



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ :

ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ
ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΔΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΗΣ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ



*ΚΑΜΠΟΥΡΟΓΛΟΥ
ΑΝΤΩΝΗΣ*

*ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :
ΑΙΜΙΛΙΟΣ Π. ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ
(Αν.Καθηγητής Ε.Μ.Π.)*



N.T.U.A

**APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES.
DEPARTMENT**

M.Sc. Thesis

**EVALUATION OF THE DYNAMIC ELASTIC
CONSTANTS OF FIBROUS COMPOSITES
CONSIDERING
THEORY OF ELASTICITY
AND HASHIN'S CORRESPONDENCE PRINCIPLE**

Author : Antonios Kampouroglou

Supervisor : Emilio Sideridis

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή	3
1.1	Ιστορικό συνθέτων υλικών	3
1.1.2	Η εξέλιξη των πολυμερών	4
1.2	Εποξειδικές ρητίνες	4
1.2.1	Γενικά - Ορισμός	4
1.2.2	Ιδιότητες υγρών εποξειδικών ρητινών	6
1.3	Σύνθετα υλικά - εγκλείσματα στις εποξειδικές ρητίνες	8
1.3.1	Γενικά-Ορισμοί	8
1.3.2	Παράμετροι που ορίζουν ένα σύνθετο υλικό	8
1.3.3	Κατάταξη και ταξινόμηση των συνθέτων υλικών	9
1.4	Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών	10
1.4.1	Γενική περιγραφή	10
1.4.2	Ιδιότητες - Συμπεριφορά στον εφελκυσμό	10
1.4.3	Κοκκώδη σύνθετα υλικά (Particulate composites)	12
1.5	Παράρτημα με εικόνες από εφαρμογές συνθέτων υλικών	14
Κεφάλαιο 2	Στατικές ελαστικές σταθερές	23
2.1	Υπολογισμός ελαστικών σταθερών με τη βοήθεια της τασικής συνάρτησης AIRY	23
2.1.1	Διάμηκες μέτρο ελαστικότητας	23
2.1.2	Εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας	29
2.1.3	Διαμήκης λόγος Poisson	32
2.1.4	Εγκάρσιος λόγος Poisson	32
2.1.5	Μέτρο διάτμησης	33
2.1.6	Ελαστικές σταθερές συναρτήσει της γωνίας θ των ινών	33

2.2	Γραφικές παραστάσεις στατικών ελαστικών σταθερών	34
2.2.1	Πίνακες	35
2.2.2	Διαγράμματα στατικών ελαστικών σταθερών	41
2.3	Σχολιασμός αποτελεσμάτων-Συμπεράσματα	50
Κεφάλαιο 3	Δυναμικές ελαστικές σταθερές	53
3.1	Εισαγωγή	53
3.1.1	Σύνθετο (μιγαδικό) μέτρο ελαστικότητας	55
3.1.2	Δυναμικό μέτρο αποθήκευσης	57
3.1.3	Δυναμικό μέτρο απωλειών	57
3.1.4	Σύνθετο (μιγαδικό) μέτρο ενδόσεως	58
3.1.5	Σύνθετος (μιγαδικός) λόγος Poisson	59
3.1.6	Σύνθετο (μιγαδικό) μέτρο διόγκωσης	59
3.1.7	Σύνθετο (μιγαδικό) μέτρο διάτμησης	59
3.2	Υπολογισμός δυναμικών ελαστικών σταθερών	60
3.2.1	Δυναμικό διάμηκες μέτρο ελαστικότητας	60
3.2.2	Δυναμικός διαμήκης λόγος Poisson	63
3.2.3	Δυναμικός εγκάρσιος λόγος Poisson	66
3.2.4	Δυναμικό εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας	69
3.2.5	Δυναμικό μέτρο διατμήσεως	77
3.2.6	Δυναμικό μέτρο ελαστικότητας συναρτήσει της γωνίας θ των ινών	80
3.2.7	Δυναμικό μέτρο διατμήσεως συναρτήσει της γωνίας θ των ινών	82
3.2.8	Δυναμικός λόγος Poisson συναρτήσει της γωνίας θ των ινών	84
3.3	Δυναμικές σταθερές για $\mu_m'' = 0$	86
3.3.1	Δυναμικό διάμηκες μέτρο ελαστικότητας	86
3.3.2	Δυναμικός διαμήκης λόγος λόγος Poisson	87
3.3.3	Δυναμικός εγκάρσιος λόγος Poisson	87
3.3.4	Δυναμικό εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας	88
3.3.5	Δυναμικό μέτρο διατμήσεως	93

3.3.6	Δυναμικό μέτρο ελαστικότητας συναρτήσει της γωνίας θ των ινών	95
3.3.7	Δυναμικό μέτρο διατμήσεως συναρτήσει της γωνίας θ των ινών	97
3.3.8	Δυναμικός λόγος Poisson συναρτήσει της γωνίας θ των ινών	99
3.4	Γραφικές παραστάσεις δυναμικών ελαστικών σταθερών	101
3.4.1	Πίνακες	103
3.4.2	Διαγράμματα δυναμικών ελαστικών σταθερών	114
3.5	Σχολιασμός αποτελεσμάτων-Συμπεράσματα	134
3.5.1	Δυναμικές ελαστικές σταθερές	134
3.5.2	Εν κατακλείδι	139
Παράρτημα	Μοντέλα και εκφράσεις για τις ελαστικές σταθερές και τους λόγους Poisson ινωδών συνθέτων υλικών	140
<hr/>		
Βιβλιογραφία		145
<hr/>		

ABSTRACT

A theoretical model for the evaluation of the dynamic elastic moduli in fiber reinforced composites has been developed. The method takes into account the theory of elasticity together with Hashin's correspondence principle. It can evaluate all elastic moduli for all fiber angles as a function of the fiber concentration for any given combination of matrix and filler. Experimental results based on glass-filled reinforced epoxy composites were used to test the model. This comparison between the predicted and the experimental values proved satisfactory.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός μοντέλου που θα βασίζεται στην θεωρία ελαστικότητας και θα μπορεί να προσδιορίσει τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας καθώς και τον δυναμικό λόγο Poisson ενός ινώδους συνθέτου υλικού, ιών μιας διεύθυνσεως. Το μοντέλο μας θα μπορεί να υπολογίζει τις τιμές των δυναμικών ελαστικών σταθερών συναρτήσει της περιεκτικότητας των ιών στο σύνθετο και για οποιαδήποτε γωνία ιών.

Αρχικά απομονώνοντας τον στοιχειώδη αντιπροσωπευτικό όγκο (RVE) του υλικού θεμελιώνεται με την θεωρία της ελαστικότητας το διφασικό μοντέλο για το σύνθετο, με το οποίο προβλέπονται οι στατικές ελαστικές σταθερές με ακρίβεια μεγαλύτερη από αυτή που προσφέρει η κλασική θεώρηση της αντοχής των υλικών.

Στη συνέχεια κάνοντας χρήση της αρχής της αντιστοιχίας του **Hashin** μεταβαίνουμε από την ελαστική συμπεριφορά, στην ιξωδοελαστική συμπεριφορά του συνθέτου και προσδιορίζουμε τις δυναμικές (σύνθετες) ελαστικές σταθερές για οποιαδήποτε γωνία και περιεκτικότητα των ιών.

Τέλος συγκρίνουμε με ήδη υπάρχοντα μοντέλα από την διεθνή βιβλιογραφία και με πειραματικά δεδομένα που είχαμε στην διάθεση μας από το εργαστήριο της αντοχής των υλικών. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι ικανοποιητικά, αφού το μοντέλο μας μπορεί και παρακολουθεί την μορφή των μεταβολών όλων των ελαστικών σταθερών, ενώ προσεγγίζει τα πειραματικά δεδομένα με αρκετή ακρίβεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορικό Συνθέτων Υλικών

Ο όρος σύνθετο υλικό σημαίνει ότι δύο ή περισσότερα υλικά συνδυαζόμενα μακροσκοπικά μπορούν να σχηματίσουν ένα νέο υλικό που συνήθως παρουσιάζει καλύτερες ιδιότητες από εκείνες των αρχικών υλικών κάτι που συχνά ακόμη μπορεί να εμφανίζει και ιδιότητες τις οποίες κανένα από τα αρχικά υλικά δεν διέθετε.

Με βάση αυτό τον απλό ορισμό, μπορούμε να πούμε ότι ο άνθρωπος επινόησε και χρησιμοποίησε σύνθετα υλικά από τα πολύ παλιά χρόνια. Έτσι οι Εβραίοι χρησιμοποίησαν το άχυρο για να δώσουν μεγαλύτερη αντοχή στα λασπότουβλα. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν ένα είδος «κόντρα πλακέ» όταν κατάλαβαν ότι στρώματα ξύλου μπορούν να συνδυασθούν κατάλληλα ώστε να παρουσιάσουν ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις και να είναι ανθεκτικά στην διόγκωση και στη στρέβλωση που προκαλείται από την υγρασία. Επίσης στην Αίγυπτο και στην Μεσοποταμία εμφανίσθηκαν σχεδίες από καλάμι παπύρου «δεμένο» με άσφαλτο. Οι Ασσύριοι έφτιαξαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη άσφαλτο. Στον Μεσαίωνα κατασκευάσθηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων και πιο πρόσφατα ινώδη σύνθετα υλικά που έχουν μεγάλους λόγους αντοχής / βάρους και ακαμψίας / βάρους χρησιμοποιήθηκαν σε κατασκευές στις οποίες το μικρό βάρος αποτελεί σημαντικό παράγοντα, όπως π.χ. σε αεροσκάφη και διαστημόπλοια.

Τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω μας δείχνουν ότι ο άνθρωπος από τα πρώτα βήματα της ζωής του είχε «διαισθανθεί» ότι συνδυάζοντας δύο ή περισσότερα υλικά μπορούσε να κατασκευάσει ένα τρίτο «σύνθετο υλικό», που ικανοποιούσε καλύτερα τις κατασκευαστικές του ανάγκες.

Η πορεία εξέλιξης των συνθέτων υλικών δεν παρουσιάζει την ίδια ταχύτητα διά μέσου των αιώνων. Μέχρι τον 19^ο αιώνα μ.Χ. η εξέλιξη αυτή είναι πολύ μικρή και τα σύνθετα υλικά του 19^{ου} αιώνα δεν απέχουν και πάρα πολύ από αυτά των αρχαίων Αιγυπτίων, Ελλήνων κ.λ.π., ούτε σε ποιότητα, ούτε σε μεθόδους κατασκευής. Η πραγματικά αλματώδης εξέλιξη των συνθέτων υλικών σημειώνεται τον 20^ο αιώνα και θα μπορούσαμε να πούμε τα τελευταία 30 χρόνια και είναι συνέπεια μιας άλλης σημαντικής εξέλιξης: της εξέλιξης της επιστήμης των γιγαντιαίων μορίων των πολυμερών.

1.1.2 Η εξέλιξη των πολυμερών

Το μόριο ενός πολυμερούς είναι ένα μόριο μεγάλου μεγέθους (μακρομόριο) που αποτελείται από επαναλαμβανόμενες δομικές μονάδες. Οι δομικές αυτές μονάδες είναι απλά χημικά παράγωγα τα οποία προέρχονται από τα αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά με άνοιγμα διπλού δεσμού.

Τα πολυμερή συνθέτουν το υλικό όλων των ζωντανών οργανισμών. Τα κύτταρα τόσο των ζωικών όσο και των φυτικών ιστών με το πρωτόπλασμα τους και τον πυρήνα τους, αποτελούνται από τέτοια μόρια. Ωστόσο η μοριακή δομή των πολυμερών και η επίδραση της δομής αυτής πάνω στις ιδιότητές τους ήταν άγνωστες ως πριν λίγες δεκαετίες.

Ευθύς μόλις ανακαλύφθηκε ότι τα πολυμερή είναι μακριές και με τάξη οργανωμένες αλυσίδες μικροτέρων μορίων, ο άνθρωπος κατόρθωσε να δημιουργήσει κατά βούληση, όχι μόνο πολυμερή πανομοιότυπα με τα ήδη γνωστά των ζώντων οργανισμών – πράγμα που άλλοτε ήταν εντελώς αδύνατο - αλλά επιπλέον και πρωτότυπα πολυμερή, που δεν απαντώνται στη φύση. Τα τελευταία αυτά είναι και τα πιο ενδιαφέροντα από τη σκοπιά των συνθέτων υλικών. Το αποτέλεσμα των επιτευγμάτων αυτών ήταν η δημιουργία πλήθους νέων βιομηχανιών, τεράστιας σπουδαιότητας σήμερα, που παράγουν μια τρομακτική ποικιλία από πλαστικές ύλες, συνθετικές υφαντικές ύλες και συνθετικό ελαστικό.

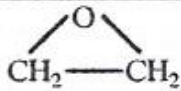
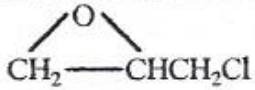
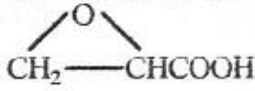
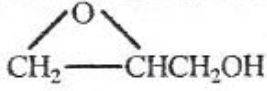
Ένα πολυμερές υλικό ικανοποιεί τον ορισμό του συνθέτου υλικού, που δόθηκε στην §1.1 σε μικροσκοπική κλίμακα γιατί αποτελείται από δομικές μονάδες προερχόμενες από αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά που συνήθως έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες από τις δικές του.

1.2 Εποξειδικές ρητίνες

1.2.1 Γενικά – ορισμός

Με τον όρο εποξειδική ρητίνη εννοούμε την ένωση η οποία σχηματίζεται από περισσότερα από ένα εποξείδια τα οποία συνδέονται μεταξύ τους υπό μορφή ευθείας ή δακτυλίου. Ως εποξείδιο ή εποξειδικό εννοούμε τη χημική ομάδα που αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου [O], ενωμένο με δύο άτομα άνθρακα [C] που είναι ήδη ενωμένα με άτομα άλλων στοιχείων.

Στο Σχήμα 1.1 φαίνονται οι συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων και η αντίστοιχη ονοματολογία τους. Η ονοματολογία αυτή προκύπτει από το όνομα της ομάδας που ενώνεται με το τρίτο άτομο άνθρακα του εποξειδίου.

	εποξειδίου του αιθυλενίου
	επιχλωροϋδρίνη
	γλυκιδικό οξύ
	γλυκιδολική ομάδα

Σχήμα 1.1

Οι εποξειδικές ρητίνες ανήκουν στην κατηγορία των θερμοσκληρυνόμενων ή θερμοσταθερών πολυμερών. Είναι προϊόντα ατελούς πολυμερισμού που θερμαινόμενα γίνονται μαλακά. Με την αύξηση όμως της θερμοκρασίας, ο πολυμερισμός καθίσταται πλήρης και σκληρύνονται οριστικά.

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν ισχυρή αντίσταση τριβής και επίσης πολύ καλή χημική αντίσταση.

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σύγκριση με των υγρών ρητινών, είναι η εύκολη επεξεργασία τους, η μηχανική αντοχή, η υψηλή χημική αντίσταση, το άριστο κολλώδες.

Ένας σημαντικός αριθμός ιδιοτήτων των εποξειδικών ρητινών είχε ως αποτέλεσμα το γρήγορο ρυθμό ανάπτυξης και την ευρεία σε έκταση χρήση τους. Έτσι αποτελούν σχεδόν πάντα το ένα από τα δύο ή περισσότερα προϊόντα που συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό σύνθετο υλικό. Σε πάρα πολλές δε περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και εντελώς μόνες τους.

1.2.2. Ιδιότητες υγρών εποξειδικών ρητινών

Οι υγρές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Χαμηλή υγροσκοπικότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση διαλύματος οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών. Είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες (low viscosity), καθώς και τα μίγματα τους με πρόσθετα (πλαστικοποιητές, σκληρυντές) με αποτέλεσμα τη εύκολη κατεργασία τους.
- Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής (ανάμιξη με κάποιο πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και συνθέσεων). κάτι που έχει σαν αποτέλεσμα την ποικιλία των εφαρμογών.
- Υψηλή δύναμη συγκόλλησης, στη σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών, ιδιότητα που είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί. . Υψηλές μηχανικές ιδιότητες και άριστη ηλεκτρική μόνωση. . Εύκολη επεξεργασία των ρητινών από 5°C έως 150°C, ενώ αυτό εξαρτάται και από την εκλογή του προσθέτου.
- Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας τους. Αυτή η μικρή συστολή είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα για τις εποξειδικές ρητίνες.
- Εξασφαλίζουν πρόσφυση σε ξηρές και υγρές επιφάνειες , ενώ τερεοποιούνται και κάτω από την επιφάνεια ύδατος. Η πρόσφυση εξασφαλίζεται πάνω σε γνωστά δομικά υλικά, όπως σκυρόδεμα, μέταλλα, μάρμαρα, πέτρα και ξύλο.
- Παρουσιάζουν καλή χημική αντίσταση, που εξαρτάται από το πρόσθετο που χρησιμοποιείται. Συνολικά οι Περισσότερες ρητίνες έχουν υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.
- Συνδυάζουν υψηλή αντοχή, δεν έχουν όγκο κατά την σκλήρυνση και δεν γίνονται εύθραυστες. Είναι απόλυτα μη διαβρωτικές και είναι κατάλληλες για χρήση σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή δομικό χάλυβα.

Μερικές από τις σημαντικότερες εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών είναι οι ακόλουθες:

1. Στην κατασκευή κτιρίων, αυτοκινητοδρόμων, γενικά σε κατασκευές που έχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντίσταση (βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος).
2. Στη βιομηχανία κατασκευής αεροσκαφών, αυτοκινήτων, πλοίων (βασικό συγκολλητικό σε δόκιμα μέρη της ατράκτου αεροσκάφους, μεταλλικών και πλαστικών τμημάτων σε βάρκες και αυτοκίνητα) λόγω της υψηλής και τέλειας στεγανότητας.
3. Στην κατασκευή τριχών για πινέλα
4. Ως φυλλώδεις ρητίνες (laminated retins) για την κατασκευή πλαισίων και τελειωμάτων αεροσκαφών και πυραύλων.
5. Ως διαλύματα επίστρωσης που έχουν ως βασικό συστατικό τη ρητίνη, που είναι χρήσιμα για τη συντήρηση και την Κατασκευή τελειωμάτων όπως τελειώματα θαλάσσιας υφής, τελειώματα λιθοδομής, τελειώματα αεροσκαφών. Ακόμη χρησιμοποιούνται για επαλείψεις κατασκευαστικού χάλυβα, επαλείψεις δεξαμενών, πτυσσόμενων αγωγών και πλακών σκυροδέματος.
6. Συστήματα εποξυ-ρητινών χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικά, επικαλυπτικά και σε μέσα ενσωμάτωσης ηλεκτρικών εξαρτημάτων.
7. Τυπικές εφαρμογές χυτών εποξυ-ρητινών αποτελούν οι κατασκευές ανθεκτικών σε χημικά αντλιών και σωλήνων, εργαλείων, μήτρων, καθώς και ηλεκτρομαγνητικών μονωτικών ειδών.

Επίσης υπάρχουν ρητίνες (wetscome) δύο συστατικών για επαλείψεις επιφανειών (υγρών και στερεών). Η ξηρή μεμβράνη που σχηματίζουν έχει πυρρανασχετικές ιδιότητες και έτσι δεν επιτρέπουν την εξάπλωση της φωτιάς.

- Οι ρητίνες αυτές προορίζονται για υγρομόνωση, για προστασία και διακόσμηση δαπέδων, τοίχων και ορόφων σε οικοδομικούς, βιομηχανικούς, αγροτικούς και άλλους χώρους.
- Εφαρμόζονται σε επιφάνειες σκυροδέματος, τσιμεντοκονιάματος, πέτρας, σοβάδων, τούβλων, γύψου, ασφάλτου κ.α.

- Για τη σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος Κυρίως σε υγρούς χώρους.
- Για την προστασία κτιρίων από τη διάβρωση και διείσδυση της υγρασίας.
- Για την υδρομόνωση πισινών και δεξαμενών.
- Για την υδρομόνωση υπόγειων χώρων και παταριών, δαπέδων κ.λ.π.

Μειονέκτημα των εποξυ-ρητινών αποτελεί το υψηλό τους κόστος. Το γεγονός αυτό αντισταθμίζεται όμως από τη μεγάλη χρησιμότητα τους και την ευρεία εφαρμογή που έχουν.

1.3 ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ-ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

1.3.1 Γενικά - Ορισμοί

Στην κατηγορία των σύνθετων υλικών ανήκουν τα πολυμερή και οι ρητίνες με εγκλείσματα. Ένα υλικό χαρακτηρίζεται ως σύνθετο εξεταζόμενο μακροσκοπικά όταν σχηματίζεται από τον συνδυασμό δύο ή περισσότερων υλικών και έχει ιδιότητες διαφορετικές από τα αρχικά υλικά που το δημιούργησαν. Συνήθως τα υλικά αυτά παρουσιάζουν βελτίωση των ιδιοτήτων των επιμέρους υλικών που το αποτελούν ή και εντελώς διαφορετικές από αυτά. Τις περισσότερες φορές τα αρχικά υλικά του συνθέτου αντιδρούν χημικά μεταξύ τους. Έτσι προκύπτει μια νέα φάση. Με τον όρο “φάση” εννοούμε κάθε ομογενές τμήμα του σύνθετου υλικού. Με τον όρο “ενδιάμεση φάση” στα σύνθετα υλικά εννοούμε την περιοχή μεταξύ των ορίων των φάσεων που εμφανίζει διαφορετικές φυσικές ιδιότητες από τα αρχικά υλικά. Τα σύνθετα υλικά μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούνται από μια συνεχή μήτρα με μια ή περισσότερες διάχυτες φάσεις (τα εγκλείσματα). Το απλούστερο σύνθετο υλικό αποτελείται από δύο υλικά από τα οποία το ένα είναι η μήτρα (matrix) και το δεύτερο το έγκλεισμα (filler).

1.3.2 Παράμετροι που ορίζουν ένα σύνθετο υλικό

Για την περιγραφή ενός σύνθετου υλικού θα πρέπει να αναφέρουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- τη συγκέντρωση και την κατανομή συγκέντρωσης των σωματιδίων

- το σχήμα των σωματιδίων
- το μέγεθος και την κατανομή μεγέθους των σωματιδίων
- το προσανατολισμό των σωματιδίων
- την τοπολογία των σωματιδίων

Η συμπεριφορά ενός σύνθετου υλικού εξαρτάται σημαντικά από περιεκτικότητα των αρχικών υλικών. Οι παράμετροι που πρέπει να ληφθούν για την περιγραφή ενός σύνθετου υλικού με μια ή περισσότερες διάχυτες μέσα σε μια συνεχή είναι:

- α) το είδος των υλικών των διάχυτων φάσεων (εγκλεισμάτων)
- β) η γεωμετρία της διάχυτης φάσης
- γ) το είδος του υλικού που χρησιμοποιείται ως μήτρα.

1.3.3 Κατάταξη και ταξινόμηση των συνθέτων υλικών

Τα σύνθετα υλικά μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με τη φύση μήτρας και των συστατικών πρόσμειξης των εγκλεισμάτων ως εξής:

1. Διάκριση ως προς την προέλευση της μήτρας:
 - σύνθετα με πλαστική μήτρα
 - σύνθετα με μεταλλική μήτρα.
2. Διάκριση ως προς τη μορφή του εγκλείσματος:
 - έγκλεισμα με μορφή ινών
 - έγκλεισμα με μορφή κόκκων έγκλεισμα με μορφή φύλλων

1.4 Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών.

1.4.1 Γενική περιγραφή

Τα εγκλείσματα είναι ανόργανα υλικά που χρησιμοποιούνται μέσα στη μήτρα των εποξειδικών ρητινών, έχουν πολύ μικρές διαστάσεις και μορφή πούδρας σκόνης με μέση διάμετρο 0,015μ. Όσο αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, τόσο αυξάνει το ιξώδες και η ρητίνη μετατρέπεται από υγρό σε μια πιο στερεή μορφή.

Τα εγκλείσματα ρυθμίζουν το ιξώδες των ρητινών, ελαττώνουν το ποσοστό συστολής και το συντελεστή θερμικής διαστολής, ενώ ταυτόχρονα χρωματίζουν το σύνθετο. Τα εγκλείσματα Πρέπει να είναι από χημικής απόψεως ουδέτερα ή ελαφρά βασικά και να μην αντιδρούν με τη ρητίνη ή το μέσο σκλήρυνσης.

Το σημαντικότερο όμως πλεονέκτημα των εγκλεισμάτων είναι ότι ελαττώνουν το κόστος του σύνθετου με παράλληλο συνδυασμό καλύτερων ποιοτικών ιδιοτήτων.

Για καλύτερα αποτελέσματα, τα εγκλείσματα πρέπει να θερμαίνονται για την απομάκρυνση της υγρασίας και του αέρα, που τυχόν απορροφήθηκε, και μετά να ενσωματώνονται στη ρητίνη. Επίσης είναι σκόπιμη η χρησιμοποίηση κάποιου ειδικού μηχανήματος για πλήρη ανάμειξη.

1.4.2 Ιδιότητες - Συμπεριφορά στον εφελκυσμό

Η παρουσία εγκλεισμάτων στις ρητίνες, γενικά αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας σε αυτές, ενώ αντίθετα η παραμόρφωση θραύσης ελαττώνεται κατ η μεταβολή αυτή είναι ανάλογη με την περιεκτικότητα της σε έγκλεισμα. Αυτό ισχύει για μετρήσεις σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

- Συστολή

Η συστολή κατά τη διάρκεια σκλήρυνσης της ρητίνης ελαττώνεται ανάλογα με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του σύνθετου υλικού. Αυτό οφείλεται στο ότι η ρητίνη αντικαθίσταται τοπικά από υλικό που δεν εμφανίζει μεταβολή στις διαστάσεις του, σε αντίθεση με την καθαρή ρητίνη.

- Αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια και σε διάβρωση

Μερικά εγκλείσματα όπως π.χ. το ανθρακικό ασβέστιο μειώνουν την αντοχή των ρητινών σε οξέα ενώ άλλα όπως το αλουμίνιο μειώνουν την αντοχή αυτή σε υγρασία, τα εγκλείσματα γενικά μειώνουν την ταχύτητα διάχυσης του νερού στα σύνθετα υλικά. Τα εγκλείσματα επίσης συμμετέχουν στην διάβρωση των πολυμερών στην επαφή τους με τα μέταλλα.

Ιόντα που υπάρχουν στη στερεοποιημένη μήτρα μπορούν να μεταφέρουν γαλβανικά ρεύματα και να ενισχύσουν τη διάβρωση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της αγωγιμότητας του σύνθετου, λόγω της ικανότητας των εγκλεισμάτων να απελευθερώνουν ιόντα.

- Ειδική πυκνότητα

Τα εγκλείσματα που στην πλειοψηφία τους έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από την ρητίνη, αυξάνουν την πυκνότητα των σύνθετων υλικών ανάλογα με την κατ' όγκο περιεκτικότητα τους. Έτσι η Παρουσία των εγκλεισμάτων μειώνει αισθητά το κόστος σύνθετου υλικού.

- Ιξώδες

Τα εγκλείσματα αυξάνουν το ιξώδες των εποξειδικών ρητινών. Η αύξηση αυτή είναι μεγαλύτερη με τνώδη και λιγότερο με κοκκώδη εγκλείσματα.

- Συντελεστής θερμικής διαστολής

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της στερεοποιημένης εποξειδικής ρητίνης ελαττώνεται με την αύξηση της κατ' όγκο συγκέντρωσης σε εγκλείσματα. Η ελάττωση δεν είναι γραμμική.

- Πρόσφυση

Τα εγκλείσματα ελαττώνουν το βαθμό συστολής και έτσι αυξάνουν την ικανότητα πρόσφυσης των εποξειδικών ρητινών αποτελεσματικά.

- Θερμική σταθερότητα

Ενισχύεται με την παρουσία εγκλεισμάτων. Με τον όρο θερμική σταθερότητα, εννοούμε την κατάσταση του σύνθετου όταν δεν παρατηρούνται αλλοιώσεις στη δομή του συναρτήσει της θερμοκρασίας.

- Θερμική αγωγιμότητα

Τα εγκλείσματα αυξάνουν τη θερμική αγωγιμότητα των ρητινών «ν και «ε μεγάλες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα αυξάνουν την παρουσία φυσαλίδων αέρα μέσα στο σύνθετο, που ως γνωστόν αποτελούν θερμομονωτικά σώματα. Περισσότερο αυξάνεται η θερμική αγωγιμότητα στην περίπτωση των μεταλλικών ινών, συγκριτικά με τα κοκκώδη μεταλλικά εγκλείσματα.

- Αντοχή στη συμπίεση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα αυξάνουν την αντοχή σε συμπίεση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν.

- Συμπεριφορά στην κρούση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση των σκληρυνόμενων εποξειδικών ρητινών σε βαθμό που ποικίλει ανάλογα με τον τύπο του εγκλείσματος, τον τύπο της ρητίνης και το είδος της δοκιμής κρούσης. Γενικά τόσο τα κοκκώδη όσο και τα ινώδη εγκλείσματα ενισχύουν την αντοχή των ρητινών σε κρούση.

- Συμπεριφορά στην κάμψη

Τα κοκκώδη εγκλείσματα γενικά ελαττώνουν την αντοχή στην κάμψη και αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη.

- Σκληρότητα επιφάνειας - Αντίσταση στην τριβή

Τα εγκλείσματα αυξάνουν την σκληρότητα της επιφάνειας του σύνθετου και την αντίσταση τριβής.

1.4.3 Ινώδη σύνθετα υλικά (Fiber composites)

Τα ινώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από ίνες ενός υλικού μέσα σε μήτρα ενός άλλου. Σε γενικές γραμμές έχουμε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς.

A. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το οπλισμένο σκυρόδεμα. Το σκυρόδεμα αποτελείται από χαλύβδινες ίνες και κόκκους άμμου και πέτρας δεμένους με ένα μίγμα τσιμέντου και νερού,

το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως η μίκα ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το ινώδες έγκλεισμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας αντίστοιχα και με τον τρόπο αυτό να προκύψει, ένα σύνθετο υλικό αυτού του είδους.

Β. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Πολλά υλικά αυτού του είδους έχουν κατασκευαστεί με σκοπό την αύξηση της θερμικής αγωγιμότητας, τη μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και τη μείωση της φθοράς της μήτρας. Παράδειγμα, τέτοιου υλικού είναι έγκλεισμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με έγκλεισμα από μέταλλο υπό μορφή φλούδας.

Γ. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας.

Τα υλικά αυτού του τύπου δεν είναι κράματα. Το μεταλλικό έγκλεισμα έχει μορφή ινών μέσα στη μήτρα και δεν είναι διαλυμένο μέσα σε αυτήν, όπως είναι στα κράματα.

Σαν παράδειγμα για αυτήν την κατηγορία μπορούμε να αναφέρουμε τις ίνες μόλυβδου εντός κραμάτων χαλκού και χάλυβα, που σκοπό έχουν τη βελτίωση της κατεργασιμότητας του κράματος στις εργαλειομηχανές.

Δ. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας.

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή ινώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα προκύπτοντα υλικά ονομάζονται κεραμομέταλλα. Τα κεραμομέταλλα μπορούν να είναι δύο ειδών ανάλογα με το έγκλεισμα. Το πρώτο είδος είναι κεραμομέταλλα με ίνες οξειδίου ενός μετάλλου πάνω σε μεταλλική μήτρα, τα οποία χρησιμοποιούνται στην κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το άλλο είδος είναι τα κεραμομέταλλα με ίνες καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα. Έτσι το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξείδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα και έτσι είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κλπ. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα.

1.5 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ ΑΠΟ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Το πεδίο εφαρμογής των συνθέτων υλικών εξαπλώνεται σε όλες σχεδόν τις εκφάνσεις της ανθρώπινης κοινωνίας. Όπου εμφανίζεται η ανάγκη για ένα υλικό το οποίο θα έχει ιδιότητες που δεν υπάρχουν ή δεν μπορούν να βρεθούν εύκολα σε κάποιο συμβατικό υλικό, αυτή η ανάγκη θα καλυφθεί από κάποιο σύνθετο υλικό.

Στον αθλητισμό :

Ρακέτες με συνθετικές ίνες που βοηθάνε τον αθλητή να πετύχει μεγαλύτερες ταχύτητες στα χτυπήματα του, ενώ απαιτούν από αυτόν λιγότερη ενέργεια κατά την διάρκεια του παιχνιδιού





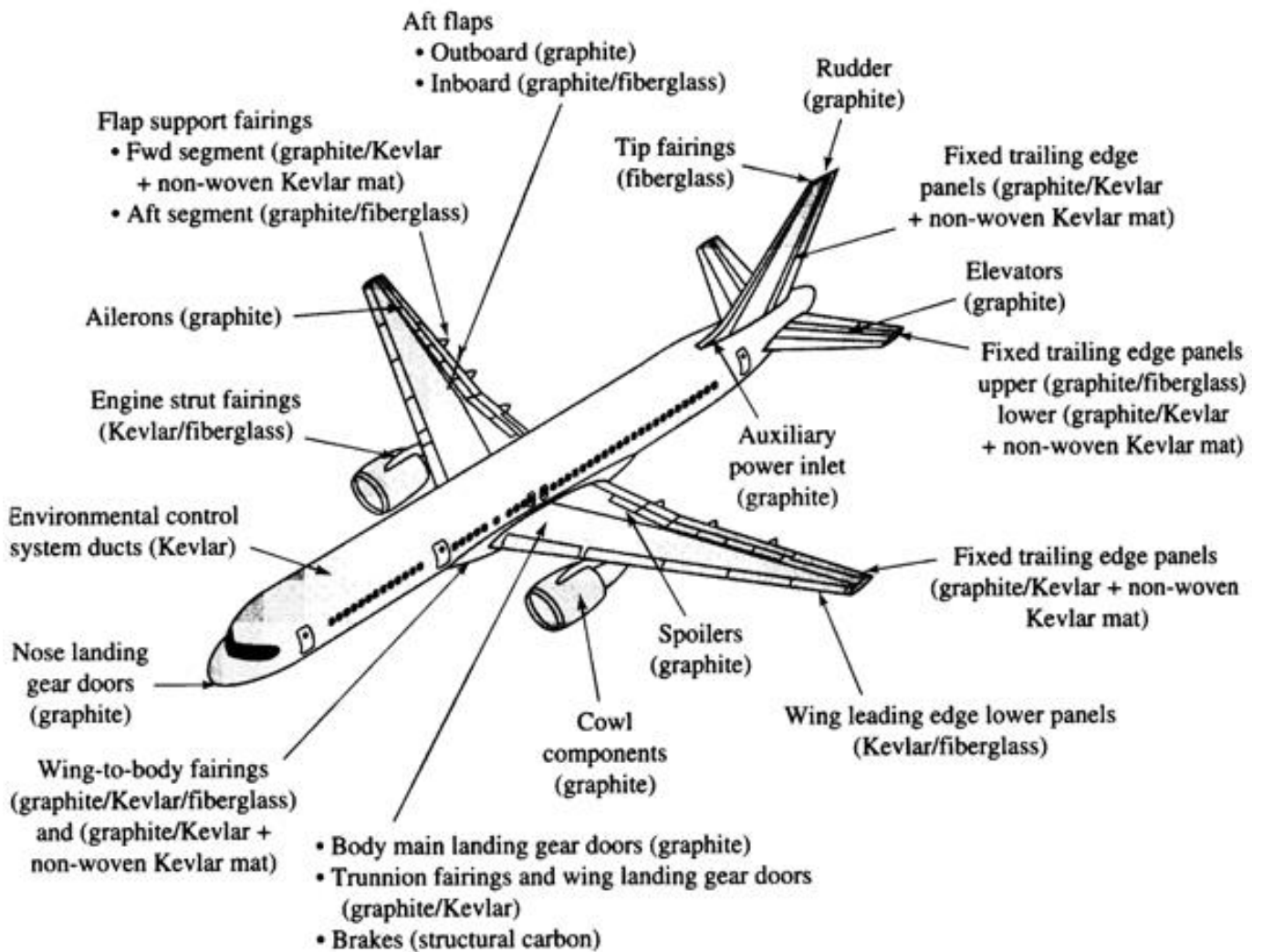
Αριστερά : Συνθετικό προσθετικό μέλος, το Cheetah, επιτρέπει σε αθλητές που τους λείπουν ένα ή και τα 2 άκρα να κάνουν χρόνους πολύ κοντά σε αυτούς των υγιών αρτιμελών αθλητών.

Δεξιά : Πολύ ελαφριά χιονοπέδιλα, εύκαμπτα ώστε να προσφέρουν καλύτερο έλεγχο στον αθλητή αλλά ταυτοχρόνως και πολύ ανθεκτικά.



Πανάλαφρα ποδήλατα. Και ο σκελετός αλλά και οι ρόδες είναι από σύνθετο υλικό

Στην αεροναυπηγική :



Στην ναυπηγική :



Σκαριά φτιαγμένα από σύνθετα υλικά, πανάλαφρα, που παρουσιάζουν μικρότερη αντίσταση στο νερό για την επίτευξη υψηλότερων ταχυτήτων.



Στην αυτοκινητοβιομηχανία :



Στην F1 τα αμαξώματα των αυτοκινήτων κατασκευάζονται εξ ολοκλήρου από ανθρακονήματα



Ανθρακοκεραμικά δισκόφρενα , ιδιαίτερως ανθεκτικά στις πολύ υψηλές θερμοκρασίες χρησιμοποιούν πολλές κατασκευάστριες εταιρείες γρήγορων αυτοκινήτων.



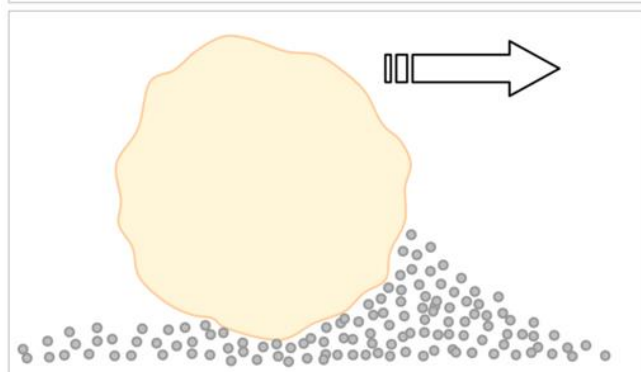
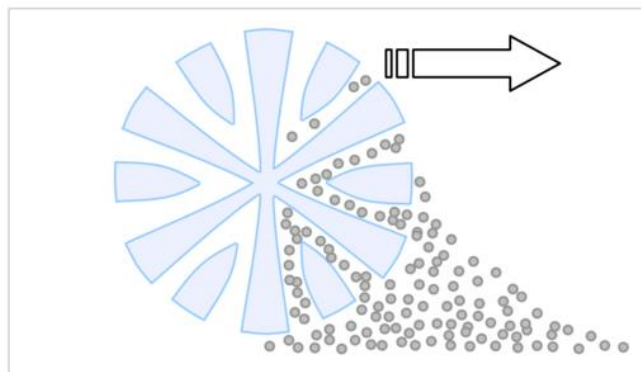
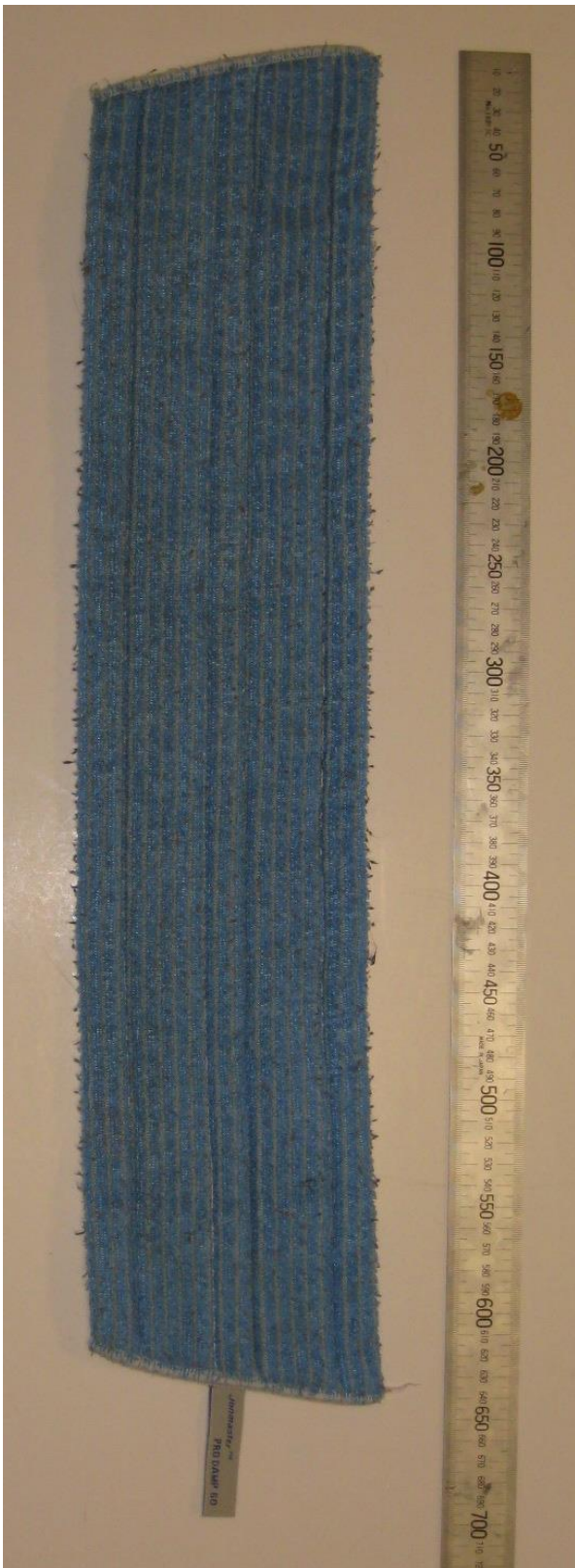
Στην στρατιωτική βιομηχανία :



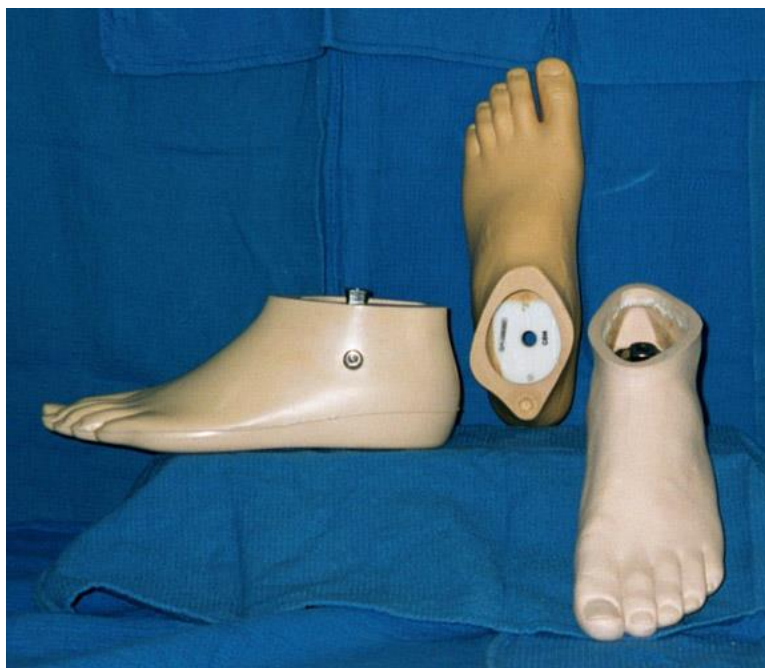
Αλεξίσφαιρα γιλέκα και κράνη (Kevlar)

Σε καθημερινές εφαρμογές :

Σύνθετα υλικά χρησιμοποιούνται για την δημιουργία πιο αποτελεσματικών συσκευών καθαριότητας



Στην ιατρική – προσθετική μελών :



Προσθετικά μέλη που βελτιώνουν την καθημερινότητα ατόμων με αναπηρία

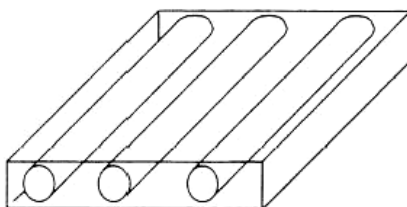


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΤΑΣΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ AIRY

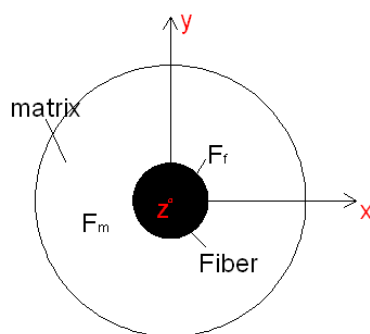
2.1.1 Διάμηκες μέτρο ελαστικότητας.

Ας θεωρήσουμε το σύνθετο υλικό συνεχών ινών της παρακάτω εικόνας



Εικόνα 2.1.1 Λεπτό στρώμα σύνθετου υλικού.

Αν πάρουμε μια εγκάρσια τομή στη διεύθυνση των ινών θα έχουμε το στοιχείο της εικόνας 2.1.2



Εικόνα 2.1.2. Εγκάρσια τομή.

