Θεωρία Choquet
και
Χαρακτηρισμοί Διατεταγμένων Χώρων

Νίκος Σταμάτης

Επιβλέπων Καθηγητής: Ι. Πολυράκης

16 Ιουνίου 2011

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Ιωάννη Πολυράκη, όχι μόνο για το χρόνο που αφιέρωσε σε αυτή τη διπλωματική, τη συνεχή επαφή που είχε μαζί μου καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησής της και την πολύτιμη καθοδήγησή του, αλλά και για όλη την έμπρακτη στήριξη που μου παρείχε τα τελευταία δύο χρόνια των σπουδών μου. Επίσης, τον διδακτορικό φοιτητή Φοίβο Ξανθό, για το ενδιαφέρον που έδειξε και τις συμβουλές του που διαμόρφωσαν και αυτές το τελικό κείμενο της εργασίας. Τέλος, και πάνω από όλα, τους ανθρώπους που μου έδωσαν τα εφόδια για να σπουδάσω, τους γονείς μου, Αμαλία και Κώστα.

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής είναι η παρουσίαση του Θεωρήματος Choquet-Kendall. Αν (X, P) διατεταγμένος χώρος και B βάση του generating κώνου P, τότε το Θεώρημα Choquet-Kendall διαβεβαιώνει ότι ο (X, P) είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν το B είναι simplex, συνδέει δηλαδή τη lattice δομή ενός διατεταγμένου χώρου με γεωμετρικές ιδιότητες της βάσης του. Επίσης αποδεικνύουμε δύο ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του θεωρήματος αυτού μέσω ολοκληρωτικής αναπαράστασης, κάνοντας κάποιες επιπλέον υποθέσεις για τη βάση B. Συγκεκριμένα, ο πρώτος ισοδύναμος χαρακτηρισμός λέει ότι αν (X, P) τοπικά κυρτός διατεταγμένος χώρος και B συμπαγής και μετρικοποιήσιμη βάση του generating κώνου P, τότε ο (X, P) είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν για κάθε σημείο x της βάσης B υπάρχει μοναδικό Radon μέτρο πιθανότητας που αναπαριστά το x και το οποίο φέρεται στο σύνολο $extB$, ενω ο δεύτερος ότι αν (X, P) τοπικά κυρτός διατεταγμένος χώρος και B συμπαγής βάση του generating κώνου P, τότε ο (X, P) είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν για κάθε σημείο της βάσης B υπάρχει μοναδικό συνοριακό μέτρο πιθανότητας που το αναπαριστά. Παράλληλα παρουσιάζουμε ένα πλήθος εννοιών της Θεωρίας Choquet με ιδιαίτερη έμφαση στη διάταξη Choquet και τα μεγιστικά και συνοριακά μέτρα.

Abstract

The subject of this thesis is to present the Choquet-Kendall theorem. Let (X, P) be an ordered space and B a base of the generating cone P. The Choquet-Kendall theorem states that (X, P) is a lattice if and only if B is a simplex. We also formulate and prove two characterizations of the theorem in question using integral representation theory and a few more assumptions concerning the base B. The first one states that if (X, P) is a locally convex ordered space and B a compact and metrizable base of the generating cone P, then (X, P) is a vector lattice if and only if for each $x \in B$ there exists a unique Radon probability measure μ which represents x and is carried by the set of extreme points of B. The second one states that if (X, P) is a locally convex ordered space and B a compact base of the generating cone P, then (X, P) is a vector lattice if and only if for each $x \in X$ there exists a unique boundary measure on B which represents x. We also present numerous notions of the Choquet theory with special attention to the Choquet ordering and the notions of maximal and boundary measures.

Πίνακας Συμβόλων

$\mathcal{A}^c(X)$	το σύνολο των αφφινικών συνεχών συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{R}$
$\mathcal{A}^c(X; E)$	το σύνολο των περιορισμών των αφφινικών συνεχών συναρτήσεων του E στο $X \subseteq E$
ϵ_x	το μέτρο Dirac στο σημείο x
$extX$	τα ακραία σημεία του συνόλου X
$\hat{f}$	ο άνω φάκελος της συνάρτησης f
$\check{f}$	ο κάτω φάκελος της συνάρτησης f
F_x	η έδρα που παράγεται από το σημείο x
$\mathcal{K}^c(X)$	το σύνολο των συνεχών κυρτών συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{R}$
$\mathcal{M}(X)$	ο χώρος των προσημασμένων μέτρων Radon του συνόλου X
$\mathcal{M}^+(X)$	ο χώρος των θετικών μέτρων Radon του συνόλου X
$\mathcal{M}^1(X)$	ο χώρος των Radon μέτρων πιθανότητας του συνόλου X
$\mathcal{M}_{bnd}(X)$	ο χώρος των συνοριακών προσημασμένων μέτρων Radon του συνόλου X
$\mathcal{M}^+_{bnd}(X)$	ο χώρος των συνοριακών θετικών μέτρων Radon του συνόλου X
$\mathcal{M}^1_{bnd}(X)$	ο χώρος των συνοριακών Radon μέτρων πιθανότητας του συνόλου X
$\mathcal{N}(X)$	ο χώρος των γενικευμένων αφφινικών εξαρτήσεων του συνόλου X
$r(\mu)$	το βαρύκεντρο του μέτρου μ
$spt(\mu)$	ο φορέας του μέτρου μ
$S(X, P, e)$	το σύνολο των καταστάσεων του διατεταγμένου χώρου με μονάδα (X, P, e)

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής αποτελούν δύο βασικά, και φαινομενικά άσχετα μεταξύ τους, ερωτήματα:

Ερώτημα 1: Έστω E τοπικά κυρτός χώρος, $X \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό, $x \in X$ και μ μέτρο πιθανότητας στο X. Το μ αναπαριστά το σημείο x αν

$$f(x) = \int_X f d\mu, \ \forall f \in E^*.$$

Ισχύει ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μέτρο πιθανότητας του X που αναπαριστά το x και το οποίο να φέρεται στο $extX$;

Ερώτημα 2: Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος, $P - P = X$ και B βάση του P. Να διατυπωθούν συνθήκες για το B οι οποίες θα είναι ικανές και αναγκαίες για να καθιστούν τον (X, P) γραμμικό σύνδεσμο.

Το κεφάλαιο 2 είναι αφιερωμένο εξ' ολοκλήρου σε εισαγωγικές έννοιες ανάλυσης, θεωρίας μέτρου, τοπολογίας και διατεταγμένων χώρων.

Στις παραγράφους 3.1 και 3.2 διατυπώνονται οι θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας Choquet, η οποία προσπαθεί να δώσει απάντηση στο Ερώτημα 1. Δείχνουμε ότι κάθε μέτρο έχει μοναδικό βαρύκεντρο και αντίστροφα, ότι κάθε σημείο αποτελεί το βαρύκεντρο κάποιου μέτρου που φέρεται στο $\overline{extX}$. Θα χρειαστεί να κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι το σύνολο X είναι μετρικοποιήσιμο για να δώσουμε καταφατική απάντηση στο Ερώτημα 1. Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται στην υποπαράγραφο 4.3.2. Επίσης, αποδεικνύουμε το Θεώρημα Bauer, σύμφωναμε το οποίο τα ακραία σημεία του X είναι ακριβώς αυτά για τα οποία το μοναδικό μέτρο που τα αναπαριστά είναι το μέτρο Dirac.

Στην παράγραφο 3.3 ορίζουμε την έννοια των εκτεθειμένων σημείων και αναφέρουμε κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με αυτά. Στην παράγραφο 3.4 εξετάζουμε την ακραία δομή, με έμφαση στα μετρικά κυρτά σύνολα, δηλαδή σύνολα για τα οποία το βαρύκεντρο κάθε μέτρου το οποίο φέρουν εξακολουθεί να ανήκει σε αυτά.

Στην παράγραφο 3.5 ορίζουμε τη διάταξη Choquet, ένα από τα βασικά εργαλεία της ολοκληρωτικής αναπαράστασης. Η διάταξη Choquet, ελέγχει το πόσο μακριά από το βαρύκεντρο και πόσο κοντά στο σύνορο ενός συνόλου είναι συγκεντρωμένη η μάζα ενός μέτρου. Μέτρα που είναι συγκεντρωμένα κοντά στο σύνορο ονομάζονται συνοριακά μέτρα και μελετώνται στην παράγραφο 3.6. Αποδεικνύουμε ότι αν το X είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου, τότε για κάθε σημείο του υπάρχει συνοριακό μέτρο πιθανότητας στο X που το αναπαριστά.

Στις παραγράφους 4.1 και 4.2 δίνουμε μια απάντηση στο Ερώτημα 2, διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας το θεώρημα Choquet-Kendall: Ο (X, P) είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν η B είναι simplex.

Στην παράγραφο 4.3 εξετάζουμε πώς συνδέονται μεταξύ τους τα Ερωτήματα 1 και 2. Μέχρι το σημείο αυτό, στο Ερώτημα 1, μας είχε απασχολήσει μονάχα το ζήτημα της ύπαρξης ενός μέτρου με τις ζητούμενες ιδιότητες. Διαπιστώνουμε ότι στην περίπτωση που το μέτρο είναι επιπλέον μοναδικό, λαμβάνουμε έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό για το Ερώτημα 2.

Στην υποπαράγραφο 4.3.1 αποδεικνύουμε ότι αν η B είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμη, τότε ο (X, P) είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν για κάθε σημείο του B υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας που το αναπαριστά και το οποίο φέρεται στο σύνολο $extB$. Στην υποπαράγραφο 4.3.2 αφαιρούμε την υπόθεση της μετρικοποιησιμότητας και αποδεικνύουμε ότι ο (X, P) είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν για κάθε σημείο του B υπάρχει μοναδικό συνοριακό μέτρο πιθανότητας που το αναπαριστά. Κλείνουμε την εργασία με την παράγραφο 4.3.3, εξασθενώντας την υπόθεση περί συμπάγειας του B και αναφέροντας κάποιους γνωστούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς στην περίπτωση αυτή.

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες

2.1 Κυρτή Ανάλυση

Ορισμός 2.1.1. *Έστω Y διανυσματικός χώρος και $X \subseteq Y$. Το X ονομάζεται κυρτό αν για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$ το $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ ανήκει στο X.*

Ορισμός 2.1.2. *Έστω Y διανυσματικός χώρος και $X \subseteq Y$ κυρτό. Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **αφφινική** αν για κάθε x, y στο X και για κάθε $\lambda \in [0,1]$, ισχύει:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{2.1.1}$$

Θα συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\mathcal{A}^c(X)}$ το σύνολο των αφφινικών, συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο X.

*Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **κυρτή** αν για κάθε x, y στο X και για κάθε $\lambda \in [0,1]$, ισχύει:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{2.1.2}$$

Θα συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\mathcal{K}^c(X)}$ το σύνολο των κυρών, συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο X.

Ορισμός 2.1.3. *Έστω X κυρτό σύνολο. Ένα σημείο $x \in X$ ονομάζεται **ακραίο σημείο** του X αν για κάθε y, $z \in X$ με $\lambda y + (1-\lambda)z = x$ για κάποιο $\lambda \in (0,1)$, έπεται ότι $y = z = x$. Θα συμβολίζουμε με $\boldsymbol{extX}$ το σύνολο των ακραίων σημείων του συνόλου X. Ένα υποσύνολο του $F \subseteq X$, ονομάζεται **ακραίο** αν για κάθε x, $y \in X$ με $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$ για κάποιο $\lambda \in (0,1)$, έπεται ότι $x, y \in F$.*

*Αν το K είναι κυρτό και ακραίο υποσύνολο του X, τότε ονομάζεται **έδρα** (face) του X.*

*Αν $K \subseteq X$, τότε ορίζουμε ως **έδρα που παράγεται από το $\boldsymbol{K}$**, τη μικρότερη έδρα του X που περιέχει το K:*

$$faceK = \cap\{G : K \subseteq G \subseteq X, \text{ και το } G \text{ έδρα του } X\}.$$

Η παραπάνω οικογένεια είναι μη κενή αφού το ίδιο το X είναι κυρτό και ακραίο υποσύνολο του εαυτού του, άρα και έδρα. Επιπλέον, είναι εύκολο να δειχθεί ότι αυθαίρετες τομές κυρτών και ακραίων υποσυνόλων του X είναι επίσης κυρτά και ακραία υποσύνολα του X, επομένως το $faceK$ είναι καλά ορισμένο.

Στην περίπτωση που το K είναι μονοσύνολο, θα συμβολίζουμε το $face\{x\}$ με F_x.

Ορισμός 2.1.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος και συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$. Η f ονομάζεται **άνω ημισυνεχής** αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) < a\}$ είναι ανοικτό. Η f ονομάζεται **κάτω ημισυνεχής** αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) > a\}$ είναι ανοικτό. Θα συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\mathcal{K}^{lsc}(X)}$ (αντ. $\boldsymbol{\mathcal{K}^{usc}(X)}$) το σύνολο των κυρτών και κάτω (αντ. άνω) ημισυνεχών συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{R}$.*

2.2 Τοπολογία

Ορισμός 2.2.1. *Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{T}$ οικογένεια υποσυνόλων του. Η $\mathcal{T}$ θα καλείται **τοπολογία** αν το X και το $\emptyset$ ανήκουν στην $\mathcal{T}$ και επιπλέον η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και τις αυθαίρετες ενώσεις. Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται **τοπολογικός χώρος**.*

Ορισμός 2.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Λέμε ότι ο X είναι:*

(i) *T_0, αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτό, τέτοιο ώστε $x \in U$ και $y \notin U$ ή $y \in U$ και $x \notin U$.*

(ii) *T_1, αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν $U_1, U_2 \subseteq X$ ανοικτά, τέτοια ώστε $x \in U_1$, $x \notin U_2$, $y \in U_2$ και $y \notin U_1$.*

(iii) *T_2, αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν $U_1, U_2 \subseteq X$ ανοικτά και ξένα, τέτοια ώστε $x \in U_1$ και $y \in U_2$.*

(iv) *T_3, αν είναι T_2 και επιπλέον για κάθε $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$, υπάρχουν $U_1, U_2 \subseteq X$ ανοικτά και ξένα, με $x \in U_1$ και $F \subseteq U_2$.*

(v) *T_4, αν είναι T_2 και επιπλέον για κάθε $F_1, F_2 \subseteq X$ κλειστά και ξένα, υπάρχουν $U_1, U_2 \subseteq X$ ανοικτά και ξένα, με $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$.*

Ορισμός 2.2.3. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{L})$ τοπολογικοί χώροι. Μια συνεχής και ένα προς ένα απεικόνιση από το X στο Y ονομάζεται **ομομορφισμός**.*

Λήμμα 2.2.4. ***(Urysohn)*** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο X είναι T_4,*

(ii) *για κάθε $A, B \subseteq X$ κλειστά και ξένα, υπάρχει $f : X \to [0, 1]$ συνεχής με $f(x) = 0$, για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$, για κάθε $x \in B$.*

Ορισμός 2.2.5. *Έστω X τοπολογικός χώρος.*

(i) *Ο X ονομάζεται **Polish**, αν είναι ομοιομορφικός με ένα διαχωρίσιμο πλήρη μετρικό χώρο.*

(ii) *Ο X ονομάζεται* ***Lusin****, αν υπάρχει Polish χώρος Y και $T : Y \to X$ συνεχής, ένα προς ένα και επί.*

(iii) *Ο X ονομάζεται* ***Suslin*** *αν υπάρχει Polish χώρος Y και $T : Y \to X$ συνεχής και επί.*

Ορισμός 2.2.6. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $\mathcal{T}$ τοπολογία στον X. Ο $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται* ***τοπολογικός γραμμικός χώρος*** *αν οι συναρτήσεις της πρόσθεσης*

$$(x, y) \to x + y$$

και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$$(\lambda, x) \to \lambda x,$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις από το $X \times X$ στο X και από το $\mathbb{R} \times X$ στο X αντίστοιχα.

Ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος ονομάζεται ***τοπικά κυρτός*** *αν υπάρχει βάση περιοχών του μηδενός που αποτελείται από κυρτά σύνολα.*

Πρόταση 2.2.7. *Έστω X τοπικά κυρτός, τοπολογικός γραμμικός χώρος. Τότε ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X, δηλαδή για κάθε x, $y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq f(y)$.*

Απόδειξη. Έστω x, $y \in X$ με $x \neq y$. Τότε ο $\{0\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του X με $x - y \notin \{0\}$. Από Θεώρημα Hahn - Banach υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $\{0\} \subseteq ker(f)$ και $f(x - y) = 1$. Άρα $f(x) = 1 + f(y)$ και συνεπώς $f(x) \neq f(y)$. □

Παρατήρηση 2.2.8. *Αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός γραμμικός χώρος και $x \in X$, τότε κάθε περιοχή V_x του x γράφεται στη μορφή $V_x = x + U$, όπου U περιοχή του μηδενός.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του ότι η απεικόνιση f, με $f(y) = x + y$, για κάθε $y \in X$ είναι ομομορφισμός. □

Παρατήρηση 2.2.9. *Αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός γραμμικός χώρος και V περιοχή του μηδενός, τότε το V ειναι απορροφητικό σύνολο, δηλαδή για κάθε $x \in X$, υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda x \in V$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Η απεικόνιση $f(\lambda, x) = \lambda x$ είναι συνεχής. Θεωρούμε την ακολουθία $\left(\frac{1}{n}, x\right)$ η οποία συγκλίνει στο $(0, x)$. Λόγω συνέχειας θα πρέπει $f\left(\frac{1}{n}, x\right) \to f(0, x) = 0 \cdot x = 0$. Άρα $\frac{1}{n}x \to 0$ και υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n}x \in V$, για κάθε $n \geqslant n_0$. Θέτουμε $\lambda = \frac{1}{n_0}$ και έχουμε ότι $\lambda x \in V$. □

Θεώρημα 2.2.10. ***(Krein-Milman)*** *Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος και $\emptyset \neq K \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό. Τότε $K = \overline{co}extX$.*

Πρόταση 2.2.11. *Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος, Y T_2 τοπολογικός χώρος και $T : X \to Y$ συνεχής, ένα προς ένα και επί. Τότε η T αμφισυνεχής και συνεπώς η T ομομορφισμός.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η T είναι ανοικτή απεικόνιση, ή ισοδύναμα ότι για κάθε $F \subseteq X$ κλειστό τότε και το $T(F) \subseteq Y$ είναι επίσης κλειστό. Πράγματι το F κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου, άρα συμπαγές, η T συνεχής, επομένως το $T(F)$ συμπαγές υποσύνολο του Y. Όμως ο Y είναι T_2 και τα συμπαγή υποσύνολα χώρων Hausdorff είναι κλειστά. □

2.3 Θεωρία Μέτρου

Ορισμός 2.3.1. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ **μη κενή** κλάση υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ ονομάζεται **άλγεβρα** υποσυνόλων του X αν είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις και τα συμπληρώματα, δηλαδή για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$,*

$$\begin{aligned} A \cup B &\in \mathcal{A} \quad \textit{και} \\ A^c &\in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

*Αν επιπλέον η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, τότε ονομάζεται **σ-άλγεβρα.***

Ορισμός 2.3.2. *Έστω σύνολο X και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X. Ονομάζουμε **μέτρο** μ μια απεικόνιση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ για την οποία ισχύουν:*

(α') $\mu(\emptyset) = 0$,

*(β') για κάθε ακολουθία ξένων στοιχείων $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$, ισχύει ότι $\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$, δηλαδή η μ είναι **σ-αθροιστική**.*

*Το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος**, ενώ η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$, **χώρος μέτρου**, τα δε στοιχεία της $\mathcal{A}$ **μετρήσιμα σύνολα**. Αν το σύνολο τιμών της μ είναι ολόκληρο το $\overline{\mathbb{R}}$, τότε το μέτρο μ ονομάζεται **προσημασμένο μέτρο**. Κάθε προσημασμένο μέτρο μ μπορεί να γραφεί σαν διαφορά $\mu = \mu^+ - \mu^-$, όπου τα μ^+ και μ^- είναι θετικά πεπερασμένα μέτρα.*

*Αν μ προσημασμένο μέτρο, ορίζουμε ως **κύμανση** του μ, το μέτρο $|\mu|$ για το οποίο:*

$$|\mu|(A) = \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n = A \Big\}.$$

Για κάθε $A \in \mathcal{A}$, ισχύει ότι $|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$.

Ορισμός 2.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.*

*(α') Αν $\mu(X) < \infty$, τότε το μ λέγεται **πεπερασμένο μέτρο**.*

*(β') Αν $\mu(X) = 1$, τότε το μ λέγεται **μέτρο πιθανότητας**.*

*(γ') Αν υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε το μ λέγεται **σ-πεπερασμένο μέτρο**.*

Ορισμός 2.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **μετρήσιμη**, αν για κάθε $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι μετρήσιμο, δηλαδή $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.*

Ορισμός 2.3.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \in \mathcal{A}$. Λέμε ότι το μέτρο μ **φέρεται** από το σύνολο A, αν $\mu(A^c) = 0$.*

Ορισμός 2.3.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $Y \subseteq X$. Τότε η κλάση:*

$$\mathcal{A}_{|Y} = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\},$$

*είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Y. Η $\mathcal{A}_{|Y}$ θα ονομάζεται ο **περιορισμός** της σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$ στο σύνολο Y. Αν επιπλέον $Y \in \mathcal{A}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο $\mu_{|Y} : \mathcal{A}_{|Y} \to [0, +\infty]$ με*

$$\mu_{|Y}(A \cap Y) = \mu(A).$$

*Το μέτρο $\mu_{|Y}$ ονομάζεται ο **περιορισμός** του μέτρου μ στο Y.*

Ορισμός 2.3.7. *Ο χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται **πλήρης** αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ έπεται ότι κάθε $N \subseteq A$ ανήκει και αυτό στην $\mathcal{A}$ και συνεπώς $\mu(N) = 0$.*

Θεώρημα 2.3.8. ***(Ανάλυσης του Jordan)*** *Κάθε προσημασμένο μέτρο μ γράφεται ως διαφορά δύο θετικών πεπερασμένων μέτρων $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Επιπλέον τα μ_1 και μ_2 δίνονται από τις:*

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &= \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, B \in \mathcal{A}\}, \\ \mu_2(A) &= \sup\{-\mu(B) : B \subseteq A, B \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

Ορισμός 2.3.9. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\nu : \mathcal{A} \to (-\infty, \infty]$ σ-αθροιστική απεικόνιση. Αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ έπεται ότι $\nu(A) = 0$, τότε λέμε ότι η ν είναι **ομοιόμορφα συνεχής ως προς το μέτρο μ** και το συμβολίζουμε ως $\nu \ll \mu$.*

Θεώρημα 2.3.10. ***(Radon-Nikodym)*** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ σ-αθροιστική συνάρτηση. Αν $\nu \ll \mu$, τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ τέτοια ώστε $\nu(A) = \int_A f d\mu$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$.*

2.3.1 Μέτρα Radon

Ορισμός 2.3.11. *Έστω X τοπικά συμπαγής, σ-συμπαγής, $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα που περιέχει τα σύνολα Borel του X και $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-αθροιστική, τέτοια ώστε:*

(α') $\mu(K) < \infty$, για κάθε $K \subset X$ συμπαγές,

(β') $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ συμπαγές}\},\ \forall A \in \mathcal{A}$,

(γ') ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης χώρος μέτρου.

*Τότε το μ ονομάζεται μέτρο **Radon**.*

Ορισμός 2.3.12. *Αν $\boldsymbol{X}$ τοπικά συμπαγής, σ-συμπαγής, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{X})$ τον χώρο των προσημασμένων μέτρων Radon, με $\boldsymbol{\mathcal{M}}^+(\boldsymbol{X})$ τον χώρο των θετικών μέτρων Radon και με $\boldsymbol{\mathcal{M}}^1(\boldsymbol{X})$ τον χώρο των Radon μέτρων πιθανότητας.*

Πόρισμα 2.3.13. *Έστω X τοπικά συμπαγής, σ-συμπαγής και $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το μέτρο Dirac ϵ_x που ορίζεται ως εξής: Για κάθε $A \in \mathcal{A}$,*

$$\epsilon_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A \\ 0 & \text{αν } x \notin A, \end{cases}$$

είναι μέτρο Radon.

Απόδειξη.

(α')

$$\epsilon_x(K) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in K \\ 0 & \text{αν } x \notin K. \end{cases}$$

Άρα $\epsilon_x(K) < \infty$, για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές.

(β') Έστω $A \in \mathcal{A}$.

- Αν $x \in A$, τότε το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι συμπαγές με $\epsilon_x(\{x\}) = 1$, άρα:

$$\sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ συμπαγές}\} = 1 = \epsilon_x(A).$$

- Αν $x \notin A$, τότε $x \notin K$, και συνεπώς $\epsilon_x(K) = 0$, για κάθε $K \subseteq A$ συμπαγές. Επιπλέον το σύνολο $\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ συμπαγές}\}$ είναι διάφορο του κενού αφού το κενό ανήκει σε αυτό. Άρα:

$$\sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ συμπαγές}\} = 0 = \epsilon_x(A).$$

(γ') Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\epsilon_x(A) = 0$. Τότε $x \notin A$, επομένως $x \notin B$, για κάθε $B \subseteq A$ και άρα $\epsilon_x(B) = 0$, δηλαδή ο χώρος είναι πλήρης.

□

Πρόταση 2.3.14. *Αν K συμπαγής χώρος, τότε το $\mathcal{M}^1(K)$ είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{M}(K)$ και $ext\mathcal{M}^1(K) = \{\epsilon_x : x \in K\}$.*

Απόδειξη. Η μοναδιαία μπάλα $B_{\mathcal{M}(K)}$ είναι *-συμπαγής (βλ. Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz), επομένως το σύνολο

$$\mathcal{M}^1(K) = \{\mu \in B_{\mathcal{M}(K)} : \mu \geqslant 0,\ \mu(\mathbb{1}) = 1\}$$

είναι *-συμπαγές.

Αν $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathcal{M}^1(K)$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε $(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2)(K) = \lambda + (1-\lambda) = 1$. Επιπλέον το μέτρο $\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ είναι μέτρο Radon, άρα το $\mathcal{M}^1(K)$ κυρτό.

Αν $x \in K$ και $\epsilon_x = \lambda\mu + (1-\lambda)\nu$, τότε $\epsilon_x(\{x\}) = 1 = \lambda\mu(\{x\}) + (1-\lambda)\nu(\{x\})$, άρα $\mu(\{x\}) = \nu(\{x\}) = 1$ και $\mu = \nu = \epsilon_x$, δηλαδή $\epsilon_x \in ext\mathcal{M}^1(K)$. Αν $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ και το μ δεν είναι μετρο Dirac, τότε υπάρχει $x \in K$ με $0 < \mu(\{x\}) < 1$. Θέτουμε $\nu = \mu_{|\{x\}}$, $\lambda = \mu_{|K\setminus\{x\}}$. Τότε

$$\mu = \mu(\{x\})\frac{\nu}{\mu(\{x\})} + \mu(K\setminus\{x\})\frac{\lambda}{\mu(K\setminus\{x\})},$$

άρα $\mu \notin ext\mathcal{M}^1(K)$.

□

Παρατήρηση 2.3.15. *Το σύνολο των κυρτών συνδυασμών των μέτρων Dirac είναι πυκνό στον $\mathcal{M}^1(K)$.*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση το $\mathcal{M}^1(K)$ είναι συμπαγές και κυρτό, οπότε από Θεώρημα Krein - Milman μπορεί να γραφεί ως η κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του:

$$\mathcal{M}^1(K) = \overline{co}ext\mathcal{M}^1(K) = \overline{co}\{\epsilon_x : x \in K\}. \tag{2.3.1}$$

□

Ορισμός 2.3.16. *Έστω X τοπικά συμπαγής, σ-συμπαγής και $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με το μ μέτρο Radon. Τότε ορίζουμε το* ***φορέα*** *(support) του μ να είναι:*

$$spt(\mu) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \cap\{F \subseteq X : F \text{ κλειστό και } \mu(F^c) = 0\}. \tag{2.3.2}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\begin{aligned} spt(\mu) &= X\setminus \cup\{G : G \subseteq X \text{ ανοικτό, με } \mu(G) = 0\} \qquad (2.3.3)\\ &= \{x \in X : \mu(U_x) > 0,\ \text{για κάθε } U_x \in \mathcal{U}(x)\}. \qquad (2.3.4) \end{aligned}$$

Πρόταση 2.3.17. *Έστω X τοπικά συμπαγής, σ-συμπαγής και $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με το μ μέτρο Radon. Τότε το σύνολο $U = \cup\{G \subseteq X : G$ ανοικτό και $\mu(G) = 0\}$ έχει μέτρο μηδέν.*

Απόδειξη. Έστω $K \subseteq U$ συμπαγές.

$$\begin{aligned} K &\subseteq \bigcup_{\substack{G \subseteq X \\ \mu(G)=0}} G && \Rightarrow \\ K &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i && \Rightarrow \\ \mu(K) &\leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(G_i) = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subseteq U\} = 0.$ □

Πόρισμα 2.3.18. *Έστω X τοπικά συμπαγής, σ-συμπαγής και $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με το μ μέτρο Radon. Τότε $\mu(spt(\mu)) = \mu(X)$ και $\mu(spt(\mu)^c) = 0$. Άρα το μέτρο μ φέρεται από το σύνολο $spt(\mu)$.*

Πρόταση 2.3.19. *Έστω X τοπικά συμπαγής, σ-συμπαγής και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X. Έστω επίσης μ, ν μέτρα Radon στο $(X, \mathcal{A})$. Τότε $spt(\mu + \nu) = spt(\mu) \cup spt(\nu)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα:

$$\begin{aligned} A &= \{G \subseteq X : \mu(G) + \nu(G) = 0\} \\ B &= \{G \subseteq X : \mu(G) = 0\} \\ C &= \{G \subseteq X : \nu(G) = 0\}. \end{aligned}$$

Τότε $G \in A \iff G \in B \cap C$. Όμως:

$$spt(\mu + \nu) = A^c = (B \cap C)^c = B^c \cup C^c = spt(\mu) \cup spt(\nu).$$

□

Παρατήρηση 2.3.20. *Έστω X T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος. Τότε για κάθε $x \in X$ για το μέτρο Dirac ϵ_x ισχύει ότι $spt(\epsilon_x) = \{x\}$.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} z \in spt(\epsilon_x) &\iff \epsilon_x(U_z) > 0, \quad \text{για κάθε } U_z \in \mathcal{U}(z) \\ &\iff \epsilon_x(U_z) = 1, \quad \text{για κάθε } U_z \in \mathcal{U}(z) \\ &\iff x \in U_z, \qquad \text{για κάθε } U_z \in \mathcal{U}(z). \end{aligned}$$

Όμως ο χώρος είναι T_2, επομένως $z = x$ γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχαν U_x, U_z ανοικτές περιοχές των x και z αντίστοιχα, ξένες μεταξύ τους. □

Ορισμός 2.3.21. *Έστω X τοπικά συμπαγής, σ-συμπαγής χώρος και $A \subseteq X$. Το A ονομάζεται* ***καθολικά μετρήσιμο*** *(universally measurable) αν είναι μ - μετρήσιμο για κάθε Radon μέτρο μ του X.*

Αν Y τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$, η f ονομάζεται ***καθολικά μετρήσιμη απεικόνιση*** *αν το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι καθολικά μετρήσιμο υποσύνολο του X για κάθε $U \subseteq Y$ ανοικτό.*

2.3.2 Διανυσματικά μέτρα

Ορισμός 2.3.22. *Έστω $(Y, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και X χώρος Banach. Μια απεικόνιση $T : \mathcal{A} \to X$ για την οποία ισχύουν:*

(i) $T(\emptyset) = 0$,

(ii) $T\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T(A_n)$, *για κάθε ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$,

ονομάζεται ***διανυσματικό μέτρο.***

Ορισμός 2.3.23. *Έστω $(Y, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, X χώρος Banach και $T : \mathcal{A} \to X$ διανυσματικό μέτρο. Ορίζουμε ως* ***κύμανση*** *του T το μέτρο $|T|$ για το οποίο*

$$|T|(A) = \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{k} ||T(A_n)|| : \biguplus_{n=1}^{k} A_n = A \Big\}.$$

Διανυσματικά μέτρα T για τα οποία ισχύει ότι $|T|(Y) < \infty$ ονομάζονται ***μέτρα φραγμένης κύμανσης****.*

Ορισμός 2.3.24. *Έστω $(Y, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και X χώρος Banach. Μια διανυσματική συνάρτηση $g : Y \to X$ της μορφής*

$$g(s) = \sum_{i=1}^{n} b_i I_{E_i}(s),$$

όπου b_i διαφορετικά ανα δύο στοιχεία του X, E_i ανα δύο ξένα στοιχεία της $\mathcal{A}$ πεπερασμένου μέτρου και I_{E_i} η χαρακτηριστική συνάρτηση των E_i, ονομάζεται ***απλή****.*

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της απλής συνάρτησης $g(s) = \sum_{i=1}^{n} b_i I_{E_i}(s)$ ως προς μ να είναι το διάνυσμα

$$\int g(s)d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} b_i I_{E_i}(s)d\mu = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(E_i).$$

*Αν $x : Y \to X$ διανυσματική συνάρτηση τέτοια ώστε να υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων x_n με $\int ||x_n(t) - x(t)||d\mu \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ και $x_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t)$, μ-σχεδόν παντού, τότε η x ονομάζεται **Bochner ολοκληρώσιμη** και το*

$$\int x(t)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int x_n(t)d\mu,$$

***ολοκλήρωμα Bochner** της x.*

Ορισμός 2.3.25. *Έστω X χώρος Banach και $K \subseteq X$ κλειστό, κυρτό και φραγμένο σύνολο. Λέμε ότι το K έχει την **ιδιότητα Radon-Nikodym ως προς το χώρο πιθανότητας** $(Y, \mathcal{A}, \mu)$, αν για κάθε μ-συνεχές διανυσματικό μέτρο $T : \mathcal{A} \to X$ με*

$$Ar(T) = \left\{\frac{T(E)}{\mu(E)} : E \in \mathcal{A}, \mu(E) \neq 0\right\} \subseteq K,$$

έπεται ότι υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1(\mu, X)$ τέτοια ώστε

$$T(E) = \int_E f d\mu, \ \forall \ E \in \mathcal{A}.$$

*Αν το σύνολο K έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym ως προς κάθε χώρο πιηανότητας $(Y, \mathcal{A}, \mu)$, τότε λέμε ότι το K έχει την **ιδιότητα Radon-Nikodym**. Αν το K κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X, λέμε ότι το K έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym ως προς το χώρο πιθανότητας $(Y, \mathcal{A}, \mu)$, αν κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του K έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym ως προς τον $(Y, \mathcal{A}, \mu)$.*

2.4 Διατεταγμένοι Χώροι

2.4.1 Βάσικές έννοιες

Ορισμός 2.4.1. *Έστω X διανυσματικός χώρος. Ένα κυρτό, μη κενό υποσύνολο P του X ονομάζεται **κώνος** αν $\lambda P \subseteq P$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $P \cap (-P) = \{0\}$, τότε ο κώνος λέγεται **οξύς**.*

Υπενθυμίζεται ότι αν X σύνολο, ορίζουμε ως **μερική διάταξη** μια αυτοπαθή, αντισυμμετρική και μεταβατική σχέση πάνω στο X.

