

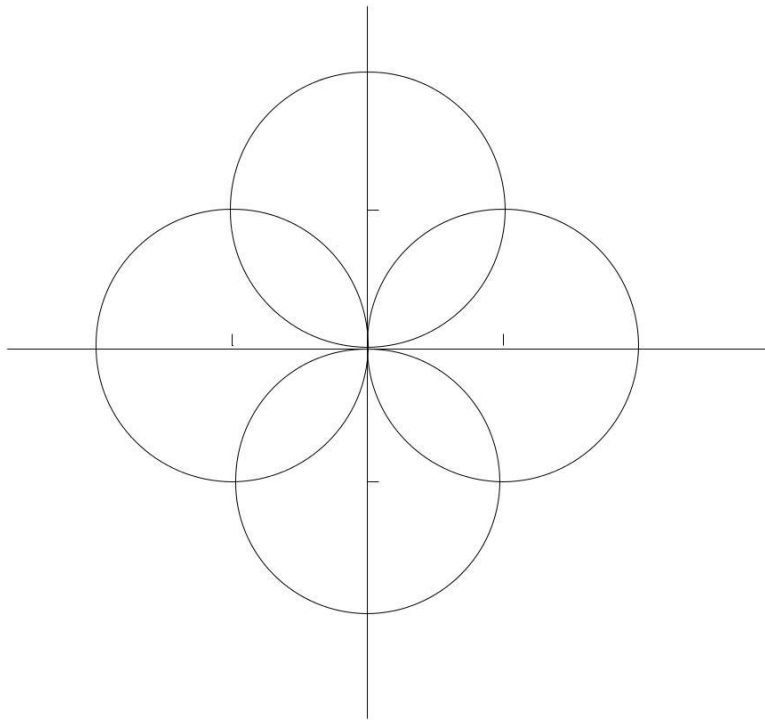


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

ΔΙΣΚΟΙ GERSGORIN ΚΑΙ ΣΥΝΑΦΗ ΧΩΡΙΑ



Διπλωματική Εργασία του: **Μουτζουρέλλη Ελευθέριου**

Επιβλέπων καθηγητής: **Ψαρράκος Παναγιώτης**

Αθήνα, 2017

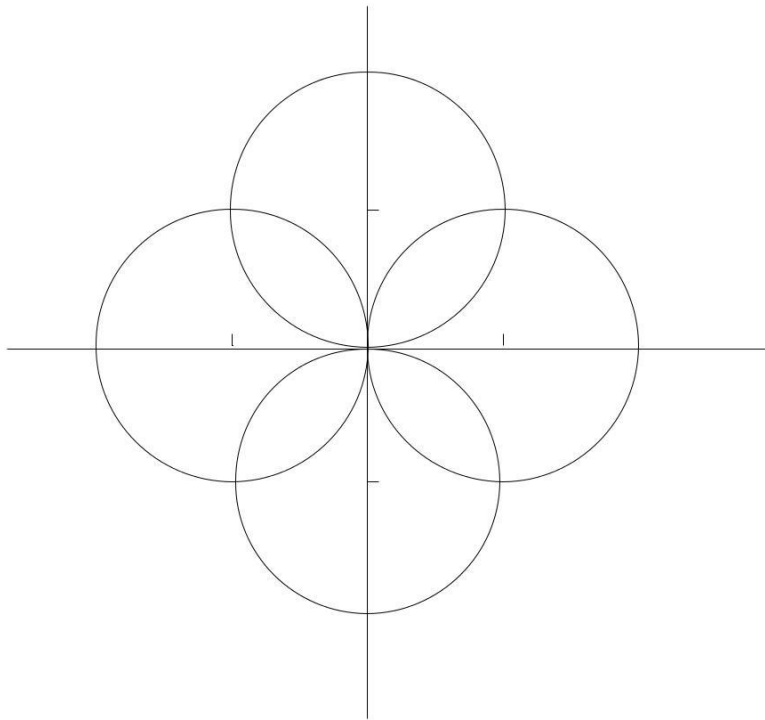


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

ΔΙΣΚΟΙ GERSGORIN ΚΑΙ ΣΥΝΑΦΗ ΧΩΡΙΑ



Διπλωματική Εργασία του: **Μουτζουρέλλη Ελευθέριου**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

- 1) Αρβανιτάκης Αλέξανδρος, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- 2) Κανελλόπουλος Βασίλειος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- 3) Ψαρράκος Παναγιώτης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2017

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα προσεγγίσουμε το φάσμα τετραγωνικών μιγαδικών πινάκων μέσω ειδικών χωρίων που εξαρτώνται άμεσα από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα και έμμεσα από τα υπόλοιπα. Αφού πρώτα εισάγουμε τον αναγνώστη σε μερικές βασικές έννοιες, θα εξετάσουμε την αλληλεξάρτηση των αυστηρά διαγώνιων κυρίαρχων πινάκων με τα χωρία αυτά. Πρώτο θεώρημα που θα παρουσιάσουμε εκτενώς είναι το θεώρημα Geršgorin. Από το θεώρημα αυτό προκύπτουν οι δίσκοι Geršgorin, των οποίων η ένωση μας δίνει το σύνολο Geršgorin, ένα ιδιαίτερος απλό στην εφαρμογή και χρήσιμο σύνολο που περιέχει όλες τις ιδιοτιμές ενός τυχαίου τετραγωνικού μιγαδικού πίνακα. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε όλες τις γραφοθεωρητικές και αναλυτικές επεκτάσεις του σπουδαίου αυτού θεωρήματος, δανειζόμενοι παράλληλα στοιχεία από το προκύπτον κατευθυνόμενο γράφημα του εκάστοτε πίνακα. Επιπρόσθετα, θα εξετάσουμε επεκτάσεις του προαναφερθέντος θεωρήματος που βασίζονται σε νόρμες πινάκων. Έπειτα θα γενικεύσουμε τους δίσκους εγκλεισμού ιδιοτιμών μιγαδικών πινάκων σε οβάλ και αργότερα σε λημνίσκους. Η ένωση των οβάλ μας δίνει το σύνολο Brauer, ενώ από την ένωση λημνίσκων, υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, ορίζεται το σύνολο Brualdi. Όλα τα σύνολα εσωκλείουν το φάσμα οποιουδήποτε πίνακα, επομένως καλούμαστε να τα συγκρίνουμε και να βγάλουμε συμπεράσματα ως προς το εμβαδόν που καταλαμβάνουν στο μιγαδικό επίπεδο, αλλά και ως προς την υπολογιστική τους πολυπλοκότητα. Τέλος, θα παρουσιάσουμε πορίσματα και μεταγενέστερα αποτελέσματα σε μια προσπάθεια βελτιστοποίησης των προηγούμενων χωρίων.

Abstract

In this diploma thesis, we will try to approximate the spectrum of complex square matrices by means of some special sets in the field of complex numbers, that are directly dependent on the diagonal elements of the matrix and indirectly from the rest elements. After we first introduce the reader to some basic linear algebra and matrix theory, we will look at the interdependence of the strictly diagonally dominated matrices with these sets. The first theorem that we will present in detail is the Geršgorin theorem. This theorem generates the famous Geršgorin discs, whose union gives the Geršgorin set, an extraordinary, unique and useful set that includes all the eigenvalues of a random complex square table. Then we will quote many extentions of the above theorem via graph theory, borrowing data from the directed graph of matrices. Additionally, we will write about the norm derivation of Geršgorin theorem and examine some of its analytical extensions. Furthermore, we will generalize the eigenvalue inclusion disks to the Cassini ovals and later to some higher order lemniscates. The Brauer set stems from the union of these ovals, while the union of the later, under certain conditions, is defined as the Brualdi set. All sets enclose the spectrum of any matrix, so our penultimate task is to compare them and draw conclusions not only about the area they occupy at the complex field, but also about the computational work that is needed to estimate them. Finally, we will present corollaries and more recent results in an attempt to define the previous sets' sharpness.

Περιεχόμενα

I. Περίληψη	i
II. Abstract	ii
III. Πρόλογος	iv
1. Βασική Θεωρία	1
1.1 Εισαγωγικές Έννοιες	1
1.2 Θεώρημα Geršgorin	3
2. Επεκτάσεις του Θεωρήματος Geršgorin	13
2.1 Επεκτάσεις του Θεωρήματος Geršgorin βάσει της θεωρίας γραφημάτων	13
2.2 Αναλυτικές επεκτάσεις του Θεωρήματος Geršgorin	23
2.3 Επεκτάσεις που προκύπτουν από Νόρμες Πινάκων	29
3. Θεωρήματα Εγκλεισμού Ιδιοτιμών τύπου Geršgorin	33
3.1 Εισαγωγή	33
3.2 Οβάλ του Cassini - Σύνολο Brauer	35
3.3 Λημνίσκοι Υψηλότερης Τάξης	44
4. Σύγκριση Συνόλων Εγκλεισμού ιδιοτιμών	55
4.1 Σύγκριση του συνόλου Brualdi με το σύνολο Brauer	55
4.2 Περιθώρια Βελτιστοποίησης του συνόλου Brualdi	61
Βιβλιογραφία	67

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία στρέφεται γύρω από τους δίσκους **Geršgorin**. Ο Semyon Aranovich Geršgorin, γεννημένος στη Ρωσική αυτοκρατορία και πιο συγκεκριμένα στη νοτιοδυτική Λευκορωσία, υπήρξε ένας σπουδαίος μαθηματικός που έζησε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα (1901-1933) και πρωτοστάτησε με την καινοτόμα θεωρία του όσον αφορά την εύρεση ιδιοτιμών (μιγαδικών) πινάκων στο μιγαδικό επίπεδο. Το σύνολο Geršgorin κατέχει μια ιδιαίτερη θέση στο παγκόσμιο μαθηματικό στερέωμα, που έγκειται στην απλότητα της κατασκευής του, επιτρέποντας κατ' αυτόν τον τρόπο τον υπολογισμό του ακόμα και για πολύ μεγάλους πίνακες.

Η βιβλιογραφία του σοβιετικού μετέπειτα μαθηματικού αποτέλεσε το έναυσμα πολλών προσπαθειών εκ μέρους πολλών εκκολλητόμενων μαθηματικών να συνεχίσουν και κατά μία έννοια να βελτιστοποιήσουν το έργο του Geršgorin.

Ένας εξ αυτών ήταν και ο Richard S. Varga, ο οποίος γεννήθηκε μόλις το 1928 στο Cleveland του Ohio των ΗΠΑ. Ο ουγγρικής καταγωγής και εν ζωή μαθηματικός που διέπρεψε στον τομέα της Αριθμητικής Ανάλυσης & Γραμμικής Άλγεβρας, μελέτησε στη συντριπτική τους πλειοψηφία τα papers του Geršgorin αρχής γενομένης τη δεκαετία του '60 και με την πάροδο του χρόνου εμβάθυνε περαιτέρω τις γνώσεις του πάνω στα χωρία εγκλεισμού ιδιοτιμών, με απώτερο στόχο να απαλείψει κάποιες ασάφειες που υπήρχαν γύρω από το κομμάτι της βελτιστοποίησης των εν λόγω χωρίων. Εξέδωσε μάλιστα και μια σειρά συγγραμμάτων στην οποία εκθειάζει το έργο του Geršgorin και συμπεριλαμβάνει και όλα τα αποτελέσματα, τα συμπεράσματα και τα πορίσματα αντίστοιχων μελετών έτερων μαθηματικών που αποτόλμησαν να ασχοληθούν εκτενώς με το συγκεκριμένο αντικείμενο τον περασμένο αιώνα.

Ένα από τα βασικά ζητήματα που απασχόλησαν πλειάδα μαθηματικών στις απαρχές του περασμένου αιώνα ήταν η εν δυνάμει ισοδυναμία της αντιστρεψιμότητας ενός πίνακα με την αυστηρή διαγώνια κυριαρχία που πιθανώς να διείπε αυτόν. Σπουδαίοι μαθηματικοί προσπάθησαν να απαντήσουν στο ερώτημα αυτό, όπως ο Desplanques, ο Minkowski και ο Hadamard. Ο πρώτος όμως που κατάφερε να απαντήσει ολοκληρωμένα στο ερώτημα που τέθηκε νωρίτερα και να αποδείξει την εν λόγω ισοδυναμία ήταν ο Geršgorin.

Ο Geršgorin λοιπόν άφησε ως παρακαταθήκη το ομώνυμο θεώρημα, με τον Γερμανό μαθηματικό Alfred Brauer, μεταπολεμικά πλέον, να είναι ο πρώτος άξιος συνεχιστής του. Ειδική αναφορά πρέπει να γίνει και στον Ουκρανό μαθηματικό Alexander Ostrowski, ο οποίος χρησιμοποίησε ως εφαρμογή στο αρχικό θεώρημα Geršgorin όμοιους πίνακες με τους αρχικούς, για να καταλήξει εν τέλει σε ανάλογα συμπεράσματα. Τόσο ο Ostrowski, όσο και ο Brauer μία δεκαετία αργότερα, απέδειξαν με διαφορετικό τρόπο, και δουλεύοντας μάλιστα τελειώς ανεξάρτητα, μία από τις σημαντικότερες αναγκαίες και ικανές συνθήκες αντιστρεψιμότητας των τετραγωνικών πινάκων. Ο Ostrowski μάλιστα αποπειράθηκε να βελτιστοποιήσει το θεώρημα Geršgorin, χρησιμοποιώντας ιδιότητες όχι μόνο των γραμμών, αλλά και των στηλών του τυχαίου πίνακα μεγέθους n .

Στο ίδιο μήκος κύματος κινήθηκαν και οι Ky Fan και Alan Hoffman την περίοδο 1954 -1958, μελετώντας υποπεριπτώσεις του θεώρηματος Geršgorin και κατά κύριο λόγο την περίπτωση των μη αρνητικών πινάκων. Το μεσοδιάστημα, και συγκεκριμένα το 1956, ο σπουδαίος μαθηματικός αμερικανικής υπηκοότητας Alston Scott Householder, είχε προβεί σε παρόμοια αποτελέσματα με τον Geršgorin, χρησιμοποιώντας όμως αποκλειστικά νόρμες πινάκων.

Η επόμενη έννοια που απασχόλησε ιδιαίτερώς τους μαθηματικούς αυτής της εποχής ήταν η υποβιβασιμότητα πινάκων, πάνω στην οποία εκτενής έρευνα έγινε από την Αυστρο-Ουγγαρέζα μαθηματικό, γεννηθείσα το 1906, Olga Taussky. Η ίδια υπήρξε μία «λαμπαδηδρόμος» στον τομέα της Ανάλυσης Πινάκων, καθώς μετείχε στην ομαλή μετάβαση από την εποχή που μεσουρανούσε το θεώρημα Geršgorin, στα τελευταία χρόνια όπου εκμεταλλευόμενοι την υπολογιστική ισχύ των σύγχρονων υπολογιστών λύνουμε με άνεση πληθώρα δυσεπίλυτων ανισώσεων, βρίσκοντας έτσι τα προκύπτοντα χωρία παρά το γεγονός ότι κάποτε η υπολογιστική τους πολυπλοκότητα φάνταζε απαγορευτική.

Σε αυτή τη διαδρομή, καθοριστικό ρόλο διαδραμάτισε η συμβολή του A. Brauer. Το όνομα του Γερμανού μαθηματικού συνδέεται άρρηκτα με αυτό του Cassini, ο οποίος ήτο μαθηματικός και αστρονόμος κατά τον 17^ο αιώνα. Παρότι όμως του έργο του υπήρξε σπουδαίο, σπανίως το συναντάμε στη διεθνή βιβλιογραφία, σε αντίθεση με αυτό του Geršgorin. Οι αιτίες που συμβαίνει αυτό εικάζουμε ότι είναι κυρίως δύο. Πρωτίστως διότι το πλήθος των οβάλ ξεπερνάει κατά πολύ το πλήθος των δίσκων Geršgorin σε περιπτώσεις που το μέγεθος του πίνακα είναι σχετικά μεγάλο, και δευτερευόντως επειδή εξ ορισμού τα οβάλ του Cassini είναι πολύπλοκες κατασκευές εν συγκρίσει με τους δίσκους.

Ένας επιπρόσθετος λόγος ενδέχεται να είναι και η αποτυχία των «λημνίσκων», που θα συναντήσουμε στην §3.3, να περιέχουν πάντοτε τις ιδιοτιμές ενός τυχαίου τετραγωνικού μιγαδικού πίνακα. Παρόλα αυτά, το παραπάνω πρόβλημα λύθηκε το 1982 από τον Αμερικάνο μαθηματικό Richard A. Brualdi, ο οποίος δανείστηκε στοιχεία της Θεωρίας Γραφημάτων για να τα ενσωματώσει στα ήδη υπάρχοντα θεώρηματα εγκλεισμού ιδιοτιμών του Brauer. Στον Brualdi λοιπόν οφείλεται το γεγονός ότι έπειτα από την έκδηλη απογοήτευση που υπήρχε για την αναποτελεσματικότητα των λημνίσκων, κατέστη πλέον δυνατό οι λημνίσκοι να χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση ιδιοτιμών.

Το θεώρημα Brualdi, το οποίο συμπεριλαμβάνεται βέβαια στην παρούσα διπλωματική εργασία, επέτρεψε στους μαθηματικούς να ξετάσουν τα χωρία εγκλεισμού ιδιοτιμών υπό ένα νέο οπτικό πρίσμα, το οποίο σε συνδυασμό με την άνθιση των υπολογιστών τους οδήγησε όπως θα δούμε στη βελτιστοποίηση του παραπάνω χωρίου. Το χωρίο αυτό, γνωστό και ως σύνολο Brualdi, αποτέλεσε μια καλύτερη προσέγγιση του φάσματος ενός οποιουδήποτε τετραγωνικού μιγαδικού πίνακα σε σχέση με το σύνολο Brauer, αλλά και το σύνολο Geršgorin που κυριαρχούσε στην αντίληψη των μαθηματικών επί αρκετές δεκαετίες ως ένα βέλτιστο χωρίο εγκλεισμού ιδιοτιμών. Ο Brualdi μάλιστα τιμήθηκε την περασμένη δεκαετία και με το μετάλλιο Euler.

Εν συνεχεία, ακολούθησε και το θεώρημα της Olga Taussky για τα σύνολα Brualdi, που μας δίνει μια αναγκαία συνθήκη για το πότε ένα σημείο του συνόρου του συνόλου Brualdi ενός πίνακα είναι ιδιοτιμή του πίνακα. Μια αναγκαία, αλλά ταυτόχρονα και ικανή συνθήκη, έχει δοθεί από τους B. Li και M. Tsatsosμοιρο το 1997, αλλά και την L. Yu. Kolotilina λίγα χρόνια αργότερα.

Η σπουδαιότητα των οβάλ του Cassini και του συνόλου Brauer αναδείχθηκε ακόμη περισσότερο μόλις το 1999, από τον Varga και τον τελευταίο διδακτορικό του φοιτητή ονόματι Alan Krautstengl. Τη χρονιά αυτή έδειξαν οι δύο τους ότι το χωρίο εγκλεισμού ιδιοτιμών δεν αντιπροσωπεύει αποκλειστικά τον πίνακα που μελετήθηκε, αλλά και ένα υπεραριθμίσσιμο εν γένει πλήθος πινάκων που αποτελούν τη λεγόμενη κλάση του αρχικού πίνακα. Απέδειξαν κατ' αυτόν τον τρόπο ένα θεώρημα το οποίο βασίστηκε στις παρατηρήσεις του Γερμανού μαθηματικού Arthur Engel πάνω στα οβάλ του Cassini. Καταλυτικό ρόλο στην απόδειξη αυτή έχει η κανονική μορφή Frobenius που ορίζεται στην §2.1.

Η επιθυμητή βελτιστοποίηση του συνόλου Brualdi ήρθε μόλις στο λυκαυγές του 21^{ου} αιώνα από τον Varga, με παραδείγματα του οποίου κλείνει και η παρούσα διπλωματική εργασία.

Κεφάλαιο 1

Βασική Θεωρία

1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Το πρωταρχικό θεώρημα Geršgorin (1931) του ομώνυμου Λευκορώσου μαθηματικού προκάλεσε ντελίριο ενθουσιασμό στον κόσμο των θετικών επιστημών με την απλότητα της εφαρμογής του και την αποτελεσματικότητά του. Το θεώρημα αυτό μπορούσε να προσδιορίσει τις ιδιοτιμές ενός οποιουδήποτε $n \times n$ μιγαδικού πίνακα εντός n το πλήθος δίσκων στο μιγαδικό επίπεδο.

Πριν προχωρήσουμε όμως στο θεώρημα Geršgorin, πρέπει να γίνουν απαραίτητος μερικοί ορισμοί. Καταρχάς με C^n , όπου n είναι θετικός ακέραιος αριθμός, ορίζουμε τον χώρο όλων των n -διάστατων διανυσμάτων στήλης $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ μιγαδικών (εν γένει) αριθμών (δηλαδή $v_i \in C, 1 \leq i \leq n$). Γενικεύοντας τον παραπάνω ορισμό, με $C^{n \times m}$ συμβολίζουμε τους πίνακες μιγαδικών στοιχείων διάστασης $n \times m$. Συνήθως ένας τέτοιος πίνακας συμβολίζεται με A ή εναλλακτικά $A = [a_{i,j}]$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

και βεβαίως $a_{i,j} \in C, \forall 1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m$. Κατ' αντιστοιχία, ο R^n και ο $R^{n \times m}$ ορίζουν διανύσματα πραγματικών αριθμών και πίνακες πραγματικών αριθμών.

Για τον προηγούμενο πίνακα A ως **ιδιοτιμή** λ ορίζουμε έναν μιγαδικό αριθμό για τον οποίον η γραμμική εξίσωση $Ax = \lambda x$ έχει μία λύση $x \in C^n \setminus \{0\}$ και η λύση $x \in C^n$ καλείται **ιδιοδιάνυσμα** του A (σε αντιστοιχία με το λ). Εναλλακτικά, μπορεί να ειπωθεί ότι ένας $n \times n$ (μιγαδικός) πίνακας A έχει ακριβώς n , όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_i \in C, i = \{1, 2, \dots, n\}$, οι οποίες είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Επιπλέον, με I_n συμβολίζουμε τον $n \times n$ ταυτοτικό πίνακα, ο οποίος έχει μηδενικά όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία του και ίσα με τη μονάδα όλα τα διαγώνια.

Καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας εξετάζονται τετραγωνικοί πίνακες πλην ελαχίστων εξαιρέσεων. Επιπρόσθετα, συμβολίζουμε με $\sigma(A)$ το **φάσμα** ενός τετραγωνικού πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, που είναι το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του A , δηλαδή

$$\sigma(A) := \{ \lambda \in C : \det(\lambda I_n - A) = 0 \}, \quad (1.2)$$

ενώ απαραίτητο κρίνεται να οριστεί και το σύνολο

$$N := \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.3)$$

που χρησιμοποιείται για να ορίσουμε τα αθροίσματα γραμμών ακολούθως.

Ορισμός 1.1.1. Ορίζουμε το i -οστό **άθροισμα γραμμής** (row sum) ως

$$r_i(A) = \sum_{j \in N \setminus i} |\alpha_{i,j}| \quad (i \in N), \quad (1.4)$$

με τη σύμβαση ότι $r_i(A) := 0$ εάν $n=1$.

Παρατήρηση 1.1.2. Παρότι ο όρος «άθροισμα γραμμής» δεν είναι απόλυτα ακριβής, καθώς εξαιρείται πάντοτε από το εκάστοτε άθροισμα το διαγώνιο στοιχείο της γραμμής, τον χρησιμοποιούμε για λόγους απλότητας. Ομοίως, η ίδια τακτική θα ακολουθηθεί και με τα «αθροίσματα στηλών» που εισάγονται στην §1.2.

Απαραίτητος είναι και ο ορισμός της νόρμας διανυσμάτων.

Ορισμός 1.1.3. Μια συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : C^n \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **νόρμα διανυσμάτων** (vector norm) αν για κάθε $x, y \in C^n$ ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

- i. $\|x\| \geq 0$ (μη αρνητική).
- ii. $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.
- iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$.
- iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός 1.1.4. Δίνονται και οι βασικότερες νόρμες για κάθε $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in C^n$, οι οποίες είναι οι εξής:

$$l_1(x) := \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad l_2(x) := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \quad \text{και} \quad l_\infty(x) := \max\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}.$$

1.2 Θεώρημα Geršgorin

Ορισμός 1.2.1. Εφόσον ορίσαμε νωρίτερα το άθροισμα γραμμής, θέτουμε

$$\Gamma_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha_{i,i}| \leq r_i(A)\} \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (1.5)$$

όπου ως $\Gamma_i(A)$ καλείται ο **i-οστός δίσκος Geršgorin** (i-th Geršgorin disk), ο οποίος φαίνεται από τον τύπο (1.5) ότι είναι ένας κλειστός (λόγω της μη αυστηρής ανισότητας “ \leq ”) δίσκος στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο το σημείο $\alpha_{i,i}$ και ακτίνα $r_i(A)$. Έπειτα θέτουμε το **σύνολο Geršgorin** (Geršgorin set) ως εξής:

$$\Gamma(A) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i(A). \quad (1.6)$$

Το παραπάνω σύνολο είναι βεβαίως κλειστό και φραγμένο στο \mathbb{C} . Παραταύτα, το $\Gamma(A)$ μπορεί να έχει μερικές φορές μια ιδιαίτερος ενδιαφέρουσα γεωμετρική δομή, κάτι που συμπεραίνεται και από τα κάτωθι παραδείγματα.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A_1) = \{0, 0\}.$$

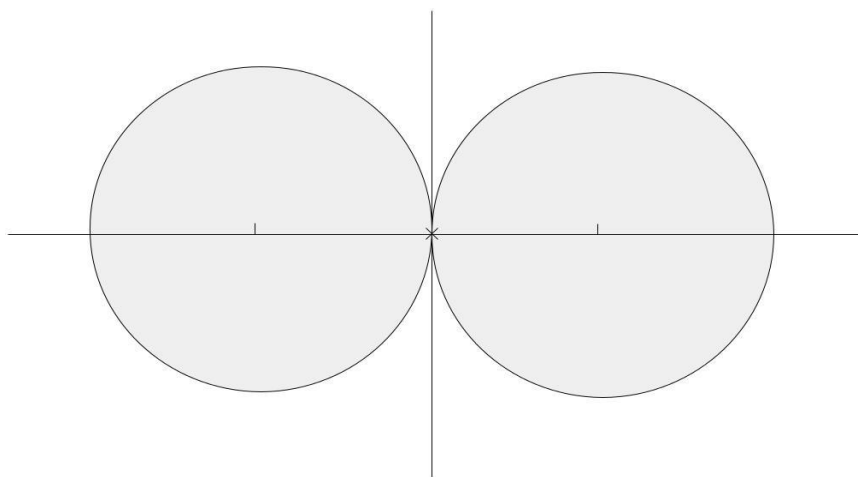
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1/2 & 4 & i/2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A_2) = \{0.9641 - 0.1620i, 4.0641 + 0.1629i, 6.9718 + 0.0008i\}.$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & -i & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & -2i & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -9/2 \end{bmatrix},$$

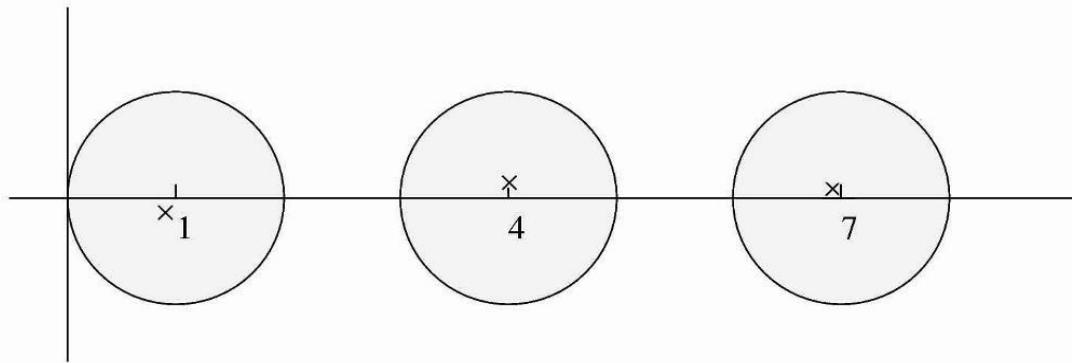
$$\sigma(A_3) = \{3.2361, -1.2361, -2, -1.0323i, -1.9677i, 4.2557, -4.2557\}.$$

→ Εδώ να επισημάνουμε ότι στις αριθμητικές τιμές των μη ακεραίων πραγματικών και μιγαδικών μερών των ιδιοτιμών έχει γίνει στρογγυλοποίηση στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο.

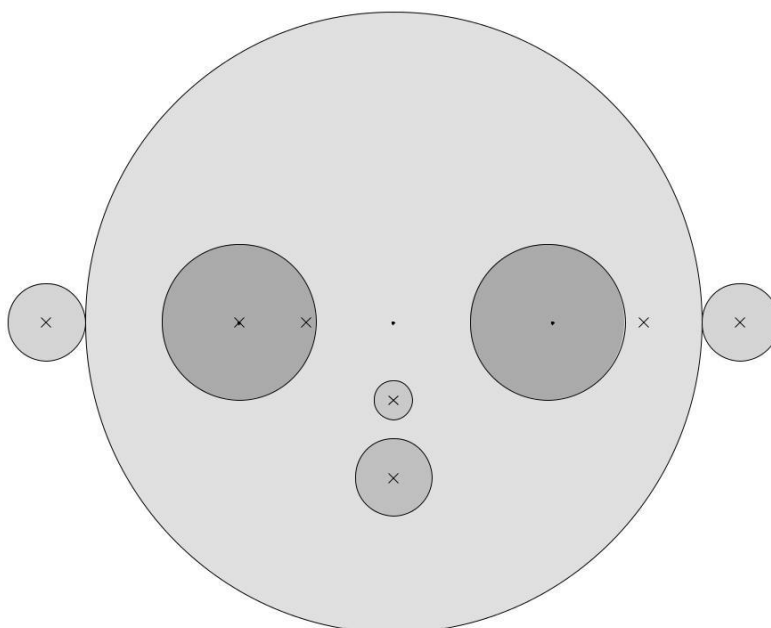
Για κάθε πίνακα $\{A_i\}_{i=1,2,3}$ που ορίστηκε παραπάνω, δίνεται τόσο το φάσμα του, όσο και το αντίστοιχο Geršgorin σύνολό του στις Εικόνες 1.1 έως 1.3, ενώ οι ιδιοτιμές του κάθε πίνακα απεικονίζονται στις ακόλουθες εικόνες με “x”.



Εικόνα 1.1: Απεικονίζεται το $\Gamma(A_1)$ και το $\sigma(A_1)$ για τον πίνακα A_1 .



Εικόνα 1.2: Απεικονίζεται αντιστοίχως το σύνολο Geršgorin και το φάσμα του δεύτερου πίνακα.



Εικόνα 1.3: Τέλος, έχουμε την απεικόνιση του συνόλου $\Gamma(A_3)$ και του φάσματος $\sigma(A_3)$ για τον πίνακα A_3 .

1. Καταρχάς παρατηρούμε στην πρώτη εικόνα πως η ιδιοτιμή 0 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα δύο. Επομένως, συνεπάγεται βάσει και του θεωρήματος Geršgorin που θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε εν συνεχεία ότι οι δύο ομώνυμοι δίσκοι που σχηματίζονται δεν πρόκειται να είναι ξένα σύνολα. Ως εκ τούτου η τομή των δύο δίσκων θα είναι τουλάχιστον ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου, όπως και ισχύει εν προκειμένη περίπτωση. Το ότι οι δύο δίσκοι Geršgorin εφάπτονται, έγκειται στο γεγονός ότι κάθε δίσκος Geršgorin είναι κλειστός.
2. Πέρα απ' την προηγούμενη περίπτωση όπου κάποια/-ες ιδιοτιμή/-ές βρίσκεται/-ονται στο σύνορο ενός η πολλών δίσκων Geršgorin, υπάρχει και η συνήθης περίπτωση για πίνακες είτε με μικρά αθροίσματα γραμμών που δεν έχουν κάποιο διαγώνιο στοιχείο να εμφανίζεται πάνω από μία φορά, είτε με διαγώνια στοιχεία που απέχουν αισθητά μεταξύ τους χωρίς να εμφανίζεται κάποιο τεράστιο άθροισμα γραμμής αναλογικά με τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα. Εν τιαυτή περίπτωση παρατηρούμε ότι κάθε δίσκος Geršgorin περιέχει ακριβώς 1 ιδιοτιμή, όπως φαίνεται ξεκάθαρα και στην Εικόνα 1.2.

3. Πριν όμως γενικεύσουμε τις παραπάνω παρατηρήσεις μας και φτάσουμε στο σημείο να διατυπώσουμε το θεώρημα Geršgorin, έχουμε το καθήκον να αποσαφηνίσουμε αν κάθε δίσκος Geršgorin περιέχει πάντοτε τουλάχιστον μία ιδιοτιμή. Και παρότι μια καταφατική απάντηση στο μείζον αυτό ερώτημα που τέθηκε θα μας διευκόλυνε ιδιαίτερος, η απάντηση δυστυχώς δεν είναι η αναμενόμενη. Και αυτό γιατί κάθε δίσκος Geršgorin δεν περιέχει οπωσδήποτε κάποια ιδιοτιμή. Δια του λόγου το αληθές, μπορούμε εύκολα να εξακριβώσουμε ότι ισχύει η παραπάνω θέση παρατηρώντας τον δεξιό σκουρόχρωμο δίσκο της τρίτης εικόνας.

Παρόλα αυτά παρατηρούμε ότι και στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις όλες οι ιδιοτιμές εμπεριέχονται εντός του συνόλου Geršgorin, συμπέρασμα που ισχύει εν τέλει για κάθε $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ και αποτελεί συνάμα και το εφελτήριο για τη διατύπωση του πρωταρχικού και σίγουρα σημαντικότερου θεωρήματος της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Θεώρημα 1.2.2. (Θεώρημα Geršgorin) Για κάθε $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ και κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $k \in N$, τέτοιος ώστε

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq r_k(A). \quad (1.7)$$

Από την παραπάνω σχέση καταρχάς συνεπάγεται (λόγω της σχέσης 1.5) ότι $\lambda \in \Gamma_k(A)$, ενώ προκύπτει άμεσα από την (1.6) ότι $\lambda \in \Gamma(A)$. Καθώς μάλιστα αυτό ισχύει για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$, ισχύει ότι

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A). \quad (1.8)$$

Απόδειξη: Για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$, έστω $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in C^n$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα μιγαδικών στοιχείων, έτσι ώστε $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Τότε θα έχουμε $\sum_{j \in N} x_j a_{i,j} = \lambda x_i, \forall i \in N$.

Καθώς όμως το ιδιοδιάνυσμα είναι μη μηδενικό, υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος $k \in N$ για τον οποίον ισχύει $0 < |x_k| = \max\{|x_i| : i \in N\}$. Γι' αυτό το k έχουμε ότι $\sum_{j \in N} x_j a_{k,j} = \lambda x_k$, ή ισοδύναμα ότι

$$(\lambda - a_{k,k})x_k = \sum_{j \in N \setminus \{k\}} x_j a_{k,j}.$$

Λαμβάνοντας πλέον τις απόλυτες τιμές και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα η παραπάνω ισότητα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$|\lambda - a_{k,k}| |x_k| \leq \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{k,j}| |x_j| \leq \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{k,j}| |x_k| = |x_k| r_k(A),$$

και διαιρώντας με $|x_k| > 0$ καταλήγουμε στην επιθυμητή σχέση. ■

Παρατήρηση 1.2.3. Παρατηρούμε πως ένας δίσκος Geršgorin που περιέχει σίγουρα την εκάστοτε λ ιδιοτιμή είναι ο k -οστός, όπου k είναι ο αύξων αριθμός του στοιχείου του ιδιοδιανύσματος της ιδιοτιμής λ που είναι μεγαλύτερο (ή ίσο) σε σχέση με τα υπόλοιπα.

Συμπερασματικά, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε πως για έναν τυχαίο πίνακα 3×3 ισχύει απαραίτητα ότι $\lambda_2 \in \Gamma_2$, αλλά ότι $\exists i \in \{1,2,3\}$ έτσι ώστε η λ_2 να περιέχεται εντός αυτού του Γ_i Geršgorin δίσκου.

Ο εξευτελιστικά απλός τρόπος με τον οποίον δύναται ένας μαθηματικός να προσδιορίσει χωρικά τις ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in C^{n \times n}$ με τη χρήση του θεωρήματος Geršgorin είναι προφανής. Με μερικές αριθμητικές διαδικασίες, προσθέσεις επί της ουσίας, που καταχράζονται πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος, μπορούμε να υπολογίσουμε αρχικά τα αθροίσματα γραμμών $\{r_i\}_{i \in N}$, τα οποία εν συνεχεία αποβαίνουν καθοριστικά στην εύρεση η το πλήθος δίσκων, των οποίων η ένωση περιέχει όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A .

Σε αντιδιαστολή με την απλότητα της καινοτόμου μεθόδου του Geršgorin μπορεί κάποιος μόνο να παραθέσει την ομολογουμένως αδυναμία του περαιτέρω προσδιορισμού της ιδιοτιμής εντός ενός δίσκου ή ακόμη και μερικές φορές και ολόκληρου του συνόλου Geršgorin

Εντούτοις, το σύνολο Geršgorin με τον τρόπο που ορίστηκε φαίνεται να εμπεριέχει (πέρα από όλες τις ιδιοτιμές του A) και όλες τις ιδιοτιμές των πινάκων $B = [b_{i,j}] \in C^{n \times n}$ με την προϋπόθεση να ισχύει $b_{i,i} = a_{i,i}$ και $r_i(B) = r_i(A) \forall i \in N$, έτσι ώστε να προκύπτει $\sigma(A) \subseteq \Gamma(B)$ για κάθε τυχαίο πίνακα B αυτού του είδους.

→ Η κύρια ιδέα πίσω από το θεώρημα Geršgorin όμως προϋπήρχε και διατυπώθηκε πρώτη φορά ως συνέπεια του Θεωρήματος Αυστηρής Διαγώνιας Κυριαρχίας (ΘΑΔΚ). Προτού όμως δώσουμε περισσότερες λεπτομέρειες και αντιπαραθέσουμε τα δύο θεωρήματα, οφείλουμε να εξετάσουμε μια γενίκευση του θεωρήματος Geršgorin δανειζόμενοι μερικά στοιχεία από τη Θεωρία Τελεστών. Αρχικά μας είναι απαραίτητος ο ορισμός της φασματικής ακτίνας.

Ορισμός 1.2.4. Ως **φασματική ακτίνα** (spectral radius) για τυχαίο πίνακα $A \in C^{n \times n}$ ορίζουμε τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή. Δηλαδή,

$$\rho(A) = \max\{\lambda: \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (1.9)$$

Πόρισμα 1.2.5. Για κάθε $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, ισχύει ότι

$$\rho(A) \leq \max_{i \in N} \sum_{j \in N} |a_{i,j}|. \quad (1.10)$$

Η απόδειξη είναι παραπλήσια του θεωρήματος Geršgorin και χρησιμοποιείται πάλι η τριγωνική ανισότητα. Εφόσον όμως το β μέλος της σχέσης (1.10) είναι ως επί το πλείστον η νόρμα άπειρο του πίνακα A , καταλήγουμε στο ότι

$$\rho(A) \leq \|A\|_{\infty}. \quad (1.11)$$

Παρατήρηση 1.2.6. Η $\|\cdot\|_{\infty}$ είναι η νόρμα άπειρο για πίνακες στο $C^{n \times n}$ που επάγεται φυσικά από τη νόρμα διανυσμάτων $\|\cdot\|_{\infty}$ στο C^n .

Παρατήρηση 1.2.7. Γνωρίζοντας πλέον την καθολική ισχύ της (1.11), μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα δίσκο στο μιγαδικό επίπεδο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\|A\|_{\infty}$, ο οποίος θα περιέχει όλες τις ιδιοτιμές του A . Παρόλα αυτά, είναι αρκετά εμφανές ότι το νέο μας χωρίο αποκλείεται να είναι γνήσιο υποσύνολο του $\Gamma(A)$, ενώ στις συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων/πινάκων θα είναι αισθητά μεγαλύτερο του συνόλου $\Gamma(A)$ (η μοναδική ουσιαστικά εξαίρεση είναι η ύπαρξη ομόκεντρων στο $(0,0)$ δίσκων Geršgorin).

Ορισμός 1.2.8. Ένας πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ ονομάζεται **αυστηρά διαγώνια κυρίαρχος** (strictly diagonally dominant) εάν ισχύει

$$|a_{i,i}| > r_i(A), \forall i \in N. \quad (1.12)$$

Θεώρημα 1.2.9. (ΘΑΔΚ) Κάθε πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ ο οποίος είναι αυστηρά διαγώνια κυρίαρχος είναι και αντιστρέψιμος (/ομαλός /μη ιδιάζων).

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπον απαγωγή. Αν υποθέσουμε ότι ο A ικανοποιεί την (1.12) και είναι μη αντιστρέψιμος, τότε αυτό συνεπάγεται ότι $0 \in \sigma(A)$. Από τη σχέση (1.7) όμως γνωρίζουμε ότι θα υπάρχει κάποιος δίσκος Geršgorin που θα περιέχει την ιδιοτιμή $\lambda = 0$. Δηλαδή $\exists k \in N$ τέτοιο ώστε να ισχύει $|\lambda - a_{k,k}| = |a_{k,k}| \leq r_k(A)$. Αυτό βέβαια αντιτίθεται στην αρχική υπόθεση, καθώς καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως ισχύει ότι ο A είναι ένας αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας. ■

→ Για να δείξουμε την ισοδυναμία του ΘΑΔΚ με το θεώρημα Geršgorin αρκεί να δείξουμε ότι δεδομένου του ΘΑΔΚ ισχύει και το θεώρημα Geršgorin, δηλαδή την αντίστροφη διαδικασία από αυτήν που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη απόδειξη, όπου φάνηκε πως όταν ισχύει θεώρημα Geršgorin ισχύει και το ΘΑΔΚ.