Χρησιμοποιούμε την τασική συνάρτηση του Airy η οποία ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας σε κυλινδρικές συντεταγμένες [1],[2]:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (2.1.1)$$

Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής Euler με λύση την ακόλουθη:

$$\Phi = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 \quad (2.1.2)$$

Κάθε μία από τις δύο φάσεις του σύνθετου χαρακτηρίζεται από μία αντίστοιχη τασική συνάρτηση. Επομένως, οι εκφράσεις των τάσεων για την κάθε φάση είναι οι εξής:

$$\sigma_{r,f} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi_f}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \quad (2.1.3)$$

$$\sigma_{\theta,f} = \frac{d^2 \Phi_f}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C \quad (2.1.4)$$

$$\sigma_{r,m} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi_m}{dr} = \frac{F}{r^2} + J(1 + 2 \ln r) + 2H \quad (2.1.5)$$

$$\sigma_{\theta,m} = \frac{d^2 \Phi_m}{dr^2} = -\frac{F}{r^2} + J(3 + 2 \ln r) + 2H \quad (2.1.6)$$

Για να αποφύγουμε άπειρες τάσεις στο σημείο $r=0$ οι σταθερές A και B παίρνουν την τιμή $A=B=0$. Συνεπώς, οι σχέσεις (2.1.3), (2.1.4) γίνονται:

$$\sigma_{r,f} = \sigma_{\theta,f} = 2C$$

Για τη μήτρα δύναται να θεωρηθεί ότι $J=0$

Επομένως:

$$\sigma_{r,m} = \frac{F}{r^2} + 2H \quad \text{και} \quad \sigma_{\theta,m} = -\frac{F}{r^2} + 2H$$

Εφαρμόζουμε μία εφελκυστική τάση σ_c , η οποία επιδρά κατά τη διεύθυνση του z άξονα. Η ισορροπία των δυνάμεων στη διεύθυνση της ασκούμενης τάσης δίνει την ακόλουθη εξίσωση:

$$\sigma_f A_f + \sigma_m A_m = \sigma_c A_c \quad (2.1.7)$$

με

$$\sigma_{z,f} = \sigma_f, \sigma_{z,m} = \sigma_m$$

Όπου:

A_f, A_m, A_c η επιφάνεια της ίνας, της μήτρας και η συνολική επιφάνεια αντίστοιχα.

Εάν θεωρήσουμε ότι $\sigma_f = s_1, \sigma_m = s_2, \sigma_c = s$ και διαιρέσουμε με A_c η σχέση (2.1.7) γίνεται:

$$s_1 \cdot U_f + s_2 \cdot U_m = s \quad (2.1.8)$$

Όπου:

U_f, U_m η κ.ο περιεκτικότητα (%) των ινών και μήτρας αντίστοιχα, με $U_f + U_m = 1$

Από τις σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων βρίσκουμε ότι:

$$\varepsilon_{r,f} = \frac{1}{E_f} [2C - \mu_f (2C + s_1)] \quad (2.1.9)$$

$$\varepsilon_{r,m} = \frac{1}{E_m} \left[\frac{F}{r^2} (1 + \mu_m) + 2H (1 - \mu_m) - \mu_m s_2 \right] \quad (2.1.10)$$

$$\varepsilon_{\theta,f} = \frac{1}{E_f} [2C - \mu_f (2C + s_1)] \quad (2.1.11)$$

$$\varepsilon_{\theta,m} = \frac{1}{E_m} \left[\frac{F}{r^2} (1 + \mu_m) + 2H (1 - \mu_m) - \mu_m s_2 \right] \quad (2.1.12)$$

$$\varepsilon_{z,f} = \frac{1}{E_f} [s_1 - 4\mu_f C] \quad (2.1.13)$$

$$\varepsilon_{z,m} = \frac{1}{E_m} [s_2 - 4\mu_m H] \quad (2.1.14)$$

Οι ακτινικές μετατοπίσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$u_{r,f} = r\varepsilon_{\theta,f} \quad \text{και} \quad u_{r,m} = r\varepsilon_{\theta,m}$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$r = r_f : \sigma_{r,f} = \sigma_{r,m} \rightarrow 2C = \frac{F}{r_f^2} + 2H \quad (2.1.15)$$

$$r = r_m : \sigma_{r,m} = 0 \rightarrow \frac{F}{r_f^2} + 2H = 0 \quad (2.1.16)$$

$$r = r_f : u_{r,f} = u_{r,m} \rightarrow E_m [2C(1 - \mu_f) - \mu_f s_1] = E_f \left[-\frac{F}{r_f^2} (1 + \mu_m) + 2H(1 - \mu_m) - \mu_m s_2 \right] \quad (2.1.17)$$

Οι αξονικές παραμορφώσεις στη μήτρα και στην ίνα είναι ίσες:

$$\varepsilon_{z,f} = \varepsilon_{z,m} \rightarrow E_m [s_1 - 4C\mu_f] = E_f [s_2 - 4H\mu_m] \quad (2.1.18)$$

Η επίλυση των εξισώσεων (2.1.17) και (2.1.18) μας δίνει για το s_1 και το s_2 :

$$s_1 = \frac{sE_f + 4[CE_m\mu_f - HE_f\mu_m]U_m}{E_fU_f + E_mU_m} \quad (2.1.19)$$

$$s_2 = \frac{sE_m - 4[CE_m\mu_f - HE_f\mu_m]U_f}{E_fU_f + E_mU_m} \quad (2.1.20)$$

Με αντικατάσταση των τιμών αυτών στην εξίσωση (2.1.18) έχουμε:

$$2C \left[(1 - \mu_f)(E_f U_f + E_m U_m) - 2\mu_f (E_m \mu_f U_m + E_f \mu_m U_f) \right] E_m = -\frac{F}{r_f^2} (1 + \mu_m)(E_f U_f + E_m U_m) E_f + 2H \left[(1 - \mu_m)(E_f U_f + E_m U_m) - 2\mu_m (E_f \mu_m U_f + E_m \mu_f U_m) \right] E_f + sW \quad (2.1.21)$$

Από την επίλυση των εξισώσεων (2.1.15) , (2.1.16) και (2.1.21) υπολογίζουμε τις τιμές των αγνώστων σταθερών F , H , C

$$F = \frac{W r_f^2}{(K + L) + (P - K) U_f} s \quad (2.1.22)$$

$$2H = -\frac{W U_f}{(K + L) + (P - K) U_f} s \quad (2.1.23)$$

$$2C = \frac{W(1 - U_f)}{(K + L) + (P - K) U_f} s \quad (2.1.24)$$

Με

$$K = \left[(1 - \mu_f)(E_f U_f + E_m U_m) - 2\mu_f (E_m \mu_f U_m + E_f \mu_m U_f) \right] E_m \quad (2.1.25)$$

$$L = (1 + \mu_m)(E_f U_f + E_m U_m) E_f \quad (2.1.26)$$

$$P = \left[(1 - \mu_m)(E_f U_f + E_m U_m) - 2\mu_m (E_f \mu_m U_f + E_m \mu_f U_m) \right] E_f \quad (2.1.27)$$

$$W = (\mu_f - \mu_m) E_f E_m \quad (2.1.28)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των σταθερών στις εξισώσεις (2.1.19) , (2.1.20) έχουμε για το s_1 και το s_2 :

$$s_1 = \left\{ \frac{E_f}{(E_f U_f + E_m U_m)} + \frac{2W U_m \left[(1 - U_f) E_m \mu_f + U_f E_f \mu_m \right]}{(E_f U_f + E_m U_m) \left[(K + L) + (P - K) U_f \right]} \right\} s = \eta \cdot s \quad (2.1.29)$$

$$s_2 = \left\{ \frac{E_m}{(E_f U_f + E_m U_m)} - \frac{2WU_f [(1-U_f)E_m \mu_f + U_f E_f \mu_m]}{(E_f U_f + E_m U_m)[(K+L)+(P-K)U_f]} \right\} s = \xi \cdot s \quad (2.1.30)$$

Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού μπορεί να υπολογιστεί τώρα ως εξής: η ενέργεια παραμόρφωσης του συστήματος πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας παραμόρφωσης στην ίνα και τη μήτρα.

Επομένως :

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{V_c} \frac{s^2}{E_L} dV_c = \frac{1}{2} \int_{V_f} (\sigma_{r,f} \varepsilon_{r,f} + \sigma_{\theta,f} \varepsilon_{\theta,f} + \sigma_{z,f} \varepsilon_{z,f}) \cdot dV_f + \frac{1}{2} \cdot \int_{V_m} (\sigma_{r,m} \varepsilon_{r,m} + \sigma_{\theta,m} \varepsilon_{\theta,m} + \sigma_{z,m} \varepsilon_{z,m}) \cdot dV_m \quad (2.1.31)$$

Εάν αντικαταστήσουμε τις τιμές των τάσεων και των παραμορφώσεων για την ίνα και τη μήτρα, καταλήγουμε στη σχέση που μας δίνει το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας:

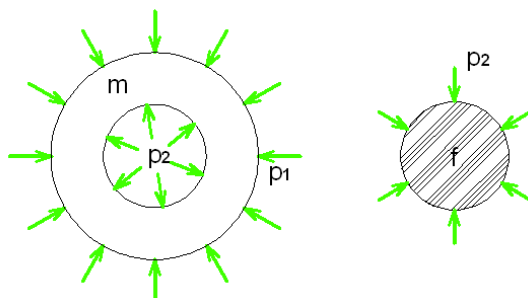
$$\frac{1}{E_L} = \frac{1}{E_f} \left[8C^2 (1 - \mu_f) - 8C \mu_f \eta + \eta^2 \right] U_f + \frac{1}{E_m} \left\{ 2F^2 \cdot U_f + 8H^2 (1 - \mu_m) - 8H \mu_m \xi + \xi^2 \right\} (1 - U_f) \quad (2.1.32)$$

Εάν στον στοιχειώδη αντιπροσωπευτικό όγκο (RVE) εφαρμοστεί αντί για τάση s παραμόρφωση ε , η οποία είναι ίδια για ίνα και μήτρα δηλαδή $\varepsilon_L = \varepsilon_f = \varepsilon_m$, τότε με την ανάλογη διαδικασία προκύπτει η κάτωθι σχέση, η οποία είναι μια ακριβέστερη μορφή του νόμου των φάσεων και η οποία χρησιμοποιείται κατά το πλείστον για την εκτίμηση του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας.

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m + \frac{2(\mu_f - \mu_m)^2 E_m E_f U_m U_f}{E_m U_m (1 - \mu_f - 2\mu_f^2) + E_f [(1 - \mu_m - 2\mu_m^2)U_f + (1 + \mu_m)]} \quad (2.1.33)$$

2.1.2 Εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας

Ας θεωρήσουμε μία τομή του σύνθετου όπως φαίνεται στην εικόνα 2.1.3. Έστω ότι ασκούμε πίεση p_1 στην εξωτερική επιφάνεια, ενώ p_2 είναι η πίεση που οφείλεται στην αλληλεπίδραση της ίνας και της μήτρας.



Εικόνα 2.1.3

Οι οριακές συνθήκες γι' αυτήν την περίπτωση είναι οι εξής:

$$r = r_f : \sigma_{r,f} = \sigma_{r,m} = -p_1 \rightarrow \frac{F}{r_f^2} + 2H = -p_1 \quad (2.1.34)$$

$$r = r_m : \sigma_{r,m} = \sigma_{r,m} = -p_2 \rightarrow \frac{F}{r_m^2} + 2H = -p_2 \quad (2.1.35)$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, προκύπτουν οι σταθερές

$$F = \frac{(p_2 - p_1)(r_f r_m)^2}{r_m^2 - r_f^2} \quad (2.1.36)$$

και

$$2H = \frac{(p_1 r_f^2 - p_2 r_m^2)}{r_m^2 - r_f^2} \quad (2.1.37)$$

Επίσης, υποθέτουμε στη συγκεκριμένη ανάλυση ότι οι αξονικές παραμορφώσεις είναι μηδενικές. Επομένως:

$$\varepsilon_{z,f} = 0 \rightarrow \sigma_{z,f} = \mu_f (\sigma_{r,f} + \sigma_{\theta,f})$$

$$\varepsilon_{z,m} = 0 \rightarrow \sigma_{z,m} = \mu_m (\sigma_{r,m} + \sigma_{\theta,m})$$

Από τις σχέσεις τάσεων -παραμορφώσεων έχουμε:

$$\varepsilon_{\theta,f} = \varepsilon_{r,f} = \frac{2C(1-\mu_f-2\mu_f^2)}{E_f} \quad (2.1.38)$$

$$\varepsilon_{\theta,m} = \frac{1}{E_m} \left[-\frac{F}{r^2}(1+\mu_m) + 2H(1-\mu_m-2\mu_m^2) \right] \quad (2.1.39)$$

$$\varepsilon_{r,m} = \frac{1}{E_m} \left[\frac{F}{r^2}(1+\mu_m) + 2H(1-\mu_m-2\mu_m^2) \right] \quad (2.1.40)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$u_{r,f} = r\varepsilon_{\theta,f}, \quad u_{r,m} = r\varepsilon_{\theta,m}$$

Για $r = r_f$ είναι $u_{r,f} = u_{r,m}$.

Επομένως:

$$2C(1-\mu_f-2\mu_f^2)E_m = E_f \left[-\frac{F}{r_f^2}(1+\mu_m) + 2H(1-\mu_m-2\mu_m^2) \right] \quad (2.1.41)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των F και $2H$ στην εξίσωση (2.1.41) προκύπτει μία σχέση μεταξύ p_1 , p_2 .

Επομένως, έχουμε:

$$p_1 = \lambda p_2$$

Με:

$$\lambda = \frac{2(1+\mu_m)(1-\mu_m)E_f}{(1+\mu_m)\left[(1-2\mu_m)U_f+1\right]E_f + (1-\mu_f-2\mu_f^2)(1-U_f)E_m} \quad (2.1.42)$$

Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας υπολογίζεται από την εξίσωση (2.1.31), εάν αντικαταστήσουμε το δεξιό μέρος με $\frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{p_2^2}{K_c} dV_c$, όπου p_2 είναι η πίεση που επιβάλλουμε και K_c το μέτρο διόγκωσης του σύνθετου.

Το τελευταίο υπολογίζεται από τη σχέση

$$K_c = \frac{1}{2 \left[\frac{1 - \mu_{TT}}{E_T} - \frac{2\mu_{LT}^2}{E_L} \right]}$$

Αφού

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_T} (\sigma_x - \mu_{TT} \sigma_y) - \left(\frac{\mu_{LT}}{E_L} \right) \sigma_z$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_T} (\sigma_y - \mu_{TT} \sigma_x) - \left(\frac{\mu_{LT}}{E_L} \right) \sigma_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_L} \left[\sigma_z - \mu_{LT} (\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

$$\sigma_x = \sigma_y = -p_2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_z = 0$$

Στις παραπάνω σχέσεις E_T είναι το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας και μ_{LT} , μ_{TT} είναι ο διαμήκης και εγκάρσιος λόγος Poisson του σύνθετου αντίστοιχα. Επομένως, αν αντικαταστήσουμε τις παραμορφώσεις, τις τάσεις, τις άγνωστες σταθερές και τη σταθερά λ στην εξίσωση (2.1.31), φτάνουμε στην τελική έκφραση του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{U_f (1 - \mu_f - 2\mu_f^2) \lambda^2}{E_f (1 - \mu_{TT})} + \frac{(1 - \mu_m - 2\mu_m^2) (\lambda U_f - 1)^2}{E_m (1 - U_f)^2 (1 - \mu_{TT})} + \frac{U_f^2 (1 + \mu_m) (1 - \lambda)^2}{E_m (1 - U_f)^2 (1 - \mu_{TT})} + \frac{2\mu_{LT}^2}{E_L (1 - \mu_{TT})} \quad (2.1.43)$$

2.1.3 Διαμήκης λόγος Poisson

Ισχύει ότι:

$$\mu_{LT} = -\frac{d_r/r_m}{\varepsilon_z}$$

Όπου d_r η ακτινική μετατόπιση στην κυλινδρική επιφάνεια του σύνθετου υλικού και ε_z η αξονική παραμόρφωση.

Επομένως:

$$\mu_{LT} = -\frac{(u_{r,m})_{r=r_m}/r_m}{\varepsilon_{z,m}} = \frac{[-F/r_m^2(1+\mu_m) + 2H(1-\mu_m) - \mu_m s_2]}{s_2 - 4H\mu_m} \quad (2.1.44)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.1.22), (2.1.23), (2.1.30), στην εξίσωση (2.1.44), καταλήγουμε στη σχέση:

$$\mu_{LT} = \frac{2WU_f(E_f U_f + E_m U_m) + \left\{ E_m [(K+L) + (P-K)U_f] - 2WU_f [(1-U_f)E_m \mu_f + U_f E_f \mu_m] \right\} \mu_m}{E_m [(K+L) + (P-K)U_f] - 2WU_f [(1-U_f)E_m \mu_f + U_f E_f \mu_m] + 2WU_f (E_f U_f + E_m U_m) \mu_m} \quad (2.1.45)$$

Επίσης εφαρμόζοντας την δεύτερη διαδικασία όπου επιβάλλεται κοινή παραμόρφωση ε στο σύνθετο, έχω:

$$\mu_{LT} = \mu_m - \frac{2(\mu_m - \mu_f)(1 - \mu_m^2)E_f U_f}{E_m(1 - U_f)(1 - \mu_f - 2\mu_f^2) + [(1 - \mu_m - 2\mu_m^2)U_f + (1 + \mu_m)]E_f} \quad (2.1.46)$$

2.1.4 Εγκάρσιος λόγος Poisson

Υποθέτουμε ότι ο λόγος Poisson μ_{TT} δίνεται από τη σχέση των **Halpin-Tsai** [3]:

$$\mu_{TT} = \mu_m \frac{1 + \xi \cdot \eta U_f}{1 - \eta U_f} \quad (2.1.47)$$

$$\text{Όπου : } \eta = \frac{\mu_f - \mu_m}{\mu_f + \xi \mu_m} \quad \text{και } \xi = 1 \dots 2 \quad (2.1.48)$$

Ο εγκάρσιος λόγος Poisson δύναται να υπολογισθεί και με τον αντίστροφο νόμο των φάσεων:

$$\frac{1}{\mu_{TT}} = \frac{U_f}{\mu_f} + \frac{U_m}{\mu_m} \quad (2.1.49)$$

2.1.5 Μέτρο διάτμησης

Για να προσδιορίσουμε το μέτρο διάτμησης μπορούμε να υποθέσουμε ότι δίνεται από τη σχέση που προτάθηκε από τους **Halpin-Tsai** ή την εξίσωση των **Hashin-Rosen**.

- Η εξίσωση των **Halpin-Tsai** [3]

Αυτή η εξίσωση δίνεται από τη σχέση

$$G_{LT} = G_m \frac{1 + \xi \cdot \eta U_f}{1 - \eta U_f}, \quad \text{όπου:} \quad \eta = \frac{G_f - G_m}{G_f + \xi G_m} \quad (2.1.50), (2.1.51)$$

και ξ είναι μία σταθερά, η οποία εξαρτάται από την επί τις εκατό κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών και υπολογίζεται από την εμπειρική σχέση:

$$\xi = 1 + 40 \cdot U_f^{10}$$

- Η εξίσωση των **Hashin-Rosen** [4]

Οι **Hashin** και **Rosen** έδωσαν την ακόλουθη έκφραση για τον υπολογισμό του μέτρου διάτμησης:

$$G_{LT} = G_m \frac{[(G_f + G_m) + (G_f - G_m)U_f]}{[(G_f + G_m) - (G_f - G_m)U_f]} \quad (2.1.52)$$

2.1.6 Ελαστικές σταθερές συναρτήσει της γωνίας θ των ινών [5]

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta}{E_T} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\mu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (2.1.53)$$

$$\frac{1}{G_\theta} = 4 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{2\mu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \quad (2.1.54)$$

$$\frac{\mu_\theta}{E_\theta} = - \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\mu_{LT}}{E_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \quad (2.1.55)$$

2.2 Γραφικές Παραστάσεις στατικών ελαστικών σταθερών

Εφαρμογή του μοντέλου και των θεωρητικών σχέσεων

Η εφαρμογή του μοντέλου και των θεωρητικών σχέσεων έγινε για ένα ινώδες σύνθετο υλικό αποτελούμενο από εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με ίνες γυαλιού.

Συγκεκριμένα το υλικό το οποίο χρησιμοποιήθηκε στα πειράματα είναι ένα σύνθετο υλικό (Permaglass XE5/1, Permali Ltd U.K.), το οποίο αποτελείται από μήτρα εποξειδικής ρητίνης (diglycidyl ether of bisphenol A), με σκληρυντή αμίνης (Araldite MY 750/HT 972, Ciba-Geigy U.K.) και με συνεχείς ίνες υάλου (glass fibres) διαμέτρου $d = 1,2 \times 10^{-5}m$ με χαρακτηριστικά στοιχεία όπως δίνονται από τον προμηθευτή. Από μετρήσεις που έγιναν, η περιεκτικότητα σε ίνες υάλου βρέθηκε περίπου 80% κατά βάρος και 65% κατ' όγκο και 60% κατά βάρος και 40% κατ' όγκο.

Ο προσδιορισμός της περιεκτικότητας των ινών έγινε με την μέθοδο της καύσεως (burn off test) σύμφωνα με την προδιαγραφή BS 2782. Ένα ορθογωνικό τεμάχιο κόπτεται από κάθε δοκίμιο και αφού ζυγισθεί τοποθετείται σε κλίβανο σε θερμοκρασία $620 \pm 20^\circ C$ για να καεί η ρητίνη. Από το βάρος του υπολείμματος το οποίο θεωρείται ότι είναι ίνες υαλού υπολογίζεται η κατά βάρος περιεκτικότητα. Ο προσδιορισμός της κατ' όγκο περιεκτικότητας γίνεται από την σχέση.

$$U_f = \frac{1}{1 + \frac{M_m \rho_f}{M_f \rho_m}}$$

Όπου,

M_f = περιεκτικότητα κατά βάρος των ινών

M_m = περιεκτικότητα κατά βάρος της ρητίνης

ρ_f = πυκνότητα ινών

ρ_m = πυκνότητα ρητίνης

Οι μετρήσεις έδωσαν κατά βάρος περιεκτικότητα του υλικού σε ίνες υάλου $(79,6 \pm 0,28)\%$, $(59,6 \pm 0,28)\%$ με δεδομένο τις πυκνότητες $\rho_f = 2,55 gr/cm^3$ και $\rho_m = 1,20 gr/cm^3$, οι οποίες δίνονταν από τους προμηθευτές του υλικού.

Έγιναν πειράματα για τον προσδιορισμό της διαμήκους, της εγκάρσιας και της υπό γωνία ως προς τις ίνες αντοχής του σύνθετου υλικού και για τον προσδιορισμό του διαμήκους, του εγκάρσιου και του υπό γωνία ως προς τις ίνες μέτρου ελαστικότητας και λόγου Poisson του σύνθετου υλικού καθώς επίσης και για τον προσδιορισμό του μέτρου διατμήσεως.

Οι τιμές των ελαστικών σταθερών των παραπάνω υλικών, παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα Α.

<u>Υλικό</u>	<u>Μέτρο Ελαστικότητας</u> <u>E(GPa)</u>	<u>Λόγος Poisson</u> <u>μ</u>	<u>Μέτρο Διάτμησης</u> <u>G(GPa)</u>
Εποξειδική Ρητίνη	3,75	0,35	1,39
Γυαλί	72	0,20	30

Πίνακας Α [6]

2.2.1 Πίνακες

ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

T=30°C, f=110 Hz

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E₁ (GPa)

U _f κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%
ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ	3,75	10,38	17,31	24,3	31,35	38,45	45,6	49,13	52,81
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	3,75	10,35	17,20	24,05	30,90	37,75	44,60	48,03	51,45
EKVALL	4,64	11,37	18,11	24,85	31,59	38,32	45,05	48,42	51,79
ΔΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ	3,75	10,59	17,42	24,25	31,08	37,90	44,73	48,14	51,55

Πίνακας 1

ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

T=30°C, f=110 Hz

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ E_L (GPa)									
U _f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	3,75	10,36	17,22	26,07	30,92	37,77	44,62	48,13	51,47
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	3,70	10,41	17,38	–	–	38,11	45,12	48,62	52,15
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ III	–	–	–	–	–	–	48,14	52,15	56,16

Πίνακας Π1 [7,8,9]

ΛΟΓΟΣ POISSON μ_{LT}

U _f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%
ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ	0,350	0,335	0,320	0,304	0,289	0,273	0,258	0,250	0,242
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	0,350	0,335	0,320	0,305	0,290	0,275	0,260	0,253	0,245
ROSEN	0,350	0,331	0,314	0,297	0,281	0,266	0,252	0,245	0,238
ΔΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ	0,35	0,332	0,314	0,297	0,281	0,266	0,252	0,245	0,238

Πίνακας 2

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ μ_{LT}									
U _f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	0,350	0,332	0,315	0,300	0,286	0,273	0,262	0,256	0,251
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	0,350	0,330	0,320	–	–	0,280	0,260	–	–

Πίνακας Π2 [8,10]

ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

T=30°C, f=110 Hz

ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T (GPa)

U _f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%
ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ	3,75	5,32	6,56	7,88	9,48	11,60	14,67	17,15	19,64
PAUL-LOWER BOUND	3,75	3,87	4,32	4,90	5,65	6,68	8,16	9,32	10,48
WHITNEY-RILEY	3,75	5,13	6,08	6,98	8,02	9,31	11,04	12,28	13,53
EKVALL	4,64	5,12	5,70	6,45	7,41	8,74	10,57	12,00	13,44
HALPIN-TSAI	3,75	4,50	5,70	7,19	9,08	11,54	14,88	17,29	19,71
TSAI-HAHN	3,75	4,23	5,13	6,28	7,80	9,93	13,15	15,48	18,65
ΔΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ	3,75	5,67	6,98	8,32	9,89	11,88	14,58	16,34	18,52

Πίνακας 3

<u>ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ E_T (GPa)</u>								
U _f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	20%	30%	40%	50%	55%	60%	65%	70%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	4,40	7,52	–	11,60	–	15,00	–	19,60
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	–	–	–	–	15,80	–	17,60	–
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ III	–	–	–	–	–	15,40	–	–

Πίνακας Π3 [8,11,12]

ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

T=30°C, f=110 Hz

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G_{LT} (GPa)

U _f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%
ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ	1,39	1,57	1,90	2,33	2,91	3,74	4,99	5,89	7,12
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	1,39	4,17	7,04	9,91	12,78	15,65	18,52	19,96	21,39
ΤΣΑΙ-ΗΑΗΝ	1,39	1,56	1,90	2,33	2,90	3,70	4,93	5,82	7,05
ΕΚΒΑΛΛ-ΓΡΕΣΖΤΣΖΚ	1,39	1,44	1,61	1,82	2,11	2,49	3,05	3,44	3,94
ΗΑΣΗΝ-ΡΟΣΕΝ	1,39	1,56	1,88	2,29	2,81	3,50	4,48	5,14	5,96
ΗΑΣΗΝ	1,39	2,87	4,61	6,54	8,71	11,14	13,90	15,42	17,06
ΔΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ	1,39	1,67	2,01	2,43	2,98	3,71	4,74	5,43	6,29

Πίνακας 4

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ G_{LT} (GPa)				
U _f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	55%	60%	65%	70%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ Ι	6,41	6,88	7,50	–
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΙ	–	6,09	6,79	7,97

Πίνακας Π4 [13,14]

ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

T=30°C, f=110 Hz

ΛΟΓΟΣ POISSON μ_{TT}

U_f	μ_{TT}
0	0,35
0,1	0,325581
0,2	0,304348
0,3	0,285714
0,4	0,269231
0,5	0,254545
0,6	0,241379
0,65	0,235294
0,7	0,229508

Πίνακας 5

ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ E_θ

	U_f									Πειραματικά για $U_f=0,65$
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	
α/α (°)	E_θ (GPa)	E_θ (GPa)	E_θ (GPa)	E_θ (GPa)	E_θ (GPa)	E_θ (GPa)	E_θ (GPa)	E_θ (GPa)	E_θ (GPa)	E_θ (GPa)
0	3,75	10,58566	17,41848	24,24866	31,07639	37,90185	44,72519	48,13611	51,54655	49,13
15	3,75	8,576795	12,58031	16,50692	20,70938	25,45118	31,0092	34,2009	37,74101	37,273
30	3,75	6,065612	7,820972	9,695801	11,92107	14,71925	18,41787	20,76849	23,59306	23,735
45	3,75	4,950887	6,036188	7,302599	8,880148	10,93857	13,7654	15,62247	17,91736	17,921
60	3,75	4,858426	5,853819	7,010667	8,449105	10,32759	12,91802	14,62932	16,75625	16,363
75	3,75	5,332035	6,497269	7,751893	9,259928	11,19451	13,83377	15,56738	17,71472	16,749
90	3,75	5,669072	6,976182	8,316416	9,889235	11,88163	14,57915	16,34347	18,52274	17,22

Πίνακας 6

ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

T=30°C, f=110 Hz

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ G_{θ}

	U_f									Πειραματικά για $U_f=0,65$
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	
α/α (°)	G_{θ} (GPa)	G_{θ} (GPa)	G_{θ} (GPa)	G_{θ} (GPa)	G_{θ} (GPa)	G_{θ} (GPa)	G_{θ} (GPa)	G_{θ} (GPa)	G_{θ} (GPa)	G_{θ} (GPa)
0	1,388889	1,667478	2,008177	2,434362	2,982823	3,714995	4,741753	5,427374	6,285656	6,45
15	1,388889	1,875625	2,311208	2,820163	3,45672	4,291229	5,443022	6,202655	7,144163	7,229
30	1,388889	2,499684	3,310223	4,128856	5,066653	6,221162	7,729201	8,683456	9,829122	9,532
45	1,388889	2,998518	4,222891	5,376285	6,604687	8,025953	9,783923	10,85404	12,10353	11,339
60	1,388889	2,499684	3,310223	4,128856	5,066653	6,221162	7,729201	8,683456	9,829122	9,532
75	1,388889	1,875625	2,311208	2,820163	3,45672	4,291229	5,443022	6,202655	7,144163	7,229
90	1,388889	1,667478	2,008177	2,434362	2,982823	3,714995	4,741753	5,427374	6,285656	6,45

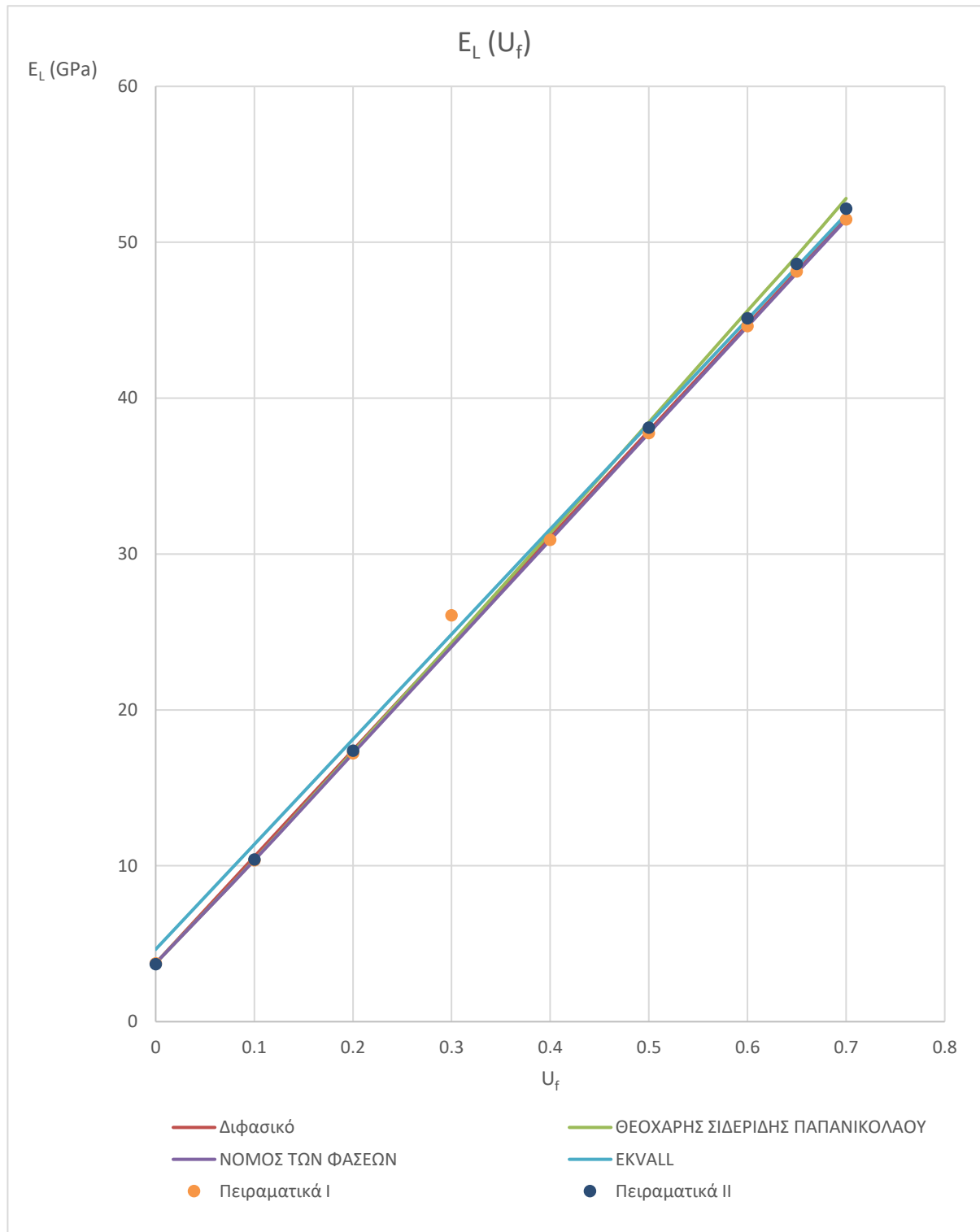
Πίνακας 7

ΛΟΓΟΣ POISSON ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ μ_{θ}

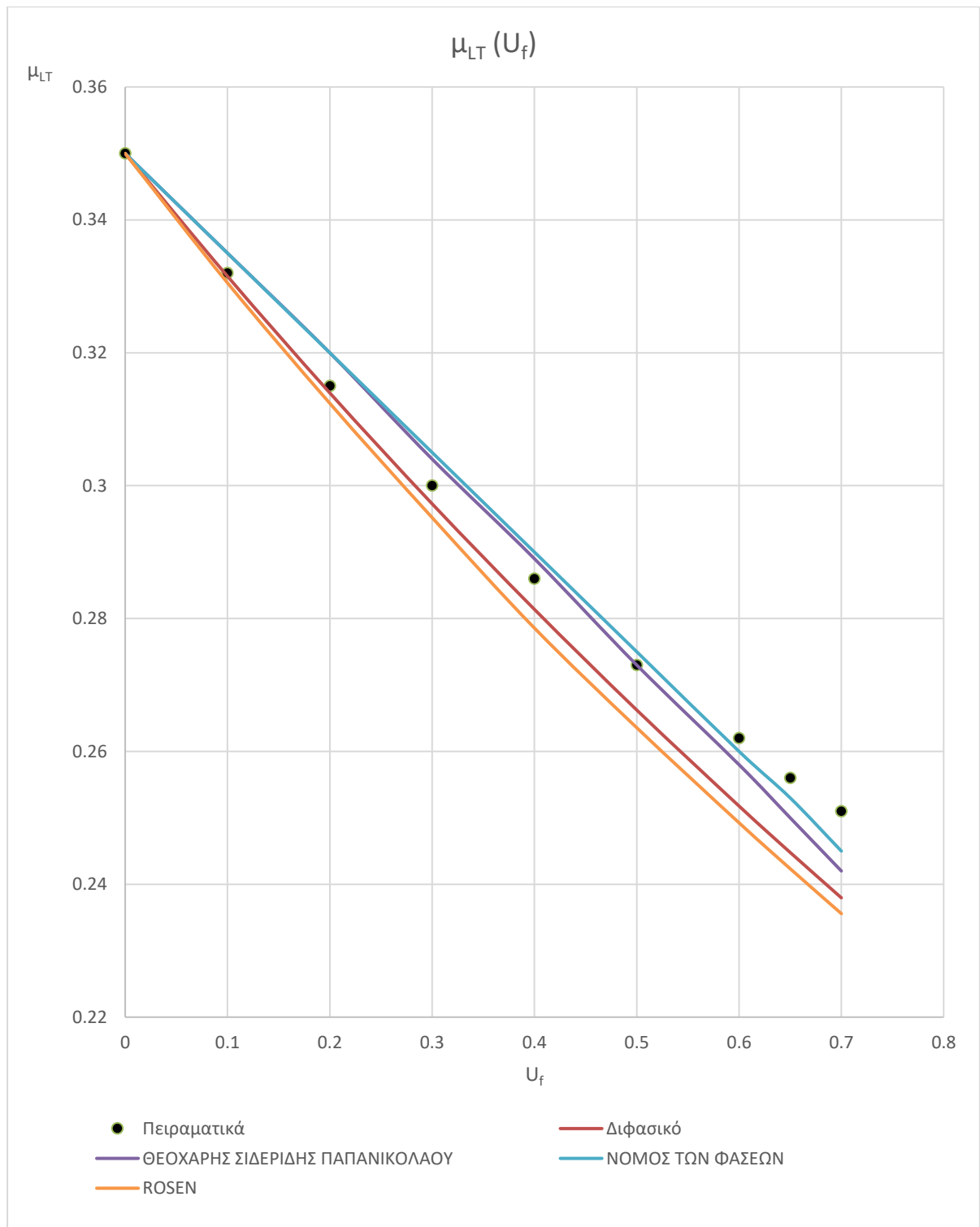
	U_f									Πειραματικά για $U_f=0,65$
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	
α/α (°)	μ_{θ}	μ_{θ}	μ_{θ}	μ_{θ}	μ_{θ}	μ_{θ}	μ_{θ}	μ_{θ}	μ_{θ}	ν_{θ}
0	0,35	0,331517	0,313963	0,297271	0,281378	0,266229	0,251772	0,244789	0,237962	0,249
15	0,35	0,411306	0,432098	0,434268	0,425469	0,408762	0,385198	0,370834	0,354612	0,342
30	0,35	0,492721	0,523943	0,527511	0,518869	0,502421	0,479004	0,464337	0,447204	0,416
45	0,35	0,484543	0,502902	0,4999	0,488548	0,472219	0,451509	0,43923	0,425258	
60	0,35	0,394659	0,39216	0,381423	0,367751	0,352518	0,335966	0,327079	0,317613	0,287
75	0,35	0,255701	0,223163	0,203939	0,190243	0,179791	0,171844	0,168794	0,166446	0,154
90	0,35	0,177541	0,125744	0,101953	0,089541	0,083459	0,082071	0,083112	0,085509	0,086

Πίνακας 8

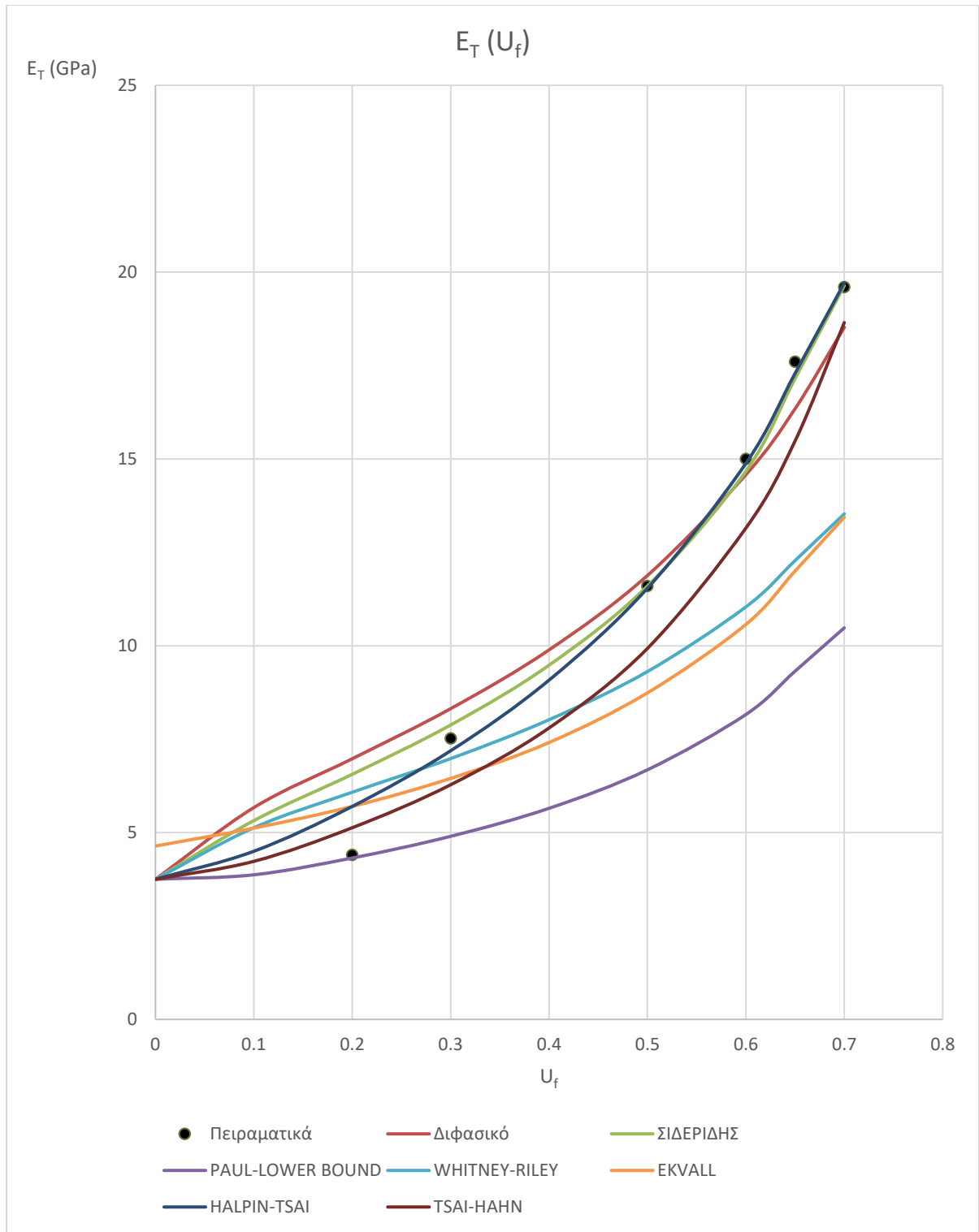
2.2.2 Διαγράμματα Στατικών Ελαστικών Σταθερών



