

ΖΑΧΑΡΙΑΣ Π. ΠΕΤΡΟΥ
Προπτυχιακός φοιτητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
στον Τομέα Μηχανικής
της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Προβλήματα Συγκέντρωσης Τάσεων σε Υλικά με Απόκριση
Τύπου Βαθμίδας Ελαστικότητας

Επιβλέπων
Χ.Γ. ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ
Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Αθήνα 2011

Επιβλέπων:

Χαράλαμπος Γ. Γεωργιάδης, Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής:

Κουρκουλής Σταύρος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Ευταξιοπούλος Δημήτρης, Επίκουρος Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών κατά το διάστημα Ιανουάριος 2011 έως Ιούνιος 2011. Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη ΔΕΠ και τους εργαζόμενους στον Τομέα Μηχανικής για το δημιουργικό και ευχάριστο περιβάλλον που έχουν δημιουργήσει, χάρη στο οποίο η παραμονή μου στον Τομέα Μηχανικής κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας υπήρξε μία πολύ ενδιαφέρουσα εμπειρία.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Χ. Γεωργιάδη για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστούμε, για την πρόταση του συγκεκριμένου θέματος και την πολύτιμη βοήθειά του.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Παναγιώτη Α. Γουργιώτη, Διδάκτορα του Τομέα Μηχανικής, για την βοήθεια του όλο αυτό το διάστημα της συνεργασίας μας αφού συνέβαλε τα μέγιστα στην ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Ζαχαρίας Π. Πέτρου
Αθήνα, 2011

Αφιερώνεται στους γονείς μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....	iii
Περίληψη της Διπλωματικής Εργασίας.....	vi
1 Το Εισαγωγή στη Γενική Διπολική Θεωρία Βαθμίδας των Tourin και Mindlin	
1.1 Γενικά.....	1
1.2 Αρχές και Βασικές Εξισώσεις.....	4
1.3 Επίπεδη Παραμόρφωση.....	16
2 Το πρόβλημα Τύπου Flamant-Boussinesq στα πλαίσια της θεωρία Βαθμίδας Τροπής	
2.1 Εισαγωγή.....	21
2.2 Διατύπωση του Προβλήματος.....	23
2.3 Αντιστροφή Μετασχηματισμού Laplace.....	31
2.4 Λύση και Αριθμητικά Αποτελέσματα για το πρόβλημα τύπου Flamant-Boussinesq.....	37
3 Προβλήματα Κατανεμημένων Φορτίων σε Ημιχώρους στα Πλαίσια της θεωρίας Βαθμίδας Τροπής	
3.1 Εισαγωγή.....	57
3.2 Επίλυση Κάθετου Κατανεμημένου Φορτίου.....	59
3.3 Επίλυση Εφαπτομενικού Κατανεμημένου Φορτίου.....	81
4 Παρατήματα	
Παράρτημα Α.....	105
Παράρτημα Β.....	110
Παράρτημα Γ.....	114
Παράρτημα Δ.....	119
5 Βιβλιογραφία.....	129

Προβλήματα Συγκέντρωσης Τάσεων σε Υλικά με Απόκριση Τύπου Βαθμίδας Ελαστικότητας

Ζαχαρίας Π. Πέτρου
Τομέας Μηχανικής
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ

Περίληψη της Διπλωματικής Εργασίας

Εισαγωγή

Η Διπλωματική εργασία έχει τίτλο «Προβλήματα Συγκέντρωσης Τάσεων σε Υλικά με Απόκριση Τύπου Βαθμίδας Ελαστικότητας» και αντικείμενό της είναι η μελέτη προβλημάτων συγκεντρωμένων και κατανεμημένων φορτίων σε ημί-χωρους στα πλαίσια της Διπολικής Θεωρίας Βαθμίδας των Tourin και Mindlin. Η Διατριβή συνίσταται από μία Περίληψη στα Ελληνικά, την Εισαγωγή, Τρία Κεφάλαια, τα Παραρτήματα και τις Αναφορές στη Βιβλιογραφία. Το περιεχόμενο των Κεφαλαίων αναφέρεται περιληπτικά κατωτέρω.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή στη Γενική Διπολική Θεωρία Βαθμίδας των Tourin και Mindlin

Παρουσιάζεται η θεμελίωση της γενικής διπολική θεωρία βαθμίδας κατά Tourin και Mindlin και εκτίθενται οι έννοιες και οι εξισώσεις που διέπουν την θεωρία. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι αρχές της θεωρίας βαθμίδας τροπής (form II) και δίνονται οι βασικές εξισώσεις στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης.

Κεφάλαιο 2: Το πρόβλημα Τύπου Flamman-Boussinesq στα πλαίσια της θεωρίας Βαθμίδας Τροπής

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται επίλυση του προβλήματος τύπου Flamman-Boussinesq στα πλαίσια της πλήρους θεωρίας βαθμίδας τροπής (λαμβάνοντας υπόψη και τις πέντε μικροδομικές σταθερές του υλικού). Η επίλυση γίνεται με την βοήθεια ολοκληρωτικών μετασχηματισμών και είναι ακριβής. Τέλος, παραθέτονται διαγράμματα αυτών των λύσεων και γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με εκείνων που προβλέπει η κλασσική θεωρία.

Κεφάλαιο 3: Προβλήματα Κατανεμημένων Φορτίων σε Ημιχώρους στα πλαίσια της θεωρίας Βαθμίδας Τροπής

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται προβλήματα κατανεμημένων φορτίων σε ημιχώρους στα πλαίσια της πλήρους θεωρίας βαθμίδας τροπής. Οι μέθοδοι επίλυσης είναι οι ίδιες με αυτές που χρησιμοποιούνται στο Κεφ. 2. Τέλος, και σε αυτά τα προβλήματα, παρέχονται διαγράμματα και γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στη Γενική Διπολική Θεωρία Βαθμίδας των Tourin και Mindlin

1.1 Γενικά

Η διπολική θεωρία βαθμίδας εισήχθη από τους Tourin (1962) και Mindlin (1964) σε μια προσπάθεια να προσομοιώσει τη μηχανική συμπεριφορά στερεών υλικών με μικροδομή. Η θεωρία αυτή βασίζεται στη γενική άποψη ότι το συνεχές μέσο αποτελείται από στοιχειώδη παραμορφώσιμα σωματίδια, τα μακρο-μέσα. Η συμπεριφορά αυτή γίνεται εύκολα αντιληπτή αν κάθε ένα από αυτά τα μακρο-μέσα θεωρηθεί ως συλλογή μικρότερων υπό-σωματιδίων, τα μικρο-μέσα. Με τον τρόπο αυτό, κάθε σωματίδιο του συνεχούς μέσου εμπεριέχει ένα «εσωτερικό» πεδίο μετατοπίσεων, το οποίο αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά ως προς ένα σύστημα εσωτερικών συντεταγμένων. Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η κατώτατης τάξης γενικευμένη θεωρία (διπολική θεωρία βαθμίδας), η οποία είναι γραμμική ως προς την κινηματική ανάλυση της θεωρούμενης μικροδομής, προκύπτει αν λάβουμε μόνο τον πρώτο όρο της δυναμοσειράς. Επιπλέον, λόγω της εν γένει εξάρτησης της παραμορφωσιακής ενέργειας από βαθμίδες συγκεκριμένων πεδίων, όπως: η (δεύτερη) βαθμίδα της μετατοπίσεως (τύπος I, στη θεωρία του Mindlin), η βαθμίδα της τροπής (τύπος II) ή η βαθμίδα της στροφής (θεωρία τάσεων ζεύγους), εισάγονται νέες σταθερές του υλικού, που υποδεικνύουν την παρουσία χαρακτηριστικού «εσωτερικού» μεγέθους στην συμπεριφορά του. Το χαρακτηριστικό αυτό μέγεθος μπορεί να συνδεθεί με το μέγεθος της μικροδομής του υλικού. Έτσι, ενσωματώνονται φαινόμενα κλίμακας (size effects) στην ανάλυση τάσεων, κάτι που δεν μπορεί να επιτευχθεί με την κλασική θεωρία. Μέσω των θεωριών βαθμίδας, μπορούν να περιγραφούν συνεχή μέσα με περιοδική δομή, όπως είναι π.χ. τα κρυσταλλικά πλέγματα, οι κρυσταλλίτες ενός πολυκρυσταλλικού υλικού ή οι κόκκοι ενός κοκκώδους υλικού.

Ιστορικά, ιδέες που διέπουν τις γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου είχαν ήδη αρχίσει να εμφανίζονται από τον 19^ο αιώνα με τις εργασίες των Cauchy (1851), Voigt (1887) και των αδελφών E. and F. Cosserat (1909). Όμως το ζήτημα γενικεύτηκε και έφτασε στην ωριμότητά του στις δεκαετίες του 1960 και 1970 με τις εργασίες των Toupin (1962), Mindlin (1964), Green and Rivlin (1964), Bleustein (1967), Mindlin και Eshel (1968), Eringen (1968), και Germain (1973). Σε μια σύντομη ιστορική αναδρομή τώρα, θα πρέπει να τονιστεί ότι η θεωρία των Toupin και Mindlin και συναφείς προς αυτήν ιδέες (Bleustein, 1967, Mindlin and Eshel, 1968) χρησιμοποιήθηκαν από νωρίς σε εφαρμογές (π.χ. Weitsman, 1966; Day και Weitsman, 1966; Cook και Weitsman, 1966; Eshel and Rosenfeld, 1970). Πιο πρόσφατα χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση διαφόρων προβλημάτων σε περιοχές όπως Διάδοση Κυμάτων (Vardoulakis and Georgiadis, 1996; Georgiadis et al., 2000; Georgiadis and Velgaki, 2003; Georgiadis et al., 2004; Charalambopoulos and Gergidis, 2008), Μηχανική των Θραύσεων (Vardoulakis et al. 1996; Zhang et al., 1998; Chen et al., 1998; Chen et al., 1999; Shi et al., 2000; Georgiadis, 2003; Paulino et al., 2003; Radi and Gei, 2004; Grentzelou and Georgiadis, 2005; 2008; Wei, 2006; Karlis et al., 2007; Radi, 2007; 2008; Gourgiotis and Georgiadis, 2007; 2008; 2009; Georgiadis and Gourgiotis, 2008; Aravas and Giannakopoulos, 2009), Πλαστικότητα (Vardoulakis and Frantziskonis, 1992; Fleck et al., 1994; Vardoulakis και Sulem, 1995; Begley και Hutchinson, 1998; Fleck και Hutchinson, 1997; 1998; Gao et al. 1999; Huang et al., 2000; 2004; Hwang et al., 2002), Μηχανική των Ατελειών (Lazar and Maugin, 2005), Προβλήματα Ευστάθειας (Exadaktylos and Vardoulakis, 1998; Papargyri-Beskou, 2003) και Μηχανικής των Κατασκευών (Vardoulakis and Giannakopoulos, 2006; Giannakopoulos and Stamoulis, 2007; Papargyri-Beskou and Beskos, 2008). Επιπλέον, έχουν αναπτυχθεί προχωρημένες αριθμητικές μέθοδοι για να αντιμετωπίσουν προβλήματα που αναλύονται βάσει της θεωρίας Toupin-Mindlin (Oden et al. 1970; Shu et al., 1999, Amanatidou and Aravas, 2002; Engel et al., 2002; Tsepoura et al., 2002; Polyzos et al., 2003; Giannakopoulos et al., 2006; Tsamasphyros et al., 2007; Gourgiotis and Georgiadis, 2008; 2009; Gourgiotis et al., 2010). Βάσει των μέχρι σήμερα αποτελεσμάτων συμπεραίνεται ότι η θεωρία Toupin-Mindlin επεκτείνει το εύρος ισχύος της έννοιας του συνεχούς σε μία προσπάθεια γεφύρωσης του χάσματος μεταξύ των κλασικών θεωριών συνεχούς μέσου και των θεωριών κρυσταλλικού πλέγματος. Ένα επίσης ενδιαφέρον στοιχείο αυτής της θεωρίας είναι η εμφάνιση σε ορισμένες περιπτώσεις φαινομένων οριακού στρώματος (Shi et al., 2000, Georgiadis, 2003, Georgiadis et al., 2004).

Θεωρώντας, στη συνέχεια, κατάλληλα μήκη κλίμακας για τις θεωρίες βαθμίδας, όπως σημειώνεται από τους Zhang et al. (1998), παρόλο που τα φαινόμενα βαθμίδας είναι συνδεδεμένα με γεωμετρικά απαραίτητες εξαρτήσεις (dislocations) στην πλαστικότητα, μπορούν να είναι

επίσης σημαντικά και για την ελαστική περιοχή των μικροδομικών υλικών. Πράγματι, οι Chen et al. (1998) ανέπτυξαν ένα μοντέλο συνεχούς μέσου για κυψελώδη υλικά και διαπίστωσαν ότι τέτοιου είδους συνεχή μέσα υπακούν σε μία μικροπολική θεωρία, δηλαδή θεωρία με φαινόμενα βαθμίδας. Στη μελέτη αυτή, το εσωτερικό μήκος του υλικού ταυτίστηκε, φυσικά, με το μέγεθος της κυψελίδας. Άλλα παραδείγματα των φαινομένων κλίμακας σε στερεά με ελαστική παραμόρφωση περιλαμβάνουν τη διάδοση κυμάτων με μικρά μήκη κύματος σε στρωσιγενή υλικά (layered materials) (Herrmann and Achenbach, 1968), την κάμψη δοκού πολυκρυσταλλικού αλουμινίου (Kakunai et al., 1985) και τον λυγισμό ελαστικών ινών σε σύνθετα υλικά (Fleck and Shu, 1995). Γενικά, οι θεωρίες με φαινόμενα βαθμίδας στοχεύουν στην προσομοίωση υλικών με εσωτερικά μήκη της τάξεως των 0.1 – 10 μικρομέτρων (Shi et al., 2000). Επειδή τα φαινόμενα ενίσχυσης (strengthening effects) που προκύπτουν από τις βαθμίδες γίνονται σημαντικά όταν οι βαθμίδες αυτές είναι αρκετά μεγάλες, τέτοια φαινόμενα θα είναι αξιοσημείωτα όταν το υλικό παραμορφώνεται σε πολύ μικρούς όγκους, όπως πολύ κοντά σε αιχμές ρωγμών και εγχοπών, σε μικρές οπές και εγκλείσματα και σε μικρομετρικές διεισδύσεις (micrometer indentations). Επίσης, στον τομέα διάδοσης κυμάτων που σχετίζεται με εφαρμογές ηλεκτρονικών συσκευών, χρησιμοποιούνται συχνά επιφανειακές συχνότητες κυμάτων της τάξεως των GHz και, για το λόγο αυτό, εμφανίζονται μήκη κύματος της τάξεως μικρομέτρου (White, 1970, Farnell, 1978). Σε τέτοιες περιπτώσεις, φαινόμενα διασποράς σε υψηλές συχνότητες μπορούν να εξηγηθούν μόνο με βάση τις θεωρίες βαθμίδας (Georgiadis and Velgaki, 2003, Georgiadis et al., 2004). Επιπλέον, οι προαναφερθείσες εργασίες παρέχουν εκτιμήσεις για μια παράμετρο μικροδομής (μία πρόσθετη υλική παράμετρο, εκτός των γνωστών σταθερών του Lamé λ και μ), η οποία εμφανίζεται στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στη θεωρία βαθμίδας τύπου II του Mindlin. Πράγματι, θεωρώντας ότι το υλικό αποτελείται εξ ολοκλήρου από μοναδιαίες κυψελίδες, που έχουν σχήμα κυβικό με ακμή μήκους $2h$, και συγκρίνοντας τις μορφές των καμπυλών διασποράς των κυμάτων Rayleigh στις προσεγγίσεις των Tourin-Mindlin (για την περίπτωση είτε ενός μοντέλου τάσεων ζεύγους, είτε ενός μοντέλου της διπολικής θεωρίας βαθμίδας) με τις αντίστοιχες που προκύπτουν από την ανάλυση κρυσταλλικού πλέγματος των Gazis et al. (1960), μπορεί να εκτιμηθεί ότι συντελεστής τάσεων ζεύγους η (couple-stress modulus) είναι της τάξεως των $0.1\mu h^2$ (Georgiadis and Velgaki, 2003), ενώ ο συντελεστής βαθμίδας c (gradient coefficient) είναι της τάξεως των $(0.1h)^2$ (Georgiadis et al., 2004). Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε την εργασία των Chang et al. (2003), όπου παρέχονται εκτιμήσεις για τις μικροδομικές σταθερές σε κοκκώδη υλικά, τα οποία προσομοιώνονται ως συνεχή μέσα βαθμίδας (strain-gradient continua).

Συνήθως στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται η πιο απλή μορφή της θεωρίας Toupin-Mindlin, γνωστή ως μικρο-ομογενής περίπτωση (βλ. Παράγραφος 10, Mindlin, 1964). Σύμφωνα με αυτήν, από τη μια πλευρά, κάθε σωματίδιο του υλικού έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας (τις συνιστώσες της μετατόπισης, όπως ακριβώς στις κλασικές θεωρίες) και η μικρο-πυκνότητα δεν διαφέρει από τη μακρο-πυκνότητα. Από την άλλη πλευρά, η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας εξαρτάται όχι μόνο από την τροπή (όπως στην κλασική ελαστικότητα), αλλά και από τη δεύτερη βαθμίδα της μετατόπισης. Αυτή η περίπτωση είναι διαφορετική από τη γενική μικροπολική (micropolar) θεωρία των Cosserat, που θεωρεί τα σωματίδια του υλικού με έξι ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας (τρεις συνιστώσες μετατόπισης και τρεις συνιστώσες στροφής).

1.2 Αρχές και Βασικές Εξισώσεις

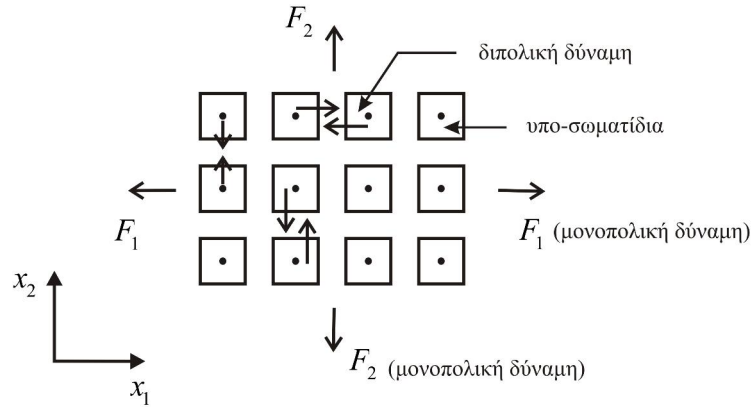
Στην παράγραφο αυτή, παρουσιάζουμε τις βασικές ιδέες και εξισώσεις της ελαστοστατικής διπολικής θεωρίας βαθμίδας μικρών τροπών και μετατοπίσεων. Αρχικά, θεωρούμε την ακόλουθη έκφραση του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής ως προς ένα ορθογώνιο, καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$

$$\rho \dot{E} = \tau_{pq} \dot{\varepsilon}_{pq} + m_{rpq} \partial_r \partial_p \dot{u}_q, \quad (1.1)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα της μάζας του συνεχούς, E είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, $\varepsilon_{pq} = (1/2)(\partial_p u_q + \partial_q u_p)$ είναι ο γραμμικός τανυστής τροπής, u_q το διάνυσμα μετατόπισης, τ_{pq} είναι ο μονοπολικός τανυστής τάσεως (τανυστής τάσεως Cauchy, σύμφωνα με την ορολογία του Mindlin), m_{rpq} ο διπολικός (ή διπλός) τανυστής τάσεως, $\partial_p(\) \equiv \partial(\)/\partial x_p$, ενώ η υπερκείμενη τελεία δηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο. Οι λατινικοί δείκτες λαμβάνουν τιμές (1,2,3). Επίσης, οι εξισώσεις γράφονται με χρήση δεικτών (indicial notation) και της σύμβασης αθροίσεως (summation convention).

Η έκφραση (1.1) προκύπτει αν θεωρήσει κανείς το ανάπτυγμα του όρου $\rho \dot{E}$ σε σειρά που περιέχει ανωτέρας τάξεως παραγώγους βαθμίδας της μετατόπισης. Οι πρόσθετοι όροι μπορούν να

γίνουν ιδιαίτερα σημαντικοί, για παράδειγμα, στην περιοχή σημείων συγκέντρωσης τάσεων, όπου η βαθμίδα της μετατόπισης υφίσταται έντονες μεταβολές. Για το λόγο αυτό, η έκφραση που προκύπτει από τη νέα θεωρία μπορεί να θεωρηθεί ότι δίνει καλύτερη περιγραφή της συμπεριφοράς του υλικού, σε σχέση με την αντίστοιχη κλασική ($\rho \dot{E} = \tau_{pq} \dot{\epsilon}_{pq}$), όπου δεν λαμβάνονται υπόψη οι διπολικές τάσεις.



Σχ. 1.1 Υλικό με μικροδομή: μονοπολικές (εξωτερικές) και διπολικές (εσωτερικές) δυνάμεις δρουν σε ένα σύνολο μικρο-μέσων.

Ο ταυστής των διπολικών τάσεων (ταυστής τρίτης τάξεως) προκύπτει από τη θεώρηση *πολυπολικών* δυνάμεων, οι οποίες είναι αντιπαράλληλες δυνάμεις και δρουν μεταξύ των μικρομέσων που περιέχονται σε συνεχές μέσο με μικροδομή (Σχ. 1.1). Όπως εξηγήθηκε από τους Green and Rivlin (1964) και Jaunzemis (1967), η έννοια των *πολυπολικών* δυνάμεων προκύπτει άμεσα από τη γενίκευση της μηχανικής ισχύος M , η οποία περιέχει ανώτερης τάξης παραγώγους του πεδίου ταχύτητας, δηλαδή $M = F_q \dot{u}_q + F_{pq} (\partial_p \dot{u}_q) + F_{rpq} (\partial_r \partial_p \dot{u}_q) + \dots$, όπου F_q είναι οι συνήθεις μονοπολικές δυνάμεις του κλασικού συνεχούς μέσου και (F_{pq}, F_{rpq}, \dots) είναι οι *πολυπολικές* δυνάμεις (διπλές, τριπλές δυνάμεις κλπ) του γενικευμένου συνεχούς μέσου. Με τον τρόπο αυτό, η συνισταμένη δύναμη που εφαρμόζεται σε ένα σύνολο υποσωματιδίων μπορεί να θεωρηθεί ότι αναλύεται σε ένα άθροισμα *εξωτερικών* και *εσωτερικών* δυνάμεων, όπου οι τελευταίες είναι αυτοίσορροπούμενες. Όμως, τέτοιες αυτοίσορροπούμενες *πολυπολικές* δυνάμεις παράγουν *μη*

μηδενικές τάσεις, τις πολυπολικές τάσεις. Αυτό σημαίνει ότι ένα στοιχείο κατά μήκος ενός τμήματος του υλικού ή στην επιφάνειά του, μπορεί να μεταβιβάσει, εκτός του συνήθους ελκυστή (traction), ένα ακόμη διάνυσμα, τον διπλό ελκυστή (dipolar or double traction). Επιπλέον, η αρχή τάσεων των Euler-Cauchy διευρύνεται, ώστε να περιλαμβάνει πρόσθετους διπολικούς ελκυστές.

Όσον αφορά το συμβολισμό των διπολικών δυνάμεων, ο πρώτος δείκτης υποδηλώνει τη διεύθυνση του μοχλοβραχίονα μεταξύ των δύο δυνάμεων και ο δεύτερος τη διεύθυνση του ζεύγους των δυνάμεων. Την ίδια σημασία έχουν και οι δύο τελευταίοι δείκτες στο συμβολισμό των διπολικών τάσεων, ενώ ο πρώτος δείκτης υποδηλώνει την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος που είναι κάθετο στην επιφάνεια όπου δρα η τάση. Τέλος, σημειώνεται ότι σε μία διατομή του υλικού με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην θετική κατεύθυνση, η δύναμη στο θετικό άκρο του μοχλοβραχίονα είναι θετική όταν δρα προς τη θετική κατεύθυνση. Ο όρος «θετικός» αναφέρεται στη θετική φορά του άξονα των συντεταγμένων, ο οποίος είναι παράλληλος προς τον μοχλοβραχίονα.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας W σε ένα τριδιάστατο συνεχές είναι μία θετικά ορισμένη συνάρτηση της μορφής

$$W \equiv W(\varepsilon_{pq}, \kappa_{rpq}), \quad (1.2)$$

όπου $\kappa_{rpq} = \partial_r \varepsilon_{pq} = \frac{1}{2}(\partial_r \partial_p u_q + \partial_r \partial_q u_p)$ είναι η δεύτερη παράγωγος της μετατόπισης και $\varepsilon_{pq} = (1/2)(\partial_p u_q + \partial_q u_p)$ ο τανυστής της τροπής. Επίσης, ο τανυστής των στροφών ορίζεται ως $\omega_{pq} = (1/2)(\partial_p u_q - \partial_q u_p)$. Βάσει των παραπάνω, είναι προφανείς οι συμμετρίες $\varepsilon_{pq} = \varepsilon_{qp}$, $\kappa_{rpq} = \kappa_{rqp}$ και $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$.

Επιπλέον, για το κινηματικό πεδίο $(\varepsilon_{pq}, \kappa_{rpq})$ ισχύουν οι σχέσεις συμβιβαστού (Mindlin, 1964)

$$e_{ijp} e_{mqr} \partial_j \partial_r \varepsilon_{pq} = 0 \quad \text{και} \quad e_{ijr} \partial_j \kappa_{rpq} = 0, \quad (1.3\alpha, \beta)$$

όπου e_{rpq} είναι το σύμβολο εναλλαγής Levi-Civita., Άλλες εκδοχές της θεωρίας μπορούν να προκύψουν αν ο τανυστής οριστεί ως δεύτερη βαθμίδα της μετατόπισης (τύπος I: $\kappa_{rpq} = \partial_r \partial_p u_q$) ή ως βαθμίδα της στροφής (τύπος III: $\kappa_{rpq} = \partial_r \omega_{pq}$).

Οι τάσεις μπορούν να οριστούν, ως μεταβολές της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας W

$$\tau_{pq} \equiv \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{pq}}, \quad m_{rpq} \equiv \frac{\partial W}{\partial \kappa_{rpq}}, \quad (1.4\alpha,\beta)$$

από όπου προκύπτουν οι σχέσεις συμμετρίας $\tau_{pq} = \tau_{qp}$ και $m_{rpq} = m_{rqp}$. Οι καταστατικές σχέσεις (1.4α,β) εξασφαλίζουν μία-προς-μία αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών τ_{pq} και ε_{pq} , και των m_{rpq} και κ_{rpq} , αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες (Georgiadis and Grentzelou, 2006):

- 1) οι παράγωγοι $(\partial^2 W / \partial \varepsilon_{pq} \partial \varepsilon_{lm})$, $(\partial^2 W / \partial \kappa_{rpq} \partial \kappa_{jlm})$ και $(\partial^2 W / \partial \varepsilon_{pq} \partial \kappa_{jlm})$ είναι συνεχείς γύρω από το «σημείο» $(\varepsilon_{pq}^*, \kappa_{rpq}^*)$,
- 2) οι ορίζουσες $|\partial^2 W / \partial \varepsilon_{pq} \partial \varepsilon_{lm}|$, $|\partial^2 W / \partial \kappa_{rpq} \partial \kappa_{jlm}|$ και $|\partial^2 W / \partial \varepsilon_{pq} \partial \kappa_{jlm}|$ είναι διάφορες του μηδενός στην περιοχή του $(\varepsilon_{pq}^*, \kappa_{rpq}^*)$.

Στην περίπτωση που ισχύουν οι ανωτέρω συνθήκες, οι καταστατικές σχέσεις (1.4α,β) αντιστρέφονται, δίνοντας τα μεγέθη τ_{pq} και m_{rpq} συναρτήσεων των ε_{pq} και κ_{rpq} , αντίστοιχα.

Παρόλο που η γενική έκφραση (1.2) επιτρέπει εξίσου την μη γραμμική καταστατική συμπεριφορά ενός υλικού, στην παρούσα διατριβή επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας μόνο στη *γραμμική και ισότροπη* καταστατική συμπεριφορά. Έτσι, στα πλαίσια γραμμικών καταστατικών νόμων, η πυκνότητα της παραμορφωσιακής ενέργειας λαμβάνει, στη γενική περίπτωση, την εξής τετραγωνική μορφή

$$W = \frac{1}{2} c_{pqlm} \varepsilon_{pq} \varepsilon_{lm} + \frac{1}{2} a_{rpqjlm} \kappa_{rpq} \kappa_{jlm} + f_{rpqilm} \kappa_{rpq} \varepsilon_{ilm}, \quad (1.5)$$

όπου c_{pqlm} , a_{rpqjlm} και f_{rpqilm} είναι τανυστές των σταθερών του υλικού. Ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών των τανυστών c_{pqlm} και a_{rpqjlm} , οι οποίοι είναι άρτιας τάξης, μπορεί να

μειωθεί ώστε οι τανυστές να περιγράφουν ισότροπη συμπεριφορά του υλικού, ενώ ο περιττής τάξης τανυστής f_{rpqilm} οδηγεί πάντα σε κάποια μορφή ανισοτροπία για το υλικό, δηλαδή σε προτιμητέες κατευθύνσεις στην απόκριση του υλικού. Στη γενική περίπτωση, οι τανυστές $(c_{pqilm}, a_{rpqilm}, f_{rpqilm})$ θεωρούνται συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις της θέσης, περιλαμβάνοντας έτσι την ύπαρξη ανομοιογένειας στο υλικό. Τελικά, το γεγονός ότι η W είναι θετικά ορισμένη θέτει τους συνήθεις περιορισμούς για το επιτρεπτό εύρος τιμών των σταθερών του υλικού, που δίνονται αναλυτικότερα στα επόμενα Κεφάλαια για την ισότροπη περίπτωση της διπολικής θεωρίας ελαστικότητας (τύπος II της θεωρίας Toupin-Mindlin) (Georgiadis et al., 2004) και για την ισότροπη περίπτωση των τάσεων ζεύγους (Mindlin and Tiersten, 1962).

Σημειώνεται ότι ο «μικτός» όρος $f_{rpqilm}K_{rpq} \varepsilon_{ilm}$ παραλείπεται εν γένει στην παρούσα μελέτη. Επιπλέον, πρόσφατη έρευνα (Georgiadis et al., 2004) σε εφαρμογή της ελαστικής διπολικής θεωρίας ελαστικότητας (η θεωρία περιλαμβάνει μία συγκεκριμένη μορφή των καταστατικών εξισώσεων με τέσσερις ανεξάρτητες σταθερές του υλικού και μελετά τη διάδοση κυμάτων Rayleigh) έδειξε ότι ο όρος αυτός παρουσιάζει τελικά πολύ μικρή επιρροή. Η περίπτωση παράλειψης του όρου $f_{rpqilm}K_{rpq} \varepsilon_{ilm}$ στην (1.5) αποτελεί την επιλογή των Mindlin και Eshel στη θεμελιώδη εργασία (Mindlin and Eshel, 1968) και δείχνει, επίσης, να είναι το αντικείμενο μελέτης στις περισσότερες από τις πρόσφατες εργασίες με θέμα την προσέγγιση βαθμίδας.

Στη συνέχεια, οι τάσεις μπορούν να οριστούν με το συνήθη τρόπο, ως μεταβολές της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας W

$$\tau_{pq} = c_{pqilm} \varepsilon_{ilm} \ , \quad m_{rpq} = a_{rpqilm} K_{jlm} \ . \quad (1.6\alpha, \beta)$$

Λόγω των συμμετριών που εμφανίζουν οι τανυστές των τάσεων, καθώς και των συνθηκών αντιστρεψιμότητας των καταστατικών σχέσεων, οι τανυστές των σταθερών του υλικού παρουσιάζουν τις ακόλουθες συμμετρίες

$$c_{pqilm} = c_{lmrpq} = c_{qplm} = c_{pqml} \ , \quad a_{rpqilm} = a_{jlmrpq} = a_{prqilm} = a_{rpqilm} \ . \quad (1.7\alpha, \beta)$$

Στα πλαίσια γραμμικών καταστατικών νόμων είχαμε δει ότι η πυκνότητα της παραμορφωσιακής ενέργειας δίνεται από την (1.5). Ο αριθμός των συντελεστών στην έκφραση (1.5) μειώνεται σημαντικά, καθώς εμφανίζονται οι συμμετρίες (1.7α,β). Στην περίπτωση

κεντροσυμμετρικού, ισότροπου υλικού ο αριθμός των ανεξάρτητων συντελεστών μειώνεται ακόμα περισσότερο. Καθώς δεν υπάρχουν ισότροποι τανυστές περιττής τάξης, ο τανυστής f_{rpqim} θα πρέπει να μηδενιστεί. Οι υπόλοιποι συντελεστές θα πρέπει να είναι ομογενείς, γραμμικές συναρτήσεις με όρους γινόμενα δέλτα του Kronecker. Υπάρχουν τρία ανεξάρτητα γινόμενα με δύο δέλτα του Kronecker και δεκαπέντε με τρία, επομένως οι συντελεστές γράφονται ως εξής

$$c_{pqim} = \lambda \delta_{pq} \delta_{im} + \mu_1 \delta_{pi} \delta_{qm} + \mu_2 \delta_{pm} \delta_{qi}, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} a_{rpqim} = & a'_1 \delta_{rp} \delta_{qj} \delta_{im} + a'_2 \delta_{rp} \delta_{ql} \delta_{jm} + a'_3 \delta_{rp} \delta_{qm} \delta_{jl} + \\ & + a'_4 \delta_{pq} \delta_{rj} \delta_{im} + a'_5 \delta_{pq} \delta_{ri} \delta_{jm} + a'_6 \delta_{pq} \delta_{rm} \delta_{jl} + \\ & + a'_7 \delta_{qr} \delta_{pj} \delta_{im} + a'_8 \delta_{qr} \delta_{pl} \delta_{jm} + a'_9 \delta_{qr} \delta_{pm} \delta_{lj} + \\ & + a'_{10} \delta_{rj} \delta_{pl} \delta_{qm} + a'_{11} \delta_{pj} \delta_{ql} \delta_{rm} + a'_{12} \delta_{qj} \delta_{rl} \delta_{pm} + \\ & + a'_{13} \delta_{rj} \delta_{pm} \delta_{ql} + a'_{14} \delta_{pj} \delta_{qm} \delta_{rl} + a'_{15} \delta_{qj} \delta_{rm} \delta_{pl}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Λόγω των συμμετριών που έχουμε προαναφέρει προκύπτουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_2 \equiv \mu, \\ a'_1 &= a'_5 = a'_6 = a'_7, \\ a'_2 &= a'_3 = a'_8 = a'_9, \\ a'_{10} &= a'_{13}, \\ a'_{11} &= a'_{12} = a'_{14} = a'_{15}. \end{aligned}$$

Επομένως η πυκνότητα της παραμορφωσιακής ενέργειας θα δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{pp} \varepsilon_{qq} + \mu \varepsilon_{pq} \varepsilon_{pq} + a_1 \mathbf{K}_{ppr} \mathbf{K}_{rqq} + a_2 \mathbf{K}_{pqq} \mathbf{K}_{prr} + a_3 \mathbf{K}_{ppr} \mathbf{K}_{qqr} + \\ & + a_4 \mathbf{K}_{pqr} \mathbf{K}_{pqr} + a_5 \mathbf{K}_{pqr} \mathbf{K}_{rqp}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

όπου $a_1 = 2a'_1$, $a_2 = \frac{1}{2}a'_3$, $a_3 = 2a'_2$, $a_4 = a'_4$, $a_5 = 2a'_5$ είναι οι πέντε νέες σταθερές του υλικού με διαστάσεις [δύναμης] και λ και μ είναι οι σταθερές του Lamé με διαστάσεις [δύναμη][μήκος]⁻². Από την έκφραση αυτή προκύπτουν οι ακόλουθες καταστατικές εξισώσεις

$$\tau_{pq} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{pq}, \quad (1.11\alpha)$$

$$m_{pqr} = \frac{1}{2} a_1 (\delta_{pq} \kappa_{r ii} + 2\delta_{qr} \kappa_{i ip} + \delta_{rp} \kappa_{q ii}) + 2a_2 \delta_{qr} \kappa_{p ii} + a_3 (\delta_{pq} \kappa_{i ir} + \delta_{pr} \kappa_{i iq}) + 2a_4 \kappa_{pqr} + a_5 (\kappa_{pqs} + \kappa_{qsp}). \quad (1.11\beta)$$

Οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για θετικά ορισμένη παραμορφωσιακή ενέργεια είναι, (ιδέ Παράγραφος 12, Mindlin, 1964 και Παράρτημα Α)

$$\mu > 0, \quad (1.13\alpha)$$

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad (1.13\beta)$$

$$2a_4 - a_5 > 0, \quad (1.13\gamma)$$

$$a_4 + a_5 > 0, \quad (1.13\delta)$$

$$-4a_1 + 8a_2 + 2a_3 + 6a_4 - 3a_5 > 0, \quad (1.13\epsilon)$$

$$5a_1 + 5a_2 + 5a_3 + 3a_4 + 3a_5 > 0, \quad (1.13\zeta)$$

$$4a_1 a_4 - 6a_1 a_5 + 20a_2 a_3 + 12a_2 a_4 + 2a_2 a_5 + 8a_3 a_4 - 2a_3 a_5 + 2a_4 a_5 - 5a_1^2 + 4a_4^2 - 2a_5^2 > 0. \quad (1.13\eta)$$

Η απλούστερη δυνατή μορφή καταστατικών εξισώσεων προκύπτει θεωρώντας μία ισότροπη περιγραφή της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας, που θα περιλαμβάνει μόνο τρεις σταθερές του υλικού (3-parameter theory). Αυτή η συνάρτηση έχει τη μορφή

$$W = (1/2)\lambda \varepsilon_{pp} \varepsilon_{qq} + \mu \varepsilon_{pq} \varepsilon_{pq} + (1/2)\lambda c (\partial_r \varepsilon_{pp}) (\partial_r \varepsilon_{qq}) + \mu c (\partial_r \varepsilon_{pq}) (\partial_r \varepsilon_{pq}), \quad (1.14)$$

και, σύμφωνα με τις Εξ. (1.4), οδηγεί στις κατωτέρω καταστατικές εξισώσεις

$$\tau_{pq} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{pq} \ , \quad m_{rpq} = c \partial_r (\lambda \delta_{pq} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{pq}) = c \partial_r \tau_{pq} \ , \quad (1.15)$$

Ο συντελεστής c είναι η πρόσθετη μηχανική σταθερά, γνωστή ως συντελεστής βαθμίδας (gradient coefficient), με διαστάσεις [μήκος]². Η σχέση (1.14) προκύπτει από την γενική έκφραση της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας (1.10) βάσει των κάτωθι σχέσεων:

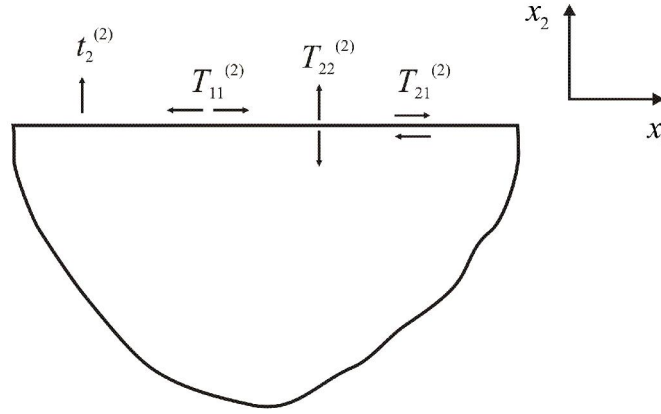
$$a_1 = a_3 = a_5 = 0 \quad \text{και} \quad a_2 = \lambda c/2 \ , \quad a_4 = \mu c \ . \quad (1.16)$$

Όπως επισημαίνουν οι Lazar and Maugin (2005), η επιλογή (1.14), είναι φυσικά αποδεκτή και παρουσιάζει μία εμφανή *συμμετρία*. Για να αποκαλύψουμε τη συμμετρία αυτή, θεωρούμε αρχικά τη γενική έκφραση (ορισμό) της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας $W \equiv \int_0^{\varepsilon_{pq}} \tau_{pq} d\varepsilon_{pq} + \int_0^{\partial_r \varepsilon_{pq}} m_{rpq} d(\partial_r \varepsilon_{pq})$, η οποία για γραμμικό καταστατικό νόμο λαμβάνει τη μορφή $W = (1/2)\tau_{pq} \varepsilon_{pq} + (1/2)m_{rpq} (\partial_r \varepsilon_{pq})$. Παρατηρούμε, στη συνέχεια, ότι από τις Εξ. (3.2) προκύπτει ότι $m_{rpq} = c \partial_r \tau_{pq}$, οπότε η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας γράφεται ως $W = (1/2)\tau_{pq} \varepsilon_{pq} + c(1/2)(\partial_r \tau_{pq})(\partial_r \varepsilon_{pq})$. Η τελευταία έκφραση είναι συμμετρική τόσο ως προς την τροπή, όσο και ως προς τη μονοπολική τάση. Επομένως, αυτή η απλή μορφή του τύπου II της θεωρίας του Toupin-Mindlin αποτελεί τόσο θεωρία βαθμίδας τροπής, όσο και θεωρία βαθμίδας τάσεως. Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, ο περιορισμός για θετικά ορισμένη πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας απαιτεί να ισχύει η ανισότητα (Georgiadis et al., 2004) $c > 0$. Σημειώνεται, ότι στην εργασία των Georgiadis et al. (2004) αποδείχθηκε ότι η συνθήκη αυτή αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για να υφίσταται *ευστάθεια* των εξισώσεων πεδίου στη γενική περίπτωση, που περιλαμβάνει και φαινόμενα αδράνειας.

Οι εξισώσεις ισορροπίας (ολική ισορροπία) και οι συνοριακές συνθήκες για τους ελκυστές των τάσεων κατά μήκος του συνόρου (τοπική ισορροπία) μπορούν να προκύψουν από θεωρήσεις μεταβολών (Mindlin, 1964). Συγκεκριμένα, απουσία καθολικών δυνάμεων, η Αρχή Δυνατών Έργων διατυπώνεται ως εξής (Bleustein, 1967)

$$\int_V \left[\tau_{pq} \delta \varepsilon_{pq} + m_{rpq} \delta (\partial_r \partial_p u_q) \right] dV = \int_S t_q^{(n)} \delta u_q dS + \int_S T_{qr}^{(n)} \partial_q (\delta u_r) dS \ , \quad (1.17)$$

όπου V είναι η περιοχή που καταλαμβάνεται από το στερεό, και S η κλειστή επιφάνειά του. Το σύμβολο δ ορίζει ασθενείς μεταβολές, και δρα στην ποσότητα στα δεξιά του. Επίσης, στην παραπάνω εξίσωση, $t_q^{(n)}$ ο πραγματικός ελκυστής των τάσεων, $T_{pq}^{(n)}$ ο πραγματικός ελκυστής των διπολικών τάσεων και n_p το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο σύνορο με φορά προς το εξωτερικό του σώματος. Παραδείγματα των ελκυστών αυτών στην επιφάνεια ημιχώρου δίνονται στο Σχήμα 1.2.



Σχ. 1.2 Θετικά προσανατολισμένοι πραγματικοί μονοπολικοί και διπολικοί ελκυστές τάσεων στην επιφάνεια ημιχώρου.

