

ΙΩΑΝΝΟΥ Θ. ΚΑΤΣΙΚΑΔΕΛΗ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΕΩΣ
ΤΗΣ ΕΝΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΣΚΩΝ
ΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΟΜΕΝΗΝ
ΣΥΝΟΡΙΑΚΗΝ ΕΝΤΑΣΙΝ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΑ ΥΠΟΒΛΗΘΕΙΣΑ ΕΙΣ ΤΗΝ
ΑΝΩΤΑΤΗΝ ΣΧΟΛΗΝ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΥ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑΙ 1973

ΙΩΑΝΝΟΥ Θ. ΚΑΤΣΙΚΑΔΕΛΗ

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΕΩΣ
ΤΗΣ ΕΝΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΣΚΩΝ
ΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΟΜΕΝΗΝ
ΣΥΝΟΡΙΑΚΗΝ ΕΝΤΑΣΙΝ**

**ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΑ ΥΠΟΒΛΗΘΕΙΣΑ ΕΙΣ ΤΗΝ
ΑΝΩΤΑΤΗΝ ΣΧΟΛΗΝ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΥ Ε.Μ.Π.**

ΑΘΗΝΑΙ 1973

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ:

ΕΥΤΥΧΙΟΣ ΚΟΚΚΙΝΟΠΟΥΛΟΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε. Μ. Π.

Η Έγκρισις διδακτορικής διατριβής υπό της 'Ανωτάτης Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Ε. Μ. Πολυτεχνείου δέν ύποδηλοι άποδοχήν τών γνώμων του συγγραφέως (N. 5343/1932 άρθρον 202)

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ
ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΕΒΑΣΤΟΥΣ ΜΟΥ ΓΟΝΕΙΣ

BLANK PAGE

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Ἡ παρούσα ἐργασία ἐξεπονήθη ἐν τῷ Ἐργαστηρίῳ Στατικῆς καί Ἀντισεισμικῶν Ἐρευνῶν τοῦ Ἐθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου κατὰ τὸ χρονικόν διάστημα 1971 - 1972 καί ὑπεβλήθη, ὡς Διδακτορική Διατριβή, εἰς τὴν Ἀνωτάτην Σχολὴν Πολιτικῶν Μηχανικῶν τοῦ Ἰδρύματος τὴν 17ην Ἰανουαρίου 1973.

Καθ' ὅλας τὰς φάσεις τῆς ἐκπονήσεως τῆς παρούσης Διατριβῆς ἔτυχον τῆς ἀνεκτιμήτου συμπαραστάσεως καί καθοδηγήσεως τοῦ Σεβαστοῦ μου καθηγητοῦ κ. Εὐτυχίου Κοκκινοπούλου, πρὸς τὸν ὁποῖον ἐκφράζω καί ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης τὰς θερμότερας τῶν εὐχαριστιῶν μου.

Διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς τῆς παρούσης Διατριβῆς ἐγένετο εὐρεῖα χρῆσις τῶν ὑπολογιστῶν IBM 1620 τοῦ Ε.Μ.Π. καί CDC 3300 - 1700 τοῦ Κεντρου Πυρηνικῶν Ἐρευνῶν "Δημόκριτος". Τὸν Ἀντιπρύτανιν καθηγητὴν κ. Κ. Θεοφιλόπουλον ὡς καί τὴν Διοίκησιν τῆς Ἑλληνικῆς Ἐπιτροπῆς Ἀτομικῆς Ἐνεργείας θερμῶς εὐχαριστῶ διὰ τὴν, μέσῳ τοῦ καθηγητοῦ κ. Κοκκινοπούλου, παρασχεθεῖσαν μοι ἄδειαν ἀπεριορίστου χρησιμοποίησεως τῶν προαναφερθέντων ὑπολογιστικῶν συγκροτημάτων.

Ἐπίσης εὐχαριστῶ θερμῶς τὸν Σεβαστόν μου Κοσμητόρα τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Πολιτικῶν Μηχανικῶν καθηγητὴν κ. Εὐάγγελον Παναγιωτουᾶκον διὰ τὰς χρήσιμους συμβουλὰς του ἐπὶ τοῦ θέματος τῆς Διατριβῆς καὶ διὰ τὴν ἐν παντί συμπαράστασίν του καθ' ὅλην τὴν διαδικασίαν τῆς ἐγκρίσεως ταύτης.

Τέλος, τοὺς τεχνίτας τοῦ Ἐργαστηρίου Στατικῆς καί Ἀντισεισμικῶν Ἐρευνῶν τοῦ Ε.Μ.Π. κ.κ. Β. Εὐρυσύνην καί Λ. Ρόμβον διὰ τὴν οὐσιαστικὴν βοήθειάν των κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πειραμάτων ὡς καί τὴν δακτυλογράφον κ. Αἰκ. Ἀναπλιώτου καί τὴν σχεδιάστριαν δ/δα Ὁλ. Ἀσημάκη διὰ τὴν τελικὴν ἐμφάνισιν τῆς Διατριβῆς, εἰλικρινῶς εὐχαριστῶ.

Ἀθῆναι, Ἰούνιος 1973

Ι. Θ. ΚΑΤΣΙΚΑΔΕΛΗΣ

BLANK PAGE

Π Ι Ν Α Σ Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Ω Ν

	Σελίς
Είσαγωγική Περίληψις	I-III
§1.- Παραδοχαί	1
§2.- Έξισώσεις Έλαστικότητας	4
§3.- Έξισωσις τῶν τεσσάρων σημείων. Ἀριθμητικὴ ὀλοκλήρωσις τῶν ἑξισώσεων Laplace καί Poisson	6
§4.- Σύγκλισις τῆς μεθόδου Gauss-Seidel διὰ τὰς ἑξισώσεις Laplace καί Poisson	14
§5.- Ταχύτης συγκλίσεως. Μέθοδος τῆς ὑπερχαλαρώσεως	16
§6.- Συστηματοποιήσις τῆς μεθόδου διὰ τὴν σύνταξιν προγράμματος Ἡλεκτρονικοῦ Ὑπολογιστοῦ	18
§7.- Δομὴ τοῦ προγράμματος Ἡλεκτρονικοῦ Ὑπολογιστοῦ. Τὸ πρόγραμμα SOLAPEQ	23
§8.- Ἐφαρμογὴ τοῦ προγράμματος SOLAPEQ εἰς δίσκον γνωστῆς ἐντάσεως	38
§9.- Ὑπολογισμὸς τῶν κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 καί τῶν γωνιῶν διευθύνσεων $\omega = (\hat{n}_1, x)$. Τὸ πρόγραμμα PRINCST	64
§10.- Ἐφαρμογὴ τῆς μεθοδολογίας	70
I. Φωτοελαστικὸν πείραμα	70
II. Ἀξιοποιήσις τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος....	74

	Σελίς
III. Ὑπολογισμός τῶν τάσεων εἰς τό σύνορον	83
IV. Ἐφαρμογή τοῦ προγράμματος SOLAPEQ	85
V. Μελέτη τῶν ἀποτελεσμάτων	114
VI. Ὑπολογισμός τῶν κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 καί τῆς γωνίας $\omega = (\eta_1, \kappa)$. Κατασκευή τοῦ δι- κτύου κυρίων τάσεων	124
 Β ι β λ ι ο γ ρ α φ ί α	 142
 Π α ρ ά ρ τ η μ α	 145
§π1.- Πρόβλημα Dirichlet. Μέθοδοι ὀλοκληρώσεως τῆς ἐξι- σώσεως Laplace.	145
§π2.- Ἐφαρμογή τῆς ἐξισώσεως τῶν τεσσάρων σημείων. Ἡ μέθοδος Gauss - Seidel διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος.	146
§π3.- Μετασχηματισμός τῶν ἐξισώσεων ἐπιπέδου ἐλαστι- κότητας.	151
 Π ε ρ ί λ η ψ ι ς ε ἰ ς τ ῆ ν Ἐ γ γ λ ι κ ῆ ν	153

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἡ ἐφαρμογή τῶν δίσκων ὡς φερόντων στοιχείων εἰς τὰς κατασκευ-
ὰς τοῦ συγχρόνου μηχανικοῦ γίνεται διαρκῶς εὐρυτέρα. Τοῦτο ὀφείλεται
κυρίως εἰς τὴν δυνατότητα προσδιορισμοῦ τῆς ἐντάσεως των δι' ἀναπτύ-
ξεως προσεγγιστικῶν ὑπολογιστικῶν μεθόδων βασιζομένων εἰς τὴν χρῆσιν
μεγάλων καὶ ταχέων ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν. Αἱ προσεγγιστικαὶ αὗται
μέθοδοι δίδουν κατὰ κανόνα ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα. Πλὴν ὅμως ὑ-
πάρχουν περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας αἱ μέθοδοι αὗται καθίστανται
ἀπρόσφοροι, εἴτε διότι δέν παρουσιάζουν καθολικότητα (π.χ. ἡ μέθοδος
διὰ σειρῶν Fourier), εἴτε διότι εἶναι δύσχρηστοι (π.χ. μέθοδος πεπερα-
σμένων διαφορῶν διὰ περίπτωσιν δίσκου μέ πολύπλοκον σύνορον). Ἐνεκα
τούτου πολλάκις γίνεται προσφυγή εἰς πειραματικὴν μέθοδον προσδιορι-
σμοῦ τῆς ἐντάσεως τῶν δίσκων.

Μία πρόσφορος πειραματικὴ μέθοδος προσδιορισμοῦ τῆς ἐντάσεως
τῶν δίσκων εἶναι ἡ φωτοελαστική. Ἡ μέθοδος αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει νά
προσδιορίσωμεν ταχέως τὴν ἔντασιν εἰς τὸ σύνορον ἑνὸς ἐπιπέδου ἐντει-
νομένου δίσκου δι' ἐκτελέσεως ἑνὸς φωτοελαστικοῦ πειράματος. Ἡ πλή-
ρης ὅμως ἀποτίμησις τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ ἐσωτερικόν τοῦ δίσκου δι' ἀ-
ξιοποιήσεως τῶν δεδομένων τοῦ πλήρους φωτοελαστικοῦ πειράματος (δί-
κτυον ἰσοχρῶμων καὶ ἰσοκλινῶν) ἀποτελεῖ ἐργασίαν λίαν κοπιώδη διὰ
τῆς χρησιμοποίησεως τῶν γνωστῶν μεθόδων ἀποτιμήσεως τῆς ἐντάσεως, ὡς
εἶναι ἡ διὰ μετρήσεων ἐπὶ τῶν τροχιῶν τῶν κυρίων τάσεων μέθοδος Fi-
lion καὶ ἡ μέθοδος τῶν διατμητικῶν διαφορῶν τοῦ Förrl. Τὰ δέ οὕτω
λαμβάνόμενα ἀποτελέσματα εἶναι ἀμφιβόλου πιστότητος.

Ἀντιθέτως ἡ πλήρης ἀποτίμησις τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ ἐσωτερικόν
τοῦ δίσκου θά ἐγένετο εὐχερῶς, εἰάν ἐπετυγχάνετο αὕτη μόνον ἐκ τῆς συν-
οριακῆς ἐντάσεως τοῦ δίσκου, καθ' ὅσον εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθοῦν
πειραματικῶς αἱ συνιστώσαι τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ σύνορον κατὰ τρόπον
ἀπλοῦν καὶ ταχύν π.χ. δι' ἐκτελέσεως ἑνὸς μόνου φωτοελαστικοῦ πειράμα-
τος καὶ λήψεως τοῦ δικτύου τῶν ἰσοχρῶμων ἐπὶ μιᾶς φωτογραφίας. Πρὸς
αὐτὴν τὴν κατεύθυνσιν ἐστράφησαν αἱ προσπάθειαι τοῦ γράφοντος, τὸ δέ
ἀποτέλεσμα ἰούτων ὑπῆρξε καρποφόρον. Τῷ ὄντι ἐπετεύχθη λύσις τοῦ προ-
βλήματος τῆς ἀποτιμήσεως τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ ἐσωτερικόν ἐπιπέδου ἐν-
τεινομένου δίσκου μόνου ἐκ τῆς συνοριακῆς ἐντάσεως δι' ἐφαρμογῆς τῆς

έν τῇ παρούσῃ ἐργασίᾳ ἀναπτυσσομένης μεθοδολογίας.

Τό πρῶτον βῆμα πρὸς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐγένετο, μέ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν ἐξισώσεων τῆς ἐπιπέδου ἐλαστικότητας (§2) εἰς ἰσοδύναμον σύστημα τεσσάρων μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων β' τάξεως ἑλλειπτικοῦ τύπου, ἐκάστη τῶν ὁποίων περιέχει μίαν μόνον ἀγνώστον συνάρτησιν. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθοῦν πειραματικῶς εἰς τό σύνορον τοῦ δίσκου αἱ συνιστώσας τῆς ἐντάσεως, τό πρόβλημα μετετοπίσθη εἰς τὴν ἐπίλυσιν τεσσάρων προβλημάτων συνοριακῶν τιμῶν, ἡ λύσις τῶν ὁποίων δίδει τὰς συνιστώσας τῆς ἐντάσεως εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ ἐπιπέδου δίσκου.

Ἡ δυσκολία τοῦ προσδιορισμοῦ, ὑπὸ ἀναλυτικὴν μορφήν, τῆς λύσεως τῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (Laplace καί Poisson) ἀντιμετωπίζεται διὰ τῆς ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως τῇ χρήσει ψηφιακοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ. Δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς ὑπερχαλαρώσεως ἐπιτυγχάνεται ταχύτατος προσδιορισμός μεγάλου πλήθους τιμῶν τῆς ζητουμένης συναρτήσεως ἀντιστοιχοῦσῶν εἰς τὰς κορυφὰς πυκνοτάτου τετραγωνικοῦ καννάβου καλύπτοντος τὴν ἐπίπεδον περιοχὴν, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐφαρμόζεται ἡ ἐξίσωσις. Ἡ ἀκρίβεια τῆς ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως χάρις καί εἰς τὸν χρησιμοποιούμενον τετραγωνικόν κἀνναβον, εἶναι λίαν ἱκανοποιητικὴ εἰς τοιοῦτον μάλιστα βαθμόν, ὥστε, ὡς τοῦτο τεκμαίρεται καί ἐκ τοῦ παραδείγματος τῆς § 8, ἡ λαμβανομένη λύσις νά θεωρῆται καθ' ἡμᾶς ἀκριβῆς διὰ τὰς περιπτώσεις τῶν ἐφαρμογῶν.

Μετὰ τὴν ἐξασφάλισιν τῆς συγκλίσεως τῆς μεθόδου τῆς ὑπερχαλαρώσεως διὰ τὰς ἐξισώσεις Laplace καί Poisson (§4) καί τὴν ὑπερνίκησιν δυσκολιῶν τινῶν ἐμφανιζομένων κατὰ τὴν μὲρῶσιν τῶν ἐξισώσεων πεπερασμένων διαφορῶν διὰ τὰ καμπύλα τμήματα τοῦ συνόρου, συστηματοποιεῖται ἡ μέθοδος τῆς ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως πρὸς σύνταξιν προγράμματος ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ εἰς γλῶσσαν FORTRAN.

Τό πρόγραμμα, εἰς τό ὁποῖον δίδεται τό ὄνομα SOLAPEQ (§ 7), δέχεται ὡς δεδομένα τὰς συνοριακὰς τιμὰς τῶν συνιστωσῶν τῆς ἐντάσεως καί μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὑπολογισμῶν δίδει ὡς ἀποτελέσματα τὰς τιμὰς τῶν συνιστωσῶν τῆς ἐντάσεως εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ ἐπιπέδου χωρίου καί ἐπὶ τῶν κορυφῶν τετραγωνικοῦ καννάβου ἐπιθυμητῆς πυκνότητος σημείων, ἐξαρτωμένης μόνον ἐκ τῆς χωρητικότητος τοῦ ὑπολογιστοῦ. Διὰ τὸν ἔλεγχον τῆς ὀρθότητος τῶν ἀποτελεσμάτων, ὁσάκις ἡ συνοριακὴ ἔντασις προσδιορίζεται φωτοελαστικῶς, τό πρόγραμμα ἀναπαράγει

καί έκτυπώνει τό δίκτυον τῶν ἰσοχρῶμων, ἥτοι τὰς ἰσοσταθμικάς καμπύ-
λας $|\sigma_1 - \sigma_2|/S = \nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$). Ἔτερον πρόγραμμα ὑπό τό ὄνομα
PRINCST ὑπολογίζει, ἐκ τῶν ὑπό τοῦ SOLAPEQ προσδιοριζομένων σ_x, σ_y
καί τ_{xy} , τὰς κυρίας τάσεις σ_1 καί σ_2 ὡς καί τήν γωνίαν διευσθύνσεως
 $\omega = (n_1, x)$, τήν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διεύθυνσις τῆς κυρίας τάσεως σ_1
μέ τόν ἄξονα x , ἐπιτρεπομένης οὕτω καί τῆς χαράξεως τῶν τροχιῶν τῶν
κυρίων τάσεων.

Εἰς τήν §10 γίνεται ἐφαρμογή τῆς μεθοδολογίας διὰ τόν προσ-
διορισμόν τῆς ἐντάσεως ἐντός κόμβου ἐπιπέδου πλαισίου ὑποβαλλομένου
εἰς δεδομένην φόρτισιν. Ὁ προσδιορισμός τῆς συνοριακῆς ἐντάσεως
γίνεται διὰ τῆς φωτοελαστικῆς μεθόδου. Τά λαμβανόμενα ἀποτελέσματα
ἐπιτρέπουν τήν πλήρη μελέτη τῆς διαίτησ τῶν συνιστωσῶν τῆς ἐντάσεως
ἐντός τοῦ κόμβου, ὁ ὅποτος, ὡς γνωστόν, ἀποτελεῖ ἐντεινομένην περιοχὴν
ἐλάχιστα διηρευνημένην.

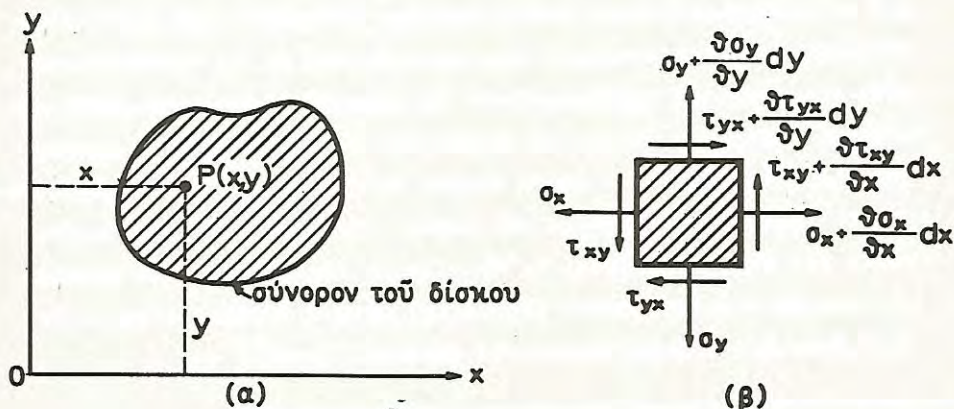
Ἡ ἐν τῇ παρουσίᾳ ἐργασίᾳ ἀναπτυσσομένη μεθοδολογία δέν συν-
αρτᾶται ἀποκλειστικῶς πρός τήν φωτοελαστικότητα. Δύναται νά ἐφαρμο-
σθῇ ἄνευ οἰασδῆποτε τροποποιήσεως διὰ τήν ἀποτίμησιν τῆς ἐντάσεως
εἰς τό ἔσωτερικόν ἐπιπέδω ἐντεινομένου δίσκου ἀπλῆς ἢ πολλαπλῆς
συνοχῆς εἰς πᾶσαν περίπτωσιν γνωστῆς συνοριακῆς ἐντάσεως πειραματι-
κῶς ἢ ἄλλως πως λαμβανομένης.

BLANK PAGE

§1.- Παράδοχαί

- 1.- Τό ύλικόν τοῦ δίσκου λαμβάνεται ὁμοιογενές ἰσότροπον καί ἔλαστικόν ἀκολουθοῦν τόν νόμον τοῦ Hooke.
- 2.- Ἡ ἐπί τοῦ συνόρου τοῦ δίσκου ἐφαρμοζομένη ἐξωτερική φόρτισις ἐπενεργεῖ παραλλήλως πρὸς τό ἐπίπεδον xy τοῦ δίσκου καί εἶναι κατανεμημένη ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ πάχους του. Τό σταθερόν πάχος τοῦ δίσκου εἶναι πολύ μικρόν ἐν συγκρίσει πρὸς τὰς ἑτέρας δύο διαστάσεις αὐτοῦ, ὥστε αἱ συνιστώσαι τῆς ἐντάσεως $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ νά ἔχουν μηδενικὴν τιμὴν καθ' ὅλον τό πάχος του*. (Ἐπίπεδος ἔντασις).
- 3.- Τό πάχος τοῦ δίσκου λαμβάνεται ἴσον πρὸς τὴν μονάδα. Κατὰ τὴν ἀντιμετώπισιν συνεπῶς οἰασθήποτε περιπτώσεως, δεῖον ὅπως, ἡ θεωρουμένη ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ πάχους τοῦ δίσκου κατανεμημένη φόρτισις, διαιρεθῆ κατ' ἀρχάς διὰ τοῦ διδομένου πάχους αὐτοῦ καί ἀναχθῆ οὕτως ἀπὸ δύναμιν ἀνὰ μονάδα μήκους εἰς δύναμιν ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας (τάσις).
- 4.- Αἱ εἰς τόν ὑπολογισμόν εἰσαγόμεναι παράμετροι τῆς ἐντάσεως προσημαίνονται βάσει τῆς κλασσικῆς σημάσεως τῆς θεωρίας τῆς ἐλαστικότητος ἦτοι:

Μία παράμετρος ἐντάσεως εἷς τι σημεῖον $P(x,y)$ τοῦ δίσκου



Σχ.1

* [7] §7,σελίς 11 καί §84,σελίς 241.

είναι θετική, εάν, εφαρμοζομένη επί τινος ἔδρας τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου μέ πλευράς dx, dy τοῦ περιέχοντος τό P , ἔχη ἄνυσμα ὁμόφορον μὲν πρὸς τοὺς θετικούς ἡμιάξονας δι' ἔδραν μέ αὐξούσας συντεταγμένας, ἀντίφορον δέ πρὸς αὐτοὺς δι' ἔδραν μέ φθινούσας συντεταγμένας. Εἰς τό Σχ.1β δεικνύεται ἡ θετική φορά τῶν παραμέτρων τῆς ἐντάσεως.

5.- Αἱ μαζικαὶ δυνάμεις ἐπὶ τοῦ δίσκου παραλείπονται ἐφ' ὅσον δέν εἶναι σταθεραὶ καὶ συνεπῶς ἡ ἔντασις προκύπτει ἀνεξάρτητος τῶν ἐλαστικῶν σταθερῶν τοῦ ὑλικοῦ. Εἰς δίσκους πολλαπλῆς συνοχῆς, πλήν τῆς περιπτώσεως, καθ' ἣν ἡ φόρτισις εἰς ἕν ἕκαστον τῶν ἐσωτερικῶν συνόρων εἶναι ἰσόρροπος ἢ ἀνάγεται εἰς ζεύγος, ἡ ἔντασις γενικῶς ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἐλαστικῶν σταθερῶν τοῦ ὑλικοῦ. Ἡ ἐπιρροή αὕτη τῶν ἐλαστικῶν σταθερῶν ἐπὶ τῆς κατανομῆς τῶν τάσεων εἶναι μικρά καὶ δύναται νά παραμεληθῇ δι' ὅλους τοὺς πρακτικούς σκοπούς.

Συνεπείφ τούτου πειραματικά ἀποτελέσματα λαμβανόμενα ἐπὶ δοκιμίου δύνανται νά ἀναχθοῦν ἐπὶ τοῦ ἐκ διαφορετικοῦ ὑλικοῦ προτύπου (κατασκευῆς)*.

6.- Τό σύνορον τοῦ δίσκου δέν παρουσιάζει εἰσεχούσας γωνίας, ἥτοι σημεῖα ἀσυνεχείας τῆς κλίσεώς του εἰς θέσεις, ὅπου τό σύνορον εἶναι κοῖλον Σχ.2α. Ἡ παραδοχή αὕτη γίνεται διὰ νά ἀποφευχθῇ ἡ ἐμφάνισις πολὺ μεγάλων τάσεων εἰς τὴν περιοχὴν τῶν σημείων τούτων. Διὰ τὰ πραγματικά ὑλικά τοῦτο σημαίνει ὑπέρβασις τοῦ ὀρίου ἐλαστικότητος, πλαστικοποίησιν τῆς περιοχῆς καὶ ὡς ἐκ τούτου ἀδυναμίαν πειραματικοῦ προσδιορισμοῦ τῆς ἰδεατῆς πλέον συνοριακῆς τάσεως δι' ἐλαστικόν ὑλικόν μέ συνέπειαν τὴν μὴ δυνατότητα ἐφαρμογῆς τῆς μεθοδολογίας, ἡ ὁποία ἰσχύει δι' ἐλαστικά ὑλικά ἀκολουθοῦντα τόν νόμον ἐλαστικότητος τοῦ Hooke. Ἄς σημειωθῇ ἐνταῦθα, ὅτι τοῦτο δέν ἀντιμετωπίζεται δι' ἀσυνέχειαν τῆς κλίσεως τοῦ συνόρου εἰς κυρτάς περιοχάς αὐτοῦ (ἐξάρσεις), ὅπου ἡ ἔντασις εἶναι μηδενική, ὅταν δέν ὑπάρχει ἐξωτερικὴ φόρτισις Σχ.2β**.

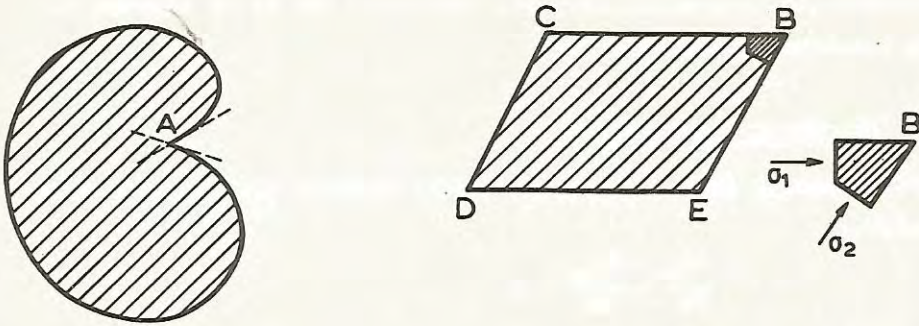
* [8] σελίς 142

[3] Vol. II, §1.11, σελ.20 καὶ §6.1, §6.2, σελ.174

[7] §39, σελ.120

[4] §3, σελ.92

** [7] §16, σελ.20



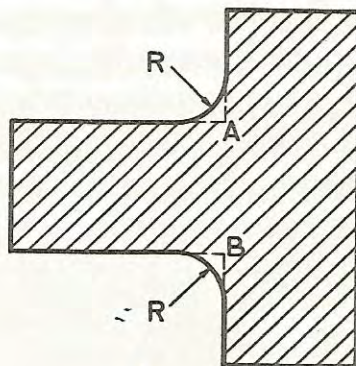
α. Δίσκος με ασυνέχειαν τῆς κλίσεως τοῦ συνόρου εἰς τὴν περιοχὴν, ἔνθα τοῦτο εἶναι κοίλον.

β. Δίσκος με κυρτὸν σύνορον καὶ ασυνέχειαν τῆς κλίσεως τοῦτου εἰς τὰ σημεῖα Β, C, D, E. Ἡ ἰσορροπία τοῦ στοιχείου Β ἀποκοπτομένου ὑπὸ καθέτων πρὸς τὸ σύνορον τομῶν ἀπαιτεῖ $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Σχ.2

Ἐάν ὅμως ὑφίστανται εἰσέχουσαι γωνίαι εἰς τὸ σύνορον, τότε ἡ ἀνωτέρω ἐμφανιζομένη δυσκολία ἀντιμετωπίζεται ὡς ἀκολούθως:

Τὸ σύνορον ἀντικαθίσταται εἰς τὴν περιοχὴν αὐτὴν ὑπὸ τόξου καμπύλης, κατὰ προτίμησιν κυκλικοῦ (Σχ.3), καταλλήλου ἀκτίνας καμπυλότητος, ὥστε νὰ ἀποκαθίσταται ἡ συνέχεια καὶ αἱ παραγόμεναι τάσεις νὰ εἶναι ἐντὸς τῆς ἐλαστικῆς περιοχῆς τοῦ ὕλικου.



Σχ.3 Δίσκος, τοῦ ὁποίου αἱ εἰσέχουσαι γωνίαι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ τόξων κύκλου ἀκτίνας R.

Ἡ παραδοχή αὐτή, ὡς καὶ πειραματικῶς ἠλέγχθη, ἐπιφέρει ἀλλοίωσιν τῆς ἐντάσεως εἰς μικράν μόνον περιοχὴν πέριξ τοῦ ἐν λόγῳ σημείου τοῦ συνόρου, ἐπιτρεπομένης οὕτω τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐν τῇ παρούσῃ ἐργασίᾳ ἐκτιθεμένης μεθοδολογίας.

§2.- Ἐξισώσεις ἐλαστικότητας.

Αἱ ἐξισώσεις ἐλαστικότητας, αἱ ὁποῖαι διέπουν τὴν ἐπίπεδον ἔντασιν εἶναι:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

1(α, β, γ)

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \text{ τελεστής Laplace})$$

Ἐνθα σ_x καὶ σ_y αἱ ὀρθαὶ τάσεις κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν ἀξόνων x καὶ y ἀντιστοίχως καὶ τ_{xy} ἡ διατμητικὴ τάσις ὁρῶσα ἐπὶ ἔδρας τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου καθέτου πρὸς τὸν ἀξόνα x καὶ ἔχουσα διεύθυνσιν τὴν τοῦ ἀξονος y . Ἡ ἐτέρα διατμητικὴ τάσις εἶναι $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ (Σχ.1β). Αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις ἐκφράζουν τὴν ἰσορροπίαν τοῦ ἀπειροστοῦ στοιχείου εἰς τι σημεῖον (x, y) τοῦ δίσκου, ἡ δὲ τρίτη, γνωστὴ ὡς ἐξίσωσις συμβιβαστοῦ, ἐξασφαλίζει τὴν συνέχειαν τοῦ ἐπιπέδου ἐλαστικοῦ μέσου.

Αἱ τρεῖς αὗται ἐξισώσεις ὁμοῦ μετὰ τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν, προκυπτουσῶν ἐκ τῆς ἰσορροπίας ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ δίσκου, θέτουν τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιπέδου ἐλαστικότητας, ἡ ἐπίλυσις τοῦ ὁποῦ ἀποτελεῖ ἀντικείμενον τῆς μαθηματικῆς θεωρίας τῆς ἐλαστικότητας.

Ἐν τοῖς ἐπομένοις αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ τὴν κατωτέρω μετεσχηματισμένην μορφήν των (βλέπε § π3)

$$\Delta s = 0$$

$$\Delta \sigma_x = - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$\Delta \sigma_y = - \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$$

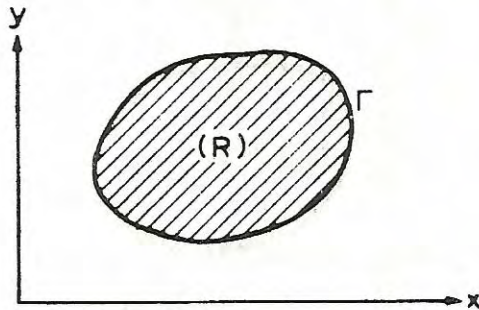
$$\Delta \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y}$$

2(α, β, γ, δ)

Ένθα $S = \sigma_x + \sigma_y$, ὥστε νά δοθῆ λύσις τοῦ προβλήματος εἰς τήν περίπτωσιν, ὅπου αἱ παράμετροι τῆς ἐντάσεως σ_x , σ_y καί τ_{xy} εἶναι γνωσταί εἰς τό σύνορον τοῦ δίσκου ἐκ πειραματικοῦ προσδιορισμοῦ τούτων (π.χ. φωτοελαστικῶς).

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν ἐξισώσεων ἐπιπέδου ἐλαστικότητος ἐκ τῆς μορφῆς 1 (α, β, γ) εἰς τήν μορφήν 2 ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) δίδεται εἰς τήν §π3 τοῦ παραρτήματος.

Κατόπιν τούτου τό πρόβλημα μετατρέπεται εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν συναρτήσεων $S(x,y)$, $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ καί $\tau_{xy}(x,y)$ ἐκ τῶν ἀνωτέρω μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἑλλειπτικοῦ τύπου, ὅταν εἶναι γνωσταί αἱ τιμαί τῶν συναρτήσεων $S(\Gamma)$, $\sigma_x(\Gamma)$, $\sigma_y(\Gamma)$ καί $\tau_{xy}(\Gamma)$ ἐπί τοῦ συνόρου Γ τῆς περιοχῆς R (Σχ. 4), ἐπί τῆς ὁποίας ἐφαρμόζονται αἱ ἐξισώσεις (2). Οὕτως ἡ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος (1) ἀνάγεται εἰς τήν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος (2), ἐκάστη ἐξίσωσις τοῦ ὁποίου περιλαμβάνει μίαν μόνον ἄγνωστον συνάρτησιν.



Σχ. 4

Δι' ολοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως (2α) προσδιορίζεται κατ' ἀρχάς ἡ συνάρτησις S δίδουσα τὸ ἄθροισμα τῶν $\sigma_x + \sigma_y$, τὸ ὅποτον εἶναι σταθερόν δι' ἕν ἕκαστον σημεῖον τοῦ δίσκου, ἀνεξάρτητον τοῦ προσανατολισμοῦ τῶν ἀξόνων ἀναφορᾶς x, y καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυρίων τάσεων $\sigma_1 + \sigma_2$ εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον (πρώτη ἀναλλοιώτος τῶν τάσεων). Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζονται αἱ συναρτήσεις:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}$$

καὶ κατόπιν δι' ολοκληρώσεως τῶν ἐξισώσεων $2(\beta, \gamma, \delta)$ προσδιορίζονται αἱ σ_x, σ_y καὶ τ_{xy} . Ἡ μέθοδος ολοκληρώσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (2) ἀναπτύσσεται εἰς ἐπομένους παραγράφους τῆς παρούσης ἐργασίας.

§3.- Ἐξισώσεις τῶν τεσσάρων σημείων. Ἀριθμητικὴ ὀλοκλήρωσις τῶν ἐξισώσεων Laplace καὶ Poisson.*

Ἡ ἀριθμητικὴ ὀλοκλήρωσις συνίσταται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων:

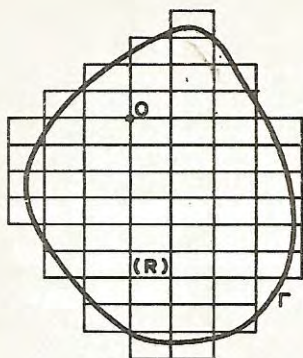
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (\beta)$$

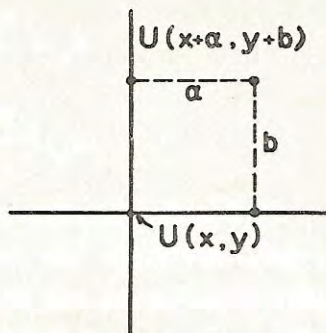
ὑπὸ ἐξισώσεων πεπερασμένων διαφορῶν δι' ὅλα τὰ σημεῖα O ἐνός ὀρθογωνικοῦ καννάβου ἐφαρμοζομένου ἐπὶ τῆς περιοχῆς R (Σχ. 5). Αἱ μορφούμεναι ἐξισώσεις εἶναι ἰσάριθμοι πρὸς τὸ πλῆθος τῶν σημείων τοῦ καννάβου ἐσωτερικῶς τοῦ συνόρου Γ , εἰς τὰ ὅποια ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως U . Οὕτω προκύπτει ἕν σύστημα γραμμικῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, ἡ ἐπίλυσις τοῦ ὁποίου δίδει τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως.

Ἡ ἀντικατάστασις τῶν ἐξισώσεων (α) καὶ (β) ὑπὸ ἐξισώσεων διαφορῶν ἐπιτυγχάνεται δι' ἀναπτύξεως τῆς συναρτήσεως εἰς σειρὰν Taylor. Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $U(x+a, y+b)$ (Σχ. 6) εἶναι δυνατόν νά προσεγγι-

* Βλέπε §§π1 καὶ π2 τοῦ παραρτήματος.



Σχ.5



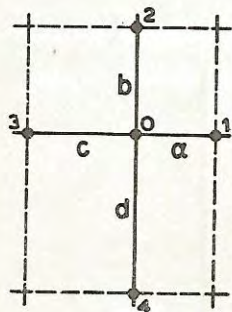
Σχ.6

σθῆ ἄν λάβωμεν τοὺς πρώτους ὄρους τῆς σειρᾶς Taylor, ὅτε, μὲ παράλειψιν τῶν ὄρων τάξεως μεγαλύτερας τῆς τρίτης, ἔχομεν:

$$U(x+a, y+b) = U(x, y) + aU_x + bU_y + \frac{1}{2} [a^2U_{xx} + 2abU_{xy} + b^2U_{yy}] + \frac{1}{6} [a^3U_{xxx} + 3a^2bU_{xxy} + 3ab^2U_{xyy} + b^3U_{yyy}] \quad (4)$$

Οἱ δεῖκται x, y εἰς τὴν συνάρτησιν U δηλοῦν παραγώγισιν π.χ.

$$U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$



Σχ.7

Δι' ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (4) διὰ τὰ σημεῖα 1, 2, 3 καὶ 4 τοῦ Σχ.7 λαμβάνομεν:

$$U_1 = U_0 + aU_x + \frac{a^2}{2} U_{xx} + \frac{a^3}{6} U_{xxx}$$

$$U_2 = U_0 + bU_y + \frac{b^2}{2} U_{yy} + \frac{b^3}{6} U_{yyy}$$

$$U_3 = U_0 - cU_x + \frac{c^2}{2} U_{xx} - \frac{c^3}{6} U_{xxx}$$

$$U_4 = U_0 - dU_y + \frac{d^2}{2} U_{yy} - \frac{d^3}{6} U_{yyy}$$

(γ)

Ἐάν $a=b=c=d=h$, τότε αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἀθροιζόμεναι κατὰ μέλη δίδουν:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 4U_0 + h^2 (U_{xx} + U_{yy})$$

καί δυνάμει τῶν ἐξισώσεων (α) καί (β) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$U_0 = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}{4} \quad (5)$$

$$U_0 = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - h^2 g(x, y)}{4} \quad (6)$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἐκφράζουν τήν τιμήν τῆς συναρτήσεως U συναρτήσῃ τῶν τιμῶν τῶν τεσσάρων ἰσαπεχόντων γειτονικῶν σημείων. Διά τοῦτο ὀνομάζονται καί ἐξισώσεις τῶν τεσσάρων σημείων. Εἰδικώτερον ἡ (5) καλεῖται καί ἐξίσωσις Liebmann.

Διά τήν ἐξαγωγήν τῶν σχέσεων (5) καί (6) ὑπετέθη ὅτι τά σημεῖα 1, 2, 3 καί 4 ἰσαπέχουν τοῦ 0, ἐάν ὁμως τοῦτο δέν συμβαίῃ, εἶναι δηλαδή $a \neq b \neq c \neq d$, τότε ἡ μόρφωσις ἀναλόγων ἐξισώσεων ἀπαιτεῖ διαφορετικόν τρόπον ἐργασίας. Πρός τοῦτο παραλείπονται εἰς τὰς σχέσεις (γ) καί οἱ ὅροι τάξεως μεγαλυτέρας τῆς δευτέρας ὅποτε λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 + aU_x + \frac{a^2}{2} U_{xx} \\ U_2 &= U_0 + bU_y + \frac{b^2}{2} U_{yy} \\ U_3 &= U_0 - cU_x + \frac{c^2}{2} U_{xx} \\ U_4 &= U_0 - dU_y + \frac{d^2}{2} U_{yy} \end{aligned} \quad (6)$$

Μεταξύ τῆς πρώτης καί τῆς τρίτης τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἀπαλείφωμεν τήν U_x καί μεταξύ δευτέρας καί τετάρτης τήν U_y , ὅποτε λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} cU_1 + aU_3 &= (a+c)U_0 + \frac{ac(a+c)}{2} U_{xx} \\ dU_2 + bU_4 &= (b+d)U_0 + \frac{bd(b+d)}{2} U_{yy} \end{aligned}$$

ἢ

$$\frac{1}{a(a+c)} U_1 + \frac{1}{c(a+c)} U_3 = \frac{1}{ac} U_0 + \frac{1}{2} U_{xx} \quad (\epsilon)$$

$$\frac{1}{b(b+d)} U_2 + \frac{1}{d(b+d)} U_4 = \frac{1}{bd} U_0 + \frac{1}{2} U_{yy} \quad (\zeta)$$

αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις ἀθροιζόμεναι κατὰ μέλη δίδουν:

$$\frac{U_1}{a(a+c)} + \frac{U_2}{b(b+d)} + \frac{U_3}{c(a+c)} + \frac{U_4}{d(b+d)} = \left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right)U_0 + \frac{1}{2} (U_{xx} + U_{yy})$$

καί δυνάμει τῶν (α) καί (β) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right)U_0 = \frac{U_1}{a(a+c)} + \frac{U_2}{b(b+d)} + \frac{U_3}{c(a+c)} + \frac{U_4}{d(b+d)} \quad (7)$$

$$\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right)U_0 = \frac{U_1}{a(a+c)} + \frac{U_2}{b(b+d)} + \frac{U_3}{c(a+c)} + \frac{U_4}{d(b+d)} - \frac{1}{2} g(x,y) \quad (8)$$

Αἱ σχέσεις (7) καί (8) ἐκφράζουν τὰς ἐξισώσεις τῶν τεσσάρων σημείων διὰ τήν περίπτωσιν, ὅπου τὰ γειτονικά σημεῖα 1, 2, 3 καί 4 ἀπέχουν ἀνίστους ἀποστάσεις ἐκ τοῦ 0.

Κατά τήν μόρφωσιν τῶν ἐξισώσεων (7) καί (8) ἐγένετο παράλειψις ὄρων τῆς σειρᾶς Taylor τάξεως μεγαλυτέρας τῆς δευτέρας, ἐνῶ διὰ τὰς (5) καί (6) ἐγένετο παράλειψις ὄρων τάξεως μεγαλυτέρας τῆς τρίτης. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τό σφάλμα εἰς τὰς ἐξισώσεις (5) καί (6) εἶναι ἀνάλογον τῆς τετάρτης δυνάμεως τοῦ βήματος τοῦ καννάβου, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἐξισώσεις (7) καί (8), ὅπου τό σφάλμα εἶναι ἀνάλογον τῆς τρίτης δυνάμεως αὐτοῦ. Αἱ ἐξισώσεις, ἄρα, (5) καί (6) παρέχουν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν διὰ τόν προσδιορισμόν τῆς U , ἀπό τὰς ἐξισώσεις (7) καί (8). Ἐκ τούτου ἐξάγεται τό συμπέρασμα, ὅτι ὁ τετραγωνικός κἀνναβος εἶναι ὁ πλέον ἐνδεδειγμένος διὰ τήν λήψιν ἀκριβεστέρων ἀποτελεσμάτων. Αἱ ἐξισώσεις (7) καί (8) θά ἐφαρμόζωνται μόνον διὰ τὰ σημεῖα πλησίον τοῦ συνόρου, ὅπου αἱ ἀποστάσεις τῶν γειτονικῶν σημείων δέν δύνανται γενικῶς νά εἶναι ἴσαι.

Αἱ ἐξισώσεις (7) καί (8) μετασχηματίζονται περαιτέρω, ἵνα λάβουν μορφήν προσφορωτέραν διὰ τήν χρησιμοποίησίν των κατά τήν σύνταξιν τοῦ προγράμματος ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ.

Θέτομεν:

$$\begin{aligned} a &= s_1 h \\ b &= s_2 h \\ c &= s_3 h \\ d &= s_4 h \end{aligned} \quad (η)$$

Ἐνθα h εἶναι μήκος ἐκφράζον τό σταθερόν βῆμα τοῦ τετραγωνικοῦ καννάβου καί $0 < s_1, s_2, s_3, s_4 \leq 1$. Δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὰς (7) καί (8) λαμβάνομεν:

$$\left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}\right) U_0 = \frac{U_1}{s_1(s_1+s_3)} + \frac{U_2}{s_2(s_2+s_4)} + \frac{U_3}{s_3(s_1+s_3)} + \frac{U_4}{s_4(s_2+s_4)} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}\right) U_0 = \frac{U_1}{s_1(s_1+s_3)} + \frac{U_2}{s_2(s_2+s_4)} + \frac{U_3}{s_3(s_1+s_3)} + \frac{U_4}{s_4(s_2+s_4)} - \frac{h^2}{2} g(x,y) \quad (10)$$

Αί εξισώσεις (9) καί (10) δύνανται νά συγχωνευθοῦν εἰς μίαν ἐξίσωσιν τήν (10) ἐκ τῆς ὁποίας ἡ (9) θά προκύπτει διὰ $g(x,y) = 0$.

Τήν ἐξίσωσιν (10) μετασχηματίζομεν περαιτέρω εἰς τήν:

$$U_0 = C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 + C_4 U_4 + C_5 g(x,y) \quad (11)$$

ἔνθα ἔτέθη:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{s_1(s_1+s_3)} / \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}\right) \\ C_2 &= \frac{1}{s_2(s_2+s_4)} / \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}\right) \\ C_3 &= \frac{1}{s_3(s_1+s_3)} / \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}\right) \\ C_4 &= \frac{1}{s_4(s_2+s_4)} / \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}\right) \\ C_5 &= -\frac{h^2}{2} / \left(\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι διὰ $s_1=s_2=s_3=s_4=1$ προκύπτουν ἐκ τῆς (11) διὰ $g(x,y) = 0$ ἡ (5) καί $g(x,y) \neq 0$ ἡ (6).

Ἐναπομένει πλέον νά προσδιορισθοῦν καί αἱ τιμαί τῶν συναρτήσεων $g(x,y)$ εἰς τὰς ἐξισώσεις 2(β,γ,δ) σελ. 4 δηλαδή αἱ τιμαί τῶν παραγῶγων $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}$ μέ ἀντίθετον πρόσημον, εἰς ὅλους τοὺς κόμβους τοῦ καννάβου ἐσωτερικῶς τοῦ σὺνδρόρου Γ, ἐκ τῆς γνωστῆς ἀρμονικῆς συναρτήσεως S τήν ὁποίαν χάριν ὁμοιομορφίας τῶν ἐκφράσεων παριστῶμεν διὰ τοῦ U .

