



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΝΟΥΚΛΕΟΝΙΟΥ ΝΟΥΚΛΕΟΝΙΟΥ
ΣΕ ΕΥΣΤΑΘΕΙΣ ΚΑΙ
ΑΣΤΑΘΕΙΣ ΠΥΡΗΝΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
της ΜΑΡΤΙΝΟΥ ΜΑΡΙΑΣ ΑΝΔΡΙΑΝΗΣ
Διπλωματούχος Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών
Τμήματος Φυσικής

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Καθηγητής Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΝΟΥΚΛΕΟΝΙΟΥ ΝΟΥΚΛΕΟΝΙΟΥ
ΣΕ ΕΥΣΤΑΘΕΙΣ ΚΑΙ
ΑΣΤΑΘΕΙΣ ΠΥΡΗΝΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της ΜΑΡΤΙΝΟΥ ΜΑΡΙΑΣ ΑΝΔΡΙΑΝΗΣ

Διπλωματούχος Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Τμήματος Φυσικής

Τριμελής Επιτροπή

Κουτσούμπας Γεώργιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Μπονάτσος Διονύσιος, Ερευνητής Ε.Κ.Ε.Φ.Ε.
Παπαδόπουλος Γεώργιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Επταμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Ρόζα Βλαστού, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.
Γεώργιος Λαλαζήσης, Καθηγητής Α.Π.Θ.
Θεόδωρος Μερτζιμέκης, Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.
Χαράλαμπος Μουστακίδης, Επίχ.Καθ. Α.Π.Θ.
Μπονάτσος Διονύσιος, Ερευνητής Ε.Κ.Ε.Φ.Ε.
Κουτσούμπας Γεώργιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Παπαδόπουλος Γεώργιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αυτό το διδακτορικό είναι αποτέλεσμα συλλογικής εργασίας. Πρωτίστως κόπιασε ο Δρ. Μπονάτσος, τον οποίο ευχαριστώ για την υπομονή και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε. Έπειτα κόπιασε η εν Ελλάδι ομάδα μας αποτελούμενη από την Σοφία Καραμπάγια, τον Δημήτρη Πετρέλη, τον Πάνο Γεωργουδή, τον Ιωάννη Ασημάκη, την Σμαράγδα Σαραντοπούλου και τον Σπύρο Περούλη, αλλά και οι συνεργάτες στο εξωτερικό *R. Casten, N. Minkov, B. Cakirli, K. Blaum, C. Quesne*. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθ. Θ. Μερτζιμέκη για την συμβολή του στο θέμα της συνυπάρξεως σχημάτων. Ευχαριστώ επιπλέον την οικογένειά μου για την βοήθειά τους όλα αυτά τα χρόνια.

Το θέμα του είναι η δημιουργία ενός συλλογικού μικροσκοπικού αλγεβρικού προτύπου, που ονομάσαμε συμμετρία *Proxy SU(3)*. Προαπαιτούνται αρκετές μεταπτυχιακές γνώσεις Μαθηματικών και Φυσικής για να καταλάβει κανείς όλη την διαδρομή εξαγωγής αποτελεσμάτων. Επιχειρώ λοιπόν σε αυτές τις σελίδες να εξηγήσω κάθε χρήσιμη έννοια και μαθηματικό εργαλείο, ώστε ένας τελειόφοιτος Φυσικής να μπορεί να παρακολουθήσει την εξέλιξη των υπολογισμών. Η διατριβή αυτή είναι προσανατολισμένη στο να εξηγήσει τις δομές της *Proxy SU(3)* συμμετρίας σε έναν μεταπτυχιακό φοιτητή, που επιθυμεί να ασχοληθεί ερευνητικά με το θέμα. Ένας έμπειρος ερευνητής μπορεί να προσπεράσει τα δύο πρώτα κεφάλαια.

Δημιουργήσαμε ένα πρότυπο για συλλογικούς και βαρείς πυρήνες, το οποίο είναι κάτι που χρειάζεται η επιστημονική κοινότητα. Φυσικά και υπάρχουν άλλα πρότυπα καθιερωμένα και ευρέως διαδεδομένα όπως το Γεωμετρικό Πρότυπο, το Πρότυπο των Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων και η Ψεύδο $SU(3)$ συμμετρία. Το Γεωμετρικό πρότυπο μειονεκτεί στο ότι δεν έχει ως είσοδο τον αριθμό πρωτονίων και νετρονίων. Δηλαδή ένας πειραματικός Φυσικός, όταν σχεδιάζει να μετρήσει έναν πυρήνα, δεν μπορεί να εισάγει σε αυτό το πρότυπο τους Z, N και να μάθει τι περιμένει να μετρήσει. Εν αντιθέσει το Πρότυπο των Αλληλεπιδρώντων μποζονίων δέχεται ως είσοδο αυτές τις ποσότητες, αλλά χρησιμοποιεί την παραδοχή ότι τα νουκλεόνια σχηματίζουν μποζονικά ζεύγη πάντα, κάτι που εν γένει δεν ισχύει. Το σύστημα των νουκλεονίων είναι φερμιονικό και

η αντίθετη θεώρηση φέρνει προβλήματα στις προβλέψεις του προτύπου. Η συμμετρία της Ψεύδο $SU(3)$ είναι η πλησιέστερη στην Φυσική του προβλήματος. Η δική μας συμμετρία χρησιμοποίησε πολλά μαθηματικά εργαλεία και κώδικες δικές της. Απλά εμείς κάνουμε διαφορετικούς χειρισμούς σε αρκετά ουσιώδη σημεία και επιτυγχάνουμε χωρίς παραμέτρους σύμπτωση με τα γνωστά πειραματικά δεδομένα.

Τελικώς και αιφνιδίως κάναμε προβλέψεις για το φαινόμενο της συνυπάρξεως σχημάτων. Θεωρώ, ότι αυτό το μέρος είναι και το πιο αναπάντεχο και συναρπαστικό.

...αφιερωμένο στην όμορφη Ηλέκτρα...

Περιεχόμενα

1	ΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΟ ΤΟΠΙΟ	11
1.1	ΟΙ ΜΑΓΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	11
1.2	ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΜΕΝΟΙ ΠΥΡΗΝΕΣ	13
1.3	ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ	16
1.4	ΟΙ ΣΥΛΛΟΓΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΕΣ ΖΩΝΕΣ	18
1.5	ΤΡΟΠΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΣ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ	21
2	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ	23
2.1	ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΤΡΟΦΗΣ	23
2.1.1	ΚΛΑΣΙΚΗ ΣΤΡΟΦΗ	25
2.1.2	ΓΩΝΙΕΣ <i>EULER</i>	28
2.1.3	ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΣΤΡΟΦΕΣ	29
2.1.4	ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΣΤΡΟΦΗ	30
2.2	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ <i>YOUNG</i> ΤΗΣ $U(n)$	33
2.3	ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ	37
2.4	Η ΟΜΑΔΑ $U(n)$	44
2.4.1	ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ $U(2)$	45
2.5	Η ΟΜΑΔΑ $SU(3)$	49
2.6	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ <i>YOUNG</i>	51
2.7	ΜΕΤΑΒΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ	52
2.7.1	ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ	52

2.7.2	ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ <i>WIGNER ECKART</i>	53
3	ΠΡΟΤΥΠΑ ΓΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΜΕΝΟΥΣ ΠΥΡΗΝΕΣ	55
3.1	ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΩΝ ΦΛΟΙΩΝ	57
3.2	ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ <i>NILSSON</i>	59
3.2.1	ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ	60
3.2.2	ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ	63
3.2.3	ΤΡΟΧΙΑΚΑ <i>NILSSON</i> ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ	66
3.3	ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΟΥ <i>ELLIOT</i>	67
3.3.1	ΕΝΑ ΚΒΑΝΤΟ ΔΙΕΓΕΡΣΕΩΣ	69
3.3.2	ΔΥΟ ΚΒΑΝΤΑ ΔΙΕΓΕΡΣΕΩΣ	71
3.3.3	ΤΡΙΑ ΚΒΑΝΤΑ ΔΙΕΓΕΡΣΕΩΣ	74
3.3.4	ΟΙ ΓΕΝΝΗΤΟΡΕΣ ΤΗΣ <i>SU(3)</i> ΚΑΤΑ ΤΟΝ <i>ELLIOTT</i>	76
3.4	ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ	77
4	Η <i>PROXY SU(3)</i>	79
4.1	ΤΑ ΑΔΕΛΦΑ ΤΡΟΧΙΑΚΑ	80
4.2	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ (λ, μ)	83
4.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΣ	91
4.4	Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\mu = 0$	98
4.5	Η ΣΥΝΥΠΑΡΕΧΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	102
4.5.1	Ο ΦΛΟΙΟΣ 20-40	102
4.5.2	Ο ΦΛΟΙΟΣ 40-70	104
4.5.3	Ο ΦΛΟΙΟΣ 70-112	104
4.5.4	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ	111
4.5.5	ΠΕΡΙΟΧΗ <i>L</i> ΜΕ $Z \approx 82$	113
4.5.6	ΠΕΡΙΟΧΗ <i>K</i> ΜΕ $Z \approx 64, N \approx 90$	117
4.5.7	ΠΕΡΙΟΧΗ <i>J</i> ΜΕ $Z \approx 50$	117

<i>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</i>	9
4.5.8 ΠΕΡΙΟΧΗ I ΜΕ $Z \approx 40, N \approx 60$	124
4.5.9 ΠΥΡΗΝΕΣ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΕΙΑ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ	139
4.5.10 ΠΕΡΙΟΧΗ Η ΜΕ $Z \approx 34, N \approx 40$	139
4.5.11 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	143
4.6 ΕΥΡΕΣΗ ΤΩΝ $B(E2)$	151
5 ΕΠΙΛΟΓΟΣ	159

Κεφάλαιο 1

ΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΟ ΤΟΠΙΟ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα διακρίνουμε τους πυρήνες αναλόγως του σχήματός τους και του αριθμού των νουκλεονίων. Θα εισάγουμε τα πειραματικά μεγέθη, που συστηματικά παρατηρούνται σε κάθε οικογένεια πυρήνων. Αρωγός σε αυτήν την συστηματοποίηση των πειραματικών μεγεθών είναι ο *R. Casten* με το βιβλίο του *Nuclear Structure from a Simple Perspective* [1].

1.1 ΟΙ ΜΑΓΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ας αρχίσουμε με τον αριθμό πρωτονίων και νετρονίων και τους περιβοήτους μαγικούς αριθμούς. Ο κάθε πυρήνας περιέχει συγκεκριμένο αριθμό πρωτονίων και νετρονίων, συμπυκνωμένα ασφικτικά σε περιορισμένο χώρο, τα οποία κινούνται τάχιστα χωρίς να συγκρούονται. Θεωρούμε (στα μικροσκοπικά πρότυπα) πως τα πρωτόνια κινούνται εντός ενός ελκτικού δυναμικού, ταυτιζόμενο με την μέση αλληλεπίδραση όλων των πρωτονίων. Την ίδια ακριβώς σκέψη κάνουμε και για τα νετρόνια. Διαχωρίζουμε δηλαδή τα πρωτόνια από τα νετρόνια. Αξίζει να επισημάνουμε ότι το φρέαρ των πρωτονίων είναι πιο ρηχό, δηλαδή λιγότερο ελκτικό, από εκείνο των νετρονίων, λόγω της απωστικής αλληλεπιδράσεως *Coulomb* μεταξύ των θετικά φορτισμένων πρωτονίων. Από την Κβαντική Φυσική πρέπει να έχουμε καταλάβει το εξής σημαντικό: όταν ένα ή πολλά σωματίδια κινούνται εντός φραγμένου χώρου, το ενεργειακό φάσμα του συστήματος είναι διακριτό. Ο περιορισμός εμφανίζεται μαθηματικά μέσω των συνθηκών $\Psi(r=0) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \Psi = 0$, που αφορούν στην κυματοσυνάρτηση. Τα προβλήματα αυτά χαρακτηρίζονται δέσμια. Στην αντίθετη περίπτωση

η ενέργεια λαμβάνει συνεχείς τιμές. Έτσι στην περίπτωση, που τα νουκλεόνια κινούνται εντός ενός ελκτικού δυναμικού, το φάσμα E_n εξαρτάται από το χβαντικό αριθμό n .

Επειδή υπάρχει περιστροφικός βαθμός ελευθερίας, το φάσμα εξαρτάται και από την στροφορμή, που είναι επίσης διακριτή ακολουθώντας τον χβαντικό αριθμό n . Έχουμε λοιπόν μία ενέργεια E_n και μία E_l . Φυσικά το φάσμα θα είναι το άθροισμά τους. Πιο συγκεκριμένα αν το μέσο ελκτικό δυναμικό είναι τρισδιάστος αρμονικός ταλαντωτής, το φάσμα από τις σφαιρικές συντεταγμένες είναι $E_{n,l} = (2n + l + \frac{3}{2})\hbar\omega$. Είναι συνεπώς δυνατόν να υπάρχουν συνδυασμοί n, l με ίδιες ή κοντινές ενέργειες $E_{n_1, l_1} \approx E_{n_2, l_2}$. Έτσι δημιουργούνται πυκνώματα και αραιώματα ενεργειακών καταστάσεων. Εμφανίζονται συστάδες ενεργειών με μεγάλα ενεργειακά χάσματα μεταξύ τους. Οι συστάδες ονομάζονται ζωνές και τα κενά μεταξύ τους χάσματα. Σε κάθε ενέργεια τοποθετούνται δύο φερμιόνια με ιδιοστροφορμή $1/2$. Όταν συμπληρώσουμε και την τελευταία κατάσταση μίας συστάδας, το συνολικό πλήθος των τοποθετημένων πρωτονίων ή νετρονίων έως εκεί λέγεται μαγικός αριθμός [2].

Στην έως τώρα περιγραφή απέκρυψα την αλληλεπίδραση ιδιοστροφορμής-τροχιάς $l \cdot s$ του σωματιδίου. Εξαιτίας της, για να επιλύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών, συζευγνύουμε την στροφορμή με την ιδιοστροφορμή και έτσι εμφανίζεται μια άλλη διακριτή ποσότητα η συνολική στροφορμή j . Η κάθε φασματική γραμμή σπάει σε δυο στάθμες με ίδιο n, l, s αλλά διαφορετικό j . Έτσι τελικά έχουμε τους μαγικούς αριθμούς 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, κ.ο.κ. Χωρίς λοιπόν αυτήν την αλληλεπίδραση θα υπήρχαν βεβαίως μαγικοί αριθμοί, αλλά θα ήταν άλλοι. Οι μαγικοί αριθμοί επαληθεύονται πειραματικά μέσω των ενεργειακών χασμάτων. Είμαστε λοιπόν υποχρεωμένοι να τους σεβαστούμε και να επικροτήσουμε το πρότυπο των φλοιών που εξήγησε την ύπαρξή τους. Το Πρότυπο των Φλοιών μπορεί να το διαβάσει κανείς διεξοδικά σε οποιοδήποτε προπτυχιακό σύγγραμμα Πυρηνικής Δομής [2] [3].

Οι μαγικοί πυρήνες έχουν αριθμό πρωτονίων και νετρονίων περίπου ίσο με μαγικό αριθμό. Σε τέτοιους πυρήνες τα λίγα νουκλεόνια σθένους δίνουν τις ιδιότητές τους στον πυρήνα συνολικά. Δηλαδή ένας πυρήνας με 21 πρωτόνια περιγράφεται μόνο από το 1 νουκλεόνιο σθένους του. Αν υπάρχουν 2 ή πλέον νουκλεόνια σθένους, τότε αυτά αλληλεπιδρούν. Έτσι η σύζευξή τους δίνει

τελικά το φάσμα του πυρήνα, το οποίο καλείται συλλογικό, διότι δεν αντιστοιχεί σε μονοσωματιδιακές καταστάσεις αλλά στον πυρήνα ως ενιαίο σύνολο. Αν τα νουκλεόνια σθένους είναι λίγα, οι πυρήνες έχουν σχήμα σφαιρικό, είναι δηλαδή μη παραμορφωμένοι.

Στην Κβαντική Φυσική η περιστροφή μίας σφαίρας δεν προκαλεί ενεργειακές μεταπτώσεις, αφού μία σφαίρα είναι ίδια από όποια γωνία κι αν την κοιτάς. Δηλαδή το φάσμα ενός σφαιρικού πυρήνα δεν θα μπορούσε να είναι περιστροφικό. Οι σφαιρικοί πυρήνες έχουν φάσμα δονητικό, δηλαδή πάλλονται ακτινικά. Ένα δονητικό φάσμα θυμίζει Απλό Αρμονικό Ταλαντωτή, δηλαδή οι ενεργειακές καταστάσεις είναι περίπου ισαπέχουσες (*Fig. 6.2* της αναφοράς [1]).

1.2 ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΜΕΝΟΙ ΠΥΡΗΝΕΣ

Αφού κατανοήσαμε την παρουσία των μαγικών αριθμών, θα δούμε την εξέλιξη ενός πυρήνα καθώς προσθέτουμε νουκλεόνια σθένους. Σε γενικές γραμμές είπαμε ότι ένας πυρήνας που είναι διπλά μαγικός, δηλαδή το πλήθος και των πρωτονίων και των νετρονίων συμπίπτει με μαγικούς αριθμούς, έχει σφαιρικό σχήμα. Πυρήνες με λίγα πρωτόνια ή νετρόνια σθένους είναι ελαφρώς παραμορφωμένοι, δηλαδή αποκλίνουν από την σφαιρικότητα. Ενώ πυρήνες με πλήθος νουκλεονίων σθένους, που είναι στο μέσο ενός φλοιού, έχουν μέγιστη παραμόρφωση. Αν αυξήσουμε κι άλλο τον αριθμό των νουκλεονίων σθένους, καθώς πλησιάζουμε ξανά τον επόμενο μαγικό αριθμό, ο πυρήνας επανέρχεται σταδιακά στην σφαιρικότητα. Επί παραδείγματι ένας πυρήνας με 50 πρωτόνια και 82 νετρόνια είναι σφαιρικός, ενώ ένας με 66 πρωτόνια και 104 νετρόνια είναι έντονα παραμορφωμένος. Καταλήγουμε λοιπόν, στο ότι οι μαγικοί αριθμοί επηρεάζουν το σχήμα του πυρήνα. Το φάσμα των παραμορφωμένων πυρήνων είναι περιστροφικό, δηλαδή η απόσταση των ενεργειακών καταστάσεων αυξάνεται με την αύξηση της στροφορμής.

Το επόμενο φαινόμενο που θα παρουσιάσουμε είναι η αλληλεπίδραση δύο νουκλεονίων σθένους. Ο γενικός κανόνας είναι πως τα νουκλεόνια, που ανήκουν σε συμπληρωμένους φλοιούς, επηρεάζουν ελάχιστα τις ιδιότητες του πυρήνα. Εν αντιθέσει τα νουκλεόνια σθένους αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και εξ αυτού παραμορφώνεται ο πυρήνας. Έτσι αν έχουμε πολλά αλληλεπιδρώντα

νουκλεόνια (προς το μέσο του φλοιού), θα έχουμε και μεγάλη παραμόρφωση. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη για συλλογικά φαινόμενα στον πυρήνα. Συλλογικά είναι τα φαινόμενα που προκύπτουν αν εξετάσουμε τον πυρήνα ως ενιαίο περιστρεφόμενο και παλλόμενο σώμα και όχι έκαστο των νουκλεονίων του.

Στους συλλογικούς πυρήνες οι ενεργειακές στάθμες δεν είναι μονοσωματιδιακές καταστάσεις, δεν αφορούν το κάθε νουκλεόνιο, αλλά τον πυρήνα ως όλον. Κοιτώντας λοιπόν το συλλογικό ενεργειακό φάσμα βλέπουμε αρχικά την θεμελιώδη κατάσταση με συλλογική στροφορμή 0^+ (όπου το $+$ ή $-$ δηλώνει θετική και αρνητική ομοτιμία αντιστοίχως) και η πρώτη διεγερμένη είναι η 2^+ . Η αλληλεπίδραση δύο νουκλεονίων σθένους γεννά μια ενέργεια 2^+ χαμηλότερη από αυτή που θα είχαμε απουσία της αλληλεπιδράσεως, δηλαδή απουσία νουκλεονίων σθένους (μαγικοί πυρήνες). Η αλληλεπίδραση τεσσάρων νουκλεονίων σθένους χαμηλώνει ακόμη περισσότερο την 2^+ . Συμπεραίνουμε, πως όσο λιγότερο μαγικός είναι ένας πυρήνας, τόσο χαμηλότερη θα είναι η πρώτη διεγερμένη του κατάσταση. Η απόσταση της πρώτης διεγερμένης από την θεμελιώδη είναι ένα μέτρο του σχήματος του πυρήνα. Οι παραμορφωμένοι πυρήνες έχουν συμπιεσμένες αυτές τις δύο καταστάσεις.

Κυριότερος όμως δείκτης συλλογικότητας και παραμορφώσεως είναι ο λόγος $R_{4/2} = \frac{E_{4^+}}{E_{2^+}}$. Η αλληλουχία των τριών χαμηλοτέρων ενεργειακών σταθμών της θεμελιώδους ζώνης έχει στροφορμές $0^+, 2^+, 4^+$. Όπως συζητήθηκε, στους μη μαγικούς πυρήνες η ενέργεια με στροφορμή 2^+ σπρώχνεται προς μικρότερες τιμές. Σε έναν σχεδόν μαγικό πυρήνα η μετατόπιση αυτή είναι μικρή, με συνέπεια η απόσταση της E_{4^+} από την E_{2^+} να είναι μικρή και ο λόγος τους επίσης σχετικά μικρός. Έχει βρεθεί μάλιστα, ότι σε τέτοιους πυρήνες ο λόγος τους δεν υπερβαίνει το 2, $R_{4/2} < 2$. Αυξανόμενων όμως των νουκλεονίων σθένους η E_{2^+} πιέζεται χαμηλότερα και ο συγκεκριμένος λόγος αυξάνεται. Αυτή η αύξηση κορυφώνεται όταν το πλήθος των νουκλεονίων συμπίπτει με το μέσο του φλοιού και έπειτα υποχωρεί ξανά καθώς ο πυρήνας συμπληρώνει τον φλοιό του και ξαναγίνεται μαγικός. Η μέγιστη τιμή, που λαμβάνει αυτός ο λόγος, είναι $R_{4/2} \approx 3.33$. Συνοψίζοντας λοιπόν μπορούμε να ισχυριστούμε, ότι οι μαγικοί πυρήνες είναι σφαιρικοί με λόγο $R_{4/2} < 2$, ενώ

όταν το πλήθος των νουκλεονίων είναι στο μέσο μεταξύ δύο μαγικών αριθμών ο πυρήνας έχει έντονη παραμόρφωση και ο λόγος $R_{4/2}$ πλησιάζει την τιμή 3.33.

Αφού αναλύσαμε, το πότε εμφανίζεται παραμόρφωση, μπορούμε να συζητήσουμε τα είδη παραμορφώσεως. Μη παραμορφωμένος θεωρείται ένας σφαιρικός πυρήνας. Οι περισσότεροι παραμορφωμένοι πυρήνες διακρίνονται σε επιμηκυμένους και πεπλατυσμένους. Μια σφαιρική πυκνότητα ύλης μπορεί, να οδηγηθεί σε επιμηκυμένο σχήμα, αν επιμηκυνθεί κατά τον άξονα συμμετρίας της. Επειδή όμως η πυρηνική ύλη είναι ασυμπίεστη, όταν επιμηκύνεται κατά τον άξονά της συρρικνώνεται ο ισημερινός της, ώστε ο όγκος να παραμένει σταθερός. Αντίστοιχα η σφαίρα μπορεί να πεπλατυνθεί αν συμπιεστεί στους πόλους της.

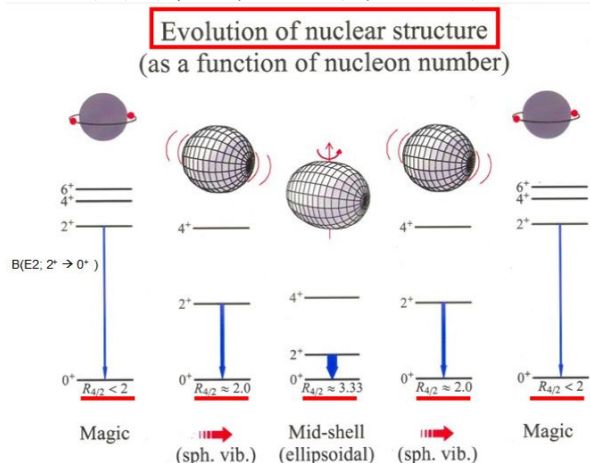
Η διαφορά μεταξύ των δύο σχημάτων είναι, πως το επιμηκυμένο επιμηκύνεται σε μία διάσταση, ενώ το πεπλατυσμένο σε δύο διαστάσεις. Επειδή η επιμήκυνση των πεπλατυσμένων πυρήνων είναι σε δύο άξονες, το σχήμα αυτό έχει την δυνατότητα καταλήψεως μεγαλύτερου όγκου. Πιο συγκεκριμένα τα σημεία της επιφανείας ενός επιμηκυμένου ή πεπλατυσμένου πυρήνα έχουν εξίσωση:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.1)$$

Ο όγκος σε αμφότερα είναι $V = \frac{4\pi}{3}a^2c$. Η διαφορά των δύο σχημάτων έγκειται, στο ότι οι επιμηκυμένοι πυρήνες έχουν $a < c$, ενώ οι πεπλατυσμένοι $a > c$. Δηλαδή οι πεπλατυσμένοι έχουν την δυνατότητα καταλήψεως μεγαλύτερου όγκου, λόγω του a^2 . Στην παρούσα διατριβή θα αποδείξουμε ότι πεπλατυσμένος ένας πυρήνας γίνεται, όταν έχει πάρα πολλά νουκλεόνια σθένους (λίγο πριν το κλείσιμο ενός φλοιού). Απλοϊκά θα λέγαμε, ότι όταν τα νουκλεόνια γίνονται πολλά, ψάχνουν τρόπο να καταλάβουν μεγαλύτερο όγκο κι έτσι ο πυρήνας γίνεται πεπλατυσμένος.

Θα πρέπει λοιπόν, να υπάρχει ένα μέτρο που να διακρίνει τα είδη παραμορφώσεως και την έντασή τους. Τα μέτρα αυτά συμβολίζονται β, γ . Είναι ορισμένα από το Γεωμετρικό Πρότυπο, που θα αναλυθεί αργότερα. Προς το παρόν μπορούμε να πούμε ότι η παράμετρος β δείχνει την απόκλιση του πυρήνα από την σφαιρικότητα. Επί παραδείγματι όταν $\beta=0$ ο πυρήνας είναι σφαιρικός, ενώ για $\beta > 0$ παραμορφωμένος. Η παράμετρος γ συμβολίζει μια γωνία, που δεν αναφέρεται στον πραγματικό καρτεσιανό χώρο. Παρόλα αυτά μας βοηθάει να διακρίνουμε τα είδη παραμορφώσεως.

Σχήμα 1.1: Παραμόρφωση του πυρήνα στο μέσο του φλοιού [4].

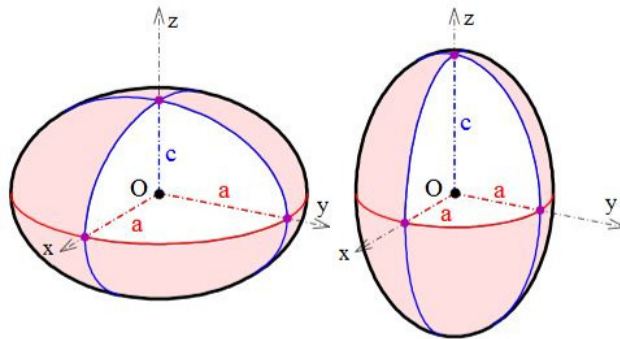


Ενώ η γ λαμβάνει οποιαδήποτε τιμή, έχει νόημα μόνο μέσα σε μια περίοδο $\gamma \in [0^\circ, 60^\circ]$. Επί πλέον όταν $\gamma = 0^\circ$ το σχήμα είναι επιμηκυμένο, ενώ όταν $\gamma = 60^\circ$ είναι πεπλατυσμένο. Φυσικά υπάρχει και η ενδιάμεση περιοχή, όπου συνυπάρχουν οι δύο παραμορφώσεις. Πιο συγκεκριμένα περίπου στο μέσο όπου $\gamma = 30^\circ$, ο πυρήνας καλείται τριαξονικός, διότι δεν είναι παραμορφωμένος γύρω από έναν άξονα.

1.3 ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ

Φανταζόμενοι τον πυρήνα σαν υγρή ασυμπίεστη σταγόνα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η επιφάνειά του πάλλεται [6]. Οι τρόποι ταλαντώσεως της επιφάνειας είναι φωνόνια, δηλαδή μηχανικά κύματα. Τα κύματα αυτά είναι προφανώς καμπυλωμένα, ώστε να κινούνται ες αεί στην επιφάνεια του πυρήνα. Εμείς αντί να μελετούμε την καμπυλωμένη διεύθυνση διαδόσεως αυτών των κυμάτων, επεξεργαζόμαστε την επίδρασή τους στην ακτίνα του πυρήνα, δηλαδή σε μία κάθετη διεύθυνση. Έτσι γίνεται πάντα με τα κύματα, αν η διεύθυνση διαδόσεως ενός επιπέδου κύματος είναι η x , εμείς μελετούμε την κάθετη σε αυτήν που καλούμε πλάτος ταλαντώσεως. Όπως στον ηλεκτρομαγνητισμό η χωρική κατανομή φορτίου αναλύεται σε σφαιρικές αρμονικές, με στόχο την απόδοση του δυναμικού ως επαλληλία πολυπόλων, έτσι και στην πυρηνική η μεταβαλλόμενη ακτίνα του παλλόμενου πυρήνα αναλύεται σε σφαιρικές αρμονικές με στόχο την απόδοση του φάσματος. Οι

Σχήμα 1.2: Πεπλατυσμένος και επιμηκυμένος πυρήνας, [5].



σφαιρικές αρμονικές χαρακτηρίζονται από δύο κβαντικούς αριθμούς λ' , μ' οι οποίοι συνήθως παραπέμπουν σε στροφομή και προβολή της στροφομής επί του άξονος z , κάτι που δεν ισχύει εδώ. Στο Γεωμετρικό Πρότυπο ο αριθμός λ' δείχνει το πλήθος των πόλων περί των οποίων παραμορφώνεται ο πυρήνας. Στα ελληνικά πόλος σημαίνει στήλος και όχι άκρο του στήλου όπως συνηθίζεται. Όταν λοιπόν το $\lambda'=1$, υπάρχει ένας άξονας, όταν $\lambda'=2$ υπάρχουν δύο άξονες σε σχήμα X κ.ο.κ. Τα ονόματα των τρόπων παραμορφώσεως της πυρηνικής ύλης ακολουθούν τον κανόνα $2^{\lambda'}$ -πολικός τρόπος. Κυρίαρχος στους πυρήνες είναι ο τετραπολικός τρόπος ($\lambda' = 2$). Προς αποφυγήν συγχύσεως τα επόμενα σχήματα απεικονίζουν τον πυρήνα παλλόμενο και όχι σε ισορροπία.

Ο μονοπολικός τρόπος παραμορφώσεως του πυρήνα αντιστοιχεί σε $\lambda'=0$. Σε αυτήν την κατάσταση η ακτίνα του πυρήνα αυξάνεται κατά μία σταθερή ποσότητα. Συνεπάγεται ότι η πυρηνική ύλη διογκώνεται. Δεδομένου όμως ότι η ύλη αυτή είναι ασυμπίεστη, η διογκωσή της θα απαιτούσε μεγάλα ποσά ενέργειας. Για αυτόν τον λόγο εγκαταλήφθηκε σε χαμηλές ενέργειες. Είναι δηλαδή μη ανιχνεύσιμος πειραματικά, ίσως και μη εφικτός για κάποιους πυρήνες.

Ο διπολικός τρόπος εγκαταλήφθηκε και αυτός, διότι αντιστοιχεί σε μία μετατόπιση στον χώρο του κέντρου μάζας του πυρήνα. Δηλαδή σε αυτόν τον τρόπο ο πυρήνας δεν πάλλεται, αλλά

Πίνακας 1.1: Είδη παραμορφώσεως

Τετραπολική επιμηκυμένος ή πεπλατυσμένος	Οκταπολική Αχλαδοειδής μορφή
--	--

μεταφέρεται. Τέτοιες κινήσεις στον χώρο δεν μελετώνται, διότι το φάσμα τους είναι συνεχές. Ένα κινούμενο αντικείμενο σε ελεύθερο χώρο από δυναμικό μπορεί να έχει οποιαδήποτε ενέργεια.

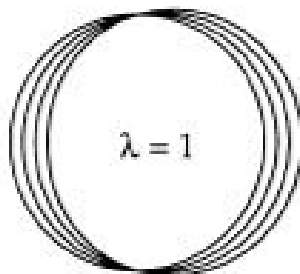
Συνεχίζουμε με τον τετραπολικό τρόπο με $l'=2$. Κατά αυτόν η ακτίνα παραμορφώνεται, ούτως ώστε να συμπιέζεται στα δύο άκρα του ενός πόλου και να επιμηκύνεται στα άκρα του άλλου πόλου. Από αυτόν τον τρόπο οι καταστάσεις ισορροπίας καταλήγουν να είναι σφαιρικές, επιμηκυμένες ή πεπλατυσμένες. Είναι σαφέστερα ο ισχυρότερος τρόπος παραμορφώσεως του πυρήνα. Το Γεωμετρικό Πρότυπο, που θα αναλυθεί προσεχώς, τον θεωρεί ισχυρότερο όλων.

Τέλος αξιοσημείωτος είναι και ο οκταπολικός τρόπος $l'=3$. Ο πυρήνας σε ισορροπία τότε καταλήγει με σχήμα αχλαδίου, δηλαδή διογκωμένος από την μία μεριά. Θυμίζει λίγο σε μορφή τους πολικούς ομοιοπολικούς δεσμούς, οι οποίοι αναπτύσσονται μεταξύ ατόμων με έντονη διαφορά ηλεκτραρνητικότητας. Το χαρακτηριστικό τους είναι, πως προκύπτουν ενεργειακές καταστάσεις αρνητικής ομοτιμίας, κάτι που δεν συμβαίνει στα τετράπολα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, αφού άρτιο πλήθος πόλων οδηγεί σε άρτιες κυματοσυναρτήσεις θετικής ομοτιμίας, ενώ περιττό πλήθος πόλων καταλήγει σε περιττές κυματοσυναρτήσεις.

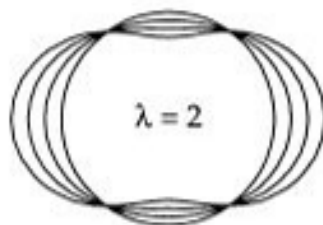
Τα υπόλοιπα πολύπολα θεωρητικά υπάρχουν, αλλά πρακτικά δεν έχουν πειραματικό ενδιαφέρον προς το παρόν. Το Γεωμετρικό Πρότυπο χρησιμοποιώντας ως κυρίαρχο τον τετραπολικό τρόπο και εξάγει ενεργειακές στάθμες θετικής ομοτιμίας και ποικίλων στροφορμών. Οι στάθμες αυτές ταξινομούνται σε ζώνες με ονόματα όπως θεμελιώδης, ζώνη β και ζώνη γ. Η φυσική σημασία των ζωνών δεν είναι κατανοητή πλήρως.

1.4 ΟΙ ΣΥΛΛΟΓΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΕΣ ΖΩΝΕΣ

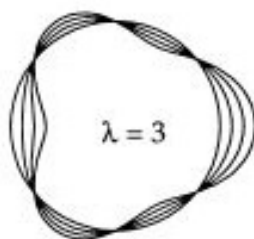
Στα πειράματα πυρηνικής δομής, οι Φυσικοί μετρούν ενέργειες φωτονίων ακτινών γ συνήθως. Οι ενέργειες αυτών των ακτινών ταυτίζονται με τις διαφορές ενεργειακών σταθμών συλλογικών



Σχήμα 1.3: Διπολική παραμόρφωση [6]



Σχήμα 1.4: Τετραπολική παραμόρφωση [6]



Σχήμα 1.5: Οκταπολική παραμόρφωση [6]

καταστάσεων του πυρήνα. Όταν ο πυρήνας είναι σχεδόν μαγικός, το ή τα ελάχιστα νουκλεόνια ευρισκόμενα εκτός του κλειστού φλοιού δίνουν τις ιδιότητές τους σε όλο τον πυρήνα. Σε αυτήν την περίπτωση το πειραματικώς μετρούμενο ταυτίζεται με την ενέργεια αποδιεγέρσεως του ενός νουκλεονίου. Σε πυρήνες όμως με μεγάλο πλήθος νουκλεονίων σθένους, που λέμε συλλογικούς, το πειραματικώς μετρούμενο αφορά στον πυρήνα συνολικά και δεν μπορεί να ταυτισθεί με μονοσωματιδιακές αποδιεγέρσεις. Όταν λοιπόν ομιλούμε για πειραματικά φάσματα, τότε αυτά κατά μεγάλο ποσοστό αναφέρονται σε συλλογικές αποδιεγέρσεις. Τα μονοσωματιδιακά πρότυπα ενώ είναι υψίστης σημασίας για τα φυσικά τους νοήματα, εξάγουν φάσματα πειραματικώς ανιχνεύσιμα μόνο σε μαγικούς ή σχεδόν μαγικούς πυρήνες. Το πλεονέκτημα των συλλογικών προτύπων είναι λοιπόν, πως τα φάσματά τους είναι ευθέως συγκρίσιμα με το πείραμα.

Οι συλλογικές ενεργειακές ζώνες διακρίνονται μεταξύ τους από έναν κβαντικό αριθμό K . Υπάρχει μία αμφιβολία για το τι εκφράζει αυτός ο αριθμός. Η επικρατούσα άποψη λέει ότι είναι απλά η προβολή της τροχιακής στροφορμής των συλλογικών καταστάσεων του πυρήνα (*Fig.8.2* της [1]). Σε πυρήνες με άρτιο πλήθος πρωτονίων και νετρονίων το K λαμβάνει τιμές 0,2,4,6,... Όταν $K=0$ οι ενεργειακές ζώνες λέγονται κατά σειρά θεμελιώδης (η χαμηλότερη), πρώτη β ζώνη, δεύτερη β ζώνη κ.τ.λ. Αν $K=2$ τότε μιλάμε για την πρώτη γ ζώνη, την δεύτερη γ κ.ο.κ. Οι υπόλοιπες απλά αναφέρονται με τον αριθμό του K , π.χ. η πρώτη $K=4$ ζώνη.

Υπάρχει μία ύποπτη συνωνυμία μεταξύ των ζωνών β , γ και των τιμών της παραμορφώσεως β, γ , η οποία χρήζει διερευνήσεως. Η πρώτη ζώνη β έχει ενεργειακές στάθμες εξαρτώμενες της παραμέτρου β και ανεξάρτητες της γωνίας γ . Το οποίο δηλώνει ταλάντωση μόνο ως προς την παράμετρο β . Πρακτικά ο πυρήνας κρατάει σταθερό το είδος της παραμορφώσεως του (π.χ. επιμηχυμένο), αλλά μεταβάλλει την επιμήχυνσή του. Στην αντίστροφη περίπτωση η πρώτη ζώνη γ εξαρτάται από την γωνία γ , αλλά όχι από την παράμετρο β . Δηλαδή τώρα αλλάζει ελαφρώς το είδος της παραμορφώσεως του πυρήνα καθώς πάλλεται, το οποίο δεικνύεται από την γωνία γ .

1.5 ΤΡΟΠΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΣ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ

Ας φανταστούμε τώρα μία σφαίρα χωρίς κάποιο διακριτικό πάνω της. Αν αυτή η σφαίρα περιστρέφεται δεν θα είμαστε σε θέση να το αντιληφθούμε, διότι δεν υπάρχει κάποια ιδιομορφία σε αυτήν, η οποία εμφανώς θα φαίνεται, πως αλλάζει θέση. Έτσι λοιπόν δεν έχει νόημα να μιλάμε για περιστροφικό τρόπο ταλαντώσεως ενός σφαιρικού πυρήνα. Οι σφαιρικοί συνεπώς πυρήνες έχουν δονητικό τρόπο ταλαντώσεως. Ως δόνηση θεωρείται η ακτινική διεύθυνση ταλαντώσεως. Δηλαδή ο πυρήνας πάλλεται λες και παλιρροϊκά κύματα σαρώνουν την επιφάνειά του. Αν ο πυρήνας είναι μαγικός ή έχει ελάχιστα νουκλεόνια σθένους, εργαζόμαστε με το Πρότυπο των Φλοιών. Το μέσο δυναμικό αλληλεπιδράσεως των νουκλεονίων των σφαιρικών πυρήνων είναι τρισδιάστατος απλός αρμονικός ταλαντωτής. Από τις προπτυχιακές μας σπουδές γνωρίζουμε ότι οι διαδοχικές ενεργειακές καταστάσεις του ταλαντωτή ισαπέχουν κατά σταθερό ποσό ενέργειας $\hbar\omega$. Όταν επομένως το φάσμα της θεμελιώδους ζώνης ενός άρτιου-άρτιου πυρήνα αποτελείται από ισαπέχουσες σχεδόν ενέργειες, τότε ο πυρήνας είναι σφαιρικός και δονητικός με λόγο $R_{4/2} < 2$.

Ας μη είμαστε όμως πολύ αυστηροί με την σφαιρικότητα. Σφαιρικός θεωρείται και ένας πυρήνας με λίγα νουκλεόνια σθένους και λόγο $R_{4/2} \approx 2$. Τότε πρέπει να συζητούμε τις μοσωματιδιακές καταστάσεις του Προτύπου των Φλοιών, για να εξάγουμε το συλλογικό φάσμα. Το Γεωμετρικό Πρότυπο ή το Πρότυπο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων είναι κατάλληλα για αυτήν την περίπτωση, διότι δίνουν εξ' αρχής το συλλογικό φάσμα. Η δυναμική συμμετρία αυτών των πυρήνων είναι η $U(5)$. Θα μιλήσουμε διεξοδικά για την συμμετρία $U(n)$ σε επόμενη παράγραφο. Επιπλέον με κώδικες γίνεται η σύζευξη των νουκλεονίων και με το Πρότυπο των Φλοιών. Απλά για μεγάλο αριθμό σωματιδίων, οι κώδικες αυτοί είναι χρονοβόροι.

Ένας όμως πυρήνας παραμορφωμένος δημιουργεί διακριτό ενεργειακό φάσμα, όταν περιστρέφεται. Από την Κβαντική Μηχανική ξέρουμε ότι η Χαμιλτονιανή ενός κβαντικού περιστροφέα είναι της μορφής $\hat{H} = \frac{I^2}{2I}$, όπου I η ροπή αδρανείας. Το φάσμα του είναι απλά $E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}$. Όταν συνεπώς οι ενεργειακές στάθμες ακολουθούν αυτόν τον κανόνα, το φάσμα λέγεται περιστροφικό. Η συμμετρία που αντιστοιχεί σε τέτοιες περιστροφικές Χαμιλτονιανές είναι η $SU(3)$, με την οποία θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα.

Φυσικά στην Φύση τίποτα δεν είναι απόλυτο. Οι περισσότεροι πυρήνες δεν είναι ούτε τέλειως δονητικοί ούτε τελείως περιστροφικοί. Ενδέχεται μάλιστα κάποιες ζώνες του ίδιου πυρήνα να είναι δονητικές και άλλες περιστροφικές. Αλλά επίσης μπορεί κάποια ζώνη να μη είναι τίποτα εκ των δύο.

Η επόμενη κατάσταση ταλαντώσεως που βρέθηκε είναι οι λεγόμενοι γ-ασταθείς πυρήνες. Το σύμβολο γ όπως αναφέραμε δείχνει μία γωνία που αντιστοιχεί στις ακραίες τιμές σε επιμηκυμένο ή πεπλατυσμένο πυρήνα. Σε αυτόν τον τρόπο ταλαντώσεως η τιμή της γ δεν έχει σταθερότητα. Έπεται, ότι πυρήνας αυτός αλλάζει από επιμηκυμένος σε πεπλατυσμένο και το αντίστροφο. Παρόλη την μεταβλητότητα της γ η τιμή της παραμέτρου β , που δείχνει την απόκλιση από την σφαιρικότητα, είναι σχεδόν σταθερή. Δηλαδή ενώ ο πυρήνας μεταμορφώνεται διαρκώς, η απόκλιση του από το σφαιρικό σχήμα είναι πάντα η ίδια. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι οι πυρήνες αυτοί ονομάστηκαν γ-ασταθείς, επειδή η παράμετρος του σχήματος γ είναι ελεύθερη. Οι πυρήνες αυτοί δεν πάλλονται γύρω από έναν άξονα συμμετρίας, για αυτό τους λέμε άξονικώς ασύμμετρους. Αποκαλύφθηκε ότι τα νουκλεονία τους έχουν πλήθος ελαφρώς μικρότερο από μαγικό αριθμό. Οι πυρήνες αυτοί είναι σαφώς παραμορφωμένοι, επομένως το φάσμα τους θα προσεγγίζει αυτό του περιστροφέα.

Πίνακας 1.2: Διακρίσεις πυρήνων

Μη συλλογικός Λίγα νουκλεόνια σθένους	Συλλογικός Πολλά νουκλεόνια σθένους
Σφαιρικός Δονητικό φάσμα με ισαπέχουσες στάθμες	Παραμορφωμένος Περιστροφικό φάσμα με αύξουσα απόσταση σταθμών

Κεφάλαιο 2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

Εδώ θα αναπτύξουμε όλες τις προαπαιτούμενες γνώσεις Κβαντικής, Θεωρίας Στροφών και Θεωρίας Ομάδος, για να καταλάβει κανείς τα αλγεβρικά πυρηνικά πρότυπα. Η ανάλυση έχει βασιστεί κυριώς στις αναφορές [7], [8].

2.1 ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΤΡΟΦΗΣ

Ο πίνακας στροφής R είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο στην Κβαντική και στην Σχετικότητα. Είναι ένας τελεστής ο οποίος δρώντας περιστρέφει μαθηματικά αντικείμενα. Αυτά διακρίνονται σε τρεις βασικές κατηγορίες: στα βαθμωτά μεγέθη, στα διανύσματα και στους τετραγωνικούς πίνακες.

Ένα βαθμωτό μέγεθος A είναι αναλλοίωτο υπό στροφές:

$$RA = A. \quad (2.1)$$

Οι συνιστώσες ενός διανυσματικού μεγέθους $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ μετασχηματίζονται ως εξής:

$$R\mathbf{r} = \mathbf{r}'. \quad (2.2)$$

Τέλος ένας τετραγωνικός πίνακας B μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$R^T B R = B', \quad (2.3)$$

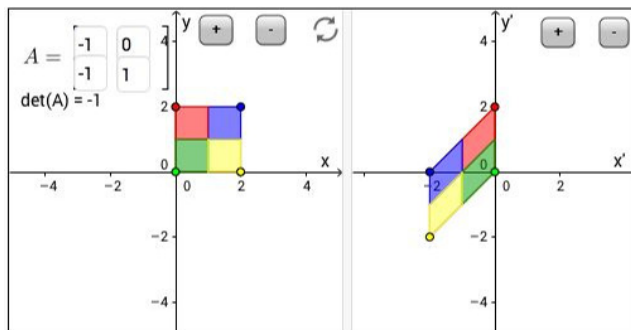
όπου το σύμβολο T δηλώνει τον ανάστροφο πίνακα.

Όλοι αυτοί οι μετασχηματισμοί έχουν διδαχθεί διεξοδικά στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, επομένως πρέπει να είναι γνώριμοι στον αναγνώστη. Στην Κβαντική τώρα που μας ενδιαφέρει, αντιμετωπίζουμε κυματοσυναρτήσεις και τελεστές της Χαμιλτονιανής. Όλες οι ιδιοσυναρτήσεις/κυματοσυναρτήσεις ανήκουν στην κατηγορία των διανυσματικών μεγεθών ή πιο σωστά των τανυστών πρώτης τάξεως, ενώ οι τελεστές πάσης φύσεως είναι τετραγωνικοί πίνακες (τανυστές δευτέρας τάξεως).

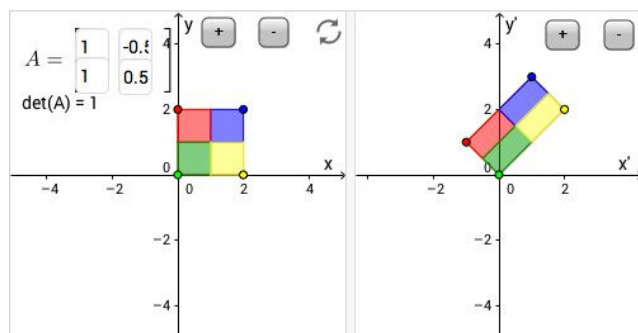
Οι μετασχηματισμοί πραγματοποιούνται από έναν τελεστή ως ακολούθως. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια βάση συντεταγμένων (x_1, x_2) ενός διδιάστατου Ευκλειδείου χώρου και ότι θέλουμε να αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα του χώρου σε νέα βάση (x'_1, x'_2) . Για να γίνει πιο χειροπιαστό θα μπορούσαμε να πούμε, ότι θέλουμε να περάσουμε από τις καρτεσιανές σε νέες καρτεσιανές περιστραμμένες ως προς τις αρχικές. Η μεταφορά αυτή γίνεται από έναν πίνακα *Jacobi*, ο οποίος έχει στοιχεία $J_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ και είναι διαστάσεως 2×2 στο εν λόγω παράδειγμα.

Σημαντικό ρόλο έχει η ορίζουσα αυτού του πίνακα. Κατ' αρχάς για να θεωρείται επιτρεπτός ο μετασχηματισμός θα πρέπει $\det(J) \neq 0$. Πέραν τούτου η απόλυτη τιμή της ορίζουσας καθορίζει, κατά πόσο διατηρείται ο όγκος (ή το εμβαδόν αν πρόκειται για διδιάστατο χώρο) ενός αντικειμένου στις νέες συντεταγμένες. Πιο συγκεκριμένα αν $|\det(J)| = 1$, το σχήμα θα διατηρήσει το εμβαδόν/όγκο του, ενώ αν $|\det(J)| = 2$, το σχήμα θα διπλασιαστεί.

Όμως σημαντικό ρόλο έχει και το πρόσημο της ορίζουσας του μετασχηματισμού. Αν $\det(J) > 0$, τότε το σχήμα περιστρέφεται διατηρώντας τον προσανατολισμό του, ενώ όταν $\det(J) < 0$, το σχήμα κατοπτρίζεται και έπειτα περιστρέφεται. Προς καλλίτερη κατανόηση παραθέτω τα αντίστοιχα σχήματα (σελ. 25). Σε αυτά φαίνεται ότι όταν η ορίζουσα είναι θετική, η σειρά των χρωμάτων πράσινο, κόκκινο, μωβ, κίτρινο είναι σύμφωνη με τους δείκτες του ωρολογίου, ενώ στο σχήμα που αντιστοιχεί στην αρνητική ορίζουσα, η αλληλουχία των χρωμάτων γίνεται αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου. Αυτό ακριβώς συμβαίνει με την πράξη του κατοπτρισμού. Σας ενθαρρύνω, να πράξετε το πείραμα αυτό μπροστά από έναν καθρέπτη. Αν η ορίζουσα ισούται με +1, τότε η ομοτιμία διατηρείται έπειτα από τον μετασχηματισμό και αυτός καλείται γνήσιος, ενώ όταν η ορίζουσα είναι -1, αλλάζει η ομοτιμία και ο μετασχηματισμός λέγεται μη γνήσιος.



Σχήμα 2.1: Στροφή έπειτα από κατοπτρισμό [9].

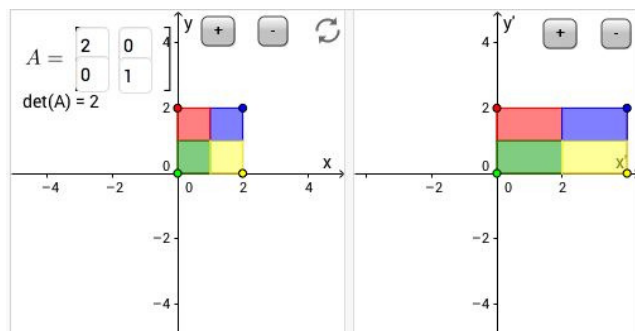


Σχήμα 2.2: Στροφή δίχως κατοπτρισμό [9].

Ιδιαίτερη σημασία στην πυρηνική έχουν οι μετασχηματισμοί με ορίζουσα $|det(J)| = 1$. Σε αυτούς ο όγκος ενός αντικειμένου, που περιγράφεται από τον συναρτησιακό χώρο, διατηρείται σταθερός. Ακολούθως θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με την ομάδα $SU(n)$. Η ομάδα αυτήν αποτελείται από γνήσιες στροφές.

2.1.1 ΚΛΑΣΙΚΗ ΣΤΡΟΦΗ

Είμαστε στον ευκλείδειο χώρο, όπου ένα σημείο του έχει συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) και διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$. Θα μελετήσουμε τους δυνατούς τρόπους περιστροφής αυτού του



Σχήμα 2.3: Μεγέθυνση [9].

συστήματος. Ο πρώτος είναι η παθητική περιστροφή, όπου περιστρέφουμε το σύστημα συντεταγμένων, καθώς το φυσικό σύστημα μένει, ως έχει. Ο δεύτερος είναι η ενεργή περιστροφή, όπου στρέφεται το ίδιο το φυσικό σύστημα. Οι αποστάσεις και οι γωνίες είναι αναλλοίωτες κατά τους δύο δυνατούς τρόπους περιστροφής. Η βασική διαφορά των δυο θεωρήσεων είναι η εξής: στην μεν ενεργή έχουμε μια βάση διανυσμάτων $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, αλλά δυο τριάδες συντεταγμένων (η πρώτη αντιστοιχεί στο σημείο προ στροφής και η δεύτερη στο σημείο μετά στροφής)· στην δε παθητική έχουμε δύο βάσεις διανυσμάτων και δύο τριάδες συντεταγμένων, οι οποίες περιγράφουν το ίδιο σημείο ως προς τις διαφορετικές βάσεις.

Η περιστροφή εκτελείται από έναν τελεστή \hat{R} . Ο τελεστής αυτός σε αναπαράσταση πίνακα έχει στοιχεία που δίνονται από την:

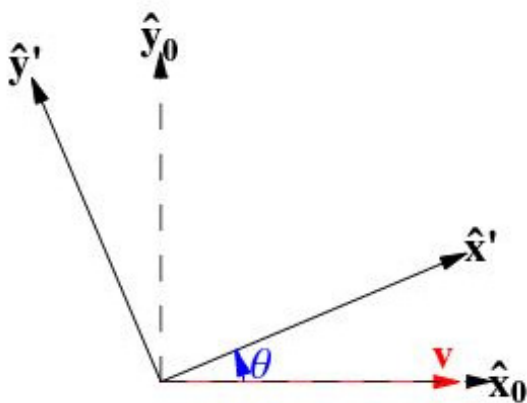
$$R_{ij} = \langle \hat{e}_i | \hat{R} | \hat{e}_j \rangle. \quad (2.4)$$

Οι συνιστώσες ενός διανύσματος μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$x'_i = \sum_j R_{ij} x_j. \quad (2.5)$$

Τα διανύσματα της βάσης μετασχηματίζονται ως:

$$\hat{e}'_i = R \hat{e}_i. \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.4: Παθητική στροφή

Σε κάθε θεωρήση εκ των δυο ένα ευκλείδειο διάνυσμα περιστρέφεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{r}' = R\mathbf{r}. \quad (2.7)$$

Στην ενεργή στροφή η ανωτέρω σχέση δηλώνει την σύνδεση των συντεταγμένων του νέου σημείου μετά την στροφή με αυτές του παλαιού σημείου προ στροφής. Στην παθητική στροφή η ίδια σχέση αναφέρεται στο πώς εκφράζονται οι συντεταγμένες του ίδιου σημείου στις δύο διαφορετικές βάσεις.

Για να περιγράψουμε την στροφή ενός συστήματος συντεταγμένων ή ενός φυσικού συστήματος αρκούν δυο πληροφορίες: η πρώτη είναι ο άξονας περιστροφής ο οποίος χαρακτηρίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} , ενώ η δεύτερη από τη γωνία περιστροφής θ . Είναι αντιληπτό, ότι οποιαδήποτε γωνία περιστροφής μπορεί να συντεθεί από απειραστά μικρές γωνίες. Αρκεί λοιπόν να περιγράψουμε την στροφή ενός συστήματος κατά μια απειροστή γωνία $\theta \ll 1$. Ο πίνακας της απειροελάχιστης περιστροφής είναι:

$$R = I + \theta \hat{n} \cdot \mathbf{L}, \quad (2.8)$$

όπου \mathbf{L} είναι το διάνυσμα της στροφορμής κλασικά και I το ταυτοτικό στοιχείο. Αυτός ο τελεστής χρησιμεύει μόνο για στροφές στον Ευκλείδειο χώρο, δηλαδή περιστρέφει τα αντικείμενα κατά την κλασική έννοια.

2.1.2 ΓΩΝΙΕΣ *EULER*

Στην παθητική περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων προκύπτουν δυο διαφορετικά συστήματα αξόνων, το ένα περιστραμμένο ως προς το άλλο. Οι γωνίες *Euler* είναι ένας τρόπος για να περιγράψουμε τον προσανατολισμό του νέου συστήματος συντεταγμένων ως προς το παλαιό.