Βάσει των παραπάνω, οι εξισώσεις ισορροπίας και οι συνοριακές συνθήκες για τους ελκυστές των τάσεων κατά μήκος ενός συνόρου γράφονται

$$\partial_p (\tau_{pq} - \delta_r m_{rpq}) + f_q = 0 \quad \text{στον όγκο } V \quad , \quad (1.18)$$

$$P_q^{(n)} = n_p (\tau_{pq} - \delta_r m_{rpq}) - D_p (n_r m_{rpq}) + (D_j n_j) n_r n_p m_{rpq} \quad \text{στο } bdy \quad , \quad (1.19)$$

$$R_q^{(n)} = n_r n_p m_{rpq} \quad \text{στο } bdy \quad , \quad (1.20)$$

$$E_q = [n_r k_p m_{rpq}] \quad \text{σε κάθε ακμή } C \quad , \quad (1.21)$$

όπου V είναι η περιοχή που καταλαμβάνεται από το στερεό, με bdy συμβολίζεται οποιοδήποτε σύνορο κατά μήκος ενός τμήματος στο εσωτερικό του υλικού ή κατά μήκος της επιφάνειάς του,

f_q είναι η μονοπολική καθολική δύναμη ανά μονάδα όγκου, $D_p(\cdot) \equiv \partial_p(\cdot) - n_p D(\cdot)$ είναι ο τελεστής της εφαπτομενικής παραγώγου, $D(\cdot) \equiv n_p \partial_p(\cdot)$ είναι ο τελεστής της κάθετης παραγώγου, $P_q^{(n)}$ είναι ο βοηθητικός μονοπολικός ελκυστής των τάσεων και $R_q^{(n)}$ είναι ο βοηθητικός διπολικός ελκυστής των τάσεων. Επίσης, με C ορίζεται ακμή η οποία σχηματίζεται από την ένωση δυο λείων επιφανειών S_1 και S_2 αντίστοιχα, με $S_1 \cup S_2 = S$. Επιπλέον, το διάνυσμα \mathbf{k} ορίζεται ως $k_q = e_{rpq} s_r n_p$, όπου s_q είναι το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στην C , ενώ η αγκύλη υποδηλώνει την διαφορά των τιμών της περικλειόμενης ποσότητας στις επιφάνειες S_1 και S_2 , αντίστοιχα. Τέλος, E_q είναι ένα γραμμικό φορτίο (line load) που ορίζεται κατά μήκος της ακμής C (Mindlin, 1964, Bleustein, 1967, Green et al. 1968).

Οι βοηθητικοί ελκυστές $P_q^{(n)}$, $R_q^{(n)}$ και το γραμμικό φορτίο E_q συνδέονται με τους πραγματικούς ελκυστές $t_q^{(n)}$ και $T_{pq}^{(n)}$ των τάσεων μέσω των ακόλουθων σχέσεων (Bleustein, 1967)

$$P_q^{(n)} \equiv t_q^{(n)} + (D_r n_r) n_p T_{pq}^{(n)} - D_p T_{pq}^{(n)}, \quad (1.22)$$

$$R_q^{(n)} \equiv n_p T_{pq}^{(n)}, \quad (1.23)$$

$$E_q \equiv [k_p T_{pq}^{(n)}]. \quad (1.24)$$

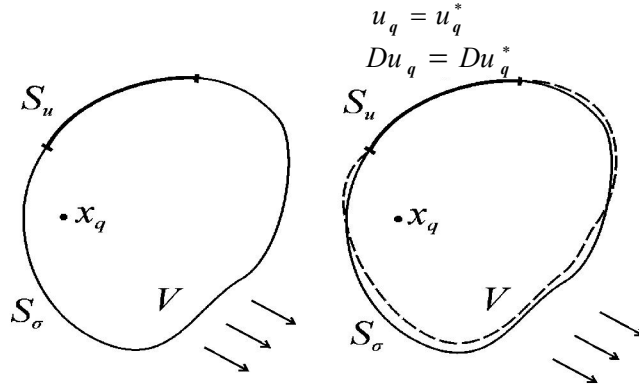
Πρέπει να σημειωθεί ότι το πεδίο διπολικών καθολικών δυνάμεων έχει παραλειφθεί στις ανωτέρω εξισώσεις, καθώς μία τέτοια περίπτωση θεωρείται όχι τόσο ρεαλιστική. Η απουσία διπολικών καθολικών δυνάμεων παρατηρείται, επίσης, στην παρουσίαση της γενικής θεωρίας βαθμίδας από τους Tourpin και Mindlin (Tourpin, 1962; Mindlin, 1964) και στους (Mindlin and Eshel, 1968).

Οι κινηματικές συνοριακές συνθήκες, οι οποίες εξήχθησαν βάσει της Αρχής των Συμπληρωματικών Δυνατών Έργων και μίας αρχής ανάλογης εκείνης των Hellinger–Reissner της κλασικής Μηχανικής του Παραμορφωσίμου Στερεού από τους Georgiadis and Grentzelou (2006) διατυπώνονται ως εξής:

$$u_q : \text{δεδομένο στο } S_u, \quad (1.25)$$

$$D(u_q) : \text{δεδομένο στο } S_u, \quad (1.26)$$

όπου S_u είναι εκείνο το τμήμα της επιφάνειας S του σώματος στο οποίο περιγράφονται τόσο οι μετατοπίσεις όσο και οι κάθετες παράγωγοι αυτών. Το τμήμα της επιφάνειας S του σώματος στο οποίο ορίζονται οι εξωτερικοί ελκυστές των τάσεων συμβολίζεται ως S_σ . Θεωρείται ότι ισχύουν οι σχέσεις $S_\sigma \cup S_u = S$ και $S_\sigma \cap S_u = \emptyset$ (ιδέ Σχήμα 1.3).



Σχ. 1.3 Δυνατή παραμόρφωση του σώματος.

Συνδυάζοντας τώρα τις καταστατικές εξισώσεις (1.11) με τις εξισώσεις ισορροπίας (1.18), καταλήγουμε, απουσία καθολικών μονοπολικών και διπολικών δυνάμεων, στις εξισώσεις πεδίου της θεωρίας βαθμίδας τροπής

$$(\lambda + 2\mu)(1 - c_1 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - c_2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0, \quad (1.27)$$

όπου

$$c_1 = \frac{2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)}{\lambda + 2\mu}, \quad c_2 = \frac{a_3 + 2a_4 + a_5}{2\mu}, \quad (1.28)$$

και $\nabla \equiv \partial_p ()$ ο τελεστής βαθμίδας. Επισημαίνουμε, ότι από την απαίτηση της θετικά ορισμένης ενέργειας και από τις ανισότητες (1.13) προκύπτει ότι $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Οι ποσότητες έχουν διαστάσεις [μήκος]². Η παρουσία αυτών των δύο παραμέτρων μήκους του υλικού διασφαλίζει την

αναλυτική πιθανότητα φαινομένων κλίμακας τα οποία δεν προβλέπονται από την κλασσική ελαστικότητα. Επιπρόσθετα, όταν αυτές οι παράμετροι τείνουν να μηδενιστούν, ανακτούνται οι κλασσικές εξισώσεις πεδίου Navier-Cauchy. Σε μια τέτοια μετάβαση στην κλασσική ελαστικότητα, η τάξη των μερικών διαφορικών εξισώσεων ελαττώνεται όπως και ο αριθμός των απαιτούμενων συνοριακών συνθηκών οπότε και παρουσιάζονται φαινόμενα οριακού στρώματος.

Αξιίζει να σημειωθεί ότι η θεωρία βαθμίδας τροπής είναι πληρέστερη της θεωρίας τάσεων ζεύγους, καθώς η τελευταία λαμβάνει υπόψη της μόνο 8 από τις 18 ανεξάρτητες συνιστώσες της βαθμίδας της τροπής. Αυτό γίνεται καλύτερα αντιληπτό, αν αναλύσουμε τη βαθμίδα της τροπής σε ένα συμμετρικό τμήμα, που αντιπροσωπεύει τη βαθμίδα της τάνυσης (stretch gradient), και σε ένα αντισυμμετρικό τμήμα που αντιπροσωπεύει την καμπυλότητα (rotation gradient). Συγκεκριμένα, έχουμε (Mindlin and Eshel, 1968; Fleck and Hutchinson, 1997)

$$\partial_r \varepsilon_{pq} = \underbrace{u_{(q,rp)}}_{\text{symmetric part}} + \frac{1}{3} \underbrace{\left[e_{rqk} \partial_p \omega_k + e_{rpq} \partial_q \omega_k \right]}_{\text{antisymmetric part}}, \quad (1.29)$$

όπου $u_{(q,rp)} = (1/3)(u_{q,rp} + u_{r,pq} + u_{p,rq})$ είναι το συμμετρικό τμήμα της βαθμίδας τροπής, το οποίο έχει δέκα ανεξάρτητες συνιστώσες. Η θεωρία τάσεων ζεύγους υποθέτει ότι η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας εξαρτάται από την τροπή και μόνο από την βαθμίδα της στροφής (οκτώ ανεξάρτητες συνιστώσες), μη λαμβάνοντας υπόψη τις δέκα ανεξάρτητες συνιστώσες του συμμετρικού τμήματος της βαθμίδας τροπής (δηλαδή την βαθμίδα τάνυσης).

Τέλος, εφαρμόζοντας τον τελεστή βαθμίδας $\nabla(\) \equiv \partial_p(\)$ στην Εξ. (1.27) καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$(1 - c_1 \nabla^2) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \equiv (1 - c_1 \nabla^2) \nabla^2 (u_{p,p}) = 0. \quad (1.30)$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η συστολή / διαστολή (dilatation) $\varepsilon_{pp} = \nabla \cdot \mathbf{u} = u_{p,p}$ υπακούει σε ανωτέρας τάξης εξίσωση από ότι στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασσική ελαστικότητα.

1.3 Επίπεδη Παραμόρφωση

Θεωρούμε ότι το σώμα καταλαμβάνει περιοχή στο (x, y) -επίπεδο υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Τότε, δημιουργείται το ακόλουθο διδιάστατο πεδίο μετατοπίσεων

$$u_x \equiv u_x(x, y) \neq 0, \quad u_y \equiv u_y(x, y) \neq 0 \quad \text{και} \quad u_z \equiv 0, \quad (1.31)$$

όπου ο άξονας z είναι κάθετος στο επίπεδο (x, y) . Στην περίπτωση αυτή, η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} W = & (\lambda/2)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})^2 + \mu(\varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + \\ & + a_1 \left(\left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right) \right) + \\ & + a_2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \right)^2 + a_3 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \right)^2 + \\ & + a_4 \left(\left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \right)^2 \right) + \\ & + a_5 \left(\left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \right)^2 \right). \quad (1.32) \end{aligned}$$

Σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, ο συμμετρικός τανυστής των τάσεων τ_{pq} έχει τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες εντός του επιπέδου (x, y) , που δίνονται από τις

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (1.33\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (1.33\beta)$$

$$\tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (1.33\gamma)$$

ενώ ο τανυστής των διπολικών τάσεων m_{pq} έχει έξι ανεξάρτητες συνιστώσες εντός του επιπέδου (x, y) , οι οποίες γράφονται συναρτήσει των μετατοπίσεων, σύμφωνα με τις Εξ. (1.11β)

$$m_{xxx} = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \partial_x \partial_x u_x + \left(\frac{a_1}{2} + a_3 \right) \partial_y \partial_y u_x + \left(\frac{3a_1}{2} + 2a_2 + a_3 \right) \partial_x \partial_y u_y, \quad (1.34\alpha)$$

$$m_{xxy} = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2} + a_4 + \frac{3a_5}{2} \right) \partial_x \partial_y u_x + \left(\frac{a_3}{2} + a_4 + \frac{a_5}{2} \right) \partial_x \partial_x u_y + \left(\frac{a_1}{2} + a_3 \right) \partial_y \partial_y u_y, \quad (1.34\beta)$$

$$m_{xyx} = (a_1 + 2a_2) \partial_x \partial_x u_x + \left(\frac{a_1}{2} + a_5 \right) \partial_x \partial_y u_x + \left(\frac{a_1}{2} + 2a_2 + 2a_4 + a_5 \right) \partial_x \partial_y u_y, \quad (1.34\gamma)$$

$$m_{yxx} = \left(\frac{a_1}{2} + 2a_2 + 2a_4 + a_5 \right) \partial_x \partial_y u_x + \left(\frac{a_1}{2} + a_5 \right) \partial_x \partial_x u_y + (a_1 + 2a_2) \partial_y \partial_y u_y, \quad (1.34\delta)$$

$$m_{yyx} = \left(\frac{a_1}{2} + a_3 \right) \partial_x \partial_x u_x + \left(\frac{a_3}{2} + a_4 + \frac{a_5}{2} \right) \partial_x \partial_y u_x + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2} + a_4 + \frac{3a_5}{2} \right) \partial_x \partial_y u_y, \quad (1.34\epsilon)$$

$$m_{yyy} = \left(\frac{3a_1}{2} + 2a_2 + a_3 \right) \partial_x \partial_y u_x + \left(\frac{a_1}{2} + a_3 \right) \partial_x \partial_x u_y + 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \partial_y \partial_y u_y. \quad (1.34\zeta)$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε μια ποσότητα θεμελιώδους σημασίας στην θεωρία βαθμίδας τροπής, την ολική τάση (total stress). Η ποσότητα αυτή συνδέεται άμεσα με τον μονοπολικό ελκυστή τάσεων $P_q^{(n)}$ (ιδέ Georgiadis 2003; Georgiadis and Grentzelou, 2006). Για να ορίσουμε τις ολικές τάσεις, οι οποίες εμφανίζονται στα προβλήματα συνοριακών τιμών στα επόμενα Κεφάλαια, θεωρούμε το επίπεδο $(x, y = \text{const.})$ με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$. Βάσει της Εξ. (1.19), οι ολικές τάσεις, στο επίπεδο αυτό, ορίζονται ως

$$P_x^{(n)} \equiv t_{yx} = \tau_{yx} - \frac{\partial m_{xyx}}{\partial x} - \frac{\partial m_{yxy}}{\partial y} - \frac{\partial m_{yxx}}{\partial x}, \quad (1.35\alpha)$$

$$P_y^{(n)} \equiv t_{yy} = \tau_{yy} - \frac{\partial m_{xyy}}{\partial x} - \frac{\partial m_{yyy}}{\partial y} - \frac{\partial m_{yyx}}{\partial x}. \quad (1.35\beta)$$

Επιπλέον, θεωρώντας μηδενικές καθολικές δυνάμεις, η Εξ. (1.18) παρέχει τις κατωτέρω εξισώσεις ισοροπίας

$$\partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{yx} - \partial_x^2 m_{xxx} - \partial_y^2 m_{yyx} - \partial_x \partial_y (m_{yxx} + m_{xyx}) = 0, \quad (1.36\alpha)$$

$$\partial_x \tau_{xy} + \partial_y \tau_{yy} - \partial_x^2 m_{xxy} - \partial_y^2 m_{yyy} - \partial_x \partial_y (m_{yxy} + m_{xyy}) = 0. \quad (1.36\beta)$$

Εν συνέχεια, συνδυάζοντας τις Εξ. (1.11) με τις (1.36) και από τους ορισμούς των $(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ijk})$ καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα συζευγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων ως προς τις συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων (u_x, u_y)

$$(1 - c_1 \nabla^2)(\lambda + 2\mu)(\partial_x^2 u_x + \partial_x \partial_y u_y) + (1 - c_2 \nabla^2)\mu(\partial_y^2 u_x - \partial_x \partial_y u_y) = 0, \quad (1.37\alpha)$$

$$(1 - c_1 \nabla^2)(\lambda + 2\mu)(\partial_x \partial_y u_x + \partial_y^2 u_y) + (1 - c_2 \nabla^2)\mu(\partial_x^2 u_y - \partial_x \partial_y u_x) = 0. \quad (1.37\beta)$$

Όπως είναι αναμενόμενο, καθώς τα $c_1 \rightarrow 0$, $c_2 \rightarrow 0$ οι παραπάνω εξισώσεις εκφυλίζονται στις εξισώσεις Navier-Cauchy της κλασικής ελαστικότητας. Επίσης, το γεγονός ότι οι Εξ. (1.37) είναι αυξημένης τάξης, σε σχέση με την οριακή περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας (σημειώνεται ότι, οι διαφορικές εξισώσεις Navier-Cauchy είναι δευτέρας τάξης), ενώ παράλληλα οι συντελεστές βαθμίδας (c_1, c_2) πολλαπλασιάζουν τους όρους με τις παραγώγους ανωτέρας τάξης, υποδηλώνει την εμφάνιση φαινομένων συνοριακού στρώματος. Βάσει της παραπάνω παρατήρησης, αναμένεται η επιρροή των φαινομένων βαθμίδας (gradient effects) να εξαρτάται κρίσιμα από το σχετικό μέγεθος του χαρακτηριστικού μήκους του υλικού $c_1^{1/2}$ και $c_2^{1/2}$.

Αναφέρουμε ότι στην απλούστερη περίπτωση, όπου $c_1 = c_2 = c$ (Georgiadis et. al, 2004), οι καταστατικές σχέσεις γίνονται ως εξής

$$m_{xxx} = c \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \quad (1.38\alpha)$$

$$m_{xxy} = c \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \quad (1.38\beta)$$

$$m_{xyy} = c \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x}, \quad (1.38\gamma)$$

$$m_{yxx} = c \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y}, \quad (1.38\delta)$$

$$m_{yyx} = c \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (1.38\epsilon)$$

$$m_{yyy} = c \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (1.38\zeta)$$

ενώ οι εξισώσεις ισορροπίας σε αυτή την περίπτωση εκφρασμένες ως προς τις συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων δίνονται από τις παρακάτω

$$(1 - c\nabla^2) \left[\lambda (\partial_x^2 u_x + \partial_x \partial_y u_y) + \mu (\partial_y^2 u_x + \partial_x \partial_y u_y) + 2\mu \partial_x^2 u_x \right] = 0, \quad (1.39\alpha)$$

$$(1 - c\nabla^2) \left[\lambda (\partial_y^2 u_y + \partial_x \partial_y u_x) + \mu (\partial_x^2 u_y + \partial_x \partial_y u_x) + 2\mu \partial_y^2 u_y \right] = 0. \quad (1.39\beta)$$

Κεφάλαιο 2

Το πρόβλημα Τύπου Flamant-Boussinesq στα πλαίσια της θεωρίας Βαθμίδας Τροπής

2.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα Flamant-Boussinesq θεωρείται ένα από τα πιο γνωστά προβλήματα στην κλασσική θεωρία ελαστικότητας. Στο πρόβλημα αυτό, σ' ένα ημίχωρο ο οποίος βρίσκεται σε συνθήκες επίπεδης τάσης/ επίπεδης παραμόρφωσης, ασκείται συγκεντρωμένο φορτίο στην επιφάνεια του. Το πρόβλημα έχει ποικίλες εφαρμογές, π.χ. στην Μηχανική των Επαφών και στην Τριβολογία (tribology). Επίσης, οι λύσεις του προβλήματος Flamant-Boussinesq χρησιμεύουν ως συναρτήσεις Green σε πληθώρα προβλημάτων που αναλύονται με την Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων.

Ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα της λύσης του προβλήματος Flamant-Boussinesq στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας είναι η λογαριθμική ιδιομορφία που παρουσιάζει το πεδίο μετατοπίσεων στο σημείο εφαρμογής του φορτίου. Επίσης, εκτός από το γεγονός αυτό το οποίο είναι, από φυσικής πλευράς, μη αποδεκτό, προκύπτει ένα πεδίο μετατοπίσεων το οποίο δεν είναι φραγμένο στο άπειρο (απειρίζεται λογαριθμικά). Όπως επισημαίνει ο Fung (1965), αυτή η μη φραγμένη συμπεριφορά στο άπειρο είναι μια ιδιομορφία των δισδιάστατων ελαστοστατικών προβλημάτων με συγκεντρωμένα φορτία. Επιπρόσθετα, το πρόβλημα Flamant-Boussinesq επιδεικνύει και μια ασυνέχεια στην εφαπτομενική (κάθετη) επιφανειακή μετατόπιση στην περίπτωση κάθετου (εφαπτομενικού) φορτίου.

Γίνεται επομένως φανερό ότι η κλασσική λύση δεν αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα. Συγκεκριμένα, μη φραγμένες μετατοπίσεις προκύπτουν στο σημείο εφαρμογής του φορτίου ανεξάρτητα από το μέγεθος του. Η εργασία αυτή σκοπό έχει, χρησιμοποιώντας μια πιο

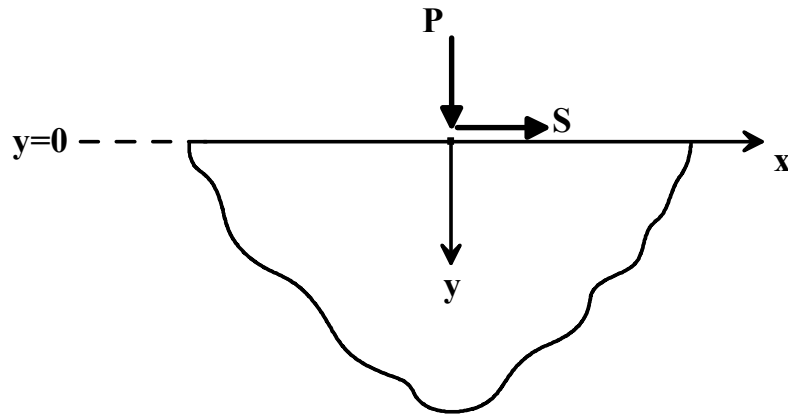
γενικευμένη θεωρία από αυτήν της κλασσικής ελαστικότητας, να παρέχει ακριβείς λύσεις για το πρόβλημα Flamant-Boussinesq απαλλαγμένες από τις προαναφερθείσες ιδιομορφίες. Ειδικότερα, όπως θα δούμε, προβλέπονται συνεχείς και φραγμένες μετατοπίσεις στα σημεία εφαρμογής των φορτίων. Επιπλέον, αυτές οι λύσεις εξαρτώνται τώρα και από το μέγεθος του φορτίου. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η θεωρία βαθμίδας μοντελοποιεί την συμπεριφορά στερεών με μικροδομή και επιτρέπει την παρουσία των χαρακτηριστικών μήκων του υλικού. Από την άλλη μεριά έχει ήδη εξακριβωθεί από πειραματικές παρατηρήσεις ότι η συμπεριφορά τέτοιων υλικών επηρεάζεται σημαντικά από την μικροδομή τους. Επομένως, η κλασσική θεωρία είναι ανεπαρκής στο να περιγράψει την συμπεριφορά τέτοιων υλικών.

Στη παρούσα μελέτη, λύνεται για πρώτη φορά το πρόβλημα Flamant-Boussinesq στα πλαίσια της *πλήρους* θεωρίας βαθμίδας τροπής (λαμβάνοντας υπόψη και τις *πέντε* *μικροδομικές σταθερές* του υλικού). Η μέθοδος της λύσης βασίζεται στη χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών και είναι ακριβής. Οι μετατοπίσεις που προβλέπονται είναι φραγμένες και επομένως οι λύσεις είναι πιο φυσικές. Το γεγονός ότι προκύπτουν φραγμένα πεδία μετατοπίσεων φαίνεται να έχει κάποια εξήγηση διότι, γενικά, υλικά που διέπονται από γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου τείνουν να συμπεριφέρονται με πιο στιβαρό τρόπο, σε σύγκριση με εκείνα των κλασσικών θεωριών συνεχούς μέσου.

Τέλος, παρέχουμε μια σύντομη βιβλιογραφία με προσπάθειες εξομάλυνσης των ιδιομορφιών στα σημεία εφαρμογής των συγκεντρωμένων φορτίων χρησιμοποιώντας τις γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου. Κατ' αρχάς στα πλαίσια της θεωρίας των Mindlin και Toupin για ένα καταστατικό μοντέλο τύπου II, το πρόβλημα Flamant-Boussinesq είχε αναλυθεί από τους Exadaktylos (1999), Zhou και Jin (2003), και Lazar και Maugin (2006). Ωστόσο, όλες οι προηγούμενες μελέτες χρησιμοποίησαν προσεγγιστικές συνοριακές συνθήκες οπότε δεν παρείχαν ακριβείς λύσεις. Επιπρόσθετα, και οι δύο αναλύσεις από τους Nowinski (1986) και Walsh και Tordesillas (2004), δεν είχαν επιτυχία στο να άρουν την ιδιομορφία του πεδίου μετατοπίσεων του προβλήματος Flamant-Boussinesq. Η πρώτη εργασία χρησιμοποίησε την θεωρία μη-τοπικής ελαστικότητας (non-local elasticity) των Kroener-Eringen, ενώ η τελευταία χρησιμοποίησε την θεωρία Cosserat (micropolar theory). Η πιο συναφής εργασία με την παρούσα έγινε από τους Georgiadis και Anagnostou (2007), όπου επιλύθηκε το πρόβλημα Flamant-Boussinesq χρησιμοποιώντας την απλούστερη μορφή της θεωρίας βαθμίδας τροπής.

2.2 Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε ένα σώμα το οποίο καταλαμβάνει το ημι-επίπεδο $(-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty)$ σε κατάσταση επιπέδου παραμορφώσεως. Ένα κάθετο (γραμμικό) φορτίο P και ένα εφαπτομενικό (γραμμικό) φορτίο S ασκούνται πάνω σ' ένα σημείο στην επιφάνεια του σώματος. Το σημείο αυτό θεωρούμε να είναι η αρχή $(x = 0, y = 0)$ ενός Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (βλ. Σχ. 2.1). Τα συγκεντρωμένα φορτία είναι εκφρασμένα σε διαστάσεις $[\deltaυναμη][\muηκος]^{-1}$. Οι



Σχήμα 2.1: Κάθετο και εφαπτομενικό γραμμικό φορτίο ασκούμενα στην επιφάνεια ενός ημιχώρου

συνοριακές συνθήκες κατά μήκος της επιφάνειας $y = 0$ προκύπτουν από τις (1.19) και (1.20) και γράφονται ακολούθως

$$\tau_{yy} - \partial_x m_{xy} - \partial_y m_{yyy} - \partial_x m_{xy} = -P\delta(x), \quad (2.1)$$

$$\tau_{yx} - \partial_x m_{xy} - \partial_y m_{yx} - \partial_x m_{yx} = -S\delta(x), \quad (2.2)$$

$$m_{yyy} = 0, \quad (2.3)$$

$$m_{yx} = 0, \quad (2.4)$$

όπου $\delta(\)$ η Dirac δέλτα κατανομή.

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών θα κάνουμε χρήση του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Laplace. Ο ευθύς και αντίστροφος μετασχηματισμός ορίζονται ως εξής:

$$f^*(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-px} dx, \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} f^*(p, y) \cdot e^{px} dp, \quad (2.5\alpha, \beta)$$

όπου B_r δηλώνει το δρόμο ολοκλήρωσης Bromwich μέσα στην περιοχή αναλυτικότητας της συνάρτησης $f^*(p, y)$ στο μιγαδικό επίπεδο. Αυτή η περιοχή είναι μια άπειρη λωρίδα παράλληλη στον $\text{Im}(p)$ - άξονα. Μετασχηματίζοντας τις (1.37α, 1.37β) με την (2.5α) προκύπτει ένα σύστημα ΣΔΕ για τις (u_x^*, u_y^*) το οποίο γράφεται σε συμπαγή μορφή

$$[K] \begin{bmatrix} u_x^* \\ u_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

όπου ο διαφορικός τελεστής $[K]$ δίνεται ως

$$[K] = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

όπου

$$q_{11} = [(\lambda + 2\mu)p^2 + \mu d^2] - [c_1(\lambda + 2\mu)p^2 + c_2\mu d^2](d^2 + p^2),$$

$$q_{12} = pd [(\lambda + \mu) - c_1(\lambda + 2\mu)(d^2 + p^2)],$$

$$q_{22} = [\mu p^2 + (\lambda + 2\mu)d^2] - [c_1(\lambda + 2\mu)d^2 + c_2\mu p^2](d^2 + p^2),$$

και $d(\cdot) \equiv d(\cdot)/dy$, $d^2(\cdot) \equiv d^2(\cdot)/dy^2$, κτλ.

Το σύστημα ομογενών διαφορικών εξισώσεων στην (2.6) έχει λύση διαφορετική της τετριμμένης αν και μόνο αν η ορίζουσα του $[K]$ είναι μηδέν. Επομένως,

$$\mu(\lambda + 2\mu)(d^2 + p^2)^2 [(d^2 + p^2)c_1 - 1][(d^2 + p^2)c_2 - 1] = 0. \quad (2.8)$$

Η τελευταία έχει δύο διπλές ρίζες $d = \pm(-p)^{1/2}$ και άλλες δύο απλές: $d = \pm[(1/c_1) - p^2]^{1/2}$ και $d = \pm[(1/c_2) - p^2]^{1/2}$. Το πρώτο ζεύγος αποτελεί τις ρίζες της κλασσικής ελαστικότητας, ενώ τα άλλα δύο ζεύγη αντικατοπτρίζουν την παρουσία φαινομένων βαθμίδας. Η γενική λύση της (2.6) είναι η ακόλουθη:

$$u_x^*(p, y) = (A_1 + A_2 y) \exp(\beta y) + (A_3 + A_4 y) \exp(-\beta y) + A_5 \exp(\gamma_1 y) + A_6 \exp(-\gamma_1 y) + A_7 \exp(\gamma_2 y) + A_8 \exp(-\gamma_2 y), \quad (2.9\alpha)$$

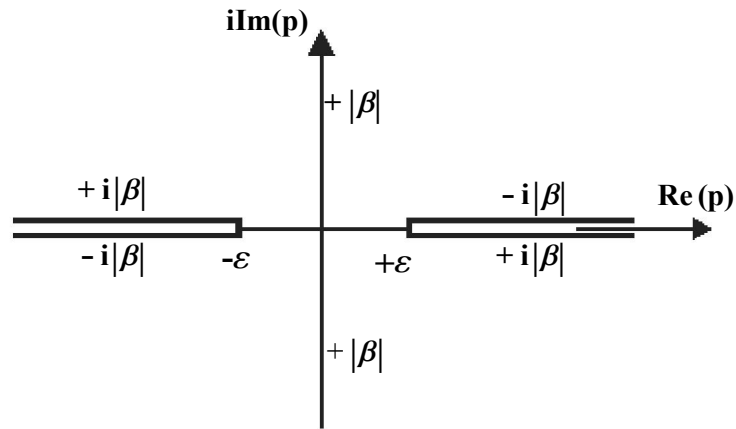
$$u_x^*(p, y) = (B_1 + B_2 y) \exp(\beta y) + (B_3 + B_4 y) \exp(-\beta y) + B_5 \exp(\gamma_1 y) + B_6 \exp(-\gamma_1 y) + B_7 \exp(\gamma_2 y) + B_8 \exp(-\gamma_2 y). \quad (2.9\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις τελευταίες στις εξίσωση ισορροπίας (1.37α) και έπειτα από εκτεταμένη άλγεβρα προκύπτουν ταυτότητες που πρέπει να ισούνται με το μηδέν. Επειδή όμως οι όροι $(\exp(\pm\beta y), y \exp(\pm\beta y), \exp(\pm\gamma_1 y), \exp(\pm\gamma_2 y))$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους θα πρέπει οι συντελεστές τους να μηδενίζονται. Το γεγονός αυτό μας δίνει την δυνατότητα να εκφράσουμε τα A_i ($i=1, \dots, 8$) συναρτήσει των B_i ($i=1, \dots, 8$). Επίσης, επειδή η λύση πρέπει να είναι φραγμένη για $y \rightarrow +\infty$ μηδενίζουμε τους συντελεστές των $(\exp(+\beta y), y \exp(+\beta y), \exp(+\gamma_1 y), \exp(+\gamma_2 y))$ και αυτό συνεπάγεται στον μηδενισμό των (B_1, B_2, B_5, B_7) . Τελικά η γενική λύση παίρνει την ακόλουθη μορφή

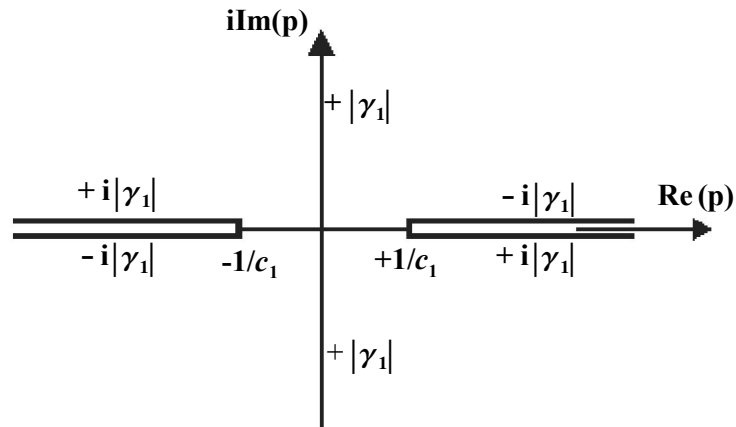
$$u_x^*(p, y) = \left(B_3 \frac{\beta}{p} - B_4 \left(\frac{(\lambda + 3\mu)}{p(\lambda + \mu)} - \frac{\beta}{p} y \right) \right) \exp(-\beta y) + B_6 \frac{p}{\gamma_1} \exp(-\gamma_1 y) + B_8 \frac{\gamma_2}{p} \exp(-\gamma_2 y) \quad \text{για } y \geq 0, \quad (2.10\alpha)$$

$$u_y^*(p, y) = (B_3 + B_4 y) \exp(-\beta y) + B_6 \exp(-\gamma_1 y) + B_8 \exp(-\gamma_2 y) \quad \text{για } y \geq 0, \quad (2.10\beta)$$

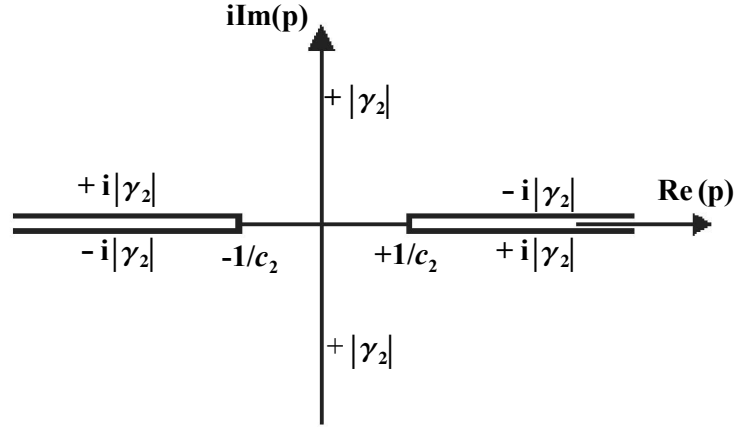
όπου (B_3, B_4, B_6, B_8) είναι ακόμα άγνωστες συναρτήσεις του p , $\beta \equiv \beta(p) = (\varepsilon^2 - p^2)^{1/2}$ με το ε να είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $\varepsilon \rightarrow +0$, $\gamma_1 \equiv \gamma_1(p) = [(1/c_1) - p^2]^{1/2}$ και $\gamma_2 \equiv \gamma_2(p) = [(1/c_2) - p^2]^{1/2}$. Συγκεκριμένα, η εισαγωγή του ε διευκολύνει την εισαγωγή των κλαδικών τομών της μιγαδικής συνάρτησης $\beta = (-p^2)^{1/2}$ (ιδέ επίσης Carrier et al., 1966).



Σχήμα 2.2: Κλαδικές τομές για την συνάρτηση $\beta(p)$



Σχήμα 2.3: Κλαδικές τομές για την συνάρτηση $\gamma_1(p)$



Σχήμα 2.4: Κλαδικές τομές για την συνάρτηση $\gamma_2(p)$

Τονίζεται ότι προκειμένου να προκύψει φραγμένη λύση όταν $y \rightarrow +\infty$, το p -επίπεδο πρέπει να κοπεί με τον τρόπο που φαίνεται στα Σχ. 2.2, 2.3 και 2.4. Η εισαγωγή των κλαδικών τομών εξασφαλίζει ότι οι συναρτήσεις $(\beta, \gamma_1, \gamma_2)$ είναι μονότιμες και ότι $\text{Re}(\beta) \geq 0$, $\text{Re}(\gamma_1) \geq 0$ και $\text{Re}(\gamma_2) \geq 0$ κατά μήκος του δρόμου ολοκλήρωσης Bromwich. Παρατηρώντας τώρα τις (2.10) και την μορφή της συνάρτησης $\beta(p)$, ο δρόμος ολοκλήρωσης Bromwich στην περίπτωση μας περιορίζεται ώστε να συμπίπτει με τον $\text{Im}(p)$ -άξονα.

Πριν προχωρήσουμε, για διευκόλυνση των πράξεων θέτουμε δύο νέες σταθερές τις

$$c_3 = \frac{a_4 + a_5}{\mu} \text{ και } c_4 = \frac{a_1 + 2a_2}{\lambda}. \quad (2.11)$$

Ορίσαμε τις παραπάνω σταθερές αφού παρατηρώντας τις σχέσεις (1.34) είδαμε ότι ουσιαστικά υπάρχουν μόνο τέσσερις γραμμικά ανεξάρτητοι συνδυασμοί των μικροδομικών σταθερών $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Αυτοί οι ανεξάρτητοι συνδυασμοί δίνονται από τις σταθερές (c_1, c_2, c_3, c_4) όπου οι σταθερές (c_1, c_2) είναι αυτές των σχέσεων (1.28). Συνεπώς οι μετασχηματισμένες γενικές εκφράσεις για τις τάσεις που υπεισέρχονται στις συνοριακές συνθήκες γίνονται

$$\tau_{xx}^* = (\lambda + 2\mu) p u_x^* + \lambda \frac{du_y^*}{dy}, \quad (2.12\alpha)$$

$$\tau_{xy}^* = \mu \left(\frac{du_x^*}{dy} + p u_y^* \right), \quad (2.12\beta)$$

$$\tau_{yy}^* = (\lambda + 2\mu) \frac{du_y^*}{dy} + \lambda p u_x^*, \quad (2.12\gamma)$$

$$\begin{aligned} m_{xxx}^* &= c_1 (\lambda + 2\mu) p^2 u_x^* + \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu) c_1 - 2\mu c_3 - \lambda c_4] \frac{d^2 u_x^*}{dy^2} + \\ &+ \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu) c_1 - 2\mu c_3 + \lambda c_4] p \frac{du_y^*}{dy}, \end{aligned} \quad (2.12\delta)$$

$$\begin{aligned} m_{xxy}^* &= \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu) c_1 - 2\mu (c_2 - c_3) - \lambda c_4] p \frac{du_x^*}{dy} + c_2 \mu p^2 u_y^* + \\ &+ \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu) c_1 - 2\mu c_3 - \lambda c_4] \frac{d^2 u_y^*}{dy^2}, \end{aligned} \quad (2.12\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} m_{xyy}^* &= c_4 \lambda p^2 u_x^* + \frac{1}{2} [c_1 (\lambda + 2\mu) - 4\mu c_2 + 2\mu c_3 - \lambda c_4] \frac{d^2 u_x^*}{dy^2} - \\ &- \frac{1}{2} [c_1 (\lambda + 2\mu) - 4\mu c_2 - 2\mu c_3 - 3\lambda c_4] p \frac{du_y^*}{dy}, \end{aligned} \quad (2.12\sigma\tau)$$

$$\begin{aligned} m_{yxx}^* &= -\frac{1}{2} [c_1 (\lambda + 2\mu) - 4\mu c_2 - 2\mu c_3 - 3\lambda c_4] p \frac{du_x^*}{dy} + \\ &+ \frac{1}{2} [c_1 (\lambda + 2\mu) - 4\mu c_2 + 2\mu c_3 - \lambda c_4] p^2 u_y^* + \lambda c_4 \frac{d^2 u_y^*}{dy^2}, \end{aligned} \quad (2.12\zeta)$$

$$\begin{aligned}
m_{yyx}^* &= \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu)c_1 - 2\mu c_3 - \lambda c_4] p^2 u_x^* + c_2 \mu p \frac{du_x^*}{dy} + \\
&+ \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu)c_1 - 2\mu(c_2 - c_3) - \lambda c_4] p \frac{du_y^*}{dy}, \tag{2.12\eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{yyy}^* &= \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu)c_1 - 2\mu c_3 + \lambda c_4] p \frac{du_x^*}{dy} + \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu)c_1 - 2\mu c_3 - \lambda c_4] p^2 u_y^* + \\
&+ c_1 (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u_y^*}{dy^2}. \tag{2.12\theta}
\end{aligned}$$

Οι μετασηματισμένες συνοριακές συνθήκες για το πρόβλημα μας προκύπτουν έπειτα από δράση της (2.5α) πάνω στις (2.1-2.4) οι οποίες γράφονται ως εξής

$$\tau_{yy}^* - p m_{xyy}^* - \frac{dm_{yyy}^*}{dy} - p m_{yyx}^* = -P, \tag{2.13\alpha}$$

$$\tau_{yx}^* - p m_{xyx}^* - \frac{dm_{yyx}^*}{dy} - p m_{yxx}^* = -S, \tag{2.13\beta}$$

$$m_{yyy}^* = 0, \tag{2.13\gamma}$$

$$m_{yyx}^* = 0. \tag{2.13\delta}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (2.13α-2.13δ) με τις (2.12) προκύπτει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για τις (B_3, B_4, B_6, B_8) . Μετά από κάποια άλγεβρα τόσο με το χέρι όσο και με τη βοήθεια συμβολικής γραφής του Maple 13, προκύπτει η λύση η οποία δίνεται στο Παράρτημα Β. Τελικά, οι μετασηματισμένες μετατοπίσεις βρίσκονται να είναι

$$\begin{aligned}
u_x^{*(P)}(p, y) &= \left[\frac{\beta}{p} B_3^{(P)} - \frac{(\lambda + 3\mu)}{(\lambda + \mu)p} B_4^{(P)} \right] \exp(-\beta y) + \left[\frac{\beta}{p} B_4^{(P)} \right] y \exp(-\beta y) - \\
&- \frac{P}{\gamma_1} B_6^{(P)} \exp(-\gamma_1 y) + \frac{\gamma_2}{p} B_8^{(P)} \exp(-\gamma_2 y) \tag{2.14}
\end{aligned}$$

$$u_y^{*(P)}(p, y) = B_3^{(P)} \exp(-\beta y) + B_4^{(P)} y \exp(-\beta y) + B_6^{(P)} \exp(-\gamma_1 y) + B_8^{(P)} \exp(-\gamma_2 y) \quad (2.15)$$

$$u_x^{*(S)}(p, y) = \left[\frac{\beta}{p} B_3^{(S)} - \frac{(\lambda + 3\mu)}{(\lambda + \mu)p} B_4^{(S)} \right] \exp(-\beta y) + \left[\frac{\beta}{p} B_4^{(S)} \right] y \exp(-\beta y) - \frac{p}{\gamma_1} B_6^{(S)} \exp(-\gamma_1 y) + \frac{\gamma_2}{p} B_8^{(S)} \exp(-\gamma_2 y) \quad (2.16)$$

$$u_y^{*(S)}(p, y) = B_3^{(S)} \exp(-\beta y) + B_4^{(S)} y \exp(-\beta y) + B_6^{(S)} \exp(-\gamma_1 y) + B_8^{(S)} \exp(-\gamma_2 y) \quad (2.17)$$

όπου τα $B_i^{(P)}, B_i^{(S)}$ ($i = 3, 4, 6, 8$) δίνονται από τις σχέσεις (B1-B8) του παραρτήματος Β και οι εκθέτες P και S στις παρενθέσεις δηλώνουν ότι η συγκεκριμένη συνιστώσα προκύπτει από το συγκεντρωμένο φορτίο P ή S , αντίστοιχα.

