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Ένα σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα μη μηδενικό σημείο ή γενικότερα ως μια μη μηδενική λύση του συστήματος. Συγκεκριμένα, έστω $\bar{y}(\tau)$ μια λύση του συστήματος:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = g(\tau, y)$$

ορισμένη για όλα τα $\tau \geq \alpha \in \mathbb{R}$. Με χρήση αλλαγής συντεταγμένων

$$\begin{aligned} x &= y - \bar{y}(\tau) \\ t &= \tau - \alpha \end{aligned}$$

το σύστημα μετασχηματίζεται ως:

$$\dot{x} = g(\tau, y) - \dot{\bar{y}}(\tau) = g(t + \alpha, x + \bar{y}(t + \alpha)) - \dot{\bar{y}}(t + \alpha) \underset{op}{=} f(t, x)$$

και

$$\dot{\bar{y}}(t + \alpha) = g(t + \alpha, x + \bar{y}(t + \alpha)), \quad \forall t \geq 0$$

όπου προφανώς το $x = 0$ είναι ένα σημείο ισορροπίας του μετασχηματισμένου συστήματος στο $t = 0$.

Άρα, εξετάζοντας την ευστάθεια του $x = 0$ ως σημείο ισορροπίας του μετασχηματισμένου συστήματος τότε προσδιορίζουμε την ευστάθεια της λύσης $\bar{y}(\tau)$ για το αρχικό σύστημα.

Παρατηρούμε ότι, αν η $\bar{y}(\tau)$ δεν είναι σταθερή τότε το μετασχηματισμένο σύστημα θα

είναι μη αυτόνομο ακόμη και αν το αρχικό είναι αυτόνομο, ακόμη και αν: $g(\tau, y) = g(y)$.

Αυτό συμβαίνει γιατί μελετάμε την συμπεριφορά ευστάθειας στις λύσεις και στην γενική αυτή περίπτωση το πρόβλημα ανάγεται στη μελέτη της ευστάθειας σημείων ισορροπίας μη

αυτόνομων συστημάτων. Οι ιδέες για την ευστάθεια και την ασυμπτωτική ευστάθεια των σημείων ισορροπίας σε μη αυτόνομα συστήματα είναι βασικά η ίδια όπως στο κεφάλαιο 1 για τα αυτόνομα συστήματα.

Παράδειγμα 4.1: Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα 1^{ου} βαθμού:

$$\dot{x} = (6t \sin t - 2t)x$$

το οποίο έχει λύση:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t (6\tau \sin \tau - 2\tau) d\tau \right] \\ &= x(t_0) \exp \left[6 \sin t - 6t \cos t - t^2 - 6 \sin t_0 + 6t_0 \cos t_0 + t_0^2 \right] \end{aligned}$$

Τώρα, $\forall t_0$ ο όρος $-t_0^2$ κυριαρχεί, ο οποίος δείχνει ότι ο εκθετικός όρος είναι φραγμένος $\forall t \geq t_0$ από μια σταθερά $c(t_0)$, εξαρτώμενη από το t_0 . Γι' αυτό:

$$|x(t)| < |x(t_0)| c(t_0), \forall t \geq t_0$$

Τώρα, $\forall \varepsilon > 0$ η επιλέγοντας,

$$\delta = \frac{\varepsilon}{c(t_0)}$$

δείχνει ότι το $x=0$ είναι ευσταθές. Τώρα, υποθέτουμε ότι το t_0 παίρνει τις ακόλουθες διαδοχικές τιμές: $t_0 = 2n\pi$ για $n = 0, 1, 2, \dots$ και υποθέτουμε ότι η $x(t)$ παίρνει την τιμή $\pi \text{ sec}$ αργότερα, για την κάθε περίπτωση. Τότε:

$$x(t_0 + \pi) = x(t_0) \exp \left[(4n+1)(6-\pi)\pi \right]$$

Αυτό σημαίνει ότι, για $x(t_0) \neq 0$,

$$\frac{x(t_0 + \pi)}{x(t_0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Άρα, δοθέντος $\varepsilon > 0$, δεν υπάρχει δ εξαρτώμενο του t_0 το οποίο να ικανοποιεί την συνθήκη ευστάθειας στο t_0 .

Ορισμός 4.1: Το σημείο ισορροπίας $x=0$ της $\dot{x} = f(t, x)$ είναι:

1. ευσταθές αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x(t_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (4.2)$$

2. ομοιόμορφα ευσταθές αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ανεξάρτητο του t_0 τέτοιο ώστε η (4.2) να ικανοποιείται.
3. ασταθές αν δεν είναι ευσταθές.
4. ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και υπάρχει $c(t_0) > 0$ τέτοιο ώστε $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ για όλα τα $\|x(t_0)\| < c$.
5. ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ομοιόμορφα ευσταθές και υπάρχει $c > 0$ ανεξάρτητο του t_0 τέτοιο ώστε για όλα τα $\|x(t_0)\| < \varepsilon$ με $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ να συγκλίνει ομοιόμορφα, έτσι ώστε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $T = T(\varepsilon) > 0$ όπου

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon), \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

6. ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ομοιόμορφα ευσταθές και για κάθε ζευγάρι θετικών αριθμών ε, c υπάρχει $T = T(\varepsilon, c) > 0$ έτσι ώστε:

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, c), \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

Ειδικά στη περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων είναι βολικό η ομοιόμορφη και η ασυμπτωτική ευστάθεια να χαρακτηρίζονται μέσω βαθμωτών συναρτήσεων.

Ορισμός 4.2: Μια συνεχής συνάρτηση $a: [0, \alpha) \rightarrow [0, \infty)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση K εάν είναι αυστηρά αύξουσα και $a(0) = 0$. Λέμε ότι ανήκει στην κλάση K_∞ αν: $a = \infty$ και $a(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$.

Ορισμός 4.3: Μια συνεχής συνάρτηση $B: [0, \alpha) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση KL εάν για κάθε s σταθερό η γραφική παράσταση $B(r, s)$ ανήκει στην κλάση KL όσον αφορά το r και για κάθε r σταθερό η γραφική παράσταση $B(r, s)$ μειώνεται όσον αφορά το s , δηλαδή:

$$B(r, s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

Παράδειγμα 4.2:

a. Η συνάρτηση $a(r) = \tan^{-1} r$ είναι αυστηρά αύξουσα αφού:

$$a'(r) = \frac{1}{1+r^2} > 0$$

Άρα, η συνάρτηση ανήκει στην κλάση K , αλλά όχι στην κλάση K_∞ αφού:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = \frac{\pi}{2} < \infty$$

b. Η συνάρτηση $a(r) = r^c, \forall c \in \mathbb{R} > 0$ είναι αυστηρά αύξουσα αφού:

$$a'(r) = cr^{c-1} > 0 \text{ και } \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = \infty. \text{ Άρα, η συνάρτηση ανήκει στην κλάση } K_\infty.$$

c. Η συνάρτηση $\beta(s, r) = \frac{r}{(ksr+1)}, \forall k \in \mathbb{R} > 0$

είναι αυστηρά αύξουσα στο r , αφού:

$$\frac{\partial \beta}{\partial r} = \frac{1}{(ksr+1)^2} > 0$$

και αυστηρά φθίνουσα στο s αφού:

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{-kr^2}{(ksr+1)^2} < 0$$

Επιπλέον, $\beta(r, s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση ανήκει στην κλάση KL .

d. Η συνάρτηση $\beta(s, r) = r^c e^{-s}, \forall c \in \mathbb{R} > 0$ αποδεικνύεται ότι ανήκει στην κλάση KL .

Το ακόλουθο Λήμμα, μας δίνει μερικές προφανείς ιδιότητες των κλάσεων των K, KL .

Λήμμα 4.1: Έστω $a_1(\cdot), a_2(\cdot)$ ν' ανήκουν στην κλάση K στο $[0, \alpha)$ και $a_3(\cdot), a_4(\cdot)$ ν' ανήκουν στην κλάση K_∞ και $\beta(\cdot, \cdot)$ ν' ανήκει στην KL κλάση. Το αντίστροφο της $a_i(\cdot)$ είναι το $a_i^{-1}(\cdot)$. Τότε:

- a_1^{-1} ορίζεται στο $[0, a_1(\alpha)) \in K$.

- a_3^{-1} ορίζεται στο $[0, \infty)$ και ανήκει στην κλάση K_∞ .
- $a_1 \circ a_2 \in K$.
- $a_3 \circ a_4 \in K_\infty$.
- $\sigma(r, s) = a_1(\beta(a_2(r), s)) \in KL$.

Τώρα το ακόλουθο Λήμμα δίνει κάποιους ισοδύναμους ορισμούς της ομοιόμορφης ευστάθειας και της ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας με χρήση των κλάσεων K , KL .