Αν θεωρήσουμε λοιπόν ότι ισχύει το Θεώρημα 1.2.9, αλλά δεν ισχύει το Θεώρημα 1.2.2, τότε αυτό σημαίνει ότι για κάποιον πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n} \exists \lambda \in \sigma(A)$ τέτοια ώστε

$$|\lambda - a_{k,k}| > r_k(A), \forall k \in N. \quad (1.13)$$

Δηλαδή να μην ανήκει η ιδιοτιμή αυτή σε κανένα δίσκο Geršgorin. Θέτουμε τώρα τον πίνακα $B := \lambda I_n - A := [b_{i,j}]$. Ο πίνακας B εξ ορισμού φαίνεται ότι θα έχει ως ιδιοτιμή το μηδέν, επομένως κατατάσσεται αυτομάτως στους μη αντιστρέψιμους. Επιπρόσθετα, πάλι απ' τον ορισμό του B προκύπτει ότι $r_k(B) = r_k(A)$ και $|\beta_{k,k}| = |\lambda - a_{k,k}|$.

Συνεπώς η σχέση (1.13) μετασχηματίζεται σε $|\beta_{k,k}| > r_k(B) \forall k \in N$. Τότε όμως σύμφωνα με το Θεώρημα Αυστηρής Διαγώνιας Κυριαρχίας (1.2.9) συνεπάγεται ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Συμπέρασμα το οποίο βεβαίως αντικρούεται με την αρχική μας διαπίστωση για τον B. Άρα καταλήγουμε πάλι σε άτοπο, που σημαίνει ότι όταν ισχύει το ΘΑΔΚ ισχύει και το θεώρημα Geršgorin. Τα δύο αυτά σπουδαία θεωρήματα λοιπόν είναι όντως ισοδύναμα. Παρατηρείται λοιπόν η ισοδυναμία ενός θεωρήματος για αντιστρέψιμους πίνακες με ένα θεώρημα εγκλεισμού ιδιοτιμών.

Παρατήρηση 1.2.10. Άξιο αναφοράς είναι το γεγονός ότι ουκ ολίγοι σπουδαίοι μαθηματικοί συνεισέφεραν στη διατύπωση του ΘΑΔΚ έτσι όπως το ξέρουμε σήμερα, και μάλιστα κατά την πλειοψηφία τους ήταν προγενέστεροι του S. A. Geršgorin. Πιο συγκεκριμένα μια εύφημη μνεία επιβάλλεται να γίνει στους Lévy (1881), Desplanques (1888), Minkowski (1900) και Hadamard (1903).

Αξίζει επίσης να επισημανθεί ότι το θεώρημα Geršgorin διαδόθηκε ευρέως ταχύτατα, καθώς είχε την ιδιαιτερότητα να μπορεί να εφαρμοστεί πολύ εύκολα σε οποιονδήποτε τυχαίο τετραγωνικό πίνακα.

Η πρώτη επέκταση του αρχικού θεωρήματος Geršgorin συμπεριλήφθηκε και αυτή στο ομώνυμο σύγγραμμά του το 1931. Θεωρούμε αρχικά ένα διάνυσμα $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$, το οποίο έχει όλα τα στοιχεία του $x_i > 0 \forall i \in N$ και συμβολίζεται με $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. Βάσει αυτού του θετικού διανύσματος ορίζουμε τον πίνακα X, ο οποίος είναι ένας διαγώνιος πίνακας με $\text{diag}[\mathbf{x}] = \text{diag}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ και προφανώς είναι αντιστρέψιμος.

Αν τώρα δίνεται ένας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ πίνακας, τότε προκύπτει ο $X^{-1}AX = [a_{i,j} x_j / x_i]$. Μάλιστα ο $X^{-1}AX$ είναι όμοιος με τον A (καθώς από ορισμό ομοιότητας πινάκων $\exists P \in C^{n \times n}$ πίνακας τέτοιος ώστε $P X^{-1}AX P^{-1} = A$ (στην περίπτωση μας είναι αρκετά προφανές ότι $P = X$). Επιπλέον, $\sigma(X^{-1}AX) = \sigma(A)$.

Ακολουθώντας τα βήματα με τα οποία φτάσαμε στο θεώρημα Geršgorin, κατασκευάζουμε τελείως ανάλογα τα νέα “σταθμισμένα” αθροίσματα γραμμών, όπως και τους σταθμισμένους δίσκους Geršgorin ούτως ώστε να προκύψει το σταθμισμένο σύνολο Geršgorin.

Ορισμός 1.2.11. Θέτουμε λοιπόν ως

$$r_i^x(A) := r_i(X^{-1}AX) = \sum_{j \in N} (|a_{i,j}| x_j / x_i) \quad (i \in N, \mathbf{x} > \mathbf{0}) \quad (1.14)$$

το οποίο είναι το i-οστό **σταθμισμένο άθροισμα γραμμής** (i-th weighted row sum). Υπενθυμίζουμε ότι το $r_i^x(A)$ είναι το άθροισμα όλων των στοιχείων της i-οστής γραμμής του πίνακα $X^{-1}AX$ πλην του διαγωνίου και είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Ορισμός 1.2.12. Συνεχίζοντας, θέτουμε τον i -οστό **σταθμισμένο δίσκο Geršgorin** (weighted Geršgorin disk) και το **σταθμισμένο σύνολο Geršgorin** (weighted Geršgorin set), που εντελώς αντίστοιχα με τις σχέσεις (1.5) και (1.6) ορίζονται ως εξής:

$$\Gamma_i^x(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha_{i,i}| \leq r_i^x(A)\} \quad (i \in \mathbb{N}), \quad (1.15)$$

$$\text{και } \Gamma^x(A) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i^x(A). \quad (1.16)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 1.2.2 στον πίνακα $X^{-1}AX$ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\sigma(X^{-1}AX) = \sigma(A)$, διαπιστώνουμε το παρακάτω:

Πόρισμα 1.2.13. Για κάθε $A = [\alpha_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $\forall \mathbf{x} > 0$ στο \mathbb{R}^n ισχύει ότι

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma^x(A). \quad (1.17)$$

Παρατήρηση 1.2.14. Ασφαλώς και το θεώρημα Geršgorin μπορεί να εφαρμοστεί στον $X^{-1}AX$, με τον X να μην είναι απαραίτητα διαγώνιος, αλλά ένας οποιοσδήποτε αντιστρέψιμος πίνακας $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Η περίπτωση που εξετάσαμε όπου $X = \text{diag}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, με $x_i > 0 \forall i \in \mathbb{N}$ είναι μια ειδική περίπτωση. Ειδική λόγω του γεγονότος ότι για τον υπολογισμό των σταθμισμένων αθροισμάτων γραμμών $\{r_i^x(A)\}_{i \in \mathbb{N}}$ χρειαζόμαστε ελάχιστη παραπάνω υπολογιστική ισχύ σε σχέση με τον υπολογισμό των «κλαστικών» αθροισμάτων γραμμών $\{r_i(A)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Αντιθέτως, σε πυκνούς, με πολλά μη μηδενικά μη διαγώνια στοιχεία πίνακες, η χρειαζόμενη υπολογιστική δύναμη ανεβαίνει κατακόρυφα.

Παρατήρηση 1.2.15. Επιπροσθέτως, εφόσον ισχύει η (1.17) για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα X και το φάσμα του A είναι πάντα υποσύνολο του σταθμισμένου συνόλου Geršgorin που προκύπτει, γεννάται το ερώτημα κατά πόσον μπορεί να συρρικνωθεί το σύνολο στο οποίο περιέχονται όλες οι ιδιοτιμές του A .

Ορμώμενοι απ' αυτό το μείζον ζήτημα, οδηγούμαστε και σε ένα επιπρόσθετο ερώτημα, αν μπορούν να υπολογιστούν επακριβώς οι ιδιοτιμές του A με σχετικά μικρό υπολογιστικό κόστος. Σε αυτό το σημείο λοιπόν οφείλουμε να αναφερθούμε στην κανονική μορφή Jordan, μια ιδιαίτερη μορφή πίνακα που μας δίνει απευθείας τις ζητούμενες ιδιοτιμές. Για κάθε $A = [\alpha_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λοιπόν $\exists S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $S^{-1}AS =: J$, με τον J να είναι ένας διδιαγώνιος άνω τριγωνικός πίνακας, του οποίου τα διαγώνια στοιχεία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του A , ενώ τα στοιχεία της άνω διαγωνίου είναι μηδενικά ή μονάδες, υποδεικνύοντας την αλγεβρική πολλαπλότητα της εκάστοτε ιδιοτιμής.

Δηλαδή, η κανονική μορφή Jordan είναι η $J = \text{diag}[J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_k(\lambda_k)]$, όπου για όλα τα $1 \leq i \leq k$ ισχύει $J_i(\lambda_i) = |\lambda_i|$ εάν ο $J_i(\lambda_i)$ είναι 1×1 πίνακας. Διαφορετικά ο $J_i(\lambda_i)$ είναι ένας άνω διδιαγώνιος πίνακας, με την κάτω μορφή:

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Ωστόσο ο υπολογισμός του J είναι υπολογιστικά κοστοβόρος, οπότε οφείλουμε να στραφούμε σε άλλες μεθόδους εγκλεισμού ιδιοτιμών.

Η επόμενη επέκταση του θεωρήματος Geršgorin αφορά το πλήθος των ιδιοτιμών που περιέχονται σε μία συνεκτική συνιστώσα του $\Gamma^x(A)$. Πιο συγκεκριμένα, για πίνακες μεγέθους $n \geq 2$, έστω S ένα γνήσιο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots, n\}$, δηλαδή $\emptyset \neq S \subsetneq \mathbb{N}$, ενώ την πληθικότητά του (το πλήθος των στοιχείων του δηλαδή), τη συμβολίζουμε με $|S|$.

Το επόμενο βήμα είναι να ομαδοποιήσουμε τους δείκτες κάθε συνεκτικής συνιστώσας Geršgorin (σταθμισμένων) δίσκων ούτως ώστε να ανήκουν σε ένα σύνολο όπως το S . Τότε για κάθε $A = [\alpha_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $\forall \mathbf{x} > 0 \in \mathbb{R}^n$, δεδομένου του συνόλου φυσικών S έχουμε το εξής συνεκτικό σύνολο:

$$\Gamma_S^x(A) := \bigcup_{i \in S} \Gamma_i^x(A). \quad (1.18)$$

Το παραπάνω είναι μία ένωση σταθμισμένων δίσκων Geršgorin, εκ των οποίων κανείς δεν είναι ξένος με όλους τους υπόλοιπους. Σαν αποτέλεσμα επομένως προκύπτει ένα υποσύνολο του σταθμισμένου συνόλου Geršgorin που αποτελεί συνάμα και μία συνεκτική συνιστώσα του.

Αν με $N \setminus S$ συμβολίσουμε το συμπλήρωμα του συνόλου S σε σχέση με το N , τότε η σχέση

$$\Gamma_S^x(A) \cap \Gamma_{N \setminus S}^x(A) = \emptyset \quad (1.19)$$

μας υποδηλώνει ότι η ένωση των σταθμισμένων δίσκων Geršgorin με δείκτη που ανήκει στο S είναι ξένη με την ένωση όλων των υπολοίπων σταθμισμένων δίσκων Geršgorin. Η προηγούμενη σχέση μας οδηγεί και στο επόμενο κομβικό θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.16. (επέκταση θεωρήματος Geršgorin) Για κάθε $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$, και $\forall x > 0 \in R^n$ για το οποίο ισχύει η σχέση (1.19) για κάποιο σύνολο S γνήσιο υποσύνολο του N , τότε το $\Gamma_S^x(A)$ περιέχει ακριβώς $|S|$ το πλήθος ιδιοτιμές.

Απόδειξη: Θεωρούμε την κλάση πινάκων $A(t) := [a_{i,j}(t)] \in C^{n \times n}$ όπου τα διαγώνια στοιχεία διατηρούνται ως έχουν, δηλαδή $a_{i,i}(t) := a_{i,i}$, ενώ για όλα τα μη διαγώνια στοιχεία ($\forall i, j \in N$ με $i \neq j$) ισχύει $a_{i,j}(t) := t \cdot a_{i,j}$. Για την παράμετρο t ισχύει $0 \leq t \leq 1$.

Αφού λοιπόν έγιναν οι απαραίτητοι ορισμοί, παρατηρούμε ότι

$$r_i^x(A(t)) = \sum_{j \in N \setminus i} (|a_{i,j}(t)| x_j / x_i) = t \cdot \sum_{j \in N \setminus i} (|a_{i,j}| x_j / x_i) = t \cdot r_i^x(A) \leq r_i^x(A), \quad \forall t \in [0,1].$$

Επομένως, εφόσον $r_i^x(A(t)) \leq r_i^x(A)$, ισχύει ότι $\Gamma_i^x(A(t)) \subseteq \Gamma_i^x(A)$ για όλα τα $t \in [0,1]$, $\forall i \in N$. Μολαταύτα, με τον ισχυρισμό της (1.19) προκύπτει η πιο γενικευμένη σχέση

$$\Gamma_S^x(A(t)) \cap \Gamma_{N \setminus S}^x(A(t)) = \emptyset, \quad \forall t \in [0,1]. \quad (1.20)$$

Εφαρμόζοντας μάλιστα τη σχέση (1.17) του Πορίσματος 1.2.13 στην προκείμενη περίπτωση, προκύπτει ότι $\sigma(A(t)) \subseteq \Gamma^x(A(t))$, $\forall t \in [0,1]$.

Για $t=0$, ο πίνακας $A(0)$ είναι εμφανώς διαγώνιος, επομένως οι ιδιοτιμές του $A(0)$ είναι οι τιμές $\{a_{i,i}\}_{i=1}^n$.

Οπότε $\Gamma_S^x(A(0)) = \{a_{i,i} : i \in S\}$ και περιέχει ακριβώς $|S|$ το πλήθος ιδιοτιμές του $A(0)$. Καθώς η τιμή που λαμβάνει η παράμετρος t αλλάζει, αλλάζουν και τα στοιχεία του πίνακα $A(t)$, και εφόσον μεταβάλλεται ο ίδιος ο πίνακας φυσικό επακόλουθο είναι να μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο και οι ιδιοτιμές $\lambda_i(t)$.

Επειδή όμως η (1.20) ισχύει για όλα τα $t \in [0,1]$, είναι αδύνατο καθώς το t αυξάνεται με συνεχή τρόπο από το μηδέν στη μονάδα το σύνολο $\Gamma_S^x(A(t))$ να απολέσει ή να αποκτήσει κάποια επιπλέον ιδιοτιμή του $A(t)$. Συνεπώς, το $\Gamma_S^x(A)$, όταν το t θα ισούται ακριβώς με τη μονάδα, θα εξακολουθεί να περιέχει ακριβώς $|S|$ ιδιοτιμές του $A(1) = A$. ■

Πρόταση 1.2.17. Σε περίπτωση που η τομή της σχέσης (1.20) δεν είναι τελείως κενή, αλλά περιλαμβάνει κάποια m το πλήθος μεμονωμένα σημεία (με $m \geq 1$), τότε το Θεώρημα 1.2.16 εξακολουθεί να ισχύει, ακόμα και αν κάποια από αυτά τα μεμονωμένα σημεία είναι ιδιοτιμές του πίνακα A .

Εν ολίγοις, διαπιστώθηκε ότι καθώς η παράμετρος t της προηγούμενης απόδειξης «τρέχει» από το μηδέν στο ένα, το $\Gamma_S^x(A(t))$ τείνει στο $\Gamma_S^x(A)$ και θα συνεχίζει να περιέχει ακριβώς $|S|$ το πλήθος ιδιοτιμές, όσο και το πλήθος των δίσκων Geršgorin. Να τονίσουμε πως το S μπορεί να αντιστοιχεί σε μία, αλλά και περισσότερες ενδεχομένως συνεκτικές συνιστώσες του συνόλου Geršgorin.

Πιο συγκεκριμένα, εάν έχουμε την περίπτωση ενός μεμονωμένου δίσκου $\Gamma_i^x(A)$, ξένου δηλαδή με την ένωση όλων των υπολοίπων $n-1$ δίσκων Geršgorin, τότε $S = \{i\}$ και απ' το προηγούμενο θεώρημα ο δίσκος $\Gamma_i^x(A)$ θα περιέχει ακριβώς μία ιδιοτιμή του A . Για παράδειγμα, στον πίνακα

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1/2 & 4 & i/2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

της §1.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε με τη βοήθεια της Εικόνας 1.2 ότι κάθε Geršgorin δίσκος είναι αποκομμένος από την ένωση των υπολοίπων καθώς δεν τέμνεται με κανέναν άλλο δίσκο. Σαν συνέπεια λοιπόν του Θεωρήματος 1.2.16 γνωρίζουμε ότι η κάθε ιδιοτιμή βρίσκεται βεβαίως μέσα σε έναν τουλάχιστον δίσκο Geršgorin, αλλά επιπρόσθετα κάθε δίσκος Geršgorin περιέχει ακριβώς 1 ιδιοτιμή.

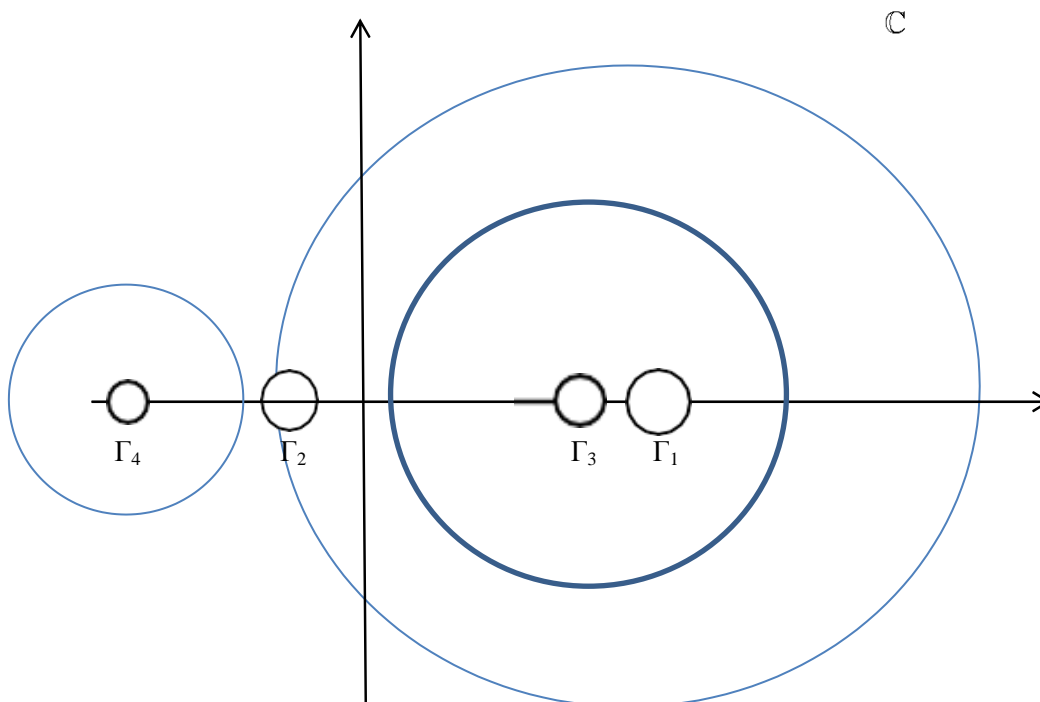
Δηλαδή $|\lambda_1 - 1| \leq 1$, $|\lambda_2 - 4| \leq 1$, $|\lambda_3 - 7| \leq 1$, όπου $\sigma(A_2) := \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

Βεβαίως τα όρια των δίσκων Geršgorin μπορούν να βελτιωθούν (να μικρύνουν οι δίσκοι επομένως) με τη χρήση των σταθμισμένων αθροισμάτων γραμμών. Η επιδίωξη όμως της σμίκρυνσης ενός συγκεκριμένου δίσκου σε υπέρμετρο βαθμό μέσω της μεθόδου σταθμισμένων συντελεστών ενδέχεται να μη φέρει πάντα τα επιθυμητά αποτελέσματα συναρτήσει της μεγέθυνσης των υπολοίπων δίσκων. Επομένως θεμιτό είναι να μην εφαρμόζεται κατά το δοκούν, αλλά έπειτα από ισχυρές ενδείξεις ότι υπάρχει δίσκος με πολύ μεγαλύτερη ακτίνα από τους υπόλοιπους (εναλλακτικά, αν υπάρχει κάποιο άθροισμα γραμμής μεγάλο σε σχέση με τα υπόλοιπα). Ακολουθεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε έναν τετραγωνικό 4×4 πίνακα, τον A_4 ,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0.2 & -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & -1 & -0.1 & 0.05 \\ -0.1 & -0.1 & 3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.05 & 0.1 & -3 \end{bmatrix}$$

Με σχετική ευκολία μπορούμε να σχεδιάσουμε τους δίσκους Geršgorin του παραπάνω πίνακα. Παρατηρούμε ότι όλοι οι δίσκοι είναι ξένοι μεταξύ τους και επομένως καθένας τους περιέχει μία ακριβώς ιδιοτιμή. Στην Εικόνα 1.4 που ακολουθεί σχεδιάζονται με μαύρο περίγραμμα και είναι οι Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 και Γ_4 .



Εικόνα 1.4: Δίσκοι Geršgorin για τον A_4 (μαύρο περίγραμμα) και τον KA_4K^{-1} (μπλε περίγραμμα).

Έστω ότι μετασχηματίζουμε τον A_4 στον όμοιό του $B=KA_4K^{-1}$, όπου ο $K \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ είναι ένας τετράγωνος πίνακας ίδιος με τον ταυτοτικό I_4 , εκτός από το στοιχείο $k_{2,2} = \kappa$ (κ θετικός πραγματικός). Αυτός ο μετασχηματισμός έχει ως αποτέλεσμα τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων της δεύτερης γραμμής του A_4 με κ και τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων της δεύτερης στήλης με $1/\kappa$ (παρατηρούμε ότι το στοιχείο $a_{2,2}$ παραμένει σταθερό). Αυτό έχει ως συνέπεια για κ μικρότερο της μονάδας ο δεύτερος δίσκος να μικραίνει και οι υπόλοιποι δίσκοι να μεγαλώνουν, ενώ για $\kappa > 1$ συμβαίνει το αντίστροφο (ισχύει βέβαια πως για $\kappa=1$ μένουν όλοι δίσκοι ως έχουν). Για να γίνει αυτό άμεσα αντιληπτό, επιλέχθηκε το κ να ισούται με $1/25$ και το αποτέλεσμα φαίνεται στους νέους δίσκους (μπλε περιγράμματος) στην Εικόνα 1.4. Ο μόνος δίσκος που έχει σμικρυνθεί είναι ο Γ_2^K μιας που αυτός ήταν ο στόχος μας, ενώ όλοι οι υπόλοιποι δίσκοι έχουν καταφανέστατα διογκωθεί. Η σμίκρυνση του δεύτερου δίσκου Geršgorin είναι τέτοια που δεν τον καθιστά πλέον ορατό στο γράφημα, ενώ είναι εμφανές ότι ο Γ_1^K που μεγεθύνθηκε περισσότερο από κάθε άλλον περιέχει πλέον τόσο τον Γ_3^K όσο και τον Γ_2^K . Επομένως ο Γ_1^K εμπεριέχει πλέον 3 ιδιοτιμές και εν γένει το νέο σύνολο Geršgorin Γ^K μας προσδιορίζει με λιγότερη σαφήνεια τις ιδιοτιμές του αρχικού πίνακα A .

Η ίδια ακριβώς διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελαττωθεί το μέγεθος οποιουδήποτε εκ των υπολοίπων δίσκων, χωρίς όμως να είναι αναγκαία για το συγκεκριμένο παράδειγμα καθώς όλοι οι αρχικοί δίσκοι Geršgorin είναι σχεδόν ισεμβαδικοί.

Η παραπάνω ιδέα επισημοποιείται στο επόμενο θεώρημα.

Πρόταση 1.2.18. Έστω πίνακας $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$ και υποθέτουμε ότι όλα τα μη διαγώνια στοιχεία είναι μικρότερα κατά απόλυτη τιμή από μία ποσότητα, έστω ε . Θα ισχύει δηλαδή $|a_{i,j}| < \varepsilon \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$ με $i \neq j$. Υποθέτουμε επίσης ότι για συγκεκριμένο ακέραιο $\mu \in \mathbb{N}$ το διαγώνιο στοιχείο $a_{\mu,\mu}$ είναι απομακρυσμένο τουλάχιστον κατά δ από όλα τα υπόλοιπα διαγώνια στοιχεία. Δηλαδή $|a_{\mu,\mu} - a_{i,i}| > \delta \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{\mu\}$. Τότε εάν ικανοποιείται η προϋπόθεση ότι $\varepsilon < \delta / (2n-1)$, θα υπάρχει μια ιδιοτιμή λ του πίνακα A τέτοια ώστε

$$|\lambda - a_{\mu,\mu}| < \frac{2(n-1)}{\delta} \varepsilon^2. \quad (1.21)$$

Απόδειξη: Θα εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό ομοιότητας $A \in \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow B = KAK^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, όπου $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ίδιος με το μοναδιαίο πίνακα εκτός από το διαγώνιο στοιχείο της γραμμής μ , το στοιχείο $k_{\mu,\mu} = \kappa > 0$. Αυτό βεβαίως έχει σαν αποτέλεσμα τον πολλαπλασιασμό των μη διαγώνιων στοιχείων της γραμμής μ του A με κ και τον πολλαπλασιασμό των μη διαγώνιων στοιχείων της στήλης μ με $1/\kappa$. Ο δίσκος Geršgorin της γραμμής μ έχει κέντρο $a_{\mu,\mu}$ και ακτίνα που δεν υπερβαίνει την ποσότητα $\kappa(n-1)\varepsilon$, ενώ κάθε άλλος δίσκος της γραμμής i , με $i \neq \mu$, έχει ακτίνα $a_{i,i}$ και ακτίνα που δεν ξεπερνάει την ποσότητα $(n-2)\varepsilon + \varepsilon/\kappa$.

Πλέον στοχεύουμε να μικρύνουμε το μέγεθος του δίσκου μ επιλέγοντας μια μικρή τιμή για το κ , ενώ τον κρατάμε ξένο από όλους τους άλλους δίσκους. Αυτό είναι εφικτό επιλέγοντας $\kappa = 2\varepsilon / \delta < 2/(2n-1)$. Τότε πράγματι, η ακτίνα του δίσκου δεν ξεπερνάει την ποσότητα $2(n-1)\varepsilon^2 / \delta$.

Αρκεί να ελέγξουμε πλέον αν η ικανοποιείται η αρχική συνθήκη του ξένου δίσκου μ από τους υπόλοιπους, καθώς ο αρχικός όρος τέθηκε ούτως ώστε να εξασφαλιστεί ότι ο δίσκος μ είναι ξένος με τους υπόλοιπους. Το άθροισμα γραμμής του δίσκου μ μαζί με το άθροισμα γραμμής οποιουδήποτε άλλου δίσκου παρατηρούμε ότι ικανοποιούν τη σχέση:

$$r_i + r_\mu \leq 2(n-1)\varepsilon^2 / \delta + (n-2)\varepsilon + \delta / 2 < \varepsilon + (n-2)\varepsilon + \delta / 2 < \delta, \quad (1.22)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε δύο φορές ο αρχικός όρος. Όσο λοιπόν τα κέντρα $a_{\mu,\mu}$ και $a_{i,i}$ ($\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{\mu\}$) απέχουν περισσότερο από δ , η σχέση (1.22) δείχνει ότι οι δίσκοι είναι ξένοι μεταξύ τους, που αποδεικνύει το ζητούμενο. ■

Πρόταση 1.2.19. Έστω ότι έχουμε έναν πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$, και ότι $\exists \mathbf{x} > \mathbf{0} \in R^n$ τέτοιο ώστε $r_1^x(A) > 0$ και ο πρώτος δίσκος Geršgorin $\Gamma_1^x(A)$ είναι αποκομμένος από τους υπόλοιπους $n-1$ δίσκους Geršgorin $\Gamma_j^x(A)$, $2 \leq j \leq n$. Τότε από το Θεώρημα 1.2.16 ισχύει ότι υπάρχει μοναδική ιδιοτιμή λ του πίνακα A εντός του δίσκου $\Gamma_1^x(A)$. Δηλαδή $|\lambda_1 - a_{1,1}| \leq r_1^x(A)$.

Υπάρχει όμως πάντα κάποιο $\mathbf{y} > \mathbf{0} \in R^n$ τέτοιο ώστε $r_1^y(A) > r_1^x(A) > 0$ και ταυτόχρονα ο δίσκος $\Gamma_1^x(A)$ να παραμένει αποκομμένος από τους υπόλοιπους $n-1$ δίσκους Geršgorin $\Gamma_j^y(A)$, $2 \leq j \leq n$. Κατά τον Ορισμό 1.2.11 μια μεγαλύτερη ακτίνα σταθμισμένου δίσκου Geršgorin μπορεί να επιτευχθεί απλά μειώνοντας την πρώτη συνιστώσα του διανύσματος \mathbf{x} . Ως εκ τούτου οι συντελεστές x_j / x_i της i -οστής γραμμής μεγαλώνουν (κατ' απόλυτη τιμή) και αυτό με τη σειρά του δίνει μια μεγαλύτερη ακτίνα στον i -οστό σταθμισμένο δίσκο Geršgorin.

Πρόταση 1.2.20. Έστω ότι έχουμε έναν πραγματικό πίνακα A , δηλαδή $A = [a_{i,j}] \in R^{n \times n}$, με την ιδιότητα $|a_{i,i} + a_{j,j}| \geq r_i^x(A) + r_j^x(A) \quad \forall i \neq j \in N$. Τότε όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απόδειξη: Καθώς όλα τα στοιχεία του πίνακα A είναι πραγματικοί αριθμοί, επομένως και τα διαγώνια στοιχεία του, προκύπτει ότι όλοι οι σχηματιζόμενοι δίσκοι Geršgorin έχουν το κέντρο τους πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι κάθε μιγαδική ιδιοτιμή σε πραγματικό πίνακα οφείλει να συνυπάρχει μαζί με τη συζυγή της. Από την υπόθεση της πρότασης γνωρίζουμε ότι οι δίσκοι Geršgorin είτε είναι ξένοι μεταξύ τους, είτε ανά δύο εφάπτονται. Ακόμα και αν ισχύει η δεύτερη περίπτωση, λόγω της Πρότασης 1.2.17, το Θεώρημα 1.2.16 δεν χάνει την καθολική ισχύ του, με αποτέλεσμα να μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κάθε δίσκος Geršgorin περιέχει ακριβώς μία ιδιοτιμή.

Αν όμως εμφανιζόντουσαν μιγαδικές τιμές ανά ζεύγη, τότε αυτές θα ανήκαν υποχρεωτικά στον ίδιο δίσκο Geršgorin, με αποτέλεσμα ο δίσκος αυτός να περιέχει δύο ιδιοτιμές. Άτοπο. Άρα όλες οι ιδιοτιμές αναμένεται να είναι πραγματικές. ■

Κεφάλαιο 2

Επεκτάσεις του Θεωρήματος Geršgorin

2.1 Επεκτάσεις του Θεωρήματος Geršgorin βάσει της Θεωρίας Γραφημάτων

Καταρχάς, πριν δούμε πως η θεωρία των γραφημάτων μπορεί έμπρακτα να μας διευκολύνει στο σχεδιασμό των δίσκων Geršgorin, θεωρείται απαραίτητο να επαναλάβουμε ότι η σχέση (1.12) είναι η συνθήκη που μας δίνει έναν αυστηρά διαγώνια κυρίαρχο πίνακα $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, που συνεπάγεται ότι ο πίνακάς μας είναι αντιστρέψιμος.

Τίθεται λοιπόν τώρα το ερώτημα αν για $n \geq 2$ μπορεί μία από αυτές τις ανισότητες να απλουστευτεί και να μετατραπεί σε ισότητα έτσι ώστε να ισχύσει επί παραδείγματι $|a_{i,i}| > r_i(A)$, $\forall 1 \leq i \leq n-1$ και $|a_{n,n}| = r_n(A)$, δίχως να επηρεάζεται η ομαλότητα του πίνακα. Ή για να θέσουμε το ερώτημα διαφορετικά, διερωτόμαστε αν μπορεί να υπάρξει αυστηρή διαγώνια υπεροχή, με $n-1$ γραμμές να διέπονται από αυστηρά διαγώνια υπεροχή και μία μόλις γραμμή να υφίσταται απλά διαγώνια υπεροχή.

Υπάρχουν κάποιοι πίνακες που μας επιτρέπουν να θεωρήσουμε την παραπάνω εικασία ορθή (π.χ. πίνακας A_5), αλλά και άλλοι πίνακες που διαψεύδουν την ορθότητα του παραπάνω ισχυρισμού (π.χ. πίνακας A_6).

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο A_6 είναι εμφανές ότι είναι μη αντιστρέψιμος/ιδιάζων πίνακας, ενώ αντιθέτως ο A_5 είναι αντιστρέψιμος. Και οι δύο πίνακες ικανοποιούν βεβαίως τον προηγούμενο ισχυρισμό.

Το αντιφατικό αυτό συμπέρασμα αποτελεί μία ακόμη αιτία για να ερευνήσουμε αν σχετίζεται πράγματι η θεωρία γραφημάτων με τον απώτερο στόχο του υπολοίπου κεφαλαίου (και εν γένει της διπλωματικής εργασίας) που δεν είναι άλλος από τη βελτιστοποίηση των ορίων των δίσκων εντός των οποίων θέλουμε να περιέχονται όλες οι ιδιοτιμές ενός τυχαίου πίνακα. Πρώτα όμως οφείλουμε να εισάγουμε τον αναγνώστη στην έννοια της υποβιβασιμότητας.

Απαραίτητο εργαλείο είναι ο πίνακας μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **πίνακας μετάθεσης** αν έχει ακριβώς ένα στοιχείο σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη ίσο με τη μονάδα και όλα τα υπόλοιπα ίσα με το μηδέν. Για παράδειγμα ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ένας 3×3 πίνακας μετάθεσης. Προφανώς ένας πίνακας μετάθεσης προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα αντίστοιχου μεγέθους, με μεταθέσεις γραμμών ή στηλών.

Ορισμός 2.1.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$ ονομάζεται **υποβιβάσιμος** (reducible) αν υπάρχει πίνακας μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και ένας θετικός ακέραιος $1 \leq r \leq n$, τέτοιοι έτσι ώστε να ισχύει

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Στον προηγούμενο παρατηρούμε την εμφάνιση ενός μηδενικού πίνακα $0 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ και δύο τετραγωνικών πινάκων, του $A_{1,1} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ και $A_{2,2} \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (n-r)}$. Για τον άνω δεξιό πίνακα ισχύει βεβαίως $A_{1,2} \in \mathbb{C}^{r \times (n-r)}$. Εάν δεν υπάρχει τέτοια μετάθεση, δηλαδή δεν υπάρχει μεταθετικός πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση (2.1), τότε ο A είναι μη υποβιβάσιμος. Εάν $A \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ τότε είναι υποβιβάσιμος μόνο αν $a_{1,1} = 0$ και μη υποβιβάσιμος αν το $a_{1,1}$ παίρνει οποιαδήποτε άλλη (μη μηδενική) τιμή.

Παρατήρηση 2.1.2. Σημειώνουμε ότι οι πίνακες $A_{1,1}$, $A_{1,2}$ και $A_{2,2}$ δεν είναι απαραίτητο να έχουν όλα τα στοιχεία τους μη μηδενικά. Παρατηρούμε ότι αν ο A είναι υποβιβάσιμος τότε πρέπει να έχει τουλάχιστον $n-1$ μηδενικά στοιχεία. Είναι επίσης προφανές ότι όταν ένας πίνακας είναι υποβιβάσιμος τότε και ο ανάστροφός του θα είναι υποβιβάσιμος.

Είναι θεμιτό να διερευνήσουμε περαιτέρω τον τύπο (2.1) που μας δίνει έναν υποβιβάσιμο πίνακα. Ως εκ τούτου, αν συνεχίσουμε να εφαρμόζουμε αναδρομικά τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω, στους πίνακες $A_{1,1}$ και $A_{2,2}$ πλέον, αλλά και στους «απογόνους» τους αργότερα, τότε τελικώς θα αποκομίσουμε έναν πίνακα μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έναν θετικό ακέραιο $1 \leq m \leq n$, έτσι ώστε να ισχύει

$$PAP^T = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots & R_{1,m} \\ 0 & R_{2,2} & \cdots & R_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{m,m} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Ο παραπάνω πίνακας ονομάζεται κανονική μορφή Frobenius, όπου κάθε πίνακας $R_{j,j}$, $1 \leq j \leq m$ είναι είτε

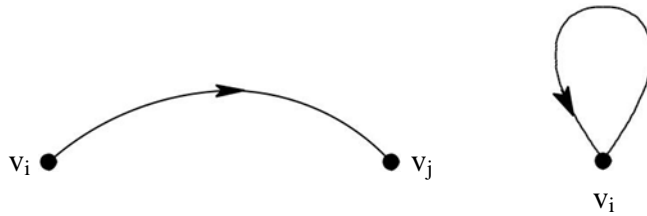
$$\begin{cases} \text{i) ένας } p_j \times p_j \text{ τετραγωνικός μη υποβιβάσιμος πίνακας με } p_j \geq 2, \\ \text{ii) ένας } 1 \times 1 \text{ πίνακας με } R_{j,j} = [\alpha_{\kappa,\kappa}] \text{ για κάποιο } \kappa \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Αυτό σημαίνει πως στη μορφή αυτή έχουμε εν γένει m το πλήθος επιμέρους μη υποβιβάσιμους υποπίνακες πάνω στη διαγώνιο του PAP^T , ενώ κάποιοι εξ'αυτών ενδέχεται να είναι πίνακες-στοιχεία, στοιχεία μάλιστα που εντοπίζονται και στη διαγώνιο του αρχικού πίνακα A .

Παρατήρηση 2.1.3. Η κανονική μορφή Frobenius δεν είναι απαραίτητα μοναδική για τον εκάστοτε πίνακα A . Είναι όμως μοναδική ως προς έναν συγκεκριμένο πίνακα μετάθεσης P και βεβαίως για οποιονδήποτε P είναι δεδομένο ότι ο κάθε $R_{j,j}$, $1 \leq j \leq m$ δεν μπορεί να υποβιβαστεί περαιτέρω.

Παρατηρούμε από τη μορφή της δομής του πίνακα στη σχέση (2.1) ότι για $n \geq 2$ τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A δεν επηρεάζουν την ενδεχόμενη υποβιβασιμότητα του. Επιπλέον, για $n \geq 2$ αν προβούμε σε αντικατάσταση ενός αυθαίρετου μη μηδενικού μη διαγώνιου στοιχείου του πίνακα $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με κάποιον άλλο τυχαίο μιγαδικό αριθμό πλην του μηδενός, τότε πάλι δεν αλλοιώνεται η ιδιότητα της υποβιβασιμότητας του πίνακα. Οι τελευταίες παρατηρήσεις ενισχύουν την αρχική εικασία ότι η υποβιβασιμότητα, ή μη, ενός πίνακα, μπορεί να μελετηθεί και υπό το γραφοθεωρητικό πρίσμα.

Δοθέντος ενός πίνακα $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ θεωρούμε κάποια σημεία (κόμβους) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, όλα διαφορετικά μεταξύ τους, τα οποία και ονομάζουμε **κορυφές**. Για κάθε μη μηδενικό στοιχείο $a_{i,j}$ συνδέουμε την κορυφή v_i με την κορυφή v_j μέσω μίας **κατευθυνόμενης ακμής** $\overrightarrow{v_i v_j}$, η οποία θα εκκινεί από τον αρχικό κόμβο v_i και θα τερματίζει v_j , όπως φαίνεται και στο Γράφημα 2.1. Να επισημανθεί ότι εάν υπάρχει κάποιο διαγώνιο στοιχείο $a_{i,i} \neq 0$, τότε σχηματίζεται ένας βρόχος στην i -οστή κορυφή όπως φαίνεται στη δεξιά ακμή του Γραφήματος 2.1.



Γράφημα 2.1: Παράδειγμα κατευθυνόμενης ακμής (αριστερά) και βρόχου (δεξιά).

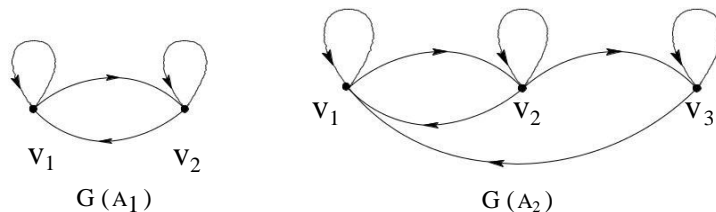
Ορισμός 2.1.4. Το σύνολο όλων των κατευθυνόμενων ακμών ενός πίνακα A ορίζει το **κατευθυνόμενο γράφημα** (directed graph) $G(A)$.