Τέλος, παρατηρούνται οι ακόλουθες σχέσεις αρτιότητας/ περιττότητας των μετασχηματισμένων συνιστωσών των μετατοπίσεων

$$u_x^{*(P)}(-p, y) = -u_x^{*(P)}(p, y), \quad (2.18)$$

$$u_y^{*(P)}(-p, y) = u_y^{*(P)}(p, y), \quad (2.19)$$

$$u_x^{*(S)}(-p, y) = u_x^{*(S)}(p, y), \quad (2.20)$$

$$u_y^{*(S)}(-p, y) = -u_y^{*(S)}(p, y). \quad (2.21)$$

Βεβαίως, συνάγεται από την θεωρία των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών (βλ. Bracewell [44]) ότι οι ίδιες ιδιότητες θα ισχύουν και στο φυσικό πρόβλημα δηλαδή: $u_x^{(P)}(-x, y) = -u_x^{(P)}(x, y)$, $u_y^{(P)}(-x, y) = u_y^{(P)}(x, y)$, $u_x^{(S)}(-x, y) = u_x^{(S)}(x, y)$, και $u_y^{(S)}(-x, y) = -u_y^{(S)}(x, y)$. Κατ' ακρίβεια αυτή η συμπεριφορά των συνιστωσών της μετατόπισης επιβεβαιώνεται εδώ αφού προκύπτουν είτε λόγω συμμετρίας (όταν το φορτίο P ασκείται μόνο του) είτε λόγω αντισυμμετρίας (όταν το φορτίο S ασκείται μόνο του) του φυσικού προβλήματος.

2.3 Αντιστροφή Μετασχηματισμού Laplace

Στη συνέχεια, εστιάζουμε την προσοχή μας μόνο στις επιφανειακές μετατοπίσεις ($y = 0$) με σκοπό να εξάγουμε την αναλυτική λύση. Μια τέτοια λύση θα προσδιορίσει την συμπεριφορά του πεδίου μετατοπίσεων κοντά στο σημείο εφαρμογής των συγκεντρωμένων φορτίων και θα μας επιτρέψει να ανιχνεύσουμε πιθανές αποκλίσεις από τις προβλέψεις της κλασικής θεωρίας. Σημειώνεται ωστόσο ότι ο προσδιορισμός του πεδίου στα σημεία ‘μέσα’ στον ημίχωρο ($y \neq 0$) μπορούν να προκύψουν ακολουθώντας σε γενικές γραμμές την παρούσα ανάλυση αλλά θα περιλαμβάνουν πολύ περιπλοκότερες σχέσεις λόγω της παρουσίας των όρων $\exp(-\beta y)$, $\exp(-\gamma_1 y)$ και $\exp(-\gamma_2 y)$.

Εκμεταλλευόμενοι τώρα τις σχέσεις (2.18-2.21) καθώς και το γεγονός ότι ο δρόμος αντιστροφής στην (2.5β) είναι ολόκληρος ο $\text{Im}(p)$ -άξονας αλλάζουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης στην (2.5β) θέτοντας $p = -i\xi$, όπου $\xi \in \mathbb{R}$. Ο νέος δρόμος αντιστροφής τώρα είναι ολόκληρος ο πραγματικός άξονας. Κάθε αντιστροφή του τύπου (2.5β) θα γραφεί τώρα ως $f(x, y = 0) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, y = 0) \cdot e^{-i\xi x} d\xi$. Κατά μήκος αυτού του δρόμου αντιστροφής, έχουμε $\beta(\xi) = \xi$, $\gamma_1(\xi) = [(1/c_1) + \xi^2]^{1/2}$ και $\gamma_2(\xi) = [(1/c_2) + \xi^2]^{1/2}$. Επίσης, λαμβάνοντας υπ’ όψιν την ταυτότητα του Euler, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, και το στοιχειώδες αποτέλεσμα ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \begin{cases} 0, & f: \text{odd} \\ 2 \int_0^{\infty} f(x) dx, & f: \text{even} \end{cases}, \quad (2.22)$$

μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για τις αντίστροφες συναρτήσεις

$$u_x^{(p)}(x, y = 0) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} u_x^{*(p)}(\xi, y = 0) \cdot \sin(\xi x) d\xi, \quad (2.23)$$

$$u_y^{(p)}(x, y = 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u_y^{*(p)}(\xi, y = 0) \cdot \cos(\xi x) d\xi, \quad (2.24)$$

$$u_x^{(S)}(x, y=0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u_x^{*(S)}(\xi, y=0) \cdot \cos(\xi x) d\xi, \quad (2.25)$$

$$u_y^{(S)}(x, y=0) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} u_y^{*(S)}(\xi, y=0) \cdot \sin(\xi x) d\xi. \quad (2.26)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω αποτελέσματα, οι μετασχηματισμένες επιφανειακές μετατοπίσεις μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$u_x^{*(P)}(\xi, y=0) = -\frac{iP}{2(\lambda + \mu)} \frac{1}{\xi} + \frac{iP}{2(\lambda + \mu)} \frac{(c_1 c_2)^{1/2} \xi}{(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2)} + \frac{iP}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{\xi \left(2N_x^{(P)} \left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) - \mu (c_1 c_2)^{1/2} \Lambda \right)}{\left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) \Lambda}, \quad (2.27)$$

$$u_y^{*(P)}(\xi, y=0) = \frac{(\lambda + 2\mu)P}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{1}{\xi} - \frac{(\lambda + 2\mu)P}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{(c_1 c_2)^{1/2} \xi}{(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2)} - \frac{(\lambda + 2\mu)P}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{\xi \left(2N_y^{(P)} \left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) - (c_1 c_2)^{1/2} \Lambda \right)}{\left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) \Lambda}, \quad (2.28)$$

$$u_x^{*(S)}(\xi, y=0) = \frac{(\lambda + 2\mu)S}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{1}{\xi} - \frac{(\lambda + 2\mu)S}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{(c_1 c_2)^{1/2} \xi}{(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2)} - \frac{S}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{\xi \left(2N_x^{(S)} \left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) - \Lambda (c_1 c_2)^{1/2} (\lambda + 2\mu) \right)}{\left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) \Lambda}, \quad (2.29)$$

$$u_y^{*(S)}(\xi, y=0) = \frac{iS}{2(\lambda + \mu)} \frac{1}{\xi} - \frac{iS}{2(\lambda + \mu)} \frac{(c_1 c_2)^{1/2} \xi}{(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2)} - \frac{iS}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{\xi \left(2N_y^{(S)} \left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) - \mu (c_1 c_2)^{1/2} \Lambda \right)}{\left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) \Lambda}, \quad (2.30)$$

όπου οι συναρτήσεις $N_x^{(P)}(\xi)$, $N_y^{(P)}(\xi)$, $N_x^{(S)}(\xi)$, $N_y^{(S)}(\xi)$ και $\Lambda(\xi)$ δίνονται στο Παράρτημα Γ.

Κάθε συνιστώσα μετατοπίσεως μπορεί να γραφεί με όρους τριών ολοκληρωμάτων, κατά την ακόλουθη μορφή

$$u_x^{(P)}(x, y=0) = I_{class.}^{(P)} + I_{grad-1}^{(P)} + I_{grad-2}^{(P)}, \quad (2.31)$$

$$u_y^{(P)}(x, y=0) = J_{class.}^{(P)} + J_{grad-1}^{(P)} + J_{grad-2}^{(P)}, \quad (2.32)$$

$$u_x^{(S)}(x, y=0) = I_{class.}^{(S)} + I_{grad-1}^{(S)} + I_{grad-2}^{(S)}, \quad (2.33)$$

$$u_y^{(S)}(x, y=0) = J_{class.}^{(S)} + J_{grad-1}^{(S)} + J_{grad-2}^{(S)}, \quad (2.34)$$

όπου

$$I_{class.}^{(P)} = -\frac{P}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \sin(\xi x) d\xi, \quad (2.35\alpha)$$

$$I_{grad-1}^{(P)} = \frac{P}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{(c_1 c_2)^{1/2} \xi}{(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2)} \sin(\xi x) d\xi, \quad (2.35\beta)$$

$$I_{grad-2}^{(P)} = \frac{P}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{\xi \left(2N_x^{(P)} \left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) - \mu (c_1 c_2)^{1/2} \Lambda \right)}{\left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) \Lambda} \sin(\xi x) d\xi, \quad (2.35\gamma)$$

$$J_{class.}^{(P)} = \frac{(\lambda + 2\mu)P}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \cos(\xi x) d\xi, \quad (2.36\alpha)$$

$$J_{grad-1}^{(P)} = -\frac{(\lambda + 2\mu)P}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{(c_1 c_2)^{1/2} \xi}{(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2)} \cos(\xi x) d\xi, \quad (2.36\beta)$$

$$J_{grad-2}^{(P)} = -\frac{(\lambda + 2\mu)P}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{\xi \left(2N_y^{(P)} \left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi \right) - (c_1 c_2)^{1/2} \Lambda \right)}{(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi)^2 \Lambda} \cos(\xi x) d\xi, \quad (2.36\gamma)$$

$$I_{class.}^{(S)} = \frac{(\lambda + 2\mu)S}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \cos(\xi x) d\xi, \quad (2.37\alpha)$$

$$I_{grad-1}^{(S)} = -\frac{(\lambda + 2\mu)S}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{(c_1 c_2)^{1/2} \xi}{(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2)} \cos(\xi x) d\xi, \quad (2.37\beta)$$

$$I_{grad-2}^{(S)} = -\frac{S}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{\xi \left(2N_x^{(S)} \left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) - \Lambda (c_1 c_2)^{1/2} (\lambda + 2\mu) \right)}{(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2)^2 \Lambda} \cos(\xi x) d\xi, \quad (2.37\gamma)$$

$$J_{class.}^{(S)} = \frac{S}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \sin(\xi x) d\xi, \quad (2.38\alpha)$$

$$J_{grad-1}^{(S)} = -\frac{S}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{(c_1 c_2)^{1/2} \xi}{(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2)} \sin(\xi x) d\xi, \quad (2.38\beta)$$

$$J_{grad-2}^{(s)} = -\frac{S}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^\infty \frac{\xi \left(2N_y^{(s)} \left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) - \mu (c_1 c_2)^{1/2} \Lambda \right)}{\left(1 + (c_1 c_2)^{1/2} \xi^2 \right) \Lambda} \sin(\xi x) d\xi \quad (2.38\gamma)$$

Τα ολοκληρώματα (2.35α), (2.35β), (2.36α), (2.36β), (2.37α), (2.37β), (2.38α) και (2.38β) μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή. Όμως τα ολοκληρώματα (2.35γ), (2.36γ), (2.37γ) και (2.38γ) πρέπει να υπολογιστούν αριθμητικά.

Τώρα, το ολοκλήρωμα στην (2.35α) και (2.38α) συγκλίνει δίνοντας το αποτέλεσμα

$$\int_0^\infty \left[\frac{\sin(\xi x)}{\xi} \right] d\xi = (\pi/2) \operatorname{sgn}(x), \quad (2.40)$$

όπου $\operatorname{sgn}(\)$ είναι η συνάρτηση προσήμου (signum function). Αντίθετα τα ολοκληρώματα (2.36α) και (2.37α) αποκλίνουν. Παρ' όλα αυτά, επικαλούμενοι αποτελέσματα από την θεωρία κατανομών (Zemanian, 1965, Hoskins, 1979) μπορούμε να γράψουμε

$$\int_0^\infty \left[\frac{\cos(\xi x)}{\xi} \right] d\xi = -\ln|x| + (\text{arbitrary constant}). \quad (2.41)$$

Σημειώνεται ότι, σε ανάλογες περιπτώσεις προβλημάτων κλασσικής ελαστικότητας με συγκεντρωμένα φορτία (Sosa and Bahar 1992, Georgiadis and Lykotrafitis 2001), η αυθαίρετη σταθερά (arbitrary constant) στο δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης μπορεί να παραληφθεί αφού ισοδυναμεί με κίνηση στερεού σώματος.

Τώρα, τα ολοκληρώματα (2.35β) και (2.36β) υπολογίζονται αναλυτικά κάνοντας χρήση του λογισμικού MATHEMATICA (version 7). Συγκεκριμένα, αυτά τα ολοκληρώματα δίνονται με τη βοήθεια των ειδικών υπερβατικών συναρτήσεων MeijerG[] (Erdelyi, 1953).

Αν στις σχέσεις (2.14-2.17) θέσουμε $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$ προκύπτουν οι μετασχηματισμένες λύσεις για την απλούστερη μορφή της θεωρίας βαθμίδας οι οποίες δόθηκαν στο άρθρο Georgiadis και Anagnostou (2007). Αυτές είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned}
u_x^{*(P)}(p, y) = & -P \frac{[-\lambda\gamma^2 + (\lambda + 2\mu)p^2]p^2}{c\mu K} \exp(-\gamma y) + \\
& + P \frac{-\mu[(\lambda + 2\mu)\gamma^4 - 2\lambda p^2\gamma^2 + (\lambda + 2\mu)p^4] + 4(\lambda + \mu)^2 p^4 \gamma y}{2c\mu(\lambda + \mu)pK} \exp(-\beta y) + \\
& + P \frac{(\lambda + \mu)\beta [4\lambda p^2\gamma + (\lambda + 2\mu)\gamma^4 y - 2\lambda p^2\gamma^2 y + (\lambda + 2\mu)p^4 y]}{2c\mu(\lambda + \mu)pK} \exp(-\beta y), \quad (2.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y^{*(P)}(p, y) = & P \frac{[-\lambda\gamma^2 + (\lambda + 2\mu)p^2]p^2}{c\mu\gamma K} \exp(-\gamma y) + \\
& + P \frac{-4(\lambda + \mu)(2\lambda + 3\mu)p^4\gamma + (\lambda + 2\mu)\beta[\gamma^4(\lambda + 2\mu) - 2\lambda p^2\gamma^2 + (\lambda + 2\mu)p^4]}{2c\mu(\lambda + \mu)p^2 K} \exp(-\beta y) + \\
& + P \frac{(\lambda + 2\mu)\gamma^4 - 2[\lambda\gamma - 2(\lambda + \mu)\beta]p^2\gamma + (\lambda + 2\mu)p^4}{2c\mu p^2 K} y \cdot \exp(-\beta y), \quad (2.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x^{*(S)}(p, y) = & S \frac{[-2(\lambda + 2\mu)\beta\gamma^3 + \mu p(p^2 - \gamma^2)]}{c\mu\gamma K} \exp(-\gamma y) - \\
& - S \frac{-(\lambda + 2\mu)\gamma^2 + \lambda p^2 [\beta(-(\lambda + 2\mu)\gamma^2 + \lambda p^2) - c^{-1}(\lambda + \mu)p^2 y]}{2c\mu(\lambda + \mu)p^2 K} \exp(-\beta y), \quad (2.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y^{*(S)}(p, y) = & -S \frac{[\mu(\gamma^2 - p^2) + 2\lambda\beta\gamma]p}{c\mu K} \exp(-\gamma y) + \\
& + S \frac{[(\lambda + 2\mu)\gamma^2 - \lambda p^2][\mu\gamma^2 + 2\lambda p^2 + 3\mu p^2 + c^{-1}(\lambda + \mu)\beta y]}{2c\mu(\lambda + \mu)K} \exp(-\beta y). \quad (2.45)
\end{aligned}$$

όπου $K \equiv K(p) = 8(\lambda + \mu)p^2\beta\gamma^3 + [(\lambda + 2\mu)\gamma^4 - 2\lambda p^2\gamma^2 + (\lambda + 2\mu)p^4](\gamma^2 - p^2)$

Τέλος, εάν πάρουμε το όριο $c_1 \rightarrow 0$, $c_2 \rightarrow 0$, $c_3 \rightarrow 0$, $c_4 \rightarrow 0$ στις εξισώσεις (2.31-2.34) τότε ο δεύτερος και ο τρίτος όρος στο δεξί μέλος μηδενίζονται. Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις στους εναπομείναντες όρους μας δίνεται η λύση της κλασσικής ελαστικότητας που φαίνεται παρακάτω:

$$u_x^{(P)}(x, y=0) = -\frac{P}{4(\lambda + \mu)} \operatorname{sgn}(x), \quad (2.46)$$

$$u_y^{(P)}(x, y=0) = -\frac{(\lambda + 2\mu)P}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \ln|x|, \quad (2.47)$$

$$u_x^{(S)}(x, y=0) = -\frac{(\lambda + 2\mu)S}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \ln|x|, \quad (2.48)$$

$$u_y^{(S)}(x, y=0) = \frac{S}{4(\lambda + \mu)} \operatorname{sgn}(x), \quad (2.49)$$

Παρατηρούμε ότι η κλασσική λύση (2.47-2.50) είναι ασυνεχής και μη φραγμένη στο σημείο εφαρμογής των φορτίων (ιδέ επίσης Barber, 1992).

2.4 Λύση και Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Πρόβλημα Τύπου Flamant-Boussinesq

Από τις εξισώσεις (2.31-2.38γ) τα τελικά αποτελέσματα για τις επιφανειακές μετατοπίσεις, τα οποία είναι σε κανονικοποιημένη μορφή, είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \hat{u}_x^{(P)}(x', y=0) = & -\operatorname{sgn}(x') + \exp(-|x'|) \cdot \operatorname{sgn}(x') + \\ & + \frac{2}{\pi(1-2\nu)} \int_0^\infty \frac{\rho [2(1+\rho^2)Q_x^{(P)} - (1-2\nu)L]}{(1+\rho^2)L} \sin(\rho x') d\rho, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_y^{(P)}(x', y=0) = & -\frac{1}{\pi} \ln(|x'|) - \frac{1}{2\pi^{1/2}} \operatorname{MeijerG} \left[\left\{ \{0\}, \{\} \right\}, \left\{ \{0, 0\}, \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}, \frac{x'^2}{4} \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\rho [2(1+\rho^2)Q_y^{(P)} + L]}{(1+\rho^2)L} \cos(\rho x') d\rho, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\hat{u}_x^{(S)}(x', y=0) = -\frac{1}{\pi} \ln(|x'|) - \frac{1}{2\pi^{1/2}} \text{MeijerG} \left[\left\{ \{0\}, \{\} \right\}, \left\{ \{0, 0\}, \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}, \frac{x'^2}{4} \right] -$$

$$-\frac{1}{\pi(1-\nu)} \int_0^\infty \frac{\rho \left[Q_x^{(S)}(1+\rho^2) - (1-\nu)L \right]}{(1+\rho^2)L} \cos(\rho x') d\rho, \quad (2.52)$$

$$\hat{u}_y^{(S)}(x', y=0) = \text{sgn}(x') - \exp(-|x'|) \cdot \text{sgn}(x') -$$

$$-\frac{2}{\pi(1-2\nu)} \int_0^\infty \frac{\rho \left[2(1+\rho^2)Q_y^{(S)} - (1-2\nu)L \right]}{(1+\rho^2)L} \sin(\rho x') d\rho, \quad (2.53)$$

όπου το σύμβολο (^) πάνω από τις μετατοπίσεις υποδηλώνει τις κανονικοποιημένες ποσότητες που θα οριστούν παρακάτω, $x' = (c_1 c_2)^{-1/4} x$ υποδηλώνει την κανονικοποιημένη (αδιάστατη) απόσταση (normalized distance), $\rho = \xi (c_1 c_2)^{1/4}$, και οι συναρτήσεις $Q_x^{(P)}(\rho)$, $Q_y^{(P)}(\rho)$, $Q_x^{(S)}(\rho)$, $Q_y^{(S)}(\rho)$ και $L(\rho)$ δίνονται στο Παράρτημα Δ. Για διευκόλυνση των αριθμητικών αποτελεσμάτων χρησιμοποιήσαμε και την σχέση που συνδέει την σταθερά λ με τον λόγο του Poisson ν και η οποία είναι $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$. Επίσης οι κανονικοποιημένες μετατοπίσεις είναι αδιάστατες ποσότητες και ορίζονται ως ακολούθως

$$\hat{u}_x^{(P)} = \frac{4(\lambda + \mu)}{P} u_x^{(P)}, \quad (2.54)$$

$$\hat{u}_y^{(P)} = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)P} u_y^{(P)}, \quad (2.55)$$

$$\hat{u}_x^{(S)} = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)S} u_y^{(S)}, \quad (2.56)$$

$$\hat{u}_y^{(S)} = \frac{4(\lambda + \mu)}{S} u_y^{(S)}. \quad (2.58)$$

Τα ολοκληρώματα (2.50-2.53) συγκλίνουν και υπολογίζονται αριθμητικά χρησιμοποιώντας αλγορίθμους από το MATHEMATICA. Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων είχαμε εισάγει τους παρακάτω λόγους

$$d_0 = \frac{c_3}{c_2}, \quad d_1 = \frac{c_1}{c_2}, \quad d_2 = \frac{c_4}{c_2}. \quad (2.59)$$

Χρησιμοποιώντας κάποια αποτελέσματα από τους Eshel και Rosenfeld (1969) βρίσκουμε ότι για να ικανοποιείται η απαίτηση της θετικά ορισμένης παραμορφωσιακής ενέργειας αυτοί οι λόγοι μπορούν να παίρνουν τιμές στα ακόλουθα διαστήματα

$$0 < d_0 < \frac{15}{8}, \quad (2.60)$$

$$0 < d_1 < \frac{15}{32d_0}, \quad (2.61)$$

$$d_2 > \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \cdot d_1 \cdot \left(1 - \frac{24\mu}{5(\lambda + 2\mu)} d_0 d_1 - \frac{1}{15(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{6(15 - 64d_0 d_1^2)(5\lambda + 10\mu - 16\mu d_0 d_1)}{d_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$d_2 < \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \cdot d_1 \cdot \left(1 - \frac{24\mu}{5(\lambda + 2\mu)} d_0 d_1 + \frac{1}{15(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{6(15 - 64d_0 d_1^2)(5\lambda + 10\mu - 16\mu d_0 d_1)}{d_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.62)$$

Εάν παρατηρήσουμε τις σχέσεις (2.50) και (2.53), αμέσως φαίνεται ότι ο πρώτος και δεύτερος όρος στο δεξί μέλος αυτών των εξισώσεων αλληλοαναιρούνται στο $x' = 0$. Συνεπώς εξαλείφεται η ασυνέχεια της κλασσικής λύσης. Το ίδιο γίνεται και στα ολοκληρώματα (2.51) και (2.52) αφού η συνάρτηση MeijerG[] συμπεριφέρεται όπως η συνάρτηση $\ln(\)$ όταν το $|x'| \rightarrow 0$.

Ειδικότερα,

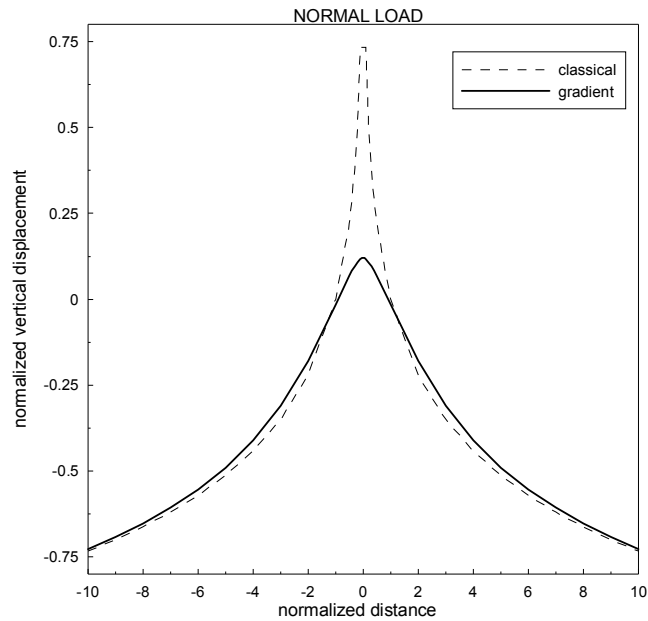
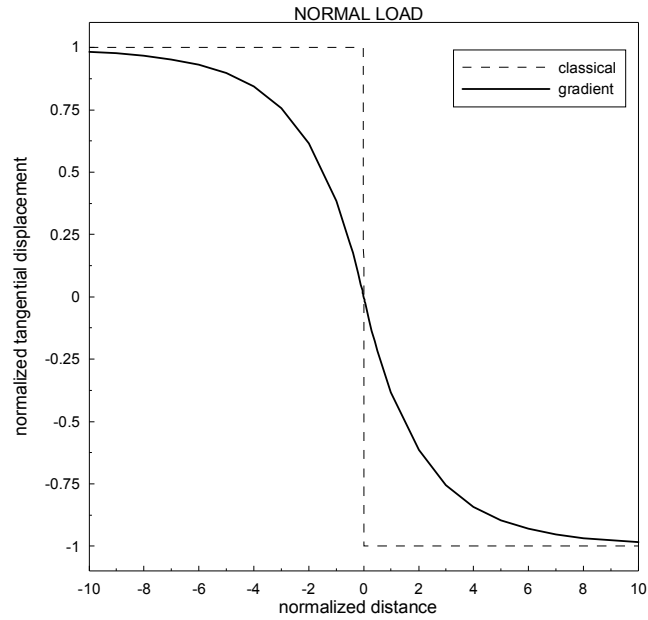
$$\text{MeijerG} \left[\left\{ \{0\}, \{\} \right\}, \left\{ \{0, 0\}, \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}, \frac{x'^2}{4} \right] = (\text{arbitrary constant}) - \frac{2}{\pi^{1/2}} \ln|x'| + O(x^2) \quad (2.63)$$

Στα Σχ. 2.5–2.12. παραθέτουμε διάφορα γραφήματα για τις κάθετες και εφαπτομενικές μετατοπίσεις τόσο για το κάθετο όσο και για το εφαπτομενικό φορτίο για διάφορες τιμές των ν , d_0 , d_1 , d_2 .

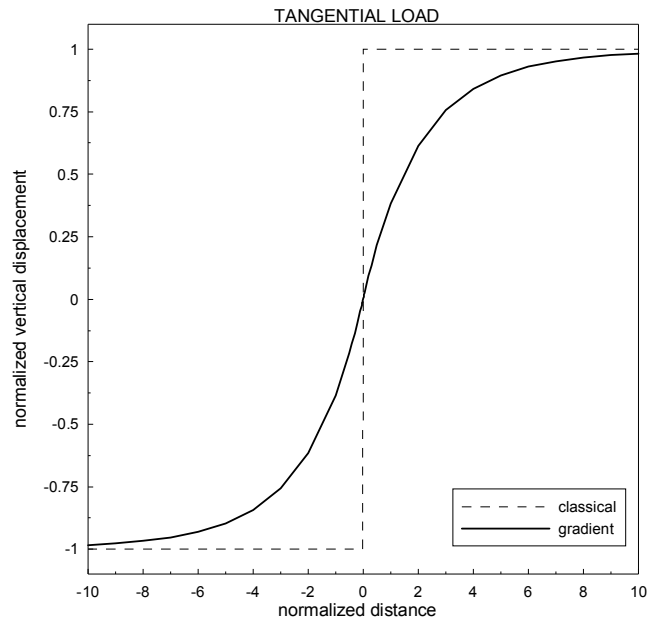
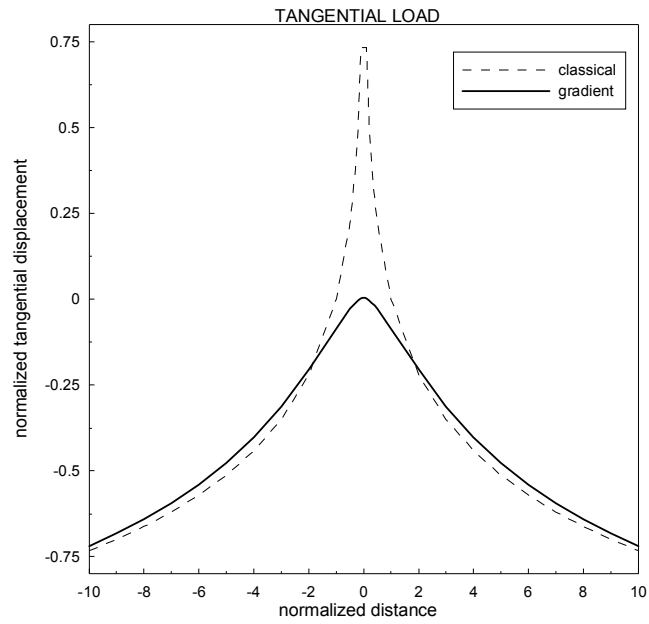
Από τα σχεδιαγράμματα γίνεται φανερό ότι οι λύσεις τώρα είναι φραγμένες στο σημείο εφαρμογής του φορτίου. Συνεπώς, η ανεπιθύμητη λογαριθμική ιδιομορφία της κλασσικής λύσης του προβλήματος Flamant- Boussinesq έχει εξαλειφθεί. Επιπρόσθετα, οι λύσεις είναι πιο ομαλές, επομένως και πιο φυσικές, στην περίπτωση της θεωρίας βαθμίδας σε σχέση με τις ασυνεχείς κλασσικές λύσεις. Συγκεκριμένα, στο κάθετο (εφαπτομενικό) φορτίο έχει εξαλειφθεί η ασυνέχεια από την εφαπτομενική (κάθετη) μετατόπιση, ενώ στο εφαπτομενικό (κάθετο) έχει εξαλειφθεί η λογαριθμική ιδιομορφία και επιπλέον, η λύση στην θεωρία βαθμίδας είναι φραγμένη σε αντίθεση με την λύση της κλασσικής θεωρίας.

Σαν πρώτη περίπτωση έχουμε πάρει την $\nu = 0.25$, $d_0 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$. Αυτή είναι και η λύση για την απλούστερη περίπτωση που είχε δοθεί από τους Georgiadis και Anagnostou (2007) . Παραθέτουμε τα σχεδιαγράμματα στις σελίδες που έπονται.

1η Περίπτωση: $\nu = 0.25, d_0 = 1, d_1 = 1, d_2 = 1. (c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c)$

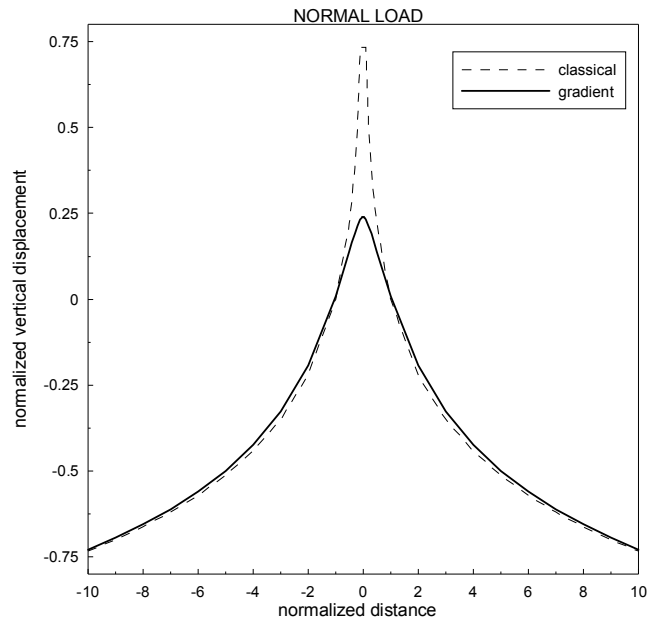
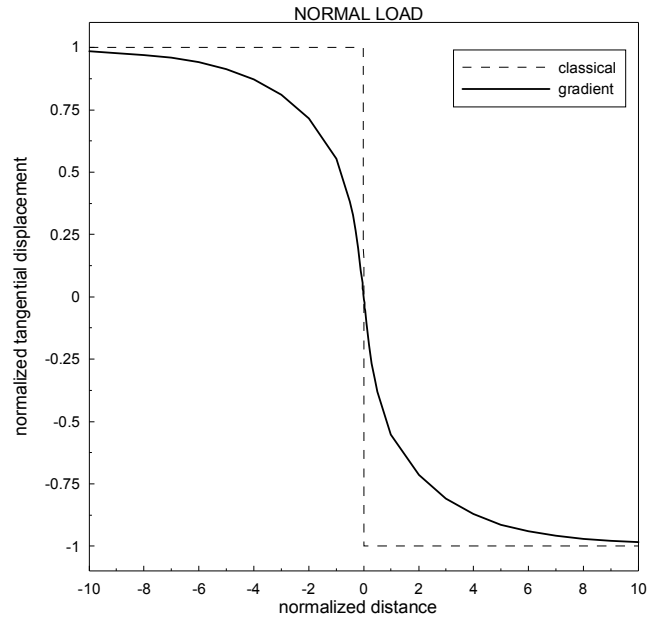


Σχήμα 2.5α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

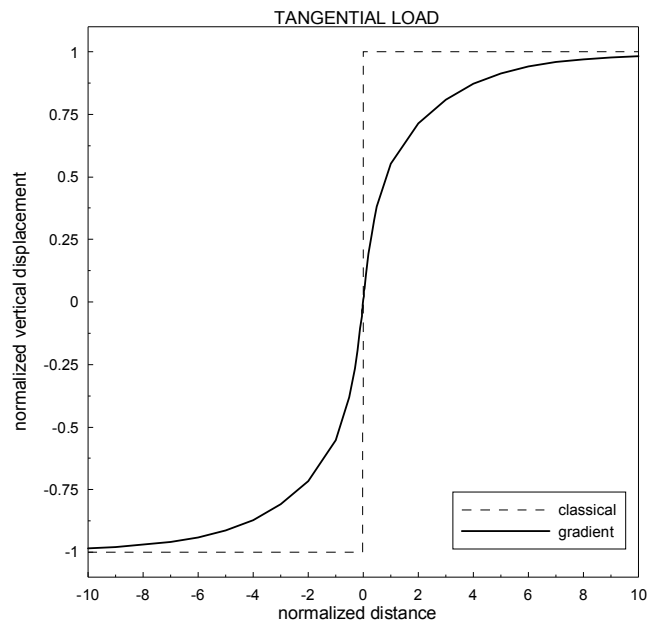
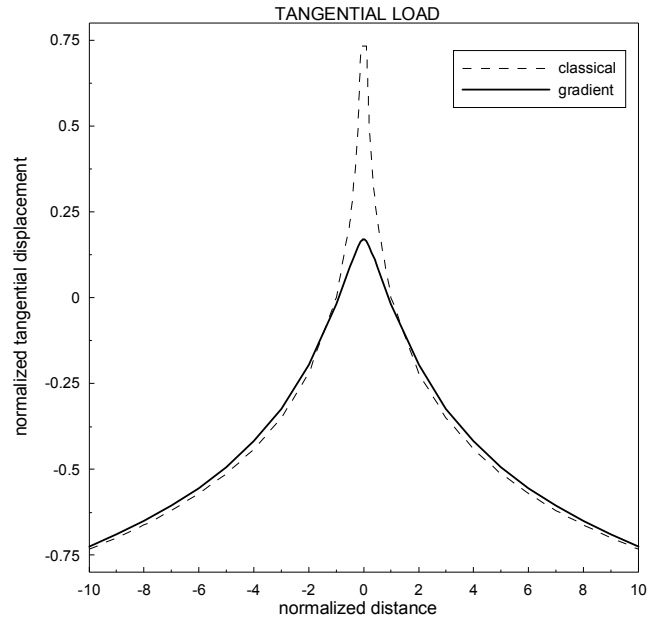


Σχήμα 2.5β: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

2η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = \frac{1}{4}$, $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = -\frac{3}{4}$.

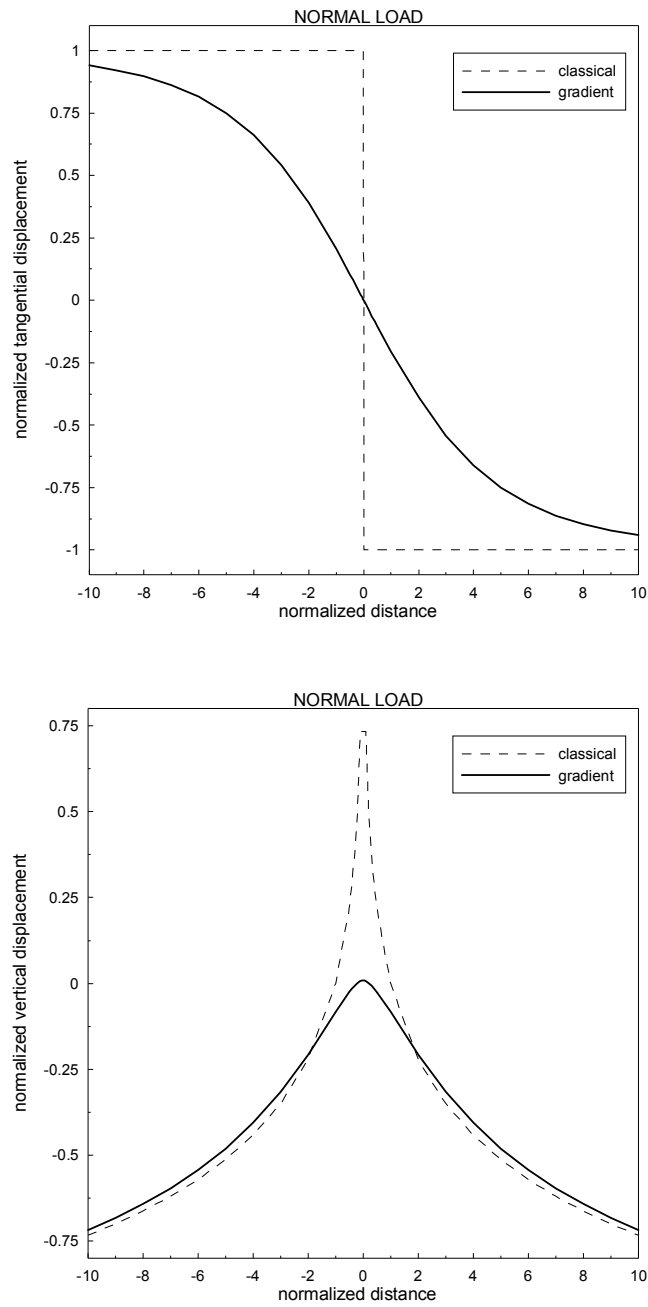


Σχήμα 2.6α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδας

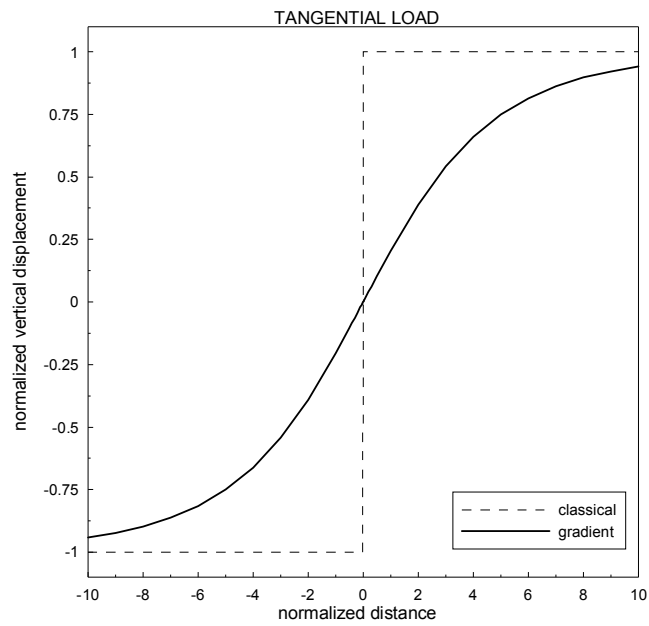
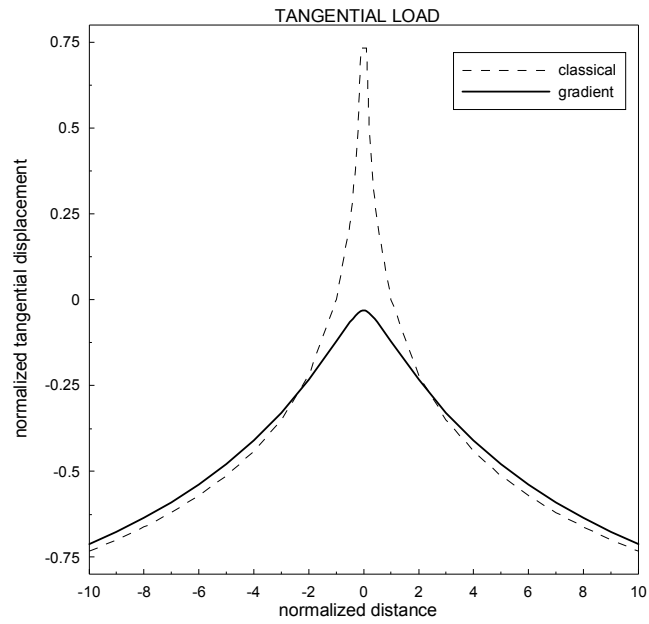


Σχήμα 2.6β: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

3η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = \frac{1}{2}$, $d_1 = \frac{1}{4}$, $d_2 = 0$.

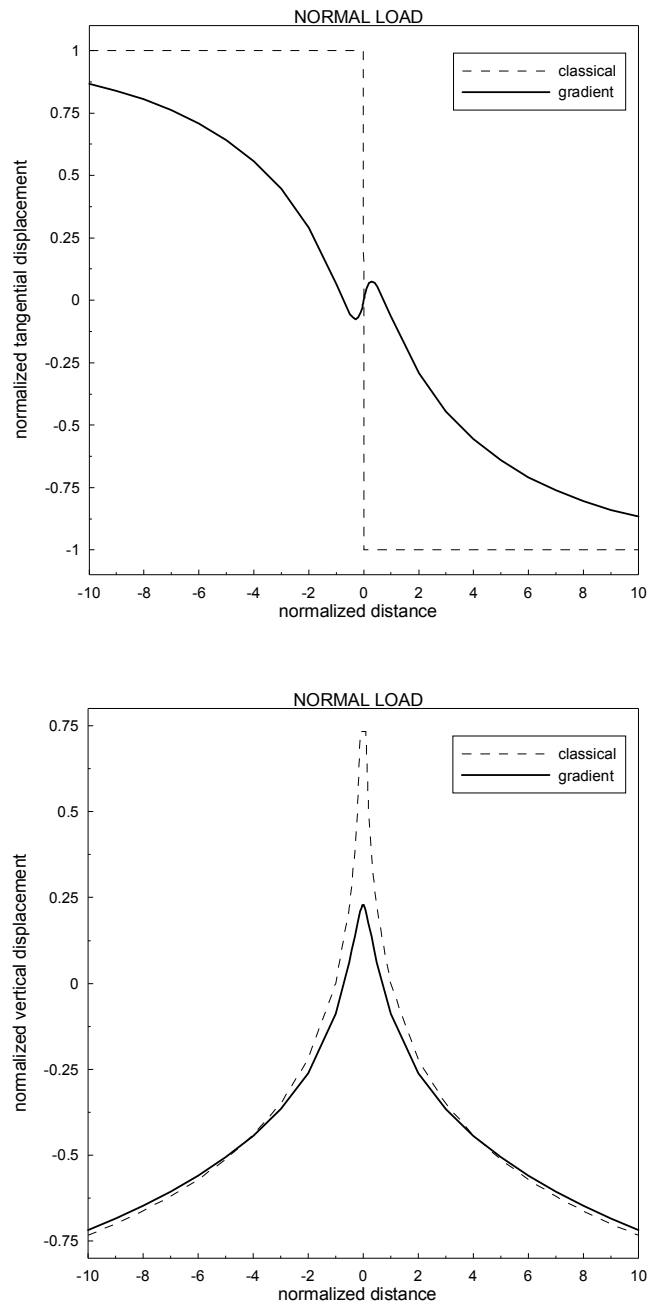


Σχήμα 2.7α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

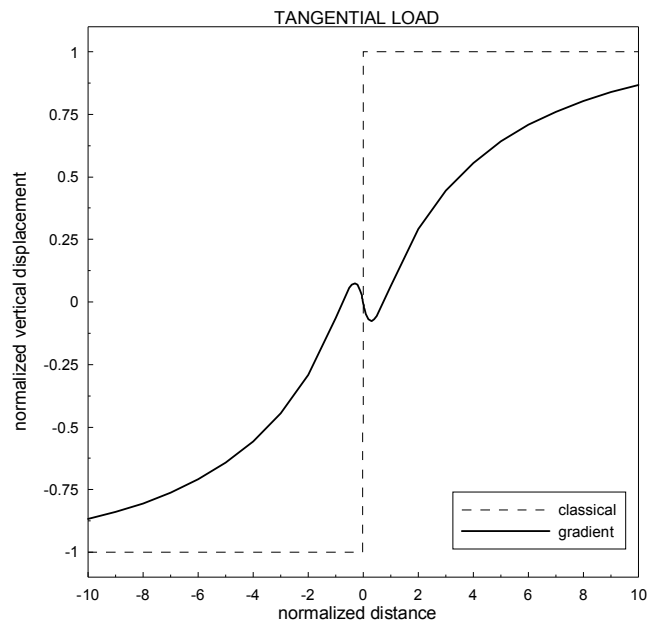
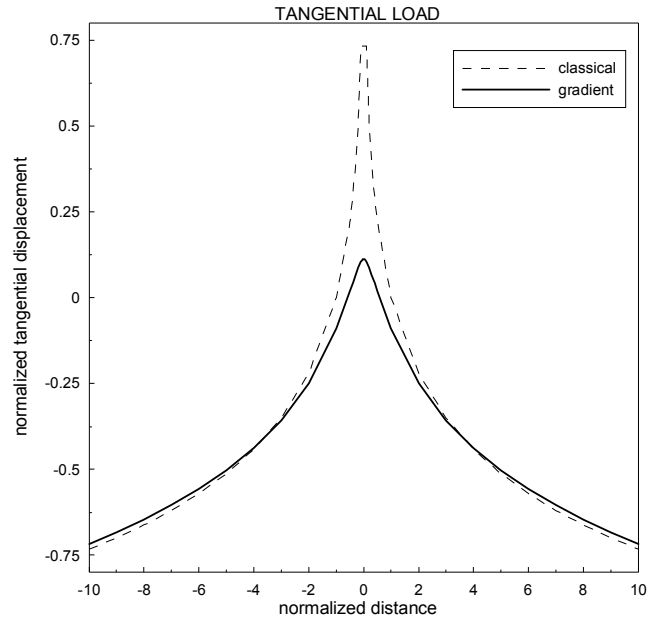


Σχήμα 2.7β: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

4η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = 1$, $d_1 = 100$, $d_2 = 300$.

