



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΑΓΡΟΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΟΜΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

**ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΝΑΝΟ-
ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΕΣ ΜΕ ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΚΑΙ ΙΣΧΥΡΕΣ
ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γκουτή Έλλη

**Επιβλέπων: Καττής Μαρίνος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π**

Αθήνα, Μάρτιος 2011

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	1
	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
2	ΚΕΦΑΛΑΙΟ	5
	Η ΟΛΟΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.....	5
2.1	Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί.....	5
2.2	Ο ορισμός της ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης.....	8
2.3	Συζυγείς συναρτήσεις.....	11
2.4	Η διαφορική εξίσωση του Laplace σε μιγαδική μορφή.....	12
3	ΚΕΦΑΛΑΙΟ	14
	ΤΟ ΑΝΤΙ-ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.....	14
3.1	Οι εξισώσεις της αντιεπίπεδης ελαστικότητας.....	14
3.2	Εξαγωγή των διφασικών δυναμικών για μία κυκλική κυλινδρική ανομοιογένεια σε μία άπειρη ελαστική μήτρα.....	17
3.2.1	Το πρόβλημα της ασυνέχειας των αντιεπίπεδων τάσεων.....	19
3.2.2	Το πρόβλημα της ασυνέχειας των διεπιφανειακών μετατοπίσεων.....	21
3.3	Το αντιεπίπεδο πρόβλημα της κυκλικής ανομοιογένειας με τέλεια διεπιφάνεια.....	22
3.3.1	Απομακρυσμένη ομοιόμορφη τάση στη μήτρα.....	22
3.3.2	Το πρόβλημα της ιδιοπαραμόρφωσης της μήτρας.....	24
4	ΚΕΦΑΛΑΙΟ	27
	ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ ΜΕ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΚΕΛΥΦΩΤΗΣ ΜΕΜΒΡΑΝΗΣ	27
4.1	Διατύπωση του προβλήματος.....	27
4.2	Η διαδικασία της λύσης.....	29

4.3	Τα ελαστικά πεδία για το z-πρόβλημα.....	30
4.4	Τα ελαστικά πεδία του προβλήματος	32
4.4.1	Απομακρυσμένη ομοιόμορφη φόρτιση στην μήτρα	32
5	ΚΕΦΑΛΑΙΟ	38
	ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ ΜΕ ΕΛΑΤΗΡΙΑΚΗ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΣΥΝΔΕΣΗ.....	38
5.1	Διατύπωση του προβλήματος και η διαδικασία της λύσης	38
5.2	Τα ελαστικά πεδία για το S-πρόβλημα	39
5.3	Τα ελαστικά πεδία του προβλήματος	42
5.3.1	Απομακρυσμένη ομοιόμορφη φόρτιση στην μήτρα	42
6	ΚΕΦΑΛΑΙΟ	47
	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ	47
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	49

1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα σύνθετα υλικά, η σύνδεση των επί μέρους συστατικών τους παίζει ένα σημαντικό ρόλο στην μακροσκοπική μηχανική συμπεριφορά των υλικών αυτών, και ως εκ τούτου, έχει αποτελέσει ένα ιδιαίτερο αντικείμενο έρευνας στην περιοχή των σύνθετων υλικών. Στα προηγμένα σύνθετα υλικά, το είδος των δεσμών που συνδέουν τις διαφορετικές υλικές φάσεις είναι αποτέλεσμα των φυσικοχημικών διεργασιών που συμβαίνουν κατά την διάρκεια παρασκευής τους. Σε ένα πολυμερές υλικό ενισχυμένο με ίνες γυαλιού, σχηματίζεται μία μικροδομή από ίνες, που γεφυρώνει τις αναπτυσσόμενες ρωγμές στο υλικό κατά το στάδιο παρασκευής τους. Στα βιολογικά υλικά των ζώντων οργανισμών, μεταξύ των διαφορετικών θέσεων των υλικών αυτών μεσολαβεί μία μεταβατική ζώνη, που εμφανίζει μία ειδικής μορφής μικροδομή. Για παράδειγμα, τα μηνίγγια, που περιβάλλουν το ανθρώπινο μυαλό εμφανίζουν μία τέτοια μικροδομή (Bertoldi, et al., 2006). Έτσι, η σύνδεση των διαφορετικών φάσεων γίνεται, είτε μέσω των ατομικών δεσμών των ατόμων των διαφορετικών φάσεων, που λαμβάνει χώρα στη διεπιφάνεια, ή δια μέσου μιας μεταβατικής ζώνης, που παρεμβάλλεται ανάμεσα στις διαφορετικές υλικές φάσεις και επιδεικνύει μία συγκεκριμένη μηχανική συμπεριφορά. Η μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς των σύνθετων αυτών υλικών γίνεται με μοντέλα της μηχανικής του συνεχούς μέσου, που περιγράφουν με απλοποιημένο τρόπο την γεωμετρία και τις ιδιότητες των επιμέρους υλικών, καθώς και τον τρόπο σύνδεσής τους. Δύο τέτοια μοντέλα είναι το μοντέλο της ανομοιογένειας σε μία άπειρη ελαστική μήτρα (Eshelby, 1957) και το μοντέλο των δύο συνδεδεμένων ημιάπειρων δίσκων. Στα δύο αυτά μοντέλα, η υποβαθμισμένη μηχανική συμπεριφορά της διεπιφανειακής σύνδεσης, προσομοιώνεται, συνήθως, με ασύνδετα τμήματα, που αποτελούν τις διεπιφανειακές ρωγμές (Karihaloo and Viswanathan; 1988 a,b). Στις περιπτώσεις που μεταξύ των διαφορετικών υλικών μεσολαβεί μία λεπτή μεταβατική ζώνη υλικού, η οποία προσομοιώνεται ως μία τρίτη ελαστική φάση μικρού πάχους, που συνδέει τα επιμέρους υλικά (Hashin, 1962; Tashin, 2002; Mikata and Taya, 1985). Στην προσομοίωση της ζώνης αυτής, μία εναλλακτική

προσέγγιση, που είναι κατάλληλη στα βιολογικά υλικά, έχει πρόσφατα προταθεί από την ερευνητική ομάδα της καθηγήτριας του Harvard, Bertoldi. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, η προσομοίωση της ζώνης αυτής γίνεται με δεσμικά γραμμικά στοιχεία, που δημιουργούν ένα τύπο ‘ραφής’ των δύο υλικών (Bertoldi et al. 2006a; Bertoldi et al., 2006b).

Τα πρόσφατα χρόνια η ραγδαία ανάπτυξη της νανοτεχνολογίας, έφερε στο προσκήνιο νέα, προς διερεύνηση, θέματα που σχετίζονται με τη μηχανική συμπεριφορά της διεπιφάνειας των σύνθετων νανο-υλικών. Υλικές ή γεωμετρικές ασυνέχειες σε υλικά με διαστάσεις νανομέτρων, γνωστές ως νανο-ανομοιογένειες (nano-inhomogeneities) ή νανο-κοιλότητες (nano-voids), επιδεικνύουν μία, ποιοτικά, διαφορετική συμπεριφορά στον τρόπο σύνδεσής του (ή στο σύνορό τους) από αυτή που εμφανίζεται στις αντίστοιχες περιπτώσεις της μικρομηχανικής. Η διαφορετική αυτή συμπεριφορά της διεπιφάνειας (ή του συνόρου), οφείλεται στην διαφορετική ενεργειακή κατάσταση που έχουν τα άτομα που βρίσκονται κοντά στην διεπιφάνεια ή στο σύνορο, από τα άτομα που βρίσκονται στο εσωτερικό του υλικού. Η συμπεριφορά αυτή γίνεται έκδηλη μόνο στη νανο-κλίμακα, δηλαδή στις διαστάσεις των νανο-ανομοιογενειών και νανο-κοιλοτήτων. Όταν οι διαστάσεις του σύνθετου υλικού απομακρύνονται από τις διαστάσεις αυτές, τότε η παραπάνω συμπεριφορά δεν είναι έκδηλη και συνεπώς αμελείται (Gurtin and Murdoch, 1957; Gurtin and Murdoch, 1978; Gurtin et al., 1998; Choniem et al., 2003). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση μιας νανο-ανομοιογένειας ο λόγος του εμβαδού της επιφάνειας προς τον περικλειόμενο όγκο είναι αρκετά μεγάλος σε σχέση με τον αντίστοιχο λόγο στην κλίμακα της μικρομηχανικής. Ο λόγος αυτός αποτελεί μία χαρακτηριστική παράμετρο για την αξιολόγηση της επίδρασης της διεπιφάνειας ή του συνόρου, στην συνολική μηχανική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών. Συνεπώς, η προσομοίωση της συμπεριφοράς της διεπιφάνειας ή του συνόρου στη νανο-κλίμακα θα πρέπει να πάρει υπόψη την διαφορική ενεργειακή συμπεριφορά που επιδεικνύουν οι περιοχές αυτές σε σχέση με τις εσωτερικές περιοχές του σύνθετου υλικού. Στα πλαίσια της μηχανικής του συνεχούς μέσου, η προσομοίωση αυτή γίνεται με την εισαγωγή διαφορετικών καταστατικών εξισώσεων για την περιγραφή της συμπεριφοράς της διεπιφάνειας των νανο-ανομοιογενειών, ή του συνόρου των νανο-κοιλοτήτων. Σε μία τέτοια κατεύθυνση έχει κινηθεί η έρευνα στην περιοχή αυτή. Η συμπεριφορά της διεπιφάνειας των νανο-ανομοιογενειών, ή των συνόρων των νανο-κοιλοτήτων, έχει προσομοιωθεί με μία λεπτή μεμβράνη με διδιάστατη μηχανική συμπεριφορά, όπως

συμβαίνει σε ένα λεπτό κέλυφος. Η μεμβράνη αυτή μπορεί να αναπτύξει τάσεις, που βρίσκονται πάνω στο εφαπτομενικό της επίπεδο, μεμβράνη και μπορεί να καταπονηθεί με εξωτερικές δυνάμεις που επενεργούν, στη γενική περίπτωση κάθετα και εφαπτομενικά σε αυτήν. Η μεμβράνη αυτή προσομοιώνει την συμπεριφορά μερικών στρωμάτων ατόμων που βρίσκονται κοντά στην διεπιφάνεια ή κοντά στο σύνορο, και παρακολουθεί την παραμόρφωση του κυρίως υλικού στην περιοχή αυτή. Η συμπεριφορά του κυρίως σώματος των συνδεδεμένων υλικών, μπορεί να περιγραφεί, για παράδειγμα, με τις καταστατικές εξισώσεις της γραμμικής ελαστικότητας του Hooke. Στην ουσία, η συμπεριφορά αυτή αποτελεί την γενίκευση του γνωστού νόμου των Laplace-Young των ρευστών στα στερεά. Ο νόμος αυτός ερμηνεύει τα τριχοειδή μοριακά φαινόμενα των ρευστών, όπως αυτό της σαπουνόφουσκας. Η πρώτη γενίκευση του νόμου αυτού για την περίπτωση των στερεών έχει γίνει από τον γνωστό φυσικό Landau (Rottman, 1988). Αργότερα, ο νόμος αυτός εισήχθη ως διεπιφανειακή συνθήκη σε σύνθετα υλικά, σε μία πρώτη απλοποιημένη μορφή, από τον Povstenko (Povstenko, 1993). Με κίνητρο την πρόσφατη ραγδαία εξέλιξη της νανο-τεχνολογίας, το αντικείμενο αυτό έχει προσελκύσει το έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον των επιστημόνων της μηχανικής. Οι πρόσφατες δημοσιεύσεις πάνω στο αντικείμενο αυτό, διερευνούν διάφορα θέματα της μηχανικής συμπεριφοράς των σύνθετων υλικών, που αφορούν, είτε τον καταστατικό νόμο της διεπιφάνειας των νανο-ανομοιογενειών και νανο-κοιλοτήτων, ή την αλληλεπίδραση τέτοιων διεπιφανειών και συνόρων με εξωτερικές και εσωτερικές πηγές τάσεων (Duan et al., 2005; Qu et al., 1993; Lim et al., 2006; Wang and Wang, 2006; Tian and Rajapakse, 2007; Yang, 2010; Sharma et al. 2003; Sharma and Dasgupta, 2002). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, η προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς της διεπιφάνειας με την καταστατική συμπεριφορά του νόμου Laplace-Young, ουσιαστικά, δημιουργεί μία ασυνέχεια τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας ή του συνόρου. Μία τέτοια ασυνέχεια τάσεων παρατηρείται κατά την ενίσχυση ενός συνόρου με ένα σχετικά άκαμπτο δακτύλιο, ή με την εισαγωγή μιας πιο άκαμπτης ίνας μέσα σε ένα σώμα. Μια τέτοια συμπεριφορά χαρακτηρίζει μια ισχυρή διεπιφάνεια ή ένα ισχυρό σύνορο, που μαθηματικά περιγράφεται με μία ασυνέχεια των τάσεων και από μία συνέχεια των μετατοπίσεων. Η ακριβώς αντίθετη περίπτωση χαρακτηρίζει την ‘ασθενή’ διεπιφάνεια, που περιγράφεται από μία ασυνέχεια των μετατοπίσεων και από μία συνέχεια των τάσεων. Μια τέτοια διεπιφάνεια προκύπτει στην περίπτωση, που μια τέλεια διεπιφάνεια που χαρακτηρίζεται από συνέχεια τάσεων και μετατοπίσεων, αστοχεί με συνέπεια να μη μπορεί να συγκρατεί μαζί, κατά την παραμόρφωση, τις δύο επιφάνειες. Αυτό συμβαίνει,

όταν κατά την παραμόρφωση, σπάσουν ορισμένοι ατομικοί δεσμοί, με αποτέλεσμα οι δύο επιφάνειες να απομακρύνονται σχετικά, συγκρατούμενες με λιγότερους ατομικούς δεσμούς από ότι στην τέλεια περίπτωση. Αυτή η συμπεριφορά περιγράφεται με τις ελατηριακού τύπου διεπιφανειακές συνθήκες.

