



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Απόρριψη Διαταραχών με Συνεχή
Κατανεμημένο Έλεγχο για Πολυπρακτορικά
Συστήματα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ Κ. ΓΚΕΣΟΥΛΗ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2017



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής

Απόρριψη Διαταραχών με Συνεχή Κατανεμημένο Έλεγχο για Πολυπρακτορικά Συστήματα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ Κ. ΓΚΕΣΟΥΛΗ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 20η Οκτωβρίου 2017.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

.....
Νικόλαος Μαράτος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κωνσταντίνος Τζαφέστας
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2017

(Υπογραφή)

.....
ΓΚΕΣΟΥΛΗΣ Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

© 2017 – All rights reserved



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής

Copyright ©–All rights reserved ΓΚΕΣΟΥΛΗΣ Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ, 2017.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ.Ψυλλάκη, για την δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα ενδιαφέρον και πρωτότυπο θέμα, καθώς και για την καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές και τον χρόνο που αφιέρωσε κατά την διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, για την διαρκή στήριξη σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου και τέλος τους φίλους μου, με τους οποίους πορευτήκαμε μαζί και συνάψαμε δυνατές σχέσεις φιλίας.

Περίληψη

Αντικείμενο της διπλωματικής είναι η ανάπτυξη και απόδειξη σύγκλισης συνεχούς καταναμημένου ελέγχου για την επίτευξη συμφωνίας σε πολυπρακτορικά δίκτυα με άγνωστες διαταραχές, για σταθερή και εναλλασσόμενη τοπολογία δικτύου το οποίο περιγράφεται από μη κατευθυνόμενο και συνεκτικό γράφο. Οι πράκτορες ακολουθούν την δυναμική του απλού ολοκληρωτή. Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι συνεχής, πλήρως καταναμημένος και συγκεκριμένα χρησιμοποιεί την συνάρτηση προσήμου.

Αρχικά, γίνεται μια ανασκόπηση των βασικών ιδεών της θεωρίας για ασυνεχή δυναμικά συστήματα, της θεωρίας γράφων, του προβλήματος της συμφωνίας και αναφέρονται ασυνεχείς στρατηγικές ελέγχου για μη γραμμικά συστήματα που εμφανίζονται στην βιβλιογραφία. Στη συνέχεια ακολουθεί η απόδειξη σύγκλισης του συνεχούς καταναμημένου ελέγχου για πολυπρακτορικά συστήματα με άγνωστες διαταραχές για σταθερή και έπειτα για εναλλασσόμενη τοπολογία δικτύου. Τέλος, γίνεται προσομοίωση, σε περιβάλλον Simulink, των συστημάτων που περιγράφηκαν προηγουμένως.

Λέξεις Κλειδιά

Συμφωνία, Πολυπρακτορικό Δίκτυο, Συνεχής Έλεγχος, Καταναμημένος Έλεγχος, Συνάρτηση Προσήμου, Ασυνεχή Δυναμικά Συστήματα

Abstract

The purpose of this diploma thesis is the development of a distributed continuous control law for consensus of multiagent networks with unknown disturbances described by an undirected and connected graph. The agents follow simple integrator dynamics and the proposed algorithm is continuous, completely distributed and uses a filtered signum function.

Initially, we review basic ideas in the literature of discontinuous dynamical systems, graph theory, consensus and discontinuous control for nonlinear systems. Then, a distributed continuous control law for multiagent networks with unknown disturbances for both static and switching topology is proposed. A detailed analysis proves that our approach ensures asymptotic consensus among all agents. Finally, simulation results are presented that illustrate the effectiveness of the proposed methodology.

Keywords

Consensus, Multiagent Network, Continuous Control, Distributed Control, Signum Function, Discontinuous Dynamical Systems

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	1
Περίληψη	3
Abstract	5
Περιεχόμενα	8
Κατάλογος Σχημάτων	9
1 Εισαγωγή	11
1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής	11
1.1.1 Συνεισφορά	11
1.2 Οργάνωση του τόμου	11
2 Θεωρητικό υπόβαθρο	13
2.1 Εισαγωγή	13
2.2 Άλγεβρα πινάκων	13
2.3 Ασυνεχή δυναμικά συστήματα	16
2.3.1 Μαθηματικό υπόβαθρο	16
2.3.2 Κλασσικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων	18
2.3.3 Λύσεις Καραθεοδωρή	19
2.3.4 Λύσεις Filippov	19
2.3.5 Σχετικές εργασίες	21
2.4 Το πρόβλημα της συμφωνίας σε πολυπρακτορικά δίκτυα	21
2.4.1 Θεωρία γράφων	22
2.4.2 Το πρωτόκολλο της συμφωνίας	24
2.4.3 Σχετικές εργασίες	25
3 Στρατηγικές ελέγχου για ασυνεχή δυναμικά συστήματα	27
3.1 Εισαγωγή	27
3.2 Συνεχής στρατηγική ελέγχου για αβέβαια μη γραμμικά συστήματα	27

3.3	Δεύτερης τάξης ελεγκτές ολισθούμενης λειτουργίας (second order sliding mode, SOSM)	28
3.3.1	Ελεγκτές-παρατηρητές ολισθούμενης λειτουργίας για συστήματα με και χωρίς διαταραχές	28
3.3.2	Μια διαφορετική προσέγγιση Lyapunov για τον υπερσυστρεφόμενο αλγόριθμο	29
3.3.3	Ελεγκτής ανατροφοδότησης εξόδου σε σύστημα με άγνωστες φραγμένες διαταραχές	30
3.3.4	Σύγκριση με την παρούσα εργασία	30
4	Συνεχής καταναμημένος έλεγχος για πολυπρακτορικό δίκτυο με άγνωστες διαταραχές και σταθερή τοπολογία	31
4.1	Εισαγωγή	31
4.2	Περιγραφή του προβλήματος προς επίλυση	31
4.3	Ορισμός του προβλήματος	32
4.4	Συνάρτηση Lyapunov - Ύπαρξη λύσεων του συστήματος	32
4.5	Απόδειξη συμφωνίας για σταθερή τοπολογία	35
5	Συνεχής καταναμημένος έλεγχος για πολυπρακτορικό δίκτυο με άγνωστες διαταραχές και εναλλασσόμενη τοπολογία	39
5.1	Εισαγωγή	39
5.2	Περιγραφή του προβλήματος προς επίλυση	39
5.3	Ορισμός του προβλήματος	40
5.4	Συνάρτηση Lyapunov - Ύπαρξη λύσεων του συστήματος	40
5.5	Απόδειξη συμφωνίας για εναλλασσόμενη τοπολογία	46
5.5.1	Γενίκευση της συμφωνίας σε ανώτερες διαστάσεις	47
6	Προσομοίωση σε περιβάλλον Matlab-Simulink	49
6.1	Οργάνωση προσομοίωσης	49
6.2	Αποτελέσματα της προσομοίωσης	51
6.3	Συμπεράσματα της προσομοίωσης	59
7	Επίλογος	61
7.1	Σύνοψη και συμπεράσματα	61
7.2	Μελλοντικές επεκτάσεις	61
	Βιβλιογραφία	63

Κατάλογος Σχημάτων

6.1	Είσοδος (πρώτη διάσταση, σταθερή τοπολογία).	52
6.2	Είσοδος (δεύτερη διάσταση, σταθερή τοπολογία).	52
6.3	Μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο πρακτόρων (δύο διαστάσεις, σταθερή τοπολογία).	53
6.4	Συμπεριφορά πρώτης διάστασης των πρακτόρων (δύο διαστάσεις, σταθερή τοπολογία).	53
6.5	Συμπεριφορά δεύτερης διάστασης των πρακτόρων (δύο διαστάσεις, σταθερή τοπολογία).	54
6.6	Είσοδος (μία διάσταση, εναλλασσόμενη τοπολογία).	55
6.7	Μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο πρακτόρων (μία διάσταση, εναλλασσόμενη τοπολογία).	55
6.8	Συμπεριφορά των πρακτόρων (μία διάσταση, εναλλασσόμενη τοπολογία).	56
6.9	Είσοδος (πρώτη διάσταση, εναλλασσόμενη τοπολογία).	57
6.10	Είσοδος (δεύτερη διάσταση, εναλλασσόμενη τοπολογία).	57
6.11	Μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο πρακτόρων (δύο διαστάσεις, εναλλασσόμενη τοπολογία).	58
6.12	Συμπεριφορά πρώτης διάστασης των πρακτόρων (δύο διαστάσεις, εναλλασσόμενη τοπολογία).	58
6.13	Συμπεριφορά δεύτερης διάστασης των πρακτόρων (δύο διαστάσεις, εναλλασσόμενη τοπολογία).	59

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής

Η διπλωματική θα αντιμετωπίσει το πρόβλημα της συμφωνίας σε πολυπρακτορικό δίκτυο, για σταθερή και εναλλασσόμενη τοπολογία δικτύου, στο οποίο οι πράκτορες έχουν δυναμική απλού ολοκληρωτή με άγνωστη διαταραχή. Η συμφωνία επιτυγχάνεται με καταναμημένο συνεχή αλγόριθμο ελέγχου. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί συνεχή φιλτραρισμένη είσοδο που χρησιμοποιεί την συνάρτηση προσήμου. Η μέθοδος απόδειξης της σύγκλισης θα γίνει με χρήση θεωρίας Lyapunov.

1.1.1 Συνεισφορά

Η συνεισφορά της διπλωματικής συνοψίζεται ως εξής:

1. Αποδείχτηκε ασυμπτωτική συμφωνία του δικτύου των πρακτόρων ολοκληρωτών με άγνωστες διαταραχές, για σταθερή τοπολογία με χρήση συνεχούς, καταναμημένου ελέγχου.
2. Αποδείχτηκε ασυμπτωτική συμφωνία του δικτύου των πρακτόρων ολοκληρωτών με άγνωστες διαταραχές, για εναλλασσόμενη τοπολογία με χρήση συνεχούς, καταναμημένου ελέγχου.
3. Υλοποιήθηκε προσομοίωση σε περιβάλλον Simulink για δίκτυο με σταθερή και εναλλασσόμενη τοπολογία.

1.2 Οργάνωση του τόμου

Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύσσεται το βασικό μαθηματικό υπόβαθρο που θα βοηθήσει στην κατανόηση της διπλωματικής. Αναφέρονται μέθοδοι της θεωρίας πινάκων, ασυνεχών δυναμικών συστημάτων αλλά και της θεωρίας γύρω από το πρόβλημα της συμφωνίας. Το Κεφάλαιο 3 ασχολείται με εργασίες σχετικές με ασυνεχείς στρατηγικές ελέγχου οι οποίες βοήθησαν στην ανάπτυξη του ελέγχου που χρησιμοποιείται για την επίτευξη συμφωνίας στην παρούσα διπλωματική. Στο Κεφάλαιο 4 αναλύεται το πρόβλημα προς επίλυση και παρουσιάζονται κάποια

αποτελέσματα σχετικά με την χρησιμοποιούμενη συνάρτηση Lyapunov, αποδεικνύεται ύπαρξη λύσεων του συστήματος καθώς και η επίτευξη συμφωνίας του πολυπρακτορικού δικτύου με άγνωστες διαταραχές για σταθερή τοπολογία. Στο Κεφάλαιο 5 αναλύεται το πρόβλημα για την περίπτωση της εναλλασσόμενης τοπολογίας, επεκτείνονται τα αποτελέσματα του προηγούμενου Κεφαλαίου, καθώς και αποδεικνύεται η συμφωνία πολυπρακτορικού δικτύου με άγνωστες διαταραχές για εναλλασσόμενη τοπολογία. Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται προσομοιώσεις πολυπρακτορικών συστημάτων με διαταραχές σε περιβάλλον Simulink, για σταθερή και εναλλασσόμενη τοπολογία. Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 γίνεται μια σύνοψη της διπλωματικής και προτείνονται κάποιες κατευθύνσεις για περαιτέρω έρευνα.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό υπόβαθρο

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσεται το θεωρητικό υπόβαθρο που θα βοηθήσει στην κατανόηση των βασικών εννοιών που λαμβάνουν μέρος στην απόδειξη της διπλωματικής. Αρχικά παρατίθενται στοιχεία από την άλγεβρα πινάκων, στην συνέχεια στοιχεία της θεωρίας ασυνεχών δυναμικών συστημάτων, καθώς και αντιμετωπίζονται κάποια θέματα που αφορούν την συνέχεια. Τέλος αναπτύσσονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας του προβλήματος της συμφωνίας.

2.2 Άλγεβρα πινάκων

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα αναφερθούν επιγραμματικά στοιχεία της άλγεβρας πινάκων, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια του παρόντος Κεφαλαίου. Σαν προαπαιτούμενο θεωρούνται βασικές γνώσεις των εννοιών της άλγεβρας πινάκων. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων παραλείπονται, καθώς ξεφεύγουν από τον σκοπό της διπλωματικής, μπορούν όμως να βρεθούν στο [13].

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Ορισμός 2.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Τότε (α) κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ ονομάζεται δεξί ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A , αν ικανοποιεί την εξίσωση

$$Ax = \lambda^r x \quad (2.1)$$

για κάποια μιγαδική τιμή $\lambda^r \in \mathbb{C}$ η οποία καλείται ιδιοτιμή του πίνακα A που αντιστοιχεί στο δεξί ιδιοδιάνυσμα x και (β) κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ ονομάζεται αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A , αν ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^* A = \lambda^l x^* \quad (2.2)$$

για κάποια μιγαδική τιμή $\lambda^l \in \mathbb{C}$ η οποία καλείται ιδιοτιμή του πίνακα A που αντιστοιχεί στο δεξί ιδιοδιάνυσμα x .

Ο αστερίσκος συμβολίζει τον Ερμιτιανό ανάστροφο. Στην περίπτωση που οι τιμές του πίνακα είναι πραγματικές, ο ερμιτιανός ανάστροφος του είναι ο ίδιος με τον συνήθη ανάστροφο του.

Πρόταση 2.1. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ κάθε ιδιοτιμή λ^r (καθώς και λ^l) ικανοποιεί την ονομαζόμενη χαρακτηριστική εξίσωση

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda \mathbb{I}_{n \times n} - A) = 0. \quad (2.3)$$

Το $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο και έχει ακριβώς n ρίζες.

Ορισμός 2.2. Το σύνολο των ριζών του $p_A(\lambda)$ λέγεται φάσμα του A και συμβολίζεται με

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (2.4)$$

όπου το λ_j ικανοποιεί την

$$p_A(\lambda_j) = 0. \quad (2.5)$$

Το μέγιστο μέτρο των ιδιοτιμών λέγεται φασματική ακτίνα του A , και συμβολίζεται με

$$\rho(A) := \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|. \quad (2.6)$$

Πρόταση 2.2. Αν ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι Ερμιτιανός ή πραγματικός και συμμετρικός, δηλαδή αν

$$A^* = A \quad (2.7)$$

ή

$$A = A^T \quad (2.8)$$

τότε υποχρεωτικά όλες οι ιδιοτιμές λ_j είναι πραγματικές. Αν ο A είναι συμμετρικός, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα x^j ($j = 1, \dots, n$) είναι και αυτά πραγματικά.

Πρόταση 2.3. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες

Για κάποιο $n \times n$ πίνακα A μπορεί να συμβεί κάποιες ιδιοτιμές του να είναι ίσες, δηλαδή το αντίστοιχο χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $p_A(\lambda)$ να έχει την ακόλουθη μορφή

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^K (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i}, \quad \sum_{i=1}^K \mu_i = n, \quad (2.9)$$

όπου μ_i είναι ο αριθμός των φορών που ο παράγοντας $(\lambda - \lambda_i)$ εμφανίζεται στην από πάνω εξίσωση.

Ορισμός 2.3. Ο αριθμός μ_i καλείται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i του πίνακα A .

Ορισμός 2.4. Ο αριθμός $k_i := \dim \text{Ker}(\lambda_i \mathbb{I}_{n \times n} - A)$ καλείται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i του πίνακα A .

Γενικά ισχύει η εξής ιδιότητα

Λήμμα 2.1. Η γεωμετρική πολλαπλότητα μια ιδιοτιμής δεν ξεπερνά την αλγεβρική πολλαπλότητα, το οποίο σημαίνει ότι, για κάθε $i = 1, \dots, K$

$$k_i \leq \mu_i. \quad (2.10)$$

Το φασματικό θεώρημα

Θεώρημα 2.1. Φασματικό θεώρημα

Έστω $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ το σύνολο των γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων ενός $n \times n$ Ερμιτιανού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (πιθανώς πολλαπλές), τότε ισχύει η ακόλουθη αναπαράσταση

$$A = X \Lambda X^{-1} = X \Lambda X^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i x^{i*}, \quad (2.11)$$

όπου $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ και $X := [x^1 x^2 \dots x^n]$ έχουν την ιδιότητα $X^* = X^{-1}$.

Διάσπαση ιδιαζουσών τιμών

Ας υποθέσουμε πίνακα $L \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Όλες οι ιδιοτιμές των πινάκων $L^*L \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $LL^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$, όπου L^* συμβολίζει τον Ερμιτιανό ανάστροφο, είναι πραγματικές και μη αρνητικές. Πράγματι, αν $\lambda_{i1} = \lambda_i(L^*L)$, $\lambda_{i2} = \lambda_i(LL^*)$ είναι κάποιες ιδιοτιμές και $x_1^i = x^i(L^*L)$ και $x_2^i = x^i(LL^*)$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε

$$x_1^{i*} L^* L x_1^i = \lambda_{i1} x_1^i \quad (2.12)$$

$$x_2^{i*} L L^* x_2^i = \lambda_{i2} x_2^i \quad (2.13)$$

και επομένως

$$x_1^{i*} L^* L x_1^i = \|L x_1^i\|^2 = \lambda_{i1} x_1^{i*} x_1^i = \lambda_{i1} \|x_1^i\|^2 \quad (2.14)$$

$$x_2^{i*} L L^* x_2^i = \|L^* x_2^i\|^2 = \lambda_{i2} x_2^{i*} x_2^i = \lambda_{i2} \|x_2^i\|^2 \quad (2.15)$$

ή, ισοδύναμα

$$\lambda_{i1} = \frac{\|L x_1^i\|^2}{\|x_1^i\|^2} \geq 0 \quad (2.16)$$

$$\lambda_{i2} = \frac{\|L^* x_2^i\|^2}{\|x_2^i\|^2} \geq 0. \quad (2.17)$$

Επιπλέον αν $m = n$ προκύπτει ότι τα φάσματα των L^*L και LL^* συμπίπτουν, δηλαδή

$$\sigma(L^*L) = \sigma(LL^*). \quad (2.18)$$

Ο αριθμός

$$\sigma_i(L) := \sqrt{\lambda_i(L^*L)} = \sqrt{\lambda_i(LL^*)} \quad (2.19)$$

λέγεται η i -οστή ιδιάζουσα τιμή του $L \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Αν ένας τετραγωνικός πίνακας $L \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός, δηλαδή αν $LL^* = L^*L$ τότε ισχύει ότι

$$\sigma_i(L) = \sqrt{\lambda_i(L^*L)} = |\lambda_i(L)|. \quad (2.20)$$

Θεώρημα 2.2. Διάσπαση ιδιζουσών τιμών

Έστω $L \in \mathbb{C}^{m \times n}$ και $\sigma_i(L)$ ($i = 1, \dots, r \leq \min\{m, n\}$) οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του L . Τότε ο L μπορεί να διασπαστεί στην μορφή

$$L = U\Sigma V^* \quad (2.21)$$

όπου $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ και $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ έχουν την ιδιότητα $U^*U = UU^* = \mathbb{I}_{m \times m}$ και $V^*V = VV^* = \mathbb{I}_{n \times n}$ και ο $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times n}$ έχει την $\sigma_i(L)$ στην (i, i) θέση ($i = 1, \dots, r$) και μηδενικά αλλού. Αν ένας τετραγωνικός πίνακας $L \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός δηλαδή αν $LL^* = L^*L$ τότε ισχύει ότι $U = V$.