Λήμμα 4.2: Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (4.1) είναι:

- ομοιόμορφα ευσταθές εάν και μόνο αν υπάρχει κλάση K με συνάρτηση $a(\cdot)$ και $c = ct > 0$, ανεξάρτητη του t_0 τέτοια ώστε:

$$\|x(t)\| \leq a(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (4.3)$$

- ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο αν υπάρχει κλάση KL με συνάρτηση $\beta(\cdot, \cdot)$ και $c = ct > 0$, ανεξάρτητη του t_0 τέτοια ώστε:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (4.4)$$

- ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο αν η ανισότητα (4.4) ικανοποιείται για κάθε $x(t_0)$ αρχική τιμή.

Ως συνέπεια του Λήμματος (4.2) στην περίπτωση των μη αυτόνομων συστημάτων η ευστάθεια και ασυμπτωτική ευστάθεια με χρήση ορισμού (4.1) προϋποθέτουν την ύπαρξη των κλάσεων K , KL να ικανοποιούν τις παραπάνω ανισότητες, λόγω του ότι στα αυτόνομα συστήματα η ευστάθεια και ασυμπτωτική ευστάθεια του 0 είναι ομοιόμορφη όσον αφορά την αρχική τιμή t_0 .

Μια ειδική περίπτωση της ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας απορρέει όταν η κλάση KL με συνάρτηση $\beta(\cdot, \cdot)$ στην ανίσωση (4.4) παίρνει την μορφή $\beta(s, r) = kre^{-\gamma s}$, όπου η περίπτωση αυτή θα χαρακτηριστεί ως ξεχωριστή ιδιότητα ευστάθειας για σημεία ισορροπίας.

Ορισμός 4.4: Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (4.1) είναι εκθετικά ευσταθές εάν η ανίσωση (4.4) ικανοποιείται με την συνάρτηση:

$$\beta(s, r) = kre^{-\gamma s}, \quad k, \gamma > 0$$

και εάν η ανίσωση (4.4) ικανοποιείται για κάθε $x(t_0)$ τότε το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι ολικά εκθετικά ευσταθές.

Η θεωρία Lyapunov για αυτόνομα συστήματα μπορεί να επεκταθεί και σε μη αυτόνομα συστήματα. Για κάθε θεώρημα (1.1) έως (1.4) μπορούμε να αναφέρουμε διάφορες επεκτάσεις για τα μη αυτόνομα συστήματα. Εδώ, θα επικεντρωθούμε στην ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια, όπου είναι η περίπτωση που θα συναντήσουμε στα περισσότερα μη αυτόνομα συστήματα της μεθόδου Lyapunov. Έτσι, για να ορίσουμε την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του 0, πρέπει να επαληθεύσουμε την ανίσωση (4.4). Θα ξεκινήσουμε με δύο λήμματα..

Λήμμα 4.3: Θεωρούμε την αυτόνομη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{y} = -a(y), \quad y(t_0) = y_0$$

με $a(\cdot)$ τοπικά Lipschitz της κλάσης K στο $[0, \alpha)$. Για όλα τα $y_0 \in [0, \alpha)$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $y(t)$ ορισμένη $\forall t \geq t_0$. Επιπλέον:

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0)$$

με $\sigma(r, s) \in KL$ ορισμένη στο $[0, \alpha) \times [0, \infty)$.

Μπορούμε να δούμε ότι ο ισχυρισμός του Λήμματος είναι αληθής, εξετάζοντας ειδικά παραδείγματα, όπου μπορούμε να βρούμε μια κλειστή μορφή λύσης της εξίσωσης.

Παράδειγμα 4.3:

a. Εάν $\dot{y} = -ky, k > 0$ τότε η λύση είναι η:

$$y(t) = y_0 \exp[-k(t - t_0)] \Rightarrow \sigma(r, s) = r \exp(-ks)$$

b. Εάν $\dot{y} = -ky^2, k > 0$ τότε η λύση είναι η:

$$y(t) = \frac{y_0}{ky_0(t-t_0)+1} \Rightarrow \sigma(r, s) = \frac{r}{krs+1}$$

Λήμμα 4.4: Έστω $V(x): D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής θετικά ορισμένη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού $D \subset \mathbb{R}^n$, με το 0. Έστω $B_r \subset D$ για κάποιο $r > 0$. Τότε υπάρχει κλάση K με συναρτήσεις a_1, a_2 ορισμένες στο $[0, r]$ τέτοιες ώστε:

$$a_1(\|x\|) \leq V(x) \leq a_2(\|x\|), \quad \forall x \in B_r$$

Επιπλέον, εάν $D = \mathbb{R}^n$ και $V(x)$ μη φραγμένη (στο σύνορο) τότε οι a_1, a_2 μπορούν να επιλεγούν ν' ανήκουν στην κλάση K_∞ και η ανωτέρω ανισότητα να ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

4.2 Λήμμα Σύγκρισης

Λήμμα 4.5: Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση:

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

όπου $f(t, u)$ συνεχής στο t και τοπικά Lipschitz στο u , $\forall t \geq 0, \forall u \in J \subset \mathbb{R}$. Έστω $[t_0, T]$ με T να μπορεί να γίνει και ∞ , δηλαδή να είναι το maximal διάστημα ύπαρξης της λύσης $u(t)$ και υποθέτουμε ότι $u(t) \in J, \forall t \in [t_0, T]$. Έστω $v(t)$ μια συνεχής συνάρτηση, άνω δεξιά παραγωγίσιμη $D^+v(t)$ και να ικανοποιεί την διαφορική ανίσωση:

$$D^+v(t) \leq f(t, v(t))$$

με $v(t_0) \leq u_0$ όπου $v(t) \in J, \forall t \in [t_0, T]$. Τότε $v(t) \leq u(t), \forall t \in [t_0, T]$.

4.3 Βασικό Θεώρημα Ευστάθειας & Εφαρμογές

Θεώρημα 4.6: Έστω $x=0$ σημείο ισορροπίας του συστήματος (4.1) και $D \subset \mathbb{R}^n$, με το 0. Έστω $V: [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$W_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq W_2(\|x\|) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \tag{4.7}$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ όπου $W_1(x), W_2(x), W_3(x)$ συνεχείς θετικά ορισμένες συναρτήσεις στο 0. Τότε το $x = 0$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: Η παράγωγος του V είναι η:

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x)$$

Επιλέγω $r > 0, \rho > 0$ τέτοια ώστε $B_r \subset D$ όπου:

$$\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$$

Άρα, το σύνολο $\{x \in B_r / W_1(x) \leq \rho\}$ ανήκει στο εσωτερικό του B_r . Ορίζουμε χρονοεξαρτώμενο σύνολο $\Omega_{t,\rho}$ ως:

$$\Omega_{t,\rho} = \{x \in B_r : V(t, x) \leq \rho\}$$

Το σύνολο $\Omega_{t,\rho}$ περιέχει το $\{x \in B_r / W_1(x) \leq \rho\}$ αφού:

$$V(t, x) \leq \rho \Rightarrow W_1(x) \leq \rho$$

Επομένως:

$$\{x \in B_r / W_2(x) \leq \rho\} \subset \Omega_{t,\rho} \subset \{x \in B_r / W_1(x) \leq \rho\} \subset B_r, \quad \forall t \geq 0$$

όπου $\forall t_0 \geq 0, \forall x_0 \in \Omega_{t_0,\rho}$ η λύση που ξεκινά από το (t_0, x_0) παραμένει στο $\Omega_{t,\rho} \forall t \geq t_0$.

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η $\dot{V}(t, x)$ είναι αρνητική στο $D \setminus \{0\}$, άρα η $V(t, x)$ φθίνει. Συνεπώς η λύση που ξεκινά από το (t_0, x_0) ορίζεται $\forall t \geq t_0$ και $\forall x(t) \in B_r$. Τώρα για το υπόλοιπο της απόδειξης θα πρέπει να υποθέσουμε ότι το $x_0 \in \{x \in B_r / W_2(x) \leq \rho\}$ και από το Λήμμα (4.4) υπάρχει κλάση K με συναρτήσεις $a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ ορισμένες στο $[0, r]$ τέτοιες ώστε:

$$W_1(x) \geq a_1(\|x\|), \quad W_2(x) \leq a_2(\|x\|), \quad W_3(x) \geq a_3(\|x\|)$$

Άρα οι V, \dot{V} ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$a_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq a_2(\|x\|)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -a_3(\|x\|)$$

Συνεπώς:

$$\dot{V} \leq -a_3(\|x\|) \leq -a_3(a_2^{-1}(V)) \stackrel{op}{=} -\alpha(V)$$

Η συνάρτηση $\alpha(\cdot)$ είναι κλάσης K , ορισμένη στο $[0, r]$ (βλέπε Λήμμα 4.1) και χωρίς βλάβη της γενιότητας έχουμε ότι $\alpha(\cdot)$ τοπικά Lipschitz.