Ορισμός 2.4.2. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $\leqslant$ μια σχέση μερικής διάταξης για την οποία επιπλέον ισχύουν:*

(i) $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z, \ \ \forall \ z \in X,$

(ii) $x \leqslant y \Rightarrow \lambda x \leqslant \lambda y, \ \ \forall \lambda \geqslant 0.$

*Τότε το ζεύγος $(X, \leqslant)$ **ονομάζεται μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος**.*

Παρατήρηση 2.4.3. *Αν X διανυσματικός χώρος και P οξύς κώνος του X, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση μερικής διάταξης $\leqslant$ στον X:*

$$x \leqslant y \iff y - x \in P.$$

*Αντίστροφα, αν ο $(X, \leqslant)$ μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος, τότε το σύνολο των στοιχείων του X που είναι μεγαλύτερα ή ίσα από το μηδέν αποτελούν έναν οξύ κώνο που ονομάζεται **θετικός κώνος** του X:*

$$X_+ = \{x \in X : x \geqslant 0\}.$$

Συνήθως παριστούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο με (X, P), όπου P ο θετικός κώνος του X.

Πρόταση 2.4.4. *Έστω X διανυσματικός χώρος και P κώνος. Τότε $spanP = P - P$.*

Απόδειξη. Αν $x \in P - P$, τότε $x = y - z$ για κάποια y, $z \in P$, επομένως $x \in spanP$. Αντίστροφα, αν $x \in spanP$, τότε $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $x_i \in P$. Θέτουμε $\Theta = \{i : \lambda_i \geqslant 0\}$ και $A = \{i : \lambda_i < 0\}$, οπότε το x γράφεται ως

$$x = \underbrace{\sum_{i \in \Theta} \lambda_i x_i}_{y} - \underbrace{\sum_{i \in A} (-\lambda_i x_i)}_{z}.$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ισχύει ότι $\lambda_i x_i \in \lambda_i P \subseteq P$, επομένως y, $z \in P$ και $x = y - z \in P - P$. □

Αν $P - P = X$ λέμε ότι ο κώνος P είναι **generating**, δηλαδή **παράγει** τον X.

Ορισμός 2.4.5. *Αν (X, P) διατεταγμένος χώρος και S υποσύνολο του X, το S ονομάζεται **άνω κατευθυνόμενο** (αντ. **κάτω κατευθυνόμενο**) αν για κάθε δύο στοιχεία x, y του S υπάρχει άνω φράγμα (αντ. κάτω φράγμα) του $\{x, y\}$ στο S.*

Πρόταση 2.4.6. *Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος. Ο P παράγει τον X αν και μόνο αν ο X είναι άνω κατευθυνόμενος.*

Απόδειξη. Αν ο P παράγει τον X και x, $y \in X$, τότε

$$\begin{aligned} x &= x_1 - x_2, \quad x_1, x_2 \in P, \\ y &= y_1 - y_2, \quad y_1, y_2 \in P, \end{aligned}$$

με $x \leqslant x_1$ και $y \leqslant y_1$, άρα $x, y \leqslant x_1 + y_1$.

Αντίστροφα, αν ο X είναι άνω κατευθυνόμενος και $x \in X$, τότε υπάρχει $z \in X$ με $z \geqslant x, 0$, οπότε $x = z - (z - x) \in P - P$. □

Ορισμός 2.4.7. *Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος. Ο X ονομάζεται* ***Αρχιμήδειος*** *αν για κάθε x, $y \in X$ ισχύει η συνεπαγωγή:*

$$nx \leqslant y, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leqslant 0.$$

Ορισμός 2.4.8. *Αν (X, P) διατεταγμένος χώρος, και x, y στοιχεία του X με $x \leqslant y$, συμβολίζουμε με $[x, y]$ το* ***διατεταγμένο διάστημα*** *με άκρα τα x και y, δηλαδή*

$$[x, y] = \{z \in X : x \leqslant z \leqslant y\}.$$

Ένα σημείο $e \in X$ θα ονομάζεται ***διατακτική μονάδα*** *αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^+$ τέτοιο ώστε $x \in [-\lambda e, \lambda e]$, ή ισοδύναμα αν $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-ne, ne]$.*

Παρατήρηση 2.4.9. *Αν ο διατεταγμένος χώρος (X, P) έχει διατακτική μονάδα e, τότε ο P παράγει τον X.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $-n_0 e \leqslant x \leqslant n_0 e$. Τότε

$$x = \frac{1}{2}(x + n_0 e) - \frac{1}{2}(n_0 e - x),$$

με $\frac{1}{2}(x + n_0 e)$ και $\frac{1}{2}(n_0 e - x) \in \frac{1}{2}P \subseteq P$. □

2.4.2 Διατεταγμένοι χώροι με μονάδα

Πρόταση 2.4.10. *Αν (X, P) Αρχιμήδειος διατεταγμένος χώρος και e διατακτική μονάδα του X, τότε η σχέση*

$$||x|| = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda e \leqslant x \leqslant \lambda e\} \tag{2.4.1}$$

ορίζει νόρμα στον (X, P) για την οποία ισχύει ότι $-||x||e \leqslant x \leqslant ||x||e$. Θα ονομάζουμε τη νόρμα αυτή, ***νόρμα επαγόμενη από τη διατακτική μονάδα e*** *(order unit norm).*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η $||\cdot||$ πληροί τις τέσσερις ιδιότητες της νόρμας.

(i) Έστω $x \in X$ με $||x|| = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda e \leqslant x \leqslant \lambda e\} = 0$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα ισχύει ότι $-\frac{1}{n}e \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}e$. Από τη δεξιά ανισότητα, και λαμβάνοντας υπ‘ όψιν μας ότι ο X είναι Αρχιμήδειος, έχουμε ότι $x \leqslant 0$. Από την αριστερή ανισότητα με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι $-x \leqslant 0$. Άρα $x = 0$.

(ii) Αν $x = 0$, τότε $-\lambda e \leqslant x = 0 \leqslant \lambda e$, για κάθε $\lambda > 0$, άρα $||x|| = 0$.

(iii) Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$, ισχύει ότι $||-x|| = ||x||$. Πράγματι

$$\begin{aligned} ||-x|| &= \inf\{\lambda > 0 : -\lambda e \leqslant -x \leqslant \lambda e\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : -\lambda e \leqslant x \leqslant \lambda e\} \\ &= ||x||. \end{aligned}$$

Έστω $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Τότε $||ax|| = ||-ax||$ και

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}||ax|| &= \frac{1}{a}\inf\{\lambda > 0 : -\lambda e \leqslant ax \leqslant \lambda e\} \\ &= \frac{1}{a}\inf\{\lambda > 0 : -\frac{\lambda}{a}e \leqslant x \leqslant \frac{\lambda}{a}e\} \\ &= \inf\{\frac{\lambda}{a} : -\frac{\lambda}{a}e \leqslant x \leqslant \frac{\lambda}{a}e\} \\ &= \inf\{\mu > 0 : -\mu e \leqslant x \leqslant \mu e\} \\ &= ||x||,\end{aligned}$$

άρα $||ax|| = a||x||$, για $a > 0$ και $||ax|| = -a||x||$, για $a < 0$, δηλαδή $||ax|| = |a|||x||$, για κάθε $a \neq 0$. Για $a = 0$ η σχέση αυτή εξακολουθεί να ισχύει, άρα $||ax|| = |a|||x||$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(iv) Έστω x, $y \in X$ και λ_x, $\lambda_y > 0$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}-\lambda_x e \leqslant & \quad x \quad \leqslant \lambda_x e, \\ -\lambda_y e \leqslant & \quad y \quad \leqslant \lambda_y e.\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $-(\lambda_x + \lambda_y)e \leqslant x + y \leqslant (\lambda_x + \lambda_y)e$, άρα $||x + y|| \leqslant \lambda_x + \lambda_y$, για κάθε $\lambda_x \in \{\lambda > 0 : -\lambda e \leqslant x \leqslant \lambda e\}$ και $\lambda_y \in \{\lambda > 0 : -\lambda e \leqslant y \leqslant \lambda e\}$, συνεπώς $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

□

Ορισμός 2.4.11. *Ένας Αρχιμήδειος διανυσματικός χώρος $\boldsymbol{X}$, διατεταγμένος από τον κώνο $\boldsymbol{P}$ με διατακτική μονάδα $\boldsymbol{e}$ θα ονομάζεται* ***διατεταγμένος χώρος με μονάδα*** *(order unit space) και θα συμβολίζεται με $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{e})$. Ένας διατεταγμένος χώρος με μονάδα είναι χώρος με νόρμα· την νόρμα η οποία επάγεται από τη διατακτική μονάδα. Θα συμβολίζουμε τη νόρμα που επάγει η διατακτική μονάδα $\boldsymbol{e}$ με $||\cdot||_{\boldsymbol{e}}$, ή απλούστερα $||\cdot||$ αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.*

Πρόταση 2.4.12. *Έστω (X, P, e) μερικά διατεταγμένος χώρος με διατακτική μονάδα e. Τότε ο κώνος P έχει μη κενό εσωτερικό.*

Απόδειξη. Κάθε στοιχείο της μορφής ae, όπου $a \in \mathbb{R}$, έχει νόρμα $||ae|| = |a|||e|| = |a|$. Έστω $a > 0$. Θα δείξουμε ότι το στοιχείο ae ανήκει στο εσωτερικό του P.

Θεωρούμε την μπάλα $B\left(ae, \frac{a}{3}\right)$ και x ένα στοιχείο αυτής. Τότε

$$\begin{aligned}-\frac{a}{3}e \leqslant -||ae - x||e \leqslant & \quad ae - x \quad \leqslant ||ae - x||e \leqslant \frac{a}{3}e \qquad \Rightarrow \\ -\frac{4a}{3}e \leqslant & \quad -x \quad \leqslant -\frac{2a}{3}e \qquad \Rightarrow \\ \frac{2a}{3}e \leqslant & \quad x \quad \leqslant \frac{4a}{3}e.\end{aligned}$$

Άρα $x \in P$ και $B\left(ae, \frac{a}{3}\right) \subseteq P$. □

Ορισμός 2.4.13. *Ένας τελεστής T μεταξύ δύο διατεταγμένων χώρων (X,P), (Y,P') ονομάζεται* ***θετικός*** *αν για κάθε $x \in P$ συνεπάγεται ότι $T(x) \in P'$.*

Ορισμός 2.4.14. *Δύο διατεταγμένοι χώροι (X_1,P_1) και (X_2,P_2) ονομάζονται* ***αλγεβρικά διατακτικά ισόμορφοι*** *αν υπάρχει γραμμική, ένα προς ένα και επί απεικόνιση $T : X_1 \to X_2$, τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in X_1$ να ισχύει ότι*

$$x \leqslant_1 y \iff Tx \leqslant_2 Ty.$$

Παρατήρηση 2.4.15. *Αν οι μερικά διατεταγμένοι χώροι με μονάδα (X,P,e) και (Y,P') είναι αλγεβρικά διατακτικά ισόμορφοι και T ο αντίστοιχος ισομορφισμός, τότε το στοιχείο $T(e)$ είναι διατακτική μονάδα του Y.*

Απόδειξη. Έστω $y \in Y$ και $x \in X$ τέτοιο ώστε $T(x) = y$. Αφού το e διατακτική μονάδα του X θα υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε $-ne \leqslant x \leqslant ne$. Ο τελεστής T είναι θετικός, επομένως

$$\begin{aligned} T(-ne) \leqslant \;& T(x) & \leqslant T(ne) \quad & \Rightarrow \\ -nT(e) \leqslant \;& \;\; y & \leqslant nT(e), & \end{aligned}$$

άρα το $T(e)$ διατακτική μονάδα του Y. □

Πρόταση 2.4.16. *Έστω (X,P,e) και (Y,P',e') μερικά διατεταγμένοι χώροι με μονάδα. Αν $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T(e) = e'$, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο T θετικός,

(ii) ο T φραγμένος με $||T|| = 1$.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Έστω $x \in X$ με $||x|| = 1$. Τότε $-e \leqslant x \leqslant e$, οπότε εφαρμόζοντας το θετικό τελεστή T στην ανισότητα αυτή, έχουμε

$$-e' = -T(e') \leqslant T(x) \leqslant T(e) = e',$$

δηλαδή $||T(x)|| \leqslant 1$. Άρα $||T|| = \sup\limits_{||x||=1} \{||T(x)||\} \leqslant 1$. Όμως $T(e) = e'$, άρα $||T(e)|| = 1$ και τελικά $||T|| = 1$.

(ii) ⇒ (i)

Έστω $x \geqslant 0$ με $0 \leqslant x \leqslant ||x||e$. Τότε $0 \leqslant ||x||e - x \leqslant ||x||e$, δηλαδή $\Big|\Big| ||x||e - x \Big|\Big| \leqslant ||x||$. Εφαρμόζοντας τον φραγμένο τελεστή T παίρνουμε $\Big|\Big| T(||x||e - x) \Big|\Big| \leqslant ||x||$, επομένως:

$$\begin{aligned} -||x||e' \leqslant \;& \quad T\left(||x||e - x\right) & \leqslant ||x||e' \\ -||x||T(e) \leqslant \;& \quad T\left(||x||e - x\right) & \leqslant ||x||T(e) \\ -||x||T(e) \leqslant \;& ||x||T(e) - T(x) & \leqslant ||x||T(e) \\ -2||x||T(e) \leqslant \;& \qquad -T(x) & \leqslant 0. \end{aligned}$$

Τελικά $T(x) \geqslant 0$ και ο T θετικός.

$\square$

Πόρισμα 2.4.17. *Έστω (X, P, e) και (Y, P', e') μερικά διατεταγμένοι χώροι με μονάδα. Αν $T : X \to Y$ ένα προς ένα και επί με $T(e) = e'$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο T αλγεβρικός διατακτικός ισομορφισμός,

(ii) ο T ισομετρία.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Αν ο T είναι διατακτικός ισομορφισμός, τότε διατηρεί τη διάταξη, επομένως, από Πρόταση (2.4.16), είναι φραγμένος με $||T|| = 1$.

(ii) ⇒ (i)

Αν $||T|| = ||T^{-1}|| = 1$, τότε, πάλι από Πρόταση (2.4.16), οι τελεστές T και T^{-1} είναι θετικοί. Άρα ο T διατακτικός ισομορφισμός.

$\square$

Πόρισμα 2.4.18. *Έστω (X, P, e) μερικά διατεταγμένος χώρος με μονάδα και $q \neq 0$ γραμμικό συναρτησιακό του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το q θετικό,

(ii) το q φραγμένο με $||q|| = q(e)$.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Έστω q θετικό συναρτησιακό του X. Τότε $q(e) \neq 0$, αφού, αν υποθέσουμε ότι $q(e) = 0$, τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $-n_0 e \leqslant x \leqslant n_0 e$. Εφαρμόζοντας το θετικό q στην ανισότητα αυτή, παίρνουμε ότι $q(x) = 0$, για κάθε $x \in X$, δηλαδή $q = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού το q έχει υποτεθεί μη μηδενικό.

Θέτουμε $p(x) = \dfrac{q(x)}{q(e)}$. Το p θετικό συναρτησιακό, επομένως $||p|| = p(e) = 1$, δηλαδή $\dfrac{||q||}{|q(e)|} = p(e) = 1$ και τελικά $||q|| = |q(e)| = q(e)$.

(ii) ⇒ (i)

Έστω q φραγμένο συναρτησιακό με $q(e) = ||q||$. Τότε $q(e) \neq 0$, αφού $q(e) = 0 \Rightarrow ||q|| = 0 \Rightarrow q = 0$, άτοπο.

Το q είναι θετικό αν και μόνο αν το $p(x) = \dfrac{q(x)}{q(e)}$ είναι θετικό, αν και μόνο αν $||p|| = p(e) = 1$, αν και μόνο αν $\dfrac{||q||}{|q(e)|} = 1$, αν και μόνο αν $||q|| = |q(e)|$, το οποίο ισχύει από υπόθεση. Άρα το q θετικό.

$\square$

Ορισμός 2.4.19. *Έστω (X, P, e) μερικά διατεταγμένος χώρος με μονάδα. Ένα γραμμικό συναρτησιακό $p \in X'$ ονομάζεται* ***κατάσταση*** *(state), αν $p \geqslant 0$ και $p(e) = 1$, ή ισοδύναμα αν $||p|| = p(e) = 1$. Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{S(X, e)}$ το σύνολο των καταστάσεων του διατεταγμένου χώρου (X, P, e).*

Παρατήρηση 2.4.20. *Το σύνολο των καταστάσεων $S(X, e)$ ενός μερικά διατεταγμένου χώρου με μονάδα είναι ασθενώς *-συμπαγές υποσύνολο του X^*. Πράγματι,*

$$S(X, e) = \{p \in X^* : ||p|| = 1\},$$

*με τη μοναδιαία μπάλα του X^* να είναι *-συμπαγής από Θεώρημα Alaoglu.*

Πρόταση 2.4.21. *Έστω (X, P, e) μερικά διατεταγμένος χώρος με μονάδα και $x \in X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $x \geqslant 0$,

(ii) $p(x) \geqslant 0$, *για κάθε* $p \in S(X, e)$.

Επιπλέον $||x|| = \sup\{|p(x)| : p \in S(X, e)\}$.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Αν $x \geqslant 0$ και $p \in S(X, e)$, τότε $p \geqslant 0$, δηλαδή $p(x) \geqslant 0$.

(ii) ⇒ (i)

Έστω $x \notin P$. Τότε $l(x) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda e \leqslant x\} < 0$. Ισχύει ότι $B\left(x, \frac{|l(x)|}{3}\right) \subseteq P^c$: Αν $y \in X$ με $||y - x|| < \frac{|l(x)|}{3}$, τότε $|l(x) - l(y)| \leqslant \frac{|l(x)|}{3}$, άρα $l(y) < 0$ και $y \notin P$. Το P κυρτό σύνολο, από Πρόταση (2.4.12) ο κώνος P έχει μη κενό εσωτερικό και $x \in X \backslash intP$. Από Θεμελιώδες Διαχωριστικό Θεώρημα υπάρχει μη μηδενικό $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) < \lambda \leqslant f(P)$. Όμως $0 \in P$, επομένως $f(x) < 0$. Θέτουμε $p = \frac{f}{f(e)}$. Το p είναι θετικό και επιπλέον $p(e) = \frac{f(e)}{f(e)} = 1$, άρα το p κατάσταση με $p(x) = \frac{f(x)}{f(e)} < 0$.

Θα δείξουμε ότι $||x|| = \sup\{|p(x)| : p \in S(X, e)\}$. Προφανώς $|p(x)| \leqslant ||p||||x|| = ||x||$, για κάθε κατάσταση p, άρα $||x|| \geqslant |p(x)|$, για κάθε $p \in S(X, e)$.

Έστω ότι $||x|| = m(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : x \leqslant \lambda e\}$. Τότε $x \leqslant ||x||e$ και επομένως για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει ότι $x \nleqslant (||x|| - \epsilon)e$. Άρα $(||x|| - \epsilon)e - x \notin P$, για κάθε $\epsilon > 0$. Από το κομμάτι της Πρότασης που έχουμε ήδη δείξει, θα υπάρχει $p \in S(X, e)$ με $p((||x|| - \epsilon)e - x) < 0$, δηλαδή $||x|| - \epsilon < p(x)$, για κάθε $\epsilon > 0$. Άρα $||x|| \leqslant p(x)$.

Έστω ότι $||x|| = M(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : -\lambda e \leqslant x\} = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : -x \leqslant \lambda e\}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ θα ισχύει ότι $-x \nleqslant (||x|| - \epsilon)e$, επομένως υπάρχει $p \in S(X, e)$ τέτοιο ώστε $||x|| - \epsilon < -p(x) \Rightarrow -p(x) \geqslant ||x||$ και τελικά έχουμε ότι $\pm p(x) \geqslant ||x|| \Rightarrow |p(x)| \geqslant ||x||$.

□

2.4.3 Βάσεις κώνων και νόρμα βάσης

Ορισμός 2.4.22. *Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος, $P \neq \{0\}$ και $B \subseteq P$ κυρτό σύνολο για το οποίο ισχύει ότι για κάθε $x \in P \backslash \{0\}$ υπάρχει μοναδικό $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda x \in B$. Τότε το B ονομάζεται **βάση του κώνου** P.*

Θεώρημα 2.4.23. *Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος και $B \subseteq P$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το B είναι βάση του κώνου P,

(ii) υπάρχει $f \in X'$ αυστηρά θετικό τέτοιο ώστε

$$B = \{x \in P : f(x) = 1\}. \tag{2.4.2}$$

Πρόταση 2.4.24. *Έστω (X, P) άνω κατευθυνόμενος μερικά διατεταγμένος χώρος και B βάση του με το $B' = co(B, -B)$ να είναι ευθειακά συμπαγές. Τότε η σχέση*

$$||x|| = \inf\{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda B'\}, \tag{2.4.3}$$

*ορίζει νόρμα στον (X, P). Η νόρμα αυτή θα καλείται **νόρμα βάσης** (base norm) του (X, P, B) και θα συμβολίζεται με $|| \cdot ||_B$, ή $|| \cdot ||$ αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.*

Απόδειξη. Ο X είναι άνω κατευθυνόμενος, άρα ο κώνος P παράγει το χώρο. Έστω $x \in X$ και x_1, $x_2 \in P$ τέτοια ώστε $x = x_1 - x_2$. Επειδή η B βάση του P υπάρχουν λ_1, $\lambda_2 > 0$ και b_1, $b_2 \in B$ με $x_1 = \lambda_1 b_1$, $x_2 = \lambda_2 b_2$, επομένως τελικά έχουμε ότι $x = \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2$ και διαιρώντας με $\lambda_1 + \lambda_2$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\lambda_1 + \lambda_2} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} b_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} b_2 \\ &= \lambda b_1 - (1 - \lambda) b_2, \quad \text{με } \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Άρα $x \in (\lambda_1 + \lambda_2)B'$. Δείξαμε ότι για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda B'\}$ είναι μη κενό και συνεπώς η $|| \cdot ||$ είναι καλά ορισμένη. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες της νόρμας.

(i) Αν $x = 0$, τότε $x \in 0B'$, άρα $||x|| \leqslant 0$ και τελικά $||x|| = 0$.

(ii) Αν $x \in X$ με $||x|| = 0$, τότε $\inf\{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda B'\} = 0$, επομένως $x \in \frac{1}{n}B'$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε n πορούμε να επιλέξουμε στοιχεία $b'_n \in B'$ και στη συνέχεια $\lambda_n \in [0,1]$, b_n^1, $b_n^2 \in B$ τέτοια ώστε $x = \frac{1}{n}b'_n = \frac{\lambda_n}{n}b_n^1 - \frac{1-\lambda_n}{n}b_n^2$. Εφαρμόζοντας το συναρτησιακό της βάσης έχουμε ότι $f(x) = \frac{2\lambda_n - 1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Άρα $f(x) = 0$ και $x = 0$ αφού το f αυστηρά θετικό.

(iii) Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$, ισχύει ότι $||-x|| = ||x||$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x \in \lambda B'$ αν και μόνο αν $-x \in \lambda B'$, ή ισοδύναμα ότι $x \in B'$ αν και μόνο αν $-x \in B'$. Αν $x \in B'$, υπάρχουν $\lambda \in [0,1]$ και b_1, $b_2 \in B$, τέτοια ώστε $x = \lambda b_1 - (1-\lambda)b_2$. Τότε $-x = (1-\lambda)b_2 - \lambda b_1 \in co(B,-B) = B'$. Ομοίως εργαζόμαστε και για το αντίστροφο.

Έστω $0 \neq a \in \mathbb{R}$ και $x \in X$.

$$\begin{aligned} |a|||x|| &= \inf\{|a|\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda B'\} \\ &= \inf\{|a|\lambda \geqslant 0 : |a|x \in |a|\lambda B'\} \\ &= \inf\{\mu \geqslant 0 : |a|x \in \mu B'\} \\ &= |||a|x|| \\ &= ||ax||. \end{aligned}$$

(iv) Έστω x, $y \in X$, $x \in \lambda_x B'$, $y \in \lambda_y B'$. Θα δείξουμε ότι $x + y \in (\lambda_x + \lambda_y)B'$, από το οποίο έπεται η υποαθροιστικότητα της $||\cdot||$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{\lambda_x+\lambda_y} &= \underbrace{\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_y}}_{a}\underbrace{\frac{x}{\lambda_x}}_{x'} + \underbrace{\frac{\lambda_y}{\lambda_x+\lambda_y}}_{1-a}\underbrace{\frac{y}{\lambda_y}}_{y'} \\ &= ax' + (1-a)y' \in B', \end{aligned}$$

αφού x', $y' \in B'$, $a \in [0,1]$ και το B' είναι κυρτό. Άρα $x + y \in (\lambda_x + \lambda_y)B'$.

□

Ορισμός 2.4.25. *Έστω X άνω κατευθυνόμενος διανυσματικός χώρος μερικά διατεταγμένος από τον κώνο P, B βάση του κώνου P τέτοια ώστε το σύνολο $B' = co(B,-B)$ να είναι ευθειακά συμπαγές και $||\cdot||$ η νόρμα βάσης του X. Τότε ο X θα ονομάζεται* ***χώρος με νόρμα βάσης*** *(base norm space) και θα συμβολίζεται με (X,P,B).*

Πρόταση 2.4.26. *Η νόρμα βάσης ενός χώρου (X,P,B) είναι αθροιστική στο P, δηλαδή $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ για κάθε x, $y \in P$. Επιπλέον, αν f το συναρτησιακό της βάσης, ισχύει ότι $f(x) = ||x||$, για κάθε $x \in P$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in P$. Υπάρχει $\lambda_x > 0$ με $x \in \lambda_x B$, οπότε $||x|| \leqslant \lambda_x$ και καθώς $f(x) = \lambda_x$ έπεται ότι $||x|| \leqslant f(x)$.

Ισχύει ότι $x \in ||x||B'$, άρα υπάρχουν $y, z \in B$ και $\lambda \in (0,1)$ με $x = ||x||\lambda y - (1-\lambda)||x||z$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda||x|| - (1-\lambda)||x|| \\ &= 2\lambda||x|| - ||x|| \\ &= (2\lambda - 1)||x|| \\ &\leqslant ||x||. \end{aligned}$$

Άρα τελικά ισχύει ότι $f(x) = ||x||$. Η αθροιστικότητα της νόρμας είναι άμεση συνέπεια της γραμμικότητας του f. □

Πρόταση 2.4.27. *Έστω (X, P, B) χώρος με νόρμα βάσης. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $y, z \in P$ τέτοια ώστε $x = y - z$ και $||x|| = ||y|| + ||z||$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Το x ανήκει στο $||x||B'$, άρα υπάρχουν $y, z \in B$ και $\lambda \in (0,1)$ με

$$x = \underbrace{||x||\lambda y}_{y'} - \underbrace{(1-\lambda)||x||z}_{z'}. \tag{2.4.4}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} ||y'|| + ||z'|| &= \Big|\Big|||x||\lambda y\Big|\Big| + \Big|\Big|||x||(1-\lambda)z\Big|\Big| \\ &= ||x|||\lambda|||y|| + ||x|||1-\lambda|||z|| \\ &= \lambda||x|| + (1-\lambda)||x|| \\ &= ||x||. \end{aligned}$$

Άρα τα y' και z' της σχέσης (2.4.4) αποτελούν τη ζητούμενη διάσπαση. □

Πρόταση 2.4.28. *Έστω (X, P, B) χώρος με νόρμα βάσης και f το συναρτησιακό της βάσης B. Τότε το f είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Ο X είναι άνω κατευθυνόμενος, επομένως $X = P - P$. Έστω $x \in X$ και y, $z \in P$ όπως στην Πρόταση (2.4.27).

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) - f(z) \\ &= ||y|| - ||z|| \\ &\leqslant ||y|| + ||z|| \\ &= ||x||. \end{aligned}$$

Άρα $|f(x)| \leqslant ||x|| \Rightarrow ||f|| \leqslant 1$. □

Θεώρημα 2.4.29. *Έστω (X, P, e) μερικά διατεταγμένος χώρος με μονάδα. Τότε ο χώρος X^* διατεταγμένος από τον θετικό κώνο X^*_+ με βάση τον $S(X, e)$ είναι χώρος με νόρμα βάσης. Επιπλέον η νόρμα που επάγεται από τη βάση αυτή, ταυτίζεται με τη συνήθη νόρμα του X^*.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο $(X^*, S(X,e))$ μερικά διατεταγμένο με τη διάταξη $f \leqslant g \iff f(x) \leqslant g(x)$, για κάθε $x \in P$. Έστω $0 \neq f \in X^*$, $f \geqslant 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $\lambda > 0$ και $p \in S(X,e)$ τέτοια ώστε $f = \lambda p$.

Θεωρούμε το $p = \dfrac{f}{f(e)}$. Τότε $p(e) = 1$ και $p \geqslant 0$, άρα $p \in S(X,e)$ και $f = f(e)p$, $f(e) > 0$. Αν $f = \lambda_1 p_1 = \lambda_2 p_2$, με p_1, $p_2 \in S(X,e)$, τότε $f(e) = \lambda_1 = \lambda_2$ και $p_1 = p_2$, άρα για κάθε $f \geqslant 0$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda \geqslant 0$ και $p \in S(X,e)$ με $f = \lambda p$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το $S(X,e)$ είναι κυρτό. Άρα η $S(X,e)$ είναι βάση του θετικού κώνου του X^*.

Τέλος, δείχνουμε ότι $||f|| = \inf\{\lambda > 0 : f \in \lambda S(X,e)\}$, όπου $||f|| = \sup\{|f(x)| : ||x|| \leqslant 1\}$ η συνήθης νόρμα του X^*.

Έστω $f \in X^*_+$, $f \geqslant 0$ και $f(e) = ||f||_B$. Θα δείξουμε ότι $||f|| = \sup\{|f(x)| : ||x|| \leqslant 1\} = ||f||_B$. Έστω $x \in X$ με $||x|| \leqslant 1$, δηλαδή $-e \leqslant x \leqslant e$. Τότε $-f(e) \leqslant f(x) \leqslant f(e)$, επομένως $-||f||_B \leqslant f(x) \leqslant ||f||_B$. Άρα $|f(x)| \leqslant ||f||_B \Rightarrow \sup\{|f(x)| : ||x|| \leqslant 1\} = ||f|| \leqslant ||f||_B$. Για το στοιχείο e του X, έχουμε ότι $||e|| = 1$ και $f(e) = ||f||_B$. Άρα τελικά έχουμε ότι $||f|| = ||f||_B$, για κάθε $f \in X^*_+$. □

Θεώρημα 2.4.30. *Έστω (X, P, B) χώρος με νόρμα βάσης και f το συναρτησιακό της βάσης B, τότε ο (X^*, X^*_+, f) είναι διατεταγμένος χώρος με μονάδα. Επιπλέον η νόρμα που επάγει η διατακτική μονάδα f στον X^* ταυτίζεται με τη συνήθη νόρμα του X^*.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον X^* με τη συνήθη διάταξη. Ο X^* είναι Αρχιμήδειος αφού

$$nf \leqslant g,\ \forall n \in \mathbb{N} \iff nf(x) \leqslant g(x),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in P$$

και από την τελευταία ισοδυναμία συμπεραίνουμε ότι $f(x) \leqslant 0$ για κάθε $x \in P$ αφού οι τιμές των $f(x)$ και $g(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί και ο $\mathbb{R}$ Αρχιμήδειος.

Έστω f το συναρτησιακό της βάσης B το οποίο, από προηγούμενη πρόταση, γνωρίζουμε ότι είναι φραγμένο. Επιπλέον το f είναι θετικό αφού για κάθε $x \in P$, υπάρχουν $\lambda_x \geqslant 0$ και $b_x \in B$ τέτοια ώστε $x = \lambda_x b_x$ και εφαρμόζοντας το f προκύπτει ότι $f(x) = \lambda_x \geqslant 0$.

Θα δείξουμε ότι το f είναι διατακτική μονάδα του X^*. Έστω $g \in X^*$. Τότε

$$\begin{aligned}
-||g|| \cdot ||x|| \leqslant \quad & g(x) & \leqslant ||g|| \cdot ||x||,\ \forall x \in B \ \Rightarrow \\
-||g||f(x) \leqslant \quad & g(x) & \leqslant ||g||f(x),\ \forall x \in B \ \Rightarrow \\
-||g||f(\lambda_x b_x) \leqslant \quad & g(\lambda_x b_x) & \leqslant ||g||f(\lambda_x b_x),\ \forall x = \lambda_x b_x \in P \ \Rightarrow \\
-||g||f(x) \leqslant \quad & g(x) & \leqslant ||g||f(x),\ \forall x \in P.
\end{aligned}$$

Άρα $g \in [-||g||f, ||g||f]$ και το f διατακτική μονάδα του X^*.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}
\inf\{\lambda > 0 : -\lambda f \leqslant g \leqslant \lambda f\} &= \inf\{\lambda > 0 : -\lambda f(x) \leqslant g(x) \leqslant \lambda f(x),\ \forall x \in B\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : -\lambda \leqslant g(x) \leqslant \lambda,\ \forall x \in B\} \\
&= \sup\{|g(x)| : x \in B\} \\
&= \sup\{|g(x)| : x \in B'\} \\
&= ||g||,
\end{aligned}$$

άρα η νόρμα που επάγεται από τη διατακτική μονάδα ταυτίζεται με τη συνήθη νόρμα του X^*. □

Ορισμός 2.4.31. *Έστω (X, P) μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος. Λέμε ότι ο X έχει την **ιδιότητα διάσπασης του Riesz**, αν για κάθε $x, y, z \in P$ με $0 \leqslant x \leqslant y + z$, υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε $0 \leqslant x_1 \leqslant y$, $0 \leqslant x_2 \leqslant z$ και $x = x_1 + x_2$.*

*Αν για κάθε $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ με $x_1, x_2 \leqslant y_1, y_2$, υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε $x_1, x_2 \leqslant z \leqslant y_1, y_2$, λέμε ότι ο X έχει την **ιδιότητα παρεμβολής του Riesz**.*

Πρόταση 2.4.32. *Έστω (X, P) μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz,

(ii) ο X έχει την ιδιότητα παρεμβολής του Riesz,

(iii) για κάθε $\{u_1, \dots, u_n\}$, $\{v_1, \dots, v_m\}$ με u_i, $v_j \geqslant 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ και $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{m} v_j$, υπάρχουν $w_{ij} \geqslant 0$ τέτοια ώστε $u_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ij}$ και $v_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}$.

*Η ιδιότητα (iii) ονομάζεται **ιδιότητα εκλέπτυνσης του Riesz**.*

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Έστω ότι ο χώρος μας έχει την ιδιότητα παρεμβολής του Riesz και $0 \leqslant u \leqslant u_1 + u_2$, $0 \leqslant v_1, v_2$. Θεωρούμε τα στοιχεία $u - v_1, 0, u, v_2$. Είναι προφανές ότι $u - v_1, 0 \leqslant u, v_2$, επομένως, λόγω της ιδιότητας παρεμβολής του Riesz, υπάρχει z τέτοιο ώστε

$$u - v_1, 0 \leqslant z \leqslant u, v_2.$$

Για τα στοιχεία z, $u - z$ ισχύουν:

(α') $0 \leqslant z \leqslant v_2$,

(β') $0 \leqslant u - z \leqslant v_1$,

(γ') $z + (u - z) = u$.