2.3 Ασυνεχή δυναμικά συστήματα

Τα ασυνεχή δυναμικά συστήματα εμφανίζονται σε μεγάλο εύρος εφαρμογών, από προβλήματα βελτίστου ελέγχου, όπου οι είσοδοι μεταπηδούν μεταξύ τιμών, και θερμοστάτες που ανοιγοκλείνουν ανάλογα με το ύψος της θερμοκρασίας προς έλεγχο, μέχρι ρομποτικό χειρισμό αντικειμένων, όπου οι ασυνέχειες προκύπτουν από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Για αυτό το σκοπό, και επειδή στην παρούσα διπλωματική γίνεται χρήση φιλτραρισμένης ασυνέχειας αναπτύσσεται εδώ η βασική θεωρία πίσω από τα ασυνεχή δυναμικά συστήματα.

2.3.1 Μαθηματικό υπόβαθρο

Αρχικά, θα επανεξεταστούν κάποιες έννοιες από την ανάλυση, οι οποίες θα φανούν χρήσιμες στην συνέχεια του παρόντος Κεφαλαίου.

Ορισμός 2.5. Συνάρτηση Lipschitz

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται Lipschitz ή Lipschitz συνεχής αν υπάρχει μια θετική σταθερά K τέτοια, ώστε $\forall x_1, x_2$ να ισχύει:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\| \quad (2.22)$$

Ορισμός 2.6. Τοπικά Lipschitz συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται τοπικά Lipschitz στο $x \in \mathbb{R}^d$ αν υπάρχουν $L_x, \epsilon \in (0, +\infty)$ τέτοια, ώστε:

$$\|f(y) - f(y')\|_2 \leq L_x\|y - y'\|_2 \quad (2.23)$$

για κάθε $y, y' \in B(x, \epsilon)$, όπου $B(x, \epsilon)$, μπάλα με κέντρο x και ακτίνα ϵ .

Μια συνάρτηση είναι τοπικά Lipschitz στο σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^d$ αν είναι τοπικά Lipschitz για κάθε $x \in S$. Οι κυρτές συναρτήσεις είναι Lipschitz και επομένως και οι κοίλες συναρτήσεις είναι επίσης Lipschitz. Επιπλέον, μια συνάρτηση που είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο x , είναι τοπικά Lipschitz στο x . Το αντίθετο δεν ισχύει πάντα.

Ορισμός 2.7. Μονόπλευρα Lipschitz διανυσματικό πεδίο

Το διανυσματικό πεδίο $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ λέγεται μονόπλευρα Lipschitz (one-sided Lipschitz) στο $U \subseteq \mathbb{R}^d$, αν υπάρχει $L > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $y, y' \in U$,

$$[X(y) - X(y')]^T (y - y') \leq L \|y - y'\|_2^2. \quad (2.24)$$

Κάθε διανυσματικό πεδίο που είναι τοπικά Lipschitz στο x , ικανοποιεί την συνθήκη για μονόπλευρα Lipschitz πεδία. Το αντίθετο δεν ισχύει πάντα. Επιπλέον, ένα μονόπλευρα Lipschitz διανυσματικό πεδίο μπορεί να είναι ασυνεχές.

Ορισμός 2.8. Απολύτως συνεχής συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται απολύτως συνεχής στο $[a, b]$ αν, δεδομένου $\epsilon > 0$, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon, \quad (2.25)$$

όπου $\{[x_i, y_i] : i = 1, \dots, n\}$ είναι μια συλλογή μεταξύ τους ξένων υποσυνόλων του $[a, b]$ με $\sum_{i=1}^n |y_i - x_i| < \delta$.

Σε αυτό το σημείο, αφού ορίστηκε η απόλυτη συνέχεια, είναι καιρός πλέον να παρατεθεί ένα θεώρημα το οποίο θα φανεί αρκετά χρήσιμο στην απόδειξη σύγκλισης του συστήματος που πραγματεύεται η διπλωματική, μιας και επιτρέπει την συναγωγή απόλυτης συνέχειας, από την σύνθεση μιας απολύτως συνεχούς συνάρτησης με μια συνάρτηση Lipschitz. Η απόδειξη του θεωρήματος θα παραληφθεί, ο αναγνώστης όμως μπορεί να την βρει, αν ανατρέξει στο [5].

Θεώρημα 2.3. Έστω f μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση στο $[c, d]$, και έστω u μια απολύτως συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ τέτοια, ώστε $u([a, b]) \subseteq [c, d]$. Τότε η $f \circ u$ είναι απολύτως συνεχής.

Τέλος δίνονται κάποιοι ορισμοί που χρησιμοποιούνται στην θεωρία ασυνεχών δυναμικών συστημάτων.

Ορισμός 2.9. Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Δεδομένης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, η δεξιά παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο $x \in \mathbb{R}^m$ στην κατεύθυνση του $u \in \mathbb{R}^m$ ορίζεται ως

$$f'(x, u) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \quad (2.26)$$

Η γενικευμένη παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο x στην κατεύθυνση του u ορίζεται ως

$$f^\circ(x, u) = \lim_{y \rightarrow x} \sup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(y + tu) - f(y)}{t} \quad (2.27)$$

Ορισμός 2.10. Κανονική (regular) συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται κανονική στο $x \in \mathbb{R}^m$ αν για κάθε $u \in \mathbb{R}^m$, η δεξιά παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο x στην κατεύθυνση του u υπάρχει και $f'(x, u) = f^\circ(x, u)$.

Μια συνάρτηση που είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο x είναι κανονική στο x . Επίσης, μια κυρτή συνάρτηση είναι κανονική. Ένα πόρισμα που οδηγεί σε συναγωγή κανονικότητας συνάρτησης διατυπώνεται στο [6] και είναι το εξής

Πρόταση 2.4. Για $k \in \{1, \dots, m\}$, έστω $f_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τοπικά Lipschitz στο $x \in \mathbb{R}^d$, και συνάρτηση $f_{\max}(y) \triangleq \max\{f_k(y) : k \in \{1, \dots, m\}\}$. Τότε η f_{\max} είναι τοπικά Lipschitz στο x και αν τα f_i είναι κανονικά για όλα τα $i \in \{i : f_i(x) = f_{\max}(x)\}$ η f_{\max} είναι κανονική στο x .

Αυτή η πρόταση επιτρέπει την συναγωγή κανονικότητας για την συνάρτηση της απόλυτης τιμής, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1. Η συνάρτηση απόλυτης τιμής $f(x) = |x|$ μπορεί να γραφτεί ως $f(x) = \max\{x, -x\}$. Η $x \rightarrow x$ και η $x \rightarrow -x$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες και κατά συνέπεια τοπικά Lipschitz και κανονικές. Συνεπώς από την Πρόταση 2.4 η f είναι τοπικά Lipschitz και κανονική.

2.3.2 Κλασσικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, θα περιγραφούν βασικά αποτελέσματα ύπαρξης και μοναδικότητας για κλασσικές λύσεις συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Για διευκόλυνση της παρουσίασης, η μελέτη θα εστιαστεί σε χρονικά αμετάβλητα διανυσματικά πεδία. Βέβαια, τα περισσότερα αποτελέσματα μπορούν να προσαρμοστούν σε χρονικά μεταβαλλόμενο περιβάλλον.

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\dot{x}(t) = X(x(t)), \quad (2.28)$$

όπου $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ διανυσματικό πεδίο. Το σημείο $x_e \in \mathbb{R}^d$ λέγεται σημείο ισορροπίας της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης αν $0 = X(x_e)$.

Ορισμός 2.11. Κλασσική λύση διαφορικής εξίσωσης

Μια κλασσική λύση της (2.28) στο $[0, t_1]$ λέγεται μια συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση $x : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ η οποία ικανοποιεί την (2.28).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε μόνο λύσεις που ξεκινούν σε χρόνο μηδέν. Η συνέχεια του διανυσματικού πεδίου αρκεί για να υπάρχουν κλασσικές λύσεις, όπως διατυπώνει το θεώρημα του Peano.

Πρόταση 2.5. Ύπαρξη κλασσικής λύσης διαφορικής εξίσωσης

Έστω το $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, συνεχές διανυσματικό πεδίο. Τότε, για όλα τα $x_0 \in \mathbb{R}$, υπάρχει κλασσική λύση της (2.28) με αρχική τιμή x_0 .

Μοναδικότητα κλασσικών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (2.28), σημαίνει ότι κάθε ζεύγος λύσεων με την ίδια αρχική τιμή, συμπίπτει στην τομή των διαστημάτων ορισμού τους. Διαφορετικά, αν $x_1 : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ και $x_2 : [0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^d$ είναι κλασσικές λύσεις της (2.28) με $x_1(0) = x_2(0)$, τότε $x_1(t) = x_2(t)$ για κάθε $t \in [0, t_1] \cup [0, t_2]$. Υπάρχουν αρκετά κριτήρια στην βιβλιογραφία για την απόδειξη μοναδικότητας κλασσικών λύσεων συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Ένα από αυτά είναι το εξής.

Πρόταση 2.6. Μοναδικότητα κλασσικής λύσης διαφορικής εξίσωσης

Έστω $x : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ συνεχές. Επιπλέον, έστω ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο, ώστε το X να είναι μονόπλευρα Lipschitz στην μπάλα $B(x, \epsilon)$. Τότε, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^d$, υπάρχει μοναδική κλασσική λύση της (2.28) με αρχική τιμή $x(0) = x_0$.

2.3.3 Λύσεις Καραθεοδωρή

Η κλασσική έννοια της λύσης είναι αρκετά περιοριστική, όταν θεωρήσουμε ασυνεχές δυναμικό πεδίο, μιας και προϋποθέτει ότι οι λύσεις ακολουθούν την κατεύθυνση που ορίζει το δυναμικό πεδίο σε κάθε χρονική στιγμή. Για να λυθεί αυτό το πρόβλημα, μιας και η παρούσα εργασία ασχολείται με ασυνεχή δυναμικά συστήματα, αρχικά, δεν απαιτείται οι λύσεις να ακολουθούν το διανυσματικό πεδίο σε κάθε χρονική στιγμή. Η μαθηματική έννοια που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδέα είναι οι λύσεις Καραθεοδωρή.

Ορισμός 2.12. Λύση Καραθεοδωρή διαφορικής εξίσωσης

Μια λύση Καραθεοδωρή της (2.28) ορισμένη στο $[0, t_1] \subset \mathbb{R}$ είναι μια απολύτως συνεχής απεικόνιση $x : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$, η οποία ικανοποιεί την (2.28) σχεδόν για κάθε $t \in [0, t_1]$ (με την έννοια του μέτρου Lebesgue).

Με άλλα λόγια μια λύση Καραθεοδωρή ακολουθεί την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου, εκτός από ένα σύνολο χρονικών στιγμών που έχει μέτρο μηδέν. Ισοδύναμα, λύσεις Καραθεοδωρή είναι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες λύνουν την ολοκληρωτική μορφή της (2.28), η οποία είναι

$$x(t) = x(0) + \int_0^t X(x(s))ds. \quad (2.29)$$

Φυσικά, μια κλασσική λύση είναι και λύση Καραθεοδωρή.

Η χαλάρωση της συνθήκης για τις τιμές του διανυσματικού πεδίου σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, στον ορισμό των λύσεων Καραθεοδωρή, δεν είναι πάντα ικανή για να εγγυηθεί την ύπαρξη λύσεων. Εξ' αιτίας της ασυνέχειας του διανυσματικού πεδίου, η τιμή του μπορεί να επιδειξει μεγάλες διακυμάνσεις κοντά σε δεδομένο σημείο, και αυτό μπορεί να καθιστά ανίκανη την κατασκευή λύσης Καραθεοδωρή. Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, αντί να μελετηθεί η τιμή του διανυσματικού πεδίου σε διακεκριμένα σημεία, μελετάται στην γειτονιά κάθε σημείου. Αυτή είναι η κεντρική ιδέα πίσω από τις λύσεις Filippov ασυνεχών δυναμικών συστημάτων.

2.3.4 Λύσεις Filippov

Το μαθηματικό πλαίσιο για το φορμαλισμό αυτής της ιδέας περί συμπεριφοράς του δυναμικού πεδίου στη γειτονιά ενός σημείου χρησιμοποιεί απεικονίσεις σημείου σε σύνολο. Η ιδέα είναι να αντιστοιχιστεί μια απεικόνιση σημείου σε σύνολο στο $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, ελέγχοντας της γειτονικές τιμές του X γύρω από κάθε σημείο. Ακριβολογώντας, για $x \in \mathbb{R}^d$, το διανυσματικό πεδίο X υπολογίζεται στα σημεία που ανήκουν στο $B(x, \delta)$, το οποίο είναι η ανοιχτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα $\delta > 0$. Ελέγχεται το αποτέλεσμα του δ να προσεγγίζει το μηδέν, κάνοντας την εκτίμηση για όλο και μικρότερα δ . Για επιπλέον ευελιξία, δεν λαμβάνεται υπόψη

ένα σύνολο μέτρου μηδέν στο $B(x, \delta)$ όταν υπολογίζεται το X , έτσι ώστε το αποτέλεσμα να είναι το ίδιο για δύο διανυσματικά πεδία που διαφέρουν για ένα σύνολο μέτρου μηδέν.

Μαθηματικά, η παραπάνω διαδικασία μπορεί να συνοψιστεί ως ακολούθως.

Ορισμός 2.13. *Απεικόνιση Filippov*

Εστω $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ η συλλογή των υποσυνόλων του \mathbb{R}^d . Για $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, η απεικόνιση Filippov σημείου προς σύνολο $F[X] : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ ορίζεται ως

$$F[X](x) \triangleq \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(S)=0} \overline{\{X(B(x, \delta) \setminus S)\}}, x \in \mathbb{R}^d \quad (2.30)$$

Στην (2.28), το $\overline{}$ συμβολίζει την κυρτή κλειστότητα (convex closure), και μ συμβολίζει το μέτρο Lebesgue. Με τον τρόπο που ορίστηκε η απεικόνιση Filippov, η τιμή του $F[X]$ σε ένα σημείο x είναι ανεξάρτητη από την τιμή του διανυσματικού πεδίου X στο x .

Τώρα οι ασυνέχειες του διανυσματικού πεδίου X μπορούν να διαχειριστούν χρησιμοποιώντας την απεικόνιση Filippov. Η διαφορική εξίσωση $\dot{x}(t) = X(x(t))$ αντικαθίσταται με τον διαφορικό εγκλεισμό

$$\dot{x}(t) \in F[X](x(t)). \quad (2.31)$$

Με το νέο αυτό μαθηματικό πλαίσιο, ορίζεται ένα νέο είδος λύσεων, το οποίο επιτρέπει την διαχείριση δυναμικών συστημάτων με ασυνεχή διανυσματικά πεδία. Αυτές οι νέου είδους λύσεις λέγονται λύσεις Filippov.

Ορισμός 2.14. *Λύση Filippov*

Μια λύση Filippov της (2.28) στο $[0, t_1] \subset \mathbb{R}$ είναι μια απολύτως συνεχής απεικόνιση $x : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ που ικανοποιεί την (2.31) για σχεδόν όλα τα $t \in [0, t_1]$.

Με τον τρόπο που ορίστηκε η απεικόνιση Filippov, ένα διανυσματικό πεδίο που διαφέρει από το X σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, έχει την ίδια απεικόνιση Filippov, και κατά συνέπεια το ίδιο σύνολο λύσεων. Η επόμενη πρόταση, εξασφαλίζει ύπαρξη λύσεων Filippov κάτω από μέτριες συνθήκες.

Πρόταση 2.7. *Υπαρξη λύσεων Filippov*

Εστω $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και ουσιαστικά τοπικά φραγμένο, δηλαδή, φραγμένο σε μια φραγμένη γειτονιά κάθε σημείου, εκτός από σύνολα μέτρου μηδέν. Τότε, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^d$, υπάρχει λύση Filippov της (2.28) με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$.

Γενικά, οι λύσεις οι λύσεις Filippov και Καραθεοδωρή δεν συνδέονται.

Σε αυτό το σημείο θα παρατεθούν δύο Λήμματα από την εργασία [4] τα οποία θα φανούν χρήσιμα στις αποδείξεις του επόμενου κεφαλαίου.

Λήμμα 2.2. *Εστω $x(t)$ λύση Filippov του συστήματος (2.28) και V μια τοπικά Lipschitz και κανονική συναρτήση. Αν ισχύει ότι $\dot{V}(x(t), t) \leq^{a.e.} 0$, τότε $V(x(t), t) \leq V(x(0), t_0)$, $\forall t > 0$.*

Λήμμα 2.3. *Λήμμα του Barbalat*

Εστω $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αν το $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε $f(t) \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$.

2.3.5 Σχετικές εργασίες

Σε αυτό το υποκεφάλαιο παρατίθενται εργασίες σχετικά με τα ασυνεχή δυναμικά συστήματα, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στην παραπάνω ανάλυση, αλλά και αναπτύσσουν σε μεγαλύτερο βάθος θέματα που συζητήθηκαν πάνω σε αυτή. Τέλος, γίνεται σύνδεση αυτών των εργασιών με την παρούσα διπλωματική.

Στις εργασίες [4],[6],[7] και [8] αναπτύσσεται η θεωρία για διαφορικές εξισώσεις με ασυνεχή δεξιά μέλη και αποδεικνύονται θεωρήματα στην θεωρία ελέγχου για ασυνεχή συστήματα.

Συγκεκριμένα, στην [6] αναλύεται η βασική θεωρία για ασυνεχή συστήματα, δίνονται τα ερεθίσματα που οδήγησαν στην ανάπτυξη νέου είδους λύσεων για διαφορικές εξισώσεις που το διανυσματικό τους πεδίο δεν είναι συνεχές και θεωρήματα εφαρμογής της θεωρίας σε εφαρμογές ελέγχου σε συστήματα με ασυνέχειες. Στην εργασία [7] αναπτύσσεται λογισμός για το υπολογισμό του εγκλεισμού Filippov καθώς και ένα γενικευμένο θεώρημα Lyapunov για ασυνεχείς συναρτήσεις δυναμικού.

Στην [8] παρουσιάζονται κάποια εργαλεία γενικευμένης ανάλυσης Lyapunov για τον καθορισμό της ευστάθειας ασυνεχών συστημάτων. Τέλος, στην [4] παρουσιάζονται πορίσματα του θεωρήματος LaSalle-Yoshizawa για μη αυτόνομα συστήματα με ασυνεχή δεξιά μέλη, αξιοποιώντας την θεωρία Filippov.

Οι παραπάνω εργασίες παρέχουν ένα μαθηματικό υπόβαθρο για την παρούσα διπλωματική, μιας και ο έλεγχος που χρησιμοποιείται έχει φιλτραρισμένη ασυνέχεια και επομένως η δυναμική του συστήματος εμπίπτει στην θεωρία Filippov. Η λύση του συστήματος της διπλωματικής είναι λύση Filippov και την ύπαρξή της εγγυάται η Πρόταση 2.7.

2.4 Το πρόβλημα της συμφωνίας σε πολυπρακτορικά δίκτυα

Ένα πολυπρακτορικό δίκτυο είναι ένα σύνολο πρακτόρων με δυναμική συμπεριφορά οι οποίοι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους για την επίτευξη κάποιου στόχου. Παράδειγμα πολυπρακτορικού δικτύου είναι δίκτυο αισθητήρων που αποτελείται από χωρικά κατανεμημένες αυτόνομες συσκευές οι οποίες συλλογικά καταγράφουν φυσικές ή περιβαλλοντικές συνθήκες και επικοινωνούν μεταξύ τους με ασύρματες συσκευές, ανταλλάσσοντας πληροφορίες για τις μετρήσεις τους, ώστε να πετύχουν ακριβή εκτίμηση για την επιθυμητή μεταβλητή.

