



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICS
AND PHYSICAL SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Colorings, Embeddings and Related Graph Theoretic Problems

Ph.D. Thesis

of

CHRYSANTHI N. RAFTOPOULOU

Athens, December 2015



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICS AND PHYSICAL SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Colorings, Embeddings and Related Graph Theoretic Problems

Ph.D. Thesis

of

CHRYSANTHI N. RAFTOPOULOU

Thesis Committee:

Alexandros Papaioannou

Béla Bollobás

Antonios Symvonis

The Ph.D. Degree Proposal has been examined and approved on

.....
A. Papaioannou
Assoc. Professor
NTUA
(supervisor)

.....
B. Bollobás
Professor
Un. of Cambridge
Un. of Memphis

.....
A. Symvonis
Professor
NTUA

.....
A. Arvanitakis
Assist. Professor
NTUA

.....
I. Emiris
Professor
Un. of Athens

.....
D. Fotakis
Assist. Professor
NTUA

.....
M. Kaufmann
Professor
Un. of Tübingen

.....
CHRYSANTHI N. RAFTOPOULOU

School of Applied Mathematics and Physical Sciences

Copyright ©Chrysanthi N. Raftopoulou, 2015

All rights reserved

No part of this thesis may be reproduced, stored in retrieval systems, or transmitted in any form or by any means -electronic, mechanical, photocopying, or otherwise- for profit or commercial advantage. It may be reprinted, stored or distributed for a non-profit, educational or research purpose, given that its source of origin and this notice are retained. Any questions concerning the use of this thesis for profit or commercial advantage should be addressed to the author. The opinions and conclusions stated in this thesis are expressing the author. They should not be considered as a pronouncement of the National Technical University of Athens.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Χρωματισμοί, Εμφυτεύσεις και Συναφή Γραφοθεωρητικά
Προβλήματα**

Διδακτορική Διατριβή

της

ΧΡΥΣΑΝΘΗΣ Ν. ΡΑΥΤΟΠΟΥΛΟΥ

Αθήνα, Δεκέμβριος 2015



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χρωματισμοί, Εμφυτεύσεις και Συναφή Γραφοθεωρητικά Προβλήματα

Διδακτορική Διατριβή

της

ΧΡΥΣΑΝΘΗΣ Ν. ΡΑΥΤΟΠΟΥΛΟΥ

Τριμελής Συμβουλευτική
Επιτροπή:

Αλέξανδρος Παπαϊωάννου
Béla Bollobás
Αντώνιος Συμβώνης

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την

.....
Α. Παπαϊωάννου
Αναπ. Καθηγητής
ΕΜΠ
(επιβλέπων)

.....
B. Bollobás
Καθηγητής
Παν. Cambridge
Παν. Memphis

.....
Α. Συμβώνης
Καθηγητής
ΕΜΠ

.....
Α. Αρβανιτάκης
Επικ. Καθηγητής
ΕΜΠ

.....
Ι. Εμίρης
Καθηγητής
ΕΚΠΑ

.....
Δ. Φωτάκης
Επικ. Καθηγητής
ΕΜΠ

.....
M. Kaufmann
Καθηγητής
Παν. Tübingen

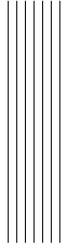
.....
ΧΡΥΣΑΝΘΗ Ν. ΡΑΥΤΟΠΟΥΛΟΥ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Copyright ©Χρυσάνθη Ν. Ραυτοπούλου, 2015

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος-All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται η παρούσα σημείωση. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτή τη διατριβή εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.



Abstract

Book embeddings are a well studied topic of graph theory with numerous applications. Research dates back to early 70s and has produced a vast literature. In this thesis we focus on two particular problems. The first was posed by Heath: he proved that planar graphs of maximum degree 3 are subhamiltonian and therefore 2-page book embeddable, and asked if the same holds for planar graphs of maximum degree greater than 3. In this concept we prove that all planar graphs of maximum degree 4 are indeed subhamiltonian. The second question is related to the page number of graphs that are not closed under minors. It is well known that if a graph is closed under minors then its page number is bounded. However it remained open whether any bound exists for families of graphs that are not minor-closed. We prove that the class of 1-planar graphs, i.e. graphs that can be embedded in the plane so that every edge is crossed at most once, have bounded page number. To the best of our knowledge, this is the first attempt to bound the page number of such families of graphs.

Another topic of graph theory that we focus on, are a variation of the well known total coloring problem. We consider total colorings that distinguish adjacent vertices by the sets of colors used for the vertex and its incident edges. This problem was proposed by Professor Béla Bollobás. In fact he suggested to consider AVD-total colorings of graphs with maximum degree 3, in order to answer a question posed by Hulan of whether 5 colors suffice for such a coloring or 6 colors are necessary for certain 3-regular graphs. Although we did not manage to completely answer this question, we proved that 5 colors are enough for generalized Halin graphs with maximum degree 3. This is also a step towards determining the exact AVD-total coloring number of planar graphs. From another perspective, we also prove that the AVD-total coloring conjecture holds for 4-regular graphs.

In this thesis, we also examine some problems of graph drawing. In particular, we answer an open question posed by Lovász about circle representations of 4-regular planar graphs. Circle representations are related to the well known contact graph representation problem. We prove that if the graph is triconnected then circle-packing techniques can produce a realization as a system of touching circles, however if the graph is not triconnected then there exist infinite counterexamples. Also, we give new results on

perfect smooth orthogonal layouts, that were recently introduced in the graph drawing literature, and we extend and improve previous work on this topic.



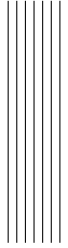
Περίληψη

Οι εμφυτεύσεις γραφημάτων σε βιβλίο είναι ένα ευρέως μελετημένο κεφάλαιο της θεωρίας γραφημάτων με πολλές εφαρμογές. Η σχετική ερευνητική δραστηριότητα χρονολογείται από τις αρχές της δεκαετίας του 70 και έχει παράξει πλούσια βιβλιογραφία. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή εστιάζουμε σε δύο συγκεκριμένα προβλήματα. Το πρώτο τέθηκε από τον Heath: έδειξε ότι τα επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 3 είναι υποχαμιλτονιανά και συνεπώς εμφυτεύονται σε βιβλίο με 2 σελίδες, και έθεσε το ερώτημα εάν το ίδιο ισχύει για επίπεδα γράφημα με μέγιστο βαθμό μεγαλύτερο του 3. Προς αυτή την κατεύθυνση, αποδεικνύουμε ότι όλα τα επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 4 είναι πράγματι υποχαμιλτονιανά. Το δεύτερο πρόβλημα σχετίζεται με το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο γραφημάτων που δεν είναι κλειστά υπό ελάχισσωνα. Είναι γνωστό ότι εάν ένα γράφημα είναι κλειστό υπό ελάχισσωνα, τότε το πάχος εμφύτευσής του σε βιβλίο είναι φραγμένο. Ωστόσο, παρέμενε ανοιχτό εάν υπάρχει κάποιο φράγμα για οικογένειες γραφημάτων που δεν είναι κλειστές υπό ελάχισσωνα. Αποδεικνύουμε ότι η οικογένεια των 1-επίπεδων γραφημάτων, δηλαδή των γραφημάτων που μπορούν να απεικονιστούν στο επίπεδο έτσι ώστε κάθε ακμή να τέμνεται το πολύ μία φορά, έχουν φραγμένο πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο. Απ' όσο γνωρίζουμε, αυτή είναι η πρώτη απόπειρα προσδιορισμού κάποιου άνω φράγματος για το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο τέτοιων οικογενειών γραφημάτων.

Ένα άλλο θέμα της θεωρίας γραφημάτων στο οποίο εστιάζουμε, είναι μία παραλλαγή του γνωστού προβλήματος ολικών χρωματισμών γραφημάτων. Εξετάζουμε ολικούς χρωματισμούς που διαχωρίζουν γειτονικές κορυφές βάση του συνόλου των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται για την κορυφή και τις προσκείμενες ακμές της. Το πρόβλημα αυτό προτάθηκε από τον Καθηγητή Béla Bollobás. Βασικά πρότεινε να εξετάσουμε AVD-ολικούς χρωματισμούς γραφημάτων με μέγιστο βαθμό 3, προκειμένου να απαντηθεί ένα ερώτημα που τέθηκε από τον Hulgan και αφορά εάν 5 χρώματα επαρκούν για αυτόν το χρωματισμό ή απαιτούνται 6 χρώματα για ορισμένα 3-κανονικά γραφήματα. Αν και δεν καταφέραμε να απαντήσουμε συνολικά την ερώτηση αυτή, δείξαμε ότι 5 χρώματα επαρκούν για τα γενικευμένα Halin γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3. Αυτό είναι επίσης ένα βήμα προς τον πλήρη προσδιορισμό του AVD-ολικού χρωματικού αριθμού των επίπεδων γραφημάτων. Από μία άλλη οπτική γωνία, δείξαμε επίσης

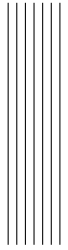
ότι η εικασία των AVD-ολικών χρωματισμών ισχύει για 4-κανονικά γραφήματα.

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή, μελετήσαμε και ορισμένα προβλήματα της απεικόνισης γραφημάτων. Ειδικότερα, απαντάμε μία εικασία που διατυπώθηκε από τον Lonász σχετικά με αναπαραστάσεις με κύκλους των 4-κανονικών επίπεδων γραφημάτων. Οι αναπαραστάσεις με κύκλους σχετίζονται με το γνωστό πρόβλημα αναπαράστασης γραφημάτων ως γραφήματα επαφών. Αποδεικνύουμε ότι εάν το γράφημα είναι τρισυνεκτικό, τότε τεχνικές συσκευασίας κύκλων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή μίας πραγματοποίησης ως ένα σύστημα εφαπτόμενων κύκλων. Ωστόσο, εάν το γράφημα δεν είναι τρισυνεκτικό υπάρχουν άπειρα αντιπαραδείγματα. Επίσης, παρουσιάζουμε καινούρια αποτελέσματα για άριστες ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις, οι οποίες εισήχθησαν πρόσφατα στην βιβλιογραφία της απεικόνισης γραφημάτων, και επεκτείνουμε και βελτιώνουμε προηγούμενα αποτελέσματα πάνω στο συγκεκριμένο πρόβλημα.



Acknowledgments

This thesis is the account of several years of devoted work in the field of computer science at the National Technical University of Athens. First of all, I wish to express my sincere thanks to my advisor, Associate Professor Alexandros Papaioannou, for his guidance and patient supervision. I also wish to express my profound appreciation to Professor Béla Bollobás for his collaboration and constructive advices. He invited me for an easter term at the University of Cambridge and motivated the part of this thesis that is devoted to colorings of graphs. I also thank him for accepting to be a member of my supervising committee. Also, special thanks to Professor Michael Kaufmann for inviting me twice in Germany during my Ph.D. thesis and giving me the opportunity and pleasure to work with him and his team. During the last two years, I have been working on a research project under the supervising of Professor Antonios Symvonis; I express my gratitude for his support and trust during our collaboration. Another person who stands out for his valuable help, support and encouragement is my colleague and coauthor Michael Bekos. I have also had a lot of support from my current or former colleagues in our research group: Tamara Mchedlidze, Fouli Argyriou, Kostas Mastakas, Efi Karra, Despina Papatheodorou. Additionally, I would like to thank my friend and colleague Athanasios Angelakis for all our useful discussions. Of course, there are no words to express my sincere and profound gratitude towards those who have been behind the curtains all these years, people who value most in my life: my family and friends.



Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή είναι προϊόν επί ετών δουλειάς στον τομέα των υπολογιστικών μαθηματικών στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Καταρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντά μου, Αναπ. Καθηγητή Αλέξανδρο Παπαϊωάννου, για την καθοδήγηση και υπομονετική επίβλεψη. Επίσης θα ήθελα να εκφράσω την βαθύτατη εκτίμησή μου προς τον Καθηγητή Béla Bollobás για την συνεργασία του και τις εποικοδομητικές συμβουλές του. Με προσκάλεσε για ένα τρίμηνο στο Πανεπιστήμιο του Cambridge και έβαλε τα θεμέλια για το κομμάτι της παρούσας διατριβής που αφορά χρωματισμούς γραφημάτων. Τον ευχαριστώ επίσης, που δέχτηκε να είναι μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής μου. Επίσης, θερμές ευχαριστίες στον Καθηγητή Michael Kaufmann που με κάλεσε δύο φορές στην Γερμανία κατά τη διάρκεια της εκπόνησης του διδακτορικού μου, και μου έδωσε τη χαρά και την ευκαιρία να εργαστώ μαζί με τον ίδιο και την ομάδα του. Τα τελευταία δύο χρόνια, εργάστηκα σε ένα ερευνητικό πρόγραμμα υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Αντώνιου Συμβώνη. Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου για την συμπαράστασή του και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Ένα πρόσωπο ακόμα που ξεχωρίζει για την πολύτιμη βοήθειά του, την υποστήριξη και ενθάρρυνση είναι ο συνάδελφος και συνσυγγραφέας Μιχάλης Μπέκος. Επίσης, είχα μεγάλη υποστήριξη από τους τωρινούς και τους παλαιότερους συναδέλφους της ερευνητικής μας ομάδας: την Tamara Mchedlidze, την Φούλη Αργυρίου, τον Κώστα Μάστακα, την Έφη Καρρά, την Δέσποινα Παπαθεοδώρου. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον φίλο και συνάδελφο Αθανάσιο Αγγελάκη για τις χρήσιμες συζητήσεις που είχαμε. Φυσικά, δεν υπάρχουν λόγια να εκφράσω την ειλικρινή και βαθιά ευγνωμοσύνη προς εκείνους που ήταν στα παρασκήνια όλα αυτά τα χρόνια, τους πιο πολύτιμους ανθρώπους της ζωής μου: την οικογένεια και τους φίλους μου.

Contents-Περιεχόμενα

Contents-Περιεχόμενα

9

Embeddings, Colorings and Related Graph Theoretic Problems

1 Introduction	15
1.1 Book Embeddings	15
1.2 Adjacent Vertex Distinguishing Total Colorings	17
1.3 Circle Representations	20
1.4 Smooth Orthogonal Drawings	22
1.5 Thesis Contribution	24
1.6 Thesis Overview	26
2 Preliminaries	29
2.1 Terminology	29
2.1.1 Book Embeddings	31
2.1.2 Adjacent Vertex Distinguishing Total Colorings	32
2.1.3 Circle Representations	33
2.1.4 Smooth Orthogonal Drawings	34
2.2 Algorithmic Tools	36
2.2.1 Yannakakis' Algorithm	36
2.2.2 SPQR Trees	39
Part A: Graph Theory	40
3 Book Embedding of Maximum Degree 4 Planar Graphs	43
4 Book Embedding of 1-Planar Graphs	65
4.1 The Two-Level Case	66
4.2 The Multi-Level Case	76

4.3	Coping with Multiedges	77
4.4	Coping with Crossings on the Graph's Unbounded Face	79
5	AVDTC of Generalized Halin Graphs with Maximum Degree 3	81
6	AVDTC of 4-Regular Graphs	93
6.1	Hamiltonian 4-Regular Graphs	93
6.2	Non-Hamiltonian 4-Regular Graphs	98
Part B: Graph Drawing		126
7	Circle-Representations of Simple 4-Regular Planar Graphs	129
7.1	Bounds on the Number of Circles Needed in a Circle Representation of a Simple 4-Regular Planar Graph	129
7.2	The Case of 3-Connected 4-Regular Planar Graphs	131
7.3	The Case of Connected 4-Regular Planar Graphs	133
7.4	The Case of Biconnected 4-Regular Planar Graphs	144
8	Perfect Smooth Layouts	147
8.1	Planar Perfect Smooth Orthogonal Drawings of Planar Graphs with Maximum Degree 3	147
8.2	Non-Planar Perfect Smooth Orthogonal Drawings	151
8.3	Perfect Smooth Orthogonal Kandinsky Drawings	153
8.4	Graph Classes of Perfect Edge Complexity	160
9	Conclusions	163
9.1	Book Embeddings	163
9.2	Adjacent Vertex Distinguishing Total Colorings	163
9.3	Circle Representations	164
9.4	Smooth Orthogonal Drawings	165

Εμφυτεύσεις, Χρωματισμοί και Συναφή Γραφοθεωρητικά Προβλήματα

10	Εισαγωγή	169
10.1	Εμφυτεύσεις σε Βιβλίο	169
10.2	Ολικοί Χρωματισμοί με Διαχωριζόμενες Γειτονικές Κορυφές	172
10.3	Αναπαραστάσεις Κύκλων	175
10.4	Ομαλές Ορθογώνιες Απεικονίσεις	178

10.5 Συμβολή της Διδακτορικής Διατριβής	181
10.6 Οργάνωση της Διδακτορικής Διατριβής	183
11 Βασικοί Ορισμοί	185
11.1 Ορολογία	185
11.1.1 Εμφυτεύσεις σε Βιβλίο	188
11.1.2 Ολικοί Χρωματισμοί με Διαχωριζόμενες Γειτονικές Κορυφές	189
11.1.3 Αναπαραστάσεις με Κύκλους	190
11.1.4 Ομαλές Ορθογώνιες Απεικονίσεις	191
11.2 Αλγοριθμικά Εργαλεία	193
11.2.1 Ο Αλγόριθμος του Γιαννακάκη	193
11.2.2 SPQR-Δένδρα	197
Μέρος Α: Θεωρία Γραφημάτων	198
12 Εμφύτευση σε Βιβλίο Επίπεδων Γραφημάτων Μέγιστου Βαθμού 4	201
13 Εμφύτευση σε Βιβλίο 1-Επίπεδων Γραφημάτων	227
13.1 Η Περίπτωση Δύο-Επιπέδων	228
13.2 Η Περίπτωση Πολλών Επιπέδων	241
13.3 Πολλαπλές Ακμές	242
13.4 Τομές Ακμών στη μη Φραγμένη Όψη του Γραφήματος	244
14 AVD-Ολικός Χρωματισμός Γενικευμένων Halin Γραφημάτων με Μέ- γιστο Βαθμό 3	245
15 AVD-Ολικός Χρωματισμός 4-Κανονικών Γραφημάτων	259
15.1 Χαμιλτονιανά 4-Κανονικά Γραφήματα	259
15.2 Μη-Χαμιλτονιανά 4-Κανονικά Γραφήματα	265
Μέρος Β: Απεικόνιση Γραφημάτων	296
16 Αναπαραστάσεις με Κύκλους Απλών 4-Κανονικών Επίπεδων Γραφη- μάτων	299
16.1 Φράγματα στο Πλήθος των Κύκλων για μία Αναπαράσταση με Κύ- κλους ενός Απλού 4-Κανονικού Επίπεδου Γραφήματος	299
16.2 Η Περίπτωση 3-Συνεκτικών 4-Κανονικών Επίπεδων Γραφημάτων	301
16.3 Η Περίπτωση Συνεκτικών 4-Κανονικών Επίπεδων Γραφημάτων	303
16.4 Η Περίπτωση Δισυνεκτικών 4-Κανονικών Επίπεδων Γραφημάτων	316

17 Άριστες Ομαλές Απεικονίσεις	319
17.1 Επίπεδες Άριστες Ομαλές Ορθογώνιες Απεικονίσεις Επίπεδων Γρα- φημάτων με Μέγιστο Βαθμό 3	319
17.2 Μη-Επίπεδες Άριστες Ομαλές Ορθογώνιες Απεικονίσεις	325
17.3 Άριστες Ομαλές Ορθογώνιες Kandinsky Απεικονίσεις	326
17.4 Κλάσεις Γραφημάτων Με Άριστη Πολυπλοκότητα Ακμής	335
18 Συμπεράσματα	339
18.1 Εμφυτεύσεις σε Βιβλίο	339
18.2 Ολικοί Χρωματισμοί με Διαχωριζόμενες Γειτονικές Κορυφές	340
18.3 Απεικονίσεις με Κύκλους	340
18.4 Άριστες Ορθογώνιες Απεικονίσεις	341
Bibliography	345

Embeddings, Colorings and Related Graph Theoretic Problems

1 Introduction

1.1 Book Embeddings

Book embeddings are in a sense a special case of planar embeddings of graphs. In a book embedding the vertices of a graph are placed on the “spine” of a book and the edges are assigned to “pages”, so that edges on the same page do not cross. The book thickness or page number of a graph is the smallest number of pages required for any book embedding of this graph.

Book embeddings have a long history of research dating back to the early seventies [Oll73]. Book embeddings naturally arise in VLSI (Very Large Scale Integration) design where vertices of the book correspond to components of a circuit and edges correspond to connections between them [CLR87]. Other application areas of book embeddings include parallel computing, design of fault-tolerant systems [CLR87], bioinformatics [HS99] and many more.

An upper bound on the page number of an n -vertex graph is $\lceil n/2 \rceil$, which is tight for complete graphs [BK79]. For the complete bipartite graph $K_{n,m}$, with $n \leq m$ it is at most n . Although the upper bound is not tight in general (for example $K_{4,4}$ has page number 3 as can be seen in Figure 1.1), it is exactly n in the case where $m > n(n-1)$ [BK79, dKPS14].

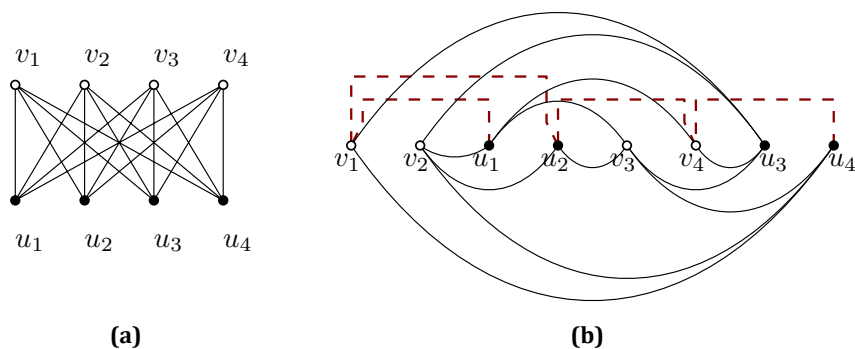


Figure 1.1: (a) The complete bipartite graph $K_{4,4}$. (b) $K_{4,4}$ has page number 3: edges on the first page are drawn as solid arcs above the spine, edges on the second page as solid arcs below the spine, and edges on the third page are drawn as dashed red polylines.

Since the page number of a graph equals to the maximum page number of its biconnected components [BK79], one can always assume biconnectivity. It has been found that binary de Bruijn graphs, shuffle-exchange graphs and cube-connected cycles always fit in three pages [HS97]. Apart from specific classes of graphs, upper bounds of the page number have been also related to several graph invariants. In particular graphs with m edges have page number $O(\sqrt{m})$ [Mal94b] and graphs of genus g have page number $O(\sqrt{g})$ [Mal94a]. For graphs of constant treewidth k the page number is bounded by $k + 1$ [GH01], and this bound is tight for $k > 2$ [DW07]. More generally, minor-closed graphs have bounded page number [NdM12]. For families of graphs that are not closed under minors it remains open whether their page number is bounded or not. For example, k -planar graphs are not minor-closed. Recall that the problem of determining whether a graph is k -planar, even for $k = 1$ is NP-hard [GB07, KM13], even if the deletion of a single edge makes the input graph planar [CM13].

There is an extensive amount of literature on embedding various types of graphs into books; for an overview see e.g. [DW04, Ove07]. However, it is book embeddings of planar graphs that have received most attention in the past. One early upper bound on the page number of planar graphs is due to Buss and Shor [BS84], who showed that the page number of planar graphs is at most 9. Heath [Hea84] proved that planar graphs fit in a book of 7 pages, and later on Istrail [Ist88] reduced the number of pages by one. Perhaps the most popular and central result on book embeddability of planar graphs is due to M. Yannakakis [Yan89], who in the late eighties proved that planar graphs have page number at most four. It remains however unanswered whether this known bound of four is tight. Heath [Hea84] for example proves that all planar 3-trees are 3-page book embeddable. For more restricted subclasses of planar graphs, Bernhart and Kainen [BK79] show that the graphs with page number one are the outerplanar graphs, while the class of two-page embeddable graphs coincides with the class of subhamiltonian graphs (see Figures 1.2a-1.2b). The relation between subhamiltonian cycles and two-page book embeddings is quite intuitive. The ordering of the nodes on the spine is equivalent to the cyclic order of the subhamiltonian cycle. The edges are partitioned by whether they lie in the interior of the cycle or not. Note that not all planar graphs are subhamiltonian: the Goldner-Harary graph is the smallest maximal planar graph that requires three pages (see Figure 1.2c).

Although testing whether a graph is subhamiltonian is NP-complete [Wig82], several graph classes are known to be subhamiltonian (and therefore two-page book embeddable). An early important result is due to Whitney [Whi31], who proves that every maximal planar graph with no separating triangles is hamiltonian (recall that a separating triangle is a 3-cycle whose removal disconnects the graph). Tutte [Tut56] shows that every 4-connected planar graph has a hamiltonian cycle, while Chiba and Nishizeki

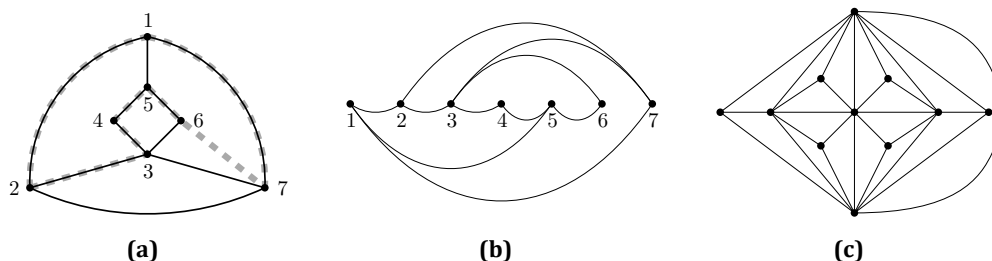


Figure 1.2: (a) A subhamiltonian planar graph G : the subhamiltonian cycle is drawn with gray dotted line. (b) The 2-page book embedding of G where the ordering of the vertices along the spine is given by the subhamiltonian cycle. (c) The Goldner-Harary graph.

[CN89] provide a linear-time algorithm to find a hamiltonian cycle in a 4-connected planar graph. Chen [Che03] gives a proof that every maximal planar graph with at least five vertices and no separating triangles is 4-connected. Sanders [San97] generalizes a theorem of Thomassen [Tho83] and shows that any 4-connected planar graph has a hamiltonian cycle that contains two arbitrarily chosen edges of the graph. Based on Whitney's theorem [Whi31], Kainen and Overbay [K007] show that every planar graph with no separating triangles is subhamiltonian. Another result is by Chen [Che03] who shows that if a maximal planar graph contains only one separating triangle, then it is hamiltonian. Helden [Hel07] improves this result further to two triangles. One result that is interesting in our context is that of Heath [Hea85]. In his thesis, he describes a linear-time algorithm to embed any planar graph of maximum degree 3 into two pages and concludes that it would be interesting to know if a higher degree bound is possible.

Clearly, since finding a subhamiltonian cycle is NP-complete [Wig82], computing the page number of a graph is NP-hard. If the ordering of the vertices along the spine is fixed, then a two-page book embedding can be found (if it exists) in linear time, since it is equivalent to planarity testing. For three pages, Unger [Ung92] provides a polynomial time procedure although some details are omitted. Still, for four or more pages, the problem is NP-hard [Ung88, GJMP80] as it is equivalent to vertex coloring of circle graphs. On the other hand, if the partition of the edges into pages is fixed, then, for two pages the decision problem is linearly solvable with SPQR trees [ADBDB13, HN09].

1.2 Adjacent Vertex Distinguishing Total Colorings

Graph coloring is probably the best known and most studied area of graph theory. Graph colorings have an intriguing history. The first results about graph coloring date back to 1852 and deal almost exclusively with planar graphs in the form of the coloring of maps (for an extended historical overview see e.g. [CLZ10]). Since coloring a map is equivalent to coloring the vertices of its dual graph, it is vertex colorings that have

received most attention. The literature for graph colorings is vast, and the requirement of different restrictions lead to different types of colorings:

Proper Vertex Coloring: Only the vertices of the graph are colored under the restriction that adjacent vertices have different colors.

Proper Edge Coloring: Only the edges of the graph are colored under the restriction that edges with common endpoints have different colors.

Proper Total Coloring: Both vertices and edges are colored such that adjacent or incident elements have different colors.

The study of proper edge colorings that induce different color sets on vertices was introduced independently by Burriss and Schelp [BS97] and Černý et al. [ČHS96] (under the notion of observability). In their work they examined the number of colors needed for a proper edge coloring so that any two vertices have different color sets. This type of coloring is known as vertex-distinguishing-proper-edge-coloring (VD-edge-coloring for short). Note that a VD-edge-coloring of a graph G is also a proper edge coloring. By the famous theorem of Vizing it is known that the chromatic index of G equals either $\Delta(G)$ or $\Delta(G) + 1$ (where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G). However, for the VD-chromatic index it is surprisingly difficult to formulate any such result. In [BS97] it was conjectured that the VD-chromatic index of a graph G is at most $\min_{1 \leq k \leq \Delta(G)} \left\{ k : \binom{k}{d} \geq n_d \right\} + 1$ (where n_d is the number of vertices of degree d in G). This conjecture has been verified for graphs with maximum degree 2 [BBS02]. For other results we refer to [BHLW99, BHLW01, BRS03, BKLS04].

Later, Zhang et al. [ZLW02] relaxed the restrictions of VD-edge-colorings and examined proper edge colorings that distinguish only pairs of adjacent vertices, thus introducing adjacent - strong - edge - colorings or adjacent - vertex - distinguishing - proper - edge - colorings (AVD-edge-coloring for short). In their paper Zhang et al. [ZLW02] determined the AVD-chromatic index of several classes of graphs and they conjectured that the AVD-chromatic index of a graph G is at most $\Delta(G) + 2$. Balister et al. [BGLS07] verified the conjecture for graphs with maximum degree 3 and bipartite graphs.

It is almost impossible not to wonder if there is a relation between the aforementioned upper bound and the total coloring conjecture (stated by Behzad (1965) and Vizing (1968)): The total chromatic number of a graph G is at most $\Delta(G) + 2$. The extension of AVD-edge-colorings to total colorings was made independently by Chen [Che04] and Zhang et al. [ZCL⁺05], who introduced adjacent-vertex-distinguishing-total-colorings (AVDTC in short); see Figure 1.3. In their work, Zhang et al. determined the AVDT-chromatic number of several classes of graphs, such as cycles, complete graphs, complete bipartite graphs, fans, wheels and trees. They also conjectured that the upper

bound of $\Delta(G) + 3$ always holds. For the case where $\Delta(G) = 3$ the AVDTC conjecture has been verified independently by Wang [Wan07] and Chen [Che08], while Hulgan [Hul09, Hul10] presented a more concise proof on this result. In fact, Hulgan proved that for a graph with $\Delta(G) = 3$ there exists an adjacent vertex distinguishing total coloring with 6 colors with the additional property that at most one color appears on both edges and vertices (refer to Figure 1.3c). In 2012 Coker and Johansson [CJ12] used the probabilistic method to derive an upper bound of $\Delta(G) + C$, where C is a constant, while Huang et al. [HWY12] proved that the AVDT-chromatic number is at most $2\Delta(G)$.

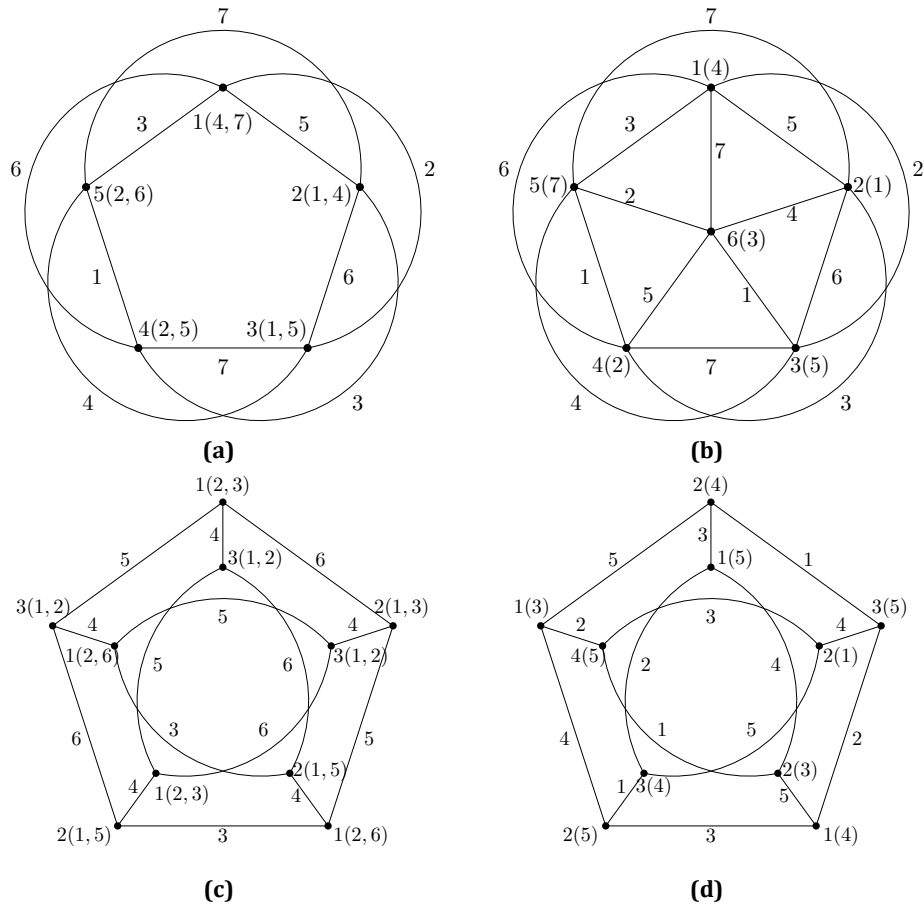


Figure 1.3: For every vertex we denote its color by the color assigned to the vertex followed by other colors in parenthesis: these are the colors that are not in the color set of the vertex. (a) AVDTC of K_5 with 7 colors. (b) AVDTC of K_6 with 7 colors. (c) AVDTC of Petersen's graph with 6 colors. (d) AVDTC of Petersen's graph with 5 colors.

Apart from the results presented in [ZCL⁺05], exact values have been given for particular classes of graphs: the graph obtained by the K_{2n+1} after the deletion of two adjacent edges [Che04], connected graphs with only one cycle and the square of cycles [CZS05], the Mycielski graphs of paths, cycles, complete graphs, complete bipartite

graphs, stars, fans and wheels [CZYZ05] (related results are also given in [LWZW06, CZ08, CG09, WW10, BKT12]).

For outerplanar graphs, Chen and Zhang [CZ06] examined the AVDT-chromatic number of 2-connected outerplanar graphs with $\Delta(G) \leq 4$. However, the AVDT-chromatic number of outerplanar graphs was fully determined by Wang and Wang [WW10]: the AVDT-chromatic number of outerplanar graphs is at most $\Delta(G) + 2$ in general, while equality holds only if there are adjacent vertices of maximum degree. The same bounds hold for planar graphs with large maximum degree [WH14].

Although for complete graphs of odd order the AVDT-conjecture's upper bound is tight [ZCL⁺05], it can be reduced by 1 for several classes of graphs: for outerplanar graphs [WW10] and planar graphs of large maximum degree [WH14] (as already mentioned), for cycles, paths, trees, fans, wheels, complete graphs of even order and complete bipartite graphs [ZCL⁺05], for connected graphs with one cycle and C_n^2 for $n \geq 6$ [CZS05], for the graph P_n^k where $k = 2, 3, 4$ and $n \geq 6$ [LWZW06], for generalized Halin graphs with $\Delta(G) \geq 5$ [CZ08], for graphs with small maximum average degree [WW08], for the hypercube Q_n [CG09] and the generalized hypercube K_n^d [BKT12]. Hulgan [Hul09] asks whether the bound of 6 for graphs with $\Delta(G) = 3$ is tight (see Figure 1.3d).

1.3 Circle Representations

Lovász [ERS70, pp.1175],[Leh81, pp.426] conjectured that every connected 4-regular planar graph G admits a realization as a system of circles, i.e., it can be drawn on the plane using a set of circles, such that the vertices of G correspond to the intersection and touching points of the circles and the edges of G are the arc segments among pairs of intersection and touching points of the circles (see Figures 1.4b-1.4c). Touching points are necessary, since if we use only crossings, we have an even number of vertices, but there are 4-regular planar graphs with an odd number of vertices [Man79].

Connected 4-regular planar graphs form a well studied class of graphs. In the late 70s, Manca [Man79] proposed four operations to generate all connected 4-regular planar graphs from the octahedron graph. As noted by Lehel [Leh81], Manca's construction could not generate all connected 4-regular planar graphs, however, an additional operation could fix this problem. Broersma et. al [BDG93] showed that all 3-connected 4-regular planar graphs can also be generated from the octahedron, using only three operations.

Although the aforementioned problem has attracted little attention, it is closely related to the contact graph representation problem. A contact graph is a graph whose vertices are represented by geometric objects and whose edges correspond to two

objects touching in some specific predefined way. Typical classes of such objects are curves, line segments, disks, triangles, rectangles and convex polygons. For example, Hliněný [Hli96, Hli98] studies contact representations using curves and line segments as objects (see Figure 1.4e). Several authors have considered contact graphs of triangles of various types: de Fraysseix et al. [dFMR94] show that every planar graph has a triangle-contact representation (see Figure 1.4f), Badent et al. [BBDG⁺07] considers contact representations with homothetic triangles, and Gonçalves et al. [GLP12] prove that every 3-connected planar graph and its dual can be simultaneously represented by touching triangles (and they point out that 4-connected planar graphs also have contact representations with homothetic triangles). Also, Duncan et al. [DGH⁺12] show that every planar graph has a contact representation with convex hexagons all of whose sides have one of three possible slopes, and that hexagons are necessary for some graphs, if convexity is required.

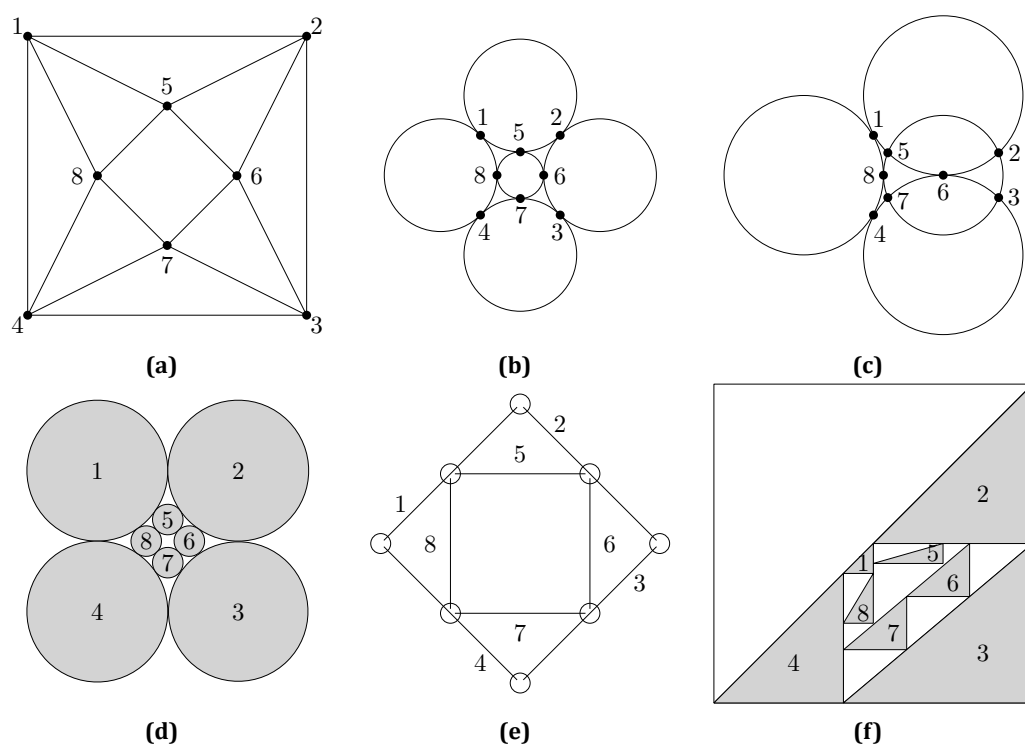


Figure 1.4: (a) A 4-regular planar graph. (b) Realization as a system of five touching circles. (c) Realization as a system of four circles. (d) Realization as coin graph. (e) Realization as segment-contact graph. (f) Realization as triangle-contact graph.

Perhaps, the first result on contact graphs is Koebe's theorem [Koe36] back in 1936, which states that any planar graph can be represented as a contact graph of disks in the plane (see Figure 1.4d). The main difference between the problem of representing a graph as a contact graph of disks and the problem of finding a realization as a system of

circles, is that in the former problem the vertices correspond to disks and the edges are implied by the contacts; in our problem, however, the vertices are the crossing and/or touching points of the disks and the edges are the arc-segments defined between them.

Graphs with circle-contact representations are also known as “coin graphs” [Sac94] and such representations are frequently used in graph drawing [ARSV12, BE01, Epp13, EHL⁺13, KPP13, MP94, Moh99, Rot12]. Koebe’s theorem, also known as circle packing theorem has been subsequently re-proved several times [And70a, And70b, TM79]. The original proof of the circle packing theorem is existential. Colin de Verdière [dV89, dV91] gave a constructive proof by means of a convergent process and polynomial-time iterative schemes for constructing circle packings have been developed [CS03, Moh93]. However, the sizes of the circles produced may vary exponentially, leading to drawings that are practically unreadable. For this reason, balanced circle-packings have also been investigated [AEG⁺14]. In the particular case where all circles have the same radius, i.e. we have a perfectly-balanced circle-contact representation, the recognition problem is NP-complete, as proved by Breu and Kirkpatrick [BK98b].

1.4 Smooth Orthogonal Drawings

Smooth orthogonal drawings were recently introduced in the literature with the view of combining two different graph drawing approaches: Orthogonal drawings and Lombardi drawings.

Orthogonal Drawings: An orthogonal drawing of a graph of maximum degree 4 is a drawing in which vertices correspond to points on the integer grid and edges are drawn as sequences of alternating horizontal and vertical line segments (see Figure 1.5b). Over the years, orthogonal graph drawing has received considerable research attention dating back to the 80’s, with Valiant’s [Val81], Leiserson’s [Lei80] and Leighton’s [Lei84] work on VLSI layouts and floor-planning applications. In the context of graph drawing, the goal was to produce orthogonal drawings while optimizing various features of the layout. The most common objectives have been the minimization of the used area, total edge length, total number of bends and maximum number of bends per edge.

In [KvL84, FW91] it was shown that deciding whether a graph G can be embedded in a grid of prescribed area is NP-complete. In [Sch95] this was improved to an embedding of the same size with at most two bends per edge. If G is planar it can be embedded in an $n \times n$ grid with $2n + 4$ bends if it is biconnected, and $2.4n + 2$ bends otherwise [TT87, TT89, TTV91]. The number of bends along each edge is at most 4. For planar graphs with maximum degree 3 and triconnected planar graphs with maximum degree 4 better bounds are known [Kan92, Kan93].

In [Sto84] a lower bound of $2n - 2$ bends is presented for biconnected planar graphs. If a combinatorial embedding of a planar graph is given, an orthogonal representation of it with minimal number of bends can be computed in $O(n^2 \log n)$ time [Tam87]. However, the number of bends per edge can be large which decreases the readability of the drawing. If the planar embedding is not given, the problem is polynomial time solvable for planar graphs with maximum degree 3 [DBLV93] and NP-hard for planar graphs with maximum degree 4 [GT01].

Biedl and Kant [BK98a] presented a linear time and space algorithm to draw any connected graph orthogonally on a grid of size $n \times n$ with at most $2n + 2$ bends, where each edge is bent at most twice.

By default, due to the port restriction of orthogonal drawings it was often assumed that input graphs were restricted to planar graphs of maximum degree 4. Note that in this case vertices of degree 4 have perfect angular resolution and vertices of lower degrees have angular resolution within a factor of twice the optimal. Even in cases where the input graph is not planar, there exist common techniques, e.g., the planarization phase of the topology-shape-metrics approach [Tam87], in which a “planar embedding” is computed for a given non-planar graph by replacing the edge crossings by dummy vertices, producing a planar graph of maximum degree 4. For graphs of higher degree Fößmeier and Kaufmann [FK96] introduced the Kandinsky model according to which square-shaped vertices are placed on a coarse grid with multiple edges attached to each side of the square (next to each other with a very small distance).

Lombardi Drawings: Lombardi drawings were recently introduced in the graph drawing literature [DEG⁺12b] and quickly became a popular matter of research. They are motivated by perception research indicating that representing paths with smooth geodesic trajectories aids in comprehension [HEH09], as well as by the aesthetic appeal of Mark Lombardi’s [LH03] drawings. Mark Lombardi, an American abstract artist, in his work uses mainly circular-arc edges that are evenly distributed around vertices, i.e. vertices have perfect angular resolution (see Figure 1.5c). Duncan et al. [DEG⁺12b] formally defined Lombardi drawings and gave algorithms for constructing Lombardi drawings for regular graphs, graphs of bounded degeneracy and certain families of planar graphs. In a subsequent work [DEG⁺13], they constructed planar Lombardi drawings for trees with polynomial area, while Löffler and Nöllenburg [LN13] gave a linear time algorithm for planar Lombardi drawings of outerpaths. Eppstein [Epp13] used circle-packing techniques in order to produce planar Lombardi drawings for planar graphs with maximum degree 3 and for medial graphs of polyhedral graphs; a special class of 4-regular planar graphs. Although the characterization of graphs that admit (planar) Lombardi drawings seems a difficult task, if one allows polyarcs or relaxes the

constraint of perfect angular resolution, then all graphs have such drawings [CCG⁺12, DEG⁺12a].

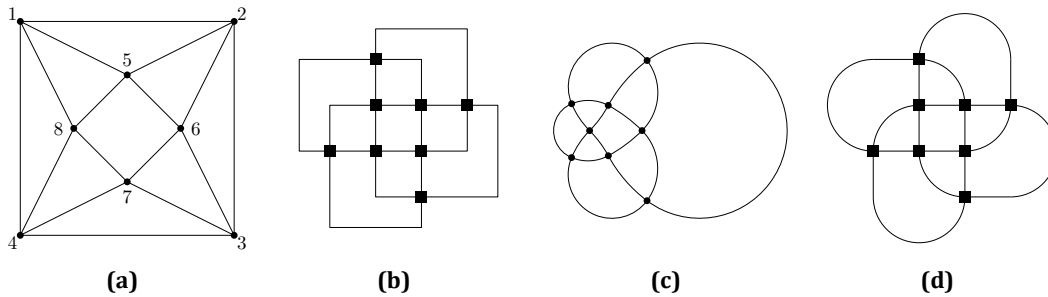


Figure 1.5: (a) A 4-regular planar graph. (b) Orthogonal drawing with at most 2 bends per edge. (c) Lombardi drawing. (d) Smooth orthogonal drawing with edge complexity 2.

Smooth Orthogonal Drawings: Smooth orthogonal drawings were introduced by Bekos et al. [BKKS13] and they combine the clarity of orthogonal layouts and the artistic style of Lombardi drawings (see Figure 1.5d). As an extension of orthogonal layouts, smooth orthogonal drawings are at a first glance restricted to planar graphs of maximum degree 4. In their work, Bekos et al. [BKKS13] proved that such graphs always admit smooth orthogonal drawings with edge complexity 3, while for 3-connected or Hamiltonian planar graphs with maximum degree 3 one can have perfect edge complexity, that is edge complexity one. These results are partially improved by Alam et al. [ABK⁺14], who proved that planar graphs with maximum degree 4 admit drawings with edge complexity 2, while there exist infinitely many graphs for which the upper bound of 2 is strict.

For graphs of higher degree, Bekos et al. [BKKS13] suggested to use the Kandinsky model [FK96]. As already mentioned this is a quite common approach to overcome practical applicability issues posed by the vertex degree restriction of orthogonal graph drawings in general, and consequently, of smooth orthogonal drawings. Hence, under the Kandinsky model any planar graph admits a smooth orthogonal layout with edge complexity 2 [BKKS13].

1.5 Thesis Contribution

The contribution of this thesis can be mainly focused on the following two topics:

Graph Theory: New results on book embeddings and adjacent-vertex-distinguishing total colorings are presented.

Research on book embeddings of graphs dates back to the early seventies with

a really extended literature. Perhaps the most popular result is Yannakakis' algorithm that embeds any planar graph in a book of four pages [Yan89]. The question of whether this bound is tight remains open till today, while research focuses mainly on relating page number with various graph invariants and on identifying families of graphs that can be embedded in 2 or 3 pages. In this thesis we prove that planar graphs with maximum degree 4 are subhamiltonian, i.e. their page number equals two. This is an improvement on a result of Heath [Hea85], who proved that planar graphs with maximum degree 3 can be embedded in two pages. Subhamiltonicity is equivalent to hamiltonicity of maximal planar graphs and it is well known that separating triangles play a decisive role for this property. Our approach differs in the sense that we do not focus on separating triangles; instead, we borrow the "peeling" technique from Yannakakis' algorithm and modify it to our needs. We also present an upper bound on the page number of 1-planar graphs. Although far from optimal, it is the first attempt to compute the page number of families of graphs that are not minor-closed.

Another topic of graph theory that is examined in this thesis is adjacent-vertex-distinguishing total colorings, a constrained version of total colorings. Several classes of graphs are considered in the literature, among them planar graphs and graphs with small maximum degree. The AVDTC conjecture stated by Zhang et al. [ZCL⁺05] seems to be as hard as the Total Coloring Conjecture. In this thesis we prove that generalized Halin graphs with maximum degree 3 have AVDT chromatic number 5; one less than the AVDTC conjecture's bound, and we verify the conjecture for 4-regular graphs. Previous results verified the conjecture for graphs with maximum degree 3, and proved the tighter value of $\Delta(G) + 2$ for planar graphs with large maximum degree ($\Delta(G) \geq 14$) and generalized Halin graphs with maximum degree at least 6. Our work clearly extends these results. It is worth mentioning that the improved upper bound for generalized Halin graphs with maximum degree 3 is a step towards determining the exact value of the AVDT chromatic number of graphs with maximum degree 3, and addresses a conjecture by Chen and Zhang [CZ08].

Graph Drawing: We examine representations of 4-regular planar graphs as systems of circles and present results on smooth orthogonal drawings.

Contact graphs, especially coin graphs and circle packings are a well studied subject of graph drawing, with numerous applications. In this thesis we focus on representing 4-regular planar graphs as systems of circles. Lovász [ERS70, pp.1175] conjectured that all 4-regular planar graphs admit such a representation. We settle this question by affirmatively answering in the case of triconnected graphs and negatively in the general case. The tools we use are the circle packing theo-

rem and properties of circles as geometric objects.

The main objective of graph drawing is to make aesthetically appealing and easy to read drawings. Many criteria for defining “nice” drawings have been adopted: crossing number, angular resolution, crossing resolution, total area, number of bends per edge and many more. Orthogonal drawings form a well studied chapter with main focus on using few bends and small area. Orthogonal bends on edges reduce readability of the drawing, as the tangent of the consecutive segments changes instantly. A way to overcome this issue is to “smooth” bends by using arcs, therefore adopt smooth orthogonal layouts. Smooth orthogonal drawings were introduced very recently by Bekos et al. [BKKS13] and there are only few results. Our contribution consists of several new results that extend (and partially improve) the work of Bekos et al. [BKKS13] and Alam et al. [ABK⁺14].

1.6 Thesis Overview

In [Chapter 2](#) we give all definitions and preliminary results for the following chapters. We also describe two basic algorithmic tools that we use: Yannakakis’ algorithm and SPQR trees. The remaining chapters are divided into two parts: the first one is devoted to graph theoretic results, and the second part contains work on the field of graph drawing.

The first part consists of four chapters: in the first two chapters we consider book embeddings, and in the other two adjacent-vertex-distinguishing total colorings. In [Chapter 3](#) we determine the page number of planar graphs with maximum degree 4. We present a polynomial-time algorithm that embeds such graphs in two pages, which implies that planar graphs with maximum degree 4 are subhamiltonian. This is joint work with Micheal A. Bekos and Martin Gronemann. A preliminary version of this work has been published in [BGR14], which was subsequently improved in [BGR15]. In [Chapter 4](#) we prove that the number of pages required to embed any 1-planar graph is bounded. This is joint work with Micheal A. Bekos, Till Bruckdorfer and Michael Kaufmann. A preliminary version of this work has been published in [BBKR15].

In [Chapter 5](#) we prove that the adjacent-vertex-distinguishing total chromatic number of generalized Halin graphs with maximum degree 3 equals 5. In [Chapter 6](#) we prove that the adjacent-vertex-distinguishing total coloring conjecture holds for 4-regular graphs: first we treat the case of Hamiltonian graphs and then extend it to every 4-regular graph. This is joint work with Alexandros Papaioannou and a preliminary version of this work has been published in [PR14].

The second part consists of two chapters. In [Chapter 7](#) we consider representations of planar 4-regular graphs as systems of circles. First we provide tight upper and lower

bounds on the number of circles required in such a representation. We also prove that if the input graph is triconnected then it always admits a realization as a system of touching circles. If the input graph is not triconnected (i.e. it is biconnected or simply connected) we demonstrate an infinite family of graphs that can not be realized as systems of circles. These results answer an open question posed by Lovász, who conjectured that all 4-regular planar graphs admit such a representation. This is joint work with Micheal A. Bekos. A preliminary version of this work has been published in [BR12], which was subsequently improved in [BR15].

Chapter 8 contains results on smooth orthogonal drawings. In particular we prove that (a) planar graphs with maximum degree 3 admit planar perfect smooth orthogonal drawings, (b) planar graphs with maximum degree 4 admit (not necessarily planar) perfect smooth orthogonal drawings, (c) any graph admits a non-planar drawing of perfect edge complexity under the Kandinsky model, but not all graphs admit a planar drawing. Finally, we introduce a classification of graphs based on the specific styles of drawings that they admit, and study relations between the classes. This is joint work with Micheal A. Bekos, Martin Gronemann and Sergey Pupyrev. A preliminary version of this work has been published in [BGPR14].



2 Preliminaries

2.1 Terminology

We use the standard notation as can be found in any book on graph theory, see e.g. [Bol98, BM76]. All the graphs considered in this thesis are simple, finite and undirected graphs. We denote by $V(G)$ and $E(G)$ the set of vertices and edges of graph G respectively, $\delta(G)$ is the minimum degree of G , $\Delta(G)$ its maximum degree and $\alpha(G)$ its independence number. For a connected graph G we denote by $d(u, v)$ the distance of vertices u and v , i.e. the length of a shortest path from u to v (connectivity of G assures that $d(u, v) \leq |V(G)|$). The eccentricity $ecc(u)$ of a vertex u is defined as $ecc(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$. The radius $rad(G)$ (diameter $diam(G)$) of G is the minimum (maximum respectively) eccentricity of any vertex of G . If u has $ecc(u) = rad(G)$ we say that u is a central vertex of G and if $ecc(u) = diam(G)$ then u is a peripheral vertex of G . Note that if u is a peripheral vertex of G , then there always exists another peripheral vertex v of G such that $d(u, v) = diam(G)$.

We say that a graph is k -regular if every vertex $v \in V(G)$ has degree k . A 2-factor of a graph G is a subgraph F of G such that any vertex of G is of degree 2 in F . Obviously F has the same vertex set as G and consists of disjoint cycles. It is well known that every 4-regular graph can be decomposed into two 2-factors. Let G be a 4-regular graph on $3n$ vertices consisting of a Hamilton cycle and a set of n vertex disjoint triangles. Fleischner and Stiebitz [FS92] proved that G is 3-choosable, where a graph is k -choosable if for every assignment of lists of size k to the vertices, there is a proper coloring giving each vertex a color from its list. Sachs [Sac93] proved that all such graphs are 3-colorable. Both results imply that the independence number of G is equal to $\alpha(G) = n$. This is known as the cycle-plus-triangles problem which also answers positively a problem posed by Schur that we state here as a lemma:

Lemma 2.1. *Given $3n$ points on a cycle, for every partition of the points into n triples, one can always find a set of n points, one from each triple, such that no two points are consecutive on the cycle.*

For a 4-regular hamiltonian graph G , let HC be the Hamilton cycle of G and $\mathcal{C} =$

$\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ the 2-factor of $G - HC$, $k \geq 1$. We say that $R \subseteq V(G)$ is a set of representatives of \mathcal{C} if for every $C_i \in \mathcal{C}$ there is exactly one vertex $v_i \in R$. Following this definition we have:

Corollary 2.1. *Let G be a 4-regular hamiltonian graph and \mathcal{C} as defined above. Then one can find a set of representatives R of \mathcal{C} such that the vertices of R are not consecutive along the Hamilton cycle of G .*

Proof. For every cycle $C \in \mathcal{C}$ we arbitrarily delete vertices until there are only three left that will form a triple. For every vertex that we delete, we join by an edge its neighbors on the Hamilton cycle. So we have $|\mathcal{C}|$ triples, one for each cycle of the 2-factor, i.e. a total of $3|\mathcal{C}|$ points on the Hamilton cycle, and by [Lemma 2.1](#) we can find a set of representatives of every triple, with no two representatives being consecutive on the Hamilton cycle. \square

Corollary 2.2. *Given $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ points on a cycle where each m_i is a positive integer at least 3, for every partition of the points into n parts with cardinality m_1, m_2, \dots, m_n respectively, one can always find a set of n points, one from each part, such that no two points are consecutive on the cycle.*

Let G be a simple topological graph, that is, undirected and drawn in the plane. Unless otherwise specified, we consider simple drawings, that is, no edge crosses itself, no two edges meet tangentially and no two edges cross more than once. A drawing uniquely defines the cyclic order of the edges incident to each vertex and therefore specifies a combinatorial embedding. We say that G is planar if it can be drawn on the plane with no crossings. For a connected planar graph G and its dual, the following well known result holds [[Bol98](#), pp.172]:

Lemma 2.2. *Let G be a connected planar graph. G is Eulerian if and only if its dual G^* is bipartite.*

Special subclasses of planar graphs are outerplanar and subhamiltonian graphs. A planar graph G is outerplanar if it can be drawn in the plane without crossings in such a way that all vertices belong to the outerface of the drawing (see [Figure 2.1a](#)). A planar graph G is called subhamiltonian if it is subgraph of a planar Hamiltonian graph (see [Figure 2.1b](#)). It is not hard to see that outerplanar graphs are subhamiltonian. Another special case of planar graphs are Halin graphs. Let $G = (V, E)$ be a plane graph with minimum degree $\delta(G) \geq 3$ and outerface f_0 , such that every vertex of f_0 has degree 3. If after removing all the edges of f_0 , $G(V, E - E(f_0))$ becomes a tree T_G , then G is called a Halin graph (see [Figure 2.1c](#) for an example). Halin graphs are triconnected and hamiltonian. Also, if G is a Halin graph then G always contains a triangle. Now if

one relaxes the restriction on the minimum degree, i.e. allows T_G to have vertices of degree 2, then we say that G is a generalized Halin graph. However, for generalized Halin graphs the properties of triconnectivity, hamiltonicity and the existence of triangles do not hold, as can be seen in [Figure 2.1d](#).

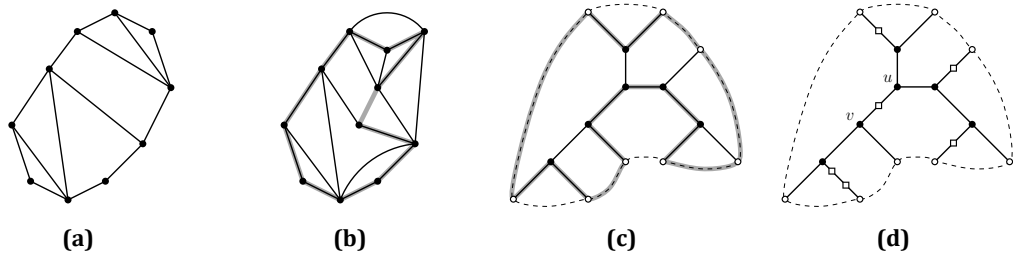


Figure 2.1: (a) An outerplanar graph. (b) A subhamiltonian graph: a sub-Hamilton cycle is highlighted in gray. (c) A Halin graph with maximum degree 3. The outerface f_0 is drawn dashed, and after removing all edges of f_0 the remaining graph is a tree (drawn with solid edges, its interior vertices are black and its leafs are white vertices). A Hamilton cycle is highlighted in gray. (d) A generalized Halin graph with maximum degree 3 (where vertices of degree 2 are drawn as white squares): vertices u, v form a separating pair of vertices, the graph is not Hamiltonian and it is triangle-free.

G is called κ -planar ($\kappa \geq 1$) if it can be drawn on the plane so that each edge is involved in at most κ crossings. Therefore 1-planar graphs admit drawings in which each edge is crossed at most once. A 1-planar topological graph is called planar-maximal or simply maximal, if the addition of a non-crossed edge is not possible. The following lemma shows that two crossing edges induce a K_4 (see, e.g., Lemma 1 in [\[ABK13\]](#)).

Lemma 2.3. *In a maximal 1-planar topological graph, the endpoints of two crossing edges are pairwise adjacent, that is, they induce a K_4 .*

2.1.1 Book Embeddings

In a book embedding the placement of vertices is restricted to a line, the spine of the book. The edges are assigned to different pages of the book. A page can be thought of as a half-plane bounded by the spine where the edges are drawn as circular arcs between their endpoints. We say that a graph admits a k -page book embedding or is k -page embeddable if one can assign the edges to k pages and there exists a linear ordering of the nodes on the spine such that no two edges of the same page are in conflict, i.e. no two edges of the same page cross. The minimum number of pages required to construct such an embedding is the book thickness or page number of a graph (see [Figure 2.2](#)).

The following lemma summarizes some basic results for book embeddings:

Lemma 2.4. *Let G be a graph.*

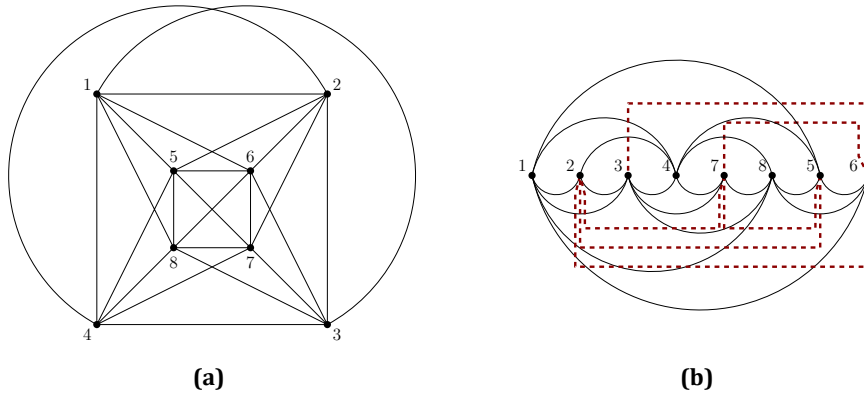


Figure 2.2: (a) A maximal 1-planar graph. (b) A book embedding in four pages: edges on the first page are drawn as solid arcs above the spine, edges on the second page as solid arcs below the spine, edges on the third page are drawn as dashed red polylines above the spine, and edges on the last page as dashed red polylines below the spine.

- (i) The page number of G equals to the maximum page number of its biconnected components [BK79].
- (ii) G has page number 1 if and only if G is outerplanar [BK79].
- (iii) G has page number 2 if and only if G is a planar subhamiltonian graph [BK79].
- (iv) If G is planar, then G has page number at most 4 [Yan89].
- (v) If G is planar 3-regular, then G is subhamiltonian [KO07].

2.1.2 Adjacent Vertex Distinguishing Total Colorings

Let G be a finite simple connected graph with maximum degree $\Delta(G)$. Let $c : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ be an assignment of k colors $1, 2, \dots, k$ to the vertices and edges of G . For each element $z \in V(G) \cup E(G)$, we use $c(z)$ to denote the color of z . Assignment c is a total coloring of G with k colors. We say that c is a proper total coloring if any two adjacent or incident elements take different colors (i.e. two adjacent vertices, or a vertex and its incident edges, or two edges with a common endpoint). The total chromatic number of a graph G , denoted by $\chi''(G)$, equals the minimum number of colors needed in a proper total coloring of G . The total coloring conjecture (posed by Behzad (1965) and Vizing (1968)) states that for every graph G , the total chromatic number equals the maximum degree of G plus one or two. In other words, $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ or $\Delta(G) + 2$.

Suppose now that k is a positive integer and c is a total coloring of G with k colors. For every vertex $x \in V(G)$ the set of colors of edges incident with x together with the color assigned to x is denoted by $C(x)$ and is called the color set of x . If c is proper and

$C(u) \neq C(v)$ for each edge $uv \in E(G)$, then c is a k -adjacent-vertex-distinguishing total coloring of G (or a k -AVDTC). The minimum number of colors in an AVDTC of G is called the adjacent-vertex-distinguishing total chromatic number of G , denoted by $\chi''_a(G)$ ¹ (see Figure 2.3).

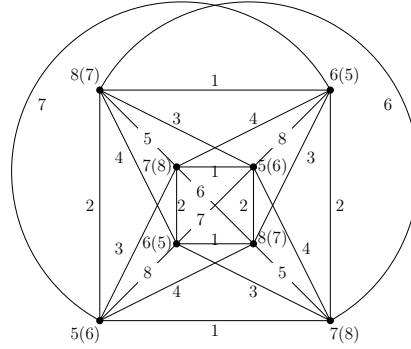


Figure 2.3: The graph of Figure 2.2a has $\chi''_a = 8$. For every vertex we denote its color by the color assigned to the vertex followed by another color in parenthesis: this is the only color that is not in the color set of the vertex.

The following lemmas were first proven in [ZCL⁺05] and their proof is straightforward:

Lemma 2.5 (Zhang et al. [ZCL⁺05]). *If graph G has two vertices of maximum degree which are adjacent, then $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2$.*

Lemma 2.6 (Zhang et al. [ZCL⁺05]). *If graph G has k components G_1, G_2, \dots, G_k , and $|V(G_i)| \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, k$, then $\chi''_a(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \chi''_a(G_i)$.*

In [ZCL⁺05] the following conjecture was made, which is known as the AVDTC conjecture:

Conjecture 2.1 (Zhang et al. [ZCL⁺05]). *For every connected graph G with order at least 2, we have $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

2.1.3 Circle Representations

Let G be a connected 4-regular planar graph. We say that G admits a realization as a system of circles, if it can be drawn on the plane using a set of circles such that (see Figures 2.4b-2.4d):

- (i) The vertex set $V(G)$ is given by the intersection and touching points of the circles.

¹ In the literature the notation $\chi_{at}(G)$ is also used for the AVDT chromatic number of G .

- (ii) The edge set $E(G)$ is defined by all circular arcs between the intersection and touching points of the circles.

In the special case where intersection points are not allowed (i.e., there are only touching circles), we say that G admits a realization as a system of touching circles (see Figures 2.4b-2.4c).

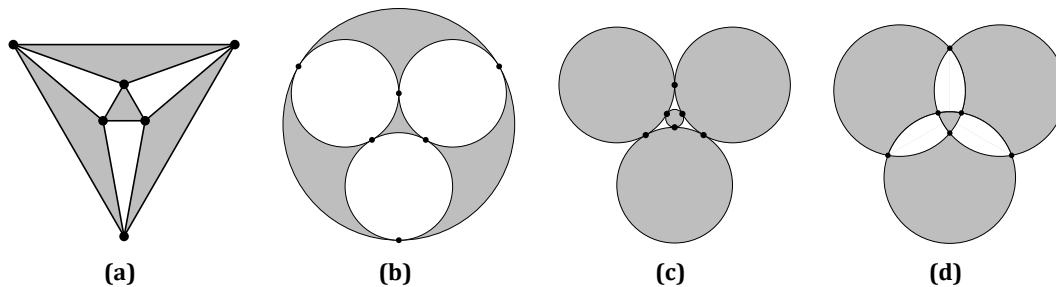


Figure 2.4: (a) A straight-line drawing of the octahedron graph. (b)-(d) Different realizations of the octahedron graph as system of circles.

The following conjecture about 4-regular planar graphs is due to Lovász [ERS70, pp.1175],[Leh81, pp.426]:

Conjecture 2.2 (Lovász). *Let G be a simple connected 4-regular planar graph. Then G admits a realization as a system of circles.*

A circle packing is a “connected collection” of touching circles with disjoint interiors. The intersection graph (also known as tangency or contact graph) of a circle packing is the graph having a vertex for each circle and an edge for every pair of circles that are tangent. A graph that admits a realization as a system of touching circles is called coin graph (see Figure 2.5). Coin graphs are always simple, connected and planar. The circle packing theorem states the following.

Theorem 2.1 (Circle packing theorem [Koe36]). *For every simple connected planar graph G , there is a circle packing in the plane with G as its intersection graph.*

2.1.4 Smooth Orthogonal Drawings

A smooth orthogonal drawing of a graph is a drawing in which each vertex is drawn as a point on the plane and each edge is drawn as a sequence of axis-aligned straight-line segments and circular arcs; see Figure 2.6. A critical feature standing out in smooth orthogonal drawings is that consecutive segments of an edge have a common point of intersection and a common horizontal or vertical tangent at that point. The complexity of an edge is given by the number of segments it consists of. We also say that a smooth

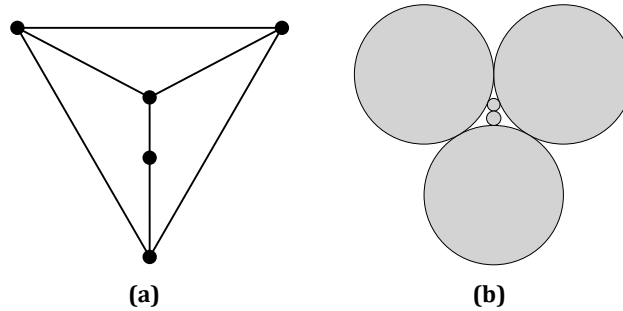


Figure 2.5: (a) A planar graph. (b) Its representation as a coin graph.

orthogonal drawing is of complexity $k \geq 1$ if it contains an edge of complexity k and no edge of complexity $k + 1$. In particular, for $k = 1$, i.e. edge complexity one, we say that the graph admits a perfect smooth orthogonal drawing or a smooth orthogonal drawing of perfect edge complexity.

Traditionally, smooth orthogonal drawings are restricted to planar graphs of maximum degree 4, since every vertex has four available ports (North, South, East, West), where the edges enter/leave with horizontal or vertical tangents. In addition, there cannot be two segments incident to the same vertex using the same port. Notice that using the same port necessarily causes overlaps only in the case of straight-line segments.

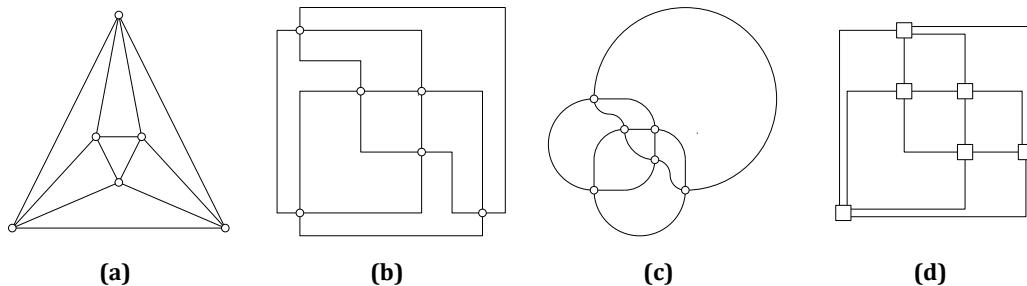


Figure 2.6: Different drawings of the octahedron graph, which is 4-regular and planar: (a) Drawn with straight line-segments. (b) Drawn in traditional orthogonal style with the minimum number of bends per edge (i.e. 3 bends per edge or edge complexity 4). (c) Redrawn in the smooth orthogonal style with edge complexity 2. (d) Redrawn with edge complexity 2 under the Kandinsky model.

The Kandinsky model is mainly used to overcome the degree restriction of orthogonal drawings. Under the Kandinsky model, vertices become squares and two or more edges can share the same port. Note that if two edges share the same port, only one of them can be drawn as straight line. The following lemma summarizes major results on smooth orthogonal drawings given by Bekos et al. [BKKS13] and Alam et al. [ABK⁺14].

Lemma 2.7. *Let G be a planar graph.*

- (i) If G has maximum degree 4, then G admits a smooth orthogonal drawing with edge complexity 2 [ABK⁺14].
- (ii) If G is triconnected with maximum degree 3, then G admits a perfect smooth orthogonal drawing [BKKS13].
- (iii) G admits a smooth orthogonal drawing with edge complexity 2 under the Kandisky model [BKKS13].

2.2 Algorithmic Tools

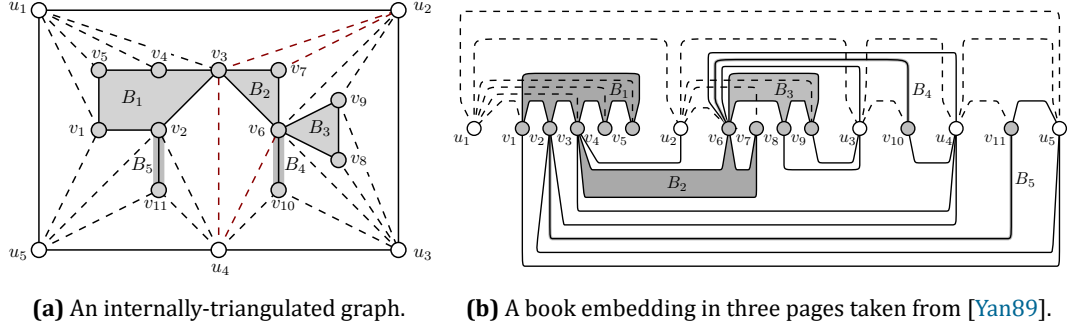
In this section, we present two algorithmic tools that we will use in the upcoming chapters of this thesis. In particular, we provide a short introduction to Yannakakis' algorithm, which embeds any planar graph in a book of five pages and we also present an overview of SPQR-trees, a very common structure to deal with non-triconnected graphs.

2.2.1 Yannakakis' Algorithm

Our first algorithmic tool is the simple version of Yannakakis' algorithm, which embeds any (internally-triangulated) plane graph in a book of five pages (not four) [Yan89]. This algorithm is based on a "peeling" into levels approach: (i) vertices on the outerface are at level zero, (ii) vertices that are on the outerface of the graph induced by deleting all vertices of levels $\leq i-1$ are at level i , (iii) edges between vertices of the same (different, respectively) level are called level (binding, respectively) edges (see Figure 2.7).

Let $G = (V, E)$ be a graph consisting of two levels, say L_0 and L_1 (it is also assumed that L_0 has no chords). The vertices, say u_1, \dots, u_k , of L_0 are called outer and appear in this order along the clockwise traversal of the outerface of G . The remaining vertices are called inner (and obviously belong to L_1). The graph induced by all outer vertices is biconnected. The biconnected components (or blocks), say B_1, \dots, B_m , of the graph induced by the inner vertices form a tree (in the absence of chords in L_0). It is assumed that the block tree is rooted at block, say w.l.o.g. B_1 , that contains the so-called first inner vertex, which is uniquely defined as the third vertex of the bounded face containing the outer vertices u_1 and u_k . Given a block B_i , an outer vertex is said to be adjacent to B_i if it is adjacent to a vertex of it. The set of outer vertices adjacent to B_i is denoted by $N(B_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Furthermore, a vertex w is said to see an edge (x, y) , if w is adjacent to x and y and the triangle x, y, w is a face. An outer vertex sees a block if it sees an edge of it.

The leader $\ell(B_i)$ of a block B_i is the first vertex of B_i that is encountered in any path in L_1 from the first inner vertex to block B_i . An inner vertex that belongs to only one



(a) An internally-triangulated graph.

(b) A book embedding in three pages taken from [Yan89].

Figure 2.7: (a) Outer (inner) vertices are colored white (gray). Level (binding) edges are solid (dashed). Blocks are highlighted in gray. The first inner vertex is v_1 . So, the root of the block tree is B_1 . $N(B_3) = \{u_2, u_3\}$. Vertex u_2 sees (v_3, v_7) and so sees B_2 . The leaders of B_1, B_2, B_3, B_4 and B_5 are v_1, v_3, v_6, v_6 and v_2 , respectively. The dominators of B_1, B_2, B_3, B_4 and B_5 are u_1, u_2, u_2, u_3 and u_4 , respectively. The red edges indicate that $u_f(B_2) = u_2$ and $u_l(B_2) = u_4$. Hence, $P[u_f(B_2) \rightarrow u_l(B_2)] = u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow u_4$. (b) Linear order and assignment of edges to pages.

block is assigned to that block. One that belongs to more than one blocks is assigned to the “highest block” in the block tree that contains it. Given an inner vertex $v \in L_1$, we denote by $B(v)$ the block that v is assigned to. The dominator of a block B is the first outer vertex that is adjacent to a vertex assigned to B and is denoted by $dom(B)$.

Let B be a block of level L_1 and assume that v_0, v_1, \dots, v_t are the vertices of B as they appear in a counterclockwise traversal of the boundary of B starting from $v_0 = \ell(B)$. Denote by $u_f(B)$ and $u_l(B)$ the smallest- and largest-indexed vertices of level L_0 that see edges (v_0, v_k) and (v_0, v_1) , respectively. Equivalently, $u_f(B)$ and $u_l(B)$ are defined as the smallest- and largest-indexed vertices of $N(B)$. Note that $u_f(B) = dom(B)$. The path on level L_0 from $u_f(B)$ to $u_l(B)$ in clockwise direction along L_0 is denoted by $P[u_f(B) \rightarrow u_l(B)]$. Another useful notion is the trail of an inner vertex v_i , denoted by $tr(v_i)$, which is recursively defined as follows. If v_i is identified by the first inner vertex, then $tr(v_i) = v_i$. Otherwise, $tr(v_i) = tr(\ell(B)) \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_i, i = 1, 2, \dots, t$. Intuitively, the trail of an inner vertex v_i is the path that starts from the first inner vertex and ends in v_i , which (i) consists exclusively of level one vertices, and, (ii) traverses each intermediate block from the root block towards B always in counterclockwise direction. In Figure 2.7a, the trail of vertex v_9 is $tr(v_9) = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6 \rightarrow v_8 \rightarrow v_9$. The trail of a block is the trail of its leader.

The linear order of the vertices along the spine is computed as follows. First, the outer vertices are embedded in the order u_1, u_2, \dots, u_k . For $j = 1, 2, \dots, k$, the blocks dominated by the outer vertex u_j are embedded right next to u_j one after the other in the top-to-bottom order of the block tree. The vertices that belong to block B_i are ordered along the spine in the order they appear in the counterclockwise traversal of

the boundary of B_i starting from $\ell(B_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ (which is already placed for $i \neq 1$).

The edges are assigned to pages as follows. All level edges of L_0 are assigned to the first page. Level edges of L_1 are assigned either to the second or to the third page according to whether they belong to a block that is in an odd or even distance from the root of the block tree, respectively. Binding edges are further classified as forward or back. A binding edge is forward if the inner vertex precedes the outer vertex. Otherwise it is back (recall that a binding edge connects an outer and an inner vertex). All back edges are assigned to the first page. A forward edge incident to a block B_i is assigned to the second page, if B_i is on the third page. Otherwise to the third page, for $i = 1, 2, \dots, m$.

In the case where more than two levels are present, the algorithm is as follows. Possible chords in level L_0 are assigned to the first page. Note however that in the presence of such chords the blocks of level L_1 form a forest in general (i.e., not a single tree). Therefore, each block tree of the underlying forest must be embedded according to the rules described above. Graphs with more than two levels are embedded by “recycling” the remaining available pages. More precisely, consider a block B of level $i - 1$ and let B' be a block of level i that is in the interior of B in the peeling order. Let $\{p_1, \dots, p_5\}$ be a permutation of $\{1, \dots, 5\}$ and assume w.l.o.g. that the boundary of block B is assigned to page p_1 , while the boundary of all blocks in its interior (including B') are assigned to pages p_2 and p_3 . Then, the boundary of all blocks of level $i + 1$ that are in the interior of B' in the peeling order will be assigned to pages p_4 and p_5 . In the following we present properties that follow from Yannakakis’s algorithm.