Η γωνία α συμβολίζει την περιστροφή του συστήματος περί του αξόνου $\hat{\mathbf{z}}$ κατά γωνία α . Η γωνία β εκφράζει την περιστροφή του συστήματος περί του $\hat{\mathbf{y}}$ κατά γωνία β . Αν αυτές οι στροφές γίνουν διαδοχικά με την εξής σειρά:

$$R_1 = R(\hat{\mathbf{z}}, \alpha)R(\hat{\mathbf{y}}, \beta), \quad (2.9)$$

προκύπτει ένας νέος άξονας $\hat{\mathbf{z}}'$. Οι νέοι άξονες $\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}'$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε άξονες αποτελούν ένα τρισσορθογώνιο σύστημα μαζί με τον $\hat{\mathbf{z}}'$. Επειδή αυτή η αοριστία μας δυσαρεστεί, ορίζουμε και μια τρίτη γωνία γ , η οποία καθορίζει τον ακριβή προσανατολισμό των $\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}'$, και είναι η περιστροφή κατά γωνία γ περί του $\hat{\mathbf{z}}'$. Έτσι λοιπόν οι γωνίες *Euler* είναι οι ακόλουθες επάλληλες στροφές:

$$R = R(\hat{\mathbf{z}}', \gamma)R(\hat{\mathbf{z}}, \alpha)R(\hat{\mathbf{y}}, \beta) = R(\hat{\mathbf{z}}', \gamma)R_1. \quad (2.10)$$

Στην ανωτέρω έκφραση παρατηρούμε ότι συνυπάρχουν στροφές περί του παλαιού και καινού συστήματος συντεταγμένων. Ωφέλιμο θα ήταν να έχουμε μια έκφραση, που να δίνει οδηγίες για τις απαραίτητες στροφές ως προς το παλαιό σύστημα αξόνων. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια τέτοια σχέση με την βοήθεια του αντιστρόφου πίνακα:

$$R = R(\hat{\mathbf{z}}', \gamma)R_1 = R_1(R_1^{-1}R(\hat{\mathbf{z}}', \gamma)R_1) \quad (2.11)$$

Η πράξη $R_1^{-1}R(\hat{\mathbf{z}}', \gamma)R_1$ λέγεται μετασχηματισμός ομοιότητας και δηλώνει ότι ο πίνακας $R(\hat{\mathbf{z}}', \gamma)$ αλλάζει βάση και έτσι επιστρέφει από την νέα στην παλαιά. Εν τέλει λοιπόν η στροφή μπορεί να εκφραστεί μόνο συναρτήσει του παλαιού συστήματος:

$$R = R_1R(\hat{\mathbf{z}}, \gamma) = R(\hat{\mathbf{z}}, \alpha)R(\hat{\mathbf{y}}, \beta)R(\hat{\mathbf{z}}, \gamma). \quad (2.12)$$

Απλή εφαρμογή των ανωτέρω είναι η περιστροφή των αξόνων $x - y$ κατά γωνία θ . Αν αναλύσει κανείς το διάνυσμα \hat{x}' σε συνιστώσες θα διαπιστώσει ότι $\hat{x}' = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$. Παρομοίως $\hat{y}' = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$. Έπεται λοιπόν ότι ο πίνακας της περιστροφής σε δύο διαστάσεις είναι:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Βάσει αυτού οι πίνακες των περιστροφών περί των γωνιών *Euler* είναι:

$$R(\hat{z}, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$R(\hat{y}, \beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$R(\hat{x}, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

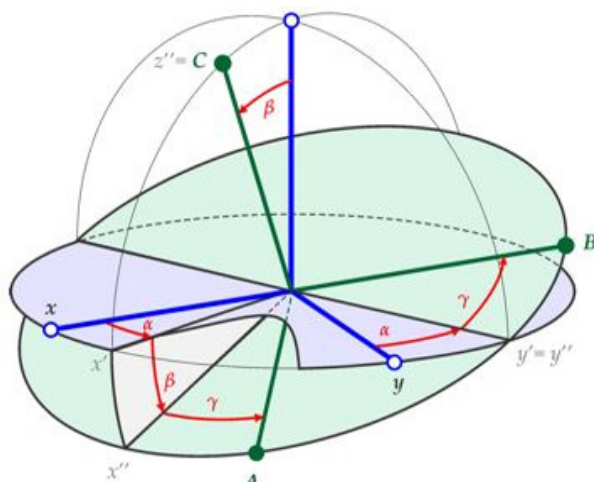
Έτσι τελικά ο πίνακας της περιστροφής σε τρεις διαστάσεις είναι ο:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma & \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma & \cos\alpha \sin\beta \\ -\sin\alpha \cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha \sin\gamma & -\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma & -\sin\alpha \sin\beta \\ -\sin\beta \cos\gamma & -\sin\beta \sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Ο πίνακας αυτός είναι ορθογώνιος με ορίζουσα $\det R = 1$.

2.1.3 ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΣΤΡΟΦΕΣ

Αρχικά ας θυμηθούμε τις ιδιότητες των ορθογωνίων πινάκων. Τα στοιχεία των πινάκων αυτών είναι υποχρεωτικά πραγματικοί αριθμοί εν αντιθέσει με τα στοιχεία των μοναδιακών πινάκων, που είναι εν γένει μιγαδικά. Επιπλέον $|\det O| = 1$, όπως και στους μοναδιακούς πίνακες. Για να κατασκευάσουμε έναν ορθογώνιο τετραγωνικό πίνακα $n \times n$, αρκεί να βρούμε μία n -διάστατη ορθοκανονική βάση διανυσμάτων $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ και να τοποθετήσουμε τις συνιστώσες αυτών στις γραμμές ενός πίνακα. Δηλαδή αν $\mathbf{x}_1 = (a, b, c)$ και $\mathbf{x}_2 = (d, e, f)$ τότε ισχύει $|\mathbf{x}_1|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ λόγω κανονικότητας και $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = ad + be + cf = 0$ λόγω ορθογωνιότητας. Άμεση συνέπεια των ανωτέρω είναι πως, όταν ένας ορθογώνιος πίνακας δρα σε ένα διάνυσμα



Σχήμα 2.5: Γωνίες Euler

$O\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, τότε $|\mathbf{y}| = |\mathbf{y}'|$. Δηλαδή οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί διατηρούν τα μέτρα άρα και τα εσωτερικά γινόμενα. Επιπλέον ο ανάστροφος ενός ορθογωνίου πίνακα ισούται με τον αντίστροφό του $O^T = O^{-1}$. Θυμίζω ότι ο ανάστροφος πίνακας κατασκευάζεται από τον ορθό αν ανταλλάξουμε τις γραμμές με τις στήλες:

$$O = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow O^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Συνοψίζω λοιπόν στο ότι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί όπως και οι μοναδιακοί έχουν ορίζουσα ± 1 και ότι διατηρούν τα εσωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων στα οποία δρουν. Η διαφορά τους είναι ότι οι ορθογώνιοι αποτελούνται από πραγματικά στοιχεία, ενώ οι μοναδιακοί από μιγαδικά στοιχεία· εξ αυτού $O^T = O^\dagger$. Συνεπώς όπως στους μοναδιακούς ισχύει $U^\dagger U = I$, έτσι και στους ορθογωνίους $O^\dagger O = O^T O = O^{-1} O = I$.

2.1.4 ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΣΤΡΟΦΗ

Αν θέλουμε να δούμε πώς περιστρέφονται τα στοιχεία ενός συναρτησιακού χώρου *Hilbert* τότε θα πρέπει να κατασκευάσουμε έναν δευτερογενή τελεστή στροφής $U(R)$. Η διαφορά του με τον τελεστή R είναι, πως ο $U(R)$ περιστρέφει κβαντικές καταστάσεις. Ο τελεστής αυτός θα πρέπει

να διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα των κυματοσυναρτήσεων, διότι αυτό που έχει φυσική σημασία είναι η πυκνότητα πιθανότητας· κατά συνέπεια το μέτρο της κυματοσυναρτήσεως θα πρέπει να είναι αναλλοίωτο υπό στροφές. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων/συναρτήσεων του συναρτησιακού χώρου πρέπει να μένει αναλλοίωτο υπό στροφές. Οι μετασχηματισμοί που επιτυγχάνουν αυτό είναι οι μοναδιαίοι (*unitary*):

$$U(R)^{-1} = U(R)^\dagger. \quad (2.19)$$

Αν στην ευκλείδεια στροφή το ταυτοτικό στοιχείο είναι το I , δηλαδή το στοιχείο που δεν εκτελεί καμία περιστροφή, τότε ισοδύναμα στην κβαντική στροφή θα ισχύει:

$$U(I) = \hat{1}. \quad (2.20)$$

Επιπλέον αν μια ευκλείδεια στροφή προκαλείται από διαδοχικές στροφές, δηλαδή $R = R_1 R_2$, τότε το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για την κβαντική στροφή:

$$U(R) = U(R_1 R_2) = U(R_1)U(R_2). \quad (2.21)$$

Αυτό πρακτικά δηλώνει, ότι οι κβαντικές στροφές υπακούουν στον ίδιο πίνακα πολλαπλασιασμού με τις ευκλείδειες στροφές. Έτσι λοιπόν η ανεύρεση μιας ευκλείδειας στροφής που εκφράζεται από τον πίνακα R^{-1} , ισοδυναμεί με την ανεύρεση μιας κβαντικής στροφής:

$$U(R^{-1}) = U(R)^{-1} = U(R)^\dagger. \quad (2.22)$$

Η μορφή του πίνακα στροφής για απειροελάχιστες στροφές ϑ περί αξόνου \hat{n} είναι:

$$U(R) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \theta \hat{n} \cdot \hat{\mathbf{J}} \quad (2.23)$$

Υπάρχει αντίστοιχη σχέση, η οποία εκφράζει τον εν λόγω πίνακα για κανονική κι όχι απειροελάχιστη γωνία περιστροφής ϑ και είναι η:

$$U(\hat{n}, \theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta (\hat{n} \cdot \hat{\mathbf{J}})} \quad (2.24)$$

Η χρήση αυτού του πίνακα ποικίλει αναλόγως του αντικειμένου που θέλουμε να μετατρέψουμε. Αν το μέγεθος αυτό αναπαριστάται από βαθμωτό τελεστή (πίνακας 1×1), ο πίνακάς του μένει αναλλοίωτος υπό στροφές, τουτ' έστι:

$$\langle \psi' | \hat{T}' | \psi' \rangle = \langle \psi | \hat{T} | \psi \rangle. \quad (2.25)$$

Αν το μέγεθος αναπαριστάται από διάνυσμα (πίνακας $n \times 1$), όπως είναι οι κυματοσυναρτήσεις τότε μετασχηματίζεται ως ακολούθως:

$$|\psi'\rangle = U(R)|\psi\rangle. \quad (2.26)$$

Ενώ αν είναι τανυστής δευτέρας τάξεως (πίνακας $n \times n$) όπως η Χαμιλτονιανή τότε μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\hat{T}' = U(R)\hat{T}U^\dagger(R). \quad (2.27)$$

Και στις τρεις περιπτώσεις οι αναμενόμενες τιμές μέτρησης των φυσικών μεγεθών θα πρέπει να είναι αναλλοίωτες υπό στροφή. Δηλαδή μπορεί να αλλάζουν τα στοιχεία του πίνακα T για παράδειγμα, αλλά οι ιδιοτιμές του μένουν οι ίδιες! Επίσης μπορεί να αλλάζουν οι συνιστώσες του διανύσματος $|\psi\rangle$, αλλά η πυκνότητα πιθανότητας μένει η ίδια. Αυτό επιτυγχάνεται αφού οι μοναδιαίοι τελεστές αφήνουν το εσωτερικό γινόμενο αναλλοίωτο $\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$.

Στην διατριβή αυτή θα ασχοληθούμε με τους πυρήνες που έχουν $U(3)$ συμμετρία. Οι πυρήνες αυτοί αποτελούνται από σωματίδια σθένους, που καταλαμβάνουν τροχιακά του τρισδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή. Αν τα τροχιακά αυτά έχουν ίδιο κύριο κβαντικό αριθμό N (συνολικό πλήθος κβάντων του ταλαντωτή), τότε έχουν ίδιο μέγεθος. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί ο συναρτησιακός χώρος, να περιστραφεί, ώστε τα παλαιά να συμπεσουν με τα νέα διανύσματα. Έχουν δηλαδή $U(n)$ συμμετρία. Αν όμως ένα ή πολλά τροχιακά έχει μεγαλύτερο N , τότε αυτό το τροχιακό έπειτα από την περιστροφή δεν θα συνέπιπτε με κανένα άλλο. Αρκεί λοιπόν για να έχει μία οικογένεια τροχιακών του 3Δ ταλαντωτή $U(n)$ συμμετρία, να αποτελείται από τροχιακά κοινού N .

2.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ YOUNG ΤΗΣ $U(n)$

Από το προπτυχιακά μας χρόνια είμαστε όλοι εξοικειωμένοι με την θεμελιώδη κυματοσυνάρτηση δυο αλληλεπιδρώντων ταυτοτικών στοιχειωδών σωματιδίων. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε αν αυτά είναι μποζόνια ή φερμιόνια, διότι στην μεν περίπτωση η κυματοσυνάρτηση θα είναι συμμετρική, ενώ στην δε αντισυμμετρική. Θυμόμαστε επίσης ότι η κυματοσυνάρτηση είναι το γινόμενο ενός χωρικού μέρους επί έναν σπίνορα $\Psi_{ολικη} = \psi X$. Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει συζευγνύουμε πρωτόνια μεταξύ τους και νετρόνια μεταξύ τους. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι η συνολική κυματοσυνάρτηση αντισυμμετρική. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής: α) αν η κυματοσυνάρτηση χώρου είναι πλήρως συμμετρική, τότε ο σπίνορας θα είναι είναι πλήρως αντισυμμετρικός, β) αν η ψ είναι πλήρως αντισυμμετρική, ο σπίνορας είναι συμμετρικός. Όταν έχουμε πολλά σωματίδια όμως η ψ μπορεί να είναι μερικώς αντισυμμετρική και ο σπίνορας μερικώς συμμετρικός, ώστε το σύνολό τους να είναι αντισυμμετρικό εν τέλει. Αυτή η διαδικασία είναι χρονοβόρα και δυσνόητη για αυτό θα αναπτύξουμε βήμα βήμα τους κανόνες.

Αρχικά έχουμε ένα πλήθος N ταυτοτικών σωματιδίων τα οποία πρέπει να συζεύξουμε ώστε η συνολική κυματοσυνάρτηση να είναι αντισυμμετρική. Όταν η συμμετρία είναι $U(n)$ κάθε σωματίδιο σε ένα διάγραμμα *Young* συμβολίζεται με ένα κουτάκι. Αν το σωματίδιο είναι στην κατάσταση a , θα γράφουμε \boxed{a} , ενώ αν είναι στην b θα συμβολίζουμε με \boxed{b} . Δηλαδή στο παράδειγμά μας έχουμε δύο δυνατές μονοσωματιδιακές καταστάσεις, άρα η συμμετρία είναι $U(2)$. Σε αυτές θα επιχειρήσουμε να τοποθετήσουμε δύο σωματίδια, άρα θα έχουμε δύο κουτάκια. Οι δυνατοί συμμετρικοί συνδυασμοί στην ανταλλαγή των δύο σωματιδίων είναι οι $\psi_1(a)\psi_2(a)$, $\sqrt{\frac{1}{2}}(\psi_1(a)\psi_2(b) + \psi_1(b)\psi_2(a))$, $\psi_1(b)\psi_2(b)$. Τα διαγράμματα *Young* αυτών είναι τα ακόλουθα: $\boxed{a}\boxed{a}$, $\boxed{a}\boxed{b}$, $\boxed{b}\boxed{b}$. Παρατηρούμε ότι ο συμβολισμός αυτός είναι απλούστερος της κανονικής γραφής, για αυτό και επινοήθηκε. Συνεχίζουμε με την αντισυμμετρική κυματοσυνάρτηση $\sqrt{\frac{1}{2}}(\psi_1(a)\psi_2(b) - \psi_1(b)\psi_2(a))$ και το διάγραμμα αυτής $\begin{array}{|c|} \hline \boxed{a} \\ \hline \boxed{b} \\ \hline \end{array}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όταν συμμετροποιούμε δύο σωματίδια το διάγραμμα είναι μια γραμμή, ενώ όταν αντισυμμετροποιούμε είναι στήλη.

Τα ανωτέρω διαγράμματα προέκυψαν αβίαστα χωρίς κανόνες. Όταν όμως έχουμε N σωματίδια σε n καταστάσεις και εμπλέκεται η απαγορευτική αρχή του *Pauli*, τότε χρειαζόμαστε κανόνες. Επειδή το αντικείμενο προκαλεί σύγχυση θα το κτίσουμε σταδιακά. Αρχικά θα μάθουμε να τοποθετούμε τα άδεια κουτάκια. Οι κανόνες αυτού του βήματος είναι:

1. Αν το πλήθος των κουτιών στην πρώτη γραμμή είναι f_1 , στην δεύτερη f_2 κ.ο.κ. θα πρέπει:

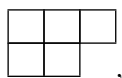
$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots \geq f_v \quad (2.28)$$

Συντομογραφία του διαγράμματος που προκύπτει είναι η $[f_1, f_2, \dots, f_v]$.

2. Το άθροισμα όλων των κουτιών ισούται με το πλήθος των σωματιδίων:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_v = N. \quad (2.29)$$

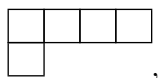
Εξαιτίας του πρώτου κανόνα σωστό είναι το διάγραμμα $[3,2]$:



αλλά λάθος είναι το $[2,3]$:



Όσον αφορά στον δεύτερο κανόνα, αν έχουμε 5 σωματίδια σωστό είναι το $[4,1]$:



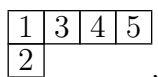
ενώ λάθος θα ήταν το $[4,2]$:



Σε δεύτερη φάση θα μάθουμε να τοποθετούμε αριθμούς στα κουτιά. Ο κανόνας είναι:

3. Αν το κάθε σωματίδιο-κουτί φέρει έναν αριθμό $1, 2, 3, \dots$, όπως οι παίκτες μίας ποδοσφαιρικής ομάδος, τότε σε κάθε στήλη και γραμμή οι αριθμοί αυτοί θα πρέπει να αυξάνονται.

Έτσι λοιπόν είναι σωστό



λάθος όμως θα ήταν το:

1	3	2	4
5			

Το πλήθος των δυνατών συνδυασμών δίνεται από τον αλγόριθμο *hook length*, ο οποίος λέει πως πρέπει σε κάθε κουτάκι να σημειώσουμε το άθροισμα της μονάδος με το πλήθος των κουτιών που είναι δεξιά του και κάτω του. Στην συνέχεια πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς αυτούς και να διαιρέσουμε το $N!$ με το γινόμενό τους. Εφαρμογή του κανόνα είναι η εξής:

5	3	2	1
1			

Το γινόμενο των αριθμών αυτών είναι $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 30$. Άρα το πλήθος των δυνατών συνδυασμών είναι $\frac{5!}{30} = 4$.

Τέλος θα μάθουμε να τοποθετούμε χβαντικές καταστάσεις στα κουτάκια. Αν η άλγεβρα είναι η $U(n)$, τότε έχουμε n πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορούμε να τοποθετήσουμε τα σωματίδιά μας. Οι κανόνες για αυτές είναι:

4. Σε μια στήλη μπορούμε να έχουμε μόνο διαφορετικές καταστάσεις, διότι οι στήλες δηλώνουν αντισυμμετροποίηση και η Απαγορευτική Αρχή του *Pauli* δεν επιτρέπει επαναλαμβανόμενες καταστάσεις. Αυτός ο κανόνας εφαρμόζεται μόνο όταν η κατάσταση ταυτίζεται με κάποιο φερμιόνιο.
5. Αν αντιμεταθέσουμε δύο καταστάσεις της ίδιας γραμμής θα προκύψει διάγραμμα ισοδύναμο με το αρχικό, διότι αυτές είναι συμμετρικές.

Δηλαδή αν έχουμε τρεις δυνατές καταστάσεις a, b, c σωστό είναι το:

a	a	c	b
b			

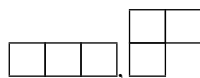
ενώ θα ήταν λάθος το:

a	b	c	a
a			

Επιπλέον οι ακόλουθες καταστάσεις είναι ισοδύναμες:

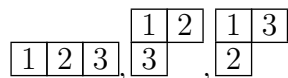
b	a	b	b	a
---	---	---	---	---

Εν συνεχεία θα εφαρμόσουμε αυτούς τους κανόνες σε παράδειγμα με δύο καταστάσεις και τρία σωματίδια. Ας αρχίσουμε με τα κενά κουτάκια:



Αν αριθμήσουμε το διάγραμμα $[3]$ θα προκύψουν $\frac{3!}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$ διαγράμματα. Ενώ για το διάγραμμα $[21]$ θα έχουμε $\frac{3!}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 2$ συνδυασμούς.

Όντως η αρίθμηση δίνει:



Η πρώτη αρίθμηση δηλώνει ότι το σωματίδιο 1 είναι συμμετροποιημένο με το 2 και το 2 με το 3. Αυτή είναι μία πλήρως συμμετρική κατάσταση. Η δεύτερη αρίθμηση δηλώνει ότι το σωματίδιο 1 είναι συμμετρικό με το 2, ενώ δεν υπάρχει συμμετρία με το 3. Η τελευταία αρίθμηση δηλώνει ότι το 1 είναι αντισυμμετρικό του 2, αλλά δεν υπάρχει συμμετρία με το 3.

Τέλος θα τοποθετήσουμε χβαντικές καταστάσεις. Οι συμμετρικές είναι:

$$\begin{array}{|c|c|c|}, \text{ με } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \text{ και } \psi = \psi_1(a)\psi_2(a)\psi_3(a),$$

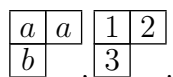
$$\begin{array}{|c|c|c|}, \text{ με } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \text{ και } \psi = \psi_1(b)\psi_2(b)\psi_3(b),$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \psi = \sqrt{\frac{1}{3}}(\psi_1(a)\psi_2(a)\psi_3(b) + \psi_1(a)\psi_2(b)\psi_3(a) + \psi_1(b)\psi_2(a)\psi_3(a)),$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \psi = \sqrt{\frac{1}{3}}(\psi_1(b)\psi_2(b)\psi_3(a) + \psi_1(b)\psi_2(a)\psi_3(b) + \psi_1(a)\psi_2(b)\psi_3(b)).$$

Είναι πρόκληση να αντιμετωπίσετε τα σωματίδια $1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 3$ για να ελέγξετε αν η τελική κατάσταση ισοδυναμεί της αρχικής. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ένα διάγραμμα *Young* είναι ένας κομψός τρόπος γραφής της κυματοσυναρτήσεως.

Συνεχίζουμε με μία μερικώς συμμετροποιημένη:



Την εξαγωγή της κυματοσυναρτήσεως της θα την δείξω διεξοδικά. Κατ' αρχάς αυτή θα είναι γραμμικός συνδυασμός των ίδιων καταστάσεων που εμφανίστηκαν στο $\begin{bmatrix} a & a & b \end{bmatrix}$, δηλαδή:

$$\psi = c_1\psi_1(a)\psi_2(a)\psi_3(b) + c_2\psi_1(a)\psi_2(b)\psi_3(a) + c_3\psi_1(b)\psi_2(a)\psi_3(a)$$

Το αριθμημένο διάγραμμα δείχνει ότι τα 1,2 είναι συμμετρικά στην εναλλαγή τους. Αν λοιπόν τα ανταλλάξουμε θα συμβούν τα ακόλουθα:

$$A = \psi_1(a)\psi_2(a)\psi_3(b) \leftrightarrow \psi_2(a)\psi_1(a)\psi_3(b) = A.$$

Εφόσον προκύπτει η ίδια κατάσταση μετά την ανταλλαγή, αυτή είναι ήδη συμμετροποιημένη. Με τις άλλες δύο έχουμε:

$$B = \psi_1(a)\psi_2(b)\psi_3(a) \leftrightarrow \psi_2(a)\psi_1(b)\psi_3(a) = C, C = \psi_1(b)\psi_2(a)\psi_3(a) \leftrightarrow \psi_2(b)\psi_1(a)\psi_3(a) = B.$$

Αφού αυτές μεταμορφώνονται η μία στην άλλη θα πρέπει $c_2 = c_3$, ώστε να είναι συμμετρική η ψ . Λόγω κανονικοποίησης όμως $|c_1|^2 + 2|c_2|^2 = 1$. Τέλος υπολογίζουμε ότι οι κυματοσυναρτήσεις των διαγραμμάτων $\begin{bmatrix} a & a & b \\ b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & a \\ b \end{bmatrix}$ θα πρέπει να είναι ορθογώνιες, δηλαδή $c_1 + 2c_2 = 0$. Μια λύση του συστήματος είναι $c_1 = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $c_2 = \frac{-1}{\sqrt{6}}$. Με αντίστοιχο κόπο προκύπτουν όλες οι άλλες μερικώς συμμετροποιημένες καταστάσεις. Ισχύει εν τέλη

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \psi = \frac{2}{\sqrt{6}}\psi_1(a)\psi_2(a)\psi_3(b) - \frac{1}{\sqrt{6}}\psi_1(a)\psi_2(b)\psi_3(a) - \frac{1}{\sqrt{6}}\psi_1(b)\psi_2(a)\psi_3(a).$$

Παρατηρήστε πως όντως αν ανταλλάξουμε τα 1 \leftrightarrow 3 δεν προκύπτει αντισυμμετρική. Το αφήνω στην δική σας όρεξη να συνεχίσετε με την παραγωγή τους.

2.3 ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Τα περισσότερα βιβλία μαθηματικών και δη θεωρίας ομάδων, χρησιμοποιούν αρκετούς ορισμούς, οι οποίοι αποθαρρύνουν έναν νέο φοιτητή. Για αυτό συστήνω ανεπιφύλακτα το βιβλίο του *H.Lipkin* με τίτλο *Lie groups for pedestrians*. Εκεί αντί να αρχίσει με ορισμούς για το τί είναι μία άλγεβρα

Lie, αναλύει μία γνώριμη διαδικασία για τους τελεστές της στροφορμής, οι οποίοι συνδέονται με την ομάδα $SO(3)$.

1. Κλείσιμο Άλγεβρας

Αρχίζουμε με τους γνωστούς μεταθέτες:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hat{L}_z, [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hat{L}_x, [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hat{L}_y. \quad (2.30)$$

Αν συλλέξουμε τους τελεστές $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ σε μία ομάδα παρατηρούμε ότι ο μεταθέτης δύο εξ' αυτών σου δίνει έναν τελεστή της ομάδος. Αυτό ακριβώς σημαίνει η φράση *οι τελεστές αυτοί κλείνουν μία άλγεβρα*. Οι τελεστές που κλείνουν μία άλγεβρα παράγονται από κάποιους άλλους πίνακες που λέγονται γεννήτορες αυτών.

2. Εύρεση Γεννητόρων

Επι παραδείγματι οι τρεις προβολές της στροφορμής παράγονται από τον πίνακα στροφής σε τρεις διαστάσεις ως ακολούθως: Η πιο φημισμένη ορθογώνια ομάδα είναι η $SO(3)$ και καλείται άλγεβρα των στροφορμών σε τρεις διαστάσεις. Οι γεννήτορές της βρίσκονται από τους πίνακες της περιστροφής περί των γωνιών *Euler*

$$X_z = \left(\frac{\partial R(\hat{\mathbf{z}}, \alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Αν προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε την περιστροφή περί του αξόνου x κατά γωνία ϕ χρησιμοποιώντας τον πίνακα στροφής με τις γωνίες *Euler* θα δυσκολευτούμε γιατί οι γωνίες α, β, γ δηλώνουν στροφές περί των άλλων δυο αξόνων. Για αυτό ο πίνακας περιστροφής στην περίπτωση αυτή θα οριστεί βασικά:

$$R(\hat{x}, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Ο γεννήτορας είναι:

$$X_x = \left(\frac{\partial R(\hat{\mathbf{x}}, \phi)}{\partial \phi} \right)_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Παρομοίως ο τρίτος είναι:

$$X_y = \left(\frac{\partial R(\hat{\mathbf{y}}, \beta)}{\partial \beta} \right)_{\beta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Οι γεννήτορες της είναι σχεδόν οι πίνακες της στροφορμής για $l = 1$: $\hat{X}_x = \frac{\hat{L}_x}{i\hbar}$, $\hat{X}_y = \frac{\hat{L}_y}{i\hbar}$, $\hat{X}_z = \frac{\hat{L}_z}{i\hbar}$. Άρα στην ουσία οι προβολές της στροφορμής είναι οι γεννήτορες της $SO(3)$. Το σύμβολο S δηλώνει $\det O = 1$. Άρα οι τρεις γεννήτορες της $SO(3)$ εκτελούν γνήσιες περιστροφές. Η ομάδα $O(3)$ έχει δύο παραπάνω γεννήτορες, το ταυτοτικό στοιχείο και το αντίθετό του $E = -I$. Αυτός στην ουσία αντιστρέφει όλες τις συνιστώσες ενός διανύσματος.

3. Καθορισμός της βάσεως.

Εν συνεχεία ψάχνουμε μήπως δύο εκ των τελεστών της άλγεβρας μετατίθονται. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο θα διαλέξουμε ως βάση του χώρου τα ιδιοδιανύσματά τους, ώστε αυτοί να είναι διαγώνιοι. Βλέπουμε τώρα ότι δεν υπάρχουν μετατιθόμενοι τελεστές σε αυτήν την άλγεβρα. Άρα ως βάση διαλέγουμε τα ιδιοδιανύσματα τυχαία ενός εκ των τριών, ο οποίος κατά σύμβαση είναι ο \hat{L}_z .

4. Εύρεση του *Casimir*.

Αμέσως μετά ψάχνουμε γραμμικούς συνδυασμούς αυτών των τριών τελεστών, τέτοιους ώστε οι γραμμικοί συνδυασμοί να μετατίθονται με όλους τους τελεστές της άλγεβρας. Αυτός φυσικά είναι ο $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$. Ένας τελεστής που είναι γραμμικός συνδυασμός των τελεστών της ομάδος και μετατίθεται όλους αυτούς, αποκαλείται τελεστής *Casimir*. Ο \hat{L}^2 είναι τελεστής *Casimir* δευτέρας τάξεως της ομάδος $O(3)$, διότι εμπεριέχει τετραγωνικούς όρους.

5. Εξισώσεις ιδιοτιμών.

Εφόσον μόνο ένας τελεστής, ο \hat{L}_z , διαγωνιοποιείται ταυτοχρόνως με τον *Casimir*, η βάση των διανυσμάτων θα είναι της μορφής $|L, M\rangle$, όπου L η ιδιοτιμή του \hat{L}^2 και M του \hat{L}_z . Συνεπώς οι εξισώσεις ιδιοτιμών είναι

$$\hat{L}^2 |L, M\rangle = L |L, M\rangle, \hat{L}_z |L, M\rangle = M |L, M\rangle. \quad (2.35)$$

6. Δημιουργία τελεστών δημιουργίας και καταστροφής.

Αμέσως μετά συνδιάζουμε τους μη μετατιθόμενους γεννήτορες σε συναφείς τελεστές:

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y, \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y. \quad (2.36)$$

Θα αποδείξουμε ότι αυτοί είναι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Προς αυτήν την κατεύθυνση από τους αρχικούς μεταθέτες υπολογίζουμε τους ακόλουθους μεταθέτες:

$$[\hat{L}_\pm, \hat{L}_z] = \mp \hat{L}_\pm, [\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hat{L}_z, [\hat{L}_\pm, \hat{L}^2] = 0. \quad (2.37)$$

Τώρα από τους μεταθέτες αυτούς υπολογίζουμε τις δράσεις:

$$\hat{L}_z \hat{L}_\pm |L, M\rangle = (M \pm 1) \hat{L}_\pm |L, M\rangle \quad (2.38)$$

$$\hat{L}^2 \hat{L}_\pm |L, M\rangle = L \hat{L}_\pm |L, M\rangle. \quad (2.39)$$

Άρα τα κόκκινα διανύσματα είναι ιδιοδιανύσματα των αντιστοίχων τελεστών. Περαιτέρω καταλαβαίνουμε ότι οι τελεστές \hat{L}_\pm μεταβάλλουν την τιμή M κατά μία μονάδα, ενώ αφήνουν την L αμετάβλητη. Είναι συνεπώς τελεστές αναβάσεως και καταβάσεως.

7. Καθορισμός δράσεων.

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την δράση αυτών των τελεστών στα διανύσματα του χώρου. Επειδή $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ (προσοχή δεν ισχύει η ταυτότητα του αναπτύγματος τετραγώνων για μη μετατιθέμενους τελεστές):

$$\hat{L}_\mp \hat{L}_\pm = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \mp \hat{L}_z. \quad (2.40)$$

Το στοιχείο πίνακα θα είναι:

$$\begin{aligned} \langle L, M | \hat{L}_\mp \hat{L}_\pm |L, M\rangle &= L - M^2 \mp M. \Rightarrow \langle \hat{L}_\pm L, M | \hat{L}_\pm L, M\rangle = L - M^2 \mp M \Rightarrow \\ &\hat{L}_\pm |L, M\rangle = \sqrt{L - M^2 \mp M} |L, M \pm 1\rangle, \end{aligned}$$

8. Εξαγωγή του φάσματος.

Το τελευταίο βήμα είναι να υπολογίσουμε τις τιμές που λαμβάνουν τα L, M . Από τις δράσεις των τελεστών αναβάσεως και καταβάσεως έχουμε

$$\hat{L}_+ |L, M_{max}\rangle = 0, \hat{L}_- |L, M_{min}\rangle = 0. \quad (2.41)$$

Εξ αυτών έχουμε τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις

$$M_{max}^2 + M_{max} - L = 0, M_{min}^2 - M_{min} - L = 0. \quad (2.42)$$

Από την διακρίνουσα και έχοντας υπόψιν ότι $M_{max} \geq M_{min}$ προκύπτουν οι λύσεις

$$M_{max} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + L}, M_{min} = -M_{max}. \quad (2.43)$$

Από τις δράσεις των τελεστών αναβάσεως και καταβάσεως καταλαβαίνουμε ότι δυο διαδοχικές τιμές του M απέχουν μία μονάδα. Άρα το πλήθος των τιμών του M είναι $n = M_{max} - M_{min} = 2M_{max}$. Επιλύοντας την $n = -2\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + L}$ ως προς L , προκύπτει:

$$L = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}n + 1\right) \quad (2.44)$$

Εν συνεχεία από την $n = 2M_{max}$ έχουμε:

$$M_{max} = \frac{n}{2} \quad (2.45)$$

θέτουμε $M_{max} = l$ και τελικώς προκύπτει:

$$L = l(l + 1), M = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l. \quad (2.46)$$

9. Καθορισμός της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης.

Ας υποθέσουμε ότι ένα φυσικό σύστημα έχει δύο πιθανές τιμές της στροφορμής $l = 0, 1$ και ότι θέλουμε να φτιάξουμε τον πίνακα της προβολής της στροφορμής \hat{L}_z . Προς τον σκοπό αυτό χρειζόμαστε μια βάση διανυσμάτων, οι οποίες σαφώς συμφέρει να είναι οι σφαιρικές αρμονικές $Y_{l,m} = |l, m\rangle$, όπου l η στροφορμή και m η προβολή της στροφορμής στον z άξονα. Γνωστό είναι ότι όταν $l = 0 \rightarrow m = 0$ και ότι όταν $l = 1 \rightarrow m = -1, 0, 1$. Άρα ο διανυσματικός χώρος αποτελείται από τα ακόλουθα διανύσματα: $a = |0, 0\rangle, b = |1, -1\rangle, c = |1, 0\rangle, d = |1, 1\rangle$. Η δράση του \hat{L}_z στα ιδιοδιανύσματά του δίνει $\hat{L}_z|l, m\rangle = m\hbar|l, m\rangle$. Ο πίνακας λοιπόν θα είναι:

$$\hat{L}_z = \begin{pmatrix} \langle a|\hat{L}_z|a\rangle & \langle a|\hat{L}_z|b\rangle & \langle a|\hat{L}_z|c\rangle & \langle a|\hat{L}_z|d\rangle \\ \langle b|\hat{L}_z|a\rangle & \langle b|\hat{L}_z|b\rangle & \langle b|\hat{L}_z|c\rangle & \langle b|\hat{L}_z|d\rangle \\ \langle c|\hat{L}_z|a\rangle & \langle c|\hat{L}_z|b\rangle & \langle c|\hat{L}_z|c\rangle & \langle c|\hat{L}_z|d\rangle \\ \langle d|\hat{L}_z|a\rangle & \langle d|\hat{L}_z|b\rangle & \langle d|\hat{L}_z|c\rangle & \langle d|\hat{L}_z|d\rangle \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Ο κόκκινος πίνακας διαστάσεως 1×1 είναι αυτός που θα είχαμε αν η στροφορμή ήταν μόνο $l = 0$, ενώ τον πράσινο θα τον είχαμε αν η στροφορμή ήταν μόνο $l = 1$. Τώρα που η στροφορμή

λαμβάνει δύο τιμές η αναπαράσταση καλείται αναγωγίσιμη. Αν η στροφορμή λάμβανε μόνο μια τιμή, η αναπαράσταση θα ήταν μη αναγωγίσιμη. Ο πίνακας λοιπόν μιας αναγωγίσιμης αναπαράστασης αποτελείται από τους υποπίνακες όλων των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων που εμπεριέχει, οι οποίοι μάλιστα βρίσκονται στην διαγώνιό του.

Ας εμβραθύνουμε λίγο παραπάνω στο πώς μπορούμε να μετακινηθούμε από έναν διάνυσμα της εν λόγω πενταδιάστατης βάσεως σε ένα άλλο. Γνωρίζουμε πως υπάρχουν κάποιοι τελεστές αναβάσεως και καταβάσεως της στροφορμής \hat{L}^+, \hat{L}^- . Η δράση τους είναι η εξής $\hat{L}^+|l, m \rangle = c_1|l, m + 1 \rangle$, $\hat{L}^-|l, m \rangle = c_2|l, m - 1 \rangle$, όπου $c_{1,2}$ γνωστές σταθερές. Παρατηρούμε ότι αυτοί οι δύο τελεστές έχουν την δυνατότητα να μας μετακινούν μόνο μεταξύ διανυσμάτων με ίδια l και διαδοχικές τιμές της m . Δηλαδή είναι εφικτό να κινούμαστε εντός των διανυσμάτων μίας μη αναγωγίσιμης αναπαραστάσεως, αλλά δεν μπορούμε να κινηθούμε μεταξύ διανυσμάτων διαφορετικών μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων. Στο παράδειγμά μας ο τελεστής αναβάσεως μπορεί να μας μεταφέρει από το $|b \rangle$ στο $|c \rangle$, αλλά όχι από το $|a \rangle$ στο $|b \rangle$. Επιπλέον όταν κινούμαστε στον διανυσματικό χώρο μίας μη αναγωγίσιμης αναπαραστάσεως αλλάζει μόνο ο κβαντικός αριθμός m , ενώ ο l όχι.

Κι αν το μέγεθός μας δεν είναι ο τελεστής της στροφορμής, αλλά τυχόν άλλο, μπορούμε να μιλάμε για μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις; Η απάντηση είναι ναι. Προηγουμένως εξηγήσαμε πως οι τρεις συνιστώσες της στροφορμής είναι οι γεννήτορες της ομάδος $O(3)$. Σε αυτήν ο κβαντικός αριθμός l χαρακτηρίζει την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση και ο m σε μετακινεί εντός της. Κάθε ομάδα έχει τέτοιους κβαντικούς αριθμούς. Επί παραδείγματι η ομάδα $SU(3)$ έχει δύο κβαντικούς αριθμούς τύπου l και προφανώς άλλους δύο τύπου m . Οι τύπου l αυτής λέγονται f_1, f_2 ή στον συμβολισμό του Elliott λ,μ. Δηλαδή όλα τα διανύσματα της ίδιας μη αναγωγίσιμης αναπαραστάσεως της $SU(3)$ έχουν τα ίδια λ,μ, αλλά οι κβαντικοί αριθμοί τύπου m ποικίλουν μέσα σε αυτήν.

Κάθε ομάδα τάξεως r έχει r τελεστές Casimir και r κβαντικούς αριθμούς τύπου l . Οι ιδιοτιμές των τελεστών Casimir συνδέονται μόνο με αυτούς τους κβαντικούς αριθμούς. Παρομοίως μια

Πίνακας 2.1: Κβαντικοί αριθμοί μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων

Ομάδα	Αριθμοί τύπου l
$O(3)$	l
$O(2)$	m
$SU(3)$	$[f_1, f_2]$ ή (λ, μ)
$O(6)$	$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$
$U(n)$	$[n_1, n_2, \dots, n_n]$

Πίνακας 2.2: Τάξη ομάδος

Ομάδα	Τάξη
$U(n)$	n
$SU(n)$	$n - 1$
$O(n)$ με n άρτιο	$\frac{1}{2}n$
$O(n)$ με n περιττό	$\frac{1}{2}(n - 1)$

τέτοια ομάδα έχει r μεταθέτες γεννητόρων της ίσους με το μηδέν. Αυτοί συνδέονται με r κβαντικούς αριθμούς τύπου m . Οι γεννήτορες των μεταθετών αυτών έχουν ιδιοτιμές που σχετίζονται μόνο με αυτούς τους κβαντικούς αριθμούς.

Για να εδραιωθεί μέσα μας το παραπάνω συμπέρασμα αναφέρω το παράδειγμα της $O(3)$ τάξεως ένα. Δηλαδή έχει έναν τελεστή *Casimir* τον \hat{L}^2 , με ιδιοτιμές σχετιζόμενες μόνο με τον κβαντικό αριθμό l : $l(l + 1)$. Επιπλέον έχει μόνο έναν μεταθέτη γεννητόρων ίσο με το μηδέν $[\hat{L}_z, \hat{L}_z] = 0$, με ιδιοτιμές που σχετίζονται με τον κβαντικό αριθμό m : m . Φυσικά θα αναρωτιέστε “μα γιατί, οι μεταθέτες $[\hat{L}_x, \hat{L}_x], [\hat{L}_y, \hat{L}_y]$ δεν ισούνται με μηδέν;”. Σας θυμίζω ότι μπορείς να διαγωνιοποιείς ταυτοχρόνως την \hat{L}^2 με μία μόνο προβολή της στροφορμής, η οποία κατά σύμβαση είναι η \hat{L}_z .

Άλλη πολύ σημαντική παρατήρηση είναι ότι οι γεννήτορες μίας ομάδος συνδέουν διανύσματα με ίδια τιμή κβαντικού αριθμού τύπου l . Στο παράδειγμα των στροφορμών αυτό φαίνεται από την εξής σκέψη: Οι τελεστές \hat{L}^\pm, \hat{L}_z είναι οι γεννήτορες της $O(3)$. Αν υπολογίσουμε το στοιχείο πίνακα οποιουδήποτε εκ των τριών γεννητόρων, π.χ. του $\langle l, m | \hat{L}_z | l' m' \rangle$, αυτό πάντα θα ισούται με μηδέν για διαφορετικές τιμές του κβαντικού αριθμού l .

Πίνακας 2.3: Πλήθος γεννητόρων

Ομάδα	Πλήθος
$U(n)$	n^2
$SU(n)$	$n^2 - 1$
$O(n)$	$\frac{1}{2}n(n - 1)$

Κουραστήκαμε μεν αλλά καταφέραμε δε να δείξουμε ότι οι ιδιοτιμές των τελεστών της στροφορμής παράγονται μόνο από την γνώση των μεταθετών της ομάδος. Αυτή είναι η επιτυχία της Θεωρίας Ομάδων: χωρίς να γνωρίζουμε το είδος της αλληλεπιδράσεως, εξάγουμε το φάσμα μόνο από γεωμετρικές ιδιότητες.

2.4 Η ΟΜΑΔΑ $U(n)$

Καταστήσαμε λοιπόν σαφές, ότι όταν οι μοναδιακοί τελεστές δρουν σε κάποιον πίνακα, αλλάζουν μεν τα στοιχεία πίνακα, αλλά οι αναμενόμενες τιμές αυτών είναι αναλλοίωτες. Η πλέον σημαντική αλγεβρική ομάδα είναι αυτή των μοναδιακών τελεστών και συμβολίζεται $U(n)$. Όταν έχουμε κάποιο πλήθος νουκλεονίων σθένους και θέλουμε να τα συζεύξουμε, ώστε να βρούμε την συλλογική κατάσταση, τότε το μόνο βέβαιο είναι πως η συλλογική Χαμιλτονιανή αυτών θα έχει κάποια μοναδιακή συμμετρία. Βέβαια για να ακριβολογούμε, αυτό επιτυγχάνεται όταν συζεύξουμε την γωνιακή στροφορμή \hat{l} του κάθε σωμαδίου με την ιδιοστροφορμή \hat{s} του προς σχηματισμό της συνολικής στροφορμής \hat{j} και έπειτα συζεύξουμε όλες τις συνολικές στροφορμές που προέκυψαν. Αυτό που μόλις περιέγραψα λέγεται σύζευξη $\hat{l} - \hat{s}$ και αναλύεται σε διδακτικά βιβλία Κβαντικής Μηχανικής. Σε αυτήν την σύζευξη η Χαμιλτονιανή έχει κάποια $U(n)$ συμμετρία. Δηλαδή αν ένας τελεστής της ομάδος $U(n)$ δράσει επί της Χαμιλτονιανής, να μεν τα στοιχεία πίνακα αυτής θα αλλάξουν, όμως οι ιδιοτιμές της και οι πιθανότητες πραγματοποίησης αυτών θα είναι οι ίδιες. Όλοι οι πυρήνες θα έχουν κάποια μοναδιακή συμμετρία, η οποία στις περισσότερες περιπτώσεις θα ανάγεται σε άλλες υποομάδες.

Υπάρχει μία πολύ εύληπτη αντιστοιχία μεταξύ της ομάδος $U(n)$ και της Συμπλεκτικής Ομάδος S_m που φανερώνεται από το ακόλουθο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε πως έχουμε την ιδιοσυνάρτη-

ση δύο μη αλληλεπιδρώντων ταυτοτικών σωματιδίων $\psi_a(1)\psi_b(2)$. Μπορούμε να την μετατρέψουμε στην $\psi_a(2)\psi_b(1)$ με δύο δυνατούς τρόπους: α) ανταλλάσσοντας τα σωματίδια $1 \Leftrightarrow 2$, ή β) ανταλλάσσοντας τις καταστάσεις $a \Leftrightarrow b$. Η ανταλλαγή των σωματιδίων γίνεται από έναν τελεστή αντιμεταθέσεως σωματιδίων, ενώ η ανταλλαγή των καταστάσεων γίνεται από έναν μοναδιακό τελεστή. Ως εκ τούτου η πρώτη ανήκει σε μια συμπλεκτική ομάδα S_m , όπου m το πλήθος των σωματιδίων, ενώ η δεύτερη σε μία ομάδα $U(n)$ (αφού θα πρέπει $\langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle$), όπου n η διάσταση του συναρτησιακού χώρου. Αν τα σωματίδια αυτά είναι αλληλεπιδρώντα, τότε οι ιδιοσυναρτήσεις αυτών είναι συμμετρικές ή αντισυμμετρικές. Πιο συγκεκριμένα αφού μια κυματοσυνάρτηση είναι το γινόμενο ενός χωρικού μέρους επί έναν σπίνορα, θα πρέπει το τελικό γινόμενο να έχει συμμετρία ή αντισυμμετρία. Συνειδητοποιούμε επομένως ότι η συμμετρία $U(n)$ επιβάλλεται στην σύζευξη ταυτοτικών σωματιδίων είτε αυτά είναι φερμιόνια είτε είναι μποζόνια. Την σύζευξη μποζονίων την πραγματοποίησε το Πρότυπο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων (*IBM*), ενώ την σύζευξη φερμιονίων την πραγματοποίησαν αρκετά πρότυπα συμπεριλαμβανομένου και του προσεγγιστικού προτύπου (*Proxy SU(3)*) που παρουσιάζουμε στην παρούσα διατριβή.

2.4.1 ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ $U(2)$

Όταν η διάσταση του συναρτησιακού χώρου είναι n , τότε οι γεννήτορες της ομάδος $U(n)$ είναι n^2 τω πλήθη. Δηλαδή αν υπάρχουν μόνο δύο καταστάσεις (όπως στο ανωτέρω παράδειγμα), τότε οι γεννήτορες της $U(2)$ θα είναι τέσσερις. Ακολούθως θα περιγράψουμε την διαδικασία ευρέσεως των γεννητόρων της $U(2)$ για δύο νουκλεόνια σε δύο ιδιοκαταστάσεις. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το νουκλεόνιο ενδέχεται να βρεθεί σε δύο καταστάσεις $|p \rangle$ και $|n \rangle$. Αν βρεθεί στην πρώτη θα είναι πρωτόνιο, ενώ στην δεύτερη θα είναι νετρόνιο. Αυτή είναι η βασική σύλληψη του ισοσπίν. Στην θεώρηση αυτή ο συναρτησιακός χώρος αποτελείται από δύο καταστάσεις, είναι δηλαδή διδιάστατος. Η κυματοσυνάρτηση συνεπώς θα είναι γραμμικός συνδυασμός $|\psi \rangle = c_p|p \rangle + c_n|n \rangle$.

Όπως στην θεωρία της δεύτερης κβάντωσης ο τελεστής δημιουργίας του απλού αρμονικού ταλαντωτή δρα στο κενό και δημιουργεί την πρώτη διεγερμένη ιδιοκατάσταση, έτσι και εδώ οι τελεστές δημιουργίας έχουν την αντίστοιχη δράση $a_p^\dagger|0 \rangle = |p \rangle$, $a_n^\dagger|0 \rangle = |n \rangle$. Φυσικά υπάρχουν

και οι τελεστές καταστροφής με την ιδιότητα $a_p|0\rangle = 0, a_n|0\rangle = 0 \Leftrightarrow \{\hat{a}_p, \hat{a}_p\} = \{\hat{a}_n, \hat{a}_n\} = 0$. Οι τελεστές αυτοί είναι φύσει φερμιονικοί, αφού δημιουργούν ή καταστρέφουν νουκλεόνια. Οι φερμιονικοί τελεστές είναι φροντισμένοι έτσι, ώστε να ικανοποιείται η απαγορευτική αρχή του *Pauli*. Δηλαδή να μη μπορείς να δημιουργήσεις δυο ταυτοτικά φερμιόνια στην ίδια ακριβώς κατάσταση, συνεπώς $a_p^\dagger a_p^\dagger|0\rangle = a_n^\dagger a_n^\dagger|0\rangle = 0 \Leftrightarrow \hat{a}_p^\dagger|p\rangle = \hat{a}_n^\dagger|n\rangle = 0 \Leftrightarrow \{\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_p^\dagger\} = \{\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_n^\dagger\} = 0$. Επιπλέον αν ανταλλάξεις τα δυο σωματίδια, η κυματοσυνάρτησή τους θα αλλάξει πρόσημο, δεδομένου ότι είναι αντισυμμετρική $a_p^\dagger a_n^\dagger = -a_n^\dagger a_p^\dagger \Leftrightarrow \{a_p^\dagger, a_n^\dagger\} = 0$. Ας ασχοληθούμε λίγο με τον τελεστή του πλήθους των σωματιδίων. Οι τελεστές των οποίων οι ιδιοτιμές είναι το πλήθος των πρωτονίων/νετρονίων σε μία κατάσταση είναι οι:

$$\hat{n}_p = a_p^\dagger a_p, \hat{n}_n = a_n^\dagger a_n. \quad (2.48)$$

Στην περίπτωση των φερμιονίων οι ιδιοτιμές των τελεστών αυτών είναι 0 ή 1. Ας παρακολουθήσουμε την δράση $\{\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger\}|p\rangle = \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger|p\rangle + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p|p\rangle = 0 + \hat{n}_p|p\rangle = 1|p\rangle$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι $\{a_p, a_p^\dagger\} = \{a_n, a_n^\dagger\} = 1$. Ακολουθώντας παραθέτουμε όλους τους δυνατούς αντιμεταθέτες, που ήδη αποδείξαμε:

$$\{a_p^\dagger, a_p^\dagger\} = \{a_n^\dagger, a_n^\dagger\} = \{a_p^\dagger, a_n^\dagger\} = 0, \quad (2.49)$$

$$\{a_p, a_p\} = \{a_n, a_n\} = \{a_p, a_n\} = 0, \quad (2.50)$$

$$\{a_p, a_p^\dagger\} = \{a_n, a_n^\dagger\} = 1, \{a_p, a_n^\dagger\} = \{a_n, a_p^\dagger\} = 0 \quad (2.51)$$

Στα επόμενα βήματα θα συνειδητοποιήσουμε τι σημαίνει στοιχείο ομάδος, πράξη πολλαπλασιασμού, και γεννήτορας. Οι γεννήτορες θα πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι, δηλαδή να μη υπάρχει τρόπος να εκφράσεις τον πρώτο ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων γεννητόρων. Τέλος το σύνολο των γεννητόρων δεν είναι μοναδικό. Για να αντιστοιχίσω την περιγραφή αυτή με κάτι οικείο θα φέρω το εξής παράδειγμα: ένας διανυσματικός ευκλείδειος χώρος παράγεται από κάποια διανύσματα αποκαλούμενα βάση. Τα διανύσματα της βάσης είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, όπως και γεννήτορες. Επίσης τα διανύσματα της βάσης είναι και αυτά διανύσματα του χώρου, όπως και οι γεννήτορες αποτελούν στοιχεία της ομάδος. Ο γραμμικός συνδυασμός των

Πίνακας 2.4: Αντιστοίχιση των ιδιοτήτων του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου και της Ομάδος $U(2)$

Ευκλείδειος χώρος	$U(n)$
Τριάδα διανυσμάτων βάσεως	n^2 πλήθος γεννητόρων
Πολλές δυνατές βάσεις	Πολλά δυνατά σύνολα γεννητόρων
Γραμμικώς ανεξάρτητα τα διανύσματα της βάσεως	Γραμμικώς ανεξάρτητοι οι γεννήτορες
Ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσεως γεννά τα υπόλοιπα διανύσματα του χώρου	Ο πολλαπλασιασμός των γεννητόρων γεννά όλα τα άλλα στοιχεία

διανυσμάτων της βάσης γεννά όλα τα υπόλοιπα διανύσματα του χώρου, όπως και η πράξη του πολλαπλασιασμού των γεννητόρων δημιουργεί τα υπόλοιπα στοιχεία της ομάδος. Η βάση των διανυσμάτων δεν είναι μοναδική, αλλά το πλήθος τους διατηρείται σταθερό από βάση σε βάση. Έτσι και το σύνολο των γεννητόρων ποικίλει, αλλά το πλήθος τους για την δεδομένη ομάδα είναι σταθερό.

Αφού ξεκαθαρίσαμε τον ρόλο των γεννητόρων, μπορούμε να προχωρήσουμε στην εκλογή τους. Η απλούστερη εκλογή γεννητόρων του παραδείγματός μας είναι η:

$$\hat{n}_p = \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p, \hat{B} = \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_n, \hat{D} = \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_p, \hat{n}_n = \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n. \quad (2.52)$$

Εδώ ο αναγνώστης ίσως αναρωτηθεί αν είναι και μοναδιακοί τελεστές, ώστε να είναι άξια μέλη της $U(n)$. Η απάντηση είναι ότι έναν τελεστή \hat{A} τον κάνουμε μοναδιακό με το σύννητες τέχνασμα: $\hat{A} \rightarrow e^{i f \hat{A}}$, όπου f κατάλληλη σταθερά. Έναν στοιχείο της ομάδος παράγεται από την σχέση $e^{i(\sum_j f_j \hat{A}_j)}$, η οποία είναι στην ουσία ο απλός πολλαπλασιασμός μεταξύ των γεννητόρων. Οι γεννήτορες αυτοί είναι φανερώς γραμμικώς ανεξάρτητοι. Οι μεταθέτες αυτών θα πρέπει να ικανοποιούν την κλειστότητα των ομάδων *Lie*. Δηλαδή ο μεταθέτης γεννητόρων να παράγει γραμμικό συνδυασμό γεννητόρων. Όντως έτσι συμβαίνει αφού από τις σχέσεις αντιμεταθέτως παράγονται οι μεταθέτες:

$$[\hat{n}_p, \hat{B}] = \hat{n}_p, [\hat{n}_p, \hat{D}] = -\hat{D}, [\hat{n}_p, \hat{n}_n] = 0. \quad (2.53)$$

$$[\hat{B}, \hat{D}] = \hat{n}_p - \hat{n}_n, [\hat{B}, \hat{n}_n] = \hat{B}, [\hat{D}, \hat{n}_n] = -\hat{D} \quad (2.54)$$

Δυστυχώς όμως κανένας γεννήτορας εξ αυτών δεν μετατίθεται με όλους τους άλλους γεννήτορες. Δηλαδή ουδείς είναι τελεστής *Casimir*. Γνωρίζουμε όμως ότι θα πρέπει να υπάρχει ένας τέτοιος τελεστής, αφού μία ομάδα $U(n)$ έχει $n - 1$ τελεστές *Casimir*. Μπορούμε φυσικά να βρούμε εναλλακτικό σύνολο γεννητόρων, ώστε να τον αποκαλύψουμε

$$\hat{T}_1 = \frac{\hat{B} + \hat{D}}{2}, \hat{T}_2 = \frac{\hat{B} - \hat{D}}{2i}, \hat{T}_3 = \frac{1}{2}(\hat{n}_p - \hat{n}_n), \hat{N} = \hat{n}_p + \hat{n}_n \quad (2.55)$$

Συμβαίνει τώρα όλοι αυτοί να είναι ερμιτιανοί τελεστές και οι μεταθέτες των $\hat{T}_{1,2,3}$ να μας θυμίζουν μια πολύ γνώριμη αλληλουχία μεταθετών, αυτήν την στροφορμών. Επιπλέον αν τους αναπαράστησουμε σε μορφή πίνακα με βάση τις σφαιρικές αρμονικές, τότε αυτοί θα είναι οι στροφορμές $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$:

$$[\hat{T}_1, \hat{T}_2] = i\hat{T}_3, [\hat{T}_2, \hat{T}_3] = i\hat{T}_1, [\hat{T}_3, \hat{T}_1] = i\hat{T}_2, [\hat{N}, \hat{T}_{1,2,3}] = 0 \quad (2.56)$$

Ανακαλύπτουμε λοιπόν, ότι ο τελεστής \hat{N} που μετρά το πλήθος των νουκλεονίων είναι τελεστής *Casimir*. Οι τελεστές *Casimir* δεν χρειάζεται να είναι στοιχεία της ομάδος ή γεννήτορες αυτής. Περεταίρω η πράξη πολλαπλασιασμού (μεταθέτης) μεταξύ των $\hat{T}_{1,2,3}$ γεννά στοιχεία που είναι γραμμικός συνδυασμός των $\hat{T}_{1,2,3}$, δηλαδή αυτοί από μόνοι τους κλείνουν μία άλλη άλγεβρα! Αυτή ονομάζεται $SU(2)$, *special unitary*. Γενικά όταν ένα μέρος γεννητόρων μιας άλγεβρας κλείνει μια άλλη άλγεβρα, τότε λέμε ότι η δεύτερη είναι υποομάδα της πρώτης:

$$U(2) \supset SU(2) \quad (2.57)$$

Όταν η ομάδα $U(n)$ έχει n^2 γεννήτορες, τότε η $SU(n)$ υποομάδα της έχει έναν λιγότερο, $n^2 - 1$, λόγω του περιορισμού που θέτει η ορίζουσα. Για όλους τους μοναδιακούς πίνακες αποδεικνύεται ότι $\det(UU^\dagger) = \det(I) \Rightarrow \det(U)\det(U^\dagger) = 1 \Rightarrow \det(U)(\det(U))^* = 1 \Rightarrow |\det(U)|^2 = 1 \Rightarrow \det(U) = \pm 1$. Οι γεννήτορες της $SU(n)$ έχουν ορίζουσα $\det(U) = 1$.