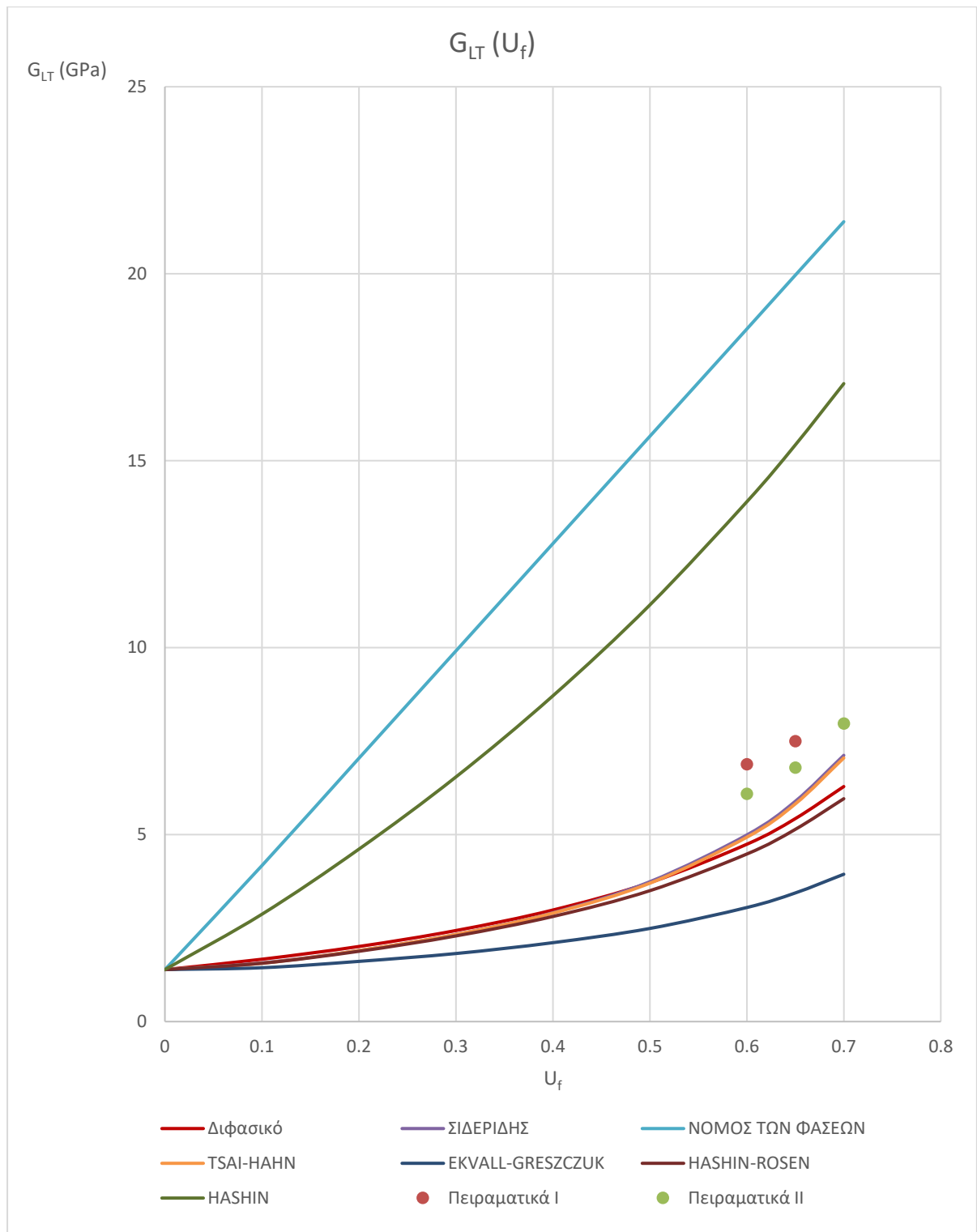
Διάγραμμα 1



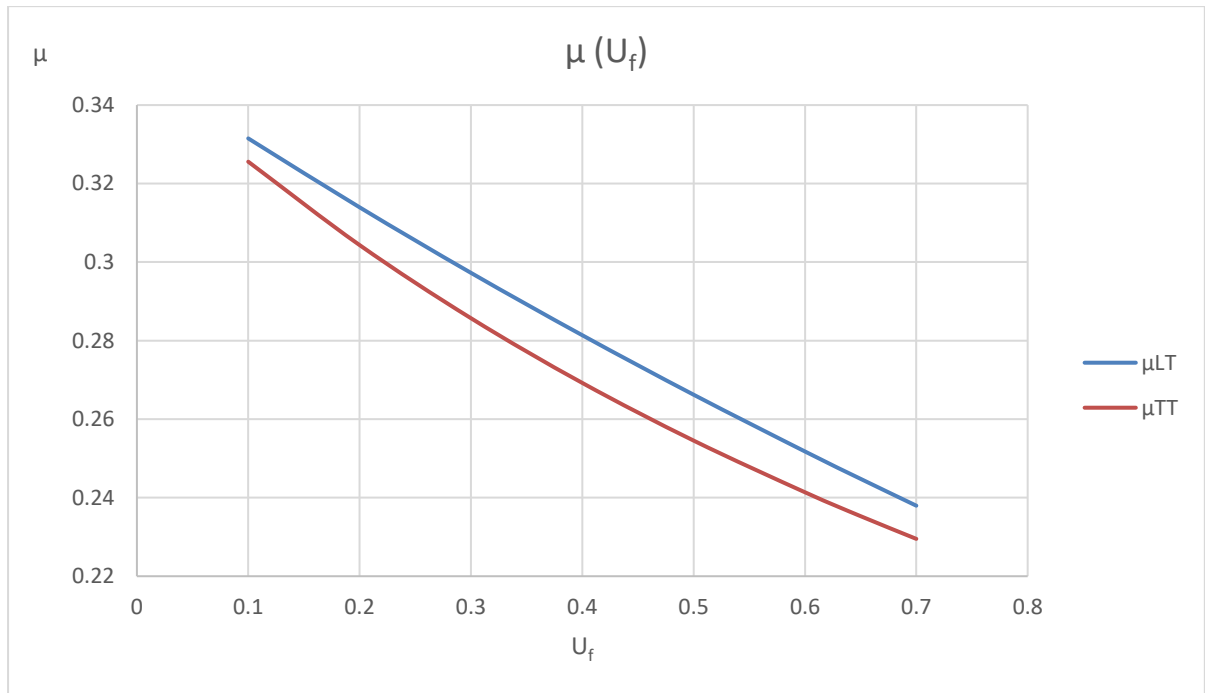
Διάγραμμα 2



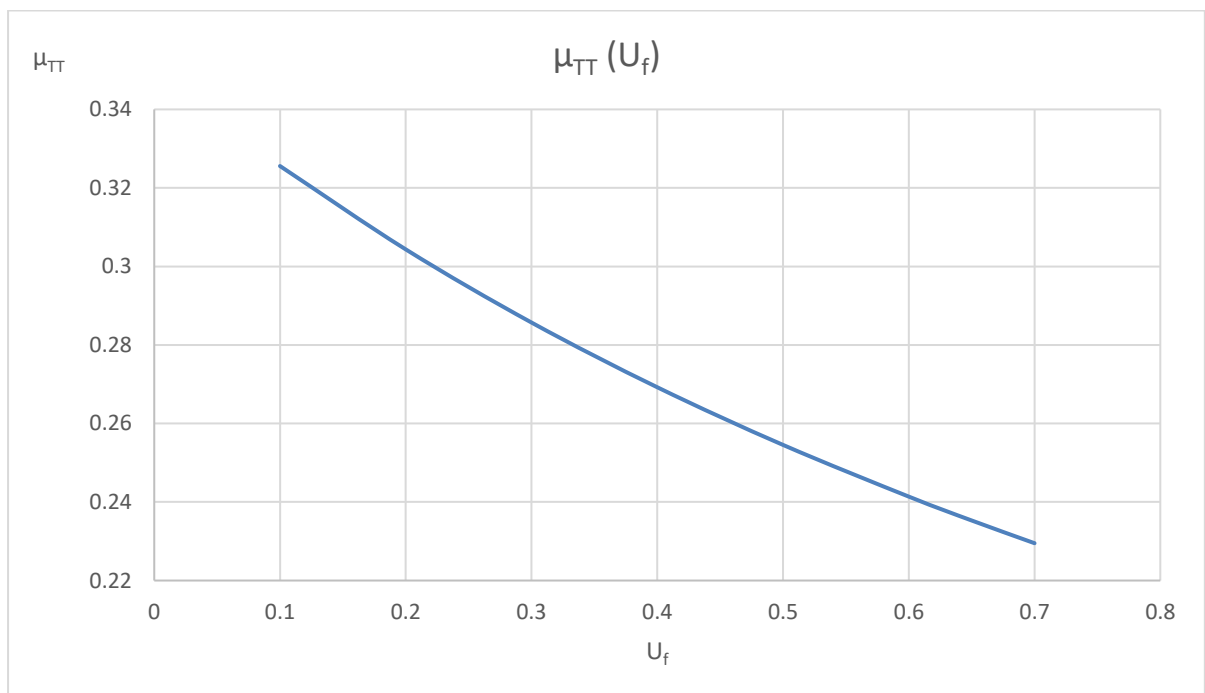
Διάγραμμα 3



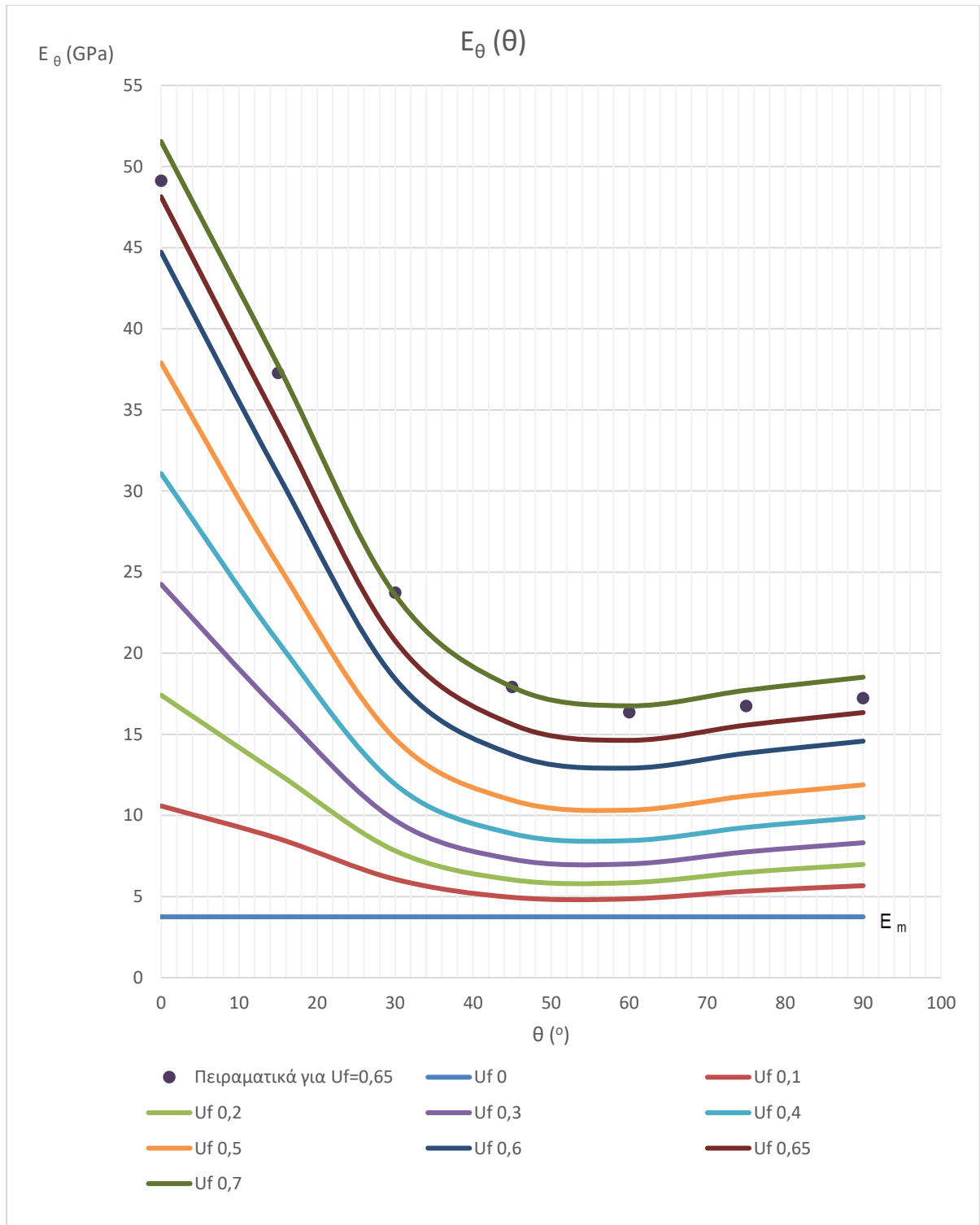
Διάγραμμα 4



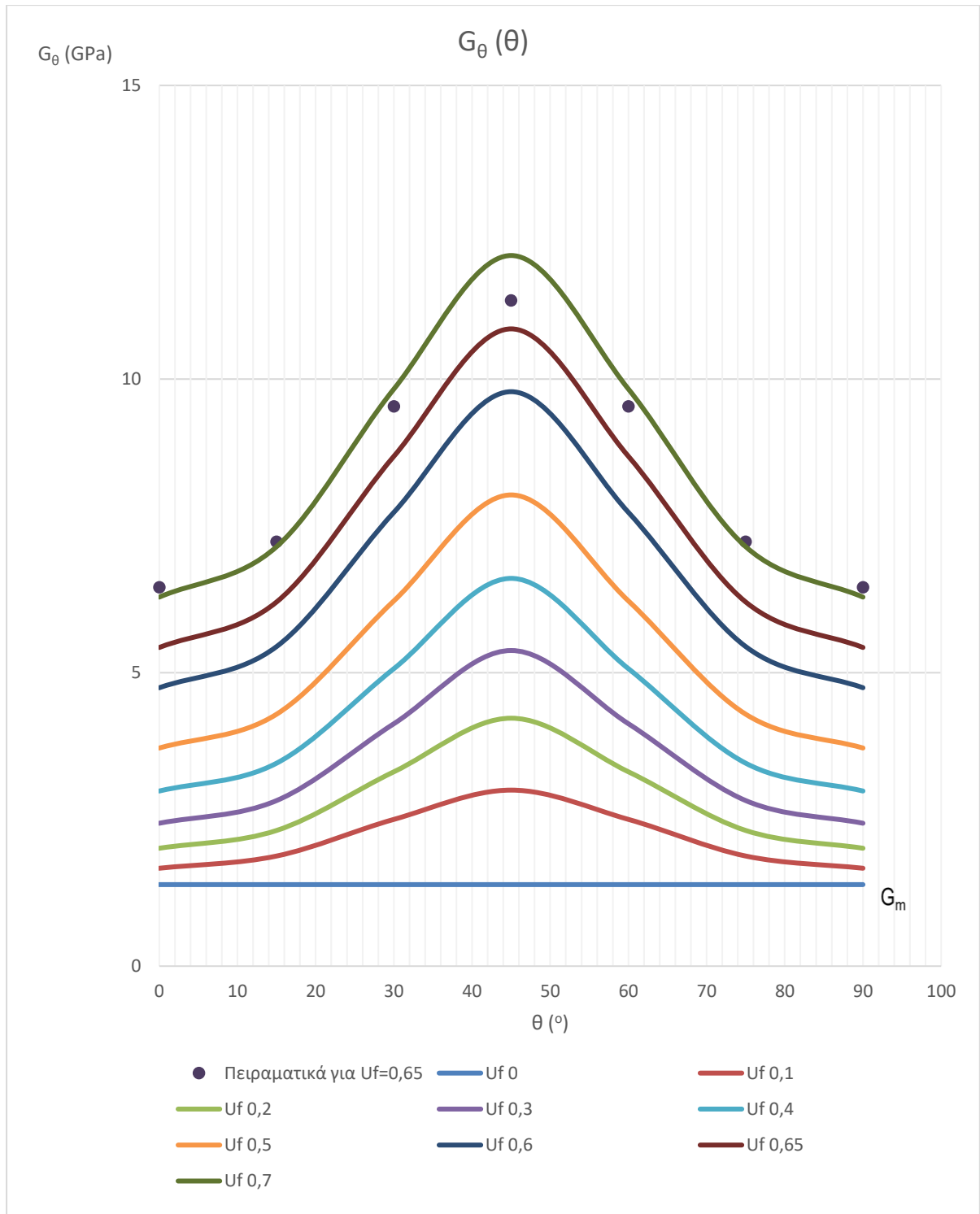
Διάγραμμα 5α



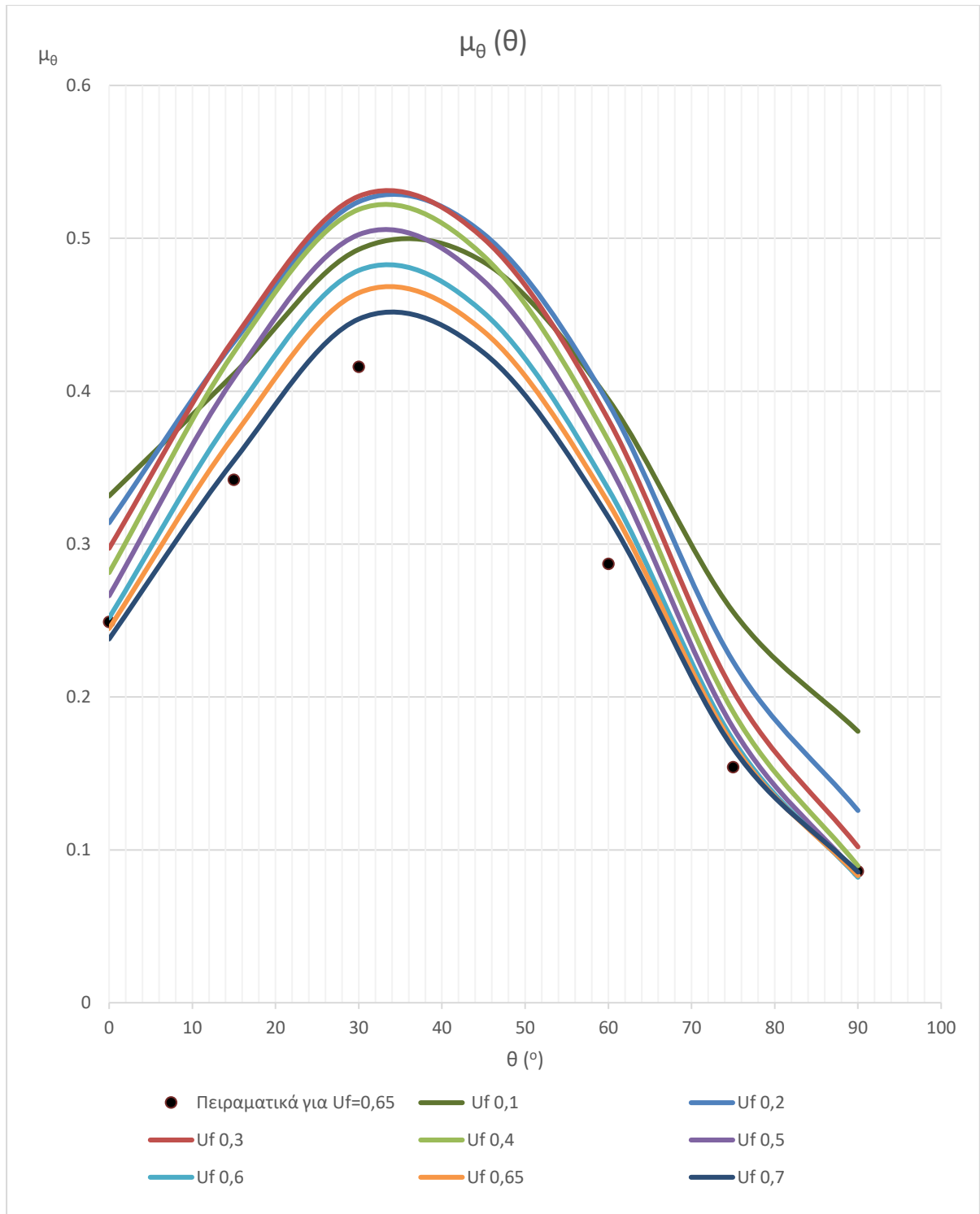
Διάγραμμα 5β



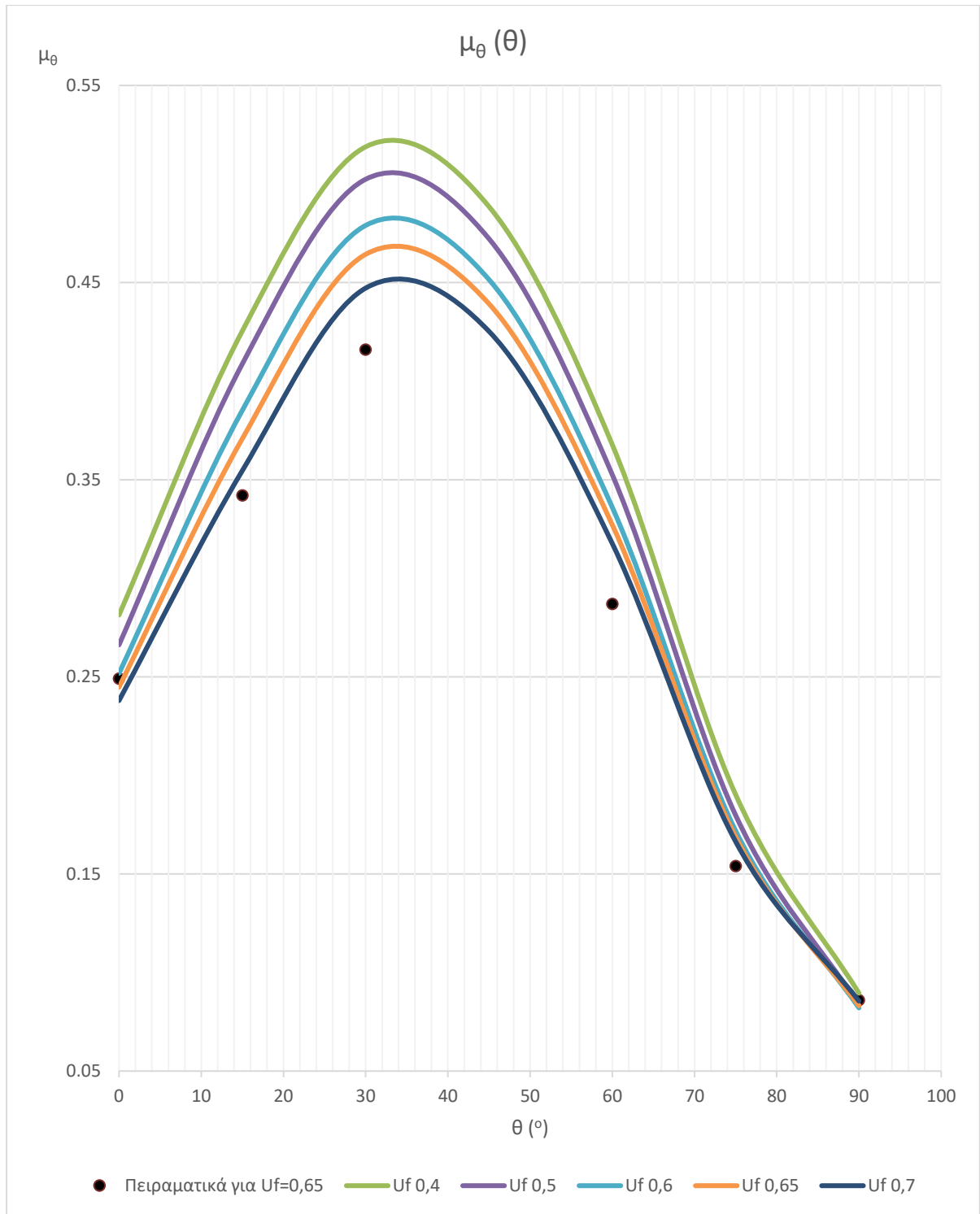
Διάγραμμα 6



Διάγραμμα 7



Διάγραμμα δα



Διάγραμμα 8β

2.3 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων – Συμπεράσματα

Διάμηκες Μέτρο Ελαστικότητας E_L

Από το διάγραμμα 1 διαπιστώνουμε μια σχεδόν τέλεια ταύτιση τόσο του μοντέλου που μελετήσαμε με τους θεωρητικούς τύπους, όσο και με τα πειραματικά δεδομένα [7,8,9]. Τα αποτελέσματα που δίνει το μοντέλο μας μπορούν να χαρακτηρισθούν πολύ ικανοποιητικά για το E_L αφού τα πειραματικά σημεία προσεγγίζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό σε όλο το εύρος των περιεκτικότητων.

Διαμήκης Λόγος Poisson μ_{LT}

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του μοντέλου μας για τον υπολογισμό του μ_{LT} και φαίνονται και στο διάγραμμα 2 δείχνουν ότι για περιεκτικότητες εγκλείσματος έως 40% το διφασικό μας μοντέλο αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση της πραγματικότητας αφού συμφωνεί περισσότερο από κάθε άλλο μοντέλο με τα πειράματα. Για περιεκτικότητες 40%-70%, φαίνεται να υστερεί λίγο σε σχέση με τα μοντέλα των Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [15] και των νόμο των φάσεων, προσεγγίζει όμως παρόλα αυτά τα πειραματικά αποτελέσματα [8,10] και σε αυτή την περιοχή σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό.

Εγκάρσιο Μέτρο Ελαστικότητας E_T

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3, το διφασικό μοντέλο μας για περιεκτικότητες $U_f < 50\%$ προβλέπει τις υψηλότερες τιμές για το E_T σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα με τα οποία το συγκρίνουμε. Για περιεκτικότητες $U_f > 50\%$ δίνει τιμές ανάμεσα στα μοντέλα Σιδερίδη [16], Whitney-Riley [10] των οποίων οι προβλέψεις για $U_f > 50\%$ σχεδόν ταυτίζονται και του μοντέλου των Tsai-Hahn [17]. Για αυτές τις υψηλές περιεκτικότητες αυτά είναι και τα μοντέλα τα οποία προσεγγίζουν καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα [8,11,12].

Διάμηκες Μέτρο Διάτμησης G_{LT}

Στο διάγραμμα 4 βλέπουμε πως με εξαίρεση τον νόμο των φάσεων και την θεωρία του Hashin [18] όλοι οι άλλοι θεωρητικοί τύποι είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, ειδικά για περιεκτικότητες $U_f < 50\%$. Για $U_f > 50\%$ υπάρχει μια μικρή διασπορά των προβλέψεων μεταξύ των μοντέλων, με το διφασικό μοντέλο μας να είναι πολύ κοντά στο μοντέλο των Hashin-Rosen [4]. Οι δε προβλεπόμενες τιμές για το G_{LT} προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα [13,14].

Εγκάρσιος Λόγος Poisson μ_{TT}

Στο διάγραμμα 5β βλέπουμε τις τιμές που προβλέπει το διφασικό μοντέλο για τον εγκάρσιο λόγο Poisson. Στην βιβλιογραφία δεν βρήκαμε να έχουν γίνει πειράματα για το εν λόγω μέγεθος, ενδεχομένως επειδή είναι δευτερευούσης σημασίας ως ελαστική σταθερά .

Στο διάγραμμα 5α παρατίθενται οι εξαγόμενες από το μοντέλο τιμές του διαμήκους και του εγκάρσιου λόγου Poisson συναρτήσει της περιεκτικότητας U_f . Παρατηρούμε ότι ο μ_{TT} είναι σε όλες τις περιεκτικότητες μικρότερος από τον μ_{LT} .

Μέτρο ελαστικότητας E_{θ}

Από το διάγραμμα 6 για δεδομένη U_f διαπιστώνουμε μια ραγδαία πτώση της τιμής του μέτρου ελαστικότητας στο διάστημα ανάμεσα 5° - 45° , για να ακολουθήσει μια πιο ομαλή πτώση μέχρι τις 60° περίπου. Σε γωνία ινών περίπου 60° το μέτρο ελαστικότητας λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του για να κλείσει με μια μικρή άνοδο μέχρι τις 90° . Οι ακραίες τιμές που λαμβάνουμε για 0° και 90° αντιστοιχούν, εξ' ορισμού στις τιμές E_L και E_T αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας εγκλείσματος U_f οδηγεί και σε αύξηση του E_{θ} , γεγονός αναμενόμενο αφού το U_f αποτελεί το ποσοστό ενίσχυσης του συνθέτου υλικού (το έγκλεισμα ονομάζεται εναλλακτικά ενίσχυση). Από την σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα [6] που έχουν εξαχθεί για $U_f=65\%$ προκύπτει ότι το διφασικό μοντέλο παρακολουθεί επιτυχώς την συσχέτιση του E_{θ} (θ), οι τιμές που προβλέπει όμως είναι σταθερά μικρότερες από τις τιμές του πειράματος.

Μέτρο Διατμήσεως G_{θ}

Από το διάγραμμα 7 για δεδομένη U_f διαπιστώνουμε πως το μέτρο διατμήσεως είναι συμμετρικό ως προς γωνία ινών 45° . Από 0° - 45° το μέτρο διάτμησης αυξάνει συνεχώς μέχρι τη μέγιστη τιμή του. Για 45° - 90° συνέχεια ακολουθεί πτώση, συμμετρική της ανόδου, και για $\theta=90^{\circ}$ λαμβάνει την αρχική τιμή που έχει για $\theta=0^{\circ}$. Ομοίως με ότι συμβαίνει για το E_{θ} παρατηρούμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας εγκλείσματος U_f οδηγεί και σε αύξηση του G_{θ} , ενώ από την σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα [6] που έχουν εξαχθεί για $U_f=65\%$ προκύπτει ότι το διφασικό μοντέλο παρακολουθεί επιτυχώς την συσχέτιση του G_{θ} (θ), οι τιμές που προβλέπει όμως είναι σταθερά μικρότερες από τις τιμές του πειράματος.

Λόγος Poisson μ_θ

Για δεδομένη περιεκτικότητα, ο λόγος Poisson όπως φαίνεται από τα διαγράμματα 8α,8β παρουσιάζει αρχικά αύξηση μέχρι τις 35° περίπου. Στο σημείο αυτό η καμπύλη παρουσιάζει μέγιστο και έπειτα ακολουθεί μια συνεχής μείωση της τιμής του Poisson μέχρι την ελάχιστη τιμή των 90°. Η αύξηση της U_f οδηγεί σε μείωση του μ_θ , ενώ από την σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα [6] που έχουν εξαχθεί για $U_f=65\%$ προκύπτει ότι το διφασικό μοντέλο παρακολουθεί επιτυχώς την συσχέτιση του $\mu_\theta(\theta)$, οι τιμές που προβλέπει όμως είναι σταθερά μεγαλύτερες από τις πειραματικές τιμές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

3.1 Εισαγωγή

Η κλασσική θεωρία της ελαστικότητας ασχολείται με τις μηχανικές ιδιότητες των ελαστικών στερεών, για τα οποία, σύμφωνα με το νόμο του Hooke, η τάση είναι πάντα ευθέως ανάλογη με την παραμόρφωση, για μικρές παραμορφώσεις, αλλά ανεξάρτητη από την ταχύτητα παραμόρφωσης. Η κλασσική θεωρία της υδροδυναμικής ασχολείται με τις ιδιότητες ιξωδών υγρών, όπου σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα, η τάση είναι πάντα ανάλογη με την ταχύτητα παραμόρφωσης, αλλά ανεξάρτητη από την ίδια την παραμόρφωση. Οι παραπάνω θεωρίες αφορούν ιδανικές καταστάσεις, παρά το γεγονός ότι η συμπεριφορά πολλών στερεών πλησιάζει το νόμο του Hooke μόνο για απειροστές και πολλά υγρά προσεγγίζουν το νόμο του Νεύτωνα για απειροστές ταχύτητες παραμόρφωσης. Συνήθως παρατηρούνται δυο ειδών αποκλίσεις.

Πρώτον, όταν επιβάλλονται πεπερασμένες παραμορφώσεις σε στερεά, συνήθως πολύ μαλακά για να παραμορφώνονται χωρίς να σπάνε, οι σχέσεις τάσεων- παραμορφώσεων γίνονται αρκετά περίπλοκες. Αντίστοιχα σε περιπτώσεις σταθερής ροής με πεπερασμένη ταχύτητα παραμόρφωσης, πολλά υγρά αποκλίνουν σημαντικά από τη Νευτωνική συμπεριφορά. Η διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στο πεπερασμένο και το απειροστό κυμαίνεται σημαντικά και συχνά εξαρτάται κύρια από το υλικό.

Δεύτερον, όταν η παραμόρφωση, όσο και η ταχύτητα παραμόρφωσης είναι απειροστές, ένα σύστημα μπορεί να εμφανίζεται με συνδυασμένα χαρακτηριστικά τόσο της υγρής, όσο και της στερεής κατάστασης. Έτσι ένα υλικό, που δεν είναι ακριβώς στερεό δε διατηρεί μια σταθερή παραμόρφωση κάτω από σταθερή τάση, αλλά παραμορφώνεται αργά με το χρόνο, ή έρπει. Όταν το ίδιο υλικό έχει μια σταθερή παραμόρφωση, η τάση που χρειάζεται για να τη διατηρήσει σταθερή ελαττώνεται βαθμιαία. Επίσης ένα υλικό που δεν είναι ακριβώς υγρό, μπορεί, ενώ ρέει με την επιβολή μιας σταθερής τάσης, να αποθηκεύσει μέρος της ενέργειας που δέχεται αντί να την διασκορπίσει σαν θερμότητα.

Όταν υλικά αυτής της μορφής βρίσκονται στην επίδραση εναλλασσόμενης τάσης, η παραμόρφωση δεν είναι ούτε ακριβώς σε φάση με την τάση (περίπτωση τέλειου ελαστικού στερεού), ούτε σε διαφορά φάσης 90° (περίπτωση τέλειου ιξώδους υγρού), αλλά είναι κάπου ανάμεσα.

Μέρος της εισαγόμενης ενέργειας αποθηκεύεται και ανακτάται σε κάθε κύκλο, ενώ ένα μέρος σκεδάζεται σαν θερμότητα. Υλικά των οποίων η συμπεριφορά έχει τέτοια χαρακτηριστικά λέγονται «βισκοελαστικά». Στην περίπτωση απειροστής παραμόρφωσης και ταχύτητας παραμόρφωσης, έχουμε γραμμική βισκοελαστική συμπεριφορά και τότε η τάση προς παραμόρφωση είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου (ή της συχνότητας) και όχι του μεγέθους της τάσης.

Αν και τα θεμέλια της φαινομενολογικής θεωρίας της γραμμικής βισκοελαστικότητας έγιναν με πειράματα ερπυσμού και χαλάρωσης σε ίνες μετάλλου ή γυαλιού και η σκέδαση της ενέργειας σε ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενες παραμορφώσεις έδωσε χρήσιμες πληροφορίες για τη δομή των μετάλλων, οι αποκλίσεις από την κλασσική ελαστικότητα είναι μικρές. Αντίθετα στα σύνθετα υλικά η μηχανική συμπεριφορά κυριαρχείται από τα βισκοελαστικά φαινόμενα που συχνά είναι θεαματικά.

Η υπεροχή της βισκοελαστικότητας στα σύνθετα υλικά είναι κάτι που αναμένεται, αν αναλογιστεί κανείς τις πολύπλοκες μοριακές διευθετήσεις που γίνονται με την επίδραση κάποιας μακροσκοπικής μηχανικής παραμόρφωσης.

Όταν παραμορφώνεται κάποιο σκληρό στερεό, όπως το διαμάντι, τα άτομα μετατοπίζονται από τις θέσεις ισορροπίας σε περιοχές δυνάμεων τοπικού χαρακτήρα. Σε κάποιο υγρό, η ιξώδης ροή, με την επιβολή μιας τάσης, αντανakλά την αλλαγή με τον χρόνο της κατανομής των μορίων που περιβάλλουν ένα δεδομένο μόριο.

Οι μετρήσεις των βισκοελαστικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών δίνουν σημαντική πληροφόρηση για την φύση και την ταχύτητα των μοριακών διευθύνσεων. Επιπλέον, οι μετρήσεις αυτές αποκτούν ιδιαίτερη σημασία, λόγω της πρακτικής αξίας της μηχανικής συμπεριφοράς στη διεργασία και χρήση των ελαστομερών, των πλαστικών και των ινών.

Πειράματα, όπου επιβάλλεται στο υλικό μια κυμαινόμενη τάση ή παραμόρφωση, αποτελούν μια σημαντική ομάδα πειραμάτων για τη μελέτη της βισκοελαστικής συμπεριφοράς των σύνθετων υλικών.

Τα περισσότερα κατασκευαστικά υλικά έχουν σε ένα βαθμό ιξωδοελαστικό χαρακτήρα. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητος ο έλεγχος των υλικών αυτών πριν από την σχεδίαση των τελικών προϊόντων. Οι συνηθέστεροι έλεγχοι βασίζονται σε μετρήσεις:

A)Ερπυσμού.

B)Χαλάρωσης τάσεων.

Γ)Δυναμομηχανικής φόρτισης.

Με τις μετρήσεις αυτές παίρνουμε δεδομένα που συσχετίζουν τάση, ανηγμένη παραμόρφωση, θερμοκρασία και χρόνο.

Από τις στατικές ελαστικές σταθερές για να “περάσουμε” στις αντίστοιχες δυναμικές, χρησιμοποιούμε την αρχή της αντιστοιχίας, σύμφωνα με την οποία έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις :

$$E_f^* = E_f' + iE_f'', \quad E_m^* = E_m' + iE_m'', \quad \mu_m^* = \mu_m' - i\mu_m'', \quad \mu_f^* = \mu_f' - i\mu_f''.$$

Για λόγους απλοποίησης των πολύ μικρών, συγκριτικά, όρων θεωρούμε ότι:

$E_f'' \cong 0$, $\mu_f'' \cong 0$ και δευτερευόντως $\mu_m'' \cong 0$, οπότε έχουμε :

$$E_f^* = E_f$$

$$\mu_f^* = \mu_f$$

$$\mu_m^* = \mu_m$$

Αυτή η διαδικασία του υπολογισμού των μιγαδικών μέτρων των βισκοελαστικών υλικών από τις εκφράσεις των ελαστικών σταθερών για τα ελαστικά υλικά ονομάζεται *αρχή της αντιστοιχίας* του **Hashin [19]**.

Στην παρούσα ανάλυση ακολουθώντας αυτή την διαδικασία υπολογίζονται οι εκφράσεις για τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας E_c' και E_c'' εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας στην έκφραση του μέτρου ελαστικότητας E_c το οποίο υπολογίστηκε από το θεωρητικό μοντέλο το οποίο λαμβάνει υπόψιν το διφασικό μοντέλο. Το ίδιο εφαρμόζεται και για τις άλλες ελαστικές σταθερές.

3.1.1 Σύνθετο (Μιγαδικό) μέτρο ελαστικότητας

Η δυναμομηχανική φόρτιση χρησιμοποιείται για να ληφθούν ορισμένες πληροφορίες, με τις οποίες γίνεται δυνατός ο διαχωρισμός της ελαστικής από την ιξώδη απόκριση των υλικών. Ακολουθεί η περιγραφή της απόκρισης των υλικών κάτω από δυναμομηχανική φόρτιση.

Είναι γνωστό ότι η πλειοψηφία των στερεών όταν υπόκειται μικρές παραμορφώσεις, ακολουθεί το νόμο του Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.1.1.1)$$

Εάν υποθέσουμε ότι στο υλικό επιβάλλεται μια τάση ω ημιτονοειδούς μορφής δόνηση, τότε και η εμφανιζόμενη ανηγμένη παραμόρφωση είναι ημιτονοειδούς μορφής της ίδιας συχνότητας, παρουσιάζει όμως μια διαφορά φάσης δ . Έτσι, αν

$$\sigma = \sigma_0 \eta \mu(\omega t) \quad (3.1.1.2)$$

Τότε

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \eta \mu(\omega t - \delta) \quad (3.1.1.3)$$

Όπου: σ_0 = το πλάτος της τάσης.

ω = η κυκλική συχνότητα, $\omega = 2\pi f$

f = η συχνότητα ταλαντώσεων.

t = χρόνος.

Μια άλλη έκφραση είναι :

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (3.1.1.4)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)} \quad (3.1.1.5)$$

Με τη βοήθεια των δύο παραπάνω σχέσεων, μπορούμε να ορίσουμε το μιγαδικό μέτρο ελαστικότητας E^* ως εξής:

$$E^* = E' + iE'' = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \quad (3.1.1.6)$$

Αν στην πιο πάνω σχέση αντικαταστήσουμε τις σχέσεις που δίνουν τα σ^* και ε^* , υπολογίζουμε:

$$E^* = E' + iE'' = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) e^{i\delta} = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) (\sigma \nu \nu \delta + i \eta \mu \delta) \quad (3.1.1.7)$$

Επομένως προκύπτει:

$$E' = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) \sigma \nu \nu \delta \quad (3.1.1.8)$$

$$E'' = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) \eta \mu \delta \quad (3.1.1.9)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, το E' που είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας ονομάζεται δυναμικό μέτρο αποθήκευσης, ενώ το E'' που είναι το φανταστικό μέρος του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας, ονομάζεται δυναμικό μέτρο απωλειών.

Η τάση που δεν βρίσκεται σε φάση με την παραμόρφωση, μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μια βρίσκεται σε φάση με την παραμόρφωση και η άλλη θα διαφέρει από αυτήν κατά φάση ίση με $\pi/2$. Έτσι μπορούμε να έχουμε έναν ποιοτικό προσδιορισμό των E' και E'' .

3.1.2 Δυναμικό μέτρο αποθήκευσης

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας E' είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας. Είναι ίσο με το λόγο μεταξύ του μέρους της τάσης που βρίσκεται σε φάση με την παραμόρφωση, προς την τιμή αυτής της παραμόρφωσης.

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας χαρακτηρίζει την ποσότητα ενέργειας που λαμβάνεται και που ελκύεται από μια μονάδα κάποιου όγκου ενός σώματος σε διάρκεια μιας περιόδου. Για ταλαντώσεις σταθερού πλάτους η τιμή του δυναμικού μέτρου ελαστικότητας E' αυξάνει (ή μένει σταθερή) με μια αντίστοιχη αύξηση της συχνότητας.

3.1.3 Δυναμικό μέτρο απωλειών

Το μέτρο απωλειών E'' είναι ο λόγος μεταξύ του μέρους της τάσης που βρίσκεται σε διαφορά φάσης $\pi/2$ με την παραμόρφωση, προς την τιμή της παραμόρφωσης. Το μέτρο απωλειών E'' χαρακτηρίζει το μέτρο εκείνο της ενέργειας της ελαστικής ταλάντωσης που χάνεται υπό μορφή θερμότητας κατά τη διάρκεια μιας περιόδου ταλάντωσης. Όταν η διαφορά φάσης ανάμεσα στην τάση και στην παραμόρφωση γίνει μέγιστη, το μέτρο απωλειών E'' λαμβάνει μια μέγιστη τιμή. Έτσι το μέτρο απωλειών χαρακτηρίζει τη διασπορά της ενέργειας της ταλάντωσης σε ένα βισκοελαστικό σώμα.

Η ακριβής τιμή του σύνθετου μέτρου ελαστικότητας, είναι:

$$E^* = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2} \quad (3.1.3.1)$$

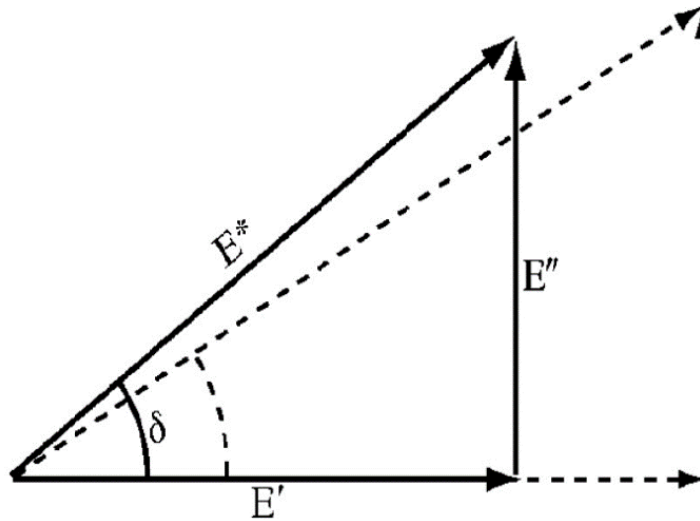
Από την άλλη μεριά η σχέση μεταξύ του πλάτους των τιμών της τάσης και της παραμόρφωσης μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\sigma_o}{\varepsilon_o} = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2} \quad (3.1.3.2)$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης-παραμόρφωσης είναι καθορισμένη συνήθως από την κλίση των μηχανικών απωλειών.

$$\varepsilon\varphi\delta = \frac{E''}{E'} \quad (3.1.3.3)$$

Οι σχέσεις μεταξύ του μιγαδικού μέτρου απωλειών E^* και της διαφοράς φάσης δ μπορούν εύκολα να αποδοθούν από το διανυσματικό διάγραμμα του σχήματος 3.1.3.1.



Σχήμα 3.1.3.1

$$E' = E^* \cos \delta$$

$$E'' = E^* \sin \delta$$

(3.1.3.4)

Αν ένα σώμα είναι ιδανικά ελαστικό, τότε έχουμε $\delta=0$ και $E^* = E'$ όπως προκύπτει από τις σχέσεις 3.1.3.1 και 3.1.3.4. Στην πραγματικότητα κανένα στέρεο σώμα δεν είναι ιδανικά ελαστικό. Όλα τα στερεά έχουν μαζί ελαστικές και ιξώδεις ιδιότητες μέχρι ένα οριστικό μέγεθος. Η ιξώδης συμπεριφορά σε πολλά από αυτά εκδηλώνεται τόσο αδύναμα, ώστε πρακτικά αυτά τα υλικά να θεωρούνται ιδανικά ελαστικά.

3.1.4 Σύνθετο (μιγαδικό) μέτρο ενδόσεως

Μερικές φορές χρησιμοποιείται η έννοια του μιγαδικού μέτρου ενδόσεως ως ο αποκλίνων τανυστής του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή:

$$D^* = \frac{1}{E^*} = D' - iD'' \quad (3.1.4.1)$$

Όπου το D' ονομάζεται δυναμικό μέτρο ενδόσεως και το D'' ονομάζεται απώλεια ενδόσεως. Ακολουθούν οι σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες του σύνθετου μέτρου ενδόσεως με αυτές του σύνθετου μέτρου ελαστικότητας.

$$D^* = \frac{\frac{1}{E'} - i \frac{1}{E'} \varepsilon \varphi \delta}{1 + \varepsilon \varphi^2 \delta} \quad (3.1.4.2)$$

$$D' = \frac{1}{E'} \quad (3.1.4.3)$$

$$D'' = \frac{\varepsilon \varphi \delta / E'}{1 + \varepsilon \varphi^2 \delta} = \frac{1/E''}{(1 + \varepsilon \varphi^2 \delta) - 1} \quad (3.1.4.4)$$

3.1.5 Σύνθετος (μυγαδικός) λόγος Poisson

Δυο ακόμα σημαντικά μεγέθη είναι ο μυγαδικός λόγος του Poisson ν^* και το μυγαδικό μέτρο διόγκωσης K^* . Τα δυο αυτά μεγέθη δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mu^* = \mu' - i\mu'' = \frac{E^*}{2G^*} - 1 \quad (3.1.5.1)$$

3.1.6 Σύνθετο (μυγαδικό) μέτρο διόγκωσης

$$K^* = K' + iK'' = \frac{E^*}{3(1 - 2\nu^*)} \quad (3.1.6.1)$$

3.1.7 Σύνθετο (μυγαδικό) μέτρο διάτμησης

$$G^* = G' + iG'' = \frac{E^*}{2(1 + \mu^*)} \quad (3.1.7.1)$$

Για να περιγραφεί η βισκοελαστική συμπεριφορά ενός ισότροπου σώματος χρειάζονται δυο ανεξάρτητες μυγαδικές σταθερές ελαστικότητας, για παράδειγμα το μυγαδικό μέτρο ελαστικότητας E^* και το μυγαδικό μέτρο διάτμησης G^* , ή ο μυγαδικός λόγος Poisson.