Θά διακρίνωμεν, ὡς καί διὰ τήν ἐξίσωσιν τῶν τεσσάρων σημείων, δύο περιπτώσεις:

I.- $a = b = c = d = h.$

Δι' ἀθροίσεως τῆς πρώτης καί τῆς τρίτης τῶν ἐξισώσεων (γ) σελ. 7 λαμβάνομεν:

$$U_1 + U_3 = 2U_0 + h^2 U_{xx}$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει:

$$U_{xx} = \frac{U_1 - 2U_0 + U_3}{h^2} \quad (13)$$

καθ' ὅμοιον τρόπον δι' ἀθροίσεως τῆς δευτέρας καί τετάρτης τῶν ἐξισώσεων (γ) λαμβάνομεν:

$$U_2 + U_4 = 2U_0 + h^2 U_{yy}$$

ἢ

$$U_{yy} = \frac{U_2 - 2U_0 + U_4}{h^2} \quad (14)$$

II.- $a \neq b \neq c \neq d.$

Ἐκ τῆς σχέσεως (ε) λαμβάνομεν:

$$U_{xx} = 2 \frac{cU_1 - (a+c)U_0 + aU_3}{ac(a+c)} \quad (θ)$$

καί ἐκ τῆς σχέσεως (ζ):

$$U_{yy} = 2 \frac{dU_2 - (b+d)U_0 + bU_4}{bd(b+d)} \quad (ι)$$

Αἱ (θ) καί (ι) δυνάμει τῶν σχέσεων (η) δίδουν:

$$U_{xx} = 2 \frac{s_3 U_1 - (s_1 + s_3) U_0 + s_1 U_3}{s_1 s_3 (s_1 + s_3) h^2} \quad (15)$$

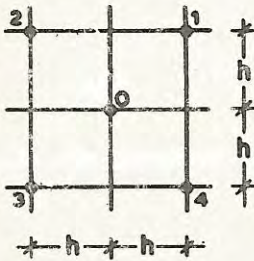
$$U_{yy} = 2 \frac{s_4 U_2 - (s_2 + s_4) U_0 + s_2 U_4}{s_2 s_4 (s_2 + s_4) h^2} \quad (16)$$

Προφανῶς αἱ σχέσεις (15) καί (16) διὰ $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$ δίδουν τὰς σχέσεις (13) καί (14).

Καί διὰ τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἰσχύει ἡ παρατήρησις, ὅτι αἱ σχέσεις (13) καί (14) δίδουν τὰς μερικὰς παραγώγους μέ μεγαλύτεραν ἀ-

πρίβειαν από τας (15) και (16).

Ο υπολογισμός της μικτής παραγώγου U_{xy} , δύναται, ως θα ίδωμεν, να γίνη πάντοτε διά τήν περίπτωσιν, όπου $a=b=c=d=h$ και εργαζόμεθα ως κατωτέρω.



Σχ. 8

Εφαρμόζοντας τήν σχέσιν (4) σελ. 7 διαδοχικῶς διά τὰς κορυφάς 1, 2, 3 και 4 τοῦ περί τό 0 τετραγώνου, βλ. Σχ. 8, λαμβάνομεν:

$$U_1 = U_0 + hU_x + hU_y + \frac{h^2}{2}(U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy}) + \frac{h^3}{6}(U_{xxx} + 3U_{xxy} + 3U_{xyy} + U_{yyy})$$

$$U_2 = U_0 - hU_x + hU_y + \frac{h^2}{2}(U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy}) + \frac{h^3}{6}(-U_{xxx} + 3U_{xxy} - 3U_{xyy} + U_{yyy})$$

$$U_3 = U_0 - hU_x - hU_y + \frac{h^2}{2}(U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy}) + \frac{h^3}{6}(-U_{xxx} - 3U_{xxy} - 3U_{xyy} - U_{yyy})$$

$$U_4 = U_0 + hU_x - hU_y + \frac{h^2}{2}(U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy}) + \frac{h^3}{6}(U_{xxx} - 3U_{xxy} + 3U_{xyy} - U_{yyy})$$

Ἀθροίζοντας τὰς ἀνωτέρω σχέσεις κατά μέλη, ἀφοῦ προηγουμένως πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δευτέρας και τῆς τετάρτης ἐξ αὐτῶν ἐπί -1, λαμβάνομεν:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 = 4h^2 U_{xy}$$

και ἐπομένως:

$$U_{xy} = \frac{U_1 - U_2 + U_3 - U_4}{4h^2} \quad (17)$$

Ἐκ τοῦ τρόπου ἐξαγωγῆς τῆς σχέσεως (17) συμπεραίνομεν, ὅτι τό σφάλμα ὑπολογισμοῦ τῆς μικτῆς παραγώγου εἶναι ἀνάλογον τῆς τετάρτης δυνάμεως τοῦ βήματος h τοῦ καννάβου.

Ἀκολουθεῖς θα δειχθῆ, πῶς ἡ σχέση (17) ἐφαρμόζεται δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ καννάβου, ἀσχετῶς ἐάν ταῦτα εὐρίσκονται μακράν τοῦ συνόρου ἢ πλησίον αὐτοῦ. Πρὸς τόν σκοπόν τοῦτον διακρίνομεν τὰς τρεῖς κατωτέρω περιπτώσεις:

I.- Τό σημείον Ο εύρίσκεται μακράν τοῦ συνόρου (Σχ.9α). Ἐπειδή τό σημείον Ο ἰσαπέχη τῶν τεσσάρων γειτονικῶν του, ἐφαρμόζεται ἀπ' εὐθείας ἡ ἀχέσις (17).

II.- Τό σημείον Ο εύρίσκεται πλησίον τοῦ συνόρου, δύο δέ γειτονικά σημεῖα διατεταγμένα κατά διαγώνιον εύρίσκονται ἑσωτερικῶς τοῦ συνόρου (Σχ.9β καί Σχ.9γ).

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν χρησιμοποιοῦμεν γνωστήν ἰδιότητα τῶν ἁρμονικῶν συναρτήσεων*, ὅποτε διά Σχ.9β, μέ $\alpha = (\hat{x}, \hat{n}) = \pi/4$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$ καί βάσει τῆς (13) γραφομένης διά τήν διεύθυνσιν n καί μέ $h\sqrt{2}$ ἀντί h ἔχομεν:

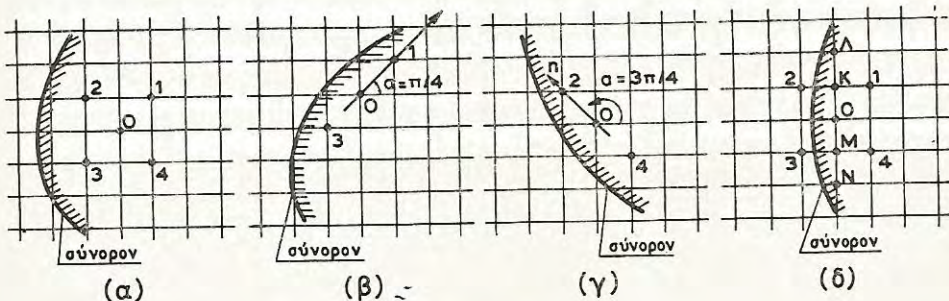
$$U_{xy} = \frac{U_1 - 2U_0 + U_3}{2h^2} \quad (18\alpha)$$

καί διά Σχ.9γ, μέ $\alpha = (\hat{x}, \hat{n}) = 3\pi/4$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$:

$$U_{xy} = - \frac{U_2 - 2U_0 + U_4}{2h^2} \quad (18\beta)$$

III.- Εἶναι ἡ περίπτωσις, ὅπου πρέπει νά χρησιμοποιήσωμεν ὅπωςδήποτε τιμήν τῆς U ἐκτός τοῦ συνόρου.

Π.χ. αἱ τιμαί U_2, U_3 (Σχ.9δ) εἶναι ἄγνωστοι. Ἐπομένως πρέπει νά ὑπολογίσωμεν μίαν ἐκ τῶν τιμῶν U_2, U_3 καί νά ἐφαρμόσωμεν κατά περίπτωση μίαν ἐκ τῶν σχέσεων (18) ἢ νά ὑπολογίσωμεν ἀμφοτέρας τάς U_2 καί U_3 καί νά ἐφαρμόσωμεν τήν σχέσηιν (17).



Σχ.9

* Διά κάθε ἁρμονικήν συναρτήσιν $U(x, y)$ ἰσχύει: $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$ διά $(\hat{x}, \hat{n}) = \pi/4$ ἢ $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$ διά $(\hat{x}, \hat{n}) = 3\pi/4$.

Ο υπολογισμός, όμως τιμής της U εκτός του συνόρου είναι δυνατός αν ληφθῆ ὑπ'ὄψιν ὅτι ἡ U εἶναι ἀρμονικὴ.

Δι' ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (5) σελ.8 ἔχομεν:

$$U_2 = 4U_K - U_\Lambda - U_1 - U_0$$

$$U_3 = 4U_M - U_N - U_4 - U_0$$

ἔνθα $U_0, U_1, U_4, U_K, U_\Lambda, U_M, U_N$ γνωσταί τιμαί τῆς U .

§4.- Σύγκλισις τῆς μεθόδου Gauss - Seidel διὰ τὰς ἐξισώσεις Laplace καί Poisson.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προκύπτοντος συστήματος ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων $AU = C$ ἐκ τοῦ ὁποῦ προδιορίζονται αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως ἐφαρμόζεται ἡ ἐπαναληπτικὴ μέθοδος Gauss-Seidel (ὄρα §2 τοῦ παραρτήματος).

Εἰς τὴν §2 τοῦ παραρτήματος (σελ.146) ὑποτίθεται, ὅτι ἡ ἐπαναληπτικὴ μέθοδος διὰ τὰς ἐξισώσεις Laplace καί Poisson συγκλίνει. Ἀπαιτεῖται, ἄρα, ἀπόδειξις τῆς ἀληθείας τῆς ὑποθέσεως ταύτης, διὰ νὰ εἶναι δυνατόν νὰ ἐφαρμοσθῆ ἡ μέθοδος.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται δι' ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογῆς τοῦ ἰκανοῦ κριτηρίου συγκλίσεως (ὄρα §2 τοῦ παραρτήματος).

Τὸ σύστημα $AU=C$ εἶναι μὴ ἐλαττώσιμον, διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει θὰ ἔπρεπε αἱ τιμαί τῆς U εἰς μίαν ὑποπεριοχὴν τῆς R νὰ μὴ ἐπηραζώνται ἀπὸ τὰς συνοριακὰς τιμὰς τμήματος τῆς καμπύλης τοῦ συνόρου, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄλλωστε τοῦτο γίνεται ἀμέσως φανερόν, εἰάν καταγράψωμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, ὅποτε διαπιστοῦται εὐκόλως ἐκ

του τρόπου μορφώσεώς των, ότι δεν είναι δυνατόν να εύρεθῆ ὁμάς ἐξι-
σώσεων, ἢ ὁποῖα να δύναται να ἐπιλυθῆ ἀνεξαρτήτως τῶν ὑπολοίπων.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν καί τοῦ δευτέρου σκέλους τοῦ κριτηρίου λαμβά-
νομεν τὴν ἐξίσωσιν (7) σελ. 9 —διὰ τὴν ἐξίσωσιν (8) θὰ ἰσχύουν τὰ
αὐτά, διότι ἡ ποσότης $-\frac{1}{2} g(x, y)$ ὡς γνωστὴ παραμένει εἰς β' μέλος
τῆς ἐξισώσεως— ἢ ὁποῖα γράφεται:

$$\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right)U_0 - \frac{1}{a(a+c)}U_1 - \frac{1}{b(b+d)}U_2 - \frac{1}{c(a+c)}U_3 - \frac{1}{d(b+d)}U_4 = 0 \quad (\alpha)$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὁ συντελεστὴς τῆς U_0 εἶναι διαγώνιον
στοιχείον τοῦ μητρώου A.

Ἐπομένως θὰ πρέπει:

$$\left|\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right| \geq \left|\frac{-1}{a(a+c)}\right| + \left|\frac{-1}{b(b+d)}\right| + \left|\frac{-1}{c(a+c)}\right| + \left|\frac{-1}{d(b+d)}\right| \quad (\beta)$$

ἢ ἐπειδὴ $a, b, c, d > 0$

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} \geq \frac{1}{a(a+c)} + \frac{1}{b(b+d)} + \frac{1}{c(a+c)} + \frac{1}{d(b+d)}$$

ἢ

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} \geq \frac{a+c}{ac(a+c)} + \frac{b+d}{bd(b+d)}$$

ἢ

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} \geq \frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}$$

δηλαδή ἡ σχέση (β) ἰσχύει ὡς ἰσότης.

Ἐναπομένει να δείξωμεν, ὅτι ὑπάρχει τοῦλάχιστον μία ἐξίσωσις,
διὰ τὴν ὁποῖαν ἡ ἀνάλογος πρὸς τὴν (β) σχέσηις να ἰσχύῃ ὡς ἀνισότης.
Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν ἐκ τῶν ἐφαρμοζομένων εἰς τὰ παρὰ
τό σύνορον σημεῖα. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν τοῦλάχιστον μία ἐκ τῶν τι-
μῶν U_1, U_2, U_3, U_4 θὰ εἶναι γνωστὴ ὡς συνοριακὴ. Ἐστω ὅτι αὕτη, χωρὶς
να περιορίζεται ἢ γενικότης, εἶναι ἡ U_1 . Τότε ἡ ποσότης $\frac{1}{a(a+c)} U_1$ ὡς
γνωστὴ μεταφέρεται εἰς τό β' μέλος τῆς ἐξισώσεως. Οὕτω θὰ πρέπει:

$$\left|\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right| > \left|\frac{-1}{c(a+c)}\right| + \left|\frac{-1}{b(b+d)}\right| + \left|\frac{-1}{d(b+d)}\right|$$

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} > \frac{1}{c(a+c)} + \frac{1}{b(b+d)} + \frac{1}{d(b+d)}$$

$$\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd} > \frac{1}{ac+c^2} + \frac{1}{bd}$$

$$\frac{1}{ac} > \frac{1}{ac+c^2}$$

$$ac + c^2 > ac$$

$$c^2 > 0, \text{ τό όποτον καί ίσχύει.}$$

Κατ'έντελῶς όμοιον τρόπον άποδεικνύεται ή ίσχύς τής άνισότητος, όταν μία άλλη έκ τών ύπολοίπων τιμών U_2, U_3, U_4 είναι γνωστή.

Άπεδείχθη λοιπόν, ότι ίσχύει τό ίκανόν κριτήριο συγκλίσεως και έπομένως ή μέθοδος Gauss-Seidel δύναται νά εφαρμοσθή διά τάς έξισώσεις Laplace και Poisson. Δέον νά σημειωθή, ότι διά τυχόντα όρθογωνικό καννάβον αι άνωτέρω ιδιότητες του A έν συνδυασμῶ πρός τήν συμμετρίαν αυτού συνεπάγονται τό θετικῶς ώρισμένον τούτου, όπερ μετ' άλλων ίσχυουσῶν ιδιοτήτων άποτελεῖ ίκανήν συνθήκην συγκλίσεως και έτέρων έπαναληπτικῶν μεθόδων*.

§5 .- Ταχύτης συγκλίσεως. Μέθοδος τής ύπερχαλαράσεως.

Μία πλήρης διαδρομή τών σημείων του καννάβου διά τήν εφαρμογήν τής έξισώσεως τών τεσσάρων σημείων άποτελεῖ μίαν έπανάληψιν (iteration). Ό αριθμός τών άπαιτουμένων έπαναλήψεων διά τήν σύγκλισιν δι'έκάστοτε δεδομένην ακρίβειαν χαρακτηρίζει τήν ταχύτητα τής συγκλίσεως. Διά τοῦτο επιδιώκομεν πάντοτε ή σύγκλισιν νά είναι όσον τό δυνατόν ταχέα,ώστε νά έπιτυγχάνωμεν τήν λύσιν του συστήματος μέ τόν μικρότερον αριθμόν έπαναλήψεων.

Δι'έφαρμογής τής έξισώσεως τών τεσσάρων σημείων,ώσ αυτη δίδεται από τ'ς σχέσεις (5),(6),(9),(10) ή τήν γενικωτέραν αυτών (11),σελ. 8 ÷ 10 ή μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει βραδέως,άπαιτούσα πολλάκις πολύ μεγάλον αριθμόν έπαναλήψεων,όπερ σημαίνει άπασχόλησιν του υπολογιστου επί μακρόν χρόνον,καθιστώσα οὔτω άντιοικονομικήν τήν μέθοδον.

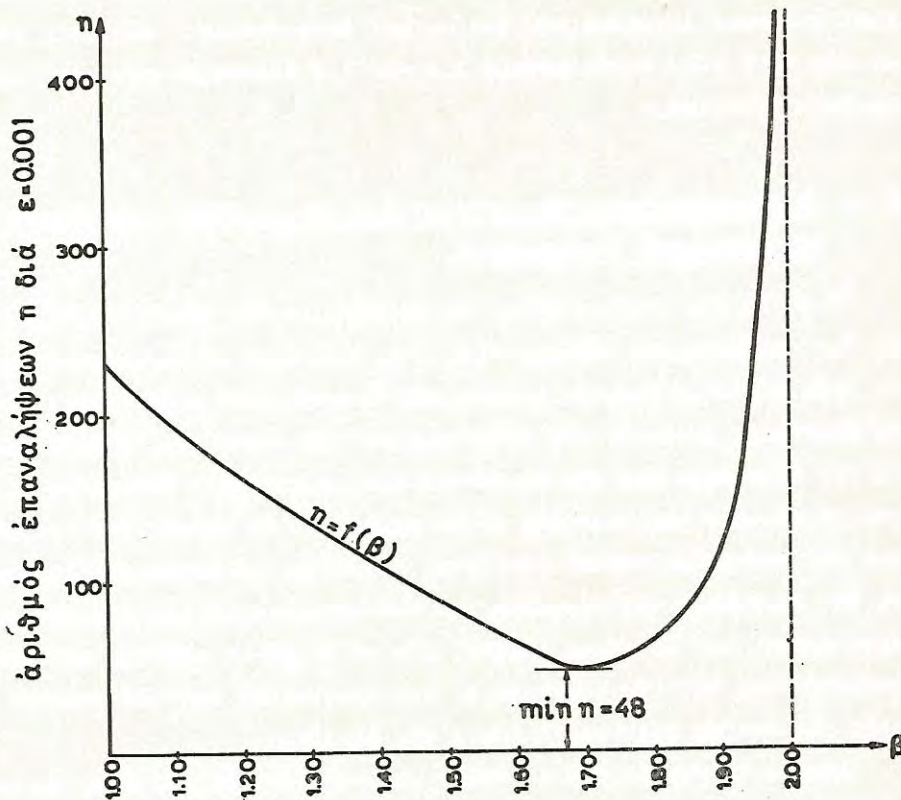
(*) Westlake. A handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of linear Equations. John Wiley and Sons Inc. New York 1968.

Τό μειονέκτημα τούτο αἴρεται διά χρησιμοποίησιν μιᾶς βελτιωμένης ἐπαναληπτικῆς μεθόδου*, γνωστῆς ὡς μεθόδου τῆς ὑπερχαλαρώσεως (Overrelaxation method ἢ Extrapolated Liebmann method).

Ἡ μέθοδος αὕτη συνίσταται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς σχέσεως (11) ὑπὸ τὴν κάτωθι μορφήν:

$$U_o = \beta(C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3 + C_4U_4 + C_5 g(x,y)) + (1-\beta)U_o' \quad (19)$$

Ἐνθα U_o' εἶναι ἡ τιμὴ τῆς U_o ληφθεῖσα κατὰ τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἐπανάληψιν καὶ β εἰς θετικὸς ἀριθμὸς μεταξὺ 1 καὶ 2 ($1 < \beta < 2$) καλούμενος παράμετρος τῆς χαλαρώσεως (relaxation parameter).



Σχ.12. Ἡ καμπύλη περιτᾶ τὴν συνάρτησιν $n = f(\beta)$ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς $S = \sigma_x + \sigma_y$ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς §10.

* [10], §11.4, σελ.375

Είναι προφανές ότι για $\beta=1$ έχουμε την μέθοδο Gauss-Seidel. Διά καταλλήλου έκλογής του β μεταξύ 1 και 2 είναι δυνατόν να επιτύχουμε ταχυστάτη σύγκλιση, πολλές φορές 30 ή και 50 φορές ταχύτερα της μεθόδου Gauss-Seidel. Διά τουτού ο β καλεΐται και συντελεστής επιταχύνσεως της συγκλίσεως.

Είς τό Σχ.12 δεικνύεται ή επίρροή της τιμής του β επί της ταχύτητος συγκλίσεως.

Η καμπύλη ελήφθη εκ της εφαρμογής της §10 διά μεταβολής της τιμής του β από 1 έως 2. Εκ ταύτης συμπεραΐνουμεν ότι επιτυγχάνεται ταχυστάτη σύγκλιση διά $\beta = 1.70$, ήτοι $\frac{229}{48} = 4,8$ φορές ταχύτερα της μεθόδου Gauss-Seidel ($\beta=1$).

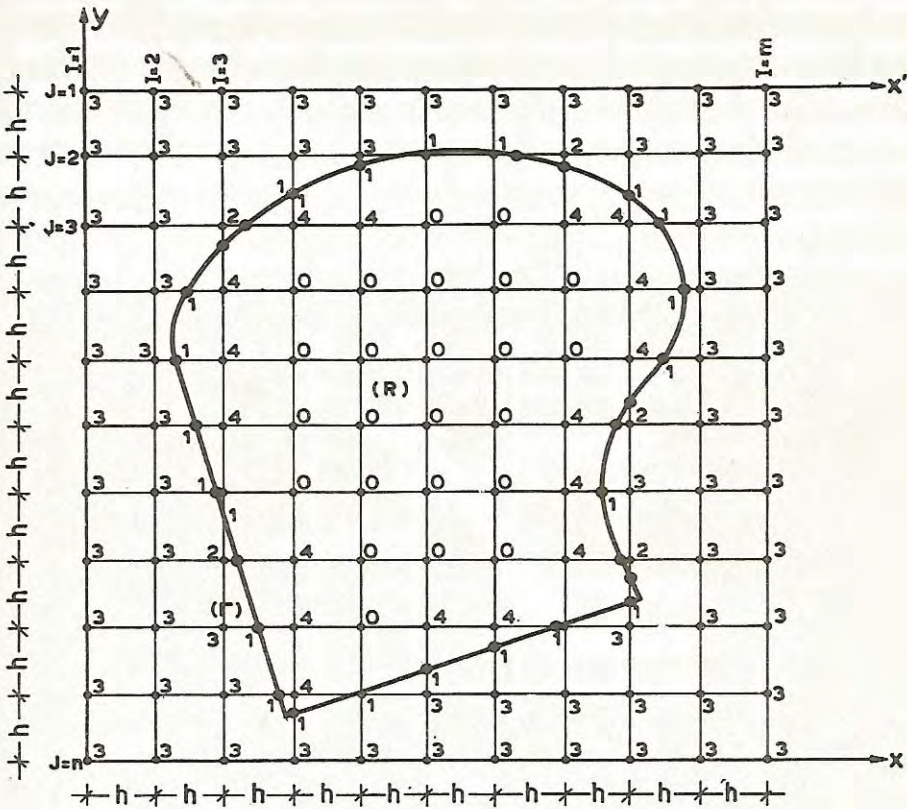
Ο εκ των προτέρων προσδιορισμός της βελτίστης τιμής του β αποτελεί επίπονον έργασίαν, την οποίαν και αποφεύγομεν. Δίδοντες συνήθως είς τό β μίαν τιμήν μεταξύ 1.5 και 1.8 επιτυγχάνομεν σχετικώς ταχεΐαν σύγκλιση.

§6 .- Συστηματοποίησης της μεθόδου διά την σύνταξιν προγράμματος Ηλεκτρονικού Υπολογιστού.

Η ουσία της μεθόδου είναι να επιθέσωμεν επί της ύπ' όφιν περιοχής ένα τετραγωνικόν καννάβον ($\Delta_x = \Delta_y = h$) και να αντικαταστήσωμεν την πρόσ επίλυσιν μερικόν διαφορικόν εξίσωσιν υπό μιās προσεγγιστικής εξισώσεως διαφορών είς κάθε σημείον του καννάβου. Η κατάστρωσις των εξισώσεων πρό της επίλυσσεως των παρουσιάζει δυσκολίαν τινα, όταν τό σύνορον της περιοχής είναι καμπύλον. Ο τρόπος αντιμεττωπίσεως της δυσκολίας ταύτης εκτίθεται κατωτέρω διά μεθοδικής εφαρμογής της εξισώσεως των διαφορών και του υπολογισμού των μερικων παραγών πρώτης και δευτέρας τάξεως. Είς τό Σχ.13 δεικνύεται καννάβος εφαρμοζόμενος επί της περιοχής R περικλειομένης υπό του συνόρου Γ, εντός της οποίας ζητείται ή λύσις της εξισώσεως.

Απαντα τά σημεία του καννάβου χαρακτηρίζονται υπό ενός αριθμού, ο όποτος θα καληται "κωδικός αριθμός του σημείου". Τό σύνολον δέ τούτων αποτελοϋν τά στοιχεΐα ενός μητρώου. Η αντίστοιχισις των κωδικων είς τά σημεία γίνεται βάσει της κατωτέρω κατατάξεως τούτων.

3. Διά τά σημεία τά όποτα κείνται εκτός του συνόρου της περιοχής R και είς τά όποτα δέν θα εφαρμοσθῆ ή εξίσωσις.



Σχ.13

1. Διά τὰ σημεῖα, τὰ ὅποια εἶναι τομαί τοῦ συνόρου Γ μέ τὰ τῶν πλευρῶν τοῦ καννάβου.
0. Διά τὰ σημεῖα ἐσωτερικῶς τοῦ συνόρου καί ἰσαπέχοντα ἐκ τῶν τεσσάρων γειτονικῶν ($\Delta_x = \Delta_y = h$).
4. Διά τὰ σημεῖα ἐσωτερικῶς τοῦ συνόρου καί μὴ ἰσαπέχοντα ἐκ τῶν τεσσάρων γειτονικῶν. (Σημεῖα ἐσωτερικά πλησίον τοῦ συνόρου).
2. Διά τὰ σημεῖα τοῦ καννάβου, τὰ ὅποια παρουσιάζουν διπλῆν ἀπεικόνισιν ἐπί τοῦ συνόρου, ἥτοι τό σημεῖον 2 ἀντιστοιχεῖ εἰς δύο σημεῖα τοῦ συνόρου.

Τὰ σημεῖα τοῦ καννάβου χαρακτηρίζονται ἀπό ἀπόφωσ θέσεως ὑπό δύο δεικτῶν i, j . Μέ τούς αὐτούς δείκτας χαρακτηρίζονται καί αἱ τι-

μαί τῆς συναρτήσεως π.χ. $U(i, j)$. Ἡ ἐξίσωσις τῶν τεσσάρων σημείων, ἐφαρμοζομένη διὰ σημεία πλησίον τοῦ συνόρου, περιλαμβάνει καί συνοριακάς τιμάς σημείων, τὰ ὅποια δέν συμπίπτουν πρός τὰς κορυφάς τοῦ καννάβου. Ἴνα εἶναι δυνατόν νά ἐργασθῶμεν καθ' ὅμοιον τρόπον, χαρακτηρίζομεν τὰ σημεία ταῦτα μέ τούς δείκτας τοῦ σημείου τοῦ καννάβου τοῦ εὐρισκομένου πλησιέστερον πρός τό σύνορον καί ἐξωτερικῶς τούτου, π.χ. ἡ συνοριακή τιμή U_A ἑνός σημείου A (βλ. Σχ.14) θά ἀναφερθῆ εἰς τήν θέσιν τοῦ σημείου $i+2, j$: $U_A = U(i+2, j)$, ὁμοίως $U_D = U(i, j+2)$



Σχ.14

Σημειοῦται ὅτι τοῦτο δέν σημαίνει παραμόρφωσιν τοῦ συνόρου, ἤτοι μετατόπισιν τῶν σημείων A καί D εἰς τὰ $(i+2, j)$ καί $(i, j+2)$ ἀντιστοίχως, ἀλλά ἀπλῶς ἓνα τρόπον διὰ νά χαρακτηρίσωμεν διὰ δεικτῶν ἀναφορᾶς σημεία τοῦ συνόρου διὰ τὰ ὅποια δέν ὑπάρχουν τοιοῦτοι. Ἀντινομία πρός τόν ἀνωτέρω κανόνα δημιουργεῖται διὰ τὰ σημεία τῶν κορυφῶν τοῦ καννάβου, τὰ ὅποια ἔχουν διπλῆν ἀπεικόνισιν ἐπί τοῦ συνόρου π.χ. τό σημείον 2 τοῦ (Σχ.14) ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀμφοτέρα τὰ σημεία B καί C τοῦ συνόρου. Οὕτω παρουσιάζονται δύο συνοριακά, αἱ U_B καί U_C , αἱ ὅποια δέον νά ἀναφερθοῦν εἰς ἓν σημείον, τό $(i+1, j+1)$. Ἡ ἄρσις τῆς ἀναφουμένης ἀντινομίας ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς παραδοχῆς, ὅτι ἀμφοτέρα τὰ σημεία B καί C τοῦ συνόρου ἔχουν τήν αὐτήν τιμήν καί ἴσην πρός τήν τιμήν τοῦ σημείου τοῦ συνόρου τοῦ κειμένου πλησιέστερον πρός τήν κορυφήν τοῦ καννάβου (σημείον B τοῦ Σχ.14). Τό εἰσαγόμενον σφάλμα ὑπό τῆς παραδοχῆς ταύτης τείνει πρός τό μηδέν καθώς τὰ Δ_x καί Δ_y τείνουν πρός τό μηδέν.

Μετά τόν χαρακτηρισμόν τῶν σημείων διά τῶν κωδικῶν των ἀριθμῶν καί τόν προσδιορισμόν τῶν δεικτῶν ἀναφορᾶς τῶν σημείων, προβαίνομεν εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν συντεταγμένων $x(i,j)$ καί $y(i,j)$ τῶν σημείων. Διά τὰ σημεῖα τὰ συμπίπτοντα πρὸς τὰς κορυφὰς τοῦ καννάβου ὁ προσδιορισμός τῶν συντεταγμένων εἶναι ἀπλοῦς ὑπολογιζομένων ἐκ τῶν σχέσεων:

$$\begin{aligned}x(i,j) &= (i-1)h \\y(i,j) &= (j-1)h\end{aligned}\tag{α}$$

Ἐνθα i, j οἱ δεῖκται ἀναφορᾶς τοῦ σημείου καί h τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῶν στοιχείων τοῦ καννάβου. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τετμημένοι $y(i,j)$ δέν μετροῦνται ἐκ τοῦ ἀξονος τῶν x , ἀλλὰ ἐκ τοῦ x' παραλλήλου πρὸς τόν x καί ἐφαπτομένου τοῦ ἄνω συνόρου τοῦ καννάβου. Τοῦτο ὁμως δέν ἐνοχλεῖ, διότι τελικῶς ἀπαιτοῦνται διά τόν ὑπολογισμόν οὐχί αἱ συντεταγμένοι τῶν σημείων, ἀλλὰ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς τῶν συντεταγμένων τῶν γειτονικῶν σημείων, ἡ ὁποία καί ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν τούτων. Ἀντιθέτως ἡ παρατυπία αὕτη διευκολύνει τὴν σύνταξιν τοῦ προγράμματος τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ διά τὴν ἐκτύπωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων. Διά τὰ λοιπὰ σημεῖα, τὰ μὴ συμπίπτοντα πρὸς τὰς κορυφὰς τοῦ καννάβου, ὁ προσδιορισμός τῶν συντεταγμένων ἀπαιτεῖ περισσοτέραν ἐργασίαν, καθ' ὅσον αὐταὶ ὑπολογίζονται ἐκ τῆς γεωμετρίας τοῦ συνόρου. Ὅπως αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως, οὕτω καί αἱ συντεταγμένοι χαρακτηρίζονται μὲ δύο δείκτας ἀναφορᾶς i, j , προσδιοριζομένους κατὰ τὰ ἐκτεθέντα ἀνωτέρω διά τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως.

Ἡ μορφή τῆς ἐξίσωσως τῶν διαφορῶν καί τῶν μερικῶν παραγῶγων διά τὰς διαφόρους κατηγορίας σημείων βάσει τοῦ κωδικοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν εἶναι ὡς ἀκολούθως:

α) Ἐξίσωσις διαφορῶν (τεσσάρων σημείων).

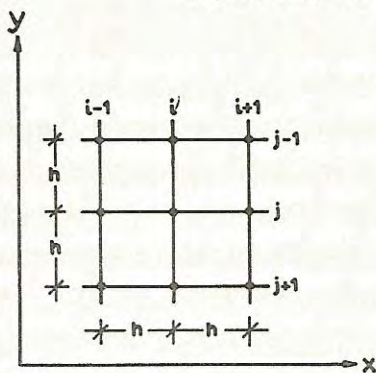
- Σημεῖα 3: δέν ἐφαρμόζεται ἡ ἐξίσωσις
- Σημεῖα 1: δέν ἐφαρμόζεται ἡ ἐξίσωσις
- Σημεῖα 2: δέν ἐφαρμόζεται ἡ ἐξίσωσις
- Σημεῖα 0: ἐφαρμόζεται ἡ ἐξίσωσις δι' ἴσαπέχοντα γειτονικά σημεῖα ἐξ. (6) (βλ. Σχ. 14α):

$$U(i,j) = \frac{U(i+1,j)+U(i,j+1)+U(i-1,j)+U(i,j-1)-h^2g(i,j)}{4}\tag{20}$$

Σημεία 4: εφαρμόζεται ή γενικευμένη εξίσωση των τεσσάρων σημείων έξ.(11):

$$U(i, j) = C_1 U(i+1, j) + C_2 U(i, j-1) + C_3 U(i-1, j) + C_4 U(i, j+1) + C_5 g(i, j) \quad (21)$$

Ένθα: C_1, C_2, C_3, C_4 και C_5 οί συντελεσταί οί διδόμενοι έκ τών σχέσεων (12). Τά μεγέθη s_1, s_2, s_3, s_4 υπολογίζονται έκ τών σχέσεων:



Σχ. 14α

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{|x(i+1, j) - x(i, j)|}{h} \\ s_2 &= \frac{|y(i, j-1) - y(i, j)|}{h} \\ s_3 &= \frac{|x(i-1, j) - x(i, j)|}{h} \\ s_4 &= \frac{|y(i, j+1) - y(i, j)|}{h} \end{aligned} \quad (22)$$

β.- Μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$

Η U είναι γνωστή έντός και επί του συνόρου. Αί μερικαί παράγωγοι υπολογίζονται μόνον διά τά έσωτερικά σημεία 0 και 4.

Σημεία 0: Έκ τών σχέσεων (13), (14), (17) άντιστοίχως, Σχ. 7, 8:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(i+1, j) - 2U(i, j) + U(i-1, j)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U(i, j-1) - 2U(i, j) + U(i, j+1)}{h^2} \quad (23\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{U(i+1, j-1) - U(i-1, j-1) - U(i+1, j+1) + U(i-1, j+1)}{4h^2}$$

Σημεία 4: Έκ τών σχέσεων (15), (16), Σχ. 7, 8:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 \frac{s_3 U(i+1, j) - (s_1 + s_3) U(i, j) + s_1 U(i-1, j)}{s_1 s_3 (s_1 + s_3) h^2} \quad (24\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2 \frac{s_4 U(i, j-1) - (s_2 + s_4) U(i, j) + s_2 U(i, j+1)}{s_2 s_4 (s_2 + s_4) h^2} \quad (24\beta)$$

Τά s_1, s_2, s_3, s_4 δίδονται έκ τῶν σχέσεων (22).

Ἡ μικτή παράγωγος ὑπολογίζεται έκ τῶν (18 α, β), Σχ.9:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{U(i+1, j-1) - 2U(i, j) + U(i-1, j+1)}{2h^2} \quad (25\alpha, \beta)$$

$$\text{καί} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{U(i-1, j-1) - 2U(i, j) + U(i+1, j+1)}{2h^2}$$

κατά περίπτωσιν ἢ έκ τῆς (23γ) ἀφοῦ προηγουμένως ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί τῆς U ἐκτός τοῦ συνόρου.

§7 .- Δομή τοῦ προγράμματος Ἡλεκτρονικοῦ Ὑπολογιστοῦ.

Τό πρόγραμμα SOLAPEQ.

Βάσει τῶν εἰς προηγουμένης παραγράφους ἐκτεθέντων συντάσσεται πρόγραμμα διά ψηφιακόν ἠλεκτρονικόν ὑπολογιστήν εἰς γλῶσσαν FORTRAN. Εἰς τό πρόγραμμα δίδεται τό ὄνομα SOLAPEQ (ἀρχικά τῆς φράσεως SOLUTION OF LAPLACE AND POISSON EQUATION).

Τό πρόγραμμα SOLAPEQ ἀποτελεῖται έκ τοῦ κυρίου προγράμματος (MAIN PROGRAM) καί τῶν τριῶν ὑποπρογραμμάτων BOUND, SOPEQ καί SHOW.

Ἐπιχειροποιεῖται τό πρόγραμμα ἔχει τήν εὐθύνην τῶν κάτωθι ἐργασιῶν:

1.- ἔτοιμασίαν τῶν δεδομένων, τά ὅποια συνίστανται εἰς:

α. τήν εὐρεσίαν τῶν συνοριακῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων σ_x, σ_y καί

τ_{xy}

β. τόν καθορισμόν τῆς τιμῆς τοῦ ϵ , ὁ ὅποῖος ἐκφράζει τήν ἐπιθυμητήν ἀκρίβειαν τῆς μεθόδου ὑπερχαλαρώσεως

γ. τόν καθορισμόν τοῦ βήματος h τοῦ τετραγωνικοῦ καννάβου καί τῶν ἀριθμῶν v_x τῶν v_y δηλούντων τό πλήθος τῶν σημείων αὐτοῦ κατά τὰς διευθύνσεις x καί y ἀντιστοίχως

δ. τήν ἐκλογήν τῆς τιμῆς β τῆς παραμέτρου χαλαρώσεως.

Αί συνοριακαί τιμαί δίδονται κατά σειράν, μέ έκκίνησην έκ τινος σημείου τοῦ συνόρου καί διάνυσιν τούτου δεξιοστροφῶς

$$\sigma_x(i), \sigma_y(i), \tau_{xy}(i) \quad (i = 1 \text{ ἕως } \kappa)$$

ἔνθα ὁ κ ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν συνοριακῶν τιμῶν.

2.- Τήν μόρφωσιν τοῦ μητρώου INDEX (i,j) τῶν κωδικῶν ἀριθμῶν τῶν σημείων τοῦ καννάβου.

3.- Τήν μόρφωσιν τῶν μητρώων X(i,j), Y(i,j) τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τοῦ καννάβου.

Ἐν συνεχείᾳ τό πρόγραμμα ἐκτελεῖ κατά σειράν τὰς ἀκολουθοῦσας ἐργασίας:

4.- Υπολογισμός τοῦ $U = \sigma_x + \sigma_y$

Ἀναγιγνώσκει τὰς τιμάς $\sigma_x(i), \sigma_y(i)$ ($i = 1$ ἕως κ) τοῦ συνόρου καί τὰς τοποθετεῖ τῇ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος BOUND εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεία (i,j) τοῦ καννάβου.

Μορφώνει τό ἄθροισμα $U = \sigma_x + \sigma_y$ ἐπί τοῦ συνόρου.

Υπολογίζει τὰς τιμάς $U(i,j)$ δι' ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως τῆς ἐξίσωσως:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = g(x,y) \quad g(x,y) = 0$$

τῇ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος SOPEQ.

Ἐκτυπώνει τὰς τιμάς $U(i,j)$ τῇ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος SHOW.

5.- Υπολογισμός τῆς σ_x

Μορφώνει τήν συνάρτησιν $g(x,y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$

Υπολογίζει τὰς τιμάς $\sigma_x(i,j)$ δι' ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως τῆς ἐξίσωσως:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = g(x,y)$$

τῇ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος SOPEQ.

Ἐκτυπώνει τὰς τιμάς $\sigma_x(i,j)$ τῇ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος SHOW.

6.- Υπολογισμός τῆς σ_y

Μορφώνει τήν συνάρτησιν $g(x,y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$

Υπολογίζει τās τιμές $\sigma_y(i,j)$ δι' αριθμητικής ολοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = g(x,y)$$

τῆ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος SOPEQ.

Ἐκτυπώνει τās τιμές $\sigma_y(i,j)$ τῆ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος SHOW.

7.- Υπολογισμός τῆς τ_{xy}

Ἀναγιγνώσκει τās τιμές $\tau_{xy}(i)$ ($i = 1$ ἕως κ) ἐπὶ τοῦ συνόρου καί τās τοποθετεῖ τῆ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος BOUND εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα (i,j) τοῦ συνόρου.

$$\text{Μορφώνει τὴν συνάρτησιν } g(x,y) = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Υπολογίζει τās τιμές $\tau_{xy}(i,j)$ δι' αριθμητικής ολοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = g(x,y)$$

τῆ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος SOPEQ.

Ἐκτυπώνει τās τιμές $\tau_{xy}(i,j)$ τῆ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος SHOW.

Εἰς ἀπάσας τās περιπτώσεις ἐκτυποῦται καὶ ἄριθμός τῶν ἐπαναληφῶν τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν σύγκλισιν τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου.

8.- Δίκτυον Ἴσοχρῶμων.

Διὰ τόν ἔλεγχον τῶν ἀποτελεσμάτων ὑπολογίζονται αἱ τιμαὶ τῶν ἰσοχρῶμων εἰς τὰ σημεῖα τοῦ καννάβου καί ἐκτυποῦται τὸ δίκτυον τῶν ἰσοχρῶμων πρὸς παραβολὴν μὲ τὴν φωτογραφίαν τὴν λαμβανομένην ἐκ τοῦ φωτοελαστικοῦ πειράματος.

Παραθέτομεν κατωτέρω τὸ πρόγραμμα SOLAPEQ. Τὰ μητρώα INDEX(I,J), X(I,J), Y(I,J) τοῦ κυρίου προγράμματος ἐμορφώθησαν συμφώνως πρὸς τās ἀπαιτήσεις τῆς ἐφαρμογῆς τῆς §10.

PROGRAM SOLAPEQ

PROGRAM SOLAPEQ

DIMENSION SX(33,31),SY(33,31),U(33,31),INDEX(33,31),TXY(33,31),
1KORDEK(33),DNS(33,31),DPS(33,31),BV(120),LL(120),MM(120),
2X(33,31),Y(33,31),GG(33,31),FB(33,31)

COMMON /10/ INDEX,U,SY
COMMON/SOLP/EPS,MAXIT,X,Y
COMMON/SH/NX,KO

EQUIVALENC (SX,TXY),(SY,DNS),(U,DPS.