Ο τελεστής \hat{N} λέμε ότι κλείνει μόνος του μια άλγεβρα, την $U(1)$. Αν έχουμε δύο ομάδες, όπως την $SU(2)$ και την $U(1)$ και οι γεννήτορες της μεν μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες της δε, τότε ο συνδυασμός όλων των γεννητόρων κλείνει μια μεγαλύτερη και από τις δύο άλγεβρες:

$$U(2) = SU(2) \times U(1). \quad (2.58)$$

Γενικά το σύμβολο \times μπορούμε να το χρησιμοποιούμε μόνο μεταξύ ομάδων των οποίων οι γεννήτορες μετατίθενται.

Επειδή στην έκφραση $\hat{N} = \hat{n}_p + \hat{n}_n$ οι εκθέτες είναι μονάδες, λέμε ότι ο \hat{N} είναι τελεστής *Casimir* πρώτης τάξεως της $SU(2)$. Όμως ο τελεστής $\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2$, είναι τελεστής *Casimir* δευτέρας τάξεως της $SU(2)$, εφόσον μετατίθεται με όλους τους γεννήτορές της και γράφεται συναρτήσεϊ αυτών με τετραγωνικές δυνάμεις. Οι τελεστές πρώτης τάξεως υποκρύπτουν μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια λόγω των όρων $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ που περιέχουν οι εκφράσεις τους, ενώ οι τελεστές δευτέρας τάξεως δηλώνουν συνήθως την αλληλεπίδραση δύο σωμάτων $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$. Ακολούθως οι τελεστές τρίτης τάξεως που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτήν την διατριβή σε επόμενο κεφάλαιο, συνηθίζεται να λέγονται τελεστές τριών σωμάτων. Οι αλληλεπιδράσεις τριών ή επιπλέον σωμάτων δεν είναι κατ' ανάγκη υπαρκτές. Μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως διορθώσεις σε κάποια προσέγγιση που έγινε, όπως ακριβώς χρησιμοποιούμε επιπλέον όρους σε ένα ανάπτυγμα *Taylor* μιας συνάρτησης, όταν δεν μας ικανοποιεί η ακρίβεια.

2.5 Η ΟΜΑΔΑ $SU(3)$

Στην παρούσα διατριβή συζητούμε πρωτόνια σθένους και νετρόνια σθένους. Έπειτα από μια προσέγγιση που θα αναλυθεί αργότερα, όλα τα πρωτόνια σθένους βρίσκονται σε φλοιό με μοναδική ομοτιμία. Τα τροχιακά ονομάζονται $s, p, d, f, g, h, i, \dots$, αν έχουν στροφορμή $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ αντιστοίχως. Τα τροχιακά με άρτια/περιττή στροφορμή έχουν θετική/αρνητική ομοτιμία. Επειδή η προβολή της στροφορμής λαμβάνει $2l + 1$ τιμές, κάθε τροχιακό με συγκεκριμένη γωνιακή στροφορμή περιέχει $2l + 1$ τροχιακά με οριμένη στροφορμή l και προβολή m_l . Το οποίο σημαίνει ότι ένας φλοιός sdg αποτελείται από $\sum_l (2l + 1) = 1 + 5 + 9 = 15$ τροχιακά. Αφού ο διανυσματικός χώρος είναι δεκαπενταδιάστατος, η συμμετρία του φλοιού είναι $U(15)$ και το πλήθος των γεννητόρων αυτής είναι 225 ! Ένας άλλος συνήθης φλοιός με μοναδική ομοτιμία είναι ο pfh . Σε αυτόν υπάρχουν $\sum_l (2l + 1) = 3 + 7 + 11 = 21$ τροχιακά. Άρα η συμμετρία του είναι $U(21)$, και παράγεται από 441 γεννήτορες!!! Φυσικά κανένας δεν θα ασχοληθεί με όλους αυτούς. Αποδεικνύεται ότι όταν ένας φλοιός του τρισδιάτου απλού αρμονικού ταλαντωτή (Πρότυπο

Φλοιών) έχει μία συμμετρία $SU(3)$ (πρότυπο *Elliott*), δηλαδή $U(15) \supset SU(3)$, $U(21) \supset SU(3)$.

Ευτυχώς οι γεννήτορες της $SU(3)$ είναι $n^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$ και μόνο αυτοί μας ενδιαφέρουν.

Έχει καθιερωθεί οι γεννήτορες της $SU(3)$ να είναι οι πίνακες του *Gell – Mann*:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Εκ πρώτης όψεως αυτοί οι οκτώ πίνακες είναι απλά νούμερα. Αν τους παρατηρήσουμε όμως οι τρεις εξ αυτών ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) είναι οι πίνακες της στροφορμής (L_x, L_y, L_z) για στροφορμή 1. Δηλαδή οι τρεις πρώτοι κλείνουν την άλγεβρα της στροφορμής $SU(2)$. Οι υπόλοιποι πέντε αποτελούν τις πέντε συνιστώσες ενός σφαιρικού ταυσιτικού τελεστή δευτέρας τάξεως.

Εφόσον γεννούν μία άλγεβρα *Lie* οι μεταθέτες αυτών εξάγουν γραμμικό συνδυασμό γεννητόρων:

$$[\lambda_j, \lambda_j] = 2i \sum_l c_{jkl} \lambda_l. \quad (2.61)$$

Οι τελεστές *Casimir* της $SU(3)$ είναι $n - 1 = 3 - 1 = 2$. Ο δευτέρας τάξεως είναι:

$$C_2 = \sum_j^8 \lambda_j^2, \quad (2.62)$$

ενώ ο τρίτης τάξεως είναι:

$$C_3 = \sum_{jkl} d_{jkl} \lambda_j \lambda_k \lambda_l \quad (2.63)$$

όπου d_{jkl}, c_{jkl} γνωστές σταθερές.

Ας προχωρήσουμε στο φυσικό περιεχόμενο αυτής της συμμετρίας. Οι κβαντικοί αριθμοί τύπου l της ομάδος αυτής είναι δύο (όπως και οι τελεστές *Casimir*) και συμβολίζονται με (λ, μ) . Η φυσική σημασία αυτών ποικίλει αναλόγως του φυσικού συστήματος που έχει την $SU(3)$ συμμετρία. Στην βιβλιογραφία η συμμετρία αυτή έχει εφαρμοστεί συχνότερα στην περιγραφή του συστήματος των τριών βαρυονίων: πρωτόνιο, νετρόνιο και σωματίδιο Λ . Στην παρούσα όμως διατριβή θα εφαρμόσουμε την συμμετρία αυτή στον τρισδιάστατο απλό αρμονικό ταλαντωτή, που

καθιερώθηκε ως πρότυπο του *Elliott*. Σε κάθε πάντως πρόβλημα πρέπει να υπάρχουν τρεις δυνατές καταστάσεις. Όταν πρόκειται για βαρυόνια αυτές είναι πρωτόνιο, νετρόνιο, Λ, ενώ όταν πρόκειται για τον ταλαντωτή είναι τα χβάντα διεγέρσεως στους άξονες x, y, z . Δύο εκ των τριών είναι πιο ισοδύναμες μεταξύ τους (π.χ. το πρωτόνιο με το νετρόνιο ή τα χβάντα στους άξονες x, y) σε σχέση με την τρίτη κατάσταση (σωμάτιο Λ ή άξονας z). Τα λ, μ είναι οι διαφορές μεταξύ των τριών αυτών καταστάσεων. Αναλυτικότερα στο πρότυπο του *Elliott* που ακολουθεί.

2.6 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ YOUNG

Ο πολλαπλασιασμός των διαγραμμάτων *Young* είναι πολύ απλός. Θα ξεκινήσω με ένα παράδειγμα:

$$\square \times \textcircled{a} = \square \textcircled{a} + \textcircled{a} \tag{2.64}$$

$$(\square \square + \square) \times \textcircled{a} = \square \square \textcircled{a} + 2 \cdot \textcircled{a} + \textcircled{a} \tag{2.65}$$

$$\tag{2.66}$$

Δηλαδή απλά τοποθετούμε το κόκκινο κουτάκι είτε δεξιά είτε κάτω από το μεγάλο διάγραμμα.

Εμάς μας ενδιαφέρουν τα διαγράμματα *Young* της $SU(3)$. Αυτά έχουν πάντα δύο γραμμές με πλήθος στηλών $[f_1, f_2]$. Στον συμβολισμό του *Elliott* $\lambda = f_1 - f_2, \mu = f_2$. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε τα:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \tag{2.67}$$

Τώρα πρέπει να κολλήσουμε τα κουτιά του δεύτερου διαγράμματος στο πρώτο σεβόμενοι τους εξής κανόνες:

1. Το τελικό αποτέλεσμα να έχει $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \dots$
2. Σε μία στήλη να μη επαναληφθούν δύο a ή b .

3. Σε μία γραμμή το πλήθος των a να είναι μεγαλύτερο του πλήθους των b .
4. Επειδή τα διαγράμματα *Young* της $SU(3)$ επιτρέπεται να έχουν μόνο δύο γραμμές, αν προκύψει τρίτη ή πλέον γραμμή απορρίπτουμε όλες τις στήλες της.

Δηλαδή:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} . \quad (2.68)$$

2.7 ΜΕΤΑΒΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ

Όταν ένας πυρήνας διεγείρεται ή αποδιεγείρεται μεταξύ δύο ενεργειακών καταστάσεων αλλάζει και η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου/ρεύματος μέσα του. Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί ηλεκτρικές και μαγνητικές ροπές. Στον Ηλεκτρομαγνητισμό έχουμε δει ότι η πυκνότητα φορτίου αναλύεται σε σφαιρικές αρμονικές Y_{kq} , όπου το k θυμίζει τον κβαντικό αριθμό της στροφορμής και το q την προβολή της.. Αν η κυριότερη παραμόρφωση του φορτίου είναι αντιστοιχεί σε σφαιρική αρμονική με κβαντικό αριθμό στροφορμής $k = 2$, έχουμε ηλεκτρική τετραπολική ροπή. Αυτή, όπως κάθε μέγεθος στην Κβαντική, συνδέεται με έναν τετραπολικό τελεστή, ο οποίος χαρακτηρίζεται επίσης από $k=2$. Οι τελεστές με συγκεκριμένο k ονομάζονται σφαιρικοί τανυστικοί τελεστές. Αντίστοιχα η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος αναλύεται σε σφαιρικές αρμονικές. Αν η κυρίαρχη αρμονική έχει $k = 1$, τότε εμφανίζεται μαγνητική διπολική ροπή. Επίσης συνδέεται με έναν σφαιρικό τανυστικό τελεστή. Η σημαντικότερη ηλεκτρική ροπή είναι η τετραπολική και οι αντίστοιχες αποδιεγέρσεις της συμβολίζονται $B(E2)$. Στην ουσία δηλώνουν την πιθανότητα μεταβάσεως μεταξύ δύο καταστάσεων. Αντίστοιχα οι πυρήνες έχουν και μαγνητικές διπολικές ροπές και οι αντίστοιχες πιθανότητες αποδιεγέρσεως συμβολίζονται $B(M1)$.

2.7.1 ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ

Ένας σφαιρικός τανυστικός τελεστής είναι μια συλλογή από τελεστές. Οι τελεστές αυτοί συμβολίζονται ως $T_q^{(k)}$, όπου k είναι η τάξη του σφαιρικού τελεστή και q ένας κβαντικός αριθμός με

πλήθος τιμών $2k + 1$. Άρα λοιπόν ένας σφαιρικός ταυσιτικός τελεστής τάξης 1 αποτελείται από τρεις τελεστές. Αυτοί οι τελεστές ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$[\hat{L}_+, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q+1)}T_{q+1}^{(k)}, \quad (2.69)$$

$$[\hat{L}_-, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q-1)}T_{q-1}^{(k)}, \quad (2.70)$$

$$[\hat{L}_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}. \quad (2.71)$$

2.7.2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ WIGNER ECKART

Η παράγραφος αυτή βασίζεται στο βιβλίο Κβαντομηχανική II, του Καθ. Δ. Μπανάτσου. Στην παράγραφο 8.19 του βιβλίου παρουσιάζεται το Θεώρημα *Wigner – Eckart*. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν σφαιρικό ταυσιτικό τελεστή τάξεως 1, δηλαδή αποτελείται από 3 τελεστές ($k = 1, q = -1, 0, 1$) και ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία πίνακά του. Προσιτό παράδειγμα τέτοιου σφαιρικού ταυσιτικού τελεστή είναι η συλλογή:

$$T_1^{(1)} = -\frac{L_+}{\sqrt{2}}, T_0^{(1)} = L_z, T_{-1}^{(1)} = \frac{L_-}{\sqrt{2}}. \quad (2.72)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία πίνακα των τριών αυτών τελεστών σε κάποια βάση από το Θεώρημα *Wigner Eckart*:

$$\langle \gamma' l' m' | T_q^{(k)} | \gamma l m \rangle = \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2l' + 1}} \langle l m k q | l' m' \rangle \langle \gamma' l' || T^{(k)} || \gamma l \rangle. \quad (2.73)$$

Ας το αποδομήσουμε για να το κατανοήσουμε. Η βάση, δηλαδή οι ιδιοσυναρτήσεις είναι της μορφής $|\gamma l m \rangle$, όπου l, m η στροφορμή και η προβολή της, ενώ γ είναι οι λοιποί κβαντικοί αριθμοί της βάσεως. Εν συνεχεία το στοιχείο $\langle l m k q | l' m' \rangle$ είναι συντελεστής *Clebsch – Gordan* της συζεύξεως δύο στροφορμών (l, k) προς μία τρίτη (l'). Για τους κανόνες συζεύξεως στροφορμών μπορεί κανείς να διαβάσει την παράγραφο 8.2 του εν λόγω βιβλίου. Ο τελευταίος όρος του θεωρήματος είναι ο $\langle \gamma' l' || T^{(k)} || \gamma l \rangle$ και καλείται ανηγμένο στοιχείο πίνακα. Η ουσία του βρίσκεται στο ότι είναι ανεξάρτητος των προβολών της στροφορμής, είναι δηλαδή κοινός για όλους τους τελεστές της συλλογής του σφαιρικού ταυσιτικού τελεστή. Μπορούμε συνεπώς να

τον υπολογίσουμε για την πιο εύκολη περίπτωση, π.χ. για τον $T_0^{(1)}$ και να τον χρησιμοποιήσουμε στους άλλους δύο ως πολλαπλασιαστική σταθερά.

Από προηγούμενη παράγραφο κατανοήσαμε πως υπάρχει μία άλγεβρα, η $O(3)$, με κύριο κβαντικό αριθμό την στροφορμή και υποάλγεβρα αυτής είναι η $O(2)$ με κύριο κβαντικό αριθμό την προβολή της στροφορμής. Παρατηρώντας την εξίσωση (2.73) βλέπουμε ότι στο πρώτο μέλος έχουμε να υπολογίσουμε ένα στοιχείο πίνακα εξαρτώμενο από τους κβαντικούς αριθμούς της $O(3)$ (η οποία ισοδυναμεί με την $SU(2)$) και της $O(2)$, ενώ στο δεύτερο μέλος το ανηγμένο στοιχείο πίνακα εξαρτάται μόνο από αυτόν της $O(3)$.

Η λογική αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες αλυσίδες αλγεβρών. Επί παραδείγματι υπάρχει η άλγεβρα $SU(3)$ χαρακτηριζόμενη από τους (λ, μ) και υποάλγεβρα αυτής είναι η $SU(2)$. Υπάρχει θεώρημα *Wigner – Eckart* και για αυτήν την αναγωγή [10]:

$$\begin{aligned} \langle (\lambda_3 \mu_3) K_3 L_3 M_3 | T_{K_2 L_2 M_2}^{(\lambda_2 \mu_2)} | (\lambda_1 \mu_1) K_1 L_1 M_1 \rangle = \sum_{\rho} \langle (\lambda_3 \mu_3) || T^{(\lambda_2 \mu_2)} || (\lambda_1 \mu_1) \rangle_{\rho} \\ \times \langle (\lambda_1 \mu_1) K_1 L_1 M_1; (\lambda_2 \mu_2) K_2 L_2 M_2 | (\lambda_3 \mu_3) K_3 L_3 M_3 \rangle_{\rho}, \end{aligned}$$

όπου $\rho = 1, 2, \dots, \rho_{max}$ είναι η πολλαπλότητα εμφάνισης της (λ_3, μ_3) στο ευθύ γινόμενο των $(\lambda_1, \mu_1) \times (\lambda_2, \mu_2)$. Για την κυριότερη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση δεν χρειάζεται ο δείκτης ρ , διότι είναι μοναδική. Ο K διακρίνει τις ενεργειακές ζώνες μεταξύ τους, ο L είναι η στροφορμή της κάθε ενεργειακής καταστάσεως. Τώρα μπορεί να φαίνεται παράλογο αυτοί οι κβαντικοί αριθμοί να δεικτοδοτούν τον τελεστή T . Κι όμως όπως κατασκευάζονται σφαιρικοί τανυστικοί τελεστές με δείκτες τους κβαντικούς αριθμούς αριθμούς της αλυσίδας $SU(2) \supset O(2)$, έτσι υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής τελεστών με χαρακτηριστικά μεγέθη άλλης αλυσίδας, όπως λόγω χάρη της $SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$. Συγκεκριμένα ο χαρακτήρας του τελεστή των τετραπολικών μεταβάσεων που θα αναφέρουμε ακολούθως είναι $(\lambda_2 \mu_2) L_2 = (1, 1) 2$.

Κεφάλαιο 3

ΠΡΟΤΥΠΑ ΓΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΜΕΝΟΥΣ ΠΥΡΗΝΕΣ

Στην Πυρηνική Δομή υπάρχουν δύο κρατούσες τάσεις: οι μικροσκοπικές θεωρίες και τα συλλογικά πρότυπα. Οι μεν πρώτες θεωρούν ότι μελετούν την αλληλεπίδραση νουκλεονίου-νουκλεονίου και οι δε δεύτερες τον πυρήνα ως σύνολο. Ως εκ τούτου οι μικροσκοπικές θεωρίες λογίζονται ως ορθότερες των άλλων. Οι πιο διάσημες αυτών είναι το Πρότυπο των Φλοιών και το Πρότυπο *Nilsson*· ενώ στην δεύτερη κατηγορία ανήκει το Γεωμετρικό Πρότυπο και το Πρότυπο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων.

Οι μικροσκοπικές θεωρίες υποθέτουν ένα μέσο δυναμικό το οποίο παρήχθηκε από το σύνολο των νουκλεονίων και λύνοντας την Χαμιλτονιανή αυτού εξάγουν τις κυματοσυναρτήσεις και τις ενεργειακές στάθμες του κάθε νουκλεονίου ξεχωριστά.

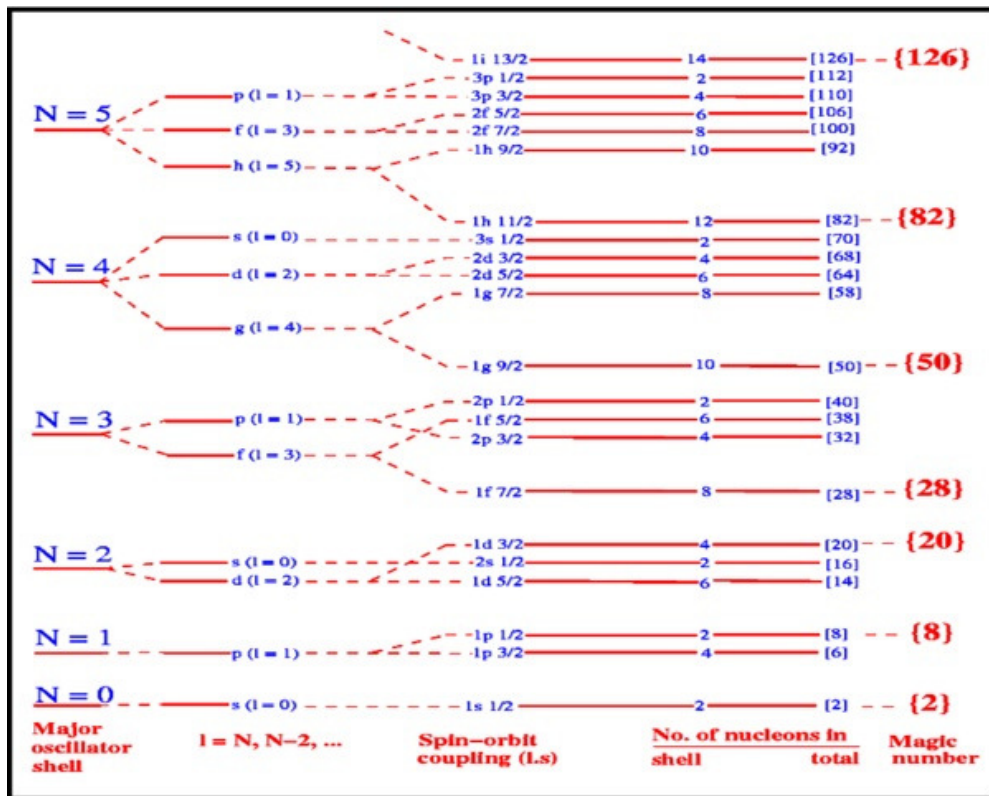
Το Γεωμετρικό Πρότυπο αντιμετωπίζει το πρόβλημα ως εξής: αντί να μελετά το κάθε νουκλεόνιο, φαντάζεται τον πυρήνα ως ένα ασυμπέστο ρευστό, μεταβλητού σχήματος, αλλά σταθερού όγκου, στην επιφάνεια του οποίου διαδίδονται φωνόνια (μηχανικά κύματα). Τα τροχιακά και οι στάθμες αυτού του προτύπου αναφέρονται πλέον στα φωνόνια και όχι στα νουκλεόνια.

Το Πρότυπο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων ζευγαρώνει τα νουκλεόνια σθένους σε μαθηματικά αντικείμενα που λέγονται σφαιρικοί τανυστικοί τελεστές (δηλαδή σε υπέρχεις με καθορισμένη στροφορμή) και μελετά την αλληλεπίδραση αυτών των αντικειμένων λαμβάνοντας στο τέλος συλλογικές κυματοσυναρτήσεις και στάθμες.

Προσωπική μου άποψη είναι ότι όλα τα προαναφερθέντα πρότυπα είναι στην βάση τους συλλογικά. Τα Πρότυπα Φλοιών και *Nilsson* υποθέτουν ένα δυναμικό το οποίο παρήχθη από το σύνολο των νουκλεονίων, για να παρακάμψουν την άγνοια του δυναμικού της Ισχυρής Αλληλεπιδράσεως. Άρα αυτή η άγνοια ανάγκασε την κοινότητα να δημιουργήσει πληθώρα Προτύπων και διορθώσεις αυτών, όπου τα μεν επαληθεύουν καλά κάποιους πυρήνες και τα δε κάποιους άλλους. Θυμίζει λίγο την πληθώρα προτύπων του ηλιακού μας συστήματος (Πτολεμαίου, Αριστοτέλη, Υπατίας κ.ο.κ) και το πλήθος των διορθώσεων επί αυτών προτού επικρατήσει η θεωρία του Αριστάρχου περί ηλιοκεντρικού συστήματος, την οποία απέδειξαν και προήγαγαν ο Γαλιλαίος, ο Κοπέρνικος και ο Κέπλερ. Όπως τότε έπρεπε να ωριμάσει η κοινωνία και η τεχνολογία (τηλεσκόπιο) για να λυθεί ο Γόρδιος Δεσμός του ζητήματος, ίσως και τώρα η τεχνολογική πρόοδος να μας δώσει μια κατεύθυνση για την κατανόηση της Ισχυρής Αλληλεπιδράσεως.

Το πλέον σίγουρο είναι ότι τα νουκλεόνια όταν ευρίσκονται σε πυρήνα δεν είναι σφαιρίδια όπως απλοϊκά δείχνουμε σε εικόνες αλλά μια ελαστική, ταχέως κινούμενη πυκνότητα ενέργειας. Αξιοσημείωτο είναι πως το μεγαλύτερο ποσοστό πυρηνικής ενέργειας είναι κινητική των νουκλεονίων και όχι δυναμική. Έτσι αφού οι ταχύτητες είναι υψηλότερες, ο πυρήνας θεωρείται υπερρευστό και η θεωρία της Σχετικότητας υποθάλπτεται. Στα μικροσκοπικά Πρότυπα σχετικιστικό φαινόμενο είναι η αλληλεπίδραση ιδιοστροφορμής-τροχιάς που θα αναφέρουμε εν συνεχεία. Στο Γεωμετρικό Πρότυπο σχετικιστικής προελεύσεως είναι επίσης η εξάρτηση της μάζας του πυρήνα από την παραμόρφωση. Λόγω της εξελισσόμενης υπολογιστικής ισχύος έχει αναπτυχθεί επιπλέον η Σχετικιστική Θεωρία Μέσου Πεδίου, η οποία μέσω αναδρομικών υπολογιστικών σχέσεων προσπαθεί να προσεγγίσει την Ισχυρή Αλληλεπίδραση. Συνειδητοποιούμε λοιπόν ότι έχουμε δρόμο ακόμα, έως ότου κατανοήσουμε τον πυρήνα.

Η κατανόηση των πυρηνικών φαινομένων όχι μόνον θα ανοίξει τον δρόμο σε εφαρμοσμένες επιστήμες όπως αυτήν των ραδιοφαρμάκων που δρουν κατά του καρκίνου, αλλά θα μας ανοίξει τους ορίζοντες και στην Πυρηνική Αστροφυσική περί της γενέσεως των βαρέων πυρήνων εντός των θνήσκοντων αστέρων και ίσως και στην Κοσμολογία, την *επιστήμη των επιστημών*.



Σχήμα 3.1: Τροχιακά του προτύπου των φλοιών

3.1 ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΩΝ ΦΛΟΙΩΝ

Το πρότυπο των Φλοιών είναι ένα πολύ απλό κβαντομηχανικό πρότυπο που εξηγεί τους μαγικούς αριθμούς. Στην απλούστερη εκδοχή του θεωρεί ότι το κάθε νουκλεόνιο κινείται σε κάποιο επιλύσιμο κεντρικό δυναμικό, μείον την αλληλεπίδραση σπιν τροχιάς, μείον το φυγοκεντρικό δυναμικό. Το επιλύσιμο κεντρικό δυναμικό που μας ενδιαφέρει στην εν λόγω διατριβή, είναι ο απλός αρμονικός ταλαντωτής για λόγους, που θα γίνουν κατανοητοί στο πρότυπο του *Elliott*. Επιπλέον στην απλή αυτή θεώρηση τα σωματίδια του πυρήνα είναι μη αλληλεπιδρώντα. Αν A ο μαζικός αριθμός και ζ, κ δύο σταθερές ισχύος, τότε η Χαμιλτονιανή του πυρήνα είναι:

$$H = \sum_{k=1}^A \left(\frac{p_k^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} r_k^2 - \zeta l_k \cdot s_k - \kappa l_k^2 \right) \quad (3.1)$$

Αποδεικνύεται ότι η αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς είναι σχετικιστικής προελεύσεως, που στο πρότυπο των Φλοιών εισήχθηκε αυθαίρετα για να προβλεφεί σωστά τους μαγικούς αριθμούς

που είναι πειραματιώς επιβεβαιωμένοι. Είναι λοιπόν αναγκαία η εισαγωγή της, παρόλο που μας δημιουργεί αρκετά προβλήματα.

Ας δούμε τι θα γινόταν αν δεν υπήρχε αυτή η αλληλεπίδραση. Κατ' αρχάς οι μαγικοί αριθμοί θα ήταν άλλοι. Αν N ο κύριος κβαντικός αριθμός του τρισδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή ο κάθε πυρηνικός φλοιός θα περιείχε $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ τροχιακά. Δηλαδή η θεμελιώδης κατάσταση με $N = 0$ θα είχε 1 τροχιακό, η πρώτη διεγερμένη 3, η δεύτερη 6 κ.ο.κ. Σκεπτόμενοι ότι σε κάθε τροχιακό χωρούν δύο πρωτόνια/νετρόνια οι μαγικοί αριθμοί θα ήταν 2, 6, 12, 24 κ.τ.λ. Δυστυχώς όμως τα ενεργειακά χάσματα δεν δείχνουν αυτούς τους αριθμούς. Παρόλο που τα τροχιακά αυτά θα είχαν πολλά κοινά μεταξύ τους. Πρωτίστως θα είχαν το ίδιο συνολικό πλήθος κβάντων κατανομημένων στους τρεις καρτεσιανούς άξονες, αφού $N = n_x + n_y + n_z$. Δευτερευόντως θα είχαν όλα είτε άρτια στροφορμή $l = 0, 2, 4, \dots$ είτε όλα περιττή $l = 1, 3, 5, \dots$. Αυτό θα σήμαινε ότι θα είχαν όλα κοινή ομοτιμία. Συγκεκριμένα τα τροχιακά άρτιας στροφορμής θα είχαν θετική ομοτιμία, ενώ αυτά με την περιττή στροφορμή αρνητική ομοτιμία. Αν παρομοιάσουμε τα τροχιακά του ίδιου αυτού υποθετικού φλοιού με φυλές, τότε τα τροχιακά της ίδιας φυλής θα είχαν αρκετά κοινά χαρακτηριστικά, λόγω του ότι όλα προέρχονται από το ίδιο κύριο τροχιακό απλού αρμονικού ταλαντωτή χαρακτηριζόμενο από τον κύριο κβαντικό αριθμό N , έχουν δηλαδή τον ίδιο γενάρχη. Αυτά τα ομόφυλα τροχιακά, λόγω των κοινών τους χαρακτηριστικών θα έκλειναν μία δυναμική αλγεβρική συμμετρία $SU(3)$, όπως θα αποδειχθεί στο πρότυπο του *Elliott*.

Στην πραγματικότητα όμως υπάρχει και η αλληλεπίδραση σπιν τροχιάς, η οποία αναγκάζει μέρος των τροχιακών μίας φυλής να αποικίσει τον πιο κάτω φλοιό. Αυτό το φαινόμενο τίθεται εν ενεργεία για $N \geq 3$. Ο *Elliott* λοιπόν απεδείξε την ύπαρξη της $SU(3)$ συμμετρίας για $N \leq 2$. Άνωθεν αυτού οι φλοιοί αποτελούνται από ένα κυρίως σώμα ομόφυλων τροχιακών και μία μικρή πρόσμιξη αποίκων. Αυτοί οι άποικοι όμως χαλούν την συμμετρία και έτσι μπαίνουμε σε περιπέτειες μικροσκοπικών υπολογισμών, για να ανακαλύψουμε τα συλλογικά φαινόμενα εκάστου φλοιού.

Από την ανακοίνωση του προτύπου των φλοιών κι έπειτα οι επιστήμονες συζευγνούν δογματικά τα μοχλευμένα τροχιακά του ίδιου φλοιού. Στην διατριβή αυτή θα δείξουμε ότι είναι καλή προσέγγιση να συζητούμε τα ομόφυλα μόνο τροχιακά, παρόλο που απέχουν ενεργειακά. Στην

διατριβή αυτή, στην παράγραφο της “Συνυπαρξέως Σχημάτων” θα δείξουμε ότι μπορούμε να συ-
ξεύσουμε τα ομόφυλα τροχιακά του 3Δ απλού αρμονικού ταλαντωτή, παρόλο που χωρίζονται από
ένα μεγάλο ενεργειακό χάσμα.

3.2 ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ NILSSON

Ο *Nilsson* υπέθεσε ότι το κάθε νουκλεόνιο αισθάνεται στον χώρο το μέσο παραγόμενο δυ-
ναμικό των υπολοίπων νουκλεονίων [11]. Σκοπός του ήταν να περιγράψει παραμορφωμένους
πυρήνες, δηλαδή μη σφαιρικούς. Έτσι το χωρικό δυναμικό έχει κυλινδρική συμμετρία· αν πρόκει-
ται για επιμηκυμένη πυρήνα το ύψος του κυλίνδρου υπερτερεί της ακτίνας της βάσεως, ενώ για
πεπλατυσμένο μειονεκτεί. Υπάρχει όμως και μη χωρικό δυναμικό, η περιβόητη αλληλεπίδραση
ιδιοστροφορμής-τροχιάς. Ο όρος αυτός ενώ προκύπτει σχετικιστικά, στην απλή κβαντομηχανι-
κή εισάγεται αυθαίρετα μέσα στην Χαμιλτονιανή, για να επαληθευτούν οι μαγικοί αριθμοί του
πυρήνα. Τέλος εισάγεται ένας τρίτος όρος εξαρτώμενος από τό τετράγωνο της στροφορμής, ο
οποίος έχει στόχο να μειώσει την αύξηση της ενέργειας με την αύξηση της στροφορμής.

Η Χαμιλτονιανή συνεπώς γράφεται [12][13]:

$$H = H_{osc} + u_{ls}\hbar\omega_0(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) + u_{ll}\hbar\omega_0(\mathbf{l}^2 - \langle \mathbf{l}^2 \rangle_N), \quad (3.2)$$

με

$$H_{osc} = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \frac{1}{2}M(\omega_z^2 z^2 + \omega_\perp^2(x^2 + y^2)). \quad (3.3)$$

Επιπλέον

$$\langle \mathbf{l}^2 \rangle_N = \frac{1}{2}N(N + 3). \quad (3.4)$$

Όπου M η πυρηνική μάζα, N ο αριθμός του φλοιού και προφανώς $\mathbf{l}, \mathbf{s}, \mathbf{p}$ είναι αντίστοιχα η
τροχιακή στροφορμή, η ιδιοστροφορμή και η ορμή του κάθε νουκλεονίου. Ας τονίσουμε εδώ ότι η
ανωτέρω Χαμιλτονιανή γράφεται ξεχωριστά για πρωτόνια και νετρόνια και τα αποτελέσματά είναι
μονοσωματιδιακές καταστάσεις. Ο στόχος μας είναι να περιγράψουμε παραμορφωμένους πυρήνες
(επιμηκυμένοι ή πεπλατυσμένους).

Η παραμορφώση περιγράφεται από μια αδιάστατη παράμετρο ϵ . Έτσι αν $\epsilon = 0$ έχουμε σφαιρικό πυρήνα, αν $\epsilon > 0$ επιμηκυμένο και αν $\epsilon < 0$ πεπλατυσμένο. Είναι αναμενόμενο αυτή η παράμετρος να καθορίζει το σχήμα του κυλινδρικού δυναμικού του μέσου πεδίου:

$$\omega_z = \omega_0(\epsilon)\left(1 - \frac{2}{3}\epsilon\right), \quad (3.5)$$

$$\omega_{\perp} = \omega_0(\epsilon)\left(1 + \frac{1}{3}\epsilon\right), \quad (3.6)$$

$$\epsilon = \frac{\omega_{\perp} - \omega_z}{\omega_0(\epsilon)}, \quad (3.7)$$

όπου ω σημαίνει συχνότητα ταλαντώσεως.

Οι σταθερές u_{\parallel}, u_{\perp} είναι επίσης αδιάστατες και δείχνουν την ισχύ των μη χωρικών όρων του δυναμικού. Είναι ως επί τω πλείστω αρνητικές ώστε να μειώνουν το ενεργειακό φάσμα και εξαρτώνται από τον φλοιό σθένους. Παραθέτω πίνακα με τις τιμές τους:

Πλήθος Νουκλεονίων	u_{\perp}	u_{\parallel}	
N, Z < 50	-0,16	0	
50 < Z < 82	-0,127	-0,0382	(3.8)
82 < N < 126	-0,127	-0,0268	
82 < Z < 126	-0,115	-0,0375	
126 < N	-0,127	-0,0206	

Οι τιμές αυτές έχουν υπολογισθεί από προσαρμογή σε πειραματικά δεδομένα.

3.2.1 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Αρχικά ο *Nilsson* εισήγαγε αδιάστατες μεταβλητές μήκους:

$$\xi = x \left(\frac{M\omega_{\perp}}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

$$\eta = y \left(\frac{M\omega_{\perp}}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.10)$$

$$\zeta = z \left(\frac{M\omega_z}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Έτσι

$$H_{osc} = \frac{1}{2}\hbar\omega_{\perp} \left[- \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + (\xi^2 + \eta^2) \right] + \frac{1}{2}\omega_z \left(- \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right). \quad (3.12)$$

Ας θυμηθούμε εδώ ότι οι όροι με διπλή παραγωγή ως προς χωρική μεταβλητή στην Χαμιλτονιανή συνήθως εκπροσωπούν κινητική ενέργεια.

Επειδή όμως η στροφορμή ορίζεται ως $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, με $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ το διάνυσμα της στροφορμής δίνει την θέση του στο:

$$\mathbf{l}_t = -i\hbar \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{vmatrix}.$$

Εφόσον όμως το δυναμικό έχει κυλινδρική συμμετρία, αξίζει να μετατρέψουμε τις μεταβλητές μήκους σε αυτές των κυλινδρικών:

$$\xi = \rho \cos \phi, \eta = \rho \sin \phi \text{ με } \rho^2 = \xi^2 + \eta^2. \quad (3.13)$$

Η κυματική εξίσωση γίνεται:

$$\left[\frac{1}{2} \hbar \omega_{\perp} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \rho^2 \right) + \frac{1}{2} \omega_z \left(-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right) - E \right] \psi = 0. \quad (3.14)$$

Ο χωρισμός των μεταβλητών επιτάσσει:

$$\psi = U(\rho) Z(\zeta) \Phi(\phi) \quad (3.15)$$

Η επαλήθευση οδηγεί σε τρεις διαφορικές εξισώσεις με χωρισμένες πλέον μεταβλητές:

$$-\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi = \Lambda^2 \Phi, \quad (3.16)$$

$$\hbar \omega_z \left(-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right) Z(\zeta) = E_z Z(\zeta), \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{2} \hbar \omega_{\perp} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\Lambda^2}{\rho^2} + \rho^2 \right) U(\rho) = E_{\perp} U(\rho). \quad (3.18)$$

Στην διεύθυνση ϕ η λύση είναι απλά ένα στάσιμο κύμα με περίοδο 2π :

$$\Phi = e^{i\Lambda\phi}. \quad (3.19)$$

Το Λ είναι η προβολή της στροφορμής στον άξονα z , δηλαδή αυτό που στην κβαντομηχανική αποκαλούμε m , μαγνητικό κβαντικό αριθμό.

Η δεύτερη διαφορική εξίσωση είναι αυτή του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Συνεπώς οι λύσεις της προκύπτουν από τα πολυώνυμα *Hermite*:

$$Z(\zeta) = e^{-\zeta^2/2} H_n(\zeta), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Προφανώς εδώ η σταθερά E_z είναι το κβάντο ενέργειας στην διεύθυνση ζ και οι τιμές της δίνονται από την:

$$E_z = (n_z + \frac{1}{2}) \hbar \omega_z \quad (3.21)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η τρίτη διαφορική εξίσωση. Αυτή είναι επιλύσιμη στις οριακές περιπτώσεις όπου $\rho \rightarrow 0$ και $\rho \rightarrow +\infty$. Η πρώτη ανταποκρίνεται σε επιμηκυμένο πυρήνα, δηλαδή μικρής βάσεως συγκρίσει του ύψους. Η δεύτερη σχετίζεται με πεπλατυσμένο πυρήνα, αφού η βάση είναι αρκετά μεγαλύτερη του ύψους. Καταλήγουμε λοιπόν ότι η λύση που θα ακολουθήσει μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε αρκετά παραμορφωμένους πυρήνες, είτε επιμηκυμένοι, είτε πεπλατυσμένους. Σε αυτά τα όρια η κυματοσυνάρτηση ικανοποιεί την:

$$U = \rho^{|\Lambda|} e^{-\frac{\rho^2}{2}} W(\rho). \quad (3.22)$$

Όπου η $W(\rho)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση *Kummer* και λέγεται συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση. Το φάσμα αυτής της διαστάσεως δίνεται από την:

$$E_{\perp} = \hbar \omega_{\perp} (2n_{\rho} + |\Lambda| + 1) = \hbar \omega_{\perp} (n_{\perp} + 1), \quad (3.23)$$

με

$$n_{\rho} = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.24)$$

$$n_{\perp} = 2n_{\rho} + |\Lambda|, \quad (3.25)$$

$$|\Lambda| = n_{\perp}, n_{\perp} - 2, n_{\perp} - 4, \dots, 0 \text{ ή } 1 \quad (3.26)$$

Τελικά το φάσμα είναι:

$$E_{osc} = \hbar \omega_z (n_z + \frac{1}{2}) + \hbar \omega_{\perp} (n_{\perp} + 1) = \hbar \omega_0 (N + \frac{3}{2} + (n_{\perp} - 2n_z) \frac{\epsilon}{3}), \quad (3.27)$$

όπου N το μέγεθος του φλοιού με $N = n_z + n_{\perp}$. Το n_{\perp} λαμβάνει τιμές $n_{\perp} = 0, 1, 2, \dots, N$. Όμως ως μη ξεχνάμε ότι η Χαμιλτονιανή έχει άλλους δύο όρους πέρα από το κομμάτι του ταλαντωτή. Έτσι τελικά η ενέργεια είναι:

$$E = \left(N + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega_0 + \frac{1}{3} \epsilon \hbar\omega_0 (N - 3n_z) - 2\kappa \hbar\omega_0 \Lambda \Sigma - \mu' \hbar\omega_0 \left(\Lambda^2 + 2n_{\perp}n_z + 2n_z + n_{\perp} - \frac{N(N+3)}{2} \right). \quad (3.28)$$

Οι σταθερές κ και μ' δίνονται για κάθε φλοιό ξεχωριστά στην αναφορά [13] στο Σχήμα 6.3. Ενδεικτικά αναφέρω πως στον φλοιό 50-82 $\kappa = 0.06$, $\mu' = 0.024$. Βάσει του ανωτέρου τύπου μπορεί κανείς να βρει την σειρά των τροχιακών *Nilsson* ανά αυξανόμενη ενέργεια για διάφορες τιμές της παραμορφώσεως.

3.2.2 ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Τώρα θα λύσουμε ξανά το αυτό πρόβλημα με τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, όπως αυτοί είναι γνωστοί στην γλώσσα της δεύτερης κβάντωσης για το πρόβλημα του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{i}{\hbar} p_{\xi} \right), a_x^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{i}{\hbar} p_{\xi} \right), \quad (3.29)$$

Ομοίως ορίζουμε τελεστές δημιουργίας και καταστροφής για τις άλλες δύο καρτεσιανές συντεταγμένες. Οι τελεστές αυτοί έχουν την ακόλουθη φυσική σημασία: ο a_x^{\dagger} δημιουργεί ένα ενεργειακό κβάντο κατά τον άξονα x , ενώ ο a_x το καταστρέφει. Είναι δηλαδή μποζονικοί τελεστές με $[a_x, a_x^{\dagger}] = 1$. Προφανώς το πλήθος των κβάντων που είναι τελικώς τοποθετημένα στο κάθε άξονα είναι:

$$n_x = a_x^{\dagger} a_x, n_y = a_y^{\dagger} a_y, n_z = a_z^{\dagger} a_z. \quad (3.30)$$

Το πλήθος των κβάντων στο xy επίπεδο είναι:

$$n_{\perp} = n_x + n_y. \quad (3.31)$$

Γενικά ομιλώντας ένας επιμηχυμένος πυρήνας έχει:

$$n_z > \frac{n_{\perp}}{2}, \quad (3.32)$$

ενώ ένας πεπλατυσμένος

$$n_z < \frac{n_{\perp}}{2}. \quad (3.33)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $n_z = \frac{n_{\perp}}{2}$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $n_z = n_x = n_y$ άρα ο πυρήνας είναι σφαιρικός εφόσον $\omega_z \approx \omega_{\perp}$,
2. $n_z \neq n_x \neq n_y$ τότε ο πυρήνας παρουσιάζει μικρή μεν παραμόρφωση, αλλά είναι τριαξονικός (έχει τρεις άξονες). Στο πρότυπο *Nilsson* δεν διακρίνεται ο άξονας x από τον y , αλλά τους θεωρεί ισοδύναμους και ξεχωρίζει το xy επίπεδο από τον άξονα z .

Συναρτήσει των μποζονικών τελεστών η Χαμιλτονιανή γράφεται:

$$H_{osc} = \hbar\omega_z(a_z^{\dagger}a_z + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_{\perp}(a_x^{\dagger}a_x + a_y^{\dagger}a_y + 1) \quad (3.34)$$

Τα χβάντα στο xy επίπεδο συνήθως κατανέμονται άνισα επί των αξόνων x και y . Ο άξονας που θα έχει τα περισσότερα χβάντα γεμίζει και αδειάζει απο τον τελεστή:

$$R^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^{\dagger} + ia_y^{\dagger}), R = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y), \quad (3.35)$$

ενώ ο άξονας με τα λιγότερα χβάντα έχει αντιστοίχως τους τελεστές:

$$S^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^{\dagger} - ia_y^{\dagger}), S = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y), \quad (3.36)$$

Οι τελεστές αυτοί είναι και πάλι μποζονικοί, με έκαστο εκ των $R^{\dagger}R, S^{\dagger}S$ να μη έχει φυσική σημασία, αλλά το άθροισμά τους να είναι:

$$R^{\dagger}R + S^{\dagger}S = r + s = n_x + n_y = n_{\perp}. \quad (3.37)$$

Δηλαδή r είναι το πλήθος των χβάντων στον άξονα του xy επιπέδου που είναι πιο γεμάτος, ενώ s είναι το πλήθος των χβάντων στον πιο άδειο άξονα. Συνέπεια αυτού πάντα να ισχύει:

$$r \geq s. \quad (3.38)$$

Έτσι λοιπόν

$$H_{osc} = \hbar\omega_z(a_z^{\dagger}a_z + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_{\perp}(R^{\dagger}R + S^{\dagger}S + 1), \quad (3.39)$$

$$E_{osc} = \hbar\omega_z(n_z + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_{\perp}(r + s + 1). \quad (3.40)$$

Όμως από την αναλυτική λύση είδαμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις εξαρτώνται επιπλέον από έναν κβαντικό αριθμό Λ (προβολή της στροφορμής), ο οποίος δεν εμφανίζεται στο φάσμα E_{osc} . Για να τον αποκαλύψουμε γράφουμε:

$$l_z = \frac{1}{i}(\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi}) = \frac{1}{i}(a_x^{\dagger} a_y - a_y^{\dagger} a_x) = R^{\dagger} R - S^{\dagger} S. \quad (3.41)$$

Η ιδιοτιμή της προβολής της στροφορμής είναι συνεπώς:

$$\Lambda = r - s \geq 0. \quad (3.42)$$

Τώρα θα αναρωτιέστε τι προβολή είναι αυτή, που λαμβάνει μόνο θετικές τιμές; Θυμηθείτε ότι $l_z = -i\hbar(xp_y - yp_x)$. Πλέον όμως δεν διακρίνουμε τους άξονες σε x και y , αλλά σε αυτόν με τα πολλά κβάντα και σε αυτόν με τα λίγα. Έτσι πάντα η προβολή της στροφορμής είναι θετική.

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι οι ιδιοσυναρτήσεις είναι της μορφής

$$\psi_{osc} = |n_z n_{\perp} \Lambda \rangle, \quad (3.43)$$

ενώ προς το παρόν οι ιδιοτιμές είναι:

$$E_{n_z, n_{\perp}}. \quad (3.44)$$

Υπάρχει δηλαδή εκφυλισμός, ο οποίος θα αφθεί με την εισαγωγή της αλληλεπιδράσεως $l \cdot s$. Μπορεί να ακούγεται πλέον αυτός ο όρος γνωστός και τετριμμένος, λόγω του προτύπου των φλοιών, αλλά χρειάζεται προσοχή διότι μπορεί εύκολα να γίνει παρεξήγηση. Το σπιν σε αυτό το πρόβλημα δεν είναι αυτό του πρωτονίου ή του νετρονίου που τοποθετούμε αργότερα στο τροχιακό. Καλό λοιπόν είναι να το ονομάσουμε αλλιώς (στην βιβλιογραφία λέγεται *quasispin*). Ας υποθέσουμε ότι κατέχουμε ένα κβάντο ενέργειας και πρόκειται να το τοποθετήσουμε στο xy επίπεδο. Προφανώς οι επιλογές είναι δύο: ή θα το δώσουμε στον άξονα x ή στον y . Για να δημιουργήσουμε δύο επιλογές με μία ενιαία περιγραφή κάνουμε την εξής θεώρηση: υποθέτουμε ότι το κβάντο μας έχει $s = \frac{1}{2}$ και άρα οι δυνατές προβολές είναι $\Sigma = \pm \frac{1}{2}$. Αν το κβάντο βρεθεί

στον άξονα x θα έχει $\Sigma = +\frac{1}{2}$, ενώ αν βρεθεί στον y το $\Sigma = -\frac{1}{2}$. Έτσι λοιπόν η αλληλεπίδραση $l \cdot s$ αίρει τον εκφυλισμό που οφείλεται στην ισοδυναμία των κβάντων στο xy επίπεδο. Τελικά τα τροχιακά *Nilsson* συμβολίζονται:

$$\psi = |n_z n_{\perp} \Lambda \Sigma \rangle . \quad (3.45)$$

Βέβαια δεν είναι αυτή η συνήθης μορφή. Αν συζητούσαμε την στροφορμή με το *quasispin* θα προκύψει η συνολική στροφορμή. Η προβολή της συνολικής στροφορμής συμβολίζεται με K . Ας μη το μπερδέψουμε όμως με το K , που διαχωρίζει τις συλλογικές ενεργειακές ζώνες του πρώτου κεφαλαίου. Έτσι τελικά τα τροχιακά *Nilsson* έγιναν διάσημα με την μορφή:

$$K |N n_z \Lambda \rangle . \quad (3.46)$$

Ενώ το πρόβλημα που λύσαμε είναι ακριβώς επιλύσιμο σε μικρές και μεγάλες παραμορφώσεις, είναι εφικτό να το λύσουμε και σε μεσαία παραμόρφωση με την βοήθεια την θεωρίας διαταραχών. Έχουμε δηλαδή συνολική λύση για όλους τους πυρήνες. Ψάχνοντας κανείς στην βιβλιογραφία θα δει κανείς μία πολύ διάσημη εικόνα, αυτήν των ενεργειών *Nilsson* για κάθε παραμόρφωση.

3.2.3 ΤΡΟΧΙΑΚΑ NILSSON ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ

Τα τροχιακά *Nilsson* συνήθως στην βιβλιογραφία δίνονται σε μορφή $K[N n_z \Lambda]$. Όμως για να υπολογίσουμε τα (λ, μ) της $SU(3)$ θα χρειαστεί να μετατρέψουμε τα τροχιακά σε μορφή (n_z, n_x, n_y) , δηλαδή να γνωρίζουμε την κατανομή των κβάντων στους άξονες. Για να γίνει αυτό υπάρχει ένα ενδιαμέσο βήμα. Πρέπει πρώτα να φέρουμε το τροχιακό στην μορφή $|n_z r s \Sigma \rangle$.

Ας ξεκινήσω με παράδειγμα. Έχουμε το τροχιακό $\frac{1}{2}[301]$. Αυτό σημαίνει ότι $n_z = 0$ και $N = 3$. Άρα στους x, y άξονες υπάρχουν $n_x + n_y = N - n_z = 3$ κβάντα. Είδαμε επίσης ότι $\Lambda = r - s$, άρα $r - s = 1$ που σημαίνει ότι $|n_x - n_y| = 1$. Άρα επιτρέπονται οι συνδυασμοί $(n_z, n_x, n_y) = (0, 1, 2)$ ή $(0, 2, 1)$. Τώρα όμως έρχεται και το *quasispin* $\Sigma = K - \Lambda = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Άρα τα κβάντα πλεονάζουν στον άξονα y και έτσι τελικά έχουμε την αντιστοιχία $\frac{1}{2}[301] \leftrightarrow (0, 1, 2)$.

Με όμοιο σκεπτικό μπορούμε να κάνουμε κάθε μετατροπή. Ακολούθως παραθέτω πίνακα των τροχιακών με $N = 3$ (σελ. 67).

Πίνακας 3.1: Τροχιακά *Nilsson* σε δύο μορφές για $N = 3$

$K[Nn_z\Lambda]$	(n_z, n_x, n_y)
1/2[330]	(3,0,0)
3/2[321]	(2,1,0)
5/2[312]	(1,2,0)
7/2[303]	(0,3,0)
1/2[321]	(2,0,1)
3/2[312]	(1,0,2)
1/2[310]	(1,1,1)
3/2[301]	(0,2,1)
5/2[303]	(0,0,3)
1/2[301]	(0,1,2)

3.3 ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΟΥ ELLIOT

Κατ' αρχάς ο *Elliott* πραγματεύτηκε το ίδιο πρόβλημα με τον *Nilsson*, με την διαφορά ότι του έδωσε μία αλγεβρική διάσταση. Δηλαδή θα δούμε και πάλι τον τρισδιάστατο απλό αρμονικό ταλαντωτή, μόνο που τώρα είναι ισοτροπικός:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (3.47)$$

Όπως στο πρότυπο του Νιλσον, έτσι κι εδώ ορίζουμε τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής των χβάντων στους τρεις καρτεσιανούς άξονες:

$$a_j^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_j - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p_j, \quad a_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_j + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p_j, \quad j = x, y, z \quad (3.48)$$

Οι συνδυασμοί αυτών της μορφής $a_j^\dagger a_{j'}$ είναι εννέα και αποτελούν τους γεννήτορες μίας $U(3)$ άλγεβρας.

Βάση αυτών ορίζουμε τους R, S με την ίδια μορφή και σημασία, που είχαν στο πρότυπο

Nilsson

$$R^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger + ia_y^\dagger), \quad (3.49)$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y), \quad (3.50)$$

$$S^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger - ia_y^\dagger), \quad (3.51)$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y), \quad (3.52)$$

$$(3.53)$$

Η Χαμιλτονιανή γράφεται

$$H = \hbar\omega(R^\dagger R + S^\dagger S + a_z^\dagger a_z + \frac{3}{2}). \quad (3.54)$$

Εδώ θα ήθελα να τονίσω ότι η Χαμιλτονιανή του Elliott είναι ίδια με αυτήν του Nilsson αν αντικαταστήσει κανείς $\omega_\perp = \omega_z$. Ενώ οι συχνότητες διαφέρουν οι τελεστές που χρησιμοποιούνται είναι εντελώς ίδιοι. Άρα είτε έχει κανείς σφαιρικό είτε παραμορφωμένο πυρήνα οι τελεστές που χρησιμοποιούνται για την δόμηση της Χαμιλτονιανής γεννούν μία $SU(3)$ συμμετρία.

Θέλουμε να αποδείξουμε τώρα ότι συνδυασμοί των γεννητόρων της $U(3)$ καταλήγουν να κλείνουν μία $SU(3)$. Φτιάχνουμε τους τελεστές του *quasispin* με την ίδια φυσική σημασία του προτύπου *Nilsson* μόνο που τώρα θα αλλάξουμε το συμβολισμό ($\Sigma \leftrightarrow \lambda_0$):

$$\lambda_+ = R^\dagger S, \lambda_- = S^\dagger R, \quad (3.55)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(R^\dagger R - S^\dagger S) = \frac{1}{2}l_z. \quad (3.56)$$

Οι τρεις αυτοί τελεστές ικανοποιούν την άλγεβρα των στροφορμών $SU(2)$, άρα μπορούμε να συζητούμε τα *quasispin* όπως ακριβώς έχουμε μάθει από την θεωρία των στροφορμών. Επιπλέον διατηρούν το πλήθος των κβάντων στο xy επίπεδο σταθερό.

Χρειαζόμαστε άλλους πέντε γεννήτορες για να κλείσουμε την $SU(3)$. Αυτοί είναι:

$$B_+ = R^\dagger a_z, B_- = S^\dagger a_z, \quad (3.57)$$

$$C_+ = a_z^\dagger S, C_- a_z^\dagger R, \quad (3.58)$$

$$N = \frac{1}{3}(R^\dagger R + S^\dagger S - 2a_z^\dagger a_z) = \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{3}(n_x + n_y - 2n_z) = \frac{2}{3}\left(\frac{n_x + n_y}{2} - n_z\right) = \frac{1}{3}n - n_z \quad (3.60)$$

Οι τελεστές αυτοί διατηρούν το συνολικό πλήθος κβάντων σταθερό. Το έργο του κάθε τελεστή είναι φανερό, επί παραδείγματι οι τελεστές B αφαιρούν ένα κβάντο από το xy επίπεδο και το προσθέτουν στον άξονα z . Ο τελεστής N δείχνει το πόσο διαφέρει ο μέσος όρος των κβάντων του xy επιπέδου από αυτά του άξονα z .

Αν κατασκευάσουμε τους μεταθέτες των οκτώ αυτών τελεστών θα δούμε ότι ικανοποιούν τις σχέσεις μεταθέσεως της $SU(3)$. Επιπλέον:

$$[\lambda_0, N] = 0. \quad (3.61)$$

Εφόσον υπάρχουν δύο μετατιθόμενοι γεννήτορες, περιμένουμε και δύο κβαντικούς αριθμούς που θα χαρακτηρίζουν μία μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση, τους (λ, μ) και αναμένουμε και δύο τελεστές *Casimir*. Εν συνεχεία θα δώσω αναλυτικά παραδείγματα για 1, 2 και 3 κβάντα διεγέρσεως.