Lemma 2.8 (Yannakakis [Yan89]). *Let B be a block with leader v_0 . Consider the trail $tr(B)$ of B , vertices $u_f(B)$ and $u_l(B)$ as in Figure 2.8. Then G is partitioned into regions, where the trail $tr(B)$ belongs to region I. Then, along the spine vertices of region I are to the left of vertices of B , vertices of B are to the left of vertices of region II and vertices of region II are to the left of vertices of region III.*

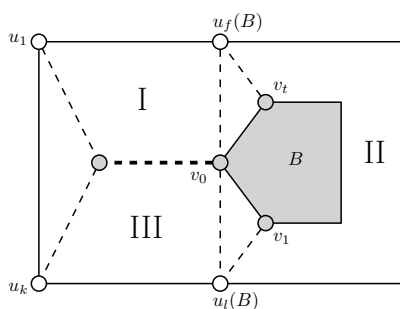


Figure 2.8: Illustration of different regions I, II and III of Lemma 2.8. The trail of B is drawn fat.

Lemma 2.9 (Yannakakis [Yan89]). *Let G be a planar graph consisting of two levels L_0 and L_1 . Let B be a block of level L_1 and let v_0, \dots, v_t be the vertices of B in a counter-clockwise order along the boundary of B starting from $v_0 = \ell(B)$. Then: (i) Vertices v_1, \dots, v_t are consecutive along the spine. (ii) $u_f(B) \neq u_l(B)$. (iii) If $u_i = u_f(B)$ and $u_j = u_l(B)$ for some $i < j$, then vertices $v_1, \dots, v_t, u_{i+1}, \dots, u_j$ appear in this order from left to right along the spine. (iv) Let $G[B]$ be the subgraph of G in the interior of cycle $P[u_f(B) \rightarrow u_l(B)] \rightarrow \ell(B) \rightarrow u_f(B)$. Then, a block $B' \in G[B]$ if and only if B is an ancestor of B' , that is, B' belongs to the block subtree rooted at B .*

Lemma 2.10 (Yannakakis [Yan89]). *Let G be a planar graph consisting of two levels L_0 and L_1 and assume that $(u_i, u_j), i < j$, is a chord of L_0 . Denote by H the subgraph of G in the interior of the cycle $P[u_i \rightarrow u_j] \rightarrow u_i$. Then: (i) Vertices u_i and u_j form a separating pair in G . (ii) All vertices of H lie between u_i and u_j along the spine. (iii) If there is a vertex between u_i and u_j that does not belong to H , then this vertex belongs to a block B dominated by u_i . In addition, all vertices of H , except for u_i are to the right of B along the spine.*

2.2.2 SPQR Trees

An SPQR tree $T = (V(T), E(T))$ of a biconnected graph $G = (V, E)$ provides structural information about its triconnected components and their relation.

Mac Lane [ML37] was the first to investigate the basic structures related with SPQR trees, and Hopcroft and Tarjan [HT73] solved the decomposition of a graph in its triconnected components in linear time. However, SPQR trees were formally defined and introduced by Di Battista and Tamassia [DBT89]. In the following we give only a short presentation of SPQR trees (refer to [DBT89, Kan93, DBT96] for more details). Every triconnected component is associated with a tree node μ in T and is referred to as the skeleton of μ , denoted by $\text{skel}(\mu)$. The vertices of a skeleton are a subset of V , whereas an edge $e = (u, v)$ is either a real edge associated with an edge of G , or a virtual edge. Virtual edges represent subgraphs of G and occur in pairs. Furthermore, a tree edge of T is in a one-to-one correspondence with a pair of virtual edges, each contained in the skeletons of the two endpoints. The tree node μ is one of three types² reflecting the structure of $\text{skel}(\mu)$.

- if μ is an S-node, then $\text{skel}(\mu)$ is a cycle. This case is analogous to series composition in series-parallel graphs; the S stands for “series”.
- if μ is a P-node, then $\text{skel}(\mu)$ is a triconnected multigraph consisting of a bundle of at least three parallel edges. This case is analogous to parallel composition in series-parallel graphs; the P stands for “parallel”.

² Some authors prefer to introduce Q-nodes to handle the trivial case of a graph that has only one edge.

- if μ is an R-node, then $\text{skel}(\mu)$ is a simple triconnected graph; The R stands for “rigid”.

Typically, it is not allowed within an SPQR tree for two S-nodes to be adjacent, nor for two P-nodes to be adjacent, because if such an adjacency occurred the two nodes could be merged into a single larger node of the same type. Under this assumption, the SPQR tree is uniquely determined for a graph G .

Part A: Graph Theory



3 Book Embedding of Maximum Degree 4 Planar Graphs

In this chapter, we prove that any planar graph of maximum degree four admits a two-page book embedding. The proof is given by a recursive combinatorial construction, which determines the order of the vertices along the spine and the page in which each edge is drawn. By [Lemma 2.4\(i\)](#) we assume w.l.o.g. that the input graph G is biconnected. Note that one can neglect the exact geometry, as two edges that are drawn on the same page cross if and only if their endpoints alternate along the spine. We say that an edge e nests a vertex v if and only if one endpoint of edge e is to the left of vertex v along the spine and the other endpoint of edge e to its right. We also say that an edge e nests an edge e' if and only if both edges e and e' are drawn on the same page and both endpoints of edge e' are nested by edge e . Observe that nested edges do not cross.

Our algorithm follows the general “peeling-into-levels” approach, which was initially employed by Heath [[Hea84](#)] to prove that a planar graph can be embedded into seven pages and subsequently by Yannakakis [[Yan89](#)] to further reduce the planar page number to four: First remove from graph G cycle C_{out} delimiting the outerface of G and contract each bridge-block¹ of the remaining graph into a single vertex. Let F be the implied graph, which is a forest in general, since $G - C_{out}$ is not necessarily connected. Cycle C_{out} is embedded, such that: (i) the order of the vertices of cycle C_{out} along the spine is fixed (and follows the one in which the vertices of C_{out} appear along C_{out}), and, (ii) all edges of cycle C_{out} are on the same page, except for the one that connects its outermost vertices (i.e. the leftmost and rightmost vertices of C_{out} along the spine). Then, we describe how to embed without crossings: (i) the chords of cycle C_{out} , (ii) forest F , and, (iii) the edges between C_{out} and F . To obtain a two-page book embedding of G , we replace each vertex of F with a cycle (embedded similarly to C_{out}), whose length equals to the length of the cycle delimiting the outerface of the bridge-block it corresponds to in $G - C_{out}$, and recursively embed its interior.

More formally, consider an arbitrary simple cycle $C : v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$ of graph G . The removal of cycle C results in two planar subgraphs of G , say $G_{in}(C)$

¹The bridge-blocks of a connected graph G are the connected components formed by deleting all bridges of G . The bridge-blocks and the bridges of G have a natural tree structure, called bridge-block tree.

and $G_{out}(C)$, that are the components of $G - C$ that lie in the interior and exterior of cycle C in G , respectively. Note that $G_{in}(C)$ and $G_{out}(C)$ are not necessarily connected. Let $\overline{G}_{in}(C)$ ($\overline{G}_{out}(C)$, respectively) be the subgraph of G induced by C and $G_{in}(C)$ ($G_{out}(C)$, respectively). For the recursive step, we assume the following invariant properties:

- IP-1:** The order of the vertices of $\overline{G}_{out}(C)$ along the spine ℓ is fixed and the page in which each edge of $\overline{G}_{out}(C)$ is drawn (i.e., top or bottom) is determined such that the book embedding of $\overline{G}_{out}(C)$ is planar. In other words, we assume that we have already produced a two-page book embedding for $\overline{G}_{out}(C)$, in which no edge crosses the spine.
- IP-2:** The combinatorial embedding of $\overline{G}_{out}(C)$ is consistent with a given planar combinatorial embedding of G .
- IP-3:** The vertices of cycle C occupy consecutive positions along ℓ , such that vertex v_1 (v_k , respectively) is the leftmost (rightmost, respectively) along spine ℓ . Moreover, all edges of cycle C are on the same page, except for the one that connects vertices v_1 and v_k . Say w.l.o.g. that edge (v_1, v_k) is on the top-page (or top-drawn), while the remaining edges of cycle C , namely edges (v_i, v_{i+1}) for $1 \leq i < k$, are on the bottom-page (or bottom-drawn); see [Figure 3.1](#).
- IP-4:** If cycle C is not identified with the cycle delimiting the outerface of graph G , the degree of either vertex v_1 or vertex v_k is at most 3 in $\overline{G}_{in}(C)$. Say w.l.o.g. that vertex v_k is of degree at most 3.
- IP-5:** If vertex v_1 has degree 4 in $\overline{G}_{in}(C)$, then it is adjacent to either zero or two chords of cycle C .

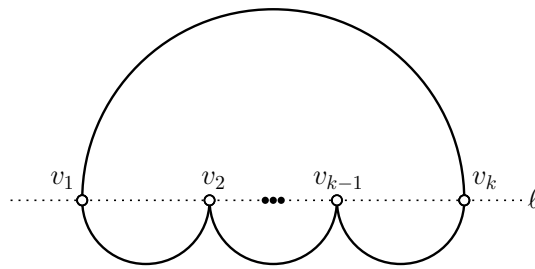


Figure 3.1: Illustration of invariant property **IP-3**.

We explicitly notice that the combinatorial embedding specified in **IP-2** is maintained throughout the whole drawing process. This combined with the fact that every edge entirely lies on one page (i.e., no edge crosses the spine; recall **IP-1**) is sufficient to ensure planarity.

In the following, we describe in detail how to recursively produce a two-page book embedding of graph $\overline{G}_{in}(C)$. Note that we first present the recursive step of our algorithm and then its base, since this approach shows better how the different ideas flow one after the other. Let v_i be a vertex of cycle C , $i = 1, \dots, k$. Since graph G is of maximum degree 4, vertex v_i is incident to at most two undrawn edges. Assume that vertex v_i has at least one undrawn edge. We refer to the edge incident to vertex v_i that follows edge $(v_i, v_{(i+1) \bmod k})$ in the counterclockwise order of the edges around vertex v_i (as defined by the combinatorial embedding specified by IP-2), as the right edge of vertex v_i . If vertex v_i is adjacent to two undrawn edges, then the one that is not identified with the right edge of vertex v_i is its left edge. Otherwise, the left and the right edge of vertex v_i are identified.

Initially, we draw the chords of cycle C on the top-page. By invariant properties IP-2 and IP-3, it follows that no two chords intersect. We then draw $G_{in}(C)$ and the edges between C and $G_{in}(C)$. Note that $G_{in}(C)$ is not necessarily connected. Hence, its bridge-block trees form a forest. As already stated, we contract each bridge-block of $G_{in}(C)$ into a single vertex, which we call block-vertex; see Figures 3.2a-3.2b. We distinguish two types of block-vertices. Block-vertices that are adjacent to vertices of cycle C are referred to as anchors. Block-vertices that are adjacent to other block-vertices only are referred to as ancillaries. From the contraction, it follows that an edge between cycle C and a certain anchor can be of multiplicity at most two. On the other hand, however, edges among block-vertices are always simple.

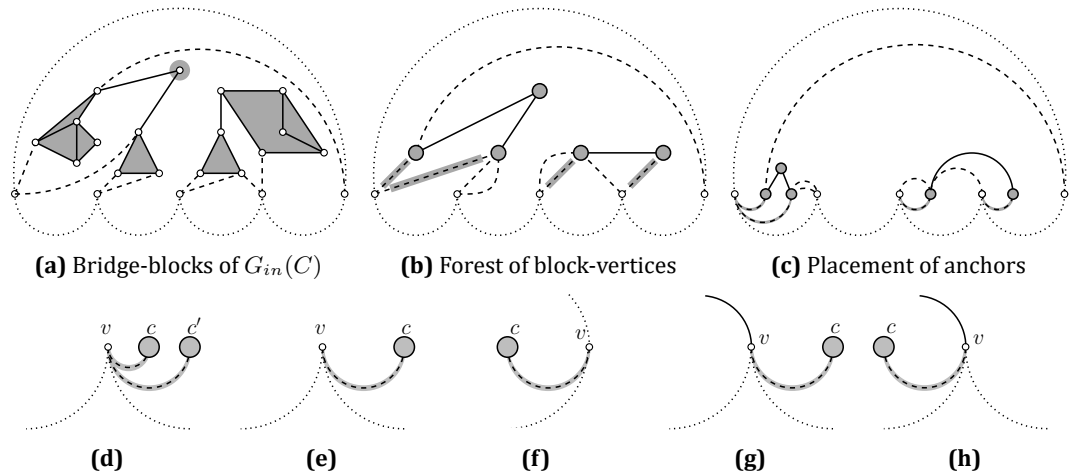


Figure 3.2: In all figures, the edges of C are drawn dotted, bridge-blocks are colored gray and edges between C and anchors are drawn dashed; marked edges are highlighted in gray.

We will first determine the positions of all anchors along spine ℓ . Let c be an anchor. Among the edges between anchor c and cycle C , we select and mark exactly one, such that: (i) the marked edge will be drawn on the bottom-page, and, (ii) all other edges in-

cident to anchor c (i.e., either edges between anchor c and cycle C that are not marked, or between anchor c and block-vertices) will be drawn on the top-page. Let $v_{l,c}$ be the leftmost vertex of cycle C adjacent to anchor c along spine ℓ . If $(c, v_{l,c})$ is a simple edge, then we select and mark this particular edge. Otherwise, we mark the right edge of vertex $v_{l,c}$. It follows that each anchor has exactly one marked edge (which we will shortly utilize to determine its position along spine ℓ) and each vertex of cycle C is incident to at most two marked edges. Let $v \in C$ be a vertex of cycle C adjacent to at least one anchor through a marked edge. We distinguish two cases:

Case 1: Vertex v is adjacent to exactly two anchors, say c and c' , through two marked edges, say e and e' , respectively. Assume w.l.o.g. that edge e is the left edge of vertex v . Hence, edge e' is its right edge. In this case, both anchors c and c' are placed directly to the right of vertex v and anchor c precedes anchor c' (see [Figure 3.2d](#)). Note that such a placement is not possible in the case where vertex v is the rightmost vertex of cycle C . However, this case cannot occur due to [IP-4](#).

Case 2: Vertex v is adjacent to exactly one anchor c through a marked edge e . If the degree of vertex v in $\overline{G}_{in}(C)$ is three, then we distinguish two sub-cases: (i) If vertex v is not the rightmost vertex of cycle C , then anchor c is placed directly to the right of vertex v ; see [Figure 3.2e](#). (ii) If vertex v is indeed the rightmost vertex of cycle C , then anchor c is placed directly to the left of vertex v ; see [Figure 3.2f](#). It now remains to consider the case where the degree of vertex v in $\overline{G}_{in}(C)$ is four. In this case, by [IP-4](#) it follows that vertex v is not the rightmost vertex of cycle C . Again, we distinguish two sub-cases: (i) If edge e is the right edge of vertex v , then anchor c is placed directly to the right of vertex v ; see [Figure 3.2g](#). (ii) If edge e is the left edge of vertex v , then anchor c is placed directly to the left of vertex v ; see [Figure 3.2h](#). Note that vertex v cannot be the leftmost vertex of cycle C , as the right edge of vertex v would be a chord, violating [IP-5](#).

As already stated, all marked edges are bottom-drawn. Edges between anchors and cycle C that are not marked are top-drawn; see [Figure 3.2c](#). Observe that we do not change the underlying combinatorial embedding of graph G , preserving [IP-2](#). Hence, the book embedding constructed so far is planar.

Before we proceed to describe how anchors “determine” the positions of ancillaries, we introduce the notion of a (labeled) anchored tree and investigate properties of it. Observe that ancillaries form a new forest (forest of ancillaries), which is a subgraph of the initial forest (containing all block-vertices). Let T be a tree of the forest of ancillaries and let c_1, c_2, \dots, c_t be anchors that: (i) are adjacent to at least one ancillary of T , and, (ii) c_i is to the left of c_{i+1} , $i = 1, \dots, t - 1$. We refer to c_1, c_2, \dots, c_t as the anchors of T , and to the tree formed by T and its anchors as the anchored tree of T , denoted by \overline{T} .

Furthermore, we say that two anchors of anchored tree \bar{T} are consecutive if and only if there is no anchor of the anchored tree \bar{T} between them. However, anchors that do not belong to the anchored tree \bar{T} or vertices of cycle C may lie in between.

Lemma 3.1. *For anchored trees the following hold:*

- (i) *Two anchored trees \bar{T} and \bar{T}' share at most one common anchor,*
- (ii) *An anchored tree \bar{T} contains at least two anchors.*
- (iii) *Every leaf of an anchored tree \bar{T} is an anchor of \bar{T} , and vice versa.*

Proof. The proof is given by contradiction to either the connectivity or biconnectivity of graph G .

- (i) If anchored trees \bar{T} and \bar{T}' have two common anchors, say c and c' , then there are two paths from c to c' ; one through T and one through T' . These two paths obviously form a cycle of block-vertices; a clear contradiction.
- (ii) If an anchored tree \bar{T} has no anchors, then no path from C to T exists; a contradiction to the connectivity of graph G . On the other hand, if an anchored tree \bar{T} has only one anchor, say c , then the edge from c to T is a bridge; a contradiction to the biconnectivity of graph G . Note that the edge from c to T is always simple; double edges potentially occur between vertices of cycle C and anchors.
- (iii) Removing the anchors of an anchored tree \bar{T} , yields a tree T . If an anchor of \bar{T} is internal to \bar{T} , then its removal disconnects T ; a contradiction to the connectivity of T . Conversely, if there is a leaf $c \in \bar{T}$ that is not an anchor of \bar{T} , then the edge from c to T is a bridge; a contradiction to the biconnectivity of graph G .

□

Let c_1, c_2, \dots, c_t be the anchors of an anchored tree \bar{T} , so that c_i is to the left of c_{i+1} , $i = 1, \dots, t - 1$, and, assume that \bar{T} is rooted at anchor c_1 (rooted anchored tree). For an anchor or ancillary c of the anchored tree \bar{T} , denote by $p(c)$ the parent of c in \bar{T} and let $p(c_1)$ be any of the vertices of cycle C adjacent to anchor c_1 . For an ancillary c of T (i.e., non-leaf in \bar{T}), we define an order for its children: if c' and c'' are children of c , then $c' < c''$ if and only if c' precedes c'' in the counterclockwise order of the edges around c (defined by the combinatorial embedding specified by IP-2), when starting from edge $(c, p(c))$. By this order, we label the vertices of \bar{T} as they appear in the pre-order traversal of \bar{T} (labeled anchored tree); see [Figure 3.3a](#).

Lemma 3.2. *For each ancillary c of a labeled anchored tree \bar{T} there is:*

- (i) *at least an anchor of \bar{T} with label smaller than that of c , and,*

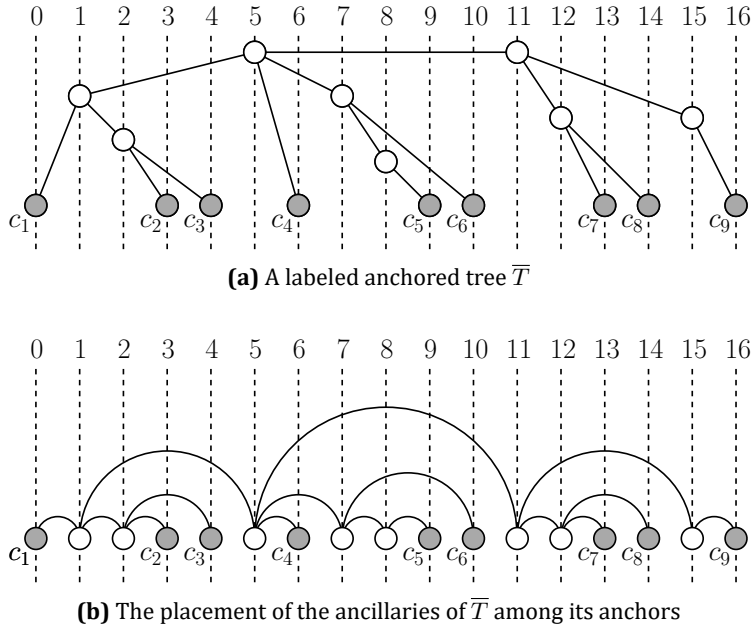


Figure 3.3: In both figures, anchors are colored gray; the indices of the vertical grid-lines denote the labeling of \bar{T} .

(ii) at least an anchor of \bar{T} with label greater than that of c .

Proof. Both properties follow from the pre-order traversal of \bar{T} . More precisely, let c be an ancillary of \bar{T} . Then, the following hold:

- (i) The label of the leftmost anchor of \bar{T} is always smaller than that of c . Recall that the leftmost anchor of \bar{T} is its root and therefore is labeled zero.
- (ii) The greatest labeled vertex, say c_{max} , of \bar{T} is a leaf of \bar{T} , and, by [Lemma 3.1\(iii\)](#) an anchor of \bar{T} . Therefore, $c_{max} \neq c$.

□

We first define the order in which the trees of the forest of ancillaries will be drawn. To do so, we create an auxiliary digraph G_{aux}^T whose vertices correspond to trees and there is a directed edge $(v_{T'}, v_T)$ in G_{aux}^T if and only if \bar{T}' has an anchor between two consecutive anchors of \bar{T} . The desired order is defined by a topological sorting of digraph G_{aux}^T , which always exists as the following lemma suggests.

Lemma 3.3. *The auxiliary digraph G_{aux}^T is acyclic.*

Proof. Assume to the contrary that there is a cycle $v_{T_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{T_s} \rightarrow v_{T_1}$ in digraph G_{aux}^T . For $i = 1, 2, \dots, s$, let I_i be the interval defined by the leftmost and the rightmost anchors of \bar{T}_i . Edge $(v_{T_i}, v_{T_{i+1 \bmod s}})$ implies that there is an anchor of \bar{T}_i between

consecutive anchors of $\overline{T}_{i+1 \bmod s}$. However, in this case all anchors of \overline{T}_i should be between the same two anchors of $\overline{T}_{i+1 \bmod s}$, as otherwise the embedding specified by IP-2 is not planar. Therefore, it holds that $I_i \subseteq I_{i+1 \bmod s}$. On the other hand, however, by Lemma 3.1(i), it follows that $I_i \neq I_{i+1 \bmod s}$. Hence, $I_1 \subset \dots \subset I_s \subset I_1$; a clear contradiction. \square

Lemma 3.3 implies that drawing the trees in the order defined by a topological sorting of G_{aux}^T , assures that tree T' will be drawn before T , if and only if \overline{T}' has an anchor that is between two consecutive anchors of \overline{T} along ℓ . Now assume that we have drawn zero or more of these trees such that: (i) all edges are top-drawn, (ii) there are no edge crossings, and, (iii) the combinatorial embedding specified by IP-2 is preserved. Let T be the next tree to be drawn. The following lemma presents an important property of our drawing approach.

Lemma 3.4. *Assume that all trees that precede T in a topological sorting of the auxiliary digraph G_{aux}^T have been drawn on the top-page without edge crossings by preserving the combinatorial embedding specified by IP-2. If e is a top-drawn edge that does not belong to \overline{T} and nests at least one anchor of \overline{T} , then it nests all anchors of \overline{T} .*

Proof. If edge e is the top-drawn edge of cycle C , then clearly it nests all anchors of \overline{T} , since all anchors of \overline{T} are between the leftmost and rightmost vertices of cycle C . Now, consider the more interesting case where edge e is not the top-drawn edge of cycle C . By Lemma 3.1(ii), \overline{T} has at least two anchors, say c and c' with c to the left of c' along the spine ℓ , and, assume to the contrary that edge e nests c and not c' . We will distinguish two cases based on whether edge e is an edge of an anchored tree drawn before \overline{T} or not.

First, consider the case where edge e is indeed an edge of an anchored tree, say \overline{T}' , drawn before \overline{T} . In this case, by Lemma 3.2 it follows that both endpoints of edge e are between the leftmost and the rightmost anchors of \overline{T}' . Since edge e nests c , it follows that T should be drawn before T' , which is a contradiction.

To complete the proof of this lemma, it remains to consider the case where edge e is not an edge of an anchored tree drawn before \overline{T} . In this case, each endpoint of edge e is: (i) either a vertex of cycle C , or, (ii) an anchor. Since such vertices are connected to cycle C by bottom-drawn edges, there is a bottom-drawn path connecting the endpoints of edge e , which together with edge e forms a cycle where c is in its interior and c' on its exterior. Hence, the embedding specified by IP-2 is not planar; a contradiction. \square

We now describe how to draw T on the top page such that there are no edge crossings and the combinatorial embedding specified by IP-2 is preserved. More precisely, we place each ancillary c of T between a pair of consecutive anchors of \overline{T} , such that:

(i) the label of c is larger (smaller, respectively) than the label of the anchor to its left (right, respectively)², (ii) for ancillaries placed between the same pair of anchors, the one with smaller label is to the left, and, (iii) all edges of \bar{T} are top-drawn; see [Figure 3.3b](#).

Note that we have not fully specified the exact positions of the ancillaries of \bar{T} along ℓ , since between consecutive anchors of \bar{T} there may exist anchors that do not belong to \bar{T} or vertices of cycle C or anchors/ancillaries of trees that have already been drawn. Details will be given shortly. Also, note that all ancillaries of \bar{T} are placed between its leftmost and rightmost anchors, which by [Lemma 3.4](#) implies that if a top-drawn edge (that does not belong to \bar{T}) nests at least one anchor of \bar{T} , then it nests the entire tree \bar{T} . By exploiting the correspondence between the left-to-right order of the vertices of \bar{T} along spine ℓ and the labeling of \bar{T} , we can prove that the drawing of \bar{T} is planar.

Lemma 3.5. *The drawing of the anchored tree \bar{T} is planar.*

Proof. Assume to the contrary that two edges, say $e = (c_1, c_2)$ and $e' = (c'_1, c'_2)$, of \bar{T} cross. Since both edges e and e' are top-drawn, their endpoints must alternate along ℓ . W.l.o.g., assume that the order of the endpoints of edges e and e' along ℓ is: $c_1 \rightarrow c'_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c'_2$. Then, it follows that c_1 is the parent of c_2 , because the label of c_1 is smaller than the label of c_2 and they are adjacent in \bar{T} . Similarly, c'_1 is the parent of c'_2 .

Since between c_1 and c_2 are drawn subtrees of \bar{T} rooted at children of c_1 other than c_2 , it follows that c'_1 and c'_2 belong to a subtree rooted at a child of c_1 , different from c_2 . However, this implies that the label of c'_2 is smaller than the label of c_2 ; a contradiction. \square

Recall that we have not fully specified the exact positions of the ancillaries of \bar{T} along ℓ . In order to do so, we first have to consider a particularly problematic scenario and describe how to cope with it: Suppose there is a path P of top-drawn edges (e.g., non-marked edges incident to cycle C and/or edges of previously drawn trees) joining a pair of consecutive anchors of \bar{T} and our algorithm must place an ancillary c of \bar{T} between them. Since c is nested by an edge of path P and all edges of \bar{T} are top-drawn, an edge connecting c with an ancillary of \bar{T} placed between another pair of consecutive anchors of \bar{T} would inevitably cross P . However, by exploiting the degree restriction of the input graph, we can prove that such a path cannot exist and therefore that the aforementioned scenario cannot occur. This is ensured by the following lemma.

² Note that the existence of this pair of consecutive anchors of \bar{T} is implied by [Lemma 3.2](#); since for each ancillary c of a labeled anchored tree \bar{T} there exist at least an anchor of \bar{T} with label smaller than that of c and at least another with label greater than that of c , there should be two consecutive ones with this property as well.

Lemma 3.6. *Let u_0, u_1, \dots, u_{l+1} , $l \geq 0$, be vertices (anchors/ancillaries are treated as vertices) drawn on spine ℓ from left to right, such that vertices u_0 and u_{l+1} are two consecutive anchors of \bar{T} . Assume that all trees anchored at u_1, \dots, u_l have been drawn on the top-page without edge crossings by preserving the combinatorial embedding specified by IP-2, while T has not been drawn. Then, there is an index $i \in \{0, 1, \dots, l\}$, such that no two adjacent vertices u_k and u_m exist with $0 \leq k \leq i$, $i + 1 \leq m \leq l + 1$ and edge (u_k, u_m) is top-drawn.*

Proof. Since all trees anchored at anchors of the set $\{u_1, \dots, u_l\}$ have been drawn, all potential edges incident to vertices u_1, \dots, u_l are present in the drawing. For a proof by contradiction, we make the following assumption: For all $i \in \{0, \dots, l\}$, there are two adjacent vertices u_k and u_m with $0 \leq k \leq i$, $i + 1 \leq m \leq l + 1$ and edge (u_k, u_m) is top-drawn. We will first prove that there is a path $P(u_0 \rightarrow u_{l+1}) : u_0 \rightarrow u_{j_1} \dots u_{j_p} \rightarrow u_{l+1}$ consisting of vertices of $\{u_0, \dots, u_{l+1}\}$, whose edges are top-drawn and for each edge of $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ there is not a top-drawn edge with endpoints in $\{u_0, \dots, u_{l+1}\}$ that nests this edge. The existence of path $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ will imply the desired contradiction. Observe that path $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ may result in a problematic situation, as the one describe earlier.

For $i = 0$, by our assumption it follows that for some $m \in \{1, \dots, l + 1\}$, edge (u_0, u_m) exists and is on the top-page. Let $j_1 \in \{1, \dots, l + 1\}$ be the maximum index such that (u_0, u_{j_1}) is drawn on the top-page. If $j_1 = l + 1$, then trivially we have proved the existence of path $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$. Consider now the more interesting case where $j_1 \neq l + 1$. By our initial assumption, for $i = j_1$, it follows that for some $k \in \{0, \dots, j_1\}$ and $m \in \{j_1 + 1, \dots, l + 1\}$, edge (u_k, u_m) exists and is drawn on the top-page. Now observe that $k \notin \{1, \dots, j_1 - 1\}$, since otherwise edges (u_0, u_{j_1}) and (u_k, u_m) would cross, which is not possible since the combinatorial embedding specified by IP-2 is planar. In addition, k must be non-zero, since j_1 was the maximum of $\{1, \dots, l + 1\}$, such that edge (u_0, u_{j_1}) is drawn on the top-page. Therefore, it follows that $k = j_1$. Let $j_2 \in \{j_1 + 1, \dots, l + 1\}$ be the maximum index, such that (u_{j_1}, u_{j_2}) is drawn on the top-page, and proceed similarly to the case $i = 0$.

The procedure described above will eventually lead to path $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$. We claim that path $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ contains at least one vertex of cycle C . To prove our claim, assume to the contrary that $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ contains no vertices of cycle C . In this case, path $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ consists only of anchors and ancillaries, which, however, cannot belong to \bar{T} , since u_0 and u_{l+1} are consecutive anchors of \bar{T} . By Lemma 3.1(iii), it follows that u_0 and u_{l+1} are leaves of \bar{T} . The desired contradiction follows from the fact that the path from u_0 to u_{l+1} through T and path $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ form a cycle of anchors/ancillaries. Hence, path $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ contains at least one vertex of cycle C , as desired.

Let u be the rightmost vertex of cycle C in $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ and let c be the neighbor of vertex u in $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ to the right of vertex u along the spine ℓ . Since u_{l+1} is an anchor of \bar{T} , c is well-defined and is either an anchor or an ancillary. Now, observe that c is adjacent to vertex u , where $u \in C$. This implies that c is an anchor and hence incident to a marked edge, say (v, c) , where $v \in C$ ($u = v$ is possible). First, assume that $u \neq v$. In this case, v is the leftmost neighbor of c , which suggests that the order along the spine ℓ is: $v \rightarrow u \rightarrow c$. However, such an order along ℓ is not possible, since edge (v, c) is marked and u in between. It follows that $u = v$. Since $(u, c) \in P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ (i.e., top-drawn) and is marked (i.e., bottom-drawn), it follows that edge (u, c) is a double edge. Now, observe that $u \in C$ has two incident edges on C , which contribute 2 to its degree. Double edge (u, c) also contributes 2. Up to now $\deg(u) = 4$. The contradiction follows from the fact that u has one more neighbor on the path $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$, and so its degree is at least 5. \square

We are now ready to specify the exact positions of the ancillaries of \bar{T} along the spine ℓ . Recall that the anchors of \bar{T} are denoted by $c_i, i = 1, \dots, t$, such that c_i is to the left of c_{i+1} . Now, assume that a particular number of ancillaries of \bar{T} should be drawn between two consecutive anchors c_i and c_{i+1} of \bar{T} , $i = 1, \dots, t - 1$. By [Lemma 3.6](#), it follows that there is a pair of vertices that are between c_i and c_{i+1} along ℓ and there is not a top-drawn edge with endpoints between c_i and c_{i+1} nesting both of these vertices. We benefit from this by placing between this particular pair of vertices all ancillaries of \bar{T} that must reside between c_i and c_{i+1} . Note that their relative order is not affected, that is, for ancillaries placed between c_i and c_{i+1} , the one with smaller label is to the left. This guarantees that [Lemma 3.5](#) still ensures that \bar{T} is drawn planar. It remains to prove that the combinatorial embedding specified by [IP-2](#) is preserved, once \bar{T} is completely drawn.

Lemma 3.7. *Assume that all trees that precede T in a topological sorting of G_{aux}^T have been drawn on the top-page without edge crossings by preserving the combinatorial embedding specified by [IP-2](#). When \bar{T} is drawn, the combinatorial embedding specified by [IP-2](#) is also preserved.*

Proof. Since the drawing of \bar{T} preserves the order of the edges of \bar{T} around all ancillaries, the combinatorial embedding specified by [IP-2](#) is preserved for all ancillaries of \bar{T} . We will prove that this also holds for all anchors of \bar{T} . Let c be an anchor of \bar{T} and denote by e_c the marked edge incident to c . Recall that, by construction, edge e_c is bottom-drawn. Let also e_p and e_t be two edges incident to c such that e_p is an edge among those drawn before T and e_t is an edge of \bar{T} . We restrict our proof to the case where in the combinatorial embedding specified by [IP-2](#), edge e_p precedes edge e_t in the clockwise traversal of the edges around c when starting from edge e_c and c is the

left endpoint of edge e_p along ℓ (the remaining cases are treated similarly). In this case, there is a simple path of drawn edges (other than the degenerate one consisting only of edge e_p) that joins the two endpoints of edge e_p and together with edge e_p forms a face of G . Let $C(e_p)$ be the cycle bounding this face. Since edge e_p precedes edge e_t in the clockwise traversal of the edges around c when starting from edge e_c , it follows that \bar{T} lies in the interior of cycle $C(e_p)$. Therefore, there is a top-drawn edge that belongs to cycle $C(e_p)$ (possibly edge e_p) that does not belong to \bar{T} and that nests an anchor of \bar{T} . By Lemma 3.4, this edge nests all anchors of \bar{T} (including anchor c). Since c belongs to $C(e_p)$, it follows that the only edge of cycle $C(e_p)$ that nests \bar{T} is edge e_p . Thus, c is the leftmost anchor of \bar{T} and the entire drawing of \bar{T} is nested by edge e_p . After drawing \bar{T} , edge e_p still precedes e_t in the clockwise traversal of the edges around c when starting from edge e_c , as desired. \square

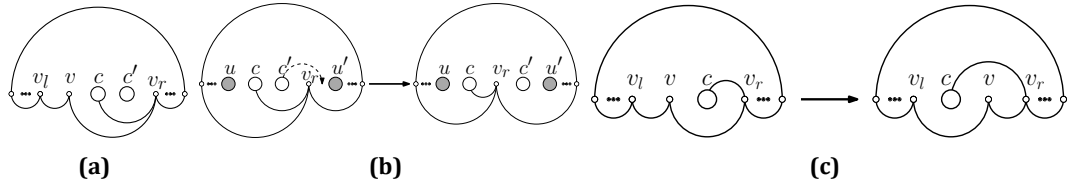


Figure 3.4: Configuration considered in Lemma 3.8: (a) A situation in which placing anchor c to the left of v creates crossings. (b) Moving block-vertex c' to the right of v_r . (c) Edge (v, v_r) can be drawn on the top page.

In the following lemma, we turn our attention to the case where cycle C contains a vertex of degree 2 in $\bar{G}_{in}(C)$ (other than its leftmost or rightmost vertex). We will utilize this lemma later.

Lemma 3.8. *Let v be a vertex of cycle C with degree 2 in $\bar{G}_{in}(C)$ that is not the leftmost or the rightmost vertex of cycle C . Let also v_r (v_l , respectively) be its next neighbor on cycle C to its right (left, respectively). Since edge (v, v_r) belongs to C , it is drawn on the bottom-page. However, it can also be drawn on the top-page without introducing edge-crossings and without changing the combinatorial embedding specified by IP-2.*

Proof. If no block-vertex is drawn between vertices v and v_r , then obviously edge (v, v_r) can be drawn on the top-page without introducing edge-crossings and without changing the combinatorial embedding specified by IP-2 (recall that vertices v and v_r are consecutive vertices of cycle C). So, we may assume w.l.o.g. that there exist block-vertices drawn between vertices v and v_r of cycle C . We will prove that we can move the block-vertices in between to the left of vertex v , so that vertices v and v_r become consecutive along spine ℓ .

The aforementioned move is not possible, only if there is an anchor c between vertices v and v_r , such that edge (c, v_r) is bottom-drawn; see Figure 3.4a. To overcome this

problem, we can potentially place vertex v between vertices c and v_r . However, in this case edges (v_r, c) and (v_l, v) would cross. We can cope with this problematic situation if edge (v_r, c) is redrawn on the top-page. However, this is not possible only if there is a block-vertex c' between c and v_r . We distinguish two cases:

- (i) Block-vertex c' is an anchor, i.e., adjacent to a vertex of cycle C . In this case, anchor c' can only be adjacent to vertex v_r through a marked edge. Hence, c and c' are both anchors, to the left of vertex v_r and adjacent to vertex v_r through marked edges. However, such a sequence of anchors along the spine is not consistent with our algorithm; a contradiction.
- (ii) Block-vertex c' is an ancillary. In this case, c' belongs to a tree, say T . Now, recall that all ancillaries of T are placed between the leftmost and the rightmost anchors of \bar{T} . Let u and u' be two consecutive anchors of \bar{T} such that the order along spine ℓ is: $u \rightarrow c' \rightarrow u'$; see the left part of [Figure 3.4b](#). Note that $u = c$ is possible. Now, observe that u' cannot be between c and v_r , since otherwise the previous case applies for u' . Thus, u' is to the right of v_r . It can be shown that [Lemma 3.6](#) holds for $u_0 = v_r$ and $u_{l+1} = u'$, even though u_0 is not an anchor but a vertex of cycle C (the detailed proof is similar to the one of [Lemma 3.6](#)). Hence, there are two consecutive vertices between v_r and u' such that c' can be placed between them (and not between c and v_r); see [Figure 3.4b](#). The same holds for every ancillary that was initially placed between c and v_r . If we move all ancillaries between v_r and u' by keeping their relative order unchanged, then (c, v_r) can be drawn on the top-page; see [Figure 3.4c](#).

□

Up to now, we have drawn $\bar{G}_{in}(C)$, such that, every bridge-block of $G_{in}(C)$ is contracted to a block-vertex that lies on spine ℓ and each edge is drawn either on the bottom (if it is a marked edge) or on the top page (otherwise). In addition, both the order of the vertices of cycle C along spine ℓ and the embedding of G specified by [IP-2](#) have been preserved. This guarantees that crossings in $\bar{G}_{out}(C)$ cannot occur.

In the following, we describe how to proceed recursively. Let c be a block-vertex of $G_{in}(C)$ with outerface \mathcal{F}_c . Initially, assume that \mathcal{F}_c is a single cycle. If c is an anchor, denote by w_0 the vertex of \mathcal{F}_c incident to the marked edge of c . If c is an ancillary, then c belongs to an anchored tree. In this case, w_0 denotes the vertex of \mathcal{F}_c adjacent to the closest neighbor of c to its left, which is well-defined since c is always placed between two consecutive anchors of the anchored tree it belongs to. Let w_0, w_1, \dots, w_m be the vertices of \mathcal{F}_c , in the clockwise traversal of \mathcal{F}_c from w_0 ; see [Figure 3.5a](#).

First assume that c is an anchor, i.e., w_0 is incident to a marked edge. We place the vertices of \mathcal{F}_c along spine ℓ as follows: (i) w_0 occupies the position of c and it is the

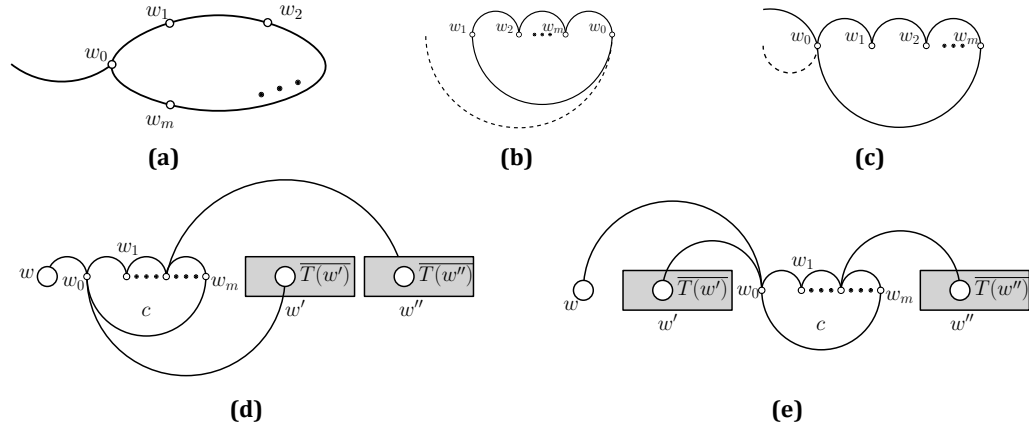


Figure 3.5: (a) The outerface of a block-vertex c . (b)-(c) different cases that occur when drawing the outerface of c , in the case where c is anchor. (d) Ancillary c needs to be repositioned. (e) Its placement is determined by [Lemma 3.9](#).

rightmost vertex of \mathcal{F}_c on ℓ , (ii) w_1 is the leftmost vertex of \mathcal{F}_c on ℓ , (iii) w_i is to the left of w_{i+1} for $i = 1, \dots, m-1$, and, (iv) there are no vertices in between; see [Figure 3.5b](#). All edges of \mathcal{F}_c are top-drawn, except for (w_1, w_0) . This placement is always feasible, except for the case in which in the combinatorial embedding specified by [IP-2](#) there is an edge incident to w_0 that is between (w_0, w_1) and the marked edge incident to w_0 in the counterclockwise order of the edges around w_0 when starting from (w_0, w_1) ; see [Figure 3.5c](#). In this case, we place w_0 to the left of w_1, \dots, w_m , such that w_0 is the leftmost vertex of \mathcal{F}_c . So, (w_0, w_m) is the bottom-drawn edge of \mathcal{F}_c .

Suppose now that c is an ancillary. Let w be the closest neighbor of c to its left on ℓ . Then, w is the parent of c in the tree in which c belongs to and (w_0, w) is top-drawn. We place the vertices of \mathcal{F}_c as follows: (i) w_0 occupies the position of c and it is the leftmost vertex of \mathcal{F}_c on ℓ , (ii) w_m is the rightmost vertex of \mathcal{F}_c on ℓ , (iii) w_i is to the left of w_{i+1} , $i = 1, \dots, m-1$, and, (iv) there are no vertices in between. All edges of \mathcal{F}_c are top-drawn, except for (w_0, w_m) . This placement is infeasible only when in the combinatorial embedding specified by [IP-2](#) there is an edge incident to w_0 , say (w_0, w') , and between (w_0, w_m) and (w_0, w) in the clockwise order of the edges around w_0 when starting from (w_0, w_m) ; see [Figure 3.5d](#). In this case, (w_0, w') cannot be drawn on the top-page, as required for edges incident to ancillaries. More precisely, since c has only its parent to its left among the block-vertices of the anchored tree it belongs to, it follows that, w' is to the right of c . Hence, edge (w_0, w') cannot be drawn on the top-page, without deviating the combinatorial embedding specified by [IP-2](#). Since G is biconnected, c is adjacent to at least another block-vertex, say w'' , such that $w'' \notin \{w, w'\}$. The following lemma takes care of this case.

Lemma 3.9. *Ancillary c can be repositioned on spine ℓ , such that: (i) c is placed between*

two consecutive anchors of \bar{T} ; (ii) the combinatorial embedding specified by IP-2 is preserved; (iii) edges (w_0, w) , (w_0, w') and (c, w'') are top-drawn and crossing-free; (iv) w_0 is leftmost vertex of \mathcal{F}_c and w_i is to the left of w_{i+1} , $i = 1, \dots, m - 1$; (v) All edges of \mathcal{F}_c are top-drawn, except for (w_0, w_m) .

Proof. Vertex w is the parent of c . Vertices w' and w'' are children of c in \bar{T} , with w' being the first child of c . For our proof, we may assume that w'' is its second child. So, edges (c, w) , (c, w') and (c, w'') are consecutive around c ; see Figure 3.5d. Let $\bar{T}(w')$ and $\bar{T}(w'')$ be the subtrees of \bar{T} rooted at w' and w'' , respectively. Initially, c is to the left of all vertices of $\bar{T}(w')$, all vertices of $\bar{T}(w')$ are to the left of all vertices of $\bar{T}(w'')$ and there are no ancillaries of \bar{T} in between. We proceed by placing c between the rightmost (leftmost, respectively) anchor of $\bar{T}(w')$ ($\bar{T}(w'')$, respectively); see Figure 3.5e. In this way, c is placed between two consecutive anchors of \bar{T} . If we place the vertices of \mathcal{F}_c , with w_0 being leftmost on \mathcal{F}_c and w_i to the left of w_{i+1} , then edges (w_0, w) , (w_0, w') and (c, w'') are drawn on the top-page and the embedding is preserved. \square

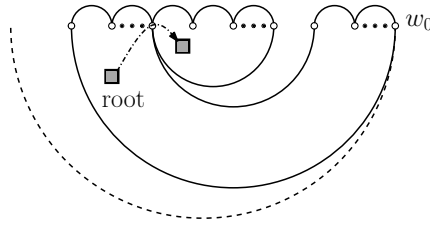


Figure 3.6: \mathcal{F}_c is not a single cycle

From the above it follows that if we process all ancillaries that have to be repositioned from right to left along ℓ , then by Lemma 3.9 it follows that we will eventually obtain a planar drawing in which the embedding specified by IP-2 is preserved once the outerface of each block-vertex is drawn and all edges that connect block-vertices are drawn on the top-page.

Now, recall that initially we assumed that \mathcal{F}_c is a single cycle in order to simplify our presentation. However, in general \mathcal{F}_c consists of smaller subcycles, such that (i) any two subcycles share at most one vertex of \mathcal{F}_c , and, (ii) any vertex of \mathcal{F}_c is incident to at most two subcycles. Hence, the “tangency graph” of these subcycles (which has a vertex for each subcycle and an edge between every pair of subcycles that share a vertex) is a tree. Define w_0 as in the case of single cycle and let the tangency tree be rooted at the cycle containing w_0 . Due to the degree restriction, w_0 cannot be incident to two subcycles. We draw the subcycles of \mathcal{F}_c in the order implied by the breadth first search traversal of the tangency tree. The first one (which is incident to vertex w_0) is drawn as in the case of a single cycle. Each next subcycle is plugged into the drawing, as shown in Figure 3.6.

It remains to ensure that **IP-1** up to **IP-5** are satisfied when a single cycle, say C_s , is recursively drawn. **IP-1** holds, since each edge is drawn either on the bottom (if it is a marked edge) or on the top-page (otherwise) and no two edges intersect. **Lemma 3.7** guarantees that **IP-2** also holds. If C_s is the outerface of a block-vertex or a leaf in the tangency tree, then **IP-3** trivially holds. If C_s is a non-leaf in the tangency tree, then it contains at least one edge drawn on the bottom page; see **Figure 3.6**). This clearly violates **IP-3**. Hopefully, we can benefit from **Lemma 3.8**. The edge which is improperly drawn on the bottom page is incident to a vertex (of degree four) that is not adjacent to any other vertex in the interior of C_s . So, for the sake of the recursion we assume that it is drawn on the top-page and once C_s is completely drawn, we redraw it on the bottom-page using **Lemma 3.8**. If C_s is the outerface of a block-vertex or the root of the tangency tree of a non-simple outerface \mathcal{F}_c , then at least one vertex of C_s is adjacent to $G_{out}(C_s)$. If C_s is an internal node of the tangency tree of \mathcal{F}_c , then its leftmost vertex has two edges in $G_{out}(C_s)$. Hence, **IP-4** also holds.

However, **IP-5** does not necessarily hold. To cope with this case, consider a single cycle C_s and, with a slight abuse of the notation developed so far, denote by w_1, \dots, w_m the vertices of C_s from left to right along ℓ . If **IP-5** is violated, then $\deg(w_1) = 4$ in $\overline{G}_{in}(C_s)$ and w_1 is incident to exactly one chord of C_s , say (w_1, w_i) , $i \in \{3, \dots, m-1\}$; see **Figure 3.7a**. Let v be the other neighbor of w_1 in $G_{in}(C_s)$. Clearly, $v \notin C_s$. In general, (w_1, w_i) belongs to a path of chords stemming from w_1 . Let w_j , $j \geq i$, be the end of this path, say $P(w_1 \rightarrow w_j)$. The degree restriction implies that $P(w_1 \rightarrow w_j)$ is uniquely defined. We refer to it as the separating path of chords of C_s , since it splits $\overline{G}_{in}(C_s)$ into two subgraphs (see **Figures 3.7b-3.7c**):

- $\overline{G}_{in}(C_l)$ with outerface C_l consisting of the edges $(w_1, w_2), (w_2, w_3), \dots, (w_{j-1}, w_j)$ and the edges of $P(w_1 \rightarrow w_j)$ (highlighted in gray in **Figure 3.7a**), and,
- $\overline{G}_{in}(C_r)$ with outerface C_r consisting of the edges $(w_j, w_{j+1}), \dots, (w_m, w_1)$ and the edges of $P(w_1 \rightarrow w_j)$.

In the following, we describe how can be recursively drawn the two sub-instances $\overline{G}_{in}(C_l)$ and $\overline{G}_{in}(C_r)$. Observe that if $i \neq j$, then C_l is not simple. In this case, C_l consists of a particular number of smaller simple subcycles, for which **IP-4** and **IP-5** hold (hence they can be recursively drawn), except for the first one, that is leftmost drawn along ℓ . First consider $\overline{G}_{in}(C_r)$. We distinguish two cases:

Case 1: $j = m$ (see **Figure 3.7d**). In this case, C_r is formed by path $P(w_1 \rightarrow w_m)$ and edge (w_1, w_m) . Observe that w_m is the rightmost vertex of C_r and incident to a chord of C_s . Therefore, the degree of w_m is two in $\overline{G}_{in}(C_r)$. Since none of the edges of path $P(w_1 \rightarrow w_m)$ is nested by a chord of C_r , it follows that all vertices of C_r (except

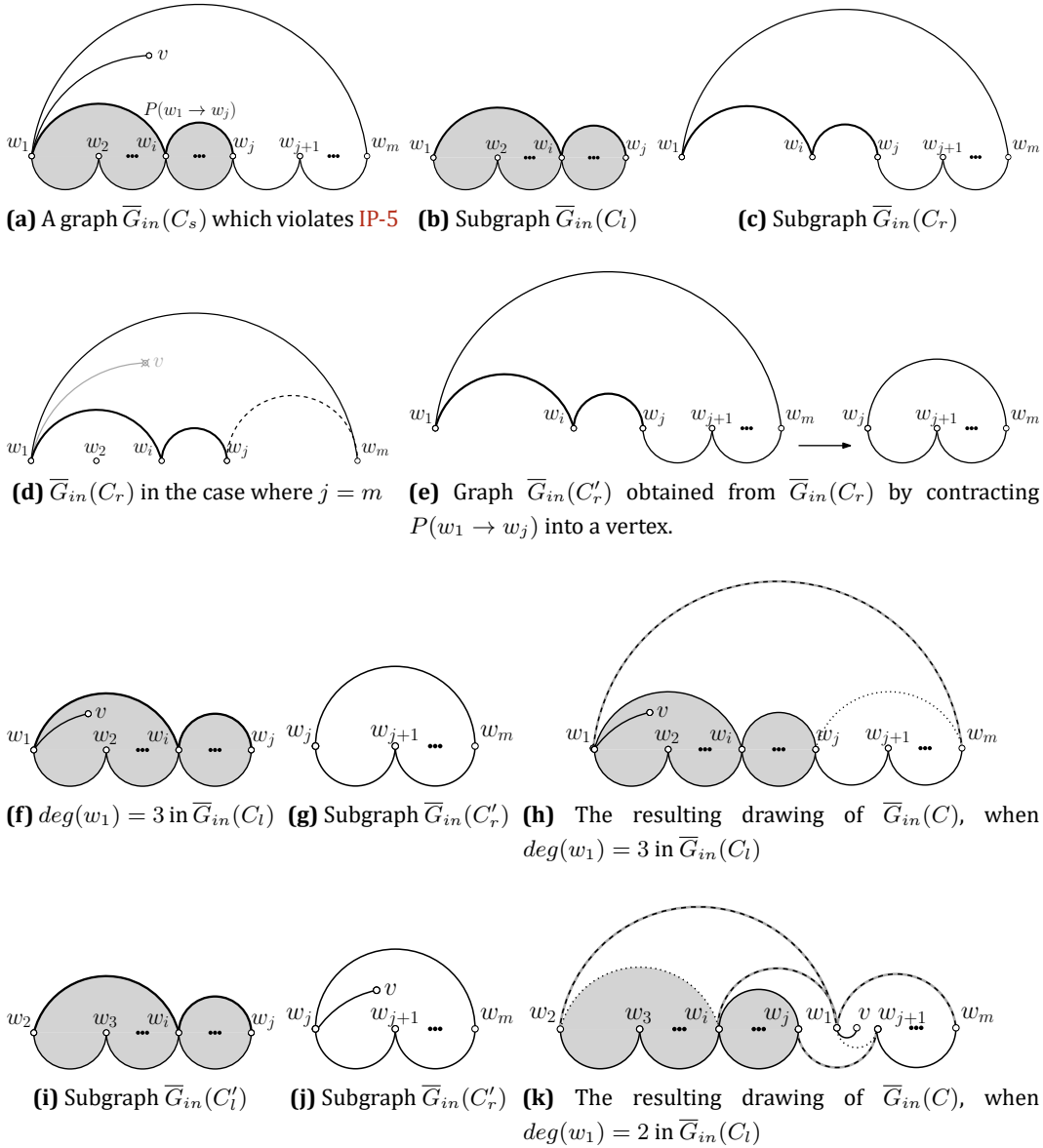


Figure 3.7: In all figures, $P(w_1 \rightarrow w_j)$ is drawn fat, dotted edges are removed and gray-shaded dashed edges are added.

possibly for w_1) are of degree 2 in $\overline{G}_{in}(C_r)$. If the degree of w_1 is three in $\overline{G}_{in}(C_r)$, then edge (w_1, v) is bridge; a contradiction to the biconnectivity of graph G . Hence, $\overline{G}_{in}(C_r) \equiv C_r$. So, we draw C_r as in Figure 3.7d, i.e., on the top-page. Then, each sub-cycle of C_l conforms to IP-4 and IP-5 (including the first one, that is leftmost drawn along ℓ) and can be recursively drawn. The drawing of $\overline{G}_{in}(C_s)$ is derived by plugging the drawing of the subcycles of C_l into the drawing of $\overline{G}_{in}(C_r)$. Observe that the combinatorial embedding is preserved.

Case 2: $j < m$ (see [Figure 3.7c](#)). In this case all vertices of path $P(w_1 \rightarrow w_j)$ are of degree 2 in $\overline{G}_{in}(C_r)$, except for endvertices w_1 and w_j , that can be of maximum degree 3. We modify $\overline{G}_{in}(C_r)$ as follows (see [Figure 3.7e](#)): We contract $P(w_1 \rightarrow w_j)$ into a single vertex, identified by w_j . Let $\overline{G}_{in}(C'_r)$ be the new subgraph with outerface C'_r . Clearly, [IP-5](#) holds for $\overline{G}_{in}(C'_r)$. [IP-4](#) also holds, since w_m is the rightmost vertex of C'_r and $\deg(w_m) \leq 3$. Hence, $\overline{G}_{in}(C'_r)$ can be recursively drawn. We proceed by distinguishing two sub-cases based on the degree of w_1 in $\overline{G}_{in}(C_l)$:

Case 2.a: $\deg(w_1) = 3$ in $\overline{G}_{in}(C_l)$ (see [Figure 3.7f](#)). In this case, [IP-4](#) and [IP-5](#) hold for $\overline{G}_{in}(C_l)$. Hence, it can be recursively drawn. Once $\overline{G}_{in}(C_l)$ and $\overline{G}_{in}(C'_r)$ are drawn, the drawing of $\overline{G}_{in}(C)$ can be derived by deleting edge (w_j, w_m) from $\overline{G}_{in}(C'_r)$ and restoring edge (w_1, w_m) , as in [Figure 3.7h](#). Since w_1 has no neighbors in $G_{in}(C'_r)$, the embedding is preserved.

Case 2.b: $\deg(w_1) = 2$ in $\overline{G}_{in}(C_l)$ (see [Figure 3.7j](#)): In this case, the degree of w_1 is three in $\overline{G}_{in}(C'_r)$. Again, we modify $\overline{G}_{in}(C_l)$ as follows; see [Figure 3.7i](#). We remove w_1 and join w_2 and w_i by an edge. Let $\overline{G}_{in}(C'_l)$ be the new subgraph with outerface C'_l . Observe that [IP-5](#) may not hold for $\overline{G}_{in}(C'_l)$. However, $\overline{G}_{in}(C'_l)$ has fewer vertices than $\overline{G}_{in}(C)$. We can benefit from this by proceeding recursively, as we initially did with $\overline{G}_{in}(C)$. Eventually, at some point [IP-5](#) should hold, otherwise a graph with at most 3 vertices on its outerface should have a chord; a contradiction. Once $\overline{G}_{in}(C'_l)$ has been drawn, we derive the drawing of $\overline{G}_{in}(C)$ as follows; see [Figure 3.7k](#). We remove edge (w_2, w_i) and connect the neighbors of w_j in $\overline{G}_{in}(C'_r)$ with its copy in $\overline{G}_{in}(C'_l)$. Note that no crossings are introduced, since the two copies of w_j in $\overline{G}_{in}(C'_l)$ and $\overline{G}_{in}(C'_r)$ are consecutive along ℓ . To complete the drawing of $\overline{G}_{in}(C)$, it remains to replace the copy of w_j in $\overline{G}_{in}(C'_r)$ with w_1 , and, add the edges (w_1, w_2) and (w_1, w_i) .

To complete the description of our algorithm, it remains to describe how the recursion begins. To do so, we need the following lemma, that describes a simple property of planar graph drawings.

Lemma 3.10. *Any planar graph G admits a planar drawing $\Gamma(G)$ with a chordless outerface.*

Proof. Suppose that we are given a planar drawing $\Gamma'(G)$ of G , in which the cycle, say $C : u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow u_1$, bounding its outerface contains at least one chord. Then, the endpoints of any chord of C is a separating pair of G . Let (u_i, u_j) , $1 \leq i < j \leq k$, be a chord of C such that cycle $C' : u_i \rightarrow u_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow u_j \rightarrow u_i$ has no chords. Let also G_1 and G_2 be the two subgraphs of G with outerfaces $u_i \rightarrow u_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow u_{j-1} \rightarrow u_j \rightarrow u_i$ and $u_i \rightarrow u_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow u_{j+1} \rightarrow u_j \rightarrow u_i$ respectively. Denote by f the face of G_1 that contains edge (u_i, u_j) . Since u_i and u_j is a separating pair of G , there exist a

planar drawing $\Gamma(G)$ of G in which $G_2 - \{(u_i, u_j)\}$ is drawn in the interior of f and the outerface of G is bounded by the chordless cycle C' . \square

We are now ready to describe how the recursion begins. This is done by specifying a drawing of G with a chordless outerface, say $C_{out} : v_1 \rightarrow \dots v_k \rightarrow v_1$, which by [Lemma 3.10](#) exists. Then, we place v_1, \dots, v_k in this order along ℓ and draw the edges of C_{out} as imposed by [IP-3](#). If there is a vertex of C_{out} with degree less than four, then it is chosen as v_k and all invariant properties of our algorithm are satisfied. However, in the case where such a vertex does not exist, it follows that the degree of v_k in $\overline{G}_{in}(C_{out})$ is four and therefore [IP-4](#) does not hold.

To cope with the latter case, we assume that we have computed the block-vertices of $G_{in}(C_{out})$. Let v_l (v_r , respectively) be the left (right, respectively) neighbor of v_k in $G_{in}(C_{out})$ and c_r (c_l , respectively) the block-vertex that v_r (v_l , respectively) belongs to; see [Figure 3.8a](#). Note that $c_r = c_l$ is possible. Since C_{out} is chordless, it follows that both v_l and v_r do not belong to C_{out} . We will augment G , such that [IP-4](#) holds in the augmented graph G_{aug} . We outline our case analysis:

Case 1: Block-vertex c_r is incident to a vertex of C_{out} other than v_k .

Case 2: Block-vertex c_r is not incident to any other vertex of C_{out} apart from v_k . In this case, once we define G_{aug} , we consider two additional subcases:

Case 2.a: Vertices v_l and v_r belong to two different block-vertices of G_{aug} .

Case 2.b: Vertices v_l and v_r belong to the same block-vertex of G_{aug} .

We investigate each of the aforementioned cases in detail.

Case 1: Block-vertex c_r is incident to a vertex of C_{out} other than v_k : Let v_i , $i < k$, be the leftmost neighbor of c_r on C_{out} . We augment graph G as in [Figure 3.8b](#), by introducing three vertices to the right of v_k . Let C_{aug} be the outerface of the augmented graph. Now, observe that G_{aug} satisfies [IP-4](#) and can be recursively drawn. We claim that, in the drawing of G_{aug} , v_r and v_l are to the left of v_k , as in [Figure 3.8c](#). Denote by c_r^{aug} (c_l^{aug} , respectively) the block-vertex that v_r (v_l , respectively) belongs to in $G_{aug} - C_{aug}$. Note that $c_r^{aug} = c_l^{aug}$ is possible. c_r^{aug} is incident to v_i through a marked edge, since v_i is the leftmost neighbor of c_r . This implies that c_r^{aug} is placed directly next to v_i (hence, to the left of v_k). Now, observe that v_k is the rightmost neighbor of c_l^{aug} . So, c_l^{aug} is placed to the left of v_k , even if edge (v_l, v_k) is a marked one, due to chord (v_k, v_{k+2}) . Between v_k and v_{k+3} no vertices of G_{aug} exist, except for v_{k+1} and v_{k+2} , since the only anchor that could be between v_{k+2} and v_{k+3} is c_r^{aug} , which, however, is to the left of v_k , and so all vertices of $G_{aug} - C_{aug}$ are to the left of v_k . If we contract v_k, v_{k+1}, v_{k+2} and v_{k+3} back into v_k , we obtain a valid drawing of G ; see [Figure 3.8d](#).

Case 2: Block-vertex c_r is not incident to any other vertex of C_{out} apart from v_k : In this case, c_r is not incident to any other vertex of C_{out} apart from v_k . We claim that we are allowed to assume w.l.o.g. that c_l is not incident to any other vertex of C_{out} apart from v_k . To see this, consider a mirroring of ℓ on the y -axis; see [Figure 3.8e](#). The clockwise order of the edges around each vertex of G is obviously preserved. However, edge (v_k, v_l) ((v_k, v_r) , respectively) becomes the right (left, respectively) edge of vertex v_k . If c_l is incident to a vertex of C_{out} other than v_k , then [Case 1](#) applies. Therefore, we may assume w.l.o.g. that c_r and c_l are not incident to any other vertex of C_{out} apart from v_k . We augment G as in [Figure 3.8f](#), such that [IP-4](#) holds. Let C_{aug} be the outerface of the augmented graph. Since v_k is not a cutvertex in G , edge (v_k, v_{k+1}) cannot be a bridge in G_{aug} . Hence, G_{aug} can be recursively drawn. We distinguish two subcases:

Case 2.a: Vertices v_l and v_r belong to two different block-vertices of graph $G_{aug} - C_{aug}$, say c_l^{aug} and c_r^{aug} respectively. In this case, v_{k+1} belongs to another block-vertex (containing only v_{k+1}) and is incident to v_k . Both c_r^{aug} and c_l^{aug} are ancillaries. Since v_{k+1} is adjacent to one vertex of C_{out} (that is, vertex v_k), it follows that edge (v_k, v_{k+1}) is the marked edge of v_{k+1} , and, v_{k+1} is placed directly to the left of v_k ; see [Figure 3.8g](#). On the other hand, edge (v_k, v_{k+1}) is drawn on the bottom page (marked edge), while edges (v_l, v_{k+1}) and (v_r, v_{k+1}) are drawn on the top page. If there was an anchor between v_{k+1} and v_k , it would have been adjacent to v_k , contradicting the fact that the degree of v_k in G_{aug} is three. So, the rightmost anchor of $G_{aug} - C_{aug}$ is v_{k+1} . It follows that all vertices of $G_{aug} - C_{aug}$ are to the left of v_{k+1} , which implies that if we contract v_k and v_{k+1} back to v_k , then we obtain a valid drawing of G ; see [Figure 3.8h](#).

Case 2.b: Vertices v_l and v_r belong to the same block-vertex, say c , of G_{aug} . In this case, v_{k+1} must belong to c , as well. In addition, v_r, v_{k+1} and v_l appear in this order in the clockwise traversal of the outerface C_c of c . Since c contains v_{k+1} , c is adjacent to vertex v_k of C_{out} . Therefore, c is incident to a marked edge, which “determines” the placement of the vertices of C_c on ℓ . Let v' be the vertex of C_c incident to the marked edge of c . Since c is adjacent to v_k , it follows that $v' = v_{k+1}$ is possible (however, $v' \notin \{v_r, v_l\}$ since v_r and v_l are not incident to a vertex of C_{out}). We distinguish the following cases, based on whether $v' = v_{k+1}$ or not:

- (i) $v' = v_{k+1}$: In this case edge (v_k, v_{k+1}) is the marked edge of c ; see [Figure 3.8i](#). Therefore, c is directly to the left of v_k , with v_{k+1} being the rightmost vertex of C_c . In addition, between v_{k+1} and v_k no vertices of G_{aug} exist, since the degree of v_k in G_{aug} is three, that is, if there was an anchor between v_k and v_{k+1} , it would have been adjacent to v_k and then the degree of v_k becomes four. So, the rightmost anchor of $G_{aug} - C_{aug}$ has v_{k+1} as its rightmost vertex.

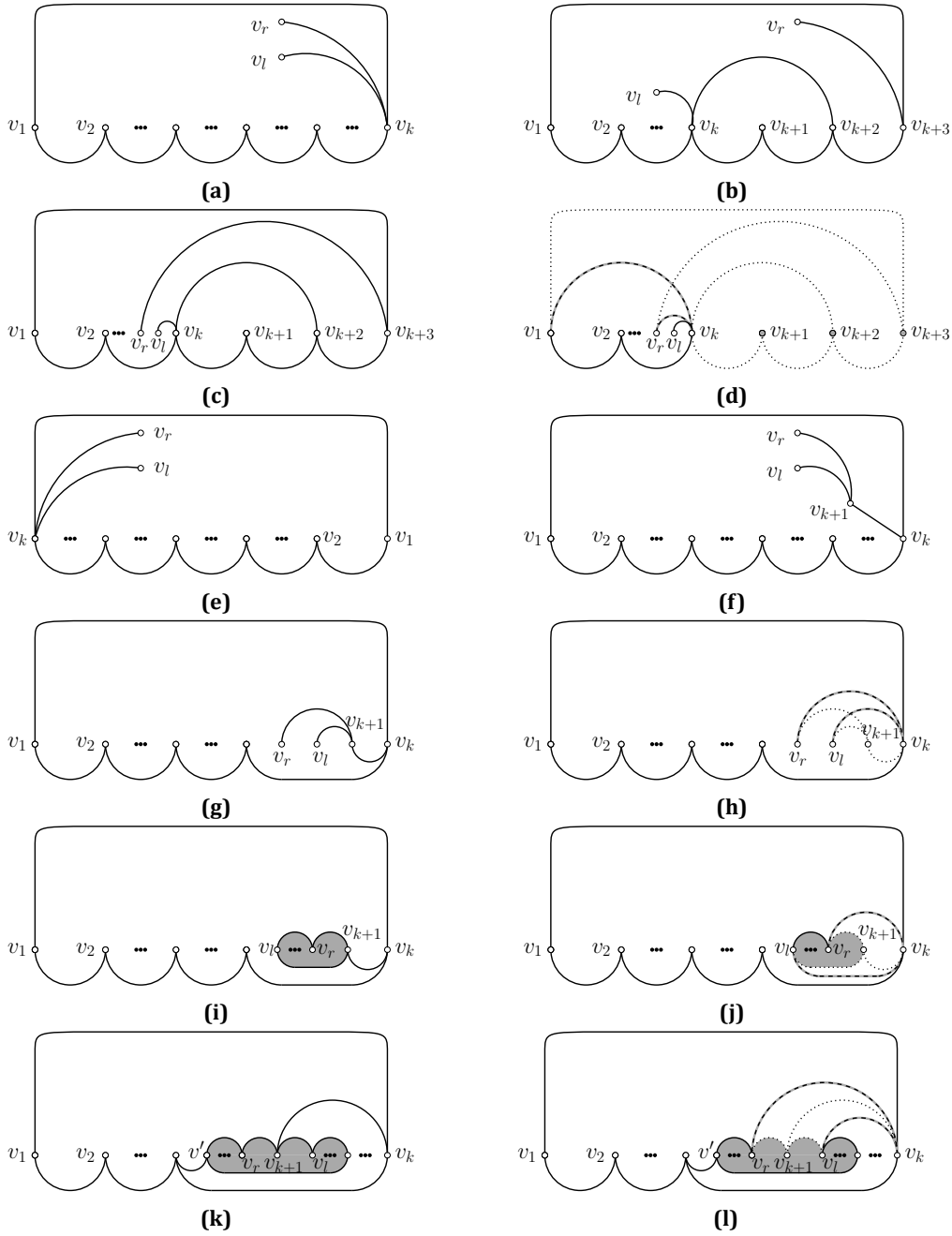


Figure 3.8: In all figures, dotted edges are removed and gray-shaded dashed edges are added: (a) An instance in which IP-4 is violated, (b) G_{aug} , when c_r is adjacent to a vertex of C_{out} other than v_k , (c) The drawing of G_{aug} , when c_r is adjacent to a vertex of C_{out} other than v_k , (d) A valid drawing of G , when c_r is adjacent to a vertex of C_{out} other than v_k , (e) Mirroring G along the y -axis, (f) G_{aug} when c_r is not incident to a vertex of C_{out} apart from v_k , (g) The drawing of G_{aug} , when: c_r is not adjacent to another vertex of C_{out} apart from v_k ; v_l and v_r belong to different block-vertices, (h) A valid drawing of G , when: c_r is not adjacent to another vertex of C_{out} apart from v_k ; v_l and v_r belong to different block-vertices, (i) The drawing of G_{aug} , when: c_r is not adjacent to any other vertex of C_{out} apart from v_k ; v_l and v_r belong to the same block-vertex; (v_k, v_{k+1}) is marked, (j) A valid drawing of G , when: c_r is not adjacent to any other vertex of C_{out} apart from v_k ; v_l and v_r belong to the same block-vertex; (v_k, v_{k+1}) is marked, (k) The drawing of G_{aug} , when: c_r is not adjacent to any other vertex of C_{out} apart from v_k ; v_l and v_r belong to the same block-vertex; (v_k, v_{k+1}) is not marked, (l) A valid drawing of G , when: c_r is not adjacent to any other vertex of C_{out} apart from v_k ; v_l and v_r belong to the same block-vertex; (v_k, v_{k+1}) is not marked.

This implies that all vertices of $G_{aug} - C_{aug}$ are to the left of v_{k+1} . So, if we contract vertices v_k and v_{k+1} back to v_k , and draw the edge (v_l, v_k) on the bottom page and (v_r, v_k) on the top page, we obtain a valid drawing of G ; see [Figure 3.8j](#).

- (ii) $v' \neq v_{k+1}$: We claim that v_r, v_{k+1} and v_l appear in this order from left to right on ℓ . Assume to the contrary that, either v_l and v_{k+1} , or, v_{k+1} and v_r , are the leftmost and rightmost vertices of C_c on ℓ , respectively. The contradiction is implied by the construction, in which v' is either leftmost or rightmost on C_c , and, $v' \notin \{v_{k+1}, v_r, v_l\}$. The current situation is depicted in [Figure 3.8k](#). If we remove v_{k+1} , and, draw the edges (v_l, v_k) and (v_r, v_k) on the top page, then we obtain a valid drawing of G ; see [Figure 3.8l](#).

Having described how the recursion begins, we are now ready to state our main theorem.

Theorem 3.1. *Any planar graph of maximum degree 4 on n vertices admits a two-page book embedding, which can be constructed in $O(n^2)$ time.*

Proof. It remains to discuss the time complexity of our algorithm. At each step, our algorithm performs a series of computations; the computation of the bridge-blocks, the topological sorting of G_{aux}^T , BFS-traversals on the tangency trees. Using standard algorithms from the literature all of these computations can be done in $O(n)$ time, resulting in $O(n^2)$ total time. \square

In this chapter we consider book embeddings of 1-planar graphs. Recall that a graph is 1-planar if it can be drawn on the plane such that every edge is crossed at most once. In the following we prove that 1-planar graphs have bounded page number. Let $G = (V, E)$ be a 1-planar graph and $\Gamma(G)$ be a 1-planar drawing of G . Initially, we consider the case where $\Gamma(G)$ contains no crossings incident to its unbounded face. To simplify the presentation, we further assume that G satisfies the K_4 -emptiness property, that is, G is internally maximal 1-planar and in $\Gamma(G)$ the interior of all K_4 's of [Lemma 2.3](#) are free of vertices and edges. In order to guarantee this property, first we planarize G by replacing each crossing in $\Gamma(G)$ with a so-called crossing vertex. The planarized graph is then triangulated (only in its interior), so that no new edge is incident to a crossing vertex. Note that the latter restriction may lead to a non-simple graph (containing multiedges), as we will see in [Section 4.2](#). However, if we treat all crossing vertices as actual crossings, then the implied augmented graph satisfies the K_4 -emptiness property (at the cost of non-simplicity).

First, we consider the case where graph G is simple, internally-maximal 1-planar, satisfies the K_4 -emptiness property and has no crossings at its unbounded face (i.e., no multiedges are created during the procedure described above). We prove that if there are only two levels, then such a graph fits in 16 pages. Otherwise, 34 pages suffice. Finally, we show how to cope with multiedges and crossings on the unbounded face of $\Gamma(G)$ with the aid of 5 extra pages.

Let G be a simple and internally-maximal 1-planar graph that satisfies the K_4 -emptiness property and has no crossings at its unbounded face. Then, (i) vertices on the outerface of G are at level zero, (ii) vertices that are at distance i from the level zero vertices are at level i . Following Yannakakis' naming scheme, edges that connect vertices on the same (different, respectively) level are called level (binding, respectively) edges.

If we remove one edge from each pair of crossing edges, then the result is an internally-triangulated plane graph (which we call underlying planar structure). For a pair of binding crossing edges or for a pair of level crossing edges, we choose arbitrarily one edge to remove (we will shortly adjust this choice for two special cases). However, for a pair of crossing edges consisting of a binding edge and a level edge, we always choose to

remove the level edge. This approach allow us to define the blocks, the leaders and the dominators of the blocks as Yannakakis does (refer to [Section 2.2.1](#) for more details). Also observe that if all edges removed are plugged back in the graph, then a binding edge cannot cross a block.

4.1 The Two-Level Case

We first consider the basic case where the given graph consists of two levels L_0 and L_1 . We also assume that there is no level edge of L_1 which by the combinatorial embedding is strictly in the interior of a block of L_1 . In addition, G is simple, internally maximal 1-planar satisfies the K_4 -emptiness property and has no crossings on its unbounded face. We proceed to obtain a 3-page book embedding of the underlying planar structure G_P using Yannakakis' algorithm (see [Section 2.2.1](#)). We argue that we can embed the removed edges in the linear order implied by the book embedding of G_P using 13 more pages.

We first introduce an important notion useful in "eliminating" possible crossing situations. We say that two edges e_1 and e_2 of G form a strong pair if (i) they are both assigned to the same page, say p , and (ii) if an edge e , that is assigned also to page p , is in conflict with e_i , then it is also in conflict with e_j , where $i \neq j \in \{1, 2\}$. Suppose that $e_1 \notin E(G_P)$ and $e_2 \in E(G_P)$ form a strong pair of edges. If $e_3 \in E(G_P)$, then e_3 can cross neither e_1 nor e_2 (due to Yannakakis' algorithm). On the other hand, if $e_3 \notin E(G_P)$ and forms a strong pair with another edge $e_4 \in E(G_P)$, then again e_3 crosses neither e_1 nor e_2 , as otherwise e_4 would also be involved in a crossing with e_1 or e_2 , contradicting the correctness of Yannakakis' algorithm as $e_4 \in E(G_P)$.

We now describe six types of crossings that occur when the removed edges are plugged back in G (see [Figure 4.1](#)). Level edges of L_0 that do not belong to G_P are called outer crossing chords. Such chords may be involved in crossings with (i) other chords of L_0 that belong to G_P or (ii) binding edges (between levels L_0 and L_1), or, (iii) degenerate blocks (so-called block-bridges) of level L_1 that are simple edges.

Level edges of L_1 that do not belong to G_P are called inner crossing chords or simply 2-hops (since it can "bypass" only one vertex along the boundary of the block tree). We claim that 2-hops do not cross with each other. Assume to the contrary that $e = (u, v)$ and $e' = (u', v')$ are two 2-hops that cross and say w.l.o.g. that u, u', v and v' appear in this order along the boundary of the block tree of G_P . Since G is maximal 1-planar, by [Lemma 2.3](#) and the K_4 -emptiness property it follows that (u, v') belongs to G_P . However, in the presence of this edge both vertices u' and v are not anymore at the boundary of the block tree of level L_1 of G_P , which is a contradiction as e and e' are both level edges of L_1 . Hence, 2-hops are involved in crossings only with binding

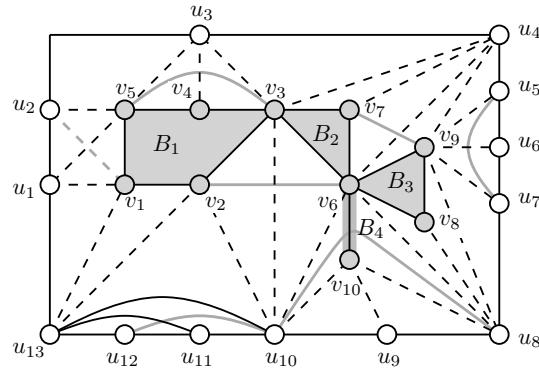


Figure 4.1: Level (binding) edges are solid (dashed). The planar structure G_P is colored black. Gray colored edges do not belong to G_P . Edges (u_5, u_7) , (u_8, u_{10}) and (u_{10}, u_{12}) are outer crossing chords that cross a binding edge, a bridge-block and a chord of G_P , respectively. Edges (v_3, v_5) , (v_7, v_9) and (v_2, v_6) are 2-hops crossing binding edges. Edge (u_2, v_1) is forward.

edges. Since level edges of different levels cannot cross, the only type of crossings that we have not reported are those between binding edges.