Επομένως ο χώρος μας έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz.

(ii) ⇒ (i)

Έστω ότι ο χώρος μας έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz και $x_1, x_2 \leqslant y_1, y_2$. Θεωρούμε τα στοιχεία

$$\begin{aligned} v_1 &= y_1 - x_1 \geqslant 0, \\ v_2 &= y_2 - x_2 \geqslant 0, \\ u &= y_1 - x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ισχύει ότι $0 \leqslant u \leqslant y_1 - x_2 \leqslant y_1 - x_2 + y_2 - x_1 = v_1 + v_2$. Λόγω της ιδιότητας διάσπασης του Riesz υπάρχουν u_1 και u_2 τέτοια ώστε $0 \leqslant u_1 \leqslant v_1$, $0 \leqslant u_2 \leqslant v_2$ και $u_1 + u_2 = u$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_1 &\leqslant y_1 - x_1 \\ 0 \leqslant u_2 &\leqslant y_2 - x_2 \\ u_1 + u_2 &= y_1 - x_2. \end{aligned}$$

Για το στοιχείο $u_2 + x_2$ ισχύουν:

(α') $u_2 \geqslant 0 \Rightarrow u_2 + x_2 \geqslant x_2$,

(β') $u_1 + u_2 = y_1 - x_2 \leqslant u_2 + y_1 - x_2 \Rightarrow u_2 + x_2 \geqslant x_1$,

(γ') $0 \leqslant u_2 \leqslant y_2 - x_2 \Rightarrow u_2 + x_2 \leqslant y_2$,

(δ') $u_1 + u_2 = y_1 - x_2 \Rightarrow u_2 + x_2 = y_1 - u_1 \leqslant y_1 \Rightarrow u_2 + x_2 \leqslant y_1$.

Άρα $x_1, x_2 \leqslant u_2 + x_2 \leqslant y_1, y_2$ και ο X έχει την ιδιότητα παρεμβολής του Riesz.

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Θα δείξουμε τον ισχυρισμό με επαγωγή στο m. Για $m = 1$ και $x = \sum_{i=1}^{n} x_i = y_1$ ορίζουμε τα z_{ij} ως

$$z_{ij} = \begin{cases} x_i, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1. \end{cases}$$

Τότε, $\sum_{j=1}^{m} z_{ij} = z_{i1} = x_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} z_{i1}, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} y_1, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1 \end{cases} = y_j,$$

για κάθε $j = 1, \ldots, m$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το ζητούμενο για κάποιον φυσικό m και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $m + 1$. Έστω λοιπόν ότι $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m+1} y_j$. Τότε $\sum_{j=1}^{m+1} y_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i$, αφού $y_{m+1} \geqslant 0$. Από την ιδιότητα διάσπασης του Riesz, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ υπάρχουν

u_i με $0 \leqslant u_i \leqslant x_i$ και $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{m} y_j$. Από την επαγωγική μας υπόθεση, υπάρχουν z_{ij} τέτοια ώστε

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \quad \text{και} \quad y_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij}.$$

Για κάθε $i = 1, \dots, n$ θέτουμε $z_{in+1} = x_i - u_i \geqslant 0$. Η οικογένεια (z_{ij}) για $i = 1, \dots, n$ και $j = 1, \dots, m+1$ αποτελεί τη ζητούμενη διάσπαση, αφού

$$\sum_{j=1}^{m+1} z_{ij} = \sum_{j=1}^{m} z_{ij} + z_{im+1} = u_i + z_i - u_i = z_i,$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$ και

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = \begin{cases} y_j, & j \leqslant m \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - u_i), & j = m+1 \end{cases} = \begin{cases} y_j, & j \leqslant m \\ \sum_{j=1}^{m+1} y_j - \sum_{j=1}^{m} y_j, & j = m+1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} y_j, & j \leqslant m \\ y_{m+1}, & j = m+1 \end{cases} = y_j,$$

για κάθε $j = 1, \dots, m+1$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Έστω x_1, x_2, y_1, $y_2 \in X$ με $x_1, x_2 \leqslant y_1, y_2$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει $x \in X$ με $x_1, x_2 \leqslant x \leqslant y_1, y_2$.

Ισχύει ότι $(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) = (y_1 - x_2) + (y_2 - x_1)$. Από την υπόθεσή μας υπάρχουν $z_{ij} \geqslant 0$ τέτοια ώστε

$$y_1 - x_1 = z_{11} + z_{12} \tag{2.4.5}$$
$$y_2 - x_2 = z_{21} + z_{22} \tag{2.4.6}$$
$$y_1 - x_2 = z_{11} + z_{21} \tag{2.4.7}$$
$$y_2 - x_1 = z_{12} + z_{22}. \tag{2.4.8}$$

Θεωρούμε το στοιχείο $x = z_1 + z_{12}$. Τότε

(i) $z_{12} \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant x_1$.

(ii) Από την (2.4.6) ισχύει ότι $y_1 - (x_1 + z_{12}) = z_{11} \geqslant 0$, άρα $y_1 \geqslant x$.

(iii) Από την (2.4.8) ισχύει ότι $y_2 - (x_1 + z_{12}) = z_{22} \geqslant 0$, άρα $y_2 \geqslant x$.

(iv) Από τις (2.4.8) και (2.4.6), ισχύει ότι $x_2 = y_1 - z_{11} - z_{21} = z_{12} + x_1 - z_{21}$, επομένως $x_2 - x = -z_{21} \leqslant 0$ και $x \geqslant x_2$.

Άρα το x είναι το ζητούμενο στοιχείο.

□

2.4.4 Γραμμικοί σύνδεσμοι

Ορισμός 2.4.33. *Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος και $Y \subseteq X$. Αν το $x \in X$ είναι άνω φράγμα του Y και επιπλέον για κάθε άλλο άνω φράγμα z του Y ισχύει ότι $x \leqslant z$, τότε το x ονομάζεται **ελάχιστο άνω φράγμα** του Y και συμβολίζεται με $x = \sup Y$. Ομοίως ορίζουμε το **μέγιστο κάτω φράγμα** ενός συνόλου Y και το συμβολίζουμε με $\inf Y$.*

Ορισμός 2.4.34. *Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος με την ιδιότητα ότι για κάθε δύο στοιχεία x, $y \in X$, υπάρχει το $\sup\{x, y\}$ και το $\inf\{x, y\}$ στο X. Τότε ο (X, P), ονομάζεται **γραμμικός σύνδεσμος** ή **χώρος Riesz** (vector lattice ή Riesz space). Θα συμβολίζουμε το $\sup\{x, y\}$ με $x \vee y$ και το $\inf\{x, y\}$ με $x \wedge y$.*

Πρόταση 2.4.35. *Έστω (X, P) γραμμικός σύνδεσμος. Τότε ο X έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz.*

Απόδειξη. Έστω X γραμμικός σύνδεσμος. Αρκεί να δείξουμε ότι ο X έχει την ιδιότητα παρεμβολής του Riesz. Θεωρούμε x_1, x_2, y_1, $y_2 \in X$ με $x_1, x_2 \leqslant y_1, y_2$. Τότε για οποιοδήποτε από τα στοιχεία $x = x_1 \vee x_2$ ή $y = y_1 \wedge y_2$ ισχύει ότι

$$x_1, x_2 \leqslant x, y \leqslant y_1, y_2.$$

□

Πρόταση 2.4.36. *Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος Banach, με την ιδιότητα διάσπασης του Riesz και $X^* = X^*_+ - X^*_+$. Τότε ο X^* είναι γραμμικός σύνδεσμος.*

Ορισμός 2.4.37. *Αν (X, P) διατεταγμένος χώρος, κάθε γραμμικός υπόχωρος Y του X με την επαγόμενη διάταξη ονομάζεται **διατεταγμένος υπόχωρος** του X.*

*Αν ο Y είναι διατεταγμένος υπόχωρος του X και για κάθε x, $y \in X$ υπάρχουν τα $x \vee y$ και $x \wedge y$ στον Y, τότε ο Y ονομάζεται **γραμμικός υποσύνδεσμος** του X.*

*Αν ο Y είναι διατεταγμένος υπόχωρος του X και για κάθε x, $y \in X$ υπάρχουν τα $\sup\{x, y\}_Y$ και $\inf\{x, y\}_Y$, τότε ο Y ονομάζεται **σύνδεσμος υπόχωρος** του X.*

Θεώρημα 2.4.38. *(**Stone-Weierstrass**). Έστω X συμπαγής χώρος και A γραμμικός υποσύνδεσμος του $C(X)$ που διαχωρίζει τα σημεία του X και περιέχει τη σταθερή συνάρτηση $\mathbb{1}$. Τότε ο A είναι πυκνός στον $C(X)$.*

Πόρισμα 2.4.39. *Έστω X συμπαγής χώρος και $P \subseteq C(X)$ κυρτός κώνος ο οποίος διαχωρίζει τα σημεία του X, περιέχει τη σταθερή συνάρτηση $\mathbb{1}$ και για κάθε f, $g \in P$ έπεται ότι $f \vee g \in P$. Τότε $\overline{P - P} = C(K)$.*

Πόρισμα 2.4.40. *Έστω X συμπαγής χώρος και $\mathcal{K}^c(X)$ το σύνολο των συνεχών και κυρτών συναρτήσεων του X. Τότε $\overline{\mathcal{K}^c(X) - \mathcal{K}^c(X)} = C(K)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{K}^c(X)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Πορίσματος (2.4.39), δηλαδή ότι είναι κυρτός κώνος του $C(X)$ που διαχωρίζει τα σημεία του X, περιέχει τη σταθερή συνάρτηση $\mathbb{1}$ και για κάθε $f, g \in \mathcal{K}^c(X)$ το $f \vee g$ ανήκει και αυτό στο $\mathcal{K}^c(X)$.

Το $\mathcal{K}^c(X)$ κυρτό: Έστω $f, g \in \mathcal{K}^c(X)$ και $a, b \in [0,1]$. Θέτουμε $h = af + (1-a)g$ και θα δείξουμε ότι $h \in \mathcal{K}^c(X)$. Η h είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών και κυρτή αφού:

$$\begin{aligned} h(bx + (1-b)y) &= af(bx + (1-b)y) + (1-a)g(bx + (1-b)y) \\ &\leqslant abf(x) + a(1-b)f(y) + (1-a)bg(x) + (1-a)(1-b)g(y) \\ &= b[af(x) + (1-a)g(x)] + (1-b)[af(y) + (1-a)g(y)] \\ &= bh(x) + (1-\lambda)h(y). \end{aligned}$$

Το $\mathcal{K}^c(X)$ είναι κώνος, αφού αν f κυρτή και συνεχής και $\lambda \geqslant 0$, τότε η λf είναι επίσης κυρτή και συνεχής, άρα $\lambda\mathcal{K}^c(X) \subseteq \mathcal{K}^c(X)$, για κάθε $\lambda \geqslant 0$. Η σταθερή συνάρτηση $\mathbb{1}$ είναι κυρτή και συνεχής, άρα ανήκει στο $\mathcal{K}^c(X)$, επιπλέον η $\mathcal{K}^c(X)$ διαχωρίζει τα σημεία του X, αφού αν θεωρήσουμε x και $y \in X$ με $x \neq y$, τότε, από διαχωριστικό θεώρημα, υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x) \neq f(y)$, με την f να είναι γραμμική και συνεχή, άρα $f \in \mathcal{K}^c(X)$.

Τέλος, αν f και $g \in \mathcal{K}^c(X)$, η συνάρτηση $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ είναι κυρτή και συνεχής και ισχύει ότι $h = f \vee g$. □

Πρόταση 2.4.41. *Έστω X συμπαγής και T_2 τοπολογικός χώρος. Ο X είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν ο χώρος $C(X)$ είναι διαχωρίσιμος Banach lattice.*

Παρατήρηση 2.4.42. *Έστω X συμπαγές και κυρτό σύνολο, K συμπαγής χώρος και Y τοπικά συμπαγής, σ-συμπαγής. Τότε οι $\mathcal{A}^c(X)$, $C(K)$, $C_c(Y)$, $C_0(Y)$, καθώς και οι δυϊκοί τους, είναι διατεταγμένοι χώροι Banach.*

Θεώρημα 2.4.43. ***(Αναπαράστασης του Riesz για θετικούς τελεστές)*** *Έστω X τοπικά συμπαγής και T_2 χώρος και $C_c(X)$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων του X με συμπαγή φορέα. Για κάθε θετικό τελεστή $T : C_c(X) \to \mathbb{R}$ υπάρχει σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ του X και μοναδικό θετικό μέτρο μ στον $(X, \mathcal{A})$, τέτοιο ώστε $T(f) = \int_X f d\mu$, για κάθε $f \in C_c(X)$. Επιπλέον ισχύει ότι*

(i) $\mu(K) < \infty$, *για κάθε* $K \subseteq X$ *συμπαγές,*

(ii) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ συμπαγές}\}$, *για κάθε* $A \in \mathcal{A}$,

(iii) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \text{ ανοικτό}\}$, *για κάθε* $A \in \mathcal{A}$,

(iv) *ο* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *πλήρης χώρος μέτρου.*

Συχνά θα συμβολίζουμε τη δράση του τελεστή T στη συνάρτηση f με $T(f) = \mu(f)$, όπου μ το παραπάνω μέτρο. Είναι προφανές ότι το μ είναι μέτρο Radon.

Θεώρημα 2.4.44. ***(Αναπαράστασης του Riesz για τον $C_0(X)$)*** *Έστω X τοπικά συμπαγής, σ-συμπαγής χώρος και $C_0(X)$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων του X για τις οποίες ισχύει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $K_\epsilon \subseteq X$ συμπαγές τέτοιο ώστε $|f(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \notin K_\epsilon$. Τότε για κάθε $T \in C_0(X)^*$ υπάρχει μοναδικό προσημασμένο μέτρο του X, τέτοιο ώστε $T(f) = \int_X f d\mu$, για κάθε $f \in C_0(X)$.*

Παρατήρηση 2.4.45. *Ο χώρος $C_0(X)$ εφοδιασμένος με τη supremum νόρμα, είναι μερικά διατεταγμένος χώρος Banach, ο οποίος επιπλέον είναι γραμμικός σύνδεσμος, επομένως, από Πρόταση (2.4.36), ο $C_0(X)^*$ είναι και αυτός γραμμικός σύνδεσμος.*

Από το Θεώρημα (2.4.44), ο $\mathcal{M}(X)$ ταυτίζεται με τον $C_0(X)^*$, επομένως ο $\mathcal{M}(X)$ θα είναι και αυτός διατεταγμένος χώρος Banach και γραμμικός σύνδεσμος. Αν $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(X)$, τότε $\mu_n \to \mu \iff |\mu - \mu_n|(A) \to 0$, για κάθε $A \subseteq X$. Η σχέση διάταξης στο $\mathcal{M}(X)$ ορίζεται από τη σχέση: $\mu \leqslant \nu \iff \mu(A) \leqslant \nu(A)$, για κάθε $A \subseteq X$.

Κεφάλαιο 3

Ολοκληρωτική Αναπαράσταση

3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Υπενθυμίζεται ότι συμβολίζουμε με $\mathcal{A}^c(X)$ το σύνολο των αφφινικών, συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο X.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω E χώρος με νόρμα και $D \subseteq E$. Αν $x \in E$, ρίζουμε $s(x, D) = \sup\{||x - y|| : y \in D\}$. Ένα σημείο $z \in D$ ονομάζεται **απώτατο σημείο** (farthest point) του D αν υπάρχει $x \in E$ τέτοιο ώστε $s(x, D) = ||x - z||$.*

Το σύνολο των απώτατων σημείων του D συμβολίζεται με $far(D)$.

Λήμμα 3.1.2. *Έστω E τοπικά κυρτός T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και $X \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό. Τότε ο χώρος $(E^* + \mathbb{R})|_X$ είναι πυκνός στον $\mathcal{A}^c(X)$.*

Απόδειξη. Έστω συνάρτηση $h \in \mathcal{A}^c(X)$ και $\epsilon > 0$. Θα βρούμε συνάρτηση $f \in E^* + \mathbb{R}$ με $||f - h|| < \epsilon$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} J_1 &= \{(x, h(x)) : x \in X\} \subseteq X \times \mathbb{R} \\ J_2 &= \{(x, h(x) + \epsilon) : x \in X\} \subseteq X \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Τα J_1 και J_2 είναι

Κυρτά:

Έστω $(x, h(x))$, $(y, h(y)) \in J_1$, $\lambda \in [0, 1]$ και $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

$$\begin{aligned} \lambda(x, h(x)) + (1 - \lambda)(y, h(y)) &= (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)) \\ &\overset{\text{(αφφινική)}}{=} (\lambda x + (1 - \lambda)y, h(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \\ &= (z, h(z)) \in J_1. \end{aligned}$$

Ομοίως προκύπτει και για το J_2.

Ξένα:

Αν $(x, h(x)) \in J_1$ και $(y, h(y) + \epsilon) \in J_2$, τότε η ισότητα $(x, h(x)) = (y, h(y) + \epsilon)$ συνεπάγεται $x = y$ και $h(x) = h(y) + \epsilon$, δηλαδή $h(x) = h(x) + \epsilon$, άτοπο αφού το ϵ έχει υποτεθεί μη μηδενικό.

Συμπαγή:

Έστω $(x_i, h(x_i))_{i\in I}$ δίκτυο του J_1. Το δίκτυο $(x_i)_{i\in I}$ ανήκει στο συμπαγές σύνολο X, επομένως θα έχει συγκλίνον υποδίκτυο. Έστω $(x_i)_{i\in J}$ με $x_i \to x_0$. Η h συνεχής επομένως $h(x_i) \to h(x_0)$, από τη μοναδικότητα του ορίου. Άρα, για $i \in J$ το $(x_i, h(x_i)) \to (x_0, h(x_0))$ και επομένως το J_1 συμπαγές. Ομοίως και για το J_2.

Επομένως τα J_1 και J_2 διαχωρίζονται. Έστω $F \in (E \times \mathbb{R})^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$F(J_1) < \lambda \leqslant F(J_2).$$

Η F θα έχει τη μορφή $F(x,r)$, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, με $F(x,r) = F(x,0) + F(0,r)$. Θέτουμε $\phi(x) = F(x,0) \in E^*$, $\beta r = F(0,r)$, οπότε η F γράφεται:

$$\begin{aligned} F(x,r) &= \phi(x) + \beta r \quad \text{και συνεπώς:} \\ F(x,h(x)) &= \phi(x) + \beta h(x), \quad \text{για κάθε } (x,h(x)) \in J_1 \text{ και} \\ F(x,h(x)+\epsilon) &= \phi(x) + \beta h(x) + \beta\epsilon, \quad \text{για κάθε } (x,h(x)+\epsilon) \in J_2. \end{aligned}$$

Πλέον, το διαχωριστικό θεώρημα δίνει:

$$\begin{aligned} \phi(x) + \beta h(x) < {} & \lambda \leqslant \phi(x) + \beta h(x) + \beta\epsilon \Rightarrow \\ h(x) < {} & \frac{\lambda - \phi(x)}{\beta} \leqslant h(x) + \epsilon \end{aligned}$$

και θέτοντας $f(x) = \dfrac{\lambda - \phi(x)}{\beta} \in E^* + \mathbb{R}$, έχουμε $||f - h|| \leqslant \epsilon$. Το β είναι διάφορο του μηδενός, αφού σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε $F(x,r) = \phi(x)$ και συνεπώς $F(x,h(x)) = \phi(x) = F(x,h(x)+\epsilon)$, για κάθε $x \in X$, άτοπο αφού το F υποτέθηκε ότι διαχωρίζει τα J_1 και J_2. □

3.2 Ολοκληρωτική Αναπαράσταση

Ορισμός 3.2.1. *Έστω E τοπικά κυρτός και T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος, $X \subseteq E$ κυρτό και συμπαγές και $x \in X$. Αν υπάρχει μέτρο Radon $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ τέτοιο ώστε*

$$f(x) = \int_X f d\mu, \tag{3.2.1}$$

*για κάθε $f \in \mathcal{A}^c(X)$, τότε λέμε ότι το μέτρο μ **αναπαριστά** το σημείο x και ότι το σημείο x είναι το **βαρύκεντρο** του μέτρου μ.*

Η σχέση (3.2.1) ονομάζεται **βαρυκεντρικός τύπος**, ενώ θα συμβολίζουμε το βαρύκεντρο ενός μέτρου μ με $\boldsymbol{r(\mu)}$. Η απεικόνιση $r : \mathcal{M}^1(X) \to X$, με $r : \mu \to r(\mu)$, ονομάζεται **βαρυκεντρική απεικόνιση**.

Παρατήρηση 3.2.2. *Για κάθε $x \in X$, το μέτρο Dirac ϵ_x, είναι ένα μέτρο που το αναπαριστά.*

Απόδειξη. Είδαμε νωρίτερα ότι το μέτρο Dirac είναι μέτρο Radon, άρα αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει ο βαρυκεντρικός τύπος.

$$
\begin{aligned}
\int_X f d\epsilon_x &= \cancelto{0}{\int_{X\setminus\{x\}} f d\epsilon_x} + \int_{\{x\}} f d\epsilon_x \\
&= \int_{\{x\}} f d\epsilon_x \\
&= f(x)\epsilon_x(\{x\}) \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

□

Πρόταση 3.2.3. *Έστω $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ μέτρο Radon. Το μ αναπαριστά το σημείο $x \in X$ αν και μόνο αν:*

$$f(x) = \int_X f d\mu, \quad \text{για κάθε } f \in E^*. \tag{3.2.2}$$

Απόδειξη.

- Αν το μ αναπαριστά το x, τότε ο βαρυκεντρικός τύπος θα ισχύει για κάθε $f \in E^*$, αφού οι περιορισμοί των γραμμικών συναρτησιακών του E στο X είναι γραμμικές συναρτήσεις, άρα και αφφινικές.

- Για το αντίστροφο, έστω ότι $f(x) = \displaystyle\int_X f d\mu$, για κάθε $f \in E^*$ και έστω $h \in \mathcal{A}^c(X)$. Η h συνεχής και το X συμπαγές, άρα υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|h(x)| \leqslant M < \infty$, για κάθε $x \in X$. Από το Λήμμα (3.1.2) υπάρχει ακολουθία $(f_n + \lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$ και $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

  $$f_n + \lambda_n \to h.$$

  Εδώ χρησιμοποιήσαμε ακολουθία και όχι δίκτυο γιατί ο $\mathcal{A}^c(X) \subset \mathcal{C}(X)$ είναι μετρικοποιήσιμος. Η σύγκλιση της $(f_n + \lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην h στον χώρο $\mathcal{C}(X)$ ισοδυναμεί με το ότι $\sup\limits_{x\in X}\{|f_n(x) + \lambda_n - h(x)|\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Άρα για $\epsilon = 1$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in X$, να ισχύει $|f_n(x) + \lambda_n - h(x)| \leqslant 1$. Τότε:

  $$
  \begin{aligned}
  |f_n(x) + \lambda_n| &= |f_n(x) + \lambda_n - h(x) + h(x)| \\
  &\leqslant |f_n(x) + \lambda_n - h(x)| + |h(x)| \\
  &\leqslant 1 + M = M', \quad \text{για κάθε } n \geqslant n_0.
  \end{aligned}
  $$

  Όμως $M' \in L^1$ αφού $\displaystyle\int_X M' d\mu = M'\mu(X) = M' < \infty$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, για τους όρους της ακολουθίας που είναι μεγαλύτεροι του n_0 προκύπτει ότι:

  $$\int_X (f_n + \lambda_n) d\mu \to \int_X h d\mu.$$

Όμως, από υπόθεση, $\int_X f_n + \lambda_n d\mu = f_n(x) + \lambda_n \to h(x)$, για κάθε $x \in X$. Άρα $h(x) = \int_X h d\mu$.

□

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω E τοπικά κυρτός, T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και $X \neq \emptyset$, $X \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό. Τότε κάθε μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ έχει μοναδικό βαρύκεντρο.*

Απόδειξη.

Ύπαρξη (α′ τρόπος):

Έστω $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$.

(i) Αν $\mu \in co\{\epsilon_x : x \in K\}$, τότε $\mu = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \epsilon_{x_j}$, με $r(\mu) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \in X$.

(ii) Στη γενική περίπτωση έχουμε $\mu = \lim_a \mu_a$, με $(x_a)_{a \in A}$ δίκτυο του $co\{\epsilon_x : x \in K\}$. Το δίκτυο $(r(\mu_a))_{a \in A} \subseteq X$ με τον X συμπαγή, άρα υπάρχει $z \in X$ και υποδίκτυο του $(r(\mu_a))_{a \in A}$ με $r(\mu_a) \to z$. Έστω $f \in \mathcal{A}^c(X)$. Τότε:

$$f(z) = \lim_a f(r(\mu_a)) = \lim_a \int_X f d\mu_a = \int_X f d\mu.$$

Ύπαρξη (β′ τρόπος):

Για κάθε $f \in E^*$ θεωρούμε το σύνολο $H_f = \left\{ y \in E : f(y) = \int_X f d\mu \right\}$. Παρατηρούμε ότι $H_f = f^{-1}(\{a\})$, όπου $a = \int_X d\mu \in \mathbb{R}$, δηλαδή το H_f κλειστό υπερεπίπεδο του E. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\left(\bigcap_{f \in E^*} H_f \right) \bigcap X \neq \emptyset$. Επειδή το X είναι συμπαγές και τα H_f κλειστά, αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια $(H_f)_{f \in E^*}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f_1, \ldots, f_n$ γραμμικά συναρτησιακά του E^*.

$$\begin{aligned} T : E &\to \mathbb{R}^n, \quad \text{με} \\ T(y) &= (f_1(y), \ldots, f_n(y)), \quad \text{για κάθε } y \in E. \end{aligned}$$

Η T είναι γραμμική και συνεχής λογω της γραμμικότητας και της συνέχειας των συναρτήσεων $(f_i)_{i=1}^n$. Θέτουμε

$$p = \left(\int_X f_1 d\mu, \ldots, \int_X f_n d\mu \right)$$

και για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα δείξουμε ότι $p \in T(X)$. Έστω ότι $p \notin T(X)$. Το X συμπαγές και κυρτό και η T συνεχής και γραμμική, άρα το $T(X)$ συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επομένως τα p και $T(X)$ διαχωρίζονται.

Έστω $\Lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\Lambda(b) = \langle a, b \rangle$, για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε:

$$\langle a, T(x) \rangle < \lambda \leqslant \langle a, p \rangle, \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Τότε η συνάρτηση $g = \Lambda \circ T$:

$$\begin{aligned} g : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x), \quad \text{για κάθε } x \in E, \end{aligned}$$

είναι γραμμική και συνεχής ως σύνθεση τέτοιων. Άρα $g \in E^*$. Επιπλέον

$$\sup_{x \in X}\{g(x)\} < \lambda \leqslant g(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_X f_i d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_X a_i f_i d\mu = \int_X g d\mu.$$

Όμως

$$\begin{aligned} g(x) &\leqslant \sup_{x \in X}\{g(x)\} && \Rightarrow \\ \int_X g d\mu &\leqslant \int_X \sup_{x \in X}\{g(x)\} d\mu && \Rightarrow \\ \int_X g d\mu &\leqslant \sup_{x \in X}\{g(x)\}, \end{aligned}$$

άτοπο. Άρα $p = \left(\int_X f_1 d\mu, \ldots, \int_X f_n d\mu\right) \in T(X)$ και συνεπώς υπάρχει $x \in X$ με

$$\begin{aligned} T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) &= \left(\int_X f_1 d\mu, \ldots, \int_X f_n d\mu\right) && \Rightarrow \\ f_i(x) &= \int_X f_i d\mu, \quad \text{για κάθε } i = 1 \ldots, n && \Rightarrow \\ x &\in \bigcap_{i=1}^{n} H_{f_i} \neq \varnothing. \end{aligned}$$

Μοναδικότητα:

Έστω $x, y \in X$, $x \neq y$ με $f(x) = f(y) = \int_X f d\mu$, για κάθε $f \in E^*$. Από την Πρόταση (2.2.7) υπάρχει $g \in E^*$ τέτοια ώστε $g(x) \neq g(y)$. Άτοπο. Άρα το βαρύκεντρο είναι μοναδικό.

□

Θεώρημα 3.2.5. ***(Ολοκληρωτικής αναπαράστασης).*** *Έστω E τοπικά κυρτός, T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος, $X \neq \emptyset$, $X \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό και $x \in X$. Τότε υπάρχει μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ με $r(\mu) = x$ και $spt(\mu) \subseteq \overline{extX}$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση (3.2.7) ισχύει ότι αν $K \subseteq E$ συμπαγές και $x \in E$, τότε υπάρχει $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ που το αναπαριστά, αν και μόνο αν το x ανήκει στο $\overline{co}K$.

Εδώ $X \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου. Από Θεώρημα Krein - Milman, $X = \overline{co}(extX) \subseteq \overline{co}(\overline{extX})$. Το $\overline{extX}$ κλειστό υποσύνολο συμπαγούς, άρα συμπαγές. Από την παραπάνω πρόταση υπάρχει μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(\overline{extX})$ τέτοιο ώστε $r(\mu) = x$. Όμως $\mu(\overline{extX}) = 1$, $\mu(\overline{extX^c}) = 0$ και το $\overline{extX}$ κλειστό, άρα $spt\mu \subseteq \overline{extX}$. □

Πρόταση 3.2.6. *Έστω E τοπικά κυρτός, T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και $X \neq \emptyset$, $X \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό. Τότε η βαρυκεντρική απεικόνιση είναι αφφινική και συνεχής.*

Απόδειξη.

Αφφινική:

Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned}
f(r(\mu)) &= \int_X f d\mu, \\
f(r(\nu)) &= \int_X f d\nu, \quad \text{για κάθε } f \in E^*. \\
\lambda f(r(\mu)) + (1-\lambda) f(r(\nu)) &\overset{(\text{αφφινική})}{=} f(\lambda r(\mu) + (1-\lambda) r(\nu)) \\
&= \lambda \int_X f d\mu + (1-\lambda) \int_X f d\nu \\
&= \int_X f d(\lambda\mu + (1-\lambda)\nu).
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι το βαρύκεντρο του μέτρου $\lambda\mu + (1-\lambda)\nu$ είναι το $\lambda r(\mu) + (1-\lambda) r(\nu)$, δηλαδή:

$$r(\lambda\mu + (1-\lambda)\nu) = \lambda r(\mu) + (1-\lambda) r(\nu) \ \text{ και η } r \text{ αφφινική.}$$

Συνεχής:

Έστω $(\mu_a)_{a\in A} \subseteq \mathcal{M}^1(X)$ δίκτυο με $\mu_a \to \mu$. Τότε για κάθε $f \in E^*$ θα ισχύει:

$$f(r(\mu_a)) = \int_X f d\mu_a \to \int_X f d\mu = f(r(\mu)).$$

Άρα το δίκτυο $(r(\mu_a))_{a\in A}$ συγκλίνει ασθενώς. Το σύνολο X είναι συμπαγές, άρα υπάρχει υποδίκτυο του $(r(\mu_a))_{a\in A}$ που συγκλίνει ισχυρώς. Συνεπώς $r(\mu_a) \to r(\mu)$.

□

Πρόταση 3.2.7. *Έστω E τοπικά κυρτός, T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος, $K \subseteq E$ συμπαγές και $x \in E$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $x \in \overline{co}K$,

(ii) υπάρχει μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ που το αναπαριστά.

Απόδειξη.

(i) ⇒ (ii)

Έστω $x \in \overline{co}K$ και δίκτυο $(x_a)_{a\in A} \subseteq coK$ με $x_a \to x$. Γράφουμε κάθε x_a ως κυρτό συνδυασμό σημείων του K:

$$x_a = \sum_{j=1}^{n_a} \lambda_j^a x_j^a, \quad n_a \in \mathbb{N}, \quad \lambda_j^a \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n_a} \lambda_j^a = 1, \quad x_j^a \in K$$

και για κάθε x_a ορίζουμε ένα μέτρο $\mu_a = \sum_{j=1}^{n_a} \lambda_j^a \epsilon_{x_j^a}$ που το αναπαριστά. Επειδή το $\mathcal{M}^1(K)$ είναι συμπαγές, υπάρχει συγκλίνον υποδίκτυο του $(\mu_a)_{a\in A}$, που θα συμβολίζουμε και πάλι με $(\mu_a)_{a\in A}$, με $\mu_a \to \mu$. Το μέτρο μ είναι το ζητούμενο μέτρο που αναπαριστά το x, αφού για κάθε $f \in E^*$:

$$\begin{aligned} f(r(\mu_a)) &= \int_K f d\mu_a \to \int_K f d\mu, \\ f(r(\mu_a)) &= f(x_a) \to f(x) \end{aligned}$$

και από τη μοναδικότητα του ορίου έπεται ότι $f(x) = \int_K f d\mu$.

(ii) ⇒ (i)

Έστω $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ με $r(\mu) = x$. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $x \notin \overline{co}K$. Το $\overline{co}K$ κυρτό και κλειστό, το $\{x\}$ συμπαγές και κυρτό και ο χώρος μας τοπικά κυρτός. Άρα τα δύο αυτά σύνολα διαχωρίζονται. Υπάρχουν $f \in E^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f(x) < \lambda \leqslant f(y), \quad \text{για κάθε } y \in \overline{co}K.$$

Όμως τότε θα είχαμε:

$$f(x) < \lambda \leqslant \int_K f d\mu,$$

άτοπο γιατί το x υποτέθηκε ότι είναι το βαρύκεντρο του μέτρου μ. Άρα $x \in \overline{co}K$.

□

Θεώρημα 3.2.8. ***(Bauer).*** *Έστω E τοπικά κυρτός, T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος, $X \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό και $x \in X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $x \in extX$,

(ii) *το μέτρο Dirac* ϵ_x *είναι το μόνο μέτρο που αναπαριστά το σημείο* x.

Απόδειξη. **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)**

Έστω $x \in extX$ και $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ που το αναπαριστά. Αρκεί να δείξουμε ότι $spt(\mu) = \{x\}$. Έστω ότι υπάρχει $y \in spt(\mu)\backslash\{x\}$ και θεωρούμε V_y κλειστή και κυρτή περιοχή του y με $x \notin V_y$. Τέτοια περιοχή υπάρχει: Ο X συμπαγής και T_2, άρα είναι και T_4, επομένως διαχωρίζει κλειστά από κλειστά. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε V_y ανοικτή περιοχή του y με $x \notin V_y$. Επειδή ο χώρος μας είναι τοπικά κυρτός, μπορούμε να πάρουμε την V_y κλειστή και κυρτή περιοχή του y.

Το $y \in spt(\mu)$, άρα $\mu(U_y) > 0$, για κάθε $U_y \in \mathcal{U}(y)$, άρα $\mu(V_y) > 0$. Αν $\mu(V_y) = 1$, τότε $\mu \in \mathcal{M}^1(V_y)$, με V_y κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς X. Άρα το V_y συμπαγές και από την Πρόταση (3.2.7) θα έχουμε $r(\mu) \in \overline{co}V_y$. Το V_y κλειστό και κυρτό, οπότε $\overline{co}V_y = V_y$ και τελικά $r(\mu) = x \in V_y$, άτοπο. Άρα $0 < \mu(V_y) < 1$.