READ 110, EPS, MAXIT, B, NX, NY, K, H, S

110 FORMAT (F6.3, I4, F6.2, 3I4, F6.2, F6.2)

DO 1 J=1, NY

DO 1 I=1, NX

SX(I,J)=0.0

SY(I,J)=0.0

U(I,J)=0.0

1 INDEX(I,J)=0

C** FORMULATION OF THE MATRIX =INDEX=

DO 2 J=1, 6

DO 2 I=1, 22

2 INDEX(I,J)=3

DO 3 I=1, 21

3 INDEX(I,7)=3

DO 4 I=1, 20

4 INDEX(I,8)=3

DO 5 I=1, 20

5 INDEX(I,22)=3

DO 6 I=1, 21

6 INDEX(I,23)=3

DO 7 J=24, 31

DO 7 I=1, 22

7 INDEX(I,J)=3

DO 8 I=1, 20

8 INDEX(I,9)=1

DO 9 J=1, 6

9 INDEX(23,J)=1

DO 10 I=24, 33

10 INDEX(I,1)=1

DO 11 J=2, 31

11 INDEX(33,J)=1

DO 12 I=23, 32

12 INDEX(I,31)=1

DO 13 J=24, 30

13 INDEX(23,J)=1

DO 14 I=1, 20

14 INDEX(I,21)=1

DO 15 J=10, 20

15 INDEX(I,J)=1

INDEX(21,8)=2

PROGRAM SOLAPEQ

```
INDEX(22,7)=2
INDEX(21,22)=2
INDEX(22,23)=2
INDEX(21,9)=4
INDEX(22,8)=4
INDEX(23,7)=4
INDEX(21,21)=4
INDEX(22,22)=4
INDEX(23,23)=4
INDEX(22,9)=4
INDEX(23,8)=4
INDEX(22,21)=4
INDEX(23,22)=4
DO 16 J=1,NY
16 PRINT 101, (INDEX(I,J),I=1,NX)
101 FORMAT(1H ,33I1)
C** FORMULATION OF THE COORDINATES X(I,J),Y(I,J)
DO 17 J=1,NY
DO 17 I=1,NX
AI=I
AJ=J
X(I,J)=(AI-1.)*H
17 Y(I,J)=(AJ-1.)*H
Y(21,8)=1.87
X(21,8)=5.16
Y(22,7)=1.66
X(22,7)=5.37
Y(21,22)=5.13
X(21,22)=5.16
Y(22,23)=5.34
X(22,23)=5.37
PRINT 102
102 FORMAT(1H1,10X,13HMATRIX X(I,J))
PRINT 103,((X(I,J),I=1,NX),J=1,NY)
103 FORMAT(1H ,17F6.2/16F6.2)
PRINT 104
104 FORMAT(1H1,10X,13HMATRIX Y(I,J))
PRINT 103,((Y(I,J),I=1,NX),J=1,NY)
C** SX AND SY ON THE BOUNDARY I **
I=1
J=9
READ 600, (BV(N), N=1,K)
600 FORMAT(10F8.2)
CALL BOUND (I,J,K,INDEX,BV,SX,LL,MM,NX,NY)
I=1
J=9
READ 600, (BV(N), N=1,K)
CALL BOUND (I,J,K,INDEX,BV,SY,LL,MM,NX,NY)
```


PROGRAM SOLAPEQ

C** CALCULATION OF $U = S_x + S_y$ **

KO=1

DO 222 J=1,NY

DO 222 I=1,NX

222 U(I,J)=SX(I,J)+SY(I,J)

NNX=NX-1

NNY=NY-1

DO 1001 J=2,NNY

DO 1001 I=2,NNX

1001 GG(I,J)=0.0

CALL SOPEQ (H,B,U,INDEX,GG,NNX,NNY)

C** CALCULATION OF S_x **

KU=2

DO 1002 J=2,NNY

DO 1002 I=2,NNX

IF(INDEX(I,J).NE.0) GO TO 1003

GG(I,J)=-((U(I+1,J)-2.*U(I,J)+U(I-1,J)))/(H**2)

GO TO 1002

1003 IF(INDEX(I,J).NE.4) GO TO 1002

S1=ABS(X(I+1,J)-X(I,J))/H

S2=ABS(Y(I,J+1)-Y(I,J))/H

S3=ABS(X(I-1,J)-X(I,J))/H

S4=ABS(Y(I,J-1)-Y(I,J))/H

GG(I,J)=-2.*((S3*U(I+1,J)-(S1+S3)*U(I,J)+S1*U(I-1,J)))/(S1*S3*(S1+
S3)*H**2)

1002 CONTINUE

CALL SUPEQ(H,B,SX,INDEX,GG,NNX,NNY)

C** CALCULATION OF S_y **

KU=3

DO 1004 J=2,NNY

DO 1004 I=2,NNX

IF(INDEX(I,J).NE.0) GO TO 1005

GG(I,J)=-((U(I,J+1)-2.*U(I,J)+U(I,J-1)))/(H**2)

GO TO 1004

1005 IF(INDEX(I,J).NE.4) GO TO 1004

S1=ABS(X(I+1,J)-X(I,J))/H

S2=ABS(Y(I,J+1)-Y(I,J))/H

S3=ABS(X(I-1,J)-X(I,J))/H

S4=ABS(Y(I,J-1)-Y(I,J))/H

GG(I,J)=-2.*((S4*U(I,J+1)-(S2+S4)*U(I,J)+S2*U(I,J-1)))/(S2*S4*(S2+
S4)*H**2)

1004 CONTINUE

CALL SUPEQ (H,B,SY,INDEX,GG,NNX,NNY)

C** CALCULATION OF THE DIFFERENCE OF NORMAL STRESSES **

DO 500 J=1,NY

DO 500 I=1,NX

500 DNS(I,J)=(SX(I,J)-SY(I,J))/2.

C** TXY ON THE BONDARY **

PROGRAM SOLAPEQ

```
I=1
J=9
READ 600, (BV(N), N=1,K)
CALL BOUND (I,J,K,INDEX,BV,TTY,LL,MM,NX,NY)
C** CALCULATION OF TXY **
KO=4
DO 1006 J=2,NNY
DO 1006 I=2,NNX
IF(INDEX(I,J).NE.0) GO TO 1007
GG(I,J)=+(U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1)-U(I+1,J-1)+U(I-1,J-1))/(4.*H**2)
1007 IF(INDEX(I,J).NE.4) GO TO 1006
LB=INDEX(I-1,J-1)+INDEX(I+1,J+1)
IF(LB-3)41,41,40
40 GG(I,J)=+(U(I+1,J+1)-2.*U(I,J)+U(I-1,J-1))/(2.*H**2)
GO TO 1006
41 GG(I,J)=- (U(I-1,J+1)-2.*U(I,J)+U(I+1,J-1))/(2.*H**2)
1006 CONTINUE
CALL SOPEQ (H,B,TTY,INDEX,GG,NNX,NNY)
C** CALCULATION OF THE DIFFERENCE OF PRINCIPAL STRESSES **
DO 501 J=1,NY
DO 501 I=1,NX
501 DPS(I,J)=SQRT(DNS(I,J)*DNS(I,J)+TTY(I,J)*TTY(I,J))*2./S
C** FORMULATION OF THE MATRIX OF THE ISOCHROMATIC ORDERS **
KK1=4H
KK2=4H0000
KK3=4HAAAA
KK4=4HBBBB
KK5=4HCCCC
KK6=4HDDDD
KK7=4HEEEE
KK8=4HFFFF
KK9=4HGGGG
KK10=4HHHHH
KK11=4HIIII
KK12=4HJJJJ
KK13=4HKKKK
DO 297 KA=1,5
HK = KA
H = HK*0.05
PRINT 295,H
295 FORMAT(1H1,45X,23HISOCHROMATICS FOR H=,F5.2,/)
DO 2901 J=1,NY
DO 1101 KK=1,NX
1101 KORDER(KK)=KK1
DO 291 I=1,NX
IF(INDEX(I,J).EQ.3)GO TO 292
H1=0.0
H2=H
```

PROGRAM SOLAPEQ

```
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK2
H1= 1.-H
H2= 1.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK3
H1=2.-H
H2=2.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK4
H1=3.-H
H2=3.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK5
H1=4.-H
H2=4.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK6
H1= 5.-H
H2= 5.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK7
H1=6.-H
H2=6.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK8
H1=7.-H
H2=7.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK9
H1=8.-H
H2=8.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK10
H1=9.-H
H2=9.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK11
H1=10.-H
H2=10.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK12
H1=11.-H
H2=11.+H
IF(DPS(I,J).GE.H1.AND.DPS(I,J).LT.H2) KORDER(I)=KK13
GO TO 291
292 KORDER(I)=KK1
291 CONTINUE
PRINT 296, (KORDER(I),I=1,NX)
296 FORMAT(1H ,33(A1,1X))
2901 CONTINUE
297 CONTINUE
STOP
END
```

SUBROUTINE SOPEQ

```
SUBROUTINE SOPEQ (H,B,F,INDEX,GG,NNX,NNY)
DIMENSION F(33,31),INDEX(33,31),GG(33,31),X(33,31),Y(33,31)
COMMON/SOLP/EPS,MAXIT,X,Y
ITN=1
33 D=0.0
DO 20 J=2,NNY
DO 20 I=2,NNX
IF(INDEX(I,J).NE.0) GO TO 77
FNEW=B*(F(I+1,J)+F(I,J+1)+F(I-1,J)+F(I,J-1)-H**2*GG(I,J))/4.
1(1.-B)*F(I,J)
GO TO 78
77 IF(INDEX(I,J).NE.4) GO TO 20
S1=ABS(X(I+1,J)-X(I,J))/H
S2=ABS(Y(I,J+1)-Y(I,J))/H
S3=ABS(X(I-1,J)-X(I,J))/H
S4=ABS(Y(I,J-1)-Y(I,J))/H
A0=1./(S1*S3)+1./(S2*S4)
A1=1./(S1*S1+S1*S3)
A2=1./(S2*S2+S2*S4)
A3=1./(S3*S1+S3*S3)
A4=1./(S4*S2+S4*S4)
C1=A1/A0
C2=A2/A0
C3=A3/A0
C4=A4/A0
C5=-H*H/(2.*A0)
FNEW=B*(C1*F(I+1,J)+C2*F(I,J+1)+C3*F(I-1,J)+C4*F(I,J-1)+C5*
1GG(I,J))+(1.-B)*F(I,J)
78 RESID=ABS(FNEW-F(I,J))
IF(RESID-D)37,37,38
38 D=RESID
37 F(I,J)=FNEW
20 CONTINUE
IF(D-EPS)39,39,40
40 ITN=ITN+1
IF(ITN-MAXIT)33,41,41
41 PRINT 200, MAXIT
200 FORMAT(1H1,21H FAILS TO CONVERGE IN, I5,10HITERATIONS)
39 PRINT 201, ITN
201 FORMAT(1H1,19HF WAS CALCULATED IN, I4,10HITERATIONS)
PRINT 210
210 FORMAT(1H1,9HPAGE NO 1)
PRINT 211,((F(I,J),I=1,10),J=1,31)
PRINT 212
212 FOKMAT(1H1,9HPAGE NO 2)
PRINT 211,((F(I,J),I=11,20),J=1,31)
211 FOKMAT(1H ,10F8.2)
PRINT 213
```

SUBROUTINE SOPEQ

```
213 FORMAT(1H1,9HPAGE NO 3)
    PRINT 214,((F(I,J),I=21,33),J=1,31)
214 FORMAT(1H ,13F10.2)
    CALL SHOW(INDEX,F)
    PUNCH 250,((F(I,J),I=1,33),J=1,31)
250 FUKMAT(10F8.2/10F8.2/10F8.2/3F8.2)
    RETURN
    END
```

SUBROUTINE BOUND

SUBROUTINE BOUND (I,J,K,INDEX,BV,FB,LL,MM,NX,NY)
DIMENSION INDEX(NX,NY), BV(K), LL(K), MM(K), FB(NX,NY)

LL(1)=I
MM(1)=J
FB(I,J)=BV(1)

I=I+1
LL(2)=I
MM(2)=J
FB(I,J)=BV(2)
DO 90 N=3,K

L=I+1
M=J
IF(L.GT.NX) GO TO 10
IF(M.GT.NY) GO TO 10
IF(L.LT.1) GO TO 10
IF(M.LT.1) GO TO 10
LL(N)=L
MM(N)=M
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 20
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 20
GO TO 10

20 IF(LL(N).NE.LL(N-2)) GO TO 40
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40

10 L=I+1
M=J+1
IF(L.GT.NX) GO TO 11
IF(M.GT.NY) GO TO 11
IF(L.LT.1) GO TO 11
IF(M.LT.1) GO TO 11
LL(N)=L
MM(N)=M
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 21
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 21
GO TO 11

21 IF(LL(N).NE.LL(N-2)) GO TO 40
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40

11 L=I
M=J+1
IF(L.GT.NX) GO TO 12
IF(M.GT.NY) GO TO 12
IF(L.LT.1) GO TO 12
IF(M.LT.1) GO TO 12
LL(N)=L
MM(N)=M
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 22
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 22
GO TO 12

22 IF(LL(N).NE.LL(N-2)) GO TO 40

SUBROUTINE BOUND

```
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40
12 L=I-1
M=J+1
IF(L.GT.NX) GO TO 13
IF(M.GT.NY) GO TO 13
IF(L.LT.1) GO TO 13
IF(M.LT.1) GO TO 13
LL(N)=L
MM(N)=M
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 23
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 23
GO TO 13
23 IF(LL(N).NE.LL(N-2)) GO TO 40
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40
13 L=I-1
M=J
IF(L.GT.NX) GO TO 14
IF(M.GT.NY) GO TO 14
IF(L.LT.1) GO TO 14
IF(M.LT.1) GO TO 14
LL(N)=L
MM(N)=M
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 24
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 24
GO TO 14
24 IF(LL(N).NE.LL(N-2)) GO TO 40
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40
14 L=I-1
M=J-1
IF(L.GT.NX) GO TO 15
IF(M.GT.NY) GO TO 15
IF(L.LT.1) GO TO 15
IF(M.LT.1) GO TO 15
LL(N)=L
MM(N)=M
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 25
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 25
GO TO 15
25 IF(LL(N).NE.LL(N-2)) GO TO 40
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40
15 L=I
M=J-1
IF(L.GT.NX) GO TO 16
IF(M.GT.NY) GO TO 16
IF(L.LT.1) GO TO 16
IF(M.LT.1) GO TO 16
LL(N)=L
MM(N)=M
```

SUBROUTINE BOUND

```
IF(INDEX(L,M).EQ.1) GO TO 26
IF(INDEX(L,M).EQ.2) GO TO 26
GO TO 16
26 IF(LL(N).NE.LL(N-2)) GO TO 40
IF(MM(N).NE.MM(N-2)) GO TO 40
16 L=I+1
M=J-1
LL(N)=L
MM(N)=M
40 FB(L,M)=BV(N)
I=L
J=M
IF(INDEX(I,J).EQ.1) GO TO 71
IF(INDEX(I,J).EQ.2) GO TO 72
71 INDEX(I,J)=10
GO TO 90
72 INDEX(I,J)=20
90 CONTINUE
DO 73 J=1,NY
DO 73 I=1,NX
IF(INDEX(I,J).EQ.10) GO TO 74
IF(INDEX(I,J).EQ.20) GO TO 75
GO TO 73
74 INDEX(I,J)=1
GO TO 73
75 INDEX(I,J)=2
73 CONTINUE
RETURN
END
```


SUBROUTINE SHOW

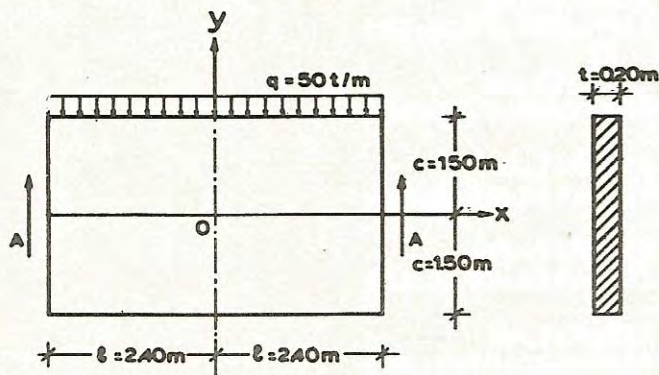
```
SUBROUTINE SHOW (INDEX,F)
DIMENSION F(33,31),INDEX(33,31),II(33)
COMMON/SH/NX,KO
NN=NX/7
NI=NX-NN*7
IF(NI.GT.0) NN=NN+1
DO 1 N=1,NN
GO TO (31,32,33,34),KO
31 PRINT 91
91 FORMAT(1HJ,30X,30HAHKOISLA ORHZM UASEZM SX+SV)
PRINT 92
92 FORMAT(1H ,30X,22HSUM OF NORMAL STRESSES)
GO TO 40
32 PRINT 93
93 FORMAT(1HJ,30X,18HORHAI UASEIS SX)
PRINT 94
94 FORMAT(1H ,30X,15HNORMAL STRESSES)
GO TO 40
33 PRINT 95
95 FORMAT(1HJ,30X,18HORHAI UASEIS SV)
PRINT 94
GO TO 40
34 PRINT 96
96 FORMAT(1HJ,30X,25HDIAULGUIJAI UASEIS UXV,
PRINT 97
97 FORMAT(1H ,30X,14HSHEAR STRESSES)
40 PRINT 102, N
102 FORMAT(1HZ,15X,8HSEKIS MO,I2)
PRINT 103
103 FORMAT(1H ,15X,4HPAGE,/)
PRINT 104
104 FORMAT(1H ,10X,69(1H*))
PRINT 105
105 FORMAT(1H ,10X,6H* I *,7(8X,1H*))
K=(N-1)*7+1
L=7*N
IF(L.GT.NX) L=NX
DO 11 I=K,L
11 II(I)=1
PRINT 106, (II(I), I=K,L)
106 FORMAT(1H ,10X,1H*,4X,1H*,7(3X,I2,3X,1H*))
PRINT 107
107 FORMAT(1H ,10X,6H* J *,7(8X,1H*))
PRINT 104
DO 4 J=1,31
PRINT 108, J
108 FORMAT(1H ,10X,2H* ,12,2H *)
DO 12 I=K,L
```

SUBROUTINE SHOW

```
IF(INDEX(I,J).EQ.3) GO TO 12
IA=I-K+1
GO TO (70,71,72,73,74,75,76),IA
70 PRINT 170,F(I,J)
170 FORMAT(1H+,16X,F7.2,2X)
GO TO 12
71 PRINT 171,F(I,J)
171 FORMAT(1H+,25X,F7.2,2X)
GO TO 12
72 PRINT 172,F(I,J)
172 FORMAT(1H+,34X,F7.2,2X)
GO TO 12
73 PRINT 173,F(I,J)
173 FORMAT(1H+,43X,F7.2,2X)
GO TO 12
74 PRINT 174,F(I,J)
174 FORMAT(1H+,52X,F7.2,2X)
GO TO 12
75 PRINT 175,F(I,J)
175 FORMAT(1H+,61X,F7.2,2X)
76 PRINT 176,F(I,J)
176 FORMAT(1H+,70X,F7.2,2X)
12 CONTINUE
PRINT 180
180 FORMAT(1H+,16X,7(8X,1H*))
4 CONTINUE
PRINT 104
1 CONTINUE
RETURN
END
```

§8 . Εφαρμογή του προγράμματος SOLAPEQ εις δίσκον γνωστής έντάσεως.

Διά τόν έλεγχον τής άκριβείας τής μεθοδολογίας εφαρμόζομεν τό πρόγραμμα εις τόν δίσκον του Σχ.15, του όποιου ή έντασις είναι γνωστή.



Σχ.15

Αί συνιστώσαι τής έντάσεως διά τήν άνωτέρω περίπτωσιν φορτίσεως του όρθογωνικοϋ δίσκου δίδονται υπό τών κατωτέρω έκφράσεων* :

$$\sigma_x = - \frac{q}{2tI} (1^2 - x^2)y - \frac{q}{2tI} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right)$$

$$\sigma_y = - \frac{q}{2tI} \left(- \frac{1}{3} y^3 + c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \quad (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\tau_{xy} = + \frac{q}{2tI} (c^2 - y^2)x$$

ένθα $I = \frac{(2c)^3}{12} = \frac{2}{3} c^3$ ή ανά μονάδα πάχους ροπή άδρανειας τής διατομής.

Σημείωσις: Εις τήν υπό τών άνωτέρω έκφράσεων διδομένην έντασιν ή ίσορροπίσις του δίσκου γίνεται υπό τεμνουσών δυνάμεων κατανεμημένων εις τάς διατομάς $x = \pm 1$ ήτοι :

$$A = \int_{-c}^c (\tau_{xy})_{x=-1} dy = \int_{-c}^c (\tau_{xy})_{x=+1} dy = q1$$

* [7] §21, σελ.41

Δέν ἐξετάζεται ἡ αὐστηρότης τῆς ἀνωτέρω λύσεως ἀρκούμεθα μόνον εἰς τό γεγονός, ὅτι αὕτη ἱκανοποιεῖ τὰς ἐξισώσεις 1(α,β,γ) καί 2(α,β,γ,δ).

Ἐπί τοῦ δίσκου τοῦ Σχ.15 ἐπιθέτομεν κάρναβον μέ βῆμα $h=0.10m$, ὁπότε θά εἶναι:

$$v_x = \frac{4.80}{0.10} + 1 = 49 \quad (\text{πλήθος σημείων μιᾶς σειρᾶς})$$

$$v_y = \frac{3.00}{0.10} + 1 = 31 \quad (\text{πλήθος σημείων μιᾶς στήλης})$$

$$k=2(v_x+v_y)-4=2(49+31)-4=156 \quad (\text{πλήθος συνοριακῶν σημείων})$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (α,β,γ) ὑπολογίζονται αἱ τιμαί τῶν σ_x , σ_y καί τ_{xy} εἰς τό σύνορον τοῦ δίσκου καί ἀκολουθῶς ὑπολογίζονται αἱ συνιστώσαι τῆς ἐντάσεως εἰς ἅπαντα τὰ ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ κάρναβου δι' ἐφαρμογῆς τοῦ προγράμματος SOLAPEQ μέ ἀκρίβειαν συγκλίσεως τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου $\epsilon = 0.0005$.

Αἱ ὑπολογισθεῖσαι τιμαί ἐμφαίνονται εἰς τοὺς πίνακας τῶν σελίδων 40 ἕως 60.

Εἰς τοὺς πίνακας τῶν σελίδων 61,62,63 ἐμφαίνονται αἱ τιμαί τῶν ἐντατικῶν μεγεθῶν αἱ ὑπολογισθεῖσαι δι' ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογῆς τῶν σχέσεων (α,β,γ). Λόγω τῆς συμμετρίας τῶν σ_x, σ_y καί τῆς ἀντιμετρίας τῶν τ_{xy} ὡς πρὸς τόν ἄξονα O_y ἐξετυπώθησαν μόνον αἱ τιμαί τοῦ ἄριστεροῦ ἡμίσεος τοῦ δίσκου καί μάλιστα αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διατομὰς $I = 1,3,5,\dots,25$.

Διὰ συγκρίσεως τῶν ἀντιστοιχῶν ἀποτελεσμάτων ληφθέντων κατὰ τοὺς δύο ὡς ἄνω τρόπους, διαπιστοῦται ἡ μεγάλη ἀκρίβεια τῆς ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως τῶν ἐξισώσεων Laplace καί Poisson.

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 1
PAGE

I	1	2	3	4	5	6	7
1	-5.00	-8.92	-12.67	-16.25	-19.67	-22.92	-26.00
2	-3.16	-6.82	-10.32	-13.67	-16.85	-19.89	-22.77
3	-1.64	-5.03	-8.28	-11.39	-14.35	-17.17	-19.84
4	-0.40	-3.53	-6.54	-9.40	-12.14	-14.74	-17.21
5	0.57	-2.30	-5.05	-7.68	-10.19	-12.57	-14.84
6	1.30	-1.31	-3.82	-6.21	-8.49	-10.66	-12.71
7	1.80	-0.55	-2.80	-4.95	-7.01	-8.96	-10.81
8	2.10	0.01	-1.99	-3.90	-5.73	-7.46	-9.11
9	2.23	0.40	-1.35	-3.03	-4.62	-6.14	-7.58
10	2.20	0.63	-0.87	-2.31	-3.67	-4.98	-6.21
11	2.04	0.73	-0.52	-1.72	-2.86	-3.95	-4.98
12	1.76	0.72	-0.29	-1.24	-2.16	-3.03	-3.85
13	1.40	0.61	-0.14	-0.86	-1.54	-2.19	-2.81
14	0.97	0.45	-0.06	-0.54	-0.99	-1.43	-1.84
15	0.50	0.23	-0.02	-0.26	-0.49	-0.71	-0.92
16	0.00	-0.00	-0.00	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01
17	-0.50	-0.24	0.01	0.25	0.47	0.69	0.89
18	-0.97	-0.45	0.05	0.52	0.98	1.41	1.82
19	-1.40	-0.62	0.13	0.84	1.53	2.17	2.79
20	-1.76	-0.72	0.28	1.23	2.14	3.01	3.83
21	-2.04	-0.73	0.51	1.71	2.84	3.93	4.95
22	-2.20	-0.64	0.86	2.29	3.66	4.96	6.19
23	-2.23	-0.40	1.34	3.02	4.61	6.12	7.56
24	-2.10	-0.01	1.98	3.89	5.71	7.45	9.09
25	-1.80	0.55	2.80	4.95	7.00	8.94	10.79
26	-1.30	1.31	3.81	6.20	8.49	10.64	12.70
27	-0.57	2.30	5.05	7.68	10.19	12.57	14.83
28	0.40	3.53	6.53	9.40	12.13	14.73	17.20
29	1.64	5.03	8.28	11.39	14.35	17.16	19.84
30	3.16	6.82	10.32	13.66	16.85	19.89	22.76
31	5.00	8.92	12.67	16.25	19.67	22.92	26.00

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

I	8	9	10	11	12	13	14
1	-28.92	-31.67	-34.25	-36.67	-38.92	-41.00	-42.92
2	-25.49	-28.06	-30.47	-32.72	-34.82	-36.77	-38.56
3	-22.37	-24.75	-26.99	-29.09	-31.04	-32.84	-34.51
4	-19.54	-21.74	-23.81	-25.74	-27.54	-29.21	-30.74
5	-16.98	-18.99	-20.89	-22.66	-24.31	-25.84	-27.25
6	-14.66	-16.49	-18.21	-19.83	-21.33	-22.72	-24.00
7	-12.56	-14.21	-15.76	-17.21	-18.56	-19.82	-20.97
8	-10.66	-12.13	-13.51	-14.80	-16.00	-17.11	-18.14
9	-8.94	-10.23	-11.44	-12.56	-13.62	-14.59	-15.48
10	-7.38	-8.48	-9.52	-10.48	-11.39	-12.22	-12.99
11	-5.95	-6.87	-7.73	-8.54	-9.29	-9.98	-10.62
12	-4.63	-5.36	-6.05	-6.70	-7.30	-7.86	-8.37
13	-3.40	-3.95	-4.47	-4.95	-5.40	-5.82	-6.21
14	-2.23	-2.60	-2.95	-3.27	-3.57	-3.85	-4.11
15	-1.11	-1.30	-1.47	-1.63	-1.79	-1.93	-2.05
16	-0.01	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02
17	1.08	1.27	1.44	1.60	1.74	1.88	2.01
18	2.20	2.57	2.91	3.23	3.53	3.81	4.06
19	3.37	3.92	4.43	4.92	5.36	5.78	6.16
20	4.60	5.33	6.02	6.66	7.26	7.82	8.33
21	5.92	6.84	7.70	8.50	9.25	9.95	10.58
22	7.36	8.45	9.49	10.45	11.35	12.18	12.95
23	8.92	10.20	11.41	12.54	13.58	14.56	15.45
24	10.64	12.11	13.49	14.77	15.97	17.08	18.11
25	12.54	14.19	15.74	17.19	18.54	19.79	20.94
26	14.64	16.48	18.20	19.81	21.31	22.69	23.97
27	16.96	18.98	20.87	22.65	24.30	25.82	27.23
28	19.53	21.73	23.80	25.73	27.53	29.20	30.73
29	22.36	24.75	26.99	29.08	31.03	32.83	34.50
30	25.49	28.05	30.46	32.72	34.82	36.76	38.55
31	28.92	31.67	34.25	36.67	38.92	41.00	42.92

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

I	15	16	17	18	19	20	21
J							
1	-44.67	-46.25	-47.67	-48.92	-50.00	-50.92	-51.67
2	-40.19	-41.67	-42.99	-44.16	-45.17	-46.02	-46.72
3	-36.02	-37.39	-38.62	-39.71	-40.65	-41.44	-42.09
4	-32.14	-33.41	-34.54	-35.54	-36.41	-37.14	-37.74
5	-28.53	-29.69	-30.73	-31.65	-32.44	-33.12	-33.67
6	-25.16	-26.22	-27.16	-28.00	-28.72	-29.33	-29.83
7	-22.02	-22.97	-23.82	-24.57	-25.22	-25.77	-26.22
8	-19.07	-19.92	-20.67	-21.34	-21.92	-22.41	-22.81
9	-16.30	-17.04	-17.70	-18.29	-18.79	-19.22	-19.57
10	-13.69	-14.32	-14.89	-15.39	-15.82	-16.19	-16.49
11	-11.21	-11.74	-12.21	-12.63	-12.99	-13.29	-13.54
12	-8.84	-9.26	-9.64	-9.97	-10.26	-10.51	-10.71
13	-6.56	-6.87	-7.16	-7.41	-7.63	-7.81	-7.96
14	-4.34	-4.55	-4.74	-4.91	-5.06	-5.18	-5.28
15	-2.17	-2.28	-2.37	-2.46	-2.53	-2.59	-2.64
16	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03
17	2.12	2.23	2.32	2.41	2.48	2.54	2.59
18	4.30	4.51	4.69	4.86	5.00	5.13	5.23
19	6.51	6.83	7.11	7.36	7.58	7.76	7.91
20	8.79	9.22	9.59	9.93	10.21	10.46	10.66
21	11.17	11.69	12.16	12.58	12.94	13.25	13.50
22	13.65	14.28	14.85	15.35	15.78	16.15	16.45
23	16.27	17.00	17.66	18.25	18.75	19.18	19.53
24	19.04	19.88	20.64	21.30	21.88	22.37	22.77
25	21.99	22.94	23.79	24.54	25.19	25.74	26.19
26	25.14	26.19	27.14	27.97	28.69	29.30	29.80
27	28.51	29.67	30.71	31.63	32.42	33.09	33.64
28	32.13	33.39	34.53	35.53	36.39	37.13	37.73
29	36.01	37.38	38.61	39.70	40.63	41.43	42.08
30	40.19	41.66	42.98	44.15	45.16	46.02	46.72
31	44.67	46.25	47.67	48.92	50.00	50.92	51.67

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ
NORMAL STRESSES

ΣΦΑΙΣ NO 4
PAGE

I	22	23	24	25	26	27	28
1	-52.25	-52.67	-52.92	-52.00	-52.92	-52.67	-52.25
2	-47.27	-47.66	-47.89	-47.97	-47.89	-47.66	-47.27
3	-42.60	-42.96	-43.17	-43.25	-43.17	-42.96	-42.60
4	-38.21	-38.54	-38.74	-38.81	-38.74	-38.54	-38.21
5	-34.09	-34.40	-34.58	-34.64	-34.58	-34.40	-34.09
6	-30.22	-30.50	-30.66	-30.72	-30.66	-30.50	-30.22
7	-26.57	-26.82	-26.97	-27.02	-26.97	-26.82	-26.57
8	-23.12	-23.34	-23.47	-23.52	-23.47	-23.34	-23.12
9	-19.84	-20.04	-20.15	-20.19	-20.15	-20.04	-19.84
10	-16.72	-16.89	-16.99	-17.02	-16.99	-16.89	-16.72
11	-13.74	-13.88	-13.96	-13.99	-13.96	-13.88	-13.74
12	-10.86	-10.97	-11.04	-11.06	-11.04	-10.97	-10.86
13	-8.07	-8.16	-8.21	-8.23	-8.21	-8.16	-8.07
14	-5.35	-5.41	-5.45	-5.46	-5.44	-5.41	-5.35
15	-2.68	-2.71	-2.72	-2.73	-2.72	-2.71	-2.68
16	-0.02	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.02
17	2.63	2.66	2.67	2.68	2.67	2.66	2.63
18	5.31	5.36	5.39	5.40	5.39	5.36	5.31
19	8.03	8.11	8.16	8.18	8.16	8.11	8.03
20	10.82	10.93	10.99	11.01	10.99	10.93	10.82
21	13.69	13.83	13.91	13.94	13.91	13.83	13.69
22	16.68	16.85	16.95	16.98	16.95	16.85	16.68
23	19.80	20.00	20.11	20.15	20.11	20.00	19.80
24	23.08	23.30	23.44	23.48	23.44	23.30	23.08
25	26.54	26.73	26.94	26.99	26.94	26.73	26.54
26	30.19	30.47	30.64	30.69	30.64	30.47	30.19
27	34.07	34.38	34.56	34.62	34.56	34.38	34.07
28	38.19	38.53	38.73	38.79	38.73	38.53	38.19
29	42.58	42.95	43.16	43.23	43.16	42.95	42.58
30	47.26	47.65	47.88	47.96	47.88	47.65	47.26
31	52.25	52.67	52.92	53.00	52.92	52.67	52.25

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 5
PAGE

I	29	30	31	32	33	34	35
J							
1	-51.67	-50.92	-50.00	-48.92	-47.67	-46.25	-44.67
2	-46.72	-46.02	-45.17	-44.16	-42.99	-41.67	-40.19
3	-42.09	-41.44	-40.64	-39.71	-38.62	-37.39	-36.02
4	-37.74	-37.14	-36.41	-35.54	-34.54	-33.41	-32.14
5	-33.66	-33.11	-32.44	-31.65	-30.73	-29.69	-28.53
6	-29.83	-29.33	-28.72	-27.99	-27.16	-26.22	-25.16
7	-26.22	-25.77	-25.22	-24.56	-23.81	-22.96	-22.01
8	-22.80	-22.40	-21.91	-21.34	-20.67	-19.91	-19.07
9	-19.57	-19.22	-18.79	-18.28	-17.70	-17.04	-16.30
10	-16.49	-16.19	-15.82	-15.39	-14.88	-14.32	-13.68
11	-13.54	-13.29	-12.98	-12.62	-12.20	-11.73	-11.20
12	-10.70	-10.50	-10.26	-9.97	-9.63	-9.26	-8.83
13	-7.96	-7.81	-7.62	-7.40	-7.15	-6.87	-6.55
14	-5.28	-5.18	-5.05	-4.91	-4.74	-4.55	-4.34
15	-2.64	-2.59	-2.53	-2.45	-2.37	-2.27	-2.17
16	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02
17	2.59	2.54	2.48	2.41	2.33	2.23	2.13
18	5.23	5.13	5.01	4.87	4.70	4.51	4.30
19	7.91	7.76	7.58	7.36	7.12	6.83	6.52
20	10.66	10.46	10.22	9.93	9.60	9.22	8.80
21	13.50	13.25	12.95	12.58	12.17	11.70	11.17
22	16.45	16.15	15.78	15.35	14.85	14.29	13.65
23	19.53	19.18	18.76	18.25	17.67	17.01	16.27
24	22.77	22.37	21.88	21.31	20.64	19.89	19.04
25	26.19	25.74	25.19	24.54	23.79	22.94	21.99
26	29.81	29.31	28.70	27.97	27.14	26.20	25.14
27	33.64	33.09	32.42	31.63	30.71	29.67	28.51
28	37.73	37.13	36.40	35.53	34.53	33.40	32.13
29	42.08	41.43	40.63	39.70	38.61	37.39	36.01
30	46.72	46.02	45.16	44.15	42.99	41.66	40.19
31	51.67	50.92	50.00	48.92	47.67	46.25	44.67

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ 5X
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 6
PAGE

I	36	37	38	39	40	41	42
J							
1	-42.92	-41.00	-38.92	-36.67	-34.25	-31.67	-28.92
2	-38.56	-36.77	-34.82	-32.72	-30.47	-28.06	-25.49
3	-34.50	-32.84	-31.04	-29.09	-26.99	-24.75	-22.37
4	-30.74	-29.21	-27.54	-25.74	-23.81	-21.74	-19.54
5	-27.24	-25.84	-24.31	-22.66	-20.89	-18.99	-16.97
6	-23.99	-22.71	-21.32	-19.82	-18.21	-16.49	-14.65
7	-20.96	-19.81	-18.56	-17.21	-15.76	-14.21	-12.56
8	-18.13	-17.11	-16.00	-14.80	-13.51	-12.13	-10.66
9	-15.48	-14.58	-13.61	-12.56	-11.43	-10.22	-8.94
10	-12.98	-12.21	-11.38	-10.48	-9.51	-8.48	-7.37
11	-10.62	-9.98	-9.28	-8.53	-7.72	-6.86	-5.94
12	-8.36	-7.85	-7.30	-6.69	-6.05	-5.36	-4.62
13	-6.20	-5.82	-5.40	-4.95	-4.46	-3.94	-3.39
14	-4.10	-3.85	-3.57	-3.26	-2.94	-2.60	-2.23
15	-2.05	-1.92	-1.78	-1.63	-1.47	-1.29	-1.11
16	-0.02	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01
17	2.02	1.89	1.75	1.60	1.44	1.27	1.09
18	4.07	3.81	3.54	3.24	2.92	2.58	2.21
19	6.17	5.79	5.37	4.92	4.44	3.92	3.38
20	8.33	7.82	7.27	6.67	6.03	5.34	4.61
21	10.59	9.95	9.26	8.51	7.70	6.84	5.93
22	12.95	12.19	11.36	10.46	9.49	8.46	7.36
23	15.45	14.56	13.59	12.54	11.41	10.21	8.93
24	18.11	17.09	15.98	14.78	13.49	12.11	10.65
25	20.94	19.79	18.54	17.19	15.74	14.20	12.55
26	23.98	22.70	21.31	19.81	18.20	16.48	14.65
27	27.23	25.83	24.30	22.65	20.88	18.98	16.97
28	30.73	29.20	27.53	25.73	23.80	21.73	19.53
29	34.50	32.84	31.03	29.08	26.99	24.75	22.36
30	38.55	36.76	34.82	32.72	30.46	28.05	25.49
31	42.92	41.00	38.92	36.67	34.25	31.67	28.92

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 7
PAGE

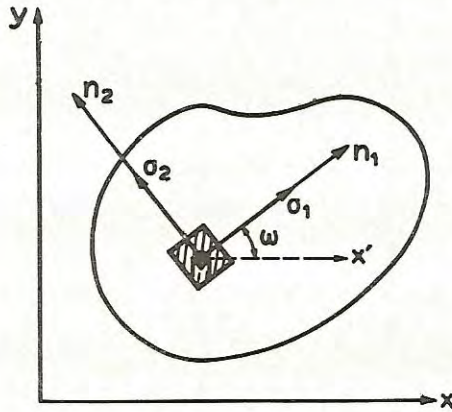
I	43	44	45	46	47	48	49
1	-26.00	-22.92	-19.67	-16.25	-12.67	-8.92	-5.00
2	-22.77	-19.89	-16.85	-13.66	-10.32	-6.82	-3.16
3	-19.84	-17.17	-14.35	-11.39	-8.28	-5.03	-1.64
4	-17.20	-14.74	-12.14	-9.40	-6.52	-3.53	-0.40
5	-14.83	-12.57	-10.19	-7.68	-5.05	-2.30	0.57
6	-12.71	-10.65	-8.48	-6.21	-3.82	-1.31	1.30
7	-10.81	-8.95	-7.00	-4.95	-2.80	-0.55	1.80
8	-9.10	-7.46	-5.72	-3.90	-1.99	0.01	2.10
9	-7.58	-6.14	-4.62	-3.02	-1.35	0.40	2.23
10	-6.21	-4.97	-3.67	-2.30	-0.87	0.63	2.20
11	-4.97	-3.94	-2.86	-1.72	-0.52	0.73	2.04
12	-3.84	-3.02	-2.15	-1.24	-0.28	0.72	1.76
13	-2.81	-2.19	-1.54	-0.85	-0.14	0.62	1.40
14	-1.84	-1.43	-0.99	-0.53	-0.05	0.45	0.97
15	-0.91	-0.70	-0.49	-0.26	-0.02	0.24	0.50
16	-0.01	-0.01	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00
17	0.90	0.69	0.48	0.25	0.01	-0.24	-0.50
18	1.82	1.41	0.98	0.53	0.05	-0.45	-0.97
19	2.79	2.18	1.53	0.85	0.13	-0.62	-1.40
20	3.83	3.01	2.14	1.23	0.22	-0.72	-1.76
21	4.96	3.93	2.85	1.71	0.52	-0.73	-2.04
22	6.19	4.96	3.66	2.30	0.86	-0.63	-2.20
23	7.57	6.13	4.61	3.02	1.35	-0.40	-2.23
24	9.09	7.45	5.72	3.89	1.98	-0.01	-2.10
25	10.80	8.95	7.00	4.95	2.80	0.55	-1.80
26	12.70	10.65	8.48	6.20	3.81	1.31	-1.30
27	14.83	12.57	10.18	7.68	5.05	2.30	-0.57
28	17.20	14.73	12.13	9.40	6.52	3.53	0.40
29	19.84	17.17	14.35	11.39	8.28	5.03	1.64
30	22.76	19.89	16.85	13.66	10.32	6.82	3.16
31	26.00	22.92	19.67	16.25	12.67	8.92	5.00

OPBAI TAZEIZ
NCRNAL STRESSES SX

I	J	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
1	1	-5.00*	-12.67*	-19.67*	-22.00*	-31.67*	-36.67*	-41.00*	-44.67*	-47.67*	-50.00*	-51.67*	-52.67*	-53.00*
2	2	-3.16*	-10.32*	-16.85*	-22.76*	-28.05*	-32.72*	-36.76*	-40.19*	-42.99*	-45.16*	-46.72*	-47.65*	-47.96*
3	3	-1.64*	-8.28*	-14.35*	-19.84*	-24.75*	-29.08*	-32.84*	-36.01*	-38.61*	-40.64*	-42.08*	-42.95*	-43.24*
4	4	-0.40*	-6.53*	-12.13*	-17.20*	-21.73*	-25.73*	-29.20*	-32.13*	-34.53*	-36.40*	-37.73*	-38.53*	-38.80*
5	5	0.57*	-5.05*	-10.19*	-14.83*	-18.99*	-22.65*	-25.83*	-28.52*	-30.72*	-32.43*	-33.65*	-34.39*	-34.63*
6	6	1.30*	-3.81*	-8.48*	-12.70*	-16.48*	-19.81*	-22.70*	-25.15*	-27.15*	-28.70*	-29.81*	-30.48*	-30.70*
7	7	1.80*	-2.80*	-7.00*	-10.80*	-14.20*	-17.20*	-19.80*	-22.00*	-23.80*	-25.20*	-26.20*	-26.80*	-27.00*
8	8	2.10*	-1.99*	-5.72*	-9.10*	-12.12*	-14.79*	-17.10*	-19.05*	-20.85*	-21.90*	-22.79*	-23.32*	-23.50*
9	9	2.20*	-1.35*	-4.61*	-7.57*	-10.21*	-12.55*	-14.57*	-16.28*	-17.68*	-18.77*	-19.55*	-20.01*	-20.17*
10	10	2.20*	0.87*	-3.67*	-6.20*	-8.47*	-10.47*	-12.20*	-13.67*	-14.87*	-15.96*	-16.47*	-16.87*	-17.00*
11	11	2.04*	0.52*	-2.85*	-4.96*	-6.85*	-8.52*	-9.96*	-11.19*	-12.19*	-12.96*	-13.52*	-13.85*	-13.96*
12	12	1.76*	0.28*	-2.15*	-3.84*	-5.35*	-6.68*	-7.84*	-8.81*	-9.61*	-10.24*	-10.68*	-10.95*	-11.04*
13	13	1.40*	0.13*	-1.53*	-2.80*	-3.93*	-4.93*	-5.80*	-6.53*	-7.13*	-7.60*	-7.93*	-8.13*	-8.20*
14	14	0.97*	-0.05*	-0.99*	-1.83*	-2.59*	-3.25*	-3.83*	-4.32*	-4.72*	-5.03*	-5.25*	-5.39*	-5.43*
15	15	0.50*	-0.01*	-0.48*	-0.90*	-1.28*	-1.61*	-1.90*	-2.15*	-2.35*	-2.50*	-2.61*	-2.68*	-2.70*
16	16	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*
17	17	-0.50*	0.01*	0.48*	0.90*	1.28*	1.61*	1.90*	2.15*	2.35*	2.50*	2.61*	2.68*	2.70*
18	18	-0.97*	0.05*	0.99*	1.83*	2.59*	3.25*	3.83*	4.32*	4.72*	5.03*	5.25*	5.39*	5.43*
19	19	-1.40*	0.13*	1.53*	2.80*	3.93*	4.93*	5.80*	6.53*	7.13*	7.60*	7.93*	8.13*	8.20*
20	20	-1.76*	0.28*	2.15*	3.84*	5.35*	6.68*	7.84*	8.81*	9.61*	10.24*	10.68*	10.95*	11.04*
21	21	-2.04*	0.52*	3.67*	6.20*	8.47*	10.47*	12.20*	13.67*	14.87*	15.96*	16.47*	16.87*	17.00*
22	22	-2.20*	1.35*	4.61*	7.57*	10.21*	12.55*	14.57*	16.28*	17.68*	18.77*	19.55*	20.01*	20.17*
23	23	-2.20*	0.87*	3.67*	6.20*	8.47*	10.47*	12.20*	13.67*	14.87*	15.96*	16.47*	16.87*	17.00*
24	24	-2.10*	1.99*	5.72*	9.10*	12.12*	14.79*	17.10*	19.05*	20.85*	21.90*	22.79*	23.32*	23.50*
25	25	-1.80*	2.80*	7.00*	10.80*	14.20*	17.20*	19.80*	22.00*	23.80*	25.20*	26.20*	26.80*	27.00*
26	26	-1.30*	3.81*	8.48*	12.70*	16.48*	19.81*	22.70*	25.15*	27.15*	28.70*	29.81*	30.48*	30.70*
27	27	0.40*	5.05*	10.19*	14.83*	18.99*	22.65*	25.83*	28.52*	30.72*	32.43*	33.65*	34.39*	34.63*
28	28	0.40*	6.53*	12.13*	17.20*	21.73*	25.73*	29.20*	32.13*	34.53*	36.40*	37.73*	38.53*	38.80*
29	29	1.64*	8.28*	14.35*	19.84*	24.75*	29.08*	32.84*	36.01*	38.61*	40.64*	42.08*	42.95*	43.24*
30	30	3.16*	10.32*	16.85*	22.76*	28.05*	32.72*	36.76*	40.19*	42.99*	45.16*	46.72*	47.65*	47.96*
31	31	5.00*	12.67*	19.67*	22.00*	31.67*	36.67*	41.00*	44.67*	47.67*	50.00*	51.67*	52.67*	53.00*

§9 .- Υπολογισμός των κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 και των γωνιών

διευθύνσεων $\omega = (\widehat{n_1, x})$. Το πρόγραμμα PRINCST.



Σχ.16

Μετά τόν προσδιορισμόν των σ_x, σ_y και τ_{xy} εις όλα τά σημεΐα του καννάβου, υπολογίζομεν τας κυρίας τάσεις σ_1, σ_2 εκ των γνωστών σχέσεων:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\alpha)$$

Ένθα $\sigma_1 > \sigma_2$, ήτοι ή σ_1 εΐναι πάντοτε ή άλγεβρικώς μεγαλυτέρα. Τά επίπεδα, επί των οποίων αι σ_1 και σ_2 εΐναι κάθετοι, καλοϋνται, ως γνωστόν, κύρια επίπεδα. Τά διανύσματα n_1 και n_2 (βλ. Σχ.16) κάθετα επί των κυρίων επιπέδων και μέ φοράν πρός τό έξωτερικόν του όρθογωνικου στοιχείου καθορίζουν τας διευθύνσεις των κυρίων τάσεων. Διά τόν προσδιορισμόν των κυρίων διευθύνσεων άρκεΐ νά προσδιορισθῆ ή γωνία $\omega = (\widehat{n_1, x})$, τήν όποιαν σχηματίζει ό άξων x μετά του διανύσματος n_1 . Η έτέρα κυρία διεύθυνσις εΐναι $\omega' = (\widehat{n_1, x}) + \frac{\pi}{2}$.

Η γωνία $(\widehat{n_1, x})$ δίδεται εκ της σχέσεως:

$$\tau g 2(\widehat{n_1, x}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (\beta)$$

Εκ της άνωτέρω σχέσεως προσδιορίζονται δύο τιμαί της γωνίας $(\widehat{n_1, x})$ διαφέρουσαι μεταξύ των κατά $\frac{\pi}{2}$. Συνεπώς ή σχέση (β) δέν έπαρκεΐ διά τόν προσδιορισμόν της γωνίας $\omega = (\widehat{n_1, x})$. Πρός τοϋτο χρη-

σιμοποιοῦμεν καί τὰς ἀκολουθοῦσας δύο σχέσεις:*

$$\cos 2(\widehat{n}_1, x) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (\gamma)$$

$$\sin 2(\widehat{n}_1, x) = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (\delta)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ $\cos 2(\widehat{n}_1, x)$ καί $\sin 2(\widehat{n}_1, x)$ εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόσημα πρὸς τὰς ποσότητας $\sigma_x - \sigma_y$ καί τ_{xy} .

Κατόπιν τῆς παρατηρήσεως ταύτης διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς γωνίας (\widehat{n}_1, x) ἐργαζόμεθα ὡς κατωτέρω:

Προσδιορίζομεν μίαν γωνίαν $0 \leq 2\omega_0 < \frac{\pi}{2}$ ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\operatorname{tg} 2\omega_0 = \frac{|2\tau_{xy}|}{|\sigma_x - \sigma_y|} \quad (\epsilon)$$

καί ἐν συνεχείᾳ διακρίνομεν τὰς ἀκολουθοῦσας περιπτώσεις ἐπαληθεύσμενας εὐκόλως ἐκ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.

1. $\tau_{xy} \geq 0$ καί $\sigma_x - \sigma_y > 0$ $2(\widehat{n}_1, x) = 2\omega_0$ $(\widehat{n}_1, x) = \omega_0$
2. $\tau_{xy} \geq 0$ καί $\sigma_x - \sigma_y < 0$ $2(\widehat{n}_1, x) = \pi - 2\omega_0$ $(\widehat{n}_1, x) = \frac{\pi}{2} - \omega_0$
3. $\tau_{xy} < 0$ καί $\sigma_x - \sigma_y < 0$ $2(\widehat{n}_1, x) = \pi + 2\omega_0$ $(\widehat{n}_1, x) = \frac{\pi}{2} + \omega_0$
4. $\tau_{xy} < 0$ καί $\sigma_x - \sigma_y > 0$ $2(\widehat{n}_1, x) = 2\pi - 2\omega_0$ $(\widehat{n}_1, x) = \pi - \omega_0$
5. $\tau_{xy} > 0$ καί $\sigma_x - \sigma_y = 0$ $2(\widehat{n}_1, x) = \frac{\pi}{2}$ $(\widehat{n}_1, x) = \frac{\pi}{4}$
6. $\tau_{xy} < 0$ καί $\sigma_x - \sigma_y = 0$ $2(\widehat{n}_1, x) = \frac{3\pi}{2}$ $(\widehat{n}_1, x) = \frac{3\pi}{4}$
7. $\tau_{xy} = 0$ καί $\sigma_x - \sigma_y = 0$ $2(\widehat{n}_1, x) = (\widehat{n}_1, x) = \text{ἀπροσδιόριστος}$

Ἡ περίπτωσις 7 δηλοῦν, ὅτι εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον, ὅλαί αἱ διευθύνσεις εἶναι κύριαι καί, ἄρα $\sigma_x - \sigma_y = \sigma_1 - \sigma_2$ ἢ $\sigma_1 = \sigma_2$, δηλαδή τὸ

* [5] §1.7, σελ.20

σημείον είναι ισότροπον.

Τῆ βοηθεία τῶν ὡς ἄνω ἐκτεθέντων συντάσσεται πρόγραμμα ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ διὰ τόν ὑπολογισμόν τῶν κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 καί τῆς γωνίας $\omega = (\widehat{n_1, x})$. Εἰς τό πρόγραμμα δίδεται τό ὄνομα PRINCST.