Το βασικότερο στοιχείο των δικτυωμένων συστημάτων, το οποίο τα διαχωρίζει από τα συστήματα που έχουν παραδοσιακά θεωρηθεί στην θεωρία συστημάτων, είναι η ύπαρξη του δικτύου και η επίδρασή του στην συμπεριφορά του ολικού συστήματος. Η γεωμετρία του δικτύου επιβάλλει περιορισμούς στην συμπεριφορά του, καθώς και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πρακτόρων, περιγράφονται από την μετάφραση στην θεωρία γράφων των πρακτόρων ως κόμβων και των αλληλεπιδράσεων ως κλάδων ενός γράφου που περιγράφει το δίκτυο. Σε ένα τέτοιο γράφο, η ύπαρξη κλάδου υποδεικνύει ότι οι συνδεδεμένοι κόμβοι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Κατά συνέπεια, είναι αναγκαίο να γίνει αναφορά στις βασικές έννοιες της θεωρίας γράφων, που περιγράφουν την συμπεριφορά του δικτυωμένου συστήματος.

2.4.1 Θεωρία γράφων

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η θεωρία γράφων παρέχει το κατάλληλο αφαιρετικό πλαίσιο για την περιγραφή του διαμοιρασμού πληροφορίας μεταξύ των πρακτόρων ενός δικτύου. Σε αυτό το σημείο παρουσιάζονται στοιχεία της θεωρίας γράφων και παρέχονται τα βασικά εργαλεία για την διαχείρισή τους.

Γράφοι

Ένας πεπερασμένος, μη κατευθυνόμενος γράφος χτίζεται πάνω σε ένα πεπερασμένο σύνολο. Το σύνολο αυτό είναι το σύνολο των κόμβων του και συμβολίζεται με V . Κάθε στοιχείο του V είναι ένας κόμβος του γράφου. Όταν το σύνολο κόμβων V έχει n στοιχεία, μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}. \quad (2.32)$$

Έστω το σύνολο των μη διατεταγμένων ζευγών στοιχείων του V , το οποίο συμβολίζεται με $V \times V$. Το σύνολο αυτό αποτελείται από στοιχεία της μορφής $\{u_i, u_j\}$ τέτοια ώστε $i, j = 1, 2, \dots, n$ και $i \neq j$.

Ορισμός 2.15. Γράφος

Ο πεπερασμένος γράφος G ορίζεται ως το ζεύγος $G = (V, E)$, όπου V είναι το πεπερασμένο σύνολο κόμβων και E ένα υποσύνολο του $V \times V$, το οποίο ονομάζεται σύνολο κλάδων του G .

Η αναφορά στους κόμβους και τους κλάδους του G μπορεί να γραφεί ως $V(G)$ και $E(G)$, αντίστοιχα, και ο κλάδος $\{u_i, u_j\}$ μπορεί να γραφεί απλουστευμένα ως $u_i u_j$ ή ij .

Όταν υπάρχει κλάδος μεταξύ δύο κόμβων, αυτοί οι κλάδοι λέγονται παρακείμενοι. Όταν οι κλάδοι ενός γράφου δεν έχουν κατεύθυνση, δηλαδή όταν το ij υπονοεί την ύπαρξη του ji , ή διαφορετικά, όταν τα στοιχεία του E δεν είναι διατεταγμένα, ο γράφος λέγεται μη κατευθυνόμενος. Αυτό για ένα πολυπρακτορικό δίκτυο σημαίνει ότι όταν δύο πράκτορες είναι παρακείμενοι, η ροή της πληροφορίας μεταξύ τους είναι αμφίδρομη. Η έννοια αυτή επιτρέπει την αμφίδρομη κίνηση κατά μήκος των κλάδων του γράφου. Συγκεκριμένα, σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο επιτρέπεται η κίνηση κατά μήκος κάθε κλάδου, ενώ σε έναν κατευθυνόμενο, επιτρέπεται κίνηση μόνο προς την συγκεκριμένη κατεύθυνση του κλάδου. Για ένα πολυπρακτορικό δίκτυο η κίνηση αυτή συμβολίζει την ροή της πληροφορίας μεταξύ των πρακτόρων.

Οι κινήσεις αυτές πάνω στον γράφο, μπορούν να περιγραφούν από ένα μονοπάτι μήκους m στον G , που συμβολίζεται από ακολουθία διακριτών κόμβων

$$u_{i0}, u_{i1}, \dots, u_{im}, \quad (2.33)$$

τέτοια ώστε δύο διαδοχικοί κόμβοι να είναι και παρακείμενοι. Στην περίπτωση αυτή, οι u_{i0} και u_{im} ονομάζονται τελικοί κόμβοι και οι υπόλοιποι εσωτερικοί.

Ορισμός 2.16. Γειτονιά κόμβου

Η γειτονιά $N(i) \subseteq V$ του κόμβου u_i ορίζεται ως το σύνολο $\{u_j \in V | u_i u_j \in E\}$, το οποίο είναι το σύνολο όλων των κόμβων παρακείμενων στον u_i .

Σε έναν μη κατευθυνόμενο γράφο, αν $u_j \in N(i)$ προκύπτει ότι $u_i \in N(j)$.

Ορισμός 2.17. *Συνεκτικός γράφος*

Ένας γράφος G λέγεται *συνεκτικός* αν, για κάθε ζεύγος κόμβων στο $V(G)$, υπάρχει ένα μονοπάτι το οποίο έχει τους κόμβους του ζευγαριού ως τελικούς.

Σε διαφορετική περίπτωση ο γράφος καλείται *μη συνεκτικός*.

Αναπαριστάσεις γράφων με πίνακες

Μέχρι αυτό το σημείο, οι γράφοι έχουν παρουσιαστεί ως κατασκευάσματα που περιγράφουν τις σχέσεις μεταξύ ενός πεπερασμένου αριθμού αντικειμένων. Σε αυτό το μέρος θα μελετηθεί τρόπος αναπαράστασης των γράφων με την χρήση πινάκων. Αρχικά θα δοθούν κάποιιοι χρήσιμοι ορισμοί.

Ορισμός 2.18. *Βαθμός κόμβου*

Για έναν μη κατευθυνόμενο γράφο G , ο *βαθμός* ενός κόμβου, $d(u_i)$, είναι ο πληθάνριθμος του συνόλου της γειτονιάς $N(i)$, ή, ισοδύναμα, ο αριθμός των κόμβων που είναι παρακείμενοι στον κόμβο u_i στο G .

Ορισμός 2.19. *Πίνακας βαθμού*

Ο *πίνακας βαθμού* του G , $\Delta(G)$, είναι ένας διαγώνιος πίνακας, που περιέχει τους βαθμούς των κόμβων του G στην διαγώνιό του.

Ορισμός 2.20. *Παρακείμενος πίνακας*

Ο *παρακείμενος πίνακας* $A(G)$ είναι ο συμμετρικός $n \times n$ πίνακας που περιγράφει ποιοί κόμβοι είναι παρακείμενοι στον γράφο G και δίνεται από την

$$[A(G)]_{ij} = \begin{cases} 1 & , u_i u_j \in E, \\ 0 & , u_i u_j \notin E \end{cases} \quad (2.34)$$

Μια άλλη αναπαράσταση με χρήση πίνακα ενός γράφου G είναι η Λαπλασιανή του γράφου, $L(G)$. Αυτός ο πίνακας μπορεί να οριστεί με διαφορετικούς τρόπους, οι οποίοι όμως οδηγούν στο ίδιο τελικό αποτέλεσμα. Ο πιο ευθύς ορισμός της Λαπλασιανής ενός μη κατευθυνόμενου γράφου G είναι ο εξής

Ορισμός 2.21. *Λαπλασιανή γράφου*

Η *Λαπλασιανή* ενός μη κατευθυνόμενου γράφου G ορίζεται ως

$$L(G) = \Delta(G) - A(G) \quad (2.35)$$

όπου $\Delta(G)$ είναι ο πίνακας βαθμού του G και $A(G)$ ο παρακείμενος πίνακός του.

Από τους παραπάνω ορισμούς άμεσα προκύπτει ότι όλες οι γραμές της Λαπλασιανής έχουν άθροισμα μηδέν. Επομένως, η L έχει πάντα μια ιδιοτιμή $\lambda = 0$. Αυτή η μηδενική ιδιοτιμή αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ αφού το $\mathbf{1}$ ανήκει στον μηδενικό χώρο του $L(L\mathbf{1} = 0)$.

Από την αλγεβρική θεωρία γράφων είναι γνωστό ότι η Λαπλασιανή ενός γράφου είναι συμμετρική και θετικά ημιορισμένη, και κατά συνέπεια έχει πραγματικές ιδιοτιμές οι οποίες μπορούν να διαταχθούν ως εξής

$$\lambda_0(G) \leq \lambda_1(G) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(G) \quad (2.36)$$

με $\lambda_0(G) = 0$.

Ένα σημαντικό θεώρημα που επιτρέπει την συναγωγή συνεκτικότητας γράφου από την δεύτερη μικρότερη ιδιοτιμή είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.4. *Ο γράφος G είναι συνεκτικός αν και μόνο αν $\lambda_1(G) > 0$.*

Η απόδειξη του βρίσκεται στο [14].

2.4.2 Το πρωτόκολλο της συμφωνίας

Η συμφωνία είναι ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα του πολυπρακτορικού συντονισμού, κατά το οποίο μια συλλογή πρακτόρων πρέπει να συμφωνήσουν σε μια κοινή τιμή κατάστασης. Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα μελετηθεί η δυναμική του πρωτοκόλλου συμφωνίας για μη κατευθυνόμενα στατικά δίκτυα.

Έστω ένα πολυπρακτορικό δίκτυο στο οποίο οι πράκτορες πρέπει να κάνουν κάποιου είδους μέτρηση. Αν και κάθε μέτρηση που γίνεται από τους επιμέρους πράκτορες θα διαφέρει, λόγω της διαφορετικής τοποθεσίας του, απαιτείται η επίτευξη συμφωνίας σε συγκεκριμένη τιμή, η οποία θα επιτευχθεί με τον διαμοιρασμό των πληροφοριών των πρακτόρων. Για τον σκοπό αυτό οι πράκτορες χρειάζονται κάποιο πρωτόκολλο επικοινωνίας το οποίο θα δρά στο δίκτυο και θα του επιτρέπει να επιτύχει την συμφωνία.

Το πρωτόκολλο της συμφωνίας περιλαμβάνει n δυναμικές μονάδες, οι οποίες συμβολίζονται ως $1, 2, \dots, n$ και συδέονται με διαύλο επικοινωνίας μεταξύ τους. Έστω ότι η κατάσταση της μονάδας i είναι $x_i \in \mathbb{R}$. Τότε το πρωτόκολλο έχει την μορφή

$$\dot{x}_i = - \sum_{j \in N(i)} (x_i(t) - x_j(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.37)$$

όπου $N(i)$ είναι το σύνολο των γειτόνων του i στο δίκτυο. Το συνολικό δίκτυο έχει τότε δυναμική

$$\dot{x}(t) = -L(G)x(t), \quad (2.38)$$

όπου ο θετικά ημιορισμένος πίνακας $L(G)$ είναι η Λαπλασιανή του δικτύου αλληλεπίδρασης των πρακτόρων G και $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$. Η παραπάνω εξίσωση θα αναφέρεται ως δυναμική συμφωνίας.

Με αυτό το πρωτόκολλο εν δράσει, οι δυναμικές των κόμβων τραβούνται προς τις καταστάσεις των γειτονικών κόμβων. Η τιμή που τελικά καταλήγουν, δηλαδή η κατάσταση συμφωνίας ορίζεται ως εξής

Ορισμός 2.22. *Το σύνολο συμφωνίας $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι το υποσύνολο $\text{span}\{\mathbf{1}\}$, το οποίο είναι*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = x_j, \forall i, j\}. \quad (2.39)$$

Στη συνέχεια θα καταστεί σαφές ο μηχανισμός με τον οποίο οι δυναμική συμφωνίας σε έναν μη κατευθυνόμενο γράφο, οδηγεί τους κόμβους του δικτύου στην κατάσταση συμφωνίας.

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο αναφέρθηκε ότι οι ιδιοτιμές της Λαπλασιανής ενός συνεκτικού και μη κατευθυνόμενου γράφου παίρνουν την μορφή

$$0 = \lambda_0(G) \leq \lambda_1(G) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(G), \quad (2.40)$$

όπου $\mathbb{1}$, το διάνυσμα με όλα τα στοιχεία ίσα με την μονάδα, είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μηδενική ιδιοτιμή $\lambda_0(G)$. Υπενθυμίζεται ότι η Λαπλασιανή είναι συμμετρική και $L(G)\mathbb{1} = 0$ για μη κατευθυνόμενο G . Έστω $U = [u_0 u_1 \dots u_{n-1}]$ ο πίνακας που αποτελείται από κανονικοποιημένα και μεταξύ τους ορθογώνια ιδιοδιανύσματα της $L(G)$ που αντιστοιχίζονται στις διατεταγμένες ιδιοτιμές. Επιπλέον, έστω

$$\Lambda(G) = \text{Diag}([\lambda_0(G), \dots, \lambda_{n-1}(G)]^T). \quad (2.41)$$

Εφαρμόζοντας το φασματικό θεώρημα στην Λαπλασιανή προκύπτει

$$e^{-L(G)t} = e^{-(U\Lambda(G)U^T)t} = Ue^{-\Lambda(G)t}U^T \quad (2.42)$$

$$= e^{-\lambda_0(G)t}u_0u_0^T + e^{-\lambda_1(G)t}u_1u_1^T + \dots + e^{-\lambda_{n-1}(G)t}u_{n-1}u_{n-1}^T \quad (2.43)$$

Επομένως η λύση της (2.31), με αρχική τιμή $x(0) = x_0$ είναι

$$x(t) = e^{-L(G)t}x_0, \quad (2.44)$$

η οποία μπορεί να διασπαστεί κατά μήκος κάθε ιδιοάξονα ως

$$x(t) = e^{-\lambda_0(G)t}(u_0^T x_0)u_0 + e^{-\lambda_1(G)t}(u_1^T x_0)u_1 + \dots + e^{-\lambda_{n-1}(G)t}(u_{n-1}^T x_0)u_{n-1}. \quad (2.45)$$

Τέλος παρατίθεται ένα θεώρημα που συνάγει σύγκλιση του πρωτοκόλλου συμφωνίας, η απόδειξη του οποίου βρίσκεται στο [14].

Θεώρημα 2.5. Έστω G ένας συνεκτικός γράφος. Τότε το (μη κατευθυνόμενο) πρωτόκολλο συμφωνίας (2.38) συγκλίνει στο σύνολο συμφωνίας (2.39) με ρυθμό σύγκλισης που καθορίζεται από την $\lambda_1(G)$.

2.4.3 Σχετικές εργασίες

Στις εργασίες [11], [12] καθώς και στο βιβλίο [14] αναλύεται το πρόβλημα της συμφωνίας για πολυπρακτορικά συστήματα, αναπτύσσονται οι βασικές έννοιες του προβλήματος καθώς και τεχνικές της θεωρίας ελέγχου για σύγκλιση και ανάλυση της επίδοσης των πρωτοκόλλων συμφωνίας. Συγκεκριμένα, ορίζεται το πρόβλημα της συμφωνίας και προτείνεται αλγόριθμος για την επίτευξη σύγκλισης. Αναλύονται οι διαφορετικές τοπολογίες γράφων και θεωρήματα σχετικά με την εκάστοτε τοπολογία τα οποία είναι σχετικά με το πρόβλημα και προέρχονται από την θεωρία πινάκων και την φασματική θεωρία γράφων.

Η παρούσα διπλωματική έχει άμεση σχέση με αυτές τις εργασίες, αφού ο στόχος της είναι η απόδειξη της επίτευξης συμφωνίας σε πολυπρακτορικό δίκτυο με διαταραχές. Η βασική θεωρία που αναπτύσσεται σε αυτές τις εργασίες χρησιμοποιείται στην διπλωματική. Η βασική διαφορά με τις εργασίες αυτές είναι ότι οι δυναμικές των πρακτόρων στην διπλωματική περιλαμβάνουν άγνωστες διαταραχές.

Κεφάλαιο 3

Στρατηγικές ελέγχου για ασυνεχή δυναμικά συστήματα

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο αναπτύχθηκε το βασικό μαθηματικό υπόβαθρο για την διπλωματική. Στο παρόν Κεφάλαιο, θα παρατεθούν κεντρικές ιδέες εργασιών που σχετίζονται με ασυνεχείς στρατηγικές ελέγχου οι οποίες σχετίζονται με τον έλεγχο που χρησιμοποιείται στην παρούσα διπλωματική. Οι στρατηγικές αυτές οδηγούν σε ασυνεχή δυναμικά συστήματα των οποίων οι λύσεις ορίζονται με βάση την θεωρία ασυνεχών δυναμικών συστημάτων που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Κοινό σημείο των εργασιών που αναφέρονται στην συνέχεια είναι η χρήση ελέγχων που περιλαμβάνουν την συνάρτηση προσήμου sgn .

3.2 Συνεχής στρατηγική ελέγχου για αβέβαια μη γραμμικά συστήματα

Στην εργασία [9] αναπτύσσεται στρατηγική ελέγχου για αβέβαιο σύστημα της μορφής $\dot{w} = -w + \phi(t) - \hat{\phi}(t)$ όπου $w(t)$ η μεταβλητή κατάστασης και $\hat{\phi}(t)$ είναι μια μεταβλητή ελέγχου η οποία έχει εισαχθεί για να ανισταθμίσει την άγνωστη διαταραχή $\phi(t)$. Σκοπός της εργασίας είναι να σχεδιαστεί κατάλληλα το $\hat{\phi}(t)$ ώστε να συγκλίνει το $w(t)$ στο μηδέν.

Αν εφαρμοστεί ο προτεινόμενος έλεγχος, ο συνεχής μηχανισμός που αντισταθμίζει το $\phi(t)$ παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\hat{\phi}(t) = \int_0^t (\delta_0 w(\tau) + \delta_1 sgn(w(\tau))) d\tau \quad (3.1)$$

όπου δ_0, δ_1 είναι θετικά κέρδη ελέγχου, και sgn είναι η συνήθης συνάρτηση προσήμου. Για το σύστημα που περιγράφηκε ο προαναφερθείς έλεγχος αποδεικνύεται ότι επιτυγχάνει ασυμπτωτική ρύθμιση του $w(t)$ και του $\dot{w}(t)$, εφόσον το $\phi(t)$ έχει φραγμένες παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης και τα κέρδη ελέγχου δ_0, δ_1 έχουν επιλεγεί αρκετά μεγάλα σε σχέση με τα

φράγματα των παραγώγων του $\phi(t)$. Η λύση αυτή όταν εφαρμοστεί στην εξίσωση κατάστασης έχει την ιδιότητα ότι μαθαίνει την άγνωστη διαταραχή, δηλαδή $(\phi(t) - \hat{\phi}(t) \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty)$.

Η εφαρμογή τέτοιας μορφής ελέγχου γίνεται σε ένα με γραμμικό σύστημα της μορφής

$$m(x)x^{(n)} + f(x) = u \quad (3.2)$$

$$y = x \quad (3.3)$$

όπου $x(t) \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα κατάστασης, $y(t) \in \mathbb{R}$ η έξοδος του συστήματος, $u(t) \in \mathbb{R}$ η είσοδος και $m(x) > 0$, $f(x)$ είναι άγνωστες μη γραμμικές C^2 συναρτήσεις. Το πρόβλημα είναι το σύστημα να προσεγγίσει μια επιθυμητή τροχιά. Μετά από ανάλυση η είσοδος παίρνει μορφή που εξαρτάται από το ολοκλήρωμα του προσήμου του σφάλματος μεταξύ της τροχιάς του συστήματος και της επιθυμητής.