Ορίζουμε οσαύτως και το **κατευθυνόμενο μονοπάτι**, το οποίο αποτελείται από συνεχόμενες κατευθυνόμενες ακμές $\overrightarrow{v_{i_0}v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_1}v_{i_2}}, \overrightarrow{v_{i_{r-1}}v_{i_r}}$, ανήκει στο $G(A)$ καθώς αποτελεί κομμάτι του, και συνδέει την αρχική κορυφή (εδώ v_{i_0}) με την τελική (εδώ v_{i_r}).

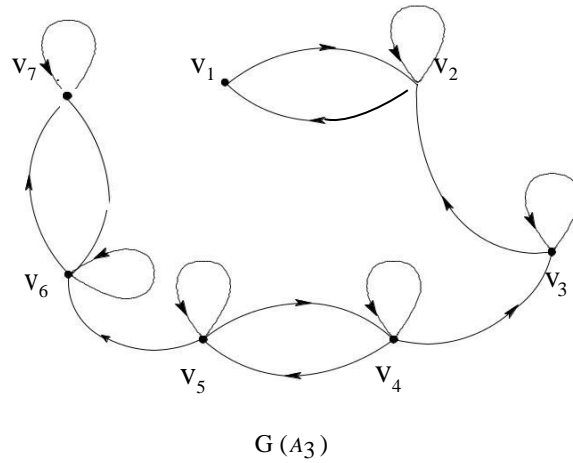
Παρατήρηση 2.1.5. Να επισημανθεί ότι αν υπάρχει το κατευθυνόμενο μονοπάτι από την κορυφή v_{i_0} στην κορυφή v_{i_r} , δε συμβαίνει ταυτοχρόνως και το αντίστροφο. Δεν υπάρχει απαραίτητα δηλαδή το μονοπάτι από την κορυφή v_{i_r} στην κορυφή v_{i_0} . Στην πρώτη πάντως περίπτωση, η ύπαρξη του κατευθυνόμενου μονοπατιού συνεπάγεται ότι $\prod_{k=0}^{r-1} \alpha_{i_k, i_{k+1}} \neq 0$.

Ορισμός 2.1.6. Ο κατευθυνόμενος γράφος $G(A)$ ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in C^{n \times n}$ είναι **ισχυρά συνεκτικός** εάν για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v , υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την κορυφή u στην κορυφή v καθώς και ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την κορυφή v στην κορυφή u .

Ως παραδείγματα, θεωρώντας τους πίνακες A_1, A_2 και A_3 της προηγούμενης ενότητας, λαμβάνουμε τρία κατευθυνόμενα γραφήματα (αυτά που παρουσιάζονται στο Γράφημα 2.2 και Γράφημα 2.3). Παρατηρούμε ότι το $G(A_1)$ όπως και το $G(A_2)$ είναι ισχυρά συνεκτικά γραφήματα, ενώ το $G(A_3)$ είναι προφανώς μη συνεκτικό γράφημα καθώς αποτελείται από τέσσερις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες. Αυτές είναι οι $\{v_1, v_2\}, \{v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}$. Δεν υπάρχει δηλαδή κάποιο κατευθυνόμενο μονοπάτι από την v_2 στην v_3 , από την v_3 στην v_5 κ.ο.κ.



Γράφημα 2.2: Κατευθυνόμενα γραφήματα $G(A_1)$ και $G(A_2)$ (ισχυρά συνεκτικά) για τους πίνακες A_1 και A_2 αντίστοιχα.



Γράφημα 2.3: Κατευθυνόμενο γράφημα $G(A_3)$ (μη ισχυρά συνεκτικό) για τον πίνακα A_3 .

Εύκολα παρατηρούμε ότι αν για κάποιον $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ το κατευθυνόμενο γράφημά του είναι **ισχυρά συνεκτικό**, τότε εξαιρουμένων των διαγώνιων στοιχείων, σε όλες τις γραμμές του πίνακα υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο μη μηδενικό. Το ίδιο συμβαίνει βέβαια και με τα μη διαγώνια στοιχεία κάθε στήλης. Επίσης, όταν το $G(A)$ είναι ισχυρά συνεκτικό, τότε το κατευθυνόμενο γράφημα $G(PAP^T)$ είναι επίσης ισχυρά συνεκτικό για οποιονδήποτε $n \times n$ πίνακα μετάθεσης P , καθώς το μόνο που αλλάζει είναι η αρίθμηση των κορυφών του αρχικού γράφου. Ακολουθεί το θεώρημα το οποίο εδραιώνει τη θεωρία γραφημάτων ως αναπόσπαστο κομμάτι της μελέτης των (μη) υποβιβάσιμων πινάκων.

Θεώρημα 2.1.7. Κάθε $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν το κατευθυνόμενο γράφημα $G(A)$ που επάγεται από τον πίνακα είναι ισχυρά συνεκτικό.

Απόδειξη: Θα κατασκευάσουμε την απόδειξη εν μέρει επαγωγικά, δείχνοντας ότι ένας πίνακας A είναι υποβιβάσιμος αν και μόνο αν το κατευθυνόμενο γράφημα του δεν είναι ισχυρά συνεκτικό (οπότε αυτομάτως θα προκύψει και το αντίστροφο συμπέρασμα που είναι το ζητούμενο) και ξεκινώντας για $n=2$ (καθώς για $n=1$ γνωρίζουμε ότι η υποβιβασσιμότητα έγκειται στο αν το μοναδικό στοιχείο εν προκειμένη περιπτώσει είναι μηδέν ή όχι).

- Για $n=2$ λοιπόν, ένα μη ισχυρά συνεκτικό (κατευθυνόμενο) γράφημα προκύπτει όταν οι δύο κορυφές του δεν συνδέονται αμοιβαία, το οποίο «μεταφράζεται» στον πίνακα A πως είτε η τιμή του $a_{1,2}$ ή αυτή του $a_{2,1}$ θα είναι μηδενική. Ως εκ τούτου θα προκύπτει ένας πίνακας με μία από τις δύο ακόλουθες μορφές: $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$ (η περίπτωση που δεν υπάρχει ούτε η ακμή $\overrightarrow{v_1 v_2}$, ούτε η $\overrightarrow{v_2 v_1}$, είναι η περίπτωση ενός μη συνεκτικού γραφήματος και μπορεί να υπαχθεί σε οποιαδήποτε από τις δύο προηγούμενες μορφές).

Και οι δύο πάντως πίνακες είναι εξ ορισμού υποβιβάσιμοι (ο δεύτερος έπειτα από μία πολύ απλή μετάθεση γραμμών και στηλών). Γενικά θα μελετάται προς συντόμηση της απόδειξης μόνο η πρώτη περίπτωση όπου ο μηδενικός υποπίνακας (διάνυσμα ενίοτε) θα εντοπίζεται στο κάτω αριστερό τμήμα του πίνακα (είναι εξάλλου ευνόητο ότι όλοι οι πίνακες που ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία μπορούν με μια απλή αναστροφή – αντιστροφή της φοράς των κατευθυνόμενων ακμών όσον αφορά το γράφο – να αναχθούν σε πίνακες της πρώτης κατηγορίας) και γενικά οι περιπτώσεις όπου εμφανίζεται μη ισχυρά συνεκτικό γράφημα, καθώς η περίπτωση του μη συνεκτικού γραφήματος καλύπτεται αυτομάτως. Τέλος, να επισημάνουμε ότι αν το μηδενικό στον πίνακα μας εξαφανιστεί, τότε το γράφημα γίνεται ισχυρά συνεκτικό (για $n=2$ γίνεται και πλήρες μάλιστα) και βεβαίως ο πίνακας γίνεται πλέον μη υποβιβάσιμος.

- Για $n=3$ ένα μη ισχυρά συνεκτικό γράφημα προκύπτει όταν σε μία κορυφή δεν υπάρχουν είτε εισερχόμενες, είτε εξερχόμενες κατευθυνόμενες ακμές. Πιο παραστατικά, μετά από κατάλληλη ονομασία των κορυφών, ο πίνακας που θα προκύψει θα έχει μία από τις επόμενες μορφές:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \text{το κατευθυνόμενο γράφημά του παρουσιάζει κορυφή που δεν έχει καμία εισερχόμενη ακμή.}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \rightarrow \text{το κατευθυνόμενο γράφημά του παρουσιάζει κορυφή που δεν έχει καμία εξερχόμενη ακμή.}$$

Προκύπτει πάλι ότι αν μετατραπεί κάποιο από τα μηδενικά σε κάποιο μιγαδικό αριθμό διάφορο του μηδενός, τότε το γράφημα αποκτάει ισχυρή συνεκτικότητα και επιπλέον ο πίνακας γίνεται μη υποβιβάσιμος.

- Για $n=4$ ένα μη ισχυρά συνεκτικό γράφημα προκύπτει είτε όταν σε μία κορυφή δεν υπάρχουν εισερχόμενες ή εξερχόμενες κατευθυνόμενες ακμές, είτε όταν υπάρχει ένα σεν κορυφών (δυάδα κορυφών εδώ και $n \div 2$ γενικά) από το οποίο ή να μην εξέρχονται ακμές ή να μην εισέρχονται. Μετά από την κατάλληλη αρίθμηση των κορυφών, εφόσον το κατευθυνόμενο γράφημα είναι μη ισχυρά συνεκτικό, θα λάβουμε έναν από τους εξής πίνακες:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \text{το κατευθυνόμενο γράφημά του παρουσιάζει κορυφή που δεν έχει καμία εισερχόμενη ακμή.}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \text{το γράφημά του παρουσιάζει σεν κορυφών που δεν έχει καμία εισερχόμενη/εξερχόμενη ακμή.}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \rightarrow \text{το κατευθυνόμενο γράφημά του παρουσιάζει κορυφή που δεν έχει καμία εξερχόμενη ακμή.}$$

Πάλι προκύπτει ότι αν κάποιο μηδενικό εξαλειφθεί από τον πίνακα τότε το γράφημα αποκτάει ισχυρή συνεκτικότητα και επιπλέον ο πίνακας γίνεται μη υποβιβάσιμος.

- Γενικά ισχύει ότι για οποιονδήποτε πίνακα διάστασης $n \geq 5$ ένα μη ισχυρά συνεκτικό γράφημα προκύπτει είτε όταν μία κορυφή δεν έχει καμία εισερχόμενη ή εξερχόμενη κατευθυνόμενη ακμή, είτε όταν υπάρχει ένα σεν κορυφών με πληθικότητα $2, 3, \dots, n \div 2$ από το οποίο ή να μην εξέρχονται ακμές ή να μην εισέρχονται. Ισχύει βέβαια ότι αν κάποιο μηδενικό εξαλειφθεί από τον πίνακα τότε το γράφημα αποκτάει ισχυρή συνεκτικότητα και επιπλέον ο πίνακας γίνεται μη υποβιβάσιμος, το οποίο το δείξαμε συνολικά για πίνακες οποιουδήποτε μεγέθους n που ήταν και το ζητούμενο.

→ Όσον αφορά το έτερο σκέλος της ισοδυναμίας, ισχύει ότι όποιο και να είναι το μέγεθος του $A_{1,1}$ τετραγωνικού πίνακα της σχέσης (2.1), θα σχηματίζεται εξ ορισμού ο μηδενικός πίνακας του ενδεικτικού πίνακα που ακολουθεί, και έτσι σε κάθε περίπτωση, από τα προηγούμενα βήματα της απόδειξης γνωρίζουμε ότι προκύπτει ένα κατευθυνόμενο γράφημα που δεν είναι ισχυρά συνεκτικό.

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline 0 & A_{2,2} \end{array} \right) \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση 2.1.8. Ο λόγος που επιλέγεται η τιμή $n \div 2$ για τον εκάστοτε πίνακα μεγέθους n για να χαρακτηρίσει το μέγιστο σύνολο κορυφών που καθιστά τον κατευθυνόμενο του γράφο μη συνεκτικό, οφείλεται στο τρόπο που θα εκλάβουμε τις ακμές στο σύνολο αυτό. Για παράδειγμα, αν $n=5$, προκύπτει $5 \div 2 = 2$. Εκ πρώτης ανάγνωσης να φαίνεται λανθασμένος αυτός ο περιορισμός διότι μπορεί βεβαίως να υπάρξει σύνολο τριών κορυφών χωρίς καμία εξερχόμενη ακμή προς τις υπόλοιπες κορυφές του γράφου. Η κατάσταση αυτή όμως μπορεί εναλλακτικά να περιγραφεί και ως η ύπαρξη ενός συνόλου δύο κορυφών που δεν έχουν καμία εισερχόμενη ακμή. Ο συλλογισμός αυτός ισχύει και τούμπαλιν. Επομένως καλύπτεται από την προηγούμενη απόδειξη κάθε περίπτωση που μπορεί να μας οδηγήσει σε υποβιβασίμο πίνακα.

Πόρισμα 2.1.9. Από την προηγούμενη αποδεικτική διαδικασία προκύπτει και μια πολύ ενδιαφέρουσα μέθοδος εύρεσης μη υποβιβασίμων πινάκων, άμεση και αποτελεσματική. Αρκεί μόνο να υπάρχει κάποιο $i \in N$, τέτοιο ώστε η i -οστή γραμμή και η i -οστή στήλη του πίνακα να μην περιέχουν κανένα μηδενικό στοιχείο, πλην ίσως του i -οστού διαγωνίου. Τότε στο αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα γνωρίζουμε ότι θα υπάρχει μία κορυφή η οποία θα έχει εισερχόμενες και εξερχόμενες ακμές, από και προς αντίστοιχα όλες τις άλλες κορυφές. Επομένως ακόμα και αν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα είναι μηδενικά, να μεν οι υπόλοιπες $n-1$ το πλήθος κορυφές δε θα συνδέονται μεταξύ τους, αλλά θα υπάρχει η κορυφή v_i ως συνδετικός κρίκος, ούτως ώστε από οποιαδήποτε κορυφή και αν ξεκινήσουμε να μπορούμε να μεταβούμε σε όλες τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος και να επιστρέψουμε τελικά στην αρχική. Να τονιστεί ότι στον κύκλο αυτόν θα διέλθουμε $n-1$ φορές από την κορυφή v_i , αλλά αυτό δεν αντικρούεται με τον ορισμό του ισχυρά συνεκτικού κατευθυνόμενου γραφήματος. Τουναντίον μάλιστα, αυτή η διαδικασία μπορεί κάλλιστα να χαρακτηριστεί και ως ένας εναλλακτικός ορισμός του κατευθυνόμενου γραφήματος. Ο πίνακας που περιγράφηκε προηγουμένως έχει την κάτωθι μορφή:

$\mathbf{0}$	*	$\mathbf{0}$	
	⋮		
*	⋯	*	$\alpha_{i,i}$
	*	*	⋯
$\mathbf{0}$	⋮	$\mathbf{0}$	*
	*		

Επισημαίνουμε ότι το διάγωνιο στοιχείο $\alpha_{i,i}$ στο κέντρο του «σταυρού» μπορεί να είναι και αυτό μηδενικό, χωρίς όμως να επηρεάζεται η καθολική ισχύς της μεθόδου. Διαγώνια προς όλες τις κατευθύνσεις από το κέντρο του σταυρού βρίσκονται μηδενικοί υποπίνακες οποιωνδήποτε εν γένει διαστάσεων. Ενδέχεται βέβαια να ισχύει είτε $i=1$, είτε $i=n$. Στις περιπτώσεις αυτές σχηματίζεται ένας μηδενικός υποπίνακας, τετραγωνικός, μεγέθους $n-1$.

→ Να σημειωθεί ότι το αντίστροφο του πορίσματος δεν ισχύει.

Πρόταση 2.1.10. Έστω πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ με $n \geq 2$. Θεωρούμε επίσης σύνολο $N := \{1, 2, \dots, n\}$. Ισχύει τότε ότι ο A είναι μη υποβιβασίμος αν και μόνο αν για κάθε δύο μη κενά, ξένα και συμπληρωματικά ως προς το N υποσύνολα του N , έστω S και T , ισχύει ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $a_{i,j} \neq 0$, με $i \in S$ και $j \in T$.

Απόδειξη: Καταρχάς εφόσον $S \cup T = N$, κατανοούμε ότι στο κατευθυνόμενο γράφημα του εξεταζόμενου πίνακα έχουμε δύο ξένα σύνολα κορυφών των οποίων η ένωση απαρτίζει όλες τις κορυφές του γράφου. Από τη στιγμή που υπάρχει κάποιο στοιχείο $a_{i,j} \neq 0$, με $i \in S$ και $j \in T$ (και αντιστρόφως θέτοντας το $S \leftarrow T$ και ως T το προηγούμενο S), προκύπτει ότι τα οποιαδήποτε συμπληρωματικά σύνολα S και T συνδέονται με κατευθυνόμενες ακμές αμοιβαία και ως εκ τούτου το εκάστοτε γράφημα είναι πάντοτε ισχυρά συνεκτικό και συνεπώς από το Θεώρημα 2.1.6 ο πίνακας είναι μη υποβιβασίμος.

Αν τώρα αντιστρόφως δεν υπήρχε μια τέτοια ακμή, τότε τα σύνολα S και T δε θα ήταν ισχυρά συνδεδεμένα (οποιαδήποτε και αν ήταν τα σετ κορυφών S και T , φαίνεται ο λόγος άλλωστε και από την αναλυτική απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.7), το οποίο συνεπάγεται ότι ο πίνακας θα ήταν υποβιβασίμος. Συμπερασματικά λοιπόν ισχύει ότι ο A είναι μη υποβιβασίμος αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο στοιχείο $a_{i,j} \neq 0$ για τα εν λόγω σύνολα κορυφών S και T της πρότασης. ■

Πλέον μπορούμε να «εξελιξουμε» τον Ορισμό 1.2.8 της αυστηρής διαγώνιας κυριαρχίας, απαντώντας συνάμα και στο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή της §1.3, δηλαδή αν στη σχέση (1.12) χρειάζεται να ισχύει πάντα η αυστηρή ανισότητα.

Ορισμός 2.1.11. Ένας πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ ονομάζεται **μη υποβιβάσιμα διαγώνια κυρίαρχος** (ir-reducibly diagonally dominant) εάν ικανοποιούνται τρεις προϋποθέσεις.

- i. Ο πίνακας να είναι μη υποβιβάσιμος.
- ii. Ο πίνακας να είναι διαγώνια κυρίαρχος (δηλαδή $|a_{i,i}| \geq r_i(A), \forall i \in N$).
- iii. Να ισχύει η αυστηρή ανισότητα $|a_{i,i}| > r_i(A)$ για τουλάχιστον ένα $i \in N$.

Παρατήρηση 2.1.12. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι κάποιος πίνακας ενδέχεται να είναι τόσο διαγώνια κυρίαρχος, όσο και μη υποβιβάσιμος, αλλά να μην είναι μη υποβιβάσιμα διαγώνια κυρίαρχος.

Θεώρημα 2.1.13. (Θεώρημα Taussky) Κάθε πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ που είναι μη υποβιβάσιμα διαγώνια κυρίαρχος, είναι και αντιστρέψιμος.

Απόδειξη: Η περίπτωση πίνακα μεγέθους $n = 1$ είναι απλοϊκή και προκύπτει εύκολα βάσει του ορισμού του υποβιβάσιμου πίνακα. Θα αποδείξουμε επομένως το θεώρημα όταν $n \geq 2$. Έστω λοιπόν ότι ο πίνακας A που είναι μη υποβιβάσιμα διαγώνια κυρίαρχος, είναι και μη αντιστρέψιμος. Τότε $0 \in \sigma(A)$, και θα $\exists \mathbf{0} \neq \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in C^n$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τέτοιο ώστε $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Επειδή η τελευταία εξίσωση είναι βεβαίως ομογενής, έχουμε τη δυνατότητα να κανονικοποιήσουμε το διάνυσμα \mathbf{x} , έτσι ώστε να ισχύει $\max\{|x_i| : i \in N\} = 1$.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο $S := \{i \in N : |x_i| = 1\}$, το οποίο βεβαίως είναι εξ ορισμού ένα μη κενό υποσύνολο του N . Η ομογενής σχέση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ συνεπάγεται ότι $\sum_{j \in N} a_{\kappa,j} x_j = 0 \quad \forall \kappa \in N$, ή ισοδύναμα,

$$-a_{\kappa,\kappa} x_\kappa = \sum_{j \in N \setminus \{\kappa\}} a_{\kappa,j} x_j = 0. \quad \text{Έστω ένα } i \in S. \text{ Επαναλαμβάνοντας για } \kappa = i \text{ την τελευταία εξίσωση,}$$

παίρνοντας τις απόλυτες τιμές και εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα προκύπτει:

$$|a_{i,i}| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}| = r_i(A) \quad (i \in S). \quad (2.4)$$

Από υπόθεση (ii) του ορισμού των μη υποβιβάσιμα διαγώνια κυρίαρχων πινάκων και τη σχέση (2.4) προκύπτει προς διευκόλυνσή μας η ισότητα

$$|a_{i,i}| = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}| |x_j| = r_i(A) \quad (i \in S). \quad (2.5)$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο, επαληθεύσαμε ότι \exists τουλάχιστον ένα $i \in S$, έτσι ώστε να έχει νόημα η ισότητα στη δεύτερη υπόθεση του Ορισμού 2.1.11. Πριν προχωρήσουμε όμως στο επόμενο σκέλος της απόδειξης, οφείλουμε να επισημάνουμε ότι πρέπει $\mathbf{0} \neq \mathbf{S} \subsetneq \mathbf{N}$ ούτως ώστε να ικανοποιείται σίγουρα η τρίτη υπόθεση του προηγούμενου ορισμού.

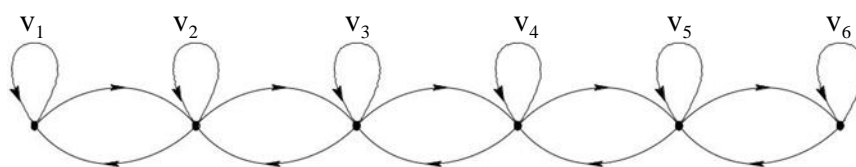
Αν τώρα εξετάσουμε τη σχέση των συνόλων S και N υπό το πρίσμα της μη υποβιβασιμότητας του πίνακα (πρώτη υπόθεση), αποκλείεται όλοι οι όροι του αθροίσματος στην (2.5) να μηδενίζονται, καθώς τότε θα προέκυπτε αυτόματα μια μηδενική γραμμή που θα μετέτρεπε τον πίνακα σε υποβιβάσιμο. Επομένως για κάποιο $j \neq i, j \in N$, ισχύει ότι $a_{i,j} \neq 0$, το οποίο δεδομένου ότι ισχύει η (2.5) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $|x_j| = 1$. Προκύπτει συνεπώς από τον ορισμό του συνόλου S ότι $j \in S$.

Από τη στιγμή που ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος, γνωρίζουμε από το θεώρημα ισοδυναμίας της μη υποβιβασιμότητας με την ύπαρξη του ισχυρά συνεκτικού κατευθυνόμενου γραφήματος ότι μπορούμε στο γράφο να πλοηγηθούμε από τον κόμβο v_i σε οποιονδήποτε άλλο κόμβο v_κ μέσω μιας αλληλουχίας κατευθυνόμενων ακμών που αντιστοιχούν σε μη μηδενικά (από ορισμό ισχυρά συνεκτικού κατευθυνόμενου γραφήματος) μη διαγώνια στοιχεία $a_{i,i_1}, a_{i_1,i_2}, \dots, a_{i_{r-1},i_r}$ με $i_r = \kappa$. Αξιοποιώντας και γενικεύοντας το σκεπτικό της αμέσως προηγούμενης παραγράφου αυτής της απόδειξης συμπεραίνουμε ότι $j \in S, 1 \leq j \leq r$. Αλλά επειδή ο κ μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε ακέραιος του συνόλου N , συνεπάγεται ότι $S = N$, οπότε και η απόδειξη της Αυστρο-Ουγγαρέζας μαθηματικού Olga Taussky-Todd ολοκληρώνεται καθώς οδηγούμαστε σε άτοπο. ■

Παράδειγμα: Ακολουθεί ένας πίνακας ιδιαίτερα συνήθης στην Αριθμητική Ανάλυση, ο $n \times n$ τριδιαγώνιος,

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Είναι προφανές ότι το κατευθυνόμενο γράφημα $G(A_7)$ είναι ισχυρά συνδεδεμένο (Γράφημα 2.4), οπότε από το Θεώρημα 2.1.7 προκύπτει ότι ο A_7 είναι μη υποβιβάζσιμος. Για να δείξουμε ότι ο A_7 είναι και αντιστρέψιμος, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.1.13. Ο A_7 είναι μη υποβιβάζσιμα διαγώνια κυρίαρχος καθώς ισχύει η σχέση $2 = |a_{i,i}| \geq r_i(A_7) \forall i \in \mathbb{N}$, ενώ η γνήσια ανισότητα τίθεται σε ισχύ για $i=1$ και $i=n$. Επομένως ο A_7 είναι αντιστρέψιμος ανεξάρτητα του μεγέθους του n .



Γράφημα 2.4: Κατευθυνόμενο γράφημα $G(A_7)$ για τον πίνακα A_7 .

Ορισμός 2.1.14. (Beauwens) Ένας πίνακας $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ονομάζεται **κάτω αυστηρά διαγώνια ημικυρίαρχος** (lower semistrictly diagonally dominant) αν ισχύει $|a_{i,i}| \geq r_i(A)$, $\forall i \in \mathbb{N}$ (δηλαδή είναι διαγώνια κυρίαρχος) και επιπλέον ισχύει ότι $|a_{i,i}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}|$ (για κάθε $i \in \mathbb{N}$). Εν συνεχεία του παραπάνω συλλογισμού, ένας πίνακας καλείται **αυστηρά διαγώνια ημικυρίαρχος** (semistrictly diagonally dominant) αν υπάρχει κατάλληλος πίνακας μετάθεσης P , τέτοιος ώστε ο PAP^T να είναι κάτω αυστηρά διαγώνια ημικυρίαρχος. Ισχύει ότι ένας πίνακας είναι μη υποβιβάζσιμα διαγώνια κυρίαρχος αν και μόνο αν είναι αυστηρά διαγώνια ημικυρίαρχος και μη υποβιβάζσιμος.

Ορισμός 2.1.15. Συμβολίζουμε με $C_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, το **εκτεταμένο μιγαδικό πεδίο** (extended complex plane). Επίσης για ένα T υποσύνολο του C , το \bar{T} συμβολίζει την κλειστότητά του στο C_∞ , ενώ με $\partial T := \bar{T} \cap (\overline{C_\infty \setminus T})$ (τομή της κλειστότητας του T με την κλειστότητα του συμπληρωματικού του T) συμβολίζουμε το σύνορο του T . Τέλος, με $\text{int}T := T \setminus \partial T$ συμβολίζουμε το εσωτερικό του T .

Ακολουθεί το πρώτο θεώρημα εγκλεισμού ιδιοτιμών που κάνει χρήση της μη υποβιβασιμότητας των πινάκων.

Θεώρημα 2.1.16. (Taussky, 1946) Έστω $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ο οποίος είναι μη υποβιβάζσιμος. Τότε αν $\lambda \in \sigma(A)$ ιδιοτιμή του A η οποία να μην ανήκει στο εσωτερικό κανενός δίσκου Geršgorin, δηλαδή $\lambda \notin \text{int} \Gamma_i(A) \forall i \in \mathbb{N}$ ή εναλλακτικά $|\lambda - a_{i,i}| \geq r_i(A)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ιδιοτιμή λ να βρίσκεται πάνω στο σύνορο ενός τουλάχιστον δίσκου Geršgorin και έξω από τους υπόλοιπους, τότε προκύπτει

$$|\lambda - a_{i,i}| = r_i(A) \forall i \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

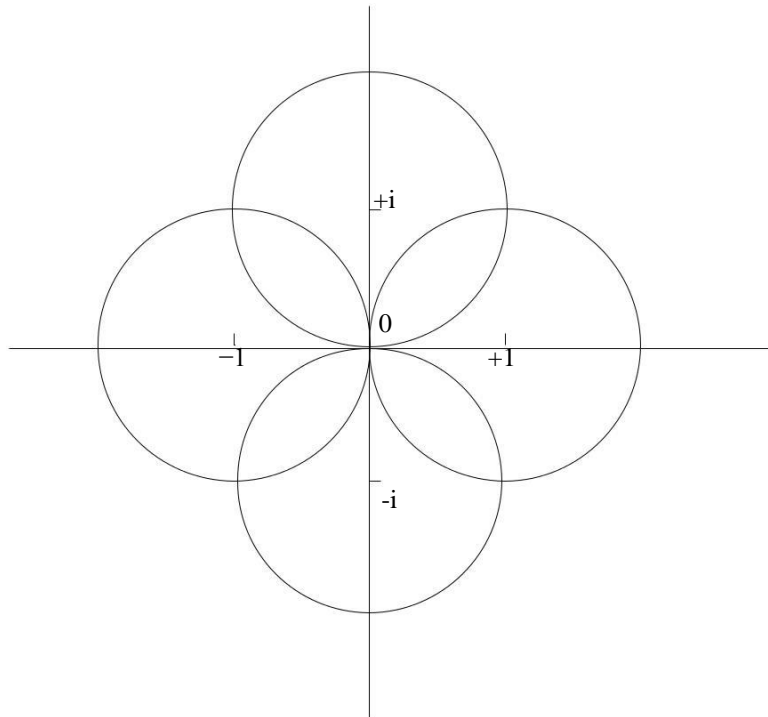
Αυτό συνεπάγεται ότι όλοι οι κύκλοι Geršgorin $\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| = r_i(A)\}$ διέρχονται από τη συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ .

Θεώρημα 2.1.17. Έστω πάλι ένας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ πίνακας μη υποβιβάσιμος. Αν μια ιδιοτιμή λ του πίνακα A κείται επί του συνόρου του $\Gamma(A)$, τότε ισχύει η σχέση (2.6), δηλαδή η ιδιοτιμή λ ανήκει στο σύνορο κάθε δίσκου Geršgorin. Δεν μπορεί επομένως μια ιδιοτιμή να βρίσκεται στο σύνορο $\partial\Gamma(A)$ αν δεν ανήκει στο σύνορο κάθε δίσκου $\Gamma_i(A)$.

Παράδειγμα 1: Το παραπάνω θεώρημα χρήζει ιδιαίτερης προσοχής, γιατί και παρουσιάζεται και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, το οποίο διαχωρίζει ξεκάθαρα τα δύο προηγούμενα θεωρήματα. Θέτουμε καταρχάς ως A_8 τον κάτωθι ιδιαίτερο πίνακα:

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ i & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A_8 είναι μη υποβιβάσιμος, αλλά και ιδιάζων, καθώς $0 \in \sigma(A_8)$. Όπως παρατηρούμε και στην Εικόνα 2.5 που ακολουθεί, το $0 \notin \text{int } \Gamma_i(A_8) \forall 1 \leq i \leq 4$, και ενώ όλοι οι δίσκοι Geršgorin $\{z \in C : |z - a_{i,i}| = r_i(A_8)\}$ περνούν από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου όπως αναμενόταν από το Θεώρημα 2.1.16, το σημείο 0 εντούτοις δεν είναι σημείου του συνόρου του συνόλου Geršgorin $\partial\Gamma(A_8)$.



Εικόνα 2.5: Σύνολο Geršgorin $\Gamma(A_*)$ για τους πίνακες A_8 και A_9 .

Εφόσον λοιπόν ο πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ που μελετάται είναι μη υποβιβάσιμος, τότε Θεώρημα 2.1.16 μας δίνει ότι μια αναγκαία συνθήκη για να βρίσκεται μια ιδιοτιμή λ του A πάνω στο σύνορο του $\Gamma(A)$ είναι όλοι οι n το πλήθος κύκλοι Geršgorin (το σύνορο των αντίστοιχων δίσκων δηλαδή) να διέρχονται από την ιδιοτιμή λ . Παρά ταύτα, όπως είδαμε δεν είναι μια ικανή συνθήκη η οποία θα μας οδηγήσει με ασφάλεια στο ότι το σημείο αυτό είναι πράγματι μια ιδιοτιμή του A πάνω στο $\partial\Gamma(A)$. Οπότε εν ολίγοις πρόκειται για μία αναγκαία αλλά μη ικανή συνθήκη.

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε τώρα έναν πανομοιότυπο ως προς τη δομή πίνακα με τον προηγούμενο, τον

$$A_9 = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & i & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & e^{i\theta_3} \\ e^{i\theta_4} & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

όπου τα θ_i , $1 \leq i \leq 4$ είναι όλα πραγματικοί αριθμοί. Ο A_9 παρατηρούμε ότι έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο Geršgorin με τον πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος, τον A_8 . Η διαφορά με πριν είναι ότι πλέον δεν έχουμε εξασφαλίσει ότι το σημείο $z=0$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα για να εξάγουμε συμπεράσματα ανάλογα του προηγούμενου παραδείγματος και να δείξουμε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.1.17. Επιπλέον, πρέπει να ερευνηθεί και η υποβιβασσιμότητα του A_9 . Η μορφή του πίνακα μας δίνει άμεση εικόνα για το κατευθυνόμενο γράφημά του και καθώς εύκολα διαπιστώνουμε ότι σε αυτό υπάρχουν οι ακμές $\overline{V_1V_2}$, $\overline{V_2V_3}$, $\overline{V_3V_4}$, $\overline{V_4V_1}$, λόγω των μη μηδενικών στοιχείων $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,4}$ και $\alpha_{4,1}$, αντιστοίχως. Επομένως έχουμε έναν κατευθυνόμενο κύκλο που περνάει από όλες τις κορυφές, που σημαίνει ότι το γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό και ο πίνακας μη υποβιβασίμος.

Όσον αφορά την αντιστρεψιμότητα του πίνακα θα χρησιμοποιήσουμε τον πλέον κλασσικό τρόπο για να αποφανθούμε αν αντιστρέφεται ή όχι, και αυτός δεν είναι άλλος από την ορίζουσα του. Προκύπτει ότι $\det(A_9) = -1 - e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}$. Άρα για να είναι το $z=0$ ιδιοτιμή του πίνακα A_9 πρέπει $\sum_{i=1}^4 \theta_i = \pi \pmod{2\pi}$.

Επομένως, στην περίπτωση αυτή, το $\Gamma(A_9)$ που δίνεται στην Εικόνα 2.5 αποδεικνύει ξανά ότι η ευρισκόμενη ιδιοτιμή δεν είναι ιδιοτιμή που ανήκει στο $\partial\Gamma(A_9)$.

Πρόταση 2.1.18. (Cvetkovic) Έστω πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ με $n \geq 2$. Θεωρούμε ότι $|a_{i,1}| > r_1(A)$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ και $|a_{n,n}| = r_n(A)$. Τότε αν $r_n(A) > 0$ ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, ενώ αν $r_n(A) = 0$, ο πίνακας είναι ιδιάζων.

Απόδειξη: Στην περίπτωση που ισχύει ότι το τελευταίο άθροισμα γραμμής είναι μηδενικό ($r_n(A) = 0$), θα ισχύει από υπόθεση ότι και η τιμή του τελευταίου διαγώνιου στοιχείου $a_{n,n}$ θα είναι μηδέν. Τότε όμως προκύπτει μία μηδενική γραμμή στον πίνακα, γεγονός που μας οδηγεί στη μη αντιστρεψιμότητα του πίνακα (ορίζουσα πίνακα μηδενική/ το μηδέν είναι ιδιοτιμή του πίνακα). Αν απεναντίας ισχύει ότι $r_n(A) > 0$, τότε αυτόματα προκύπτει ότι ο n -οστός κύκλος Geršgorin περνάει από το μηδέν (καθώς η ακτίνα αυτού του κύκλου ισούται με την απόσταση του κέντρου του δίσκου από την αρχή των αξόνων) και μάλιστα είναι και ο μοναδικός δίσκος με αυτήν την ιδιότητα. Επομένως το σημείο $(0,0)$ ανήκει στο σύνορο του συνόλου Geršgorin $\Gamma(A)$. Από Θεώρημα 2.1.16 γνωρίζουμε ότι αν υπάρχει σημείο που να ανήκει στο $\partial\Gamma(A)$ και είναι παράλληλα και ιδιοτιμή του πίνακα A , τότε όλοι οι κύκλοι Geršgorin θα διέρχονται από το σημείο αυτό. Συνθήκη η οποία δεν ικανοποιείται, άρα το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα και ο πίνακας τελικά δεν είναι ιδιάζων. ■

2.2 Αναλυτικές Επεκτάσεις του Θεωρήματος Geršgorin

Δοθέντος ενός πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, είναι ευρέως γνωστό στον κλάδο της Ανάλυσης Πινάκων ότι το φάσμα του πίνακα A είναι ακριβώς το ίδιο με το φάσμα του ανάστροφου του ($\sigma(A) = \sigma(A^T)$), όπου $A^T := [a_{j,i}]$. Προβλέπεται λοιπόν ο A να είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο A^T είναι αντιστρέψιμος. Επομένως εισάγοντας τον A^T στη θέση του A στο θεώρημα αυστηρής διαγώνια κυριαρχίας (Θεώρημα 1.2.9) προκύπτει:

Πόρισμα 2.2.1. Κάθε πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, ο οποίος ικανοποιεί την

$$|a_{i,i}| > c_i(A) := r_i(A^T) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}| \quad \forall i \in N, \quad (2.7)$$

προκύπτει εύλογα ότι είναι αντιστρέψιμος.

Παρατήρηση 2.2.2. Οι ποσότητες $c_i(A) = r_i(A^T)$ της προηγούμενης σχέσης εξαρτώνται πλέον από τα αθροίσματα στηλών του A σε αντίθεση με την εξάρτηση από τα αθροίσματα γραμμών του αρχικού Θεωρήματος 1.2.9.

Πρόταση 2.2.3. Δοθέντος ενός πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, τότε πάντοτε ισχύει $\sum_{i \in N} r_i(A) = \sum_{j \in N} c_j(A)$.

Η κλάση μάλιστα των πινάκων για τους οποίους ισχύει ότι έχουν ακριβώς το ίδιο άθροισμα μη διαγώνιων στοιχείων είναι υπεραριθμησιμη.

Απόδειξη: Παίρνουμε ως παράδειγμα έναν $A = [a_{i,j}] \in C^{3 \times 3}$, με αθροίσματα γραμμών $r_i(A) = 1 \quad \forall i \in \{1,2,3\}$ και ομοίως με αθροίσματα γραμμών $c_i(A) = 1 \quad \forall i \in \{1,2,3\}$. Σκοπός μας είναι βέβαια να δείξουμε καταρχάς ότι υπάρχουν πίνακες $B = [\beta_{i,j}] \in C^{3 \times 3}$, τέτοιοι ώστε να έχουν το ίδιο άθροισμα μη διαγώνιων στοιχείων. Αυτό βέβαια θα ίσχυε πάντα αν οι πίνακες είχαν ακριβώς τα ίδια αθροίσματα γραμμών και στηλών. Αν λοιπόν θέσουμε τον B ως

$$B = \begin{bmatrix} * & 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & * & 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & \varepsilon & * \end{bmatrix} \text{ με } \varepsilon \in (0,1),$$

τότε λόγω της υπεραριθμησιμότητας των πραγματικών αριθμών που ανήκουν μεταξύ του μηδέν και της μονάδας, προκύπτει ότι υπάρχουν υπεραριθμησιμα άπειροι το πλήθος πίνακες σαν τον B , πίνακες που αυτομάτως έχουν το ίδιο ακριβώς άθροισμα στοιχείων με τον αρχικό πίνακα A .

Σε περίπτωση που $n=2$, είναι προφανής η υπεραριθμησιμη δυνατότητα επιλογής δύο αριθμών ($\beta_{1,2}$ και $\beta_{2,1}$) που να έχουν συγκεκριμένο άθροισμα, ενώ για $n \geq 4$ η μόνη αλλαγή είναι η προσθήκη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-2}$ πραγματικών αριθμών με $\varepsilon_i \in (0,1)$ για $i = \{1,2, \dots, n-2\}$. Στη περίπτωση αυτή κάθε γραμμή/(στήλη) θα έχει τη μορφή $[*, 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-2}]$. ■

Κατά παρόμοιο τρόπο με την ισοδυναμία των Θεωρημάτων 1.2.2 και 1.2.9 προκύπτει μια ανάλογη ισοδυναμία για τον ανάστροφο πίνακα του A .

Πόρισμα 2.2.4. Για κάθε πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, ισχύει ότι

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A^T). \quad (2.8)$$

Καθώς δηλαδή έχουμε τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές για τον A^T σε σχέση με τον A , επίκειται ότι το φάσμα του A θα ανήκει στο σύνολο Geršgorin του A^T .

Προφανώς ως συνέπεια των σχέσεων εγκλεισμού (1.8) του Θεωρήματος 1.2.2 και της σχέσης (2.8) του παραπάνω πορίσματος μπορεί να προκύψει και μια τρίτη ενδιαφέρουσα σχέση εγκλεισμού.

Θεώρημα 2.2.5. Για οποιονδήποτε πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, θέτοντας $\Gamma(A^T) := \{z \in C : |z - a_{i,i}| \leq c_i(A)\}$ με το $c_i(A)$ να είναι το i -οστό άθροισμα στήλης που έχει οριστεί στη σχέση (2.7) ισχύει ότι

$$\sigma(A) \subseteq (\Gamma(A) \cap \Gamma(A^T)). \quad (2.9)$$

Το φάσμα του πίνακα A δηλαδή, ανήκει στην τομή του συνόλου Geršgorin με την ένωση των δίσκων Geršgorin που έχουν κέντρο τα σημεία $a_{i,i}$, αλλά πλέον ακτίνα $c_i(A)$ και αποτελούν το σύνολο Geršgorin του A^T .