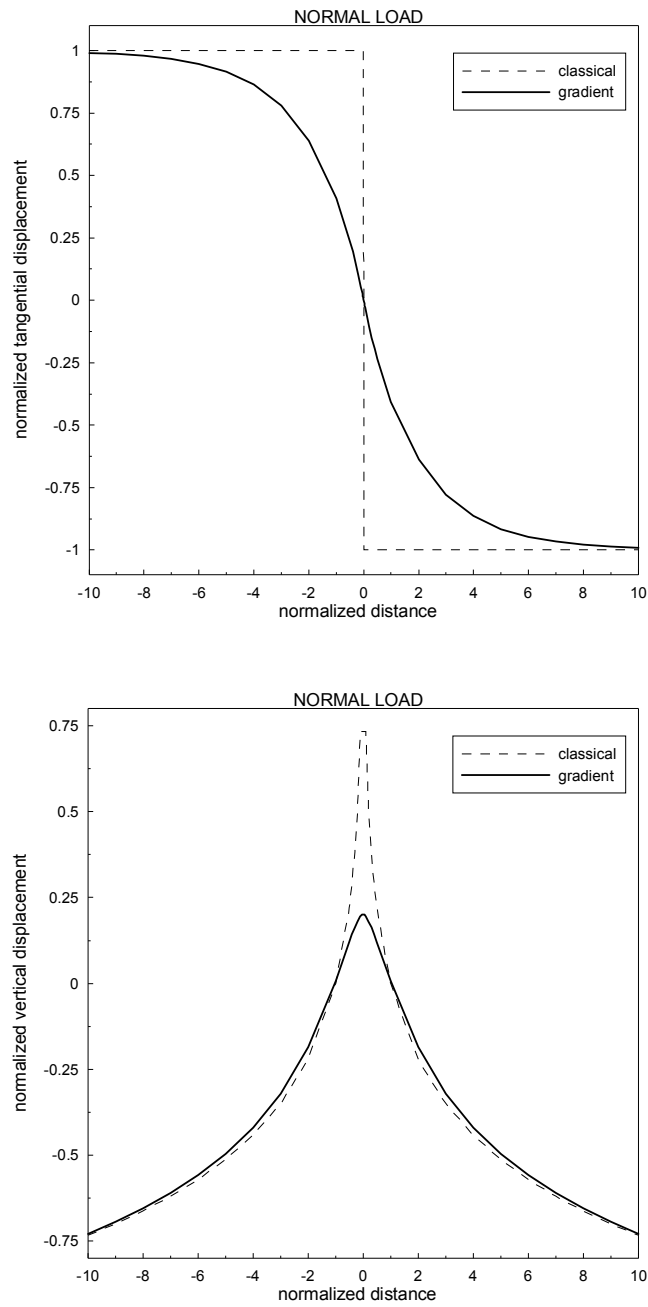


Σχήμα 2.8α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

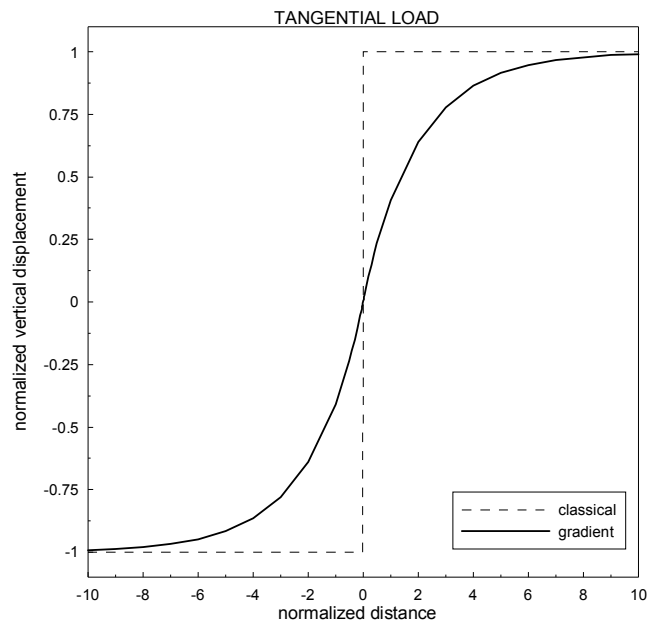
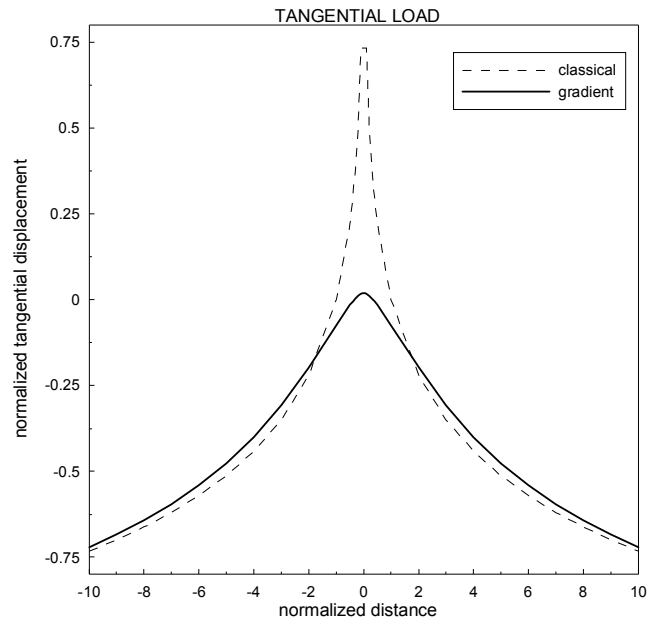


Σχήμα 2.8β: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

5η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = \frac{5}{3}$, $d_1 = \frac{25}{6}$, $d_2 = \frac{25}{3}$.

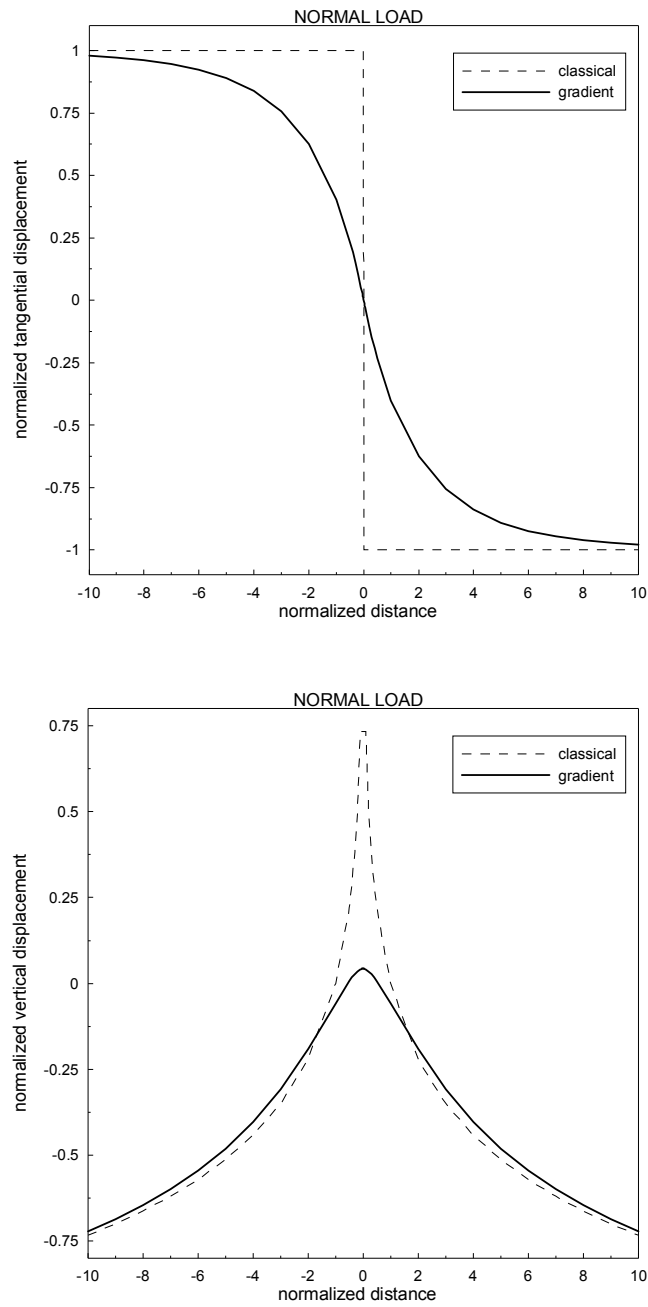


Σχήμα 2.9α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

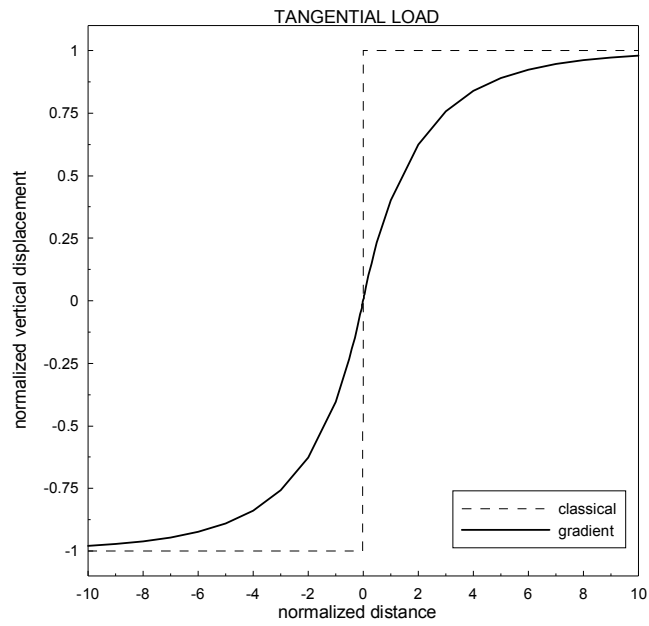
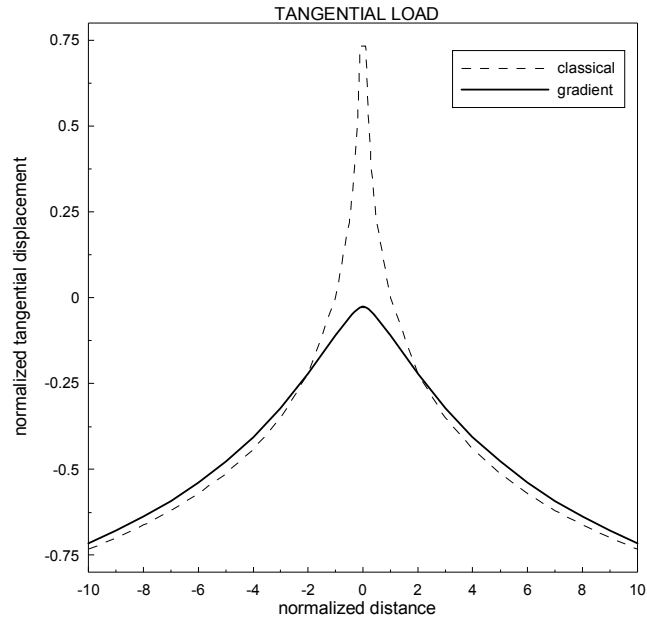


Σχήμα 2.9β: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

6η Περίπτωση: $\nu = 0$, $d_0 = \frac{4}{3}$, $d_1 = \frac{2}{3}$, $d_2 = 1$.

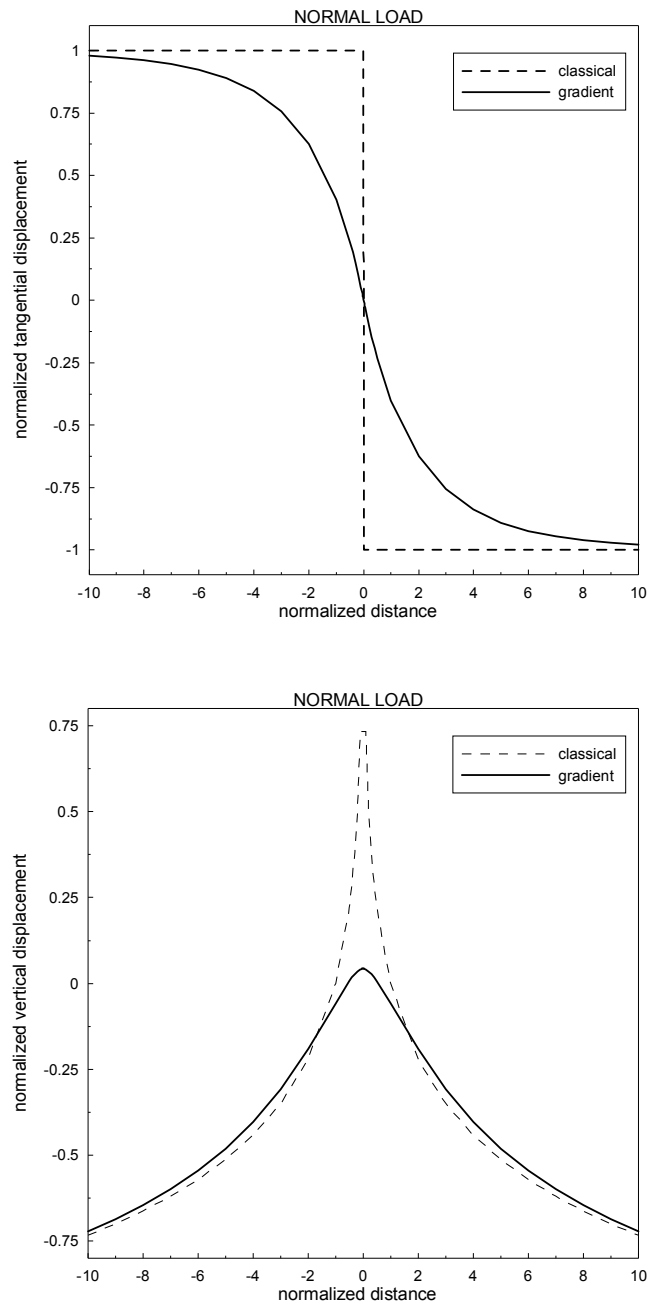


Σχήμα 210α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

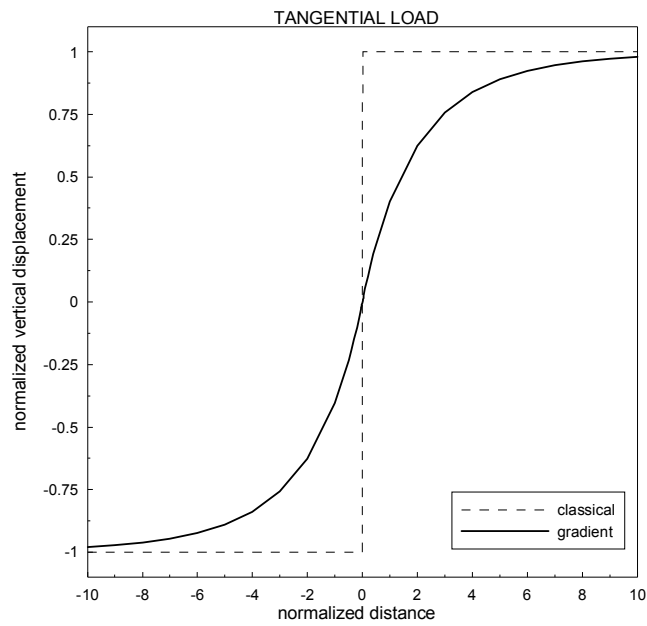
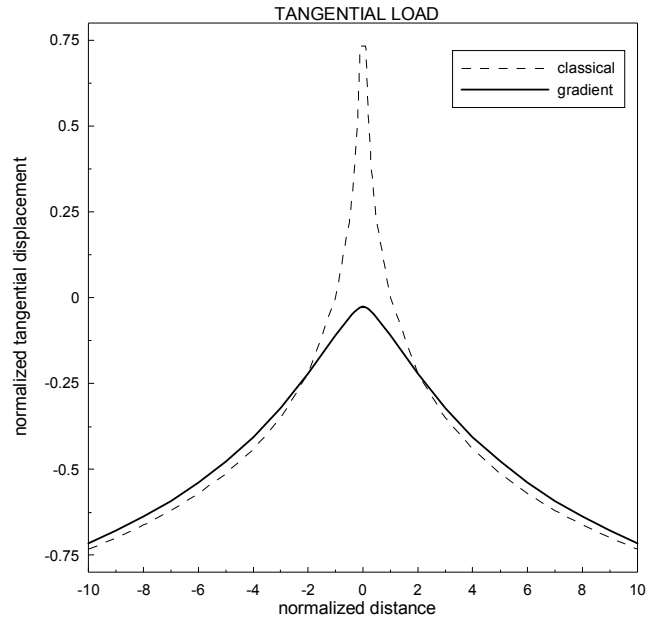


Σχήμα 2.10β: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

7η Περίπτωση: $\nu = 0$, $d_0 = \frac{4}{3}$, $d_1 = \frac{2}{3}$, $d_2 = 0$.

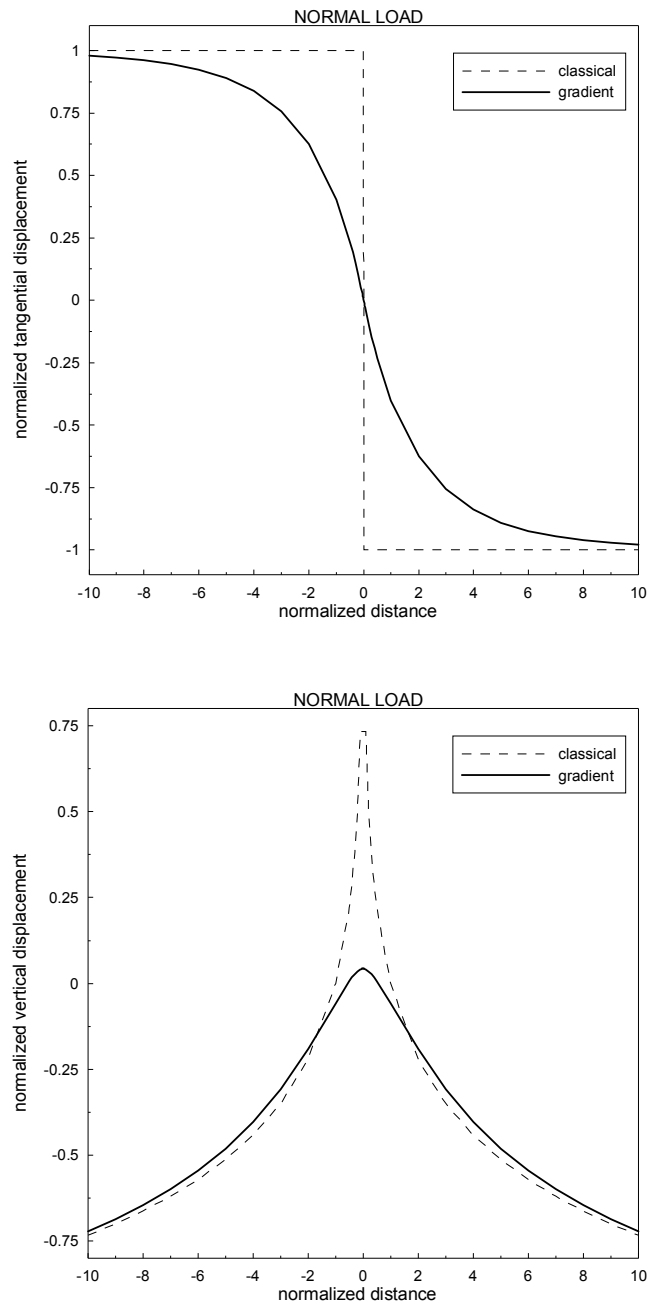


Σχήμα 211α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

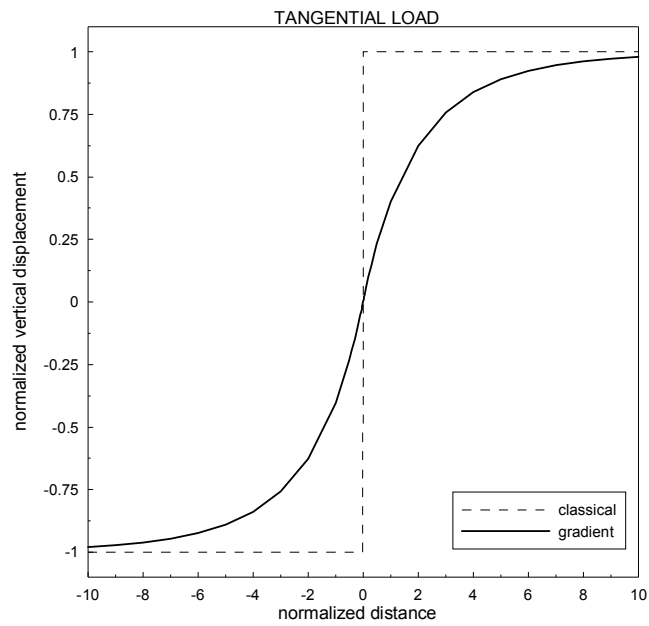
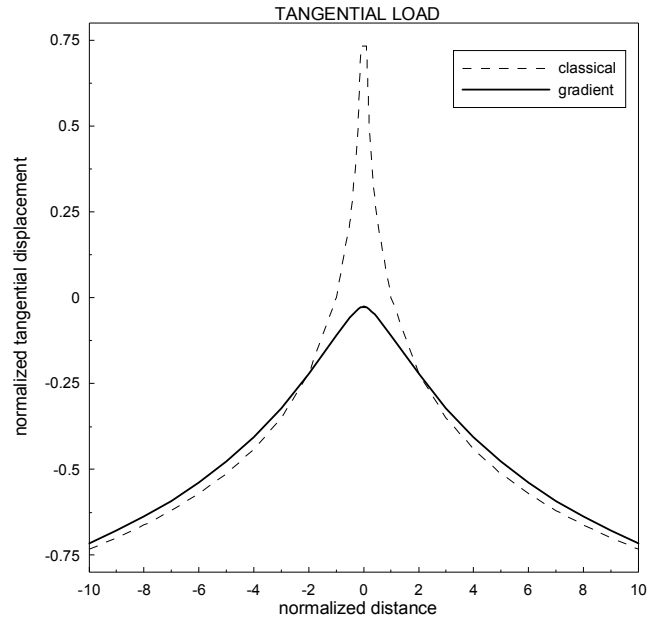


Σχήμα 2.11β: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

8η Περίπτωση: $\nu = 0$, $d_0 = \frac{4}{3}$, $d_1 = \frac{2}{3}$, $d_2 = -1$.



Σχήμα 212α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα



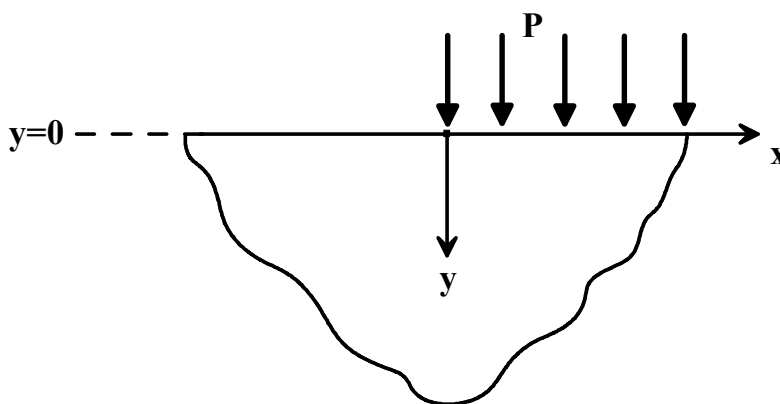
Σχήμα 2.12β: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού συγκεντρωμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρία βαθμίδα

Κεφάλαιο 3

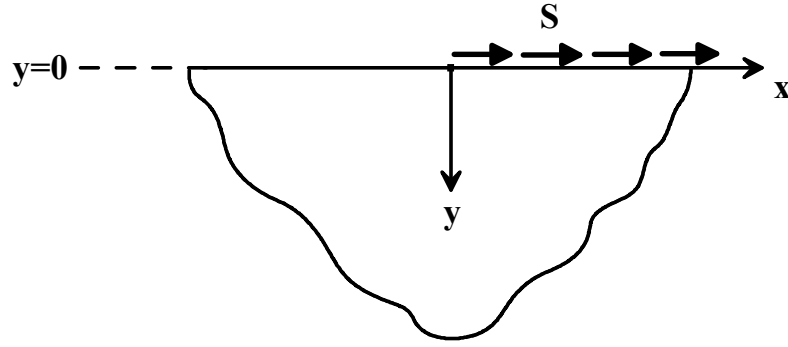
Προβλήματα Κατανεμημένων Φορτίων σε Ημιχώρους στα πλαίσια της θεωρίας Βαθμίδας Τροπής

3.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε και πάλι ένα σώμα το οποίο καταλαμβάνει το ημι-επίπεδο $(-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty)$ σε κατάσταση επιπέδου παραμορφώσεως με τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις φορτίσεων. Στην πρώτη περίπτωση ένα κάθετο κατανεμημένο φορτίο P ασκείται πάνω στην επιφάνεια του σώματος κατά μήκος ολόκληρου του θετικού οριζόντιου άξονα (Σχ. 3.1α). Στη δεύτερη περίπτωση ένα εφαπτομενικό κατανεμημένο φορτίο S ασκείται στην



Σχήμα 3.1α: Κάθετο κατανεμημένο φορτίο ασκούμενο στην επιφάνεια ενός ημι-χώρου



Σχήμα 3.1β: Εφαπτομενικό καταναμημένο φορτίο ασκούμενο στην επιφάνεια ενός ημι-χώρου

επιφάνεια του σώματος κατά μήκος ολόκληρου του x -άξονα (Σχ. 3.1β). Τα καταναμημένα φορτία είναι εκφρασμένα σε διαστάσεις [δυναμη][μήκος]². Οι συνοριακές συνθήκες κατά μήκος της επιφάνειας $y = 0$ προκύπτουν από τις (1.19) και (1.20) και γράφονται ακολούθως

Κάθετο καταναμημένο φορτίο

$$\tau_{yy} - \partial_x m_{xyy} - \partial_y m_{yyy} - \partial_x m_{yxy} = -P \cdot H(x), \quad (3.1\alpha)$$

$$\tau_{yx} - \partial_x m_{xyx} - \partial_y m_{yyx} - \partial_x m_{yxx} = 0, \quad (3.1\beta)$$

$$m_{yyy} = 0, \quad (3.1\gamma)$$

$$m_{yyx} = 0, \quad (3.1\delta)$$

Εφαπτομενικό καταναμημένο φορτίο

$$\tau_{yy} - \partial_x m_{xyy} - \partial_y m_{yyy} - \partial_x m_{yxy} = 0, \quad (3.2\alpha)$$

$$\tau_{yx} - \partial_x m_{xyx} - \partial_y m_{yyx} - \partial_x m_{yxx} = -S \cdot H(x), \quad (3.2\beta)$$

$$m_{yyy} = 0, \quad (3.2\gamma)$$

$$m_{yyx} = 0, \quad (3.2\delta)$$

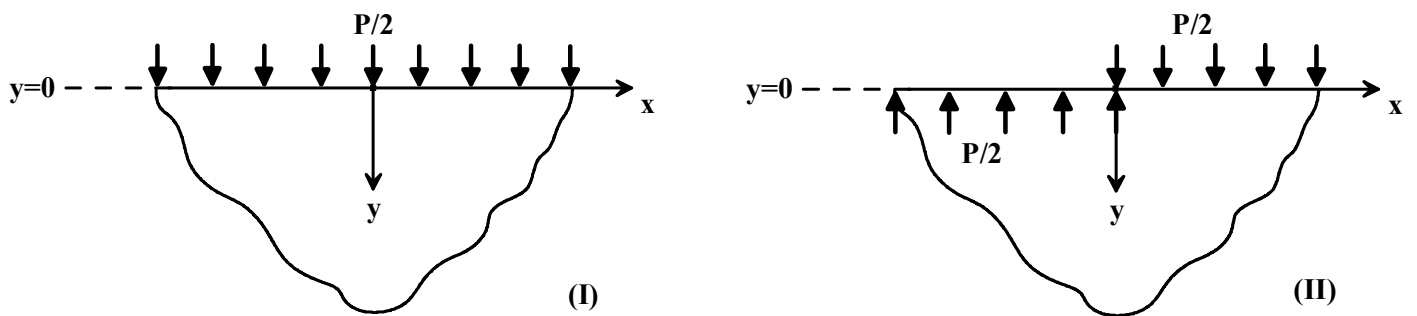
όπου $H(\cdot)$ η βηματική συνάρτηση Heaviside, η οποία ορίζεται ως εξής

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

Για να επιλύσουμε τα ανωτέρω προβλήματα θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της υπέρθεσης. Συγκεκριμένα τα βασικά προβλήματα θα αναλυθούν σε δύο επιμέρους (βοηθητικά) προβλήματα το καθένα (Σχ.3.2, 3.8).

3.2 Επίλυση Κάθετου Κατανεμημένου φορτίου

Θα προχωρήσουμε τώρα στην επίλυση των επιμέρους προβλημάτων για το κάθετο κατανεμημένο φορτίο. Το κάθετο κατανεμημένο φορτίο χωρίζεται σε ένα σταθερό φορτίο στην επιφάνεια του ημι-χώρου και σε μια φόρτιση “προσήμου” όπως υποδεικνύει το κάτωθεν σχήμα.



Σχήμα 3.2: Χρήση της αρχής της υπέρθεσης για το κάθετο κατανεμημένο φορτίο

Επιμέρους Πρόβλημα (I)- Σταθερό Φορτίο στην Επιφάνεια του Ημιχώρου

Οι συνοριακές συνθήκες για το επιμέρους πρόβλημα (I) του σχήματος 3.2α κατά μήκος της επιφάνειας $y = 0$ γράφονται ως ακολούθως

$$\tau_{yy} - \partial_x m_{xyy} - \partial_y m_{yyy} - \partial_x m_{yxy} = -\frac{P}{2}, \quad (3.4\alpha)$$

$$\tau_{yx} - \partial_x m_{xyx} - \partial_y m_{yyx} - \partial_x m_{yxx} = 0, \quad (3.4\beta)$$

$$m_{yyy} = 0, \quad (3.4\gamma)$$

$$m_{yxx} = 0, \quad (3.4\delta)$$

Εργαζόμενοι όπως και στο πρόβλημα Flamant-Boussinesq, το πρόβλημα (I) έχει γενικές λύσεις της μορφής (2.10). Οι μετασχηματισμένες συνοριακές συνθήκες για αυτή την περίπτωση γίνονται ως εξής

$$\tau_{yy}^* - \rho m_{xyy}^* - \frac{dm_{yyy}^*}{dy} - \rho m_{yxy}^* = -\pi P \delta(ip), \quad (3.5\alpha)$$

$$\tau_{yx}^* - \rho m_{xyx}^* - \frac{dm_{yyx}^*}{dy} - \rho m_{yxx}^* = 0, \quad (3.5\beta)$$

$$m_{yyy}^* = 0, \quad (3.5\gamma)$$

$$m_{yxx}^* = 0. \quad (3.5\delta)$$

όπου $\delta(\)$ η Dirac δέλτα κατανομή. Από τις τελευταίες βρίσκουμε ότι οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις είναι οι ακόλουθες

$$u_{x-1}^{*(P)}(p, y) = \left(\pi \delta(ip) B_3^{(P)} \frac{\beta}{p} - \pi \delta(ip) B_4^{(P)} \left(\frac{(\lambda + 3\mu)}{p(\lambda + \mu)} - \frac{\beta}{p} y \right) \right) \exp(-\beta y) + \\ + \pi \delta(ip) B_6^{(P)} \frac{P}{\gamma_1} \exp(-\gamma_1 y) + \pi \delta(ip) B_8^{(P)} \frac{\gamma_2}{p} \exp(-\gamma_2 y) \quad \text{για } y \geq 0, \quad (3.6\alpha)$$

$$u_{y-1}^{*(P)}(p, y) = (\pi\delta(ip)B_3^{(P)} + \pi\delta(ip)B_4^{(P)}y)\exp(-\beta y) + \pi\delta(ip)B_6^{(P)}\exp(-\gamma_1 y) + \pi\delta(ip)B_8^{(P)}\exp(-\gamma_2 y) \text{ για } y \geq 0, \quad (3.6\beta)$$

όπου τα $B_i^{(P)}$ ($i = 3, 4, 6, 8$) είναι αυτά του προβλήματος Flamant-Boussinesq και δίνονται από τις σχέσεις (B1-B4) του παραρτήματος Β, ο εκθέτης P στις παρενθέσεις δηλώνει ότι η συγκεκριμένη συνιστώσα προκύπτει από το κάθετο φορτίο P . Επίσης ο κάτω δείκτης (I) δηλώνει ότι η συγκεκριμένη συνιστώσα είναι για το επιμέρους πρόβλημα (I). Οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις για το ομοιόμορφο φορτίο συνοπτικά γράφονται ως εξής

$$u_{x-1}^{*(P)}(p, y) = \pi\delta(ip)u_x^{*(P)}(p, y), \quad (3.7)$$

$$u_{y-1}^{*(P)}(p, y) = \pi\delta(ip)u_y^{*(P)}(p, y), \quad (3.8)$$

όπου $u_x^{*(P)}(p, y)$, $u_y^{*(P)}(p, y)$ είναι οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις του προβλήματος Flamant-Boussinesq οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (2.14, 2.15). Υπενθυμίζουμε ότι για τις μετασχηματισμένες μετατοπίσεις προβλήματος Flamant-Boussinesq, η $u_x^{*(P)}(p, y)$, $u_y^{*(P)}(p, y)$, είναι περιττή και άρτια αντίστοιχα. Επειδή η Dirac δέλτα κατανομή είναι άρτια συνεπάγεται ότι η $u_{x-1}^{*(P)}(p, y)$ είναι περιττή ενώ η $u_{y-1}^{*(P)}(p, y)$ είναι άρτια. Θέτοντας και πάλι $p = -i\xi$ και κάνοντας χρήση της (2.5β) στις (3.8, 3.9) καταλήγουμε στις

$$\begin{aligned} u_{x-1}^{(P)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\xi)u_x^{*(P)}(\xi, y)e^{-i\xi x}d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\xi)u_x^{*(P)}(\xi, y)\cos(\xi x)d\xi - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\xi)u_x^{*(P)}(\xi, y)\sin(\xi x)d\xi = \\ &= 0 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi)u_x^{*(P)}(\xi, y)\sin(\xi x)d\xi = -\frac{i}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} [u_x^{*(P)}(\xi, y)\sin(\xi x)] = \\ &= -\frac{i}{2} \left(-\frac{iPx}{2(\lambda + \mu)} \right) = -\frac{Px}{4(\lambda + \mu)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

και

$$\begin{aligned}
u_{y-1}^{(P)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_y^{*(P)}(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_y^{*(P)}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_y^{*(P)}(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) u_y^{*(P)}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi - 0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) u_y^{*(P)}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\delta(\xi) u_y^{*(P)}(\xi, y) \cos(\xi x) \right].
\end{aligned}$$

Το όριο όμως καθώς το $\xi \rightarrow 0$ της τελευταίας σχέσης δεν υπάρχει. Αναπτύσσουμε σε σειρά την $u_y^{*(P)}(\xi, y)$ καθώς το $\xi \rightarrow 0$ και παρατηρούμε ότι

$$u_y^{*(P)}(\xi, y) = \frac{P(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{1}{\xi} - \frac{P}{2(\lambda + \mu)} y + O(\xi). \quad (3.10)$$

Παραγωγίζουμε την άνω σειρά ως προς y και παίρνουμε το όριο καθώς το $\xi \rightarrow 0$ οπότε έχουμε

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial u_y^{*(P)}}{\partial y} \right] = -\frac{P}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.11)$$

Παίρνοντας τώρα τις μερικές παραγώγους ως προς x και ως προς y της $u_{y-1}^{(P)}(x, y)$, και λαμβάνοντας υπόψη τις (3.10) και (3.11), προκύπτουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (u_{y-1}^{(P)}(x, y))}{\partial x} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) u_y^{*(P)}(\xi, y) \xi \sin(\xi x) d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[u_y^{*(P)}(\xi, y) \xi \sin(\xi x) \right] = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$u_{y-1}^{(P)}(x, y) = g(y) + (\text{arbitrary constant}), \quad (3.12\alpha)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_{y-1}^{(P)}(x, y))}{\partial y} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) \frac{\partial u_y^{*(P)}(\xi, y)}{\partial y} \cos(\xi x) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial u_y^{*(P)}(\xi, y)}{\partial y} \cos(\xi x) \right] = \frac{1}{2} \left(-\frac{P}{2(\lambda + \mu)} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$u_{y-1}^{(P)}(x, y) = -\frac{P}{4(\lambda + \mu)} y + (\text{arbitrary constant}). \quad (3.12\beta)$$

Από τις (3.9), (3.12α) και (3.12β) και επειδή η αυθαίρετη σταθερά σχετίζεται με την κίνηση στερεού σώματος έχουμε τις τελικές σχέσεις για την κάθετη μετατόπιση που φαίνεται παρακάτω

$$u_{x-1}^{(P)}(x, y) = -\frac{P}{4(\lambda + \mu)} x, \quad (3.13)$$

$$u_{y-1}^{(P)}(x, y) = -\frac{P}{4(\lambda + \mu)} y. \quad (3.14)$$

Τέλος, οι μετατοπίσεις στην επιφάνεια του ημι-χώρου, ($y = 0$), είναι οι ακόλουθες

$$u_{y-1}^{(P)}(x, y) = -\frac{P}{4(\lambda + \mu)} x, \quad (3.15)$$

$$u_{y-1}^{(P)}(x, y) = 0. \quad (3.16)$$

Επιμέρους Πρόβλημα (II) - Φόρτιση “Προσήμου” στην Επιφάνεια του Ημιχώρου

Οι συνοριακές συνθήκες για το επιμέρους πρόβλημα (II) του σχήματος 3.2α κατά μήκος της επιφάνειας $y = 0$ γράφονται ως ακολούθως

$$\tau_{yy} - \partial_x m_{xyy} - \partial_y m_{yyy} - \partial_x m_{yxy} = -\frac{P}{2} \operatorname{sgn}(x), \quad (3.17\alpha)$$

$$\tau_{yx} - \partial_x m_{xyx} - \partial_y m_{yyx} - \partial_x m_{yxx} = 0, \quad (3.17\beta)$$

$$m_{yyy} = 0, \quad (3.17\gamma)$$

$$m_{yyx} = 0, \quad (3.17\delta)$$

όπου $\operatorname{sgn}(\)$ είναι η συνάρτηση προσήμου. Εργαζόμενοι όπως και στο πρόβλημα Flamant-Boussinesq, διαπιστώνουμε ότι το πρόβλημα (II) έχει και αυτό γενικές λύσεις της μορφής (2.10). Κατά μήκος της επιφάνειας $y = 0$ ισχύουν οι παρακάτω μετασχηματισμένες συνοριακές συνθήκες

$$\tau_{yy}^* - pm_{xyy}^* - \frac{dm_{yyy}^*}{dy} - pm_{yxy}^* = -\frac{P}{p}, \quad (3.18\alpha)$$

$$\tau_{yx}^* - pm_{xyx}^* - \frac{dm_{yyx}^*}{dy} - pm_{yxx}^* = 0, \quad (3.18\beta)$$

$$m_{yyy}^* = 0, \quad (3.18\gamma)$$

$$m_{yyx}^* = 0. \quad (3.18\delta)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (3.18α-3.18δ) με τις (2.10) προκύπτει, κατά τα γνωστά, ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Επιλύοντας το σύστημα προκύπτουν οι κατωτέρω μετασχηματισμένες μετατοπίσεις για τη φόρτιση “προσήμου”

$$u_{x-II}^{*(P)}(p, y) = \left(\frac{B_3^{(P)}}{p} \frac{\beta}{p} - \frac{B_4^{(P)}}{p} \left(\frac{(\lambda + 3\mu)}{p(\lambda + \mu)} - \frac{\beta}{p} y \right) \right) \exp(-\beta y) + \frac{B_6^{(P)}}{p} \frac{p}{\gamma_1} \exp(-\gamma_1 y) + \frac{B_8^{(P)}}{p} \frac{\gamma_2}{p} \exp(-\gamma_2 y) \quad \text{για } y \geq 0, \quad (3.19\alpha)$$

$$u_{y-II}^{*(P)}(p, y) = \left(\frac{B_3^{(P)}}{p} B_3^{(P)} + \frac{B_4^{(P)}}{p} y \right) \exp(-\beta y) + \frac{B_6^{(P)}}{p} \exp(-\gamma_1 y) + \frac{B_8^{(P)}}{p} \exp(-\gamma_2 y) \quad \text{για } y \geq 0, \quad (3.19\beta)$$

όπου τα $B_i^{(P)}$ ($i = 3, 4, 6, 8$) είναι αυτά του προβλήματος Flamant-Boussinesq και δίνονται από τις σχέσεις (B1-B4) του παραρτήματος Β και ο εκθέτης P στις παρενθέσεις δηλώνει ότι η συγκεκριμένη συνιστώσα προκύπτει από το φορτίο κάθετο φορτίο P . Επίσης ο κάτω δείκτης (II) δηλώνει ότι η συγκεκριμένη συνιστώσα είναι για το επιμέρους πρόβλημα (II). Οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις για αυτό το πρόβλημα γράφονται σε συνοπτική μορφή ως εξής

$$u_{x-II}^{*(P)}(p, y) = \frac{u_x^{*(P)}(p, y)}{p}, \quad (3.20)$$

$$u_{y-II}^{*(P)}(p, y) = \frac{u_y^{*(P)}(p, y)}{p}, \quad (3.21)$$

όπου $u_x^{*(P)}(p, y)$, $u_y^{*(P)}(p, y)$ είναι οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις του προβλήματος Flamant-Boussinesq οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (2.14, 2.15).