Το αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας είναι να αναπτύξει τα αντιεπίπεδα ελαστικά πεδία στο μοντέλο της κυκλικής ανομοιογένειας που είναι ένθετη σε μία ελαστική μήτρα για τους δύο διακριτούς τύπους διεπιφανειακών συνθηκών που προαναφέρθηκαν για τις ακόλουθες φορτίσεις:

- μία απομακρυσμένη ομοιόμορφη φόρτιση στη μήτρα
- μία ομοιόμορφη ιδιοπαραμόρφωση στην ανομοιογένεια

Καθότι η έννοια της ισχυρής και ασθενούς διεπιφάνειας καθορίζεται με βάση την τέλεια διεπιφάνεια, όπου υπάρχει συνέχεια τάσεων και μετατοπίσεων, η απόκτηση των ελαστικών πεδίων στο μοντέλο έγινε με την παρακάτω διαδικασία: προσδιορίστηκαν πρώτα τα ελαστικά πεδία για την τέλεια διεπιφάνεια. Στη συνέχεια ορίστηκαν δύο επιπρόσθετες πλασματικές παραμορφωσιακές καταστάσεις, που αν προστεθούν στην παραμορφωσιακή κατάσταση της τέλει διεπιφάνειας, παρέχουν τις παραμορφωσιακές καταστάσεις του μοντέλου για ασθενείς και ισχυρές διεπιφανειακές συνθήκες.

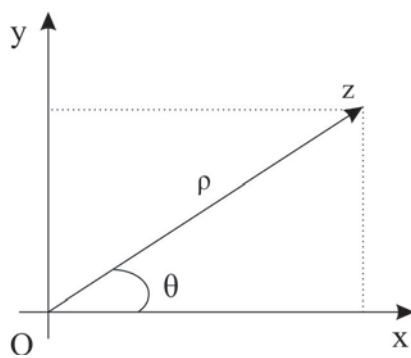
Η δομή της εργασίας είναι η ακόλουθη. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων όπου στηρίζεται η ανάπτυξη της λύσης. Στο Κεφάλαιο 3 επιλύονται τα αντιεπίπεδα ελαστικά προβλήματα της κυκλικής ανομοιογένειας για μία ομοιόμορφη φόρτιση στην μήτρα και για μία ομοιόμορφη ιδιοπαραμόρφωση στην ανομοιογένεια. Στο Κεφάλαιο 4 και 5, τοποθετούνται και επιλύονται για τις δύο παραπάνω φορτίσεις οι δύο πλασματικές παραμορφωσιακές καταστάσεις του μοντέλου της κυκλικής ανομοιογένειας, που αντιστοιχούν στην ισχυρή και στην ασθενή διεπιφανειακή σύνδεση μήτρας-ανομοιογένειας. Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας.

2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η ΟΛΟΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

2.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Οι μιγαδικοί αριθμοί θα αναφέρονται σε ένα επίπεδο, πάνω στο οποίο έχει τοποθετηθεί ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y) , του οποίου ο άξονας x αντιπροσωπεύει τον άξονα των πραγματικών αριθμών και ο άξονας y τον άξονα των φανταστικών αριθμών (Σχήμα 2.1). Έτσι, ένα σημείο του επιπέδου θα αντιπροσωπεύεται από τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$, όπου $i^2 = -1$ και x,y είναι οι συντεταγμένες του σημείου αυτού ως προς το σύστημα συντεταγμένων (x,y) .



Σχήμα 2.0.1 Το μιγαδικό επίπεδο z

Αν ρ και θ αντιπροσωπεύουν τις πολικές συντεταγμένες του ίδιου σημείου, τότε

$$z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \quad (2.1)$$

όπου έχει τεθεί

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (2.2)$$

Αν $f(z)$ είναι συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z , με τον συμβολισμό $\overline{f(z)}$ θα συμβολίζουμε τον μιγαδικό συζυγή του μιγαδικού αριθμού $f(z)$. Έτσι, αν $f(z) = 6z + 3iz^2$, τότε θα έχουμε $\overline{f(z)} = \overline{f(\bar{z})} = 6\bar{z} - 3i\bar{z}^2$. Επίσης, με τον συμβολισμό $f(\bar{z})$ θα εννοούμε την συνάρτηση f , της οποίας η μεταβλητή είναι ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = x - iy$. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\overline{f(z)} = \overline{f(\bar{z})}. \quad (2.3)$$

Για παράδειγμα, για την παραπάνω συνάρτηση μπορούμε να γράψουμε

$$\overline{f(z)} = 6z - 3iz^2, \quad f(\bar{z}) = 6\bar{z} + 3i\bar{z}^2. \quad (2.4)$$

Γενικά, μια συνάρτηση $F(x, y)$ των πραγματικών μεταβλητών x, y και με πεδίο τιμών στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, με βάση τις σχέσεις

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (2.5)$$

μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$F\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = f(z, \bar{z}). \quad (2.6)$$

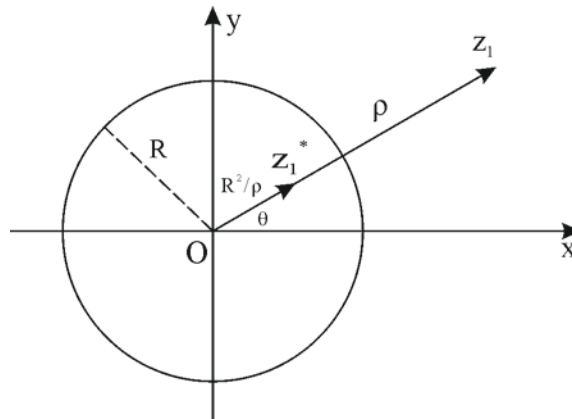
Με άλλα λόγια, μία συνάρτηση F των πραγματικών μεταβλητών x και y μπορεί να γραφτεί ως μία συνάρτηση f των μιγαδικών μεταβλητών z και \bar{z} .

Στο μιγαδικό επίπεδο του Σχήματος 1, που θα το καλούμε στο εξής z -επίπεδο, η σχέση $z \cdot \bar{z} = R^2$ αντιπροσωπεύει ένα κύκλο με ακτίνα R . Πράγματι, αν $z = x + iy$, τότε από τη σχέση αυτή προκύπτει η εξίσωση του κύκλου

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (2.7)$$

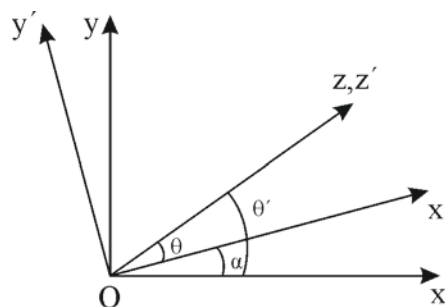
Αν ο μιγαδικός αριθμός z_1 βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου με ακτίνα R , δηλαδή, αν $\rho > R$, τότε ο μιγαδικός αριθμός z_1^* βρίσκεται εσωτερικά του κύκλου R . Επειδή $\left|z_1^*\right| \cdot |z_1| = R^2$, θα λέμε ότι ο μιγαδικός αριθμός z_1^* στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο αντανάκλασης του σημείου που ορίζει ο μιγαδικός αριθμός z .

στο σημείο t , που είναι ένα σημείο της περιφέρειας του κύκλου με ακτίνα R . Τότε, και η μεταβλητή z_1^* τείνει στο ίδιο σημείο t από το εσωτερικό του κύκλου. Το γεγονός αυτό έχει χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό του ολομορφικού μετασχηματισμού μιας μιγαδικής μη ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης συνάρτησης $f(z, \bar{z})$.



Σχήμα 2.0.2 Το σημείο αντανάκλασης z_1^* του μιγαδικού z_1

Τέλος, θα συζητήσουμε την αλλαγή που υφίσταται ο μιγαδικός αριθμός z , αν αλλάξουμε το σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, αν αντί του συστήματος συντεταγμένων (x, y) , θεωρήσουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων (x', y') στραμμένο ως προς το παλιό κατά



Σχήμα 2.0.3

γωνία α , τότε ο μιγαδικός αριθμός z ως προς το νέο σύστημα θα γίνει z' . Οι πολικές μορφές των δύο αυτών μορφών θα είναι

$$z = \rho e^{i\theta}, z' = \rho' e^{i\theta'}. \quad (2.7)$$

Τα μέτρα ρ και ρ' των z και z' είναι ίσα, αλλά οι γωνίες θ και θ' διαφέρουν κατά την γωνία α που σχηματίζει ο άξονας x' με τον άξονα x , δηλαδή

$$\theta - \theta' = \alpha. \quad (2.8)$$

Συνεπώς,

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\alpha}, \quad (2.9)$$

από όπου,

$$z = z' e^{i\alpha}, \quad (2.10\alpha)$$

ή

$$z' = z e^{-i\alpha} \quad (2.11\beta)$$

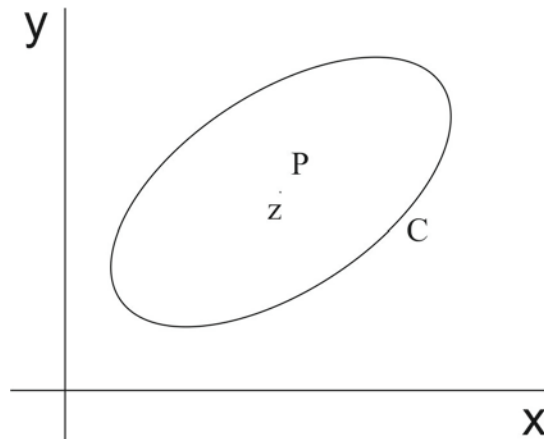
2.2 Ο ορισμός της ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης

Αν $\varphi = \varphi(x, y)$ και $\psi = \psi(x, y)$ είναι δύο πραγματικές συναρτήσεις των πραγματικών μεταβλητών x, y , τότε ο συνδυασμός $\varphi + i\psi$ μέσω των σχέσεων (2.4) ορίζει μία μιγαδική συνάρτηση $f(z, \bar{z})$, της οποίας το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι οι συναρτήσεις φ και ψ , αντίστοιχα, δηλαδή $f(z, \bar{z}) = \varphi + i\psi$.

Στη συνέχεια, οι ιδιότητες της μιγαδικής συνάρτησης $f(z, \bar{z})$ θα συζητηθούν σε σχέση με δύο ορισμένες καμπύλες του z -επίπεδο, που θα ορισθούν ως *απλό τόξο* και ως *κλειστή καμπύλη*.

Ένα απλό τόξο πάνω στο z -επίπεδο είναι ένα τόξο, που δεν τέμνει τον εαυτό του και είναι πεπερασμένο, δηλαδή έχει πεπερασμένο μήκος. Μια απλή κλειστή καμπύλη πάνω στο z -επίπεδο είναι μία κλειστή καμπύλη, όταν από κάθε ζευγάρι σημείων της, διασπάται σε δύο απλά τόξα.