Έστω η $y(t)$ να ικανοποιεί το αυτόνομο διαφορικό 1^{ης} τάξης σύστημα όπου:

$$\dot{y} = -a(y), \quad y(t_0) = V(t_0, x(t_0)) \geq 0$$

Από το Λήμμα (4.5) έχουμε:

$$V(t, x(t)) \leq y(t), \quad \forall t \geq t_0$$

Από Λήμμα (4.3) υπάρχει κλάση KL με συνάρτηση $\sigma(r, s)$ ορισμένη στο $[0, r] \times [0, \infty)$ τέτοια ώστε:

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, \rho]$$

Συνεπώς, κάθε λύση που ξεινιά στο $\Omega_{t, \rho}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq a_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq a_1^{-1}(\sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0)) \leq a_1^{-1}(\sigma(a_2(\|x(t_0)\|), t - t_0)) \\ &= \beta_{\rho}(\|x(t_0)\|, t - t_0) \end{aligned}$$

Έτσι, το Λήμμα (4.1) δείχνει ότι $\beta(\cdot, \cdot) \in \text{KL}$. Άρα, η ανισότητα (4.4) ικανοποιείται για κάθε $x(t_0) \in \{x \in B_r / W_2(x) \leq \rho\}$ και αυτό συνεπάγεται ότι το $x=0$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές. ■

Η συνάρτηση $V(t, x)$ που ικανοποιεί την αριστερή ανισότητα (4.6) λέμε ότι είναι θετικά ορισμένη. Η συνάρτηση $V(t, x)$ που ικανοποιεί την δεξιά ανισότητα (4.6) λέμε ότι μειώνεται σταδιακά. Η συνάρτηση $V(t, x)$ λέμε ότι είναι αρνητικά ορισμένη αν η $-V(t, x)$ είναι θετικά ορισμένη. Άρα, από το θεώρημα (4.5) έχουμε ότι το 0 είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές εάν υπάρχει συνεχής διαφορίσιμη, θετικά ορισμένη, ελαττούμενη σταδιακά συνάρτηση $V(t, x)$, της οποίας η παράγωγος του συστήματος (4.1) είναι αρνητικά ορισμένη. Σ' αυτή την περίπτωση η $V(t, x)$ καλείται Lyapunov συνάρτηση.

Η απόδειξη του θεωρήματος (4.6) εκτιμάται στην περιοχή του μηδενός, από το σύνολο:

$$\{x \in B_r / W_2(x) \leq \rho\}$$

όπου η εκτίμηση αυτή μας επιτρέπει να κρατήσουμε μια ολική εκδοχή του θεωρήματος (4.6).

Πόρισμα 4.7: Υποθέτουμε ότι όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος (4.6) ικανοποιούνται ολικά για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ και $W_1(x)$ μη φραγμένη. Τότε το $x = 0$ είναι ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: Βάσει της σχέσης (4.6), αφού $W_1(x)$ μη φραγμένη τότε η $W_2(x)$ φραγμένη. Άρα το σύνολο:

$$\{x \in \mathbb{R}^n / W_2(x) \leq \rho\}$$

είναι φραγμένο για κάθε $\rho > 0$. Έτσι, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ επιλέγω ρ όσο μεγάλο θέλουμε τέτοιο ώστε $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n / W_2(x) \leq \rho\}$. Τώρα, η υπόλοιπη απόδειξη είναι ίδια όπως στο θεώρημα (4.6). ■

Όταν μια συνάρτηση Lyapunov $V(t, x)$ ικανοποιεί την ανισότητα (4.6) με μη φραγμένη $W_1(x)$ τότε λέμε ότι η $V(t, x)$ είναι μη φραγμένη.

Η κατηγορία των K συναρτήσεων στην απόδειξη του θεωρήματος (4.6) απλοποιείται όταν η κατηγορία των K συναρτήσεων πάρει την ειδική μορφή $a_i(r) = k_i r^c$. Σ' αυτή την περίπτωση φαίνεται ότι το $x = 0$ είναι εκθετικά ευσταθές.

Πόρισμα 4.8: Έστω ότι όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος (4.6) ικανοποιούνται με τις ακόλουθες ανισοτικές σχέσεις:

$$W_1(x) \geq k_1 \|x\|^c, \quad W_2(x) \leq k_2 \|x\|^c, \quad W_3(x) \geq k_3 \|x\|^c$$

για κάποιες θετικές σταθερές k_1, k_2, k_3, c . Τότε το $x = 0$ είναι εκθετικά ευσταθές.

Επιπλέον, αν οι υποθέσεις ισχύουν ολικά τότε το $x = 0$ είναι ολικά εκθετικά ευσταθές.

Απόδειξη: Οι V, \dot{V} ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$k_1 \|x\|^c \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^c$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -k_3 \|x\|^c \leq -\frac{k_3}{k_2} V(t, x)$$

Σύμφωνα με το Λήμμα (4.5) έχουμε:

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) \cdot e^{-\left(\frac{k_3}{k_2}\right)(t-t_0)}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \left[\frac{V(t, x(t))}{k_1} \right]^{1/c} \leq \left[\frac{V(t_0, x(t_0)) \cdot e^{-\left(\frac{k_3}{k_2}\right)(t-t_0)}}{k_1} \right]^{1/c} \leq \left[\frac{k_2 \|x(t_0)\|^c \cdot e^{-\left(\frac{k_3}{k_2}\right)(t-t_0)}}{k_1} \right]^{1/c} = \\ &= \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{1/c} \|x(t_0)\| e^{-\frac{1}{c} \left(\frac{k_3}{k_2}\right)(t-t_0)} \end{aligned}$$

Επομένως, το $x=0$ είναι εκθετικά ευσταθές. Αν όλες οι υποθέσεις ισχύουν ολικά τότε οι ανωτέρω ανισότητες ισχύουν για όλα τα $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$. ■

Παράδειγμα 4.4: Θεωρούμε το σύστημα:

$$\dot{x} = -[1 + g(t)]x^3$$

με την $g(t)$ συνεχή συνάρτηση και $g(t) \geq 0, \forall t \geq 0$. Θεωρώντας ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

καταλήγουμε ότι:

$$\dot{V} = -[1 + g(t)]x^4 \leq -x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι υποθέσεις του θεωρήματος (4.6) ικανοποιούνται ολικά, όπου:

$$W_1(x) = W_2(x) = V(x), \quad W_3(x) = x^4$$

Οπότε, το $x=0$ είναι ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο.

Παράδειγμα 4.5: Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

όπου η $g(t)$ είναι συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$0 \leq g(t) \leq k, \quad \dot{g}(t) \leq g(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.8)$$

Θεωρώντας ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την:

$$V(t, x) = x_1^2 + [1 + g(t)]x_2^2$$

εύκολα φαίνεται ότι ισχύει:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq V(t, x) \leq x_1^2 + (1+k)x_2^2, \quad \forall t \geq 0$$

Η $V(t, x)$ είναι θετικά ορισμένη, φθίνουσα και ακτινικά μη φραγμένη. Η παράγωγος της $V(t, x)$ κατά μήκος των τροχιών του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{V}(t, x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - [2 + 2g(t) - \dot{g}(t)]x_2^2$$

Με χρήση της ανισότητας (4.8) έχουμε:

$$2 + 2g(t) - \dot{g}(t) \geq 2 + 2g(t) - g(t) \geq 2$$

Άρα:

$$\dot{V}(t, x) \leq -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \stackrel{op}{=} -x^T Q x$$

όπου ο Q είναι θετικά ορισμένος και άρα η $\dot{V}(t, x)$ είναι αρνητικά ορισμένη, δηλαδή $\dot{V}(t, x) < 0$. Οπότε, όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος (4.6) ικανοποιούνται ολικά με του 2^{ου} βαθμού θετικά ορισμένες συναρτήσεις: W_1, W_2, W_3 . Από το πόρισμα (4.8) συμπεραίνουμε ότι το $x = 0$ είναι ολικά ευσταθές.