Για τις μετασχηματισμένες συνιστώσες των μετατοπίσεων παρατηρούνται οι ακόλουθες σχέσεις αρτιότητας/ περιττότητας

$$u_{x-II}^{*(P)}(-p, y) = u_{x-II}^{*(P)}(p, y), \quad (3.22)$$

$$u_{y-II}^{*(P)}(-p, y) = -u_{y-II}^{*(P)}(p, y). \quad (3.23)$$

Όπως και στο πρόβλημα Flamant-Boussinesq εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις (3.22, 3.23), αλλάζουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης στην (2.5β) θέτοντας $p = -i\xi$, όπου $\xi \in \mathbb{R}$ και με την ίδια διαδικασία που είχαμε αναφέρει στο Κεφ. 2 μπορούμε να γράψουμε τις κατωτέρω σχέσεις για τις μετατοπίσεις στο επίπεδο $y = 0$

$$u_{x-II}^{*(P)}(x, y = 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u_{x-II}^{*(P)}(\xi, y = 0) \cdot \cos(\xi x) d\xi, \quad (3.24)$$

$$u_{y-II}^{*(P)}(x, y = 0) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} u_{y-II}^{*(P)}(\xi, y = 0) \cdot \sin(\xi x) d\xi, \quad (3.25)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω αποτελέσματα, οι μετασχηματισμένες επιφανειακές μετατοπίσεις παίρνουν την εξής μορφή

$$u_{x-II}^{*(P)}(\xi, y = 0) = \frac{P}{2(\lambda + \mu)} \frac{1}{\xi^2} - \frac{P}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{N_x^{(P)}}{\Lambda}, \quad (3.26)$$

$$u_{y-II}^{*(P)}(\xi, y = 0) = \frac{i(\lambda + 2\mu)P}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{1}{\xi^2} - \frac{i(\lambda + 2\mu)P}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{N_y^{(P)}}{\Lambda}, \quad (3.27)$$

όπου οι συναρτήσεις $N_x^{(P)}(\xi)$, $N_y^{(P)}(\xi)$ και $\Lambda(\xi)$ είναι αυτές που είχαμε και στο Flamant-Boussinesq και δίνονται στο Παράρτημα Γ. Εφαρμογή τώρα των (3.25, 3.26) στις (3.27, 3.28) λαμβάνουμε τις κατωτέρω μετατοπίσεις στην επιφάνεια του ημι-χώρου

$$u_{x-II}^{(P)}(x, y = 0) = -\frac{P}{4(\lambda + \mu)} |x| - \frac{P}{\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^{+\infty} \frac{N_x^{(P)}}{\Lambda} \cos(\xi x) d\xi, \quad (3.28)$$

$$u_{y-II}^{(P)}(x, y = 0) = \frac{(\lambda + 2\mu)P}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} (x - x \ln(|x|)) - \frac{(\lambda + 2\mu)P}{\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^{+\infty} \frac{N_y^{(P)}}{\Lambda} \sin(\xi x) d\xi, \quad (3.29)$$

Ολική Λύση για το Κάθετο Καταναμημένο Φορτίο

Οι ολικές μετατοπίσεις για το κάθετο καταναμημένο πρόβλημα προκύπτουν έπειτα από πρόσθεση των επιμέρους μετατοπίσεων των προβλημάτων (I) και (II). Συνεπώς,

$$u_{x-heav}^{(P)}(x, y) = u_{x-I}^{(P)}(x, y) + u_{x-II}^{(P)}(x, y), \quad (3.30)$$

$$u_{y-heav}^{(P)}(x, y) = u_{y-I}^{(P)}(x, y) + u_{y-II}^{(P)}(x, y). \quad (3.31)$$

Αντικαθιστώντας στις τελευταίες τις σχέσεις (3.15), (3.16), (3.28) και (3.29) προκύπτουν οι ολικές επιφανειακές μετατοπίσεις οι οποίες δίνονται ως εξής

$$u_{x-heav}^{(P)}(x, y=0) = -\frac{P}{2(\lambda + \mu)} x \cdot H(x) - \frac{P}{\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^{+\infty} \frac{N_x^{(P)}}{\Lambda} \cos(\xi x) d\xi, \quad (3.32)$$

$$u_{y-heav}^{(P)}(x, y=0) = \frac{(\lambda + 2\mu)P}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} (x - x \ln(|x|)) - \frac{(\lambda + 2\mu)P}{\pi\mu(\lambda + \mu)} \int_0^{+\infty} \frac{N_y^{(P)}}{\Lambda} \sin(\xi x) d\xi, \quad (3.33)$$

Πεδίο Τροπών για το Κάθετο Καταναμημένο Φορτίο

Στη συνέχεια αναζητούμε το πεδίο τροπών στην περίπτωση του κάθετου καταναμημένου φορτίου του σχήματος 3.1α. Υπενθυμίζουμε ότι οι συνιστώσες του τανυστή τροπής δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (3.34)$$

Μετασχηματίζοντας τώρα τις (3.34) με την (2.5α) λαμβάνουμε το ακόλουθο μετασχηματισμένο πεδίο τροπών

$$\varepsilon_{xx}^* = pu_x^*, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{du_y^*}{dy}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{du_x^*}{dy} + \frac{p}{2} u_y^*, \quad (3.35)$$

Συνεπώς, λόγω των σχέσεων (3.14), (3.15), (3.20) και (3.21) προκύπτει ότι το επιφανειακό πεδίο τροπών για το κάθετο κατανεμημένο φορτίο είναι το πιο κάτω

$$\varepsilon_{xx}^{(P)} = -\frac{P}{4(\lambda + \mu)} - \frac{i}{\pi} \int_0^\infty -i\xi u_{x-\Pi}^{*(P)}(\xi, y) \cdot \sin(\xi x) d\xi, \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(P)} = -\frac{P}{4(\lambda + \mu)} - \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{du_{y-\Pi}^{*(P)}(\xi, y)}{dy} \cdot \sin(\xi x) d\xi, \quad (3.37)$$

$$\varepsilon_{xy}^{(P)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(pu_{y-\Pi}^{*(P)}(p, y) + \frac{du_{x-\Pi}^{*(P)}(\xi, y)}{dy} \right) \cos(\xi x) d\xi. \quad (3.38)$$

Παρατηρούμε από την (3.38) ότι η $\varepsilon_{xy}^{(P)}$ στην κλασσική ελαστικότητα είναι μηδέν κάτι που δεν ισχύει στην περίπτωση της θεωρίας βαθμίδας.

Λύση και Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Κάθετο Κατανεμημένο Φορτίο

Από τις εξισώσεις (3.32), (3.33), (3.36-3.38) προκύπτουν τα τελικά αποτελέσματα για τις επιφανειακές μετατοπίσεις και τροπές. Τα αποτελέσματα αυτά σε κανονικοποιημένη μορφή δίνονται στις σχέσεις που έπονται

$$\hat{u}_{x-\text{heav}}^{(P)}(x', y=0) = -2xH(x') - \frac{4}{\pi(1-2\nu)} \int_0^{+\infty} \frac{Q_x^{(P)}}{L} \cos(\rho x') d\rho, \quad (3.39)$$

$$\hat{u}_{y-\text{heav}}^{(P)}(x', y=0) = \frac{1}{\pi} x' - \frac{1}{\pi} x' \ln(|x'|) + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{Q_y^{(P)}}{L} \sin(\rho x') d\rho, \quad (3.40)$$

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^{(P)}(x', y=0) = -1 - \text{sgn}(x) + \frac{4}{\pi(1-2\nu)} \int_0^\infty \frac{\rho Q_x^{(P)}}{L} \sin(\rho x') d\rho, \quad (3.41)$$

$$\hat{\varepsilon}_{yy}^{(P)}(x', y=0) = -1 - \text{sgn}(x) + \frac{4}{\pi(1-2\nu)} \int_0^\infty \frac{Q_{\varepsilon_{yy}}^{(P)}}{d_1^{1/4} L} \sin(\rho x') d\rho, \quad (3.42)$$

$$\hat{\varepsilon}_{xy}^{(P)}(x', y=0) = -2 \frac{(1-\nu)}{\pi} \int_0^\infty d_1^{7/4} \frac{Q_{\varepsilon_{xy}}^{(P)}}{L} \cos(\rho x') d\rho. \quad (3.43)$$

όπου το σύμβολο $(\hat{\quad})$ πάνω από τις μετατοπίσεις υποδηλώνει τις κανονικοποιημένες ποσότητες που θα οριστούν παρακάτω, $x' = (c_1 c_2)^{-1/4} x$ υποδηλώνει την κανονικοποιημένη (αδιάστατη) απόσταση (normalized distance), $\rho = \xi (c_1 c_2)^{1/4}$, οι συναρτήσεις $Q_x^{(P)}$, $Q_y^{(P)}$, $Q_{\varepsilon_{yy}}^{(P)}$, $Q_{\varepsilon_{xy}}^{(P)}$ και L δίνονται στο παράρτημα Δ. Αυτές οι συναρτήσεις εμπεριέχουν τους λόγους d_0 , d_1 και d_2 όπως αυτοί ορίζονται στις σχέσεις (2.59) και έχει γίνει η αντικατάσταση του $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$. Στα σχήματα που ακολουθούν παραθέτουμε τα διαγράμματα των κανονικοποιημένων μετατοπίσεων και κανονικοποιημένων τροπών για διάφορες τιμές των ν , d_0 , d_1 και d_2 . Επίσης οι κανονικοποιημένες μετατοπίσεις είναι αδιάστατες ποσότητες και ορίζονται ως ακολούθως

$$\hat{u}_{x\text{-heav}}^{(P)} = \frac{4(\lambda + \mu)}{P(c_1 c_2)^{1/4}} u_{x\text{-heav}}^{(P)}, \quad (3.44)$$

$$\hat{u}_{y\text{-heav}}^{(P)} = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{P(\lambda + 2\mu)(c_1 c_2)^{1/4}} u_{y\text{-heav}}^{(P)}, \quad (3.45)$$

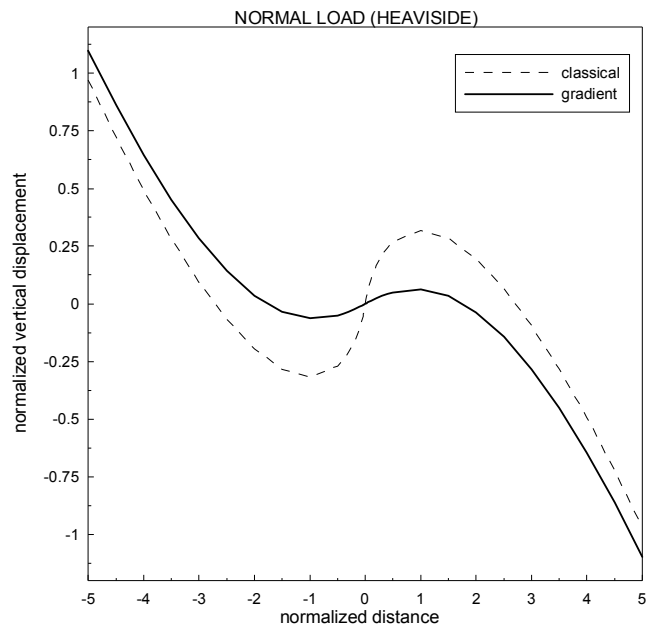
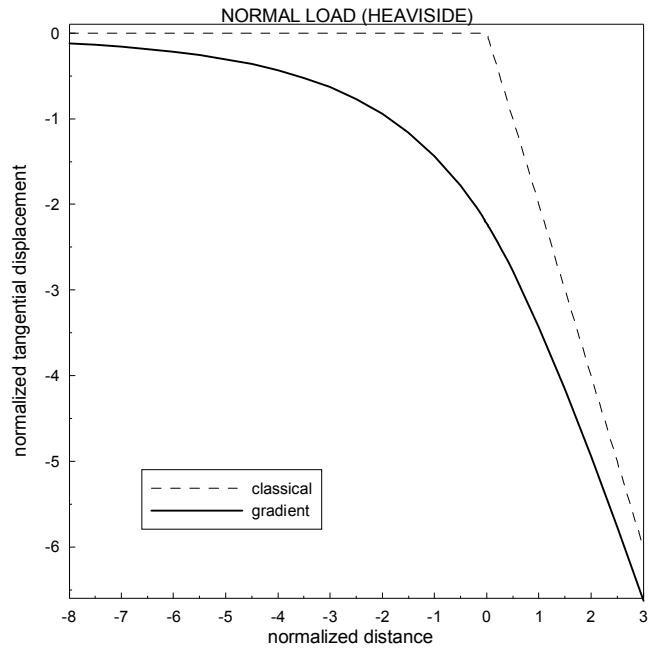
$$\hat{\varepsilon}_{xx}^{(P)} = \frac{4(\lambda + \mu)}{P} \varepsilon_{xx}^{(P)}, \quad (3.46)$$

$$\hat{\varepsilon}_{yy}^{(P)} = \frac{4(\lambda + \mu)}{P} \varepsilon_{yy}^{(P)}, \quad (3.47)$$

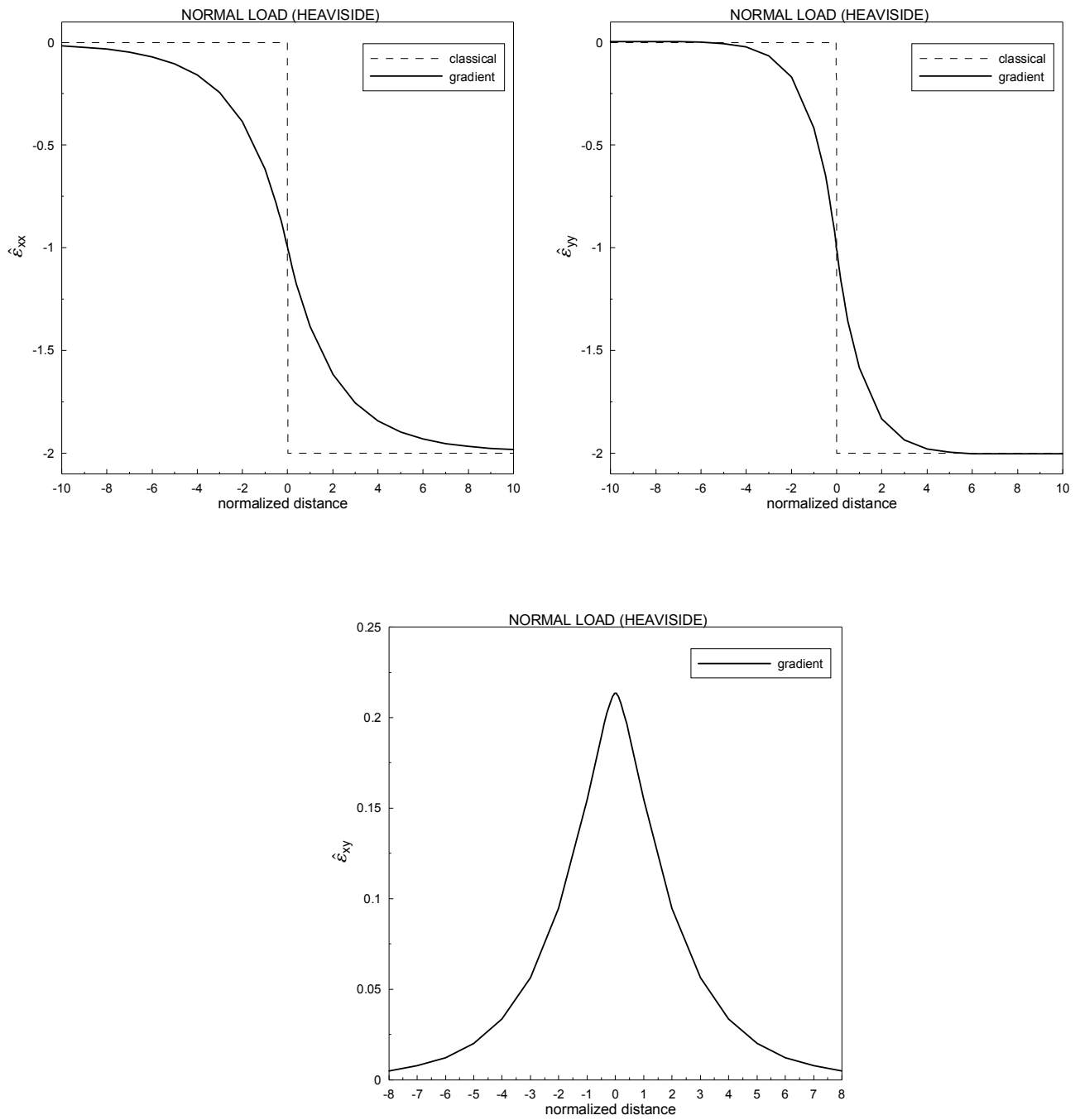
$$\hat{\varepsilon}_{xy}^{(P)} = \frac{2\mu}{P} \varepsilon_{xy}^{(P)}, \quad (3.48)$$

Από τα σχεδιαγράμματα γίνεται φανερό ότι οι λύσεις τώρα είναι πιο ομαλές, επομένως και πιο φυσικές, στην περίπτωση της θεωρίας βαθμίδας σε σχέση με τις ασυνεχείς κλασσικές λύσεις. Συγκεκριμένα, στο κάθετο φορτίο η εφαπτομενική μετατόπιση είναι πιο ομαλή αφού δεν υπάρχει η γωνία που σχημάτιζε η μετατόπιση με την κλασσική λύση. Στην περίπτωση των τροπών $\varepsilon_{xx}^{(P)}$ και $\varepsilon_{yy}^{(P)}$ έχει εξαλειφθεί η ασυνέχεια των κλασσικών λύσεων. Τέλος, η τροπή $\varepsilon_{xy}^{(P)}$ στην κλασσική ελαστικότητα είναι μηδέν κάτι που δεν συμβαίνει στην περίπτωση της θεωρίας βαθμίδας. Τα διαγράμματα παραθέτονται στις επόμενες σελίδες.

1η Περίπτωση: $\nu = 0.25, d_0 = 1, d_1 = 1, d_2 = 1. (c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c)$

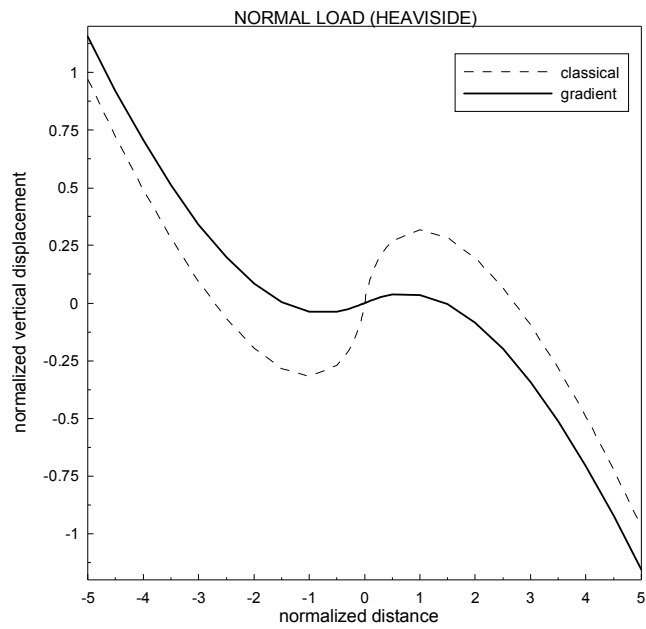
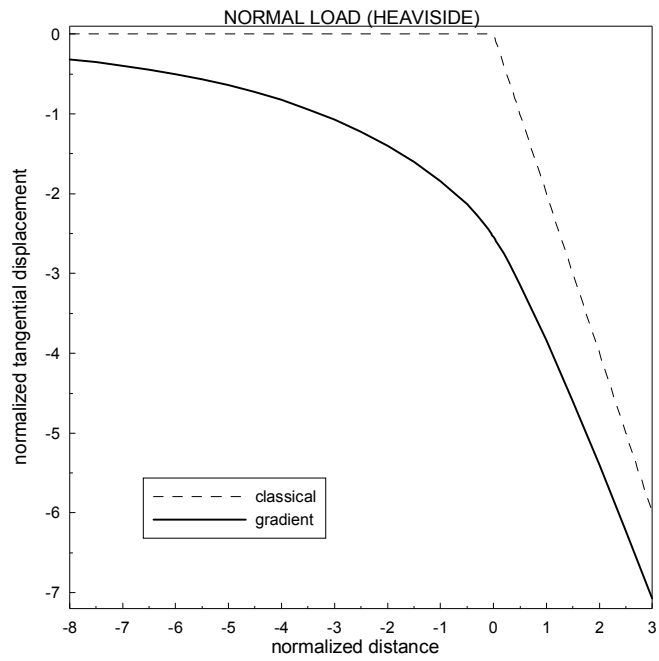


Σχήμα 3.3α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου καταμεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

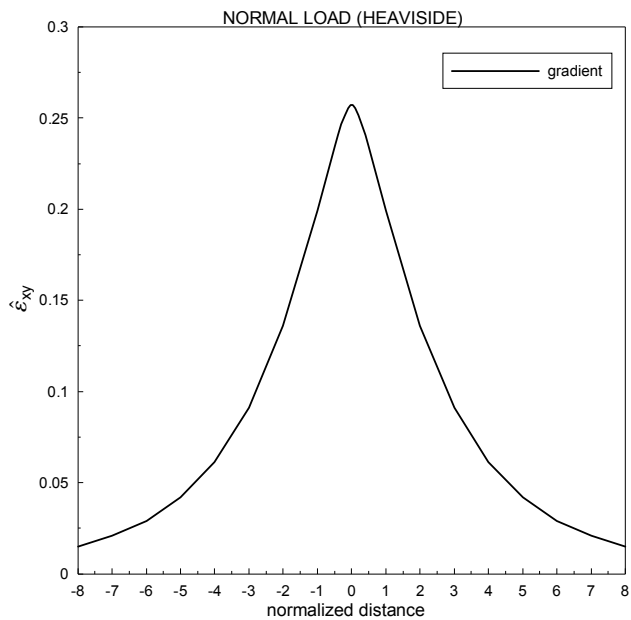
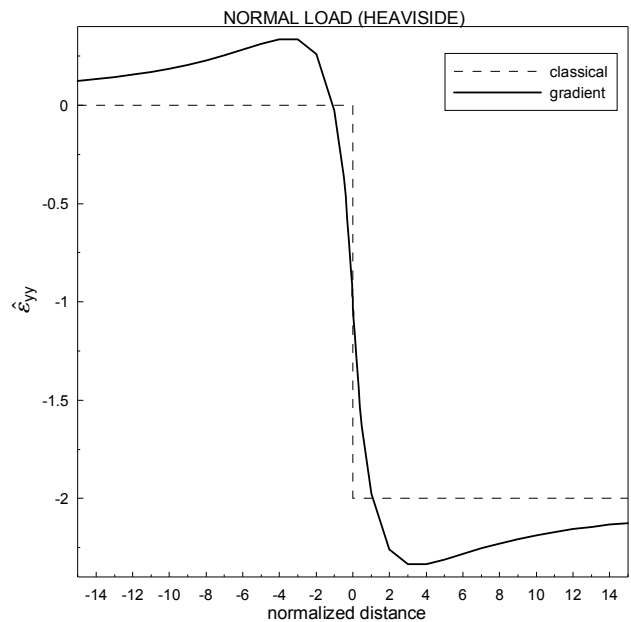
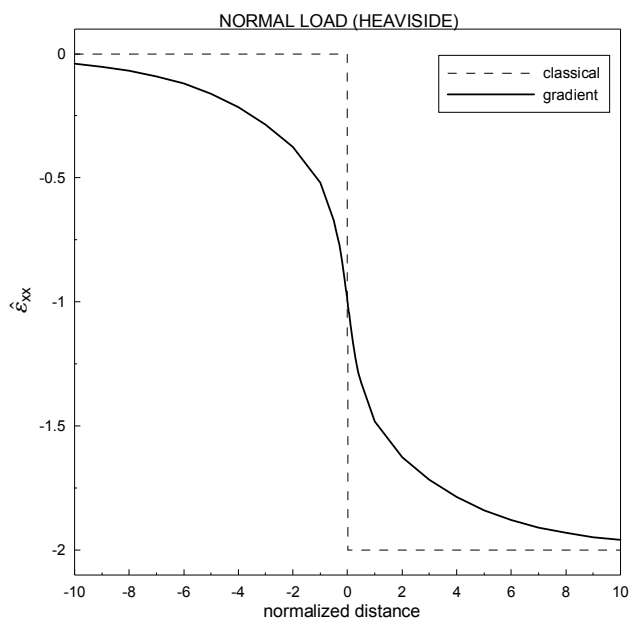


Σχήμα 3.3β: Κανονικοποιημένες τροπές λόγω ενός κάθετου κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

2η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = \frac{1}{2}$, $d_1 = \frac{1}{4}$, $d_2 = -\frac{3}{4}$.

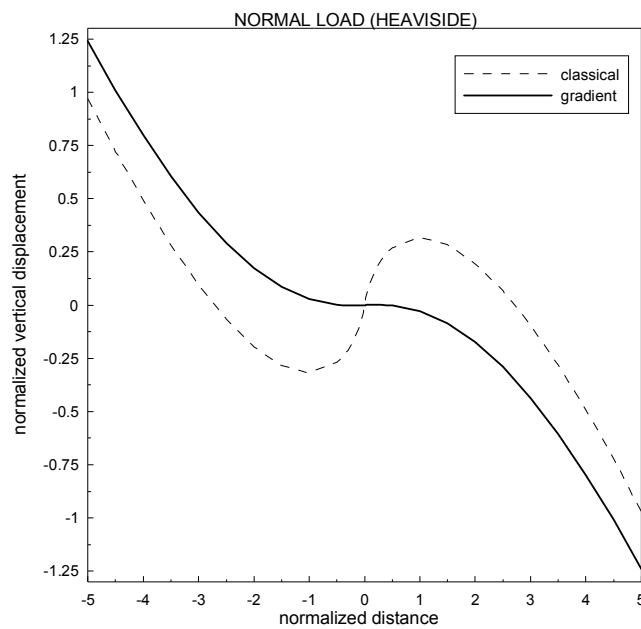
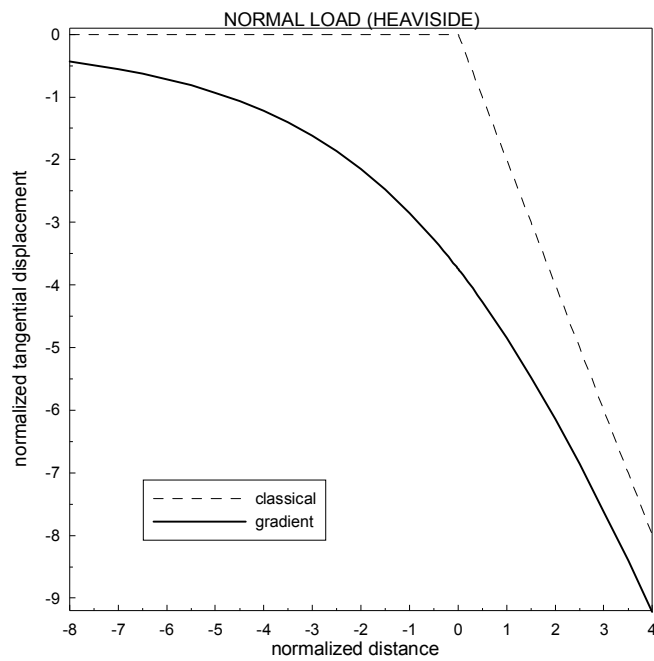


Σχήμα 3.4α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

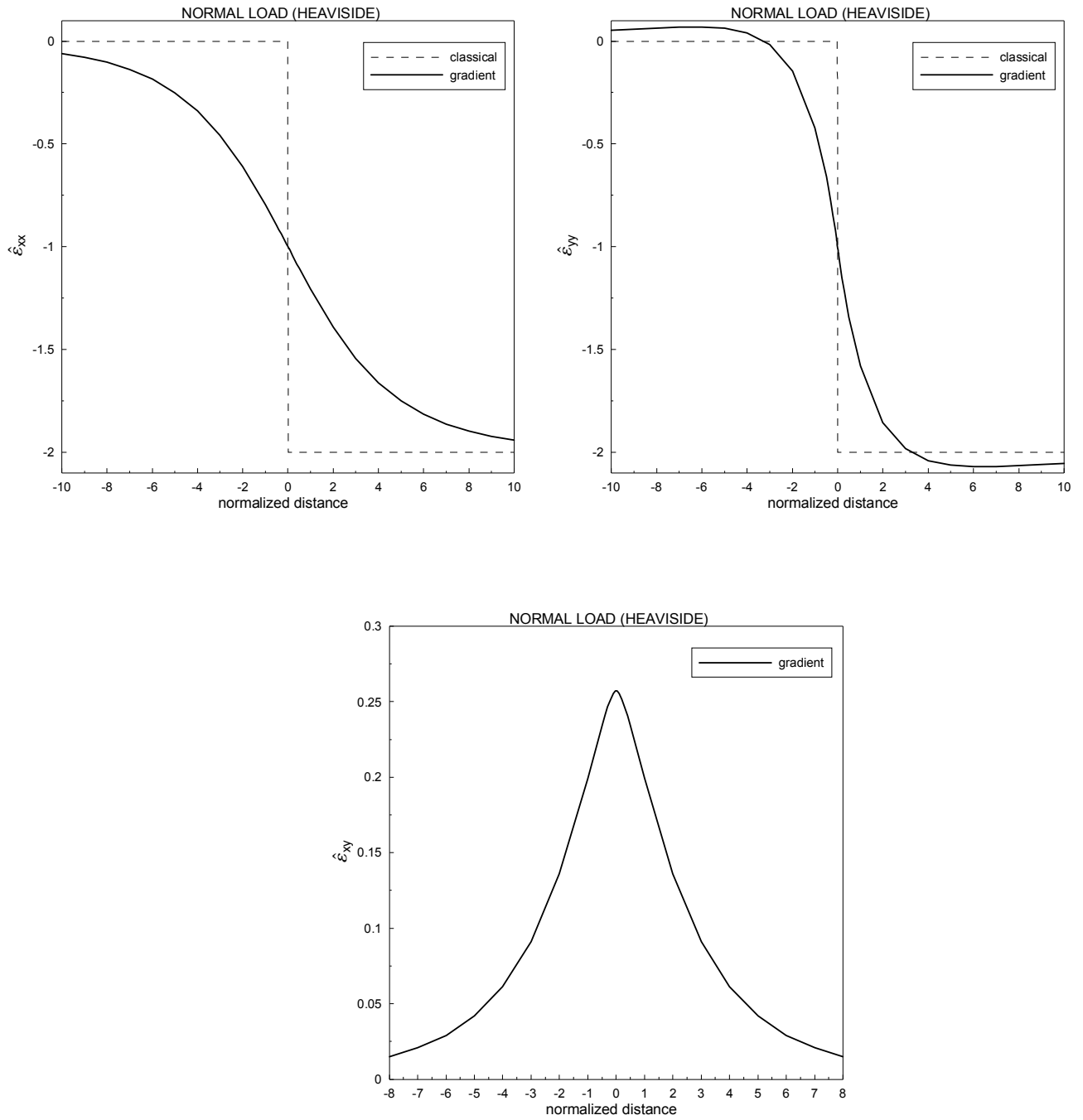


Σχήμα 3.4β: Κανονικοποιημένες τροπές λόγω ενός κάθετου κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

3η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = \frac{1}{2}$, $d_1 = \frac{1}{4}$, $d_2 = 0$.

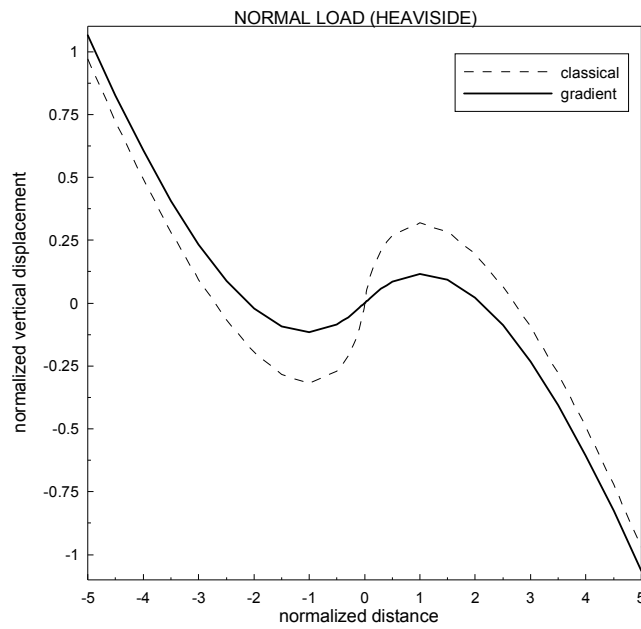
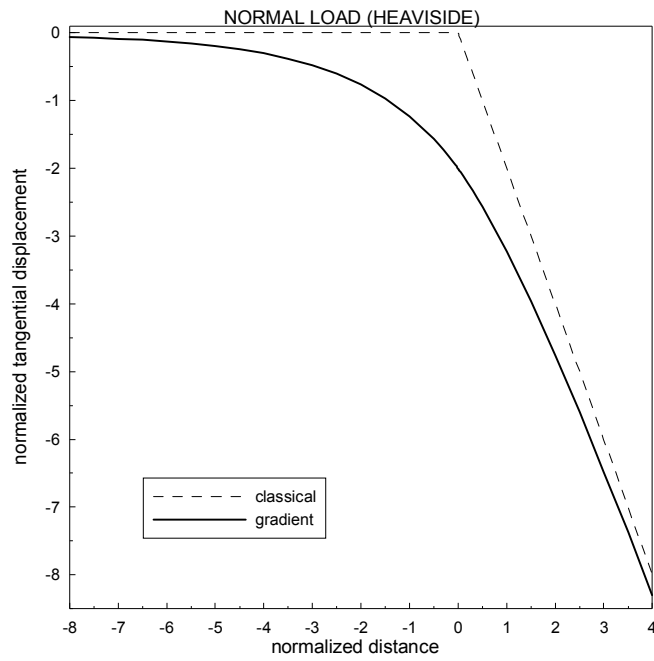


Σχήμα 3.5α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

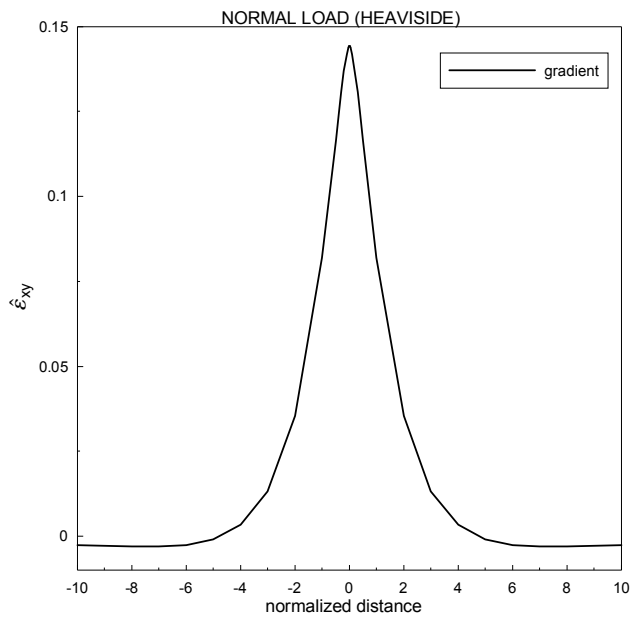
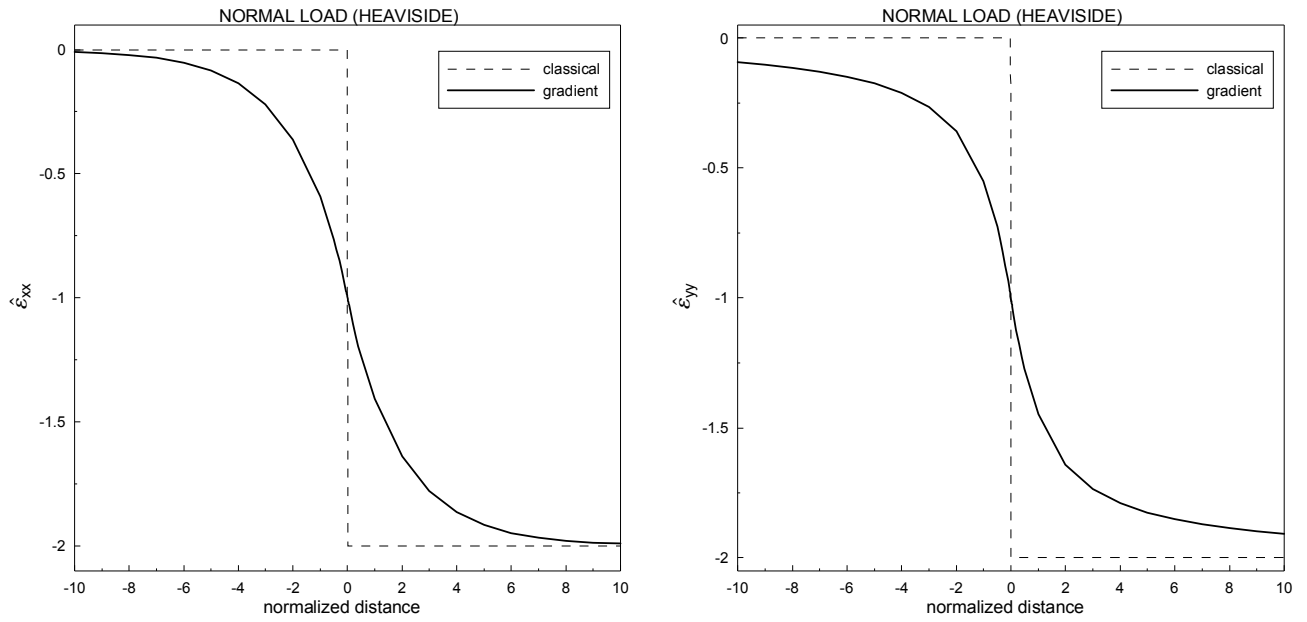


Σχήμα 3.5β: Κανονικοποιημένες τροπές λόγω ενός κάθετου κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

4η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = \frac{5}{3}$, $d_1 = \frac{25}{6}$, $d_2 = \frac{25}{3}$.

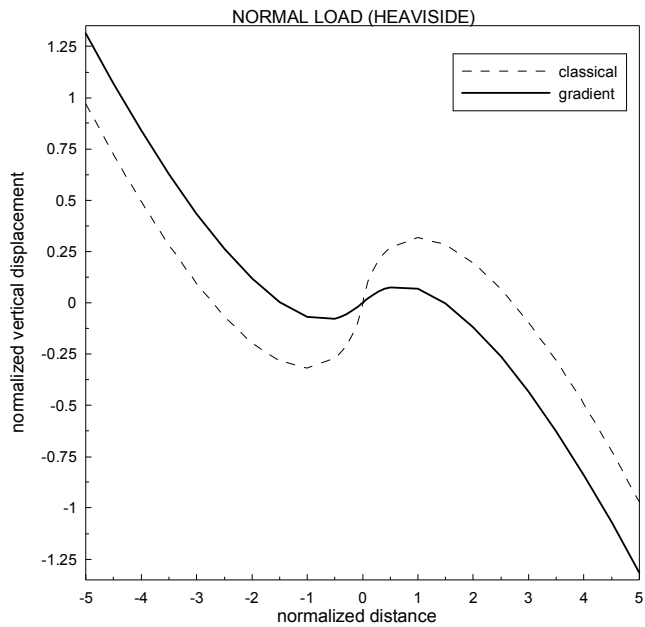
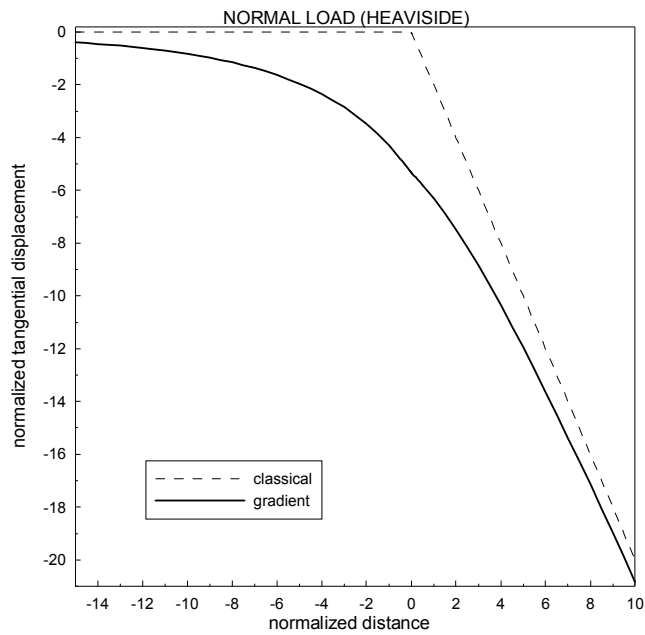


Σχήμα 3.6α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

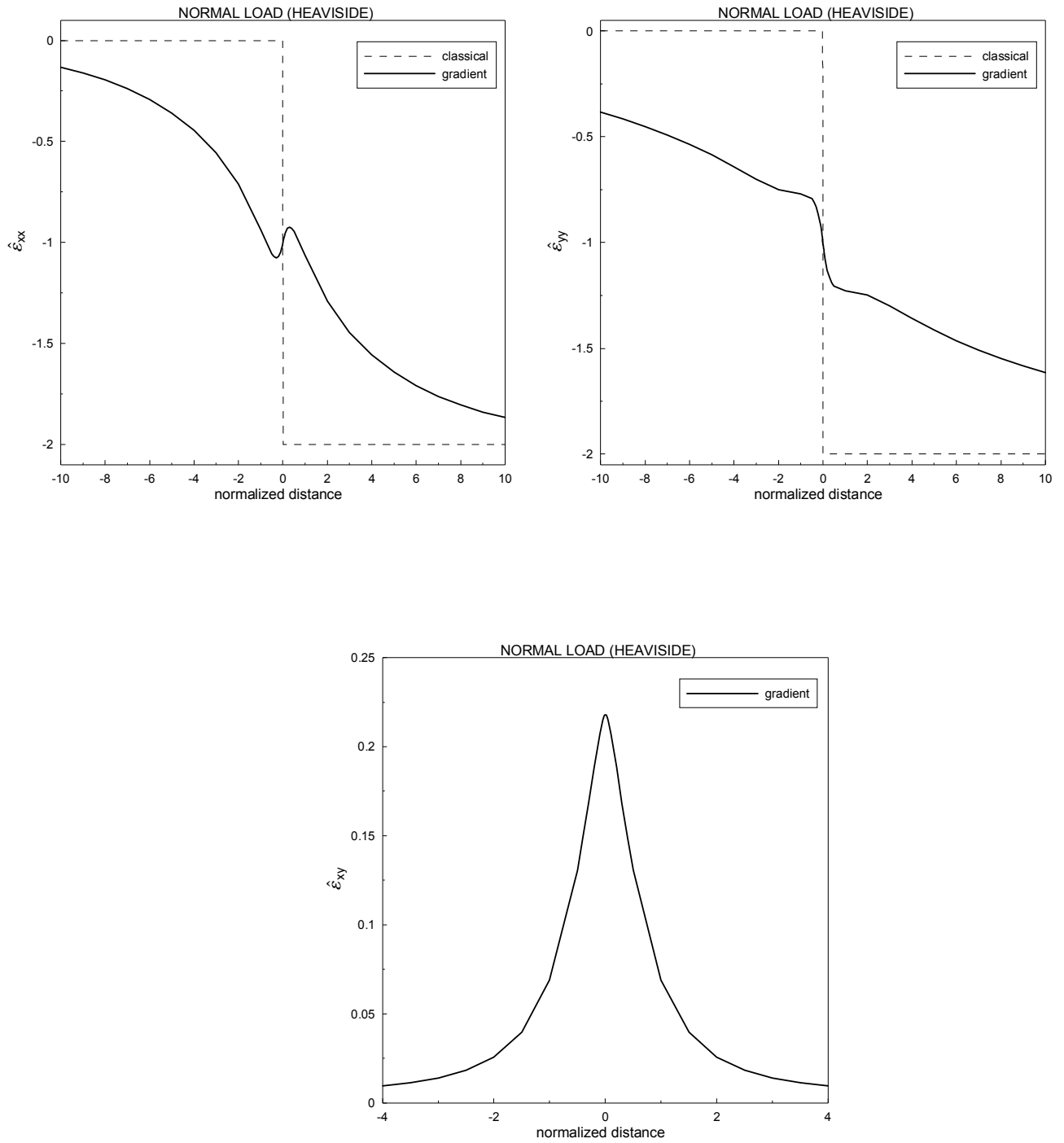


Σχήμα 3.6β: Κανονικοποιημένες τροπές λόγω ενός κάθετου κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

5η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = 1$, $d_1 = 100$, $d_2 = 300$.