Θέτουμε $\lambda = \dfrac{1}{\mu(V_y)}\mu|_{V_y}$ και $\nu = \dfrac{1}{\mu(X\backslash V_y)}\mu|_{X\backslash V_y}$. Τα λ και ν ανήκουν στον $\mathcal{M}^1(X)$:

$$\lambda(X) = \frac{1}{\mu(V_y)}\mu|_{V_y}(X) = \frac{1}{\mu(V_y)}\mu(X \cap V_y) = \frac{\mu(V_y)}{\mu(V_y)} = 1.$$

Ομοίως και για το ν. Οπότε, πάλι από την Πρόταση (3.2.7), $r(\lambda) \in V_y \Rightarrow r(\lambda) \neq r(\mu)$. Επιπλέον $\mu = \mu(V_y)\lambda + (1 - \mu(V_y))\nu$, αφού για κάθε $A \subseteq X$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(V_y)\lambda(A) + (1-\mu(V_y))\nu(A) &= \mu(V_y)\frac{\mu(V_y \cap A)}{\mu(V_y)} + (1-\mu(V_y))\frac{\mu(V_y^c \cap A)}{1-\mu(V_y)} \\ &= \mu(V_y \cap A) + \mu(V_y^c \cap A) \\ &= \mu(A).\end{aligned}$$

Για το βαρύκεντρο του μ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} r(\mu) &\overset{\text{(αφφινική)}}{=} \mu(V_y)r(\lambda) + (1-\mu(V_y))r(\nu) \quad \Rightarrow \\ x &= ar(\lambda) + (1-a)r(\nu), \quad a \in (0,1), \quad r(\lambda) \neq x,\end{aligned}$$

άτοπο αφού το x ακραίο σημείο του X.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)**

Έστω $x = ay + (1-a)z$, με $y \neq z \in X$ και $a \in (0,1)$. Θεωρούμε το μέτρο $\mu = a\epsilon_y + (1-a)\epsilon_z$. Προφανώς $r(\mu) = x$ και $spt(\mu) = \{y, z\} \neq \{x\}$. Άρα $\mu \neq \epsilon_x$, άτοπο.

□

Πόρισμα 3.2.9. *Έστω E τοπικά κυρτός, T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και $X \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό. Αν $x \in extX$, τότε η οικογένεια*

$$\{y \in X : f(y) < \lambda\}, \quad f \in E^*, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ με } f(x) < \lambda,$$

αποτελεί βάση περιοχών του x στο X.

Απόδειξη. Έστω U_x ανοικτή περιοχή του x. Το σύνολο $X \backslash U_x$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς X, άρα συμπαγές. Επιπλέον $x \notin \overline{co}(X \backslash U_x)$, αφού, σε αντίθετη περίπτωση, από την Πρόταση (3.2.7) θα υπήρχε μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(X \backslash U_x)$, με $r(\mu) = x$, $\mu(X \backslash U_x) = 1$. Το μέτρο μ επεκτείνεται σε μέτρο $\tilde{\mu}$ ολόκληρο το X έτσι ώστε $\tilde{\mu}(X) = 1$, $r(\tilde{\mu}) = x$. Όμως $x \in extX$ και από το Θεώρημα του Bauer το μόνο μέτρο που αναπαριστά το x είναι το ϵ_x. Για το $\tilde{\mu}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(X \backslash U_x) = 1 \qquad & \Rightarrow \\ spt(\tilde{\mu}) \subseteq X \backslash U_x \qquad & \Rightarrow \\ \tilde{\mu} \neq \epsilon_x. \qquad & \end{aligned}$$

Άρα $x \notin \overline{co}(X \backslash U_x)$.

Το $\{x\}$ συμπαγές και κυρτό, ενώ το $\overline{co}(X \backslash U_x)$ κλειστό και κυρτό, οπότε διαχωρίζονται. Έστω $f \in E^*$ με:

$$f(x) < \lambda \leqslant f(\overline{co}(X \backslash U_x)).$$

Τότε $\{y \in X : f(y) < \lambda\} \subseteq U_x$. □

Θεώρημα 3.2.10. *Έστω E τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος και B υποσύνολο του E τέτοιο ώστε το $X = \overline{co}B$ να είναι συμπαγές. Τότε $extX \subseteq \overline{B}$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in extX \backslash \overline{B}$. Το $\overline{B}$ κλειστό, άρα και συμπαγές, υποσύνολο του συμπαγούς X, ενώ το $\{x\}$ συμπαγές και κυρτό. Από διαχωριστικό θεώρημα, υπάρχει $f \in E^*$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x) > \lambda &\geqslant f(y), \quad \forall y \in \overline{B}, \quad \text{άρα} \\ f(x) > \lambda &\geqslant f(y), \quad \forall y \in \overline{co}B, \end{aligned}$$

αφού η f γραμμική. Όμως τότε έπεται ότι $x \notin \overline{co}B = X$, άτοπο. Άρα $extX \subseteq \overline{B}$. □

Πρόταση 3.2.11. *Έστω E τοπικά κυρτός, T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και $X \subseteq E$ συμπαγές, κυρτό και μετρικοποιήσιμο. Τότε το X είναι αφφινικά ισομορφικό με κάποιο συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του ℓ^2.*

Απόδειξη. Αφού ο X είναι T_2, μετρικοποιήσιμος και συμπαγής, ο $\mathcal{C}(X)$ θα είναι διαχωρίσιμος από το Θεώρημα (2.4.41). Έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πυκνό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{A}^c(X)$. Ορίζουμε $T : X \to \ell^2$, με

$$T(x) = \left(\frac{f_n(x)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Η T είναι:

Αφφινική:

Έστω $x,\, y \in X,\, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \left(\frac{f_n(\lambda x + (1-\lambda)y)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \left(\frac{\lambda f_n(x) + (1-\lambda)f_n(y)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \lambda\left(\frac{f_n(x)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} + (1-\lambda)\left(\frac{f_n(y)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y). \end{aligned}$$

Ένα προς ένα:

Έστω $x,\, y \in X$,

$$\begin{aligned} T(x) &= T(y) && \Rightarrow \\ \left(\frac{f_n(x)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} &= \left(\frac{f_n(y)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} && \Rightarrow \\ \frac{f_n(x)}{n} &= \frac{f_n(y)}{n}, \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N} && \Rightarrow \\ f_n(x) &= f_n(y), \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N} && \Rightarrow \\ h(x) &= h(y), \text{ για κάθε } h\in B_{\mathcal{A}^c}(X) && \Rightarrow \\ x &= y, \end{aligned}$$

με την προτελευταία συνεπαγωγή να ισχύει επειδή η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πυκνή στη μοναδιαία μπάλα των αφφινικών συναρτήσεων και η τελευταία επειδή ο χώρος είναι τοπικά κυρτός και συνεπώς διαχωρίζει τα σημεία.

Από τη συμπάγεια του X και τη συνέχεια της T προκύπτει ότι $T(X) \subseteq \ell^2$ συμπαγές, ενώ από την κυρτότητα του X και το ότι η T είναι αφφινική, προκύπτει ότι το $T(X)$ θα είναι κυρτό. Επιπλέον η T είναι αμφισυνεχής από την Πρόταση (2.2.11). Άρα ο X αφφινικά ισομορφικός με το συμπαγές και κυρτό υποσύνολο $T(X)$ του ℓ^2. $\square$

3.3 Εκτεθειμένα Σημεία

Ορισμός 3.3.1. *Έστω X συμπαγές και κυρτό σύνολο ενός τοπολογικού γραμμικού χώρου. Το σημείο $x \in X$ ονομάζεται **εκτεθειμένο σημείο** του X αν υπάρχει $h \in \mathcal{A}^c(X)$, τέτοια ώστε $h(x) > h(y)$, για κάθε $y \in X\backslash\{x\}$. Τότε λέμε ότι η h **εκθέτει** το σημείο x στο X.*

*Αν επιπλέον για κάθε δίκτυο $(x_a)_{a\in A}$ του X με $h(x_a) \to h(x)$, συνεπάγεται ότι $x_a \to x$, τότε το x ονομάζεται **ισχυρά εκτεθειμένο σημείο** του X και λέμε ότι η h **εκθέτει ισχυρά** το σημείο x στο X.*

Θα συμβολίζουμε με $\boldsymbol{exp(X)}$ το σύνολο των εκτεθειμένων σημείων του συνόλου X και με $\boldsymbol{sep(X)}$ το σύνολο των ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του.

Λήμμα 3.3.2. *Αν H χώρος Hilbert και $B_H = \{x \in X : ||x|| \leqslant 1\}$ η μοναδιαία μπάλα του, τότε κάθε σημείο της μοναδιαίας σφαίρας, δηλ. του συνόρου της B_H, είναι και ισχυρά εκτεθειμένο σημείο της B_H:*

$$S_H \subseteq sep(B_H).$$

και το συναρτησιακό που εκθέτει το $x_0 \in S_H$ είναι το $f(y) = \langle x_0, y\rangle$, για κάθε $y \in H$.

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in S_H$ και θεωρούμε το συναρτησιακό $f(y) = \langle x_0, y\rangle$, για κάθε $y \in B_H$. $f(x_0) = \langle x_0, x_0\rangle = ||x_0||^2 = 1$. Επιπλέον, από ανισότητα Cauch - Schwarz $|f(y)| = \langle x_0, y\rangle \leqslant ||x_0|| \cdot ||y|| \leqslant ||y||$. Έστω $y \neq x_0$. Αν $f(y) = 1$, τότε αναγκαστικά $y \in S_H$ λόγω της προηγούμενης ανισότητας. Άρα:

$$\begin{aligned} \langle x_0, y\rangle = \langle x_0, x_0\rangle = 1 & \qquad \Rightarrow \\ \langle x_0, y - x_0\rangle = 0 & \qquad \Rightarrow \\ x_0 \perp y - x_0. & \end{aligned}$$

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\begin{aligned} ||x_0 + y - x_0||^2 &= ||x_0||^2 + ||y - x_0||^2 && \Rightarrow \\ ||y||^2 - ||x_0||^2 &= ||y - x_0||^2 && \\ &= ||y||^2 + ||x_0||^2 - 2\langle x_0, y\rangle && \\ &= 0 && \Rightarrow \\ ||y - x_0||^2 &= 0 && \Rightarrow \\ ||y - x_0|| &= 0 && \Rightarrow \\ y &= x_0, \text{ άτοπο.} && \end{aligned}$$

Άρα $f(y) = \langle x_0, y\rangle < f(x_0)$, για κάθε $y \neq x_0$ στο B_H και συνεπώς η f εκθέτει το σημείο x_0.

Για να δείξουμε ότι το f εκθέτει ισχυρά το x_0 θεωρούμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_H$, με $f(x_n) = \langle x_n, x_0\rangle \to \langle x_0, x_0\rangle$. Από ανισότητα Cauch - Schwarz, $|\langle x_n, x_0\rangle| \leqslant ||x_n|| \cdot ||x_0|| \leqslant ||x_0||$ και $\langle x_n, x_0\rangle \to \langle x_0, x_0\rangle = 1$. Άρα $||x_n|| \to 1$ και

$$||x_n - x_0||^2 = ||x_n||^2 + ||x_0||^2 - 2\langle x_0, x_n\rangle \to 0,$$

άρα $x_n \to x_0$. □

Πόρισμα 3.3.3. *Αν H χώρος Hilbert και $B(a, r)$ η μπάλα με κέντρο a και ακτίνα r. Τότε κάθε συνοριακό σημείο της $B(a, r)$ είναι ισχυρά εκτεθειμένο σημείο της. Επιπλέον, το συναρτησιακό f που εκθέτει το σημείο $c \in S(a, r)$ είναι το $f(c') = \langle c', c - a\rangle$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $c' \in B(a,r)$ το διάνυσμα $c' - a$ ανήκει στην $B(0,r)$. Έστω $c \in S(a,r)$ και $c' \in B(a,r)$, $c' \neq c$. Τότε $c - a \in S_H(r)$ και $c' - a \in B_H(r)$. Επομένως, από προηγούμενη πρόταση, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \langle c' - a, c - a \rangle &< \langle c - a, c - a \rangle \qquad \Rightarrow \\ \langle c', c - a \rangle &< \langle c, c - a \rangle \end{aligned}$$

και συνεπώς το συναρτησιακό $f(c') = \langle c', c - a \rangle$ εκθέτει το c. Ακριβώς όπως και προηγουμένως μπορούμε να δείξουμε ότι το f εκθέτει το c ισχυρά □

Πόρισμα 3.3.4. *Αν H χώρος Hilbert και $C \subseteq H$ μη κενό και κυρτό. Τότε κάθε απώτατο σημείο του C είναι και ισχυρά εκτεθειμένο σημείο του:*

$$far(C) \subseteq sep(C).$$

Απόδειξη. Έστω $c \in C$ απώτατο σημείο του C και έστω $a \in H$ τέτοιο ώστε:

$$d(a, C) = \sup\{||a - t|| : t \in C\} = ||a - c|| = r.$$

Θεωρούμε την μπάλα κέντρου a και ακτίνας r, $B(a,r)$. Τότε το $c \in S(a,r)$ και από προηγούμενη πρόταση είναι ισχυρά εκτεθειμένο σημεί ο της $B(a,r)$. Όμως $C \subseteq B(a,r)$, καθώς το c είναι το απώτατο σημείο του C για το κέντρο a της σφαίρας. Αν f το συναρτησιακό που εκθέτει ισχυρά το c, θα έχουμε $f(c) > f(x)$ για κάθε $x \in B(a,r)$, άρα $f(c) > f(x)$ για κάθε $x \in C$ και το συναρτησιακό f εκθέτει το c ισχυρά στο σύνολο C. □

Λήμμα 3.3.5. *Αν X πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος, $\emptyset \neq C \subseteq X$ κλειστό και κυρτό, $c \in C$ και $f \in X^*$, τότε η f εκθέτει το σημείο c στο C αν και μόνο αν το εκθέτει ισχυρά.*

Θεώρημα 3.3.6. ***(Straszewicz)**. Έστω X πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος και $\emptyset \neq C \subseteq X$ κλειστό και κυρτό. Τότε:*

$$\overline{exp}C = \overline{sep}C = extC.$$

Πρόταση 3.3.7. *Έστω H χώρος Hilbert και $\emptyset \neq X \subseteq H$ συμπαγές και κυρτό. Τότε*

$$X = \overline{co}farX = \overline{co}expX.$$

Πρόταση 3.3.8. *Έστω E τοπικά κυρτός, T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και $X \subseteq E$ συμπαγές, κυρτό και μετρικοποιήσιμο. Τότε $X = \overline{co}expX$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση (3.2.11) το X είναι αφφινικά ομοιομορφικό με κάποιο συμπαγές και κυρτό υποσύνολο Y του ℓ^2, μέσω μιας απεικόνισης T.

Θα δείξουμε ότι $T(expX) = expY$. Έστω $T(x_0) \in expY$ και $g \in \mathcal{A}^c(Y)$ συνάρτηση που εκθέτει το $T(x_0)$, δηλαδή $g(T(x_0)) > g(T(x))$, για κάθε $x \in X \backslash \{x_0\}$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$

με $f(x) = g(T(x))$, για κάθε $x \in X$. Η f συνεχής ως σύνθεση συνεχών και αφφινική ως σύνθεση αφφινικών:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= g(T(\lambda x + (1-\lambda)y)) \\ &= g(\lambda T(x) + (1-\lambda)T(y)) \\ &= \lambda g(T(x)) + (1-\lambda)g(T(y)) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \end{aligned}$$

άρα $f \in \mathcal{A}^c(X)$. Επιπλέον $f(x) = g(T(x)) < g(T(x_0)) = f(x_0)$, για κάθε $x \in X\backslash\{x_0\}$ και συνεπώς η f εκθέτει το σημείο x_0. Ο αντίστροφος εγκλεισμός δείχνεται με όμοιο τόπο χρησιμοποιώντας την T^{-1}.

Ο ℓ^2 είναι χώρος Hilbert και το Y συμπαγές και κυρτό υποσύνολό του, οπότε, από την Πρόταση (3.3.7), θα ισχύει $Y = \overline{co}expY$ και επειδή ο X αφφινικά ομομορφικός με τον Y, συμπεραίνουμε ότι $X = \overline{co}expX$. □

3.4 Ακραία Δομή

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι E τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος και $X \subseteq E$ κυρτό και συμπαγές.

Λήμμα 3.4.1. *Έστω $F \subseteq X$. Το F ακραίο αν και μόνο αν*

$$\bigcup_{\lambda \geqslant 1} (\lambda F - (\lambda - 1)X) \cap X.$$

Απόδειξη. $\Rightarrow$

Έστω $F \subseteq X$ ακραίο και $z \in X \cap (\lambda F - (\lambda - 1)X)$. Τότε

$$\begin{aligned} z = x = \lambda f - (\lambda - 1)y \quad &\Rightarrow \\ f = \frac{1}{\lambda}x + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) y \ &\in F, \end{aligned}$$

άρα $x, y \in F$.

$\Leftarrow$

Έστω $x, y \in X$ με $\lambda x + (1-\lambda)y = f \in F$. Τότε

$$x = \frac{1}{\lambda}f - \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \in X \cap (\lambda F - (\lambda - 1)X).$$

□

Πρόταση 3.4.2. *Έστω $F \subseteq X$. Τότε:*

(i) $F \cap extX \subset extF$,

(ii) αν επιπλέον το F ακραίο, τότε $F \cap extX = extF$.

Απόδειξη.

(i) Έστω $x \in F \cap extX$ και $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ με $\lambda \in (0,1)$ και $z,\ y \in F$. Τότε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ με $\lambda \in (0,1)$ και $z,\ y \in X$ και καθώς $x \in extX$ έπεται ότι $y = z$. Άρα $x \in extF$.

(ii) Έστω $x \in extF \subseteq F$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x \in extX$. Έστω $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ με $\lambda \in (0,1)$ και $z,\ y \in X$. Το x ανήκει στο F με το F ακραίο υποσύνολο του X, επομένως $y,\ z \in F$. Άρα

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z, \ \text{ με } \lambda \in (0,1) \ \text{ και } \ z, y \in F.$$

Όμως $x \in extF \ \Rightarrow y = z$ και τελικά $x \in extX$.

□

Πρόταση 3.4.3. *Έστω $F \subseteq X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το F ακραίο,

(ii) η χαρακτηριστική συνάρτηση I_F είναι κυρτή,

(iii) το F γράφεται σαν ένωση από έδρες.

Απόδειξη.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Έστω ότι το F ακραίο.

- Αν $x,\ y \in F$, τότε $I_F(x) = I_F(y) = 1$,

$$\begin{aligned} \lambda I_F(x) + (1-\lambda) I_F(y) &= \lambda + (1-\lambda) = 1, \ \text{ ενώ} \\ I_F(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leqslant 1 = \lambda I_F(x) + (1-\lambda) I_F(y), \end{aligned}$$

  άρα η I_F κυρτή.

- Αν $x,\ y \notin F$, τότε $I_F(x) = I_F(y) = 0$ και επιπλέον $I_F(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε

$$\begin{array}{lll} I_F(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1 & & \Rightarrow \\ \lambda x + (1-\lambda)y \in F & \text{και επειδή } F \text{ ακραίο} & \Rightarrow \\ x \in F \ \text{ και } \ y \in F & & \Rightarrow \\ I_F(x) = 1 \ \text{ και } \ I_F(y) = 1, \ \text{ άτοπο.} & & \end{array}$$

  Άρα $I_F(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0 \leqslant \lambda I_F(x) + (1-\lambda) I_F(y) = 0$ και η I_F κυρτή.

- $x \in F$, $y \notin F$, τότε $I_F(x) = 1$, $I_F(y) = 0$ και η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με τη δεύτερη περίπτωση.

(ii) ⇒ (i)

Έστω ότι η I_F κυρτή και $z \in F$ με $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in (0,1)$, $x, y \in X$.

$$\begin{aligned} I_F(z) = I_F(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leqslant \lambda I_F(x) + (1-\lambda)I_F(y) \qquad \Rightarrow \\ 1 = I_F(z) &\leqslant \lambda I_F(x) + (1-\lambda)I_F(y). \end{aligned}$$

Άρα $I_F(x) = I_F(y) = 1$, δηλαδή $x, y \in F$ και επομένως το F ακραίο.

□

Πρόταση 3.4.4. *Έστω $F \subseteq X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το F κλειστό και ακραίο σύνολο,

(ii) η χαρακτηριστική συνάρτηση I_F είναι κυρτή και άνω ημισυνεχής,

(iii) υπάρχει θετική, κοίλη και κάτω ημισυνεχής συνάρτηση f στο X τέτοια ώστε:

$$F = \{x \in X : f(x) = 0\},$$

(iv) το F κλειστό και για κάθε $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ με $r(\mu) \in F$, συνεπάγεται ότι $spt(\mu) \subseteq F$,

(v) το F είναι κλειστό και μπορεί να γραφεί σαν ένωση από έδρες,

(vi) το F είναι κλειστό και μπορεί να γραφεί σαν ένωση από κλειστές έδρες.

Απόδειξη. **(i) ⇔ (ii)**

Θα δείξουμε ότι το F κλειστό αν και μόνο αν η I_F άνω ημισυνεχής. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$A_a = \{x \in X : I_F(x) < a\} = \begin{cases} \varnothing & \text{για } a \leqslant 0 \\ F^c & \text{για } 0 < a < 1 \\ X & \text{για } a \geqslant 1. \end{cases}$$

Άρα A_a ανοικτό για κάθε $a \in \mathbb{R} \iff F^c$ ανοικτό $\iff F$ κλειστό. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι F ακραίο αν και μόνο αν η I_F κυρτή, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη.

(ii) ⇔ (iii)

Θέτουμε $f(x) = -I_F(x) + 1 = I_{F^c}(x)$. Η f κοίλη και κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν η I_F είναι κυρτή και άνω ημισυνεχής.

(i) ⇒ (iv)

Έστω F κλειστό και ακραίο και $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ με $r(\mu) \in F$. Έστω ότι $spt(\mu) \nsubseteq F$, τότε υπάρχει $C \subset X \backslash F$ κλειστό και κυρτό με $\mu(C) > 0$:

Ο X συμπαγής και T_2, άρα είναι και T_4. Επομένως διαχωρίζει κλειστά από κλειστά. Αν $x \in spt(\mu) \backslash F$ τότε τα F και x διαχωρίζονται. Έστω U_x περιοχή του x με $U_x \cap F = \emptyset$. Ο χώρος μας είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος, επομένως έχει μια βάση από κλειστά και κυρτά. Άρα υπάρχει $V_x \subseteq U_x$ κλειστή και κυρτή περιοχή του x με $\mu(V_x) > 0$. Επίσης $\mu(C) < 1$ γιατί διαφορετικά:

$$\begin{aligned} f(r(\mu)) &= \int_X f d\mu \\ &= \int_C f d\mu + \cancel{\int_{X\backslash C} f d\mu} \\ &= \int_C f d\mu|_C, \end{aligned}$$

δηλαδή $r(\mu) = r(\mu|_C) \notin F$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{\mu(C)} \mu|_C, \\ \lambda &= \frac{1}{1-\mu(C)} \mu|_{X\backslash C}. \end{aligned}$$

Τότε $r(\mu) = \mu(C)r(\nu) + (1-\mu(C))r(\lambda) \in F$ και επειδή το F ακραίο θα έχουμε $r(\nu)$, $r(\lambda) \in F$, άτοπο.

(iv) ⇒ (i)

Έστω F κλειστό και $x \in F$ με $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, y, $z \in X$, $\lambda \in (0,1)$. Το μέτρο $\mu = \lambda \epsilon_y + (1-\lambda)\epsilon_z$ αναπαριστά το σημείο $x \in F$ και συνεπώς $spt(\mu) = \{y, z\} \subseteq F$, πράγμα που δείχνει ότι το F ακραίο.

(vi) ⇒ (v)

Προφανές.

(i) ⇒ (vi)

Έστω F κλειστό και ακραίο υποσύνολο του X και $x \in X$. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων,

$$\mathcal{F} = \{C \subseteq F : x \in C,\ C \text{ κυρτό}\},$$

μερικά διατεταγμένη με τον εγκλεισμό $\subseteq$. Έστω $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ αλυσίδα του $\mathcal{F}$. Τότε το σύνολο $C = \bigcup_{i\in I} C_i$, είναι κυρτό ως ένωση κυρτών συνόλων, ενώ $x \in C$ αφού $x \in C_i$, για κάθε $i \in I$. Άρα το C είναι στοιχείο της $\mathcal{F}$. Επιπλέον $C_i \subseteq C$ για κάθε $C_i \in \mathcal{C}$, δηλαδή το C άνω φράγμα της αλυσίδας $\mathcal{C}$. Από το Λήμμα του Zorn η $\mathcal{F}$ έχει μεγιστικό στοιχείο C.

Το σύνολο C είναι κλειστό αφού $C \subseteq \overline{C} \subseteq F$, με F κλειστό και C μεγιστικό κυρτό υποσύνολο του F. Άρα $C = \overline{C}$. Επίσης είναι κυρτό από τον ορισμό του. Άρα για να δείξουμε ότι το C είναι έδρα, απομένει να δείξουμε ότι είναι ακραίο.

Έστω a, $b \in X$, $\lambda \in (0,1)$, με $z = \lambda a + (1-\lambda)b \in C$ και θα δείξουμε ότι a, β$\in F$. Θέτουμε $D = co\{C, a, b\}$. Το D είναι υποσύνολο του F:

Έστω $d \in D$, τότε το d γράφεται στη μορφή:

$$d = \lambda_1(\lambda_2 a + (1-\lambda_1)b) + (1-\lambda_1)c,$$

για κατάλληλα λ_1, $\lambda_2 \in [0,1]$ και $c \in C$. Αν $\lambda_1 = 0$, τότε $d = c \in C \subseteq F$. Αν $\lambda_1 = 1$, τότε $d = \lambda_2 a + (1-\lambda_1)b$, με $\lambda a + (1-\lambda)b \in C \subseteq F$ και F ακραίο, άρα a, $b \in F$ και $d \in F$. Αν $\lambda_1 \in (0,1)$, τότε:

$$\begin{aligned}
d &= \lambda_1(\lambda_2 a + (1-\lambda_1)b) + (1-\lambda_1)c && \Rightarrow \\
\frac{\lambda d}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)} &= \frac{\lambda\lambda_1\lambda_2 a}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)} + \frac{\lambda\lambda_1(1-\lambda_2)b}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)} \\
&\quad + \frac{\lambda(1-\lambda_1)c}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)} && \Rightarrow \\
\frac{\lambda d}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)} &= \frac{\lambda\lambda_1\lambda_2 a}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)} + \frac{(1-\lambda)\lambda_1\lambda_2 b}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)} \\
&\quad + \frac{\lambda_1 b(\lambda - \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)} + \frac{\lambda(1-\lambda_1)c}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)}
\end{aligned}$$

και θέτοντας

$$k = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)}, \quad l = \frac{\lambda}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda(1-\lambda_1)},$$

παίρνουμε

$$ld + (1-l)b = kz + (1-k)c \in C \subseteq F.$$

Όμως F ακραίο, οπότε $d \in F$. Άρα $D \subseteq F$, κυρτό με $x \in D$, $C \subseteq D$ και λόγω του ότι το C υποτέθηκε μεγιστικό στοιχείο, έπεται ότι $C = D \subseteq F$. Δείξαμε ότι για κάθε $x \in F$, υπάρχει $C_x \subseteq F$ κλειστή έδρα του F με $x \in C_x$. Άρα $F = \bigcup_{x \in F} C_x$.

□

3.4.1 Μετρικά κυρτά σύνολα

Σε όλη αυτή την παράγραφο θεωρούμε E έναν τοπικά κυρτό, T_2 τοπολογικό γραμμικό χώρο και $X \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό.

Τα μετρικά κυρτά σύνολα διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία Choquet, καθώς πρόκειται για σύνολα που περιέχουν το βαρύκεντρο οποιουδήποτε μέτρου το οποίο φέρουν. Τέτοια σύνολα είναι, όπως έχουμε ήδη δει, τα συμπαγή.

Ορισμός 3.4.5. *Έστω $A \subseteq X$ καθολικά μετρήσιμο. Το A ονομάζεται **μετρικά κυρτό** (measure convex) αν για κάθε μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ που φέρεται από το A, έπεται ότι $r(\mu) \in A$.*

Πρόταση 3.4.6. *Έστω $A \subseteq X$ μετρικά κυρτό. Τότε το A κυρτό.*

Απόδειξη. Έστω $x,\ y \in A$, $\lambda \in (0,1)$ και $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Θεωρούμε το μέτρο $\mu = \lambda\epsilon_x + (1-\lambda)\epsilon_y$. Τότε $spt(\mu) = \{x,y\}$ και συνεπώς το μ φέρεται από το σύνολο A. Αφού το A μετρικά κυρτό θα πρέπει $r(\mu) = z \in A$, άρα το F κυρτό. □

Πρόταση 3.4.7. *Έστω $F \subseteq X$ κυρτό και κλειστό. Τότε το F μετρικά κυρτό.*

Απόδειξη. Έστω μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ που φέρεται από το F. Το F κλειστό υποσύνολο συμπαγούς, άρα συμπαγές. Επιπλέον, $\mu(F) = 1$, δηλαδή $\mu \in \mathcal{M}^1(F)$. Από την Πρόταση (3.2.7) θα πρέπει $r(\mu) \in \overline{co}F$. Όμως το F κλειστό και κυρτό, οπότε $r(\mu) \in \overline{co}F = F$ και το F είναι μετρικά κυρτό. □

Πρόταση 3.4.8. *Έστω $A \subseteq X$ καθολικά μετρήσιμο. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το A μετρικά κυρτό,

(ii) για κάθε $K \subseteq A$ συμπαγές, έπεται ότι $\overline{co}K \subseteq A$.

Απόδειξη. **(i) $\Rightarrow$ (ii)**

Έστω A μετρικά κυρτό, $K \subseteq A$ συμπαγές και $x \in \overline{co}K$. Από την Πρόταση (3.2.7) υπάρχει μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ με $r(\mu) = x$. Όμως το μ φέρεται από το A, οπότε από υπόθεση $r(\mu) = x \in A$. Άρα $\overline{co}K \subseteq A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

(βλ. [Luk, σελ. 31-32]).

□

Πρόταση 3.4.9. *Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό και κυρτό. Τότε το U είναι μετρικά κυρτό.*

Πρόταση 3.4.10. *Έστω $(A_i)_{i\in I}$ οικογένεια μετρικά κυρτών υποσυνόλων του X. Τότε το $A = \bigcap_{i\in I} A_i$, είναι μετρικά κυρτό.*

Απόδειξη. Έστω $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ με $spt(\mu) \subseteq A \subseteq A_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε $r(\mu) \in A_i$ για κάθε $i \in I$, άρα $r(\mu) \in \bigcap_{i\in I} A_i = A$. □

Πρόταση 3.4.11. *Έστω $(E_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπικά κυρτών χώρων και $E = \prod_{i\in I} E_i$. Αν για κάθε $i \in I$ το $A_i \subseteq E_i$ είναι μετρικά κυρτό, τότε το $A = \prod_{i\in I} A_i$ είναι μετρικά κυρτό υποσύνολο του E.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο χαρακτηρισμό της Πρότασης (3.4.8). Έστω $K = \prod_{i\in I} K_i \subseteq A$ συμπαγές. Τότε τα K_i συμπαγή υποσύνολα των A_i για κάθε $i \in I$ με τα A_i μετρικά κυρτά. Άρα $\overline{co}K_i \subseteq A_i$, για κάθε $i \in I$ και $\prod_{i\in I} \overline{co}K_i \subseteq A$. Επομένως $\overline{co}K \subseteq A$ και το A μετρικά κυρτό. □

Πρόταση 3.4.12. *Έστω E χώρος πεπερασμένης διάστασης, $X \subseteq E$ και A καθολικά μετρήσιμο υποσύνολο του X. Αν το A είναι κυρτό, τότε είναι και μετρικά κυρτό.*

3.4.2 Μετρικά ακραία σύνολα

Ορισμός 3.4.13. *Έστω $A \subseteq X$ καθολικά μετρήσιμο. Το A ονομάζεται* ***μετρικά ακραίο*** *(measure extremal) αν για κάθε μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ με $r(\mu) \in A$, έπεται ότι το μ φέρεται από το A, δηλαδή $\mu(A^c) = 0$.*

Πρόταση 3.4.14. *Έστω $A \subseteq X$ καθολικά μετρήσιμο και μετρικά ακραίο. Τότε το A ακραίο υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Θεωρούμε x, $y \in X$, $\lambda \in (0,1)$, τέτοια ώστε $x = \lambda x + (1-\lambda)y \in A$. Για το μέτρο $\mu = \lambda\epsilon_x + (1-\lambda)\epsilon_y$ ισχύουν: $r(\mu) = \lambda x + (1-\lambda)y \in A$, $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$. Αφού το A είναι μετρικά κυρτό θα έχουμε ότι $\mu(A^c) = 0$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
1 = \mu(A) = \lambda\epsilon_x(A) + (1-\lambda)\epsilon_y(A) & \qquad \Rightarrow \\
\epsilon_x(A) = \epsilon_y(A) = 1 & \qquad \Rightarrow \\
x, y \in A, &
\end{aligned}$$

άρα το A ακραίο.

□

Πρόταση 3.4.15. *Έστω $A \subseteq X$ κλειστό και ακραίο. Τότε το A μετρικά ακραίο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε A κλειστό και ακραίο και $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ με $r(\mu) \in A$. Από την Πρόταση (3.4.4) γνωρίζουμε ότι θα πρέπει $spt(\mu) \subseteq A$. Το A κλειστό, άρα $\mu(A) = 1$ και συνεπώς το μέτρο μ φέρεται από το A. □

Πρόταση 3.4.16. *Έστω $A \subseteq X$ καθολικά μετρήσιμο. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το A μετρικά ακραίο,

(ii) το $X \backslash A$ μετρικά κυρτό.

3.5 Η Διάταξη Choquet

Η διάταξη Choquet παρέχει έναν τρόπο καθορισμού του πόσο κοντά στο σύνορο είναι συγκεντρωμένη η μάζα ενός μέτρου. Πιο συγκεκριμένα, αν για δύο μέτρα του K, μ και ν ισχύει ότι $\mu \prec \nu$, τότε η μάζα του ν, σε σχέση με αυτή του μ, απομακρύνεται από το κοινό τους βαρύκεντρο και πλησιάζει προς το σύνορο του K.

Υπενθυμίζεται ότι συμβολίζουμε με $\mathcal{K}^c(X)$ το σύνολο των κυρτών, συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το X.

Ορισμός 3.5.1. *Αν $\mu \in \mathcal{M}(K)$ με $\mu(K) = 0$ και $r(\mu) = 0$, τότε το μ ονομάζεται* ***γενικευμένη αφφινική εξάρτηση*** *(generalized affine dependence) στο K. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{N}(K)$ τον υπόχωρο του $\mathcal{M}(K)$ που περιέχει τις γενικευμένες αφφινικές εξαρτήσεις του K:*

$$\mathcal{N}(K) = \{\mu \in \mathcal{M}(K) : \mu(K) = 0 \quad \text{και} \quad r(\mu) = 0\}.$$

Παρατήρηση 3.5.2. *Ο χώρος $\mathcal{N}(K)$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{M}(K)$ ως εξής: Αν $\mu, \nu \in \mathcal{M}(K)$, τότε ορίζουμε*

$$\begin{aligned} \mu \sim \nu \quad &\iff \quad \mu - \nu \in \mathcal{N}(K) \\ &\iff \quad \mu(K) = \nu(K) \ \text{ και } \ r(\mu) = r(\nu). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε μια σχέση διάταξης $\prec$ στο χώρο $\mathcal{M}(K)$, με:

$$\mu \prec \nu \iff \int_K f d\mu \leqslant \int_K f d\nu, \quad \forall f \in \mathcal{K}^c(K). \tag{3.5.1}$$

Πρόταση 3.5.3. *Η σχέση (3.5.1) ορίζει όντως μία μερική διάταξη στο σύνολο $\mathcal{M}(K)$. Η διάταξη αυτή ονομάζεται* ***διάταξη Choquet****[*].