Παράδειγμα 4.6: Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα

$$\dot{x} = A(t)x \tag{4.9}$$

το οποίο έχει ένα σημείο ισορροπίας, το $x = 0$. Έστω $A(t)$ συνεχής για κάθε $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας συνεχής, παραγωγίσιμος, συμμετρικός, bounded, θετικά ορισμένος πίνακας $P(t)$ έτσι ώστε:

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \quad \forall t \geq 0$$

όπου ο πίνακας ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t) \tag{4.10}$$

με $Q(t)$ να είναι συνεχής, συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας έτσι ώστε:

$$Q(t) \geq c_3 I > 0, \quad \forall t \geq 0$$

Έστω η ακόλουθη υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(t, x) = x^T P(t)x \tag{4.11}$$

όπου η $V(t, x)$ θετικά ορισμένη, φθίνουσα και ακτινικά μη φραγμένη επειδή:

$$c_1 \|x\|_2^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|_2^2$$

Η παράγωγος της $V(t, x)$ κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (4.9) είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t) \dot{x} + \dot{x}^T P(t)x \\ &= x^T [\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t)]x = -x^T Q(t)x \leq -c_3 \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

Άρα, $\dot{V}(t, x) < 0$. Οπότε, όλες οι υποθέσεις του πορίσματος (4.8) ικανοποιούνται ολικά για $c = 2$, άρα το $x = 0$ είναι ολικά εκθετικά ευσταθές.

Κεφάλαιο 5: Γραμμικά Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα και Γραμμικοποίηση

Η ευστάθεια του $x = 0$ ως σημείο ισορροπίας του γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος (4.9) μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως από τα χαρακτηριστικά του πίνακα του συστήματος $A(t)$. Από την γραμμική θεωρία συστημάτων, γνωρίζουμε ότι η λύση του συστήματος είναι η:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0)$$

όπου $\Phi(t, t_0)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας, με $\Phi(t_0, t_0) = I$. Το ακόλουθο Θεώρημα αφορά την ασυμπτωτική ευστάθεια σε σχέση με τον πίνακα $\Phi(t, t_0)$.

Θεώρημα 5.1: Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (4.9) είναι (ολικά) ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο αν ο θεμελιώδης πίνακας $\Phi(t, t_0)$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq k e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (5.1)$$

για κάποιες θετικές σταθερές k, γ .

Απόδειξη: Λόγω της γραμμικής εξάρτησης των $x(t)$ από το $x(t_0)$, εάν το $x = 0$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές τότε είναι και ολικά. Η επάρκεια της σχέσης (5.1) είναι φανερή αφού:

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x(t_0)\| \leq k e^{-\gamma(t-t_0)} \|x(t_0)\|, \quad \forall t \geq t_0$$

Για ν' αποδείξουμε την αναγκαία συνθήκη, υποθέτουμε ότι το $x = 0$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές. Ακόμη, υπάρχει μια κατηγορία KL – συναρτήσεων της μορφής $\beta(\cdot, \cdot)$ έτσι ώστε:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

Από τον ορισμό νόρμας πίνακα έχουμε ότι:

$$\|\Phi(t, t_0)\| = \max_{\|x\|=1} \|\Phi(t, t_0) x\| \leq \max_{\|x\|=1} \beta(\|x\|, t - t_0) = \beta(1, t - t_0)$$

και αφού,

$$\beta(1, s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\beta(1, T) \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Τώρα, για κάθε $t \geq t_0$ έστω N να είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος, τέτοιος ώστε: $t \leq t_0 + NT$, χωρίζοντας το διάστημα $[t_0, t_0 + (N-1)T]$ σε $(N-1)$ ίσα υποδιαστήματα, πλάτους T το καθένα. Με χρήση της ιδιότητας (5.1) του χρονικά μεταβαλλόμενου πίνακα $\Phi(t, t_0)$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= \Phi(t, t_0 + (N-1)T) \Phi(t_0 + (N-1)T, t_0 + (N-2)T) \dots \Phi(t_0 + T, t_0) \Rightarrow \\ \|\Phi(t, t_0)\| &\leq \|\Phi(t, t_0 + (N-1)T)\| \prod_{\kappa=1}^{\kappa=N-1} \|\Phi(t_0 + \kappa T, t_0 + (\kappa-1)T)\| \\ &\leq \beta(1, 0) \prod_{\kappa=1}^{\kappa=N-1} \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon \beta(1, 0) e^{-N} \leq \varepsilon \beta(1, 0) e^{-(t-t_0)/T} = \kappa e^{-\gamma(t-t_0)} \end{aligned}$$

όπου $\kappa = \varepsilon \beta(1, 0)$, $\gamma = \frac{1}{T}$. ■

Το θεώρημα (5.1) αποδεικνύει ότι για τα γραμμικά συστήματα, η ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του μηδενός είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ευστάθεια. Επίσης η ανισότητα (5.1) χαρακτηρίζει την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του μηδενός χωρίς την αναγκαιότητα εύρεσης υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov, που χρειάζεται για την λύση της εξίσωσης (4.9). Σημειώνουμε ότι, για τα γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, η ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια δεν μπορεί να χαρακτηριστεί από την θέση των χαρακτηριστικών ριζών του πίνακα A , και αυτό φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.1: Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα 2^{ης} τάξης, με τον πίνακα:

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + 1.5 \cos^2 t & 1 - 1.5 \sin t \cos t \\ -1 - 1.5 \sin t \cos t & -1 + 1.5 \sin^2 t \end{bmatrix}$$

Προκύπτει ότι: για κάθε t οι χαρακτηριστικές ρίζες του $A(t)$ είναι $-0.25 \pm 0.25\sqrt{7}j$. Οι χαρακτηριστικές ρίζες εξαρτώνται από το t και κείνται στο ανοιχτά αριστερό μισό επίπεδο. Εν τούτοις, το μηδέν είναι ασταθές. Αυτό επιβεβαιώνεται αφού:

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{0.5t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{0.5t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix}$$

δείχνοντας ότι υπάρχουν αρχικές συνθήκες $x(0)$, αυθαίρετα κοντά στο 0, για την οποία η λύση είναι μη φραγμένη και τείνει το άπειρο.

Σημείωση: Το θεώρημα (5.1) πιθανόν να μην είναι πολύ χρήσιμο στη μελέτη ευστάθειας, αλλά μας εξασφαλίζει την ύπαρξη συνάρτησης Lyapunov για το γραμμικό σύστημα (4.9). Είδαμε στο παράδειγμα (5.1) ότι αν βρούμε έναν θετικά ορισμένο φραγμένο πίνακα $P(t)$ ο οποίος να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (4.9) για κάποιον θετικά ορισμένο $Q(t)$, τότε η (4.11) είναι μια Lyapunov συνάρτηση του συστήματος. Εάν ο πίνακας $Q(t)$ επιλεγεί να είναι φραγμένος και θετικά ορισμένος έτσι ώστε:

$$0 < c_3 I \leq Q(t) \leq c_4 I, \quad \forall t \geq 0$$

και αν $A(t)$ είναι συνεχής και φραγμένος τότε, μπορεί να δειχθεί ότι το 0 είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές, που συνεπάγεται ότι υπάρχει μια λύση του (4.9) η οποία έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

Θεώρημα 5.2: Έστω το $x=0$ να είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (4.9). Υποθέτουμε ότι ο $A(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι συνεχής και φραγμένος. Έστω $Q(t)$ συνεχής, φραγμένος, θετικά ορισμένος, συμμετρικός πίνακας. Τότε υπάρχει ένας συνεχής, διαφορίσιμος, φραγμένος, θετικά ορισμένος, συμμετρικός πίνακας $P(t)$ ο οποίος ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (4.10). Άρα, η (4.11) είναι μια Lyapunov συνάρτηση του συστήματος (4.9) το οποίο ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος (4.6).