3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

3.2.1 Δυναμικό διάμηκες μέτρο ελαστικότητας

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στην εξίσωση του στατικού διαμήκους μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή στην εξίσωση :

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m + \frac{2(\mu_f - \mu_m)^2 E_m E_f U_m U_f}{E_m U_m (1 - \mu_f - 2\mu_f^2) + E_f [(1 - \mu_m - 2\mu_m^2) U_f + (1 + \mu_m)]} \quad (2.1.33)$$

έχουμε :

$$E_L^* = E_f^* U_f + E_m^* U_m + \frac{2(\mu_f^* - \mu_m^*)^2 E_m^* E_f^* U_m U_f}{E_m^* U_m (1 - \mu_f^* - 2\mu_f^{*2}) + E_f^* [(1 - \mu_m^* - 2\mu_m^{*2}) U_f + (1 + \mu_m^*)]} \quad (3.2.1.1)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση το σύνθετο μέτρο ελαστικότητας και τον σύνθετο λόγο Poisson από τις εξισώσεις ορισμού τους, δηλαδή από τις εξισώσεις :

$$E^* = E' + iE'' = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \quad (3.1.1.6)$$

$$\mu^* = \mu' - i\mu'' = \frac{E^*}{2G^*} - 1 \quad (3.1.5.1)$$

Η εξίσωση (3.2.1.1) γίνεται :

$$E'_L + iE''_L = E'_f U_f + (E'_m + iE''_m)(1 - U_f) + \frac{2\{[(\mu'_f)^2 + \mu'_m{}^2 - \mu''_m{}^2 - 2\mu'_f \mu'_m] + 2i(\mu'_f - \mu'_m)\mu''_m\}(E'_m + iE''_m)E'_f(1 - U_f)U_f}{(E'_m + iE''_m)U_m(1 - \mu'_f - 2\mu'_f{}^2) + E'_f[(1 - (\mu'_m - i\mu''_m) - 2(\mu'_m - i\mu''_m)^2)U_f + (1 + (\mu'_m - i\mu''_m))]} \quad (3.2.1.2)$$

Αντικαθιστώντας την κατ' όγκο περιεκτικότητα της μήτρας από την εξίσωση $U_m = 1 - U_f$,

θέτοντας στον αριθμητή την ποσότητα :

$$\mu'_f{}^2 + \mu'_m{}^2 - \mu''_m{}^2 - 2\mu'_f \mu'_m = F \quad (3.2.1.3)$$

και στον παρονομαστή τις ποσότητες

$$\begin{aligned} E'_m(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu'_f{}^2) &= A \\ E''_m(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu'_f{}^2) &= B \\ [(1 - \mu'_m - 2\mu'_m{}^2 + 2\mu''_m{}^2)U_f + (1 + \mu'_m)]E'_f &= C \\ [\mu''_m(1 + 4\mu'_m)U_f - \mu''_m]E'_f &= D \end{aligned} \quad (3.2.1.4 \ a - d)$$

η εξίσωση (3.2.1.2) γράφεται σε παραμετρική μορφή, ως εξής :

$$E'_L + iE''_L = \frac{E'_f U_f[(A + C) + i(B + D)] + (E'_m + iE''_m)(1 - U_f)[(A + C) + i(B + D)] + 2\{[F + 2i(\mu'_f - \mu'_m)\mu''_m](E'_m + iE''_m)E'_f(1 - U_f)U_f\}}{(A + C) + i(B + D)} \quad (3.2.1.5)$$

Από την (3.2.1.5) έχουμε :

$$E'_L + iE''_L = \frac{E'_f U_f (A + C) + iE'_f U_f (B + D) + E'_m (A + C)(1 - U_f) + iE''_m (A + C)(1 - U_f) + iE'_m (B + D)(1 - U_f) - E''_m (B + D)(1 - U_f) + 2\{[F + 2i(\mu'_f - \mu'_m)\mu''_m](E'_m + iE''_m)E'_f(1 - U_f)U_f\}}{(A + C) + i(B + D)}$$

ή ομαδοποιώντας πραγματικούς και φανταστικούς όρους :

$$E'_L + iE''_L = \frac{\{E'_f U_f (A + C) + [E'_m (A + C) - E''_m (B + D)](1 - U_f) + 2[FE'_m - 2(\mu'_f - \mu'_m)\mu''_m E''_m]E'_f(1 - U_f)U_f\} + i\{E'_f U_f (B + D) + [E''_m (A + C) + E'_m (B + D)](1 - U_f) + 2[FE''_m + 2(\mu'_f - \mu'_m)\mu''_m E'_m]E'_f(1 - U_f)U_f\}}{(A + C) + i(B + D)}$$

Τελικά το δυναμικό μέτρο αποθήκευσης και το δυναμικό μέτρο απωλειών προκύπτουν σε παραμετρική μορφή από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$E'_L = \frac{\{E'_f U_f (A + C) + [E'_m (A + C) - E''_m (B + D)](1 - U_f) + 2[FE'_m - 2(\mu'_f - \mu'_m)\mu''_m E''_m]E'_f(1 - U_f)U_f\}(A + C) + \{E'_f U_f (B + D) + [E''_m (A + C) + E'_m (B + D)](1 - U_f) + 2[FE''_m + 2(\mu'_f - \mu'_m)\mu''_m E'_m]E'_f(1 - U_f)U_f\}(B + D)}{(A + C)^2 + (B + D)^2}$$

$$E''_L = \frac{\{-[E'_f U_f (A + C) + [E'_m (A + C) - E''_m (B + D)](1 - U_f) + 2[FE'_m - 2(\mu'_f - \mu'_m)\mu''_m E''_m]E'_f(1 - U_f)U_f\}(B + D) + \{E'_f U_f (B + D) + [E''_m (A + C) + E'_m (B + D)](1 - U_f) + 2[FE''_m + 2(\mu'_f - \mu'_m)\mu''_m E'_m]E'_f(1 - U_f)U_f\}(A + C)}{(A + C)^2 + (B + D)^2}$$

(3.2.1.6 a, b)

3.2.2 Δυναμικός διαμήκης λόγος Poisson

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στην εξίσωση του στατικού διαμήκους λόγου Poisson , δηλαδή στην εξίσωση :

$$\mu_{LT} = \mu_m - \frac{2(\mu_m - \mu_f)(1 - \mu_m^2)E_f U_f}{E_m(1 - U_f)(1 - \mu_f - 2\mu_f^2) + [(1 - \mu_m - 2\mu_m^2)U_f + (1 + \mu_m)]E_f} \quad (2.1.46)$$

έχουμε :

$$\mu_{LT}^* = \mu_m^* - \frac{2(\mu_m^* - \mu_f^*)(1 - \mu_m^{*2})E_f^* U_f}{E_m^*(1 - U_f)(1 - \mu_f^* - 2\mu_f^{*2}) + [(1 - \mu_m^* - 2\mu_m^{*2})U_f + (1 + \mu_m^*)]E_f^*} \quad (3.2.2.1)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση το σύνθετο μέτρο ελαστικότητας και τον σύνθετο λόγο Poisson από τις εξισώσεις ορισμού τους, δηλαδή από τις εξισώσεις :

$$E^* = E' + iE'' = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \quad (3.1.1.6)$$

$$\mu^* = \mu' - i\mu'' = \frac{E^*}{2G^*} - 1 \quad (3.1.5.1)$$

$$\text{Η εξίσωση (3.2.1.1) γίνεται : } \mu'_{LT} - i\mu''_{LT} = \mu'_m - i\mu''_m - \frac{2(\mu'_m - i\mu''_m - \mu'_f)[(1 - (\mu'_m - i\mu''_m)^2)](E'_f + iE''_f)U_f}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2) + \{(1 - (\mu'_m - i\mu''_m) - 2(\mu'_m - i\mu''_m)^2)U_f + (1 + \mu'_m - i\mu''_m)\}(E'_f + iE''_f)} \quad (3.2.2.2)$$

Από την (3.2.2.2) έχουμε :

$$\mu'_{LT} - i\mu''_{LT} = \mu'_m - i\mu''_m - \frac{2(\mu'_m - i\mu''_m - \mu'_f) [(1 - (\mu'_m - i\mu''_m)^2)] E'_f U_f}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu'^2_f) + \{(1 - (\mu'_m - i\mu''_m) - 2(\mu'_m - i\mu''_m)^2)U_f + (1 + \mu'_m - i\mu''_m)\}E'_f} \Rightarrow$$

$$\mu'_{LT} - i\mu''_{LT} = \mu'_m - i\mu''_m - \frac{2(\mu'_m - \mu'_f - i\mu''_m)[(1 - \mu'^2_m + \mu''^2_m + 2i\mu'_m\mu''_m)]E'_f U_f}{E'_m(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu'^2_f) + iE''_m(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu'^2_f) + (1 - \mu'_m - 2\mu'^2_m + 2\mu''^2_f)U_f E'_f + (1 + \mu'_m)E'_f + i[\mu''_m(1 + 4\mu'_m)U_f E'_f - \mu''_m E'_f]} \quad (3.2.2.3)$$

Ο παρανομαστής της εξίσωσης (3.2.2.3) είναι ίδιος με τον παρανομαστή της εξίσωσης (3.2.1.2) του συνθέτου μέτρου ελαστικότητας γι αυτό και οι ποσότητες που θέτουμε είναι οι ίδιες A, B, C, D των εξισώσεων (3.2.1.4 $a - d$).

Η εξίσωση (3.2.2.3) γράφεται τώρα σε παραμετρική μορφή :

$$\mu'_{LT} - i\mu''_{LT} = \frac{\mu'_m[(A + C) + i(B + D)] - i\mu''_m[(A + C) + i(B + D)] - 2(\mu'_m - \mu'_f - i\mu''_m)[(1 - \mu'^2_m + \mu''^2_m + 2i\mu'_m\mu''_m)]E'_f U_f}{(A + C) + i(B + D)} \quad (3.2.2.4)$$

Από την (3.2.2.4) έχουμε:

$$\mu'_{LT} - i\mu''_{LT} = \frac{\mu'_m[(A+C) + i(B+D)] - i\mu''_m[(A+C) + i(B+D)] - 2\{[(\mu'_m - \mu'_f)(1 - \mu_m'^2 + \mu_m''^2) + 2\mu'_m\mu_m''^2]E'_fU_f + i[-\mu'_m(1 - \mu_m'^2 + \mu_m''^2) + 2(\mu'_m - \mu'_f)(\mu'_m\mu_m'')]E'_fU_f\}}{(A+C) + i(B+D)} \Rightarrow$$

$$\mu'_{LT} - i\mu''_{LT} = \frac{[\mu'_m(A+C) + \mu''_m(B+D)] + i[\mu'_m(B+D) - \mu''_m(A+C)] - 2\{[(\mu'_m - \mu'_f)(1 - \mu_m'^2 + \mu_m''^2) + 2\mu'_m\mu_m''^2]E'_fU_f + i[-\mu'_m(1 - \mu_m'^2 + \mu_m''^2) + 2(\mu'_m - \mu'_f)(\mu'_m\mu_m'')]E'_fU_f\}}{(A+C)^2 + (B+D)^2} * [(A+C) - i(B+D)]$$

ή ομαδοποιώντας πραγματικούς και φανταστικούς όρους :

$$\mu'_{LT} - i\mu''_{LT} = \frac{\{[\mu'_m(A+C) + \mu''_m(B+D)] - 2[(\mu'_m - \mu'_f)(1 - \mu_m'^2 + \mu_m''^2) + 2\mu'_m\mu_m''^2]E'_fU_f\} + i\{[\mu'_m(B+D) - \mu''_m(A+C)] - 2[-\mu'_m(1 - \mu_m'^2 + \mu_m''^2) + 2(\mu'_m - \mu'_f)(\mu'_m\mu_m'')]E'_fU_f\}}{(A+C)^2 + (B+D)^2} * [(A+C) - i(B+D)]$$

Τελικά ο πραγματικός διαμήκης δυναμικός λόγος Poisson και ο φανταστικός διαμήκης δυναμικός λόγος Poisson προκύπτουν σε παραμετρική μορφή από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\mu'_{LT} = \frac{\{[\mu'_m(A+C) + \mu''_m(B+D)] - 2[(\mu'_m - \mu'_f)(1 - \mu_m'^2 + \mu_m''^2) + 2\mu'_m\mu_m''^2]E'_fU_f\}(A+C) + \{[\mu'_m(B+D) - \mu''_m(A+C)] - 2[-\mu'_m(1 - \mu_m'^2 + \mu_m''^2) + 2(\mu'_m - \mu'_f)(\mu'_m\mu_m'')]E'_fU_f\}(B+D)}{(A+C)^2 + (B+D)^2}$$

$$\mu''_{LT} = \frac{\{[\mu'_m(A+C) + \mu''_m(B+D)] - 2[(\mu'_m - \mu'_f)(1 - \mu_m'^2 + \mu_m''^2) + 2\mu'_m\mu_m''^2]E'_fU_f\}(B+D) - \{[\mu'_m(B+D) - \mu''_m(A+C)] - 2[-\mu'_m(1 - \mu_m'^2 + \mu_m''^2) + 2(\mu'_m - \mu'_f)(\mu'_m\mu_m'')]E'_fU_f\}(A+C)}{(A+C)^2 + (B+D)^2}$$

(3.2.2.5 a, b)

3.2.3 Δυναμικός εγκάρσιος λόγος Poisson

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στην εξίσωση του στατικού εγκάρσιου λόγου Poisson , δηλαδή στην εξίσωση (2.1.49) :

$$\mu_{TT} = \frac{\mu_f \mu_m}{\mu_m U_f + \mu_f (1 - U_f)}$$

έχουμε :

$$\mu_{TT}^* = \frac{\mu_f^* \mu_m^*}{\mu_m^* U_f + \mu_f^* (1 - U_f)} \quad (3.2.3.1)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τον σύνθετο λόγο Poisson από την εξίσωση ορισμού του, δηλαδή από την εξίσωση :

$$\mu^* = \mu' - i\mu'' = \frac{E^*}{2G^*} - 1 \quad (3.1.5.1)$$

Η εξίσωση (3.2.3.1) γίνεται :

$$\mu'_{TT} - i\mu''_{TT} = \frac{\mu'_f(\mu'_m - i\mu''_m)}{(\mu'_m - i\mu''_m)U_f + \mu'_f(1 - U_f)} = \frac{\mu'_f\mu'_m - i\mu'_f\mu''_m}{\mu'_m U_f + \mu'_f(1 - U_f) - i\mu''_m U_f} = \frac{\mu'_f\mu'_m - i\mu'_f\mu''_m}{[\mu'_m U_f + \mu'_f(1 - U_f)]^2 + \mu''_m{}^2 U_f^2} [\mu'_m U_f + \mu'_f(1 - U_f) + i\mu''_m U_f] \Rightarrow$$

$$\mu'_{TT} - i\mu''_{TT} = \frac{\mu'_f \mu'_m [\mu'_m U_f + \mu'_f (1 - U_f)] + \mu'_f \mu''_m{}^2 U_f + i\{\mu'_f \mu'_m \mu''_m U_f - \mu'_f \mu''_m [\mu'_f (1 - U_f) + \mu'_m U_f]\}}{[\mu'_m U_f + \mu'_f (1 - U_f)]^2 + \mu''_m{}^2 U_f^2} \quad (3.2.3.2)$$

Άρα ο πραγματικός εγκάρσιος δυναμικός λόγος Poisson και ο φανταστικός εγκάρσιος δυναμικός λόγος Poisson προκύπτουν :

$$\mu'_{TT} = \frac{\mu'_f \mu'_m [\mu'_m U_f + \mu'_f (1 - U_f)] + \mu'_f \mu''_m{}^2 U_f}{[\mu'_m U_f + \mu'_f (1 - U_f)]^2 + \mu''_m{}^2 U_f^2}, \quad \mu''_{TT} = \frac{\mu'_f \mu''_m [\mu'_f (1 - U_f) + \mu'_m U_f] - \mu'_f \mu'_m \mu''_m U_f}{[\mu'_m U_f + \mu'_f (1 - U_f)]^2 + \mu''_m{}^2 U_f^2} \quad (3.2.3.3 a, b)$$

Θεωρώντας τον εγκάρσιο λόγο Poisson μ_{TT} από τη σχέση των **Halpin-Tsai** :

$$\mu_{TT} = \mu_m \frac{1 + \xi n U_f}{1 - n U_f}, \quad n = \frac{\mu_f - \mu_m}{\mu_f + \xi \mu_m}$$

Αν εφαρμόσουμε τον νόμο της αντιστοιχίας του Hashin έχουμε :

$$n^* = \frac{\mu'_f - (\mu'_m - i\mu''_m)}{\mu'_f + \xi(\mu'_m - i\mu''_m)} = \frac{(\mu'_f - \mu'_m) + i\mu''_m}{\mu'_f + \xi\mu'_m - i\xi\mu''_m} = \frac{[(\mu'_f - \mu'_m) + i\mu''_m][(\mu'_f + \xi\mu'_m) + i\xi\mu''_m]}{(\mu'_f + \xi\mu'_m)^2 + \xi^2\mu''_m{}^2} = \frac{[(\mu'_f - \mu'_m)(\mu'_f + \xi\mu'_m) - \xi\mu''_m{}^2] + i[\mu''_m(\mu'_f + \xi\mu'_m) + \xi\mu''_m(\mu'_f - \mu'_m)]}{(\mu'_f + \xi\mu'_m)^2 + \xi^2\mu''_m{}^2} = n_1 + in_2 \quad (3.2,3,4)$$

$$\mu'_{TT} - i\mu''_{TT} = \frac{(\mu'_m - i\mu''_m)[1 + \xi(n_1 + in_2)U_f]}{1 - (n_1 + in_2)U_f} = \frac{(\mu'_m - i\mu''_m)[1 + \xi(n_1 + in_2)U_f]}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2} [(1 - n_1 U_f) + in_2 U_f] \Rightarrow$$

$$\mu'_{TT} - i\mu''_{TT} = \frac{\{[\mu'_m(1 + \xi n_1 U_f) + \mu''_m \xi n_2 U_f](1 - n_1 U_f) - [-\mu''_m(1 + \xi n_1 U_f) + \mu'_m \xi n_2 U_f]n_2 U_f\} + i\{[\mu'_m(1 + \xi n_1 U_f) + \mu''_m \xi n_2 U_f]n_2 U_f + [-\mu''_m(1 + \xi n_1 U_f) + \mu'_m \xi n_2 U_f](1 - n_1 U_f)\}}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2} \quad (3.2.3.5)$$

Τελικά ο πραγματικός εγκάρσιος δυναμικός λόγος Poisson και ο φανταστικός εγκάρσιος δυναμικός λόγος Poisson προκύπτουν :

$$\mu'_{TT} = \frac{\{[\mu'_m(1 + \xi n_1 U_f) + \mu''_m \xi n_2 U_f](1 - n_1 U_f) - [\mu'_m \xi n_2 U_f - \mu''_m(1 + \xi n_1 U_f)]n_2 U_f\}}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2}$$

$$\mu''_{TT} = \frac{-\{[\mu'_m \xi n_2 U_f - \mu''_m(1 + \xi n_1 U_f)](1 - n_1 U_f) + [\mu'_m(1 + \xi n_1 U_f) + \mu''_m \xi n_2 U_f]n_2 U_f\}}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2} \quad (3.2.3.6 a, b)$$

3.2.4 Δυναμικό εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στην εξίσωση του στατικού διαμήκους μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή στην εξίσωση :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{U_f(1-\mu_f-2\mu_f^2)\lambda^2}{E_f(1-\mu_{TT})} + \frac{(1-\mu_m-2\mu_m^2)(\lambda U_f-1)^2}{E_m(1-U_f)^2(1-\mu_{TT})} + \frac{U_f^2(1+\mu_m)(1-\lambda)^2}{E_m(1-U_f)^2(1-\mu_{TT})} + \frac{2\mu_{LT}^2}{E_L(1-\mu_{TT})} \quad (2.1.43)$$

, όπου :

$$\lambda = \frac{2(1+\mu_m)(1-\mu_m)E_f}{(1+\mu_m)[(1-2\mu_m)U_f+1]E_f + (1-\mu_f-2\mu_f^2)(1-U_f)E_m} \quad (2.1.42)$$

έχουμε :

$$\frac{1}{E_T^*} = \frac{\lambda^{*2}(1-\mu_f^*-2\mu_f^{*2})}{E_f^*(1-\mu_{TT}^*)}U_f + \frac{(1+\mu_m^*)(1-\lambda^*)^2}{E_m^*(1-U_f)(1-\mu_{TT}^*)}U_f + \frac{(\lambda^*U_f-1)^2(1-\mu_m^*-2\mu_m^{*2})}{E_m^*(1-U_f)(1-\mu_{TT}^*)} + \frac{2\mu_{LT}^{*2}}{E_L^*(1-\mu_{TT}^*)} \quad (3.2.4.1)$$

, όπου :

$$\lambda^* = \frac{2(1-\mu_m^*-2\mu_m^{*2})E_f^*}{E_m^*(1-U_f)(1-\mu_f^*-2\mu_f^{*2}) + [(1-\mu_m^*-2\mu_m^{*2})U_f + (1+\mu_m^*)]E_f^*} \quad (3.2.4.2)$$

Αντικαθιστούμε στις παραπάνω εξισώσεις το σύνθετο μέτρο ελαστικότητας και τον σύνθετο λόγο Poisson από τις εξισώσεις ορισμού τους, δηλαδή από τις εξισώσεις (3.1.1.6), (3.1.5.1). Η εξίσωση (3.2.4.2) γίνεται :

$$\lambda^* = \frac{2(1-(\mu'_m-i\mu''_m)-2(\mu'_m-i\mu''_m)^2)E'_f}{(E'_m+iE''_m)(1-U_f)(1-\mu'_f-2\mu_f'^2) + [(1-(\mu'_m-i\mu''_m)-2(\mu'_m-i\mu''_m)^2)U_f + (1+(\mu'_m-i\mu''_m))]E'_f} \Rightarrow$$

$$\lambda^* = \frac{2[(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']E_f'}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2) + [(1 - (\mu'_m - i\mu_m'') - 2(\mu'_m - i\mu_m'')^2)U_f + (1 + (\mu'_m - i\mu_m''))]E_f'} \Rightarrow$$

$$\lambda^* = \frac{2[(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']E_f'}{E_f'\{(1 + \mu'_m)[1 + (1 - 2\mu'_m)U_f] + 2\mu_m''^2U_f + i[2(1 + \mu'_m)\mu_m''U_f - \mu_m''U_f(1 + (1 - 2\mu'_m))]\} + E'_m(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2) + iE''_m(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)}$$

Ομαδοποιώντας πραγματικούς και φανταστικούς όρους :

$$\lambda^* = \frac{2[(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']E_f'}{\{E_f'(1 + \mu'_m)[1 + (1 - 2\mu'_m)U_f] + 2\mu_m''^2U_f + E'_m(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)\} + i\{E_f'[2(1 + \mu'_m)\mu_m''U_f - \mu_m''U_f(1 + (1 - 2\mu'_m))] + E''_m(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)\}} \quad (3.2.4.3)$$

Ο παρανομαστής της εξίσωσης (3.2.4.3) είναι ίδιος με τον παρανομαστή της εξίσωσης (3.2.1.2) του συνθέτου μέτρου ελαστικότητας για αυτό και οι ποσότητες που θέτουμε είναι οι ίδιες A, B, C, D των εξισώσεων (3.2.1.4 a - d).

$$A_1 = E_f'(1 + \mu'_m)[1 + (1 - 2\mu'_m)U_f] + 2\mu_m''^2U_f + E'_m(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)(1 - U_f) \quad , \text{ αυτό είναι το } (A+C)$$

$$B_1 = E_f'[2(1 + \mu'_m)\mu_m''U_f - \mu_m''U_f(1 + (1 - 2\mu'_m))] + E''_m(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2) \quad , \text{ αυτό είναι το } (B+D) \quad (3.2.4.4 \text{ a, b})$$

Τελικά το λ^* προκύπτει σε παραμετρική μορφή :

$$\lambda^* = \frac{2[(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']E_f'(A_1 - iB_1)}{A_1^2 + B_1^2} \Rightarrow$$

$$\lambda^* = \frac{2E_f'[A_1(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + B_1(1 + 4\mu'_m)\mu_m''] + i[A_1(1 + 4\mu'_m)\mu_m'' - B_1(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2)]}{A_1^2 + B_1^2} = \lambda_1 + i\lambda_2 \quad (3.2.4.5)$$

με

$$\lambda_1 = \frac{2E_f'[A_1(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + B_1(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']}{A_1^2 + B_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{[A_1(1 + 4\mu'_m)\mu_m'' - B_1(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2)]}{A_1^2 + B_1^2} \quad (3.2.4.6 a, b)$$

Αντικαθιστούμε στις παραπάνω εξισώσεις το σύνθετο μέτρο ελαστικότητας και τον σύνθετο λόγο Poisson από τις εξισώσεις ορισμού τους, δηλαδή από τις εξισώσεις (3.1.1.6), (3.1.5.1). Η εξίσωση (3.2.4.1) γίνεται :

$$\frac{1}{E_f^*} = \frac{(\lambda_1 + i\lambda_2)^2(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)}{E_f'(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} U_f + \frac{(1 + \mu'_m - i\mu_m'')[1 + (\lambda_1 + i\lambda_2)^2 - 2i(\lambda_1 + i\lambda_2)]}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} U_f + \frac{[(\lambda_1 + i\lambda_2)^2 U_f^2 + 1 - 2(\lambda_1 + i\lambda_2)U_f][1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2 + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} + \frac{2(\mu'_{LT} - i\mu''_{LT})^2}{(E'_L + iE''_L)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} \quad (3.2.4.7)$$

Ο πρώτος δεξιός όρος δίνει :

$$\frac{(\lambda_1 + i\lambda_2)^2(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)}{E'_f(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} U_f = \frac{(\lambda_1^2 + 2i\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2)(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)}{E'_f(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} U_f = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 2i\lambda_1\lambda_2)(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)[(1 - \mu'_{TT}) - i\mu''_{TT}]}{E'_f[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} U_f \Rightarrow$$

$$\frac{(\lambda_1 + i\lambda_2)^2(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)}{E'_f(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} U_f = \frac{(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)U_f}{E'_f[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} \{[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(1 - \mu'_{TT}) + 2\lambda_1\lambda_2\mu''_{TT}] + i[2\lambda_1\lambda_2(1 - \mu'_{TT}) - (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\mu''_{TT}]\} \quad (3.2.4.8)$$

Θέτουμε τις ποσότητες :

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(1 - \mu'_{TT}) + 2\lambda_1\lambda_2\mu''_{TT} = H$$

$$2\lambda_1\lambda_2(1 - \mu'_{TT}) - (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\mu''_{TT} = R \quad (3.2.4.9 \ a, b)$$

Από (3.2.4.8), (3.2.4.9 a, b) :

$$\frac{(\lambda_1 + i\lambda_2)^2(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)}{E'_f(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} U_f = \frac{(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)U_f}{E'_f[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} \{H + iR\} \quad (3.2.4.10)$$

Ο δεύτερος δεξιός όρος δίνει :

$$\frac{(1 + \mu'_m - i\mu''_m)[1 + (\lambda_1 + i\lambda_2)^2 - 2i(\lambda_1 + i\lambda_2)]}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} U_f = \frac{(1 + \mu'_m - i\mu''_m)[1 + (\lambda_1 + i\lambda_2)^2 - 2i(\lambda_1 + i\lambda_2)](E'_m - iE''_m)[(1 - \mu'_{TT}) - i\mu''_{TT}]}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} \frac{U_f}{(1 - U_f)} \Rightarrow$$

$$\frac{(1 + \mu'_m - i\mu''_m)[1 + (\lambda_1 + i\lambda_2)^2 - 2i(\lambda_1 + i\lambda_2)]}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} U_f = \frac{\left\{ [(1 + \mu'_m)[(1 - \lambda_1)^2 - \lambda_2^2] + 2\mu''_m(\lambda_1 - 1)\lambda_2] + i[2(\lambda_1 - 1)\lambda_2(1 + \mu'_m) - \mu''_m[(1 - \lambda_1)^2 - \lambda_2^2]] \right\} \{ [E'_m(1 - \mu'_{TT}) - E''_m\mu''_{TT}] - i[E''_m(1 - \mu'_{TT}) + E'_m\mu''_{TT}] \}}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} \frac{U_f}{(1 - U_f)} \quad (3.2.4.11)$$

Θέτοντας :

$$(1 + \mu'_m)[(1 - \lambda_1)^2 - \lambda_2^2] + 2\mu''_m(\lambda_1 - 1)\lambda_2 = I$$

$$[2(\lambda_1 - 1)\lambda_2(1 + \mu'_m) - \mu''_m[(1 - \lambda_1)^2 - \lambda_2^2]] = J$$

$$[E'_m(1 - \mu'_{TT}) - E''_m\mu''_{TT}] = M$$

$$[E''_m(1 - \mu'_{TT}) + E'_m\mu''_{TT}] = N$$

$$(3.2.4.12 \ a - d)$$

Έχουμε :

$$\frac{(1 + \mu'_m - i\mu''_m)[1 + (\lambda_1 + i\lambda_2)^2 - 2i(\lambda_1 + i\lambda_2)]}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} U_f = \frac{(I + iJ)(M - iN)}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} \frac{U_f}{(1 - U_f)} = \frac{(IM + JN) + i(JM - IN)}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} \frac{U_f}{(1 - U_f)} \quad (3.2.4.13)$$

Ο τρίτος δεξιός όρος δίνει :

$$\begin{aligned} & \frac{[(\lambda_1 + i\lambda_2)^2 U_f^2 + 1 - 2(\lambda_1 + i\lambda_2)U_f][(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} = \frac{[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)U_f^2 + 1 - 2\lambda_1 U_f + 2i\lambda_2 U_f(\lambda_1 U_f - 1)][(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} \Rightarrow \\ & \frac{[(\lambda_1 + i\lambda_2)^2 U_f^2 + 1 - 2(\lambda_1 + i\lambda_2)U_f][(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} = \frac{[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)U_f^2 + 1 - 2\lambda_1 U_f + 2i\lambda_2 U_f(\lambda_1 U_f - 1)][(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu_{TT}''^2](1 - U_f)} \Rightarrow \\ & \frac{[(\lambda_1 + i\lambda_2)^2 U_f^2 + 1 - 2(\lambda_1 + i\lambda_2)U_f][(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} \\ & = \frac{\{[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)U_f^2 + 1 - 2\lambda_1 U_f](1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) - 2\lambda_2 U_f(\lambda_1 U_f - 1)(1 + 4\mu'_m)\mu_m''\} + i\{2\lambda_2 U_f(\lambda_1 U_f - 1)(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)U_f^2 + 1 - 2\lambda_1 U_f](1 + 4\mu'_m)\mu_m''\}}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu_{TT}''^2](1 - U_f)} \{[E'_m(1 - \mu'_{TT}) - E_m''\mu_{TT}''] - i(E_m''(1 - \mu'_{TT}) + E_m'\mu_{TT}'')\} \end{aligned}$$

(3.2.4.14)

Θέτοντας :

$$K = [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)U_f^2 + 1 - 2\lambda_1 U_f](1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) - 2\lambda_2 U_f(\lambda_1 U_f - 1)(1 + 4\mu'_m)\mu_m''$$

$$L = 2\lambda_2 U_f(\lambda_1 U_f - 1)(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)U_f^2 + 1 - 2\lambda_1 U_f](1 + 4\mu'_m)\mu_m''$$

$$M = E'_m(1 - \mu'_{TT}) - E_m''\mu_{TT}''$$

$$N = E_m''(1 - \mu'_{TT}) + E_m'\mu_{TT}''$$

(3.2.4.15 a, d)

Έχουμε :

$$\frac{[(\lambda_1 + i\lambda_2)^2 U_f^2 + 1 - 2(\lambda_1 + i\lambda_2)U_f][(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + i(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']}{(E'_m + iE''_m)(1 - U_f)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} = \frac{\{[K] + i[L]\}\{M - iN\}}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2](1 - U_f)} = \frac{(KM + LN) + i(LM - KN)}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2](1 - U_f)} \quad (3.2.4.16)$$

Ο τέταρτος δεξιός όρος δίνει :

$$\frac{2(\mu'_{LT} - i\mu''_{LT})^2}{(E'_L + iE''_L)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} = \frac{2(\mu'_{LT}{}^2 - \mu''_{LT}{}^2 - 2i\mu'_{LT}\mu''_{LT})}{(E'_L + iE''_L)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} = \frac{2(\mu'_{LT}{}^2 - \mu''_{LT}{}^2 - 2i\mu'_{LT}\mu''_{LT})(E'_L - iE''_L)(1 - \mu'_{TT} - i\mu''_{TT})}{(E_L'^2 + E_L''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} = \frac{2(\mu'_{LT}{}^2 - \mu''_{LT}{}^2 - 2i\mu'_{LT}\mu''_{LT})\{[E'_L(1 - \mu'_{TT}) - E''_L\mu''_{TT}] - i[E'_L(1 - \mu'_{TT}) + E''_L\mu''_{TT}]\}}{(E_L'^2 + E_L''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} \Rightarrow$$

$$\frac{2(\mu'_{LT} - i\mu''_{LT})^2}{(E'_L + iE''_L)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} = \frac{2\{(\mu'_{LT}{}^2 - \mu''_{LT}{}^2)[E'_L(1 - \mu'_{TT}) - E''_L\mu''_{TT}] - 2i\mu'_{LT}\mu''_{LT}[E''_L(1 - \mu'_{TT}) + E'_L\mu''_{TT}]\} - 2i\{2\mu'_{LT}\mu''_{LT}[E'_L(1 - \mu'_{TT}) - E''_L\mu''_{TT}] + (\mu'_{LT}{}^2 - \mu''_{LT}{}^2)[E''_L(1 - \mu'_{TT}) + E'_L\mu''_{TT}]\}}{(E_L'^2 + E_L''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} \quad (3.2.4.17)$$

Θέτοντας :

$$P = E'_L(1 - \mu'_{TT}) - E''_L\mu''_{TT}$$

$$Q = E''_L(1 - \mu'_{TT}) + E'_L\mu''_{TT} \quad (3.2.4.18 a, b)$$

Έχουμε :

$$\frac{2(\mu'_{LT} - i\mu''_{LT})^2}{(E'_L + iE''_L)(1 - \mu'_{TT} + i\mu''_{TT})} = \frac{2\{(\mu'_{LT}{}^2 - \mu''_{LT}{}^2)P - 2\mu'_{LT}\mu''_{LT}Q\} - 2i\{2\mu'_{LT}\mu''_{LT}P + (\mu'_{LT}{}^2 - \mu''_{LT}{}^2)Q\}}{(E_L'^2 + E_L''^2)[(1 - \mu'_{TT})^2 + \mu''_{TT}{}^2]} \quad (3.2.4.19)$$

Ο όρος του αριστερού τμήματος γράφεται :

$$\frac{1}{E_T^*} = \frac{1}{E_T' + iE_T''} = \frac{E_T' - iE_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} = \frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} - i \frac{E_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} \quad (3.2.4.20)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.2.4.7) τις εξισώσεις (3.2.4.10), (3.2.4.13), (3.2.4.16), (3.2.4.19), (3.2.4.20) τελικά προκύπτει :

$$\frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} = \frac{(1 - \mu_f' - 2\mu_f'^2)U_f}{E_f'[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2]} H + \frac{U_f(IM + JN) + (KM + LN)}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2](1 - U_f)} + \frac{2[(\mu_{LT}'^2 - \mu_{LT}''^2)P - 2\mu_{LT}'\mu_{LT}''Q]}{(E_L'^2 + E_L''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2]} = Z \quad (3.2.4.21)$$

$$\frac{E_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} = -\frac{(1 - \mu_f' - 2\mu_f'^2)U_f}{E_f'[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2]} R - \frac{U_f(JM - IN) + (LM - KN)}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2](1 - U_f)} + \frac{2i\{2\mu_{LT}'\mu_{LT}''P + (\mu_{LT}'^2 - \mu_{LT}''^2)Q\}}{(E_L'^2 + E_L''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2]} = V \quad (3.2.4.22)$$

$$\begin{aligned} (3.2.4.21) &\Rightarrow \frac{E_T'}{E_T''} = \frac{Z}{V} \Rightarrow E_T' = \frac{Z}{V} E_T'' \end{aligned} \quad (3.2.4.23)$$

$$(3.2.4.21) \xrightarrow{(3.2.4.23)} \frac{\frac{Z}{V} E_T''}{\left(\frac{Z}{V} E_T''\right)^2 + E_T''^2} = Z \Rightarrow \frac{\frac{Z}{V} E_T''}{E_T''^2 \left[\left(\frac{Z}{V}\right)^2 + 1\right]} = Z \Rightarrow \frac{\frac{1}{V}}{E_T'' \left(\frac{Z^2 + V^2}{V^2}\right)} = 1 \Rightarrow E_T'' = \frac{V}{Z^2 + V^2} \quad (3.2.4.24)$$

$$\text{Και από την (3.2.4.23)} \xrightarrow{(3.2.4.24)} E_T' = \frac{Z}{V} \frac{V}{Z^2 + V^2} = \frac{Z}{Z^2 + V^2} \quad (3.4.4.25)$$

$$\text{Επίσης : } \tan \delta_T = \frac{E_T''}{E_T'} = \frac{\frac{V}{Z^2 + V^2}}{\frac{Z}{Z^2 + V^2}} = \frac{V}{Z} \quad (3.2.4.26)$$

3.2.5 Δυναμικό μέτρο διατμήσεως

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο των **Hashin-Rosen** για το δυναμικό διαμήκες μέτρο διατμήσεως :

$$G_{LT}^* = \frac{[(G_f^* + G_m^*) + (G_f^* - G_m^*)U_f]G_m^*}{[(G_f^* + G_m^*) - (G_f^* - G_m^*)U_f]} \quad (3.2.5.1)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.2.5.1) την σχέση ορισμού του συνθέτου μέτρου διάτμησης, δηλαδή την εξίσωση :

$$G^* = G' + iG'' = \frac{E^*}{2(1 + \mu^*)} \quad (3.1.7.1)$$

έχουμε:

$$G'_{LT} + iG''_{LT} = \frac{[(G'_f + G'_m + iG''_m) + (G'_f U_f - G'_m U_f - iG''_m U_f)](G'_m + iG''_m)}{[(G'_f + G'_m + iG''_m) - (G'_f U_f - G'_m U_f - iG''_m U_f)]} = \frac{\{[(G'_f(1 + U_f) + G'_m(1 - U_f))] + iG''_m(1 - U_f)\}(G'_m + iG''_m)}{[G'_f(1 - U_f) + G'_m(1 + U_f)] + iG''_m(1 + U_f)} \Rightarrow$$

$$G'_{LT} + iG''_{LT} = \frac{\{(G'_m[G'_f(1 + U_f) + G'_m(1 - U_f)] - G''_m{}^2(1 - U_f)\} + i\{G'_m G''_m(1 - U_f) + G''_m[G'_f(1 + U_f) + G'_m(1 - U_f)]\}}{[G'_f(1 - U_f) + G'_m(1 + U_f)] + iG''_m(1 + U_f)} \Rightarrow$$

$$G'_{LT} + iG''_{LT} = \frac{\{[(G'_m[G'_f(1 + U_f) + G'_m(1 - U_f)] - G''_m{}^2(1 - U_f)] + i[G'_m G''_m(1 - U_f) + G''_m[G'_f(1 + U_f) + G'_m(1 - U_f)]]\}\{[G'_f(1 - U_f) + G'_m(1 + U_f)] - iG''_m(1 + U_f)\}}{[G'_f(1 - U_f) + G'_m(1 + U_f)]^2 + G''_m{}^2(1 + U_f)^2}$$

Έτσι προκύπτουν ο πραγματικός δυναμικός διαμήκης λόγος διάτμησης και ο φανταστικός δυναμικός διαμήκης λόγος διάτμησης ως εξής :

$$G'_{LT} = \frac{\{[(G'_m[G'_f(1+U_f) + G'_m(1-U_f)] - G_m''^2(1-U_f))[G'_f(1-U_f) + G'_m(1+U_f)] + G_m''(1+U_f)[G'_m G_m''(1-U_f) + G_m''[G'_f(1+U_f) + G'_m(1-U_f)]]\}}{[G'_f(1-U_f) + G'_m(1+U_f)]^2 + G_m''^2(1+U_f)^2}$$

$$G''_{LT} = \frac{\{[G'_m G_m''(1-U_f) + G_m''[G'_f(1+U_f) + G'_m(1-U_f)]] [G'_f(1-U_f) + G'_m(1+U_f)] - [(G'_m[G'_f(1+U_f) + G'_m(1-U_f)] - G_m''^2(1-U_f))G_m''(1+U_f)\}}{[G'_f(1-U_f) + G'_m(1+U_f)]^2 + G_m''^2(1+U_f)^2} \quad (3.2.5.2 \text{ a, b})$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο των **Halpin- Tsai** για το δυναμικό διάμηκες μέτρο διατμήσεως :

$$G_{LT}^* = G_m^* \frac{1 + \xi n^* U_f}{1 - n^* U_f}, \quad n^* = \frac{G_f^* - G_m^*}{G_f^* + \xi G_m^*} \quad (3.2.5.3)$$

$$n^* = \frac{G'_f - (G'_m + iG_m'')}{G'_f + \xi(G'_m - iG_m'')} = \frac{(G'_f - G'_m) - iG_m''}{(G'_f + \xi G'_m) + i\xi G_m''} = \frac{[(G'_f - G'_m) - iG_m''][(G'_f + \xi G'_m) - i\xi G_m'']}{(G'_f + \xi G'_m)^2 + \xi^2 G_m''^2} = \frac{[(G'_f - G'_m)(G'_f + \xi G'_m) - \xi G_m''^2] - i[G_m''(G'_f + \xi G'_m) + \xi G_m''(G'_f - G'_m)]}{(G'_f + \xi G'_m)^2 + \xi^2 G_m''^2} = n_1 - in_2 \quad (3.2.5.4)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.2.5.3) την (3.2.5.4) και την σχέση ορισμού του συνθέτου μέτρου διάτμησης (3.1.7.1), προκύπτει :

$$G'_{LT} + iG''_{LT} = \frac{(G'_m + iG_m'')[1 + \xi(n_1 - in_2)U_f]}{1 - (n_1 - in_2)U_f} = \frac{(G'_m + iG_m'')[1 + \xi(n_1 - in_2)U_f]}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2} [(1 - n_1 U_f) - in_2 U_f] \Rightarrow$$

$$G'_{LT} + iG''_{LT} = \frac{\{[G'_m(1 + \xi n_1 U_f) + G''_m \xi n_2 U_f](1 - n_1 U_f) + [G''_m(1 + \xi n_1 U_f) - G'_m \xi n_2 U_f]n_2 U_f\} + i\{[G''_m(1 + \xi n_1 U_f) - G'_m \xi n_2 U_f](1 - n_1 U_f) - [G'_m(1 + \xi n_1 U_f) + G''_m \xi n_2 U_f]n_2 U_f\}}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2} \quad (3.2.5.5)$$

Τελικά ο πραγματικός δυναμικός διαμήκης λόγος διάτμησης και ο φανταστικός δυναμικός διαμήκης λόγος διάτμησης βάσει του τύπου των **Halpin-Tsai** προκύπτουν:

$$G'_{LT} = \frac{[G'_m(1 + \xi n_1 U_f) + G''_m \xi n_2 U_f](1 - n_1 U_f) + [G''_m(1 + \xi n_1 U_f) - G'_m \xi n_2 U_f]n_2 U_f}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2}$$

$$G''_{LT} = \frac{[G''_m(1 + \xi n_1 U_f) - G'_m \xi n_2 U_f](1 - n_1 U_f) - [G'_m(1 + \xi n_1 U_f) + G''_m \xi n_2 U_f]n_2 U_f}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2} \quad (3.2.5.6 a, b)$$

$$\tan \delta_G = \frac{G''_{LT}}{G'_{LT}} \quad (3.2.5.7)$$

3.2.6 Δυναμικό μέτρο ελαστικότητας συναρτήσει της γωνίας θ των ινών

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο για το υπό γωνία δυναμικό μέτρο ελαστικότητας, δηλαδή στην εξίσωση :

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta}{E_T} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\mu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (2.1.53)$$

έχουμε :

$$\frac{1}{E_\theta^*} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L^*} + \frac{\sin^4 \theta}{E_T^*} + \left(\frac{1}{G_{LT}^*} - \frac{2\mu_{LT}^*}{E_L^*} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \xrightarrow[(3.1.5.1)]{(3.1.1.6)} \frac{1}{E'_\theta + iE''_\theta} = \frac{\cos^4 \theta}{E'_L + iE''_L} + \frac{\sin^4 \theta}{E'_T + iE''_T} + \left(\frac{1}{G'_{LT} + iG''_{LT}} - \frac{2(\mu'_{LT} - i\mu''_{LT})}{E'_L + iE''_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (3.2.6.1)$$

Ο αριστερός όρος γράφεται :

$$\frac{1}{E'_\theta + iE''_\theta} = \frac{E'_\theta - iE''_\theta}{E'^2_\theta + E''^2_\theta} \quad (3.2.6.2)$$

Ο πρώτος δεξιός όρος δίνει :

$$\frac{\cos^4 \theta}{E'_L + iE''_L} = \frac{(E'_L - iE''_L) \cos^4 \theta}{E'^2_L + E''^2_L} \quad (3.2.6.3)$$

Ο δεύτερος δεξιός όρος δίνει :

$$\frac{\sin^4 \theta}{E'_T + iE''_T} = \frac{(E'_T - iE''_T) \sin^4 \theta}{E'^2_T + E''^2_T} \quad (3.2.6.4)$$

Ο τρίτος δεξιός όρος δίνει :

$$\left(\frac{1}{G'_{LT} + iG''_{LT}} - \frac{2(\mu'_{LT} - i\mu''_{LT})}{E'_L + iE''_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \left(\frac{G'_{LT} - iG''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} - \frac{2(\mu'_{LT} - i\mu''_{LT})(E'_L - iE''_L)}{E'^2_L + E''^2_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \left(\frac{G'_{LT} - iG''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} - \frac{2[(\mu'_{LT}E'_L - \mu''_{LT}E''_L) - i(\mu'_{LT}E'_L + \mu''_{LT}E''_L)]}{E'^2_L + E''^2_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (3.2.6.5)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.2.6.2), (3.2.6.3), (3.2.6.4), (3.2.6.5) στην εξίσωση (3.2.6.1) :

$$\frac{E'_\theta}{E'^2_\theta + E''^2_\theta} = \frac{E'_L}{E'^2_L + E''^2_L} \cos^4 \theta + \frac{E'_T}{E'^2_T + E''^2_T} \sin^4 \theta + \left[\frac{G'_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} - \frac{2[\mu'_{LT}E'_L - \mu''_{LT}E''_L]}{E'^2_L + E''^2_L} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \Phi \quad (3.2.6.6)$$

$$\frac{E''_{\theta}}{E'_{\theta}{}^2 + E''_{\theta}{}^2} = \frac{E''_L}{E'_L{}^2 + E''_L{}^2} \cos^4 \theta + \frac{E''_T}{E'_T{}^2 + E''_T{}^2} \sin^4 \theta + \left[\frac{G''_{LT}}{G'_L{}^2 + G''_L{}^2} - \frac{2[\mu''_{LT} E'_L + \mu'_{LT} E''_L]}{E'_L{}^2 + E''_L{}^2} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \Omega \quad (3.2.6.7)$$

$$\frac{(3.2.6.6)}{(3.2.6.7)} \Rightarrow \frac{E'_{\theta}}{E''_{\theta}} = \frac{\Phi}{\Omega} \Rightarrow E'_{\theta} = \frac{\Phi}{\Omega} E''_{\theta} \quad (3.2.6.8)$$