Παρατήρηση 2.2.6. Το θεώρημα του Geršgorin 1.2.2 καθώς και το παραπάνω θεώρημα δεν αποκλείουν την πιθανότητα να υπάρχουν δίσκοι που δεν περιέχουν ιδιοτιμές.

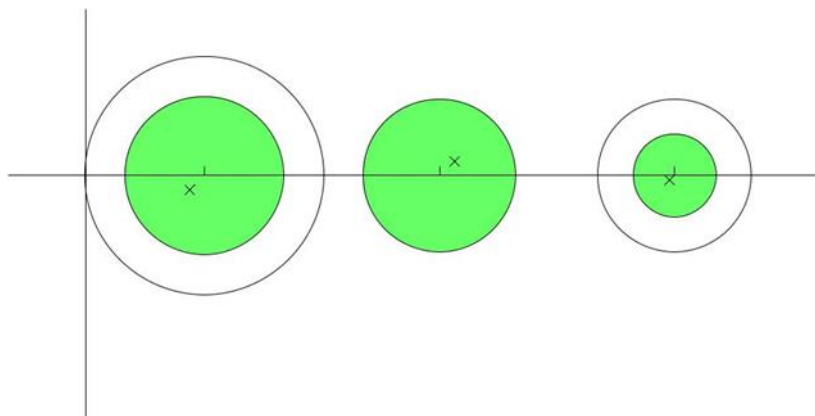
Παρατήρηση 2.2.7. Σημαντική επίσης λεπτομέρεια είναι ότι πλέον η σχέση εγκλεισμού των ιδιοτιμών (2.9) εξαρτάται πλέον από $3n$ το πλήθος παραμέτρους, που καθορίζουν πλήρως το χωρίο που αναμένεται να εμφανιστούν οι ιδιοτιμές του πίνακα και προέρχονται όλες από τον πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$. Οι παράμετροι αυτές είναι οι

$$\{a_{i,i}\}_{i=1}^n, \{\tau_i(A)\}_{i=1}^n \text{ και } \{c_i(A)\}_{i=1}^n. \quad (2.10)$$

Παράδειγμα: Για να διαπιστώσουμε έμπρακτα τη σπουδαιότητα του τελευταίου θεωρήματος, θα θεωρήσουμε ξανά έναν πίνακα που μελετήθηκε νωρίτερα όσον αφορά τους δίσκους Geršgorin. Έστω ο

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1/2 & 4 & i/2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

ο οποίος θα μελετηθεί εκ νέου, αυτή τη φορά υπό το πρίσμα των δίσκων Geršgorin του ανάστροφού του. Τίθεται εν ισχύ λοιπόν η σχέση (2.8) και προκύπτουν τρεις νέοι δίσκοι, με τα ίδια κέντρα μεν, αλλά με διαφορετική ακτίνα πλέον, η οποία ισούται με κάποιο άθροισμα στήλης. Γραφικώς, οι δίσκοι αυτοί απεικονίζονται στην Εικόνα 2.6 με ολόενα και φθίνουσα ακτίνα από αριστερά προς τα δεξιά (ενώ με σταθερή ακτίνα είναι οι προϋπάρχοντες δίσκοι). Εμφανώς προκύπτει ότι η τομή των αντίστοιχων δίσκων είναι ένα ακόμη μικρότερο και προτιμότερο συνεπώς χωρίο που περιέχει όλες βεβαίως τις ιδιοτιμές. Στην εικόνα που ακολουθεί το νέο αυτό χωρίο είναι χρωματισμένο, αποτελείται από τρεις δίσκους και κάθε δίσκος περιέχει μία ιδιοτιμή.



Εικόνα 2.6: $\Gamma(A_2)$, $\Gamma(A_2^T)$ και $\Gamma(A_2) \cap \Gamma(A_2^T)$.

→ Είναι πάντως απολύτως αναμενόμενο και λογικό η τομή των $\Gamma(A^T)$ και $\Gamma(A)$ να μην είναι το κενό (αγνοώντας προς στιγμήν την επίγνωση του ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A θα ανήκουν σε αυτήν την τομή), καθώς όλοι οι επιμέρους δίσκοι $\Gamma_i(A^T)$ και $\Gamma_i(A)$ έχουν το ίδιο κέντρο.

Γεννάται το ερώτημα σε αυτό το σημείο αν μπορεί ο συνδυασμός των αθροισμάτων γραμμών και των αθροισμάτων στηλών να επιφέρει χωρίο ανάλογο με τα προηγούμενα, που θα περιέχει το φάσμα ενός τυχαίου πίνακα. Ένα τέτοιο εγχείρημα σίγουρα δε φαντάζει παράλογο. Εν προκειμένω, με χρήση εργαλείων της Μαθηματικής Ανάλυσης και λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι ισχύει το Θεώρημα 1.2.9. (ΘΑΔΚ) ο A. Ostrowski το 1951 απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.8. Για οποιονδήποτε $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ πίνακα και κάθε α με $0 \leq \alpha \leq 1$, αν ισχύει ότι

$$|a_{i,i}| > (r_i(A))^\alpha (c_i(A))^{1-\alpha}, \quad \forall i \in N, \quad (2.11)$$

τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

Παρατήρηση 2.2.9. Στην παραπάνω επέκταση του ΘΑΔΚ πρέπει να τονιστεί ότι το α είναι σταθερό για κάθε $i \in N$, οπότε για τον τυχαίο i -οστό δίσκο Geršgorin δεν μπορεί να επιλεγεί μόνο το άθροισμα γραμμής $r_i(A)$ ή το άθροισμα στήλης $c_i(A)$, αλλά και τα δύο με συγκεκριμένη ποσόστωση (που καθορίζεται βεβαίως από το α). Επίσης η απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.8 χρησιμοποιεί την ανισότητα Hölder όπως και άλλα μαθηματικά εργαλεία που δεν βρίσκονται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Από το προηγούμενο θεώρημα και τα πορίσματα του θεωρήματος Geršgorin της §1.2 προκύπτουν άμεσα κατ' αντιστοιχία κάποια εξίσου ενδιαφέροντα πορίσματα. Πιο συγκεκριμένα, αφού πρώτα για διάνυσμα $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, θέσουμε $X = \text{diag}[\mathbf{x}] = \text{diag}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ εφαρμόζουμε το θεώρημα 2.2.8 για το $X^{-1}AX = [a_{i,j} x_j / x_i]$.

Πόρισμα 2.2.10. Για κάθε $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ πίνακα, $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0} \in R^n$ και $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ αν υποθέσουμε ότι ισχύει

$$|a_{i,i}| > (r_i^x(A))^\alpha (c_i^x(A))^{1-\alpha}, \quad \forall i \in N, \quad (2.12)$$

όπου μάλιστα από τη σχέση (2.7) συνεπάγεται ότι ισχύει $c_i^x(A) = r_i^x(A^T)$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

Πόρισμα 2.2.11. Για πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0} \in R^n$ και $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$, για το φάσμα του A ισχύει

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i \in N} \{z \in C : |z - a_{i,i}| \leq (r_i^x(A))^\alpha (c_i^x(A))^{1-\alpha}\}. \quad (2.13)$$

Το Πόρισμα 2.2.11 είναι τελείως ανάλογο του Πορίσματος 1.2.13 με την προσθήκη της παραμέτρου α και είναι ισοδύναμο με το αμέσως προηγούμενο Πόρισμα 2.2.10. Το Πόρισμα 2.2.11 διατυπώνει με σαφήνεια ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A εντοπίζονται μέσα στο παραλλαγμένο σταθμισμένο σύνολο Geršgorin με τις ακτίνες των παραλλαγμένων σταθμισμένων δίσκων Geršgorin να δίνονται από ένα γινόμενο συζυγών εκθετών που χρησιμοποιεί όλα τα αθροίσματα γραμμών και στηλών.

Το χωρίο που σχηματίζεται στη (2.13) ονομάζεται **σύνολο Ostrowski** προς τιμή του Ουκρανού μαθηματικού. Είναι προφανές ότι όπως συμβαίνει και με τα σταθμισμένα σύνολα Geršgorin έτσι και το σύνολο Ostrowski για έναν τετραγωνικό πίνακα A δεν είναι μοναδικό.

Η συνήθης διαδικασία είναι να αναζητείται το βέλτιστο α έτσι ώστε το σύνολο Ostrowski να είναι το μικρότερο δυνατό. Ακολουθεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τον πίνακα $A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0,5 & 4 \end{bmatrix}$ με $\mathbf{x} = [1,1]^T$ και επιπρόσθετα θεωρούμε και τους δύο δίσκους που προκύπτουν βάσει της (2.13), όπου βεβαίως ισχύει $0 \leq \alpha \leq 1$.

Οι δύο δίσκοι είναι οι $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 8^\alpha(0,5)^{1-\alpha}\}$ και $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq 8^{1-\alpha}(0,5)^\alpha\}$.

Παρότι ο πίνακας A_{10} δεν είναι συμμετρικός, γνωρίζουμε ότι έχει πραγματικές ιδιοτιμές, με την πρώτη εξ αυτών να είναι σίγουρα το 0, όπως προκύπτει από τις γραμμές/στήλες του πίνακα καθώς είναι διπλάσια η μία της άλλης, με αποτέλεσμα να προκύπτει εύκολα μηδενική ορίζουσα που συνεπάγεται ότι ο πίνακας είναι μη αντιστρέψιμος. Ως εκ τούτου για τη βελτιστοποίηση του χωρίου μας, θέλουμε να περιλαμβάνει οριακά, δηλαδή πάνω στο σύνορο του, το μηδέν, και αντίστοιχα με το Θεώρημα 2.1.17 αυτό σημαίνει ότι και οι δύο κύκλοι θα διέρχονται από το σημείο αυτό. Αυτό συμβαίνει για $\alpha=1/4$. Πιο αναλυτικά, αγνοώντας την παραπάνω παρατήρηση θέτουμε

$$\beta(\alpha) := \min[1 - 8^\alpha(0,5)^{1-\alpha}, 4 - 8^{1-\alpha}(0,5)^\alpha] \quad (\alpha \in [0,1]). \quad \text{Τότε όντως διαπιστώνουμε ότι}$$

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \beta(\alpha) = 0 = \beta(1/4).$$

Επειδή μάλιστα οι δύο δίσκοι Ostrowski με κέντρο $z=1$ και $z=4$ αντίστοιχα δημιουργούν ένα διάστημα στον άξονα των πραγματικών όπου αναμένεται να βρίσκονται οι ιδιοτιμές του A_{10} , αν κατορθώσουμε να βελτιστοποιήσουμε το διάστημα που εμπεριέχονται οι ιδιοτιμές, τότε ταυτόχρονα βελτιστοποιούμε και το εμβαδόν του συνόλου Ostrowski καθώς οι δίσκοι δεν είναι ξένοι, τα κέντρα τους είναι συνευθειακά με τις ιδιοτιμές του A_{10} και τέλος το εμβαδόν τους είναι κατά προσέγγιση ανάλογο της διαμέτρου των δύο δίσκων. Το μόνο αναπάντητο – προς το παρόν – ερώτημα που μένει είναι αν το χωρίο αυτό είναι καλύτερο οποιουδήποτε σταθμισμένου συνόλου Geršgorin.

Θεώρημα 2.2.12. (Θεώρημα Ostrowski) Για κάθε πίνακα $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \rho_i^{(1)}\}, \quad (2.14)$$

$$\text{όπου } \rho_i^{(1)} := \alpha_i^{1/q} \left(\sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} |a_{i,j}|^p \right)^{1/p} \quad (2.15)$$

και $p \geq 1$, με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ενώ όλοι οι θετικοί αριθμοί $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{(1 + \alpha_i)} \leq 1$.

Σε παρόμοιο αποτέλεσμα κατέληξαν το 1954 οι Fan και Hoffman.

Θεώρημα 2.2.13. (Fan-Hoffman) Για κάθε πίνακα $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \rho_i^{(2)}\}, \quad (2.16)$$

$$\text{όπου } \rho_i^{(2)} := \alpha \left(\max_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} |a_{i,j}| \right) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (2.17)$$

με α τυχαίο θετικό αριθμό που να ικανοποιεί τη σχέση $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{r_i(A)}{\max_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} |a_{i,j}|} \leq \alpha(1 - \alpha)$. Σημειωτέον δε, ότι σε περίπτωση που για κάποιο i ο παρονομαστής κάποιου όρου του αθροίσματος είναι μηδέν, τότε ο όρος αυτός θεωρείται μηδενικός.

Παρατηρούμε ότι όλα τα προαναφερθέντα σύνολα εγκλεισμού ιδιοτιμών αυτής της παραγράφου, δηλαδή το σύνολο Ostrowski του Πορίσματος 2.2.11, το παραλλαγμένο σύνολο Ostrowski του Θεωρήματος 2.2.12 και το σύνολο των Fan και Hoffman του Θεωρήματος 2.2.13, εξαρτώνται πέρα από τις τιμές των στοιχείων του πίνακα και από άλλες παραμέτρους.

Οι παράμετροι αυτές διαφέρουν σε κάθε σύνολο.

- ❖ Στο σύνολο Ostrowski είναι σαφές μέσω της (2.13) ότι οι επιπλέον αυτές παράμετροι είναι το α , αλλά και οι n το πλήθος τιμές του διανύσματος $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.
- ❖ Στο έτερο σύνολο του Ostrowski που προκύπτει από το Θεώρημα 2.2.12, διαπιστώνουμε ότι χρειαζόμαστε τις $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, το p και το q . Άρα συνολικά $n+1$ παραμέτρους, καθώς p και q αλληλοεξαρτώνται.
- ❖ Τέλος όσον αφορά το σύνολο των Fan και Hoffman, η μοναδική και συνάμα σημαντικότερη μεταβλητή που καθορίζει την ακτίνα των δίσκων είναι η α . Αυτό αποτελεί και το μέγα πλεονέκτημα του Θεωρήματος 2.2.13, το ότι δηλαδή μπορεί να εφαρμοστεί άπαξ και προσδιοριστεί ένα κατάλληλο α .

Στο σημείο αυτό κάνοντας μια μικρή ανασκόπηση είναι λογικό να αναρωτηθούμε αν αυτά τα τρία τελευταία χωρία εγκλεισμού ιδιοτιμών είναι προτιμητέα σε σχέση με το σύνολο Geršgorin και δη το σταθμισμένο σύνολο του Πορίσματος 1.2.13. Επισημαίνεται ότι το σταθμισμένο σύνολο Geršgorin χρειάζεται τον προσδιορισμό των ίδιων παραμέτρων με το σύνολο Ostrowski πλην της παραμέτρου α .

Στο ερώτημα αυτό η απάντηση εν μέρει ήρθε από τον Αμερικάνο μαθηματικό κινεζικής καταγωγής Ky Fan το 1958, με χρήση του θεωρήματος Perron-Frobenius πάνω σε μη αρνητικούς μη υποβιβάσιμους πίνακες.

Θεώρημα 2.2.14. (Θεώρημα Fan) Για $n \geq 2$ έστω πίνακας $B = [\beta_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μη υποβιβάσιμος πίνακας με $\beta_{i,j} > 0 \ \forall i, j \in \mathbb{N}$ με $i \neq j$ και $\beta_{i,i} = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$. Επίσης έστω $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ n το πλήθος θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε για κάθε $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $|a_{i,j}| = \beta_{i,j} \ \forall i, j \in \mathbb{N}$ με $i \neq j$ και κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A να ανήκει σε έναν τουλάχιστον από τους δίσκους

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \rho_i\}. \quad (2.18)$$

Τότε θα $\exists \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, διάνυσμα εξαρτώμενο από τον πίνακα A , τέτοιο ώστε

$$\rho_i \geq r_i^x(A) \quad (\forall i \in \mathbb{N}). \quad (2.19)$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος οφείλουμε να αναφερθούμε στα εξής:

Παρατήρηση 2.2.15. Από την σχέση (2.19) είναι ξεκάθαρο ότι οι σταθμισμένοι δίσκοι Geršgorin $\Gamma_i^x(A)$ είναι υποσύνολα των αντίστοιχων δίσκων $\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \rho_i\} \ \forall i \in \mathbb{N}$, το οποίο σημαίνει ότι

$$\Gamma^x(A) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \rho_i\}, \quad (2.20)$$

δηλαδή υπάρχει πάντα κάποιο σταθμισμένο σύνολο Geršgorin που να είναι υποσύνολο των υπολοίπων συνόλων. Η σύγκριση αυτή είναι εφικτή μόνο στην κατηγορία των μη υποβιβάσιμων πινάκων.

Θεώρημα 2.2.16. (Θεώρημα Perron-Frobenius) Δοθέντος ενός πίνακα $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $a_{i,j} > 0 \ \forall 0 \leq i, j \leq n$ (δηλαδή $A > 0$ θετικός πίνακας), ισχύουν τα ακόλουθα:

- i. Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ του πίνακα είναι θετική.
- ii. Ο A έχει μία θετική πραγματική ιδιοτιμή ίση με την φασματική του ακτίνα $\rho(A)$.
- iii. Αντιστοιχεί στην φασματική ακτίνα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T > \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$.
- iv. Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ αυξάνεται αν οποιοδήποτε στοιχείο του A αυξηθεί.
- v. Η $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα A .

Πλέον μπορούμε να προσθέσουμε την απόδειξη του θεωρήματος του Fan (2.2.14).

Απόδειξη: Από υπόθεση, αν ο $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ ικανοποιεί τη σχέση $|a_{i,j}| = \beta_{i,j} \forall i, j \in N$ με $i \neq j$ και αν $|a_{i,j}| > \rho_i$, καθώς τα ρ_i επιλέγονται κατά το δοκούν, τότε προφανώς το $z=0$ δεν μπορεί, από τη σχέση (2.18), να είναι ιδιοτιμή του A . Επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Έπειτα, ορίζουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα $D := \text{diag}[\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \dots, \frac{1}{\rho_n}]$ και θέτουμε $B' := DB = [b'_{i,j}]$, έτσι ώστε

$$b'_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{\rho_i} \text{ και } b'_{i,i} = 0 \quad \forall i, j \in N. \quad (2.21)$$

Τότε κάθε $A' = [a'_{i,j}] \in C^{n \times n}$ με $|a'_{i,j}| = \beta'_{i,j} \forall i, j \in N$ με $i \neq j$ και με $|a'_{i,j}| > 1 \forall i \in N$ (τροποποιήσαμε τους πίνακες έτσι ώστε να προκύπτει κανονικοποιημένο το κάθε άθροισμα γραμμής), είναι επίσης αντιστρέψιμος.

Επιπλέον, καθώς ο B είναι μη υποβιβασίμος, το ίδιο ισχύει και με τον B' . Από το θεώρημα Perron-Frobenius που παρατέθηκε νωρίτερα, ο B' έχει μία θετική ιδιοτιμή λ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T > \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $\lambda x_i = (B'\mathbf{x})_i \forall i \in N$. Με τη επίγνωση της (2.21) και του ορισμού του σταθμισμένου αθροίσματος γραμμής, προκύπτει ότι

$$\lambda \rho_i = \frac{1}{x_i} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}| x_j = r_i^x(A) \quad (\forall i \in N). \quad (2.22)$$

Τέλος, παίρνουμε έναν πίνακα, έστω C , με $C = B' - \lambda I_n = [c_{i,j}] \in C^{n \times n}$. Τότε ο C θα είναι ιδιάζων εξ ορισμού με $|c_{i,j}| = \beta'_{i,j} \forall i, j \in N$ με $i \neq j$ και $|c_{i,i}| = \lambda \forall i \in N$. Από την άλλη γνωρίζουμε ότι αν $|c_{i,i}| > 1 \forall i \in N$ ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς για να είναι ο πίνακας C μη αντιστρέψιμος, πρέπει $\lambda \leq 1$. Άρα από (2.22) προκύπτει $\rho_i \geq r_i^x(A) \forall i \in N$, που είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα της (2.19). ■

Παρατήρηση 2.2.17. Είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε ότι οι n ανισότητες της σχέσης (2.19) ισχύουν για κάποια συγκεκριμένα διανύσματα $\mathbf{x} > \mathbf{0} \in R^n$ και εξαρτώνται από τον ίδιο τον πίνακα A . Συνεπώς, ο εγκλεισμός της σχέσης (2.20) ενδέχεται να μην ισχύει για τυχαία επιλογή του διανύσματος \mathbf{x} .

2.3 Επεκτάσεις που προκύπτουν από Νόρμες Πινάκων

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να μελετηθεί το θεώρημα Geršgorin υπό το πρίσμα των νορμών πίνακα. Αυτή η σκοπιά του κεντρικού αν μη τι άλλο θεωρήματος της εργασίας εδραιώθηκε από τον A.S. Householder, Αμερικάνο μαθηματικό του περασμένου αιώνα.

Έστω νόρμα $\|\cdot\|_\varphi$ που εφαρμόζεται σε διανύσματα $\mathbf{x} \in C^n$. Έστω τώρα πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ με $\lambda \in \sigma(A)$. Τότε γνωρίζουμε πως υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} \in C^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύει $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Για κάποιον πίνακα $B \in C^{n \times n}$, η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί και ως

$$(A-B)\mathbf{x} = (\lambda I_n - B)\mathbf{x}. \quad (2.23)$$

Πιο συγκεκριμένα, αν $\lambda \notin \sigma(B)$, τότε ο $(\lambda I_n - B)$ είναι αντιστρέψιμος και η (2.23) γράφεται και ως

$$(\lambda I_n - B)^{-1}(A-B)\mathbf{x} = \mathbf{x}. \quad (2.24)$$

Αντίστοιχα με την Παρατήρηση 1.2.6, για ένα πίνακα $C \in C^{n \times n}$, η επαγόμενη νόρμα πίνακα (εν γένει τελεστή) $\|\cdot\|_\varphi$ σε σχέση με τη νόρμα διανύσματος δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\|C\|_\varphi := \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|C\mathbf{x}\|_\varphi}{\|\mathbf{x}\|_\varphi} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|C\mathbf{x}\|_\varphi,$$

και απευθείας προκύπτει από την (2.24) ότι

$$\|(\lambda I_n - B)^{-1}(A-B)\|_\varphi \geq 1 \text{ για } \lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma(B). \quad (2.25)$$

Οπότε πλέον μπορούμε να ορίσουμε το επόμενο σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο:

$$G_\varphi(A,B) := \sigma(B) \cup \{z \in C : z \notin \sigma(B) \wedge \|(zI_n - B)^{-1}(A-B)\|_\varphi \geq 1\}. \quad (2.26)$$

Επομένως αφού ορίστηκε το παραπάνω σύνολο, μπορούμε να ενστερνιστούμε το συλλογισμό του Householder. Έστω λοιπόν μια οποιαδήποτε ιδιοτιμή του $\lambda \in \sigma(A)$. Αν $\lambda \in \sigma(B)$, τότε από τη (2.26) θα ισχύει $\lambda \in G_\varphi(A,B)$. Αν απεναντίας ισχύει $\lambda \in \sigma(A) \wedge \lambda \notin \sigma(B)$, τότε ισχύει πάλι η (2.26) λόγω του ότι ο ισχύει και ο δεύτερος όρος της σύζευξης (σχέση (2.26)). Άρα σε κάθε περίπτωση, αν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A , τότε θα ανήκει και στο σύνολο $G_\varphi(A,B)$. Σε αυτήν την διαπίστωση κατέληξε αρχικά ο Householder το 1956 και την εξέλιξε περαιτέρω το 1964.

Θεώρημα 2.3.1. (Householder) Για κάθε πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, οποιονδήποτε $B = [\beta_{i,j}] \in C^{n \times n}$ και οποιαδήποτε νόρμα πινάκων $\|\cdot\|_\varphi$ ισχύει:

$$\sigma(A) \subseteq G_\varphi(A,B), \quad (2.27)$$

όπου το σύνολο $G_\varphi(A,B)$ ονομάζεται **σύνολο Householder** (Householder set) και δίνεται από τη σχέση (2.26). Στην αρχική του όμως τοποθέτηση ο Householder είχε ενδιασμούς για το αν το φάσμα $\sigma(B)$ θα πρέπει να περιλαμβάνεται απαραίτητα στην (2.26). Βεβαίως αποδείχθηκε μετέπειτα περίτρανα ότι οι ιδιοτιμές του B πρέπει να περιλαμβάνονται οπωσδήποτε στο σύνολο Householder και ένα απλο παράδειγμα από τα πολλά που το αποδεικνύουν αυτό έμπρακτα είναι και το ακόλουθο:

Παράδειγμα: Εξετάζουμε αν ο πίνακας A_{11} και ο διαγώνιος του πίνακας B μη τη χρήση της νόρμας άπειρο (ορίζεται επακριβώς στη σχέση (2.30) της μεθεπόμενης σελίδας) μπορούν να επαληθεύσουν τη σχέση (2.26) χωρίς το φάσμα του B . Δίνονται:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $(zI_n - B)^{-1}(A_{11} - B)$ που προκύπτει υπολογίζεται εύκολα και είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1/(z-1) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(z-5) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(z-5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/(z-5) & 0 & 1/(z-5) \\ 1/(z-5) & 1/(z-5) & 0 \end{bmatrix}.$$

Με αποτέλεσμα το ζητούμενο σύνολο να προκύπτει μετά από απλούς υπολογισμούς ως

$$\{z \in \mathbb{C} : z \notin \sigma(B) \wedge \|(zI_n - B)^{-1}(A_{11} - B)\|_\infty \geq 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z-5| \leq 2\}.$$

Δεδομένου λοιπόν ότι το φάσμα του πίνακα A_{11} είναι το $\sigma(A_{11}) = \{1, 4, 6\}$, το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z-5| \leq 2\}$ δεν περιέχει την ιδιοτιμή $z=1$, και ως εκ τούτου ο συνδυασμός των δύο πινάκων που επιλέχθηκαν μαζί με τη νόρμα άπειρο είναι ένα αντιπαράδειγμα της αρχικής εικασίας του Householder.

Ακολουθούν μερικές χρήσιμες συνολοθεωρητικές ιδιότητες του $G_\varphi(A, B)$.

Πρόταση 2.3.2. Έστω πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, πίνακας $B = [b_{i,j}] \in C^{n \times n}$ και $\|\cdot\|_\varphi$ οποιαδήποτε φυσική νόρμα πινάκων. Τότε το σύνολο $G_\varphi(A, B)$ της σχέσης (2.26) είναι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο του \mathbb{C} .

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι το $G_\varphi(A, B)$ είναι φραγμένο. Αρκεί να δείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση το μέτρο ενός οποιουδήποτε στοιχείου που ανήκει στο σύνολο αυτό είναι φραγμένο από έναν πραγματικό αριθμό.

- Υποθέτουμε αρχικά ότι $z \in G_\varphi(A, B)$ με $z \notin \sigma(B)$. Τότε θα ισχύει $\|(zI_n - B)^{-1}(A - B)\|_\varphi \geq 1$. Από βασική ιδιότητα κάθε νόρμας ισχύει ότι

$$1 \leq \|(zI_n - B)^{-1}(A - B)\|_\varphi \leq \|(zI_n - B)^{-1}\|_\varphi \|A - B\|_\varphi.$$

Καθώς όμως από υπόθεση έχουμε $\|(zI_n - B)^{-1}\|_\varphi > 0$, μετασχηματίζεται η προηγούμενη σχέση σε

$$\|A - B\|_\varphi \geq 1 / \|(zI_n - B)^{-1}\|_\varphi = \inf_{y \neq 0} \left\{ \frac{\|(zI_n - B)y\|_\varphi}{\|y\|_\varphi} \right\},$$

που προκύπτει από τον ορισμό της νόρμας τελεστή με χρήση του infimum αντί του supremum λόγω της ιδιόμορφης κατάστασης που προέκυψε. Επιπλέον, με χρήση της αντίστροφης τριγωνικής ανισότητας προκύπτει:

$$\|A - B\|_\varphi \geq \inf_{y \neq 0} \left\{ |z| - \frac{\|By\|_\varphi}{\|y\|_\varphi} \right\} = |z| - \|B\|_\varphi,$$

όπερ και σημαίνει ότι

$$|z| \leq \|A - B\|_\varphi + \|B\|_\varphi, \quad \forall z \in G_\varphi(A, B) \text{ με } z \notin \sigma(B). \quad (2.28)$$

- Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση που $z \in G_\varphi(A, B)$ με $z \in \sigma(B)$. Είναι γνωστό ως ιδιότητα της νόρμας πίνακα, ότι για τη φασματική ακτίνα του πίνακα B θα ισχύει $\rho(B) \leq \|B\|_\varphi$, συνεπώς θα ισχύει και $|z| \leq \|B\|_\varphi$, αφού το z είναι στην περίπτωση αυτή κάποια ιδιοτιμή του B και η μέγιστη όλων των ιδιοτιμών δεν μπορεί να υπερβαίνει τη νόρμα φ του πίνακα B .

Επομένως η ανισότητα (2.28) ισχύει και εδώ τετριμμένα. Άρα $|z| \leq \|A - B\|_\varphi + \|B\|_\varphi, \quad \forall z \in G_\varphi(A, B)$.

- Για να δείξουμε ότι το $G_\varphi(A, B)$ είναι κλειστό, θεωρούμε μια ακολουθία άπειρων σημείων $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ στο επίπεδο των μιγαδικών \mathbb{C} , τέτοια ώστε $z_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} z$, με το κάθε $z_i \in G_\varphi(A, B)$ για κάθε $i \geq 1$.

Εάν λοιπόν $z \in \sigma(B)$ τότε από (2.26) $z \in G_\varphi(A, B)$ (και το χωρίο συνεπάγεται ότι είναι κλειστό).

Αν $z \notin \sigma(B)$, τότε για τα αρκετά μεγάλα i , καθώς τα $z_i \in G_\varphi(A, B)$, θα ισχύει $\|(z_i I_n - B)^{-1}(A - B)\|_\varphi \geq 1$. Λόγω όμως της συνέχειας της νόρμας θα ισχύει επίσης ότι $\|(z I_n - B)^{-1}(A - B)\|_\varphi \geq 1$, δηλαδή ότι $z \in G_\varphi(A, B)$ και συνεπώς το $G_\varphi(A, B)$ είναι πάντα κλειστό. ■

Πριν δούμε πως ακριβώς συνδέονται τα σύνολα Householder και Geršgorin, επιβάλεται να υπενθυμίσουμε τη νόρμα άπειρο την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε. Ισχύει

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{i \in N} |u_i| \quad \forall \mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \in C^n, \quad (2.29)$$

ενώ η επαγόμενη νόρμα πίνακα ισούται με το μέγιστο άθροισμα γραμμής (συμπεριλαμβανομένου και του διαγώνιου στοιχείου) του πίνακα. Δηλαδή για $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, η νόρμα άπειρο πίνακα είναι η

$$\|A\|_\infty = \max_{i \in N} \sum_{j \in N} |a_{i,j}|. \quad (2.30)$$

Επιπρόσθετα θέτουμε για τυχαίο πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ τον πίνακα που αποτελείται αποκλειστικά από τα διαγώνια του στοιχεία $\text{diag}[A] := \text{diag}[a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}]$.

Πόρισμα 2.3.3. Για κάθε $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$ και θέτοντας $D := \text{diag}[A]$ ισχύει

$$G_\infty(A, D) = \Gamma(A). \quad (2.31)$$

Δηλαδή, για τον κατάλληλο πίνακα D , που συνδέεται άρρηκτα με τον πίνακα A καθώς πρόκειται για τον διαγώνιο πίνακα του, το σύνολο Householder $G_\infty(A, D)$ ταυτίζεται με το σύνολο Geršgorin $\Gamma(A)$.

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα των συνόλων της σχέσης (2.31) θα αποδείξουμε ότι $G_\infty(A, D) \subseteq \Gamma(A)$, αλλά και το αντίστροφο. Έστω λοιπόν $z \in G_\infty(A, D)$. Τότε είτε θα ισχύει $z \in \sigma(D)$ είτε θα ισχύει $z \notin \sigma(D)$ με $\|(z I_n - D)^{-1}(A - D)\|_\infty \geq 1$.

- Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση που $z \notin \sigma(D)$ και $\|(z I_n - D)^{-1}(A - D)\|_\infty \geq 1$. Ο πίνακας $(z I_n - D)^{-1}(A - D)$ λόγω του ότι ο $(A - D)$ έχει μηδενικά διαγώνια στοιχεία μπορεί να γραφεί και ως

$$(z I_n - D)^{-1}(A - D) = [\beta_{i,j}] = \begin{cases} \beta_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{z - \alpha_{i,i}} \quad \forall i \neq j, \\ \beta_{i,i} = 0 \quad \forall i \in N. \end{cases} \quad (2.32)$$

Εφαρμόζοντας τη νόρμα άπειρο πίνακα (2.30) στη (2.32) προκύπτει:

$$1 \leq \|(z I_n - D)^{-1}(A - D)\|_\infty = \max_{i \in N} \frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}|}{|z - \alpha_{i,i}|} = \max_{i \in N} \frac{r_i(A)}{|z - \alpha_{i,i}|}.$$

Συνεπώς, υπάρχει κάποιο $j \in N$ με $|z - \alpha_{i,i}| \leq r_j(A)$ το οποίο συνεπάγεται ότι $z \in \Gamma_j(A)$, άρα $z \in \Gamma(A)$.

- Εάν τώρα ισχύει ότι $z \in \sigma(D)$, τότε αυτόματα προκύπτει ότι $z = \alpha_{j,j}$ για κάποιο $j \in N$. Επομένως και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι $z \in \Gamma(A)$ και καταλήγουμε ότι πάντα θα ισχύει $G_\infty(A, D) \subseteq \Gamma(A)$.

Η αντίστροφη σχέση προκύπτει με τελείως ανάλογη διαδικασία και συμπερασματικά ισχύει η ισότητα $G_\infty(A, D) = \Gamma(A)$. ■

Με παρόμοιο τρόπο, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Householder (2.3.1) με μία κατάλληλα ορισμένη νόρμα μπορούμε να φτάσουμε σε πόρισμα αντίστοιχο του Πορίσματος 1.2.13 των σταθμισμένων δίσκων Geršgorin. Αναλυτικότερα, αν για διάνυσμα $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, θέσουμε $X := \text{diag}[\mathbf{x}] = \text{diag}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, τότε ο X είναι ένας διαγώνιος αντιστρέψιμος πίνακας. Μπορούμε τότε να ορίσουμε

τη νόρμα διανυσμάτων $\|\mathbf{u}\|_\infty^x := \|\mathbf{X}\mathbf{u}\|_\infty$ ($\forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$).

Ο παραπάνω τύπος ορίζει μία νόρμα γιατί ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες των νορμών. Πιο συγκεκριμένα,

- ✓ $\|\mathbf{u}\|_\infty^x \geq 0$, καθώς $\mathbf{X}\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ και γνωρίζουμε από (1.1.3) ότι $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$.
- ✓ $\|\mathbf{u}\|_\infty^x = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, επειδή $x_i > 0 \forall i \in N$, οπότε ο X δε μηδενίζει κανένα στοιχείο του \mathbf{u} .
- ✓ $\|\lambda\mathbf{u}\|_\infty^x = |\lambda| \|\mathbf{u}\|_\infty^x$, καθώς $\|\mathbf{X}(\lambda\mathbf{u})\|_\infty = \|\lambda(\mathbf{X}\mathbf{u})\|_\infty = |\lambda| \|\mathbf{X}\mathbf{u}\|_\infty$ από την τρίτη ιδιότητα μιας νόρμας.
- ✓ $\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\|_\infty^x \leq \|\mathbf{u}_1\|_\infty^x + \|\mathbf{u}_2\|_\infty^x$. Ισχύει καθώς $\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\|_\infty^x = \|\mathbf{X}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)\|_\infty \leq \|\mathbf{X}\mathbf{u}_1\|_\infty + \|\mathbf{X}\mathbf{u}_2\|_\infty = \|\mathbf{u}_1\|_\infty^x + \|\mathbf{u}_2\|_\infty^x$.

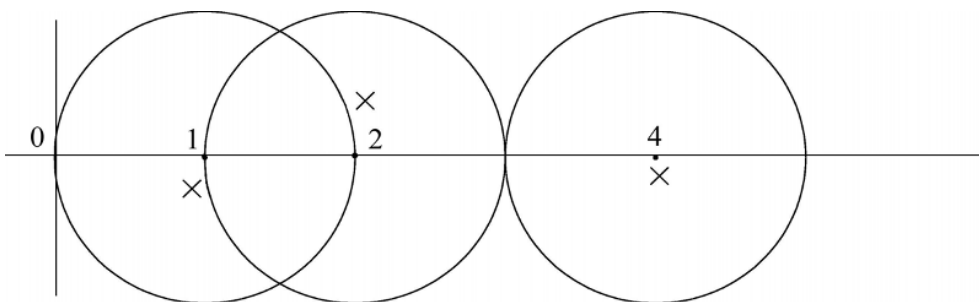
Πόρισμα 2.3.4. Για κάθε $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{x} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ και $D := \text{diag}[A]$ ισχύει

$$G_{1, \infty^x}(A, D) = \Gamma^x(A). \quad (2.33)$$

Ισχύει δηλαδή ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ και αν «σταθμίσουμε» το σύνολο Geršgorin, υπάρχει πάντοτε η κατάλληλη νόρμα έτσι ώστε το σταθμισμένο σύνολο Householder $G_{1, \infty^x}(A, D)$ να ταυτίζεται με το σταθμισμένο σύνολο Geršgorin.

Παράδειγμα: Δίνεται ο πίνακας $A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ και ο διαγώνιος του $B = \text{diag}[1, 4, 2]$. Το παράδειγμα

αυτό έχει ως στόχο να δείξει ότι υπάρχουν μερικές ειδικές περιπτώσεις πινάκων που οποιαδήποτε νόρμα εκτός από τη νόρμα άπειρο και αν επιλεγεί, δεν επηρεάζεται το σύνολο Householder της σχέσης (2.31) του Πορίσματος 2.3.3. Πράγματι, με υπολογισμούς ανάλογους του παραδείγματος αμέσως μετά το Θεώρημα 2.3.1, χρησιμοποιώντας τρεις διαφορετικές νόρμες πινάκων επαγόμενες από τις $l_1(x)$, την ευκλείδεια νόρμα $l_2(x)$ και τη $l_\infty(x)$ που ορίζονται στο 1.1.4, προκύπτει το ίδιο ακριβώς σύνολο $G_\varphi(A_{12}, B)$, το οποίο φαίνεται στην Εικόνα 2.7 και βεβαίως ταυτίζεται με το σύνολο Geršgorin.



Εικόνα 2.7: $G_{l_j}(A_{12}, B)$, $j=1, 2, \infty$ για τους πίνακες A_{12} και B .

Κεφάλαιο 3

Θεωρήματα Εγκλεισμού Ιδιοτιμών τύπου Geršgorin

3.1 Εισαγωγή

Πριν αναφερθούμε στα οβάλ του Cassini και στο σύνολο αυτών των οβάλ που ονομάζεται σύνολο Brauer προς τιμή του Γερμανού μαθηματικού που διέπρεψε τον περασμένο αιώνα στις ΗΠΑ, οφείλουμε να κάνουμε μια ανασκόπηση των προηγούμενων κεφαλαίων και να διερευνήσουμε το μέγεθος της επιρροής του Geršgorin στους μαθηματικούς της εποχής του, αλλά και του 20^{ου} αιώνα γενικότερα. Μια μικρή ιστορική αναδρομή θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε πόσο σημαντικό υπήρξε το βασικό θεώρημα του Geršgorin το 1931 πριν έρθουν οι Brauer, Brouard και λοιποί μαθηματικοί να το βελτιώσουν περαιτέρω όπως θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Ο Geršgorin λοιπόν το 1931 ήταν ο πρώτος μαθηματικός που έδειξε την ισοδυναμία του εγκλεισμού των ιδιοτιμών ενός πίνακα με την αντιστρεψιμότητά του λόγω αυστηρής διαγώνιας κυριαρχίας, αλλά πριν το ριζοσπαστικό αυτό αποτέλεσμα των ερευνών του, η πιθανή αυτή ισοδυναμία είχε ερευνηθεί και από τους Levy (1881), Desplanques (1887), Minkowski (1900) και Hadamard (1903). Βέβαια, να επισημάνουμε ότι η έρευνα του Levy περιορίστηκε μόνο σε πραγματικούς αριθμούς, ενώ ο Desplanques (1887) ήταν ο πρώτος που μελέτησε πίνακες μιγαδικών στοιχείων. Μάλιστα ανεξάρτητα του έργου του Desplanques το ίδιο φαίνεται να έκανε και ο Hadamard. Ο Brauer οδηγήθηκε και αυτός στο αρχικό θεώρημα του Geršgorin, επανανακαλύπτοντάς το, με τη διαφορά ότι δε διείδε την ισοδυναμία της αυστηρής διαγώνιας κυριαρχίας με το θεώρημα Geršgorin. Ο Brauer ασχολήθηκε κυρίως με την περίπτωση της εμφάνισης ξένων δίσκων στο σύνολο Geršgorin. Η παραπάνω ισοδυναμία παραδόξως έμεινε στην αφάνεια μέχρι και σχετικά πρόσφατα. Ο μόνος που έδειξε αρχικώς ιδιαίτερο ενδιαφέρον να μελετήσει και να εξελίξει αυτήν την ισοδυναμία ήταν ο Ostrowski, τα θεωρήματα του οποίου παρουσιάστηκαν στην §2.2.