Απόδειξη: Έστω

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau$$

και $\varphi(\tau, t, x)$ η λύση του συστήματος (4.9) η οποία ξεκινά στο (t, x) δηλαδή, $\varphi(\tau, \tau, x) = x$. Λόγω γραμμικότητας, μέσω της σχέσης $\varphi(\tau, t, x) = \Phi(\tau, t) x$ και βάσει ορισμού του $P(t)$ έχουμε:

$$x^T P(t) x = \int_t^\infty \varphi^T(\tau, t, x) Q(\tau) \varphi(\tau, t, x) d\tau$$

Με χρήση της σχέσης (5.1) καταλήγουμε, ότι:

$$x^T P(t) x \leq \int_t^\infty c_4 \|\Phi(\tau, t)\|_2^2 \|x\|_2^2 d\tau \leq c_4 \|x\|_2^2 \int_t^\infty \kappa^2 \cdot e^{-2\gamma(\tau-t)} d\tau = \frac{\kappa^2 c_4}{2\gamma} \|x\|_2^2 = c_2 \|x\|_2^2$$

Από την άλλη πλευρά αφού:

$$\|A(t)\|_2 \leq L, \quad \forall t \geq 0$$

το γραμμικό σύστημα (4.9) ικανοποιεί την ολική συνθήκη Lipchitz με μια σταθερά Lipchitz L . Άρα η λύση $\varphi(\tau, t, x)$ ικανοποιεί το κατώτατο όριο:

$$\|\varphi(\tau, t, x)\|_2^2 \geq \|x\|_2^2 e^{-2L(\tau-t)}$$

Άρα,

$$x^T P(t) x \geq \int_t^\infty c_3 \|\varphi(\tau, t, x)\|_2^2 d\tau \geq c_3 \|x\|_2^2 \int_t^\infty e^{-2L(\tau-t)} d\tau = \frac{c_3}{2L} \|x\|_2^2 = c_1 \|x\|_2^2$$

Επομένως,

$$c_1 \|x\|_2^2 \leq x^T P(t) x \leq c_2 \|x\|_2^2$$

η οποία δείχνει ότι ο $P(t)$ είναι θετικά ορισμένος και φραγμένος. Ο ορισμός του $P(t)$ λέει ότι είναι συμμετρικός και διαφορίσιμα συνεχής. Το γεγονός ότι ο $P(t)$ ικανοποιεί την (4.10) μπορεί ν' αποδειχθεί από την διαφορισμότητα του $P(t)$ με χρήση της ιδιότητας:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\tau, t) = -\Phi(\tau, t) A(t)$$

Ειδικότερα,

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\tau, t) d\tau \\ &+ \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau - Q(t) \\ &= -A(t) \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \\ &- A^T(t) \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau - Q(t) \\ &= -P(t) A(t) - A^T(t) P(t) - Q(t) \end{aligned}$$

Τώρα, το γεγονός ότι η (4.11) είναι Lyapunov συνάρτηση αποδεικνύεται στο παράδειγμα (4.6). ■

Σημείωση: Όταν το γραμμικό σύστημα (4.9) είναι χρονικά μεταβαλλόμενο με τον πίνακα $A(t)$ σταθερό, τότε η συνάρτηση $V(t, x)$ του θεωρήματος (5.2) μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητη του t . Έτσι, για τα γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα έχουμε:

$$\Phi(\tau, t) = e^{(\tau-t)A}$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση (5.1), όταν A ευσταθής πίνακας. Επιλέγουμε τον Q να είναι ένας θετικά ορισμένος, συμμετρικός (σταθερός) πίνακας και ο πίνακας $P(t)$ να δίνεται από την σχέση:

$$P(t) = \int_t^\infty \exp[(\tau-t)A^T] Q \exp[(\tau-t)A] d\tau = \int_0^\infty \exp[A^T s] Q \exp[As] ds$$

ο οποίος είναι ανεξάρτητος του t . Σε σύγκριση αυτής της σχέσης για τον P , με την σχέση (3.7) αποδεικνύεται ότι ο P αποτελεί μοναδική λύση της εξίσωσης Lyapunov (3.5). Έτσι η συνάρτηση Lyapunov του θεωρήματος (5.2) ανάγεται στη μοναδική που χρησιμοποιήσαμε στο 3^ο Κεφάλαιο.

Η ύπαρξη των Lyapunov συναρτήσεων για τα γραμμικά συστήματα κατά το Θεώρημα (5.2) θα χρησιμοποιηθεί για ν' αποδείξουμε την επακολούθια της γραμμικότητας η οποία επεκτείνει το θεώρημα (4.5) για μη αυτόνομη περίπτωση. Θεωρούμε το μη γραμμικό μη αυτόνομο σύστημα (4.1) όπου $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμα συνεχής συνάρτηση με $D = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_2 < r\}$.

Υποθέτουμε ότι το $x=0$ είναι σημείο ισορροπίας για το σύστημα (4.1), όπου για $t=0$ έχουμε $f(t,0)=0$ για κάθε $t \geq 0$. Επιπλέον, υποθέτουμε τον Ιακωβιανό πίνακα:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \quad (5.2)$$

να είναι φραγμένος και Lipschitz στο D , ομοιόμορφα στο t ,

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x_2) \right\|_2 \leq L_1 \|x_1 - x_2\|_2, \quad \forall x_1, x_2 \in D, \forall t \geq 0$$

για όλα τα $i \in [1, n]$, όπου:

$$f_i(t, x) = f_i(t, 0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) x$$

με z_i να είναι ένα σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα συνδέοντας το x με το 0. Αφού, $f(t,0)=0$ μπορούμε να γράψουμε το $f_i(t, x)$ ως:

$$f_i(t, x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right] x$$

Γι' αυτό,

$$f(t, x) = A(t)x + g(t, x)$$

όπου:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) \text{ και } g_i(t, x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right] x$$

Η συνάρτηση $g(t, x)$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\|g(t, x)\|_2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right\|_2^2 \right)^{1/2} \|x\|_2 \leq L \|x\|_2^2$$

όπου $L = \sqrt{n} \cdot L_1$. Επομένως, σε μια μικρή γειτονιά του μηδενός μπορούμε να προσεγγίσουμε το μη γραμμικό σύστημα (4.1) από την γραμμικοποίησή του για το 0. Το ακόλουθο θεώρημα ορίζει την έμμεση μέθοδο Lyapunov που μας δείχνει την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του μηδενός στη μη αυτόνομη περίπτωση.

Θεώρημα 5.3: Έστω $x=0$ ένα σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα (4.1) όπου $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $D = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_2 < r\}$, με τον Ιακωβιανό πίνακα (5.2) ο οποίος είναι φραγμένος και Lipschitz στο D , ομοιόμορφα στο t . Έστω:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)|_{x=0} \quad (5.3)$$

Έστω ότι ο $A(\cdot)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος (5.2) τότε το 0 είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα (4.1), εάν είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το γραμμικό σύστημα (4.)

Απόδειξη: Αφού το γραμμικό σύστημα (4.9) έχει ένα εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας στο 0 και ο $A(t)$ είναι συνεχής και φραγμένος τότε το θεώρημα (5.2) μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός διαφορίσιμα συνεχούς, φραγμένου, θετικά ορισμένου συμμετρικού πίνακα $P(t)$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (4.10), με τον $Q(t)$ να είναι συνεχής, θετικά ορισμένος και συμμετρικός. Χρησιμοποιούμε ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το μη γραμμικό σύστημα τη σχέση (4.11). Η παράγωγος της $V(t, x)$ κατά μήκος του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^T P(t) f(t, x) + f^T(t, x) P(t) x + x^T \dot{P}(t) x \\ &= x^T [P(t) A(t) + A^T(t) P(t) + \dot{P}(t)] x + 2x^T P(t) g(t, x) \\ &= -x^T Q(t) x + 2x^T P(t) g(t, x) \\ &\leq -c_3 \|x\|_2^2 + 2c_2 L \|x\|_2^3 \\ &\leq -(c_3 - 2c_2 L \rho) \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < \rho \end{aligned}$$

Επιλέγοντας,

$$\rho < \min\left\{r, \frac{c_3}{2c_2L}\right\}$$

εξασφαλίζουμε ότι η $\dot{V}(t, x)$ είναι αρνητικά ορισμένη στο $\|x\|_2 < \rho$. Αφού, όλες οι συνθήκες του πορίσματος (4.8) ικανοποιούνται στο $\|x\|_2 < \rho$ τότε καταλήγουμε στο ότι το 0 είναι εκθετικά ευσταθές. ■