Το δυναμικό μέτρο απωλειών για οποιαδήποτε γωνία θ των ινών υπολογίζεται από :

$$(3.2.6.6) \xrightarrow{(3.2.4.8)} \frac{\frac{\Phi}{\Omega} E''_{\theta}}{\left(\frac{\Phi}{\Omega} E''_{\theta}\right)^2 + E''_{\theta}{}^2} = \Phi \Rightarrow \frac{\frac{\Phi}{\Omega} E''_{\theta}}{E''_{\theta}{}^2 \left[\left(\frac{\Phi}{\Omega}\right)^2 + 1\right]} = \Phi \Rightarrow \frac{\frac{1}{\Omega}}{E''_{\theta} \left(\frac{\Phi^2 + \Omega^2}{\Omega}\right)} = 1 \Rightarrow E''_{\theta} = \frac{\Omega}{\Phi^2 + \Omega^2} \quad (3.2.6.9)$$

Το δυναμικό μέτρο αποθήκευσης για οποιαδήποτε γωνία των ινών υπολογίζεται από :

$$(3.2.6.8) \xrightarrow{(3.2.6.9)} E'_{\theta} = \frac{\Phi}{\Omega} \frac{\Omega}{\Phi^2 + \Omega^2} = \frac{\Phi}{\Phi^2 + \Omega^2} \quad (3.2.6.10)$$

$$\text{Επίσης : } \tan \delta_{\theta} = \frac{E''_{\theta}}{E'_{\theta}} = \frac{\frac{\Omega}{\Phi^2 + \Omega^2}}{\frac{\Phi}{\Phi^2 + \Omega^2}} = \frac{\Omega}{\Phi} \quad (3.2.6.11)$$

3.2.7 Δυναμικό μέτρο διατμήσεως συναρτήσει της γωνίας θ των ιών

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο για το υπό γωνία δυναμικό μέτρο διατμήσεως, δηλαδή στην εξίσωση :

$$\frac{1}{G_\theta} = 4 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{2\mu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \quad (2.1.54)$$

έχουμε :

$$\frac{1}{G_\theta^*} = 4 \left(\frac{1}{E_L^*} + \frac{1}{E_T^*} + \frac{2\mu_{LT}^*}{E_L^*} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \quad (3.2.7.1)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση το σύνθετο μέτρο ελαστικότητας, το σύνθετο μέτρο διατμήσεως και τον σύνθετο λόγο Poisson από τις εξισώσεις ορισμού τους, δηλαδή από τις εξισώσεις (3.1.1.6), (3.1.5.1), (3.1.7.1) :

$$\frac{1}{G'_\theta + iG''_\theta} = 4 \left(\frac{1}{E'_L + iE''_L} + \frac{1}{E'_T + iE''_T} + \frac{2(\mu'_{LT} - i\mu''_{LT})}{E'_L + iE''_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G'_{LT} + iG''_{LT}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \quad (3.2.7.2)$$

$$(3.2.7.2) \Rightarrow \frac{G'_\theta - iG''_\theta}{G'^2_\theta + G''^2_\theta} = 4 \left\{ \frac{E'_L - iE''_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E'_T - iE''_T}{E'^2_T + E''^2_T} + \frac{2(\mu'_{LT} - i\mu''_{LT})(E'_L - iE''_L)}{E'^2_L + E''^2_L} \right\} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{G'_{LT} - iG''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{G'_\theta - iG''_\theta}{G'^2_\theta + G''^2_\theta} = 4 \left\{ \frac{E'_L - iE''_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E'_T - iE''_T}{E'^2_T + E''^2_T} + \frac{2[(\mu'_{LT}E'_L - \mu''_{LT}E''_L) - i(\mu'_{LT}E'_L + \mu''_{LT}E''_L)]}{E'^2_L + E''^2_L} \right\} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{G'_{LT} - iG''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \quad (3.2.7.3)$$

Από (3.2.7.3) \Rightarrow

$$\frac{G'_\theta}{G'^2_\theta + G''^2_\theta} = 4 \left\{ \frac{E'_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E'_T}{E'^2_T + E''^2_T} + \frac{2(\mu'_{LT}E'_L - \mu''_{LT}E''_L)}{E'^2_L + E''^2_L} \right\} \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{G'_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 = P \quad (3.2.7.4)$$

$$\frac{G''_\theta}{G'^2_\theta + G''^2_\theta} = 4 \left\{ \frac{E''_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E''_T}{E'^2_T + E''^2_T} + \frac{2(\mu''_{LT}E'_L + \mu'_{LT}E''_L)}{E'^2_L + E''^2_L} \right\} \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{G''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 = Q \quad (3.2.7.5)$$

Επιλύουμε με την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στις παραγράφους 3.2.4 και 3.2.6. Τελικά ο πραγματικός δυναμικός λόγος διάτμησης συναρτήσσει της γωνίας των ινών και ο φανταστικός δυναμικός λόγος διάτμησης συναρτήσσει της γωνίας των ινών προκύπτουν:

$$G'_\theta = \frac{P}{P^2 + Q^2} \quad (3.2.7.6)$$

$$G''_\theta = \frac{Q}{P^2 + Q^2} \quad (3.2.7.7)$$

3.2.8 Δυναμικός λόγος Poisson συναρτήσει της γωνίας θ των ινών

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο για το υπό γωνία δυναμικό μέτρο διατμήσεως, δηλαδή στην εξίσωση :

$$\frac{\mu_{\theta}}{E_{\theta}} = -\left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{\mu_{LT}}{E_L} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \quad (2.1.55)$$

έχουμε :

$$\frac{\mu_{\theta}^*}{E_{\theta}^*} = -\left(\frac{1}{E_L^*} + \frac{1}{E_T^*} - \frac{1}{G_{LT}^*}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{\mu_{LT}^*}{E_L^*} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \quad (3.2.8.1)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση το σύνθετο μέτρο ελαστικότητας, το σύνθετο μέτρο διατμήσεως και τον σύνθετο λόγο Poisson από τις εξισώσεις ορισμού τους, δηλαδή από τις εξισώσεις (3.1.1.6), (3.1.5.1), (3.1.7.1) :

$$\frac{\mu'_{\theta} - i\mu''_{\theta}}{E'_{\theta} + iE''_{\theta}} = -\left(\frac{1}{E'_L + iE''_L} + \frac{1}{E'_T + iE''_T} - \frac{1}{G'_{LT} + G''_{LT}}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{\mu'_{LT} - i\mu''_{LT}}{E'_L + iE''_L} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \quad (3.2.8.2)$$

$$(3.2.8.2) \Rightarrow \frac{(\mu'_{\theta} - i\mu''_{\theta})(E'_{\theta} + iE''_{\theta})}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} = -\left(\frac{E'_L - iE''_L}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E'_T - iE''_T}{E_T'^2 + E_T''^2} - \frac{G'_{LT} - G''_{LT}}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{(\mu'_{LT} - i\mu''_{LT})(E'_L - iE''_L)}{E_L'^2 + E_L''^2} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \Rightarrow$$

$$\frac{(\mu'_{\theta}E'_{\theta} - \mu''_{\theta}E''_{\theta}) - i(\mu''_{\theta}E'_{\theta} + \mu'_{\theta}E''_{\theta})}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} = -\left(\frac{E'_L - iE''_L}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E'_T - iE''_T}{E_T'^2 + E_T''^2} - \frac{G'_{LT} - G''_{LT}}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{(\mu'_{LT}E'_L - \mu''_{LT}E''_L) - i(\mu''_{LT}E'_L + \mu'_{LT}E''_L)}{E_L'^2 + E_L''^2} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \quad (3.2.8.3)$$

Από (3.2.8.3) \Rightarrow

$$\frac{\mu'_\theta E'_\theta - \mu''_\theta E''_\theta}{E'^2_\theta + E''^2_\theta} = - \left(\frac{E'_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E'_T}{E'^2_T + E''^2_T} - \frac{G'_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\mu'_{LT} E'_L - \mu''_{LT} E''_L}{E'^2_L + E''^2_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = T \quad (3.2.8.4)$$

$$\frac{\mu''_\theta E'_\theta + \mu'_\theta E''_\theta}{E'^2_\theta + E''^2_\theta} = - \left(\frac{E''_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E''_T}{E'^2_T + E''^2_T} - \frac{G''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\mu''_{LT} E'_L - \mu'_{LT} E''_L}{E'^2_L + E''^2_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = W \quad (3.2.8.5)$$

$$(3.2.8.4) \Rightarrow \frac{\mu'_\theta E'_\theta - \mu''_\theta E''_\theta}{E'^2_\theta + E''^2_\theta} = T \Rightarrow \mu'_\theta E'_\theta = T(E'^2_\theta + E''^2_\theta) + \mu''_\theta E''_\theta \Rightarrow \mu'_\theta = \frac{T(E'^2_\theta + E''^2_\theta) + \mu''_\theta E''_\theta}{E'_\theta} \quad (3.2.8.6)$$

Από (3.2.8.5) $\xrightarrow{(3.2.8.6)}$

$$\mu'_\theta E'_\theta = W(E'^2_\theta + E''^2_\theta) - \frac{T(E'^2_\theta + E''^2_\theta) + \mu''_\theta E''_\theta}{E'_\theta} E''_\theta \Rightarrow \mu''_\theta (E'_\theta + \frac{E''_\theta}{E'_\theta} E''_\theta) = W(E'^2_\theta + E''^2_\theta) - \frac{T(E'^2_\theta + E''^2_\theta) E''_\theta}{E'_\theta} \Rightarrow \mu''_\theta (E'_\theta + \frac{E''_\theta}{E'_\theta} E''_\theta) = (E'^2_\theta + E''^2_\theta) (W - \frac{T E''_\theta}{E'_\theta})$$

$$\Rightarrow \mu''_\theta (E'_\theta + \tan \delta_\theta E''_\theta) = (E'^2_\theta + E''^2_\theta) (W - T \tan \delta_\theta) \Rightarrow \mu''_\theta = \frac{(E'^2_\theta + E''^2_\theta) (W - T \tan \delta_\theta)}{(E'_\theta + \tan \delta_\theta E''_\theta)} = (W E'_\theta - T E''_\theta) \quad (3.2.8.7)$$

$$\text{Από (3.2.8.6) } \xrightarrow{(3.2.8.7)} \mu'_\theta = \frac{T(E'^2_\theta + E''^2_\theta) + \frac{(E'^2_\theta + E''^2_\theta) (W - T \tan \delta_\theta)}{(E'_\theta + \tan \delta_\theta E''_\theta)} E''_\theta}{E'_\theta} = \frac{T(E'^2_\theta + E''^2_\theta)}{E'_\theta} + \frac{(E'^2_\theta + E''^2_\theta) (W - T \tan \delta_\theta)}{(E'_\theta + \tan \delta_\theta E''_\theta)} \tan \delta_\theta \quad (3.2.8.8)$$

η οποία μπορεί να εκφραστεί και ως εξής :

$$\mu'_\theta = \frac{T}{\Phi} + \frac{\Omega}{\Phi} (W E'_\theta - T E''_\theta) = \frac{T}{\Phi} + \frac{\Omega}{\Phi} \mu''_\theta = \frac{1}{\Phi} (T + \Omega) \mu''_\theta \quad (3.2.8.9)$$

3.3 Δυναμικές σταθερές για $\mu_m''=0$

Με σκοπό την απόκτηση πιο συμπαγών εκφράσεων και με δεδομένο ότι το μ_m'' είναι πολύ μικρό (πρακτικά θεωρείται $\mu_m'' \rightarrow 0$), έχουμε :

3.3.1 Δυναμικό διάμηκες μέτρο ελαστικότητας

Από τις εξισώσεις (3.2.1.3) και (3.2.1.4 a, d) για $\mu_m'' = 0$ προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις:

$$F_0 = (\mu_f - \mu_m)^2$$

$$A = E_m'(1 - U_f)(1 - \mu_f' - 2\mu_f'^2)$$

$$B = E_m''(1 - U_f)(1 - \mu_f' - 2\mu_f'^2)$$

$$C_0 = [(1 - \mu_m' - 2\mu_m'^2)U_f + (1 + \mu_m')]E_f'$$

$$D_0 = 0$$

(3.3.1.1 a - e)

Από τις εξισώσεις (3.2.1.6 a, b), (3.3.1.1 a - e) προκύπτουν οι παρακάτω παραμετρικές εκφράσεις:

$$E_L' = \frac{\{E_f'U_f(A + C_0) + [E_m'(A + C_0) - E_m''B](1 - U_f) + 2[F_0E_m']E_f'(1 - U_f)U_f\}(A + C_0) + \{E_f'U_fB + [E_m''(A + C_0) + E_m'B](1 - U_f) + 2[F_0E_m'']E_f'(1 - U_f)U_f\}B}{(A + C_0)^2 + B^2}$$

$$E_L'' = \frac{\{-[E_f'U_f(A + C_0) + [E_m'(A + C_0) - E_m''B](1 - U_f) + 2[F_0E_m']E_f'(1 - U_f)U_f\}B + \{E_f'U_fB + [E_m''(A + C_0) + E_m'B](1 - U_f) + 2[F_0E_m'']E_f'(1 - U_f)U_f\}(A + C_0)}{(A + C_0)^2 + B^2}$$

(3.3.1.2 a, b)

3.3.2 Δυναμικός διαμήκης λόγος Poisson

Από τις εξισώσεις (3.2.2.5 a, b) , (3.3.1.1 b – e) προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις :

$$\mu'_{LT} = \frac{\{[\mu'_m(A + C_0)] - 2[(\mu'_m - \mu'_f)(1 - \mu'_m{}^2)]E'_f U_f\}(A + C_0) + \{[\mu'_m B]\}B}{(A + C_0)^2 + B^2}$$

$$\mu''_{LT} = \frac{\{[\mu'_m(A + C_0)] - 2[(\mu'_m - \mu'_f)(1 - \mu'_m{}^2)]E'_f U_f\}B - \{[\mu'_m B]\}(A + C_0)}{(A + C_0)^2 + B^2} \quad (3.3.2.1 \ a, b)$$

3.3.3 Δυναμικός εγκάρσιος λόγος Poisson

Για $\mu''_m = 0$ από την εξίσωση (3.2.3.3 a, b) :

$$\mu'_{TT} = \frac{\mu'_f \mu'_m [\mu'_m U_f + \mu'_f (1 - U_f)]}{[\mu'_m U_f + \mu'_f (1 - U_f)]^2} , \mu''_{TT} = 0 \quad (3.3.3.1 \ a, b)$$

Θεωρώντας τον εγκάρσιο λόγο Poisson μ_{TT} από τη σχέση των **Halpin-Tsai** για $\mu''_m = 0$:

$$\mu'_{TT} = \frac{\{[\mu'_m(1 + \xi n_1 U_f)](1 - n_1 U_f) - [\mu'_m \xi n_2 U_f] n_2 U_f\}}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2} , \quad \mu''_{TT} = \frac{-\{[\mu'_m \xi n_2 U_f](1 - n_1 U_f) + [\mu'_m(1 + \xi n_1 U_f)] n_2 U_f\}}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2} \quad (3.3.3.2 \ a, b)$$

3.3.4 Δυναμικό εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στην εξίσωση του στατικού διαμήκους μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή στην εξίσωση :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{U_f(1-\mu_f-2\mu_f^2)\lambda^2}{E_f(1-\mu_{TT})} + \frac{(1-\mu_m-2\mu_m^2)(\lambda U_f-1)^2}{E_m(1-U_f)^2(1-\mu_{TT})} + \frac{U_f^2(1+\mu_m)(1-\lambda)^2}{E_m(1-U_f)^2(1-\mu_{TT})} + \frac{2\mu_{LT}^2}{E_L(1-\mu_{TT})} \quad (2.1.43)$$

, όπου :

$$\lambda = \frac{2(1+\mu_m)(1-\mu_m)E_f}{(1+\mu_m)[(1-2\mu_m)U_f+1]E_f + (1-\mu_f-2\mu_f^2)(1-U_f)E_m} \quad (2.1.42)$$

έχουμε :

$$\frac{1}{E_T^*} = \frac{\lambda^{*2}(1-\mu_f^*-2\mu_f^{*2})}{E_f^*(1-\mu_{TT}^*)}U_f + \frac{(1+\mu_m^*)(1-\lambda^*)^2}{E_m^*(1-U_f)(1-\mu_{TT}^*)}U_f + \frac{(\lambda^*U_f-1)^2(1-\mu_m^*-2\mu_m^{*2})}{E_m^*(1-U_f)(1-\mu_{TT}^*)} + \frac{2\mu_{LT}^{*2}}{E_L^*(1-\mu_{TT}^*)} \quad (3.2.4.1)$$

, όπου :

$$\lambda^* = \frac{2(1-\mu_m^*-2\mu_m^{*2})E_f^*}{E_m^*(1-U_f)(1-\mu_f^*-2\mu_f^{*2}) + [(1-\mu_m^*-2\mu_m^{*2})U_f + (1+\mu_m^*)]E_f^*} \quad (3.2.4.2)$$

Αντικαθιστούμε στις παραπάνω εξισώσεις το σύνθετο μέτρο ελαστικότητας και τον σύνθετο λόγο Poisson από τις εξισώσεις ορισμού τους, δηλαδή από τις εξισώσεις (3.1.1.6), (3.1.5.1). Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.2.4 η εξίσωση (3.2.4.2) γίνεται σε παραμετρική μορφή η εξίσωση (3.2.4.5):

$$\lambda^* = \frac{2E'_f[A_1(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + B_1(1 + 4\mu'_m)\mu_m''] + i[A_1(1 + 4\mu'_m)\mu_m'' - B_1(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2)]}{A_1^2 + B_1^2} = \lambda_1 + i\lambda_2 \quad (3.2.4.5)$$

με

$$\lambda_1 = \frac{2E'_f[A_1(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2) + B_1(1 + 4\mu'_m)\mu_m'']}{A_1^2 + B_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{[A_1(1 + 4\mu'_m)\mu_m'' - B_1(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2)]}{A_1^2 + B_1^2} \quad (3.2.4.6 a, b)$$

Ο παρανομαστής της εξίσωσης (3.2.4.3) είναι ίδιος με τον παρανομαστή της εξίσωσης (3.2.1.2) του συνθέτου μέτρου ελαστικότητας για αυτό και οι ποσότητες που θέτουμε είναι οι ίδιες A, B, C, D των εξισώσεων (3.2.1.4 a – d).

Για $\mu_m'' = 0$ από την εξίσωση (3.2.4.4 a, b) :

$$(A_1)_0 = E'_f(1 + \mu'_m)[1 + (1 - 2\mu_m')U_f] + E'_m(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)(1 - U_f) \quad , \text{ αυτό είναι το } (A+C) \text{ για } \mu_m'' = 0$$

$$(B_1)_0 = E_m''(1 - U_f)(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2) \quad , \text{ αυτό είναι το } (B+D) \text{ για } \mu_m'' = 0 \quad (3.3.4.1)$$

και από τις εξισώσεις (3.3.4.1), (3.2.4.6 a, b) :

$$(\lambda_1)_0 = \frac{2E'_f[(A_1)_0(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2)]}{(A_1)_0^2 + (B_1)_0^2}, \quad (\lambda_2)_0 = \frac{[-(B_1)_0(1 - \mu'_m - 2\mu_m'^2)]}{(A_1)_0^2 + (B_1)_0^2} \quad (3.3.4.2 a, b)$$

Αντικαθιστούμε στις παραπάνω εξισώσεις το σύνθετο μέτρο ελαστικότητας και τον σύνθετο λόγο Poisson από τις εξισώσεις ορισμού τους, δηλαδή από τις εξισώσεις (3.1.1.6), (3.1.5.1). Η εξίσωση (3.2.4.1) γίνεται :

$$\frac{1}{E_T^*} = \frac{(\lambda_1 + i\lambda_2)^2(1 - \mu_f' - 2\mu_f'^2)}{E_f'(1 - \mu_{TT}' + i\mu_{TT}'^2)} U_f + \frac{(1 + \mu_m' - i\mu_m'')(1 + (\lambda_1 + i\lambda_2)^2 - 2i(\lambda_1 + i\lambda_2))}{(E_m' + iE_m'')(1 - U_f)(1 - \mu_{TT}' + i\mu_{TT}'^2)} U_f + \frac{[(\lambda_1 + i\lambda_2)^2 U_f^2 + 1 - 2(\lambda_1 + i\lambda_2)U_f][1 - \mu_m' - 2\mu_m'^2 + 2\mu_m''^2 + i(1 + 4\mu_m')\mu_m'']}{(E_m' + iE_m'')(1 - U_f)(1 - \mu_{TT}' + i\mu_{TT}'^2)} + \frac{2(\mu_{LT}' - i\mu_{LT}'')^2}{(E_L' + iE_L'')(1 - \mu_{TT}' + i\mu_{TT}'^2)} \quad (3.2.4.7)$$

Τελικά όπως είδαμε στην παράγραφο 3.2.4 σε παραμετρική μορφή προκύπτει :

$$\frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} = \frac{(1 - \mu_f' - 2\mu_f'^2)U_f}{E_f'[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2]} H + \frac{U_f(IM + JN) + (KM + LN)}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2](1 - U_f)} + \frac{2[(\mu_{LT}'^2 - \mu_{LT}''^2)P - 2\mu_{LT}'\mu_{LT}''Q]}{(E_L'^2 + E_L''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2]} = Z \quad (3.2.4.21)$$

$$\frac{E_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} = -\frac{(1 - \mu_f' - 2\mu_f'^2)U_f}{E_f'[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2]} R - \frac{U_f(JM - IN) + (LM - KN)}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2](1 - U_f)} + \frac{2i\{2\mu_{LT}'\mu_{LT}''P + (\mu_{LT}'^2 - \mu_{LT}''^2)Q\}}{(E_L'^2 + E_L''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}'^2]} = V \quad (3.2.4.22)$$

Για $\mu_m'' = 0$ από τις εξισώσεις (3.2.4.9 a - b), (3.3.4.2 a, b) :

$$H_0 = ((\lambda_1)_0^2 - (\lambda_2)_0^2)(1 - \mu_{TT}') + 2(\lambda_1)_0(\lambda_2)_0\mu_{TT}''$$

$$R_0 = 2(\lambda_1)_0(\lambda_2)_0(1 - \mu_{TT}') - ((\lambda_1)_0^2 - (\lambda_2)_0^2)\mu_{TT}'' \quad (3.3.4.3 a, b)$$

Για $\mu_m'' = 0$ από τις εξισώσεις (3.2.4.12 a - d) , (3.3.4.2 a, b) :

$$I_0 = (1 + \mu_m')[(1 - (\lambda_1)_0)^2 - (\lambda_2)_0^2]$$

$$J_0 = 2[(\lambda_1)_0 - 1](\lambda_2)_0(1 + \mu_m')$$

$$M = [E_m'(1 - \mu_{TT}') - E_m''\mu_{TT}'']$$

$$N = [E_m''(1 - \mu_{TT}') + E_m'\mu_{TT}'']$$

(3.3.4.4 a - d)

Για $\mu_m'' = 0$ από τις εξισώσεις (3.2.4.15 a - d) , (3.3.4.2 a, b) :

$$K_0 = [((\lambda_1)_0^2 - (\lambda_2)_0^2)U_f^2 + 1 - 2(\lambda_1)_0U_f](1 - \mu_m' - 2\mu_m'^2)$$

$$L_0 = 2(\lambda_2)_0U_f[(\lambda_1)_0U_f - 1](1 - \mu_m' - 2\mu_m'^2)$$

$$M = E_m'(1 - \mu_{TT}') - E_m''\mu_{TT}''$$

$$N = E_m''(1 - \mu_{TT}') + E_m'\mu_{TT}''$$

(3.3.4.5 a - d)

Για $\mu_m'' = 0$ από τις εξισώσεις (3.2.4.18 a - d) , (3.3.4.2 a, b) : P, Q παραμένουν αμετάβλητα

$$P = E_L'(1 - \mu_{TT}') - E_L''\mu_{TT}''$$

$$Q = E_L''(1 - \mu_{TT}') + E_L'\mu_{TT}''$$

(3.3.4.6 a, b)

Αντικαθιστώντας στις (3.2.4.21), (3.2.4.22) τις εξισώσεις (3.3.4.3 a, b), (3.3.4.4 a – d), (3.3.4.5 a – d), (3.3.4.6 a, b) τελικά προκύπτει :

$$\frac{E'_T}{E_T'^2 + E_T''^2} = \frac{(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)U_f}{E_f[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}''^2]} H_0 + \frac{U_f(I_0M + J_0N) + (K_0M + L_0N)}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}''^2](1 - U_f)} + \frac{2[(\mu_{LT}'^2 - \mu_{LT}''^2)P - 2\mu_{LT}'\mu_{LT}''Q]}{(E_L'^2 + E_L''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}''^2]} = Z_0 \quad (3.3.4.7)$$

$$\frac{E''_T}{E_T'^2 + E_T''^2} = -\frac{(1 - \mu'_f - 2\mu_f'^2)U_f}{E_f[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}''^2]} R_0 - \frac{U_f(J_0M - I_0N) + (L_0M - K_0N)}{(E_m'^2 + E_m''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}''^2](1 - U_f)} + \frac{2i\{2\mu_{LT}'\mu_{LT}''P + (\mu_{LT}'^2 - \mu_{LT}''^2)Q\}}{(E_L'^2 + E_L''^2)[(1 - \mu_{TT}')^2 + \mu_{TT}''^2]} = V_0 \quad (3.3.4.8)$$

$$\frac{(3.3.4.7)}{(3.3.4.8)} \Rightarrow \frac{E'_T}{E''_T} = \frac{Z_0}{V_0} \Rightarrow E'_T = \frac{Z_0}{V_0} E''_T \quad (3.3.4.9)$$

$$(3.2.4.21) \xrightarrow{(3.2.4.23)} \frac{\frac{Z_0}{V_0} E''_T}{\left(\frac{Z_0}{V_0} E''_T\right)^2 + E_T''^2} = Z_0 \Rightarrow \frac{\frac{Z_0}{V_0} E''_T}{E_T''^2 \left[\left(\frac{Z_0}{V_0}\right)^2 + 1\right]} = Z_0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{V_0}}{E_T'' \left(\frac{Z_0^2 + V_0^2}{V_0^2}\right)} = 1 \Rightarrow E''_T = \frac{V_0}{Z_0^2 + V_0^2} \quad (3.3.4.10)$$

$$\text{Και από την (3.2.4.23)} \xrightarrow{(3.2.4.24)} E'_T = \frac{Z_0}{V_0} \frac{V_0}{Z_0^2 + V_0^2} = \frac{Z_0}{Z_0^2 + V_0^2} \quad (3.3.4.11)$$

$$\text{Επίσης : } \tan\delta_T = \frac{E''_T}{E'_T} = \frac{\frac{V_0}{Z_0^2 + V_0^2}}{\frac{Z_0}{Z_0^2 + V_0^2}} = \frac{V_0}{Z_0} \quad (3.3.4.12)$$

3.3.5 Δυναμικό μέτρο διατμήσεως

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.2.5 εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο των **Hashin-Rosen** για το δυναμικό διαμήκες μέτρο διατμήσεως :

$$G_{LT}^* = \frac{[(G_f^* + G_m^*) + (G_f^* - G_m^*)U_f]G_m^*}{[(G_f^* + G_m^*) - (G_f^* - G_m^*)U_f]} \quad (3.2.5.1)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.2.5.1) την σχέση ορισμού του συνθέτου μέτρου διάτμησης, δηλαδή την εξίσωση :

$$G^* = G' + iG'' = \frac{E^*}{2(1 + \mu^*)} \quad (3.1.7.1)$$

προκύπτουν ο πραγματικός δυναμικός διαμήκης λόγος διάτμησης και ο φανταστικός δυναμικός διαμήκης λόγος διάτμησης ως εξής :

$$G_{LT}' = \frac{\{[(G_m'G_f'(1 + U_f) + G_m'(1 - U_f)) - G_m''^2(1 - U_f)][G_f'(1 - U_f) + G_m'(1 + U_f)] + G_m''(1 + U_f)[G_m'G_m''(1 - U_f) + G_m''[G_f'(1 + U_f) + G_m'(1 - U_f)]]\}}{[G_f'(1 - U_f) + G_m'(1 + U_f)]^2 + G_m''^2(1 + U_f)^2}$$

$$G_{LT}'' = \frac{\{[G_m'G_m''(1 - U_f) + G_m''[G_f'(1 + U_f) + G_m'(1 - U_f)]] [G_f'(1 - U_f) + G_m'(1 + U_f)] - [(G_m'[G_f'(1 + U_f) + G_m'(1 - U_f)] - G_m''^2(1 - U_f))G_m''(1 + U_f)\}}{[G_f'(1 - U_f) + G_m'(1 + U_f)]^2 + G_m''^2(1 + U_f)^2} \quad (3.2.5.2 a, b)$$

Ομοίως εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο των **Halpin- Tsai** για το δυναμικό διάμηκες μέτρο διατμήσεως :

$$G_{LT}^* = G_m^* \frac{1 + \xi n^* U_f}{1 - n^* U_f}, \quad n^* = \frac{G_f^* - G_m^*}{G_f^* + \xi G_m^*} \quad (3.2.5.3)$$

$$n^* = \frac{G_f' - (G_m' + iG_m'')}{G_f' + \xi(G_m' - iG_m'')} = \frac{(G_f' - G_m') - iG_m''}{(G_f' + \xi G_m') + i\xi G_m''} = \frac{[(G_f' - G_m') - iG_m''][(G_f' + \xi G_m') - i\xi G_m'']}{(G_f' + \xi G_m')^2 + \xi^2 G_m''^2} = \frac{[(G_f' - G_m')(G_f' + \xi G_m') - \xi G_m''^2] - i[G_m''(G_f' + \xi G_m') + \xi G_m''(G_f' - G_m')]}{(G_f' + \xi G_m')^2 + \xi^2 G_m''^2} = n_1 - in_2 \quad (3.2.5.4)$$

ο πραγματικός δυναμικός διαμήκης λόγος διάτμησης και ο φανταστικός δυναμικός διαμήκης λόγος διάτμησης βάσει του τύπου των **Halpin-Tsai** προκύπτουν:

$$G_{LT}' = \frac{[G_m'(1 + \xi n_1 U_f) + G_m'' \xi n_2 U_f](1 - n_1 U_f) + [G_m''(1 + \xi n_1 U_f) - G_m' \xi n_2 U_f] n_2 U_f}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2}$$

$$G_{LT}'' = \frac{[G_m''(1 + \xi n_1 U_f) - G_m' \xi n_2 U_f](1 - n_1 U_f) - [G_m'(1 + \xi n_1 U_f) + G_m'' \xi n_2 U_f] n_2 U_f}{(1 - n_1 U_f)^2 + n_2^2 U_f^2} \quad (3.2.5.6 a, b)$$

$$\tan \delta_G = \frac{G_{LT}''}{G_{LT}'} \quad (3.2.5.7)$$

Παρατηρούμε ότι για $\mu_m'' = 0$ οι εξισώσεις (3.2.5.2 a, b), (3.2.5.6 a, b) δεν επηρεάζονται, άρα οι εκφράσεις των G_{LT}' , G_{LT}'' δεν απλοποιούνται περαιτέρω.

3.3.6 Δυναμικό μέτρο ελαστικότητας συναρτήσει της γωνίας θ των ινών

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο για το υπό γωνία δυναμικό μέτρο ελαστικότητας, δηλαδή στην εξίσωση :

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta}{E_T} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\mu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (2.1.53)$$

έχουμε :

$$\frac{1}{E_\theta^*} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L^*} + \frac{\sin^4 \theta}{E_T^*} + \left(\frac{1}{G_{LT}^*} - \frac{2\mu_{LT}^*}{E_L^*} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \xrightarrow[(3.1.5.1)]{(3.1.1.6)} \frac{1}{E_\theta' + iE_\theta''} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L' + iE_L''} + \frac{\sin^4 \theta}{E_T' + iE_T''} + \left(\frac{1}{G_{LT}' + iG_{LT}''} - \frac{2(\mu_{LT}' - i\mu_{LT}'')}{E_L' + iE_L''} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (3.2.6.1)$$

Στην παράγραφο 3.2.6 είδαμε ότι τελικά :

$$\frac{E_\theta'}{E_\theta'^2 + E_\theta''^2} = \frac{E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} \cos^4 \theta + \frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} \sin^4 \theta + \left[\frac{G_{LT}'}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} - \frac{2[\mu_{LT}'E_L' - \mu_{LT}''E_L'']}{E_L'^2 + E_L''^2} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \Phi \quad (3.2.6.6)$$

$$\frac{E_\theta''}{E_\theta'^2 + E_\theta''^2} = \frac{E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} \cos^4 \theta + \frac{E_T''}{E_T'^2 + E_T''^2} \sin^4 \theta + \left[\frac{G_{LT}''}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} - \frac{2[\mu_{LT}''E_L' + \mu_{LT}'E_L'']}{E_L'^2 + E_L''^2} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \Omega \quad (3.2.6.7)$$

Για $\mu_m'' = 0$ από τις εξισώσεις (3.2.6.6) , (3.2.6.7) :

$$\frac{E_\theta'}{E_\theta'^2 + E_\theta''^2} = \frac{E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} \cos^4 \theta + \frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} \sin^4 \theta + \left[\frac{G_{LT}'}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2} - \frac{2[\mu_{LT}'E_L' - \mu_{LT}''E_L'']}{E_L'^2 + E_L''^2} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \Phi_0 \quad (3.3.6.1)$$

$$\frac{E''_{\theta}}{E'_{\theta}{}^2 + E''_{\theta}{}^2} = \frac{E''_L}{E'_L{}^2 + E''_L{}^2} \cos^4 \theta + \frac{E''_T}{E'_T{}^2 + E''_T{}^2} \sin^4 \theta + \left[\frac{G''_{LT}}{G'_L{}^2 + G''_L{}^2} - \frac{2[\mu''_{LT} E'_L + \mu'_{LT} E''_L]}{E'_L{}^2 + E''_L{}^2} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \Omega_0 \quad (3.3.6.2)$$

Οι παράμετροι $\Phi_0 \neq \Phi$, $\Omega_0 \neq \Omega$ διότι τα E'_L , E''_L , E'_T , E''_T , μ'_{LT} , μ''_{LT} υπολογίζονται εδώ από τις εκφράσεις τους για $\mu''_m = 0$ δηλαδή από τις εξισώσεις (3.3.1.2 a, b), (3.3.2.1 a, b), (3.3.4.10), (3.3.4.11)

$$\begin{aligned} (3.3.6.1) & \Rightarrow \frac{E'_{\theta}}{E''_{\theta}} = \frac{\Phi_0}{\Omega_0} \Rightarrow E'_{\theta} = \frac{\Phi_0}{\Omega_0} E''_{\theta} \\ (3.3.6.2) & \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.3.6.3)$$

Το δυναμικό μέτρο απωλειών για οποιαδήποτε γωνία θ των ινών υπολογίζεται από :

$$(3.2.6.6) \xrightarrow{(3.2.4.8)} \frac{\frac{\Phi_0}{\Omega_0} E''_{\theta}}{\left(\frac{\Phi_0}{\Omega_0} E''_{\theta}\right)^2 + E''_{\theta}{}^2} = \Phi \Rightarrow \frac{\frac{\Phi_0}{\Omega_0} E''_{\theta}}{E''_{\theta}{}^2 \left[\left(\frac{\Phi_0}{\Omega_0}\right)^2 + 1\right]} = \Phi_0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\Omega}}{E''_{\theta} \left(\frac{\Phi_0^2 + \Omega_0^2}{\Omega}\right)} = 1 \Rightarrow E''_{\theta} = \frac{\Omega_0}{\Phi_0^2 + \Omega_0^2} \quad (3.3.6.4)$$

Το δυναμικό μέτρο αποθήκευσης για οποιαδήποτε γωνία των ινών υπολογίζεται από :

$$(3.2.6.8) \xrightarrow{(3.2.6.9)} E'_{\theta} = \frac{\Phi_0}{\Omega_0} \frac{\Omega_0}{\Phi_0^2 + \Omega_0^2} = \frac{\Phi_0}{\Phi_0^2 + \Omega_0^2} \quad (3.3.6.5)$$

$$\text{Επίσης : } \tan \delta_{\theta} = \frac{E''_{\theta}}{E'_{\theta}} = \frac{\frac{\Omega_0}{\Phi_0^2 + \Omega_0^2}}{\frac{\Phi_0}{\Phi_0^2 + \Omega_0^2}} = \frac{\Omega_0}{\Phi_0} \quad (3.3.6.6)$$

3.3.7 Δυναμικό μέτρο διατμήσεως συναρτήσει της γωνίας θ των ιών

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο για το υπό γωνία δυναμικό μέτρο διατμήσεως, δηλαδή στην εξίσωση :

$$\frac{1}{G_\theta} = 4 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{2\mu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{1}{G_{LT}} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 \quad (2.1.54)$$

έχουμε :

$$\frac{1}{G_\theta^*} = 4 \left(\frac{1}{E_L^*} + \frac{1}{E_T^*} + \frac{2\mu_{LT}^*}{E_L^*} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{1}{G_{LT}} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 \quad (3.2.7.1)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση το σύνθετο μέτρο ελαστικότητας, το σύνθετο μέτρο διατμήσεως και τον σύνθετο λόγο Poisson από τις εξισώσεις ορισμού τους προκύπτει :

$$\frac{G'_\theta}{G_{\theta'}^2 + G_{\theta''}^2} = 4 \left\{ \frac{E'_L}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E'_T}{E_T'^2 + E_T''^2} + \frac{2(\mu'_{LT}E'_L - \mu''_{LT}E'_L)}{E_L'^2 + E_L''^2} \right\} \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{G'_{LT}}{G_{LT'}^2 + G_{LT''}^2} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 = P \quad (3.2.7.4)$$

$$\frac{G''_\theta}{G_{\theta'}^2 + G_{\theta''}^2} = 4 \left\{ \frac{E''_L}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E''_T}{E_T'^2 + E_T''^2} + \frac{2(\mu''_{LT}E'_L + \mu'_{LT}E'_L)}{E_L'^2 + E_L''^2} \right\} \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{G''_{LT}}{G_{LT'}^2 + G_{LT''}^2} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 = Q \quad (3.2.7.5)$$

Για $\mu_m'' = 0$ από τις εξισώσεις (3.2.6.6) , (3.2.6.7) :

$$\frac{G'_\theta}{G'^2_\theta + G''^2_\theta} = 4 \left\{ \frac{E'_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E'_T}{E'^2_T + E''^2_T} + \frac{2(\mu'_{LT}E'_L - \mu''_{LT}E''_L)}{E'^2_L + E''^2_L} \right\} \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{G'_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 = P_0 \quad (3.2.7.4)$$

$$\frac{G''_\theta}{G'^2_\theta + G''^2_\theta} = 4 \left\{ \frac{E''_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E''_T}{E'^2_T + E''^2_T} + \frac{2(\mu''_{LT}E'_L + \mu'_{LT}E''_L)}{E'^2_L + E''^2_L} \right\} \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{G''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 = Q_0 \quad (3.2.7.5)$$

Οι παράμετροι $P_0 \neq P$, $Q_0 \neq Q$ διότι τα E'_L , E''_L , E'_T , E''_T , μ'_{LT} , μ''_{LT} υπολογίζονται εδώ από τις εκφράσεις τους για $\mu_m'' = 0$ δηλαδή από τις εξισώσεις (3.3.1.2 a,b) , (3.3.2.1 a,b) , (3.3.4.10) , (3.3.4.11)

Τελικά ο πραγματικός δυναμικός λόγος διάτμησης συναρτήσει της γωνίας των ινών και ο φανταστικός δυναμικός λόγος διάτμησης συναρτήσει της γωνίας των ινών προκύπτουν:

$$G'_\theta = \frac{P_0}{P_0^2 + Q_0^2} \quad (3.3.7.1)$$

$$G''_\theta = \frac{Q_0}{P_0^2 + Q_0^2} \quad (3.3.7.2)$$

3.3.8 Δυναμικός λόγος Poisson συναρτήσει της γωνίας θ των ινών

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας του **Hashin** στον τύπο για το υπό γωνία δυναμικό μέτρο διατμήσεως, δηλαδή στην εξίσωση :

$$\frac{\mu_{\theta}}{E_{\theta}} = -\left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{\mu_{LT}}{E_L} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \quad (2.1.55)$$

έχουμε :

$$\frac{\mu_{\theta}^*}{E_{\theta}^*} = -\left(\frac{1}{E_L^*} + \frac{1}{E_T^*} - \frac{1}{G_{LT}^*}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{\mu_{LT}^*}{E_L^*} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \quad (3.2.8.1)$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.2.8 αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση το σύνθετο μέτρο ελαστικότητας, το σύνθετο μέτρο διατμήσεως και τον σύνθετο λόγο Poisson από τις εξισώσεις ορισμού τους, δηλαδή από τις εξισώσεις (3.1.1.6), (3.1.5.1), (3.1.7.1), προκύπτουν:

$$\mu_{\theta}'' = \frac{(E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2)(W - T \tan\delta_{\theta})}{(E_{\theta}' + \tan\delta_{\theta} E_{\theta}'')} = (W E_{\theta}' - T E_{\theta}'') \quad (3.2.8.7)$$

$$\mu_{\theta}' = \frac{T}{\Phi} + \frac{\Omega}{\Phi} (W E_{\theta}' - T E_{\theta}'') = \frac{T}{\Phi} + \frac{\Omega}{\Phi} \mu_{\theta}'' = \frac{1}{\Phi} (T + \Omega) \mu_{\theta}'' \quad (3.2.8.9)$$

, όπου :

$$T = \frac{\mu_{\theta}' E_{\theta}' - \mu_{\theta}'' E_{\theta}''}{E_{\theta}'^2 + E_{\theta}''^2} = -\left(\frac{E_L'}{E_L'^2 + E_L''^2} + \frac{E_T'}{E_T'^2 + E_T''^2} - \frac{G_{LT}'}{G_{LT}'^2 + G_{LT}''^2}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{\mu_{LT}' E_L' - \mu_{LT}'' E_L''}{E_L'^2 + E_L''^2} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \quad (3.2.8.4)$$

$$W = \frac{\mu''_{\theta} E'_{\theta} + \mu'_{\theta} E''_{\theta}}{E'^2_{\theta} + E''^2_{\theta}} = - \left(\frac{E''_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E''_T}{E'^2_T + E''^2_T} - \frac{G''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\mu''_{LT} E'_L - \mu'_{LT} E''_L}{E'^2_L + E''^2_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \quad (3.2.8.5)$$

Για $\mu''_m = 0$ από τις εξισώσεις (3.2.8.4), (3.2.8.5), (3.2.8.7), (3.2.8.9) :

$$T_0 = \frac{\mu'_{\theta} E'_{\theta} - \mu''_{\theta} E''_{\theta}}{E'^2_{\theta} + E''^2_{\theta}} = - \left(\frac{E'_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E'_T}{E'^2_T + E''^2_T} - \frac{G'_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\mu'_{LT} E'_L - \mu''_{LT} E''_L}{E'^2_L + E''^2_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \quad (3.3.8.1)$$

$$W_0 = \frac{\mu''_{\theta} E'_{\theta} + \mu'_{\theta} E''_{\theta}}{E'^2_{\theta} + E''^2_{\theta}} = - \left(\frac{E''_L}{E'^2_L + E''^2_L} + \frac{E''_T}{E'^2_T + E''^2_T} - \frac{G''_{LT}}{G'^2_{LT} + G''^2_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\mu''_{LT} E'_L - \mu'_{LT} E''_L}{E'^2_L + E''^2_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \quad (3.3.8.2)$$

Οι παράμετροι $\Phi_0 \neq \Phi$, $\Omega_0 \neq \Omega$, $T_0 \neq T$, $W_0 \neq W$ διότι τα E'_L , E''_L , E'_T , E''_T , μ'_{LT} , μ''_{LT} , E'_{θ} , E''_{θ} , $\tan \delta_{\theta}$ υπολογίζονται εδώ από τις εκφράσεις τους για $\mu''_m = 0$ δηλαδή από τις εξισώσεις (3.3.1.2 a, b), (3.3.2.1 a, b), (3.3.4.10), (3.3.4.11), (3.3.6.4), (3.3.6.5), (3.3.6.6)

Από τις εξισώσεις (3.3.6.1), (3.3.6.2), (3.3.8.1), (3.3.8.2), (3.2.8.7), (3.2.8.9) προκύπτουν :

$$\mu''_{\theta} = \frac{(E'^2_{\theta} + E''^2_{\theta})(W_0 - T_0 \tan \delta_{\theta})}{(E'_{\theta} + \tan \delta_{\theta} E''_{\theta})} = (W_0 E'_{\theta} - T_0 E''_{\theta}) \quad (3.2.8.7)$$

$$\mu'_{\theta} = \frac{T_0}{\Phi_0} + \frac{\Omega_0}{\Phi_0} (W_0 E'_{\theta} - T_0 E''_{\theta}) = \frac{T_0}{\Phi_0} + \frac{\Omega_0}{\Phi_0} \mu''_{\theta} = \frac{1}{\Phi_0} (T_0 + \Omega_0) \mu''_{\theta} \quad (3.2.8.9)$$

3.4 Γραφικές Παραστάσεις δυναμικών ελαστικών σταθερών

Εφαρμογή του μοντέλου και των θεωρητικών σχέσεων

Η εφαρμογή του μοντέλου και των θεωρητικών σχέσεων έγινε για ένα ινώδες σύνθετο υλικό αποτελούμενο από εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με ίνες γυαλιού.