3.3.1 ΕΝΑ ΚΒΑΝΤΟ ΔΙΕΓΕΡΣΕΩΣ

Θα δούμε με πόσους τρόπους μπορούμε να κατανείμουμε ένα κβάντα στους τρεις καρτεσιανούς άξονες. Ο γενικός τύπος που δίνει το πλήθος των δυνατών κατανομών είναι $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Όταν το κβάντο τοποθετείται στον άξονα z , τότε ο γεννήτορας N λαμβάνει τιμή:

$$N = \frac{1}{3}n - n_z = \frac{1}{3}1 - 1 = -\frac{2}{3}. \quad (3.62)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, επειδή ο άξονας z χαρακτηρίζεται από προβολή του *quasispin* $\lambda_0 = 0$ ο κβαντικός αριθμός τύπου l , που εδώ είναι το *quasispin*, θα είναι $\bar{\Lambda} = 0$ (η παύλα πάνω από το σύμβολο τοποθετείται για να μη συγχύσουμε το *quasispin* με την προβολή της στροφορμής στο

Πίνακας 3.2: Κατανομή του ενός κβάντου διεγέρσεως στους τρεις καρτεσιανούς άξονες.

n_z	n_x	n_y
1	0	0
0	1	0
0	0	1

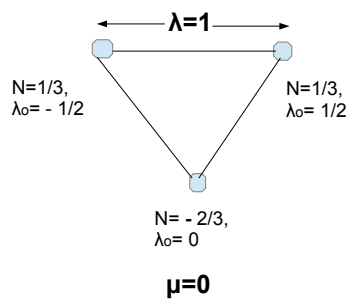
πρότυπο *Nilsson*) κι έτσι το διάνυσμα του *quasispin* είναι το $|\bar{\Lambda}, \lambda_0 \rangle = |0, 0 \rangle$. Άρα αυτή είναι μοναδική η κατάσταση.

Αν το κβάντο κατανέμεται ή στον x ή στον y άξονα, τότε $n_z = 0$ και:

$$N = \frac{1}{3}1 - 0 = \frac{1}{3}. \quad (3.63)$$

Εν τοιαύτη περιπτώσει η προβολή του *quasispin* λαμβάνει δύο δυνατές τιμές, μία για κάθε άξονα, $\lambda_0 = \pm \frac{1}{2}$. Έτσι το διάνυσμα του *quasispin* είναι $|\bar{\Lambda}, \lambda_0 \rangle = |\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \rangle$. Δηλαδή έχουμε μία διπλή κατάσταση.

Αυτά μπορούμε να τα απεικονίσουμε σε ένα τρίγωνο. Γενικά τα διαγράμματα της $SU(3)$ είναι ή τρίγωνα ή εξάγωνα (όχι απαραίτητως κανονικά). Ο κβαντικός αριθμός λ της $SU(3)$ είναι το μήκος της πλευράς του τριγώνου/εξαγώνου για την μέγιστη τιμή του N . Άρα στην περίπτωσή μας ισούμε με $\lambda = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$. Εν αντιθέσει ο κβαντικός αριθμός μ της $SU(3)$ είναι το μήκος της πλευράς για το ελάχιστο N , δηλαδή τώρα $\mu = 0$. Άρα αυτή η μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση είναι η $(\lambda, \mu) = (1, 0)$. Οι δυο αυτοί αριθμοί επαρκούν για να καθορίσουν το σχήμα του τριγώνου/εξαγώνου και άρα όλες τις δυνατές καταστάσεις που εσωκλείει. Το διάγραμμα *Young* αυτής είναι απλά ένα κουτάκι \square .



Σχήμα 3.2: Αναπαράσταση της $(1,0)$ για ένα κβάντο διεγέρσεως.

3.3.2 ΔΥΟ ΚΒΑΝΤΑ ΔΙΕΓΕΡΣΕΩΣ

Αυτήν την φορά θα ξεκινήσουμε με τον πολλαπλασιασμό δύο διαγράμματος *Young*, ένα για κάθε κβάντο.

$$\square \times \square = \square\square + \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$$

$$(1, 0) \times (1, 0) = (2, 0) + (0, 1)$$

$$3 \text{ κατ.} \times 3 \text{ κατ.} = 6 \text{ κατ.} + 3 \text{ κατ.}$$

Ο πολλαπλασιασμός των διαγραμμάτων επαρκεί για τον προσδιορισμό των αναπαραστάσεων, αλλά εμείς απο περιέργεια θα εξάγουμε τα αποτελέσματα αυτά με την μέθοδο που ακολουθήσαμε για το ένα κβάντο διεγέρσεως. Πλέον μπορούμε να κατανήσουμε τα κβάντα στους άξονες με 6 δυνατούς τρόπους. Αρκετοί από αυτούς βέβαια είναι ισοδύναμοι λόγω της ισοδυναμίας των αξόνων x και y .

Πίνακας 3.3: Κατανομή των δύο κβάντων διεγέρσεως στους τρεις καρτεσιανούς άξονες.

n_z	n_x	n_y
2	0	0
1	0	1
1	1	0
0	0	2
0	2	0
0	1	1

Για τον συνδυασμό $(n_z, n_x, n_y) = (2, 0, 0)$ έχουμε:

$$N = \frac{1}{3}n - n_z = \frac{1}{3}2 - 2 = -\frac{4}{3}. \quad (3.64)$$

Επειδή όλα τα κβάντα είναι στον άξονα z , η σύζευξη των *quasispin* δίνει συνολικό $|\bar{\Lambda}, \lambda_0 \rangle = |0, 0 \rangle$, δηλαδή μοναδική κατάσταση.

Οι συνδυασμοί $(n_z, n_x, n_y) = (1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ δίνουν

$$N = \frac{1}{3}2 - 1 = -\frac{1}{3} \text{ και } |\bar{\Lambda}, \lambda_0 \rangle = |\frac{1}{2}, \pm, \frac{1}{2} \rangle. \quad (3.65)$$

Δηλαδή μία διπλή κατάσταση. Το αποτέλεσμα του διανύσματος του *quasispin* έχει προκύψει έπειτα από σύζευξη των $|0, 0 \rangle, |\frac{1}{2}, \pm, \frac{1}{2} \rangle$.

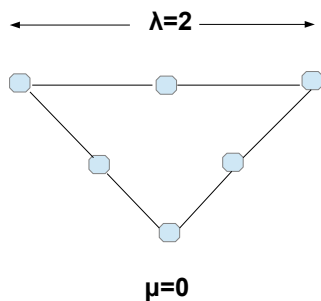
Συνεχίζουμε με τους συνδυασμούς $(n_z, n_x, n_y) = (0, 0, 2) = (0, 2, 0) = (0, 1, 1)$.

$$N = \frac{1}{3}2 - 0 = \frac{2}{3} \text{ και } |\bar{\Lambda}, \lambda_0 \rangle = |1, \pm 1 \rangle, |1, 0 \rangle. \quad (3.66)$$

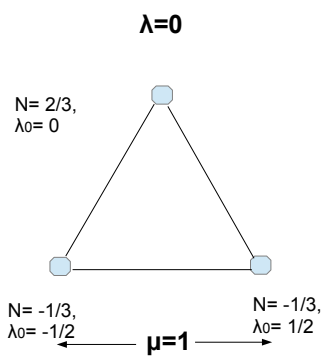
Καταλήξαμε σε μία τριπλή κατάσταση.

Τα σενάρια αυτά μας δίνουν τα εξής τρίγωνα:

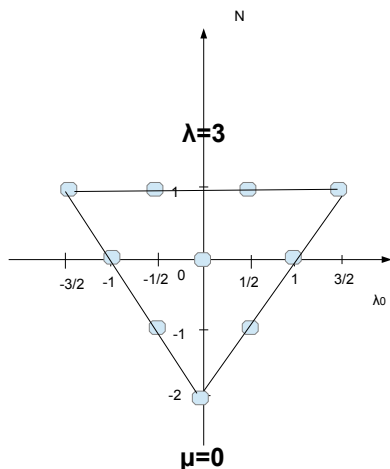
Παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις ομαδοποιούνται σε διαφορετικά τρίγωνα. Το κριτήριο για την ταξινόμησή τους είναι όλες οι καταστάσεις του ίδιου τριγώνου να έχουν ίδιο πλήθος συμμετροποιημένων και αντισυμμετροποιημένων κβάντων. Έτσι όλες οι καταστάσεις της $(2,0)$ έχουν δύο συμμετροποιημένα κβάντων, όπως και όλες τις $(0,1)$ έχουν δύο αντισυμμετροποιημένα κβάντα. Μία από αυτές τις δύο αναπαραστάσεις έχει μεγαλύτερη βαρύτητα, είναι δηλαδή πιο ευσταθής. Από την βαρύτερη αναπαράσταση (λ, μ) γεννάται τουλάχιστον η θεμελιώδης ζώνη του πυρήνα. Το πώς ταυτοποιούμε την αναπαράσταση αυτή θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 3.3: Αναπαράσταση της $(2,0)$ για δύο κβάντα διεγέρσεως.



Σχήμα 3.4: Αναπαράσταση της $(0,1)$ για δύο κβάντα διεγέρσεως.



Σχήμα 3.5: Αναπαράσταση της $(3,0)$ για τρία κβάντα διεγέρσεως.

3.3.3 ΤΡΙΑ ΚΒΑΝΤΑ ΔΙΕΓΕΡΣΕΩΣ

Ας εργαστούμε τώρα στα τρία κβάντα διεγέρσεως. Για ασφάλεια θα ξεκινήσουμε από τον πολλαπλασιασμό των διαγραμμάτων *Young*:

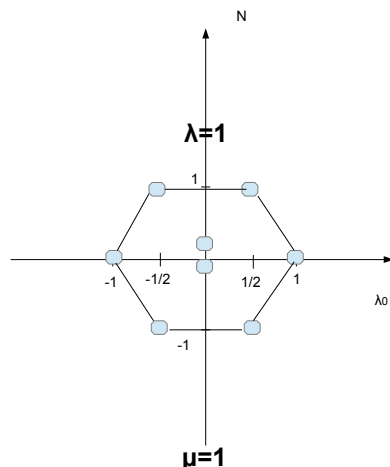
$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (3.67)$$

$$((2, 0) + (0, 1)) \times (1, 0) = (3, 0) + (1, 1) + (0, 0) \quad (3.68)$$

$$(6 \text{ κατ.} + 3 \text{ κατ.}) \times 3 \text{ κατ.} = 10 \text{ κατ.} + 2 \cdot 8 \text{ κατ.} + 1 \text{ κατ.} \quad (3.69)$$

Το διάγραμμα $[f_1, f_2, f_3] = [1, 1, 1]$ εκπροσωπεί κατάσταση με $N = 0, |\bar{\Lambda}, \lambda_0 \rangle = |0, 0 \rangle$ είναι δηλαδή η κατάσταση του κενού. Γενικότερα κάθε φορά που εμφανίζεται ένα ορθογώνιο ύψους τριών κουτιών, έχουμε δικαίωμα να το διαγράψουμε θεωρώντας πως εκπροσωπεί το κενό.

Παρόλο που η μεθοδολογία έγινε σαφής με τα δύο προηγούμενα παραδείγματα είναι σκόπιμο να συνεχίσουμε στα τρία κβάντα διεγέρσεως. Σε αυτήν την περίπτωση μία από τις αναπαραστάσεις θα έχει $\lambda = \mu$. Κάτι τέτοιο συμβαίνει όταν σχήμα είναι κανονικό εζάγωνο με κέντρο την αρχή



Σχήμα 3.6: Αναπαράσταση της (1,1) για τρία χβάντα διεγέρσεως.

των αξόνων. Πρέπει δηλαδή:

1. $N_{max} = -N_{min} \Rightarrow \frac{1}{3}n - n_{z,min} = \frac{1}{3}n + n_{z,max} \Rightarrow n = 3 \frac{n_{z,max} + n_{z,min}}{2}$.
2. Τα $n_{z,max}, n_{z,min}$ να δίνουν τις ίδιες προβολές λ_0 .

Όσον αφορά στην πρώτη απαίτηση πρέπει απλά το συνολικό πλήθος χβάντων να είναι πολλαπλάσιο του τρία και το άθροισμα $n_{z,max} + n_{z,min}$ να είναι ζυγός. Έτσι λοιπόν στο παράδειγμα της (1,1) οι καταστάσεις που δίνουν $\lambda = 1$ είναι οι $(n_{z,min}, n_x, n_y) = (0,2,1)$ και $(0,1,2)$, ενώ αυτές που δίνουν $\mu = 1$ είναι οι $(n_{z,max}, n_x, n_y) = (2,1,0)$ και $(2,0,1)$.

Η περίπτωση $\lambda = \mu$ βρήκαμε πως είναι το κρίσιμο σημείο μεταβάσεως από το επιμηκυμένο σχήμα στο πεπλατυσμένο. Σε επόμενο κεφάλαιο θα το δείξω αυτό με αναλυτικούς πίνακες. Γενικά καθόσον $\lambda > \mu$ το σχήμα του φλοιού είναι επιμηκυμένο, ενώ όταν $\lambda < \mu$ γυρίζει σε πεπλατυσμένο. Οι πυρήνες με $\lambda = \mu$ θεωρούμε πως χαρακτηρίζονται από μέγιστη τριαξονικότητα. Πειραματικά αλλά και θεωρητικά (από άλλα πρότυπα) οι πεπλατυσμένοι πυρήνες εμφανίζονται όταν ο φλοιός σθένους χαρακτηρίζεται από κύριο χβαντικό αριθμό του απλού αρμονικού ταλαντωτή $N \geq 3$. Γενικά σε μία αναπαράσταση (λ, μ) το πλήθος των χβάντων διεγέρσεως είναι $n = \lambda + 2\mu$. Σε

έναν φλοιό απλού αρμονικού ταλαντωτή με κύριο κβαντικό αριθμό $N \geq 3$ (αυτό το N είναι διαφορετικό από τον *Casimir* της $SU(3)$), αλλά όχι πολλαπλάσιο του τρία ενδέχεται να προκύψει αναπαράσταση με πλήθος κβάντων διεγέρσεως $n = 3, 6, 9, \dots$, όμως αυτό δεν μπορεί να συμβεί όταν $N < 3$. Η εμφάνιση των ωσειδών πυρήνων μόνο σε αυτούς τους φλοιούς εξηγείται από την πρώτη απαίτηση. Επιπλέον το φαινόμενο το κρισίμου σημείου εμφανίζει μία επαναληπτικότητα, την οποία μπορούμε να προβλέψουμε.

3.3.4 ΟΙ ΓΕΝΝΗΤΟΡΕΣ ΤΗΣ $SU(3)$ ΚΑΤΑ ΤΟΝ *ELLIOTT*

Γνωρίζουμε ότι τα σύνολα γεννητόρων μίας άλγεβρας δεν είναι μοναδικά. Ψάχνοντας άλλα σύνολα μπορεί να αποκαλύψει κανείς φυσικές ποσότητες του συστήματος. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η επιλογή του εξής συνόλου γεννητόρων της $SU(3)$ [14]:

$$l_0 = 2\lambda_0, \quad (3.70)$$

$$l_{\pm} = \pm\sqrt{2}(C_{\pm} - B_{\pm}), \quad (3.71)$$

$$q_{\pm 2} = -\sqrt{6}\lambda_{\pm}, \quad (3.72)$$

$$q_{\pm 1} = \mp\sqrt{3}(C_{\pm} + B_{\pm}), \quad (3.73)$$

$$q_0 = -3N \quad (3.74)$$

Οι γεννήτορες αυτοί συνολικά οκτώ, ικανοποιούν τις σχέσεις μεταθέσεως της $SU(3)$. Κατατάσσονται σε δύο ομάδες: οι τρεις πρώτοι l_0, l_{\pm} είναι τελεστές που ικανοποιούν την παραδοσιακή άλγεβρα των στροφορμών, ενώ οι πέντε τελευταίοι είναι οι πέντε συνιστώσες του σφαιρικού ταυσιτικού τελεστή δευτέρας τάξεως της τετραπολικής παραμορφώσεως.

Επειδή όλη αυτή η ανάλυση ήταν για τις μονοσωματιδιακές καταστάσεις, τώρα ήρθε η στιγμή να ορίσουμε τους αντίστοιχους συλλογικούς τελεστές:

$$L = \sum_i l_i, \quad (3.75)$$

$$\Lambda = \sum_i \lambda_i, \quad (3.76)$$

$$Q_m = \sum_i q_{im}. \quad (3.77)$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται στον αριθμό των σωματιδίων σθένους. Ο τελεστής *Casimir* με όρους δύο σωμάτων είναι:

$$C_2 = \frac{1}{36}(3L^2 + \sum_m (-1)^m Q_m Q_{-m}). \quad (3.78)$$

Ο ίδιος τελεστής στην βιβλιογραφία απαντάται και με διαφορετικούς συντελεστές [8]:

$$C_2 = \frac{1}{2}L^2 + \frac{4}{3}Q \cdot Q. \quad (3.79)$$

Οι ιδιοτιμές αυτού είναι:

$$\langle C_2 \rangle = \frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu). \quad (3.80)$$

Η χαμιλτονιανή που χρησιμοποίησε ο *Elliott* είναι [14]:

$$H = H_{osc} - V \sum_m (-1)^m Q_m Q_{-m} = H_{osc} - 36C_2V + 3VL^2, \quad (3.81)$$

όπου V μία σταθερά ενδεικτική της ισχύος της τετραπολικής αλληλεπιδράσεως. Ο όρος H_{osc} είναι στην ουσία μία σταθερά για νουκλεόνια του ίδιου μείζονος φλοιού, όπως επίσης και ο C_2 . Άρα η Χαμιλτονιανή είναι ανάλογη της L^2 . Εδώ εμφανίζεται ένα πρόβλημα: το φάσμα αυξάνει με ρυθμό L^2 μόνο για πολύ περιστροφικούς πυρήνες και για πολύ χαμηλές τιμές της στροφορμής. Έτσι ενώ η αλληλεπίδραση $Q \cdot Q$ αίρει κάποιους εκφυλισμούς εντός της ίδιας ζώνης, δεν πετυχαίνει να περιγράψει το φάσμα πυρήνων με χαμηλή παραμόρφωση.

3.4 ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

Το πρότυπο αυτό λέγεται και “Πρότυπο της Υγρής Σταγόνας” ή “Πρότυπο των *Bohr, Mottelson* και *Rainwater*”. Εξαιτίας της σπουδαιότητάς του κέρδισαν και οι τρεις το βραβείο *Nobel* Φυσικής το 1975. Οι δύο πρώτοι Φυσικοί είναι Δανοί, ενώ ο τρίτος ιθαγενής Αμερικανός από το *Idaho*. Το πρότυπο αυτό συνέλαβε τον πυρήνα ως μία ασυμπίεστη, συνεχής πυρηνική ύλη, της οποίας οι μεταπτώσεις οφείλονται στα μηχανικά κύματα (φωνόνια) που πάλλουν την επιφάνειά του. Για την μαθηματική υλοποίησή του θεώρησαν ότι ο πυρήνας είναι τετραπολικώς παραμορφωμένος

και ανέλυσαν την ακτίνα του σε σφαιρικές αρμονικές με $l'=2$ και $\mu' = \pm 2, \pm 1, 0$. Όλα δηλαδή ξεκίνησαν κάπως έτσι [6]:

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu'} \alpha_{2\mu'}^* Y_{2\mu'}(\theta, \phi) \right) \quad (3.82)$$

Να θυμήσω ότι η απλή κβαντική αρχίζει ως εξής: πρώτα αναλύεις το διάνυσμα θέσεως του σωματιδίου σε μία βάση $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ και έπειτα κβαντίζεις τους συντελεστές της βάσεως x, y, z . Αυτό σημαίνει ότι μέσω μίας σχέσεως μεταθέσεως $[x, p_x] = i\hbar$ απαγορεύεις την ταυτόχρονη μέτρηση θέσεως και ορμής. Έτσι μόνο προκύπτει διακριτό φάσμα! Την ίδια τεχνική ακολούθησαν και στο Γεωμετρικό Πρότυπο: ανέλυσαν την ακτίνα σε μία ορθογώνια βάση (σφαιρικές αρμονικές) και έπειτα τους συντελεστές $\alpha_{2,\mu'}$ τους κβάντισαν μέσω σχέσεων μεταθέσεων με τις συζυγείς ορμές. Έτσι λοιπόν ο χώρος των θέσεων είναι πενταδιάστατος.

Λεπτομέριες για το πρότυπο αυτό μπορεί να διαβάσει κάποιος στο βιβλίο των *Greiner* και *Maruhn* στο κεφάλαιο *Collective Models*. Εμείς εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τις παραμέτρους παραμορφώσεως της επιφανείας του πυρήνα β, γ . Αυτές ορίζονται ως εξής:

$$\alpha'_{20} = \alpha_0 = \beta \cos \gamma, \quad (3.83)$$

$$\alpha'_{2\pm 2} = \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma. \quad (3.84)$$

Οι τόνοι δείχνουν ότι οι συντελεστές είναι ως προς το ιδιοσύστημα του πυρήνα. Το β είναι μία μεταβλητή που σηματοδοτεί την απόκλιση από την σφαιρικότητα. Αυτό σημαίνει ότι όταν το β είναι μηδέν ο πυρήνας θεωρείται σφαιρικός, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση παραμορφωμένος. Η παράμετρος γ είναι μία γωνία που έχει νόημα να λαμβάνει τιμές $\gamma \in [0^\circ, 60^\circ]$. Στο πρώτο μισό του διαστήματος ο πυρήνας θεωρείται επιμηκυμένος, ενώ στο δεύτερο μισό πεπλατυσμένος. Ακριβώς στις 30° λέμε ότι έχει μέγιστη τριαξονικότητα.

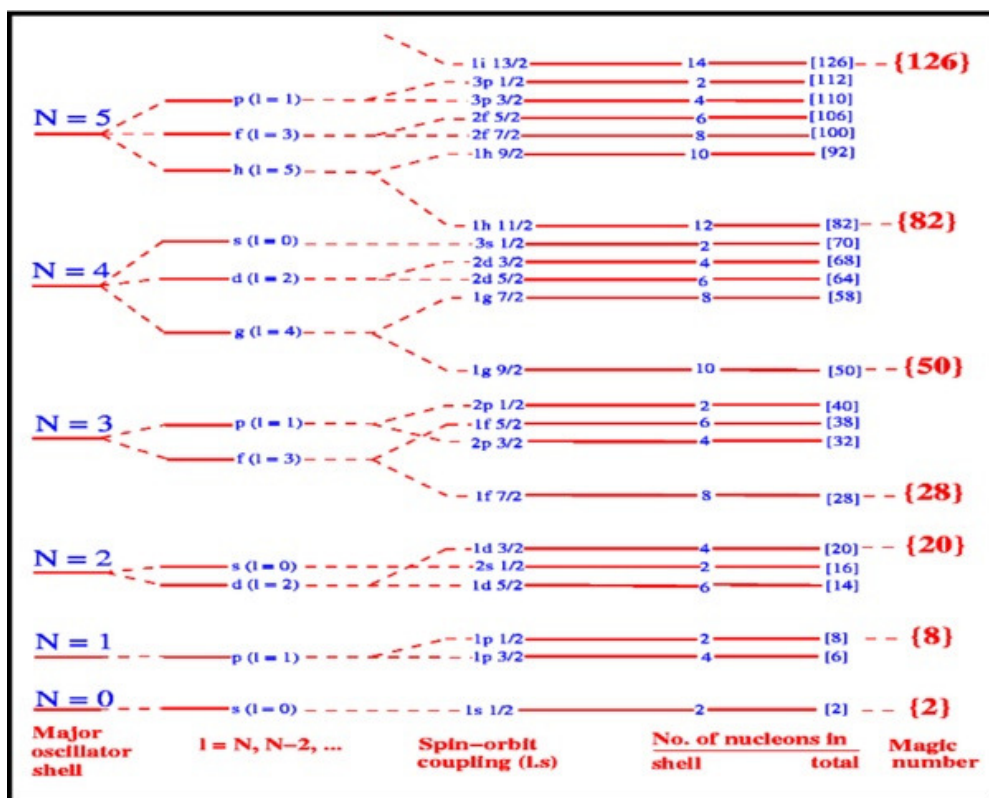
Κεφάλαιο 4

Η *PROXY SU(3)*

Τα προηγούμενα κεφάλαια ήταν όλες οι απαιτούμενες γνώσεις, ώστε να καταλάβει κανείς το πρότυπο *Proxy SU(3)*. Το πρότυπο αυτό αρχίζει με τα τροχιακά *Nilsson*, δηλαδή έχει μικροσκοπική βάση, τα αναδιατάσσει μέσω μίας προσεγγίσεως ώστε όλα μαζί να κλείνουν μία *SU(3)* άλγεβρα και τελικά υπολογίζει τα (λ, μ) . Αυτοί οι δύο αριθμοί επαρκούν πλέον για να προβλέψουμε όλο το ενεργειακό φάσμα, το σχήμα των πυρήνων, τις ηλεκτρικές και μαγνητικές μεταβάσεις.

Τα μεγέθη αυτά είναι βεβαίως τα συλλογικά και υπολογίζονται με μεγάλη ευκολία ακόμα και για φλοιούς με πολλά σωματίδια σθένους. Είναι δηλαδή πιο εύχρηστο εν συγκρίσει με το πρότυπο των Φλοιών, γιατί σε εκείνο οι συζεύξεις των μονοσωματιδιακών καταστάσεων απαιτούν άπειρη υπολογιστή ισχύ, τόσο μεγάλη που ο πυρήνας *Fe*, είναι απλησίαστος. Βέβαια λόγω της προσεγγίσεως που εμείς κάνουμε για να συστήσουμε την *SU(3)* συμμετρία, χάνουμε κάποια πληροφορία. Επί παραδείγματι δεν μπορούμε να προβλέψουμε οκταπολικές παραμορφώσεις. Αλλά στους σφαιρικούς και τετραπολικούς πυρήνες έχουμε πολύ καλά αποτελέσματα.

Επιπλέον η *Proxy SU(3)* δίνει σωστότερα αποτελέσματα από το *Interacting Boson Model* για πολύ μεγάλο εύρος πυρήνων. Ο λόγος είναι ότι σε εκείνο όλοι οι πυρήνες έχουν θεμελιώδη ζώνη με $\mu = 0$, δηλαδή προκύπτουν όλα τα κβάντα συμμετροποιημένα, διότι η πρώτη ύλη του είναι μποζόνια. Εν αντιθέσει, σε εμάς η πρώτη ύλη είναι τα νουκλεόνια σθένους και έτσι σε ελάχιστες περιπτώσεις η θεμελιώδης ζώνη είναι πλήρως συμμετροπιημένη. Αυτή η ουσιώδης διαφορά, που είναι προϊόν της Απαγορευτικής Αρχής του *Pauli*, δίνει σωστές ηλεκτρικές και μαγνητικές μεταβάσεις από διεγερμένες ζώνες προς την θεμελιώδη.



Σχήμα 4.1: Τροχιακά του προτύπου των φλοιών

4.1 ΤΑ ΑΔΕΛΦΑ ΤΡΟΧΙΑΚΑ

Όπως έχει πλέον ειπωθεί στην παράγραφο του προτύπου των φλοιών, τα τροχιακά λόγω της αλληλεπιδράσεως σπιν-τροχιάς δεν έχουν συμμετρία $SU(3)$. Σκεφτόμαστε λοιπόν μία προσέγγιση, για να αναστηλώσουμε την συμμετρία. Η προσέγγιση αυτή λειτουργεί καλά στους παραμορφωμένους πυρήνες, δηλαδή εκεί όπου εφαρμόζεται το πρότυπο *Nilsson*.

Για να γίνει εύκολα αντιληπτό θα επικεντρωθούμε στο ακόλουθο σχήμα. Η φυλή των τροχιακών του τρισδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή με πλήθος κβάντων $n = 4$ αποτελείται από τα τροχιακά $1g_{9/2}, 1g_{7/2}, 2d_{5/2}, 2d_{3/2}, 3s_{1/2}$. Το τροχιακό όμως $1g_{9/2}$, λόγω της αλληλεπιδράσεως σπιν-τροχιάς αποίκισε τον φλοιό με $n = 3$. Επιπλέον η φυλή των $n = 4$ τροχιακών όχι μόνο έχασε ένα τροχιακό, αλλά δέχτηκε ένα άλλο, το $1h_{11/2}$, το οποίο έχει $n = 5$. Δηλαδή έχει έρθει από τον άνω φλοιό. Έτσι λοιπόν συνοψίζουμε, πως ο φλοιός με $n = 4$ έχασε ένα τροχιακό

$(1g_{9/2})$ και δέχθηκε ένα τροχιακό με $n = 5$, $(1h_{11/2})$. Αυτό συμβαίνει σε όλα τα τροχιακά με $n \geq 3$. Δηλαδή χάνουν έναν της φυλής τους και δέχονται έναν άποικο.

Η προσέγγιση που κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε τον άποικο με το τροχιακό της φυλής που χάθηκε [15],[16],[12]. Επί παραδείγματι στον φλοιό με αριθμό σωματιδίων 50-82, αντικαθιστούμε το $1h_{11/2}$ τροχιακό με το $1g_{9/2}$. Το αποτέλεσμα είναι να έχουμε μια καθαρόμαιμη φυλή τροχιακών με όμοιο πλήθος χβάντων διεγέρσεως και κοινή ομοτιμία. Αυτά τα πέντε τροχιακά της φυλής ισοδυναμούν με δεκαπέντε τροχιακά *Nilsson*.

Λόγω της κοινής τους προελεύσεως μπορούν να βρεθούν πίνακες στροφής του δεκαπενταδιάστατου αυτού χώρου *Hilbert*, που να ανταλλάσσουν τα τροχιακά αυτά μεταξύ χωρίς να αλλάζει το μέτρο των τροχιακών, δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας παραμένει σταθερή αφού όλα έχουν τέσσερα χβάντα διεγέρσεως. Εξηγήσαμε στην παράγραφο των $U(n)$ συμμετριών πως το να ανταλλάσσει δύο μονοσωματιδιακά τροχιακά μεταξύ τους, ισοδυναμεί με το να ανταλλάσσει τα σωματίδια των τροχιακών αυτών. Άρα αυτές οι μοναδιακές στροφές βασίζονται στο ότι τα σωματίδια είναι ταυτοτικά φερμιόνια και τα ανταλλάσσουν σεβόμενες την απαγορευτική αρχή του *Pauli*. Τέτοιοι πίνακες στροφής ανήκουν σε ομάδα $U(n)$, όπου εδώ το n είναι η διάσταση του χώρου *Hilbert*, δηλαδή $U(15)$ στο παράδειγμά μας. Αφού κάθε φλοιός τρισδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή με N χβάντα διεγέρσεως περιέχει $n = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ τροχιακά, υπάρχουν μοναδιακές συμμετρίες $U(1), U(3), U(6), \dots$. Αυτοί οι αριθμοί 1,3,6,... είναι απλά το πλήθος των τρόπων κατανομής των N χβάντων στους τρεις καρτεσιανούς άξονες.

Τα ομόφυλα τροχιακά δημιουργούν συλλογικότητες, που έχουν $SU(3)$ συμμετρία. Δηλαδή οι συλλογικές πλέον ιδιοκαταστάσεις του πυρήνα έχουν κοινή ομοτιμία (εξού το σύμβολο $S - Special$) και καθορισμένη στροφορμή και προβολή της στροφορμής. Δηλαδή οι πυρήνες με $SU(3)$ συμμετρία έχουν καθορισμένες περιστροφικές ιδιότητες. Όπως εξηγήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο τα περιστροφικά ενεργειακά φάσματα συνδέονται μόνο με τους παραμορφωμένους πυρήνες. Για αυτό θα δείξουμε στην παράγραφο της Χαμιλτονιανής ότι οι πυρήνες με αυτήν την συμμετρία προσεγγίζονται ικανοποιητικά από τον χβαντικό συμπαγή περιστροφέα.

Τώρα αφού έγινε κατανοητή η προσέγγιση ας διεισδύσουμε στα τροχιακά με τον συμβολισμό *Nilsson*. Στις σελίδες 83, 84 παραθέτω πίνακες με τα τροχιακά *Nilsson* σε τέσσερις φλοιούς. Ο Συμβολισμός των τροχιακών *Nilsson* είναι $K[Nn_z\Lambda]$. Θυμίζω ότι K είναι η προβολή της συνολικής στροφορμής, N ο κύριος κβαντικός αριθμός (το πλήθος κβάντων του τρισδιάστατου ταλαντωτή), n_z το πλήθος των κβάντων στον άξονα z και Λ η προβολή της στροφορμής. Στις δεύτερες στήλες δείχνω τα τροχιακά *Nilsson* προ της αντικατάστασης, ενώ στις τέταρτες τα τροχιακά έπειτα από την αντικατάσταση. Φωτισμένα με χρώματα είναι τα τροχιακά που εμπλέκονται στην αντικατάσταση. Για παράδειγμα στον φλοιό 28-50 το τροχιακό $1/2[440]$, αντικαθιστάται από το $1/2[330]$. Αυτού του είδους τα ζεύγη τροχιακών (παλαιό-αντικαταστάτης) μπορούμε να τα αποκαλούμε αδελφά τροχιακά. Πάντα στο τέλος μένει ένα τροχιακό (με φούξια χρώμα), που δεν έχει αντικαταστάτη. Έτσι ο φλοιός, που προκύπτει έπειτα από την προσέγγιση, έχει πάντα δύο σωματίδια λιγότερα. Δηλαδή παύει να έχει 50-82 σωματίδια και έχει τελικά 50-80.

Επιπλέον οι κβαντικοί αριθμοί *Nilsson* των αδελφών τροχιακών διαφέρουν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$. Το $\Delta N = 1$ σημαίνει ότι διαφέρουν κατά ένα κβάντο συνολικά. Αυτή η διαφορά στα κβάντα πάντα επωμίζεται στον άξονα z , εξού και $\Delta n_z = 1$. Παρόλο όμως που τα κβάντα διαφέρουν οι προβολές των στροφορμών είναι ίσες. Η συνεργάτις μας Σοφία Καραμπάγια στο διδακτορικό της απέδειξε ότι τροχιακά με ίδιες προβολές στροφορμών έχουν μεγάλη χωρική επικάλυψη [17]. Συνέπεια αυτού είναι η χωρική τους κατανομή να είναι παρεμφερής. Έτσι δικαιολογείται η αντικατάσταση του ενός με το άλλο.

Επιπλέον αιτιολόγηση δόθηκε στην δημοσίευση [13],[16]. Εκεί υπολογίστηκαν τα στοιχεία πίνακα της Χαμιλτονιανής *Nilsson* με τα παλαιά και έπειτα με τα νέα τροχιακά. Απόδειξη αυτής της εργασίας ήταν ότι τα στοιχεία πίνακα έχουν μικρές αλλαγές και οι επιπτώσεις της αντικατάστασης είναι ακόμη μικρότερες στις ιδιοτιμές.

Φυσικά αυτή η αντικατάσταση όσο καλή κι αν είναι θεωρείται προσέγγιση. Παρόλα αυτά δίνει πολύ καλά αποτελέσματα και στις ηλεκτρικές τετραπολικές μεταπτώσεις και στα ενεργειακά φάσματα. Είναι αρκούντως καλά τα αποτελέσματα που αναρρωτιόμαστε μήπως όντως τα ομόφυλα τροχιακά συζεύγνυονται μεταξύ τους, ακόμη κι όταν ενεργειακά χάσματα τα χωρίζουν. Ειδικά

Πίνακας 4.1: Τροχιακά *Nilsson* προ και έπειτα της αντικαταστάσεως

28-50	28-50	<i>pf</i>	<i>pf</i>	50-82	50-82	<i>sdg</i>	<i>sdg</i>
$2p_{1/2}$	$1/2[301]$	$2p_{1/2}$	$1/2[301]$	$3s_{1/2}$	$1/2[400]$	$3s_{1/2}$	$1/2[400]$
$2p_{3/2}$	$1/2[321]$	$2p_{3/2}$	$1/2[321]$	$2d_{3/2}$	$1/2[411]$	$2d_{3/2}$	$1/2[411]$
	$3/2[312]$		$3/2[312]$		$3/2[402]$		$3/2[402]$
$1f_{5/2}$	$1/2[310]$	$1f_{5/2}$	$1/2[310]$	$2d_{5/2}$	$1/2[420]$	$2d_{5/2}$	$1/2[420]$
	$3/2[301]$		$3/2[301]$		$3/2[411]$		$3/2[411]$
	$5/2[303]$		$5/2[303]$		$5/2[402]$		$5/2[402]$
$1g_{9/2}$	$1/2[440]$	$1f_{7/2}$	$1/2[330]$	$1g_{7/2}$	$1/2[431]$	$1g_{7/2}$	$1/2[431]$
	$3/2[431]$		$3/2[321]$		$3/2[422]$		$3/2[422]$
	$5/2[422]$		$5/2[312]$		$5/2[413]$		$5/2[413]$
	$7/2[413]$		$7/2[303]$		$7/2[404]$		$7/2[404]$
	$9/2[404]$			$1h_{11/2}$	$1/2[550]$	$1g_{9/2}$	$1/2[440]$
					$3/2[541]$		$3/2[431]$
					$5/2[532]$		$5/2[422]$
					$7/2[523]$		$7/2[413]$
					$9/2[514]$		$9/2[404]$
					$11/2[505]$		

για το Κρυπτόν, όπου οι άποικοι δεν έχουν και ιδιαίτερος μεγάλο χάσμα με τους ομόφυλους τους, φαίνεται ότι ως φλοιός δύναται να θεωρηθούν τα ομόφυλα τροχιακά, χωρίς καμμία αντικατάσταση ή προσέγγιση. Δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε φλοιό σθένους για τα 36 πρωτόνια του Κρυπτού τον φλοιό με 20-40 σωματίδια και όχι τον 28-50 όπως συνηθίζεται.

4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ (λ, μ)

Το εισαγόμενο πρότυπο σε αυτήν την διατριβή εμπνεύστηκε από ένα άλλο πρότυπο αποκαλούμενο *Pseudo SU(3)*. Μολονότι τα θεμέλια των δύο προτύπων, δηλαδή τα τροχιακά, είναι διαφορετικά και ο χειρισμός διαφορετικός, εν τέλη αμφότερα συστήνουν έναν πυρήνα με $SU(3)$ συμμετρία. Η ομάδα αυτή με ηγέτη τον *K.T.Hecht* και αργότερα τον *J.P.Draayer* και πλείστους υποψηφίους διδάκτορες δημιούργησε πολλά εργαλεία για την $SU(3)$. Εξ αυτών είναι ο κώδικας που υπολογίζει τους χβαντικούς αριθμούς (λ, μ), που προκύπτουν από την αναγωγή $U(n) \supset SU(3)$. Ο κώδικας αυτός είναι γραμμένος σε *Fortran* και μπορεί να διαβάσει κανείς λεπτομέριες σε αυτήν την αναφορά [18]. Ο Ιωάννης Ασημάκης κατά την εκόπηση της μεταπτυχιακής εργασίας του, λειτούργησε τον κώδικα στις εγκαταστάσεις του Μετσοβίου Πολυτεχνείου και έτσι έχουμε τα

Πίνακας 4.2: Τροχιακά *Nilsson* προ και έπειτα της αντικαταστάσεως

82-126	82-126	<i>pfh</i>	<i>pfh</i>	126-184	126-184	<i>sdgi</i>	<i>sdgi</i>
$3p_{1/2}$	1/2[501]	$3p_{1/2}$	1/2[501]	$4s_{1/2}$	1/2[611]	$4s_{1/2}$	1/2[611]
$3p_{3/2}$	1/2[521]	$3p_{3/2}$	1/2[521]	$3d_{3/2}$	1/2[600]	$3d_{3/2}$	1/2[600]
	3/2[512]		3/2[512]		3/2[602]		3/2[602]
$2f_{5/2}$	1/2[510]	$3f_{5/2}$	1/2[510]	$3d_{5/2}$	1/2[631]	$3d_{5/2}$	1/2[631]
	3/2[501]		3/2[501]		3/2[622]		3/2[622]
	5/2[503]		5/2[503]		5/2[613]		5/2[613]
$2f_{7/2}$	1/2[541]	$3f_{7/2}$	1/2[541]	$2g_{7/2}$	1/2[620]	$2g_{7/2}$	1/2[620]
	3/2[532]		3/2[532]		3/2[611]		3/2[611]
	5/2[523]		5/2[523]		5/2[602]		5/2[602]
	7/2[514]		7/2[514]		7/2[604]		7/2[604]
$1h_{9/2}$	1/2[530]	$1h_{9/2}$	1/2[530]	$2g_{9/2}$	1/2[651]	$2g_{9/2}$	1/2[651]
	3/2[521]		3/2[521]		3/2[642]		3/2[642]
	5/2[512]		5/2[512]		5/2[633]		5/2[633]
	7/2[503]		7/2[503]		7/2[624]		7/2[624]
	9/2[505]		9/2[505]		9/2[615]		9/2[615]
$1i_{13/2}$	1/2[660]	$1h_{11/2}$	1/2[550]	$1i_{11/2}$	1/2[640]	$1i_{11/2}$	1/2[640]
	3/2[651]		3/2[541]		3/2[631]		3/2[631]
	5/2[642]		5/2[532]		5/2[622]		5/2[622]
	7/2[633]		7/2[523]		7/2[613]		7/2[613]
	9/2[624]		9/2[514]		9/2[604]		9/2[604]
	11/2[615]		11/2[505]		11/2[606]		11/2[606]
	13/2[606]			$1j_{15/2}$	1/2[770]	$1i_{13/2}$	1/2[660]
					3/2[761]		3/2[651]
					5/2[752]		5/2[642]
					7/2[743]		7/2[633]
					9/2[734]		9/2[624]
					11/2[725]		11/1[615]
					13/2[716]		13/2[606]
					15/2[707]		

αποτελέσματα. Παράλληλα ένας συνεργάτης μας από την Σόφια, ο *N.Minkou* έκανε ακριβώς την ίδια εργασία στο δικό τους υπολογιστικό κέντρο και έτσι επαληθεύσαμε τα αποτελέσματα. Αν και ο κώδικας είναι αξιόπιστος, μπορούμε να ικανοποιήσουμε την περιέργειά μας εξάγοντας τα (λ, μ) για μία απλή περίπτωση. Έτσι θα καταλάβουμε και την μεθοδολογία.

Θα υπολογίσουμε την κύρια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση των πρωτονίων του Κρυπτού. Το Κρυπτό έχει 36 πρωτόνια. Έρα τα πρωτόνια σθένους θα ήταν στον φλοιό με 28-50 σωματίδια. Αν κάνουμε την αντικατάσταση που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο τότε θα πρέπει να τοποθετήσουμε τα τροχιακά $1f_{7/2}$ στην θέση των $1g_{9/2}$ (πίνακας σελ.83). Έτσι ο φλοιός θα αποτελείται από $2p_{1/2}, 2p_{3/2}, 1f_{5/2}, 1f_{7/2}$ τροχιακά και θα έχει χωριτικότητα από 28-48 σωματίδια. Έρα υπάρχουν $36 - 28 = 8$ πρωτόνια σθένος κατανομημένα σε δέκα τροχιακά *Nilsson*.

Τα δέκα τροχιακά έχουν κβαντικούς αριθμούς σε γλώσσα (n_z, n_x, n_y) που φαίνονται στον πίνακα της σελίδος 90. **Εδώ χρειάζεται να τονίσουμε ότι η σειρά λήψης των τροχιακών έχει σημασία και δεν είναι πάντα η σειρά εμφάνισής τους στο πρότυπο του Nilsson. Δηλαδή δεν λαμβάνονται πάντα με σειρά αυξανόμενης ενέργειας.** Η μόνη περίπτωση, όπου η σειρά πλήρωσης των τροχιακών με σωματίδια είναι ίδια, είτε χρησιμοποιεί κανείς τον κώδικα [18], είτε την ενεργειακή σειρά των τροχιακών, όπως αυτή προβλέπεται στο Πρότυπο του Nilsson, είναι για παραμόρφωση κατά Nilsson $\epsilon \approx 0.6$. Σε παραμόρφωση $\epsilon = 0.4$ οι δύο ταξινομήσεις (του κώδικα και η ενεργειακή) διαφέρουν λίγουν, ενώ σε μικρές παραμορφώσεις είναι εντελώς διαφορετικές. Πάνω σε αυτήν την παρατήρηση βασίζεται όλη η ορθότητα των αποτελεσμάτων της συμμετρίας *Proxy SU(3)* σε παραμορφωμένους πυρήνες. Δίχως αυτήν θα είχαμε βγάλει άλλους κβαντικούς αριθμούς (λ, μ) και θα είχε προκληθεί χάος και στις προβλέψεις των σχημάτων των πυρήνων και στις ηλεκτρικές και μαγνητικές μεταβάσεις των πυρήνων. Αναφέρω αυτά τα τρία φυσικά μεγέθη, διότι όπως θα δούμε παρακάτω τα προβλέπουμε σωστά **χωρίς** παράμετρο! Μόνο με γνώση του αριθμού των πρωτονίων και των νετρονίων του πυρήνα μπορούμε να γνωρίζουμε το σχήμα του και τις ηλεκτρικές και μαγνητικές πιθανότητες μετάπτωσής του. Ας κατανοήσουμε τις δύο αρχές τις Φύσεως που κρύβονται πίσω από τα σωστά

αποτελέσματα:

1. Απαγορευτική Αρχή του *Pauli*.

Στην *Proxy SU(3)* η συνολική κυματοσυνάρτηση είναι γινόμενο ενός χωρικού μέρους και ενός σπίνορα. Το χωρικό μέρος έχει *SU(3)* συμμετρία χαρακτηριζόμενη από τα (λ, μ) . Η συμμετρία του κάθε όρου είναι μικτή, αλλά το γινόμενό τους είναι πλήρως αντισυμμετρικό.

2. Αρχή της μέγιστης χωρικής επικάλυψης.

Της δίνω ένα τέτοιο όνομα για να ταιριάζει με την Αρχή του *Pauli*. Αυτή η καινούρια Αρχή πολύ ωραία διατυπώθηκε σε μία δημοσίευση των P. Van Isacker, D. D. Warner, D. S. Brenner [19].

Αναφέρουν οι συγγραφείς στην σελίδα 4608 ότι:

Η μικρή εμβέλεια της ισχυρής αλληλεπιδράσεως μεταξύ γειτονικών νουκλεονίων ευνοεί την μέγιστη χωρική επικάλυψη των χωρικών κυματοσυναρτήσεων των φερμιονίων, η οποία επιτυγχάνεται όταν η κυματοσυνάρτηση χώρου είναι το πλείστον συμμετρική. Άρα ο σπίνορας θα είναι το πλείστον αντισυμμετρικός, ώστε το γινόμενο να είναι πλήρως αντισυμμετρικό.

Παρατηρούμε ότι η Απαγορευτική Αρχή του *Pauli* δρα σαν απωστικό δυναμικό, ενώ η Αρχή της μέγιστης επικάλυψης σαν ελκτικό δυναμικό και έτσι τελικώς επιτυγχάνουμε την ισορροπία. Επί των δύο αυτών Νόμων στηρίχθηκε το ότι δεν υπάρχει πλέον η συμμετρία σωματιδίου σπίνος. Αναλυτικά για την κατήργησή της έχουμε δημοσιεύσει στην αναφορά [20]. Παρόλα αυτά θα γίνει εμφανές στις $B(E2)$ s πως στην αρχή του φλοιού, η *Proxy* εμφανίζει προβλήματα. Αυτά ίσως να προκαλούνται από το ότι η σειρά πλήρωσης των τροχιακών κατά τον κώδικα είναι εντελώς διαφορετική από την ενεργειακή τους κατάταξη.

Το πρόγραμμα τοποθετεί τα τρία χβάντα που του δώσαμε στους τρεις καρτεσιανούς άξονες με την ακόλουθη λογική: πρώτα τοποθετεί το μέγιστο πλήθος χβάντων στον άξονα z , έπειτα τοποθετεί το μέγιστο πλήθος χβάντων στον άξονα x , στην συνέχεια ισομοιράζει τα χβάντα στους x, y άξονες (με προτεραιότητα στον x) και τέλος τοποθετεί το μέγιστο πλήθος χβάντων στον άξονα y . Η σειρά που προκύπτει αν ακολουθήσουμε αυτήν την λογική είναι αυτή του πίνακα στην σελίδα 90. Η κύρια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση των (λ, μ) προκύπτει όταν τοποθετούμε

Πίνακας 4.3: Τροχιακά *Nilsson* με την σειρά λήψης από τον κώδικα

$K[Nn_z\Lambda]$	(n_z, n_x, n_y)
1/2[330]	(3,0,0)
3/2[321]	(2,1,0)
1/2[321]	(2,0,1)
5/2[312]	(1,2,0)
1/2[310]	(1,1,1)
3/2[312]	(1,0,2)
7/2[303]	(0,3,0)
3/2[301]	(0,2,1)
1/2[301]	(0,1,2)
5/2[303]	(0,0,3)

το μέγιστο πλήθος σωματιδίων στις πρώτες καταστάσεις του πίνακα της σελίδος 90. Άρα το διάγραμμα *Young* της $U(10)$ θα είναι $[f] = [2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$. Εν συνεχεία ακολουθούμε κάποια βήματα για να βρούμε πως αυτή η $U(10)$ ανάγεται σε $SU(3)$.

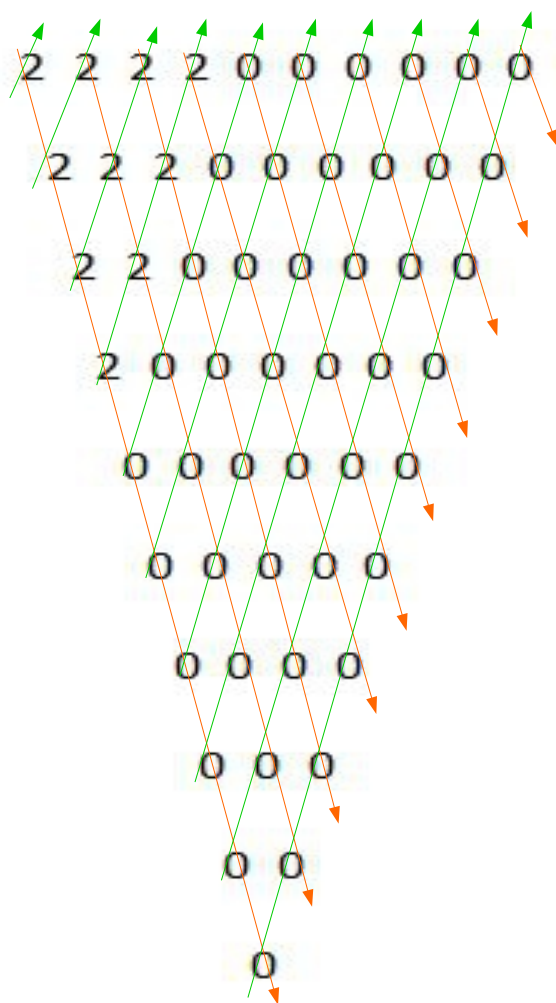
Πρέπει να φτιάξουμε το τρίγωνο του *Gelfand – Tsetlin*. Είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο με τόσους αριθμούς σε κάθε πλευρά, όση είναι η διάσταση της $U(n)$, δηλαδή δέκα. Στην πρώτη γραμμή τοποθετούμε τους αριθμούς καταλήψεως των δέκα τροχιακών, δηλαδή τους αριθμούς $[f]$. Έπειτα συμπληρώνουμε ούτως ώστε οι αριθμοί κατά μήκος των διαγωνίων του σχήματος (σελ. 89) να μη αυξάνονται, δηλαδή να είναι φθίνοντες ή σταθεροί. Ακολουθώντας υπολογίζουμε τα αθροίσματα των στοιχείων κάθε γραμμής. Κοιτώντας πάντα το σχήμα στην σελίδα 89 βλέπουμε ότι τα αθροίσματα Σ_i είναι $\Sigma_1 = 8, \Sigma_2 = 6, \Sigma_3 = 4, \Sigma_4 = 2, \Sigma_5 = 0, \Sigma_6 = 0, \Sigma_7 = 0, \Sigma_8 = 0, \Sigma_9 = 0, \Sigma_{10} = 0$. Τώρα θα βρούμε το διάνυσμα βαρύτητας του διαγράμματος $[f]$ που υποθέσαμε. Το διάνυσμα αυτό έχει 10 στοιχεία και η αξία του θα αποκαλυφθεί σε λίγο

$$w = (\Sigma_1 - \Sigma_2, \Sigma_2 - \Sigma_3, \Sigma_3 - \Sigma_4, \Sigma_4 - \Sigma_5, \Sigma_5 - \Sigma_6, \Sigma_6 - \Sigma_7, \Sigma_7 - \Sigma_8, \Sigma_8 - \Sigma_9, \Sigma_9 - \Sigma_{10}, \Sigma_{10}) = (2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Το κάθε στοιχείο του διανύσματος δείχνει το πόσα κβάντα έχουν τοποθετηθεί στο αντίστοιχο τροχιακό *Nilsson*. Δηλαδή αφού $w_1 = 2$, έχουν τοποθετηθεί 2 κβάντα στο πρώτο τροχιακό του

Πίνακας 4.4: Τροχιακά *Nilsson* με την σειρά λήψης από τον κώδικα και με ενεργειακή σειρά για $\epsilon = 0.4$, για τον φλοιό 50-80. Η σειρά ανά αυξανόμενη ενέργεια προέκυψε από τις ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής *Nilsson* (σελ.63) Παρατηρούμε μικρές αποκλίσεις στην ταξινόμηση των τροχιακών με τους δύο τρόπους.

Σειρά του κώδικα	Ενεργειακή σειρά για $\epsilon = 0.4$
1/2[440]	1/2[440]
3/2[431]	3/2[431]
1/2[431]	1/2[431]
5/2[422]	5/2[422]
1/2[420]	1/2[420]
3/2[422]	3/2[422]
7/2[413]	7/2[413]
3/2[411]	3/2[411]
5/2[413]	9/2[404]
1/2[411]	5/2[413]
9/2[404]	1/2[411]
5/2[402]	5/2[402]
7/2[404]	7/2[404]
1/2[400]	1/2[400]
3/2[402]	3/2[402]



Σχήμα 4.2: Τρίγωνο του *Gelfand – Tsetlin* για 8 σωματίδια σε 10 καταστάσεις.

Πίνακας 4.5: Τροχιακά *Nilsson* με την σειρά λήψης από τον κώδικα και με ενεργειακή σειρά για $\epsilon = 0.2$, για τον φλοιό 50-80. Παρατηρούμε μεγάλες αποκλίσεις στην ταξινόμηση των τροχιακών με τους δύο τρόπους.

Σειρά του κώδικα	Ενεργειακή σειρά για $\epsilon = 0.2$
1/2[440]	3/2[431]
3/2[431]	1/2[440]
1/2[431]	5/2[422]
5/2[422]	1/2[431]
1/2[420]	7/2[413]
3/2[422]	1/2[420]
7/2[413]	9/2[404]
3/2[411]	3/2[422]
5/2[413]	3/2[411]
1/2[411]	5/2[413]
9/2[404]	1/2[411]
5/2[402]	5/2[402]
7/2[404]	7/2[404]
1/2[400]	1/2[400]
3/2[402]	3/2[402]

πίνακα της σελίδος 67. Άρα το συνολικό πλήθος κβάντων σε κάθε άξονα είναι:

$$n_z = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 16, \quad (4.1)$$

$$n_x = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 6, \quad (4.2)$$

$$n_y = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2. \quad (4.3)$$

Τώρα κατατάσσουμε τους αριθμούς των κβάντων σε φθίνουσα σειρά και έχουμε το διάγραμμα *Young* της $U(3)$, στην οποία οι τρεις διαστάσεις είναι οι τρεις καρτεσιανοί άξονες, ενώ οι αριθμοί του διαγράμματος *Young* αυτής είναι το πλήθος κβάντων σε κάθε άξονα. Δηλαδή $[f] = [16, 6, 2]$.

Τώρα μπορούμε να βρούμε τα (λ, μ) , από τις σχέσεις:

$$\lambda = f_1 - f_2, \mu = f_2 - f_3 \quad (4.4)$$

Συνεπώς $(\lambda, \mu) = (10, 4)$ για τα οκτώ σωματίδια.

4.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΣ

Έχει γίνει πλέον σαφές πως για τους τετραπολικώς παραμορφωμένους πυρήνες τα (λ, μ) συνδέονται με το σχήμα του πυρήνα. Για να έχουμε όμως ποσοτική περιγραφή της παραμορφώσεως, θα χρειαστούμε σύνδεση με το γεωμετρικό πρότυπο. Το πρότυπο αυτό μελετάει στην ουσία μόνον τις ταλαντώσεις της επιφανείας του πυρήνα, άρα είναι το πλέον κατάλληλο για μετρήσεις του σχήματος.

Ένα απλό πρόβλημα κβαντομηχανικής είναι ο συμπαγής περιστροφέας. Είναι απλά ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται. Η χαμιλτονιανή του είναι:

$$H_{rot} = A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + A_3 I_3^2, \quad (4.5)$$

όπου A_i είναι το αντίστροφο του διπλασίου της ροπής αδρανείας, I_i είναι η προβολή της συνολικής στροφορμής στο ιδιοσύστημα του πυρήνα και i είναι ο εκάστοτε καρτεσιανός άξονας. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να περιγραφεί και από το γεωμετρικό πρότυπο και από την $SU(3)$ συμμετρία του *Elliott*. Η χαμιλτονιανή του συμπαγούς περιστροφέα μπορεί να έρθει σε άλλη μορφή μέσω των σχέσεων [8]:

$$I_i^2 = \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) L^2 + (\lambda_i^2) X_3^c + (\lambda_i) X_4^c}{2\lambda_i^3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (4.6)$$

όπου τα $\lambda_{1,2,3}$, είναι ποσότητες που θα υπολογισθούν σε λίγο, και οι τελεστές X_3^c, X_4^c είναι αντιστοίχως τρίτης και τετάρτης τάξεως:

$$X_3^c = \sum_{ij} L_i Q_{ij}^c L_j = \sum_i \lambda_i I_i^2, \quad (4.7)$$

$$X_4^c = \sum_{ijk} L_i Q_{ij}^c Q_{jk}^c L_k = \sum_i \lambda_i^2 I_i^2. \quad (4.8)$$

Τότε

$$H_{rot} = aL^2 + bX_3^c + cX_4^c. \quad (4.9)$$

Το σύμβολο c σημαίνει *collective* και δηλώνει ότι οι πίνακες αυτοί συνδέουν και τροχιακά διαφορετικών συνολικών κβάντων [21], [8]. Συγκεκριμένα ο πίνακας της συλλογικής τετραπολικής ροπής Q^c εκτείνεται σε τροχιακά με κοινό πλήθος κβάντων N , αλλά και με $N \pm 2$. Αυτό

σημαίνει ότι η τετραπολική αλληλεπίδραση δεν περιορίζεται στον φλοιό σθένους. Όταν επί παραδείγματι ο φλοιός σθένους είναι ο 50-80 (*sdg* φλοιός στην *Proxy*), τότε η τετραπολική ροπή εκτείνεται και στα τροχιακά από 40-50 σωματίδια (τροχιακά $1g_{9/2}$), διότι αυτά έχουν κοινό N με τα σωματίδια του 50-82, αλλά και στα τροχιακά με 8-20 (*sd* φλοιός). Αν υποθέσουμε ότι έχουμε έως 70 σωματίδια, τότε ο πίνακας της συλλογικής τετραπολικής ροπής θα αποτελείται από δύο υποπίνακες: ο ένας θα περιέχει τον φλοιό του απλού αρμονικού ταλαντωτή 40-70 κι ο άλλος τον *sd* φλοιό (8-20). Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι οι μαγικοί αριθμοί του απλού αρμονικού ταλαντωτή επανεμφανίζονται και διαδραματίζουν κυρίαρχο ρόλο στην τετραπολική ροπή. Επιπλέον φαίνεται πως τα μεγάλα ενεργειακά χάσματα, που δημιουργούν τους συνηθισμένους μαγικούς αριθμούς, δεν απαγορεύουν στα τροχιακά διαφορετικών φλοιών, να αλληλεπιδράσουν. Η συλλογική τετραπολική ροπή χαρακτηρίζεται ως η αληθινή, ενώ υπάρχει και μία δεύτερη, η αλγεβρική, η οποία περιορίζεται μόνο στον φλοιό σθένους και συμβολίζεται Q^a . Η συλλογική τετραπολική ροπή είναι ο λόγος που χρησιμοποιούμε τους μαγικούς αριθμούς του απλού αρμονικού για την ερμηνεία του φαινομένου της συνυπάρξεως σχημάτων (Παράγραφος 4.5).

$$H_{SU(3)} = H_0 + aL^2 + bX_3^a + cX_4^a. \quad (4.10)$$

όπου H_0 είναι ο τριδιάστατος απλός αρμονικός ταλαντωτής. Σε αυτήν την θεώρηση ο συμπαγής περιστροφέας έχει αναλλοίωτες ποσότητες τους τελεστές *Casimir* της $SU(3)$

$$C_2 = \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu), \quad (4.11)$$

$$C_3 = (\lambda - \mu)(\lambda + 2\mu + 3)(2\lambda + \mu + 3), \quad (4.12)$$

όπου λ, μ είναι οι κβαντικοί αριθμοί της $SU(3)$.

