



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Δευτεραίου Πολυξένη

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΗΣ
ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕ
ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΩΝ

Επιβλέπων Καθηγητής : Κωνσταντίνος Σιέττος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2017

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς, πρώτη από όλους την οικογένειά μου, για τη διακριτική αλλά συνάμα αμέριστη στήριξή της σε όλη την πορεία των σπουδών μου. Επίσης, τους συντρόφους μου, που με τον ανιδιοτελή τους αγώνα και την παλικαρίσια στάση ζωής, δεν έπαψαν ποτέ να με εμπνέουν και να μου δίνουν δύναμη να ξεπερνώ κάθε εμπόδιο. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Κώστα Σιέττο για τη συνεργασία μας καθώς και τον Κώστα Σπηλιώτη για τη συμβολή του στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	5
1. Εισαγωγή.....	7
2. Εισαγωγικές έννοιες στη Θεωρία Διακλάδωσης.....	10
2.1 Βασικές έννοιες.....	10
2.2 Εύρεση λύσεων :Απλή προσομοίωση στο χρόνο και επαναληπτικές μέθοδοι.....	13
2.3 Ευστάθεια λύσεων.....	15
2.4 Αναλλοίωτες πολλαπλότητες.....	16
2.5 Διακλαδώσεις και Ευστάθεια Λύσεων Ισορροπίας σε μια διάσταση.....	18
2.6 Διαχωρισμός σημείων ισορροπίας στις καμπύλες λύσεων.....	19
2.7 Ιδιάζοντα σημεία	20
2.8 Κριτήρια τοπικής (κατά συνθήκη) ευστάθειας.....	20
2.9 Θεώρημα παραγοντοποίησης σε μια διάσταση.....	22
2.10 Κανονικές μορφές διακλαδώσεων σε μια διάσταση.....	23
2.11 Θεωρία ατελειών και σπάσιμο συμμετρίας.....	28
2.12 Δυναμική συστημάτων σε δύο διαστάσεις και ευστάθεια λύσεων.....	32
2.13 Περιοδικές Ταλαντώσεις. Διακλάδωση οριακών κύκλων από λύσεις ισορροπίας σε δύο διαστάσεις.....	34
3. Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων με χρήση αριθμητικής μεθόδου-επαναληπτικού αλγορίθμου	40
3.1 Επαναληπτική μέθοδος Newton.....	40
3.2 Μέθοδος συνέχισης μήκους τόξου (arclength continuation method)	42
4. Αριθμητική συνέχιση με χρήση CL_MATCONT.....	45
4.1 Αλγόριθμος Αριθμητικής Συνέχισης (numerical continuation algorithm).....	45
4.2 Αριθμητική συνέχιση της λύσης (equilibrium continuation).....	48
5. Παραδείγματα αριθμητικής συνέχισης με χρήση MATCONT.....	50
5.1 Χρήση MATCONT για αριθμητική ολοκλήρωση ΣΔΕ.....	50
5.2 Χρήση MATCONT για ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς μονοπαραμετρικής	

λύσης ισορροπίας (bifurcation analysis of equilibria).....	57
5.3 Οριακά σημεία και σημεία διακλάδωσης στο διακριτοποιημένο πρόβλημα Bratu-Gelfand (Limit and branching points in a discretization of Bratu-Gelfand PDE).....	61
5.4 Το παράδειγμα Brusselator.....	67
6. Μοντέλο του πληθυσμού των εμπόρων- single agent based model.....	73
6.1 Εισαγωγή.....	73
6.2 Το μικροσκοπικό agent based μοντέλο.....	74
6.3 Αλληλεπιδράσεις.....	75
6.4 Δυναμική συμπεριφορά του πληθυσμού.....	76
6.5 Εξίσωση Fokker-Planck.....	77
6.6 Κατάσταση ισορροπίας.....	79
6.7 Ευστάθεια της καμπύλης ισορροπίας.....	80
6.8 Αποτελέσματα προσομοιώσεων- Διαγράμματα διακλάδωσης και ευστάθεια λύσεων.....	81
6.9 Συμπεράσματα.....	89
Βιβλιογραφία.....	90

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια μέθοδος μοντελοποίησης ενός μεγάλου πληθυσμού συμμετεχόντων σε μια χρηματοοικονομική αγορά, όπου κάθε συμμετέχων στην αγορά μοντελοποιείται ως έχοντας μία κατάσταση προτίμησης, επηρεασμένη από συνεχή εισροή εξωτερικών πληροφοριών και την συμπεριφορά των άλλων ατόμων. Τη συστηματική ανάλυση του μικροσκοπικού μοντέλου δεν μπορεί να μας τη δώσει ολοκληρωμένα μια απλή προσομοίωση στον χρόνο (αριθμητική ολοκλήρωση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων στο χρόνο). Σκοπός, λοιπόν, της εργασίας μας ήταν να εξάγουμε από το agent model μία (στην περίπτωσή μας, μη γραμμική μερική διαφορική) εξίσωση που περιγράφει ολόκληρο τον πληθυσμό. Από αυτήν την εξίσωση αντλούμε συμπεράσματα για τη διερεύνηση της συλλογικής συμπεριφοράς των ατόμων, καθώς αυτή επηρεάζεται από μιμητικές αλληλεπιδράσεις. Εντοπίζουμε, για ποιες τιμές της μιμητικής παραμέτρου της διαφορικής εξίσωσης, τα άτομα του πληθυσμού παρουσιάζουν ανεξέλεγκτη συμπεριφορά, καθώς και τους ασταθείς κλάδους ισορροπίας. Βασικό εργαλείο για αυτήν την ανάλυση είναι η θεωρία διακλάδωσης. Επιπλέον, παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα συστημάτων μη γραμμικών συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων (χαοτικό σύστημα Rossler, Bratu, Brusselator), όπου αναλύεται η δυναμική τους συμπεριφοράς χρησιμοποιώντας το λογισμικό αριθμητικής ανάλυσης διακλάδωσης CL_MATCONT. Τέλος, αντλούμε συμπεράσματα για την συμπεριφορά του πληθυσμού, καθώς μεταβάλλεται η μιμητική παράμετρος, μέσω χρονικών προσομοιώσεων του a-m μοντέλου, καθώς και μέσω του διαγράμματος διακλάδωσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης συναρτήσει της παραμέτρου. Επιπρόσθετα, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του a-m μοντέλου με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης της μεθόδου «Ελεύθερης Εξισώσεων», για τις ίδιες τιμές των παραμετρικών σταθερών.

Abstract

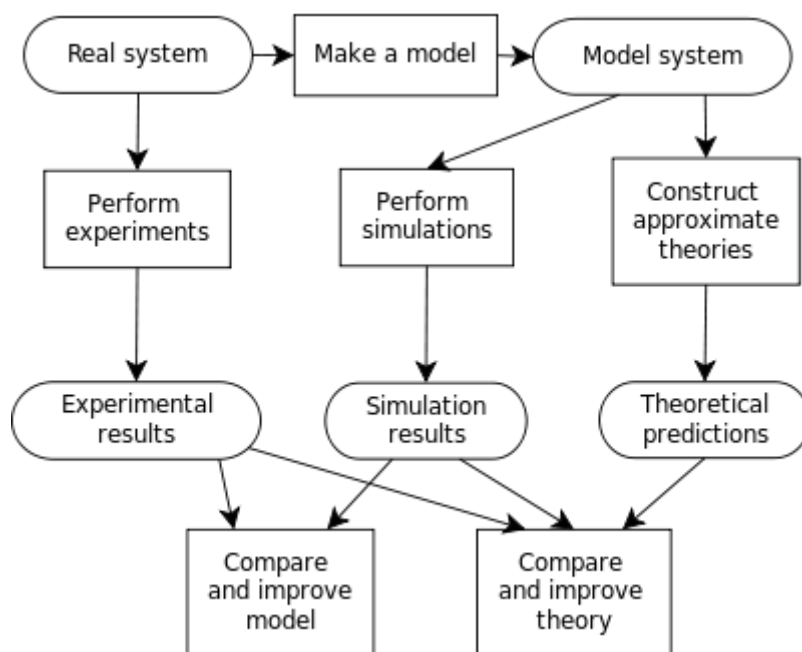
In this present paper, we will try to present a method of modeling a large population of participants in a financial market where each market participant is modeled as having a preference state influenced by a continuous influx of external information and the behavior of other individuals. The systematic analysis of the microscopic model can not be given by a simple simulation over time (numerical integration of a system of differential equations over time). Our aim, therefore, is to extract from the agent model a (non-linear partial differential) equation describing the entire population from which we are drawing out conclusions for the investigation of the collective behavior of individuals as it is affected by mimetic interactions. We find out with which values of the mimetic parameter, people display uncontrolled behavior. Branch theory allows us to make this analysis. In addition, some examples of nonlinear common and partial differential equations (chaotic Rossler system, Bratu, Brusselator system) are presented to analyze their dynamic behavior using the CL_MATCONT numerical branch analysis software. Finally, we draw out conclusions about the behavior of the population as the mimetic parameter changes, through time simulations of the α -m model, as well as through the branch diagram of the partial differential equation depended on the parameter. Additionally, we compare the results of simulation of the α -m model with the results of the simulation of the "Equations Free" method for the same values of the constant parameters.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Υπολογιστική προσομοίωση-Υπολογιστικά μοντέλα

Οι υπολογιστικές προσομοιώσεις αναπαράγουν τη συμπεριφορά ενός συστήματος χρησιμοποιώντας ένα μαθηματικό μοντέλο. Αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μαθηματική μοντελοποίηση πολλών φυσικών συστημάτων στη φυσική (υπολογιστική φυσική), αστροφυσική, κλιματολογία, χημεία και βιολογία, ανθρώπινα συστήματα οικονομίας, ψυχολογία, κοινωνικές επιστήμες και μηχανική. Η προσομοίωση ενός συστήματος αντιπροσωπεύεται ως η λειτουργία του μοντέλου του συστήματος. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διερεύνηση και την απόκτηση νέων γνώσεων σχετικά με τη νέα τεχνολογία και για να εκτιμηθεί η απόδοση συστημάτων πολύ περίπλοκων για αναλυτικές λύσεις [29].



Σχήμα1 Υπολογιστική προσομοίωση
https://en.wikipedia.org/wiki/Computer_simulation

Ένα υπολογιστικό μοντέλο είναι οι αλγόριθμοι και οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για την καταγραφή της συμπεριφοράς ενός συστήματος. Αντίθετα, η υπολογιστική προσομοίωση είναι η πραγματική εκτέλεση του προγράμματος που περιέχει αυτές τις εξισώσεις ή αλγόριθμους. Επομένως, η προσομοίωση είναι η διαδικασία εκτέλεσης ενός μοντέλου. Έτσι κανείς δεν θα "οικοδομήσει μια προσομοίωση". Αντίθετα, κάποιος θα "οικοδομήσει ένα μοντέλο", και στη συνέχεια θα "τρέξει το μοντέλο" ή ισοδύναμα θα "τρέξει μια προσομοίωση".

Τα υπολογιστικά μοντέλα μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με πολλά ανεξάρτητα ζεύγη χαρακτηριστικών, όπως:

Στοχαστικά ή ντετερμινιστικά, μοντέλα σταθερής κατάστασης ή δυναμικής κατάστασης, συνεχή ή διακριτά μοντέλα.

Agent-based model (ABM)

Η μοντελοποίηση ABM είναι μια πολύ ισχυρή τεχνική προσομοίωση η οποία έχει πολλές εφαρμογές τα τελευταία χρόνια , συμπεριλαμβανομένων των εφαρμογών σε ρεαλιστικά χρηματοοικονομικά προβλήματα.

Στην ABM ένα σύστημα μοντελοποιείται ως η συλλογή από αυτόνομες μονάδες, τους αποκαλούμενους *agents* ή αλλιώς άτομα. Κάθε άτομο αξιολογεί μεμονωμένα την κατάστασή του και λαμβάνει αποφάσεις βάσει ενός συνόλου κανόνων. Τα άτομα μπορούν να εκτελέσουν διάφορες συμπεριφορές κατάλληλες για το σύστημα που αντιπροσωπεύουν , για παράδειγμα παραγωγή, κατανάλωση ή πώληση. Οι επαναλαμβανόμενες ανταγωνιστικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ ατόμων είναι ένα χαρακτηριστικό της ABM, το οποίο βασίζεται στη δυνατότητα των υπολογιστών να μελετήσουν τη δυναμική με καθαρά μαθηματικές μεθόδους [9].

Στην απλούστερη περίπτωση , μια ABM αποτελείται από ένα σύστημα ατόμων και τις σχέσεις μεταξύ τους. Ακόμη και ένα απλό μοντέλο μπορεί να παρουσιάσει περίπλοκα πρότυπα συμπεριφοράς [23] και να παρέχει πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τη δυναμική του πραγματικού συστήματος που μιμείται. Επιπλέον, τα άτομα έχουν τη δυνατότητα να εξελίσσονται επιτρέποντας έτσι την εμφάνιση απρόβλεπτων συμπεριφορών. Οι εξελιγμένες ABM ενσωματώνουν μερικές φορές νευρωνικά δίκτυα, εξελικτικούς αλγορίθμους ή άλλες τεχνικές μάθησης που επιτρέπουν την ρεαλιστική εκμάθηση και προσαρμογή.

Έχει αξία να επισημάνουμε πως η ABM μοντελοποίηση συνίσταται στην περιγραφή ενός συστήματος από την οπτική των συστατικών του μονάδων. Ορισμένοι ερευνητές πιστεύουν πως η εναλλακτική λύση στην ABM είναι η παραδοσιακή μοντελοποίηση διαφορικών εξισώσεων. Αυτό όμως δεν ισχύει, καθώς ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων, το καθένα που περιγράφει τη δυναμική μιας από τις συστατικές μονάδες του συστήματος, είναι ένα μοντέλο βασισμένο σε μονάδες. Ένα συνώνυμο της ABM θα μπορούσε να είναι η μικροσκοπική μοντελοποίηση και μια εναλλακτική λύση θα ήταν η μακροσκοπική μοντελοποίηση.

Η μοντελοποίηση ABM είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μονάδων είναι πολύπλοκες, μη γραμμικές, ασυνεχείς ή διακριτές (για παράδειγμα όταν η συμπεριφορά ενός ατόμου μπορεί να μεταβληθεί δραματικά ακόμη και ασυνεχώς από άλλα άτομα). Επομένως, η ABM μπορεί να αποφέρει σημαντικά οφέλη όταν εφαρμόζεται σε ανθρώπινα συστήματα[4].

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο εξαγωγής ενός μοντέλου πληθυσμού μιας χρηματοοικονομικής αγοράς. Στο μοντέλο μας, η συμπεριφορά των ατόμων ως προς την «ενέργεια» της αγοράς και της πώλησης, επηρεάζεται από σταθερή εισροή πληροφοριών – από εξωγενείς πηγές και από τη συμπεριφορά των άλλων εμπόρων- οι οποίες ωθούν τα άτομα να ενεργήσουν. Από την ABM προκύπτει η εξίσωση του πληθυσμού. Η εξίσωση του πληθυσμού χρησιμοποιείται για τη διερεύνηση της συλλογικής συμπεριφοράς με τις μιμητικές αλληλεπιδράσεις. Παρακολουθούμε και μελετάμε τις αιχμηρές μεταβάσεις στο χώρο παραμέτρων, από ένα σταθερό ανεξάρτητο από το χρόνο καθεστώς σε αστάθεια όπου η ζήτηση και η προσφορά αποκλίνουν απότομα.

Το κεφάλαιο 2 που ακολουθεί περιέχει μια εκτενής αναφορά στη θεωρία διακλάδωσης, αναγκαία

γνώση για την κατανόηση της παρούσας εργασίας. Στο κεφάλαιο 3 αναφέρουμε συνοπτικά την αριθμητική μέθοδο Newton-Raphson, στην οποία βασίζεται η μέθοδος συνέχισης μήκους τόξου, η μέθοδος σύγκλισης που χρησιμοποιούμε και αναπαριστούμε το διάγραμμα της λύσης καθώς και το διάγραμμα διακλάδωσης. Στο κεφάλαιο 4 κάνουμε μια σύντομη μαθηματική παράθεση της μεθόδου σύγκλισης στην οποία βασίζεται το λογισμικό αριθμητικής ανάλυσης διακλάδωσης CL_MATCONT [7]. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε ορισμένα παραδείγματα χρήσης του CL_MATCONT σε συστήματα μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (χαοτικό σύστημα Rossler), στην ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς αυτόνομων συστημάτων που εξαρτώνται από μια παράμετρο (εξετάζεται ένα οικολογικό μοντέλο). Επίσης, χρησιμοποιούμε CL_MATCONT για τα προβλήματα Bratu και Brusselator. Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε το μικροσκοπικό μοντέλο που περιγράφει τον πληθυσμό των ατόμων και την εξαγωγή του μακροσκοπικού μοντέλου, στη μορφή μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης σε μια διάσταση. Τέλος, μελετάμε την ευστάθεια της λύσης ισορροπίας, το διάγραμμα διακλαδώσεων και παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγικές έννοιες στη Θεωρία Διακλάδωσης

2.1 Βασικές έννοιες

Με τον όρο δυναμική εννοείται η μεταβολή της κατάστασης ενός συστήματος με τον χρόνο [32]. Θα ασχοληθούμε με την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς μη-γραμμικών συστημάτων του τύπου

$$\frac{dU}{dt} = F(t, \mu, U) \quad (1)$$

Όπου $t \geq 0$ είναι ο χρόνος, $\mu \in \mathbb{R}^p$ είναι το άνωσμα των παραμέτρων του συστήματος και $U \in \mathbb{R}^n$ είναι το άνωσμα των μεταβλητών του συστήματος.

Η εξίσωση $F(t, \mu, U)$ είναι ένας μη γραμμικός τελεστής που μετασχηματίζει μια αρχική συνθήκη $U \in \mathbb{R}^n$ στο ανυσματικό πεδίο ροής (vector field) $\frac{dU}{dt}$.

Για την ανάλυση που θα ακολουθήσει θα υποθέτουμε ότι

$$F = F(U(t)) \quad (2)$$

Όταν η F είναι ανεξάρτητη του χρόνου t το σύστημα εξισώσεων

$$\frac{dU}{dt} = F(\mu, U) \quad (3)$$

,λέγεται αυτόνομο.

Πολλά προβλήματα με σύγχρονο ερευνητικό αλλά και πρακτικό ενδιαφέρον, από περιοχές της Κλασικής Μηχανικής, Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Φυσικών, Βιολογικών και Οικονομικών Επιστημών χαρακτηρίζονται από μη-γραμμικές δυναμικές συμπεριφορές της μορφής (1) ή (3).

Το κύριο χαρακτηριστικό των μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση της δυναμικής συμπεριφοράς αυτών των προβλημάτων είναι η εμφάνιση περίπλοκων δυναμικών, όπως η εμφάνιση και εξαφάνιση λύσεων με αλλαγή της τιμής μιας παραμέτρου, η ύπαρξη πολλαπλών σημείων ισορροπίας, αλλαγές φάσεων ισορροπίας, ταλαντώσεις και χάος.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ όπου $t \in I \subset \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την (1) $\forall t \in I$ τέτοια ώστε

$$\frac{d\phi}{dt} = F(t, \mu, \phi) \quad (4)$$

λέγεται *λύση του συστήματος*

$$\frac{dU}{dt} = F(t, \mu, U) \quad (1).$$

Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας

Αν E είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^{n+1} που περιέχει μια αρχική συνθήκη $(t_0, U(t_0)) \in E$, $F(t, U) \in C(E, \mathbb{R}^n)$ και η $F(t, U)$ είναι τοπικά Lipschitz συνεχής στο U τότε υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών (1).

Ορισμός

Εστω W ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n που περιέχει μια αρχική συνθήκη $U(t_0) \in E$, $F(U) \in C(E)$ και $\varphi(t, U(t_0)) \in E$ η λύση του συστήματος $\frac{dU}{dt} = F(U)$ (3). Τότε $\forall t \in I$, η απεικόνιση $\varphi_t: E \rightarrow E$ που ορίζεται από τη σχέση

$$U(t) = \varphi_t(U(t_0)) = \varphi(t, U(t_0))$$

λέγεται ροή του συστήματος (ή ροή του ανυσματικού πεδίου) της (3).

Δηλαδή είναι ο τελεστής που προσδιορίζει την κατάσταση του συστήματος $U(t)$ την χρονική στιγμή t δεδομένης μιας αρχικής κατάστασης του συστήματος $U(t_0)$ την χρονική στιγμή t_0 .

Η ροή φ_t έχει κάποιες απλές ιδιότητες που απορρέουν από τον ορισμό της:

Η μοναδικότητα των λύσεων εξασφαλίζει ότι

$$(I) \varphi_0 = I$$

$$(II) \varphi_{t+s}(U) = \varphi_t(\varphi_s(U)) = \varphi_s(\varphi_t(U))$$

Ορισμός

Μια **τροχιά** φάσης (orbit) του συστήματος (1) που περνά από το $(t_0, U(t_0))$ είναι το σύνολο των σημείων στο E που βρίσκονται πάνω σε μία τροχιά που περνά από το $(t, U(t_0))$.

Δηλαδή: $O(U(t_0)) = \{U \in E \mid U = U(t, t_0, U(t_0)), t \in I\}$

Σημείωση: Σύμφωνα με τον ορισμό, κάθε ξεχωριστή τροχιά φάσης $O(U(t_0))$ αποτελεί ένα αναλλοίωτο σύνολο. Αν ο χώρος κατάστασης εφοδιαστεί με ένα μέτρο τότε μπορούν να θεωρηθούν κλειστά αναλλοίωτα σύνολα στο χώρο αυτό.

Γενικά ένα σύστημα μπορεί να έχει ως **κλειστά αναλλοίωτα σύνολα**:

- (α) σημεία ισορροπίας
- (β) περιοδικές λύσεις (ταλαντώσεις)
- (γ) ημι-περιοδικές λύσεις (quasi)
- (δ) χαοτικές λύσεις

Ορισμός

Ενα σύνολο M λέγεται **αναλλοίωτο** ως προς την (3) αν για κάθε $U(t_0) \in M$ τότε $\varphi_t(U(t_0)) \in M$, για κάθε $t \in I$.

Οι πιο απλές περιπτώσεις κλειστών αναλλοίωτων συνόλων είναι τα σημεία ισορροπίας και οι περιοδικές ταλαντώσεις.

Ορισμός

Μια λύση ισορροπίας (fixed point ή equilibrium), έστω U^* , του συστήματος (3) είναι μια λύση που ικανοποιεί την σχέση:

$$F(\mu, U^*) = 0$$

Ορισμός

Μια T -περιοδική λύση είναι μια λύση του συστήματος (1) που ικανοποιεί την σχέση:

$$U(t) = U(t+T), \text{ για κάθε } t$$

Τα σημεία ισορροπίας, περιοδικές λύσεις, οριακοί κύκλοι και οι χαοτικοί ελκυστές μπορούν επίσης να ορισθούν μέσω των οριακών συνόλων (limit sets).

Ορισμός

Εστω $U \in E$ ένα σημείο στο διάγραμμα φάσης της ροής φ_t . Το α -οριακό σύνολο του U είναι το σύνολο των σημείων $y \in E$ για τα οποία $\varphi_t(x) \rightarrow y, t \rightarrow \infty$.

Ορισμός

Εστω $U \in E$ ένα σημείο στο διάγραμμα φάσης της ροής φ_t . Το ω -οριακό σύνολο του U είναι το σύνολο των σημείων $y \in E$ για τα οποία $\varphi_t(x) \rightarrow y, t \rightarrow -\infty$.

2.2 Εύρεση λύσεων: Απλή προσομοίωση στο χρόνο και επαναληπτικές μέθοδοι

Η δυναμική συμπεριφορά μη γραμμικών συστημάτων είναι συνήθως αρκετά πιο πολύπλοκη από αυτή των γραμμικών γιατί δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας και ως εκ τούτου τις περισσότερες φορές η εύρεση αναλυτικών λύσεων από την (4) δεν γίνεται. Ο προσδιορισμός της δυναμικής συμπεριφοράς τους καθίσταται δυνατός συνήθως μόνο με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι υπάρχουν δύο τεχνικές για την εξέταση ενός μοντέλου με τη βοήθεια του υπολογιστή.

Ο πρώτος τρόπος είναι απλή προσομοίωση, δηλαδή χρησιμοποιούμε τον Η/Υ όπως ακριβώς θα κάναμε σε ένα πείραμα:

θέτουμε αρχικές συνθήκες και ολοκληρώνουμε στο χρόνο (και στο χώρο) .

Για την κατανόηση της συμπεριφοράς του υπό εξέταση μοντέλου, συναρτήσε των αρχικών συνθηκών, παραμέτρων και κανόνων, πρέπει να πραγματοποιήσουμε πολλές προσομοιώσεις για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Ως παράδειγμα αναφέρουμε την μέθοδο ολοκλήρωσης κατά Euler σύμφωνα με την οποία, η προσέγγιση της (4) από το χρόνο t στο χρόνο $t+\Delta t$ δίνεται από τη σχέση

$$U(t+\Delta t) = U(t) + F(t, U(t))\Delta t$$

Υπάρχει όμως ένας δεύτερος τρόπος, τον οποίο θα ονομάσουμε εδώ “μαθηματικώς – αριθμητικώς υποκινούμενο”. Σύμφωνα με αυτόν, χρησιμοποιήσουμε τον υπολογιστή για την διερεύνηση της συμπεριφοράς του μοντέλου, αλλά η προσέγγιση είναι τελείως διαφορετική. Το πιο απλό παράδειγμα, είναι η εύρεση των τιμών των μεταβλητών του υπό εξέταση συστήματος σε μόνιμη κατάσταση. Σε ένα πείραμα η μοναδική δυνατότητα που υπάρχει είναι η παρακολούθηση της συμπεριφοράς του συστήματος στο χρόνο μέχρι το εξελισσόμενο σύστημα να φτάσει μόνο του στη “μόνιμη κατάσταση”, δηλαδή στην ασυμπτωτική λύση, όπου δεν παρατηρείται πλέον καμία “αξιοσημείωτη” παρατηρήσιμη αλλαγή.

Σε μια προσομοίωση, αυτό αντιστοιχεί στην ολοκλήρωση του μοντέλου, με την βοήθεια του υπολογιστή, στο χρόνο. Αλλά χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο τύπου Newton Raphson, είναι δυνατή η εύρεση της μόνιμης κατάστασης του μοντέλου, μετά από κάποιες αριθμητικές επαναλήψεις του αλγορίθμου.

Ο αλγόριθμος Newton Raphson είναι η πλέον διαδεδομένη μέθοδος για την επίλυση συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής

$$F(U)=0, F : R^n \rightarrow R^n$$

Υποθέτοντας ότι η F είναι επαρκώς παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα στο R^n το οποίο εμπεριέχει την λύση $U^* : F(U^*) = 0$ τότε η $F(U)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από ένα σημείο x_c

“κοντά” στο x^* ως

$$F(U) \approx F(U_c) + \nabla F(U_c)(U-U_c)$$

Αν στην προηγούμενη σχέση αντικαταστήσουμε την $F(U^*) = 0$ τότε προκύπτει η σχέση

$$(U^* - U_c) \approx -F(U_c)[\nabla F(U_c)]^{-1}$$

Βάση της παραπάνω σχέσης, η επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson δίνεται από την εξής αναδρομική σχέση

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} - F(U^{(n)})[\nabla F(U^{(n)})]^{-1} \quad (15)$$

Βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της παραπάνω σχέσης είναι η συνθήκη ότι ο Ιακωβιανός πίνακας δεν πρέπει να είναι ιδιάζων, δηλαδή

$$\det(\nabla F(U^n)) \neq 0 \quad (16)$$

Η αναδρομική σχέση (15) επαναλαμβάνεται έως ότου $\|U^{(n+1)} - U^{(n)}\| < \text{tol}$.

Αποδεικνύεται ότι αν η αρχική εκτίμηση $U^{(0)}$ είναι επαρκώς κοντά στην λύση U^* τότε η μέθοδος συγκλίνει τετραγωνικά στο U^* .

Η ίδια ασυμπτωτική λύση βρίσκεται στο τέλος. Η διαφορά, βρίσκεται ουσιαστικά στον επαναληπτικό αλγόριθμο, αφού ένα διαφορετικό σύνολο από υπολογιστικές μεθόδους συγκλίνει στην ίδια ασυμπτωτική λύση, ταχύτερα, ευκολότερα, η σύγκλιση είναι δυνατή ακόμα και για ασταθείς ή κρίσιμα ευσταθείς λύσεις.

2.3 Ευστάθεια λύσεων

Ορισμός

Μια λύση $U(t)$ ενός αυτόνομου ή μη αυτόνομου συστήματος λέγεται ευσταθής κατά Lyapunov αν για $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: οποιαδήποτε άλλη λύση $V(t)$ για την οποία ισχύει $\|U - V\| < \delta$ για $t = t_0$ ικανοποιεί την $\|U - V\| < \varepsilon$, $\forall t > t_0$. (Για μη-αυτόνομα συστήματα $\delta = \delta(\varepsilon, t)$)

Ορισμός

Αν μια λύση είναι ευσταθής κατά Lyapunov και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U - V\| \rightarrow 0$$

τότε η λύση είναι **ασυμπτωτικά ευσταθής**.

Αν ένα αναλλοίωτο σύνολο M_0 είναι ευσταθές κατά Lyapunov τότε όλες οι συντεταγμένες τροχιές στην γειτονιά του συνόλου παραμένουν στην γειτονιά. Σημειώνεται ότι υπάρχουν αναλλοίωτα σύνολα (ή λύσεις μόνιμης κατάστασης) που είναι ευσταθείς κατά Lyapunov αλλά δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Από την άλλη υπάρχουν αναλλοίωτα σύνολα που είναι ελκυστές, δηλαδή γειτονικές συντεταγμένες τροχιές στο M_0 αλλά δεν είναι ευσταθείς κατά Lyapunov μπορεί να συγκλίνουν σε αυτό αφού πρώτα οι τροχιές έχουν “βγει” έξω από μια προκαθορισμένη γειτονιά του M_0 .

Αν τώρα U^* είναι μια λύση ισορροπίας του συστήματος και v είναι μια διαταραχή της U^* τέτοια ώστε

$$v(t) = U^* + v(t_0)$$

Τότε

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{dU^*}{dt} = F(t, \mu, U^* + v) - F(t, \mu, U^*) = F_U(t, \mu, U)|_{U^*} v + O(\|v\|^2)$$

με $\|v\| < \varepsilon$, όπου $F_U \equiv \nabla F(U)|_{U^*} \equiv J$ είναι η Ιακωβιανή του γραμμικοποιημένου συστήματος:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial U_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial U_n} \end{bmatrix}$$

Μια λύση ισορροπίας $U^* = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν $v(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Για τοπική ευστάθεια

λύσεων ισορροπίας ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα (Lyapunov)

Εστω το δυναμικό σύστημα που ορίζεται από τις εξισώσεις (3) τότε μια λύση ισορροπίας είναι τοπικά ευσταθής αν όλες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής (14) έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος:
 $\text{Re}(\lambda_i) < 0$

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί πολύ εύκολα να αποδειχθεί για ένα γραμμικό σύστημα

$$\frac{dU}{dt} = JU$$

από τη λύση της (2.9) όταν ο πίνακας A μπορεί να μετασχηματιστεί σε μορφή Jordan. Επίσης για μη γραμμικά συστήματα μπορεί να αποδειχθεί μέσω κατασκευής μιάς συνάρτησης Lyapunov.

Τοπική ευστάθεια σημείων ισορροπίας σημαίνει ότι μικρές διαταραχές γύρω από τη λύση ισορροπίας αποσβένονται στο χρόνο. Αντίθετα ασταθείς λύσεις σημαίνει ότι μικρές διαταραχές μεγαλώνουν στο χρόνο.

2.4 Αναλλοίωτες πολλαπλότητες

Οι πολλαπλότητες είναι μια άλλη κατηγορία κλειστών αναλλοίωτων συνόλων.

Ορισμός

Γενικά μια **πολλαπλότητα** $M \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο σημείων που ικανοποιούν ένα σύστημα m βαθμωτών εξισώσεων της μορφής

$$G(x) = 0, G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Ορισμός

Μια **πολλαπλότητα M είναι λεία** αν η G είναι λεία και ο βαθμός (rank) της Ιακωβιανής ∇G είναι ίσος με $m, \forall x \in M$.

Ορισμός

Μία C^r **αναλλοίωτη πολλαπλότητα** είναι μια πολλαπλότητα που είναι αναλλοίωτη και C^r λεία.

Μετά από ανάπτυξη και κατάλληλους μετασχηματισμούς το μη γραμμικό πρόβλημα

$$\frac{dU}{dt} = F(\mu, U), F(\mu, U^*) = 0$$

γύρω από το σημείο ισορροπίας U^* μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{dU^-}{dt} = J^- U^- + F^-(U^-, U^+, U^0) \quad (24\alpha)$$

$$\frac{dU^+}{dt} = J^+ U^+ + F^+(U^-, U^+, U^0) \quad (24\beta)$$

$$\frac{dU^0}{dt} = J^0 U^0 + F^0(U^-, U^+, U^0) \quad (24\gamma)$$

όπου οι πίνακες J^- , J^+ , J^0 έχουν ιδιοτιμές με αρνητικό, θετικό και μηδενικό πραγματικό μέρος αντίστοιχα. Το άνυσμα U έχει αποσυντεθεί ως $U = (U^-, U^+, U^0)$ σύμφωνα με τις διαστάσεις των πινάκων J^- , J^+ , J^0 . Οι συναρτήσεις F^- , F^+ , F^0 περιέχουν όλους τους μη γραμμικούς όρους.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι w^k είναι τα ιδιοδιανύσματα και

$$E_s := \text{span}\{w^1, w^2, \dots, w^i\}$$

ο χώρος που αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές με **αρνητικό** πραγματικό μέρος.

$$E_u := \text{span}\{w^{i+1}, w^{i+2}, \dots, w^{i+j}\}$$

ο χώρος που αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές με **θετικό** πραγματικό μέρος.

$$E_c := \text{span}\{w^{i+j+1}, w^{i+j+2}, \dots, w^{i+j+k}\}, \text{ όπου } i+j+k = n$$

ο χώρος που αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές με **μηδενικό** πραγματικό μέρος.

$$\text{Δηλαδή } \mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u \oplus E_c$$

Οι υπόχωροι E_s , E_u , E_c είναι οι ευσταθείς, ασταθείς και κεντρικές πολλαπλότητες του γραμμικού συστήματος

$$\frac{dU^-}{dt} = J^- U^-$$

$$\frac{dU^+}{dt} = J^+ U^+$$

$$\frac{dU^0}{dt} = J^0 U^0$$

Οι αντίστοιχοι, μη γραμμικοί υπόχωροι λέγονται τοπικές πολλαπλότητες M_s, M_u, M_c .

- Η πολλαπλότητα M_s είναι το σύνολο των αρχικών συνθηκών $z: \varphi(t,z) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} U^*$
- Η πολλαπλότητα M_u είναι το σύνολο των αρχικών συνθηκών $z: \varphi(t,z) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} U^*$
- Η πολλαπλότητα M_c είναι το σύνολο των αρχικών συνθηκών όπου η λύση δεν μεταβάλλεται στον χρόνο.

2.5 Διακλαδώσεις και Ευστάθεια λύσεων ισορροπίας σε μία διάσταση

Το βασικό ερώτημα που τίθεται στην ανάλυση δυναμικών συστημάτων είναι το εξής:
Πώς αλλάζουν οι λύσεις και η ευστάθειά τους αν αλλάξουμε τις τιμές των παραμέτρων;
Η απάντηση δίνεται από τη θεωρία των Διακλαδώσεων (Bifurcation Theory)

Διακλαδωμένες λύσεις είναι ασυμπτωτικές λύσεις που σχηματίζουν τέμνοντες κλάδους λύσεων σε ένα κατάλληλο χώρο συναρτήσεων.

Έστω δυναμική εξίσωση στο \mathbb{R} του αυτόνομου προβλήματος

$$\frac{dU}{dt} = F(\mu, u)$$

όπου η $F(\cdot)$ έχει τουλάχιστον δύο συνεχείς παραγώγους ως προς μ, u .