Τό πρόγραμμα PRINCST ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ κυρίου μέρους αὐτοῦ καί τοῦ ὑποπρογράμματος SHOW.

Τό πρόγραμμα ἐκτελεῖ τās κατωτέρω ἐργασίας:

- 1.- Ἀναγιγνώσκει ἐκ τῶν δεδομένων τās τιμάς $\sigma_x(i, j)$, $\sigma_y(i, j)$ καί $\tau_{xy}(i, j)$ τās ὑπολογισθείσας ἐκ τοῦ προγράμματος SOLAPEQ.
- 2.- Ὑπολογίζει τās τιμάς $\sigma_1(i, j)$, $\sigma_2(i, j)$ καί $\omega(i, j)$ εἰς τά σημεία ἔνθα τό INDEX(i, j) \neq 3.
- 3.- Ἐκτυπώνει τās τιμάς $\sigma_1(i, j)$, $\sigma_2(i, j)$, $\omega(i, j)$ τῆ κλήσει τοῦ ὑποπρογράμματος SHOW.

Βεβαίως τό πρόγραμμα PRINCST δύναται νά ἀποτελέσῃ ὑποπρόγραμμα τοῦ SOLAPEQ ὥστε τοῦτο νά ὑπολογίξῃ καί τās σ_1, σ_2 καί ω συγχρόνως μέ τās σ_x, σ_y καί τ_{xy} . Πλήν ὅμως ἀπετέλεσεν ἰδιαίτερον πρόγραμμα πρὸς ἀποφυγὴν μειώσεως τῆς δυναμικότητος τοῦ προγράμματος SOLAPEQ ἀναφορικῶς πρὸς τό πλῆθος τῶν σημείων τοῦ καννάβου.

Κατωτέρω παρατίθεται τό πρόγραμμα PRINCST, ὡς τοῦτο ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς §10.

PROGRAM PRINCST

```
C PROGRAM PRINCST
  DIMENSION SX(33,31),SY(33,31), TXY(33,31),S1(33,31),S2(33,31),
  IOMEGA(33,31),INDEX(33,31)
  COMMON/SH/KO,NX,NY
  READ 100,NX,NY
100 FORMAT(2I3)
  READ 101, ((SX(I,J),I=1,NX), J=1,NY)
  READ 101, ((SY(I,J),I=1,NY), J=1,NY)
  READ 101, ((TXY(I,J),I=1,NX), J=1,NY)
101 FORMAT(10F8.2/10F8.2/10F8.2/3F8.2)
C** FORMULATION OF THE MATRIX =INDEX=
  DO 2 J=1,6
  DO 2 I=1,22
  2 INDEX(I,J)=3
  DO 3 I=1,21
  3 INDEX(I,7)=3
  DO 4 I=1,20
  4 INDEX(I,8)=3
  DO 5 I=1,20
  5 INDEX(I,22)=3
  DO 6 I=1,21
  6 INDEX(I,23)=3
  DO 7 J=24,31
  DO 7 I=1,22
  7 INDEX(I,J)=3
  DO 8 I=1,20
  8 INDEX(I,9)=1
  DO 9 J=1,6
  9 INDEX(23,J)=1
  DO 10 I=24,33
 10 INDEX(I,1)=1
  DO 11 J=2,31
 11 INDEX(33,J)=1
  DO 12 I=23,32
 12 INDEX(I,31)=1
  DO 13 J=24,30
 13 INDEX(23,J)=1
  DO 14 I=1,20
 14 INDEX(I,21)=1
  DO 15 J=10,20
 15 INDEX(1,J)=1
  INDEX(21,8)=2
  INDEX(22,7)=2
  INDEX(21,22)=2
  INDEX(22,23)=2
  INDEX(21,9)=4
  INDEX(22,8)=4
  INDEX(23,7)=4
```

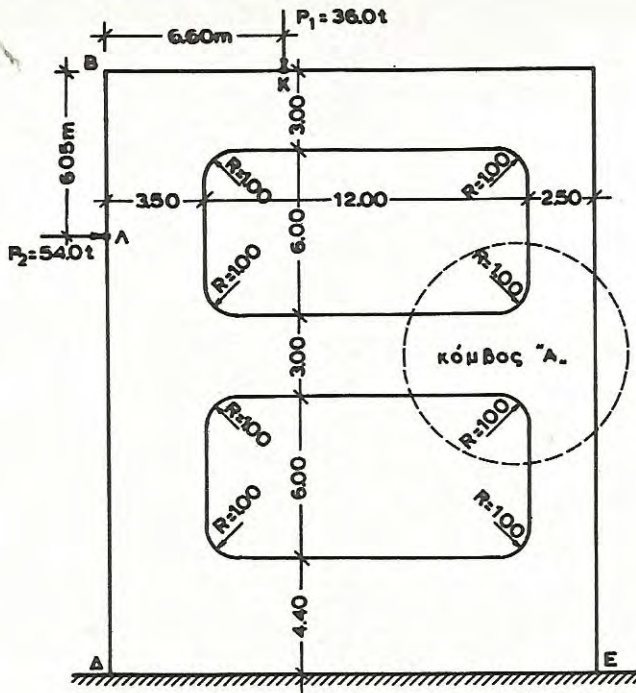

PROGRAM PRINCS T

```
INDEX(21,21)=4
INDEX(22,22)=4
INDEX(23,23)=4
INDEX(22,9)=4
INDEX(23,8)=4
INDEX(22,21)=4
INDEX(23,22)=4
DO 16 J=1,NY
16 PRINT 501, (INDEX(I,J),I=1,NX)
501 FORMAT(1H ,33I1)
C** CALCULATION OF PRINCIPAL STRESSES
DO 302 J=1,NY
DO 302 I=1,NX
S1(I,J)=0.0
S2(I,J)=0.0
302 OMEGA(I,J)=0.0
DO 1 J=1,NY
DO 1 I=1,NX
IF(INDEX(I,J).EQ.3) GO TO 1
A=(SX(I,J)+SY(I,J))/2.
B=(SX(I,J)-SY(I,J))/2.
C=SQRT(B**2+TXY(I,J)**2)
S1(I,J)=A+C
S2(I,J)=A-C
1 CONTINUE
KO=5
CALL SHOW(INDEX,S1)
KO=6
CALL SHOW(INDEX,S2)
C** DIRECTION ANGLE OMEGA=(N1,X)
DO 303 J=1,NY
DO 303 I=1,NX
PI=3.14
IF(INDEX(I,J).EQ.3) GO TO 303
C=2.*TXY(I,J)
D=SX(I,J)-SY(I,J)
Z=0.0
IF(D.EQ.Z) GO TO 314
R=ATAN(ABS(C/D))
IF(C.GE.Z.AND.D.GT.Z) GO TO 310
IF(C.GE.Z.AND.D.LT.Z) GO TO 311
IF(C.LE.Z.AND.D.LT.Z) GO TO 312
IF(C.LE.Z.AND.D.GT.Z) GO TO 313
310 ANGLE=R
GO TO 20
311 ANGLE=PI-R
GO TO 20
312 ANGLE=PI+R
```

PROGRAM PRINCST

```
GO TO 20
313 ANGLE=2.*PI-R
GO TO 20
314 IF(C)315,316,317
315 ANGLE=3.*PI/2.
GO TO 20
316 ANGLE=8.*PI
GO TO 20
317 ANGLE=PI/2.
20 OMEGA(I,J)=90.*ANGLE/PI
303 CONTINUE
KO=7
CALL SHOW(INDEX,OMEGA)
STOP
END
```

§10.- Εφαρμογή της μεθοδολογίας.

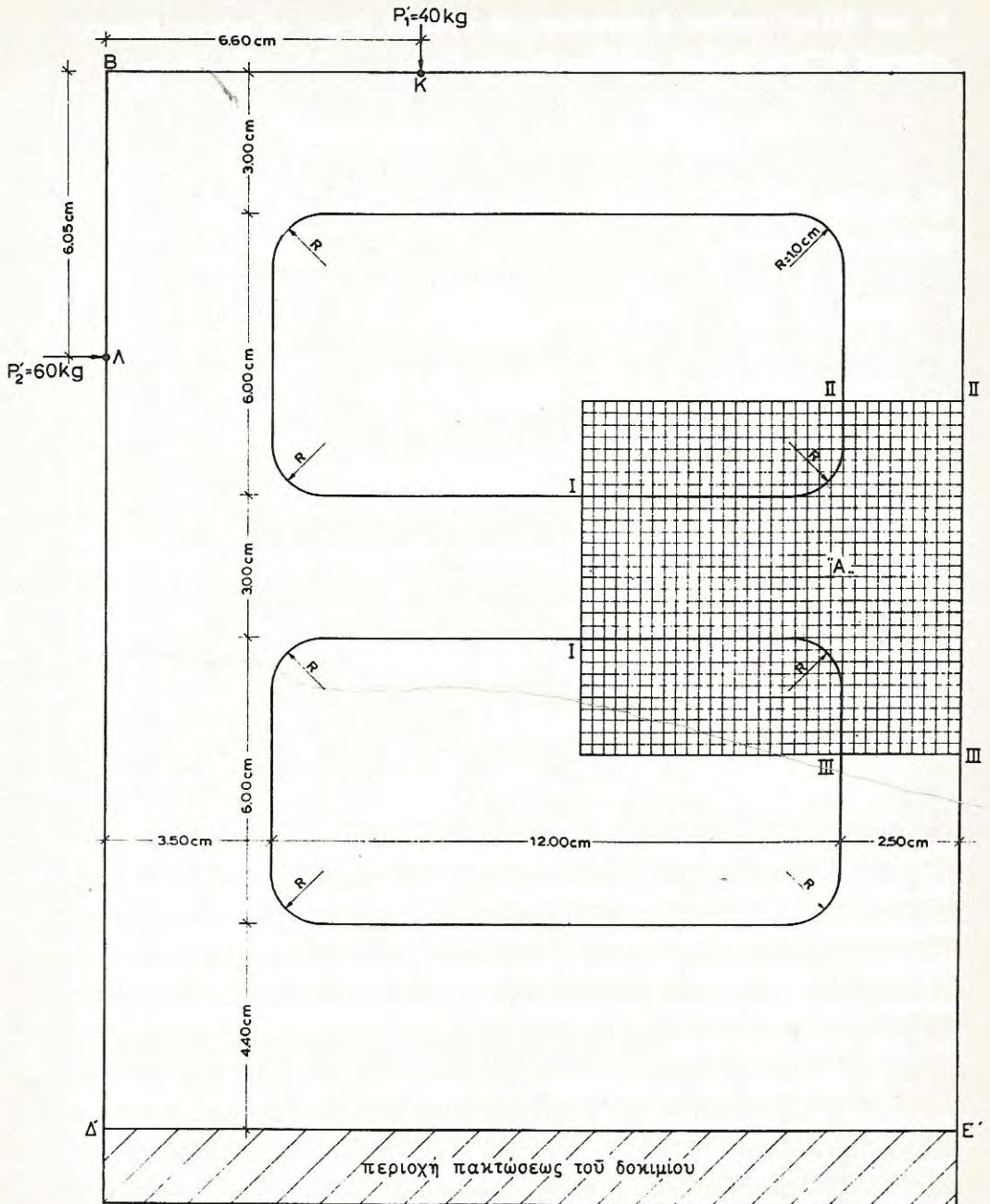


Σχ.17

ὡς παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς μεθοδολογίας θὰ μελετηθῆ ἡ ἔντασις τοῦ κόμβου "A" τοῦ ἐν Σχ.17 ἐπιπέδου πλαισίου ἐξ ὠπλισμένου σκυροδέματος πάχους $d = 0.30m$. ὡς γνωστόν, εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ κόμβου δὲν ἰσχύουν αἱ παραδοχαὶ τῆς στατικῆς τῶν ραβδωτῶν φορέων, ἡ δὲ εἰς αὐτόν ἀναπτυσσομένη ἔντασις ὡς καὶ μιᾶς περιοχῆς πέριξ αὐτοῦ, εἶναι ἔντασις ἐπιπέδου δίσκου. Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς ἐντάσεως ἐντὸς τοῦ κόμβου, ἀπομονοῦται οὗτος ἐκ τοῦ ὑπολοίπου φορέως (Σχ.30) καὶ προσδιορίζονται αἱ παράμετροι τῆς ἐντάσεως σ_x, σ_y καὶ τ_{xy} εἰς τὸ σύνορον τοῦ προκύπτοντος δίσκου.

I.- Φωτοελαστικὸν πείραμα

Ὁ προσδιορισμὸς τῶν παραμέτρων τῆς ἐντάσεως εἰς τὸ σύνορον ἐγένετο πειραματικῶς τῇ βοηθειᾷ τῆς φωτοελαστικῆς μεθόδου. Πρὸς τοῦτο κατεσκευάσθη ὁμοίωμα τῆς ἐν Σχ.17 κατασκευῆς. ὡς ὕλικόν τοῦ ὁμοιώματος προεκρίθη τὸ Araldit B, λόγῳ τῶν καλῶν φωτοελαστικῶν ἰδιοτήτων του, παρεχόμενον εἰς πλάκας περίπου $50 \times 60 \text{ cm}$, πάχους $d = 1 \text{ cm}$



Σχ.18. Όμοιομα. Έντός του καννάβου ή εξεταζομένη περιοχή του κόμβου "Α".

Τῆ βοηθεῖα εἰδικῆς συσκευῆς ἐμετρήθη ἐπὶ προτύπου δοκιμίου 2x11cm ἐκ τοῦ ὑλικοῦ τούτου ἡ φωτοελαστικὴ σταθερά S καί τὸ μέτρον ἐλαστικότητος E' τοῦ ὑλικοῦ τοῦ ὁμοιώματος, ἦτοι:

$$S = 10.0 \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{τάξις}} \text{ cm καί } E' = 32.500 \text{ kg/cm}^2$$

Τὸ ὁμοίωμα κατασκευάσθη ὑπὸ κλίμακα 1:100 βάσει τοῦ Σχ.18.

Εἶναι κατὰ ταῦτα:

$$\text{Κλίμαξ μηκῶν: } \lambda = \frac{1}{1'} = \frac{\text{κατασκευῆ}}{\text{ὁμοίωμα}} = \frac{100}{1}$$

$$\text{Κλίμαξ πάχους: } \tau = \frac{d}{d'} = \frac{\text{κατασκευῆ}}{\text{ὁμοίωμα}} = \frac{30}{1}$$

$$\text{Λαμβάνεται κλίμαξ τάσεων: } \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\text{κατασκευῆ}}{\text{ὁμοίωμα}} = 0.30$$

Ὅποτε ἡ κλίμαξ δυνάμεων p ὑπολογίζεται κατὰ τοὺς νόμους τῆς μηχανικῆς ὁμοιότητος [4]:

$$p = \frac{P}{P'} = \frac{\text{κατασκευῆ}}{\text{ὁμοίωμα}} = \frac{\sigma}{\sigma'} \lambda \tau = 0.30 \cdot 100 \cdot 30 = 900$$

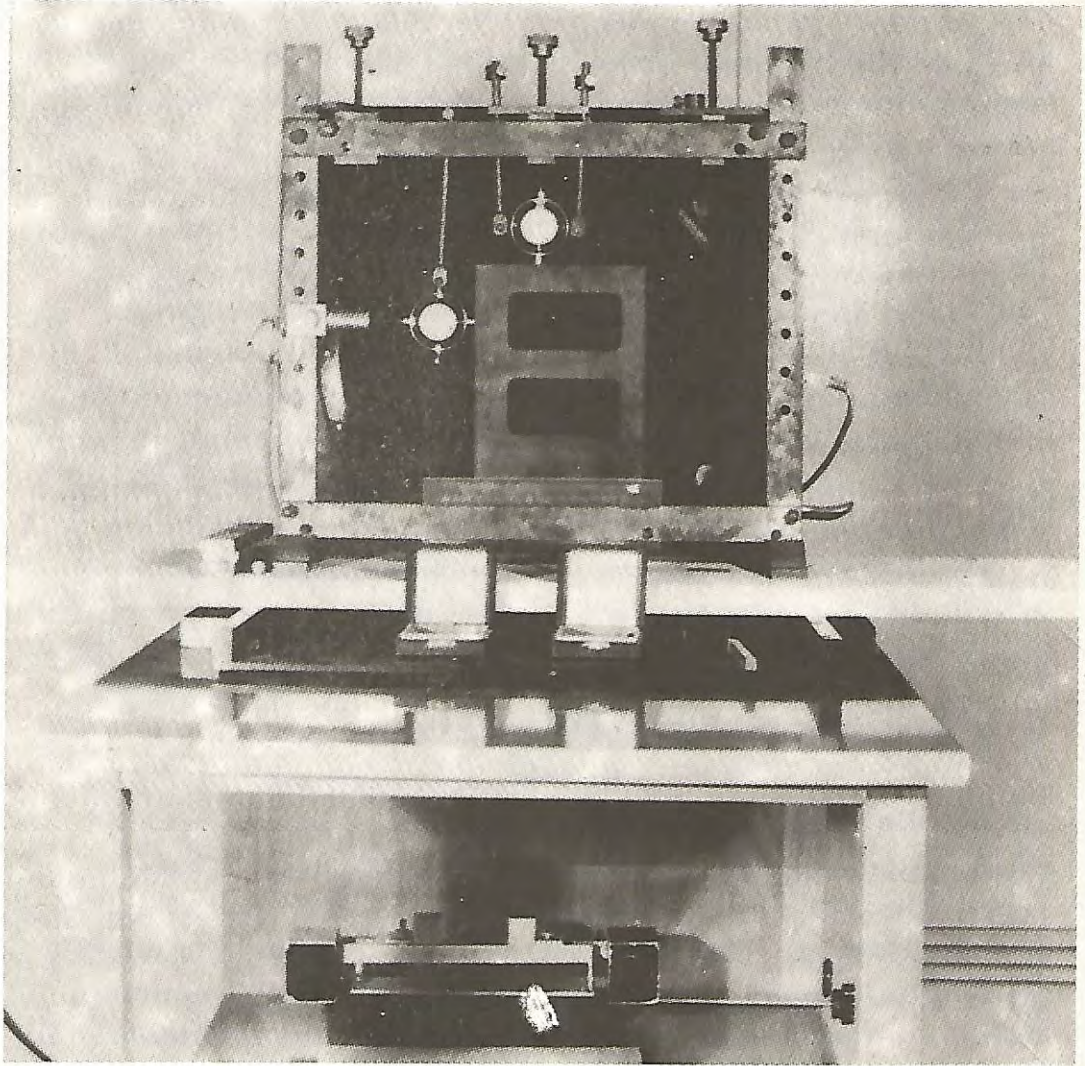
καί περαιτέρω ἡ κλίμαξ παραμορφώσεων:

$$\lambda_1 = \frac{\text{κατασκευῆ}}{\text{ὁμοίωμα}} = \frac{p}{\tau} \cdot \frac{E'}{E} = \frac{900}{30} \cdot \frac{32500}{210000} = 4.647$$

Ἐνθα E' = 32.500 kg/cm² τὸ μετρηθέν μέτρον ἐλαστικότητος τοῦ ὑλικοῦ τοῦ ὁμοιώματος καί E = 210.000 kg/cm² τὸ τοῦ σκυροδέματος B225 τῆς κατασκευῆς, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς ὑλικὸν ὁμοιογενές, ἰσότροπον καί ἀκολουθοῦν τὸν γραμμικὸν νόμον τοῦ Hooke μεταξύ τάσεων καί παραμορφώσεων, εἶνα εἶναι δυνατὴ ἡ ἀναγωγή τῶν ἀποτελεσμάτων ἐκ τοῦ πειράματος εἰς τὴν κατασκευὴν.

Ἡ φόρτισις τῆς κατασκευῆς συνισταμένη ἐκ δύο φορτίων P₁=36.0t καί P₂=54.0t. ἐφαρμοζομένων εἰς τὰ σημεῖα K καί Λ τῆς κατασκευῆς ἀπέχοντα ἐκ τοῦ σημείου Β ἀποστάσεις 6.60m καί 6.05m ἀντιστοίχως, μεταφράζεται, βάσει τῆς ἀνωτέρω κλίμακος δυνάμεων, ἐν τῷ ὁμοίωματι εἰς δύο φορτία:

$$P'_1 = 36.000:900 = 40\text{kg}, \quad P'_2 = 54.000:900 = 60\text{kg}. \quad (\text{βλ. Σχ.18})$$



Σχ.19. Ἡ πειραματική διάταξις.

Διά τήν ἐπιβολήν τοῦ ὡς ἄνω ἔξωτερικοῦ συστήματος δυνάμεων ἐπί τοῦ ὁμοιώματος ἐφηρμόσθη ἡ εἰς τήν φωτογραφίαν τοῦ Σχ.19 εἰκονιζομένη πειραματικὴ διάταξις. Τό δοκίμιον στερεοῦται κατά τήν διατομήν Δ' Ε' ἐντός τοῦ αὐλακος τοῦ κοχλιωτοῦ συσφιγκτήρος προσηρμοσμένου ἐπί τοῦ πλαισίου φορτίσεως, ὥστε νά πραγματοποιηῖται ἡ συνθήκη στηρίξεως τοῦ δοκιμίου (πάκτωσις κατά τήν διατομήν Δ' Ε'). Τά φορτία P_1' καί P_2' ἐπιβάλλονται ἐπί τοῦ δοκιμίου ὑπό τῶν ἀκίδων τῶν δύο δυναμομέτρων ἀνηρτημένων εἰς τό στερεόν πλαίσιον, διά καταλλήλου ρυθμίσεως τοῦ περικοχλίου.

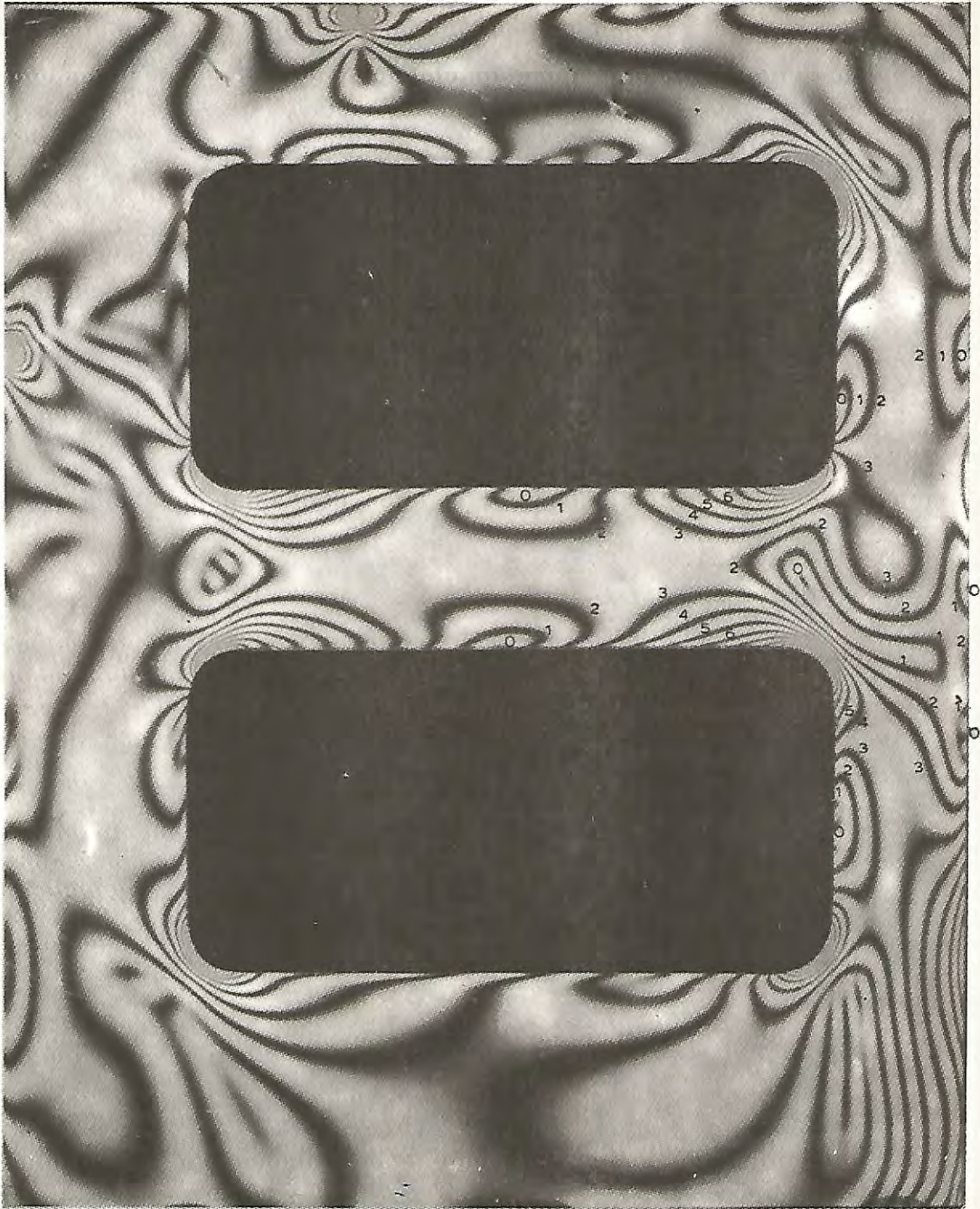
Τό φορτισμένον ὁμοίωμα ἐτοποθετήθη μεταξύ τῶν ἐν διασταυρώσει πολωτικῶν ἡθμῶν τῆς φωτοελαστικῆς συσκευῆς. Μέ χρῆσιν ἀρχικῶς λευκοῦ καί κατόπιν κιτρίνου φωτός καί μέ παρεμβολήν ἡθμῶν $1/4$ μήκους κύματος πρὸς ἐπίτευξιν κυκλικῆς πολώσεως τοῦ ἐπί τοῦ ὁμοιώματος προσπίπτοντος φωτός (ἀπαλοιφή τῶν ἰσοκλινῶν), ἐλήφθη τό δίκτυον τῶν ἰσοχρῶμων ἀκεραίας τάξεως (σκοτεινόν πεδίου) ὡς εἰς τήν φωτογραφίαν τοῦ Σχ.20. Αἱ μετρηθεῖσαι προσεκτικῶς τάξεις τῆς περιοχῆς τοῦ κόμβου Α ἀνεγράφησαν ἐπί τῆς φωτογραφίας. Ἐν συνεχείᾳ ἐλήφθη τό δίκτυον τῶν ἰσοχρῶμων ἡμιακεραίας τάξεως (φωτεινόν πεδίου), ἐμφαινόμενον μετ' ἀναγραφῆς τῶν τάξεων, εἰς τήν φωτογραφίαν τοῦ Σχ.21. Τό δίκτυον τοῦτο παρήχθη διά χρησιμοποίησεως ἑνός 3μ ἡθμοῦ $1/4$ μήκους κύματος, παρεμβληθέντος μεταξύ ὁμοιώματος καί ἀναλύτου.

II.- Ἀξιοποιήσις τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος.

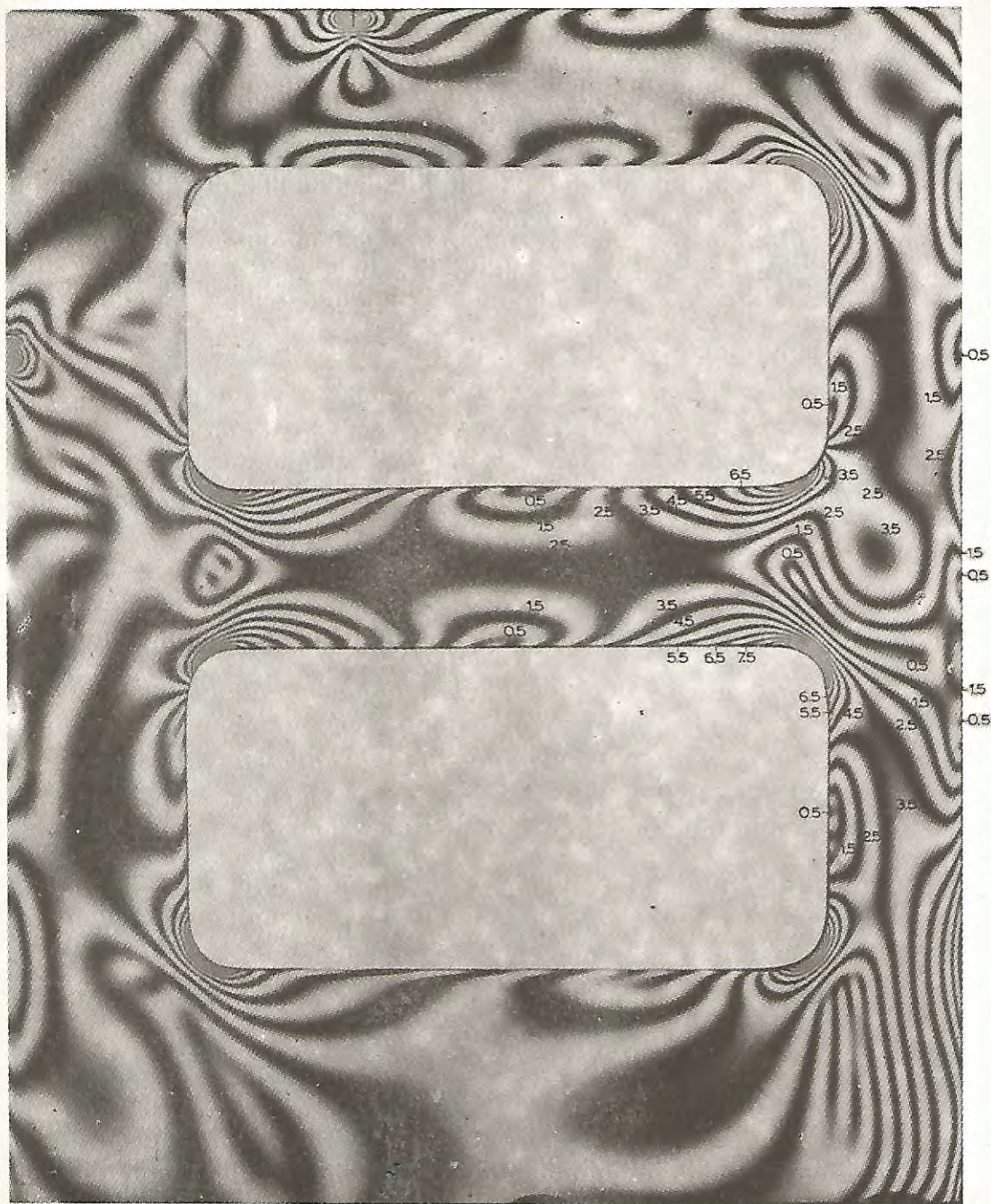
Ἐν τοῖς ἐπομένοις διά τοῦ ὄρου "δίσκος" θά ἐννοεῖται ἡ ἐντός τοῦ καννάβου τοῦ Σχ.18 περιοχὴ τοῦ κόμβου "Α", ἥτοι τό τμήμα τοῦ πλαισίου τό περιοριζόμενον μεταξύ τῶν διατομῶν I-I, II-II, III-III καί τοῦ συνόρου αὐτοῦ. Ὁ προσδιορισμός τῶν τάσεων εἰς τό ἐλεύθερον σύνορον τοῦ δίσκου εἶναι λίαν εὐκόλος ἐκ τῆς τάξεως τῶν ἰσοχρῶμων τῶν καταληγούσων εἰς τό σύνορον. Συμφώνως πρὸς τόν φωτοστασεομετρικόν νόμον, ἡ διαφορὰ τῶν κυρίων τάσεων $|\sigma_1 - \sigma_2|$ εἰς τό τυχόν σημεῖον τοῦ ὁμοιώματος δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{S}{d} \cdot \delta$$

ἔνθα S ἡ φωτοελαστικὴ σταθερά, ἴση ἐν προκειμένῳ πρὸς $10.0 \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{τάξιν}} \cdot \text{cm}$, d τό πάχος τοῦ δοκιμίου, ἴσον πρὸς 1.0cm , καί δ ἡ τάξις τῆς διά τοῦ



Σχ.20. Όμοίωμα ARALDIT. Δίκτυον ίσοχρώμων. Τάξεις ἀέρας.



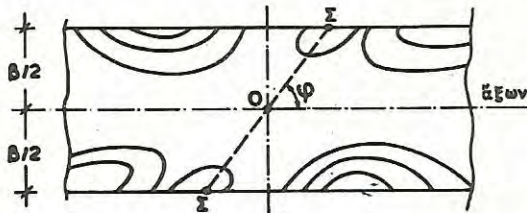
Σχ.21. Όμοίωμα ARALDIT. Δίκτυον ίσοχρώμων. Τάξεις ήμιακέραιαι.

σημείου διερχομένης ίσοχρώμου. Διά τὰ σημεῖα τοῦ ἐλευθέρου συνόρου τοῦ δίσκου ἡ διατμητική τάσις παραλλήλως πρὸς αὐτό εἶναι μηδενική, ἄρα αἱ κύριαι τάσεις εἰς τὰ σημεῖα τοῦ συνόρου ἔχουν διευθύνσεις τὴν παράλληλον καὶ τὴν κάθετον πρὸς τὸ σύνορον. Πλήν ὅμως ἡ κάθετος πρὸς τὸ σύνορον τάσις εἶναι μηδενική καὶ μόνον ἡ παράλληλος πρὸς τὸ σύνορον ὀρθή τάσις ἔχει μέγεθος διάφορον τοῦ μηδενός. Εἰς τὰ σημεῖα ἄρα τοῦ ἀφορτίστου συνόρου ἡ διαφορὰ τῶν τιμῶν τῶν κυρίων τάσεων ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν τῆς ὀρθῆς τάσεως παραλλήλως πρὸς τὸ σύνορον, ἦτοι :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = |\sigma_1| = \frac{S}{d} \delta$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις δίδει τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς ὀρθῆς τάσεως εἰς τὸ σύνορον τοῦ δίσκου. Ἡ διαπίστωσις τοῦ προσήμου τῆς ὀρθῆς τάσεως εἰς τὸ περίγραμμα γίνεται διὰ τῆς "Δοκιμῆς τῆς Βελόνης". Ἐπιφέροντες διὰ μιᾶς βελόνης ἐλαφράν πίεσιν καθέτως πρὸς τὸ σύνορον, προσδιορίζομεν εὐκόλως τὸ πρόσημον τῆς ὀρθῆς τάσεως εἰς τὸ σύνορον ἐκ τοῦ εἴδους τῆς ἀλλοιώσεως τῶν ἰσοχρῶμων εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ ἐξεταζομένου σημείου. Ἐκ τῶν ὀρθῶν τάσεων εἰς τὸ ἐλεύθερον σύνορον θὰ προσδιορισθοῦν αἱ παράμετροι τῆς ἐντάσεως $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ εἰς τοῦτο κατὰ τρόπον ἐκτιθέμενον εἰς τὸ ἐδάφιον (III).

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν τάσεων εἰς τὰς διατομὰς I-I, II-II καὶ III-III (σύνορα τοῦ δίσκου) ἐφαρμόζεται ἑτέρα μεθοδολογία βασιζομένη ἐπὶ παρατηρήσεων τῆς φωτοδιαγνωστικῆς μεθόδου. Αἱ διατομαὶ I-I, II-II καὶ III-III ἐπελέγησαν σκοπῶς πλησίον περιοχῶν, ὅπου τὸ δίκτυον ἰσοχρῶμων παρουσιάζει μίαν χαρακτηριστικὴν ἀντιμετρίαν (βλ. Σχ.



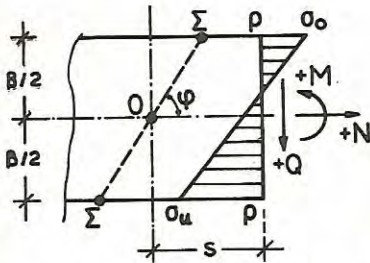
Σχ.22. Ἄντιμετρία τοῦ δικτύου ἰσοχρῶμων. Ο τό σημεῖον μηδενισμοῦ τῆς ροπῆς.

20) τῆς μορφῆς τοῦ Σχ.22.

Τοῦτο σημαίνει [4], ὅτι εἰς τὰς περιοχὰς αὐτάς ἰσχύει ἡ γραμμικὴ κατανομή τῶν ὀρθῶν τάσεων καὶ ἡ παραβολικὴ κατανομή τῶν διατμητικῶν τάσεων, αἱ δέ ὀρθαὶ τάσεις καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ράβδου ἔχουν μηδενικὴν τιμὴν.

Εἰς τὴν διὰ τοῦ O διερχομένην διατομὴν τῆς ράβδου ἡ ροπὴ κάμψεως εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Εἶναι δὲ τὸ O ἡ τομὴ τοῦ ἄξονος τῆς ράβδου μετὰ τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰ σημεῖα Σ , εἰς τὰ ὅποια ἡ τάξις τῆς ἰσοχρώμου εἶναι μηδενικὴ. Τὰ σημεῖα ταῦτα προσδιορίζονται εὐκόλως, καθ' ὅσον ἐμφανίζονται μελανὰ εἰς τὸ δίκτυον τῶν ἰσοχρῶμων ἀκεραίας τάξεως τὸ παραγόμενον διὰ λευκοῦ φωτός.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων, εἰάν σ_o καὶ σ_u εἶναι αἱ ὀρθαὶ τάσεις εἰς τὸ ἄνω καὶ κάτω σύνορον τῆς ράβδου εἰς τὴν θέσιν μιᾶς διατομῆς (π.χ. τῆς $\rho-\rho$ τοῦ Σχ.23), τότε ἡ κατανομὴ τῶν ὀρθῶν τάσεων θὰ εἶναι ὡς ἐν Σχ.23.



Σχ.23. Κατανομὴ τῶν ὀρθῶν καὶ διατμητικῶν τάσεων εἰς διατομὴν πλησίον τοῦ σημείου μηδενισμοῦ τῆς ροπῆς κάμψεως.

Ἡ ροπὴ κάμψεως καὶ ἡ ὀρθὴ δύναμις τῆς διατομῆς πάχους $d' (= 1)$ ὑπολογίζονται ἀμέσως ἐκ τῶν σχέσεων:

$$N = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} F \quad (26\alpha, \beta)$$

$$M = \frac{\sigma_u - \sigma_o}{2} W$$

ἔνθα $F = \beta d'$ ἡ διατομὴ τῆς ράβδου καὶ $W = \frac{\beta d'^2}{6}$ ἡ ροπὴ ἀντιστάσεως τῆς διατομῆς.

Ἡ τέμνουσα δύναμις Q τῆς διατομῆς $\rho-\rho$ κατόπιν τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν N καὶ M δύναται νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ δύο τρόπους. Εἴτε ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως [4]:

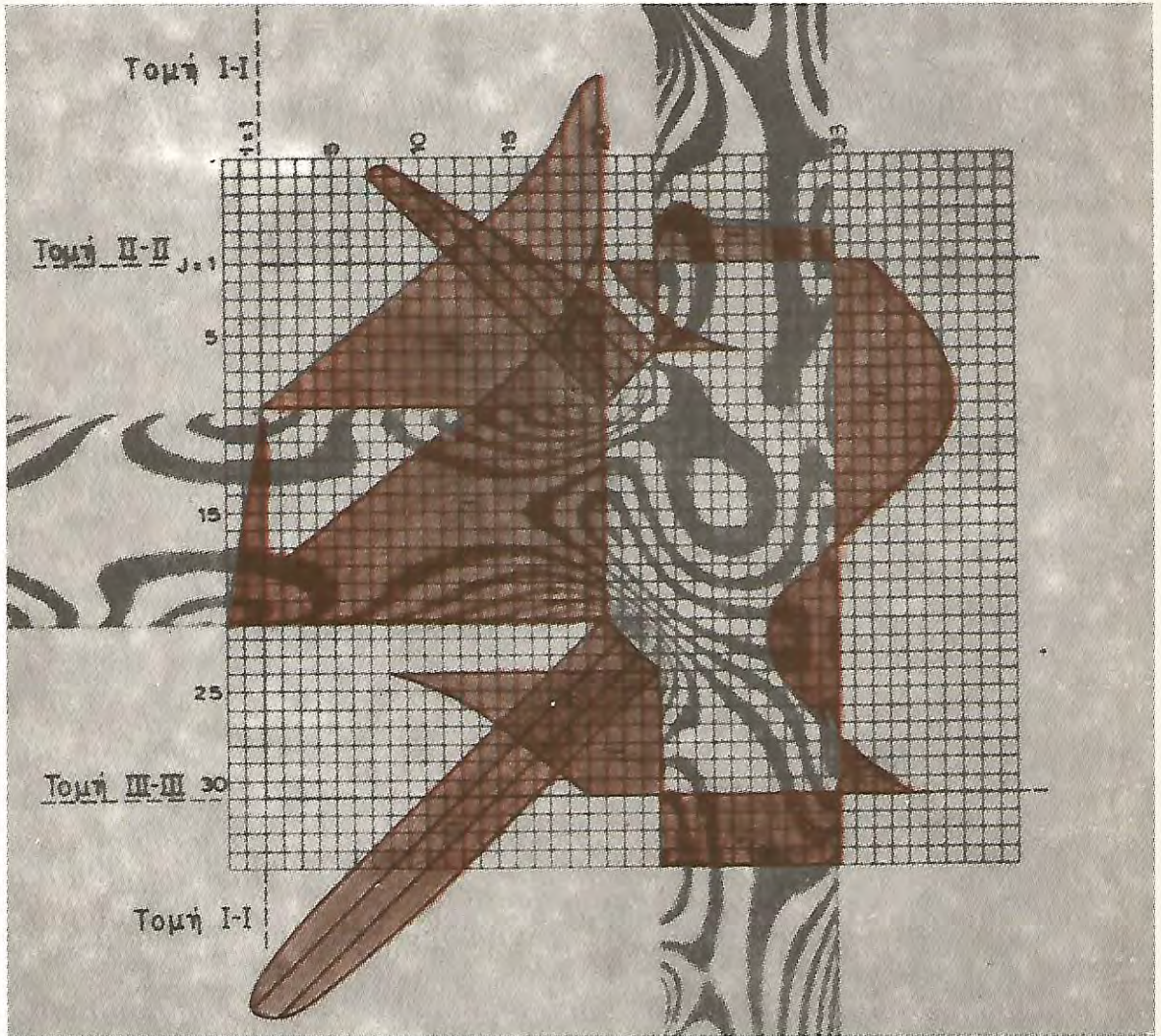
$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{N}{3Q} \quad (27)$$

ἔνθα φ ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς $\Sigma\Sigma$ καὶ τοῦ ἄξονος τῆς ράβδου, εἴτε ἐκ τῆς σχέσεως:

$$Q = \frac{M}{s} \quad (28)$$

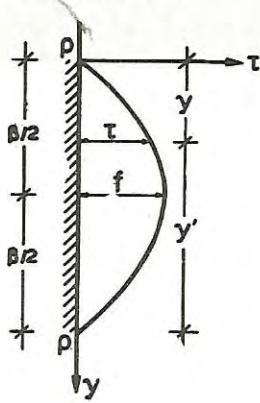
ἔνθα s ἡ ἀπόστασις τῆς διατομῆς $\rho-\rho$ ἀπὸ τὸ σημεῖον O .

Ἡ σχέσις (28) εἶναι προφανής, εἰάν ληθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ροπὴ κάμψεως εἰς τὴν διατομὴν τὴν διὰ τοῦ O διερχομένην ἔχει μηδενικὴν τιμὴν. Ἐπειδὴ αἱ σχέσις (27) & (28) προκύπτουν ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, ὑπολογίζεται ἡ Q ἐκ τῆς μιᾶς τῶν σχέσεων τούτων, τῆς ἐτέρας χρησιμοποιουμένης διὰ τὸν ἔλεγχον τοῦ ὑπολογισμοῦ. Γνωστῆς οὖσης πλέον τῆς Q ,



Σχ. 24. Διαγράμματα κυρίων τάσεων επί του
ἐλευθέρου συνόρου καί ὀρθῶν τάσεων
ἐπί τῶν τομῶν I-I, II-II, III-III.

Υπολογίζονται αί διατμητικάί τάσεις τής διατομής, βάσει τής παραβολικής κατανομής.



$Q = \text{έμβαδόν τής παραβολής}$

$$Q = \frac{2}{3} f \beta \Rightarrow f = \frac{3}{2} \frac{Q}{\beta}$$

$$\tau = \frac{4f}{\beta^2} yy'$$

$$\text{ή } \tau = 6 \frac{Q}{\beta^3} yy' \quad (29)$$

Σχ.25

Δι'έφαρμογής πλέον τών σχέσεων (26α,β), (27) καί (28) υπολογίζονται τά έντατικά μεγέθη τών διατομών I-I, II-II καί III-III. Αί σ_u καί σ_o λαμβάνονται έκ τών διαγραμμάτων του Σχ.24.