Recall that binding edges are of two types, forward and back. For a pair of crossing binding edges, say $e = (u_i, v_j)$ and $e' = (u_{i'}, v_{j'})$, where $u_i, u_{i'} \in L_0$ and $v_i, v_{i'} \in L_1$, we mentioned that we can arbitrarily choose which one is assigned to G_P . Here we adjust this choice. Edge e is assigned to G_P if and only if vertex u_i is lower-indexed than $u_{i'}$ in L_0 , that is $i < i'$. Hence, e' is always forward and no two back edges cross.

Similarly, for a pair of crossing level edges of level L_0 we adjust our initial choice as follows. If a level edge is incident to $u_1 \in L_0$, then it is necessarily assigned to G_P .

From the above, it follows that for a pair of crossing edges, say $e \in E(G_P)$ and $e' \notin E(G_P)$, we have the following crossing situations each of which is separately treated in the following lemmas (except for the last one which is more demanding).

- C.1 e' is an outer crossing chord and e is a chord of L_0 that belongs to G_P .
- C.2 e' is an outer crossing chord and e is a binding edge.
- C.3 e' is an outer crossing chord and e is a block-bridge of L_1 .
- C.4 e' is a forward edge and e is a forward edge.
- C.5 e' is a forward edge and e is a back edge.
- C.6 e' is a 2-hop and e is a binding edge.

Theorem 4.1. *Any simple internally-maximal 1-planar graph G with 2 levels, that satisfies the K_4 -emptiness property and has no crossings at its unbounded face admits a book embedding on 16 pages.*

Proof. The underlying planar structure can be embedded in three pages. Case C.1 requires one extra page (due to Lemma 4.2(i)). The crossing edges that fall into Cases C.2

and C.3 can be accommodated on the same pages used for the underlying planar structure (see [Lemma 4.2\(ii\)](#)). Case C.4 requires two extra pages due to [Lemma 4.3](#). Case C.5 requires three extra pages due to [Lemma 4.4](#). Finally, Case C.6 requires seven more pages due to [Lemma 4.5](#). Summing up the above yields 16 pages in total. \square

We start by investigating the case where e' is an outer crossing chord of G .

Lemma 4.1. *Let u_1, \dots, u_k be the vertices of level L_0 in clockwise order along its boundary. Let $c = (u_i, u_j)$ and $c' = (u_{i'}, u_{j'})$ be two chords of L_0 , such that $i < i' < j < j'$. Then, exactly one of c and c' is an outer crossing chord.*

Proof. Since $c = (u_i, u_j)$ and $c' = (u_{i'}, u_{j'})$ are chords of L_0 with $i < i' < j < j'$, chords c and c' cross in the 1-planar drawing $\Gamma(G)$ of G . So, one of them would belong to G_P and the other one would be an outer crossing chord. \square

By [Lemma 4.1](#), outer crossing chords can be placed on one page. However, in order to achieve more flexibility for the multi-level case, we chose to place some of them on a separate page (see [Lemma 4.2](#)). We call this particular page universal, because it contains outer crossing chords from all levels. Recall that we use three pages for G_P : p_1 (for level edges of L_0 and back edges), p_2 and p_3 (for level edges of L_1 and forward edges).

Lemma 4.2 (Cases C.1 - C.3). *Let $e = (u, v) \in E(G_P)$ and $e' = (u', v') \notin E(G_P)$ be two edges of G that are involved in a crossing, where e' is an outer crossing chord of L_0 .*

- (i) *If e is a chord of L_0 , then e' is placed on a universal page denoted by up_c (Case C.1).*
- (ii) *If e is a binding or a block-bridge of L_1 , then e' is assigned to page p_1 , that is, the page used for level edges of L_0 and back edges of G_P (Cases C.2 and C.3).*

Proof.

- (i) Since e is chord of level L_0 , e is placed on page p_1 (recall that $e \in E(G_P)$) and e' is placed on the universal page up_c . Since up_c contains only outer crossing chords of G , by [Lemma 4.1](#) they do not cross with each other.
- (ii) If e is a binding edge or a block-bridge of level L_1 , then e' is assigned to page p_1 . Suppose that e' is in conflict with another edge, say e'' , of page p_1 . By [Lemma 4.1](#), edge e'' is not an outer crossing chord, that is, e'' belongs to the underlying planar structure G_P of G . So, $e'' \in E(G_P)$ and it is either: (a) a level edge of level L_0 or (b) a back edge of G_P . In the first case, the endpoints of e'' cannot be consecutive vertices of level L_0 , since that would not lead to a crossing situation. Hence, e'' must be a chord of level L_0 . However, if e' is involved in such a crossing, then e' is assigned to page up_c , a contradiction. In the second case, e'' is back

edge of G_P . So, edge e'' is nested by a level edge of level L_0 that is not a chord of L_0 and therefore if e' crosses e'' , then e' must also cross this particular level edge of level L_0 , which is not possible. □

Lemma 4.3 (Case C.4). *All forward edges that are involved in crossings with forward edges of the underlying planar structure can be assigned to 2 new pages.*

Proof. Observe that for a pair of crossing forward edges, the choice of the edge that will be assigned to G_P affects neither the decomposition into blocks nor the choice of dominators and leaders of blocks. Therefore, it does not affect the linear order of the vertices along the spine. This ensures that two new pages suffice. □

We proceed with Case C.5, where the back edge $e = (u, v) \in E(G_P)$ crosses the forward edge $e' = (u', v') \notin E(G_P)$. Let P be the block containing (v, v') and let v_0, \dots, v_t be the vertices of P in counterclockwise order around P starting from $v_0 = \ell(P)$. Since e is back, it follows that $u = u_f(P)$. By definition of $u_f(P)$, u sees $(v_i, v_{i+1}), \dots, (v_{t-1}, v_t), (v_t, v_0)$ of P , for some $1 \leq i \leq t$. Hence, edges $(u, v_0), (u, v_t), \dots, (u, v_i)$ exist and are back. This implies that either $v = v_i$ and $v' = v_{(i+1) \bmod t}$ or $v = v_0$ and $v' = v_t$. In the latter case and since u' is to the right of u on the spine, P is a root-block. In both cases (u', v) is forward.

Lemma 4.4 (Case C.5). *Let $e = (u, v)$ and $e' = (u', v')$ a back and a forward edge of G that cross. Let v_0, \dots, v_t be the vertices of block P in counterclockwise order around P starting from $v_0 = \ell(P)$, where P contains (v, v') . Finally, let i be the minimum index such that $u = u_f(P)$ sees $(v_i, v_{i+1}), \dots, (v_{t-1}, v_t), (v_t, v_0)$. Then, we use three new pages p'_1, p'_2 and p'_3 as follows.*

- (i) *If $v = v_i$ and $v' = v_{(i+1) \bmod t}$, then edge e' is placed on a new page p'_j if and only if forward edges incident to block $B(v')$ are assigned to page p_j , $j = 2, 3$.*
- (ii) *If $v = v_0$ and $v' = v_t$, then edge e' is placed on a page p'_1 .*

Proof.

- (i) We prove that if the forward edges incident to $B(v')$ are on p_j , then e' can also be on p_j . If this is true, the lemma follows, as one can always split one page into two. We distinguish two cases based on whether $v = v_t$ (i.e., $i = t$) or $v = v_i$ for $i < t$.

First, assume that $v = v_t$ and $v' = v_0$ (refer to $e = (u_2, v_5)$ and $e' = (u_3, v_2)$ in [Figure 4.2a](#)). Let $B = B(v)$ and $B' = B(v')$. It follows that $B = P$ and B' is the

parent-block of B . W.l.o.g. assume that the boundary of B' is on p_2 . We claim that e' can be placed on page p_3 (together with forward edges of B'). To prove it, we show that $e' = (u', v_0)$ and (v_0, v_t) form a strong pair. First, observe that (v_0, v_t) is on page p_3 . Indeed, B' is on page p_2 . So, B is on p_3 and (v_0, v_t) is an edge of B . By [Lemma 2.9\(iii\)](#), vertices v_1, v_2, \dots, v_t and u' appear in the same order from left to right along the spine, so (v_0, v_t) is nested by e' . If v_t and u' are consecutive along the spine, then e' and (v_0, v_t) clearly form a strong pair. Otherwise, (u, u') is a chord and by [Lemma 2.10\(iii\)](#), again e' and (v_0, v_t) form a strong pair.

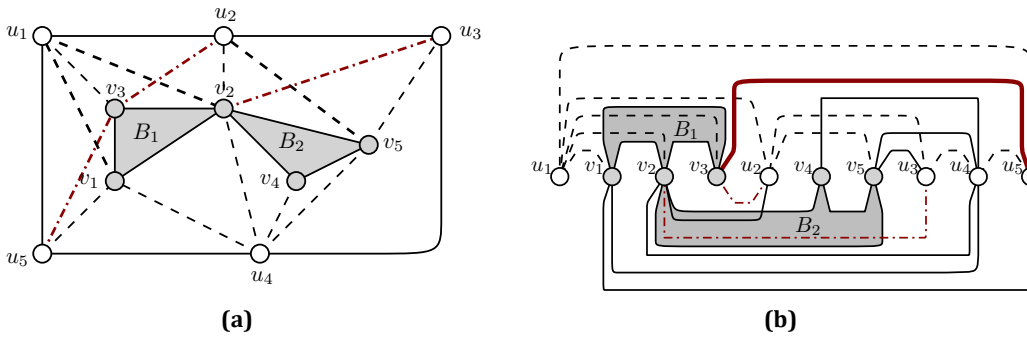


Figure 4.2: (a) Red edges indicate forward edges involved in crossings. (b) Linear order and assignment of edges to pages. The fat edge is assigned to p'_1 . The dashed-dotted ones to p'_2 and p'_3 .

In the case where $v = v_i$ and $v' = v_{i+1}$ for some $i < t$ (refer to $e = (u_1, v_2)$ and $e' = (u_2, v_3)$ in [Figure 4.2a](#)), we have that $B = B' = P$. Suppose w.l.o.g. that P is on p_2 . We claim that $e' = (u', v_{i+1})$ and (u', v_i) form a strong pair. By [Lemma 2.3](#) and the K_4 -emptiness property, (u', v_i) exists and is forward. So, it is on page p_3 . Since vertices v_i and v_{i+1} are consecutive along the spine, edges e' and (u', v_i) form a strong pair.

- (ii) In this case (refer to $e = (u_1, v_1)$ and $e' = (u_5, v_3)$ in [Figure 4.2a](#)), P is a root-block. Let $e'_1 = (u'_1, v'_1)$ and $e'_2 = (u'_2, v'_2)$ be two edges that are assigned to the new page p'_1 . Since $P_1 = B(v'_1)$ and $P_2 = B(v'_2)$ are both root blocks, it follows that P_1 and P_2 are separated by a chord of L_0 . So, by [Lemma 2.10](#), e'_1 is not in conflict with e'_2 .

□

Finally, we consider Case C.6 where $e' = (x, y)$ is a 2-hop of level L_1 and $e = (u, z)$ is a binding edge of G_P , where $x, y, z \in L_1$ and $u \in L_0$. Let x, z and y be assigned to blocks B_x, B_z and B_y , respectively, that are not necessarily distinct. By [Lemma 2.3](#) and the K_4 -emptiness property, $x \rightarrow z \rightarrow y$ is a path in L_1 . So, B_x and B_y are at distance

at most two on the block tree of G . If x and y are assigned to the same block (that is, $B_x = B_z = B_y$), then e is called simple 2-hop (see Figure 4.3a). Suppose w.l.o.g. that B_x precedes B_y in the pre-order traversal of the block tree of G . Then, there exist two cases depending on whether B_x is an ancestor of B_y on the block tree. If this is not the case, then B_x and B_y have the same parent-block, say B_p . In this case, e' is called bridging 2-hop (see Figure 4.3b). Suppose now that B_x is an ancestor of B_y . Then, the path $x \rightarrow z \rightarrow y$ contains the leader of B_y , which is either x or z . By Lemma 2.3 and the K_4 -emptiness property, (u, x) , (u, z) and (u, y) exist in G . So, u is either $u_l(B_y)$ or $u_f(B_y)$. In the first subcase, e' is called forward 2-hop (see Figure 4.3c). In the second subcase, since B_x is ancestor of B_y and the two blocks are at distance at most two, if B_x is the parent-block of B_y , then e' is called backward 2-hop (see Figure 4.3d). Finally, if B_x is the grand-parent-block of B_y , then e' is called long 2-hop (see Figure 4.3e).

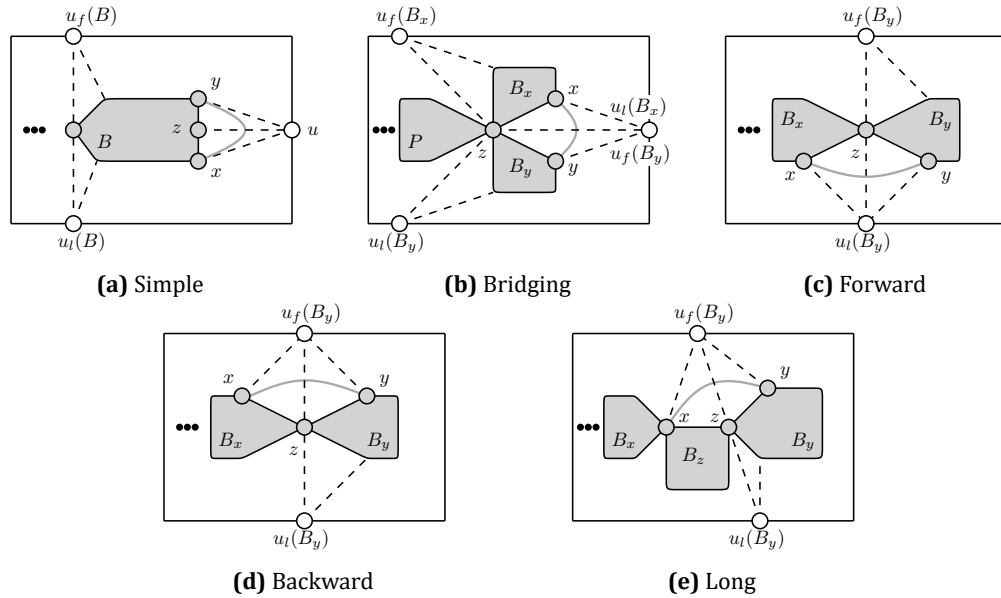


Figure 4.3: Different types of 2-hops (drawn in gray).

Lemma 4.5 (Case C.6). *All crossing 2-hops can be assigned to seven pages in total.*

Proof. By Lemma 4.6 all simple 2-hops can be embedded in any page that contains 2-hops. All bridging 2-hops can be embedded in two new pages (see Lemma 4.8). Forward 2-hops can be embedded in one new page (see Lemma 4.11). Finally, backward and long 2-hops can be embedded in two new pages each (see Lemma 4.13 and 4.15, respectively). Summing up the above yields a total of seven pages for all 2-hops. \square

In the following we treat each type of 2-hops separately.

Simple 2-hops:

Lemma 4.6. *Let edges e and e' of G cross such that e is a binding edge of G_P and e' a simple 2-hop of G . Then, if e' is placed on the same page as any other 2-hop e'' , then e' and e'' do not cross.*

Proof. Let $e' = (x, y)$ where $x, y \in L_1$ and $e = (u, z)$, where u is a vertex of L_0 and z a vertex of L_1 . By definition of simple 2-hops, vertices x, z and y belong to the same block B . Then, for the leader $\ell(B)$ of B , it holds that $\ell(B) \notin \{x, z, y\}$. By [Lemma 2.9\(iii\)](#), vertices x, z and y are consecutive along the spine and appear in this order from left to right. If $e' = (x, y)$ is placed on a page p_h and crosses with another 2-hop e'' on p_h , then e'' has z as one endpoint. Hence, e' and e'' would cross in the 1-planar embedding of G , a contradiction. \square

Bridging 2-hops: Recall that, by definition, if $e' = (x, y)$ is a bridging 2-hop, then B_x and B_y are at distance two, and they have the same parent-block B_P and a common leader, say ℓ . Since ℓ is a cut-vertex of L_1 , which separates blocks B_x and B_y , any $x - y$ path on L_1 must go through ℓ . Hence, for the path $x \rightarrow z \rightarrow y$, we have that $z = \ell$. Also, from the assumption that B_x precedes B_y along the spine and by [Lemma 2.3](#) and the K_4 -emptiness property, it follows that $u = u_l(B_x) = u_f(B_y)$.

Lemma 4.7. *Let B be a block of G with children-blocks B_1, B_2, \dots, B_s , where for any $i < j$ all vertices of B_i appear before all vertices of B_j along the spine. Then: (i) there is at most one bridging 2-hop of G with one endpoint on B_1 , (ii) there are at most two bridging 2-hops of G with one endpoint on B_i for $i = 2, \dots, s - 1$ and (iii) there is at most one bridging 2-hop of G with one endpoint on B_s .*

Proof. By definition, if $e' = (x, y)$ is bridging 2-hop, then B_x and B_y have the same parent-block B_P and the same leader, say ℓ . Therefore, if e' has one endpoint on one of the children-blocks B_i of B , then its other endpoint is also on another child-block B_j of B ($i \neq j$). By [Lemma 2.9\(ii\)](#), if $|j - i| > 1$, i.e. B_i and B_j are not consecutive child-blocks of B , then e' would cross with edges $(\ell, u_l(B_i)), (\ell, u_l(B_{i+1})), \dots, (\ell, u_l(B_{j-1}))$, i.e., with at least two edges of G , contradicting 1-planarity of G . So, $j = i - 1$ or $j = i + 1$ and the lemma follows. \square

Lemma 4.8. *All bridging 2-hops of G can be placed on two new pages without crossings.*

Proof. Let $e'_1 = (x_1, y_1)$ and $e'_2 = (x_2, y_2)$ be two bridging 2-hops of G . W.l.o.g. assume that x_1, x_2, y_1, y_2 appear in this order along the spine from left to right, i.e., edges e'_1 and e'_2 cannot be placed on the same page. Since x_2 appears after vertex x_1 , by [Lemma 2.8](#),

x_2 is either a vertex of B_{x_1} with greater index than x_1 , or its block B_{x_2} appears after block B_{x_1} . Similarly, since x_2 appears before y_1 on the spine, by the same lemma, x_2 is either a vertex of B_{y_1} with smaller index than y_1 , or its block B_{x_2} appears before block B_{y_1} . By the definition of bridging 2-hops, B_{x_1} and B_{y_1} are consecutive children-blocks of a block B with the same leader. Hence, the only blocks that are between B_{x_1} and B_{y_1} on the spine are descendant-blocks of B_{x_1} on the block-tree. Combining the above restrictions, we distinguish three cases for B_{x_2} : (c.1) $B_{x_2} = B_{x_1}$ and x_2 appears after x_1 , (c.2) B_{x_2} is a descendant of B_{x_1} , and (c.3) $B_{x_2} = B_{y_1}$ and x_2 appears before y_1 .

In the first and third case, edges e'_1 and e'_2 are bridging 2-hops with one endpoint on the same block. In the second case, again by definition, B_{y_2} is also a descendant-block of B_{x_1} (since B_{x_2} and B_{y_2} have the same parent-block). Then, B_{y_2} appears before B_{y_1} on the ordering of blocks, a contradiction. Hence, if two bridging 2-hops e'_1 and e'_2 cannot be placed on the same page, then they have an endpoint on the same block.

Consider now an auxiliary graph where vertices are bridging 2-hops of G and an edge exists if the bridging 2-hops corresponding to its endpoints cannot be placed on the same page, i.e., if the two bridging 2-hops have an endpoint on the same block in G . By [Lemma 4.7](#), it follows that the auxiliary graph consists of disjoint paths and is therefore bipartite. We assign bridging 2-hops that correspond to vertices of the first (second, respectively) bipartition in the auxiliary graph to first (second, respectively) page of the two available ones. It is clear that bridging 2-hops on the same page do not cross, concluding the proof of the lemma. \square

Forward 2-hops: Recall that, by definition, if $e' = (x, y)$ is a forward 2-hop, then B_x is an ancestor of B_y and vertex u is $u_i(B_y)$. Also, since $x \rightarrow z \rightarrow y$ is a path of G and x, y belong to different blocks, it follows that the index of y on B_y is either 1 or 2.

Lemma 4.9. *Let v_1 and v_2 be two vertices of L_1 such that v_1 appears before v_2 on the spine. Let v be the last common vertex of trails $tr(v_1)$ and $tr(v_2)$. Then, all vertices of $tr(v_1)$ after v precede vertices of $tr(v_2)$ after v .*

Proof. Let $B_1 = B(v_1)$, $B_2 = B(v_2)$ and $B = B(v)$. Since v is the last common vertex of $tr(v_1)$ and $tr(v_2)$, it follows that B is the last common ancestor of B_1 and B_2 on the block-tree. Then, on the ordering of blocks, all blocks on the path defined from B to B_1 appear before all blocks on the path from B to B_2 . Hence, $tr(v_1)$ and $tr(v_2)$ are identical up to vertex v and vertices of $tr(v_1)$ after v precede vertices of $tr(v_2)$ after v . \square

Lemma 4.10. *Let $e' = (x, y)$ be a forward 2-hop. Then, $tr(y) = tr(x) \rightarrow z \rightarrow y$.*

Proof. It suffices to prove that x, z, y appear in this order from left to right along the spine. Since y is either the first or second vertex of B_y , either $z = \ell(B_y)$ or z is the first vertex of B_y respectively. In both cases, the desired property holds. \square

Lemma 4.11. *All forward 2-hops of G can be placed on a new page without crossings.*

Proof. Let $e'_1 = (x_1, y_1)$ and $e'_2 = (x_2, y_2)$ be two forward 2-hops of G . W.l.o.g. assume that x_1, x_2, y_1, y_2 appear in this order along the spine from left to right, i.e., edges e'_1 and e'_2 cannot be placed on the same page. Consider the trails of y_1 and y_2 . By Lemma 4.10, $tr(y_1) = tr(x_1) \rightarrow z_1 \rightarrow y_1$ and $tr(y_2) = tr(x_2) \rightarrow z_2 \rightarrow y_2$. Let v_x be the last common vertex of the trails $tr(x_1)$ and $tr(x_2)$ and v_y the last common vertex of the trails $tr(y_1)$ and $tr(y_2)$. By Lemma 4.9, if v_x is not x_1 , then all three vertices x_1, z_1 and y_1 will appear before x_2, z_2 and y_2 (as in this case we would have $v_x = v_y$), a contradiction. Hence, $v_x = x_1$ and $v_y \in \{x_1, z_1, y_1\}$. Similarly, let v be the last common vertex of the trails $tr(x_2)$ and $tr(y_1)$. By Lemma 4.9, if v is not x_2 , then all three vertices x_2, z_2 and y_2 will appear before y_1 (as in this case we would have $v = v_y$), a contradiction. Hence $v = x_2$ and $v_y \in \{x_2, z_2, y_2\}$. From the above, it follows that $v_y \in \{x_1, z_1, y_1\}$ and $v_y \in \{x_2, z_2, y_2\}$. By the order of the vertices along the spine, it follows that $v_y \notin \{x_1, y_2\}$. If $v_y = z_1$, then $v_y = x_2$ also (otherwise, if $v_y = z_2$ vertex x_2 would also be on the common part of the trails, and inevitably it would be $x_2 = x_1$, a contradiction). On the other hand, if $v_y = y_1$, then $v_y = z_2$ and $z_1 = x_2$ (since they are the unique vertex on the trail before v_y). In both cases, the K_4 -emptiness property is violated. \square

Backward 2-hops: By definition, if $e' = (x, y)$ is a backward 2-hop, then vertex $u = u_f(B_y)$ and B_x is the parent-block of B_y and y is either the last or the second-to-last vertex of B_y .

Lemma 4.12. *If $e' = (x_1, y_1)$ and $e'' = (x_2, y_2)$ are two backward 2-hops, then $B_{y_1} \neq B_{y_2}$.*

Proof. For a backward 2-hop $e' = (x, y)$ we say that the last edge of B_y is covered by edge e' . By Lemma 2.3 and the K_4 -emptiness property, the last edge of B_y can be covered by at most one backward 2-hop. So, $B_{y_1} \neq B_{y_2}$ holds for e'_1 and e'_2 . \square

Lemma 4.13. *All backward 2-hops of G can be placed on two new pages without crossings.*

Proof. Let $e'_1 = (x_1, y_1)$ and $e'_2 = (x_2, y_2)$ be two backward 2-hops of G . By Lemma 4.12, $B_{y_1} \neq B_{y_2}$. W.l.o.g. assume that x_1, x_2, y_1, y_2 appear in this order along the spine from left to right, i.e., edges e'_1 and e'_2 cannot be placed on the same page. Since x_2 appears after vertex x_1 , by Lemma 2.8, x_2 is either a vertex of B_{x_1} with greater index than x_1 , or its block B_{x_2} appears after block B_{x_1} . Similarly, since x_2 appears before y_1 on the spine, by the same lemma, x_2 is either a vertex of B_{y_1} with smaller index than y_1 , or its block B_{x_2} appears before block B_{y_1} . Combining the above restrictions, we distinguish

three cases for B_{x_2} : (c.1) $B_{x_2} = B_{x_1}$ and x_2 appears after x_1 , (c.2) B_{x_2} is a descendant of B_{x_1} that appears before B_{y_1} , and (c.3) $B_{x_2} = B_{y_1}$ and x_2 appears before y_1 .

In the first two cases, since B_{y_2} is child-block of B_{x_2} , B_{y_2} will appear before B_{y_1} and y_2 will be to the left of y_1 , a contradiction. Hence, if two backward 2-hops e'_1 and e'_2 cannot be placed on the same page, then $B_{x_2} = B_{y_1}$.

We say that a backward 2-hop $e' = (x, y)$ is charged to block B_x (i.e., to the parent-block). Then, whenever e'_1 and e'_2 cannot be placed on the same page, we have that they are charged to blocks of consecutive levels on the block-tree. Then, we can place backward 2-hops that are charged on blocks of odd level on one of the two new available pages and those charged on blocks of even level on the other available page. It is clear that backward 2-hops on the same page do not cross, concluding the proof of the lemma. \square

Long 2-hops: By definition, if $e' = (x, y)$ is a long 2-hop, then $u = u_f(B_y) = u_f(B_z)$, B_y is the first child-block of B_z and B_z is a child-block of B_x .

Lemma 4.14. *Let $e' = (x, y)$ be a long 2-hop of G . We say that B_z is the middle block of e' , and B_y the ending block of e' . Then, a block B can be middle (ending) block of at most one long 2-hop e' . Also, B cannot be middle block of a long 2-hop e' and ending block of another long 2-hop e'' at the same time.*

Proof. The proof is similar to the one of [Lemma 4.12](#). We say that the last edge of a block B is covered by a long 2-hop $e' = (x, y)$, if B is the middle or ending block of e' . By [Lemma 2.3](#) and the K_4 -emptiness property, the last edge of B can be covered by at most one long 2-hop, and the lemma follows. \square

Lemma 4.15. *All long 2-hops of G can be placed on two new pages without crossings.*

Proof. Let $e'_1 = (x_1, y_1)$ and $e'_2 = (x_2, y_2)$ be two long 2-hops of G . W.l.o.g. assume that x_1, x_2, y_1, y_2 appear in this order along the spine from left to right, i.e., edges e'_1 and e'_2 cannot be placed on the same page. Since x_2 appears after vertex x_1 , by [Lemma 2.8](#), we have that x_2 is either a vertex of B_{x_1} with greater index than x_1 , or its block B_{x_2} appears after block B_{x_1} . Similarly, since x_2 appears before y_1 on the spine, by the same lemma, we have that x_2 is either a vertex of B_{y_1} with smaller index than y_1 , or its block B_{x_2} appears before block B_{y_1} . Combining the above restrictions and the fact that B_{y_1} is the first child-block of B_{z_1} , we distinguish four cases for B_{x_2} : (c.1) $B_{x_2} = B_{x_1}$ and x_2 appears after x_1 , (c.2) B_{x_2} is a descendant of B_{x_1} before B_{z_1} , (c.3) $B_{x_2} = B_{z_1}$, and (c.4) $B_{x_2} = B_{y_1}$ and x_2 appears before y_1 .

In the first two cases, since B_{y_2} is grand-child-block of B_{x_2} , B_{y_2} will appear before B_{y_1} and y_2 will be to the left of y_1 , a contradiction. Hence, if two long 2-hops e'_1 and e'_2

cannot be placed on the same page, then $B_{x_2} = B_{y_1}$ or $B_{x_2} = B_{z_1}$. We say that a long 2-hop e'_1 is indirectly in conflict with e'_2 if $B_{x_2} = B_{y_1}$ and directly in conflict with e'_2 if $B_{x_2} = B_{z_1}$. Note that [Lemma 4.14](#) in terms of conflicts means that a long 2-hop cannot be simultaneously indirectly and directly in conflict with other 2-hops. In the following, we use induction on the number of blocks to show that two pages are sufficient.

Start with block B_1 , the root-block of the block-tree. Long 2-hop edges $e' = (x, y)$ with $B_x = B_1$ are not in conflict with each other and can, therefore, be placed on the same page. Suppose that we have placed all long 2-hop edges $e' = (x, y)$ with $B_x \leq B_s$ on two pages, say p^1 and p^2 .

Let $e' = (x, y)$ with $B_x = B_{s+1}$ be a long 2-hop. We claim that it can be placed on one of the two pages without introducing any crossings. We have that e' is indirectly in conflict with a long 2-hop $e'_1 = (x_1, y_1)$, if $B_x = B_{y_1}$ and directly in conflict with a long 2-hop $e'_2 = (x_2, y_2)$, if $B_x = B_{z_2}$. By [Lemma 4.14](#), e' cannot be simultaneously indirectly and directly in conflict with other long 2-hops. So, assume first that e' is only indirectly in conflict with other long 2-hops of G . As already stated, if e' is indirectly in conflict with $e'_1 = (x_1, y_1)$, then $B_x = B_{y_1}$. Then, B_{z_1} is the parent-block of B_x and B_{x_1} the grand-parent-block of B_x . These blocks are uniquely defined and e'_1 is the only long 2-hop that e' is indirectly in conflict with. Clearly, if e'_1 is on page p^i , then e' can go on the other page p^j , where $i \neq j$. In the case where e' is only directly in conflict with other long 2-hops of G , we have that if $e'_2 = (x_2, y_2)$ is such an edge, then $B_x = B_{z_2}$. By [Lemma 4.14](#), B_x can be middle block of at most one long 2-hop, that is, e'_2 is the only long 2-hop that e' is directly in conflict with. So, if e'_2 is on page p^i , then e' can go on the other page p^j , where $i \neq j$. By induction, it follows that all long 2-hop edges of G can be placed on two new pages. \square

4.2 The Multi-Level Case

We now consider the more general case according to which the given 1-planar graph G consists of more than two levels, say $L_0, L_1, \dots, L_\lambda$, $\lambda \geq 2$.

Lemma 4.16. *Any simple internally-maximal 1-planar graph G with $\lambda \geq 2$ levels, that satisfies the K_4 -emptiness property and has no crossings at its unbounded face admits a book embedding on 3λ pages.*

Proof. We first embed in 5 pages the underlying planar structure G_P of G using the algorithm of Yannakakis (see [Section 2.2.1](#)). This implies that all vertices of a block of level i , except possibly for its leader, are between two consecutive vertices of level $i - 1$, $i = 1, \dots, \lambda$. So, for outer crossing chords that are involved in crossings with level edges of G_P (Case C.1), one universal page (denoted by up_c in [Lemma 4.2\(i\)](#)) suffices, since such chords are not incident to block-leaders.

Next, we consider the outer crossing chords that are involved in crossings with binding edges or bridge-blocks of G (Cases C.2 and C.3). Such a chord $c_{i,j} = (v_i, v_j)$ of a block B is on the same page as the boundary and the non-crossing chords of B . The path $P[v_i \rightarrow v_j]$ on the boundary of B joins the endpoints of the crossing chord. Hence, if another edge of the same page crosses with $c_{i,j}$, then it must also cross with an edge of B , a contradiction. Therefore, such chords do not require additional pages.

For binding edges of Case C.4, 5 pages in total suffice (one page for each page of G_P). For binding edges of Case C.5, we argue differently. Since a binding edge between levels L_{i+2} and L_{i+1} cannot cross with a binding edge between levels L_{i-1} and L_{i-2} , $i = 2, \dots, \lambda - 2$, it follows that binding edges that bridge pairs of levels at distance at least 3 are independent. So, for binding edges of Case C.5 we need a total of 9 pages.

Similarly, all blocks of level $i + 1$ that are in the interior of a certain block of level i are always between two consecutive vertices of level $i - 1$, $i = 1, 2, \dots, \lambda - 1$. Hence, 2-hops that are by at least two levels apart in the peeling order are independent, which implies that for 2-hops we need a total of $2 * 7 = 14$ pages (Case C.6). Summing up we need $5 + 1 + 5 + 9 + 14 = 34$ pages for G . \square

4.3 Coping with Multiedges

At the beginning of the algorithm, one must augment the input 1-planar graph, in order to guarantee the K_4 -emptiness property. The augmentation, however, may introduce multiedges. On the positive side, we can assume that all multiedges are crossing-free. Indeed, if a multiedge contains an edge that is involved in a crossing, then this particular edge can be safely removed from the graph, as it can be “replaced” by any of the corresponding crossing-free ones.

Let (v, w) be a double edge of G . Denote by $G_{in}[(v, w)]$ the so-called interior subgraph of G with respect to (v, w) that is bounded by the double edge (v, w) in $\Gamma(G)$. By $G_{ext}[(v, w)]$ we denote the so-called exterior subgraph of G with respect to (v, w) derived from G by substituting $G_{in}[(v, w)]$ by a single edge (see [Figure 4.4](#)). Clearly, $G_{ext}[(v, w)]$ stays internally-maximal 1-planar, satisfies the K_4 -emptiness property, has no crossings at its unbounded face and simultaneously has fewer multiedges than G . So, it can be recursively embedded. The base of the recursion is a graph that can be embedded based on [Lemma 4.16](#).

On the other hand, we cannot assure that the interior subgraph has fewer multiedges than G . Our aim is to modify it appropriately, so as to reduce the number of its multiedges by one. To do so, we will “remove” the multiedge (v, w) that defines the boundary of $G_{in}[(v, w)]$, so as to be able to recursively embed it (again we seek to employ [Lemma 4.16](#) in the base of the recursion). Let $e_i(v)$ ($e_i(w)$, respectively) be the

i -th edge incident to vertex v (w , respectively) in clockwise direction and between the two edges that form the double edge (v, w) . We replace vertex v (w , respectively) by a path of $d(v)$ ($d(w)$, respectively) vertices, say $v_1, v_2, \dots, v_{d(v)}$ ($w_1, w_2, \dots, w_{d(w)}$, respectively), such that vertex v_i (w_i , respectively) is the endpoint of edge $e_i(v)$ ($e_i(w)$, respectively). Let $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ be the implied graph. Since $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ has no new crossings, it can be augmented to internally-maximal 1-planar, that satisfies the K_4 -emptiness property, has no crossings at its unbounded face and has fewer multiedges than $G_{in}[(v, w)]$. So, $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ can be embedded recursively.

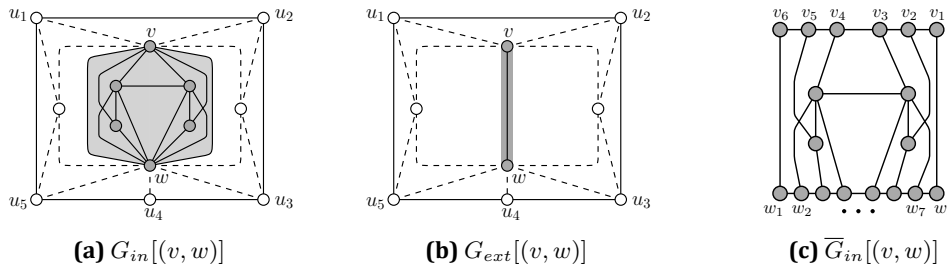


Figure 4.4: Illustration of the decomposition in case of multiedges.

We now describe how to plug the embedding of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ in the one of $G_{ext}[(v, w)]$. Suppose that (v, w) of $G_{ext}[(v, w)]$ is on page p . Clearly, p is one of the pages used to embed the planar structure of $G_{ext}[(v, w)]$, since (v, w) is not involved in crossings in $G_{ext}[(v, w)]$. Let the boundary of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ be also on page p . Since (v, w) is present in the embedding of $G_{ext}[(v, w)]$, it suffices to plug in the embedding of $G_{ext}[(v, w)]$ only the interior of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$, which is the same as the one of $G_{in}[(v, w)]$. Suppose w.l.o.g. that in the embedding of $G_{ext}[(v, w)]$ v appears before w . Then, we place the interior subgraph of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ to the right of v . The edges connecting the interior of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ with v (w , respectively) are assigned to page p (a new page p' which is in correspondence to p , respectively). In this way, we create 5 new pages.

Next, we prove that no crossings are introduced. Since the boundary of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ is on page p , all edges incident to v towards $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ become back edges of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$. So, edges that join v with vertices in the interior of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ do not cross with other edges in the interior of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$. Since $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ is placed next to v , edges incident to v do not cross edges of $G_{ext}[(v, w)]$ on page p . Similarly, we argue that edges incident to w towards the interior of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ do not cross other edges in the interior of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ on page p' . It remains to prove that edges incident to w do not cross edges of $G_{ext}[(v, w)]$ on page p' . Such a crossing can only be in the presence of another double-edge (v', w') also of page p in $G_{ext}[(v, w)]$. Say w.l.o.g. that v' is to the left of w' (recall that v is to the left of w). First, consider the case where $v \neq v'$. If a conflict occurs because of $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ and $\overline{G}_{in}[(v', w')]$, then (v, w) and (v', w') , which belong to the

planar structure, must cross. If on the other hand $v = v'$ (and w.l.o.g. w to the left of w'), it suffices to place $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ before $\overline{G}_{in}[(v', w')]$.

4.4 Coping with Crossings on the Graph's Unbounded Face

If there exist crossings incident to the unbounded face of G , then, when we augment G in order to ensure the K_4 -emptiness property, we must also triangulate the unbounded face of the planarized graph implied by replacing all crossings of G with crossing vertices (recall the first step of our algorithm). This procedure may lead to a situation where the unbounded face is a double edge, say (v, w) . In this case, $G_{ext}[(v, w)]$ consists of two vertices and a single edge between them. $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ is treated as described above. So, we are now ready to state the main result of this chapter.

Theorem 4.2. *Any 1-planar graph admits a book embedding in a book of 39 pages.*

5 AVDT of Generalized Halin Graphs with Maximum Degree 3

In this chapter we examine the Adjacent Vertex Distinguishing Total chromatic number of generalized Halin graphs with maximum degree 3. Chen and Zhang [CZ08] proved that if G is a generalized Halin graph with $\Delta(G) \geq 6$ and no two adjacent vertices of maximum degree, then its AVDT chromatic number equals $\Delta(G) + 1$, and if G has adjacent vertices of maximum degree, for $\Delta(G) \geq 5$, it is $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$. The same bounds hold for planar graphs with $\Delta(G) \geq 14$ [WH14]. These results leave open the cases of graphs with small maximum degree. The main theorem of this chapter states that $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$ for generalized Halin graphs with $\Delta(G) = 3$. This strengthens both previously mentioned results. Also, it is a step towards a positive answer to the question of whether 5 colors suffice for the AVDT coloring of graphs with $\Delta(G) = 3$ posed by Hulan [Hul09]. Recall that by definition a planar graph G is generalized Halin graph if it can be drawn on the plane without crossings such that its outerface f_0 has only vertices of degree 3 and after removing all edges of f_0 the remaining subgraph of G is a tree T ; see Figure 5.1a for an example. We say that T is the backbone of G . Under the requirement that G has maximum degree 3 it follows that the backbone T of G has inner vertices (i.e. vertices that are not leaves) of degree 2 or 3. The main theorem of this chapter is the following:

Theorem 5.1. *Let G be a generalized Halin graph with maximum degree 3. Then the AVDT chromatic number of G is $\chi_a''(G) = 5$.*

Note that all vertices of f_0 have degree 3 and by Lemma 2.5 $\chi_a''(G) \geq 5$. Therefore Theorem 5.1 is optimal.

Consider now a tree T of maximum degree 3. We construct another tree T_C from T as follows: Let $P = u_0, u_1, \dots, u_s, u_{s+1}$ be a path in T of length $s + 1$, where $s \geq 2$, such that all vertices of P have degree 2 except for its endpoints u_0 and u_{s+1} that may have degree 1 or 3. We contract P to a shorter path of length 1 or 2 depending on the parity of s . In particular, if $s \equiv 0 \pmod{2}$ we replace P by the edge (u_0, u_{s+1}) , and if $s \equiv 1 \pmod{2}$ we replace P by the path $P_C = u_0, u', u_{s+1}$. We apply the above contracting operation for every such path P of T , and say that the produced tree T_C is the contracted tree of T (see Figure 5.1b). It is not hard to see that T_C is uniquely derived from T (while it can be the case that two different trees T_1 and T_2 have the same contracted tree T_C),

T is a subdivision of T_C and that T_C has the same number of leaves as T and the same number of vertices of degree 3. Furthermore, if there is a vertex v with $d_{T_C}(v) = 2$ then both neighbors of v in T_C have degree 1 or 3. If T_C is the same tree as T we say that T satisfies the contraction property.

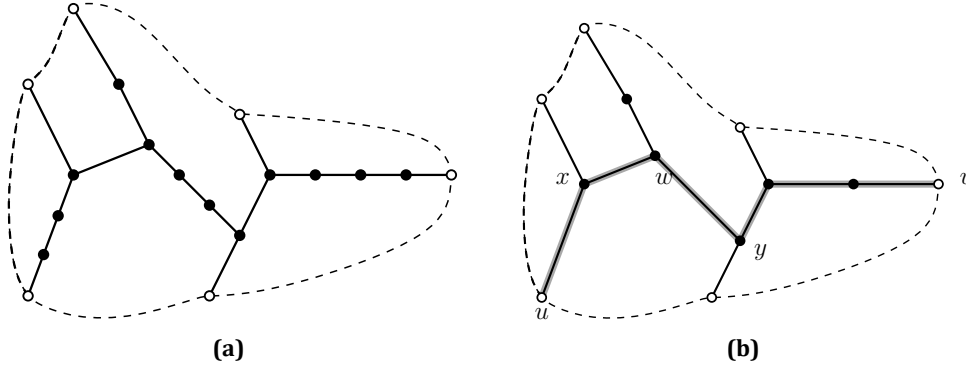


Figure 5.1: (a) A generalized Halin graph G of $\Delta = 3$ with backbone T that does not satisfy the contraction property. (b) G_C has as backbone the contracted tree T_C of T with diameter $\text{diam}(T_C) = 6$.

Our purpose is to prove [Theorem 5.1](#) firstly for trees that satisfy the contraction property and then expand it to all trees and therefore to all generalized Halin graphs with maximum degree 3. So, in the following let T be a tree that satisfies the contraction property and let G be the generalized Halin graph of $\Delta(G) = 3$ with T as its backbone. For our proof we will use induction on the number of vertices of T . The base of the induction will correspond to generalized Halin graphs whose backbone has at most six vertices, and are described in the following cases:

- If T has three vertices, then T is isomorphic to the path P_3 (see [Figure 5.2a](#)).
- If T has four vertices, then T is isomorphic to the star $K_{1,3}$ (see [Figure 5.2b](#)).
- If T has five vertices, then T is isomorphic to the tree of [Figure 5.2c](#).
- If T has six vertices, then T is isomorphic to the tree of [Figure 5.2d](#) or the one of [Figure 5.2e](#).

Note that the trees of [Figures 5.2a-5.2b](#) ([Figures 5.2c-5.2d](#)) are the only trees with $\Delta = 3$ that satisfy the contraction property and have diameter 2 (3 respectively). For a tree T that satisfies the contraction property and has more than 6 vertices, let u and v be two peripheral vertices of T , i.e. such that $d(u, v) = \text{diam}(T)$. It is clear that both u and v are leaves of T and that the path P_{uv} connecting u and v in T is unique. If T has more than 6 vertices, then let w be the vertex of P_{uv} with $d(u, w) = 2$ and y the vertex of P_{uv} with $d(u, y) = 3$. Note that in this case $\text{diam}(T) \geq 4$. Hence, vertices u, w and y are distinct. We distinguish two cases depending on whether w has degree 2 or 3 in T .

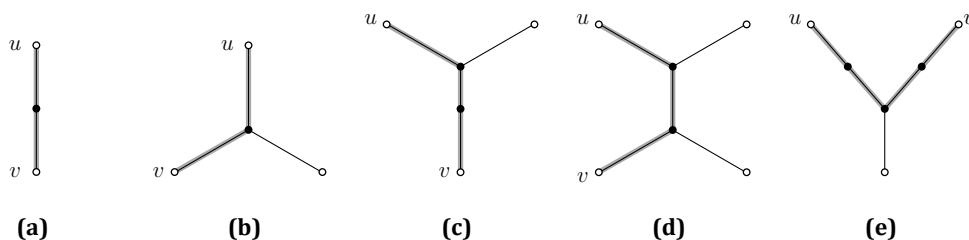


Figure 5.2: Different trees that satisfy the contraction property with (a) three, (b) four, (c) five and (d)-(e) six vertices. Leaves of T are white vertices and the path P_{uv} is gray shaded.

- if $d(w) = 2$, the contraction property gives that the degree of the neighbors of w is either 1 or 3. In this case it should be always 3 since w has distance 2 from u , which is a leaf, and since T has diameter at least 4. Let x be the neighbor of w with $d(u, x) = 1$. Since u is a peripheral vertex of T the third neighbor of x (that is not on P_{uv}) is a leaf of T (see [Figure 5.3a](#)).
- if $d(w) = 3$, then we have a total of 6 different cases that are shown in [Figures 5.3b-5.3g](#). These cases correspond to all rooted trees where the root w has two children, the height of the tree is 2 and the maximum degree is 3.

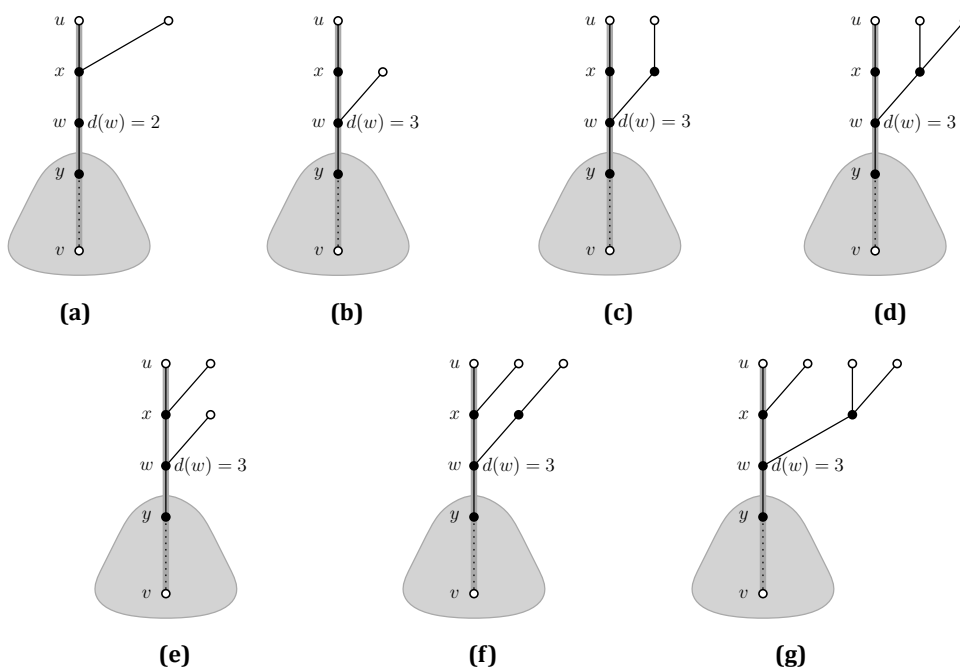


Figure 5.3: Trees that satisfy the contraction property with $diam(T) \geq 4$: (a) $d(w) = 2$, and (b-g) $d(w) = 3$. Leaves of T are white vertices and the path P_{uv} is gray shaded.

Base Of Induction: The base of our induction is formed by all generalized Halin graphs, whose backbone trees have at most 6 vertices. In Figure 5.4, we illustrate valid AVDT-colorings for these graphs. Note that these graphs are simple, except for the one of Figure 5.4a, which contains a parallel edge. This graph is only required for the induction step, as we will shortly see.

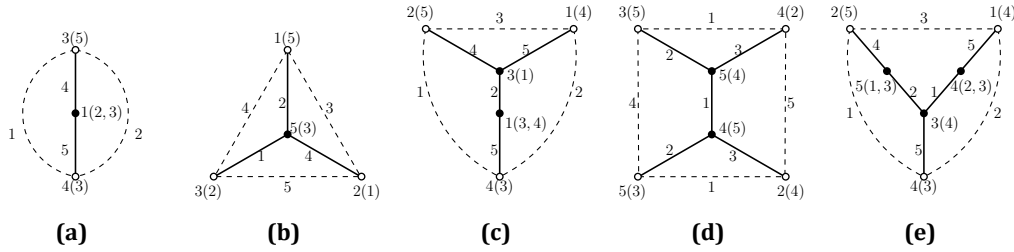


Figure 5.4: AVDT colorings of generalized Halin graphs with backbone the trees of Figure 5.2.

Induction Step: For the inductive step, we will assume that all generalized Halin graphs that (i) are of maximum degree 3, (ii) have $n_0 > 6$ vertices and (iii) whose backbone trees satisfy the contraction property, have AVDT chromatic number 5. We will prove that if the backbone T of a Halin graph G has $n > n_0$ vertices, $\Delta(G) = 3$ (and satisfies the contraction property), then its AVDT chromatic number is also equal to 5. From the above analysis, it follows that T has two peripheral vertices u and v such that $d(u, v) \geq 4$ and T is one of the trees shown in Figure 5.3.

The main idea is that for each one of these cases, we will prune T to a smaller tree T' that satisfies the induction hypothesis. In particular, T' is obtained from T by removing from it the subtree, which is rooted at w and contains u (without, however, removing vertex w ; refer to the parts of T in the dashed drawn regions of Figure 5.3). In this way, T' contains vertex v (but not u) and has w as a leaf (recall that w is at distance 2 from u in T). As a subtree of T , T' satisfies the contraction property and has $n' \geq n - 6$ vertices. Also note that $n' \geq 3$ since $diam(T') \geq diam(T) - 2 \geq 2$. So, by the induction hypothesis, the generalized Halin graph G' with backbone T' has an AVDT-coloring with 5 colors.

Without loss of generality, assume that the produced coloring of T' is the one shown in Figure 5.5, where w_1 and w_2 are the two neighbors of w along the outerface f'_0 of G' . Note that $w_1 = w_2$ may occur, but only in the case where G' is the graph of Figure 5.4b. We have that edges (w, w_1) , (w, w_2) and (w, y) have colors 1, 2 and 3 respectively, while vertex w has color 4. Then, the only color that does not belong to the color set of w is color 5. For simplicity, if a vertex of degree 3 has color p and c is the only color not in its color set, we say that the color of the vertex is $p(c)$. Similarly, if a vertex of degree 2 has color p and c_1, c_2 are the two colors that do not belong to its color set, we say

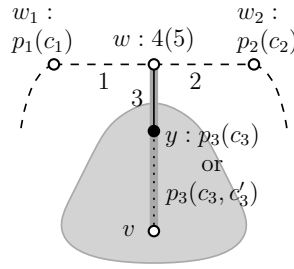


Figure 5.5: AVDT coloring of G' with backbone T' , where T' is the pruned tree T with w as a leaf.

that the color of the vertex is $p(c_1, c_2)$. Following this notation, vertices w_1 and w_2 have colors $p_1(c_1)$ and $p_2(c_2)$, while vertex y has color $p_3(c_3)$, if it has degree 3 or it has color $p_3(c_3, c'_3)$, if it is a vertex of degree 2. By the definition of AVDT-colorings it follows that $p_1, p_2, p_3 \neq 4$ and $c_1, c_2 \neq 5$. If y has degree 3 with color $p_3(c_3)$, then $c_3 \neq 5$ must also hold. From this coloring of G' , we will derive a valid AVDT-coloring for G by examining each of the possible configurations for pruning T shown in [Figure 5.3](#). However, before we do so, we make the following remarks:

- Let z be a vertex of degree 2 with incident edges $e_1 = (z, z_1)$ and $e_2 = (z, z_2)$, where z_1 and z_2 have degree 3 in G by the contraction property. Suppose that edge e_1 has color p'_1 , e_2 color p'_2 , vertex z_1 has color $p_1(c_1)$ and vertex z_2 color $p_2(c_2)$ (where $p'_i \neq p_i, c_i$ for $i = 1, 2$). Then, there are three available colors for vertex z and at least one of them is different from p_1 and p_2 . Also, the color set of z consists of three colors and is different from the color sets of its two neighbors z_1 and z_2 , since they contain four colors. This implies that in order to produce a valid AVDT-coloring for G , it suffices to color all uncolored edges and vertices of degree 3.
- Let z_1 and z_2 be two adjacent vertices of degree three. Suppose that all edges incident to z_1 and z_2 are colored. Then there are two colors available for z_1 , say $\{p_1, p'_1\}$ and two colors for z_2 , say $\{p_2, p'_2\}$. Then, z_i ($i = 1, 2$) can take color $p_i(p'_i)$ or $p'_i(p_i)$. If the two sets are disjoint, i.e., $\{p_1, p'_1\} \cap \{p_2, p'_2\} = \emptyset$, then the coloring of z_1 is independent from the coloring of z_2 in the sense that any coloring distinguishes them.

Assume that T is the tree shown in [Figure 5.3a](#). Since w has degree 2 in T , vertex y has degree 3 by the contraction property and color $p_3(c_3)$. By the coloring of G' we have a partial coloring of G (refer to [Figure 5.6a](#)): it remains to extend it to an AVDT coloring of G by appropriately coloring the uncolored elements of G .

We color edges (u, u') , (u, x) , (u', x) and (x, w) with colors 3, 4, 5 and 1 respectively, and vertex w with color 4(2, 5). For vertex u the only available colors are $\{2, 5\}$, for

vertex x colors $\{2, 3\}$ and for vertex u' colors $\{1, 4\}$ (see Figure 5.6b). Note that $\{1, 4\} \cap \{2, 5\} = \emptyset$ and $\{1, 4\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$, which implies that the coloring of u' is independent from the coloring of its neighbors u and x . So, starting from vertex u' there are two possible colorings $4(1)$ and $1(4)$. Since $p_2 \neq 4$, u' can't be colored as $4(1)$ if and only if $c_2 = 1$. But in this case we can use the second coloring $1(4)$, since $p_2 \neq c_2 = 1$ and $c_2 \neq 4$. Hence u' can always be colored. Now for the other two vertices, there are two possible colorings:

$$\begin{cases} u : 2(5) & \text{and} & x : 3(2) \\ u : 5(2) & \text{and} & x : 2(5) \end{cases}$$

Examining vertex u , the coloring $2(5)$ is not applicable if and only if $p_1 = 2$ (since $c_1 \neq 5$). But in this case, the second coloring $5(2)$ is possible. Hence, in any case the coloring can be extended to a proper AVDTC of G .

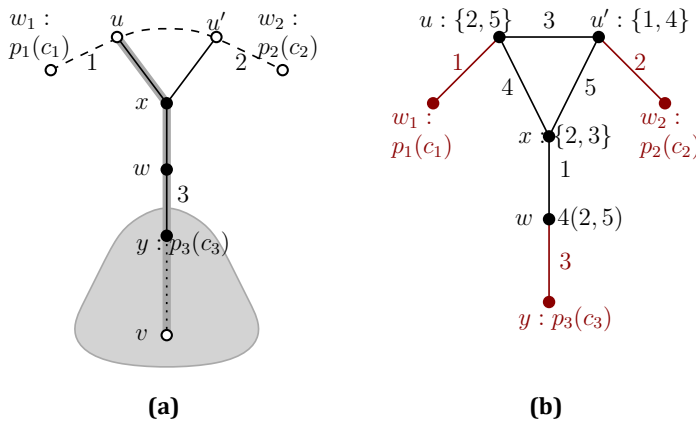


Figure 5.6: G is the generalized Halin graph with backbone T , where T is the tree of Figure 5.3a. (a) The partial coloring of G derived from the AVDT coloring of G' (b) Extension of the coloring of (a). Elements with red color are colored according to G' , available colors for vertices are shown in brackets.

Let now T be the tree of Figure 5.3b. In Figure 5.7a we can see the partial coloring of G produced by the coloring of G' .

We color edges (u, u') , (u, x) , (u', w) and (x, w) with colors 4, 3, 5 and 1 respectively. For vertex u the only available colors are $\{2, 5\}$, for vertex u' colors $\{1, 3\}$, for vertex w colors $\{2, 4\}$ and for vertex x colors $\{1, 4, 5\}$ (see Figure 5.7b). If one considers only vertices of degree 3, the coloring of u depends only on the coloring of w_1 , the coloring of u' on the one of w_2 and the coloring of w on the coloring of y (this is because the sets of available colors of uncolored adjacent vertices are disjoint). So, for vertex u there are two possible colorings $2(5)$ and $5(2)$. Since $c_1 \neq 5$, u can't be colored as $2(5)$ if and only if $p_1 = 2$. But in this case we can use the second coloring $5(2)$. Hence u can

always be colored. The same applies for vertex u' , and w if y has $d(y) = 3$. However if y is of degree 2 with color $p_3(c_3, c'_3)$, then w can always take color $4(2)$, since $p_3 \neq 4$ and the two vertices have different degree and therefore different color sets. The only vertex that remains uncolored is vertex x . Since x has degree 2 it can always be properly colored. In any case the coloring can be extended to a proper AVDTC of G .

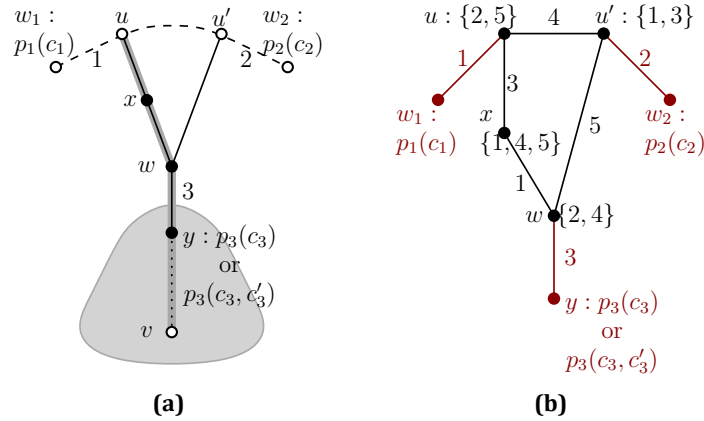


Figure 5.7: G is the generalized Halin graph with backbone T , where T is the tree of Figure 5.3b. (a) The partial coloring of G derived from the AVDT coloring of G' (b) Extension of the coloring of (a).

If T is the tree of Figure 5.3c then the partial coloring of G produced by the coloring of G' is the one shown in Figure 5.8a.

We color all uncolored edges and vertex w as in Figure 5.8b. Considering only vertices of degree 3, the coloring of u depends only on the coloring of w_1 and the coloring of u' on the one of w_2 . So, for vertex u there are two possible colorings $4(2)$ and $2(4)$. Since $p_1 \neq 4$, u can't be colored as $4(2)$ if and only if $c_1 = 2$. But in this case we can use the second coloring $2(4)$. Hence u can always be colored. The same applies for vertex u' . The only vertices that remain uncolored are vertices x and x' of degree 2. But we know that they can always be colored giving a proper AVDTC of G .

For the next case, let T be the tree of Figure 5.3d with corresponding partial coloring of G as in Figure 5.9a.

We color all uncolored edges and vertex u' as in Figure 5.9b. Considering only vertices of degree 3, the coloring of u depends only on the coloring of w_1 and so we can always find a proper coloring for u . For the remaining vertices of degree 3 we have two possible colorings:

$$\begin{cases} w : 1(2), & x'2(3) & \text{and} & u'' : 1(2) \\ w : 2(1), & x'3(2) & \text{and} & u'' : 2(1) \end{cases}$$

Since the coloring of w may be determined by the coloring of vertex y , the coloring of x'

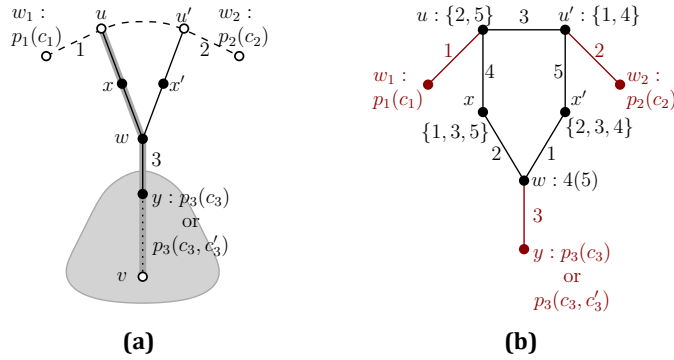


Figure 5.8: G is the generalized Halin graph with backbone T , where T is the tree of Figure 5.3c. (a) The partial coloring of G derived from the AVDT coloring of G' (b) Extension of the coloring of (a).

and u'' is also determined. However, the coloring of x' is independent from the coloring of its third neighbor w_2 and the coloring of u' is also independent from the coloring of w_2 and u . Finally, vertex x has degree 2, hence it can be always properly colored giving a proper AVDTTC of G .

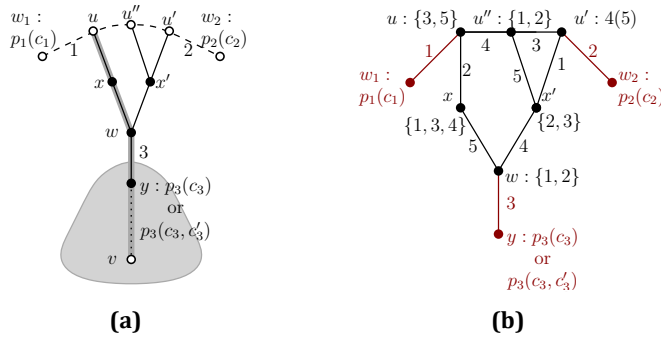


Figure 5.9: G is the generalized Halin graph with backbone T , where T is the tree of Figure 5.3d. (a) The partial coloring of G derived from the AVDT coloring of G' (b) Extension of the coloring of (a).

We continue with the case where T is the tree of Figure 5.3e. In Figure 5.10a we can see the corresponding partial coloring of G .

In Figures 5.10b and 5.10c we can see two colorings of G , where vertex u has color $4(5)$ (recall that $p_1 \neq 4$ and $c_1 \neq 5$):

$$\begin{cases} u' : 4(3) & \text{and} & w : 2(5) \\ u' : 3(5) & \text{and} & w : 4(2) \end{cases}$$

Suppose that none of the above colorings is valid, i.e. u' is not distinguished from w_2 and/or w is not distinguished from y . We consider two cases depending on whether c_2 equals 3 or not.

- $c_2 = 3$: In this case the first coloring is not applicable as u' would have the same color set with w_2 . If on the other hand we use color $3(5)$ for u' , it is distinguished from w_2 since $p_2 \neq 3 = c_2$ and $c_2 \neq 5$. Under the assumption that the second coloring is not valid either, it follows that w is not distinguished from y . For y it is $p_3 \neq 4$, so y is a vertex of degree three with $c_3 = 2$.
- $c_2 \neq 3$: In this case the first coloring distinguishes u' from w_2 (since $p_2 \neq 4$), hence w is not distinguished from y . This can only occur if $p_3 = 2$. But then, the second coloring distinguishes w from y . Hence u' can't be colored as $3(5)$ and therefore $p_2 = 3$.

From the above it follows that the two colorings are not valid if (i) $c_2 = 3$ and y is a degree 3 vertex with $c_3 = 2$, or (ii) $p_2 = 3$ and $p_3 = 2$. For the first case, we use the coloring of [Figure 5.10d](#) and for the second case the one of [Figure 5.10e](#). In all cases, it is possible to produce a proper AVDTC of G , completing the case where T corresponds to the tree of [Figure 5.3e](#).

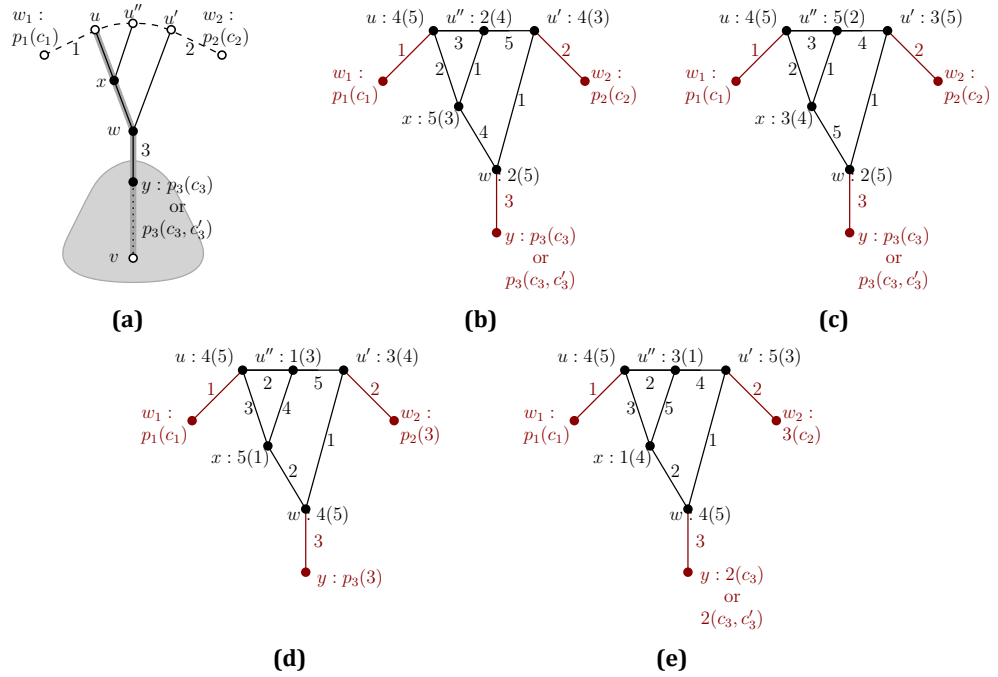


Figure 5.10: G is the generalized Halin graph with backbone T , where T is the tree of [Figure 5.3e](#). (a) The partial coloring of G derived from the AVDT coloring of G' (b-e) Extensions of the coloring of (a).

The case where T is the tree of [Figure 5.3f](#) is symmetric to the case of [Figure 5.3d](#) and is therefore omitted. So, the last case to consider is the one where T is the tree of [Figure 5.3g](#). The corresponding partial coloring of G is shown in [Figure 5.11a](#).

In **Figure 5.11b** we can see a coloring of G where vertices u, u' and w take color 4(5). This is clearly a proper AVDTC of G .

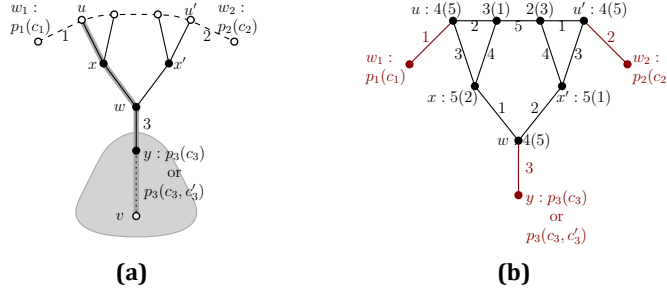


Figure 5.11: G is the generalized Halin graph with backbone T , where T is the tree of **Figure 5.3g**. (a) The partial coloring of G derived from the AVDT coloring of G' (b) Extension of the coloring of (a).

Summarizing all the above, we have proved the following lemma:

Lemma 5.1. *Let G be a generalized Halin graph with maximum degree 3 whose backbone T satisfies the contraction property. Then for the AVDT chromatic number of G it is $\chi''_a(G) = 5$.*

It remains to extend **Lemma 5.1** for generalized Halin graphs G with backbone T that does not satisfy the contraction property. Let T_C be the contracted tree of T and G_C the generalized Halin graph with backbone T_C . Let $P = u_0, u_1, \dots, u_s, u_{s+1}$ be a path in T of length $s + 1$, where $s \geq 2$, such that all vertices of P have degree 2 except for its endpoints u_0 and u_{s+1} that may have degree 1 or 3. We distinguish two cases according to the parity of s .

- $s \equiv 0(mod2)$: in T_C , path P is contracted to a single edge (u_0, u_{s+1}) where vertices u_0 and u_{s+1} have degree 3 in G_C . Suppose that there is an AVDT coloring of G_C with 5 colors. Let p be the color of edge (u_0, u_{s+1}) , $p_1(c_1)$ the color of u_0 and $p_2(c_2)$ the color of u_{s+1} , with $p \neq p_1, p_2, c_1, c_2$ (refer to **Figure 5.12a**). Let p' be a color that is different from p, p_1 and p_2 (p' always exists). Then we replace edge (u_0, u_{s+1}) with P without changing the colors of its endpoints: edges (u_0, u_1) and (u_s, u_{s+1}) have color p . We color vertices u_i with color p_1 if i is even and with color p_2 otherwise for, $1 \leq i \leq s$. For the edges, we color (u_i, u_{i+1}) with color p if i is even and with color p' otherwise, for $1 \leq i \leq s - 1$ (note that (u_{s-1}, u_s) takes color p' , different from the color of (u_s, u_{s+1})). Consider now two adjacent vertices of degree 2 on P . Their incident edges have colors p and p' . One of the two vertices is colored with p_1 and has color p_2 in its color set, while the other vertex is of color p_2 and has color p_1 in its color set. Therefore they are distinguished. Vertices u_0 and u_{s+1} are also

distinguished from u_1 and u_s respectively: u_1 has vertex-color p_2 and u_s has color p_1 since s is even. Also they have different degrees and therefore different color sets.

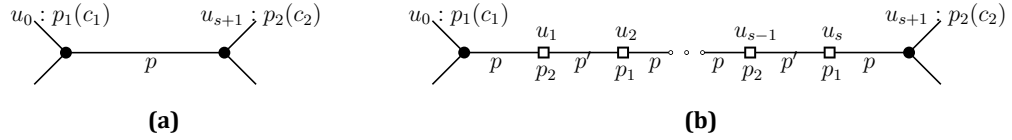


Figure 5.12: Path P has $s+2$ vertices in T with $s \equiv 0(\text{mod}2)$: (a) Coloring of the edge (u_0, u_{s+1}) in G_C , (b) Coloring of P in G .

- $s \equiv 1(\text{mod}2)$: in T_C P is contracted to the path $P_C = u_0, u', u_{s+1}$, where vertex u' has degree 2 in G_C and vertices u_0 and u_{s+1} have degree 3. Suppose that there is an AVDT coloring of G_C with 5 colors. Let p be the color of vertex u' , f_1 the color of edge (u_0, u') , f_2 the color of (u', u_{s+1}) , $p_1(c_1)$ the color of vertex u_0 and $p_2(c_2)$ the color of vertex u_{s+1} (refer to Figure 5.13a). Let p' be a color that is different from p, f_1 and f_2 (p' always exists). Then we replace path $P_C = u_0, u', u_{s+1}$ with P without changing the colors of its endpoints: edges (u_0, u_1) and (u_s, u_{s+1}) have color f_1 and f_2 respectively. We color vertices u_i with color p if i is odd and with color p' otherwise for, $1 \leq i \leq s$. For the edges, we color (u_i, u_{i+1}) with color f_1 if i is even and with color f_2 otherwise, for $1 \leq i \leq s-1$ (note that (u_{s-1}, u_s) takes color f_1 , different from the color of (u_s, u_{s+1})). Consider now two adjacent vertices of degree 2 on P . Their incident edges have colors f_1 and f_2 . One of the two vertices is colored with p and has color p' in its color set, while the other vertex is of color p' and has color p in its color set. Therefore they are distinguished. Vertices u_0 and u_{s+1} are also distinguished from u_1 and u_s respectively: u_1 and u_s have color p since s is odd. Also they have different degrees and therefore different color sets.

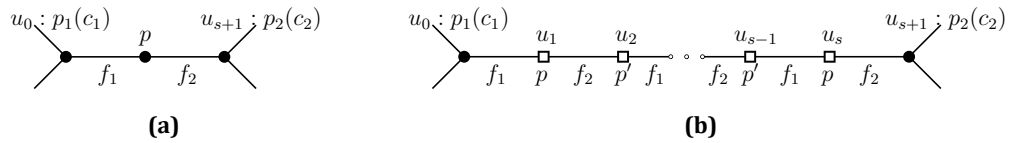


Figure 5.13: Path P has $s+2$ vertices in T with $s \equiv 1(\text{mod}2)$: (a) Coloring of the path (u_0, u', u_{s+1}) in G_C , (b) Coloring of P in G .

From the two cases that we distinguished above, it follows that we can expand all contracted paths of T_C one by one following the two aforementioned rules. At each step, a new generalized Halin graph is produced along with an AVDT-coloring with 5 colors. After expanding all paths, the produced graph is G and therefore we can conclude that Theorem 5.1 holds.

6 AVDTC of 4-Regular Graphs

In this chapter we consider the Adjacent Vertex Distinguishing Total chromatic number of simple 4-regular graphs. We prove that 7 colors suffice for an AVDTC of 4-regular graphs, therefore strengthening [Conjecture 2.1](#). In the following, we consider two cases depending on whether there is a Hamilton cycle in the input graph or not. Actually it is not needed to treat the case of hamiltonian 4-regular graphs separately, but it simplifies the algorithmic procedure and makes the general case of non-hamiltonian 4-regular graphs easier to follow.

6.1 Hamiltonian 4-Regular Graphs

In this section we prove that [Conjecture 2.1](#) holds for simple hamiltonian 4-regular graphs. In particular, we prove the following theorem:

Theorem 6.1. *Let G be a hamiltonian 4-regular graph on n vertices. Then $\chi''_a(G) \leq 7$.*

The following algorithm produces an AVDTC of G with 7 colors:

Step 1: decomposition of G

Let $G = HC \cup \mathcal{C}$ where HC and \mathcal{C} is the decomposition of G into two 2-factors (HC is the Hamilton cycle of G). For convenience, we will refer to HC as the blue Hamilton cycle, and to \mathcal{C} as the red 2-factor of G . Let $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, $k \geq 1$. We reorder the cycles of \mathcal{C} so that cycles of odd order appear first. We write $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{odd} \cup \mathcal{C}_{even}$, where $\mathcal{C}_{odd} = \{C_1^{odd}, \dots, C_{k_{odd}}^{odd}\}$ and $\mathcal{C}_{even} = \{C_1^{even}, \dots, C_{k_{even}}^{even}\}$ are the cycles of \mathcal{C} of odd and even order respectively.

Step 2: defining the sign of odd cycles

For every cycle $C_i^{odd} \in \mathcal{C}_{odd}$ we define its sign $sign(C_i^{odd})$ as follows:

- If $k_{odd} = |\mathcal{C}_{odd}|$ is even, then $sign(C_i^{odd}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \equiv 1(mod 2) \\ -1 & \text{if } i \equiv 0(mod 2) \end{cases}$, and
- if k_{odd} is odd then $sign(C_i^{odd}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \equiv 1(mod 2) \text{ or } i = 2 \\ -1 & \text{if } i \equiv 0(mod 2) \text{ and } i \neq 2 \end{cases}$

We can see that if k_{odd} is even the positive and negative signs are equal but if k_{odd} is odd there are three more positive signs than negative signs. The only case this is not true is for $k_{odd} = 1$, and we treat it separately as a special case.

Step 3: choosing the representatives of \mathcal{C}_{odd}

Corollary 2.1 assures the existence of a set $R = \{u_1, \dots, u_{k_{odd}}\}$ of representatives of \mathcal{C}_{odd} such that $u_i \in C_i^{odd}$ for every $1 \leq i \leq k_{odd}$, and that the vertices of R are not consecutive along the HC of G .

Step 4: coloring \mathcal{C}_{even}

In this step we assign colors $\{1, 2, 3, 4\}$ to all vertices and edges of C_j^{even} , for $1 \leq j \leq k_{even}$. Let n_j be the order of C_j^{even} where $C_j^{even} = (w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{n_j}, w_j^1)$. We orient the edges $(w_j^1, w_j^2), (w_j^2, w_j^3), \dots, (w_j^{n_j}, w_j^1)$ of C_j^{even} as $\overrightarrow{(w_j^1, w_j^2)}, \overrightarrow{(w_j^2, w_j^3)}, \dots, \overrightarrow{(w_j^{n_j}, w_j^1)}$. In general every vertex will have an in-edge and an out-edge. By $\vec{e}(v)$ we will denote the out-edge of vertex v . We color the vertices with colors 1 and 2:

$$c(w_j^s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2 & \text{if } s \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}, s = 1, 2, \dots, n_j$$

and the oriented edges with colors 3 and 4:

$$c(\vec{e}(w_j^s)) = \begin{cases} 3 & \text{if } c(w_j^s) = 1 \\ 4 & \text{if } c(w_j^s) = 2 \end{cases}, s = 1, 2, \dots, n_j$$

The coloring is shown in **Figure 6.1a**, where red edges are drawn with dashed lines. Note that for every vertex w_j^s the colors assigned to w_j^s and its out-edge $\vec{e}(w_j^s)$ have the same parity. The reason for formalising this step is that later we want to be able to swap the colors of w_j^s and $\vec{e}(w_j^s)$ without affecting the parity of the elements of $C(w_j^s)$ or $C(w_j^{s+1})$.

Step 5: coloring \mathcal{C}_{odd}

Let $C_i^{odd} = (u_i, w_i^1, w_i^2, \dots, w_i^{n_i}, u_i)$ where $n_i + 1$ is the order of C_i^{odd} and u_i is the representative of C_i^{odd} . This step is similar to **Step 4**, but the orientation of the edges depends on the sign $sign(C_i^{odd})$ assigned at **Step 2**. We orient the edges $(u_i, w_i^1), (w_i^1, w_i^2), \dots, (w_i^{n_i}, u_i)$ of C_i^{odd} as:

$$\begin{cases} \overrightarrow{(u_i, w_i^{n_i}), (w_i^{n_i}, w_i^{n_i-1}), \dots, (w_i^1, u_i)} & \text{if } sign(C_i^{odd}) = 1 \\ \overrightarrow{(u_i, w_i^1), (w_i^1, w_i^2), \dots, (w_i^{n_i}, u_i)} & \text{if } sign(C_i^{odd}) = -1 \end{cases}$$

We color the vertices with colors 1 and 2:

$$c(w_i^s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2 & \text{if } s \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}, s = 1, 2, \dots, n_i$$

and the oriented edges with colors 3 and 4 (see Figures 6.1b-6.1c, where red representatives are square, red shaded vertices):

$$c(\vec{e}(w_i^s)) = \begin{cases} 3 & \text{if } c(w_i^s) = 1 \\ 4 & \text{if } c(w_i^s) = 2 \end{cases}, s = 1, 2, \dots, n_i$$

Note that the only elements that are not colored are representative vertices u_i and their out-edges $\vec{e}(u_i)$, for $1 \leq i \leq k_{\text{odd}}$. Also for every other vertex w_i^s the colors assigned to w_i^s and its out-edge $\vec{e}(w_i^s)$ have the same parity.

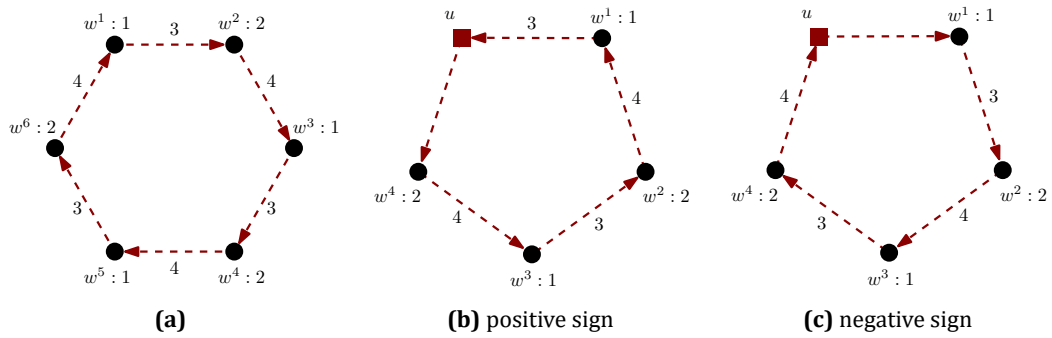


Figure 6.1: (a) Coloring a red cycle of even order. (b)-(c) Coloring a red cycle of odd order.