Κεφάλαιο 6: Αντίστροφα Θεωρήματα

Το θεώρημα (4.6) και τα πορίσματα (4.7) και (4.8) αποδεικνύουν την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια (ή την εκθετική ευστάθεια) του μηδενός, με την απαίτηση ύπαρξης μιας συνάρτησης Lyapunov $V(t, x)$, η οποία ικανοποιεί τις απαραίτητες συνθήκες. Η απαίτηση ύπαρξης μιας βοηθητικής συνάρτησης $V(t, x)$, η οποία ικανοποιεί τις απαραίτητες συνθήκες είναι η τυπική μέθοδος σε αρκετά θεωρήματα που αφορούν την Lyapunov. Οι συνθήκες αυτών των Θεωρημάτων δεν μπορούν να ελεγχθούν κατευθείαν στα δεδομένα του προβλήματος. Έτσι, σε αντικατάσταση θα πρέπει να ψάξουμε για την βοηθητική συνάρτηση. Αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα, δύο ερωτήσεις προκύπτουν: 1^ο Υπάρχει η συνάρτηση η οποία να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος; 2^ο Πως μπορούμε να βρούμε αυτή τη συνάρτηση; Σε πολλές περιπτώσεις η θεωρία Lyapunov μας δίνει μια καταφατική απάντηση στο 1^ο ερώτημα. Η απάντηση όμως μας δίνει την διατύπωση του αντίστροφου θεωρήματος Lyapunov, το οποίο είναι το ένα από τα θεωρήματα Lyapunov. Για παράδειγμα, ένα αντίστροφο θεώρημα για την ασυμπτωτική ευστάθεια αποδεικνύεται εάν το 0 είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές όπου τότε υπάρχει μια συνάρτηση Lyapunov η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος (4.6). Τα περισσότερα από αυτά τα αντίστροφα θεωρήματα αποδεικνύονται στην πράξη με την κατασκευή βοηθητικών συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνθήκες των αντίστοιχων θεωρημάτων. Δυστυχώς, η κατασκευή της βοηθητικής συνάρτησης σχεδόν πάντα υποθέτει την γνώση λύσης της διαφορικής εξίσωσης. Συνεπώς, τα θεωρήματα αυτά δε βοηθούν πρακτικά στην εύρεση μιας βοηθητικής συνάρτησης. Και μόνο η γνώση ότι η συνάρτηση υπάρχει είναι πολλές φορές καλύτερο από το τίποτα. Η ιδέα της κατασκευής μιας αντίστροφης συνάρτησης Lyapunov δεν είναι κάτι καινούριο σε μας, αφού το έχουμε κάνει στα γραμμικά συστήματα στην απόδειξη του θεωρήματος (5.1). Μια προσεκτική ανάγνωση της απόδειξης δείχνει ότι η γραμμικότητα του συστήματος δεν παίζει καθοριστικό ρόλο στην απόδειξη και μας οδηγεί στο 1^ο αντίστροφο θεώρημα του οποίου η απόδειξη είναι μια απλή επέκταση της απόδειξης του θεωρήματος (5.1).

Θεώρημα 6.1: Έστω $x = 0$ να είναι ένα σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα

$$(4.1) \quad \text{όπου } f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο}$$

$D = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r\}$ με τον Ιακωβιανό πίνακα (5.2) φραγμένος στο D , ομοιόμορφος στο t . Έστω k, γ, r_0 θετικές σταθερές όπου:

$$r_0 < \frac{r}{k}$$

Έστω $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r_0\}$. Υποθέτουμε ότι οι τροχιές του συστήματος ικανοποιούν την ανισότητα:

$$\|x(t)\| \leq k \|x(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall x(t_0) \in D_0, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $V : [0, \infty) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις ανισότητες:

$$\begin{aligned} c_1 \|x\|^2 &\leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -c_3 \|x\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq c_4 \|x\| \end{aligned}$$

για κάποιες σταθερές c_1, c_2, c_3, c_4 . Επιπλέον, αν $r = \infty$ και το 0 είναι ολικά εκθετικά ευσταθές τότε η $V(t, x)$ ορίζεται και ικανοποιεί τις παραπάνω ανισότητες. Επιπλέον, αν το σύστημα είναι μη αυτόνομο τότε η $V(t, x)$ μπορεί να επιλεγεί ως ανεξάρτητη του t .

Απόδειξη: Λόγω της ισοδυναμίας των νορμών είναι επαρκές ν' αποδείξουμε το θεώρημα για την $\|\cdot\|_2$. Έστω $\varphi(\tau, t, x)$ η λύση του συστήματος η οποία ξεκινά στο (t, x) έτσι ώστε:

$$\varphi(t, t, x) = x, \quad \varphi(\tau, t, x) \in D, \quad \forall x \in D_0, \forall \tau \geq t$$

Έστω:

$$V(t, x) = \int_t^{t+T} \varphi^T(\tau, t, x) \varphi(\tau, t, x) d\tau$$

όπου η T είναι μια θετική σταθερά και θα επιλεγεί αργότερα. Λόγω της εκθετικής μείωσης, πάνω στις τροχιές έχουμε:

$$V(t, x) = \int_t^{t+T} \|\varphi(\tau, t, x)\|_2^2 d\tau \leq \|x\|_2^2 \int_t^{t+T} k^2 e^{-2\gamma(\tau-t)} d\tau = \frac{k^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma T}) \|x\|_2^2$$

Από την άλλη, ο Ιακωβιανός πίνακας (5.2) είναι περιορισμένος (φραγμένος) στο 0. Έστω:

$$L > 0: \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\|_2 \leq L, \quad \forall x \in D \quad (6.1)$$

Η συνάρτηση $f(t, x)$ είναι Lirchitz στο D , με μια σταθερά Lirchitz L . Συνεπώς, η λύση $\varphi(\tau, t, x)$ ικανοποιεί το κατώτατο όριο:

$$\|\varphi(\tau, t, x)\|_2^2 \geq \|x\|_2^2 e^{-2L(\tau-t)}$$

Συνεπώς:

$$V(t, x) \geq \|x\|_2^2 \int_t^{t+T} e^{-2L(\tau-t)} d\tau = \frac{1}{2L} (1 - e^{-2LT}) \|x\|_2^2$$

Άρα, η $V(t, x)$ ικανοποιεί την 1^η ανισότητα του θεωρήματος με:

$$c_1 = \frac{1}{2L} (1 - e^{-2LT}) \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{k^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma T})$$

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της $V(t, x)$ κατά μήκος των τροχιών του συστήματος ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\varphi_t(\tau, t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\tau, t, x), \quad \varphi_x(\tau, t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\tau, t, x)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &= \varphi^T(t+T, t, x) \varphi(t+T, t, x) - \varphi^T(t, t, x) \varphi(t, t, x) \\ &\quad + \int_t^{t+T} 2\varphi^T(\tau, t, x) \varphi_t(\tau, t, x) d\tau + \\ &\quad + f(t, x) \int_t^{t+T} 2\varphi^T(\tau, t, x) \varphi_x(\tau, t, x) d\tau = \\ &= \varphi^T(t+T, t, x) \varphi(t+T, t, x) - \|x\|_2^2 \\ &\quad + \int_t^{t+T} 2\varphi^T(\tau, t, x) [\varphi_t(\tau, t, x) + \varphi_x(\tau, t, x) f(t, x)] d\tau \end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι:

$$\varphi_t(\tau, t, x) + \varphi_x(\tau, t, x) \cdot f(t, x) \equiv 0, \quad \forall \tau \geq t$$

Συνεπώς:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) = \varphi^T(t+T, t, x) \varphi(t+T, t, x) - \|x\|_2^2 \leq -(1 - k^2 e^{-2\gamma T}) \|x\|_2^2$$

Επιλέγοντας,

$$T = \frac{\ln 2k^2}{2\gamma}$$

τότε η 2^η ανισότητα του θεωρήματος ικανοποιείται για

$$c_3 = \frac{1}{2}$$

Προς απόδειξη της τελευταίας ανισότητας, ας παρατηρήσουμε ότι η $\varphi_x(\tau, t, x)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_x = \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi(\tau, t, x)) \varphi_x, \text{ με την συνθήκη } \varphi_x(t, t, x) = I$$

Από την σχέση (6.1) στο D , η φ_x ικανοποιεί την:

$$\|\varphi_x(\tau, t, x)\|_2 \leq e^{L(\tau-t)}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|_2 &= \left\| \int_t^{t+T} 2\varphi^T(\tau, t, x) \varphi_x(\tau, t, x) d\tau \right\|_2 \\ &\leq \int_t^{t+T} 2\|\varphi(\tau, t, x)\|_2 \|\varphi_x(\tau, t, x)\|_2 d\tau \\ &\leq \|x\|_2 \int_t^{t+T} 2ke^{-\gamma(\tau-t)} e^{L(\tau-t)} d\tau \\ &= \frac{2k}{(\gamma-L)} [1 - e^{-(\gamma-L)T}] \|x\|_2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Γι' αυτό η τελευταία ανισότητα του θεωρήματος ικανοποιείται για:

$$c_4 = \frac{2k}{(\gamma-L)} [1 - e^{-(\gamma-L)T}]$$

Αν όλες οι υποθέσεις ισχύουν ολικά, τότε προφανώς το r_0 μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μεγάλο. Εάν το σύστημα είναι αυτόνομο τότε η $\varphi(\tau, t, x)$ εξαρτάται μόνο από το $(\tau-t)$ τέτοια ώστε:

$$\varphi(\tau, t, x) = \psi(\tau-t, x)$$

Τότε:

$$V(t, x) = \int_t^{t+T} \psi^T(\tau-t, x) \psi(\tau-t, x) d\tau = \int_0^T \psi^T(s, x) \psi(s, x) ds \quad (6.3)$$

ανεξάρτητη του t . ■

Σημείωση: Στο θεώρημα (5.3) είδαμε ότι αν η γραμμικοποίηση ενός μη γραμμικού συστήματος στην περιοχή του μηδενός έχει ένα εκθετικό ευσταθές σημείο ισορροπίας τότε το 0 είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν το θεώρημα (6.1) για ν' αποδείξουμε ότι η εκθετική ευστάθεια της γραμμικότητας είναι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για την εκθετική ευστάθεια του μηδενός.