Στο γεωμετρικό πρότυπο ο συμπαγής περιστροφέας έχει δύο αναλλοίωτες ποσότητες: τα ίχνη των πινάκων Q_c^2, Q_c^3 . Ο πίνακας Q είναι ο τελεστής της τετραπολικής παραμορφώσεως της μάζας του πυρήνα. Οι παραγόμενες αναλλοίωτες ποσότητες είναι:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \rightarrow (k\beta)^2, \quad (4.13)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \rightarrow (k\beta)^3 \cos(3\gamma). \quad (4.14)$$

όπου $k = \frac{5}{9\pi}(Ar^2)^2$, A ο μαζικός αριθμός, β η απόκλιση από την σφαιρικότητα και γ η γωνία που δείχνει το είδος της παραμορφώσεως του πυρήνα. Επιπλέον η ποσότητα $\bar{r}^2 = (0,87A^{1/6})^2$ [22].

Εφόσον περιγράφουμε το ίδιο φυσικό πρόβλημα (συμπαγής περιστροφέας) με δύο διαφορετικά πρότυπα (αλγεβρικό και γεωμετρικό) οι αναλλοίωτες ποσότητές τους θα πρέπει αριθμητικά να είναι ίσες. Από την σύνδεσή τους προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\lambda_1 = -\frac{(\lambda - \mu)}{3}, \quad (4.15)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\lambda + 2\mu + 3}{3}, \quad (4.16)$$

$$\lambda_3 = \frac{2\lambda + \mu + 3}{3}, \quad (4.17)$$

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{5(Ar^2)^2}(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu) + 3), \quad (4.18)$$

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}(\mu + 1)}{2\lambda + \mu + 3}\right). \quad (4.19)$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις σε συνδυασμό με τα (λ, μ) των πυρήνων μπορούν να μας δώσουν πλέον ποσοτική περιγραφή της παραμορφώσεως κάθε μη αναγωγίσιμης αναπαραστάσεως. Ακολουθώντας παραθέτω τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις ισοτόπων με πρωτόνια και νετρόνια σε φλοιό 50-82, 82-126[22]. Για να βρούμε την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση του πυρήνα συνολικά απλά προσθέτουμε αυτήν των πρωτονίων με αυτήν των νετρονίων.

Από την εξίσωση 4.18 και τους πίνακες των σελίδων 94, 95 έχουμε μία συνολική εικόνα για την απόκλιση από την σφαιρικότητα β συναρτήσει του αριθμού νετρονίων (σχήμα σελίδος 96). Παρατηρούμε ότι μία φανερή απότομη αλλαγή συμβαίνει στα 116 νετρόνια. Εκεί ακριβώς οι πυρήνες μεταβαίνουν από το επιμηκυμένο στο πεπλατυσμένο σχήμα. Μπορούμε να το αποκαλούμε κρίσιμο σημείο. Στο κρίσιμο σημείο η απόκλιση από το σφαιρικό σχήμα μειώνεται δραματικά, διότι το πλήθος των διαθέσιμων κβάντων περίπου ισοκατανέμεται στους τρεις καρτεσιανούς άξονες. Τέτοιοι πυρήνες λέμε ότι έχουν μέγιστη τριαξονικότητα.

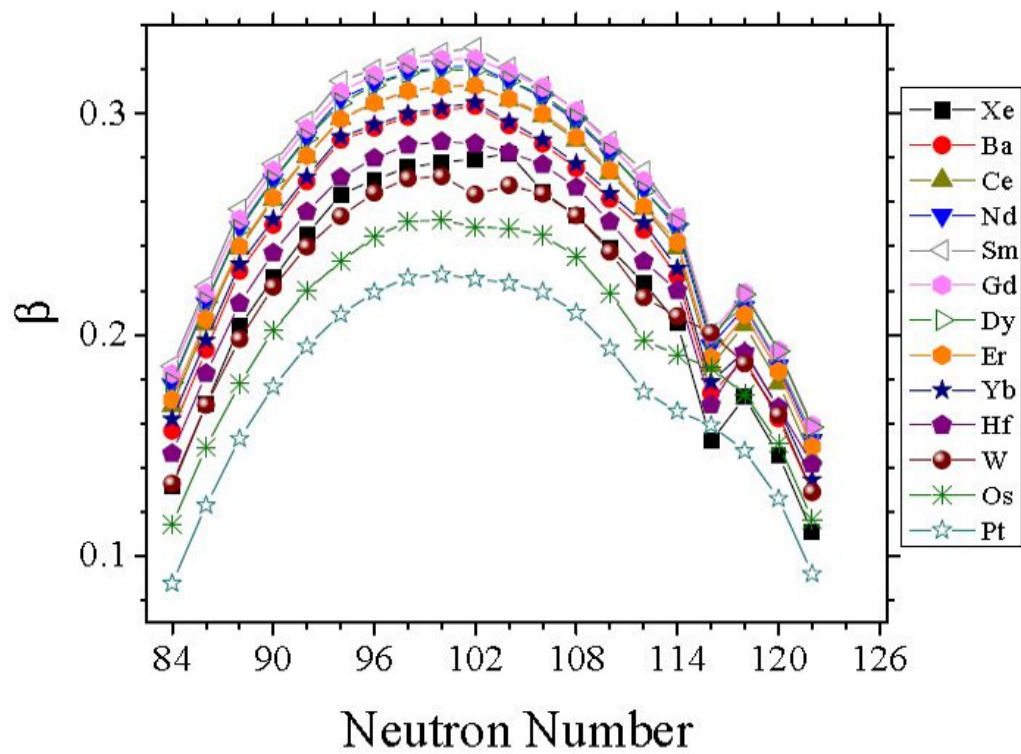
Εν συνεχεία μπορούμε να μελετήσουμε την ποσότητα γ , όπως αυτή εισάγεται από το γεωμετρικό πρότυπο. Η ποσότητα αυτή λαμβάνει τιμές $0^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$. Ειδικότερα όταν $0^\circ \leq \gamma < 30^\circ$ ο πυρήνας είναι επιμηκυμένος, ενώ όταν $30^\circ < \gamma \leq 60^\circ$ είναι πεπλατυσμένος. Από την σχέση 4.19 παράγουμε το σχήμα της σελίδος 97.

Πίνακας 4.6: Κύριες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (λ, μ) αλυσίδων ισοτόπων. Στην δεύτερη στήλη και τρίτη γραμμή παρατίθενται ξεχωριστά οι αναπαραστάσεις των νετρονίων και πρωτονίων αντιστοίχως. Η αναπαράσταση του πυρήνα προκύπτει με απλή άθροιση της δεύτερης στήλης με την τρίτη γραμμή. Με έντονο χρώμα τονίζονται οι περιπτώσεις με $\lambda < \mu$, δηλαδή οι πεπλατυσμένοι πυρήνες.

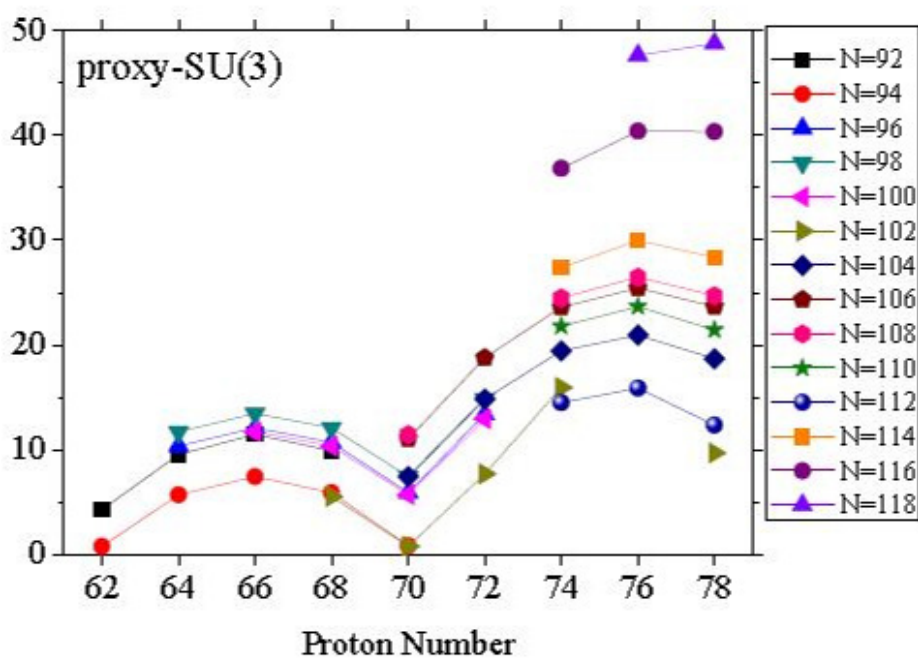
N	Z	Ba	Ce	Nd	Sm	Gd	Dy	Er	Yb	Hf
	<i>irrep</i>	56	58	60	62	64	66	68	70	72
		(18,0)	(18, 4)	(20, 4)	(24,0)	(20, 6)	(18,8)	(18,6)	(20,0)	(12,8)
56	(18,0)	(36,0)	(36,4)	(38,4)	(42,0)	(38,6)	(36,8)	(36,6)	(38,0)	(30,8)
58	(18,4)	(36,4)	(36,8)	(38,8)	(42,4)	(38,10)	(36,12)	(36,10)	(38,4)	(30,12)
60	(20,4)	(28,4)	(38,8)	(40,8)	(44,4)	(40,10)	(38,12)	(38,10)	(40,4)	(32,12)
62	(24,0)	(42,0)	(42,4)	(44,4)	(48,0)	(44,6)	(42,8)	(42,6)	(44,0)	(36,8)
64	(20,6)	(38,6)	(38,10)	(40,10)	(44,6)	(40,12)	(38,14)	(38,12)	(40,6)	(32,14)
66	(18,8)	(36,8)	(36,12)	(38,12)	(32,8)	(38,14)	(36,16)	(36,14)	(38,8)	(30,16)
68	(18,6)	(36,6)	(36,10)	(38,10)	(42,6)	(38,12)	(36,14)	(36,12)	(38,6)	(30,14)
70	(20,0)	(38,0)	(38,4)	(40,4)	(44,0)	(40,6)	(38,8)	(38,6)	(40,0)	(32,8)
72	(12,8)	(30,8)	(30,12)	(32,12)	(36,8)	(32,14)	(30,16)	(30,14)	(32,8)	(24,16)
74	(6,12)	(24,12)	(24,16)	(26,16)	(30,12)	(26,18)	(24,20)	(24,18)	(26,12)	(18, 20)
76	(2,12)		(20,16)	(22,16)	(26,12)	(22,18)	(20,20)	(20,18)	(22,12)	(14, 20)
78	(0,8)							(18,14)	(20,8)	(12,16)
88	(24,0)	(42,0)	(42,4)	(44,4)						
90	(26,4)	(44,4)	(44,8)	(46,8)	(50,4)	(46,10)	(44,12)	(44,10)	(46,4)	(38,12)
92	(30,4)	(48,4)	(48,8)	(50,8)	(54,4)	(50,10)	(48,12)	(48,10)	(50,4)	(42,12)
94	(36,0)	(54,0)	(54,4)	(56,4)	(60,0)	(56,6)	(54,8)	(54,6)	(56,0)	(48,8)
96	(34,6)	(52,6)	(52,10)	(54,10)	(58,6)	(54,12)	(52,14)	(52,12)	(54,6)	(46,14)
98	(34,8)	(52,8)	(52,12)	(54,12)	(58,8)	(54,14)	(52,16)	(52,14)	(54,8)	(46,16)
100	(36,6)	(54,6)	(54,10)	(56,10)	(60,6)	(56,12)	(54,14)	(54,12)	(56,6)	(48,14)
102	(40,0)	(58,0)	(58,4)	(60,4)	(64,0)	(60,6)	(58,8)	(58,6)	(60,0)	(52,8)
104	(34,8)	(52,8)	(52,12)	(54,12)	(58,8)	(54,14)	(52,16)	(52,14)	(54,8)	(46,16)
106	(30,12)	(48,12)	(48,16)	(50,16)	(54,12)	(50,18)	(48,20)	(48,18)	(50,12)	(42,20)
108	(28,12)	(46,12)	(46,16)	(48,16)	(52,12)	(48,18)	(46,20)	(46,18)	(48,12)	(40,20)
110	(28,8)	(46,8)	(46,12)	(48,12)	(52,8)	(48,14)	(46,16)	(46,14)	(48,8)	(40,16)
112	(30,0)	(48,0)	(48,4)	(50,4)	(54,0)	(50,6)	(48,8)	(48,6)	(50,0)	(42,8)
114	(20,10)	(38,10)	(38,14)	(40,14)	(44,10)	(40,16)	(38,18)	(38,16)	(40,10)	(32,18)
116	(12,16)	(30,6)	(30,10)	(32,10)	(36,6)	(32,12)	(30,14)	(30,12)	(32,6)	(24,14)
118	(6,18)	(24,18)	(24,22)	(26,22)	(30,18)	(26,24)	(24,16)	(24,24)	(26,18)	(18, 26)
120	(2,16)	(20,16)	(20,20)	(22,20)	(26,16)	(22,22)	(20, 24)	(20, 22)	(22,16)	(14, 24)

Πίνακας 4.7: Κύριες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (λ, μ) αλυσίδων ισοτόπων. Στην δεύτερη στήλη και τρίτη γραμμή παρατίθενται ξεχωριστά οι αναπαραστάσεις των νετρονίων και πρωτονίων αντιστοίχως. Η αναπαράσταση του πυρήνα προκύπτει με απλή άθροιση της δεύτερης στήλης με την τρίτη γραμμή. Με έντονο χρώμα τονίζονται οι περιπτώσεις με $\lambda < \mu$, δηλαδή οι πεπλατυσμένοι πυρήνες.

N	Z <i>irrep</i>	W	Os	Pt
		74 (6,12)	76 (2,12)	78 (0,8)
56	(18,0)	(24,12)	(20,12)	(18,8)
58	(18,4)	(24,16)	(20,16)	(18,12)
60	(20, 4)	(26,16)	(22,16)	(20,12)
62	(24,0)	(30,12)	(26,12)	(24,8)
64	(20,6)	(26,18)	(22,18)	(20,14)
66	(18,8)	(24,20)	(20,20)	(18,16)
68	(18, 6)	(24,18)	(20,18)	(18,14)
70	(20,0)	(26,12)	(22,12)	(20,8)
72	(12, 8)	(18, 20)	(14, 20)	(12, 16)
74	(6,12)	(12, 24)	(8, 24)	(6, 20)
76	(2,12)	(8, 24)	(4, 24)	(2, 20)
78	(0,8)	(6, 20)	(2, 20)	(0, 16)
94	(36,0)	(42,12)	(38,12)	
96	(34,6)	(40,18)	(36,18)	
98	(34,8)	(40,20)	(36,20)	
100	(36,6)	(42,18)	(38,18)	(36,14)
102	(40,0)	(46,12)	(42,12)	(40,8)
104	(34,8)	(40,20)	(36,20)	(34,16)
106	(30,12)	(36,24)	(32,24)	(30,20)
108	(28,12)	(34,24)	(30,24)	(28,20)
110	(28,8)	(34,20)	(30,20)	(28,16)
112	(30,0)	(36,12)	(32,12)	(30,8)
114	(20,10)	(26,22)	(22,22)	(20,18)
116	(12,16)	(18, 28)	(14, 28)	(12, 24)
118	(6,18)	(12, 30)	(8, 30)	(6, 26)
120	(2,16)	(8, 28)	(4, 28)	(2, 24)



Σχήμα 4.3: Απόκλιση από την σφαιρικότητα για αλυσίδες ισότοπων. Το κρίσιμο σημείο για τον φλοιό νετρονίων 82-126 βρίσκεται στα 116 νετρόνια. Αντίστοιχα κρίσιμα σημεία μπορούν να προβλεφθούν και για ανώτερους φλοιούς [22].



Σχήμα 4.4: Η γωνία γ έχει μία κυματοειδή μορφή. Παρουσιάζει ελάχιστο εκεί όπου $\mu = 0$. Σε αυτές τις περιπτώσεις η κυματοσυνάρτηση της $SU(3)$ είναι πλήρως συμμετρική και θυμίζει την μποζονική κυματοσυνάρτηση της κύριας αναπαράστασης του IBM .

Η πρόβλεψη για αλλαγή σχήματος στα 116 νετρόνια έχει γίνει και από το *Interacting Boson Model*. Ειδικότερα το *IBM* θεωρεί τους κρίσιμους πυρήνες υποψηφίους για O(6) συμμετρία. Στην *Proxy SU(3)* όλοι οι παραμορφωμένοι πυρήνες έχουν την κοινή SU(3) συμμετρία.

4.4 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\mu = 0$

Γνωρίζουμε ότι το *Interacting Boson Model*, θεωρεί ότι τα νουκλεόνια σθένους συζευγνύονται σε μποζονικούς σχηματισμούς. Ως εκ τούτου η κύρια αναπαράσταση έχει πάντα $(\lambda, \mu) = (\lambda, 0)$. Αν σχεδιάσουμε το διάγραμμα *Young* για αυτήν την περίπτωση θα δούμε κάτι τέτοιο:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \dots \\ \hline \end{array} \quad (4.20)$$

Είναι δηλαδή πλήρως συμμετροποιημένη η κυματοσυνάρτηση, αφού οι γραμμές στα διαγράμματα *Young* δηλώνουν συμμετροποίηση, ενώ οι στήλες αντισυμετροποίηση των κβάντων. Τέτοια οριζόντια διαγράμματα της SU(3) προκύπτουν από διαγράμματα της U(3) με $n_x = n_y$, αφού $\mu = n_x - n_y$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \dots n_z \\ \hline \square & \dots & n_x & \\ \hline \square & \dots & n_y & \\ \hline \end{array} \quad (4.21)$$

Στην πλήρως συμμετρική κατάσταση λοιπόν το πλήθος των κβάντων στους άξονες x και y είναι ίσο, δηλαδή το xy επίπεδο του πυρήνα είναι κυκλική τομή.

Ας δούμε λοιπόν σε τι αριθμό σωματιδίων σθένους προκύπτουν οι πλήρως συμμετρικές καταστάσεις στην SU(3). Ο πίνακας της σελίδος 99 θα μας διαφωτίσει. Βλέπουμε ότι το φαινόμενο συμβαίνει σε αριθμό σωματιδίων σθένους 0,2,6,12,20,30,42,... Η επαναληπτικότητα στην φύση ποτέ δεν είναι τυχαία.

Ένας φλοιός σθένους με SU(3) συμμετρία έχει τροχιακά πάντα με ίδιο συνολικό πλήθος κβάντων. Αυτά τα κβάντα κατανέμονται με όλους τους δυνατούς τρόπους στους τρεις καρτεσιανούς άξονες. Το πλήθος των δυνατών τρόπων κατανομής είναι πάντα ίσο με τα τροχιακά *Nilsson* που περιλαμβάνουμε στον φλοιό. Οι πιθανοί αυτοί τρόποι ισούνται με $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$, όπου N το πλήθος

Πίνακας 4.8: Περιπτώσεις με $\mu = 0$.

$U(n)$	Σωματίδια σθένους	$(\lambda, 0)$
$U(6)$	1	(2,0)
	2	(4,0)
	6	(6,0)
$U(10)$	1	(3,0)
	2	(6,0)
	6	(12,0)
	12	(12,0)
$U(15)$	1	(4,0)
	2	(8,0)
	6	(18,0)
	12	(24,0)
	20	(20,0)
$U(21)$	1	(5,0)
	2	(10,0)
	6	(24,0)
	12	(36,0)
	20	(40,0)
	30	(30,0)

Πίνακας 4.9: Ομάδα $U(n)$ ανά πλήθος κβάντων N και χωρητικότητα φλοιού

N	$U(n)$	Μέγιστο πλήθος σωματιδίων
0	$U(1)$	2
1	$U(3)$	6
2	$U(6)$	12
3	$U(10)$	20
4	$U(15)$	30
5	$U(21)$	42

κβάντων. Έτσι για μηδέν κβάντα έχουμε την $U(1)$, για ένα κβάντο την $U(3)$ κ.ο.κ. Συγκεντρώνω τα αποτελέσματα στον πίνακα της σελίδος 100. Φυσικά γνωρίζουμε ότι σε κάθε τροχιακό τοποθετούνται έως 2 σωματίδια. Άρα η χωρητικότητα του κάθε φλοιού είναι $(N+1)(N+2)$. Τώρα θα ήθελα να παρατηρήσουμε ταυτόχρονα τους πίνακες των σελίδων 99 και 100. Είναι φανερό ότι το πλήθος των σωματιδίων όπου $\mu = 0$ ταυτίζεται με την χωρητικότητα σε σωματίδια των ομάδων $U(n)$, είναι δηλαδή 2,6,12,20,30,42,... και δίνεται από τον τύπο $(N+1)(N+2)$. Σε κάθε τέτοιο μαγικό αριθμό το πλήθος των κατανεμημένων κβάντων στους άξονες x και y είναι ίσο.

Για να πειστήμε λοιπόν εντελώς ότι σε αυτούς τους μαγικούς αριθμούς τα κβάντα στους άξονες x, y ισοκατανέμονται παραθέτω ένα παράδειγμα για την $U(10)$ στον πίνακα της σελίδος 101. Εν τέλη αν ακολουθήσουμε την αλυσίδα αλγεβρών:

$$U\left(\frac{(N+1)(N+2)}{2}\right) \supset U\left(\frac{N(N+1)}{2}\right) \supset U\left(\frac{(N-1)N}{2}\right) \supset \dots \supset U(1) \quad (4.22)$$

τότε οι μαγικοί αριθμοί της περιπτώσεως $\mu = 0$ θα είναι:

$$(N+1)(N+2), N(N+1), (N-1)N, \dots, 2, 1. \quad (4.23)$$

Έχουμε αναφέρει ότι οι ενεργειακές συλλογικές ζώνες του πυρήνα διακρίνονται μεταξύ τους από έναν κβαντικό αριθμό K . Αυτός σε ειδικές και σπάνιες περιπτώσεις ταυτίζεται με την προβολή της στροφορμής. Γενικά όμως είναι ένας αναγκαίος κβαντικός αριθμός για να διακρίνονται οι ενεργειακές ζώνες χωρίς περεταίρω φυσική σημασία. Έτσι λοιπόν η θεμελιώδης ζώνη έχει $K = 0$,

Πίνακας 4.10: Οι μαγικοί αριθμοί της περιπτώσεως $\mu = 0$ όταν $\sum n_x = \sum n_y$.

Άθροισμα χβάντων στους x, y άξονες	(n_z, n_x, n_y)	Συνολικό πλήθος σωματιδίων
	(3,0,0)	
$(\sum n_x, \sum n_y)$	(0,0)	2
	(2,1,0)	
	(2,0,1)	
$(\sum n_x, \sum n_y)$	(1,1)	6
	(1,2,0)	
	(1,1,1)	
	(1,0,2)	
$(\sum n_x, \sum n_y)$	(4,4)	12
	(0,3,0)	
	(0,2,1)	
	(0,1,2)	
	(0,0,3)	
$(\sum n_x, \sum n_y)$	(10,10)	20

η γάμμα ζώνη $K = 2$, και οι επόμενες απλά ονομάζονται από την τιμή του K . Μια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση (λ, μ) περιέχει ζώνες με $K = 0, 2, 4, \dots, \mu$. Όταν $\mu = 0$ στην αναπαράσταση υπάρχει μόνο η θεμελιώδης ζώνη, ενώ όλες οι υπόλοιπες ζώνες βρίσκονται σε δευτερεύουσες αναπαραστάσεις. Σε αυτήν την περίπτωση, όπου η θεμελιώδης ζώνη είναι μόνη της, οι πιθανότητες ενεργειακών μεταβάσεων από άλλες ζώνες προς αυτήν θεωρητικά ισούνται με το μηδέν. Δηλαδή απαγορεύονται οι μεταπτώσεις μεταξύ ζωνών διαφορετικών αναπαραστάσεων. Έτσι λοιπόν στο *IBM* επειδή πάντα η κύρια αναπαράσταση είναι $(\lambda, 0)$, πάντα απαγορεύονται οι μεταπτώσεις από την γάμμα ζώνη προς την θεμελιώδη. Δυστυχώς όμως πειραματικά οι εν λόγω μεταπτώσεις είναι πολύ ισχυρές. Αυτό αποδεικνύει ότι η μποζονική υπόθεση για όλους τους πυρήνες είναι ανεπιτυχής. Μόνο οι πυρήνες με πλήθος πρωτονίων και νετρονίων σθένους ξεχωριστά 1,2,6,12,20 ταιριάζουν στην μποζονική περιγραφή. Δηλαδή μόνο όταν τα χβάντα ισοκατανέμονται στους x, y άξονες η κυματοσυνάρτηση χώρου του πυρήνα είναι πλήρως συμμετρική στην θεμελιώδη ζώνη.

4.5 Η ΣΥΝΥΠΑΡΞΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Στην παράγραφο αυτή θα προτείνουμε κάτι ριζοσπαστικό, την αλλαγή των μαγικών αριθμών. Όπως ισχυριστήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο τα νουκλεόνια επιλέγουν ταίρι όχι πάντα με ενεργειακό κριτήριο, αλλά δημιουργούνται ζεύγη με μέγιστη χωρική αλληλεπικάλυψη των τροχιακών τους. Οι συνήθεις μαγικοί αριθμοί δημιουργήθηκαν καθαρά και μόνο με ενεργειακά κριτήρια. Δηλαδή τα τροχιακά που διαχωρίζονται από μεγάλα ενεργειακά χάσματα ανήκουν σε διαφορετικούς φλοιούς. Τα γνωστά ενεργειακά χάσματα προκλήθηκαν από την συζητημένη αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς, η οποία διαχωρίζει ενεργειακά μία ομάδα τροχιακών του τρισδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή από τα υπόλοιπα και έτσι παραλαμβάνουμε τους γνωστούς μαγικούς αριθμούς. Η αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς δεν επιδρά όμως στο χωρικό μέρος της κυματοσυναρτήσεως. Έτσι τα απόδημα τροχιακά συνεχίζουν να έχουν ισχυρή χωρική αλληλεπικάλυψη με τα ομογενή τους. Συνεπώς μπορούμε να δοκιμάσουμε να συλλέξουμε τα τροχιακά με κοινό συνολικό πλήθος κβάντων του τρισδιάστου απλού αρμονικού ταλαντωτή, χωρίς να κάνουμε κάποια αντικατάσταση τροχιακών. Δηλαδή αντί να θεωρήσουμε ως φλοιό σθένους τον 28 – 50, να θεωρήσουμε τον 20 – 40 και να δούμε τί θα συμβεί. Αυτός ο φλοιός θα έχει μία ακριβή $SU(3)$ συμμετρία διότι δεν έγιναν προσεγγίσεις.

4.5.1 Ο ΦΛΟΙΟΣ 20-40

Θα ξεκινήσω με έναν πίνακα (σελ. 103) που θα εξηγεί ποια ακριβώς τροχιακά τον συναποτελούν και με ποια σειρά συμπληρώνονται. Θυμίζω ότι τα τροχιακά $1f_{7/2}$ είναι αυτά που αποδημούν λόγω της αλληλεπίδρασης σπιν-τροχιάς, αλλά εμείς τώρα τα συμπεριλαμβάνουμε στον φλοιό. Παρατηρούμε ότι αυτό το απόδημο τροχιακό συμπληρώνεται πλήρως όταν τοποθετηθούν 14 νουκλεόνια, αφού το τελευταίο τροχιακό του συμπληρώνεται έβδομο. Για να υπάρχουν 14 νουκλεόνια σθένους, θα πρέπει τα συνολικά νουκλεόνια να είναι $14 + 20 = 34$. Αν αυτά είναι πρωτόνια, τότε θα μιλάμε για το στοιχείο ${}_{34}\text{Se}$. Με αυτήν την θεώρηση, δηλαδή των 14 πρωτονίων σθένους σε $U(10)$ συμμετρία, οι αριθμοί (λ, μ) της $SU(3)$ άλγεβρας προκύπτουν $(6,6)$ δηλαδή ο πυρήνας χαρακτηρίζεται κρίσιμος μεταξύ του επιμηκυμένου και του πεπλατυσμένου σχήματος. Ενώ αν

Πίνακας 4.11: Φλοιός 20-40 για την ακριβή $SU(3)$ συμμετρία

Τροχιακό	(n_z, n_x, n_y)	Σειρά συμπληρώσεως	Πρωτόνια σθένους Σεληνίου
$2p_{1/2}$	(0,1,2)	9	
$2p_{3/2}$	(2,0,1)	3	✓
	(1,0,2)	6	✓
$1f_{5/2}$	(1,1,1)	5	✓
	(0,2,1)	8	
	(0,0,3)	10	
$1f_{7/2}$	(3,0,0)	1	✓
	(2,1,0)	2	✓
	(1,2,0)	4	✓
	(0,3,0)	7	✓

χρησιμοποιούσαμε την *Proxy* – $SU(3)$ ο φλοιός θα ήταν ο 28 – 48, άρα τα νουκλεόνια σθένους θα ήταν $34 - 28 = 6$ και οι αριθμοί (λ, μ) θα ήταν (12,0) και ο πυρήνας θα ήταν καθαρά επιμηκυμένος.

$$\lambda > \mu \Leftrightarrow \text{επιμηκυμένος}$$

$$\lambda < \mu \Leftrightarrow \text{Πεπλατυσμένος}$$

$$\lambda = \mu \Leftrightarrow \text{Κρίσιμος}$$

Είναι απορίας άξιο, να μάθουμε αν αυτές οι δύο θεωρήσεις, δηλαδή η Ακριβής και η *Proxy* $SU(3)$ έχουν κάποια πειραματική επαλήθευση. Αν ψάξουμε στην βιβλιογραφία του Σεληνίου, θα δούμε δημοσιεύσεις, που υποστηρίζουν ότι στα $^{70}\text{Se}, ^{72}\text{Se}$ συνυπάρχουν δύο σχήματα, το επιμηκυμένο και το σφαιρικό [23]. Αυτό πειραματικά φαίνεται από το ακόλουθο γεγονός: γνωρίζουμε ότι στην θεμελιώδη ενεργειακή ζώνη οι στάθμες χαρακτηρίζονται από στροφορμή και ομοτιμία $0^+, 2^+, 4^+, \dots$. Εκεί μέσα στο φάσμα του μετράται τουλάχιστον μία επιπλέον εμβόλιμη 0_2^+ (ίσως και μία 2_2^+), η οποία όμως δεν είναι β ζώνη. Θα αποδείξουμε ότι οι δύο 0^+ προκύπτουν από την *Proxy* και την Ακριβή $SU(3)$ συμμετρία.

Φαίνεται συνεπώς ότι τα πρωτόνια σθένους του Σεληνίου βρίσκουν το δρόμο προς την συλλογικότητα αλληλεπιδρώντας με τα τελευταία πρωτόνια του προηγούμενου φλοιού, εξαιτίας της

συγγενειάς τους. Αυτή η συνύπαρξη σχημάτων εμφανίζεται σε αριθμό σωματιδίων κατάλληλο, ώστε να κλείσει το απόδημο τροχιακό $1f_{7/2}$. Φυσικά αν το φαινόμενο δεν επαναληφθεί στους ανώτερους φλοιούς, ίσως να πρόκειται για σύμπτωση. Επομένως πρέπει να ελέγξουμε και τους επόμενους μαγικούς αριθμούς κατά τον ίδιο τρόπο.

4.5.2 Ο ΦΛΟΙΟΣ 40-70

Με την ίδια τεχνική θα ερευνήσουμε τον φλοιό 40 – 70. Τα τροχιακά, που έχουν κατεβεί στον κάτω φλοιό, είναι τα $1g_{9/2}$. Παρατηρώντας τον πίνακα της σελίδος 105 βλέπουμε ότι χρειαζόμαστε 22 σωματίδια σθένους για να συμπληρωθεί πλήρως οι οικογένεια των $1g_{9/2}$, αφού το τελευταίο της οικογενείας συμπληρώνεται ενδέκατο. Τα 22 σωματίδια σθένους για αυτόν τον φλοιό σημαίνουν $22 + 40 = 62$ σωματίδια συνολικά. Τα 22 σωματίδια σθένους σε μία $U(15)$ άλγεβρα καταλήγουν σε αριθμούς $(l, m) = (12, 8)$ οι οποίοι δεικνύουν επιμηκυμένη παραμόρφωση, αλλά όχι έντονη. Αν όμως χρησιμοποιούσαμε την *Proxy* – $SU(3)$, τότε ο φλοιός θα ήταν ο 50 – 80 και τα σωματίδια σθένους θα ήταν $62 - 50 = 12$. Σε αυτήν την περίπτωση τα (λ, μ) θα ισούταν με $(24, 0)$ δηλαδή ένα καθαρά επιμηκυμένο σχήμα με μεγάλη παραμόρφωση.

Προσφάτως δημοσιεύθηκαν τα αποτελέσματα ενός πειράματος [24], όπου οι συγγραφείς παρατηρούν πως στο ${}_{36}\text{Kr}_{60}$ δεν εμφανίζεται συνύπαρξη σχημάτων, αλλά για στο ${}_{36}\text{Kr}_{62}$ αίφνης βλέπουμε δύο εμβόλιμες ενεργειακές καταστάσεις $0_2^+, 2_2^+$ μέσα στην θεμελιώδη ζώνη, οι οποίες δηλώνουν συνύπαρξη σχημάτων ξανά. Δηλαδή το φαινόμενο επανεμφανίζεται στα 62 νετρόνια ακριβώς.

4.5.3 Ο ΦΛΟΙΟΣ 70-112

Τέλος θα αναζητήσουμε το φαινόμενο στον επόμενο φλοιό του απλού αρμονικού ταλαντωτή 70-112. Αν εστιάσουμε στον πίνακα στην σελίδα 106 θα καταλάβουμε ότι για να συμπληρωθούν πλήρως τα απόδημα τροχιακά $1h_{11/2}$ χρειαζόμαστε 32 σωματίδια σθένους, εφόσον το τελευταίο συμπληρώνεται δέκατο έκτο. Ο συνολικός αριθμός σωματιδίων θα πρέπει συνεπώς να είναι $32 + 70 = 102$. Τα 32 νετρόνια ενός φλοιού με $U(21)$ άλγεβρα, θα είχαν $(\lambda, \mu) = (20, 10)$, ενώ με τους παραδοσιακούς μαγικούς αριθμούς της *Proxy* – $SU(3)$ τα νετρόνια σθένους θα ήταν $102 - 82 = 20$

Πίνακας 4.12: Φλοιός 40-70 για την ακριβή $SU(3)$ συμμετρία

Τροχιακό	(n_z, n_x, n_y)	Σειρά συμπληρώσεως	Νετρόνια σθένους για το ${}_{36}Kr_{62}$
$3s_{1/2}$	(0,2,2)	13	
$2d_{3/2}$	(1,1,2)	9	✓
	(0,1,3)	14	
$2d_{5/2}$	(2,1,1)	5	✓
	(1,2,1)	8	✓
	(0,3,1)	12	
$1g_{7/2}$	(3,0,1)	3	✓
	(2,0,2)	6	✓
	(1,0,3)	10	✓
	(0,0,4)	15	
$1g_{9/2}$	(4,0,0)	1	✓
	(3,1,0)	2	✓
	(2,2,0)	4	✓
	(1,3,0)	7	✓
	(0,4,0)	11	✓

και τα (λ, μ) θα ήταν $(40, 0)$. Περιέργως πάντα η αντίστοιχη περίπτωση στην *Proxy* – $SU(3)$ έχει $\mu = 0$. Αλλά αυτό θα αναλυθεί σε επόμενη παράγραφο. Προς το παρόν υποψιαζόμαστε πως οι περιπτώσεις της *Proxy* – $SU(3)$ με $\mu = 0$ και $\lambda = 2 \times 2, 2 \times 6, 2 \times 12, 2 \times 20, \dots$ είναι υποψήφιοι για συνύπαρξη σχημάτων.

Έχουμε λοιπόν μία ιδέα για το ποια τροχιακά πρέπει να είναι συμπληρωμένα, ώστε να ξεκινήσει η συνύπαρξη. Σίγουρα το φαινόμενο σταματάει απότομα σε μαγικό αριθμό του 3Δ απλού αρμονικού ταλαντωτή. Θα ερευνήσουμε από ποιον αριθμό σωματιδίων ξεκινάει. Η έρευνα αυτή θα βασιστεί στην παραμόρφωση β της συλλογής. Η παραμόρφωση δίνεται από την σχέση:

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{5(Ar^2)^2}(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu) + 3). \quad (4.24)$$

Θέλουμε όμως να μελετήσουμε μόνο την παραμόρφωση των πρωτονίων ή των νετρονίων ξεχωριστά. Άρα η σταθερά κανονικοποίησης δεν ισχύει, διότι περιέχει τον μαζικό αριθμό και την μέση τετραγωνική ακτίνα του πυρήνα. Για αυτό θα την αμελήσουμε και θα κρατήσουμε:

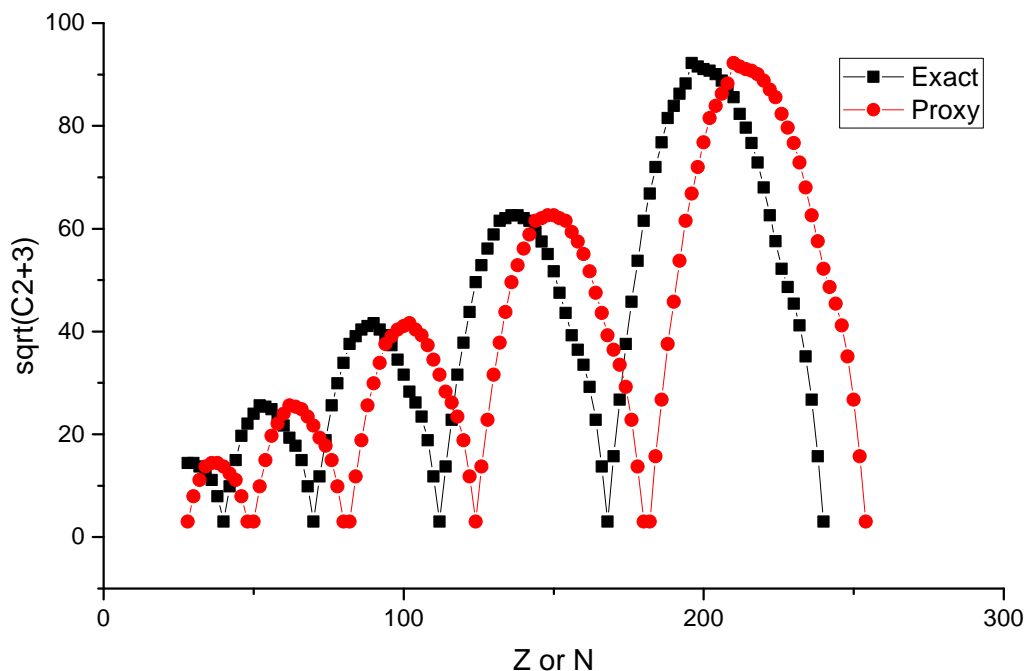
$$\sqrt{C_2 + 3} = \sqrt{(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu) + 3)}. \quad (4.25)$$

Πίνακας 4.13: Φλοιός 70-112 για την ακριβή SU(3) συμμετρία

Τροχιακό	(n_z, n_x, n_y)	Σειρά συμπληρώσεως	Νετρόνια σθένους για το ${}_{80}Hg_{102}$
$3p_{1/2}$	(0,2,3)	19	
$3p_{3/2}$	(2,1,2)	9	✓
	(1,1,3)	14	✓
$3f_{5/2}$	(1,2,2)	13	✓
	(0,3,2)	18	
	(0,1,4)	20	
$3f_{7/2}$	(4,0,1)	3	✓
	(3,0,2)	6	✓
	(2,0,3)	10	✓
	(1,0,4)	15	✓
$1h_{9/2}$	(3,1,1)	5	✓
	(2,2,1)	8	✓
	(1,3,1)	12	✓
	(1,3,0)	7	✓
	(0,4,1)	17	
$1h_{11/2}$	(0,0,5)	21	
	(5,0,0)	1	✓
	(4,1,0)	2	✓
	(3,2,0)	4	✓
	(2,3,0)	7	✓
	(1,4,0)	11	✓
(0,5,0)	16	✓	

Πίνακας 4.14: Απαιτούμενα σωματίδια για την συμπλήρωση των αποδήμων τροχιακών

Φλοιός	Απόδημα τροχιακά	Σειρά συμπλήρωσης	Σωματίδια σθένους	Αριθμός σωματιδίων
20-40	$1f_{7/2}$			
	(3,0,0)	1		
	(2,1,0)	2		
	(1,2,0)	4	8	28
	(0,3,0)	7	14	34
40-70	$1g_{9/2}$			
	(4,0,0)	1		
	(3,1,0)	2		
	(2,2,0)	4		
	(1,3,0)	7	14	54
	(0,4,0)	11	22	62
70-112	$1h_{11/2}$			
	(5,0,0)	1		
	(4,1,0)	2		
	(3,2,0)	4		
	(2,3,0)	7		
	(1,4,0)	11	22	92
	(0,5,0)	16	32	102



Σχήμα 4.5: Στον κατακόρυφο άξονα είναι οι τιμές της παραμορφώσεως δίχως κανονικοποίηση. Όπου η παραμόρφωση σύμφωνα με την Ακριβή $SU(3)$ είναι μικρότερη της *Proxy*, υπάρχει συνύπαρξη. Ο πυρήνας ακολουθεί την διαδρομή με την μικρότερη παραμόρφωση. Αυτή είναι και η αιτία της συνυπάρξεως σχημάτων.

Η ποσότητα αυτή είναι ανάλογη του β και θα την υπολογίσουμε για πλέον των 28 σωματιδίων, στις δύο θεωρήσεις (Ακριβής και *Proxy*). Τα αποτελέσματα φαίνονται στην γραφική παράσταση της σελίδος 108.

Επειδή οι αναπαραστάσεις στις δύο θεωρήσεις είναι πολύ χρήσιμες, παραθέτω τις κύριες για πλέον των 28 σωματιδίων. Παρατηρώντας την γραφική παράσταση της ποσότητας $\sqrt{C_2+3}$ συναρτήσει του αριθμού σωματιδίων με την Ακριβή και την *Proxy* $SU(3)$, θα διαπιστώσει ότι σε συγκεκριμένες περιοχές, η Ακριβής δίνει χαμηλότερη παραμόρφωση από την *Proxy*. Συμπεραίνουμε ότι: *συνύπαρξη εμφανίζεται, όταν η τιμή της παραμορφώσεως $\sqrt{C_2+3}$ είτε των πρωτονίων, είτε των νετρονίων, είτε και των δύο είναι μικρότερη με την Ακριβή $SU(3)$ συμμετρία, εν συγκρίσει με την *Proxy*. Οι μαγικοί αριθμοί όπου συμβαίνει αυτό είναι 34 – 42, 60 – 72, 96 –*

Z or N	Exact	Exact	Proxy	Proxy	sqrt(C2+3)	sqrt(C2+3)	gamma	gamma
	lambda	mu	lambda	mu	Exact	Proxy	Exact	Proxy
					$(B) * \text{col}(C) + \text{col}(C)^2 + 1 * \text{col}(E) + \text{col}(E)^3) * (\text{col}(C) + 1) / (2 * \text{co}3) * (\text{col}(E) + 1) / (2 * \text{col}($			
20	0	0	--	--	1,73205	--	30	--
22	6	0	--	--	7,54983	--	6,58678	--
24	8	2	--	--	10,81665	--	13,89789	--
26	12	0	--	--	13,52775	--	3,6705	--
28	10	4	0	0	14,17745	1,73205	17,78365	30
30	10	4	6	0	14,17745	7,54983	17,78365	6,58678
32	12	0	8	2	13,52775	10,81665	3,6705	13,89789
34	6	6	12	0	12,12436	13,52775	30	3,6705
36	2	8	10	4	10,81665	14,17745	46,10211	17,78365
38	0	6	10	4	7,54983	14,17745	53,41322	17,78365
40	0	0	12	0	1,73205	13,52775	30	3,6705
42	8	0	6	6	9,53939	12,12436	5,20872	30
44	12	2	2	8	14,73092	10,81665	10,15833	46,10211
46	18	0	0	6	19,51922	7,54983	2,54292	53,41322
48	18	4	0	0	21,93171	1,73205	11,38711	30
50	20	4	0	0	23,89561	1,73205	10,44026	30
52	24	0	8	0	25,5147	9,53939	1,94512	5,20872
54	20	6	12	2	25,23886	14,73092	13,89789	10,15833
56	18	8	18	0	24,75884	19,51922	18,3491	2,54292
58	18	6	18	4	23,30236	21,93171	15,07914	11,38711
60	20	0	20	4	21,51743	23,89561	2,30664	10,44026
62	12	8	24	0	19,15724	25,5147	24,00745	1,94512
64	6	12	20	6	17,5784	25,23886	39,82643	13,89789
66	2	12	18	8	14,73092	24,75884	49,84167	18,3491
68	0	8	18	6	9,53939	23,30236	54,79128	15,07914
70	0	0	20	0	1,73205	21,51743	30	2,30664
72	10	0	12	8	11,53256	19,15724	4,30662	24,00745
74	16	2	6	12	18,68154	17,5784	7,99414	39,82643
76	24	0	2	12	25,5147	14,73092	1,94512	49,84167
78	26	4	0	8	29,8161	9,53939	8,35047	54,79128
80	30	4	0	0	33,77869	1,73205	7,36507	30
82	36	0	0	0	37,51	1,73205	1,32295	30
84	34	6	10	0	38,97435	11,53256	8,94828	4,30662
86	34	8	16	2	40,26164	18,68154	11,16233	7,99414
88	36	6	24	0	40,95119	25,5147	8,51302	1,94512
90	40	0	26	4	41,50904	29,8161	1,19548	8,35047
92	34	8	30	4	40,26164	33,77869	11,16233	7,36507
94	30	12	36	0	39,15354	37,51	16,71092	1,32295
96	28	12	34	6	37,24245	38,97435	17,5957	8,94828
98	28	8	34	8	34,39477	40,26164	13,09762	11,16233
100	30	0	36	6	31,5119	40,95119	1,57483	8,51302
102	20	10	40	0	28,16026	41,50904	19,77261	1,19548
104	12	16	34	8	26,05763	40,26164	34,40195	11,16233
106	6	18	30	12	23,30236	39,15354	44,92086	16,71092
108	2	16	28	12	18,68154	37,24245	52,00586	17,5957
110	0	10	28	8	11,53256	34,39477	55,69338	13,09762
112	0	0	30	0	1,73205	31,5119	30	1,57483
114	12	0	20	10	13,52775	28,16026	3,6705	19,77261
116	20	2	12	16	22,6495	26,05763	6,58678	34,40195
118	30	0	6	18	31,5119	23,30236	1,57483	44,92086
120	34	4	2	16	37,74917	18,68154	6,58678	52,00586
122	40	4	0	10	43,71499	11,53256	5,68468	55,69338
124	48	0	0	0	49,50758	1,73205	1,00231	30
126	48	6	0	0	52,84884	1,73205	6,58678	30
128	50	8	12	0	56,04463	13,52775	7,99414	3,6705
130	54	6	20	2	58,81326	22,6495	5,91627	6,58678
132	60	0	30	0	61,5061	31,5119	0,80677	1,57483
134	56	8	34	4	61,99193	37,74917	7,2229	6,58678
136	54	12	40	4	62,522	43,71499	10,37383	5,68468
138	54	12	48	0	62,522	49,50758	10,37383	1,00231
140	56	8	48	6	61,99193	52,84884	7,2229	6,58678
142	60	0	50	8	61,5061	56,04463	0,80677	7,99414
144	52	10	54	6	59,27057	58,81326	9,249	5,91627

Σχήμα 4.6: Οι κύριες αναπαράστασεις (λ,μ) για διάφορους αριθμούς σωματίδιων στις δύο θεωρήσεις και οι αντίστοιχες τιμές της ποσότητας $\sqrt{C_2 + 3}$

Z or N	Exact	Exact	Proxy	Proxy	sqrt(C2+3)	sqrt(C2+3)	gamma	gamma
	lambda	mu	lambda	mu	Exact	Proxy	Exact	Proxy
146	46	16	60	0	57,41951	61,5061	14,85663	0,80677
148	42	18	56	8	55,01818	61,99193	17,40197	7,2229
150	40	16	54	12	51,64301	62,522	16,56368	10,37383
152	40	10	54	12	47,46578	62,522	11,57777	10,37383
154	42	0	56	8	43,50862	61,99193	1,14053	7,2229
156	30	12	60	0	39,15354	61,5061	16,71092	0,80677
158	20	20	52	10	36,37307	59,27057	30	9,249
160	12	24	46	16	33,45146	57,41951	40,33274	14,85663
162	6	24	42	18	29,1376	55,01818	47,9917	17,40197
164	2	20	40	16	22,6495	51,64301	53,41322	16,56368
166	0	12	40	10	13,52775	47,46578	56,3295	11,57777
168	0	0	42	0	1,73205	43,50862	30	1,14053
170	14	0	30	12	15,52417	39,15354	3,19794	16,71092
172	24	2	20	20	26,62705	36,37307	5,59942	30
174	36	0	12	24	37,51	33,45146	1,32295	40,33274
176	42	4	6	24	45,70558	29,1376	5,43633	47,9917
178	50	4	2	20	53,67495	22,6495	4,62726	53,41322
180	60	0	0	12	61,5061	13,52775	0,80677	56,3295
182	62	6	0	0	66,77574	1,73205	5,20872	30
184	66	8	0	0	71,92357	1,73205	6,22126	30
186	72	6	14	0	76,73982	15,52417	4,53089	3,19794
188	80	0	24	2	81,5046	26,62705	0,60881	5,59942
190	78	8	36	0	83,86298	37,51	5,33277	1,32295
192	78	12	42	4	86,23804	45,70558	7,50134	5,43633
194	80	12	50	4	88,22131	53,67495	7,33177	4,62726
196	84	12	60	0	92,19002	61,5061	7,01452	0,80677
198	90	0	62	6	91,5041	66,77574	0,54227	5,20872
200	84	10	66	8	91	71,92357	6,00898	6,22126
202	80	16	72	6	90,70281	76,73982	9,3413	4,53089
204	78	18	80	0	90,01667	81,5046	10,53253	0,60881
206	78	16	78	8	88,72993	83,86298	9,55092	5,33277
208	80	10	78	12	87,02299	86,23804	6,28468	7,50134
210	84	0	80	12	85,50439	88,22131	0,58033	7,33177
212	74	12	84	12	82,27393	92,19002	7,86501	7,01452
214	66	20	90	0	79,60528	91,5041	13,20636	0,54227
216	60	24	84	10	76,62245	91	16,41321	6,00898
218	56	24	80	16	72,79423	90,70281	17,30285	9,3413
220	54	20	78	18	67,97794	90,01667	15,51769	10,53253
222	54	12	78	16	62,522	88,72993	10,37383	9,55092
224	56	0	80	10	57,50652	87,02299	0,86288	6,28468
226	42	14	84	0	52,14403	85,50439	14,42574	0,58033
228	30	24	74	12	48,59012	82,27393	26,46025	7,86501
230	20	30	66	20	45,31004	79,60528	36,33554	13,20636
232	12	32	60	24	41,07311	76,62245	44,09133	16,41321
234	6	30	56	24	35,02856	72,79423	50,03399	17,30285
236	2	24	54	20	26,62705	67,97794	54,40058	15,51769
238	0	14	54	12	15,52417	62,522	56,80206	10,37383
240	0	0	56	0	1,73205	57,50652	30	0,86288
242	16	0	42	14	17,52142	52,14403	2,83309	14,42574
244	28	2	30	24	30,61046	48,59012	4,86886	26,46025
246	42	0	20	30	43,50862	45,31004	1,14053	36,33554
248	50	4	12	32	53,67495	41,07311	4,62726	44,09133
250	--	--	6	30	--	35,02856	--	50,03399
252	--	--	2	24	--	26,62705	--	54,40058
254	--	--	0	14	--	15,52417	--	56,80206
256	--	--	0	0	--	1,73205	--	30
258	--	--	0	0	--	1,73205	--	30

Σχήμα 4.7: Οι κύριες αναπαραστάσεις (λ, μ) για διάφορους αριθμούς σωματίδιων στις δύο θεωρήσεις και οι αντίστοιχες τιμές των ποσοτήτων $\sqrt{C_2 + 3}$ και γ .

Πίνακας 4.15: Αριθμοί σωματιδίων όπου συνήθως εμφανίζεται η συνύπαρξη σχημάτων. Το άνω όριο είναι δύο σωματίδια πριν κλείσει μαγικός αριθμός του τρισδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή, ενώ το κάτω όριο είναι ο αριθμός των σωματιδίων όπου η τιμή της $\sqrt{C_2 + 3}$ είναι μικρότερη με την Ακριβή συμμετρία.

Φλοιός Ταλαντωτή	Έναρξη φαινομένου	Λήξη Φαινομένου
20-40	34	38
40-70	60	68
70-112	96	110
112-168	146	166
168-240	210	238

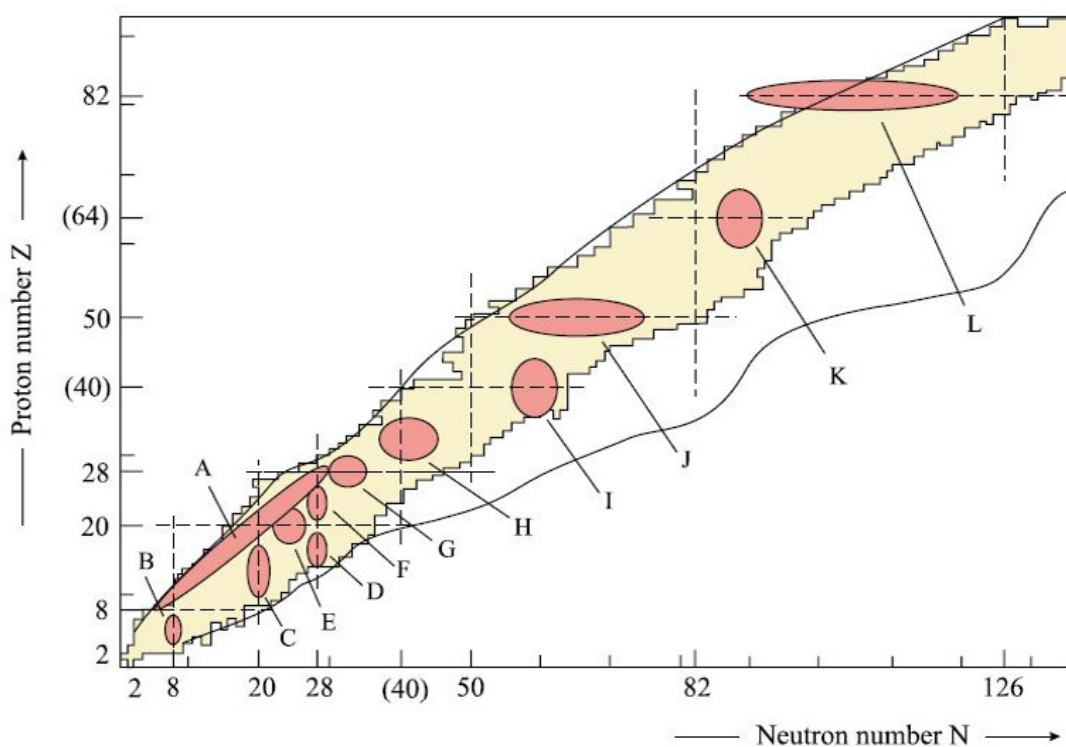
116, 146 – 174, 210 – 246. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως το φαινόμενο λήγει δύο σωματίδια πριν κλείσει μαγικός αριθμός ταλαντωτή, δηλαδή **34 – 38, 60 – 68, 96 – 110, 146 – 166, 210 – 238.**

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης και η γωνία γ με τις δύο θεωρήσεις. Στους αριθμούς 34-40, 64-70, 104-112, 158-168, 230-240 η Ακριβής δίνει πεπλατυσμένο σχήμα, ενώ η *Proxy* επιμηκυμένο. Η γωνία γ λοιπόν είναι ενδεικτική του είδους συνυπάρξεως.