Step 6: coloring the edges of the HC

Let $HC = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ be the Hamilton cycle of G , where $v_1 = u_1$ if $\mathcal{C}_{\text{odd}} \neq \emptyset$ (if $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{even}}$, v_1 can be any vertex with $c(v_1) = 1$). We will color the edges of HC with colors $\{5, 6, 7\}$. Let

$$S(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } c(v_i) = 1 \text{ or } v_i = u_j \in C_j^{\text{odd}} \text{ with } \text{sign}(C_j^{\text{odd}}) = 1 \\ 2 & \text{if } c(v_i) = 2 \text{ or } v_i = u_j \in C_j^{\text{odd}} \text{ with } \text{sign}(C_j^{\text{odd}}) = -1 \end{cases}$$

Function S turns the Hamilton cycle into a string of '1' and '2's of length n . Take the numbers $(5, 6, 7)$ on a circle as in Figure 6.2 and let $f_1(t)$ to be the next element of t moving clockwise on the circle (e.g. $f_1(5) = 6$), and $f_2(t)$ to be the next element of t moving counterclockwise on the circle (e.g. $f_2(5) = 7$). We arbitrarily choose the color of the edge (v_1, v_2) , say $c(v_1, v_2) = 5$. We color edge (v_i, v_{i+1}) for $i = 2, 3, \dots, n$, where $v_{n+1} = v_1$ as follows:

$$c(v_i, v_{i+1}) = f_{S(v_i)}(c(v_{i-1}, v_i)).$$

Claim 1: Having colored the edges of HC , the last edge (v_n, v_1) has color $c(v_n, v_1) = 7$.

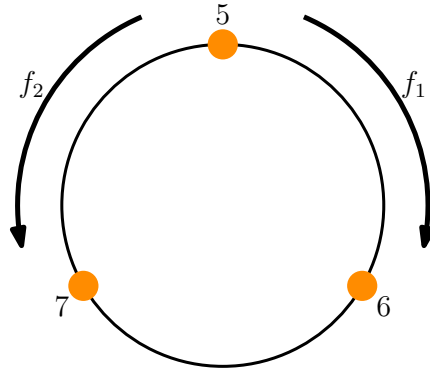


Figure 6.2: Functions f_1 and f_2 .

Proof. Indeed if we want to see the color of the edge (v_n, v_1) we have that $c(v_n, v_1) = f_{S(v_n)}(c(v_{n-1}, v_n))$. Similarly $c(v_n, v_1) = f_{S(v_n)}(f_{S(v_{n-1})}(c(v_{n-2}, v_{n-1})))$ and finally

$$c(v_n, v_1) = f_{S(v_n)} \circ f_{S(v_{n-1})} \circ \cdots \circ f_{S(v_2)}(c(v_1, v_2)).$$

It is not hard to see that the right part contains $f_{S(v_r)}$ for all vertices v_r except for v_1 . We distinguish two cases depending on whether there is an even or an odd number of cycles in \mathcal{C}_{odd} (as in Step 2). If $k_{odd} = |\mathcal{C}_{odd}|$ is even then the number of '1's in the string of function S equals the number of '2's. So f_2 is applied one more time than f_1 when we calculate $c(v_n, v_1)$ (since $\text{sign}(C_1^{odd}) = 1$). By the definition of f_1 and f_2 we have that $c(v_n, v_1) = f_2(c(v_1, v_2)) = f_2(5) = 7$. If $k_{odd} = |\mathcal{C}_{odd}|$ is odd then the number of '1's in the string of function S equals the number of '2's plus three. So f_1 is applied two more times than f_2 when we calculate $c(v_n, v_1)$. So $c(v_n, v_1) = f_1 \circ f_1(c(v_1, v_2)) = f_2(c(v_1, v_2)) = 7$ as claimed. \square

Step 7: modifying consecutive vertices on the HC with the same color

On the previous step we viewed the vertices of the HC as a string of '1' and '2's. We alter the string keeping only the digit of colored vertices and turning the digit of the representatives $\{u_1, u_2, \dots, u_{k_{odd}}\}$ into a '*'. If we have a sequence of at least two same digits say '1's this means that on the HC there are adjacent vertices that have the same color, which is forbidden for an AVDTC of G . For every maximal such sequence (i.e. for a sequence of '1's the digits right before and after the sequence are '2' or '*', or for a sequence of '2's the digits right before and after the sequence are '1' or '*'), we pick every second element of the sequence and we swap the colors of the vertex and its out-edge (defined in Step 4 and Step 5). For example in Figure 6.3a, we see a modified path of three consecutive vertices with initial color 1, where blue edges (i.e. edges of the HC) are drawn as solid lines. Note that now the sequence consists of alternating '1's and '3's (or '2's and '4's) and there is no pair of consecutive digits being the same on the modified string.

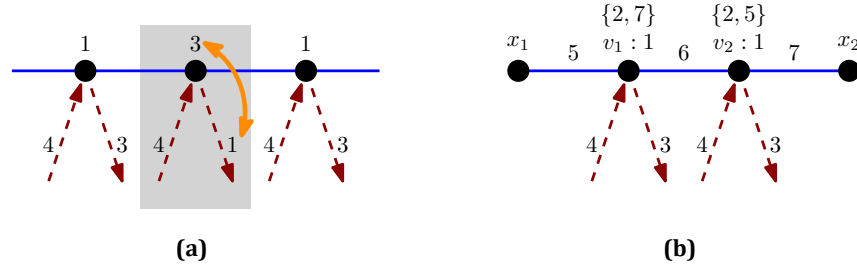


Figure 6.3: (a) The swapping of colors described at Step 7. (b) Color sets of consecutive vertices with the same vertex color along the HC .

Step 8: coloring the elements u_i and $\vec{e}(u_i)$

The only elements that are not colored are vertices u_i and their out-edges $\vec{e}(u_i)$, for $1 \leq i \leq k_{\text{odd}}$. Let $\overrightarrow{(w_i^s, u_i)}$ be the in-edge of u_i , where $s = 1$ or n_i . For $\vec{e}(u_i)$ we assign $c(\vec{e}(u_i)) = c(w_i^s)$, and for $c(u_i)$ the only color from the set $\{5, 6, 7\}$ that was not used at Step 6 for coloring the incident edges of u_i on the HC . Note that the only vertices with all three colors $\{5, 6, 7\}$ in their color set are the representative vertices u_i .

Now that all elements of G have been colored we can show the following:

Claim 2: The above algorithm produces an AVDTC of G with 7 colors.

Proof. First we prove that c is a proper total coloring of G , i.e. that incident or adjacent elements do not have the same color. This is obvious for a vertex and an incident edge or for two incident edges, even when swapping colors at Step 7. Also, adjacent vertices of the same color could only be along the HC , but this was exactly what Step 7 took care. In order to have an AVDTC we need to show that adjacent vertices have different color sets. By definition color sets contain 5 elements from the set $\{1, 2, \dots, 7\}$. The representative vertices $\{u_1, \dots, u_{k_{\text{odd}}}\}$ are the only vertices with $\{5, 6, 7\} \subset C(u_i)$. Since they are not consecutive along the HC (by Corollary 2.1) and they belong to different cycles of \mathcal{C} , they are not adjacent in G . So their color sets are different from their neighbors'. All color sets of other vertices contain exactly three elements from the set $\{1, 2, 3, 4\}$ and two elements from the set $\{5, 6, 7\}$. We have two types of vertices: a vertex v is of type (1) with $\{1, 3\} \subset C(v)$, and v is of type (2) with $\{2, 4\} \subset C(v)$. Actually vertex v is of type (1) (or type (2)) if v had color $c(v) = 1$ (or $c(v) = 2$ respectively) at Step 4 and Step 5. Clearly two adjacent vertices of different type have different color sets. We need to check adjacent vertices of the same type, say v_1 and v_2 . Note that they can only be adjacent along the HC (see Figure 6.3b). Denote by x_1 and x_2 the other neighbors of v_1 and v_2 respectively along the HC . W.l.o.g. we may assume that v_1, v_2 are of type (1), and that the edge (x_1, v_1) was colored first at Step 6 with color $c(x_1, v_1) = c_1$. Then $c(v_1, v_2) = f_1(c_1)$ and $c(v_2, x_2) = f_1 \circ f_1(c_1)$. By the definition of f_1 we have that

$\{c_1, f_1(c_1), f_1 \circ f_1(c_1)\} = \{5, 6, 7\}$ which implies that $C(v_1)$ and $C(v_2)$ cannot contain the same elements of $\{5, 6, 7\}$, i.e. $C(v_1) \neq C(v_2)$. The same applies for two adjacent vertices of type (2) proving that the above algorithm indeed produces a valid AVDTC of G . \square

Special case: $k_{\text{odd}} = 1$

At **Step 2** we assumed that the set C^{odd} has $k_{\text{odd}} \neq 1$ cycles, leaving $k_{\text{odd}} = 1$ as a special case. If $k_{\text{odd}} = 1$ the graph G must be of odd order. Assume that $n \geq 7$ is odd (for $n = 5$, $G = K_5$ and it is known from [ZCL⁺05] that $\chi_a''(K_5) = 7$), and let u_1 be the representative of C_1^{odd} . We follow the algorithm from **Step 1** to **Step 5**. We claim that there is a vertex w with color $c(w) = 2$ (assigned at **Step 4** or **Step 5**) that is not adjacent to u_1 . Indeed if this is not the case then u_1 is adjacent to all vertices w with color $c(w) = 2$. But at **Step 4** and **Step 5** the number of vertices with color 1 equals the number of vertices with color 2. Also u_1 has one neighbor with color 1 on the cycle C_1^{odd} . So there are exactly three vertices w with color 2 and $n = 7$. We swap colors 1 and 2 as well as 3 and 4. Now u_1 has one neighbor with color 2 and there is a vertex w with color 2 not adjacent to u_1 . So vertex w we claimed always exists and we continue by removing its color.

At the string produced at **Step 6**, we treat vertex w as a representative of a cycle with positive sign. The algorithm continues and at **Step 8**, we do not color the out-edge of w since it already has a color. **Claim 1** still holds since the number of '1's in the string of **Step 6** equals the number of '2's plus three. So does **Claim 2**, since vertices u_1 and w are the only vertices with color set C containing all three colors $\{5, 6, 7\}$ and they are not adjacent in G .

6.2 Non-Hamiltonian 4-Regular Graphs

We are now ready to consider the case of non-hamiltonian 4-regular graphs. In this section we prove the following:

Theorem 6.2. *Let G be a 4-regular graph on n vertices that is not hamiltonian. Then $\chi_a''(G) \leq 7$.*

The following algorithm produces an AVDTC of G with 7 colors:

Our aim is to partition the vertices of G into six types of color sets. We shall say that vertex v is of type

- (1) if $C(v) = \{1, 3, c_1, c_2, c_3\}$, where $c_1 \in \{2, 4\}$, $\{c_2, c_3\} \subseteq \{5, 6, 7\}$, and $c(v) \in \{1, 3\}$
- (2) if $C(v) = \{2, 4, c_1, c_2, c_3\}$, where $c_1 \in \{1, 3\}$, $\{c_2, c_3\} \subseteq \{5, 6, 7\}$, and $c(v) \in \{2, 4\}$
- (1, 4) if $C(v) = \{1, 2, 3, 4, c_1\}$, where $c_1 \in \{5, 6, 7\}$ and $c(v) \in \{1, 2, 3, 4\}$
- (u^{odd}) if $C(v) = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ and $c(v) \in \{5, 6, 7\}$
- (u^{even}) if $C(v) = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ and $c(v) \in \{5, 6, 7\}$
- (u^*) if $C(v) = \{c_1, c_2, 5, 6, 7\}$, where $c_1 \in \{1, 3\}$, $c_2 \in \{2, 4\}$, and $c(v) \in \{5, 6, 7\}$

We also say that vertex v is of type (12) if v is of type (1) or (2), and of type (u) if v is of type (u^{odd}), (u^{even}) or (u^*).

Step 1: decomposition of G

Let $G = \mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2$ where \mathcal{C}^1 and \mathcal{C}^2 are two edge disjoint 2-factors of G . For convenience we will refer to \mathcal{C}^1 and \mathcal{C}^2 as the red and blue 2-factors and write \mathcal{C}^{red} and \mathcal{C}^{blue} . Let $\mathcal{C}^{red} = \{C_1^{red}, C_2^{red}, \dots, C_{k_{red}}^{red}\}$, and $\mathcal{C}^{blue} = \{C_1^{blue}, C_2^{blue}, \dots, C_{k_{blue}}^{blue}\}$, with $k_{red}, k_{blue} \geq 2$. We say that a cycle is red or blue if it belongs to \mathcal{C}^{red} or \mathcal{C}^{blue} respectively.

Step 2: choosing red representatives

For every blue cycle of \mathcal{C}^{blue} we arbitrarily choose an edge and remove it, turning the blue cycles into blue paths. We connect the blue paths to a blue Hamilton cycle with temporary edges. From [Corollary 2.2](#) there is a set of red representatives R^{red} such that $R^{red} = \{u_1^{red}, \dots, u_{k_{red}}^{red}\}$ and $u_i^{red} \in C_i^{red}$, $i = 1, \dots, k_{red}$. The red representatives are not consecutive along the blue Hamilton cycle (but there might be adjacent red representatives on an edge that we removed).

Step 3: temporarily coloring the vertices according to the red cycles

This step is similar to [Step 4](#) and [Step 5](#) of the previous section. First we define the sign of red cycles. Since there can only be pairs of adjacent red representatives, the subgraph that they induce is bipartite. So we can assign positive and negative signs to every red representative, so that adjacent representatives have different signs. We will refer to the sign of a red cycle as the sign of its red representative. Let $n_i + 1$ be the order of C_i^{red} and $C_i^{red} = (u_i^{red}, w_i^1, \dots, w_i^{n_i}, u_i^{red})$, where $u_i^{red} = w_i^0$ is the red representative of C_i^{red} .

Assume that C_i^{red} is an even cycle. We orient the edges $(u_i^{red}, w_i^1), (w_i^1, w_i^2), \dots, (w_i^{n_i}, u_i^{red})$ of C_i^{red} as $(u_i^{red}, w_i^1), (w_i^1, w_i^2), \dots, (w_i^{n_i}, u_i^{red})$. We color the vertices with colors 1 and 2:

$$c(w_i^s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \equiv 1 \pmod{2} \\ 2 & \text{if } s \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, s = 0, 1, 2, \dots, n_i$$

Finally we mark the red representative u_i^{red} if the sign of C_i^{red} is negative. The coloring is shown in **Figure 6.4a**.

Now let C_i^{red} be an odd cycle of order $n_i + 1$. We orient the edges $(u_i^{red}, w_i^1), (w_i^1, w_i^2), \dots, (w_i^{n_i}, u_i^{red})$ of C_i^{red} as:

$$\begin{cases} \overrightarrow{(u_i^{red}, w_i^{n_i}), \overrightarrow{(w_i^{n_i}, w_i^{n_i-1}), \dots, \overrightarrow{(w_i^1, u_i^{red})}} & \text{if } \text{sign}(C_i^{red}) = 1 \\ \overrightarrow{(u_i^{red}, w_i^1), \overrightarrow{(w_i^1, w_i^2), \dots, \overrightarrow{(w_i^{n_i}, u_i^{red})}} & \text{if } \text{sign}(C_i^{red}) = -1 \end{cases}$$

We color the vertices with colors 1 and 2 (see **Figures 6.4b-6.4c**):

$$c(w_i^s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \equiv 1 \pmod{2} \\ 2 & \text{if } s \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, s = 1, 2, \dots, n_i$$

Note that the only vertices that are not colored are representative vertices of odd red cycles.

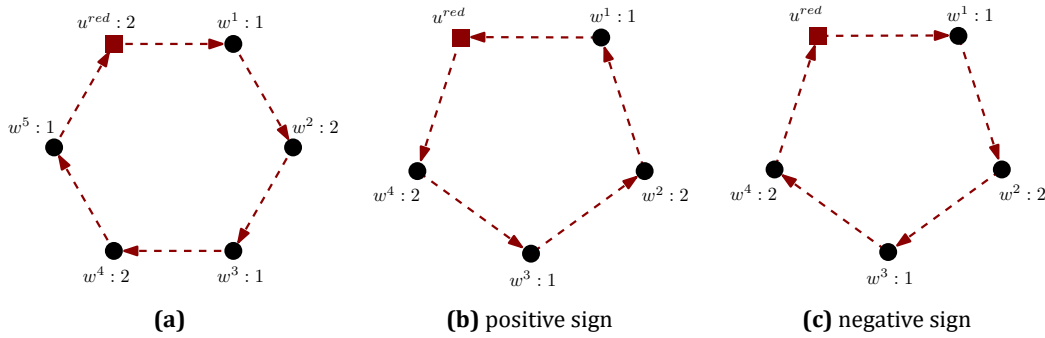


Figure 6.4: (a) Temporary coloring the vertices of a red cycle of even order. (b)-(c) Temporary coloring the vertices of a red cycle of odd order.

Step 4: partitioning the blue cycles

If we attempt to color the blue cycles using colors $\{5, 6, 7\}$, we realize that the approach of **Step 6** of **Section 6.1** can't be applied. For example, if the length of a blue cycle is congruent to $1 \pmod{3}$, and every vertex has the same temporary color, then there will be two consecutive blue edges with the same color in $\{5, 6, 7\}$ (see **Figure 6.5**). However, if a blue cycle has at least a specific number of vertices of type (u) (recall that vertices of type (u) have vertex color in $\{5, 6, 7\}$), then it can be colored so that two adjacent vertices have different subsets of $\{5, 6, 7\}$ in their color sets. In **Figure 6.6** we see the existence of valid colorings for blue cycles, in the case where they contain the required number of red representatives depending on their length being congruent to $(\text{mod}3)$ (the edges of blue cycles are drawn with solid lines). Note that in these colorings, if there is another red representative (that is not adjacent to the representatives

already shown in Figure 6.6), then it can take the only color in $\{5, 6, 7\}$ that is not assigned to its incident edges. The problem is that we cannot assure that every blue cycle has the necessary number of vertices of type (u) , i.e. of red representatives.

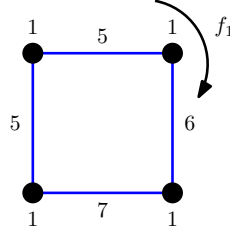


Figure 6.5: Coloring a blue cycle is not always simple.

We want every blue cycle to have a specific number of representatives depending on its length congruent to $(\text{mod}3)$. So in Step 5 we will choose some extra vertices, other than the red representatives, that we call blue representatives, in order to achieve this. Having chosen the red representatives we partition the blue cycles into two sets $\mathcal{C}^{blue} = \mathcal{C}_{good}^{blue} \cup \mathcal{C}_{bad}^{blue}$. The set $\mathcal{C}_{good}^{blue}$ consists of blue cycles that contain the required number of representative vertices, and \mathcal{C}_{bad}^{blue} consists of blue cycles where blue representatives are needed. Let $C^{blue} \in \mathcal{C}^{blue}$ be a blue cycle. If C^{blue} has two non adjacent red representatives, then $C^{blue} \in \mathcal{C}_{good}^{blue}$. If C^{blue} has just two red representatives which are adjacent, then $C^{blue} \in \mathcal{C}_{good}^{blue}$, unless the length of C^{blue} is congruent to $2(\text{mod}3)$. If C^{blue} has one red representative, then $C^{blue} \in \mathcal{C}_{good}^{blue}$, unless the length of C^{blue} is congruent to $1(\text{mod}3)$. If C^{blue} has no red representative, then $C^{blue} \in \mathcal{C}_{good}^{blue}$ if and only if the length of C^{blue} is congruent to $0(\text{mod}3)$, with one exception: if a blue cycle C^{blue} has length congruent to $3(\text{mod}6)$, no red representative and every vertex has the same temporary color, then $C^{blue} \in \mathcal{C}_{bad}^{blue}$.

Step 5: choosing the blue representatives

We want to choose blue representatives for the bad cycles \mathcal{C}_{bad}^{blue} as follows:

- If $C^{blue} \in \mathcal{C}_{bad}^{blue}$ is of length congruent to $2(\text{mod}3)$ with two adjacent red representatives we need one extra blue representative (i.e. different from the red representatives).
- If $C^{blue} \in \mathcal{C}_{bad}^{blue}$ is of length congruent to $2(\text{mod}3)$ with no red representative we need one extra blue representative.
- If $C^{blue} \in \mathcal{C}_{bad}^{blue}$ is of length congruent to $1(\text{mod}3)$ with one red representative we need one extra blue representative.
- If $C^{blue} \in \mathcal{C}_{bad}^{blue}$ is of length congruent to $1(\text{mod}3)$ with no red representative we need two extra blue representatives.

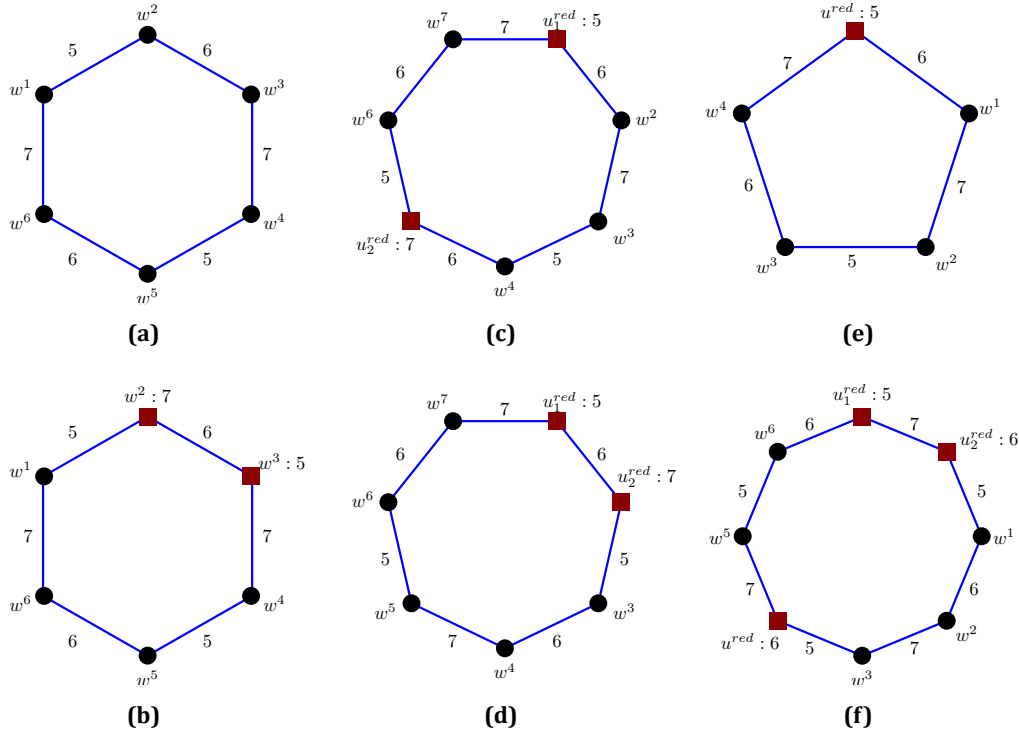


Figure 6.6: Valid colorings for a blue cycle with length congruent to: (a)-(b) $0(mod3)$, (c)-(d) $1(mod3)$ and (e)-(f) $2(mod3)$.

- If $C^{blue} \in \mathcal{C}_{bad}^{blue}$ is of length congruent to $3(mod6)$ with no red representative and every vertex has the same temporary color by **Step 3**, we need one extra blue representative.

Our aim is to alter the blue cycles so that **Corollary 2.2** can be applied with a red Hamilton cycle. In fact, we want to assure that the blue representatives form an independent set of vertices in G . Also, we want to assure that they are not adjacent to red representatives along a blue cycle. However, these requirements can't always hold. Consider a blue C_4 with one red representative. For **Corollary 2.2** we need a triple of candidate vertices for each blue representative. In this case, we can't assure that the blue representative will not be adjacent to the red representative of C_4 . Cases like that will be treated separately.

- Assume that for $C_j^{blue} \in \mathcal{C}_{bad}^{blue}$ we need one blue representative.
 - If C_j^{blue} has two red representatives, then C_j^{blue} is of length congruent to $2(mod3)$. Let $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \dots, w_j^t, u_{i_1}^{red})$ with $t \equiv 0(mod3)$, $t \geq 9$. We take $C_j^* = \{w_j^2, w_j^5, w_j^8, \dots, w_j^{t-1}\}$, i.e. C_j^* contains only vertices w_j^s for $s \equiv 2(mod3)$

(the set C_j^* is the altered set mentioned above, that we need to apply [Corollary 2.2](#)). The cases $t = 3, 6$ will be treated separately.

- If C_j^{blue} has one red representative, then its length is congruent to $1(mod3)$. Let $C_j^{blue} = (u_i^{red}, w_j^1, \dots, w_j^t, u_i^{red})$ with $t \equiv 0(mod3)$. For $t \geq 6$, we take $C_j^* = \{w_j^2, \dots, w_j^{t-1}\}$. The case $t = 3$ will be treated separately.
- If C_j^{blue} has no red representative then C_j^{blue} is of length congruent to $2(mod3)$ or $3(mod6)$, and we take $C_j^* = V(C_j^{blue})$.
- Assume now that for $C_j^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ we need two blue representatives.

In this case the length of C_j^{blue} is congruent to $1(mod3)$ and C_j^{blue} has no red representative. Let $C_j^{blue} = (w_j^1, \dots, w_j^t, w_j^1)$ with $t \equiv 1(mod3)$. If $t \geq 10$, we take two sets, one for each blue representative that we need: $C_j^* = \{w_j^1, w_j^2, w_j^3\}$ and $C_j^{*'} = \{w_j^5, w_j^6, w_j^7\}$. The reason for only taking a part of blue cycles is that we do not want blue representatives to be adjacent along a blue cycle with either a blue or a red representative. If $t = 4, 7$ we take $C_j^* = V(C_j^{blue})$. Note that, for these two cases, we can choose exactly one of the two blue representatives needed, so they will be treated separately for the choice of the second blue representative.

Finally we arbitrarily take a set containing all vertices that do not belong to the sets C^* or $C^{*'}$, which we denote by \tilde{C}^* . Note that \tilde{C}^* contains red representatives and their neighboring vertices along blue cycles. Also, we are not interested in the blue representative of \tilde{C}^* given by [Corollary 2.2](#).

Now we need to turn the red cycles into a Hamilton cycle. For every red cycle C_i^{red} we choose an edge that is incident with its red representative u_i^{red} . We remove these edges and form a red Hamilton cycle (as we did in [Step 2](#) for the blue Hamilton cycle). By [Corollary 2.2](#) we can pick representatives of every set C^* or $C^{*'}$, so that they are not consecutive on the red Hamilton cycle. Note that there don't exist adjacent blue representatives on any of the removed red edges, since in that case one of them would be a representative of \tilde{C}^* which we ignore. So the blue representatives are independent vertices and a blue representative can only be adjacent with a red representative on a red cycle.

As mentioned before, we may not have all the blue representatives that we need. In particular, we still need one blue representative for the following blue cycles: blue C_5 with two adjacent red representatives, blue C_8 with two adjacent red representatives, blue C_4 with one representative vertex (red or blue) and blue C_7 with one blue representative vertex. In these cases we will "force" some vertices as additional blue representatives and refer to them as forced (blue) representatives \tilde{u} . The four cases are shown in [Figure 6.7](#), where blue representatives are drawn as blue shaded squares and forced representatives are drawn as diamond shaped vertices. Specifically,

- If C_j^{blue} has two red representatives and $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, w_j^2, w_j^3, u_{i_1}^{red})$ (i.e. $t = 3$), we have $\tilde{u} = w_j^2$ (see **Figure 6.7a**)
- If C_j^{blue} has two red representatives and $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^6, u_{i_1}^{red})$ (i.e. $t = 6$), we have $\tilde{u} = w_j^2$ (see **Figure 6.7b**)
- If $C_i^{blue} = (u_i^{red}, w_j^1, w_j^2, w_j^3, u_i^{red})$ has one red representative (i.e. $t = 3$), then we have $\tilde{u} = w_j^2$ (see **Figure 6.7c**)
- If $C_j^{blue} = (w_j^1, \dots, w_j^t, w_j^1)$ is of length congruent to $1 \pmod{3}$ with $t = 4, 7$ and no red representative, from **Corollary 2.2** there is a blue representative, say u^{blue} . For $t = 4$, $C_j^{blue} = (u^{blue}, w_j^1, w_j^2, w_j^3, u^{blue})$ and we have $\tilde{u} = w_j^2$. For $t = 7$, $C_j^{blue} = (u^{blue}, w_j^1, \dots, w_j^6, u^{blue})$ and we have $\tilde{u} = w_j^2$ (see **Figures 6.7c-6.7d**).

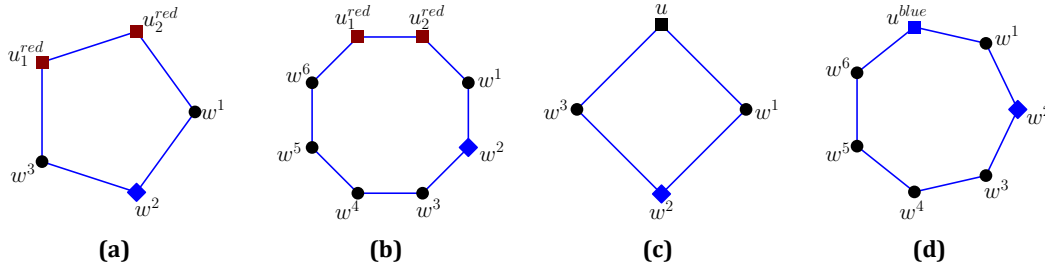


Figure 6.7: (a)-(d) Choosing the forced representatives.

In the following, we write simple vertex for non representative vertices, and write simple blue representative for a non forced blue representative, while the term blue representatives will include simple and forced blue representatives.

Note that we have chosen all the blue representatives that we needed in such a way that a blue representative is not adjacent to any other representative vertex along a blue cycle. However, on a red cycle all vertices may be representatives as shown in **Figure 6.8**. Still, for every pair of adjacent blue representatives at least one of them is forced.

Step 6: marking some simple vertices

This step is similar to **Step 7** of the previous section. We can view the vertices of a blue cycle as a string where every digit of simple vertex is the temporary color of the vertex and every digit of any representative vertex will be an asterisk denoted by $'*'$. If we have a sequence of at least two same digits say $'1'$'s this means that there are adjacent vertices that have the same color, which is forbidden for an AVDTC of G . For every maximal such sequence (i.e. a sequence of $'1'$'s such that the digits right before and after the sequence are $'2'$ or $'*'$ or a sequence of $'2'$'s the digits right before and after the sequence are $'1'$ or $'*'$), pick every second element of the sequence and mark the

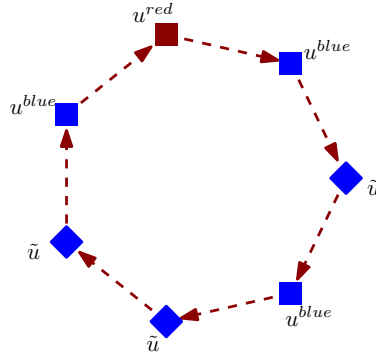


Figure 6.8: A red cycle where every vertex is a representative.

vertex. Especially, suppose that we have a blue cycle C^{blue} , such that all vertices in this cycle have the same temporary color and C^{blue} has no representative. In this time, the length of this C^{blue} is congruent to $0(mod6)$ and C^{blue} is an even cycle. From a vertex of C^{blue} we can pick every second vertex of this cycle and mark the vertex. The marked vertices will swap color with their out-edges in the next step. The only other vertices that are marked so far are red representatives corresponding to red cycles with even order and negative sign (as seen in [Step 3](#)).

Step 7: coloring the red cycles

In this step we assign colors $\{1, 2, 3, 4\}$ to all edges and simple vertices of the red cycles. Let $n_i + 1$ be the order of C_i^{red} and $C_i^{red} = (u_i^{red}, w_i^1, \dots, w_i^{n_i}, u_i^{red})$, where u_i^{red} is the red representative of C_i^{red} . There are in general two cases: C_i^{red} contains at least one simple vertex or C_i^{red} is a cycle of representative vertices, i.e. every vertex is a representative vertex (as in [Figure 6.8](#)). In [Step 3](#) we oriented the red edges and temporarily colored all the vertices of red cycles except for the red representatives of odd cycles. Also in [Step 3](#) and [Step 6](#) we marked certain vertices.

For every vertex v with temporary color $c(v)$, let $\overrightarrow{vv'}$ be its red out-edge. We color

$$c(\overrightarrow{vv'}) = \begin{cases} 3 & \text{if } c(v) = 1 \\ 4 & \text{if } c(v) = 2 \end{cases}$$

The coloring is shown in [Figure 6.9](#). For each marked vertex we swap the color of the vertex and its out-edge. By doing this, adjacent simple vertices on a blue cycle have different vertex color. The only vertices that have no temporary color are the representatives of red cycles of odd order. So, the only red edges that are not colored are their out-edges. Let u_i^{red} be such a red representative (i.e. representative of a red cycle of odd order) with out-edge $\vec{e}(u_i^{red}) = \overrightarrow{(u_i^{red}, w_i^s)}$, and let $\vec{e}(w_i^{s'}) = \overrightarrow{(w_i^{s'}, u_i^{red})}$ be its in-edge. We assign $c(\vec{e}(u_i^{red})) = c(w_i^{s'})$. Note that if u_i^{red} has positive sign then its incident red

edges take colors 1 and 3, and if it has negative sign then its incident red edges take colors 2 and 4.

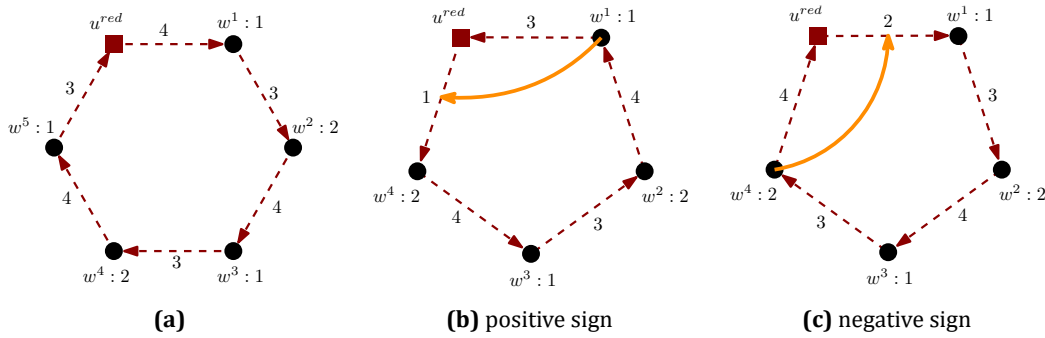


Figure 6.9: (a) Coloring a red cycle of even order. (b)-(c) Coloring a red cycle of odd order.

Before we continue we need to make the following remarks. Simple vertices are of type (12): of type (1) if the temporary color assigned at Step 3 was 1, and of type (2) if the temporary color was 2. Red representatives of odd red cycles are of type (u^{odd}) or (u^{even}), if their cycle has positive or negative sign respectively. In particular, the color set of a red representative of even red cycle of type (u^*) contains the subsets $\{4, 1\}$ or $\{4, 3\}$ of $\{1, 2, 3, 4\}$ (representative vertices have only two colors from $\{1, 2, 3, 4\}$ in their color sets) if it has positive sign, and the subsets $\{2, 1\}$ or $\{2, 3\}$ if it has negative sign (i.e. it was marked at Step 3). Note that for a pair of adjacent (along blue cycles) red representatives of even red cycles, the colors assigned to the red edges that are incident with the red representatives can't be the same, since they have different signs.

Assume now that there is a maximal path of consecutive representatives along a red cycle. Consider the case where the path doesn't contain the red representative, that is we have the path $v, u_1^{blue}, u_2^{blue}, \dots, u_s^{blue}, v'$, where vertices v, v' are simple vertices. Let $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. We mark vertices u_t^{blue} for every $t \equiv i, i + 1(mod 4)$, and we swap the temporary color of the marked blue representatives with the color of their red out-edges. Clearly there are four possible colorings for the path, depending on the value of i . If vertex v was not marked at Step 6, then we keep one of the colorings for $i = 1$ or 2 , and if v was marked, then we keep one of the colorings for $i = 0$ or 3 .

If this path contains the red representative of the red cycle, then the path can be written as $v, u_1^{blue}, u_2^{blue}, \dots, u_{s'}^{blue}, u^{red}, u_{s'+1}^{blue}, \dots, u_s^{blue}, v'$ (where v, v' are simple vertices). Let the red cycle be of even order. The above method describes two different valid colorings for the path, but without considering the sign of u^{red} . If the red representative is marked (not marked) by the above method, u^{red} will contain color 2 (color 4 respectively) in its color set. Recall that we want color 2 in the color set of a red representative that has negative sign and color 4 in the color set of a red representative that has positive sign. Hence, the following situation may occur: u^{red} has positive (negative)

sign and it is marked (not marked respectively) in both valid colorings of the path. For example, in [Figures 6.10a-6.10b](#), we can see the two valid colorings in the case where vertex v was not marked at [Step 3](#) and $s' \equiv 2(\text{mod}4)$ (note that u^{red} is marked in both colorings). However, vertex u^{red} has two different color sets under the two valid colorings (since its previous vertex on the path $u_{s'-1}^{\text{blue}}$ is marked in exactly one coloring). This implies that there is a choice of coloring the paths under consideration, such that two adjacent red representatives on a blue cycle have different color sets. If u^{red} is representative of an odd red cycle, first we color path $u_1^{\text{blue}}, \dots, u_{s'-1}^{\text{blue}}$ using the above method and according to whether v is marked. Then, if the edge $(u_{s'-1}^{\text{blue}}, u^{\text{red}})$ has color 1 or 2, we color the path $u_{s'+1}^{\text{blue}}, \dots, u_s^{\text{blue}}$ by using the above method and viewing u^{red} as a not marked vertex (otherwise, i.e. if edge $(u_{s'-1}^{\text{blue}}, u^{\text{red}})$ has color 3 or 4, we consider u^{red} as a marked vertex), see [Figure 6.10c](#). After coloring the two paths, we color the edge $(u^{\text{red}}, u_{s'+1}^{\text{blue}})$ as $c(u^{\text{red}}, u_{s'+1}^{\text{blue}}) = c(u_{s'-1}^{\text{blue}})$. Note that all blue representatives are of type (u^*) and two adjacent representatives have different color sets.

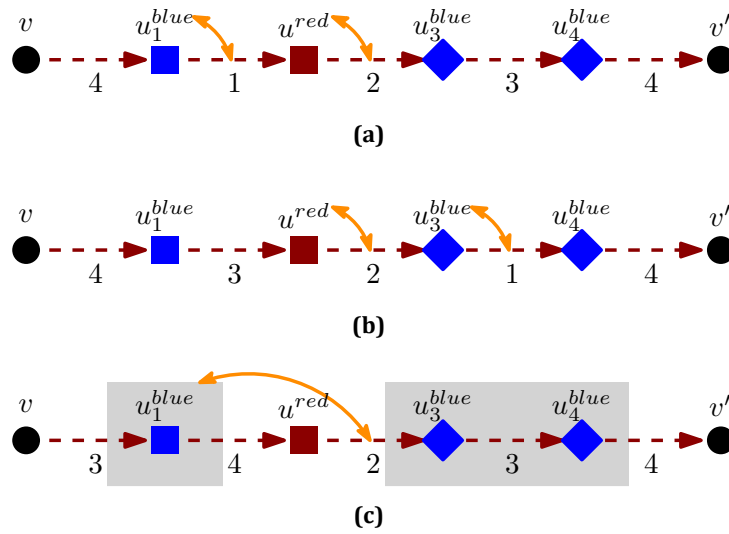


Figure 6.10: Coloring a path of consecutive representatives: (a)-(b) On an even red cycle (the red representative is in the path), and (c) On an odd red cycle.

The only case left is that all the vertices of the red cycle C_j^{red} are representatives. So let $C_j^{\text{red}} = (u_j^{\text{red}}, u_1^{\text{blue}}, \dots, u_{n_j}^{\text{blue}}, u_j^{\text{red}})$, with oriented edges $(u_j^{\text{red}}, u_1^{\text{blue}})$, $(u_1^{\text{blue}}, u_2^{\text{blue}})$, \dots , $(u_{n_j}^{\text{blue}}, u_j^{\text{red}})$. We consider four subcases depending on the value of n_j congruent to $3(\text{mod}4)$.

- If $n_j \equiv 3(\text{mod}4)$, then C_j^{red} is an even cycle. If the red representative u_j^{red} has posi-

tive sign, we color the oriented edges as follows:

$$c(\overrightarrow{u_s^{blue}, u_{s+1}^{blue}}) = \begin{cases} 3 & \text{if } s \equiv 1(\text{mod}4) \\ 2 & \text{if } s \equiv 2(\text{mod}4) \\ 1 & \text{if } s \equiv 3(\text{mod}4) \\ 4 & \text{if } s \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}, \text{ for } s = 0, 1, \dots, n_j,$$

where $u_j^{red} = u_0^{blue} = u_{n_j+1}^{blue}$. Note that the incident edges of u_j^{red} take colors $\{4, 1\}$ (see [Figure 6.11a](#)). If the red representative u_j^{red} has negative sign we swap colors 2 and 4 of the above coloring, and the incident edges of u_j^{red} take colors $\{2, 1\}$. All vertices are of type (u^*) .

- If $n_j \equiv 2(\text{mod}4)$, then C_j^{red} is an odd cycle. If u_j^{red} has positive sign we color the oriented edges as follows (see [Figure 6.11b](#)):

$$c(\overrightarrow{u_s^{blue}, u_{s+1}^{blue}}) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \equiv 0(\text{mod}4) \\ 2 & \text{if } s \equiv 1(\text{mod}4) \\ 3 & \text{if } s \equiv 2(\text{mod}4) \\ 4 & \text{if } s \equiv 3(\text{mod}4) \end{cases}, \text{ for } s = 0, 1, \dots, n_j,$$

where $u_j^{red} = u_0^{blue} = u_{n_j+1}^{blue}$. If u_j^{red} has negative sign we swap colors 1 and 3 with 2 and 4 respectively. All blue representatives are of type (u^*) . The red representative is of type (u^{odd}) or (u^{even}) if it has positive or negative sign respectively.

- If $n_j \equiv 1(\text{mod}4)$, then C_j^{red} is an even cycle. If the red representative u_j^{red} has positive sign, we color the oriented edges as follows:

$$c(\overrightarrow{u_s^{blue}, u_{s+1}^{blue}}) = \begin{cases} 2 & \text{if } s \equiv 1(\text{mod}4) \\ 3 & \text{if } s \equiv 2(\text{mod}4) \\ 4 & \text{if } s \equiv 3(\text{mod}4) \\ 1 & \text{if } s \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}, \text{ for } s = 1, \dots, n_j - 1,$$

and $c(\overrightarrow{u_{n_j}^{blue}, u_j^{red}}) = 3$, $c(\overrightarrow{u_j^{red}, u_1^{blue}}) = 4$ (see [Figure 6.11c](#)). Vertex u_1^{blue} is of type (u^{even}) , $u_{n_j}^{blue}$ is of type (u^{odd}) and every other vertex is of type (u^*) . Note that the incident edges of u_j^{red} take colors $\{4, 3\}$. If the red representative u_j^{red} has negative sign we swap colors 2 and 4 of the above coloring, and the incident edges of u_j^{red} take colors $\{2, 3\}$.

- If $n_j \equiv 0(\text{mod}4)$, $n_j \neq 4$, then C_j^{red} is an odd cycle. If u_j^{red} has positive sign we color the oriented edges as follows:

$$c(\overrightarrow{u_s^{blue}, u_{s+1}^{blue}}) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \equiv 1(\text{mod}4) \\ 4 & \text{if } s \equiv 2(\text{mod}4) \\ 3 & \text{if } s \equiv 3(\text{mod}4) \\ 2 & \text{if } s \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}, \text{ for } s = 2, \dots, n_j - 2,$$

and $c(\overrightarrow{u_{n_j-1}^{blue}, u_{n_j}^{blue}}) = 2$, $c(\overrightarrow{u_{n_j}^{blue}, u_j^{red}}) = 1$, $c(\overrightarrow{u_j^{red}, u_1^{blue}}) = 3$, $c(\overrightarrow{u_1^{blue}, u_2^{blue}}) = 2$ (see Figure 6.11d). If u_j^{red} has negative sign we swap colors 1 and 3 with 2 and 4 respectively. If the red representative has positive (or negative) sign, the red representative is of type (u^{odd}) (or (u^{even}) respectively), vertices $u_2^{blue}, u_{n_j-1}^{blue}$ of type (u^{even}) (or (u^{odd}) respectively), and every other vertex is of type (u^*) .

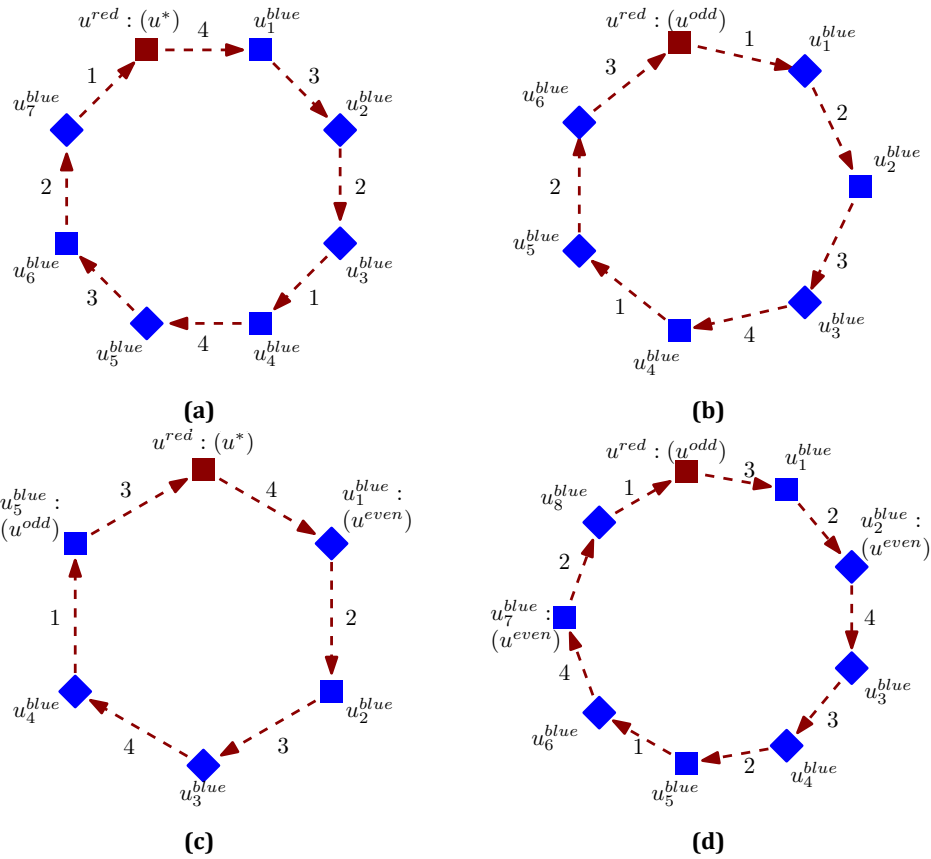


Figure 6.11: Coloring a red cycle with $n_j + 1$ vertices, where every vertex is a representative vertex: (a) $n_j \equiv 3(mod 4)$, (b) $n_j \equiv 2(mod 4)$, (c) $n_j \equiv 1(mod 4)$, (d) $n_j \equiv 0(mod 4)$.

Finally suppose $n_j = 4$, i.e. $C_j^{red} = C_5 = (u_j^{red}, u_1^{blue}, u_2^{blue}, u_3^{blue}, u_4^{blue}, u_j^{red})$. If we try to apply the above coloring, then vertices u_2^{blue} and u_3^{blue} will have the same color set. However, there are at least two forced blue representatives. We want to pick one of them to be of type $(1, 4)$ and also one of its neighbors on its blue cycle to be of type $(1, 4)$, so that there are no adjacent vertices of type $(1, 4)$ on a red cycle. The existence of a vertex of type $(1, 4)$, will allow us to find a suitable coloring for the red C_5 .

Claim 1: We can always choose the vertices of type $(1, 4)$ so that no two of them are adjacent along a red cycle.

Proof. For every red cycle $C_j^{red} = C_5$ with all its vertices being representatives, we want to choose a forced representative \tilde{u}^{blue} of C_j^{red} and a neighbor of \tilde{u}^{blue} along its blue cycle, say $v(\tilde{u}^{blue})$, to be of type $(1, 4)$. Since the C_5 cycles under consideration are distinct there can not be a red edge incident with two chosen forced representatives \tilde{u}^{blue} . Also on a blue cycle, a forced representative \tilde{u} has only neighbors which are not representatives, so $v(\tilde{u})$ cannot be in any of the C_5 cycles under consideration, meaning there is no red edge connecting a vertex \tilde{u} to another vertex $v(\tilde{u}')$. So only vertices $v(\tilde{u}^{blue})$ can be adjacent along a red cycle. For every red C_5 under consideration there are at least two forced representatives \tilde{u}^{blue} that we can choose, and for every forced representative two neighbors $v(\tilde{u}^{blue})$. Since every blue cycle has at most one forced representative all neighbor vertices $v(\tilde{u}^{blue})$ for all forced representatives \tilde{u}^{blue} are distinct and no two of them are adjacent on a blue cycle. So for every red cycle C_5 under consideration there are four choices for the vertex $v(\tilde{u}^{blue})$. Note that a vertex $v(\tilde{u}^{blue})$ cannot be representative vertex by the definition of the forced representatives. Consider the subgraph H induced by vertices $v(\tilde{u}^{blue})$. It is clear that there are only red edges between them. Also, there cannot be a red cycle, since every red cycle has one red representative. We arbitrarily add red edges to H to form a red Hamilton cycle and consider every 4-tuple of $v(\tilde{u}^{blue})$. Applying [Corollary 2.2](#) assures that there are representatives of the 4-tuples that are not consecutive along the Hamilton cycle. So we can choose a vertex $v(\tilde{u}^{blue})$ for every C_5 under consideration, so that the vertices $v(\tilde{u}^{blue})$ are not adjacent on a red cycle in G . \square

W.l.o.g. we can assume that vertex u_1^{blue} or u_2^{blue} is of type $(1, 4)$. We distinguish two cases depending on the color of the neighbor of u_1^{blue} (or u_2^{blue} respectively), say $v(u^{blue})$ that is of type $(1, 4)$.

- If $c(v(u^{blue})) = 1$ or 3 and the red representative u_j^{red} has positive sign, we color the edges of C_j^{red} as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(u_j^{red}, u_1^{blue}) = 3 \\ c(u_1^{blue}, u_2^{blue}) = 1 \\ c(u_2^{blue}, u_3^{blue}) = 3 \\ c(u_3^{blue}, u_4^{blue}) = 2 \\ c(u_4^{blue}, u_j^{red}) = 4. \end{array} \right.$$

Note that the incident edges of u_j^{red} take colors $\{4, 3\}$. If the red representative u_j^{red} has negative sign we swap colors 2 and 4 of the above coloring and the incident edges of u_j^{red} take colors $\{2, 3\}$.

- If $c(v(u^{blue})) = 2$ or 4 and the red representative u_j^{red} has positive sign, we color

the edges of C_j^{red} as follows:

$$\begin{cases} c(u_j^{red}, u_1^{blue}) = 4 \\ c(u_1^{blue}, u_2^{blue}) = 2 \\ c(u_2^{blue}, u_3^{blue}) = 4 \\ c(u_3^{blue}, u_4^{blue}) = 1 \\ c(u_4^{blue}, u_j^{red}) = 3. \end{cases}$$

Note that the incident edges of u_j^{red} take colors $\{4, 3\}$. If the red representative u_j^{red} has negative sign we swap colors 2 and 4 of the above coloring, and the incident edges of u_j^{red} take colors $\{2, 3\}$.

The only elements that take colors in $\{1, 2, 3, 4\}$ and are not yet colored are forced representatives of type $(1, 4)$. Let \tilde{u}^{blue} be a forced representative of type $(1, 4)$ and $v(\tilde{u}^{blue})$ its neighbor that is also of type $(1, 4)$. Also let $\vec{e}(v') = (v', v(\tilde{u}^{blue}))$ be the red in-edge of $v(\tilde{u}^{blue})$. We assign $c(\tilde{u}^{blue}) = c(\vec{e}(v'))$ and we color the blue edge $(\tilde{u}^{blue}, v(\tilde{u}^{blue}))$ with the only color in $\{1, 2, 3, 4\}$ that is not used by vertices \tilde{u}^{blue} and $v(\tilde{u}^{blue})$ and their incident red edges. In **Figure 6.12** we see the coloring described in the case of $c(v(\tilde{u}^{blue})) = 1$, where vertices of type $(1, 4)$ are shown with white color (the type of vertices is also shown).

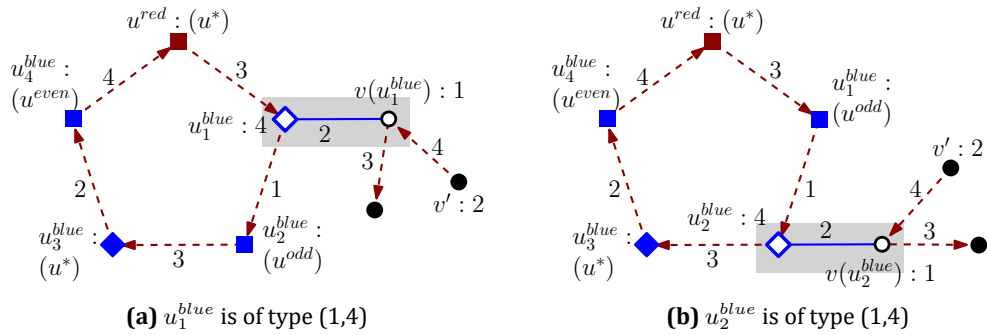


Figure 6.12: Coloring a red C_5 with no simple vertices.

We change the temporary color of each simple vertex not of type $(1, 4)$ to a permanent color. So far we have only used colors $\{1, 2, 3, 4\}$ and the elements that we have colored are: simple vertices, vertices of type $(1, 4)$, all red edges and blue edges that connect adjacent vertices of type $(1, 4)$. In general every simple vertex is of type (12) and representative vertices are of type (u) , except for those that have type $(1, 4)$. Clearly adjacent vertices of different type have different color sets. Consider two adjacent vertices of type (12) . If they are connected by a red edge then one of them has type (1) and the other type (2) , which implies different color sets and different vertex colors. If they are connected by a blue edge then by **Step 6** they have different vertex colors. For two

adjacent vertices of type (u) on a red cycle, the colorings described in **Step 7** assure that they have different color sets. On a blue cycle, there can only be adjacent red representatives of type (u) . In this case they have different signs and different color sets. Finally two adjacent vertices of type $(1, 4)$ have different vertex colors.

There is one case where adjacent vertices might still have the same vertex color: a forced representative of type $(1, 4)$ and its neighbor along the blue cycle that is of type (12) . This case will be considered in detail in **Step 11**.

Step 8: coloring the blue cycles in $\mathcal{C}_{good}^{blue}$

We divide the blue cycles in three categories, the blue cycles in $\mathcal{C}_{good}^{blue}$ that contain only red representatives or no representatives, the blue cycles in \mathcal{C}_{bad}^{blue} with simple blue representatives and the cycles in \mathcal{C}_{bad}^{blue} with a forced blue representative. The coloring of the blue cycles will take place in two different steps. In this step we color the first category (see **Figure 6.6**) and the other two categories in **Step 10**. So, we have a total of three cases, one for each category of blue cycles. Take the numbers $(5, 6, 7)$ on a circle as in **Figure 6.2** and let $f_1(t)$ to be the next element of t moving clockwise on the circle, and $f_2(t)$ to be the next element of t moving counterclockwise on the circle, as in **Step 6** of **Section 6.1**.

Case A. $C_j^{blue} \in \mathcal{C}_{good}^{blue}$

In this case we know that C_j^{blue} can only have red representatives.

Case A.I. The length of C_j^{blue} is congruent to $0(mod3)$

Let $C_j^{blue} = (w_j^1, \dots, w_j^{n_j}, w_j^1)$ where $n_j \equiv 0(mod3)$. We arbitrarily color the edge (w_j^1, w_j^2) with color $c((w_j^1, w_j^2)) = c_1$. Then, for $i = 2, \dots, n_j$ we color

$$c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)), \text{ where } w_j^{n_j+1} = w_j^1.$$

Apparently $f_1(c(w_j^{n_j}, w_j^1)) = c(w_j^1, w_j^2)$ and two adjacent vertices have different colors assigned to their incident blue edges. For every red representative u^{red} in C_j^{blue} , we assign $c(u^{red})$ to be the only color in $\{5, 6, 7\}$ not assigned to its incident edges (see **Figures 6.6a-6.6b**).

Case A.II. The length of C_j^{blue} is congruent to $1(mod3)$

By **Step 4** C_j^{blue} has at least two red representatives, say $u_{i_1}^{red}$ and $u_{i_2}^{red}$. Suppose that the two red representatives are not adjacent, that is $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, w_j^2, \dots, u_{i_2}^{red}, \dots, w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})$ where $n_j \equiv 1(mod3)$, $w_j^1 = u_{i_1}^{red}$ and $w_j^s = u_{i_2}^{red}$ (see **Figure 6.6c**). We arbitrarily color vertex $u_{i_1}^{red}$ with color $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$. We color the

edge $(u_{i_1}^{red}, w_j^2)$ as $c(u_{i_1}^{red}, w_j^2) = f_1(c_1)$ and for $i = 2, \dots, n_j$ we color

$$\begin{cases} c(w_j^s) &= f_1(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^i)) & \text{if } i = s \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{if } i \neq 1, s \end{cases}, \text{ where } w_j^{n_j+1} = w_j^1 = u_{i_1}^{red}$$

If C_j^{blue} has two adjacent red representatives, then $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^3, \dots, w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})$ where $n_j \equiv 1 \pmod{3}$, $w_j^1 = u_{i_1}^{red}$ and $w_j^2 = u_{i_2}^{red}$ (see Figure 6.6d). Let $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ and $c(u_{i_2}^{red}) = c_2$, be an arbitrary coloring of the red representatives with $c_2 = f_2(c_1)$. We color the edge $(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red})$ as $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_1(c_1)$ and the edge $(u_{i_2}^{red}, w_j^3)$ as $c(u_{i_2}^{red}, w_j^3) = f_1(c_2)$. For $i = 3, \dots, n_j$ we color

$$c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)), \text{ where } w_j^{n_j+1} = w_j^1 = u_{i_1}^{red}$$

Apparently $f_1(c(w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})) = c_1$ and two adjacent simple vertices have different colors assigned to their blue edges. For every other red representative u^{red} in C_j^{blue} , we assign to u^{red} the only color in $\{5, 6, 7\}$ not assigned to its incident edges.

Case A.III. The length of C_j^{blue} is congruent to $2 \pmod{3}$

By Step 4 C_j^{blue} has at least one red representative, say u^{red} and no pair of adjacent red representatives, or a pair of adjacent red representatives and at least one more red representative.

– In the first case let $C_j^{blue} = (u^{red}, w_j^1, \dots, w_j^{n_j}, u^{red})$, where $n_j + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ (see Figure 6.6e). Let $c(u^{red}) = c_1$ be an arbitrary color. We color $c(u^{red}, w_j^1) = f_1(c_1)$ and for $i = 1, 2, \dots, n_j$:

$$c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)), \text{ where } w_j^{n_j+1} = w_j^0 = u^{red}$$

For every other red representative u^{red} in C_j^{blue} we assign $c(u^{red})$ to be the only color in $\{5, 6, 7\}$ not assigned to its incident edges.

– If C_j^{blue} has a pair of adjacent red representatives, then $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \dots, u^{red}, \dots, w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})$, where $u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}$ and $u^{red} = w_j^s$ are the red representatives (see Figure 6.6f). Let $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ and $c(u_{i_2}^{red}) = c_2$ be an arbitrary coloring of the adjacent red representatives with $c_2 = f_1(c_1)$. We color the edge $(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red})$ as $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1)$ and the edge $(u_{i_2}^{red}, w_j^1)$ as $c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_2)$. For $i = 1, \dots, n_j$ we color

$$\begin{cases} c(w_j^s) &= f_1(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^i)) & \text{if } i = s \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{if } i \neq s \end{cases}$$

where $w_j^{n_j+1} = u_{i_1}^{red}$ and $w_j^0 = u_{i_2}^{red}$.

Apparently $f_2(c(w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})) = c_1$ and two adjacent vertices except for u^{red} have different colors assigned to their blue edges. For every other red representative u^{red} in C_j^{blue} we assign $c(u^{red})$ to be the only color in $\{5, 6, 7\}$ not assigned to its incident edges.

Step 9: ordering the blue cycles

Recall that the purpose of blue representatives was to assure that there exists a proper coloring for the blue cycles. However, blue representatives are not necessarily independent (they can be adjacent to red or blue representatives along a red cycle). Our aim is to define an ordering of the blue cycles, based on the three categories defined in the previous step (the blue cycles in C_{good}^{blue} that contain only red representatives or no representatives, the blue cycles in C_{bad}^{blue} with no forced blue representatives and the cycles in C_{bad}^{blue} with a forced blue representative). The reason is that there are only pairs of adjacent red representatives, simple blue representatives can only be adjacent to at most one red representative, while forced representatives can be adjacent to at most two other representative vertices (red, blue or forced). So our aim is to color first all red representatives (some are already colored in Step 8), then simple blue representatives and finally forced representatives (see Figure 6.13). Still, the above ordering of the blue cycles may not respect the desired order for the representative vertices, since there are blue cycles in the last category of C_{bad}^{blue} that have a red and a forced representative. In order to overcome this problem we pick a starting vertex or a pair of starting vertices for every blue cycle. Our aim is to color all starting vertices, so that when we color the blue cycles in the proposed order, the order of representative vertices is also respected. In particular, let C^{blue} be a blue cycle.

- If C^{blue} has been colored in Step 8, then all the red representatives it contains are colored (note that $C^{blue} \in C_{good}^{blue}$).
- If C^{blue} has one red representative, we pick it as a starting vertex.
- If C^{blue} has a pair of adjacent red representatives, we pick both of them as starting vertices.
- If C^{blue} has no red representatives, we pick one of its simple blue representatives as a starting vertex (there is at least one simple blue representative).

We take the induced subgraph of G with vertex set the set of colored red representatives and the starting vertices as an auxiliary graph H' . Then the auxiliary graph H' contains independent vertices and paths of at most four vertices. Some vertices of H' are colored by 5, 6 or 7. We can easily expand this partial coloring to the proper color-

ing of all vertices of H' by properly assigning 5, 6, 7 to the (not colored by 5, 6, 7) red representatives firstly.

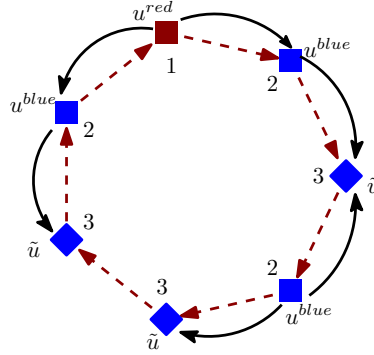


Figure 6.13: Desired order of representative vertices. The solid arrows show how the coloring of a representative vertex is restricted by the ordering: A representative vertex can't have the same color with a neighbor that is already colored.

Having colored the starting vertices of blue cycles, all red representatives are colored as well as some simple blue representatives. Then, if we color the remaining two classes of blue cycles in the order proposed above, it follows that all simple blue representatives will be colored before the forced representatives.

Step 10: coloring the blue cycles

In this step we will color the last two categories of blue cycles (i.e. blue cycles of C_{bad}^{blue}), that is blue cycles with at least one simple blue representative and blue cycles with a forced blue representative.

Case B. $C_j^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ with no forced blue representative

In this case we know that C_j^{blue} has at least one (simple) blue representative, say u^{blue} . If C_j^{blue} has a total of at least two representatives u_{i_1} and $u_{i_2}^{blue}$ (u_{i_1} is either blue or red), we claim that, given the color of u_{i_1} , there are two colorings such that $u_{i_2}^{blue}$ takes a different color. This implies that when we color a blue cycle of **Case B**, this blue representative can always have different color from its neighboring colored representative vertices on a red cycle (since a simple blue representative can only have one representative neighbor that has already been colored).

Case B.I. The length of C_j^{blue} is congruent to $3(mod6)$ and C_j^{blue} has no forced blue representative

In this case, C_j^{blue} has only one blue representative that is its starting vertex. The coloring of C_j^{blue} is the same as **Case A.I**, where w_j^1 is the blue representative and $c(w_j^1, w_j^2) = f_2(c(w_j^1))$.

Case B.II. The length of C_j^{blue} is congruent to $1(mod3)$ and C_j^{blue} has no forced blue representative

By **Step 5** we have that C_j^{blue} has exactly two representatives, say u_{i_1} and $u_{i_2}^{blue}$, where u_{i_1} is its starting vertex and can be a red or a blue representative. Let $C_j^{blue} = (u_{i_1}, w_j^2, \dots, u_{i_2}^{blue}, \dots, w_j^{n_j}, u_{i_1})$ where $n_j \equiv 1(mod3)$, $w_j^1 = u_{i_1}$ and $w_j^s = u_{i_2}^{blue}$, where $1 < s < n_j$. Let $c(u_{i_1}) = c_1$. We follow the coloring of **Case A.II**, that is we color the edge (u_{i_1}, w_j^2) as $c(u_{i_1}, w_j^2) = f_1(c_1)$ and for $i = 2, \dots, n_j$ we color

$$\begin{cases} c(w_j^s) &= f_1(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^i)) & \text{if } i = s \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{if } i \neq 1, s \end{cases}$$

The coloring is shown in **Figures 6.14a, 6.14c, 6.14e** for different values of $s(mod3)$. But our aim is to find another coloring such that $u_{i_2}^{blue}$ gets a different color. In fact we will alter the above coloring. We have $c(u_{i_1}) = c_1$, $c(u_{i_1}, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$ and $c(w_j^{n_j}, u_{i_1}) = f_2(c_1) = c_3$, where colors $\{c_1, c_2, c_3\}$ are all distinct. If $c(u_{i_2}^{blue}) \neq c_1$ then we swap colors c_2 and c_3 (equivalently we apply f_2 instead of f_1 on the above coloring and f_1 instead of f_2) and vertex $u_{i_2}^{blue}$ can take color c_2 or c_3 without changing the color of u_{i_1} (see **Figures 6.14b, 6.14d**). If $c(u_{i_2}^{blue}) = c_1$ (which can only happen if $s \equiv 0(mod3)$), then we modify the above coloring as follows:

$$\begin{cases} c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{if } 2 \leq i \leq s-1 \\ c(w_j^s) &= f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_2(c(w_j^i)) & \text{if } i = s \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_2(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{if } s+1 \leq i \leq n_j \end{cases}, \text{ where } w_j^s = u_{i_2}^{blue}$$

Actually we swap colors c_1 and c_2 only on the path $(u_{i_2}^{blue}, \dots, w_j^{n_j})$. So vertex $u_{i_2}^{blue}$ can take color c_1 or c_2 without changing the color of u_{i_1} (see **Figure 6.14f**).

Case B.III. The length of C_j^{blue} is congruent to $2(mod3)$ and C_j^{blue} has no forced blue representative

By **Step 4** C_j^{blue} has only one blue representative or two red adjacent representatives and a blue one.

- If C_j^{blue} has only one blue representative, say u^{blue} , then u^{blue} is the starting vertex and we color the edges of C_j^{blue} as in **Case A.III**. (where u^{blue} has the role of u^{red} in **Case A.III**).
- Suppose now that C_j^{blue} has two red adjacent representatives, say $u_{i_1}^{red}$ and $u_{i_2}^{red}$, and a blue one, say u^{blue} . Then $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \dots, u^{blue}, \dots, w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})$, where $n_j + 2 \equiv 2(mod3)$ and $u^{blue} = w_j^s$. Note that it cannot be the

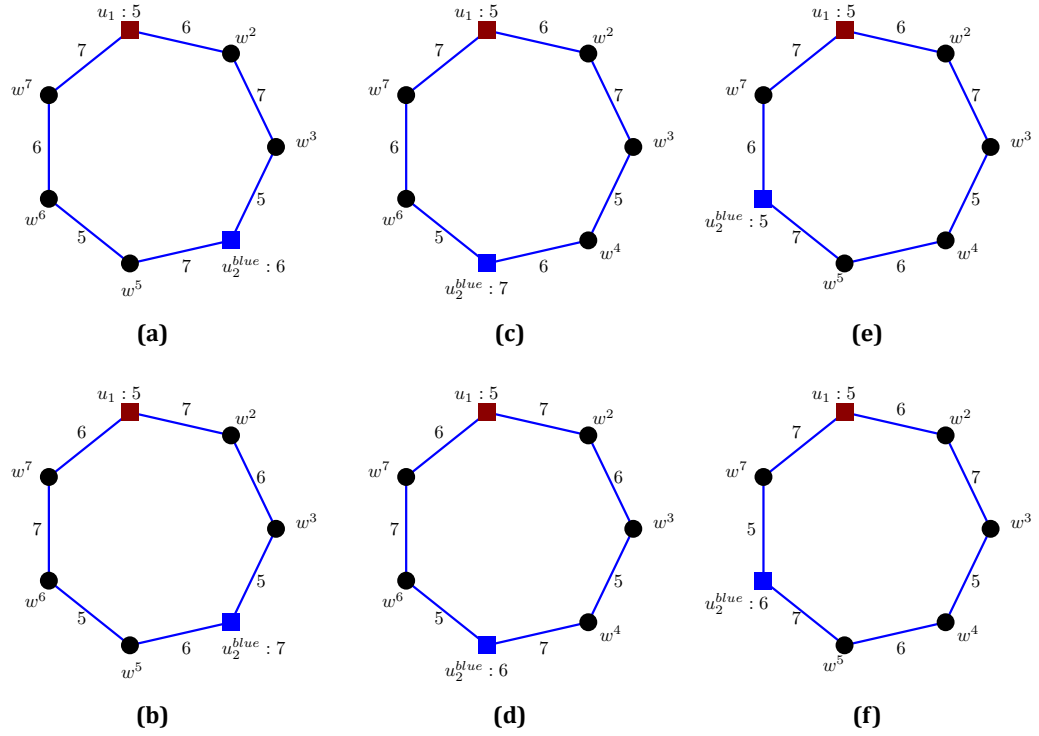


Figure 6.14: Coloring blue cycles of **Case B.II** for: (a)-(b) $s \equiv 1(\text{mod}3)$, (c)-(d) $s \equiv 2(\text{mod}3)$, (e)-(f) $s \equiv 0(\text{mod}3)$.

case that $s \equiv 0(\text{mod}3)$ or $s \equiv 1(\text{mod}3)$ since these vertices belong to \tilde{C}^* from **Step 5**. The adjacent red representatives $u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}$ are the starting vertices of the blue cycle. Let $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ and $c(u_{i_2}^{red}) = c_2$. W.l.o.g. we can assume that $c_2 = f_1(c_1)$. We color the edge $(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red})$ as $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1)$ and the edge $(u_{i_2}^{red}, w_j^1)$ as $c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_2)$. We have the following coloring:

$$\begin{cases} c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_2(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{if } 1 \leq i \leq s-1 \\ c(w_j^s) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^i)) & \text{if } i = s \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{if } s+1 \leq i \leq n_j \end{cases}$$

where $w_j^0 = u_{i_2}^{red}$ and $w_j^{n_j+1} = u_{i_1}^{red}$.

Apparently $c(w_j^s) = c_2$. **Figure 6.15a** shows the coloring for $s \equiv 2(\text{mod}3)$. In this case, we can obtain a second coloring where the blue representative takes different color by altering the coloring of **Figure 6.15a**: we swap colors c_2 and c_3 on the path $(w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^s)$, and color $c(w_j^s) = c_3$ (see **Figure 6.15b**).

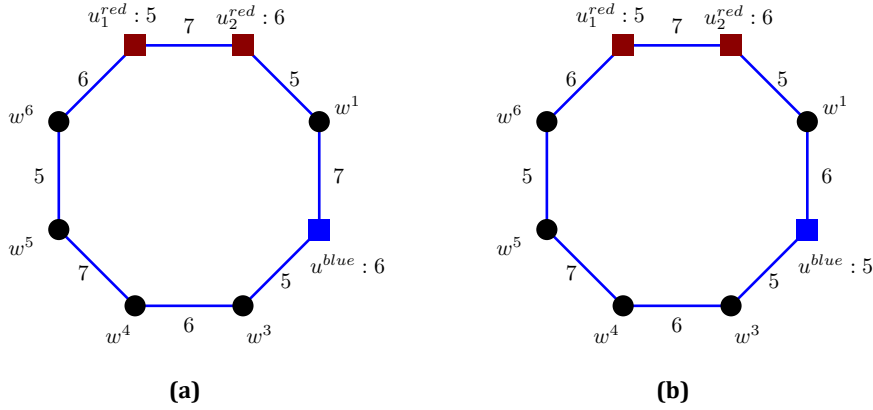


Figure 6.15: Coloring blue cycles of Case B.III.

Case C. $C_j^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ with a forced blue representative

In this case we know that C_j^{blue} is either a C_5 with two adjacent red representatives as starting vertices and a forced blue representative \tilde{u}^{blue} , or C_j^{blue} is a C_8 with two adjacent red representatives as starting vertices and a forced blue representative \tilde{u}^{blue} , or C_j^{blue} is a C_4 with one representative vertex (red or simple blue) as starting vertex and a forced blue representative \tilde{u}^{blue} , or C_j^{blue} is a C_7 with one blue representative vertex as starting vertex and a forced blue representative \tilde{u}^{blue} . In all four cases, given the color of the starting vertices arbitrarily, our aim is to show that there are three colorings such that \tilde{u}^{blue} takes a different color, that is \tilde{u}^{blue} can take all three colors in $\{5, 6, 7\}$. This implies that when we color a blue cycle of Case C, the forced blue representative can always have a different color from its neighboring colored representative vertices on a red cycle (since a forced blue representative can have at most two representative neighbors that have already been colored). Note that by Step 4 the length of $C_j^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ can't be congruent to $0(mod3)$.

Case C.I. The length of C_j^{blue} is congruent to $1(mod3)$ and C_j^{blue} has a forced blue representative \tilde{u}^{blue} that is not of type $(1, 4)$

If the length of C_j^{blue} is congruent to $1(mod3)$ and there is a forced blue representative \tilde{u}^{blue} , then $C_j^{blue} = C_4$ or C_7 .

- Let $C_j^{blue} = C_4 = (u, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, u)$, where u is either a red or a blue representative. Vertex u is the starting vertex of C_4 with color $c(u) = c_1$. We color $c(u, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$ and $c(w_j^2, u) = f_2(c_1) = c_3$. For the other elements

we have the following three possible colorings:

$$\begin{cases} c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_2 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_2 \end{cases}$$

It is clear that vertex \tilde{u}^{blue} can have all three colors from $\{5, 6, 7\}$ without changing the color of u (see **Figure 6.16**).

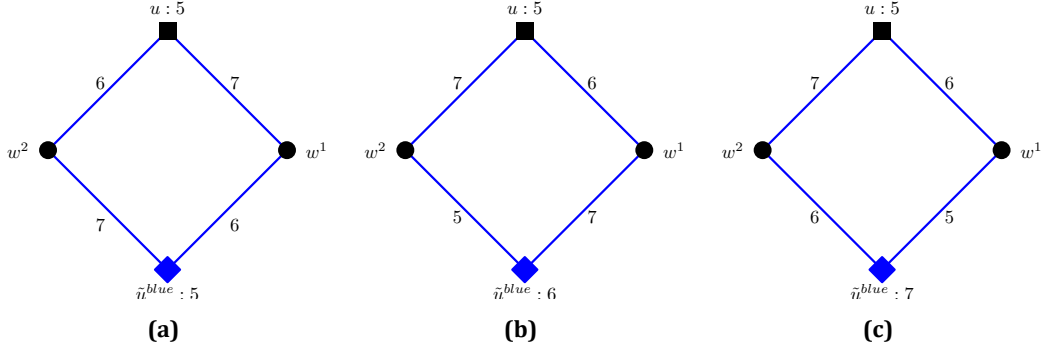


Figure 6.16: (a)-(c) Coloring blue cycles of **Case C.I:** C_4 .

–Similarly let $C_j^{blue} = C_7 = (u^{blue}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, \dots, w_j^5, u^{blue})$, with the starting vertex u^{blue} colored as $c(u^{blue}) = c_1$ (recall that if a blue C_7 cycle has a forced representative, then its starting vertex is a simple blue representative). We color $c(u^{blue}, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(w_j^5, u^{blue}) = f_2(c_1) = c_3$ and have the following three possible colorings:

$$\begin{cases} c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_2 & c(w_j^2, w_j^3) = c_3 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 & c(w_j^2, w_j^3) = c_3 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_2 & c(w_j^2, w_j^3) = c_3 \end{cases}$$

and for the other edges

$$c(w_j^s, w_j^{s+1}) = \begin{cases} f_1(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ f_1(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \end{cases} \text{ for } s = 3, 4, \text{ respectively.}$$

It is clear that vertices w_j^s and w_j^{s+1} have different colors assigned to their blue edges for $s = 2, 3, 4$, and vertex \tilde{u}^{blue} can have all three colors from $\{5, 6, 7\}$ without changing the color of u^{blue} (see **Figure 6.17**).

Case C.II. The length of C_j^{blue} is congruent to $2 \pmod{3}$ and C_j^{blue} has a forced blue representative \tilde{u}^{blue} that is not of type $(1, 4)$

In this case by **Step 5** we have that $C_j^{blue} = C_5$ or C_8 with two red representatives, say $u_{i_1}^{red}$ and $u_{i_2}^{red}$, and one forced blue representative \tilde{u}^{blue} .

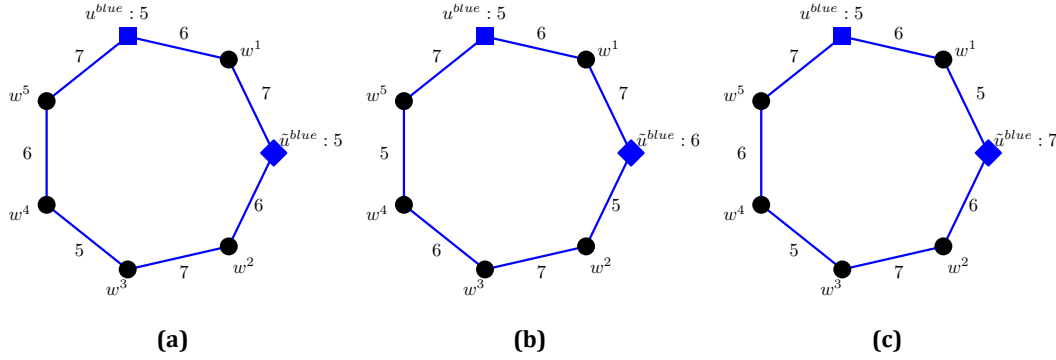


Figure 6.17: (a)-(c) Coloring blue cycles of **Case C.I**: C_7 .

–If C_j^{blue} has 5 vertices, then $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, u_{i_1}^{red})$, where the red representatives $u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}$ are the starting vertices. Assume that $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ and $c(u_{i_2}^{red}) = f_1(c_1) = c_2$. Then we color $c(w_j^2, u_{i_1}^{red}) = f_1(c_2) = c_3$, $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_3) = c_1$ and $c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_1) = c_2$. For the other elements we have the following possible colorings:

$$\begin{cases} c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_3 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 \end{cases}$$

It is clear that vertex \tilde{u}^{blue} can have all three colors from $\{5, 6, 7\}$ without changing the color of $u_{i_1}^{red}$ or $u_{i_2}^{red}$ (see **Figure 6.18**).