Θεώρημα 6.2: Έστω $x = 0$ να είναι ένα σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα

(4.1) όπου $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο

$D = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r\}$ με τον Ιακωβιανό πίνακα της σχέσης (5.2) να είναι φραγμένος στο

D , ομοιόμορφος στο t . Έστω:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)|_{x=0}$$

Τότε το 0 είναι ένα εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα, εάν και μόνο αν το 0 είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το γραμμικό σύστημα (4.9).

Απόδειξη: (\Rightarrow) Το ευθύ μέρος της απόδειξης προκύπτει από το θεώρημα (5.2).

(\Leftarrow) Τώρα για να αποδείξουμε το αντίστροφο μέρος γράφουμε το γραμμικό σύστημα στη μορφή:

$$\dot{x} = f(t, x) - [f(t, x) - A(t)x] = f(t, x) - g(t, x)$$

Με χρήση της προηγούμενης υπόθεσης του θεωρήματος (5.3) γνωρίζουμε ότι:

$$\|g(t, x)\|_2 \leq L\|x\|_2^2, \quad \forall x \in D, \forall t \geq 0$$

Αφού το 0 είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος, υπάρχουν θετικές σταθερές k, γ, c έτσι ώστε:

$$\|x(t)\|_2 \leq k\|x(t_0)\|_2 e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall \|x(t_0)\|_2 < c, \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Επιλέγοντας,

$$r_0 < \min \left\{ c, \frac{r}{k} \right\}$$

τότε όλες οι συνθήκες του θεωρήματος (6.1) ικανοποιούνται. Έστω $V(t, x)$ να είναι η συνάρτηση που παρέχεται από το θεώρημα (6.1), την οποία χρησιμοποιούμε ως την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το γραμμικό σύστημα (4.9). Τότε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} A(t)x &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) - \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \\ &\leq -c_3\|x\|_2^2 + c_4L\|x\|_2^3 \\ &\leq -(c_3 - c_4L\rho)\|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < \rho \end{aligned}$$

Επιλέγοντας,

$$\rho < \min \left\{ r_0, \frac{c_3}{c_4L} \right\}$$

εξασφαλίζει ότι η $\dot{V}(t, x)$ είναι αρνητικά ορισμένη στο $\|x\|_2 < \rho$. Άρα, όλες οι συνθήκες του πορίσματος (4.8) ικανοποιούνται στο $\|x\|_2 < \rho$ και καταλήγουμε στο ότι το 0 είναι ένα εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το γραμμικό σύστημα. ■

Παράδειγμα 6.1: Θεωρούμε το σύστημα 1^{ης} τάξης:

$$\dot{x} = -x^3$$

Είδαμε στο παράδειγμα (3.3) ότι το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αλλά, η γραμμικοποίησή του γύρω από το 0 καταλήγει στο γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = 0$$

του οποίου ο πίνακας A δεν είναι Hurwitz. Τώρα, με χρήση του θεωρήματος (6.2) καταλήγουμε στο ότι το 0 δεν είναι εκθετικά ευσταθές.

Σημείωση: Κλείνουμε αυτή την ενότητα επισημαίνοντας ένα άλλο αντίστροφο θεώρημα το οποίο εφαρμόζεται για πιο γενική περίπτωση της ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας για την ισορροπία.

Θεώρημα 6.3: Έστω $x = 0$ να είναι ένα σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα

(4.1) όπου $f: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο

$D = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r\}$ με τον Ιακωβιανό πίνακα της σχέσης (5.2) να είναι φραγμένος στο

D , ομοιόμορφος στο t . Έστω $\beta(\cdot, \cdot)$ μια συνάρτηση στην κατηγορία KL και r_0 μια

θετική σταθερά τέτοια ώστε: $\beta(r_0, 0) < r$. Έστω $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r_0\}$. Υποθέτουμε ότι

η τροχιά του συστήματος ικανοποιεί την:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall x(t_0) \in D_0, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Τότε υπάρχει μιας συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση $V: [0, \infty) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις ανισότητες:

$$\begin{aligned} a_1(\|x\|) &\leq V(t, x) \leq a_2(\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -a_3(\|x\|) \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq a_4(\|x\|) \end{aligned}$$

όπου $a_1(\cdot), a_2(\cdot), a_3(\cdot), a_4(\cdot)$ συναρτήσεις της κατηγορίας K ορισμένες στο $[0, r_0]$. Εάν το σύστημα είναι αυτόνομο τότε η $V(t, x)$ μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητη του t .

Κεφάλαιο 7: Επεκτάσεις στην περίπτωση των Χρονικά Μεταβαλλόμενων Συστημάτων & Σύνδεση με την έννοια της Παρατηρησιμότητας

Στην περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων το θεώρημα La Salle' s (2.2) της σταθεροποίησης αποδεικνύει ότι η τροχιά του συστήματος προσεγγίζει την καλύτερη σταθεροποίηση ορισμένη στο E , όπου E είναι το σύνολο όλων των σημείων στην περιοχή Ω όπου

$$\dot{V}(x) = 0$$

Στην περίπτωση των μη αυτόνομων συστημάτων δεν είναι εμφανές πως μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο E αν η συνάρτηση $\dot{V}(t, x)$ αποτελεί εξάρτηση των t, x . Έτσι, μπορεί να γίνει απλούστερη αν μπορεί να δειχθεί ότι:

$$\dot{V}(t, x) \leq -w(x) \leq 0$$

όπου, το σύνολο E μπορεί να ορισθεί ως το σύνολο των σημείων όπου $w(x) = 0$. Έτσι αναμένεται ότι η τροχιά του συστήματος προσεγγίζει το E καθώς $t \rightarrow +\infty$.

Λήμμα 7.1: Barbalat' s

Έστω $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $[0, \infty)$. Υποθέτουμε ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$$

υπάρχει και είναι ορισμένο. Τότε:

$$\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Απόδειξη: Έστω ότι δεν υπάρχει μια θετική σταθερά $k_1 > 0$ έτσι ώστε: $\forall T > 0$ μπορούμε να βρούμε $T_1 \geq T$ με

$$|\varphi(T_1)| \geq k_1$$

Αφού $\varphi(t)$ ομοιόμορφα συνεχής τότε υπάρχει θετική σταθερά $k_2 > 0$ τέτοια ώστε:

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| < \frac{k_1}{2}, \quad \forall t \geq 0, \forall \tau \in [0, k_2] \quad (7.1)$$

Άρα:

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= |\varphi(t) - \varphi(T_1) + \varphi(T_1)| \geq |\varphi(T_1)| - |\varphi(t) - \varphi(T_1)| \\ &> k_1 - \frac{k_1}{2} = \frac{k_1}{2}, \quad \forall t \in [T_1, T_1 + k_2] \end{aligned} \quad (7.2)$$

Άρα:

$$\left| \int_{T_1}^{T_1+k_2} \varphi(t) dt \right| = \int_{T_1}^{T_1+k_2} |\varphi(t)| dt > \frac{1}{2} k_1 k_2$$

όπου η ισότητα ισχύει αφού η $\varphi(t)$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο στην περιοχή $T_1 \leq t \leq T_1 + k_2$. Άρα το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t \varphi(\tau) d\tau, t \rightarrow \infty$$

δε συγκλίνει σε κάποιο όριο. Άτοπο. ■

Θεώρημα 7.2: Έστω $D \subset \mathbb{R}^n$ που περιέχει το $x=0$ και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(t, x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής ως προς t και τοπικά Lipschitz ως προς x , ομοιόμορφα ως προς t στο $[0, \infty) \times D$. Επιπλέον, έστω $f(t, 0)$ ομοιόμορφα φραγμένο για κάθε $t > 0$. Έστω $V : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \quad (7.3)$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x) \quad (7.4)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ όπου $W_1(x), W_2(x)$ συνεχείς θετικά ορισμένες συναρτήσεις και $W(x)$ μια θετικά ημιορισμένη συνεχής συνάρτηση στο D . Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε $B_r \subset D$ και έστω $\rho > 0$:

$$\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$$

Τότε, όλες οι λύσεις του συστήματος $\dot{x} = f(t, x)$ με $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$, είναι φραγμένες και ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$W(x(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (7.5)$$