Συγκεκριμένα το υλικό το οποίο χρησιμοποιήθηκε στα πειράματα είναι ένα σύνθετο υλικό (Permaglass XE5/1, Permali Ltd U.K.), το οποίο αποτελείται από μήτρα εποξειδικής ρητίνης (diglycidyl ether of bisphenol A), με σκληρυντή αμίνης (Araldite MY 750/HT 972, Ciba-Geigy U.K.) και με συνεχείς ίνες υάλου (glass fibres) διαμέτρου $d = 1,2 \times 10^{-5}m$ με χαρακτηριστικά στοιχεία όπως δίνονται από τον προμηθευτή. Από μετρήσεις που έγιναν, η περιεκτικότητα σε ίνες υάλου βρέθηκε περίπου 80% κατά βάρος και 65% κατ' όγκο και 60% κατά βάρος και 40% κατ' όγκο.

Ο προσδιορισμός της περιεκτικότητας των ινών έγινε με την μέθοδο της καύσεως (burn off test) σύμφωνα με την προδιαγραφή BS 2782. Ένα ορθογωνικό τεμάχιο κόπτεται από κάθε δοκίμιο και αφού ζυγισθεί τοποθετείται σε κλίβανο σε θερμοκρασία $620 \pm 20^\circ C$ για να καεί η ρητίνη. Από το βάρος του υπολείμματος το οποίο θεωρείται ότι είναι ίνες υαλού υπολογίζεται η κατά βάρος περιεκτικότητα. Ο προσδιορισμός της κατ' όγκο περιεκτικότητας γίνεται από την σχέση.

$$U_f = \frac{1}{1 + \frac{M_m \rho_f}{M_f \rho_m}}$$

Όπου,

M_f = περιεκτικότητα κατά βάρος των ινών

M_m = περιεκτικότητα κατά βάρος της ρητίνης

ρ_f = πυκνότητα ινών

ρ_m = πυκνότητα ρητίνης

Οι μετρήσεις έδωσαν κατά βάρος περιεκτικότητα του υλικού σε ίνες υάλου $(79,6 \pm 0,28)\%$, $(59,6 \pm 0,28)\%$ με δεδομένο τις πυκνότητες $\rho_f = 2,55 gr/cm^3$ και $\rho_m = 1,20 gr/cm^3$, οι οποίες δίνονταν από τους προμηθευτές του υλικού.

Έγιναν πειράματα για τον προσδιορισμό της διαμήκους, της εγκάρσιας και της υπό γωνία ως προς τις ίνες αντοχής του σύνθετου υλικού και για τον προσδιορισμό του διαμήκους, του εγκάρσιου και του υπό γωνία ως προς τις ίνες μέτρου ελαστικότητας και λόγου Poisson του σύνθετου υλικού καθώς επίσης και για τον προσδιορισμό του μέτρου διατμήσεως.

Οι τιμές των ελαστικών σταθερών των παραπάνω υλικών, παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα Α.

<u>Υλικό</u>	<u>Μέτρο Ελαστικότητας</u> <u>E(GPa)</u>	<u>Λόγος Poisson</u> <u>μ</u>	<u>Μέτρο Διάττησης</u> <u>G(GPa)</u>
Εποξειδική Ρητίνη	3,75	0,35	1,39
Γυαλί	72	0,20	30

Πίνακας Α [6]

Για να επαληθευθούν οι θεωρητικές τιμές του μοντέλου, δοκίμια από το ίδιο υλικό δοκιμάστηκαν και οι δυναμικές ελαστικές σταθερές τους προσδιορίστηκαν σε ένα εύρος θερμοκρασιών. Η συσκευή μέτρησης δυναμικών ελαστικών σταθερών (viscoelastometer) εφάρμοζε ημιτονοειδή εφελκυστική παραμόρφωση σε συνεχή συχνότητα στο ένα άκρο του δοκιμίου και η απόκριση της τάσεως μετρήσταν στο άλλο άκρο. Οι τιμές των E' και E'' λαμβάνονταν απευθείας με την χρήση δύο μετατροπέων. Δυναμικές μετρήσεις έγιναν σε συχνότητες $f=110\text{Hz}$ και $f=800\text{Hz}$ με το εύρος των παραμορφώσεων να είναι από 0,4% έως 0,6%. Κατά την διάρκεια των πειραμάτων τα δοκίμια θερμάνθηκαν με ρυθμό $1^\circ\text{C}/\text{min}$. Οι διαστάσεις των δοκιμίων ήταν $100 \times 12 \times 3,5\text{mm}$.

3.4.1 Πίνακες

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

$$U_f=0,65, f=110 \text{ Hz}$$

Uf=0,65 , f=110Hz		
T (°C)	E'm (GPa)	E''m (GPa)
20	3,9	0,0405
30	3,75	0,042
40	3,55	0,0435
50	3,4	0,0435
60	3,25	0,0435
70	3,1	0,0435
80	2,97	0,0435
90	2,85	0,045
100	2,7	0,046
110	2,55	0,049

Πίνακας 9

T (°C)	μ'_{LT}
20	0,244823
30	0,244789
40	0,244744
50	0,24471
60	0,244676
70	0,244642
80	0,244609
90	0,244585
100	0,244551
110	0,244517

Πίνακας 10

T (°C)	μ'_{TT}
20	0,235294
30	0,235294
40	0,235294
50	0,235294
60	0,235294
70	0,235294
80	0,235294
90	0,235294
100	0,235294
110	0,235294

Πίνακας 11

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ $U_f=0,65$, $f=110$ Hz

T (°C)	E' _L (GPa)	Πειραμ.
20	48,18954	53,6
30	48,13611	
40	48,06486	52,6
50	48,01142	
60	47,95798	52,1
70	47,90454	
80	47,86891	51,6
90	47,81547	
100	47,76203	51
110	47,70859	

Πίνακας 12

T (°C)	E' _T (GPa)	Πειραμ.
20	16,86718	19,45
30	16,44213	
40	15,92955	18,92
50	15,38554	
60	14,83303	18,1
70	14,27181	
80	13,69273	16,75
90	13,01637	
100	12,43074	15,14
110	11,83529	

Πίνακας 13

T (°C)	G' _{LT} (GPa)
20	5,606574
30	5,427468
40	5,204893
50	5,010063
60	4,827692
70	4,647725
80	4,484608
90	4,30019
100	4,103013
110	3,903031

Πίνακας 14

T (°C)	E'' _L (GPa)	Πειραμ.
20	0,014428	0,0108
30	0,015262	
40	0,015497	0,0114
50	0,015497	
60	0,015497	0,0116
70	0,015497	
80	0,015497	0,0119
90	0,015732	
100	0,016389	0,0122
110	0,017458	

Πίνακας 15

T (°C)	E'' _T (GPa)	Πειραμ.
20	0,14071	0,189
30	0,151136	
40	0,156571	0,195
50	0,158996	
60	0,161479	0,2
70	0,164024	
80	0,165755	0,203
90	0,17121	
100	0,180951	0,21
110	0,195882	

Πίνακας 16

T (°C)	G'' _{LT} (GPa)
20	0,048039
30	0,051487
40	0,053238
50	0,053967
60	0,054712
70	0,055473
80	0,05599
90	0,057739
100	0,060899
110	0,065802

Πίνακας 17

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

$U_f=0,65$, $f=110$ Hz

	α/α (°)						
	0	15	30	45	60	75	90
T (°C)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)
20	48,18954	34,67107	21,31502	16,11353	15,1095	16,07314	16,86718
30	48,13611	34,20178	20,76889	15,62241	14,62883	15,56636	16,34213
40	48,06486	33,53976	20,01831	14,95496	13,97757	14,87923	15,62955
50	48,01142	33,01338	19,43773	14,44463	13,4812	14,35516	15,08554
60	47,95798	32,45892	18,84131	13,92567	12,97782	13,82336	14,53303
70	47,90454	31,87379	18,22831	13,39786	12,4673	13,28366	13,97181
80	47,86891	31,46525	17,81006	13,04095	12,1229	12,91937	13,59273
90	47,81547	30,8225	17,16776	12,49782	11,60004	12,36597	13,01637
100	47,76203	30,14048	16,50674	11,94516	11,0696	11,80418	12,43074
110	47,70859	29,41536	15,82616	11,38266	10,53128	11,23356	11,83529

Πίνακας 18α

	Πειραματικά						
	α/α (°)						
	0	15	30	45	60	75	90
T (°C)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)	E'_θ (GPa)
20	54	39	33,5	30,5	24	21,5	20
30	53,5	39	32	30	23	20	18,5
40	53	38,5	31	29	22,5	19,5	18,2
60	52,5	38	29	27,5	21	18,5	17
80	52	37,5	27	25	20	17,5	16
90	51,5	37,5	26,5	23,5	19	16,5	15,5
110	51	36,5	24	22,5	17,5	15,5	14

Πίνακας 18β

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

$U_f=0,65, f=110 \text{ Hz}$

	$\alpha/\alpha \text{ (}^\circ\text{)}$						
	0, 90	15, 75	30, 60	45	60, 30	75, 15	90, 0
T (°C)	G'_{θ} (GPa)	G'_{θ} (GPa)	G'_{θ} (GPa)	G'_{θ} (GPa)	G'_{θ} (GPa)	G'_{θ} (GPa)	G'_{θ} (GPa)
20	5,606162	6,396658	8,909092	11,08626	8,909092	6,396658	5,606162
30	5,426999	6,202213	8,682758	10,85304	8,682758	6,202213	5,426999
40	5,184347	5,937898	8,371496	10,52909	8,371496	5,937898	5,184347
50	4,999481	5,735776	8,130621	10,2758	8,130621	5,735776	4,999481
60	4,812071	5,530199	7,883023	10,013	7,883023	5,530199	4,812071
70	4,622059	5,32107	7,628392	9,740106	7,628392	5,32107	4,622059
80	4,49391	5,179629	7,45457	9,552251	7,45457	5,179629	4,49391
90	4,299387	4,964302	7,187389	9,260937	7,187389	4,964302	4,299387
100	4,10211	4,745155	6,912262	8,957703	6,912262	4,745155	4,10211
110	3,901922	4,521966	6,628614	8,641457	6,628614	4,521966	3,901922

Πίνακας 19

	$\alpha/\alpha \text{ (}^\circ\text{)}$						
	0	15	30	45	60	75	90
T (°C)	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}
20	0,244823	0,367188	0,460639	0,437018	0,326531	0,170224	0,085692
30	0,244789	0,370826	0,464314	0,439196	0,327045	0,168775	0,083105
40	0,244744	0,375999	0,469384	0,442163	0,327742	0,166804	0,079585
50	0,24471	0,380143	0,473321	0,44444	0,328276	0,165297	0,07689
60	0,244676	0,384536	0,477379	0,446761	0,328817	0,163763	0,074146
70	0,244642	0,389201	0,481562	0,449126	0,329366	0,162203	0,071352
80	0,244619	0,392474	0,484424	0,450728	0,329736	0,161147	0,069461
90	0,244585	0,39765	0,488825	0,453165	0,330293	0,159537	0,066581
100	0,244551	0,403173	0,493369	0,455651	0,330859	0,157898	0,063648
110	0,244517	0,409077	0,498054	0,458175	0,331423	0,156224	0,060658

Πίνακας 20

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

$U_f=0,65$, $f=110$ Hz

	α/α (°)						
	0	15	30	45	60	75	90
T (°C)	E''_{θ} (GPa)	E''_{θ} (GPa)	E''_{θ} (GPa)	E''_{θ} (GPa)	E''_{θ} (GPa)	E''_{θ} (GPa)	E''_{θ} (GPa)
20	0,014428	0,123781	0,14559	0,131536	0,128907	0,13587	0,14071
30	0,014962	0,13458	0,154909	0,138642	0,135518	0,142924	0,148136
40	0,015497	0,148823	0,166142	0,146777	0,142959	0,150894	0,156571
50	0,015497	0,159625	0,170638	0,14924	0,144961	0,153101	0,158996
60	0,015497	0,168132	0,175337	0,15177	0,147007	0,155359	0,161479
70	0,015497	0,17443	0,18025	0,154371	0,149099	0,157668	0,164024
80	0,015497	0,181118	0,183651	0,156145	0,15052	0,159238	0,165755
90	0,016032	0,195587	0,192467	0,161345	0,154955	0,16421	0,17121
100	0,016389	0,215637	0,205683	0,170957	0,163813	0,173523	0,180951
110	0,017458	0,244572	0,225654	0,185349	0,177051	0,187666	0,195882

Πίνακας 21

	α/α (°)						
	0, 90	15, 75	30, 60	45	60, 30	75, 15	90, 0
T (°C)	G''_{θ} (GPa)	G''_{θ} (GPa)	G''_{θ} (GPa)	G''_{θ} (GPa)	G''_{θ} (GPa)	G''_{θ} (GPa)	G''_{θ} (GPa)
20	0,048036	0,052057	0,060321	0,061926	0,060321	0,052057	0,048036
30	0,050483	0,054878	0,064214	0,066471	0,064214	0,054878	0,050483
40	0,052232	0,057112	0,067915	0,071167	0,067915	0,057112	0,052232
50	0,053961	0,059097	0,070816	0,074834	0,070816	0,059097	0,053961
60	0,054705	0,06011	0,072804	0,077665	0,072804	0,06011	0,054705
70	0,055465	0,061152	0,074883	0,080673	0,074883	0,061152	0,055465
80	0,055982	0,061862	0,077323	0,083784	0,077323	0,061862	0,055982
90	0,057728	0,064123	0,080276	0,08809	0,080276	0,064123	0,057728
100	0,060885	0,067755	0,08557	0,094833	0,08557	0,067755	0,060885
110	0,065783	0,073471	0,093926	0,105295	0,093926	0,073471	0,065783

Πίνακας 22

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

T=30°C, f=110 Hz

	Θεωρητικά								Πειραματικά	
	U _f									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,4	0,65
α/α (°)	E' _θ (GPa)	E' _θ (GPa)	E' _θ (GPa)	E' _θ (GPa)	E' _θ (GPa)	E' _θ (GPa)	E' _θ (GPa)	E' _θ (GPa)	E' _θ (GPa)	E' _θ (GPa)
0	10,58566	17,41848	24,24866	31,07639	37,90185	44,72519	48,13611	51,54655	30,15	53,5
15	8,576899	12,58056	16,5073	20,70991	25,45185	31,01001	34,20178	37,74195	24,55	39
30	6,065643	7,821039	9,695901	11,92122	14,71946	18,41819	20,76889	23,59354	15,8	27
45	4,950801	6,036093	7,302493	8,880036	10,93846	13,76531	15,62241	17,91734	12,7	23
60	4,858203	5,853553	7,010353	8,44874	10,32717	12,91755	14,62883	16,75575	10,75	20
75	5,331617	6,49675	7,751273	9,259201	11,19367	13,83281	15,56636	17,71364	10,25	19
90	5,66853	6,975495	8,31559	9,88827	11,88052	14,57789	16,34213	18,52133	10	18,5

Πίνακας 23

	U _f							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7
α/α (°)	E'' _θ (GPa)	E'' _θ (GPa)	E'' _θ (GPa)	E'' _θ (GPa)	E'' _θ (GPa)	E'' _θ (GPa)	E'' _θ (GPa)	E'' _θ (GPa)
0	0,037917	0,033803	0,02966	0,025491	0,021297	0,017079	0,014962	0,01284
15	0,051563	0,068911	0,086984	0,104188	0,119451	0,131064	0,13458	0,135769
30	0,054971	0,070206	0,085839	0,102848	0,121929	0,143411	0,154909	0,16654
45	0,051727	0,062368	0,074226	0,088179	0,105131	0,126189	0,138642	0,152528
60	0,051624	0,061794	0,073074	0,086371	0,102648	0,123167	0,135518	0,149539
75	0,054053	0,066312	0,078892	0,093038	0,109849	0,130601	0,142924	0,156778
90	0,055416	0,069228	0,082841	0,097676	0,114923	0,135855	0,148136	0,161818

Πίνακας 24

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

$U_f=0,65$, $f=110$ Hz

α/α (°)	T (°C)									
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
	G'_θ (GPa)	G'_θ (GPa)	G'_θ (GPa)	G'_θ (GPa)	G'_θ (GPa)	G'_θ (GPa)	G'_θ (GPa)	G'_θ (GPa)	G'_θ (GPa)	G'_θ (GPa)
0	5,606162	5,426999	5,184347	4,999481	4,812071	4,622059	4,49391	4,299387	4,10211	3,901922
15	6,396658	6,202213	5,937898	5,735776	5,530199	5,32107	5,179629	4,964302	4,745155	4,521966
30	8,909092	8,682758	8,371496	8,130621	7,883023	7,628392	7,45457	7,187389	6,912262	6,628614
45	11,08626	10,85304	10,52909	10,2758	10,013	9,740106	9,552251	9,260937	8,957703	8,641457
60	8,909092	8,682758	8,371496	8,130621	7,883023	7,628392	7,45457	7,187389	6,912262	6,628614
75	6,396658	6,202213	5,937898	5,735776	5,530199	5,32107	5,179629	4,964302	4,745155	4,521966
90	5,606162	5,426999	5,184347	4,999481	4,812071	4,622059	4,49391	4,299387	4,10211	3,901922

Πίνακας 25

α/α (°)	T (°C)									
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
	G''_θ (GPa)	G''_θ (GPa)	G''_θ (GPa)	G''_θ (GPa)	G''_θ (GPa)	G''_θ (GPa)	G''_θ (GPa)	G''_θ (GPa)	G''_θ (GPa)	G''_θ (GPa)
0	0,048036	0,050483	0,053232	0,053961	0,054705	0,055465	0,055982	0,058728	0,060885	0,065783
15	0,052057	0,054878	0,058112	0,059097	0,06011	0,061152	0,061862	0,065123	0,067755	0,073471
30	0,060321	0,064214	0,068915	0,070816	0,072804	0,074883	0,076323	0,081276	0,08557	0,093926
45	0,061926	0,066471	0,072167	0,074834	0,077665	0,080673	0,082784	0,08909	0,094833	0,105295
60	0,060321	0,064214	0,068915	0,070816	0,072804	0,074883	0,076323	0,081276	0,08557	0,093926
75	0,052057	0,054878	0,058112	0,059097	0,06011	0,061152	0,061862	0,065123	0,067755	0,073471
90	0,048036	0,050483	0,053232	0,053961	0,054705	0,055465	0,055982	0,058728	0,060885	0,065783

Πίνακας 26

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

$U_f=0,65$, $f=110$ Hz

	T (°C)									
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
α/α (°)	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}	μ'_{θ}
0	0,244823	0,244789	0,244744	0,24471	0,244676	0,244642	0,244619	0,244585	0,244551	0,244517
15	0,367188	0,370826	0,375999	0,380143	0,384536	0,389201	0,392474	0,39765	0,403173	0,409077
30	0,460639	0,464314	0,469384	0,473321	0,477379	0,481562	0,484424	0,488825	0,493369	0,498054
45	0,437018	0,439196	0,442163	0,44444	0,446761	0,449126	0,450728	0,453165	0,455651	0,458175
60	0,326531	0,327045	0,327742	0,328276	0,328817	0,329366	0,329736	0,330293	0,330859	0,331423
75	0,170224	0,168775	0,166804	0,165297	0,163763	0,162203	0,161147	0,159537	0,157898	0,156224
90	0,085692	0,083105	0,079585	0,07689	0,074146	0,071352	0,069461	0,066581	0,063648	0,060658

Πίνακας 27

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

$U_f=0,4$, $f=110$ Hz

$U_f = 0,4$														
$f=110$ Hz														
E'_θ (Γρα) Πειραματικά								E'_θ (Γρα) Θεωρητικά						
α/α (°)								α/α (°)						
$T(^{\circ}C)$	0	15	30	45	60	75	90	0	15	30	45	60	75	90
30	30,15	24,55	15,8	12,7	10,75	10,25	10	31,07639	23,70991	14,92122	8,880036	8,44874	9,259201	9,88827
40	29,87	24,2	15,55	12,47	10,57	10	9,75	30,955	23,20113	14,42587	8,457706	8,035602	8,813843	9,420368
50	29,75	23,95	15,42	12,22	10,25	9,75	9,5	30,86396	22,8018	14,04676	8,1377	7,723274	8,476707	9,065701
60	29,63	23,73	15,17	11,85	10	9,38	9,14	30,77292	22,38591	13,66088	7,814838	7,408777	8,136815	8,707716
70	29,5	23,45	14,93	11,6	9,75	9,14	8,88	30,68187	21,95208	13,26798	7,489066	7,092081	7,794122	8,346348
80	29,38	23,2	14,68	11,35	9,38	8,88	8,65	30,62118	21,65213	13,00203	7,270241	6,879713	7,564081	8,103525
90	29,25	22,84	14,3	11,01	9,14	8,52	8,27	30,53013	21,18495	12,59688	6,939484	6,559243	7,216536	7,73627
100	28,88	22,35	13,44	10,52	8,75	8,15	7,9	30,43908	20,6953	12,18399	6,605669	6,236498	6,866077	7,365474
110	28,28	21,28	12,45	9,75	8,02	7,4	7,15	30,34803	20,18121	11,76309	6,26871	5,911367	6,512499	6,990859

Πίνακας 28

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

$U_f=0,4$, $f=800\text{Hz}$

$U_f = 0,4$														
$f=800\text{Hz}$														
E'_θ (Γρα) Πειραματικά							E'_θ (Γρα) Θεωρητικά							
α/α (°)							α/α (°)							
$T(^{\circ}\text{C})$	0	15	30	45	60	75	90	0	15	30	45	60	75	90
30	32,35	25,94	17,03	13,45	11,85	11,23	10,5	30,97321	23,27908	14,50089	8,521378	8,097838	8,881	9,490983
40	32,22	25,57	16,63	13,08	11,48	10,98	10,25	30,82148	22,60981	13,86753	7,9874	7,576812	8,318499	8,89914
50	31,98	25,2	16,42	12,72	11,11	10,62	9,88	30,66973	21,89274	13,21504	7,445419	7,049721	7,748284	8,297998
60	31,85	24,83	16,05	12,42	10,75	10,25	9,5	30,52406	21,1529	12,56957	6,917353	6,537878	7,193421	7,711872
70	31,6	24,46	15,83	12,03	10,5	9,88	9,14	30,37838	20,58075	12,02001	6,464406	6,098448	6,717256	7,209134
80	31,48	24,22	15,43	11,78	10,12	9,63	8,88	30,22663	19,94644	11,43445	5,989049	5,638797	6,218156	6,681135
90	31,35	23,85	14,94	11,41	9,75	9,26	8,52	30,07488	19,23887	10,82137	5,50065	5,1684	5,706138	6,138179
100	30,86	23,23	14,33	10,92	9,38	8,88	8,15	30,00203	18,49584	10,28634	4,958977	4,654784	5,142018	5,534505
110	30,37	22,36	13,22	10,3	8,77	8,4	7,65	29,73493	17,44641	9,563856	4,305675	4,026214	4,457063	4,807521

Πίνακας 29

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

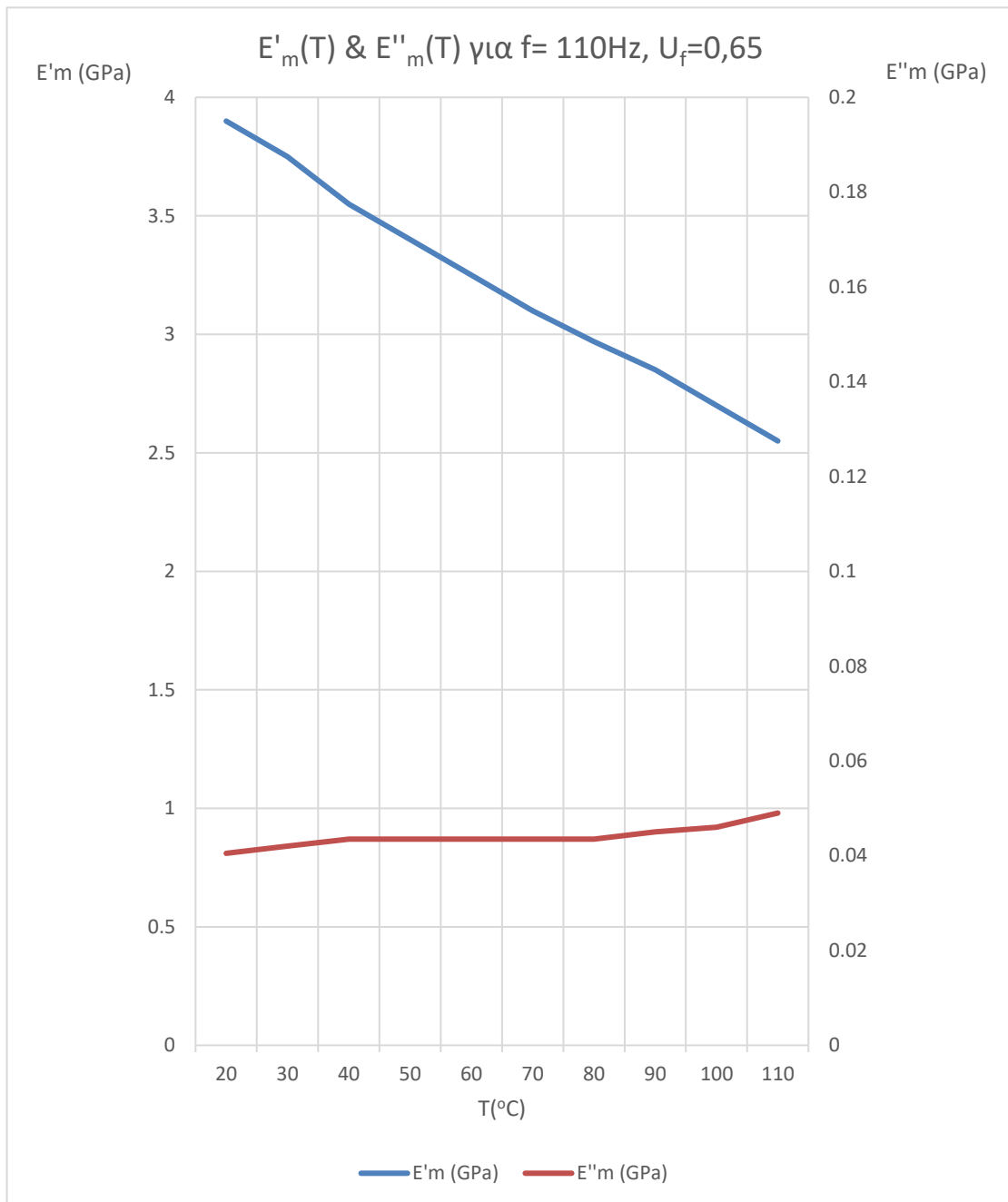
$U_f=0,4$

$U_f = 0,4$														
$f=110\text{Hz}$								$f=800\text{Hz}$						
E'_θ (GPa) Πειραματικά														
α/α (°)														
$T(^{\circ}\text{C})$	0	15	30	45	60	75	90	0	15	30	45	60	75	90
30	30,15	24,55	15,8	12,7	10,75	10,25	10	32,35	25,94	17,03	13,45	11,85	11,23	10,5
40	29,87	24,2	15,55	12,47	10,57	10	9,75	32,22	25,57	16,63	13,08	11,48	10,98	10,25
50	29,75	23,95	15,42	12,22	10,25	9,75	9,5	31,98	25,2	16,42	12,72	11,11	10,62	9,88
60	29,63	23,73	15,17	11,85	10	9,38	9,14	31,85	24,83	16,05	12,42	10,75	10,25	9,5
70	29,5	23,45	14,93	11,6	9,75	9,14	8,88	31,6	24,46	15,83	12,03	10,5	9,88	9,14
80	29,38	23,2	14,68	11,35	9,38	8,88	8,65	31,48	24,22	15,43	11,78	10,12	9,63	8,88
90	29,25	22,84	14,3	11,01	9,14	8,52	8,27	31,35	23,85	14,94	11,41	9,75	9,26	8,52
100	28,88	22,35	13,44	10,52	8,75	8,15	7,9	30,86	23,23	14,33	10,92	9,38	8,88	8,15
110	28,28	21,28	12,45	9,75	8,02	7,4	7,15	30,37	22,36	13,22	10,3	8,77	8,4	7,65

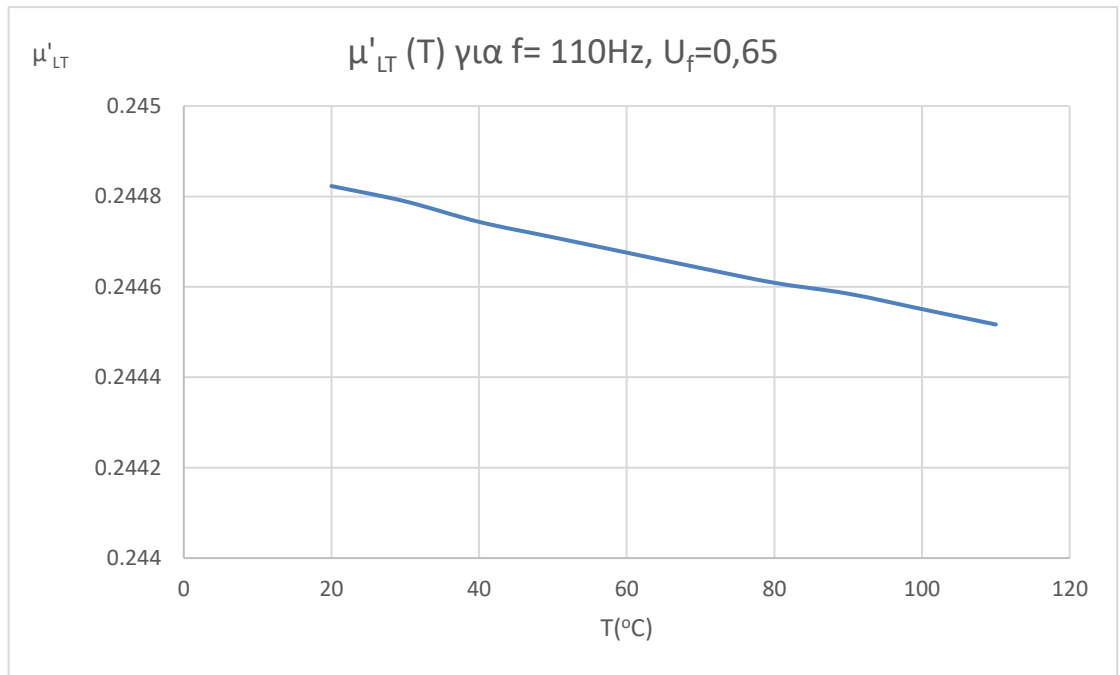
Πίνακας 30

*Το διάγραμμα 31 προκύπτει από τον συνδυασμό των πινάκων 28,29 και 30.

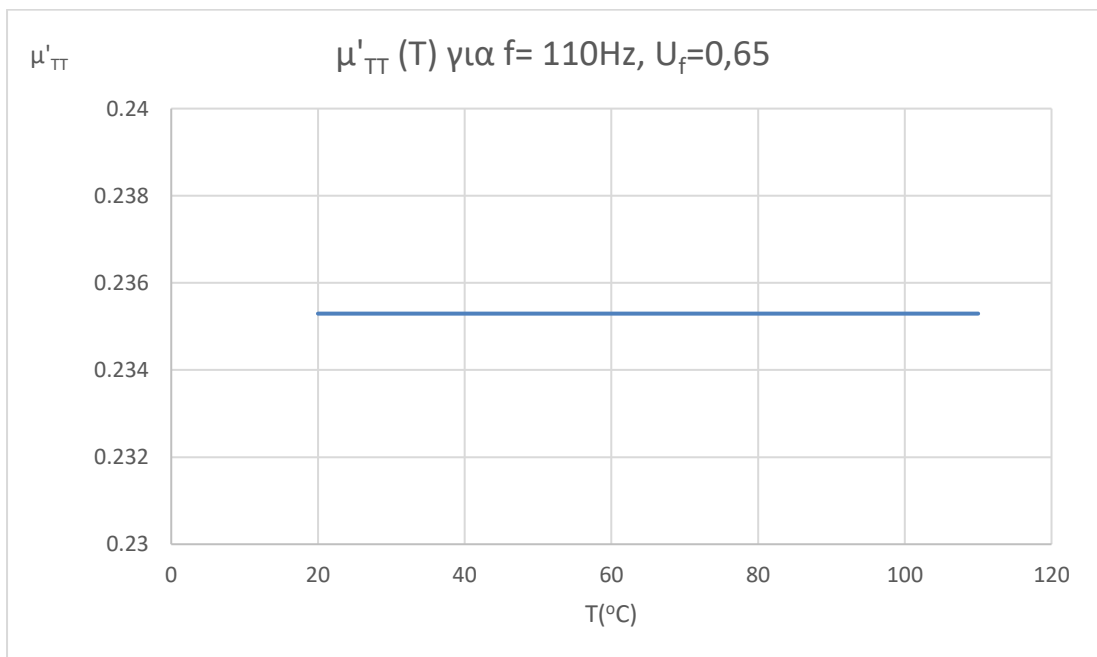
3.4.2 Διαγράμματα Δυναμικών Ελαστικών Σταθερών