Έστω, τώρα, ότι μας δίνεται μία απλή καμπύλη C πάνω στο z -επίπεδο και μία συνάρτηση $f = f(z, \bar{z})$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(z, \bar{z})$ θα είναι *ολόμορφη* εντός της καμπύλης C ,



Σχήμα 2.0.4

αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες (Milne-Thomson, 1962):

- (i). Για κάθε τιμή της μεταβλητής z που βρίσκεται μέσα στην C , αντιστοιχεί μία και μόνο μία τιμή της $f(z, \bar{z})$. Με άλλα λόγια, η $f(z, \bar{z})$ είναι πεπερασμένη και μοναδική μέσα στην καμπύλη z .
- (ii). Για κάθε τιμή του z μέσα στην C , η συνάρτηση $f(z, \bar{z})$ έχει ένα μοναδικό και πεπερασμένο διαφορικό df . Δηλαδή, το διαφορικό της f ως προς τις μεταβλητές z και \bar{z} , που παρέχεται με τη σχέση

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \quad (2.12)$$

είναι πεπερασμένο και μοναδικό. Από την σχέση αυτή, έχουμε

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz}, \quad (2.13)$$

όπου το διαφορικό ορίζεται ως εξής

$$dz = dx + idy = \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} (\delta x + i\delta y) \quad (2.14)$$

Συνεπώς,

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{dx - idy}{dx + idy} = \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} \frac{\delta x - i\delta y}{\delta x + i\delta y} = \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} \frac{1 - i\frac{\delta y}{\delta x}}{1 + i\frac{\delta y}{\delta x}}. \quad (2.15)$$

Όμως, επειδή τα δx και δy τείνουν στο μηδέν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, μπορούν να προκύψουν διάφορα διαφορετικά όρια για την ποσότητα $\frac{d\bar{z}}{dz}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην έχουμε μία και μοναδική τιμή του διαφορικού df . Για να εξασφαλιστεί η μία και μοναδική τιμή του διαφορικού df , θα πρέπει ο συντελεστής $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ στην (2.11) να μηδενίζεται, δηλαδή θα πρέπει

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.16)$$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής z . Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f = \phi + i\psi$ και ότι η f είναι μία ολόμορφη συνάρτηση, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση (2.17). Αφού ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi + i\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi + i\psi)i = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\right), \quad (2.17)$$

λόγω της (2.17) προκύπτει

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (2.18)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές ως εξισώσεις των Cauchy-Riemann. Οι συνθήκες αυτές είναι αναγκαίες, αλλά όχι και ικανές για να είναι μία συνάρτηση $f = \phi + i\psi$ ολόμορφη.

Οι συνθήκες αυτές μπορούν να καταστούν και ικανές, αν οι συναρτήσεις

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.19)$$

είναι συνεχείς εντός της καμπύλης C . Έτσι, οι συνθήκες (2.19) μαζί με τη συνθήκη (2.21) αποτελούν τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες, ώστε η $f = \phi + i\psi$ να είναι μια ολόμορφη συνάρτηση.

2.3 Συζυγείς συναρτήσεις

Τα πραγματικά και φανταστικά μέρη μιας ολόμορφης συνάρτησης f ονομάζονται συζυγείς συναρτήσεις. Έτσι, αν

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (2.20)$$

οι ϕ και ψ είναι συζυγείς συναρτήσεις. Για παράδειγμα, η ολόμορφη συνάρτηση $f(z) = z^3$ μπορεί να γραφτεί

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3). \quad (2.21)$$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις

$$\phi(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad \psi(x, y) = 3x^2y - y^3$$

είναι συζυγείς συναρτήσεις.

Τώρα θα εξάγουμε μία χρήσιμη ιδιότητα των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων. Από τις συνθήκες των Cauchy και Riemann εύκολα εξάγεται ότι

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.22)$$

Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι οι συζυγείς συναρτήσεις της ολόμορφης συνάρτησης f ικανοποιούν την διδιάστατη διαφορική εξίσωση του Laplace. Με άλλα λόγια, οι συζυγείς συναρτήσεις ϕ και ψ μιας ολόμορφης συνάρτησης $f (= \phi + i\psi)$ αποτελούν λύσεις της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace. Το γεγονός αυτό θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης του αντεπίπεδου ελαστικού προβλήματος.

Αν τώρα, εξισώσουμε τις συζυγείς συναρτήσεις με σταθερές τιμές, δηλαδή $\phi(x, y) = c_1$, $\psi(x, y) = c_2$, τότε παίρνουμε δύο συστήματα καμπυλών πάνω στο z -επίπεδο. Αυτές οι

καμπύλες είναι ορθογώνιες, δηλαδή, οι εφαπτόμενές τους σε ένα σημείο της διατομής είναι κάθετες. Για να αποδειχθεί αυτό, παρατηρούμε ότι η κλίση dy/dx της καμπύλης $\phi(x, y) = c_1$ προκύπτει από την σχέση

$$\frac{d}{dx} \phi = \frac{d}{dx} c_1, \quad (2.23)$$

από την οποία εξάγεται ότι

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \quad (2.24)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}. \quad (2.25\alpha)$$

Ομοίως, βρίσκουμε την κλίση των καμπυλών $\psi(x, y) = c_2$ στην μορφή

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}. \quad (2.26\beta)$$

Από τις σχέσεις (2.25) παίρνοντας υπόψη τις συνθήκες των Cauchy-Riemann (2.19) προκύπτει ότι το γινόμενο των κλίσεων αυτών είναι -1 , που σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες στις καμπύλες αυτές στο σημείο τομής τους είναι κάθετες.

2.4 Η διαφορική εξίσωση του Laplace σε μιγαδική μορφή

Από την αλυσιδωτή ιδιότητα παραγωγίσιμης μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών εύκολα εξάγονται οι παρακάτω τελεστές

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (2.27)$$

από τις οποίες

$$2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.28)$$

Έτσι, η παρακάτω διαφορική εξίσωση του Laplace με άγνωστη συνάρτηση την $w = w(x, y)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2.29)$$

με χρήση των παραπάνω τελεστών, γράφεται

$$4\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.30)$$

Η λύση της (2.28) να εκφραστεί εξισώνοντας την w με ένα πολλαπλάσιο του πραγματικού μέρους ϕ μιας ολόμορφης συνάρτησης $f(z)$, ας πούμε

$$w = 2\phi, \quad (2.30\alpha)$$

από όπου

$$w = f(z) + \overline{f(z)}. \quad (2.31\beta)$$

Επίσης, μια άλλη γενική έκφραση της λύσης της (2.28) θα μπορούσε να βρεθεί παίρνοντας ένα πολλαπλάσιο του φανταστικού μέρους ψ της $f(z)$, ας πούμε

$$w = 2i\psi, \quad (2.32\alpha)$$

από όπου

$$w = f(z) - \overline{f(z)}. \quad (2.33\beta)$$

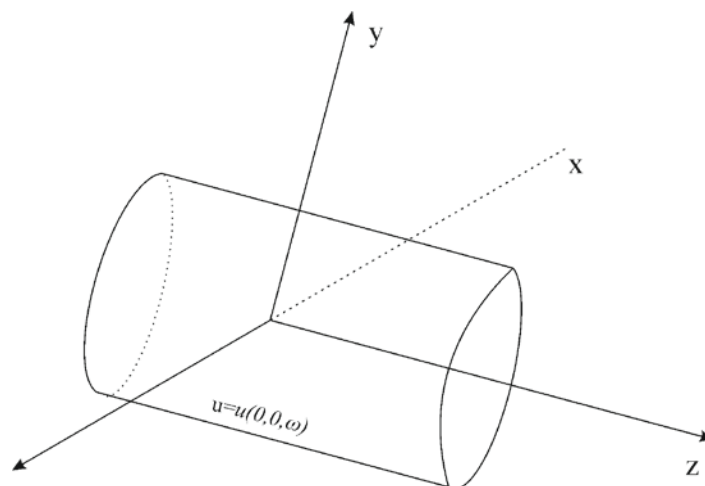
Στην βιβλιογραφία έχουν χρησιμοποιηθεί και οι δύο παραπάνω μορφές στην επίλυση συνοριακών προβλημάτων που εμπλέκουν την διαφορική εξίσωση του Laplace. Παρακάτω, για την μελέτη του αντι-επίπεδου ελαστικού προβλήματος υιοθετείται η πρώτη γενική έκφραση (2.31) της λύσης.

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΑΝΤΙ-ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

3.1 Οι εξισώσεις της αντιεπίπεδης ελαστικότητας

Θεωρούμε το στερεό σώμα του Σχήματος 3.1, που λόγω κάποιας αιτίας βρίσκεται σε εντατική κατάσταση αντιεπίπεδης παραμόρφωσης. Στα πλαίσια της γραμμικής ισότροπης ελαστικότητας, η κατάσταση της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης ως προς τον άξονα z ενός σταθερού συστήματος αναφοράς (x, y, z) ορίζεται ως εκείνη η διδιάστατη παραμόρφωση



Σχήμα 3.1 Ένα ελαστικό στερεό σώμα σε κατάσταση αντιεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης

στην οποία, η μη μηδενική συνιστώσα του διανύσματος μετατόπισης είναι η συνιστώσα w που είναι παράλληλη στον άξονα z του συστήματος (x, y, z) . Το σύστημα αναφοράς

(x, y, z) είναι ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και η μετατόπιση w είναι συνάρτηση μόνο των μεταβλητών x, y , δηλαδή $w = w(x, y)$. Κάτω από αυτές τις υποθέσεις, οι εξισώσεις της τρισδιάστατης ελαστικότητας ανάγονται στην επίλυση της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης του Laplace (Milne-Thomson, 1962)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (3.1)$$

με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Όταν η συνάρτηση της αντιεπίπεδης μετατόπισης $w = w(x, y)$ προσδιορισθεί από την επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, τότε οι μη μηδενικές τάσεις $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(x, y)$, $\sigma_{yz} = \sigma_{yz}(x, y)$ του αντιεπίπεδου ελαστικού προβλήματος, προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3.2)$$

όπου μ είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού του σώματος. Από την θεωρία των ολόμορφων συναρτήσεων που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace.

Έτσι, αν θέσουμε την άγνωστη συνάρτηση $w = w(x, y)$ ως το διπλάσιο του πραγματικού μέρους μιας ολόμορφης συνάρτησης $f(z)$ προκύπτει (βλέπε εξίσωση (2.31) στο 2.4)

$$w = f(z) + \overline{f(z)}, \quad z = x + iy \quad (3.3)$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι ο συνδιασμός $\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}$ μπορεί να γραφτεί σε όρους της ολόμορφης συνάρτησης $f(z)$ στην μορφή

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = 2\mu \overline{f'(z)}. \quad (3.4)$$

Στην ελαστική ανάλυση που γίνεται παρακάτω, για την διατύπωση των διεπιφανειακών συνθηκών των τάσεων στην διεπιφάνεια δύο υλικών, εισάγεται μια νέα μεταβλητή πεδίου $Z = Z(x, y)$, που χρησιμοποιείται αντί του βέλους τάσης (traction) που επενεργεί πάνω σε μία απειροστή επιφάνεια dS του σώματος. Όπως αποδεικνύεται παρακάτω, η μεταβλητή αυτή εκφράζεται σε όρους της ολόμορφης συνάρτησης $f(z)$ με την σχέση

$$Z = \mu i [f(z) - \overline{f(z)}], \quad (3.5)$$

και συνδέεται με τον τασικό συνδιασμό $\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}$ με την σχέση

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = 2\mu \overline{Z'(z)}. \quad (3.6)$$

Η νέα αυτή μεταβλητή πεδίου (field variable) εκφράζει την συνισταμένη δύναμη των τάσεων που επενεργούν πάνω σε μία κυλινδρική επιφάνεια του σώματος. Συγκεκριμένα, έστω μία κυλινδρική επιφάνεια μέσα στο σώμα, που βρίσκεται σε αντιεπίπεδη παραμόρφωση, της οποίας οι γενέτειρες είναι παράλληλες με τον άξονα συντεταγμένων z . Έστω η τομή της κυλινδρικής επιφάνειας με το επίπεδο xy ότι είναι ένα τόξο MN , του οποίου η θετική διεύθυνση είναι από το M στο N . Η κυλινδρική επιφάνεια χωρίζει το σώμα σε δύο γειτονίες, στη γειτονιά 1 και στη γειτονιά 2. Η συνισταμένη δύναμη (δύναμη ανά μονάδα μήκους), που επενεργεί πάνω στην κυλινδρική αυτή επιφάνεια, παρέχεται από την σχέση

$$Z = \int_M^N (\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y) ds, \quad (3.7)$$

όπου

$$n_x = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = -\frac{dx}{ds}, \quad (3.8)$$

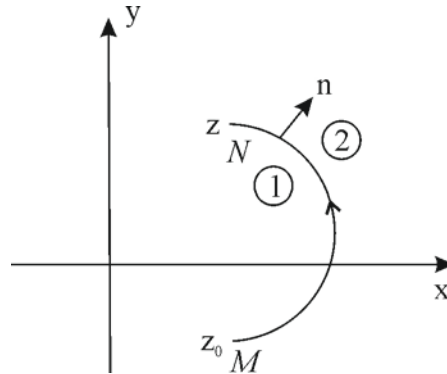
είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος \mathbf{n} πάνω στην MN που διευθύνεται από τη γειτονιά 1 στη γειτονιά 2.