Η μελέτη των διακλαδωμένων λύσεων ισορροπίας του παραπάνω αυτόνομου προβλήματος είναι ισοδύναμη με τη μελέτη "ιδιαζόντων" (singular) σημείων της καμπύλης

$$F(\mu, \varepsilon) = 0$$

στο (μ, ε) επίπεδο.

Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής:

Έστω ότι έχουμε ήδη βρει ένα σημείο ισορροπίας (μ_0, ε_0) τέτοιο ώστε $F(\mu_0, \varepsilon_0) = 0$

Τι θα συμβεί αν αλλάξει η τιμή της παραμέτρου μ ; Την απάντηση στο ερώτημά μας δίνει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Εστω $F(\mu_0, \varepsilon_0) = 0$ και η F είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση σε κάποιο ανοιχτό σύνολο που περιέχει το σημείο (μ_0, ε_0) στο (μ, ε) επίπεδο.

Τότε αν, $F_\varepsilon(\mu_0, \varepsilon_0) \equiv \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \neq 0$, $\exists \alpha > 0, \beta > 0$ τέτοια ώστε

(I) Η εξίσωση $F(\mu, \varepsilon) = 0$ έχει **μοναδική λύση**, $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ για $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$, $\varepsilon_0 - \beta < \varepsilon < \varepsilon_0 + \beta$

(II) Η συνάρτηση $\varepsilon(\mu)$ είναι **συνεχώς παραγωγίσιμη** για $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$

(III) Η παράγωγος $\varepsilon_\mu(\mu) = \frac{d\varepsilon(\mu)}{d\mu} = - \frac{F_\mu(\mu, \varepsilon(\mu))}{F_\varepsilon(\mu, \varepsilon(\mu))}$

Ουσιαστικά, το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης εκφράζει ότι, για μικρή αλλαγή της παραμέτρου, η λύση αλλάζει λίγο, καθώς και ότι η λύση είναι λεία και συνεχής.

Παρατηρούμε ότι, αν $F_\varepsilon(\mu_0, \varepsilon_0) = 0$, τότε δεν ισχύει το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης για λύσεις του τύπου $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$. Παρόλα αυτά μπορούμε να επιχειρήσουμε να βρούμε λύσεις του τύπου $\mu = \mu(\varepsilon)$ εφόσον ισχύει ότι $F_\mu(\mu, \varepsilon(\mu)) \neq 0$.

Στην περίπτωση που δεν ισχύει καμία από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, δηλαδή στην περίπτωση που $F_\varepsilon(\mu_0, \varepsilon_0) = F_\mu(\mu, \varepsilon(\mu)) = 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης δεν υπάρχει μοναδική λεία καμπύλη που να περνά από αυτό το σημείο.

2.6 Διαχωρισμός των σημείων ισορροπίας στις καμπύλες λύσεων

Ένα **κανονικό σημείο** της καμπύλης λύσεων $F(\mu, \varepsilon) = 0$ είναι αυτό για το οποίο ισχύει το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης. Δηλαδή είναι ένα σημείο για το οποίο ισχύει $F_\mu(\mu, \varepsilon(\mu)) \neq 0, F_\varepsilon(\mu_0, \varepsilon_0) \neq 0$. Τότε μπορούμε να βρούμε μια μοναδική καμπύλη $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ ή $\mu = \mu(\varepsilon)$

Ένα **κανονικό σημείο καμπής** είναι ένα σημείο πάνω στην $F(\mu, \varepsilon) = 0$ εκατέρωθεν του οποίου η $\mu = \mu(\varepsilon)$ αλλάζει πρόσημο και $F_\mu(\mu, \varepsilon(\mu)) \neq 0$.

Ένα **ιδιάζον σημείο** της καμπύλης $F(\mu, \varepsilon) = 0$ είναι ένα σημείο στο οποίο $F_\varepsilon(\mu_0, \varepsilon_0) = F_\mu(\mu, \varepsilon(\mu)) = 0$

Ένα **διπλό σημείο** της καμπύλης $F(\mu, \varepsilon) = 0$ είναι ένα ιδιάζον σημείο από το οποίο περνούν μόνο κλάδοι της $F(\mu, \varepsilon) = 0$ με διακριτές εφαπτόμενες. Επίσης θεωρείτε ότι δεν μηδενίζονται όλες οι δεύτερες παράγωγοι της $F()$.

Ένα **ιδιάζον σημείο καμπής** της καμπύλης $F(\mu, \varepsilon) = 0$ είναι ένα διπλό σημείο στο οποίο η κλίση μ_ε αλλάζει πρόσημο από τον ένα κλάδο στον άλλο.

Ένα **σημείο συμβολής** της καμπύλης $F(\mu, \varepsilon) = 0$ είναι ένα σημείο στο οποίο οι δύο κλάδοι της καμπύλης έχουν την ίδια κλίση.

Ένα **συζυγές σημείο** της καμπύλης $F(\mu, \varepsilon) = 0$ είναι ένα απομονωμένο σημείο της $F(\mu, \varepsilon) = 0$

2.7 Ιδιάζοντα σημεία

Για την ανάλυσή τους αναπτύσσουμε την $F(\mu, \varepsilon) = 0$ γύρω από το (μ_0, ε_0) με σειρές Taylor δεύτερης τάξης

$$F(\mu_0 + \delta\mu, \varepsilon_0 + \delta\varepsilon) = F(\mu_0, \varepsilon_0) + F_\varepsilon \delta\varepsilon + F_\mu \delta\mu + 1/2 F_{\mu\mu} \delta\mu^2 + 1/2 F_{\varepsilon\varepsilon} \delta\varepsilon^2 + F_{\mu\varepsilon} \delta\mu\delta\varepsilon + O(3) \quad (7)$$

όπου $\delta\mu = \mu - \mu_0, \delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0, F_{\mu\mu} \equiv F_{\mu\mu}(\mu_0, \varepsilon_0)$

Στο όριο $(\mu, \varepsilon) \rightarrow (\mu_0, \varepsilon_0)$ για σημεία πάνω στην καμπύλη η (7) ανάγεται στην ακόλουθη τετραγωνική εξίσωση:

$$F_{\mu\mu} \delta\mu^2 + F_{\varepsilon\varepsilon} \delta\varepsilon^2 + F_{\mu\varepsilon} \delta\mu\delta\varepsilon = 0$$

$$\text{Αν } F_{\mu\mu} \neq 0 \rightarrow \mu_\varepsilon^{(1),(2)}(\varepsilon_0) = \frac{F_{\mu\varepsilon}}{F_{\mu\mu}} \mp \frac{\sqrt{D}}{F_{\mu\mu}^2} \quad (9)$$

$$\text{Αν } F_{\varepsilon\varepsilon} \neq 0 \rightarrow \varepsilon_\mu^{(1),(2)}(\mu_0) = -\frac{F_{\mu\varepsilon}}{F_{\varepsilon\varepsilon}} \mp \frac{\sqrt{D}}{F_{\varepsilon\varepsilon}^2} \quad (10)$$

όπου $D = F_{\mu\varepsilon}^2 - F_{\mu\mu} F_{\varepsilon\varepsilon}$ (11)

- 1) Αν $D > 0$ τότε υπάρχουν δύο διακριτές λύσεις και συνεπώς το σημείο είναι ένα *διπλό σημείο*
- 2) Αν $D = 0$ τότε υπάρχει μια *διπλή λύση* και αναφερόμαστε στο σημείο με υψηλότερης τάξης επαφή
- 3) Αν $D < 0$ τότε **δεν** υπάρχει πραγματικό μ_ε ή πραγματικό ε_μ και το σημείο είναι ένα απομονωμένο συζύγες σημείο της $F(\mu, \varepsilon) = 0$
 - Αν $D > 0$ και $F_{\mu\mu} \neq 0$ τότε υπάρχουν δύο κλίσεις $\mu_\varepsilon^{(1)}(\varepsilon_0)$ και $\mu_\varepsilon^{(2)}(\varepsilon_0)$ που δίνονται από την (9)
 - Αν $D > 0$ και $F_{\mu\mu} = 0$ τότε από την (11) προκύπτει ότι $F_{\mu\varepsilon} \neq 0$ και η (8) γίνεται $[2F_{\mu\varepsilon}\delta\mu + F_{\varepsilon\varepsilon}\delta\varepsilon]\delta\varepsilon = 0$

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν δύο κλίσεις που δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\varepsilon_\mu(\mu_0) = 0, \mu_0(\varepsilon_0) = -\frac{F_{\varepsilon\varepsilon}}{2F_{\mu\varepsilon}}$$

Αν $\varepsilon_\mu(\mu_0) = 0$ τότε από την (8) προκύπτει $F_{\mu\mu} = 0$

Έτσι συνοπτικά όλες οι περιπτώσεις καλύπτονται από τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

Αν $D > 0$ και $F_{\mu\mu} \neq 0$ τότε υπάρχουν δύο κλίσεις $\mu_\varepsilon^{(1)}(\varepsilon_0)$ και $\mu_\varepsilon^{(2)}(\varepsilon_0)$ από την (9)

Αν $D > 0$ και $F_{\mu\mu} = 0$ οι δύο κλίσεις είναι $\varepsilon_\mu(\mu_0) = 0, \mu_0(\varepsilon_0) = \frac{F_{\varepsilon\varepsilon}}{2F_{\mu\varepsilon}}$

2.8 Κριτήρια τοπικής (κατά συνθήκη) ευστάθειας

Στα σημεία διακλάδωσης κάποιες από τις λύσεις που διακλαδώνονται είναι ευσταθείς και κάποιες ασταθείς. Για τη μελέτη της ευστάθειας μια λύση $u = \varepsilon$ συνήθως εξετάζεται η γραμμικοποιημένη εξίσωση

$$\frac{dv}{dt} = F_{\varepsilon}(\mu, \varepsilon)v \quad (32)$$

όπου $u = \varepsilon + v$ και v είναι μια διαταραχή.

Η γενική λύση της (32) είναι $v = v_0 e^{\sigma t}$ (33), με $\sigma = F_{\varepsilon}(\mu, \varepsilon)$ (34)

Σύμφωνα με τις (33), (34) διαταραχές στην ε μεγαλώνουν όταν $\sigma > 0$ και αποσβένονται όταν $\sigma < 0$

Έτσι σύμφωνα με την γραμμική θεωρία μια λύση $(\mu(\varepsilon), \varepsilon): F(\mu, \varepsilon) = 0$ είναι ευσταθής όταν $\sigma > 0$ και ασταθής όταν $\sigma < 0$.

Στην περίπτωση μη γραμμικού συστήματος

$\frac{dv}{dt} = F_{\varepsilon}(\mu(\varepsilon), \varepsilon) + R(\varepsilon, v)$ (35α) όπου $|R(\varepsilon, v)| \leq K |v|^2$ (35β) είναι οι όροι δεύτερης τάξης.

$$\frac{d(v e^{-\sigma t})}{dt} = R(\varepsilon, v) e^{-\sigma t} \quad (36)$$

από την οποία προκύπτει $v(t) e^{-\sigma t} = v(0) + \int_0^t R(\varepsilon, v(s)) e^{-\sigma s} ds$ (37)

από την (35β) έχουμε

$$|v(t) - v(0) e^{-\sigma t}| \leq K \int_0^t e^{\sigma(t-s)} |v(s)|^2 ds \quad (38)$$

θέλουμε να δείξουμε ότι η (38) οδηγεί σε $v(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ αν $\sigma(\varepsilon) < 0$ και δεδομένου ότι το $|v(0)|$ είναι "αρκετα μικρό".

- Έστω $\sigma < 0$ τότε $\exists \eta > 0 : \sigma(\varepsilon) + \eta < 0$

Υποθέτουμε ότι $|v(t)| \leq \eta / K, \forall t \geq 0$ (39)

Από (38) και (39) έχουμε ότι

$$|v(t) - v(0) e^{-\sigma t}| \leq \eta e^{\sigma t} \int_0^t e^{-\sigma s} |v(s)| ds \quad (40)$$

Από την (40)

$$|v(s)| \leq |v(0) e^{-\sigma s}| + \eta e^{\sigma s} \int_0^s e^{-\sigma t} |v(t)| dt \quad (41)$$

Θέτοντας $y(t) = \int_0^t e^{-\sigma t} |v(s)| ds$ (42)

Από την (41) προκύπτει $0 \leq dy(t)/dt \leq |v(0)| + \eta y(t)$, $y(0) = 0$ (43)

Πολλαπλασιάζοντας την (43) με τον όρο $e^{-\eta t}$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$y(t) e^{-\eta t} \leq \{1 - e^{-\eta t}\} |v(0)| / \eta \quad (44)$$

Από τις (40), (44) προκύπτει ότι

$$|v(t) - v(0) e^{-\sigma t}| \leq |v(0)| e^{(\sigma + \eta)t} \quad (45)$$

Όμως, $(\sigma + \eta) < 0$. Άρα η εξ.(45) δείχνει ότι $v(t) \rightarrow 0$ όταν $\sigma(\varepsilon) < 0$ και $|v(t)| \leq \eta/K$, για κάθε $t \geq 0$, $|v(0)| \ll 1$.

Η παραπάνω συνθήκη για το $|v(0)|$ είναι ο λόγος που λέμε ότι η λύση $(\mu(\varepsilon), \varepsilon)$ είναι κατά συνθήκη ευσταθής.

Αν το $|v(0)|$ ήταν μη φραγμένο θα μιλούσαμε για ολική ευστάθεια.

Έστω $\sigma > 0$. Τότε υποθέτουμε ότι $|v(t)| \leq \varepsilon$. Από την (37) για $t \rightarrow \infty$:

$$v(0) = \int_0^\infty R(\varepsilon, v(s)) e^{-\sigma t} ds \quad (46)$$

Συνεπώς η (37) μπορεί να γραφεί ως

$$v(t) = - \int_0^\infty R(\varepsilon, v(s)) e^{\sigma(t-s)} ds$$

Αλλά λόγω της (35β) $|R(\varepsilon, v)| \leq K |v|^2$ και $|v(t)| \leq \varepsilon$.

Άρα

$$|v(t)| \leq K\varepsilon^2 \int_t^\infty e^{\sigma(t-s)} ds = K\varepsilon^2/\sigma \Rightarrow \varepsilon \leq K\varepsilon^2/\sigma$$

Αν διαλέξουμε $v(0) \neq 0$, $\varepsilon < \sigma/K$ τότε η (48) δεν μπορεί να ισχύει. Άρα η αρχική μας υπόθεση $|v(t)| \leq \varepsilon$, για κάθε t δεν μπορεί να ισχύει. Άρα η λύση $v(t)$ δεν είναι φραγμένη.

2.9 Θεώρημα παραγοντοποίησης σε μια διάσταση (factorization theorem)

Θεώρημα

Για κάθε σημείο ισορροπίας $F(\mu, \varepsilon) = 0$ για το οποίο $\mu = \mu(\varepsilon)$ έχουμε

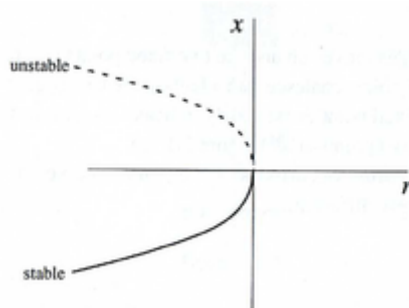
$$\sigma(\varepsilon) = F_\varepsilon(\mu(\varepsilon), \varepsilon) = - \mu_\varepsilon(\varepsilon) F_\mu(\mu(\varepsilon), \varepsilon) = \mu_\varepsilon \hat{\sigma}(\varepsilon)$$

Απόδειξη

$$F(\mu, \varepsilon) = 0 \Rightarrow \frac{dF(\mu(\varepsilon), \varepsilon)}{d\varepsilon} = 0 \Rightarrow F_\varepsilon(\mu(\varepsilon), \varepsilon) + \mu_\varepsilon(\varepsilon) F_\mu(\mu(\varepsilon), \varepsilon) = 0$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι εκατέρωθεν από ένα κανονικό σημείο καμπής εφόσον το μ_ε αλλάζει πρόσημο και $F_\mu(\bullet) \neq 0$ τότε το $\sigma(\varepsilon)$ αλλάζει πρόσημο.

Δηλαδή η λύση $u = \varepsilon$, $\mu = \mu(\varepsilon)$ είναι ευσταθής από την μία πλευρά και ασταθής από την άλλη. Ένας τέτοιος κλάδος λύσεων λέγεται και **κλάδος σάγγματος- κόμβου (saddle-node)**



Σχήμα2 ένα διάγραμμα διακλάδωσης σάγματος-κόμβου

Παρατηρούμε πως ακριβώς πάνω στο σημείο καμπής $\mu_\varepsilon = 0$. Το κύριο χαρακτηριστικό των κανονικών σημείων καμπής (regular turning points) είναι ότι με την αλλαγή της παραμέτρου έχουμε εμφάνιση (ή εξαφάνιση λύσεων). Συγκεκριμένα υπάρχουν δύο λύσεις, πάνω ακριβώς στο σημείο καμπής μόνο μια λύση ενώ μετά το σημείο καμπής δεν υπάρχει καμία λύση.

Σημειώνουμε ότι η συνθήκη για την εμφάνιση κανονικού σημείου καμπής είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή.

Ως παράδειγμα θα θεωρήσουμε την εξίσωση $F(\mu, \varepsilon) = \mu - \varepsilon^3$ όπου ισχύει ότι $F(0,0) = 0$, $F_\mu|_{(0,0)} = 1$ και $F_\varepsilon|_{(0,0)} = 0$.

Όμως η παραπάνω εξίσωση έχει μόνο μια πραγματική λύση την $\varepsilon = \mu^{1/3}$ και επίσης η ευστάθεια γύρω από το $\mu = 0$ δεν αλλάζει. Άρα δεν υπάρχει σημείο διακλάδωσης.

Λήμμα

- (α) Κάθε σημείο (μ_0, ε_0) της καμπύλης $\mu = \mu(\varepsilon)$ για το οποίο $\hat{\sigma}(\varepsilon)$ είναι ιδιάζον σημείο.
- (β) Κάθε σημείο (μ_0, ε_0) της καμπύλης $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ για το οποίο $\sigma(\mu_0) = 0$ είναι ιδιάζον σημείο.

Απόδειξη

(α) από την σχέση (49) $F_\mu = 0 \Rightarrow F_\varepsilon = 0$.

(β) προκύπτει από τη σχέση $\sigma(\mu) = F_\varepsilon(\mu, \varepsilon(\mu))$ και την $\frac{dF}{d\mu} = F_\mu + \varepsilon_\mu F_\varepsilon$

2.10 Κανονικές μορφές διακλαδώσεων σε μια διάσταση

Για να ταξινομήσουμε τους διάφορους τύπους διακλαδώσεων είναι εύχρηστο να γράφονται τα συστήματα σε κανονική μορφή.

Ως κανονική μορφή εννοείται ένα απλοποιημένο σύστημα εξισώσεων που προσεγγίζει την δυναμική συμπεριφορά του αρχικού συστήματος στην γειτονιά ενός σημείου διακλάδωσης.

Κανονική μορφή μιας διακλάδωσης σάγματος- κόμβου (saddle-node bifurcation)

Αυτός ο τύπος διακλάδωσης είναι ο βασικός μηχανισμός δημιουργίας και εξαφάνισης λύσεων. Η κανονική μορφή είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dx}{dt} = \mu + x^2 \quad (1)$$

όπου η παράμετρος του συστήματος μ μπορεί να λάβει αρνητικές, θετικές και μηδενική τιμή.

- Για $\mu < 0$ υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας : $x^* = \mp\sqrt{-\mu}$
- Για $\mu > 0$ δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας
- Για $\mu = 0$ υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας , το $x^* = 0$

Για την ευστάθεια των λύσεων εξετάζουμε την παράγωγο $f'(x)|_{x^*} = 2x$. Σύμφωνα με αυτήν , το σημείο ισορροπίας $x^* = -\sqrt{-\mu}$ είναι ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας ενώ το $x^* = +\sqrt{-\mu}$ είναι ένα ασταθές σημείο ισορροπίας.

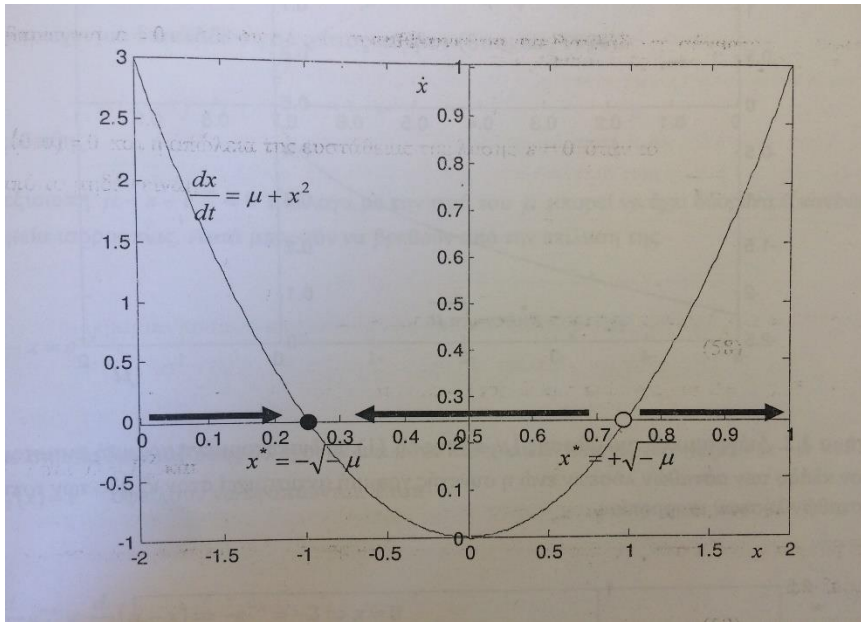
Προσοχή: η ευστάθεια είναι *τοπική*. Για να γίνει κατανοητή η διαφορά μεταξύ τοπικής και ολικής ευστάθειας θα εξετάσουμε αρχικά ποιοτικά την δυναμική συμπεριφορά του συστήματος για διαφορετικές αρχικές συνθήκες.

Κατασκευάζουμε το ανυσματικό πεδίο που δίνει τον ρυθμό μεταβολής στον χρόνο (την ταχύτητα) της κατάστασης $\frac{dx}{dt}$, συναρτήσει της κατάστασης x . Για το σύστημα (1) για $x < -\sqrt{-\mu} \Rightarrow \frac{dx}{dt} > 0$ και για $x > -\sqrt{-\mu} \Rightarrow \frac{dx}{dt} < 0$. Για $-\sqrt{-\mu} < x < \sqrt{-\mu} \Rightarrow \frac{dx}{dt} < 0$

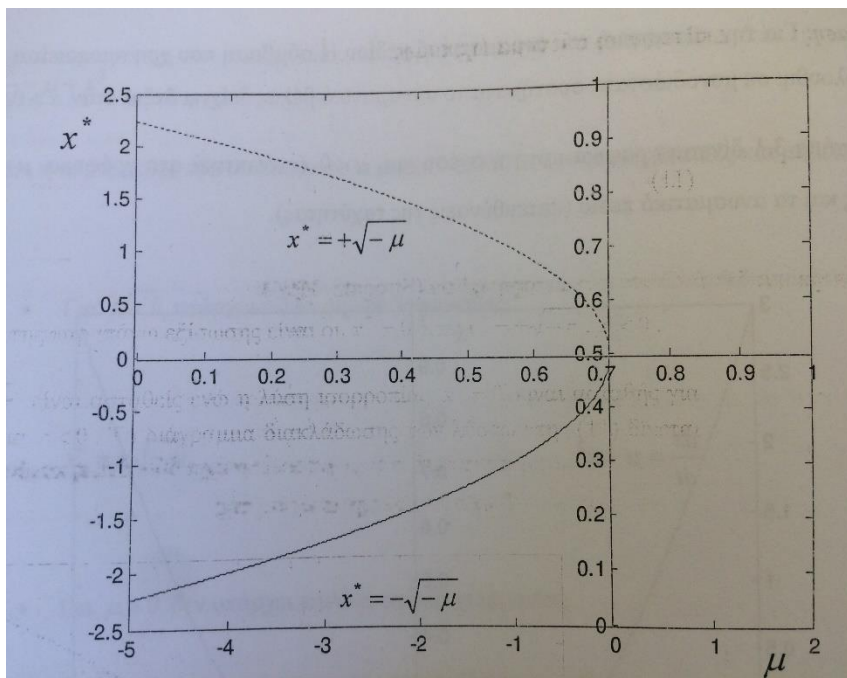
Σύμβαση: Για την κατασκευή του ανυσματικού πεδίου η σύμβαση που χρησιμοποιείται είναι πως σε μονοδιάστατα συστήματα το ανυσματικό βέλος δείχνει δεξιά όταν $\frac{dx}{dt} > 0$.

Από αυτήν την ποιοτική θεώρηση της δυναμικής συμπεριφοράς της εξίσωσης (1) παρατηρούμε ότι το σημείο ισορροπίας $x^* = -\sqrt{-\mu}$ είναι τοπικά ευσταθές καθώς μικρές διαταραχές γύρω από αυτό το σημείο αποσβένονται και το σύστημα οδηγείται στο σημείο ισορροπίας $x^* = -\sqrt{-\mu}$. Αντίθετα το σημείο ισορροπίας $x^* = +\sqrt{-\mu}$ είναι ασταθές διότι μικρές διαταραχές ενισχύονται και το σύστημα απομακρύνεται από αυτό το σημείο. Όμως, παρατηρούμε πως το σημείο ισορροπίας $x^* = -\sqrt{-\mu}$ παρότι είναι τοπικά ευσταθές δεν είναι ολικά ευσταθές: μια μεγάλη διαταραχή , πχ. Μια διαταραχή που θα καταστήσει μια αρχική τιμή $x^* > +\sqrt{-\mu}$ καθιστά το σημείο ισορροπίας ολικά ασταθές.

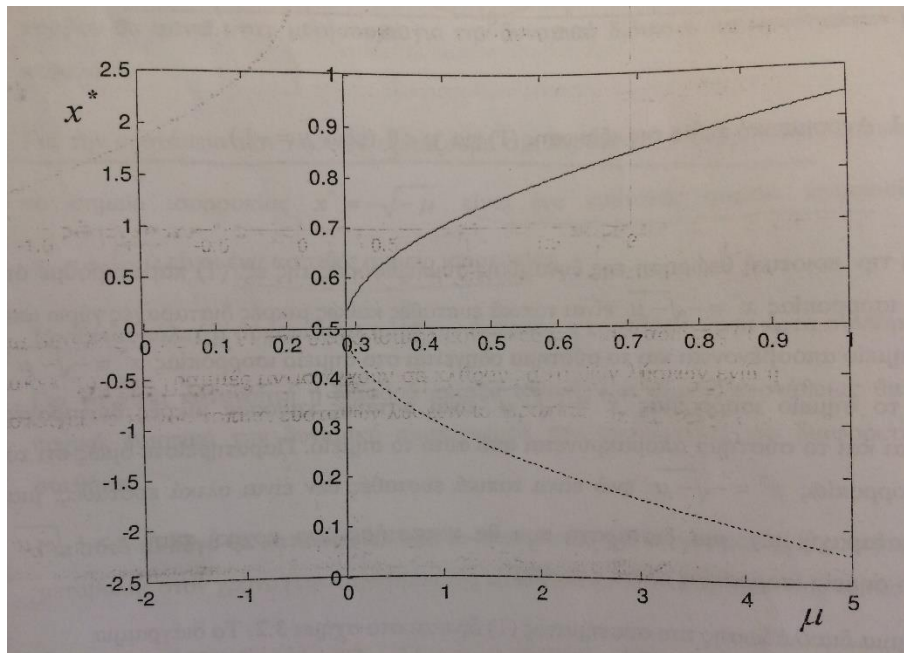
Το σημείο (0,0) είναι ένα κανονικό σημείο καμπής.



Σχήμα3 Ανυσματικό πεδίο της εξίσωσης (1) για $\mu < 0$ (εδώ $\mu = -1$) [32]



Σχήμα4 Διάγραμμα διακλάδωσης (μ, x) της εξ.(1). Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στον κλάδο των ασταθών λύσεων ενώ η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στον κλάδο των τοπικά ευσταθών λύσεων ισορροπίας [32]



Σχήμα5 Διάγραμμα διακλάδωσης (μ, x) της $\frac{dx}{dt} = \mu - x^2$ [32]

Κανονική μορφή μιας αμφίπλευρης διακλάδωσης (transcritical bifurcation)

Σε αυτόν τον τύπο του διαγράμματος διακλάδωσης μια λύση υπάρχει ανεξάρτητα από την μεταβολή της παραμέτρου.

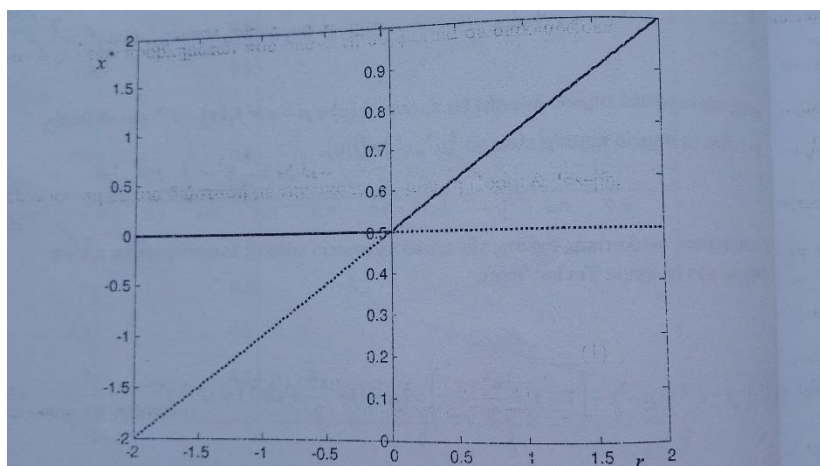
Η κανονική μορφή της αμφίπλευρης διακλάδωσης είναι η ακόλουθη

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^2$$

Οι λύσεις ισορροπίας της παραπάνω εξίσωσης είναι οι $x^* = 0$ και $x^* = r$.

Για την ευστάθεια των λύσεων εξετάζουμε την παράγωγο $f'(x)|_{x^*} = r - 2x$. Σύμφωνα με αυτήν το σημείο ισορροπίας $x^* = 0$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας για $r < 0$ και ασταθές για $r > 0$. Το σημείο ισορροπίας $x^* = r$ είναι ευσταθές για $r > 0$ και ασταθές για $r < 0$.

Βασικό γνώρισμα αυτού του είδους των διακλαδώσεων είναι η ανταλλαγή της ευστάθειας των λύσεων στο σημείο διακλάδωσης.



Σχήμα6 Διάγραμμα διακλάδωσης (μ, x) της εξίσωσης (7) για $r \in [-2, 2]$. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν σε κλάδους τοπικά ασταθών λύσεων ισορροπίας, ενώ οι συνεχείς γραμμές σε κλάδους τοπικά ευσταθών λύσεων ισορροπίας [32]

Κανονική μορφή μιας μονόπλευρης διακλάδωσης (pitchfork bifurcation)

Αυτή η μορφή των διαγραμμάτων διακλάδωσης χαρακτηρίζει προβλήματα με συμμετρία. Σε αυτόν τον τύπο των διακλαδώσεων διακρίνονται τρεις περιπτώσεις:

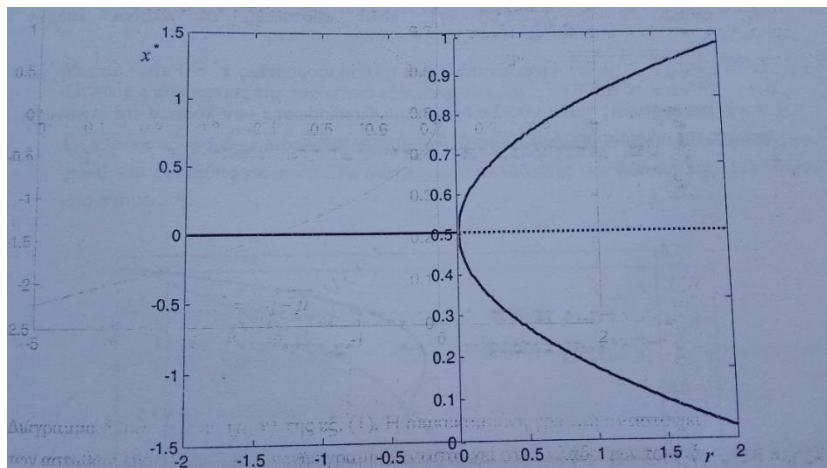
A. Υπερκρίσιμη μονόπλευρη ταλάντωση (supercritical)

Η κανονική μορφή είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3$$

Οι λύσεις ισορροπίας της παραπάνω εξίσωσης είναι οι $x^* = 0$ και $x^* = \pm \sqrt{r}$, $r > 0$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης παραμένουν ίδιες θέτοντας $x \rightarrow -x$. Οι κλάδοι $x^* = \pm \sqrt{r}$ είναι ευσταθείς ενώ η λύση ισορροπίας $x^* = 0$ είναι ασταθής για $r < 0$ και ευσταθής για $r > 0$.



Σχήμα7 Διάγραμμα διακλάδωσης (μ, x) της υπερκρίσιμης μονόπλευρης διακλάδωσης για $r \in [-2, 2]$. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στον κλάδο ασταθών λύσεων ενώ η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί σε κλάδους των τοπικά ευσταθών λύσεων ισορροπίας [32].

B. Υποκρίσιμη (subcritical) μονόπλευρη διακλάδωση – τύπος I

Η κανονική μορφή είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dx}{dt} = rx + x^3 - x^5$$

Οι λύσεις ισορροπίας της παραπάνω εξίσωσης είναι οι ακόλουθες:

$$x^* = 0$$

$$x^* = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2 + 2(1 + 4r)}}, r \geq \frac{-1}{4}$$

$$x^* = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2 - 2(1 + 4r)}}, r \geq \frac{-1}{4}$$

Οι κλάδοι $x^* = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2 + 2(1 + 4r)}}$ είναι ευσταθείς οι κλάδοι λύσεων $x^* = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2 - 2(1 + 4r)}}$ είναι ασταθείς ενώ η λύση ισορροπίας $x^* = 0$ είναι ασταθής για $r > 0$ και ευσταθής για $r < 0$.

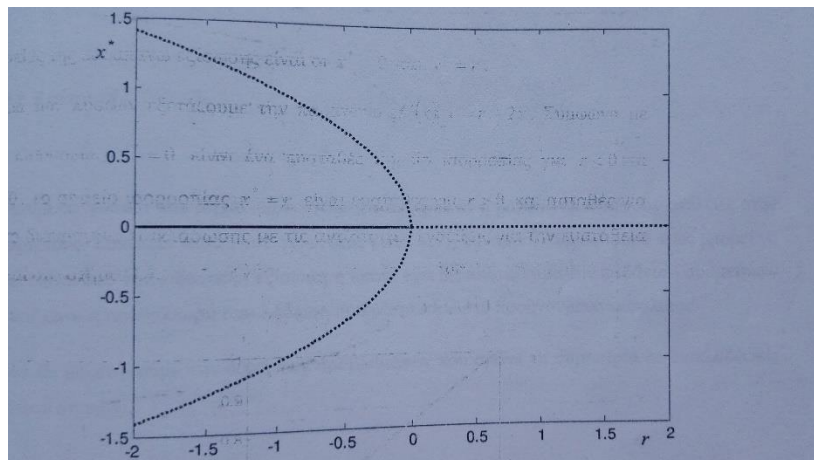
Γ. Υποκρίσιμη (subcritical) μονόπλευρη διακλάδωση – τύπος II

Υπάρχει άλλος ένας τύπος υποκρίσιμης διακλάδωσης ο οποίος χαρακτηρίζεται από τον απειρισμό (blow up) της λύσης μετά το κρίσιμο σημείο. Η κανονική μορφή αυτού του τύπου είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dx}{dt} = rx + x^3$$

Οι λύσεις ισορροπίας της παραπάνω εξίσωσης είναι οι $x^* = 0$ και $x^* = \mp \sqrt{r}$, $r < 0$.