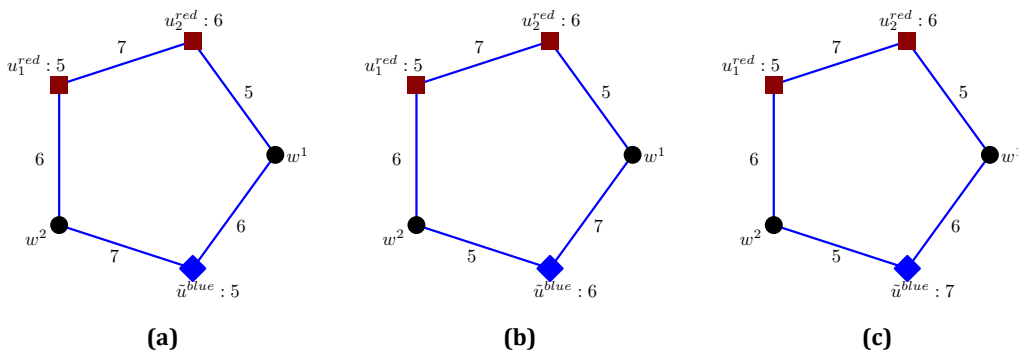


Figure 6.18: (a)-(c) Coloring blue cycles of **Case C.II**: C_5 .

–If C_j^{blue} has 8 vertices, then $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, \dots, w_j^5, u_{i_1}^{red})$, where the red representatives $u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}$ are the starting vertices. Let $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ and $c(u_{i_2}^{red}) = f_1(c_1) = c_2$. Then we color $c(w_j^5, u_{i_1}^{red}) = f_1(c_2) = c_2$, $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_2) = c_3$ and $c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_3) = c_1$. For the other

elements we have the following possible colorings:

$$\left\{ \begin{array}{lll} c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_3 \\ c(w_j^2, w_j^3) = c_2 & c(w_j^3, w_j^4) = c_1 & c(w_j^4, w_j^5) = c_3 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 \\ c(w_j^2, w_j^3) = c_2 & c(w_j^3, w_j^4) = c_3 & c(w_j^4, w_j^5) = c_1 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 \\ c(w_j^2, w_j^3) = c_2 & c(w_j^3, w_j^4) = c_3 & c(w_j^4, w_j^5) = c_1 \end{array} \right.$$

It is clear that vertex \tilde{u}^{blue} can have all three colors from $\{5, 6, 7\}$ without changing the color of $u_{i_1}^{red}$ or $u_{i_2}^{red}$ (see Figure 6.19)).

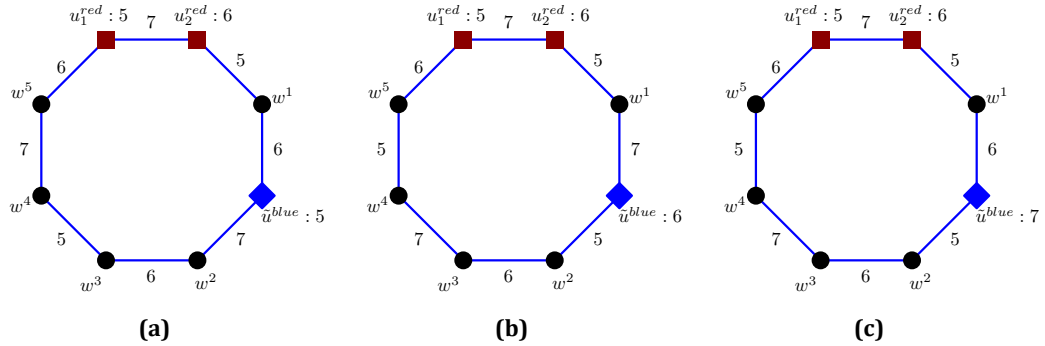


Figure 6.19: (a)-(c) Coloring blue cycles of Case C.II: C_8 .

In the two last sub-cases we turn our attention to blue cycles with a forced blue representative that is of type $(1, 4)$. Recall that such a vertex belongs to a red C_5 where every other vertex is a representative. Also, on the blue cycle the forced blue representative belongs, exactly one of its neighbors is also of type $(1, 4)$. Every pair of type $(1, 4)$ vertices has different color set from their other neighboring vertices. Also they have different vertex color from one another and the edge joining them has color in $\{1, 2, 3, 4\}$. So, it remains to assure that they will also have different color set.

Case C.III. The length of C_j^{blue} is congruent to $1(mod3)$ and C_j^{blue} has a forced blue representative \tilde{u}^{blue} that is of type $(1, 4)$

–As in Case C.I, let $C_j^{blue} = C_4 = (u, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, u)$. W.l.o.g. we can assume that \tilde{u}^{blue} and w_j^1 are the vertices of type $(1, 4)$ chosen at Step 7. The edge $(\tilde{u}^{blue}, w_j^1)$ has been colored from $\{1, 2, 3, 4\}$ in Step 7, so these vertices will be distinguished by the color of their other incident edges along the blue cycle. We only need to assure that there is a coloring where edges (u, w_j^1) and $(\tilde{u}^{blue}, w_j^2)$ take different colors from $\{5, 6, 7\}$. Since u is the starting vertex, let $c(u) = c_1$. Then we color $c(u, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(w_j^2, u) = f_2(c_1) = c_3$ and $c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1$ (see Figure 6.20a).

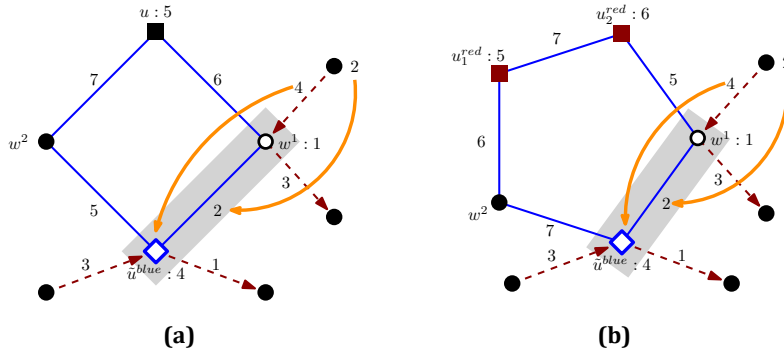


Figure 6.20: (a) Coloring blue cycles of Case C.III: C_4 . (b) Coloring blue cycles of Case C.IV: C_5 .

–Similarly let $C_j^{blue} = C_7 = (u^{blue}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, \dots, w_j^5, u^{blue})$, with the starting vertex u^{blue} colored as $c(u^{blue}) = c_1$.

If \tilde{u}^{blue} and w_j^1 are the vertices of type (1, 4) chosen at Step 7 we want edges (u^{blue}, w_j^1) and $(\tilde{u}^{blue}, w_j^2)$ to have different colors. We color $c(u^{blue}, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(w_j^5, u^{blue}) = f_2(c_1) = c_3$, $c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1$, $c(w_j^2, w_j^3) = c_3$ and $c(w_j^s, w_j^{s+1}) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s))$ for $s = 3, 4$ (see Figure 6.21a).

If \tilde{u}^{blue} and w_j^2 are the vertices of type (1, 4) chosen at Step 7 we want edges $(w_j^1, \tilde{u}^{blue})$ and (w_j^2, w_j^3) to have different colors. Then, we color $c(u^{blue}, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_1$, $c(w_j^5, u^{blue}) = f_2(c_1) = c_3$, $c(w_j^2, w_j^3) = c_3$ and $c(w_j^s, w_j^{s+1}) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s))$ for $s = 3, 4$ (see Figure 6.21b).

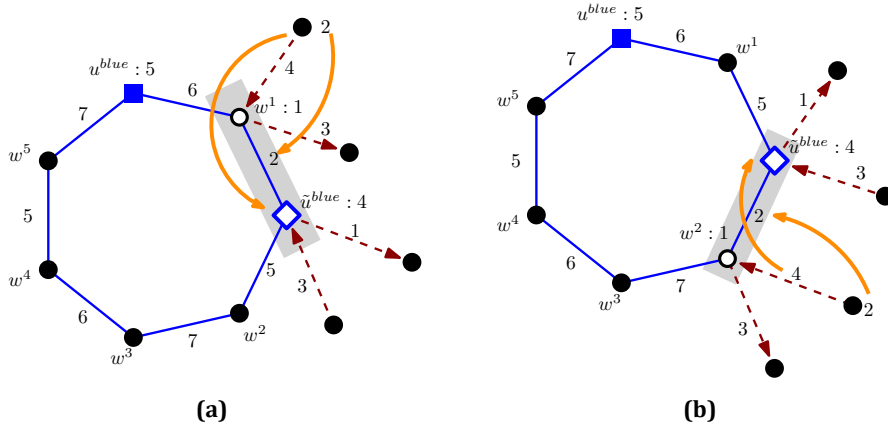


Figure 6.21: (a)-(b) Coloring blue cycles of Case C.III: C_7 .

Case C.IV. The length of C_j^{blue} is congruent to $2(mod3)$ and C_j^{blue} has a forced blue representative \tilde{u}^{blue} that is of type (1, 4)

As in Case C.II we have that C_j^{blue} has either 5 or 8 vertices.

–Let $C_j^{blue} = C_5 = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, u_{i_1}^{red})$. W.l.o.g. we can assume that \tilde{u}^{blue} and w_j^1 are the vertices of type (1, 4) chosen at Step 7. We want to assure

that there is a coloring where edges $(u_{i_2}^{red}, w_j^1)$ and $(\tilde{u}^{blue}, w_j^2)$ take different color from $\{5, 6, 7\}$. For the starting vertices $u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}$ let $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ and $c(u_{i_2}^{red}) = c_2$. W.l.o.g. we can assume that $c_2 = f_1(c_1)$. We color $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1) = c_3, c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_1(c_3) = c_1, c(w_j^2, u_{i_1}^{red}) = f_1(c_1) = c_2$, and $c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_3$ (see Figure 6.20b).

–If C_j^{blue} has 8 vertices, then $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, \dots, w_j^5, u_{i_1}^{red})$. Let $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ and $c(u_{i_2}^{red}) = c_2$, where we can assume w.l.o.g. that $c_2 = f_1(c_1)$.

If \tilde{u}^{blue} and w_j^1 are the vertices of type (1, 4) we want edges $(u_{i_2}^{red}, w_j^1)$ and $(\tilde{u}^{blue}, w_j^2)$ to have different colors. We color $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1) = c_3, c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_2) = c_1, c(w_j^5, u_{i_1}^{red}) = f_1(c_1) = c_2, c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_3, c(w_j^2, w_j^3) = c_2$ and $c(w_j^s, w_j^{s+1}) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s))$ for $s = 3, 4$ (see Figure 6.22a).

If \tilde{u}^{blue} and w_j^2 are the vertices of type (1, 4) we want edges $(w_j^1, \tilde{u}^{blue})$ and (w_j^2, w_j^3) to have different colors. Then, we color $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1) = c_3, c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_2) = c_1, c(w_j^5, u_{i_1}^{red}) = f_1(c_1) = c_2, c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3, c(w_j^2, w_j^3) = c_2$ and $c(w_j^s, w_j^{s+1}) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s))$ for $s = 3, 4$ (see Figure 6.22b).

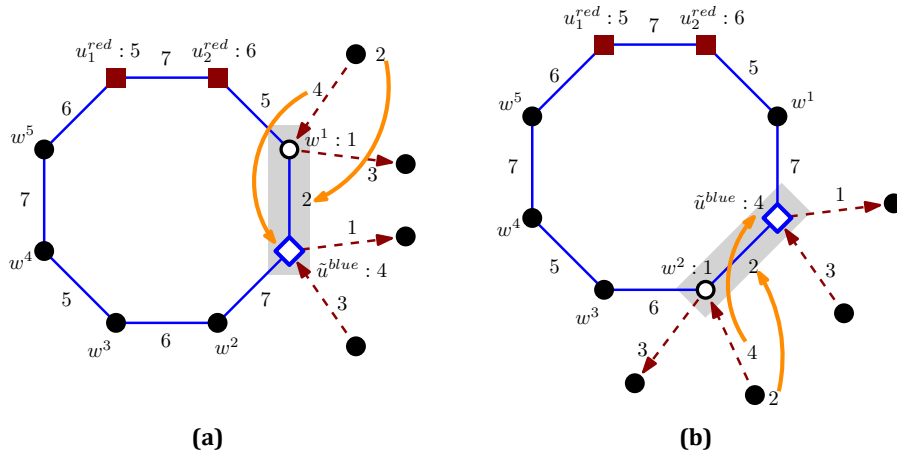


Figure 6.22: (a)-(b) Coloring blue cycles of Case C.IV: C_8 .

Step 11: adjacent vertices of type (1,4) and (12) with the same vertex color

Recall that along a blue cycle, a forced representative of type (1, 4) has one neighbor of type (1, 4) and one of type (12). At the end of Step 7 we noted that the forced representative and its neighbor of type (12) might have the same vertex color. One such situation is depicted in Figure 6.23a:

We have a red $C_5 = (u^{red}, w_1, w_2, w_3, w_4, u^{red})$, with vertex w_2 being of type (1, 4).

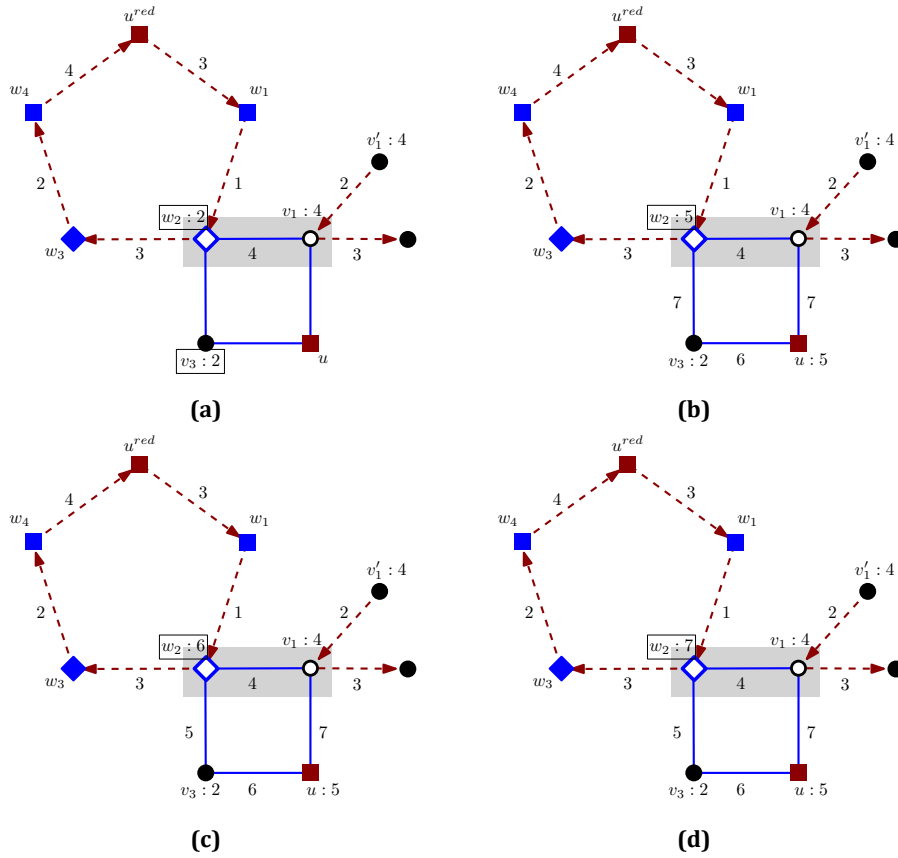


Figure 6.23: Situation of Step 11.

The blue cycle where w_2 belongs has 4 vertices, $C^{blue} = \{u, v_1, w_2, v_3, u\}$ with starting vertex u . Vertex v_1 is of type $(1, 4)$ with vertex color 1, and red in-edge $\vec{e}(v_1) = (v_1', v_1)$. The coloring of the red C_5 is determined by the color of vertex v_1' . In Figure 6.23a vertex v_1' has swapped color with its red out-edge, therefore w_2 has vertex color 2, the same as vertex v_3 . In this case, we change the color of vertex w_2 to be in $\{5, 6, 7\}$ (see Figure 6.23b). By doing this, vertex w_2 has color set of type (1) and vertex color of type (u) . In fact the type of w_2 is not any of the six types of vertices defined at the beginning of the section. Since this new type occurs only as a special case and can be treated with local changes of the coloring, we do not define a new type for these vertices. The color set of w_2 is different from the color sets of its neighbors: v_1 is of type $(1, 4)$, v_3 of type (2) , w_1 of type (u^{odd}) and w_3 of type (u^*) . However since the vertex color of w_2 may take any one in $\{5, 6, 7\}$ we may have a coloring of C_4 so that the color of w_2 is different from the vertex color of w_1 and w_3 . In Figures 6.23b-6.23d, we see that w_2 can take any color in $\{5, 6, 7\}$ without changing the vertex color of the starting vertex of the blue C_4 (the starting vertex u has color 5 in Figure 6.23).

From the above, it is clear that we have to allow the forced blue representative of

C^{blue} to take any color in $\{5, 6, 7\}$. The same can apply to every similar case. More precisely suppose that we have a red $C_5 = (u^{red}, w_1, w_2, w_3, w_4, u^{red})$, with vertex w_2 being of type (1, 4) and with the same vertex color as its neighbor of type (12) along its blue cycle. The blue cycle C^{blue} where w_2 belongs is of length 4, 5, 7 or 8. The case of C^{blue} having 4 vertices is covered above, leaving three more cases.

- If the length of the blue cycle is 5 then $C^{blue} = (u_1^{red}, u_2^{red}, v_1, w_2, v_3, u_1^{red})$, and w.l.o.g. we can assume that v_1 is also of type (1, 4). Let $c(u_1^{red}) = c_1$ and $c(u_2^{red}) = f_1(c_1) = c_2$. Then we color $c(v_3, u_1^{red}) = f_1(c_1) = c_2$, $c(u_1^{red}, u_2^{red}) = f_2(c_1) = c_3$ and $c(u_2^{red}, v_1) = f_2(c_2) = c_1$. For the remaining elements we have the following possible colorings:

$$\begin{cases} c(w_2) = c_1 & c(w_2, v_3) = c_3 \\ c(w_2) = c_2 & c(w_2, v_3) = c_1 \\ c(w_2) = c_3 & c(w_2, v_3) = c_1 \end{cases}$$

- If the length of the blue cycle is 7 then $C^{blue} = (u^{blue}, v_1, w_2, v_3, \dots, v_6, u^{blue})$, with the starting vertex u^{blue} colored as $c(u^{blue}) = c_1$. Here vertex v_1 or v_3 might be the neighbor of w_2 along the blue cycle that is of type (1, 4). If w_2 and v_1 are the vertices of type (1, 4) chosen at **Step 7** we color $c(u^{blue}, v_1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(v_6, u^{blue}) = f_2(c_1) = c_3$ and have the following three possible colorings:

$$\begin{cases} c(w_2) = c_1 & c(w_2, v_3) = c_2 & c(v_3, v_4) = c_3 \\ c(w_2) = c_2 & c(w_2, v_3) = c_1 & c(v_3, v_4) = c_3 \\ c(w_2) = c_3 & c(w_2, v_3) = c_2 & c(v_3, v_4) = c_3 \end{cases}$$

and for the other edges

$$c(v_s, v_{s+1}) = \begin{cases} f_1(c(v_{s-1}, v_s)) \\ f_2(c(v_{s-1}, v_s)) \\ f_1(c(v_{s-1}, v_s)) \end{cases} \text{ for } s = 4, 5$$

If w_2 and v_3 are the vertices of type (1, 4) chosen at **Step 7** we color $c(u^{blue}, v_1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(v_6, u^{blue}) = f_2(c_1) = c_3$, $c(v_3, v_4) = c_3$, $c(v_s, v_{s+1}) = f_1(c(v_{s-1}, v_s))$ for $s = 4, 5$, and have the following three possible colorings for the remaining elements:

$$\begin{cases} c(v_1, w_2) = c_3 & c(w_2) = c_1 \\ c(v_1, w_2) = c_3 & c(w_2) = c_2 \\ c(v_1, w_2) = c_1 & c(w_2) = c_3 \end{cases}$$

- If C_j^{blue} has 8 vertices, then $C^{blue} = (u_1^{red}, u_2^{red}, v_1, w_2, v_3, \dots, v_6, u_1^{red})$, where the red representatives u_1^{red}, u_2^{red} are the starting vertices. Assume that $c(u_1^{red}) = c_1$ and $c(u_2^{red}) = f_1(c_1) = c_2$. Here vertex v_1 or v_3 might be the neighbor of w_2 along the blue cycle that is of type (1, 4). If w_2 and v_1 are the vertices of type (1, 4) chosen at **Step 7** we color $c(v_6, u_1^{red}) = f_1(c_1) = c_2$, $c(u_1^{red}, u_2^{red}) = f_2(c_1) = c_3$, $c(u_2^{red}, v_1) = f_2(c_2) = c_1$ and have the following three possible colorings:

$$\begin{cases} c(w_2) = c_1 & c(w_2, v_3) = c_3 & c(v_3, v_4) = c_2 \\ c(w_2) = c_2 & c(w_2, v_3) = c_3 & c(v_3, v_4) = c_2 \\ c(w_2) = c_3 & c(w_2, v_3) = c_1 & c(v_3, v_4) = c_2 \end{cases}$$

and for the other edges

$$c(v_s, v_{s+1}) = \begin{cases} f_2(c(v_{s-1}, v_s)) \\ f_2(c(v_{s-1}, v_s)) & \text{for } s = 4, 5 \\ f_1(c(v_{s-1}, v_s)) \end{cases}$$

If w_2 and v_3 are the vertices of type (1, 4) chosen at **Step 7** we color $c(v_6, u_1^{red}) = f_1(c_1) = c_2$, $c(u_1^{red}, u_2^{red}) = f_2(c_1) = c_3$, $c(u_2^{red}, v_1) = f_2(c_2) = c_1$, $c(v_3, v_4) = c_2$ and $c(v_s, v_{s+1}) = f_1(c(v_{s-1}, v_s))$ for $s = 4, 5$. For the other elements we have the following possible colorings:

$$\begin{cases} c(v_1, w_2) = c_3 & c(w_2) = c_1 \\ c(v_1, w_2) = c_3 & c(w_2) = c_2 \\ c(v_1, w_2) = c_2 & c(w_2) = c_3 \end{cases}$$

In all the above colorings we have that vertex w_2 can take any color in $\{5, 6, 7\}$, so that the color of w_2 is different from the vertex color of w_1 and w_3 along the red C_5 .

Now that all elements of G have been colored we need to show the following:

Claim 2: The above algorithm produces an AVDTC of G with 7 colors.

Proof. Previously (at **Step 7**), after using colors $\{1, 2, 3, 4\}$, we saw that there were different vertex colors and color sets for certain adjacent vertices. So, in order to prove the claimed result we only need to show that the use of colors $\{5, 6, 7\}$ takes care of the following: adjacent simple vertices on a blue cycle have different color sets. This is true as noted in **Step 8** and **Step 10**. Also, adjacent vertices of type (1, 4) have different color sets. This is settled in **Step 10: Case C.III-C.IV**, while **Step 11** settles situations where a vertex of type (1, 4) has the same vertex color with one of its neighbors. Finally, adjacent representative vertices have different vertex colors. This is provided by the ordering of the blue cycles and the initial coloring of the starting vertices. Therefore, we proved that all adjacent or incident elements of G have different colors and any two adjacent vertices have different color sets, satisfying the definition of AVDTC. \square

Part B: Graph Drawing

The motivation for this chapter is Lovász' Conjecture that every connected 4-regular planar graph G admits a realization as a system of circles (refer to [Conjecture 2.2](#)). First, we provide tight upper and lower bounds on the number of circles needed in a realization of any simple 4-regular planar graph. Furthermore, we affirmatively answer Lovász's conjecture, if G is 3-connected, and demonstrate an infinite class of simple connected 4-regular planar graphs which are not 3-connected (i.e., either simply connected or biconnected) and do not admit realizations as a system of circles.

7.1 Bounds on the Number of Circles Needed in a Circle Representation of a Simple 4-Regular Planar Graph

In this section, we present upper and lower bounds on the number of circles needed in a realization of a simple connected 4-regular planar graph as a system of circles. We also prove that these bounds are tight, i.e., there exist infinitely many connected 4-regular planar graphs that admit realizations as system of circles and use the number of circles given by the two bounds.

Lemma 7.1. *Let G be a simple connected 4-regular planar graph on n vertices. Then, the number of circles, say $c[G]$, that participate in a realization of G as system of circles, if one exists, satisfies the following inequality:*

$$(1 + \sqrt{1 + 4n})/2 \leq c[G] \leq 2n/3.$$

Proof. In general, there are certain restrictions concerning the number of circles that participate in a realization of a graph as a system of circles:

- Two circles may have at most two vertices in common: Two crossing points if they intersect, one touching point if they are tangent, or none if they are separated.
- There exist at least three vertices on every circle, since we consider only simple graphs.

- Every vertex belongs to exactly two circles, since every vertex has degree 4.

From the latter two properties, it follows that in any realization of G as a system of circles, the number of vertices of G defined by all circles is at least $3c[G]/2$, which immediately implies the desired upper bound, i.e. $c[G] \leq 2n/3$. On the other hand, if every pair of circles defines exactly two vertices (i.e., every pair of circles intersects), the corresponding realization of G has the minimum number of circles. However, in this case a total of $c[G](c[G] - 1)/2$ pairs of circles define at most $c[G](c[G] - 1)$ vertices. Hence, it follows that $n \leq c[G](c[G] - 1)$ or equivalently that $(1 + \sqrt{1 + 4n})/2 \leq c[G]$. \square

In the following, we prove that the bounds of [Lemma 7.1](#) are tight.

Lemma 7.2. *There exist infinitely many connected 4-regular n -vertex planar graphs that admit realizations as system of $(1 + \sqrt{1 + 4n})/2$ and $2n/3$ circles.*

Proof. In order to prove this lemma, it is enough to show that there exist two classes of graphs that admit realizations as system of circles, in which (a) every pair of circles intersect and (b) every circle has exactly three vertices.

- (a) We aim to create a set of non-coincident circles all with the same radius and all containing the same interior point. More formally, let $c \geq 3$ be an arbitrary integer. Let also C be an auxiliary geometric circle of radius $R > 0$ (refer to the dashed circle of [Figure 7.1a](#)). We proceed to draw c circles of the same radius $r > 0$ centered at the vertices of a regular c -gon inscribed at circle C , such that $r > R$ (see [Figure 7.1a](#)). It is not difficult to see that every pair of circles intersects, since their centers are at distance less than $2r$. One can also appropriately choose r , so that no three circles pass through the same point. Since c is arbitrarily chosen, the class of graphs derived by the circle representations corresponding to different values of integer c , $c \geq 3$, has obviously the property that its members admit realizations in which every pair of circles intersect.
- (b) In order to prove that there exist infinitely many graphs that admit realizations as system of circles, in which every circle has exactly three vertices, we follow a similar approach as in the previous case (refer to [Figure 7.1b](#)). Let $m > 2$ be an odd integer number. We proceed to draw a “chain of circles” consisting of m circles of equal radius respectively, which touch with each other and also touch the interior of an “enclosing circle”, as illustrated in [Figure 7.1b](#). The construction ensures that every circle has exactly three vertices. Hence, the class of graphs derived by the circle representations corresponding to different values of $m > 2$, has obviously the property that its members admit realizations in which every circle has exactly three vertices.

□

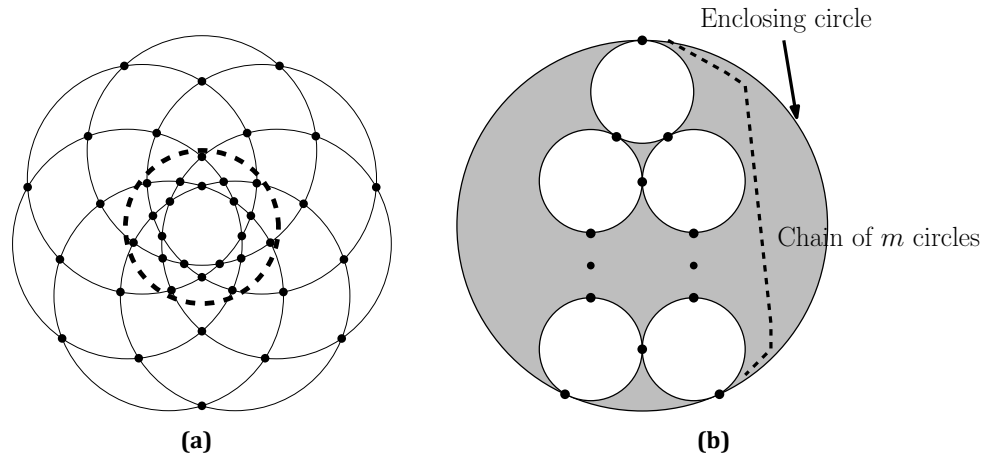


Figure 7.1: Circle representations in which: (a) Every pair of circles intersects, and (b) Every circle has exactly three vertices.

7.2 The Case of 3-Connected 4-Regular Planar Graphs

We prove that a 3-connected 4-regular planar graph admits a realization as a system of touching circles. Our starting point is the circle packing theorem ([Theorem 2.1](#)). We will use [Theorem 2.1](#) on an auxiliary graph that can be constructed based on any 3-connected 4-regular planar graph.

Let G be a 4-regular planar graph embedded in the plane. Since G is obviously Eulerian, by [Lemma 2.2](#) its dual G^* is bipartite. Hence, we can color the faces of G using two colors, say gray and white, so that any two adjacent faces are of different color. For convenience, we assume that the outer face of G is always colored white. We proceed to construct a new graph $IL(G)$ as follows. We associate a vertex of $IL(G)$ with every gray face of G . We join two vertices of $IL(G)$ with an edge if and only if the corresponding faces of G have at least one vertex in common (refer to the black colored graph of [Figure 7.2a](#)).

Lemma 7.3. *If G is a 3-connected 4-regular planar graph, then $IL(G)$ is simple.*

Proof. Suppose that G is 3-connected and assume for the sake of contradiction that $IL(G)$ is not simple. W.l.o.g., we further assume that $IL(G)$ contains a multiple edge, say a double edge between f and g , where $f, g \in V(IL(G))$ (see [Figure 7.3a](#)). The case where $IL(G)$ contains loops is treated similarly. By definition, f and g correspond to gray faces of G that have exactly two common vertices, say $u, v \in V(G)$. Then, u, f, v and g define a separating simple closed curve which intersects G at exactly two vertices

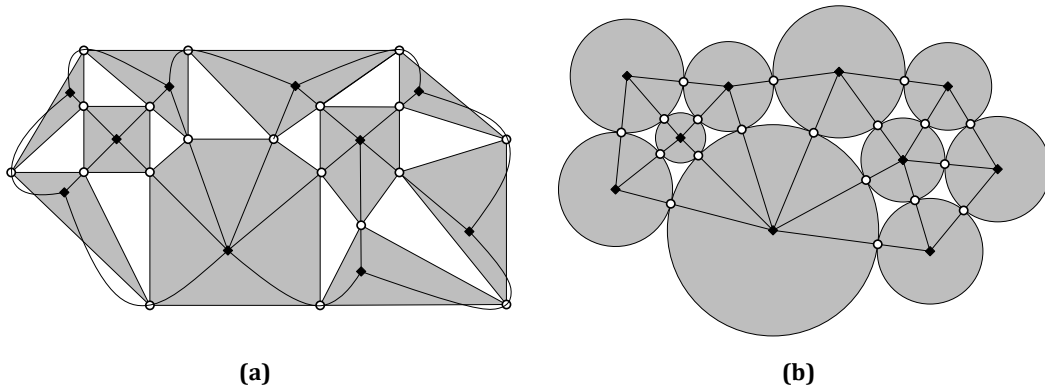


Figure 7.2: (a) Constructing graph $IL(G)$. (b) A realization of G as system of circles.

(i.e., vertices u and v ; see Figure 7.3a). Note that since G is simple there is at least one vertex of G that lies in the interior of this curve and one in its exterior. Hence, G is not 3-connected, which implies the claimed contradiction. \square

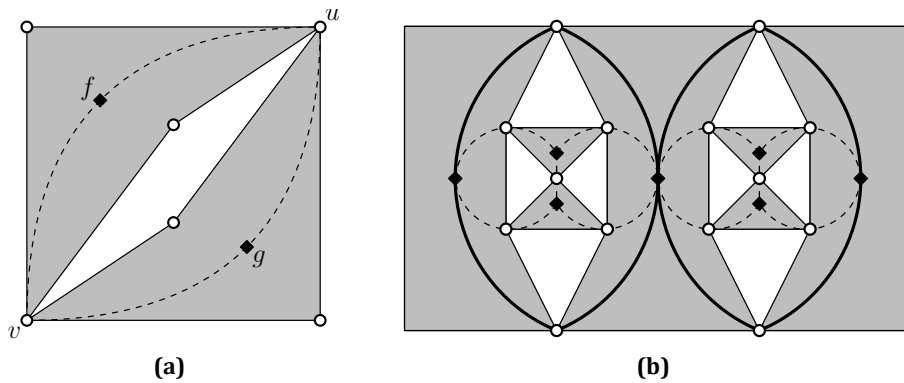


Figure 7.3: (a) Vertices u, f, v and g define a separating simple closed curve. (b) If G is biconnected, then $IL(G)$ is not necessarily simple (refer to bold edges).

We are now ready to state the main theorem of this section.

Theorem 7.1. *Every 3-connected 4-regular planar graph admits a realization as a system of touching circles.*

Proof. By Lemma 7.3, $IL(G)$ is simple. So, we can apply Theorem 2.1 on it. This leads to a drawing in which each gray-colored face of G corresponds to a circle and two circles meet at a point if and only if the corresponding faces are vertex-adjacent (see Figure 7.2b). By construction of $IL(G)$ we have that the vertices of G are the points where circles touch. Also, every circle contains as arcs all the edges of the gray face it corresponds to. Since the gray-colored faces contain all edges of the graph, it follows that the constructed representation is indeed a system of touching circles for G . \square

7.3 The Case of Connected 4-Regular Planar Graphs

In this section, we will demonstrate an infinite class of connected 4-regular planar graphs that do not admit a realization as a system of circles. The base of our constructive proof is the octahedron graph G_{oct} (see Figure 7.4a), which is a 3-connected 4-regular planar graph and hence, by Theorem 7.1, it admits a realization as a system of touching circles. Note that in the case where G is not 3-connected, $IL(G)$ is not necessarily simple (for an example refer to Figure 7.3b). Hence, Theorem 2.1 cannot be applied directly.

Assume now that a graph G admits a realization, say R , as a system of circles. In general, R is not uniquely defined, as one can construct infinitely many realizations of G as a system of circles based on R , e.g., by scaling R or by translating R over the plane. In the same spirit, if we slightly change the radii of the circles or even the centers of the circles of the realization of the octahedron graph depicted in Figure 7.4d, then we can obtain a new realization of the octahedron graph (again as a system of three mutually crossing circles), which will be more or less “equivalent” to the one depicted in Figure 7.4d. The same actually holds, if we simply change the triple of the vertices delimiting its outerface (as the octahedron graph is symmetric). Intuitively, two realizations R and R' of G are equivalent if there is a bijective function from the faces of R to the faces of R' , which maps each face of R to a face of R' of the same shape, where the shape of a face is determined by the convexity of the arcs it consists of, i.e., towards to or away from the interior of the face.

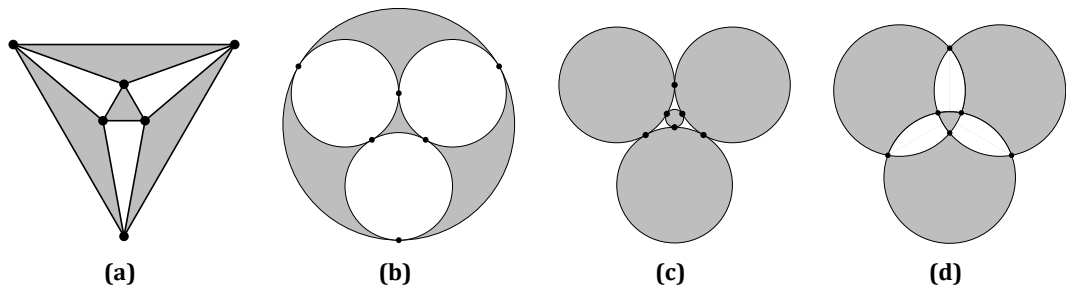


Figure 7.4: (a) A straight-line drawing of the octahedron graph G_{oct} . (b)-(d) Non-equivalent realizations of the octahedron graph G_{oct} as a system of circles.

More formally, given a realization R of G as a system of circles, first we smooth out G by eliminating vertices of degree two, and then construct the dual, say G_R^* , and orient its edges as follows: For an edge $e \in E(G)$ incident to two faces f_e and f'_e of R , edge $(f_e, f'_e) \in E(G_R^*)$ is oriented from f_e to f'_e if and only if every straight-line segment with endpoints on the arc of R corresponding to e does not lie entirely in f'_e . Otherwise, (f_e, f'_e) is directed from f'_e towards f_e . Note that for any circle of R , say c , a face of G lies

either in the interior of c or in its exterior. Then, orienting edge $(f_e, f'_e) \in E(G_R^*)$ from f_e to f'_e implies that f_e lies in the interior of c and f'_e in its exterior, where c is a circle of R and e is an arc-segment of c . We say that two realizations R and R' of G are equivalent if and only if G_R^* and $G_{R'}^*$ are isomorphic, that is, there is a bijective function $g : V(G_R^*) \rightarrow V(G_{R'}^*)$ such that $(v, v') \in E(G_R^*)$ if and only if $(g(v), g(v')) \in E(G_{R'}^*)$. Observe that in the aforementioned definition degree two vertices affect neither the set of circles that participate in the realization nor their relative positions. This is the reason why they are omitted. The following lemma describes all non-equivalent realizations of G_{oct} as a system of circles.

Lemma 7.4. *The octahedron graph has exactly three non-equivalent realizations as a system of circles, which are shown in Figures 7.4b-7.4d.*

Proof. Lemma 7.1 implies that any realization of the octahedron graph G_{oct} as a system of circles consists of either three or four circles. Easy considerations show that in the former case the three circles are mutually crossing, while in the latter one the four circles are mutually touching. Consider first the case of three mutually crossing circles (see Figure 7.4d, in which there are six vertices of degree four and every face is a triangle). Since G_{oct} is the only fully-triangulated 4-regular planar graph on six vertices, this is indeed a realization of G_{oct} as a system of circles. There is exactly one face of G_{oct} that belongs to the interior of all three circles. It follows that in G_{oct}^* the corresponding vertex has out-degree three (refer to the innermost vertex of Figure 7.5a). Also, for every pair of circles, there is exactly one face that belongs to the interior of both circles and to the exterior of the third circle. The corresponding vertices of G_{oct}^* have out-degree two and in-degree one (refer to vertices at distance one from the innermost vertex of Figure 7.5a). For every circle, there is exactly one face that belongs to its interior and to the exterior of the other two circles. The corresponding vertices of G_{oct}^* have out-degree one and in-degree two (refer to vertices at distance two from the innermost vertex of Figure 7.5a). Finally, the vertex corresponding to the outerface has in-degree three. From the above, it follows that the oriented dual G_{oct}^* that corresponds to a realization of G_{oct} as a system of three mutually crossing circles is isomorphic to the one given in Figure 7.5a, where the vertex corresponding to the outerface is omitted.

In the case of four touching circles, by Lemma 7.1 it follows that every circle has exactly three vertices. Since vertices are defined by touching points and two circles can have at most one common point, it follows that a circle touches all three other circles of the representation. Let c_1, \dots, c_4 be the four circles. If c_2 lies in the interior of c_1 , then c_3 and c_4 are also in the interior of c_1 (since they touch with c_2). This implies that either all circles have empty interiors or one circle contains all three other circles in its interior (see Figures 7.4c and 7.4b, respectively, so there are defined six vertices

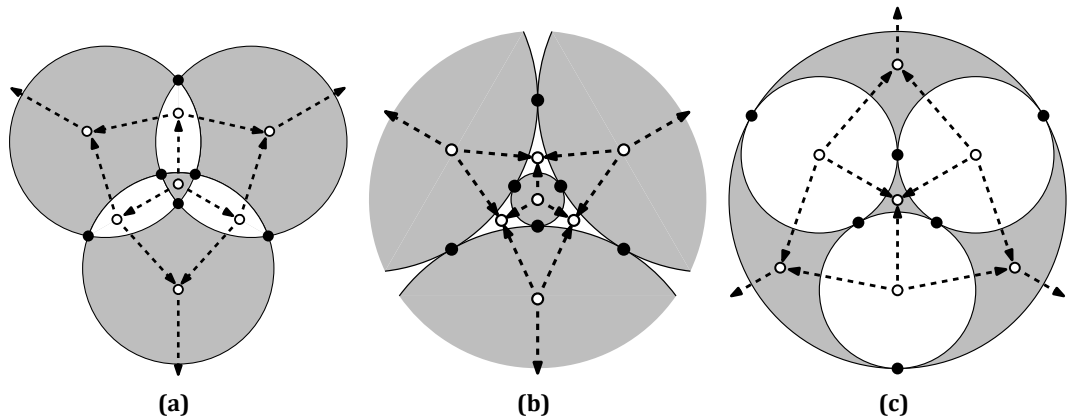


Figure 7.5: Illustration of the oriented duals (drawn in dotted) of G_{oct} that correspond to the three non-equivalent realizations of the octahedron graph G_{oct} as a system of circles.

of degree four, and every face is a triangle). Since G_{oct} is the only fully-triangulated 4-regular planar graph on six vertices, these are indeed realizations of G_{oct} as system of circles. For the case where all circles have empty interior, circles c_1 to c_4 are faces of G_{oct} and the corresponding vertices of G_{oct}^* have out-degree three (refer to the innermost vertex of [Figure 7.5b](#) and to vertices at distance two from it). All other faces of G_{oct} lie in the exterior of all circles and have therefore in-degree three and out-degree zero (refer to vertices at distance one from the innermost vertex of [Figure 7.5b](#); the outerface vertex also fits to this case). Therefore, the oriented dual G_{oct}^* that corresponds to a realization of G_{oct} as four touching circles with disjoint interiors is isomorphic to the one given in [Figure 7.5b](#), where the vertex corresponding to the outerface is omitted.

Suppose now that one circle, say circle c_1 , contains in its interior all three other circles. Then, circles c_2 , c_3 and c_4 are faces of G_{oct} and the corresponding vertices of G_{oct}^* have out-degree three (refer to vertices at distance one from the innermost vertex of [Figure 7.5c](#)). There is exactly one face delimited by c_2 , c_3 and c_4 (in the interior of c_1) that corresponds to a vertex of G_{oct}^* with in-degree three (refer to the innermost vertex of [Figure 7.5c](#)). Three distinct faces share an edge with c_1 and lie in its interior corresponding to three vertices of G_{oct}^* with in-degree two and out-degree one (refer to vertices at distance two from the innermost vertex of [Figure 7.5c](#)). The outerface corresponds to a vertex of in-degree three. Similarly to the previous cases, the oriented dual G_{oct}^* that corresponds to a realization of G_{oct} as four touching circles where one circle contains in its interior all three other circles, is isomorphic to the one given in [Figure 7.5c](#), where the vertex corresponding to the outerface is omitted.

It is not hard to see that the three realizations presented are not equivalent: In the realization of [Figure 7.5a](#) there is only one vertex with out-degree three, while in the realization of [Figure 7.5b](#) there are four vertices with out-degree three, and in the re-

alization of Figure 7.5c there are three. Since the degree sequences of the three dual graphs are different they can't be isomorphic.

Any realization of the octahedron graph as a system of circles will use either three mutually crossing circles or four touching circles. Since we proved that the oriented dual in the former case is isomorphic to the one of Figure 7.5a, while in the latter case isomorphic either to the one of Figure 7.5b or to the one of Figure 7.5c, it follows that it is always isomorphic to one of the digraphs of Figure 7.5, giving a total of three non-equivalent realizations of G_{oct} as a system of circles. \square

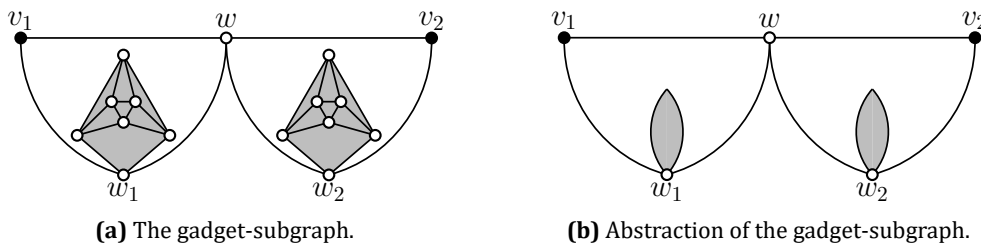
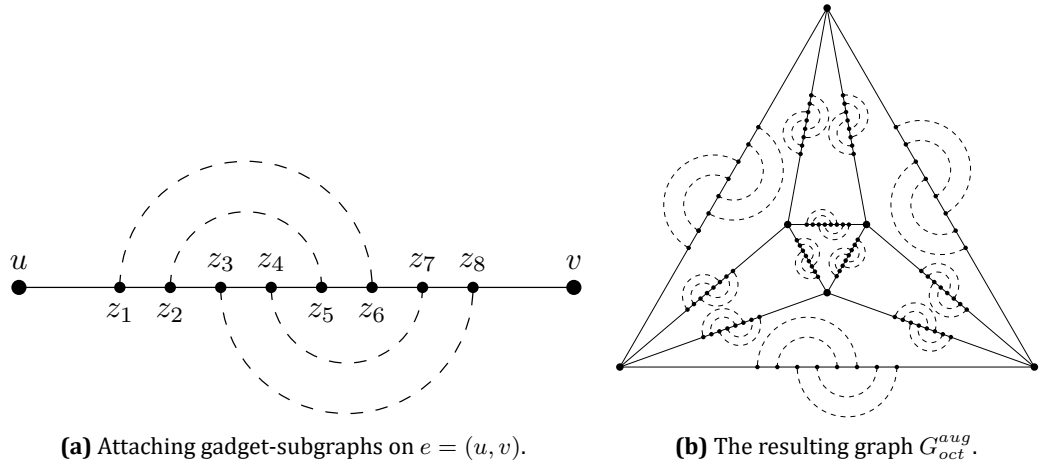


Figure 7.6: Illustrations of the gadget-subgraph.

Initially, we will exhibit a specific connected 4-regular planar graph that does not admit a realization as a system of circles. This graph will be constructed based on G_{oct} , augmented by appropriately “attaching” a specific gadget-subgraph to its edges, leading thus to a graph, say G_{oct}^{aug} , that contains cut-vertices and separating pairs (note that any connected 4-regular planar graph is bridgeless [Wes01, pp.34]). The gadget-subgraph is illustrated in Figure 7.6a. Observe that it contains exactly two vertices of degree two, namely v_1 and v_2 , which are its endpoints. Now we replace every edge $e = (u, v)$ of G_{oct} by a path consisting of 8 internal vertices. Clearly, the graph, say G_{oct}^{sub} , that is obtained in this manner is a subdivision of G_{oct} . Let $u \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_8 \rightarrow v$ be the path replacing edge (u, v) . We associate four copies of the gadget-subgraph having vertices z_1, \dots, z_8 as their endpoints: the first gadget-subgraph connects vertices z_1 and z_6 , the second connects z_2 and z_5 , the third connects z_3 and z_8 and the last connects z_4 and z_7 (see Figure 7.7a, in which the gadget-subgraphs are drawn with dashed curves joining the end-vertices; Figure 7.7b depicts the resulting graph G_{oct}^{aug}).

The skeleton of the gadget-subgraph consists of vertices v_1, v_2, w_1, w_2 and w (see Figure 7.6) and edges $(v_i, w), (w_i, w)$ and $(v_i, w_i), i = 1, 2$. If we remove the edges of the skeleton, the remaining graph consists of three isolated vertices (namely v_1, v_2 and w) and two disjoint graphs that are subdivisions of the octahedron graph (refer to the gray-shaded graphs of Figure 7.6a). In this section we will exhibit some properties of the gadget-subgraphs. These properties are not actually due to the structure of the gadget-subgraphs. In fact, any graph in which every vertex has degree four except for exactly one degree-2 vertex on the outerface can be used instead of the gadget-subgraphs still

(a) Attaching gadget-subgraphs on $e = (u, v)$.(b) The resulting graph G_{oct}^{aug} .**Figure 7.7:** Each dashed edge corresponds to the gadget-subgraph of [Figure 7.6](#).

guaranteeing the same properties. The general situation is shown in [Figure 7.6b](#), where the subgraphs are drawn as loops at vertices w_1 and w_2 . For convenience, we will refer to these subgraphs as loop-subgraphs.

Lemma 7.5. *Let G be a 4-regular planar graph that contains at least one copy of the gadget-subgraph. Suppose that there is a realization of G as a system of circles. Then, the skeleton of each gadget-subgraph in this realization consists of two circles C_1 and C_2 tangent at a point w , where circle C_i contains vertices $\{v_i, w_i, w\}$ and the arc-segments realizing edges (v_i, w_i) , (w_i, w) , and (v_i, w) , for $i = 1, 2$.*

Proof. Suppose that there is a realization of G as a system of circles and consider a copy of the gadget-subgraph in this realization. Since every vertex is defined by exactly two circles and w_i is a cut-vertex, it follows that one of the two circles defining w_i contains vertices that belong only to its loop-subgraph, $i = 1, 2$. Hence, the edges (v_i, w_i) and (w_i, w) belong to the same circle, $i = 1, 2$. Let C_i be the circle that contains (v_i, w_i) and (w_i, w) and C'_i the circle that contains (v_i, w) , $i = 1, 2$. We claim that $C_i = C'_i$, $i = 1, 2$. Observe that this implies the lemma. For the sake of contradiction, assume that $C_1 \neq C'_1$. Since vertex w is defined by exactly two circles, we have that $\{C_1, C'_1\} = \{C_2, C'_2\}$, which also implies that $C_2 \neq C'_2$. Then, C_1 and C'_1 have at least three points in common, namely vertices v_1, v_2 and w , from which we obtain $C_1 = C'_1$; a contradiction. \square

Lemma 7.6. *Let G be a 4-regular planar graph and G^{sub} a subdivision of G . Let v_1 and v_2 be two subdivision vertices of G^{sub} , i.e. v_1 and v_2 are vertices of degree 2. Attach a gadget-subgraph, so that v_1 and v_2 are its endpoints, and such that the resulting graph is planar. Then, in any realization of the resulting graph as a system of circles, the realization of the gadget-subgraph and the realization of G^{sub} are independent, i.e., any circle contains edges that belong exclusively either to the gadget-subgraph or to G^{sub} .*

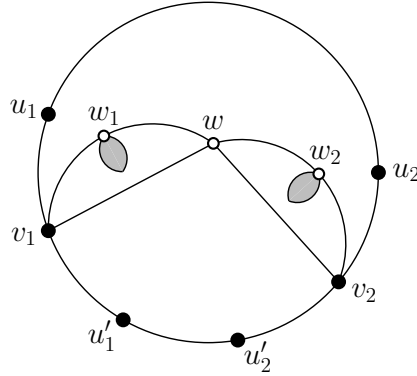


Figure 7.8: Configuration considered in proof of [Lemma 7.6](#).

Proof. Refer to [Figure 7.8](#). Since the resulting graph is planar, v_1 and v_2 lie on the boundary of a face of G^{sub} . By [Lemma 7.5](#), it follows that edges (v_i, w_i) , (v_i, w) and (w_i, w) belong to the same circle, say C_i , $i = 1, 2$. Let u_j, u'_j be the two neighbors of vertex v_j in G^{sub} , $j = 1, 2$ (Note that $u'_1 = v_2$ and $u'_2 = v_1$ are possible). Since every vertex belongs to exactly two circles, it follows that edges (u_j, v_j) and (v_j, u'_j) belong to a circle different from C_1 and C_2 . Therefore, if we remove C_1 and C_2 and the circles representing the loop-subgraphs of the gadget-subgraph, we have a representation of the remaining graph (namely of graph G^{sub}), as a system of circles. \square

From the above, it follows that in any realization of G_{oct}^{aug} as a system of circles the realization of each gadget-subgraph and the realization of G_{oct}^{sub} are independent. This is summarized in the following corollary.

Corollary 7.1. *In any realization of G_{oct}^{aug} as a system of circles, the realization of each gadget-subgraph and the realization of G_{oct}^{sub} are independent.*

[Corollary 7.1](#) is the key element of our proof. It implies that the realization of G_{oct}^{sub} obtained from a realization of G_{oct}^{aug} by removing all vertices of the gadget-subgraphs except for their endpoints will be equivalent to one of the realizations of G_{oct} depicted in [Figures 7.4b-7.4d](#) (recall that the definition of two equivalent realizations ignores vertices of degree-2).

In any planar embedding of G_{oct} , there is always a triangular face that shares no vertex and no edge with the outerface. Hence, the gadget-subgraphs attached to the edges of this triangular face have to be realized as in [Figure 7.9a](#) (in fact a realization as in [Figure 7.9b](#) is only possible if the gadget-subgraph is incident to the outerface). So, there is a total of six gadget-subgraphs attached along the edges of this triangular face, each with a realization as in [Figure 7.9a](#).

In the following, we state two useful geometric results regarding tangent circles. We denote by $C(O, r)$ a circle with center O and radius r .

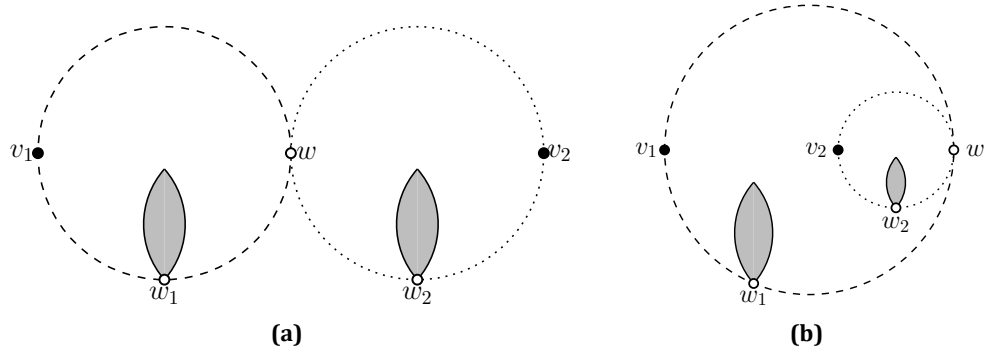


Figure 7.9: Non-equivalent realizations of the gadget-subgraph as a system of circles: (a) The two circles representing the skeleton have disjoint interiors, and (b) One circle lies in the interior of the other.

Lemma 7.7. Let $C_1(O_1, r_1)$ and $C_2(O_2, r_2)$ be two circles, so that C_1 is tangent to C_2 at point p_1 and C_2 lies entirely in the interior of C_1 . Let $C(O, r)$ be another circle that is tangent to C_1 at point p_2 ($p_2 \neq p_1$), tangent to C_2 and lies in the interior of C_1 (see [Figure 7.10a](#)). If ϕ is the angle $\widehat{p_1 O_1 p_2}$, then the radius r of C is an increasing function of ϕ , $\phi \in (0, \pi]$.

Proof. W.l.o.g., we assume that O_1 coincides with the origin of the Cartesian coordinate system and point p_1 lies on the x-axis, i.e., at point $(r_1, 0)$. Then, the center of circle C_2 is at point $(r_1 - r_2, 0)$, while the center of circle C is at point $((r_1 - r) \cos \phi, (r_1 - r) \sin \phi)$, as shown in [Figure 7.10a](#). Since C_2 and C are tangent the distance between their centers equals to the sum of their radii, i.e.:

$$\begin{aligned} & [(r_1 - r) \cos \phi - (r_1 - r_2)]^2 + [(r_1 - r) \sin \phi]^2 = (r_2 + r)^2 \\ \Rightarrow & (r_1 - r_2)^2 + (r_1 - r)^2 - 2(r_1 - r_2)(r_1 - r) \cos \phi = (r_2 + r)^2 \\ \Rightarrow & (r_1 + r_2)(r_1 - r) - 2r_1 r_2 - (r_1 - r_2)(r_1 - r) \cos \phi = 0 \\ \Rightarrow & r = r_1 - \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2 - (r_1 - r_2) \cos \phi} \end{aligned}$$

By the above equation, when ϕ is increasing in the interval $(0, \pi]$, $\cos \phi$ is decreasing and r is increasing. Hence, circle C has maximum radius for angle $\phi = \pi$. \square

A similar result holds if circles C and C_2 lie outside circle C_1 .

Lemma 7.8. Let $C_1(O_1, r_1)$ and $C_2(O_2, r_2)$ be two circles, so that C_1 is tangent to C_2 at point p_1 and C_1 lies entirely in the exterior of C_2 . Let $C(O, r)$ be another circle that is tangent to C_1 at point p_2 ($p_2 \neq p_1$), tangent to C_2 and lies in the exterior of C_1 (see [Figure 7.10b](#)). If ϕ is the angle $\widehat{p_1 O_1 p_2}$, then the radius r of C is an increasing function of ϕ , $\phi \in (0, \arccos(\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2})]$.

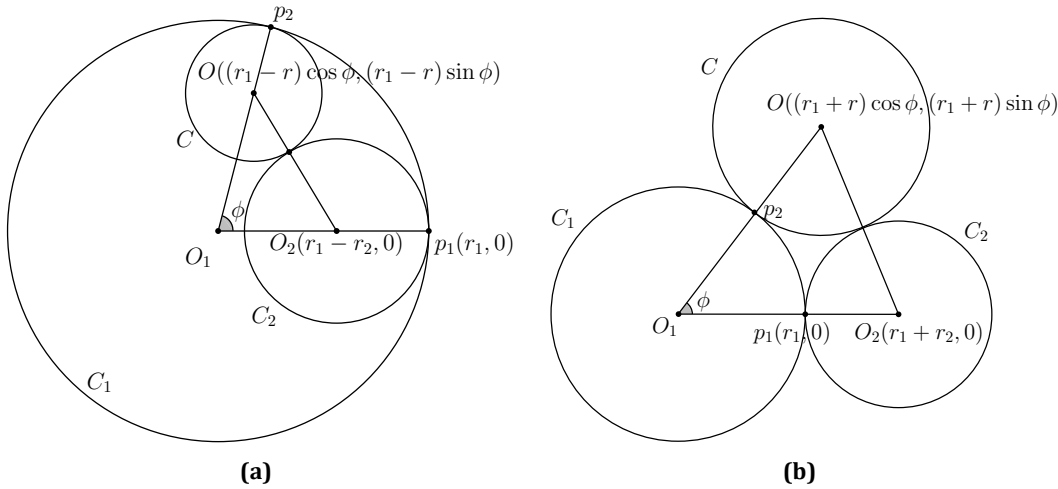


Figure 7.10: (a) Configuration considered in Lemma 7.7. (b) Configuration considered in Lemma 7.8.

Proof. The proof of Lemma 7.8 is similar to the one of Lemma 7.7. So, we omit the details. We simply mention the corresponding equation for r , which is the following:

$$r = \frac{2r_1r_2}{r_2 - r_1 + (r_2 + r_1) \cos \phi} - r_1$$

Note that circle C does not always exist. For an example, refer to Figure 7.10b, when $\phi = \pi/2$ and $r_1 > r_2$. In particular, for given radii r_1 and r_2 , angle ϕ is bounded from above by the value $\arccos(\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2})$, which corresponds to the angle in the extreme case where circle C is of infinite radius and is therefore reduced to the common tangent of circles C_1 and C_2 . \square

Lemma 7.9. Consider a circle $C(O, r)$ and an arc \widehat{AB} of C with $\widehat{AOB} = \phi < \pi$. Let $C_1(O_1, r_1)$ and $C_2(O_2, r_2)$ be two tangent circles, that are both tangent to C at points A and B respectively (see Figure 7.11). Let $C'_1(O'_1, r'_1)$ and $C'_2(O'_2, r'_2)$ be another such pair of tangent circles that are both tangent to C at points A' and B' respectively (with A' and B' on the arc between A and B), so that the two pairs of circles have no crossing and no touching points. Assuming that C_i and C'_i , $i = 1, 2$ are all in the interior of C or in the exterior of C and $A, A', B',$ and B occur in this order on the arc between A and B , then:

$$|\widehat{A'B'}| < |\widehat{AA'}| \text{ and } |\widehat{A'B'}| < |\widehat{B'B}|.$$

Proof. Consider the circle C_1 . There exist two circles C''_i for $i = 1, 2$ with radius r''_i , that are both tangent to C_1 and also tangent to C at points A' and B' respectively. Note that

for $i = 1, 2$ circle C_i'' contains circle C_i' , and so $r_i'' \geq r_i'$. We have that $\widehat{AOA'} < \widehat{AOB'} < \widehat{AOB}$ and therefore, by **Lemmas 7.7** and **7.8**, $r_i' \leq r_i'' < r_2$ for $i = 1, 2$. Similarly, starting from circle C_2 we have that $r_i' \leq r_i'' < r_1$ for $i = 1, 2$. Now, for circle C_1' we have that $r_2' < r_1$ and $\widehat{AOA'}, \widehat{A'OB'} < \pi$. Then by **Lemmas 7.7** and **7.8** it follows that $\widehat{A'OB'} < \widehat{AOA'}$. Similarly, we conclude that $\widehat{A'OB'} < \widehat{B'OB}$. So, we have that:

$$|A'B'| < |AA'| \text{ and } |A'B'| < |B'B'|.$$

□

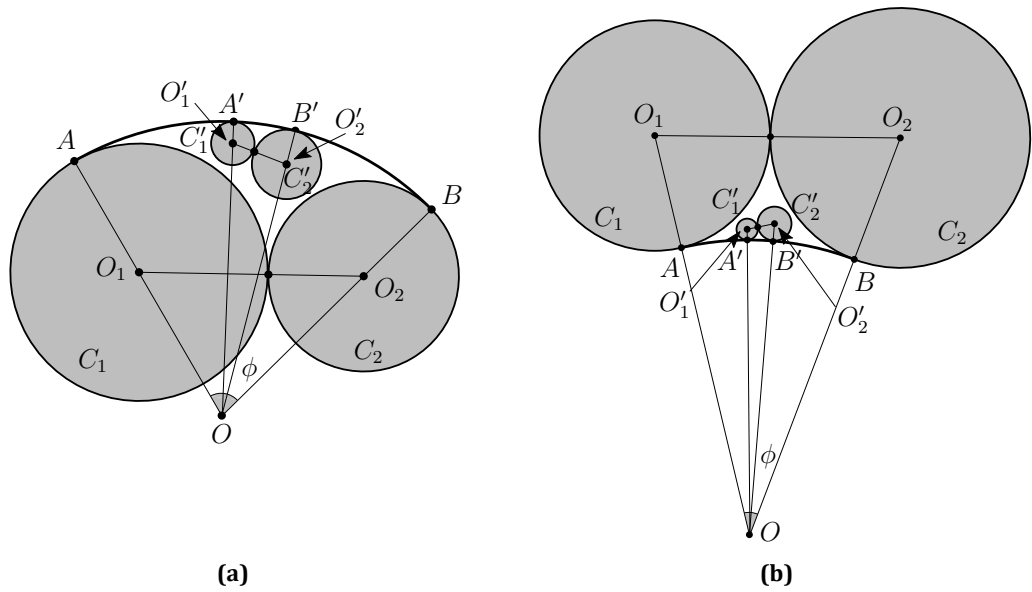


Figure 7.11: Configurations used in **Lemma 7.9**.

Note that **Lemma 7.9** is still true when the four circles lie either in the interior or on the exterior of circle C . Let $e = (u, v)$ be an edge of the innermost interior face of the octahedron graph G_{oct} , as shown in **Figure 7.7b**. Assume that in a realization of the octahedron as a system of circles, e is drawn as an arc of a circle $C(O, r)$, with $\widehat{uOv} = \phi < \pi$. The next lemma proves that this assumption leads to a contradiction to the existence of a realization of graph G_{oct}^{aug} as a system of circles.

Lemma 7.10. Consider a circle $C(O, r)$ and assume that edge $e = (u, v) \in E(G_{oct})$ is drawn as an arc segment \widehat{uv} of C such that $\widehat{uOv} = \phi < \pi$. If we attach two pairs of gadget-subgraphs along e , as shown in **Figure 7.7a**, then the resulting subgraph of G_{oct}^{aug} does not admit a realization as a system of circles.

Proof. By **Lemma 7.5** we have that each gadget-subgraph is drawn as a pair of tangent circles that are also tangent to the arc \widehat{uv} at points z_i, z_j . Furthermore, the two tangent

circles have disjoint interiors since they are not on the outerface of G_{oct}^{aug} , as in [Figure 7.9a](#). By applying [Lemma 7.9](#) to the pair of gadget-subgraphs with endpoints z_1, z_6 and z_2, z_5 , we have:

$$\widehat{z_2 z_5} < \widehat{z_1 z_2} \text{ and } \widehat{z_2 z_5} < \widehat{z_5 z_6}$$

Similarly, for the pair of gadget-subgraphs with endpoints z_3, z_8 and z_4, z_7 , we have:

$$\widehat{z_4 z_7} < \widehat{z_3 z_4} \text{ and } \widehat{z_4 z_7} < \widehat{z_7 z_8}$$

Combining those inequalities and the fact that $\widehat{z_i z_j} \leq \widehat{z_{i'} z_{j'}}$ for $i' \leq i \leq j \leq j'$, we have:

$$\widehat{z_4 z_7} < \widehat{z_3 z_4} \leq \widehat{z_2 z_5} < \widehat{z_5 z_6} \leq \widehat{z_4 z_7}$$

that is $\widehat{z_4 z_7} < \widehat{z_4 z_7}$, which is a contradiction. \square

In order to complete the proof that graph G_{oct}^{aug} does not admit a realization as a system of circles, it suffices to show that in any realization of G_{oct} (and therefore of G_{oct}^{sub}), at least one edge of the innermost interior face meets the requirements of [Lemma 7.10](#).

Lemma 7.11. *In any realization of the octahedron as a system of circles, at least one edge, say $e = (u, v)$, of the innermost interior face is drawn as an arc of a circle $C(O, r)$ so that $\widehat{uOv} = \phi < \pi$.*

Proof. By [Lemma 7.4](#), it suffices to show that the lemma holds for the three non-equivalent representations shown in [Figure 7.4](#). For the first two representations of [Figure 7.4](#), the result is almost straightforward. More precisely, let $C_1(O_1, r_1)$, $C_2(O_2, r_2)$ and $C_3(O_3, r_3)$ be the circles (white-colored in [Figure 7.4b](#)) that define the innermost interior face (refer to the innermost gray-shaded face of [Figure 7.4b](#)) of the first representation. The three points of this face lie on the edges of the triangle defined by points O_1, O_2 and O_3 , since circles C_1, C_2 and C_3 are mutually tangent. Then, at least one of the angles of the triangle is less than π , as desired. In the second representation, the innermost interior face is a circle (refer to the innermost gray-shaded circle of [Figure 7.4c](#)) with three distinct points on its boundary. Trivially, at least one of the arcs defined by those points corresponds to an angle that is smaller than π .

We now turn our attention to the more interesting case where the realization of the octahedron graph as a system of circles is implied by three mutually crossing circles (refer to [Figure 7.4d](#)). First, consider two circles $C_1(O_1, r_1)$ and $C_2(O_2, r_2)$ intersecting at points A and B and assume w.l.o.g. that their centers lie along the x-axis, such that O_1 is to the left of O_2 (see [Figure 7.12](#)). We are interested in the angles that correspond to the two arcs of C_1 and C_2 that “confine” the common points of the two circles (refer to the dashed drawn arcs incident to A and B in [Figure 7.12](#)). It is not difficult to see

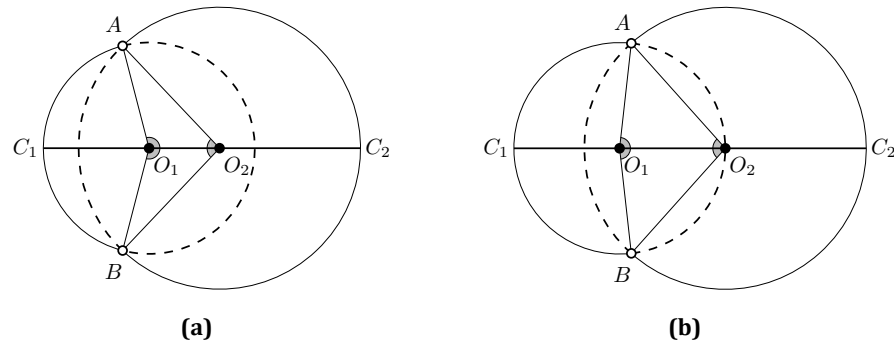


Figure 7.12: Configurations considered in Lemma 7.11.

that $\widehat{AO_1B}$ and $\widehat{AO_2B}$ cannot be both greater than π . Consider now two of the crossing circles of the realization of the octahedron of Figure 7.4d. From the above, it follows that at least one of the two arcs that “confine” their common points, corresponds to an angle that is less than π . Since the innermost interior face is also confined by the two arcs, it follows that at least one edge of the innermost interior face has the desired property. \square

Theorem 7.2. *There exists a connected 4-regular planar graph that does not admit a realization as a system of circles.*

Proof. Lemma 7.11 states that in any realization of the octahedron graph as a system of circles, at least one edge of the innermost interior face is drawn as an arc segment of an angle less than π . Hence, by Lemma 7.10 it follows that G_{oct}^{aug} does not admit a realization as a system of circles. \square

Theorem 7.3. *There exists an infinite class of connected 4-regular planar graphs that do not admit a realization as a system of circles.*

Proof. Recall that in order to obtain G_{oct}^{aug} , each edge of the octahedron graph was augmented by two pairs of gadget-subgraphs. However, Theorem 7.2 trivially holds if more than two pairs of gadget-subgraphs are attached to each edge of G_{oct} , defining thus an infinite class of connected 4-regular planar graphs that do not admit a realization as a system of circles. An alternative (and more interesting) class of such graphs can be derived by replacing the octahedron graph of the loop-subgraph of each gadget-subgraph by any 4-regular planar graph, in which one of the edges on its outerface is replaced by a path of length two and the additional vertex implied by this procedure is identified by vertices w_1 and/or w_2 of the gadget-subgraph (refer to Figure 7.6). \square

7.4 The Case of Biconnected 4-Regular Planar Graphs

In this section, we consider the case of biconnected 4-regular planar graphs. More precisely, we will prove that there exist infinitely many biconnected 4-regular planar graphs that do not admit realizations as a system of circles. To do so, we follow a similar approach as the one presented in Section 7.3. Recall that graph G_{oct}^{aug} that we constructed in Section 7.3 was not biconnected, since each gadget-subgraph defines two cut-vertices. In fact, all cut-vertices of G_{oct}^{aug} belong to the gadget-subgraphs. So, for the case of biconnected 4-regular planar graphs, we will construct a new gadget-subgraph, referred to as bigadget-subgraph, that does not contain cut-vertices and simultaneously has the same properties as the corresponding ones of Section 7.3 (in particular the properties implied by Lemma 7.5).

The bigadget-subgraph is illustrated in Figure 7.13a. Again, it contains exactly two vertices of degree two, namely v_1 and v_2 , which are its endpoints. However, its skeleton now consists of seven vertices (i.e., v_i, w_i, w'_i and $w, i = 1, 2$). If we remove the edges of the skeleton except for the edges $(w_i, w'_i), i = 1, 2$, the remaining graph again consists of three isolated vertices and two disjoint biconnected graphs, which we call biloop-subgraphs (refer to the grey-shaded graphs of Figure 7.13a). The properties of the bigadget-subgraph are again independent of the biloop-subgraphs, i.e., any simple biconnected planar graph satisfying the following degree condition can be used instead: Every vertex is of degree 4 except for exactly two vertices on the outerface that are of degree 3. The general situation is shown in Figure 7.13b, where the subgraphs are drawn as “bi-loops” at vertices w_i and $w'_i, i = 1, 2$.

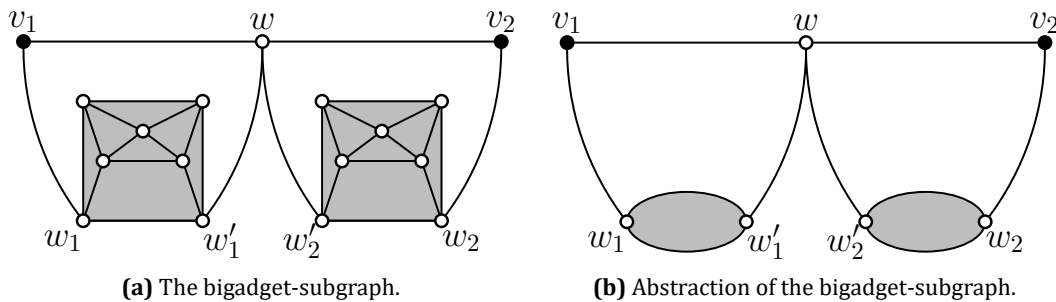


Figure 7.13: Illustrations of the new gadget-subgraph.

Having specified the bigadget-subgraph, we can augment the octahedron graph similarly to Section 7.3. This will result in a biconnected graph, which we denote by BG_{oct}^{aug} . Now, we are in position to prove the analogue of Lemma 7.5.

Lemma 7.12. *Let G be a 4-regular planar graph that contains at least one copy of the bigadget- subgraph. Suppose that there is a realization of G as a system of circles. Then,*

the skeleton of each bigadget-subgraph in this realization consists of two circles C_1 and C_2 tangent at a point w , where circle C_i contains vertices $\{v_i, w_i, w'_i, w\}$ and the arcs-segments realizing edges (v_i, w_i) , (w'_i, w) and (v_i, w) , for $i = 1, 2$.

Proof. Suppose that there is a realization of G as a system of circles and consider a copy of the bigadget-subgraph in this realization. Note that the edges (v_i, w_i) and (w'_i, w) belong to the same circle, $i = 1, 2$ (otherwise, one of the circles would contain vertex w_i twice and the other circle would contain vertex w'_i twice, $i = 1, 2$, which is not possible since every vertex belongs to exactly two different circles). Let C_i be the circle that contains (v_i, w_i) and (w'_i, w) and C'_i the circle that contains (v_i, w) , $i = 1, 2$. We claim that $C_i = C'_i$, $i = 1, 2$. For the sake of contradiction, assume that $C_1 \neq C'_1$. Since vertex w is defined by exactly two circles, we have that $\{C_1, C'_1\} = \{C_2, C'_2\}$, which also implies that $C_2 \neq C'_2$. Then, C_1 and C'_1 have at least three points in common, namely vertices v_1, v_2 and w , from which we obtain $C_1 = C'_1$; a contradiction. \square

In **Figure 7.14** two non-equivalent realizations are shown. Note that these realizations actually depend on the relative position of the two touching circles C_1 and C_2 in the planar embedding of G . In particular, in **Figure 7.14a** the two circles C_1 and C_2 contain only the biloops-subgraphs in their interior, while in **Figure 7.14b** C_1 is the outerface and therefore contains the entire graph. This implies that in any realization of BG_{oct}^{aug} as a system of circles, all bigadget-subgraphs are drawn as in **Figure 7.14a** except for at most one bigadget-subgraph if one of its two circles is the outerface of BG_{oct}^{aug} . Hence, we can similarly prove the analogue of **Corollary 7.1**.

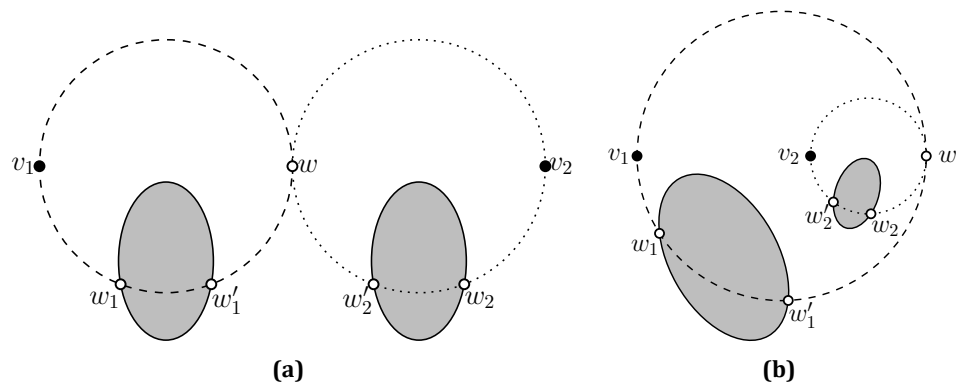


Figure 7.14: Non-equivalent realizations of the bigadget-subgraph as a system of circles: (a) The two circles representing the skeleton have disjoint interiors, and (b) One circle lies in the interior of the other.

Corollary 7.2. *In any realization of BG_{oct}^{aug} as a system of circles, the realizations of each bigadget-subgraph and the realization of G_{oct}^{sub} are independent.*

Lemma 7.12 and Corollary 7.2 allow us to prove an analogue of Lemma 7.10 (where bigadget-subgraphs are used instead of gadget-subgraphs). That result, together with Lemma 7.11, allows us to give an analogue of Theorem 7.2.

Theorem 7.4. *There exists a biconnected 4-regular planar graph that does not admit a realization as a system of circles.*

Finally, in order to prove that there exist infinitely many biconnected 4-regular planar graphs that do not admit realizations as a system of circles, one can attach more than two pairs of bigadget-subgraphs to every edge of G_{oct} , or replace the biloop-subgraphs by any simple biconnected planar graph (in which every vertex is of degree 4 except for exactly two vertices on the outerface that are of degree 3), which leads to the following conclusion.

Theorem 7.5. *There exists an infinite class of biconnected 4-regular planar graphs that do not admit a realization as a system of circles.*



In this chapter we consider smooth orthogonal drawing using various styles. We describe how to obtain planar perfect smooth orthogonal drawings for planar graphs with maximum degree 3. Furthermore, we prove that planar graphs with maximum degree 4 admit perfect smooth orthogonal drawings if we allow crossings in the resulting drawing. In order to deal with graphs of higher degree, we use the Kandinsky model: any graph admits a non-planar drawing of perfect edge complexity, but not all graphs admit a planar drawing.

Finally, we investigate different styles of perfect orthogonal drawings considered in the literature so far. We introduce classes of graphs admitting drawings of specific styles, and study relations between the classes.

8.1 Planar Perfect Smooth Orthogonal Drawings of Planar Graphs with Maximum Degree 3

In this section, we extend the algorithm of Bekos et al. [BKKS13], which is based on canonical ordering, and hence, is limited to triconnected planar graphs of maximum degree 3; we show that every planar graph with maximum degree 3 can be drawn with perfect edge complexity. Note that this result also improves upon a known result of Alam et al. [ABK⁺14], who recently showed that any planar graph with maximum degree 3 admits a smooth orthogonal drawing of edge complexity two. Following standard practice, we proceed as follows. We handle each biconnected component independently and decompose it using the SPQR tree (for a short introduction to SPQR trees, refer to [Section 2.2.2](#)). Then we use a recursive drawing procedure based on the SPQR tree that uses the original algorithm for the triconnected components.

Since SPQR trees are only defined for biconnected graphs, we start with decomposing the connected graph into its biconnected components. We mostly follow Kant's work [Kan93] on orthogonal layouts of planar graphs with maximum degree 3. He shows that one can draw each biconnected component independently and assemble them later using a tree drawing technique. The crucial observation is that each cut vertex is contained in at least one and at most three bridge components. A bridge is a

biconnected component consisting only of a single edge linking two cut vertices. These bridges serve as edges in the tree layout. This approach generates a layout without introducing any additional bends, that is, the bridges are straight lines in the final drawing. Since every edge without bends has perfect edge complexity, we may concentrate on biconnected planar graphs of maximum degree 3. However, without going into details, the method may require to put a specific cut vertex in the upper left corner of the generated layout. We keep this constraint in mind and reconsider it when generating the layout.