Με βάση τις εξισώσεις (3.4) και (3.8), η εξίσωση (3.5) παρέχει

$$Z = \mu i [f(z) - \overline{f(z)}] - \mu i [f(z_0) - \overline{f(z_0)}], \quad (3.9)$$

όπου z είναι ο μιγαδικός αριθμός που αντιστοιχεί στο (μεταβλητό) σημείο N και z_0 είναι ο μιγαδικός αριθμός που αντιστοιχεί στο (σταθερό) σημείο M . Εισάγουμε τώρα την $Z = Z(z, \bar{z})$ ως μια μεταβλητή πεδίου της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης, με την προϋπόθεση ότι η καμπύλη MN είναι μία λεία και συνεχής καμπύλη που δεν τέμνει τον εαυτό της. Η νέα αυτή μεταβλητή πεδίου ορίζεται μονοσήμαντα σε κάθε σημείο του

σώματος, που αντιπροσωπεύεται με τον μιγαδικό αριθμό z και παρέχει το πεδίο των τάσεων με την σχέση (3.6). Επειδή ο δεύτερος όρος στην (3.9) είναι σταθερός και



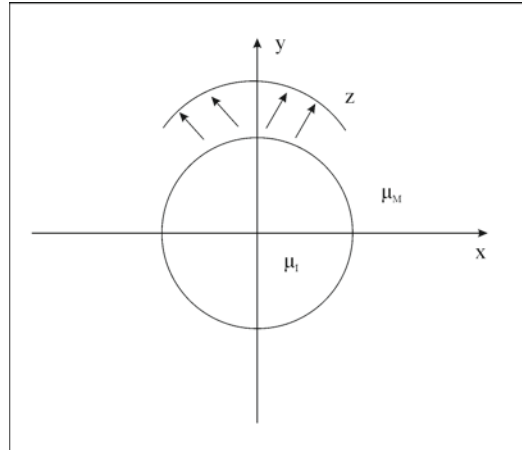
Σχήμα 3.2

αυθαίρετος, μπορεί να ληφθεί ως z_0 εκείνο το σημείο για το οποίο ο όρος αυτός μηδενίζεται. Συνεπώς, αντί της (3.9) θα θεωρηθεί η σχέση (3.5).

3.2 Εξαγωγή των διαφορικών δυναμικών για μία κυκλική κυλινδρική ανομοιογένεια σε μία άπειρη ελαστική μήτρα

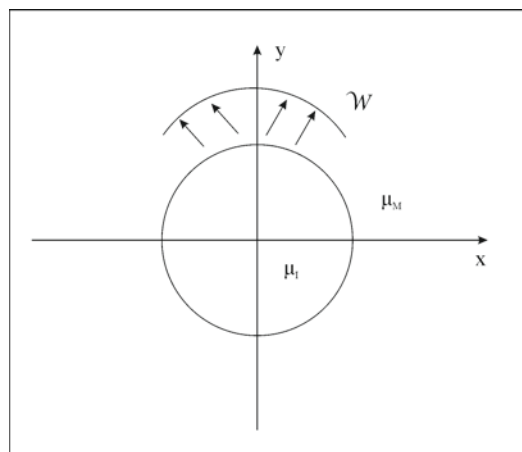
Θα θεωρήσουμε την περίπτωση ενός σύνθετου στερεού σώματος που απαρτίζεται από μια κυλινδρική ανομοιογένεια που βρίσκεται ένθετη σε μία ελαστική, τις οποίας οι ελαστικές παράμετροι είναι διαφορετικές από αυτές της ανομοιογένειας. Η διατομή της ανομοιογένειας είναι κυκλική με ακτίνα R , και οι γενέτειρες της κυλινδρικής επιφάνειας είναι παράλληλες στον άξονα z , που ταυτίζεται με τον άξονα της κυλινδρικής ανομοιογένειας. Το μέτρο διάτμησης της ανομοιογένειας θα δηλώνεται με μ_I και το μέτρο διάτμησης της μήτρας με μ_M . Στη συνέχεια, οι δείκτες I και M , όπου εμφανίζονται, θα δηλώνουν ποσότητες που σχετίζονται με την ανομοιογένεια και την μήτρα, αντίστοιχα. Τα δύο υλικά είναι συνδεδεμένα κατά μήκος της διεπιφάνειας και βρίσκονται σε κατάσταση αντιεπίπεδης παραμόρφωσης, με αντιεπίπεδες μετατοπίσεις $w_M = w_M(x, y)$ και $w_I = w_I(x, y)$, παράλληλες στον άξονα z . Θα θεωρήσουμε ότι η

μήτρα εκτείνεται στο «άπειρο» σε όλες τις διευθύνσεις και ότι η αντεπίπεδη παραμόρφωση είναι αποτέλεσμα δύο διακριτών τύπων φορτίσεων που εφαρμόζονται κατά μήκος της διεπιφάνειας. Στο πρώτο τύπο διεπιφανειακής συνθήκης οι αντεπίπεδες



Σχήμα 3.3α

μετατοπίσεις παρουσιάζουν μία γνωστή ασυνέχεια $W(x, y)$ και στο δεύτερο τύπο μία γνωστή ασυνέχεια των τάσεων που εκφράζεται με την συνάρτηση $Z = Z(x, y)$. Αφού προσδιοριστούν τα μιγαδικά δυναμικά $f_M(z)$ και $f_I(z)$ των δύο φάσεων με τον τρόπο



Σχήμα 3.3β

που θα παρουσιασθεί παρακάτω, οι τάσεις και οι μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του σώματος (x, y) θα προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$(\sigma_{xz} - i\sigma_{yz})_M = 2\mu_M \frac{\partial f_M(z)}{\partial z} \quad (3.10)$$

$$w_M = f_M(z) + \overline{f_M(z)}, \text{ όταν } |z| \geq R \quad (3.11)$$

για την μήτρα, και

$$(\sigma_{xz} - i\sigma_{yz})_I = 2\mu_I \frac{\partial f_I(z)}{\partial z} \quad (3.12)$$

$$w_I = f_I(z) + \overline{f_I(z)}, \text{ όταν } |z| \leq R \quad (3.13)$$

για την ανομοιογένεια. Αμέσως παρακάτω, θα αναπτυχθούν οι εκφράσεις που παρέχουν τις άγνωστες μιγαδικές συναρτήσεις $f_M(z)$, $f_I(z)$ των δύο φάσεων του σύνθετου σώματος, για τους δύο τύπους διεπιφανειακών φορτίσεων που συζητήθηκε προηγουμένως.

3.2.1 Το πρόβλημα της ασυνέχειας των αντιεπίπεδων τάσεων

Στην περίπτωση όπου η αιτία της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης είναι μία συνεχώς διανεμημένη τάση $\tau_{\rho z}$ κατά μήκος της διεπιφάνειας, οι διεπιφανειακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$w_M = w_I, Z_M - Z_I = Z \quad (3.14)$$

πάνω στη διεπιφάνεια. Έτσι, αν $f_M(z)$ και $f_I(z)$ είναι τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας και της ανομοιογένειας, αντίστοιχα, θα έχουμε

$$w_M = f_M(z) + \overline{f_M(z)} \quad (3.15)$$

$$Z_M = i\mu_M [f_M(z) + \overline{f_M(z)}], |z| \geq R \quad (3.16)$$

για τη μήτρα, και

$$w_I = f_I(z) + \overline{f_I(z)} \quad (3.17)$$

$$Z_I = i\mu_I[f_I(z) + \overline{f_I(z)}], |z| \leq R \quad (3.18)$$

για την ανομοιογένεια. Με βάση τις παραπάνω σχέσεις οι διεπιφανειακές συνθήκες (3.14) γράφεται

$$f_M(t) + \overline{f_M(t)} = f_I(t) + \overline{f_I(t)} \quad (3.19)$$

$$i\mu_M[f_M(t) + \overline{f_M(t)}] - i\mu_I[f_I(t) - \overline{f_I(t)}] = Z(t, \bar{t}), \quad t = \text{Re}^{i\theta} \quad (3.20)$$

όπου t είναι ένα σημείο της διεπιφάνειας των δύο υλικών. Οι δύο αυτές σχέσεις μπορούν αν αντικατασταθούν ισοδυνάμως με μία μόνο σχέση

$$\frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} f_M(t) = f_I(t) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \overline{f_I(t)} - \frac{i}{2(\mu_M + \mu_I)} Z(t, \bar{t}) \quad (3.21)$$

Η σχέση αυτή περιγράφει την συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι μιγαδικές συναρτήσεις πάνω στην διεπιφάνεια των δύο φάσεων. Ορίζουμε στο σημείο αυτό τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων $f_M(z)$ και $f_I(z)$ με τις σχέσεις

$$f_I(z) = \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} f_0(z), \quad |z| \leq R \quad (3.22)$$

για την ανομοιογένεια, και

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \overline{f_0\left(\frac{R^2}{z}\right)} - \frac{i}{2\mu_M} Z\left(z, \frac{R^2}{z}\right), \quad \text{όταν } |z| \geq R, \quad (3.23)$$

για τη μήτρα.

Για τον ορισμό των συναρτήσεων $f_M(z)$ και $f_I(z)$ έχουμε εισάγει την ολόμορφη συνάρτηση $f_0(z)$, που στο εξής θα δηλώνεται ως διαφασικό δυναμικό του διαφασικού συστήματος. Έχοντας ορίσει τις μιγαδικές συναρτήσεις $f_M(z)$ και $f_I(z)$ με αυτό τον τρόπο, επιτυγχάνεται η ικανοποίηση της διεπιφανειακής συνθήκης (3.21). Πράγματι, όταν $f_M(z)$ και $z \rightarrow t (= \text{Re}^{i\theta})$, οι σχέσεις (3.22) και (3.23) γράφονται

$$f_I(t) = \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} f_0(t), \quad (3.24)$$

$$f_M(t) = f_0(t) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \overline{f_0(t)} - \frac{i}{2\mu_M} Z(t, \bar{t}). \quad (3.25)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (3.21), προκύπτει ότι η σχέση αυτή ικανοποιείται αυτόματα. Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφτούν στην παρακάτω αδιάστατη μορφή

$$f_I(z) = \frac{2}{1+\Gamma} f_0(z), \quad |z| \leq R, \quad (3.26)$$

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \overline{f_0\left(\frac{R^2}{z}\right)} - \frac{i}{2\mu_M} Z\left(z, \frac{R^2}{z}\right), \quad |z| \geq R, \quad (3.27)$$

$$\text{όπου } \Gamma = \frac{\mu_I}{\mu_M}.$$

3.2.2 Το πρόβλημα της ασυνέχειας των διεπιφανειακών μετατοπίσεων

Στην περίπτωση που η αιτία παραμόρφωσης είναι μία συνεχώς διανεμημένη μετατόπιση \mathcal{W} κατά μήκος της διεπιφάνειας, η διεπιφανειακή συνθήκη του προβλήματος είναι

$$w_M - w_I = \mathcal{W}, \quad Z_M = Z_I, \quad (3.28)$$

πάνω στη διεπιφάνεια.

Ακολουθώντας την ίδια, με την παραπάνω, διαδικασία προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για τις μιγαδικές συναρτήσεις των δύο φάσεων:

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \overline{f_0\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{1}{2} \mathcal{W}\left(z, \frac{R^2}{z}\right), \quad |z| \geq R \quad (3.29)$$

$$f_I(z) = \frac{2}{1+\Gamma} f_0(z), \quad |z| \leq R. \quad (3.30)$$

Από τις σχέσεις αυτές, όταν είναι γνωστή η ασυνέχεια των μετατοπίσεων $W(z, \bar{z})$ προσδιορίζεται το διαφοσικό δυναμικό $f_0(z)$ ώστε η $f_M(z)$ στο άπειρο να είναι σταθερή, δηλαδή

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f_M(z) = C, \quad (3.31)$$

όπου C είναι μία σταθερά.

3.3 Το αντιεπίπεδο πρόβλημα της κυκλικής ανομοιογένειας με τέλεια διεπιφάνεια

Οι εξισώσεις των διαφοσικών δυναμικών όπου εξήχθησαν προηγουμένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον προσδιορισμό των μιγαδικών συναρτήσεων των δύο φάσεων όταν η διεπιφάνεια είναι τέλεια, δηλαδή, όταν κατά μήκος της διεπιφάνειας το βέλος τάσης και οι μετατοπίσεις είναι συνεχείς. Στην περίπτωση αυτή, τα μιγαδικά δυναμικά (3.26) και (3.27), παίρνουν τη μορφή

$$f_I(z) = \frac{2}{1+\Gamma} f_0(z), \quad |z| \leq R, \quad (3.32)$$

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} f_0\left(\frac{R^2}{z}\right), \quad |z| \geq R \quad (3.33)$$

Στην παρούσα εργασία, η αντιεπίπεδη παραμόρφωση του διαφοσικού συστήματος θα θεωρείται ότι προέρχεται είτε από μια απομακρυσμένη ομοιόμορφη τάση $\sigma_{xz}^\infty + i\sigma_{yz}^\infty$ στη μήτρα είτε από μία ιδιοπαραμόρφωση $\varepsilon_{xz}^T + \bar{\varepsilon}_{yz}^T$ στην κυκλική ανομοιογένεια. Οι δύο αυτές περιπτώσεις εξετάζονται ξεχωριστά παρακάτω.