Οι κλάδοι $x^* = \mp \sqrt{r}$ είναι ασταθείς ενώ η λύση ισορροπίας $x^* = 0$ είναι ασταθής για $r > 0$ και ευσταθής για $r < 0$.



Σχήμα8 Διάγραμμα διακλάδωσης (μ, x) της υποκρίσιμης μονόπλευρης διακλάδωσης (11) για $r \in [-2, 2]$. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν σε κλάδο ασταθών λύσεων ενώ η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί σε κλάδο τοπικά ευσταθών λύσεων ισορροπίας [32].

2.11 Θεωρία ατελειών και σπάσιμο συμμετρίας

Λόγω του ότι τα φυσικά και μηχανικά συστήματα εμπεριέχουν ατέλειες στην δομή τους, η δυναμική συμπεριφορά τους μπορεί να αποκλίνει από την ιδανική εξίσωση η οποία έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση συμμετριών όπως είναι η μονόπλευρη διακλάδωση.

Θα εξετάσουμε την δομή των προβλημάτων που σπάνε τη συμμετρία σε διακλαδώσεις διπλού σημείου.

Έστω, λοιπόν, η δυναμική εξίσωση σε μια διάσταση με την ακόλουθη μορφή (Iooss & Joseph, 1990):

$$\frac{dx}{dt} = F(\mu, x, \delta) \quad (1)$$

όπου μ, δ είναι παράμετροι του συστήματος.

Υποθέτουμε ότι η F είναι επαρκώς παραγωγίσιμη στην γειτονιά του σημείου ισορροπίας $(\mu, x, \delta) = (0, 0, 0)$

Επίσης, υποθέτουμε ότι το σημείο $(\mu, x) = (0, 0)$ είναι ένα διπλό σημείο της $F(0, 0, \delta) = 0$.
Κατά συνέπεια ισχύουν τα παρακάτω:

$$F() = 0$$

$$F_x() = 0$$

$$F_\mu() = 0$$

$$D = F_{x\mu}^2 - F_{\mu\mu}F_{xx} > 0 \quad (2)$$

Για να σπάσει η διακλάδωση διπλού σημείου αρκεί να ισχύει

$$F_\delta() = 0 \quad (3)$$

Το σπάσιμο της διακλάδωσης

Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης και τις (2),(3) προκύπτει ότι

$$\exists \delta = \Delta(\mu, \varepsilon) \text{ τέτοιο ώστε } \Delta(0, 0) = 0 \text{ και } F(\mu, \varepsilon, \Delta(\mu, \varepsilon)) = 0 \quad (4)$$

Από την (4) προκύπτει ότι εφόσον ισχύουν οι σχέσεις (2)

$$F_\mu + F_\delta \Delta_\mu = 0 \quad (5)$$

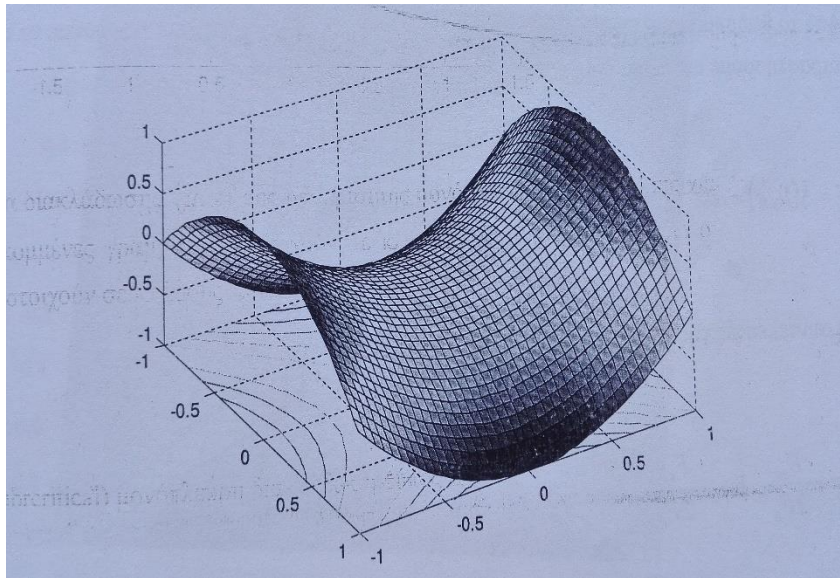
$$F_\varepsilon + F_\delta \Delta_\varepsilon = 0 \quad (6)$$

Εφόσον ισχύει ότι $F_\mu = F_\varepsilon = 0$ και ότι $F_\delta \neq 0$ από τις (5) και (6) προκύπτει ότι

$$\Delta_\mu = \Delta_\varepsilon = 0 \quad (7)$$

Οι εξισώσεις (7) δείχνουν ότι η επιφάνεια $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$ είναι εφαπτόμενη στο επίπεδο $\delta = 0$ στο σημείο $(\mu, \varepsilon, \delta) = (0, 0, 0)$. Θα δείξουμε ότι αυτό το σημείο είναι ένα σημείο διακλάδωσης σάγματος- κόμβου. Σε μια επιφάνεια $z = z(x, y)$ για να είναι ένα σημείο σάγμα θα πρέπει οι ιδιοτιμές του Hessian πίνακα να είναι κάποιες αρνητικές και κάποιες θετικές.

- Αν είναι όλες θετικές το z είναι τοπικό ελάχιστο
- Αν είναι όλες αρνητικές τότε το z είναι τοπικό μέγιστο



Σχήμα9 Μια σαγματική επιφάνεια όπως ορίζεται από το υπερβολικό παραβολοειδές $z=x^2 - y^2$ [32]

Ο Hessian πίνακας για το ως άνω σύστημα είναι ο

$$H(\Delta) = \begin{bmatrix} \Delta_{\mu\mu} & \Delta_{\mu\varepsilon} \\ \Delta_{\mu\varepsilon} & \Delta_{\varepsilon\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Η όριζουσα του Hessian είναι

$$\det(H) = \Delta_{\mu\mu} \Delta_{\varepsilon\varepsilon} - \Delta_{\mu\varepsilon}^2 \quad (9)$$

- Αν $\det(H) > 0$ και $\Delta_{\mu\mu} > 0$ τότε το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο
- Αν $\det(H) > 0$ και $\Delta_{\varepsilon\varepsilon} < 0$ τότε το σημείο είναι τοπικό μέγιστο
- Αν $\det(H) < 0$ τότε το σημείο είναι σάγμα

Τότε προκύπτει ότι $\Delta_{\mu\mu} \Delta_{\varepsilon\varepsilon} - \Delta_{\mu\varepsilon}^2 < 0$, από τις (5), (6) και (2).

Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης, εφόσον η $\Delta(\mu, \varepsilon)$ είναι λεία, μπορούμε να την παραστήσουμε ως σειρά:

$$\delta = \Delta(\mu, \varepsilon) = \alpha\varepsilon^2 + 2\beta\varepsilon\mu + c\mu^2 + d\varepsilon^3 + e\varepsilon^2\mu + f\varepsilon\mu^2 + g\mu^3 + O(4) \quad (10)$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές της (10), χρησιμοποιούμε τις (5) και (6):

$$\begin{aligned} \alpha &= -F_{\varepsilon\varepsilon} / 2F_{\delta}, \\ \beta &= -F_{\varepsilon\mu} / 2F_{\delta}, \\ c &= -F_{\mu\mu} / 2F_{\delta}, \\ d &= -(F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} - 3F_{\varepsilon\varepsilon}F_{\varepsilon\delta} / F_{\delta}) / 3!F_{\delta}, \\ e &= -[F_{\mu\varepsilon\varepsilon} - (2F_{\varepsilon\delta}F_{\varepsilon\mu} + F_{\delta\mu}F_{\varepsilon\varepsilon}) / F_{\delta}] / 2F_{\delta}, \\ f &= -[F_{\mu\mu\varepsilon} - (2F_{\mu\delta}F_{\mu\varepsilon} + F_{\mu\mu}F_{\varepsilon\delta}) / F_{\delta}] / 2F_{\delta} \\ g &= -(F_{\mu\mu\mu} - 3F_{\mu\mu}F_{\mu\delta} / F_{\delta}) / 3!F_{\delta} \end{aligned} \quad (11)$$

Η εξίσωση (10) θα πρέπει να λυθεί ως προς $\mu(\varepsilon, \delta)$ ή ως προς $\varepsilon(\mu, \delta)$ για σταθερές τιμές του δ . Ουσιαστικά αυτές οι λύσεις είναι οι τομές της επιφάνειας $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$ και των επιφανειών $\delta = \text{const}$

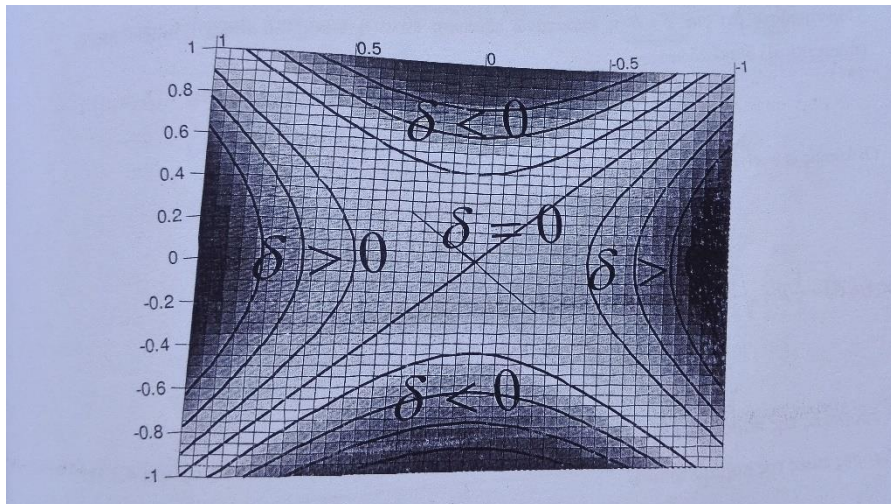
[11]

Για μικρές τιμές της παραμέτρου δ η εξίσωση (10) μπορεί να γραφτεί ως :

$$\delta = \alpha \varepsilon^2 + 2b\varepsilon\mu + c\mu^2$$

Η προβολή των καμπυλών στο επίπεδο $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$ είναι υπερβολές.

Η (12) είναι μια τετραγωνική επιφάνεια και αποτελεί χαρακτηριστική εξίσωση γενικής μορφής που εμπεριέχει σαγματικές επιφάνειες. Η προβολή της (12) στο επίπεδο (μ, ε) φαίνεται στο σχήμα:



Σχήμα10 Προβολές της (12) στο επίπεδο (μ, ε) [32]

Ευστάθεια λύσεων που σπάνε την διακλάδωση

Η διακλάδωση των απομονωμένων λύσεων της καμπύλης $\mu(\varepsilon, \delta)$ μπορεί να προσδιοριστεί από το θεώρημα της παραγοντοποίησης [11].

Διαταράσσοντας τις λύσεις $\mu = \mu(\varepsilon, \delta)$, $x = \varepsilon$ στην $\frac{dx}{dt} = F(\mu, x, \delta)$ ανάλογα του $e^{\gamma t}$, δηλαδή ως

$$x = \varepsilon + \varepsilon e^{\gamma t}$$

Προκύπτει

$$\gamma(\varepsilon) = F(\mu(\delta, \varepsilon), \varepsilon, \delta) = -\mu_\varepsilon(\delta, \varepsilon)F_\mu(\mu(\delta, \varepsilon), \varepsilon) \quad (17)$$

Έτσι :

- Οι ευσταθείς κλάδοι που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένο πρόσημο το $\mu_\varepsilon(\varepsilon, 0)$, διαταράσσονται σε ευσταθείς κλάδους που αντιστοιχούν σε $\mu_\varepsilon(\varepsilon, \delta)$ με το ίδιο πρόσημο.
- Η ευστάθεια κάθε κλάδου $\mu(\varepsilon, \delta)$ αλλάζει πρόσημο σε κάθε κανονικό σημείο καμπής (regular turning point).

2.12 Δυναμική συστημάτων σε δύο διαστάσεις και ευστάθεια λύσεων

Στα προβλήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων σε μία διάσταση, οι λύσεις αν υπάρχουν τείνουν ασυμπτωτικά σε σημεία ισορροπίας. Σε συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων μεγαλύτερης τάξης η δυναμική συμπεριφορά είναι πιο πλούσια. Συγκεκριμένα για δισδιάστατα συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι δυνατόν η δυναμική συμπεριφορά να περιλαμβάνει τόσο σημεία ισορροπίας όσο και περιοδικές ταλαντώσεις. Όταν η διάσταση είναι μεγαλύτερη – ίση του τρία τότε η δυναμική συμπεριφορά εμπλουτίζεται με χαοτικά φαινόμενα.

Ορισμός

Το σύνολο των αρχικών συνθηκών για τις οποίες οι τροχιές ενός συστήματος $x' = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ με σημείο ισορροπίας $x^* : F(x^*) = 0$, $x(t) \rightarrow x^*$ για $t \rightarrow -\infty$ λέγεται **ασταθής πολλαπλότητα** (unstable manifold) του σαγματικού σημείου ισορροπίας x^* .

Ορισμός

Το σύνολο των αρχικών συνθηκών για τις οποίες οι τροχιές ενός συστήματος $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$ ή γενικότερα $x' = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ με σημείο ισορροπίας $x^* : F(x^*) = 0$, $x(t) \rightarrow x^*$ για $t \rightarrow \infty$ λέγεται **ευσταθής πολλαπλότητα** (stable manifold) του σαγματικού σημείου ισορροπίας x^* .

Ταξινόμηση της συμπεριφοράς γραμμικών συστημάτων

Για ένα γραμμικό σύστημα $\frac{dx}{dt} = Ax$, $x = [x \ y]^T$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (1) η δυναμική συμπεριφορά εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Αυτές υπολογίζονται ως ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που δίνεται από την σχέση :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις :

A. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ Σε αυτήν την περίπτωση το σημείο ισορροπίας λέγεται ευσταθής κόμβος

B. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Σε αυτήν την περίπτωση το σημείο ισορροπίας λέγεται σαγματικό σημείο (saddle point)

Γ. $\lambda_{1,2} = r + iw$ όπου τα ιδιοδιανύσματα ικανοποιούν την σχέση $v_1 = \bar{v}_2$

Σε αυτήν την περίπτωση η γενική λύση του συστήματος (5.1) έχει τη μορφή

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Από την (18) η λύση είναι πραγματική αν $c_2 = \bar{c}_1$. Έτσι η (18) γράφεται:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{c e^{\lambda_1 t} v_1\} = \frac{1}{2} [c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \bar{c}_1 e^{\lambda_2 t} v_2]$$

Η (5.19) μπορεί να γραφεί και ως

$$x(t) = e^{rt} [\operatorname{Re}(c v_1) \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(c v_1) \sin(\omega t)]$$

Γ1. $r < 0$

Σ' αυτήν την περίπτωση το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές και η τροχιά προς αυτό είναι σπειροειδής. Το σημείο ισορροπίας ονομάζεται ευσταθής εστία (stable focus)

Γ2. $r > 0$

Σ' αυτήν την περίπτωση το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές και η τροχιά από αυτό προς είναι σπειροειδής. Το σημείο ισορροπίας ονομάζεται ασταθής εστία (unstable focus)

Γ3. $r = 0$

Σ' αυτήν την περίπτωση η λύση του συστήματος (1) σύμφωνα με την σχέση (20) είναι η ακόλουθη :

$$x(t) = c_2 \cos(\omega t) - c_1 \sin(\omega t)$$

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) - c_2 \sin(\omega t)$$

Για διαφορετικές αρχικές συνθήκες οι παραπάνω τροχιές αντιστοιχούν σε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες με κέντρο το σημείο ισορροπίας (0,0) η περίοδος των οποίων καθορίζεται από το ω . Το σημείο ισορροπίας σε αυτήν την περίπτωση ονομάζεται κέντρο (Center)

Δ. Αν $\lambda_1 = \lambda_2$ υπάρχουν δύο περιπτώσεις όσον αφορά τα ιδιοδιανύσματα:

Δ1. Η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι γεωμετρική πολλαπλότητα

- Αν $\lambda_1 \neq 0$ τότε οι τροχιές είναι ευθείες γραμμές και αναφερόμαστε σε ευσταθές αστέρι
- Αν $\lambda_1 = 0$ τότε όλο το επίπεδο είναι λύση του συστήματος

Δ2. Η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι μεγαλύτερη της γεωμετρικής πολλαπλότητας

Σε αυτήν την περίπτωση και για τις δύο ιδιοτιμές αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα και το σημείο ισορροπίας ονομάζεται εκφυλισμένος κόμβος. Παρατηρούμε ότι οι τροχιές κοντά στο σημείο ισορροπίας εφάπτονται του ιδιοδιανύσματος.

Δυναμική συμπεριφορά μη γραμμικών συστημάτων

Η διασύνδεση της δυναμικής συμπεριφοράς ενός μη- γραμμικού συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (22)$$

με αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \nabla F(x) |_{x^*}, \hat{x} = x - x^* \quad (23)$$

γύρω από ένα σημείο ισορροπίας $x^* : F(x^*) = 0$ γίνεται μέσω του θεωρήματος Hartman-Grossman:

Θεώρημα Hartman-Grossman

Το τοπικό διάγραμμα φάσεων ενός μη γραμμικού συστήματος (22) κοντά σε ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας είναι τοπολογικά ισοδύναμο με το διάγραμμα φάσης του γραμμικοποιημένου συστήματος (23).

Ορισμός υπερβολικού σημείου (hyperbolic point)

Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται υπερβολικό όταν η Ιακωβιανή του συστήματος $\nabla F(x)|_{x^*}$ δεν έχει καμία ιδιοτιμή με μηδενικό πραγματικό μέρος.

“Τοπολογικά ισοδύναμο” διάγραμμα φάσης σημαίνει ότι υπάρχει ομοιομορφισμός, δηλαδή ένας συνεχής μετασχηματισμός με συνεχή αντίστροφο, μεταξύ των διαγραμμάτων φάσης του μη-γραμμικού και του γραμμικοποιημένου συστήματος έτσι ώστε η μορφή των τροχιών και ο χρόνος στον οποίο εκδηλώνονται να διατηρούνται.

Δηλαδή αν συμβολίσουμε με P το διάγραμμα φάσης (δηλαδή το σύνολο των τροχιών φάσης γύρω από το σημείο ισορροπίας) του γραμμικού συστήματος και με Q τότε $\forall x \in P, \exists h : h(P(x)) = Q(h(x))$. Δηλαδή η h απεικονίζει κάθε τροχιά φάσης του $x \in P$ στην τροχιά $y = h(x) \in Q$.

2.13 Περιοδικές Ταλαντώσεις, Διακλάδωση οριακών κύκλων από λύσεις ισορροπίας

Ορισμός

Οι **οριακοί κύκλοι** είναι απομονωμένες κλειστές τροχιές στο διάγραμμα φάσης. Απομονωμένες είναι εκείνες οι τροχιές για τις οποίες γειτονικές τροχιές γυρίζουν σπειροειδώς είτε προς είτε μακριά από αυτές. Συγκεκριμένα μια κλειστή τροχιά φάσης O καλείται οριακός κύκλος αν $O \subset \alpha(x)$ ή του οριακού συνόλου $\omega(x)$ για κάποιο $x \notin O$.

Οι οριακοί κύκλοι αποτελούν χαρακτηριστική δυναμική συμπεριφορά των μη-γραμμικών συστημάτων και δεν μπορούν να συμβούν σε γραμμικά συστήματα. Για παράδειγμα οι τροχιές που αντιστοιχούν σε “κέντρο” δεν είναι απομονωμένες τροχιές. Το γεγονός αυτό προκύπτει από τον ορισμό των γραμμικών συστημάτων. Πράγματι, έστω το γραμμικό σύστημα $x' = Ax$ και $x(t)$ είναι μια περιοδική λύση. Τότε και η $cx(t)$ είναι και αυτή λύση του συστήματος. Συνεπώς η $x(t)$ δεν είναι

απομονωμένη κλειστή τροχιά.

Έστω το μη γραμμικό σύστημα $x' = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Ορισμός

Μια λύση $x(t)$ του συστήματος (1) λέγεται **περιοδική λύση** με περίοδο $t = T$ αν $\exists T > 0$ τέτοιο ώστε $x(t) = x(t+T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Διακλάδωση Andronov – Hopf

Είναι ο τύπος της διακλάδωσης που συνδέει κλάδους λύσεων ισορροπίας με περιοδικές ταλαντωτικές λύσεις και συγκεκριμένα με οριακούς κύκλους.

Θεώρημα Andronov – Hopf

Έστω $F \in C^2$. Αν ισχύει ότι

(α) $F(x^*, \mu^*) = 0$

(β) η Ιακωβιανή έχει ένα ζεύγος φανταστικών ιδιοτιμών $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ και καμία άλλη ιδιοτιμή με μηδενικό πραγματικό μέρος

(γ) $\frac{d \operatorname{Re}\{\lambda(\mu^*)\}}{d\mu} \neq 0$

Τότε στο σημείο ισορροπίας (x^*, μ^*) γεννιέται ένας κλάδος οριακών κύκλων με αρχική περίοδο $T_0 = \frac{2\pi}{\beta}$.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις διακλάδωσης Andronov-Hopf, η **υπερκρίσιμη** και η **υποκρίσιμη** διακλάδωση.

Υπερκρίσιμη Διακλάδωση Andronov-Hopf (supercritical bifurcation)

Η κανονική μορφή περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} dx_1 / dt &= \mu x_1 - x_2 - x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ dx_2 / dt &= x_1 + \mu x_2 - x_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (13)$$

Το σύστημα (13) έχει το σημείο ισορροπίας (0,0) για κάθε τιμή της παραμέτρου μ ενώ η Ιακωβιανή είναι η

$$A = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές της (14) είναι $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$

Για την ανάλυσή μας εισάγουμε την μιγαδική μεταβλητή

$$z = x_1 + ix_2 \quad (15)$$

Από την (15) έχουμε $\bar{z} = x_1 - ix_2$ και $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$

Τότε παραγωγίζοντας την z ως προς τον χρόνο έχουμε

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + i \frac{dx_2}{dt} = \mu(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2) \quad (16)$$

Δηλαδή το σύστημα (13) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{dz}{dt} = (\mu + i)z - z|z|^2 \quad (17)$$

Θέτοντας $z = \rho e^{i\varphi}$ η (17) γίνεται

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\rho}{dt} e^{i\varphi} + \rho i \frac{d\varphi}{dt} e^{i\varphi} \quad (19)$$

Από την (19) έχουμε

$$\frac{d\rho}{dt} e^{i\varphi} + \rho i \frac{d\varphi}{dt} e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi} (\mu + i - \rho^2) \quad (20)$$

Εν τέλει από την (20) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho(\mu - \rho^2) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος (21) υποδηλώνει περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Το σύστημα (21) έχει δύο σημεία ισορροπίας: $\rho_1 = 0$ και $\rho_2 = \sqrt{\mu}$, $\mu > 0$. Το σημείο ισορροπίας $\rho_2 = \sqrt{\mu}$, $\mu > 0$ είναι ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Για το σημείο ισορροπίας $\rho_1 = 0$ διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το πρόσημο της παραμέτρου μ :

- 1) $\mu < 0$. Σε αυτήν την περίπτωση το σημείο ισορροπίας είναι μια ευσταθής εστία (stable focus).
- 2) $\mu = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση το σημείο ισορροπίας είναι μια μη γραμικά ευσταθής εστία (stable focus).
- 3) $\mu > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση το σημείο ισορροπίας είναι μια ασταθής εστία (unstable focus).

Εδώ εμφανίζεται ένας ευσταθής οριακός κύκλος για $\mu > 0$

Υποκρίσιμη Διακλάδωση Andronov-Hopf (subcritical bifurcation)

Η κανονική μορφή της υποκρίσιμης διακλάδωσης Hopf περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \mu x_1 - x_2 + x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + \mu x_2 + x_2 (x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}\quad (22)$$

Κατά ανάλογο τρόπο με τα προηγούμενα καταλήγουμε στη μιγαδική εξίσωση

$$\frac{dz}{dt} = (\mu + i)z + z |z|^2 \quad (23)$$

Εδώ υπάρχει ένας ασταθής οριακός κύκλος που εξαφανίζεται για $\mu > 0$. Το σημείο ισορροπίας $\rho = 0$ έχει την ίδια ευστάθεια με την υπερκρίσιμη περίπτωση για $\mu \neq 0$.

Ένα ενδεικτικό παράδειγμα προβλήματος που παρουσιάζει διακλάδωση Andronov-Hopf είναι οι **εξισώσεις Lorenz** οι οποίες έχουν τη μορφή

$$x_1' = P(x_2 - x_1) \quad (39a)$$

$$x_2' = -x_1 x_3 + R x_1 - x_2 \quad (39b)$$

$$x_3' = x_1 x_2 - b x_3 \quad (39c)$$

Μας ενδιαφέρει για ποια τιμή της παραμέτρου R παρουσιάζεται διακλάδωση Andronov-Hopf.

Οι λύσεις ισορροπίας προκύπτουν για $x_1' = x_2' = x_3' = 0$

Επομένως, από τις εξισώσεις Lorenz, προκύπτει ότι $x_1 = x_2$ από την (39a), $x_3 = \frac{x_1 x_2}{b}$ από την (39c)

και από την (39b) έχουμε $x_1 = 0$ ή $x_1 = \pm \sqrt{(bR - b)} = S$

Έτσι $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0, \forall R, (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\pm S, \pm S, R - 1), R \geq 1$

Στον κλάδο λύσεων $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$ υπάρχει μια διακλάδωση για $R = 1$. Η Ιακωβιανή για τα μη μηδενικά σημεία ισορροπίας είναι

$$A = \begin{bmatrix} -P & P & 0 \\ -x_3 + R & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{bmatrix} \quad (40)$$

Οι ιδιοτιμές της (40) προκύπτουν ως ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2(P + 1 + b) - \lambda(b + bP + S^2) - 2S^2 P = 0 \quad (41)$$

Αν υπάρχει διακλάδωση Andronov-Hopf το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα έχει ακριβώς στο σημείο αυτό δύο φανταστικές ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ και μια πραγματική έστω $\lambda = -\alpha$.

Δηλαδή η (41) θα μπορεί να γραφεί ως

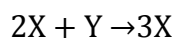
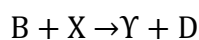
$$\pm(\lambda^2 + \beta^2)(\lambda + \alpha) = 0$$

Από τις (41), (42) προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \alpha &= P + 1 + b \\ \beta^2 &= b + bP + S^2 \\ \beta^2\alpha &= 2S^2P \end{aligned} \quad (43)$$

$$\text{Αντικαθιστώντας παίρνουμε τελικά } R^* = 1 + \frac{(1+b+P)(1+P)}{(P-b-1)} \quad (44)$$

Ένα παράδειγμα άλλο παράδειγμα είναι το μοντέλο των Lefever και Nicolis [20] με εφαρμογές σε βιολογικά και χημικά συστήματα που έχει ταλαντωτική συμπεριφορά. Οι χημικές αντιδράσεις είναι :



Οι κινητικές εξισώσεις για την συγκέντρωση των X,Y είναι

$$X' = \alpha - (b+1)X + X^2Y$$

$$Y' = bX - X^2Y$$

Το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $(X^*, Y^*) = (\alpha \frac{b}{a})$ και η Ιακωβιανή είναι η

$$J = \begin{bmatrix} 2XY - b - 1 & X^2 \\ b - 2XY & -X^2 \end{bmatrix} \Big|_{(X^*, Y^*)} = \begin{bmatrix} b - 1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Η ορίζουσα της (32) είναι $\det(J) = \alpha^2$. Άρα η ευστάθεια εξαρτάται από το ίχνος της Ιακωβιανής.

Έτσι το $(X^*, Y^*) = (\alpha \frac{b}{a})$ είναι ευσταθές για $\alpha^2 + 1 > b$ και ασταθές για $\alpha^2 + 1 < b$.

Θέτοντας $x_1 = X - \alpha$ και $x_2 = Y - \frac{b}{a}$ το σύστημα (31) γίνεται

$$x_1' = (b-1)x_1 + \alpha^2 x_2 + 2\alpha x_1 x_2 + \frac{b}{a} x_1^2 + x_1^2 x_2$$

$$x_2' = -bx_1 - \alpha^2 x_2 - 2\alpha x_1 x_2 - \frac{b}{a} x_1^2 - x_1^2 x_2$$

Οι ιδιοτιμές είναι της μορφής

$$\lambda_{1,2} = c + bi \text{ όπου } c = \frac{1}{2}(b - \alpha^2 - 1) \text{ για } (\alpha - 1)^2 < b < (\alpha + 1)^2$$

Έτσι υπάρχει μια διακλάδωση Andronov – Hopf στο $b = \alpha^2 + 1$ όπου

$$\frac{d}{db} \left[\frac{1}{2} (b - \alpha^2 - 1) \right] = \frac{1}{2} > 0$$

Στο συγκεκριμένο μοντέλο, γνωστό και ως *brusselator*, επανερχόμαστε σε επόμενο κεφάλαιο, και το μελετάμε κάνοντας χρήση του *CL_MATCONT*.

Κεφάλαιο 3

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων με χρήση αριθμητικής μεθόδου-επαναληπτικού αλγορίθμου

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στη χρήση της αριθμητικής μεθόδου Newton για την επίλυση συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής $F(U) = 0$, $F : R^n \rightarrow R^n$. Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε μια τροποποίηση της μεθόδου Newton, την **μέθοδο συνέχισης μήκους τόξου** όπου το βασικό της πλεονέκτημα είναι πως τα περισσότερα ιδιάζοντα σημεία στους κλάδους των λύσεων μπορούν να γίνουν διαχειρίσιμα με ευκολία.

3.1 Επαναληπτική μέθοδος Newton

Δοθέντος τιμής λ και αρχικής τυχαίας συνθήκης u_0 για τη λύση $u(\lambda)$ επαναλαμβάνουμε τα παρακάτω βήματα έως ότου $\| \delta u^i \| < \epsilon$ ικανοποιείται :

$$\begin{aligned} G_u^i \delta u^i &= -G(u^i, \lambda) \\ u^{i+1} &= u^i + \delta u^i \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου G_u υποδηλώνει την Ιακωβιανή του G ως προς u .

Η διαδικασία αυτή συγκλίνει, εκτός από την περίπτωση όπου επιλέξουμε μία αρχική συνθήκη που δεν είναι κοντά στην πραγματική λύση.

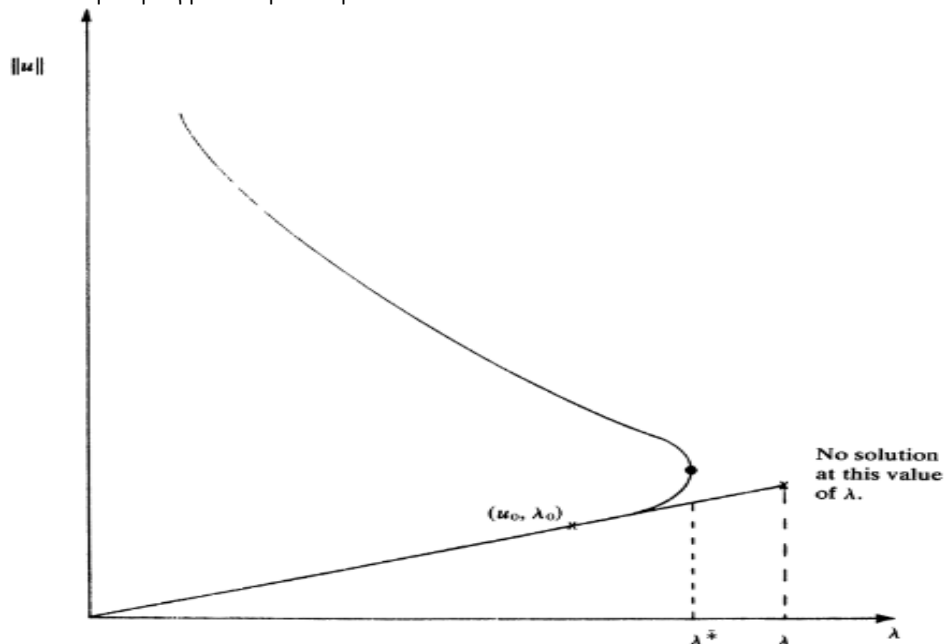


FIG. 2.2. Failure of natural continuation near limit points.

Σχήμα_α_[30]

Για να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο στην σύγκλιση, καθώς και για να καθορίσουμε την εξάρτηση του u από το λ , ξεκινάμε από γνωστή λύση (u_0, λ_0) στην καμπύλη της λύσης και τη χρησιμοποιούμε

ως αρχική συνθήκη για την επαναληπτική μέθοδο Newton ώστε να βρούμε τη λύση για ένα γειτονικό σημείο της καμπύλης της λύσης με λ κοντά στο λ_0 , και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται. Μπορούμε επιπλέον να υπολογίζουμε την παράγωγο u_λ σε μια γνωστή λύση και να τη χρησιμοποιούμε ώστε να κάνουμε μια καλύτερη επιλογή για την επόμενη τιμή της λ με μια μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης. Αυτή τη μέθοδο την ονομάζουμε διαδικασία φυσικής συνέχισης (natural continuation procedure) διότι παραμετροποιεί την καμπύλη της λύσης συναρτήσει του λ , τη φυσική παράμετρο. Μια συγκεκριμένη μορφή αυτής της μεθόδου είναι η μέθοδος Euler-Newton. Δοθέντος γνωστής λύσης (u_0, λ_0) υπολογίζουμε τις λύσεις κοντά στο λ ως εξής:

1. Υπολογίζουμε την παράγωγο u_λ στο (u_0, λ_0) από τον τύπο

$$G_u u_\lambda = -G_\lambda$$

2. Βρίσκουμε ένα βήμα Euler με τη μέθοδο της πρόβλεψης

$$u^0 = u_0 + u_\lambda (\lambda - \lambda_0)$$

3. Χρησιμοποιούμε u^0 ως αρχική συνθήκη στη μέθοδο Newton

$$G_u^i (u^{i+1} - u^i) = -G(u^i, \lambda)$$

Εωσότου συγκλίνει.

4. Χρησιμοποιούμε το σημείο $(u(\lambda), \lambda)$ ως καινούρια αρχική τιμή και επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Η διαδικασία αυτή χρειάζεται κάποια τροποποίηση ώστε να υλοποιείται γενικά σε μη γραμμικά συστήματα λόγω της πιθανότητας να υπάρχει πολλαπλότητα στις λύσεις (nonunique solutions).

Η πολλαπλότητα συνήθως γίνεται αντιληπτή λόγω της παρουσίας ιδιάζοντων σημείων, όπου η Ιακωβιανή G_u είναι μη ομαλή. Επιπλέον, για σημεία καμπής ισχύει η συνθήκη $G_\lambda \notin \text{Range}(G_u)$ και για σημεία διακλάδωσης ισχύει $G_\lambda \in \text{Range}(G_u)$.

Η μέθοδος που περιγράψαμε δεν μπορεί να εφαρμοστεί στα ιδιάζοντα σημεία για τρεις λόγους.

Καταρχάς, εφόσον η Ιακωβιανή G_u είναι μη ομαλή σε αυτά τα σημεία, η μέθοδος Newton θα συγκλίνει στην καλύτερη περίπτωση γραμμικά, κάνοντας απαγορευτικά χρονοβόρο τον υπολογισμό της λύσης. Επιπλέον, κοντά σε ένα σημείο καμπής πιθανόν να μην υπάρχει λύση για δοσμένη τιμή το λ (βλ. σχήμα α) και ως αποτέλεσμα αυτού η μέθοδος δεν θα συγκλίνει σε λύση. Τέλος, χρειαζόμαστε ένα μηχανισμό ώστε να αλλάζουμε κλάδους στα σημεία διακλάδωσης [30].