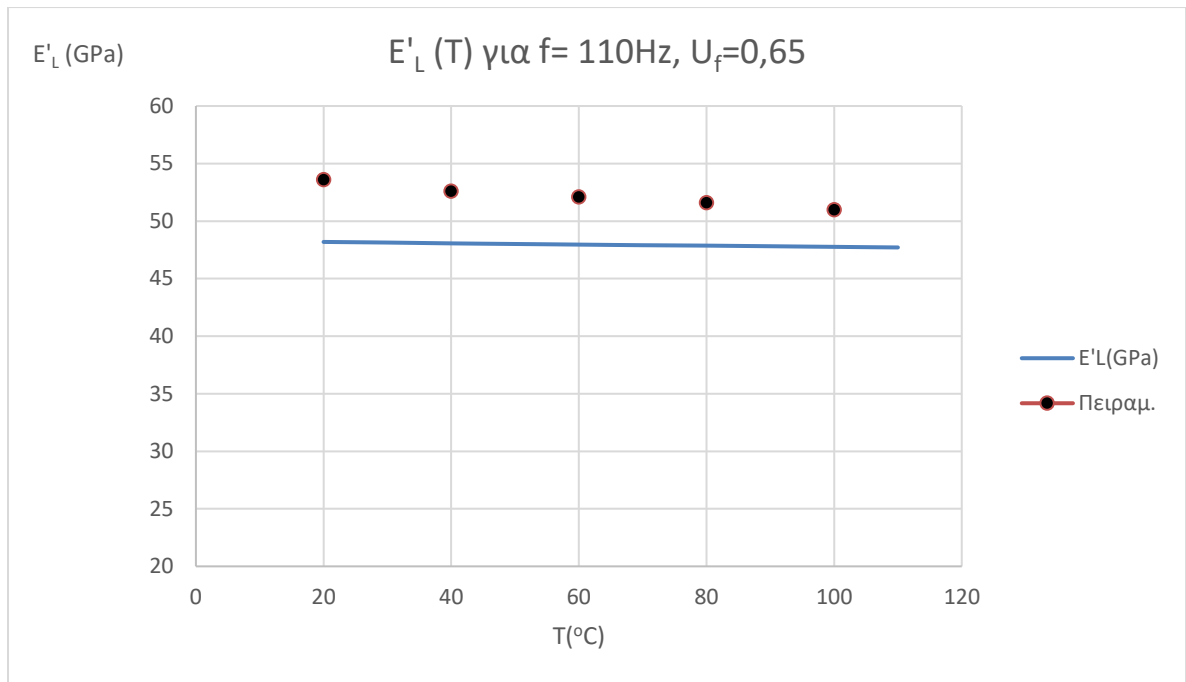
Διάγραμμα 9



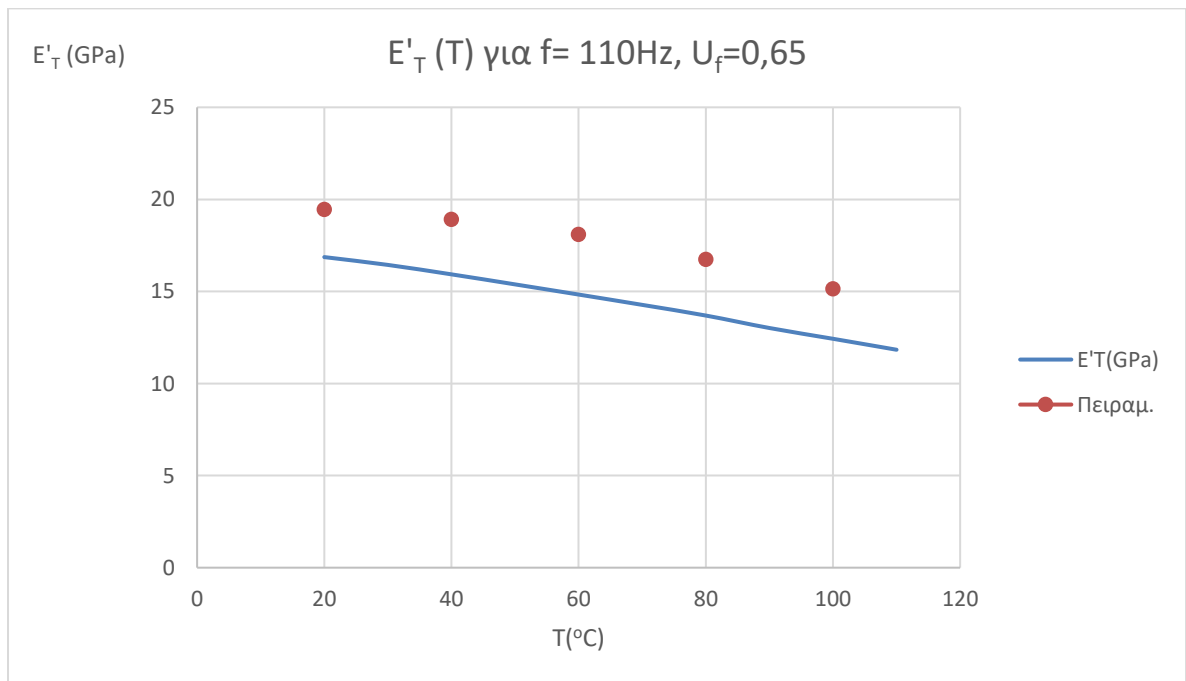
Διάγραμμα 10



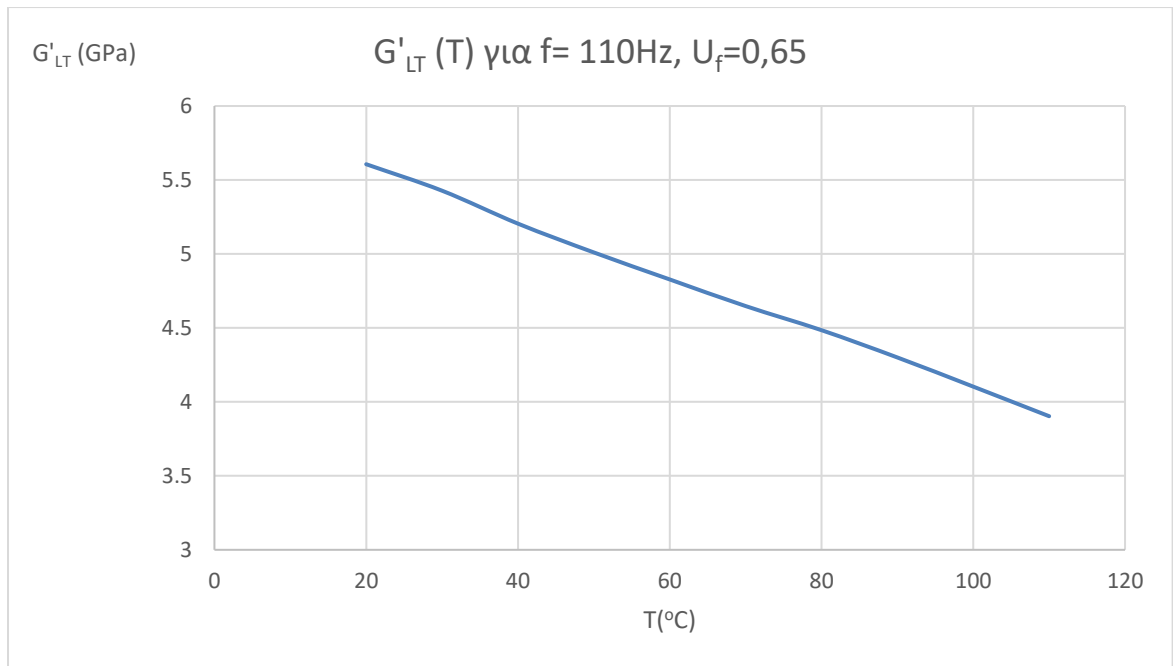
Διάγραμμα 11



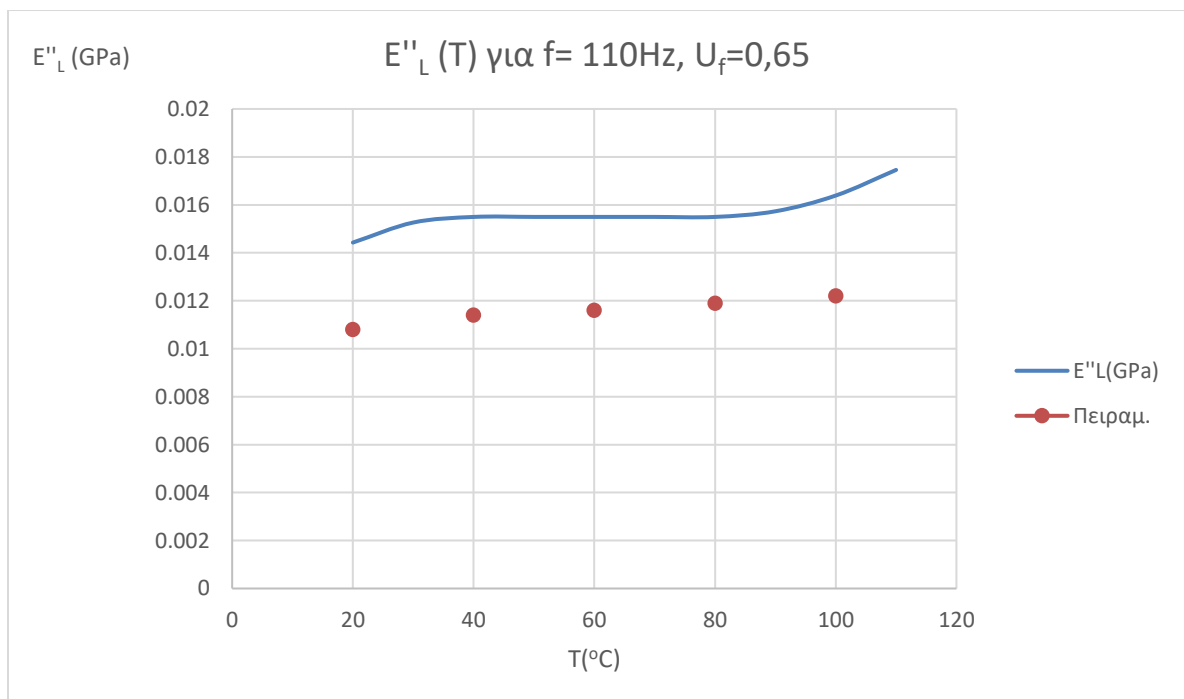
Διάγραμμα 12



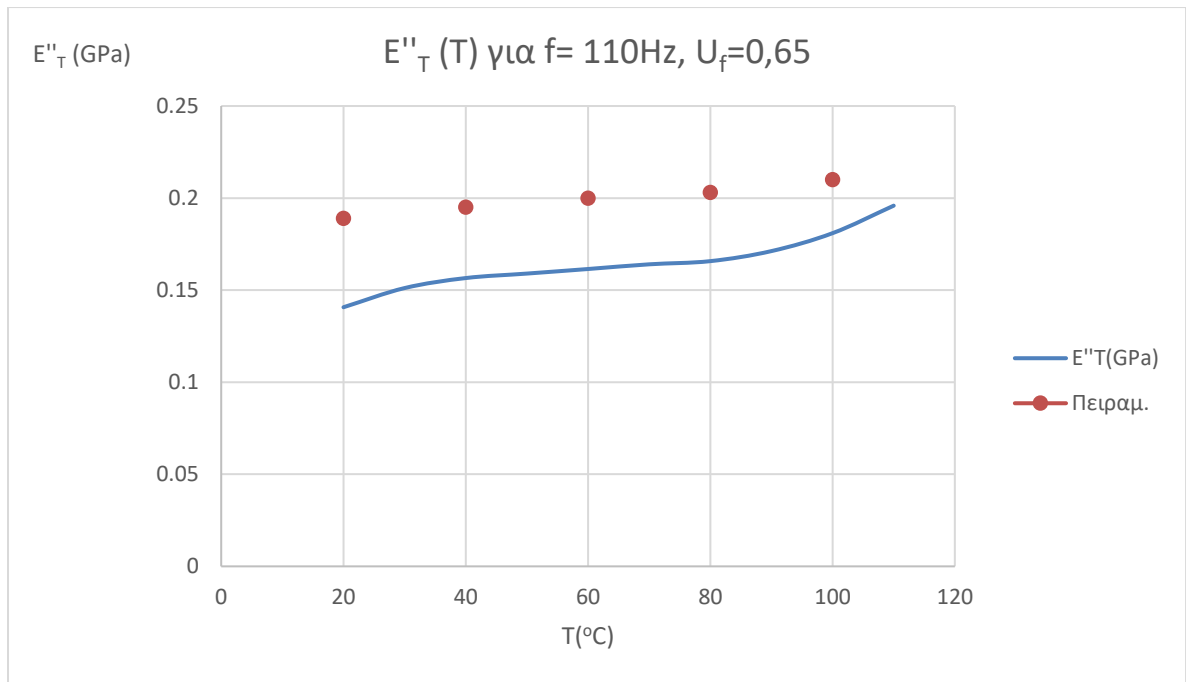
Διάγραμμα 13



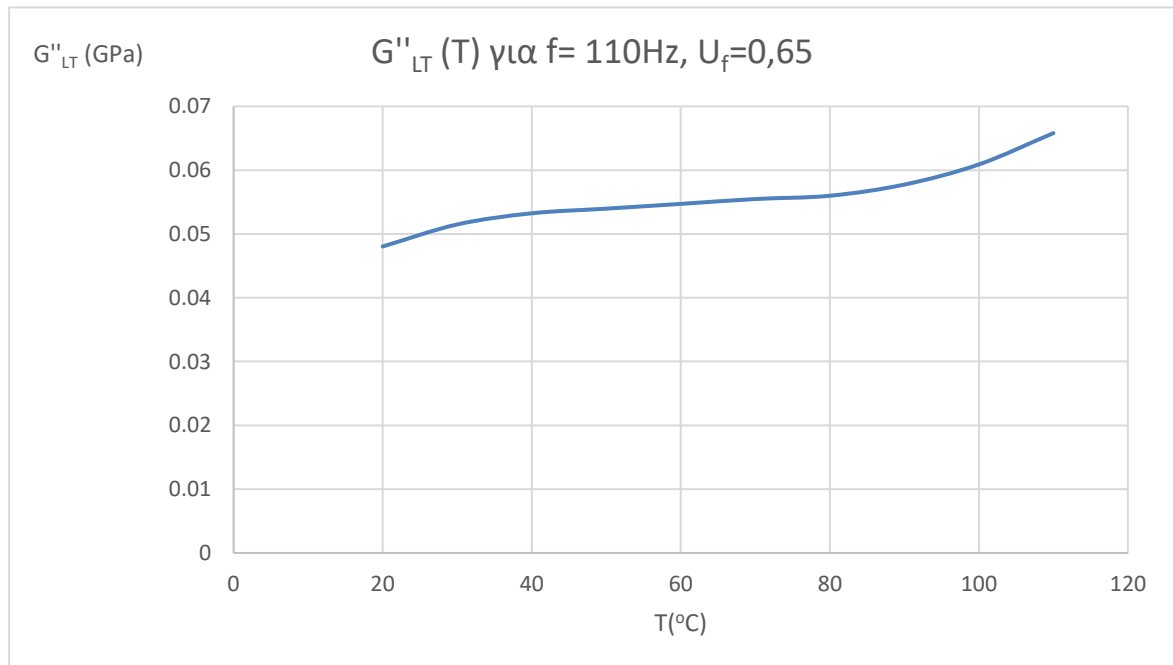
Διάγραμμα 14



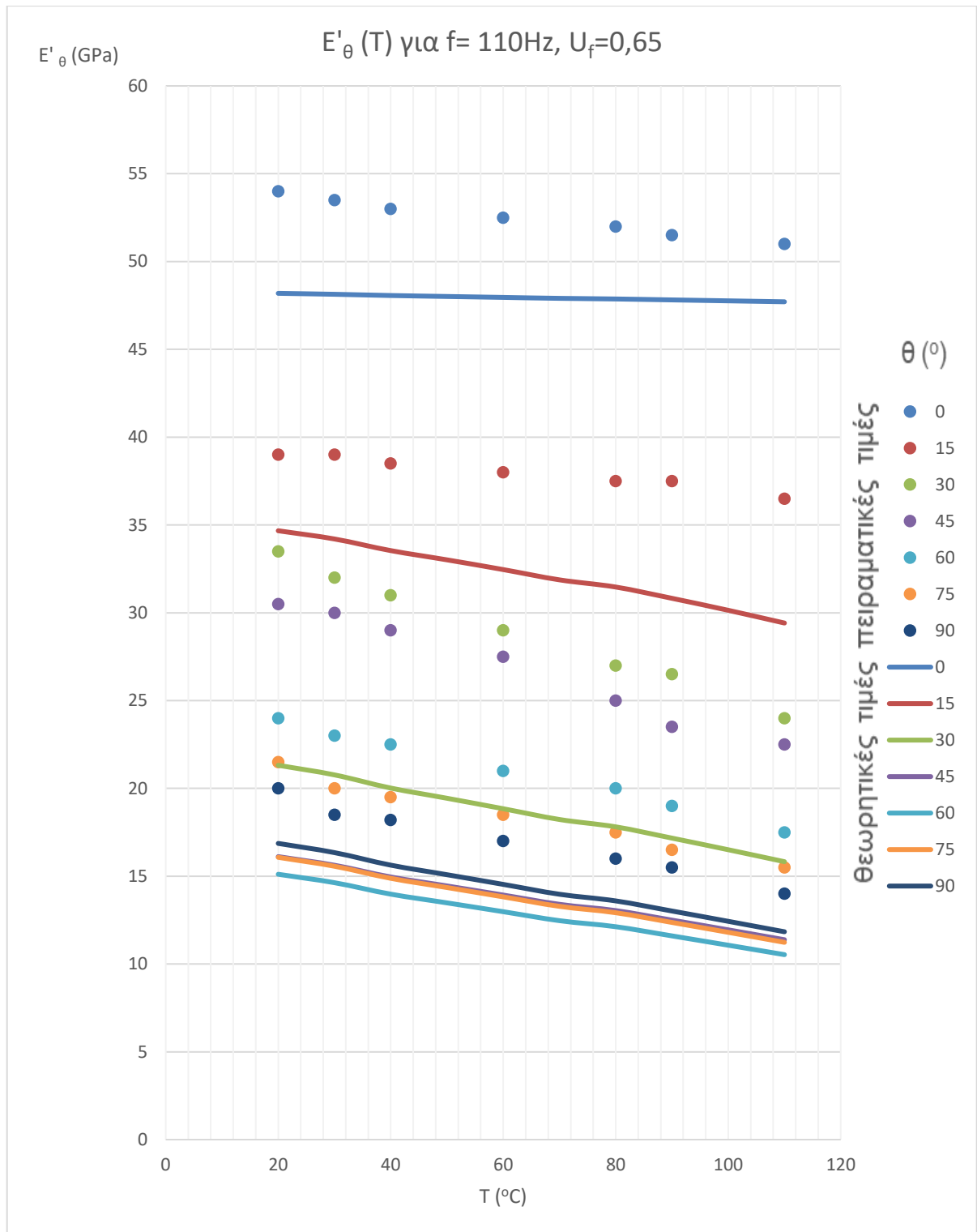
Διάγραμμα 15



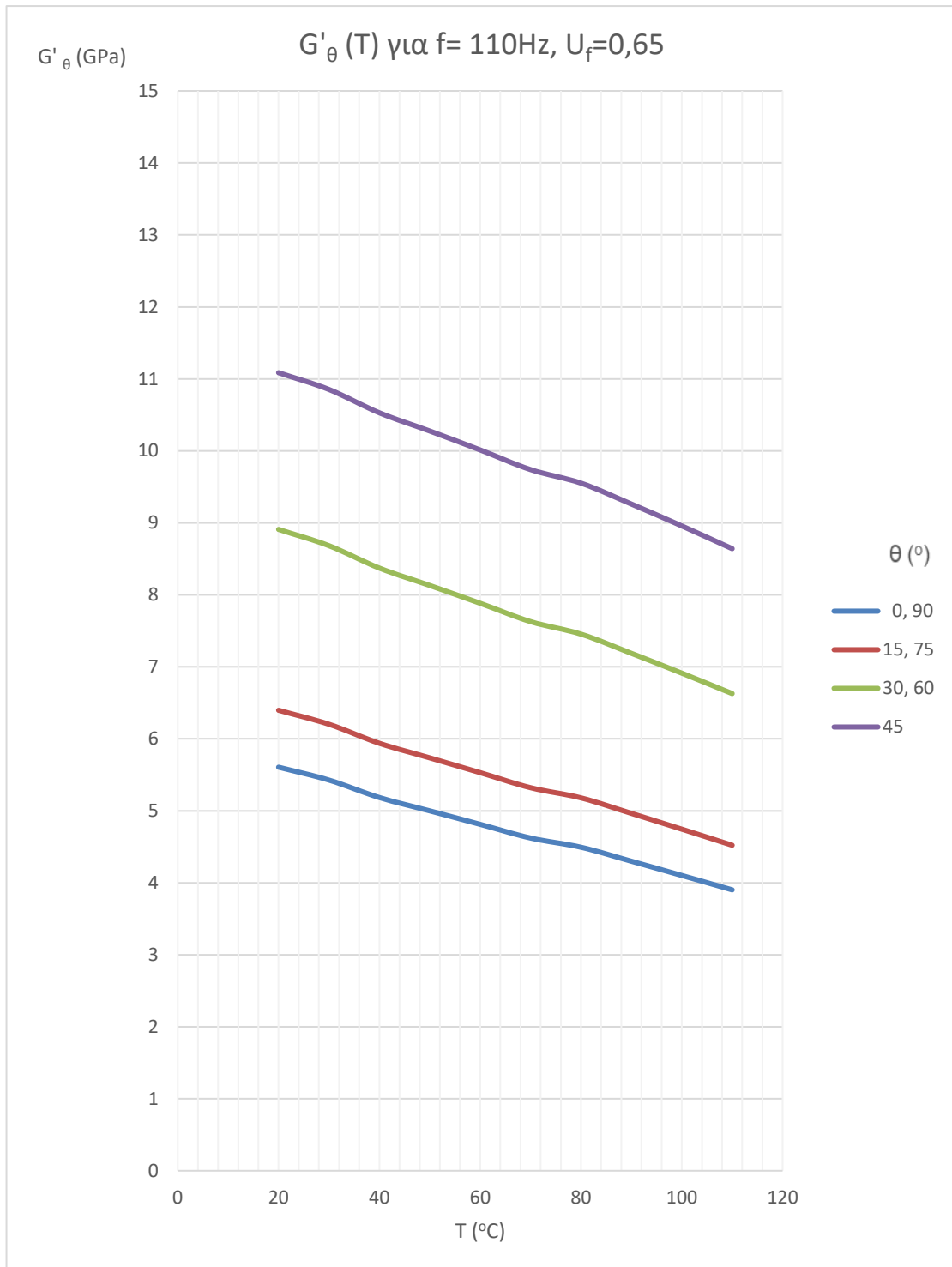
Διάγραμμα 16



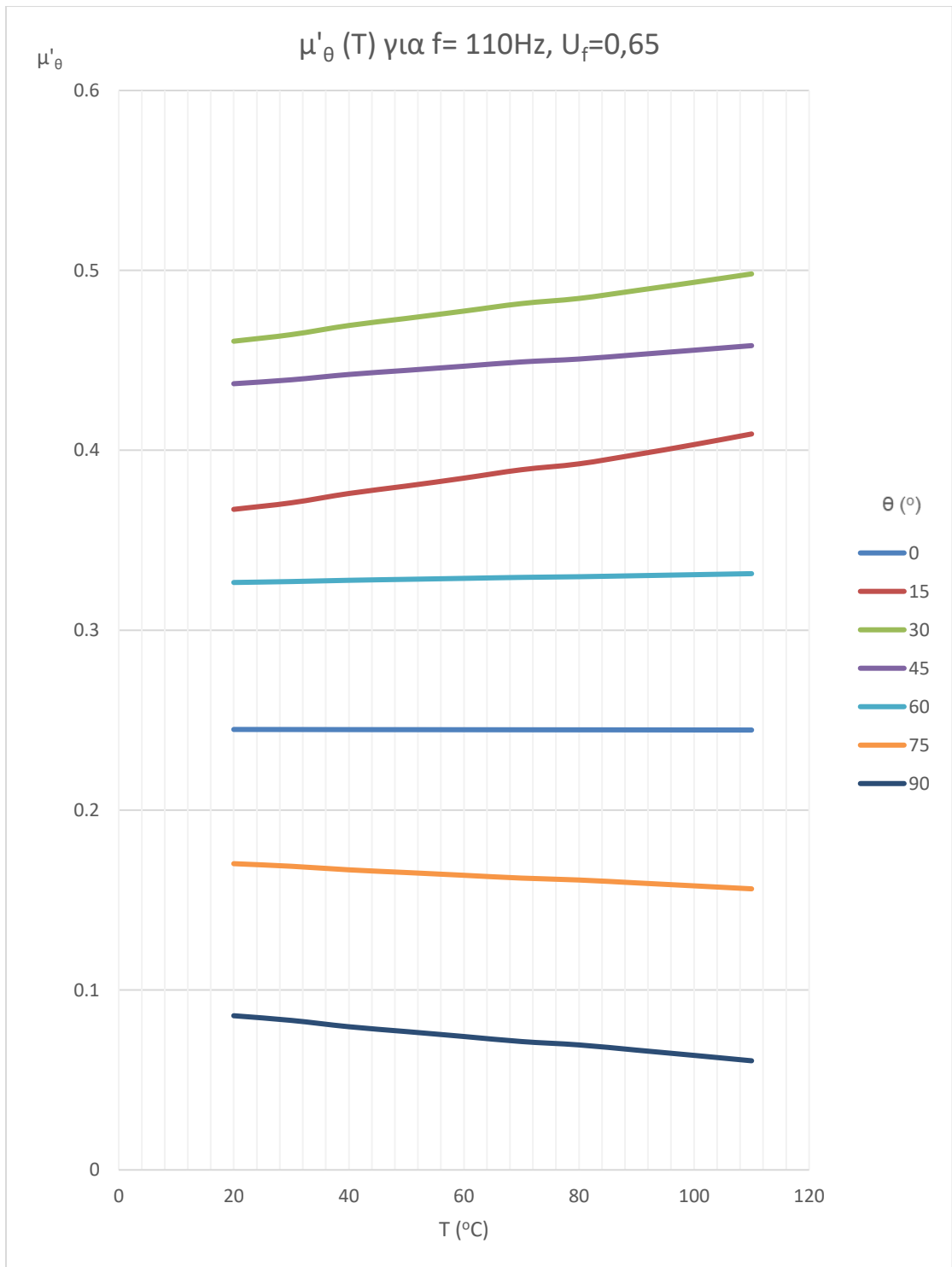
Διάγραμμα 17



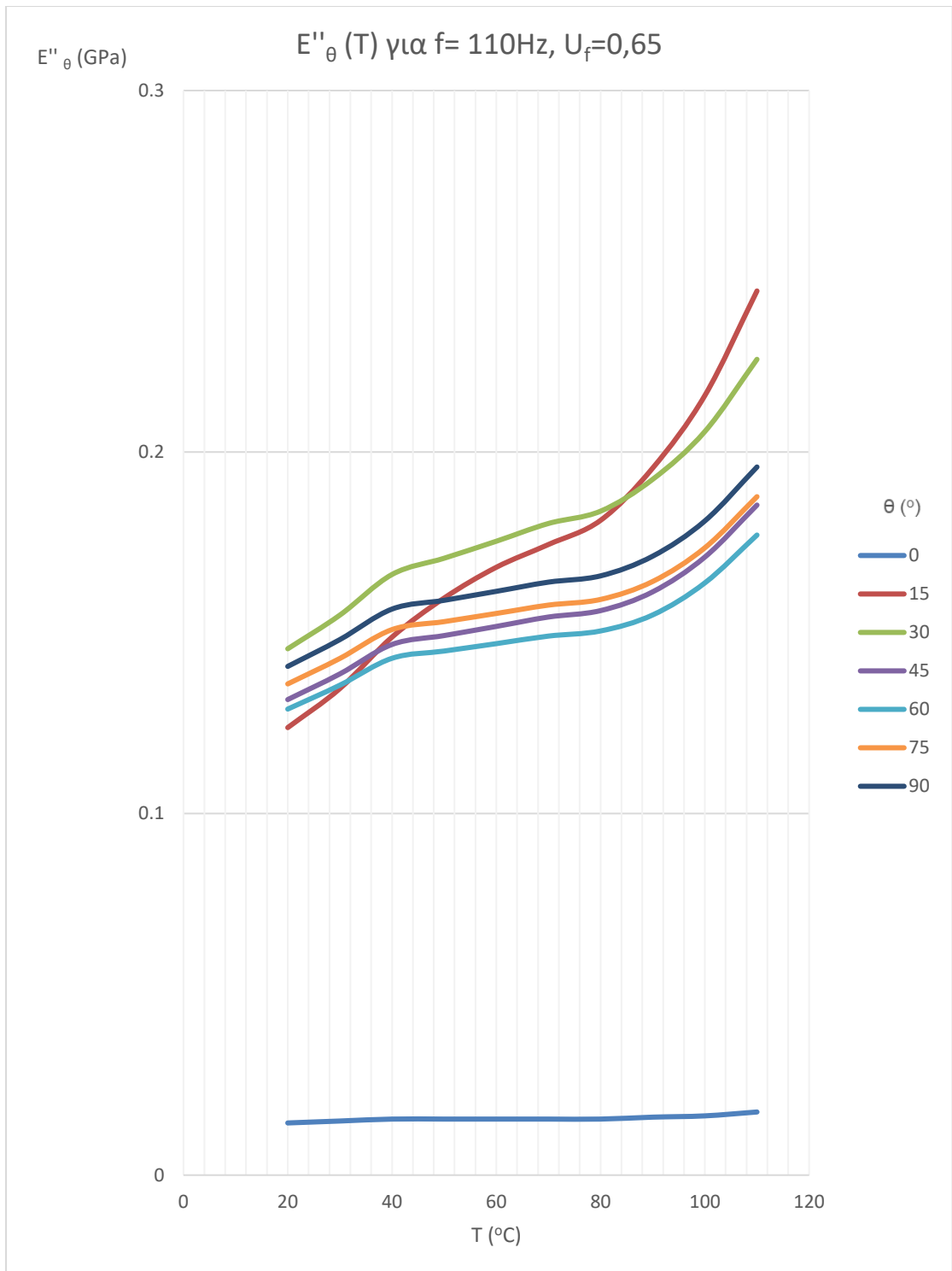
Διάγραμμα 18



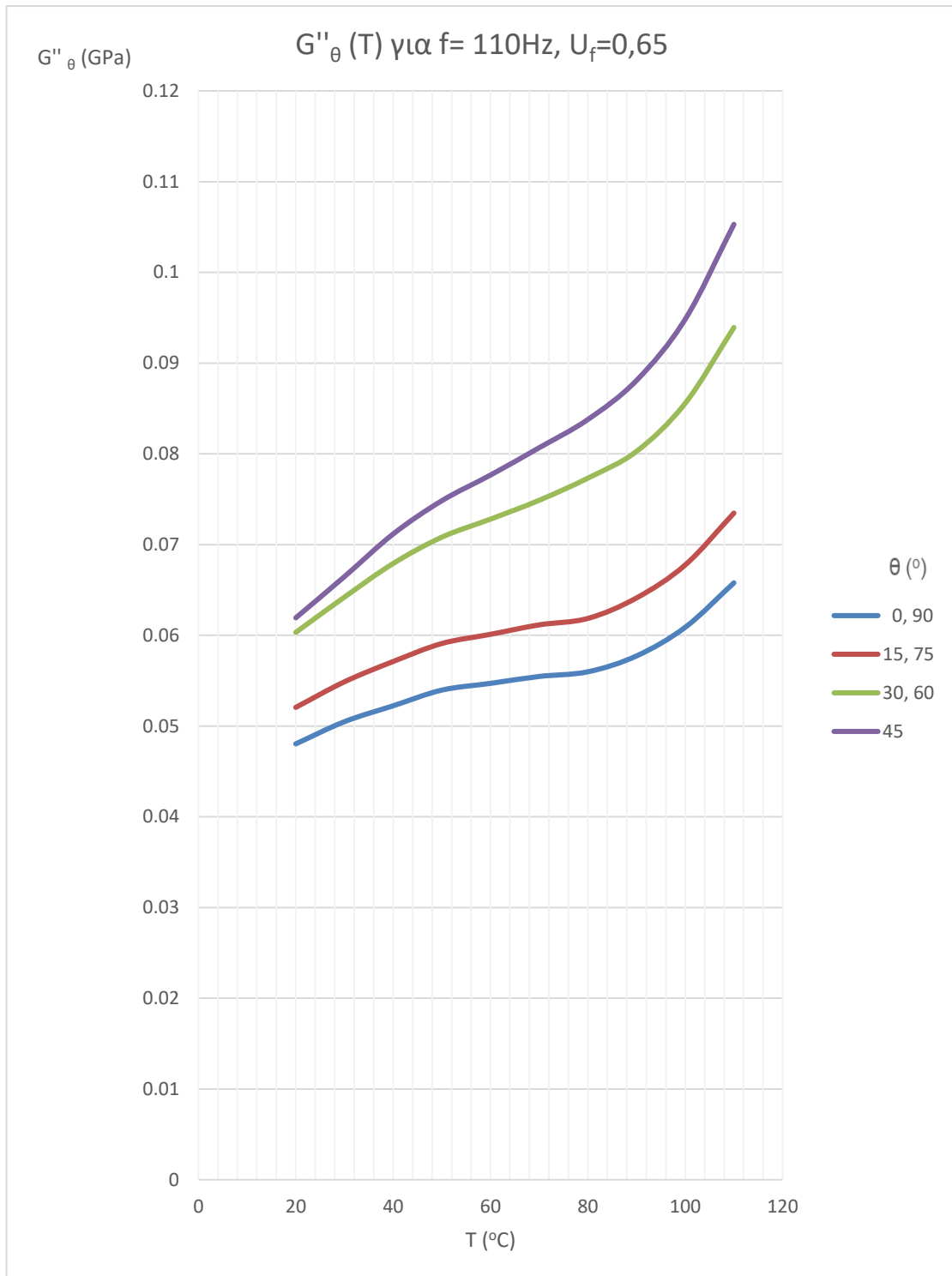
Διάγραμμα 19



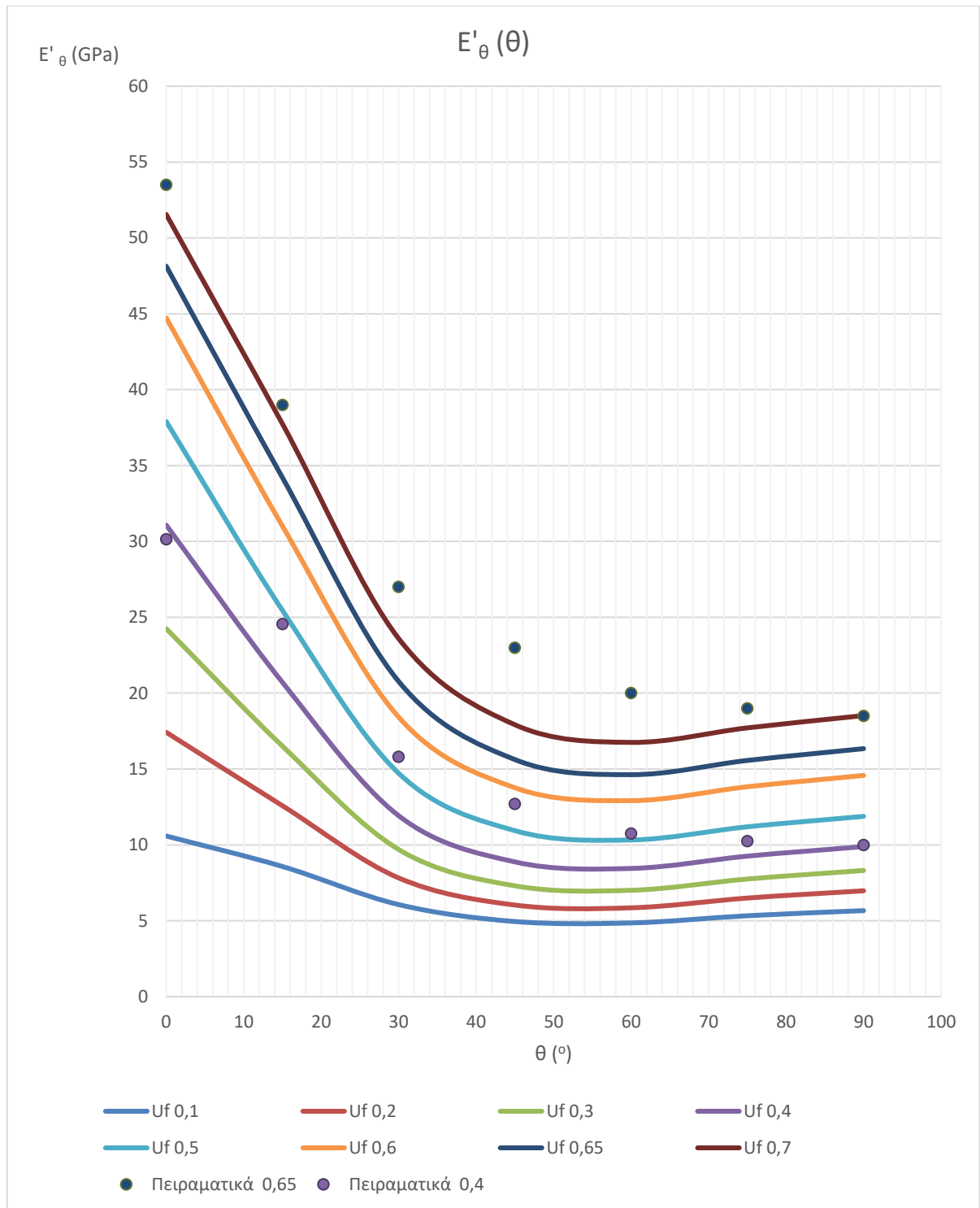
Διάγραμμα 20



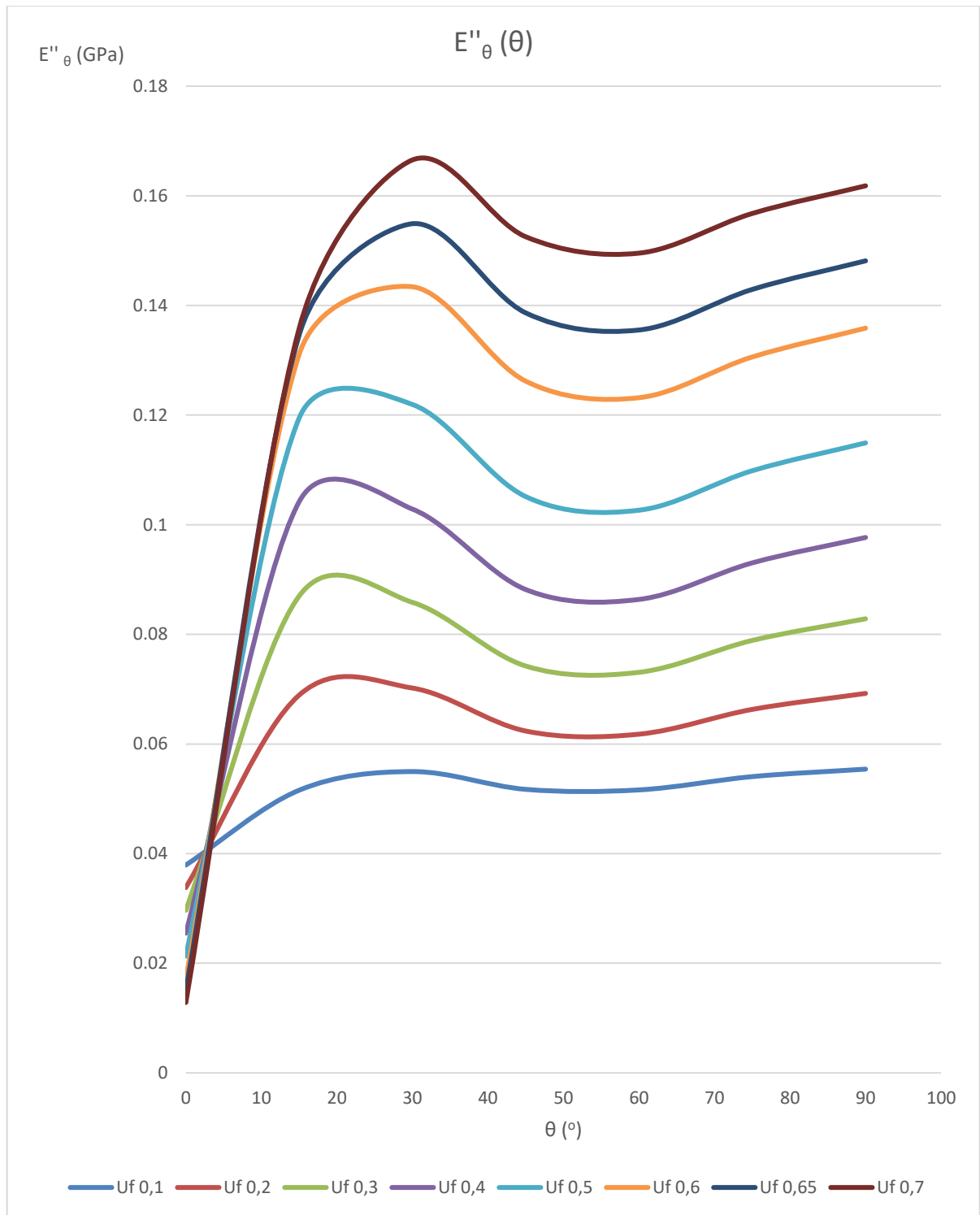
Διάγραμμα 21



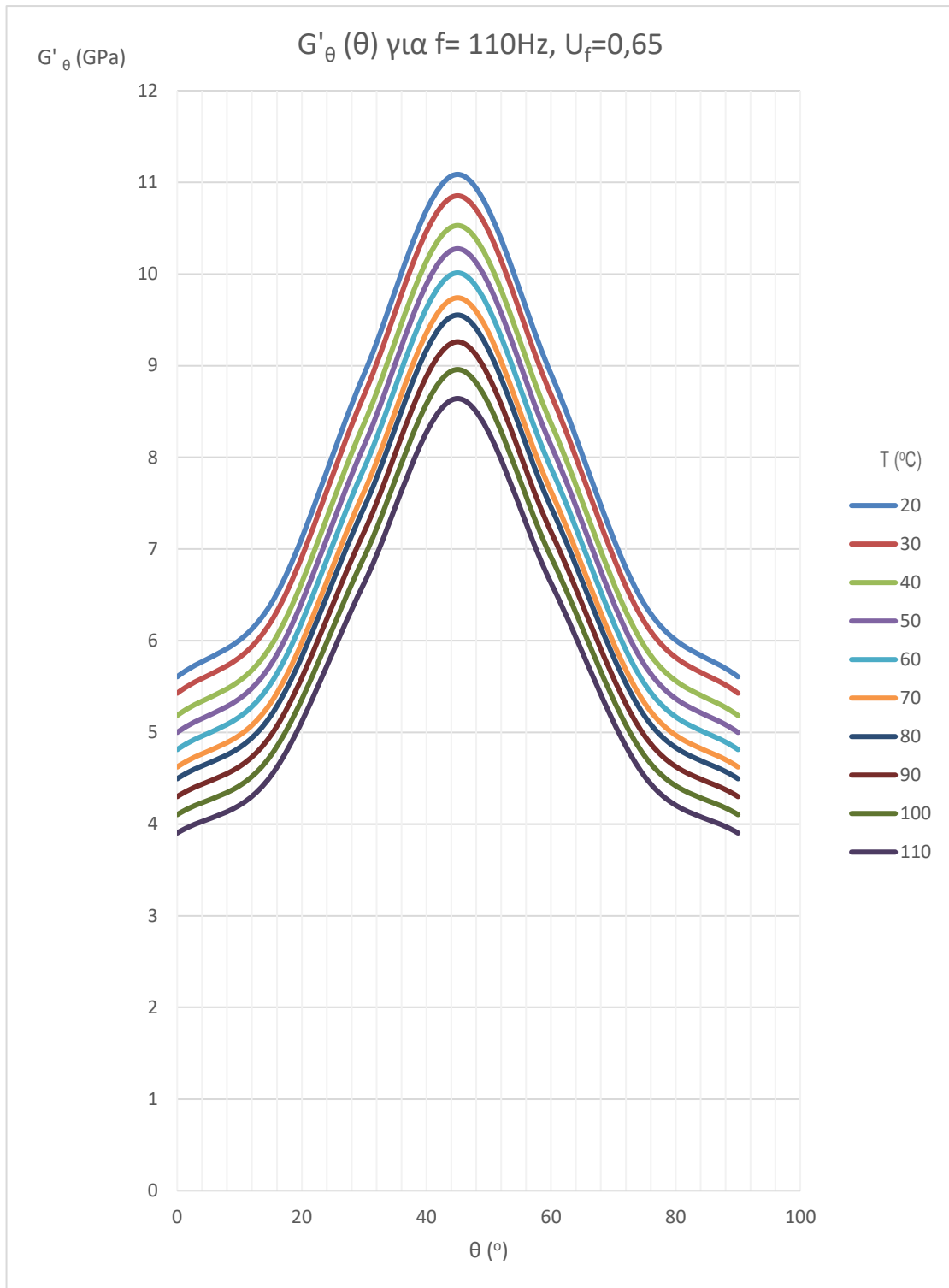
Διάγραμμα 22



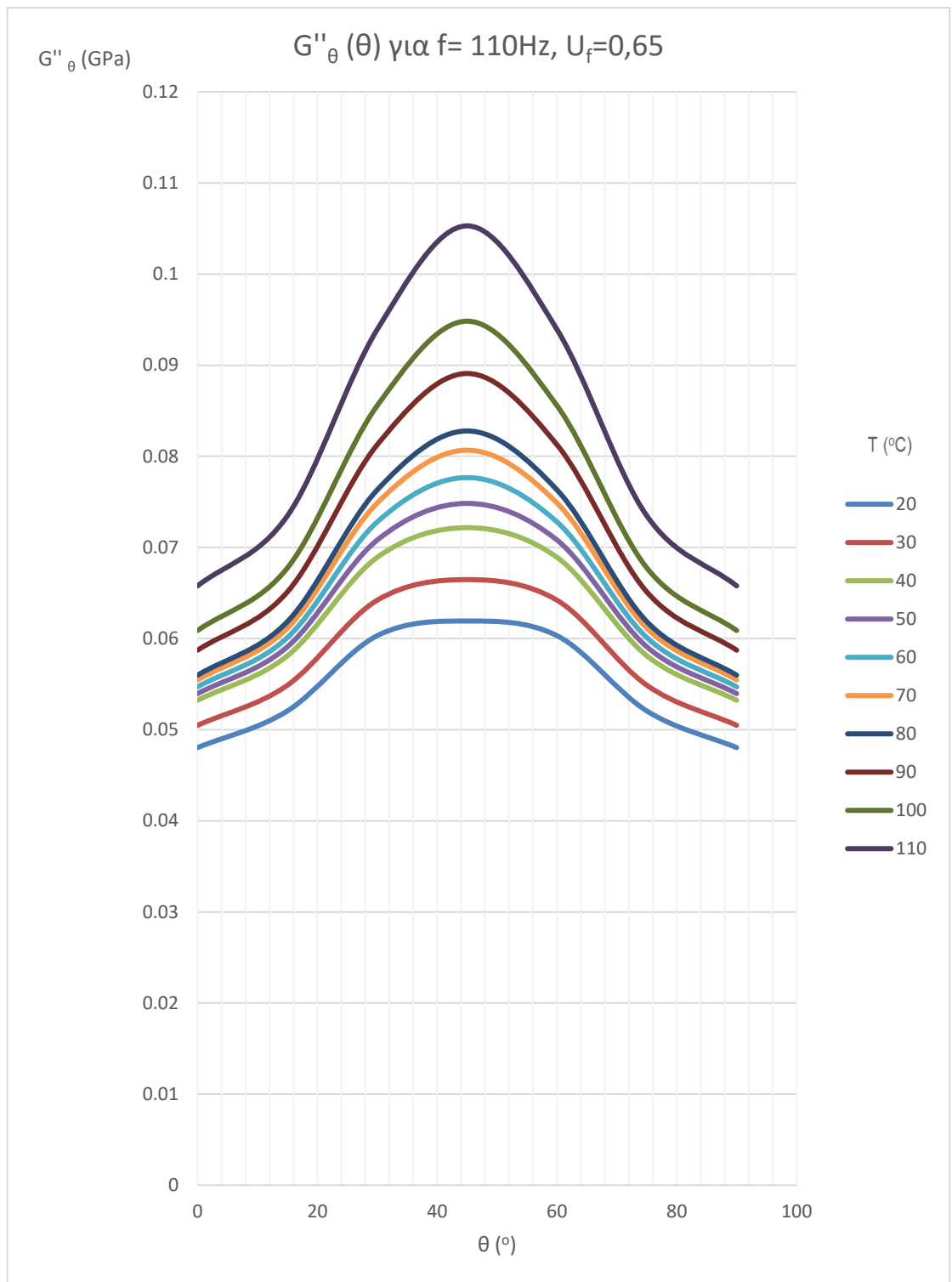
Διάγραμμα 23



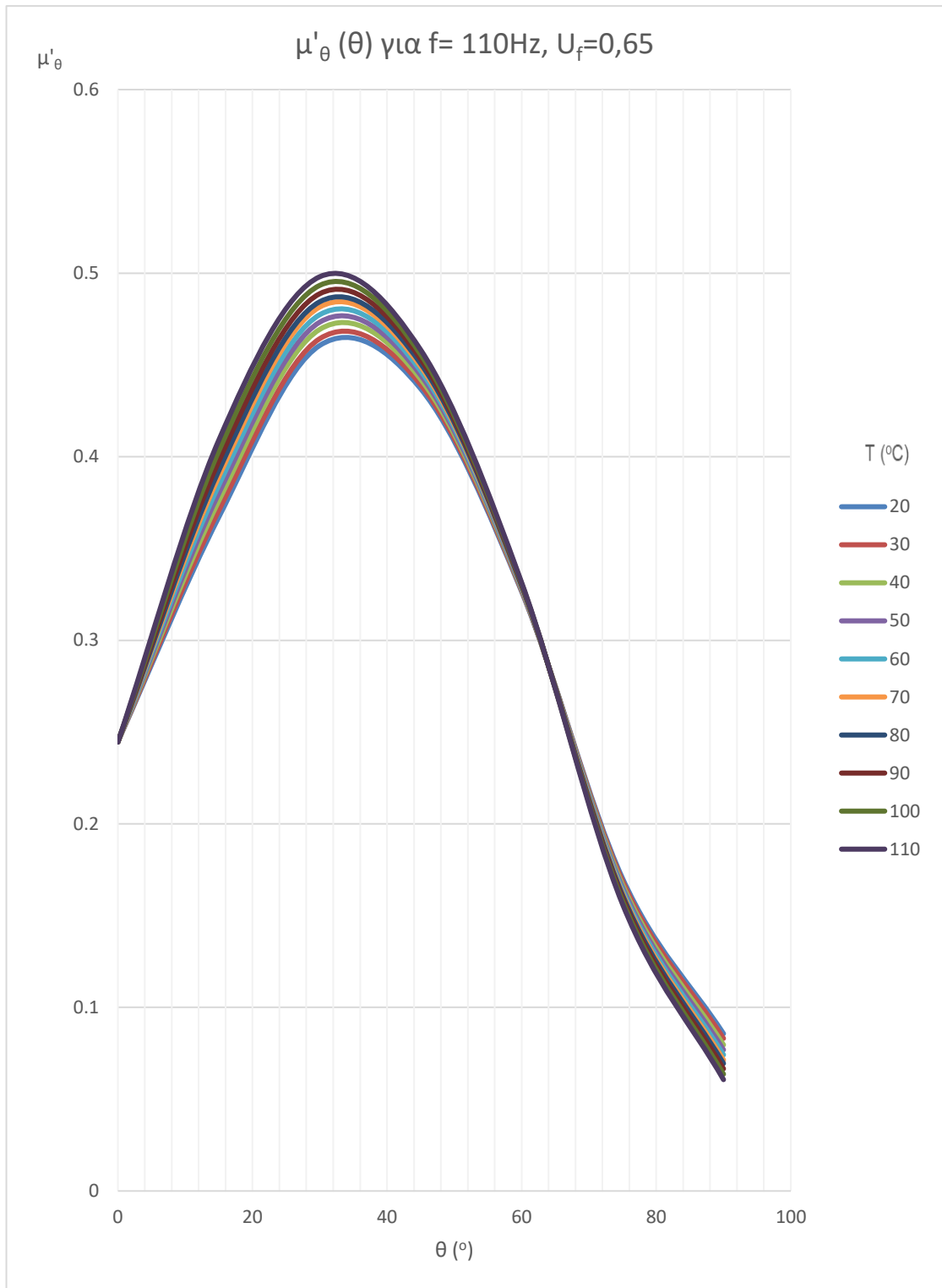
Διάγραμμα 24



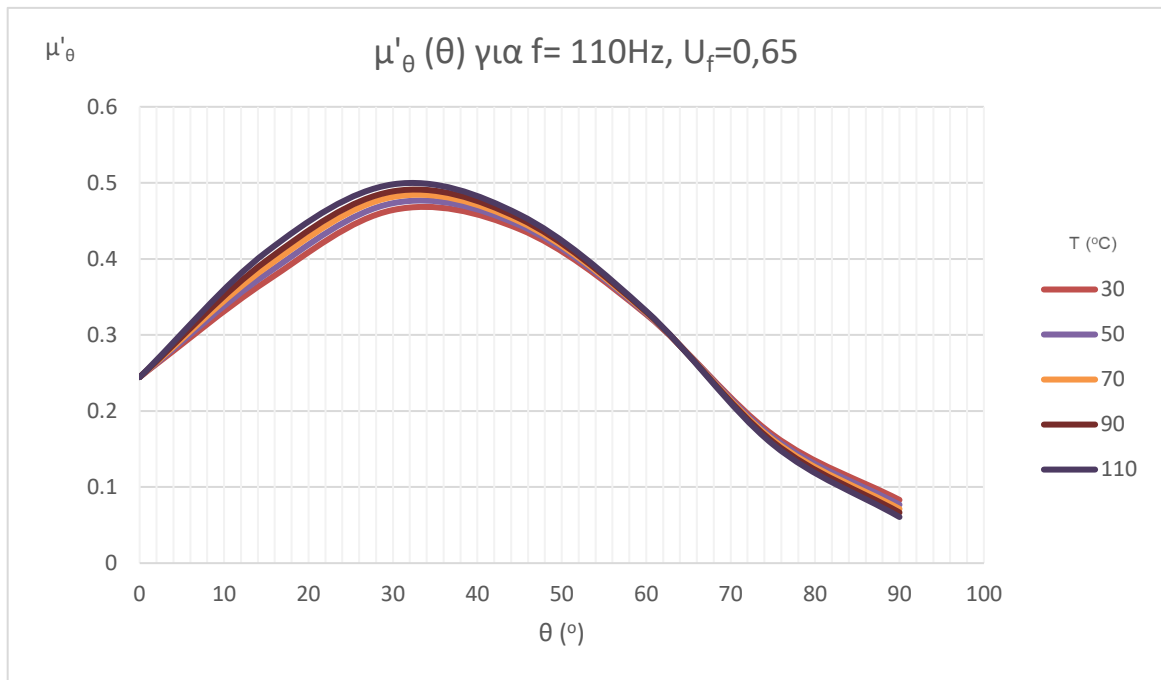
Διάγραμμα 25



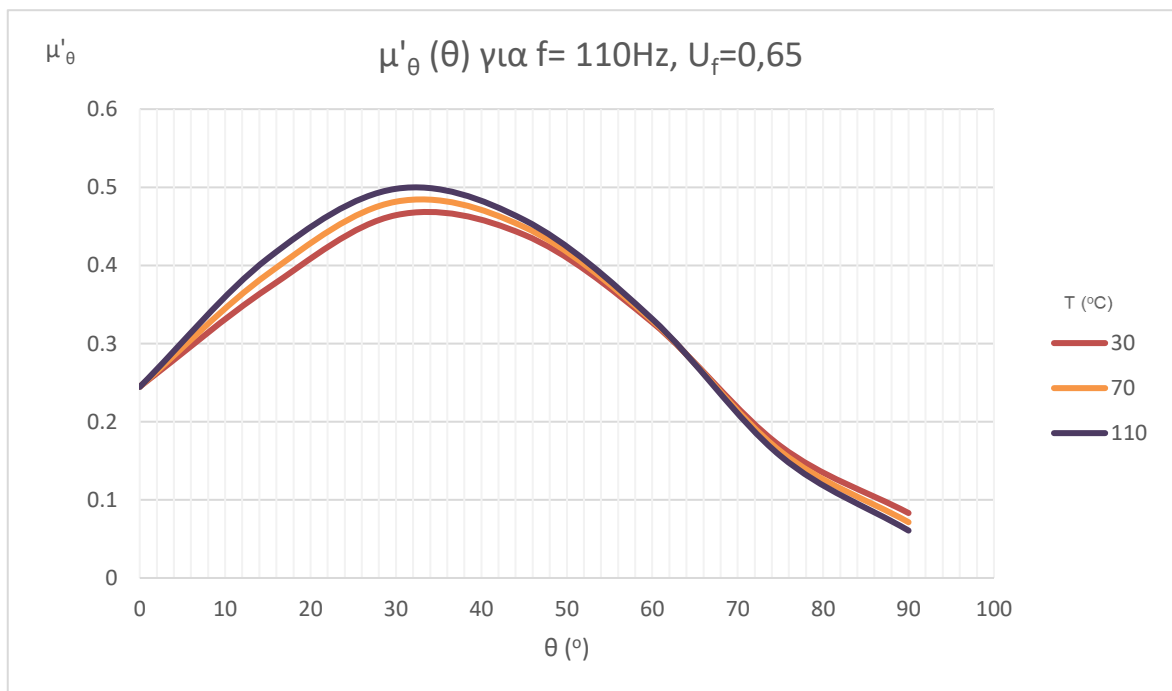
Διάγραμμα 26



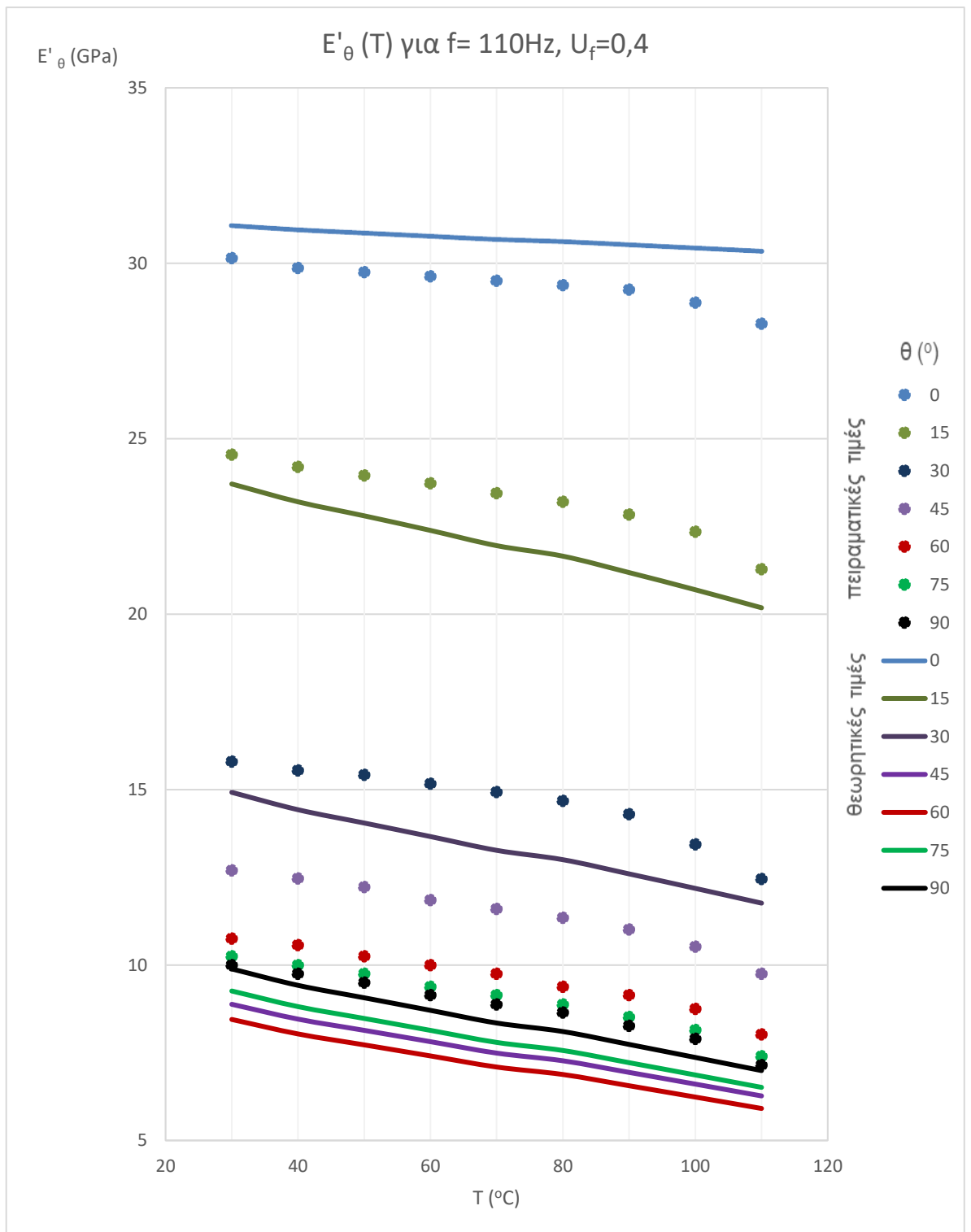
Διάγραμμα 27α



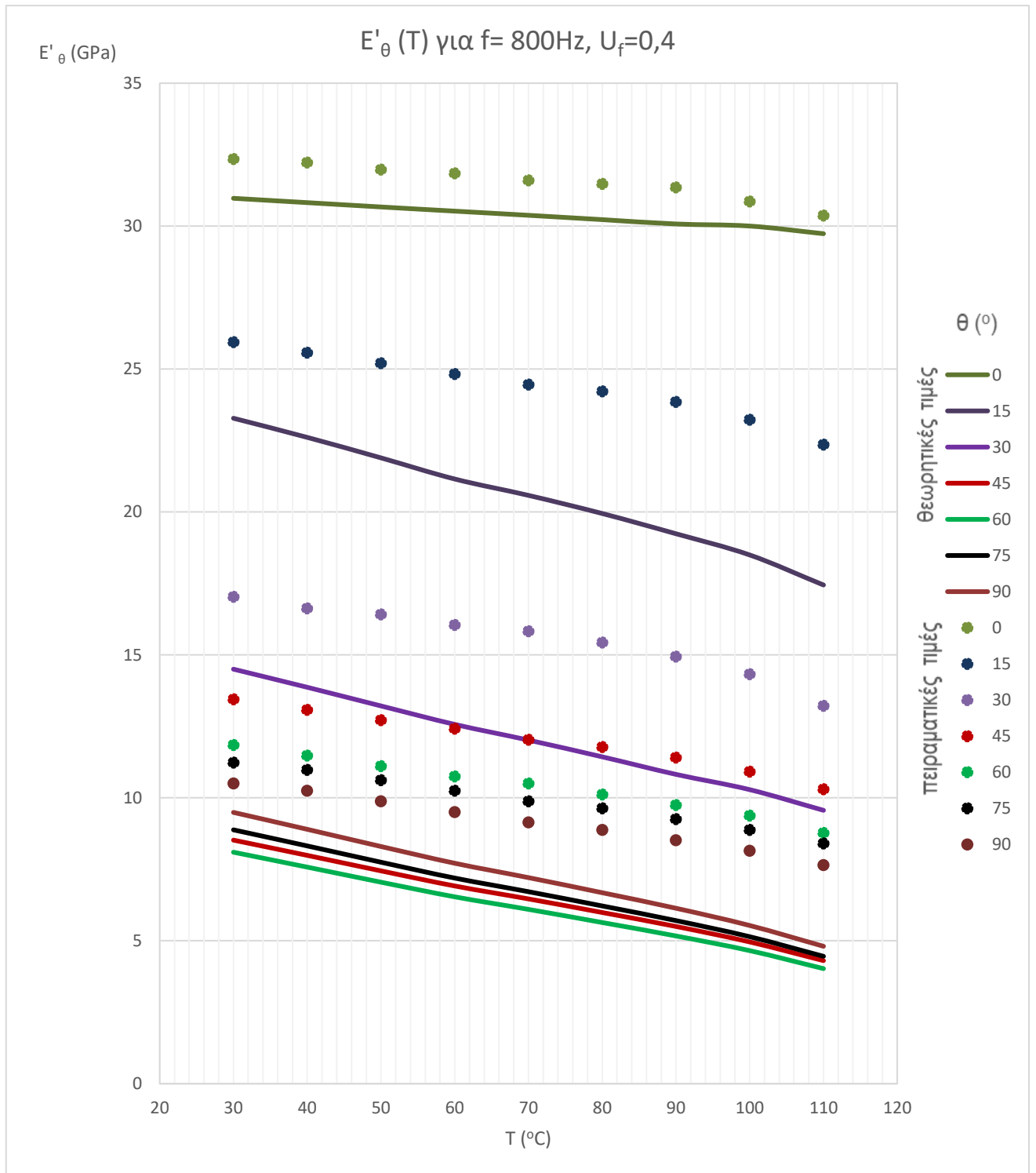
Διάγραμμα 27β



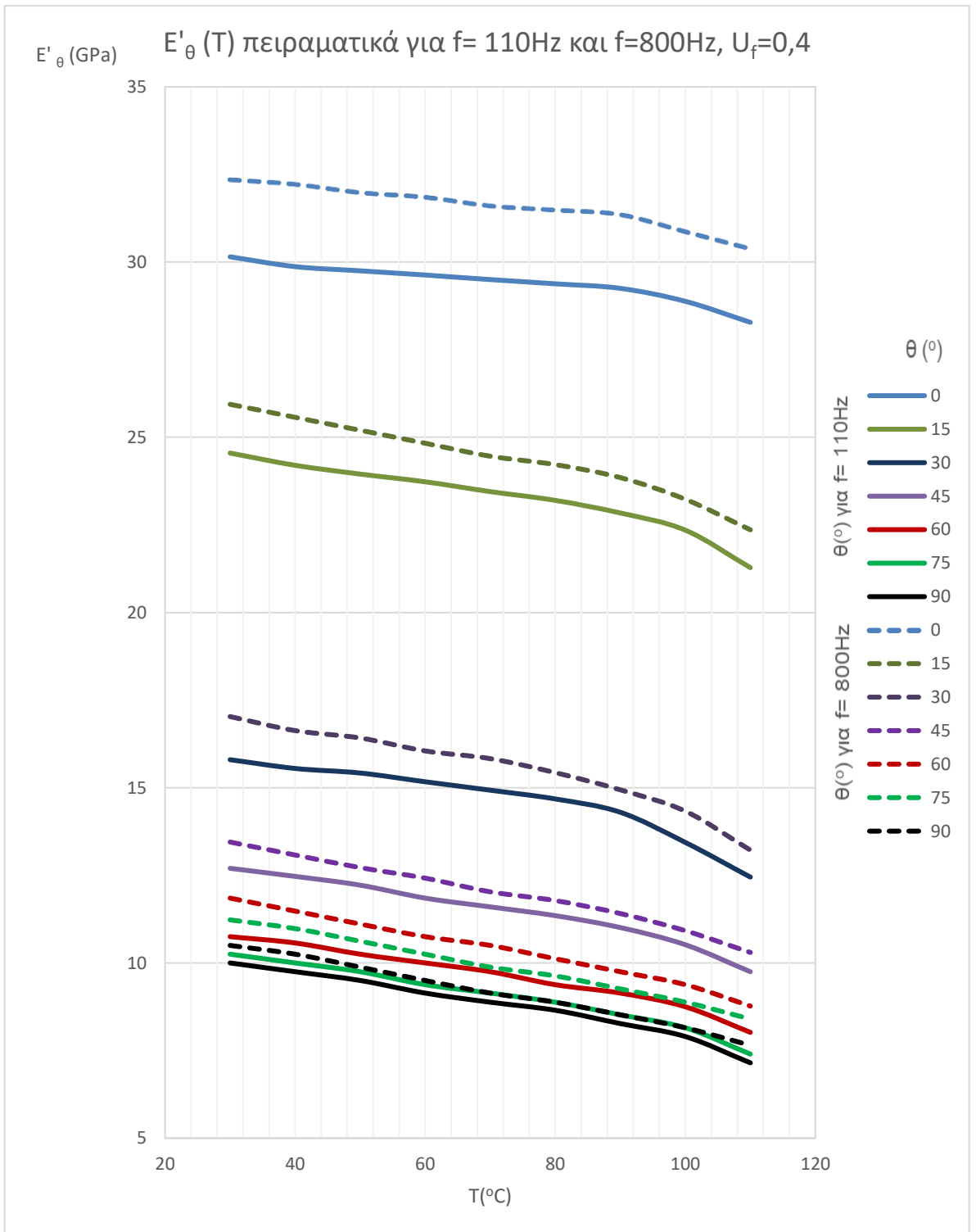
Διάγραμμα 27γ



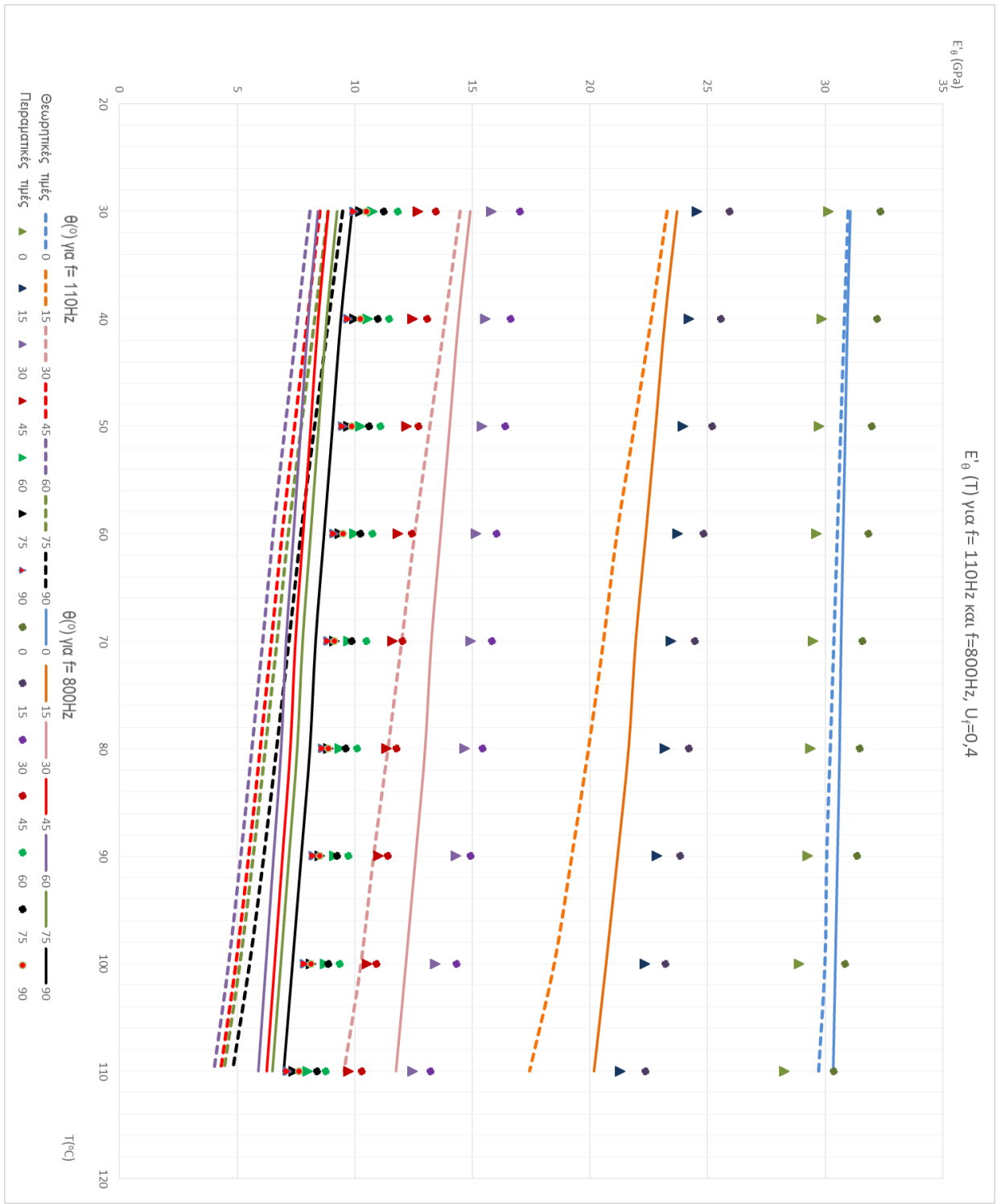
Διάγραμμα 28



Διάγραμμα 29



Διάγραμμα 30



Διάγραμμα 31

3.5 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων – Συμπεράσματα

3.5.1 Δυναμικές ελαστικές σταθερές

E'_m & E''_m

Παρατηρώντας το μέτρο αποθηκεύσεως E'_m της μήτρας συναρτήσει της θερμοκρασίας στο διάγραμμα 11 διαπιστώνουμε ότι οι τιμές του φθίνουν καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία. Αντίθετα το μέτρο απωλειών E''_m αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.

Δυναμικός Διαμήκης Λόγος Poisson μ'_{LT}

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του μοντέλου μας για τον υπολογισμό του μ'_{LT} και φαίνονται και στο διάγραμμα 12 δείχνουν μια πολύ ασθενή πτωτική εξάρτηση του μ'_{LT} από την θερμοκρασία.

Δυναμικός Εγκάρσιος Λόγος Poisson μ'_{TT}

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του μοντέλου μας για τον υπολογισμό του μ'_{TT} και φαίνονται και στο διάγραμμα 13 δείχνουν ότι ο δυναμικός εγκάρσιος λόγος Poisson είναι σχεδόν ανεξάρτητος της θερμοκρασίας.

Διάμηκες Μέτρο Αποθηκεύσεως E'_L

Από το διάγραμμα 14 διαπιστώνουμε ότι το E'_L εμφανίζει μια ασθενή πτωτική εξάρτηση από την θερμοκρασία, γεγονός που επιβεβαιώνουν και τα πειραματικά δεδομένα. Τα αποτελέσματα που δίνει το μοντέλο μας για το E'_L μπορούν να χαρακτηρισθούν ικανοποιητικά αφού τα πειραματικά σημεία προσεγγίζονται σε καλό βαθμό σε όλο το εύρος των θερμοκρασιών, οι τιμές που προβλέπει όμως είναι σταθερά μικρότερες από τις τιμές του πειράματος.

Εγκάρσιο Μέτρο Αποθηκεύσεως E'_T

Παρόμοια είναι τα συμπεράσματα που προκύπτουν και για το εγκάρσιο μέτρο αποθηκεύσεως, Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 15, το E'_T εμφανίζει πτωτική εξάρτηση από την θερμοκρασία, γεγονός που επιβεβαιώνουν και τα πειραματικά δεδομένα. Το μοντέλο μας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα αφού τα πειραματικά σημεία προσεγγίζονται σε καλό βαθμό σε όλο το εύρος των θερμοκρασιών, οι τιμές που προβλέπει όμως είναι σταθερά μικρότερες από τις τιμές του πειράματος.

Διάμηκες Μέτρο Απωλειών E_L''

Από το διάγραμμα 17 διαπιστώνουμε ότι το E_L'' αυξάνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, γεγονός που επιβεβαιώνουν και τα πειραματικά δεδομένα. Ο ρυθμός της αύξησης του E_L'' βλέπουμε ότι επιταχύνεται για $T > 80^\circ\text{C}$, καθώς πλησιάζουμε τις θερμοκρασίες υαλώδους μετάβασης για το σύνθετο. Τα αποτελέσματα που δίνει το μοντέλο μας για το E_L' μπορούν να χαρακτηρισθούν ικανοποιητικά αφού τα πειραματικά σημεία προσεγγίζονται σε καλό βαθμό σε όλο το εύρος των θερμοκρασιών, οι τιμές που προβλέπει όμως είναι σταθερά μεγαλύτερες από τις τιμές του πειράματος.

Εγκάρσιο Μέτρο Απωλειών E_T''

Παρόμοια σε όσα διαπιστώσαμε για το διάμηκες μέτρο απωλειών ισχύουν και για το εγκάρσιο. Από το διάγραμμα 18 διαπιστώνουμε ότι το E_T'' αυξάνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, γεγονός που επιβεβαιώνουν και τα πειραματικά δεδομένα. Ο ρυθμός της αύξησης του E_T'' βλέπουμε ότι επιταχύνεται για $T > 80^\circ\text{C}$, καθώς πλησιάζουμε τις θερμοκρασίες υαλώδους μετάβασης για το σύνθετο. Τα αποτελέσματα που δίνει το μοντέλο μας για το E_T' μπορούν να χαρακτηρισθούν ικανοποιητικά αφού τα πειραματικά σημεία προσεγγίζονται σε καλό βαθμό σε όλο το εύρος των θερμοκρασιών, οι τιμές που προβλέπει όμως είναι σταθερά μικρότερες από τις τιμές του πειράματος.

Δυναμικό Διάμηκες Μέτρο Διάτμησης G_{LT}'

Στο διάγραμμα 16 βλέπουμε πως το G_{LT}' μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα σε σχέση με την θερμοκρασία.

Δυναμικό Διάμηκες Μέτρο Διάτμησης G_{LT}''

Στο διάγραμμα 19 βλέπουμε πως το G_{LT}'' ακολουθεί όμοιο νόμο μεταβολής με τα δυναμικά μέτρα απωλειών, πράγμα λογικό αφού αποτελεί το δυναμικό μέτρο απωλειών σε διάτμηση. Το G_{LT}'' αυξάνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία, ενώ ο ρυθμός της αύξησης του βλέπουμε ότι επιταχύνεται για $T > 80^\circ\text{C}$, καθώς πλησιάζουμε τις θερμοκρασίες υαλώδους μετάβασης για το σύνθετο.

E'_θ

Παρατηρώντας το μέτρο αποθηκεύσεως E'_θ στο διάγραμμα 9 συναρτήσει της γωνίας των ινών και για περιεκτικότητες $0,1 < U_f < 0,7$ παρατηρούμε ότι ακολουθεί ακριβώς την μορφή του στατικού μέτρου ελαστικότητας E_θ του διαγράμματος 6. Διαπιστώνουμε μια ραγδαία πτώση της τιμής του μέτρου ελαστικότητας στο διάστημα ανάμεσα $5^\circ - 45^\circ$, για να ακολουθήσει μια πιο ομαλή πτώση μέχρι τις 60° περίπου. Σε γωνία ινών περίπου 60° το μέτρο ελαστικότητας λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του για να κλείσει με μια μικρή άνοδο μέχρι τις 90° . Οι ακραίες τιμές που λαμβάνουμε για 0° και 90° αντιστοιχούν, εξ' ορισμού στις τιμές E'_L και E'_T αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας εγκλείσματος U_f οδηγεί και σε αύξηση του E'_θ , γεγονός αναμενόμενο αφού το U_f αποτελεί το ποσοστό ενίσχυσης του συνθέτου υλικού (το έγκλεισμα ονομάζεται εναλλακτικά ενίσχυση).

Από το διάγραμμα 20 συναρτήσει της θερμοκρασίας και για γωνίες ινών $0^\circ < \theta < 90^\circ$ παρατηρούμε ότι εμφανίζει πτωτική εξάρτηση από την θερμοκρασία. Διαπιστώνουμε μια ραγδαία πτώση της τιμής του μέτρου ελαστικότητας στο διάστημα ανάμεσα $0^\circ - 45^\circ$. Το ελάχιστο E'_θ εμφανίζεται γωνία ινών 60° , ενώ στο διάστημα $60^\circ < \theta < 90^\circ$ το μέτρο αποθηκεύσεως εμφανίζει μικρή αύξηση καθώς η γωνία των ινών αυξάνεται μέχρι τις 90° . Οι ακραίες τιμές που λαμβάνουμε για 0° και 90° αντιστοιχούν, εξ' ορισμού στις τιμές E'_L και E'_T αντίστοιχα.

Η πτωτική εξάρτηση του μέτρου αποθηκεύσεως από την θερμοκρασία φαίνεται και στα διαγράμματα 28,29. Για την επίδραση της γωνίας των ινών τα συμπεράσματά μας συμφωνούν με αυτά που εξαγάγαμε από τα διαγράμματα 9,20. Οι θεωρητικές προβλέψεις του μοντέλου μας ακολουθούν επιτυχώς την μορφή της εξάρτησης του μέτρου αποθηκεύσεως από την θερμοκρασία και την γωνία των ινών, όπως αυτή φαίνεται από τα πειραματικά δεδομένα. Η προσέγγιση των θεωρητικών με τις πειραματικές τιμές είναι αρκετά ικανοποιητική, αν και το μοντέλο υποτιμά τις τιμές του E'_θ για $15^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

Από το διάγραμμα 31 διαπιστώνουμε επιπλέον ότι υπάρχει πτωτική εξάρτηση μεταξύ του μέτρου αποθηκεύσεως και της συχνότητας f της καταπόνησης, γεγονός που προβλέπεται από το μοντέλο, επιβεβαιώνεται δε από τα πειραματικά δεδομένα.

E''_{θ}

Παρατηρώντας το μέτρο απωλειών E''_{θ} στο διάγραμμα 10 συναρτήσει της γωνίας των ινών και για περιεκτικότητες $0,1 < U_f < 0,7$ διαπιστώνουμε μια ραγδαία αύξηση της τιμής του μέτρου ελαστικότητας στο διάστημα ανάμεσα 0° - 30° . Σε γωνία ινών περίπου 30° το μέτρο απωλειών λαμβάνει την μέγιστη τιμή του για να κλείσει με μια μικρή πτώση μέχρι τις 90° . Οι ακραίες τιμές που λαμβάνουμε για 0° και 90° αντιστοιχούν, εξ' ορισμού στις τιμές E''_L και E''_T αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η αύξηση της περιεκτικότητας εγκλείσματος U_f οδηγεί και σε αύξηση του E''_{θ} . Μάλιστα η αύξηση της περιεκτικότητας φαίνεται να επηρεάζει και τον ρυθμό αύξησης του μέτρου απωλειών, ο οποίος αυξάνεται αυξανόμενης της U_f . Έτσι για γωνία ινών περίπου 5° οι καμπύλες των μέτρων απωλειών παίρνουν την ίδια τιμή και οι καμπύλες τέμνονται.

Παρατηρώντας στο διάγραμμα 23 το μέτρο απωλειών E''_{θ} συναρτήσει της θερμοκρασίας και για περιεκτικότητες $0,1 < U_f < 0,7$ αποτελεί αύξουσα συνάρτηση της θερμοκρασίας. Ο ρυθμός της αύξησης του E''_{θ} επιταχύνεται για $T > 80^{\circ}\text{C}$, καθώς πλησιάζουμε τις θερμοκρασίες υαλώδους μετάβασης για το σύνθετο. Όσον αφορά την επίδραση της γωνίας ινών στο διάστημα για θ μέχρι περίπου 30° το μέτρο απωλειών αυξάνεται καθώς αυξάνεται η γωνία των ινών. Στο διάστημα $30^{\circ} < \theta < 60^{\circ}$ το E''_{θ} φθίνει καθώς αυξάνεται η γωνία των ινών, ενώ στο διάστημα $75^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ αυξάνεται ξανά. Παρατηρούμε επίσης ότι για $\theta = 15^{\circ}$ ο ρυθμός αύξησης του E''_{θ} συναρτήσει της T είναι μεγαλύτερος από όλες τις άλλες τιμές γωνιών και το $E''_{15^{\circ}}$ καταλήγει να έχει για $T > 80^{\circ}\text{C}$ τις υψηλότερες τιμές για το μέτρο απωλειών. Αυτή η παράξενη φαινομενικά συμπεριφορά ίσως να οφείλεται στο ότι η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως, στην οποία το μέτρο απωλειών μεγιστοποιείται, έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι εξαρτάται από την γωνία των ινών, γεγονός που δεν λαμβάνεται υπόψιν, καθιστώντας αυτό ως ένα αδύναμο σημείο του προτεινόμενου μοντέλου.

G'_{θ}

Παρατηρώντας το δυναμικό μέτρο διάτμησης G'_{θ} συναρτήσει της θερμοκρασίας στο διάγραμμα 21 διαπιστώνουμε ότι είναι αντιστρόφως ανάλογο της θερμοκρασίας. Επίσης παρατηρούμε μια έντονη αύξηση της τιμής του δυναμικού μέτρου διατμήσεως στο διάστημα ανάμεσα 0° - 45° . Σε γωνία ινών περίπου 45° το μέτρο απωλειών λαμβάνει την μέγιστη τιμή του, ενώ στο διάστημα 45° - 90° οι τιμές του πέφτουν με τις συμπληρωματικές γωνίες να δίδουν ίδιες τιμές.

Παρατηρώντας το δυναμικό μέτρο αποθήκευσης διάτμησης G'_θ συναρτήσει της γωνίας των ινών στο διάγραμμα 25 φαίνεται ξεκάθαρα η συμμετρία για γωνία ινών 45° . Όπως και από το διάγραμμα 21 έτσι και εδώ βλέπουμε την έντονη αύξηση της τιμής του δυναμικού μέτρου διατμήσεως στο διάστημα ανάμεσα 0° - 45° . Σε γωνία ινών περίπου 45° το μέτρο απωλειών λαμβάνει την μέγιστη τιμή του, ενώ στο διάστημα 45° - 90° οι τιμές του πέφτουν με τις συμπληρωματικές γωνίες να δίδουν ίδιες τιμές. Επίσης όσον αφορά την εξάρτηση του από την θερμοκρασία φαίνεται η αντιστρόφως ανάλογη σχέση μεταξύ του δυναμικού μέτρου αποθηκεύσεως και της θερμοκρασίας,.

G''_θ

Παρατηρώντας το δυναμικό μέτρο απωλειών διάτμησης G''_θ συναρτήσει της θερμοκρασίας στο διάγραμμα 24 διαπιστώνουμε ότι αυξάνεται αυξανόμενης της θερμοκρασίας, με τρόπο όμοια όπως σε και στα υπόλοιπα μέτρα απωλειών. Ο ρυθμός της αύξησης του G''_θ επιταχύνεται για $T > 80^\circ\text{C}$, καθώς πλησιάζουμε τις θερμοκρασίες υαλώδους μετάβασης. Επίσης σε ότι αφορά την εξάρτηση από την γωνία των ινών, παρατηρούμε μια έντονη αύξηση της τιμής του δυναμικού μέτρου διατμήσεως στο διάστημα ανάμεσα 0° - 45° . Σε γωνία ινών περίπου 45° το μέτρο απωλειών λαμβάνει την μέγιστη τιμή του, ενώ στο διάστημα 45° - 90° οι τιμές του πέφτουν με τις συμπληρωματικές γωνίες να δίδουν ίδιες τιμές.

Παρατηρώντας το δυναμικό μέτρο απωλειών διάτμησης G''_θ συναρτήσει της θερμοκρασίας στο διάγραμμα 26 διαπιστώνουμε τα ίδια που διαπιστώσαμε και από το διάγραμμα 23. Η συμμετρία των τιμών του G''_θ γύρω από τις 45° φαίνεται χαρακτηριστικά. Φαίνεται επίσης ότι αυξανόμενης της θερμοκρασίας, το G''_θ αυξάνεται, ενώ φαίνεται και η ραγδαία αύξηση του ρυθμού της αύξησης του G''_θ επιταχύνεται για $T > 80^\circ\text{C}$, καθώς πλησιάζουμε τις θερμοκρασίες υαλώδους μετάβασης.

μ'_θ