Απόδειξη. Η σχέση $\prec$ είναι:

Αυτοπαθής : Ισχύει ότι $\displaystyle\int_K f d\mu \leqslant \int_K f d\mu$, για κάθε $f \in \mathcal{K}^c(K)$, δηλαδή $\mu \prec \mu$.

Μεταβατική : Αν $\mu \prec \nu$ και $\nu \prec \lambda$, τότε $\displaystyle\int_K f d\mu \leqslant \int_K f d\nu \leqslant \int_K f d\lambda$, για κάθε $f \in \mathcal{K}^c(K)$, δηλαδή $\mu \prec \lambda$.

Αντισυμμετρική : Αν $\mu \prec \nu$ και $\nu \prec \mu$, τότε προκύπτει ότι $\displaystyle\int_K f d\mu = \int_K f d\nu$, για κάθε $f \in \mathcal{K}^c(K)$. Έστω $f \in C(K)$. Γνωρίζουμε ότι το $\mathcal{K}^c(K) - \mathcal{K}^c(K)$ είναι πυκνό στον $C(K)$, επομένως υπάρχει ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $f_n = p_n - q_n$, με p_n, $q_n \in \mathcal{K}^c(K)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η f_n να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

$$\begin{aligned} \int_K f_n d\mu &= \int_K (p_n - q_n) d\mu \\ &= \int_K p_n d\mu - \int_K q_n d\mu \\ &= \int_K p_n d\nu - \int_K q_n d\nu \\ &= \int_K (p_n - q_n) d\nu \\ &= \int_K f_n d\nu, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

[*] Παρά την ονομασία της, η εν λόγω διάταξη είχε ήδη χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση στατιστικών δεδομένων από προγενέστερους του Choquet, όπως οι Hardy, Littlewood, Polya που την εφάρμοσαν σε μονοδιάστατους χώρους και οι Blakwell, Stein και Sherman που την εφάρμοσαν σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Ο Choquet ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τη διάταξη αυτή στη θεωρία ολοκληρωτικής αναπαράστασης.

Από Θεώρημα Ομοιόμορφης Σύγκλισης $\int_K f_n d\mu \to \int_K f d\mu$ και $\int_K f_n d\nu \to \int_K f d\nu$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\int_K f d\mu = \int_K f d\nu$, για κάθε $f \in C(K)$, δηλαδή $\mu = \nu$.

□

Παρατήρηση 3.5.4. *Αν $h \in \mathcal{A}^c(K) \subseteq \mathcal{K}^c(K)$, τότε η σχέση $\mu \prec \nu$ συνεπάγεται ότι $\int_K h d\mu \leqslant \int_K h d\nu$. Όμως $-h \in \mathcal{A}^c(K)$, από το οποίο προκύπτει ότι $\int_K h d\mu \geqslant \int_K h d\nu$ και τελικά*

$$\int_K h d\mu = \int_K h d\nu, \quad \text{για κάθε } h \in \mathcal{A}^c(K). \tag{3.5.2}$$

- *Για $h = 1$, $\mu \prec \nu \Rightarrow \mu(K) = \nu(K)$.*
- *Για $h = x$, $\mu \prec \nu \Rightarrow \int_K x d\mu = \int_K x d\nu \Rightarrow r(\mu) = r(\nu)$.*

Επομένως, αν τα μέτρα μ και ν είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους με τη διάταξη Choquet, τότε να πρέπει να ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας ως προς $\mathcal{N}(K)$.

Αν E διανυσματικός χώρος και $X \subseteq E$ συμβολίζουμε με $\mathcal{A}^c(X; E)$ το σύνολο των συνεχών αφφινικών συναρτήσεων του E περιορισμένων στο X.

Ορισμός 3.5.5. *Έστω K συμπαγές και κυρτό σύνολο, X υποσύνολο του K με $extK \subseteq X \subseteq K$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.*

*Αν $f : X \to [\lambda, +\infty]$ συνάρτηση, τότε ορίζουμε ως **κάτω φάκελο** (lower envelope) της $f(x)$ τη συνάρτηση:*

$$\check{f}(x) = \sup\{a(x) : a \in \mathcal{A}^c(K; E) \text{ και } a(y) \leqslant f(y), \text{ για κάθε } y \in X\}, \ \forall x \in K. \tag{3.5.3}$$

*Ανάλογα, αν $f : X \to [-\infty, \lambda]$, ορίζουμε ως **άνω φάκελο** (upper envelope) της $f(x)$ τη συνάρτηση:*

$$\hat{f}(x) = \inf\{a(x) : a \in \mathcal{A}^c(K; E) \text{ και } a(y) \geqslant f(y), \text{ για κάθε } y \in X\}, \ \forall x \in K. \tag{3.5.4}$$

Παρατήρηση 3.5.6. *Η συνάρτηση $\check{f}(x)$ είναι κυρτή ως supremum κυρτών συναρτήσεων και κάτω ημισυνεχής ως supremum συνεχών, δηλαδή $\check{f}(x) \in \mathcal{K}^{lsc}(K)$. Ομοίως προκύπτει ότι η $\hat{f}(x)$ είναι κοίλη και άνω ημισυνεχής.*

Πρόταση 3.5.7. *Έστω K συμπαγές και κύρτό και X υποσύνολο του K τέτοιο ώστε $extK \subseteq X \subseteq K$. Αν $f, g : X \to [-\infty, \lambda]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε*

(i) $\hat{f}(x) \leqslant \lambda$, *για κάθε* $x \in K$,

(ii) $f(x) \leqslant g(x)$, *για κάθε* $x \in X \Rightarrow \hat{f}(x) \leqslant \hat{g}(x)$, *για κάθε* $x \in K$,

(iii) $\widehat{f+g} \leqslant \hat{f} + \hat{g}$,

(iv) $\widehat{\mu f} = \mu \hat{f}$, *για κάθε* $\mu \geqslant 0$,

(v) $\widetilde{(-f)} = -\hat{f}$.

Αν επιπλέον η f *είναι φραγμένη, τότε*

$$\check{f}(x) \leqslant \hat{f}(x), \quad \text{για κάθε } x \in K. \tag{3.5.5}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $B = \{a \in \mathcal{A}^c(K;E) : a_{|X} \geqslant g\}$ και $A = \{a \in \mathcal{A}^c(K;E) : a_{|X} \geqslant f\}$.

(i) Η συνάρτηση $a(x) = \lambda$ είναι αφφινική και $f(x) \leqslant a(x)$, για κάθε $x \in K$. Άρα $\hat{f}(x) \leqslant a(x) = \lambda$, για κάθε $x \in K$.

(ii) Αν $f(x) \leqslant g(x)$, για κάθε $x \in K$, τότε

$$\begin{aligned}
\{a \in \mathcal{A}^c(K;E) : a_{|X} \geqslant g\} &\subseteq \{a \in \mathcal{A}^c(K;E) : a_{|X} \geqslant f\} && \Rightarrow \\
\inf\{a \in \mathcal{A}^c(K;E) : a_{|X} \geqslant g\} &\geqslant \{a \in \mathcal{A}^c(K;E) : a_{|X} \geqslant f\} && \Rightarrow \\
\hat{f}(x) &\leqslant \hat{g}(x).
\end{aligned}$$

(iii) Θεωρούμε τις συαρτήσεις f και g. Ισχύει ότι $\widehat{f+g}(x) = \inf\{a \in \mathcal{A}^c(K;E) : a_{|X} \geqslant f+g\}$. Έστω $a(x)$, $b(x) \in \mathcal{A}^c(K;E)$ με $a(x) \geqslant f(x)$ και $b(x) \geqslant f(x)$ για κάθε $x \in X$ και επομένως $a(x) + b(x) \geqslant f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in X$. Τότε $\hat{f}(x) \leqslant a(x)$, $\hat{g}(x) \leqslant b(x)$ και $\widehat{f+g}(x) \leqslant a(x) + b(x)$.

Η $(a+b)(x)$ είναι αφφινική, επομένως $\widehat{f+g}(x) \leqslant a(x) + b(x)$, για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Άρα $\widehat{f+g}(x) \leqslant \inf A + \inf B \Rightarrow \widehat{f+g}(x) \leqslant \hat{f}(x) + \hat{g}(x)$.

(iv) Έστω $\mu \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu f} &= \inf\{a(x) \in \mathcal{A}^c(K;E) : a(y) \geqslant \mu f(y), \forall y \in X\} \\
&= \inf\{\mu a(x) \in \mathcal{A}^c(K;E) : a(y) \geqslant f(y), \forall y \in X\} \\
&= \mu \hat{f}(x).
\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
-\hat{f}(x) &= \inf\{a(x) \in \mathcal{A}^c(K;E) : a(y) \geqslant f(y), \forall y \in X\} \\
&= \sup\{-a(x) : a \in \mathcal{A}^c(K;E), a(y) \geqslant f(y), \forall y \in X\} \\
&= \sup\{a(x) \in \mathcal{A}^c(K;E) : -a(y) \geqslant f(y), \forall y \in X\} \\
&= \sup\{a(x) \in \mathcal{A}^c(K;E) : a(y) \leqslant -f(y), \forall y \in X\} \\
&= \widetilde{(-f)}(x).
\end{aligned}$$

(vi) Έστω f φραγμένη συνάρτηση από το X στο $\mathbb{R}$, με $extK \subseteq X \subseteq K$. Για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $\check{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \hat{f}(x)$. Έστω $x \in coextK$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Τότε

$$\check{f}(x) = \check{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \check{f}(e_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{f}(e_i) \leqslant \hat{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \hat{f}(x).$$

Θεωρούμε $x_0 \in K$. Από το Θεώρημα Krein-Milman, υπάρχει δίκτυο $(x_a)_{a\in A}$ του $coextK$ με $x_a \to x_0$ και $\check{f}(x_0) \leqslant \liminf \check{f}(x_a) \leqslant \liminf \hat{f}(x_a) \leqslant \limsup \hat{f}(x_a) \leqslant \hat{f}(x_0)$

□

3.6 Μεγιστικά και συνοριακά μέτρα

Πρόταση 3.6.1. *Έστω K συμπαγές και κυρτό και μ, ν θετικά μέτρα του K. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mu \prec \nu$,

(ii) $\mu(\check{f}) \leqslant \nu(f)$, *για κάθε* $f \in C(K)$,

(iii) $\nu(f) \leqslant \mu(\hat{f})$, *για κάθε* $f \in C(K)$.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Έστω $f \in C(K)$. Τότε $\check{f} \in \mathcal{K}^c(K)$ και $\mu \prec \nu$, άρα $\mu(\check{f}) \leqslant \nu(\check{f})$. Όμως $\check{f}(x) \leqslant f(x)$ στο K, άρα $\nu(\check{f}) \leqslant \nu(f)$ και τελικά $\mu(\check{f}) \leqslant \nu(\check{f}) \leqslant \nu(f)$.

(ii) ⇒ (i)

Έστω $f \in \mathcal{K}^c(K)$. Τότε $\mu(f) = \mu(\check{f}) \leqslant \nu(f)$, άρα $\mu \prec \nu$.

(iii) ⇔ (ii)

Θέτουμε $f \rightsquigarrow -f$ στην (ii) οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_K \widecheck{(-f)} d\mu \leqslant \int_K -f d\nu & \qquad \Longleftrightarrow \\ -\int_K \hat{f} d\mu \leqslant -\int_K f d\nu & \qquad \Longleftrightarrow \\ \nu(f) \leqslant \mu(\hat{f}). & \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.6.2. *Έστω K συμπαγές και κυρτό και μ, ν θετικά μέτρα στο K. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mu \prec \nu$,

(ii) για κάθε $\mu_1, \ldots, \mu_n$ θετικά μέτρα του K με $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, υπάρχουν $\nu_1, \ldots, \nu_n$ θετικά μέτρα του K τέτοια ώστε $\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$ και $\mu_i \prec \nu_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Έστω ότι $\mu \prec \nu$ και ότι το μ γράφεται ως $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ με τα μ_i θετικά μέτρα. Ορίζουμε $p : C(K)^n \to \mathbb{R}$, με

$$p(\tilde{f}) = \sum_{i=1}^{n} \int_K \hat{f}_i d\mu_i, \quad \text{για κάθε } \tilde{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C(K)^n.$$

Η p είναι υπογραμμική:

$$\begin{aligned} p(\tilde{f} + \tilde{g}) &= \sum_{i=1}^{n} \int_K \widehat{f_i + g_i} d\mu_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_K \hat{f}_i d\mu_i + \sum_{i=1}^{n} \int_K \hat{g}_i d\mu_i \\ &= p(\tilde{f}) + p(\tilde{g}). \\ p(\lambda\tilde{f}) &= \sum_{i=1}^{n} \int_K \widehat{\lambda f}_i d\mu_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_K \lambda \hat{f}_i d\mu_i \\ &= \lambda p(\tilde{f}). \end{aligned}$$

Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y \subseteq C(K)^n$ με $Y = \{\tilde{f} = (f, \ldots, f) : f \in C(K)\}$ και ορίζουμε $T_0 : Y \to \mathbb{R}$ με

$$T_0(\tilde{f}) = \int_K f d\nu, \quad \text{για κάθε } \tilde{f} = (f, \ldots, f) \in Y.$$

Από Πρόταση (3.6.1), ισχύει ότι

$$T_0(\tilde{f}) = \int_K f d\nu \leqslant \int_K \hat{f} d\mu = p(\tilde{f}), \quad \text{για κάθε } \tilde{f} \in Y.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach ο T_0 επεκτείνεται σε τελεστή $T : C(K)^n \to \mathbb{R}$, με $T(\tilde{f}) \leqslant p(\tilde{f})$, για κάθε $\tilde{f} \in C(K)^n$.

Θα δείξουμε ότι $||T|| \leqslant ||\mu||$. Έστω $\tilde{f} \in C(K)^n$.

$$\begin{aligned} |T(\tilde{f})| &\leqslant |p(\tilde{f})| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_K \hat{f}_i d\mu_i \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_K ||f_i|| d\mu_i = \sum_{i=1}^{n} ||f_i|| \mu_i(K) \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||\tilde{f}|| \mu_i(K) \\ &= ||\tilde{f}|| \sum_{i=1}^{n} \mu_i(K) = ||\tilde{f}|| \cdot |\mu(K)| = ||\tilde{f}|| \cdot ||\mu||. \end{aligned}$$

Άρα $|T(\tilde{f})| \leqslant ||\tilde{f}|| \cdot ||\mu||$, δηλαδή $||T|| \leqslant ||\mu||$. Το T ανήκει στο $(C(K)^n)^*$, επομένως υπάρχουν μέτρα $\nu_i \in \mathcal{M}(K) = C(K)^*$ για $i = 1, \ldots, n$, τέτοια ώστε

$$T(\tilde{f}) = \sum_{i=1}^{n} \int_K f_i d\nu_i, \quad \text{για κάθε } \tilde{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in C(K)^n.$$

Θεωρούμε $f \in C(K)$ και θέτουμε $\tilde{f} \in C(K)^n$ με $f_i = 0$, για κάθε $i \neq k$ και $f_k = f$. Τότε

$$T(\tilde{f}) = \int_K f d\nu_k \leqslant p(\tilde{f}) = \int_K \hat{f} d\mu_k.$$

Άρα $\mu_k \prec \nu_k$, για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

Θα δείξουμε ότι τα ν_i είναι θετικά μέτρα. Θεωρούμε $f \in C(K)$, $f \geqslant 0$, οπότε $-f \leqslant 0$. Επίσης θέτουμε $\tilde{f} = (f, \ldots, f)$. Τότε

$$\begin{aligned} T(-\tilde{f}) \leqslant p(-\tilde{f}) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\widehat{-f_i}) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\check{f}_i) \quad \Rightarrow \\ -T(\tilde{f}) &\leqslant -\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\check{f}_i) \quad \Rightarrow \\ -\nu_i(f) &\leqslant -\mu_i(\check{f}) \quad \Rightarrow \\ \nu_i(f) &\geqslant \mu_i(\check{f}). \end{aligned}$$

Όμως $\check{f} \in \mathcal{K}^c(K)$ και $\mu_i \geqslant 0$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\check{f} \geqslant 0$ και το ζητούμενο έπεται. Αυτό όμως ισχύει αφού η συνάρτηση που είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν είναι αφφινική και ισχύει ότι $0 \leqslant f(x)$ για κάθε x στο X, άρα $\check{f} \geqslant 0$. Άρα κάθε μέτρο ν_i είναι θετικό μέτρο. Επίσης $T(\tilde{f}) = \nu(f) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(f)$, δηλαδή το ν γράφεται ως $\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω μέτρα μ, ν με την ιδιότητα (ii). Θα δείξουμε ότι $\mu \prec \nu$, δηλαδή ότι $\mu(f) \leqslant \nu(f)$, για κάθε $f \in \mathcal{K}^c(K)$ συνεχή και κυρτή συνάρτηση του K. Επιλέγουμε μια τέτοια συνάρτηση f και $\epsilon > 0$. Η f συνεχής και το K συμπαγές, άρα η εικόνα $f(K)$ θα είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η οικογένεια $(B(f(x), \epsilon))_{x \in K}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα της $f(K)$, επομένως θα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Έστω $f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f(x_i), \epsilon/2)$ και θεωρούμε τα κλειστά και κυρτά σύνολα $G_i = f^{-1}(B[f(x_i), \epsilon])$ για τα οποία ισχύουν:

$$\begin{aligned} K &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i \ \text{ και} \\ |f(x) - f(y)| &\leqslant \epsilon, \ \text{ για κάθε } x, y \in G_i \end{aligned}$$

και για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Επιπλέον τα G_i μπορούμε να τα θεωρήσουμε ξένα, κατασκευάζοντας, αν είναι ανάγκη, την ακολουθία $G'_k = G_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} G_i$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τα μέτρα $\mu_i = \mu_{|G_i} \geqslant 0$. Αν $X \subseteq K$, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu(X \cap G_i) = \mu\left(X \cap \left(\biguplus_{i=1}^{n} G_i \right) \right) = \mu(X \cap K) = \mu(X).$$

Άρα ισχύει ότι $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$. Από υπόθεση, υπάρχουν θετικά μέτρα ν_i τέτοια ώστε $\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$ και $\mu_i \prec \nu_i$. Πιο συγκεκριμένα $r(\mu_i) = r(\nu_i) = x_i \in \overline{co}G_i \subseteq G_i$. Για κάθε $x \in G_i$ ισχύει ότι $f(x) \leqslant f(x_i) + \epsilon$, επομένως

$$\begin{aligned} \int_K f d\mu_i &\leqslant \int_K (f(x_i) + \epsilon) d\mu_i = \mu_i(K)(f(x_i) + \epsilon) \quad \Rightarrow \\ \int_K f d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \int_K f d\mu_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_i(K)(f(x_i) + \epsilon) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \nu_i(K)(f(x_i) + \epsilon) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \nu_i(K) \left(\frac{1}{\nu_i(K)} \int_K f d\nu_i + \epsilon \right) = \sum_{i=1}^{n} \int_K f d\nu_i + \sum_{i=1}^{n} \nu_i(K)\epsilon \\ &= \int_K f d\nu + \nu(K)\epsilon. \end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο καθώς $\epsilon \to 0$, προκύπτει ότι $\int_K f d\mu \leqslant \int_K f d\nu$.

□

Πόρισμα 3.6.3. *Έστω K συμπαγές και κυρτό και μ, ν θετικά μέτρα πιθανότητας του K. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mu \prec \nu$,

(ii) για κάθε $\mu_1, \dots, \mu_n$ *θετικά μέτρα του* K *και* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ *με* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ *και* $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$, *υπάρχουν* $\nu_1, \dots, \nu_n$ *θετικά μέτρα του* K *τέτοια ώστε* $\nu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i$ *και* $\mu_i \prec \nu_i$, *για κάθε* $i = 1, \dots, n$.

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή της Πρότασης (3.6.2). □

Πόρισμα 3.6.4. *Έστω K συμπαγές και κυρτό και μ, ν μέτρα πιθανότητας στο K με το μ απλό, δηλαδή* $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \epsilon_{x_i}$. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mu \prec \nu$,

(ii) υπάρχουν θετικά μέτρα ν_i *στο* K *έτσι ώστε* $r(\nu_i) = x_i$ *για κάθε* $i = 1, \dots, n$ *και* $\nu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i$.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο πόρισμα, $\mu \prec \nu$ αν και μόνο αν υπάρχουν θετικά μέτρα $\nu_i \in \mathcal{M}^1(K)$ τέτοια ώστε $\nu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i$ και $\epsilon_{x_i} \prec \nu_i$. Όμως $\epsilon_{x_i} \prec \nu_i \Rightarrow \epsilon_{x_i}(K) = \nu_i(K) = 1$, το οποίο ισχύει, και $r(\epsilon_{x_i}) = r(\nu_i) = x_i$. □

Πρόταση 3.6.5. *Έστω K συμπαγές και κυρτό σύνολο, $f \in C(K)$ και $\mu \in \mathcal{M}(K)$. Τότε υπάρχει μέτρο $\nu \in \mathcal{M}(K)$ τέτοιο ώστε $\mu \prec \nu$ και* $\int_K f d\nu = \int_K \hat{f} d\mu$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το συναρτησοειδές $p : C(K) \to \mathbb{R}$ με $p(g) = \int_K \hat{g} d\mu$, για κάθε $g \in C(K)$. Το p είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές:

- Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $p(\lambda f) = \int_K \widehat{\lambda f} d\mu = \lambda \int_K \hat{f} d\mu = \lambda p(f)$.
- Αν $f, g \in C(K)$, τότε $p(f+g) = \int_K \widehat{f+g} d\mu \leqslant \int_K \hat{f} d\mu + \int_K \hat{g} d\mu = p(f) + p(g)$.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y \subseteq C(K)$ ο οποίος παράγεται από το f, $Y = span\{f\}$, και ορίζουμε τον τελεστή $T_0 : Y \to \mathbb{R}$, $T_0(af) = a \int_K \hat{f} d\mu$, για κάθε πραγματικό a.

Αν $a \geqslant 0$, τότε $T_0(af) = a\displaystyle\int_K \hat{f} d\mu = \int_K \widehat{af} d\mu = p(af)$.
Αν $a < 0$, τότε θέτουμε $a = -b$ και παρατηρούμε ότι $p(0) = 0 = p(bf - bf) \leqslant p(-bf) + p(bf)$, επομένως $-p(bf) \leqslant p(-bf)$. Επιπλέον

$$T_0(af) = T_0(-bf) = -b\int_K \hat{f} d\mu = -\mu(\widehat{bf}) = -p(bf) \leqslant p(-bf) = p(af).$$

Σε κάθε περίπτωση δείξαμε ότι $T_0(y) \leqslant p(y)$ για κάθε $y = af \in Y$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach το T_0 επεκτείνεται σε συναρτησιακό $T \in C(K)^* = \mathcal{M}(K)$, το οποίο θα συμβολίζουμε με (μέτρο) ν, για το οποίο ισχύει ότι $\nu(g) \leqslant \mu(\hat{g})$, για κάθε $g \in C(K)$ και $\nu(f) = \displaystyle\int_K \hat{f} d\mu$. Αρκεί να δείξουμε ότι το ν είναι θετικό μέτρο και το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση (3.6.1).

Έστω $g \leqslant 0$. Τότε $\hat{g} \leqslant 0 \Rightarrow \nu(g) \leqslant \mu(\hat{g}) \leqslant 0$, αφού το μ είναι θετικό μέτρο. Άρα $\nu(f) \geqslant 0$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\mu \prec \nu$, επομένως $\nu(K) = \mu(K) = 1$, το οποίο δείχνει ότι το ν είναι μέτρο πιθανότητας και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 3.6.6. *Έστω K συμπαγές και κυρτό σύνολο, $f \in C(K)$ και $x \in K$. Τότε*

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \max\Big\{ \int_K f d\nu : \nu \in \mathcal{M}_x^1(K) \Big\} \\ &= \sup\Big\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0 \Big\}. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Για την πρώτη ισότητα θεωρούμε το μέτρο Dirac $\epsilon_x \in \mathcal{M}_x^1(K)$. Από Πρόταση (3.6.5) υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν στο K με $\epsilon_x \prec \nu$ και $\displaystyle\int_K f d\nu = \int_K \hat{f} d\epsilon_x = \hat{f}(x)$. Άρα $\sup\Big\{ \displaystyle\int_K f d\nu : \nu \in \mathcal{M}_x^1(K) \Big\} \geqslant \hat{f}(x)$.

Από την Πρόταση (3.6.1), για κάθε $\nu \in \mathcal{M}_x^1(K)$ με $\epsilon_x \prec \nu$, ισχύει ότι $\nu(f) \leqslant \epsilon_x(\hat{f}) = \hat{f}(x)$. Άρα $\hat{f}(x) = \max\Big\{ \displaystyle\int_K f d\nu : \nu \in \mathcal{M}_x^1(K) \Big\}$.

Για τη δεύτερη ισότητα, θεωρούμε το μέτρο ν του πρώτου μέρους για το οποίο ισχύουν ότι $\nu \in \mathcal{M}_x^1(K)$ και $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_K f d\nu$. Θεωρούμε ένα δίκτυο από απλά μέτρα $\nu_a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_a} \lambda_i^a \epsilon_{x_i^a}$ που συγκλίνει στο ν. Τότε $\displaystyle\int_K f d\nu_a \to \int_K f d\nu$. Όμως $\displaystyle\int_K f d\nu_a = \sum_{i=1}^{n_a} \lambda_i^a f(x_i^a)$. Επιπλέον $\nu_a(f) \leqslant \nu(f)$, γιατί αλλιώς θα υπήρχε μέτρο ν_a με $\nu_a(f) > \hat{f}(x)$. Άρα $\hat{f}(x) = \sup\Big\{ \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0 \Big\}$. □

Πρόταση 3.6.7. *Έστω K συμπαγές και κυρτό σύνολο και $x \in K$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $x \in extK$,

(ii) $f(x) = \hat{f}(x)$, *για κάθε* $f \in C(K)$.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Αν $x \in extK$, τότε το μοναδικό μέτρο που αναπαριστά το x είναι το μέτρο Dirac. Άρα, από Πόρισμα (3.6.6) ισχύει ότι

$$\hat{f}(x) = \max\{\nu(f) : \nu \in \mathcal{M}_x^1(K)\} = \epsilon_x(f) = f(x).$$

(ii) ⇒ (i)

Αν $f(x) = \hat{f}(x)$, για κάθε $f \in C(K)$, τότε για την $-f \in C(K)$ ισχύει ότι $-f = \widehat{(-f)} \Rightarrow -f = -\check{f} \Rightarrow f(x) = \hat{f}(x) = \check{f}(x)$.

Θεωρούμε $\nu \in \mathcal{M}_x^+(K)$. Γνωρίζουμε ότι $\epsilon_x \prec \nu$ αν και μόνο αν $r(\nu) = x$, άρα για το τυχαίο $\nu \in \mathcal{M}_x^+(K)$ ισχύει ότι $\epsilon_x \prec \nu$. Από την Πρόταση (3.6.1) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \epsilon_x(\check{f}) \leqslant \quad & \nu(f) \quad \leqslant \epsilon_x(\hat{f}) \quad \Rightarrow \\ f(x) = \check{f}(x) \leqslant \quad & \nu(f) \quad \leqslant \hat{f}(x) = f(x). \end{aligned}$$

Άρα $\nu(f) = f(x)$, για κάθε $f \in C(K)$, δηλαδή $\nu = \epsilon_x$.

Δείξαμε ότι το μόνο μέτρο που αναπαριστά το x είναι το μέτρο Dirac, επομένως, από το Θεώρημα Bauer, το x είναι ακραίο σημείο του K.

□

Θεώρημα 3.6.8. ***(Mokobodzki)*** *Έστω K συμπαγές και κυρτό και $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το μ είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{M}^+(K)$ ως προς τη διάταξη Choquet,*

(ii) *για κάθε $f \in C(K)$ ισχύει ότι* $\int \hat{f} d\mu = \int f d\mu$,

(iii) *για κάθε $f \in \mathcal{K}^c(K)$ ισχύει ότι* $\int \hat{f} d\mu = \int f d\mu$.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Έστω $f \in C(K)$. Από Πρόταση (3.6.5), υπάρχει θετικό μέτρο ν τέτοιο ώστε $\mu \prec \nu$ και $\nu(f) = \mu(\hat{f})$. Όμως το μ υποτέθηκε μεγιστικό, επομένως $\mu = \nu$ και $\mu(f) = \mu(\hat{f})$, για κάθε $f \in C(K)$.

(ii) ⇒ (i)

Έστω ότι $\mu(f) = \mu(\hat{f})$, για κάθε $f \in C(K)$ και θεωρούμε μέτρο ν με $\mu \prec \nu$. Από Πρόταση (3.6.1), $\mu \prec \nu \Rightarrow \nu(f) \leqslant \mu(\hat{f}) = \mu(f)$, για κάθε $f \in C(K)$. Άρα $\nu \prec \mu \Rightarrow \mu = \nu$ και το μ μεγιστικό.

(ii) ⇒ (iii)

Προφανές.

(iii) ⇒ (i)

Έστω $\nu \in \mathcal{M}^+(K)$ τέτοιο ώστε $\mu \prec \nu$. Αν $f \in \mathcal{K}^c(K)$, τότε $f = \check{f}$, επομένως

$$\mu(\check{f}) = \mu(f) \leqslant \nu(f) \leqslant \mu(\hat{f}) = \mu(f).$$

Άρα $\mu(f) = \nu(f)$ για κάθε $f \in \mathcal{K}^c(K)$ και από την πυκνότητα του $\mathcal{K}^c(K) - \mathcal{K}^c(K)$ στο $C(K)$ προκύπτει ότι $\mu(f) = \nu(f)$, για κάθε $f \in C(K)$, δηλαδή $\mu = \nu$ και το μ είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{M}^+(K)$.

□

Ορισμός 3.6.9. *Έστω K συμπαγές και κυρτό και $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$. Το μ ονομάζεται **μεγιστικό μέτρο** (maximal measure) αν ικανοποιεί κάποια από τις τρεις ιδιότητες του θεωρήματος (3.6.8). Αν $\mu \in \mathcal{M}(K)$, τότε το μ ονομάζεται **συνοριακό μέτρο** (boundary measure) αν η κύμανσή του $|\mu|$ είναι μεγιστικό μέτρο.*

Ορισμός 3.6.10. *Αν K συμπαγές και κυρτό σύνολο και $f \in C(K)$, τότε ορίζουμε ως **συνοριακό σύνολο** (boundary set) της f το σύνολο*

$$B_f = \{x \in K : f(x) = \hat{f}(x)\}.$$

Άμεση συνέπεια της Πρότασης (3.6.7) είναι ότι

$$extK = \bigcap_{f \in C(K)} B_f = \{x \in K : f(x) = \hat{f}(x), \forall f \in C(K)\}.$$

Πρόταση 3.6.11. *Έστω K συμπαγές και κυρτό σύνολο και μ θετικό μέτρο στο K. Τότε το μ είναι συνοριακό μέτρο αν και μόνο αν $|\mu|(K \backslash B_f) = 0$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\mu(\hat{f}) = \mu(f)$, για κάθε $f \in C(K)$ αν και μόνο αν $\mu(K \backslash B_f) = 0$ και το ζητούμενο έπεται θεωρώντας ως μ το μέτρο $|\mu|$.

$$\begin{aligned}
\mu(\hat{f}) = \mu(f) & \iff \\
\int_K \hat{f} d\mu = \int_K f d\mu & \iff \\
\int_{K \backslash B_f} \hat{f} d\mu + \int_{B_f} \hat{f} d\mu = \int_{K \backslash B_f} f d\mu + \int_{B_f} f d\mu & \iff \\
\int_{K \backslash B_f} \hat{f} d\mu = \int_{K \backslash B_f} f d\mu & \iff \\
\mu(K \backslash B_f) = 0, &
\end{aligned}$$

αφού $\hat{f} > f$ στο $K \backslash B_f$. $\square$

Πρόταση 3.6.12. *Έστω K συμπαγές και κυρτό και απλό μέτρο $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \epsilon_{x_i}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το μ συνοριακό μέτρο,

(ii) για κάθε $i = 1, \ldots, n$, $x_i \in extK$.

Απόδειξη. Το μέτρο μ είναι συνοριακό αν και μόνο αν $\mu(f) = \mu(\hat{f})$, για κάθε συνεχή συνάρτηση f. Όμως το μ απλό και επομένως

$$
\begin{aligned}
\mu(f) = \mu(\hat{f}), \ \ \forall f \in C(K) \qquad & \Longleftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{f}(x_i), \ \ \forall f \in C(K) \qquad & \Longleftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(f(x_i) - \hat{f}(x_i) \Big) = 0, \ \ \forall f \in C(K) \qquad & \Longleftrightarrow \\
f(x_i) = \hat{f}(x_i), \ \ \forall f \in C(K), \ \forall i = 1, \ldots, n \qquad & \Longleftrightarrow \\
x_i \in extK, \ \ \forall i = 1, \ldots, n, &
\end{aligned}
$$

λόγω της Πρότασης (3.6.7). $\square$

Πρόταση 3.6.13. *Αν K συμπαγές και κυρτό και $\mu \in \mathcal{M}_{bnd}(K)$, τότε $spt\mu \subseteq \overline{ext}K$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $|\mu|(K \backslash \overline{ext}K) = 0$. Το $|\mu|$ είναι μέτρο Radon, επομένως

$$
|\mu|(K \backslash \overline{ext}K) = \sup\{|\mu|(C) : C \subseteq K \backslash \overline{ext}K, \ C \ \text{ συμπαγές}\},
$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι $|\mu|(C) = 0$, για κάθε $C \subseteq K \backslash \overline{ext}K$ συμπαγές.

Έστω C συμπαγές υποσύνολο του $K \backslash \overline{ext}K$. Τα C και $\overline{ext}K$ κλειστά, επομένως, από το Λήμμα του Urysohn, υπάρχει $f \in C(K)$ με $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \overline{ext}K$ και $f(y) = 1$, για κάθε $y \in C$. Τότε $\check{f} = 0$, επομένως

$$
|\mu|(C) \leqslant |\mu|(f) = |\mu|(\check{f}) = 0.
$$

Άρα $\mu(C) = 0$, για κάθε $C \subseteq K \backslash \overline{ext}K$. $\square$

Πρόταση 3.6.14. *Έστω K συμπαγές και κυρτό. Το σύνολο των θετικών συνοριακών μέτρων πιθανότητας του K είναι κυρτό.*

Απόδειξη. Έστω $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^1_{bnd}(K)$ και $a \in (0,1)$. Θα δείξουμε ότι το $\nu = a\mu_1 + (1-a)\mu_2$ είναι συνοριακό. Έστω μέτρο $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$ τέτοιο ώστε $\nu \prec \lambda$. Από το Πόρισμα (3.6.3) το λ γράφεται στη μορφή $\lambda = a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2$, με $\mu_1 \prec \lambda_1$ και $\mu_2 \prec \lambda_2$. Όμως τα μ_1 και μ_2 είναι μεγιστικά, επομένως $\mu_1 = \lambda_1$ και $\mu_2 = \lambda_2$ και τελικά $\lambda = \nu$, δηλαδή το ν είναι μεγιστικό μέτρο. $\square$

Λήμμα 3.6.15. *Αν K συμπαγές και κυρτό και $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$, τότε υπάρχει μέτρο $\nu \in \mathcal{M}^+_{bnd}(K)$ τέτοιο ώστε $\mu \prec \nu$.*

Απόδειξη. Έστω $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ και θεωρούμε το σύνολο $M = \{\nu \in \mathcal{M}^+(K) : \mu \prec \nu\}$. Για κάθε $\nu \in M$ ισχύει ότι $||\nu|| = \nu(1) = \mu(1) = ||\mu||$, επομένως το M συμπαγές. Έστω $(\nu_a)_{a\in I}$ αλυσίδα του M. Θα δείξουμε ότι έχει άνω φράγμα στο M.