Σχήμα_β_[30]

3.2 Μέθοδος συνέχισης μήκους τόξου (arc-length continuation method)

Για να ξεπεράσουμε αυτές τις δυσκολίες, στη μέθοδο ψευδο-συνέχισης μήκους τόξου (pseudo-arclength continuation) χρησιμοποιούμε μία νέα παράμετρο s , και εκφράζουμε τη λύση (u, λ) συναρτήσει της s , $(u(s), \lambda(s))$, και προσδιορίζουμε πόσο μακριά κατά μήκος του κλάδου της λύσης θέλουμε να φτάσουμε.

Συγκεκριμένα, έστω s η παράμετρος της μεθόδου και $u(s), \lambda(s)$ συναρτήσεις του s . Μπορούμε να υπολογίσουμε το εφαπτόμενο $[\dot{u}(s_0), \dot{\lambda}(s_0)]$, όπου οι τελείες υποδηλώνουν παραγώγιση ως προς s , ως γνωστή λύση στο $s=s_0$ από τις ακόλουθες δύο εξισώσεις:

$$G_u \dot{u}_0 + \dot{\lambda}_0 G_\lambda = 0 \quad (3.2)$$

$$\|\dot{u}_0\|^2 + |\dot{\lambda}_0| - 1 = 0 \quad (3.3)$$

Η εξίσωση (3.2) προκύπτει παραγωγίζοντας την $G(u, \lambda) = 0$ ως προς s και η (3.3) προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα που ισχύει για μήκος τόξου:

$$(A\Gamma) \approx (A\Delta) = |\delta s| \quad \text{άρα} \quad \|\delta \vec{u}\|^2 + |\delta \lambda|^2 = |\delta s|^2 \Leftrightarrow \left\| \frac{\delta \vec{u}}{\delta s} \right\|^2 + \left| \frac{\delta \lambda}{\delta s} \right| = 1 \Leftrightarrow \|\dot{u}_0\|^2 + |\dot{\lambda}_0| - 1 = 0$$

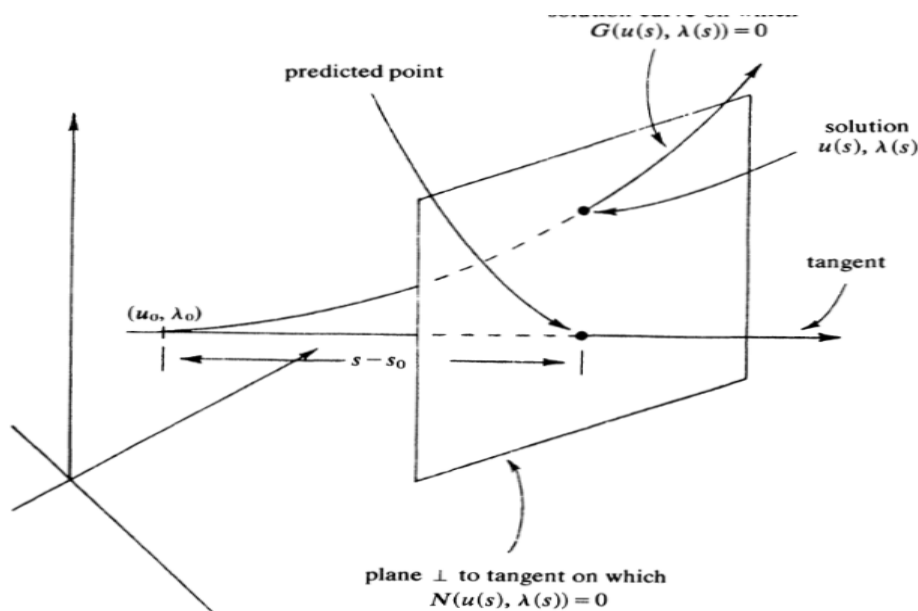


FIG. 2.3. Pseudo arc-length continuation.

Σχήμα_γ_[30]

Στην μέθοδο ψευδο-συνέχισης μήκους τόξου, περνάμε από το s_0 στο s κατά μήκος της εφαπτομένης και πρέπει η νέα λύση να ικανοποιεί την σχέση του υπερεπιπέδου N

$$N(u(s), \lambda(s)) = \dot{u}_0^T (u(s) - u(s_0)) + \dot{\lambda}_0 (\lambda(s) - \lambda(s_0)) - (s - s_0) = 0 \quad (3.4)$$

Φυσικά, η λύση $(u(s), \lambda(s))$ θα ικανοποιεί και την συνάρτηση της καμπύλης της λύσης $G(u(s), \lambda(s)) = 0$ (3.5)

Η εξίσωση (3.4) προκύπτει από τη γραμμικοποίηση της (3.3) και την συνθήκη ότι η $(u(s), \lambda(s))$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση του υπερεπιπέδου που σχηματίζεται κάθετα στην εφαπτόμενη της καμπύλης στη λύση (u_0, λ_0) στο s_0 και σε απόσταση $(s - s_0)$ από την (u_0, λ_0) (βλ σχήμα γ).

Η εξίσωση (3.5) επιβάλλει τα $u(s)$ και $\lambda(s)$ να ανήκουν στην καμπύλη της πραγματικής λύσης. Έπειτα λύνουμε το σύστημα (3.4) και (3.5) για τα $u(s)$ και $\lambda(s)$, δοθέντος του βήματος $(s - s_0)$. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Newton όπου πρέπει να λύνουμε το παρακάτω σύστημα σε κάθε επανάληψη:

$$\begin{bmatrix} G_u & G_\lambda \\ N_u^T & N_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G \\ N \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Αποδεικνύεται ότι τα σημεία καμπής, όπου G_u είναι μη ομαλή (ιδιάζουσα) και επιπλέον ισχύει $G_\lambda \notin \text{Range}(G_u)$ το γραμμικό σύστημα (3.6) είναι ομαλό (μη ιδιάζον) και έτσι η μέθοδος Newton για το σύστημα (3.4) και (3.5) είναι καλά ορισμένη. Στα σημεία διακλάδωσης, όπου G_u μη ομαλή (ιδιάζουσα) και $G_\lambda \in \text{Range}(G_u)$, τα πράγματα περιπλέκονται. Στην απλούστερη περίπτωση όπου έχουμε έναν κλάδο στο σημείο διακλάδωσης, πρέπει να προσδιοριστεί μία συνθήκη μεγαλύτερης τάξης που περιέχει τις G_{uu} , $G_{u\lambda}$ και $G_{\lambda\lambda}$. Αποδεικνύεται πως αυτή η συνθήκη μαζί με τις συνθήκες (3.2) και (3.3) και τους μηδενικούς δείκτες στα αριστερά και δεξιά της G_u υπολογίζει δύο λύσεις για $(\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0)$ σε ένα απλό σημείο διακλάδωσης, όπου κάθε λύση αντιστοιχεί σε ένα κλάδο [24]. Χρησιμοποιώντας το κατάλληλο ζεύγος $(\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0)$ στη σχέση (3.4) επιτρέπει στους κλάδους να αλλάζουν.

Συνήθως η G_u έχει αραιή δομή, η οποία προκύπτει από τα μη γραμμικά ελλειπτικά προβλήματα ιδιοτιμών. Εκμεταλλευόμενος αυτό το πλεονέκτημα στη δομή της G_u , ο Keller [21] πρότεινε την παρακάτω διαδικασία:

Λύνουμε τη σχέση

$$G_u y = G_\lambda \quad (3.7)$$

και

$$G_u z = -G \quad (3.8)$$

Θέτουμε

$$\delta\lambda = (-N_u^T z - N) / (N_\lambda - N_u^T y) \quad (3.9)$$

και

$$\delta u = z - \delta\lambda y \quad (3.10)$$

Επομένως έχουμε να λύσουμε μόνο συστήματα με τον πίνακα συντελεστών G_u , επομένως η δομή του G_u μπορεί να αξιοποιηθεί. Επιπλέον μόνο μια παραγοντοποίηση του G_u χρειάζεται. Έχει αποδειχθεί πως ακόμη κι όταν ο G_u είναι ιδιάζον, ο παραπάνω αλγόριθμος κάνει επαναλήψεις οι οποίες συγκλίνουν τετραγωνικά στα οριακά σημεία (σημεία καμπής) [12].

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική συνέχιση με χρήση CL_Matcont

4.1 Αλγόριθμος Αριθμητικής συνέχισης (numerical continuation algorithm)

Το CL_MATCONT υλοποιεί μια υπολογιστική (continuation) μέθοδο η οποία είναι διαφορετική σε σχέση με την pseudo-arclength continuation.

Moore-Penrose continuation

Ορισμός

Εστω A ένας $N \times (N+1)$ πίνακας με μέγιστο βαθμό. Τότε ο Moore-Penrose αντίστροφος πίνακας του A ορίζεται ως $A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$.

Έστω, λοιπόν, A ένας $N \times (N+1)$ πίνακας με μέγιστο βαθμό. Υποθέτουμε το παραπάνω γραμμικό σύστημα με $x, u \in \mathbb{R}^{N+1}$, $b \in \mathbb{R}^N$:

$$Ax = b$$

$$u^T x = 0$$

όπου x είναι ένα σημείο της καμπύλης και u είναι το εφαπτόμενο διάνυσμά του, σεβόμενοι τον A , δηλαδή, $Au = 0$. Εφόσον ισχύει ότι $AA^+b = b$ και $u^T A^+b = \langle Au, (AA^T)^{-1}b \rangle = 0$ μια λύση του συστήματος είναι η $x = A^+b$.

Υποθέτουμε ότι έχουμε προβλέψει ένα σημείο X^0 χρησιμοποιώντας την (3.1). Θέλουμε να βρούμε το σημείο x της καμπύλης που είναι το πλησιέστερο στο X^0 , δηλαδή θα λύσουμε το βελτιστοποιημένο πρόβλημα:

$$\min_x \{ \|x - X^0\| \mid F(x) = 0 \} \quad (4.1)$$

Έτσι το σύστημα που πρέπει να λύσουμε είναι:

$$F(x) = 0$$

$$w^T(x - X^0) = 0 \quad (4.2)$$

όπου το w είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο x .

Στη μέθοδο Newton το παραπάνω σύστημα λύνεται χρησιμοποιώντας μια γραμμικοποίηση του X^0 .

Η σειρά Taylor για το X^0 :

$$F(x) = F(X^0) + F_x(X^0)(x - X^0) + O(\|x - X^0\|^2) \quad (4.3)$$

$$w^T(x - X^0) = u^T(x - X^0) + O(\|x - X^0\|^2) \quad (4.4)$$

Έτσι, όταν παραλείψουμε τους όρους ανώτερης τάξης παίρνουμε λύση του συστήματος

$$x = X^0 - F_x^{-1}(X^0)F(X^0) \quad (4.5)$$

Παρότι, το μηδενικό διάνυσμα του $F_x(X^0)$ δεν είναι γνωστό, μπορούμε να το προσεγγίσουμε από το $V^0 = u_i$, το εφαπτόμενο διάνυσμα του x_i . Γεωμετρικά αυτό σημαίνει πως λύνουμε την $F(x)=0$ σε ένα υπερεπίπεδο κάθετο στο προηγούμενο εφαπτόμενο διάνυσμα.

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $g(x)$ γίνεται :

$$g_k(x) = \langle x - X^k, V^k \rangle \quad (4.6)$$

όπου $F_x(X^{k-1})V^k = 0$ για $k=1,2,\dots$. Έτσι η επαναληπτική μέθοδος Newton είναι:

$$X^{k+1} = X^k - H_x^{-1}(X^k, V^k)H(X^k, V^k) \quad (4.7)$$

$$V^{k+1} = V^k - H_x^{-1}(X^k, V^k)R(X^k, V^k) \quad (4.8)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε πως, υπό τις ίδιες συνθήκες όπως στην ψευδο-συνέχιση τόξου (pseudo-arclength continuation), η επαναληπτική μέθοδος Newton (4.7) και (4.8) συγκλίνει σε ένα σημείο της καμπύλης $x_{(i+1)}$ και το αντίστοιχο $u_{(i+1)}$ εφαπτόμενο διάνυσμα, αντίστοιχα.

Στην ψευδο-συνέχιση τόξου, πρέπει να υπολογίσουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα κάθε φορά που βρίσκουμε ένα καινούργιο σημείο. Στην περίπτωσή μας, έχουμε ήδη υπολογίσει τα εφαπτόμενα διανύσματα v^k σε κάθε επανάληψη (4.8), έτσι το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να κανονικοποιήσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα.

Έλεγχος μεγέθους βήματος

Ο έλεγχος του μεγέθους του βήματος είναι σημαντικός για τον αλγόριθμό μας. Πολύ μικρά βήματα οδηγούν στο να κάνουμε περιττούς υπολογισμούς, τους οποίους θα μπορούσαμε να αποφύγουμε, και από την άλλη πολύ μεγάλα βήματα μπορεί να οδηγήσουν στο να "χάσουμε" πληροφορίες για την καμπύλη μας.

Μια εύχρηστη και αξιόπιστη μέθοδος είναι ο εξαρτημένος-συγκλίνον έλεγχος.

Υποθέτουμε πως για τον υπολογισμό του επόμενου σημείου χρησιμοποιούμε βήμα h_i . Αν ο υπολογισμός συγκλίνει, θέτω n τον αριθμό των Newton επαναλήψεων που χρειάζονται. Τότε το νέο βήμα $h_{(i+1)}$ θα επιλεχθεί ως εξής:

$$h_{i+1} = \begin{cases} h_i h_{dec} & \text{αν δεν συγκλίνει} \\ h_i h_{inc} & \text{αν συγκλίνει και } n < n_{thr} \\ h_i & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου $h_{dec} < 1$, $h_{inc} > 1$ και n_{thr} είναι σταθερά, τα οποία είναι πειραματικά αποδεδειγμένα.

Μελέτη ιδιάζοντων σημείων - Συναρτήσεις ελέγχου

Η ιδέα να ανιχνεύσουμε πότε αλλάζει η ευστάθεια στο σύστημά μας είναι να ορίσουμε λείες κλιμακωτές συναρτήσεις τις οποίες ικανοποιούν τα ιδιάζοντα σημεία. Αυτές οι συναρτήσεις λέγονται συναρτήσεις ελέγχου (test functions). Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ιδιάζον σημείο S το οποίο ανιχνεύεται από μια συνάρτηση ελέγχου

$$\varphi(x_i)\varphi(x_{i+1}) < 0.$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι έχουμε δύο διαδοχικά σημεία x_i και x_{i+1} στην καμπύλη

$$F(x)=0 \quad F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Το ιδιάζον σημείο S θα ανιχνευτεί αν

$$\varphi(x_i)\varphi(x_{i+1}) < 0$$

Έχοντας βρει δύο διαδοχικά σημεία x_i, x_{i+1} μπορούμε να προσδιορίσουμε το σημείο x^* για το οποίο $\varphi(x)$ εξαφανίζεται. Γι αυτό λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$F(x)=0$$

$$\varphi(x)=0$$

χρησιμοποιώντας επαναληπτική μέθοδο Newton ξεκινώντας από το x_i . Παρόλαυτά για να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο, πρέπει να μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους της $\varphi(x)$ ως προς το x , το οποίο δεν είναι πάντα εύκολο. Για να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία δηλώνουμε στο default μια επαναληπτική μέθοδο secant μιας διάστασης για να προσδιορίσουμε το $\varphi(x)=0$ κατά μήκος της καμπύλης. Να επιστήσουμε την προσοχή στο ότι αυτή η διαδικασία εμπεριέχει διορθώσεις Newton σε κάθε ενδιαμέσο σημείο.

Πολλαπλές συναρτήσεις ελέγχου

Τα παραπάνω είναι ένας γενικός τρόπος να εντοπίσουμε ιδιάζοντα σημεία βασιζόμενοι σε μια συνάρτηση ελέγχου. Παρόλαυτά, πιθανόν να μην είναι δυνατό να αντιπροσωπευτεί ένα ιδιάζον σημείο από μια μόνο συνάρτηση ελέγχου.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ιδιάζον σημείο S το οποίο εξαρτάται από n_t συναρτήσεις. Έστω, επίσης, δύο διαδοχικά σημεία x_i και $x_{(i+1)}$ και όλες οι n_t συναρτήσεις αλλάζουν πρόσημο:

$$\text{για κάθε } j \in [1, n_t]: \varphi_j(x_i)\varphi_j(x_{i+1}) < 0$$

Έστω, ακόμη, πως έχουμε βρει όλες τις λύσεις x_j^* των συναρτήσεων ελέγχου, με τη μέθοδο secant σε μια διάσταση. Στην ιδανική περίπτωση, όλες αυτές οι λύσεις θα συμπίπτουν με:

$$\text{για κάθε } j \in [1, n_t]: x^* = x_j^* \text{ και } \varphi_j(x_j^*) = 0$$

Εφόσον, η συνέχιση δεν είναι ακριβής αλλά αριθμητική, δεν μπορούμε να το υποθέσουμε αυτό. Παρόλαυτά, τα x_j^* πιθανόν να είναι σημεία συσσώρευσης γύρω από ένα x^c . Σε αυτήν την περίπτωση θα “κολλήσουμε” τα x_j^* στο $x^* = x^c$.

Έτσι, θα ανιχνεύσουμε μια κλάση αν για κάθε $i, j \in [1, n_t]: \|x^* - x_j^*\| \leq \epsilon$ για μικρές τιμές του ϵ . Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε ως το μέσο όρο των λύσεων

$$x^* = \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} x_j^*$$

Πίνακας ιδιάζοντων σημείων

Ως τώρα συζητήσαμε για ιδιάζοντα σημεία που εξαρτώνται από συναρτήσεις ελέγχου που εξαφανίζονται. Υποθέτουμε πως έχουμε δύο ιδιάζοντα σημεία S_1 και S_2 , τα οποία εξαρτώνται από τις συναρτήσεις ελέγχου φ_1 και φ_2 , αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε πως η φ_1 εξαφανίζεται και για το S_1 και για το S_2 , ενώ η φ_2 εξαφανίζεται μόνο για το S_2 . Γι αυτό χρειαζόμαστε μια πιθανότητα να εκφράσουμε

τα ιδιάζοντα σημεία χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση ελέγχου που δεν εξαφανίζεται. Για να εκφράσουμε όλα τα ιδιάζοντα σημεία θα χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα, που θα εκφράζει τη σχέση μεταξύ όλων των ιδιάζοντων σημείων και των συναρτήσεων ελέγχου. Ας υποθέσουμε πως ψάχνουμε n_s ιδιάζοντα σημεία και n_t συναρτήσεις ελέγχου, οι οποίες είναι αναγκαίες για να εξετάσουμε τα ιδιάζοντα σημεία. Γι αυτό το σκοπό ορίζουμε S [14] έναν πίνακα $n_s \times n_t$, ως εξής:

$$S_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{singularity } i : \text{εξαφανίζεται η συνάρτηση ελέγχου } j \\ 1 & \text{singularity } i : \text{δεν εξαφανίζεται η συνάρτηση ελέγχου } j \\ \text{διαφορετικά} & \text{singularity } i : \text{αγνοούμε τη συνάρτηση ελέγχου } j \end{cases}$$

4.2 Αριθμητική συνέχιση της λύσης ισορροπίας (equilibrium continuation)

Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε πως προσεγγίζουμε (continue) μια λύση ισορροπίας μιας διαφορικής εξίσωσης που είναι ορισμένη σε ένα σταθερό ODE αρχείο του MATLAB. Σκοπός μας είναι να ανιχνεύσουμε τα ιδιάζοντα σημεία κατά μήκος της καμπύλης.

Μαθηματικός ορισμός

Θεωρούμε μια διαφορική εξίσωση

$$\frac{du}{dt} = f(u, a), \quad u \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R} \quad f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Για να βρούμε την καμπύλη της λύσης ισορροπίας (equilibrium curve), δηλαδή $f(u, a) = 0$, ορίζουμε $F(x) = f(u, a) = 0$ με $x = (u, a) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Ακόμη, ορίζουμε $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη ισορροπίας στο x .

Διακλαδώσεις

Σε χρονο-συνεχή συστήματα μπορούμε να εντοπίσουμε:

- Διακλάδωση αναδίπλωσης (fold bifurcation) / οριακά σημεία (limit point (LP))
- Σημεία Hopf (Hopf-point (H))

Η καμπύλη ισορροπίας μπορεί να έχει και σημεία διακλάδωσης (branch points (BP)). Για να ανιχνεύσουμε αυτά τα ιδιάζοντα σημεία, θα ορίσουμε τρεις συναρτήσεις ελέγχου:

$$\varphi_1(u, a) = \det \begin{pmatrix} F_x \\ u^T \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$\varphi_2(u, a) = \left(\begin{bmatrix} 2f_u(u, a) \odot I_n & w_1 \\ u_1^T & d \end{bmatrix} \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (4.10)$$

$$\varphi_3(u, a) = u_{n+1} \quad (4.11)$$

όπου \odot είναι το αποτέλεσμα του διενναλλακτικού πίνακα (bialternate matrix) και u_1, w_1 είναι $n(n-1)/2$ διανύσματα επιλεγμένα ώστε ο τετραγωνικός πίνακας στην (4.10) να είναι μη ιδιάζον.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις συναρτήσεις μπορούμε να ορίσουμε τα ιδιάζοντα σημεία:

- BP : $\varphi_1 = 0$
- H : $\varphi_2 = 0$
- LP : $\varphi_3 = 0, \varphi_1 \neq 0$

Σημειώνουμε ότι $\varphi_2 = 0$ έχουμε όχι μόνο για σημείο Hopf αλλά και για ουδέτερο σάγμα (*neutral saddles*), δηλαδή σημεία όπου f_x έχει δύο πραγματικά ιδιοδιανύσματα με άθροισμα ίσο με το 0. Έτσι, παίρνουμε τον πίνακα ιδιάζοντων σημείων.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & - \\ 1 & - & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Για κάθε οριακό σημείο (limit point), η κανονική μορφή του τετραγωνικού συντελεστή υπολογίζεται ως εξής:

$$\alpha = \frac{1}{2} p^T f_{uu}[q, q] \quad (4.13)$$

όπου $f_u q = f_{uq}^T = 0$, $q^T q = 1$, $p^T q = 1$. Σε ένα σημείο διακλάδωσης τύπου Hopf, ο πρώτος συντελεστής Lyapunov υπολογίζεται από τη σχέση

$$l_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p^T (f_{uuu}[q, q, \bar{q}] - 2f_{uu}[q, F_u^{-1} f_{uu}[q, \bar{q}]] + f_{uu}[\bar{q}, (2i\omega I_n - f_u)^{-1} f_{uu}[q, q]]) \} \quad (4.14)$$

όπου $f_u q = i\omega q$, $q^T q = 1$, $f_u^T p = -i\omega p$, $p^T q = 1$.

Παρότι οι συντεταγμένες των οριακών σημείων και των σημείων Hopf εντοπίζονται εύκολα, τα σημεία διακλάδωσης (branch points) πολλές φορές δεν εντοπίζονται εξίσου εύκολα [1]. Αυτή η δυσκολία μπορεί να ξεπεραστεί επειδή αν υποθέσουμε $p \in \mathbb{R}^n$ και $\beta \in \mathbb{R}$ και θέτουμε το σύστημα (extended system):

$$\begin{aligned} f(u, \alpha) + \beta p &= 0 \\ f_u^T(u, \alpha) p &= 0 \\ p^T f_\alpha(u, \alpha) &= 0 \\ p^T p - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Λύνουμε αυτό το σύστημα με τη μέθοδο Newton με αρχική συνθήκη $\beta = 0$ και $p : f_u^T p = \mu p$ όπου μ είναι οι πραγματικές ιδιοτιμές με μικρότερη νόρμα. Ένα σημείο διακλάδωσης (u, α) ικανοποιεί την λύση $(u, \alpha, 0, p)$ του συστήματος (4.15) [3]. Σημειώνουμε πως η δεύτερη χωρική παράγωγος (Hessian) της f ως προς το u και το α είναι αναγκαία [7].

Κεφάλαιο 5

Παραδείγματα αριθμητικής συνέχισης με χρήση MATCONT

5.1 Χρήση MATCONT για αριθμητική ολοκλήρωση ΣΔΕ

ΤΟ ΧΑΟΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ROSSLER (THE ROSSLER CHAOTIC SYSTEM)

Ο ελκυστής Rössler είναι ο ελκυστής για ένα σύστημα τριών μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων που αρχικά μελετήθηκε από τον Otto Rössler.

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + Ay$$

$$\frac{dz}{dt} = Bx - Cz + xz$$

Αυτές οι διαφορικές εξισώσεις ορίζουν ένα συνεχές δυναμικό σύστημα στο χρόνο που εμφανίζει χαοτική δυναμική.

Χρήση του MATCONT για τη μελέτη των λύσεων του συστήματος

Για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς μη-γραμμικών συστημάτων (μελέτη ευστάθειας, κατασκευή διαγραμμάτων διακλάδωσης) χρησιμοποιούμε το λογισμικό MATCONT [6][10][16].

Ξεκινάμε ορίζοντας το σύστημα, με όνομα Rössler, με συντεταγμένες X,Y,Z, παραμέτρους AA,BB,CC και χρόνο t (default), και επιλέγουμε συμβολική αναπαράσταση της παραγώγου πρώτης τάξης.

Σημειώνουμε, πως η παράγωγος πρώτης τάξης χρησιμοποιείται σε κάποιους αλγόριθμους ολοκλήρωσης, οι παράγωγοι πρώτης και δευτέρας τάξης χρησιμοποιούνται στην συνέχιση (continuation), και τέλος η παράγωγος τρίτης τάξης εφαρμόζεται σε υπολογισμούς κανονικής μορφής (normal form continuations).

Επομένως, το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$X' = -Y - Z$$

$$Y' = X + AA*Y$$

$$Z' = BB*X - CC*Z + X*Z$$

Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε αριθμητικά το σύστημα, δηλαδή να λύσουμε αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών τιμών για το σύστημα. Πρέπει να συγκεκριμενοποιήσουμε το είδος της λύσης και τον τύπο της καμπύλης που θέλουμε να υπολογίσουμε. Για την επιλογή του είδους της λύσης Type\Initial point\Point, πράγμα που σημαίνει πως η λύση μας δεν έχει κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Για την επιλογή του τύπου της καμπύλης Type\Curve\Orbit

Θέτουμε τα δεδομένα για την αριθμητική ολοκλήρωση:

X -5.0
Y 5.0
Z 10.0

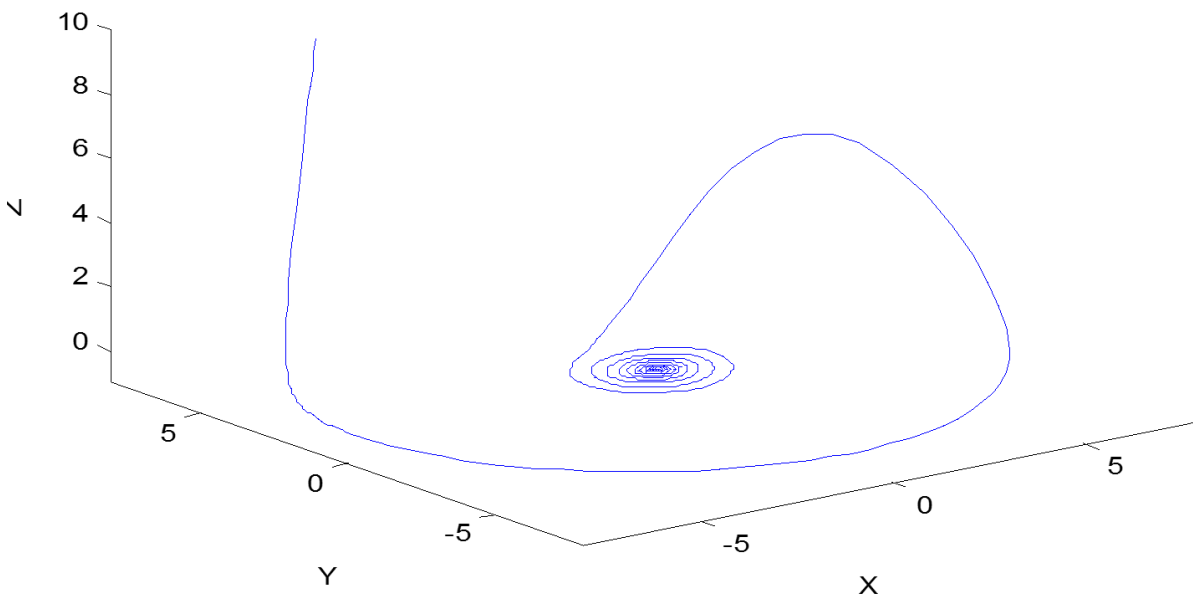
AA 0.0
BB 0.4
CC 4.5

Ακόμη, χρησιμοποιούμε της default αριθμητικές παραμέτρους (η τιμή για τη μέθοδο είναι ode45) , εκτός της τιμής στο Interval, όπου θέτουμε την τιμή 100.

Για να σχεδιάσουμε τις τροχιές , δηλαδή την αναπαράσταση της καμπύλης λύσεων σε τρεις διαστάσεις , πρέπει να επιλέξουμε με την εξής σειρά Window\Graphic\3Dplot. Ορίζουμε τα εξής όρια για τους άξονες:

$$-8 \leq x \leq 8 , -8 \leq y \leq 8 , -1 \leq z \leq 10$$

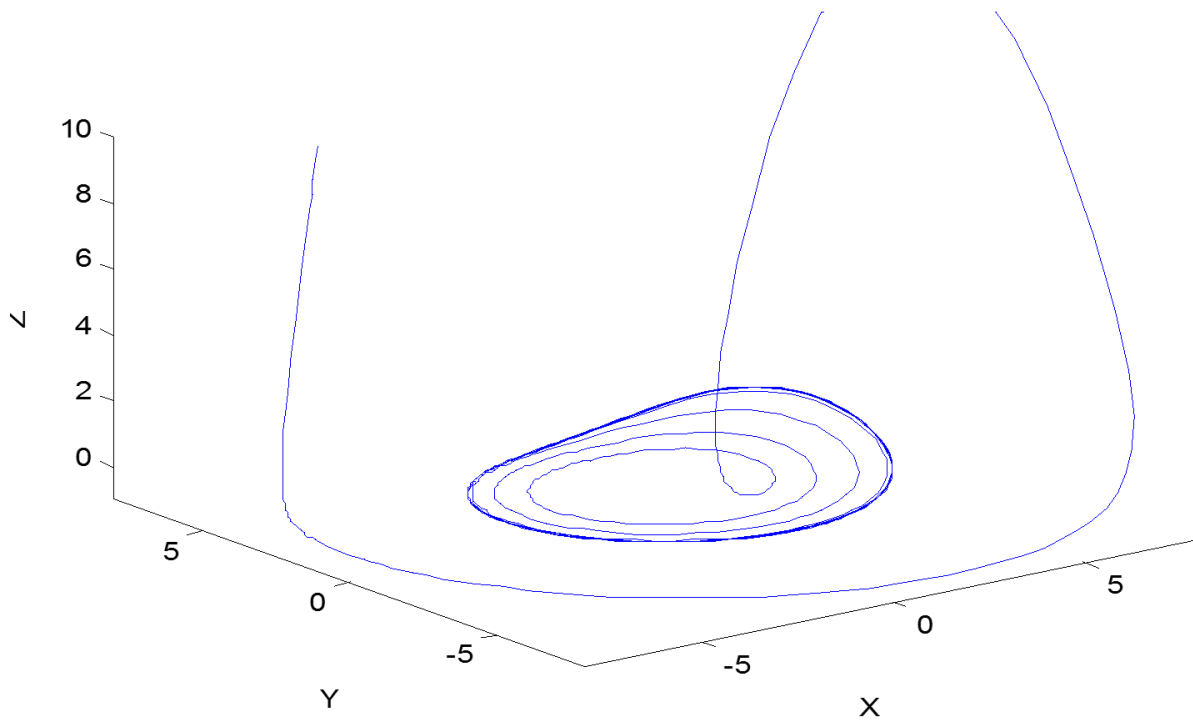
Και τώρα μπορούμε να ξεκινήσουμε την αριθμητική ολοκλήρωση



Σχήμα11 Η τροχιά - χρονική προσομοίωση για την τιμή της παραμέτρου AA=0.0

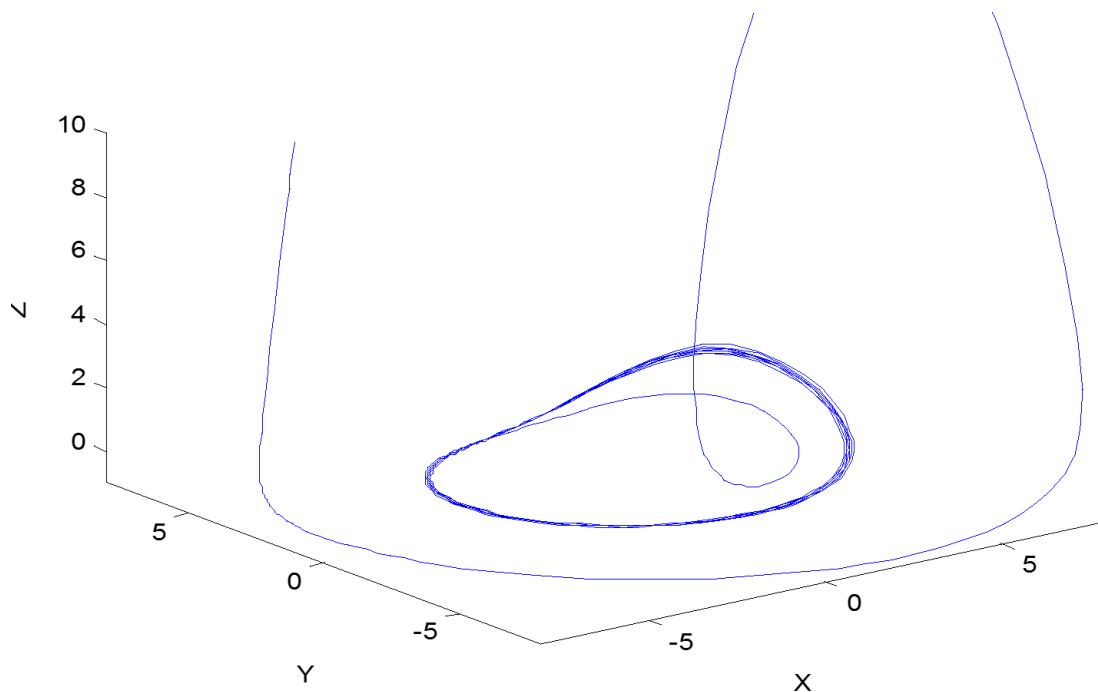
Η τροχιά συγκλίνει σε μια ευσταθή λύση ισορροπίας (stable equilibrium)

Στη συνέχεια αλλάζουμε την παράμετρο AA, δίνοντας την τιμή 0.2, και κρατάμε ίδιες τις τιμές για όλες τις άλλες παραμέτρους. Ολοκληρώνουμε αριθμητικά και παρατηρούμε πως τώρα η τροχιά συγκλίνει σε μια σταθερή περιοδική τροχιά (limit cycle) . Η απώλεια της ευστάθειας της λύσης ισορροπίας λόγω της παρουσίας **οριακού κύκλου** (limit cycle) ονομάζεται **υπερκρίσιμη διακλάδωση Andronov-Hopf** .