Διατομή I-I:

$$\sigma_u = -1.035 \times 10 = -5.17 \times \frac{10 \cdot 0}{5} = -10.35 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_o = -0.02 \times 10 = +0.10 \times \frac{10 \cdot 0}{5} = +0.20 \quad "$$

$$\text{ctg} = \frac{0.34}{1.5} = 0.227$$

$$F = 1.0 \times 3.0 = 3.0 \text{ cm}^2$$

$$W = \frac{1.0 \times 3.0^2}{6} = 1.5 \text{ cm}^3$$

$$N = \frac{-10.35 + 0.20}{2} \times 3 = -15.2 \text{ kg}$$

$$M = \frac{-10.35 - 0.20}{2} \times 1.5 = -7.6 \text{ kg cm}$$

$$Q = \frac{-15.2}{3 \times 0.227} = -22.3 \text{ kg}$$

$$s = \frac{-7.6}{-22.3} = 0.34 \text{ cm (έλεγχος)}$$

Διατομή II-II:

$$\sigma_u = -1.3 \times 10 = -6.50 \times \frac{10.0}{5} = -13.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_o = -1.0 \times 10 = -5.00 \times \frac{10.0}{5} = -10.0 \quad "$$

$$\text{ctg} = -\frac{0.75}{1.25} = 0.60$$

$$F = 1.0 \times 2.5 = 2.5 \text{ cm}^2$$

$$W = \frac{1.0 \times 2.5^2}{6} = 1.04 \text{ cm}^3$$

$$N = \frac{-13.00 - 10.00}{2} \times 2.5 = -28.7 \text{ kg}$$

$$M = \frac{-13.00 - (-10.00)}{2} \times 1.04 = -1.63 \text{ kg cm}$$

$$Q = \frac{-28.7}{-3 \times 0.60} = 15.9 \text{ kg}$$

$$s = \frac{-1.63}{15.9} = -0.10 \text{ cm} \quad (\text{Έλεγχος})$$

Διατομή III-III:

$$\sigma_u = -2.0 \times 10 = -10.00 \times \frac{10.0}{5} = -20.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_o = -1.9 \times 10 = -9.50 \times \frac{10.0}{5} = -19.0 \quad "$$

$$\text{ctg} = -\frac{0.70}{1.25} = -0.56$$

$$F = 1.0 \times 2.5 = 2.5 \text{ cm}^2$$

$$W = \frac{1.0 \times 2.5^2}{6} = 1.04 \text{ cm}^3$$

$$N = \frac{-20.0 - 19.0}{2} \times 2.5 = -48.8 \text{ kg}$$

$$M = \frac{-20.0 - (-19.0)}{2} \times 1.04 = -0.52 \text{ kg cm}$$

$$Q = \frac{-48.8}{-3 \times 0.56} = 29.0 \text{ kg}$$

$$s = \frac{-0.52}{29.0} = 0.0 \text{ cm} \quad (\text{Έλεγχος})$$

Τά ούτως υπολογισθέντα έντατικά μεγέθη τών διατομών I-I, II-II καί III-III αποτελοϋν τήν έξωτερικήν φόρτισιν τοϋ δίσκου τοϋ κόμβου,

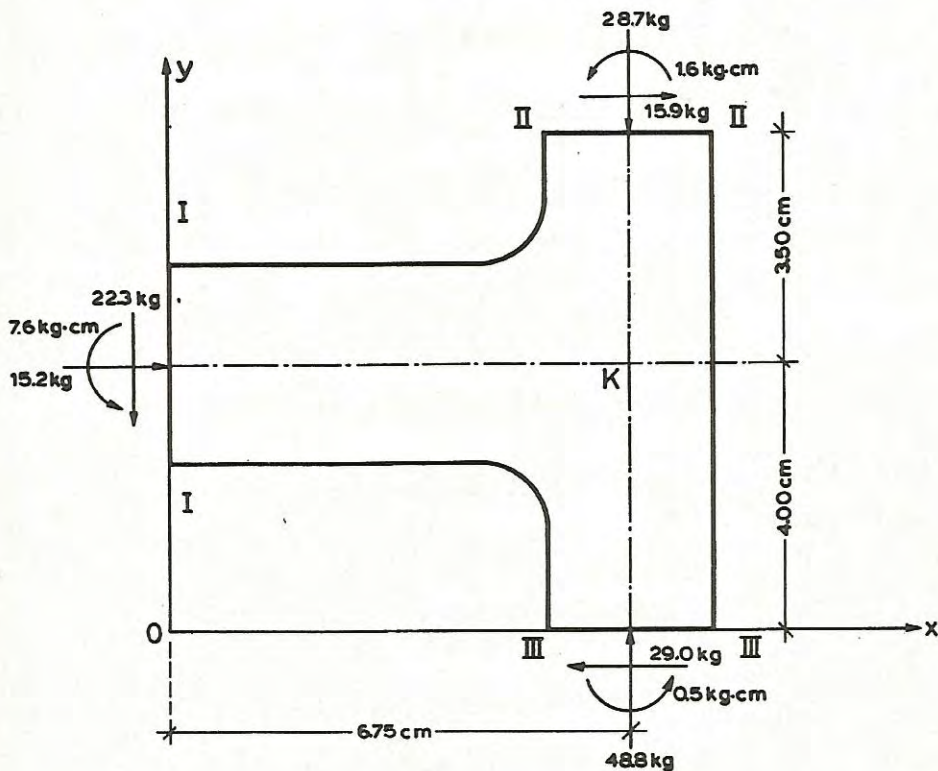
καί ὡς ἐκ τούτου δέον ταῦτα νά ἀποτελοῦν ἰσορροπον σύστημα δυνάμεων. Πρὸς ἔλεγχον ἐλέγχεται κατωτέρω ἡ ἰσορροπία τῶν δυνάμεων τούτων.

Ἐκ τοῦ Σχ.26 ἔχομεν:

προβολαί ἐπί τοῦ οx $\Sigma X = 15.2 + 15.9 - 29.0 = +2.1 \text{ kg} \approx 0$

προβολαί ἐπί τοῦ οy $\Sigma Y = -22.3 - 28.7 + 48.8 = -2.2 \text{ kg} \approx 0$

ροπαί ὡς πρὸς K $\Sigma M = -7.6 - 22.3 \times 6.75 - 1.6 + 15.9 \times 3.5 + 29.0 \times 4.0 - 0.5 = +11.4 \text{ kg cm} \approx 0$



Σχ.26

Ἡ ἀνωτέρω ἰσορροπία τοῦ κόμβου δέον νά θεωρηθῇ ὡς ἱκανοποιητική, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι αἱ τιμαί ἐλήφθησαν πειραματικῶς καί δὴ τό 1:10.0 αὐτῶν (ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπί τήν φωτοελαστικήν σταθεράν $S = 10.0 \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{τάξιν cm}}$).

III.- Υπολογισμός τών τάσεων είς τό σύνορον.

Αί είς τόν υπολογισμόν είσαγόμεναι παράμετροι τής έντάσεως προσημαίνονται βάσει τής κλασσικής σημάσεως τής θεωρίας τής έλαστικότητος (παραδοχή 4, §1).

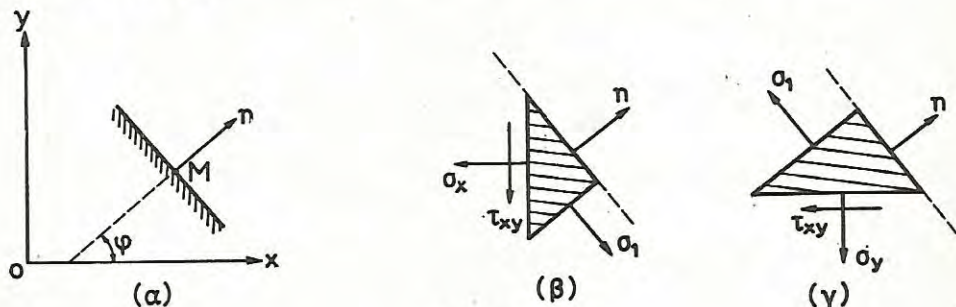
Ούτω βάσει τής άνωτέρω σημάσεως αί συνιστώσαι τής έντάσεως τών διατομών I-I, II-II καί III-III προσημαίνονται άναλόγως πρός τόν προσανατολισμόν τών διατομών τούτων ώς πρός τό έπιλεγόμενον σύστημα άξόνων oxy. Διά τās όρθάς τάσεις έπί έλευθέρων συνόρων παραλλήλων ώς πρός τούς άξονας τών συντεταγμένων θά είναι :

$\sigma_x = \sigma_1$ όταν τό σύνορον είναι παράλληλον πρός τόν άξονα τών x

$\sigma_y = \sigma_1$ όταν τό σύνορον είναι παράλληλον πρός τόν άξονα τών y

$\tau_{xy} = 0$ είς άμφοτέρας τās περιπτώσεις.

Όταν όμως τό σύνορον είναι κεκλιμένον ώς πρός τούς άξονας τών συντεταγμένων (Σχ.27α), τότε αί $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ είς τό σύνορον υπολογίζονται ώς κατωτέρω:

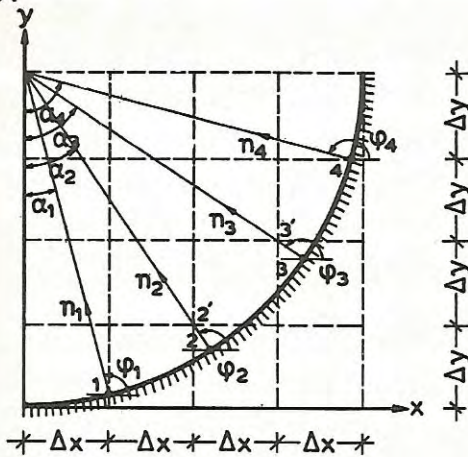


Σχ.27

Έστω n τό κάθετον διάνυσμα επί του συνόρου καί μέ φοράν πρός τό έξωτερικόν του δίσκου καί $\varphi = (\hat{x}, n)$ ή γωνία που σχηματίζει ό θετικος ήμιάξων ox μέ τό n. Έπί του συνόρου ύπάρχει μόνον ή κυρία τάσις σ_1 παραλλήλως πρός αυτό. Έκ τής ίσορροπίας τών στοιχείων (Σχ.27β καί 27γ) περιλαμβανόντων τό σημείον M λαμβάνομεν:

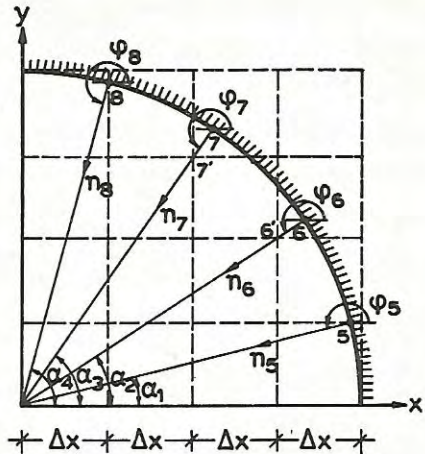
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 \sin^2 \varphi \\ \sigma_y &= \sigma_1 \cos^2 \varphi \\ \tau_{xy} &= -\sigma_1 \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (30)$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τῶν σ_x, σ_y καί τ_{xy} εἰς τά καμπύλα τμήματα τοῦ συνόρου θά ἐφαρμοσθοῦν αἱ σχέσεις (30). Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νά ὑπογισθοῦν τὰ $\sin\varphi, \cos\varphi$ τῶν σημείων 1,2,3,4,5,6,7,8 τῶν κυκλικῶν τόξων.



Σχ.28

$\Delta x = \Delta y = 0.25 \text{ cm}$



Σχ.29

Οὕτω ἐκ τῶν 28 καί 29 ἔχομεν:

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{0.25}{1.00} = 0.250$$

$$\alpha_1 = 14.1^\circ$$

$$\text{tg}\alpha_2 = \frac{0.50}{0.75} = 0.667$$

$$\alpha_2 = 33.7^\circ$$

$$\text{tg}\alpha_3 = \frac{0.75}{0.50} = 1.500$$

$$\alpha_3 = 56.3^\circ$$

$$\text{tg}\alpha_4 = \frac{1.00}{0.25} = 4.000$$

$$\alpha_4 = 75.9^\circ$$

καί

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$$

$$\sin\varphi_1 = 0.970$$

$$\cos\varphi_1 = -0.242$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_2$$

$$\sin\varphi_2 = 0.833$$

$$\cos\varphi_2 = -0.555$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \alpha_3$$

$$\sin\varphi_3 = 0.555$$

$$\cos\varphi_3 = -0.833$$

$$\varphi_4 = \frac{\pi}{2} + \alpha_4$$

$$\sin\varphi_4 = 0.243$$

$$\cos\varphi_4 = -0.970$$

$$\varphi_5 = \pi + \alpha_1$$

$$\sin\varphi_5 = -0.242$$

$$\cos\varphi_5 = -0.970$$

$$\begin{array}{lll} \varphi_6 = \pi + \alpha_2 & \sin\varphi_6 = -0.555 & \cos\varphi_6 = -0.833 \\ \varphi_7 = \pi + \alpha_3 & \sin\varphi_7 = -0.833 & \cos\varphi_7 = -0.555 \\ \varphi_8 = \pi + \alpha_4 & \sin\varphi_8 = -0.970 & \cos\varphi_8 = -0.243 \end{array}$$

Βάσει του Σχ.24 και των μέχρι τουδε άναπτυχθέντων ύπελογίσθησαν είς τόν πίνακα των σελ. 87 - 90 αί τιμαί των σ_x, σ_y και τ_{xy} των σημείων του συνόρου του δίσκου όριζομένων υπό του καννάβου του Σχ.30.

IV.- Έφαρμογή του προγράμματος SOLAPEQ.

Μετά τόν προσδιορισμόν των παραμέτρων της έντάσεως είς τό σύνορον χρησιμοποιείται πλέον τό πρόγραμμα SOLAPEQ (§7), δι' ού άποτιμᾶται ή ένταση και είς τό έσωτερικόν του δίσκου, ήτοι αί όρθαί τάσεις σ_x, σ_y και αί διατημητικάί τάσεις τ_{xy} είς άπαντα τά έσωτερικά σημεία του καννάβου.

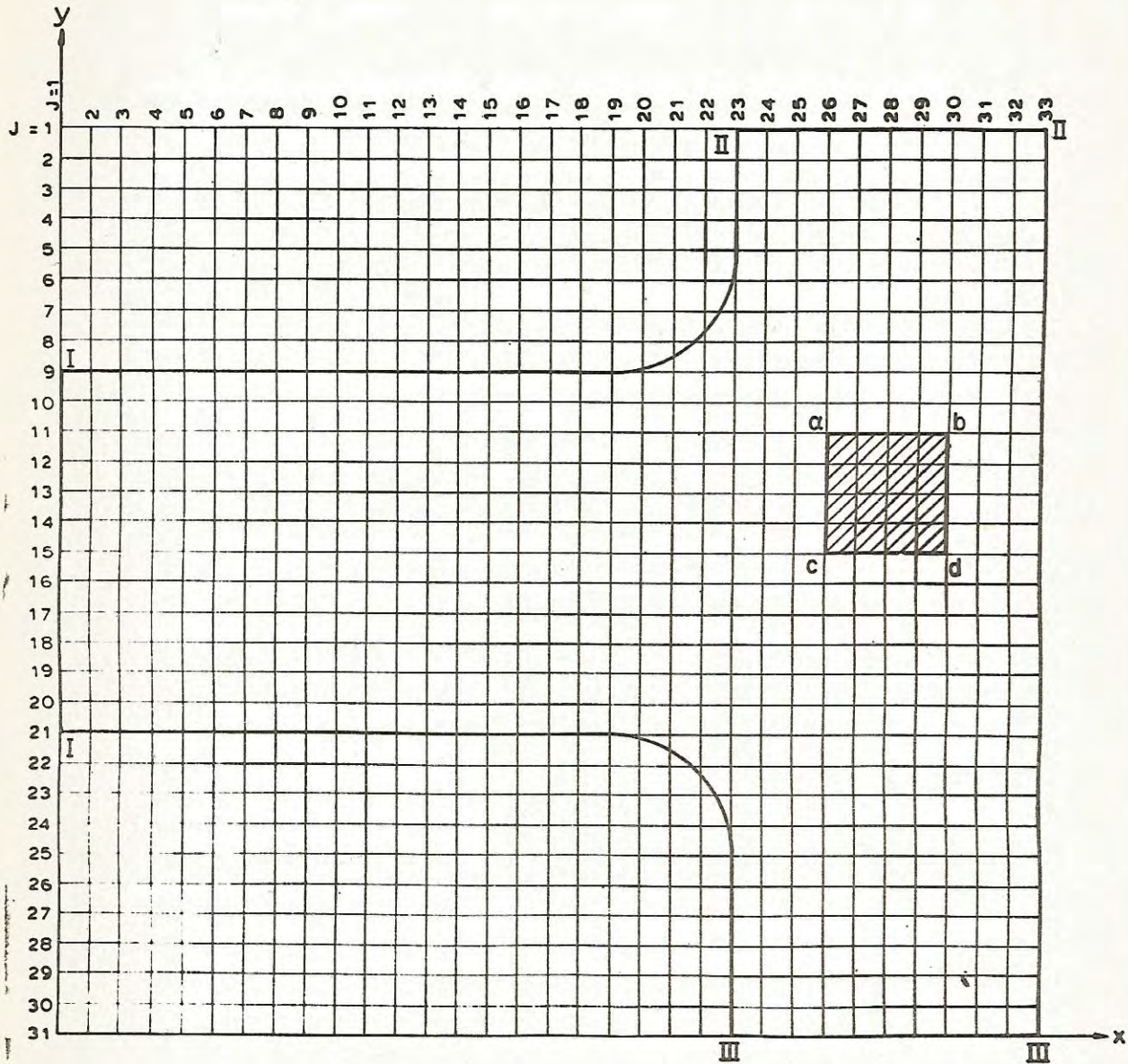
Κατ' έπιταγήν του προγράμματος SOLAPEQ, μορφοϋται τό μητρώον INDEX (I,J) των κωδικών αριθμών των σημείων (I,J) του καννάβου, ήτοι:

INDEX(I,J) = 3	διά	σημεία	του	καννάβου	έκτός	του	συνόρου	του	δίσκου		
INDEX(I,J) = 1	"	"	"	"	έπί	του	συνόρου				
INDEX(I,J) = 0	"	"	"	"	έσωτερικώς	του	συνόρου				
INDEX(I,J) = 4	"	"	"	"	γειτνιάζονται	πρός	τά	καμπύλα	τμήματα	του	συνόρου.
INDEX(I,J) = 2	"	"	"	"	παρουσιάζονται	διπλήν	άπεικόνισιν	έπί	του	συνόρου.	

Είς τό Σχ.31 δεικνύεται περιοχή του καννάβου, είς την όποιαν έμφανίζονται χαρακτηριστικώς όλοι αί άνωτέρω κατηγορίαι των σημείων.

Τό μητρώον INDEX(I,J) διαστάσεων 31X33 έμφαίνεται είς τό Σχ.32. Τά σημεία (20,9) και (23,6) λόγω της μικρᾶς των άποστάσεων από τό σύνορον θεωροϋνται εύρισκόμενα έπ' αϋτου.

Αί συντεταγμέναι $X(I,J), Y(I,J)$ ύπολογίζονται έκ των σχέσεων (α) της §6, σελ. 21 πλην των σημείων των καμπύλων τμημάτων του συνόρου, των όποιών αί συντεταγμέναι ύπολογίζονται γεωμετρικώς έκ των Σχ 28 και 29, σελ. 84.



Σχ.30. Έμφαττον τόν κάναβον τοῦ δίσκου, εἰς τὰ σημεῖα τοῦ ὁποῖου ὑπλογίζονται αἱ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_1, \sigma_2, \omega$. Τό σύνορον τοῦ δίσκου δηλοῦται δι' ἐντόνου γραμμῆς. $\Delta_x = \Delta_y = h = 0.25$

Π Ι Ν Α Ξ (Ι). Τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ εις τὸ σύνορον τοῦ δίσκου.

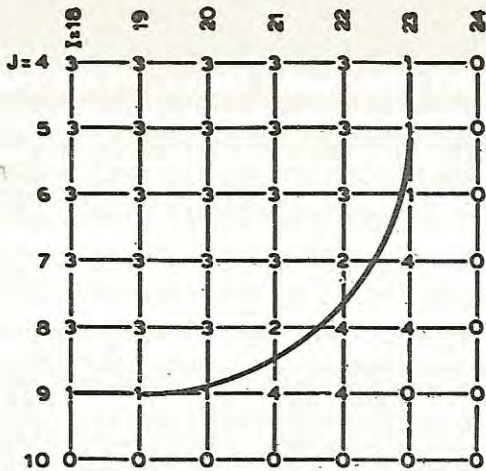
Κ	Σημεῖον		$\sigma_1: \frac{10.0}{5}$ εἰς mm	σ_1	$\sin^2\varphi$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
	I	J			$\cos^2\varphi$ $-\sin\varphi\cos\varphi$			
1	1	9	0.10	+ 0.20		+ 0.20		
2	2	9	2.04	+ 4.08		+ 4.08		
3	3	9	4.08	+ 8.16		+ 8.16		
4	4	9	6.14	+12.28		+12.28		
5	5	9	8.18	+16.36		+16.36		
6	6	9	10.04	+20.08		+20.08		
7	7	9	12.28	+24.56		+24.56		
8	8	9	14.30	+28.60		+28.60		
9	9	9	16.40	+32.80		+32.80		
10	10	9	18.40	+36.80		+36.80		
11	11	9	20.42	+40.84		+40.84		
12	12	9	22.50	+45.00		+45.00		
13	13	9	24.55	+49.10		+49.10		
14	14	9	26.60	+53.20		+53.20		
15	15	9	29.00	+58.00		+58.00		
16	16	9	31.40	+62.80		+62.80		
17	17	9	34.80	+69.60		+69.60		
18	18	9	38.50	+77.00		+77.00		
19	19	9	44.00	+88.00		+88.00		
20	20	9	46.00	+92.00	0.941 0.059	+86.58	+ 5.42	+21.62
21	21	8	43.70	+87.40	0.693 0.308 0.235 0.462	+60.56	+26.91	+40.37
22	22	7	25.00	+50.00	0.308 0.693 0.462 0.059	+15.40	+34.65	+23.10
23	23	6	12.00	+24.00	0.059 0.941 0.235 0.765	+ 1.42	+22.58	+ 5.64
24	23	5	4.20	+ 8.40			+ 8.40	
25	23	4	0.10	+ 0.20			+ 0.20	
26	23	3	- 2.20	- 4.40			- 4.40	
27	23	2	- 4.40	- 8.80			- 8.80	
28	23	1	- 6.50	-13.00			-13.00	+ 0.00
29	24	1	- 6.35	-12.70			-12.70	+ 3.44
30	25	1	- 6.20	-12.40			-12.40	+ 6.12

K	Σημεῖον		$\sigma_1: \frac{10.0}{5}$ εἰς mm	σ_1	$\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
	I	J			$-\sin\varphi\cos\varphi$			
31	26	1	- 6.05	-12.10			-12.10	+ 8.02
32	27	1	- 5.90	-11.80			-11.80	+ 9.17
33	28	1	- 5.75	-11.50			-11.50	+ 9.55
34	29	1	- 5.60	-11.20			-11.20	+ 9.17
35	30	1	- 5.45	-10.90			-10.90	+ 8.02
36	31	1	- 5.30	-10.60			-10.60	+ 6.12
37	32	1	- 5.15	-10.30			-10.30	+ 3.44
38	33	1	- 5.00	-10.00			-10.00	0.00
39	33	2	- 6.50	-13.00			-13.00	
40	33	3	- 8.60	-17.20			-17.20	
41	33	4	-11.00	-22.00			-22.00	
42	33	5	-13.20	-26.40			-26.40	
43	33	6	-14.80	-29.60			-29.60	
44	33	7	-15.50	-31.00			-31.00	
45	33	8	-16.00	-32.00			-32.00	
46	33	9	-16.20	-32.40			-32.40	
47	33	10	-15.70	-31.40			-31.40	
48	33	11	-14.90	-29.80			-29.80	
49	33	12	-12.60	-25.20			-25.20	
50	33	13	-10.60	-21.20			-21.20	
51	33	14	- 8.00	-16.00			-16.00	
52	33	15	- 5.00	-10.00			-10.00	
53	33	16	- 2.50	- 5.00			- 5.00	
54	33	17	+ 0.05	+ 0.10			+ 0.10	
55	33	18	+ 3.20	+ 6.40			+ 6.40	
56	33	19	+ 5.90	+11.80			+11.80	
57	33	20	+ 8.10	+16.20			+16.20	
58	33	21	+ 9.50	+19.00			+19.00	
59	33	22	+ 9.80	+19.60			+19.60	
60	33	23	+ 9.50	+19.00			+19.00	
61	33	24	+ 7.90	+15.80			+15.80	
62	33	25	+ 6.00	+12.00			+12.00	

K	Σημείον		$\sigma_1 \cdot \frac{10.0}{5}$ είς mm	σ_1	$\sin^2 \varphi$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
	I	J			$\cos^2 \varphi$			
					$-\sin \varphi \cos \varphi$			
63	33	26	+ 3.90	+ 7.80			+ 7.80	
64	33	27	+ 1.00	+ 2.00			+ 2.00	
65	33	28	- 0.90	- 1.80			- 1.80	
66	33	29	- 3.80	- 7.60			- 7.60	
67	33	30	- 7.20	-14.40			-14.40	
68	33	31	-10.00	-20.00			-20.00	0.00
69	32	31	- 9.95	-19.90			-19.90	+ 6.26
70	31	31	- 9.90	-19.80			-19.80	+11.15
71	30	31	- 9.85	-19.70			-19.70	+14.64
72	29	31	- 9.80	-19.60			-19.60	+16.73
73	28	31	- 9.75	-19.50			-19.50	+17.42
74	27	31	- 9.70	-19.40			-19.40	+16.73
75	26	31	- 9.65	-19.30			-19.30	+14.64
76	25	31	- 9.60	-19.20			-19.20	+11.15
77	24	31	- 9.55	-19.10			-19.10	+ 6.26
78	23	31	- 9.50	-19.00			-19.00	+ 0.00
79	23	30	-12.80	-25.60			-25.60	
80	23	29	-16.10	-32.20			-32.20	
81	23	28	-19.20	-38.40			-38.40	
82	23	27	-22.60	-45.20			-45.20	
83	23	26	-25.80	-51.60			-51.60	
84	23	25	-30.60	-61.20			-61.20	
85	23	24	-40.00	-80.00	0.059 0.941	- 4.72	-75.28	+18.72
86	22	23	-72.00	-144.00	0.693 0.463	-44.36	-99.93	+66.52
87	21	22	-74.00	-148.00	0.681 0.308	-102.71	-45.58	+68.37
88	20	21	-55.00	-110.00	0.941 0.059	-103.51	- 6.49	+25.74
89	19	21	-46.80	-93.60		- 93.60		
90	18	21	-42.80	-85.60		- 85.60		
91	17	21	-39.50	-79.00		- 79.00		
92	16	21	-37.00	-74.00		- 74.00		
93	15	21	-34.50	-69.00		- 69.00		
94	14	21	-32.46	-64.92		- 64.92		

Κ	Σημ. του		$\sigma_1: \frac{10.0}{5}$ εἰς mm	σ_1	$\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
	I	J			$-\sin\varphi\cos\varphi$			
95	13	21	-30.30	-60.60		-60.60		
96	12	21	-28.25	-56.50		-56.50		
97	11	21	-26.15	-52.30		-52.30		
98	10	21	-24.08	-48.15		-48.15		
99	9	21	-21.95	-43.90		-43.90		
100	8	21	-19.88	-39.75		-39.75		
101	7	21	-17.75	-35.50		-35.50		
102	6	21	-15.65	-31.30		-31.30		
103	5	21	-13.55	-27.10		-27.10		
104	4	21	-11.46	-22.92		-22.92		
105	3	21	-9.34	-18.68		-18.68		
106	2	21	-7.25	-14.51		-14.51		
107	1	21	-5.17	-10.35		-10.35		0.00
108	1	20	-4.87	-9.74		-9.74		+ 3.41
109	1	19	-4.29	-8.59		-8.59		+ 6.22
110	1	18	-3.85	-7.71		-7.71		+ 8.36
111	1	17	-3.41	-6.83		-6.83		+ 9.92
112	1	16	-2.98	-5.95		-5.95		+10.86
113	1	15	-2.54	-5.08		-5.08		+11.15
114	1	14	-2.10	-4.20		-4.20		+10.86
115	1	13	-1.66	-3.32		-3.32		+ 9.92
116	1	12	-1.22	-2.44		-2.44		+ 8.36
117	1	11	-0.78	-1.56		-1.56		+ 6.22
118	1	10	-0.34	-0.68		-0.68		+ 3.41

Παρατήρησης: Εἰς τὴν διατομὴν I-I ἀναπτύσσεται τάσις σ_y καὶ εἰς τὰς διατομὰς II-II καὶ III-III σ_x . Πλὴν ὅμως αἱ τιμαὶ αὐτῶν εἶναι πολὺ μικραὶ (≈ 0), δι' ὅ καὶ παρελείφθησαν.



Σχ. 31

Τό πρόγραμμα εφαρμόζεται διά: $\epsilon=0.0005$, $\beta=1.5$, $v_x = 33$, $v_y = 31$,
 $\kappa=118$ (συνοριακά σημεία), $h=0.25\text{cm}$.

```

J=1  I=1  I=33
3333333333333333333333333333331111111111111
333333333333333333333333333333100000000001
333333333333333333333333333333100000000001
333333333333333333333333333333100000000001
333333333333333333333333333333100000000001
333333333333333333333333333332400000000001
333333333333333333333333333324400000000001
111111111111111111111111111144000000000001
10000000000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000000001
111111111111111111111111111144000000000001
333333333333333333333333333324400000000001
33333333333333333333333333332400000000001
33333333333333333333333333333100000000001
3333333333333333333333333333310000000001
3333333333333333333333333333310000000001
3333333333333333333333333333310000000001
3333333333333333333333333333310000000001
3333333333333333333333333333310000000001
3333333333333333333333333333310000000001
J=31 33333333333333333333333333333111111111111
    
```

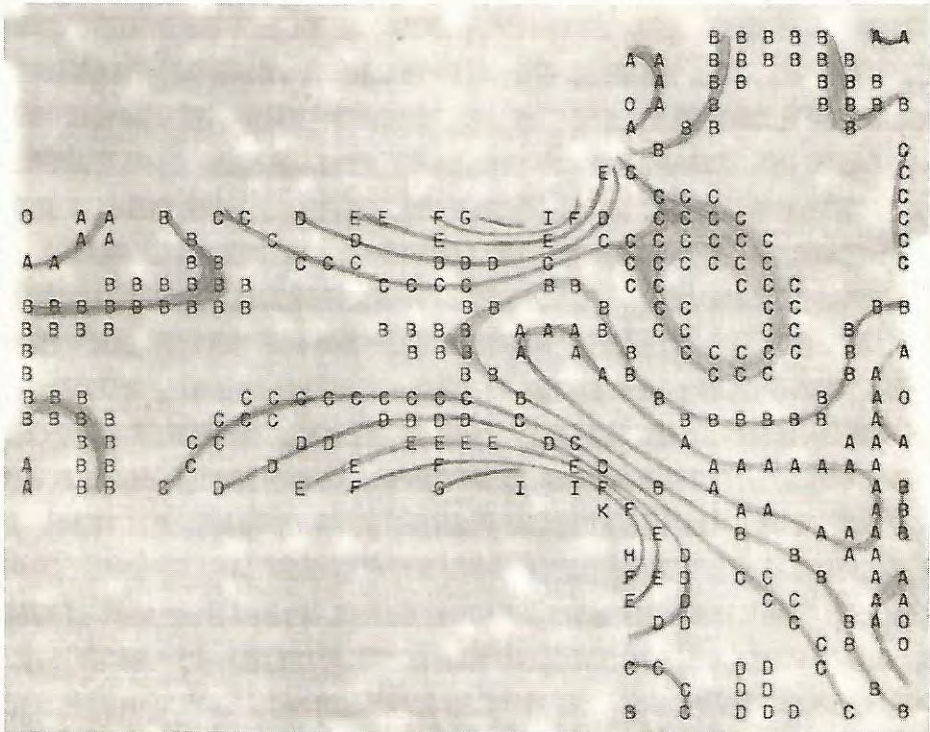
Σχ. 32. Τό μητρώον INDEX(I,J)

Ἡ ἐκτέλεσις τοῦ προγράμματος ἐγένετο ὑπὸ τοῦ ὑπολογιστοῦ CDC 3300-1700 τοῦ Κέντρου Πυρηνικῶν Ἐρευνῶν "Δημόκριτος". Τὰ ἀποτελέσματα παρατίθενται εἰς τοὺς ἐπομένους πίνακας (σελ.94-113) ὡς καὶ ταῦτα ἐξετυκώθησαν ὑπὸ τοῦ ὑπολογιστοῦ.

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν καὶ ἐκτύπωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων ἀπητήθη χρόνος ἀπασχολήσεως τοῦ ὑπολογιστοῦ 3.5 πρῶτα λεπτά.

Ἡ σύγκλισις τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου διὰ ἀκαυτηθεῖσαν ἀκρίβειαν $\epsilon=0.0005$ καὶ διὰ παράμετρον χαλαρώσεως $\beta=1.5$ ἐπετεύχθη:

διὰ τὴν $U = \sigma_x + \sigma_y$	εἰς	96	ἐπαναλήψεις
" " σ_x	"	87	"
" " σ_y	"	90	"
" " τ_{xy}	"	86	"



Σχ.33.- Δίκτυον ἰσοχρόμων ἀκραίας τάξεως

Είς τό Σχ.33 έμφαίνεται τό δίκτυον τών ίσοχρώμων άκεραίας τάξεως τοϋ δίσκου,τό όποϊον παριστᾶ τάς ίσοσταθμικᾶς καμπύλας

$$|\sigma_1 - \sigma_2|/S = n = \text{σταθερά}$$

ένθα $n = 1, 2, 3, \dots$ ή τάξις τῆς ίσοχρώμου καί S ή φωτοελαστική σταθερά τοϋ ύλικοϋ τοϋ δοκιμίου. Τό δίκτυον τοϋτο παρήχθη έκ τών ύπολογισθεισών συνιστωσών τῆς έντάσεως $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Διά συγκρίσεως τοϋ Σχ.33 κρός τήν φωτογραφίαν τοϋ Σχ.24 διαπιστοϋμεν ότι ταϋτα ταυτίζονται. Τό γεγονός τοϋτο μαρτυρεϊ τήν όρθότητα τών ληφθέντων άποτελεσμάτων έκ τῆς έφαρμογῆς τῆς έν τῇ παρουσίᾳ έργασίᾳ άναπτυσσομένης μεθοδολογίας. Η μικρά παραμόρφώσις τοϋ σχήματος τών ίσοχρώμων όφείλεται είς τήν διαφορετικὴν κλίμακα έκτυπώσεως τών στοιχείων ύπό τῆς έκτυπωτικῆς μονάδος (PRINTER) τοϋ ήλεκτρονικοϋ ύπολογιστοϋ.

Αί ύπολογισθεΐσαι παράμετροι τῆς έντάσεως σ_x, σ_y καί τ_{xy} άνάγονται είς τήν κατασκευήν τῇ βοηθείᾳ τῆς έκλεγεΐσης κλίμακος τάσεων

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\text{κατασκευή}}{\text{όμοίωμα}} = 0.30$$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΘΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΧ+ΣΥ
SUM OF NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 1
PAGE

```

*****
* I * * * * *
* * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 *
* J * * * * *
*****
* 1 * * * * *
* 2 * * * * *
* 3 * * * * *
* 4 * * * * *
* 5 * * * * *
* 6 * * * * *
* 7 * * * * *
* 8 * * * * *
* 9 * 0.20 * 4.08 * 8.16 * 12.28 * 16.36 * 20.08 * 24.56 *
* 10 * -0.68 * 2.61 * 5.95 * 9.32 * 12.68 * 15.98 * 19.45 *
* 11 * -1.56 * 1.07 * 3.72 * 6.38 * 9.05 * 11.70 * 14.41 *
* 12 * -2.44 * -0.48 * 1.48 * 3.45 * 5.42 * 7.39 * 9.37 *
* 13 * -3.32 * -2.05 * -0.77 * 0.51 * 1.79 * 3.06 * 4.34 *
* 14 * -4.20 * -3.61 * -3.02 * -2.43 * -1.85 * -1.26 * -0.68 *
* 15 * -5.08 * -5.18 * -5.27 * -5.37 * -5.47 * -5.58 * -5.70 *
* 16 * -5.95 * -6.74 * -7.52 * -8.31 * -9.10 * -9.89 * -10.70 *
* 17 * -6.83 * -8.30 * -9.77 * -11.24 * -12.71 * -14.19 * -15.69 *
* 18 * -7.71 * -9.87 * -12.02 * -14.17 * -16.32 * -18.49 * -20.66 *
* 19 * -8.59 * -11.44 * -14.26 * -17.09 * -19.92 * -22.77 * -25.62 *
* 20 * -9.74 * -13.05 * -16.50 * -20.01 * -23.52 * -27.04 * -30.57 *
* 21 * -10.35 * -14.51 * -18.68 * -22.92 * -27.10 * -31.30 * -35.50 *
* 22 * * * * *
* 23 * * * * *
* 24 * * * * *
* 25 * * * * *
* 26 * * * * *
* 27 * * * * *
* 28 * * * * *
* 29 * * * * *
* 30 * * * * *
* 31 * * * * *
*****

```

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΘΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΧ+ΣΥ
SUM OF NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

I	8	9	10	11	12	13	14
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	28.60	32.80	36.80	40.84	45.00	49.10	53.20
10	22.85	25.27	29.63	33.00	36.40	39.83	43.34
11	17.10	19.78	22.45	25.11	27.78	30.47	33.21
12	11.35	13.32	15.27	17.21	19.15	21.07	22.99
13	5.61	6.87	8.11	9.33	10.52	11.68	12.79
14	-0.12	0.44	0.96	1.47	1.93	2.34	2.68
15	-5.83	-5.98	-6.15	-6.36	-6.61	-6.93	-7.34
16	-11.52	-12.36	-13.23	-14.14	-15.09	-16.12	-17.24
17	-17.19	-18.72	-20.27	-21.86	-23.51	-25.22	-27.03
18	-22.85	-25.05	-27.27	-29.54	-31.85	-34.23	-36.71
19	-28.48	-31.35	-34.25	-37.16	-40.11	-43.13	-46.25
20	-34.11	-37.64	-41.19	-44.74	-48.32	-51.92	-55.64
21	-39.75	-43.90	-48.15	-52.30	-56.50	-60.60	-64.92
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΘΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΥΧΣΥ
SUM OF NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

I	15	16	17	18	19	20	21
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							87.47
9	58.00	62.80	69.60	77.00	88.00	92.01	75.39
10	47.13	51.14	55.71	60.32	64.38	63.81	55.09
11	35.03	38.91	41.77	44.20	45.40	43.75	38.28
12	24.89	26.69	28.27	29.30	29.27	27.51	23.77
13	13.82	14.71	15.32	15.46	14.86	13.26	10.62
14	2.91	2.99	2.84	2.36	1.45	0.05	-1.78
15	-7.85	-8.50	-9.31	-10.31	-11.47	-12.73	-13.95
16	-18.47	-19.82	-21.28	-22.81	-24.30	-25.54	-26.30
17	-28.96	-31.52	-33.18	-35.37	-37.37	-38.84	-39.32
18	-39.33	-42.12	-45.07	-48.10	-50.97	-53.14	-53.65
19	-49.53	-53.06	-56.86	-61.00	-65.28	-69.09	-70.30
20	-59.47	-63.71	-68.33	-73.75	-80.07	-87.63	-91.38
21	-69.00	-74.00	-79.00	-85.60	-93.60	-110.00	-122.11
22							-148.29
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΘΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΧ+ΣΥ
SUM OF NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 4
PAGE

```

*****
* I * * * * *
* * 22 * 23 * 24 * 25 * 26 * 27 * 28 *
* J * * * * *
*****
* 1 * * -13.00 * -12.70 * -12.40 * -12.10 * -11.80 * -11.50 *
* 2 * * -8.80 * -8.72 * -8.91 * -9.32 * -9.85 * -10.45 *
* 3 * * -4.40 * -4.46 * -5.20 * -6.41 * -7.85 * -9.38 *
* 4 * * 0.20 * 0.47 * -1.03 * -3.26 * -5.74 * -8.27 *
* 5 * * 8.40 * 7.18 * 3.88 * 0.12 * -3.59 * -7.15 *
* 6 * * 24.00 * 15.99 * 9.23 * 3.46 * -1.58 * -6.13 *
* 7 * 50.05 * 38.17 * 23.54 * 13.60 * 6.07 * -0.07 * -5.39 *
* 8 * 53.32 * 41.50 * 26.41 * 15.55 * 7.29 * 0.62 * -5.08 *
* 9 * 54.93 * 38.12 * 25.03 * 14.91 * 6.91 * 0.35 * -5.29 *
* 10 * 42.89 * 31.00 * 20.70 * 12.15 * 5.08 * -0.85 * -6.01 *
* 11 * 30.53 * 22.29 * 14.62 * 7.89 * 2.13 * -2.82 * -7.17 *
* 12 * 18.64 * 13.03 * 7.59 * 2.67 * -1.63 * -5.37 * -8.68 *
* 13 * 7.25 * 3.59 * 0.04 * -3.17 * -5.96 * -8.36 * -10.43 *
* 14 * -3.86 * -5.95 * -7.85 * -9.44 * -10.70 * -11.65 * -12.38 *
* 15 * -14.97 * -15.68 * -16.04 * -16.04 * -15.73 * -15.18 * -14.47 *
* 16 * -26.39 * -25.78 * -24.58 * -22.94 * -21.00 * -18.88 * -16.66 *
* 17 * -38.50 * -36.47 * -33.57 * -30.14 * -26.46 * -22.69 * -18.92 *
* 18 * -51.82 * -48.04 * -43.07 * -37.58 * -32.00 * -26.52 * -21.18 *
* 19 * -67.10 * -60.81 * -53.10 * -45.12 * -37.44 * -30.20 * -23.35 *
* 20 * -85.47 * -74.98 * -63.39 * -52.38 * -42.43 * -33.49 * -25.28 *
* 21 * -108.40 * -90.27 * -73.10 * -58.56 * -46.42 * -36.04 * -26.79 *
* 22 * -135.76 * -104.60 * -80.19 * -62.34 * -48.65 * -37.45 * -27.68 *
* 23 * -144.29 * -112.20 * -80.71 * -61.96 * -48.40 * -37.42 * -27.82 *
* 24 * * -80.00 * -68.50 * -56.39 * -45.58 * -35.99 * -27.25 *
* 25 * * -61.20 * -56.91 * -49.52 * -41.54 * -33.72 * -26.21 *
* 26 * * -51.60 * -48.39 * -43.26 * -37.32 * -31.15 * -24.97 *
* 27 * * -45.20 * -41.81 * -37.81 * -33.32 * -28.58 * -23.71 *
* 28 * * -38.40 * -35.82 * -32.86 * -29.59 * -26.12 * -22.53 *
* 29 * * -32.20 * -30.22 * -28.20 * -26.06 * -23.80 * -21.45 *
* 30 * * -25.60 * -24.65 * -23.68 * -22.65 * -21.58 * -20.45 *
* 31 * * -19.00 * -19.19 * -19.20 * -19.30 * -19.40 * -19.50 *
*****

```

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΘΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΧ+ΣΥ
SUM OF NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΔΕ ΝΟ 5
PAGE

```
*****  
* I * * * * *  
* * 29 * 30 * 31 * 32 * 33 * * * * *  
* J * * * * *  
*****  
* 1 * -11.20 * -10.90 * -10.60 * -10.30 * -10.00 * * * * *  
* 2 * -11.08 * -11.72 * -12.34 * -12.85 * -13.00 * * * * *  
* 3 * -10.95 * -12.55 * -14.18 * -15.78 * -17.20 * * * * *  
* 4 * -10.80 * -13.37 * -16.04 * -18.88 * -22.00 * * * * *  
* 5 * -10.61 * -14.08 * -17.72 * -21.72 * -26.40 * * * * *  
* 6 * -10.41 * -14.64 * -19.03 * -23.88 * -29.60 * * * * *  
* 7 * -10.27 * -15.01 * -19.90 * -25.17 * -31.00 * * * * *  
* 8 * -10.25 * -15.25 * -20.38 * -25.90 * -32.00 * * * * *  
* 9 * -10.41 * -15.37 * -20.48 * -26.04 * -32.40 * * * * *  
* 10 * -10.74 * -15.34 * -20.11 * -25.37 * -31.40 * * * * *  
* 11 * -11.19 * -15.13 * -19.26 * -23.95 * -29.80 * * * * *  
* 12 * -11.73 * -14.72 * -17.87 * -21.35 * -25.20 * * * * *  
* 13 * -12.32 * -14.17 * -16.13 * -18.39 * -21.20 * * * * *  
* 14 * -12.96 * -13.50 * -14.10 * -14.88 * -16.00 * * * * *  
* 15 * -13.64 * -12.77 * -11.89 * -11.02 * -10.00 * * * * *  
* 16 * -14.37 * -12.04 * -9.68 * -7.32 * -5.00 * * * * *  
* 17 * -15.14 * -11.33 * -7.48 * -3.59 * 0.10 * * * * *  
* 18 * -15.93 * -10.68 * -5.30 * 0.34 * 6.40 * * * * *  
* 19 * -16.73 * -10.15 * -3.38 * 3.85 * 11.80 * * * * *  
* 20 * -17.50 * -9.82 * -1.90 * 6.62 * 16.20 * * * * *  
* 21 * -18.17 * -9.73 * -1.04 * 8.35 * 19.00 * * * * *  
* 22 * -18.67 * -9.88 * -0.87 * 8.82 * 19.60 * * * * *  
* 23 * -18.93 * -10.26 * -1.37 * 8.18 * 19.00 * * * * *  
* 24 * -18.99 * -10.85 * -2.53 * 6.28 * 15.80 * * * * *  
* 25 * -18.91 * -11.63 * -4.17 * 3.66 * 12.00 * * * * *  
* 26 * -18.81 * -12.59 * -6.19 * 0.52 * 7.80 * * * * *  
* 27 * -18.77 * -13.72 * -8.53 * -3.18 * 2.00 * * * * *  
* 28 * -18.83 * -15.01 * -11.01 * -6.72 * -1.80 * * * * *  
* 29 * -19.00 * -16.46 * -13.79 * -10.90 * -7.60 * * * * *  
* 30 * -19.28 * -18.06 * -16.79 * -15.50 * -14.40 * * * * *  
* 31 * -19.60 * -19.70 * -19.80 * -19.90 * -20.00 * * * * *  
*****
```

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 1
PAGE

I	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	0.20	4.08	8.16	12.28	16.36	20.08	24.56
10	-0.68	2.63	5.97	9.32	12.67	16.02	19.43
11	-1.56	1.08	3.73	6.38	9.04	11.71	14.38
12	-2.44	-0.48	1.48	3.44	5.40	7.37	9.33
13	-3.32	-2.05	-0.78	0.49	1.76	3.02	4.28
14	-4.20	-3.62	-3.04	-2.46	-1.89	-1.32	-0.76
15	-5.08	-5.19	-5.31	-5.41	-5.53	-5.65	-5.78
16	-5.95	-6.75	-7.55	-8.35	-9.16	-9.97	-10.78
17	-6.83	-8.31	-9.81	-11.28	-12.77	-14.27	-15.76
18	-7.71	-9.88	-12.05	-14.21	-16.38	-18.55	-20.73
19	-8.59	-11.46	-14.30	-17.13	-19.97	-22.81	-25.67
20	-9.74	-13.10	-16.54	-20.03	-23.54	-27.07	-30.59
21	-10.35	-14.51	-18.68	-22.92	-27.10	-31.30	-35.50
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

I	8	9	10	11	12	13	14
J							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	28.60	52.80	36.80	40.84	45.00	49.10	53.20
10	22.83	26.23	29.61	33.00	36.41	39.85	43.35
11	17.06	19.74	22.41	25.09	27.77	30.45	33.10
12	11.30	13.26	15.22	17.17	19.11	21.02	22.85
13	5.54	6.80	8.04	9.28	10.50	11.67	12.77
14	-0.20	0.36	0.90	1.44	1.96	2.46	2.92
15	-5.91	-6.06	-6.20	-6.36	-6.51	-6.66	-6.78
16	-11.61	-12.43	-13.27	-14.10	-14.92	-15.71	-16.42
17	-17.27	-18.78	-20.30	-21.81	-23.30	-24.74	-26.09
18	-22.91	-25.10	-27.29	-29.48	-31.65	-33.79	-35.83
19	-28.53	-31.39	-34.25	-37.12	-39.98	-42.82	-45.62
20	-34.13	-37.66	-41.20	-44.72	-48.25	-51.78	-55.34
21	-39.75	-43.90	-48.15	-52.30	-56.50	-60.60	-64.92
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

```

*****
* I * * * * *
* * 15 * 16 * 17 * 18 * 19 * 20 * 21 *
* J * * * * *
*****
* 1 * * * * *
* 2 * * * * *
* 3 * * * * *
* 4 * * * * *
* 5 * * * * *
* 6 * * * * *
* 7 * * * * *
* 8 * * * * *
* 9 * 58.00 * 62.80 * 69.60 * 77.00 * 88.00 * 86.58 * 58.15 *
* 10 * 46.99 * 51.72 * 54.48 * 57.67 * 58.96 * 54.85 * 44.98 *
* 11 * 35.68 * 38.04 * 39.90 * 40.78 * 39.96 * 37.00 * 32.74 *
* 12 * 24.51 * 25.88 * 26.73 * 26.82 * 25.95 * 24.27 * 22.31 *
* 13 * 13.73 * 14.47 * 14.88 * 14.88 * 14.47 * 13.81 * 13.13 *
* 14 * 3.33 * 3.66 * 3.91 * 4.08 * 4.23 * 4.42 * 4.67 *
* 15 * -6.85 * -6.83 * -6.66 * -6.25 * -5.56 * -4.61 * -3.52 *
* 16 * -15.99 * -17.31 * -17.27 * -16.70 * -15.53 * -13.81 * -11.84 *
* 17 * -27.24 * -28.06 * -28.33 * -27.81 * -26.29 * -23.75 * -20.69 *
* 18 * -37.70 * -39.23 * -40.17 * -40.12 * -38.58 * -35.21 * -30.61 *
* 19 * -48.33 * -50.84 * -52.91 * -54.07 * -53.41 * -49.55 * -42.43 *
* 20 * -58.92 * -62.59 * -66.25 * -69.68 * -71.92 * -69.74 * -57.81 *
* 21 * -69.00 * -74.00 * -79.00 * -85.60 * -93.60 * -103.51 * -81.13 *
* 22 * * * * * * * * * -102.71 *
* 23 * * * * * * * * * *
* 24 * * * * * * * * * *
* 25 * * * * * * * * * *
* 26 * * * * * * * * * *
* 27 * * * * * * * * * *
* 28 * * * * * * * * * *
* 29 * * * * * * * * * *
* 30 * * * * * * * * * *
* 31 * * * * * * * * * *
*****