Μπορούμε να θεωρήσουμε την $(\nu_a)_{a\in I}$ ως δίκτυο του M. Από συμπάγεια, υπάρχει υποδίκτυο $(\nu_a)_{a\in A}$ και $\nu_0 \in \mathcal{M}^+(K)$, τέτοιο ώστε $\nu_a \underset{a\in A}{\rightarrow} \nu_0$. Θα δείξουμε ότι $\nu_a \prec \nu_0$, για κάθε $a \in I$.

Έστω $a \in I$, $f \in \mathcal{K}^c(K)$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $b \in A$ με $\nu_a \prec \nu_b$ και $|\nu_b(f) - \nu_0(f)| < \epsilon$. Όμως $\nu_a \prec \nu_b \Rightarrow \nu_a(f) \leqslant \nu_b(f)$, άρα,

$$\nu_0(f) \geqslant \nu_b(f) - \epsilon \geqslant \nu_a(f) - \epsilon,$$

δηλαδή $\nu_0(f) \geqslant \nu_a(f)$, για κάθε $f \in \mathcal{K}^c(K)$ και $a \in I$. Επομένως $\nu_a \prec \nu_0$, για κάθε $a \in I$ και το ν_0 άνω φράγμα της αλυσίδας. Από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο στο M, άρα υπάρχει θετικό συνοριακό μέτρο ν με $\mu \prec \nu$. □

Θεώρημα 3.6.16. ***(Ολοκληρωτικής αναπαράστασης για μεγιστικά μέτρα)**. Αν K συμπαγές και κυρτό και $x \in K$. Τότε υπάρχει θετικό συνοριακό μέτρο πιθανότητας $\mu \in \mathcal{M}^1_{bnd}(K)$, που αναπαριστά το σημείο x.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το μέτρο Dirac $\epsilon_x \in \mathcal{M}^+(K)$. Από το Λήμμα (3.6.15), υπάρχει $\nu \in \mathcal{M}^+_{bnd}(K)$, με $\epsilon_x \prec \nu$. Όμως τότε $\epsilon_x(K) = \nu(K) = 1$ και $r(\epsilon_x) = x = r(\nu)$. Άρα $\nu \in \mathcal{M}^+_{bnd}(K)$ και το ν αναπαριστά το x. □

Πρόταση 3.6.17. *Έστω K συμπαγές και κυρτό, μ μεγιστικό μέτρο του K και $\nu \in \mathcal{M}(K)$ ομοίμορφα συνεχές ως προς το μ. Τότε το ν συνοριακό μέτρο του K.*

Απόδειξη. Έστω $f \in C(K)$ και θα δείξουμε ότι $\nu(f) = \nu(\hat{f})$. Θεωρούμε το συνοριακό σύνολο της f, $B_f = \{x \in K : \hat{f}(x) = f(x)\}$. Το μ είναι συνοριακό μέτρο, επομένως $|\mu|(K\backslash B_f) = 0$. Από το Θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $h \in \mathcal{L}_1(\mu)$ τέτοια ώστε $\nu(B) = \displaystyle\int_B h d\mu$, για κάθε $B \subseteq K$ μετρήσιμο. Τότε $\nu(K\backslash B_f) = 0$, αφού $|\mu|(K\backslash B_f) = 0$. Άρα

$$\nu(g) = \int_K g d\nu = \int_{B_f} g d\nu + \cancelto{0}{\int_{K\backslash B_f} g d\nu} = \int_{B_f} g d\nu = \int_{B_f} \hat{g} d\nu + \int_{K\backslash B_f} \hat{g} d\nu = \nu(\hat{g}).$$

Άρα $\nu(f) = \nu(\hat{f})$ για κάθε $f \in C(K)$ και από το Θεώρημα Mokobodzki συμπεραίνουμε ότι το ν είναι συνοριακό μέτρο. □

Παρατήρηση 3.6.18. *Αν K συμπαγές και κυρτό και μ συνοριακό μέτρο του K, τότε υπάρχουν θετικά μεγιστικά μέτρα του K μ_1, μ_2, τέτοια ώστε $\mu = \mu_1 - \mu_2$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ανάλυση Jordan του μέτρου μ, $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Το μ συνοριακό αν και μόνο αν το $|\mu| = \mu_1 + \mu_2$ μεγιστικό.

Έστω $\lambda \in \mathcal{M}^+(K)$ τέτοιο ώστε $\mu_1 \prec \lambda$. Τότε για το μέτρο $\mu' = \lambda + \mu_2$, ισχύει ότι

$$\mu'(f) = \lambda(f) + \mu_2(f) \geqslant \mu_1(f) + \mu_2(f) = |\mu(f)|,$$

δηλαδή $|\mu| \prec \mu'$. Άρα $\mu' = |\mu|$ και $\mu_1 = \lambda$, δηλαδή το μ_1 είναι μεγιστικό μέτρο. Ομοίως προκύπτει και για το μ_2. $\square$

Θεώρημα 3.6.19. *Έστω K συμπαγές και κυρτό. Ο χώρος των συνοριακών μέτρων του K, $\mathcal{M}_{bnd}(K)$ είναι γραμμικός σύνδεσμος.*

Απόδειξη. Έστω $\mu \in \mathcal{M}_{bnd}(K)$. Από προηγούμενη παρατήρηση υπάρχουν μεγιστικά θετικά μέτρα μ_1, μ_2 τέτοια ώστε $\mu = \mu_1 - \mu_2$, δηλαδή $\mathcal{M}_{bnd}(K) = \mathcal{M}_{max}(K) - \mathcal{M}_{max}(K)$.

Έστω $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{max}(K)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει το $\mu_1 \wedge \mu_2$ στο $\mathcal{M}_{max}(K)$. Τα μ_1, μ_2 ανήκουν στον $\mathcal{M}(K)$ ο οποίος είναι γραμμικός σύνδεσμος. Άρα υπάρχει το $\nu = \mu_1 \wedge \mu_2$ στο $\mathcal{M}(K)$. Επιπλέον $\nu \leqslant \mu_1 + \mu_2$, δηλαδή $\nu \ll \mu_1 + \mu_2$, με το $\mu_1 + \mu_2$ μεγιστικό. Από Πρόταση (3.6.17), το ν συνοριακό μέτρο, επομένως $\mu_1 \wedge \mu_2 \in \mathcal{M}_{bnd}(K)$. $\square$

Κεφάλαιο 4

Το Θεώρημα Choquet-Kendall

Θεωρούμε έναν διατεταγμένο χώρο (X, P) με βάση B. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι ο (X, P) είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν για κάθε x, $y \in X$ υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε $(x + P) \cap (y + P) = (z + P)$. Μας ενδιαφέρει να δώσουμε έναν παρόμοιο χαρακτηρισμό σε σχέση με τις γεωμετρικές ιδιότητες της βάσης B.

Πρώτος ο Choquet, το 1956, παρατήρησε ότι αν ο X είναι χώρος πεπερσμένης διάστασης και η B συμπαγής βάση του, τότε η B είναι simplex του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν για κάθε x, $y \in X$ και a, $b \geqslant 0$ υπάρχουν $z \in X$ και $c \geqslant 0$ τέτοια ώστε

$$(x + aB) \cap (y + bB) = (z + cB), \tag{4.0.1}$$

αρκεί η τομή να είναι μη κενή και χρησιμοποίησε αυτή την παρατήρηση για να επεκτείνει την έννοια του simplex σε απειροδιάστατους χώρους. Οι Rogers και Shepard, το 1957, έδειξαν ότι αν το B είναι πεπερασμένης διάστασης συμπαγές σύνολο, τότε το B είναι n-simplex αν και μονο αν για κάθε x, $y \in X$ και a, $b \geqslant 0$ υπάρχουν $z \in X$ και $c \geqslant 0$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (4.0.1). Το 1962, ο Kendall εισήγαγε στο πρόβλημα τη συνθήκη της ευθειακής συμπάγειας και απέδειξε το γενικότερο: Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος και B βάση του P. Ο (X, P) είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν το B είναι ευθειακά συμπαγές και για κάθε x, $y \in X$ και a, $b \geqslant 0$ υπάρχουν $z \in X$ και $c \geqslant 0$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (4.0.1).

4.1 Εισαγωγικές έννοιες

Ορισμός 4.1.1. *Έστω E διανυσματικός χώρος. Αν x, y στοιχεία του E τότε ορίζουμε ως ευθεία L που διέρχεται από τα σημεία x και y, το σύνολο $L = \{x + t(y - x) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. Μπορούμε να ορίσουμε μια μετρική ρ στο L έτσι ώστε η απόσταση δύο σημείων $w_1 = x + t_1(y - x)$ και $w_2 = x + t_2(y - x)$ του L να ισούται με*

$$\rho(w_1, w_2) = \rho(x + t_1(y - x), x + t_2(y - x)) = |t_1 - t_2|.$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η μετρική ρ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, αν $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία του L με $w_n = x + t_n(y - x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $w_0 = x + t_0(y - x) \in L$, τότε

$$w_n \xrightarrow{\rho} w_0 \iff \rho(w_n, w_0) \to 0 \iff |t_n - t_0| \to 0.$$

*Αν $A \subseteq E$ κυρτό, τότε το A ονομάζεται **ευθειακά συμπαγές** αν για κάθε ευθεία L του X, το $A \cap L$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (L, ρ). Αν το A είναι ευθειακά συμπαγές και επιπλέον για κάθε $x, y \in E$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{R}^+$ ισχύει ότι το σύνολο $(x + aA) \cap (y + bA)$ είναι είτε κενό, είτε της μορφής $z + cA$ για κάποια $z \in E$ και $c \in \mathbb{R}^+$, τότε το A ονομάζεται **simplex**.*

Προτού προχωρήσουμε στη διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος Choquet-Kendall, θα αναφέρουμε δύο λήμματα που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Λήμμα 4.1.2. *Έστω X διανυσματικός χώρος, W ευθειακά συμπαγές υποσύνολο του X που περιέχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία και $x, y \in X$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.*

(i) Αν $x + aW \subseteq W$, τότε $a \leqslant 1$ και $x \in (1 - a)W$.

(ii) Αν $x + aW \subseteq y + bW$, τότε $a \leqslant b$ και $x \in y + (b - a)W$.

Απόδειξη. (i) Θα δείξουμε επαγωγικά τον ακόλουθο ισχυρισμό: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$x + ax + \ldots + a^{n-1}x + a^nW \subseteq W. \tag{4.1.1}$$

Για $n = 1$ η παραπάνω σχέση γίνεται $x + aW \subseteq W$ το οποίο ισχύει.

Έστω ότι η (4.1.1) ισχύει για $n = k$. Πολλαπλασιάζοντας επί a και προσθέτοντας x, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x + ax + \ldots + a^{k-1}x + a^kW &\subseteq W & \stackrel{(\times a)}{\Rightarrow} \\ ax + a^2x + \ldots + a^kx + a^{k+1}W &\subseteq aW & \stackrel{(+x)}{\Rightarrow} \\ x + ax + a^2x + \ldots + a^kx + a^{k+1}W &\subseteq x + aW \subseteq W, \end{aligned}$$

το οποίο δείχνει το ζητούμενο.

Επειδή το W περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία μπορούμε να επιλέξουμε $w \in W$ με $w \neq x$.

Αν $a = 1$, η (4.1.1) δίνει

$$\begin{aligned} \underbrace{x + \ldots + x}_{n} + W &\subseteq W & \Rightarrow \\ nx + W &\subseteq W, \quad \forall n \in \mathbb{N} & \Rightarrow \\ x &= 0, \end{aligned}$$

γιατί αλλιώς για την ευθεία $L = \{f(t) = tx + w : t \in \mathbb{R}\}$ το σύνολο $L \cap W$ δεν θα ήταν ευθειακά συμπαγές, αφού η ακολουθία $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ δε θα είχε συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα $x = 0 \in (1 - a)W = 0 \cdot W$.

Αν $a \neq 1$, μπορούμε να γράψουμε την (4.1.1) στη μορφή:

$$\begin{aligned} x + ax + \ldots + a^{n-1}x + a^nW &\subseteq W & \Rightarrow \\ x(1 + a + \ldots + a^{n-1}) + a^nW &\subseteq W & \Rightarrow \\ x\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) + a^nW &\subseteq W, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Θεωρούμε την ευθεία L που διέρχεται από τα σημεία w και $\dfrac{x}{1-a}$:

$$L = \left\{ f(t) = \frac{x}{1-a} + t\left(w - \frac{x}{1-a}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(a^n) &= \frac{x}{1-a} + a^n\left(w - \frac{x}{1-a}\right) \\ &= (1-a^n)\frac{x}{1-a} + a^n w \quad \in L \cap W, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Αν $a > 1$ τότε η ακολουθία $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια μη φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών με $f(a^n) \in W \cap L$ και το W να είναι ευθειακά συμπαγές, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $a \leqslant 1$. Απομένει να δείξουμε ότι $x \in (1-a)W$.

- Αν $a = 0$, τότε $x \in (1-a)W = W$ το οποίο ισχύει.
- Αν $0 < a < 1$, τότε θεωρούμε ξανά την ευθεία:

$$L = \left\{ f(t) = \frac{x}{1-a} + t\left(w - \frac{x}{1-a}\right) : t \in \mathbb{R} \right\},$$

  με $f(a^n) \in L \cap W$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως $a^n \to 0$, επομένως $f(a^n) \to \dfrac{x}{1-a} \in L \cap W$, άρα $x \in (1-a)W$.

Σε κάθε περίπτωση δείξαμε ότι $x \in (1-a)W$.

(ii) Έστω ότι $x + aW \subseteq y + bW$. Το b είναι διάφορο του μηδενός, αφού διαφορετικά θα είχαμε $x + aW \subseteq \{y\}$, το οποίο είναι άτοπο αφού το W υποτέθηκε ότι περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Άρα

$$\begin{aligned} & x - y + aW \subseteq bW && \overset{(b\neq 0)}{\Rightarrow} \\ & \frac{x-y}{b} + \frac{a}{b}W \subseteq W && \overset{(i)}{\Rightarrow} \\ & \frac{a}{b} \leqslant 1 \quad \text{και} \quad \frac{x-y}{b} \in \left(1 - \frac{a}{b}\right) W && \Rightarrow \\ & a \leqslant b \quad \text{και} \quad x - y \in (b-a)W && \Rightarrow \\ & a \leqslant b \quad \text{και} \quad x \in y + (b-a)W. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.1.3. *Έστω (X, P) διατεταγμένος διανυσματικός χώρος, $B = B_f$ ευθειακά συμπαγής βάση του P και x, $y \in X$. Αν για κάθε a, $b \geqslant 0$ με $(x + aB) \cap (y + bB) \neq \varnothing$ υπάρχουν $z \in X$ και $c \geqslant 0$ τέτοια ώστε $(x + aB) \cap (y + bB) = z + cB$, τότε:*

$$\begin{aligned} c &\leqslant a \wedge b \quad \text{και} \\ [x + (a-c)B] &\cap [y + (b-c)B] = \{z\}. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Προφανώς $z + cB \subseteq (x + aB), (y + bB)$. Από Λήμμα (4.1.2) θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} c &\leqslant a \quad \text{και} \quad z \in x + (a - c)B \\ c &\leqslant b \quad \text{και} \quad z \in y + (b - c)B, \end{aligned}$$

επομένως $c \leqslant a \wedge b$ και $z \in (x + (a - c)B) \cap (y + (b - c)B)$. Απομένει να δείξουμε ότι το σύνολο $(x + (a - c)B) \cap (y + (b - c)B)$ δεν περιέχει άλλα στοιχεία εκτός του z.

Παρατηρούμε ότι $(a + b)B = aB + bB$, για κάθε a, $b \geqslant 0$ αφού το B είναι κυρτό. Επίσης, αν $a \geqslant c \geqslant 0$, τότε $(a - c)B \subseteq aB - cB$.

Από υπόθεση υπάρχουν $z' \in X$, $c' \geqslant 0$ τέτοια ώστε

$$(x + (a - c)B) \cap (y + (b - c)B) = z' + c'B.$$

$$z' + (c' + c)B = z' + c'B + cB \subseteq cB + x + (a - c)B \subseteq x + aB.$$

Ομοίως προκύπτει ότι $z' + (c' + c)B \subseteq y + bB$. Άρα

$$\begin{aligned} z' + (c' + c)B \subseteq (x + aB) \cap (y + bB) = z + cB & \quad \overset{(\text{Λήμμα})}{\underset{(4.1.2)}{\Rightarrow}} \\ c' + c \leqslant c & \quad \Rightarrow \\ c' = 0 & \end{aligned}$$

και το $(x+(a-c)B)\cap(y+(b-c)B)$ μονοσύνολο, δηλαδή $(x+(a-c)B)\cap(y+(b-c)B) = \{z\}$. □

Παρατήρηση 4.1.4. *Αν (X, P) διατεταγμένος διανυσματικός χώρος, B βάση του P, x, y, $z \in X$ και a, $b \in \mathbb{R}^+$ με $z \in (x + aB) \cap (y + bB)$, τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει:*

$$z + tB \subseteq [x + (a + t)B] \cap [y + (b + t)B].$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} z &\in x + aB & \Rightarrow \\ z + tB &\subseteq x + aB + tB & \\ &= x + (a + t)B & \Rightarrow \\ z + tB &\subseteq x + (a + t)B. & \end{aligned}$$

Ομοίως προκύπτει και ότι $z + tB \subseteq y + (b + t)B$. □

4.2 Το Θεώρημα Choquet-Kendall

Πλέον είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος Choquet-Kendall.

Θεώρημα 4.2.1. *(Choquet-Kendall).* *Έστω (X, P) διατεταγμένος διανυσματικός χώρος με τον κώνο P να παράγει τον X και B βάση του P. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Ο (X, P) είναι γραμμικός σύνδεσμος,

(ii) για κάθε x, $y \in X$, υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε $(x + P) \cap (y + P) = z + P$,

(iii) το B είναι simplex.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Έστω x, $y \in X$. Θα δείξουμε ότι $(x + P) \cap (y + P) = x \vee y + P$.

- Αν $z \in (x + P) \cap (y + P)$, τότε

$$\begin{aligned} z = x + p_1 = y + p_2 & \quad\Rightarrow \\ z - x \in P \quad \text{και} & \\ z - y \in P & \quad\Rightarrow \\ z \geqslant x, y & \quad\Rightarrow \\ z \geqslant x \vee y & \quad\Rightarrow \\ z - x \vee y \in P & \quad\Rightarrow \\ z \in x \vee y + P. & \end{aligned}$$

- Αν $w \in x \vee y + P$, τότε

$$\begin{aligned} & w \geqslant x \vee y && \Rightarrow \\ & w \geqslant x, y && \Rightarrow \\ & w \in (x + P) \cap (y + P). && \end{aligned}$$

(ii) ⇒ (i)

Έστω x, $y \in X$ και $z \in X$ τέτοιο ώστε $(x + P) \cap (y + P) = z + P$. Το $0 \in P$ επομένως $z = x + p_1 = y + p_2$, για κάποια $p_1, p_2 \in P$, δηλαδή $z \geqslant x, y$. Αν $w \in X$ με $w \geqslant x, y$, τότε $w \in (x + P) \cap (y + P) = z + P$, δηλαδή $w \geqslant z$, πράγμα που αποδεικνύει ότι $z = x \vee y$.

(ii) ⇒ (iii)

Έστω $B = \{x \in X : f(x) = 1\}$, $f \in X'$ και $z \in X$ τέτοιο ώστε $(x + P) \cap (y + P) = z + P$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$(x + \lambda_1 B) \cap (x + \lambda_2 B) = \begin{cases} \varnothing, & \text{για } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ x + \lambda_1 B, & \text{για } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

και

$$\biguplus_{a \geqslant 0} x + aB = x + P,$$

για κάθε $x \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\biguplus_{a \geqslant 0,\ b \geqslant 0} (x + aB) \cap (y + bB) = z + P = \biguplus_{c \geqslant 0} (z + cB).$$

Παρατηρούμε ότι κάθε μέλος της οικογένειας $(z + cB)_{c \geqslant 0}$ τέμνει το πολύ ένα μέλος της οικογένειας $((x + aB) \cap (y + bB))_{a,b \geqslant 0}$, καθώς αν

$$\begin{aligned} (x + aB) \cap (y + bB) \cap (z + cB) &\neq \varnothing, \quad \text{τότε} \\ f(x) + a = f(y) + b = f(z) + c, \end{aligned}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι $c = f(y) - f(z) + b$, δηλαδή μοναδικό.

Όμως

$$\begin{aligned} z + cB &= (z + cB) \cap (z + P) \\ &= (z + cB) \cap \left(\biguplus_{a,b \geqslant 0} (x + aB) \cap (y + bB) \right) \\ &= (z + cB) \cap (x + a_0 B) \cap (y + b_0 B), \end{aligned}$$

για κάποια $a_0, b_0 \geqslant 0$, πράγμα το οποίο δείχνει ότι κάθε στοιχείο της μίας οικογένειας είτε θα είναι κενό, είτε θα ισούται με ακριβώς ένα στοιχείο της άλλης οικογένειας.

(iii) $\Rightarrow$ **(ii)**

Ο κώνος P παράγει τον X, επομένως, από την Πρόταση (2.4.6), ο X είναι άνω κατευθυνόμενος, δηλαδή $(x + P) \cap (y + P) \neq \varnothing$. Όμως

$$\begin{aligned} (x + P) \cap (y + P) &= \left(x + \bigcup_{a \geqslant 0} aB \right) \bigcap \left(y + \bigcup_{b \geqslant 0} bB \right) && (4.2.1) \\ &= \bigcup_{a,b \geqslant 0} (x + aB) \cap (y + bB) \neq \varnothing. && (4.2.2) \end{aligned}$$

Από υπόθεση θα υπάρχουν a', b', $d \in \mathbb{R}^+$ και $z \in X$ τέτοια ώστε

$$(x + a'B) \cap (y + b'B) = z + dB.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα (4.1.3) έχουμε ότι

$$(x + (a' - d)B) \cap (y + (b' - d)B) = \{z\}$$

με $a' - d$ και $b' - d \geqslant 0$. Δείξαμε λοιπόν ότι υπάρχουν a_0, $b_0 \geqslant 0$ και $z \in X$, τέτοια ωστε

$$(x + a_0 B) \cap (y + b_0 B) = \{z\}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\bigcup_{a,b \geqslant 0} (x + aB) \cap (y + bB) = \bigcup_{c \geqslant 0} z + cB. \tag{4.2.3}$$

Έστω ότι $f(x) \geqslant f(y)$. Τότε $f(x) + a = f(y) + b$, άρα $b = f(x) - f(y) + a$.

Ισχύει ότι:

$$(x + aB) \cap (y + (f(x) - f(y) + a)B) = \varnothing, \quad \forall a \text{ με } 0 \leqslant a < a_0,$$

γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε:

$$\begin{aligned} z' \in (x + aB) \cap (y + (f(x) - f(y) + a)B), \quad 0 \leqslant a < a_0, & \quad \overset{(\text{Παρατήρηση})}{\underset{(4.1.4)}{\Rightarrow}} \\ z' + tB \subseteq (x + (a + t)B) \cap (y + (f(x) - f(y) + a + t)B) & \quad \overset{(t=a_0-a)}{\Rightarrow} \\ z' + (a_0 - a)B \subseteq (x + a_0B) \cap (y + (f(x) - f(y) + a_0)B) & \quad \Rightarrow \\ z' + (a_0 - a)B \subseteq (x + a_0B) \cap (y + b_0B) = \{z\}, & \end{aligned}$$

άτοπο, αφού το B είναι άπειρο.

Αν $a > a_0$, τότε πάλι από Παρατήρηση (4.1.4) για $t = a - a_0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} z \in (x + a_0B) \quad &\cap \quad (y + b_0B) \qquad \Rightarrow \\ z + (a - a_0)B \quad &\subseteq \quad (x + aB) \cap (y + (b_0 + a - a_0)B) \end{aligned}$$

και καθώς το $z + (a - a_0)B$ είναι άπειρο, συμπεραίνουμε ότι το a_0 είναι η μόνη τιμή του r για την οποία το

$$(x + rB) \cap (y + (f(x) - f(y) + r)B)$$

είναι μονοσύνολο. Θα δείξουμε ότι για κάθε $a > a_0$ ισχύει ότι

$$z + (a - a_0)B = (x + aB) \cap (y + (f(x) - f(y) + a)B).$$

Έστω $a > a_0$. Υπάρχουν $z' \in X$ και $c' \geqslant 0$ τέτοια ώστε:

$$(x + aB) \cap (y + (f(x) - f(y) + a)B) = z' + c'B.$$

Από Λήμμα (4.1.3) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} c' \quad &\leqslant \quad a \qquad \text{και} \\ (x + (a - c')B) \quad &\cap \quad (y + (f(x) - f(y) + a - c')B) = \{z\}, \end{aligned}$$

μονοσύνολο.

Είδαμε όμως ότι η μόνη τιμή του r για την οποία ισχύει κάτι τέτοιο είναι η a_0, δηλαδή

$$a - c' = a_0 \quad \text{και} \quad f(x) - f(y) + a - c' = f(x) - f(y) + a_0 = b_0.$$

Επομένως $\{z'\} = (x + a_0B) \cap (y + b_0B) = \{z\}$ και $z = z'$.

Συνοψίζοντας, έχουμε δείξει ότι για κάθε $a \geqslant 0$ υπάρχει $a_0 \geqslant 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $b \geqslant 0$ να ισχύει ότι

$$\begin{aligned}(x+aB)\cap(y+bB) &= (x+aB)\cap(y+(f(x)-f(y)+a)B)\\ &= \begin{cases}\varnothing, & \text{αν } 0<a<a_0,\\ \{z\}, & \text{αν } a=a_0,\\ z+(a-a_0)B, & \text{αν } a>a_0,\end{cases}\end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned}\bigcup_{a\geqslant 0,\ b\geqslant 0}(x+aB)\cap(y+bB) &= \bigcup_{a\geqslant 0}(x+aB)\cap(y+(f(x)-f(y)+a)B)\\ &= \{z\}\cup\left(\bigcup_{a>a_0}(z+(a-a_0)B\right)\\ &= \{z\}\cup\left(\bigcup_{c>0}(z+cB)\right)\\ &= \bigcup_{c\geqslant 0}(z+cB).\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν την (4.2.3). Άρα:

$$\begin{aligned}(x+P)\cap(y+P) &= \bigcup_{a,b\geqslant 0}(x+aB)\cap(y+bB)\\ &= \bigcup_{c\geqslant 0} z+cB\\ &= z+P.\end{aligned}$$

□

4.3 Ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί

4.3.1 Με τη χρήση ολοκληρωτικής αναπαράστασης

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε τη μορφή που παίρνει το Θεώρημα Choquet-Kendall όταν επιπλέον η βάση B είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμη. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι αν (X,P) διατεταγμένος διανυσματικός χώρος με τον P να παράγει τον X και B συμπαγής και μετρικοποιήσιμη βάση του κώνου P, τότε ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο του B υπάρχει μοναδικό μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(B)$ που το αναπαριστά, τέτοιο ώστε $spt\mu \subseteq extB$.

Θεώρημα 4.3.1. ***(Choquet)*** *Έστω X τοπικά κυρτός χώρος και $K \subseteq X$ συμπαγές, κυρτό και μετρικοποιήσιμο. Τότε για κάθε $x_0 \in K$ υπάρχει μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(extK)$ που αναπαριστά το x_0.*

Απόδειξη. Το K είναι μετρικοποιήσιμο, επομένως, από την Πρόταση (2.4.41), ο $C(K)$, καθώς και ο κλειστός υπόχωρός του $\mathcal{A}^c(K)$, είναι διαχωρίσιμος. Θεωρούμε μια ακολουθία $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αφφινικών και συνεχών συναρτήσεων με $||h_n|| = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οποία είναι πυκνή στη μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{A}^c(K)$.

Θέτουμε $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{2^n} \in C(K)$. Το όριο αυτό υπάρχει αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{2^n}$ είναι απολύτως συγκλίνουσα και ο $C(K)$ είναι χώρος Banach. Η f είναι αυστηρά κυρτή, αφού για κάθε $x \neq y$ υπάρχει h_n τέτοια ώστε $h_n(x) \neq h_n(y)$ και επομένως η αφφινική συνάρτηση h_n δεν είναι σταθερή στο διάστημα $[x, y]$, οπότε η h_n^2 θα είναι αυστηρά κυρτή στο διάστημα αυτό.

Θέτουμε $Y = span\{\mathcal{A}^c(K), f\} \subseteq C(K)$ και ορίζουμε $p : C(K) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$p(g) = \hat{g}(x_0),\ \forall g \in C(K).$$

- Το p είναι υποαθροιστικό: $p(g_1+g_2) = \widehat{g_1 + g_2}(x_0) \leqslant \hat{g}_1(x_0)+\hat{g}_2(x_0) = p(g_1)+p(g_2)$.
- Το p είναι θετικά ομογενές: $p(\lambda g) = \widehat{\lambda g}(x_0) = \lambda\hat{g}(x_0) = \lambda p(g)$, για κάθε $\lambda \geqslant 0$.

Άρα το p είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές. Ορίζουμε τον τελεστή $T_0 : Y \to \mathbb{R}$ με

$$T_0(h + rf) = h(x_0) + r\hat{f}(x_0),\ \forall h \in \mathcal{A}^c(K),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Το T_0 κυριαρχείται από το p στον Y. Από Θεώρημα Hahn-Banach, μπορούμε να επεκτείνουμε τον τελεστή T_0 σε ολόκληρο τον $C(K)$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} T(g) &\leqslant \hat{g}(x_0),\ \forall g \in C(K)\ \text{ και} \\ T(h + rf) &= h(x_0) + r\hat{f}(x_0),\ \forall h \in \mathcal{A}^c(K),\ r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Αν $g \in C(K)$, $g \leqslant 0$, τότε $T(g) \leqslant \hat{g}(x_0) \leqslant 0$, άρα ο T θετικός τελεστής. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(K)$ τέτοιο ώστε $\mu(g) = T(g)$, για κάθε $g \in C(K)$. Για $h = \mathbb{1} \in \mathcal{A}^c(K)$ και $r = 0$ παίρνουμε

$$\mu(\mathbb{1}) = T(\mathbb{1}) = \mathbb{1}(x_0) = 1,$$

άρα το μ είναι μέτρο πιθανότητας. Επιπλέον, $\mu(f) = T(f) = \hat{f}(x_0) \leqslant \mu(\hat{f})$. Αν $h \in \mathcal{A}^c(K)$ και $h \geqslant f$, τότε $h \geqslant \hat{f}$, άρα $h(x_0) = T(h) = \mu(h) \geqslant \mu(\hat{f})$ και $\hat{f}(x_0) \geqslant \mu(\hat{f})$. Τελικά έχουμε ότι $\mu(f) = \mu(\hat{f})$ από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $spt(\mu) \subseteq \{x : f(x) = \hat{f}(x)\}$.

Απομένει να δείξουμε ότι $\{x : f(x) = \hat{f}(x)\} \subseteq extK$. Έστω $x \in \{x : f(x) = \hat{f}(x)\}$, $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, $\lambda \in (0, 1)$, $y \neq z$. Τότε

$$f(x) = f(\lambda y + (1 - \lambda)z) < \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(z) \leqslant \lambda\hat{f}(y) + (1 - \lambda)\hat{f}(z) \leqslant \hat{f}(x),$$

άτοπο. Άρα κάθε σημείο του $\{x : f(x) = \hat{f}(x)\}$ είναι ακραίο σημείο του K. □

Πρόταση 4.3.2. *Έστω (X, P) διατεταγμένος διανυσματικός χώρος με τον P να παράγει τον X, $B = \{x \in P : f(x) = 1\}$ βάση του κώνου P και $x, y \in B$. Τότε* *(i)* $face\{x\} = F_x = \{z \in B :$ *υπάρχουν* $w \in B$ *και* $\lambda \in (0,1) : x = \lambda z + (1-\lambda)w\}$.

(ii) $x \perp y \iff F_x \cap F_y = \emptyset$.

Απόδειξη. (i) Θέτουμε $G_x = \{z \in B :$ υπάρχουν $w \in B$ και $\lambda \in (0,1) : x = \lambda z + (1-\lambda)w\}$ και έστω $z \in G_x$. Τότε υπάρχουν $w \in B$ και $\lambda \in (0,1)$ με $x = \lambda x + (1-\lambda)w$. Έστω F μια έδρα του B με $x \in F$. Τότε $x = \lambda x + (1-\lambda)w \in F \Rightarrow z, w \in F$. Άρα το z ανήκει σε κάθε έδρα F του B που περιέχει το x και επομένως $G_x \subseteq F_x$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να δείξουμε ότι το G_x είναι κυρτό και ακραίο υποσύνολο του B.

Κυρτό:

Έστω $z_1,\, z_2 \in G_x$. Υπάρχουν $w_1,\, w_2 \in B$ και $\lambda_1,\, \lambda_2 \in (0,1)$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 z_1 + (1-\lambda_1)w_1 && (4.3.1)\\ x &= \lambda_2 z_2 + (1-\lambda_2)w_2. && (4.3.2)\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι $z' = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in G_x$, για κάθε $\lambda \in (0,1)$. Λύνοντας τις παραπάνω σχέσεις ως προς z_1 και z_2, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} z' &= \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_1}x + \frac{1-\lambda}{\lambda_2}x - \frac{\lambda(1-\lambda_1)}{\lambda_1}w_1 - \frac{(1-\lambda)(1-\lambda_2)}{\lambda_2}w_2, \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2\lambda + \lambda_1(1-\lambda)}{\lambda_1\lambda_2}x = z' + \frac{\lambda(1-\lambda_1)}{\lambda_1}w_1 + \frac{(1-\lambda)(1-\lambda_2)}{\lambda_2}w_2 \qquad &\Rightarrow \\ x = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2\lambda + \lambda_1(1-\lambda)}z' + \\ + \underbrace{\frac{\lambda_2\lambda(1-\lambda_1)}{\lambda_2\lambda + \lambda_1(1-\lambda)}w_1 + \frac{\lambda_1(1-\lambda)(1-\lambda_2)}{\lambda_2\lambda + \lambda_1(1-\lambda)}w_2}_{w'}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $a = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2\lambda + \lambda_1(1-\lambda)}$ και εφαρμόζουμε το συναρτησιακό f της βάσης στο στοιχείο w':

$$\begin{aligned} f(w') &= \frac{\lambda_2\lambda(1-\lambda_1) + \lambda_1(1-\lambda)(1-\lambda_2)}{\lambda_2\lambda + \lambda_1(1-\lambda)} \\ &= \frac{\lambda_2\lambda + (1-\lambda)\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_2\lambda + \lambda_1(1-\lambda)} \\ &= 1 - a. \end{aligned}$$

Άρα $w' \in (1-a)B \Rightarrow w' = (1-a)w''$, για κάποιο $w'' \in B$. Τελικά $x = az' + (1-a)w''$, με $a \in (0,1)$ και $w'' \in B$, επομένως $z' \in G_x$ και το G_x κυρτό.