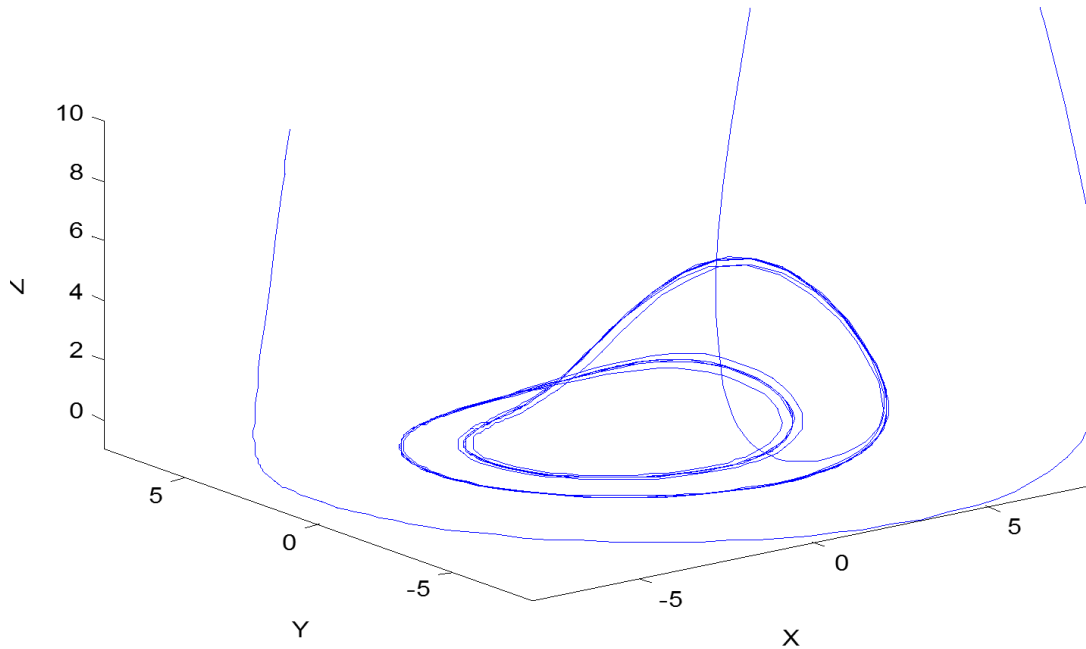
Σχήμα12 Η τροχιά - χρονική προσομοίωση για την τιμή της παραμέτρου $AA=0.2$

Εν συνεχεία, αλλάζουμε ξανά την τιμή της παραμέτρου AA σε 0.25 , όπου παρατηρούμε πως η νέα τροχιά τείνει σε οριακό κύκλο όμως πιο "αργά".



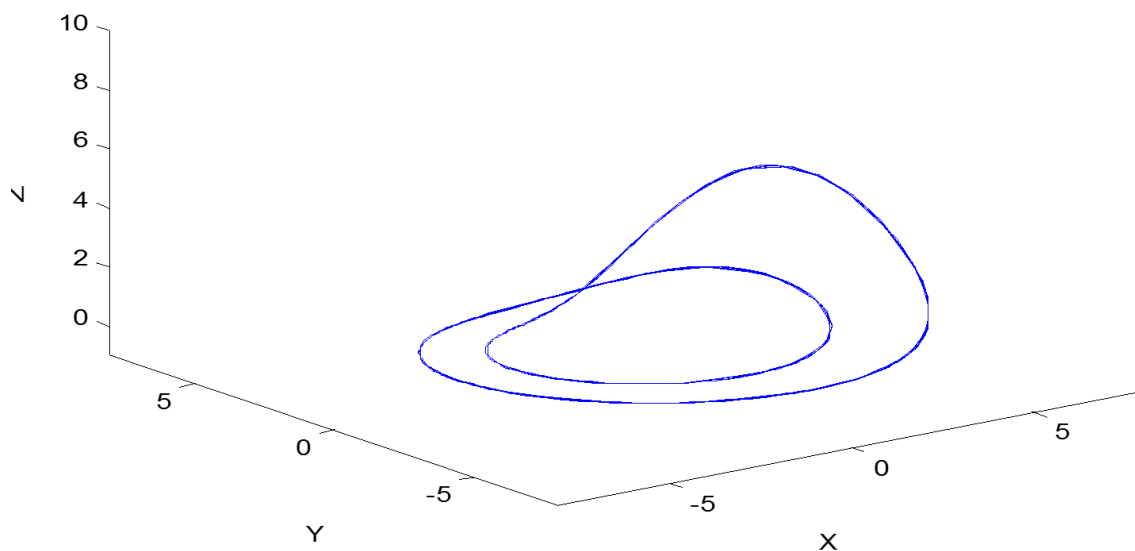
Σχήμα13 Η τροχιά - χρονική προσομοίωση για την τιμή της παραμέτρου $AA=0.25$

Αλλάζοντας ξανά την τιμή της παραμέτρου AA σε 0.3 και επαναλαμβάνοντας την αριθμητική ολοκλήρωση, παρατηρούμε πως η τροχιά τείνει σε έναν οριακό κύκλο κάνοντας δύο στροφές πριν την κλειστότητα. Η εμφάνιση ενός σταθερού κύκλου με προσεγγιστική διπλάσια περίοδο, καθώς ο προηγούμενος κύκλος γίνεται ασταθής, ονομάζεται υπερκρίσιμη διπλά-περιοδική διακλάδωση.



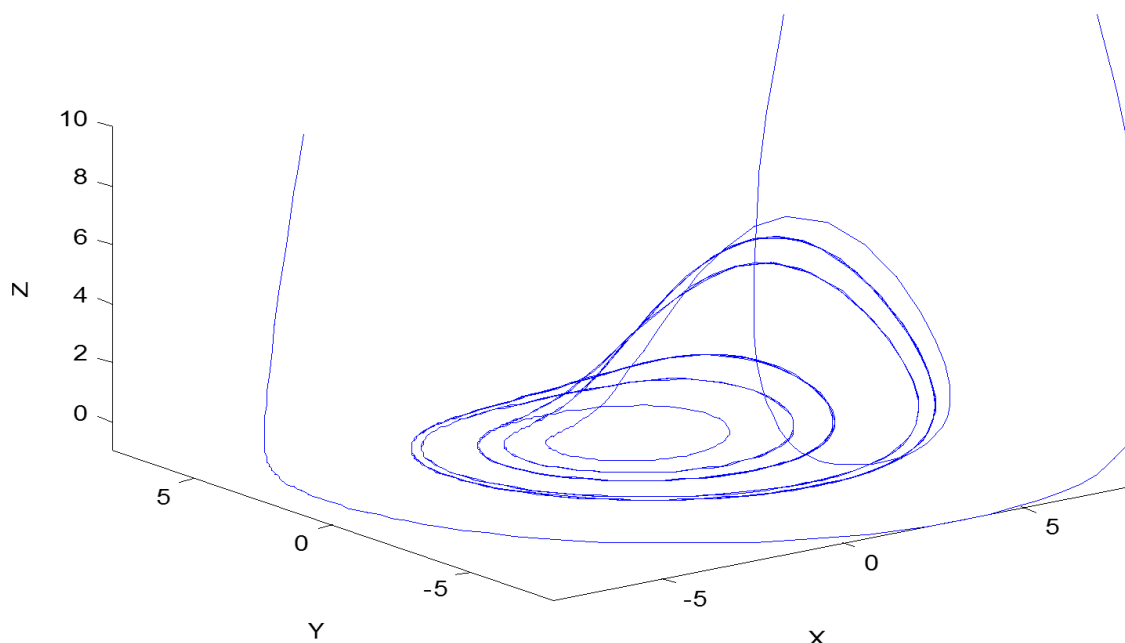
Σχήμα14 Η τροχιά - χρονική προσομοίωση για την τιμή της παραμέτρου AA=0.3

Για να παραλείψουμε την παροδική συμπεριφορά, επιλέγουμε Compute\Extend



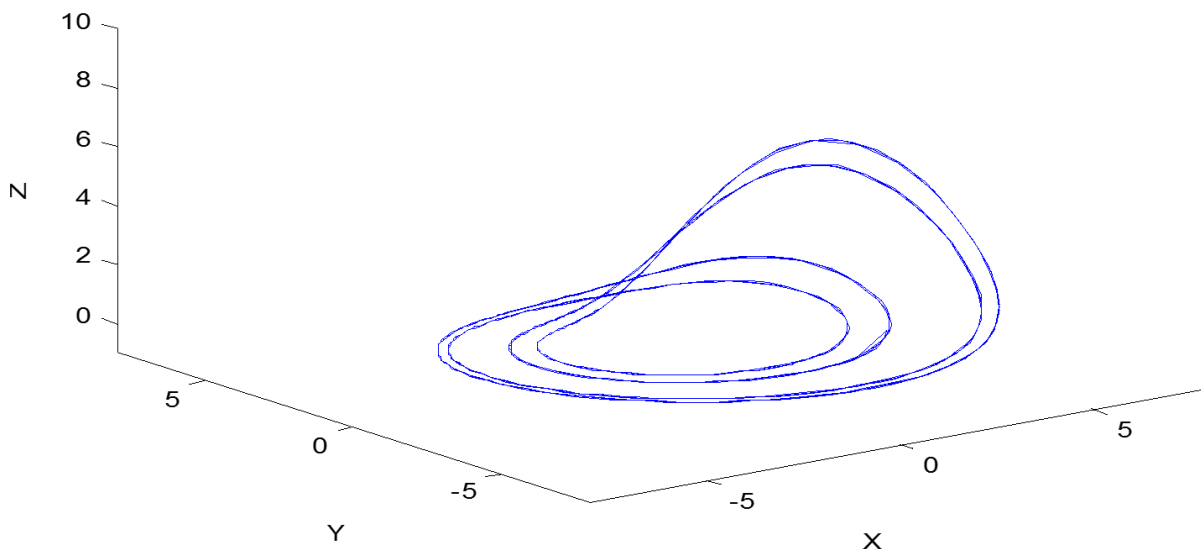
Σχήμα15 Η τροχιά - χρονική προσομοίωση για την τιμή της παραμέτρου AA=0.3

Αυξάνοντας κι άλλο την τιμή της παραμέτρου AA σε 0.315 , καταλήγουμε σε ένα πιο περίπλοκο κύκλο ο οποίος παρουσιάζει τέσσερα global turns πριν την κλειστότητα (closure)



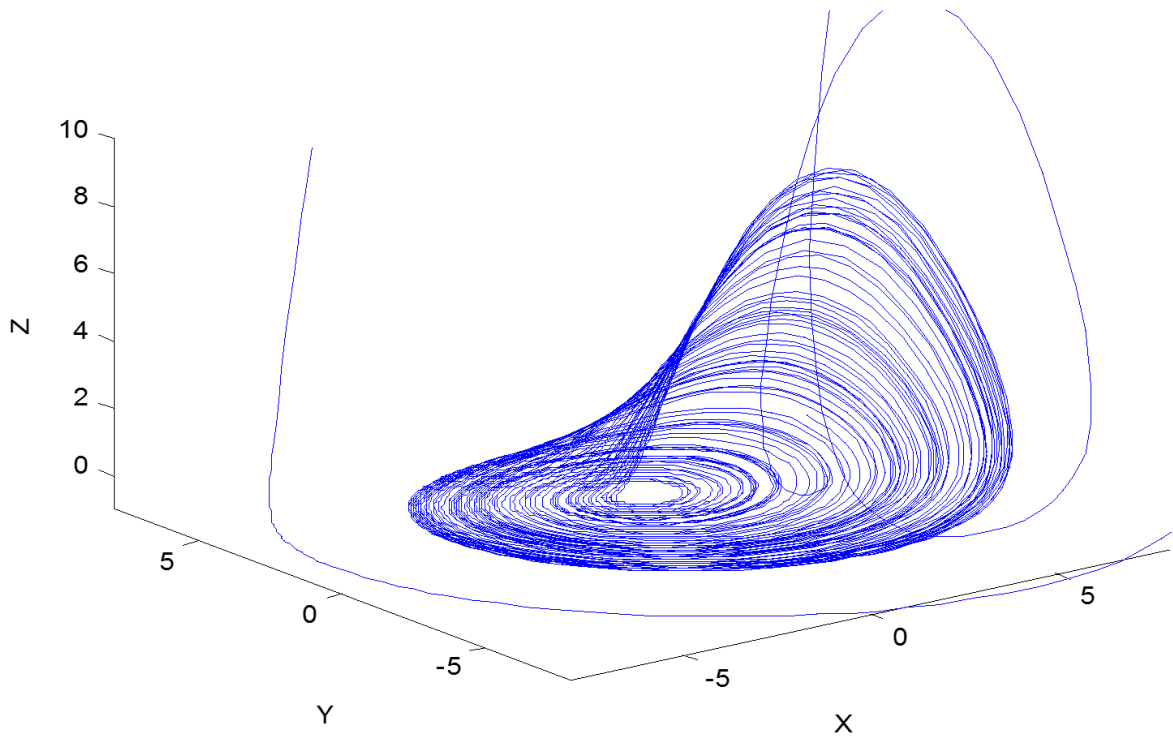
Σχήμα16 Η τροχιά - χρονική προσομοίωση για την τιμή της παραμέτρου $AA=0.315$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο διπλάσιος κύκλος υποβάλλεται στην επόμενη διακλάδωση διπλάσιος-περιόδου από μια αλληλουχία τέτοιων διακλαδώσεων.

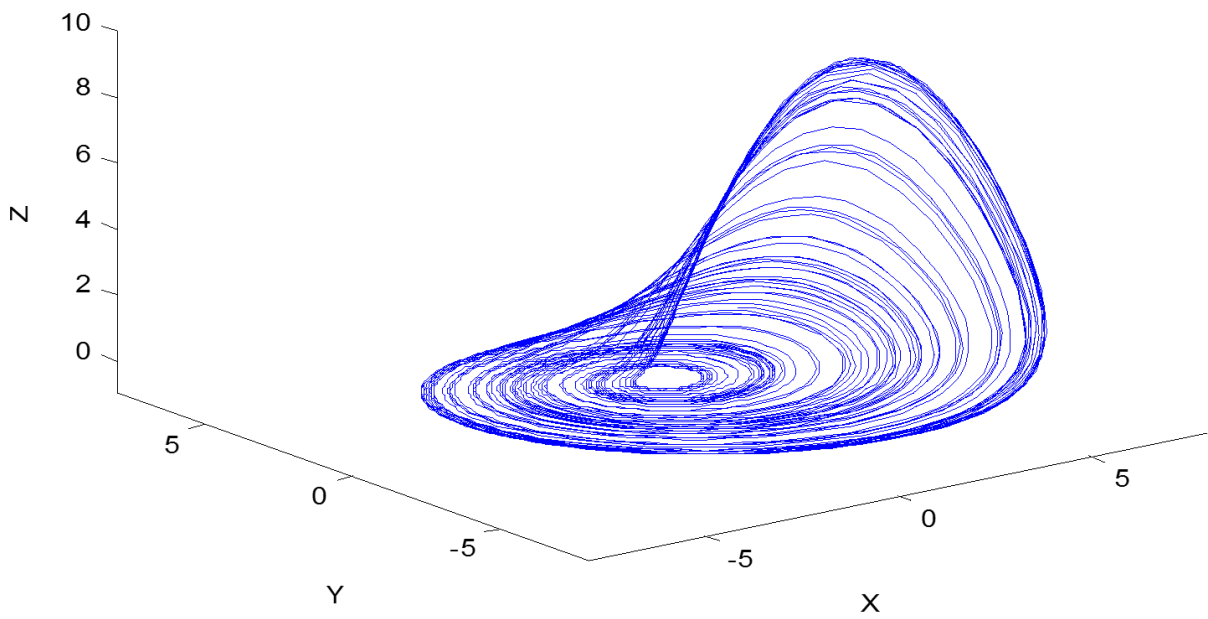


Σχήμα17 Η τροχιά - χρονική προσομοίωση για την τιμή της παραμέτρου $AA=0.315$

Τέλος αλλάζουμε το AA σε 0.36 , αλλάζουμε στο Interval το Intergrator window σε 500 , και ξεκινάμε νέο υπολογισμό. Μετά από λίγο, παρατηρούμε έναν *χαοτικό ελκυστή*.

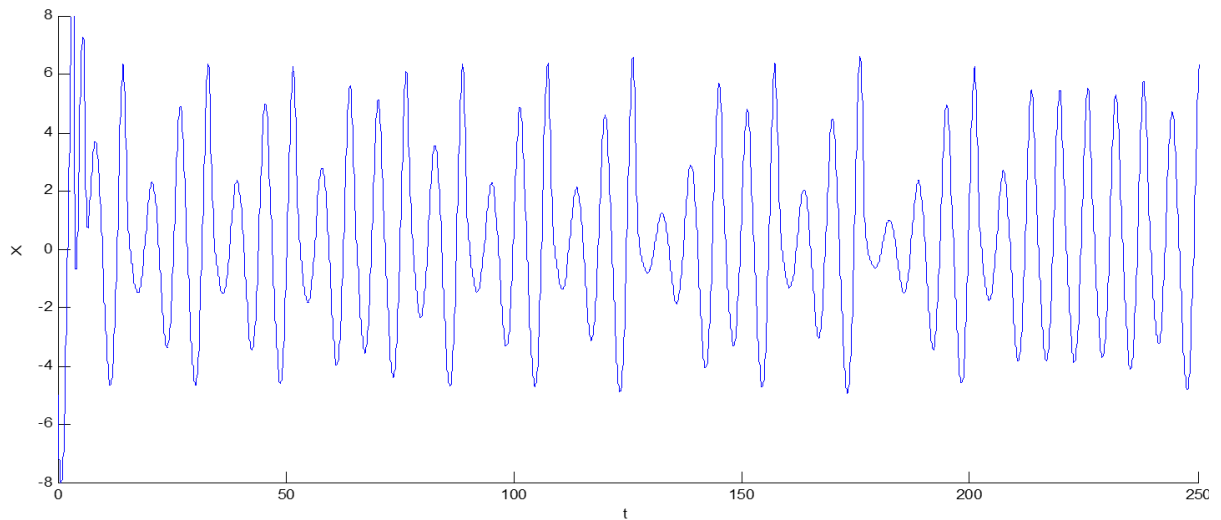


Σχήμα18 Η τροχιά - χρονική προσομοίωση για την τιμή της παραμέτρου $AA=0.36$



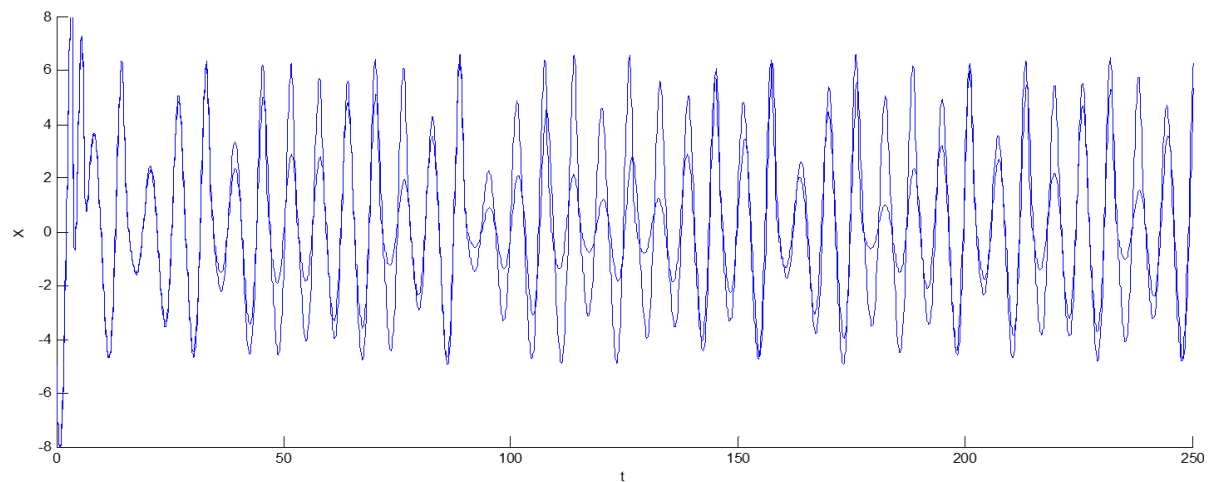
Σχήμα19 Η τροχιά - χρονική προσομοίωση για την τιμή της παραμέτρου $AA=0.36$

Στη συνέχεια θα αναπαραστήσουμε γραφικά τη χρονική σειρά που αντιστοιχεί στη χαοτική τροχιά για χρόνο $0 \leq t \leq 250$.



Σχήμα20 Αναπαράσταση της χρονικής σειράς που αντιστοιχεί στη χαοτική κατάσταση για την τιμή της παραμέτρου $AA=0.36$ και αρχικές συνθήκες $X=-5.0, Y=5.0, Z=10.0$

Αλλάζοντας τη μέθοδο (από το default ode45 στο ode23) και ολοκληρώνοντας ξανά αριθμητικά παρατηρούμε διαφορά στα δύο διαγράμματα [21].



Σχήμα21 Αναπαράσταση της χρονικής σειράς που αντιστοιχεί στη χαοτική κατάσταση για την τιμή της παραμέτρου $AA=0.36$ και αρχικές συνθήκες $X=-5.0, Y=5.0, Z=10.0$ και για τις δύο μεθόδους ode45 και ode23

5.2 Ανάλυση της διακλάδωσης μονοπαραμετρικής λύσης ισορροπίας (bifurcation analysis of equilibria)

Το παράδειγμα αυτό αφορά την numerical continuation of equilibrium σε συστήματα αυτόνομων συνήθων διαφορικών εξισώσεων που εξαρτώνται από μια παράμετρο και την ανάλυση της δυναμικής τους συμπεριφοράς [19].

Ένα οικολογικό μοντέλο με πολλαπλές λύσεις ισορροπίας και limit points.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(1-x) - \frac{xy}{(x-a)} \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \frac{xy}{(x-a)} - \frac{dy^2}{(y^2+b^2)}\end{aligned}\quad (1)$$

Θέτουμε $r = 2$, $a = 0.6$, $b = c = 0.25$ και θεωρούμε την d , την παράμετρο εκείνη για την οποία θα εξετάσουμε την δυναμική συμπεριφορά της λύσης ισορροπίας του συστήματος, με αρχική τιμή $d=0.1$. Ο σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τη λύση ισορροπίας του (1) και να μελετήσουμε την εξάρτησή τους από το d .

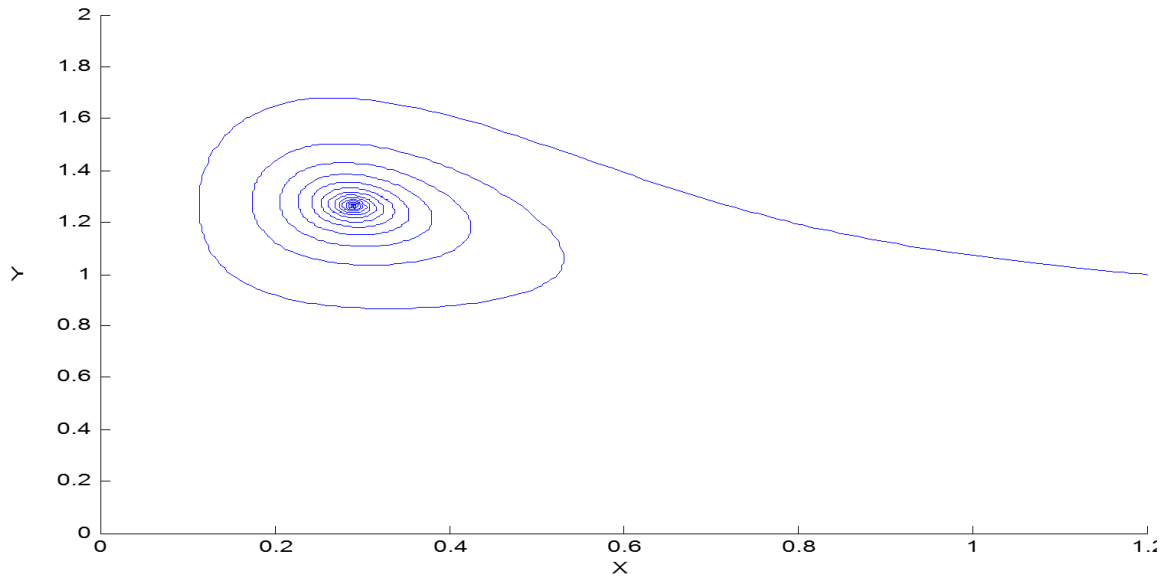
Δημιουργούμε στο MATCONT ένα νέο σύστημα ODEs με την ονομασία EcoMod. Επιλέγουμε Type\Initial point\Point και ελέγχουμε εάν είναι επιλεγμένο στο default Type\Curve\Orbit. Στην συνέχεια, αλλάζουμε την default τιμή στο Interval στο 200 και θέτουμε Rel.Tolerance $1e-7$ και Abs.Tolerance $1e-10$ (ώστε να “πάρουμε” μικρότερα βήματα στην αριθμητική ολοκλήρωση). Ακόμη, θέτουμε τις τιμές για το αρχικό σημείο (initial point) – στο παράθυρο Starter ως ακολούθως:

X	1.2
Y	1

και τις αρχικές τιμές των παραμέτρων :

RR	2
AA	0.6
BB	0.25
CC	0.25
DD	0.1

και ξεκινάμε την διαδικασία συνέχισης της λύσης, όπου παίρνουμε μία τροχιά η οποία συγκλίνει σε ευσταθή λύση ισορροπίας

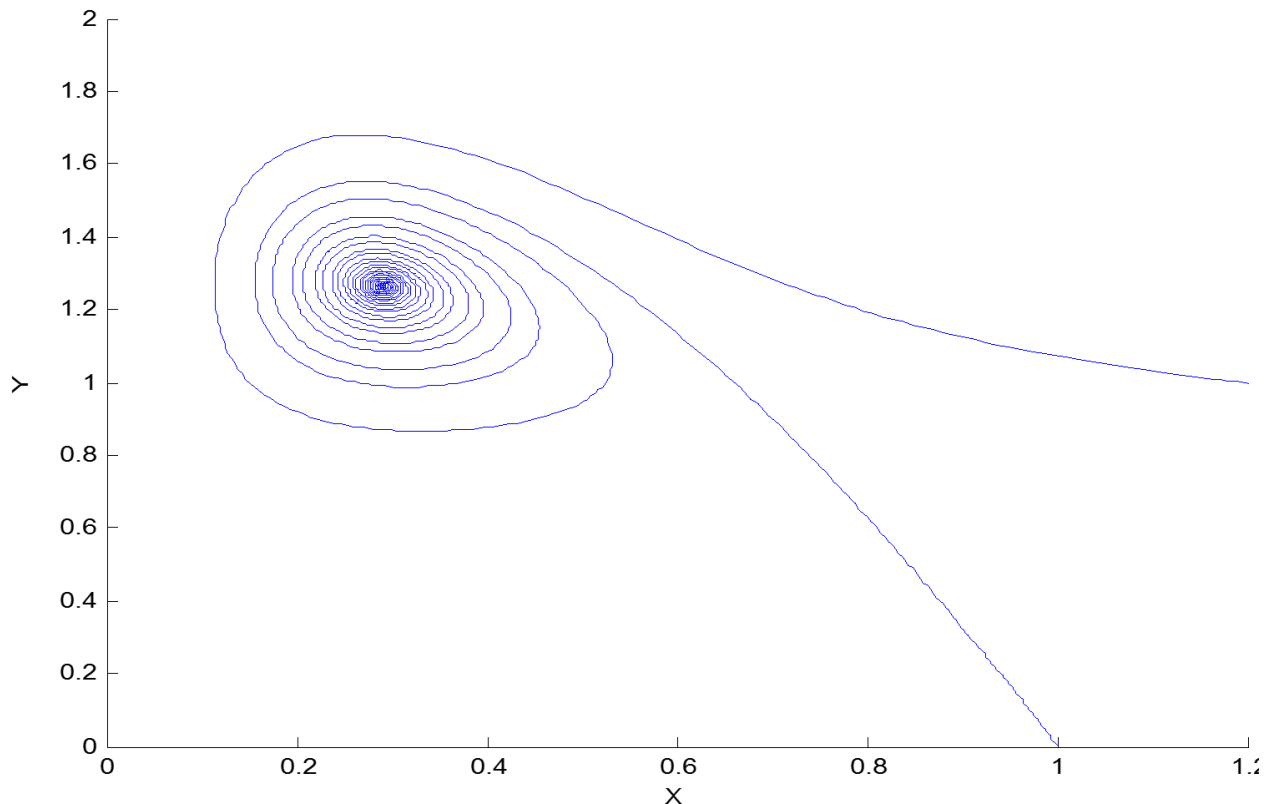


Σχήμα22 τροχιά της λύσης ισορροπίας του συστήματος (1)

Έπειτα αλλάζουμε τις αρχικές συνθήκες στο Starter window

X 1.0
Y 0.001

και προχωρώντας την διαδικασία continuation παίρνουμε την δεύτερη τροχιά που συγκλίνει στην ίδια λύση ισορροπίας



Σχήμα23 η προηγούμενη τροχιά μαζί με μια δεύτερη που συγκλίνει στην ίδια λύση ισορροπίας

της οποίας οι προσεγγιστικές συντεταγμένες φαίνονται στο Numeric window

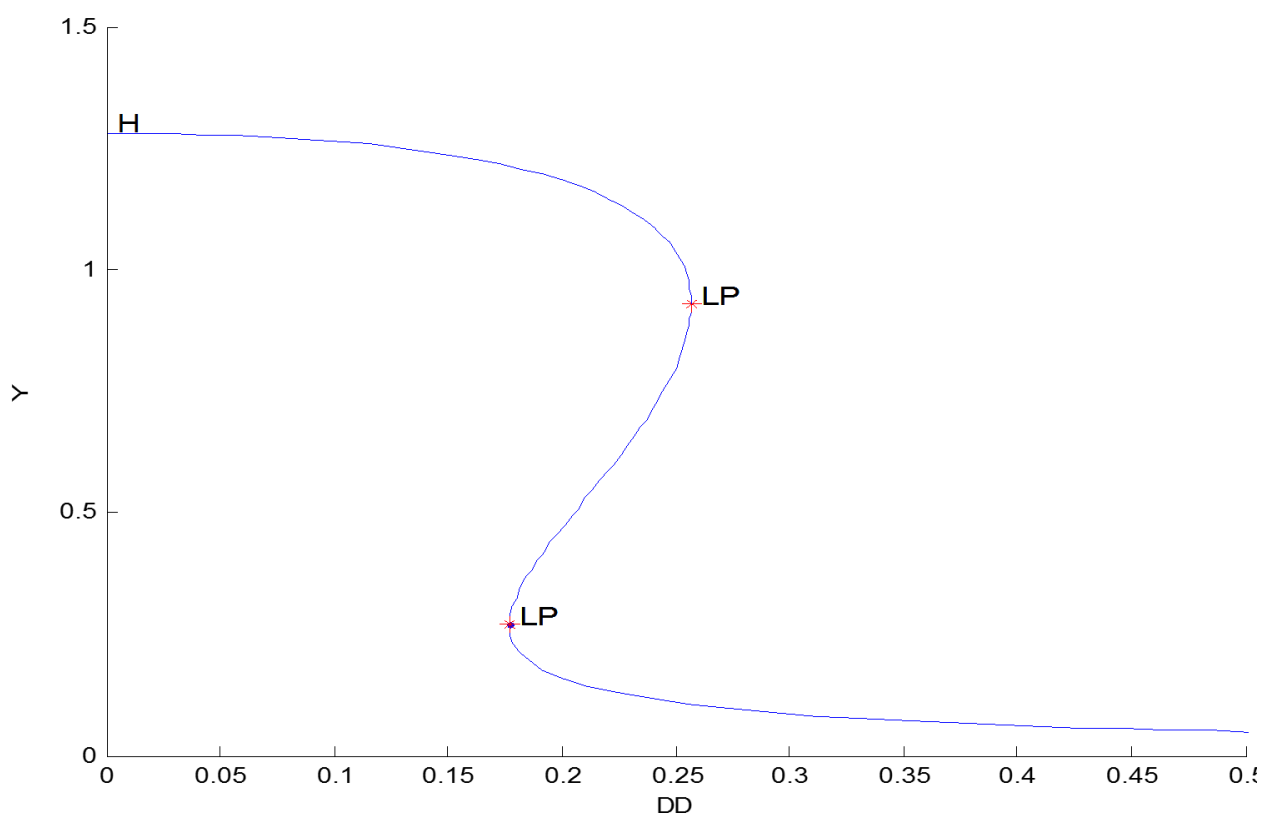
```
t      200
X      0.2927971252
Y      1.263720946
```

Για να συνεχίσουμε την αριθμητική ολοκλήρωση της λύσης ισορροπίας ως προς την παράμετρο d , επιλέγοντας το τελευταίο σημείο της τροχιάς $P_{O(1)}$ από το `Select\Initial point`. Για να συνεχίσουμε τη διαδικασία πρέπει να ενημερώσουμε το `MATCONT` για το είδος του αρχικού σημείου και για το είδος της καμπύλης. Επιλέγουμε, λοιπόν, `Type\Initial point\Equilibrium` και τον ίδιο τύπο της καμπύλης (default). Ανοίγουν δύο νέα παράθυρα `Starter` και `Continuer`, επιλέγουμε ως ενεργή παράμετρο την d , στο `Starter` και αλλάζουμε τις τιμές στο `Continuer` για τα `MaxStepsize` σε 0.02 και για `MaxNumPoints` σε 100.

Σχεδιάζουμε μια `2Dplot` όπου στον άξονα των x θέτουμε την παράμετρο d και στον άξονα των y θέτουμε την συντεταγμένη γ με τις εξής τιμές:

```
Abscissa:      0      0.5
Ordinate:      0      1.5
```

Έπειτα προχωράμε στο continuation με την επιλογή `Compute\Forward` και `Compute\Backward` ώστε να πάρουμε το παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 24 το διάγραμμα διακλάδωσης ως προς την μεταβλητή γ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $d \in (0,0.5)$

Εάν θέλουμε να προσδιορίσουμε την ευστάθεια της λύσης ισορροπίας (equilibria) και να διαβάσουμε τις τιμές της παραμέτρου στη διακλάδωση επιλέγουμε `Window\Numeric` και `Window\Layout`, όπου

επιλέγουμε eigenvalues. Τώρα αν επαναλάβουμε το Compute\Forward μπορούμε να δούμε στο παράθυρο Numeric τις LP παραμέτρους:

$$d_2 = 0.256805..... \quad d_1 = 0.176927.....$$

Για κάθε περίπτωση παίρνουμε μία ιδιοτιμή (κοντά στο) μηδέν. Μπορούμε να παρατηρήσουμε την ύπαρξη τριών λύσεων ισορροπίας για $d \in (d_1, d_2)$.

Στο Command Window στο MATLAB μπορούμε να δούμε την τιμή του συντελεστή αναδίπλωσης κανονικής μορφής α για κάθε limit point:

```
label = LP, x = ( 0.619532 0.927986 0.256805 )  
a=-5.311546e-01  
label = LP, x = ( 0.911266 0.268200 0.176927 )  
a=5.681504e-01
```

Παρατηρούμε πως οι ανώτεροι και κατώτεροι κλάδοι αντιστοιχούν σε γραμμική ευσταθή λύση ισορροπίας (με $\text{Re } \lambda_i < 0$), ενώ ο μεσαίος κλάδος αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό σάγμα (με $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) Εφόσον $\alpha \neq 0$ μεταξύ των αριθμητικών προσεγγίσεων, η καμπύλη της λύσης ισορροπίας είναι μια προσεγγιστική παραβολή κοντά σε αυτά.

5.3 Οριακά σημεία και σημεία διακλάδωσης στο διακριτοποιημένο πρόβλημα Bratu-Gelfand (Limit and branching points in a discretization of Bratu-Gelfand PDE)

Το πρόβλημα Bratu είναι μία μη γραμμική ελλειπτική μερική διαφορική εξίσωση, που παρουσιάζει μεγάλο αριθμό εφαρμογών, από το μοντέλο ανάφλεξης καυσίμου που βρίσκουμε στη θεωρία θερμικής καύσης μέχρι το μοντέλο Chandrasekhar για την επέκταση του σύμπαντος [5].

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα εξέλιξης για $u=u(x,t)$ με $x \in [0,1]$, $t \geq 0$:

$$u_t = u_{xx} + \lambda e^u \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t$$

όπου λ είναι μια παράμετρος. Το παραπάνω σύστημα ονομάζεται Bratu-Gelfand .

Μελετάμε τη συμπεριφορά της ευσταθούς λύσης του (2) συναρτήσει της παραμέτρου λ , χρησιμοποιώντας μια πεπερασμένη διαφορική προσέγγιση πάνω σε ένα πλέγμα ισορροπίας. Μια τέτοια χρονική ανεξάρτητη λύση είναι προφανής για $\lambda=0$ $u \equiv 0$.