Η στρατηγική αυτή μοιάζει με την στρατηγική που εφαρμόζουμε ως προς την χρήση της συνάρτησης προσήμου. Όμως η συνάρτηση αυτή στην προκειμένη περίπτωση ολοκληρώνεται, ενώ στην απόδειξη της διπλωματικής αυτό δεν συμβαίνει. Επιπλέον μια κοινή συνισταμένη είναι ότι και εδώ η άγνωστη διαταραχή θεωρείται δευτέρου βαθμού παραγωγίσιμη και φραγμένη με φραγμένες παραγώγους.

3.3 Δεύτερης τάξης ελεγκτές ολισθούμενης λειτουργίας (second order sliding mode, SOSM)

3.3.1 Ελεγκτές-παρατηρητές ολισθούμενης λειτουργίας για συστήματα με και χωρίς διαταραχές

Στην εργασία [1], αρχικά παρουσιάζονται συναρτήσεις Lyapunov για βασικά και διαταραγμένα SOSM συστήματα. Στη συνέχεια προτείνεται μια βελτίωση για το SOSM το οποίο του επιτρέπει να αντιμετωπίσει γραμμικά αυξανόμενες διαταραχές.

Ο βασικός αλγόριθμος που παρουσιάζεται στην παραπάνω εργασία είναι ο υπερσυστροφόμενος αλγόριθμος (super-twisting), ο οποίος περιγράφεται από τον διαφορικό εγκλεισμό

$$\dot{x}_1 = -k_1|x_1|^{1/2}\text{sgn}(x_1) + x_2 + \rho_1(x, t) \quad (3.4)$$

$$\dot{x}_2 = -k_3\text{sgn}(x_1) + \rho_2(x, t) \quad (3.5)$$

όπου τα x_i είναι οι μεταβλητές κατάστασης, τα k_i είναι κέρδη προς σχεδίαση και ρ_i είναι οι διαταραχές. Προτείνεται συνάρτηση Lyapunov η οποία αποδεικνύει σύγκλιση σε πεπερασμένο χρόνο όλων των μεταβλητών κατάστασης στο μηδέν, για κατάλληλα επιλεγμένα κέρδη και συγκεκριμένο είδος διαταραχών.

Συγκεκριμένα η αρχική συνάρτηση Lyapunov που προτείνεται είναι η εξής

$$V(x) = 2k_3|x_1| + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(k_1|x_1|^{1/2}\text{sgn}(x_1) - x_2)^2 \quad (3.6)$$

η οποία είναι συνεχής παντού, αλλά όχι διαφορίσιμη στο $x_1 = 0$, και αποδεικνύεται ότι είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov για το αρχικό σύστημα, χωρίς διαταραχές. Επιπλέον αποδεικνύεται η σύγκλιση σε πεπερασμένο χρόνο. Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι για φραγμένες

διαταραχές, με φράγματα της μορφής $|\rho_1| \leq \delta_1|x_1|^{1/2}$, $|\rho_2| \leq \delta_2$ για κάποιες σταθερές δ_1, δ_2 , το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για συγκεκριμένα κέρδη και μάλιστα φτάνει στο μηδέν για πεπερασμένο χρόνο.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας, θεωρείται ένα τροποποιημένο SOSM, το οποίο περιγράφεται από διαφορικό εγκλεισμό της μορφής

$$\dot{x}_1 = -k_1|x_1|^{1/2}\text{sgn}(x_1) - k_2x_1 + x_2 + \rho_1(x, t) \quad (3.7)$$

$$\dot{x}_2 = -k_3\text{sgn}(x_1) - k_4x_1 + \rho_2(x, t) \quad (3.8)$$

όπου τα x_i είναι οι μεταβλητές κατάστασης, k_i τα κέρδη προς σχεδίαση και ρ_i οι διαταραχές.

Αποδεικνύεται ότι το σύστημα χωρίς διαταραχές συγκλίνει στο μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο με χρήση της συνάρτησης Lyapunov $V(x) = 2k_3|x_1| + k_4x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(k_1|x_1|^{1/2}\text{sgn}(x_1) + k_2x_1 - x_2)^2$. Για το διαταραγμένο σύστημα αποδεικνύεται ότι αν οι διαταραχές είναι φραγμένες, με φράγματα της μορφής $|\rho_1| \leq \delta_1|x_1|^{1/2} + \delta_3|x_1|$, $|\rho_2| \leq \delta_2 + \delta_4|x_1|$ για κάποιες σταθερές $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \geq 0$, το σύστημα συγκλίνει σε πεπερασμένο χρόνο στο μηδέν, με χρήση της ίδιας συνάρτησης Lyapunov.

3.3.2 Μια διαφορετική προσέγγιση Lyapunov για τον υπερσυστρεφόμενο αλγόριθμο

Στην εργασία [3] προτείνεται μέθοδος για την κατασκευή συναρτήσεων Lyapunov για συστήματα της μορφής (3.4),(3.5). Η μέθοδος που προτείνεται έχει τα πλεονεκτήματα ότι προτείνει τρόπο για την κατασκευή οικογένειας συναρτήσεων Lyapunov, οι συναρτήσεις Lyapunov είναι τετραγωνικής μορφής και οι παράγωγοί τους είναι επίσης τετραγωνικής μορφής, για κάθε μέλος της οικογένειας, μπορεί να αποδειχτεί σύγκλιση σε πεπερασμένο χρόνο και η κλάση των διαταραχών για την οποία μπορεί να αποδειχτεί ευστάθεια σε πεπερασμένο χρόνο είναι αρκετά μεγαλύτερη από την μέχρι τότε εδραιωμένη.

Η ιδέα για την κατασκευή της συνάρτησης Lyapunov προέρχεται από το γεγονός ότι η παράγωγος του διανύσματος $\zeta^T = [\zeta_1, \zeta_2] = [|x_1|^{1/2}\text{sgn}(x_1), x_2]$ δίνεται από την

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{|\zeta_1|}A\zeta, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

όπου $|\zeta_1| = |x_1|^{1/2}$. Επομένως γίνεται η επιλογή της συνάρτησης

$$V(x) = \zeta^T P \zeta \quad (3.10)$$

με P ένα σταθερό, συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα, ως υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov για το σύστημα (3.4),(3.5) χωρίς διαταραχές. Η παράγωγός της κατά μήκος των τροχιών του συστήματος είναι

$$\dot{V} = -|x_1|^{-1/2}\zeta^T Q \zeta \quad (3.11)$$

σχεδόν παντού, στην οποία οι P και Q σχετίζονται με την αλγεβρική εξίσωση Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q. \quad (3.12)$$

Με χρήση της παραπάνω συνάρτησης Lyapunov το σύστημα συγκλίνει στο μηδέν για πεπερασμένο χρόνο για την περίπτωση χωρίς διαταραχές. Στην περίπτωση που οι διαταραχές έχουν κατάλληλη συμπεριφορά, δηλαδή είναι φραγμένες με σταθερά φράγματα ή φράγματα που εξαρτώνται με συγκεκριμένο τρόπο από τις μεταβλητές κατάστασης, το σύστημα συγκλίνει και πάλι στο μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο, με κατάλληλη επιλογή των κερδών ελέγχου.

3.3.3 Ελεγκτής ανατροφοδότησης εξόδου σε σύστημα με άγνωστες φραγμένες διαταραχές

Στην εργασία [2] θεωρείται ένα σύστημα μιας εισόδου μιας εξόδου της μορφής

$$\dot{\xi} = f(t, \xi) + g(t, \xi)u \quad (3.13)$$

$$\sigma = h(t, \xi) \quad (3.14)$$

όπου $\xi \in \mathbb{R}^n$ είναι η κατάσταση, $u \in \mathbb{R}$ είναι η μεταβλητή ελέγχου και $\sigma \in \mathbb{R}$ είναι η μετρούμενη έξοδος. Οι λείες συναρτήσεις f, g, h και η διάσταση n είναι άγνωστες. Ο σκοπός του ελέγχου είναι να μηδενιστεί η έξοδος σ και να διατηρηθεί στο μηδέν, παρά τις διαταραχές και χρησιμοποιώντας μόνο την μετρούμενη έξοδο σ . Παίρνοντας την δεύτερης τάξης παράγωγο του συστήματος και ορίζοντας $x_1 = \sigma, x_2 = \dot{\sigma}$ το σύστημα παίρνει την μορφή

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.15)$$

$$\dot{x}_2 = a(t, \xi) + b(t, \xi)u \quad (3.16)$$

όπου a, b είναι άγνωστες λείες συναρτήσεις.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται και σε αυτήν την περίπτωση είναι ο υπερσυστρεφόμενος, εδώ με την μορφή

$$u = -k_1 \text{sgn}(x_1) - k_2 \text{sgn}(x_2) \quad (3.17)$$

όπου τα κέρδη k_1, k_2 είναι προς σχεδίαση. Αποδεικνύεται σύγκλιση σε πεπερασμένο χρόνο για κατάλληλα φραγμένες διαταραχές.

3.3.4 Σύγκριση με την παρούσα εργασία

Η κοινή συνισταμένη των εργασιών αυτών με την παρούσα είναι η χρήση αλγορίθμου που περιέχει την συνάρτηση προσήμου. Βέβαια οι εφαρμογές στις παραπάνω εργασίες γίνονται σε διαφορετικού είδους συστήματα, μιας και στην παρούσα εργασία ο αλγόριθμος εφαρμόζεται στο πρόβλημα της συμφωνίας. Επιπλέον στην διπλωματική, η συνάρτηση προσήμου εμφανίζεται σε μια φιλτραρισμένη είσοδο και όχι αυτούσια στο σύστημα του κάθε πράκτορα. Ένα άλλο κοινό είναι ότι οι διαταραχές που υποθέτουμε είναι και στην περίπτωση της διπλωματικής φραγμένες και έχουν συνεχείς παραγώγους μέχρι και δευτέρου βαθμού, όπως και σε κάποιες από τις παραπάνω εργασίες.

Κεφάλαιο 4

Συνεχής κατανεμημένος έλεγχος για πολυπρακτορικό δίκτυο με άγνωστες διαταραχές και σταθερή τοπολογία

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο γίνεται ανάλυση του προβλήματος που πραγματεύεται η διπλωματική, στην περίπτωση σταθερής τοπολογίας δικτύου. Αρχικά περιγράφεται το πρόβλημα προς επίλυση, ώστε να δοθεί μια ποιοτική εικόνα για καλύτερη κατανόηση και στη συνέχεια το πρόβλημα ορίζεται με μαθηματικό φορμαλισμό. Ορίζεται συνάρτηση Lyapunov και αποδεικνύονται βασικές της ιδιότητες, καθώς και αποδεικνύεται η ύπαρξη λύσεων του συστήματος. Τέλος, γίνεται η απόδειξη επίτευξης συμφωνίας σε δίκτυα με σταθερή τοπολογία για συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο, με την χρήση συνεχούς και πλήρως κατανεμημένου ελέγχου.

4.2 Περιγραφή του προβλήματος προς επίλυση

Το πρόβλημα προς επίλυση είναι η επίτευξη συμφωνίας σε πολυπρακτορικό δίκτυο με άγνωστες διαταραχές για σταθερή τοπολογία δικτύου. Οι πράκτορες ακολουθούν την δυναμική απλού ολοκληρωτή. Οι διαταραχές θεωρούνται φραγμένες, με φραγμένες και συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης. Ο γράφος περιγραφής δικτύου είναι συνεκτικός και μη κατευθυνόμενος.

Η λύση που αναπτύσσεται στην συνέχεια, κάνει χρήση της θεωρίας ασυνεχών συστημάτων, και χρησιμοποιεί κατανεμημένο συνεχή έλεγχο. Η είσοδος των επιμέρους πρακτόρων αρχικά φιλτράρεται με χρήση των μεταβλητών T και β καθώς και του προσήμου του σφάλματος ζονσενσους ξ . Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας την φιλτραρισμένη είσοδο δημιουργείται η τελική, που έχει έναν επιπλέον αυθροιστικό όρο που χρησιμοποιεί τα ξ . Ο έλεγχος αυτός είναι

πλήρως κατανεμημένος, δηλαδή οι επιμέρους πράκτορες λειτουργούν αυτόνομα χρησιμοποιώντας πληροφορία μόνο από τους γείτονες τους, και αποδεικνύεται ότι επιτυγχάνει ασυμπτωτικά συμφωνία για σταθερή τοπολογία γράφου. Στην πράξη, η επίτευξη σύγκλισης σημαίνει ότι η είσοδος μαθαίνει την διαταραχή και καταφέρνει να την αντιμετωπίσει. Το πως ακριβώς λειτουργεί θα γίνει σαφές στην συνέχεια του Κεφαλαίου.

4.3 Ορισμός του προβλήματος

Η τοπολογία του δικτύου των πρακτόρων περιγράφεται χρησιμοποιώντας ένα μη κατευθυνόμενο, συνεκτικό γράφο $G = (V, E)$, όπου $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ είναι το σύνολο των κόμβων του και $E \subseteq V \times V$ το σύνολο των κλάδων του. Το σύνολο των γειτόνων του πράκτορα i είναι το $N(i) = \{u_j \in V | u_i u_j \in E\}$.

Οι δυναμικές των πρακτόρων δίνονται από την εξίσωση:

$$\dot{x}_i = u_i + d_i, \quad i \in V \quad (4.1)$$

όπου τα x_i είναι οι μονοδιάστατες μεταβλητές κατάστασης των πρακτόρων, d_i είναι άγνωστες φραγμένες διαταραχές με φραγμένες συνεχείς παραγώγους μέχρι και δεύτερου βαθμού και

$$u_i = -K_p \xi_i + u_{fi}, \quad i \in V. \quad (4.2)$$

Το u_{fi} είναι η φιλτραρισμένη είσοδος

$$T \dot{u}_{fi} + u_{fi} = -\beta \text{sgn}(\xi_i), \quad i \in V \quad (4.3)$$

όπου sgn είναι η συνάρτηση προσήμου και τα T, β, K_p είναι κέρδη ελέγχου. Τα ξ_i περιέχουν την πληροφορία του πράκτορα i για τους γείτονες του και δίνονται από την εξίσωση

$$\xi_i = \sum_{j \in N(i)} \alpha_{ij} (x_i - x_j), \quad i \in V. \quad (4.4)$$

Το πρόβλημα έγκειται στο να δειχθεί η επίτευξη συμφωνίας, δηλαδή ότι $x_i - x_j \rightarrow 0, \forall i, j \in V$ για σταθερή τοπολογία γράφου.

4.4 Συνάρτηση Lyapunov - Ύπαρξη λύσεων του συστήματος

Η συνάρτηση *Lyapunov* που θα χρησιμοποιηθεί είναι η εξής:

$$V(x_{ag}, t) = \frac{1}{2} \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right)^T \mathcal{L} \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right) + \frac{\beta}{T} \sum_{i \in V} |\xi_i| - \sum_{i \in V} \left(\dot{d}_i + \frac{1}{T} d_i \right) \xi_i \quad (4.5)$$

όπου $x_{ag} = (x, \dot{x}, d, \dot{d})$ το επαυξημένο διάνυσμα κατάστασης με $x, \dot{x}, d, \dot{d} \in \mathbb{R}^n$ και \mathcal{L} η Λαπλασιανή του γράφου του δικτύου. Όλοι οι όροι της συνάρτησης είναι συνεχώς διαφορίσιμοι άρα και κανονικοί, εκτός του όρου που περιέχει την απόλυτη τιμή των ξ_i . Σύμφωνα με το

παράδειγμα 2.1. ο όρος αυτός είναι επίσης κανονικός, επομένως και η συνάρτηση Lyapunov είναι κανονική.

Στη συνέχεια θα αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $V_0 = \frac{1}{2}(\dot{x} + \frac{1}{T}x)^T \mathcal{L}(\dot{x} + \frac{1}{T}x)$ μπορεί να γραφεί σε μορφή που εξαρτάται μόνο από το διάνυσμα $(\xi, \dot{\xi})$ χρησιμοποιώντας διάσπαση ιδιαζουσών τιμών καθώς και ιδιότητες της Λαπλασιανής. Αυτό θα βοηθήσει την απόδειξη Lipschitz συνέχειας της V_0 στο σύνολο τιμών του x_{ag} .

Λήμμα 4.4. Η Λαπλασιανή $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ενός συνεκτικού και μη κατευθυνόμενου γράφου μπορεί να διασπαστεί στην μορφή $\mathcal{L} = \mathcal{L} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}$, όπου \mathcal{L}_0 είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας που προκύπτει από τους πίνακες διάσπασης της \mathcal{L} με χρήση της μεθόδου ιδιαζουσών τιμών.

Απόδειξη. Από τις ιδιότητες της Λαπλασιανής είναι γνωστό ότι έχει n πραγματικές ιδιοτιμές οι οποίες μπορούν να διαταχθούν στην μορφή $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$, όπου $\lambda_0 = 0$ και από το θεώρημα 2.4, αφού ο γράφος είναι συνεκτικός προκύπτει $\lambda_1 > 0$.

Με χρήση της διάσπασης ιδιαζουσών τιμών στην Λαπλασιανή, όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2, και αφού η Λαπλασιανή έχει μοναδική μηδενική ιδιοτιμή, προκύπτει

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} U & \frac{\mathbf{1}_n}{\sqrt{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^T \\ \frac{\mathbf{1}_n^T}{\sqrt{n}} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

όπου $U \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ με την ιδιότητα $U^T U = \mathbb{I}_{(n-1) \times (n-1)}$ και ο $\Sigma \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ έχει στις θέσεις $(i, i), i = 1, \dots, n-1$ τις τιμές $\sigma_i(L) = \sqrt{\lambda_i(L^T L)}$. Στην μορφή που παρουσιάστηκε ο πίνακας Σ έχει όλες τις μη μηδενικές ιδιαζουσες τιμές της Λαπλασιανής στην διαγώνιο του, αφού η μοναδική μηδενική ιδιαζουσα τιμή της Λαπλασιανής αφαιρέθηκε στην εξίσωση (4.6).

Τότε η Λαπλασιανή γράφεται στην μορφή

$$\mathcal{L} = U \Sigma U^T = U \Sigma \Sigma^{-1} \Sigma U^T = U \Sigma U^T U \Sigma^{-1} U^T U \Sigma U^T = \mathcal{L} U \Sigma^{-1} U^T \mathcal{L}$$

αφού η Λαπλασιανή έχει ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{1}$ ισχύει και ότι

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(U \Sigma^{-1} U^T + r \frac{\mathbf{1} \mathbf{1}^T}{N} \right) \mathcal{L} \quad (4.7)$$

όπου r θετική σταθερά, η οποία επιλέγεται έτσι ώστε $\lambda_1(\mathcal{L}) < r < \lambda_{\max}(\mathcal{L})$.

Αν οριστεί

$$\mathcal{L}_0 = \begin{bmatrix} U & \frac{\mathbf{1}_n}{\sqrt{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^T \\ \frac{\mathbf{1}_n^T}{\sqrt{n}} \end{bmatrix} = U \Sigma^{-1} U^T + r \frac{\mathbf{1} \mathbf{1}^T}{N}$$

ικανοποιείται το ζητούμενο. □

Επομένως από το Λήμμα αυτό και την ιδιότητα $\xi = \mathcal{L}x$ που απορρέει από την (4.4) προκύπτει άμεσα το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 4.1. Η συνάρτηση V_0 μπορεί να γραφεί στην μορφή $V_0 = \frac{1}{2}(\dot{\xi} + \frac{1}{T}\xi)^T \mathcal{L}_0(\dot{\xi} + \frac{1}{T}\xi)$.