Πλην της προηγούμενης βαρυσήμαντης ισοδυναμίας, εξέχουσα θέση στην εξέλιξη των χωρίων εγκλεισμού μιγαδικών πινάκων έχει και η εν δυνάμει μη υποβιβασιμότητά τους. Η χρήση της μη υποβιβασιμότητας πινάκων ως εργαλείο της γραμμικής άλγεβρας πιστώνεται στην Olga Taussky. Η Αυστρο-Ουγγαρέζα μαθηματικός διαδραμάτισε έναν καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη των προϋπάρχοντων θεωρημάτων, συνεισφέροντας απεριόριστα με τη σπουδαία αυτή επισήμανσή της. Το θεώρημα το οποίο προς τιμήν της φέρει το όνομα της παρουσιάστηκε στην §2.1 και μας δίνει μία αναγκαία και μη ικανή συνθήκη έτσι ώστε μια ιδιοτιμή ενός μη υποβιβάσιμου πίνακα να ανήκει στο σύνολο του συνόλου Geršgorin. Εκτοτε βέβαια έχουν γίνει προσπάθειες να βρεθούν αναγκαίες, αλλά και ικανές συνθήκες, με θετική μάλιστα έκβαση χάρη στο θεώρημα της Ρωσίδας μαθηματικού Kolotilina.

Πολύ σημαντική βεβαίως ήταν και η συμβολή του Ostrowski, ο οποίος πρωτοτύπησε με τον συνυπολογισμό και των αθροισμάτων στηλών στη διαμόρφωση των δίσκων Geršgorin. Εν συνεχεία, οι Fan και Hoffman υπήρξαν άξιοι συνεχιστές της ιδέας του Ostrowski, με αποκορύφωμα μάλιστα το θεώρημα του πρώτου. Ο Fan λίγα χρόνια μετά το θεώρημα του Ostrowski, χρησιμοποίησε το θεώρημα του Ουκρανού μαθηματικού για να κατασκευάσει μια παραλλαγή του βασιζόμενος στο θεώρημα Perron-Frobenius για τους μη αρνητικούς, μη υποβιβάσιμους πίνακες. Το θεώρημα αυτό μάλιστα χαρακτηρίζεται έως και σήμερα ως ένα από τα κορυφαία θεωρήματα τύπου Geršgorin.

Σκοπός όλων αυτών των μεθόδων ήταν και συνεχίζει να είναι η εκτίμηση του φάσματος ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Η ιδέα χρησιμοποίησης διαγωνίων πινάκων με στόχο το μετασχηματισμό πινάκων σε όμοιους και την κατά το δοκούν βελτίωση του θεωρήματος Geršgorin, ανήκε στον ίδιο τον Geršgorin. Η καλύτερη βέβαια εκτίμηση είναι ο απόλυτος προσδιορισμός των ιδιοτιμών, που επιτυγχάνεται μέσω της μεθόδου της κανονικής μορφής Jordan, όπου οι τιμές των διαγωνίων στοιχείων στη μορφή $S^{-1}AS$ (με S κατάλληλο αντιστρέψιμο πίνακα) είναι, όπως ειπώθηκε στην §2.2, οι ιδιοτιμές του πίνακα A , ενώ τα στοιχεία της άνω διαγωνίου (του άνω διαγώνιου πίνακα που προκύπτει), άσσοι ή μηδενικά, μας φανερώνουν την πολυπλοκότητα της εκάστοτε ιδιοτιμής. Παρόλα αυτά, το να βρεθεί ο κατάλληλος πίνακας S της παραπάνω διαδικασίας μόνο εύκολο δεν είναι, καθώς η χρήση αριθμητικών μεθόδων, όπως η QR, συνεπάγεται μεγάλο υπολογιστικό κόστος, ενώ πάντα ελοχεύει ο κίνδυνος παραποίησης της ακριβούς λύσης λόγω της ύπαρξης του σφάλματος αποκοπής και του σφάλματος στρογγυλοποίησης. Επομένως τα χωρία εγκλεισμού τύπου Geršgorin παραμένουν πάντα σε περίοπτη θέση λόγω της απλότητας της εφαρμογής τους.

Αξίζει πάντως να αναφερθεί ότι υπάρχει και μια μέση προσέγγιση στο προηγούμενο δίλημμα μεταξύ υπολογιστικών και απλών γραφικών μεθόδων. Μπορεί δηλαδή ο αρχικός πίνακας να διαμεριστεί και να εφαρμοστεί εν τέλει η επίλυση Jordan σε συγκεκριμένους υποπίνακες του σύνθετου πλέον πίνακα A . Επομένως προκύπτουν ενδιάμεσες μέθοδοι όσον αφορά την ακρίβεια των ιδιοτιμών και την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Στα εναπομείναντα βέβαια κεφάλαια της εργασίας ο στόχος θα παραμείνει να προσεγγιστούν όσο καλύτερα γίνεται οι σπουδαιότερες γραφικές/θεωρητικές μέθοδοι δίχως να αποτολμηθεί η εύρεση της βέλτιστης υπολογιστικής μεθόδου εγκλεισμού ιδιοτιμών.

3.2 Οβάλ του Cassini - Σύνολο Brauer

Η μετάβασή μας από τους δίσκους εγκλεισμού ιδιοτιμών στα οβάλ αντίστοιχων ιδιοτήτων ξεκινάει καταρχάς από το ακόλουθο αποτέλεσμα του Ostrowski:

Θεώρημα 3.2.1. Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$, αν ισχύει

$$|\alpha_{i,i}| |\alpha_{j,j}| > r_i(A) r_j(A) \quad \forall i, j \in N := \{1, 2, \dots, n\}, \text{ με } i \neq j. \quad (3.1)$$

τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με εις άτοπον απαγωγή. Υποθέτουμε λοιπόν ότι πίνακα $A \in C^{n \times n}$ ικανοποιεί την (3.1) και είναι ταυτόχρονα και μη αντιστρέψιμος. Τότε θα υπάρχει $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in C^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μηδέν) έτσι ώστε $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ταξινομώντας τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{x} σε απόλυτη τιμή κατά φθίνουσα σειρά, μπορούμε να βρούμε $s, t \in N$ με $s \neq t$, ώστε να ισχύει $|x_t| > \mathbf{0}$ και

$$|x_t| \geq |x_s| \geq \max\{|x_k| : k \in N \text{ με } k \neq s, k \neq t\}, \quad (3.2)$$

όπου ο τελευταίος όρος της τελευταίας σχέσης ορίζεται ίσος με το μηδέν αν $n=2$. Τότε η σχέση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ συνεπάγεται ότι θα ισχύει $\alpha_{i,i} x_i = - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \alpha_{i,j} x_j$ για κάθε $i \in N$. Λαμβάνοντας απόλυτες τιμές και εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι

$$|\alpha_{i,i}| |x_i| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |\alpha_{i,j}| |x_j| \quad \forall i \in N. \quad (3.3)$$

Επιλέγοντας $i = t$, η ανισότητα (3.3) μετασχηματίζεται με χρήση της (3.2) στην

$$|\alpha_{t,t}| |x_t| \leq \sum_{j \in N \setminus \{t\}} |\alpha_{t,j}| |x_j| \leq r_t(A) |x_s|. \quad (3.4)$$

Εάν $|x_s| = 0$, τότε από τη σχέση (3.4) συνεπάγεται ότι $|\alpha_{t,t}| |x_t| = 0$, δηλαδή $|\alpha_{t,t}| = 0$, καθώς το x_t είναι κατά απόλυτη τιμή μέγιστο στοιχείο του διανύσματος \mathbf{x} . Αυτό το αποτέλεσμα όμως θα ερχόταν σε σύγκρουση με το γεγονός ότι πρέπει $|\alpha_{i,i}| > 0$, $\forall i \in N$, το οποίο είναι άμεση συνέπεια της υπόθεσής μας.

Επομένως απορρίπτουμε την περίπτωση να ισχύει $|x_s| = 0$, καταλήγοντας έτσι ότι η s συνιστώσα είναι διάφορη του μηδενός. Ομοίως με πριν, αν επιλέξουμε $i = s$ στη σχέση (3.3), προκύπτει η σχέση $|\alpha_{s,s}| |x_s| \leq r_s(A) |x_t|$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την ανισότητα αυτή με την (3.4) λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

$$|\alpha_{t,t}| |\alpha_{s,s}| |x_s| |x_t| \leq r_t(A) r_s(A) |x_s| |x_t|.$$

Καθώς λοιπόν γνωρίζουμε ότι $|x_s| |x_t| > 0$, αυτόματα συμπεραίνουμε ότι $|\alpha_{t,t}| |\alpha_{s,s}| \leq r_t(A) r_s(A)$, που αντιτίθεται στην αρχική υπόθεση. Άτοπο. Συνεπώς ο πίνακας A δε μπορεί να έχει κάποια μηδενική ιδιοτιμή και είναι κατ' αυτόν τον τρόπο αντιστρέψιμος. ■

Παρατήρηση 3.2.2. Εύκολα διαπιστώνεται ότι αν κάποιος πίνακας είναι αυστηρά διαγώνια κυρίαρχος τότε η σχέση (3.1) και το Θεώρημα 3.2.1 ισχύουν. Αντιστρόφως, όταν ισχύει η σχέση (3.1) γνωρίζουμε ότι ισχύουν τουλάχιστον $n-1$ από τις n το πλήθος σχέσεις $|\alpha_{i,i}| > r_i(A)$ ($i \in N$) που χαρακτηρίζουν τον πίνακα A ως αυστηρά διαγώνια κυρίαρχο. Άρα χωρίς να είμαστε βέβαιοι για την αυστηρή διαγώνια κυριαρχία του πίνακα A συμπεραίνουμε ότι είναι αντιστρέψιμος. Το γεγονός αυτό καθιστά αυτομάτως το Θεώρημα 3.2.1 ισχυρότερο του θεωρήματος της αυστηρής διαγώνιας κυριαρχίας (Θεώρημα 1.2.9).

Στο Θεώρημα 3.2.1 κατέληξε δουλεύοντας μόνος του και ο Brauer το 1947 και μάλιστα το χρησιμοποίησε για να παράξει ένα χωρίο που δεν αποτελείται απαραίτητα από δίσκους και περιέχει πάντοτε το φάσμα ενός τυχαίου πίνακα $A \in C^{n \times n}$. Μάλιστα το θεώρημα αυτό είναι ισοδύναμο με το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.2.1 και ως εκ τούτου δε χρειάζεται απόδειξη.

Θεώρημα 3.2.3. (Θεώρημα Brauer) Έστω πίνακας $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$, και κάποια ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$. Υπάρχει τότε ένα ζεύγος διακεκριμένων ακεραίων i και j έτσι ώστε να ισχύει

$$\lambda \in K_{i,j}(A) := \{z \in C : |z - \alpha_{i,i}| |z - \alpha_{j,j}| \leq r_i(A) r_j(A)\}. \quad (3.5)$$

Καθώς μάλιστα η σχέση (3.5) ισχύει για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma(A) \subseteq K(A) := \bigcup_{\substack{i,j \in N \\ i \neq j}} K_{i,j}(A). \quad (3.6)$$

Το σύνολο $K_{i,i}(A)$ που ορίζεται στη σχέση (3.5) ονομάζεται **i-j-οστό (Brauer) Cassini οβάλ** του πίνακα A , ενώ το χωρίο $K(A)$ που ορίζεται μέσω της σχέσης (3.6) ονομάζεται **σύνολο Brauer**. Υπάρχουν συνολικά $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ τέτοια οβάλ του Cassini (το «K» ως συμβολισμός αυτών των χωρίων – που ως επί το πλείστον έχουν σχήμα οβάλ – προκύπτει από το όνομα του σπουδαίου μαθηματικού και αστρονόμου Giovanni Domenico Cassini) που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του συνόλου Brauer, εν αντιθέσει με τους n το πλήθος δίσκους Geršgorin του Θεωρήματος 1.2.2.

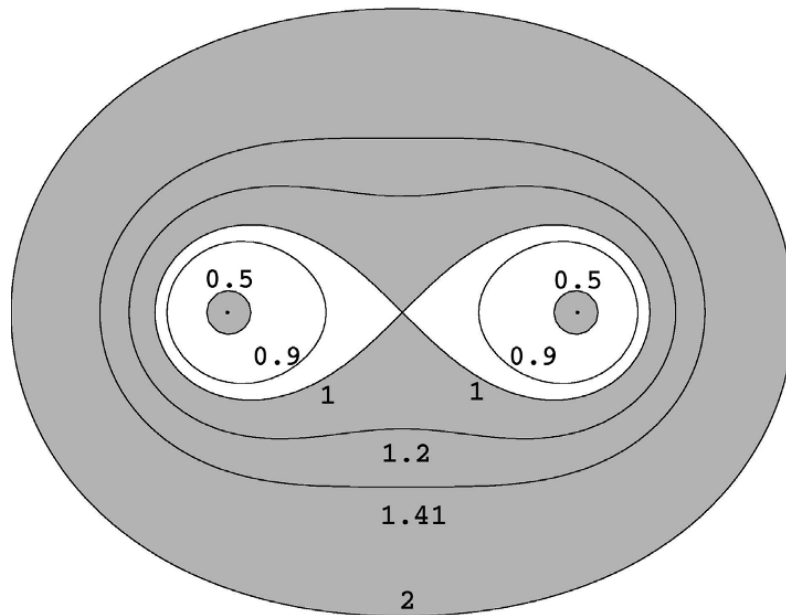
Παρατήρηση 3.2.4. Εύκολα μπορείς κανείς να διαπιστώσει ότι για $n > 3$ και όσο το n αυξάνεται, τα οβάλ του Cassini γίνονται ολοένα και περισσότερα σε σχέση με τους δίσκους του Geršgorin. (ίδιο πλήθος από οβάλ και δίσκους έχουμε μόνο στην περίπτωση που $n=3$, ενώ για $n=2$ προκύπτει ένα μοναδικό οβάλ). Επιπλέον τα οβάλ του Cassini αποτελούν αδιαμφισβήτητα ένα πιο πολύπλοκο χωρίο σε σχέση με τους δίσκους του Geršgorin καθώς ενδέχεται ένα οβάλ του Cassini να αποτελείται από δύο ξένα σύνολα σχήματος περίπου οβάλ. Συγκεκριμένα, οι δύο αυτές μη συνεκτικές συνιστώσες προκύπτουν αν ισχύει $|\alpha_{i,i} - \alpha_{j,j}| > 2(r_i(A) r_j(A))^{1/2}$.

Παράδειγμα: Για την καλύτερη κατανόηση των συνόρων των οβάλ του Cassini, έστω έξι διαφορετικά οβάλ Cassini που διαφέρουν μόνο στην «ακτίνα» τους. Επιπλέον, για την περαιτέρω απλούστευση του χωρίου θεωρήθηκε ότι $r_i(A) = r_j(A) = r$, ενώ οι τιμές των «εστιών» παραμένουν σταθερές και ίσες με -1 και 1 . Επομένως, τα οβάλ του παραδείγματος καθορίζονται ως εξής:

$$K(-1, 1, r) := \{z \in C : |z - 1| |z + 1| \leq r^2\}. \quad (3.7)$$

Για ενδεικτικές τιμές του r , από $r = 0$ έως και $r = 2$, λαμβάνουμε την Εικόνα 3.1. Πιο συγκεκριμένα,

- Για $r = 0$ το σύνολο K αποτελείται από δύο μεμονωμένα σημεία, το $z = -1$ και το $z = 1$.
- Για $r = 0,5$ το σύνολο K αποτελείται από δύο σχεδόν κυκλικά χωρία, σχεδόν κεντραρισμένα στο -1 και 1 .
- Για $r = 0,9$ το σύνολο K αποτελείται από δύο ξεχωριστά χωρία που έχουν αποκτήσει ένα σαφές ωοειδές σχήμα και τείνουν να ενωθούν όσο το r αυξάνεται.
- Για $r = 1$ το σύνολο K είναι για πρώτη φορά ένα συνεκτικό σύνολο, με το $z = 0$ να είναι το σημείο που επιφέρει κατά μία έννοια τη συνεκτικότητα στο K .
- Για $r \geq 1$ το σύνολο K είναι πλέον πάντα ένα κλειστό και συνεκτικό σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο.
- Για $r \geq \sqrt{2}$ το σύνολο K είναι πλέον κυρτό και παραπέμπει εμφανώς σχηματικά σε έλλειψη.



Εικόνα 3.1: Τα οβάλ του Cassini για το σύνολο $K(-1, 1, r)$ της σχέσης (3.7).

Ας γενικεύσουμε όμως την περίπτωση που παρατηρούνται δύο ξεχωριστά χωρία σε ένα οβάλ του Cassini. Θεωρούμε λοιπόν την καμπύλη $\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| |z - \beta| \leq \rho\}$, όπου $\alpha \neq \beta$. Εφαρμόζοντας τον τύπο από το τέλος της Παρατήρησης 3.2.4 στην καμπύλη, προκύπτει ότι η καμπύλη είναι «κομματιασμένη» αν $0 < \rho < |\beta - \alpha|^2 / 4$. Μάλιστα αυτές οι δύο επιμέρους προκύπτουσες καμπύλες είναι σχεδόν κύκλοι, με την ακτίνα του κάθε κύκλου να είναι ασυμπτωτικά $\rho / |\beta - \alpha|$, όσο $\rho \rightarrow 0$.

Επομένως χρησιμοποιώντας την ορολογία των πινάκων στα οβάλ του Cassini, συμπεραίνουμε αντίστοιχα ότι αν ο λόγος $r_i(A)r_j(A) / |\alpha_{i,i} - \alpha_{j,j}|$ είναι αρκετά μικρός, τότε έχουμε χωρία που σχηματίζουν ασυμπτωτικά κύκλο όταν $r_i(A)r_j(A) \rightarrow 0$. Όσο όμως η προηγούμενη ποσότητα αυξάνεται, βλέπουμε ένα συνεκτικό σύνολο να τείνει να σχηματιστεί και επιπρόσθετα αν η ποσότητα αυξηθεί ακόμη περισσότερο, τότε έχουμε ένα κυρτό σύνολο. Όσο μάλιστα $r_i(A)r_j(A) / |\alpha_{i,i} - \alpha_{j,j}| \rightarrow \infty$, τείνει να εμφανιστεί ένα σύνολο ελλειπτικού σχήματος.

Πρακτικά, για το παράδειγμα της προηγούμενης σελίδας, μπορούμε να καταλήξουμε ότι:

- Ο $K(-1, 1, r)$ αποτελείται από δύο μη συνεκτικές συνιστώσες $\forall 0 \leq r < 1$.
- Ο $K(-1, 1, r)$ είναι ένα κλειστό και συνεκτικό σύνολο $\forall r \geq 1$.
- Ο $K(-1, 1, r)$ είναι ένα κυρτό σύνολο $\forall r \geq \sqrt{2}$.

Παρατήρηση 3.2.5. Μία ομολογουμένως ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι τόσο το σύνολο Geršgorin $\Gamma(A)$ που αποτελείται από n το πλήθος δίσκους Geršgorin, όσο και το σύνολο Brauer που αποτελείται από $\binom{n}{2}$ το πλήθος οβάλ του Cassini, εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ίδιες $2n$ το πλήθος παραμέτρους που εξάγονται από τον πίνακα A που μελετάμε. Αυτές λοιπόν είναι οι αριθμοί:

$$\{\alpha_{i,i}\}_{i=1}^n \text{ και } \{\tau_i(A)\}_{i=1}^n, \quad (3.8)$$

που χρειάζονται τόσο στο Θεώρημα 1.2.2, όσο και στο Θεώρημα 3.2.3.

Καθίσταται πλέον αναγκαία η ερώτηση, ιδίως από τη στιγμή που γνωρίζοντας τις παραπάνω τιμές μπορούμε να υπολογίσουμε και τα δύο σύνολα, ποιο από τα σύνολα $\Gamma(A)$ και $K(A)$ είναι μικρότερο. Είναι προφανές ότι το μικρότερο σύνολο αυτού του ερωτήματος θα μας προσδιόριζε γραφικά καλύτερα τις ιδιοτιμές του δοθέντος πίνακα A . Η απάντηση δόθηκε από τον ίδιο τον Brauer το 1947 και διατυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.6. (Σύγκριση συνόλων Geršgorin και Brauer) Για κάθε πίνακα $A \in C^{n \times n}$ με $n \geq 2$, ισχύει

$$K(A) \subseteq \Gamma(A). \quad (3.9)$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι για κάθε σημείο $z \in K(A)$ ισχύει ότι $z \in \Gamma(A)$. Έστω λοιπόν $i, j \in N$ με $i \neq j$ και z ένα τυχαίο σημείο του συνόλου Brauer. Τότε εξ ορισμού από σχέση (3.5) έχουμε ότι

$$|z - \alpha_{i,i}| |z - \alpha_{j,j}| \leq r_i(A) r_j(A). \quad (3.10)$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- i. Ένα από τα δύο αθροίσματα γραμμών είναι μηδενικό. Τότε $r_i(A) r_j(A) = 0$ και συνεπώς είτε $z = \alpha_{i,i}$, είτε $z = \alpha_{j,j}$. Αλλά επειδή $\alpha_{i,i} \in \Gamma_i(A)$ και $\alpha_{j,j} \in \Gamma_j(A)$, συνεπάγεται ότι $z \in \Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A)$.
- ii. Αν $r_i(A) r_j(A) > 0$, τότε από τη σχέση (3.10) προκύπτει

$$\frac{|z - \alpha_{i,i}|}{r_i(A)} \frac{|z - \alpha_{j,j}|}{r_j(A)} \leq 1. \quad (3.11)$$

Καθώς οι δύο παράγοντες στις παρενθέσεις δεν μπορούν και οι δύο να υπερβαίνουν τη μονάδα, θα ισχύει ότι είτε $|z - \alpha_{i,i}| \leq r_i(A)$, άρα $z \in \Gamma_i(A)$, είτε αντίστοιχα ότι $z \in \Gamma_j(A)$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε ότι $z \in \Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A)$ και από αρχική υπόθεση ότι το z ανήκει στο i - j -οστό οβάλ του Cassini, έπεται ότι

$$K_{i,j}(A) \subseteq \Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A). \quad (3.12)$$

Επειδή όμως η σχέση (3.12) ισχύει $\forall i, j$ ($i \neq j$) $\in N$, από τους ορισμούς των δύο συνόλων προκύπτει τελικά

$$K(A) := \bigcup_{\substack{i,j \in N \\ i \neq j}} K_{i,j}(A) \subseteq \bigcup_{\substack{i,j \in N \\ i \neq j}} \{\Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A)\} = \bigcup_{k \in N} \Gamma_k(A) =: \Gamma(A),$$

αποτέλεσμα το οποίο μας δίνει ότι για οποιονδήποτε μιγαδικό πίνακα A το σύνολο Brauer είναι υποσύνολο του Geršgorin συνόλου. ■

Παρατήρηση 3.2.7. Συναντάται ενίοτε και η περίπτωση όπου η σχέση (3.12) μετατρέπεται σε ισότητα, δηλαδή τα δύο σύνολα ταυτίζονται. Αυτό συγκεκριμένα συμβαίνει όταν ισχύει είτε ότι $r_i(A) = r_j(A) = 0$, είτε όταν $r_i(A) = r_j(A) > 0$ και $\alpha_{i,i} = \alpha_{j,j}$.

Στην πρώτη περίπτωση ισχύει εξ ορισμού των δίσκων Geršgorin ότι $\Gamma_i(A) = \alpha_{i,i}$ και $\Gamma_j(A) = \alpha_{j,j}$, ενώ πάλι εξ ορισμού ισχύει για το οβάλ του Cassini ότι $K_{i,j}(A) = \{\alpha_{i,i}, \alpha_{j,j}\}$. Άρα $K_{i,j}(A) = \Gamma_i(A) \cup \Gamma_j(A)$.

Στη δεύτερη περίπτωση σχηματίζονται δύο ομόκεντροι δίσκοι Geršgorin με ίδια μάλιστα ακτίνα, δηλαδή $\Gamma_i(A) = \Gamma_j(A)$, ενώ για το οβάλ του Cassini έχουμε $K_{i,j}(A) := \{z \in C : |z - \alpha_{i,i}| |z - \alpha_{i,i}| \leq r_i(A) r_i(A)\}$, που συνεπάγεται με απαλοιφή των σχηματιζόμενων τετραγώνων, καθώς και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί, ότι $K_{i,j}(A) := \{z \in C : |z - \alpha_{i,i}| \leq r_i(A)\} = \Gamma_i(A) = \Gamma_j(A)$.

Πρόταση 3.2.8. Μπορούμε ανάλογα με την επέκταση του θεωρήματος Geršgorin (Θεώρημα 1.2.16) να προβούμε και στην επέκταση του θεωρήματος Brauer (Θεώρημα 3.2.3). Επιλέγουμε επομένως ένα τυχαίο οβάλ του Cassini $K_{i_1, j_1}(A)$ από τα $n(n-1)/2$ οβάλ που δημιουργούνται από έναν τυχαίο πίνακα $A \in C^{n \times n}$ με $n \geq 2$ (καθώς για $n=1$ το οβάλ εκφυλίζεται σε δίσκο Geršgorin). Έστω ότι αυτό το συγκεκριμένο οβάλ αποτελεί το αρχικό μας σύνολο. Μπορούμε με ασφάλεια να πούμε ότι στο αρχικό μας σύνολο περιέχονται δύο ιδιοτιμές. Το σύνολό μας γενικά θα περιέχει $|S|$ το πλήθος ιδιοτιμές, όπου αρχικά $S = \{i_1, j_1\}$. Για κάθε έτερο όμως οβάλ του Cassini $K_{i_2, j_2}(A)$ που τέμνει το αρχικό μας σύνολο με

$i_2 \notin S$ ή $j_2 \notin S$, προσθέτουμε το νέο δείκτη (ή τους νέους δείκτες) στο σύνολο δεικτών S και αυτομάτως αυξάνεται η πληθικότητα του συνόλου S κατά μία ή δύο μονάδες.

Με τη διαδικασία αυτή λοιπόν έχει αποδειχθεί ότι κάθε σύνολο από οβάλ του Cassini, στο οποίο όμως τα οβάλ τέμνονται τουλάχιστον ανά δύο, περιέχει ακριβώς $|S|$ το πλήθος ιδιοτιμές, όπου S είναι σύνολο φυσικών ($S \subseteq \mathbb{N} := \{1, 2, \dots, n\}$) και συγκεκριμένα το σύνολο των δεικτών που αρκούν για να προσδιοριστεί πλήρως το σύνολο με τα οβάλ του Cassini που μελετάται.

Παρατήρηση 3.2.9. Πριν προχωρήσουμε στο πρώτο παράδειγμα σχεδιασμού των οβάλ του Cassini δοθέντος ενός συγκεκριμένου πίνακα με μιγαδικές τιμές, οφείλουμε να αντιπαραβάλλουμε τα δύο κυριότερα χαρακτηριστικά του συνόλου Brauer.

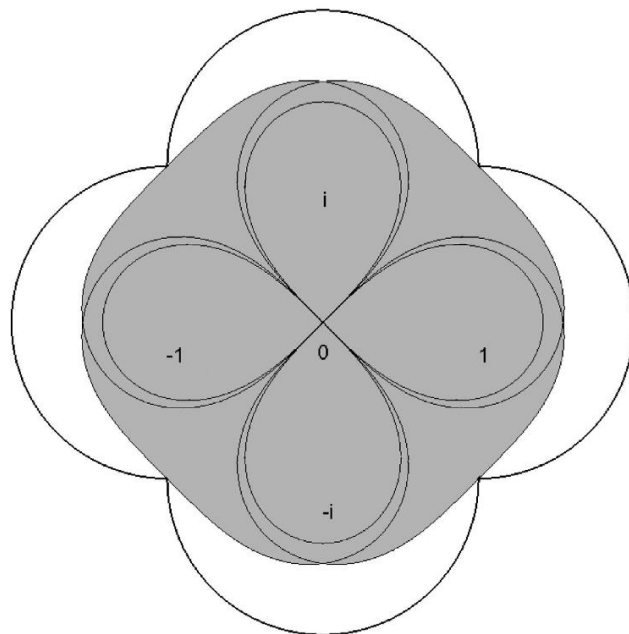
Πλεονέκτημα: Το σύνολο Brauer για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $n \geq 2$, είναι πάντα υποσύνολο του συνόλου Geršgorin.

Μειονέκτημα: Χρειάζονται αρκετοί περισσότεροι υπολογιστικοί πόροι και υπολογισμοί για να υπολογιστεί το σύνολο Brauer σε σχέση με το σύνολο Geršgorin. Ενδεικτικό είναι ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος του πίνακα, το πλήθος των υπολογισμών ανεβαίνει με αυξανόμενο βήμα, καθώς για αύξηση μίας μονάδας του μεγέθους n του πίνακα απαιτείται να βρεθούν $n-1$ το πλήθος οβάλ του Cassini σε αντίθεση με τον μόλις έναν επιπλέον δίσκο Geršgorin.

Παράδειγμα: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.2.6 για τον πίνακα A_{13} , όπου

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & i & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Προφανώς για όλα αθροίσματα γραμμής ισχύει $r_i(A_{13}) = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Βλέπουμε λοιπόν στην Εικόνα 3.2 σχεδιασμένο τόσο το $\Gamma(A_{13})$, όσο και το $K(A_{13})$. Το πρώτο σύνολο αποτελείται από τους ισακτινικούς δίσκους Geršgorin με κέντρα το -1 , 1 , i και $-i$. Στην Εικόνα 3.2 το $\Gamma(A_{13})$ οριοθετείται από τέσσερα ημικύκλια ακτίνας 1 που ισαπέχουν από το σημείο μηδέν και σχηματίζουν ένα συμμετρικό «νούφαρο». Εσωτερικά του, βρίσκεται ένα γραμμοσκιασμένο χωρίο, που είναι το $K(A_{13})$.



Εικόνα 3.2: Το σύνολο $\Gamma(A_{13})$ και το υποσύνολό του $K(A_{13})$ (γραμμοσκιασμένο).

Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο Brauer αποτελείται από έξι οβάλ του Cassini, τέσσερα εκ των οποίων είναι κυρτά και έχουν σχήμα οβάλ, ενώ τα άλλα δύο έχουν σχήμα «πετάλων». Συγκεκριμένα πρόκειται για το $K_{1,3}(A_{13})$ που έχει «εστίες» το 1 και το -1 και αποτελείται από το πάνω και το κάτω πέταλο, ενώ τα άλλα δύο πέταλα αποτελούν το $K_{2,4}(A_{13})$. Και τα δύο αυτά οβάλ του Cassini είναι συνεκτικά έστω και οριακά λόγω του ότι το μοναδικό σημείο που ανήκει σε περισσότερα από ένα πέταλα είναι το μηδέν και εν προκειμένη περιπτώσει ανήκει σε όλα τα πέταλα.

Παρατηρούμε βεβαίως ότι ισχύει $K(A_{13}) \subseteq \Gamma(A_{13})$ και ότι επαληθεύεται και γραφικά το Θεώρημα 3.2.6.

Πρόταση 3.2.10. Δοθέντος ενός πίνακα $A \in C^{n \times n}$ με $n \geq 2$. Έστω κάποιο σημείο του μιγαδικού επιπέδου που ανήκει στο σύνορο δύο διαφορετικών δίσκων Geršgorin, δηλαδή $z' \in \partial\Gamma_i(A)$ και $z' \in \partial\Gamma_j(A)$. Τότε θα ισχύει επιπλέον και $z' \in \partial K_{i,j}(A)$, δηλαδή το z' θα ανήκει και στο σύνορο του i - j -οστού οβάλ του Cassini.

Απόδειξη: Επειδή το σημείο z' ανήκει στο σύνορο του i -οστού δίσκου Geršgorin γνωρίζουμε ότι θα ισχύει $|z' - a_{i,i}| = r_i(A)$. Κατά παρόμοιο τρόπο από το σημείο z' θα διέρχεται και ο κύκλος Geršgorin $|z - a_{j,j}| = r_j(A)$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις αυτών των δύο κύκλων και για $z = z'$ λαμβάνουμε $|z' - a_{i,i}| |z' - a_{j,j}| = r_i(A) r_j(A)$ και βεβαίως αυτό συνεπάγεται ότι $z' \in \partial K_{i,j}(A)$. ■

Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, τα σύνολα $\Gamma(A)$ και $K(A)$ εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ίδιες $2n$ το πλήθος παραμέτρους, οι οποίες με τη σειρά τους εξαρτώνται από όλα τα στοιχεία του πίνακα A . Παρατηρούμε όμως ότι κρατώντας τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα σταθερά, προσθέτοντας μία ποσότητα ε σε ένα μη διαγώνιο στοιχείο του πίνακα και αφαιρώντας την ίδια ποσότητα από κάποιο άλλο στοιχείο της ίδιας γραμμής, τότε το άθροισμα γραμμής της γραμμής αυτής παραμένει και αυτό σταθερό. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί για οποιοδήποτε ζεύγος στοιχείων οποιασδήποτε γραμμής για οποιαδήποτε ποσότητα ε . Συνεπώς, μεταβάλλοντας με συνεχή τρόπο κάποιο ε κάθε φορά που εφαρμόζουμε τη διαδικασία αυτή προκύπτει ένα «συνεχές δείγμα» πινάκων, οι οποίοι έχουν όλοι ανεξαρτέτως δύο κοινά χαρακτηριστικά. Τα ίσα διαγώνια στοιχεία τους $a_{i,i}(A) \forall i \in N$ και τα ίσα αθροίσματα γραμμών $r_i(A) \forall i \in N$. Οδηγούμαστε επομένως στον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 3.2.11. Για κάθε πίνακα $A \in C^{n \times n}$ ορίζουμε την **κλάση πινάκων** (equiradial set) του A ως το σύνολο όλων των πινάκων που ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$\omega(A) := \{B = [\beta_{i,j}] \in C^{n \times n} : \beta_{i,i} = a_{i,i} \text{ και } r_i(B) = r_i(A) \forall i \in N\}, \quad (3.13)$$

ενώ έπεται και ο συμπληρωματικός ορισμός της **διευρυμένης κλάσης πινάκων** (extended equiradial set) του A , η οποία είναι μία κλάση που περιλαμβάνει όλους τους πίνακες που ικανοποιούν τη σχέση

$$\omega(A) := \{B = [\beta_{i,j}] \in C^{n \times n} : \beta_{i,i} = a_{i,i} \text{ και } r_i(B) \leq r_i(A) \forall i \in N\}. \quad (3.14)$$

Παρατήρηση 3.2.12. Είναι προφανές είναι η διευρυμένη κλάση πινάκων $\omega(A)$ λόγω της ανισότητας των αθροισμάτων γραμμών στη σχέση (3.14) θα είναι μεγαλύτερη από την αρχική κλάση $\omega(A)$, δηλαδή $\omega(A) \subseteq \omega(A)$. Επίσης, η κλάση πινάκων $\omega(A)$ συναντάται στη βιβλιογραφία και ως ισακτινικό σύνολο του A και η κλάση $\omega(A)$ συναντάται αντίστοιχα ως διευρυμένο ισακτινικό σύνολο του A .

Όπως έχουμε ορίσει το φάσμα ενός πίνακα $A \in C^{n \times n}$ έτσι μπορούμε να ορίσουμε και το φάσμα της κλάσης του πίνακα A . Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$\sigma(\omega(A)) := \bigcup_{B \in \omega(A)} \sigma(B) \text{ και } \sigma(\omega(A)) := \bigcup_{B \in \omega(A)} \sigma(B). \quad (3.15)$$

Από τους προηγούμενους ορισμούς, την ανισότητα στη σχέση (3.5) και τη σχέση (3.6) προκύπτει ότι

$$\sigma(\omega(A)) \subseteq \sigma(\omega(A)) \subseteq K(A). \quad (3.16)$$

Το κυρίαρχο βέβαια ερώτημα που «βασάνιζε» επί σειρά δεκαετιών τους κορυφαίους μαθηματικούς στον κλάδο της ανάλυσης πινάκων ήταν αν μπορούσε υπό κάποιες προϋποθέσεις η σχέση (3.16) να αποτελέσει μια σχέση ισότητας συνόλων. Η απάντηση δόθηκε πρωτίστως από τον Γερμανό μαθηματικό Engel το 1973.

Θεώρημα 3.2.13. (Θεώρημα Engel) Για κάθε πίνακα $A \in C^{n \times n}$ με $n \geq 2$, ισχύει

$$\sigma(\omega(A)) = \begin{cases} \partial K(A) = \partial K_{1,2}(A) & \text{αν } n=2, \\ K(A) & \text{αν } n \geq 3, \end{cases} \quad (3.17)$$

ενώ ισχύει επίσης για $n \geq 2$,

$$\sigma(\omega(A)) = K(A). \quad (3.18)$$

Απόδειξη: Καταρχάς για το πολύ σημαντικό αυτό θεώρημα έχουν γραφεί κατά το παρελθόν αρκετές αποδείξεις. Η απόδειξη που παρατίθεται εδώ είναι αυτή των Varga και Krautstengl και αποτελείται από πέντε διαφορετικά σκέλη.

Το πρώτο σκέλος περιλαμβάνει την απόδειξη της σχέσης (3.17) όταν $n=2$. Έστω λοιπόν πίνακας $B \in \sigma(\omega(A))$ ο οποίος από τον ορισμό του (σχέση (3.13)) θα έχει μια γενική μορφή

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & r_1(A)e^{i\psi_1} \\ r_2(A)e^{i\psi_2} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}, \text{ όπου } \psi_1 \text{ και } \psi_2 \text{ αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί.} \quad (3.19)$$

Εάν λ μια ιδιοτιμή του πίνακα B , τότε θα ισχύει $\det(B - \lambda I) = 0$, και έτσι από την (3.19) έχουμε

$$(\alpha_{1,1} - \lambda)(\alpha_{2,2} - \lambda) = r_1(A)r_2(A)e^{i(\psi_1 + \psi_2)}, \quad (3.20)$$

Από τη σχέση (3.20) με χρήση απολύτων συνεπάγεται ότι

$$|\alpha_{1,1} - \lambda| |\alpha_{2,2} - \lambda| = r_1(A)r_2(A). \quad (3.21)$$

Καθώς η σχέση (3.21) αντιστοιχεί στη σχέση (3.5) στην περίπτωση που έχουμε ισότητα, θα ισχύει ότι $\lambda \in \partial K_{1,2}(A)$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε ιδιοτιμή οποιουδήποτε πίνακα B που ανήκει στο $\omega(A)$ και καθώς ισχύει προφανώς στην περίπτωση των 2×2 πινάκων ότι $K_{1,2}(A) = K(A)$, καταλήγουμε ότι

$$\sigma(\omega(A)) \subseteq \partial K_{1,2}(A) = \partial K(A). \quad (3.22)$$

Αντιστρόφως, διαπιστώνεται ότι κάθε σημείο του συνόρου $\partial K_{1,2}(A)$ για κατάλληλες επιλογές των ψ_1 και ψ_2 μπορεί να αποτελέσει ιδιοτιμή κάποιου πίνακα B της μορφής (3.19). Επομένως συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\sigma(\omega(A)) = \partial K_{1,2}(A) = \partial K(A)$ που είναι και το πρώτο σκέλος της σχέσης (3.17).

→ Για την απόδειξη του δεύτερου σκέλους της (3.17) διερευνούμε πρώτα την περίπτωση που $n \geq 4$. Έστω λοιπόν ο τετραγωνικός και σύνθετος πίνακας $B \in \omega(A)$ ο οποίος μπορεί να διαμεριστεί στη μορφή

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline \circ & B_{2,2} \end{array} \right), \quad (3.23)$$

όπου

$$B_{1,1} := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & se^{i\psi_1} \\ te^{i\psi_2} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}, \text{ με } 0 \leq s \leq r_1(A), 0 \leq t \leq r_2(A). \quad (3.24)$$

Οι ψ_1 και ψ_2 είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί, ενώ ισχύει για τα διαγώνια στοιχεία $\beta_{i,i} = \alpha_{i,i} \forall i \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, οποιεσδήποτε τιμές s και t και αν επιλεγούν, μπορούμε να φτιάξουμε τον $B_{1,2}$ κατάλληλα έτσι ώστε τα αθροίσματα γραμμών $r_1(B)$ και $r_2(B)$ να είναι ίσα με τα αντίστοιχα του πίνακα A .

Κατά παρόμοιο τρόπο, επειδή $n \geq 4$ και συνεπώς ο $B_{2,2}$ της (3.23) θα είναι ένας τετραγωνικός πίνακας μεγέθους τουλάχιστον 2×2 , και μπορούν να επιλεγούν με κατάλληλο τρόπο τα στοιχεία του ούτως ώστε όλα τα αθροίσματα των γραμμών του να ισούνται με τα $n-2$ αντίστοιχα αθροίσματα του πίνακα A . Άρα είναι εμφανές ότι ο πίνακας B της σχέσης (3.23) λόγω της επιτηδευμένης κατασκευής των υποπινάκων του θα ανήκει στην κλάση πινάκων του A , $\omega(A)$. Ο λόγος μάλιστα που υποτέθηκε ότι πρέπει $n \geq 4$, είναι ότι στην περίπτωση που ισχύει $n=3$, ο $B_{2,2}$ ταυτίζεται επί της ουσίας με το στοιχείο $a_{3,3}$ του πίνακα A και ως εκ τούτου δεν μπορεί να αληθεύει η προηγούμενη αποδεικτική διαδικασία, εξαιρουμένης της περιπτώσεως όπου $r_3(A) = 0$.