Στο διάγραμμα 22 για το δυναμικό λόγο Poisson μ'_θ συναρτήσει της θερμοκρασίας παρατηρούμε δύο περιοχές. Στο διάστημα $0^\circ < \theta < 60^\circ$ ο μ'_θ αυξάνεται καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία. Ο ρυθμός της αύξησης μάλιστα μεταβάλλεται και αυτός. Στο διάστημα $0^\circ < \theta < 15^\circ$ ο ρυθμός της αύξησης αυξάνεται, με $\left(\frac{d\mu'_\theta}{dT}\right)_{max} = \frac{d\mu'_{15^\circ}}{dT}$. Στο διάστημα $15^\circ < \theta < 60^\circ$ ο ρυθμός της αύξησης αν και ακόμα είναι θετικός, μειώνεται. Στο διάστημα $60^\circ < \theta < 90^\circ$ ο μ'_θ μειώνεται καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία. Ο ρυθμός της αύξησης μάλιστα μεταβάλλεται

και σε αυτό το διάστημα . Στο διάστημα $60^\circ < \theta < 90^\circ$ ο ρυθμός της μείωσης αυξάνεται , με

$$\left(\frac{d\mu_\theta'}{dT}\right)_{min} = \frac{d\mu_{90^\circ}'}{dT} .$$

Στα διαγράμματα 27α,β,γ για το δυναμικό λόγο Poisson μ_θ' συναρτήσει της γωνίας των ινών παρατηρούμε τα εξής: Για δεδομένη θερμοκρασία φαίνεται αμεσότερα από ότι στο διάγραμμα 22 ότι στο διάστημα $\theta < 30^\circ$ (περίπου) ο μ_θ' αυξάνεται, εμφανίζει μέγιστο περίπου στις 30° και μετά ακολουθεί πτωτική πορεία για $30^\circ < \theta < 90^\circ$. Όσον αφορά την επίδραση της θερμοκρασίας φαίνονται και εδώ οι δύο περιοχές. Για $\theta < 60^\circ$ (περίπου), η αύξηση της θερμοκρασίας συνεπάγεται και αύξηση του δυναμικού λόγου Poisson. Για $60^\circ < \theta < 90^\circ$ η αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί σε μείωση του δυναμικού λόγου Poisson, ολόένα μεγαλύτερη όσο αυξάνεται η γωνία των ινών.

3.5.2 Εν κατακλείδι

Η απόκλιση των τιμών των ελαστικών σταθερών αλλά και των λόγων Poisson, που εξήχθησαν από το διαφασικό κυλινδρικό μοντέλο μας, σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των ινών μέσα στη ρητίνη θεωρείται ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει, αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι.
2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φυσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ.)
3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.
4. Το θεωρητικό μοντέλο μας προβλέπει τέλεια γεωμετρικά σχήματα (κυλινδρικές ίνες) ενώ στην πραγματικότητα δύναται να υπάρχουν μικρές ατέλειες στην επιφάνεια και ολίγον διαφορετικό μέγεθος ινών.
5. Η ευθυγράμμιση των ινών που είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί κατά την διάρκεια του υλικού των δοκιμίων.
6. Τα πειραματικά δεδομένα εμπεριέχουν και αυτά σφάλμα, το σφάλμα της μέτρησης.

Κατά τα άλλα παρατηρούμε ότι σε γενικά πλαίσια το μοντέλο μας ανταποκρίνεται αρκετά καλά στην πραγματικότητα και οι τιμές που εξήχθησαν από αυτό, προσεγγίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τα πειραματικά δεδομένα στις περισσότερες των περιπτώσεων. Ως μελλοντική εργασία προτείνεται η βελτίωση του μοντέλου θεωρώντας την επίδραση της ενδιάμεσης φάσης ή/και των γειτονικών ινών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ POISSON ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Παρακάτω παραθέτουμε θεωρητικές σχέσεις που κατά καιρούς έχουν εκφράσει διάφοροι ερευνητές για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L , του διαμήκους λόγου Poisson μ_{LT} και του διαμήκους μέτρου διάτμησης G_{LT} . Να αναφέρουμε κατά τα γνωστά πως ο δείκτης f δηλώνει το έγκλεισμα (filler) ενώ ο δείκτης m δηλώνει την μήτρα (matrix).

Τύποι διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L

Εξίσωση Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [15]:

Οι παραπάνω ερευνητές θεώρησαν την ύπαρξη μιας ενδιάμεσης φάσης η οποία δημιουργείται ανάμεσα στην μήτρα και στο έγκλεισμα. Το μοντέλο τους είναι κυλινδρικό διαφασικό και η κατανομή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης φάσης στον παρακάτω τύπο επιλέχθηκε να είναι παραβολική.

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m + \frac{3(E_f + E_m)(1 - U_m)^{3/2} + U_f^{1/2}(1 - U_m) + U_f(1 - U_m)^{1/2} + U_f^{3/2}}{6[(1 - U_m)^{1/2} - U_f^{1/2}]} + \frac{8(E_f - E_m)(1 - U_m)^{1/2} \{1 - U_m + U_f + [U_f(1 - U_m)]^{1/2}\}}{6[(1 - U_m)^{1/2} - U_f^{1/2}]} + \frac{6 \{E_f(1 - U_m) + E_m U_f - 2E_m [U_f(1 - U_m)]^{1/2} [(1 - U_m)^{1/2} + U_f^{1/2}]\}}{[(1 - U_m)^{1/2} - U_f^{1/2}]} \quad (A1)$$

Όπου εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης: $U_m = 1 - U_f - U_i$

Εξίσωση Ekvall [20]:

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m \quad , \quad \text{όπου} \quad E_{m'} = \frac{E_m}{(1 - 2\mu_m)^2} \quad (A2)$$

Τύποι διαμήκους λόγου Poisson μLT

Εξίσωση Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [15]:

Θεωρώντας και πάλι το κυλινδρικό διαφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση και χρησιμοποιώντας την παραβολική μεταβολή, οι παραπάνω ερευνητές έδειξαν ότι ισχύει η εξής σχέση:

$$\begin{aligned} \mu_{LT} = \mu_f U_f + \mu_m U_m + & \frac{3(\mu_f + \mu_m)(1 - U_m)^{3/2} + U_f^{1/2}(1 - U_m) + U_f(1 - U_m)^{1/2} + U_f^{3/2}}{6[(1 - U_m)^{1/2} - U_f^{1/2}]} \\ & + \frac{8(\mu_f - \mu_m)(1 - U_m)^{1/2} \{1 - U_m + U_f + [U_f(1 - U_m)]^{1/2}\}}{6[(1 - U_m)^{1/2} - U_f^{1/2}]} \\ & + \frac{6\{\mu_f(1 - U_m) + \mu_m U_f - 2\mu_m[U_f(1 - U_m)]^{1/2}[(1 - U_m)^{1/2} + U_f^{1/2}]\}}{[(1 - U_m)^{1/2} - U_f^{1/2}]} \end{aligned} \quad (A3)$$

Όπου εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης: $U_m = 1 - U_f - U_i$

Εξίσωση Rosen [21]:

$$\mu_{LT} = \frac{U_f E_f L_1 + U_m E_m L_2 \mu_m}{U_f E_f L_3 + U_m E_m L_2} \quad (A4)$$

, όπου :

$$L_1 = 2\mu_f(1 - \mu_m^2)U_f + \mu_m(1 + \mu_m)U_m$$

$$L_2 = U_f(1 - \mu_f - 2\mu_f^2)U_f + (1 + \mu_m)U_m$$

$$L_3 = 2(1 - \mu_m^2)U_f + (1 + \mu_m)U_m$$

Τύποι εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T

Εξίσωση Σιδερίδη [16]:

Θεωρώντας την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης στο κυλινδρικό διαφασικό μοντέλο και έστω ότι $E_i(r)$ και $\mu_i(r)$ οι συναρτήσεις που περιγράφουν το μέτρο ελαστικότητας και τον λόγο Poisson της ενδιάμεσης φάσης αντίστοιχα με βάση την παραβολική μεταβολή, τότε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του μοντέλου E_T θα είναι:

$$\frac{1 - \mu_{TT}}{E_T} - \frac{2\mu_{LT}^2}{E_L} = \frac{1}{E_f}(1 - \mu_f - 2\mu_f^2)U_f + \frac{1}{E_m}(1 - \mu_m - 2\mu_m^2)U_m + \frac{2U_f}{a^2} \int_a^b \frac{(1 - \mu_i(r) - 2\mu_i^2(r))}{E_i(r)} r dr \quad (A5)$$

Όπου τα E_L και τα μ_{LT} δίνονται από τις σχέσεις (A1), (A3).

Και εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης θα ισχύει ότι $U_m = 1 - U_f - U_i$

Εξίσωση Paul [22]:

Η εξίσωση Paul αποτελεί ένα κατώτατο όριο για το E_T και είναι η εξής:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{U_f}{E_f} + \frac{U_m}{E_m} \quad (A6)$$

Εξίσωση Whitney-Riley [10]:

$$E_T = \frac{2K_C(1 - \mu_T)E_L}{E_L + 4K_C\mu_L^2} \quad (A7)$$

Όπου K_C το μέτρο διογκώσεως του σύνθετου υλικού και ισχύει η σχέση:

$$K_C = \frac{(k_f + G_m)k_m - (k_f - k_m)G_m U_f}{(k_f + G_m) - (k_f - k_m)U_f}$$

$$\text{Με } k_f = \frac{E_f}{(1 - \mu_f - 2\mu_f^2)} \text{ και } k_m = \frac{E_m}{(1 - \mu_m - 2\mu_m^2)}$$

Εξίσωση Ekvall [23]:

$$E_T = \frac{E_f E_{m'}}{U_f E_{m'} + U_m E_f (1 - \mu_m^2)} \quad , \quad \text{όπου} \quad E_{m'} = \frac{E_m}{(1 - 2\mu_m)^2} \quad (A8)$$

Εξίσωση Tsai-Hahn [17]:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{U_f + n_2 U_m} \left[\frac{U_f}{E_f} + \frac{n_2 U_m}{E_m} \right] \quad , \quad \text{όπου} \quad n_2 = 0.50 \quad (A9)$$

Εξίσωση Halpin-Tsai [3]:

$$E_T = E_m \left(\frac{1 + \xi n U_f}{1 - n U_f} \right) \quad , \quad \text{όπου} \quad n = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} - \xi} \quad \text{και} \quad \xi = 2 \quad (A10)$$

Τύποι διαμήκους μέτρου διατμήσεως G_{LT}

Εξίσωση Σιδερίδη [24]:

Θεωρείται από τον ερευνητή το διφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση, όπου με $G_i(r)$ συμβολίζεται το διάμηκες μέτρο διατμήσεως της ενδιάμεσης φάσης το οποίο περιγράφεται με παραβολική μεταβολή. Το διάμηκες μέτρο διατμήσεως G_{LT} θα είναι:

$$G_{LT} \gamma_0 = G_f (A + \gamma_0)^2 U_f + \frac{2U_f}{a^2} \int_a^b G_i(r) (D + \gamma_0)^2 r dr + G_m \left[(K + \gamma_0)^2 + \frac{K_2}{1 - U_m} \right] U_m \quad (A11)$$

$$\text{Όπου} \quad A = D = \frac{(G_m - G_i)(c^2 - b^2)}{(G_m - G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2} \gamma_0 \quad , \quad K = \frac{(G_i - G_m)b^2}{(G_m - G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2} \gamma_0$$

$$\text{Και} \quad Y = U_m = 1 - U_f - U_i$$

Εξίσωση Hashin-Rosen [4]:

Οι Hashin και Rosen έδωσαν μια έκφραση η οποία αποτελεί ένα κάτω όριο για G_{LT} και είναι η εξής:

$$G_{LT} = G_m \frac{(1 + U_f)G_f + G_m U_m}{(1 + U_f)G_m + G_f U_m} \quad (A12)$$

Εξίσωση Hashin [18]:

Ο Hashin έδωσε επίσης μια έκφραση που αποτελεί ένα άνω όριο για το G_{LT} και είναι η εξής:

$$G_{LT} = G_f \frac{(1 + U_m)G_m + G_f U_f}{(1 + U_m)G_f + G_m U_f} \quad (A13)$$

Εξίσωση Ekvall-Greszczuk [25,26]:

$$G_{LT} = \frac{G_m G_f}{G_f U_m + G_m U_f} \quad (A14)$$

Εξίσωση Tsai-Hahn [17]:

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{U_f + n_2 U_m} \left[\frac{U_f}{G_f} + \frac{n_2 U_m}{G_m} \right] \quad \text{όπου } n_2 = 0.50 \quad (A15)$$

Εξίσωση Halpin-Tsai [3]:

$$G_{LT} = G_m \left(\frac{1 + \xi n U_f}{1 - n U_f} \right) \quad \text{όπου } n = \frac{\frac{G_f}{G_m} - 1}{\frac{G_f}{G_m} + \xi} \quad \text{και } \xi = 2 \quad (A16)$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Χαράλαμπος Γ.Γεωργιάδης «Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών», Συμμετρία 2003
2. Γ.Τσαμασφύρος , Γ.Καντεράκης “ Ειδικά Κεφάλαια Συνθέτων Υλικών” Εθνικό Μετσόβιο πολυτεχνείο, Μάρτιος 2004.
3. J.C. Halpin and S.W. Tsai , Effects of Environmental Factors on Composite Materials , AFML-TR-67-423, June 1969.
4. Z. Hashin and B.W. Rosen, J. Appl. Mech. , Trans. Asme, 86 (1964), 223.
5. Robert M. Jones “ Mechanics of composite materials“
6. G. A. Papadopoulos, E. Sideridis, Study of Orthotropic materials: The Interphase Model and the Crack Initiation., Archive of Applied Mechanics 66 (1995) 111-125
7. Theocaris P.S. , “The Unfolding Model for the Representation of the Interphase Layer in Composites”, Proc. Nat. Acad. Athens, Vol.59, No. II, pp.87-100 (1984)
8. Sih G.C. , Hilton P.D. , Badalian R. , Schenberger P.S and Villareal G. , “Fractured Mechanics for Fibrous Composites, ASTM STP 521 , pp. 98-132 (1973).
9. Clements L.L and Moore R.L. , Composites, 1, p.93 (1978).
10. Whitney J.M. and Riley M.B. , AIAA Journal, 4(9), p.1537 (1966).
11. L.B. Gteszczuk, “Theoretical and Experimental Studies on Properties and Behaviour of Filamentary Composites”, SPI 21st Conference, Chicago, IL, Sect. 5-B (1966).
12. S.W. Tsai, NASA CR-71 (1964)
13. R.M. Orgrkiewicz and A.A.M. Sayigh, J. Strain Analysis, 6 (1971), 226.
14. Z. Hashin, Int. J. Solids Structures, 6 (1970), 797.
15. P.S. Theocaris, E.P. Sideridis, G.C Papanicolaou, “The Elastic Longitudinal Modulus and Poisson ’s Ratio of Fiber Composites” Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 4, (October 1985)
16. E. Sideridis, “The Transverse Elastic Modulus of Fiber-Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase” Journal of Applied Polymer Science, Vol. 48, 243-255 (1993)
17. S.W. Tsai and H.T. Hahn, “Introduction to composite materials”, Technomic , Lancaster, Pa (1985)
18. Z. Hashin, J. Mech. Phys. Solids, 12 (1965), 119.
19. Hashin, Z. (1972b). Vibrations of Wiscoelastic Bodies with Small Loss Tangents: Correspondence Principle and Application to Composites. MED Rep. 37.
20. Ekvall J.C. , “ASME” (1961).

21. Rosen B.W. , “Composites” (1974).
22. Paul, Trans. Metallurgical Soc. AIME, 21. 8, 36 (1960)
23. J.C Ekvall, “Structural Behaviour of Monofilament Composites”, Proc. AIAA 6th Structures and Materials Conf. , AIAA, New York (1965)
24. E. Sideridis, “The In-Plane Shear Modulus of Fiber Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase” Composites Science and Technology 31(1988) 35-53.
25. J.C. Ekvall, ASME Paper No.63-WA-223 (1963)
26. L.B Greszczuk, “Membrane Analysis Methods for Composites Structures”, Douglas Aircraft Co. Inc. , SM-41543 (1962)