Λήμμα 4.5. Η συνάρτηση V_0 είναι Lipschitz συνεχής στο σύνολο τιμών του x_{ag} .

Απόδειξη. Αρχικά το V_0 είναι τοπικά Lipschitz ως τετραγωνική συνάρτηση. Επίσης ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i + \frac{1}{T}x_i \right) = \dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i - K_p \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right) + \frac{1}{T}\beta \text{sgn}(\xi_i), \forall i \in V \quad (4.8)$$

και επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{dV_0}{dt} = & -K_p \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right)^2 + \sum_{i \in V} \left(\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i \right) \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right) \\ & - \sum_{i \in V} \frac{\beta}{T} \text{sgn}(\xi_i) \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Για αρκετά μεγάλο $\|\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i\|$ δηλαδή για αρκετά μεγάλο V_0 , ισχύει ότι $\frac{dV_0}{dt} \leq 0$. Επομένως η V_0 είναι φραγμένη.

Επιλέον ισχύει από το Λήμμα 4.4 ότι:

$$V_0 = \frac{1}{2}(\dot{x} + \frac{1}{T}x)^T \mathcal{L}(\dot{x} + \frac{1}{T}x) \geq \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{L}_0)}{2} \left\| \dot{\xi} + \frac{1}{T}\xi \right\|^2 \quad (4.10)$$

Άρα και το $\|\dot{\xi} + \frac{1}{T}\xi\|$ είναι φραγμένο.

Σύμφωνα με το [5], αφού η V_0 είναι φραγμένη και τοπικά Lipschitz, είναι Lipschitz συνεχής στο σύνολο τιμών του x_{ag} . \square

Σε αυτό το σημείο θα αποδειχτεί η ύπαρξη λύσεων Filippov του συστήματος για σταθερή τοπολογία γράφου. Για την ύπαρξη λύσεων Filippov του συστήματος των πρακτόρων (4.1),(4.1),(4.3) από την Πρόταση (2.7) αρκεί να δείχτεί ότι η (4.1) είναι ουσιαστικά τοπικά φραγμένη, αφού είναι μετρήσιμη. Αυτό συνεπάγεται ότι αρκεί η είσοδος u_i και κατά συνέπεια η u_{fi} και το ξ να είναι φραγμένα, μιας και η διαταραχή θεωρείται φραγμένη.

Λήμμα 4.6. Η φιλτραρισμένη είσοδος u_{fi} είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση Lyapunov $V_{fi} = \frac{T}{2}u_{fi}^2$. Η παράγωγος της είναι $\dot{V}_{fi} = -u_{fi}^2 - \beta \text{sgn}(\xi_i)u_{fi} \leq -u_{fi}^2 + \beta|u_{fi}| = -|u_{fi}|(|u_{fi}| - \beta)$. Επομένως, αν το u_{fi} αυξηθεί αρκετά ώστε το $|u_{fi}|$ να ξεπεράσει το β η συνάρτηση Lyapunov θα γίνει αρνητικά ορισμένη, επομένως το u_{fi} θα φθίνει. Συνεπώς, το u_{fi} είναι φραγμένο. \square

Λήμμα 4.7. Το διάνυσμα ξ είναι φραγμένο.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση Lyapunov $V_\xi = \frac{1}{2}\xi^T \xi$. Έστω $w(t) = \dot{\xi} + \frac{1}{T}\xi$. Η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι $\dot{V}_\xi = \xi^T w(t) - \frac{2}{T}V_\xi$. Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα προκύπτει ότι $\dot{V}_\xi \leq \frac{T}{2}\|\dot{\xi} + \frac{1}{T}\xi\|^2 - \frac{1}{T}V_\xi$. Από την απόδειξη του Λήμματος 4.5 προκύπτει ότι το $\|\dot{\xi} + \frac{1}{T}\xi\|$ είναι φραγμένο και επομένως αν η V_ξ αυξηθεί αρκετά, θα προκύπτει ότι $\dot{V}_\xi \leq 0$ και κατά συνέπεια η V_ξ είναι φραγμένη. Από την μορφή της V_ξ προκύπτει ότι και το ξ είναι φραγμένο. \square

Αφού τα ορίσματα της εισόδου u είναι φραγμένα, σύμφωνα με τα δύο παραπάνω Λήμματα, προκύπτει άμεσα το εξής αποτέλεσμα.

Πόρισμα 4.2. *Η είσοδος u είναι φραγμένη.*

Επομένως η είσοδος u είναι φραγμένη και αφού και οι διαταραχές έχουν υποθεθεί φραγμένες, προκύπτει από την Πρόταση 2.7 ότι υπάρχουν λύσεις του συστήματος (4.1).

Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι η $V \circ x_{ag}$ είναι απόλυτα συνεχής συνάρτηση στο σύνολο τιμών του x_{ag} .

Λήμμα 4.8. *Η συνάρτηση Lyapunov (4.5) είναι απολύτως συνεχής στο σύνολο τιμών του x_{ag} .*

Απόδειξη. Το x_{ag} είναι απολύτως συνεχές, ως λύση *Filippov*. Η ύπαρξή του εξασφαλίζεται από την Πρόταση 2.7, όπως εξηγήθηκε προηγουμένως. Ο όρος $-\sum_{i \in V} (d_i + \frac{1}{T} d_i) \xi_i$ είναι *Lipschitz* συνεχής, καθώς και ο όρος $\frac{\beta}{T} \sum_{i \in V} |\xi_i|$ είναι *Lipschitz* συνεχής. Η συνάρτηση $V_0 = \frac{1}{2} (\dot{x} + \frac{1}{T} x)^T \mathcal{L} (\dot{x} + \frac{1}{T} x)$ είναι *Lipschitz* συνεχής σύμφωνα με το Λήμμα 4.5.

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω η συνάρτηση Lyapunov είναι *Lipschitz* στο διάστημα τιμών του x_{ag} , ως άθροισμα *Lipschitz* συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, αφού η x_{ag} είναι απόλυτα συνεχής συνάρτηση, προκύπτει από το Θεώρημα 2.3 ότι η $V \circ x_{ag}$ είναι απολύτως συνεχής. \square

4.5 Απόδειξη συμφωνίας για σταθερή τοπολογία

Όπως αποδείχτηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, η συνάρτηση Lyapunov

$$V(x_{ag}, t) = \frac{1}{2} (\dot{x} + \frac{1}{T} x)^T \mathcal{L} (\dot{x} + \frac{1}{T} x) + \frac{\beta}{T} \sum_{i \in V} |\xi_i| - \sum_{i \in V} (d_i + \frac{1}{T} d_i) \xi_i \quad (4.11)$$

είναι απολύτως συνεχής, στο σύνολο τιμών του x_{ag} . Επομένως είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού. Η παράγωγός της είναι σχεδόν παντού:

$$\dot{V}(x_{ag}, t) = -K_p \sum_{i \in V} (\dot{\xi}_i + \frac{1}{T} \xi_i)^2 - \frac{\beta}{T^2} \sum_{i \in V} \text{sgn}(\xi_i) \xi_i + \frac{1}{T^2} \sum_{i \in V} \xi_i d_i - \sum_{i \in V} \xi_i \ddot{d}_i. \quad (4.12)$$

Θεώρημα 4.6. *Το σύστημα (4.1) με σταθερή τοπολογία δικτύου, για συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο εξασφαλίζει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ με χρήση του καταναμημένου συνεχούς ελέγχου (4.2),(4.3), για κατάλληλο κέρδος ελέγχου β .*

Απόδειξη. Ισχύει ότι:

$$W_1(\xi_{ag}) \leq V(x_{ag}, t) \leq W_2(\xi_{ag}) \quad (4.13)$$

όπου:

$$W_1(\xi_{ag}) = \frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathcal{L}_0) \left\| \dot{\xi} + \frac{1}{T} \xi \right\|^2 + \sum_{i \in V} |\xi_i| \left(\frac{\beta}{T} - \max_{i \in V} \left| d_i + \frac{1}{T} d_i \right| \right) \quad (4.14)$$

και

$$W_2(\xi_{ag}) = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\mathcal{L}_0) \left\| \dot{\xi} + \frac{1}{T} \xi \right\|^2 + \sum_{i \in V} |\xi_i| \left(\frac{\beta}{T} + \max_{i \in V} \left| \dot{d}_i + \frac{1}{T} d_i \right| \right). \quad (4.15)$$

Οι W_1 και W_2 είναι θετικά ορισμένες και συνεχείς, ως προς $\xi_{ag} = (\xi, \dot{\xi})$, για κατάλληλο β το οποίο ξεπερνά τον όρο $-\max_{i \in V} |T\dot{d}_i + d_i|$. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\dot{V}(x_{ag}, t) \leq^{a.e.} -W(\xi_{ag}(t)) \quad (4.16)$$

όπου:

$$W(\xi_{ag}) = K_p \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T} \xi_i \right)^2 + \sum_{i \in V} |\xi_i| \left(\frac{\beta}{T^2} - \max_{i \in V} \left| \frac{d_i}{T^2} - \ddot{d}_i \right| \right) \quad (4.17)$$

Έστω $\xi_{ag} \in D$, ανοικτό και συνεκτικό σύνολο, που περιέχει το $\xi_{ag} = 0$ και $r > 0, c > 0 : B_r \subset D$ με $c < \min_{\|\xi_{ag}\|=r} W_1(\xi_{ag})$. Τότε, το σύνολο $\{\xi_{ag} \in B_r | W_1(\xi_{ag}) \leq c\}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του B_r . Έστω $\Omega_{t,c} = \{\xi_{ag} \in B_r | V(x_{ag}, t) \leq c\}$. Από (4.14), το $\Omega_{t,c}$ περιέχει το $\{\xi_{ag} \in B_r | W_2(\xi_{ag}) \leq c\}$, αφού $W_2(\xi_{ag}) \leq c \Rightarrow V(x_{ag}, t) \leq c$. Επιπλέον, $\Omega_{t,c} \subset \{\xi_{ag} \in B_r | W_1(\xi_{ag}) \leq c\}$, αφού $V(x_{ag}, t) \leq c \Rightarrow W_1(\xi_{ag}) \leq c$. Επομένως $\{\xi_{ag} \in B_r | W_2(\xi_{ag}) \leq c\} \subset \Omega_{t,c} \subset \{\xi_{ag} \in B_r | W_1(\xi_{ag}) \leq c\} \subset B_r \subset D$.

Με βάση τη (4.17): $\dot{V}(x_{ag}, t) \leq 0$ σχεδόν παντού, επομένως, από το Λήμμα 2.2, η $V(x_{ag})$ δεν αυξάνεται. Άρα, για κάθε $t_0 \geq 0$ και $x_{ag}(t_0)$ τέτοιο ώστε $\xi_{ag}(t_0) \in \Omega_{t_0,c}$, η λύση $x_{ag}(t)$ εξασφαλίζει ότι το $V(x_{ag}(t), t)$ δεν θα αυξάνεται, επομένως $V(x_{ag}(t), t) \leq c, \forall t \geq t_0$. Κατά συνέπεια, για τα ξ_{ag} που προκύπτουν θα ισχύει ότι $\xi_{ag}(t) \in \Omega_{t,c}, \forall t \geq t_0$.

Επομένως για κάθε $\xi_{ag}(t_0) \in \{\xi_{ag} \in B_r | W_2(\xi_{ag}) \leq c\}$, προκύπτει ότι $\xi_{ag}(t) \in \Omega_{t,c}$ και συνεπώς $\xi_{ag}(t) \in \{\xi_{ag} \in B_r | W_1(\xi_{ag}) \leq c\}$ για κάθε $t \geq t_0$. Άρα $\|\xi_{ag}\| \leq r, \forall t \geq t_0$.

Από το Λήμμα 2.2, $V(x(t), t) \leq V(x(t_0), t_0)$ και από το (4.16), η \dot{V} είναι Lebesgue μετρήσιμη:

$$0 \leq \int_{t_0}^t W(\xi_{ag}(\tau), \tau) d\tau = V(x(t_0), t_0) - V(x(t), t) \leq V(x(t_0), t_0) \quad (4.18)$$

Άρα το $\int_{t_0}^t W(\xi_{ag}(\tau), \tau) d\tau$ είναι φραγμένο, $\forall t \geq t_0$. Η ύπαρξη του $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t W(\xi_{ag}(\tau), \tau) d\tau$ εξασφαλίζεται λόγω του ότι το αριστερό μέλος της (4.18) είναι μονοτονικά μη φθίνον και φραγμένο από τα πάνω.

Αφού η $W(\xi_{ag})$ είναι συνεχής ως προς ξ_{ag} , και το ξ_{ag} ανήκει στο συμπαγές σύνολο B_r , η $W(\xi_{ag}(t))$ είναι ομοιόμορφα συνεχής για $t \in (t_0, \infty]$. Επομένως από το Λήμμα 2.3: $\lim_{t \rightarrow \infty} W(\xi_{ag}(t)) = 0$. Από αυτό, εύκολα προκύπτει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$, που είναι και το ζητούμενο. \square

Τέλος, θα δειχθεί ότι η συλλογική τιμή των πρακτόρων συγκλίνει στην μέση τιμή των καταστάσεών τους (*average consensus*).

Λήμμα 4.9. Για ένα πολυπρακτορικό δίκτυο που περιγράφεται από ένα συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφο, αν ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = 0$ για κάθε $i, j \in V$.

Απόδειξη. Κάνοντας διάσπαση ιδιαζουσών τιμών στην Λαπλασιανή \mathcal{L} του γράφου του δικτύου προκύπτει:

$$\mathcal{L} = U\Sigma U^T \quad (4.19)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση $\xi = \mathcal{L}x$ ισχύει:

$$U\Sigma^{-1}U^T\xi = UU^T x = \left(\mathbb{I}_n - \frac{\mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T}{n} \right) x = x - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \mathbf{1}_n \quad (4.20)$$

και κατά συνέπεια:

$$x = U\Sigma^{-1}U^T\xi + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \mathbf{1}_n. \quad (4.21)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πάνω ισότητα με $(e_i - e_j)^T$ από δεξιά (e_i η i -στήλη του μοναδιαίου πίνακα) προκύπτει ότι

$$x_i - x_j = (e_i - e_j)^T U\Sigma^{-1}U^T\xi$$

και παίρνοντας το όριο στο $t \rightarrow \infty$ συνεπάγεται ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = 0$ για κάθε $i, j \in V$. \square

Κεφάλαιο 5

Συνεχής κατανεμημένος έλεγχος για πολυπρακτορικό δίκτυο με άγνωστες διαταραχές και εναλλασσόμενη τοπολογία

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο γίνεται ανάλυση του προβλήματος που πραγματεύεται η διπλωματική, για την περίπτωση εναλλασσόμενης τοπολογίας δικτύου. Αρχικά περιγράφονται οι διαφορές του προβλήματος στην περίπτωση της εναλλασσόμενης τοπολογίας σε σχέση με την σταθερή, που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Ορίζεται συνάρτηση Lyapunov και αποδεικνύονται βασικές της ιδιότητες, που διαφέρουν από του προηγούμενου κεφαλαίου αφού η τοπολογία είναι εναλλασσόμενη, καθώς και επεκτείνεται η ισχύς των ιδιοτήτων από το προηγούμενο Κεφάλαιο. Τέλος γίνεται η απόδειξη επίτευξης συμφωνίας σε δίκτυα με εναλλασσόμενη τοπολογία για συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο, με την χρήση συνεχούς και πλήρως κατανεμημένου ελέγχου.

5.2 Περιγραφή του προβλήματος προς επίλυση

Το πρόβλημα προς επίλυση είναι η επίτευξη συμφωνίας σε πολυπρακτορικό δίκτυο με άγνωστες διαταραχές για εναλλασσόμενη τοπολογία δικτύου. Εναλλασσόμενη τοπολογία σημαίνει ότι η ροή πληροφορίας μεταξύ των πρακτόρων, αλλάζει μορφή με τον χρόνο. Δηλαδή η Λαπλασιανή αλλάζει μορφή σε κάποιες χρονικές στιγμές t_i . Οι πράκτορες ακολουθούν και σε αυτή την περίπτωση την δυναμική απλού ολοκληρωτή. Οι διαταραχές θεωρούνται φραγμένες, με φραγμένες και συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης. Ο γράφος περιγραφής δικτύου είναι συνεκτικός και μη κατευθυνόμενος, για κάθε διαφορετική τοπολογία.

5.3 Ορισμός του προβλήματος

Η τοπολογία του δικτύου των πρακτόρων περιγράφεται χρησιμοποιώντας μια οικογένεια μη κατευθυνόμενων, συνεκτικών γράφων $G = (V, E)$, όπου $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ είναι το σύνολο των κόμβων του κάθε επιμέρους γράφου και $E \subseteq V \times V$ το σύνολο των κλάδων του. Το σύνολο των γειτόνων του πράκτορα i είναι το $N(i) = \{u_j \in V | u_i u_j \in E\}$, για κάθε διαφορετική τοπολογία. Για ένα τυχαίο t_ℓ στο οποίο γίνεται αλλαγή τοπολογίας, ορίζουμε t_ℓ^+ τη στιγμή ακριβώς μετά την αλλαγή και t_ℓ^- τη στιγμή ακριβώς πριν. Η Λαπλασιανή του δικτύου αλλάζει μορφή σε κάθε χρονική στιγμή i στην οποία συμβαίνει αλλαγή τοπολογίας.

Οι δυναμικές των πρακτόρων δίνονται από την εξίσωση:

$$\dot{x}_i = u_i + d_i, \quad i \in V \quad (5.1)$$

όπου τα x_i είναι οι μονοδιάστατες μεταβλητές κατάστασης των πρακτόρων, d_i είναι άγνωστες διαταραχές φραγμένες, με φραγμένες συνεχείς παραγώγους μέχρι και δεύτερου βαθμού και

$$u_i = -K_p \xi_i + u_{fi}, \quad i \in V \quad (5.2)$$

Το u_{fi} είναι η φιλτραρισμένη είσοδος

$$T \dot{u}_{fi} + u_{fi} = -\beta \operatorname{sgn}(\xi_i), \quad i \in V \quad (5.3)$$

όπου sgn είναι η συνάρτηση προσήμου και τα T, β, K_p είναι κέρδη ελέγχου. Τα ξ_i δίνονται από την εξίσωση

$$\xi_i = \sum_{j \in N(i)} \alpha_{ij} (x_i - x_j), \quad i \in V. \quad (5.4)$$

Το πρόβλημα έγκειται στο ναδειχθεί η επίτευξη συμφωνίας, δηλαδή ότι $x_i - x_j \rightarrow 0, \forall i, j \in V$ για εναλλασσόμενη τοπολογία γράφου.

5.4 Συνάρτηση Lyapunov - Ύπαρξη λύσεων του συστήματος

Η συνάρτηση *Lyapunov* που θα χρησιμοποιηθεί είναι η εξής:

$$V(x_{ag}, t) = \frac{1}{2} (\dot{x} + \frac{1}{T} x)^T \mathcal{L}(t_\ell^+) (\dot{x} + \frac{1}{T} x) + \frac{\beta}{T} \sum_{i \in V} |\xi_i| - \sum_{i \in V} (d_i + \frac{1}{T} d_i) \xi_i \quad (5.5)$$

για $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$ όπου $x_{ag} = (x, \dot{x}, d, \dot{d})$ το επαυξημένο διάνυσμα κατάστασης με $x, \dot{x}, d, \dot{d} \in \mathbb{R}^n$ και \mathcal{L} η Λαπλασιανή του γράφου του δικτύου για δεδομένη τοπολογία, η οποία αλλάζει μορφή κάθε φορά που αλλάζει η τοπολογία του γράφου.