3.3.1 Απομακρυσμένη ομοιόμορφη τάση στη μήτρα

Στη περίπτωση, που η αιτία παραμόρφωσης είναι μία απομακρυσμένη τάση $\sigma_{xz}^\infty + i\sigma_{yz}^\infty$ στο άπειρο, το διαφοσικό δυναμικό στις (3.32) και (3.33) αναζητείται στη μορφή

$$f_0(z) = Bz, \quad (3.34)$$

όπου B είναι μία σταθερά που θα προσδιοριστεί από την κατάσταση των τάσεων στο άπειρο. Στο άπειρο, το μιγαδικό δυναμικό της μήτρας $f_M(z)$ θα έχει το ακόλουθο ανάπτυγμα

$$f_M(z) = \frac{\sigma_{yz}^\infty - i\sigma_{xz}^\infty}{2\mu_M} z + a_0 + \frac{a-1}{z} + \frac{a-2}{z^2} + \dots, \quad z = \infty. \quad (3.35)$$

Η παραπάνω σχέση συνάγεται από την (3.4) και από το γεγονός ότι η συνάρτηση $f_M(z)$ είναι ολόμορφη παντού στο επίπεδο z . Εισάγοντας την (3.34) στην (3.33) και συγκρίνοντάς την στο άπειρο με την (3.35) προκύπτει ότι

$$B = \frac{\sigma_{yz}^\infty - i\sigma_{xz}^\infty}{2\mu_M}. \quad (3.36)$$

Συνεπώς, το ζητούμενο διφασικό δυναμικό θα έχει τη μορφή

$$f_0(z) = \frac{\sigma_{yz}^\infty - i\sigma_{xz}^\infty}{2\mu_M} z. \quad (3.37)$$

Εισάγουμε την (3.37) στις (3.32) και (3.33), προκύπτουν οι μιγαδικές συναρτήσεις των δύο φάσεων

$$f_M(z) = \frac{\sigma_{xz}^\infty - i\sigma_{yz}^\infty}{2\mu_M} z + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \frac{\sigma_{xz}^\infty + i\sigma_{yz}^\infty}{2\mu_M} \frac{R^2}{z}, \quad |z| \geq R \quad (3.38)$$

$$f_I(z) = \frac{1}{1+\Gamma} \frac{\sigma_{xz}^\infty - i\sigma_{yz}^\infty}{\mu_M} z, \quad |z| \leq R. \quad (3.39)$$

Εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στις (3.10)-(3.13), προκύπτουν τα ελαστικά πεδία των τάσεων και των μετατοπίσεων στην παρακάτω μορφή

$$2\mu_M w_M = (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}) \left(\rho + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \frac{R^2}{\rho} \right), \quad (3.40)$$

$$(\sigma_{\rho z} + i\sigma_{\theta z})_M = \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta} - \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \Sigma^\infty e^{i\theta} \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (3.41)$$

για τη μήτρα ($\rho \geq R$),

όπου έχει τεθεί

$$\Sigma^\infty = \sigma_{xz}^\infty - i\sigma_{yz}^\infty, \quad (3.42)$$

και

Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.

$$\mu_M w_I = \frac{\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}}{1+\Gamma} \rho, \quad (3.43)$$

$$(\sigma_{\rho z} + i\sigma_{\theta z})_I = \frac{2\Gamma}{1+\Gamma} \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}, \quad (3.44)$$

για την ανομοιογένεια ($\rho \leq R$).

3.3.2 Το πρόβλημα της ιδιοπαραμόρφωσης της μήτρας

Όταν η ανομοιογένεια υποστεί μία ιδιοπαραμόρφωση, που παράγει σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις ε_{xz}^T και ε_{yz}^T σε κάθε σημείο της ανομοιογένειας, εύκολα αποδεικνύεται ότι η μετατόπιση που αντιστοιχεί σε αυτήν την κατάσταση είναι

$$w(t, \bar{t}) = \varepsilon^T z + \bar{\varepsilon}^T \bar{z}, \quad (3.45)$$

όπου

$$E^T = \varepsilon_{xz}^T - i\bar{\varepsilon}_{yz}^T. \quad (3.46)$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι, η κατάσταση αυτή της ιδιοπαραμόρφωσης είναι ελεύθερη τάσεων και αναπτύσσεται σύμφωνα με την παραπάνω σχέση μόνο όταν η μήτρα είναι απούσα. Όταν υπάρχει η μήτρα, που είναι συνδεδεμένη με την ανομοιογένεια, τότε αυτή εμποδίζει την πλήρη ανάπτυξη της ιδιοπαραμόρφωσης (3.34). Αυτό έχει ως συνέπεια την ανάπτυξη των ελαστικών μετατοπίσεων w_I , w_M στην ανομοιογένεια και στη μήτρα,

αντίστοιχα. Επειδή οι δύο φάσεις είναι “τέλεια” συνδεδεμένες, πάνω στην διεπιφάνεια θα ισχύει

$$w_M = w_I + w^T \quad (3.47)$$

από όπου

$$w_M - w_I = w^T. \quad (3.48)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το ελαστικό πρόβλημα της ιδιοπαραμόρφωσης της ανομοιογένειας με τέλεια διεπιφάνεια ανάγεται σε ένα πρόβλημα μιας ασυνέχειας των μετατοπίσεων w^T πάνω στη διεπιφάνεια, είναι ίση με

$$w^T(t, \bar{t}) = \varepsilon^T t + \bar{\varepsilon}^T \bar{t}, \quad t = \text{Re}^{i\theta}. \quad (3.49)$$

Συνεπώς για την επίλυση του προβλήματος αυτού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (3.29) και (3.30) με $W = w^T$. Στην περίπτωση αυτή, το διφασικό δυναμικό θα αναζητηθεί στη μορφή

$$f_0(z) = Bz. \quad (3.50)$$

Θέτοντας τις σχέσεις (3.49) και (3.50) στην (3.29) και απαιτώντας η $f_M(z)$ να είναι φραγμένη στο άπειρο, προκύπτει ότι

$$B = -\frac{1}{2}\varepsilon^T. \quad (3.51)$$

Έτσι, από τις σχέσεις (3.29) και (3.30), λαμβάνοντας υπόψη τις (3.49) και (3.51), προκύπτουν οι μιγαδικές συναρτήσεις των δύο φάσεων στη μορφή

$$f_M(z) = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \bar{\varepsilon}^T \frac{R^2}{z}, \quad (3.52)$$

$$f_I(z) = -\frac{1}{1+\Gamma} \varepsilon^T z. \quad (3.53)$$

Ομοίως με παραπάνω, προκύπτουν τα ελαστικά πεδία των τάσεων και των μετατοπίσεων στην παρακάτω μορφή

$$w_M = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} [E^T e^{i\theta} + \bar{E}^T e^{-i\theta}] \frac{R^2}{\rho}, \quad (3.54)$$

$$(\sigma_{\rho\alpha} + i\sigma_{\theta\alpha})_M = -2\mu_M \frac{\Gamma}{1+\Gamma} E^T e^{i\theta} \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (3.55)$$

$$(\sigma_{\rho\alpha})_M^P = -\frac{\mu_I}{1+\Gamma} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \bar{\varepsilon}^T e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (3.56)$$

για τη μήτρα ($\rho \geq R$), και

$$w_I = -\frac{1}{1+\Gamma} [E^T e^{i\theta} + \bar{E}^T e^{-i\theta}] \rho, \quad (3.57)$$

$$(\sigma_{\rho\alpha} + i\sigma_{\theta\alpha})_I = -2\mu_I \frac{1}{1+\Gamma} \bar{E}^T e^{-i\theta}, \quad (3.58)$$

$$(\sigma_{\rho\alpha})_I^P = -\frac{\mu_I}{1+\Gamma} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \bar{\varepsilon}^T e^{-i\theta}), \quad (3.59)$$

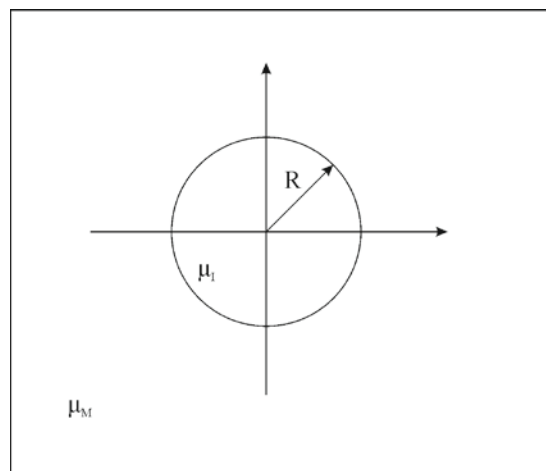
για την ανομοιογένεια ($\rho \leq R$).

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ ΜΕ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΚΕΛΥΦΩΤΗΣ ΜΕΜΒΡΑΝΗΣ

4.1 Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε την αντιεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση του συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 4.1. Το σύστημα αποτελείται από μία άπειρη ελαστική μήτρα που περιέχει μια ελαστική κυλινδρική ανομοιογένεια κυκλικής διατομής. Η ανομοιογένεια έχει



Σχήμα 4.1

διαφορετικές ιδιότητες και καταλαμβάνει το πεδίο $|z| < R$, ενός z επιπέδου, με $z = x + iy$. Η μηχανική συμπεριφορά της διεπιφάνειας περιγράφεται με συνθήκες ελαστικής κελυφωτής μεμβράνης.

Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές, η διεπιφάνεια των δύο μέσων επιδεικνύει συμπεριφορά κελυφωτής μεμβράνης, που για την γενική τρισδιάστατη περίπτωση περιγράφεται με τις ακόλουθες σχέσεις (Gurtin and Murdoch, 1975):

$$[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}] + \text{div}_s \boldsymbol{\sigma}^S = \mathbf{0}, [\mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^S = \boldsymbol{\tau}_0 + 2(\mu^S - \tau_0)\boldsymbol{\varepsilon}^S \quad (4.2)$$

όπου λ^S , μ^S είναι οι διεπιφανειακές σταθερές του Lamé και τ_0 η επιφανειακή τάση. Η αγκύλη δηλώνει ασυνέχεια της ποσότητας που περιέχει διαμέσου της διεπιφάνειας. Το $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ο τανυστής των τάσεων των υλικών που βρίσκονται εκατέρωθεν της διεπιφάνειας και \mathbf{u} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην διεπιφάνεια. Το σύμβολο div_s ορίζει τον τελεστή της επιφανειακής απόκλισης. Ο δείκτης s δηλώνει ποσότητες συνδεδεμένες με την διεπιφανειακή μεμβράνη. Το $\boldsymbol{\sigma}^S$ και το $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ είναι ο τανυστής τάσης και ο τανυστής παραμόρφωσης της διεπιφανειακής μεμβράνης. Οι παραπάνω σχέσεις, για το ελαστικό πρόβλημα που εξετάζουμε εξειδικεύονται στην μορφή

$$[\sigma_{\rho\kappa}] + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta\kappa}^S}{\partial \theta} = 0, [w] = 0, \quad (4.3)$$

$$\sigma_{\theta\kappa}^S = 2(\mu^S - \tau^0)\varepsilon_{\theta\kappa}^S, \varepsilon_{\theta\kappa}^S = \frac{1}{2R} \frac{\partial w^S}{\partial \theta}. \quad (4.4)$$

Στη συνέχεια, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται στη μορφή

$$(\sigma_{\rho\kappa})_M - (\sigma_{\rho\kappa})_I = -\frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta\kappa}^S}{\partial \theta}, w_M = w_I = w^S \quad (4.5)$$

$$\sigma_{\theta\kappa}^S = \frac{\mu_0^S}{R} \frac{\partial w^S}{\partial \theta}, \quad (4.6)$$

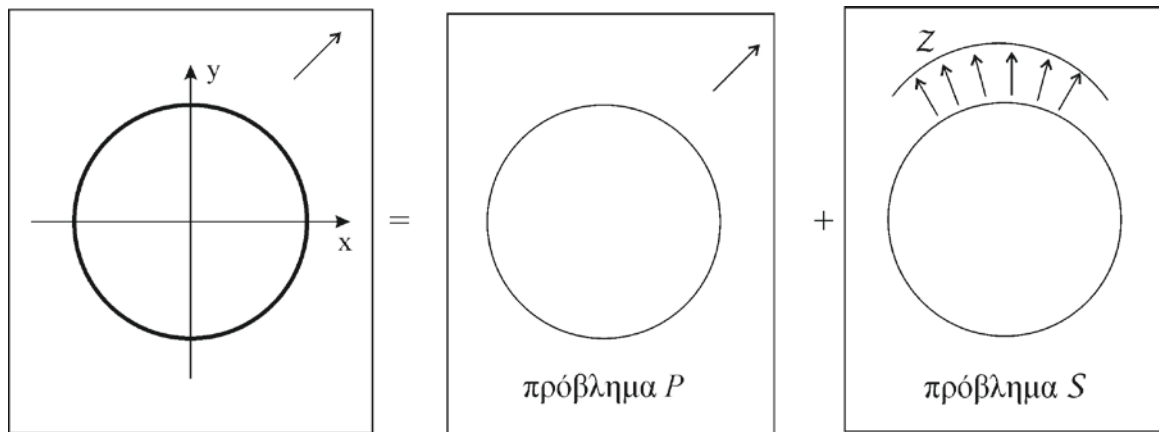
όπου έχει τεθεί

$$\mu_0^S = \mu^S - \tau^0. \quad (4.7)$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι δείκτες M και I έχουν εισαχθεί δηλώνοντας ποσότητες που συνδέονται με την μήτρα και την ανομοιογένεια, αντίστοιχα.