In the next step, we decompose each biconnected component that is not a bridge into its triconnected components. We borrow again the basic steps from Kant [Kan93] who uses the SPQR tree. Similar to our setting, his core algorithm requires triconnectivity, hence, can be applied to R-nodes. It remains to deal with P- and S-nodes and ensure that the core algorithm can handle virtual edges. A similar technique is used by Eppstein [Epp13] for Lombardi drawings of planar graphs with maximum degree 3. Eppstein proceeds as follows: First, all degree two nodes are suppressed resulting in a 3-regular multigraph. Construction of the SPQR tree yields a decomposition into triconnected components. Eppstein exploits the special properties of SPQR trees on 3-regular graphs. Similar to the bridges in the biconnected case, the degree restriction of the input graph provides enough freedom to glue the substructures together. However, Lemma 1 in [Epp13] requires the graph to be 3-regular and not just planar with maximum degree 3. While suppressing degree two nodes simplifies the method, it requires that this procedure can be reversed afterwards. In our context this is not straightforward. Hence, we keep the degree two nodes as Kant [Kan93] does. The drawback is that we can only formulate a relaxed version of the lemma used by Eppstein. Nevertheless, it will be sufficient for our purpose.

Lemma 8.1. *In an SPQR tree of a biconnected planar graph with maximum degree 3, the skeleton of a P-node is a bundle of three parallel edges, the skeleton of an R-node is a triconnected 3-regular planar graph, and each edge in the tree has exactly one S-node as an endpoint. In the skeleton of an S-node no two virtual edges share a common vertex, that is, virtual edges are separated by at least one real edge.*

Proof. We only sketch the proof, similar arguments can be found in [Kan93]. By definition, P-nodes have at least three parallel edges. Any P-node skeleton with more edges violates the degree restriction. The skeletons of R-nodes are by definition triconnected while still obeying the degree restriction and planarity. Both P- and R-node contribute each at least two to the degrees of the separating pair. Hence, P- and R-nodes cannot share a common vertex without inducing a degree of at least four. As a result, they cannot be adjacent in the tree, nor share a common vertex on the cycle of an S-node. \square

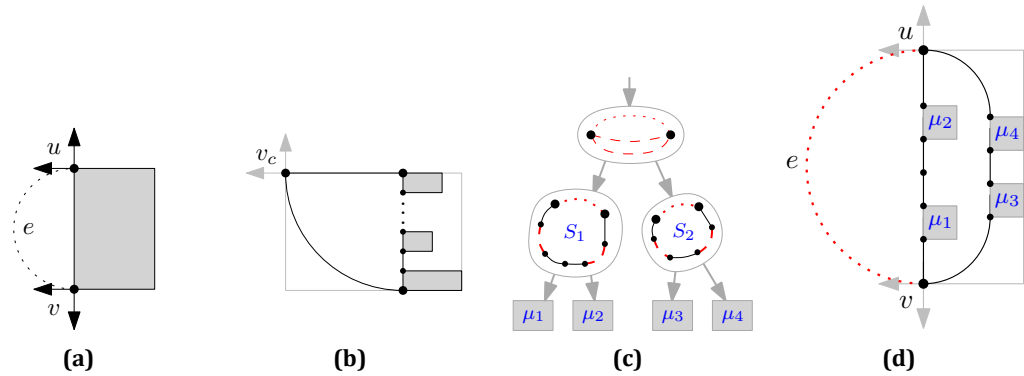


Figure 8.1: (a) The basic shape used for the skeletons. (b) Placing the v_c in the upper left corner at the root of the SPQR tree. (c) P-node with two S-node children S_1, S_2 , and (d) The corresponding drawing with two chains formed by μ_1, μ_2 and μ_3, μ_4 , respectively.

The crucial part of the lemma regarding our approach is that it guarantees the existence of additional edges to glue the subgraphs of P- and R-nodes together. To ensure that the layout of these subgraphs matches a certain pattern, we define a basic building block. As in [Kan93], we use the shape shown in Figure 8.1a. The building block has two free ports at the upper and lower left corner, where the vertices of the corresponding separation pair (u, v) are located. We ensure that P- and R-nodes can be drawn this way only using one circular arc or one straight-line segment per edge. Instead of explicitly drawing S-nodes, we implicitly consider them when drawing the P- and R-nodes.

Before showing how to draw them, we deal with the extra constraint mentioned earlier. The biconnected components layout may require to put a specific cut vertex v_c in the upper left corner. Every cut vertex in a biconnected component which is not bridge has degree two, hence, can only occur in the skeleton of an S-node, where it is incident to two real edges. We root the SPQR tree at this unique S-node containing v_c and draw it in a special way such that v_c is located in the upper left corner; see Figure 8.1b. In case that the input graph is biconnected, we root the tree at an arbitrarily chosen S-node, select one of its real edges and draw it as a half-circle. The rest of the cycle is drawn along a vertical line. Note that if the SPQR tree does not contain any S-nodes, then it consists only of a single R-node, hence, we can directly apply the algorithm of Bekos et al. [BKKS13].

The rooted SPQR tree induces a hierarchy on the virtual edges. In the skeleton of each node μ (except the root) there exists a unique virtual edge representing the parent node. We refer to this edge as the reference edge of μ and to its endpoints as the poles of μ . Suppose now we remove the reference edge in the skeleton of an S-node. The result is a simple path consisting of virtual and real edges. Since the reference edge is virtual, this chain starts and ends with a real edge. Furthermore, every virtual edge represents

either a P- or R-node. We show in the following that we can insert these chains into the skeletons of P- and R-nodes and draw them with perfect edge complexity. Notice that a chain may contain degree two nodes, some of them being cut vertices that require additional space to attach a bridge.

When drawing the skeleton of a P-node μ with poles (u, v) , we only have to consider the two chains induced by the two children of μ . One chain is drawn directly on the vertical line from u to v , while the other is parallel to that and connected by circular arcs to u and v ; see Figure 8.1d. Notice that in the case of a real edge or a single degree two node, this approach still works. Clearly, the layout has perfect edge complexity and conforms with the basic building block shape.

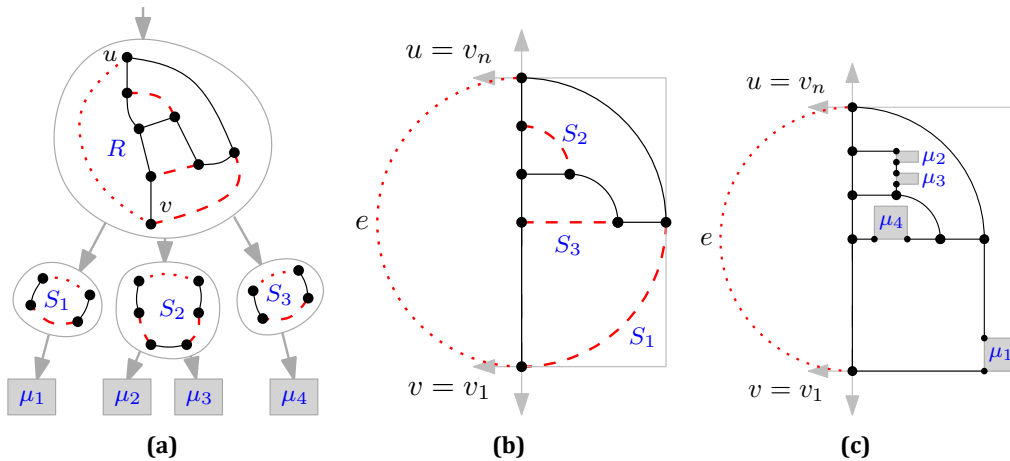


Figure 8.2: (a) An R-node with three S-node children S_1, S_2, S_3 . Real, virtual and reference edges are drawn solid, dashed and dotted. (b) Initial layout of the skeleton, and (c) After expanding the chains of S_1, S_2 and S_3 .

It remains to draw the R-nodes using the algorithm of Bekos et al. [BKKS13] and modify it so that it can handle virtual edges. An example of a R-node with three children is given in Figure 8.2a. We proceed in two steps: We apply the algorithm of Bekos et al. to obtain a layout for the skeleton of the R-node. Then we insert the chains of the children into the drawing. However, the layout has to match the basic building block scheme. Hence, the poles (u, v) have to be placed in the upper and lower left corner of the drawing. The algorithm of Bekos et al. [BKKS13] uses a leftmost canonical ordering for drawing any triconnected planar graph of maximum degree 3 with the property that the edge (v_n, v_1) is always a half-circular arc and v_n and v_1 have the same x-coordinate. Furthermore, their approach guarantees that no node is left of v_1 and v_n , respectively. The three nodes v_n, v_1, v_2 are part of the input when computing the canonical ordering. We use this property by choosing $v_n = u$ and $v_1 = v$ to obtain the correct placement of u and v ; see Figure 8.2b. In the second step, we expand every virtual edge by inserting

the corresponding chains. Similar to the P-node case, for each chain we have two real edges available for embedding the rest of the chain. Since the result of the algorithm of Bekos et al. [BKKS13] has perfect edge complexity, we have to deal with two cases: the virtual edge is drawn as a straight line or a quarter-circular arc. Expanding the line segment is straightforward if we put the chain on the line. When replacing a circular arc we make use of the free left (or top) port at the top node of the chain and the free bottom (or left respectively) port at the bottom node, and connect it by an horizontal and a vertical (or a vertical and an horizontal respectively) drawn edge. Figure 8.2b shows an example, where the virtual edge representing S_2 is drawn as a circular arc. In Figure 8.2c it is replaced by μ_2, μ_3 without using any circular arcs and the two real edges at the start and end of the chain are drawn horizontal and vertical. The result conforms to the shape and has perfect edge complexity.

We have shown that P-nodes, R-nodes and the S-node at the root of the SPQR-tree can be drawn with perfect edge complexity. Furthermore, the chains induced by the S-nodes are drawn on a line (except the real edges at the beginning and end). We are ready to describe the algorithm and formulate the main result of this section.

Theorem 8.1. *Every planar graph of maximum degree 3 admits a planar drawing of perfect edge complexity.*

Proof. Decompose the graph into its biconnected components as described in [Kan93] to obtain a hierarchy on the cut vertices. For each component construct the SPQR-tree and root it as described. We traverse the SPQR tree in a bottom-up manner. Since S-nodes are drawn implicitly by their parents (P- and R-nodes), we skip them. Instead, when visiting a P- or R-node, we obtain a set of chains, where every virtual edge corresponds to a subgraph that has already been drawn. The shape of these drawing matches the shape of the basic building block. Combined with the fact that each chain is drawn on a line, we can easily rescale them so that they fit into the drawing of the current skeleton. Notice that rescaling is only necessary for R-nodes. In this way we obtain a layout for the complete subgraph induced by the current node. The recursion terminates at the root S-node of the tree. The result is a drawing of the biconnected component with perfect edge complexity. Furthermore, the pre-specified cut vertex required for Kant's method to assemble the biconnected components is located in the upper left corner. Hence, we glue biconnected components with bridges together by using vertical or horizontal lines. \square

8.2 Non-Planar Perfect Smooth Orthogonal Drawings

In this section, we consider perfect smooth orthogonal drawings, which might not be planar. Notice that although crossings are allowed, no two edges incident to a vertex

can use the same port of the vertex. The main difficulty is to assign edges to ports so that the port constraints are respected. We prove the following result.

Theorem 8.2. *Every graph of maximum degree 4 admits a (not necessarily planar) drawing of perfect edge complexity.*

Proof. Let $G = (V, E)$ be an input graph of maximum degree 4. First, we create a new graph $G' = (V, E')$ from G so that G' is 4-regular. The new graph G' is a supergraph of G on the same vertex set, that is, $E' \supseteq E$. It is easy to construct G' starting from G by iteratively choosing a pair of vertices of degree less than 4 and adding an edge between them. Note that G' may have loops and multiple edges.

To construct a drawing of perfect edge complexity, we fix an arbitrary order of vertices $v_1, v_2, \dots, v_{|V|}$. We draw vertices on a diagonal; each vertex v_i for $1 \leq i \leq |V|$ has coordinates (i, i) . The edges are drawn as quarter-circular and 3-quarter-circular arcs; see Figure 8.3b. The goal now is to assign edges to ports of the vertices so that every port of a vertex is used only once.

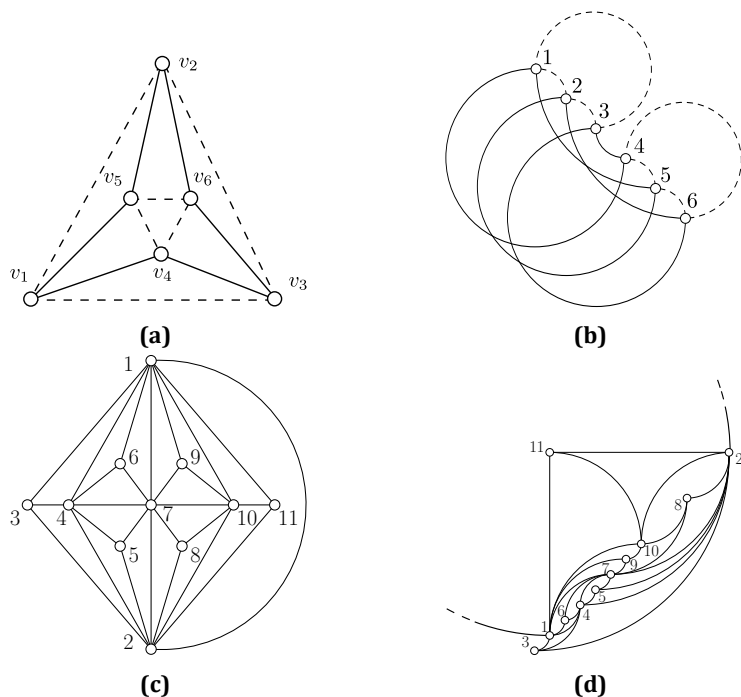


Figure 8.3: (a-b) The octahedron graph: (a) decomposed into 2 sets of cycles; C_1 (solid) and C_2 (dashed), (b) drawn with perfect edge complexity. (c-d) The Goldner-Harary graph drawn (c) with straight line-segments and (d) with perfect edge complexity under the Kandinsky model.

As Petersen showed in [Pet91], the edges of any graph of degree Δ can be covered by $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$ edge-disjoint sets of cycles, and such sets can be found in polynomial time. We

apply the result for graph G' to get 2 sets of cycles C_1 and C_2 . The edges of C_1 use West and South ports of vertices, while the edges of C_2 use East and North ports; see [Figure 8.3b](#). Consider a cycle $u_1, \dots, u_k, u_{k+1} = u_1$ with $u_i \in V$ from C_1 . We draw the cycle so that edge (u_i, u_{i+1}) uses West port of u_i and South port of u_{i+1} for all $1 \leq i \leq k$. Symmetrically, we draw the cycles of C_2 . It is easy to see that each port is used once since every vertex is covered by exactly one cycle from C_1 and by one cycle from C_2 . A drawing of G is constructed from G' by removing the edges from $E' \setminus E$. \square

8.3 Perfect Smooth Orthogonal Kandinsky Drawings

Bekos et al. [[BKKS13](#)] proved that every planar graph admits a smooth orthogonal drawing of edge complexity two under the Kandinsky model. Their algorithm is mostly based on techniques stemming from book-embedding. In the resulting drawings the vertices of the graph are always restricted on a horizontal line so that the edges that are of smooth complexity two consist of two half-circles each, and cross the line at the inflection point. We notice that such a drawing approach is quite restricted. To realize this, observe that the Goldner-Harary graph, which is the smallest non-Hamiltonian maximal planar graph, has book thickness three; see [Figure 8.3c](#). Therefore, according to the algorithm of Bekos et al. [[BKKS13](#)], it requires a smooth orthogonal drawing of edge complexity two. If one relaxes the requirement that the vertices lie on a horizontal line, then it is possible to construct a perfect smooth orthogonal drawing; see [Figure 8.3d](#). Thus, a natural question is whether any planar graph admits a perfect smooth orthogonal drawing under the Kandinsky model. In the remainder of this section, we answer the question negatively.

We show that the graph in [Figure 8.4a](#), denoted as G_K , does not admit a perfect smooth orthogonal drawing under the Kandinsky model. The graph is constructed from K_4 by stellating all internal faces, that is, by adding an extra vertex to an internal face and joining it with every vertex of the face; see [Figure 8.4b](#). In order to obtain G_K , the stellating procedure is repeated twice. By construction, G_K contains three interior-disjoint isomorphic subgraphs that correspond to the three internal faces of the initial K_4 . This subgraph is shown in [Figure 8.4c](#) and we denote it by G_T . We can derive a nice property for all possible smooth orthogonal drawings of G_T with perfect edge complexity under the Kandinsky model. To this end, we introduce some notation.

Suppose that a graph G admits a smooth orthogonal drawing with perfect edge complexity under the Kandinsky model, and consider its embedded dual G^* . Let f_1 and f_2 be two adjacent faces of G with a common edge (v_1, v_2) . If (v_1, v_2) is drawn as an arc, we direct (f_1, f_2) in G^* from f_1 to f_2 if and only if every line-segment with endpoints on the arc (v_1, v_2) does not lie entirely within face f_2 . We stress that (f_1, f_2) remains undi-

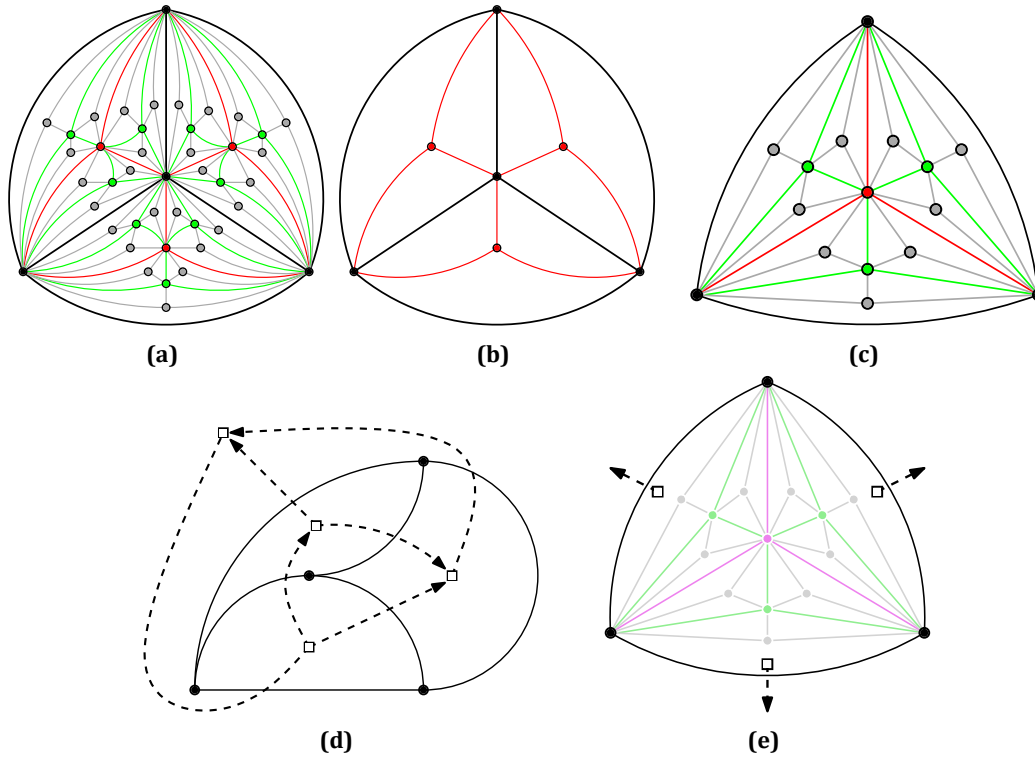


Figure 8.4: (a) Graph G_K does not admit a perfect smooth orthogonal drawing under the Kandinsky model. (b) K_4 (black vertices and edges) in which every internal face is stellated (red vertices and edges). (c) Graph G_T is a subgraph of G_K . (d) The mixed dual derived from a specific smooth orthogonal drawing of K_4 with perfect edge complexity under the Kandinsky model. (e) G_T^* has three directed edges pointing from the interior of G_T to its exterior. Vertices of the dual graph are drawn as squares, while edges of the dual are dashed.

rected if (v_1, v_2) is drawn as a line segment. The derived mixed dual G^* depends solely on the drawing of G ; see [Figure 8.4d](#). The mixed dual G_T^* has the following property.

Lemma 8.2. *The vertex of G_T^* corresponding to the outerface of G_T has in-degree 3. In other words, G_T^* has three directed edges pointing from the interior of G_T to its exterior; see [Figure 8.4e](#).*

Proof. Note that G_T is a planar triangulated graph. Hence, before we proceed, we examine the possible drawing with perfect edge complexity of a triangular face under the Kandinsky model. Consider two adjacent vertices v_1 and v_2 in a smooth orthogonal drawing of perfect edge complexity. Then, v_1 and v_2 are either horizontally, vertically or diagonally aligned. If v_1 and v_2 are horizontally (vertically, respectively) aligned, then edge (v_1, v_2) is drawn as a straight line or as a half-circle. If they are diagonally aligned, edge (v_1, v_2) is drawn as a quarter-circular or 3-quarter-circular arc; see [Figure 8.5a](#). In order to facilitate the reader, we denote by $\ell(v_1, v_2)$ the line that is defined by v_1 and

v_2 . If we want to emphasize that it is an horizontal (vertical or diagonal) line, we write $hl(v_1, v_2)$ ($vl(v_1, v_2)$ or $dl(v_1, v_2)$, respectively).

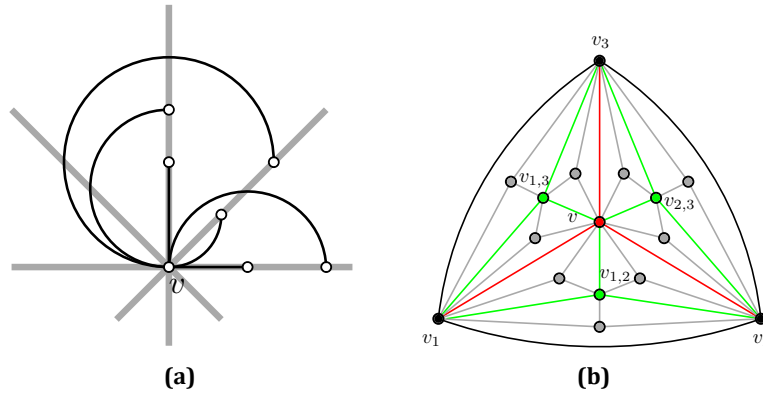


Figure 8.5: (a) All neighbors of vertex v lie on the four gray axes, while all edges incident to v are drawn as straight lines or arcs of circles. (b) Graph G_T is a subgraph of G_K

Consider now a triangle $T = \{v_1, v_2, v_3\}$. In **Figure 8.6** we can see all possible positioning of vertices v_1, v_2 and v_3 on the plane. In particular, if all three vertices are diagonally aligned, then w.l.o.g. we have the configuration of **Figure 8.6a**. Otherwise, at least two vertices of T are horizontally or vertically aligned. Assume w.l.o.g. that v_1 and v_2 are horizontally aligned. Vertex v_3 must be properly aligned with both v_1 and v_2 ; see **Figure 8.6b**. Hence, either all three vertices are horizontally aligned (see **Figure 8.6c**), or v_3 is diagonally aligned to both v_1 and v_2 (see **Figure 8.6d**), or v_3 is diagonally aligned to only one of v_1 and v_2 , say v_1 , and vertically aligned to the other vertex, namely v_2 (see **Figure 8.6e**).

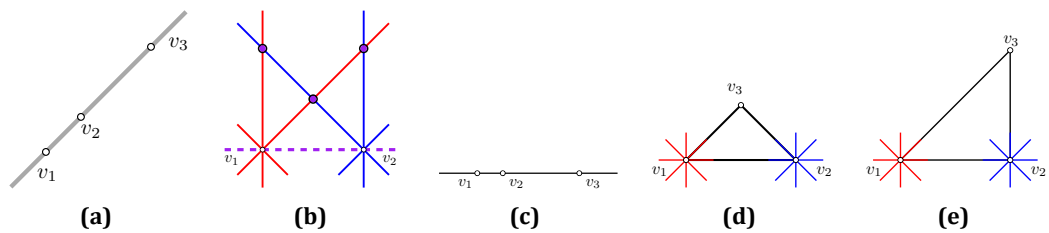


Figure 8.6: Placement of the vertices of a triangle $T = \{v_1, v_2, v_3\}$. (a) v_1, v_2 and v_3 are diagonally aligned. (b) v_1 and v_2 are horizontally aligned. Purple color denotes allowed positions for v_3 . (c) v_1, v_2 and v_3 are horizontally aligned. (d) v_1 and v_2 are horizontally aligned, v_3 is diagonally aligned to v_1 and v_2 . (e) v_1 and v_2 are horizontally aligned, v_3 is diagonally aligned to v_1 and vertically aligned to v_2 .

Our purpose is to examine the properties of a smooth orthogonal drawing of G_T with perfect edge complexity under the Kandinsky model. Let $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ be the outerface of G_T and v the common neighbor of v_1, v_2 and v_3 that lies in the interior of

T ; see [Figure 8.5b](#). Also, we write $v_{i,j}$ for the common neighbor of vertices v, v_i and v_j , $1 \leq i < j \leq 3$, and write $T_{i,j}$ for the triangle with vertices v_i, v_j and v , $1 \leq i < j \leq 3$. Since T is a triangle, its vertices are positioned as in [Figure 8.6](#). We distinguish four cases:

Case A. Vertices v_1, v_2 and v_3 are diagonally aligned; see [Figure 8.6a](#). Assume w.l.o.g. that edge (v_1, v_3) is to the right of $dl(v_1, v_3)$. By the alignment restrictions v is placed either (i) horizontally aligned to v_1 , vertically aligned to v_3 and diagonally aligned to v_2 , or (ii) vertically aligned to v_1 , horizontally aligned to v_3 and diagonally aligned to v_2 , or (iii) diagonally aligned to all three vertices of T . The first case is shown in [Figure 8.7a](#). In this case, since v is inside T , edge (v_1, v_3) is drawn as a 3-quarter-circular arc to the right of $dl(v_1, v_3)$. Then, the alignment restrictions for vertex $v_{1,3}$ impose that it is placed either on edge (v_1, v_3) or on vertex v_2 . Hence, this case is rejected. In the second scenario, where v is vertically aligned to v_1 , horizontally aligned to v_3 and diagonally aligned to v_2 , we have the situation of [Figure 8.7b](#). Edge (v_1, v_2) (or (v_2, v_3)) cannot be drawn as a 3-quarter-circular arc to the left of $dl(v_1, v_3)$, otherwise v would be placed on edge (v_1, v_2) ((v_2, v_3) , respectively). In any other case, vertex v will be placed outside T , which is not allowed. Hence, v is placed along $dl(v_1, v_3)$ and between vertices v_1 and v_3 . We assume w.l.o.g. that v is placed between v_1 and v_2 . Then, edge (v_3, v) is to the right of $dl(v_1, v_3)$ and (v_1, v_2) to the left of $dl(v_1, v_3)$; see [Figure 8.7c](#).

The above argument, concerning the placement of vertex v , can be generalized: Suppose that we have a K_4 graph, where every internal face is stellated. If the vertices of the outerface of K_4 are diagonally aligned, then the internal vertex of the K_4 is also diagonally aligned with the vertices of the outerface. Now, every subgraph $T_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq 3$, is a K_4 with vertices v_i, v_j and v on the outerface, internal vertex $v_{i,j}$, and every internal face is stellated. Since all vertices v_1, v_2, v_3 and v are diagonally aligned along $dl(v_1, v_3)$, so are vertices $v_{1,2}, v_{1,3}$ and $v_{2,3}$; see [Figure 8.8a](#). Then, vertex $v_{1,3}$ is placed between vertices v_1 and v , and edge (v_1, v) is drawn to the left of $dl(v_1, v_3)$. Similarly vertex $v_{1,2}$ is placed between vertices v and v_2 , and edge (v_2, v) is drawn to the right of $dl(v_1, v_3)$. Finally, vertex $v_{2,3}$ is placed between vertices v_2 and v_3 , and edge (v_2, v_3) is drawn to the left of $dl(v_1, v_3)$. Note that edge (v_1, v_3) is drawn as a quarter-circular or 3-quarter-circular arc to the right of $dl(v_1, v_3)$, and edges (v_1, v_2) and (v_2, v_3) are drawn to the left of $dl(v_1, v_3)$, where at most one of them can be drawn as a 3-quarter-circular arc.

Case B. Vertices v_1, v_2 and v_3 are horizontally aligned; see [Figure 8.6c](#). We can assume w.l.o.g. that edge (v_1, v_3) is drawn as a half-circle below $hl(v_1, v_3)$. Since v is adjacent to v_1, v_2 and v_3 , and v lies inside triangle T , by the alignment restrictions, v can

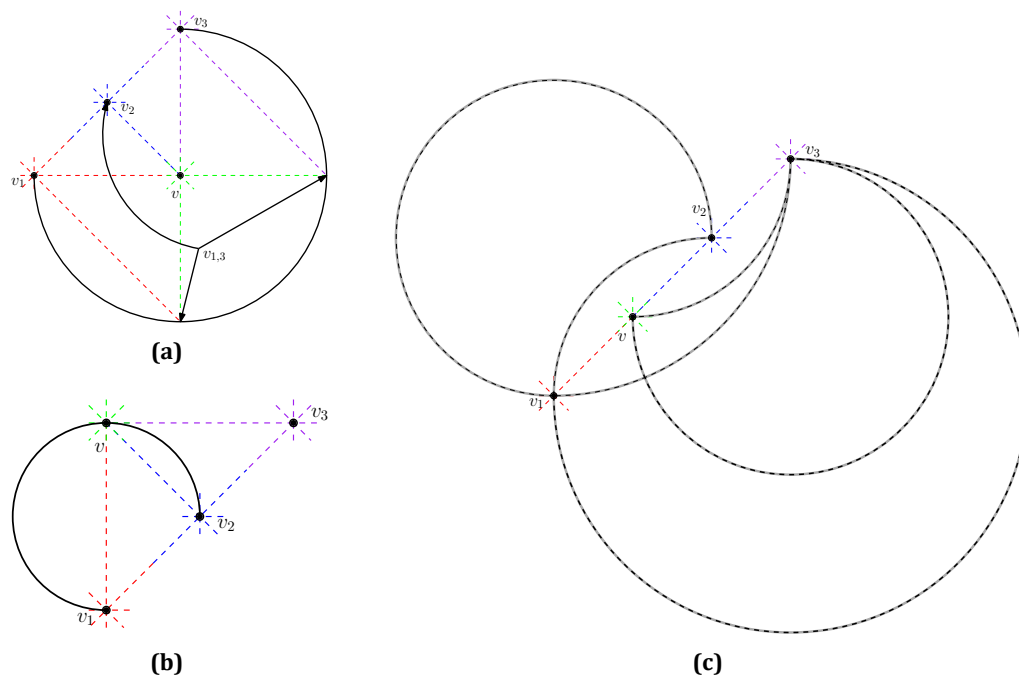


Figure 8.7: (a)-(b) The drawing of T is not possible when vertices v_1 , v_2 and v_3 are diagonally aligned and v is not along $dl(v_1, v_3)$. (c) Vertices v_1 , v_2 , v_3 and v are along $dl(v_1, v_3)$. Gray-shaded edges correspond to different drawings.

only be placed along $hl(v_1, v_3)$ and between vertices v_1 and v_3 . Let, w.l.o.g. v placed between vertices v_1 and v_2 ; see [Figure 8.8b](#). Then edge (v_1, v_2) is drawn as a half-circle above $hl(v_1, v_3)$ and edge (v_3, v) is drawn as a half-circle below $hl(v_1, v_3)$.

The above argument can be generalized: Suppose that we have a K_4 graph, where the vertices of the outerface of K_4 are horizontally aligned. Then the internal vertex of the K_4 is horizontally aligned and placed between two vertices of the outerface. Then, for vertex $v_{1,3}$, which is adjacent to all vertices of $T_{1,3}$, we have that $v_{1,3}$ must be placed on $hl(v_1, v_3)$ and between vertices v_1 and v_3 . Since $v_{1,3}$ lies inside $T_{1,3}$, $v_{1,3}$ can only be placed between v_1 and v . Then edge (v_1, v) is drawn as a half-circle above $hl(v_1, v_3)$. Similarly, $v_{1,2}$ is placed along $hl(v_1, v_3)$ and between v and v_2 , while edge (v_2, v) is drawn as a half-circle below $hl(v_1, v_3)$. Finally, $v_{2,3}$ is placed along $hl(v_1, v_3)$ and between v_2 and v_3 , and edge (v_2, v_3) is drawn as a half-circle above $hl(v_1, v_3)$. Note that (v_1, v_3) is drawn below $hl(v_1, v_3)$, while (v_1, v_2) and (v_2, v_3) are drawn above $hl(v_1, v_3)$.

Case C. Vertices v_1 and v_2 are horizontally aligned, v_3 is diagonally aligned to v_1 and v_2 ; see [Figure 8.6d](#). By the alignment restrictions, there are two possible positions for vertex v : (i) horizontally aligned to v_1 and v_2 , and vertically aligned to v_3 , or, (ii) diagonally aligned to v_1 and v_2 , and vertically aligned to v_3 . Since none of the two

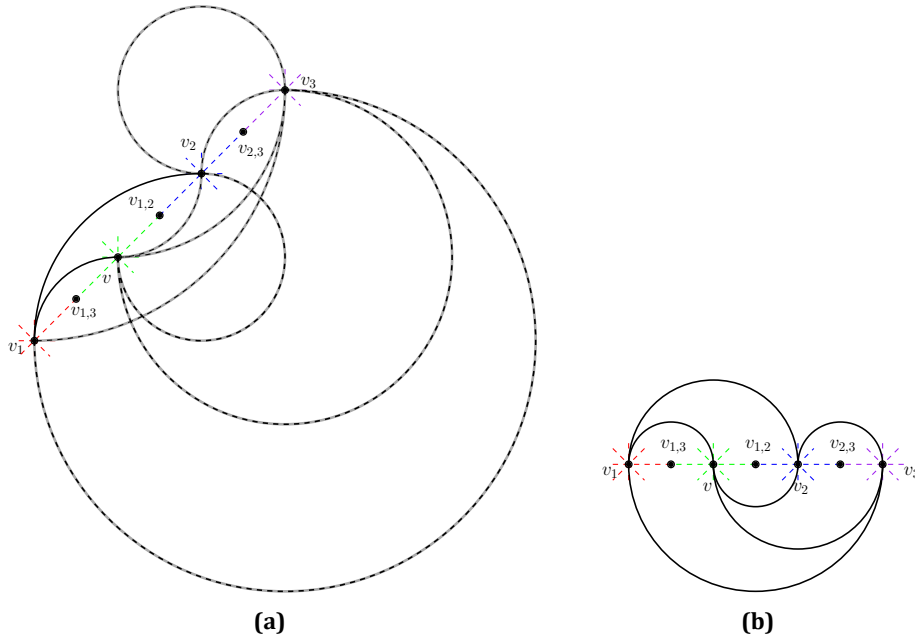


Figure 8.8: (a) Drawing of T when vertices v_1, v_2 and v_3 are diagonally aligned. Gray-shaded edges correspond to different drawings. (b) Drawing of T when vertices v_1, v_2 and v_3 are horizontally aligned.

positions is above $hl(v_1, v_2)$, and v lies in the interior of T , edge (v_1, v_2) is drawn as a half-circle below $hl(v_1, v_2)$. The situation is shown in [Figure 8.9a](#). Then v is either placed on $hl(v_1, v_2)$ or on edge (v_1, v_2) . Clearly, the second option is rejected, and v is horizontally aligned to v_1 and v_2 , and vertically aligned to v_3 . Now, vertex $v_{1,2}$ is adjacent to vertices v_1, v_2 and v , and lies inside triangle $T_{1,2} = \{v, v_1, v_2\}$. By the alignment restrictions, $v_{1,2}$ is either (i) horizontally aligned to all three vertices of $T_{1,2}$, or (ii) diagonally aligned to v_1 and v_2 , and vertically aligned to v . The second placement is rejected since $v_{1,2}$ would be placed on edge (v_1, v_2) . So, $v_{1,2}$ is placed along $hl(v_1, v_2)$ and between vertices v_1 and v_2 . Assume w.l.o.g., that $v_{1,2}$ is placed between vertices v_1 and v as shown in [Figure 8.9a](#). Then edge (v_1, v) is drawn as a half-circle above $hl(v_1, v_2)$, and $(v_2, v_{1,2})$ is drawn as a half-circle below $hl(v_1, v_2)$. Then, for vertex $v_{1,3}$, which is adjacent to vertices v_1, v_3 and v , there are two valid placements: (i) vertically aligned to v_1 , horizontally aligned to v_3 and diagonally aligned to v , or (ii) diagonally aligned to all three vertices of $T_{1,3}$. The second placement is rejected, otherwise $v_{1,3}$ would be placed on edge (v_1, v) . Then, $v_{1,3}$ is vertically aligned to v_1 , horizontally aligned to v_3 and diagonally aligned to v . This placement forces edge (v_1, v_3) to be drawn as a 3-quarter-circular arc to the left of $dl(v_1, v_3)$. As in the case of $v_{1,3}$, there are two placements for vertex $v_{2,3}$: (i) vertically aligned to v_2 , horizontally aligned to v_3 and diagonally aligned to v , or (ii) diagonally aligned to all three

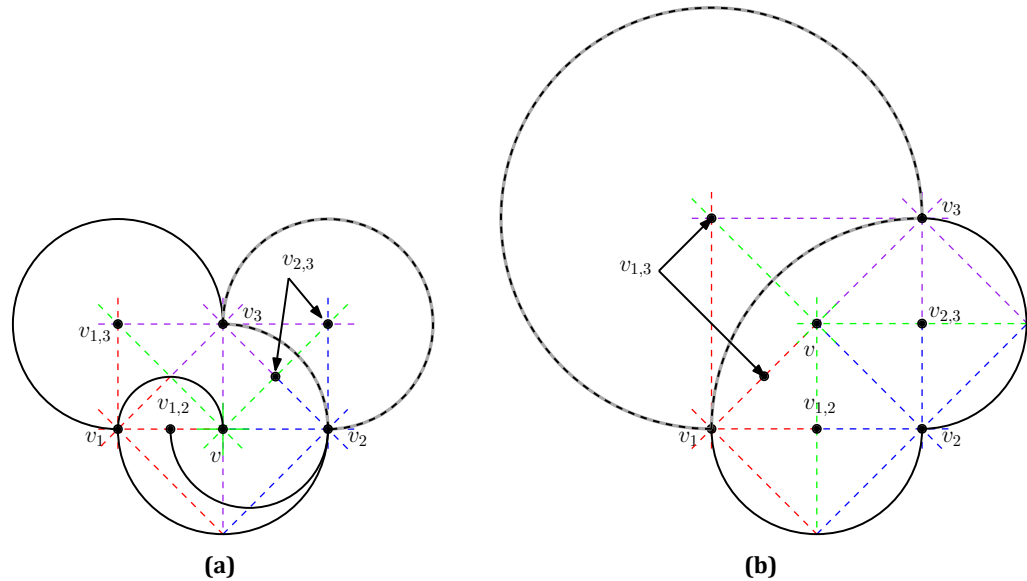


Figure 8.9: (a) Drawing of T when vertices v_1 and v_2 are horizontally aligned, v_3 is diagonally aligned to v_1 and v_2 . (b) Drawing of T when vertices v_1 and v_2 are horizontally aligned, v_3 is diagonally aligned to v_1 and vertically aligned to v_2 . Gray-shaded edges correspond to different drawings.

vertices of $T_{2,3}$. In the first case, edge (v_2, v_3) is drawn as a 3-quarter-circular arc to the right of $dl(v_2, v_3)$, and in the second case it is drawn as a quarter-circular or 3-quarter-circular arc to the right of $dl(v_2, v_3)$. Note that edge (v_1, v_2) is drawn below $hl(v_1, v_2)$, (v_1, v_3) is drawn to the left of $dl(v_1, v_3)$, and (v_2, v_3) is drawn to the right of $dl(v_2, v_3)$.

Case D. Vertices v_1 and v_2 are horizontally aligned, v_3 is diagonally aligned to v_1 and vertically aligned to v_2 ; see Figure 8.6e. By the alignment restrictions, there are two possible positions for vertex v : (i) vertically aligned to v_1 , diagonally aligned to v_2 , and horizontally aligned to v_3 , or, (ii) diagonally aligned to all three vertices of T . The first placement is rejected, otherwise, vertex $v_{1,3}$ cannot be placed inside the triangle $T_{1,3}$. So, v is diagonally aligned to all three vertices of T ; see Figure 8.9b. Now, vertex $v_{1,2}$ is adjacent to vertices v_1, v_2 and v , and lies inside triangle $T_{1,2} = \{v, v_1, v_2\}$. By the alignment restrictions, $v_{1,2}$ is either (i) horizontally aligned to v_1 and v_2 , and vertically aligned to v , or, (ii) diagonally aligned to v_1 and v_2 , and vertically aligned to v . Since none of the two positions is above $hl(v_1, v_2)$, and $v_{1,2}$ lies in the interior of $T_{1,2}$, edge (v_1, v_2) is drawn as a half-circle below $hl(v_1, v_2)$. Then $v_{1,2}$ is either placed on $hl(v_1, v_2)$ or on edge (v_1, v_2) . Clearly, the second option is rejected, and $v_{1,2}$ is horizontally aligned to v_1 and v_2 , and vertically aligned to v . Similarly, for vertex $v_{2,3}$ there are two possible placements: (i) vertically aligned to v_2 and v_3 , and horizon-

tally aligned to v , or (ii) diagonally aligned to v_2 and v_3 , and horizontally aligned to v . Since none of the two positions is to the left of $v\ell(v_2, v_3)$, and $v_{2,3}$ lies in the interior of $T_{2,3}$, edge (v_2, v_3) is drawn as a half-circle to the right of $v\ell(v_2, v_3)$. Then $v_{2,3}$ is either placed on $v\ell(v_2, v_3)$ or on edge (v_2, v_3) . Clearly, the second option is rejected, and $v_{2,3}$ is vertically aligned to v_2 and v_3 , and horizontally aligned to v . Finally, for vertex $v_{1,3}$, which is adjacent to vertices v_1, v_3 and v , there are two valid placements: (i) vertically aligned to v_1 , horizontally aligned to v_3 and diagonally aligned to v , or (ii) diagonally aligned to all three vertices of $T_{1,3}$. In the first case edge (v_1, v_3) is drawn as a 3-quarter-circular arc to the left of $d\ell(v_1, v_3)$, and in the second case it is drawn as a quarter-circular or 3-quarter-circular arc to the left of $d\ell(v_1, v_3)$. Note that edge (v_1, v_2) is drawn below $h\ell(v_1, v_2)$, (v_1, v_3) is drawn to the left of $d\ell(v_1, v_3)$, and (v_2, v_3) is drawn to the right of $v\ell(v_2, v_3)$.

□

Now we prove our main theorem.

Theorem 8.3. *There exists an infinite class of planar graphs that do not admit planar perfect smooth orthogonal drawings under the Kandinsky model.*

Proof. Suppose that there is a smooth orthogonal drawing of G_K with perfect edge complexity under the Kandinsky model, and let G_K^* be its dual. Since G_K contains three interior-disjoint copies of G_T , in any planar embedding of G_K there are two copies of G_T with a common edge on their outerfaces. Let G_T^1 and G_T^2 be the two copies of G_T that share an edge, and let f_1 (and f_2) be the interior face of G_T^1 (G_T^2 , respectively), which is incident to the common edge. From the drawing of G_T^1 and **Lemma 8.2**, we have the directed edge (f_1, f_2) . On the other hand, from the drawing of G_T^2 , the directed edge is (f_2, f_1) , which contradicts the definition of the mixed dual G_K^* . Hence, G_K does not admit a perfect smooth orthogonal drawing under the Kandinsky model.

Now it is easy to construct an infinite class of planar graphs that do not admit a perfect smooth orthogonal drawing. To this end, in any planar graph with a triangle T , we replace the interior of T with a copy of G_K . Clearly, the resulting graph also does not admit a perfect smooth orthogonal drawing under the Kandinsky model. □

8.4 Graph Classes of Perfect Edge Complexity

In this section, we study the smooth orthogonal graph drawing problem from a different perspective. First, we consider the problem under the Kandinsky model. Let kHLS_1 (kDLS_1 , respectively) be the graph class containing all graphs that admit perfect smooth orthogonal drawings under the Kandinsky model in the case, where all

vertices are restricted on a horizontal (diagonal, respectively) line. Let also kGS_1 be the general graph class containing all graphs admitting smooth orthogonal drawings of perfect edge complexity under the Kandinsky model (that is, there is no restriction on the vertex positions). Obviously, $kHLS_1, kDLS_1 \subseteq kGS_1$. Since the Goldner-Harary graph does not belong neither to $kHLS_1$ nor to $kDLS_1$ (see Section 8.3), it follows that $kHLS_1, kDLS_1 \subset kGS_1$. In addition, it is easy to observe that $kHLS_1 = kDLS_1$ since both $kHLS_1$ and $kDLS_1$ are identified with the class of graphs that admit two-page book embeddings. In conclusion, Theorem 8.3 yields the following relationship: $kHLS_1 = kDLS_1 \subset kGS_1 \subset \{G : G \text{ is planar}\}$.

We now consider the problem, assuming that no two edges are allowed to use the same port of a vertex. Similarly to the previous case, we denote by HLS_1 and DLS_1 the graph classes containing all planar graphs with maximum degree 4 that admit perfect smooth orthogonal drawings in the cases, where all vertices are restricted on a horizontal line and a diagonal line, respectively. GS_1 denotes the general graph class containing all planar graphs with maximum degree 4 that admit smooth orthogonal drawings of perfect edge complexity (that is, there is no restriction on the vertex positions). It is not difficult to see that K_4 (and subsequently any planar graph with maximum degree 4 that contains K_4 as a subgraph) belongs neither to HLS_1 nor to DLS_1 , which implies that $HLS_1, DLS_1 \subset GS_1$; recall that we assume that no two edges are allowed to use the same port of a vertex. On the other hand, Figure 8.10a (8.10b, re-

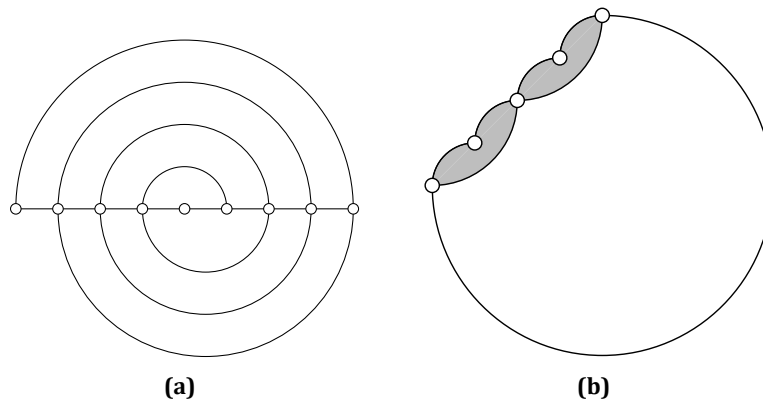



Figure 8.10: Graphs that belong to (a) $HLS_1 \setminus DLS_1$, (b) $DLS_1 \setminus HLS_1$.

spectively) shows a graph that belongs to HLS_1 (DLS_1 , respectively) but not to DLS_1 (HLS_1 , respectively). Indeed, if one restricts the vertices of the graph of Figure 8.10a on a diagonal line, then all edges that are drawn as half-circular arcs in Figure 8.10a should be drawn as 3-quarter-circular arcs, while the remaining ones as quarter-circular arcs, which unavoidably requires port sharing. Similarly, if one restricts the vertices of the graph of Figure 8.10b on a horizontal line, then one of the two gray-shaded triangles

of this graph should be drawn on the top-page and the other one on the bottom-page, which implies that the edge that connects the outermost vertices of the graph of [Figure 8.10b](#) cannot be drawn as a half-circle (either on the top- or bottom-page) without port sharing. Notice that both $\text{HLS}_1 \setminus \text{DLS}_1$ and $\text{DLS}_1 \setminus \text{HLS}_1$ contain infinitely many planar graphs of maximum degree 4, e.g., any planar graph with maximum degree 4 that has the graph of [Figure 8.10a](#) ([8.10b](#), respectively) as a subgraph belongs to $\text{HLS}_1 \setminus \text{DLS}_1$ ($\text{DLS}_1 \setminus \text{HLS}_1$, respectively). Hence, $\text{HLS}_1 \neq \text{DLS}_1$. Since the octahedron graph does not belong to GS_1 [[BKKS13](#)], we have the following: $\text{HLS}_1, \text{DLS}_1 \subset \text{GS}_1 \subset \{G : G \text{ is planar with } \Delta(G) = 4\}$.



9 Conclusions

9.1 Book Embeddings

In [Chapter 3](#) we proved that any planar graph with maximum degree 4 is subhamiltonian and therefore 2-page book embeddable, and in [Chapter 4](#) we proved that 1-planar graphs have constant page number. Some open questions that arise are the following:

- Can [Theorem 3.1](#) be extended to planar graphs with maximum degree 5, i.e. are planar graphs with maximum degree 5 subhamiltonian?
- Can the page number of 1-planar graphs be further reduced, e.g., to less than 20?
- The same question is of importance even for optimal 1-planar graphs, i.e., graphs with n vertices and exactly $4n - 8$ edges.
- Are there families of 1-planar graphs that need a certain number of pages (e.g., ≥ 4 or ≥ 5)?
- Can one prove with similar arguments that k -planar graphs have bounded page number? Or more precisely, is there a linear function $f(k)$ such that k -planar graphs fit into $f(k)$ pages?
- Are there other families of graphs that are not minor-closed and that have bounded page number?
- Of course the most interesting and intriguing question about book embeddings of planar graphs is whether Yannakakis' upper bound of 4 [[Yan89](#)] is tight, i.e. can all planar graphs be embedded in 3 pages, or there exist planar graphs that requires 4 pages?

9.2 Adjacent Vertex Distinguishing Total Colorings

In [Chapter 6](#) we proved that the AVDTC conjecture holds for 4-regular graphs. In [Chapter 5](#) we were able to prove that for generalized Halin graphs with maximum de-

gree 3 a total of 5 colors is sufficient, i.e. in this case the upper bound of the conjecture is not tight. This leads to the following questions:

- Is the bound of the AVDTC conjecture tight for planar graphs with small maximum degree (i.e. ≤ 13)?
- Is the bound of 6 tight for graphs of maximum degree 3 or is it true that 5 colors are always sufficient?
- Is the bound of the AVDTC conjecture tight for k -regular graphs where k is odd?
- Is it true that if the AVDTC conjecture holds for k -regular graphs then it also holds for any graph with maximum degree k ?

9.3 Circle Representations

In [Chapter 7](#) we proved that every 3-connected 4-regular planar graph admits a realization as a system of touching circles. We also demonstrated that there exist 4-regular planar graphs which are not 3-connected (i.e., either connected or biconnected) and do not admit realizations as system of circles. However, our work raises several open problems. In the following, we name only few of them:

- What is the computational complexity of the corresponding decision problem, i.e., does a given connected 4-regular planar graph admit a realization as a system of circles?
- Which is the smallest connected 4-regular planar graph not admitting a realization as a system of circles? The ones we managed to construct consist of more than 100 vertices.
- The octahedron graph admits non-equivalent realizations as system of circles, in which the number of circles participating in the corresponding realizations also differs. In general, an n -vertex 4-regular planar graph needs at least $(1 + \sqrt{1 + 4n})/2$ and at most $2n/3$ circles in order to be realized as a system of circles, as shown in [Section 7.1](#). So, what is the range of the number of circles needed in order to realize a given (3-connected) 4-regular planar graph as a system of circles?
- In the context of graph realizations as a system of circles, it would be interesting to study the class of Eulerian planar graphs. Obviously, certain vertices would be defined as the intersection of more than two circles.

9.4 Smooth Orthogonal Drawings

In [Chapter 8](#) we proved several new results on smooth orthogonal drawings. Still, our work raises several open questions:

- The interesting problem is the recognition of planar graphs with maximum degree 4 admitting a perfect smooth orthogonal drawing.
- The same question can be posed for a planar graph under the Kandinsky model, that is, does a given planar graph belong to kGS_1 ? Notice that the corresponding decision problems whether a given graph belongs either to $kHLS_1$ or to $kDLS_1$ are NP-hard since they are equivalent to the problem of determining whether a graph admits a two-page book embedding.
- The algorithm that supports [Theorem 8.2](#) does not take care of the crossings that potentially arise. Thus, the minimization of the crossings is also of importance.
- Is it possible to determine a universal point set so that any planar graph with maximum degree 4 can be embedded on the point set with perfect edge complexity?

**Εμφυτεύσεις, Χρωματισμοί και
Συναφή Γραφοθεωρητικά
Προβλήματα**

10 Εισαγωγή

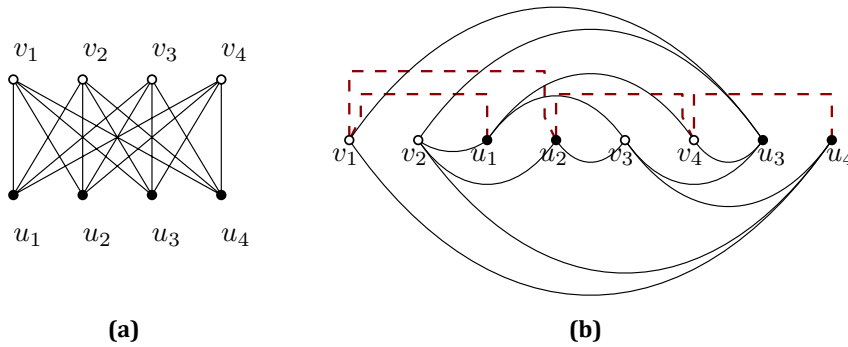
10.1 Εμφυτεύσεις σε Βιβλίο

Οι εμφυτεύσεις γραφημάτων σε βιβλίο (book embeddings) είναι κατά μία έννοια ειδική περίπτωση των εμφυτεύσεων γραφημάτων στο επίπεδο. Σε μία εμφύτευση σε βιβλίο, οι κορυφές του γραφήματος τοποθετούνται στη ράχη (spine) του βιβλίου και οι ακμές αντιστοιχούνται σε σελίδες (pages), έτσι ώστε οι ακμές που βρίσκονται στην ίδια σελίδα να μην τέμνονται. Το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο (book thickness/ page number) ενός γραφήματος είναι ο μικρότερος αριθμός σελίδων που απαιτούνται για οποιαδήποτε εμφύτευση του γραφήματος σε βιβλίο.

Οι εμφυτεύσεις σε βιβλίο έχουν μακρά ερευνητική ιστορία, ξεκινώντας χρονικά στις αρχές τις δεκαετίας του '70 [Oll73]. Οι εμφυτεύσεις σε βιβλίο προκύπτουν με φυσικό τρόπο σε VLSI (Very Large Scale Integration) σχεδιασμούς όπου οι κορυφές του γραφήματος αντιστοιχούν στα τμήματα ενός κυκλώματος και οι ακμές αντιστοιχούν στις συνδέσεις μεταξύ τους [CLR87]. Άλλες περιοχές εφαρμογών των εμφυτεύσεων σε βιβλίο περιλαμβάνουν παράλληλο προγραμματισμό, το σχεδιασμό συστημάτων με ανοχή βλάβης [CLR87], τη βιοπληροφορική [HS99] και πολλές άλλες.

Ένα άνω φράγμα για το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο ενός γραφήματος με n κορυφές είναι $\lceil n/2 \rceil$, το οποίο είναι αυστηρό για πλήρη γραφήματα [BK79]. Για τα πλήρη διμερή γραφήματα $K_{n,m}$, με $n \leq m$ το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο είναι το πολύ ίσο με n . Παρά το γεγονός ότι το άνω όριο δεν είναι γενικά αυστηρό (για παράδειγμα το $K_{4,4}$ έχει πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο 3, όπως μπορεί να δει κανείς στην [Εικόνα 10.1](#)), είναι ακριβώς ίσο με n , στην περίπτωση που $m > n(n-1)$ [BK79, dKPS14].

Εφόσον το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο ενός γραφήματος ισούται με το μέγιστο πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο των δυσυνεκτικών του συνιστωσών [BK79], μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι το γράφημα είναι δυσυνεκτικό. Έχει υπολογιστεί ότι τα δυαδικά de Bruijn γραφήματα, τα γραφήματα διαπλοκής-εναλλαγής και οι κυβικά-συνεκτικοί κύκλοι πάντα μπαίνουν σε τρεις σελίδες [HS97]. Πέρα από συγκεκριμένες κλάσεις γραφημάτων, άνω φράγματα στο πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο έχουν επίσης συσχετιστεί με διάφορες ιδιότητες γραφημάτων. Συγκεκριμένα τα γραφήματα με m ακμές έχουν πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο $O(\sqrt{m})$ [Mal94b] και τα γραφήματα με γέ-

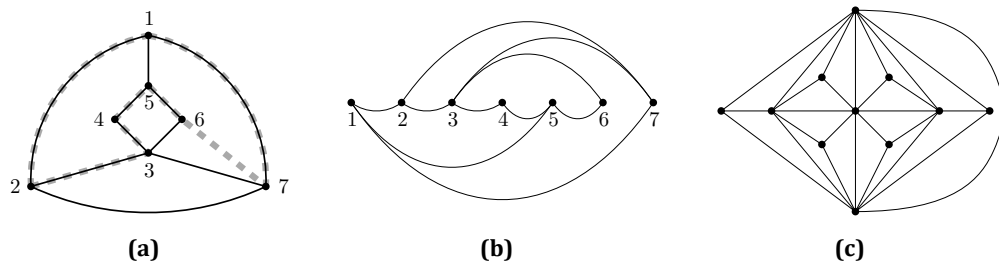


Εικόνα 10.1: (a) Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{4,4}$. (b) Το $K_{4,4}$ έχει πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο 3: Οι ακμές της πρώτης σελίδας έχουν σχεδιαστεί ως συνεχή κυκλικά τόξα πάνω από τη ράχη, οι ακμές της δεύτερης σελίδας ως συνεχή κυκλικά τόξα κάτω από τη ράχη, και οι ακμές της τρίτης σελίδας έχουν σχεδιαστεί ως διακεκομμένες κόκκινες πολυγωνικές γραμμές.

νος g έχουν πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο $O(\sqrt{g})$ [Mal94a]. Για γραφήματα με σταθερό πλάτος-δένδρου (treewidth) k το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο είναι το πολύ $k+1$ [GH01], και αυτό το φράγμα είναι αυστηρό για $k > 2$ [DW07]. Γενικότερα, γραφήματα που είναι κλειστά ως προς ελάσσονα έχουν φραγμένο πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο [NdM12]. Για οικογένειες γραφημάτων που δεν είναι κλειστές ως προς ελάσσονα παραμένει ανοιχτό το ερώτημα αν το πάχος εμφύτευσής τους σε βιβλίο είναι φραγμένο ή όχι. Για παράδειγμα, τα k -επίπεδα γραφήματα δεν είναι κλειστά ως προς ελάσσονα. Υπενθυμίζουμε ότι το πρόβλημα αναγνώρισης αν ένα γράφημα είναι k -επίπεδο, ακόμα και στην περίπτωση που $k = 1$ είναι NP-δύσκολο [GB07, KM13], ακόμα και αν η διαγραφή μιας μόνο ακμής μετατρέπει το αρχικό γράφημα σε επίπεδο [CM13].

Υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία για εμφυτεύσεις διαφόρων τύπων γραφημάτων σε βιβλίο, για μια επισκόπηση των αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [DW04, Ove07]. Εντούτοις, οι εμφυτεύσεις των επίπεδων γραφημάτων σε βιβλίο είναι εκείνες που έχουν μελετηθεί περισσότερο στο παρελθόν. Ένα πρώτο άνω φράγμα για το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο των επίπεδων γραφημάτων δόθηκε από τους Buss και Shor [BS84], οι οποίοι έδειξαν ότι το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο των επίπεδων γραφημάτων είναι το πολύ 9. Ο Heath [Hea84] έδειξε ότι τα επίπεδα γραφήματα εμφυτεύονται σε βιβλίο με 7 σελίδες, και αργότερα ο Istrail [Ist88] μείωσε το πλήθος σελίδων κατά ένα. Ενδεχομένως το πλέον δημοφιλές και κεντρικό αποτέλεσμα σχετικά με εμφυτεύσεις επίπεδων γραφημάτων σε βιβλίο οφείλεται στον Μ. Γιαννακάκη [Yan89] (Μ. Yannakakis), ο οποίος απέδειξε στα τέλη της δεκαετίας του '80 ότι τα επίπεδα γραφήματα έχουν πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο το πολύ τέσσερα. Παραμένει ωστόσο ανοιχτό το ερώτημα εάν το άνω φράγμα των τεσσάρων σελίδων είναι αυστηρό. Ο Heath [Hea84] για παράδειγμα αποδεικνύει ότι τα επίπεδα 3-δένδρα (3-trees) εμφυτεύονται σε βιβλίο με 3 σελίδες. Για πιο περιορισμένες υποκλάσεις των επίπεδων γραφημάτων, οι Bernhart

και Kainen [BK79] έδειξαν ότι τα γραφήματα με πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο ένα είναι τα εξωεπίπεδα (outerplanar) γραφήματα, ενώ η κλάση των εμφυτεύσιμων γραφημάτων σε βιβλίο με δύο σελίδες ταυτίζεται με την κλάση των υποχαμιλτονιανών γραφημάτων (βλ. [Εικόνες 10.2a-10.2b](#)). Η σχέση μεταξύ υποχαμιλτονιανών κύκλων και εμφυτεύσεις σε βιβλίο δύο σελίδων είναι μάλλον διαισθητική. Η σειρά των κορυφών κατά μήκος της ράχης ισοδυναμεί με την σειρά που εμφανίζονται πάνω στον υποχαμιλτονιανό κύκλο. Οι ακμές διαχωρίζονται βάση του εάν βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου ή όχι. Σημειώνουμε ότι δεν είναι όλα τα επίπεδα γραφήματα υποχαμιλτονιανά: για παράδειγμα, το γράφημα των Goldner-Harary είναι το μικρότερο μεγιστικό επίπεδο γράφημα που απαιτεί τρεις σελίδες (βλ. [Εικόνα 10.2c](#)).



Εικόνα 10.2: (a) Ένα υποχαμιλτονιανό γράφημα G . (b) Εμφύτευση του G σε βιβλίο 2 σελίδων. (c) Το γράφημα των Goldner-Harary.

Αν και ο έλεγχος εάν ένα γράφημα είναι υποχαμιλτονιανό είναι NP-πλήρες [Wig82], ορισμένες κλάσεις γραφημάτων είναι γνωστό ότι είναι υποχαμιλτονιανές (και επομένως εμφυτεύονται σε βιβλίο δύο σελίδων). Ένα πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα οφείλεται στον Whitney [Whi31], ο οποίος έδειξε ότι κάθε μεγιστικό επίπεδο γράφημα χωρίς διαχωρίζοντα τρίγωνα (separating triangles) είναι χαμιλτονιανό (υπενθυμίζουμε ότι ένα διαχωρίζον τρίγωνο είναι ένας 3-κύκλος, ο οποίος αν αφαιρεθεί αποσυνδέει το γράφημα). Ο Tutte [Tut56] έδειξε ότι κάθε 4-συνεκτικό επίπεδο γράφημα περιέχει ένα Χάμιλτον κύκλο, ενώ οι Chiba και Nishizeki [CN89] περιέγραψαν έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου για την εύρεση ενός Χάμιλτον κύκλου σε ένα 4-συνεκτικό επίπεδο γράφημα. Ο Chen [Che03] απέδειξε ότι κάθε μεγιστικό επίπεδο γράφημα με τουλάχιστον πέντε κορυφές και χωρίς διαχωρίζοντα τρίγωνα είναι 4-συνεκτικό. Ο Sanders [San97] γενικεύοντας ένα θεώρημα του Thomassen [Tho83] έδειξε ότι κάθε 4-συνεκτικό επίπεδο γράφημα έχει Χάμιλτον κύκλο που περιέχει δύο αυθαίρετες ακμές του γραφήματος. Βασισμένοι στο θεώρημα του Whitney [Whi31], οι Kainen και Overbay [KO07] έδειξαν ότι κάθε επίπεδο γράφημα χωρίς διαχωρίζοντα τρίγωνα είναι υποχαμιλτονιανό. Ένα άλλο σχετικό αποτέλεσμα δόθηκε από τον Chen [Che03], ο οποίος έδειξε ότι εάν ένα μεγιστικό επίπεδο γράφημα περιέχει μόνο ένα διαχωρίζον τρίγωνο, τότε είναι χαμιλτονιανό. Ο Helden [Hel07] βελτίωσε περαιτέρω το αποτέλεσμα αυτό σε δύο τρίγωνα. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα στα πλαίσια της παρούσας διατριβής δόθηκε

από τον Heath [Hea85]. Στην διδακτορική του διατριβή, περιγράφει ένα αλγόριθμο γραμμικού χρόνου για την εμφύτευση οποιουδήποτε επίπεδου γραφήματος με μέγιστο βαθμό 3 σε βιβλίο δύο σελίδων, και καταλήγει ότι θα ήταν ενδιαφέρον να γνωρίζαμε κατά πόσο είναι εφικτό να αυξηθεί το άνω όριο στον μέγιστο βαθμό.

Προφανώς, εφόσον η εύρεση ενός υποχαμιλτονιανού κύκλου είναι NP-πλήρες πρόβλημα [Wig82], ο υπολογισμός του πάχους εμφύτευσης ενός γραφήματος σε βιβλίο είναι NP-δύσκολο. Εάν η σειρά των κορυφών κατά μήκος της ράχης δίνεται, τότε μια εμφύτευση σε βιβλίο δύο σελίδων μπορεί να υπολογιστεί (εάν υπάρχει) σε γραμμικό χρόνο, εφόσον είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα ελέγχου επιπεδότητας. Για τρεις σελίδες, ο Unger [Ung92] έδωσε μια διαδικασία πολυωνυμικού χρόνου αν και ορισμένες λεπτομέρειες παραλείπονται. Εντούτοις, για τέσσερις ή περισσότερες σελίδες, το πρόβλημα είναι NP-δύσκολο [Ung88, GJMP80], καθώς είναι ισοδύναμο με τον χρωματισμό κορυφών των κυκλικών γραφημάτων. Από την άλλη, εάν δίνεται η διαμέριση των ακμών σε σελίδες, τότε για δύο σελίδες, το πρόβλημα απόφασης λύνεται σε γραμμικό χρόνο με χρήση SPQR-δένδρων [ADBDB13, HN09].

10.2 Ολικοί Χρωματισμοί με Διαχωριζόμενες Γειτονικές Κορυφές

Οι χρωματισμοί γραφημάτων είναι ενδεχομένως ο πλέον διαδεδομένος και μελετημένος κλάδος της θεωρίας γραφημάτων. Οι χρωματισμοί γραφημάτων έχουν μια ενδιαφέρουσα ιστορία. Τα πρώτα αποτελέσματα σχετικά με χρωματισμούς γραφημάτων χρονολογούνται στο μακρινό 1852 και αναφέρονται σχεδόν αποκλειστικά σε επίπεδα γραφήματα, υπό τη μορφή χρωματισμού χαρτών (για μια εκτενή ιστορική αναδρομή βλ. π.χ. [CLZ10]). Εφόσον ο χρωματισμός ενός χάρτη ισοδυναμεί με τον χρωματισμό των κορυφών του δυϊκού ενός γραφήματος, είναι οι χρωματισμοί κορυφών που έχουν αποτελέσει το επίκεντρο του ενδιαφέροντος. Η βιβλιογραφία για χρωματισμούς γραφημάτων είναι σχεδόν απεριόριστη, και η επιβολή διαφόρων περιορισμών στους χρωματισμούς έχει οδηγήσει σε διαφορετικούς τύπους χρωματισμών:

Ορθός Χρωματισμός Κορυφών (Proper Vertex Coloring): Μόνο οι κορυφές του γραφήματος χρωματίζονται υπό τον περιορισμό ότι γειτονικές κορυφές έχουν διαφορετικό χρώμα.

Ορθός Χρωματισμός Ακμών (Proper Edge Coloring): Μόνο οι ακμές του γραφήματος χρωματίζονται υπό τον περιορισμό ότι ακμές με κοινά άκρα έχουν διαφορετικό χρώμα.

Ορθός Ολικός Χρωματισμός (Proper Total Coloring): Και οι κορυφές και οι ακμές του γραφήματος χρωματίζονται υπό τον περιορισμό γειτονικά ή προσπίπτοντα

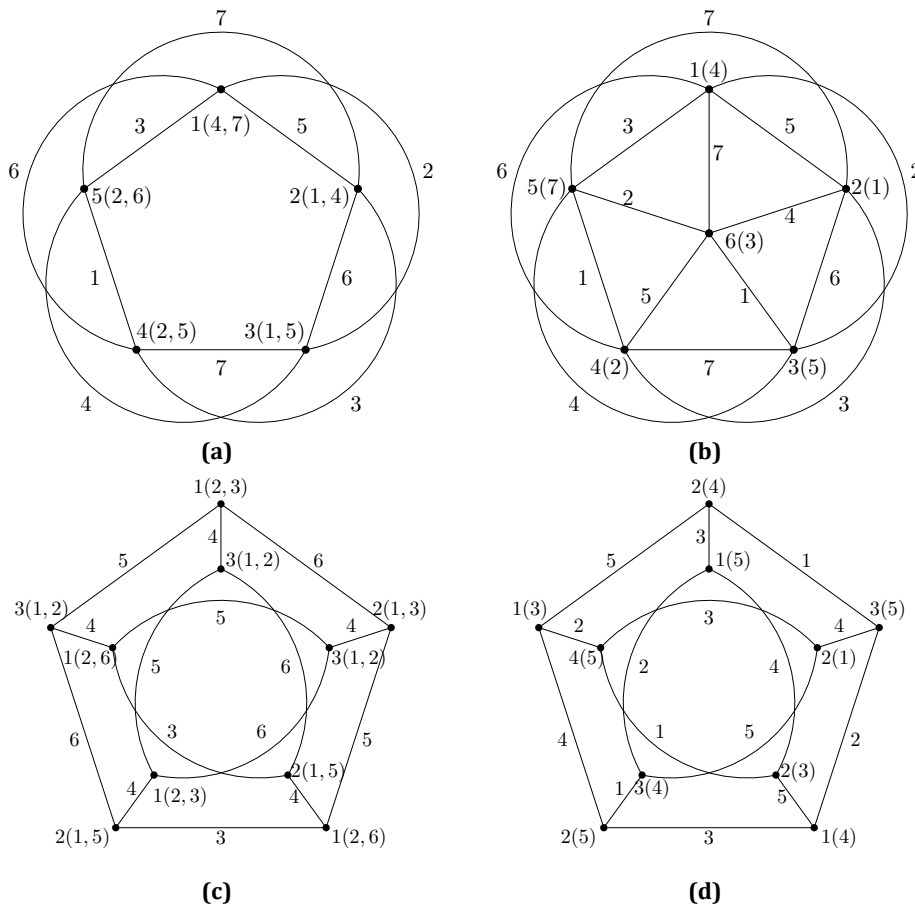
στοιχεία να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Η μελέτη ορθών χρωματισμών ακμών που επάγουν διαφορετικά χρωματικά σύνολα στις κορυφές ξεκίνησε ανεξάρτητα από τους Burris και Schelp [BS97], και Černý et al. [ČHS96] (με τον όρο της παρατηρησιμότητας (observability)). Στην δουλειά τους μελέτησαν το πλήθος χρωμάτων που χρειάζεται για έναν ορθό χρωματισμό ακμών ώστε οποιεσδήποτε δύο κορυφές να έχουν διαφορετικά χρωματικά σύνολα. Αυτό το είδος χρωματισμών είναι γνωστό ως ορθός χρωματισμός ακμών με διαχωριζόμενες κορυφές (vertex-distinguishing-proper-edge-coloring), ή εν συντομία VD-χρωματισμός ακμών. Σημειώνουμε ότι ένας VD-χρωματισμός ακμών ενός γραφήματος G είναι επίσης ένας ορθός χρωματισμός ακμών. Από το διάσημο θεώρημα του Vizing είναι γνωστό ότι ο χρωματικός δείκτης του G ισούται με $\Delta(G)$ ή $\Delta(G) + 1$ (όπου $\Delta(G)$ είναι ο μέγιστος βαθμός του G). Ωστόσο, για τον VD-χρωματικό δείκτη είναι εκπληκτικά δύσκολο να διατυπωθεί ένα παρόμοιο αποτέλεσμα. Στο [BS97] εικάσθηκε ότι ο VD-χρωματικός δείκτης ενός γραφήματος G είναι το πολύ $\min_{1 \leq k \leq \Delta(G)} \{k : \binom{k}{d} \geq n_d\} + 1$ (όπου n_d είναι το πλήθος των κορυφών με βαθμό d στο G). Η εικασία αυτή έχει επαληθευτεί για γραφήματα με μέγιστο βαθμό 2 [BBS02]. Για περισσότερα αποτελέσματα βλ. [BHLW99, BHLW01, BRS03, BKLS04].

Αργότερα, οι Zhang et al. [ZLW02] περιόρισαν τις απαιτήσεις των VD-χρωματισμών ακμών και εξέτασαν ορθούς χρωματισμούς ακμών που διαχωρίζουν μόνο ζεύγη γειτονικών κορυφών, εισάγοντας τους γειτονικά ισχυρούς χρωματισμούς ακμών (adjacent-strong-edge-colorings) ή ορθούς χρωματισμούς ακμών με διαχωριζόμενες γειτονικές κορυφές (adjacent-vertex-distinguishing-proper-edge-colorings), ή εν συντομία AVD-χρωματισμοί ακμών. Στο άρθρο τους οι Zhang et al. [ZLW02] προσδιόρισαν τον AVD-χρωματικό δείκτη διαφόρων κλάσεων γραφημάτων και διατύπωσαν την εικασία ότι ο AVD-χρωματικός δείκτης ενός γραφήματος G είναι το πολύ $\Delta(G) + 2$. Οι Balister et al. [BGLS07] επιβεβαίωσαν την εικασία για γραφήματα μέγιστου βαθμού 3 και για διμερή γραφήματα.

Είναι σχεδόν αδύνατο να μην αναρωτηθεί κανείς εάν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του προαναφερθέντος άνω φράγματος και της εικασίας ολικών χρωματισμών (total coloring conjecture) (που διατυπώθηκε από τον Behzad (1965) και τον Vizing (1968)): ο ολικός χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος G είναι το πολύ $\Delta(G) + 2$. Η επέκταση των AVD-χρωματισμών ακμών σε ολικούς χρωματισμούς έγινε ανεξάρτητα από τον Chen [Che04] και τους Zhang et al. [ZCL⁺05], οι οποίοι εισήγαγαν τους ολικούς χρωματισμούς με διαχωριζόμενες γειτονικές κορυφές (adjacent-vertex-distinguishing-total-colorings), ή εν συντομία AVD-ολικοί χρωματισμοί (βλ. **Εικόνα 10.3**). Στην δουλειά τους, οι Zhang et al. προσδιόρισαν τον AVD-ολικό χρωματικό αριθμό διαφόρων κλάσεων γραφημάτων, όπως οι κύκλοι, τα πλήρη γραφήματα, τα πλήρη διμερή γραφήματα, τις βεντάλιες (fans), τους τροχούς και τα δένδρα. Επίσης διατύπωσαν την εικα-

σία ότι το άνω φράγμα $\Delta(G) + 3$ ισχύει πάντα. Στην περίπτωση που $\Delta(G) = 3$ η εικασία των AVD-ολικών χρωματισμών έχει επιβεβαιωθεί ανεξάρτητα από τον Wang [Wan07] και τον Chen [Che08], ενώ ο Hulgan [Hul09, Hul10] παρουσίασε μια πιο συνοπτική απόδειξη του αποτελέσματος αυτού. Ειδικότερα, ο Hulgan απέδειξε ότι για ένα γράφημα με $\Delta(G) = 3$ υπάρχει AVD-ολικός χρωματισμός με 6 χρώματα με την επιπλέον ιδιότητα το πολύ ένα από τα χρώματα να χρησιμοποιείται για χρωματισμό κορυφών και ακμών (βλ. **Εικόνα 10.3c**). Το 2012 οι Coker και Johansson [CJ12] χρησιμοποίησαν την πιθανοτική μέθοδο (probabilistic method) για να υπολογίσουν ένα άνω φράγμα της τάξης του $\Delta(G) + C$, όπου C είναι μια σταθερά, ενώ οι Huang et al. [HWY12] απέδειξαν ότι ο AVD-ολικός χρωματικός αριθμός είναι το πολύ $2\Delta(G)$.



Εικόνα 10.3: Για κάθε κορυφή συμβολίζουμε το χρώμα της με τον αριθμό του χρώματος που δόθηκε στην κορυφή ακολουθούμενο από αριθμούς χρωμάτων μέσα σε παρενθέσεις: αυτά είναι τα χρώματα που δεν περιέχονται στο σύνολο χρωμάτων της κορυφής. (a) AVD-ολικός χρωματισμός του K_5 με 7 χρώματα. (b) AVD-ολικός χρωματισμός του K_6 με 7 χρώματα. (c) AVD-ολικός χρωματισμός του γραφήματος του Petersen με 6 χρώματα. (d) AVD-ολικός χρωματισμός του γραφήματος του Petersen με 5 χρώματα.

Πέρα από τα αποτελέσματα που περιέχονται στο [ZCL⁺05], ακριβές τιμές έχουν δοθεί για συγκεκριμένες κλάσεις γραφημάτων: το γράφημα που παράγεται από το K_{2n+1} μετά την αφαίρεση δύο γειτονικών ακμών [Che04], συνεκτικά γραφήματα με μόνο έναν κύκλο και το τετράγωνο κύκλων [CZS05], τα Mycielski γραφήματα μονοπατιών, κύκλων, πλήρων γραφημάτων, πλήρων διμερών γραφημάτων, αστεριών, βενταλιών και τροχών [CZYZ05] (σχετικά αποτελέσματα παρουσιάζονται επίσης στα [LWZW06, CZ08, CG09, WW10, BKT12]).

Για τα εξωεπίπεδα γραφήματα οι Chen και Zhang [CZ06] μελέτησαν τον AVD-ολικό χρωματικό αριθμό των 2-συνεκτικών εξωεπίπεδων γραφημάτων με $\Delta(G) \leq 4$. Ωστόσο, ο AVD-ολικός χρωματικός αριθμός των εξωεπίπεδων γραφημάτων προσδιορίστηκε πλήρως από τους Wang και Wang [WW10]: ο AVD-ολικός χρωματικός αριθμός των εξωεπίπεδων γραφημάτων είναι το πολύ $\Delta(G) + 2$ στη γενική περίπτωση, ενώ η ισότητα ισχύει μόνο εάν υπάρχουν γειτονικές κορυφές μέγιστου βαθμού. Αντίστοιχα άνω φράγματα ισχύουν για επίπεδα γραφήματα με μεγάλο μέγιστο βαθμό [WH14].

Αν και για τα πλήρη γραφήματα περιττής τάξης το άνω φράγμα της εικασίας για AVD-ολικούς χρωματισμούς είναι αυστηρό [ZCL⁺05] μπορεί να μειωθεί κατά 1 για ορισμένες κλάσεις γραφημάτων: για τα εξωεπίπεδα γραφήματα [WW10] και τα επίπεδα γραφήματα με μεγάλο μέγιστο βαθμό [WH14] (όπως ήδη προαναφέραμε), για κύκλους, μονοπάτια, δένδρα, βεντάλιες, τροχούς, πλήρη γραφήματα άρτιας τάξης και πλήρη διμερή γραφήματα [ZCL⁺05], για συνεκτικά γραφήματα με έναν κύκλο και τα C_n^2 με $n \geq 6$ [CZS05], για το γράφημα P_n^k όπου $k = 2, 3, 4$ και $n \geq 6$ [LWZW06], για τα γενικευμένα Halin γραφήματα με $\Delta(G) \geq 5$ [CZ08], για γραφήματα με μικρό μέγιστο μέσο-βαθμό [WW08], για τον υπερκύβο Q_n [CG09] και τον γενικευμένο υπερκύβο K_n^d [BKT12]. Ο Hulgan [Hul09] έθεσε το ερώτημα κατά πόσο το φράγμα των 6 χρωμάτων για τα γραφήματα με $\Delta(G) = 3$ είναι αυστηρό (βλ. Εικόνα 10.3d).