Διακριτοποίηση

Χαρακτηρίζουμε μια λύση για το (2) σε χρόνο t από τις τιμές $u_i(t) = u(x_i, t)$ στα ομοιόμορφα καταναμημένα σημεία του πλέγματος

$$x_i = ih \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N, N+1 \quad \text{για } N > 1$$

Εν συνεχεία προσεγγίζουμε τις χωρικές παραγώγους του (2) με πεπερασμένες παραγώγους στα εσωτερικά σημεία

$$\frac{u_i(t)}{dt} = \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2} + \lambda e^{u_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

και τις συνοριακές συνθήκες στη μορφή

$$u_0(t) = 0 \\ u_{N+1}(t) = 0 \quad (4)$$

Μετά την ελαχιστοποίηση του $u_0(t)$ και $u_{N+1}(t)$ οι εξισώσεις (3) και (4) παίρνει τη μορφή συστήματος (ODE) συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dU}{dt} = F(U, \lambda) \quad (5)$$

όπου $U=(u_1, u_2, \dots, u_N)$ και $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ δίνεται από την (3). Η λύση ισορροπίας του συστήματος αυτού προσεγγίζει μια ευσταθή λύση για το σύστημα (2) με $O(h^2)$ ακρίβεια.

Θα μελετήσουμε μια χωρική διακριτοποίηση του (2) με μόνο δύο εσωτερικά σημεία (δηλαδή $N = 2$ και $h=1/3$) και έτσι το (5) γίνεται

$$\frac{du_1}{dt} = -2u_1 + u_2 + \alpha e^{u_1}$$

$$\frac{du_2}{dt} = -2u_2 + u_1 + \alpha e^{u_2} \quad (6)$$

όπου $\alpha = h^2\lambda = 1/9 \lambda$ και ο χρόνος είναι επίσης κλιμακωτός. Το σύστημα (6) παρουσιάζει Z_2 -συμμετρία, και γι αυτό το σύστημα μένει αναλλοίωτο αν εφαρμόσουμε τη σχέση $(u_1, u_2) \rightarrow (u_2, u_1)$. Θα υπολογίσουμε την πολλαπλότητα της λύσης ισορροπίας του (6) στο χώρο (u_1, u_2, α) ξεκινώντας από το σημείο $(0,0,0)$ που αντιστοιχεί στην ευσταθή λύση του (2), που είναι η $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \equiv 0$.

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα δημιουργούμε νέο σύστημα ODE στο MATCONT και επιλέγουμε Type\Initial point\Equilibrium. Στο παράθυρο Starter ενεργοποιούμε την παράμετρο alpha. Εφόσον (6) έχει τη λύση ισορροπίας στο $u_1 = u_2 = 0$ για $\alpha = 0$ δεν χρειάζεται να κάνουμε άλλες αλλαγές.

Έπειτα σχεδιάζουμε 2Dplot, όπου στον άξονα των x θέτουμε την παράμετρο alpha και στον άξονα των y θέτουμε τη συντεταγμένη u_1 , με τις εξής τιμές:

Abscissa: 0 0.5

Ordinate: 0 8.0

Ανοίγοντας, πάλι, το παράθυρο Numeric και επιλέγοντας Window\Layout\EIGENVALUES μπορούμε να δούμε τις ιδιοτιμές.

Ξεκινάμε την continuation και το πρώτο σημείο διακλάδωσης, το οποίο είναι ένα limit point LP, το βρίσκουμε για $\alpha = 0.367879...$

Μπορούμε να δούμε στο Command Window του MATLAB :

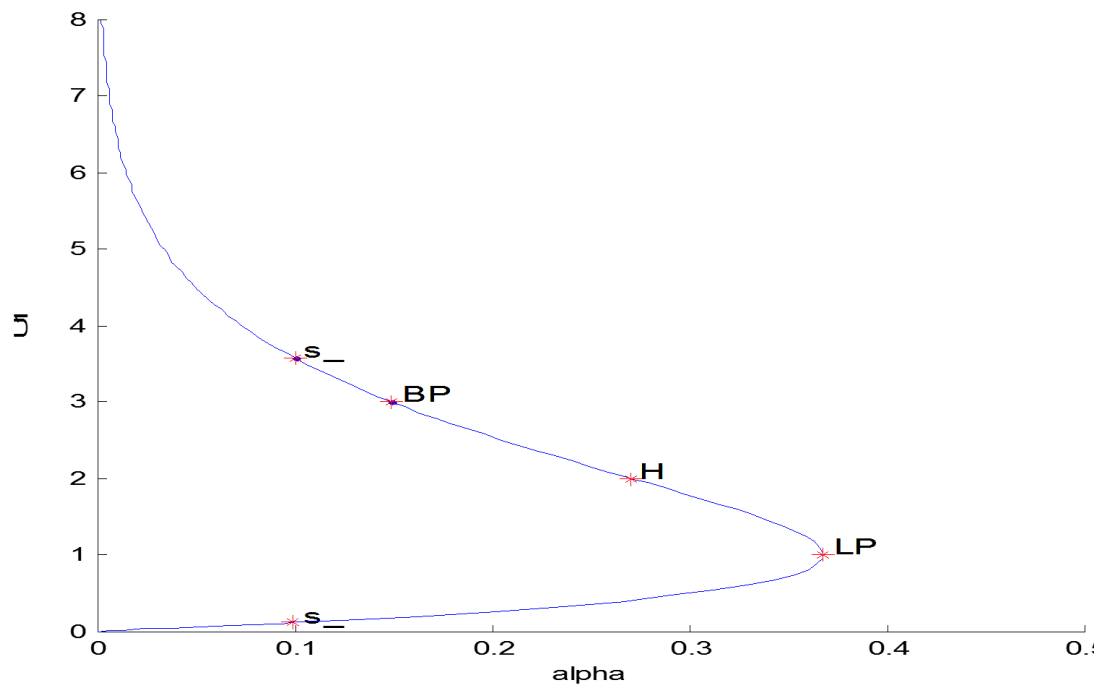
```
label = LP, x = ( 1.000001 1.000001 0.367879 )
a=3.535537e-01
```

Το παραπάνω δίνει την κρίσιμη τιμή της λύσης ισορροπίας και την κρίσιμη τιμή της παραμέτρου, όπως και τον συντελεστή τετραγωνικής κανονικής μορφής $a = 0.35355...$ στο LP. Το limit point είναι μη εκφυλισμένο και η πολλαπλότητα της λύσης ισορροπίας κοντά στο LP μοιάζει με παραβολή.

Συνεχίζοντας τον υπολογισμό, παίρνουμε ένα ουδέτερο σάγμα H στο $\alpha = 0.270671...$, όπου η λύση ισορροπίας έχει ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \pm 1$, όπου το άθροισμά τους είναι μηδέν. Αυτό δεν είναι σημείο διακλάδωσης για τη λύση ισορροπίας διότι είναι ένα υπερβολικό σάγμα (hyperbolic saddle).

Συνεχίζουμε τους υπολογισμούς ώσπου να πάρουμε το δεύτερο σημείο διακλάδωσης στο $\alpha = 0.14936122...$ το οποίο είναι σημείο διακλάδωσης BP.

```
label = H , x = ( 2.000000 2.000000 0.270671 )
Neutral saddle
label = BP, x = ( 3.000000 3.000000 0.149361 )
```



Σχήμα 25 το διάγραμμα διακλάδωσης ως προς τη μεταβλητή α , όπου φαίνεται ένα οριακό σημείο LP και ένα σημείο διακλάδωσης BP

Παρατηρούμε ότι σε όλο τον κλάδο έχουμε $u_1 = u_2$, δηλαδή έχει συντεθεί από συμμετρικές λύσεις ισορροπίας (symmetric equilibria)

Στο παράθυρο Numeric βλέπουμε τις ιδιοτιμές, όπου παρατηρούμε ότι μόνο ο χαμηλότερος κλάδος είναι ευσταθής, παρόλο που έχουμε σάγμα μεταξύ του LP και του BP:

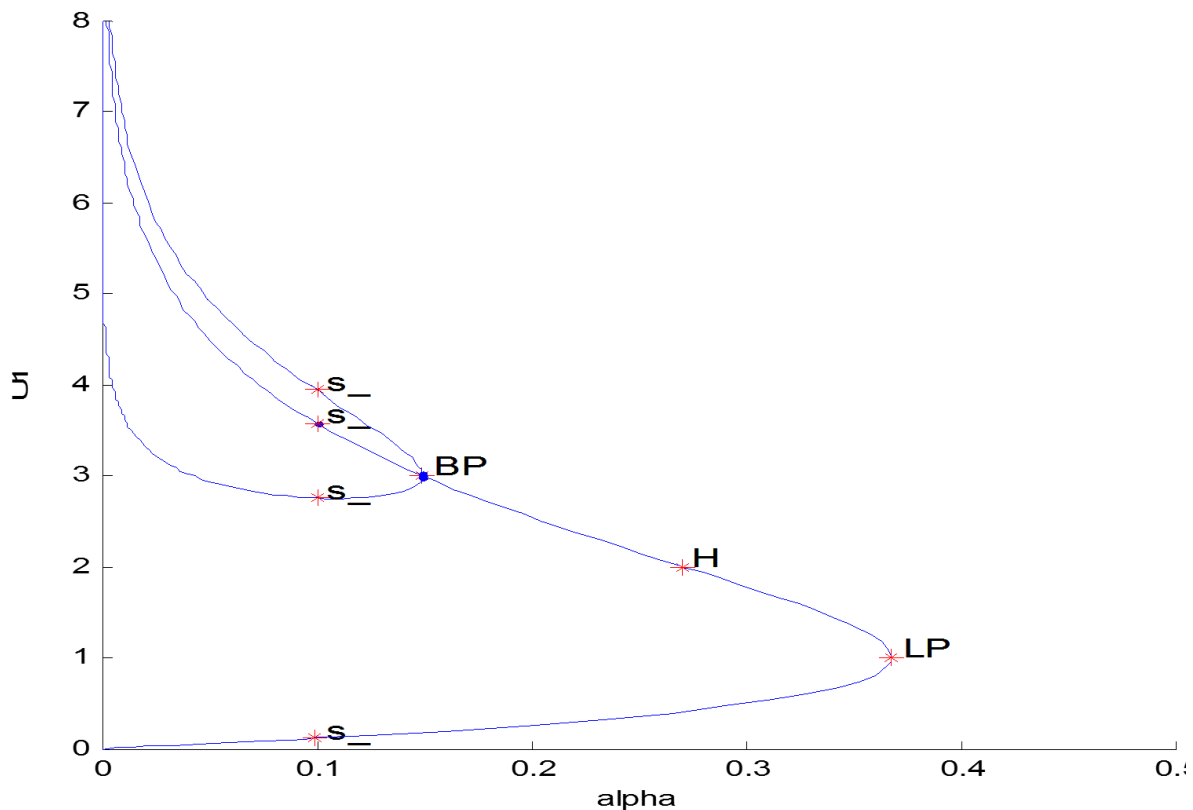
U1 = 1.0000008	U1 = 2	U1 = 3
U2 = 1.0000008	U2 = 2	U2 = 3
Alpha = 0.36787944	Alpha = 0.27067057	Alpha = 0.14936121
EIGENVALUES	EIGENVALUES	EIGENVALUES
Re[1] = -2	Re[1] = -1	Re[1] = 0
Re[2] = 7.72649e-007	Re[2] = 1	Re[2] = 2
Im[1]=0	Im[1]=0	Im[1]=0
Im[2]=0	Im[2]=0	Im[2]=0

Σχήμα26 το παράθυρο Numeric για τα LP, H και BP αντίστοιχα

Μετονομάζουμε την καμπύλη ως symmetric .

Σπάσιμο της συμμετρίας

Θα υπολογίσουμε τον δεύτερο κλάδο περνώντας από το BP. Γι'αυτό επιλέγουμε Select\Initial point και στο Initial point επιλέγουμε το BP : Branch point of the equilibrium curve symmetric . Θα αναπαραστήσουμε τις τιμές (u_1, u_2, α) που αντιστοιχούν στο BP. Κάνοντας Compute\Forward και Compute\Backward παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα



Σχήμα27 σπάσιμο συμμετρίας

Το σημείο διακλάδωσης BP αντιστοιχεί σε μονόπλευρη διακλάδωση (pitchfork bifurcation) . Δύο επιπλέον κλάδοι της λύσης ισορροπίας διακλαδώνονται κάθετα από αυτό το σημείο. Επιπλέον, κάθε κλάδος συντίθεται από λύσεις ισορροπίας (equilibrium) οι οποίες δεν είναι συμμετρικές $u_1 \neq u_2$. Εδώ παρατηρούμε το φαινόμενο «σπάσιμο συμμετρίας» : Έχουμε μη συμμετρικές λύσεις ισορροπίας σε συμμετρικό σύστημα.

Προσοχή: Δείξαμε αριθμητικά ότι η διακριτοποίηση του προβλήματος Bratu-Gelfand (2) έχει πολλαπλές ευσταθείς λύσεις καθώς και οριακά σημεία και σημεία διακλάδωσης (limit και branching points). Αυτό δεν συνεπάγεται πως το “αυθεντικό” πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων έχει τις ίδιες ιδιότητες. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, πρέπει να επαναλάβουμε την υπολογιστική διαδικασία (continuation) με μικρότερα h (δηλαδή μεγαλύτερα N) και αναπόφευκτα θα διαπιστώσουμε κάποια λάθη. Σημειώνουμε πως η παρουσία της μονόπλευρης διακλάδωσης (pitchfork bifurcation) συμβαίνει λόγω των ομοιόμορφα κατανεμημένων σημείων του πλέγματος, με ένα μικρό αριθμό σημείων.

Αν χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στη διακριτοποίηση του συστήματος (2), η μονόπλευρη διακλάδωση και οι σχετικοί της κλάδοι εξαφανίζονται. Παραμένει το οριακό σημείο και αντιστοιχεί σε ένα οριακό σημείο του κλάδου των ευσταθών λύσεων του συστήματος (2).

Όταν θέλουμε να σταματήσουμε τους υπολογισμούς για μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου, μπορούμε να το κάνουμε στο MATCONT συγκεκριμενοποιώντας μια user function [19].

Το παράδειγμα Bratu στο CL_MATCONT

Ο κώδικας MATLAB είναι ο ακόλουθος [7]:

```
function out = bratu
out{1} = @init;
out{2} = @fun_eval;
out{3} = @jacobian;
out{4} = @jacobianp;
out{5} = @hessians;
out{6} = @hessiansp;
out{7} = @der3;
out{8} = [];
out{9} = [];
out{10} = @userf1;

% -----
function dydt = fun_eval(t,kmrgd,a)
dydt=[-2*kmrgd(1)+kmrgd(2)+a*exp(kmrgd(1));;
kmrgd(1)-2*kmrgd(2)+a*exp(kmrgd(2))];];

% -----
function [tspan,y0,options] = init
y0=[0,0];
options =
odeset('Jacobian',handles(3),'JacobianP',handles(4),'Hessians',handles(5),'Hessi
ansP',handles(6));
handles = feval(bratu);
tspan = [0 10];

% -----
function jac = jacobian(t,kmrgd,a)
jac=[ a*exp(kmrgd(1)) - 2 , 1 ; 1 , a*exp(kmrgd(2)) - 2 ];

% -----
function jacp = jacobianp(t,kmrgd,a)
jacp=[ exp(kmrgd(1)) ; exp(kmrgd(2)) ];

% -----
function hess = hessians(t,kmrgd,a)
hess1=[ a*exp(kmrgd(1)) , 0 ; 0 , 0 ];
hess2=[ 0 , 0 ; 0 , a*exp(kmrgd(2)) ];
hess(:,:,1) =hess1;
hess(:,:,2) =hess2;

% -----
function hessp = hessiansp(t,kmrgd,a)
hessp1=[ exp(kmrgd(1)) , 0 ; 0 , exp(kmrgd(2)) ];
hessp(:,:,1) =hessp1;

% -----
function tens3 = der3(t,kmrgd,a)
tens31=[ a*exp(kmrgd(1)) , 0 ; 0 , 0 ];
tens32=[ 0 , 0 ; 0 , 0 ];
tens33=[ 0 , 0 ; 0 , 0 ];
tens34=[ 0 , 0 ; 0 , a*exp(kmrgd(2)) ];
tens3(:,:,1,1) =tens31;
tens3(:,:,1,2) =tens32;
tens3(:,:,2,1) =tens33;
tens3(:,:,2,2) =tens34;

% -----
function tens4 = der4(t,kmrgd,a)

% -----
function tens5 = der5(t,kmrgd,a)
function userfun1=userf1(t,kmrgd,a)
userfun1=a-0.2;
```

Αρχικά υπολογίζουμε 50 σημεία και έπειτα επεκτείνουμε την καμπύλη για άλλα 50 σημεία:

```
>>init;
>>global cds
>>p=0;
>>ap=1;
>>[x0,v0]=init_EP_EP(@bratu,[0;0],p,ap);
>>opt=contset;
>>opt=contset(opt,'MaxNumPoints',50);
>>opt=contset(opt,'Singularities',1);
>>opt=contset(opt,'Userfunctions',1);
>>UserInfo.name='userfl';UserInfo.state=1;UserInfo.label='u1';
>>opt=contset(opt,'UserfunctionsInfo',UserInfo);
>>[x,v,s,h,f]=cont(@equilibrium,x0,[],opt);
first point found
tangent vector to first point found
label = u1, x = ( 0.259174 0.259174 0.200002 )
label = LP, x = ( 1.000001 1.000001 0.367879 )
a=3.535537e-01
label = H , x = ( 2.000000 2.000000 0.270671 )
Neutral saddle
label = u1, x = ( 2.542639 2.542639 0.200000 )

elapsed time = 0.6 secs
npoints curve = 50
>> [x,v,s,h,f]=cont(x,v,s,h,f,cds);
start computing extended curve
label = BP, x = ( 3.000000 3.000000 0.149361 )

elapsed time = 0.3 secs
npoints curve = 100
```

Παρατηρούμε πως για $(x,y,a)=(3.0,3.0,0.15)$ το σύστημα έχει BP. Για να εντοπίσουμε το σημείο BP χρησιμοποιούμε το output s. Εν συνεχεία σχεδιάζουμε μια 3D παράσταση, με την παράμετρο a στον x άξονα, και x, y τους άξονες y,z αντίστοιχα.

```
>> cpl(x,v,s,[3 1 2]);
```

Όπου αναπαράγεται το σχήμα 25 και έπειτα συνεχίζουμε

```
>>x1=x(1:2,s(6).index);
>>p(ap)=x(3,s(6).index);
>>[x0,v0]=init_BP_EP(@bratu,x1,p,s(6),0.01);
>>opt=contset(opt,'MaxNumPoints',50);
>>[x1,v1,s1]=cont(@equilibrium,x0,[],opt);
first point found
tangent vector to first point found

elapsed time = 0.2 secs
npoints curve = 50
>> cpl(x1,v1,s1,[3 1 2]);
>> opt=contset(opt,'Backward',1);
>> [x2,v2,s2]=cont(@equilibrium,x0,[],opt);
first point found
tangent vector to first point found
label = BP, x = ( 3.000000 3.000000 0.149361 )

elapsed time = 0.2 secs
npoints curve = 50
>> cpl(x2,v2,s2,[3 1 2]);
```

Όπου αναπαράγουμε το σχήμα 27.

5.4 Το παράδειγμα Brusselator

Ο brusselator είναι ένα μοντέλο που εκφράζει μια χημική αντίδραση της οποίας το χρώμα του διαλύματος αλλάζει περιοδικά, δηλαδή το σύστημα δεν καταλήγει σε συγκεκριμένη κατάσταση αλλά παρουσιάζει αμφίδρομη εξέλιξη, με τις συγκεντρώσεις των προϊόντων να αυξομειώνονται περιοδικά. Άρα στο σύστημα από δυναμική άποψη έχουμε την παρουσία οριακού κύκλου. Ο Brusselator είναι ένα σύστημα εξισώσεων που μοντελοποιούν την Belousov-Zhabotinsky αντίδραση [σύστημα εξισώσεων αντίδρασης-διάχυσης (reaction-diffusion), που ως γνωστόν εμφανίζουν συμπεριφορά ταλάντωσης]. Μελετήθηκε από τους Prigogine-Lefever και η δυναμική του συστήματος περιγράφεται και σε προηγούμενο κεφάλαιο [7].

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{D_x}{L^2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + A - (B - 1)X + X^2Y$$
$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{D_y}{L^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + BX - X^2Y$$

Η παράμετρος του προβλήματος είναι το L. Τα A και B είναι σταθερά, το t υποδηλώνει το χρόνο και το x είναι μια κανονικοποιημένη μονοδιάστατη χωρική μεταβλητή μεταξύ του 0 και του 1. Το σύστημα περιγράφεται από δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις. Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στις λύσεις ισορροπίας του συστήματος και την εξάρτησή τους από το L. Παίρνουμε, για x=0 και x=1 από τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet:

$$\begin{cases} X(0, t) = X(1, t) = A \\ Y(0, t) = Y(1, t) = \frac{B}{A} \end{cases}$$

Και οι λύσεις ισορροπίας X(x) και Y(x) του συστήματος:

$$\begin{cases} X(x) = A + 2\sin(\pi x) \\ Y(x) = \frac{B}{A} - \frac{1}{2}\sin(\pi x) \end{cases}$$

Το N, είναι ο αριθμός των σημείων δεδομένων με ισαπέχοντα διαστήματα, στα οποία έχουμε διακριτοποιήσει τις X, Y.

Όσο το N μεγαλώνει το πρόβλημα γίνεται ιδιαίτερα δύσκαμπτο και ο Jacobian γίνεται αραιός.

Ο κώδικας MATLAB για το brusselator είναι ο ακόλουθος:

```
function out = bruss
%
% Odefile of 1-d Brusselator model
%
out{1} = @init;
out{2} = @fun_eval;
out{3} = @jacobian;
out{4} = @jacobianp;
out{5} = []; %hessians;
out{6} = []; %hessiansp;
out{7} = [];
out{8} = [];
out{9} = [];
```

```

% -----
function dfdt = fun_eval(t,y,N,L)

x = y(1:N);
y = y(N+1:2*N);

A = 2;
B = 4.6;
Dx = 0.0016;
Dy = 0.008;
x0 = A; x1 = A;
y0 = B/A; y1 = B/A;
L2 = L^2;
h = 1/(N+1);
cx = (Dx/L2)/(h*h);
cy = (Dy/L2)/(h*h);

dxdt = zeros(N,1);
dydt = zeros(N,1);

dxdt(1) = (x0-2*x(1)+x(2))*cx + A - (B+1)*x(1) + x(1)*x(1)*y(1);
dxdt(N) = (x(N-1)-2*x(N)+x1)*cx + A - (B+1)*x(N) + x(N)*x(N)*y(N);

dydt(1) = (y0-2*y(1)+y(2))*cy + B*x(1) - x(1)*x(1)*y(1);
dydt(N) = (y(N-1)-2*y(N)+y1)*cy + B*x(N) - x(N)*x(N)*y(N);

for i=2:N-1
    dxdt(i) = (x(i-1)-2*x(i)+x(i+1))*cx + A - (B+1)*x(i) + x(i)*x(i)*y(i);
    dydt(i) = (y(i-1)-2*y(i)+y(i+1))*cy + B*x(i) - x(i)*x(i)*y(i);
end

dfdt = [dxdt; dydt];

% -----

function [tspan,y0,options] = init(N)
tspan = [0; 10];
A = 2;
B = 4.6;

y0 = zeros(2*N,1);

for i=1:N
    y0(i) = A + 2*sin(pi*i/(N+1));
    y0(N+i) = B/A - 0.5*sin(pi*i/(N+1));
end
handles = feval(@bruss);
options = odeset('Vectorized','on', 'Jacobian', handles(3), 'JacobianP',
handles(4));

% -----

function dfdxy = jacobian(t,y,N,L)
x = y(1:N);
y = y(N+1:2*N);
A = 2;
B = 4.6;
Dx = 0.0016;
Dy = 0.008;
x0 = A; x1 = A;
y0 = B/A; y1 = B/A;
L2 = L^2;

```

```

h = 1/(N+1);
cx = (Dx/L2)/(h*h);
cy = (Dy/L2)/(h*h);

%
% Sparse jacobian
%
A=zeros(2*N,3);
A(1:N-1,2)=cx;
A(1:N,3)=-2*cx - (B+1) + 2*x(1:N).*y(1:N);
A(1:N,4)=cx;

A(N+1:2*N,2) = cy;
A(N+1:2*N,3) = -2*cy -x(:).*x(:);
A(N+2:2*N,4) = cy;

A(1:N,1) = B - 2*x(:).*y(:);
A(N+1:2*N,5) = x(:).*x(:);

dfdxy = spdiags(A, [-N,-1:1,N] , 2*N, 2*N);

% -----

function dfdp = jacobianp(t,y,N,L)
x = y(1:N);
y = y(N+1:2*N);
A = 2;
B = 4.6;
Dx = 0.0016;
Dy = 0.008;
x0 = A; x1 = A;
y0 = B/A; y1 = B/A;
L2 = L^2;
h = 1/(N+1);
cx = (Dx/L2)/(h*h);
cy = (Dy/L2)/(h*h);
kx = (-2/L)*cx;
ky = (-2/L)*cy;

Sx = zeros(N,1);
Sy = zeros(N,1);

Sx(1) = kx*(x0-2*x(1)+x(2));
Sy(1) = ky*(y0-2*y(1)+y(2));

Sx(N) = kx*(x(N-1)-2*x(N)+x1);
Sy(N) = ky*(y(N-1)-2*y(N)+y1);

i=2:N-1;
Sx(i) = kx*(x(i-1)-2*x(i)+x(i+1));
Sy(i) = ky*(y(i-1)-2*y(i)+y(i+1));

dfdp = [ zeros(2*N,1) [Sx;Sy] ];

% -----

```

Στο μοντέλο έχουμε δύο παραμέτρους τις N και L , οι τιμές των A, B, D_x, D_y εμπεριέχονται στον κώδικα. Σημειώνουμε πως η τιμή της παραμέτρου N δεν μπορεί να αλλάζει κατά την αριθμητική συνέχιση

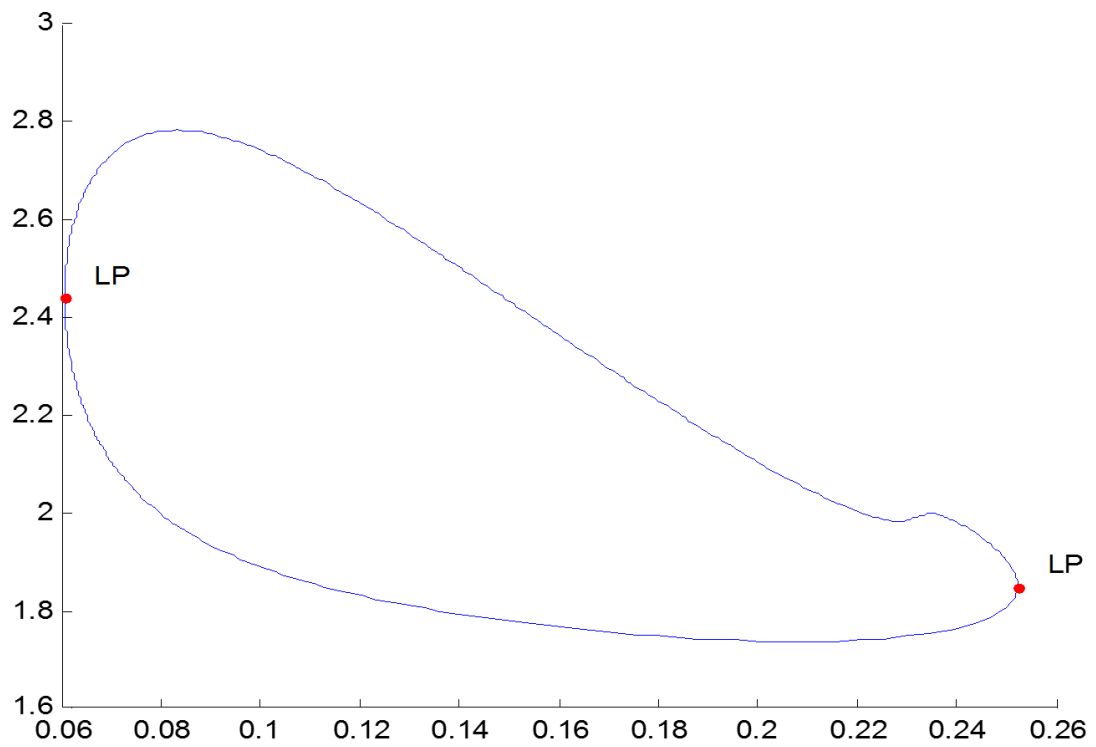
της λύσης. Γι αυτό το λόγο δεν έχει εισόδους στην Jacobianp. Η ενεργή παράμετρος είναι η L, δηλαδή η δεύτερη παράμετρος για το bruss.m . Καταρχάς, πρέπει να προσεγγίσουμε την λύση ισορροπίας, η οποία δίνεται στην υποσυνάρτηση init του bruss.m .

```
>>N=20;
>>L=0.06;
>>handles=feval (@bruss) ;
>>[t,x0,options]=feval (handles{1},N) ;
```

Με αυτόν τον τρόπο θέτουμε το πλήθος των τιμών των καταστάσεων να είναι 2N , και φτιάχνουμε ένα αρχικό διάνυσμα x_0 μήκους 2N , το οποίο περιέχει τις τιμές των προσεγγιστικών λύσεων ισορροπίας .

Με την επόμενη εντολή ενημερώνουμε την pde_1 καμπύλη, πως η δεύτερη παράμετρος (L) είναι η ενεργή παράμετρος για εμάς , και πως και ποιες είναι οι default τιμές για τις άλλες παραμέτρους. Επίσης, θέτουμε κάποιες options.

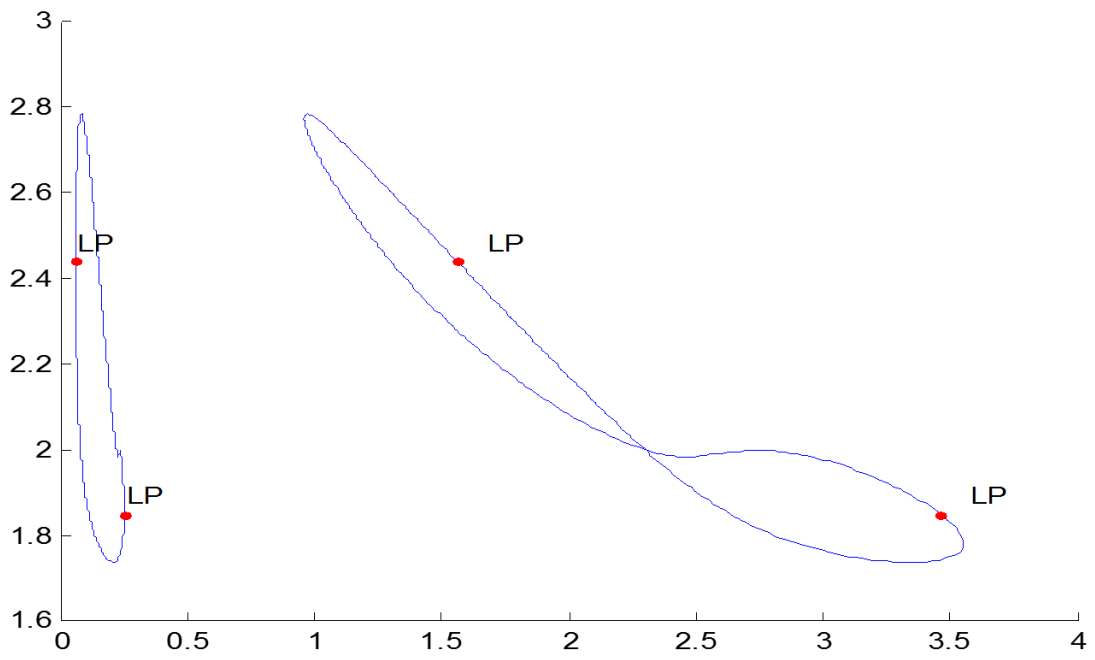
```
>>[x1,v1]=init_EP_EP(@bruss,x0,[N,L],[2]);
>>opt=contset;
>>opt=contset(opt,'MinStepsize',1e-5);
>>opt=contset(opt,'MaxCorrIters',10);
>>opt=contset(opt,'MaxNewtonIters',20);
>>opt=contset(opt,'FunTolerance',1e-3);
>>opt=contset(opt,'Singularities',1);
>>opt=contset(opt,'MaxNumPoints',500);
>>opt=contset(opt,'Locators',[]);
>> [x,v,s,h]=cont (@pde_1,x1,v1,opt);
first point found
tangent vector to first point found
label = LP, x = ( 2.441804 2.876388 3.294693 3.686753 4.042622 4.353160 4.610584
4.808752 4.943218 5.011139 5.011139 4.943218 4.808752 4.610584 4.353160 4.042622
3.686753 3.294693 2.876388 2.441804 2.190760 2.083425 1.980256 1.883684 1.796105
1.719717 1.656399 1.607649 1.574561 1.557844 1.557844 1.574561 1.607649 1.656399
1.719717 1.796105 1.883684 1.980256 2.083425 2.190760 0.060583 )
a=-9.480896e-002
label = LP, x = ( 1.849690 1.691659 1.527607 1.365990 1.217346 1.090159 0.989019
0.914980 0.867020 0.843565 0.843565 0.867020 0.914980 0.989019 1.090159 1.217346
1.365990 1.527607 1.691659 1.849690 2.467981 2.634795 2.797248 2.950689 3.090096
3.211088 3.310452 3.386152 3.437057 3.462616 3.462616 3.437057 3.386152 3.310452
3.211088 3.090096 2.950689 2.797248 2.634795 2.467981 0.252317 )
a=1.888577e-001
Closed curve detected at step 477
elapsed time = 1.4 secs
npoints curve = 477
>> cpl(x,v,s[41 20])
```



Σχήμα30 Στο παραπάνω διάγραμμα έχουμε την καμπύλη της λύσης ισορροπίας για $x(20)$, $N=20$ και $L=0.06$.

Επίσης, παρακάτω παίρνουμε το διάγραμμα για μια ακόμη συνιστώσα του $x(20)$

```
>> cpl(x,v,s,[41 20])
>> cpl(x,v,s,[31 20])
```

Σχήμα 31 η καμπύλη της λύσης ισορροπίας
για δύο διαφορετικές συνιστώσες και για $N=20$ και $L=0.06$.

Κεφάλαιο 6

ABM προσομοίωση ενός χρηματοοικονομικού προβλήματος

6.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ένα *agent model* (*a-m*) ικανό να περιγράψει τη διαδικασία μιας συναλλαγής χρηματιστηρίου και πως αυτή οδηγεί στην πράξη σε μη γραμμικά φαινόμενα όπως η έκρηξη ή η κατάρρευση. Στο μοντέλο μας, κάθε άτομο περιγράφεται από μία εσωτερική κατάσταση (*internal preference state*) με εσωτερική δυναμική και επηρεασμένη από εξωτερικά γεγονότα καθώς και γεγονότα εντός του πληθυσμού. Μόλις η κατάσταση του κάθε ατόμου ξεπερνά ένα προκαθορισμένο σύνορο, τότε το άτομο δραστηριοποιείται.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε έναν πληθυσμό που αποτελείται από άτομα που διαρκώς αποφασίζουν είτε να αγοράσουν είτε να πουλήσουν ένα περιουσιακό στοιχείο. Στη συνέχεια δημιουργούμε μια δυναμική εξίσωση που περιγράφει ολόκληρο τον πληθυσμό των ατόμων. Στη στατιστική μηχανική μια ανάλογη εξίσωση στην παραπάνω είναι η κινητική εξίσωση. Εξάγουμε την εξίσωση του πληθυσμού αυστηρά από το *a-m* με την προϋπόθεση ότι κάνουμε μία λογική στατιστική προσέγγιση και χωρίς ανεξάρτητες παραμέτρους. Στη συνέχεια παρατηρούμε τις συνέπειες της εξίσωσης στα ποσοστά αγρών και πωλήσεων που προκύπτουν από σταθερή εισαγωγή πληροφοριών.