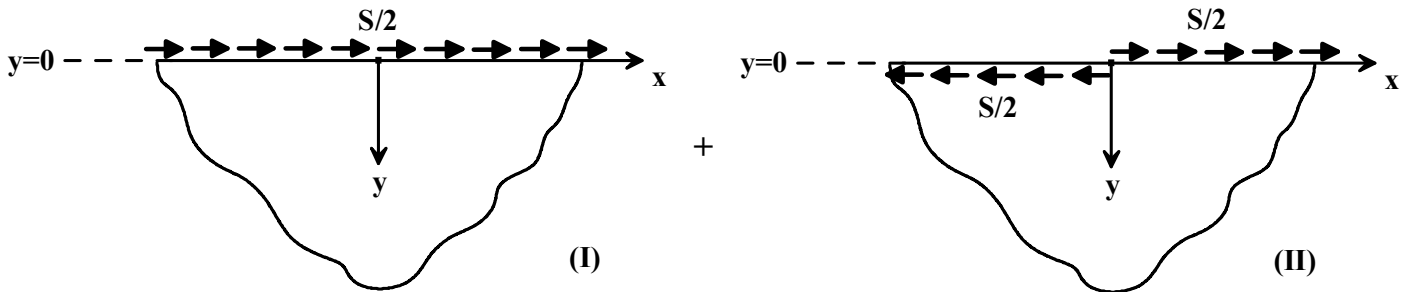
Σχήμα 37α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός κάθετου κατανομμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας



Σχήμα 3.7β: Κανονικοποιημένες τροπές λόγω ενός κάθετου κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

3.3 Επίλυση Εφαπτομενικού Κατανεμημένου φορτίου

Το εφαπτομενικό κατανεμημένο φορτίο χωρίζεται σε ένα σταθερό φορτίο στην επιφάνεια του ημι-χώρου και σε μια φόρτιση “προσήμου” όπως υποδεικνύει το ακόλουθο σχήμα. Οι μέθοδοι επίλυσης είναι οι ίδιοι που χρησιμοποιήσαμε και για το κάθετο κατανεμημένο φορτίο.



Σχήμα 3.8: Χρήση της αρχής της υπέρθεσης για το εφαπτομενικό κατανεμημένο φορτίο

Επιμέρους Πρόβλημα (I) - Σταθερό Φορτίο στην Επιφάνεια του Ημιχώρου

Οι συνοριακές συνθήκες για το επιμέρους πρόβλημα (I) του σχήματος 3.8 κατά μήκος της επιφάνειας $y = 0$ γράφονται ως ακολούθως

$$\tau_{yy} - \partial_x m_{xy} - \partial_y m_{yy} - \partial_x m_{xy} = 0, \quad (3.49\alpha)$$

$$\tau_{yx} - \partial_x m_{yx} - \partial_y m_{yx} - \partial_x m_{yx} = -\frac{S}{2}, \quad (3.49\beta)$$

$$m_{yy} = 0, \quad (3.49\gamma)$$

$$m_{yx} = 0. \quad (3.49\delta)$$

Εργαζόμενοι όπως και στο πρόβλημα Flamant-Boussinesq, το πρόβλημα (I) έχει και αυτό γενικές λύσεις της μορφής (3.5). Οι μετασχηματισμένες συνοριακές συνθήκες για αυτή την περίπτωση γίνονται ως εξής

$$\tau_{yy}^* - \rho m_{xyy}^* - \frac{dm_{yyy}^*}{dy} - \rho m_{xyy}^* = 0, \quad (3.50\alpha)$$

$$\tau_{yx}^* - \rho m_{xyx}^* - \frac{dm_{yxx}^*}{dy} - \rho m_{yxx}^* = -\pi S \delta(ip), \quad (3.50\beta)$$

$$m_{yyy}^* = 0, \quad (3.50\gamma)$$

$$m_{yxx}^* = 0. \quad (3.50\delta)$$

όπου $\delta(\)$ η Dirac δέλτα κατανομή. Συνδυάζοντας τις τελευταίες με τις (2.10) βρίσκουμε ότι

$$u_{x-1}^{*(S)}(p, y) = \left(\pi \delta(ip) B_3^{(S)} \frac{\beta}{p} - \pi \delta(ip) B_4^{(S)} \left(\frac{(\lambda + 3\mu)}{p(\lambda + \mu)} - \frac{\beta}{p} y \right) \right) \exp(-\beta y) + \\ + \pi \delta(ip) B_6^{(P)} \frac{P}{\gamma_1} \exp(-\gamma_1 y) + \pi \delta(ip) B_8^{(P)} \frac{\gamma_2}{p} \exp(-\gamma_2 y) \quad \text{για } y \geq 0, \quad (3.51\alpha)$$

$$u_{y-1}^{*(S)}(p, y) = \left(\pi \delta(ip) B_3^{(S)} + \pi \delta(ip) B_4^{(S)} y \right) \exp(-\beta y) + \\ + \pi \delta(ip) B_6^{(S)} \exp(-\gamma_1 y) + \pi \delta(ip) B_8^{(S)} \exp(-\gamma_2 y) \quad \text{για } y \geq 0, \quad (3.51\beta)$$

όπου τα $B_i^{(S)}$ ($i = 3, 4, 6, 8$) είναι αυτά του προβλήματος Flamant-Boussinesq και δίνονται από τις σχέσεις (B5-B8) του παραρτήματος B, ο εκθέτης S στις παρενθέσεις δηλώνει ότι η συγκεκριμένη συνιστώσα προκύπτει από το εφαπτομενικό φορτίο S . Επίσης ο κάτω δείκτης (I) δηλώνει ότι η συγκεκριμένη συνιστώσα είναι για το επιμέρους πρόβλημα (I). Οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις για το ομοιόμορφο φορτίο τότε γίνονται

$$u_{x-1}^{*(S)}(p, y) = \pi \delta(ip) u_x^{*(S)}(p, y), \quad (3.52)$$

$$u_{y-1}^{*(S)}(p, y) = \pi \delta(ip) u_y^{*(S)}(p, y), \quad (3.53)$$

όπου $u_x^{*(S)}(p, y)$, $u_y^{*(S)}(p, y)$ είναι οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις του προβλήματος Flamant-Boussinesq οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (2.16, 2.17). Υπενθυμίζουμε ότι για τις μετασχηματισμένες μετατοπίσεις προβλήματος Flamant-Boussinesq, η $u_x^{*(S)}(p, y)$, $u_y^{*(S)}(p, y)$, είναι άρτια και περιττή αντίστοιχα. Επειδή η Dirac δέλτα κατανομή είναι άρτια συνεπάγεται ότι η $u_{x-1}^{*(S)}(p, y)$ είναι άρτια ενώ η $u_{y-1}^{*(S)}(p, y)$ είναι περιττή. Θέτοντας $p = -i\xi$ και κάνοντας χρήση της (2.5β) στις (3.52, 3.53) καταλήγουμε στις

$$\begin{aligned} u_{x-1}^{(S)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_x^{*(S)}(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_x^{*(S)}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_x^{*(S)}(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_x^{*(S)}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi - 0 = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} [u_x^{*(S)}(\xi, y) \cos(\xi x)] \end{aligned}$$

Το όριο όμως καθώς το $\xi \rightarrow 0$ της τελευταίας σχέσης δεν υπάρχει. Αναπτύσσουμε σε σειρά την $u_x^{*(S)}(\xi, y)$ καθώς το $\xi \rightarrow 0$ και παρατηρούμε ότι

$$u_x^{*(S)}(\xi, y) = \frac{S(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{1}{\xi} - \frac{S(2\lambda + 3\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} y + O(\xi). \quad (3.54)$$

Παραγωγίζουμε την άνω σειρά ως προς y και παίρνουμε το όριο καθώς το $\xi \rightarrow 0$ οπότε έχουμε

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial u_x^{*(S)}}{\partial y} \right] = - \frac{S(2\lambda + 3\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)}. \quad (3.55)$$

Θα πάρουμε μερικές παραγώγους ως προς x και ως προς y για να υπολογίσουμε το $u_{x-1}^{(S)}(x, y)$.

Επομένως

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{x-1}^{(S)}(x, y)}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) u_x^{*(S)}(\xi, y) \xi \sin(\xi x) d\xi = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[u_x^{*(S)}(\xi, y) \xi \sin(\xi x) \right] = 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$u_{x-1}^{(S)}(x, y) = g(y) + (\text{arbitrary constant}), \quad (3.56\alpha)$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial (u_{x-1}^{(S)}(x, y))}{\partial y} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) \frac{\partial u_x^{*(S)}(\xi, y)}{\partial y} \cos(\xi x) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial u_x^{*(S)}(\xi, y)}{\partial y} \cos(\xi x) \right] = \frac{1}{2} \left(-\frac{(2\lambda + 3\mu)S}{2\mu(\lambda + \mu)} \right) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$u_{x-1}^{(S)}(x, y) = -\frac{(2\lambda + 3\mu)S}{4\mu(\lambda + \mu)} y + (\text{arbitrary constant}). \quad (3.56\beta)$$

Για το $u_{y-1}^{(S)}(x, y)$ έχουμε τα κατωτέρω

$$\begin{aligned}u_{y-1}^{(S)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_y^{*(S)}(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_y^{*(S)}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_y^{*(S)}(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi = \\ &= 0 - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\xi) u_y^{*(S)}(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) u_y^{*(S)}(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi = \\ &= -\frac{i}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[u_y^{*(S)}(\xi, y) \sin(\xi x) \right] = -\frac{i}{2} \left(\frac{iS}{2(\lambda + \mu)} x \right) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$u_{y-1}^{(S)}(x, y) = \frac{S}{4(\lambda + \mu)} x \quad (3.57)$$

Από τις (3.56α), (3.56β) και (3.57) και επειδή η αυθαίρετη σταθερά σχετίζεται με την κίνηση στερεού σώματος έχουμε τις τελικές σχέσεις για την κάθετη μετατόπιση που φαίνεται παρακάτω

$$u_{x-1}^{(p)}(x, y) = -\frac{(2\lambda + 3\mu)S}{4\mu(\lambda + \mu)}y, \quad (3.58)$$

$$u_{y-1}^{(p)}(x, y) = \frac{S}{4(\lambda + \mu)}x. \quad (3.59)$$

Τέλος, οι μετατοπίσεις στην επιφάνεια του ημι-χώρου, ($y = 0$), είναι οι ακόλουθες

$$u_{x-1}^{(p)}(x, y) = 0, \quad (3.60)$$

$$u_{y-1}^{(p)}(x, y) = \frac{S}{4(\lambda + \mu)}x. \quad (3.61)$$

Επιμέρους Πρόβλημα (II)- Φόρτιση “Προσήμου” στην Επιφάνεια του Ημιχώρου

Οι συνοριακές συνθήκες για το επιμέρους πρόβλημα (II) του σχήματος 3.8 κατά μήκος της επιφάνειας $y = 0$ γράφονται ως ακολούθως

$$\tau_{yy} - \partial_x m_{xy} - \partial_y m_{yyy} - \partial_x m_{xy} = 0, \quad (3.62\alpha)$$

$$\tau_{yx} - \partial_x m_{yx} - \partial_y m_{yyx} - \partial_x m_{yx} = -\frac{S}{2} \cdot \text{sgn}(x), \quad (3.62\beta)$$

$$m_{yyy} = 0, \quad (3.62\gamma)$$

$$m_{yyx} = 0, \quad (3.62\delta)$$

όπου $\text{sgn}(\)$ είναι η συνάρτηση προσήμου. Το πρόβλημα (II) έχει και αυτό γενικές λύσεις της μορφής (2.10). Κατά μήκος της επιφάνειας $y=0$ ισχύουν οι παρακάτω μετασχηματισμένες συνοριακές συνθήκες

$$\tau_{yy}^* - pm_{yy}^* - \frac{dm_{yyy}^*}{dy} - pm_{yxy}^* = 0, \quad (3.63\alpha)$$

$$\tau_{yx}^* - pm_{xyx}^* - \frac{dm_{yyx}^*}{dy} - pm_{yxx}^* = \frac{S}{p}, \quad (3.63\beta)$$

$$m_{yyy}^* = 0, \quad (3.63\gamma)$$

$$m_{yyx}^* = 0. \quad (3.63\delta)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (3.63α-3.63δ) με τις (3.5) προκύπτει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων και από την επίλυση του προκύπτουν οι κάτωθι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις

$$u_{x-II}^{*(S)}(p, y) = \left(\frac{B_3^{(S)}}{p} \frac{\beta}{p} - \frac{B_4^{(S)}}{p} \left(\frac{(\lambda + 3\mu)}{p(\lambda + \mu)} - \frac{\beta}{p} y \right) \right) \exp(-\beta y) + \frac{B_6^{(S)}}{p} \frac{p}{\gamma_1} \exp(-\gamma_1 y) + \frac{B_8^{(S)}}{p} \frac{\gamma_2}{p} \exp(-\gamma_2 y) \quad \text{για } y \geq 0, \quad (3.64\alpha)$$

$$u_{y-I}^{*(S)}(p, y) = \left(\frac{B_3^{(S)}}{p} B_3^{(P)} + \frac{B_4^{(S)}}{p} y \right) \exp(-\beta y) + \frac{B_6^{(S)}}{p} \exp(-\gamma_1 y) + \frac{B_8^{(S)}}{p} \exp(-\gamma_2 y) \quad \text{για } y \geq 0, \quad (3.64\beta)$$

όπου τα $B_i^{(S)}$ ($i=3,4,6,8$) είναι αυτά του προβλήματος Flamant-Boussinesq και δίνονται από τις σχέσεις (B5-B8) του παραρτήματος Β και ο εκθέτης S στις παρενθέσεις δηλώνει ότι η συγκεκριμένη συνιστώσα προκύπτει από το φορτίο κάθετο φορτίο S . Επίσης ο κάτω δείκτης (II) δηλώνει ότι η συγκεκριμένη συνιστώσα είναι για το επιμέρους πρόβλημα (II). Οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις για αυτό το πρόβλημα, σε συνοπτική μορφή είναι οι ακόλουθες

$$u_{x-\text{II}}^{*(S)}(p, y) = \frac{u_x^{*(S)}(p, y)}{p}, \quad (3.65)$$

$$u_{y-\text{II}}^{*(S)}(p, y) = \frac{u_y^{*(S)}(p, y)}{p}, \quad (3.66)$$

όπου $u_x^{*(S)}(p, y)$, $u_y^{*(S)}(p, y)$ είναι οι μετασχηματισμένες μετατοπίσεις του προβλήματος Flamant-Boussinesq οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (2.16, 2.17).

Για τις μετασχηματισμένες συνιστώσες των μετατοπίσεων παρατηρούνται οι ακόλουθες σχέσεις αρτιότητας/ περιττότητας

$$u_{x-\text{II}}^{*(S)}(-p, y) = -u_{x-\text{II}}^{*(S)}(p, y), \quad (3.67)$$

$$u_{y-\text{II}}^{*(S)}(-p, y) = u_{y-\text{II}}^{*(S)}(p, y). \quad (3.68)$$

Όπως και στο πρόβλημα Flamant-Boussinesq εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις (3.67, 3.68), αλλάζουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης στην (2.5β) θέτοντας $p = -i\xi$, όπου $\xi \in \mathbb{R}$ και με την ίδια διαδικασία που είχαμε αναφέρει στο Κεφ. 2 μπορούμε να γράψουμε τις κατωτέρω σχέσεις για τις αντίστροφες συναρτήσεις

$$u_{x-\text{II}}^{(S)}(x, y=0) = -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty u_{x-\text{II}}^{*(S)}(\xi, y=0) \cdot \sin(\xi x) d\xi, \quad (3.69)$$

$$u_{y-\text{II}}^{(S)}(x, y=0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u_{y-\text{II}}^{*(S)}(\xi, y=0) \cdot \cos(\xi x) d\xi, \quad (3.70)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω οι μετασχηματισμένες επιφανειακές μετατοπίσεις παίρνουν την εξής μορφή

$$u_{x-\text{II}}^{(S)}(\xi, y=0) = \frac{i(\lambda + 2\mu)S}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{1}{\xi^2} - \frac{iS}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{N_x^{(S)}}{\Lambda}, \quad (3.71)$$

$$u_{y-\text{II}}^{*(S)}(\xi, y=0) = -\frac{S}{2(\lambda+\mu)} \frac{1}{\xi^2} + \frac{S}{\mu(\lambda+\mu)} \frac{N_y^{(S)}}{\Lambda}. \quad (3.72)$$

όπου οι συναρτήσεις $N_x^{(S)}(\xi)$, $N_y^{(S)}(\xi)$ και $\Lambda(\xi)$ είναι αυτές που είχαμε και στο Flamant-Boussinesq και δίνονται στο Παράρτημα Γ. Εφαρμογή τώρα των (3.69) και (3.70) στις (3.71), (3.72) λαμβάνουμε τις κάτωθι επιφανειακές μετατοπίσεις

$$u_{x-\text{II}}^{(S)}(x, y=0) = \frac{(\lambda+2\mu)S}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} (x - x \ln(|x|)) - \frac{S}{\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_0^\infty \frac{N_x^{(S)}}{\Lambda} \sin(\xi x) d\xi, \quad (3.73)$$

$$u_{y-\text{II}}^{(S)}(x, y=0) = \frac{S}{4(\lambda+\mu)} |x| + \frac{S}{\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_0^\infty \frac{N_y^{(S)}}{\Lambda} \cos(\xi x) d\xi. \quad (3.74)$$

Ολική Λύση για το Εφαπτομενικό Κατανεμημένο Φορτίο

Η ολικές μετατοπίσεις για το κάθετο κατανεμημένο πρόβλημα προκύπτουν έπειτα από πρόσθεση των επιμέρους μετατοπίσεων των προβλημάτων (I) και (II). Συνεπώς,

$$u_{x-\text{heav}}^{(S)}(x, y) = u_{x-\text{I}}^{(S)}(x, y) + u_{x-\text{II}}^{(S)}(x, y), \quad (3.75)$$

$$u_{y-\text{heav}}^{(S)}(x, y) = u_{y-\text{I}}^{(S)}(x, y) + u_{y-\text{II}}^{(S)}(x, y). \quad (3.76)$$

Αντικαθιστώντας στις τελευταίες τις σχέσεις (3.58), (3.59), (3.73) και (3.74) προκύπτουν οι ολικές επιφανειακές μετατοπίσεις οι οποίες δίνονται ως εξής

$$u_{x-\text{II}}^{(S)}(x, y=0) = \frac{(\lambda+2\mu)S}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} (x - x \ln(|x|)) - \frac{S}{\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_0^\infty \frac{N_x^{(S)}}{\Lambda} \sin(\xi x) d\xi, \quad (3.77)$$

$$u_{y-\text{II}}^{(S)}(x, y=0) = \frac{S}{2(\lambda+\mu)} xH(x) + \frac{S}{\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_0^\infty \frac{N_y^{(S)}}{\Lambda} \cos(\xi x) d\xi. \quad (3.78)$$

Πεδίο Τροπών για το Εφαπτομενικό Καταναμημένο Φορτίο

Θέλουμε να βρούμε το πεδίο τροπών στην περίπτωση του κάθετου καταναμημένου φορτίου του σχήματος 3.8. Ο τανυστής τροπής γενικά δίνεται από την έκφραση (3.34) και σε μετασχηματισμένη μορφή από την (3.35). Συνεπώς προκύπτει ότι το επιφανειακό πεδίο τροπών για το εφαπτομενικό καταναμημένο φορτίο είναι το πιο κάτω

$$\varepsilon_{xx}^{(S)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} -i\xi u_{x-\Pi}^{*(S)}(\xi, y) \cdot \cos(\xi x) d\xi, \quad (3.79)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(S)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{du_{y-\Pi}^{*(S)}(\xi, y)}{dy} \cdot \cos(\xi x) d\xi, \quad (3.80)$$

$$\varepsilon_{xy}^{(P)} = -\frac{S}{4\mu} - \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \left(pu_{y-\Pi}^{*(P)}(p, y) + \frac{du_{x-\Pi}^{*(P)}(\xi, y)}{dy} \right) \sin(\xi x) d\xi. \quad (3.81)$$

Λύση και Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Κάθετο Καταναμημένο Φορτίο

Από τις εξισώσεις (3.77), (3.78), (3.79-3.81) προκύπτουν τα τελικά αποτελέσματα για τις επιφανειακές μετατοπίσεις και τροπές. Τα αποτελέσματα αυτά σε κανονικοποιημένη μορφή δίνονται στις σχέσεις που έπονται

$$\hat{u}_{x-\Pi}^{(S)}(x', y=0) = \frac{1}{\pi} x' - \frac{1}{\pi} x' \ln(|x'|) - \frac{1}{\pi(1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{Q_x^{(S)}}{L} \sin(\rho x') d\rho, \quad (3.82)$$

$$\hat{u}_{y-\Pi}^{(S)}(x', y=0) = 2x'H(x') + \frac{4}{\pi(1-2\nu)} \int_0^{\infty} \frac{Q_y^{(S)}}{L} \cos(\rho x') d\rho, \quad (3.83)$$

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^{(S)}(x', y=0) = -\frac{1}{\pi} \ln(|x'|) - \frac{1}{\pi(1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{\rho Q_x^{(S)}}{L} \cos(\rho x') d\rho, \quad (3.84)$$

$$\hat{\varepsilon}_{yy}^{(S)}(x', y=0) = \frac{1}{\pi} \ln(|x'|) - \frac{1}{\pi\nu} \int_0^{\infty} \frac{Q_{\varepsilon_{yy}}^{(S)}}{(d_1)^{\frac{1}{4}} L} \cos(\rho x') d\rho, \quad (3.85)$$

$$\hat{\varepsilon}_{xy}^{(S)}(x', y=0) = -1 - \text{sgn}(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Q_{\varepsilon_{xy}}^{(S)}}{(d_1)^{\frac{1}{4}} L} \sin(\rho x') d\rho, \quad (3.86)$$

όπου το σύμβολο (\wedge) πάνω από τις μετατοπίσεις υποδηλώνει τις κανονικοποιημένες ποσότητες που θα οριστούν παρακάτω, $x' = (c_1 c_2)^{-1/4} x$ υποδηλώνει την κανονικοποιημένη (αδιάστατη) απόσταση (normalized distance), $\rho = \xi (c_1 c_2)^{1/4}$, οι συναρτήσεις $Q_x^{(S)}$, $Q_y^{(S)}$, $Q_{\varepsilon_{xy}}^{(S)}$, $Q_{\varepsilon_{xy}}^{(S)}$ και L δίνονται στο παράρτημα Δ. Αυτές οι συναρτήσεις εμπεριέχουν τους λόγους d_0 , d_1 και d_2 όπως αυτοί ορίζονται στις σχέσεις (2.59) και έχει γίνει η αντικατάσταση του $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$. Στα σχήματα που ακολουθούν παραθέτουμε τα διαγράμματα των κανονικοποιημένων μετατοπίσεων και κανονικοποιημένων τροπών για διάφορες τιμές των ν , d_0 , d_1 και d_2 . Επίσης οι κανονικοποιημένες μετατοπίσεις είναι αδιάστατες ποσότητες και ορίζονται ως ακολούθως

$$\hat{u}_{x\text{-heav}}^{(S)} = \frac{2(\lambda + \mu)}{S(\lambda + 2\mu)(c_1 c_2)^{1/4}} u_{x\text{-heav}}^{(S)}, \quad (3.87)$$

$$\hat{u}_{y\text{-heav}}^{(P)} = \frac{4(\lambda + \mu)}{S(c_1 c_2)^{1/4}} u_{y\text{-heav}}^{(P)}, \quad (3.88)$$

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^{(P)} = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{S(\lambda + 2\mu)} \varepsilon_{xx}^{(P)}, \quad (3.89)$$

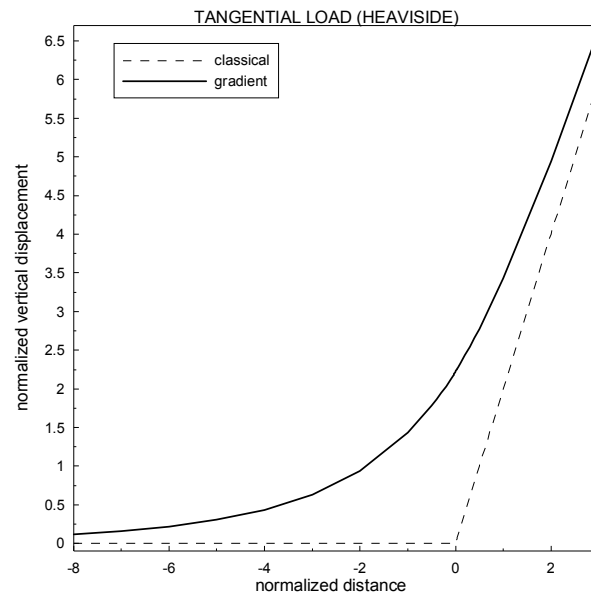
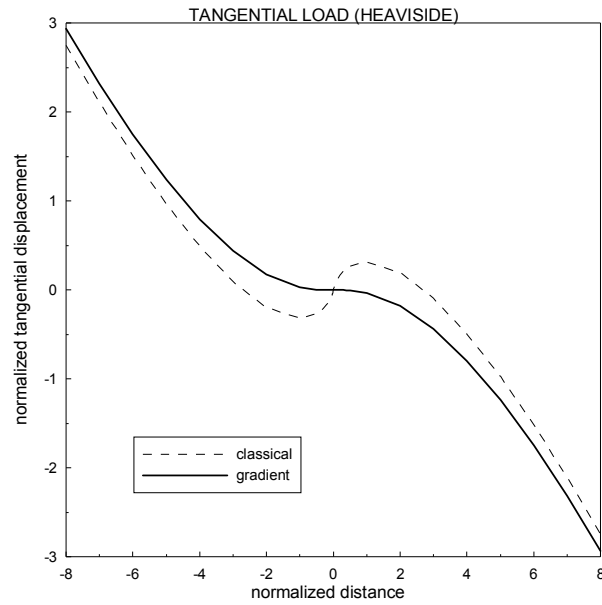
$$\hat{\varepsilon}_{yy}^{(P)} = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda S} \varepsilon_{yy}^{(P)}, \quad (3.90)$$

$$\hat{\varepsilon}_{xy}^{(P)} = \frac{4\mu}{S} \varepsilon_{xy}^{(P)}, \quad (3.97)$$

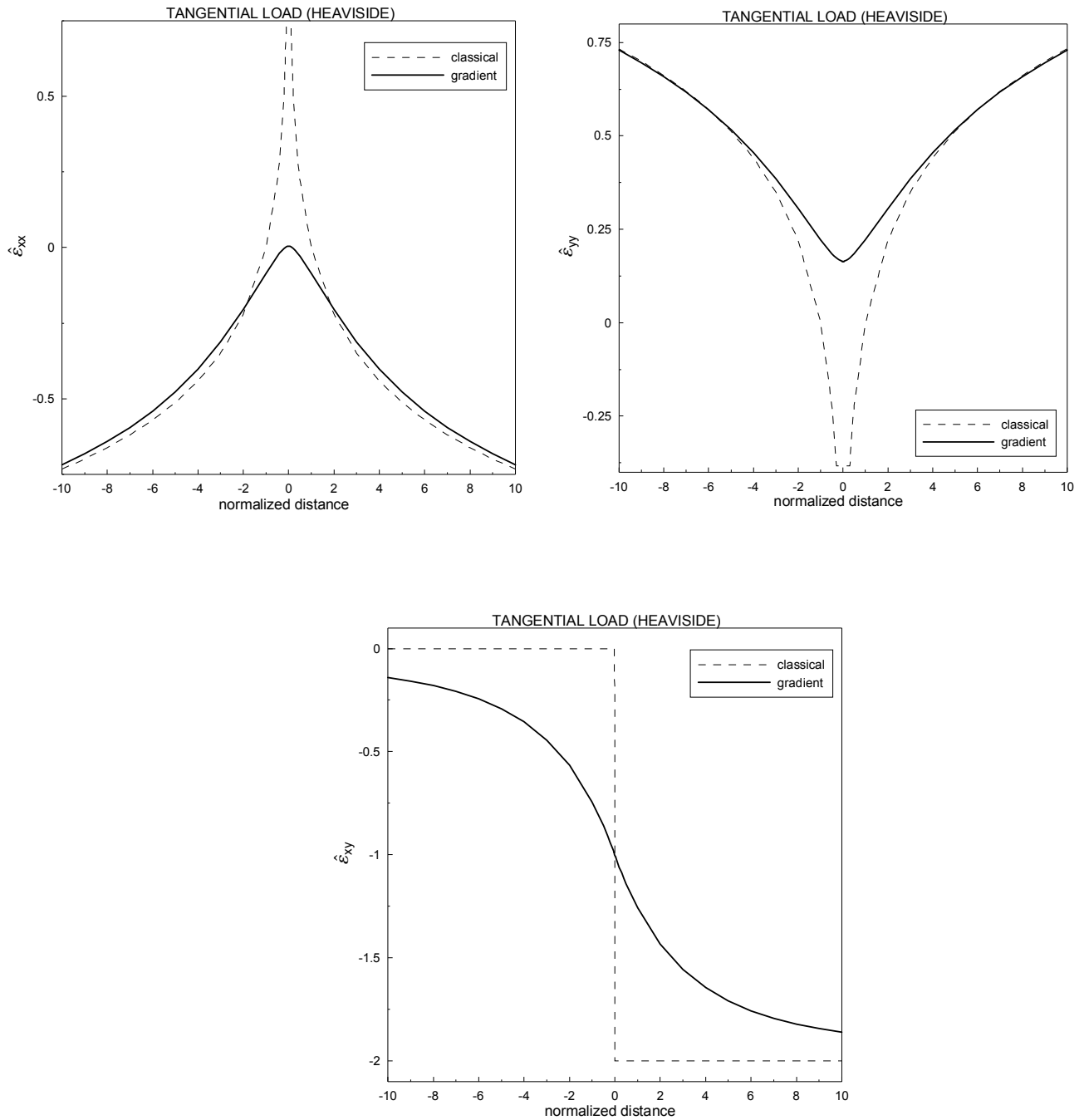
Από τα σχεδιαγράμματα γίνεται φανερό ότι οι λύσεις της θεωρίας βαθμίδας τροπής είναι πιο ομαλές, επομένως και πιο φυσικές, σε σχέση με τις ασυνεχείς κλασσικές λύσεις. Συγκεκριμένα, στο εφαπτομενικό φορτίο η κάθετη μετατόπιση δεν παρουσιάζει τώρα αυτή τη γωνία που παρουσίαζε η κλασσική λύση. Στην περίπτωση των τροπών $\varepsilon_{xx}^{(P)}$ και $\varepsilon_{yy}^{(P)}$ η νέα λύση είναι

φραγμένη σε αντίθεση με την κλασσική που απειρίζεται.. Τέλος εξαλείφεται η ασυνέχεια που υπάρχει στην κλασσική λύση για την $\varepsilon_{xy}^{(P)}$. Τα διαγράμματα παραθέτονται στις επόμενες σελίδες.

1η Περίπτωση: $\nu = 0.25, d_0 = 1, d_1 = 1, d_2 = 1. (c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c)$

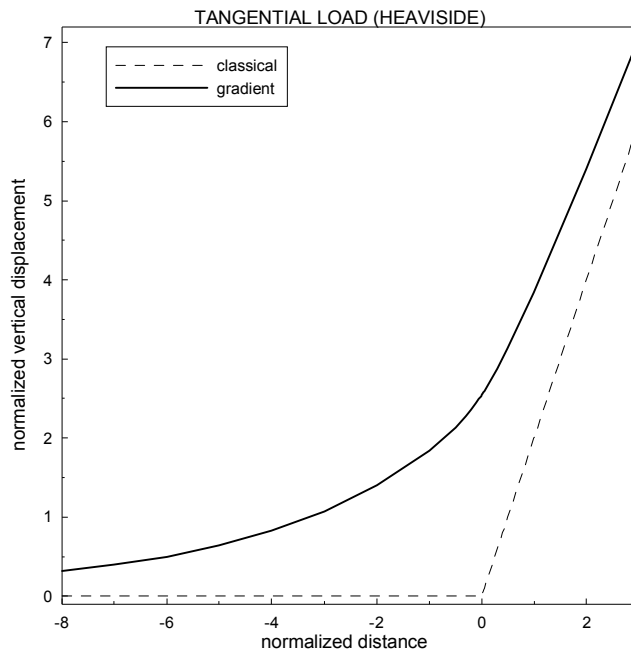
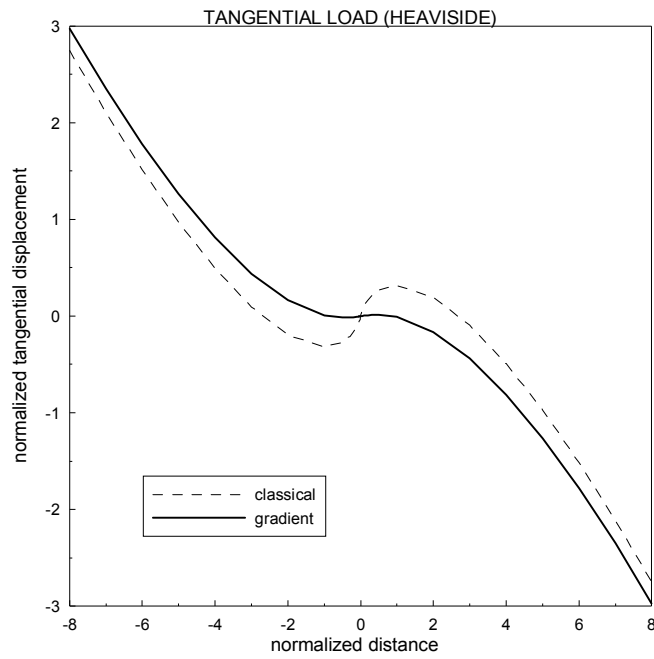


Σχήμα 3.9α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

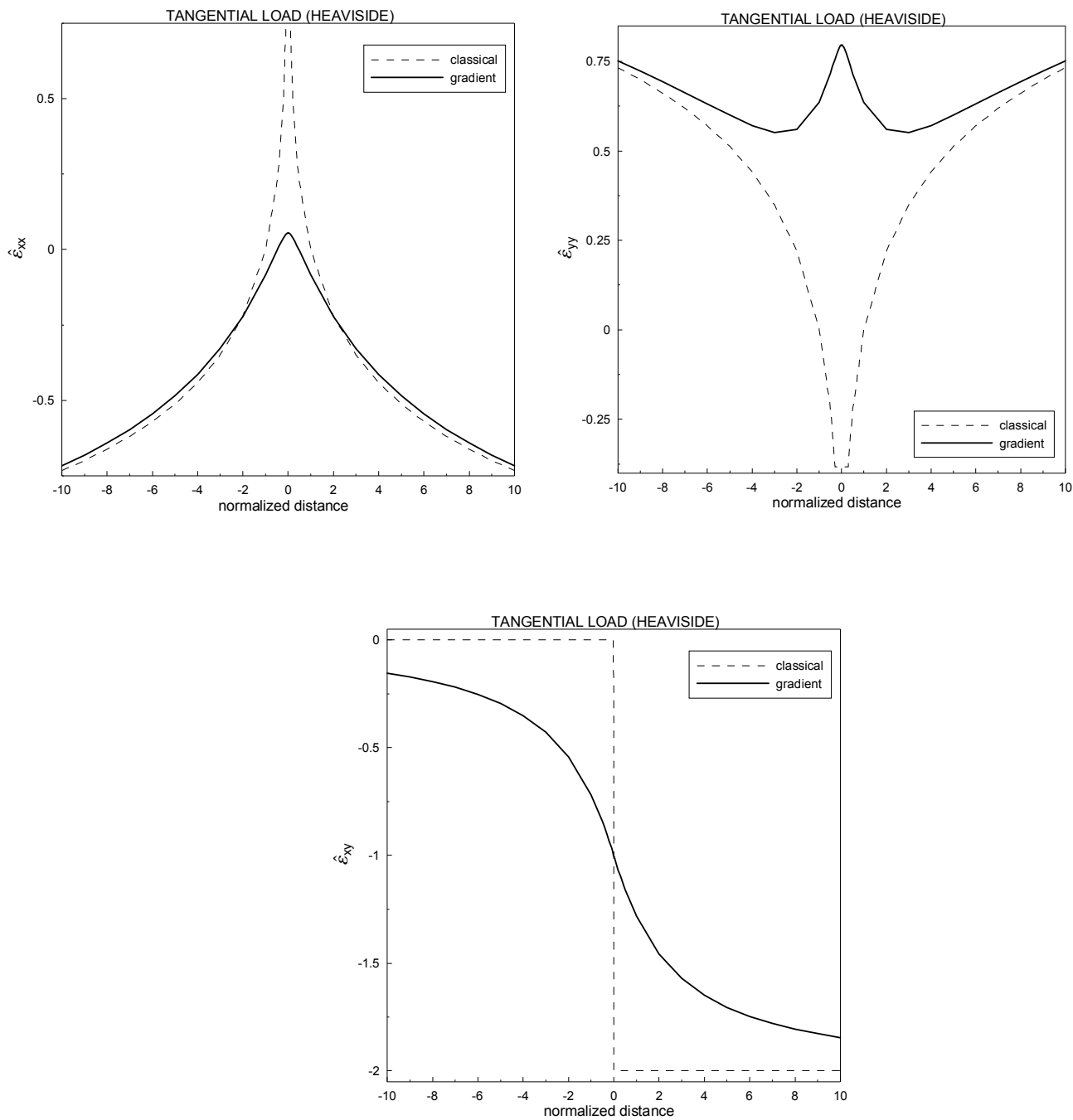


Σχήμα 3.9β: Κανονικοποιημένες τροπές λόγω ενός εφαπτομενικού κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

2η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = \frac{1}{2}$, $d_1 = \frac{1}{4}$, $d_2 = -\frac{3}{4}$.

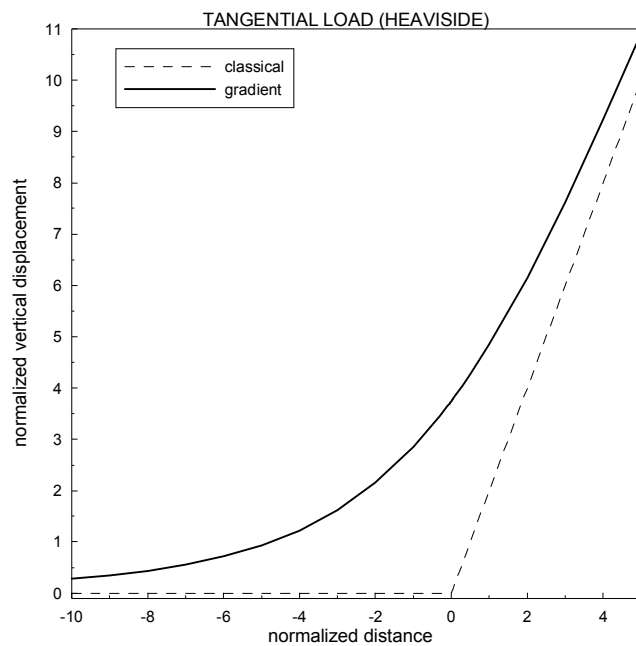
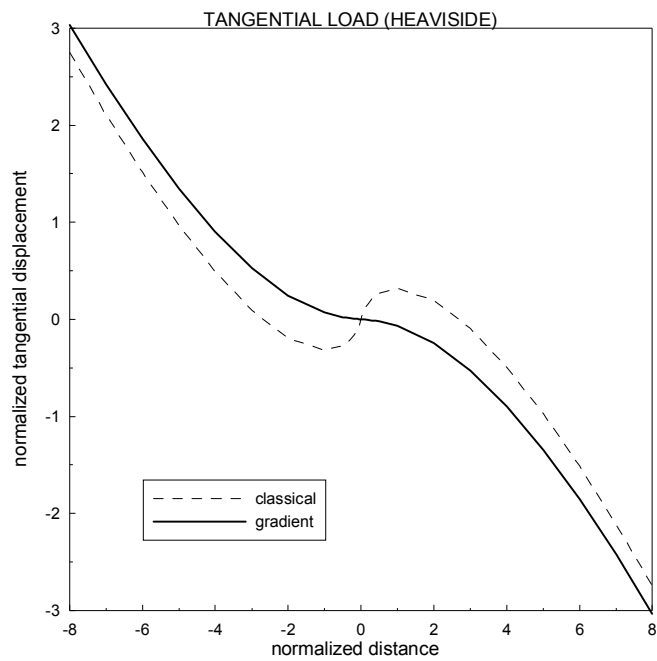


Σχήμα 3.10α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού κατανομμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

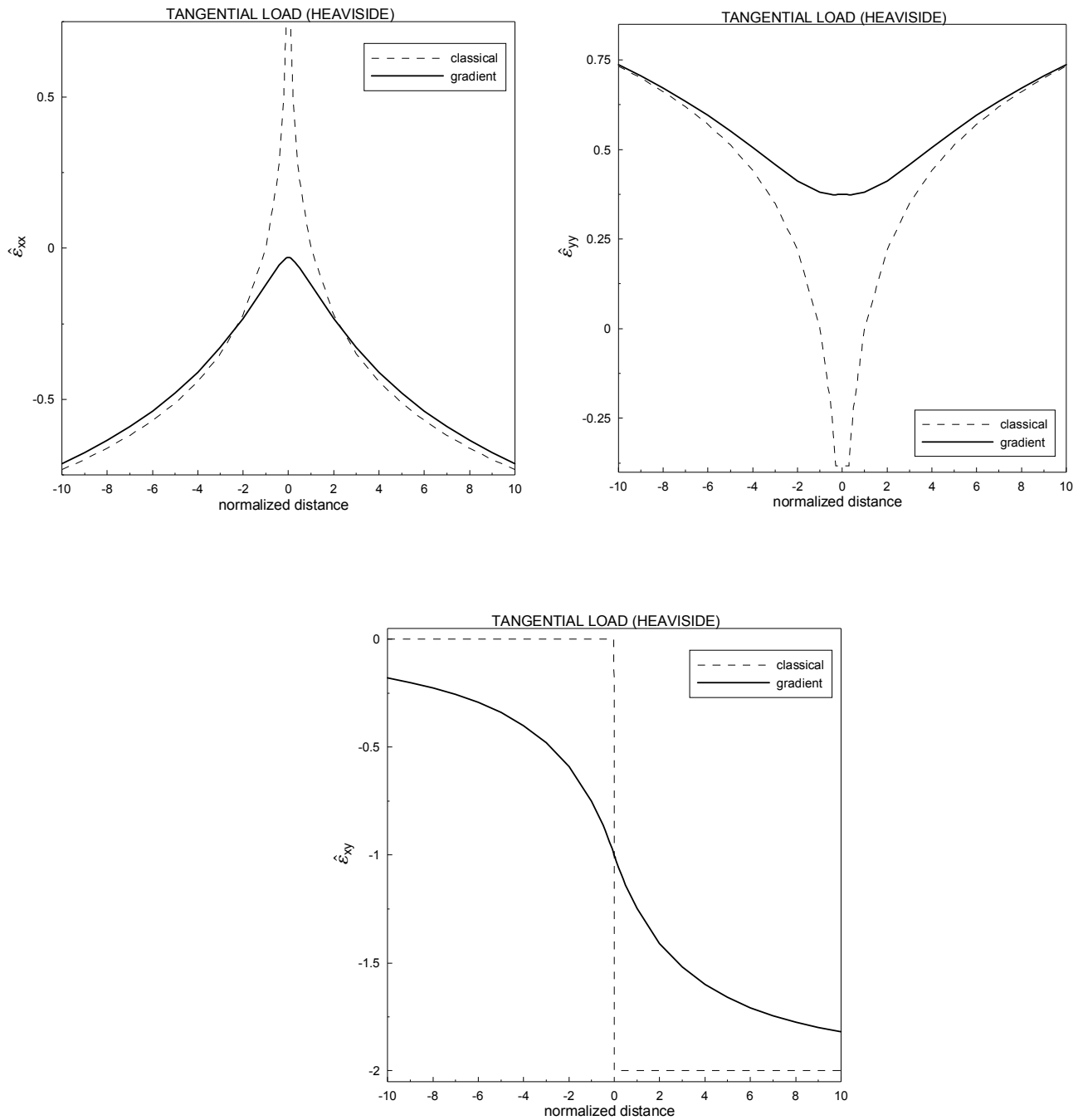


Σχήμα 3.10β: Κανονικοποιημένες τροπές λόγω ενός εφαπτομενικού κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

3η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = \frac{1}{2}$, $d_1 = \frac{1}{4}$, $d_2 = 0$.