Επιπλέον, αν όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται ολικά και η $W_1(x)$ είναι μη φραγμένη, τότε το θεώρημα ικανοποιείται για κάθε $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη του θεωρήματος (4.6) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\} \Rightarrow x(t) \in \Omega_{t,\rho} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \leq \rho\}, \quad \forall t \geq t_0$$

αφού $\dot{V}(t, x) \leq 0$. Άρα, $\|x(t)\| < r$ για κάθε $t \geq t_0$. Επειδή, η συνάρτηση $V(t, x(t))$ είναι μονότονα μη αύξουσα και φραγμένη στο μηδέν τότε συγκλίνει καθώς $t \rightarrow \infty$. Επομένως,

$$\int_{t_0}^t W(x(\tau)) d\tau \leq -\int_{t_0}^t \dot{V}(\tau, x(\tau)) d\tau = V(t_0, x(t_0)) - V(t, x(t))$$

Άρα, το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t W(x(\tau)) d\tau$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Αφού $x(t)$ είναι φραγμένη, $\dot{x} = f(t, x(t))$ είναι φραγμένη, ομοιόμορφα ως προς t , για κάθε $t \geq t_0$. Επομένως, η $x(t)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ως προς t στο διάστημα $[t_0, \infty)$ επομένως, η $W(x(t))$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ως προς x στο συμπαγές σύνολο B_r . Οπότε, βάσει του λήμματος (7.1) καταλήγουμε στη σχέση (7.5). Αν όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται ολικά και η $W_1(x)$ είναι μη φραγμένη τότε για κάθε $x(t_0)$ μπορούμε να επιλέξουμε ρ αρκietά μεγάλο, τέτοιο ώστε:

$$x(t_0) \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid W_2(x) \leq \rho\} \quad \blacksquare$$

Θεώρημα 7.3: Έστω $D \subset \mathbb{R}^n$ που περιέχει το $x=0$ και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(t, x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής ως προς t και τοπικά Lipschitz ως προς x , για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $x \in D$. Έστω $x=0$ σημείο ισορροπίας του συστήματος $\dot{x} = f(t, x)$ στο $t=0$. Έστω $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x)$$

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0$$

$$V(t + \delta, \varphi(t + \delta; t, x)) - V(t, x) \leq -\lambda V(t, x), \quad 0 < \lambda < 1$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$, για κάποιο $\delta > 0$, όπου $W_1(x), W_2(x)$ θετικά ορισμένες συνεχείς συναρτήσεις στην περιοχή D και $\varphi(\tau; t, x)$ η λύση του συστήματος που ξεκινά στο (t, x) . Τότε το $x=0$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν όλες οι υποθέσεις ικανοποιούνται ολικά και η $W_1(x)$ είναι μη φραγμένη, τότε το $x=0$ είναι ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν,

$$W_1(x) \geq k_1 \|x\|^c, \quad W_2(x) \leq k_2 \|x\|^c, \quad k_1, k_2 > 0, \quad c > 0$$

τότε το $x=0$ είναι εκθετικά ευσταθές.

Απόδειξη: Επιλέγουμε $r > 0$ έτσι ώστε $B_r \in D$. Όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος (4.6) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\} \Rightarrow x(t) \in \Omega_{t, \rho}, \quad \forall t \geq t_0$$

όπου $\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$, επειδή $\dot{V}(t, x) \leq 0$. Τώρα, για κάθε $t \geq t_0$ έχουμε:

$$V(t + \delta, x(t + \delta)) \leq V(t, x(t)) - \lambda V(t, x(t)) = (1 - \lambda)V(t, x(t))$$

Επιπλέον, αφού $\dot{V}(t, x) \leq 0$ έπεται:

$$V(\tau, x(\tau)) \leq V(t, x(t)), \quad \forall \tau \in [t, t + \delta]$$

Τώρα, για κάθε $t \geq t_0$, έστω N ο μικρότερος θετικός ακέραιος έτσι ώστε $t \leq t_0 + N\delta$.

Διαμερίζοντας το διάστημα $[t_0, t_0 + (N-1)\delta]$ σε $(N-1)$ υποδιαστήματα μήκους δ το καθένα, έχουμε:

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &\leq V(t_0 + (N-1)\delta, x(t_0 + (N-1)\delta)) \\ &\leq (1 - \lambda)V(t_0 + (N-2)\delta, x(t_0 + (N-2)\delta)) \\ &\vdots \\ &\leq (1 - \lambda)^{(N-1)}V(t_0, x(t_0)) \\ &\leq \frac{1}{(1 - \lambda)}(1 - \lambda)^{(t-t_0)/\delta}V(t_0, x(t_0)) \\ &= \frac{1}{(1 - \lambda)}e^{-b(t-t_0)}V(t_0, x(t_0)) \end{aligned}$$

όπου:

$$b = \frac{1}{\delta} \ln \frac{1}{(1-\lambda)}$$

Θέτοντας,

$$\sigma(r, s) = \frac{r}{(1-\lambda)} e^{-bs}$$

μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η $\sigma(r, s)$ ανήκει στη KL τάξη συναρτήσεων και η $V(t, x(t))$ ικανοποιεί την ακόλουθη ανισοτική σχέση:

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, \rho]$$

Από αυτό το σημείο η απόδειξη είναι όμοια του θεωρήματος (4.6). Οι αποδείξεις των ισχυρισμών για την ολική ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια και την εκθετική ευστάθεια είναι όμοιες με τις αποδείξεις των πορισμάτων (4.7) και (4.8), αντίστοιχα. ■

Παράδειγμα 7.1: Θεωρούμε το γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα:

$$\dot{x} = A(t)x$$

όπου $A(t)$ συνεχής για $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας συνεχώς παραγωγίσιμος, συμμετρικός πίνακας που ικανοποιεί την ακόλουθη ανισοτική σχέση:

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \quad \forall t \geq 0$$

καθώς και την διαφορική εξίσωση πινάκων:

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C^T(t)C(t)$$

όπου $C(t)$ συνεχής ως προς t . Η παράγωγος της ακόλουθης συνάρτησης,

$$V(t, x) = x^T P(t)x$$

είναι:

$$\dot{V}(t, x) = -x^T C^T(t)C(t)x \leq 0$$

Η λύση του γραμμικού συστήματος δίνεται από τη σχέση $\varphi(\tau; t, x) = \Phi(\tau, t)x$, όπου $\Phi(\tau, t)$ ο πίνακας μετασχηματισμού. Επομένως,

$$\begin{aligned}
 V(t+\delta, \varphi(t+\delta; t, x)) - V(t, x) &= \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \varphi(\tau; t, x)) d\tau \\
 &= -x^T \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau x \\
 &= -x^T W(t, t+\delta) x
 \end{aligned}$$

όπου

$$W(t, t+\delta) = \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετική σταθερά $k < c_2$ τέτοια ώστε:

$$W(t, t+\delta) \geq kI, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{συνθήκη παρατηρησιμότητας})$$

τότε

$$V(t+\delta, \varphi(t+\delta; t, x)) - V(t, x) \leq -k \|x\|_2^2 \leq -\frac{k}{c_2} V(t, x)$$

Συνεπώς, όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος (7.3) ικανοποιούνται ολικά με

$$W_i(x) = c_i \|x\|_2^2, \quad i=1, 2, \quad \lambda = \frac{k}{c_2} < 1$$

και καταλήγουμε ότι το $x=0$ είναι ολικά εκθετικά ευσταθές. Επομένως, το παράδειγμα αυτό συνδέει την ευστάθεια των γραμμικών συστημάτων με την έννοια της παρατηρησιμότητας.

Βιβλιογραφία

1. Brauer F. & Nohel J.A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1989. Reprint originally published by Benjamin, 1969.
2. Hahn W., *Stability of Motion*, Springer – Verlag, New York, 1967.
3. Kailath T., *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.
4. Khalil H. K., *Nonlinear Systems*, Prentice – Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, Second Edition, 1996.
5. Κραββαρίτης Δ.Χ., Παντελίδης Γ.Ν., Χατζησάββας Ν.Σ., *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1996.
6. Lefschetz S., *Stability of Nonlinear Control Systems*, Academic Press, New York, 1965.
7. Peuteman J., Aeyels D., *A new Asymptotic Criterion for Nonlinear Time-Variant Differential Equations*, IEEE Trans. Automat. Control, 43 (1998), 968-971.
8. Rouche N., Habets P. & Laloy M., *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*, Springer – Verlag, New York, 1977.
9. Σταυρακάκης Ν.Μ., *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και μη Γραμμική Θεωρία με Εφαρμογές από τη Φύση και τη Ζωή*, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2011.
10. Vidyasagar M., *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, Second Edition, 1993.