10.3 Αναπαραστάσεις Κύκλων

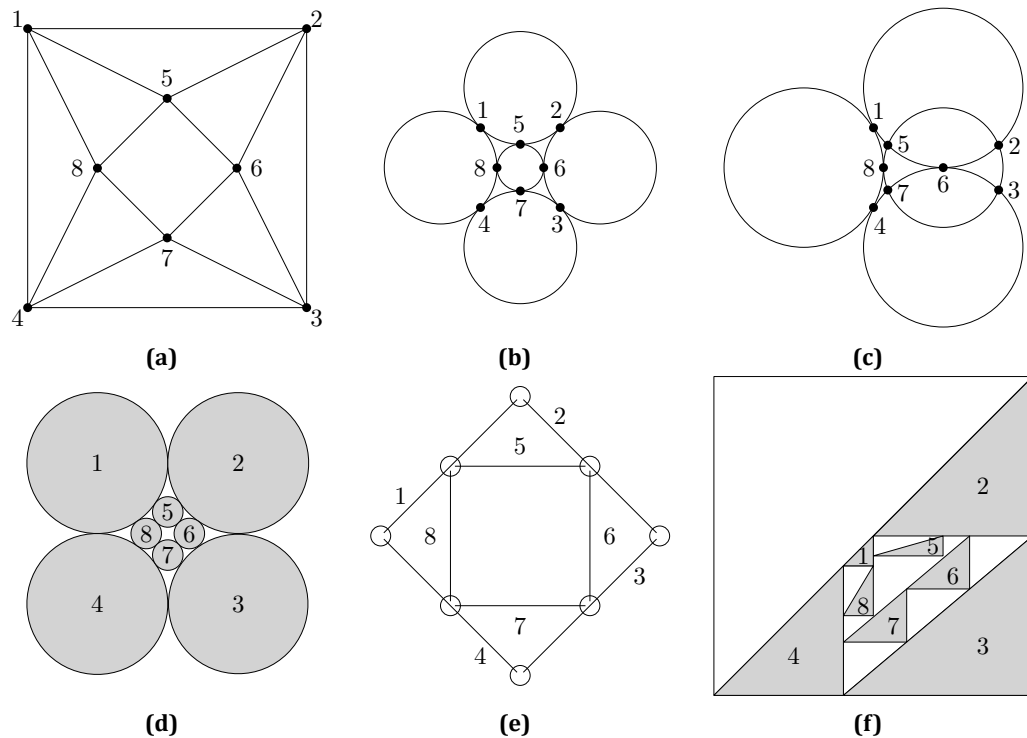
Ο Lovász [ERS70, pp.1175],[Leh81, pp.426] διατύπωσε την εικασία ότι κάθε συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα G επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων (admits a realization as a system of circles), δηλαδή, μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο χρησιμοποιώντας ένα σύνολο από κύκλους, έτσι ώστε οι κορυφές του G να αντιστοιχούν στα σημεία τομής και επαφής των κύκλων και οι ακμές του G να είναι τα κυκλικά τόξα ανάμεσα στα ζεύγη των σημείων τομής και επαφής των κύκλων (βλ. Εικόνες 10.4b-10.4c). Τα σημεία επαφής είναι αναγκαία, εφόσον εάν χρησιμοποιήσουμε μόνο σημεία τομής, θα έχουμε άρτιο πλήθος κορυφών, ενώ υπάρχουν 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα με περιττό πλήθος κορυφών [Man79].

Τα συνεκτικά 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα αποτελούν μια καλά μελετημένη

κλάση γραφημάτων. Στα τέλη της δεκαετίας του 70 ο Manca [Man79] πρότεινε τέσσερις πράξεις για την κατασκευή όλων των συνεκτικών 4-κανονικών επίπεδων γραφημάτων από το οκτάεδρο γράφημα. Όπως παρατήρησε ο Lehel [Leh81], η κατασκευή του Manca δεν παρήγαγε όλα τα συνεκτικά 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα, ωστόσο, μία επιπλέον πράξη μπορούσε να διορθώσει το πρόβλημα. Οι Broersma et al. [BDG93] έδειξαν ότι όλα τα 3-συνεκτικά 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα μπορούν επίσης να παραχθούν από το οκτάεδρο, χρησιμοποιώντας μόνο τρεις πράξεις.

Αν και το προαναφερθέν πρόβλημα έχει τραβήξει λίγη προσοχή, σχετίζεται άμεσα με το πρόβλημα αναπαράστασης ενός γραφήματος ως γράφημα επαφών (contact graph representation problem). Ένα γράφημα αναπαρίσταται ως γράφημα επαφών αν οι κορυφές του αναπαρίστανται με γεωμετρικά αντικείμενα και οι ακμές αντιστοιχούν σε δύο αντικείμενα που εφάπτονται με κάποιο προκαθορισμένο τρόπο. Συνήθεις κλάσεις τέτοιων αντικειμένων είναι οι καμπύλες, τα ευθύγραμμα τμήματα, οι κυκλικοί δίσκοι, τα τρίγωνα, τα ορθογώνια και τα κυρτά πολύγωνα. Για παράδειγμα ο Hliněný [Hli96, Hli98] μελέτησε αναπαραστάσεις γραφημάτων ως γράφημα επαφών χρησιμοποιώντας καμπύλες και ευθύγραμμα τμήματα ως αντικείμενα (βλ. Εικόνα 10.4e). Αρκετοί συγγραφείς έχουν μελετήσει γραφήματα επαφών τριγώνων διαφόρων τύπων: οι de Fraysseix et al. [dFdMR94] έδειξαν ότι κάθε επίπεδο γράφημα επιδέχεται αναπαράσταση ως γράφημα επαφών τριγώνων (βλ. Εικόνα 10.4f), οι Badent et al. [BBDG⁺07] μελέτησαν αναπαραστάσεις ως γράφημα επαφών ομοθετικών τριγώνων, και οι Gonçalves et al. [GLP12] έδειξαν ότι κάθε 3-συνεκτικό επίπεδο γράφημα και το δυϊκό του μπορούν να αναπαρασταθούν ταυτόχρονα ως γραφήματα επαφών τριγώνων (και επισήμαναν ότι τα 4-συνεκτικά επίπεδα γραφήματα επιδέχονται επίσης αναπαραστάσεις ως γράφημα επαφών ομοθετικών τριγώνων). Επίσης, οι Duncan et al. [DGH⁺12] έδειξαν ότι κάθε επίπεδο γράφημα επιδέχεται αναπαράσταση ως γράφημα επαφών κυρτών εξάγωνων, τέτοια ώστε όλες οι πλευρές των εξάγωνων να έχουν μία από τρεις συνολικά δυνατές κλίσεις, και επιπλέον ότι η χρήση εξάγωνων είναι αναγκαία για την αναπαράσταση ορισμένων γραφημάτων, εάν απαιτείται τα πολυγωνικά αντικείμενα να είναι κυρτά.

Ενδεχομένως, το πρώτο αποτέλεσμα σχετικά με γραφήματα επαφών να είναι το θεώρημα του Koebe [Koe36] το 1936, που λέει ότι οποιοδήποτε επίπεδο γράφημα μπορεί να αναπαρασταθεί ως γράφημα επαφών κυκλικών δίσκων στο επίπεδο (βλ. Εικόνα 10.4d). Η κύρια διαφορά μεταξύ του προβλήματος αναπαράστασης ενός γραφήματος ως γράφημα επαφών κυκλικών δίσκων και του προβλήματος εύρεσης πραγματοποίησης ως ένα σύστημα κύκλων, είναι ότι στο πρώτο πρόβλημα οι κορυφές αντιστοιχούν στους δίσκους και οι ακμές υποδηλώνονται από τις επαφές, ενώ στο δεύτερο πρόβλημα, οι κορυφές είναι τα σημεία τομής και/ή επαφών των κύκλων και οι ακμές είναι τα κυκλικά τόξα που ορίζονται μεταξύ τους.



Εικόνα 10.4: (a) Ένα 4-κανονικό επίπεδο γράφημα. (b) Πραγματοποίηση ως ένα σύστημα πέντε εφαπτόμενων κύκλων. (c) Πραγματοποίηση ως ένα σύστημα τεσσάρων κύκλων. (d) Αναπαράσταση ως γράφημα κέρματος. (e) Αναπαράσταση ως γράφημα επαφών ευθύγραμμων τμημάτων. (f) Αναπαράσταση ως γράφημα επαφών τριγώνων.

Τα γραφήματα που επιδέχονται αναπαράσταση ως γράφημα επαφών κυκλικών δίσκων είναι επίσης γνωστά ως γραφήματα κέρματος (coin graphs) [Sac94] και τέτοιες αναπαραστάσεις εφαρμόζονται συχνά στην απεικόνιση γραφημάτων [ARSV12, BE01, Epp13, EHL⁺13, KPP13, MP94, Moh99, Rot12]. Το θεώρημα του Koebe, επίσης γνωστό ως θεώρημα συσκευασίας κύκλων (circle packing theorem), έχει επαναδιατυπωθεί έκτοτε αρκετές φορές [And70a, And70b, TM79]. Η αρχική απόδειξη του θεωρήματος συσκευασίας κύκλων είναι υπαρξιακή. Ο Colin de Verdière [dV89, dV91] έδωσε μια κατασκευαστική απόδειξη μέσω μιας διαδικασίας σύγκλισης, ενώ έχουν αναπτυχθεί επαναληπτικά προγράμματα πολυωνυμικού χρόνου για την κατασκευή συσκευασιών κύκλων (circle packings) [CS03, Moh93]. Ωστόσο, τα μεγέθη των κύκλων που παράγονται μπορεί να διαφέρουν εκθετικά, οδηγώντας σε απεικονίσεις που είναι πρακτικά δυσανάγνωστες. Για αυτό το λόγο ισορροπημένες συσκευασίες κύκλων έχουν επίσης μελετηθεί [AEG⁺14]. Στην ειδική περίπτωση που όλοι οι κύκλοι έχουν την ίδια ακτίνα, δηλαδή έχουμε μια πλήρως ισορροπημένη αναπαράσταση ως γράφημα επαφών κυκλικών δίσκων, το πρόβλημα αναγνώρισης είναι NP-πλήρες, όπως αποδείχθηκε από τους Breu και Kirkpatrick [BK98b].

10.4 Ομαλές Ορθογώνιες Απεικονίσεις

Οι ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις εισήχθησαν πρόσφατα στην λογοτεχνία με την προοπτική συνδυασμού δύο διαφορετικών προσεγγίσεων απεικόνισης γραφημάτων: ορθογώνιων απεικονίσεων και Lombardi απεικονίσεων.

Ορθογώνιες Απεικονίσεις: Μια ορθογώνια απεικόνιση (orthogonal drawing) ενός γραφήματος μέγιστου βαθμού 4 είναι μια απεικόνιση στην οποία οι κορυφές αντιστοιχούν σε σημεία πάνω στο ακέραιο πλέγμα και οι ακμές απεικονίζονται ως ακολουθίες από εναλλασσόμενα οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα (βλ. **Εικόνα 10.5b**). Στο πέρασμα των χρόνων, οι ορθογώνιες απεικονίσεις έχουν λάβει σημαντική ερευνητική προσοχή που χρονολογείται από στη δεκαετία του '80, με τη δουλειά των Valiant [Val81], Leiserson [Lei80] και Leighton [Lei84] σε VLSI σχεδιασμούς και διάταξη τμημάτων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (floor-planning applications). Στα πλαίσια της απεικόνισης γραφημάτων, ο στόχος ήταν η κατασκευή ορθογώνιων απεικονίσεων που βελτιστοποιούσαν διάφορα χαρακτηριστικά της απεικόνισης. Οι πλέον συνήθεις στόχοι ήταν η ελαχιστοποίηση του χρησιμοποιούμενου εμβαδού, του συνολικού μήκους των ακμών, του συνολικού πλήθους των σημείων καμπής (bends) και του μέγιστου πλήθους σημείων καμπής ανά ακμή.

Στα [KnL84, FW91] έδειξαν ότι το πρόβλημα απόφασης εάν ένα γράφημα G μπορεί να εμφυτευτεί σε ένα πλέγμα προδιαγεγραμμένου εμβαδού είναι NP-πλήρες, ενώ στο [Sch95] το αποτέλεσμα αυτό βελτιώθηκε σε εμφύτευση ίδιου μεγέθους με το πολύ δύο σημεία καμπής ανά ακμή. Εάν το G είναι επίπεδο μπορεί να εμφυτευτεί σε ένα $n \times n$ πλέγμα με $2n + 4$ σημεία καμπής εάν είναι δυσανεκτικό, και $2.4n + 2$ σημεία καμπής διαφορετικά [TT87, TT89, TTV91]. Το πλήθος των σημείων καμπής κατά μήκος κάθε ακμής είναι το πολύ 4. Για τα επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3 και τα τρισυνεκτικά επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 4 καλύτερα φράγματα είναι γνωστά [Kan92, Kan93].

Στο [Sto84] παρουσιάστηκε ένα κάτω φράγμα από $2n - 2$ σημεία καμπής για δυσανεκτικά επίπεδα γραφήματα. Εάν δίνεται η συνδυαστική εμφύτευση (combinatorial embedding) ενός επίπεδου γραφήματος, τότε μια ορθογώνια απεικόνιση του με το ελάχιστο πλήθος σημείων καμπής μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n^2 \log n)$ χρόνο [Tam87]. Ωστόσο, το πλήθος των σημείων καμπής ανά ακμή μπορεί να είναι μεγάλο μειώνοντας την αναγνωσιμότητα της απεικόνισης. Εάν δεν δίνεται συνδυαστική εμφύτευση, το πρόβλημα λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο για επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3 [DBLV93] και είναι NP-δύσκολο για επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 4 [GT01].

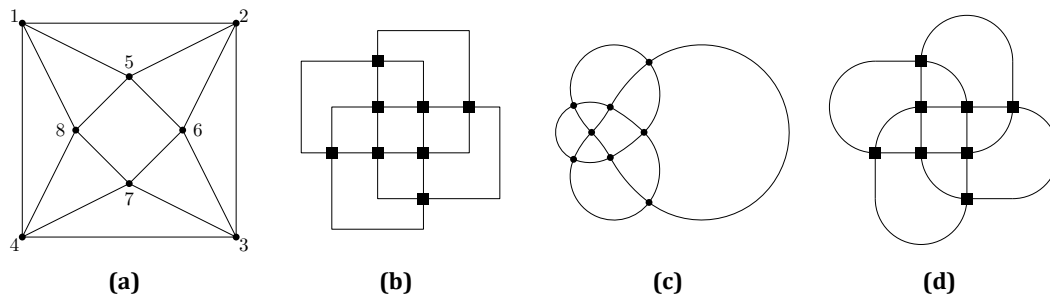
Οι Biedl και Kant [BK98a] παρουσίασαν έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου και χώρου για την κατασκευή ορθογώνιας απεικόνισης οποιουδήποτε συνεκτικού γραφήμα-

τος σε ένα πλέγμα διαστάσεων $n \times n$ με το πολύ $2n + 2$ συνολικά σημεία καμπής, όπου κάθε ακμή έχει το πολύ δύο σημεία καμπής.

Εξ ορισμού, λόγω του περιορισμού θύρας (port) των ορθογώνιων απεικονίσεων, θεωρούταν συχνά ότι τα δοθέντα γραφήματα περιορίζονταν σε επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 4. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή, οι κορυφές βαθμού 4 έχουν άριστη γωνιακή ευκρίνεια (angular resolution) και οι κορυφές μικρότερου βαθμού έχουν γωνιακή ευκρίνεια εντός δύο φορές επί το βέλτιστο. Ακόμα και στις περιπτώσεις που το δοθέν γράφημα δεν είναι επίπεδο, υπάρχουν συνήθεις τεχνικές, π.χ., η φάση επιπεδοποίησης (planarization phase) της προσέγγισης τοπολογικών-σχηματικών-μετρικών (topology-shape-metrics approach) [Tam87], στην οποία μια “επίπεδη εμφύτευση” υπολογίζεται για ένα δοθέν μη επίπεδο γράφημα, αντικαθιστώντας τις τομές ακμών με ψευδο-κορυφές (dummy vertices), καταλήγοντας σε ένα επίπεδο γράφημα μέγιστου βαθμού 4. Για γραφήματα μεγαλύτερου βαθμού οι Fößmeier και Kaufmann [FK96] εισήγαγαν το μοντέλο Kandinsky σύμφωνα με το οποίο οι κορυφές έχουν σχήμα τετραγώνου και τοποθετούνται σε ένα αραιό πλέγμα με πολλαπλές ακμές να προσπίπτουν σε κάθε πλευρά του τετραγώνου (η μία δίπλα στην άλλη με μικρή μεταξύ τους απόσταση).

Lombardi Απεικονίσεις: Οι Lombardi απεικονίσεις εισήχθησαν πρόσφατα στη λογοτεχνία της απεικόνισης γραφημάτων [DEG⁺12b] και έγιναν γρήγορα ένα δημοφιλές θέμα έρευνας. Το κίνητρο είναι πορίσματα από έρευνες αντίληψης που υποδεικνύουν ότι απεικονίζοντας μονοπάτια ως ομαλές γεωδαισιακές τροχιές (smooth geodesic trajectories) βοηθά στην κατανόηση [HEH09], καθώς επίσης και η αισθητική των απεικονίσεων του Mark Lombardi [LH03]. Ο Mark Lombardi, ένας αφηρημένος Αμερικανός καλλιτέχνης, στο έργο του χρησιμοποιεί κυρίως ακμές κυκλικών τόξων που κατανέμονται ομοιόμορφα στις κορυφές, δηλαδή οι κορυφές έχουν άριστη γωνιακή ευκρίνεια (βλ. [Εικόνα 10.5c](#)). Οι Duncan et al. [DEG⁺12b] όρισαν επίσημα τις Lombardi απεικονίσεις και έδωσαν αλγορίθμους για την κατασκευή Lombardi απεικονίσεων για κανονικά γραφήματα, γραφήματα φραγμένου εκφυλισμού (graphs of bounded degeneracy) και ορισμένες οικογένειες επίπεδων γραφημάτων. Σε μια ακόλουθη εργασία [DEG⁺13], κατασκεύασαν επίπεδες Lombardi απεικονίσεις για δένδρα με πολυωνυμικό χώρο, ενώ οι Löffler και Nöllenburg [LN13] έδωσαν ένα γραμμικού χρόνου αλγόριθμο για επίπεδες Lombardi απεικονίσεις εξωμονοπατιών (outerpaths). Ο Eppstein [Epp13] χρησιμοποίησε τεχνικές συσκευασίας κύκλων προκειμένου να παράξει επίπεδες Lombardi απεικονίσεις για επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3 και για διάμεσα γραφήματα των πολυέδρων (medial graphs of polyhedral graphs), μια ειδική κατηγορία 4-κανονικών επίπεδων γραφημάτων. Αν και ο χαρακτηρισμός των γραφημάτων που επιδέχονται (επίπεδη) Lombardi απεικόνιση φαίνεται να εί-

να δύσκολος, εάν κάποιος επιτρέψει πολυτόξα (polyarcs) ή χαλαρώσει τον περιορισμό της άριστης γωνιακής ευκρίνειας, τότε όλα τα γραφήματα έχουν τέτοια απεικόνιση [CCG⁺12, DEG⁺12a].



Εικόνα 10.5: (a) Ένα 4-κανονικό επίπεδο γράφημα. (b) Ορθογώνια απεικόνιση με το πολύ 2 σημεία καμπής ανά ακμή. (c) Lombardi απεικόνιση. (d) Ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με πολυπλοκότητα ακμής 2.

Ομαλές Ορθογώνιες Απεικονίσεις: Οι ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις (smooth orthogonal drawings) εισήχθησαν από τους Bekos et al. [BKKS13] και συνδυάζουν την σαφήνεια των ορθογώνιων απεικονίσεων και το καλλιτεχνικό στυλ των Lombardi απεικονίσεων (βλ. Εικόνα 10.5d). Ως επέκταση των ορθογώνιων απεικονίσεων, οι ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις εκ πρώτης όψεως περιορίζονται σε επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 4. Στην δουλειά τους, οι Bekos et al. [BKKS13] έδειξαν ότι τέτοια γραφήματα πάντα επιδέχονται ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις με πολυπλοκότητα ακμής (edge complexity) 3, ενώ για 3-συνεκτικά ή χαμιλτονιανά επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3 μπορεί κανείς να έχει άριστη πολυπλοκότητα ακμής, δηλαδή πολυπλοκότητα ακμής ένα. Τα αποτελέσματα αυτά βελτιώθηκαν μερικώς από τους Alam et al. [ABK⁺14], οι οποίοι έδειξαν ότι τα επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 4 επιδέχονται απεικονίσεις με πολυπλοκότητα ακμής 2, ενώ υπάρχουν άπειρα γραφήματα για τα οποία το άνω φράγμα του 2 είναι αυστηρό.

Για γραφήματα μεγαλύτερου βαθμού οι Bekos et al. [BKKS13] πρότειναν τη χρήση του μοντέλου Kandinsky [FK96]. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, αυτό είναι μια συνήθης προσέγγιση για την επίλυση πρακτικών ζητημάτων στις εφαρμογές που προκύπτουν από τον περιορισμό του βαθμού των κορυφών στις ορθογώνιες απεικονίσεις γενικά, και συνεπώς και στις ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις. Έτσι, χρησιμοποιώντας το μοντέλο Kandinsky κάθε επίπεδο γράφημα επιδέχεται ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με πολυπλοκότητα ακμής 2 [BKKS13].

10.5 Συμβολή της Διδακτορικής Διατριβής

Η συμβολή της παρούσας διδακτορικής διατριβής μπορεί να εστιάσει στα ακόλουθα δύο αντικείμενα:

Θεωρία Γραφημάτων: Νέα αποτελέσματα για εμφυτεύσεις σε βιβλίο και για ολικούς χρωματισμούς με διαχωριζόμενες γειτονικές κορυφές παρουσιάζονται.

Η έρευνα σχετικά με εμφυτεύσεις γραφημάτων σε βιβλίο χρονολογείται στις αρχές της δεκαετίας του '70 με μια πραγματικά εκτενή βιβλιογραφία. Ενδεχομένως, το πλέον δημοφιλές αποτέλεσμα είναι ο αλγόριθμος του Γιαννακάκη, που εμφυτεύει οποιοδήποτε επίπεδο γράφημα σε βιβλίο με τέσσερις σελίδες [Yan89]. Το ερώτημα εάν το φράγμα αυτό είναι αυστηρό παραμένει ανοιχτό μέχρι και σήμερα, ενώ η έρευνα εστιάζει κυρίως στη συσχέτιση του πάχους εμφύτευσης σε βιβλίο με διάφορες αναλλοίωτες γραφημάτων και στην αναγνώριση οικογενειών γραφημάτων που μπορούν να εμφυτευτούν σε 2 ή 3 σελίδες. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή αποδεικνύουμε ότι τα επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 4 είναι υποχαμιλτονιανά, δηλαδή το πάχος εμφύτευσής τους σε βιβλίο ισούται με δύο. Αυτό βελτιώνει ένα αποτέλεσμα του Heath [Hea85], ο οποίος έδειξε ότι τα επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3 μπορούν να εμφυτευτούν σε δύο σελίδες. Η ύπαρξη υποχαμιλτονιανού κύκλου είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη Χάμιλτον κύκλου σε μεγιστικά επίπεδα γραφήματα και είναι γνωστό ότι τα διαχωρίζοντα τρίγωνα παίζουν καθοριστικό ρόλο στην ιδιότητα αυτή. Η προσέγγισή μας διαφέρει κατά την έννοια ότι δεν εστιάζουμε στα διαχωρίζοντα τρίγωνα, εντούτοις, δανειζόμαστε την τεχνική “ξεφλουδίσματος” του αλγορίθμου του Γιαννακάκη και την τροποποιούμε στις ανάγκες μας. Επίσης παρουσιάζουμε ένα άνω φράγμα στο πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο των 1-επίπεδων γραφημάτων. Αν και απέχει από το να είναι βέλτιστο, αποτελεί την πρώτη απόπειρα υπολογισμού του πάχους εμφύτευσης σε βιβλίο οικογενειών γραφημάτων που δεν είναι κλειστές ως προς ελάσσονα.

Ένα άλλο κεφάλαιο της θεωρίας γραφημάτων που εξετάζεται στην παρούσα διδακτορική διατριβή είναι οι ολικοί χρωματισμοί γραφημάτων με διαχωριζόμενες γειτονικές κορυφές. Διάφορες κλάσεις γραφημάτων έχουν μελετηθεί στη βιβλιογραφία, εκ των οποίων επίπεδα γραφήματα και γραφήματα με μικρό μέγιστο βαθμό. Η εικασία των AVD-ολικών χρωματισμών που διατυπώθηκε από τους Zhang et al. [ZCL⁺05] φαίνεται να είναι εξίσου δύσκολη με την εικασία ολικών χρωματισμών. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή αποδεικνύουμε ότι τα γενικευμένα Halin γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3 έχουν AVD-ολικό χρωματικό αριθμό 5, ένα λιγότερο από το φράγμα της εικασίας των AVD-ολικών χρωματισμών, και επιβεβαιώνουμε την εικασία για 4-κανονικά γραφήματα. Προη-

γούμενα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την εικασία για γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3, και έδειξαν ότι το καλύτερο φράγμα του $\Delta(G) + 2$ ισχύει για επίπεδα γραφήματα με μεγάλο μέγιστο βαθμό ($\Delta(G) \geq 14$) και για τα γενικευμένα Halin γραφήματα με μέγιστο βαθμό τουλάχιστον 6. Η δουλειά μας προφανώς επεκτείνει τα αποτελέσματα αυτά. Αξίζει να σημειωθεί ότι το βελτιωμένο άνω φράγμα για τα γενικευμένα Halin γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3 είναι ένα βήμα προς τον προσδιορισμό της ακριβούς τιμής του AVD-ολικού χρωματικού αριθμού των γραφημάτων με μέγιστο βαθμό 3, και απαντά μια εικασία των Chen και Zhang [CZ08].

Απεικόνιση Γραφημάτων: Εξετάζουμε πραγματοποιήσεις 4-κανονικών γραφημάτων ως συστήματα κύκλων και παρουσιάζουμε αποτελέσματα σε ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις.

Τα γραφήματα επαφών, ειδικότερα τα γραφήματα κέρματος και οι συσκευασίες κύκλων είναι ένας αρκετά μελετημένος τομέας της απεικόνισης γραφημάτων, με πληθώρα εφαρμογών. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή εστιάζουμε στην πραγματοποίηση 4-κανονικών επίπεδων γραφημάτων ως συστήματα κύκλων. Ο Lovász [ERS70, pp.1175] διατύπωσε την εικασία ότι όλα τα 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα επιδέχονται τέτοια πραγματοποίηση. Κλείνουμε την ερώτηση αυτή απαντώντας την θετικά στην περίπτωση των τρισυνεκτικών γραφημάτων και αρνητικά στη γενική περίπτωση. Τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε είναι το θεώρημα συσκευασίας κύκλων και ιδιότητες των κύκλων ως γεωμετρικά αντικείμενα.

Ο κύριος στόχος της απεικόνισης γραφημάτων είναι η κατασκευή αισθητικών και ευανάγνωστων απεικονίσεων. Διάφορα κριτήρια για τον προσδιορισμό της “ωραίας” απεικόνισης έχουν υιοθετηθεί: το πλήθος των τομών μεταξύ των ακμών, η γωνιακή ευκρίνεια, η γωνιακή ευκρίνεια στις τομές των ακμών (crossing resolution), το συνολικό εμβαδό, το πλήθος των σημείων καμπής ανά ακμή και πολλά άλλα. Οι ορθογώνιες απεικονίσεις αποτελούν ένα καλά μελετημένο κεφάλαιο με κύριο μέλημα τη χρήση λίγων σημείων καμπής και μικρού εμβαδού. Οι ορθές γωνίες στα σημεία καμπής των ακμών μειώνουν την αναγνωσιμότητα της απεικόνισης καθώς η εφαπτόμενη των διαδοχικών τμημάτων αλλάζει στιγμιαία. Ένας τρόπος να παρακάμψουμε αυτό το πρόβλημα είναι να “εξομαλύνουμε” τις γωνίες χρησιμοποιώντας κυκλικά τόξα, επομένως υιοθετώντας ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις. Οι ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις εισήχθησαν πρόσφατα από τους Bekos et al. [BKKS13] και υπάρχουν μόνο λίγα αποτελέσματα. Η συνεισφορά μας αποτελείται από μερικά νέα αποτελέσματα που επεκτείνουν (και βελτιώνουν μερικώς) την υπάρχουσα δουλειά των Bekos et al. [BKKS13] και Alam et al. [ABK⁺14].

10.6 Οργάνωση της Διδακτορικής Διατριβής

Στο **Κεφάλαιο 11** δίνουμε όλους τους ορισμούς και προαπαιτούμενα αποτελέσματα για τα κεφάλαια που ακολουθούν. Επίσης περιγράφουμε δύο βασικά αλγοριθμικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε: τον αλγόριθμο του Γιαννακάκη και τα SPQR-δένδρα. Τα υπόλοιπα κεφάλαια χωρίζονται σε δύο μέρη: το πρώτο είναι αφιερωμένο σε γραφοθεωρητικά αποτελέσματα, και το δεύτερο μέρος περιέχει δουλειά στο πεδίο της απεικόνισης γραφημάτων.

Το πρώτο μέρος αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια: στα πρώτα δύο κεφάλαια εξετάζουμε εμφυτεύσεις σε βιβλίο, και στα υπόλοιπα δύο ολικούς χρωματισμούς με διαχωριζόμενες γειτονικές κορυφές. Στο **Κεφάλαιο 12** προσδιορίζουμε το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο των επίπεδων γραφημάτων με μέγιστο βαθμό 4. Παρουσιάζουμε έναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο που εμφυτεύει τέτοια γραφήματα σε δύο σελίδες, το οποίο συνεπάγεται ότι τα επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 4 είναι υποχαμιλτονιανά. Το κεφάλαιο αυτό είναι σε συνεργασία με τους Micheal A. Bekos και Martin Gronemann. Μέρος των αποτελεσμάτων έχει δημοσιευτεί στην εργασία [BGR14], η οποία βελτιώνεται στην εργασία [BGR15]. Στο **Κεφάλαιο 13** αποδεικνύουμε ότι το πλήθος σελίδων που απαιτούνται για την εμφύτευση οποιουδήποτε 1-επίπεδου γραφήματος είναι φραγμένο. Το κεφάλαιο αυτό είναι σε συνεργασία με τους Micheal A. Bekos, Till Bruckdorfer και Michael Kaufmann. Μέρος των αποτελεσμάτων έχει δημοσιευτεί στην εργασία [BBKR15].

Στο **Κεφάλαιο 14** αποδεικνύουμε ότι ο ολικός χρωματικός αριθμός με διαχωριζόμενες γειτονικές κορυφές των γενικευμένων Halin γραφημάτων με μέγιστο βαθμό 3 ισούται με 5. Στο **Κεφάλαιο 15** αποδεικνύουμε ότι η εικασία των ολικών χρωματισμών με διαχωριζόμενες γειτονικές κορυφές ισχύει για 4-κανονικά γραφήματα: πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση των χαμιλτονιανών γραφημάτων και στη συνέχεια το επεκτείνουμε σε κάθε 4-κανονικό γράφημα. Το κεφάλαιο αυτό είναι σε συνεργασία με τον Alexandros Paraiοannου. Μέρος των αποτελεσμάτων έχει δημοσιευτεί στην εργασία [PR14].

Το δεύτερο μέρος απαρτίζεται από δύο κεφάλαια. Στο **Κεφάλαιο 16** μελετάμε πραγματοποίησεις επίπεδων 4-κανονικών γραφημάτων ως συστήματα κύκλων. Αρχικά δίνουμε αυστηρά άνω και κάτω φράγματα στο πλήθος των κύκλων που απαιτούνται σε μια τέτοια πραγματοποίηση. Επίσης αποδεικνύουμε ότι αν το δοθέν γράφημα είναι τρισυνεκτικό τότε πάντα επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα εφαιπόμενων κύκλων. Εάν το γράφημα δεν είναι τρισυνεκτικό (δηλαδή είναι δισυνεκτικό ή απλά συνεκτικό) παρουσιάζουμε μια άπειρη οικογένεια γραφημάτων που δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ως συστήματα κύκλων. Τα αποτελέσματα αυτά απαντούν μια ανοιχτή εικασία που διατυπώθηκε από τον Lovász, και λέει ότι όλα τα 4-κανονικά

επίπεδα γραφήματα επιδέχονται τέτοια αναπαράσταση. Το κεφάλαιο αυτό είναι σε συνεργασία με τον Micheal A. Bekos. Μέρος των αποτελεσμάτων έχει δημοσιευτεί στην εργασία [BR12], η οποία βελτιώνεται στην εργασία [BR15].

Το **Κεφάλαιο 17** περιέχει αποτελέσματα σε ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι (a) τα επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3 επιδέχονται άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση, (b) τα επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 4 επιδέχονται (όχι απαραίτητα επίπεδη) άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση, (c) κάθε γράφημα επιδέχεται μια μη-επίπεδη απεικόνιση με άριστη πολυπλοκότητα ακμής υπό το μοντέλο Kandinsky, όμως δεν επιδέχονται όλα τα γραφήματα επίπεδη απεικόνιση. Τέλος, εισάγουμε μια κατηγοριοποίηση των γραφημάτων βάση των συγκεκριμένων τύπων απεικονίσεων που επιδέχονται, και μελετάμε σχέσεις μεταξύ των κλάσεων. Το κεφάλαιο αυτό είναι σε συνεργασία με τους Micheal A. Bekos, Martin Gronemann και Sergey Pupyrev. Μέρος των αποτελεσμάτων έχει δημοσιευτεί στην εργασία [BGPR14].

11 Βασικοί Ορισμοί

11.1 Ορολογία

Χρησιμοποιούμε την συνήθη ορολογία που περιέχεται σε οποιοδήποτε βιβλίο θεωρίας γραφημάτων, βλ. π.χ. [Bol98, BM76]. Όλα τα γραφήματα που μελετάμε στην παρούσα διδακτορική διατριβή είναι απλά, με πεπερασμένο πλήθος κορυφών και χωρίς κατευθυνόμενες ακμές. Συμβολίζουμε με $V(G)$ και $E(G)$ το σύνολο κορυφών και ακμών ενός γραφήματος G αντίστοιχα, $\delta(G)$ είναι ο μικρότερος βαθμός (minimum degree) του G , $\Delta(G)$ ο μέγιστος βαθμός (maximum degree) του, και $\alpha(G)$ ο αριθμός ανεξαρτησίας (independence number) του. Για ένα συνεκτικό γράφημα G συμβολίζουμε με $d(u, v)$ την απόσταση (distance) των κορυφών u και v , δηλαδή το μήκος ενός συντομότερου μονοπατιού από την u στην v (η συνεκτικότητα του G εξασφαλίζει ότι $d(u, v) \leq |V(G)|$). Η εκκεντρότητα (eccentricity) $ecc(u)$ μιας κορυφής u ορίζεται ως $ecc(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$. Η ακτίνα (radius) $rad(G)$ (διάμετρος (diameter) $diam(G)$) του G είναι η μικρότερη (μεγαλύτερη αντίστοιχα) εκκεντρότητα οποιασδήποτε κορυφής του G . Εάν για την κορυφή u ισχύει $ecc(u) = rad(G)$ λέμε ότι η u είναι κεντρική (central) κορυφή του G και εάν $ecc(u) = diam(G)$ τότε η u είναι απόκεντρη (peripheral) κορυφή του G . Σημειώνουμε ότι αν η u είναι απόκεντρη κορυφή του G , τότε υπάρχει πάντα μια άλλη απόκεντρη κορυφή v του G έτσι ώστε $d(u, v) = diam(G)$.

Λέμε ότι ένα γράφημα είναι k -κανονικό (k -regular) αν κάθε κορυφή $v \in V(G)$ έχει βαθμό k . Ένας 2-παράγοντας (2-factor) ενός γραφήματος G , είναι ένα υπογράφημα F του G τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του G να έχει βαθμό 2 στο F . Προφανώς το F έχει το ίδιο σύνολο κορυφών με το G και αποτελείται από ξένους κύκλους. Είναι γνωστό ότι κάθε 4-κανονικό γράφημα μπορεί να διαμεριστεί σε δύο 2-παράγοντες. Έστω ότι το γράφημα G είναι 4-κανονικό γράφημα με $3n$ κορυφές και αποτελείται από έναν κύκλο Χάμιλτον και ένα σύνολο από n ξένα μεταξύ τους τρίγωνα. Οι Fleischner and Stiebitz [FS92] έδειξαν ότι το G είναι 3-επιλέξιμο (3-choosable), όπου ένα γράφημα είναι k -επιλέξιμο αν για κάθε ανάθεση λιστών μεγέθους k στις κορυφές, υπάρχει ένας ορθός χρωματισμός δίνοντας σε κάθε κορυφή ένα χρώμα από τη λίστα της. Ο Sachs [Sac93] έδειξε ότι τα γραφήματα αυτά είναι 3-χρωματίσιμα. Και τα δύο αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι ο αριθμός ανεξαρτησίας του G ισούται με $\alpha(G) = n$. Αυτό είναι

γνωστό ως το πρόβλημα του κύκλου με τα τρίγωνα (cycle-plus-triangles problem), το οποίο επίσης επιλύει ένα πρόβλημα που έθεσε ο Schur και το οποίο παραθέτουμε ως λήμμα:

Λήμμα 11.1. Έστω $3n$ σημεία σε έναν κύκλο. Για οποιαδήποτε διαμέριση των σημείων σε n τριάδες, μπορούμε πάντα να βρούμε ένα σύνολο από n σημεία, ένα από κάθε τριάδα, έτσι ώστε τα σημεία αυτά να μην είναι διαδοχικά στον κύκλο.

Σε ένα 4-κανονικό χαμιλτονιανό γράφημα G , έστω HC ο κύκλος Χάμιλτον του G και $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ ο 2-παράγοντας του $G - HC$, $k \geq 1$. Λέμε ότι το $R \subseteq V(G)$ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων του \mathcal{C} εάν για κάθε $C_i \in \mathcal{C}$ υπάρχει ακριβώς μια κορυφή $v_i \in R$. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό έχουμε:

Πόρισμα 11.1. Έστω G ένα 4-κανονικό χαμιλτονιανό γράφημα και \mathcal{C} όπως ορίστηκε προηγουμένως. Τότε μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο αντιπροσώπων R του \mathcal{C} έτσι ώστε οι κορυφές του R να μην είναι γειτονικές πάνω στον κύκλο Χάμιλτον του G .

Απόδειξη.

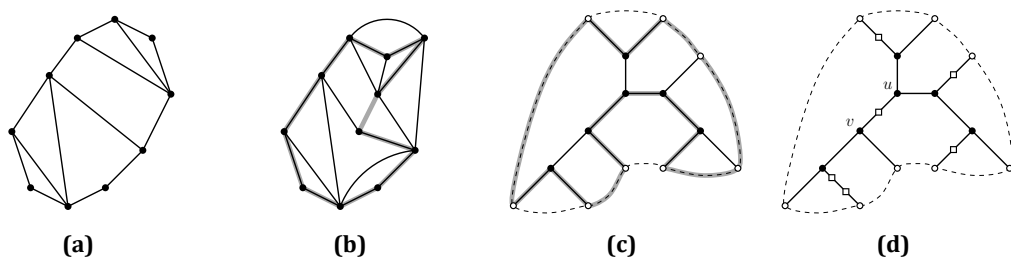
Για κάθε κύκλο $C \in \mathcal{C}$ διαγράφουμε αυθαίρετα κορυφές έως ότου απομείνουν μόνο τρεις που θα αποτελέσουν μια τριάδα κορυφών. Για κάθε κορυφή που διαγράφουμε, ενώνουμε με ακμή τους γείτονές της στον κύκλο Χάμιλτον. Έτσι έχουμε $|\mathcal{C}|$ τριάδες, μία για κάθε κύκλο του 2-παράγοντα, δηλαδή συνολικά $3|\mathcal{C}|$ σημεία στον κύκλο Χάμιλτον και από το **Λήμμα 11.1** μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο αντιπροσώπων από κάθε τριάδα, ώστε οποιοδήποτε δύο αντιπρόσωποι να μην είναι γειτονικοί στον κύκλο Χάμιλτον. \square

Πόρισμα 11.2. Έστω $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ σημεία σε έναν κύκλο, όπου κάθε m_i είναι ένας θετικός ακέραιος τουλάχιστον ίσος με 3. Για κάθε διαμέριση των σημείων σε n μέρη με πληθικότητα m_1, m_2, \dots, m_n αντίστοιχα, μπορούμε πάντα να βρούμε ένα σύνολο από n σημεία, ακριβώς ένα από κάθε σύνολο διαμέρισης, έτσι ώστε τα σημεία αυτά να μην είναι διαδοχικά στον κύκλο.

Έστω τώρα G ένα απλό τοπολογικό γράφημα, δηλαδή, μη-κατευθυνόμενο και απεικονισμένο στο επίπεδο. Εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε μόνο απλές απεικονίσεις, δηλαδή καμία ακμή δεν τέμνει τον εαυτό της, οποιοσδήποτε δύο ακμές δεν εφάπτονται και δεν τέμνονται περισσότερες από μία φορά. Μια απεικόνιση ορίζει κατά μοναδικό τρόπο την κυκλική σειρά των ακμών που προσπίπτουν σε κάθε κορυφή και επομένως ορίζει μία συνδυαστική εμφύτευση (combinatorial embedding). Λέμε ότι το G είναι επίπεδο (planar) εάν μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του. Για ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα G και το δυϊκό του, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα [Bol98, pp.172]:

Λήμμα 11.2. Έστω G ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα. Το G είναι γράφημα Euler αν και μόνο αν το δυϊκό του G^* είναι διμερές.

Ειδικές υποκλάσεις των επίπεδων γραφημάτων είναι τα εξωεπίπεδα (outerplanar) γραφήματα και τα υποχαμιλτονιανά (subhamiltonian) γραφήματα. Ένα επίπεδο γράφημα G είναι εξωεπίπεδο εάν μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του και κατά τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι κορυφές να ανήκουν στην εξωτερική όψη (outerface) της απεικόνισης (βλ. [Εικόνα 11.1a](#)). Ένα επίπεδο γράφημα G λέγεται υποχαμιλτονιανό εάν είναι υπογράφημα ενός επίπεδου χαμιλτονιανού γραφήματος (βλ. [Εικόνα 11.1b](#)). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα εξωεπίπεδα γραφήματα είναι και υποχαμιλτονιανά. Μία άλλη ειδική κατηγορία επίπεδων γραφημάτων είναι τα Halin γραφήματα (Halin graphs). Έστω $G = (V, E)$ ένα επιπεδικό (plane) γράφημα με ελάχιστο βαθμό $\delta(G) \geq 3$ και εξωτερική όψη f_0 , έτσι ώστε κάθε κορυφή της f_0 να έχει βαθμό 3. Εάν αφαιρώντας όλες τις ακμές της f_0 , το γράφημα $G(V, E - E(f_0))$ είναι ένα δένδρο T_G , τότε το G λέγεται Halin γράφημα (βλ. [Εικόνα 11.1c](#) για παράδειγμα). Τα Halin γραφήματα είναι τρισυνεκτικά και χαμιλτονιανά. Επιπλέον, εάν το G είναι ένα Halin γράφημα, τότε το G πάντα περιέχει ένα τρίγωνο. Τώρα, αν αφαιρέσουμε τον περιορισμό στον ελάχιστο βαθμό, δηλαδή, εάν επιτρέψουμε το T_G να περιέχει κορυφές βαθμού 2, τότε λέμε ότι το G είναι ένα γενικευμένο Halin γράφημα (generalized Halin graph). Ωστόσο, στα γενικευμένα Halin γραφήματα οι ιδιότητες της τρισυνεκτικότητας, της ύπαρξης κύκλου Χάμιλτον και της ύπαρξης τριγώνων δεν ισχύουν εν γένει, όπως φαίνεται στην [Εικόνα 11.1d](#).



Εικόνα 11.1: (a) Ένα εξωεπίπεδο γράφημα. (b) Ένα υποχαμιλτονιανό γράφημα: ένας υποχαμιλτονιανός κύκλος του G τονίζεται με γκρι χρώμα. (c) Ένα Halin γράφημα με μέγιστο βαθμό 3. Η εξωτερική όψη f_0 έχει σχεδιαστεί με διακεκομμένη γραμμή, αφαιρώντας τις ακμές της f_0 το εναπομείνον γράφημα είναι ένα δένδρο (σχεδιασμένο με συνεχείς ακμές, οι εσωτερικές του κορυφές είναι μαύρου χρώματος και τα φύλλα του άσπρου χρώματος). Ένας κύκλος Χάμιλτον τονίζεται με γκρι χρώμα. (d) Ένα γενικευμένο Halin γράφημα με μέγιστο βαθμό 3 (όπου οι κορυφές βαθμού 2 έχουν σχεδιαστεί ως άσπρα τετράγωνα), οι κορυφές u, v αποτελούν ένα διαχωριστικό ζεύγος κορυφών, το γράφημα δεν είναι χαμιλτονιανό και δεν περιέχει τρίγωνα.

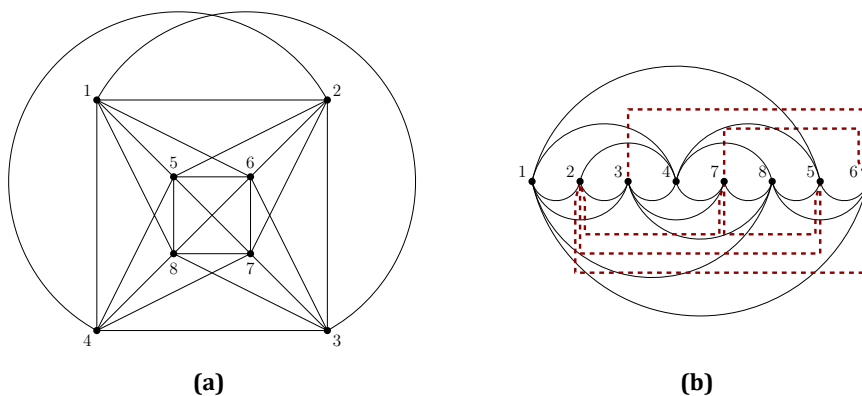
Ένα γράφημα G λέγεται κ -επίπεδο (κ -planar) ($\kappa \geq 1$) αν μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο έτσι ώστε κάθε ακμή να τέμνεται το πολύ κ φορές. Συνεπώς τα 1-επίπεδα

γραφήματα επιδέχονται απεικονίσεις στις οποίες κάθε ακμή τέμνεται το πολύ μία φορά. Ένα 1-επίπεδο τοπολογικό γράφημα λέγεται επιπεδικά μεγιστικό (planar-maximal) ή απλούστερα μεγιστικό (maximal), εάν δεν είναι εφικτή η προσθήκη μιας ακμής που δεν τέμνεται. Το παρακάτω λήμμα δείχνει ότι δύο τεμνόμενες ακμές επάγουν ένα K_4 (βλ., π.χ., Λήμμα 1 στο [ABK13]).

Λήμμα 11.3. Σε ένα μεγιστικό 1-επίπεδο τοπολογικό γράφημα, τα άκρα δύο τεμνόμενων ακμών είναι ανά δύο γειτονικά, δηλαδή επάγουν ένα K_4 .

11.1.1 Εμφυτεύσεις σε Βιβλίο

Σε μία εμφύτευση σε βιβλίο (book embedding) ενός γραφήματος, οι κορυφές περιορίζονται σε μία ευθεία, την ράχη (spine) του βιβλίου. Οι ακμές αντιστοιχούνται σε διαφορετικές σελίδες (pages) του βιβλίου. Μία σελίδα είναι ουσιαστικά ένα ημι-επίπεδο που ορίζεται από την ράχη του βιβλίου, και στο οποίο οι ακμές απεικονίζονται ως κυκλικά τόξα μεταξύ των άκρων τους. Λέμε ότι ένα γράφημα εμφυτεύεται σε βιβλίο k -σελίδων (admits a k -page book embedding, is k -page embeddable) εάν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις ακμές σε k σελίδες και υπάρχει γραμμική διάταξη των κορυφών πάνω στη ράχη του βιβλίου, έτσι ώστε να μην υπάρχει ζεύγος ακμών στην ίδια σελίδα που να τέμνονται. Το μικρότερο πλήθος σελίδων που απαιτούνται για την κατασκευή τέτοιας εμφύτευσης είναι το πάχος της εμφύτευσης σε βιβλίο (book thickness/page number) του γραφήματος (βλ. **Εικόνα 11.2**).



Εικόνα 11.2: (α) Ένα μεγιστικό 1-επίπεδο γράφημα. (β) Μία εμφύτευση σε βιβλίο με τέσσερις σελίδες: οι ακμές στην πρώτη σελίδα έχουν σχεδιαστεί ως συνεχή κυκλικά τόξα πάνω από την ράχη, οι ακμές της δεύτερης σελίδας ως συνεχή κυκλικά τόξα κάτω από την ράχη, οι ακμές της τρίτης σελίδας έχουν σχεδιαστεί ως διακεκομμένες κόκκινες πολυγωνικές γραμμές πάνω από τη ράχη, και οι ακμές της τελευταίας σελίδας ως διακεκομμένες κόκκινες πολυγωνικές γραμμές κάτω από τη ράχη.

Το ακόλουθο λήμμα συνοψίζει μερικά βασικά αποτελέσματα για τις εμφυτεύσεις

σε βιβλίο:

Λήμμα 11.4. Έστω G ένα γράφημα.

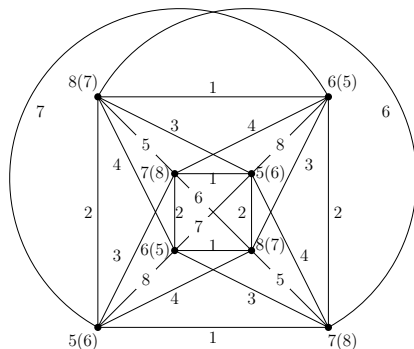
- (i) Το πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο του G ισούται με το μέγιστο πάχος εμφύτευσης των δισυνεκτικών του συνιστωσών [BK79].
- (ii) Το G έχει πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο 1 αν και μόνο αν το G είναι εξωεπίπεδο [BK79].
- (iii) Το G έχει πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο 2 αν και μόνο αν το G είναι επίπεδο υποχαμιλτονιανό γράφημα [BK79].
- (iv) Εάν το G είναι επίπεδο, τότε το G έχει πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο το πολύ 4 [Yan89].
- (v) Εάν το G είναι επίπεδο 3-κανονικό, τότε το G είναι υποχαμιλτονιανό [KO07].

11.1.2 Ολικό Χρωματισμοί με Διαχωριζόμενες Γειτονικές Κορυφές

Έστω ότι το G ένα πεπερασμένο απλό συνεκτικό γράφημα με μέγιστο βαθμό $\Delta(G)$. Έστω $c : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ μια ανάθεση k χρωμάτων $1, 2, \dots, k$ στις κορυφές και ακμές του G . Για κάθε στοιχείο $z \in V(G) \cup E(G)$, συμβολίζουμε με $c(z)$ το χρώμα του z . Η ανάθεση c είναι ένας ολικός χρωματισμός (total coloring) του G με k χρώματα. Λέμε ότι ο c είναι ορθός ολικός χρωματισμός (proper total coloring) εάν οποιαδήποτε δύο γειτονικά στοιχεία έχουν διαφορετικό χρώμα (δηλαδή δύο γειτονικές κορυφές, ή μια κορυφή και οι ακμές της, ή δύο ακμές με κοινό άκρο). Ο ολικός χρωματικός αριθμός (total chromatic number) ενός γραφήματος G , συμβολίζεται με $\chi''(G)$, και ισούται με το μικρότερο πλήθος χρωμάτων που απαιτούνται σε έναν ορθό ολικό χρωματισμό του G . Η εικασία ολικών χρωματισμών (total coloring conjecture) (που διατυπώθηκε από τους Behzad (1965) και Vizing (1968)) λέει ότι για κάθε γράφημα G , ο ολικός χρωματικός αριθμός ισούται με τον μέγιστο βαθμό του G συν ένα ή δύο. Δηλαδή, $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ or $\Delta(G) + 2$.

Έστω τώρα k ένας θετικός ακέραιος και c ένας ολικός χρωματισμός του G με k χρώματα. Για κάθε κορυφή $x \in V(G)$ το σύνολο των χρωμάτων των ακμών που προσπίπτουν στην x μαζί με το χρώμα της κορυφής x συμβολίζεται με $C(x)$ και είναι το χρωματικό σύνολο (color set) της x . Εάν ο χρωματισμός c είναι ορθός και $C(u) \neq C(v)$ για κάθε ακμή $uv \in E(G)$, τότε ο c είναι ένας k -ολικός χρωματισμός με διαχωριζόμενες γειτονικές κορυφές (k -adjacent-vertex-distinguishing total coloring) του G , ή εν συντομία k -AVD-ολικός χρωματισμός. Το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων σε ένα AVD-ολικό χρωματισμό του G είναι ο ολικός χρωματικός αριθμός με διαχωριζόμενες γειτονικές

κορυφές (adjacent-vertex-distinguishing total chromatic number) του G , και συμβολίζεται με $\chi_a''(G)$ ¹ (βλ. **Εικόνα 11.3**).



Εικόνα 11.3: Το γράφημα στην **Εικόνα 11.2a** έχει $\chi_a'' = 8$. Για κάθε κορυφή γράφουμε το χρώμα της ακολουθούμενο από ένα άλλο χρώμα σε παρένθεση: αυτό είναι το μόνο χρώμα που δεν ανήκει στο χρωματικό σύνολο της κορυφής.

Τα ακόλουθα λήμματα δίνονται στο [ZCL⁺05] και η απόδειξή τους παραλείπεται:

Λήμμα 11.5 (Zhang et al. [ZCL⁺05]). *Εάν ένα γράφημα G έχει δύο γειτονικές κορυφές μέγιστου βαθμού τότε $\chi_a''(G) \geq \Delta(G) + 2$.*

Λήμμα 11.6 (Zhang et al. [ZCL⁺05]). *Εάν ένα γράφημα G έχει k συνεκτικές συνιστώσες G_1, G_2, \dots, G_k , και $|V(G_i)| \geq 2, i = 1, 2, \dots, k$, τότε $\chi_a''(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \chi_a''(G_i)$.*

Στο [ZCL⁺05] διατυπώθηκε η παρακάτω εικασία, γνωστή ως εικασία AVD-ολικών χρωματισμών:

Εικασία 11.1 (Zhang et al. [ZCL⁺05]). *Για κάθε συνεκτικό γράφημα G τάξης τουλάχιστον 2, ισχύει $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

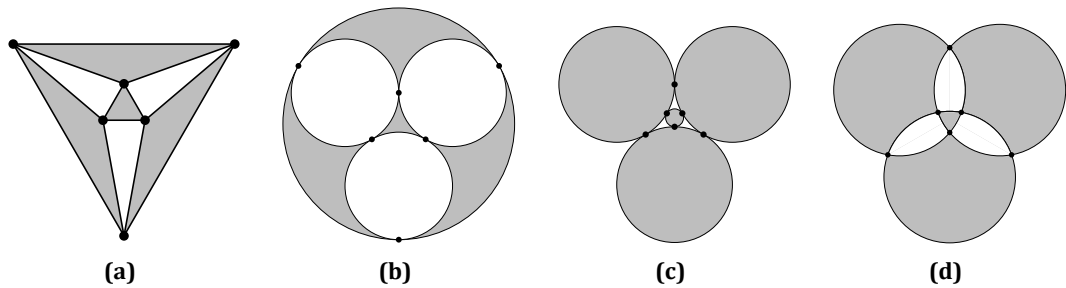
11.1.3 Αναπαραστάσεις με Κύκλους

Έστω G ένα συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα. Λέμε ότι το G επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων (realization as a system of circles) εάν μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο χρησιμοποιώντας ένα σύνολο από κύκλους έτσι ώστε (βλ. **Εικόνες 11.4b-11.4d**):

- (i) Το σύνολο κορυφών $V(G)$ δίνεται από τα σημεία τομής και επαφής των κύκλων.
- (ii) Το σύνολο ακμών $E(G)$ ορίζεται από όλα τα κυκλικά τόξα μεταξύ των σημείων τομής και επαφής των κύκλων.

¹ Στη βιβλιογραφία συχνά χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $\chi_{at}(G)$ για τον AVD-ολικό χρωματικό αριθμό του G .

Στην ειδική περίπτωση που δεν επιτρέπουμε σημεία τομής (δηλαδή υπάρχουν μόνο εφαπτόμενοι κύκλοι), λέμε ότι το G επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα εφαπτόμενων κύκλων (realization as a system of touching circles) (βλ. [Εικόνες 11.4b-11.4c](#)).



Εικόνα 11.4: (a) Απεικόνιση του οκταέδρου γραφήματος με ευθείες ακμές. (b)-(d) Διαφορετικές πραγματοποιήσεις του οκταέδρου ως σύστημα κύκλων.

Η ακόλουθη εικασία αφορά τα 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα και διατυπώθηκε από τον Lonász [[ERS70](#), pp.1175],[[Leh81](#), pp.426]:

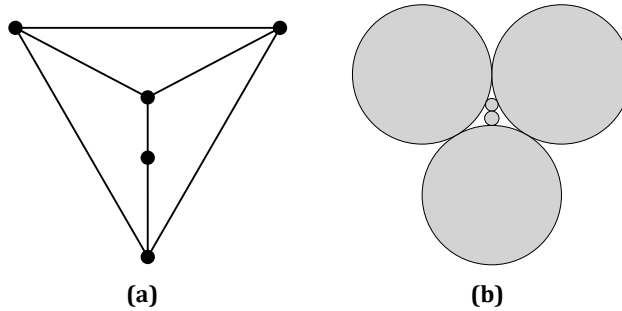
Εικασία 11.2 (Lonász). Έστω G ένα απλό συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα. Το G επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων.

Μία συσκευασία κύκλων (circle packing) είναι μια “συνδεδεμένη συλλογή” από κύκλους που εφάπτονται και είναι ξένοι μεταξύ τους. Το γράφημα τομών (intersection graph), επίσης γνωστό ως γράφημα επαφών (tangency/contact graph), μιας συσκευασίας κύκλων είναι το γράφημα του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στους κύκλους και υπάρχει ακμή για κάθε ζεύγος εφαπτόμενων κύκλων. Ένα γράφημα το οποίο επιδέχεται αναπαράσταση ως ένα σύστημα εφαπτόμενων κύκλων λέγεται γράφημα κέρματος (coin graph) (βλ. [Εικόνα 11.5](#)). Τα γραφήματα κέρματος είναι πάντα απλά, συνεκτικά και επίπεδα. Το θεώρημα συσκευασίας κύκλων (circle packing theorem) διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 11.1 (θεώρημα συσκευασίας κύκλων [[Koe36](#)]). Για κάθε απλό συνεκτικό επίπεδο γράφημα G , υπάρχει μια συσκευασία κύκλων στο επίπεδο με το G ως γράφημα τομών.

11.1.4 Ομαλές Ορθογώνιες Απεικονίσεις

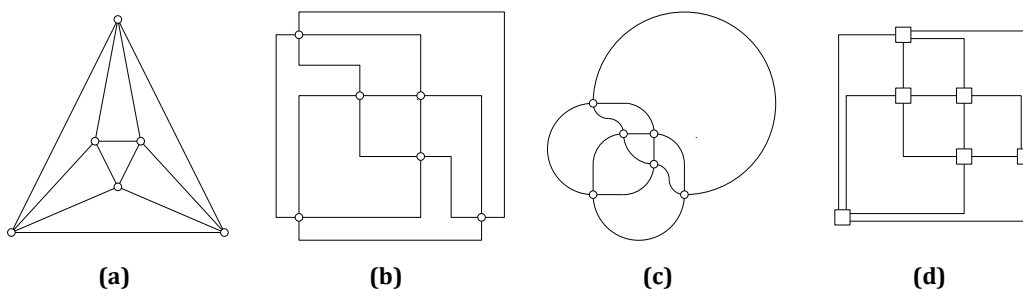
Μία ομαλή ορθογώνια απεικόνιση (smooth orthogonal drawing) ενός γραφήματος είναι μια απεικόνιση στην οποία κάθε κορυφή απεικονίζεται ως ένα σημείο στο επίπεδο και κάθε ακμή σχεδιάζεται ως μια αλληλουχία από ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στους δύο άξονες, και κυκλικά τόξα, βλ. [Εικόνα 11.6](#). Ένα βασικό χαρακτηριστικό



Εικόνα 11.5: (a) Ένα επίπεδο γράφημα. (b) Η αναπαράστασή του ως γράφημα κέρματος.

που ξεχωρίζει στις ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις είναι ότι τα διαδοχικά τμήματα μιας ακμής έχουν ένα κοινό σημείο επαφής και κοινή εφαπτόμενη (η οποία είναι είτε κατακόρυφη είτε οριζόντια). Η πολυπλοκότητα ακμής (complexity of an edge) υπολογίζεται ως το πλήθος από τα τμήματα που την αποτελούν. Λέμε επίσης ότι μια ομαλή ορθογώνια απεικόνιση έχει πολυπλοκότητα $k \geq 1$ εάν περιέχει μια ακμή με πολυπλοκότητα k και δεν περιέχει ακμές με πολυπλοκότητα $k+1$. Ειδικότερα για $k = 1$, δηλαδή πολυπλοκότητα ακμής ένα, λέμε ότι το γράφημα επιδέχεται άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση (perfect smooth orthogonal drawing) ή ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με άριστη πολυπλοκότητα ακμής (perfect edge complexity).

Παραδοσιακά, οι ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις περιορίζονται σε επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 4, εφόσον κάθε κορυφή έχει τέσσερις δυνατές θύρες (ports) (Βόρεια, Νότια, Ανατολική, Δυτική), όπου οι ακμές εισέρχονται/εξέρχονται με οριζόντιες ή κατακόρυφες εφαπτόμενες. Επιπλέον, δεν μπορεί να υπάρχουν δύο τμήματα ακμών που προσπίπτουν στην ίδια κορυφή και να χρησιμοποιούν την ίδια θύρα. Σημειώνουμε ότι αν χρησιμοποιείται η ίδια θύρα τότε αναπόφευκτα υπάρχουν επικαλύψεις ακμών μόνο στην περίπτωση που τα τμήματα είναι ευθύγραμμα.



Εικόνα 11.6: Διαφορετικές απεικονίσεις του οκτάεδρου, το οποίο είναι 4-κανονικό και επίπεδο: (a) Απεικόνιση με ευθύγραμμα τμήματα. (b) Απεικόνιση με το παραδοσιακό ορθογώνιο στυλ και με το ελάχιστο πλήθος σημείων καμπής ανά ακμή (δηλαδή 3 σημεία καμπής ανά ακμή ή πολυπλοκότητα ακμής 4). (c) Ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με πολυπλοκότητα ακμής 2. (d) Απεικόνιση με πολυπλοκότητα ακμής 2 χρησιμοποιώντας το μοντέλο Kandinsky.

Το μοντέλο Kandinsky χρησιμοποιείται κυρίως για την παράκαμψη του περιορισμού στο βαθμό των ορθογώνιων απεικονίσεων. Σύμφωνα με το μοντέλο Kandinsky, οι κορυφές απεικονίζονται ως τετράγωνα και δύο ή περισσότερες ακμές μπορούν να χρησιμοποιούν την ίδια θύρα. Σημειώνουμε ότι αν δύο ακμές χρησιμοποιούν την ίδια θύρα, μόνο μία από αυτές μπορεί να σχεδιαστεί ως ευθύγραμμο τμήμα. Το παρακάτω λήμμα συνοψίζει τα κυριότερα αποτελέσματα για ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις όπως δίνονται από τους Bekos et al. [BKKS13] και Alam et al. [ABK⁺14].

Λήμμα 11.7. Έστω G ένα επίπεδο γράφημα.

- (i) Εάν το G έχει μέγιστο βαθμό 4, τότε το G επιδέχεται ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με πολυπλοκότητα ακμής 2 [ABK⁺14].
- (ii) Εάν το G είναι τρισυνεκτικό με μέγιστο βαθμό 3, τότε το G επιδέχεται άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση [BKKS13].
- (iii) Το G επιδέχεται ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με πολυπλοκότητα ακμής 2 χρησιμοποιώντας το μοντέλο Kandinsky [BKKS13].

11.2 Αλγοριθμικά Εργαλεία

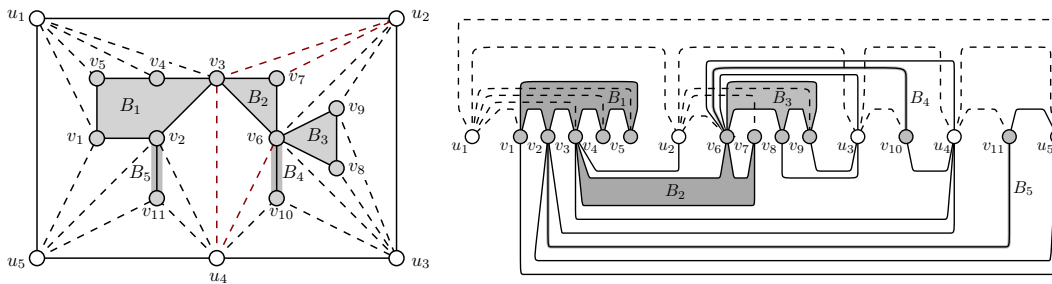
Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε δύο αλγοριθμικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Συγκεκριμένα, παραθέτουμε μία σύντομη εισαγωγή στον αλγόριθμο του Γιαννακάκη, ο οποίος εμφυτεύει κάθε επίπεδο γράφημα σε βιβλίο με πέντε σελίδες, και επίσης κάνουμε μια σύντομη επισκόπηση των SPQR-δένδρων, μία αρκετά συνήθης δομή για γραφήματα που δεν είναι τρισυνεκτικά.

11.2.1 Ο Αλγόριθμος του Γιαννακάκη

Το πρώτο μας αλγοριθμικό εργαλείο είναι η απλοποιημένη εκδοχή του αλγόριθμου του Γιαννακάκη που εμφυτεύει κάθε (εσωτερικώς τριγωνοποιημένο) επίπεδο γράφημα σε βιβλίο με πέντε σελίδες (όχι τέσσερις) [Yan89]. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται σε μια προσέγγιση “ξεφλουδίσματος” σε επίπεδα (levels): (i) οι κορυφές της εξωτερικής όψης είναι στο επίπεδο μηδέν, (ii) οι κορυφές της εξωτερικής όψης του γραφήματος που επάγεται μετά τη διαγραφή όλων των κορυφών των επιπέδων $\leq i - 1$ βρίσκονται στο επίπεδο i , (iii) οι ακμές μεταξύ κορυφές ίδιου (διαφορετικού, αντίστοιχα) επιπέδου λέγονται ισόπεδες (level) (συνδετικές (binding), αντίστοιχα) ακμές (βλ. **Εικόνα 11.7**).

Ας υποθέσουμε ότι το γράφημα $G = (V, E)$ αποτελείται από δύο επίπεδα, έστω L_0 και L_1 (υποθέτουμε επίσης ότι το L_0 δεν περιέχει χορδές). Οι κορυφές, έστω u_1, \dots, u_k ,

του L_0 είναι οι εξωτερικές (outer) κορυφές και εμφανίζονται με αυτή τη σειρά κατά την διαπέραση της εξωτερικής όψης του G σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (ωρολογιακή φορά εν συντομία). Οι υπόλοιπες κορυφές είναι οι εσωτερικές (inner) (και προφανώς ανήκουν στο L_1). Το γράφημα που επάγεται από όλες τις εξωτερικές κορυφές είναι δισυνεκτικό. Οι δισυνεκτικές συνιστώσες, ή συστάδες (blocks), έστω B_1, \dots, B_m , του γραφήματος που επάγεται από τις εσωτερικές κορυφές σχηματίζουν ένα δένδρο (στην περίπτωση που δεν υπάρχουν χορδές στο L_0). Θεωρούμε ότι χ.β.τ.γ. το δένδρο συστάδων έχει ως ρίζα τη συστάδα B_1 , η οποία περιέχει την αποκαλούμενη πρώτη εσωτερική κορυφή (first inner vertex), που ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο ως η τρίτη κορυφή της φραγμένης όψης που περιέχει τις εξωτερικές κορυφές u_1 και u_k . Δοθέντος μιας συστάδας B_i , λέμε ότι μία εξωτερική κορυφή είναι γειτονική (adjacent) με τη B_i εάν είναι γειτονική με μια κορυφή της. Το σύνολο των εξωτερικών κορυφών που είναι γειτονικές με τη B_i συμβολίζεται με $N(B_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Επιπλέον, λέμε ότι μια κορυφή w βλέπει (sees) μια ακμή (x, y) , εάν η w συνδέεται με τις x και y και το τρίγωνο x, y, w είναι μία όψη. Μία εξωτερική κορυφή βλέπει μια συστάδα εάν βλέπει μια ακμή της.



(a) Ένα εσωτερικώς τριγωνοποιημένο γράφημα. (b) Μία εμφύτευση σε βιβλίο τριών σελίδων από το [Yan89].

Εικόνα 11.7: (a) Οι εξωτερικές (εσωτερικές) κορυφές έχουν χρώμα άσπρο (γκρι). Οι ισόπεδες (συνδετικές) ακμές είναι συνεχείς (διακεκομμένες). Οι συστάδες τονίζονται με γκρι χρώμα. Η πρώτη εσωτερική κορυφή είναι η v_1 . Συνεπώς η ρίζα του δένδρου συστάδων είναι η B_1 . $N(B_3) = \{u_2, u_3\}$. Η κορυφή u_2 βλέπει την (v_3, v_7) και συνεπώς βλέπει την B_2 . Οι οδηγόι των B_1, B_2, B_3, B_4 και B_5 είναι οι v_1, v_3, v_6, v_6 και v_2 , αντίστοιχα. Οι κυρίαρχοι των B_1, B_2, B_3, B_4 και B_5 είναι οι u_1, u_2, u_2, u_3 και u_4 , αντίστοιχα. Οι κόκκινες ακμές υποδηλώνουν ότι $u_f(B_2) = u_2$ και $u_l(B_2) = u_4$. Συνεπώς, $P[u_f(B_2) \rightarrow u_l(B_2)] = u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow u_4$. (b) Γραμμική διάταξη των κορυφών και αντιστοίχιση των ακμών σε σελίδες.

Ο οδηγός (leader) $\ell(B_i)$ μιας συστάδας B_i είναι η πρώτη κορυφή του B_i που συναντάμε σε οποιοδήποτε μονοπάτι του L_1 από την πρώτη εσωτερική κορυφή προς τη συστάδα B_i . Μία εσωτερική κορυφή που ανήκει μόνο σε μία συστάδα αντιστοιχείται (is assigned) στη συστάδα αυτή. Εάν ανήκει σε περισσότερες από μία συστάδες, τότε

αντιστοιχείται στην “πιο ψηλή συστάδα” στο δένδρο συστάδων που την περιέχει. Για μία εσωτερική κορυφή $v \in L_1$, συμβολίζουμε με $B(v)$ τη συστάδα που έχει αντιστοιχηθεί η v . Ο κυρίαρχος (dominator) μίας συστάδας B είναι η πρώτη εξωτερική κορυφή που συνδέεται με κάποια κορυφή που έχει αντιστοιχηθεί στη B και συμβολίζεται με $dom(B)$.

Έστω B μία συστάδα του επιπέδου L_1 και έστω v_0, v_1, \dots, v_t οι κορυφές της B με τη σειρά που εμφανίζονται σε μία διαπέραση του συνόρου της B αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (αντιωρολογιακή φορά εν συντομία) και ξεκινώντας από την κορυφή $v_0 = \ell(B)$. Συμβολίζουμε με $u_f(B)$ και $u_l(B)$ τις κορυφές μικρότερου και μεγαλύτερου δείκτη του επιπέδου L_0 που βλέπει η ακμή (v_0, v_k) και η (v_0, v_1) , αντίστοιχα. Ισοδύναμα, οι $u_f(B)$ και $u_l(B)$ ορίζονται ως οι κορυφές μικρότερου και μεγαλύτερου δείκτη του $N(B)$. Σημειώνουμε ότι $u_f(B) = dom(B)$. Το μονοπάτι του επιπέδου L_0 από την $u_f(B)$ στην $u_l(B)$ με ωρολογιακή φορά κατά μήκος του L_0 συμβολίζεται με $P[u_f(B) \rightarrow u_l(B)]$. Ένας άλλος χρήσιμος όρος είναι το ίχνος (trail) μίας εσωτερικής κορυφής v_i , που συμβολίζεται με $tr(v_i)$ και ορίζεται αναδρομικά ως εξής. Αν η v_i ταυτίζεται με την πρώτη εσωτερική κορυφή, τότε $tr(v_i) = v_i$. Διαφορετικά, $tr(v_i) = tr(\ell(B)) \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_i, i = 1, 2, \dots, t$. Διαισθητικά, το ίχνος μίας εσωτερικής κορυφής v_i είναι το μονοπάτι που ξεκινά από την πρώτη εσωτερική κορυφή και καταλήγει στην v_i , και το οποίο (i) αποτελείται αποκλειστικά από κορυφές επιπέδου ένα, και, (ii) διασχίζει κάθε ενδιάμεση συστάδα από τη συστάδα ρίζα προς τη B πάντα με αντιωρολογιακή φορά. Στην **Εικόνα 11.7a**, το ίχνος της κορυφής v_9 είναι $tr(v_9) = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6 \rightarrow v_8 \rightarrow v_9$. Το ίχνος μιας συστάδας (trail of a block) είναι το ίχνος του οδηγού της.

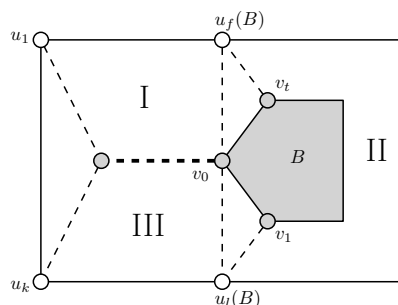
Η γραμμική διάταξη (linear order) των κορυφών κατά μήκος της ράχης του βιβλίου υπολογίζεται ως εξής. Πρώτα, οι εξωτερικές κορυφές εμφυτεύονται με τη διάταξη u_1, u_2, \dots, u_k . Για $j = 1, 2, \dots, k$, οι συστάδες που κυριαρχούνται από την εξωτερική κορυφή u_j εμφυτεύονται ακριβώς μετά την u_j ή μία μετά την άλλη όπως εμφανίζονται στο δένδρο συστάδων από πάνω προς τα κάτω. Οι κορυφές που ανήκουν στη συστάδα B_i διατάσσονται κατά μήκος της ράχης του βιβλίου με τη σειρά που εμφανίζονται σε μια αντιωρολογιακή διαπέραση του συνόρου της B_i ξεκινώντας από την κορυφή $\ell(B_i), i = 1, 2, \dots, m$ (που έχει ήδη τοποθετηθεί για $i \neq 1$).

Οι ακμές αντιστοιχίζονται σε σελίδες ως εξής. Όλες οι ισόπεδες ακμές του L_0 αντιστοιχίζονται στην πρώτη σελίδα. Οι ισόπεδες ακμές του L_1 αντιστοιχίζονται είτε στη δεύτερη είτε στην τρίτη σελίδα ανάλογα με το αν ανήκουν σε μία συστάδα που βρίσκεται σε περιττή ή άρτια απόσταση από τη ρίζα του δένδρου συστάδων, αντίστοιχα. Οι συνδετικές ακμές κατηγοριοποιούνται περαιτέρω σε έμπροσθεν (forward) ή όπισθεν (back). Μία συνδετική ακμή είναι έμπροσθεν αν η εσωτερική κορυφή προηγείται της εξωτερικής κορυφής. Διαφορετικά είναι όπισθεν (υπενθυμίζουμε ότι μία συνδετική

συνδέει μια εξωτερική και μια εσωτερική κορυφή). Όλες οι όπισθεν ακμές αντιστοιχίζονται στην πρώτη σελίδα. Μία έμπροσθεν ακμή που προσπίπτει στη συστάδα B_i αντιστοιχίζεται στη δεύτερη σελίδα, εάν η B_i ανήκει στην τρίτη σελίδα. Διαφορετικά αντιστοιχίζεται στην τρίτη σελίδα, για $i = 1, 2, \dots, m$.

Στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα από δύο επίπεδα, ο αλγόριθμος έχει ως εξής. Πιθανές χορδές του επιπέδου L_0 αντιστοιχίζονται στην πρώτη σελίδα. Σημειώνουμε ωστόσο ότι όταν υπάρχουν τέτοιες χορδές οι συστάδες του επιπέδου L_1 σχηματίζουν στη γενική περίπτωση ένα δάσος (δηλαδή, όχι ένα μόνο δένδρο). Συνεπώς, κάθε δένδρο συστάδων του δάσους πρέπει να εμφυτευτεί σύμφωνα με τους κανόνες που περιγράφηκαν παραπάνω. Γραφήματα με περισσότερα από δύο επίπεδα εμφυτεύονται “ανακυκλώνοντας” τις εναπομείναντες διαθέσιμες σελίδες. Πιο συγκεκριμένα, έστω μία συστάδα B του επιπέδου $i - 1$ και έστω B' μία συστάδα του επιπέδου i που βρίσκεται στο εσωτερικό της B κατά την ανάθεση σε επίπεδα. Έστω $\{p_1, \dots, p_5\}$ μία μετάθεση του συνόλου $\{1, \dots, 5\}$ και ας υποθέσουμε χ.β.τ.γ. ότι το σύνορο της συστάδας B έχει αντιστοιχιστεί στη σελίδα p_1 , ενώ το σύνορο όλων των συστάδων στο εσωτερικό της (συμπεριλαμβανομένης και της B') έχουν αντιστοιχιστεί στις σελίδες p_2 και p_3 . Τότε το σύνορο όλων των συστάδων του επιπέδου $i + 1$ που βρίσκονται στο εσωτερικό της B' κατά την ανάθεση σε επίπεδα θα αντιστοιχιστούν στις σελίδες p_4 και p_5 . Παρακάτω παραθέτουμε ιδιότητες που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του Γιαννακάκη.

Λήμμα 11.8 (Yannakakis [Yan89]). Έστω B μία συστάδα με οδηγό v_0 . Θεωρούμε το ίχνος $tr(B)$ της B , τις κορυφές $u_f(B)$ και $u_l(B)$ όπως στην **Εικόνα 11.8**. Τότε το G διαμερίζεται σε περιοχές, όπου το ίχνος $tr(B)$ ανήκει στην περιοχή I . Τότε, κατά μήκος της ράχης του βιβλίου οι κορυφές της περιοχής I βρίσκονται αριστερότερα των κορυφών της B , οι κορυφές της B βρίσκονται αριστερότερα των κορυφών της περιοχής II και οι κορυφές της περιοχής II βρίσκονται αριστερότερα των κορυφών της περιοχής III .



Εικόνα 11.8: Αναπαράσταση των διαφορετικών περιοχών I , II και III του **Λήμματος 11.8**. Το ίχνος της B απεικονίζεται με παχιά διακεκομμένη γραμμή.