Ο πληθυσμός των ατόμων επηρεάζεται από πληροφορίες που εισέρχονται από εξωγενείς παράγοντες, καθώς και από ενδογενή ανταλλαγή πληροφοριών. Συγκεκριμένα η άμεση αλληλεπίδραση και η προσωπική επικοινωνία μπορούν να δημιουργήσουν τεράστια επιρροή σε μονάδες ενός ανθρώπινου πληθυσμού. Η συνεκτική ανθρώπινη συμπεριφορά που προκύπτει από τη μίμηση έχει μελετηθεί ιδιαίτερα [25]. Εφόσον η μίμηση συνδέεται με συναισθηματικές ή παρορμητικές κινήσεις, μπορεί επίσης να ερμηνευτεί σαν μια στρατηγική υπό προϋποθέσεις μιας μη τέλειας πληροφορίας. Η σύγχρονη οικονομική βιβλιογραφία δίνει έμφαση στο πως η συμπεριφορά επηρεάζεται από ένα σύνθετο σύμπλεγμα πληροφοριών και τις επιπτώσεις τους στο να δημιουργήσουν απροσδόκητα σχέδια [2][31]. Στο σχετικά απλουστευμένο εμποροκρατούμενο οικονομικό μοντέλο (*agent based financial market model*) η μίμηση έχει τεράστια συμβολή στην μη γκαουσιανή φύση που παρουσιάζουν οι αλλαγές στις τιμές και στην υπερβολική αστάθεια.

Ως εφαρμογή της μεθόδου μας θα χρησιμοποιήσουμε την κινητική εξίσωση ώστε να διερευνήσουμε τα αποτελέσματα της μιμητικής συμπεριφοράς. Για τα μιμητικά άτομα, η κινητική εξίσωση παίρνει τη μορφή μιας μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης που θυμίζει ιδιαίτερα την εξίσωση του Boltzmann για την κινητική θεωρία. **Αυτή η διατύπωση μας επιτρέπει να μελετήσουμε θεωρητικά τη δυναμική συμπεριφορά του μοντέλου σε παραμετρικό χώρο.**

Κατά την ανάλυση και την προσομοίωση εστιάζουμε στους παράγοντες εκείνους που η μιμητική συμπεριφορά προκαλεί αστάθεια και μη φυσιολογική διαφορά μεταξύ του αθροίσματος της προσφοράς και της ζήτησης.

Η τυπική ανάλυση που παρουσιάζεται παρακάτω είναι ιδιαίτερως βασισμένη στην εμπειρία που αποκτήθηκε προσπαθώντας να ξεπεραστούν προβλήματα στη νευρολογία, τα οποία αφορούσαν την

συμπεριφορά των πληθυσμών των νεύρων [13][22][27][28][17].

6.2 Το μικροσκοπικό agent- based μοντέλο

Αποτυπώνουμε ποσοτικά μία απλή, πιθανόν εξωπραγματική πτυχή της ψυχολογίας ενός ατόμου καθώς και τη σχέση του με την ρεαλιστική συμπεριφορά, που διατηρούμε σε ένα ελάχιστο ώστε να μην επηρεάσει τη γενική μας προσέγγιση.

Το μοντέλο βασίζεται αφενός σε αποτελέσματα της θεωρίας αποφάσεων που σχεδιάστηκε από ποσοτικούς ψυχολόγους [8]. Μια άλλη έμπνευση για το παρόν μοντέλο είναι η integrate-and-fire παρουσίαση των νευρικών κυτάρρων.

Υποθέτουμε ότι η κατάσταση ενός ατόμου τη στιγμή t είναι πλήρως επηρεασμένη από την τιμή του $x(t)$. Αυτή είναι η στιγμιαία εσωτερική κατάσταση του ατόμου για την οποία θα αναφερόμαστε στο εξής ως κατάσταση προτίμησης (preference state). Γενικά μπορεί να θεωρηθεί ως η τάση που έχει το άτομο να συμπεριφέρεται με μια πληθώρα από συγκεκριμένους τρόπους. Το x καθορίζει τις συντεταγμένες της χωρικής κατάστασης όπου κάθε άτομο αναπαρίσταται ως σημείο. **Το άτομο δρα μόνο όταν το σημείο που το αντιπροσωπεύει περνά ένα προκαθορισμένο όριο στο χώρο κατάστασης.** Στο μοντέλο μας η διαδικασία μιας συναλλαγής χρηματιστηρίου των ατόμων περιγράφεται από το δυναμικό σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x + I(t) \quad (6.1)$$

υπό την προϋπόθεση ότι $|x| = 1$, η κατάσταση προτίμησης επανέρχεται για $x = 0$, κι έτσι η κατάσταση προτίμησης παραμένει μέσα σε ένα πεπερασμένο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$.

Το $I(t)$ περιγράφει το αποτέλεσμα των εξωγενών παραγόντων πάνω στο άτομο. Αυτό μπορεί να προέρχεται από όλων των ειδών τις πηγές πληροφοριών όπως τα μέσα μαζικής ενημέρωσης ή διαπροσωπικές επαφές. Να σημειώσουμε πως, η εξίσωση (6.1) είναι μη γραμμική λόγω της προϋπόθεσης επαναφοράς. Αναφερόμαστε στο x ως το κλάσμα σιγουριάς των ατόμων και επιλέγουμε τις τιμές $x = 1$ και $x = -1$ ως τα όρια για αγορά και πώληση, αντίστοιχα.

Το αποτέλεσμα της εισροής πληροφοριών αποδίδεται από μία σειρά από στιγμιαία άλματα στην κατάσταση προτίμησης, μεγέθους $\varepsilon^{(k)}$ που λαμβάνονται σε χρόνους $t^{(k)}$, $k=1,2,\dots$. Αυτή η μορφή είναι επιτρεπτή όσο η χρονική κλίμακα του πακέτου πληροφοριών είναι πολύ μικρότερη από τις άλλες αλλαγές που συντελούνται στο x . Η κατάσταση προτίμησης των ατόμων δίνεται από τον όρο

$$I(t) = \sum_k \varepsilon^{(k)} \delta(t - t^{(k)}) \quad (6.2)$$

Συγκεντρώνουμε ένα μεγάλο μέγεθος από ανεξάρτητες πηγές πληροφοριών και επιλέγουμε τις εισερχόμενες πληροφορίες ως κατανομή Poisson στο χρόνο.

Χάριν απλότητας κάθε άλμα θα θεωρείται θετικό για ε^+ , ή αρνητικό για ε^- , με συχνότητα εισροής $\nu^+(t)$ και $\nu^-(t)$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μορφή θα αναφερόμαστε από εδώ και στο εξής στα θετικά και στα αρνητικά πακέτα πληροφοριών. Παίρνουμε τα μεγέθη ε^+ , ε^- ως μέτρα των πακέτων πληροφορίας ενός τυπικού ατόμου. Στην ιδιαίτερη περίπτωση που $\varepsilon^+ = -\varepsilon^-$, μπορούμε να πούμε πως τα πακέτα πληροφοριών είναι συμμετρικά.

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης (6.1) εκφράζει την εξέλιξη της κατάστασης προτίμησης ενός υποθετικού

απομονωμένου ατόμου. Στο παρόν μοντέλο αυτός ο όρος αντιστοιχεί στην αδράνεια του συστήματος και αποτελείται από περιοδική επιστροφή στην ουδέτερη κατάσταση προτίμησης, $x=0$ με ρυθμό που προσδιορίζεται από το γ . Όσο υπάρχει απουσία εισερχόμενης πληροφορίας, το άτομο δεν έχει εσωτερική τάση να αγοράσει είτε να πουλήσει. Οι προϋποθέσεις επαναφοράς προσδιορίζουν πως μόλις περάσουμε το όριο της απόφασης, η κατάσταση προτίμησης τοποθετείται στην ουδέτερη θέση. Δηλαδή, μόλις το άτομο αντιδράσει (αγοράσει ή πουλήσει) υπό την επίδραση των πληροφοριών που έλαβε ξεκινάει νέα διαπραγμάτευση. Ακόμα, αν θέλουμε να ενσωματώσουμε την επίδραση της *μνήμης* στο μοντέλο μπορούμε να τοποθετήσουμε την επαναφορά του συστήματος σε μη ουδέτερη θέση. Τέλος, είναι προφανές πως, όταν το $x(t)$ είναι στο θετικό (αρνητικό) μισό του πεδίου ορισμού, το άτομο έχει μεγαλύτερη τάση να αγοράσει (πουλήσει) και μπορεί να θεωρηθεί αισιόδοξος (απαισιόδοξος).

6.3 Αλληλεπιδράσεις

Εν συνεχεία υποθέτουμε ένα μεγάλο σύνολο από N ατόμων που εμπορεύονται την ίδια αξία περιουσιακών στοιχείων. Ονομάζουμε κάθε άτομο με έναν δείκτη $i=1, \dots, N$, και η κατάσταση προτίμησης τους περιγράφεται από την εξίσωση (6.1). Προφανώς, οι συμμετέχοντες στην αγορά δεν εισπράττουν στο σύνολό τους τις ίδιες πληροφορίες και δεν είναι εξίσου εκτεθειμένοι στα ίδια κανάλια πληροφοριών. Μάλιστα, κάθε είσοδος πληροφορίας σε ένα πραγματικό άτομο υποβάλλεται σε εντατική επεξεργασία πριν ερμηνευτεί ως χρήσιμη πληροφορία για το άτομο. Καθώς πλησιάζουμε στο τελικό αποτέλεσμα της διαδικασίας, πρέπει να περιμένουμε διαφορές μεταξύ των ατόμων στο πως αντιδρούν σε εξωτερικούς παράγοντες. Στο μοντέλο μας επιτρέπουμε σε κάθε άτομο i να οδηγείται από τον προσωπικό του δίαυλο πληροφοριών $I_i(t)$. Η ανομοιογένεια στις πληροφορίες, μαζί με μη γραμμική δυναμική εξέλιξη καθώς και, πιθανώς, διαφορετικές αρχικές συνθήκες, μπορούν να δώσουν μια μεγάλη ποικιλία από χαρακτήρες στον πληθυσμό.

Το μέσο ποσοστό των εισερχόμενων εξωγενών πληροφοριών θεωρείται ίδιο για όλα τα άτομα. Κάθε άτομο, μάλιστα, επηρεάζεται από τη συμπεριφορά των άλλων ατόμων του πληθυσμού. **Ορίζουμε ως g το μέσο αριθμό των ατόμων που επηρεάζουν κάποιο άτομο.** Το μέγεθος της ομάδας που επηρεάζεται από κάθε άτομο επιλέγεται τυχαία από μια κατανομή *Poisson* με μέσο g , και η ομάδα συμπληρώνεται τυχαία από τους υπόλοιπους πληθυσμούς. Άρα αλληλεπιδράσεις στον πληθυσμό συμβαίνουν μέσω της επίδρασης των ενεργειών των ατόμων στην κατάσταση προτίμησης άλλων ατόμων. Συγκεκριμένα, αν ένα άτομο προχωρά σε μια ενέργεια αγοράς (πώλησης), η κατάσταση προτίμησης ενός άλλου ατόμου στιγμιαία αυξάνεται κατά $\varepsilon^{+(-)}$, εφόσον επηρεάζεται από τη συγκεκριμένη ενέργεια εκείνη τη στιγμή. Αυτό επιβεβαιώνει την διαίσθηση πως όσο περισσότερο ένα άτομο βλέπει πως τα άλλα άτομα αγοράζουν (πουλάνε), τόσο άπληστα (ολιγαρκή-συγκρατημένα) γίνονται.

Η ύπαρξη αμοιβαίων αλληλεπιδράσεων αυξάνει την πιθανότητα αλληλεξαρτώμενων εισόδων πληροφοριών στα άτομα. Σε περίπτωση σταθερής εισόδου πληροφοριών κάθε άτομο στο μοντέλο μας είναι απεικονιστικά ένας *ταλαντωτής* και είναι γνωστό πως αλληλοσυνδεόμενοι ταλαντωτές είναι ικανοί για παγκόσμιο συγχρονισμό [15]. Σε συγκεκριμένες διακυμάνσεις της τιμής της παραμέτρου, ο παγκόσμιος συγχρονισμός γίνεται αντιληπτός στον πληθυσμό μας. Σε ασυγχρόνιστο καθεστώς, από την άλλη πλευρά, τοπικοί ταλαντωτές είναι πιθανόν να εμφανιστούν αν η συνδεσιμότητα είναι σταθερή στο χρόνο. Η εμπειρία μας από τα αριθμητικά αποτελέσματα, υποδηλώνει πως με αραιή σύζευξη, $g \ll N$, δεν παίρνουμε αλληλοσυνδεόμενες εισόδους. Στη δική μας αριθμητική προσομοίωση (*direct simulation*) χρησιμοποιούμε αραιή σύζευξη, και έτσι η συνδεσιμότητα παραμένει σταθερή στο χρόνο.

Ορίζουμε τις τιμές της αγοράς και της πώλησης ανά άτομο, R^+ και R^- , αντίστοιχα, ως

$$R^\pm = \frac{1}{N\Delta t} \sum_n \sum_{i=1}^N \int_t^{t+\Delta t} dt' \delta(t' - T_i^{(n)\pm}) \quad (6.3)$$

όπου $T_i^{(n)\pm}$ είναι η στιγμή όπου το άτομο i “περνά” το όριο απόφασης στο ± 1 για n -οστή φορά.

Εφόσον η συναλλαγή δεν είναι συγχρονισμένη στο μοντέλο μας, χρησιμοποιούμε τις τιμές αγοράς και πώλησης και όχι τη συνολική προσφορά και ζήτηση. Δt είναι ένα μικρό χρονικό διάστημα ρυθμισμένο να αποδίδει το στιγμιαίο μέσο του R^\pm μαζί με τις διακυμάνσεις τους στον μέσο. Υπολογίζουμε ταυτόχρονα όλες τις αριθμητικές λύσεις για τις εξισώσεις των N μεμονωμένων ατόμων με μια αριθμητική προσομοίωση (direct simulation). Σημειώνουμε πως κανένα άτομο δεν έχει μεγαλύτερη επιρροή στο σύνολο του πληθυσμού σε σχέση με κάποιον άλλο.

6.4 Δυναμική συμπεριφορά του πληθυσμού

Είναι πιθανό να προσεγγίσουμε μια συνοπτική περιγραφή της δυναμικής μεγάλου μεγέθους ατόμων εστιάζοντας στον αριθμό των ατόμων σε κάθε κατάσταση προτίμησης και όχι στην κατάσταση προτίμησης του κάθε ατόμου στον πληθυσμό. Αυτό επιτυγχάνεται από την εξίσωση της πυκνότητας των ατόμων $\rho(x,t)$, στην κατάσταση προτίμησης x σε χρόνο t . Η πυκνότητα πιθανότητας δηλώνει την πιθανότητα ρdx στην οποία ένα άτομο του πληθυσμού ανήκει στο διάστημα $(x, x+dx)$ του χώρου κατάστασης σε χρόνο t . Θέτουμε $\rho(x,t)$ ως την μέση πυκνότητα των ατόμων σε ένα μεγάλο αριθμό αντιγράφων του πληθυσμού, όλα με τον ίδιο αριθμό ατόμων, ίδιο μέσο όρο εξωγενών αφίξεων και ίδια δύναμη ανάδρασης g . Όπως εξηγήσαμε παραπάνω, οι εξωγενείς παράγοντες σχεδιάζονται από μια κατανομή, καθώς και τα μέλη των επηρεασμένων ομάδων. Μπορούμε να θεωρήσουμε και για τα δύο εξίσου πως μπορούν να παράγουν την αναλογία των αντιγράφων του πληθυσμού.

Για να ορίσουμε τα ποσοστά αγοράς και πώλησης, πρώτα σημειώνουμε πως κάθε άτομο στο διάστημα $[1-\epsilon^+, 1]$, μετά τη λήψη μιας θετικής ώθησης, “περνά” το όριο της απόφασης και αγοράζει. Όμοια, κάθε άτομο στο διάστημα $[-1, -1+\epsilon^-]$ μετά τη λήψη μιας αρνητικής ώθησης, “περνά” το όριο της απόφασης να πουλήσει. Τώρα, αν υποθέσουμε ότι η κατάσταση προτίμησης ενός ατόμου είναι ανεξάρτητη με το γεγονός ότι ενδέχεται να λαμβάνει πληροφορία μπορούμε να γράψουμε τα ποσοστά αγοράς και πώλησης ως εξής

$$R^\pm = \pm v^\pm \int_{\pm 1 \mp \epsilon^\pm}^{\pm 1} \rho(x,t) dx = v^\pm(P^\pm, \rho) \quad (6.4)$$

όπου P^\pm είναι μονάδα μόνο σε συγκεκριμένα υποδιαστήματα, μηδέν αλλού, και (\cdot, \cdot) ορίζει το εσωτερικό προϊόν στο $[-1, 1]$. Ορίζουμε τα ποσοστά αγοράς και πώλησης R^\pm στην αριθμητική προσομοίωση όπως και στην εξίσωση πληθυσμού. Όταν κάθε άτομο είναι επηρεασμένο από g άλλα άτομα, το ποσοστό της εισόδου πληροφοριών ανά άτομο είναι

$$v^\pm = v_{ex}^\pm + gR^\pm = v_{ex}^\pm + gv^\pm(P^\pm, \rho)$$

όπου λύνοντας ως προς v^\pm οδηγούμαστε στη σχέση:

$$v^\pm = \frac{v_{ex}^\pm}{1-g(P^\pm, \rho)} \quad (6.5)$$

Μελετώντας τα άτομα που διέπονται από την εξίσωση (6.1) [22]:

Η διατήρηση της πιθανότητας επιτάσσει το ρ να ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x} + (R^+ + R^-)\delta(x) \quad (6.6)$$

όπου η ροή πιθανότητας δίνεται από

$$J(x,t) = -\gamma x \rho(x,t) + v^+(t) \int_{-1}^x dx' q^+(x',x) \rho(x',t) - v^-(t) \int_x^1 dx' q^-(x',x) \rho(x',t) \quad (6.7)$$

Όπου ο πρώτος όρος αναπαριστά τη ροή της κατάστασης προτίμησης των ατόμων προς την ουδέτερη κατάσταση όταν δεν έχουμε εισροή κάποιας πληροφορίας.

Ο επόμενος όρος αναπαριστά το ρυθμό με τον οποίο η κατάσταση προτίμησης των ατόμων “περνά” στα δεξιά του πεδίου ορισμού λόγω της εισροής των θετικών πληροφοριών v^+ . Το θετικό πακέτο πληροφοριών εμπεριέχεται στην συνάρτηση $q^+(x',x)$, η οποία είναι η πιθανότητα ένα άτομο να μεταπηδήσει από την κατάσταση x' στην κατάσταση x ή και μεγαλύτερη από αυτήν, λόγω θετικής πληροφορίας που προσλήφθηκε από το άτομο στην κατάσταση x' . Αν το μέγεθος του θετικού άλματος είναι σταθερό ίσο με ε^+ , τότε η συνάρτηση $q^+(x',x) = H[\varepsilon^+ - (x - x')]$, όπου η συνάρτηση $H(y) = 1$ όταν $y \geq 1$ και $H(y) = 0$ διαφορετικά. Ο τρίτος όρος αφορά αρνητικό πακέτο πληροφορίας και εκφράζεται αντιστοίχως. Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει η επόμενη

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \gamma \frac{\partial(x\rho)}{\partial x} + \sum_{k=+,-} \frac{v_{ex}^{(k)}}{1 - g^{(k)}(\rho)} (\rho(x - \varepsilon^{(k)}, t) - \rho(x, t)) + (R^+ + R^-)\delta(x) \quad (6.8)$$

Η παραπάνω εξίσωση περιέχει μη γραμμικότητα στη μεταβλητή της πυκνότητας την οποία κληρονομεί από τον μιμητικό όρο g .

Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (6.8) εκφράζει την τάση των ατόμων που περνούν το όριο της απόφασης να επανέρχονται στην αρχική κατάσταση. Τέλος, ως αποτέλεσμα των αλμάτων που σχετίζονται με την εισροή πληροφοριών, υπάρχουν όροι απώλειας και κέρδους, $\rho(x,t)$ και $\rho(x-\varepsilon^{(k)},t)$ αντίστοιχα.

Είναι προφανές ότι $\rho(x=\pm 1,t)=0$, όπου σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα άτομα στην κατάσταση $x=\pm 1$ επιστρέφουν στην ουδέτερη θέση επιβεβαιώνουν ότι $\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \rho dx = 0$. Περιορισμός που πρέπει να τηρείται λόγω της διατήρησης της πιθανότητας.

6.5 Εξίσωση Fokker Planck

Για μικρά $\varepsilon^{(k)}$ μπορούμε να αναπτύξουμε τους όρους $\rho(x-\varepsilon^{(k)},t)$ σε $\rho(x,t)$, σε δυνάμεις του $\varepsilon^{(k)}$ στην (6.8)

$$\rho(x-\varepsilon^{(k)}, t) = \rho(x, t) - \varepsilon^{(k)} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{2} (\varepsilon^{(k)})^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + O[(\varepsilon^{(k)})^3] \quad (6.9)$$

και απαλείφοντας τους όρους του $\varepsilon^{(k)}$ μεγαλύτερης τάξης του δύο παίρνουμε τη σχέση:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\mu\rho)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + (R^+ + R^-)\delta(x) \quad (6.10)$$

όπου $\mu(x,t) = \gamma x - (v^+ \varepsilon^+ + v^- \varepsilon^-)$ και $\sigma^2(t) = v^+ (\varepsilon^+)^2 + v^- (\varepsilon^-)^2$.

Έχει τη μορφή εξίσωσης διάχυσης, ή διαφορετικά γνωστή ως **εξίσωση Fokker Planck**. Η παράμετρος μ σχετίζεται με το ντετερμινιστικό μέρος των αλλαγών στην κατάσταση προτίμησης του ατόμου, και η παράμετρος σ είναι το μέτρο του μεγέθους των τυχαίων διακυμάνσεων της κατάστασης προτίμησης.

Να σημειώσουμε πως η μορφή μιας μη γραμμικής εξίσωσης Fokker Planck είναι η εξής:

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial t} = - \frac{d(Kf^\mu)}{dx} + Q \frac{d^2}{dx^2}(f^\nu)$$

όπου το K είναι ντετερμινιστικός συντελεστής (drift coefficient), Q είναι η σταθερά διάχυσης και μ και ν είναι πραγματικοί αριθμοί. Το t αναφέρεται στο χρόνο καθώς και το x υποδηλώνει την κατάσταση του συστήματος. Σημειώνουμε πως το x είναι ανακατασκευασμένο ώστε να είναι βαθμωτή μεταβλητή. Η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται στην *γραμμική Fokker Planck εξίσωση για $\mu=\nu=1$* [3].

Για να πληρείται ο περιορισμός για τη διατήρηση της πιθανότητας ορίζουμε

$$R^\pm = \mp \frac{1}{2} \sigma^2 \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=\pm 1}$$

Εάν πάρουμε $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ και τη συνοριακή συνθήκη για $x=-1$, $\rho(x=-1, t) = 0$ ολοκληρώνοντας την (7.8) μπορούμε να πάρουμε την πυκνότητα στην λύση ισορροπίας:

$$\rho_0(x) = R^- \frac{2}{\sigma^2} U^{-1}(x) \int_{-1}^x dx' U(x') [1 - \left(\frac{R^+}{R^-} + 1\right) H(x')] \quad (6.11)$$

Όπου ορίζουμε ως $U(x) = \exp\left\{-\frac{(2\mu x - \gamma x^2)}{\sigma^2}\right\}$.

Έπειτα, για να υπολογίσουμε τα ποσοστά αγοράς και πώλησης, θα χρησιμοποιήσουμε τη συνοριακή συνθήκη $\rho(x=1, t) = 0$ και την προϋπόθεση ότι $\int_{-1}^1 \rho dx = 1$:

$$\frac{R^+}{R^-} = \frac{\int_{-1}^0 dx U(x)}{\int_0^1 dx U(x)} \quad (6.12)$$

$$R^- = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \int_{-1}^1 dx U^{-1}(x) \int_{-1}^x dx' U(x') [1 - \left(\frac{R^+}{R^-} + 1\right) H(x')] \right\}^{-1} \quad (6.13)$$

Σημειώνουμε πως η εξίσωση (6.8) παραμένει μη γραμμική λόγω της εξάρτησης της πυκνότητας από το μ και το σ .

Αν ο όρος διάχυσης παραληφθεί στην (6.8), λαμβάνουμε ένα καθαρά ντετερμινιστικό σύστημα. Θα αναφερόμαστε σε αυτή την τελευταία περίπτωση ως την ντετερμινιστική προσέγγιση. Εδώ αν $v^+ \varepsilon^+ = -v^- \varepsilon^-$ τότε $R^+ = R^- = 0$ στη λύση ισορροπίας, λόγω της απουσίας πληροφορίας. Θέτουμε $I = v^+ \varepsilon^+ + v^- \varepsilon^-$ και θεωρούμε πως έχουμε εισροή θετικής πληροφορίας, δηλαδή $I > 0$. Τότε ρ είναι μη μηδενικό μόνο στο θετικό μισό του πεδίου ορισμού και το ποσοστό πωλήσεων

εξαφανίζεται. Ολοκληρώνοντας την χρονοανεξάρτητη ντετερμινιστική εξίσωση πληθυσμού οδηγούμαστε στην πυκνότητα της λύσης ισορροπίας $\rho_0 = \frac{\alpha}{(I-\gamma x)}$ όπου η σταθερά $\alpha = \frac{\gamma}{\ln \frac{I}{I-\gamma}}$ λαμβάνεται από την κανονικοποίηση του ρ_0 .

Το R^+ στη λύση ισορροπίας που βρίσκεται από αυτήν την προσέγγιση, είναι το προϊόν του ρυθμού αλλαγής της κατάστασης στο δεξί σύνορο, $I-\gamma$ φορές την πυκνότητα, όμως λόγω του ότι το ποσοστό αγοράς R^+ πρέπει να παραμένει μη αρνητικό, υπάρχει ένα όριο στην είσοδο, $I=\gamma$, κάτω από το οποίο δεν γίνονται ενέργειες. Επομένως όταν $I>0$,

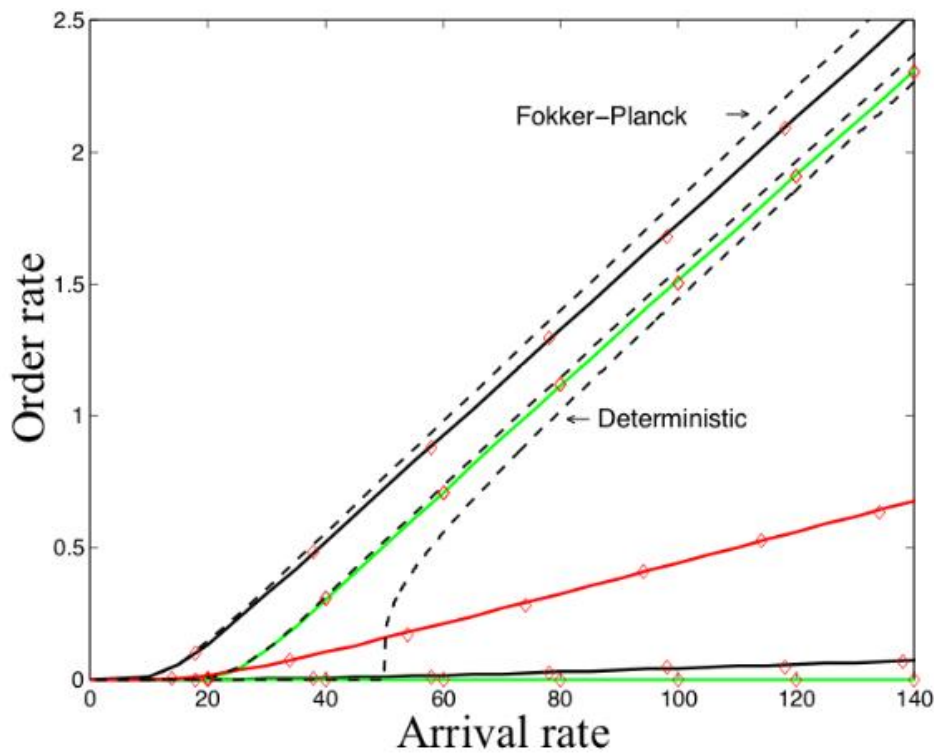
$$R^+ \begin{cases} \frac{\gamma}{\ln \frac{I}{I-\gamma}} \text{ αν } I > \gamma \\ 0 \text{ διαφορετικά} \\ R^- = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε πως η εισροές θετικών και αρνητικών πληροφοριών είναι ίσες, $\nu = \nu^+ = \nu^-$, τότε $R^+ > 0$ μόνο αν $\nu > \frac{\gamma}{\varepsilon^+ \varepsilon^-}$.
Για $I < 0$ είναι αντίστοιχα με τα R^+ και R^- αντίστροφα.

6.6 Κατάσταση ισορροπίας

Είναι γνωστό πως ένα δυναμικό σύστημα, το οποίο δεν διαταράσσεται από χρονικά μεταβαλλόμενες εξωτερικές εισόδους, θα “δώσει” μια χρονικά ανεξάρτητη λύση εφόσον αυτή υπάρχει [22]. Κατά την παρουσία σταθερής εισόδου πληροφοριών, ο πληθυσμός των ατόμων συνήθως προσεγγίζει μία λύση ισορροπίας (equilibrium) όπου τα ποσοστά αγοράς και πώλησης γίνονται ανεξάρτητα του χρόνου. Έτσι μία λύση ισορροπίας ικανοποιεί την (6.8) για $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Για να μελετήσουμε τις ιδιότητες της κατάστασης της λύσης ισορροπίας, εκτελούμε αριθμητική ολοκλήρωση της (6.8) ώσπου το σύστημα να γίνει χρονικά ανεξάρτητο. Στην ισορροπία τα ποσοστά των θετικών και αρνητικών πληροφοριών, ν^+, ν^- είναι σταθερά.

Ενδιαφερόμαστε για τη δυναμική του μοντέλου μας κάτω από κάποιους “συνηθισμένους” εξωτερικούς παράγοντες. Γι’ αυτό δεχόμαστε ως ίσα τα μέσα ποσοστά εισροής θετικών και αρνητικών εξωγενών πληροφοριών, $\nu_{ex^+} = \nu_{ex^-}$. Παρότι παίρνουμε αυτήν την παραδοχή, ένα τυπικό άτομο συνεχίζει τις ενέργειες, γεγονός που οφείλεται σε δύο παράγοντες.



Σχήμα 32 διάγραμμα των R^\pm συναρτήσει των v^\pm , οι συμπαγείς γραμμές αντιστοιχούν στα R^\pm που προκύπτουν από την αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης πληθυσμού. Τα χρώματα αντιστοιχούν σε: κόκκινο $\varepsilon^+ = \varepsilon^- = 0.08$, πράσινο $\varepsilon^+ = 0.05$, $\varepsilon^- = -0.03$ και μαύρο $\varepsilon^+ = 0.09$, $\varepsilon^- = -0.07$ [21]

Καταρχάς, όπως επισημάναμε παραπάνω, οι πληροφορίες παράγονται από ένα μεγάλο αριθμό από εξωτερικές πηγές, η εισροή των οποίων ακολουθεί κατανομή Poisson στο χρόνο. Αυτό έχει ως συνέπεια, ανεξάρτητα το είδος των πληροφοριών, να δημιουργείται η τάση οι πληροφορίες αυτές να επηρεάζουν τα άτομα και να τους ωθούν να “περάσουν” το όριο της απόφασης. Έτσι, έχουμε μη μηδενικά v^\pm ακόμη κι όταν τα πακέτα πληροφοριών είναι συμμετρικά, $\varepsilon^+ = \varepsilon^-$.

Αυτό, φαίνεται και στο διάγραμμα του σχήματος #32 όπου για την περίπτωση όπου $\varepsilon^+ = \varepsilon^- = 0.08$ παρατηρούμε πως το v^\pm αυξάνεται με αργό ρυθμό, όμως αυξάνεται, καθώς εισρέουν πληροφορίες.

Ενδιαφέρον έχει το ότι στη ντετερμινιστική προσέγγιση, το v^\pm εξαφανίζεται όταν η εξωγενής εισροή πληροφοριών είναι μικρότερη από την τιμή $\gamma / (\varepsilon^+ + \varepsilon^-)$. Αυτό το όριο αποκλίνει όταν το πακέτο πληροφοριών είναι συμμετρικό, και έτσι το ντετερμινιστικό σύστημα δεν εκδηλώνει ενέργειες για καμία τιμή του ποσοστού των εισερχόμενων πληροφοριών.

Ο δεύτερος παράγοντας στον οποίο οφείλεται το ότι το άτομο συνεχίζει τις παραγγελίες είναι το γεγονός πως οι αγορές και οι πωλήσεις μπορεί να διαφέρουν λόγω της πιθανής ασυμμετρίας στο πακέτο πληροφοριών. Κι αυτό γιατί κάποιο είδος πληροφοριών μπορεί να έχει μεγαλύτερο αντίκτυπο στην κατάσταση προτίμησης ενός ατόμου απ' ότι σε άλλον. Εξετάζοντας την περίπτωση που $\varepsilon^+ > -\varepsilon^-$, παρατηρούμε στο (σχ32) πως μια μικρή ασυμμετρία στις τιμές του μεγέθους του άλματος (jump size) παρουσιάζει ιδιαίτερα μεγάλη διαφορά στα ποσοστά αγοράς και πώλησης. Μπορούμε ακόμη να συμπεράνουμε πως η τυχαιότητα των v^\pm (arrival rates) επηρεάζει τα R^\pm .

Για παράδειγμα, στις δύο περιπτώσεις με τη μη συμμετρική εισροή πληροφοριών (σχ32) ($\varepsilon^+ = 0.05$, $\varepsilon^- = -0.03$ και $\varepsilon^+ = 0.09$, $\varepsilon^- = -0.07$) φαίνεται πως η τυχαιότητα των v^\pm επηρεάζει τα R^\pm . Και οι δύο περιπτώσεις αντιστοιχούν στην ίδια ντετερμινιστική προσέγγιση αφού έχουν την ίδια τιμή για την

παράμετρο μ . Παρόλαυτα στην περίπτωση με τα μεγαλύτερα ε^\pm , όπου σύμφωνα με την προσέγγιση Fokker-Planck η κατάσταση προτίμησης ενός τυπικού ατόμου υποβάλλεται σε μεγαλύτερες τυχαίες διακυμάνσεις (μεγαλύτερο σ), μας δίνει μεγαλύτερα R^\pm .

Καθώς αυξάνονται οι εξωγενείς πληροφορίες, αρχικά τα R^\pm είναι μηδενικά και έπειτα αυξάνονται θετικά εφόσον τα v_{ex}^\pm περάσουν μια τιμή. Παρατηρούμε πως στις μικρές τιμές του v_{ex}^\pm , το διάγραμμα της πυκνότητας στην ισορροπία, προσεγγίζει Γκαουσιανή καμπύλη με μεταβλητή σ στην (6.4) ως τυπική απόκλιση. Τα όρια στο $x = \pm 1$ είναι εξαιρετικά μακριά από τον όγκο της κατανομής ώστε τα R^\pm που δίνονται από την (6.4) εξαφανίζονται. Καθώς τα v_{ex}^\pm αυξάνονται, αυξάνεται και το σ , διευρύνεται και η πυκνότητα. Όταν το εύρος της πυκνότητας μπορεί να συγκριθεί με το διάστημα της κατάστασης προτίμησης, δηλαδή για $-1 \leq x \leq 1$, τα R^\pm γίνονται πολύ μεγαλύτερα του μηδενός.

Συγκρίνοντας, την εξίσωση πληθυσμού με την αριθμητική προσομοίωση δεν περιμένουμε διαφορά στις τιμές των R^\pm , το οποίο φαίνεται και (σχ32), και αυτό συμβαίνει λόγω του ότι έχουμε ατελή σύγκλιση του R^\pm που λαμβάνεται από την εξίσωση (6.3). Αντίθετα, τα αποτελέσματα της προσέγγισης Fokker-Planck διαφέρουν.