Για την συνάρτηση Lyapunov ισχύουν όλα τα αποτελέσματα που αποδείχτηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο, περιορισμένα στα διαστήματα μεταξύ αλλαγών τοπολογίας. Η ύπαρξη λύσεων ισχύει σε κάθε τέτοιο διάστημα και αφού το διάνυσμα κατάστασης είναι συνεχές, υπάρχουν λύσεις σε όλο το πεδίο ορισμού. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι ότι η απόδειξη

για ύπαρξη φράγματος στην V_0 που χρειάζεται για την Lipschitz συνέχεια της V ως προς x_{ag} δεν προκύπτει άμεσα λόγω ασυνέχειας της V_0 στα t_ℓ . Αν ο όρος αυτός αποδειχτεί ότι είναι φραγμένος, όμοια με το προηγούμενο Κεφάλαιο προκύπτουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα και επομένως ξεπερνιέται το πρόβλημα της παραγωγισιμότητας.

Για την απόδειξη αυτή αρχικά θα αποδειχτεί μια ενδιάμεση πρόταση για σταθερή τοπολογία, η οποία δηλαδή ισχύει στα διαστήματα μεταξύ εναλλαγών.

Πρόταση 5.8. Για σταθερή τοπολογία ισχύει η σχέση $\frac{d(V_0)}{dt} \leq -a_1 V_0 + a_2$, όπου a_1, a_2 θετικές σταθερές.

Απόδειξη. Είναι:

$$V_0 = \frac{1}{2} \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right)^T \mathcal{L} \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\xi} + \frac{1}{T}\xi \right)^T \mathcal{L}_0 \left(\dot{\xi} + \frac{1}{T}\xi \right) \quad (5.6)$$

και

$$\frac{dV_0}{dt} = -K_p \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right)^2 + \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right) \left[\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i - \frac{\beta}{T} \text{sgn}(\xi_i) \right] \quad (5.7)$$

Επομένως

$$\frac{dV_0}{dt} \leq -K_p \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right)^2 + \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right) \left[\max \left| \dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i \right| + \frac{\beta}{T} \right] \quad (5.8)$$

όπου τα μέγιστα παίρνονται πάνω σε όλες τις τιμές των διαταραχών οι οποίες είναι φραγμένες και άρα υπάρχουν τα μέγιστα. Αν ορίσουμε τη σταθερά $c_1 := \frac{1}{2} \left[\max \left| \dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i \right| + \frac{\beta}{T} \right]$ προκύπτει

$$\frac{dV_0}{dt} \leq -K_p \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right)^2 + 2 \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right) c_1 \quad (5.9)$$

και επομένως

$$\frac{dV_0}{dt} \leq -K_p \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right)^2 + \frac{K_p}{2} \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right)^2 + \frac{2nc_1^2}{K_p} \quad (5.10)$$

Άρα εν τέλει

$$\frac{dV_0}{dt} \leq -\frac{K_p}{2} \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right)^2 + \frac{2nc_1^2}{K_p} \quad (5.11)$$

Τώρα αφού ισχύει η γνωστή ανισότητα

$$V_0 \geq \lambda_{\max}(\mathcal{L}_0) \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right)^2 \quad (5.12)$$

προκύπτει ότι

$$\frac{dV_0}{dt} \leq -\frac{K_p}{2\lambda_{\max}(\mathcal{L}_0)} \left(\lambda_{\max}(\mathcal{L}_0) \sum_{i \in V} \left(\dot{\xi}_i + \frac{1}{T}\xi_i \right)^2 \right) + \frac{2nc_1^2}{K_p} \quad (5.13)$$

δηλαδή

$$\frac{dV_0}{dt} \leq -\frac{K_p}{2\lambda_{\max}(\mathcal{L}_0)} V_0 + \frac{2nc_1^2}{K_p} \quad (5.14)$$

άν τώρα οριστεί $\frac{K_p}{2\lambda_{\max}(\mathcal{L}_0)} = a_1$ και $\frac{2nc_1^2}{K_p} = a_2$, προκύπτει το ζητούμενο. \square

Για την χρονική στιγμή t_ℓ που αλλάζει η τοπολογία ισχύει ότι:

$$V(t_\ell^+) = \frac{1}{2} \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right)^T \mathcal{L}(t_\ell^+) \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right) + \frac{\beta}{T} \sum_{i \in V} |\xi(t_\ell^+)| - \sum_{i \in V} \left(\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i \right) \xi_i(t_\ell^+) \quad (5.15)$$

και

$$V(t_\ell^-) = \frac{1}{2} \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right)^T \mathcal{L}(t_\ell^-) \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right) + \frac{\beta}{T} \sum_{i \in V} |\xi(t_\ell^-)| - \sum_{i \in V} \left(\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i \right) \xi_i(t_\ell^-) \quad (5.16)$$

καθώς και ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες για τις ιδιοτιμές των διαφορετικών Λαπλασιανών \mathcal{L} :

$$\lambda_{\min}(\mathcal{L}(t_\ell^+)) \left\| \dot{x} + \frac{1}{T}x \right\|^2 \leq \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right)^T \mathcal{L}(t_\ell^+) \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right) \leq \lambda_{\max}(\mathcal{L}(t_\ell^+)) \left\| \dot{x} + \frac{1}{T}x \right\|^2 \quad (5.17)$$

$$\lambda_{\min}(\mathcal{L}(t_\ell^-)) \left\| \dot{x} + \frac{1}{T}x \right\|^2 \leq \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right)^T \mathcal{L}(t_\ell^-) \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right) \leq \lambda_{\max}(\mathcal{L}(t_\ell^-)) \left\| \dot{x} + \frac{1}{T}x \right\|^2 \quad (5.18)$$

Σε αυτό το σημείο θα αποδειχθεί ένα ενδιαμέσο Λήμμα το οποίο συνδέει τις τιμές του ξ την στιγμή που γίνεται αλλαγή τοπολογίας.

Λήμμα 5.10. *Ισχύει η σχέση $\|\xi(t_\ell^+)\|_1 \leq \alpha_0 \|\xi(t_\ell^-)\|_1$ για θετική σταθερά α_0 .*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την διάσπαση ιδιαζουσών τιμών στην Λαπλασιανή του γράφου ισχύει ότι:

$$\mathcal{L} = U \Sigma U^T \quad (5.19)$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση $\xi = \mathcal{L}x$ προκύπτει:

$$U \Sigma^{-1} U^T \xi = U U^T x = \left(\mathbb{I}_n - \frac{\mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T}{n} \right) x = x - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \mathbf{1}_n. \quad (5.20)$$

Πολύντας από τα δεξιά με e_i^T τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης συνεπάγεται ότι:

$$e_i^T U \Sigma^{-1} U^T \xi = x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (5.21)$$

Αφαιρώντας την εξίσωση αυτή, για δύο διαφορετικούς δείκτες i και j , συμπεραίνεται:

$$x_i - x_j = (e_i - e_j)^T U \Sigma^{-1} U^T \xi \quad (5.22)$$

όπου e_i είναι το διάνυσμα με μονάδα στην θέση i και μηδενικά αλλού. Κατά συνέπεια ισχύει το εξής

$$|x_i - x_j| = |(e_i - e_j)^T U \Sigma^{-1} U^T \xi| \quad (5.23)$$

άρα:

$$|x_i - x_j| \leq \lambda \sum_{k=1}^n |\xi_k| \quad (5.24)$$

όπου $\lambda = \max_{i,j \in V} \max_{\ell} \|U_{\ell} \Sigma_{\ell}^{-1} U_{\ell}^T (e_i - e_j)\|_{\infty}$. Προκύπτει:

$$\|\xi(t_{\ell}^+)\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i(t_{\ell}^+)| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(t_{\ell}^+) (x_i(t) - x_j(t)) \right| \quad (5.25)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t_{\ell}^+)| |x_i(t) - x_j(t)| \leq \lambda \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(t_{\ell}^+)| \sum_{k=1}^n |\xi_k(t_{\ell}^+)| = \alpha_0 \|\xi(t_{\ell}^+)\|_1 \quad (5.26)$$

με $\alpha_0 = \lambda \max_{\ell} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(t_{\ell}^+)|$. \square

Στη συνέχεια, θαδειχθεί ότι, για εναλλασσόμενη τοπολογία γράφου, την χρονική στιγμή t_{ℓ} στην οποία συμβαίνει αλλαγή τοπολογίας, ισχύει ότι $V_0(t_{\ell}^+) \leq \kappa_0 V_0(t_{\ell}^-)$ και ακολούθως ότι $V(t_{\ell}^+) \leq \kappa V(t_{\ell}^-)$. Επιπλέον θα υπολογιστεί η τιμή των κ_0 και κ .

Λήμμα 5.11. *Την χρονική στιγμή t_{ℓ} , που συμβαίνει αλλαγή τοπολογίας, ισχύει η σχέση $V_0(t_{\ell}^+) \leq \kappa_0 V_0(t_{\ell}^-)$, όπου κ_0 θετική σταθερά.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} V_0(t_{\ell}^+) &= \frac{1}{2} \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right)^T U(t_{\ell}^+) \Sigma(t_{\ell}^+) U(t_{\ell}^+)^T \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right) \\ &\leq \max_{\ell} (\lambda_{\max} \Sigma(t_{\ell}^+)) \left\| U(t_{\ell}^+)^T \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right) \right\|^2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Όπως έχει εξηγηθεί στο Κεφάλαιο 2, ο πίνακας U έχει την ιδιότητα:

$$UU^T = \mathbb{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{N} \quad (5.28)$$

η οποία διατηρείται μετά την αλλαγή τοπολογίας. Σαν αποτέλεσμα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} V_0(t_{\ell}^+) &\leq \max_{\ell} (\lambda_{\max} \Sigma(t_{\ell}^+)) \left\| U(t_{\ell}^+)^T \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right) \right\|^2 \\ &= \max_{\ell} (\lambda_{\max} \Sigma(t_{\ell}^+)) \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right)^T U(t_{\ell}^+) U(t_{\ell}^+)^T \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right) \\ &= \max_{\ell} (\lambda_{\max} \Sigma(t_{\ell}^+)) \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right)^T \left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{N} \right) \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right) \\ &= \max_{\ell} (\lambda_{\max} \Sigma(t_{\ell}^+)) \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right)^T U(t_{\ell}^-) U(t_{\ell}^-)^T \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right) \\ &\leq \frac{\max_{\ell} (\lambda_{\max} \Sigma(t_{\ell}^+))}{\min_{\ell} (\lambda_{\min} \Sigma(t_{\ell}^-))} \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right)^T U(t_{\ell}^-) \Sigma(t_{\ell}^-) U(t_{\ell}^-)^T \left(\dot{x} + \frac{1}{T} x \right) \\ &= \kappa_0 V_0(t_{\ell}^-) \end{aligned} \quad (5.29)$$

με:

$$\kappa_0 = \frac{\max_{\ell} (\lambda_{\max} \Sigma(t_{\ell}^+))}{\min_{\ell} (\lambda_{\min} \Sigma(t_{\ell}^-))}. \quad (5.30)$$

\square

Λήμμα 5.12. Την χρονική στιγμή t_ℓ , που συμβαίνει αλλαγή τοπολογίας, ισχύει η σχέση $V(t_\ell^+) \leq \kappa V(t_\ell^-)$, όπου κ θετική σταθερά που εξαρτάται από το β .

Απόδειξη. Ισχύει ότι:

$$V(t_\ell^+) = \frac{1}{2} \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right)^T \mathcal{L}(t_\ell^+) \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right) + \frac{\beta}{T} \sum_{i \in V} |\xi_i(t_\ell^+)| - \sum_{i \in V} \left(\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i \right) \xi_i(t_\ell^+). \quad (5.31)$$

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 5.11, 5.12:

$$\begin{aligned} V(t_\ell^+) &\leq \kappa_0 V_0(t_\ell^-) + \sum_{i \in V} |\xi_i(t_\ell^+)| \left(\frac{\beta}{T} + \max |\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i| \right) \\ &\leq \kappa_0 V_0(t_\ell^-) + \alpha_0 \left(\frac{\beta}{T} + \max |\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i| \right) \sum_{i \in V} |\xi_i(t_\ell^-)| \\ &\leq \max \left\{ \kappa_0, \frac{\alpha_0 \left(\frac{\beta}{T} + \max |\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i| \right)}{\frac{\beta}{T} - \max |\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i|} \right\} V(t_\ell^-) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Επομένως ,

$$\kappa = \max \left\{ \kappa_0, \frac{\alpha_0 \left(\frac{\beta}{T} + \max |\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i| \right)}{\frac{\beta}{T} - \max |\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i|} \right\} \quad (5.33)$$

□

Τέλος, σε αυτό το σημείο θα αποδειχτεί ότι η V_0 είναι φραγμένη και κατά συνέπεια η απόλυτη συνέχεια της συνάρτησης Lyapunov V , όπως αυτό αποδείχτηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Λήμμα 5.13. Η συνάρτηση $V_0 = \frac{1}{2} \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right)^T \mathcal{L}(t_\ell^+) \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right)$ είναι φραγμένη για κατάλληλη σταθερά κ και αρκετά μεγάλο χρόνο μεταξύ των εναλλαγών τοπολογίας.

Απόδειξη. Για κάθε $t \in [t_\ell^+, t_{\ell+1}^-)$ ισχύει η σχέση:

$$\frac{d(V_0)}{dt} \leq -a_1 V_0 + a_2 \quad (5.34)$$

και επιπλέον ισχύει ότι:

$$V_0(t_\ell^+) \leq \kappa V_0(t_\ell^-). \quad (5.35)$$

Επομένως πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με $e^{a_1 t}$ και φέρνοντας τα πάντα στο αριστερό μέρος προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} [V_0 e^{a_1 t} - \frac{a_2}{a_1} (e^{a_1 t} - 1)] \leq 0. \quad (5.36)$$

Ολοκληρώνοντας στο $[t_\ell^+, t]$ προκύπτει ότι για $t \in [t_\ell^+, t_{\ell+1}^-)$:

$$V_0(t) e^{a_1 t} - \frac{a_2}{a_1} e^{a_1 t} \leq V_0(t_\ell^+) e^{a_1 t_\ell} - \frac{a_2}{a_1} e^{a_1 t_\ell} \quad (5.37)$$

επομένως, για $t = t_{\ell+1}^-$ ισχύει ότι:

$$V_0(t_{\ell+1}^-) e^{a_1 t_{\ell+1}^-} - \frac{a_2}{a_1} e^{a_1 t_{\ell+1}^-} \leq V_0(t_\ell^+) e^{a_1 t_\ell} - \frac{a_2}{a_1} e^{a_1 t_\ell} \leq \kappa V_0(t_\ell^-) e^{a_1 t_\ell} - \frac{a_2}{a_1} e^{a_1 t_\ell} \quad (5.38)$$

άρα:

$$V_0(t_{\ell+1}^-)e^{a_1 t_{\ell+1}} \leq \frac{a_2}{a_1}(e^{a_1 t_{\ell+1}} - e^{a_1 t_\ell}) + \kappa V_0(t_\ell^-)e^{a_1 t_\ell} \quad (5.39)$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα (5.37) συνεχώς στον όρο που εμφανίζεται η V_0 στο δεξί μέλος προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} V_0(t_{\ell+1}^-)e^{a_1 t_{\ell+1}} &\leq \frac{a_2}{a_1}(e^{a_1 t_{\ell+1}} - e^{a_1 t_\ell}) + \frac{a_2}{a_1}\kappa(e^{a_1 t_\ell} - e^{a_1 t_{\ell-1}}) \\ &\quad + \dots + \frac{a_2}{a_1}\kappa^\ell(e^{a_1 t_1} - e^{a_1 t_0}) + \kappa^{\ell+1}V_0(t_0^-)e^{a_1 t_0} \end{aligned} \quad (5.40)$$

επομένως:

$$\begin{aligned} V_0(t_{\ell+1}^-) &\leq \frac{a_2}{a_1}(1 - e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_\ell)}) + \frac{a_2}{a_1}\kappa(e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_\ell)} - e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_{\ell-1})}) \\ &\quad + \dots + \frac{a_2}{a_1}\kappa^\ell(e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_1)} - e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_0)}) + \kappa^{\ell+1}V_0(t_0^-)e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_0)} \end{aligned} \quad (5.41)$$

άρα:

$$\begin{aligned} V_0(t_{\ell+1}^-) &\leq \frac{a_2}{a_1} + (\kappa - 1)\frac{a_2}{a_1}e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_\ell)} + \kappa(\kappa - 1)\frac{a_2}{a_1}e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_{\ell-1})} \\ &\quad + \dots + \kappa^{\ell-1}(\kappa - 1)\frac{a_2}{a_1}e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_1)} + e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_0)} \left[\kappa^{\ell+1}V_0(t_0^-) - \frac{a_2}{a_1}\kappa^\ell \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

Έστω τ μικρότερο από τον χρόνο μεταξύ δύο εναλλαγών τοπολογίας, δηλαδή $\tau \leq t_{\ell+1} - t_\ell$, τότε:

$$e^{-a_1(t_{\ell+1}-t_{\ell+1-j})} \leq e^{-j a_1 \tau}, \quad (j = 1, 2, \dots, \ell + 1) \quad (5.43)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} V_0(t_{\ell+1}^-) &\leq \frac{a_2}{a_1} + \frac{(\kappa - 1)a_2}{\kappa a_1}\kappa e^{-a_1 \tau} + \frac{(\kappa - 1)a_2}{\kappa a_1}\kappa^2 e^{-2a_1 \tau} \\ &\quad + \dots + \frac{(\kappa - 1)a_2}{\kappa a_1}\kappa^\ell e^{-\ell a_1 \tau} + \kappa^{\ell+1}e^{-(\ell+1)a_1 \tau}V_0(t_0^-) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Για $a = \kappa e^{-a_1 \tau} < 1$ προκύπτει:

$$V_0(t_{\ell+1}^-) \leq \frac{a_2}{a_1} + \frac{(\kappa - 1)a_2}{\kappa a_1}[a + a^2 + \dots + a^\ell] + \kappa^{\ell+1}e^{-(\ell+1)a_1 \tau}V_0(t_0^-) \quad (5.45)$$

άρα:

$$V_0(t_{\ell+1}^-) \leq \frac{a_2}{a_1} + \frac{(\kappa - 1)a_2}{\kappa a_1} \frac{a}{1 - a} + \kappa^{\ell+1}e^{-(\ell+1)a_1 \tau}V_0(t_0^-) \quad (5.46)$$

Επομένως αν $\kappa e^{-a_1 \tau} < 1$ τότε για $\ell \rightarrow \infty$ ισχύει ότι $\kappa^{\ell+1}e^{-(\ell+1)a_1 \tau} \rightarrow 0$ και η $V_0(t_\ell^-)$ παραμένει φραγμένη παρά τις αλλαγές τοπολογίας.

Από τις (5.37), (5.35) προκύπτει ότι για $t \in [t_\ell^+, t_{\ell+1})$:

$$V_0(t) \leq \frac{a_2}{a_1} \left(1 - e^{-a_1(t-t_\ell)} \right) + \kappa V_0(t_\ell^+)e^{-a_1(t-t_\ell)} \quad (5.47)$$

και συνεπώς η V_0 είναι παντού φραγμένη. \square

5.5 Απόδειξη συμφωνίας για εναλλασσόμενη τοπολογία

Η προηγούμενη ανάλυση έχει στρώσει το έδαφος για την απόδειξη συμφωνίας του δικτύου με εναλλασσόμενη τοπολογία.

Θεώρημα 5.7. Το σύστημα (5.1) με εναλλασσόμενη τοπολογία δικτύου, για συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο σε κάθε διαφορετική τοπολογία, φτάνει σε συμφωνία με χρήση του κατανομημένου συνεχούς ελέγχου (5.2),(5.3), για κατάλληλο β .