4.5.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Η πλέον συγκεντρωτική πηγή για το φαινόμενο της συνυπάρξεως σχημάτων είναι οι δημοσιεύσεις [25], [26]. Στην [26] έχουν ταξινομηθεί τα πειραματικά δεδομένα σε περιοχές του Z και N . Θα ακολουθήσω αυτήν την ταξινόμηση και θα δείξω μέσω των (λ, μ) ότι κατάλληλοι συνδυασμοί της *Proxy* $SU(3)$ με τον απλό αρμονικό ταλαντωτή μπορούν να περιγράψουν την συνύπαρξη σχημάτων. Η μεθοδολογία θα είναι η ακόλουθη:

1. Θα υπολογίζω τα (λ, μ) και την παραμόρφωση β και γ του πυρήνα μέσω της *Proxy* $SU(3)$.
2. Αν είτε τα πρωτόνια, είτε τα νετρόνια, είτε και τα δύο είναι εντός των μαγικών αριθμών συνυπάρξεως σχημάτων (πίνακας σελίδος 111) τα (λ, μ) τους θα υπολογίζονται από την Ακριβή συμμετρία. Σε αντίθετη περίπτωση όπου είτε ο αριθμός των πρωτονίων, είτε των νετρονίων είναι εκτός των αριθμών συνυπάρξεως, τα (λ, μ) τους θα υπολογίζονται από την *Proxy*. Στο τέλος θα αθροίζονται τα (λ, μ) πρωτονίων και νετρονίων και θα υπολογίζεται η παραμόρφωση του πυρήνα.



Σχήμα 4.8: Χάρτης των περιοχών όπου εμφανίζεται η συνύπαρξη σχημάτων [26]. Οι περιοχές εμφάνισης του φαινομένου είναι οι ερυθρές. Ο συνδυασμός της *Proxy SU(3)* με την Ακριβή *SU(3)* του ταλαντωτή, μπορεί να εξηγήσει τις περιοχές με $Z, N \geq 28$.

Πίνακας 4.16: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των ισοτόπων Υδραργύρου με την Ακριβή και την *Proxy* $SU(3)$ συμμετρία. Η συνύπαρξη σχημάτων εμφανίζεται στα 104 νετρόνια. Η Ακριβής $SU(3)$ εκεί προβλέπει ότι ο πυρήνας από επιμηκυμένος έχει γίνει πεπλατυσμένος. Στα 102 νετρόνια η Ακριβής $SU(3)$ προβλέπει, ότι έχουν συμπληρωθεί εντελώς τα απόδημα τροχιακά 106. Στον ίδιο ακριβώς αριθμό νετρονίων οι ενέργειες της δεύτερης θεμελιώδους ζώνης, συναρτήσει του αριθμού των νετρονίων εμφανίζουν ελάχιστο (σελίδα 114).

N	Ακριβής $SU(3)$	<i>Proxy</i> $SU(3)$
96	(28,12)	(34,6)
98	(28,8)	(34,8)
100	(30,0)	(36,6)
102	(20,10)	(40,0)
104	(12,16)	(34,8)
106	(6,18)	(30,12)
108	(2,16)	(28,12)
110	(0,10)	(28,8)

4.5.5 ΠΕΡΙΟΧΗ L ΜΕ $Z \approx 82$

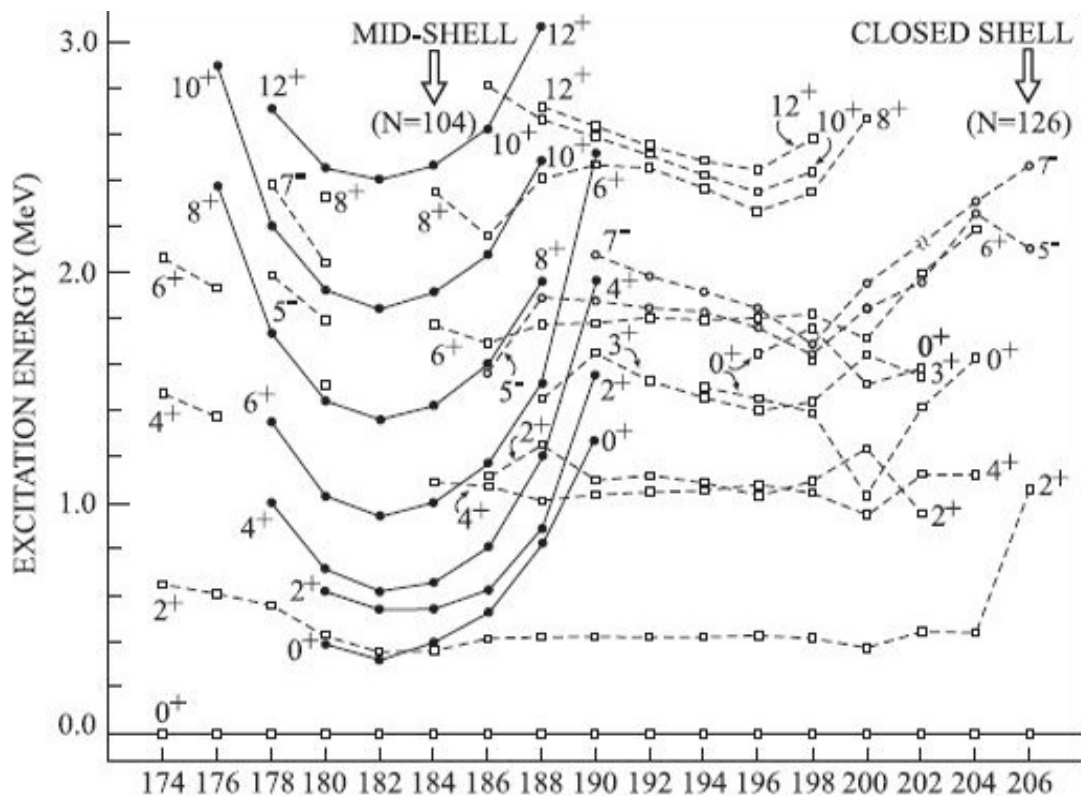
Η περιοχή αυτή δεσπόζεται από τα ισότοπα του Υδραργύρου και του Μολύβδου. Ευτυχώς για τις αλυσίδες αυτές υπάρχει συστηματική μελέτη των ενεργειακών καταστάσεων.

Τώρα μέσω των σχέσεων

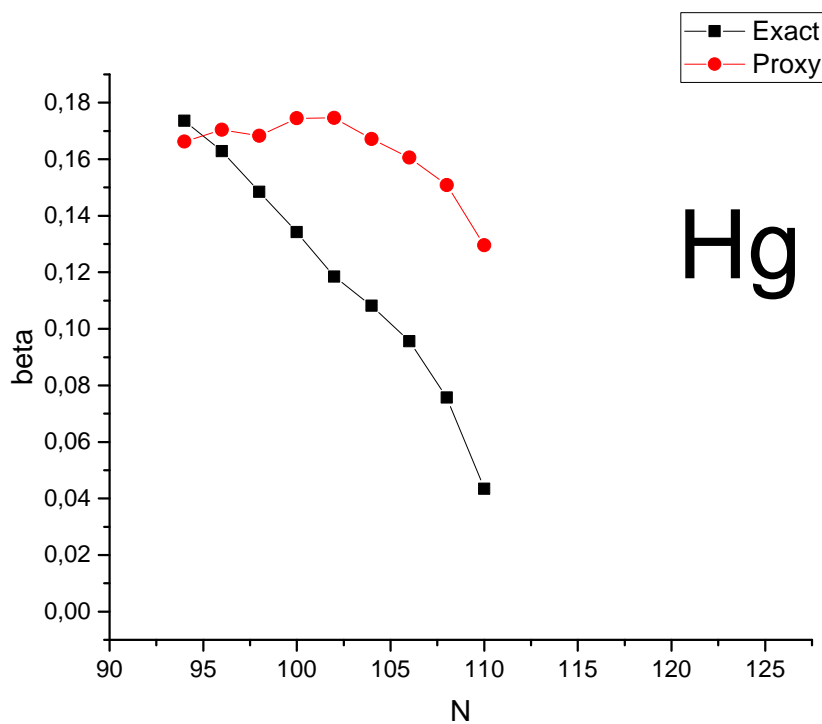
$$\beta^2 = \frac{4\pi}{5(Ar^2)^2}(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu) + 3), \quad (4.26)$$

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}(\mu + 1)}{2\lambda + \mu + 3}\right). \quad (4.27)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την παραμόρφωση στις δύο θεωρήσεις. Τα αποτελέσματα φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις. Παρατηρώντας την γραφική παράσταση της παραμορφώσεως β συναρτήσει του αριθμού των νετρονίων συμπεραίνουμε ότι η Ακριβής $SU(3)$ δίνει χαμηλότερη παραμόρφωση, άρα το αντίστοιχο φάσμα θα πλησιάζει τον δονητικό τρόπο ταλαντώσεως. Αυτό είναι σε συμφωνία με την έντονη γραμμή της γραφικής παραστάσεως της σελίδας 114. Η παραμόρφωση με την *Proxy* $SU(3)$ είναι σαφώς μεγαλύτερη, άρα το φάσμα θα αντιστοιχεί σε περιστροφικό τρόπο ταλαντώσεως, δηλαδή στις ενέργειες με διακεκομμένη γραμμή της εικόνας της σελίδος 114.



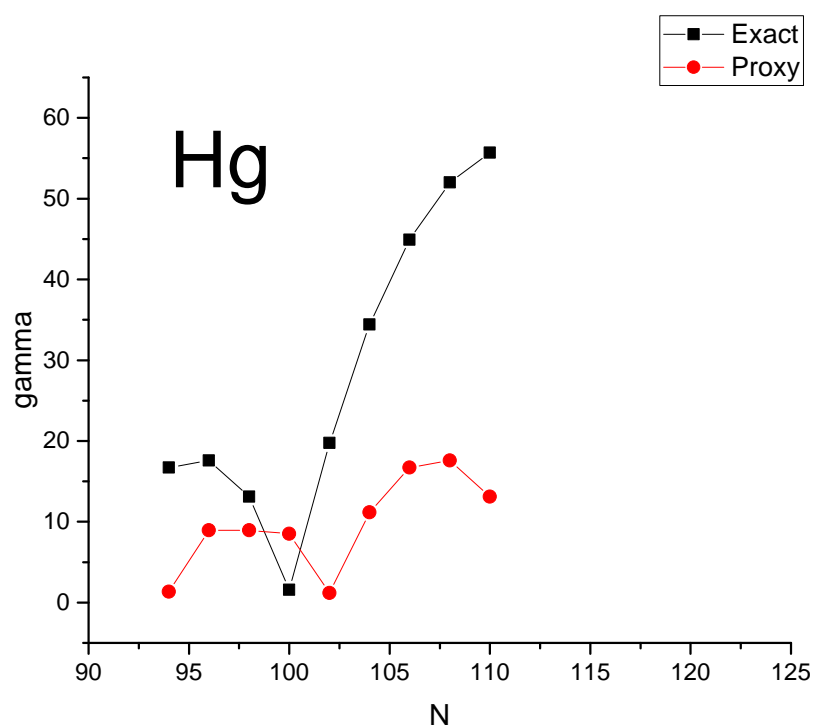
Σχήμα 4.9: Ενέργειες συναρτήσεως του μαζικού αριθμού για τα ισότοπα του Υδραργύρου. Η συνύπαρξη σχημάτων στον Υδράργυρο οφείλεται στα νετρόνιά του. Οι συγγραφείς παρατηρούν ότι οι ενέργειες με έντονη μαύρη γραμμή σχεδόν ισαπέχουν, άρα αντιστοιχούν σε ζώνη με χαμηλή παραμόρφωση, δηλαδή σε δονητικό τρόπο ταλαντώσεως. Οι ζώνες χαμηλής παραμορφώσεως μπορούν να εξηγηθούν με την ακριβή $SU(3)$ συμμετρία. Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται ελάχιστο στα $N = 102$, δηλαδή εκεί που έχει συμπληρωθεί εντελώς το τροχιακό $1h_{11/2}$. Εν αντιθέσει οι ενέργειες με διακεκομμένη γραμμή λόγω των αποστάσεων τους αντιστοιχούν σε περιστροφικό τρόπο ταλαντώσεως, δηλαδή σε μεγαλύτερη παραμόρφωση. Οι ζώνες αυτές μπορούν να ερμηνευθούν με την *Proxy* $SU(3)$ συμμετρία. Τα δύο είδη ζωνών συνυπάρχουν σε αριθμούς νετρονίων 104-110. Οι παραβολικές καμπύλες όμως εξελίσσονται στα 96-110 νετρόνια, όπως ακριβώς προβλέψαμε στον πίνακα της σελίδος 111.



Σχήμα 4.10: Παραμόρφωση β για τα ισότοπα του Υδραργύρου στην Ακριβή και στην *Proxy* $SU(3)$. Οι μαγικοί αριθμοί του 3Δ απλού αρμονικού ταλαντωτή τίθενται σε ισχύ όταν οι παραμορφώσεις με τις δύο θεωρήσεις είναι περίπου ίσες.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ένα σχόλιο στην βάση δεδομένων *ENSDF* [27], για τον ^{182}Hg , όσον αφορά στην πρώτη 0^+ κατάσταση: ισχυρίζεται ότι η θεμελιώδης ζώνη έχει χαμηλή παραμόρφωση $\beta \approx 0.15$ και το σχήμα της είναι τύπου πεπλατυσμένου [28]. Η Ακριβής $SU(3)$ εξάγει όντως χαμηλή παραμόρφωση $\beta = 0.12$ και γωνία $\gamma = 20^\circ$ κοντά στην κρίσιμη (30°). Το αποτέλεσμα αυτό ενισχύει την υπόθεση, ότι οι ενέργειες, που συνδέονται με την παραβολική έντονη γραμμή, αντιστοιχούν σε μικρή παραμόρφωση κοντά στην πεπλατυσμένη περιοχή. Φυσικά μετρήσεις της τετραπολικής ροπής για περισσότερα ισότοπα, θα μπορούσαν να ενισχύσουν την άποψη αυτή. Στην ίδια δημοσίευση μελετάται και η δεύτερη 0^+ κατάσταση. Αναφέρεται, ότι αυτή αντιστοιχεί σε επιμηκυμένο παραμορφωμένο σχήμα, το οποίο παράγεται με την *Proxy* $SU(3)$, αφού υπολογίζει ότι $\gamma = 1.19^\circ$ και $\beta = 0.17$.

Τα συμπεράσματα είναι:



Σχήμα 4.11: Γωνία γ για τα ισότοπα του Υδραργύρου στις δύο θεωρήσεις (Ακριβή και *Proxy* $SU(3)$). Η Ακριβής προβλέπει ότι το κρίσιμο σημείο μεταξύ επιμηκυμένου και πεπλατυσμένου σχήματος είναι στα $N = 102 - 104$.

Πίνακας 4.17: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των ιστόνων για $N = 90$.

Στοιχείο	Z	Ακριβής $SU(3)$	<i>Proxy</i> $SU(3)$
Nd	60	(46,4)	(46,8)
Sm	62	(38,12)	(50,4)
Gd	64	(32,16)	(46,10)
Dy	66	(28,16)	(44,12)
Er	68	(26,12)	(44,10)

1. Οι δονητικές ζώνες εξηγούνται με την Ακριβή $SU(3)$ συμμετρία.
2. Οι περιστροφικές ζώνες ερμηνεύονται με την *Proxy* $SU(3)$ συμμετρία.
3. Συνύπαρξη των δύο ζωνών εμφανίζεται όταν σύμφωνα με την Ακριβή $SU(3)$ ο πυρήνας έχει γίνει πεπλατυσμένος, έως ότου κλείσει μαγικός αριθμός του 3Δ απλού αρμονικού ταλαντωτή.

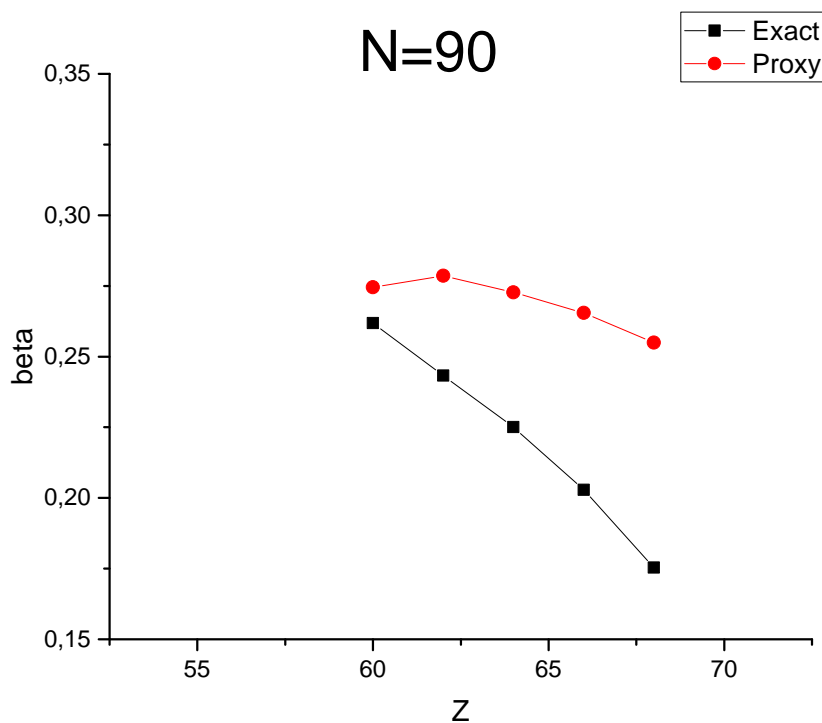
4.5.6 ΠΕΡΙΟΧΗ K ΜΕ $Z \approx 64, N \approx 90$

Η περιοχή αυτή επικεντρώνεται σε ισότονα με $N = 90$. Θα αντιμετωπίσουμε τα νετρόνια με την *Proxy* και θα πάρουμε $(\lambda, \mu) = (26, 4)$, ενώ τα πρωτόνια θα τα χειριστούμε με την Ακριβή. Τα πρωτόνια θα πρέπει να είναι από 60 έως 68, με επίκεντρο τα 64[29], δηλαδή αμέσως μετά από το κλείσιμο των αποδήμων τροχιακών. Θα βρούμε και πάλι τα (λ, μ) με τις δύο θεωρήσεις και θα υπολογίσουμε την παραμόρφωση.

4.5.7 ΠΕΡΙΟΧΗ J ΜΕ $Z \approx 50$

Αυτή η περιοχή δεσπόζεται από τα ισότοπα του Κασσιτέρου, ο οποίος έχει 50 πρωτόνια. Ο αριθμός αυτός είναι μαγικός αριθμός και εκτός της περιοχής συνυπάρξεως. Συνεπώς θα το χαρακτηρίσουμε με τα (λ, μ) της *Proxy* $SU(3)$, που εν προκειμένω είναι $(0,0)$. Εν αντιθέσει τα νετρόνια θα κινούνται σε εύρος 54-70.

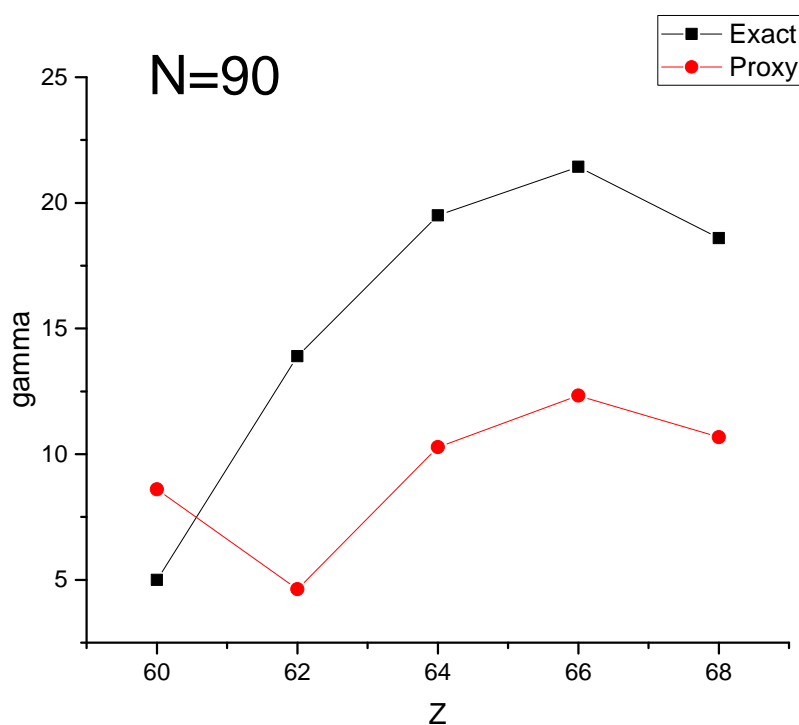
Παρατηρώντας κάποιος τα δεδομένα για τον ^{102}Sn στο *ENSDF* θα δει ότι η δεύτερη 0^+ ζώνη αποδιεγείρεται έντονα με $B(E0)s$ μεταπτώσεις προς την πρώτη. Γενικά οι έντονες μονοπολικές μεταπτώσεις, που υποδεικνύουν αλλαγή σχήματος του πυρήνα όταν συμβαίνουν, είναι σημάδι συνυπάρξεως σχημάτων.



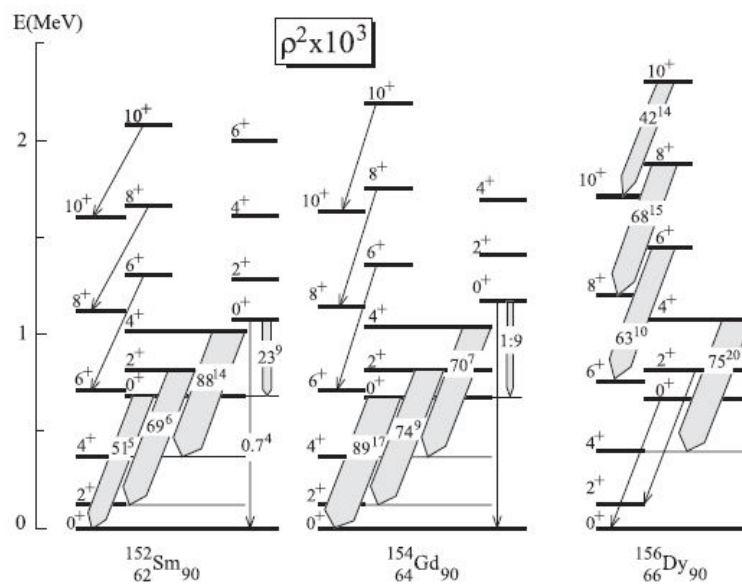
Σχήμα 4.12: Παραμόρφωση β για τα ισότοπα με $N = 90$. Στον πυρήνα ${}_{58}\text{Ce}_{90}$ η παραμόρφωση είναι σχεδόν ίδια με τις δύο θεωρήσεις.

Πίνακας 4.18: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των ισotόπων Κασσιτέρου με την Ακριβή και την *Proxy* SU(3) συμμετρία. Σύμφωνα με την Ακριβή SU(3) η αλλαγή σχήματος γίνεται στον ${}^{114}\text{Sn}$, δηλαδή στα 64 νετρόνια (ο αριθμός αυτός θεωρείται ημιμαγικός [29]). Ακριβώς εκεί ελαχιστοποιείται και η ενέργεια της δεύτερης 0^+ ζώνης (σελίδα 121).

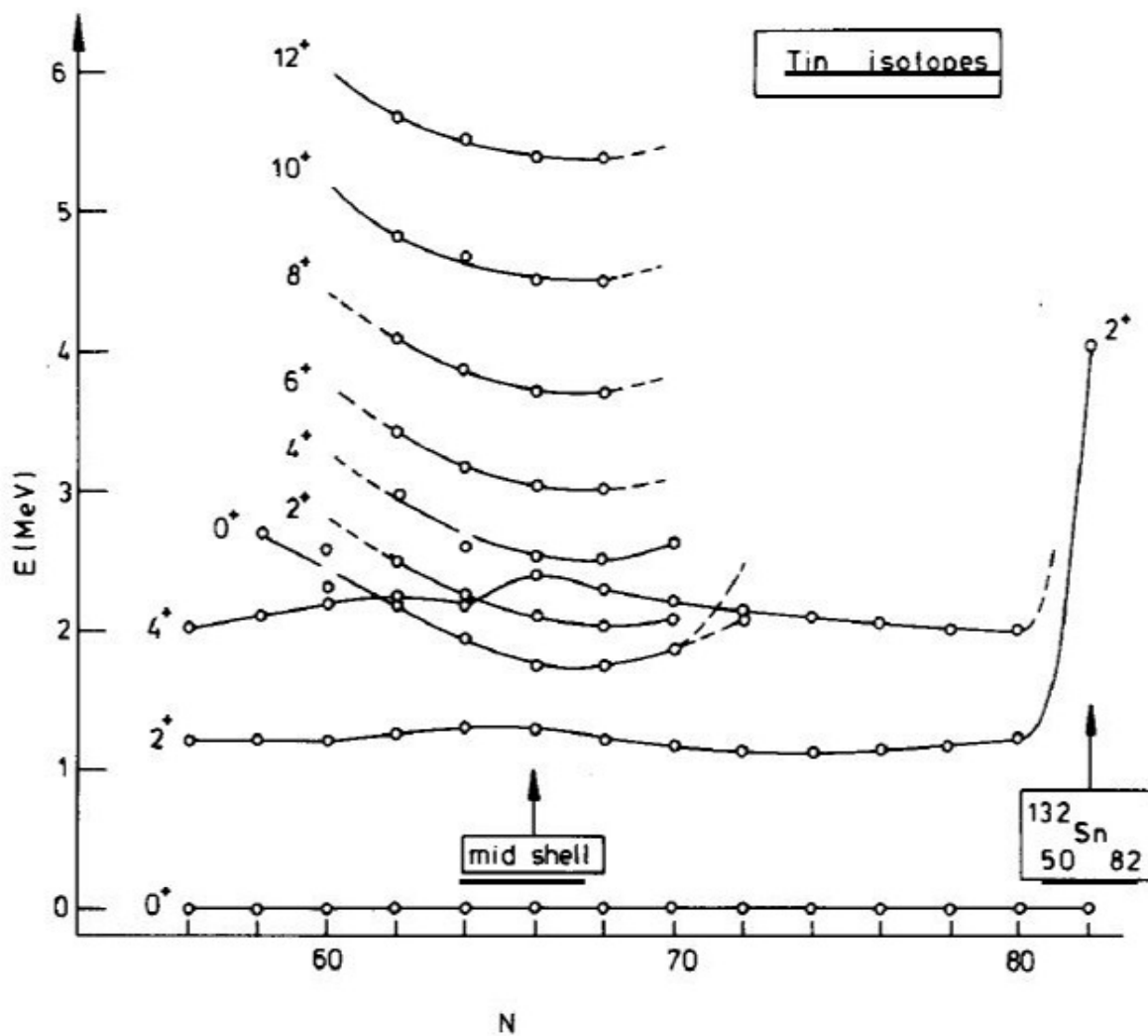
N	Ακριβής SU(3)	Proxy SU(3)
60	(20,0)	(20,4)
62	(12,8)	(24,0)
64	(6,12)	(20,6)
66	(2,12)	(18,8)
68	(0,8)	(18,6)



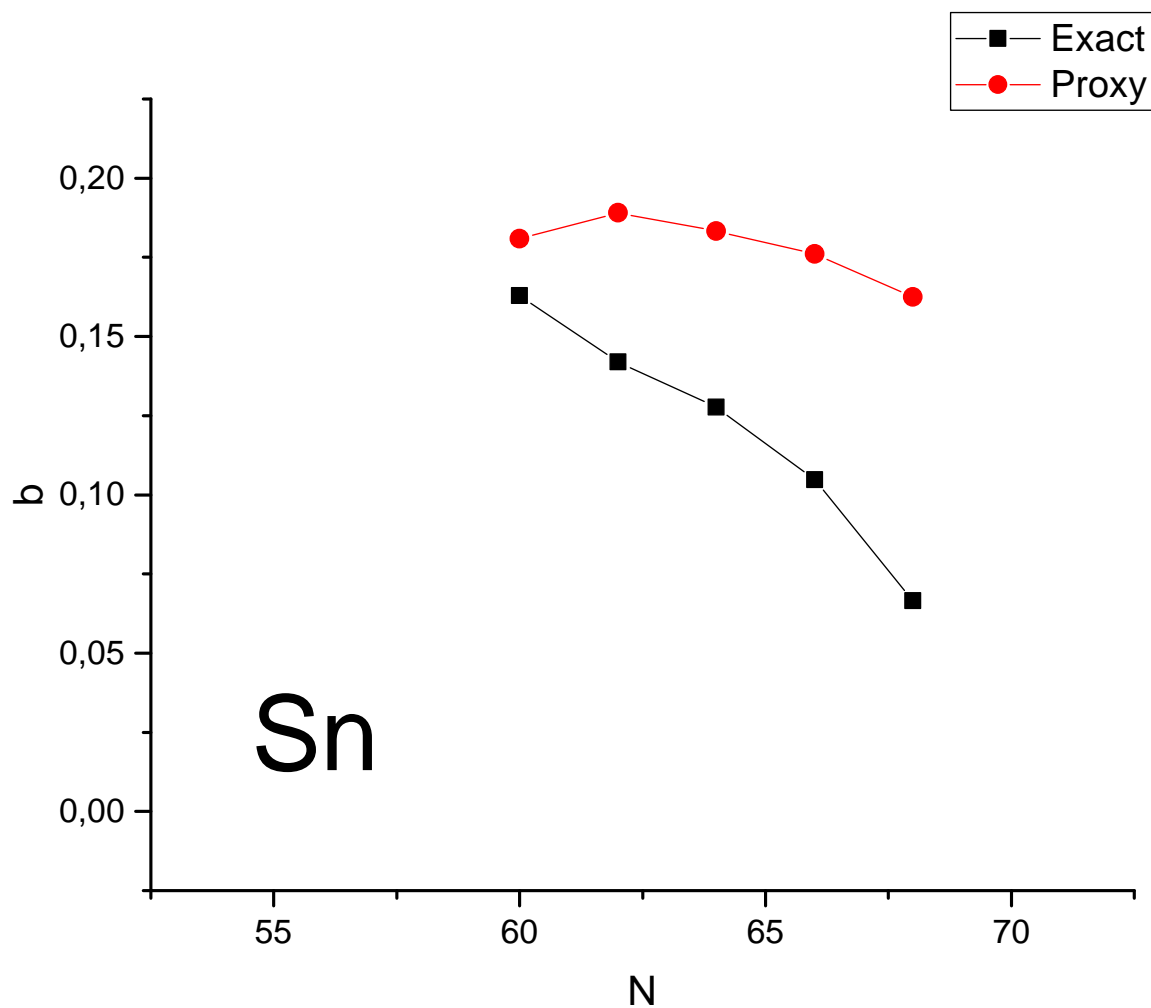
Σχήμα 4.13: Γωνία γ για τα ισότονα με $N = 90$ στις δύο θεωρήσεις (Ακριβή και *Proxy* $SU(3)$). Και στις δύο θεωρήσεις οι πυρήνες είναι επιμηκυμένοι με γωνίες $0^\circ \rightarrow 15^\circ$. Οι πυρήνες με διαφορετική παραμόρφωση, αλλά σχετικά ίδια γωνία γ είναι παραδείγματα της $X(5)$ συμμετρίας. Η συνύπαρξη σχημάτων σε αυτήν την περίπτωση είναι τύπου “ επιμηκυμένο-επιμηκυμένο ”.



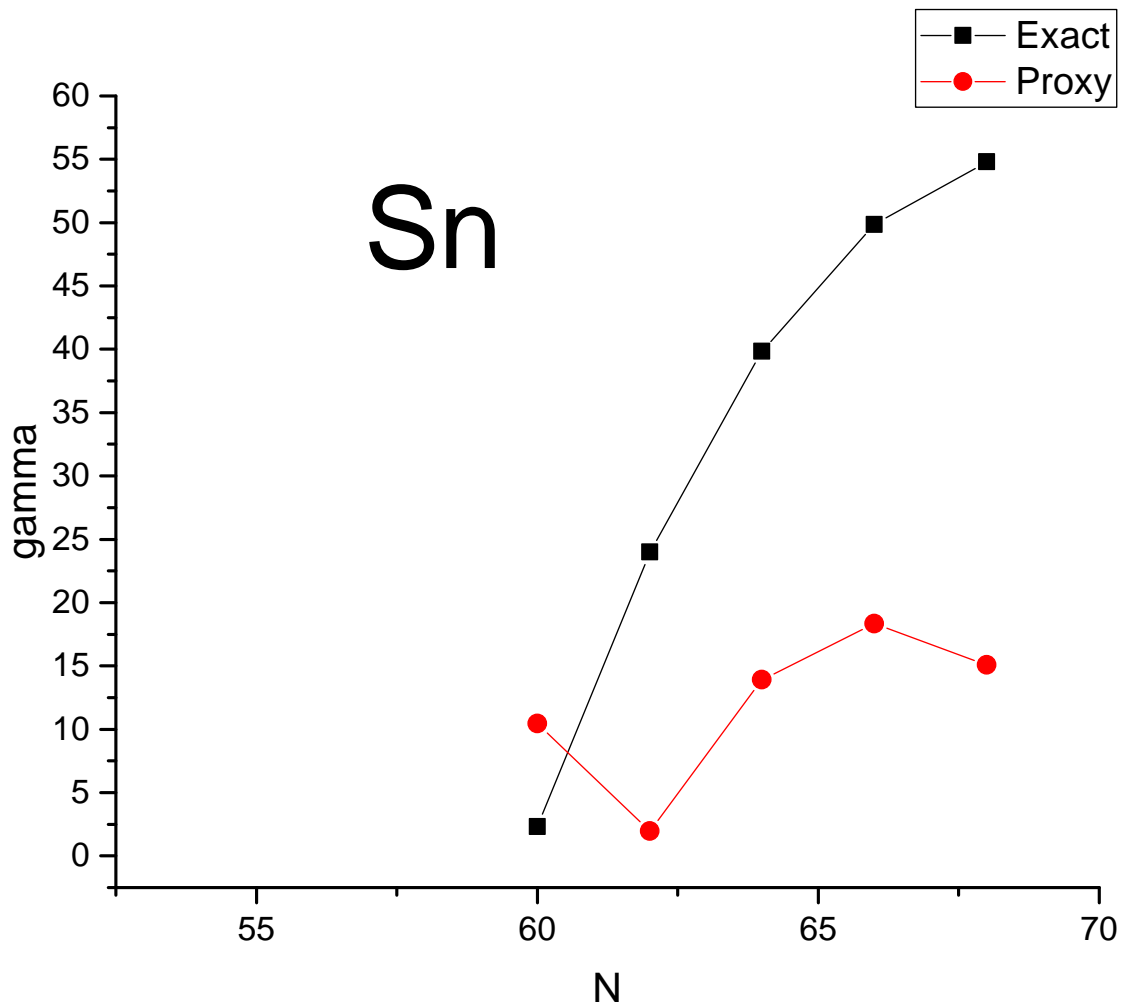
Σχήμα 4.14: Συστηματική μελέτη των μεταβάσεων $B(E0)$ [26]. Επειδή και με τις δύο θεωρήσεις οι πυρήνες είναι επιμηκυμένοι και παραμορφωμένοι, δεν μπορούμε να διακρίνουμε τις δύο ζώνες βάση των ενεργειακών χασμάτων. Επομένως οι έντονες $B(E0)$ μεταπτώσεις από την δεύτερη 0^+ ζώνη προς την πρώτη είναι το ίχνος της συνυπάρξεως των δύο θεωρήσεων (Ακριβής και *Proxy*). Στην βάση δεδομένων *ENSDF* η δεύτερη 0^+ ζώνη αναφέρεται ως β δονητική. Οι συγγραφείς όμως της [26] την συγκαταλέγουν στο φαινόμενο της συνυπάρξεως σχημάτων, λόγω των πειραματικά ευρεθέντων ισχυρών $B(E0)$.



Σχήμα 4.15: Ενεργειακές ζώνες της πρώτης και δεύτερης 0^+ ζώνης για τα ισότοπα του Κασσιτέρου [25]. Η παραβολική συμπεριφορά της δεύτερης είναι εμφανής.



Σχήμα 4.16: Παραμόρφωση β για τα ισότοπα του Κασσιτέρου στις δύο θεωρήσεις. Ο πυρήνας με σχεδόν ίδια παραμόρφωση στις δύο $SU(3)$ συμμετρίες είναι ο ^{108}Sn .



Σχήμα 4.17: Γωνία γ για τα ισότοπα του Κασσιτέρου στην Ακριβή και στην *Proxy* $SU(3)$. Στην *Proxy* το σχήμα του πυρήνα είναι παραμορφωμένο και επιμηχυμένο, ενώ η Ακριβής προβλέπει μικρότερη παραμόρφωση και κρίσιμο πυρήνα μεταξύ του επικημένου και πεπλατυσμένου σχήματος του ^{112}Sn .

Πίνακας 4.19: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των ισοτόπων Στροντίου με την Ακριβή και την *Proxy* SU(3) συμμετρία.

N	Ακριβής SU(3)	Proxy SU(3)
60	(20,6)	(30,8)
62	(12,14)	(34,4)
64	(6,18)	(30,10)
66	(2,18)	(28,12)
68	(0,14)	(28,10)

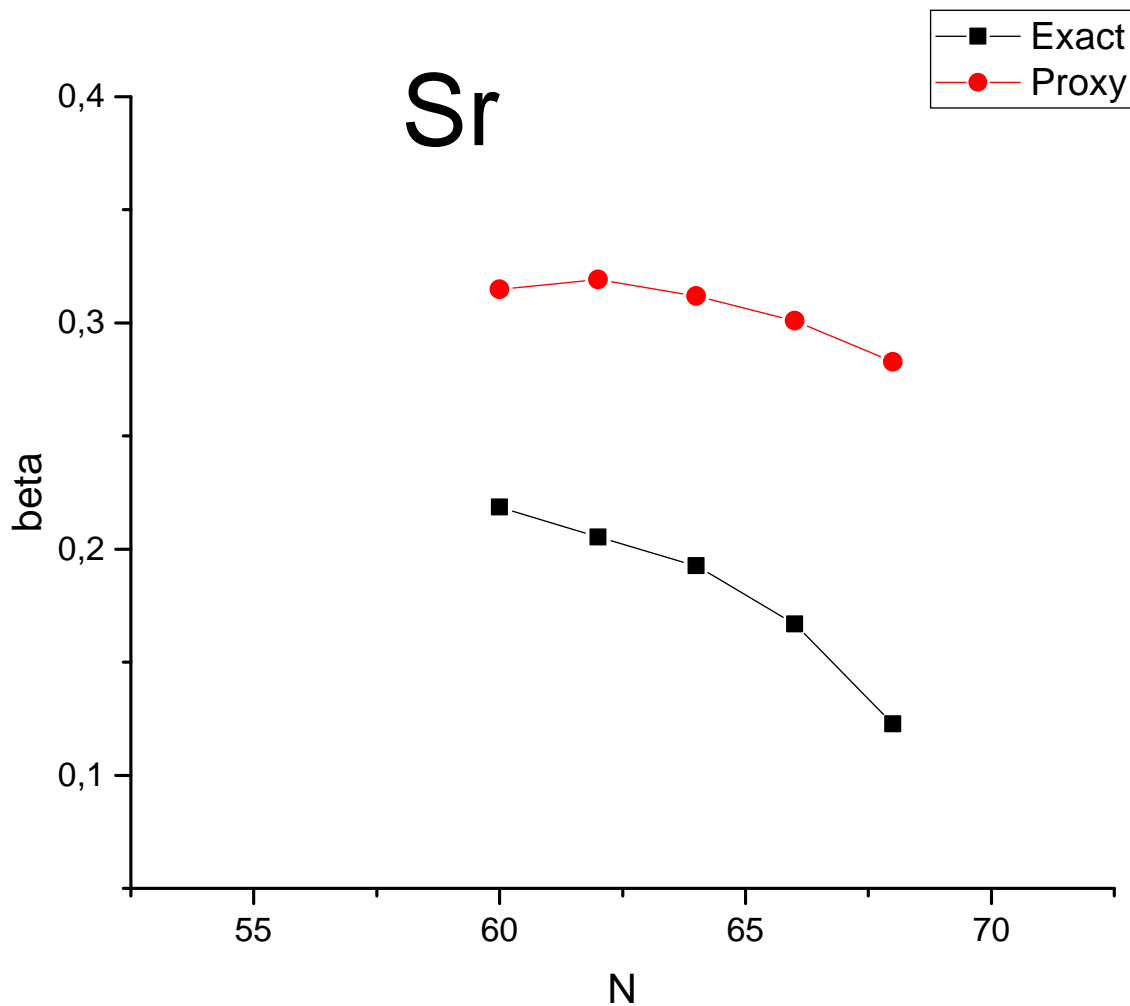
4.5.8 ΠΕΡΙΟΧΗ I ΜΕ $Z \approx 40$, $N \approx 60$

Τα 40-48 έως πρωτόνια της περιοχής αυτής είναι εκτός του εύρους όπου και εμφανίζεται η συνύπαρξη, άρα θα τα αντιμετωπίσουμε με την *Proxy* SU(3). Εν αντιθέσει τα νετρόνια από 60 έως 68 είναι εντός του εύρους, άρα θα βρούμε τα (λ, μ) τους μέσω της Ακριβούς SU(3). Οι άρτιοι-άρτιοι πυρήνες ενδιαφέροντος είναι συνεπώς τα ισότοπα των Sr, Zr, Mo, Rh, Pd, Cd.

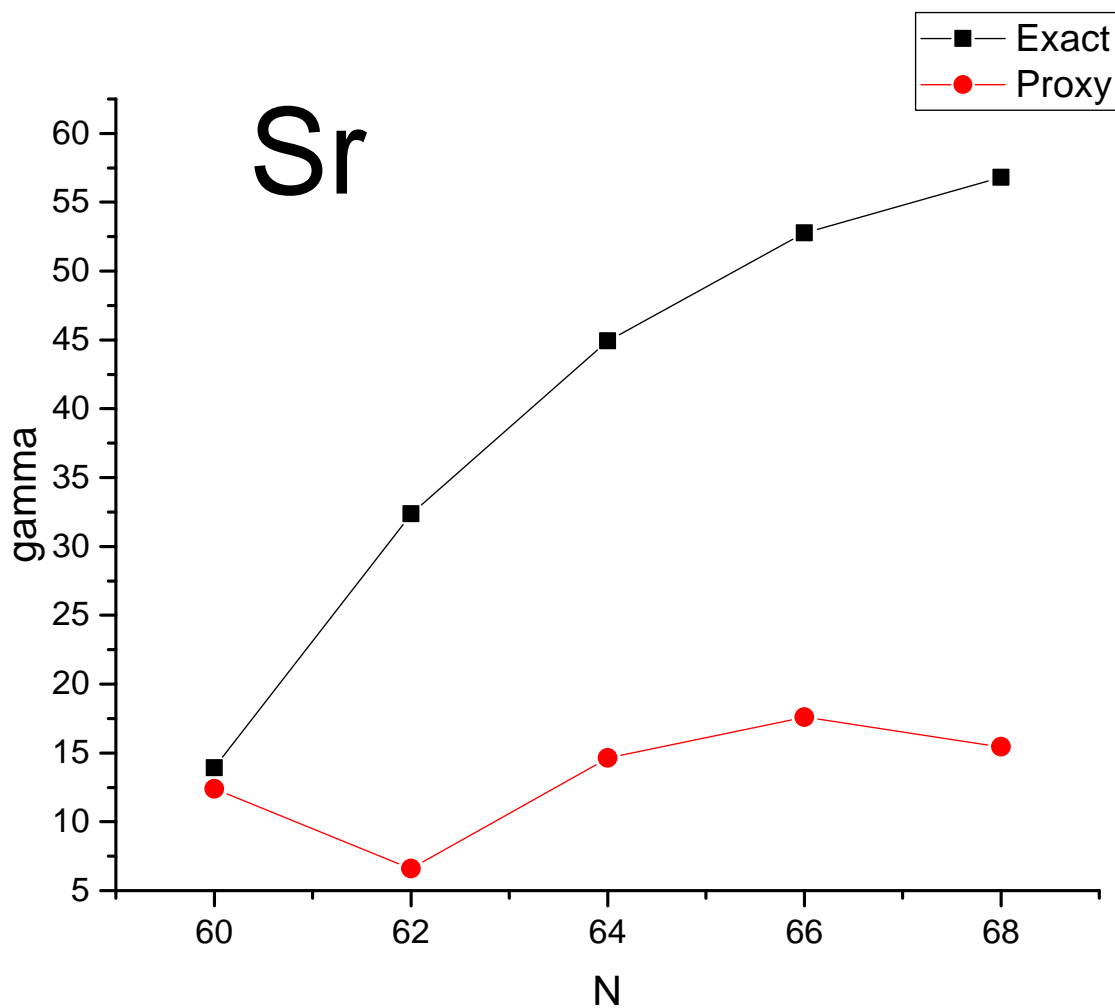
Ας ξεκινήσουμε με τα ισότοπα του Στροντίου. Συγκεκριμένα ο πυρήνας ^{98}Sr εμφανίζει την μεγαλύτερη $B(E0)$ μετάβαση στην περιοχή με μαζικό αριθμό $A > 56$ [26],[27]. Το Στρόντιο έχει 38 πρωτόνια, τα οποία σύμφωνα με την Ακριβή έχουν αναπαράσταση (0,6). Τα νετρόνια στην περιοχή 60-68, θα τα χειριστούμε επίσης με την Ακριβή συμμετρία και οι αναπαραστάσεις τους δίνονται από τον πίνακα της σελίδος 118. Οι αθροιστικές αναπαραστάσεις έχουν συλλεχθεί σε πίνακα (σελ. 124).

Τα ισότοπα του Zr έχουν για τα 40 τους πρωτόνια (σύμφωνα με την *Proxy* SU(3)) $(\lambda, \mu) = (12, 0)$. Οι αναπαραστάσεις των νετρονίων σύμφωνα με την Ακριβή SU(3) φαίνονται στον πίνακα της σελίδος 118. Άρα οι συνολικές αναπαραστάσεις των ισοτοπών Zr θα είναι το άθροισμα $(12, 0) + (\lambda, \mu)_{\text{neutrons}}$.

Συνεχίζουμε με τα ισότοπα του Μολυβδενίου. Το Μολυβδένιο έχει $Z = 42$. Σύμφωνα με την *Proxy* SU(3) έχει $(\lambda, \mu) = (6, 6)$. Τα νετρόνια του θα κινούνται επίσης στην περιοχή 60-68, άρα οι αναπαραστάσεις τους θα είναι ξανά αυτές της σελίδας 118. Οι τελικές λοιπόν αναπαραστάσεις πρωτονίων και νετρονίων θα είναι $(6, 6) + (\lambda, \mu)_{\text{neutrons}}$.



Σχήμα 4.18: Παραμόρφωση β για τα ισότοπα του Στροντίου. Στο ^{98}Sr εμφανίζεται η μεγαλύτερη μετρημένη $B(E0)$ στην περιοχή $A > 56$. Η αιτία είναι πως και τα πρωτόνια του και τα νετρόνια του ακολουθούν τους μαγικούς αριθμούς του 3Δ ταλαντωτή.



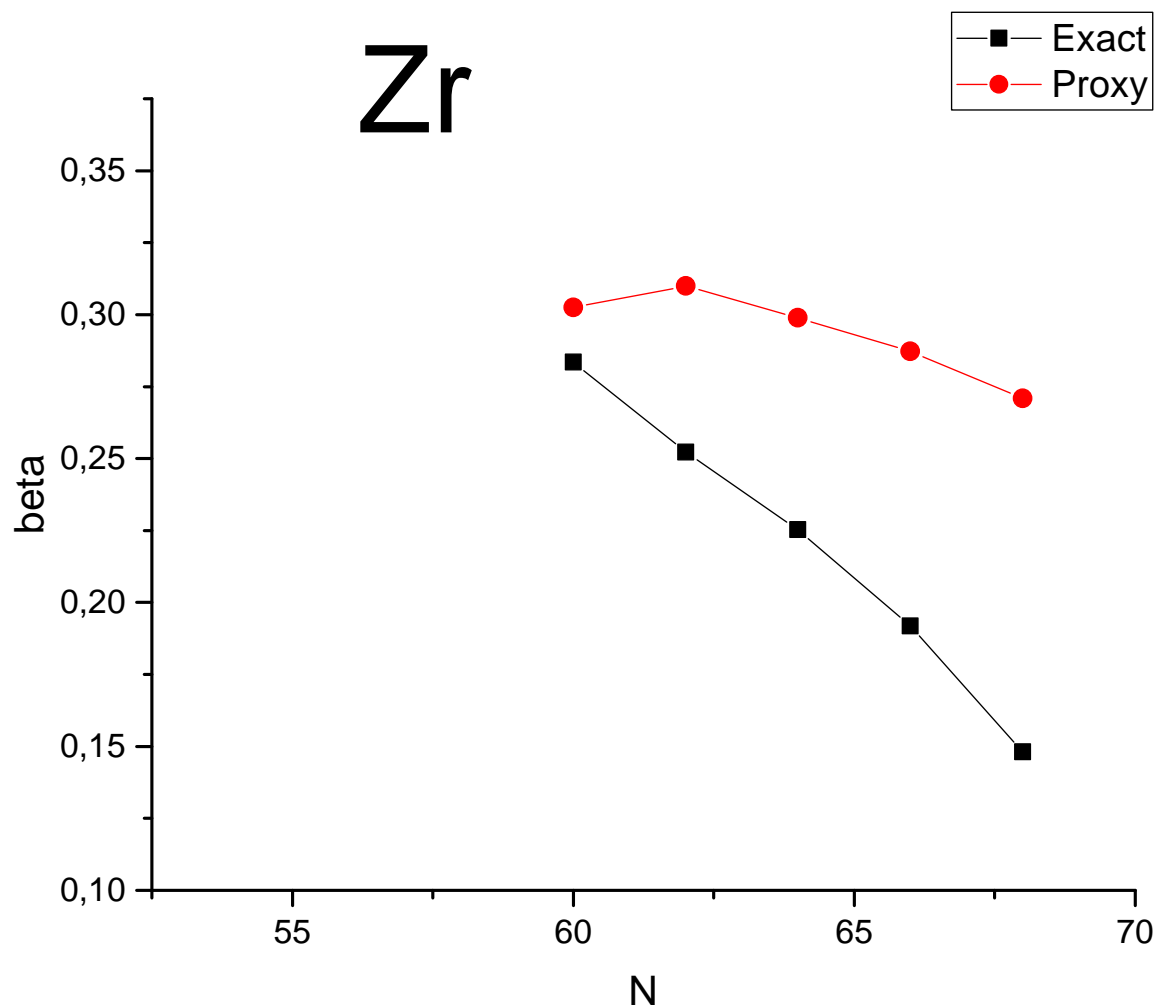
Σχήμα 4.19: Γωνία γ για τα ισότοπα του Στροντίου. Η *Proxy* προβλέπει επιμηκυμένο σχήμα, ενώ η Ακριβής μετά το ^{102}Sr προβλέπει πεπλατυσμένο σχήμα.

Πίνακας 4.20: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των ισotόπων Ζιρκονίου με την Ακριβή και την *Proxy* $SU(3)$ συμμετρία. Δεν υπάρχει κρίσιμος πυρήνας μεταξύ του επιμηκυμένου και πεπλατυσμένου σχήματος. Είναι όλοι οι πυρήνες επιμηκυμένοι και στις δύο θεωρήσεις.

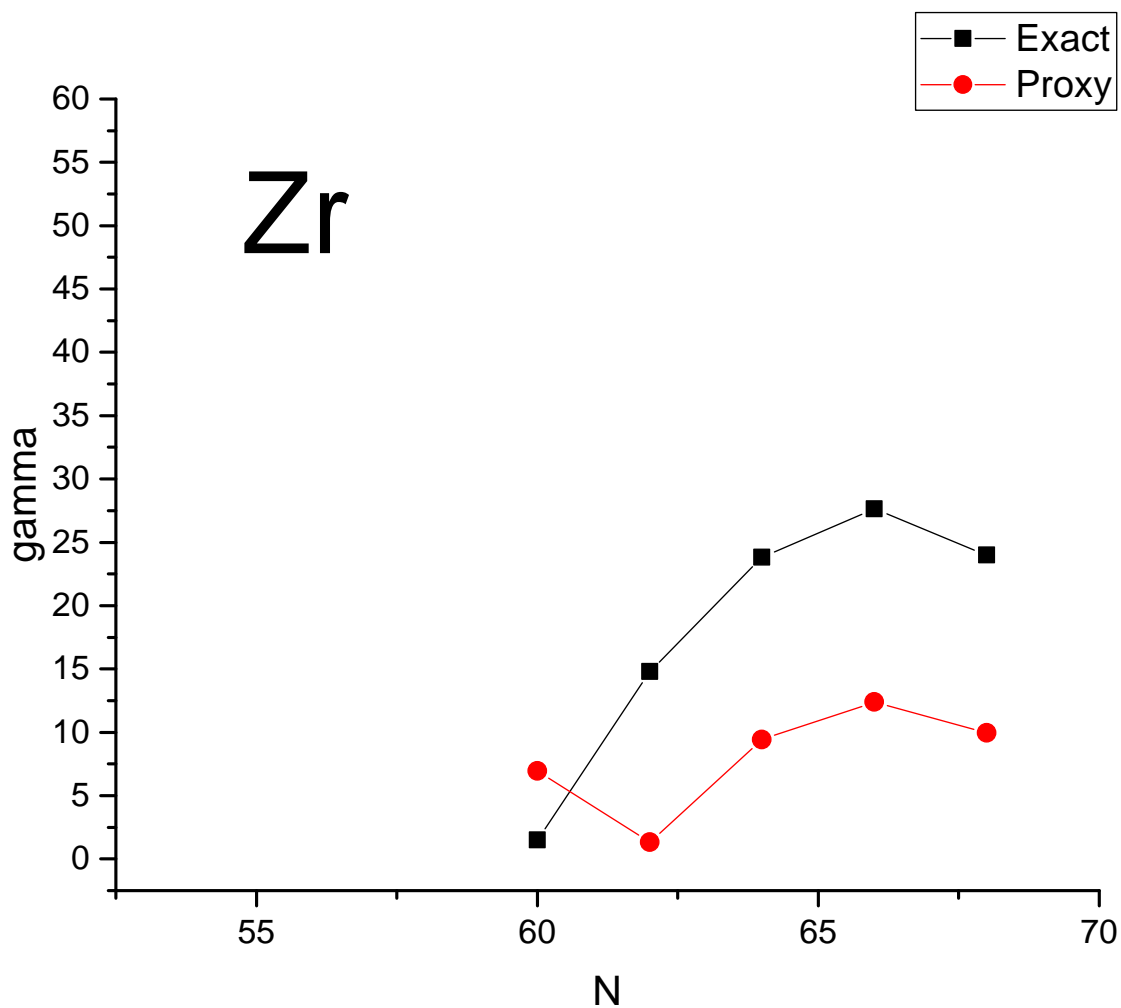
N	Ακριβής $SU(3)$	<i>Proxy</i> $SU(3)$
60	(32,0)	(32,4)
62	(24,8)	(36,0)
64	(18,12)	(32,6)
66	(14,12)	(30,8)
68	(12,8)	(30,6)

Πίνακας 4.21: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των ισotόπων Μολυβδενίου με την Ακριβή και την *Proxy* $SU(3)$ συμμετρία.