Εν συντομία, δείξαμε πως ένα μεγάλο ποσοστό παραγγελιών (orders), λόγω της στοχαστικής φύσης των εισερχόμενων πληροφοριών και μιας μικρής ενδογενούς προκατάληψης απέναντι σε πακέτα πληροφοριών, μπορεί να καταλήξει σε μεγάλη απόκλιση μεταξύ των R^\pm . Σημειώνουμε πως τα συμπεράσματα που καταλήξαμε για μια λύση ισορροπίας, είναι ιδιαίτερα χρήσιμα γενικότερα.

6.7 Ευστάθεια της καμπύλης ισορροπίας

Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε για ποιες τιμές του όρου g η λύση ισορροπίας της εξίσωσης πληθυσμού γίνεται ασταθής, δηλαδή θέλουμε να υπολογίσουμε την κρίσιμη τιμή του όρου g και το είδος της αστάθειας.

Ο όρος g θυμίζουμε πως είναι ο μιμητικός όρος που εκφράζει τον μέσο αριθμό των ατόμων που επηρεάζουν κάποιο άλλο άτομο. Οι αποδέκτες των πληροφοριών ανάδρασης γίνονται πιο ευάλωτοι στο να σχεδιάσουν παραγγελίες του ίδιου είδους. Γενικά, οι πληροφορίες ανάδρασης μπορεί να είναι δημόσιες (πχ. τιμές) ή ιδιωτικές (πχ. συζητήσεις μεταξύ ομάδων εμπόρων). Στο μοντέλο μας, η μιμητική συμπεριφορά σχετίζεται με το δεύτερο.

Αποδεικνύεται ότι όσο ο όρος g μεγαλώνει θα υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο g_{cr} στο οποίο ένα από τα ιδιοδιανύσματα έχει πραγματικό μέρος ίσο με το μηδέν. Αυτή είναι η περίπτωση στην οποία λέμε πως έχουμε οριακή ευστάθεια (marginal stability), όπου αν αυξηθεί λίγο ακόμα η τιμή των πληροφοριών ανάδρασης τότε θα έχουμε αποσταθεροποίηση του συστήματος. Ορίζουμε οριακή ευστάθεια ως

$$\max \operatorname{Re}[\lambda_n(g_{cr})] = 0, \text{ για } n \geq 1 \quad (6.15)$$

6.8 Αποτελέσματα προσομοιώσεων- Διαγράμματα διακλάδωσης και ευστάθεια λύσεων

Προσομοιώνουμε για $\varepsilon^+ = 0,075$, $\varepsilon^- = -0,072$, $\nu e x^+ = \nu e x^- = 20$, $\gamma = 1$ και βήμα της μεθόδου συνέχισης τόξου $\delta = 0.2$. Ξεκινάμε τις επαναλήψεις με $g_0=28$ και $g_1=28.2$. Το ίδιο μοντέλο έχει μελετηθεί για τις παραπάνω τιμές με χρήση της μεθοδολογίας equation-free [26].

Τρέχοντας τον κώδικα της μεθόδου συνέχισης μήκους τόξου στο MATLAB, για $N=240$, λαμβάνουμε τους εξής πίνακες:

Α) τον πίνακα u $[481 \times 1]$, διάνυσμα που αντιστοιχεί στη λύση της εξίσωσης για την τελευταία τιμή του g

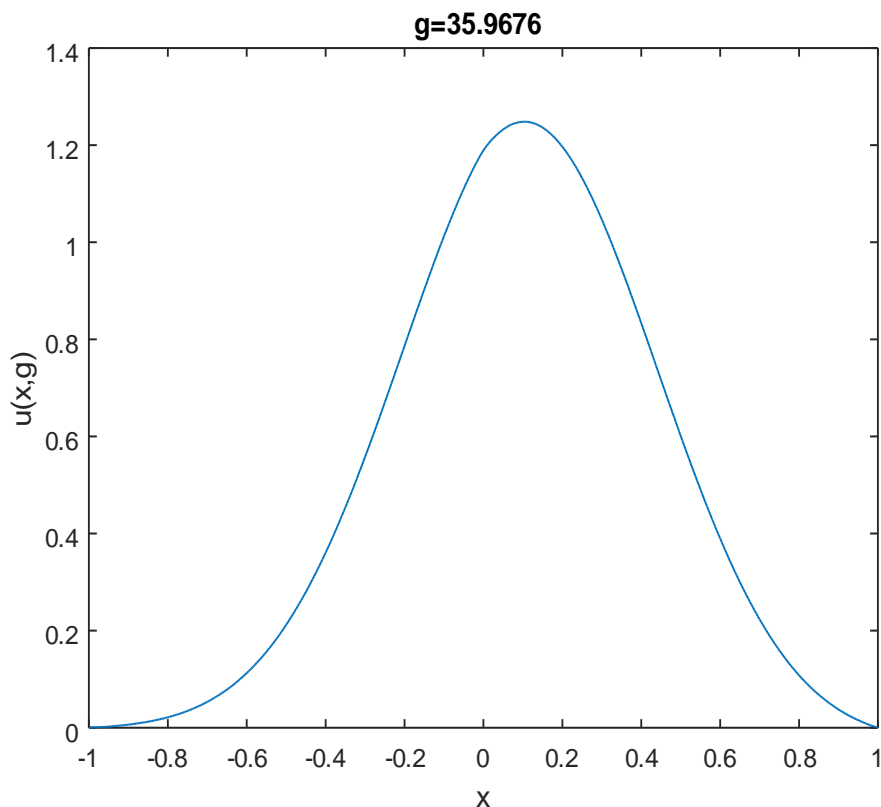
Β) τον πίνακα g $[1 \times 481]$, η τιμή του g αυξάνει με βήμα 0.2 σε κάθε επανάληψη της μεθόδου.

Γ) τον πίνακα $usave$ $[481 \times 481]$, διάνυσμα που αντιστοιχεί στη λύση της εξίσωσης για όλες τις τιμές του g

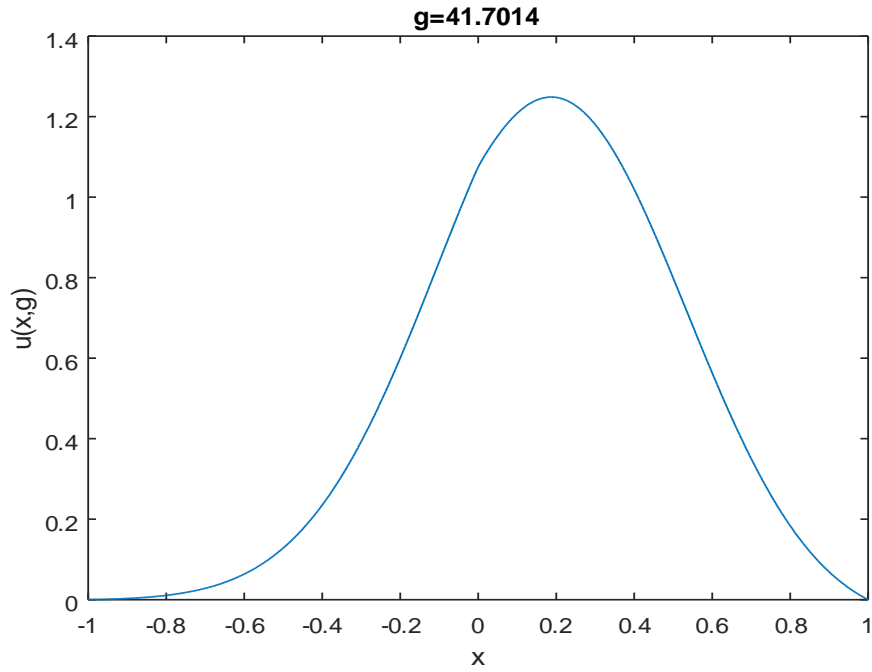
Δ) τον πίνακα των ιδιοτιμών $[479 \times 1]$

Ε) τους πίνακες των ποσοστών αγοράς και πώλησης R_p, R_m αντίστοιχα $[1 \times 481]$

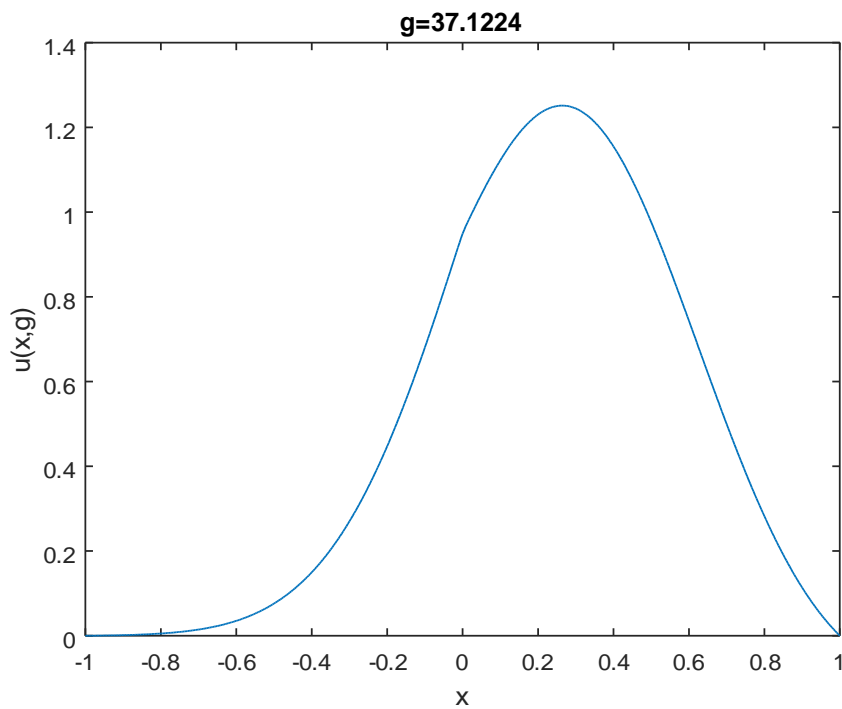
Έπειτα, καλώντας την εντολή `plot(u,x)` μπορούμε να πάρουμε τα διαγράμματα της λύσης της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές του g . Παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα :



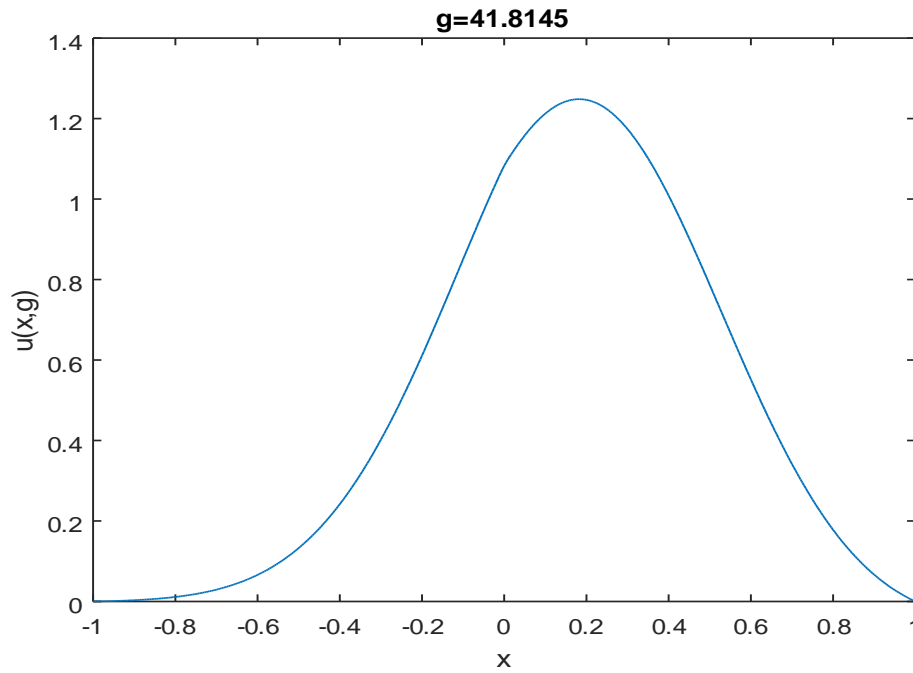
Σχήμα33 διάγραμμα της λύσης της $\mu\delta\varepsilon$ για $g=35.9676$ και $\lambda=-0,5394$ ($\lambda < 0$) καλώντας την εντολή `plot(x,u)`



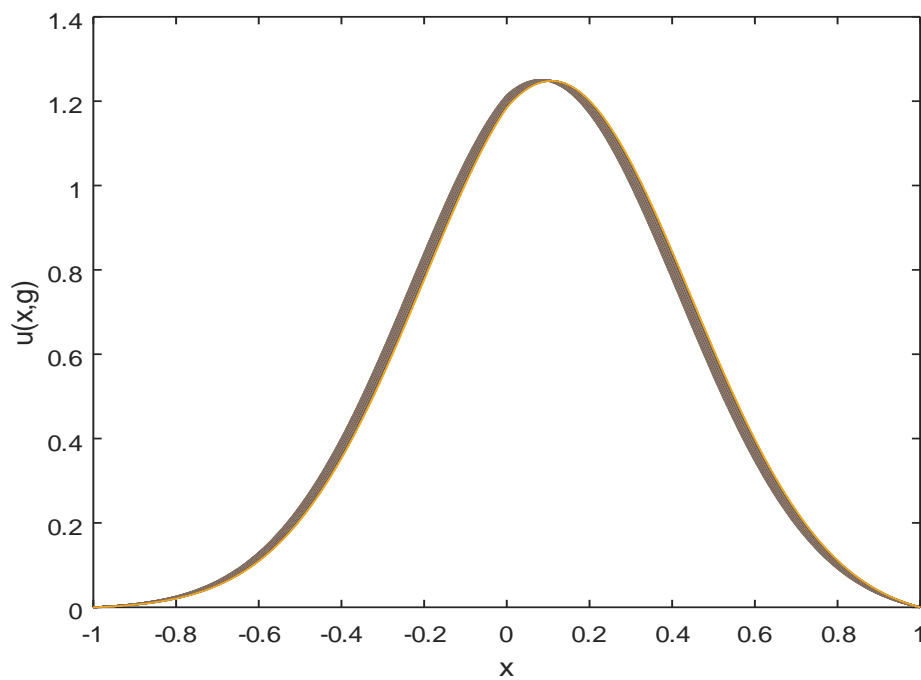
Σχήμα34 διάγραμμα της λύσης της μδε για $g=41.7014$ και $\lambda=-0,1248$ ($\lambda < 0$) καλώντας την εντολή $\text{plot}(x,u)$



Σχήμα35 διάγραμμα της λύσης της μδε για $g=37.1224$ και $\lambda=0,0001$ ($\lambda > 0$) καλώντας την εντολή $\text{plot}(x,u)$



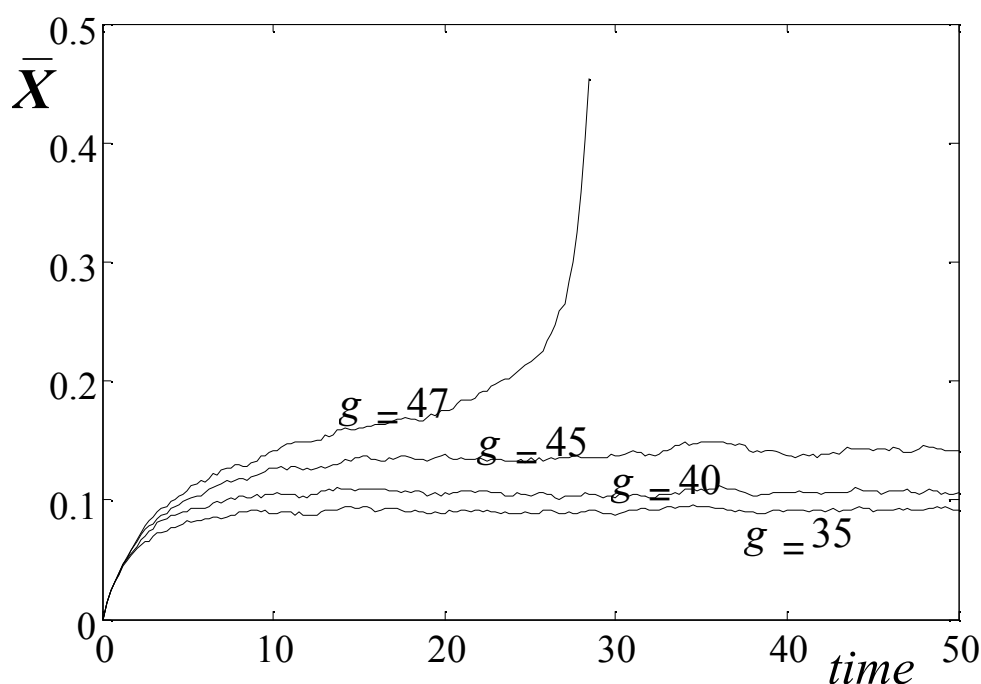
Σχήμα36 διάγραμμα της λύσης της μδε για $g=41.8145$ και $\lambda=0,0007$ ($\lambda>0$) καλώντας την εντολή `plot(x,u)`



Σχήμα37 διάγραμμα της λύσης της μδε για όλες τις τιμές του $g \in [28.4011, 37.1224]$, όπου $\lambda < 0$, καλώντας την εντολή `plot(x,usave)`

Παρακάτω παραθέτουμε δύο διαγράμματα που έχουν προκύψει εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία «Ελεύθερη εξισώσεων» (Equation Free), η οποία ουσιαστικά καθιστά δυνατή την κατασκευή διαγραμμάτων διακλάδωσης κατευθείαν από τον μικροσκοπικό προσομοιωτή χωρίς την ανάγκη εξαγωγής της μερικής διαφορικής εξίσωσης [26]. Παρότι η μεθοδολογία αυτή ξεπερνά τα όρια της συγκεκριμένης εργασίας, παραθέτουμε τα παρακάτω διαγράμματα διότι προσφέρουν χρήσιμα συμπεράσματα.

Οι χρονικές προσομοιώσεις, που βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα, εκφράζουν την εξέλιξη της μέσης τιμής της κατάστασης των ατόμων καθώς αλλάζει η παράμετρος διακλάδωσης g . Τα αποτελέσματα είναι ενδεικτικά της ύπαρξης μιας κρίσιμης τιμής παραμέτρου, μεταξύ των τιμών $g=45$ και $g=47$, που σηματοδοτεί την έναρξη μιας ποιοτικής μετάβασης στην αναδυόμενη δυναμική.

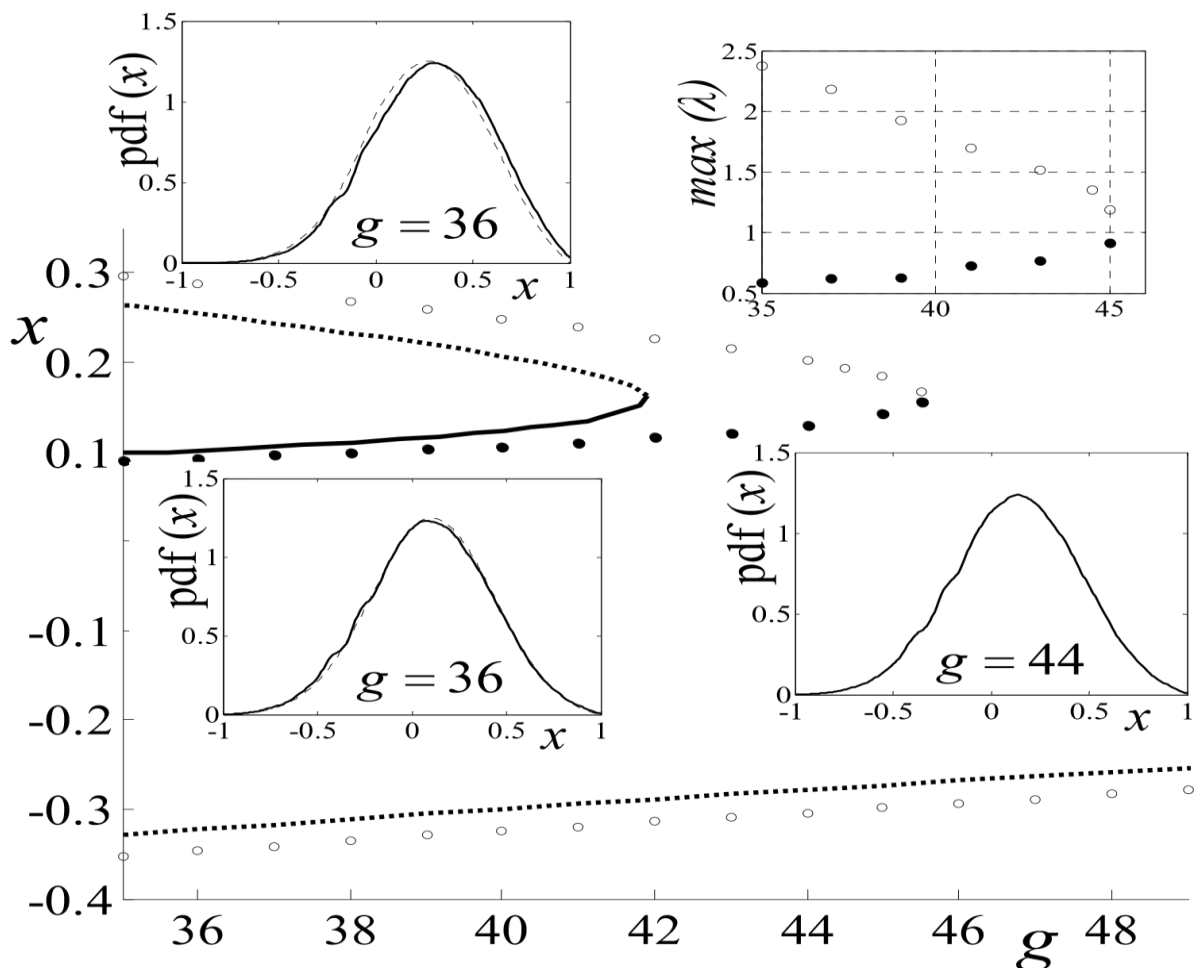


Σχήμα 38 χρονικές προσομοιώσεις του μικροσκοπικού μοντέλου για διάφορες τιμές του g .

Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο πως, στην μεθοδολογία «Ελεύθερη εξισώσεων», το κρίσιμο σημείο εντοπίζεται για την τιμή $g=47$, ενώ με τη Fokker-Planck προσέγγιση το εντοπίσαμε για την τιμή του $g \approx 42$. Όπως θα διαπιστώσουμε και παρακάτω, υπάρχει ποσοτική αναντιστοιχία μεταξύ της μεθοδολογίας μας και της μεθοδολογίας «Ελεύθερη εξισώσεων», όμως υπάρχει ποιοτική σύγκλιση των δύο μεθοδολογιών. Για βαθύτερη μελέτη προτείνουμε στον αναγνώστη να ανατρέξει στην βιβλιογραφική αναφορά [26].

Στο επόμενο σχήμα, αποτυπώνονται τα διαγράμματα διακλάδωσης που προκύπτουν από το «πραγματικό» μοντέλο – που έχει παραχθεί από τον μικροσκοπικό/στοχαστικό προσομοιωτή, με 50000 άτομα, 4000 αντίτυπα, $\Delta T=4\delta T$ (μεθοδολογία «Ελεύθερη Εξίσωση»)– και από το μοντέλο που περιγράφεται στην παρούσα εργασία. Οι διαφορές μεταξύ των δύο διαγραμμάτων έγκεινται στις παραδοχές που έχουν γίνει για την κατασκευή της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης (όπως ομοιόμορφα κατανεμημένος πληθυσμός, άπειρος πληθυσμός) καθώς και παραδοχές κατά την εξαγωγή των αλγεβρικών εξισώσεων κατά την παραγωγή της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Τρέχοντας τον κώδικα του μοντέλου της παρούσης εργασίας, παρατηρούμε πως στην τιμή $g = 41,8878$ οι ιδιοτιμές αλλάζουν πρόσημο, και από αρνητικές τιμές παίρνουμε την πρώτη θετική ιδιοτιμή $\lambda=0,0018$. Έχουμε διακλάδωση της μορφής σάγματος-κόμβου, όπου ο κλάδος για $\lambda < 0$ είναι ευσταθής, ενώ ο κλάδος για $\lambda > 0$ είναι ασταθής. Επιπλέον, λαμβάνουμε ακόμη έναν κλάδο που είναι παντού ασταθής (βλ σχήμα 39).



Σχήμα 39 Διάγραμμα διακλάδωσης. Σύγκριση του πραγματικού μοντέλου με τη μερική διαφορική εξίσωση. Οι κύκλοι αντιστοιχούν στο διάγραμμα διακλάδωσης όπως προκύπτει από το μικροσκοπικό μοντέλο εφαρμόζοντας την μεθοδολογία «Ελεύθερη Εξίσωση» [26]. Οι γεμάτοι κύκλοι αντιστοιχούν σε ευσταθείς καταστάσεις, ενώ οι ανοικτοί κύκλοι αντιστοιχούν σε ασταθείς (σάγμα). Οι συνεχείς (διακεκομμένες) γραμμές αντιστοιχούν σε ευσταθείς (ασταθείς) καταστάσεις όπως προκύπτουν από την μερική διαφορική εξίσωση. Ο κατώτερος κλάδος είναι ασταθής παντού. Επιπλέον, το επάνω δεξιό ένθετο απεικονίζει την εξέλιξη της μεγαλύτερης ιδιοτιμής σε σχέση με την παράμετρο διακλάδωσης, ενώ τα υπόλοιπα τρία ένθετα απεικονίζουν το διάγραμμα της λύσης agent-based μοντέλου και της ΜΔΕ συναρτήσει του x για τις συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου g - συνεχείς γραμμές: μεθοδολογία «Ελεύθερη εξίσωση», διακεκομμένες γραμμές: λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Επίσης, τα διαγράμματα $G(\text{pdf}(x),x)$ απεικονίζουν τις κατανομές των καταστάσεων προτίμησης x που προκύπτουν από την μεθοδολογία «Ελεύθερη εξισώσεων» και συγκρίνονται με τις λύσεις της ΜΔΕ. Το διάγραμμα κάτω αριστερά αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου διακλάδωσης $g=36$ και για $\lambda < 0$ (αρνητική ιδιοτιμή), το διάγραμμα κάτω δεξιά αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου διακλάδωσης $g=44$ και $\lambda < 0$, και τέλος το διάγραμμα πάνω αριστερά αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $g=36$ και $\lambda > 0$ (θετική ιδιοτιμή).

Ακόμη, το διάγραμμα που απεικονίζει την εξάρτηση της μέγιστης ιδιοτιμής, $\max(\lambda)$, από την παράμετρο διακλάδωσης g , εκφράζει το πέρασμα από ευσταθή σημεία ισορροπίας σε ασταθή σημεία ισορροπίας. Αυτό συμβαίνει όταν η μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή ξεπερνά την τιμή 1. Να σημειώσουμε πως στην περίπτωση απεικονίσεων όπως προκύπτουν από την μεθοδολογία «Ελεύθερη Εξισώσεων» ένα σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές όταν όλες οι απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών της Ιακωβιανής, υπολογισμένης στο σημείο ισορροπίας είναι μικρότερες της μονάδας.

Από την άλλη για συστήματα συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων ένα σημείο είναι ευσταθές εάν όλες οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής της $f(x)$ στο σημείο ισορροπίας έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο το μηδενός.

6.9 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία, δείξαμε πως ένα μικροσκοπικό μοντέλο , ατομο-κεντρικό (agent-based model) σε συνδυασμό με μια προσέγγιση του πληθυσμού μπορούν να προκαλέσουν ευρύ φάσμα δυνατοτήτων για την ανάλυση του πληθυσμού των ατόμων μιας χρηματοπιστωτικής αγοράς. Οι υπολογισμοί μέσω της εξίσωσης πληθυσμού είναι πιο γρήγοροι σε σχέση με την απλή προσομοίωση του μικροσκοπικού μοντέλου. Αυτό το πλεονέκτημα είναι ακόμη πιο σημαντικό στην περίπτωση που υφίσταται αλληλεπίδραση μεταξύ των ατόμων, όπως στο κοινωνικοοικονομικό μοντέλο. Οι προσομοιώσεις μας υποδεικνύουν την ακρίβεια της εξίσωσης του πληθυσμού στην απόδοση της συμπεριφοράς μιας μεγάλης συνάθροισης ατόμων.

Η θεωρία διακλάδωσης αποτελεί το απαραίτητο εργαλείο για την ανάλυση της δυναμική της συμπεριφοράς του πληθυσμού, την εύρεση των κρίσιμων σημείων που σηματοδοτούν την αλλαγή της συμπεριφοράς του συστήματος και την εύρεση ασταθών κλάδων ισορροπίας. Αποτελεσματικό λογισμικό για την κατασκευή των διαγραμμάτων διακλάδωσης είναι το MATLAB και το CL_MATCONT.

Η παραπάνω ανάλυση δεν μπορεί να γίνει κατά τρόπο συστηματικό με την απλή χρονική προσομοίωση στοχαστικών, μικροσκοπικών και εν γένει δυναμικών προσομοιωτών. Παραδείγματος χάριν είναι αδύνατη η εύρεση κλάδων με ασταθή σημεία ισορροπίας με απλή χρονική προσομοίωση, όπως επίσης είναι υπολογιστικά χρονοβόρα και μη ακριβής η αναγνώριση κρίσιμων σημείων διακλάδωσης όπου συμβαίνουν αλλαγές φάσης-συμπεριφοράς.

Εδώ δείξαμε πως από ένα στοχαστικό μοντέλο μπορούμε με τεχνικές στατιστικής μηχανικής να εξάγουμε μια μερική διαφορική εξίσωση και μέσω αυτής να εφαρμόσουμε την θεωρία της αριθμητικής ανάλυσης διακλάδωσης για την εύρεση κρίσιμων σημείων, και την κατασκευή του διαγράμματος διακλάδωσης των λύσεων με βάση παραμέτρους του συστήματος.

Βέβαια επειδή η κατασκευή της μερικής διαφορικής βασίζεται σε κάποιες παραδοχές η δυναμική της δεν είναι ακριβής ποσοτικά ως προς την «πραγματική» συμπεριφορά. Για αυτό το λόγο , συγκρίναμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης μας με τη μεθοδολογία «Ελεύθερη εξισώσεων» (Equation Free), η οποία καθιστά δυνατή την κατασκευή διαγραμμάτων διακλάδωσης κατευθείαν από τον μικροσκοπικό προσομοιωτή χωρίς την ανάγκη εξαγωγής της μερικής διαφορικής εξίσωσης, και διαπιστώσαμε πως υπάρχει ποιοτική σύγκλιση των δύο μεθοδολογιών. Οι διαφορές στις απεικονίσεις μεταξύ των δύο μεθόδων έγκεινται στις παραδοχές που πήραμε για την εξαγωγή της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Βιβλιογραφία

- [1]Allgower, E. L. & Georg, K., (1990). Numerical Continuation Methods: An introduction. *Springer-Verlag*.
- [2]Bannerjee, A. (1992). A simple model of herd behavior. *Quarterly Journal of Economics*, 107, 787-818.
- [3]Beyn, W. J., Champneys, A., Doedel, E., Govaerts, W., Kuznetsov, Yu. A., & Sandstede, B. (2002). Numerical continuation and computation of normal forms. In B. Fiedler, G. Iooss, and N. Kopell (Eds.) *“Handbook of Dynamical System : Vol 2”* (pp 149-219). Elsevier.
- [4]Bonabeau, E. (2002). Agent-based modeling: Methods and techniques for simulating human systems. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 99, 7280-7.
- [5]Buckmire, R., Application of a Mickens Finite-difference Scheme to the Cylindrical Bratu-Gelfand Problem. Mathematics Department, Occidental College, 1600 Campus Road, Los Angeles, California 90041-3338
- [6]Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov, Yu. A. (2003). MatCont: A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs. *ACM TOMS*, 29, 141-164.
- [7]Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov, Yu. A., Mestrom, W., Riet, A. M., & Sautois, B. (2006). *MATCONT and CL_MATCONT: Continuation toolboxes in MATLAB*. Belgium: Utrecht University The Netherlands.
- [8]Diederich, A. (1997). Dynamic stochastic models for decision making under time constraints. *Journal of Mathematical Psychology*, 41, 260-274.
- [9]Epstein, J. M. & Axtell, R. L. (1996). *Growing Artificial Societies: Social Science from the Bottom Up*. Cambridge, MA: Up. MIT Press.
- [10]Govaerts W., Kuznetsov Yu. A., and Dhooge A. (2005). Numerical continuation of bifurcation of limit cycles in MATLAB. *SIAM J. Sci. Comp.*, 27, 231-252.
- [11]Ioos, G., & Joseph, D. D. (1990). Elementary stability and Bifurcation theory, 2nd Ed., *Spinger*.
- [12]KELLER, H. B. (1977). Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. In P. H. Rabinowitz (Ed.), *Applications of Bifurcation Theory* (pp.359-384). New York: Academic Press.
- [13]Knight, B. W. (1996). Dynamical models of interacting neuron populations. In E.C. Gerf (Ed.), *Symposium on Robotics and Cybernetics: Computational Engineering in System Applications*. (pp. 185–189). Lille, France: Cite Scientifique
- [14]Knight, B. W. (2000). Dynamics of encoding in neuron populations: some general mathematical features. *Neural Computation*, 12, 473-518.
- [15]Kuramoto, Y. (1991). Collective synchronization of pulse-coupled oscillators an excitable units. *Physica D*, 50, 15-30.

- [16]Kuznetsov Yu. A., Govaerts W., Doedel E. J., and Dhooge A. (2005). Numerical periodic normalization for codim 1 bifurcation of limit cycles. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43, 1407-1435.
- [17]Kuznetsov, Yu. A., & Levitin, V. V. (1997). content: Integrated Environment for analysis of dynamical systems. Amsterdam: CWI.
<http://www.sgtnd.narod.ru/science/nummeth/bifsoft/content/eng/download.htm>
- [18]Kuznetsov, Yu.A. (2011). *Tutorial I: Using matcont for numerical integration of ODEs*. Utrecht: Department of Mathematics Utrecht University.
- [19]Kuznetsov, Yu.A. (2011). *Tutorial II: One-parameter bifurcation analysis of equilibria with matcont*. Utrecht: Department of Mathematics Utrecht University.
- [20]Lefever, R., & Nicolis, G. (1971) Chemical Instabilities and Sustained Oscillations. *J. Theor. Biology*, 30, 267-284.
- [21]Omurtag, A., & Sirovich, L. (2005). Modeling a large population of traders: Mimesis and stability. *J. Econ. Behav. Organ.*, 61, 562-576.
- [22]Omurtag, A., Knight, B. W., & Sirovich L. (2000). On the simulation of large populations of neurons. *Journal of Computational Neuroscience*, 8, 51-63.
- [23]Reynolds, C. (1987). Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model. *Comput. Graphics*, 21(4), 25-34.
- [24]Rheinboldt, C. W. (1980). Solution fields of nonlinear equations and continuation methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 17, 221-237.
- [25]Shiller, R. J. (2000). *Irrational Exuberance*. Princeton University Press, Princeton.
- [26]Siettos, C. I., Gear, C. W., & Kevrekidis, I. G. (2012). An equation-free approach to agent-based computation: Bifurcation analysis and control of stationary states. *EPL*, 99, 48007.
- [27]Sirovich, L., Knight, B. W., & Omurtag, A. (2000). Dynamics of neuronal populations: the equilibrium solution. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60, 2009-2028.
- [28]Sirovich, L. (2003). Dynamics of neuronal populations: eigenfunction theory; some solvable cases. *Network, Computation in Neural System*, 14, 249-272.
- [29]Strogatz, S. (2007). "The End of Insight". In Brockman, John. *What is your dangerous idea?*. HarperCollins. ISBN 9780061214950
https://en.wikipedia.org/wiki/Computer_simulation
Accessed September 20, 2017
- [30]Tony, F. C., Chan, T. F., & Keller, H. B. (1982). Arc-length Continuation and multi-grid techniques for nonlinear elliptic eigenvalue problems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput*, 3, 173-194.
- [31]Topol, R. (1991). Bubbles and volatility of stock prices: effect of mimetic contagion. *Economic*

Journal, 101, 786-800.

[32]Σιέττος, Ι. Κ., (2010). *Δυναμική συστημάτων και ταλαντώσεις*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.