Απόδειξη. Όπως έχει αναφερθεί:

$$\dot{V}(x_{ag}, t) \leq^{a.e.} -W(\xi_{ag}(t)) \quad (5.48)$$

Κατά συνέπεια, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq^{a.e.} -\frac{2K_p}{\min_{\ell}(\lambda_{\min}(\mathcal{L}_0))} \frac{1}{2} \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right)^T \mathcal{L} \left(\dot{x} + \frac{1}{T}x \right) \\ &\quad - \frac{\frac{\beta}{T^2} - \max | \frac{d_i}{T^2} - \ddot{d}_i |}{\frac{\beta}{T} + \max | \dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i |} \sum_{i \in V} |\xi_i| \left(\frac{\beta}{T} - \text{sgn}(\xi_i)(\dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i) \right) \\ &\leq^{a.e.} -\min \left\{ \frac{2K_p}{\min_{\ell}(\lambda_{\min}(\mathcal{L}_0))}, \frac{\frac{\beta}{T^2} - \max | \frac{d_i}{T^2} - \ddot{d}_i |}{\frac{\beta}{T} + \max | \dot{d}_i + \frac{1}{T}d_i |} \right\} V = -\lambda V \end{aligned} \quad (5.49)$$

Άρα $\dot{V} + \lambda V \leq^{a.e.} 0$ και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με την εκθετική συνάρτηση προκύπτει ότι $\dot{V}e^{\lambda t} + \lambda V e^{\lambda t} \leq^{a.e.} 0$, συνεπώς $\frac{d}{dt}[Ve^{\lambda t}] \leq^{a.e.} 0$.

Ανάμεσα σε δύο στιγμές στις οποίες γίνεται αλλαγή τοπολογίας, t_{ℓ}^+ και $t_{\ell+1}^-$ ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dt}[Ve^{\lambda t}] \leq 0, \forall t \in [t_{\ell}^+, t_{\ell+1}^-] \quad (5.50)$$

Ολοκληρώνοντας από t ως t_{ℓ} , $t \in [t_{\ell}^+, t_{\ell+1}^-]$, όπου η τοπολογία είναι σταθερή, προκύπτει:

$$V(t)e^{\lambda t} \leq V(t_{\ell}^+)e^{\lambda(t_{\ell}^+ - t)} \quad (5.51)$$

Άρα για $t = t_{\ell+1}^-$:

$$V(t_{\ell+1}^-) \leq V(t_{\ell}^+)e^{-\lambda(t_{\ell+1}^- - t_{\ell}^+)} \quad (5.52)$$

Από το Λήμμα 4.8 προκύπτει ότι: $V(t_{\ell+1}^+) \leq \kappa V(t_{\ell+1}^-)$. Κατά συνέπεια:

$$V(t_{\ell+1}^+) \leq \kappa e^{-\lambda(t_{\ell+1} - t_{\ell})} V(t_{\ell}^-) \quad (5.53)$$

$$\leq \kappa e^{-\lambda\tau} V(t_{\ell}^-) \quad (5.54)$$

όπου $\tau \leq t_{\ell+1} - t_{\ell}$ κάτω φράγμα χρόνου αλλαγής τοπολογίας. Έστω $\gamma = \kappa e^{-\lambda\tau}$. Για κατάλληλη επιλογή παραμέτρων, ώστε $0 < \gamma < 1$, αφού για το σύστημα ισχύει:

$$V(t_{\ell+1}^+) \leq \gamma^{\ell} V(t_{\ell}^-) \quad (5.55)$$

προκύπτει ότι:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} V(t_{\ell+1}^+) = 0 \quad (5.56)$$

Αφού αποδείχτηκε ότι $V(t) \leq V(t_{\ell}^+)e^{-\lambda(t-t_{\ell})} \forall t \in (t_{\ell}, t_{\ell+1})$ και το παραπάνω όριο συγκλίνει στο μηδέν, προκύπτει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$. Από αυτό το αποτέλεσμα και λόγω της μορφής της συνάρτησης Lyapunov, για κατάλληλο κέρδος β το οποίο ξεπερνά τους όρους των διαταραχών προκύπτει ότι $\xi \rightarrow 0$. Από το Λήμμα 4.9 απορρέει η επίτευξη της συμφωνίας. \square

5.5.1 Γενίκευση της συμφωνίας σε ανώτερες διαστάσεις

Σε αυτό το σημείο είναι ουσιώδες να αναφερθεί ότι τα παραπάνω αποτελέσματα, και για σταθερή και για εναλλασσόμενη τοπολογία, ισχύουν και σε παραπάνω διαστάσεις. Δηλαδή το διάνυσμα κατάστασης, για κάθε πράκτορα, μπορεί να μην είναι μονοδιάστατο, όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ανάλυση, αλλά να έχει m διαστάσεις:

$$\dot{x}_i = u_i + d_i, \quad i \in V \quad (5.57)$$

όπου $x_i \in \mathbb{R}^m$, δηλαδή $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m})$, $\forall i \in V$, όμοια $u_i \in \mathbb{R}^m$ άρα $u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,m}) \forall i \in V$ όπου το κάθε $u_{i,j}, i \in V, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ δίνεται κατά τις εξισώσεις (5.2), (5.3), (5.4). Τέλος, και οι διαταραχές έχουν m διαστάσεις, δηλαδή $d_i \in \mathbb{R}^m$, $d_i = (d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,m})$ με κάθε $d_{i,j}, \forall i \in V, \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$ να είναι φραγμένο με φραγμένες παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης. Η επέκταση αυτή ισχύει, αφού το σύστημα είναι αποσυζευγμένο και η κάθε συνιστώσα του κάθε πράκτορα ελέγχεται ξεχωριστά. Δηλαδή, στην κάθε επιμέρους διάσταση, η συμφωνία επιτυγχάνεται ακριβώς όπως στην παρούσα ανάλυση. Επομένως και το m -διάστατο σύστημα οδηγείται σε συμφωνία, αφού κάθε διάστασή του οδηγείται σε συμφωνία ξεχωριστά.

Κεφάλαιο 6

Προσομοίωση σε περιβάλλον Matlab-Simulink

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει παρουσίαση της προσομοίωσης πολυπρακτορικών δικτύων με εφαρμογή του συνεχούς και πλήρως κατανεμημένου ελέγχου που αναλύθηκε στα προηγούμενα Κεφάλαια. Σκοπός της προσομοίωσης είναι η επίδειξη λειτουργίας του προτεινόμενου ελέγχου, για πολυπρακτορικά δίκτυα με σταθερή και εναλλασσόμενη τοπολογία. Η προσομοίωση έγινε για τρία διαφορετικά δίκτυα. Τα δίκτυα σε κάθε περίπτωση περιγράφονται από συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο. Αρχικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για διδιάστατο σύστημα με οκτώ πράκτορες για σταθερή τοπολογία δικτύου και στη συνέχεια δύο προσομοιώσεις για εναλλασσόμενη τοπολογία δικτύου τεσσάρων πρακτόρων, η πρώτη σε μία διάσταση και η άλλη σε δύο.

6.1 Οργάνωση προσομοίωσης

Οι προσομοιώσεις έγιναν με την χρήση του περιβάλλοντος προσομοίωσης Simulink, στο οποίο κατασκευάστηκε το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (4.1),(4.2),(4.3) και (4.4) για διαφορετικές τοπολογίες δικτύου.

Αρχικά προσομοιώθηκε δίκτυο με σταθερή τοπολογία, συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο, με οκτώ πράκτορες που ακολουθούν την δυναμική του απλού ολοκληρωτή με διαταραχές, σε δύο διαστάσεις. Τα κέρδη ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν είναι $K_p = 4$, $\beta = 120$ και $T = 1$. Οι διαταραχές υλοποιήθηκαν ως αθροίσματα ημιτόνων με διαφορετικά πλάτη και συχνότητες. Οι αρχικές τιμές των καταστάσεων των πρακτόρων είναι:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 & -2 & 1 & -3.5 & -1 & 3.5 \end{bmatrix}^T$$

και

$$y_0 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & 1 & 2 & -1 & 3.5 & -3.5 \end{bmatrix}^T$$

Η Λαπλασιανή που χρησιμοποιήθηκε είναι:

$$L = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, προσομοιώθηκε δίκτυο με εναλλασσόμενη τοπολογία, συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο για κάθε τοπολογία, με τέσσερις πράκτορες που ακολουθούν την δυναμική του απλού ολοκληρωτή με διαταραχές, σε μία διάσταση. Τα κέρδη ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν είναι $K_p = 4$, $\beta = 20$ και $T = 1$. Οι διαταραχές υλοποιήθηκαν ως αθροίσματα ημιτόνων και σταθερού όρου με διαφορετικά πλάτη και συχνότητες. Η αρχική τιμή του διανύσματος κατάστασης των πρακτόρων είναι:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1.25 & 0.5 \end{bmatrix}^T$$

Οι διαφορετικές Λαπλασιανές που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

και

$$L_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τέλος, προσομοιώθηκε δίκτυο με εναλλασσόμενη τοπολογία, συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο για κάθε τοπολογία, με τέσσερις πράκτορες που ακολουθούν την δυναμική του απλού ολοκληρωτή με διαταραχές, σε δύο διαστάσεις. Τα κέρδη ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν είναι $K_p = 3$, $\beta = 3$ και $T = 1$. Οι διαταραχές υλοποιήθηκαν ως αθροίσματα ημιτόνων με διαφορετικά πλάτη και συχνότητες. Οι αρχικές τιμές των καταστάσεων των πρακτόρων είναι:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1.25 & 0.5 \end{bmatrix}^T$$

και

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1.25 & 0.5 \end{bmatrix}^T$$

Οι διαφορετικές Λαπλασιανές που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

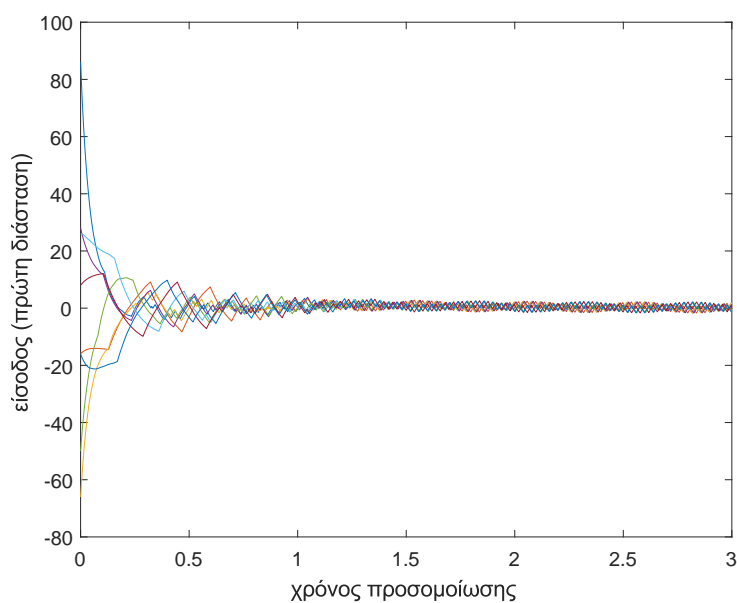
και

$$L_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

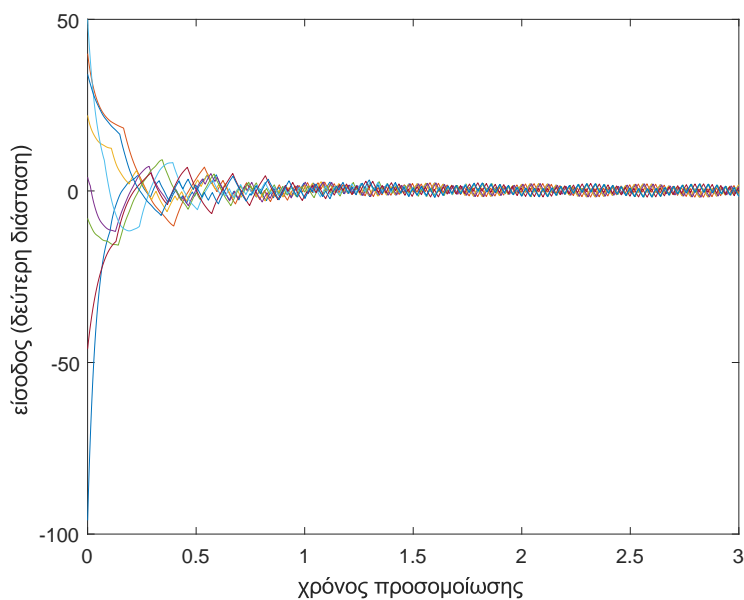
6.2 Αποτελέσματα της προσομοίωσης

Προσομοίωση για δίκτυο οκτώ πρακτόρων, με σταθερή τοπολογία σε δύο διαστάσεις

Εδώ παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης δικτύου οκτώ πρακτόρων με σταθερή τοπολογία, συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο σε δύο διαστάσεις. Αρχικά παρουσιάζεται γραφική παράσταση που περιέχει τις εισόδους του συστήματος και για τις δύο διαστάσεις

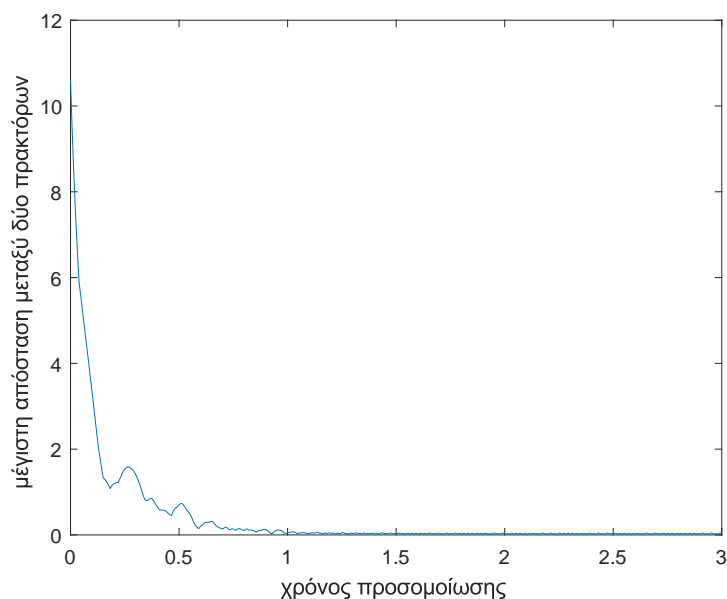


Σχήμα 6.1: Είσοδος (πρώτη διάσταση, σταθερή τοπολογία).



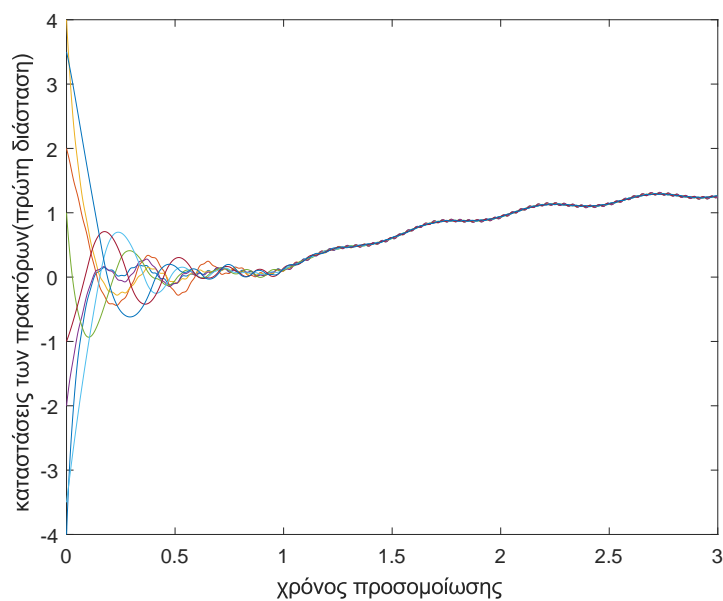
Σχήμα 6.2: Είσοδος (δεύτερη διάσταση, σταθερή τοπολογία).

Στις επόμενες γραφικές παραστάσεις φαίνεται η ελάχιστη και μέγιστη απόσταση μεταξύ των πρακτόρων.

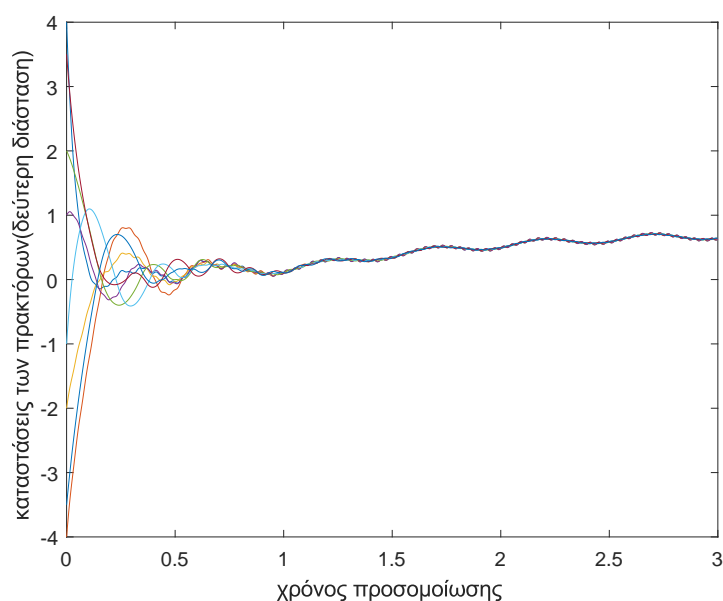


Σχήμα 6.3: Μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο πρακτόρων (δύο διαστάσεις, σταθερή τοπολογία).

Παρατηρείται ότι η απόσταση των πρακτόρων οδηγείται στο μηδέν μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, το οποίο είναι και το ζητούμενο για την επιτυχία της συμφωνίας. Στη συνέχεια παρατίθενται γραφικές παραστάσεις, που δείχνουν τις καταστάσεις των οκτώ πρακτόρων συναρτήσει του χρόνου και για τις δύο διαστάσεις.



Σχήμα 6.4: Συμπεριφορά πρώτης διάστασης των πρακτόρων (δύο διαστάσεις, σταθερή τοπολογία).

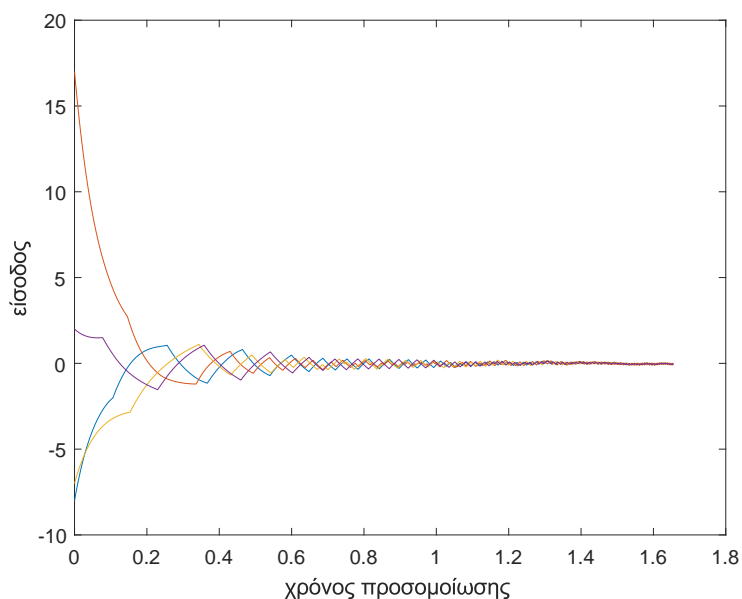


Σχήμα 6.5: Συμπεριφορά δεύτερης διάστασης των πρακτόρων (δύο διαστάσεις, σταθερή τοπολογία).