4.2 Η διαδικασία της λύσης

Η λύση του αντιεπίπεδου ελαστικού προβλήματος, που περιγράφηκε παραπάνω, θα κατασκευασθεί ως εξής. Υποθέτουμε ότι η ελαστική παραμόρφωση του συστήματος προέρχεται από αυτή της τέλει διεπιφάνειας (πρόβλημα P) επιβάλλοντας κατά μήκος της διεπιφάνειας μια κατάλληλη τασική ασυνέχεια εκφρασμένη σε όρους της δύναμης Z (πρόβλημα Z). Με βάση τα παραπάνω, τα ελαστικά πεδία του προβλήματος θα



Σχήμα 4.2

προκύψουν ως επαλληλία του ελαστικού πεδίου των δύο προβλημάτων από τις σχέσεις

$$\sigma_{\rho z} = \sigma_{\rho z}^P + \sigma_{\rho z}^Z, \quad \sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}^P + \sigma_{\theta z}^Z, \quad w = w^P + w^Z, \quad (4.8)$$

όπου οι άνω δείκτες P , Z δηλώνουν τα πεδία που σχετίζονται με τα προβλήματα P και S , αντίστοιχα. Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, η διεπιφανειακή συνθήκη (4.5) γράφεται

$$(\sigma_{\rho z}^Z)_M - (\sigma_{\rho z}^Z)_I = -\frac{\mu_0}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (w^P + w^Z), \quad (4.9)$$

Σύμφωνα με παραπάνω, αν τα ελαστικά πεδία του αντίστοιχου ελαστικού προβλήματος για την τέλεια διεπιφάνεια είναι γνωστά, τότε τα ελαστικά πεδία για το πρόβλημα της διεπιφανειακής ελαστικής κελυφωτής μεμβράνης προσδιορίζονται επιλύοντας το πρόβλημα της ανομοιογένειας που καταπονείται με μία τασική ασυνέχεια κατά μήκος της διεπιφάνειας, της οποίας οι τασικές συνιστώσες ικανοποιούν την σχέση (4.9).

4.3 Τα ελαστικά πεδία για το z-πρόβλημα

Θα αναζητήσουμε την γενική λύση του προβλήματος Z για την περίπτωση, που κατά μήκος της διεπιφάνειας εφαρμόζεται η δύναμη

$$Z(z, \bar{z}) = Bz + \bar{B}\bar{z}, \quad (4.10)$$

όπου B είναι μία μιγαδική σταθερά. Για την παραπάνω ασυνέχεια θα προσδιορισθεί το διαφοσικό δυναμικό $f_0(z)$ του συστήματος με βάση τις σχέσεις (3.26) και (3.27).

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο διαφοσικό δυναμικό έχει τη μορφή

$$f_0(z) = \beta z. \quad (4.11)$$

όπου β μία μιγαδική σταθερά.

Εισάγοντας τις (4.10) και (4.11) στην (3.27), έχουμε

$$f_M(z) = \beta z + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \beta \frac{R^2}{z} - \frac{i}{2\mu_M} \left(Bz + \bar{B} \frac{R^2}{z} \right). \quad (4.12)$$

Επειδή στο άπειρο δεν υπάρχουν τάσεις θα πρέπει η $f_M(z)$ στην περιοχή του απείρου να είναι σταθερή συνάρτηση. Αυτό εξασφαλίζεται όταν

$$\beta - \frac{i}{2\mu_M} B = 0, \quad (4.13)$$

από όπου

$$\beta = \frac{i}{2\mu_M} B. \quad (4.14)$$

Έτσι, το διαφορικό δυναμικό του συστήματος είναι

$$f_0(z) = \frac{i}{2\mu_M} Bz. \quad (4.15)$$

Εισάγοντας τις (4.15) και (4.10) στις (4.26) και (4.27), προκύπτουν οι μιγαδικές συναρτήσεις των δύο μέσων στην μορφή

$$f_M(z) = -\frac{i}{1+\Gamma} \frac{1}{\mu_M} \bar{B} \frac{R^2}{z}, \quad (4.16)$$

$$f_I(z) = \frac{1}{1+\Gamma} \frac{i}{\mu_M} Bz. \quad (4.17)$$

αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.16) και (4.17) στις (3.10)-(3.13) προκύπτουν τα παρακάτω ελαστικά πεδία

$$\mu_M w_M^Z = \frac{i}{1+\Gamma} (Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho}, \quad (4.18)$$

$$(\sigma_{xz} + i\sigma_{yz})_M^Z = -2i \frac{1}{1+\Gamma} Be^{2i\theta} \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (\rho \geq R) \quad (4.19)$$

$$(\sigma_{\rho x} + i\sigma_{\rho z})_M^Z = -2i \frac{1}{1+\Gamma} Be^{2i\theta} \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (4.20)$$

για τη μήτρα, και

$$\mu_M w_I^Z = \frac{i}{1+\Gamma} (Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta}) \rho, \quad (4.21)$$

$$(\sigma_{xz} + i\sigma_{yz})_I^Z = \frac{2\Gamma}{1+\Gamma} iB, \quad (\rho \leq R) \quad (4.22)$$

$$(\sigma_{\rho x} + i\sigma_{\rho z})_I^Z = -\frac{2\Gamma}{1+\Gamma} i\bar{B}e^{-i\theta}, \quad (4.23)$$

για την ανομοιογένεια. Οι πολικές συνιστώσες των τάσεων, μπορούν να προσδιορισθούν από την σχέση

$$(\sigma_{\rho x} + i\sigma_{\theta x}) = e^{-i\theta} (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}). \quad (4.24)$$

Από την σχέση αυτή, και τις (4.19) και (4.21) προκύπτουν

$$(\sigma_{\rho x})_M^Z = -\frac{i}{1+\Gamma} (Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (4.25)$$

$$(\sigma_{\theta x})_M^Z = -\frac{1}{1+\Gamma} (Be^{i\theta} + \bar{B}e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (\rho \geq R) \quad (4.26)$$

για τη μήτρα, και

$$(\sigma_{\rho x})_I^Z = i \frac{\Gamma}{1+\Gamma} (Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta}), \quad (4.27)$$

$$(\sigma_{\theta x})_I^Z = -\frac{\Gamma}{1+\Gamma} (Be^{i\theta} + \bar{B}e^{-i\theta}), \quad (4.28)$$

για την ανομοιογένεια.

4.4 Τα ελαστικά πεδία του προβλήματος

4.4.1 Απομακρυσμένη ομοιόμορφη φόρτιση στην μήτρα

Παρακάτω, θα προσδιορισθούν τα ελαστικά πεδία του προβλήματος της ελαστικής ανομοιογένειας με διεπιφανειακές συνθήκες της ελαστικής μεμβράνης για την περίπτωση που στην μήτρα εφαρμόζεται μια ομοιόμορφη φόρτιση στο άπειρο ίση με

$$\Sigma^\infty = \sigma_{xz}^\infty - i\sigma_{yz}^\infty. \quad (4.29)$$

Όπως προαναφέρθηκε οι τάσεις και οι μετατοπίσεις του προβλήματος θα προκύψουν ως επαλληλία του προβλήματος P και του προβλήματος Z . Το πρόβλημα Z που αντιστοιχεί

στην περίπτωση που εξετάζεται θεωρείται ότι έχει ως διεπιφανειακή ασυνέχεια την δύναμη

$$Z(z, \bar{z}) = Bz + \bar{B}\bar{z}. \quad (4.30)$$

Για την ασυνέχεια αυτή προέκυψαν τα ελαστικά πεδία (4.18)-(4.26). Από τις σχέσεις αυτές, οι διεπιφανειακές τάσεις και οι μετατοπίσεις ($\rho = R$), που υπεισέρχονται στην σχέση (4.9) εξάγονται στη μορφή

$$(\sigma_{\rho z})_M^Z = -\frac{i}{1+\Gamma}(Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta}), \quad (4.31)$$

$$(\sigma_{\rho z})_I^Z = i\frac{\Gamma}{1+\Gamma}(Be^{i\theta} + \bar{B}e^{-i\theta}), \quad (4.32)$$

$$\mu_M w_M^Z = \frac{i}{1+\Gamma}(Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta})R, \quad (4.33)$$

$$\mu_M w_I^Z = \frac{i}{1+\Gamma}(Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta})R. \quad (4.34)$$

Επίσης η διεπιφανειακή μετατόπιση w^P του προβλήματος P που υπεισέρχεται στην σχέση (4.19) εξάγεται από τη σχέση (3.40) στη μορφή

$$w_I^P = w_M^P = \frac{1}{(1+\Gamma)\mu_M}(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta})R, \quad (4.35)$$

$$\text{όπου } \Sigma^\infty = \sigma_{xz}^\infty - i\sigma_{yz}^\infty.$$

Αντικαθιστώντας τις (4.29), (4.30), (4.31) και (4.32) στην (4.9) προκύπτει ότι

$$B = i\frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) - \mu_0^S}\Sigma^\infty. \quad (4.36)$$

Όπως προαναφέρθηκε τα ελαστικά πεδία του προβλήματος που θεωρούνται, θα προκύψουν ως επαλληλία των ελαστικών πεδίων του προβλήματος P και του

προβλήματος Z με την παράμετρο B να παρέχεται από την σχέση (4.36). Έτσι, τα ελαστικά πεδία του προβλήματος P από τις σχέσεις (3.40)-(3.43) στη μορφή

$$w_M^P = \frac{1}{2\mu_M} \left(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta} \right) \left(1 + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \frac{R^2}{\rho^2} \right) \rho, \quad (4.37)$$

$$(\tau_{\rho z})_M^P = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta}) \quad (4.38)$$

για τη μήτρα, και

$$w_I^P = \frac{1}{\mu_M} \frac{1}{1+\Gamma} \left(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta} \right) \rho, \quad (4.39)$$

$$(\tau_{\rho z})_I^P = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta}), \quad (4.40)$$

για την ανομοιογένεια. Αντικαθιστώντας την (4.33) στις (4.18), (4.25) και (4.21), (4.27) προκύπτουν τα ελαστικά πεδία του προβλήματος Z :

$$w_M^Z = -\frac{1}{\mu_M} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) - \mu_0^S} \frac{1}{1+\Gamma} \left(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta} \right) \frac{R^2}{\rho}, \quad (4.41)$$

$$(\tau_{\rho z})_M^Z = \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) - \mu_0^S} \frac{1}{1+\Gamma} \left(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta} \right), \quad (4.42)$$

για τη μήτρα, και

$$w_I^Z = -\frac{1}{\mu_M} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) - \mu_0^S} \frac{1}{1+\Gamma} \left(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta} \right) \rho, \quad (4.43)$$

$$(\tau_{\rho z})_I^Z = \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) - \mu_0^S} \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \left(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta} \right), \quad (4.44)$$

για την ανομοιογένεια. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.41)-(4.44) και (4.37)-(4.40) στις (4.8) προκύπτουν τα παρακάτω ελαστικά πεδία

$$w_M = \frac{1}{\mu_M} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \frac{R^2}{\rho^2} \right) \rho - \frac{1}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) - \mu_0^S} \frac{R^2}{\rho} \right] (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}), \quad (4.45)$$

$$(\sigma_{\rho z})_M = \frac{1}{1+\Gamma} \left(\Gamma + \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) - \mu_0^S} \right) (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}), \quad (4.46)$$

για τη μήτρα, και

$$w_I = \frac{1}{\mu_M} \frac{1}{1+\Gamma} \left[1 - \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) - \mu_0^S} \right] (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}) \rho, \quad (4.47)$$

$$(\sigma_{\rho z})_I = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \frac{R(\mu_M + \mu_I)}{R(\mu_M + \mu_I) - \mu_0^S} (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}), \quad (4.48)$$

για την ανομοιογένεια.