```

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 4
PAGE

I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
J	22	23	24	25	26	27	28	*	*	*			

1	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*		
2	*	0.00	*	0.22	*	0.58	*	0.89	*	1.03	*		
3	*	0.00	*	0.58	*	1.43	*	2.06	*	2.29	*		
4	*	0.00	*	1.33	*	2.96	*	3.87	*	4.02	*		
5	*	0.00	*	3.57	*	5.94	*	6.70	*	6.36	*		
6	*	1.42	*	9.09	*	10.98	*	10.59	*	9.19	*		
7	15.40	*	18.71	*	19.14	*	17.31	*	14.75	*	11.97	*	
8	44.21	*	32.98	*	26.77	*	21.95	*	17.73	*	13.93	*	
9	44.80	*	35.50	*	28.79	*	23.38	*	18.71	*	14.58	*	
10	37.69	*	31.69	*	26.55	*	21.94	*	17.73	*	13.87	*	
11	28.97	*	25.45	*	22.02	*	18.61	*	15.26	*	12.04	*	
12	20.46	*	18.57	*	16.51	*	14.25	*	11.86	*	9.44	*	
13	12.48	*	11.70	*	10.68	*	9.40	*	7.91	*	6.33	*	
14	4.90	*	4.96	*	4.77	*	4.32	*	3.67	*	2.91	*	
15	-2.50	*	-1.71	*	-1.18	*	-0.89	*	-0.75	*	-0.71	*	
16	-9.99	*	-3.47	*	-7.26	*	-6.24	*	-5.33	*	-4.46	*	
17	-17.86	*	-15.53	*	-13.57	*	-11.78	*	-10.04	*	-8.30	*	
18	-26.44	*	-23.09	*	-20.23	*	-17.53	*	-14.83	*	-12.12	*	
19	-35.17	*	-31.33	*	-27.25	*	-23.38	*	-19.53	*	-15.75	*	
20	-47.58	*	-40.24	*	-34.34	*	-28.91	*	-23.72	*	-18.82	*	
21	-60.67	*	-48.80	*	-40.38	*	-33.12	*	-26.62	*	-20.79	*	
22	-69.59	*	-52.96	*	-42.63	*	-34.18	*	-27.08	*	-21.00	*	
23	-44.36	*	-44.07	*	-36.45	*	-29.73	*	-24.04	*	-18.99	*	
24	*	-4.72	*	-16.61	*	-19.05	*	-17.80	*	-15.13	*	-11.96	*
25	*	0.00	*	-6.86	*	-10.75	*	-11.74	*	-10.92	*	-9.12	*
26	*	0.00	*	-3.16	*	-5.96	*	-7.33	*	-7.38	*	-6.50	*
27	*	0.00	*	-1.74	*	-3.41	*	-4.48	*	-4.76	*	-4.38	*
28	*	0.00	*	-0.97	*	-1.97	*	-2.67	*	-2.94	*	-2.78	*
29	*	0.00	*	-0.58	*	-1.10	*	-1.50	*	-1.68	*	-1.61	*
30	*	0.00	*	-0.26	*	-0.50	*	-0.68	*	-0.76	*	-0.74	*
31	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*	0.00	*

ΟΡΘΑΙ ΓΑΣΕΙΣ ΣΧ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 5
PAGE

I	29	30	31	32	33
J					
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.86	0.67	0.49	0.33	0.00
3	1.79	1.31	0.85	0.44	0.00
4	2.84	1.96	1.12	0.43	0.00
5	4.06	2.68	1.41	0.42	0.00
6	5.37	3.46	1.78	0.52	0.00
7	6.56	4.18	2.19	0.75	0.00
8	7.36	4.65	2.43	0.85	0.00
9	7.59	4.75	2.44	0.79	0.00
10	7.20	4.46	2.24	0.68	0.00
11	6.27	3.85	1.86	0.45	0.00
12	4.91	2.99	1.45	0.43	0.00
13	3.24	1.92	0.86	0.17	0.00
14	1.35	0.69	0.20	-0.06	0.00
15	-0.69	-0.64	-0.51	-0.27	0.00
16	-2.82	-2.05	-1.34	-0.67	0.00
17	-4.94	-3.44	-2.12	-1.03	0.00
18	-6.96	-4.68	-2.71	-1.13	0.00
19	-8.75	-5.74	-3.17	-1.20	0.00
20	-10.16	-6.54	-3.49	-1.21	0.00
21	-10.99	-6.99	-3.67	-1.21	0.00
22	-11.04	-7.00	-3.67	-1.23	0.00
23	-10.23	-6.54	-3.44	-1.13	0.00
24	-8.73	-5.70	-3.10	-1.13	0.00
25	-6.90	-4.64	-2.59	-1.00	0.00
26	-5.10	-3.52	-2.01	-0.78	0.00
27	-3.54	-2.50	-1.48	-0.67	0.00
28	-2.29	-1.61	-0.89	-0.26	0.00
29	-1.34	-0.94	-0.50	-0.12	0.00
30	-0.62	-0.44	-0.27	-0.15	0.00
31	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 1
PAGE

```
*****  
* I * * * * *  
* * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 *  
* J * * * * *  
*****  
* 1 * * * * *  
* 2 * * * * *  
* 3 * * * * *  
* 4 * * * * *  
* 5 * * * * *  
* 6 * * * * *  
* 7 * * * * *  
* 8 * * * * *  
* 9 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 *  
* 10 * 0.00 * -0.02 * -0.01 * 0.00 * 0.00 * -0.04 * 0.02 *  
* 11 * 0.00 * -0.01 * -0.01 * 0.00 * 0.00 * -0.01 * 0.02 *  
* 12 * 0.00 * -0.00 * -0.00 * 0.01 * 0.01 * 0.02 * 0.04 *  
* 13 * 0.00 * 0.00 * 0.01 * 0.02 * 0.03 * 0.04 * 0.06 *  
* 14 * 0.00 * 0.01 * 0.02 * 0.03 * 0.04 * 0.06 * 0.07 *  
* 15 * 0.00 * 0.01 * 0.02 * 0.04 * 0.05 * 0.07 * 0.08 *  
* 16 * 0.00 * 0.01 * 0.03 * 0.04 * 0.06 * 0.07 * 0.08 *  
* 17 * 0.00 * 0.01 * 0.03 * 0.05 * 0.06 * 0.07 * 0.08 *  
* 18 * 0.00 * 0.01 * 0.03 * 0.04 * 0.05 * 0.06 * 0.07 *  
* 19 * 0.00 * 0.02 * 0.03 * 0.04 * 0.04 * 0.05 * 0.05 *  
* 20 * 0.00 * 0.05 * 0.04 * 0.03 * 0.03 * 0.03 * 0.03 *  
* 21 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 *  
* 22 * * * * *  
* 23 * * * * *  
* 24 * * * * *  
* 25 * * * * *  
* 26 * * * * *  
* 27 * * * * *  
* 28 * * * * *  
* 29 * * * * *  
* 30 * * * * *  
* 31 * * * * *  
*****
```

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

```

*****
* I * * * * *
* * 8 * 9 * 10 * 11 * 12 * 13 * 14 *
* J * * * * *
*****
* 1 * * * * *
* 2 * * * * *
* 3 * * * * *
* 4 * * * * *
* 5 * * * * *
* 6 * * * * *
* 7 * * * * *
* 8 * * * * *
* 9 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 *
* 10 * 0.02 * 0.03 * 0.01 * -0.00 * -0.01 * -0.02 * -0.01 *
* 11 * 0.04 * 0.05 * 0.03 * 0.02 * 0.01 * 0.03 * 0.11 *
* 12 * 0.05 * 0.06 * 0.05 * 0.04 * 0.04 * 0.06 * 0.14 *
* 13 * 0.07 * 0.07 * 0.06 * 0.05 * 0.02 * 0.01 * 0.02 *
* 14 * 0.08 * 0.08 * 0.06 * 0.03 * -0.03 * -0.12 * -0.24 *
* 15 * 0.09 * 0.08 * 0.05 * -0.00 * -0.10 * -0.28 * -0.56 *
* 16 * 0.09 * 0.07 * 0.04 * -0.03 * -0.17 * -0.41 * -0.82 *
* 17 * 0.08 * 0.06 * 0.03 * -0.05 * -0.21 * -0.48 * -0.94 *
* 18 * 0.06 * 0.05 * 0.02 * -0.06 * -0.19 * -0.44 * -0.88 *
* 19 * 0.04 * 0.04 * 0.01 * -0.04 * -0.14 * -0.31 * -0.63 *
* 20 * 0.02 * 0.02 * 0.00 * -0.02 * -0.07 * -0.14 * -0.30 *
* 21 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 *
* 22 * * * * *
* 23 * * * * *
* 24 * * * * *
* 25 * * * * *
* 26 * * * * *
* 27 * * * * *
* 28 * * * * *
* 29 * * * * *
* 30 * * * * *
* 31 * * * * *
*****

```

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

I	15	16	17	18	19	20	21
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							26.91
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5.43	17.24
10	0.13	0.42	1.22	2.65	5.42	8.96	10.11
11	0.36	0.87	1.87	3.42	5.44	6.75	5.54
12	0.37	0.81	1.54	2.48	3.32	3.24	1.46
13	0.09	0.23	0.44	0.58	0.39	-0.55	-2.51
14	-0.41	-0.67	-1.07	-1.72	-2.78	-4.37	-6.45
15	-0.99	-1.66	-2.66	-4.06	-5.91	-8.12	-10.42
16	-1.48	-2.50	-4.01	-6.11	-8.77	-11.73	-14.46
17	-1.72	-2.96	-4.85	-7.55	-11.09	-15.09	-18.63
18	-1.63	-2.89	-4.90	-7.98	-12.39	-17.93	-23.04
19	-1.19	-2.22	-3.95	-6.93	-11.87	-19.54	-27.87
20	-0.55	-1.12	-2.08	-4.06	-8.14	-17.89	-33.57
21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-6.49	-40.97
22							-45.58
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 4
PAGE

I										
J	22	23	24	25	26	27	28			

1		-13.00	-12.70	-12.40	-12.10	-11.80	-11.50			
2		-8.80	-8.94	-9.49	-10.20	-10.89	-11.46			
3		-4.40	-5.04	-6.63	-8.47	-10.14	-11.54			
4		0.20	-0.85	-3.99	-7.14	-9.76	-11.86			
5		8.40	3.62	-2.06	-6.58	-9.94	-12.52			
6		22.58	6.90	-1.75	-7.13	-10.77	-13.48			
7	34.65	19.46	4.40	-3.71	-8.68	-12.04	-14.58			
8	19.11	8.52	-0.37	-6.40	-10.45	-13.31	-15.55			
9	10.13	2.62	-3.76	-8.47	-11.81	-14.23	-16.16			
10	5.20	-0.69	-5.85	-9.79	-12.64	-14.72	-16.36			
11	1.56	-3.16	-7.40	-10.72	-13.13	-14.86	-16.20			
12	-1.81	-5.54	-8.92	-11.58	-13.49	-14.81	-15.77			
13	-5.23	-8.11	-10.64	-12.57	-13.88	-14.68	-15.17			
14	-8.76	-10.91	-12.62	-13.76	-14.37	-14.56	-14.49			
15	-12.47	-13.98	-14.86	-15.15	-14.98	-14.47	-13.76			
16	-15.39	-17.31	-17.33	-16.70	-15.67	-14.42	-13.03			
17	-20.64	-20.95	-20.00	-18.35	-16.42	-14.40	-12.33			
18	-25.38	-24.96	-22.84	-20.05	-17.17	-14.40	-11.71			
19	-30.92	-29.47	-25.84	-21.75	-17.91	-14.45	-11.23			
20	-37.89	-34.75	-29.05	-23.47	-18.71	-14.67	-11.00			
21	-47.73	-41.47	-32.72	-25.44	-19.80	-15.24	-11.20			
22	-66.16	-51.64	-37.56	-28.16	-21.57	-16.45	-11.99			
23	-99.93	-68.12	-44.27	-32.24	-24.36	-18.43	-13.43			
24		-75.28	-51.89	-37.35	-27.79	-20.87	-15.29			
25		-61.20	-50.05	-38.77	-29.79	-22.80	-17.09			
26		-51.60	-45.24	-37.30	-29.98	-23.77	-18.47			
27		-45.20	-40.07	-34.40	-28.84	-23.81	-19.33			
28		-38.40	-34.85	-30.89	-26.92	-23.18	-19.75			
29		-32.20	-29.64	-27.10	-24.56	-22.12	-19.83			
30		-25.60	-24.38	-23.18	-21.98	-20.82	-19.71			
31		-19.00	-19.10	-19.20	-19.30	-19.40	-19.50			

ΟΡΘΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΣΥ
NORMAL STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 5
PAGE

I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
J	29	30	31	32	33	*	*	*	*	*

1	-11.20	-10.90	-10.60	-10.30	-10.00	*	*	*	*	*
2	-11.95	-12.39	-12.82	-13.18	-13.00	*	*	*	*	*
3	-12.74	-13.87	-15.02	-16.22	-17.20	*	*	*	*	*
4	-13.65	-15.33	-17.15	-19.31	-22.00	*	*	*	*	*
5	-14.68	-16.77	-19.13	-22.14	-26.40	*	*	*	*	*
6	-15.78	-18.10	-20.82	-24.40	-29.60	*	*	*	*	*
7	-15.83	-19.20	-22.09	-25.92	-31.00	*	*	*	*	*
8	-17.61	-19.90	-22.82	-26.74	-32.00	*	*	*	*	*
9	-18.00	-20.12	-22.91	-26.83	-32.40	*	*	*	*	*
10	-17.94	-19.80	-22.35	-26.05	-31.40	*	*	*	*	*
11	-17.46	-18.98	-21.12	-24.40	-29.80	*	*	*	*	*
12	-16.64	-17.72	-19.32	-21.78	-25.20	*	*	*	*	*
13	-15.56	-16.09	-16.99	-18.56	-21.20	*	*	*	*	*
14	-14.31	-14.19	-14.30	-14.82	-16.00	*	*	*	*	*
15	-12.95	-12.13	-11.38	-10.75	-10.00	*	*	*	*	*
16	-11.55	-9.99	-8.35	-6.66	-5.00	*	*	*	*	*
17	-10.20	-7.90	-5.36	-2.56	0.10	*	*	*	*	*
18	-8.97	-6.00	-2.59	1.47	6.40	*	*	*	*	*
19	-7.98	-4.42	-0.20	5.04	11.80	*	*	*	*	*
20	-7.34	-3.29	1.59	7.84	16.20	*	*	*	*	*
21	-7.18	-2.74	2.63	9.56	19.00	*	*	*	*	*
22	-7.63	-2.88	2.80	10.04	19.60	*	*	*	*	*
23	-8.71	-3.72	2.07	9.31	19.00	*	*	*	*	*
24	-10.26	-5.15	0.57	7.40	15.80	*	*	*	*	*
25	-12.01	-7.00	-1.58	4.65	12.00	*	*	*	*	*
26	-13.71	-9.07	-4.18	1.30	7.80	*	*	*	*	*
27	-15.23	-11.22	-7.05	-2.51	2.00	*	*	*	*	*
28	-16.54	-13.39	-10.12	-6.46	-1.80	*	*	*	*	*
29	-17.66	-15.52	-13.29	-10.78	-7.60	*	*	*	*	*
30	-18.66	-17.61	-16.52	-15.35	-14.40	*	*	*	*	*
31	-19.60	-19.70	-19.80	-19.90	-20.00	*	*	*	*	*

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΤΧΥ
SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 1
PAGE

```
*****
* I * * * * *
* * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 *
* J * * * * *
*****
* 1 * * * * *
* 2 * * * * *
* 3 * * * * *
* 4 * * * * *
* 5 * * * * *
* 6 * * * * *
* 7 * * * * *
* 8 * * * * *
* 9 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 *
* 10 * 3.41 * 3.51 * 3.60 * 3.65 * 3.67 * 3.72 * 3.77 *
* 11 * 6.22 * 6.38 * 6.51 * 6.60 * 6.67 * 6.75 * 6.81 *
* 12 * 8.36 * 8.59 * 8.76 * 8.89 * 8.99 * 9.08 * 9.15 *
* 13 * 9.92 * 10.17 * 10.36 * 10.51 * 10.64 * 10.73 * 10.81 *
* 14 * 10.86 * 11.11 * 11.32 * 11.48 * 11.61 * 11.71 * 11.78 *
* 15 * 11.15 * 11.42 * 11.63 * 11.79 * 11.92 * 12.02 * 12.08 *
* 16 * 10.86 * 11.10 * 11.30 * 11.45 * 11.57 * 11.66 * 11.72 *
* 17 * 9.92 * 10.15 * 10.33 * 10.47 * 10.57 * 10.65 * 10.69 *
* 18 * 8.36 * 8.56 * 8.71 * 8.83 * 8.91 * 8.97 * 9.01 *
* 19 * 6.22 * 6.33 * 6.45 * 6.54 * 6.60 * 6.64 * 6.67 *
* 20 * 3.41 * 3.49 * 3.56 * 3.61 * 3.64 * 3.66 * 3.67 *
* 21 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 *
* 22 * * * * *
* 23 * * * * *
* 24 * * * * *
* 25 * * * * *
* 26 * * * * *
* 27 * * * * *
* 28 * * * * *
* 29 * * * * *
* 30 * * * * *
* 31 * * * * *
*****
```

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΤΧΥ
SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

I	8	9	10	11	12	13	14
J							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	9.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	3.78	3.78	3.78	3.80	3.82	3.86	3.95
11	6.84	6.86	6.87	6.89	6.92	6.95	7.02
12	9.20	9.22	9.24	9.25	9.25	9.24	9.19
13	10.86	10.89	10.90	10.89	10.86	10.77	10.60
14	11.83	11.86	11.86	11.83	11.76	11.62	11.36
15	12.13	12.14	12.14	12.09	12.01	11.85	11.57
16	11.75	11.76	11.74	11.70	11.61	11.47	11.24
17	10.72	10.72	10.69	10.65	10.58	10.48	10.34
18	9.02	9.01	8.99	8.94	8.89	8.84	8.80
19	6.67	6.66	6.63	6.59	6.56	6.53	6.56
20	3.67	3.65	3.64	3.61	3.58	3.57	3.59
21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΤΧΥ
SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

I	15	16	17	18	19	20	21
J							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							40.37
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	21.62	23.19
10	4.10	4.38	4.79	5.40	6.26	9.77	7.96
11	7.10	7.17	7.15	6.85	6.00	4.61	1.52
12	9.07	8.77	8.14	6.95	4.95	2.11	-1.42
13	10.26	9.64	8.56	6.82	4.29	1.03	-2.63
14	10.90	10.10	8.82	6.90	4.24	0.93	-2.76
15	11.09	10.31	9.09	7.29	4.80	1.63	-2.01
16	10.86	10.27	9.35	7.95	5.92	3.11	-0.41
17	10.15	9.88	9.45	8.76	7.55	5.45	2.17
18	8.81	8.90	9.08	9.35	9.49	8.81	6.11
19	6.70	7.04	7.73	9.00	11.09	13.42	12.19
20	3.73	4.05	4.77	6.39	10.25	19.43	22.42
21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	25.74	42.44
22							68.37
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΤΧΥ
SHEAR STRESSES

ΣΕΛΙΣ NO 4
PAGE

I	22	23	24	25	26	27	28
1		0.00	3.44	6.12	8.02	9.17	9.55
2		0.00	3.51	6.38	8.35	9.43	9.71
3		0.00	3.88	6.89	8.74	9.61	9.69
4		0.00	4.82	7.78	9.19	9.59	9.35
5		0.00	6.69	8.95	9.44	9.16	8.51
6		5.64	9.60	9.71	8.91	7.95	6.99
7	23.10	16.11	11.36	8.77	7.00	5.70	4.68
8	25.29	13.67	8.18	5.34	3.61	2.47	1.68
9	13.14	6.37	2.68	0.63	-0.58	-1.31	-1.70
10	3.34	-0.34	-2.67	-4.03	-4.78	-5.12	-5.12
11	-2.07	-4.91	-6.80	-7.90	-8.43	-8.53	-8.25
12	-4.88	-7.66	-9.58	-10.74	-11.28	-11.30	-10.86
13	-6.15	-9.07	-11.22	-12.59	-13.26	-13.32	-12.83
14	-6.36	-9.50	-11.91	-13.53	-14.39	-14.56	-14.08
15	-5.73	-9.10	-11.79	-13.66	-14.71	-15.00	-14.58
16	-4.29	-7.93	-10.91	-13.01	-14.23	-14.63	-14.31
17	-1.92	-5.94	-9.23	-11.55	-12.90	-13.42	-13.22
18	1.66	-2.93	-6.63	-9.17	-10.66	-11.31	-11.29
19	7.04	1.47	-2.86	-5.71	-7.39	-8.24	-8.47
20	15.53	7.95	2.47	-0.94	-3.00	-4.20	-4.82
21	30.31	17.64	9.76	5.22	2.44	0.64	-0.54
22	56.02	30.91	18.61	12.28	8.40	5.81	3.98
23	66.52	41.44	26.11	18.29	13.59	10.45	8.15
24		18.72	21.46	19.00	16.11	13.58	11.40
25		0.00	12.38	15.91	16.09	15.05	13.51
26		0.00	8.33	13.20	15.22	15.51	14.75
27		0.00	6.67	11.60	14.45	15.51	15.46
28		0.00	6.07	10.86	14.04	15.68	15.95
29		0.00	5.90	10.64	13.97	15.87	16.39
30		0.00	5.99	10.76	14.18	16.21	16.86
31		0.00	6.26	11.15	14.64	16.73	17.42

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΑΙ ΤΑΣΕΙΣ ΤΧΥ
SHEAR STRESSES

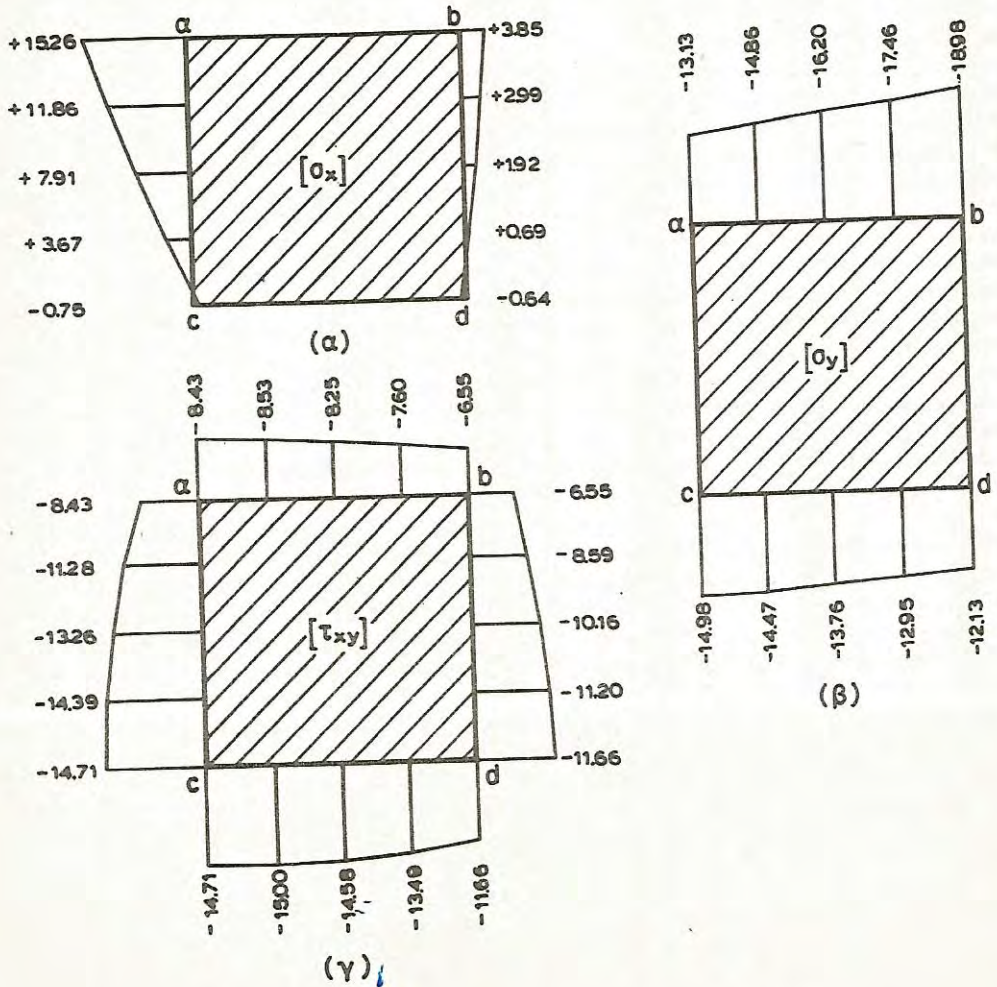
ΣΕΛΙΣ NO 5
PAGE

I	29	30	31	32	33
1	9.17	8.02	6.12	3.44	0.00
2	9.26	8.10	6.22	3.55	0.00
3	9.12	7.96	6.17	3.62	0.00
4	8.62	7.44	5.77	3.43	0.00
5	7.61	6.45	4.95	2.91	0.00
6	6.02	4.97	3.72	2.12	0.00
7	3.83	3.05	2.22	1.23	0.00
8	1.15	0.79	0.54	0.32	0.00
9	-1.81	-1.67	-1.30	-0.71	0.00
10	-4.81	-4.18	-3.19	-1.79	0.00
11	-7.60	-6.55	-5.03	-2.91	0.00
12	-9.98	-8.59	-6.60	-3.85	0.00
13	-11.79	-10.16	-7.80	-4.50	0.00
14	-12.98	-11.20	-8.62	-5.01	0.00
15	-13.49	-11.66	-8.96	-5.18	0.00
16	-13.29	-11.53	-8.87	-5.10	0.00
17	-12.36	-10.80	-8.41	-4.93	0.00
18	-10.67	-9.43	-7.45	-4.47	0.00
19	-8.18	-7.37	-5.92	-3.61	0.00
20	-4.98	-4.70	-3.90	-2.44	0.00
21	-1.26	-1.59	-1.53	-1.03	0.00
22	2.66	1.68	0.96	0.43	0.00
23	6.35	4.81	3.37	1.86	0.00
24	9.42	7.50	5.46	3.09	0.00
25	11.69	9.59	7.09	4.00	0.00
26	13.25	11.12	8.32	4.72	0.00
27	14.28	12.19	9.17	5.15	0.00
28	15.02	12.98	9.83	5.50	0.00
29	15.62	13.62	10.41	5.94	0.00
30	16.16	14.15	10.83	6.16	0.00
31	16.73	14.64	11.15	6.26	0.00

V.- Μελέτη τῶν ἀποτελεσμάτων.

Πρὸς διασταύρωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων ἀποκόπτομεν ἓν τυχόν τμήμα τοῦ δίσκου, ἐπιβάλλομεν ἐπὶ τοῦ συνόρου του τὰς ὑπολογισθείσας τάσεις καὶ ἔξετάζομεν τὴν ἰσορροπίαν.

Οὕτω, ἐν προκειμένῳ, ἀποκόπτομεν τὸ τετραγωνικὸν στοιχείον $abcd$ (Σχ.30) σελ. 86, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξύ τῶν διατομῶν $I=26, I=30, J=11, J=15$. Εἰς τὰ Σχ.34 (α, β, γ) ἐμφαίνεται τὸ ἐν λόγῳ τμήμα μὲ τὰς ἐπὶ τοῦ συνόρου του ἀναπτυσομένας τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.



Σχ.34. Τμήμα τοῦ δίσκου $abcd$ διαστάσεων $1cm \times 1cm$ μὲ τὰς ἐπὶ τοῦ συνόρου του τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Υπολογισμός των συνισταμένων επί των έδρων του abcd.

$$S_x|_c^a = 0.25X\left(\frac{15.26}{2} + 11.86 + 7.91 + 3.67 - \frac{0.75}{2}\right) = +7.67$$

$$S_x|_d^b = 0.25X\left(\frac{3.85}{2} + 2.99 + 1.92 + 0.69 - \frac{0.64}{2}\right) = +1.80$$

$$S_y|_a^b = 0.25X\left(-\frac{13.13}{2} - 14.86 - 16.20 - 17.46 - \frac{18.98}{2}\right) = -16.15$$

$$S_y|_c^d = 0.25X\left(-\frac{14.98}{2} - 14.47 - 13.76 - 12.95 - \frac{12.13}{2}\right) = -13.68$$

$$T|_c^a = 0.25X\left(-\frac{8.43}{2} - 11.28 - 13.26 - 14.39 - \frac{14.71}{2}\right) = -12.62$$

$$T|_d^b = 0.25X\left(-\frac{6.55}{2} - 8.59 - 10.16 - 11.20 - \frac{11.66}{2}\right) = -9.77$$

$$T|_a^b = 0.25X\left(-\frac{8.43}{2} - 8.53 - 8.25 - 7.60 - \frac{6.55}{2}\right) = -7.97$$

$$T|_c^d = 0.25X\left(-\frac{14.71}{2} - 15.00 - 14.58 - 13.49 - \frac{11.66}{2}\right) = -14.06$$

Υπολογισμός της θέσεως των συνισταμένων επί των έδρων.

$h = 0.25$ os_i = απόστασις Κ.Β. από την άνω ή την άριστεράν πλευράν των στοιχειωδών τραπεζίων.

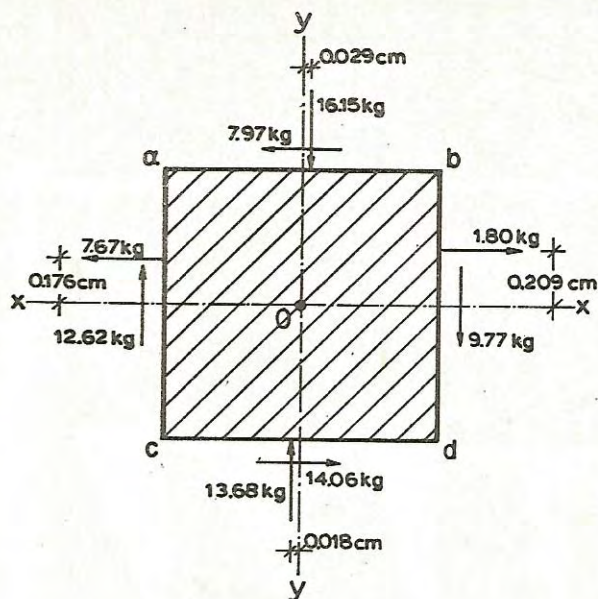
f_i = έμβαδόν στοιχειωδών τραπεζίων

	os_i	Απόστασις Κ.Β. από α	f_i	Ροπή M_i ως προς α
$S_x _c^a$	$\frac{15.26+2 \times 11.86}{15.26+11.86} \times \frac{h}{3} = 0.479 h$	0.479 h	13.56 h	6.49 h ²
	$\frac{11.86+2 \times 7.91}{11.86+7.91} \times \frac{h}{3} = 0.466 h$	1.466 h	9.88 h	14.49 h ²
	$\frac{7.91+2 \times 3.67}{7.91+3.67} \times \frac{h}{3} = 0.438 h$	2.438 h	5.79 h	14.12 h ²
	$\frac{3.67+2 \times 0.75}{3.67-0.75} \times \frac{h}{3} = 0.247 h$	3.247 h	1.46 h	4.74 h ²
	$os = \frac{39.84}{30.69} \times 0.25 = 0.324 \text{ cm}$		$\sum f_i = 30.69 h$	$\sum M_i = 39.84 h^2$

	OS_i	Απόσταση Κ.Β. από α	f_i	Ροπή M_i ως προς α
$S_x d$	$\frac{3.85+2 \times 2.99}{3.85+2.99} \times \frac{h}{3} = 0.479h$	0.479 h	3.42 h	1.64 h ²
	$\frac{2.99+2 \times 1.92}{2.99+1.92} \times \frac{h}{3} = 0.463h$	1.463 h	2.45 h	3.58 h ²
	$\frac{1.92+2 \times 0.69}{1.92+0.69} \times \frac{h}{3} = 0.421h$	2.421 h	1.91 h	3.17 h ²
	$\frac{0.69-2 \times 0.64}{0.69-0.64} \times \frac{h}{3} = -0.933h$	-0.933h	0.02 h	-0.02 h ²
$OS = \frac{8.37}{7.20} \times 0.25 = 0.291 \text{ cm}$			$\Sigma f_i = 7.20h$	$\Sigma M_i = 8.37 h^2$

	OS_i	Απόσταση Κ.Β. από α	f_i	Ροπή M_i ως προς α
$S_y d$	$\frac{-13.13-2 \times 14.86}{-13.13-14.86} \times \frac{h}{3} = 0.510h$	0.510 h	13.99 h	7.13 h ²
	$\frac{-14.86-2 \times 16.20}{-14.86-16.20} \times \frac{h}{3} = 0.507h$	1.507 h	13.53 h	23.40 h ²
	$\frac{-16.20-2 \times 17.46}{-16.20-17.46} \times \frac{h}{3} = 0.507h$	2.507 h	16.83 h	42.19 h ²
	$\frac{-17.46-2 \times 18.98}{-17.46-18.98} \times \frac{h}{3} = 0.508h$	3.508 h	18.22 h	63.92 h ²
$OS = \frac{136.64}{64.57} \times 0.25 = 0.529 \text{ cm}$			$\Sigma f_i = 64.57h$	$\Sigma M_i = 136.64 h^2$

	OS_i	Απόσταση Κ.Β. από α	f_i	Ροπή M_i ως προς α
$S_y c$	$\frac{-14.98-2 \times 14.47}{-14.98-14.47} \times \frac{h}{3} = 0.497h$	0.497 h	14.72 h	7.32 h ²
	$\frac{-14.47-2 \times 13.76}{-14.47-13.76} \times \frac{h}{3} = 0.496h$	1.496 h	14.11 h	21.11 h ²
	$\frac{-13.76-2 \times 12.95}{-13.76-12.95} \times \frac{h}{3} = 0.495h$	2.495 h	13.35 h	33.31 h ²
	$\frac{-12.95-2 \times 12.13}{-12.95-12.13} \times \frac{h}{3} = 0.495h$	3.495 h	12.54 h	43.83 h ²
$OS = \frac{105.57}{34.72} \times 0.25 = 0.482 \text{ cm}$			$\Sigma f_i = 54.72h$	$\Sigma M_i = 105.57 h^2$



Σχ. 35

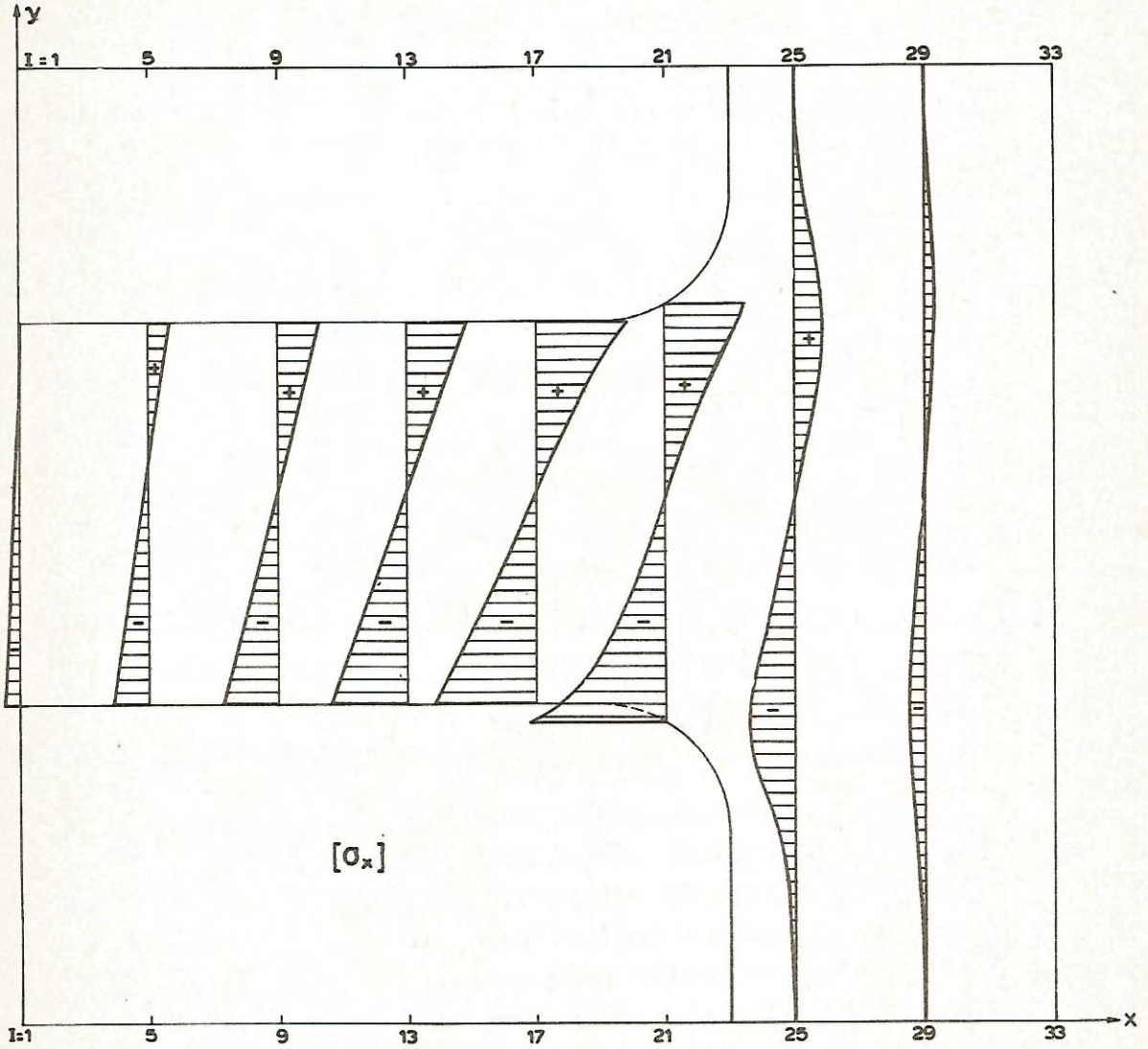
Έλεγχος ισορροπίας.

Προβολαί επί του x-x $\Sigma X = -7.67 + 1.80 - 7.97 + 14.06 = +0.22 \text{ kg} \approx 0$
 " " " y-y $\Sigma Y = -16.15 + 13.68 + 12.62 - 9.77 = +0.38 \text{ kg} \approx 0$

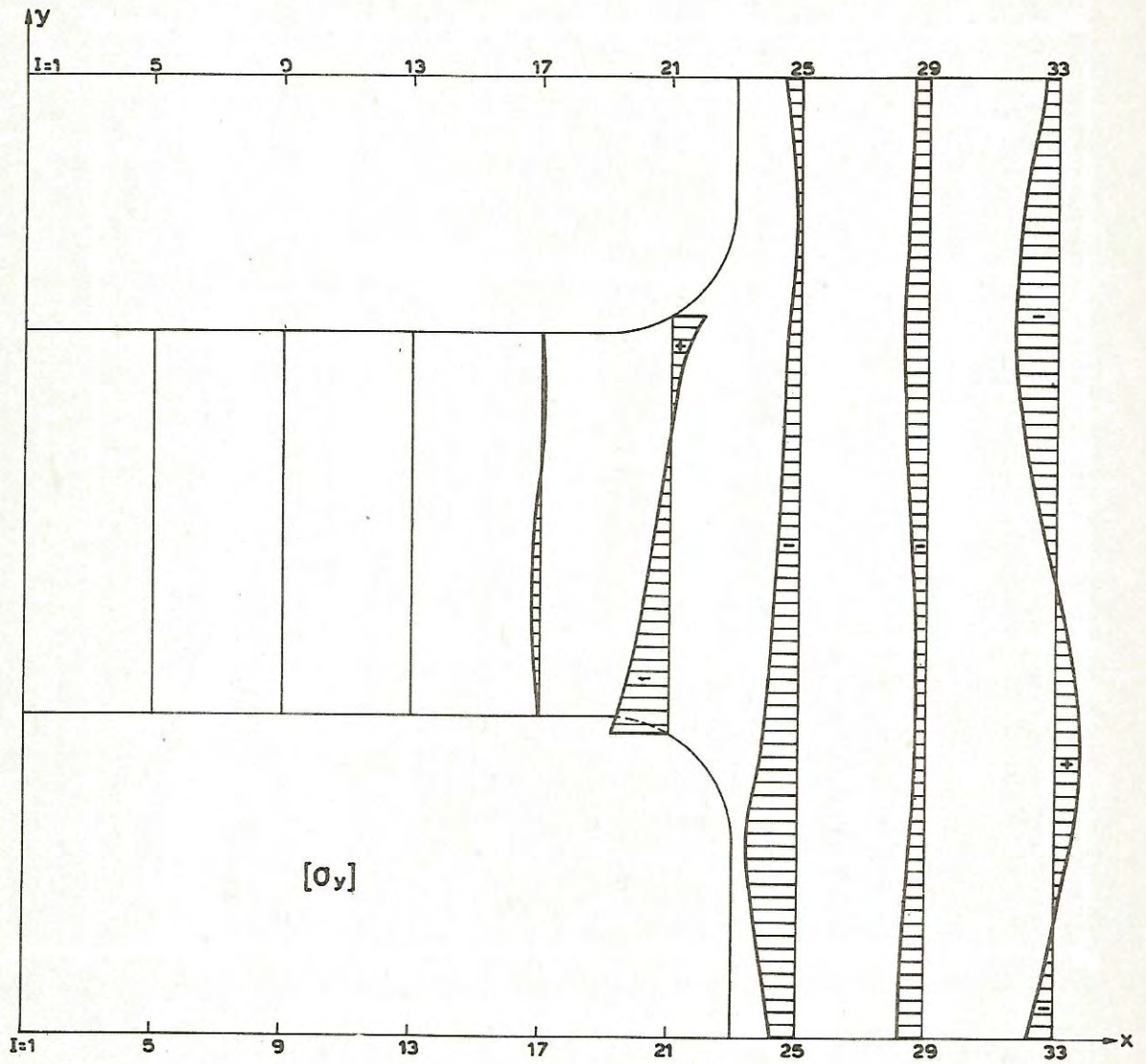
Ροπαί ως προς O.

$$\begin{aligned} & - 7.67 \times 0.176 = -1.350 \\ & + 1.80 \times 0.209 = +0.376 \\ & + 16.15 \times 0.029 = +0.468 \\ & + 13.68 \times 0.018 = +0.246 \\ & + 12.62 \times 0.500 = +6.310 \\ & - 7.97 \times 0.500 = -3.985 \\ & + 9.77 \times 0.500 = +4.885 \\ & - 14.06 \times 0.500 = -7.030 \end{aligned} \quad \Sigma M_O = -0.08 \text{ kgcm} \approx 0$$

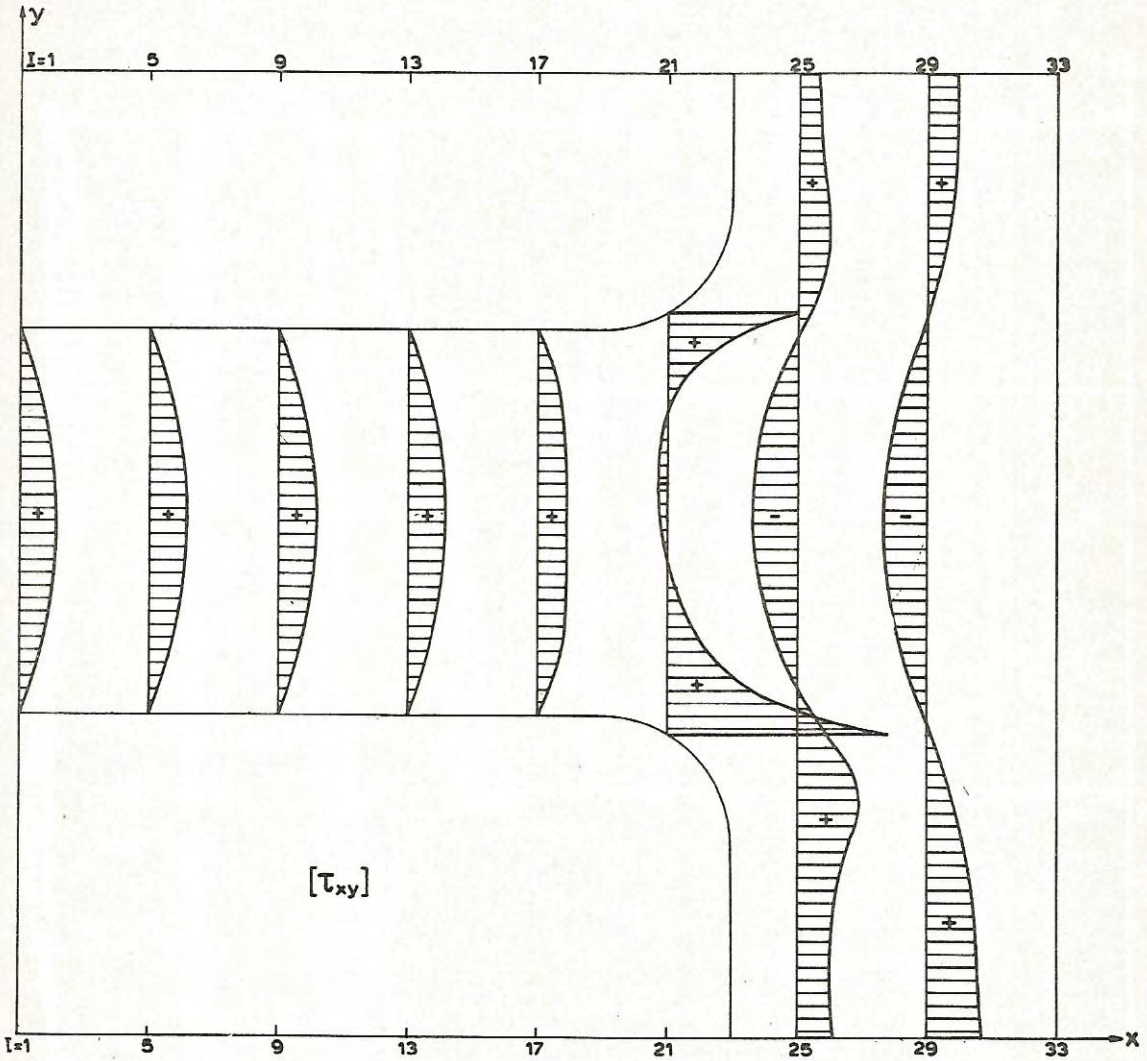
Έκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἰσορροπία εἶναι λίαν ἱκανοποιητικὴ δεδομένου ὅτι τὰ σφάλματα εἶναι:



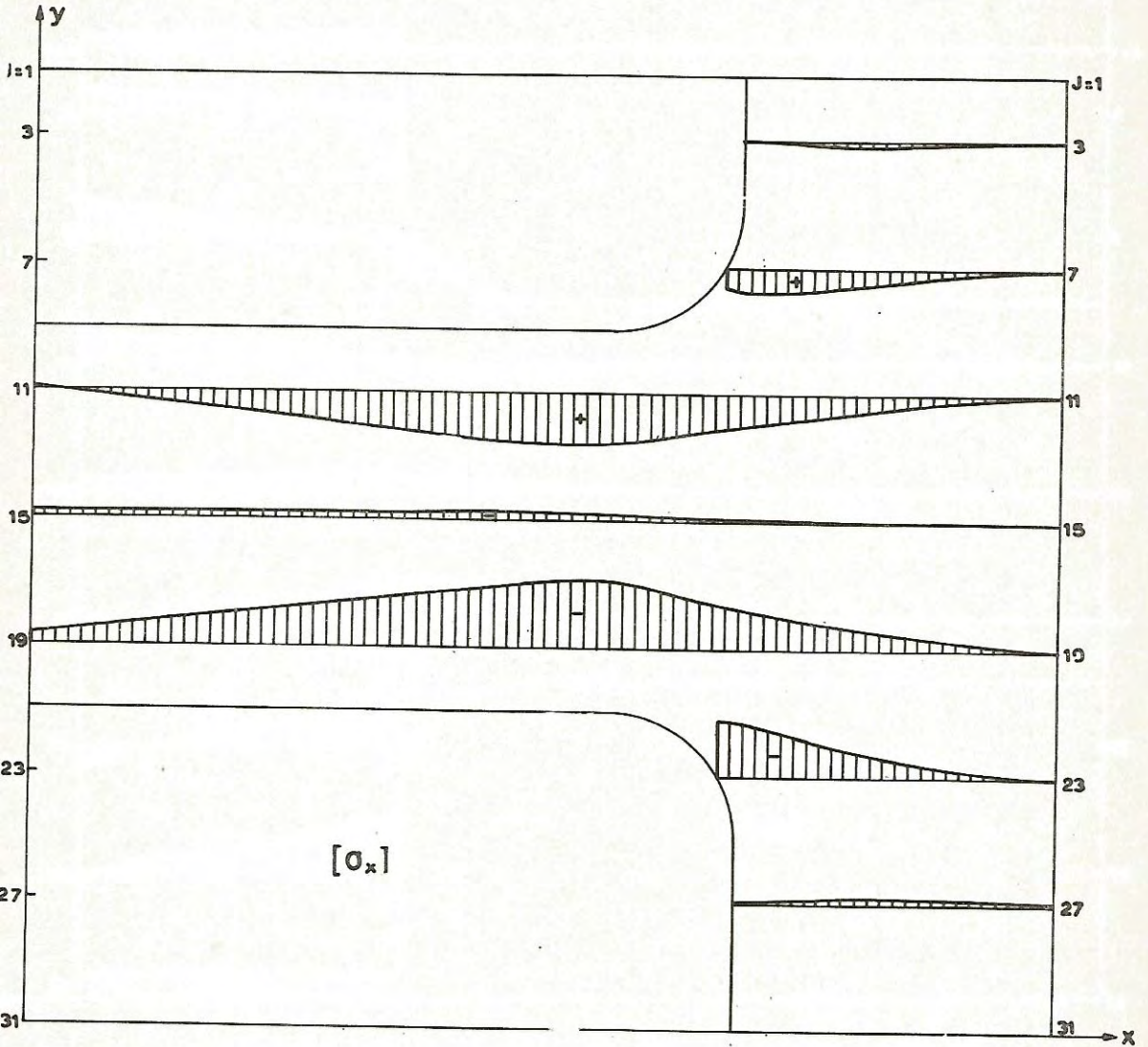
Σχ. 36α Κατανομή της σ_x εις διατομές καθέτους προς τόν άξονα x.