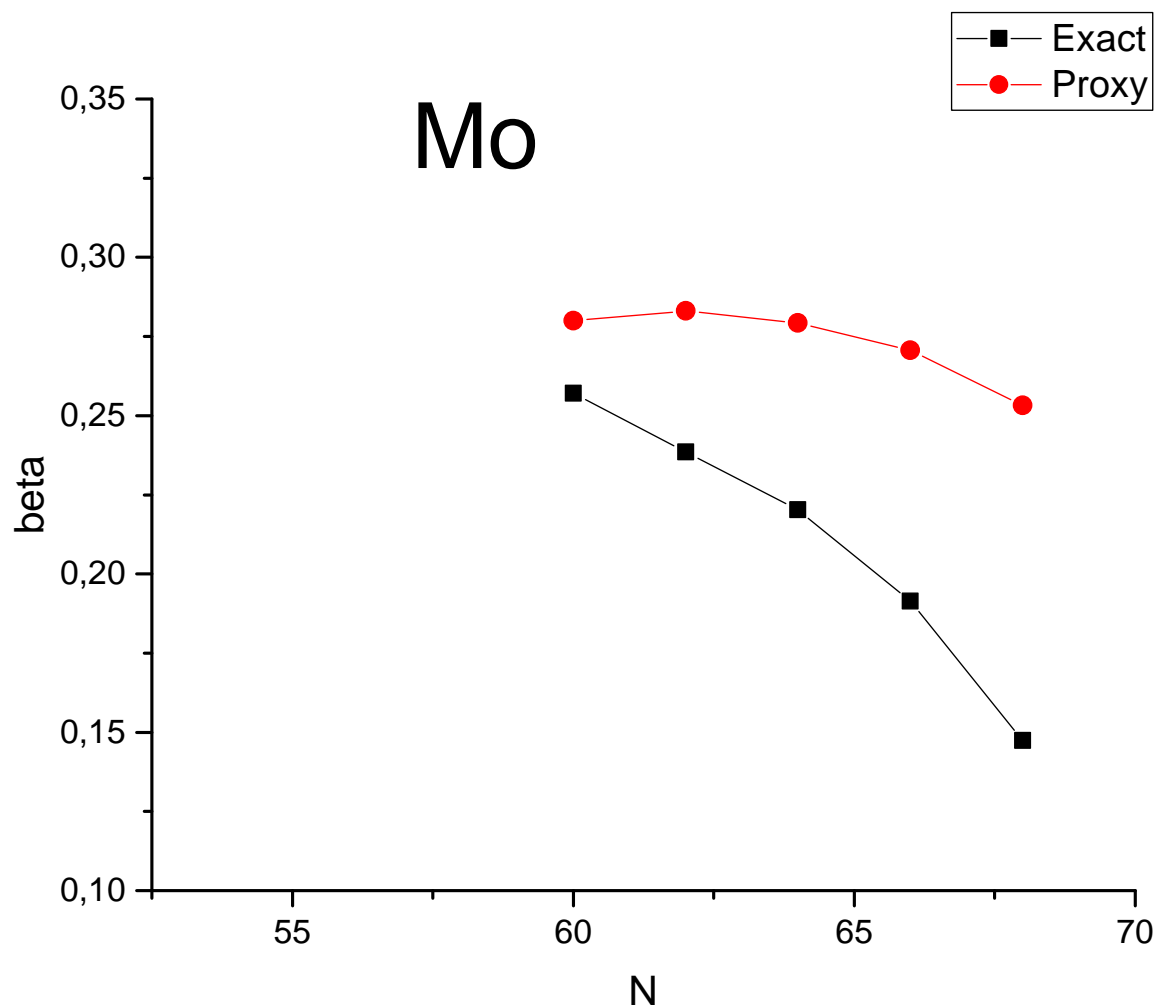
N	Ακριβής $SU(3)$	<i>Proxy</i> $SU(3)$
60	(26,6)	(26,10)
62	(18,14)	(30,6)
64	(12,18)	(26,12)
66	(8,18)	(24,14)
68	(6,14)	(24,12)



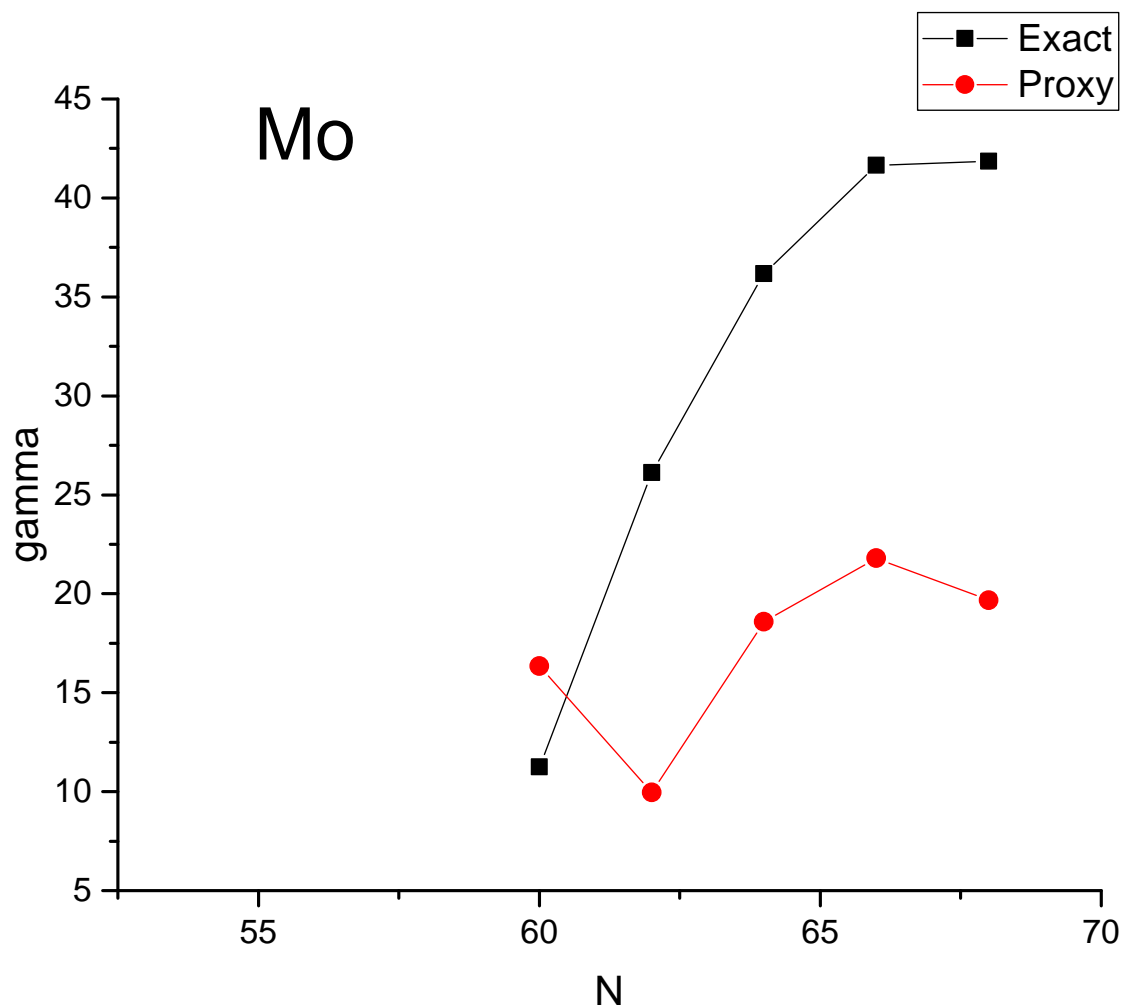
Σχήμα 4.20: Παραμόρφωση β για τα ισότοπα του Ζιρκονίου. Η παραμορφώση γίνεται σχεδόν ίδια στις δύο θεωρήσεις για το ^{98}Zr . Σε αυτόν ακριβώς τον πυρήνα παρουσιάζονται έντονες $B(E0)$ μεταπτώσεις από τις 853keV , 1436keV 0^+ καταστάσεις προς την θεμελιώδη [27].



Σχήμα 4.21: Γωνία γ για τα ισότοπα του Ζιρκονίου. Όλοι οι πυρήνες είναι στην επιμηκυμένη περιοχή.



Σχήμα 4.22: Παραμόρφωση β για τα ισότοπα του Μολυβδενίου. Η παραμορφώση γίνεται σχεδόν ίδια στις δύο θεωρήσεις για το ^{100}Mo .



Σχήμα 4.23: Γωνία γ για τα ισότοπα του Μολυβδενίου. Ο ^{106}Mo είναι πεπλατυσμένος στην Ακριβή συμμετρία.

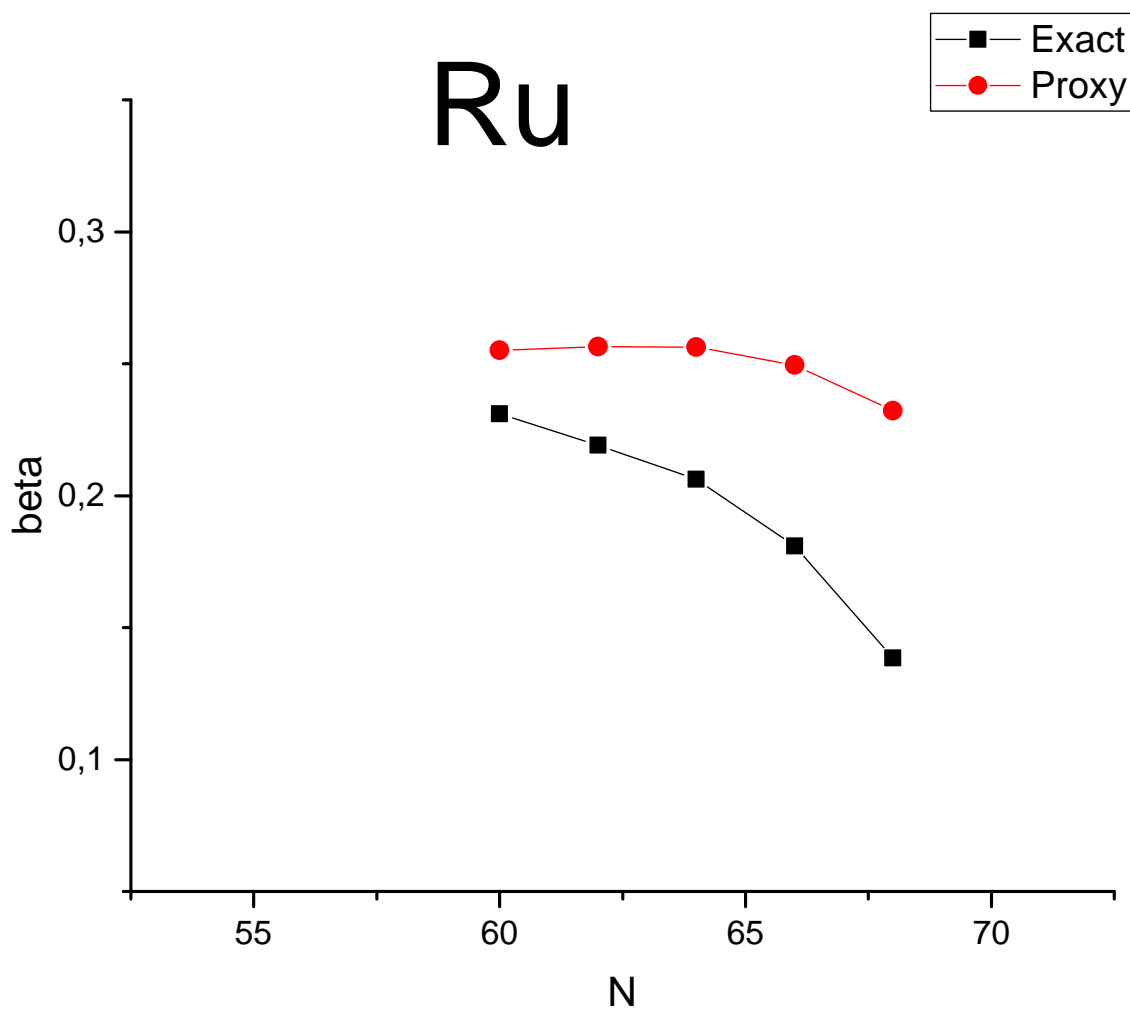
Πίνακας 4.22: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των ισότοπων Ρουθηνίου με την Ακριβή και την *Proxy* SU(3) συμμετρία.

N	Ακριβής SU(3)	<i>Proxy</i> SU(3)
60	(22,8)	(22,12)
62	(14,16)	(26,8)
64	(8,20)	(22,14)
66	(4,20)	(20,16)
68	(2,16)	(20,14)

Σειρά έχουν τα ισότοπα του Ρουθηνίου. Αυτοί οι πυρήνες έχουν μία ιδιαιτερότητα: τα πρωτόνια τους είναι 44, κατανέμονται στην $U(10)$ της *Proxy* και αντιστοιχούν σε $(\lambda, \mu) = (2, 8)$, δηλαδή σε πεπλατυσμένο σχήμα, αφού $\lambda < \mu$. Η επιστημονική κοινότητα που ασχολείται με το φαινόμενο της συνυπάρξεως σχημάτων, ερμηνεύει μικροσκοπικά το φαινόμενο, μέσω μονοσωματιδιακών διεγέρσεων. Για τα Ρουθίνια συγκεκριμένα παραδέχονται πως αυτός ο μηχανισμός δεν είναι κατάλληλος. Όπως και στους προηγούμενους πυρήνες τα νετρόνια θα αντιμετωπιστούν με την Ακριβή συμμετρία.

Συνεχίζουμε με τα Παλλάδια. Αυτά έχουν 46 πρωτόνια, δηλαδή στην *Proxy* περιγράφονται από αναπαράσταση (0,6). Τα νετρόνια τους, όπως και πριν έχουν τις αναπαραστάσεις του Sn. Κατά την γνώμη μου τα Παλλάδια είναι η πιο σημαντική περίπτωση. Παρατηρώντας κανείς τις μετρημένες τετραπολικές ροπές [30], από 60-68 νετρόνια, θα δει ότι είναι αρνητικές. Έχουν συνεπώς πεπλατυσμένο σχήμα. Αυτό σημαίνει ότι η θεμελιώδης ζώνη ακολουθεί τους μαγικούς αριθμούς του 3Δ ταλαντωτή και όχι τους μαγικούς αριθμούς του προτύπου των φλοιών!

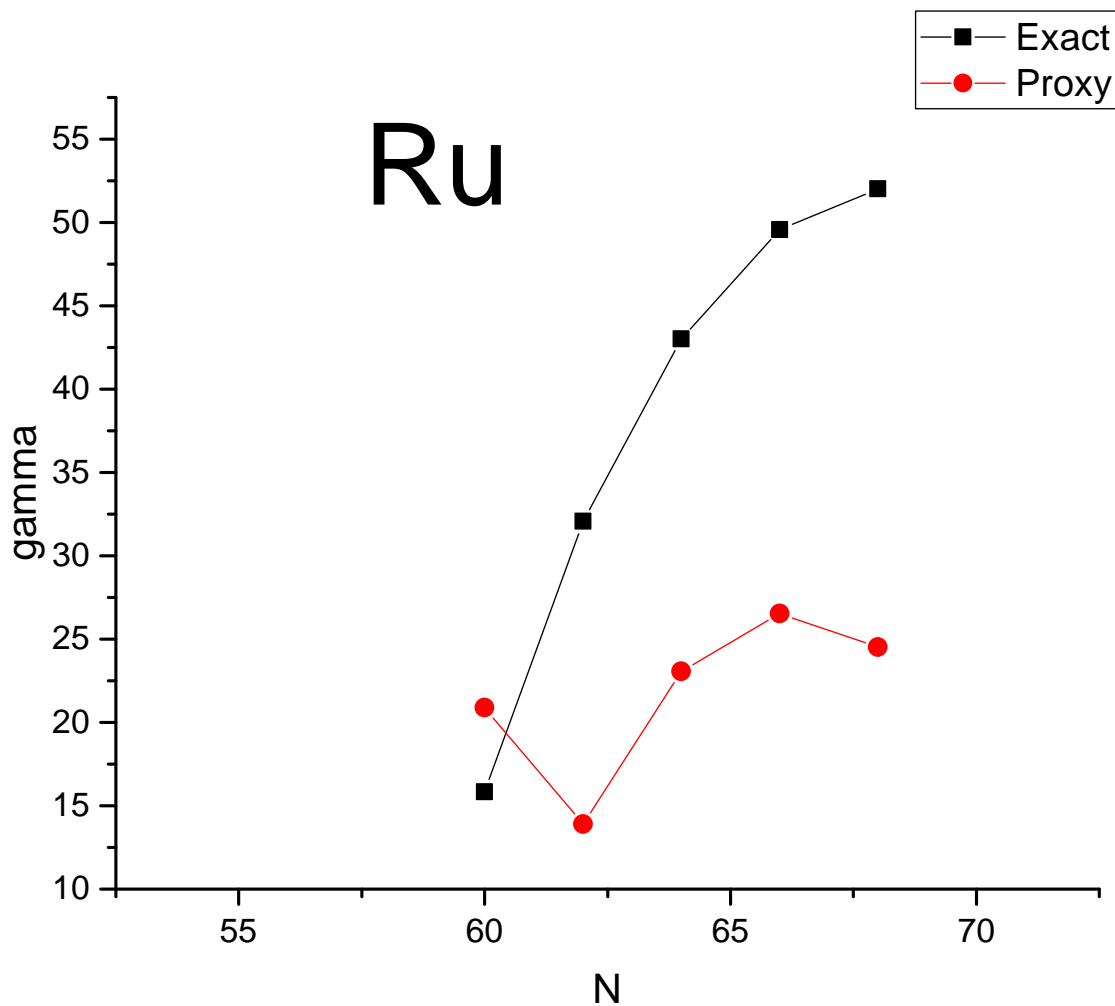
Τέλος έχουμε τα Κάδμια με τα 48 τους πρωτόνια. Περιγράφοντάς τα στην *Proxy* έχουν (0,0) αναπαράσταση, όπως και οι Κασσίτεροι. Άρα οι συνολικές αναπαραστάσεις αυτών θα είναι ίδιες με τα ισότοπα του Κασσιτέρου. Δηλαδή οι προβλεψεις της παραμόρφωσης θα είναι παρόμοιες, γιατί το μόνο που διαφέρει είναι ο μαζικός αριθμός.



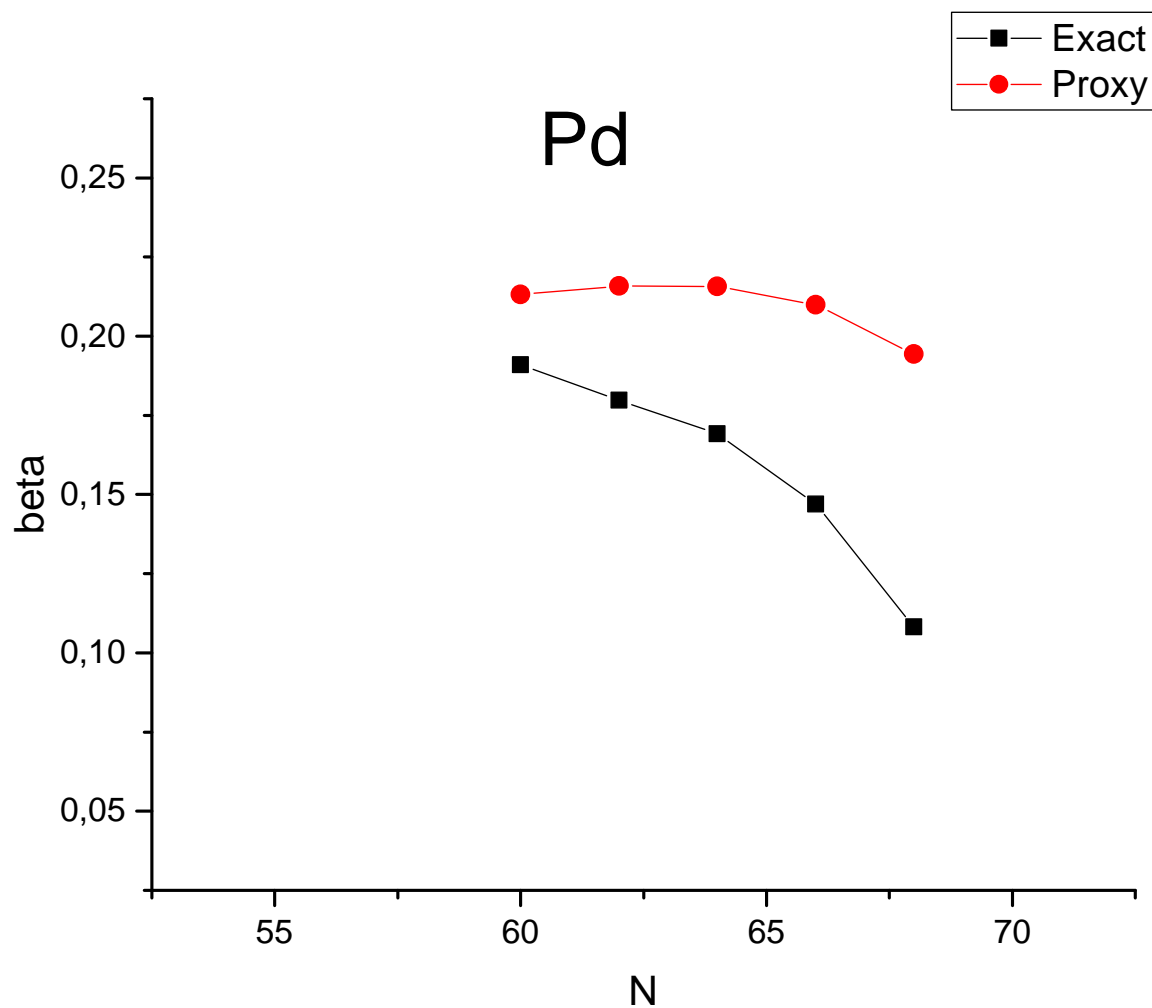
Σχήμα 4.24: Παραμόρφωση β για τα ισότοπα του Ρουθηνίου. Η παραμορφώση γίνεται σχεδόν ίδια στις δύο θεωρήσεις για το ^{102}Ru .

Πίνακας 4.23: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των ισωτόπων Παλλαδίου με την Ακριβή και την *Proxy* $SU(3)$ συμμετρία.

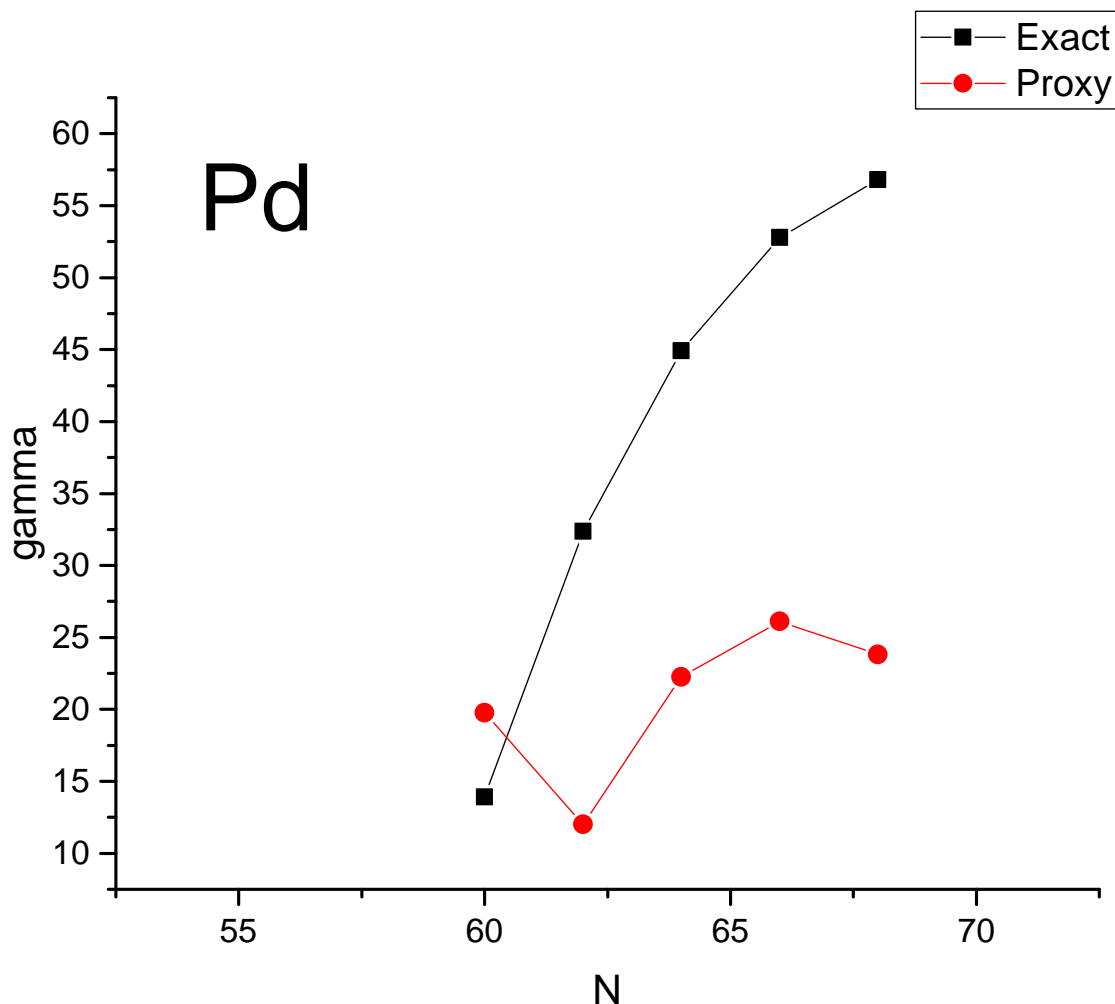
N	Ακριβής $SU(3)$	<i>Proxy</i> $SU(3)$
60	(20,6)	(20,10)
62	(12,14)	(24,6)
64	(6,18)	(20,12)
66	(2,18)	(18,14)
68	(0,14)	(18,12)



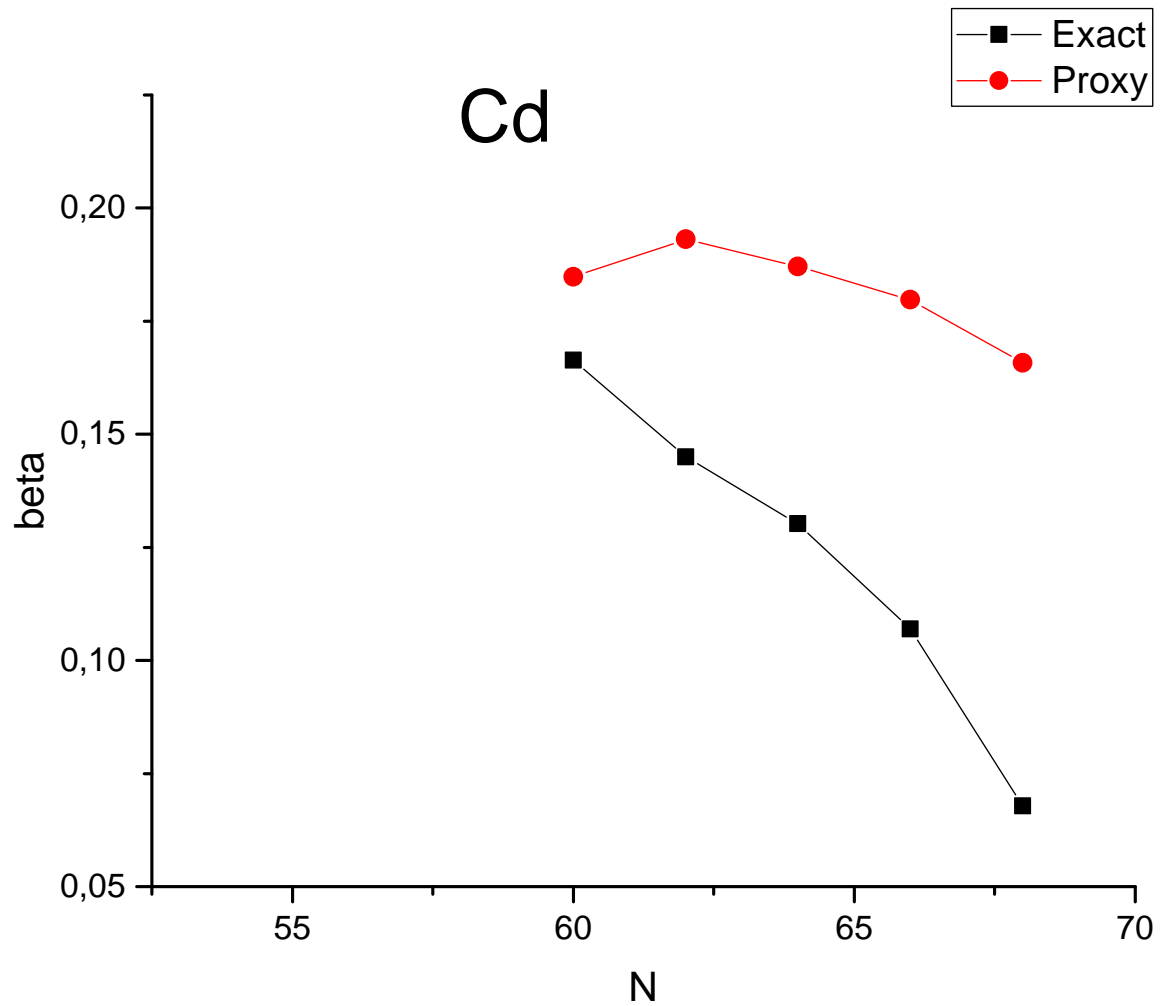
Σχήμα 4.25: Γωνία γ για τα ισότοπα του Ρουθηνίου. Ο κρίσιμος πυρήνας στην Ακριβή συμμετρία είναι ο ^{106}Ru .



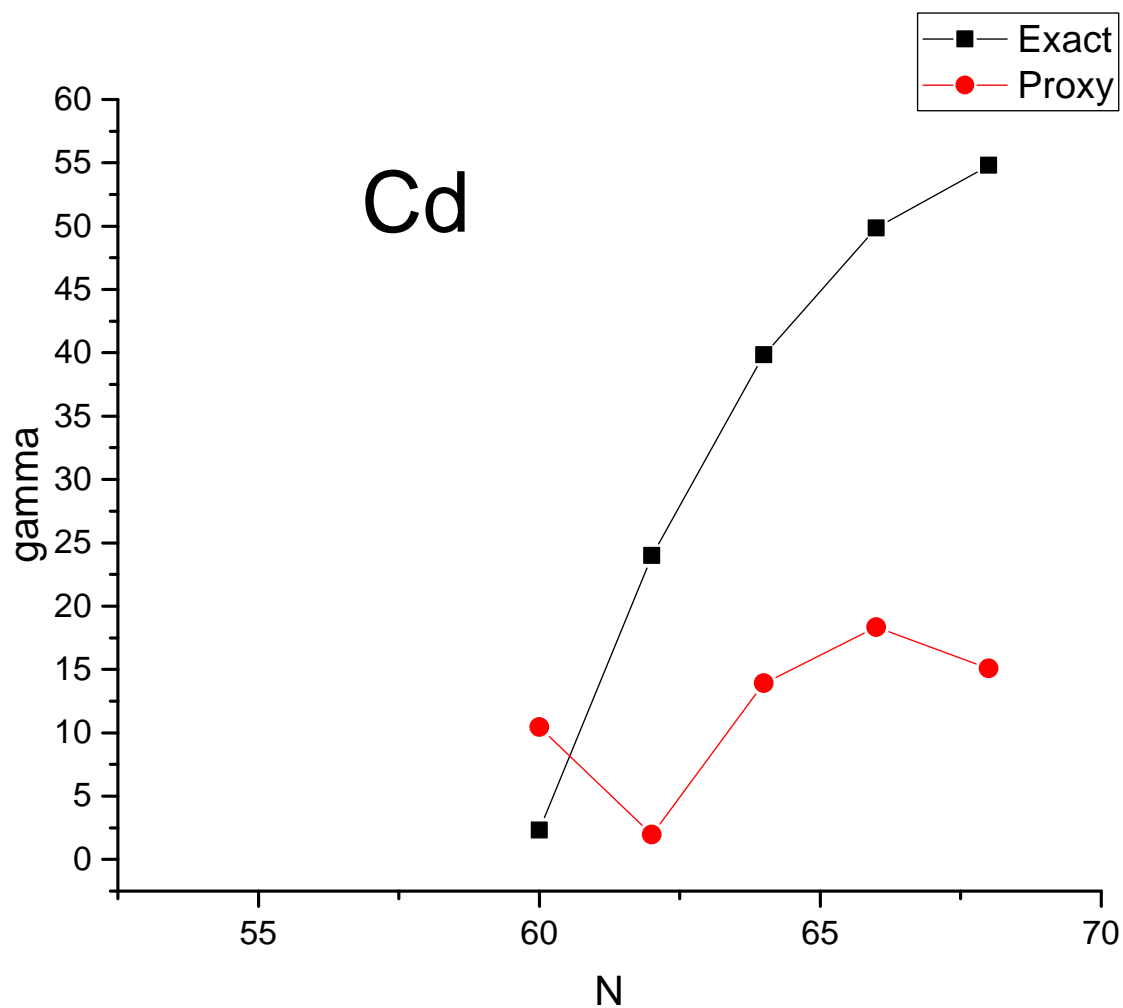
Σχήμα 4.26: Παραμόρφωση β για τα ισότοπα του Παλλαδίου. Η παραμορφώση γίνεται σχεδόν ίδια στις δύο θεωρήσεις για το ^{104}Pd . Στο ^{106}Pd βλέπουμε πάλι $B(E0)$ μετάβαση από την δεύτερη στην πρώτη 0^+ [27].



Σχήμα 4.27: Γωνία γ για τα ισότοπα του Παλλαδίου. Ο κρίσιμος πυρήνας στην Ακριβή συμμετρία είναι ο ^{108}Pd . Παρατηρούμε στα πειραματικά δεδομένα ότι στην αλληλουχία ισοτόπων $^{102-110}\text{Pd}$ η θεμελιώδης ζώνη έχει αρνητική τετραπολική ροπή, δηλαδή πεπλατυσμένο σχήμα [30]. Αυτό υποδεικνύει ότι η θεμελιώδης ζώνη είναι πιο πιθανό να περιγράφεται από την Ακριβή παρά από την *Proxy* SU(3) συμμετρία στα ισότοπα με $N = 60-68$. Το ίδιο συνέβει και στους Υδραργύρους: η μετρήμενη τετραπολική ροπή αντιστοιχούσε στην Ακριβή συμμετρία. Δυστυχώς όμως δεν υπάρχει πληθώρα μετρημένων τετραπολικών ροπών, ώστε να ελέξουμε αν το φαινόμενο είναι καθολικό.



Σχήμα 4.28: Παραμόρφωση β για τα ισότοπα του Καδμίου. Η παραμορφώση γίνεται σχεδόν ίδια στις δύο θεωρήσεις για το ^{106}Cd .



Σχήμα 4.29: Γωνία γ για τα ισότοπα του Καδμίου. Ο κρίσιμος πυρήνας στην Ακριβή συμμετρία είναι ο ^{110}Cd .

Πίνακας 4.24: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των βαρέων ισωτόπων Κρυπτού με την Ακριβή και την *Proxy* $SU(3)$ συμμετρία

N	Ακριβής $SU(3)$	<i>Proxy</i> $SU(3)$
60	(22,8)	(30,8)
62	(14,16)	(34,4)
64	(8,20)	(30,10)
66	(4,20)	(28,12)
68	(2,16)	(28,10)

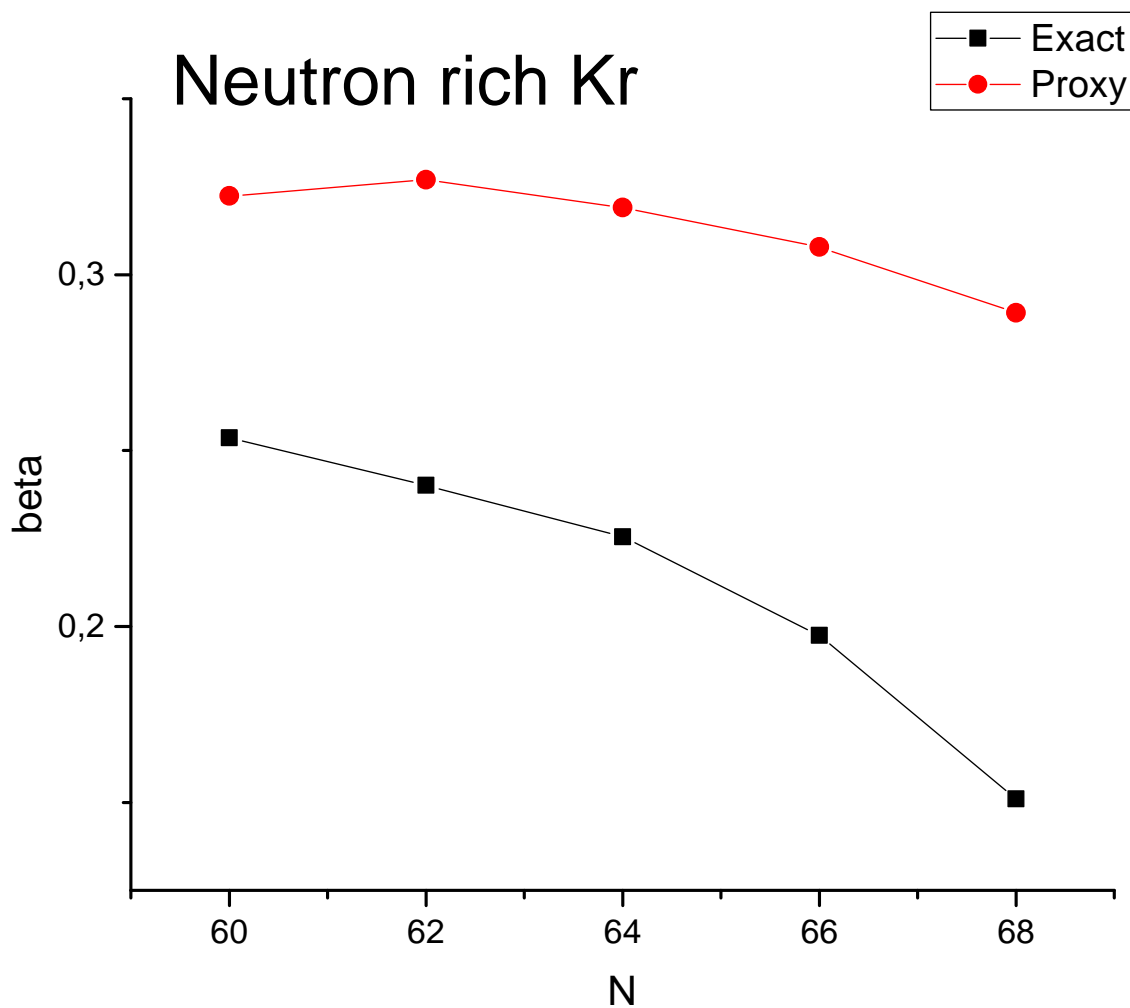
4.5.9 ΠΥΡΗΝΕΣ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΕΙΑ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ

Το τελευταίο μας παράδειγμα θα είναι οι πυρήνες $^{98,100}\text{Kr}$, εξαιτίας των οποίων ασχολήθηκα με το φαινόμενο της συνυπάρξεως, έπειτα από την πρόσφατη δημοσίευση (Ιούλιος 2017) στην αναφορά [24]. Οι συγγραφείς αναφέρουν ότι βρέθηκε συνύπαρξη πεπλατυσμένου-επιμηκυμένου σχήματος σε αυτά τα δύο ισότοπα. Θα επιχειρήσω με την συνήθη μεθοδολογία, να δω τι προβλέπει η θεωρία μας για αυτήν την περιοχή.

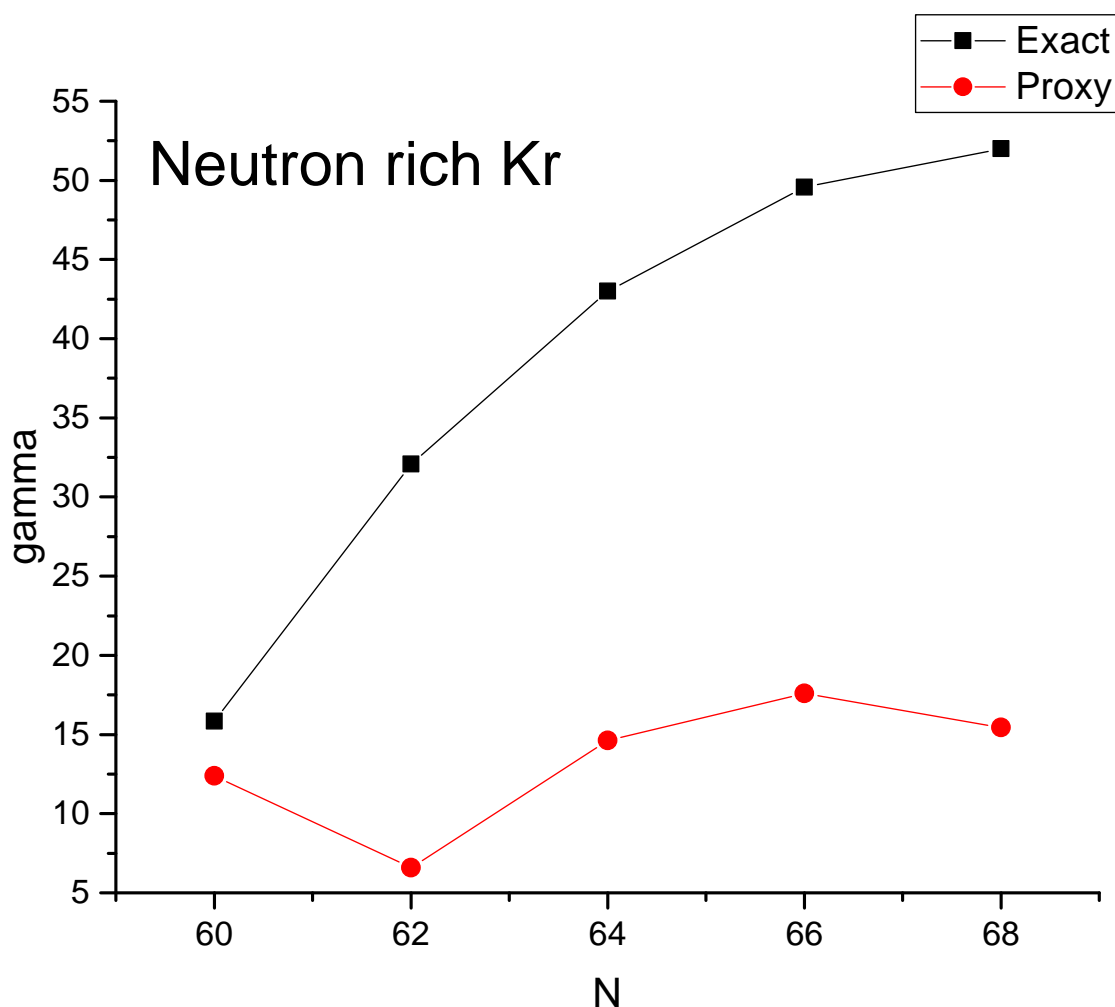
Τα 36 πρωτόνια είναι εντός της περιοχής συνυπάρξεως, συνεπώς θα τα διαχειριστώ με την Ακριβή συμμετρία, η οποία προβλέπει $(\lambda, \mu) = (2, 8)$. Τα 60 και 62 νετρόνια ανήκουν προφανώς στην περιοχή συνυπάρξεως 60-68, άρα και αυτά θα έχουν Ακριβή συμμετρία.

4.5.10 ΠΕΡΙΟΧΗ Η ΜΕ $Z \approx 34, N \approx 40$

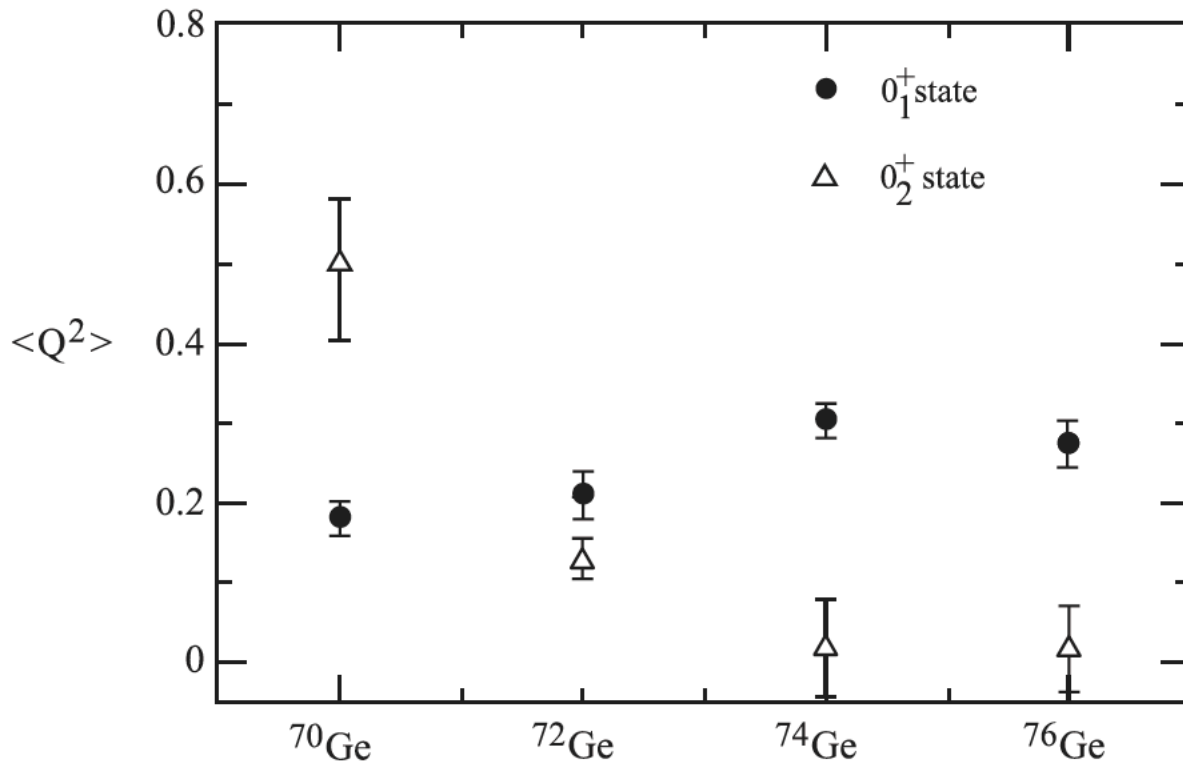
Αυτή η περιοχή ήταν η πιο δύσκολη περίπτωση. Θα ξεκινήσω με τα ισότοπα του Γερμανίου $^{70}\text{Ge}, ^{72}\text{Ge}, ^{74}\text{Ge}, ^{76}\text{Ge}$. Το Γερμάνιο έχει 32 πρωτόνια, τα οποία είναι εκτός του εύρους συνυπάρξεως (η περιοχή ξεκινάει από τα 34 σωματίδια). Συνεπώς η παραμόρφωσή τους είναι μικρότερη με την *Proxy*, άρα δεν μπορώ να επικαλεστώ κάποιον πειστικό λόγο για να εφαρμόσω την Ακριβή. Τα νετρόνια κυμαίνονται από 38, έως 44. Εδώ υπάρχουν δύο προβλήματα: αφενός τα 40, 42, 44 πρωτόνια είναι εκτός περιοχής συνυπάρξεως, αφετέρου, τα 38 και 40 νετρόνια είναι στον φλοιό 20-40 της Ακριβούς, ενώ τα 42, 44 είναι στον 40-70. Σε γενικές γραμμές θα λέγαμε ότι σε αυτούς τους πυρήνες δεν εμφανίζεται συνύπαρξη. Παρόλα αυτά οι συγγραφείς της [26] στο Σχήμα 35 ισχυρίζονται συνύπαρξη. Από έναν λεπτομερή έλεγχο στην βάση [27] για τα ισότοπα $^{72-76}\text{Ge}$ θα



Σχήμα 4.30: Επειδή και τα πρωτόνια και τα νετρόνια της περιοχής αυτής συμμετέχουν στο φαινόμενο της συνυπάρξεως, η παραμόρφωση με την Ακριβή συμμετρία είναι πολύ μικρότερη αυτής με την *Proxy*.



Σχήμα 4.31: Οι συγγραφείς της [24] αναφέρουν ότι είδαν συνύπαρξη πεπλατυσμένου (θεμελιώδης ζώνη)-επιμηκυμένου σχήματος (πρώτη διεγερμένη ζώνη) μόνο στα ισότοπα $^{98,100}\text{Kr}$. Ενώ για το ^{96}Kr αναφέρουν ότι δεν παρατήρησαν συνύπαρξη. Σύμφωνα με την ανωτέρω γραφική παράσταση, ενδέχεται να είδαν συνύπαρξη και για τα 60 νετρόνια, δίχως όμως να την αναγνωρίσουν, αφού εκεί η Ακριβής και η *Proxy* προβλέπουν συνύπαρξη επιμηκυμένου-επιμηκυμένου σχήματος.



Σχήμα 4.32: Οι συγγραφείς της [26] επικαλούνται συνύπαρξη σχημάτων για τα ισότοπα του Γερμανίου, σε περιοχή που δεν προβλέπεται από την θεωρία μας. Η θεωρία μας προβλέπει ότι η θεμελιώδης ζώνη είναι πάντα αυτήν με την μικρότερη παραμόρφωση. Στην εικόνα αυτή για τα ισότοπα $^{72-76}\text{Ge}$ η θεμελιώδης ζώνη έχει μεγαλύτερη παραμόρφωση από την δευτερεύουσα. Εν αντιθέσει για τον πυρήνα ^{70}Ge υπάρχει συνύπαρξη που οφείλεται στα 38 νετρόνια. Τα 38 νετρόνια είναι εντός της περιοχής συνυπάρξεως.

δεν κανείς κανείς ότι όντως υπάρχουν δύο ζώνες 0^+ εκ των οποίων η θεμελιώδης είναι πεπλατυσμένη. Αυτή προβλέπεται ξεκάθαρα από την *Proxy*, αφού σε αυτήν την περιοχή δίνει $\lambda < \mu$. Η δεύτερη 0^+ δεν έχει μετρημένη παραμόρφωση και αποκαλείται *grast* ζώνη. Μπορεί να προέρχεται από δευτερεύουσα αναπαράσταση (λ, μ) και να μη είναι αποτέλεσμα συνυπάρξεως της *Proxy* με την Ακριβή, ή για κάποιον άγνωστο λόγο να συνεχίζουν οι μαγικοί αριθμοί του 3Δ ταλαντωτή για τα νετρόνια.

Επόμενος στόχος μας τα Σελήνια $^{68-72}\text{Se}$, τα οποία έχουν και πρωτόνια και νετρόνια εντός εύρους συνυπάρξεως. Άρα οι δύο ομάδες αναπαραστάσεων θα είναι του τύπου $(\lambda, \mu)_{p,exact} +$

Πίνακας 4.25: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των Σεληνίων

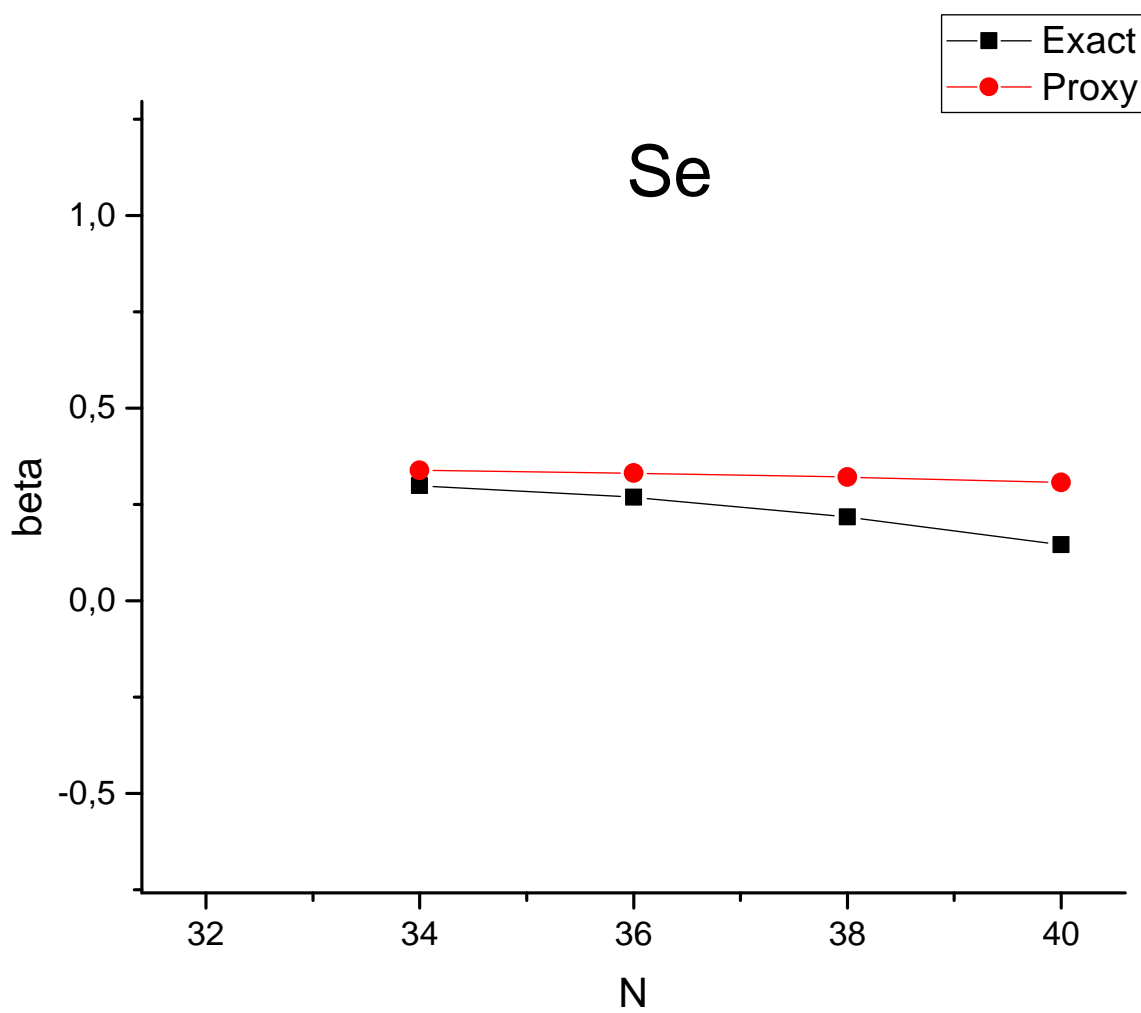
N	Ακριβής $SU(3)$	<i>Proxy</i> $SU(3)$
34	(12,12)	(24,0)
36	(8,14)	(22,4)
38	(6,12)	(22,4)
40	(6,6)	(24,0)
42	(12,12)	(18,6)
44	(8,14)	(14,8)
46	(6,12)	(12,6)
48	(6,6)	(12,0)

$(\lambda, \mu)_{n,exact}, (\lambda, \mu_{p,proxy} + (\lambda, \mu_{n,proxy})$. Εν αντιθέσει τα επόμενα ισότοπα του Σεληνίου $^{74-82}\text{Se}$ θα έχουν συνύπαρξη μόνο εξαιτίας των πρωτονίων τους, αφού τα νετρόνια έφυγαν εκτός εύρους. Δηλαδή τώρα οι αναπαραστάσεις τους θα είναι $(\lambda, \mu)_{p,exact} + (\lambda, \mu)_{n,proxy}$. Σε όλα τα ισότοπα του Σεληνίου έχουμε συμφωνία με το πείραμα, πλην του ^{70}Se , όπου οι συγγραφείς της δημοσίευσης [23], δηλώνουν ότι έχει θετική τετραπολική ροπή (μη μετρομένη όμως), ενώ η θεωρία μας προβλέπει ότι αυτός ο πυρήνας είναι πεπλατυσμένος.

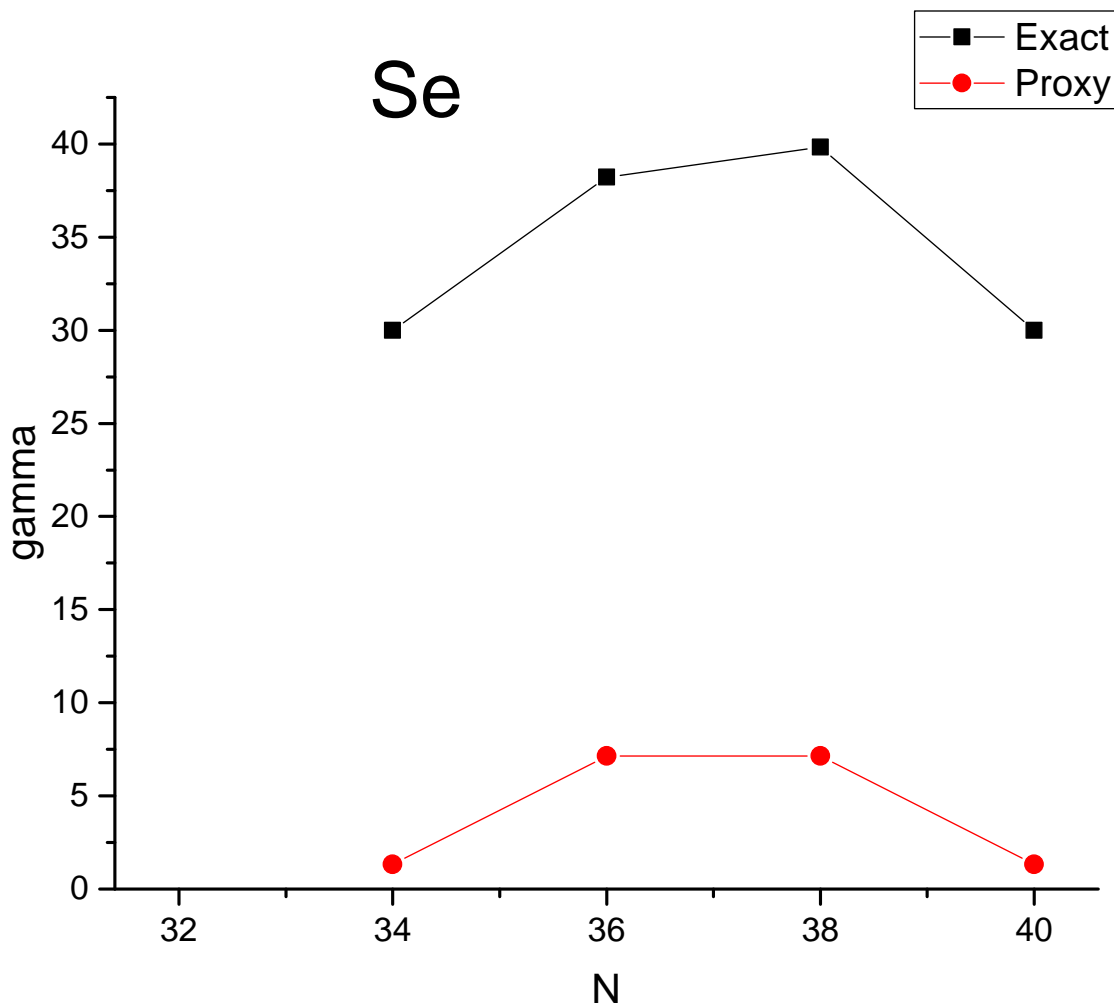
Τελειώνουμε την μελέτη της συνυπαρξεως με τα ελαφρά Κρυπτά. Για τα ισότοπα $^{68-74}\text{Kr}$ οι αναπαραστάσεις θα είναι τύπου $(\lambda, \mu)_{p,exact} + (\lambda, \mu)_{n,exact}$ για την Ακριβή, ενώ στην *Proxy* θα είναι $(\lambda, \mu)_{p,proxy} + (\lambda, \mu)_{n,proxy}$. Εν αντιθέσει για τα ισότοπα $^{76-82}\text{Kr}$ οι αναπαραστάσεις θα είναι τύπου $(\lambda, \mu)_{p,exact} + (\lambda, \mu)_{n,proxy}$ και $(\lambda, \mu)_{p,proxy} + (\lambda, \mu)_{n,proxy}$. Πειραματικά δεδομένα για τα ελαφρά Κρυπτά μπορεί κανείς να αντλήσει από την δημοσίευση [31].