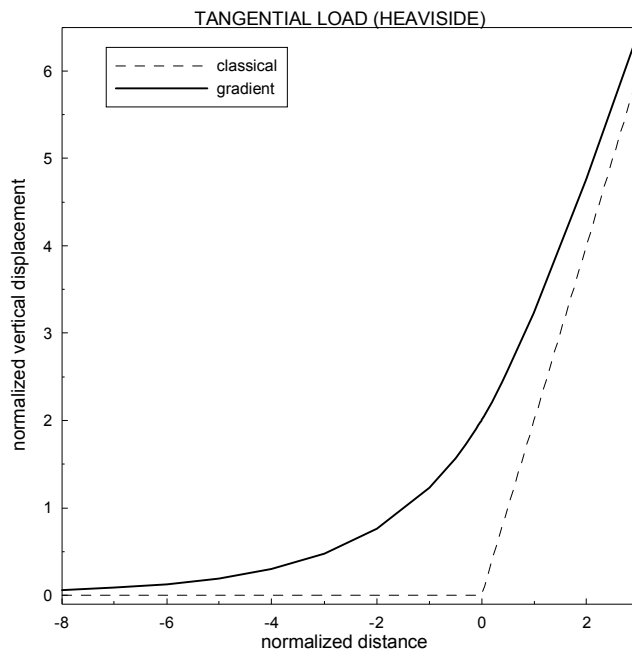
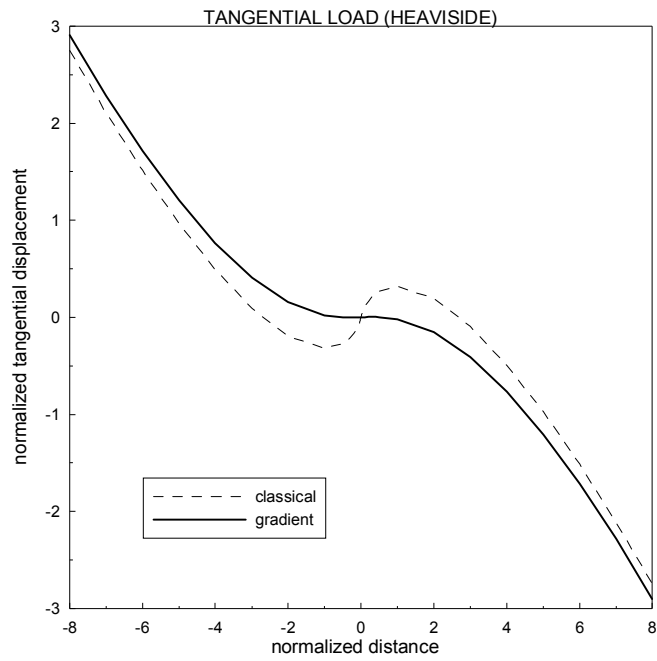


Σχήμα 3.11α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

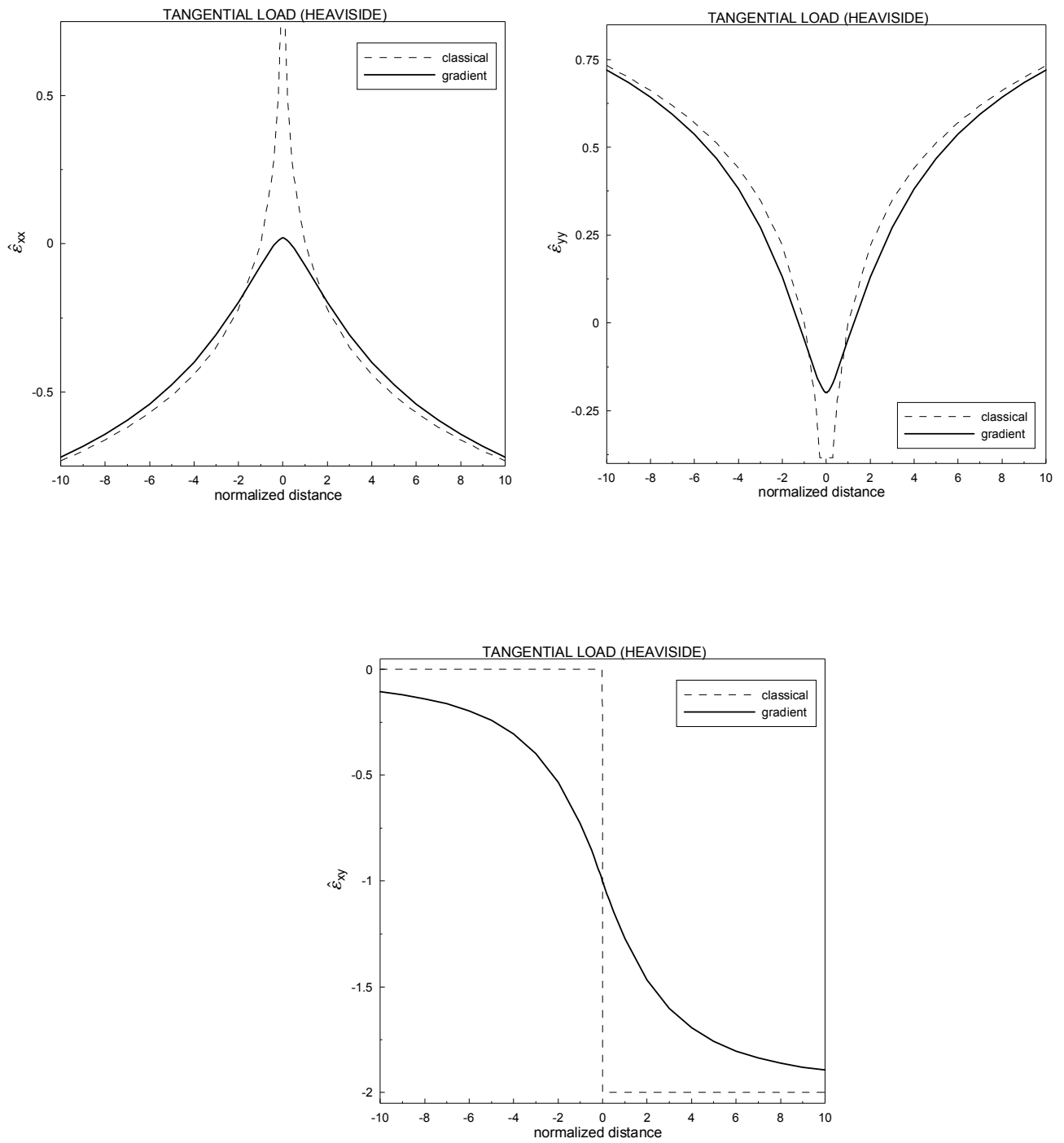


Σχήμα 3.11β: Κανονικοποιημένες τροπές λόγω ενός εφαπτομενικού κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

4η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = \frac{5}{3}$, $d_1 = \frac{25}{6}$, $d_2 = \frac{25}{3}$.

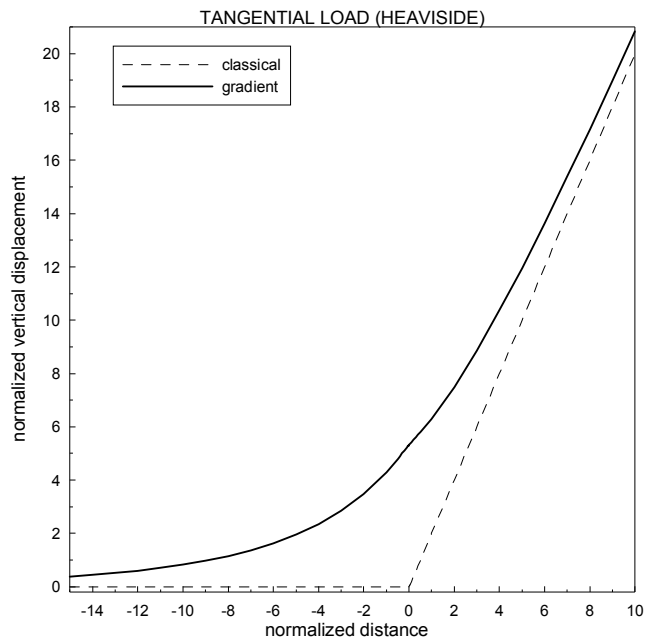
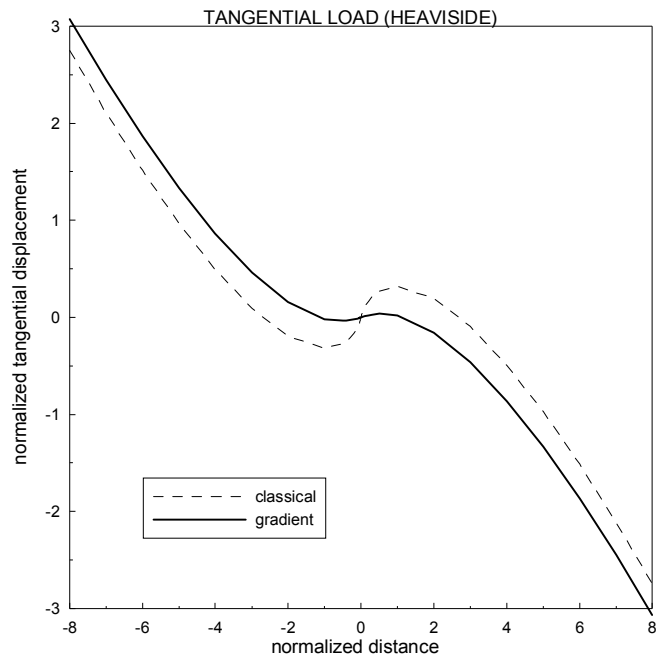


Σχήμα 3.12α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού καταναμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

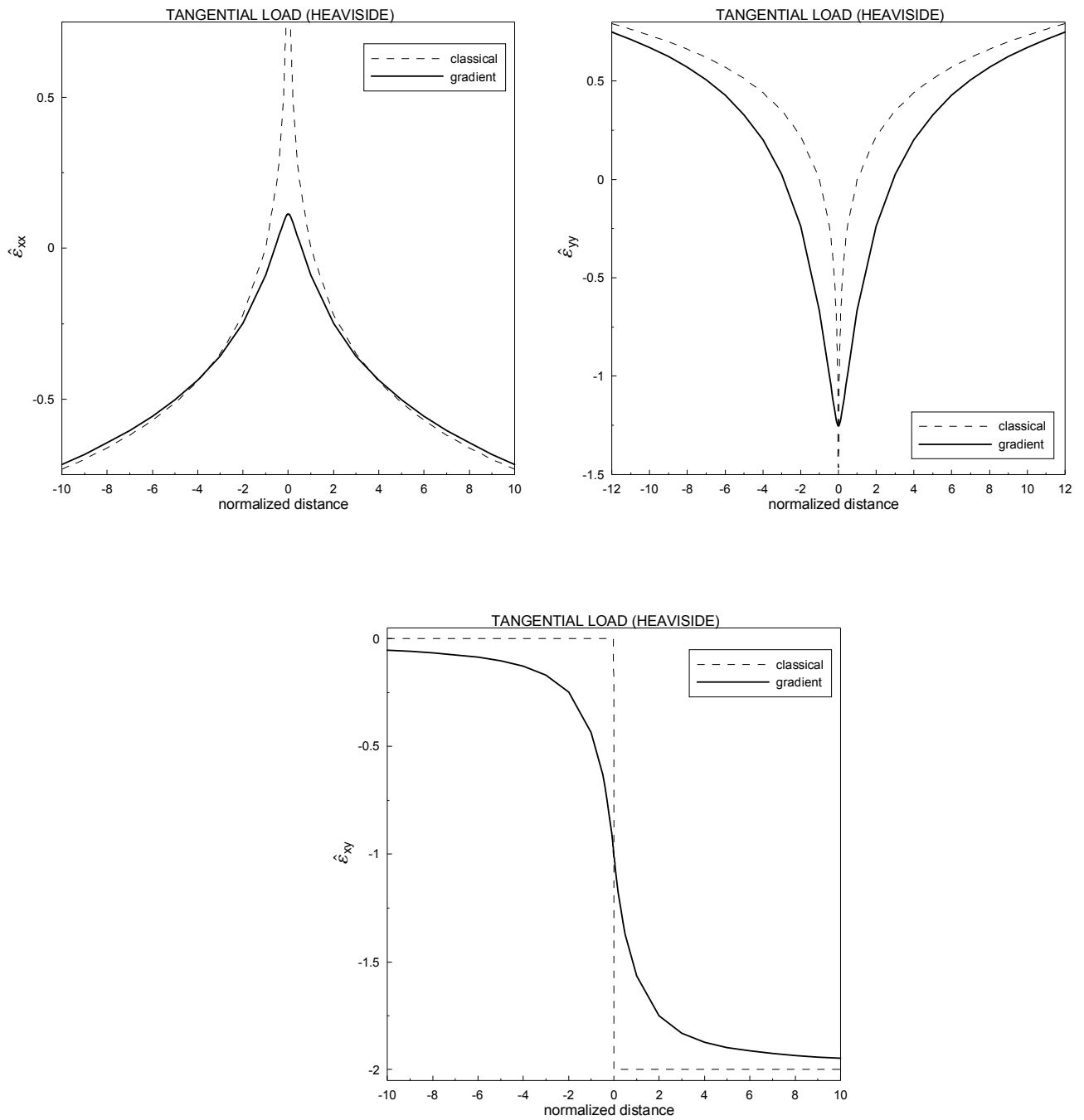


Σχήμα 3.12β: Κανονικοποιημένες τροπές λόγω ενός εφαπτομενικού κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

5η Περίπτωση: $\nu = 0.25$, $d_0 = 1$, $d_1 = 100$, $d_2 = 300$.



Σχήμα 3.13α: Κανονικοποιημένη εφαπτομενική και κάθετη επιφανειακή μετατόπιση (normalized tangential, vertical, displacement) λόγω ενός εφαπτομενικού κατανομμένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας



Σχήμα 3.13β: Κανονικοποιημένες τροπές λόγω ενός εραπτομενικού κατανεμημένου φορτίου στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας βαθμίδας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α

Στο παράρτημα αυτό εξάγουμε τις (1.13) οι οποίες είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες που απαιτούνται για να είναι θετικά ορισμένη η παραμορφωσιακή ενέργεια η οποία δίνεται από την τετραγωνική μορφή (1.10). Αυτή μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως

$$2W = X^T AX \quad (A1)$$

όπου X^T είναι ο ανάστροφος του πίνακα X και

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad (A2),(A3)$$

με

$$X_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}, \quad (A4)$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} \kappa_{111} \\ \kappa_{212} \\ \kappa_{313} \\ \kappa_{122} \\ \kappa_{133} \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} \kappa_{222} \\ \kappa_{112} \\ \kappa_{323} \\ \kappa_{211} \\ \kappa_{233} \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} \kappa_{333} \\ \kappa_{113} \\ \kappa_{223} \\ \kappa_{311} \\ \kappa_{322} \end{pmatrix}, \quad X_5 = \begin{pmatrix} \kappa_{312} \\ \kappa_{213} \\ \kappa_{123} \end{pmatrix}, \quad (A5\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (\text{A6})$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) & a_1+2a_3 & a_1+2a_3 & a_1+2a_2 & a_1+2a_2 \\ \frac{a_1}{2}+a_3 & a_3+2a_4+a_5 & a_3 & \frac{a_1}{2}+a_5 & \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_1}{2}+a_3 & a_3 & a_3+2a_4+a_5 & \frac{a_1}{2} & \frac{a_1}{2}+a_5 \\ a_1+2a_2 & a_1+2a_5 & a_1 & 2a_2+2a_4 & 2a_2 \\ a_1+2a_2 & a_1 & a_1+2a_5 & 2a_2 & 2a_2+2a_4 \end{pmatrix}, \quad (\text{A7})$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2a_4 & a_5 & a_5 \\ a_5 & 2a_4 & a_5 \\ a_5 & a_5 & 2a_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{A8})$$

Η τετραγωνική μορφή $2W = X^T A X$ είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες που αντιστοιχούν στους πίνακες A_1 , A_2 και A_3 είναι θετικές. Συνεπώς θα χειριστούμε ξεχωριστά τους πίνακες A_1 , A_2 και A_3 .

Οι ορίζουσες του πίνακα A_1 δίνουν:

$$\Delta_1 = \lambda + 2\mu > 0, \quad (\text{A9}\alpha)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda+2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \mu(\lambda + \mu) > 0, \quad (\text{A9}\beta)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow 4\mu^2(2\lambda+3\mu) > 0, \quad (\text{A9}\gamma)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow 4\mu^3(2\lambda+3\mu) = \mu \cdot \Delta_3 > 0 \quad (\text{A9}\delta)$$

Οι ορίζουσες ανωτέρας τάξης του πίνακα A_1 δεν προσφέρουν επιπρόσθετους περιορισμούς από τις παραπάνω τέσσερις ανισότητες. Συνδυάζοντας τώρα τις (A9) οι ανισότητες που προκύπτουν τελικά είναι οι κάτωθι

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0,$$

οι οποίες αποτελούν τις (1.13α) και (1.13β). Εν συνεχεία από τον πίνακα A_2 προκύπτουν οι παρακάτω ανισότητες από τις κύριες ελάχιστονες ορίζουσες:

$$\Delta_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > 0, \quad (\text{A10}\alpha)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) & a_1 + 2a_3 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 & a_3 + 2a_4 + a_5 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{a_1^2}{2} + 4a_4^2 + 2a_5^2 + 4a_1a_4 + 2a_1a_5 + 2a_2a_3 + 4a_2a_4 + 2a_2a_5 + 6a_3a_4 + 4a_3a_5 + 6a_4a_5 > 0, \quad (\text{A10}\beta)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) & a_1 + 2a_3 & a_1 + 2a_3 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 & a_3 + 2a_4 + a_5 & a_3 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 & a_3 & a_3 + 2a_4 + a_5 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$$

$$(2a_4 + a_5)(a_1^2 - 4a_4^2 - 2a_5^2 - 4a_1a_4 - 2a_1a_5 - 4a_2a_3 - 4a_2a_4 - 2a_2a_5 - 8a_3a_4 - 6a_3a_5 - 6a_4a_5) > 0 \quad (\text{A10}\gamma)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) & a_1 + 2a_3 & a_1 + 2a_3 & a_1 + 2a_2 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 & a_3 + 2a_4 + a_5 & a_3 & \frac{a_1}{2} + a_5 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 & a_3 & a_3 + 2a_4 + a_5 & \frac{a_1}{2} \\ a_1 + 2a_2 & a_1 + 2a_5 & a_1 & 2a_2 + 2a_4 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$$

$$(a_4 + a_5)(-4a_4^3 + a_5^3 - 4a_1a_4^2 + 2a_1a_5^2 - 8a_2a_4^2 - 8a_3a_4^2 + 2a_3a_5^2 + 3a_4a_1^2 + a_4a_5^2 + a_5a_1^2 - 4a_5a_4^2 + 2a_1a_4a_5 - 12a_2a_3a_4 - 4a_2a_3a_5 - 4a_2a_4a_5 - 2a_3a_4a_5) > 0, \quad (\text{A10}\delta)$$

$$\Delta_5 = \det(A_2) > 0 \Rightarrow (2a_4 - a_5)(a_4 + a_5)^2(4a_1a_4 - 6a_1a_5 + 20a_2a_3 + 12a_2a_4 + 2a_2a_5 + 8a_3a_4 - 2a_3a_5 + 2a_4a_5 - 5a_1^2 + 4a_4^2 - 2a_5^2) > 0. \quad (\text{A10}\epsilon)$$

Όμοια εργαζόμενοι και για τον πίνακα A_3 λαμβάνουμε τα ακόλουθα

$$\Delta_1 = a_4 > 0, \quad (\text{A11}\alpha)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2a_4 & a_5 \\ a_5 & 2a_4 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow (2a_4 - a_5)(2a_4 + a_5) > 0, \quad (\text{A11}\beta)$$

$$\Delta_3 = \det(A_3) > 0 \Rightarrow (2a_4 - a_5)^2 (a_4 + a_5) > 0. \quad (\text{A11}\gamma)$$

Από τις (A11) προκύπτουν αμέσως οι συνθήκες (1.13γ) και (1.13δ). Λόγω αυτού του γεγονότος η (A10ε) δίνει κατ' ευθείαν την σχέση (1.13η). Οι εναπομείναντες δύο σχέσεις (1.13ε) και (1.13ζ) προκύπτουν πιο δύσκολα και με αρκετή άλγεβρα κάνοντας χρήση των ανισοτήτων (A10α), (A10β), (A10γ), (A10δ) και (A10ε).

Παράρτημα Β

Η λύση του συστήματος (2.13) δίνεται εδώ. Οι συναρτήσεις (B_2, B_4, B_6, B_8) είναι συναρτήσεις του p και εξαρτώνται από τις υλικές παραμέτρους:

$$\begin{aligned}
 B_3^{(p)} = \frac{P}{K} & \left\{ -\frac{2\mu^2 c_1 c_2 \beta \gamma_2 (\lambda + 2\mu) (2c_3 p^2 - 1)^2 [(\lambda + 2\mu) + \lambda(c_1 - c_4) p^2]}{p^2} + \right. \\
 & + \frac{\beta}{2\gamma_1} \mu (\lambda + 2\mu) [2\mu c_3 + \lambda(c_1 - c_4) - 2\mu c_1 (2c_3 p^2 - 1)] \times \\
 & \times [-2\mu(c_1 + c_3) - \lambda(c_1 - c_4) + 2p^2 (2\mu c_1 c_3 - \lambda c_2 (c_1 - c_4)) + 4\lambda c_2 c_3 p^4 (c_1 - c_4)] + \\
 & \left. + c_1 \mu^2 p^2 [\lambda c_4 + (\lambda + 2\mu)(-c_1 + 2c_2 + 2c_3)] [2c_3 (\lambda + \mu) + ((\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4) (2c_3 p^2 - 1)] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{B1}$$

$$\begin{aligned}
 B_4^{(p)} = \frac{(\lambda + \mu)P}{K} & \left\{ 2c_1 c_3 \mu^2 p^2 \beta [2c_3 (\lambda + \mu) + ((\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4) (2c_3 p^2 - 1)] + \right. \\
 & + 2c_1 c_2 \mu^2 \gamma_2 (\lambda + 2\mu) (2c_3 p^2 - 1)^2 - \\
 & \left. - \frac{\mu p^2 [c_1 (\lambda + 2\mu) - \lambda c_4 - 2\mu c_3 (2c_1 p^2 - 1)] [(c_1 (\lambda + 2\mu) - \lambda c_4) (2c_3 p^2 - 1) - 2\mu c_3]}{2\gamma_1} \right\},
 \end{aligned}
 \tag{B2}$$

$$B_6^{(P)} = -\frac{c_1 P}{K} \left\{ -2\mu^2 \lambda c_2 \beta \gamma_2 (\lambda + 2\mu)(c_1 - c_4)(2c_3 p^2 - 1)^2 - \mu^2 p^2 \left[8\lambda c_2 c_3^2 (\lambda + 2\mu)(c_1 - c_4) p^4 - \right. \right. \\ \left. \left. -2c_3 p^2 [(\lambda + 2\mu)[-(\lambda + 2\mu)c_1^2 + 2\lambda c_1 c_4 + 4(\lambda + \mu)c_1 c_2 + 2\lambda c_3 (c_1 - c_4) - 4\lambda c_2 c_4] - \lambda^2 c_4^2 \right] - \right. \\ \left. - [(\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4] [c_1 (\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3 - \lambda c_4] \right\}, \quad (B3)$$

$$B_8^{(P)} = -\frac{c_2 \mu p^2 P}{K} \left\{ 2\mu c_1 (\lambda + 2\mu)(2c_3 p^2 - 1) [2\lambda c_3 p^2 (c_1 - c_4) + (\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4] + \right. \\ \left. + \frac{\lambda \beta (\lambda + 2\mu)(c_1 - c_4)(1 - 2c_3 p^2) [c_1 (\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3 (1 - 2c_1 p^2) - \lambda c_4]}{\gamma_1} \right\}, \quad (B4)$$

$$B_3^{(T)} = \frac{\mu T}{2p\gamma_1 K} \left\{ 4\mu c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2 (2c_3 p^2 - 1) [(\lambda + 2\mu) - 2\mu c_3 p^2] [p^2 ((\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4) - \mu] + \right. \\ \left. + 2\lambda c_2 \beta \gamma_2 p^2 (\lambda + 2\mu)(c_1 - c_4)(2c_3 p^2 - 1)(\lambda(c_1 - c_4) + 2\mu c_3) - \right. \\ \left. - p^2 [c_1 (\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3 (1 - 2p^2 c_2) - \lambda c_4] \left[-4\mu c_1 c_3 p^4 [(c_1 - 2c_2)(\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] + \right. \right. \\ \left. \left. + p^2 [c_1 [2\mu(c_1 - 2c_2)(\lambda + 2\mu) + c_3 (2\lambda^2 + 6\lambda\mu + 8\mu^2) - 2\lambda\mu c_4] - \right. \right. \\ \left. \left. - 4\mu c_2 c_3 (\lambda + 2\mu) - 2\lambda c_3 c_4 (\lambda + 3\mu) \right] - \mu c_1 (\lambda + 2\mu) - 2\mu^2 c_3 + \lambda\mu c_4 \right\}, \quad (B5)$$

$$\begin{aligned}
B_4^{(T)} = & -\frac{\mu T(\lambda + \mu)}{2p\gamma_1 K} \left\{ 4\lambda\mu c_2 c_3 \gamma_2 p^4 (c_1 - c_4)(2c_3 p^2 - 1) + 4\mu c_1 c_2 \beta \gamma_1 \gamma_2 (2c_3 p^2 - 1)(\lambda + 2\mu - 2\mu c_3 p^2) + \right. \\
& + \beta p^2 [c_1(\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3(1 - 2c_2 p^2) - \lambda c_4] \times \\
& \left. \times [c_1(\lambda + 2\mu)(2c_3 p^2 - 1) - 2c_3(\lambda c_4 p^2 + \mu) + \lambda c_4] \right\}, \tag{B6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_6^{(T)} = & \frac{\mu^2 c_1 p T}{K} \left\{ 2c_2 \gamma_2 (2c_3 p^2 - 1) \times \right. \\
& \times [\lambda(c_1 - c_4)(\lambda + 2\mu) + 2c_3 \mu p^2 (\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) + 2c_3 \mu (\lambda + \mu - \lambda c_4 p^2)] + \\
& + \beta [c_1(\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3(1 - 2c_2 p^2) - \lambda c_4] \times \\
& \left. \times [[(c_1 - 2c_2)(\lambda + 2\mu) - \lambda c_4](2c_3 p^2 - 1) + 2c_3(\lambda + \mu)] \right\}, \tag{B7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_8^{(T)} = & \frac{\mu c_2 p T}{\gamma_1 K} \left\{ -2\mu c_1 \beta \gamma_1 (\lambda + 2\mu - 2\mu c_3 p^2) [[(c_1 - 2c_2)(\lambda + 2\mu) - \lambda c_4](2c_3 p^2 - 1) + 2c_3(\lambda + \mu)] + \right. \\
& + p^2 \left[8\mu^2 c_1 c_3^2 p^4 [(\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4] + 2c_3 p^2 \times \right. \\
& \times [c_1(\lambda + 2\mu) [c_1(\lambda^2 + 2\lambda\mu - 2\mu^2) + 4\mu^2 c_2] + 2\lambda\mu^2 c_3 (c_1 + c_4) - \\
& - 2\lambda c_1 c_4 (\lambda^2 + 3\lambda\mu + \mu^2) + (4\mu^2 c_2 c_3 + \lambda^2 c_4^2)(\lambda + 2\mu)] - \\
& \left. \left. - [c_1(\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3 - \lambda c_4] [\lambda(\lambda + 2\mu)(c_1 - c_4) + 2\mu c_3(\lambda + \mu)] \right] \right\}, \tag{B8}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
K \equiv K(p) = & \left\{ 2\mu^3 c_1 p^2 \beta \left[2c_3 (\lambda + \mu) + [(\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4] (2c_3 p^2 - 1) \right]^2 + \right. \\
& + \frac{2\lambda^2 \mu^2 c_2 p^2 \beta \gamma_2 (\lambda + 2\mu) (c_1 - c_4)^2 (2c_3 p^2 - 1)^2}{\gamma_1} + \\
& + 4\mu^3 c_1 c_2 \gamma_2 (\lambda + 2\mu) (2c_3 p^2 - 1)^2 \left[2c_1 p^2 (\lambda + \mu) - 2c_2 p^2 (\lambda + 2\mu) - 2\lambda c_4 p^2 + (\lambda + \mu) \right] + \\
& + \frac{\mu^2 p^2}{\gamma_1} \left[(2c_3 p^2 - 1) [c_1 (\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] - 2\mu c_3 \right] \cdot \\
& \quad \cdot \left[4c_3 p^4 [(\lambda + 2\mu) [\mu c_1^2 + c_1 c_2 (\lambda - 2\mu) - \lambda c_2 c_4] - \lambda \mu c_1 c_4] + \right. \\
& + p^2 \left[(\lambda + 2\mu) (4\mu c_2 c_3 - 2\mu c_1^2 - 2c_1 c_2 (\lambda - 2\mu) + 2\lambda c_2 c_4) - \right. \\
& \quad \left. \left. - 2\lambda (c_1 c_3 (\lambda + \mu) - c_3 c_4 (\lambda + 3\mu) - \mu c_1 c_4) \right] + \right. \\
& \left. + (\lambda + \mu) (-c_1 (\lambda + 2\mu) - 2\mu c_3 + \lambda c_4) \right] \left. \right\}, \tag{B9}
\end{aligned}$$

και οι εκθέτες P και T στις παρενθέσεις στις παραπάνω συναρτήσεις υποδηλώνουν ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση παράγεται από το συγκεντρωμένο φορτίο P ή T , αντίστοιχα.

Παράρτημα Γ

Παραθέτουμε στο παράρτημα αυτό τις συναρτήσεις $N_x^{(P)}(\xi)$, $N_y^{(P)}(\xi)$, $N_x^{(S)}(\xi)$, $N_y^{(S)}(\xi)$ και $\Lambda(\xi)$ που εμπλέκονται στις σχέσεις (2.27-2.30).

$$\begin{aligned}
 N_x^{(P)}(\xi) = & \mu c_1 \gamma_1 \xi (\lambda + 2\mu + 2\mu c_3 \xi^2) [(\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4] \cdot \\
 & \cdot [(2c_3 \xi^2 + 1)[(\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4] - 2c_3(\lambda + \mu)] + \\
 & + 4\mu c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2 (\lambda + 2\mu) (2c_3 \xi^2 + 1) (\lambda + 2\mu + 2\mu c_3 \xi^2) [c_1(\lambda + \mu) - c_2(\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] + \\
 & + \lambda c_2 \gamma_2 \xi (\lambda + 2\mu) (c_1 - c_4) (2c_3 \xi^2 + 1) \cdot \\
 & \cdot [\lambda c_1 (2\mu c_3 \xi^2 + \lambda + 2\mu) - 2\mu c_3 (\lambda c_4 \xi^2 - \lambda - \mu) - \lambda c_4 (\lambda + 2\mu)] - \\
 & - \xi^2 \left\{ 4\mu c_3^2 \xi^4 [c_1(\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] [(\lambda + 2\mu)(\mu c_1^2 + c_1 c_2 (\lambda - 2\mu) - \lambda c_2 c_4) - \lambda \mu c_1 c_4] + \right. \\
 & + 2c_3 \xi^2 \left\{ \mu c_1^3 (\lambda + 3\mu) (\lambda + 2\mu)^2 + c_1^2 (\lambda + 2\mu) \cdot \right. \\
 & \cdot [c_2 (\lambda + 3\mu) (\lambda^2 - 4\mu^2) + c_3 \mu (\lambda^2 + 3\lambda \mu + 4\mu^2) - 2\lambda \mu c_4 (\lambda + 3\mu)] + \\
 & \left. + c_1 \left[2c_2 (\lambda + 2\mu) [\mu c_3 (\lambda^2 + \lambda \mu - 4\mu^2) - 2\lambda^2 c_4 (\lambda + 3\mu)] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2\lambda \mu c_3 c_4 (\lambda^2 + 4\lambda \mu + 5\mu^2) + \lambda^2 \mu c_4^2 (\lambda + 3\mu) \right] + \right. \\
 & \left. + c_2 c_4 (\lambda + 2\mu) [-2\lambda \mu c_3 (\lambda + \mu) + \lambda^2 c_4 (\lambda + 3\mu)] + \lambda^2 \mu c_3 c_4^2 (\lambda + 3\mu) \right\} + \\
 & \left. + [c_1 (\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3 - \lambda c_4] \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \left[\mu c_1^2 (\lambda + 2\mu)^2 + c_1 (\lambda + 2\mu) [c_2 (\lambda^2 - 4\mu^2) + c_3 (\lambda + \mu)^2 - \lambda \mu c_4] + \right. \right. \\
 & \left. \left. - c_2 (\lambda + 2\mu) [2\mu^2 c_3 + \lambda c_4 (\lambda + 2\mu)] - \lambda c_3 c_4 (\lambda^2 + 4\lambda \mu + 5\mu^2) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

(Γ1)

$$\begin{aligned}
N_y^{(P)} = & \mu c_1 \gamma_1 \xi \left\{ \xi^4 \left[4c_1^2 c_3^2 (\lambda + 2\mu)^2 - 8c_1 c_3^2 (\lambda + 2\mu) [2c_2 (\lambda + 2\mu) + \lambda c_4] + \right. \right. \\
& \left. \left. + 16c_2^2 c_3^2 (\lambda + 2\mu)^2 + 16c_2 c_3^2 c_4 \lambda (\lambda + 2\mu) + 4\lambda^2 c_3^2 c_4^2 \right] + \right. \\
& \left. + \xi^2 \left[4c_1^2 c_3 (\lambda + 2\mu)^2 - 8c_1 c_3 [2c_2 (\lambda + 2\mu)^2 + c_3 (\lambda + \mu)^2 + c_4 \lambda (\lambda + 2\mu)] + \right. \right. \\
& \left. \left. + 16c_2^2 c_3 (\lambda + 2\mu)^2 + 8c_2 c_3 (\lambda + 2\mu) [c_3 (\lambda + \mu) + 2\lambda c_4] + 8c_3^2 c_4 \lambda (\lambda + \mu) + 4\lambda^2 c_3 c_4^2 \right] + \right. \\
& \left. + c_1^2 (\lambda + 2\mu)^2 - c_1 (\lambda + 2\mu) [4c_2 (\lambda + 2\mu) + 2\lambda c_4] + 4c_2^2 (\lambda + 2\mu)^2 + 4c_2 c_4 \lambda (\lambda + 2\mu) + \lambda^2 c_4^2 \right\} + \\
& + 4\mu c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2 (\lambda + 2\mu) (2c_3 \xi^2 + 1)^2 [c_1 (\lambda + \mu) - c_2 (\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] + \\
& + \lambda^2 c_2 \gamma_2 \xi (\lambda + 2\mu) (c_1 - c_4)^2 (2c_3 \xi^2 + 1)^2 - \\
& - \xi^2 \left\{ 4c_3^2 \xi^4 [c_1 (\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] [c_1^2 \mu (\lambda + 2\mu) + c_1 [c_2 (\lambda^2 - 4\mu^2) - \lambda \mu c_4] - c_2 c_4 \lambda (\lambda + 2\mu)] + \right. \\
& + 2c_3 \xi^2 \left\{ 2c_1^3 \mu (\lambda + 2\mu)^2 + \right. \\
& + c_1^2 [2c_2 (\lambda - 2\mu) (\lambda + 2\mu)^2 + c_3 (\lambda^3 + 3\lambda^2 \mu + 8\lambda \mu^2 + 8\mu^3) - 4c_4 \lambda \mu (\lambda + 2\mu)] + \\
& + c_1 [-8c_2 c_3 \mu^2 (\lambda + 2\mu) - 4c_2 c_4 \lambda^2 (\lambda + 2\mu) - 2c_3 c_4 \lambda (\lambda^2 + 3\lambda \mu + 4\mu^2) + 2\lambda^2 \mu c_4^2] + \\
& \left. \left. + 2c_2 c_4^2 \lambda^2 (\lambda + 2\mu) + c_3 c_4^2 \lambda^2 (\lambda + 3\mu) \right\} + \right. \\
& \left. + [c_1 (\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3 - \lambda c_4] \cdot \right. \\
& \left. \left. \left[\begin{array}{l} c_1^2 \mu (\lambda + 2\mu) + c_1 [c_2 (\lambda^2 - 4\mu^2) + 2c_3 \mu (\lambda + \mu) - \lambda \mu c_4] \\ -c_2 (\lambda + 2\mu) (2\mu c_3 + \lambda c_4) - 2\lambda \mu c_3 c_4 \end{array} \right] \right\}, \quad (\Gamma 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_x^{(S)} = & \mu c_1 \gamma_1 \xi (\lambda + 2\mu) \left[(2c_3 \xi^2 + 1) [(\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4] - 2c_3 (\lambda + \mu) \right]^2 + \\
& + \xi c_2 \gamma_2 \left\{ 4\lambda^2 c_3^2 \xi^4 (c_1 - c_4)^2 (\lambda + 2\mu)^2 + \right. \\
& \left. + 4c_3 \xi^2 \left[\lambda^2 c_1^2 (\lambda + 2\mu)^2 - 2c_1 [c_3 \mu^3 (\lambda + \mu) + c_4 \lambda^2 (\lambda + 2\mu)^2] + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2c_2 c_3 \mu^2 (\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu) + \lambda^2 c_4^2 (\lambda + 2\mu)^2 \right] + \right. \\
& \left. + [\lambda (c_1 - c_4) (\lambda + 2\mu) + 2c_3 \mu (\lambda + \mu)]^2 \right\} + \\
& + 4\mu c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2 \left\{ 4c_3^2 \xi^4 (\lambda + 2\mu)^2 [c_1 (\lambda + \mu) - c_2 (\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] + \right. \\
& + 2c_3 \xi^2 [2(\lambda + 2\mu)^2 [c_1 (\lambda + \mu) - c_2 (\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] - c_3 (\lambda + 3\mu) (\lambda + \mu)^2] + \\
& \left. + (\lambda + 2\mu) [(\lambda + 2\mu) [c_1 (\lambda + \mu) - c_2 (\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] - 2c_3 (\lambda + \mu)^2] \right\} - \\
& - \xi^2 (\lambda + 2\mu) \left\{ 4c_3^2 \xi^4 [(\lambda + 2\mu) c_1 - \lambda c_4] \left[\begin{array}{l} c_1^2 \mu (\lambda + 2\mu) + c_1 [c_2 (\lambda^2 - 4\mu^2) - \lambda \mu c_4] \\ - c_2 c_4 \lambda (\lambda + 2\mu) \end{array} \right] + \right. \\
& + 2c_3 \xi^2 \left\{ 2\mu c_1^3 (\lambda + 2\mu)^2 + \right. \\
& + c_1^2 (\lambda + 2\mu) [2c_2 (\lambda^2 - 4\mu^2) + c_3 (\lambda^2 + \lambda \mu + 2\mu^2) - 4\lambda \mu c_4] + \\
& + c_1 \left[\begin{array}{l} -8c_2 c_3 \mu^2 (\lambda + 2\mu) - 4c_2 c_4 \lambda^2 (\lambda + 2\mu) - \\ - 2c_3 c_4 \lambda (\lambda^2 + 3\lambda \mu + 4\mu^2) + 2\mu \lambda^2 c_4^2 \end{array} \right] + \\
& \left. + 4c_2^2 c_3 \mu^2 (\lambda + \mu) + 2c_2 c_4^2 \lambda^2 (\lambda + 2\mu) + \lambda^2 c_3 c_4^2 (\lambda + 3\mu) \right\} + \\
& \left. + [c_1 (\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3 - \lambda c_4] \cdot \right. \\
& \left. \left. \left[\begin{array}{l} c_1^2 \mu (\lambda + 2\mu) + c_1 [c_2 (\lambda^2 - 4\mu^2) - 2c_3 \mu (\lambda + \mu) - \lambda \mu c_4] + \\ + c_2 [2\lambda \mu c_3 - c_4 \lambda (\lambda + 2\mu)] - 2\lambda \mu c_3 c_4 \end{array} \right] \right\} \right. \\
\end{aligned} \tag{G3}$$

$$\begin{aligned}
N_y^{(S)} = & \mu c_1 \gamma_1 \xi \left[(\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4 \right] \left[(\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3 \xi^2 \right] \cdot \\
& \cdot \left[(2c_3 \xi^2 + 1) \left[(\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4 \right] - 2c_3(\lambda + \mu) \right] + \\
& + \lambda c_2 \gamma_2 \xi (\lambda + 2\mu)(c_1 - c_4)(2c_3 \xi^2 + 1) \left[\left[2\lambda \mu c_3 \xi^2 + \lambda(\lambda + 2\mu) \right] (c_1 - c_4) + 2c_3 \mu(\lambda + \mu) \right] + \\
& + 4\mu c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2 (\lambda + 2\mu)(2c_3 \xi^2 + 1)(2\mu c_3 \xi^2 + \lambda + 2\mu) \left[c_1(\lambda + \mu) - c_2(\lambda + 2\mu) - \lambda c_4 \right] - \\
& - \xi^2 \left\{ 4\mu c_3^2 \xi^4 \left[(\lambda + 2\mu)c_1 - \lambda c_4 \right] \left[c_1^2 \mu(\lambda + 2\mu) + c_1 \left[c_2(\lambda^2 - 4\mu^2) - \lambda \mu c_4 \right] - \lambda c_2 c_4(\lambda + 2\mu) \right] + \right. \\
& + 2c_3 \xi^2 \left\{ \mu c_1^3 (\lambda + 3\mu)(\lambda + 2\mu)^2 + \right. \\
& + c_1^2 (\lambda + 2\mu) \left[(\lambda + 3\mu) \left[c_2(\lambda^2 - 4\mu^2) - 2\lambda \mu c_4 \right] + c_3 \mu(\lambda^2 + 3\mu\lambda + 4\mu^2) \right] + \\
& + c_1 \left[\begin{aligned} & 2c_2 c_3 \mu(\lambda + 2\mu)(\lambda^2 + \lambda\mu - 4\mu^2) - 2c_2 c_4 \lambda^2 (\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu) - \\ & - 2c_3 c_4 \lambda \mu(\lambda^2 + 4\lambda\mu + 5\mu^2) + c_4^2 \lambda^2 \mu(\lambda + 3\mu) \end{aligned} \right] + \\
& + c_2(\lambda + 2\mu) \left[-2c_3 c_4 \lambda \mu(\lambda + \mu) + c_4^2 \lambda^2 (\lambda + 3\mu) \right] + c_3 c_4^2 \lambda^2 \mu(\lambda + 3\mu) \left. \right\} + \\
& + \left[c_1(\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3 - \lambda c_4 \right] \cdot \\
& \cdot \left. \left[\begin{aligned} & c_1^2 \mu(\lambda + 2\mu)^2 + c_1(\lambda + 2\mu) \left[c_2(\lambda^2 - 4\mu^2) + c_3(\lambda + \mu)^2 - \lambda \mu c_4 \right] - \\ & - c_2(\lambda + 2\mu) \left[2\mu^2 c_3 + c_4 \lambda(\lambda + 2\mu) \right] - c_3 c_4 \lambda(\lambda^2 + 4\lambda\mu + 5\mu^2) \end{aligned} \right] \right\},
\end{aligned}
\tag{Г4}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda \equiv \Lambda(\xi) = & 2\mu c_1 \gamma_1 \xi^3 \left[(2c_3 \xi^2 + 1) [(\lambda + 2\mu)(c_1 - 2c_2) - \lambda c_4] - 2c_3(\lambda + \mu) \right]^2 + \\
& + 2\lambda^2 c_2 \gamma_2 \xi^3 (\lambda + 2\mu)(c_1 - c_4)^2 (2c_3 \xi^2 + 1)^2 + \\
& + 4\mu c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2 (\lambda + 2\mu)(2c_3 \xi^2 + 1)^2 \left[2\xi^2 [c_1(\lambda + \mu) - c_2(\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] - (\lambda + \mu) \right] - \\
& - \xi^2 \left[(2c_3 \xi^2 + 1) [c_1(\lambda + 2\mu) - \lambda c_4] + 2\mu c_3 \right]. \\
& \cdot \left\{ 4c_3 \xi^4 \left[c_1^2 \mu (\lambda + 2\mu) + c_1 [c_2(\lambda^2 - 4\mu^2) - \lambda \mu c_4] - c_2 c_4 \lambda (\lambda + 2\mu) \right] + \right. \\
& \left. + \xi^2 \left[\begin{array}{l} 2\mu c_1^2 (\lambda + 2\mu) + c_1 [2c_2(\lambda^2 - 4\mu^2) + 2c_3 \lambda (\lambda + \mu) - 2\lambda \mu c_4] - \\ - c_2 (\lambda + 2\mu) [4\mu c_3 + 2\lambda c_4] - 2\lambda c_3 c_4 (\lambda + 3\mu) \end{array} \right] - \right. \\
& \left. - (\lambda + \mu) [c_1(\lambda + 2\mu) + 2\mu c_3 - \lambda c_4] \right\}. \tag{G5}
\end{aligned}$$