Για να ολοκληρώσουμε όμως το δεύτερο σκέλος της απόδειξης, είναι εμφανές ότι

$$\sigma(B) = \sigma(B_{1,1}) \cup \sigma(B_{2,2}), \quad (3.25)$$

ενώ για κάθε $z \in K_{1,2}(A)$ μπορούν να βρεθούν κατάλληλες τιμές στις παραμέτρους ψ_1, ψ_2, s και t , έτσι ώστε το z να είναι επιπρόσθετα και ιδιοτιμή του $B_{1,1}$. Με άλλα λόγια οι ιδιοτιμές των πινάκων $B_{1,1}$, που προκύπτουν για τις διάφορες επιλογές τιμών των παραμέτρων, γεμίζουν όλο το χωρίο του μοναδικού οβάλ του $B_{1,1}$, του εκάστοτε $K_{1,2}(B_{1,1})$, που μπορεί από τον ορισμό του $B_{1,1}$ να ταυτιστεί με το $K_{1,2}(A)$. Για τις υπόλοιπες ιδιοτιμές του B (δηλαδή αυτές του $B_{2,2}$) γνωρίζουμε από τη σχέση (3.16) ότι κείνται στο σύνολο Brauer $K(A)$.

Η μεθοδολογία του σκέλους αυτού μπορεί να εφαρμοστεί για οποιοδήποτε οβάλ του Cassini $K_{i,j}(A)$, $i \neq j$, απλά και μόνο με μία κατάλληλη μετάθεση γραμμών και στηλών του B της σχέσης (3.23) που θα συνεπάγεται τη μετακίνηση της i -οστής γραμμής πάνω από όλες τις υπόλοιπες γραμμές ως γραμμή 1 και αντίστοιχα την μετακίνηση της j -οστής γραμμής ώστε να γίνει η γραμμή 2 του νέου πίνακα. Επομένως οι ιδιοτιμές όλων των μετατεθειμένων B που μπορούν να προκύψουν θα καλύπτουν εν τέλει όλο το σύνολο Brauer $K(A)$ και συνεπώς καταλήγουμε ότι $\sigma(\omega(A)) = K(A) \forall n \geq 4$.

→ Για την περίπτωση όπου $n = 3$ (τρίτο σκέλος της απόδειξης), ο βοηθητικός πίνακας B που ανήκει στην κλάση πινάκων του A είναι μεγέθους πλέον 3×3 και έχει τη μορφή

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & se^{i\psi_1} & (r_1(A)-s)e^{i\psi_2} \\ te^{i\psi_3} & \alpha_{2,2} & (r_2(A)-t)e^{i\psi_4} \\ ue^{i\psi_5} & (r_3(A)-u)e^{i\psi_6} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

όπου

$$0 \leq s \leq r_1(A), \quad 0 \leq t \leq r_2(A), \quad 0 \leq u \leq r_3(A), \quad (3.27)$$

ενώ οι $\{\psi_i\}_{i=1}^6$ είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί.

Έστω ότι επιλέγουμε έναν τυχαίο μιγαδικό z που να ανήκει στο οβάλ του Cassini $K_{1,2}(A)$. Εξ ορισμού θα ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$|z - \alpha_{1,1}| |z - \alpha_{2,2}| \leq r_1(A) r_2(A). \quad (3.28)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις. Αν $r_1(A) = 0$, τότε από τη σχέση (3.28) θα ισχύει είτε ότι $z = \alpha_{1,1}$, είτε ότι $z = \alpha_{2,2}$. Βέβαια, αν $r_1(A) = 0$, τότε γνωρίζουμε ότι η πρώτη γραμμή του πίνακα B είναι η $[\alpha_{1,1}, 0, 0]$, το οποίο σημαίνει ότι η $\alpha_{1,1} = z$ είναι μια ιδιοτιμή του B . Ακριβώς το ίδιο επιχείρημα χρησιμοποιούμε όταν $r_2(A) = 0$ για να καταλήξουμε ότι και το $\alpha_{2,2}$ μπορεί να είναι ιδιοτιμή του B .

Υποθέτουμε πλέον ότι $r_1(A) r_2(A) > 0$. Για κάποιο s για το οποίο ισχύει $0 \leq s \leq r_1(A)$, γνωρίζουμε ότι $|z - \alpha_{1,1}| |z - \alpha_{2,2}| = s r_2(A)$ και επιλέγουμε πραγματικό αριθμό ψ έτσι ώστε να ισχύει $(\alpha_{1,1} - z)(\alpha_{2,2} - z) = s r_2(A) e^{i\psi}$. Εν συνεχεία θέτουμε $\alpha := r_2(A) + |\alpha_{2,2} - z|$, όπου $\alpha > 0$ και ορίζουμε τον πίνακα

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & se^{i\psi} & (r_1(A)-s) \\ r_2(A) & \alpha_{2,2} & 0 \\ \frac{r_2(A)r_3(A)}{a} & \frac{(\alpha_{2,2}-z)r_3(A)}{a} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

ο οποίος μπορεί να επαληθευτεί ότι ανήκει στο $\omega(A)$. Επίσης για το προηγούμενο z ισχύει ότι $\det(\tilde{B} - zI) = 0$, δηλαδή το z είναι ιδιοτιμή του \tilde{B} . Επομένως για κάθε $z \in K_{1,2}(A)$ ισχύει ότι το z είναι ιδιοτιμή κάποιου πίνακα B που ανήκει στην κλάση πινάκων του A . Συνεπώς, αφού αυτή η διαδικασία μπορεί με τις κατάλληλες μεταθέσεις να εφαρμοστεί και για τα άλλα δύο οβάλ του συνόλου Brauer $K(A)$, ισχύει τελικά ότι $\sigma(\omega(A)) = K(A)$.

→ Για την απόδειξη της σχέσης (3.18) αρκεί να συνδυάσουμε τη σχέση εγκλεισμού (3.16) με τη σχέση (3.17) που μόλις αποδείχθηκε. Έπεται αυτομάτως λοιπόν ότι για $n \geq 3$, ισχύει $\sigma(\omega(A)) = K(A)$.

→ Για την περίπτωση που $n=2$, ισχύει ότι το σύνολο Brauer αποτελείται από το μόλις ένα σχηματιζόμενο οβάλ του Cassini, το $K_{1,2}(A)$. Οι πίνακες που ανήκουν στο $\sigma(\omega(A))$ είναι οι πίνακες B της

μορφής
$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & s \cdot \tau_1(A)e^{i\psi_1} \\ t \cdot \tau_2(A)e^{i\psi_2} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}, \text{ με } 0 \leq s \leq 1 \text{ και } 0 \leq t \leq 1.$$

Τότε από το πρώτο σκέλος της απόδειξης γνωρίζουμε ότι για $s=1$ και $t=1$ ισχύει $\sigma(\omega(A)) \supseteq \partial K_{1,2}(A) = \partial K(A)$. Μειώνοντας σταδιακά και με συνεχή τρόπο τις παραμέτρους s και t από την αρχική τους τιμή που είναι η μονάδα ως το μηδέν, σε κάθε ένα βήμα (από τα υπεραριθμησίμως άπειρα που υπάρχουν λόγω του συνεχούς χαρακτήρα της όλης διαδικασίας) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όλο το εσωτερικό του αρχικού $K_{1,2}(A)$ θα είναι σημείο προς σημείο ιδιοτιμή ενός πίνακα $B \in \omega(A)$. Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\sigma(\omega(A)) = K_{1,2}(A) = K(A)$.

⇒ Ισχύει επομένως ότι $\sigma(\omega(A)) = K(A)$ για $n \geq 2$. ■

Το Θεώρημα 3.2.13 έμμεσα μας παραπέμπει σε ένα ακόμη πλεονέκτημα του συνόλου Brauer εν συγκρίσει με το σύνολο Geršgorin για κάθε πίνακα $A \in C^{n \times n}$ με $n \geq 3$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο Brauer $K(A)$ υπολογίζει επακριβώς το φάσμα όλων των πινάκων που ανήκουν στην ίδια κλάση με τον πίνακα A , καθώς είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη ότι ταυτίζεται πάντα με αυτό το σύνολο. Επιπλέον, ταυτίζεται και με το σύνολο των φασμάτων των πινάκων που ανήκουν στη διευρυμένη κλάση του πίνακα A . Ως εκ τούτου, όταν μελετάμε κάποιον πίνακα με σταθερές τις $2n$ χαρακτηριστικές του ποσότητες της (3.8), τότε το σύνολο Brauer συνεισφέρει τα μάλα στη διεξαγωγή άμεσων συμπερασμάτων.

3.3 Λημνίσκοι Υψηλότερης Τάξης

Έστω πίνακας $A \in C^{n \times n}$ και $\{\mathbf{i}_j\}_{j=1}^m$ οι m το πλήθος οποιοιδήποτε διακεκριμένοι ακέραιοι του συνόλου $N := \{1, 2, \dots, n\}$, με $n \geq m$. Τότε ο λημνίσκος τάξης m που παράγεται από τους ακεραίους $\{\mathbf{i}_j\}_{j=1}^m$ και τους $2n$ το πλήθος αριθμούς $\{\alpha_{i,i}\}_{i=1}^n$ και $\{\Gamma_i(A)\}_{i=1}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο που ανήκει στο μιγαδικό επίπεδο C και ορίζεται ως εξής:

$$L_{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_m}(A) = \left\{ z \in C : \prod_{j=1}^m |z - \alpha_{i_j, i_j}| \leq \prod_{j=1}^m \Gamma_{i_j}(A) \right\}. \quad (3.30)$$

Ορισμός 3.3.1. Η ένωση όλων των δυνατών λημνίσκων που μπορούν να σχηματιστούν για έναν πίνακα $A \in C^{n \times n}$ ονομάζεται σύνολο λημνίσκων (lemniscate set) του A και χαρακτηρίζεται πάντα από έναν φυσικό αριθμό που είναι η τάξη του:

$$L_{(m)} = \bigcup_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_m \leq n} L_{i_1, i_2, \dots, i_m}(A) \quad (\{\mathbf{i}_j\}_{j=1}^m \in N, \text{ ανά δύο διαφορετικοί}). \quad (3.31)$$

Προκύπτει ότι δοθέντος ενός τετραγωνικού πίνακα A μεγέθους n , μπορούν να δημιουργηθούν $\binom{n}{m}$ το πλήθος λημνίσκοι τάξης m , καθώς για κάθε διαφορετική επιλογή m το πλήθος ακεραίων $\{\mathbf{i}_j\}_{j=1}^m$ προκύπτει και διαφορετικός λημνίσκος. Όπως είναι εύκολο κάποιος να υποψιαστεί, τα σύνολα Geršgorin και Brauer συνδέονται άμεσα με τον παραπάνω ορισμό των λημνίσκων, καθώς το σύνολο λημνίσκων είναι η γενίκευσή τους. Πιο συγκεκριμένα, οι δίσκοι Geršgorin $\Gamma_i(A)$ είναι λημνίσκοι τάξης 1, ενώ τα οβάλ του Cassini $K_{i,j}(A)$ είναι λημνίσκοι τάξης 2. Ισχύει δηλαδή

$$L_{(1)}(A) = \Gamma(A) \quad \text{και} \quad L_{(2)}(A) = K(A). \quad (3.32)$$

Παρατήρηση 3.3.2. Ενίοτε, ο όρος «λημνίσκος», που μπορεί να ανευρεθεί σε βιβλία ανάλυσης, συναντάται ως η καμπύλη της σχέσης (3.30). Εντούτοις, στην παρούσα διπλωματική εργασία, γράφοντας το λημνίσκο θα αναφερόμαστε όχι στην ίδια την καμπύλη, αλλά στο σύνολο που περιέχει και όλα τα εσωτερικά σημεία της καμπύλης.

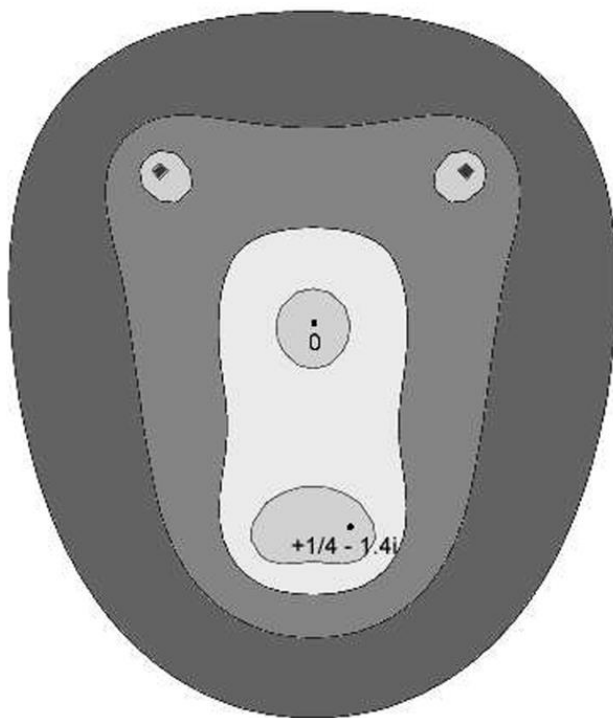
Παράδειγμα: Για την οπτικοποίηση της σχέσης (3.30) και την καλύτερη κατανόηση του τι εστί λημνίσκος λαμβάνουμε ως παράδειγμα έναν πίνακα του οποίου γνωρίζουμε όλα τα διαγώνια στοιχεία και αυξομειώνουμε το γινόμενο των αθροισμάτων γραμμών κατά το δοκούν. Έστω λοιπόν,

$$\alpha_{1,1} := 1 + i, \quad \alpha_{2,2} := -1 + i, \quad \alpha_{3,3} := 0, \quad \alpha_{4,4} := -1/4 - 1,4i, \quad \alpha_{5,5} := +1/4 - 1,4i.$$

Θεωρούμε επομένως το λημνίσκο τάξης 5, ή για την ακρίβεια το σύνορό του

$$I_5(\{\alpha_{i,i}\}_{i=1}^5, \rho) := \left\{ z \in C : \prod_{i=1}^5 |z - \alpha_{i,i}| \leq \rho \right\}. \quad (3.33)$$

Για τις πέντε τιμές των διαγωνίων στοιχείων $\alpha_{1,1}$ έως $\alpha_{5,5}$ που δίνονται δεν έχει ιδιαίτερη σημασία αν είναι τα διαγώνια στοιχεία ενός πίνακα διάστασης 5 (οπότε και ο σχηματιζόμενος λημνίσκος θα ήταν και ο μοναδικός τάξης 5), ή τα πρώτα πέντε διαγώνια στοιχεία ενός πίνακα διάστασης εν γένει n , με $n \geq 5$. Και αυτό γιατί θέλουμε να δώσουμε έμφαση στον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται τα σύνορα ενός συγκεκριμένου λημνίσκου, αυξάνοντας σταδιακά την «ακτίνα» του, που δεν είναι άλλη από το γινόμενο των πέντε πρώτων αθροισμάτων γραμμών. Για τις τιμές $\rho = 3, 10, 20$ και 50 λαμβάνουμε την Εικόνα 3.3 με τους μικρότερους σε εμβαδόν και «ακτίνα» λημνίσκους να περιέχονται πάντοτε εντός των μεγαλύτερων.



Εικόνα 3.3: Ο λημνίσκος I_5 για τις τιμές $\rho = 3, 10, 20$ και 50 .

Από τη σύγκριση του συνόλου Geršgorin με το σύνολο Brauer, και τις αποδείξεις τους από προηγούμενες παραγράφους, διαπιστώσαμε ότι το μεν επιμέρους χωρίο Geršgorin (δίσκος) επικεντρώνεται σε μία μόλις γραμμή του πίνακα, ενώ το δε επιμέρους χωρίο Brauer (οβάλ του Cassini) χρησιμοποιεί δεδομένα από δύο γραμμές του πίνακα A . Συνέπεια αυτών των εγγενών ιδιοτήτων των δύο συνόλων που απαρτίζονται από την ένωση όλων των επιμέρους χωρίων είναι ότι τα οβάλ μας οδηγούν σε μία καλύτερη χωρική προσέγγιση του φάσματος σε σχέση με τους δίσκους και ότι πιθανότατα όσες περισσότερες γραμμές και δεδομένα λαμβάνουμε υπόψιν για τη δημιουργία ενός χωρίου που θα περιέχει ιδιοτιμές, τόσο πιο μικρή θα προκύπτει η ένωση αυτών των χωρίων. Απομένει λοιπόν αφού ορίσαμε το λημνίσκο και το σύνολο λημνίσκων να εξετάσουμε αν η θεωρία αυτή διευρύνεται πέρα από την περίπτωση του $L_{(1)}$ (σύνολο Geršgorin) και $L_{(2)}$ (σύνολο Brauer) και για τα σύνολα λημνίσκων τάξης n γενέει m . Ιδιαίτερης προσοχής χρήζει το ακόλουθο ανατρεπτικό παράδειγμα.

Παράδειγμα: Δίνεται ο κάτωθι 4×4 πίνακας:

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ με } \sigma(A_{14}) = \{0, 1, 1, 2\},$$

Ο πίνακας A_{14} έχει εμφανώς όλα τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με τη μονάδα ($\alpha_{1,1} = \alpha_{2,2} = \alpha_{3,3} = \alpha_{4,4} = 1$), ενώ για τα αθροίσματα γραμμών ισχύει $r_1(A) = r_2(A) = 1$ και $r_3(A) = r_4(A) = 1$. Επιλέγοντας τώρα $m = 3$ για τον υπολογισμό των τεσσάρων λημνίσκων που σχηματίζονται βάσει της σχέσης (3.30) διαπιστώνουμε ότι κάθε τριάδα διακεκριμένων ακεραίων $\{i_1, i_2, i_3\}$ από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$ δημιουργεί γινόμενο «ακτίνας» $r_{i_1}(A) r_{i_2}(A) r_{i_3}(A) = 0$. Επομένως για τον πίνακα A_{14} προκύπτει εξ ορισμού ότι κάθε λημνίσκος θα ανάγεται στη σχέση $|z - 1|^3 = 0$ που ισοδυναμεί με το μονοσύνολο $\{z = 1\}$. Προκύπτει επομένως ότι $L_{(3)}(A_{14}) = \{1\}$ που σημαίνει ότι το σύνολο λημνίσκων τάξης 3 αποτυγχάνει να συμπεριλάβει όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A_{14} . Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με το μοναδικό λημνίσκο τάξης 4 που σχηματίζεται και ισούται βέβαια με το σύνολο λημνίσκων τάξης 4, το $L_{(4)}(A_{14})$. Η απρόσμενη αυτή αποτυχία συναντάται γενικώς για πίνακες μεγέθους $n \geq 3$.

Το παραπάνω παράδειγμα ανήκει στον Νεοϋορκέζο Morris Newman, ο οποίος ασχολήθηκε με τη γραμμική άλγεβρα και εν προκειμένω αναίρεσε πλήρως το επιχείρημα ότι οι λημνίσκοι (m εν γένει τάξης) είναι μια ακόμη καλύτερη προσέγγιση στην εύρεση ιδιοτιμών τυχαίου πίνακα $A \in C^{n \times n}$, από τις ήδη υπάρχουσες. Καθίσταται λοιπόν σαφές ότι οι λημνίσκοι $L_{(m)}$ για $m > 2$ δεν δίνουν απαραίτητα ένα μιγαδικό σύνολο το οποίο να περιέχει όλο το φάσμα πινάκων $A \in C^{n \times n}$, $n \geq m$.

Παρ' όλα αυτά, ο Αμερικάνος μαθηματικός Brualdi το 1982 κατάφερε να δείξει ότι υπό ειδικές προϋποθέσεις οι λημνίσκοι τάξης υψηλότερης από δύο μπορούν να απεικονιστούν και συνάμα να περιέχουν όλες τις ιδιοτιμές οποιουδήποτε μιγαδικού πίνακα A . Καθώς όμως ο Brualdi δανείστηκε μερικές έννοιες από τη θεωρία γραφημάτων, θεωρούμε αναγκαίο να παραθέσουμε μερικές από αυτές τις πολύ σημαντικές και σχεδόν απαραίτητες έννοιες.

Δοθέντος ενός πίνακα $A \in C^{n \times n}$ και του κατευθυνόμενου γραφήματος $G(A)$ όπως ορίστηκε στην §2.1 (Ορισμός 2.1.4), ορίζουμε τους ισχυρούς και ασθενείς κύκλους.

Ορισμός 3.3.3. Ένας **απλός ή ισχυρός κύκλος** (strong cycle) του κατευθυνόμενου γραφήματος $G(A)$ είναι ένας κύκλος ο οποίος διέρχεται από κάθε κορυφή του ακριβώς μία φορά. Υπάρχει δηλαδή σύνολο ακεραίων $\{l_i\}_{i=1}^{r-1}$ που ανήκουν στο σύνολο N , με $r \geq 2$, έτσι ώστε οι ακεραίοι $\{l_i\}_{i=1}^r$ να είναι όλοι διακεκριμένοι και να ισχύει $l_{r+1} = l_1$. Επιπλέον οι ακμές $\overrightarrow{v_{l_1} v_{l_2}}, \dots, \overrightarrow{v_{l_{r-1}} v_{l_r}}, \overrightarrow{v_{l_r} v_{l_1}}$ πρέπει να ανήκουν στο $G(A)$, όπου $\{v_i\}_{i=1}^r$ είναι κορυφές του $G(A)$.

Ο παραπάνω ορισμός συνεπάγεται ότι αν υπάρχει ένας τέτοιος κύκλος, τότε $\prod_{k=1}^{r-1} \alpha_{l_k, l_{k+1}} \neq 0$, καθώς καμία ακμή που ανήκει σε έναν ισχυρό κύκλο δε μπορεί να φέρει τιμή μηδενική. Επίσης, από τη στιγμή που δεν μας ενδιαφέρει ποια κορυφή αποτελεί την πρώτη του κύκλου, γράφουμε τον ισχυρό κύκλο ως μία ακολουθία ακεραίων που μπορεί να μεταταθεί κυκλικά και συμβολίζεται ως εξής:

$$\gamma := (l_1, l_2, \dots, l_r) \text{ με } r \geq 2. \quad (3.34)$$

Στον παραπάνω ορισμό θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και το γ ως συνάρτηση του επόμενου, γράφοντας $\gamma(l_1) := l_2, \gamma(l_2) := l_3, \dots, \gamma(l_r) := l_1$. Ισχύει πάντως ότι ο ισχυρός κύκλος γ περνάει από τις κορυφές $\{v_{l_i}\}_{i=1}^r$ και έχει μήκος r , όπου $r \geq 2$.

Ορισμός 3.3.4. Αν υπάρχει κάποια κορυφή v_i του κατευθυνόμενου γραφήματος $G(A)$ από την οποία να μη διέρχεται κανένας ισχυρός κύκλος, τότε ορίζουμε τον κύκλο $\gamma = (i)$, ανεξαιρέτως αν στην κορυφή v_i σχηματίζεται κάποιος βρόχος (δηλαδή ενδέχεται να ισχύει ακόμα και $\alpha_{i,i} = 0$), και τον ονομάζουμε **ασθενή κύκλο** (weak cycle).

Παρατήρηση 3.3.5. Αν εμφανίζεται κάποιο μηδενικό άθροισμα γραμμής (ή στήλης) στον πίνακα $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$, έστω στην i -οστή του γραμμή (ή στήλη), τότε ο κύκλος $\gamma = (i)$ είναι ασθενής. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Ορισμός 3.3.6. Μπορούμε πλέον να ορίσουμε και το **σύνολο κύκλων** $C(A)$ (cycle set) ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G(A)$ ως το σύνολο όλων των ισχυρών (απλών) και ασθενών κύκλων.

Είναι εμφανές ότι από κάθε κορυφή v_i διέρχεται είτε (τουλάχιστον) ένας ισχυρός κύκλος, είτε ένας ασθενής κύκλος. Ακόμα και αν ισχύει $n = 1$, τότε $C(A) = \{(1)\}$, δηλαδή υπάρχει ένας (και μοναδικός) κύκλος (ασθενής στην περίπτωση αυτή).

Έστω ότι μελετάμε κάποιον υποβιβάσιμο πίνακα $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$. Γνωρίζουμε τότε από την §2.1 ότι υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης $P \in R^{n \times n}$ και ένας θετικός ακέραιος $1 \leq m \leq n$, έτσι ώστε να σχηματίζεται ο PAP^T ο οποίος βρίσκεται σε κανονική μορφή Frobenius, ικανοποιεί τη σχέση (2.3) και γράφεται ως:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots & R_{1,m} \\ 0 & R_{2,2} & \cdots & R_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{m,m} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Ισχύει βεβαίως ότι αν ο πίνακας $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$ είναι μη υποβιβάσιμος, τότε προκύπτει $m=1$ στις σχέσεις (3.35) και (2.3). Έπειτα από τους ορισμούς που προηγήθηκαν στην προηγούμενη σελίδα, μπορούμε πλέον να κάνουμε μερικές εύστοχες παρατηρήσεις:

- Η ύπαρξη ενός 1×1 πίνακα $R_{i,i} = [a_{k,k}]$ συνεπάγεται από τη (2.3ii) ότι από την κορυφή v_k του $G(A)$ διέρχεται μόνο ένας κύκλος του $C(A)$ και μάλιστα ασθενής.
- Παρομοίως, αν η ύπαρξη του $R_{i,i}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (2.3i), τότε για τις κορυφές του $G(A)$ αυτού του υποπίνακα, υπάρχει τουλάχιστον ένας ισχυρός κύκλος που να διέρχεται από καθεμία εξ αυτών. Αυτό μπορεί να δειχθεί εύκολα, καθώς αν από κάποια κορυφή δεν περνούσε κάποιος ισχυρός κύκλος, τότε αυτό θα σήμαινε αυτομάτως ότι στο γράφημα $G(A)$ η κορυφή αυτή δε θα έχει είτε καμία εισερχόμενη κορυφή, είτε καμία εξερχόμενη. Κάτι τέτοιο θα μεταφερόταν στο πίνακα ως μία μηδενική (πλην του διαγωνίου στοιχείου) στήλη ή γραμμή αντίστοιχα. Θα είχαμε τότε συνεπώς έναν υποβιβάσιμο πίνακα που αντικρούεται από το γεγονός ότι ο $R_{j,j}$ είναι μη υποβιβάσιμος.
- Επειδή όλοι οι υποπίνακες της σχέσης (3.35) που βρίσκονται εξ ολοκλήρου κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικοί, αν δοκιμάζαμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές με τον κλασσικό τύπο της ορίζουσας θα παρατηρούσαμε ότι όλα τα στοιχεία των πινάκων $R_{j,k}$ (με $j \neq k$), και συνεπώς οι ίδιοι οι πίνακες, δεν επηρεάζουν τις ιδιοτιμές του πίνακα A . Ισχύει δηλαδή

$$\sigma(A) = \bigcup_{k=1}^m \sigma(R_{k,k}). \quad (3.36)$$

- Λόγω της προηγούμενης παρατήρησης, μπορούμε να καθορίσουμε νέα (παραλλαγμένα) αθροίσματα γραμμών, τα

$$\tilde{r}_i(A) := r_j(R_{k,k}), \quad (3.37)$$

αν το i -οστό άθροισμα γραμμής αντιστοιχεί στην j -οστή γραμμή του πίνακα $R_{k,k}$ της σχέσης (3.35). Αν βέβαια ο πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος τα νέα αυτά αθροίσματα γραμμών είναι ακριβώς ίδια με τα αρχικά.

- Προκύπτει άμεσα, από την τελευταία παρατήρηση, ότι αν $\tilde{r}_i(A) = 0$, τότε από την κορυφή v_i διέρχεται μόνο ένας ασθενής κύκλος.
- Αντίστοιχα, αν $\tilde{r}_i(A) > 0$, με το νέο άθροισμα γραμμής να αντιστοιχεί σε κάποιον μη υποβιβάσιμο υποπίνακα $R_{k,k}$, τότε από τη v_i κορυφή διέρχεται τουλάχιστον ένας ισχυρός κύκλος.

Οι προηγούμενοι ορισμοί, των ισχυρών και ασθενών κύκλων, ακόμα και των παραλλαγμένων αθροισμάτων γραμμών, προκύπτουν από τον κατευθυνόμενο γράφο $G(A)$ του πίνακα A και μας εισαγάγουν σε ένα ακόμη σύνολο, αυτό του Bruualdi.

Ορισμός 3.3.7. Δοθέντος ενός πίνακα $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 1$, αν $\gamma := (l_1, l_2, \dots, l_r)$ είναι ισχυρός κύκλος στο $G(A)$, των διακεκριμένων ακεραίων $\{l_i\}_{i=1}^r$ με $r \geq 2$, τότε ορίζουμε ως **λημνίσκο Brualdi** $B_\gamma(A)$ (Brualdi lemniscate) τάξης r το σύνολο

$$B_\gamma(A) := \left\{ z \in C : \prod_{i \in \gamma} |z - \alpha_{i,i}| \leq \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_i(A) \right\}. \quad (3.38)$$

Αν έχουμε έναν ασθενή κύκλο $\gamma = (i)$ στο $G(A)$, τότε ο αντίστοιχος λημνίσκος Brualdi ορίζεται ως

$$B_\gamma(A) := \left\{ z \in C : |z - \alpha_{i,i}| = \tilde{r}_i(A) = 0 \right\} = \{\alpha_{i,i}\}. \quad (3.39)$$

Παρατήρηση 3.3.8. Οφείλουμε να επισημάνουμε μια ιδιαιτερότητα των λημνίσκων Brualdi σε σχέση με κύκλους $\gamma \in C(A)$ που προκύπτουν έπειτα από μετάθεση ενός συγκεκριμένου σετ κορυφών. Αν λοιπόν, έχουμε έναν πλήρη γράφο $G(A)$ ή έστω μία κλίκα του γραφήματος $G(A)$ που περιλαμβάνει για παράδειγμα τις κορυφές v_1, v_2, v_3 , και v_4 , τότε στο σύνολο κύκλων $C(A)$ θα ανήκουν όλοι οι ισχυροί κύκλοι $\gamma_1 = (1 2 3 4)$, $\gamma_2 = (1 2 4 3)$, $\gamma_3 = (1 3 2 4)$, $\gamma_4 = (1 3 4 2)$, $\gamma_5 = (1 4 2 3)$ και $\gamma_6 = (1 4 3 2)$. Κατόπιν σχεδιασμού των έξι λημνίσκων Brualdi $B_{\gamma_i}(A)$, $1 \leq i \leq 6$, που προκύπτουν, παρατηρούμε ότι όλοι ταυτίζονται. Η εξήγηση βεβαίως είναι πολύ απλή και οφείλεται στο γεγονός ότι τα i -οστά διαγώνια στοιχεία, όπως και τα παραλλαγμένα αθροίσματα γραμμών πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους, τα μεν διαγώνια στοιχεία στο πρώτο μέλος και τα δε αθροίσματα γραμμών στο δεύτερο μέλος. Επομένως λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού η σειρά τους ως παράγοντες δε διαδραματίζει κανένα απολύτως ρόλο.

Ορισμός 3.3.9. Έχοντας ορίσει το λημνίσκο Brualdi, μπορούμε να ορίσουμε πλέον και το **σύνολο Brualdi** (Brualdi set) ως

$$B(A) := \bigcup_{\gamma \in C(A)} B_\gamma(A). \quad (3.40)$$

Παρατήρηση 3.3.10. Οφείλουμε να τονίσουμε ότι ακόμη κι αν παρουσιάζεται κύκλος Hamilton στο γράφημα $G(A)$ (δηλαδή κύκλος που να περνάει από κάθε κορυφή ακριβώς μία φορά), το σύνολο Brualdi δεν είναι απλά η εφαρμογή του τύπου (3.38) για τον κύκλο Hamilton, καθώς πρέπει να υπολογιστούν όλοι οι λημνίσκοι Brualdi για κάθε ισχυρό κύκλο, ανεξαρτήτως αν περιλαμβάνει λιγότερες κορυφές από τον κύκλο Hamilton, βάσει της (3.38). Σε αυτή την περίπτωση πάντως είναι προφανές ότι δεν εμφανίζονται ασθενείς κύκλοι.

Παρατήρηση 3.3.11. Η περίπτωση που υφίσταται ένας κύκλος Hamilton είναι ειδική περίπτωση του μη υποβιβάσιμου αρχικού πίνακα A . Στις περιπτώσεις αυτές ο A δε χρειάζεται να μετασχηματιστεί στη μορφή (3.35) και επιπλέον το σύνολο λημνίσκων που προκύπτει από την (3.31) επαρκεί για να λάβουμε ένα χωρίο που να περιέχει το φάσμα του A .

Θεώρημα 3.3.12. (Θεώρημα Brualdi) Για κάθε πίνακα $A \in C^{n \times n}$ και οποιαδήποτε ιδιοτιμή λ του A , υπάρχει (ισχυρός ή ασθενής) κύκλος γ του συνόλου των κύκλων $C(A)$ ώστε

$$\lambda \in B_\gamma(A). \quad (3.41)$$

Συνεπώς ισχύει

$$\sigma(A) \subseteq B(A). \quad (3.42)$$

Απόδειξη: Ερευνούμε καταρχάς την περίπτωση όπου $n = 1$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $A = [\alpha_{1,1}] \in C^{1 \times 1}$, και έχουμε έναν μονό κύκλο, ασθενή μάλιστα, τον $\gamma = (1)$. Από τη (3.39) προκύπτει $B_\gamma(A) = \{\alpha_{1,1}\}$ και επομένως η μοναδική ιδιοτιμή του A δίνεται από το $B_\gamma(A)$. Συνεπώς οι (3.41) και (3.42) ισχύουν τετριμμένα.

→ Ας θεωρήσουμε πλέον ότι $n \geq 2$. Έστω λ μία ιδιοτιμή του A . Υποθέτουμε ότι $\lambda = \alpha_{\kappa,\kappa}$, για κάποιο $\kappa \in N$. Τότε υπάρχει ένας (ισχυρός ή ασθενής) κύκλος γ στο $C(A)$ τέτοιος ώστε $\kappa \in \gamma$. Εάν ο γ είναι ασθενής κύκλος και διέρχεται από την κορυφή v_κ , τότε $B_\gamma(A) = \{\alpha_{\kappa,\kappa}\} = \lambda$, οπότε ικανοποιείται πάλι η (3.41). Αν ο γ είναι ισχυρός κύκλος και διέρχεται από την κορυφή v_κ , τότε για $z = \alpha_{\kappa,\kappa}$ παρατηρούμε από την (3.38) ότι $\alpha_{\kappa,\kappa} \in B_\gamma(A)$ και επιπλέον $\lambda = \alpha_{\kappa,\kappa} \in B_\gamma(A)$. Γενικά, η ίδια διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί για οποιοδήποτε διαγώνιο στοιχείο του A και προκύπτει πάντα ότι ισχύει η (3.41) που συνεπάγεται ότι $\sigma(A) \subseteq B(A)$.

→ Έστω τώρα ότι λ είναι ιδιοτιμή του A με $\lambda \neq \alpha_{\kappa,\kappa}$, για κάθε $\kappa \in N$. Αν ο πίνακας A είναι υποβιβάζσιμος, προκύπτει από παρατήρηση της προηγούμενης σελίδας ότι η ιδιοτιμή λ πρέπει να είναι ιδιοτιμή κάποιου από τους m το πλήθος $R_{i,j}$, πίνακες μεγέθους p_i , με $2 \leq p_i \leq n-2$. Με παρόμοιο σκεπτικό, αν ο πίνακας A είναι μη υποβιβάζσιμος, τότε $m=1$, και η ιδιοτιμή λ πρέπει να είναι ιδιοτιμή του πίνακα $R_{i,j} = A$, μεγέθους n . Ας υποθέσουμε για αρχή ότι ο πίνακας $A = R_{1,1}$ είναι μη υποβιβάζσιμος. Αυτό βεβαίως συνεπάγεται ότι δε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τα νέα παραλλαγμένα αθροίσματα γραμμών $\tilde{r}_i(A)$ (γιατί επί της ουσίας ταυτίζονται με τα αρχικά $r_i(A)$). Ισχύει λοιπόν $Ax = \lambda x$, όπου $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in C^n \setminus \{0\}$. Έστω λοιπόν ότι $x_1 \neq 0$. Τότε ισχύει η σχέση $(Ax)_i = \lambda x_i$, που σημαίνει ότι

$$(\lambda - \alpha_{i,i})x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \alpha_{i,j}x_j.$$

Καθώς όμως το $\alpha_{i,i}$ δεν μπορεί να ισούται στη περίπτωση μας με την ιδιοτιμή λ , συμπεραίνουμε ότι $(\lambda - \alpha_{i,i})x_i \neq 0$ και άρα προκύπτει ότι δεν μπορούν να είναι όλοι οι παράγοντες $\alpha_{i,j}x_j$ του παραπάνω αθροίσματος μηδενικοί. Έστω επίσης, ότι ο κ -οστή συνιστώσα του διανύσματος $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ είναι μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή από όλες τις υπόλοιπες του διανύσματος x που συνεισφέρει στο προηγούμενο άθροισμα, εξαιρουμένης της i -οστής. Έχουμε δηλαδή ότι

$$|x_\kappa| = \max\{|x_j| : j \in N \text{ με } j \neq i \text{ και } \alpha_{i,j}x_j \neq 0\}.$$

Επομένως, $|x_\kappa| > 0$ και $\alpha_{i,\kappa} \neq 0$. Συνεπάγεται λοιπόν ότι

$$|\lambda - \alpha_{i,i}||x_i| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |\alpha_{i,j}||x_j| \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |\alpha_{i,j}||x_\kappa| = |x_\kappa| r_i(A), \text{ με } \kappa \neq i.$$

Αν θέσουμε το $i := i_1$ και το $\kappa := i_2$, μπορούμε να επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία, ξεκινώντας από το i_2 . Επομένως τώρα θα ισχύει

$$(\lambda - \alpha_{i_2, i_2})x_{i_2} = \sum_{j \in N \setminus \{i_2\}} \alpha_{i_2, j}x_j,$$

Και ομοίως θα υπάρχει ένα i_3 με $|x_{i_3}| \neq 0$ και $\alpha_{i_2, i_3} \neq 0$, έτσι ώστε

$$|\lambda - \alpha_{i_2, i_2}||x_{i_2}| \leq |x_{i_3}| r_{i_2}(A), \text{ με } i_2 \neq i_3, \text{ με } |x_{i_3}| = \max\{|x_j| : j \in N \text{ με } j \neq i_2 \text{ και } \alpha_{i_2, j}x_j \neq 0\}.$$

Με τη διαδικασία αυτή βρίσκουμε πάλι τη μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή συνιστώσα του διανύσματος x που συνεισφέρει στο τελευταίο άθροισμα. Αν ισχύει $i_3 = i_1$ (το αρχικό i που επιλέχθηκε τυχαία για να ξεκινήσει η διαδικασία) τότε η διαδικασία τερματίζεται, καθώς έχουμε τους διακεκριμένους ακέραιους i_1 και i_2 με $\alpha_{i_1, i_2} \neq 0$ και $\alpha_{i_2, i_1} \neq 0$. Συνεπάγεται λοιπόν ότι σχηματίζεται ένας ισχυρός κύκλος, ο $\gamma = (i_1 \ i_2)$.

→ Αν όμως $i_3 \neq i_1$, τότε η διαδικασία να μην συνεχίζεται, αλλά σταματάει τελικώς (καθώς το N είναι ένα πεπερασμένο σύνολο) όταν βρεθεί κάποιο $i_\rho \in N$ που να ισούται με κάποιον προηγούμενο δείκτη i_μ (και όχι το i_1 απαραίτητα). Σε κάθε περίπτωση έχουμε μία ακολουθία δεικτών $\{i_j\}_{j=\mu}^\rho$ με $\rho \geq 2$, οι οποίοι είναι διακεκριμένοι ακέραιοι που ανήκουν στο $N := \{1, 2, \dots, n\}$ με $i_{\rho+1} = i_\mu$. Αυτή όμως η ακολουθία δεικτών επιφέρει με βεβαιότητα κάποιες μη μηδενικές τιμές στοιχείων του A και πιο συγκεκριμένα τις

$$\alpha_{i_\mu, i_{\mu+1}}, \alpha_{i_{\mu+1}, i_{\mu+2}}, \dots, \alpha_{i_\rho, i_{\rho+1}}, \text{ με } i_{\rho+1} = i_\mu.$$

Τότε όμως ο $\gamma = (i_\mu \ i_{\mu+1} \ \dots \ i_\rho)$ είναι ένας ισχυρός κύκλος του A και επιπρόσθετα ισχύουν οι $\rho - \mu + 1$ το πλήθος ανισότητες

$$|\lambda - \alpha_{i_j, i_j}||x_{i_j}| \leq |x_{i_{j+1}}| r_{i_j}(A), \text{ με } j = \mu, \mu+1, \dots, \rho \text{ και επιπλέον } i_{\rho+1} = i_\mu.$$

Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι όλα τα x_{ij} είναι διάφορα του μηδενός. Παίρνοντας λοιπόν το γινόμενο όλων των προηγούμενων ανισοτήτων, προκύπτει

$$\prod_{j=\mu}^{\rho} |\lambda - \alpha_{ij,j}| \cdot \prod_{j=\mu}^{\rho} |x_{ij}| \leq \prod_{j=\mu}^{\rho} |r_{ij}(A)| \cdot \prod_{j=\mu}^{\rho} |x_{ij+1}|.$$

Καθώς όμως $x_{i\rho+1} = x_{i\mu}$, ισχύει $\prod_{j=\mu}^{\rho} |x_{ij}| = \prod_{j=\mu}^{\rho} |x_{ij+1}| > 0$, το παραπάνω γινόμενο απλοποιείται αισθητά και

εν τέλει προκύπτει $\prod_{j=\mu}^{\rho} |\lambda - \alpha_{ij,j}| \leq \prod_{j=\mu}^{\rho} |r_{ij}(A)|$ που σημαίνει βεβαίως ότι $\lambda \in B_{\gamma}(A)$. ■

Παρατήρηση 3.3.13. Το προηγούμενο θεώρημα χρησιμοποιεί τον ορισμό του λημνίσκου Brualdi $B_{\gamma}(A)$, είτε ο γ είναι ισχυρός κύκλος (3.38), είτε ασθενής (3.39). Το Θεώρημα 3.3.12 ισχύει ακόμα και αν δε χρησιμοποιήσουμε τα παραλλαγμένα αθροίσματα γραμμών $\tilde{r}_i(A)$, αλλά τα αρχικά αθροίσματα γραμμών $r_i(A)$, καθώς είναι προφανές ότι ισχύει $\tilde{r}_i(A) \leq r_i(A)$.