Ακραίο:

Έστω z_1, $z_2 \in G_x$ τέτοια ώστε $\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 \in G_x$. Τότε υπάρχουν $\lambda \in (0,1)$ και $w \in B$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} x &= \lambda\left(\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2\right) + (1-\lambda)w \quad \Rightarrow \\ x &= \frac{1}{2}\lambda z_1 + \underbrace{\frac{1}{2}\lambda z_2 + (1-\lambda)w}_{w'}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το συναρτησιακό f στο w' παίρνουμε $f(w') = 1 - \frac{\lambda}{2}$, επομένως υπάρχει $w'' \in B$ τέτοιο ώστε $w' = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) w''$ και τελικά

$$x = \frac{\lambda}{2}z_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) w'',$$

με $\frac{\lambda}{2} \in (0,1)$ και $w'' \in B$, δηλαδή $z_1 \in G_x$. Ομοίως προκύπτει ότι $z_2 \in G_x$ και επομένως το G_x ακραίο. Άρα τελικά $F_x = G_x$.

(ii) Έστω ότι $x \wedge y = 0$ και $z \in F_x \cap F_y$. Υπάρχουν λ, $\mu \in (0,1)$ και $w, w' \in B$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} x &= \lambda z + (1-\lambda)w, \\ y &= \mu z + (1-\mu)w', \end{aligned}$$

άρα $\lambda z \leqslant x$ και $\mu z \leqslant y$. Τότε $0 < \min\{\lambda, \mu\} \leqslant x, y$, άρα $x \wedge y \neq 0$, άτοπο. Άρα $F_x \cap F_y = \varnothing$.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $F_x \cap F_y = \varnothing$. Έστω ότι υπάρχει u με $0 < u < x, y$. Τότε υπάρχουν λ, $\mu > 0$ και b_1, $b_2 \in B$ τέτοια ώστε $u = \lambda b_1$ και $x - u = \mu b_2 = x - \lambda b_1$. Άρα $x = \lambda b_1 + \mu b_2$ και εφαρμόζοντας το συναρτησιακό f στο x παίρνουμε $f(x) = \lambda + \mu = 1$. Επομένως $x = \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2$, το οποίο δείχνει ότι $b_1 \in F_x$. Ομοίως προκύπτει ότι $b_1 \in F_y$, επομένως $F_x \cap F_y \neq \varnothing$, άτοπο. Άρα δεν υπάρχει u με $0 < u < x, y$ και συνεπώς $x \wedge y = 0$.

□

Θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω θεώρημα το οποίο οφείλεται στον Choquet. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Ros].

Θεώρημα 4.3.3. *Έστω (X, P) τοπικά κυρτός διατεταγμένος χώρος και $B \subseteq X$ συμπαγής και κυρτή βάση του. Αν A συμπαγές υποσύνολο του $extB$, V περιοχή του A στο B, $x \in \overline{co}A$ και $\epsilon > 0$, τότε υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $x', x_1, \ldots, x_n \in B$, τέτοια ώστε:*

(i) $0 \leqslant \lambda < \epsilon$, $0 \leqslant \lambda_i$, *για κάθε* $i = 1, \ldots, n$ *και* $\lambda + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

(ii) $x = \lambda x' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$,

(iii) $F_{x_i} \subseteq V$, *για κάθε* $i = 1, \dots, n$.

Πόρισμα 4.3.4. *Αν* A_1, A_2 *συμπαγή υποσύνολα του* $extB$, $x \in \overline{co}A_1$, $y \in \overline{co}A_2$ *και* $\epsilon > 0$, *τότε υπάρχουν* n, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$, $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m \geqslant 0$ *και* $x', x_1, \dots, x_n \in B$, $y', y_1, \dots, y_m \in B$, *τέτοια ώστε:*

(i) $0 \leqslant \lambda, \mu < \epsilon$ *και* $\lambda + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\mu + \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 1$,

(ii) $x = \lambda x' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $y = \mu y' + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$,

(iii) $x_i \perp y_j$, *για κάθε* i, j.

Απόδειξη. Επιλέγουμε U_1, U_2 ανοικτά και ξένα υποσύνολα του B τέτοια ώστε $A_1 \subseteq U_1$ και $A_2 \subseteq U_2$. Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχουν n, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$, $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m \geqslant 0$ και $x', x_1, \dots, x_n \in B$, $y', y_1, \dots, y_m \in B$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες (i) και (ii). Επιπλέον $F_{x_i} \subseteq V$ και $F_{y_j} \subseteq U$, για κάθε i, j, επομένως, από την Πρόταση (4.3.2), $x_i \perp x_j$. □

Ορισμός 4.3.5. *Δύο μέτρα* $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(X)$ *ονομάζονται* ***ξένα*** *αν υπάρχουν σύνολα Borel* A, $B \subseteq X$ *με* $A \cap B = \varnothing$ *και* $spt\mu \subseteq A$, $spt\nu \subseteq B$.

Λήμμα 4.3.6. *Έστω* (X, P) *γραμμικός σύνδεσμος,* $X = P - P$ *και* B *συμπαγής και μετρικοποιήσιμη βάση του* P. *Αν τα μέτρα* $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(extB)$ *είναι ξένα, τότε τα βαρύκεντρά τους είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη. Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(extB)$ με $\mu \perp \nu$ και $x = r(\mu)$, $y = r(\nu)$ τα βαρύκεντρά τους. Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχουν A_1, A_2 συμπαγή και ξένα υποσύνολα του B τέτοια ώστε τα μ και ν να φέρονται από τα A_1 και A_2 αντίστοιχα. Από Πρόταση (3.2.7), ισχύει ότι $x \in \overline{co}A_1$ και $y \in \overline{co}A_2$. Έστω $\epsilon > 0$. Από Πόρισμα (4.3.4) υπάρχουν n, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$, $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m \geqslant 0$ και $x', x_1, \dots, x_n \in B$, $y', y_1, \dots, y_m \in B$, τέτοια ώστε:

(i) $0 \leqslant \lambda, \mu < \epsilon$ και $\lambda + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\mu + \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 1$,

(ii) $x = \lambda x' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $y = \mu y' + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$,

(iii) $x_i \perp y_j$, για κάθε i, j.

Επομένως

$$
\begin{aligned}
x \wedge y &= \left(\lambda x' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \bigwedge \left(\mu y' + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j\right) \\
&= \lambda x' \wedge y + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \wedge \mu y' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \wedge \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j .
\end{aligned}
$$

Όμως $x_i \wedge y_j = 0$ για κάθε i, j, άρα $\lambda_i x_i \wedge \mu_j y_j = 0$ για κάθε i, j και τελικά παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
x \wedge y &\leqslant \lambda x' \wedge y + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \wedge \mu y' \\
&\leqslant \lambda x' \wedge y + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i x_i + \lambda x'\right) \wedge \mu y' \\
&= \lambda x' \wedge y + x \wedge \mu y'. \qquad (4.3.3)
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζοντας το συναρτησιακό f στο παραπάνω στοιχείο παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
x \wedge y &\leqslant \lambda x' \wedge y + x \wedge \mu y' \qquad \Rightarrow \\
f(x \wedge y) &\leqslant f(\lambda x' \wedge y) + f(x \wedge \mu y') \\
&\leqslant f(\lambda x') + f(\mu y') \\
&= \lambda + \lambda \\
&\leqslant \epsilon + \epsilon.
\end{aligned}
$$

Άρα $f(x \wedge y) \leqslant 2\epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, δηλαδή $f(x \wedge y) = 0$ και καθώς το f είναι αυστηρά θετικό συμπεραίνουμε ότι $x \wedge y = 0$.

Θεωρούμε τώρα τη γενική περίπτωση όπου τα μ και ν φέρονται από τα ξένα σύνολα A_1 και $A_2 \subseteq extB$ αντίστοιχα, με τα A_1 και A_2 να μην είναι κατ' ανάγκην συμπαγή. Από την ιδιότητα (ii) των μέτρων Radon, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mu(A_1) &= \sup\{\mu(K) : K \subseteq A_1,\ K \text{ συμπαγές}\} \quad \text{και} \\
\nu(A_2) &= \sup\{\nu(K) : K \subseteq A_2,\ K \text{ συμπαγές}\}.
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε $0 < \epsilon < 1$ και $B_1 \subseteq A_1$, $B_2 \subseteq A_2$ τέτοια ώστε

$$
\begin{aligned}
\mu(B_1) &> 1 - \epsilon \\
\nu(B_2) &> 1 - \epsilon.
\end{aligned}
$$

Θέτουμε $y_1 = \dfrac{1}{\mu(B_1)} \displaystyle\int_{B_1} t d\mu(t)$. Αν $\mu(B_1) < 1$ θέτουμε $w_1 = \dfrac{1}{1 - \mu(B_1)} \displaystyle\int_{B_1^c} t d\mu(t)$, αλλιώς θέτουμε $w_1 = w \in B$ για κάποιο σταθερό στοιχείο του B. Ομοίως θέτουμε $y_2 = \dfrac{1}{\nu(B_2)} \displaystyle\int_{B_2} t d\nu(t)$ και $w_2 = \dfrac{1}{1 - \nu(B_2)} \displaystyle\int_{B_2^c} t d\nu(t)$, αν $\nu(B_2) < 1$, αλλιώς $w_2 = w$. Τότε

$$
\begin{aligned}
x &= (1 - \mu(B_1))w_1 + \mu(B_1)y_1 \\
y &= (1 - \nu(B_2))w_2 + \nu(B_2)y_2.
\end{aligned}
$$

Τα B_1 και B_2 είναι συμπαγή και ξένα, επομένως, όπως έχουμε ήδη δει, θα πρέπει $y_1 \wedge y_2 = 0$.

$$\begin{aligned}
x \wedge y &= [(1-\mu(B_1))w_1 + \mu(B_1)y_1] \bigwedge [(1-\nu(B_2))w_2 + \nu(B_2)y_2] \\
&\leqslant (1-\mu(B_1))w_1 \wedge y + \mu(B_1)y_1 \wedge (1-\nu(B_2))w_2 + \cancel{\mu(B_1)y_1 \wedge \nu(B_2)y_2} \\
&= (1-\mu(B_1))w_1 \wedge y + \mu(B_1)y_1 \wedge (1-\nu(B_2))w_2 \\
&\leqslant (1-\mu(B_1))w_1 \wedge y + [\mu(B_1)y_1 + (1-\mu(B_1))w_1] \wedge [(1-\nu(B_2))w_2] \\
&= (1-\mu(B_1))w_1 \wedge y + x \wedge (1-\mu(B_2))w_2.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το συναρτησιακό f στο $x \wedge y$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
f(x \wedge y) &\leqslant f((1-\mu(B_1))w_1 \wedge y + x \wedge (1-\mu(B_2))w_2) \\
&\leqslant (1-\mu(B_1)) + (1-\mu(B_2)) \\
&\leqslant \epsilon + \epsilon \\
&= 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Όπως και πριν συμπεραίνουμε ότι $x \wedge y = 0$. □

Υπενθυμίζονται οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 4.3.7. *Δύο διατεταγμένοι χώροι (X_1, P_1) και (X_2, P_2) ονομάζονται* ***αλγεβρικά διατακτικά ισόμορφοι*** *αν υπάρχει γραμμική, ένα προς ένα και επί απεικόνιση $T : X_1 \to X_2$, τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in X_1$ να ισχύει ότι*

$$x \leqslant_1 y \iff Tx \leqslant_2 Ty.$$

Δύο κυρτά υποσύνολα K_1 και K_2 των διανυσματικών χώρων X_1 και X_2 αντίστοιχα, ονομάζονται ***αφφινικά ισοδύναμα*** *αν υπάρχει αφφινική, ένα προς ένα και επί απεικόνιση $a : K_1 \to K_2$.*

Πρόταση 4.3.8. *Έστω (X_1, P_1) και (X_2, P_2) μερικά διατεταγμένοι διανυσματικοί χώροι με βάσεις B_1 και B_2 αντίστοιχα. Αν οι B_1 και B_2 είναι αφφινικά ισοδύναμες, τότε οι χώροι (X_1, P_1) και (X_2, P_2) είναι αλγεβρικά διατακτικά ισόμορφοι.*

Απόδειξη. Θεωρούμε f και g τα συναρτησιακά των βάσεων B_1 και B_2 αντίστοιχα και $a : B_1 \to B_2$ αφφινική, ένα προς ένα και επί. Κάθε $x \in P_1$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως $x = \lambda_x w_x$, με $\lambda_x > 0$ και $w_x \in P_1$. Ορίζουμε $T : P_1 \to P_2$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
T(x) &= T(\lambda_x w_x) = \lambda_x a(w_x), \quad \forall x \in P_1 \backslash \{0\}, \qquad (4.3.4) \\
T(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Η T είναι καλά ορισμένη: Αν $x \in P_1$, τότε $T(x) = \lambda_x a(w_x)$, $g(T(x)) = \lambda_x \cdot 1$, δηλαδή $T(x) \in \lambda_x B_2$ το οποίο αποδεικνύει ότι $T(x) \in P_2$.

Η T γραμμική: Αν $x \in P_1$ και $\lambda > 0$, τότε

$$\begin{aligned} T(\lambda x) &= T(\lambda\lambda_x w_x) \\ &= \lambda\lambda_x a(w_x) \\ &= \lambda T(\lambda_x w_x) \\ &= \lambda T(x). \end{aligned}$$

Για $\lambda = 0$ είναι προφανές ότι η παραπάνω σχέση εξακολουθεί να ισχύει. Αν $x, y \in P_1$ με $x = \lambda_x w_x$ και $y = \lambda_y w_y$, τότε

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(\lambda_x w_x + \lambda_y w_y) \\ &= (\lambda_x + \lambda_y)\frac{1}{\lambda_x + \lambda_y} T(\lambda_x w_x + \lambda_y w_y) \\ &= (\lambda_x + \lambda_y) \cdot T\left(\underbrace{\frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y} w_x + \frac{\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y} w_y}_{\in B_1}\right) \\ &= (\lambda_x + \lambda_y) \cdot a\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y} w_x + \frac{\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y} w_y\right) \\ &= (\lambda_x + \lambda_y)\left[\frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y} a(w_x) + \frac{\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y} a(w_y)\right] \\ &= \lambda_x a(w_x) + \lambda_y a(w_y) \\ &= T(\lambda_x w_x) + T(\lambda_y w_y) \\ &= T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Η T ένα προς ένα: Αν $x, y \in P_1$ με $T(x) = T(y)$, τότε $T(\lambda_x w_x) = T(\lambda_y w_y)$, επομένως $\lambda_x a(w_x) = \lambda_y a(w_y)$. Εφαρμόζοντας το συναρτησιακό g του B_2 παίρνουμε

$$g(T(x)) = \lambda_x = g(T(y)) = \lambda_y = \lambda,$$

άρα η ισότητα πλέον γίνεται $\lambda a(w_x) = \lambda a(w_y)$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι $w_x = w_y$ αφού η a είναι ένα προς ένα. Άρα τελικά έχουμε ότι $x = y$.

Η T επί: Έστω $z' \in P_2$ και $\lambda > 0$, $w_{z'} \in B_2$ τέτοια ώστε $z' = \lambda w_{z'}$. Η a είναι επί, επομένως υπάρχει $w \in B_1$ τέτοιο ώστε $a(w) = w_{z'}$. Θέτουμε $x = \lambda w$. Τότε $T(x) = \lambda a(w) = \lambda w_{z'} = z'$. Άρα η T είναι επί.

Στη συνέχεια επεκτείνουμε την T σε ολόκληρο το $X_1 = P_1 - P_1$:

$$\overline{T}(x) = T(x) = T(x_1 - x_2) = T(x_1) - T(x_2),$$

όπου συμβολίσαμε την επέκταση και πάλι με T. Θα δείξουμε ότι η, ορισμένη πλέον σε ολόκληρο το X_1, απεικόνιση T είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός, δηλαδή ότι είναι ένα προς ένα, επί, γραμμική και διατηρεί τη διάταξη.

Η T γραμμική: Αν $x \in X_1$ με $x = x_1 - x_2$, $x_1, x_2 \in P_1$ και $\lambda > 0$, τότε

$$\begin{aligned} T(\lambda x) &= T(\lambda x_1 - \lambda x_2) \\ &= T(\lambda x_1) - T(\lambda x_2) \\ &= \lambda T(x_1) - \lambda T(x_2) \\ &= \lambda T(x_1 - x_2) \\ &= \lambda T(x). \end{aligned}$$

Ομοίως προκύπτει και για $\lambda \leqslant 0$.

Η T ένα προς ένα: Αν $x, y \in X_1$ με $x = x_1 - x_2$ και $y = y_1 - y_2$ αντίστοιχα, τότε

$$\begin{aligned} T(x) &= T(y) && \Rightarrow \\ T(x_1 - x_2) &= T(y_1 - y_2) && \Rightarrow \\ T(x_1) - T(x_2) &= T(y_1) - T(y_2) && \Rightarrow \\ T(x_1) + T(y_2) &= T(y_1) + T(x_2) && \Rightarrow \\ T(x_1 + y_2) &= T(y_1 + x_2), \ \text{ με } x_1 + y_2,\ y_1 + x_2 \in P_1, && \Rightarrow \\ x_1 + y_2 &= y_1 + x_2 && \Rightarrow \\ x_1 - x_2 &= y_1 - y_2 && \Rightarrow \\ x &= y. \end{aligned}$$

Η T επί: Έστω $y \in X_2$, $y = y_1 - y_2$. Επειδή $T(P_1) = P_2$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in P_1$ τέτοια ώστε $T(x_1) = y_1$ και $T(x_2) = y_2$. Θέτουμε $z = x_1 - x_2$, οπότε

$$T(z) = T(x_1 - x_2) = T(x_1) - T(x_2) = y_1 - y_2 = y.$$

Άρα η T επί.

Η T διατηρεί τη διάταξη: Από τη σχέση $T(P_1) = P_2$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} x \leqslant_1 y & \quad\Longleftrightarrow \\ y - x \in P_1 & \quad\Longleftrightarrow \\ T(y - x) \in P_2 & \quad\Longleftrightarrow \\ T(y) - T(x) \in P_2 & \quad\Longleftrightarrow \\ T(x) \leqslant_2 T(y). & \end{aligned}$$

Άρα η T είναι διατακτικός ισομορφισμός. □

Πλέον είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το χαρακτηρισμό του Choquet:

Θεώρημα 4.3.9. ***(Choquet)*** *Έστω (X, P) διατεταγμένος διανυσματικός χώρος με τον P να παράγει τον X και B συμπαγής και μετρικοποιήσιμη βάση του κώνου P. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος,

(ii) για κάθε στοιχείο του B υπάρχει μοναδικό μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^1(B)$ που το αναπαριστά και φέρεται στο $extB$.

Απόδειξη. **(i) $\Rightarrow$ (ii)**

Έστω ότι το B είναι simplex και θεωρούμε ένα $x \in B$. Από το Θεώρημα (4.3.1) του Choquet, γνωρίζουμε ότι υπάρχει μέτρο μ που το αναπαριστά και για το οποίο να ισχύει $spt\mu \subseteq extB$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει και άλλο τέτοιο μέτρο ν και θέτουμε $\lambda = \mu \wedge \nu$, $\mu' = \mu - \lambda$, $\nu' = \nu - \lambda$. Τότε $\mu' \wedge \nu' = \mu \wedge \nu - \lambda = 0$. Από Λήμμα (4.3.6) έπεται ότι $r(\mu') \perp r(\nu')$. Επιπλέον:

$$\begin{aligned} r(\mu') + r(\lambda) = r(\nu') + r(\lambda) &= r(\mu) = r(\nu) = x, \\ (r(\mu') + r(\lambda)) \wedge (r(\nu') + r(\lambda)) &= r(\mu') \wedge r(\nu') + r(\lambda) = x \quad \Rightarrow \\ x &= r(\lambda). \end{aligned}$$

Αν $\mu \neq \nu$, τότε υπάρχει $A \subset extB$ με $\mu(A) < \nu(A)$. Τότε:

$$\begin{aligned} \nu(extB \backslash A) &< \mu(extB \backslash A) = 1 - \mu(A) && \Rightarrow \\ \mu(A) + \nu(extB \backslash A) &< \mu(A) + 1 - \mu(A) = 1 && \Rightarrow \\ inf\{\mu(K) + \nu(extB \backslash K) : K \subseteq extB\} &< 1 && \Rightarrow \\ (\mu \wedge \nu)(extB) &< 1 && \Rightarrow \\ \lambda(extB) &< 1. \end{aligned}$$

Έστω $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $B = \{x \in X : f(x) = 1\}$. Έχουμε:

$$f(r(\lambda)) = \int_{extB} f d\lambda = \int_{extB} \mathbb{1} d\lambda = \lambda(extB) < 1,$$

άρα $r(\lambda) \notin B$, άτοπο αφού $r(\lambda) = x \in B$. Άρα $\mu = \nu$ πράγμα που αποδεικνύει τη μοναδικότητα του μέτρου.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Ορίζουμε $a : \mathcal{M}^1(extB) \to B$ με $a(\mu) = r(\mu)$ για κάθε $\mu \in \mathcal{M}^1(extB)$. Η a είναι καλά ορισμένη αφού, από την Πρόταση (3.2.7), το βαρύκεντρο κάθε μέτρου πιθανότητας του $extB$ θα ανήκει στο $\overline{co}extB = B$, αφφινική λόγω της Πρότασης (3.2.6) και ένα προς ένα και επί αφού, από υπόθεση, για κάθε σημείο του B υπάρχει μοναδικό μέτρο που το αναπαριστά και ανήκει στο $\mathcal{M}^1(extB)$. Άρα η απεικόνιση a είναι αφφινική ισοδυναμία μεταξύ της βάσης $\mathcal{M}^1(extB)$ του $\mathcal{M}(extB)$ και της βάσης B του (X, P), επομένως από την Πρόταση (4.3.8) οι χώροι $\mathcal{M}(extB)$ και (X, P) θα είναι αλγεβρικά διατακτικά ισόμορφοι. Όμως ο $\mathcal{M}(extB)$ είναι γραμμικός σύνδεσμος, άρα και ο (X, P) θα είναι και αυτός γραμμικός σύνδεσμος.

□

4.3.2 Με τη χρήση συνοριακών μέτρων

Αν αφαιρέσουμε την υπόθεση περί μετρικοποιησιμότητας της B, τότε το $extB$ δεν είναι κατ' ανάγκην σύνολο Borel, επομένως η έκφραση "το μέτρο φέρεται στο $extB$" δεν έχει νόημα.

Επιπλέον υπάρχει παράδειγμα τοπικά κυρτού χώρου E, συμπαγούς συνόλου $B \subseteq E$ και σημείου $x \in B$ για το οποίο δεν υπάρχει μέτρο του B το οποίο να φέρεται στο $extB$ και να αναπαριστά το x (Bishop-de Leeuw, 1959).

Επομένως, αν αφαιρέσουμε την υπόθεση της μετρικοποιησιμότητας, αναζητούμε όχι μέτρα που φέρονται στο $extB$, αλλά που συγκεντρώνουν τη μάζα τους όσο πλησιέστερα στο $extB$ είναι δυνατόν, δηλαδή συνοριακά μέτρα. Καταλήγουμε στο Θεώρημα Choquet-Meyer, το οποίο είναι το αντίστοιχο του πρώτου χαρακτηρισμού του Choquet της προηγούμενης παραγράφου.

Στις περισσότερες περιπτώσεις ο όρος "μεγιστικό μέτρο" είναι δικαιολογημένος. Υπάρχουν όμως παραδείγματα όπου δεν μπορούμε να ερμηνεύσουμε ένα συνοριακό μέτρο ως ένα μέτρο που έχει συγκεντρωμένη τη μάζα του κοντά στα ακραία σημεία. Για παράδειγμα, υπάρχει κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο χώρου Banach, χωρίς ακραία σημεία, αλλά που λαμβάνει συνοριακό μέτρο (Edgar, Mankiewicz, 1977). Το 1982, ο Talagrand έδειξε ότι υπάρχει B κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του c_0 χωρίς ακραία σημεία, αλλά με την ιδιότητα ότι για κάθε σημείο του B να υπάρχει συνοριακό μέτρο του B που το αναπαριστά.

Πρόταση 4.3.10. *Έστω X συμπαγής και T_2 χώρος και $Y \subseteq C(X)$ χώρος συναρτήσεων, δηλαδή ο Y περιλαμβάνει τις σταθερές συναρτήσεις του $C(X)$ και διαχωρίζει τα σημεία του X. Τότε ο χώρος $(Y, \mathbb{1})$ είναι διατεταγμένος χώρος με μονάδα.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το $\mathbb{1}$ είναι διατακτική μονάδα του Y. Έστω $f \in Y$. Η f συνεχής και το X συμπαγές, επομένως η εικόνα $f(X)$ θα είναι συμπαγές, άρα φραγμένο, υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έστω $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $-M \leqslant f(x) \leqslant M$, για κάθε $x \in X$. Τότε $f \in [-M\mathbb{1}, M\mathbb{1}]$, άρα το $\mathbb{1}$ διατακτική μονάδα του Y.

Απομένει να δείξουμε ότι ο $(Y, \mathbb{1})$ είναι Αρχιμήδειος. Έστω ότι $nf \leqslant g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $nf(x) \leqslant g(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in X^+$, επομένως $f(x) \leqslant 0$, για κάθε $x \in X^+$. Άρα $f \leqslant 0$ και ο Y Αρχιμήδειος. □

Παρατήρηση 4.3.11. *Αν X συμπαγής και T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και $Y \subseteq C(X)$ χώρος συναρτήσεων, τότε για κάθε $x \in X$ μπορούμε να ορίσουμε μια κατάσταση $\tilde{x}$ στον $(Y, \mathbb{1})$, με*

$$\tilde{x}(f) = f(x), \ \ \forall f \in Y.$$

*Το συναρτησιακό $\tilde{x}$ ονομάζεται **κατάσταση στο σημείο x**.*

Ο περιορισμός $T : C(X)^* \to Y^*$, απεικονίζει το $\mathcal{M}_1^+(X) \subseteq C(X)^*$ επί του συνόλου των καταστάσεων του Y, $S(Y, \mathbb{1})$: Αν $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$, τότε η μ γραμμική με $||\mu|| = \mu(\mathbb{1}) = 1$. Για $f \in Y$, $f \geqslant 0$, ισχύει ότι $\mu(f) = \displaystyle\int_X f d\mu \geqslant 0$, αφού τόσο το μέτρο μ, όσο και η f είναι θετικά. Άρα $\mu \in S(Y, \mathbb{1})$ και $T(\mathcal{M}_1^+(X)) \subseteq S(Y, \mathbb{1})$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρούμε $p \in S(Y, \mathbb{1})$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach, μπορούμε να επεκτείνουμε το p σε $\tilde{p} \in C(X)^* = \mathcal{M}(X)$, με $||\tilde{p}|| = ||p|| = p(\mathbb{1}) = 1$. Προφανώς $T(\tilde{p}) = p$. Άρα $S(Y, \mathbb{1}) \subseteq T(\mathcal{M}_1^+(X))$.

Ορισμός 4.3.12. *Έστω (X, P, e) διατεταγμένος χώρος με μονάδα και E συμπαγής και T_2 χώρος. Μια γραμμική απεικόνιση $T : (X, P, e) \to (C(E), \mathbb{1})$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν $T(e) = \mathbb{1}$ και η T ένα προς ένα ισομετρία που διατηρεί τη διάταξη και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ένας τέτοιος ισομορφισμός ονομάζεται* ***συναρτησιακή αναπαράσταση*** *(functional representation) του (X, P, e) στο E.*

Παρατήρηση 4.3.13. *Έστω (X, P, e) διατεταγμένος χώρος με μονάδα. Τότε η απεικόνιση $T : (X, P, e) \to (C(S(X, e)), \mathbb{1})$ με $T(x) = \tilde{x}$ και $\tilde{x}(p) = p(x)$, για κάθε $p \in S(X, e)$ είναι μια συναρτησιακή αναπαράσταση του (X, P, e) στο $S(X, e)$. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται* ***κανονική αναπαράσταση*** *(canonical representation).*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 2.4.21 για να δείξουμε ότι η T πληροί τις προϋποθέσεις της συναρτησιακής αναπαράστασης.

(i) $T(e) = \tilde{e} \Rightarrow \tilde{e}(p) = p(e) = 1$, για κάθε $p \in S(Y, e)$, άρα $\tilde{e} = 1$.

(ii) Αν $a, b \in X$, τότε $\tilde{a} = \tilde{b} \iff \tilde{a}(p) = \tilde{b}(p)$, για κάθε $p \in S(Y, e) \iff p(a) = p(b)$, για κάθε $p \in S(Y, e) \iff a = b$, άρα η T ένα προς ένα.

(iii) $a \leqslant b \iff p(a) \leqslant p(b)$, για κάθε $p \in S(Y, e) \iff \tilde{a}(p) \leqslant \tilde{b}(p)$, για κάθε $p \in S(Y, e) \iff \tilde{a} \leqslant \tilde{b} \iff T(a) \leqslant T(b)$.

(iv) $||Ta|| = ||\tilde{a}|| = \sup\limits_{||p||=1} \{|\tilde{a}(p)|\} = \sup\limits_{||p||=1} \{|p(a)|\} = ||a||$, άρα η T ισομετρία.

□

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποια θεωρήματα εμφύτευσης που θα μας χρειαστούν στην απόδειξη του θεωρήματος Choquet-Kendall.

Θεώρημα 4.3.14. *Έστω X συμπαγής και T_2 χώρος και $Y \subseteq C(X)$ χώρος συναρτήσεων. Τότε η απεικόνιση $\phi : X \to S(Y, \mathbb{1})$ με*

$$\phi(x) = \tilde{x}, \ \ \forall x \in X, \tag{4.3.5}$$

είναι ομοιομορφική εμφύτευση του X στο χώρο των καταστάσεων του $(Y, \mathbb{1})$, $S(Y, \mathbb{1})$. Αν $T : (Y, \mathbb{1}) \to C(S(Y, \mathbb{1}), \mathbb{1})$ με $T(y) = \tilde{y}$ για κάθε $y \in Y$, η κανονική αναπαράσταση του $(Y, \mathbb{1})$, τότε ισχύει ότι

$$\tilde{y}(\tilde{x}) = y(x), \ \ \forall x \in X, \ y \in Y. \tag{4.3.6}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής και ένα προς ένα. Θεωρούμε δίκτυο $(x_a)_{a \in A} \subseteq X$ και $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $x_a \to x_0$. Ισχύει ότι $\phi(x_a) = \tilde{x_a} \in S(Y, \mathbb{1})$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in Y$, ισχύει ότι $\tilde{x_a}(f) \to x_0(f)$.

Έστω $f \in Y$. Τότε

$$\tilde{x_a}(f) = f(x_a) \to f(x_0) = x_0(f),$$

αφού η f συνεχής. Άρα η ϕ συνεχής.

Έστω $x, y \in X$. Τότε

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi(y) & \quad \Longleftrightarrow \\ \tilde{x} = \tilde{y} & \quad \Longleftrightarrow \\ \tilde{x}(f) = \tilde{y}(f), \text{ για κάθε } f \in Y & \quad \Longleftrightarrow \\ f(x) = f(y), \text{ για κάθε } f \in Y & \quad \Longleftrightarrow \\ x = y, & \end{aligned}$$

αφού ο Y είναι χώρος συναρτήσεων και επομένως διαχωρίζει τα σημεία του X. Άρα η ϕ είναι ένα προς ένα.

Έστω $y \in Y$ και $x \in X$. Τότε

$$T(y)(\phi(x)) = \tilde{y}(\phi(x)) = \tilde{y}(\tilde{x}) = \tilde{x}(y) = y(x).$$

□

Πρόταση 4.3.15. *Έστω E τοπικά κυρτός και T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος, $f \in E'$, $a \neq 0$ και $K \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό τέτοιο ώστε $E = spanK$ και $K \subseteq \{x : f(x) = a\} = H$. Τότε $H = affK = \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in K, \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Big\}$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in H$. Τότε $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $x_i \in K$. Όμως $f(x) = a$, άρα $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = a \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = a$, άρα $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ και το x ανήκει στο aff$K$.

Αντίστροφα, αν $x \in$ aff$K$, τότε $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Εφαρμόζοντας το f στο x παίρνουμε $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = a \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = a$. Άρα $x \in H$. □

Παρατήρηση 4.3.16. *Με τις παραπάνω υποθέσεις κάθε $x \in E$ ορίζει μοναδικό γραμμικό συναρτησιακό q_x στο $\mathcal{A}^c(K)$ με*

$$q_x(a) = \lambda a(y) - \mu a(z), \ \forall a \in \mathcal{A}^c(K), \tag{4.3.7}$$

για κάθε $x = \lambda y - \mu z$, με $\lambda, \mu > 0$ και $y, z \in K$.

Απόδειξη. Έστω $x \in E$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum\limits_{i \in \Theta} \lambda_i x_i + \sum\limits_{i \in A} \lambda_i x_i$, όπου $\Theta = \{i : \lambda_i > 0\}$ και $A = \{i : \lambda_i < 0\}$. Θέτουμε $y' = \sum\limits_{i \in \Theta} \lambda_i x_i$, οπότε $\dfrac{y'}{\sum_{i \in \Theta} \lambda_i} = \sum\limits_{i \in \Theta} \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i \in \Theta} \lambda_i} x_i = y \in K$. Θέτοντας $\lambda = \sum\limits_{i \in \Theta} \lambda_i$, έχουμε ότι $y' = \lambda y$, με $\lambda > 0$ και $y \in K$.

Εργαζόμαστε ανάλογα και για τον όρο που αφορά τα αρνητικά λ_i, οπότε βρίσκουμε ότι για κάθε $x \in E$ υπάρχουν $\lambda, \mu > 0$, και $y, z \in K$ τέτοια ώστε $x = \lambda y - \mu z$. Είναι αρκετά εύκολο να ελεγχθεί ότι το q_x, όπως ορίστηκε στην εκφώνηση, είναι όντως γραμμικό. □

Ορισμός 4.3.17. *Έστω E τοπικά κυρτός και T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και K συμπαγές και κυρτό σύνολο. Λέμε ότι το K* ***εμφυτεύεται κανονικά*** *στο χώρο E αν*

(i) $E = spanK$,

(ii) υπάρχουν $f \in E'$ και $a \neq 0$ με $K \subseteq \{x : f(x) = a\}$,

*(iii) η απεικόνιση $\tau : E \to \mathcal{A}^c(K)^*$ με $\tau(x) = q_x$, είναι τοπολογικός ισομορφισμός ανάμεσα στον E και τον $\mathcal{A}^c(K)^*$ με την *-τοπολογία.*

Ορισμός 4.3.18. *Έστω X συμπαγής και T_2 χώρος και $Y \subseteq C(X)$ χώρος συναρτήσεων με Y κλειστό υποσύνολο του $C(X)$ και επιπλέον κάθε κατάσταση του $(Y, \mathbb{1})$ να είναι σημειακή κατάσταση, δηλαδή για κάθε $p \in S(Y, \mathbb{1})$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $p(a) = a(x)$, για κάθε $a \in Y$. Τότε το ζεύγος (X, Y) ονομάζεται* ***αφηρημένο ζεύγος*** *(abstract compact convex).*

Παρατήρηση 4.3.19. *Αν E τοπικά κυρτός και T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και K συμπαγές και κυρτό υποσύνολό του, τότε το ζεύγος $(K, \mathcal{A}^c(K))$ είναι αφηρημένο ζεύγος.*

Απόδειξη. Ο $\mathcal{A}^c(K)$ είναι χώρος συναρτήσεων και κλειστό υποσύνολο του $C(K)$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p \in S(\mathcal{A}^c(K), \mathbb{1})$, υπάρχει $x \in K$ τέτοιο ώστε $p(a) = a(x)$, για κάθε αφφινική και συνεχή συνάρτηση a του K.