Παράρτημα Δ

Στο παράρτημα αυτό παραθέτονται οι συναρτήσεις $Q_x^{(P)}$, $Q_y^{(P)}$, $Q_x^{(S)}$, $Q_y^{(S)}$, $Q_{\varepsilon_{yy}}^{(P)}$, $Q_{\varepsilon_{xy}}^{(P)}$, $Q_{\varepsilon_{yy}}^{(S)}$, $Q_{\varepsilon_{xy}}^{(S)}$ και L .

$$\begin{aligned}
 L = & -2d_1^{\frac{3}{4}}\zeta_1(2\nu-1)(\nu-1)\left(1+\rho^2d_1^{\frac{1}{2}}\right)\left(d_1^{\frac{1}{2}}+2d_0\rho^2\right)^2\left[(2d_1-4\nu d_2+4\nu-4)\rho^2-d_1^{\frac{1}{2}}\right]+ \\
 & +4\nu^2\rho^3\zeta_1\zeta_2(\nu-1)(d_1-d_2)^2d_1^{\frac{1}{2}}\left[4d_0\rho^2\left(d_0\rho^2+d_1^{\frac{1}{2}}\right)+d_1\right]+ \\
 & +2\rho^3\zeta_2(2\nu-1)\left\{4\rho^2d_0\left[d_1(n-1)+\nu d_2-2\nu+2\right]\left[\left(\rho^2d_0d_1^{\frac{3}{2}}+d_1^2\right)\left(d_1(n-1)+\nu d_2-2\nu+2\right)+d_1^2d_0\right]+ \right. \\
 & \left. +d_1^{\frac{5}{2}}\left[d_0+d_1(n-1)+\nu d_2-2\nu+2\right]^2\right\}- \\
 & -d_1^{\frac{1}{2}}\rho^2\left[2d_0\left[d_1(\nu-1)+\nu d_2\right]\rho^2+d_1^{\frac{1}{2}}\left[d_0(2\nu-1)+d_1(\nu-1)+\nu d_2\right]\right]\times \\
 & \times\left\{4d_0\left[d_1^2(2\nu-1)(\nu-1)+d_1\left[d_2\nu(2\nu-1)-2(3\nu-1)(\nu-1)\right]+2\nu d_2(\nu-1)\right]\rho^4+ \right. \\
 & +2d_1^{\frac{1}{2}}\left\{d_1^2(2\nu-1)(\nu-1)+d_1\left[d_2\nu(2\nu-1)-2(3\nu-1)(\nu-1)\right]+2d_2\nu(\nu-1)+ \right. \\
 & \left. +d_0\left[d_1\nu+d_2\nu(4\nu-3)-2(2\nu-1)(\nu-1)\right]\right\}\rho^2+ \\
 & \left. +d_1\left[d_0(2\nu-1)+d_1(\nu-1)+\nu d_2\right]\right\}, \tag{\Delta 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_x^{(P)} = & 4d_1^{\frac{3}{4}}\zeta_1(1-2\nu)(1-\nu)\left(1+\rho^2d_1^{\frac{1}{2}}\right)\left(d_1^{\frac{1}{2}}+2d_0\rho^2\right)(d_1-2\nu d_2+2\nu-2)\left[\rho^2d_0(2\nu-1)+d_1^{\frac{1}{2}}(\nu-1)\right]+ \\
& +2\nu\rho\zeta_1\zeta_2(1-\nu)(d_1-d_2)\left\{ 4\nu d_0^2d_1^{\frac{1}{2}}(d_1-d_2)(2\nu-1)\rho^4+2d_0d_1\left[(2\nu-1)d_0+\nu(4\nu-3)(d_1-d_2)\right]\rho^2+\right. \\
& \left. +d_1^{\frac{3}{2}}\left[d_0(2\nu-1)+2\nu(\nu-1)(d_1-d_2)\right]\right\}+ \\
& +2\rho\zeta_2(1-2\nu)\left\{ 2d_0^2d_1^{\frac{3}{2}}(2\nu-1)\left[(\nu-1)d_1+\nu d_2-2\nu+2\right]^2\rho^4+\right. \\
& \left. +d_0d_1^2\left[(\nu-1)d_1+\nu d_2-2\nu+2\right]\times\right. \\
& \left. \times\left[d_0(2\nu-1)+(d_1-2)(4\nu-3)(\nu-1)+\nu d_2(4\nu-3)\right]\rho^2+\right. \\
& \left. +d_1^{\frac{5}{2}}(\nu-1)\left[(\nu-1)d_1+\nu d_2-2\nu+2\right]\left[d_0+(\nu-1)d_1+\nu d_2-2\nu+2\right]\right\}+ \\
& +\rho^2d_1^{\frac{1}{4}}\left\{ 4d_0^2(2\nu-1)\left[(\nu-1)d_1+\nu d_2\right]\times\right. \\
& \left. \times\left[(2\nu-1)(\nu-1)d_1^2+\left[(2\nu-1)\nu d_2-2(3\nu-1)(\nu-1)\right]d_1+2\nu(\nu-1)d_2\right]\rho^4+\right. \\
& \left. +2d_0d_1^{\frac{1}{2}}\left\{ d_0(2\nu-1)\left[\begin{array}{l} d_1^2(\nu-1)(4\nu^2-5\nu+2)+ \\ +d_1\left[\nu d_2(8\nu^2-12\nu+5)-2(\nu-1)(8\nu^2-9\nu+2)\right]+ \\ +\nu d_2\left[\nu d_2(4\nu-3)-2\nu+2\right] \end{array} \right]+ \right. \\
& \left. +d_1^3(2\nu-1)(4\nu-3)(\nu-1)^2+\right. \\
& \left. +d_1^2(4\nu-3)(\nu-1)\left[2(2\nu-1)\nu d_2-2(3\nu-1)(\nu-1)\right]+ \right. \\
& \left. +d_1d_2\nu^2(4\nu-3)\left[(2\nu-1)d_2+4(1-\nu)\right]+2\nu^2(4\nu-3)(\nu-1)d_2^2\right\}\rho^2+ \\
& +d_1\left[d_0(2\nu-1)+d_1(\nu-1)+\nu d_2\right]\left\{ d_0\left[\left[d_1-2(2\nu-1)^2\right](\nu-1)+\nu(8\nu^2-12\nu+5)d_2\right]+ \right. \\
& \left. +2d_1^2(2\nu-1)(\nu-1)^2+d_1(\nu-1)\left[2(2\nu-1)\nu d_2-4(3\nu-1)(\nu-1)\right]+4\nu d_2(\nu-1)^2\right\}\left. \right\},
\end{aligned}$$

(Δ2)

$$\begin{aligned}
Q_y^{(P)} = & 2d_1^{\frac{3}{4}}\zeta_1(2v-1)(v-1)\left(1+\rho^2d_1^{\frac{1}{2}}\right)\left(d_1^{\frac{1}{2}}+2\rho^2d_0\right)^2(d_1-2vd_2+2v-2)+ \\
& +2v^2\rho\zeta_1\zeta_2(1-v)(d_1-d_2)^2\left(4d_0^2d_1^{\frac{1}{2}}\rho^4+4d_0d_1\rho^2+d_1^{\frac{3}{2}}\right)+\rho(2v-1)\zeta_2\times \\
& \times\left\{4d_0^2d_1^{\frac{3}{2}}\left[(v-1)d_1+vd_2-2v+2\right]^2\rho^4+\right. \\
& \left.+2d_0d_1^2\left\{d_0\left[-d_1+2v(d_2-1)+2\right]+2d_1^2(v-1)^2+\right.\right. \\
& \left.\left.+d_1(v-1)\left[4d_2v-8(v-1)\right]+2(vd_2-2v+2)^2\right\}\rho^2+\right. \\
& \left.+d_1^{\frac{3}{2}}\left[(v-1)d_1+vd_2-2v+2\right]^2\right\}+ \\
& +d_1^{\frac{1}{4}}\rho^2\left\{4d_0^2\left[(v-1)d_1+vd_2\right]\left[d_1^2(2v-1)(v-1)+\right.\right. \\
& \left.\left.+d_1\left[d_2v(2v-1)-2(3v-1)(v-1)\right]+2d_2v(v-1)\right]\rho^4+\right. \\
& \left.+2d_0d_1^{\frac{1}{2}}\left\{d_0\left[\left(4v^3-11v^2+8v-2\right)d_1^2+\left[2d_2v(4v^2-5v+2)-4(v-1)(2v-1)^2\right]d_1+\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.+v^2(4v-3)d_2^2\right]\right\}+ \\
& \left.+2(2v-1)(v-1)^2d_1^3+d_1^2(v-1)\left[4vd_2(2v-1)-4(3v-1)(v-1)\right]+ \right. \\
& \left.+2d_1v^2d_2\left[(2v-1)d_2-4v+4\right]+4v^2(v-1)d_2^2\right\}\rho^2+ \\
& +d_1\left[(2v-1)d_0+(v-1)d_1+vd_2\right]\times \\
& \times\left.\left.\left.\left[d_0(1-2v)(d_1-2vd_2+2v-2)+d_1^2(2v-1)(v-1)+\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.+d_1\left[d_2v(2v-1)-2(3v-1)(v-1)\right]+2d_2v(v-1)\right]\right\}, \tag{\Delta 3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_x^{(S)} = & 2d_1^{\frac{3}{4}}\zeta_1(2v-1)\left(1+\rho^2d_1^{\frac{1}{2}}\right)\left\{-8d_0^2(v-1)^2[-d_1+2vd_2-2(v-1)]\rho^4 + \right. \\
& +d_0d_1^{\frac{1}{2}}\left[(4v-3)d_0+8(v-1)^2[d_1-2vd_2+2(v-1)]\right]\rho^2 - \\
& \left.-2(v-1)d_1[-d_0+(v-1)[-d_1+2vd_2-2(v-1)]]\right\}- \\
& -\rho\zeta_1\zeta_2\left\{16d_1^{\frac{1}{2}}v^2d_0^2(v-1)^2(d_1-d_2)^2\rho^4 + \right. \\
& +2d_0d_1\left[d_0(2v-1)^2[d_1(2v-1)-2v+2]+8v^2(v-1)^2(d_1-d_2)^2\right]\rho^2 + \\
& \left.+d_1^{\frac{3}{2}}\left[d_0(2v-1)+2v(d_1-d_2)(v-1)\right]^2\right\}- \\
& -2\rho\zeta_2(2v-1)(v-1)\left[\left(2d_0d_1^{\frac{3}{4}}\rho^2+d_1^{\frac{5}{4}}\right)\left[(v-1)d_1+vd_2-2v+2\right]+d_0d_1^{\frac{5}{4}}\right]^2+2d_1^{\frac{1}{4}}\rho^2(v-1)\times \\
& \times\left\{4d_0^2\left[(v-1)d_1+vd_2\right]\left[(2v-1)(v-1)d_1^2+d_1\left[v(2v-1)d_2-2(3v-1)(v-1)\right]+2v(v-1)d_2\right]\rho^4 + \right. \\
& +2d_0d_1^{\frac{1}{2}}\left\{d_0\left[(v-1)(4v^2-3v+1)d_1^2+d_1\left[2v(4v^2-5v+2)d_2-4(v-1)(2v-1)^2\right]+ \right. \right. \\
& \left. \left.+v^2(4v-3)d_2^2-(2v-1)^2\right]\right\}+ \\
& +2d_1^3(2v-1)(v-1)^2+d_1^2(v-1)\left[4v(2v-1)d_2-4(3v-1)(v-1)\right]+ \\
& \left.+2v^2d_1d_2\left[(2v-1)d_2-4v+4\right]+4v^2(v-1)d_2^2\right\}\rho^2 + \\
& +d_1\left[d_0(2v-1)+d_1(v-1)+vd_2\right]\left[\left[d_0(2v-1)(d_1+2vd_2-2v)+(2v-1)(v-1)d_1^2 + \right. \right. \\
& \left. \left.+d_1\left[v(2v-1)d_2-2(3v-1)(v-1)\right]+2v(v-1)d_2\right]\right\}, \tag{\Delta 4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_y^{(S)} = & 4d_1^{\frac{3}{4}}\zeta_1(2v-1)(v-1)\left(1+\rho^2d_1^{\frac{1}{2}}\right)\left(d_1^{\frac{1}{2}}+2\rho^2d_0\right)(d_1-2vd_2+2v-2)\left[\rho^2(2v-1)d_0+(v-1)d_1^{\frac{1}{2}}\right]+ \\
& +2v\rho\zeta_1\zeta_2(1-v)(d_1-d_2)\left[4vd_0^2d_1^{\frac{1}{2}}(d_1-d_2)(2v-1)\rho^4+\right. \\
& \left.+2d_0d_1\left[d_0(2v-1)+v(d_1-d_2)(4v-3)\right]\rho^2+d_1^{\frac{3}{2}}\left[(2v-1)d_0+2v(d_1-d_2)(v-1)\right]\right]- \\
& -2\rho\zeta_2(2v-1)\left\{2d_0^2d_1^{\frac{3}{2}}(2v-1)\left[(v-1)d_1+vd_2-2v+2\right]^2\rho^4+d_0d_1^2\left[(v-1)d_1+vd_2-2v+2\right]\times\right. \\
& \times\left[(2v-1)d_0+(4v-3)\left[(v-1)d_1+vd_2-2v+2\right]\right]\rho^2+ \\
& \left.d_1^{\frac{5}{2}}(v-1)\left[(v-1)d_1+vd_2-2v+2\right]\left[d_0+(v-1)d_1+vd_2-2v+2\right]\right\}+ \\
& +\rho^2d_1^{\frac{1}{4}}\left\{4d_0^2(2v-1)\left[(v-1)d_1+vd_2\right]\times\right. \\
& \times\left[(2v-1)(v-1)d_1^2+d_1\left[d_2v(2v-1)-2(3v-1)(v-1)\right]+2v(v-1)d_2\right]\rho^4+ \\
& +2d_0d_1^{\frac{1}{2}}\left\{d_0\left[(2v-1)(v-1)(4v^2-5v+2)d_1^2+\right. \right. \\
& \left. +d_1(2v-1)\left[v(8v^2-12v+5)d_2-2(v-1)(8v^2-9v+2)\right]+\right. \\
& \left. +vd_2(2v-1)\left[v(4v-3)d_2-2v+2\right]\right\}+ \\
& +\left.(2v-1)(4v-3)(v-1)^2d_1^3+2d_1^2(v-1)(4v-3)\left[d_2v(2v-1)-(3v-1)(v-1)\right]+ \right. \\
& \left. +v^2d_1d_2(4v-3)\left[(2v-1)d_2-4v+4\right]+2v^2(4v-3)(v-1)d_2^2\right\}\rho^2+ \\
& +d_1\left[(2v-1)d_0+(v-1)d_1+vd_2\right]\left\{d_0\left[(v-1)d_1+v(8v^2-12v+5)d_2-2(v-1)(2v-1)^2\right]+ \right. \\
& \left. +2(2v-1)(v-1)^2d_1^2+2d_1(v-1)\left[d_2v(2v-1)-2(3v-1)(v-1)\right]+4v(v-1)^2d_2\right\}\left. \right\},
\end{aligned}$$

(Δ5)

$$\begin{aligned}
Q_{\varepsilon, \gamma}^{(P)} = & 4\rho\zeta_1(1-2\nu)(1-\nu)(d_1-2\nu d_2+2\nu-2) \left[2\rho^6 d_0^2 d_1^{\frac{3}{2}}(2\nu-1) + \rho^4 d_0 d_1 [d_0(4\nu-2) + d_1(4\nu-1)] + \right. \\
& \left. + \rho^2 d_1^{\frac{3}{2}} [d_0(4\nu-1) + \nu d_1] + \nu d_1^2 \right] + \\
& + 2d_1^{\frac{3}{2}} \nu \zeta_1 \zeta_2 (1-\nu)(d_1-d_2) (2\rho^2 d_0 + d_1^{\frac{1}{2}}) \left[2\rho^4 \nu d_0 (d_1-d_2)(2\nu-1) + \right. \\
& \left. + \rho^2 d_1^{\frac{1}{2}} [d_0(2\nu-1) + 2\nu^2(d_1-d_2)] + d_1(2\nu-1) \right] + \\
& + 2d_1^{\frac{7}{4}} \rho^2 \zeta_2 (1-2\nu) [(v-1)d_1 + \nu d_2 - 2\nu + 2] [\rho^2 d_0(2\nu-1) + \nu d_1^{\frac{1}{2}}] \times \\
& \times \left[(2\rho^2 d_0 + d_1^{\frac{1}{2}}) [(v-1)d_1 + \nu d_2 - 2\nu + 2] + d_0 d_1^{\frac{1}{2}} \right] + \\
& + \rho \left\{ 4\rho^6 d_0^2 d_1^{\frac{1}{2}} (2\nu-1) [(v-1)d_1 + \nu d_2] \left[(2\nu-1)(v-1)d_1^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + d_1 [v(2\nu-1)d_2 - 2(3\nu-1)(v-1)] + 2\nu(v-1)d_2 \right] + \right. \\
& + 2\rho^4 d_0 d_1 \left\{ d_0(2\nu-1) \left[(v-1)(4\nu^2 - 5\nu + 2)d_1^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + d_1 [v(8\nu^2 - 12\nu + 5)d_2 - 2(v-1)(8\nu^2 - 9\nu + 2)] + \right. \right. \\
& \left. \left. + d_2 \nu [d_2 \nu(4\nu-3) - 2\nu + 2] \right] + \right. \\
& \left. + (4\nu-1)(2\nu-1)(v-1)^2 d_1^3 + d_1^2 (v-1)(4\nu-1) [2(2\nu-1)\nu d_2 - 2(3\nu-1)(v-1)] + \right. \\
& \left. + d_2 \nu^2 (4\nu-1) [(2\nu-1)d_2 - 4\nu + 4] d_1 + 2\nu^2 (4\nu-1)(v-1)d_2^2 \right\} + \\
& + \rho^2 d_1^{\frac{3}{2}} \left\{ d_0^2 (2\nu-1) [(v-1)d_1 + \nu(8\nu^2 - 12\nu + 5)d_2 - 2(v-1)(2\nu-1)^2] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_0 \left[(v-1)(8v^3 - 8v_2 + v + 1)d_1^2 + \right. \\
& \quad +d_1 \left[2v(8v^3 - 10v^2 + 2v + 1)d_2 - 2(2v-1)(v-1)(8v^2 - 5v - 1) \right] + \\
& \quad \left. +d_2 v \left[(8v^3 - 4v^2 - v)d_2 - 12v^2 + 18v - 6 \right] \right] + \\
& +2v(2v-1)(v-1)^2 d_1^3 + 4vd_1^2(v-1) \left[v(2v-1)d_2 - (3v-1)(v-1) \right] + \\
& +2v^3 d_2 \left[(2v-1)d_2 - 4v + 4 \right] d_1 + 4v^3(v-1)d_2^2 \left. \right\} + \\
& +d_1^2(2v-1) \left[(v-1)d_1 + vd_2 - 2v + 2 \right] \left[(2v-1)d_0 + (v-1)d_1 + vd_2 \right] \left. \right\}, \tag{\Delta 6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\varepsilon_{xy}}^{(P)} & = d_1^{\frac{3}{4}} \zeta_2 (2v-1) \left[2v\rho^2 (d_1 - d_2)d_0 + (v-1)d_1^{\frac{3}{2}} + (vd_2 - 2v + 2)d_1^{\frac{1}{2}} \right] - \\
& -v\rho \left[2\rho^2 d_0 d_1^{\frac{1}{2}} (d_1 - d_2)(2v-1) + (d_1 - d_2) \left[(2v-1)d_0 + (v-1)d_1 + vd_2 \right] \right], \tag{\Delta 7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\varepsilon_{yy}}^{(S)} & = -2\rho \zeta_1 (1-2v) \left\{ 8d_0^2 d_1^{\frac{3}{2}} v(v-1)(d_1 - 2vd_2 + 2v - 2)\rho^6 - \right. \\
& -d_0 d_1 \left[\left[-d_1(8v^2 - 8v + 1) + 16v^2(v-1)d_2 - 16v(v-1)^2 \right] d_0 - 8(v-1)vd_1^2 + \right. \\
& \quad \left. \left. + 16v(v-1)(vd_2 - v + 1)d_1 \right] \rho^4 + \right. \\
& +d_1^{\frac{3}{2}} \left[d_0^2 + \left[(8v^2 - 8v + 1)d_1 - 16v(v-1)(vd_1 - v + 1) \right] d_0 + 2(v-1)vd_1^2 - \right. \\
& \quad \left. \left. - 4v(v-1)(vd_2 - v + 1)d_1 \right] \rho^2 - \right. \\
& \left. -d_1^2 \left[-d_0 - 2(v-1)vd_1 + 4v(v-1)(vd_2 - v + 1) \right] \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -d_1^{\frac{3}{4}}\zeta_1\zeta_2 \left\{ 16v^3d_0^2(d_1-d_2)^2(v-1)\rho^6 + \right. \\
& \quad + 2d_0d_1^{\frac{1}{2}}\left[[(2v-1)d_1-2v+2](2v-1)^2d_0+8v^3(d_1-d_2)^2(v-1)\right]\rho^4 + \\
& \quad + \left[(2v-1)^2d_0^2+d_0(2v-1)^2[2(2v-1)d_1-4v+4]+4v^3(d_1-d_2)^2(v-1)\right]d_1\rho^2 + \\
& \quad \left. + d_1^{\frac{3}{2}}(2v-1)\left[(2v-1)d_0+2v(d_1-d_2)(v-1)\right] \right\} + \\
& + 2d_1^{\frac{7}{4}}\zeta_2v\rho^2(1-2v)\left[\left(2\rho^2d_0+d_1^{\frac{1}{2}}\right)\left[(v-1)d_1+vd_2-2v+2\right]+d_0d_1^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \\
& + \rho \left\{ 8d_1^{\frac{1}{2}}vd_0^2\left[(v-1)d_1+vd_2\right] \times \right. \\
& \quad \times \left[(2v-1)(v-1)d_1^2+d_1\left[v(2v-1)d_2-2(3v-1)(v-1)\right]+2(v-1)vd_2\right]\rho^6 + \\
& \quad + 4d_0d_1 \left\{ d_0 \left[v(v-1)(4v^2-3v+1)d_1^2+d_1v\left[2v(4v^2-5v+2)d_2-4(v-1)(2v-1)^2\right] \right] + \right. \\
& \quad \quad \left. + v^3(4v-3)d_2^2-(v-1)(2v-1)^2 \right\} + \\
& \quad + 2v(2v-1)(v-1)^2d_1^3+4v(v-1)d_1^2\left[v(2v-1)d_2-3v^2+4v-1\right] + \\
& \quad \left. + 2v^3d_1d_2\left[(2v-1)d_2-4v+4\right]+4v^3(v-1)d_2^2 \right\} \rho^4 + \\
& + 2 \left\{ d_0^2\left[v(2v-1)^2d_1+2(2v-1)^2(v^2d_2-v^2+1)\right] + \right. \\
& \quad + d_0(2v-1)\left[2v^2(v-1)d_1^2+2v(2v-1)(vd_2-2v+2)d_1+2v^3d_2^2-2(v-1)(2v-1) \right] + \\
& \quad + v(2v-1)(v-1)^2d_1^3+d_1^2(v-1)\left[2v^2(2v-1)d_2-2v(3v-1)(v-1)\right] + \\
& \quad \left. + v^3d_1d_2\left[(2v-1)d_2-4v+4\right]+2v^3(v-1)d_2^2 \right\} d_1^{\frac{3}{2}}\rho^2 + \\
& \left. + d_1^2(2v-1)\left[(2v-1)d_0+(v-1)d_1+vd_2\right]\left[d_0+(2v-1)d_1+vd_2-2v+2\right] \right\}, \quad (\Delta 8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\varepsilon_{xy}}^{(S)} = & -4\rho\zeta_1 d_0 (1-2v)(1-v) \left[4d_0 d_1^{\frac{3}{2}} (d_1 - 2vd_2 + 2v - 2) \rho^6 - \right. \\
& -2d_1 \left[(-d_1 + 4vd_2 - 4v + 4) d_0 - d_1^2 + 2(vd_2 - v + 1) d_1 \right] \rho^4 + \\
& \left. + d_1^{\frac{3}{2}} (-2d_0 + d_1 - 4vd_2 + 4v - 4) \rho^2 - d_1^2 \right] + \\
& + 8d_1^{\frac{3}{2}} v^2 \rho^4 d_0 \zeta_1 \zeta_2 (d_1 - d_2)^2 \left(d_1^{\frac{1}{2}} + 2\rho^2 d_0 \right) (v-1) - \\
& -2d_1^{\frac{7}{2}} \zeta_2 (1-2v) \left[2d_0 \left[(v-1) d_1 + vd_2 - 2v + 2 \right] \rho^4 + d_0 \rho^2 d_1^{\frac{1}{2}} + (v-1) d_1 \right] \times \\
& \times \left[d_0 \left[2\rho^2 (v-1) d_1 + d_1^{\frac{1}{2}} + 2\rho^2 (vd_2 - 2v + 2) \right] + (v-1) d_1^{\frac{3}{2}} + (vd_2 - 2v + 2) d_1^{\frac{1}{2}} \right] - \\
& -\rho \left\{ 8d_0^2 d_1^{\frac{1}{2}} \left[d_1 (v-1) + vd_2 \right] \times \right. \\
& \times \left[(2v-1)(v-1) d_1^2 + d_1 \left[v(2v-1) d_2 - 2(3v-1)(v-1) \right] + 2v(v-1) d_2 \right] \rho^6 + \\
& + 4d_0 d_1 \left\{ \left[(v-1)(4v^2 - 3v + 1) d_1^2 + d_1 \left[2v(4v^2 - 5v + 2) d_2 - 4(v-1)(2v-1)^2 \right] \right] + \right. \\
& \left. \left. + v^2 (4v-3) d_2^2 \right] d_0 + \right. \\
& + (2v-1)(v-1)^2 d_1^3 + 2(v-1) d_1^2 \left[v(2v-1) d_2 - (3v-1)(v-1) \right] + \\
& \left. + v^2 d_1 d_2 \left[(2v-1) d_2 - 4v + 4 \right] + 2v^2 (v-1) d_2^2 \right\} \rho^4 + \\
& + 2d_0 d_1^{\frac{3}{2}} \left[(d_1 + 2vd_2 - 2v + 2)(2v-1)^2 d_0 + v(4v-3)(v-1) d_1^2 + \right. \\
& \left. + d_1 \left[v(4v^2 - 2v - 1) d_2 - 2(v-1)(2v-1)^2 \right] + d_2^2 v^2 \right] \rho^2 + \\
& \left. + d_1^2 \left[(2v-1) d_0 + (v-1) d_1 + vd_2 \right] \left[(2v-1) d_0 - 2v(d_1 - d_2)(1-v) \right] \right\}. \quad (\Delta 9)
\end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις ζ_1 και ζ_2 ορίζονται ως εξής:

$$\zeta_1 = \left[\frac{(d_1^{\frac{1}{2}} + \rho^2) d_1^{\frac{1}{2}}}{1 + \rho^2 d_1^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta_2 = \left(\frac{1 + \rho^2 d_1^{\frac{1}{2}}}{d_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\Delta 10)$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Amanatidou, E., Aravas, N., 2002. Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 191, 1723-1751.
- Aravas, N., Giannakopoulos, A.E., 2009. Plane asymptotic crack-tip solutions in gradient elasticity, submitted.
- Barber, J.R., 1992. *Elasticity*. Kluwer, Academic Publishers, Dordrecht.
- Begley, M.R., Hutchinson, J.W., 1998. The mechanics of size-dependent indentation. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 2049-2068.
- Bleustein, J.L., 1967. A note on the boundary conditions of Toupin's strain-gradient theory. *Int. J. Solids Struct.* 3, 1053-1057.
- Bracewell, R., 1965. *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, New York.
- Carrier, G.F., Krook, M., Pearson, C.E., 1966. *Functions of a complex variable. Theory and Technique*. McGraw-Hill, New York.
- Cauchy, A.L., 1851. Note sur l'equilibre et les mouvements vibratoires des corps solides. *Comptes-Rendus Acad. Paris* 32, 323-326.
- Chang, C.S., Shi, Q. and Liao, C.L., 2003. Elastic constants for granular materials modeled as first-order strain-gradient continua. *Int. J. Solids Structures* 40, 5565-5582.
- Charalambopoulos, A., Gergidis, L.N., 2008. On the dyadic scattering problem in three-dimensional gradient elasticity: an analytical approach. *J. Phys. A: Math. Theor.* 41, 395203.
- Chen, J.Y., Huang, Y., Ortiz, M., 1998. Fracture analysis of cellular materials: A strain gradient model. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 789-828.
- Chen, J.Y., Wei, Y., Huang, Y., Hutchinson, J.W., Hwang, K.C., 1999. The crack tip fields in strain gradient plasticity: The asymptotic and numerical analyses. *Eng. Fract. Mech.* 64, 625-648.
- Cook, T.S., Weitsman, Y., 1966. Strain-gradient effects around spherical inclusions and cavities. *Int. J. Solids Struct.* 2, 393-406.
- Cosserat, E., Cosserat, F., 1909. *Theorie des Corps Deformables*. Hermann et Fils, Paris.
- Day, F.D., Weitsman, Y., 1966. Strain-gradient effects in microlayers. *ASCE J. Engng. Mech.* 92, 67-86.

- Engel, G., Garikipati, K., Hughes, T.J.R., Larson, M.G., Mazzei, L., Taylor, R.L., 2002. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 191, 3669-3750.
- Eringen, A.C., 1968. Theory of micropolar elasticity. In: Liebowitz, H. (Ed.), *Fracture – An Advanced Treatise*, Vol. 2, Academic Press, New York, pp. 621-729.
- Eshel, N.N., Rosenfeld, G., 1970. Effects of strain-gradient on the stress-concentration at a cylindrical hole in a field of uniaxial tension. *J. Eng. Math.* 4, 97-111.
- Exadaktylos, G.E., Vardoulakis, I., 1998. Surface instability in gradient elasticity with surface energy. *Int. J. Solids Struct.* 35, 2251–2281.
- Exadaktylos, G., 1999. Some basic half-plane problems of the cohesive elasticity theory with surface energy. *Acta Mechanica* 133, 175-198.
- Farnell, G.W., 1978. Types and properties of surface waves. In: Oliner, A.A. (Ed.), *Acoustic Surface Waves*. Springer-Verlag Berlin, 13-60.
- Fleck, N.A., Muller, G.M., Ashby, M.F., Hutchinson, J.W., 1994. Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metall. Mater.* 42, 475-487.
- Fleck, N.A., Shu, J.Y., 1995. Microbuckle initiation in fibre composites: a finite element study. *J. Mech. Phys. Solids* 43, 1887-1918.
- Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., 1997. Strain gradient plasticity. In: Hutchinson, J.W., Wu, T.Y. (Eds.), *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 33, Academic Press, New York, pp. 295-361.
- Fosdick, R. and Royer-Carfagni, G., 2002. The Lagrange multipliers and hyperstress constraint reactions in incompressible multipolar elasticity theory. *J. Mech. Phys. Solids* 50, 1627-1647
- Fung, Y.C., 1965. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ,
- Gazis, D.C., Herman, R., Wallis, R.F., 1960. Surface elastic waves in cubic crystals. *Phys. Rev.* 119, 533-544.
- Gao, H., Huang, Y., Nix, W.D., Hutchinson, J.W., 1999. Mechanism-based strain gradient plasticity – I. Theory. *J. Mech. Phys. Solids* 47, 1239-1263.
- Georgiadis, H.G., 2003. The mode-III crack problem in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity: Static and dynamic analysis. *ASME J. Appl. Mech.* 70, 517-530.
- Germain, P., 1973. The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: microstructure. *SIAM J. Appl. Math.* 25, 556-575.

- Georgiadis, H.G., Vardoulakis, I., Lykotrafitis, G., 2000. Torsional surface waves in a gradient-elastic half-space. *Wave Motion* 31, 333-348.
- Georgiadis, H.G. and Lykotrafitis, G., 2001. A method based on the Radon transform for three-dimensional elastodynamic problems of moving loads. *J. Elasticity* 65, 87-129.
- Georgiadis, H.G., 2003. The mode-III crack problem in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity: Static and dynamic analysis. *ASME J. Appl. Mech.* 70, 517-530.
- Georgiadis, H.G., Velgaki, E.G., 2003. High-frequency Rayleigh waves in materials with microstructure and couple-stress effects. *Int. J. Solids Struct.* 40, 2501-2520.
- Georgiadis, H.G., Vardoulakis, I., Velgaki, E.G., 2004. Dispersive Rayleigh-wave propagation in microstructured solids characterized by dipolar gradient elasticity. *J. Elast.* 74, 17-45.
- Georgiadis, H.G., Grentzelou, C.G., 2006. Energy theorems and the J -integral in dipolar gradient elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 43, 5690-5712.
- Georgiadis, H.G. and Anagnostou, D. 2008. Problems of the Flamant-Boussinesq and Kelvin type in dipolar gradient elasticity. *J. Elast.* 90, 71-98.
- Georgiadis, H.G., Gourgiotis, P.A., 2008. An analytical / numerical approach based on integral equations for crack problems of gradient elasticity. 8th World Congress on Computational Mechanics (Venice, Italy).
- Giannakopoulos, A.E., Amanatidou, E., Aravas, N., 2006. A reciprocity theorem in linear gradient elasticity and the corresponding Saint-Venant principle. *Int. J. Solids Struct.* 43, 3875-3894.
- Giannakopoulos, A.E., Stamoulis, K., 2007. Structural analysis of gradient elastic components. *Int. J. Solids Struct.* 44, 3440-3451.
- Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2007. Distributed dislocation approach for cracks in couple-stress elasticity: shear modes. *Int. J. Fract.* 147, 83-102.
- Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2008. An approach based on distributed dislocations and disclinations for crack problems in couple-stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 45, 5521-5539.
- Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2009. Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, accepted.
- Green, A.E., Rivlin, R.S., 1964. Multipolar continuum mechanics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 17, 113-147.
- Green, A.E., McInnis, B.C., Naghdi, P.M., 1968. Elastic-plastic continua with simple force dipole. *Int. J. Eng. Sci.* 6, 373-394.

- Grentzelou, C.G., Georgiadis, H.G., 2005. Uniqueness for plane crack problems in dipolar gradient elasticity and in couple-stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 42, 6226-6244.
- Gronwald, F. and Hehl, F.W. Stress and hyperstress as fundamental concepts in continuum mechanics and in relativistic field theory. In: *Advances in Modern Continuum Dynamics, International Conference in Memory of Antonio Signorini, Isola d' Elba, June 1991*. Editor: G. Ferrarese, Pitagora Editrice, Bologna 1993, pp. 1-32
(E-print Archive: <http://www.arXiv.org/abs/gr-qc/9701054>)
- Herrmann, G., Achenbach, J.D., 1968. Applications of theories of generalized Cosserat continua to the dynamics of composite materials. In: Kröner, E. (Ed.), *Mechanics of Generalized Continua*, Springer, Berlin, pp. 69-79.
- Hoskins, R.F., 1979. *Generalized Functions*. Ellis Horwood, Chichester.
- Huang, Y., Gao, H., Nix, W.D., Hutchinson, J.W., 2000. Mechanism-based strain gradient plasticity – II. Analysis. *J. Mech. Phys. Solids* 48, 99-128.
- Huang, Y., Qu, S., Hwang, K.C., Li, M., Gao, H., 2004. A conventional theory of mechanism-based strain gradient plasticity. *Int. J. Plasticity* 20, 753-782.
- Hwang, K.C., Jiang, H., Huang, Y., Gao, H., Hu, N., 2002. A finite deformation theory of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 50, 81-99.
- Jaunzemis, W., 1967. *Continuum Mechanics*. McMillan. New York.
- Kakunai, S., Masaki, J., Kuroda, R., Iwata, K., Nagata, R., 1985. Measurement of apparent Young's modulus in the bending of cantilever beam by heterodyne holographic interferometry. *Exp. Mech.* 21, 408-412.
- Karlis, G.F., Tsinopoulos, S.V., Polyzos, D., Beskos, D.E., 2007. Boundary element analysis of mode I and mixed mode (I and II) crack problems of 2-D gradient elasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 196, 5092-5103.
- Lazar, M., Maugin, G.A., 2005. Nonsingular stress and strain fields of dislocations and disclinations in first strain gradient elasticity. *Int. J. Engng. Sci.* 43, 1157-1184.
- Lazar, M., Maugin, G.A., 2006. A note on line forces in gradient elasticity. *Mech. Res. Commun.* 33, 674-680.
- Mindlin, R.D., 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 16, 51-78.
- Mindlin, R.D., Eshel, N.N., 1968. On first-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 4, 109-124.
- Nowinski, J.L., 1986. The Boussinesq-Flamant problem for an elastic nonlocal half-infinite space. *Acta Mechanica* 58, 59-66

- Oden, J.T., Rigsby, D.M., Cornett, D., 1970. On the numerical solution of a class of problems in a linear first strain-gradient theory of elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2, 159-174.
- Papargyri-Beskou, S., Tsepoura, K.G., Polyzos, D., Beskos, D.E., 2003. Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *Int. J. Solids Struct.* 40, 385-400.
- Papargyri-Beskou, D., Beskos, D.E., 2008. Static, stability and dynamic analysis of gradient elastic flexural Kirchhoff plates. *Arch. Appl. Mech.* 78, 625-635.
- Polyzos, D., Tsepoura, K.G., Tsinopoulos, S.V., Beskos, D.E., 2003. A boundary element method for solving 2-D and 3-D static gradient elastic problems. Part I: Integral Formulation. *Copmut. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192, 2845-2873.
- Radi, E., 2007. Effects of characteristic material lengths on mode III crack propagation in couple stress elastic-plastic materials. *Int. J. Plast.* 23, 1439-1456.
- Radi, E., 2008. On the effects of characteristic lengths in bending and torsion on Mode III crack in couple stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 45, 3033-3058.
- Shu, J.Y., King, W.E., Fleck, N.A., 1999. Finite elements for materials with strain gradient effects. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 44, 373-391.
- Shi, M.X., Huang, Y., Hwang, K.C., 2000. Fracture in the higher-order elastic continuum. *J. Mech. Phys. Solids* 48, 2513-2538.
- Sosa, H.A. and Bahar, L.Y., 1992. Transition from Airy stress function to state space formulation of elasticity. *J. Franklin Inst.* 329, 817-828.
- Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., 1970. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York.
- Toupin, R.A., 1962. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11, 385-414.
- Tsamasphyros, G.I., Markolefas, S., Tsouvalas, D.A., 2005. Convergence analysis and comparison of the h- and p-extensions with mixed finite element C^0 -continuity formulations, for some types of one dimensional biharmonic equations. 5th GRACM Congress on Computational Mechanics, Cyprus.
- Tsamasphyros, G.I., Markolefas, S., Tsouvalas, D.A., 2007. Convergence and performance of the h- and p-extensions with mixed finite element C^0 -continuity formulations, for tension and buckling of a gradient elastic beam. *Int. J. Solids Struct.* 44, 5056-5074.
- Tsepoura, K.G., Papargyri-Beskou, S., Polyzos, D., 2002. A boundary element method for solving 3D static gradient elastic problems with surface energy. *Comput. Mech.* 29, 361-381.
- Van der Pol, B. and Bremmer, H., 1950. *Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

- Vardoulakis, I., Sulem, J., 1995. *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Blackie Academic and Professional (Chapman and Hall), London.
- Vardoulakis, I., Frantziskonis, G., 1992. Micro-structure in kinematic-hardening plasticity. *Eur. J. Mech. A/Solids* 11, 467-486.
- Vardoulakis, I., Sulem, J., 1995. *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Blackie Academic and Professional (Chapman and Hall), London.
- Vardoulakis I., Exadaktylos, G., Aifantis, E., 1996. Gradient elasticity with surface energy: Mode-III crack problem. *Int. J. Solids Struct.* 33, 4531-4559.
- Vardoulakis I., Georgiadis H.G., 1997. SH surface waves in a homogeneous gradient elastic half-space with surface energy. *J. Elast.* 47, 147-165.
- Vardoulakis, I., Giannakopoulos, A.E., 2006. Examples of dipolar forces taken from structural analysis. *Int. J. Solids Struct.* 43, 4047-4062.
- Voigt, W., 1887. *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle*. *Abh. Ges. Wiss. Göttingen* 34.
- Walsh, S.D.C. and Tordesillas, A., 2004. The stress response of a semi-infinite micropolar granular material subject to a concentrated force normal to the boundary. *Granular Matter* 6, 27-37
- Wei, Y., 2006. A new finite element method for strain gradient theories and applications to fracture analyses. *Eur. J. Mech. A/Solids* 25, 897-913.
- Weitsman, Y., 1966. Strain-gradient effects around cylindrical inclusions and cavities in a field of cylindrically symmetric tension. *ASME J. Appl. Mech.* 33, 57-67.
- White, R.M., 1970. Surface elastic waves. *Proceedings IEEE* 58, 1238-1276.
- Zemanian, A.H., 1965. *Distribution theory and transform analysis*. McGraw-Hill, New York.
- Zhou, D. and Jin, B., 2003. Boussinesq-Flamant problem in gradient elasticity with surface energy. *Mech. Res. Comm.* 30, 463-468
- Zhang, L., Huang, Y., Chen, J.Y., Hwang, K.C., 1998. The mode-III full-field solution in elastic materials with strain gradient effects. *Int. J. Fract.* 92, 325-348.