4.5.11 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

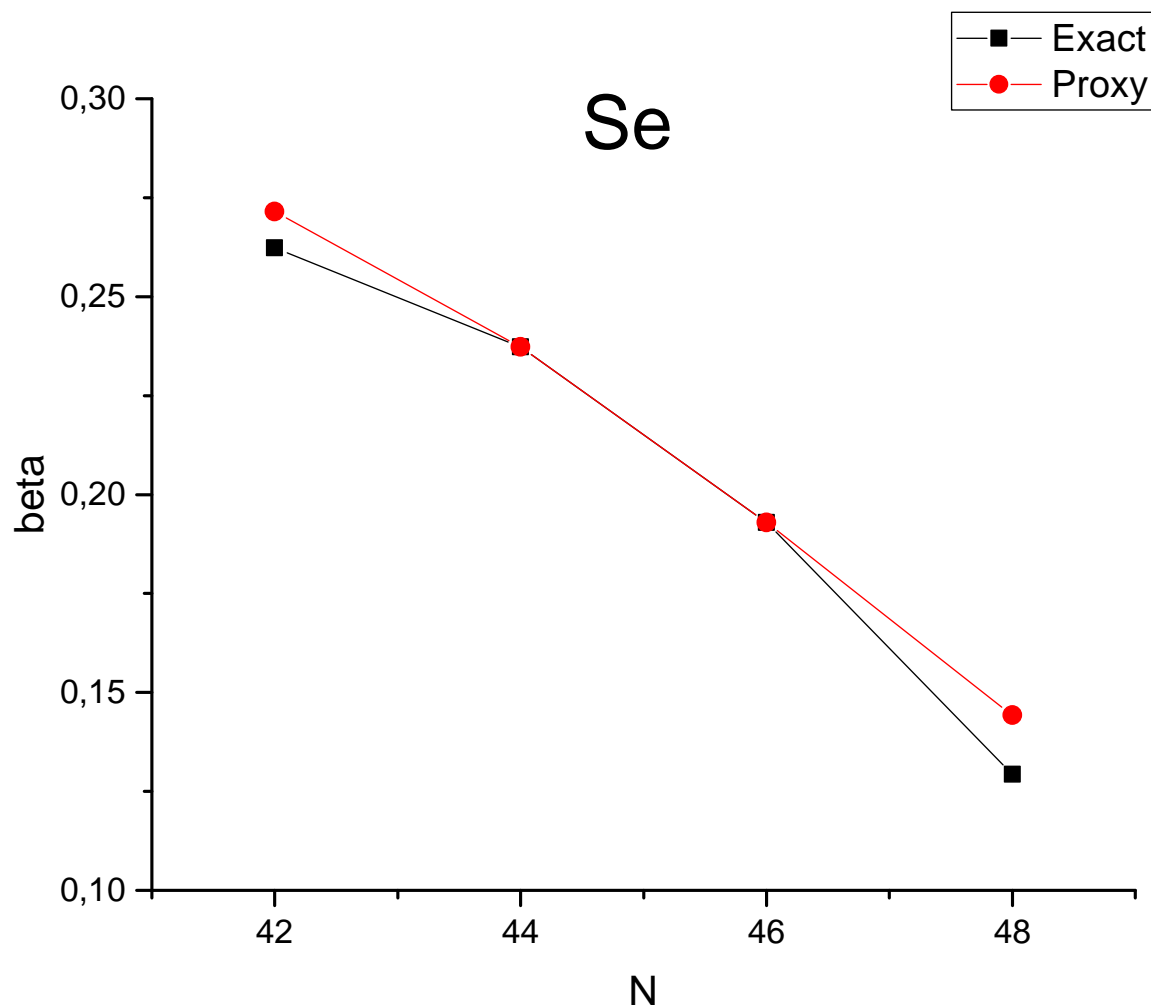
Η μελέτη μας για την συνύπαρξη απέδειξε ότι συνυπάρχουν δύο οικογένειες μαγικών αριθμών: του Προτύπου των Φλοιών και του 3Δ απλού αρμονικού ταλαντωτή. Ο πυρήνας στην θεμελιώδη του ζώνη ακολουθεί αυτήν που του προσδίδει την μικρότερη παραμόρφωση, ενώ στην πρώτη διεγερμένη ζώνη την άλλη. Τα δύο αυτά σύνολα μαγικών αριθμών προσδίδουν διαφορετικό σχήμα στον πυρήνα. Οι περιπτώσεις που εμφανίστηκαν ήταν επιμηκυμένο-πεπλατυσμένο, επιμηκυμένο-επιμηκυμένο, επιμηκυμένο-κρίσιμο. Οι κρίσιμοι πυρήνες στα πειραματικά δεδομένα αντιστοιχούσαν



Σχήμα 4.33: Χαμηλότερη παραμόρφωση δίνει πάλι η Ακριβής συμμετρία, άρα υπερισχύει.



Σχήμα 4.34: Ο πυρήνας ^{68}Se στην βάση *ENSDF* έχει μία θεμελιώδη 0^+ πεπλατυσμένη και μία δεύτερη 0^+ επιμηχυμένη. Το σχόλιο για την δεύτερη είναι πως χαρακτηρίζεται από πολύ μεγάλη ροπή αδρανείας, δηλαδή έχει πολύ μεγάλη παραμόρφωση. Η θεωρία μας για αυτόν προβλέπει ότι στην θεμελιώδη του θα είναι κρίσιμος πυρήνας μεταξύ επιμηχυμένου και πεπλατυσμένου σχήματος, ενώ η δεύτερη 0^+ θα είναι εντελώς επιμηχυμένη. Ενώ στο ^{68}Se συμφωνούσαμε με τα πειραματικά, στο ^{70}Se έχουμε την πρώτη ασυμφωνία: οι συγγραφείς της [23] επιχειρηματολογούν πως η θεμελιώδης ζώνη έχει θετική Q . Στον πυρήνα ^{72}Se εμφανίζονται δύο 0^+ ζώνες αγνώστου Q , ενώ στον ^{74}Se η Q της θεμελιώδους ζώνης είναι αρνητική [30].



Σχήμα 4.35: Σε αυτήν την περιοχή μόνο τα πρωτόνια δημιουργούν συνύπαρξη. Παρόλο που οι τιμές της παραμορφώσεως με τις δύο συμμετρίες για τους πυρήνες $^{78,80}\text{Se}$ ταυτίζονται, πειραματικά συνεχίζουν να υπάρχουν δύο 0^+ ζώνες [27].

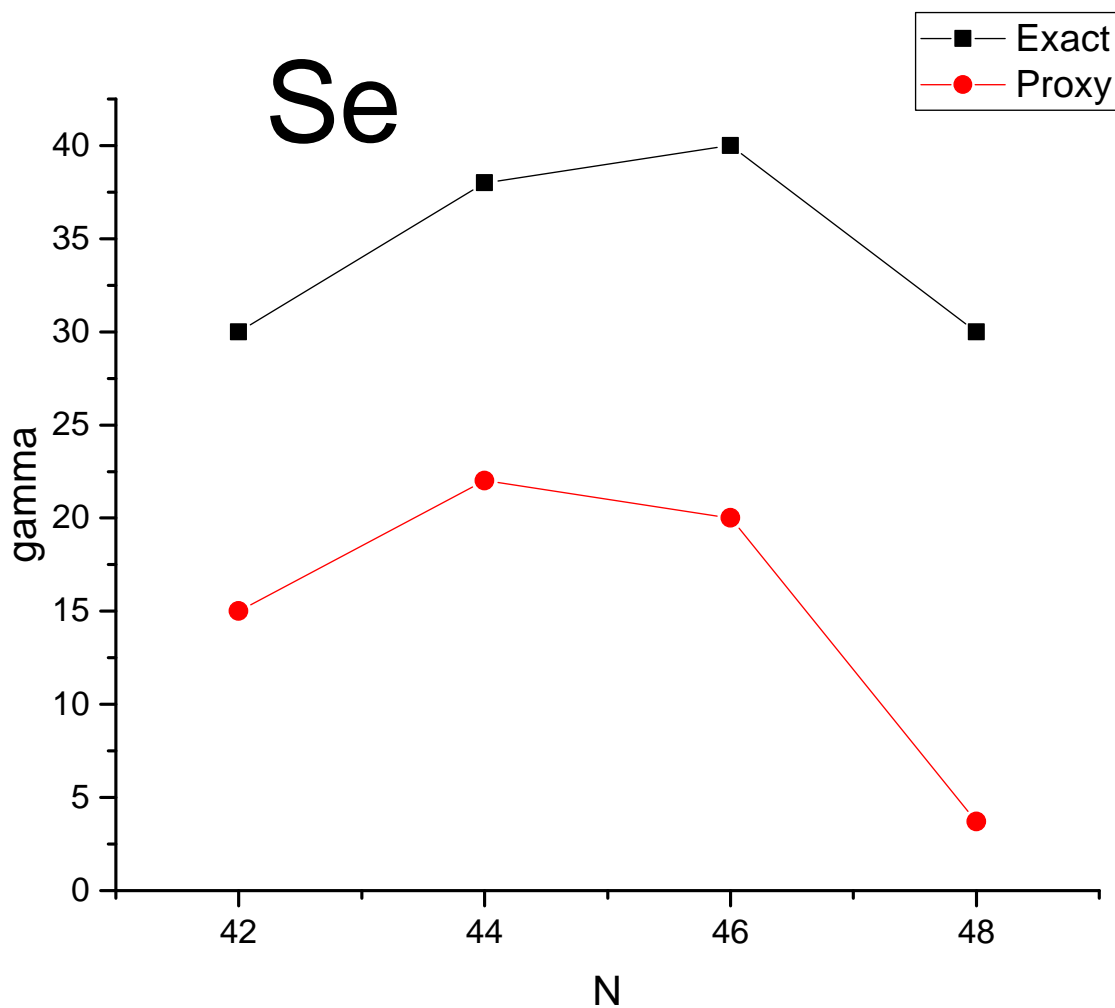
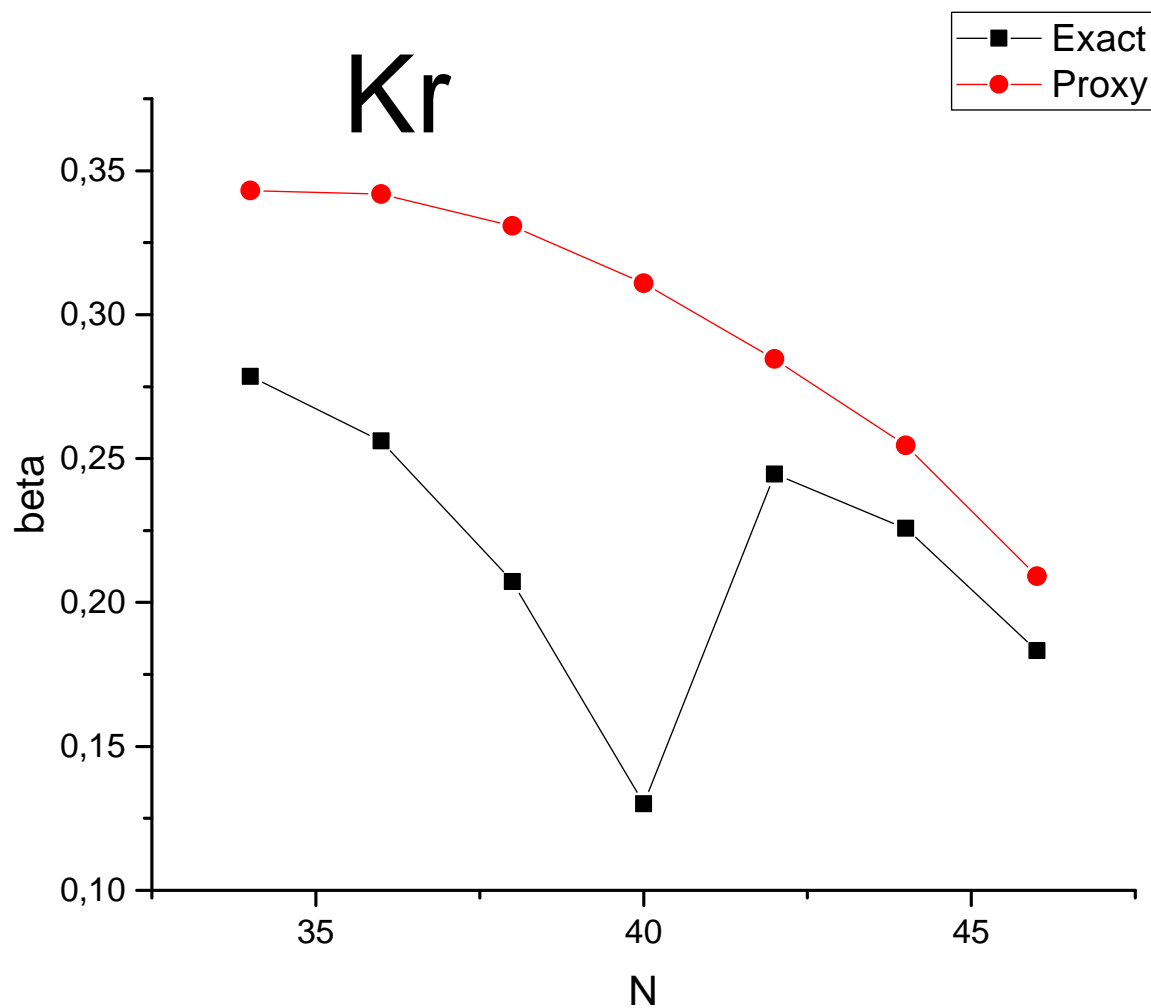
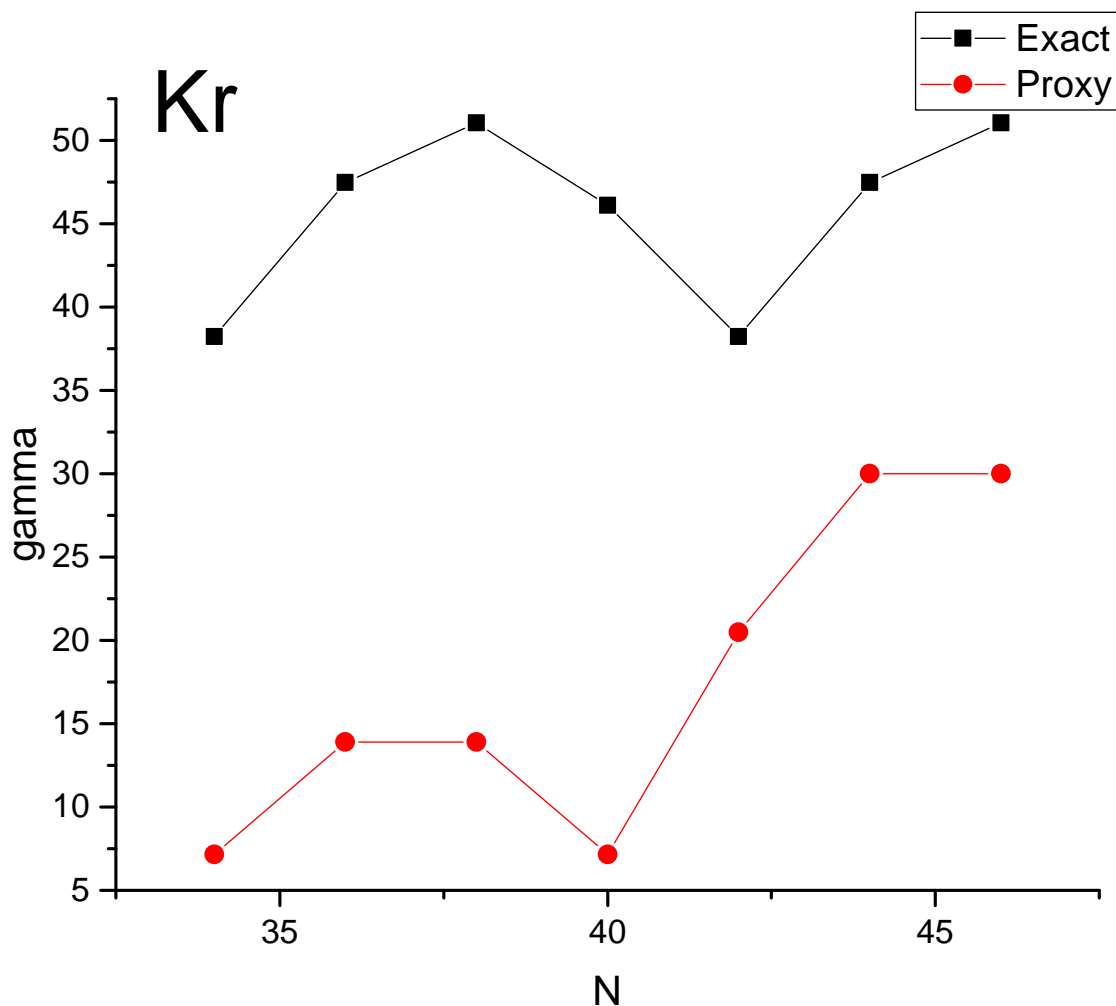


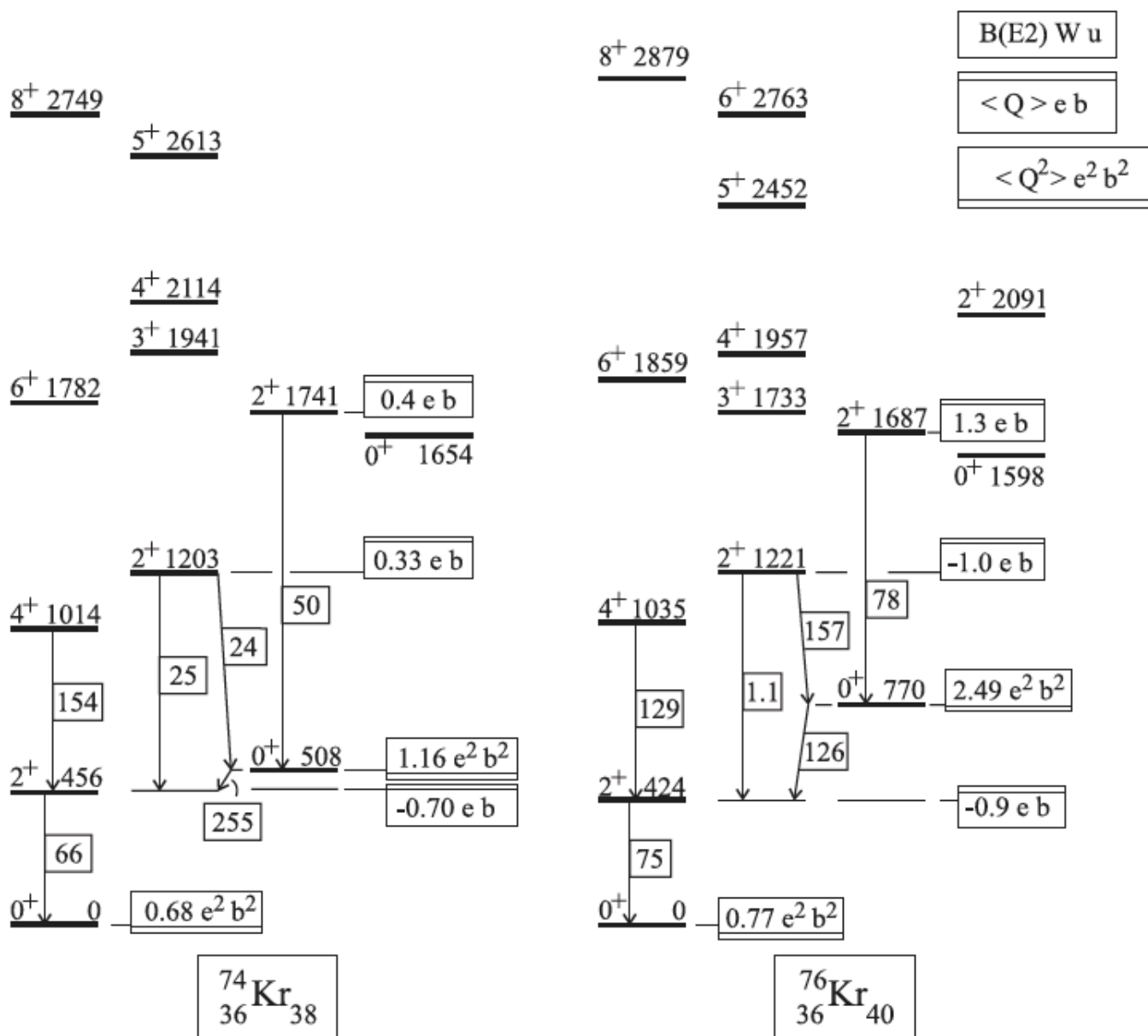
Figure 4.36: Πειραματικά όλα τα ισότοπα $^{76-82}\text{Se}$ έχουν αρνητική Q [30]. Η θεωρία προβλέπει αρνητική Q για τα $^{78-82}\text{Se}$. Ειδικά για το ^{76}Se προβλέπουμε ότι είναι κρίσιμος πυρήνας.



Σχήμα 4.37: Η απότομη αλλαγή στο β για την Ακριβή συμμετρία εμφανίζεται, διότι εκεί παύει μαγικός αριθμός του 3Δ ταλαντωτή. Σε κάθε περίπτωση υπερσχύει η Ακριβής συμμετρία, λόγω μικρότερης παραμορφώσεως.



Σχήμα 4.38: Στο ^{76}Kr προβλέπουμε την μεγαλύτερη διαφορά στο σχήμα του πυρήνα με τις δύο θεωρήσεις. Εδώ συνυπάρχουν δύο σχήματα: η θεμελιώδης ζώνη είναι πεπλατυσμένη, ενώ η πρώτη διεγερμένη 0^+ επιμηκυμένη.



Σχήμα 4.39: Πειραματικά δεδομένα για τα ελαφρά Ισότοπα του Κρυπτού. Η γραφική είναι η Fig.39 της [26]. Τα πειραματικά δεδομένα λήφθηκαν από την [31] και την βάση XUNDL. Είναι ευδιάκριτο ότι η θεμελιώδης ζώνη έχει αρνητική τετραπολική ροπή, προέρχεται συνεπώς από πεπλατυσμένο σχήμα.

Πίνακας 4.26: Οι αναπαραστάσεις (λ, μ) των Κρυπτών.

N	Ακριβής $SU(3)$	<i>Proxy</i> $SU(3)$
34	(8,14)	(22,4)
36	(4,16)	(20,8)
38	(2,14)	(20,8)
40	(2,8)	(22,4)
42	(8,14)	(16,10)
44	(4,16)	(12,12)
46	(2,14)	(10,10)
48	(2,8)	(10,4)

σε αρνητική τιμή της Q .

4.6 ΕΥΡΕΣΗ ΤΩΝ $B(E2)$

Ο πυρήνας όπως γνωρίζουμε απαρτίζεται από ηλεκτρικά φορτία (πρωτόνια), τα οποία δημιουργούν ηλεκτρική ροπή. Από τον Ηλεκτρομαγνητισμό γνωρίζουμε, ότι μία εντοπισμένη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου, είναι ικανή να δημιουργήσει ηλεκτρική διπολική ροπή, ή ηλεκτρική τετραπολική ροπή, ή ηλεκτρική οκταπολική ροπή κ.ο.κ. Ενδέχεται κάποιες από τις ροπές αυτές να είναι μηδενικές, ώστε μία εξ αυτών να είναι κυρίαρχη. Στις χαμηλές ενέργειες των πυρήνων θεωρούμε ότι υπερτερεί η ηλεκτρική τετραπολική ροπή, αφού η αμέσως προηγούμενη (η διπολική) εμφανίζεται στην περίπτωση του συντονισμού και στην βιβλιογραφία αυτό αναφέρεται ως Γιγαντιαίος Διπολικός Συντονισμός.

Κάθε συλλογική ενεργειακή στάθμη του πυρήνα είναι το αποτέλεσμα μίας χωρικής κατανομής των νουκλεονίων. Διαφορετικές ενεργειακές στάθμες αντιστοιχούν σε διαφορετικές κατανομές. Άρα η κάθε ενέργεια χαρακτηρίζεται από μία τετραπολική ροπή. Όταν λοιπόν ένας πυρήνας αποδιεγείρεται, αλλάζει η τετραπολική του ροπή. Εμείς λοιπόν ψάχνουμε τις πιθανότητες μεταβάσεως του πυρήνα από μία κατάσταση σε μία άλλη, όσον αφορά στο μέγεθος της ηλεκτρικής τετραπολικής ροπής. Αυτές οι πιθανότητες συμβολίζονται $B(E2)s$.

Ο υπολογισμός τους απαιτεί τον καθορισμό μίας διανυσματικής βάσεως. Τα διανύσματα των συλλογικών καταστάσεων ενός πυρήνα, ο οποίος έχει $SU(3)$ συμμετρία, συμβολίζονται ως εξής:

$$|(\lambda, \mu)KLS, JM \rangle \quad (4.28)$$

Τα (λ, μ) προφανώς χαρακτηρίζουν την $SU(3)$ συμμετρία. Ο κβαντικός αριθμός K στην βιβλιογραφία αναφέρεται ως ελλείπων κβαντικός αριθμός διότι δεν χαρακτηρίζει κάποια άλγεβρα, αλλά είναι απαραίτητος για να διακρίνει τις ενεργειακές ζώνες μεταξύ τους. Ο L είναι η στροφορμή της καταστάσεως, το S είναι το σπιν, ο J είναι η συνολική στροφορμή, που προκύπτει από την σύζευξη $L-S$ και M είναι η προβολή της συνολικής στροφορμής. Στους άρτιους-άρτιους πυρήνες το σπιν είναι μηδέν, άρα η συνολική στροφορμή συμπίπτει με την στροφορμή. Και έτσι τελικά τα διανύσματα της βάσεως γίνονται:

$$|(\lambda, \mu)KL0, LM \rangle. \quad (4.29)$$

Για να υπολογίσουμε τις ηλεκτρικές τετραπολικές μεταβάσεις του πυρήνα χρησιμοποιήσαμε τον τετραπολικό τελεστή. Ο τελεστής αυτός έχει δύο μορφές την με μονάδες μετρήσεως και την αδιάστατη. Στην πρώτη περίπτωση θα τον συμβολίζουμε Q , ενώ στην δεύτερη \tilde{Q} . Ο ορισμός του τελεστή είναι:

$$Q = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} b_0^2 \sum_{\sigma} e_{\sigma} \tilde{Q}. \quad (4.30)$$

Ο δείκτης σ δηλώνει τα πρωτόνια και τα νετρόνια. Ισχύει ότι $\sigma_p = e, \sigma_n = 0$, δηλαδή δεν χρησιμοποιούμε ενεργά φορτία. Η σταθερά που εμφανίζεται είναι η $b_0^2 = A^{1/6} fm^2$. Άρα η τελική μονάδα μετρήσεως του τελεστή αυτού είναι fm^2e . Ο αδιάστατος τελεστής εκφράζεται συναρτήσει σφαιρικής αρμονικής:

$$\tilde{Q} = \sum_i \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r_{\sigma,i}^2 Y_{2M}(\hat{r}_{\sigma,i}), \quad (4.31)$$

όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλα τα σωματίδια. Έχουμε τον τελικό τύπο:

$$Q = b_0^2 e \sum_i r_{p,i}^2 Y_{2M}(\hat{r}_{p,i}). \quad (4.32)$$

Ο ορισμός των $B(E2)$ s για την $SU(3)$ είναι ο ακόλουθος:

$$B(E2; (\lambda, \mu)KLSJ \rightarrow K'L'S'J') = \frac{|\langle (\lambda, \mu)K'L'S'J' || Q || (\lambda, \mu)KLSJ \rangle|^2}{2L+1}. \quad (4.33)$$

Στην σχέση αυτή όμως χρησιμοποιήσαμε τα (λ, μ) των πρωτονίων και νετρονίων συνολικά, ενώ μόνο τα πρωτόνια δημιουργούν ηλεκτρική ροπή. Άρα θα χρειαστούμε έναν διορθωτικό παράγοντα, που θα αναλυθεί σε λίγο. Παρατηρούμε επίσης ότι τα (λ, μ) στα δύο διανύσματα είναι τα ίδια, διότι ο Q μπορεί να συνδέσει μόνο τις ίδιες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SU(3)$. Ο αριθμητής είναι το τετράγωνο του ανηγμένου στοιχείου πίνακα, που προκύπτει από το γενικευμένο θεώρημα *Wigner – Eckart*.

Ο υπολογισμός αυτού του ανηγμένου στοιχείου γίνεται από την σχέση [32]:

$$\langle (\lambda, \mu) K' L' S' J' || Q || (\lambda, \mu) K L S J \rangle = \sqrt{(2J' + 1)(2J + 1)} W(S J L L' 2, L J') (-1)^{\phi_\mu} \sqrt{2L' + 1} \sqrt{4C_2^{(\lambda, \mu)}} \langle (\lambda, \mu) K L; (1, 1) 2 || (\lambda, \mu) K' L' \rangle .$$

Ο συντελεστής $W(S J L L' 2, L J')$ ονομάζεται συντελεστής *Racah* της $SU(2)$ και επιπλέον ισχύει:

$$\sqrt{(2J' + 1)(2J + 1)} W(S J L L' 2, L J') = 1,$$

επομένως ο τύπος απλοποιείται αρκετά. Η φάση $(-1)^{\phi_\mu}$, όταν υψωθεί στο τετράγωνο και αυτή ισούται με την μονάδα, επομένως αμελείται. Η ποσότητα $\langle (\lambda, \mu) K L; (1, 1) 2 || (\lambda, \mu) K' L' \rangle$ ονομάζεται σταθερά ζεύξης από $SU(3)$ σε $SO(3)$ και υπολογίστηκε από τον κώδικα της αναφοράς [33]. Εν τέλη η απόλυτη τιμή των μεταβάσεων δίνεται από την σχέση:

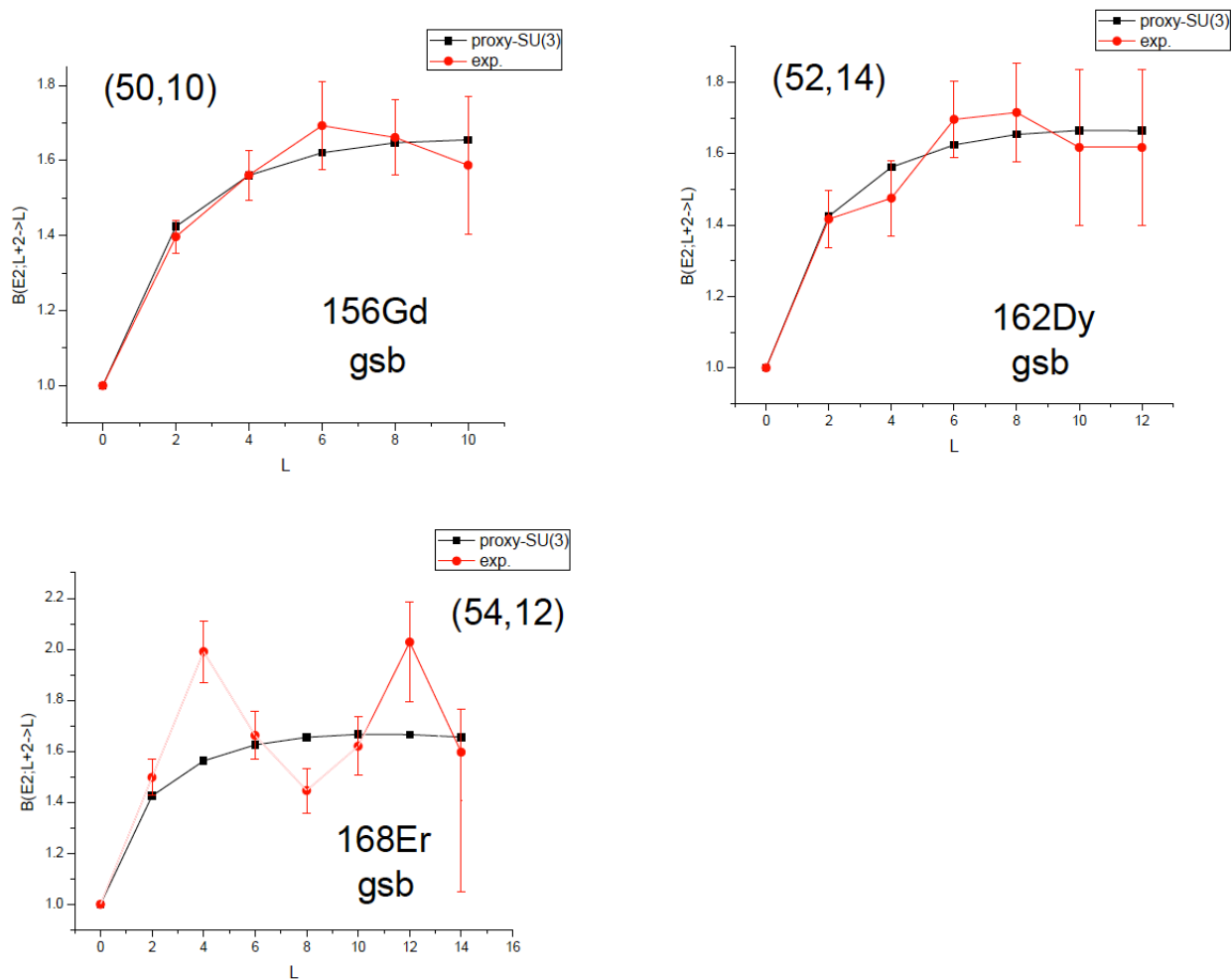
$$B(E2; (\lambda, \mu) K L S J \rightarrow K' L' S' J') = \frac{2L' + 1}{2L + 1} 4C_2^{(\lambda, \mu)} \langle (\lambda, \mu) K L; (1, 1) 2 || (\lambda, \mu) K' L' \rangle . \quad (4.34)$$

Ο τύπος αυτός θα χρειαστεί έναν διορθωτικό συντελεστή διότι έχουμε χρησιμοποιήσει τον μαζικό τετραπολικό τελεστή αντί του ηλεκτρικού, ο οποίος θα συμπεριλάμβανε μόνο τα πρωτόνια. Ο όρος αυτός είναι ο $(Z/A)^2$. Υπάρχει και δεύτερος παράγοντας ο $(A/S)^2$, όπου $S = S_p + S_n$, το μέγεθος του φλοιού. Είναι απαραίτητος διότι έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο τα νουκλεόνια σθένους, ενώ ο τελεστής $C_2^{(\lambda, \mu)}$ είναι ανάλογος όλου του πυρήνα. Άρα οι δύο διορθώσεις ενοποιούνται τελικά σε μία την $(Z/S)^2$. Στην συνέχεια πρέπει να έχουμε υπόψιν οι μονάδες μέτρησις μέσω της προηγούμενης σχέσεως είναι $10^{-4} e^2 b^2$. Για να μετατρέψουμε τα αποτελέσματά μας σε $W.u.$, ώστε να είναι συγκρίσιμα με το πείραμα, πρέπει να διαιρέσουμε τα αποτελέσματα με $0, 297 A^{4/3}$.

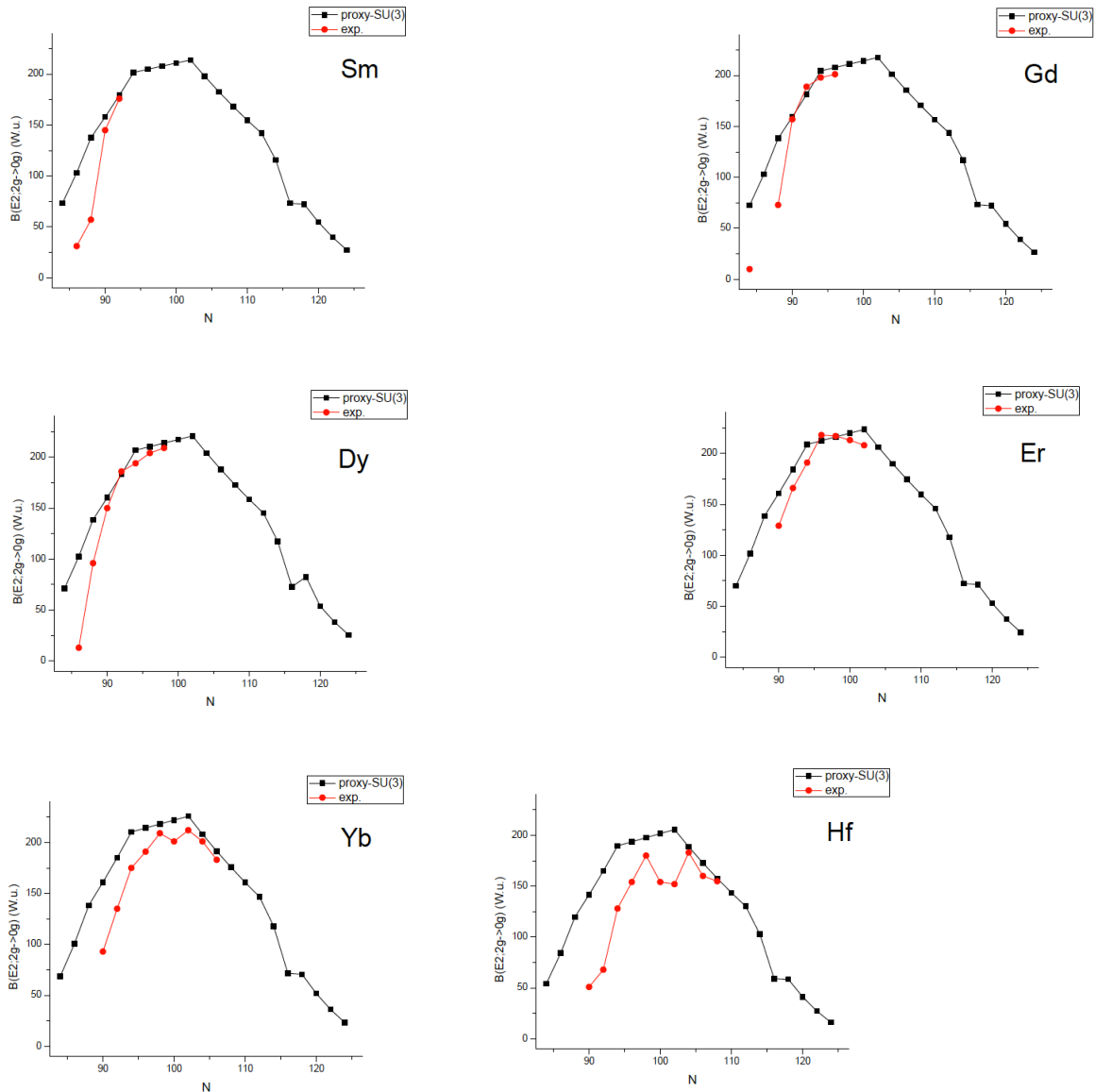
Υπάρχει τρόπος να αποφύγουμε την χρήση του διορθωτικού συντελεστή. Αν υπολογίσουμε λόγους μεταβάσεων αντί των απολύτων τιμών, τότε οι όμοιοι συντελεστές απαλείφονται. Έτσι λοιπόν για μεταβάσεις εντός της πρώτης μη αναγωγίσιμης αναπαραστάσεως μπορούμε να κανονικοποιήσουμε ως προς την μετάβαση μεταξύ των σταθμών $2^+ \rightarrow 0^+$ της θεμελιώδους ζώνης:

$$\frac{B(E2; L_i \rightarrow L_f)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} = 5 \frac{L_f + 1}{L_i + 1} \frac{(\langle (\lambda, \mu) K_i L_i; (1, 1) 2 || (\lambda, \mu) K_f L_f \rangle)^2}{(\langle (\lambda, \mu) 0 2; (1, 1) 2 || (\lambda, \mu) 0 0 \rangle)^2} \quad (4.35)$$

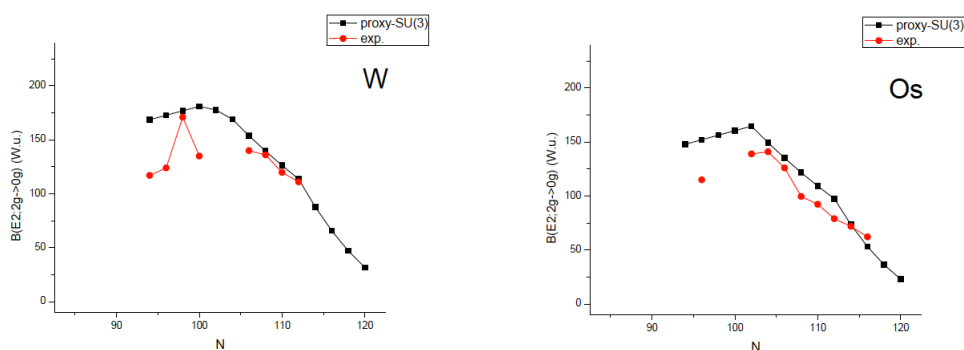
Από τις γραφικές παραστάσεις των $B(E2)s$ εξάγονται πολλά συμπεράσματα. Κατ' αρχάς στην αρχή του κάθε φλοιού υπάρχει εμφανής απόκλιση από τα πειραματικά δεδομένα. Στα λίγα σωματίδια σθένους η σειρά συμπληρώσεως των τροχιακών απο σωματίδια, είναι εντελώς διαφορετική από την ενεργειακή σειρά των τροχιακών *Nilsson*. Ως εκ τούτου ο κώδικας [18] υπολογίζει πολύ μεγαλύτερη παραμόρφωση από την υπαρκτή. Θα μπορούσαμε μελλοντικά να υπολογίσουμε, μόνο για την αρχή του φλοιού, τα (λ, μ) συμπληρώνοντας τα τροχιακά με ενεργειακή σειρά. Στο μέσο και στο τέλος του εκάστοτε φλοιού έχουμε αρκετά μεγάλη σύμπτωση με το πείραμα, την οποία αποδίδω στο ότι η σειρά πλήρωσης των τροχιακών με τον κώδικα είναι σχεδόν ίδια με την ενεργειακή σειρά, έχουμε δηλαδή τα σωστά (λ, μ) . Επιπλέον τα πειραματικά δεδομένα των $B(E2)s$ του $YbHfW$ εμφανίζουν κάποιες περίεργες διακυμάνσεις συναρτήσε του αριθμού νετρονίων, μετά τα 100 νετρόνια (σελ 156, 157). Η περιοχή αυτή είναι περιοχή συνυπάρξεως, συνεπώς η θεμελιώδης ζώνη παράγεται από τα (λ, μ) της Ακριβούς συμμετρίας, ενώ εμείς εκτελέσαμε τους υπολογισμούς με την *Proxy*.



Σχήμα 4.40: Λόγοι μεταβάσεων εντός της θεμελιώδους ζώνης. Οι λόγοι είναι όλοι κανονικοποιημένοι ως προς την $B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)$. Παρατηρούμε ικανοποιητικά μεγάλη σύμπτωση με τα πειραματικά δεδομένα δίχως την χρήση ενεργών φορτίων, παραμέτρων ή διορθωτικών παραγόντων.



Σχήμα 4.41: Απόλυτες τιμές των $B(E2)s$ $2g \rightarrow 0g$ για αλυσίδες ισotόπων. Εμφανείς αποκλίσεις από τα πειραματικά δεδομένα εμφανίζονται στην αρχή του φλοιού, όπου εκεί η θεωρία μας προβλέπει μεγαλύτερη παραμόρφωση από την υπαρκτή (οι μεταβάσεις $2g \rightarrow 0g$ είναι ανάλογες της παραμορφώσεως του πυρήνα). Εν αντιθέσει στο μέσο του φλοιού έχουμε ικανοποιητική σύμπτωση με το πείραμα.



Σχήμα 4.42: Τα Βολφράμια και τα Όσμια θεωρούνται κρίσιμοι πυρήνες μεταξύ του επιμηκυμένου και του πεπλατυσμένου σχήματος, με σχετικά μικρή παραμόρφωση. Παρόλο που η $SU(3)$ στην βιβλιογραφία εφαρμόζεται σε έντονα παραμορφωμένους πυρήνες, παρατηρούμε ότι έχουμε ικανοποιητική σύμπτωση με το πείραμα προς το κλείσιμο του φλοιού. Το συμπέρασμα είναι πως η *Proxy SU(3)* μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε σφαιρικούς πυρήνες.

Κεφάλαιο 5

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα διατριβή αναπτύξαμε ένα αλγεβρικό, συλλογικό Πρότυπο πυρήνων, με μικροσκοπική θεμελίωση, την *Proxy SU(3)* συμμετρία. Το Πρότυπο αυτό εφαρμόζεται σε όλους τους πυρήνες με μαζικό αριθμό $A \geq 40$. Σε γενικές γραμμές καταφέραμε να υπολογίσουμε σωστά και χωρίς παραμέτρους τον κρίσιμο πυρήνα μεταξύ επιμηκυμένου και πεπλατυσμένου σχήματος, την παραμόρφωση του πυρήνα, τις ηλεκτρικές τετραπολικές μεταπτώσεις και να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο της συνύπαρξης σχημάτων. Φυσικά υπάρχουν πολλά ακόμη που μπορούν να γίνουν.

Θα αναλύσουμε ένα-ένα τα βήματα και θα σχολιάσω επί αυτών:

1. Πρώτα λαμβάνουμε τα τροχιακά $Nilsson K[Nn_z\Lambda]$ που εμπεριέχονται στους μαγικούς αριθμούς και διαχωρίζουμε αυτά, που έχουν διαφορετικό πλήθος κβάντων 3Δ απλού αρμονικού ταλαντωτή, από το κυρίως μέρος των τροχιακών. Αντικαθιστούμε αυτά τα απόδημα τροχιακά πλην ενός (αυτού με την μεγαλύτερη τιμή της προβολής της στροφορμής) με τα παρεμφερή $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$ αδελφάκια τους. Η αντικατάσταση αυτή στοχεύει στο να ανασυστήσουμε την $U(n)$ συμμετρία, που χάθηκε εξαιτίας της αλληλεπιδράσεως $l \cdot s$ [17],[16], [12].
2. Η κάθε $U(n)$ συμμετρία έχει $SU(3)$ υποάλγεβρα με κβαντικούς αριθμούς (λ, μ) . Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτές τις αναπαραστάσεις μέσω του κώδικα [18]. Ο κώδικας υπολογίζει τις κύριες και όλες τις δευτερεύουσες αναπαραστάσεις και μπορεί κανείς να τις βρει στην Μεταπτυχιακή εργασία του Ιωάννη Ασημάκη. Εδώ θα ήθελα να τονίσω ότι λόγω της αντικαταστάσεως των τροχιακών, ο κώδικας υπολογίζει πάντα μεγαλύτερη παραμόρφωση από την υπάρχουσα για λίγα σωματίδια σθένους. Το πρόβλημα αυτό εκδηλώθηκε στις $B(E2)s$ στην αρχή του φλοιού, όπου

οι θεωρητικές προβλέψεις απέχουν από τις πειραματικές.

3. Εν συνεχεία ήρθε η σύνδεση του Προτύπου του *Elliott* [14], [34], [35], [36] με αυτό του *Nilsson* [13]. Αρχικά πίστευα ότι είναι εντελώς διαφορετικά, αλλά μετά κατάλαβα ότι είναι το ίδιο πρόβλημα. Είναι ένα σωματίδιο σε 3Δ απλό αρμονικό ταλαντωτή. Η διαφορά μεταξύ των δύο είναι πως στο *Nilsson* είναι κυλινδρικός ο ταλαντωτής και συνοπολογίζει την $l \cdot s$ αλληλεπίδραση, ενώ στο *Elliott* είναι ισοτροπικός και δεν βάζει $l \cdot s$ όρους. Όμως η γενική δομή του χωρικού μέρους της Χαμιλτονιανής είναι ίδια. Το σημαντικό βήμα που έκανε ο *Elliott* είναι, πως από τους γεννήτορες του ταλαντωτή δημιούργησε την συλλογική τετραπολική ροπή και την στροφορμή του πυρήνα. Αυτοί οι δύο τελεστές θα είναι και τα βασικά συστατικά της συλλογικής Χαμιλτονιανής. Το δυναμικό του ενός 3Δ απλού αρμονικού ταλαντωτή προβλέπει μόνο τετραπολική παραμόρφωση. Αν κανείς θέλει να εργαστεί σε οκταπολικώς παραμορφωμένους πυρήνες, θα πρέπει να ξεκινήσει από ένα δυναμικό ταλαντωτή με δύο ελάχιστα και να χτίσει όλη την θεωρία εξ' αρχής.

4. Μετά υπολογίσαμε την παραμόρφωση του πυρήνα [22], [37]. Για να το κάνουμε αυτό έπρεπε αρχικά να εκλέξουμε ποια (λ, μ) θα θεωρούμε σημαντικότερα. Η ομάδα της *Pseudo SU(3)* εξέλεξε αυτά που έδιναν την μεγαλύτερη τιμή του τελεστή *Casimir* C_2 . Δηλαδή τοποθέτησαν τα σωματίδια σε τροχιακά με τέτοια σειρά, ώστε η τετραπολική αλληλεπίδραση να λαμβάνει την μέγιστη τιμή της. Ο Καθ. Δ. Μπονάτσος όμως διάλεξε αυτά, που έχουν τον μεγαλύτερο συντελεστή βαρύτητας [20]. Η εκλογή αυτή, στους πυρήνες με μεγάλη παραμόρφωση, ισοδυναμεί με το να τοποθετείς τα σωματίδια σε τροχιακά αυξανόμενης ενέργειας, το οποίο είναι απόλυτα θεμιτό και λογικό για την θεμελιώδη αναπαράσταση. Ήταν επιπλέον πολύ επιτυχημένη αυτή η εκλογή, διότι έτσι προβλέψαμε χωρίς παραμέτρους τον κρίσιμο πυρήνα μεταξύ του επιμηκυμένου και πεπλατυσμένου σχήματος. Αυτή ήταν η πρώτη απόδειξη ότι το πρότυπο έχει προβλεπτική ισχύ. Για να υπολογίσουμε την παραμόρφωση β , γ χρησιμοποιήσαμε την σύνδεση της *SU(3)* με τον συμπαγή περιστροφέα [38]. Αυτή η συσχέτιση είναι καλή για το γενικό σχήμα του πυρήνα και για χαμηλές τιμές της στροφορμής. Δημοσιεύσαμε τους υπολογισμούς μας για αρκετούς παραμορφωμένους πυρήνες [22]. Οι προβλέψεις είναι ικανοποιητικές και για σφαιρικούς πυρήνες στο κλείσιμο του φλοιού, ενώ στην αρχή έχουμε αποκλίσεις.

5. Σειρά είχαν οι $B(E2)s$. Για τον υπολογισμό τους χρησιμοποιήσαμε τον μαζικό τετραπολικό τελεστή, αντί του ηλεκτρικού. Τα αποτελέσματα ήταν δίχως παραμέτρους, δίχως ενεργά φορτία, εντός των πειραματικών τιμών για όλους τους πυρήνες από την μέση έως το τέλος του κάθε φλοιού. Στην αρχή του φλοιού επαναλαμβάνω ότι οι αποκλίσεις ευθύνονται στην μεγαλύτερη παραμόρφωση της θεωρίας μας, εν συγκρίσει με την πειραματική.

6. Το τελευταίο μέρος αυτής της Διατριβής ήρθε αιφνιδίως και ήταν η ερμηνεία της συνυπάρξεως σχημάτων. Εδώ χρησιμοποιήσαμε τους μαγικούς αριθμούς της *Proxy* και του 3Δ απλού αρμανικού ταλαντωτή, για να εξάγουμε τις αναπαραστάσεις της $SU(3)$. Διαβάζοντας κανείς τις αντίστοιχες παραγράφους θα διαπιστώσει ότι είμαστε σε θέση να προβλέψουμε ακριβώς σε ποίο αριθμό πρωτονίων και νετρονίων (Πίνακας 4.15) εμφανίζεται το φαινόμενο για πυρήνες με $A \geq 40$, αλλά και το είδος της συνυπάρξεως.

Πολλά ακόμη μπορούν να γίνουν με χρήση της *Proxy* $SU(3)$. Μπορεί κανείς να επεκταθεί σε περιττούς πυρήνες, με κάποιον λεπτό χειρισμό όσον αφορά στο θέμα της ομοτιμίας. Μπορεί επίσης να συνδέσει την *Proxy* με τα τροχιακά *Nilsson* για μικρότερες τιμές της παραμορφώσεως ή και να επεκταθεί σε υπερβαρείς πυρήνες. Είναι εφικτός και ο υπολογισμός των $B(M1)s$ και των γυρομαγνητικών λόγων.

Μπορούμε να εξάγουμε τα ενεργειακά φάσματα. Εκεί θα πρέπει να διαχειριστούμε ότι η ροπή αδρανείας αυξάνει με την αύξηση της στροφορμής. Κλειδί σε αυτό το ζήτημα θεωρώ, πως θα είναι ο υπολογισμός των τετραπολικών ροπών. Οι ροπές δείχνουν το σχήμα ανά στροφορμή και έτσι βάσει αυτών θα διαμορφώσουμε και την ροπή αδρανείας δυναμικά, και όχι στατικά. Τα περισσότερα θεωρητικά πρότυπα δυσκολεύονται να εξάγουν σωστά φάσματα για μεγάλες τιμές της στροφορμής, διότι προσαρμόζουν τις σταθερές της Χαμιλτονιανής τους σε μικρή στροφορμή. Οι σταθερές αυτές μένουν στατικές στις μεγάλες στροφορμές, όπου πλέον ο πυρήνας έχει αλλάξει σχήμα. Ο πυρήνας δεν είναι συμπαγής στερεός περιστροφέας. Είναι ρευστός και αλλάζει το σχήμα του με την αύξηση της στροφορμής. Άρα οι σταθερές στην Χαμιλτονιανή θα πρέπει να είναι εξελισσόμενες και να ακολουθούν τις αλλαγές του σχήματος. Θεωρώ ότι η απόλυτη τιμή της τετραπολικής ροπής μπορεί να παίζει τον ρόλο της δυναμικής σταθεράς.

Επιπλέον οι ροπές είναι το μέγεθος κλειδί για την συνύπαρξη σχημάτων εφόσον είναι σωστά πειραματικά μετρημένες. Αν υπάρχει συνύπαρξη τότε υπάρχουν $B(E0)s$, αλλά δυστυχώς όχι το αντίστροφο. Άρα το πλέον αξιόπιστο μέγεθος είναι οι τιμές Q , των οποίων το πρόσημο δείχνει αν ο πυρήνας είναι επιμηκυμένος ή πεπλατυσμένος, ενώ η απόλυτη τιμή τους είναι ανάλογη των παραμορφώσεων β των πυρήνων, που είναι ήδη υπολογισμένες και έτσι μπορούμε να έχουμε ευθεία σύγκριση.

Κλείνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή μου Δ. Μπονάτσο για την υπομονή, που είχε απεναντί μου και για τον δρόμο στον οποίο με έβαλε.

Βιβλιογραφία

- [1] R.F. Casten, *Nuclear Structure from a Simple Perspective*, (Oxford University Press Inc., New York, 1990).
- [2] W.N. Cottingham and D. A. Greenwood, *Εισαγωγή στην Πυρηνική Φυσική*, (τυπωθήτω-Γιώργος Δάρδανος, Αθήνα 1995).
- [3] O. Sorlin, M.G. Porquet, *Nuclear Magic Numbers: new features far from stability*, arXiv:0805.2561, (2008).
- [4] R. G. Casten Lectures at Riken, January 2010.
- [5] Wikipedia: Spheroid.
- [6] W. Greiner, J. A. Maruhn, *Nuclear Models*, (Springer, Berlin and Heidelberg, 1996).
- [7] Robert Littlejohn, Lecture notes on Quantum Mechanics, University of Berkeley, (2010).
- [8] R. F. Casten, P. O. Lipas, D. D. Warner, T. Otsuka, K. Heyde, J. P. Draayer, *Algebraic Approaches to Nuclear Structure*, (Harwood Academic Publishers, 1993).
- [9] http://mathinsight.org/determinant_linear_transformation.
- [10] J. P. Draayer and Yoshimi Akiyama, *J. of Math. Phys., Vol 14, No 12*, (1973).
- [11] S. G. Nilsson, I. Ragnarsson, *Shapes and shells in nuclear structure*, (Cambridge University Press, 1995.)

- [12] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, S. K. Peroulis, S. Sarantopoulou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, *Bulg. J. Phys. (2017) in press. Proceedings of the Workshop on “Shapes and Dynamics of Atomic Nuclei: Contemporary Aspects” (SDANCA17, Sofia 2017)*, ed. N. Minkov
- [13] Dennis Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, Andriana Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten and K. Blaum, *Physical Review C* 95, 064325, (2017).
- [14] Harry J. Lipkin, *Lie groups for pedestrians*, (Dover Publications, 2002).
- [15] Dennis Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, Andriana Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum *Phys. Rev. C* 95, 064325, (2017).
- [16] I. E. Assimakis, D. Bonatsos, N. Minkov, A. Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, *Bulg. J. Phys. (2017) in press. Proceedings of the Workshop on “Shapes and Dynamics of Atomic Nuclei: Contemporary Aspects” (SDANCA17, Sofia 2017)*, ed. N. Minkov.
- [17] D. Bonatsos, S. Karampagia, R. B. Cakirli, R. F. Casten, K. Blaum and Amon Susam, *Phys. Rev. C* 88, 054309, (2013).
- [18] J. P. Draayer, Y. Lescheber, S. C. Park and R. Lopez, *Computer Physics Communications* 56, 279-290, (1989).
- [19] P. Van Isacker, D. D. Warner and D. S. Brenner, *Physical review Letters* Vol. 74, No 23, (June 1995).
- [20] S. Sarantopoulou, D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, *Bulg. J. Phys. (2017) in press. Proceedings of the Workshop on “Shapes and Dynamics of Atomic Nuclei: Contemporary Aspects” (SDANCA17, Sofia 2017)*, ed. N. Minkov

- [21] J. P. Draayer, K.J. Weeks and K. T. Hecht, *Nuclear Physics A381*, 1-12 (1982).
- [22] Dennis Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, Andriana Martinou, S. Sarantopoulou, R. B. Cakirli, R. F. Casten and K. Blaum, *Physical Review C 95*, 064326, (2017).
- [23] A. M. Hurst et al., *Phys. Rev. Lett. 98*, 072501, (2007).
- [24] F. Flavigny et al., *PRL 118*, 242501, (2017).
- [25] J.L. Wood, K. Heyde, W. Nazarewicz, M.Huse and P. Van Duppen, *Physics Reports 215*, Nos 3 & 4, 101-201, (1992).
- [26] Kris Heyde, John L. Wood, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 83, (October December 2011).
- [27] Brookhaven National Laboratory ENSDF database, <http://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>
- [28] N. Bree et al. *Phys. Rev. Lett. 112*, 162701, (April 2014).
- [29] J.M. Yao, Z.X. Li, J. Xiang, H. Mei, *arXiv: 1010.4372v1*, (2010).
- [30] T.J. Mertzimekis, K. Stamou, A. Psaltis, *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A 807*, 56 (2016).
- [31] E. Clément et al., *Phys. Rev. C 75*, 054313, (2017).
- [32] J.P. Draayer and K. J. Weeks, *Annals of Physics*, 156, 41-67, (1984).
- [33] C. Bahri, D. J. Rowe, J. P. Draayer, *Computer Physics Communications 159*, 121-143, (2004).
- [34] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc. Ser. A 245*, 128, (1958).
- [35] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc. Ser. A 245*, 562, (1958).
- [36] J. P. Elliott and M. Harvey, *Proc. Roy. Soc. Ser. A 272*, 557, (1963).

- [37] A. Martinou, D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, S. Sarantopoulou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, *Bulg. J. Phys.* (2017) *in press*. *Proceedings of the Workshop on "Shapes and Dynamics of Atomic Nuclei: Contemporary Aspects" (SDANCA17, Sofia 2017)*, ed. N. Minkov
- [38] O. Castaños, J. P. Draayer and Y. Leschber, *Z. Phys. A - Atomic Nuclei* 329, 33-43, (1988).