Έστω $p \in S(\mathcal{A}^c(K), \mathbb{1}) \subseteq C(K)^* = \mathcal{M}(K)$, $p \geqslant 0$, $||p|| = 1$. Μπορούμε να θεωρήσουμε το p ως μέτρο πιθανότητας $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Έστω x το βαρύκεντρο του μέτρου μ. Τότε $p(a) = \mu(a) = \displaystyle\int_K a d\mu = a(x)$, για κάθε $a \in \mathcal{A}^c(K)$, άρα η p είναι σημειακή κατάσταση. □

Ορισμός 4.3.20. *Έστω (X, Y) αφηρημένο ζεύγος και E τοπικά κυρτός και T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος. Ονομάζουμε* ***κανονική εμφύτευση*** *του (X, Y) στον E έναν ομομορφισμό $\phi : X \to E$, τέτοιο ώστε*

(i) Το $\phi(X)$ είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του E,

(ii) το $\phi(X)$ εμφυτεύεται κανονικά στον E,

(iii) η απεικόνιση $\phi^* : \mathcal{A}^c(\phi(X)) \to Y$ με $(\phi^* a)(x) = a(\phi(x))$, για κάθε $x \in X$ και $a \in \mathcal{A}^c(\phi(X))$ είναι ισομορφισμός του $\mathcal{A}^c(\phi(X))$ επί του Y.

Παρατήρηση 4.3.21. *Έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού και T_2 τοπολογικού γραμμικού χώρου με το αφηρημένο ζεύγος $(K, \mathcal{A}^c(K))$ να εμφυτεύεται κανονικά στον τοπικά κυρτό και T_2 τοπολογικό γραμμικό χώρο E μέσω του ομομορφισμού $\phi : X \to E$. Τότε η απεικόνιση ϕ είναι αφφινική.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $(\phi^* a)(x) = a(\phi(x))$, για κάθε $x \in X$ και $a \in \mathcal{A}^c(\phi(X))$. Η $\phi^* a$ είναι αφφινική ($\phi^* a \in \mathcal{A}^c(\phi(X))$), επομένως για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
(\phi^* a)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda(\phi^* a)(x) + (1-\lambda)(\phi^* a)(y), \quad \text{δηλαδή} \\
a(\phi(\lambda x + (1-\lambda)y)) &= \lambda a(\phi(x)) + (1-\lambda)a(\phi(y)) \\
&= a(\lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y)), \quad \forall a \in \mathcal{A}^c(\phi(X)).
\end{aligned}$$

Όμως η οικογένεια $\mathcal{A}^c(\phi(X))$ διαχωρίζει τα σημεία του $\phi(X)$, επομένως $\phi(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y)$ και η ϕ αφφινική. $\square$

Θεώρημα 4.3.22. *Κάθε αφηρημένο ζεύγος (X, Y) εμφυτεύεται κανονικά σε κάποιον τοπικά κυρτό και T_2 τοπολογικο γραμμικό χώρο. Συγκεκριμένα, η απεικόνιση $\phi : X \to Y^*$ με $\phi(x) = \tilde{x}$, για κάθε $x \in X$ είναι κανονική εμφύτευση και απεικονίζει το X επί του $S(Y, \mathbb{1})$.*

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος (4.3.14) και της σχέσης (4.3.6). $\square$

Παρατήρηση 4.3.23. *Έστω K συμπαγές και κυρτό σύνολο και $\phi : K \to \mathcal{A}^c(K)^*$ η κανονική εμφύτευση του K. Ορίζουμε στο χώρο $\mathcal{A}^c(K)^*$ τον κώνο P που έχει ως βάση το σύνολο $\phi(K)$:*

$$P = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda\phi(K) = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda S(\mathcal{A}^c(K), \mathbb{1}).$$

Τότε ο κώνος P ταυτίζεται με τον συνήθη κώνο $\mathcal{A}^c(K)^*_+$, για τον οποίον $T \in \mathcal{A}^c(K)^*_+ \iff T(g) \geqslant 0$, για κάθε $g \in \mathcal{A}^c(K)$ με $g \geqslant 0$.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος (2.4.30). $\square$

Πρόταση 4.3.24. *Έστω X τοπικά κυρτός, T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και P κώνος του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο P είναι τοπικά συμπαγής,

(ii) ο P έχει συμπαγή βάση.

Απόδειξη. **(i) ⇒ (ii)**

Έστω P τοπικά συμπαγής κώνος και V κλειστή και κυρτή περιοχή του 0 τέτοια ώστε το $V \cap P$ συμπαγές. Θεωρούμε το σύνορο του $V \cap P$, $\partial(V \cap P)$ στη σχετική τοπολογία του P και παρατηρούμε ότι:

1. Το 0 δεν ανήκει στο $\partial(V \cap P)$, αφού η $V \cap P$ είναι μια ανοικτή περιοχή του μηδενός η οποία δεν τέμνει το συμπλήρωμα του P.
2. Ο κώνος P γράφεται ως:

   $$P = \{\lambda x : x \in \partial(V \cap P), \lambda \geqslant 0\}.$$

   Πράγματι, αν $x \in \partial(V \cap P)$, τότε $x \in P$, επομένως $\lambda\partial(V \cap P) \subseteq \lambda P \subseteq P$, για κάθε μη αρνητικό λ. Άρα $\bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda\partial(V \cap P) \subseteq P$.

   Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να θυμηθούμε ότι το V, λόγω της Παρατήρησης (2.2.9), είναι απορροφητικό σύνολο, επομένως για κάθε $x \in P$, υπάρχει $\lambda > 0$, τέτοιο ώστε $\lambda x \in V$.
3. Το 0 είναι ακραίο σημείο του $(V \cap P)$. Θα δείξουμε ότι $0 \in extP$: Έστω x, $y \in P$ και $\lambda \in (0, 1)$ με $\lambda x + (1-\lambda)y = 0 \Rightarrow \lambda x = (\lambda - 1)y$. Όμως $\lambda x \in P$ και $(\lambda - 1)y \in -P$, επομένως $\lambda x, (1-\lambda)y \in P \cap (-P) = \{0\}$ και $x = y = 0$.

Το σύνολο $\partial(V \cap P)$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $V \cap P$, επομένως συμπαγές. Επιπλέον $co(\partial(V \cap P)) \subseteq V \cap P$, αφού το $V \cap P$ κυρτό. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα (3.2.10), συμπεραίνουμε ότι $0 \notin \overline{co}(\partial(V \cap P))$, επομένως υπάρχει $f \in X^*$, τέτοιο ώστε $0 \leqslant f(x)$, για κάθε $x \in \partial(V \cap P)$. Τότε το σύνολο $B = \{x \in P : f(x) = 1\}$ είναι συμπαγές, ως κλειστό υποσύνολο του $V \cap P$, και αποτελεί τη ζητούμενη βάση.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος και B συμπαγής βάση του P με $B = \{x \in P : f(x) = 1\}$, $f \in X'$. Έστω $x \in P$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ με $f(x) < \lambda$. Το σύνολο $U = \{y \in X : f(y) \leqslant \lambda\}$ είναι κλειστή περιοχή του x. Επιπλέον

$$U \cap P = \{y \in P : f(y) \leqslant \lambda\} = \bigcup_{0 \leqslant a \leqslant \lambda} aB = co(\{0\}, \lambda B),$$

συμπαγές. Άρα ο P τοπικά συμπαγής.

□

Πόρισμα 4.3.25. *Έστω X τοπικά κυρτός, T_2 τοπολογικός γραμμικός χώρος και P τοπικά συμπαγής κώνος του X. Τότε το σύνολο $P \cap (x - P)$ είναι συμπαγές για κάθε $x \in P$.*

Απόδειξη. Διαπιστώνεται εύκολα ότι $y \in P \cap (x - P) \iff 0 \leqslant y \leqslant x$. Θεωρούμε δίκτυο $(y_a)_{a \in A}$ με $0 \leqslant y_a \leqslant x$, για κάθε $a \in A$ και θα δείξουμε ότι έχει συγκλίνον υποδίκτυο, με το όριό του να εξακολουθεί να ανήκει στο διάστημα $[0, x]$.

Έστω B η συμπαγής (βλ. προηγούμενη Πρόταση) βάση του κώνου P. Για κάθε $a \in A$, το στοιχείο y_a είναι θετικό, επομένως υπάρχουν $\lambda_a > 0$ και $b_a \in B$, τέτοια ώστε $y_a = \lambda_a b_a$. Ομοίως, το x μπορεί να γραφεί ως $x = \lambda_x b_x$. Εφαρμόζοντας το συναρτησιακό f της βάσης B στην ανισότητα

$$\begin{aligned} 0 \leqslant y_a = \quad & \lambda_a b_a \quad \leqslant x = \lambda_x b_x, \quad \text{έχουμε ότι} \\ 0 \leqslant \quad & \lambda_a \quad \leqslant \lambda_x. \end{aligned}$$

Άρα το δίκτυο πραγματικών αριθμών $(\lambda_a)_{a \in A}$ είναι φραγμένο και συνεπώς θα έχει συγκλίνον υποδίκτυο $(\lambda_a)_{a \in A_1}$ με $\lambda \underset{a \in A_1}{\to} \lambda_0$.

Το δίκτυο $(b_a)_{a \in A_1}$ του B έχει και αυτό συγκλίνον υποδίκτυο $(b_a)_{a \in A_2}$ με $b_a \underset{a \in A_2}{\to} b_0 \in B$, λόγω του ότι το B είναι συμπαγές. Επομένως το αρχικό μας δίκτυο $(\lambda_a b_a)_{a \in A}$ έχει συγκλίνον υποδίκτυο $(\lambda_a b_a)_{a \in A_2}$, με $y_a = \lambda_a b_a \underset{a \in A_2}{\to} \lambda_0 b_0$.

Από τις ανισότητες

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \quad & \lambda_a b_a \quad \leqslant \lambda_x b_x, \quad \forall a \in A_2, \quad \text{έπεται ότι} \\ 0 \leqslant \quad & \lambda_a \quad \leqslant \lambda_x, \quad \forall a \in A_2 \quad \Rightarrow \\ 0 \leqslant \quad & \lambda_0 \quad \leqslant \lambda_x \quad \Rightarrow \\ 0 \leqslant \quad & \lambda_0 b_0 \quad \leqslant \lambda_x b_x. \end{aligned}$$

Άρα $0 \leqslant y_0 \leqslant x$, δηλαδή $y_0 \in P \cap (x - P)$. □

Είδαμε νωρίτερα πως κάθε γραμμικός σύνδεσμος έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει (βλ. [Ali3, σελ. 47-51]), αλλά επ' αυτού έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 4.3.26. *Έστω (X, P) άνω κατευθυνόμενος μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος με την ιδιότητα διάσπασης του Riesz και ο P τοπικά συμπαγής. Τότε ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος.*

Απόδειξη. Έστω $x,\, y \in X$. Για κάθε $z \in X$ ορίζουμε το σύνολο

$$K_z = \{w \in X : x, y \leqslant w \leqslant z\}.$$

Επειδή ο X είναι άνω κατευθυνόμενος υπάρχει τουλάχιστον ένα z στον X για το οποίο το σύνολο K_z είναι μη κενό.

Θα δείξουμε ότι η οικογένεια $\{K_z\}_{z\in X}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Πράγματι, αν $z_1, \dots, z_n$ στοιχεία του X με $x, y \leqslant z_1, \dots, z_n$, από την ιδιότητα διάσπασης του Riesz, υπάρχει $w \in X$ με $x, y \leqslant w \leqslant z_1, \dots, z_n$, οπότε $w \in \bigcap_{i=1}^{n} K_{z_i} \neq \varnothing$.

Όμως, από Πόρισμα (4.3.25), κάθε K_z είναι συμπαγές, επομένως η οικογένεια $\{K_z\}_{z\in X}$ θα έχει μη κενή τομή. Αν $w \in \bigcap_{z\in X} K_z$, τότε $x, y \leqslant w$, δηλαδή το w είναι ένα άνω φράγμα των x και y, ενώ αν $x, y \leqslant z$ τότε $w \in K_z$ επομένως $w \leqslant z$, το οποίο δείχνει ότι το w είναι το ελάχιστο άνω φράγμα των x και y, άρα ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος. □

Πρόταση 4.3.27. *Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος και B συμπαγής βάση του P. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η B είναι simplex,

(ii) κάθε σημείο $x \in B$ που μπορεί να γραφτεί ως κυρτός συνδυασμός στοιχείων του B με δύο διαφορετικούς τρόπους

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j, \tag{4.3.8}$$

μπορεί να γραφτεί και ως κυρτός συνδυασμός

$$x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_{ij} z_{ij}, \tag{4.3.9}$$

όπου $x_i = \dfrac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{m} v_{ij} z_{ij}$, $y_j = \dfrac{1}{\mu_j} \sum_{i=1}^{n} v_{ij} z_{ij}$, με $z_{ij} \in B$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Απόδειξη. **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)**

Υπενθυμίζεται ότι, από την Πρόταση (2.4.32), ένας χώρος (X, P) έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα εκλέπτυνσης του Risez, δηλαδή για κάθε $\{u_1, \dots, u_n\}$, $\{v_1, \dots, v_m\}$ με u_i, $v_j \geqslant 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ και $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{m} v_j$, υπάρχουν $w_{ij} \geqslant 0$ τέτοια ώστε $u_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ij}$ και $v_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}$.

Έστω ότι η βάση B του (X, P) είναι simplex. Τότε ο (X, P) είναι γραμμικός σύνδεσμος και επομένως έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz.

Έστω $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$, ένα στοιχείο του X που μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός στοιχείων του B με δύο διαφορετικούς τρόπους ($x_i, y_j \in B$). Από την ιδιότητα διάσπασης του Riesz, υπάρχουν $w'_{ij} \in P$ τέτοια ώστε $\lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{m} w'_{ij}$ και $\mu_j y_j = \sum_{i=1}^{n} w'_{ij}$. Όμως τα w'_{ij} μπορούν να γραφούν ως $w'_{ij} = v_{ij} w_{ij}$, με $v_{ij} \geqslant 0$ και $w_{ij} \in B$, οπότε

$$\begin{aligned} \lambda_i x_i &= \sum_{j=1}^{m} v_{ij} w_{ij} \\ \mu_j y_j &= \sum_{i=1}^{n} v_{ij} w_{ij}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας το συναρτησιακό της βάσης στις παραπάνω ισότητες, έχουμε ότι $\lambda_i = \sum_{j=1}^{m} v_{ij}$ και αθροίζοντας τη σχέση αυτή ως προς i βρίσκουμε ότι $\sum_{i,j} v_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Άρα ο $\sum_{i,j} v_{ij} w_{ij}$ είναι ο ζητούμενος κυρτός συνδυασμός.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)**

Έστω $x = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{m} v_j$, με u_i, $v_j \in P$. Γράφοντας τα u_i και v_j στη μορφή $u_i = \lambda_i x_i$ και $v_j = \mu_j y_j$ με λ_i, $\mu_j \geqslant 0$, x_i, $y_j \in B$, έχουμε

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j.$$

Εφαρμόζουμε το συναρτησιακό της βάσης στην παραπάνω σχέση και παρατηρούμε ότι $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j = \Lambda$. Θέτουμε $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda}$ και $\mu'_j = \frac{\mu_j}{\Lambda}$, οπότε μπορούμε να γράψουμε το στοιχείο $\frac{x}{\Lambda}$ ως κυρτό συνδυασμό στοιχείων του B με δύο διαφορετικούς τρόπους:

$$\frac{x}{\Lambda} = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i x_i = \sum_{j=1}^{m} \mu'_j y_j.$$

Από υπόθεση υπάρχουν $v_{ij} \geqslant 0$, $z_{ij} \in B$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\Lambda} &= \sum_{i,j} v_{ij} z_{ij}, \\
x_i &= \frac{1}{\lambda'_i} \sum_{j=1}^{m} v_{ij} z_{ij} \\
&= \frac{\Lambda}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{m} v_{ij} z_{ij} \quad \Rightarrow \\
\lambda_i x_i = u_i &= \Lambda \cdot \sum_{j=1}^{m} v_{ij} z_{ij} \qquad \text{και ομοίως} \\
y_j &= \frac{\Lambda}{\mu_j} \sum_{i=1}^{n} v_{ij} z_{ij} \quad \Rightarrow \\
\mu_j y_j = v_j &= \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} v_{ij} z_{ij}.
\end{aligned}$$

Άρα $u_i = \sum_{j=1}^{m} w'_{ij}$, $v_j = \sum_{i=1}^{n} w'_{ij}$, με $w'_{ij} = \Lambda v_{ij} z_{ij}$.

□

Πόρισμα 4.3.28. *Έστω (X, P) διατεταγμένος διανυσματικός χώρος και B συμπαγής βάση του. Αν το B είναι simplex και $x \in B$, τότε το σύνολο των απλών θετικών μέτρων που αναπαριστούν το σημείο x είναι άνω κατευθυνόμενο ως προς τη διάταξη Choquet.*

Απόδειξη. Αν $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \epsilon_{x_i}$, απλό μέτρο, από το Πόρισμα (3.6.4) έχουμε ότι $\mu \prec \nu$ αν και μόνο αν το ν μπορεί να γραφεί στη μορφή $\nu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i$ με $r(\nu_i) = x_i$.

Θεωρούμε τα απλά μέτρα $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \epsilon_{x_i}$, $\nu = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \epsilon_{y_j}$ και αναζητούμε απλό μέτρο λ τέτοιο ώστε $\mu, \nu \prec \lambda$. Από υπόθεση $r(\mu) = r(\nu) = x$, δηλαδή $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση (4.3.27) μπορούμε να γράψουμε το x ως κυρτό συνδυασμό

$x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_{ij} z_{ij}$, όπου

$$x_i = \frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{m} v_{ij} z_{ij} \ \text{ και } y_j = \frac{1}{\mu_j}\sum_{i=1}^{n} v_{ij} z_{ij}. \tag{4.3.10}$$

Τότε για το μέτρο $\lambda = \sum_{i,j} v_{ij}\epsilon_{z_{ij}}$, ισχύει ότι

$$r(\lambda) = \sum_{i,j} v_{ij} r(\epsilon_{z_{ij}}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} v_{ij} z_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = x.$$

Επιπλέον, $\lambda = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[\sum_{j=1}^{m} v_{ij}\epsilon_{z_{ij}}\right] = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\nu_i$, με $r(\nu_i) = x_i$, δηλαδή $\mu \prec \lambda$. Ομοίως προκύπτει ότι $\nu \prec \lambda$.

Λήμμα 4.3.29. *Έστω K συμπαγές και κυρτό σύνολο. Τότε για τον περιορισμό $T : C(K)^* \to \mathcal{A}^c(K)^*$ ισχύει ότι $T(\mathcal{M}_{bnd}(K)) = \mathcal{A}^c(K)^*$ ($\mathcal{M}_{bnd}(K) \subseteq \mathcal{M}^+(K) = C(K)^*$). Επιπλέον η απεικόνιση $T : \mathcal{M}_{bnd}(K) \to \mathcal{A}^c(K)^*$ είναι ένα προς ένα, αν και μόνο αν για κάθε $x \in K$ υπάρχει μοναδικό θετικό συνοριακό μέτρο στο K που το αναπαριστά.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $q \in (\mathcal{A}^c(K))^*$ υπάρχει μέτρο $\nu \in \mathcal{M}_{bnd}(K)$ τέτοιο ώστε $\nu(f) = q(f)$, για κάθε $f \in \mathcal{A}^c(K)$. Ο $(\mathcal{A}^c(K))^*$ με βάση τον $S(\mathcal{A}^c(K)), \mathbb{1})$ είναι χώρος με νόρμα βάσης, επομένως, αν $q \in (\mathcal{A}^c(K))^*$, τότε υπάρχουν $\lambda \in (0,1)$ και p_1, $p_2 \in S(\mathcal{A}^c(K)), \mathbb{1})$ με

$$q = \lambda p_1 - (1-\lambda)p_2.$$

Τα p_1 και p_2 ανήκουν στον $(\mathcal{A}^c(K))^*$, επομένως, από Θεώρημα Hahn-Banach, επεκτείνονται σε $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2 \in C(K)^* = \mathcal{M}(K)$ με $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2 \geqslant 0$ και $\bar{p}_1(1) = \bar{p}_2(1) = 1 = ||\bar{p}_1|| = ||\bar{p}_2||$. Συμβολίζουμε τα $\bar{p}_1$ και $\bar{p}_2$ ως μέτρα μ_1, $\mu_2 \in \mathcal{M}_1^+(K)$ και έστω $x_1 = r(\mu_1)$, $x_2 = r(\mu_2) \in \overline{co}K = K$.

Από Θεώρημα (3.6.16), υπάρχουν συνοριακά μετρα ν_1, $\nu_2 \in \mathcal{M}^1_{bnd}(K)$ με $x_1 = r(\nu_1)$ και $x_2 = r(\nu_2)$. Θέτουμε $\nu = \lambda\nu_1 - (1-\lambda)\nu_2 \in \mathcal{M}^1_{bnd}(K)$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{A}^c(K)$

$$\begin{aligned} \nu(f) &= \lambda\nu_1(f) - (1-\lambda)\nu_2(f) \\ &= \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2) \quad \text{και} \\ \lambda\bar{p}_1(f) - (1-\lambda)\bar{p}_2(f) &= \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2). \end{aligned}$$

Από τη σχέση $\nu(f) = \lambda\bar{p}_1(f) - (1-\lambda)\bar{p}_2(f)$, συμπεραίνουμε ότι $T(\nu) = \lambda p_1 - (1-\lambda)p_2 = q$, άρα η T επί.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, αν η T είναι ένα προς ένα, τότε το ζητούμενο είναι προφανές. Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχει μοναδικό θετικό συνοριακό μέτρο του K που το αναπαριστά. Θα δείξουμε ότι $Ker(T) = \{0\}$.

Έστω $\mu \in \mathcal{M}_{bnd}(K)$ με $T(\mu) = 0$, δηλαδή $\int_K f d\mu = 0$, για κάθε $f \in \mathcal{A}^c(K)$, ή ισοδύναμα

$$\mu^+(f) = \mu^-(f), \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{A}^c(K). \tag{4.3.11}$$

Θέτοντας $f = 1$ παίρνουμε ότι $\mu^+(1) = \mu^-(1)$, οπότε διαιρώντας, αν είναι ανάγκη, με το $\mu^+(1)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μ^+, $\mu^- \in \mathcal{M}^1_{bnd}(K)$. Από την (4.3.11) συνεπάγεται ότι $r(\mu^+) = r(\mu^-)$, δηλαδή τα μέτρα μ^+ και μ^- αναπαριστούν το ίδιο σημείο, άρα από υπόθεση θα πρέπει να ταυτίζονται. Δηλαδή, $\mu^+ = \mu^- \Rightarrow \mu = 0$. Άρα $Ker(T) = \{0\}$ και η T ένα προς ένα. □

Θεώρημα 4.3.30. ***(Choquet-Meyer)*** *Έστω (X, P) διατεταγμένος χώρος με τον κώνο P να παράγει τον X και B συμπαγής βάση του P. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο (X, P) γραμμικός σύνδεσμος,

(ii) για κάθε σημείο του B υπάρχει μοναδικό συνοριακό μέτρο πιθανότητας στο B που το αναπαριστά.

Απόδειξη. □

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Έστω ότι το B είναι simplex και $x \in B$. Από Θεώρημα (3.6.16), γνωρίζουμε ότι υπάρχει θετικό και συνοριακό μέτρο πιθανότητας που αναπαριστά το x. Θα δείξουμε ότι το μέτρο αυτό είναι μοναδικό.

Πρώτα δείχνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{M}^+_x(B)$ είναι άνω κατευθυνόμενο. Έστω μ_1, $\mu_2 \in \mathcal{M}^+_x(B)$ και για κάθε $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{K}^c(B)$, $\epsilon > 0$, ορίζουμε το σύνολο

$$\begin{aligned} A(\epsilon, g_1, \ldots, g_n) = \big\{\nu \in \mathcal{M}^+_x(B) : \nu(g_i) \geqslant \mu_1(g_i) - \epsilon, \;\; \text{και } \nu(g_i) \geqslant \mu_2(g_i) - \epsilon \\ \text{για κάθε } i = 1, \ldots, n\big\}. \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Το $A(\epsilon, g_1, \ldots, g_n)$ είναι *-κλειστό. Επιπλέον είναι μη κενό, αφού από την πυκνότητα των απλών μέτρων μπορούμε να θεωρήσουμε δύο δίκτυα $(\mu^1_a)_{a\in A_1}$, $(\mu^2_a)_{a\in A_2}$ με $\mu^1_a \to \mu_1$, $\mu^2_a \to \mu_2$ και τελικά να βρούμε δείκτες $a \in A_1$, $b \in A_2$, τέτοιους ώστε

$$\begin{aligned} \mu^1_a(g_i) &\geqslant \mu_1(g_i) - \epsilon, \\ \mu^2_b(g_i) &\geqslant \mu_2(g_i) - \epsilon, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Από το Πόρισμα (4.3.28) υπάρχει $\nu \in \mathcal{M}^+_x(B)$ με $\mu^1_a, \mu^2_b \prec \nu$, άρα $\nu \in A(\epsilon, g_1, \ldots, g_n)$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η οικογένεια $(A(\epsilon, g_1, \ldots, g_n))_{\epsilon>0, g_1,\ldots,g_n\in\mathcal{K}^c(B), n\in\mathbb{N}}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$A(\epsilon, g_1, \ldots, g_n) \bigcap A(\delta, h_1, \ldots, h_m) = A\left(\min\{\epsilon, \delta\}, g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m\right),$$

το οποίο είναι μη κενό, αφού είναι της μορφής (4.3.12).

Επομένως η οικογένεια $(A(\epsilon, g_1, \dots, g_n))_{\epsilon>0, g_1,\dots,g_n \in \mathcal{K}^c(B), n\in\mathbb{N}}$ έχει μη κενή τομή. Αν $\nu \in \bigcap_{\substack{\epsilon>0,\\ g_1,\dots,g_n\in\mathcal{K}^c(B),\\ n\in\mathbb{N}}} A(\epsilon, g_1, \dots, g_n)$, τότε $\nu(g) \geqslant \mu_1(g) - \epsilon$ και $\nu(g) \geqslant \mu_2(g) - \epsilon$, για κάθε $g \in \mathcal{K}^c(B)$ και κάθε $\epsilon > 0$. Άρα $\nu(g) \geqslant \mu_1(g), \mu_2(g)$, για κάθε $g \in \mathcal{K}^c(B)$, από το οποίο έπεται ότι $\mu_1, \mu_2 \prec \nu$. Άρα το $\mathcal{M}_x^+(B)$ άνω κατευθυνόμενο.

Έστω λ_1, λ_2, δύο θετικά συνοριακά μέτρα πιθανότητας που αναπαριστούν το σημείο x. Το $\mathcal{M}_x^+(B)$ είναι άνω κατευθυνόμενο, επομένως υπάρχει μέτρο λ που αναπαριστά το x και για το οποίο $\lambda_1, \lambda_2 \prec \lambda$. Όμως το λ_1 είναι μεγιστικό μέτρο, επομένως $\lambda_1 = \lambda$. Ομοίως, το λ_2 είναι μεγιστικό, επομένως $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ και το μέτρο είναι μοναδικό.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω ότι για κάθε $x \in B$ υπάρχει μοναδικό $\mu \in \mathcal{M}_{bnd}^1(B)$ με $r(\mu) = x$. Από το Λήμμα (4.3.29) η απεικόνιση $T : \mathcal{M}_{bnd}(B) \to (\mathcal{A}^c(B))^*$ είναι ένα προς ένα και επί. Θα δείξουμε ότι η T διατηρεί τη διάταξη. Αν

$$\begin{aligned}
\mu &= \lambda\mu_1 - (1-\lambda)\mu_2 \quad \text{και} \\
T(\mu) = q &= \lambda p_1 - (1-\lambda)p_2, \quad \text{τότε} \\
T(\mu)(f) = q(f) &= \lambda p_1(f) - (1-\lambda)p_2(f) \\
&= \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2) \\
&= \lambda\mu_1(f) - (1-\lambda)\mu_2(f) \\
&= \mu(f).
\end{aligned}$$

Θεωρώντας $f \geqslant 0$ βλέπουμε ότι $\mu(f) \geqslant 0 \iff T(\mu)(f) \geqslant 0$, δηλαδή $\mu \geqslant 0 \iff T(\mu) \geqslant 0$. Άρα η T είναι αλγεβρικός διατακτικός ισομορφισμός και οι $\mathcal{M}_{bnd}(B)$, $(\mathcal{A}^c(B))^*$ είναι αλγεβρικά διατακτικά ισόμορφοι. Ο $\mathcal{M}_{bnd}(B)$ είναι γραμμικός σύνδεσμος, επομένως ο $(\mathcal{A}^c(B))^*$ θα είναι και αυτός γραμμικός σύνδεσμος. Όμως το B εμφυτεύεται κανονικά στο $\mathcal{A}^c(B)^*$ και από Παρατήρηση (4.3.23) προκύπτει ότι το B είναι simplex.

$\square$

4.3.3 Άλλοι ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί

Μέχρι στιγμής δουλέψαμε αποκλειστικά σε συμπαγή και κυρτά υποσύνολα τοπικά κυρτών χώρων. Ο Choquet είχε ήδη προσπαθήσει να αφαιρέσει την υπόθεση της συμπάγειας με δύο τρόπους, εισάγοντας τα κωνικά μέτρα (conical measures) και τα caps (βλ. [Phe, Κεφ. 13]). Εδώ θα διατυπώσουμε κάποια σχετικά αποτελέσματα τροποποιώντας τις υποθέσεις για το υπό μελέτη σύνολο.

Ορισμός 4.3.31. *Έστω E γραμμικός χώρος και $X \subseteq E$ κυρτό. Το X ονομάζεται* ***simplex Choquet*** *αν αποτελεί βάση γραμμικού συνδέσμου.*

Θεώρημα 4.3.32. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος Banach και $K \subseteq X$ κλειστό και κυρτό. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το K έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym,

(ii) για κάθε $F \subseteq K$ κλειστό, κυρτό και φραγμένο, έπεται ότι $F = \overline{co}sep(K)$, όπου $sep(K)$ το σύνολο των αυστηρά εκτεθειμένων σημείων του K.

Πρόταση 4.3.33. *Έστω E τοπικά κυρτός χώρος και $X \subseteq E$ μετρικά κυρτό σύνολο τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει μοναδικό συνοριακό μέτρο πιθανότητας στο X που το αναπαριστά. Τότε το X είναι simplex Choquet.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι εντελώς όμοια με αυτή της κατεύθυνσης (ii)⇒ (i) του Θεωρήματος Choquet-Meyer, αφού η μόνη ιδιότητα της υπόθεσης περί συμπάγειας του X την οποία χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του εν λόγω θεωρήματος, ήταν το ότι $r(\mu) \in X$, για κάθε $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$, το οποίο εξακολουθεί να ισχύει αφού το X είναι μετρικά κυρτό. □

Το αντίστροφο της πρότασης αυτής δεν ισχύει εν γένει, έχει αποδειχθεί όμως ότι ισχύει στις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

1. Το X συμπαγές και κυρτό υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου. Πρόκειται για το Θεώρημα Choquet-Meyer που έχουμε ήδη αποδείξει.

2. Το X κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο χώρου Banach με το X να έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym (Bourgin 1971, Edgar 1976).

3. Το X κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο χώρου Banach με το X να έχει την ιδιότητα ότι κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολό του ισούται με την κλειστή κυρτή θήκη των αυστηρά εκτεθειμένων σημείων του. Πρόκειται για άμεση εφαρμογή του θεωρήματος (4.3.32) στο αποτέλεσμα των Bourgin και Edgar.

4. Το X μετρικά κυρτό υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου με την ιδιότητα ότι κάθε σύνολο διακριτών μέτρων πιθανότητας του K που είναι άνω κατευθυνόμενο ως προς τη διάταξη Choquet έχει άνω φράγμα (Weizsacker-Winker, 1980).

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να εξασθενίσουμε τις προϋποθέσεις του πρώτου ισοδύναμου χαρακτηρισμού, δηλαδή να βρούμε συνθήκες για το σύνολο X έτσι ώστε να ισχύει ότι το X είναι simplex Choquet αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\mu \in \mathcal{M}^1(extX)$ που το αναπαριστά.

Τρεις περιπτώσεις στις οποίες ισχύει η παραπάνω συνεπαγωγή είναι:

1. Το X συμπαγές, κυρτό και μετρικοποιήσιμο υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου. Πρόκειται για τον πρώτο ισοδύναμο χαρακτηρισμό που έχουμε ήδη αποδείξει.

2. Το X κλειστό, μετρικά κυρτό και Suslin υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου και το X έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym (Thomas, 1980).

3. Το X μετρικά κυρτό και Suslin υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου και το X ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη: Κάθε martingale $(f_i, \mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{F}, \mu)$ με τιμές στο X και σταθερά f, επεκτείνεται σε martingale $(f_i, \mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ στο $(X, \mathcal{F}, \mu)$ (Weizsacker - Winkler, 1980).

Ευρετήριο

 Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

Ελληνική

[Νεγ] Κουμουλλής, Γ., Νεγρεπόντης, Σ. *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

[Πολ] Πολυράκης, Ι. *Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία*, Αθήνα, 2010.

Ξενόγλωσση

[Alf] Alfsen E. M. *Compact Convex Sets and Boundary Integrals*, Springer-Verlag, 1971.

[Ali1] Aliprantis, C. D. *Positive Operators*, Springer, 2006.

[Ali2] Aliprantis, C. D., Border K. C. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, Springer, 3rd edition, 2007.

[Ali3] Aliprantis, C. D., Tourky, R. *Cones and Duality*, American Mathematical Society, 2007.

[Luk] Lukes, J., Maly, J., Netuka I., Spurny J. *Integral Representation Theory: Applications to Convexity, Banach Spaces and Potential Theory*, De Gruyter, 2010.

[Phe] Phelps, R. *Lectures on Choquet's theorem*, Springer, 2nd edition, 2001.

[Ros] Rosenthal, H. *On the Choquet representation theorem*, στο Aumann, R. J., Hart, S. (eds), *Functional Analysis*, (Austin, TX, 1986), Lecture Notes in Mathematics Vol. 1332, Springer, 1988, σελ. 1-32.

[Win] Winkler, G. *Choquet Order and Simplices with Applications in Probabilistic Models*, Springer-Verlag, 1985.