4.4.2 Το πρόβλημα της ιδιοπαραμόρφωσης της μήτρας

Όπως εξετάστηκε στη παράγραφο (3.32), προέκυψαν τα ελαστικά πεδία για το πρόβλημα P δηλαδή οι σχέσεις (3.54)-(3.59). Αν αντικατασταθούν οι σχέσεις (4.31)-(4.34) και οι (3.54), (3.55) στην σχέση (4.9) προκύπτει ότι:

$$B = i \frac{\mu_0^S \mu_I}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} \varepsilon^T. \quad (4.49)$$

Ομοίως με την παραπάνω περίπτωση, τα ελαστικά πεδία του προβλήματος αυτού θα προκύψουν ως επαλληλία των ελαστικών πεδίων του προβλήματος P και του προβλήματος Z με την παράμετρο B να παρέχεται από τη σχέση (4.49). Έτσι τα ελαστικά πεδία του προβλήματος P παρουσιάζονται στις σχέσεις (3.56) και (3.59). Κάνοντας αντικατάσταση της σχέσης (4.49) στις (4.18)-(4.28) προκύπτουν τα ελαστικά πεδία για το πρόβλημα Z :

$$w_M^Z = -\frac{\Gamma}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho},$$

$$(\sigma_{xz} + i\sigma_{yz})_M^Z = \frac{2\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} \varepsilon^T \frac{R^2}{\rho^2} e^{2i\theta},$$

$$(\sigma_{\rho z} + i\sigma_{\theta z})_M^Z = \frac{2\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} \varepsilon^T \frac{R^2}{\rho^2} e^{i\theta},$$

$$(\sigma_{\rho z})_M^Z = \frac{\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2},$$

$$(\sigma_{\theta z})_M^Z = -i \frac{\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2},$$

για τη μήτρα, και

$$w_I^Z = -\frac{\Gamma}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \rho,$$

$$(\sigma_{xz} + i\sigma_{yz})_I^Z = -\frac{2\Gamma\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} \overline{\varepsilon^T},$$

$$(\sigma_{\rho z} + i\sigma_{\theta z})_I^Z = -\frac{2\Gamma\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta},$$

$$(\sigma_{\rho z})_I^Z = -\frac{\Gamma\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}),$$

$$(\sigma_{\theta z})_I^Z = -i \frac{\Gamma\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}),$$

για την ανομοιογένεια.

$$Z\left(z, \frac{R^2}{z}\right) = i \frac{\mu_0^S \mu_I}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} \left(\varepsilon^T z - \varepsilon^T \frac{R^2}{z} \right).$$

Αντικαθιστώντας στην (4.8) προκύπτουν τα παρακάτω ελαστικά πεδία

$$w_M = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \left[1 - \frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} \right] (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho},$$

$$(\sigma_{\rho z})_M = \frac{\mu_I}{1+\Gamma} \left(\frac{\mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} - 1 \right) (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2},$$

για τη μήτρα, και

ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ
ΜΕ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΚΕΛΥΦΩΤΗΣ ΜΕΜΒΡΑΝΗΣ

$$w_I = -\frac{1}{1+\Gamma} \left[1 + \frac{\Gamma \mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} \right] (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \rho,$$

$$(\sigma_{\rho z})_I = -\frac{\mu_I}{1+\Gamma} \left(1 + \frac{\Gamma \mu_0^S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_0^S} \right) (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}),$$

για την ανομοιογένεια.

5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ ΜΕ ΕΛΑΤΗΡΙΑΚΗ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΣΥΝΔΕΣΗ

5.1 Διατύπωση του προβλήματος και η διαδικασία της λύσης

Θεωρούμε την αντιεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση του συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 5.1. Το σύστημα αποτελείται από μία άπειρη ελαστική μήτρα που περιέχει μια ελαστική κυλινδρική ανομοιογένεια κυκλικής διατομής. Η ανομοιογένεια που έχει διαφορετικές ιδιότητες από αυτές της μήτρας, καταλαμβάνει το πεδίο $|z| < R$. Η μηχανική συμπεριφορά της διεπιφάνειας περιγράφεται με συνθήκες ελατηριακής σύνδεσης. Για το αντιεπίπεδο πρόβλημα, οι συνθήκες αυτές περιγράφονται με τις σχέσεις (Hashin, 1991):

$$w_M - w_I = \frac{Rn_z}{\mu_M}, \quad (\tau_{\rho z})_M = (\tau_{\rho z})_I, \quad (5.1)$$

όπου n_z είναι ελατηριακή διεπιφανειακή σταθερά σε αδιάστατη μορφή και μ_M είναι το μέτρο διάτμησης της μήτρας. Όταν $n_z = 0$ η διεπιφανειακή σύνδεση αντιστοιχεί στην τέλεια διεπιφάνεια, ενώ όταν $n_z \equiv \infty$ η σύνδεση αντιστοιχεί στην ολισθαίνουσα, χωρίς τριβή, διεπιφάνεια. Οι δείκτες M και I δηλώνουν και εδώ ποσότητες που συνδέονται με την μήτρα και την ανομοιογένεια, αντίστοιχα.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η λύση του αντιεπίπεδου ελατηριακού προβλήματος που περιγράφηκε παραπάνω θα αποκτηθεί υποθέτοντας ότι η ελαστική

παραμόρφωση του συστήματος προέρχεται από αυτή της τέλει διεπιφάνειας (πρόβλημα P), επιβάλλοντας κατά μήκος της διεπιφάνειας μια κατάλληλη ασυνέχεια των μετατοπίσεων \mathcal{W} (πρόβλημα S). Με βάση το παραπάνω σχήμα, τα ελαστικά πεδία του προβλήματος θα προκύψουν από τις σχέσεις

$$\sigma_{\rho z} = \sigma_{\rho z}^P + \sigma_{\rho z}^S, \quad \sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}^P + \sigma_{\theta z}^S, \quad w = w^P + w^S, \quad (5.2)$$

όπου P, S δηλώνουν τα πεδία που σχετίζονται με τα προβλήματα P και S , αντίστοιχα. Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, η διεπιφανειακή συνθήκη (5.1) γράφεται

$$w_M^S - w_I^S = \frac{Rn_z}{\mu_M} (\sigma_{\rho z}^P + \sigma_{\rho z}^S). \quad (5.3)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν τα ελαστικά πεδία του αντίστοιχου ελαστικού προβλήματος για την τέλεια διεπιφάνεια είναι γνωστά, τότε τα ελαστικά πεδία για το πρόβλημα της διεπιφανειακής ελατηριακής σύνδεσης προσδιορίζονται επιλύοντας το πρόβλημα της ανομοιογένειας που καταπονείται με μία τασική ασυνέχεια κατά μήκος της διεπιφάνειας, της οποίας οι διεπιφανειακές τασικές συνιστώσες ικανοποιούν την σχέση (5.3).

5.2 Τα ελαστικά πεδία για το S-πρόβλημα

Θα αναζητήσουμε την λύση του προβλήματος S για την περίπτωση, που κατά μήκος της διεπιφάνειας εφαρμόζεται η παρακάτω ασυνέχεια των μετατοπίσεων

$$\mathcal{W}(z, \bar{z}) = Az + \bar{A}\bar{z}, \quad (5.4)$$

όπου A είναι μία μιγαδική σταθερά. Για την παραπάνω ασυνέχεια θα προσδιορισθεί το διφασικό δυναμικό $f_0(z)$ του συστήματος με βάση τις σχέσεις (3.29) και (3.30).

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο διφασικό δυναμικό έχει τη μορφή

$$f_0(z) = az, \quad (5.5)$$

όπου a είναι μία μιγαδική σταθερά.

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.29), έχουμε

$$f_M(z) = az + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \bar{\alpha} \frac{R^2}{z} + \frac{1}{2} \left(Az + \bar{A} \frac{R^2}{z} \right). \quad (5.6)$$

Επειδή στο άπειρο δεν υπάρχουν τάσεις, θα πρέπει η $f_M(z)$ στην περιοχή του απείρου να είναι μία σταθερή συνάρτηση. Αυτό εξασφαλίζεται όταν

$$a + \frac{1}{2} A = 0. \quad (5.7)$$

Έτσι το διφασικό δυναμικό του συστήματος είναι

$$f_0(z) = -\frac{1}{2} Az. \quad (5.8)$$

Εισάγοντας την (5.4) και (5.8) στις (3.29), (3.30), οι μιγαδικές συναρτήσεις των δύο μέσων εύκολα προκύπτουν στην μορφή

$$f_M(z) = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \bar{A} \frac{R^2}{z}, \quad (5.9)$$

$$f_I(z) = -\frac{1}{1+\Gamma} Az. \quad (5.10)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.9) και (5.10) και (3.10)-(3.13) προκύπτουν τα παρακάτω ελαστικά πεδία

$$w_M^S = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho}, \quad (5.11)$$

$$(\tau_{xz} + i\tau_{yz})_M^S = -2\mu_I \frac{1}{1+\Gamma} A e^{2i\theta} \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (5.12)$$

στη μήτρα, και

$$w_I^S = -\frac{1}{1+\Gamma} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \rho, \quad (5.13)$$

$$(\sigma_{xz} + i\sigma_{yz})_I^S = -2\mu_I \frac{1}{1+\Gamma} \bar{A}, \quad (5.14)$$

στην ανομοιογένεια. Οι πολικές συνιστώσες των τάσεων, μπορούν να προσδιοριστούν από την σχέση

$$(\sigma_{\rho z} + i\sigma_{\theta z}) = e^{i\theta} (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}). \quad (5.15)$$

Από την σχέση αυτή, προκύπτουν

$$(\sigma_{xz} + i\sigma_{yz})_M^S = -2\mu_I \frac{1}{1+\Gamma} A e^{i\theta} \frac{R^2}{\rho^2},$$

$$(\sigma_{\rho z})_M = -\mu_M \frac{\Gamma}{1+\Gamma} (A e^{i\theta} + \bar{A} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (5.16)$$

$$(\sigma_{\theta z})_M = i\mu_M \frac{\Gamma}{1+\Gamma} (A e^{i\theta} - \bar{A} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (5.17)$$

για τη μήτρα, και

$$(\sigma_{xz} + i\sigma_{yz})_I^S = -2\mu_I \frac{1}{1+\Gamma} \bar{A} e^{-i\theta}$$

$$(\sigma_{\rho z})_I = -\mu_I \frac{1}{1+\Gamma} (A e^{i\theta} + \bar{A} e^{-i\theta}), \quad (5.18)$$

$$(\sigma_{\theta z})_I = -i\mu_I \frac{1}{1+\Gamma} (A e^{i\theta} - \bar{A} e^{-i\theta}), \quad (5.19)$$

για την ανομοιογένεια.

5.3 Τα ελαστικά πεδία του προβλήματος

5.3.1 Απομακρυσμένη ομοιόμορφη φόρτιση στην μήτρα

Στην συνέχεια, θα προσδιοριστούν τα ελαστικά πεδία του προβλήματος μιας κυκλικής ανομοιογένειας με ελατηριακή σύνδεση για την περίπτωση που στην μήτρα εφαρμόζεται μια ομοιόμορφη φόρτιση στο άπειρο ίση με

$$\Sigma^{\infty} = \sigma_{xz}^{\infty} - i\sigma_{yz}^{\infty}. \quad (5.20)$$

Όπως προαναφέρθηκε, θα προσδιορίσουμε τις τάσεις και τις μετατοπίσεις που αναπτύσσονται στο διαφασικό σύστημα ως επαλληλία του προβλήματος P και του προβλήματος S . Το πρόβλημα S επιλύθηκε θεωρώντας ως τασική ασυνέχεια προερχόμενη από μία ασυνέχεια διεπιφανειακής μετατόπισης της μορφής

$$\mathcal{W}(z, \bar{z}) = Az + \bar{A}\bar{z}, \quad (5.21)$$

Για την δύναμη αυτή προέκυψαν τα ελαστικά πεδία (5.11)-(5.19). Από τις σχέσεις αυτές, οι διεπιφανειακές τάσεις και οι μετατοπίσεις ($\rho = R$), που υπεισέρχονται στην σχέση (5.33), εξάγονται στη μορφή

$$w_M^S = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta})R, \quad (5.22)$$

$$w_I^S = -\frac{1}{1+\Gamma} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta})R, \quad (5.23)$$

$$(\sigma_{\rho z}^S)_I = (\sigma_{\rho z}^S)_M = -\frac{\mu_I}{1+\Gamma} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}). \quad (5.24)$$

Επίσης η διεπιφανειακή μετατόπιση w^P του προβλήματος P που υπεισέρχεται στη σχέση (5.2), εξάγεται από τη σχέση (3.40) στη μορφή:

$$w_I^P = w_M^P = \frac{1}{(1+\Gamma)\mu_M} (\Sigma^{\infty} e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^{\infty} e^{-i\theta})R$$

όπου $\Sigma^\infty = \sigma_{xz}^\infty - i\sigma_{yz}^\infty$.