Μια γρήγορη επαλήθευση ότι το Brualdi σύνολο περιέχει όλες τις ιδιοτιμές ενός τυχαίου πίνακα είναι να βρούμε όλους τους κύκλους (ισχυρούς και ασθενείς) του πίνακα A_{14} και να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.3.12. Το σύνολο κύκλων $C(A_{14})$ αποτελείται από τον ισχυρό κύκλο $\gamma_1 = (1\ 2)$, $\gamma_2 = (3)$ και $\gamma_3 = (4)$. Από τη (3.40) προκύπτει ότι $B(A_{14}) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\} \cup \{1\} \cup \{1\}$, το οποίο περιέχει βεβαίως το φάσμα του πίνακα A_{14} , καθώς $\sigma(A_{14}) = \{0, 1, 1, 2\}$.

Όπως και με τα προηγούμενα σύνολα εγκλεισμού ιδιοτιμών που είχαμε ορίσει, έτσι και το θεώρημα Brualdi μπορούμε να το επεκτείνουμε τρόπον τινά διερευνώντας την περίπτωση που ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 3.3.14. (Επέκταση του ΘΑΔΚ) Εάν $A = [a_{ij}] \in C^{n \times n}$, με $C(A)$ το σύνολο κύκλων όπως αυτό προκύπτει από το κατευθυνόμενο γράφημα $G(A)$ και ισχύει

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{i,i}| > \prod_{i \in \gamma} \tilde{r}_i(A) \quad (\forall \gamma \in C(A)), \quad (3.43)$$

τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

Αντίστοιχα, μπορούμε να επεκτείνουμε και το Θεώρημα 2.1.13 της O. Taussky στην περίπτωση που το εκάστοτε άθροισμα γραμμής $r_i(A)$ αντιστοιχεί σε μια κορυφή v_i με την κορυφή να ανήκει σε κάποιον συγκεκριμένο κύκλο του $C(A)$ (όλες οι κορυφές γνωρίζουμε ότι ανήκουν σε έναν τουλάχιστον κύκλο, ισχυρό ή ασθενή).

Θεώρημα 3.3.15. (Επέκταση του θεωρήματος Taussky) Έστω πίνακας $A \in C^{n \times n}$, μη υποβιβάσιμος. Αν ισχύει

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{i,i}| \geq \prod_{i \in \gamma} r_i(A) \quad (\forall \gamma \in C(A)), \quad (3.44)$$

και επιπρόσθετα ισχύει η αυστηρή ανισότητα για κάποιον κύκλο $\gamma \in C(A)$, τότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 3.3.16. Έστω πίνακας $A \in C^{n \times n}$ μη υποβιβάσιμος, και λ είναι μια ιδιοτιμή του τέτοια ώστε $\lambda \notin \text{int}B_{\gamma}(A) \forall \gamma \in C(A)$, δηλαδή να μην ανήκει στο εσωτερικό κανενός λημνίσκου Brualdi για όλους τους κύκλους του $C(A)$. Ισχύει δηλαδή

$$\prod_{i \in \gamma} |\lambda - \alpha_{i,i}| \geq \prod_{i \in \gamma} r_i(A) \quad (\forall \gamma \in C(A)).$$

Τότε προκύπτει επιπλέον ότι θα ισχύει

$$\prod_{i \in \gamma} |\lambda - \alpha_{i,i}| = \prod_{i \in \gamma} r_i(A) \quad (\forall \gamma \in C(A)). \quad (3.45)$$

Η ιδιοτιμή λ δηλαδή θα ανήκει στο σύνορο κάθε λημνίσκου $B_\gamma(A)$, με $\gamma \in C(A)$. Αντιστρόφως μάλιστα, αν κάποια ιδιοτιμή λ ανήκει στο σύνορο του συνόλου Brualdi $B(A)$, τότε ισχύει η (3.45).

Το θεώρημα αυτό είναι ανάλογο του Θεωρήματος 2.1.16 για τους δίσκους Geršgorin, ενώ το αντίστροφο σκέλος είναι ανάλογο του Θεωρήματος 2.1.17. Αντίστοιχα θεωρήματα για τα οβάλ του Cassini στην §3.2 δεν διατυπώθηκαν διότι δεν ευσταθούν. Ακολουθεί ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα.

Παράδειγμα: Δίνεται ο πίνακας

$$A_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

του οποίου μια ιδιοτιμή είναι το μηδέν. Είναι εμφανές ότι το σύνολο κύκλων $C(A_{15})$ αποτελείται από τους δύο ισχυρούς κύκλους $\gamma_1 = (1 \ 2)$ και $\gamma_2 = (1 \ 3)$. Αρχικά θα δείξουμε ότι δεν διέρχονται όλα τα οβάλ του Cassini από το σημείο $z = 0$, που είναι ιδιοτιμή του A_{15} , παρότι αυτό είναι σύνορο του συνόλου Brauer $K(A)$. Πιο συγκεκριμένα, για τον πίνακα A_{15} σχηματίζονται τα οβάλ

$$K_{1,2}(A_{15}) = \{|z - 1| |z - 4| \leq 4\}, \quad K_{1,3}(A_{15}) = \{|z - 1| |z - 2| \leq 2\} \quad \text{και} \quad K_{2,3}(A_{15}) = \{|z - 2| |z - 4| \leq 2\},$$

για τα οποία ισχύει εμφανώς $0 \in \partial K_{1,2}(A_{15})$ και $0 \in \partial K_{1,3}(A_{15})$. Αντιθέτως $0 \notin K_{2,3}(A_{15})$. Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι δεν μπορεί να ισχύει κάποιο θεώρημα ανάλογο του Θεωρήματος 2.1.13 για τα οβάλ του Cassini καθώς ο πίνακας A_{15} αποτελεί ένα χαρακτηριστικό αντιπαράδειγμα.

Συνεχίζοντας το παράδειγμα, πάμε να υπολογίσουμε τους λημνίσκους Brualdi, οι οποίοι δημιουργούνται από τους ισχυρούς κύκλους γ_1 και γ_2 . Παρατηρούμε ότι $B_{\gamma_1}(A_{15}) = K_{1,2}(A_{15})$ και $B_{\gamma_2}(A_{15}) = K_{1,3}(A_{15})$, ενώ ισχύει βεβαίως $B(A_{15}) = B_{\gamma_1}(A_{15}) \cup B_{\gamma_2}(A_{15})$.

Συνεπώς ισχύει η συνεπαγωγή $0 \in \partial B(A_{15}) \Rightarrow 0 \in \partial B_{\gamma_1}(A_{15})$ και $0 \in \partial B_{\gamma_2}(A_{15})$ που επαληθεύει το Θεώρημα 3.3.16.

Ανάλογο θεώρημα των Θεωρημάτων 2.1.16 και 3.3.16 θα ίσχυε για τα οβάλ του Cassini μόνο υπό κάποιες προϋποθέσεις. Ο Rein το 1967 έφτασε στο ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 3.3.17. Έστω πίνακας $A \in C^{n \times n}$ μη υποβιβάσιμος με την ιδιότητα ότι έχει δύο διακεκριμένες γραμμές, καθεμία εκ των οποίων έχει τουλάχιστον δύο μη διαγώνια μη μηδενικά στοιχεία (επομένως $n \geq 3$). Τότε αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A τέτοια ώστε $\lambda \in \partial K(A)$, ισχύει ότι $\lambda \in \partial K_{i,j}(A)$, $\forall i, j$ με $i \neq j$ και $1 \leq i, j \leq n$.

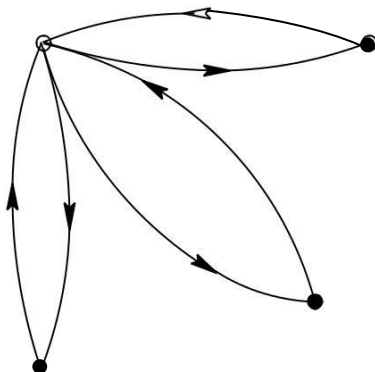
Το πιο σημαντικό ίσως από τα θεωρήματα που προηγήθηκαν, το Θεώρημα 3.3.12, διευκρινίζει ότι το φάσμα οποιουδήποτε μιγαδικού πίνακα περιέχεται στο σύνολο Brualdi, το οποίο εξαρτάται από κύκλους διαφορετικών μηκών που προκύπτουν από το κατευθυνόμενο γράφημα αυτού του πίνακα.

Αξίζει να επιστρέψουμε στο προτελευταίο παράδειγμα και στον πίνακα A_{14} καθώς μπορούμε να διαπιστώσουμε μετά από πλειάδα θεωρημάτων που παρατέθηκαν, αλλά και του χαρακτηριστικού παραδείγματος με τον πίνακα A_{15} , ότι ο λόγος που το φάσμα του A_{14} δεν περιέχεται σε κανένα σύνολο λημνίσκων $L_{(m)}(A_{14})$ οφείλεται εν πολλοίς στην υποβιβασιμότητά του. Οφείλουμε να ελέγξουμε αν για έναν παρόμοιο με τον A_{14} πίνακα, μη υποβιβάσιμο αυτή τη φορά, και μία συγκεκριμένη τάξη m , θα πετυχαίναμε το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλαδή τον εγκλεισμό ολόκληρου του φάσματος εντός του συνόλου λημνίσκων m τάξης.

Παράδειγμα: Ας πάρουμε λοιπόν έναν παρόμοιο, αλλά μη υποβιβάσιμο πίνακα, τον

$$A_{16} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \epsilon & \epsilon \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 1 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ με } \epsilon > 0.$$

Ο πίνακας A_{16} είναι επί της ουσίας ο A_{14} με τέσσερα στοιχεία του μετατρέπονται σε ϵ , $\epsilon > 0$. Το κατευθυνόμενο γράφημα του $G(A_{16})$, χωρίς τους βρόχους, καθώς η παρουσία τους δεν επηρεάζει το σύνολο των κύκλων $C(A_{16})$ αφού δεν υφίστανται ασθενείς κύκλοι, δίνεται στο Γράφημα 3.4. Όσον αφορά την πάνω αριστερά κορυφή, αυτή είναι η v_1 . Οι διάταξη των υπόλοιπων κορυφών δε μας ενδιαφέρει.



Γράφημα 3.4: Το κατευθυνόμενο γράφημα $G(A_{16})$, χωρίς βρόχους.

Το σύνολο των κύκλων $C(A_{16})$ αποτελείται από τους ισχυρούς κύκλους $\gamma_1 = (1\ 2)$, $\gamma_2 = (1\ 3)$ και $\gamma_3 = (1\ 4)$, με αντίστοιχα αθροίσματα γραμμών $r_1(A_{16}) = 1+2\epsilon$, $r_2(A_{16}) = 1$ και $r_3(A_{16}) = r_4(A_{16}) = \epsilon$. Αν τώρα θεωρήσουμε το σύνολο λημνίσκων τάξης 4 του πίνακα A_{16} , τότε λαμβάνουμε από τη (3.31) τη σχέση

$$L_{(4)}(A_{16}) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 1|^4 \leq \epsilon^2(1+2\epsilon) \}, \quad (3.46)$$

που ταυτίζεται με το δίσκο $\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \epsilon^{1/2}(1+2\epsilon)^{1/4} \}$. Εφόσον όμως το φάσμα του πίνακα είναι $\sigma(A_{16}) = \{ 1 - (1+2\epsilon^2)^{1/2}, 1, 1, 1 + (1+2\epsilon^2)^{1/2} \}$, προκύπτει ότι $\sigma(A_{16}) \notin L_{(4)}(A_{16})$, $\forall \epsilon > 0$.

Δια του λόγου το αληθές θα δείξουμε αναλυτικά ότι ισχύει $\sigma(A_{16}) \notin L_{(4)}(A_{16})$, $\forall \epsilon > 0$, ενώ $\sigma(A_{16}) \in B(A_{16})$, $\forall \epsilon > 0$. Από την (3.46) παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένας δίσκος που αντιπροσωπεύει το χωρίο $L_{(4)}(A_{16})$ με κέντρο το 1 και ακτίνα το $\epsilon^{1/2}(1+2\epsilon)^{1/4}$. Για να περιλαμβάνει όλο το φάσμα του πίνακα A_{16} όμως το χωρίο αυτό πρέπει (όπως φαίνεται αναλυτικά από τις ιδιοτιμές του A_{16}) να έχει ακτίνα τουλάχιστον ίση με $(1+2\epsilon^2)^{1/2}$.

Έστω λοιπόν, ότι έχει μεγαλύτερη ακτίνα. Τότε θα ισχύει

$$\begin{aligned} \epsilon^{1/2}(1+2\epsilon)^{1/4} &\geq (1+2\epsilon^2)^{1/2} \Leftrightarrow \\ \epsilon(1+2\epsilon)^{1/2} &\geq 1+2\epsilon^2 \Leftrightarrow \\ \epsilon^2(1+2\epsilon) &\geq 1+4\epsilon^2+4\epsilon^4 \Leftrightarrow \\ 4\epsilon^4 - 2\epsilon^3 + 3\epsilon^2 + 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

Το οποίο όμως $\forall \epsilon > 0$ δεν ισχύει. Άρα δεν μπορούν οι δύο ακραίες ιδιοτιμές να ανήκουν στο $L_{(4)}(A_{16})$, για οποιονδήποτε θετικό πραγματικό ϵ .

Την ίδια ακριβώς διαδικασία μπορούμε να ακολουθήσουμε για να δείξουμε ότι $\sigma(A_{16}) \notin L_{(3)}(A_{16})$, $\forall \epsilon > 0$. Το σύνολο λημνίσκων $L_{(3)}(A_{16})$ απαρτίζεται από τέσσερις λημνίσκους και είναι το σύνολο:

$$L_{(3)}(A_{16}) = \{|z - 1|^3 \leq \epsilon^2\} \cup \{|z - 1|^3 \leq (1+2\epsilon)\epsilon^2\} \cup \{|z - 1|^3 \leq (1+2\epsilon)\epsilon\} \cup \{|z - 1|^3 \leq (1+2\epsilon)\epsilon\}$$

Το παραπάνω σύνολο απλοποιείται σε $L_{(3)}(A_{16}) = \{|z - 1|^3 \leq (1+2\epsilon)\epsilon^2\}$ αν $\epsilon \geq 1$ και $L_{(3)}(A_{16}) = \{|z - 1|^3 \leq (1+2\epsilon)\epsilon\}$ αν $\epsilon < 1$. Αντίστοιχα με την προηγούμενη διαδικασία προκύπτει και στις δύο περιπτώσεις ότι $\sigma(A_{16}) \notin L_{(3)}(A_{16})$.

Τέλος, υπολογίζουμε το $B(A_{16}) = B_{\gamma_1}(A_{16}) \cup B_{\gamma_2}(A_{16}) \cup B_{\gamma_3}(A_{16})$. Συνεπάγεται ότι $B(A_{16}) = \{|z - 1|^3 \leq (1+2\epsilon)\epsilon^2\} \cup \{|z - 1|^2 \leq (1+2\epsilon)\epsilon\} \cup \{|z - 1|^2 \leq (1+2\epsilon)\epsilon\}$. Διακρίνουμε πάλι τις περιπτώσεις για $\epsilon \geq 1, \epsilon < 1$.

Στην πρώτη περίπτωση προκύπτει $L_{(3)}(A_{16}) = \{|z - 1| \leq (\epsilon + 2\epsilon^2)^{1/2}\}$, άρα $\text{Re}(z) = [1 - (\epsilon + 2\epsilon^2)^{1/2}, 1 + (\epsilon + 2\epsilon^2)^{1/2}] \supseteq [1 - (1 + 2\epsilon^2)^{1/2}, 1 + (1 + 2\epsilon^2)^{1/2}] \supseteq \sigma(A_{16})$, καθώς $\epsilon \geq 1$. Ομοίως καταλήγουμε στη δεύτερη περίπτωση ότι $\text{Re}(z) = [1 - (1 + 2\epsilon^2)^{1/2}, 1 + (1 + 2\epsilon^2)^{1/2}] \supseteq \sigma(A_{16})$.

Άρα δείξαμε εν κατακλείδι ότι $\sigma(A_{16}) \in B(A_{16}), \forall \epsilon > 0$.

→ Δείξαμε επομένως ότι ακόμη και για μη υποβιβάσιμους πίνακες τα σύνολα λημνίσκων $L_{(m)}$, m τάξης με $m \geq 3$, αποτυγχάνουν εν γένει να περιέχουν όλες τις ιδιοτιμές του τυχαίου πίνακα μεγέθους n , εν αντιθέσει με τα σύνολα Brualdi.

Ορισμός 3.3.18. Έστω ένας πίνακας $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$. Ο πίνακας ονομάζεται **ασθενώς μη υποβιβάσιμος** (weakly irreducible) αν από κάθε κορυφή v_i του κατευθυνόμενου γραφήματος $G(A)$ διέρχεται κάποιος ισχυρός κύκλος.

Πρόταση 3.3.19. Οι έννοιες της ασθενούς μη υποβιβασιμότητας και μη υποβιβασιμότητας είναι ισοδύναμες για όλους τους πίνακες που ανήκουν στο $C^{n \times n}$, με $n=2$ ή $n=3$. Για $n \geq 4$ ισχύει ότι κάθε μη υποβιβάσιμος πίνακας είναι και ασθενώς μη υποβιβάσιμος, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο.

Απόδειξη: Καταρχάς γνωρίζουμε ότι αν ο πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος, τότε δεν έχει καμία γραμμή (ή στήλη) - εξαιρουμένου του διαγωνίου στοιχείου - με μηδενικά στοιχεία. Ως εκ τούτου δεν παράγεται κανένας ασθενής κύκλος, καθώς σε αντίθετη περίπτωση είτε δε θα είχαμε καμία εισερχόμενη ακμή προς την μελετηθείσα - έστω v - κορυφή, που παραπέμπει σε ένα μηδενικό άθροισμα στήλης, είτε δε θα είχαμε καμία εξερχόμενη ακμή από την κορυφή v , που παραπέμπει σε μηδενικό άθροισμα γραμμής.

→ Ας εξετάσουμε τώρα τις περιπτώσεις που ο πίνακας είναι ασθενώς μη υποβιβάσιμος, για $n=2, n=3$ και τέλος για $n \geq 4$. Αν $n=2$ και ο πίνακας είναι ασθενώς μη υποβιβάσιμος, τότε τα στοιχεία $a_{1,2}$ και $a_{2,1}$ δεν μπορούν να είναι μηδενικά, καθώς τότε θα προέκυπτε ασθενής κύκλος. Επομένως ακόμα και αν επιχειρήσουμε μετάθεση γραμμών και στηλών ο πίνακας που προκύπτει (ο ανάστροφος ουσιαστικά) δεν μπορεί να έχει μηδενικό παρά μόνο ίσως κάποιο διαγώνιο στοιχείο. Μπορούμε εν ολίγοις με βεβαιότητα ότι ο πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος.

→ Αν τώρα ο πίνακας έχει μέγεθος $n=3$ και είναι παράλληλα και ασθενώς μη υποβιβάσιμος, τότε είτε θα υπάρχει ο ισχυρός κύκλος $\gamma = (1 \ 2 \ 3)$, είτε θα υπάρχει ο ισχυρός κύκλος $\gamma = (1 \ 3 \ 2)$, είτε θα υπάρχουν δύο εκ τριών ακόλουθων ισχυρών κύκλων: $\gamma_1 = (1 \ 2)$, $\gamma_2 = (1 \ 3)$ και $\gamma_3 = (2 \ 3)$. Στη τελευταία περίπτωση είναι προφανές ότι από τα 6 μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα, τα 4 πρέπει να είναι οπωσδήποτε μη μηδενικά. Και συν τοις άλλοις, αν τα 2 εναπομείναντα στοιχεία είναι μηδενικά δεν θα ανήκουν στην ίδια γραμμή, επομένως ο πίνακας θα είναι και μη υποβιβάσιμος.

Όσον αφορά τις πρώτες δύο περιπτώσεις, είναι προφανές ότι τα 3 εν δυνάμει μηδενικά στοιχεία που μπορούν να εμφανιστούν στον πίνακα μας, ανήκουν όλα σε διαφορετικές γραμμές και στήλες, οπότε και στη χειρίστη των περιπτώσεων θα έχουμε σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη ακριβώς ένα μηδενικό στοιχείο. Άρα πάλι προκύπτει μη υποβιβάσιμος πίνακας. Υπενθυμίζουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία δεν επηρεάζουν την υποβιβασιμότητα ή μη του πίνακα, εξού και ο ειδικός συμβολισμός για τις δύο πρώτες περιπτώσεις:

$$1^{\text{η}} \text{ περίπτωση: } \begin{bmatrix} x & * & 0 \\ 0 & x & * \\ * & 0 & x \end{bmatrix}, \quad 2^{\text{η}} \text{ περίπτωση: } \begin{bmatrix} x & 0 & * \\ * & x & 0 \\ 0 & * & x \end{bmatrix}.$$

→ Απομένει η περίπτωση όπου $n \geq 4$. Για να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει πάντοτε η ισοδυναμία, αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα. Το πιο χαρακτηριστικό είναι αυτό της ύπαρξης δύο ισχυρών κύκλων, οι οποίοι τείνουν να ισομοιράσουν τις κορυφές, ενώ παράλληλα όλα τα μη εμπλεκόμενα στους ισχυρούς κύκλους στοιχεία του πίνακα είναι μηδενικά. Θα πάρουμε την απλούστερη περίπτωση όπου $n = 4$, με το παράδειγμα να γενικεύεται και για μεγαλύτερα μεγέθη πινάκων.

Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν οι ισχυροί δίσκοι $\gamma_1 = (1 \ 2)$ και $\gamma_2 = (3 \ 4)$. Τότε ο πίνακας μπορεί να πάρει κάλλιστα τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} x & * & 0 & 0 \\ * & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & * \\ 0 & 0 & * & x \end{bmatrix},$$

όπου είναι προφανές ότι πρόκειται για έναν υποβιβάζσιμο πίνακα με τον τετραγωνικό υποπίνακα $B_{1,1}$ να έχει μέγεθος 2×2 . ■

Παράδειγμα: Δίνεται ο πίνακας $A_{17} = B(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & 0 & \epsilon & 1 \end{bmatrix}$, όπου $\epsilon > 0$.

Ο πίνακας ανήκει προφανώς στην τελευταία κατηγορία πινάκων της προηγούμενης πρότασης, οπότε ξέρουμε εκ των προτέρων προτέρων ότι είναι υποβιβάζσιμος. Είδαμε νωρίτερα ότι το σύνολο λημνίσκων δεν περιέχει όλο το φάσμα του πίνακα. Απεναντίας, το σύνολο Brualdi εμπεριέχει όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα $B(\epsilon)$, $\forall \epsilon > 0$, το οποίο και θα δείξουμε.

Καταρχάς οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι η ένωση των ιδιοτιμών των υποπινάκων $B_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $B_{2,2}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πρώτου πίνακα προκύπτει πολύ εύκολα και μας δίνει ιδιοτιμές το 0 και το 2, ενώ εξίσου εύκολα προκύπτουν από τον $B_{2,2}(\epsilon)$ οι ιδιοτιμές $1 - \epsilon$ και $1 + \epsilon$. Επομένως έχουμε ότι $\sigma(A_{17}) = \{0, 1 - \epsilon, 1 + \epsilon, 2\}$.

Οι λημνίσκοι Brualdi για τους κύκλους $\gamma_1 = (1 \ 2)$ και $\gamma_2 = (3 \ 4)$ είναι αντίστοιχα οι $B_{\gamma_1}(A_{17}) = \{ |z - 1| \leq 1 \}$ και $B_{\gamma_2}(A_{17}) = \{ |z - 1| \leq \epsilon \}$. Για $\epsilon \leq 1$ προκύπτει ότι ο πρώτος λημνίσκος (δίσκος εδώ) περιέχει όλες τις ιδιοτιμές, ενώ για $\epsilon > 1$ προκύπτει ότι ο δεύτερος λημνίσκος (δίσκος πάλι) περιέχει όλες τις ιδιοτιμές. Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $\sigma(B(\epsilon)) \in B_{\gamma_1}(A_{17}) \cup B_{\gamma_2}(A_{17}) = B(A_{17})$.

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα εγκλεισμού 3.3.12 για έναν πίνακα $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 1$, εξαρτάται πλέον από τις ποσότητες

$$\{\alpha_{i,i}\}_{i=1}^n, \{\tilde{\tau}_i(A)\}_{i=1}^n \text{ και το σύνολο κύκλων } C(A), \quad (3.47)$$

που προέρχονται από τον πίνακα A , το κατευθυνόμενο γράφημα $G(A)$ και την κανονική μορφή Frobenius (3.35).

- Εφόσον διαπιστώσαμε με πληθώρα παραδειγμάτων ότι το σύνολο Brualdi $B(A)$ περιέχει όλο του φάσμα κάθε μιγαδικού τετραγωνικού πίνακα A , μένει πλέον να συγκριθεί με το σύνολο Brauer $K(A)$.
- Το δεύτερο ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι αν η ένωση των φασμάτων των πινάκων που ικανοποιούν τις ίδιες παραμέτρους που ορίζει η (3.47) μπορεί να καλύψει ολόκληρο το $B(A)$.

Κεφάλαιο 4

Σύγκριση Συνόλων Εγκλεισμού Ιδιοτιμών

4.1 Σύγκριση του συνόλου Brualdi με το σύνολο Brauer

Ξεκινάμε το κεφάλαιο αυτό με την απάντηση στο μείζον ερώτημα του προηγούμενου κεφαλαίου.

Θεώρημα 4.1.1. Έστω ένας πίνακας $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$. Τότε ισχύει

$$B(A) \subseteq K(A), \quad (4.1)$$

όπου το $K(A)$ είναι το σύνολο Brauer όπως αυτό ορίστηκε στο Θεώρημα 3.2.3 και το $B(A)$ είναι το σύνολο Brualdi του Ορισμού 3.3.9. Ο λόγος που οριοθετείτε το μέγεθος του πίνακα να είναι τουλάχιστον δύο, έγκειται στο γεγονός ότι δεν υφίσταται το σύνολο Brauer για πίνακες – στοιχεία.

Απόδειξη: Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις των ασθενών και ισχυρών κύκλων από τους οποίους αποτελείται οποιοδήποτε σύνολο Brualdi.

→ Έστω λοιπόν ότι ο κύκλος γ του $C(A)$ είναι ασθενής. Έπεται ότι $\gamma = (i)$ για κάποιο $i \in N$, ενώ $B_\gamma(A) = \{\alpha_{i,i}\}$. Κάθε οβάλ του Cassini $K_{i,j}(A)$ για οποιαδήποτε $i \neq j$, έχει τη γνωστή μορφή

$$K_{i,j}(A) := \{z \in C : |z - \alpha_{i,i}| |z - \alpha_{j,j}| \leq r_i(A) r_j(A)\}.$$

Είναι πασιφανές ότι ισχύει $\alpha_{i,i} \in K_{i,j}(A)$, καθώς το $\alpha_{i,i}$ αποτελεί και μία από τις δύο εστίες του οβάλ. Επομένως ισχύει $B_\gamma(A) \subseteq K_{i,j}(A)$ για τον i - j -οστό οβάλ του Cassini για κάθε $j \in N$, $i \neq j$. Άρα $B_\gamma(A) \subseteq K(A)$.

→ Έστω τώρα ότι ο γ είναι ένας ισχυρός κύκλος του συνόλου κύκλων $C(A)$. Υπενθυμίζουμε, ότι τα παραλλαγμένα αθροίσματα γραμμών $\{\tilde{r}_i(A)\}_{i=1}^n$ των υποβιβάσιμων πινάκων της σχέσης (3.37) σχετίζονται όπως είχε παρατηρηθεί και στην §3.3 με τα αθροίσματα γραμμών $\{r_i(A)\}_{i=1}^n$ μέσω της ανισότητας

$$0 < \tilde{r}_i(A) < r_i(A). \quad (4.2)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $i \in N$, ενώ ισχύει $\tilde{r}_i(A) = r_i(A) \forall i \in N$ αν ο πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος. Εάν ένας ισχυρός κύκλος έχει επί παραδείγματι μήκος 2, δηλαδή $\gamma = (i_1 i_2)$ με $i_3 = i_1$, προκύπτει από τη σχέση (3.38) ότι ο λημνίσκος Brualdi που επάγεται του ισχυρού κύκλου γ είναι ο

$$B_\gamma(A) := \{z \in C : |z - \alpha_{i_1, i_1}| |z - \alpha_{i_2, i_2}| \leq \tilde{r}_{i_1}(A) \tilde{r}_{i_2}(A)\}.$$

Με χρήση της ανισότητας (4.2) ισχύει $B_\gamma(A) \subseteq K_{i_1, i_2}(A)$.

→ Το επόμενο βήμα είναι να πάρουμε έναν ισχυρό κύκλο ο οποίος περνάει από περισσότερες από δύο κορυφές του κατευθυνόμενου γραφήματος, έστω p . Άρα θα έχει τη μορφή $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$ με $i_{p+1} = i_1$, με όλα τα $\{\tilde{r}_{i_j}(A)\}_{j=1}^p$ να είναι βεβαίως θετικοί. Επομένως για το λημνίσκο Brualdi για τον δοθέντα κύκλο μήκους p από τη σχέση (3.38) ισχύει:

$$B_\gamma(A) := \left\{ z \in C : \prod_{j=1}^p |z - \alpha_{i_j, i_j}| \leq \prod_{j=1}^p \tilde{r}_{i_j}(A) \right\}. \quad (4.3)$$

Έστω z οποιοδήποτε σημείο του $B_\gamma(A)$. Υψώνοντας στο τετράγωνο τη σχέση (4.3) προκύπτει

$$|z - \alpha_{i_1 i_1}|^2 |z - \alpha_{i_2 i_2}|^2 \dots |z - \alpha_{i_p i_p}|^2 \leq \tilde{r}_{i_1}^2(A) \tilde{r}_{i_2}^2(A) \dots \tilde{r}_{i_p}^2(A).$$

Και επειδή γνωρίζουμε ότι όλα τα παραλλαγμένα αθροίσματα γραμμών είναι θετικά μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη ανισότητα ως

$$\frac{|z - \alpha_{i_1 i_1}| |z - \alpha_{i_2 i_2}|}{\tilde{r}_{i_1}(A) \tilde{r}_{i_2}(A)} \frac{|z - \alpha_{i_2 i_2}| |z - \alpha_{i_3 i_3}|}{\tilde{r}_{i_2}(A) \tilde{r}_{i_3}(A)} \dots \frac{|z - \alpha_{i_p i_p}| |z - \alpha_{i_1 i_1}|}{\tilde{r}_{i_p}(A) \tilde{r}_{i_1}(A)} \leq 1. \quad (4.4)$$

Συνεπάγεται από την ανισότητα (4.4) ότι δεν μπορούν όλοι οι παράγοντες να είναι μεγαλύτεροι της μονάδας και επομένως θα υπάρχει τουλάχιστον ένας το πολύ ίσος με τη μονάδα. Έστω ότι είναι ο κ -οστός αυτός ο παράγοντας, με $1 \leq \kappa \leq p$. Ισχύει τότε

$$|z - \alpha_{i_\kappa i_\kappa}| |z - \alpha_{i_{\kappa+1} i_{\kappa+1}}| \leq \tilde{r}_{i_\kappa}(A) \tilde{r}_{i_{\kappa+1}}(A),$$

όπου αν $\kappa = p$, τότε $\kappa + 1 = 1$. Από τη σχέση (4.2) μπορούμε να διαπιστώσουμε $z \in K_{i_\kappa, i_{\kappa+1}}(A)$. Αυτό ισχύει όμως $\forall z \in B_\gamma(A)$. Συνεπώς,

$$B_\gamma(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^p K_{i_j, i_{j+1}}(A).$$

Δεδομένου ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε ισχυρό κύκλο γ , για το σύνολο B_{rualdi} ισχύει ότι

$$B(A) := \bigcup_{\gamma \in C(A)} B_\gamma(A) \subseteq \bigcup_{\substack{i, j \in N \\ i \neq j}} K_{i, j}(A) := K(A). \quad \blacksquare$$

Το Θεώρημα 4.1.1. μας δίνει τη σημαντικότερη πληροφορία ότι το σύνολο B_{rualdi} είναι υποσύνολο του συνόλου Brauer για κάθε τετραγωνικό μιγαδικό πίνακα A , διάστασης τουλάχιστον 2. Εντούτοις, αυτό το πλεονέκτημα αντισταθμίζεται και από το τίμημα του αισθητά μεγαλύτερου υπολογιστικού κόστους που απαιτείται έτσι ώστε να υπολογιστούν όλοι οι λημνίσκοι B_{rualdi} $B_\gamma(A)$. Το πλήθος ειδικά των λημνίσκων στην περίπτωση ενός πίνακα μεγέθους n που δεν έχει ούτε ένα μηδενικό στοιχείο καθιστά τη μέθοδο του B_{rualdi} ιδιαίτερα χρονοβόρα και σχεδόν απαγορευτική για μεγάλες τιμές του n . Η σύγκριση με το εκ των προτέρων γνωστό πλήθος των οβάλ του Cassini παρατίθεται στην απόδειξη της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 4.1.2. Έστω ένας πίνακας $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$. Τότε, αν ο πίνακας αποτελείται μόνο από μη μηδενικά στοιχεία, το κατευθυνόμενο του γράφημα είναι πλήρες και ισχύει η ισότητα της σχέσης (4.1), δηλαδή $B(A) = K(A)$.

Απόδειξη: Θα ορίσουμε πρώτα ως P_n το σύνολο όλων των (ισχυρών) κύκλων που έχουν μήκος τουλάχιστον 2. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την πληθικότητα αυτών των κύκλων, που προκύπτουν από ένα πλήρες γράφημα n κορυφών, την οποία και θα συμβολίσουμε με $|P_n|$.

Είναι απόλυτα λογικό να θεωρήσουμε ότι το σύνολο B_{rualdi} θα αποτελείται από όλους τους λημνίσκους τάξης m που δύνανται να σχηματιστούν για $2 \leq m \leq n$. Άρα αναμένουμε το πλήθος των λημνίσκων B_{rualdi} να είναι τουλάχιστον $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$. Ισχύει όμως ότι για κάθε m -άδα

κορυφών δε δημιουργείται μόνο ένας κύκλος, αλλά σχεδόν $m!$ κύκλοι. Αν λάβουμε υπόψιν το γεγονός ότι η κυκλική μετάθεση κορυφών δεν διαφοροποιεί τον ισχυρό κύκλο, π.χ. ο $\gamma_1 = (1 \ 2 \ 3)$ είναι ο ίδιος κύκλος με τον $\gamma_2 = (3 \ 1 \ 2)$, και εξαλείψουμε το φαινόμενο της επαναληψιμότητας κύκλων θέτοντας σε κάθε m -άδα που παράγει έναν ισχυρό κύκλο τη μικρότερη σε αύξων αριθμό κορυφή ως πρώτη (ή μία συγκεκριμένη εν πάση περιπτώσει), καταφέρνουμε εν τέλει να υπολογίσουμε επακριβώς το πλήθος των ισχυρών κύκλων σε ένα πλήρες γράφημα, το οποίο θα είναι

$$|P_n| = \sum_{\kappa=2}^n \binom{n}{\kappa} (\kappa-1)! \quad (4.5)$$

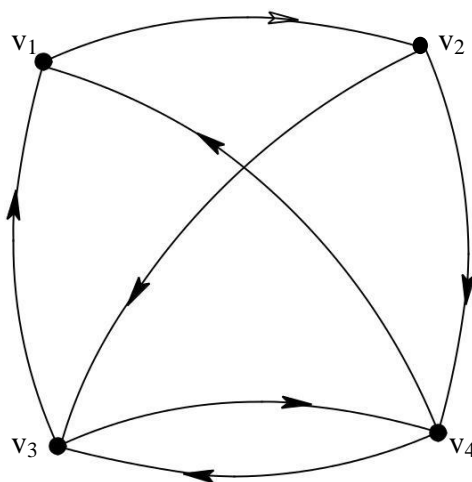
Εξασφαλίσαμε επομένως ότι κάθε ισχυρός κύκλος $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$ με $p \geq 2$ θα αποτελεί στοιχείο του P_n . Τότε όμως κάθε οβάλ του Cassini θα αντιστοιχεί σε ένα ισχυρό κύκλο μήκους 2 του $B(A)$. Έπεται λοιπόν ότι θα ισχύει $K(A) \subseteq B(A)$. Δεδομένου όμως ότι η (4.1) ισχύει πάντοτε, από τις δύο σχέσεις εγκλεισμού καταλήγουμε ότι για κάθε πίνακα A με πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα ισχύει τελικά $B(A) = K(A)$. ■

Αποδείχθηκε λοιπόν, ότι το σύνολο Brualdi $B(A)$ δεν είναι πάντα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου Brauer $K(A)$. Οι όποιοι κραδασμοί όμως παρουσιάζονται στη χρήση της μεθόδου Brualdi σχετίζονται με το δυσθεώρητο πολλές φορές πλήθος λημνίσκων Brualdi, ιδίως για πίνακες που δεν είναι αραιοί.

Για παράδειγμα, για έναν 10×10 μιγαδικό πίνακα A χωρίς κανένα μηδενικό στοιχείο προκύπτουν 1.112.073 διαφορετικοί κύκλοι στο σύνολο κύκλων $C(A)$, το οποίο συνεπάγεται βεβαίως και τον υπολογισμό ισόποσων λημνίσκων Brualdi. Ευτυχώς όμως επειδή το κατευθυνόμενο γράφημα $G(A)$ είναι πλήρες, ισχύει από την Πρόταση 4.1.2 ότι $B(A) = K(A)$ και αρκούμαστε στον υπολογισμό των οβάλ του Cassini που είναι μόλις 45. Εναλλακτικά βέβαια, θα μπορούσαν να υπολογιστούν μόνο οι δίσκοι Geršgorin, οι οποίοι είναι μόλις 10 (όσοι και το μέγεθος του πίνακα).

Το παραπάνω παράδειγμα μας έδειξε ότι ενίοτε μπορεί να βρεθεί ακριβώς το ίδιο χωρίο με τις μεθόδους του Brauer και Brualdi και μας βάζει συνάμα να ψάξουμε έναν τρόπο να μειώσουμε το πλήθος των λημνίσκων που απαιτεί η μέθοδος Brualdi να υπολογιστούν. Το έναυσμα για μια θετική κατάληξη στο ζήτημα αυτό δίνεται από πίνακες με μία ιδιαίτερη μορφή, ένας εκ των οποίων είναι και ο A του παραδείγματος που ακολουθεί

Παράδειγμα: Δίνεται πίνακας $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 4$, ο οποίος έχει όλα τα διαγώνια του μηδενικά (έτσι ώστε να μην παρουσιάζονται βρόχοι στο κατευθυνόμενο γράφημα $G(A)$) και κατευθυνόμενο γράφημα που δίνεται από το Γράφημα 4.1. Στο σύνολο κύκλων $C(A)$, με μήκος 4 εντοπίζουμε τους ισχυρούς κύκλους $\gamma_1 = (1 2 3 4)$ και $\gamma_2 = (1 2 4 3)$. Προκύπτει από τον ορισμό των λημνίσκων Brualdi και τη σχέση (3.38) ότι $B_{\gamma_1}(A) = B_{\gamma_2}(A)$. Οπότε συμπεραίνουμε καταρχάς ότι η ύπαρξη και των δύο λημνίσκων είναι περιττή. Από το Γράφημα 4.1 παρατηρούμε ότι οι υπόλοιποι (ισχυροί) κύκλοι που σχηματίζονται είναι οι $\gamma_3 = (1 2 3)$, $\gamma_4 = (1 2 4)$ και $\gamma_5 = (3 4)$. Αποδεικνύεται για τον πίνακα A του παραδείγματος, ότι το σύνολο Brualdi δίνεται από τον τύπο



Γράφημα 4.1: Το κατευθυνόμενο γράφημα $G(A)$, όπου απεικονίζονται οι κύκλοι γ_1 και γ_2 .

$$B(A) := \bigcup_{j=1}^5 B_{\gamma_j}(A) = B_{\gamma_3} \cup B_{\gamma_4} \cup B_{\gamma_5}, \quad (4.6)$$

δηλαδή, το σύνολο Brualdi δεν εξαρτάται καθόλου από τους λημνίσκους μέγιστης τάξης, αλλά από ένα υποσύνολο του $C(A)$. Αυτό μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.1.3. Έστω πίνακας $A \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$. Θέτουμε τότε ως $\hat{C}(A)$ το **ανηγμένο σύνολο κύκλων** (reduced cycle set), το οποίο είναι το αρχικό σύνολο κύκλων μείον τους ισχυρούς κύκλους που έχουν την ιδιαιτερότητα να μπορούν να αντικατασταθούν από ένα σετ ισχυρών κύκλων κατώτερης τάξης, οι οποίοι διέρχονται από τις κορυφές των κύκλων που αφαιρούνται τις ίδιες ακριβώς φορές.