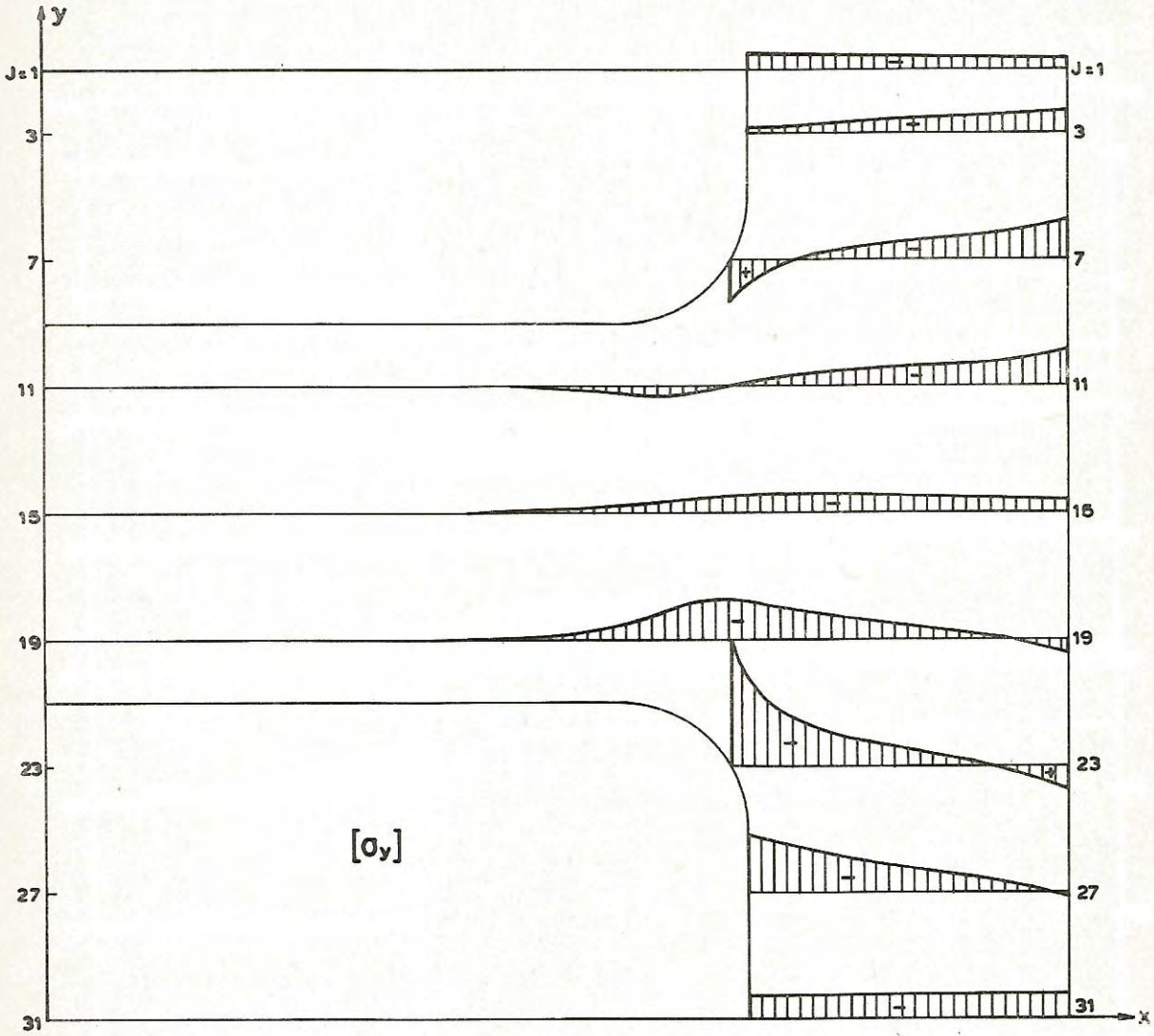
Σχ. 36β Κατανομή της $-\sigma_y$ εις διατομές καθέτους προς τόν άξονα x .



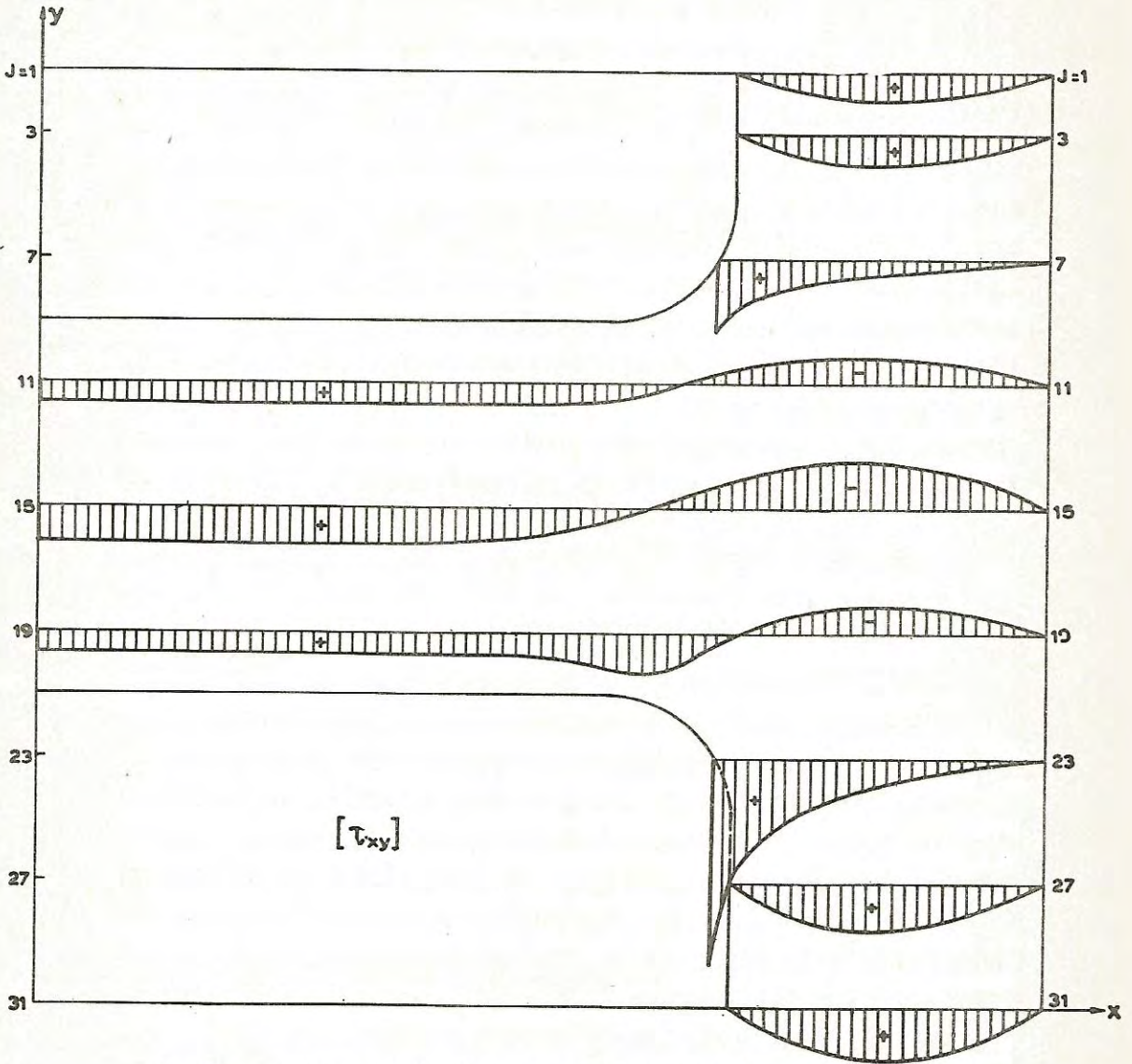
Σχ. 36γ Κατανομή της τ_{xy} εις διατομές καθέτους προς τόν άξονα x.



Σχ 37α Κατανομή της σ_x εις διατομές καθέτους προς τον άξονα y .



Σχ. 37β Κατανομή της σ_y εις διατομές καθέτους προς τον άξονα y .



Σχ. 37γ Κατανομή της τ_{xy} εις διατομές καθέτους προς τόν άξονα.

$$0.22/(7.67+1.80+7.97+14.06) = 0.7 \%$$

$$0.38/(16.15+13.68+12.62+9.77) = 0.73\%$$

$$0.08/(1.35+0.376+0.468+0.246+6.310+3.985+4.855+7.030) = 0.3 \%$$

Εἰς τὰ Σχ.36 καί 37 ἐσχεδιάσθησαν αἱ κατανομαί τῶν ὑπολογισθεισῶν ἐντατικῶν παραμέτρων εἰς διατομὰς καθέτους πρὸς τοὺς ἄξονας x καί y ἀντιστοίχως.

Ἐκ τοῦ Σχ.36 διαπιστοῦμεν ὅτι ἡ παραδοχὴ τῆς στατικῆς τῶν ραβδωτῶν φορέων, ὅσον ἀφορᾷ τὴν κατανομὴν τῶν τάσεων, παύει ἰσχύουσα ὅσον πλησιάζομεν εἰς τὸν κόμβον, ἥτοι ἡ κατανομὴ τῶν σ_x παύει νὰ εἶναι πλέον γραμμικὴ καί ἡ τῆς τ_{xy} παραβολικὴ, ἡ δὲ σ_y λαμβάνει μέγεθος διάφορον τοῦ μηδενός. Τὰ αὐτὰ διαπιστοῦμεν καί ἐκ τοῦ Σχ.37 μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι τὰ ἰσχύοντα διὰ τὰς σ_x ἰσχύουν διὰ τὰς σ_y καί ἀντιστρόφως.

VI.- Ὑπολογισμὸς τῶν κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 καί τῆς γωνίας $\omega = (\hat{n}_1, x)$.

Κατασκευὴ τοῦ δικτύου τροχιῶν τῶν κυρίων τάσεων.

Μὲ δεδομένα τὰς τιμὰς τῶν ἐντατικῶν παραμέτρων τῶν ὑπολογισθεισῶν ἐκ τοῦ προγράμματος SOLAPEQ, ὑπολογίζομεν τὰς κυρίας τάσεις σ_1, σ_2 καί τὴν γωνίαν διευθύνσεως $\omega = (\hat{n}_1, x)$ τῆς κυρίας τάσεως σ_1 ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x εἰς ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ καννάβου μὲ INDEX(i, j) $\neq 3$. Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ προγράμματος PRINCST τῆς §9, σελ.64. Εἰς τοὺς πίνακας τῶν σελίδων 125-139 ἐμφαίνονται αἱ τιμαὶ τῶν κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 καί τῆς γωνίας ω , ὡς αὐταὶ ἐξετυπώθησαν ὑπὸ τοῦ ὑπολογιστοῦ.

Τέλος ἐκ τῶν ὑπολογισθεισῶν γωνιῶν ω κατεσκευάσθησαν τὰ πεδία διευθύνσεων τῶν κυρίων τάσεων σ_1 (Σχ.38) καί σ_2 (Σχ.39).

ΚΨΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S1

ΣΕΛΙΣ NO 1
PAGE

I	1	2	3	4	5	6	7
J							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	0.20	4.08	8.16	12.28	16.36	20.08	24.56
10	3.09	5.06	7.66	10.58	13.66	16.84	20.14
11	5.49	6.94	8.63	10.52	12.58	14.79	17.10
12	7.23	8.35	9.53	10.78	12.09	13.49	14.95
13	8.40	9.20	9.98	10.77	11.57	12.36	13.18
14	8.96	9.45	9.91	10.33	10.73	11.10	11.44
15	8.90	9.12	9.29	9.42	9.50	9.57	9.58
16	8.29	8.23	8.16	8.04	7.90	7.74	7.57
17	7.08	6.82	6.55	6.29	6.01	5.74	5.46
18	5.35	4.95	4.59	4.26	3.95	3.68	3.43
19	3.26	2.82	2.51	2.25	2.02	1.84	1.68
20	1.08	0.92	0.77	0.66	0.58	0.52	0.46
21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S1

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

I	8	9	10	11	12	13	14
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	28.60	32.80	36.80	40.84	45.00	49.10	53.20
10	23.44	26.76	30.09	33.43	36.81	40.22	43.71
11	19.47	21.89	24.35	26.86	29.40	31.96	34.53
12	15.46	18.00	19.59	21.21	22.86	24.51	26.10
13	14.00	14.83	15.66	16.49	17.32	18.09	18.76
14	11.77	12.08	12.35	12.59	12.77	12.86	12.81
15	9.59	9.53	9.46	9.32	9.13	8.80	8.31
16	7.37	7.14	6.88	6.59	6.21	5.73	5.06
17	5.20	4.91	4.62	4.29	3.90	3.42	2.77
18	3.18	2.94	2.71	2.44	2.15	1.76	1.21
19	1.52	1.39	1.25	1.10	0.91	0.67	0.31
20	0.41	0.37	0.32	0.27	0.19	0.11	-0.07
21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S1

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

I	15	16	17	18	19	20	21
J							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							87.47
9	58.00	62.80	69.60	77.00	88.00	91.98	68.62
10	47.35	51.10	54.91	58.19	59.68	56.84	46.71
11	37.05	39.38	41.20	42.00	40.97	37.69	32.82
12	27.54	28.64	29.13	28.66	26.99	24.48	22.41
13	19.23	19.33	18.86	17.61	15.67	13.88	13.56
14	12.52	11.82	10.58	8.66	6.23	4.52	5.32
15	7.55	6.38	4.65	2.22	-0.93	-3.97	-2.98
16	4.11	2.76	0.82	-1.85	-5.33	-9.49	-11.78
17	1.82	0.46	-1.52	-4.29	-7.98	-12.46	-17.26
18	0.41	-0.83	-2.70	-5.46	-9.31	-14.23	-19.64
19	-0.26	-1.22	-2.76	-5.27	-9.09	-14.41	-20.95
20	-0.31	-0.85	-1.73	-3.44	-6.53	-11.42	-20.20
21	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.08	-14.10
22							-0.05
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S1

ΣΕΛΙΣ NO 4
PAGE

```

*****
* I * * * * *
* * 22 * 23 * 24 * 25 * 26 * 27 * 28 *
* J * * * * *
*****
* 1 * * 0.00 * 0.87 * 2.51 * 4.00 * 5.00 * 5.40 *
* 2 * * 0.00 * 1.41 * 3.67 * 5.37 * 6.23 * 6.31 *
* 3 * * 0.00 * 2.56 * 5.38 * 7.00 * 7.52 * 7.18 *
* 4 * * 0.20 * 5.18 * 8.01 * 9.08 * 8.94 * 8.00 *
* 5 * * 8.40 * 10.29 * 11.74 * 11.60 * 10.47 * 8.77 *
* 6 * * 23.99 * 17.66 * 16.23 * 14.30 * 11.97 * 9.48 *
* 7 * 50.05 * 35.20 * 25.31 * 20.49 * 16.68 * 13.25 * 10.09 *
* 8 * 60.79 * 39.09 * 29.04 * 22.92 * 18.19 * 14.15 * 10.58 *
* 9 * 49.22 * 36.69 * 29.01 * 23.39 * 18.72 * 14.64 * 10.98 *
* 10 * 38.03 * 31.69 * 26.77 * 22.44 * 18.46 * 14.76 * 11.30 *
* 11 * 29.13 * 26.27 * 23.52 * 20.60 * 17.57 * 14.52 * 11.48 *
* 12 * 21.48 * 20.80 * 19.72 * 18.13 * 16.15 * 13.89 * 11.43 *
* 13 * 14.41 * 15.23 * 15.50 * 15.12 * 14.18 * 12.79 * 11.02 *
* 14 * 7.40 * 9.40 * 10.82 * 11.55 * 11.63 * 11.15 * 10.15 *
* 15 * 0.11 * 3.13 * 5.61 * 7.39 * 8.48 * 8.91 * 8.75 *
* 16 * -7.84 * -3.81 * -0.28 * 2.55 * 4.64 * 6.01 * 6.73 *
* 17 * -15.88 * -11.71 * -7.01 * -3.06 * 0.06 * 2.41 * 4.07 *
* 18 * -24.17 * -20.95 * -14.78 * -9.53 * -5.28 * -1.89 * 0.76 *
* 19 * -26.03 * -28.66 * -23.60 * -16.80 * -11.29 * -6.83 * -3.19 *
* 20 * -26.47 * -29.08 * -28.08 * -23.31 * -17.31 * -12.06 * -7.55 *
* 21 * -23.21 * -27.12 * -26.07 * -22.80 * -19.02 * -15.17 * -11.13 *
* 22 * -11.83 * -21.38 * -21.31 * -18.53 * -15.48 * -12.49 * -9.45 *
* 23 * -0.06 * -12.95 * -13.96 * -12.65 * -10.61 * -8.26 * -5.75 *
* 24 * * -0.06 * -6.47 * -7.11 * -5.93 * -4.12 * -2.10 *
* 25 * * 0.00 * -3.56 * -3.56 * -2.32 * -0.68 * 0.98 *
* 26 * * 0.00 * -1.57 * -1.14 * 0.32 * 1.97 * 3.43 *
* 27 * * 0.00 * -0.61 * 0.45 * 2.24 * 4.00 * 5.32 *
* 28 * * 0.00 * 0.08 * 1.65 * 3.76 * 5.60 * 6.80 *
* 29 * * 0.00 * 0.57 * 2.70 * 5.08 * 6.98 * 8.03 *
* 30 * * 0.00 * 1.15 * 3.79 * 6.40 * 8.27 * 9.12 *
* 31 * * 0.00 * 1.87 * 5.11 * 7.88 * 9.64 * 10.21 *
*****

```

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S1

ΣΕΛΙΣ NO 5
PAGE

I	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
J	29	30	31	32	33					

1	5.14	4.25	2.80	1.04	0.00	*	*	*	*	*
2	5.71	4.54	2.94	1.21	0.00	*	*	*	*	*
3	6.18	4.72	2.97	1.19	0.00	*	*	*	*	*
4	6.52	4.72	2.79	1.01	0.00	*	*	*	*	*
5	6.76	4.62	2.54	0.79	0.00	*	*	*	*	*
6	6.96	4.55	2.38	0.70	0.00	*	*	*	*	*
7	7.17	4.57	2.39	0.81	0.00	*	*	*	*	*
8	7.41	4.68	2.44	0.85	0.00	*	*	*	*	*
9	7.72	4.86	2.51	0.81	0.00	*	*	*	*	*
10	8.09	5.16	2.65	0.80	0.00	*	*	*	*	*
11	8.50	5.60	2.91	0.79	0.00	*	*	*	*	*
12	8.82	6.09	3.37	1.08	0.00	*	*	*	*	*
13	8.92	6.49	3.79	1.20	0.00	*	*	*	*	*
14	8.68	6.70	4.21	1.48	0.00	*	*	*	*	*
15	8.00	6.61	4.53	1.86	0.00	*	*	*	*	*
16	6.80	6.17	4.69	2.25	0.00	*	*	*	*	*
17	5.07	5.36	4.82	3.19	0.10	*	*	*	*	*
18	2.75	4.11	4.80	4.83	6.40	*	*	*	*	*
19	-0.18	2.32	4.42	6.69	11.80	*	*	*	*	*
20	-3.57	0.06	3.70	8.46	16.20	*	*	*	*	*
21	-5.80	-2.21	2.98	9.66	19.00	*	*	*	*	*
22	-6.18	-2.28	2.94	10.06	19.60	*	*	*	*	*
23	-3.07	-0.12	3.67	9.63	19.00	*	*	*	*	*
24	-0.04	2.08	4.50	8.40	15.80	*	*	*	*	*
25	2.51	3.84	5.02	6.72	12.00	*	*	*	*	*
26	4.53	5.17	5.30	5.09	7.80	*	*	*	*	*
27	6.04	6.09	5.32	3.64	2.00	*	*	*	*	*
28	7.21	6.75	5.35	2.95	0.00	*	*	*	*	*
29	8.12	7.22	5.32	2.53	0.00	*	*	*	*	*
30	8.87	7.53	5.14	2.03	0.00	*	*	*	*	*
31	9.59	7.80	5.01	1.81	0.00	*	*	*	*	*

ΚΩΠΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S2

ΣΕΛΙΣ NO 1

PAGE

```
*****
* I * * * * *
* * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 *
* J * * * * *
*****
* 1 * * * * *
* 2 * * * * *
* 3 * * * * *
* 4 * * * * *
* 5 * * * * *
* 6 * * * * *
* 7 * * * * *
* 8 * * * * *
* 9 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 *
* 10 * -3.77 * -2.45 * -1.70 * -1.26 * -0.99 * -0.86 * -0.69 *
* 11 * -7.05 * -5.87 * -4.91 * -4.14 * -3.54 * -3.09 * -2.70 *
* 12 * -9.67 * -8.83 * -8.05 * -7.33 * -6.68 * -6.10 * -5.58 *
* 13 * -11.72 * -11.25 * -10.75 * -10.26 * -9.78 * -9.30 * -8.84 *
* 14 * -13.16 * -13.06 * -12.93 * -12.76 * -12.58 * -12.36 * -12.13 *
* 15 * -13.98 * -14.30 * -14.57 * -14.79 * -14.98 * -15.15 * -15.28 *
* 16 * -14.24 * -14.97 * -15.68 * -16.35 * -17.00 * -17.64 * -18.27 *
* 17 * -13.91 * -15.12 * -16.32 * -17.52 * -18.72 * -19.94 * -21.14 *
* 18 * -13.06 * -14.82 * -16.61 * -18.43 * -20.28 * -22.17 * -24.09 *
* 19 * -11.85 * -14.26 * -16.78 * -19.34 * -21.95 * -24.60 * -27.30 *
* 20 * -10.82 * -13.97 * -17.27 * -20.66 * -24.09 * -27.56 * -31.02 *
* 21 * -10.35 * -14.51 * -18.68 * -22.92 * -27.10 * -31.30 * -35.50 *
* 22 * * * * *
* 23 * * * * *
* 24 * * * * *
* 25 * * * * *
* 26 * * * * *
* 27 * * * * *
* 28 * * * * *
* 29 * * * * *
* 30 * * * * *
* 31 * * * * *
*****
```

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S2

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

I	8	9	10	11	12	13	14
J							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	-0.59	-0.50	-0.47	-0.43	-0.41	-0.39	-0.37
11	-2.37	-2.10	-1.91	-1.75	-1.62	-1.48	-1.32
12	-5.11	-4.68	-4.32	-4.00	-3.71	-3.43	-3.11
13	-8.39	-7.96	-7.56	-7.16	-6.80	-6.41	-5.97
14	-11.89	-11.64	-11.39	-11.12	-10.84	-10.52	-10.13
15	-15.41	-15.51	-15.61	-15.68	-15.74	-15.74	-15.65
16	-18.89	-19.50	-20.11	-20.72	-21.30	-21.85	-22.30
17	-22.39	-23.63	-24.89	-26.15	-27.41	-28.64	-29.80
18	-26.03	-27.99	-29.98	-31.98	-33.99	-35.99	-37.92
19	-30.01	-32.74	-35.49	-38.26	-41.03	-43.80	-46.56
20	-34.52	-38.01	-41.52	-45.01	-48.51	-52.03	-55.57
21	-39.75	-43.90	-48.15	-52.30	-56.50	-60.60	-64.92
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S2

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

I	15	16	17	18	19	20	21			
J										

1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										-0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03			6.77
10	-0.23	0.04	0.79	2.13	4.70	6.97				8.38
11	-1.01	-0.47	0.57	2.20	4.43	6.06				5.46
12	-2.66	-1.95	-0.86	0.64	2.28	3.03				1.36
13	-5.41	-4.63	-3.54	-2.15	-0.81	-0.62				-2.94
14	-9.60	-8.83	-7.74	-6.30	-4.78	-4.47				-7.10
15	-15.39	-14.87	-13.97	-12.53	-10.54	-8.76				-10.96
16	-22.58	-22.57	-22.10	-20.96	-18.97	-16.05				-14.52
17	-30.78	-31.48	-31.66	-31.07	-29.40	-26.38				-22.06
18	-39.74	-41.29	-42.37	-42.64	-41.66	-38.91				-34.01
19	-49.26	-51.84	-54.10	-55.73	-56.19	-54.68				-49.35
20	-59.16	-62.86	-66.60	-70.30	-73.53	-76.21				-71.18
21	-69.00	-74.00	-79.00	-85.60	-93.60	-109.92				-108.00
22										-148.24
23										
24										
25										
26										
27										
28										
29										
30										
31										

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S2

ΣΕΛΙΣ NO 4
PAGE

```

*****
I * * * * *
* 22 * 23 * 24 * 25 * 26 * 27 * 28 *
J * * * * *
*****
1 * * -13.00 * -13.57 * -14.91 * -16.10 * -16.80 * -16.90 *
2 * * -8.80 * -10.13 * -12.58 * -14.68 * -16.09 * -16.76 *
3 * * -4.40 * -7.02 * -10.58 * -13.41 * -15.37 * -16.56 *
4 * * 0.00 * -4.71 * -9.04 * -12.35 * -14.68 * -16.26 *
5 * * 0.00 * -3.10 * -7.86 * -11.48 * -14.05 * -15.92 *
6 * * 0.01 * -1.67 * -7.00 * -10.84 * -13.55 * -15.61 *
7 * 0.00 * 2.97 * -1.77 * -6.89 * -10.61 * -13.32 * -15.47 *
8 * 2.53 * 2.41 * -2.64 * -7.37 * -10.91 * -13.53 * -15.66 *
9 * 5.71 * 1.43 * -3.98 * -8.48 * -11.82 * -14.29 * -16.27 *
10 * 4.86 * -0.69 * -6.07 * -10.29 * -13.37 * -15.61 * -17.31 *
11 * 1.40 * -3.98 * -8.90 * -12.71 * -15.44 * -17.34 * -18.66 *
12 * -2.83 * -7.77 * -12.13 * -15.46 * -17.78 * -19.26 * -20.11 *
13 * -7.16 * -11.64 * -15.46 * -18.29 * -20.15 * -21.14 * -21.45 *
14 * -11.26 * -15.35 * -18.67 * -20.99 * -22.33 * -22.80 * -22.53 *
15 * -15.08 * -18.82 * -21.65 * -23.43 * -24.21 * -24.09 * -23.21 *
16 * -18.54 * -21.97 * -24.31 * -25.49 * -25.64 * -24.89 * -23.39 *
17 * -21.62 * -24.77 * -26.56 * -27.07 * -26.52 * -25.11 * -22.98 *
18 * -27.65 * -27.10 * -28.29 * -28.05 * -26.72 * -24.63 * -21.94 *
19 * -41.06 * -32.14 * -29.49 * -28.33 * -26.15 * -23.37 * -20.16 *
20 * -59.00 * -45.91 * -35.31 * -29.07 * -25.12 * -21.43 * -17.73 *
21 * -85.19 * -63.15 * -47.03 * -35.76 * -27.40 * -20.86 * -15.66 *
22 * -123.92 * -83.22 * -58.88 * -43.81 * -33.17 * -24.96 * -18.23 *
23 * -144.23 * -99.24 * -66.76 * -49.32 * -37.79 * -29.16 * -22.08 *
24 * * -79.94 * -62.03 * -49.29 * -39.66 * -31.88 * -25.15 *
25 * * -61.20 * -53.35 * -45.96 * -39.21 * -33.04 * -27.19 *
26 * * -51.60 * -46.83 * -42.12 * -37.63 * -33.12 * -28.40 *
27 * * -45.20 * -41.20 * -38.26 * -35.56 * -32.57 * -29.03 *
28 * * -38.40 * -35.90 * -34.51 * -33.35 * -31.72 * -29.33 *
29 * * -32.20 * -30.79 * -30.90 * -31.14 * -30.78 * -29.47 *
30 * * -25.60 * -25.79 * -27.47 * -29.06 * -29.85 * -29.57 *
31 * * -19.00 * -20.97 * -24.31 * -27.18 * -29.04 * -29.71 *
*****

```

ΚΥΡΙΑΙ ΤΑΣΕΙΣ

PRINCIPAL STRESSES S2

ΣΕΛΙΣ NO 5
PAGE

I	29	30	31	32	33
1	-16.34	-15.15	-13.40	-11.34	-10.00
2	-15.80	-16.26	-15.27	-14.06	-13.00
3	-17.13	-17.28	-17.14	-16.97	-17.20
4	-17.33	-18.09	-18.82	-19.89	-22.00
5	-17.38	-18.71	-20.26	-22.51	-26.40
6	-17.37	-19.19	-21.42	-24.58	-29.60
7	-17.44	-19.59	-22.29	-25.98	-31.00
8	-17.66	-19.93	-22.83	-26.74	-32.00
9	-18.13	-20.23	-22.98	-26.85	-32.40
10	-18.83	-20.50	-22.76	-26.17	-31.40
11	-19.69	-20.73	-22.17	-24.74	-29.80
12	-20.55	-20.82	-21.24	-22.43	-25.20
13	-21.24	-20.66	-19.92	-19.59	-21.20
14	-21.64	-20.20	-18.31	-16.36	-16.00
15	-21.64	-19.38	-16.42	-12.88	-10.00
16	-21.17	-18.21	-14.38	-9.58	-5.00
17	-20.21	-16.70	-12.30	-6.78	0.00
18	-18.68	-14.79	-10.10	-4.49	0.00
19	-15.55	-12.48	-7.79	-2.85	0.00
20	-13.93	-9.89	-5.60	-1.83	0.00
21	-11.37	-7.52	-4.02	-1.31	0.00
22	-12.49	-7.60	-3.81	-1.25	0.00
23	-15.87	-10.14	-5.04	-1.45	0.00
24	-18.95	-12.93	-7.03	-2.13	0.00
25	-21.42	-15.48	-9.19	-3.07	0.00
26	-23.34	-17.76	-11.49	-4.57	0.00
27	-24.81	-19.81	-13.85	-6.82	0.00
28	-25.04	-21.75	-16.36	-9.67	-1.80
29	-27.12	-23.68	-19.11	-13.43	-7.60
30	-28.15	-25.58	-21.93	-17.53	-14.40
31	-29.19	-27.50	-24.81	-21.71	-20.00

ΓΩΝΙΑ Ω=(N1,X)

ANGLE

ΣΕΛΙΣ NO 1
PAGE

```

*****
* I * * * * *
* * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 *
* J * * * * *
*****
* 1 * * * * *
* 2 * * * * *
* 3 * * * * *
* 4 * * * * *
* 5 * * * * *
* 6 * * * * *
* 7 * * * * *
* 8 * * * * *
* 9 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00 * 0.00
* 10 * 47.83 * 34.68 * 25.16 * 19.04 * 15.05 * 12.43 * 10.62
* 11 * 48.55 * 42.58 * 37.01 * 32.12 * 27.95 * 24.53 * 21.75
* 12 * 49.13 * 45.78 * 42.61 * 39.56 * 36.67 * 34.00 * 31.56
* 13 * 49.73 * 47.86 * 46.07 * 44.38 * 42.70 * 41.07 * 39.50
* 14 * 50.45 * 49.62 * 48.83 * 48.07 * 47.35 * 46.66 * 45.99
* 15 * 51.40 * 51.39 * 51.42 * 51.49 * 51.57 * 51.67 * 51.80
* 16 * 52.64 * 53.45 * 54.25 * 55.04 * 55.84 * 56.63 * 57.41
* 17 * 54.48 * 56.13 * 57.71 * 59.19 * 60.61 * 61.96 * 63.25
* 18 * 57.36 * 59.99 * 62.36 * 64.44 * 66.33 * 68.01 * 69.54
* 19 * 62.30 * 66.09 * 68.99 * 71.34 * 73.29 * 74.92 * 76.29
* 20 * 72.49 * 76.01 * 78.37 * 80.10 * 81.41 * 82.44 * 83.26
* 21 * 90.00 * 90.00 * 90.00 * 90.00 * 90.00 * 90.00 * 90.00
* 22 * * * * *
* 23 * * * * *
* 24 * * * * *
* 25 * * * * *
* 26 * * * * *
* 27 * * * * *
* 28 * * * * *
* 29 * * * * *
* 30 * * * * *
* 31 * * * * *
*****

```

ΓΩΝΙΑ Ω=(N1,X)

ANGLE

ΣΕΛΙΣ NO 2
PAGE

I	8	9	10	11	12	13	14
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	3.17	8.05	7.17	6.49	5.93	5.48	5.17
11	19.41	17.44	15.78	14.41	13.26	12.28	11.53
12	29.29	27.22	25.32	23.61	22.08	20.71	19.50
13	37.95	36.43	34.97	33.53	32.14	30.80	29.50
14	45.32	44.68	44.01	43.32	42.60	41.85	41.06
15	51.93	52.08	52.20	52.35	52.45	52.51	52.50
16	58.22	58.98	59.76	60.49	61.20	61.84	62.37
17	64.48	65.64	66.77	67.79	68.74	69.58	70.28
18	70.92	72.18	73.31	74.35	75.26	76.03	76.63
19	77.48	78.51	79.42	80.21	80.88	81.46	81.87
20	83.93	84.51	84.99	85.41	85.77	86.06	86.28
21	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΓΩΝΙΑ Ω=(N1,X)

ANGLE

ΣΕΛΙΣ NO 3
PAGE

I	15	16	17	18	19	20	21
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	14.03	33.70
10	4.97	4.94	5.10	5.56	6.58	11.54	24.31
11	10.96	10.55	10.31	10.07	9.59	8.48	12.28
12	18.47	17.50	16.45	14.87	11.82	5.68	3.19
13	28.21	26.79	24.94	21.83	15.69	4.08	176.12
14	40.15	38.97	37.14	33.62	25.22	5.98	170.70
15	52.38	52.02	51.18	49.25	43.98	21.45	166.79
16	62.75	62.88	62.66	61.82	59.85	54.23	164.88
17	70.74	70.88	70.57	69.56	67.58	64.22	171.31
18	76.98	76.95	76.37	74.90	72.03	67.21	57.68
19	82.06	81.92	81.23	79.55	75.94	69.09	60.87
20	86.36	86.24	85.77	84.49	81.09	69.09	60.41
21	90.00	90.00	90.00	90.00	90.00	71.57	59.18
22						76.02	57.64
23							56.32
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

ΓΩΝΙΑ Ω = (N1, X)

ANGLE

ΣΕΛΙΣ NO 4
PAGE

```

*****
* I * * * * *
* * 22 * 23 * 24 * 25 * 26 * 27 * 28 *
* J * * * * *
*****
* 1 * * 0.00 * 14.23 * 22.33 * 26.50 * 28.64 * 29.49 *
* 2 * * 0.00 * 18.74 * 25.87 * 28.22 * 28.87 * 28.66 *
* 3 * * 0.00 * 27.06 * 29.85 * 29.48 * 28.57 * 27.39 *
* 4 * * 90.00 * 38.62 * 32.98 * 29.55 * 27.17 * 25.22 *
* 5 * * 90.00 * 45.08 * 32.98 * 27.45 * 24.18 * 21.80 *
* 6 * * 75.96 * 41.77 * 28.39 * 22.59 * 19.28 * 16.94 *
* 7 * 56.29 * 45.64 * 28.53 * 19.93 * 15.44 * 12.71 * 10.75 *
* 8 * 32.26 * 24.10 * 15.55 * 10.33 * 7.19 * 5.14 * 3.68 *
* 9 * 18.59 * 10.60 * 4.58 * 1.13 * 178.91 * 177.40 * 176.41 *
* 10 * 5.81 * 179.40 * 175.32 * 172.87 * 171.26 * 170.14 * 169.51 *
* 11 * 175.70 * 170.52 * 167.59 * 165.84 * 164.64 * 163.80 * 163.39 *
* 12 * 168.16 * 163.78 * 161.49 * 160.12 * 159.16 * 158.50 * 158.22 *
* 13 * 162.60 * 158.75 * 156.76 * 155.54 * 154.69 * 154.12 * 153.89 *
* 14 * 158.51 * 154.92 * 153.05 * 151.86 * 151.03 * 150.47 * 150.24 *
* 15 * 155.50 * 151.98 * 150.04 * 148.77 * 147.89 * 147.30 * 147.05 *
* 16 * 153.35 * 149.55 * 147.37 * 145.93 * 144.97 * 144.38 * 144.07 *
* 17 * 152.94 * 147.25 * 144.58 * 142.92 * 141.93 * 141.38 * 141.11 *
* 18 * 53.84 * 143.83 * 140.55 * 138.89 * 138.11 * 137.86 * 137.81 *
* 19 * 55.21 * 61.15 * 128.10 * 130.96 * 131.89 * 132.77 * 133.52 *
* 20 * 53.64 * 54.51 * 68.47 * 99.54 * 115.08 * 121.87 * 125.62 *
* 21 * 51.01 * 50.85 * 55.73 * 63.16 * 72.20 * 83.50 * 96.91 *
* 22 * 45.85 * 45.59 * 48.86 * 51.87 * 54.06 * 55.67 * 57.45 *
* 23 * 33.68 * 36.93 * 40.76 * 43.06 * 44.69 * 45.74 * 46.68 *
* 24 * * 13.98 * 25.30 * 32.16 * 36.41 * 39.05 * 40.87 *
* 25 * * 0.00 * 14.92 * 24.33 * 30.37 * 34.25 * 36.80 *
* 26 * * 0.00 * 10.81 * 20.07 * 26.69 * 31.09 * 33.97 *
* 27 * * 0.00 * 9.60 * 18.42 * 24.95 * 29.32 * 32.11 *
* 28 * * 0.00 * 9.86 * 18.46 * 24.61 * 28.60 * 31.01 *
* 29 * * 0.00 * 11.06 * 19.66 * 25.25 * 28.62 * 30.48 *
* 30 * * 0.00 * 13.21 * 21.76 * 26.56 * 29.14 * 30.33 *
* 31 * * 0.00 * 16.63 * 24.65 * 28.32 * 29.96 * 30.40 *
*****

```

ΓΩΝΙΑ Ω=(N1,X)

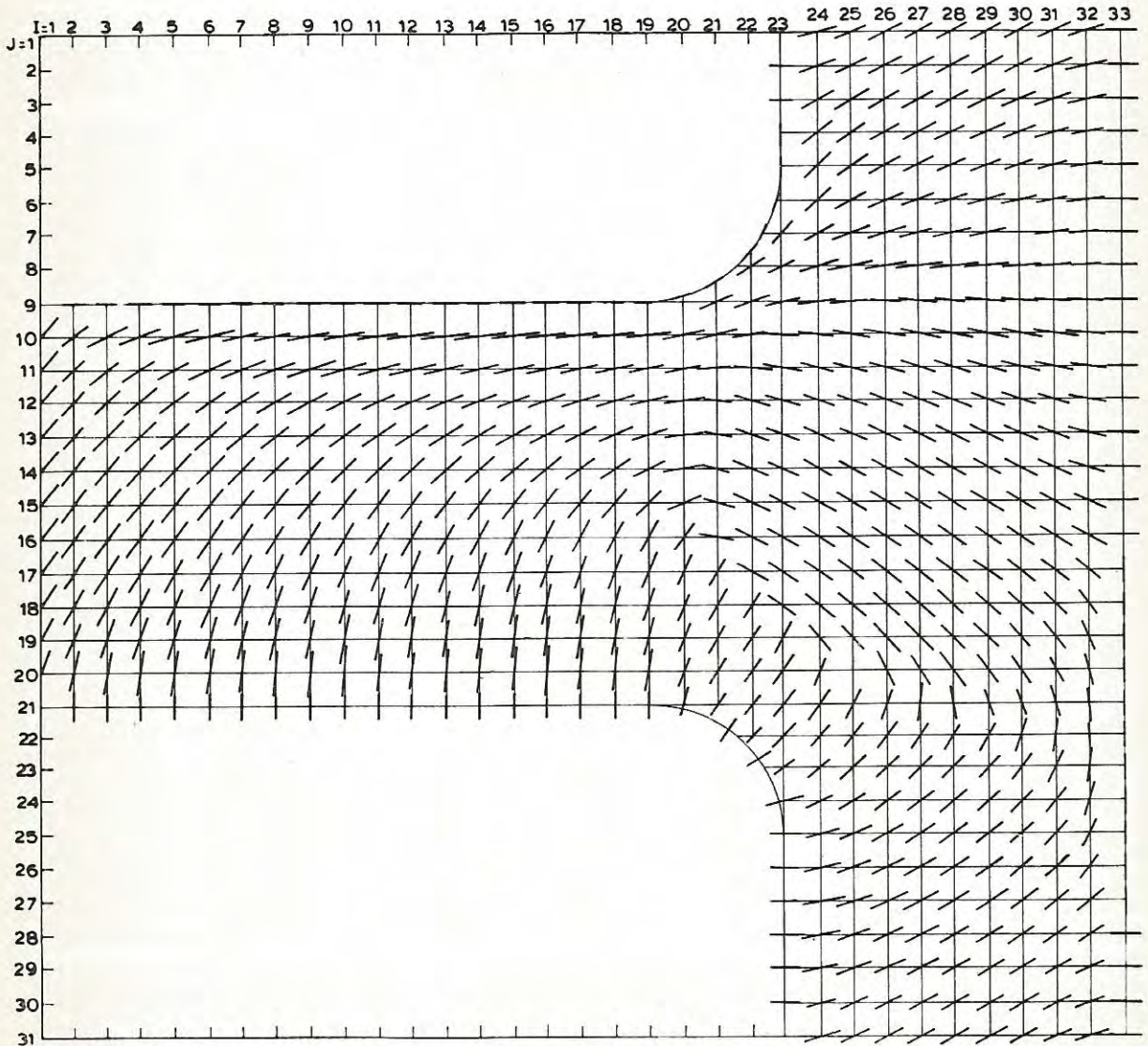
ANGLE

ΣΕΛΙΣ NO 5
PAGE

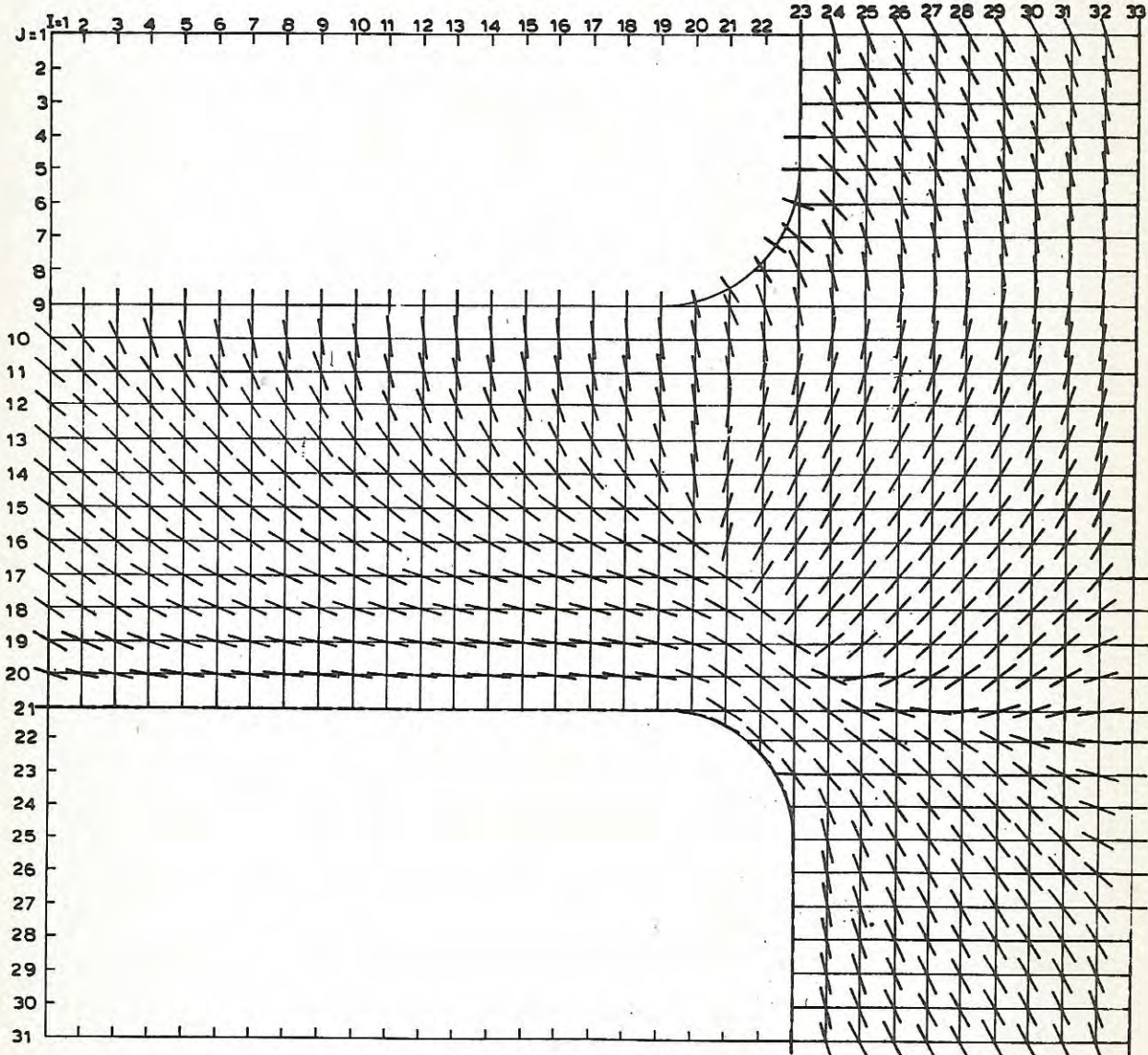
```

*****
* I * * * * *
* * 29 * 30 * 31 * 32 * 33 *
* J * * * * *
*****
* 1 * 29.31 * 27.92 * 24.57 * 16.88 * 0.00 *
* 2 * 27.68 * 25.58 * 21.54 * 13.87 * 0.00 *
* 3 * 25.74 * 23.19 * 18.94 * 11.75 * 0.00 *
* 4 * 23.15 * 20.37 * 16.15 * 9.59 * 0.00 *
* 5 * 19.55 * 16.79 * 12.87 * 7.24 * 0.00 *
* 6 * 14.83 * 12.38 * 9.12 * 4.83 * 0.00 *
* 7 * 9.07 * 7.32 * 5.18 * 2.64 * 0.00 *
* 8 * 2.63 * 1.84 * 1.23 * 0.66 * 0.00 *
* 9 * 175.97 * 176.17 * 177.07 * 178.53 * 0.00 *
* 10 * 169.52 * 170.49 * 172.72 * 176.18 * 0.00 *
* 11 * 163.67 * 165.07 * 168.17 * 173.41 * 0.00 *
* 12 * 158.59 * 160.15 * 163.77 * 170.43 * 0.00 *
* 13 * 154.27 * 155.76 * 159.41 * 167.16 * 0.00 *
* 14 * 150.54 * 151.78 * 155.02 * 162.91 * 0.00 *
* 15 * 147.20 * 148.10 * 150.61 * 157.65 * 0.00 *
* 16 * 144.07 * 144.48 * 145.76 * 150.20 * 0.00 *
* 17 * 140.99 * 140.81 * 140.43 * 139.39 * 90.00 *
* 18 * 137.67 * 136.98 * 134.79 * 126.91 * 90.00 *
* 19 * 133.67 * 132.46 * 127.98 * 114.59 * 90.00 *
* 20 * 127.11 * 125.48 * 118.48 * 104.17 * 90.00 *
* 21 * 106.75 * 108.41 * 102.96 * 95.42 * 90.00 *
* 22 * 61.31 * 70.39 * 81.73 * 87.82 * 90.00 *
* 23 * 48.39 * 53.15 * 64.62 * 80.19 * 90.00 *
* 24 * 42.70 * 46.03 * 54.27 * 72.03 * 90.00 *
* 25 * 38.86 * 41.51 * 47.02 * 62.60 * 90.00 *
* 26 * 36.02 * 38.01 * 41.31 * 51.19 * 90.00 *
* 27 * 33.89 * 35.18 * 36.57 * 39.96 * 90.00 *
* 28 * 32.33 * 32.81 * 32.44 * 30.31 * 0.00 *
* 29 * 31.22 * 30.94 * 29.23 * 24.06 * 0.00 *
* 30 * 30.43 * 29.39 * 26.57 * 19.52 * 0.00 *
* 31 * 29.83 * 28.05 * 24.21 * 16.10 * 0.00 *
*****

```

Σχ.38. Πεδίον διευθύνσεων κυρίας τάσεως σ_1



Σχ.39. Πεδίο διευθύνσεων κυρίας τάσης σ_2

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. Ε.Κοκκινόπουλου : Φωτοδιαγνωστική "Έρευνα Δίσκου ώπλισμένου σκυροδέματος είς Κτίριον Συμπιεστών Έργο-στασίου Λιπασμάτων Πτολεμαΐδος, Τεχνικά Χρονικά, 5, 1961.
2. Ε.Κοκκινόπουλου : Φωτοδιαγνωστική "Έρευνα 'Ιδιαζούσης Δοκού ώπλισμένου σκυροδέματος είς Κτίριον "Σιλό" 2ας Μονάδος Έργοστασίου Πτολεμαΐδος, Τεχνικά Χρονικά, 6, 1961.
3. M.M.Frocht : Photoelasticity, Vol.I, Vol.II, John Wiley and Sons, Inc.
4. Föppl/Mönch : Praktische Spannungsoptik, Springer-Verlag 1959.
5. J.W.Dally, W.F.Riley : Experimental Stress Analysis, Int. St. Edition, Mc Graw Hill Co.
6. M.Hetenyi : Handbook of Experimental Stress Analysis, John Wiley and Sons, Inc. 1957.
7. Timoshenko and Goodier: Theory of Elasticity, Int. St. Edition, 2nd ed., McGraw Hill Co.
8. F.W.Niefenfuhr and J.R.M.Randok (Editors): The collected Mathematical Works of J.H. and A.G.M. Michell, P.Noordhoff Ltd, Groningen - The Netherlands.
9. N.I.Muskhelishvili : Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P.Noordhoff Ltd, Groningen - The Netherlands, 1963.
10. D.D.Mc Cracken and W.S.Dorn: Numerical Methods and FORTRAN Programming, John Wiley and Sons, Inc., Int. Edition.