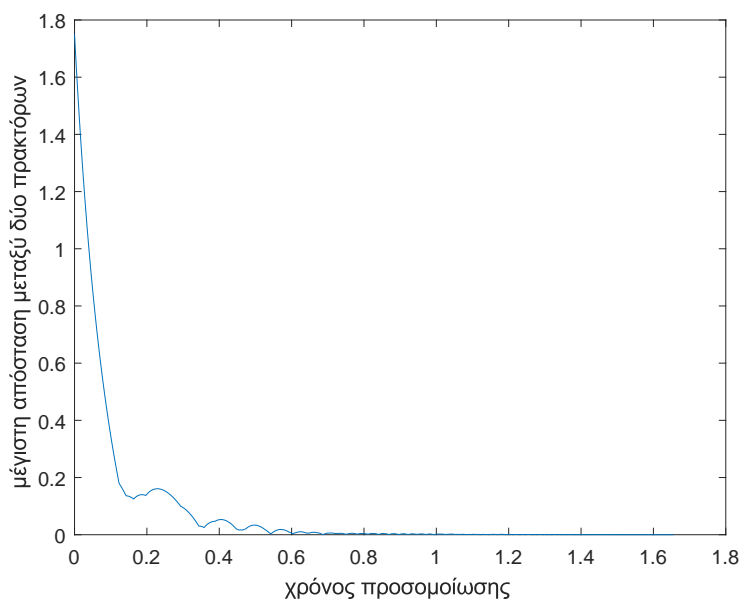
Είναι εμφανής η επίτευξη της συμφωνίας. Ενδιαφέρουσα είναι η συμπεριφορά του συστήματος μετά την επιτυχία της συμφωνίας, η οποία φαίνεται να ακολουθεί κάποια μορφή που σχετίζεται με τις διαταραχές. Αυτό όμως είναι πέρα από τον σκοπό της διπλωματικής.

Προσομοίωση για δίκτυο τεσσάρων πρακτόρων, με εναλλασσόμενη τοπολογία σε μία διάσταση

Εδώ παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης δικτύου τεσσάρων πρακτόρων με εναλλασσόμενη τοπολογία σε μία διάσταση. Κάθε γράφος που αντιστοιχεί σε διαφορετική τοπολογία είναι συνεκτικός και μη κατευθυνόμενος. Αρχικά παρουσιάζονται γραφικές παραστάσεις που δείχνουν την είσοδο, καθώς και τη μεγαλύτερη και μέγιστη απόσταση μεταξύ των πρακτόρων.

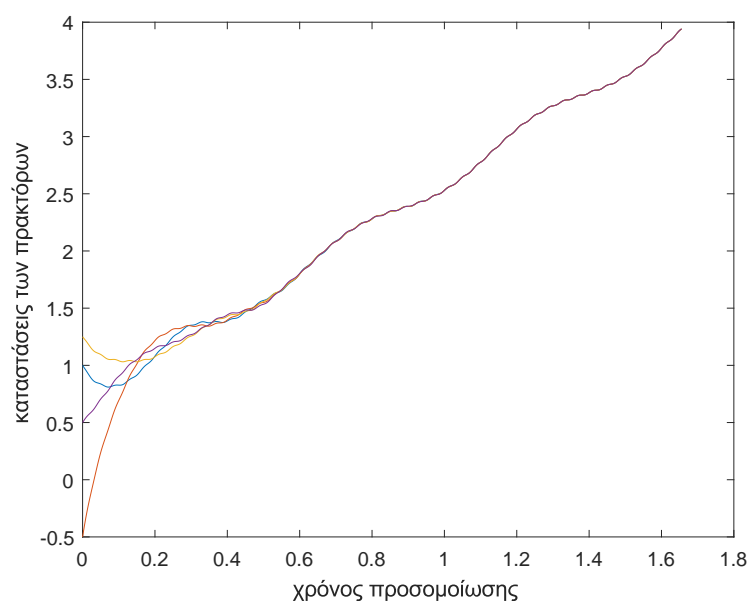


Σχήμα 6.6: Είσοδος (μία διάσταση, εναλλασσόμενη τοπολογία).



Σχήμα 6.7: Μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο πρακτόρων (μία διάσταση, εναλλασσόμενη τοπολογία).

Παρατηρείται ότι η απόσταση των πρακτόρων οδηγείται στο μηδέν μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, το οποίο είναι και το ζητούμενο για την επιτυχία της συμφωνίας. Στη συνέχεια παρατίθενται γραφικές παραστάσεις, που δείχνουν τις καταστάσεις των οκτώ πρακτόρων συναρτήσει του χρόνου.

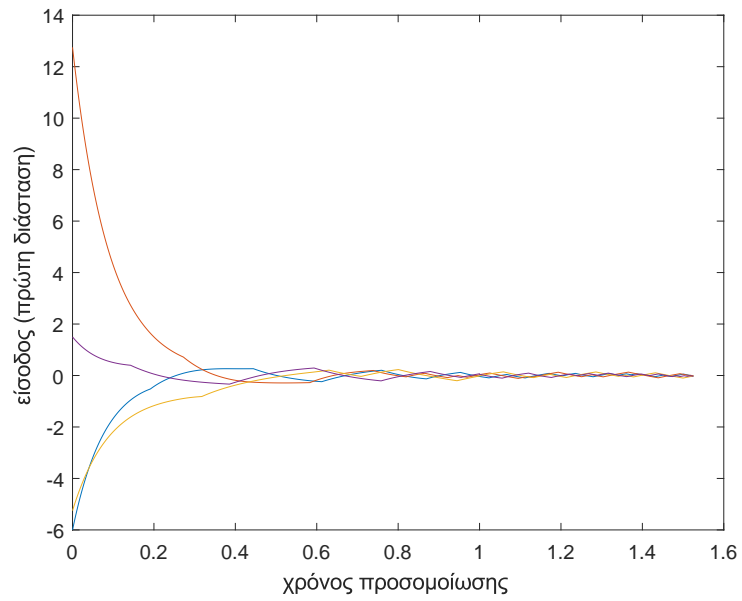


Σχήμα 6.8: Συμπεριφορά των πρακτόρων (μία διάσταση, εναλλασσόμενη τοπολογία).

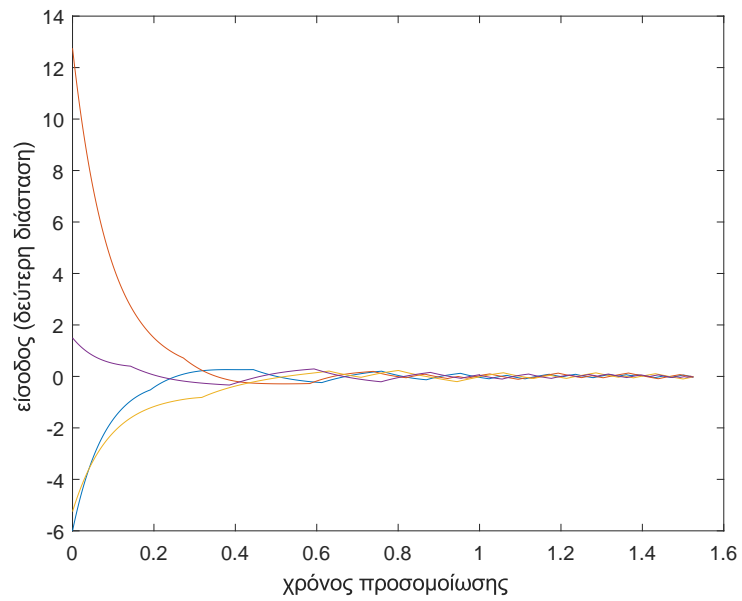
Παρατηρείται επίτευξη της συμφωνίας μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, αφού οι πράκτορες ακολουθούν την ίδια τροχιά. Το σύστημα, μετά την επιτυχία της συμφωνίας, φαίνεται να ακολουθεί κάποια μορφή που σχετίζεται με τις διαταραχές.

Προσομοίωση για δίκτυο τεσσάρων πρακτόρων, με εναλλασσόμενη τοπολογία σε δύο διαστάσεις

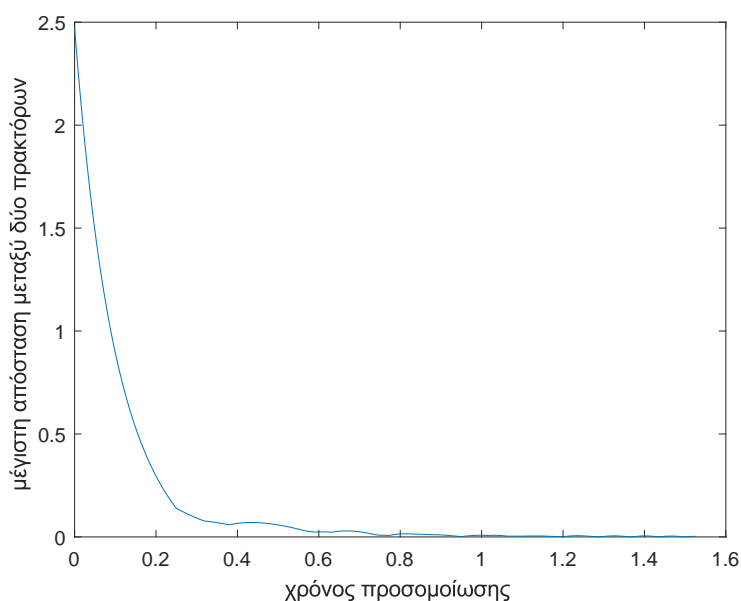
Εδώ παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης δικτύου τεσσάρων πρακτόρων με εναλλασσόμενη τοπολογία. Κάθε γράφος που αντιστοιχεί σε διαφορετική τοπολογία είναι συνεκτικός και μη κατευθυνόμενος. Αρχικά παρουσιάζονται γραφικές παραστάσεις που δείχνουν τις εισόδους, καθώς και την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση μεταξύ των πρακτόρων.



Σχήμα 6.9: Είσοδος (πρώτη διάσταση, εναλλασσόμενη τοπολογία).

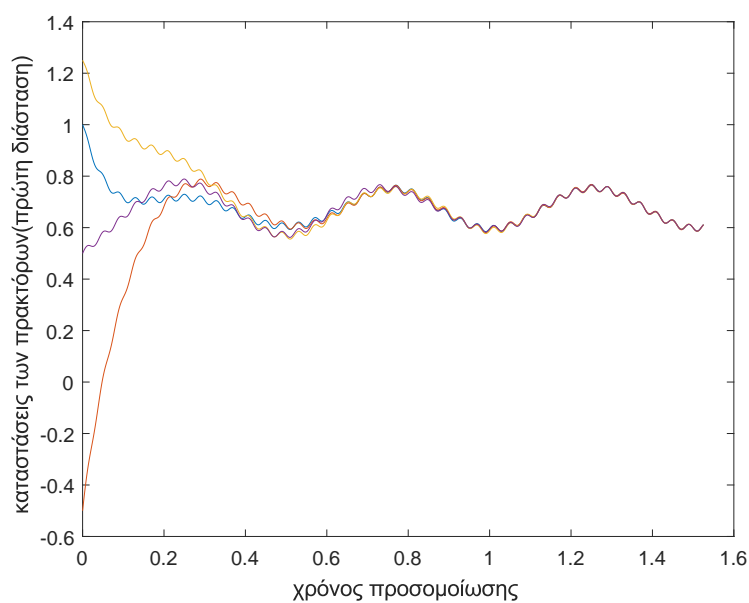


Σχήμα 6.10: Είσοδος (δεύτερη διάσταση, εναλλασσόμενη τοπολογία).

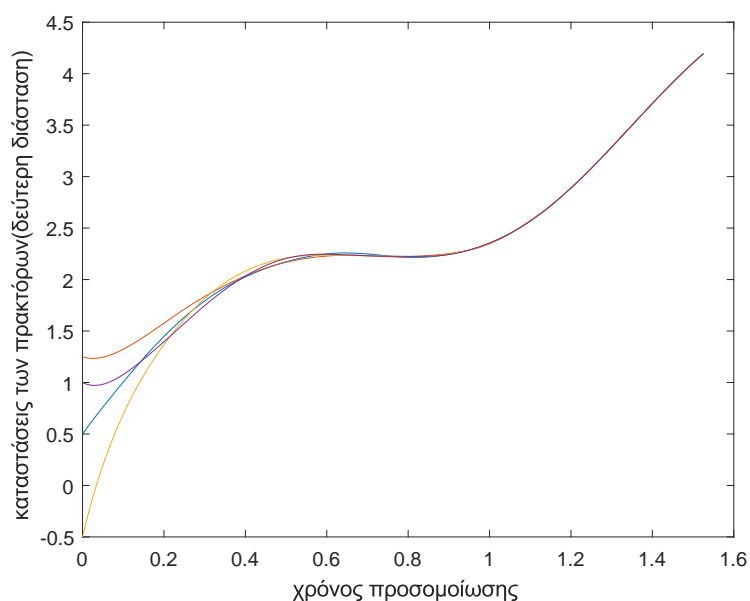


Σχήμα 6.11: Μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο πρακτόρων (δύο διαστάσεις, εναλλασσόμενη τοπολογία).

Παρατηρείται ότι η απόσταση των πρακτόρων οδηγείται στο μηδέν μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, το οποίο είναι και το ζητούμενο για την επιτυχία της συμφωνίας. Στη συνέχεια παρατίθενται γραφικές παραστάσεις, που δείχνουν τις καταστάσεις των οκτώ πρακτόρων συναρτήσει του χρόνου και για τις δύο διαστάσεις.



Σχήμα 6.12: Συμπεριφορά πρώτης διάστασης των πρακτόρων (δύο διαστάσεις, εναλλασσόμενη τοπολογία).



Σχήμα 6.13: Συμπεριφορά δευτέρας διάστασης των πρακτόρων (δύο διαστάσεις, εναλλασσόμενη τοπολογία).

Παρόμοια με τις προηγούμενες προσομοιώσεις, παρατηρείται επίτευξη συμφωνίας και ότι το σύστημα ακολουθεί τροχιά που η μορφή της μοιάζει με αυτή των διαταραχών.

6.3 Συμπεράσματα της προσομοίωσης

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι τα αναμενόμενα σύμφωνα με τις αποδείξεις των προηγούμενων Κεφαλαίων. Είναι εμφανής και στις τρεις περιπτώσεις η επίτευξη ασυμπτωτικής συμφωνίας, όπως προβλέπεται στο προηγούμενο Κεφάλαιο, και για σταθερή και για εναλλασσόμενη τοπολογία. Επιπλέον παρατηρείται ότι το σύστημα δεν καταλήγει σε κάποια τιμή, αλλά ακολουθεί τροχιά που μάλλον σχετίζεται με το είδος των διαταραχών. Μάλιστα, στην προσομοίωση που στις διαταραχές υπάρχει σταθερός όρος, παρατηρείται ότι οι καταστάσεις των πρακτόρων αυξάνονται περισσότερο από ότι στις άλλες δύο περιπτώσεις, κάτι που ίσως οφείλεται στην ύπαρξη του όρου αυτού. Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι ερμηνεύσιμο με βάση την προηγούμενη ανάλυση, αφού η συμπεριφορά των καταστάσεων των πρακτόρων μετά την επίτευξη συμφωνίας ξεφεύγει από τον σκοπό της παρούσας διπλωματικής.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

Σε αυτό το κεφάλαιο συνοψίζονται τα βασικά αποτελέσματα της διπλωματικής και γίνονται προτάσεις για επέκτασή της.

7.1 Σύνοψη και συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική, αφού αναπτύχθηκε το κατάλληλο μαθηματικό πρότυπο για την υποστήριξη των αποδείξεων, αποδείχτηκε σύγκλιση συνεχούς και πλήρως καταναμημένου ελέγχου για την επίλυση του προβλήματος της συμφωνίας σε πολυπρακτορικά δίκτυα με διαταραχές, για σταθερή και εναλλασσόμενη τοπολογία. Αρχικά αποδείχτηκε ότι ο συνεχής έλεγχος που προτάθηκε οδηγεί σε ασυμπτωτική επίλυση του προβλήματος της συμφωνίας σε πολυπρακτορικό δίκτυο με σταθερή τοπολογία και συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφο. Στη συνέχεια, αποδείχτηκε επίλυση του προβλήματος της συμφωνίας για πολυπρακτορικό δίκτυο με εναλλασσόμενη τοπολογία, σε συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφο. Τέλος, έγινε προσομοίωση για την επίδειξη της λειτουργίας του αλγορίθμου για σταθερή και εναλλασσόμενη τοπολογία γράφου για δίκτυα με διαφορετικό αριθμό πρακτόρων, διαφορετικά κέρδη ελέγχου και διαταραχές.

7.2 Μελλοντικές επεκτάσεις

Σαν συνέχεια της διπλωματικής θα μπορούσε να γίνει επέκταση της εφαρμογής του προτεινόμενου ελέγχου στο πρόβλημα της συμφωνίας για πολυπρακτορικά δίκτυα με άγνωστες διαταραχές, όπου οι πράκτορες ακολουθούν πιο πολύπλοκες δυναμικές, όπως διπλών ολοκληρωτών. Επιπλέον, θα μπορούσε να γίνει προσπάθεια επέκτασης της παρούσας διπλωματικής για πολυπρακτορικά δίκτυα, όπου ο γράφος δεν είναι συνεκτικός ή είναι κατευθυνόμενος. Ακόμα, θα ήταν ίσως χρήσιμη μια μελέτη σχετικά με την συμπεριφορά του παρόντος συστήματος, μετά την επίτευξη συμφωνίας και συσχέτισή της με τις διαταραχές, μιας και υπάρχουν ενδείξεις από την προσομοίωση προς αυτή την κατεύθυνση.

Βιβλιογραφία

- [1] J. A. Moreno and M. Osorio . A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers, *Proceeding of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, pp. 2856-2861, Dec. 9-11, 2008.
- [2] J. A. Moreno A Lyapunov approach to output feedback control using second-order sliding modes, *IMA Journal of Mathematical Control and Information Advance Access*, Jan. 2, 2012.
- [3] J. A. Moreno and M. Osorio Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm, *IEEE Transactions on Automatic Control* , vol. 57, no. 4, pp. 1035-1040, April 2012.
- [4] N. Fischer, R. Kamalapurkar, and W. E. Dixon LaSalle-Yoshizawa Corollaries for Nonsmooth Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 9, pp. 2333-2338, Sep. 2013.
- [5] C. Swartz. *Measure, integration and function spaces*. World Scientific, 1994.
- [6] J. Cortes Discontinuous Dynamical Systems, *IEEE Control Systems Magazine*, pp.36-73, June 2008.
- [7] B. E. Paden and S. S. Sastry, A Calculus for Computing Filippov's Differential Inclusion with Application to the Variable Structure Control of Robot Manipulators, In *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, col. CAS-34, no. 1, pp. 73-82, Jan. 1987.
- [8] D. Shevitz and B. Paden Lyapunov Stability Theory of Nonsmooth Systems, *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 39, no. 9, pp. 1910-1914, Sep. 1994.
- [9] B. Xian, D. M. Dawson, M. S. de Queiroz, and J. Chen, 'A Continuous Asymptotic Tracking Control Strategy for Uncertain Nonlinear Systems,' *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 49, no. 7, pp. 1206-1211, July 2004.
- [10] P. M. Patre, W. MacKunis, C. Makkar, and W. E. Dixon, 'Asymptotic Tracking for Systems With Structured and Unstructured Uncertainties,' *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, vol. 16, no. 2, pp. 373-379, March 2008.

-
- [11] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, 'Consensus Problems in Networks of Agents With Switching Topology and Time-Delays,' *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533, Sep. 2004.
- [12] R. Olfati-Saber, J. Alex Fax, and R. M. Murray, 'Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems,' *Proceeding of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215-233, Jan. 2007.
- [13] A. S. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers , vol. 1, Deterministic Techniques*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Ltd., 2008.
- [14] M. Mesbahi and M. Egerstedt *Graph theoretic Methods in Multiagent Networks* *Princeton*, University Press, 2010.