Η εντυπωσιακή ομολογουμένως ιδιότητα των κύκλων που απαρτίζουν το ανηγμένο σύνολο κύκλων, είναι ότι μας δίνουν το ίδιο σύνολο Brualdi με πριν, δηλαδή ισχύει

$$\bigcup_{j \in \hat{C}(A)} B_{\gamma_j}(A) = B(A). \quad (4.7)$$

Ορισμός 4.1.4. Εάν $\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$ είναι ένας κύκλος του $C(A)$, τότε το $V(\gamma) = \bigcup_{j=1}^p \{i_j\}$ ονομάζεται

σύνολο κορυφών (vertex set) του κύκλου γ .

Μπορούμε πλέον, αφού δώσαμε τους απαραίτητους ορισμούς, να προχωρήσουμε στο βασικότερο θεώρημα μείωσης του αρχικού πλήθους των ισχυρών κύκλων που ανήκουν στο $C(A)$ και καθορίζουν το σύνολο Brualdi.

Θεώρημα 4.1.5. (Brualdi – Varga) Έστω ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, $n \geq 2$, με $C(A)$ το σύνολο των κύκλων του και $\{\gamma_i\}_{i=1}^s$ ένα σύνολο s το πλήθος διακεκριμένων ισχυρών κύκλων του $C(A)$, με $s \geq 2$. Αν ισχύουν

i) $V(\gamma_1) = \bigcup_{j=2}^s \{\gamma_j\}$, και

ii) υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος m τέτοιος ώστε κάθε κορυφή του $V(\gamma_1)$ να εμφανίζεται ακριβώς m φορές στο $\bigcup_{j=2}^s \{\gamma_j\}$, τότε ισχύει

$$B_{\gamma_1}(A) = \bigcup_{j=2}^s B_{\gamma_j}(A). \quad (4.8)$$

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε ότι το τυχαίο σημείο $z \in B_{\gamma_1}(A)$ ανήκει στην ένωση των λημνίσκων Brualdi των $s-1$ υπόλοιπων λημνίσκων. Καταρχάς, εφόσον γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος, συνεπάγεται ότι $r_i(A) > 0 \quad \forall i \in N$. Επομένως $\forall \gamma \in C(A)$ μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει

$$B_{\gamma}(A) = \left\{ z \in C : \prod_{i \in \gamma} \frac{|z - \alpha_{i,i}|}{r_i(A)} \leq 1 \right\}, \quad (4.9)$$

για το αντίστοιχο λημνίσκο Brualdi. Από τις υποθέσεις i) και ii) του θεωρήματος, εξάγουμε άλλη μία πολύ χρήσιμη εξίσωση, καθώς ισχύει

$$\prod_{k \in \gamma_1} \frac{|z - \alpha_{k,k}|}{r_k(A)^m} = \prod_{j=2}^s \prod_{k \in \gamma_j} \frac{|z - \alpha_{k,k}|}{r_k(A)}. \quad (4.10)$$

Από την (4.9) προκύπτει ότι για κάθε $z \in B_{\gamma_1}(A)$, ότι το γινόμενο του αριστερού μέλους της (4.10) είναι το πολύ ίσο με τη μονάδα. Συνεπώς, δεν μπορούν όλα τα γινόμενα $\prod_{k \in \gamma_j} \frac{|z - \alpha_{k,k}|}{r_k(A)}$ για $2 \leq j \leq s$, στο δεξί μέλος της (4.10) να υπερβαίνουν τη μονάδα. Άρα θα υπάρχει ένα i , με $2 \leq i \leq s$, τέτοιο ώστε $\prod_{k \in \gamma_i} \frac{|z - \alpha_{k,k}|}{r_k(A)} \leq 1$, το οποίο σημαίνει όντως ότι $z \in B_{\gamma_i}(A)$. ■

Παρατήρηση 4.1.6. Το Θεώρημα 4.1.5 μας επιτρέπει με άλλα λόγια να διαγράψουμε το λημνίσκο $B_{\gamma_1}(A)$ από το σύνολο $B_{\text{rualdi}} B(A)$, εφόσον ισχύει $\bigcup_{\gamma \in C(A) \setminus \gamma_1} B_{\gamma}(A) = B(A)$. Το τελευταίο μάλιστα παράδειγμα αποτέλεσε εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1.5 για $m=2$.

Παρατήρηση 4.1.7. Άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1.5 είναι και τα σύνολα Karow. Για οποιουδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $\{z_i\}_{i=1}^p$ με $p \geq 2$ και για οποιουδήποτε p το πλήθος μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς $\{\rho_i\}_{i=1}^p$ ισχύει για τα σύνολα (τύπου B_{rualdi})

$$S_p := \left\{ z \in C : \prod_{j=1}^p |z - z_j| \leq \prod_{j=1}^p \rho_j \right\} \quad \text{και} \quad S_{p \setminus \kappa} := \left\{ z \in C : \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \kappa}}^p |z - z_j| \leq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \kappa}}^p \rho_j \right\} \quad \forall \kappa \text{ με } 1 \leq \kappa \leq p,$$

ότι $S_p \subseteq \bigcup_{\kappa=1}^p S_{p \setminus \kappa}$. Η παραπάνω σχέση εγκλεισμού προκύπτει από το Θεώρημα 4.1.5 για $m=p-1$.

Παρατήρηση 4.1.8. Είναι προφανές ότι το μήκος ενός κύκλου $\gamma \in C(A)$ ισούται με την πληθικότητα του συνόλου κορυφών $V(\gamma)$. Τότε από την υπόθεση του Θεωρήματος 4.1.5 θα ισχύει ότι το μήκος του γ_1 είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μήκους κάθε κύκλου γ_i , με $2 \leq i \leq s$. Άρα η αφαίρεση του γ_1 από το $C(A)$ σημαίνει την αφαίρεση ενός λημνίσκου B_{rualdi} σίγουρα όχι της μικρότερης τάξης των υφιστάμενων λημνίσκων.

Παρατήρηση 4.1.9. Όπως είδαμε και νωρίτερα σε παράδειγμα, μπορούμε να αφαιρέσουμε κάποιον κύκλο από το $C(A)$ ακόμη και αν διέρχεται από τις ίδιες κορυφές με ένα μόνο κύκλο ίδιου μήκους (τότε προφανώς $m=1$). Ακόμη και στην περίπτωση αυτή όμως, ο κύκλος που αφαιρείται δεν ανήκει στους κύκλους μικρότερου μήκους του $C(A)$. Για παράδειγμα, αν $\gamma_1 = (1 \ 3 \ 2 \ 4)$ και $\gamma_2 = (1 \ 2 \ 4 \ 3)$, τότε από τον πρώτο κύκλο γνωρίζουμε ότι υπάρχουν οι ακμές $\overline{v_3 v_2}$ και $\overline{v_2 v_4}$, ενώ από τον δεύτερο κύκλο πληροφορούμαστε την ύπαρξη της ακμής $\overline{v_4 v_3}$. Συνεπώς μπορεί να σχηματιστεί ο κύκλος $\gamma_3 = (3 \ 2 \ 4)$, εμφανώς μικρότερου μήκους από τον κύκλο γ_1 ή γ_2 που επιλέγουμε να αφαιρέσουμε. Η ίδια λογική επικρατεί και για κάθε υποψήφιο προς αφαίρεση κύκλο μήκους n , με $n \geq 3$.

➔ Εν κατακλείδι, χρησιμοποιούμε το σύνολο B_{rualdi} αντί του συνόλου Brauer και του συνόλου Geršgorin για τον υπολογισμό του φάσματος $\sigma(A)$ ενός πίνακα A , αν έχουμε λάβει πρώτα γνώση ότι η πληθικότητα του συνόλου κύκλων $C(A)$ είναι σχετικά μικρή, ή ακόμα καλύτερα, αν γνωρίζουμε ότι το ανηγμένο σύνολο κύκλων $\hat{C}(A)$ έχει λίγα στοιχεία.

Παράδειγμα: Θα δείξουμε για τον τριδιαγώνιο πίνακα A_7 της §2.2 για $n \geq 4$ και χρησιμοποιώντας το Γράφημα 2.4, ότι ισχύει $\Gamma(A) = K(A) = B(A)$. Καταρχάς υπενθυμίζουμε ότι ο πίνακας είναι ο

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Το σύνολο Geršgorin ως γνωστόν θα αποτελείται από n το πλήθος δίσκους Geršgorin. Όλοι οι δίσκοι θα έχουν κέντρο το σημείο $z = 2$. Επιπλέον όλοι πλην του $\Gamma_1(A_7)$ και του $\Gamma_n(A_7)$ θα έχουν ακτίνα 2. Οι δύο δίσκοι που εξαιρέθηκαν θα έχουν ακτίνα 1. Συνεπώς προκύπτει εύκολα ότι το σύνολο Geršgorin θα είναι το $\Gamma(A_7) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}$.
 - Το σύνολο Brauer αποτελείται από όλα τα οβάλ του Cassini που προέρχονται από κάθε ζεύγος κορυφών του Γραφήματος 2.4 αν επεκτείνουμε το γράφημα σαν αλυσίδα n κορυφών. Παρατηρούμε ότι όλα τα οβάλ που δεν περιέχουν το δείκτη 1 ή το δείκτη n έχουν τη μορφή $K_{i,j}(A_7) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2|^2 \leq 4\}$ ($i, j \neq \{1, n\}$). Όλα τα υπόλοιπα οβάλ θα έχουν τη μορφή $K_{i,j}(A_7) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2|^2 \leq 2\}$, με μοναδική εξαίρεση το οβάλ $K_{1,n}(A_7) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2|^2 \leq 1\}$. Όλα τα οβάλ παρατηρούμε ότι έχουν τη μορφή δίσκου και μάλιστα το σύνολο Brauer αποτελείται από n ομόκεντρους δίσκους, ακτίνας 1, $\sqrt{2}$ και 2. Συνεπώς ισχύει $K(A_7) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}$.
 - Είναι φανερό από το Γράφημα 2.4 ότι ανεξαρτήτως της τιμής του n , θα σχηματίζονται πάντα $n-1$ λημνίσκοι Broualdí που θα αντιστοιχούν στους $n-1$ ισχυρούς κύκλους μήκους 2 που θα υπάρχουν (οι κύκλοι αυτοί μπορούν να αναγνωριστούν και ως «κρίκοι» στην «αλυσίδα» μήκους $n-1$ και να αριθμηθούν κατ' αντιστοιχία με τον αύξων αριθμό του εκάστοτε κρίκου ξεκινώντας από αριστερά). Συνεπώς όλοι οι λημνίσκοι Broualdí, εξαιρουμένου του πρώτου και του τελευταίου μόνο, θα έχουν τη μορφή $B_{\gamma_i}(A_7) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2|^2 \leq 4\}$, $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$, ενώ επιπλέον ισχύει $B_{\gamma_1}(A_7) = B_{\gamma_{n-1}}(A_7) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2|^2 \leq 2\}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύνολο Broualdí είναι το $B(A_7) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}$.
- Προκύπτει επομένως ότι όλα σύνολα αποτελούνται από ομόκεντρους επιμέρους δίσκους και εν τέλει ταυτίζονται, καθώς ισχύει $\Gamma(A_7) = K(A_7) = B(A_7) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}$.

4.2 Περιθώρια Βελτιστοποίησης του συνόλου Broudi

Δοθέντος ενός πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, $n \geq 1$, γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3.3.12 ότι ισχύει η σχέση εγκλεισμού $\sigma(A) \subseteq B(A)$. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο Broudi εξαρτάται από τις ποσότητες

$$\{a_{i,i}\}_{i=1}^n, \{\tilde{\tau}_i(A)\}_{i=1}^n \text{ και το σύνολο κύκλων } C(A). \quad (4.11)$$

Ως αποτέλεσμα, οποιοσδήποτε πίνακας $B = [\beta_{i,j}] \in C^{n \times n}$, με πανομοιότυπες όλες τις χαρακτηριστικές ποσότητες της (4.11), έχει ιδιοτιμές οι οποίες με βεβαιότητα περιέχονται στο $B(A)$. Οδηγούμαστε επομένως στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.2.1. Για κάθε πίνακα $A \in C^{n \times n}$ ορίζουμε την **Broudi κλάση πινάκων** (Broudi radial set) του A ως το σύνολο όλων των πινάκων που ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$\omega_B(A) := \{B = [\beta_{i,j}] \in C^{n \times n} : \beta_{i,i} = a_{i,i}, \tilde{\tau}_i(B) = \tilde{\tau}_i(A) \forall i \in N \text{ και } C(B) = C(A)\}, \quad (4.12)$$

ενώ έπεται και ο συμπληρωματικός ορισμός της **διευρυμένης Broudi κλάσης πινάκων** (extended Broudi radial set) του A , η οποία περιλαμβάνει όλους τους πίνακες που ικανοποιούν τη σχέση

$$\omega_B(A) := \{B = [\beta_{i,j}] \in C^{n \times n} : \beta_{i,i} = a_{i,i}, \tilde{\tau}_i(B) \leq \tilde{\tau}_i(A) \forall i \in N \text{ και } C(B) = C(A)\}. \quad (4.13)$$

Παρατήρηση 4.2.2. Είναι προφανές είναι η διευρυμένη Broudi κλάση πινάκων $\omega_B(A)$ λόγω της ανισότητας των αθροισμάτων γραμμών όπως φαίνεται στη σχέση (4.13) θα είναι μεγαλύτερη από την αρχική Broudi κλάση $\omega_B(A)$, δηλαδή $\omega_B(A) \subseteq \omega_B(A)$. Επισημαίνουμε επίσης ότι η κλάση Broudi πινάκων $\omega_B(A)$ συναντάται ενίοτε στη βιβλιογραφία και ως ισακτινικό κατά Broudi σύνολο πινάκων του A , ενώ η κλάση $\omega_B(A)$ συναντάται αντίστοιχα ως διευρυμένο ισακτινικό κατά Broudi σύνολο πινάκων του A .

Ορισμός 4.2.3. Από τη στιγμή που ορίσαμε τη Broudi κλάση ενός πίνακα $A \in C^{n \times n}$, μπορούμε να ορίσουμε και το **φάσμα της Broudi κλάσης** (Broudi equiradial set spectrum) του πίνακα A . Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$\sigma(\omega_B(A)) := \bigcup_{B \in \omega_B(A)} \sigma(B) \text{ και } \sigma(\omega_B(A)) := \bigcup_{B \in \omega_B(A)} \sigma(B). \quad (4.14)$$

Από τους προηγούμενους ορισμούς, τον Ορισμό 3.3.7 και την σχέση (3.42) προκύπτει ότι

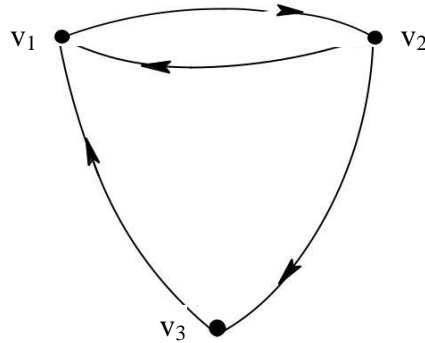
$$\sigma(\omega_B(A)) \subseteq \sigma(\omega_B(A)) \subseteq B(A). \quad (4.15)$$

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, η σχέση (4.15) ισχύει κατ' αναλογία με τη σχέση (3.16) του φάσματος της κλάσης του πίνακα A εν συγκρίσει με το σύνολο Brauer. Επιπρόσθετα, υπενθυμίζουμε ότι $\tilde{\tau}_i(A) > 0$ για κάθε i -οστή κορυφή από την οποία διέρχεται ένας τουλάχιστον ισχυρός κύκλος του κατευθυνόμενου γραφήματος $G(A)$.

Το μείζον ζήτημα που προκύπτει από τη σχέση (4.15) είναι βεβαίως αν μπορεί να υπάρξει ταύτιση των συνόλων $\sigma(\omega_B(A))$ και $B(A)$, όπως υπήρξε ανάλογη ισότητα στη σχέση (3.16) ανάμεσα στα σύνολα $\sigma(\omega(A))$ και $K(A)$, και αν ναι, ποιες είναι οι απαραίτητες προϋποθέσεις.

Παράδειγμα: Θέτουμε καταρχάς τον πίνακα $A_{18} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

ο οποίος έχει αθροίσματα γραμμής $r_1(A_{18}) = r_2(A_{18}) = 1$ και $r_3(A_{18}) = 1/2$. Το κατευθυνόμενο γράφημα του A_{18} χωρίς βρόχους είναι το Γράφημα 4.2. Ο A_{18} φαίνεται ότι είναι μη υποβιβάσιμος και το σύνολο κύκλων του είναι το $C(A_{18}) = (1\ 2) \cup (1\ 2\ 3)$.



Γράφημα 4.2: Το κατευθυνόμενο γράφημα $G(A_{18})$, όπου φαίνονται και οι ισχυροί κύκλοι του $C(A_{18})$.

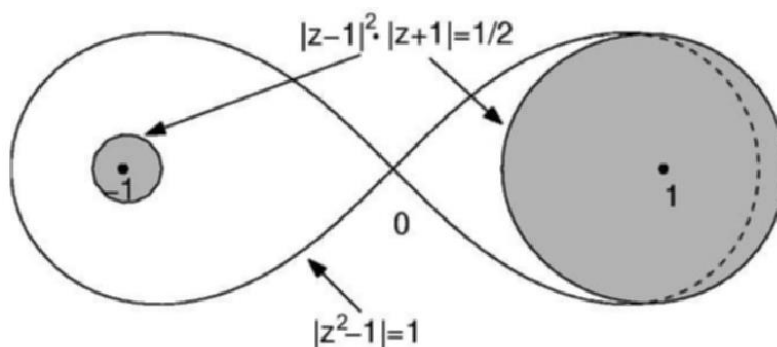
Όσον αφορά τους πίνακες που ανήκουν στην κλάση Brualdi του πίνακα A_{18} , αυτοί οι πίνακες έχουν τη μορφή

$$A_{19} = C = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta_1} & 0 \\ (1-s)e^{i\theta_2} & -1 & se^{i\theta_3} \\ \frac{1}{2}e^{i\theta_4} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

όπου πρέπει να ισχύει $0 < s < 1$ και οι $\{\theta_i\}_{i=1}^4$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής s δε μπορεί να λάβει την τιμή 0 ή 1, καθώς στην περίπτωση αυτή θα είχαμε αλλοίωση του συνόλου κύκλων $C(A_{19})$. Θέτοντας $\gamma_1 = (1\ 2)$, $\gamma_2 = (1\ 2\ 3)$ και εφαρμόζοντας τον ορισμό των λημνίσκων Brualdi για τους δύο κύκλους, προκύπτει ότι

$$B_{\gamma_1}(A_{18}) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| \leq 1\} \text{ και } B_{\gamma_2}(A_{18}) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1|^2 \cdot |z+1| \leq 1/2\}, \quad (4.17)$$

όπου ο δεύτερος λημνίσκος Brualdi αποτελείται από δύο συνιστώσες, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4.3.



Εικόνα 4.3: Οι λημνίσκοι Brualdi $B_{\gamma_1}(A_{18})$ και $B_{\gamma_2}(A_{18})$ για τον πίνακα A_{18} .

Παρατηρούμε από τη σχέση (4.17) και την Εικόνα 4.3 ότι το $z = 0$ είναι σημείο που ανήκει στο σύνορο τόσο του $B_{\gamma_1}(A_{18})$, όσο και του $B(A_{18}) := B_{\gamma_1}(A_{18}) \cup B_{\gamma_2}(A_{18})$. Έστω λοιπόν ότι μπορούμε να βρούμε μια τιμή του συντελεστή s , με $0 < s < 1$ και τέσσερις πραγματικούς αριθμούς $\{\theta_i\}_{i=1}^4$ ώστε ο πίνακας A_{19} να έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή. Αυτό θα σήμαινε όμως αυτομάτως ότι $\det A_{19} = 0$, κάτι που μπορεί να επαληθευτεί αν ισχύει καθώς για τις δεδομένες παραμέτρους s και $\{\theta_i\}_{i=1}^4$ όλα τα στοιχεία του πίνακα A_{19} είναι γνωστά. Θα πρέπει να ισχύει λοιπόν:

$$\begin{aligned} 0 = \det A_{19} &= -1 - (1-s)e^{i(\theta_1+\theta_2)} + se^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}/2 \Leftrightarrow \\ 1 &= -(1-s)e^{i(\theta_1+\theta_2)} + se^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}/2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Καθώς όμως ισχύει $0 < s < 1$, το δεξιό μέλος της σχέσης (4.18) κατά απόλυτη τιμή ισούται με

$$(1-s) + s/2 = (2-s)/2 < 1,$$

που σημαίνει ότι $\det A_{19} \neq 0$ για κάθε πίνακα της κλάσης Broudi του πίνακα A_{19} . Ισχύει δηλαδή ότι $0 \notin \sigma(\omega_B(A_{19}))$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $0 \notin \sigma(\omega_B(A_{19}))$. Επειδή όμως $0 \in B(A_{19})$, ισχύει τελικώς

$$\sigma(\omega_B(A_{19})) \subseteq \sigma(\omega_B(A_{19})) \subsetneq B(A_{19}). \quad (4.19)$$

\mapsto Είδαμε λοιπόν στο παραπάνω παράδειγμα ότι δεν μπορεί να επιτευχθεί η ισότητα συνόλων στο δεύτερο μέλος της (4.19) για $0 < s < 1$. Παρατηρούμε πάντως από την (4.17) ότι ο συντελεστής s δε διαδραματίζει κανένα απολύτως ρόλο στον καθορισμό του συνόλου Broudi. Επομένως αν αποπειραθούμε να θέσουμε $s = 0$, τότε μπορεί ο νέος πίνακας \hat{C} να μην ανήκει στην Broudi κλάση του A_{18} , αλλά θα ισχύει ότι τα αθροίσματα γραμμών και βεβαίως τα διαγώνια στοιχεία του A_{18} παραμένουν αναλλοίωτα. Από τον πίνακα της (4.16) θα προκύψει ο νέος πίνακας

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta_1} & 0 \\ e^{i\theta_2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2}e^{i\theta_3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

και μάλιστα με την κατάλληλη επιλογή των θ_1 και θ_2 (π.χ. $\theta_1 = 0$ και $\theta_2 = \pi$), θα ισχύει η ισότητα (4.18) και συνεπώς το $z = 0$ θα είναι ιδιοτιμή του \hat{C} , με τον πίνακα αυτόν να είναι το όριο των πινάκων της Broudi κλάσης του A_{18} , δηλαδή το όριο του C όταν $s \rightarrow 0$. Στο Γράφημα 4.4 παραρητούμε ότι το $G(\hat{C})$ δεν είναι το ίδιο με το $G(A_{18})$ του Γραφήματος 4.3, καθώς ελέω του μηδενισμού του συντελεστή s , έχει μηδενιστεί και το στοιχείο $\hat{c}_{2,3}$ που αντιστοιχεί στην ακμή $\overline{v_2 v_3}$. Εντούτοις, ο πίνακας \hat{C} ανήκει στην (απλή) κλάση του πίνακα A_{18} , καθώς πληρεί τα κριτήρια του ορισμού της βάσει της (3.13).

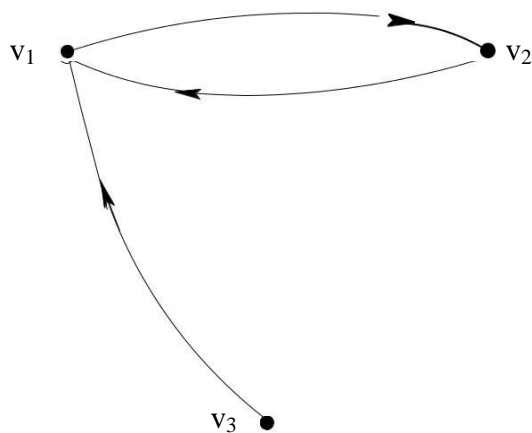
Το αποτέλεσμα αυτό μας προδιαθέτει θετικά στο να συμπεριλάβουμε και το σύνορο του συνόλου πινάκων που ορίζει μια κλάση Broudi ενός συγκεκριμένου πίνακα, δηλαδή να λάβουμε την κλειστότητα του προηγούμενου συνόλου $\omega_B(A_{18})$ (ομοίως και με τη διευρυμένη κλάση Broudi).

Ορισμός 4.2.4. Για οποιονδήποτε πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, $n \geq 1$, ορίζουμε την **κλειστότητα** (closure) της κλάσης Broudi του πίνακα A ως

$$\bar{\omega}_B(A) := \{ B = [b_{i,j}] \in C^{n \times n} : \exists \{A_i\}_{i=1}^\infty \in \omega_B(A) \text{ με } B = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i \}, \quad (4.21)$$

και την κλειστότητα της διευρυμένης κλάσης Broudi του πίνακα A ως

$$\bar{\hat{\omega}}_B(A) := \{ C = [c_{i,j}] \in C^{n \times n} : \exists \{A_i\}_{i=1}^\infty \in \hat{\omega}_B(A) \text{ με } C = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i \}. \quad (4.22)$$



Γράφημα 4.4: Το κατευθυνόμενο γράφημα $G(\hat{C})$.

Οι παραπάνω ορισμοί μας επιτρέπουν πλέον να βελτιστοποιήσουμε τη σχέση (4.15).

Θεώρημα 4.2.5. (Θεώρημα Varga) Για κάθε πίνακα $A = [a_{i,j}] \in C^{n \times n}$, ισχύει

$$\partial B(A) \subseteq \sigma(\bar{\omega}_B(A)) \subseteq \sigma(\bar{\hat{\omega}}_B(A)) = B(A), \quad (4.23)$$

δηλαδή όλα τα σημεία που αποτελούν το σύνολο του συνόλου Brualdi του πίνακα A είναι ιδιοτιμές κάποιου πίνακα που ανήκει στην κλειστότητα της κλάσης Brualdi του πίνακα A και επιπλέον όλες οι ιδιοτιμές της κλειστότητας της κλάσης Brualdi ανήκουν στο φάσμα της κλειστότητας της διευρυμένης κλάσης Brualdi του πίνακα A , το οποίο ισούται με το σύνολο Brualdi του A .

Παρατήρηση 4.2.6. Από το Θεώρημα 4.2.5 είναι εμφανές ότι τα φάσματα των πινάκων που ανήκουν στην κλάση $\bar{\omega}_B(A)$ είναι πυκνά στο σύνολο Brualdi $B(A)$. Συνεπώς δεν υφίσταται πλέον κάποιο επιπλέον περιθώριο βελτιστοποίησης της σχέσης (4.23).

Μεταξύ του Θεωρήματος 4.2.5 και του Θεωρήματος 3.3.16 υπάρχει μια αναπάντεχη συσχέτιση. Το θεώρημα του Varga σε συνδυασμό με το Θεώρημα 3.3.16 μας υποδεικνύει ότι για κάθε μιγαδικό πίνακα A υπάρχει κάποιος πίνακας \hat{A} που να ανήκει στη Brualdi κλάση του A και όλοι οι λημνίσκοι Brualdi του \hat{A} να διέρχονται από μια ιδιοτιμή του πίνακα \hat{A} .

Έπειτα, το Θεώρημα 3.3.16 δε μας καθοδηγεί στην εύρεση μιας ιδιοτιμής, αλλά στην γραφική επαλήθευσή του χωρίου Brualdi. Αντιθέτως, το Θεώρημα 4.2.5 μας επιτρέπει έμμεσα να τροποποιήσουμε τον αρχικό μας μη υποβιβάσιμο πίνακα A σε κάποιον πίνακα $\hat{A} \in \bar{\omega}_B(A)$, όπου ο νέος αυτός πίνακας περιέχει κάποιον ασθενή ή κάποιους ασθενείς κύκλους και επομένως δεν είναι μη υποβιβάσιμος. Οι περιπτώσεις που συνιστάται να ακολουθήσουμε τη διαδικασία αυτή δεν είναι και λίγες, καθώς πολλές φορές ο αρχικός πίνακας δεν έχει κάποια προφανή ιδιοτιμή. Έτσι πολλές φορές ωφελεί να θυσιάσουμε την χρήσιμη ιδιότητα της μη υποβιβασιμότητας, να επιλέξουμε έναν πίνακα $\hat{A} \in \bar{\omega}_B(A)$ με όσο πιο απλούς και ενδεχομένως επαναλαμβανόμενους λημνίσκους Brualdi γίνεται, να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα \hat{A} και τελικώς να ελέγξουμε αν οι ιδιοτιμές του \hat{A} είναι ταυτοχρόνως και ιδιοτιμές του A .

Μπορεί η παραπάνω διαδικασία να φαντάζει μακροσκελής και χρονοβόρα, αλλά υπάρχουν περιπτώσεις που απλουστεύει ιδιαίτερα το χωρίο εγκλεισμού ιδιοτιμών, σμικρύνοντας το αισθητά. Αυτό συμβαίνει σε περιπτώσεις που υπάρχουν πολλοί λημνίσκοι Brualdi με διαφορετικές εστίες και πολλαπλότητα ένα, ή στην περίπτωση που εμφανίζεται κάποιος λημνίσκος Brualdi μεγάλης τάξης και με πολύ μεγάλη ακτίνα σε σχέση με τους υπόλοιπους.

Παρόλα αυτά, η μεθοδολογία αυτή δε μας εξασφαλίζει πάντα κάποια ιδιοτιμή για τον αρχικό μας πίνακα. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση με τον τριδιαγώνιο πίνακα A_7 που μελετήσαμε και νωρίτερα.

Παράδειγμα: Υπενθυμίζουμε ότι ο τριδιαγώνιος πίνακας A_7 είναι ο

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός γνωρίζουμε από την §4.1 ότι για $n \geq 4$ έχει σύνολο Broualdi ίσο με $B(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}$. Μπορούμε να δείξουμε εύκολα πως το σημείο $z = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A_7 , καθώς βάσει του Θεωρήματος 3.3.16 αν ίσχυε ότι το μηδέν είναι ιδιοτιμή, θα έπρεπε τότε να διέρχονται και όλοι οι λημνίσκοι Broualdi από το μηδέν, καθώς το μηδέν ανήκει στο $\partial B(A)$.

Με σχετική ευκολία όμως, μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα που να ανήκει στην κλάση Broualdi του A_7 και μία από τις ιδιοτιμές του να είναι το μηδέν. Κατ' αυτόν τον τρόπο ισχύει τόσο το θεώρημα του Varga, όσο και το Θεώρημα 3.3.16. Η ενδεδειγμένη κίνηση είναι να αποκλείσουμε τους κόμβους v_1 και v_n καθώς οι αντίστοιχες γραμμές έχουν μικρότερο άθροισμα γραμμής σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα. Επιτυγχάνοντας το αυτό, προκύπτουν από το κατευθυνόμενο γράφημα του νέου πίνακα $\hat{A} \in \bar{\omega}_B(A)$ λημνίσκοι Broualdi με ίδια εστία και ίδια ακτίνα. Πρόκειται εν ολίγοις για έναν μόνο λημνίσκο Broualdi (δίσκο εδώ) με πολλαπλότητα $n-3$ (εξού και η προϋπόθεση να ισχύει $n \geq 4$).

Πλέον ο πίνακας έχει μια πιο φιλική μορφή και να μπορεί εύκολα, ακόμα και από τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα, ναδειχθεί ότι $0 \in \sigma(\hat{A})$. Άρα μόλις δείξαμε με ένα αντιπαράδειγμα ότι όπως ήταν αναμενόμενο, η παραπάνω μεθοδολογία δε μας οδηγεί πάντα στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 2: Έστω ο πίνακας

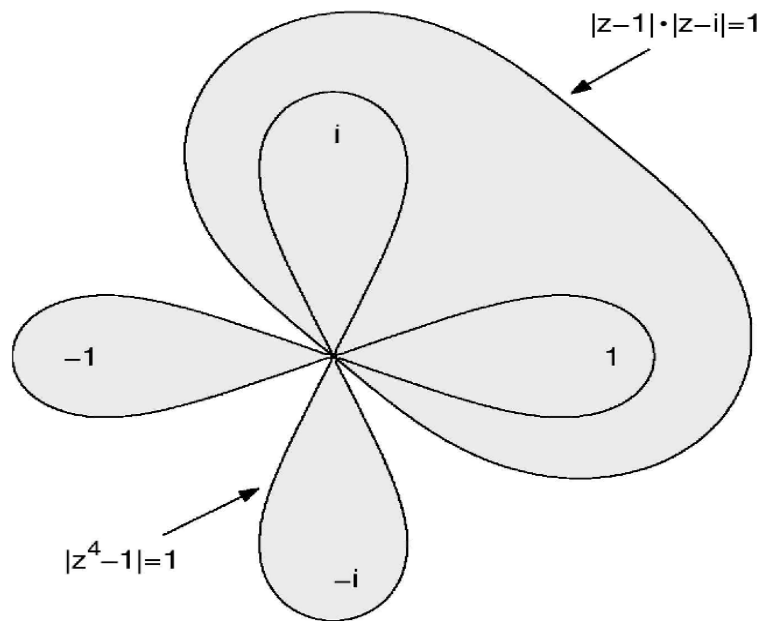
$$A_{20} = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ \frac{s}{2}e^{i\theta_2} & i & (2-s)\frac{1}{2}e^{i\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & e^{i\theta_4} \\ e^{i\theta_5} & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

όπου πρέπει να ισχύει $0 < s < 1$, ενώ οι $\{\theta_i\}_{i=1}^5$ είναι πραγματικοί αριθμοί στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Είναι εμφανές ότι ο πίνακας A_{20} είναι μη υποβιβασίμος, με το σύνολο κύκλων των να είναι το $C(A_{20}) = (1 \ 2) \cup (1 \ 2 \ 3 \ 4)$. Επιπλέον για τα αθροίσματα γραμμών ισχύει $r_i(A_{20}) = 1, \forall 1 \leq i \leq 4$.

Για το σύνολο Broualdi ισχύει ότι $B(A) = B_{\gamma_1}(A_{20}) \cup B_{\gamma_2}(A_{20})$, όπου

$$B_{\gamma_1}(A_{20}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1||z - i| \leq 1\} \text{ και } B_{\gamma_2}(A_{20}) = \{z \in \mathbb{C} : |z^4 - 1| \leq 1\}. \quad (4.24)$$

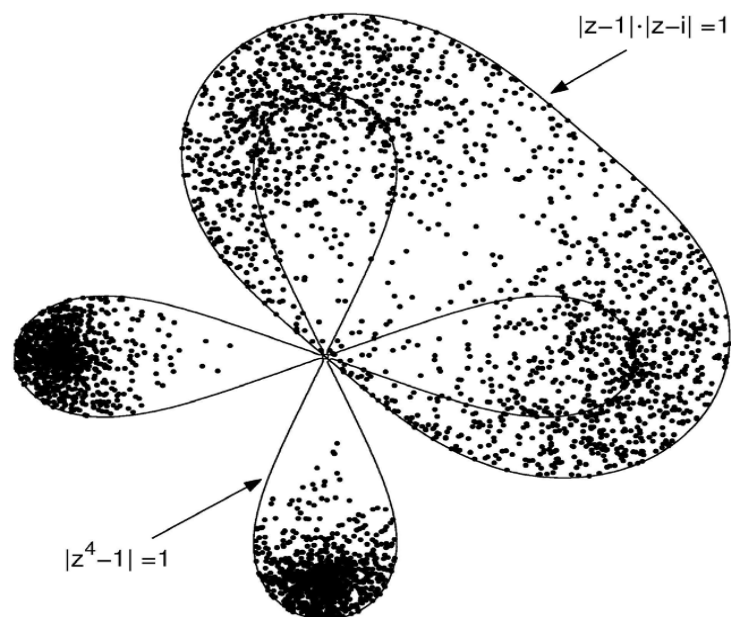
Οι δύο λημνίσκοι φαίνονται στην Εικόνα 4.5, όπου ο $B_{\gamma_2}(A_{20})$ έχει σχήμα τετράφυλλου τριφυλλιού. Τρέχοντας τον πίνακα A_{20} για διάφορες τιμές του $s \in (0,1)$ και των $\{\theta_i\}_{i=1}^5$ παρατηρούμε ότι οι εκάστοτε ιδιοτιμές του τείνουν να γεμίσουν το σύνολο Broualdi $B(A_{20})$, κάτι που φαίνεται περίτρανα και στην Εικόνα 4.6.



Εικόνα 4.5: Οι λημνίσκοι Brualdi $B_{\gamma_1}(A_{20})$ και $B_{\gamma_2}(A_{20})$ του πίνακα A_{20} .

Είδαμε προηγουμένως ότι το θεώρημα του Varga και το Θεώρημα 3.3.16 έχουν συμπληρωματικό ρόλο το ένα ως προς το άλλο. Παρά ταύτα ισχύει κάτι αρκετά παράδοξο. Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3.3.16 ότι για να είναι ένα σημείο που ανήκει στο σύνολο Brualdi ιδιοτιμή, υπάρχει η αναγκαία συνθήκη να διέρχονται όλοι οι λημνίσκοι Brualdi από αυτό. Εντούτοις, το $z = 0$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο των $\partial B_{\gamma_1}(A_{20})$ και $\partial B_{\gamma_2}(A_{20})$.

Απεναντίας, το Θεώρημα 4.2.5 μας οδηγεί ένα αντιφατικό αποτέλεσμα, καθώς κάθε στοιχείο του $\partial B(A_{20})$ είναι ιδιοτιμή κάποιου πίνακα που ανήκει στο $\bar{\omega}_B(A)$. Η διαφορά βέβαια έγκειται στο γεγονός ότι το Θεώρημα 3.3.16 αναφέρεται σε έναν συγκεκριμένο πίνακα, τον A_{20} , τη στιγμή που το Θεώρημα 4.2.5 απευθύνεται σε όλους τους πίνακες που ανήκουν στην κλειστότητα του $\omega_B(A_{20})$.



Εικόνα 4.6: Τυχαίες ιδιοτιμές του $B(A_{20})$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων.

Βιβλιογραφία

1. Π. Ι. Ψαρράκος, *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων, Σημειώσεις μαθήματος*, 2012.
 2. F. L. Bauer, Fields of values and Geršgorin disks, *Numer. Math.* 4, 103-113, 1968.
 3. R. Beauwens, Semistrict Diagonal Dominance, *SIAM J. Numer. Anal.* 13, 109-112, 1976.
 4. G. Birkhoff S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, third edition, MacMillan Co., New York, 1960.
 5. A. Brauer, Limits for the characteristic roots of a matrix, *Duke Math. J.* 13, 387-395, 1946.
 6. A. Brauer, Limits for the characteristic roots of a matrix II, *Duke Math. J.* 14, 21-26, 1947.
 7. A. Brauer, Limits for the characteristic roots of a matrix V, *Duke Math. J.* 19, 553-562, 1952.
 8. R. Brualdi, Matrices, eigenvalues and directed graphs, *Linear Multilinear Algebra* 11, 143-165, 1982.
 9. G. M. Engel, Regular equimodular sets of matrices for generalized matrix functions, *Linear Algebra and Appl.* 7, 243-274, 1973.
 10. K. Fan and A. J. Hoffman, Lower bounds for the rank and location of the eigenvalues of a matrix, *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 39*, U.S. Government Printing Office, 1954.
 11. K. Fan, Note on circular disks containing the eigenvalues of a matrix, *Duke Math. J.* 25, 441-445, 1958.
 12. D. G. Feingold and R. S. Varga, Block diagonally matrices and generalizations of the Geršgorin circle theorem, *Pacific J. Math.* 12, 1241-1250, 1962.
 13. S. Geršgorin, Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 1, 749-754, 1931.
 14. R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
 15. A. S. Householder, On the convergence of matrix iterations, *J. Assoc. Comput. Mach.* 3, 314-324, 1956.
 16. A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell Publ. Co., New York, 257 pp., 1964.
 17. A. S. Householder, R. S. Varga and J. Wilkinson, A note on Gerschgorin's inclusion theorem for eigenvalues of matrices, *Numer. Math.* 16, 141-144, 1972.
 18. M. Karow, *Geometry of Spectral Value Sets*, Ph.D. Thesis, Universitat Bremen, Bremen, Germany, 2003.
 19. L. Yu. Kolotilina, Nonsingularity/singularity criteria for nonstrictly block diagonally dominant matrices, *Linear Algebra and Appl.* 359, 133-159, 2003.
 20. L. Yu. Kolotilina, Generalizations of the Ostrowski-Brauer Theorem, *Linear Algebra and Appl.* 364, 65-80, 2003.
 21. A. Krautstengl and R. S. Varga, On Geršgorin-type Problems and Ovals of Cassini, *ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis)* 8, 15-20, 1999.
 22. B. Li and M. J. Tsatsomeros, Doubly Diagonally Dominant Matrices, *Linear Algebra and Appl.* 261, 221-235, 1997.
 23. M. Marcus and H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Allyn and Bacon, Boston, 1964.
 24. A. M. Ostrowski, Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, *Comment. Math. Helv.* 10, 69-96, 1937.
 25. A. M. Ostrowski, Über das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen, *Compositio Math.* 9, 209-226, 1951.
 26. A. M. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations*, Academic Press, New York, 1960.
 27. O. Taussky, Bounds for characteristic roots of matrices, *Duke Math. J.* 15, 1043-1044, 1948.
 28. O. Taussky, A recurring theorem on determinants, *Amer. Math. Monthly* 56, 672-676, 1949.
 29. O. Taussky, How I became a torch bearer for Matrix Theory, *Amer. Math. Monthly* 95, 801-812, 1988.
 30. R. S. Varga, Gerschgorin-type eigenvalue inclusion theorems and their sharpness, *ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis)* 12, 113-133, 2001.
 31. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer Series in Computational Mathematics, 2004.
 32. J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, Colloquium Publications, vol. 20, fifth edition, Amer. Math. Soc., Providence, 1969.
-