11. Arnold Sommerfeld : Partial Differential Equations in Physics, Lectures on Theoretical Physics, Vol. VI, Academic Press, 4th Printing, 1967.
12. R.V.Churchil : Fourier Series and Boundary Value Problems, McGraw-Hill 2nd Edition.
13. D.R.Bland : Solutions of Laplace's Equation, Library of Mathematics, Dover Publications Inc.
14. R.V.Churchil : Complex Variables and Applications, McGraw-Hill, Int. Stud. Ed.
15. M.R.Spiegel : Theory and Problems of Complex Variables, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company.
16. H.P.Hsu : Fourier Analysis, Tech Outlines, Simon and Schuster.
17. V.N.Faddeeva : Computational Methods of Linear Algebra, Dover Publications, Inc.
18. N.Θ.'Αποστολάτου : 'Αριθμητική 'Ανάλυσις, 'Αθήναι 1971.
19. N.Θ.'Αποστολάτου : 'Αριθμητικοί 'Υπολογισταί, 'Αθήναι 1972.
20. D.D.McCracken : A Guide to FORTRAN Programming, John Wiley and Sons, Inc. 16th ed., 1967
21. D.D.McCracken : A Guide to FORTRAN IV Programming, John Wiley and Sons, Inc., 1965.
22. A.E.H.Love : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, 4th ed., 1944
23. J.Prescott : Applied Elasticity, Dover Publications, 1961.
24. A.Föppl-L.Föppl : Drang und Zwang, Band I, Verlag von R. Oldenbourg, 3te Aufl. 1941.

25. I.S.Sokolnikoff: Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, Inc., 2nd ed., 1956.
26. K.Girkmann : Flächentragwerke, Springer-Verlag, 6ste Aufl., 1963.
27. Κ.Γεωργιοπούλου-Α.Μπιτσάκου: 'Αντοχή των 'Υλικών, 'Αθήναι 1967.
28. S.Timoshenko : Strength of Materials, Part. I, D. Van Nostrand Co., Inc., 3d ed., 1965.
29. W.I.Smirnow : Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil I, II, III₁, III₂, IV, V, 6te Aufl., VEB-Verlag, 1963.
- 30.- R.Sauer-I.Szabó: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil I, II, III, IV, Springer-Verlag, 1969
31. F.Scheid : Numerical Analysis, Schaum's Outlines Series, McGraw-Hill Book Co.
32. D.Moskowitz : The numerical Solution of Laplace's and Poisson's Equations. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. II, July, 1944.
33. F.S.Shaw : Relaxation Methods, Dover Publications, Inc.

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α

5π1.- Πρόβλημα Dirichlet. Μέθοδοι ολοκλήρωσης τῆς ἐξίσωσης Laplace.

Ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς ἐξίσωσης Laplace (2α, §2) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ κατωτέρω προβλήματος συνοριακῶν τιμῶν, γνωστοῦ ὡς "προβλήματος Dirichlet".

Νά προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις $U(x,y)$, ἱκανοποιούσα τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

ἐπὶ μιᾶς περιοχῆς R τοῦ ἐπιπέδου, ὅταν δίδεται ἡ $U(\Gamma)$, ἥτοι αἱ τιμαὶ τῆς ζητουμένης συναρτήσεως ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ συνόρου Γ τοῦ περικλειόντος τὴν R .

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐμφανίζεται, πλήν τῆς παρουσίας περιπτώσεως, καὶ εἰς πολλοὺς ἄλλους κλάδους τῆς φυσικῆς καὶ τῆς ἐπιστήμης τοῦ μηχανικοῦ. Ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὴν περίπτωσιν ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου περιοχῶν περικλειομένων ὑπὸ συνόρων γνωστοῦ δυναμικοῦ, εἰς τὸ πρόβλημα τῆς διαδόσεως τῆς θερμότητος, εἰς τὴν ὑδραυλικήν, εἰς τὸ πεδίου βαρύτητος, εἰς τὸν ὑπολογισμόν τοῦ σχήματος μεμβρανῶν κλπ. Ἔνεκα τούτου, ἀπὸ τότε ποὺ ἀνεφύη τὸ πρόβλημα, ἐγένετο προσπάθεια ἐπιλύσεώς του καὶ ἡσχολήθησαν μὲ αὐτὸ πολλοὶ καὶ διακεκριμένοι μαθηματικοί. Ἐχουν δέ δοθῆ μέχρι σήμερον ἀρκεταὶ μέθοδοι αὐστηρᾶς μαθηματικῆς λύσεως τοῦ προβλήματος, γνωστότεραι τῶν ὁποίων εἶναι:

α.- Δι' ἀναλυτικῶν συναρτήσεων [14], [15]

β.- Διὰ τῆς μεθόδου τῶν χωριζομένων μεταβλητῶν [12], [13], [16]

Ἡ αὐστηρὰ μαθηματικὴ λύσις εἶναι δυνατὴ εἰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ σύνορον Γ εἶναι ἀπλῆς μορφῆς. Ὄταν ὅμως τὸ σύνορον ἔχῃ πολὺπλοκον μορφήν, ὡς συμβαίνει εἰς τὰς περιπτώσεις τῶν δίσκων, ἡ ἐφαρμογὴ τῶν προαναφερθεισῶν μεθόδων διὰ τὴν ἐπίτευξιν λύσεως ὑπὸ ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν εἶναι ἢ ἀδύνατος ἢ τόσον δύσκολος, ὥστε διὰ τὰς ἐφαρμογὰς νά θεωρῆται πρακτικῶς ἀδύνατος.

Τουναντίον εἶναι πάντοτε ἐφικτόν νά ἐπιτύχωμεν προσεγγιστικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος δι' ἀριθμητικῆς ὁλοκλήρωσεως τῆς ἐξίσωσης Laplace μὲ ἀκρίβειαν λίαν ἱκανοποιητικὴν διὰ τὰς ἐφαρμογὰς μας. Μάλιστα δὲ διὰ τὰς ἐφαρμογὰς τῆς παρουσίας ἐργασίας, ὅπου αἱ τιμαὶ τῆς

συναρτήσεως U εἰς τό σύνορον δέν δίδονται ὑπό ἀναλυτικῆς ἐκφράσεως, ἀλλά ὑπό ἑνός πεπερασμένου συνόλου τιμῶν πειραματικῶς λαμβανομένων, ἡ ἀριθμητικὴ μέθοδος ἐνδείκνυται κατ' ἐξοχήν.

Ἡ ἀριθμητικὴ ὀλοκλήρωσις βασίζεται ἐπὶ τῆς-μεθόδου τῶν πεπερασμένων διαφορῶν, διὰ τῆς ὁποίας προσδιορίζονται πεπερασμένου πλήθους τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς περιοχῆς R . Χάρις δέ εἰς τὴν τεραστίαν ἀνάπτυξιν τῶν ψηφιακῶν ὑπολογιστῶν, τό πλήθος τῶν προσδιοριζομένων τιμῶν εἶναι πολὺ μεγάλον (π.χ. 15.000), ὥστε νά δυνάμεθα νά ἰσχυρισθῶμεν, ὅτι ἡ ὀλοκλήρωσις τῆς ἐξισώσεως Laplace ἐπιτυχῶνεται διὰ τὴν ἐκάστοτε ἐπιθυμητὴν ἀκρίβειαν.

Εἰς τὰς §§4-7 τῆς ἐργασίας ἐκτίθεται ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων διαφορῶν διὰ τὴν ὀλοκλήρωσιν τῶν ἐξισώσεων Laplace καὶ Poisson ὡς καὶ προσαρμογὴ τῆς μεθόδου διὰ τὴν σύνταξιν προγράμματος ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ εἰς γλῶσσαν FORTRAN διὰ τὴν ὀλοκλήρωσιν τῶν ἐξ. 2(α,β,γ,δ).

§2.- Ἐφαρμογὴ τῆς ἐξισώσεως τῶν τεσσάρων σημείων. Ἡ μέθοδος Gauss-Seidel διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος.

Δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἐξισώσεως τῶν τεσσάρων σημείων (11) εἰς ὅλους τοὺς κόμβους τοῦ καννάβου κειμένους ἐσωτερικῶς τοῦ συνόρου Γ , λαμβάνομεν ἓν γραμμικόν σύστημα ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων ἰσαριθμῶν πρὸς τὸ πλήθος τῶν προσδιοριστέων ἀγνώστων τιμῶν τῆς συναρτήσεως U . Δι' ἐπίλυσεως τοῦ συστήματος τούτου εὐρίσκομεν τὴν ζητουμένην συνάρτησιν, διδομένην ὑπό ἑνός πεπερασμένου συνόλου τιμῶν αὐτῆς.

Εἶναι προφανές ὅτι ἐκάστη ἐξίσωσις δέν δύναται νά περιέχῃ περισσότεράς τῶν πέντε ἀγνώστων.

Τό σύστημα ὑπό συμβολισμόν μητρῶν θά ἔχη τὴν μορφήν:

$$AU = C \quad (\alpha)$$

ἔνθα:

A: Τό τετραγωνικόν μητρῶν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων διαστάσεων $n \times n$.

U: Τό μητρῶν τῶν ἀγνώστων διαστάσεων $n \times 1$.

C: Τό μητρῶν τῶν γνωστῶν ὄρων ἐπίσης $n \times 1$.

Τό n δηλοῖ τό πλήθος τῶν ἀγνώστων καί ἰσοῦται πρὸς τό πλήθος τῶν σημείων τοῦ καννάβου ἐσωτερικῶς τοῦ συνόρου Γ .

Τά περισσότερα στοιχεῖα τοῦ A εἶναι μηδενικά, πλὴν ἐλαχίστων διαγωνίων (τεσσάρων) παραλλήλων πρὸς τὴν κυρίαν διαγώνιον αὐτοῦ. Τό μητρῶν τοῦτο ἀνήκει εἰς τὴν εἰδικὴν κατηγορίαν τῶν καλουμένων λωριδομόρφων μητρῶν (Band matrices).

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος (α) δίδεται ὑπό τῆς:

$$U = A^{-1}C$$

ἢτοι ἀνάγεται εἰς τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ μητρώου A . Ἡ ἀντιστροφή αὕτη ὅμως εἶναι λίαν δύσκολος διὰ μητρῶν μεγάλων διαστάσεων τῆς τάξεως π.χ. 6.000×6.000 , ὡς εἶναι δυνατόν νὰ ἐμφανισθοῦν ἐκ τῆς χρησιμοποίησεως λεπτοτάτου καννάβου πρὸς ἐπίτευξιν μεγάλης ἀκριβείας διὰ τὴν ὀλοκλήρωσιν τῆς ἐξισώσεως Laplace ἢ Poisson, διὰ τοῦτο καὶ δέν ἐνδείκνυται.

Ἐτέρα μέθοδος ἐπιλύσεως γραμμικῶν συστημάτων εἶναι ἡ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss. Αὕτη συνίσταται εἰς τὸν διὰ διαδοχικῶν ἀπαλοιφῶν μηδενισμόν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων κάτωθεν τῆς κυρίας διαγωνίου (τριγωνοποίησις τοῦ μητρώου) καὶ ἀκολουθῶς τὸν ὑπολογισμόν τῶν ἀγνώστων ἀναγωγικῶς με' ἐκκίνησιν ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη παρουσιάζει πεπερασμένον καὶ ἐκ τῶν προτέρων καθωρισμένον ἀριθμόν πράξεων*, δίδουσα πάντοτε, θεωρητικῶς τοῦλάχιστον, λύσιν τοῦ συστήματος ἐφ' ὅσον ἡ ὀρίζουσα $|A| \neq 0$. Λόγω ὅμως τοῦ μεγάλου πλήθους τῶν πράξεων τὸ σφάλμα στρογγυλεύσεως (round-off error) δυνατόν νὰ εἶναι σημαντικόν, με' ἀποτέλεσμα, ὅταν τὸ σύστημα εἶναι μεγάλο, νὰ μὴ εἶναι δυνατόν νὰ λάβωμεν ἀκριβῆ λύσιν. Προσέτι δὲ ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος δυναμένου νὰ λυθῇ δι' ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ εἶναι σημαντικῶς περιορισμένος, ἀκόμη καὶ διὰ μεγάλους ὑπολογιστὰς π.χ. διὰ τὸν ὑπολογιστὴν τοῦ Κ.Π.Ε. "Δημόκριτος" CDC 3300-1700 ὁ μέγιστος ἀριθμὸς ἐξισώσεων ἀνέρχεται εἰς 125 περίπου.

Ἡ πλέον προσφερομένη μέθοδος διὰ τὴν ἐπίλυσιν πολὺ μεγάλων συστημάτων εἶναι ἡ ἐπαναληπτικὴ μέθοδος Gauss-Seidel (Gauss - Seidel iteration method). Ἐνδείκνυται δὲ κατ' ἐξοχήν, ὅταν τὸ μητρῶον τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων περιέχῃ μεγάλου πλήθους μηδενικά στοιχεῖα (λωριδομόρφον μητρῶον) καὶ τὰ μὴ μηδενικά δημιουργοῦνται ὑπὸ τοῦ ὑπολογιστοῦ δι' ἐφαρμογῆς ἐνιαίου τύπου, ὡς συμβαίνει διὰ τὰ συστήματα, εἰς τὰ ὅποια μετασχηματίζονται αἱ ἐξισώσεις Laplace καὶ Poisson. Ἡ ἀρχὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας βασίζεται ἡ μέθοδος ἐκτίθεται ἀμέσως κατωτέρω.

* [10]

Εστω τό σύστημα τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= g_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= g_2 \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= g_n
 \end{aligned}
 \tag{β}$$

Διαιροῦντες ἐκάστην ἐξίσωσιν διὰ τοῦ διαγωνίου στοιχείου a_{ii} τοῦ μητρώου $A = [a_{ij}]$ ἔχομεν:

$$\begin{aligned}
 x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n &= \frac{g_1}{a_{11}} \\
 \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + x_2 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n &= \frac{g_2}{a_{22}} \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 + \dots + x_n &= \frac{g_n}{a_{nn}}
 \end{aligned}
 \tag{γ}$$

Τό σύστημα τοῦτο ὑπό μορφήν μητρώων γράφεται:

$$X = BX + F \tag{δ}$$

ἔνθα:

$$B = \begin{bmatrix}
 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\
 -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0
 \end{bmatrix}
 \quad
 F = \begin{bmatrix}
 \frac{g_1}{a_{11}} \\
 \frac{g_2}{a_{22}} \\
 \vdots \\
 \frac{g_n}{a_{nn}}
 \end{bmatrix}$$

* [17]

Τό μητρώον X διαστάσεων $n \times 1$ παριστᾶ τό διάνυσμα $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τοῦ n -διαστάτου χώρου, διά τοῦτο ἐν τοῖς ἐπομένοις θά γίνεταί χρησις τοῦ ὄρου διάνυσμα ἀντί μητρώον στήλη.

Μορφώνομεν τήν ἀκολουθίαν διανυσμάτων $X^{(k)}$ ὡς ἀκολουθῶς*:

Ἐκκινοῦμεν ἀπό ἓν γνωστόν διάνυσμα $X^{(0)}$ τελείως ἀθαιρέτως λαμβανόμενον $\text{πχ. } X^{(0)}(0, 0, \dots, 0)$ καί διά διαδοχικῆς ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (δ) λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= BX^{(0)} + F \\ X^{(2)} &= BX^{(1)} + F \\ X^{(3)} &= BX^{(2)} + F \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ X^{(k)} &= BX^{(k-1)} + F \end{aligned}$$

Ἐάν ἡ ἀκολουθία $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$ συγκλίνει εἰς τό διάνυσμα X , τότε τό ὄριον αὐτό θά εἶναι ἡ λύσις τοῦ συστήματος (δ) ἐπομένως καί τοῦ (β). Ἡ ἀύγκλισις τῆς ἀκολουθίας εἰς τό X δέν συμβαίνει πάντοτε, παρά μόνον ὅταν ἰσχύη ἡ κατωτέρω συνθήκη*:

Διά τήν σύγκλισιν τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου, διά τυχόν ἀρχικόν διάνυσμα $X^{(0)}$ καί οἰονδήποτε δεδομένον F , εἶναι ἀναγκαῖον καί ἱκανόν ὄλαι αἱ ἰδιοτιμαί τοῦ μητρώου B νά εἶναι ἀπολύτως μικρότεροι τῆς μονάδος.

Ἡ ἐξακρίβωσις τῆς ἰσχύος τῆς ὕπερθεν συνθήκης διά δεδομένον σύστημα δέν εἶναι εὐκόλος ἐργασία. Τοῦναντίον λίαν εὐκόλως διαπιστοῦται ἡ σύγκλισις ἐκ τῆς κατωτέρω προτάσεως, ἀποτελούσης ταχύτατον κριτήριον τῆς συγκλίσεως τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου Gauss-Seidel**.

Ἡ μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει εἰς τήν λύσιν τοῦ συστήματος, ἐάν:

α.- Τό σύστημα εἶναι μὴ ἐλαττώσιμον (irreducible), ἥτοι νά μὴ εἶναι δυνατόν δι' ἀνακατατάξεως τῶν ἐξισώσεων νά προσδιορισθοῦν μερικοὶ ἐκ τῶν ἀγνώστων δι' ἐπιλύσεως συστήματος ὁμάδος ἐξισώσεων ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ συνολικοῦ.

* [17], §17, σελ.118

** [10], §8.6, σελ.260

β.- Ισχύη

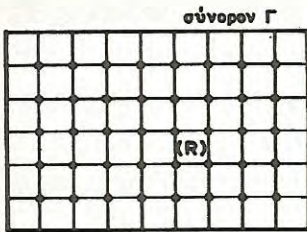
$$|a_{ii}| \geq |a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{in}|$$

δι' άλλους τους δείκτες i και δι' ένα τουλάχιστον έξ αυτών

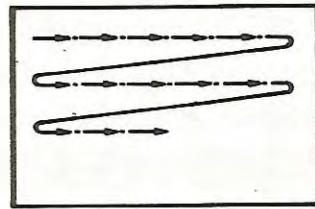
$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{in}|$$

Η συνθήκη είναι ικανή ούχι όμως και αναγκαία. Τούτέστιν είναι δυνατόν νά συγκλίνη ή μέθοδος άνευ τής ισχύος τής υπερθεν συνθήκης. Πάντως, εάν αυτή ισχύη, έχομεν όπωσδήποτε σύγκλισιν.

Προϋποτιθεμένης τής συγκλίσεως, ή εφαρμογή τής μεθόδου Gauss - Seidel διά τήν επίλυσιν του συστήματος, είς τό όποϊον μετασχηματίζονται ή εξίσωσις Laplace ή Poisson, είναι λίαν άπλή και συστηματοποιείται ως κατωτέρω.



Σχ.10



Σχ.11

Έστω επί παραδείγματι ότι πρόκειται νά εφαρμοσθή ή μέθοδος διά τήν έν Σχ.10 περιοχήν του επίπέδου (χάριν απλότητας όρθογωνική).

Δεχόμεθα κατ' αρχάς, ότι όλαί αι τιμαί είς τό έσωτερικόν τής περιοχής είναι ίσαι πρός μηδέν, όπερ σημαίνει ότι έκκινουμέν με διάνυσμα $U^{(0)} = 0$. Ακολουθως διατρέχομεν όλα τά έσωτερικά σημεία του καννάβου κατά κάποιαν σειράν (πχ. Σχ.11) εφαρμόζοντες δι' έν έκαστον τούτων τήν εξίσωσιν των τεσσάρων σημείων. Μετά τό πέρας τής πρώτης διαδρομής αι τιμαί U των έσωτερικων σημείων θα είναι έν γενει $\neq 0$, αλλά θα άποκλίνουν εκ των αληθων τιμων, θα έχωμεν δηλαδή τό διάνυσμα $U^{(1)}$. Συνεχίζοντες τήν επανάληφιν των διαδρομων λαμβάνομεν διαδοχικως τά διανύσματα:

$$U^{(2)}, U^{(3)}, \dots, U^{(κ)}$$

Όσον ο αριθμός των διαδρομών κ αυξάνει, τόσο το διάνυσμα $U^{(κ)}$ συγκλίνει προς τās τιμές τής U.

Βεβαίως ή εργασία αὐτη δύναται νά συνεχίζεται ἐπ' ἄπειρον διότι:

$$U = \lim_{κ \rightarrow \infty} U^{(κ)}$$

Πλήν ὅμως, ἐπειδή πρέπει νά ἐπιτύχωμεν λύσιν, δεχόμεθα κατὰ προσέγγισιν ὡς τοιαύτην ἐκεῖνο τό διάνυσμα, διὰ τό ὁποῖον ή ἀπολύτως μεγίστη διαφορά τῶν συνιστωσῶν του ἀπό τās ἀντιστοιχοῦς συνιστώσας τοῦ ἀμέσως προηγουμένου εἶναι μικρότερα ή ἴση δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ (π.χ. $\epsilon = 0.001$ ή 0.0001), ὁ ὁποῖος χαρακτηρίζει τήν ἀκρίβειαν τής λύσεως. Ἦτοι, ἐάν

$$U^{(κ)} \{U_1^{(κ)}, U_2^{(κ)}, \dots, U_n^{(κ)}\}$$

καί

$$U^{(κ-1)} \{U_1^{(κ-1)}, U_2^{(κ-1)}, \dots, U_n^{(κ-1)}\}$$

εἶναι αἱ τιμαί τής συναρτήσεως U κατὰ τās κ καί κ-1 διαδρομάς ἀντιστοιχῶς, τότε τό $U^{(κ)}$ εἶναι λύσις τοῦ συστήματος ἐφ' ὅσον ἰσχύει:

$$d = \max \{ |U_1^{(κ)} - U_1^{(κ-1)}|, |U_2^{(κ)} - U_2^{(κ-1)}|, \dots, |U_n^{(κ)} - U_n^{(κ-1)}| \} \leq \epsilon$$

§Π3.- Μετασχηματισμός τῶν ἐξισώσεων τής ἐπιπέδου ἐλαστικότητος.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (\beta)$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (\gamma)$$

Μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῶν συναρτήσεων σ_x , σ_y καί τ_{xy} καί ὅτι αὗται εἶναι συνεχεῖς, ἐκ τῶν (α) καί (β) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (\delta)$$

ή (γ) δυνάμει τής (δ) δίδει:

$$0 = \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = \Delta\sigma_x + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} = \Delta\sigma_x + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} \quad (\beta')$$

ομοίως

$$0 = \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} + \Delta\sigma_y = \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} + \Delta\sigma_y \quad (\gamma')$$

Διά παραγωγίσεως τῆς (α) ὡς πρὸς y καὶ τῆς (β) ὡς πρὸς x καὶ ἀθροίσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$0 = \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x^2} = \Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x\partial y} \quad (\delta')$$

θέτοντες $\sigma_x + \sigma_y = S$ καὶ διατηροῦντες τὴν ἐξίσωσιν (γ), προκύπτει ἐκ τῶν (β'), (γ') καὶ (δ'):

$$\Delta S = 0$$

$$\Delta\sigma_x = - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

$$\Delta\sigma_y = - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

$$\Delta\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}$$

ἤτοι αἱ ἐξισώσεις 2(α,β,γ,δ) τῆς §2.

A method of evaluation of the plane stress components
in the interior of thin plates from given boundary
stresses obtained experimentally.

By: J.T.Katsikadelis

Supervised by: F.E.Kokinopoulos

S u m m a r y

The purpose of the present thesis, which was entirely developed at the "Institute of Structural Analysis and Aseismic Research" of the National Technical University of Athens, under the supervision of Professor F.E.Kokinopoulos, is the evaluation of the plane stress components of thin plates of any shape, simply or multiply connected, with given boundary stresses obtained experimentally or by any other way.

The two-dimensional elastic problem of plane stress is considered under the following fundamental assumptions.

- 1.- The plate's material is homogenous, isotropic and elastic obeying to the Hooke's law.
- 2.- The boundary loads are parallel to the middle plane, coinciding with the x-y plane, and are uniformly distributed over the constant thickness of the plate which is considered very small compared with the other two dimensions. The thickness is taken equal to unity.
- 3.- The sign of the stress components is determined according to the classical convention of the theory of elasticity (fig.1)^{*}
- 4.- The body forces are omitted if not constant and hence the stress distribution becomes independent of the material's elastic constants. This also applies in multiply connected plane bodies when the resultant force vanishes on each boundary. If this is not the case the stress distribution for multiply conne-

* The numbers of figures and equations are those used in the greek text.

cted regions depends on the elastic constants. Nevertheless, the influence of the elastic constants on the stress distribution is very small and can be neglected for all practical purposes. Consequently experimental results obtained on models may be transferred to the prototype constructed from any material.

- 5.- In cases where the boundary of the plate has reentrant corners, i.e. discontinuities of the slope of the boundary at points where the boundary is concave (fig.2a), the discontinuity is removed by adjusting a segment of a curve, for example that of a circle. By this substitution the concentration of stresses is avoided and it is possible to confine the stress distribution within the elastic limits. This assumption, which has been also experimentally checked, changes the stress distribution in only a small region near the point of discontinuity and, hence, does not affect the applicability of the present method.

In §2 the equations governing the plane stress:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad 1(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

where $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ the Laplace operator, are transformed into the following equivalent system of four partial differential equation of elliptic type:

$$\Delta S = 0$$

$$\Delta \sigma_x = - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

$$\Delta \sigma_y = - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

$$\Delta \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}$$

$$2(\alpha, \beta, \delta)$$

($S = \sigma_x + \sigma_y =$ sum of normal stresses)

each of which contains only one unknown function to be determined. Under the assumption of given boundary stresses ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$), for example experimentally determined, the problem is reduced to the determination of the four unknown functions by solving the corresponding boundary value problems (Dirichlet problems). The equations (2 β, γ, δ) display a form analogous to the Beltrami-Michell equations for the three-dimensional elasticity, when introducing ν = Poisson ratio = 0. By integration of the eq. (2 α) with given boundary values $S(\Gamma)$ (Γ : the boundary of the region), the function $S(x, y)$ is determined. Then, after calculating the derivatives $\partial^2 S / \partial x^2, \partial^2 S / \partial y^2, \partial^2 S / \partial x \partial y$, the functions $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ are determined by integration of the eqs. (2 β), (2 γ), (2 δ) with given boundary values $\sigma_x(\Gamma), \sigma_y(\Gamma), \tau_{xy}(\Gamma)$.

For the integration of eqs. (2 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$), the numerical method is used. An integration by analytical functions or by the method of separation of variables would be possible only in cases of very simple boundaries. In the general case, where the boundary has any shape, the above mentioned analytical methods would surely fail and the numerical method appears as the most convenient. Especially in the present case, where the boundary values of the functions are not given analytically, but by a finite set of values experimentally determined, the use of the numerical method of integration is almost unavoidable.

In §3 the numerical method of integration of the following equations:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (\beta)$$

is developed, the above eqs. (α), (β) being representative forms of the eqs (2 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) and U being the unknown function, which has given values on the boundary. The $g(x, y)$ is a given function determined at the interior of the region R on which the eqs. (α) and (β) apply.

The numerical method of integration is well-known. Nevertheless,

it is again developed here, in order to show how to overcome some difficulties arising by the application of the four-point equation and by the evaluation of the function $g(x,y)$ at points near the boundary, when its intersections with the mesh lines do not coincide with mesh points.

The most general four-point equation derived here is the following:

$$\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right)U_0 = \frac{U_1}{a(a+c)} + \frac{U_2}{b(b+d)} + \frac{U_3}{c(a+c)} + \frac{U_4}{d(b+d)} - \frac{1}{2}g(x,y) \quad (8)$$

where a, b, c, d are the distances of point 0 from its four neighbouring points (fig. 7).

Eq. (8) is put under the form:

$$\left(\frac{1}{s_1s_3} + \frac{1}{s_2s_4}\right)U_0 = \frac{U_1}{s_1(s_1+s_3)} + \frac{U_2}{s_2(s_2+s_4)} + \frac{U_3}{s_3(s_1+s_3)} + \frac{U_4}{s_4(s_2+s_4)} - \frac{h^2}{2}g(x,y) \quad (10)$$

by setting $s_1 = a/h$, $s_2 = b/h$, $s_3 = c/h$, $s_4 = d/h$, where h = the standard mesh point distance of a square network superimposed upon the region R .

Using the relations (12), the four point equation is obtained in the form:

$$U_0 = C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3 + C_4U_4 + C_5g(x,y) \quad (11)$$

Further, the function $g(x,y)$ ($-\frac{\partial^2s}{\partial x^2}$, $-\frac{\partial^2s}{\partial y^2}$, $-\frac{\partial^2s}{\partial xy}$) is determined at the mesh points inside the boundary Γ . Two cases are distinguished:

Case 1. $a = b = c = d = h$

$$U_{xx} = \frac{U_1 - 2U_0 + U_3}{h^2} \quad (13)$$

$$U_{yy} = \frac{U_2 - 2U_0 + U_4}{h^2} \quad (14)$$

Case 2. $a \neq b \neq c \neq d$

$$U_{xx} = 2 \frac{s_3 U_1 - (s_1 + s_3) U_0 + s_1 U_3}{s_1 s_3 (s_1 + s_3) h^2} \quad (15)$$

$$U_{yy} = 2 \frac{s_4 U_2 - (s_2 + s_4) U_0 + s_2 U_4}{s_2 s_4 (s_2 + s_4) h^2} \quad (16)$$

The derivative U_{xy} is evaluated from the relation

$$U_{xy} = \frac{U_1 - U_2 + U_3 - U_4}{4h^2} \quad (17)$$

for equidistant neighbour mesh points (fig.9a) or from the relation

$$U_{xy} = \frac{U_1 - 2U_0 + U_3}{2h^2} \quad (18a)$$

and:

$$U_{xy} = - \frac{U_2 - 2U_0 + U_4}{2h^2} \quad (18b)$$

according to either the case of fig.(9b) or that of fig.(9γ). For the case of fig.(9b) U_{xy} is evaluated from the relation (17) after determination of the function values outside the boundary. This is always feasible, because the function U is harmonic.

Thus, on the base of the above mentioned, it becomes possible to apply the four-point equation and to determine the function $g(x,y)$ for any boundary shape.

After the application of the four-point equation at every mesh point inside the boundary, a linear algebraic system is formulated, the solution of which is obtained by using the Gauss-Seidel iteration method. In §4 it is shown that the sufficient conditions of convergence for the Gauss-Seidel method are satisfied. In §5 the necessity of speeding up the iteration method is discussed, by using the overrelaxation method (or extrapolated Liebmann method). In fig. 12 it is shown that considerable computation time may be saved - reduction by 229:48 = 4.8 times - introducing the relaxation parameter value of $\beta = 1.7$. The tedious work of the exact determination of the optimum β may be avoided by simply accepting the β - value

between 1.5 and 1.8.

In §6 the numerical method of integration is organized so that the computer program in FORTRAN language may be formulated. The program, which is given the name SOLAPEQ (Solution of the Laplace and Poisson equation), is displayed on pages 26-37, as was used for the application of §10.

The whole program consists of the main program and the three subroutines BOUND, SOPEQ and SHOW.

The user of the program is responsible for the following jobs:

- 1.- The preparation of data consisting of:
 - a. Determination of the boundary values of the stress components σ_x , σ_y , τ_{xy} .
 - b. Determination of the value of ϵ , which expresses the desired accuracy of the overrelaxation method.
 - c. Determination of the mesh-point distance h of the square network and the numbers v_x and v_y denoting the amount of mesh points in the directions x and y .
 - d. Choice of the value of the relaxation parameter β .

The boundary values are given in series starting from one point of the boundary and running it clockwise.

$$\sigma_x(i), \sigma_y(i), \tau_{xy}(i) \quad (i = 1 \text{ to } k)$$

where k is the total number of the boundary values.

- 2.- Formulation of the matrix INDEX(i, j) of the code numbers of the mesh points.
- 3.- The formulation of the matrices X(i, j), Y(i, j) of the coordinates of the mesh points.

When the above data are given, the program executes the following jobs:

- 4.- Calculation of $U = \sigma_x + \sigma_y$

Reads the boundary values $\sigma_x(i)$, $\sigma_y(i)$, ($i = 1$ to k) and calling the subroutine BOUND allocates them on the corresponding

mesh points (i,j). Formulates the sum $U = \sigma_x + \sigma_y$ on the boundary and calling subroutine SOPEQ integrates the equation:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = q(x,y), \quad g(x,y) = 0$$

Prints the values $U(i,j)$ on calling the subroutine SHOW.

5.- Calculation of σ_x

Formulates the function $g(x,y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, Integrates the equation:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = g(x,y)$$

on calling SOPEQ. Prints $\sigma_x(i,j)$ on calling SHOW.

6.- Calculation of σ_y

Formulates the function $g(x,y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, Integrates the equation:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = g(x,y)$$

on calling SOPEQ. Prints $\sigma_y(i,j)$ on calling SHOW.

7.- Calculation of τ_{xy}

Reads the boundary values $\tau_{xy}(i)$ ($i = 1$ to k) and calling BOUND allocates them on the corresponding mesh points (i,j).

Formulates the function $g(x,y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, integrates the equation:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = g(x,y)$$

on calling SOPEQ. Prints $\tau_{xy}(i,j)$ on calling SHOW.

In all the above integrations the number of the demanded iterations for the convergence of the iteration method is also printed.

8.- Isochromatic fringes

Reproduces the isochromatic fringes to compare them with the photography of the corresponding isochromatic fringes of the photoelastic experiment, when the boundary values are determined by the photoelastic method.

In §8 the stress components of the plate of fig.15 are calculated in two ways. First, from the eqs. α, β, γ (§8) (exact known solution of the stress distribution) and secondly from the program SOLAPEQ after the evaluation of the boundary values of the stress components from the same eqs. α, β, γ .

The dimensions of network applied on the plate was $v_x = 49$, $v_y = 31$. The numerical results obtained by the two ways are given on pages 40-63 Comparing the corresponding results, the numerical integration proves accurate enough.

The program PRINCST of §9 calculates the principal stresses σ_1, σ_2 and the angle $\omega = n_1 \hat{x}$ between the direction n_1 of σ_1 and the x-axis. The program PRINCST consists of its main part and the subroutine SHOW, which prints the results.

An application of the method is given in §10, referring to the determination of the stress distribution in the nodal region of the plane frame of fig.17, loaded by two concentrated forces $P_1 = 36.0t$ and $P_2 = 54.0t$ applied at points shown in the figure. The frame is clamped along its lower edge. The material of the frame is concrete - considered homogenous and elastic-. The boundary stresses are to be determined photoelastically. For this purpose a model from Araldite B is made. Its dimensions and loading are given in Fig.18 according to the similitude laws for scaling the model with respect to the prototype. Fig.19 shows the arrangement for the photoelastic experiment. In Figs.20 and 21 the isochromatic fringe patterns of integer- and semi integer fringe order (dark and light field) are depicted, as obtained by experiment.

The stresses on the free boundary are calculated from the relation:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = |\sigma| = \frac{S}{d'} \delta$$

where S = the photoelastic constant of the material, d' = the thickness of the model (here 1cm) and δ = the order of the isochromatic fringe. The other principal stress, normal to the boundary, is zero. Along the sections I-I, II-II and III-III the stresses are calculated by referring to the points of zero bending moment (figs. 22,23), where the distribution of the normal stress is linear (the

other one being zero) and that of the shear stress is parabolic. Fig.24 demonstrates the distribution of the boundary stresses (principal on the free boundary and normal on the sections I-I, II-II, III-III). The boundary stresses σ_x , σ_y , τ_{xy} for the sides parallel to the coordinate axes are obtained directly from the diagrams of Fig.24. For the segments of the boundary, that are inclined to the axes, the stresses σ_x , σ_y and τ_{xy} are calculated from the equations:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_1 \sin^2 \varphi \\ \sigma_y &= \sigma_1 \cos^2 \varphi \\ \tau_{xy} &= -\sigma_1 \sin \varphi \cos \varphi\end{aligned}\quad (30)$$

which are obtained from the equilibrium of the element near the boundary (fig.27 α, β, γ). The angle φ is taken from figs.28 and 29.

In the table of pages 87-90 the boundary values of σ_x, σ_y and τ_{xy} are listed for all the points of intersection of the boundary with the mesh lines (see fig.30).

After determining the boundary values the matrix INDEX(I,J) of the code numbers is established and printed in fig.32. The numerical results obtained by using the program SOLAPEQ are given on pages 94-113. The convergence accuracy of the iteration method is $\epsilon = 0.0005$. Fig.33 depicts the isochromatic fringe pattern as reproduced from the calculated stresses $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. This figure appears identical to the photograph of fig.24, and thus the accuracy of the obtained results by application of the present method is verified. The minor deformation of the isochromatic fringe pattern is due to different scale of the printer. Another check for the accuracy of the program results is made by cutting a small square piece of the plate and by examining its equilibrium, when applying on the boundaries the calculated stresses as external loads. In figs.34 α, β, γ the element abcd of fig.30 is shown with the corresponding stresses σ_x, σ_y and τ_{xy} acting on its boundary. The equilibrium conditions of the stress resultants (fig.35) are actually well satisfied i.d.

Projection on the x-axis	$\Sigma X = 0.22 \text{ Kg} \approx 0$	error 0.7%
Projection on the y-axis	$\Sigma Y = 0.38 \text{ Kg} \approx 0$	error 0.73%
Momements with respect to 0	$\Sigma M = -0.08 \text{ Kgm} \approx$	error 0.3%

In figs.36 α,β,γ and 37 α,β,γ the diagrams of the calculated stress are drawn on sections normal to the x- and y-axes respectively. From figs.36 α,β,γ it is seen that the usual assumptions for linear members,as far as the distribution of stresses is concerned, cease to be valid when approaching the nodal region. Namely,the distribution of σ_x is not any more linear,neither that of τ_{xy} parabolic. Moreover the stress component σ_y acquires values different from zero. The same conclusions are drawn from figs.37 α,β,γ by interchanging σ_x with σ_y .

Finally,using the program PRINCST the principal stresses σ_1 and σ_2 and the angle $\omega = (\hat{n}_1, \hat{x})$ are calculated. Their values are given on pages 125-139. By using the angles ω the direction fields of the principal stresses σ_1 (fig.38) and σ_2 (fig.39) are drawn. In these last two figures the flow of the principal stresses within the modal region is very clearly demonstrated.

In pages 142-144 the references used in the thesis,are given. In the attached appendix the Dirichlet problem for the Laplace equation is stated and the reasons leading to the numerical integration are explained. Finally,the thesis is closed with a brief description of the mathematical foundation of the Gauss-Seidel iteration method for solving linear systems.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟΝ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ἐγεννήθη εἰς Πειραιᾶ ἐν ἔτει 1937.

Μετά τᾶς ἐγκυκλίους σπουδᾶς, εἰσήχθη εἰς τήν Ἀνωτάτην Σχολήν Πολιτικῶν Μηχανικῶν τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου (1957), ὅθεν ἀπεφοίτησεν ἐν ἔτει 1962.

Τᾶς στρατιωτικᾶς αὐτοῦ ὑποχρεώσεις ἐξεπλήρωσεν κατὰ τό διάστημα 1962-1965 ὑπηρετήσας εἰς τήν Ἑλλ. Ἀεροπορίαν, ἐνῶ ταυτοχρόνως ἠσχολεῖτο μέ τήν ἐκτέλεσιν τῶν ἔργων ἐπεκτάσεως Ἀεροδρομίου Σούδας ὡς συνεργάτης τῆς ἀναδόχου ἐταιρείας "ΑΤΛΑΣ".

Ἀπό τοῦ 1969 ἕως τό 1970 ὑπηρετήσεν ὡς ἐπιστημονικός συνεργάτης παρά τῇ ἔδρᾳ Στατικῆς τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου, ἀπό δέ τοῦ Μαρτίου τοῦ 1970 μέχρι σήμερον ὑπηρετεῖ ὡς ἑμισθός βοηθός παρά τῇ αὐτῇ ἔδρᾳ ἀσχολούμενος μέ τήν διεξαγωγήν τῶν ἀσκήσεων τοῦ μαθήματος τῆς Στατικῆς εἰς τό Ε' ἔτος τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Πολιτικῶν Μηχανικῶν, ἐνῶ παραλλήλως καταγίνεται μέ ἐρευνητικά θέματα εἰς τήν περιοχὴν τῆς Ἐλαστικότητος. Ἐπιπροσθέτως τύγχανει ἀπό διετίας ἐπιστημονικός συνεργάτης τῆς ἔδρας τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν Β' τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου.

Ἐπαγγελματικῶς, ἀσχολεῖται μέ μελέτας καί ἐπιβλέψεις κατασκευῶν, διατηρῶν ἀπό τοῦ 1965 ἰδιωτικόν γραφεῖον μελετῶν.

BLANK PAGE