Αντικαθιστώντας τις (5.22), (5.23) και (4.32) στην (5.3) προκύπτει ότι:

$$A = \frac{1}{\mu_M} \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} \Sigma^\infty. \quad (5.25)$$

Όπως προαναφέρθηκε τα ελαστικά πεδία του προβλήματος, θα προκύψουν ως επαλληλία των ελαστικών πεδίων του προβλήματος P και του προβλήματος S με την παράμετρο A να δίνεται από τη σχέση (5.25). Έτσι, τα ελαστικά πεδία του προβλήματος P από τις σχέσεις (3.40)-(3.43) στη μορφή:

$$2\mu_M w_M^P = (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}) \left(\rho + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \frac{R^2}{\rho} \right), \quad (5.26)$$

$$(\sigma_{\rho z} + i\sigma_{\theta z})_M^P = \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta} - \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \Sigma^\infty e^{i\theta} \frac{R^2}{\rho^2}, \quad (5.27)$$

για τη μήτρα, και

$$\mu_M w_I^P = \frac{\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}}{1+\Gamma} \rho, \quad (5.28)$$

$$(\sigma_{\rho z} + i\sigma_{\theta z})_I^P = \frac{2\Gamma}{1+\Gamma} \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}, \quad (5.29)$$

για την ανομοιογένεια. Αντικαθιστώντας την (5.25) στις (5.11), (5.16) και (5.13), (5.18) προκύπτουν τα ελαστικά πεδία το προβλήματος S :

$$w_M^S = \frac{\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho}, \quad (5.30)$$

$$(\sigma_{\rho z})_M^S = -\frac{\Gamma}{1+\Gamma} \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho},$$

για τη μήτρα, και

$$w_I^S = -\frac{1}{\mu_M} \frac{1}{1+\Gamma} \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}) \rho,$$

$$(\sigma_{\rho z})_I^S = -\frac{\Gamma}{1+\Gamma} \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}),$$

για την ανομοιογένεια.

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (5.2) τις (5.26)-(5.29) και (5.30)-(5.31) προκύπτουν:

$$w_M = \left[\frac{1}{2\mu_M} \left(1 + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \frac{R^2}{\rho^2} \right) \rho - \frac{\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} \frac{R^2}{\rho} \right] (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}),$$

$$(\sigma_{\rho z})_M = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \left(1 - \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} \frac{R^2}{\rho} \right) (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}),$$

για τη μήτρα, και

$$w_I = \frac{1}{\mu_M} \frac{1}{1+\Gamma} \left(1 - \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} \rho \right) (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}),$$

$$(\sigma_{\rho z})_I = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \left(1 - \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} \right) (\Sigma^\infty e^{i\theta} + \overline{\Sigma^\infty} e^{-i\theta}),$$

για την ανομοιογένεια.

5.3.2 Το πρόβλημα της ιδιοπαραμόρφωσης της μήτρας

Για την περίπτωση αυτή, εργαστήκαμε όπως παραπάνω, δηλαδή η διεπιφανειακή μετατόπιση w^P του προβλήματος P που υπεισέρχεται στην σχέση (), εξάγεται από την (...) στη μορφή:

$$w_M = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} [E^T e^{i\theta} + \overline{E}^T e^{-i\theta}] \frac{R^2}{\rho},$$

$$(\sigma_{\rho z} + i\sigma_{\theta z})_M = -2\mu_M \frac{\Gamma}{1+\Gamma} E^T e^{i\theta} \frac{R^2}{\rho^2},$$

$$(\sigma_{\rho z})_M^P = -\frac{\mu_I}{1+\Gamma} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2},$$

για τη μήτρα ($\rho \geq R$), και

$$w_I = -\frac{1}{1+\Gamma} [E^T e^{i\theta} + \overline{E^T} e^{-i\theta}] \rho,$$

$$(\sigma_{\rho z} + i\sigma_{\theta z})_I = -2\mu_I \frac{1}{1+\Gamma} \overline{E^T} e^{-i\theta},$$

$$(\sigma_{\rho z})_I^P = -\frac{\mu_I}{1+\Gamma} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}),$$

για την ανομοιογένεια ($\rho \leq R$). Αντικαθιστώντας τις (5.11), (5.13), (5.16), (5.18) και τις παραπάνω στην (5.3) προκύπτει ότι:

$$A = -\frac{n_z \Gamma}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} \varepsilon^T.$$

Αντικαθιστώντας την στις σχέσεις (5.11), (5.16) και (5.13), (5.18) προκύπτουν τα ελαστικά πεδία του προβλήματος S για τις συγκεκριμένες συνθήκες:

$$w_M^S = -\frac{\Gamma}{1+\Gamma} \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} [E^T e^{i\theta} + \overline{E^T} e^{-i\theta}] \frac{R^2}{\rho},$$

$$(\sigma_{\rho z})_M^S = \frac{\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2},$$

για τη μήτρα, και

$$w_I^S = \frac{1}{1+\Gamma} \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} [E^T e^{i\theta} + \overline{E^T} e^{-i\theta}] \rho,$$

$$(\sigma_{\rho z})_I^S = \frac{\mu_I}{1+\Gamma} \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}),$$

για την ανομοιογένεια.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές και τις ()-() στην (5.2) προκύπτουν:

$$w_M = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \left[1 - \frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} \right] (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho},$$

$$(\sigma_{\rho})_M = \frac{\mu_I}{1+\Gamma} \left(\frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} - 1 \right) (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2},$$

για τη μήτρα, και

$$w_I = -\frac{1}{1+\Gamma} \left[\frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} - 1 \right] (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}) \rho,$$

$$(\sigma_{\rho})_I = \frac{\mu_I}{1+\Gamma} \left(\frac{\Gamma n_z}{\Gamma n_z + 1 + \Gamma} - 1 \right) (\varepsilon^T e^{i\theta} + \overline{\varepsilon^T} e^{-i\theta}),$$

για την ανομοιογένεια.

6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

1. Με βάση την θεωρία των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων αναπτύχθηκαν οι γενικές αντιπροσωπεύσεις της λύσης του αντισπίεδου ελαστικού προβλήματος μιας κυκλικής ελαστικής ανομοιογένειας, που είναι ένθετη σε μία ελαστική μήτρα, για δύο διακριτούς τύπους φόρτισης κατά μήκος της διεπιφάνειας:
 - για μία δεδομένη μετατόπιση, και
 - για μία δεδομένη διανομή τάσεων.

Οι γενικές αντιπροσωπεύσεις της λύσης εκθράσθηκαν σε όρους του διφασικού δυναμικού του ελαστικού διφασικού συστήματος μήτρας-ανομοιογένειας, που είναι μία ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη στα δύο μέσα.

2. Με βάση τις γενικές αντιπροσωπεύσεις της λύσης που αναπτύχθηκαν, εξήχθησαν τα πλήρη αντιεπίπεδα ελαστικά πεδία σε κλειστή μορφή, για δύο συγκεκριμένα προβλήματα της νανομηχανικής:
 - για μία κυκλική νανο-ανομοιογένειας, που υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης και περιγράφεται με μία ομοιόμορφη στην ανομοιογένεια, και
 - για μία κυκλική νανο-ανομοιογένεια που διαταράσσει ένα ομοιόμορφο αντιεπίπεδο τασικό πεδίο της μήτρας

Οι δύο παραπάνω περιπτώσεις μελετήθηκαν για δύο συγκεκριμένους τύπους διεπιφανειακών συνθηκών, που εμφανίζονται στην κλίμακα της νανομηχανικής. Ο πρώτος τύπος περιγράφει την περίπτωση μιας ισχυρής διεπιφάνειας και διατυπώνεται μαθηματικά με ένα καταστατικό επιφανειακό νόμο, που αποτελεί την γενίκευση του νόμου Laplace-Young για τα ρευστά. Ο δεύτερος τύπος περιγράφει την περίπτωση μιας ασθενούς διεπιφάνειας που περιγράφεται με ελατηριακού τύπου διεπιφανειακές συνθήκες. Οι τύποι αυτοί των διεπιφανειακών συνθηκών συνδέονται με την διαφορετική ενεργειακή κατάσταση των ατόμων του διαφασικού συστήματος που βρίσκονται κοντά στη διεπιφάνεια, σε σχέση με αυτά που βρίσκονται στο εσωτερικό του υλικού. Η ενεργειακή αυτή κατάσταση εκδηλώνεται μόνο στην νανοκλίμακα.

3. Τα ελαστικά πεδία που προέκυψαν δείχνουν ότι μέσα στην ανομοιογένεια αναπτύσσονται πάντα σταθερές τάσεις και για τους δύο τύπους διεπιφανειακών συνθηκών και για τις δύο περιπτώσεις φορτίσεων που εξετάστηκαν. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αντίστοιχο με το αποτέλεσμα της ανομοιογένειας με την τέλεια διεπιφάνεια (ανομοιογένεια του Eshelby). Αντίθετα, οι ελαστικές τάσεις στη μήτρα παρουσιάζουν μία ισχυρή διατάραξη που εκδηλώνεται με τοπική συγκέντρωση τάσεων γύρω από την ανομοιογένεια.
4. Ως συνέχεια της παρούσας εργασίας προτείνεται η ενεργειακή διερεύνηση του συστήματος ανομοιογένειας-μήτρας με βάση τα ελαστικά πεδία που αποκτήθηκαν. Είναι ενδιαφέρον να εξετασθεί η συνολική ενέργεια που περικλείεται στο σύστημα για τους δύο τύπους διεπιφανειακών συνθηκών.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

K. Bertoldi, D Bigoni, W.J. Drugan, Structural interfaces in linear elasticity. Part I: Nonlocality and gradient approximation, *J. Mech. Phys. Solids* **55** (2007), pp. 1-34

K. Bertoldi, D Bigoni, W.J. Drugan, Structural interfaces in linear elasticity. Part II: Effective properties and neutrality, *J. Mech. Phys. Solids* **55** (2007), pp. 35-63

Duan, H.L., Wang, J., Huang, Z.P., Luo, Z.Y., 2005. Stress concentration tensors of inhomogeneities with interface effects. *Mech. Mater.* **37**, 723–736.

J.D. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proc. R. Soc. Lond. A* **241** (1957), pp. 376–396.

-
- N.M. Ghoniem, E.P. Busso, N. Kioussis and H.C. Huang, Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics: an overview, *Philos. Mag.* **83** (2003), pp. 3475–3528.
- M.E. Gurtin and A.I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **57** (1975), pp. 291–323.
- M.E. Gurtin and A.I. Murdoch, Surface stress in solids, *Int. J. Solids Struct.* **14** (1978), pp. 431–440.
- M.E. Gurtin, J. Weissmüller and F. Larché, A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium, *Philos. Mag. A* **78** (1998), pp. 1093–1109.
- Z. Hashin, The spherical inclusion with imperfect interface, *J. Appl. Mech.* **58** (1991), pp. 444–449.
- Z. Hashin, Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface, *J. Mech. Phys. Solids* **39** (1991), pp. 745–762.
- Z. Hashin, The interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites, *J. Mech. Phys. Solids* **50** (2002), pp. 2509–2537.
- B.L. Karihaloo and K. Viswanathan, A partially debonded ellipsoidal inclusion in an elastic medium. Part I: stress and displacement fields, *Mech. Mater.* **7** (1988), pp. 191–197.
- B.L. Karihaloo and K. Viswanathan, A partially debonded ellipsoidal inclusion in an elastic medium. Part II: stress intensity factors and debond opening displacement, *Mech. Mater.* **7** (1988), pp. 199–203.
- C.W. Lim, Z.R. Li, L.H. He, Size dependent, non-uniform elastic field inside a nano-scale spherical inclusion due to interface stress, *Int. J. Solids Struct.* **43** (2006), pp. 5055–5065.
- Y. Mikata and M. Taya, Stress field in and around a coated short fiber in an infinite matrix subjected to uniaxial and biaxial loadings, *J. Appl. Mech.* **52** (1985), pp. 19–24.

L.M. Milne-Thomson, *Antiplane Elastic Systems*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1962).

Y.Z. Povstenko, Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids, *J. Mech. Phys. Solids* **41** (1993), pp. 1499–1514.

J. Qu, The effect of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composites, *Mech. Mater.* **14** (1993), pp. 269–281.

C. Rottman, Landau theory of coherent interphase interfaces, *Phys. Rev. B* **38** (1988), pp. 12031-12034

Sharma, P., Dasgupta, A., 2002. Average elastic fields and scale-dependent overall properties of heterogeneous micropolar materials containing spherical and cylindrical inhomogeneities. *Phys. Rev. B* **66**, 224110-1–224110-10.

P. Sharma, S. Ganti and N. Bhate, Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities, *Appl. Phys. Lett.* **82** (2003), pp. 535–537.

P. Sharma, S. Ganti and N. Bhate, Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities, *Appl. Phys. Lett.* **82** (2003), pp. 535–537.

L. Tian and R.K.N.D. Rajapakse, Analytical Solution for Size-Dependent Elastic Field of a Nanoscale Circular Inhomogeneity, *J. Appl. Mech.* **74** (2007), pp. 568

F.Q. Yang, Size-dependent effective modulus of elastic composite materials: Spherical nanocavities at dilute concentrations, *J. Appl. Phys.* **95** (2004), pp. 3516–3520.

G. F. Wang and T.J. Wang, Deformation around a nanosized elliptical hole with surface effect, *Appl. Phys. Lett.* **89** (2006), pp. 161901.