Λήμμα 11.9 (Yannakakis [Yan89]). Έστω G ένα επίπεδο γράφημα που αποτελείται από δύο επίπεδα L_0 και L_1 . Έστω B μία συστάδα του επιπέδου L_1 και έστω v_0, \dots, v_t οι κορυφές της B σε αντιωρολογιακή διάταξη κατά μήκος του συνόρου της B ξεκινώντας από την $v_0 = \ell(B)$. Τότε: (i) Οι κορυφές v_1, \dots, v_t είναι διαδοχικές κατά μήκος της ράχης του βιβλίου. (ii) $u_f(B) \neq u_l(B)$. (iii) Εάν $u_i = u_f(B)$ και $u_j = u_l(B)$ για κάποια $i < j$, τότε οι κορυφές $v_1, \dots, v_t, u_{i+1}, \dots, u_j$ εμφανίζονται με αυτή τη διάταξη από αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος της ράχης του βιβλίου. (iv) Έστω $G[B]$ το υπογράφημα του G που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $P[u_f(B) \rightarrow u_l(B)] \rightarrow \ell(B) \rightarrow u_f(B)$. Τότε, μία συστάδα $B' \in G[B]$ αν και μόνο αν η B είναι πρόγονος της B' , δηλαδή, η B' ανήκει στο υποδένδρο συστάδων με ρίζα τη B .

Λήμμα 11.10 (Yannakakis [Yan89]). Έστω G ένα επίπεδο γράφημα που αποτελείται από δύο επίπεδα L_0 και L_1 και έστω ότι η (u_i, u_j) , $i < j$, είναι μία χορδή του L_0 . Έστω H το υπογράφημα του G στο εσωτερικό του κύκλου $P[u_i \rightarrow u_j] \rightarrow u_i$. Τότε: (i) Οι κορυφές u_i και u_j αποτελούν ένα διαχωριστικό ζεύγος κορυφών στο G . (ii) Όλες οι κορυφές του H βρίσκονται μεταξύ των u_i και u_j κατά μήκος της ράχης του βιβλίου. (iii) Εάν υπάρχει κορυφή μεταξύ των u_i και u_j που δεν ανήκει στο H , τότε αυτή η κορυφή ανήκει σε μία συστάδα B που κυριαρχείται από την u_i . Επιπλέον, όλες οι κορυφές του H , εκτός από την u_i βρίσκονται δεξιότερα της B κατά μήκος της ράχης του βιβλίου.

11.2.2 SPQR-Δένδρα

Ένα SPQR-δένδρο $T = (V(T), E(T))$ ενός δισυνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$ παρέχει δομική πληροφορία για τις τρισυνεκτικές του συνιστώσες και τη συσχέτισή τους.

Ο Mac Lane [ML37] ήταν ο πρώτος που μελέτησε τις βασικές δομές που σχετίζονται με τα SPQR-δένδρα, και οι Hopcroft και Tarjan [HT73] επέλυσαν την ανάλυση ενός γραφήματος στις τρισυνεκτικές του συνιστώσες σε γραμμικό χρόνο. Ωστόσο, τα SPQR-δένδρα ορίστηκαν και εισήχθησαν επίσημα στη βιβλιογραφία από τους Di Battista και Tamassia [DBT89]. Παρακάτω δίνουμε μία σύντομη περιγραφή των SPQR-δένδρων (παραπέμπουμε στα [DBT89, Kan93, DBT96] για περισσότερες λεπτομέρειες). Κάθε τρισυνεκτική συνιστώσα συσχετίζεται με έναν κόμβο μ του δένδρου T , αποκαλείται ο σκελετός (skeleton) του κόμβου μ , συμβολίζεται δε με $\text{skel}(\mu)$. Οι κορυφές ενός σκελετού είναι ένα υποσύνολο του V , στο οποίο μία ακμή $e = (u, v)$ είναι είτε πραγματική ακμή (real edge) που αντιστοιχεί σε μία ακμή του G , είτε εικονική ακμή (virtual edge). Οι εικονικές ακμές αντιπροσωπεύουν υπογραφήματα του G και εμφανίζονται σε ζεύγη. Επιπλέον, μια ακμή του δένδρου T είναι σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία με ένα ζεύγος εικονικών ακμών, οι οποίες περιέχονται στους δύο σκελετούς των άκρων της ακμής. Ο κόμβος του δένδρου μ έχει έναν από τους ακόλουθους τρεις τύπους² που

² Ορισμένοι συγγραφείς προτιμούν να χρησιμοποιούν Q-κόμβους για τη διαχείριση της τετριμμένης

αντικατοπτρίζουν τη δομή του $\text{skel}(\mu)$.

- αν μ είναι ένας S-κόμβος, τότε ο $\text{skel}(\mu)$ είναι ένας κύκλος. Αυτή η περίπτωση είναι ανάλογη με την σειριακή παράθεση στα σειριακά-παράλληλα γραφήματα. Το S αντιστοιχεί στο “series”(σειριακά).
- αν μ είναι ένας P-κόμβος, τότε ο $\text{skel}(\mu)$ είναι ένα τρισυνεκτικό πολυγράφημα που αποτελείται από μία συστάδα με τουλάχιστον τρεις παράλληλες ακμές. Αυτή η περίπτωση είναι ανάλογη με την παράλληλη παράθεση στα σειριακά-παράλληλα γραφήματα. Το P αντιστοιχεί στο “parallel”(παράλληλα).
- αν μ είναι ένας R-κόμβος, τότε ο $\text{skel}(\mu)$ είναι ένα απλό τρισυνεκτικό γράφημα. Το R αντιστοιχεί στο “rigid” (άκαμπτα).

Τυπικά, δεν επιτρέπεται σε ένα SPQR-δένδρο δύο S-κόμβοι να είναι γειτονικοί, ούτε δύο P-κόμβοι να είναι γειτονικοί, καθώς εάν μία τέτοια γειτνίαση υπήρχε, τότε οι δύο κόμβοι θα μπορούσαν να συγχωνευθούν σε έναν μεγαλύτερο κόμβο του ίδιου τύπου. Με αυτή την προϋπόθεση, το SPQR-δένδρο καθορίζεται με μοναδικό τρόπο για ένα γράφημα G .

περίπτωσης που ένα γράφημα έχει μόνο μία ακμή.

Μέρος Α: Θεωρία Γραφημάτων

12 Εμφύτευση σε Βιβλίο Επίπεδων Γραφημάτων Μέγιστου Βαθμού 4

Στο κεφάλαιο αυτό, αποδεικνύουμε ότι κάθε επίπεδο γράφημα μέγιστου βαθμού τέσσερα επιδέχεται εμφύτευση σε βιβλίο δύο σελίδων. Η απόδειξη βασίζεται σε μία αναδρομική συνδυαστική κατασκευή, η οποία προσδιορίζει τη διάταξη των κορυφών κατά μήκος της ράχης και τη σελίδα στην οποία εμφυτεύεται κάθε ακμή. Από το **Λήμμα 11.4(i)** υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι το δοθέν γράφημα G είναι δισυνεκτικό. Σημειώνουμε ότι μπορούμε να παραβλέψουμε την ακριβή γεωμετρία, καθώς δύο ακμές που απαικονίζονται στην ίδια σελίδα τέμνονται αν και μόνο αν τα άκρα τους εναλλάσσονται κατά μήκος της ράχης. Λέμε ότι μία ακμή e εμφωλεύει μία κορυφή v αν και μόνο αν το ένα άκρο της ακμής e βρίσκεται αριστερά της κορυφής v κατά μήκος της ράχης και το άλλο άκρο της ακμής e βρίσκεται δεξιά της. Επίσης λέμε ότι μια ακμή e εμφωλεύει μια ακμή e' αν και μόνο αν και οι δύο ακμές e και e' εμφυτεύονται στην ίδια σελίδα και τα δύο άκρα της ακμής e' εμφωλεύονται από την ακμή e . Παρατηρούμε ότι οι εμφωλευμένες ακμές δεν τέμνονται.

Ο αλγόριθμός μας ακολουθεί την γενική προσέγγιση “ξεφλουδίσματος σε επίπεδα”, που χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον Heath [Hea84] για να αποδείξει ότι ένα επίπεδο γράφημα μπορεί να εμφυτευθεί σε επτά σελίδες και στη συνέχεια από τον Γιαννακάκη [Yan89] για να μειώσει περαιτέρω το πάχος της εμφύτευσης σε βιβλίο των επίπεδων γραφημάτων σε τέσσερα: Αρχικά αφαιρούμε από το γράφημα G τον κύκλο C_{out} που οροθετεί την εξωτερική όψη του G και Συμπτύσσουμε κάθε δισυνεκτική συνιστώσα¹ του γραφήματος που απομένει σε μία μόνο κορυφή. Έστω F το γράφημα που προκύπτει, το οποίο γενικά είναι ένα δάσος, εφόσον το $G - C_{out}$ δεν είναι απαραίτητα συνεκτικό. Ο κύκλος C_{out} εμφυτεύεται έτσι ώστε: (i) η διάταξη των κορυφών του κύκλου C_{out} κατά μήκος της ράχης είναι σταθερή (και είναι σύμφωνη με τη σειρά που εμφανίζονται οι κορυφές κατά μήκος του C_{out}), και, (ii) όλες οι ακμές του κύκλου C_{out} βρίσκονται στην ίδια σελίδα, εκτός από την ακμή που ενώνει τις ακριανές κορυφές του (δηλαδή την αριστερότερη και τη δεξιότερη κορυφή του C_{out} κατά μήκος της ράχης). Τότε, θα περιγράψουμε πώς θα εμφυτεύσουμε χωρίς τομές: (i) τις χορδές

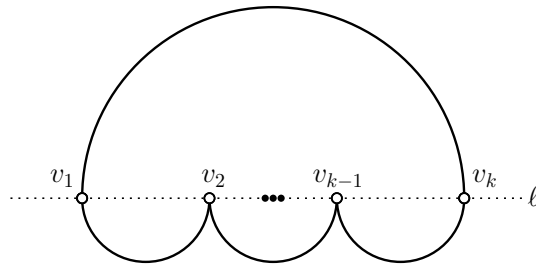
¹ Οι δισυνεκτικές συνιστώσες ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι οι συνεκτικές συνιστώσες που δημιουργούνται αν αφαιρέσουμε όλες τις γέφυρες του G . Οι δισυνεκτικές συνιστώσες και οι γέφυρες του G έχουν μία φυσική δενδροειδή δομή, που λέγεται δένδρο δισυνεκτικών συνιστωσών.

του κύκλου C_{out} , (ii) το δάσος F , και, (iii) τις ακμές μεταξύ του C_{out} και του F . Για να πάρουμε μία εμφύτευση σε βιβλίο δύο σελίδων του G , αντικαθιστούμε κάθε κορυφή του F με έναν κύκλο (που εμφυτεύεται παρόμοια με τον C_{out}), το μήκος του οποίου ισούται με το μήκος του κύκλου που οροθετεί την εξωτερική όψη της δισυνεκτικής συνιστώσας που αντιστοιχεί σ' αυτή την κορυφή του F στο $G - C_{out}$, και αναδρομικά εμφυτεύουμε το εσωτερικό του.

Πιο τυπικά, ας θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο απλό κύκλο $C : v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$ του γραφήματος G . Αφαιρώντας τον κύκλο C παίρνουμε δύο επίπεδα υπογραφήματα του G , έστω $G_{in}(C)$ και $G_{out}(C)$, που είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του $G - C$ που βρίσκονται στο εσωτερικό και το εξωτερικό του κύκλου C στο G , αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι τα $G_{in}(C)$ και $G_{out}(C)$ δεν είναι απαραίτητα συνεκτικά. Έστω $\overline{G}_{in}(C)$ ($\overline{G}_{out}(C)$, αντίστοιχα) το υπογράφημα του G που επάγεται από τον C και το $G_{in}(C)$ ($G_{out}(C)$, αντίστοιχα). Για το αναδρομικό βήμα, υποθέτουμε τις παρακάτω αναλλοίωτες ιδιότητες:

- IP-1:** Η διάταξη των κορυφών του $\overline{G}_{out}(C)$ κατά μήκος της ράχης ℓ είναι σταθερή και η σελίδα στην οποία βρίσκεται κάθε ακμή του $\overline{G}_{out}(C)$ (δηλαδή η άνω ή η κάτω σελίδα) καθορίζεται έτσι ώστε η εμφύτευση σε βιβλίο του $\overline{G}_{out}(C)$ να είναι επίπεδη. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι έχουμε ήδη κατασκευάσει μία εμφύτευση σε βιβλίο δύο σελίδων για το $\overline{G}_{out}(C)$, στην οποία καμία ακμή δεν τέμνει την ράχη.
- IP-2:** Η συνδυαστική εμφύτευση του $\overline{G}_{out}(C)$ είναι συνεπής με την δοθείσα επίπεδη συνδυαστική εμφύτευση του G .
- IP-3:** Οι κορυφές του κύκλου C καταλαμβάνουν διαδοχικές θέσεις κατά μήκος της ℓ , έτσι ώστε η κορυφή v_1 (v_k , αντίστοιχα) να είναι η αριστερότερη (δεξιότερη, αντίστοιχα) κορυφή κατά μήκος της ράχης ℓ . Επιπλέον, όλες οι ακμές του κύκλου C βρίσκονται στην ίδια σελίδα, εκτός από την ακμή που ενώνει τις κορυφές v_1 και v_k . Έστω χ.β.τ.γ. ότι η ακμή (v_1, v_k) είναι στην άνω σελίδα (ή άνω-σχεδιασμένη), ενώ οι υπόλοιπες ακμές του κύκλου C , δηλαδή οι ακμές (v_i, v_{i+1}) για $1 \leq i < k$, είναι στην κάτω σελίδα (ή κάτω-σχεδιασμένες), βλ. **Εικόνα 12.1**.
- IP-4:** Εάν ο κύκλος C δεν ταυτίζεται με τον κύκλο που οροθετεί την εξωτερική όψη του γραφήματος G , ο βαθμός είτε της κορυφής v_1 είτε της κορυφής v_k είναι το πολύ 3 στο $\overline{G}_{in}(C)$. Έστω χ.β.τ.γ. ότι η κορυφή v_k είναι βαθμού το πολύ 3.
- IP-5:** Εάν η κορυφή v_1 έχει βαθμό 4 στο $\overline{G}_{in}(C)$, τότε στην v_1 προσπίπτουν είτε καμία είτε δύο χορδές του κύκλου C .

Τονίζουμε ρητά ότι η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται στην **IP-2** διατηρείται καθόλη την αλγοριθμική διαδικασία. Αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι



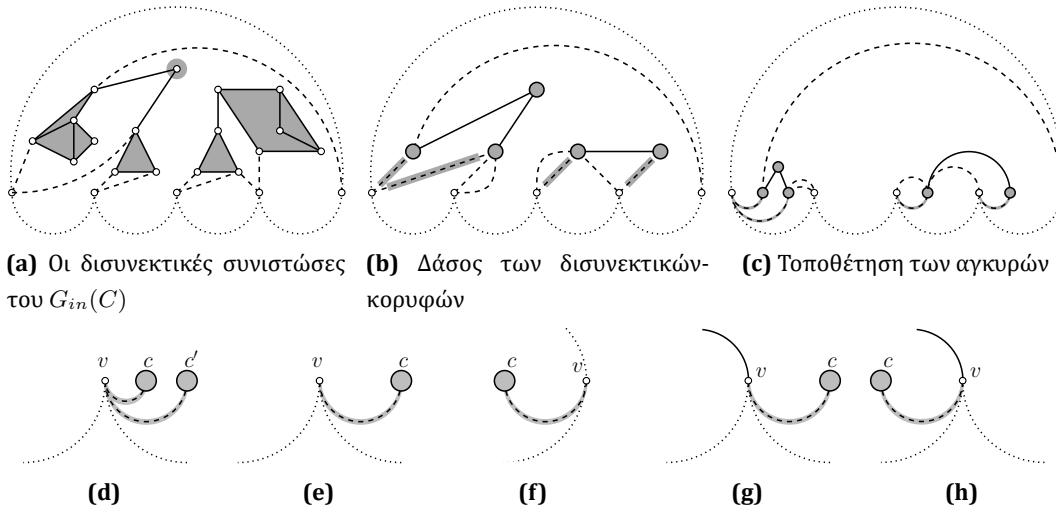
Εικόνα 12.1: Απεικόνιση της αναλλοίωτης ιδιότητας IP-3.

κάθε ακμή βρίσκεται εξολοκλήρου σε μία σελίδα (δηλαδή, καμία ακμή δεν τέμνει την ράχη, βλ. IP-1) αρκεί για να εξασφαλίσουμε ότι η απεικόνιση είναι επίπεδη.

Ακολουθώντας, περιγράφουμε λεπτομερώς πώς θα κατασκευάσουμε αναδρομικά μία εμφύτευση σε βιβλίο δύο σελίδων του γραφήματος $\overline{G}_{in}(C)$. Σημειώνουμε ότι πρώτα θα παρουσιάσουμε το αναδρομικό βήμα του αλγορίθμου μας και μετά τη βάση, εφόσον η προσέγγιση αυτή αναδεικνύει καλύτερα πώς οι διαφορετικές ιδέες έπονται η μία της άλλης. Έστω v_i μία κορυφή του κύκλου C , $i = 1, \dots, k$. Εφόσον το γράφημα G έχει μέγιστο βαθμό 4, η κορυφή v_i είναι γειτονική το πολύ με δύο μη εμφυτευμένες ακμές. Ας υποθέσουμε ότι η κορυφή v_i έχει τουλάχιστον μία μη εμφυτευμένη ακμή. Αναφερόμαστε στην ακμή που προσπίπτει στην κορυφή v_i και έπεται της ακμής $(v_i, v_{(i+1) \bmod k})$ σύμφωνα με την αντιωρολογιακή διάταξη των ακμών γύρω από την κορυφή v_i (όπως ορίζεται από την συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζει η IP-2), ως η δεξιά ακμή της κορυφής v_i . Εάν η κορυφή v_i έχει δύο μη εμφυτευμένες ακμές, τότε η ακμή που δεν ορίζεται ως η δεξιά ακμή της κορυφής v_i είναι η αριστερή ακμή. Διαφορετικά, η αριστερή και η δεξιά ακμή της κορυφής v_i ταυτίζονται.

Αρχικά, τοποθετούμε τις χορδές του κύκλου C στην άνω σελίδα. Από τις αναλλοίωτες ιδιότητες IP-2 και IP-3, έπεται ότι οποιεσδήποτε δύο χορδές δεν τέμνονται. Στη συνέχεια εμφυτεύουμε το $G_{in}(C)$ και τις ακμές μεταξύ του C και του $G_{in}(C)$. Σημειώνουμε ότι το $G_{in}(C)$ δεν είναι απαραίτητα συνεκτικό. Συνεπώς, τα δένδρα δισυνεκτικών συνιστωσών του σχηματίζουν ένα δάσος. Όπως ήδη αναφέραμε, Συμπτύσσουμε κάθε δισυνεκτική συνιστώσα του $G_{in}(C)$ σε μία μόνο κορυφή, την οποία αποκαλούμε δισυνεκτική-κορυφή (βλ. Εικόνες 12.2a-12.2b). Διακρίνουμε δύο τύπους δισυνεκτικών κορυφών. Οι δισυνεκτικές-κορυφές που είναι γειτονικές με κορυφές του κύκλου C αποκαλούνται άγκυρες (anchors). Οι δισυνεκτικές-κορυφές που είναι γειτονικές μόνο με άλλες δισυνεκτικές-κορυφές αποκαλούνται βοηθητικές (ancillaries). Από την σύμπτυξη, προκύπτει ότι μια ακμή μεταξύ του κύκλου C και κάποιας άγκυρας μπορεί να έχει πολλαπλότητα το πολύ δύο. Από την άλλη, οι ακμές μεταξύ των δισυνεκτικών κορυφών είναι πάντα απλές.

Πρώτα θα προσδιορίσουμε τις θέσεις όλων των άγκυρών κατά μήκος της ράχης ℓ . Έστω c μία άγκυρα. Από όλες τις ακμές μεταξύ της άγκυρας c και του κύκλου C , επιλέ-



Εικόνα 12.2: Σε όλες τις εικόνες, οι ακμές του C απεικονίζονται ως διάστικτες, οι δυσυνεκτικές συνιστώσες απεικονίζονται με γκρι χρώμα και οι ακμές μεταξύ του C και των άγκυρών απεικονίζονται διακεκομμένες. Οι μαρκαρισμένες ακμές τονίζονται με γκρι χρώμα.

γουμε και μαρκάρουμε ακριβώς μία, έτσι ώστε: (i) η μαρκαρισμένη ακμή θα εμφυτευθεί στην κάτω σελίδα, και, (ii) όλες οι άλλες ακμές που προσπίπτουν στην άγκυρα c (δηλαδή, είτε οι ακμές μεταξύ της άγκυρας c και του κύκλου C που δεν έχουν μαρκαριστεί, ή μεταξύ της άγκυρας c και των δυσυνεκτικών-κορυφών) θα εμφυτευθούν στην άνω σελίδα. Έστω $v_{l,c}$ η αριστερότερη κορυφή του κύκλου C που είναι γειτονική με την άγκυρα c κατά μήκος της ράχης ℓ . Εάν η $(c, v_{l,c})$ είναι απλή ακμή, τότε επιλέγουμε και μαρκάρουμε την ακμή αυτή. Διαφορετικά, μαρκάρουμε την αριστερή ακμή της κορυφής $v_{l,c}$. Έπεται ότι κάθε άγκυρα έχει ακριβώς μία μαρκαρισμένη ακμή (την οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε λίγο για να καθορίσουμε τη θέση της κατά μήκος της ράχης ℓ) και κάθε κορυφή του κύκλου C είναι γειτονική το πολύ με δύο μαρκαρισμένες ακμές. Έστω $v \in C$ μία κορυφή του κύκλου C γειτονική τουλάχιστον με μία άγκυρα μέσω μιας μαρκαρισμένης ακμής. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Η κορυφή v είναι γειτονική με ακριβώς δύο άγκυρες, έστω c και c' , μέσω δύο μαρκαρισμένων ακμών, έστω e και e' , αντίστοιχα. Έστω ότι χ.β.τ.γ. η ακμή e είναι η αριστερή ακμή της κορυφής v . Συνεπώς, η ακμή e' είναι η δεξιά ακμή της. Στην περίπτωση αυτή, και οι δύο άγκυρες c και c' τοποθετούνται ακριβώς δεξιά της κορυφής v και η άγκυρα c προηγείται της άγκυρας c' (βλ. **Εικόνα 12.2d**). Σημειώνουμε ότι η τοποθέτηση αυτή δεν είναι εφικτή στην περίπτωση που η κορυφή v είναι η δεξιότερη κορυφή του κύκλου C . Ωστόσο, η περίπτωση αυτή δεν μπορεί να υπάρξει λόγω της **IP-4**.

Περίπτωση 2: Η κορυφή v είναι γειτονική ακριβώς με μία άγκυρα c μέσω μιας μαρκαρισμένης ακμής e . Εάν ο βαθμός της κορυφής v στο $\overline{G}_{in}(C)$ είναι τρία, τότε δια-

κρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις: (i) Εάν η κορυφή v δεν είναι η δεξιότερη κορυφή του κύκλου C , τότε η άγκυρα c τοποθετείται ακριβώς δεξιά της κορυφής v (βλ. **Εικόνα 12.2e**). (ii) Εάν η κορυφή v είναι πράγματι η δεξιότερη κορυφή του κύκλου C , τότε η άγκυρα c τοποθετείται ακριβώς αριστερά της κορυφής v (βλ. **Εικόνα 12.2f**). Απομένει τώρα να εξετάσουμε την περίπτωση που ο βαθμός της κορυφής v στο $\overline{G}_{in}(C)$ είναι τέσσερα. Στην περίπτωση αυτή, από την **IP-4** έπεται ότι η κορυφή v δεν είναι η δεξιότερη κορυφή του κύκλου C . Και πάλι διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις: (i) Εάν η ακμή e είναι η δεξιά ακμή της κορυφής v , τότε η άγκυρα c τοποθετείται ακριβώς δεξιά της κορυφής v (βλ. **Εικόνα 12.2g**). (ii) Εάν η ακμή e είναι η αριστερή ακμή της κορυφής v , τότε η άγκυρα c τοποθετείται ακριβώς αριστερά της κορυφής v (βλ. **Εικόνα 12.2h**). Σημειώνουμε ότι η κορυφή v δεν μπορεί να είναι η αριστερότερη κορυφή του κύκλου C , καθώς η δεξιά ακμή της κορυφής v θα ήταν χορδή, παραβιάζοντας την **IP-5**.

Όπως ήδη αναφέραμε, όλες οι μαρκαρισμένες ακμές είναι κάτω-σχεδιασμένες. Οι ακμές μεταξύ των άγκυρών και του κύκλου C που δεν είναι μαρκαρισμένες είναι άνω-σχεδιασμένες (βλ. **Εικόνα 12.2c**). Παρατηρούμε ότι δεν αλλάζουμε την συνδυαστική εμφύτευση του γραφήματος G , διατηρώντας την **IP-2**. Συνεπώς, η εμφύτευση σε βιβλίο που έχουμε κατασκευάσει μέχρι στιγμής είναι επίπεδη.

Πρωτού προχωρήσουμε στην περιγραφή του πώς οι άγκυρες “καθορίζουν” τις θέσεις των βοηθητικών, εισάγουμε τον όρο του (αριθμημένου) αγκυλωμένου δένδρου και εξετάζουμε ιδιότητές του. Παρατηρούμε ότι οι βοηθητικές σχηματίζουν ένα νέο δάσος (δάσος των βοηθητικών), το οποίο είναι υπογράφημα του αρχικού δάσους (που περιέχει όλες τις δισυνεκτικές-κορυφές). Έστω T ένα δένδρο του δάσους βοηθητικών και έστω c_1, c_2, \dots, c_t άγκυρες τέτοιες ώστε: (i) είναι γειτονικές τουλάχιστον με μία βοηθητική του T , και, (ii) η c_i είναι αριστερά της c_{i+1} , $i = 1, \dots, t - 1$. Αναφερόμαστε στις c_1, c_2, \dots, c_t ως τις άγκυρες του T , και στο δένδρο που σχηματίζεται από το T και τις άγκυρες ως το αγκυλωμένο δένδρο του T , και το συμβολίζουμε με \overline{T} . Επιπλέον, λέμε ότι δύο άγκυρες του αγκυλωμένου δένδρου \overline{T} είναι διαδοχικές αν και μόνο αν δεν υπάρχει άγκυρα του αγκυλωμένου δένδρου \overline{T} μεταξύ τους. Ωστόσο, άγκυρες που δεν ανήκουν στο αγκυλωμένο δένδρο \overline{T} ή κορυφές του κύκλου C μπορεί να βρίσκονται μεταξύ τους.

Λήμμα 12.1. *Για τα αγκυλωμένα δένδρα ισχύουν τα παρακάτω:*

- (i) *Δύο αγκυλωμένα δένδρα \overline{T} και $\overline{T'}$ έχουν το πολύ μία κοινή άγκυρα,*
- (ii) *Ένα αγκυλωμένο δένδρο \overline{T} περιέχει τουλάχιστον δύο άγκυρες.*
- (iii) *Κάθε φύλλο ενός αγκυλωμένου δένδρου \overline{T} είναι μία άγκυρα του \overline{T} , και αντίστροφα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη δίνεται με άτοπο είτε προς τη συνεκτικότητα είτε προς τη δισυνεκτικότητα του γραφήματος G .

- (i) Εάν τα αγκυλωμένα δένδρα \bar{T} και \bar{T}' έχουν δύο κοινές άγκυρες, έστω c και c' , τότε υπάρχουν δύο μονοπάτια από την c στην c' : ένα μέσω του T και ένα μέσω του T' . Αυτά τα δύο μονοπάτια προφανώς σχηματίζουν έναν κύκλο από δισυνεκτικές-κορυφές που είναι άτοπο.
- (ii) Εάν ένα αγκυλωμένο δένδρο \bar{T} δεν έχει άγκυρες, τότε δεν υπάρχει κανένα μονοπάτι από τον C στο T , άτοπο ως προς τη συνεκτικότητα του γραφήματος G . Από την άλλη, εάν ένα αγκυλωμένο δένδρο \bar{T} έχει μόνο μία άγκυρα, έστω c , τότε η ακμή από τη c προς το T είναι γέφυρα, και πάλι άτοπο ως προς τη δισυνεκτικότητα του γραφήματος G . Σημειώνουμε ότι η ακμή από την c στο T είναι πάντα απλή, καθώς διπλές ακμές μπορούν μόνο να υπάρχουν μεταξύ κορυφών του κύκλου C και αγκυρών.
- (iii) Αφαιρώντας τις άγκυρες ενός αγκυλωμένου δένδρου \bar{T} , παίρνουμε ένα δένδρο T . Εάν μία άγκυρα του \bar{T} είναι εσωτερική κορυφή του \bar{T} , τότε αφαιρώντας την αποσυνδέουμε το T : άτοπο ως προς την συνεκτικότητα του T . Αντιστρόφως, αν υπάρχει ένα φύλλο $c \in \bar{T}$ το οποίο δεν είναι άγκυρα του \bar{T} , τότε η ακμή από την c στο T είναι γέφυρα, και πάλι άτοπο ως προς τη δισυνεκτικότητα του γραφήματος G .

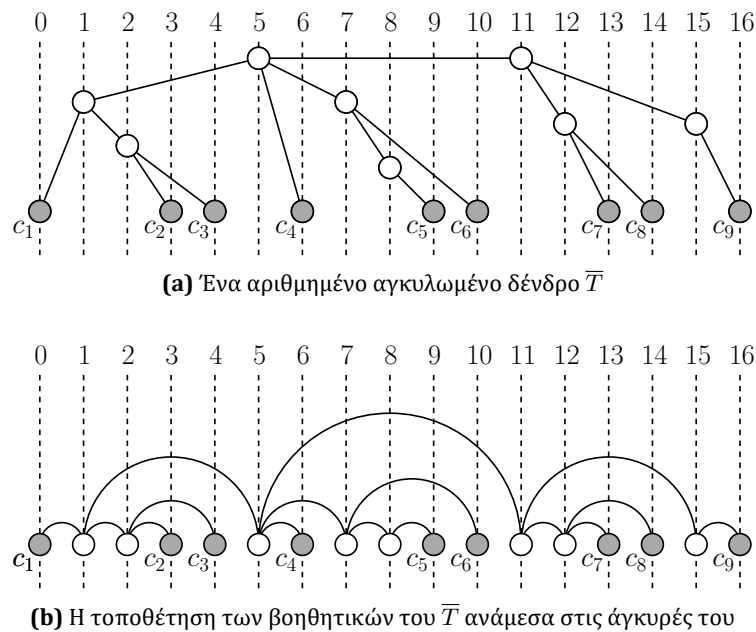
□

Έστω c_1, c_2, \dots, c_t οι άγκυρες ενός αγκυλωμένου δένδρου \bar{T} , έτσι ώστε η c_i να είναι αριστερά της c_{i+1} , $i = 1, \dots, t - 1$, και, έστω ότι το \bar{T} έχει ρίζα την άγκυρα c_1 (ενριζωμένο αγκυλωμένο δένδρο). Για μία άγκυρα ή βοηθητική c του αγκυλωμένου δένδρου \bar{T} , συμβολίζουμε με $p(c)$ τον γονέα της c στο \bar{T} και έστω $p(c_1)$ οποιαδήποτε από τις κορυφές του κύκλου C που είναι γειτονική με την άγκυρα c_1 . Για μία βοηθητική c του T (δηλαδή, μη-φύλλο του \bar{T}), ορίζουμε μία διάταξη για τα παιδιά του: εάν η c' και η c'' είναι παιδιά της c , τότε $c' < c''$ αν και μόνο αν η c' προηγείται της c'' σύμφωνα με την αντιωρολογιακή διάταξη των ακμών γύρω από την c (όπως ορίζεται από την συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2), ξεκινώντας από την ακμή $(c, p(c))$. Με αυτή τη διάταξη, αριθμούμε τις κορυφές του \bar{T} με τη σειρά που εμφανίζονται στην προδιάταξης διαπέραση του \bar{T} (αριθμημένο αγκυλωμένο δένδρο), βλ. Εικόνα 12.3a.

Λήμμα 12.2. Για κάθε βοηθητική c ενός αριθμημένου αγκυλωμένου δένδρου \bar{T} υπάρχουν:

- (i) τουλάχιστον μία άγκυρα του \bar{T} με αρίθμηση μικρότερη από εκείνη της c , και,
(ii) τουλάχιστον μία άγκυρα του \bar{T} με αρίθμηση μεγαλύτερη από εκείνη της c .

Απόδειξη. Και οι δύο ιδιότητες προκύπτουν από την προδιάταξης διαπέραση του \bar{T} . Ειδικότερα, έστω c μια βοηθητική του \bar{T} . Τότε ισχύουν τα παρακάτω:



Εικόνα 12.3: Και στις δύο εικόνες, οι άγκυρες έχουν χρώμα γκρι, ενώ οι δείκτες των κάθετων ευθειών του πλέγματος υποδηλώνουν την αρίθμηση του \bar{T} .

- (i) Η αρίθμηση της αριστερότερης άγκυρας του \bar{T} είναι πάντα μικρότερη από την αρίθμηση της c . Υπενθυμίζουμε ότι η αριστερότερη άγκυρα του \bar{T} είναι η ρίζα του και επομένως έχει αρίθμηση μηδέν.
- (ii) Η κορυφή με την μεγαλύτερη αρίθμηση, έστω c_{max} , του \bar{T} είναι ένα φύλλο του \bar{T} , και, από το **Λήμμα 12.1(iii)** είναι άγκυρα του \bar{T} . Συνεπώς, $c_{max} \neq c$.

□

Αρχικά καθορίζουμε την διάταξη με την οποία τα δένδρα του δάσους των βοηθητικών θα εμφυτευθούν. Για το σκοπό αυτό, κατασκευάζουμε ένα βοηθητικό κατευθυνόμενο γράφημα G_{aux}^T στο οποίο οι κορυφές αντιστοιχούν στα δένδρα και υπάρχει μία κατευθυνόμενη ακμή $(v_{T'}, v_T)$ στο G_{aux}^T αν και μόνο αν το \bar{T}' έχει μία άγκυρα μεταξύ δύο διαδοχικών άγκυρών του \bar{T} . Η επιθυμητή διάταξη ορίζεται από μία τοπολογική ταξινόμηση του κατευθυνόμενου γραφήματος G_{aux}^T , η οποία υπάρχει πάντα όπως προκύπτει από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 12.3. Το βοηθητικό κατευθυνόμενο γράφημα G_{aux}^T είναι ακυκλικό.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι, αντιθέτως, υπάρχει ένας κύκλος $v_{T_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{T_s} \rightarrow v_{T_1}$ στο κατευθυνόμενο γράφημα G_{aux}^T . Για $i = 1, 2, \dots, s$, έστω I_i το διάστημα που ορίζεται από την αριστερότερη και τη δεξιότερη άγκυρα του \bar{T}_i . Η ακμή $(v_{T_i}, v_{T_{i+1 \bmod s}})$ συνεπάγεται ότι υπάρχει μία άγκυρα του \bar{T}_i μεταξύ διαδοχικών άγκυρών του $\bar{T}_{i+1 \bmod s}$.

Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή, όλες οι άγκυρες του \bar{T}_i θα πρέπει να βρίσκονται μεταξύ των ίδιων δύο άγκυρών του $\bar{T}_{i+1 \bmod s}$, διαφορετικά η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2 δεν είναι επίπεδη. Συνεπώς, ισχύει ότι $I_i \subseteq I_{i+1 \bmod s}$. Από την άλλη, από το Λήμμα 12.1(i), έπεται ότι $I_i \neq I_{i+1 \bmod s}$. Οπότε, $I_1 \subset \dots \subset I_s \subset I_1$: άτοπο. \square

Το Λήμμα 12.3 συνεπάγεται ότι εάν εμφυτεύσουμε τα δένδρα με την σειρά που καθορίζει μία τοπολογική ταξινόμηση του G_{aux}^T , εξασφαλίζουμε ότι το δένδρο T' θα εμφυτευθεί πριν το δένδρο T , αν και μόνο αν το \bar{T}' έχει μία άγκυρα που βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών άγκυρών του \bar{T} κατά μήκος της ℓ . Τώρα, έστω ότι έχουμε εμφυτεύσει μηδέν ή περισσότερα από αυτά τα δένδρα έτσι ώστε: (i) όλες οι ακμές είναι άνω-σχεδιασμένες, (ii) δεν υπάρχουν τομές ακμών, και, (iii) η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2 διατηρείται. Έστω T το επόμενο δένδρο που πρέπει να εμφυτευθεί. Το παρακάτω λήμμα περιγράφει μία σημαντική ιδιότητα της προσέγγισής μας.

Λήμμα 12.4. Έστω ότι όλα τα δένδρα που προηγούνται του T στην τοπολογική ταξινόμηση του βοηθητικού κατευθυνόμενου γραφήματος G_{aux}^T έχουν εμφυτευτεί στην άνω σελίδα χωρίς τομές ακμών και διατηρώντας την συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2. Εάν η e είναι άνω-σχεδιασμένη ακμή που δεν ανήκει στο \bar{T} και εμφωλεύει τουλάχιστον μία άγκυρα του \bar{T} , τότε εμφωλεύει όλες τις άγκυρες του \bar{T} .

Απόδειξη. Εάν η ακμή e είναι η άνω-σχεδιασμένη ακμή του κύκλου C , τότε προφανώς εμφωλεύει όλες τις άγκυρες του \bar{T} , εφόσον όλες οι άγκυρες του \bar{T} βρίσκονται μεταξύ της αριστερότερης και της δεξιότερης κορυφής του κύκλου C . Τώρα, ας θεωρήσουμε την πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση που η ακμή e δεν είναι η άνω-σχεδιασμένη ακμή του κύκλου C . Από το Λήμμα 12.1(ii), το \bar{T} έχει τουλάχιστον δύο άγκυρες, έστω c και c' όπου η c βρίσκεται αριστερά της c' κατά μήκος της ράχης ℓ , και, έστω ότι, αντιθέτως, η ακμή e εμφωλεύει την c και όχι την c' . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το εάν η ακμή e είναι ακμή ενός αγκυλωμένου δένδρου που εμφυτεύθηκε πριν το \bar{T} ή όχι.

Ας θεωρήσουμε αρχικά την περίπτωση που η ακμή e είναι πράγματι ακμή ενός αγκυλωμένου δένδρου, έστω \bar{T}' , που εμφυτεύθηκε πριν το \bar{T} . Στην περίπτωση αυτή, από το Λήμμα 12.2 έπεται ότι και τα δύο άκρα της ακμής e βρίσκονται μεταξύ της αριστερότερης και της δεξιότερης άγκυρες του \bar{T}' . Εφόσον η ακμή e εμφωλεύει την c , έπεται ότι το T έπρεπε να έχει εμφυτευθεί πριν από το T' , άτοπο.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αυτού του λήμματος, απομένει να θεωρήσουμε την περίπτωση που η ακμή e δεν είναι ακμή ενός αγκυλωμένου δένδρου που εμφυτεύθηκε πριν από το \bar{T} . Στην περίπτωση αυτή, κάθε άκρο της ακμής e είναι: (i) είτε μία κορυφή του κύκλου C , ή, (ii) μία άγκυρα. Εφόσον τέτοιες κορυφές συνδέονται στον κύκλο C με κάτω-σχεδιασμένες ακμές, υπάρχει ένα κάτω-σχεδιασμένο μονοπάτι

που ενώνει τα άκρα της ακμής e , το οποίο μαζί με την ακμή e σχηματίζουν έναν κύκλο που περιέχει την c στο εσωτερικό του και την c' στο εξωτερικό του. Συνεπώς, η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2 δεν είναι επίπεδη, καταλήγοντας σε άτοπο. \square

Τώρα θα περιγράψουμε πώς θα εμφυτεύσουμε το T στην άνω σελίδα, έτσι ώστε να μην υπάρχουν τομές ακμών και η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2 να διατηρείται. Συγκεκριμένα, τοποθετούμε κάθε βοηθητική c του T μεταξύ ενός ζεύγους διαδοχικών αγκυρών του \bar{T} , έτσι ώστε: (i) η αρίθμηση της c είναι μεγαλύτερη (μικρότερη, αντίστοιχα) από την αρίθμηση της άγκυρας που βρίσκεται αριστερά της (δεξιά της, αντίστοιχα)², (ii) για τις βοηθητικές που έχουν τοποθετηθεί μεταξύ του ίδιου ζεύγους αγκυρών, εκείνη με την μικρότερη αρίθμηση είναι αριστερά, και, (iii) όλες οι ακμές του \bar{T} είναι άνω-σχεδιασμένες (βλ. Εικόνα 12.3b).

Σημειώνουμε ότι δεν έχουμε προσδιορίσει πλήρως την ακριβή θέση των βοηθητικών του \bar{T} κατά μήκος της ℓ , εφόσον μεταξύ διαδοχικών αγκυρών του \bar{T} μπορεί να υπάρχουν άγκυρες που δεν ανήκουν στο \bar{T} ή κορυφές του κύκλου C ή άγκυρες/βοηθητικές από δένδρα που έχουν ήδη εμφυτευθεί. Οι λεπτομέρειες θα δοθούν παρακάτω. Επίσης, σημειώνουμε ότι όλες οι βοηθητικές του \bar{T} έχουν τοποθετηθεί μεταξύ της αριστερότερης και της δεξιότερης άγκυρας, το οποίο, από το Λήμμα 12.4, συνεπάγεται ότι εάν μία άνω-σχεδιασμένη ακμή (που δεν ανήκει στο \bar{T}) εμφωλεύει τουλάχιστον μία άγκυρα του \bar{T} , τότε εμφωλεύει ολόκληρο το δένδρο \bar{T} . Εκμεταλλευόμενοι την αντιστοιχία μεταξύ της από-αριστερά-προς-τα-δεξιά διάταξης των κορυφών του \bar{T} κατά μήκος της ράχης ℓ και της αρίθμησης του \bar{T} , μπορούμε να αποδείξουμε ότι η εμφύτευση του \bar{T} είναι επίπεδη.

Λήμμα 12.5. *Η εμφύτευση του αγκυλωμένου δένδρου \bar{T} είναι επίπεδη.*

Απόδειξη. Έστω ότι, αντιθέτως, δύο ακμές, έστω $e = (c_1, c_2)$ και $e' = (c'_1, c'_2)$, του \bar{T} τέμνονται. Εφόσον και οι δύο ακμές e και e' είναι άνω-σχεδιασμένες, τα άκρα τους πρέπει να εναλλάσσονται κατά μήκος της ράχης ℓ . Χ.β.τ.γ. υποθέτουμε ότι η διάταξη των άκρων των ακμών e και e' κατά μήκος της ℓ είναι: $c_1 \rightarrow c'_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c'_2$. Τότε, έπεται ότι η c_1 είναι ο γονέας της c_2 , γιατί η αρίθμηση της c_1 είναι μικρότερη από την αρίθμηση της c_2 και είναι γειτονικές στο \bar{T} . Ομοίως, η c'_1 είναι ο γονέας της c'_2 .

Εφόσον μεταξύ των c_1 και c_2 έχουν εμφυτευθεί υποδένδρα του \bar{T} με ρίζες παιδιά της c_1 διαφορετικά της c_2 , έπεται ότι οι c'_1 και c'_2 ανήκουν σε ένα υποδένδρο με ρίζα

² Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη αυτού του ζεύγους διαδοχικών αγκυρών του \bar{T} εξασφαλίζεται από το Λήμμα 12.2: εφόσον για κάθε βοηθητική c ενός αριθμημένου αγκυλωμένου δένδρου \bar{T} υπάρχει τουλάχιστον μία άγκυρα του \bar{T} με αρίθμηση μικρότερη από την αρίθμηση της c και τουλάχιστον άλλη μία με αρίθμηση μεγαλύτερη από της c , πρέπει επίσης να υπάρχουν και δύο διαδοχικές άγκυρες με αυτή την ιδιότητα.

κάποιο παιδί της c_1 , που είναι διαφορετικό από την c_2 . Ωστόσο, αυτό συνεπάγεται ότι η αρίθμηση της c'_2 είναι μικρότερη από την αρίθμηση της c_2 , άτοπο. \square

Υπενθυμίζουμε ότι δεν έχουμε προσδιορίσει πλήρως την ακριβή θέση των βοηθητικών του \bar{T} κατά μήκος της ℓ . Προκειμένου να το επιτύχουμε, πρώτα πρέπει να εξετάσουμε ένα ειδικά προβληματικό σενάριο και να περιγράψουμε πώς θα το αντιμετωπίσουμε: Έστω ότι υπάρχει ένα μονοπάτι P από άνω-σχεδιασμένες ακμές (για παράδειγμα, μη-μαρκκαρισμένες ακμές που προσπίπτουν στον κύκλο C και/ή ακμές από ήδη εμφυτευμένα δένδρα) που ενώνουν ένα ζεύγος διαδοχικών αγκυρών του \bar{T} και ο αλγόριθμός μας πρέπει να τοποθετήσει μία βοηθητική c του \bar{T} μεταξύ τους. Εφόσον η c είναι εμφωλευμένη από μία ακμή του μονοπατιού P και όλες οι ακμές του \bar{T} είναι άνω-σχεδιασμένες, μία ακμή που συνδέει την c με μια βοηθητική του \bar{T} που έχει τοποθετηθεί μεταξύ ενός άλλου ζεύγους διαδοχικών αγκυρών του \bar{T} αναπόφευκτα θα τεμνόταν με το P . Ωστόσο, εκμεταλλευόμενοι τον περιορισμό στο βαθμό του αρχικού γραφήματος, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τέτοιο μονοπάτι δεν μπορεί να υπάρξει και επομένως το προαναφερθέν σενάριο δεν μπορεί να συμβεί. Αυτό εξασφαλίζεται από το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 12.6. Έστω u_0, u_1, \dots, u_{l+1} , $l \geq 0$, κορυφές (άγκυρες/βοηθητικές θεωρούνται ως κορυφές) που έχουν τοποθετηθεί στη ράχη ℓ από αριστερά προς τα δεξιά, έτσι ώστε οι κορυφές u_0 και u_{l+1} να είναι δύο διαδοχικές άγκυρες του \bar{T} . Έστω ότι όλα τα δένδρα που είναι αγκυλωμένα στις u_1, \dots, u_l έχουν εμφυτευθεί στην άνω σελίδα χωρίς τομές ακμών διατηρώντας την συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2, ενώ το T δεν έχει εμφυτευθεί. Τότε, υπάρχει ένας δείκτης $i \in \{0, 1, \dots, l\}$, για τον οποίο δεν υπάρχει ζεύγος γειτονικών κορυφές u_k και u_m με $0 \leq k \leq i$, $i+1 \leq m \leq l+1$ ώστε η ακμή (u_k, u_m) να είναι άνω-σχεδιασμένη.

Απόδειξη. Εφόσον όλα τα δένδρα που είναι αγκυλωμένα σε άγκυρες από το σύνολο $\{u_1, \dots, u_l\}$ έχουν εμφυτευθεί, όλες οι ακμές που προσπίπτουν στις κορυφές u_1, \dots, u_l υπάρχουν στην εμφύτευση. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, κάνουμε την παρακάτω παραδοχή: Για κάθε $i \in \{0, \dots, l\}$, υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές u_k και u_m με $0 \leq k \leq i$, $i+1 \leq m \leq l+1$ ώστε η ακμή (u_k, u_m) να είναι άνω-σχεδιασμένη. Πρώτα θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα μονοπάτι $P(u_0 \rightarrow u_{l+1}) : u_0 \rightarrow u_{j_1} \dots u_{j_p} \rightarrow u_{l+1}$ που αποτελείται από κορυφές του $\{u_0, \dots, u_{l+1}\}$, οι ακμές του οποίου είναι άνω-σχεδιασμένες και για κάθε ακμή του $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ δεν υπάρχει άνω-σχεδιασμένη ακμή με άκρα στο $\{u_0, \dots, u_{l+1}\}$ που να εμφωλεύει την ακμή αυτή. Η ύπαρξη του μονοπατιού $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ θα οδηγήσει σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι το μονοπάτι $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ μπορεί να οδηγήσει σε προβληματική κατάσταση, όπως αυτή που περιγράψαμε παραπάνω.

Για $i = 0$, από την παραδοχή που κάναμε, έπεται ότι για κάποιο $m \in \{1, \dots, l+1\}$, η ακμή (u_0, u_m) υπάρχει και είναι στην άνω σελίδα. Έστω $j_1 \in \{1, \dots, l+1\}$ ο μέγι-

στος δείκτης ώστε η (u_0, u_{j_1}) να είναι στην άνω σελίδα. Εάν $j_1 = l+1$, τότε τετριμμένα έχουμε αποδείξει την ύπαρξη του μονοπατιού $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$. Ας θεωρήσουμε τώρα την πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση που $j_1 \neq l+1$. Από την αρχική παραδοχή μας, για $i = j_1$, έπεται ότι για κάποια $k \in \{0, \dots, j_1\}$ και $m \in \{j_1+1, \dots, l+1\}$, η ακμή (u_k, u_m) υπάρχει και βρίσκεται στην άνω σελίδα. Τώρα παρατηρούμε ότι $k \notin \{1, \dots, j_1 - 1\}$, καθώς διαφορετικά οι ακμές (u_0, u_{j_1}) και (u_k, u_m) θα τέμνονταν, το οποίο δεν μπορεί να ισχύει αφού η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την **IP-2** είναι επίπεδη. Επιπλέον, το k πρέπει να είναι διάφορο του μηδενός, αφού το j_1 ήταν το μέγιστο των $\{1, \dots, l+1\}$, έτσι ώστε η ακμή (u_0, u_{j_1}) να βρίσκεται στην άνω σελίδα. Οπότε, έχουμε ότι $k = j_1$. Έστω $j_2 \in \{j_1+1, \dots, l+1\}$ ο μέγιστος δείκτης, έτσι ώστε η (u_{j_1}, u_{j_2}) να βρίσκεται στην άνω σελίδα, και συνεχίζουμε παρόμοια με την περίπτωση $i = 0$.

Η παραπάνω διαδικασία θα καταλήξει τελικά στο μονοπάτι $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$. Ισχυριζόμαστε ότι το μονοπάτι $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή του κύκλου C . Για να δείξουμε τον ισχυρισμό, ας υποθέσουμε ότι, αντιθέτως, το $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ δεν περιέχει καμία κορυφή του κύκλου C . Στην περίπτωση αυτή, το μονοπάτι $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ αποτελείται μόνο από άγκυρες και βοηθητικές, οι οποίες, ωστόσο, δεν μπορεί να ανήκουν στο \bar{T} , αφού οι u_0 και u_{l+1} είναι διαδοχικές άγκυρες του \bar{T} . Από το **Λήμμα 12.1(iii)**, έπεται ότι οι u_0 και u_{l+1} είναι φύλλα του \bar{T} . Το άτοπο προκύπτει από το γεγονός ότι το μονοπάτι από την u_0 στην u_{l+1} μέσω του T και το μονοπάτι $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ αποτελούν έναν κύκλο από άγκυρες/βοηθητικές. Οπότε, το μονοπάτι $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή του κύκλου C , όπως ισχυριστήκαμε.

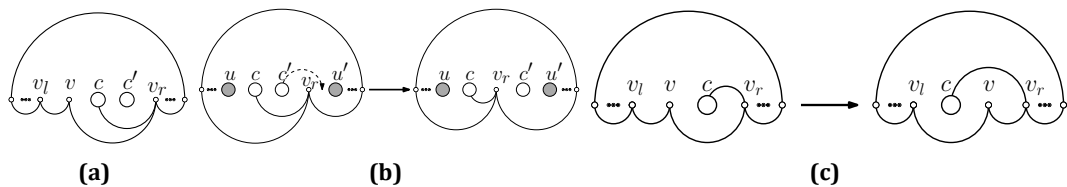
Έστω u η δεξιότερη κορυφή του κύκλου C στο $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ και έστω c ο γείτονας της κορυφής u στο $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ που βρίσκεται δεξιά της κορυφής u κατά μήκος της ράχης ℓ . Εφόσον η u_{l+1} είναι μία άγκυρα του \bar{T} , η c είναι καλώς ορισμένη και είναι είτε μία άγκυρα ή μία βοηθητική. Τώρα, παρατηρούμε ότι η c είναι γειτονική της κορυφής u , όπου $u \in C$. Αυτό συνεπάγεται ότι η c είναι μία άγκυρα και συνεπώς γειτονική με μια μαρκαρισμένη ακμή, έστω (v, c) , όπου $v \in C$ ($u = v$ είναι δυνατόν). Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι $u \neq v$. Στην περίπτωση αυτή, η v είναι ο αριστερότερος γείτονας της c , το οποίο υποδηλώνει ότι η διάταξη κατά μήκος της ράχης ℓ είναι: $v \rightarrow u \rightarrow c$. Ωστόσο, τέτοια διάταξη κατά μήκος της ℓ δεν είναι εφικτή, καθώς η ακμή (v, c) είναι μαρκαρισμένη και η u βρίσκεται μεταξύ των άκρων της. Οπότε είναι $u = v$. Εφόσον $(u, c) \in P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ (δηλαδή είναι άνω-σχεδιασμένη) και είναι μαρκαρισμένη (δηλαδή είναι κάτω-σχεδιασμένη), έπεται ότι η ακμή (u, c) είναι διπλή ακμή. Τώρα, παρατηρούμε ότι η $u \in C$ έχει δύο ακμές του C , οι οποίες συνεισφέρουν 2 στο βαθμό της. Η διπλή ακμή (u, c) επίσης συνεισφέρει 2. Μέχρι στιγμής έχουμε $\deg(u) = 4$. Το άτοπο προκύπτει από το γεγονός ότι η u έχει έναν επιπλέον γείτονα στο μονοπάτι $P(u_0 \rightarrow u_{l+1})$ και συνεπώς ο βαθμός της είναι τουλάχιστον 5. \square

Είμαστε πλέον έτοιμοι να προσδιορίσουμε τις ακριβείς θέσεις των βοηθητικών του \bar{T} κατά μήκος της ράχης ℓ . Υπενθυμίζουμε ότι οι άγκυρες του \bar{T} συμβολίζονται με c_i , $i = 1, \dots, t$, έτσι ώστε η c_i να είναι αριστερά της c_{i+1} . Τώρα, έστω ότι ένα συγκεκριμένο πλήθος από βοηθητικές του \bar{T} πρέπει να εμφυτευθεί μεταξύ δύο διαδοχικών άγκυρών c_i και c_{i+1} του \bar{T} , $i = 1, \dots, t-1$. Από το **Λήμμα 12.6**, έπεται ότι υπάρχει ένα ζεύγος κορυφών που είναι μεταξύ των c_i και c_{i+1} πάνω στην ℓ και δεν υπάρχουν άνω-σχεδιασμένες ακμές με άκρα μεταξύ των c_i και c_{i+1} που να εμφωλεύουν και τις δύο αυτές κορυφές. Επωφελούμαστε από αυτό τοποθετώντας ανάμεσα σε αυτό το ζεύγος κορυφών όλες τις βοηθητικές του \bar{T} που πρέπει να τοποθετηθούν ανάμεσα στις c_i και c_{i+1} . Σημειώνουμε ότι η μεταξύ τους διάταξη δεν επηρεάζεται, δηλαδή, για τις βοηθητικές που τοποθετούνται μεταξύ των c_i και c_{i+1} , εκείνη με την μικρότερη αρίθμηση είναι αριστερά. Αυτό μας εγγυάται ότι το **Λήμμα 12.5** ακόμα ισχύει και το \bar{T} απεικονίζεται επίπεδο. Απομένει να δείξουμε ότι η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την **IP-2** διατηρείται, όταν το \bar{T} εμφυτεύεται ολόκληρο.

Λήμμα 12.7. Έστω ότι όλα τα δένδρα που προηγούνται του T σε μία τοπολογική ταξινόμηση του G_{aux}^T έχουν εμφυτευτεί στην άνω σελίδα χωρίς τομές ακμών και διατηρώντας την συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την **IP-2**. Όταν το \bar{T} εμφυτεύεται, η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την **IP-2** διατηρείται.

Απόδειξη. Εφόσον η εμφύτευση του \bar{T} διατηρεί την διάταξη των ακμών του \bar{T} γύρω από όλες τις βοηθητικές, η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την **IP-2** διατηρείται για όλες τις βοηθητικές του \bar{T} . Θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει και για όλες τις άγκυρες του \bar{T} . Έστω c μία άγκυρα του \bar{T} και έστω e_c η μαρκαρισμένη ακμή που προσπίπτει στην c . Υπενθυμίζουμε ότι, από κατασκευής, η ακμή e_c είναι κάτω-σχεδιασμένη. Έστω επίσης e_p και e_t δύο ακμές που προσπίπτουν στην c έτσι ώστε η e_p να είναι μία ακμή από αυτές που είχαν απεικονιστεί πριν από το T και η e_t να είναι μία ακμή του \bar{T} . Περιορίζουμε την απόδειξή μας στην περίπτωση που στην συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την **IP-2**, η ακμή e_p προηγείται της ακμής e_t σύμφωνα με την ωρολογιακή διαπέραση των ακμών γύρω από την c ξεκινώντας από την ακμή e_c , και η c είναι το αριστερό άκρο της ακμής e_p κατά μήκος της ℓ (οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται παρόμοια). Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει ένα απλό μονοπάτι από εμφυτευμένες ακμές (διαφορετικό από το τετριμμένο μονοπάτι που αποτελείται μόνο από την ακμή e_p) το οποίο ενώνει τα δύο άκρα της ακμής e_p και μαζί με την ακμή e_p δημιουργούν μία όψη του G . Έστω $C(e_p)$ ο κύκλος που οριοθετεί την όψη αυτή. Εφόσον η ακμή e_p προηγείται της ακμής e_t σύμφωνα με την ωρολογιακή διαπέραση των ακμών γύρω από την c ξεκινώντας από την ακμή e_c , έπεται ότι το T βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $C(e_p)$. Οπότε, υπάρχει μία άνω-σχεδιασμένη ακμή που ανήκει στον κύκλο $C(e_p)$ (πιθανώς η ακμή e_p) που δεν ανήκει στο \bar{T} και η οποία εμφωλεύει μία άγκυρα του \bar{T} . Από το **Λήμμα 12.4**, αυτή η ακμή εμφωλεύει όλες τις άγκυρες του \bar{T}

(συμπεριλαμβανομένης και της άγκυρας c). Εφόσον η c ανήκει στον $C(e_p)$, έπεται ότι η μόνη ακμή του κύκλου $C(e_p)$ που εμφωλεύει το \bar{T} είναι η ακμή e_p . Οπότε, η c είναι η αριστερότερη άγκυρα του \bar{T} και ολόκληρη η απεικόνιση του \bar{T} εμφωλεύεται από την ακμή e_p . Μετά την εμφύτευση του \bar{T} , η ακμή e_p ακόμα προηγείται της e_t σύμφωνα με την ωρολογιακή διαπέραση των ακμών γύρω από την c ξεκινώντας από την e_c , που ήταν και το ζητούμενο. \square



Εικόνα 12.4: Η κατάσταση που πραγματεύεται το **Λήμμα 12.8**: (a) Μία περίπτωση στην οποία τοποθετώντας την άγκυρα c αριστερά της v δημιουργεί τομές ακμών. (b) Μετακινώντας την δυσυνεκτική-κορυφή c' δεξιά της v_r . (c) Η ακμή (v, v_r) μπορεί να εμφυτευθεί στην άνω σελίδα.

Στο παρακάτω λήμμα, στρέφουμε την προσοχή μας στην περίπτωση που ο κύκλος C περιέχει μία κορυφή βαθμού 2 στο $\bar{G}_{in}(C)$ (διαφορετική από την αριστερότερη ή τη δεξιότερη κορυφή του). Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα αυτό αργότερα.

Λήμμα 12.8. Έστω v μια κορυφή του κύκλου C με βαθμό 2 στο $\bar{G}_{in}(C)$ που δεν είναι η αριστερότερη ούτε η δεξιότερη κορυφή του κύκλου C . Έστω επίσης v_r (v_l , αντίστοιχα) ο επόμενος αριστερός (δεξιός, αντίστοιχα) γειτονάς της στον κύκλο C . Εφόσον η ακμή (v, v_r) ανήκει στον C , απεικονίζεται στην κάτω σελίδα. Ωστόσο, μπορεί επίσης να εμφυτευθεί στην άνω σελίδα χωρίς να δημιουργεί τομές ακμών και χωρίς να αλλάζει την συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την **IP-2**.

Απόδειξη. Εάν καμία δυσυνεκτική-κορυφή δεν έχει τοποθετηθεί μεταξύ των κορυφών v και v_r , τότε προφανώς η ακμή (v, v_r) μπορεί να σχεδιαστεί στην άνω σελίδα χωρίς να δημιουργεί τομές ακμών και χωρίς να αλλάζει την συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την **IP-2** (υπενθυμίζουμε ότι οι κορυφές v και v_r είναι διαδοχικές κορυφές του κύκλου C). Οπότε, μπορούμε να υποθέσουμε χ.β.τ.γ. ότι υπάρχουν δυσυνεκτικές-κορυφές εμφυτευμένες μεταξύ των κορυφών v και v_r του κύκλου C . Θα δείξουμε ότι μπορούμε να μετακινήσουμε τις ενδιαμέσες δυσυνεκτικές-κορυφές αριστερά της κορυφής v , έτσι ώστε οι κορυφές v και v_r να γίνουν διαδοχικές κατά μήκος της ράχης ℓ .

Η προαναφερθείσα μετακίνηση δεν είναι εφικτή, μόνο εάν υπάρχει μία άγκυρα c ανάμεσα από τις κορυφές v και v_r , έτσι ώστε η (c, v_r) να είναι κάτω-σχεδιασμένη (βλ. **Εικόνα 12.4a**). Για να παρακάμψουμε το πρόβλημα αυτό, θα μπορούσαμε ενδεχομένως να τοποθετήσουμε την κορυφή v ανάμεσα στις κορυφές c και v_r . Ωστόσο, στην

περίπτωση αυτή οι ακμές (v_r, c) και (v_l, v) θα τέμονταν. Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε αυτή την προβληματική κατάσταση εάν η ακμή (v_r, c) εμφυτευτεί εκ νέου στην άνω σελίδα. Ωστόσο, αυτό δεν είναι εφικτό μόνο εάν υπάρχει μία δυσνεκτική-κορυφή c' μεταξύ των c και v_r . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

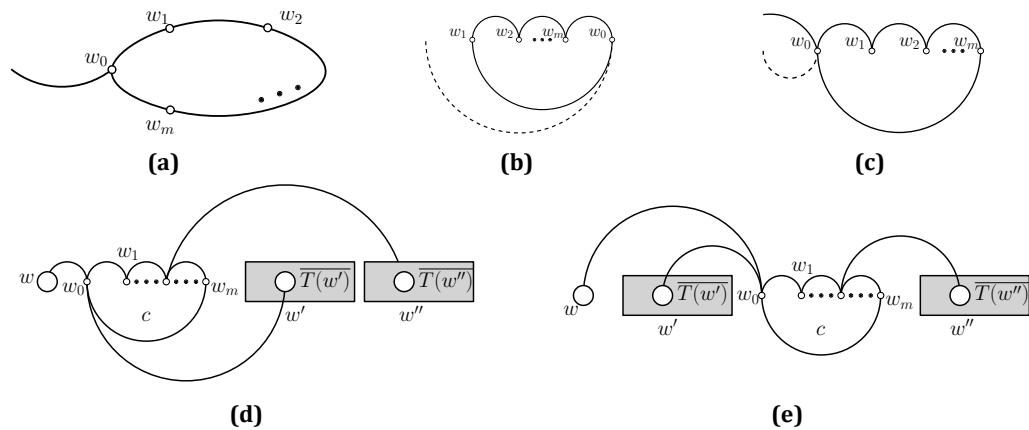
- (i) Η δυσνεκτική-κορυφή c' είναι μία άγκυρα, δηλαδή είναι γειτονική σε μία κορυφή του κύκλου C . Στην περίπτωση αυτή, η άγκυρα c' μπορεί να είναι γειτονική μόνο με την κορυφή v_r μέσω μιας μαρκαρισμένης ακμής. Συνεπώς, οι c και c' είναι και οι δύο άγκυρες, αριστερά από την κορυφή v_r και γειτονικές με την κορυφή v_r μέσω μαρκαρισμένων ακμών. Ωστόσο, μία τέτοια ακολουθία από άγκυρες κατά μήκος της ράχης δεν είναι επιτρεπτή από τον αλγόριθμό μας: άτοπο.
- (ii) Η δυσνεκτική-κορυφή c' είναι μία βοηθητική. Στην περίπτωση αυτή, η c' ανήκει σε ένα δένδρο, έστω T . Τώρα, υπενθυμίζουμε ότι όλες οι βοηθητικές του T έχουν τοποθετηθεί μεταξύ της αριστερότερης και της δεξιότερης αγκυρών του \bar{T} . Έστω u και u' δύο διαδοχικές άγκυρες του \bar{T} έτσι ώστε η διάταξη κατά μήκος της ράχης ℓ να είναι: $u \rightarrow c' \rightarrow u'$ (βλ. το αριστερό μέρος της **Εικόνας 12.4b**). Σημειώνουμε ότι $u = c$ είναι πιθανό. Τώρα, παρατηρούμε ότι η u' δεν μπορεί να είναι μεταξύ των c και v_r , καθώς διαφορετικά, η προηγούμενη περίπτωση μπορεί να εφαρμοστεί για την u' . Οπότε, η u' βρίσκεται δεξιά της v_r . Μπορούμε να δείξουμε ότι το **Λήμμα 12.6** ισχύει για $u_0 = v_r$ και $u_{l+1} = u'$, ακόμα και αν η u_0 δεν είναι άγκυρα αλλά μία κορυφή του κύκλου C (η αναλυτική απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του **Λήμματος 12.6**). Οπότε, υπάρχουν δύο διαδοχικές κορυφές μεταξύ των v_r και u' έτσι ώστε η c' να μπορεί να τοποθετηθεί μεταξύ τους (και όχι μεταξύ των c και v_r), βλ. **Εικόνα 12.4b**. Το ίδιο ισχύει για κάθε βοηθητική που ήταν αρχικά τοποθετημένη ανάμεσα από τις c και v_r . Εάν μετακινήσουμε όλες τις βοηθητικές μεταξύ των v_r και u' διατηρώντας αμετάβλητη την μεταξύ τους διάταξη, τότε η (c, v_r) μπορεί να εμφυτευθεί στον άνω σελίδα (βλ. **Εικόνα 12.4c**).

□

Μέχρι στιγμής, έχουμε απεικονίσει το $\bar{G}_{in}(C)$, έτσι ώστε, κάθε δυσνεκτική συνιστώσα του $G_{in}(C)$ έχει συμπτυχθεί σε μία δυσνεκτική-κορυφή που βρίσκεται πάνω στην ράχη ℓ και κάθε ακμή έχει εμφυτευθεί είτε στην κάτω σελίδα (εάν είναι μαρκαρισμένη ακμή) είτε στην άνω σελίδα (διαφορετικά). Επιπλέον, και η διάταξη των κορυφών του κύκλου C κατά μήκος της ράχης ℓ και η συνδυαστική εμφύτευση του G που προσδιορίζεται από την **IP-2** έχουν διατηρηθεί. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι δεν δημιουργούνται τομές με το $\bar{G}_{out}(C)$.

Ακολουθώντας, θα περιγράψουμε πώς θα συνεχίσουμε αναδρομικά. Έστω λοιπόν c μία δυσνεκτική-κορυφή του $G_{in}(C)$ με εξωτερική όψη \mathcal{F}_c . Αρχικά, υποθέτουμε ότι η \mathcal{F}_c είναι ένας απλός κύκλος. Εάν η c είναι άγκυρα, έστω w_0 η κορυφή της \mathcal{F}_c που είναι

γειτονική με την μαρκαρισμένη ακμή της c . Εάν η c είναι βοηθητική, τότε η c ανήκει σε ένα αγκυλωμένο δένδρο. Στην περίπτωση αυτή, με w_0 συμβολίζουμε την κορυφή του \mathcal{F}_c που είναι γειτονική με τον κοντινότερο γείτονα της c από αριστερά της, ο οποίος είναι καλά ορισμένος εφόσον η c πάντα βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών αγκυρών του αγκυλωμένου δένδρου που ανήκει. Έστω w_0, w_1, \dots, w_m οι κορυφές της \mathcal{F}_c , σύμφωνα με την ωρολογιακή διαπέραση την \mathcal{F}_c ξεκινώντας από την w_0 (βλ. **Εικόνα 12.5a**).



Εικόνα 12.5: (a) Η εξωτερική όψη μίας δισυνεκτικής-κορυφής c . (b)-(c) Διαφορετικές περιπτώσεις που προκύπτουν όταν απεικονίζουμε την εξωτερική όψη της c , στην περίπτωση που η c είναι άγκυρα. (d) Η βοηθητική c πρέπει να επανατοποθετηθεί. (e) Η θέση της καθορίζεται από το **Λήμμα 12.9**.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η c είναι άγκυρα, δηλαδή η w_0 είναι γειτονική με μία μαρκαρισμένη ακμή. Τοποθετούμε τις κορυφές της \mathcal{F}_c κατά μήκος της ℓ ως εξής: (i) η w_0 καταλαμβάνει την θέση της c και είναι η δεξιότερη κορυφή της \mathcal{F}_c πάνω στην ℓ , (ii) η w_1 είναι η αριστερότερη κορυφή της \mathcal{F}_c πάνω στην ℓ , (iii) η w_i είναι αριστερά της w_{i+1} για $i = 1, \dots, m-1$, και, (iv) δεν υπάρχουν άλλες κορυφές μεταξύ τους (βλ. **Εικόνα 12.5b**). Όλες οι ακμές της \mathcal{F}_c είναι άνω-σχεδιασμένες, εκτός από την (w_1, w_0) . Αυτή η εμφύτευση είναι πάντα εφικτή, εκτός από την περίπτωση που στην συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την **IP-2** υπάρχει μία ακμή που προσπίπτει στην w_0 και βρίσκεται μεταξύ της (w_0, w_1) και της μαρκαρισμένης ακμής που προσπίπτει στην w_0 , σύμφωνα με την αντισωρολογιακή διάταξη των ακμών γύρω από την w_0 ξεκινώντας από την (w_0, w_1) (βλ. **Εικόνα 12.5c**). Στην περίπτωση αυτή, τοποθετούμε την w_0 αριστερά της w_1, \dots, w_m , έτσι ώστε η w_0 να είναι η αριστερότερη κορυφή της \mathcal{F}_c . Τότε, η (w_0, w_m) είναι η κάτω-σχεδιασμένη ακμή της \mathcal{F}_c .

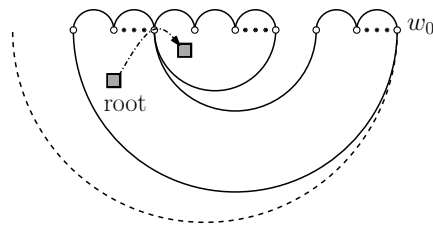
Έστω τώρα ότι η c είναι βοηθητική. Έστω w ο κοντινότερος γείτονας της c αριστερά της κατά μήκος της ℓ . Τότε, η w είναι ο γονέας της c στο δένδρο στο οποίο ανήκει η c και η (w_0, w) είναι άνω-σχεδιασμένη. Τοποθετούμε τις κορυφές της \mathcal{F}_c ως εξής: (i) η w_0 καταλαμβάνει την θέση της c και είναι η αριστερότερη κορυφή της \mathcal{F}_c πάνω

στην ℓ , (ii) η w_m είναι η δεξιότερη κορυφή της \mathcal{F}_c πάνω στην ℓ , (iii) η w_i είναι αριστερά της w_{i+1} , $i = 1, \dots, m - 1$, και (iv) δεν υπάρχουν άλλες κορυφές μεταξύ τους. Όλες οι ακμές της \mathcal{F}_c είναι άνω-σχεδιασμένες, εκτός από την (w_0, w_m) . Αυτή η σχεδίαση δεν είναι εφικτή μόνο εάν στην συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2 υπάρχει μία ακμή που προσπίπτει στην w_0 , έστω (w_0, w') , και βρίσκεται μεταξύ της (w_0, w_m) και της (w_0, w) σύμφωνα με την ωρολογιακή διάταξη των ακμών γύρω από την w_0 ξεκινώντας από την (w_0, w_m) (βλ. Εικόνα 12.5d). Στην περίπτωση αυτή, η (w_0, w') δεν μπορεί να εμφυτευθεί στην άνω σελίδα, όπως απαιτούμε για τις ακμές που προσπίπτουν στις βοηθητικές. Πιο συγκεκριμένα, εφόσον η c έχει αριστερά της μόνο τον γονέα της από τις δισυνεκτικές-κορυφές του αγκυλωμένου δένδρου που ανήκει, έπεται ότι η w' βρίσκεται δεξιά της c . Συνεπώς, η ακμή (w_0, w') δεν μπορεί να σχεδιαστεί στην άνω σελίδα, χωρίς να παραβιάζει την συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2. Εφόσον το G είναι δισυνεκτικό, η c είναι γειτονική τουλάχιστον με άλλη μία δισυνεκτική-κορυφή, έστω w'' , έτσι ώστε $w'' \notin \{w, w'\}$. Το παρακάτω λήμμα επιλύει την περίπτωση αυτή.

Λήμμα 12.9. *Η βοηθητική c μπορεί να επανατοποθετηθεί στη ράχη ℓ , έτσι ώστε: (i) η c να βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών αγκυρών του \bar{T} , (ii) η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2 να διατηρείται, (iii) οι ακμές (w_0, w) , (w_0, w') και (c, w'') να είναι άνω-σχεδιασμένες και να μην τέμνονται, (iv) η w_0 να είναι η αριστερότερη κορυφή της \mathcal{F}_c και η w_i να είναι αριστερά της w_{i+1} , $i = 1, \dots, m - 1$, (v) όλες οι ακμές της \mathcal{F}_c να είναι άνω-σχεδιασμένες, εκτός από την (w_0, w_m) .*

Απόδειξη. Η κορυφή w είναι ο γονέας της c . Οι κορυφές w' και w'' είναι παιδιά της c στο \bar{T} , με την w' να είναι το πρώτο παιδί της c . Για την απόδειξή μας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η w'' είναι το δεύτερο παιδί της. Οπότε οι ακμές (c, w) , (c, w') και (c, w'') είναι διαδοχικές γύρω από την c (βλ. Εικόνα 12.5d). Έστω $\bar{T}(w')$ και $\bar{T}(w'')$ τα υποδένδρα του \bar{T} με ρίζα w' και w'' , αντίστοιχα. Αρχικά, η c βρίσκεται αριστερά όλων των κορυφών του $\bar{T}(w')$, όλες οι κορυφές του $\bar{T}(w')$ βρίσκονται αριστερά όλων των κορυφών του $\bar{T}(w'')$ και δεν υπάρχουν βοηθητικές του \bar{T} μεταξύ τους. Τοποθετούμε την c μεταξύ της δεξιότερης (αριστερότερης, αντίστοιχα) άγκυρας του $\bar{T}(w')$ ($\bar{T}(w'')$, αντίστοιχα), βλ. Εικόνα 12.5e. Κατ' αυτό τον τρόπο, η c τοποθετείται μεταξύ δύο διαδοχικών αγκυρών του \bar{T} . Εάν τοποθετήσουμε τις κορυφές της \mathcal{F}_c , με την w_0 ως αριστερότερη της \mathcal{F}_c και την w_i αριστερά της w_{i+1} , τότε οι ακμές (w_0, w) , (w_0, w') και (c, w'') σχεδιάζονται στην άνω σελίδα και η συνδυαστική εμφύτευση διατηρείται. \square

Από τα παραπάνω έπεται ότι, αν επεξεργαστούμε όλες τις βοηθητικές που πρέπει να επανατοποθετηθούν από δεξιά προς τα αριστερά κατά μήκος της ℓ , τότε από το Λήμμα 12.9, τελικά θα πάρουμε μία επίπεδη απεικόνιση στην οποία η συνδυαστική εμφύτευση που προσδιορίζεται από την IP-2 διατηρείται, όταν οι εξωτερικές όψεις



Εικόνα 12.6: Η \mathcal{F}_c δεν είναι ένας απλός κύκλος.

κάθε δυσυνεκτικής-κορυφής έχουν σχεδιαστεί και όλες οι ακμές που συνδέουν τις δυσυνεκτικές-κορυφές έχουν εμφυτευθεί στην άνω σελίδα.

Τώρα, υπενθυμίζουμε ότι αρχικά κάναμε την υπόθεση ότι η \mathcal{F}_c είναι ένας απλός κύκλος προκειμένου να απλοποιήσουμε την παρουσίασή μας. Ωστόσο, γενικά, η \mathcal{F}_c αποτελείται από μικρότερους απλούς υποκύκλους, έτσι ώστε (i) κάθε δύο υποκύκλοι έχουν το πολύ μία κοινή κορυφή της \mathcal{F}_c , και, (ii) κάθε κορυφή της \mathcal{F}_c ανήκει το πολύ σε δύο υποκύκλους. Οπότε, το “γράφημα εφαπτόμενων” αυτών των υποκύκλων (το οποίο έχει μία κορυφή για κάθε υποκύκλο και μία ακμή μεταξύ κάθε ζεύγους υποκύκλων που έχουν κοινή κορυφή) είναι ένα δένδρο. Ορίζουμε την w_0 όπως στην περίπτωση του ενός κύκλου και έστω ότι το γράφημα εφαπτόμενων έχει ρίζα στον κύκλο που περιέχει την w_0 . Λόγω του περιορισμού στον βαθμό, η w_0 δεν μπορεί να ανήκει σε δύο υποκύκλους. Ζωγραφίζουμε τους υποκύκλους της \mathcal{F}_c με τη σειρά που υποδηλώνεται από την κατά πλάτος διερεύνηση του δένδρου εφαπτόμενων. Ο πρώτος υποκύκλος (που περιέχει την κορυφή w_0) απεικονίζεται όπως στην περίπτωση ενός απλού κύκλου. Κάθε επόμενος υποκύκλος εμφυτεύεται στην απεικόνιση όπως φαίνεται στην **Εικόνα 12.6**.

Απομένει να εξασφαλίσουμε ότι οι **IP-1** έως και την **IP-5** ικανοποιούνται όταν ένας απλός κύκλος, έστω C_s , απεικονίζεται αναδρομικά. Η **IP-1** ισχύει, εφόσον κάθε ακμή απεικονίζεται είτε στην κάτω σελίδα (εάν είναι μαρκαρισμένη) είτε στην άνω σελίδα (διαφορετικά) και οποιεσδήποτε δύο ακμές δεν τέμνονται. Το **Λήμμα 12.7** εξασφαλίζει ότι η **IP-2** επίσης ισχύει. Εάν ο C_s είναι η εξωτερική όψη μιας δυσυνεκτικής-κορυφής ή είναι φύλλο στο δένδρο εφαπτόμενων, τότε η **IP-3** ισχύει τετριμμένα. Εάν ο C_s δεν είναι φύλλο στο δένδρο εφαπτόμενων, τότε περιέχει τουλάχιστον μία ακμή που έχει σχεδιαστεί στην κάτω σελίδα, βλ. **Εικόνα 12.6**). Αυτό σαφώς παραβιάζει την **IP-3**. Ευτυχώς, μπορούμε να αξιοποιήσουμε το **Λήμμα 12.8**. Η ακμή που θέλουμε να αλλάξουμε από την κάτω σελίδα προσπίπτει σε μία κορυφή (βαθμού τέσσερα) που δεν είναι γειτονική με καμία κορυφή στο εσωτερικό του C_s . Συνεπώς, για να ισχύσει η αναδρομή, υποθέτουμε ότι έχει σχεδιαστεί στην άνω σελίδα και μόλις ο C_s εμφυτευθεί τελείως, την επανατοποθετούμε στην κάτω σελίδα χρησιμοποιώντας το **Λήμμα 12.8**. Εάν ο C_s είναι η εξωτερική όψη μίας δυσυνεκτικής-κορυφής ή η ρίζα του δένδρου εφαπτόμενων μιας μή-απλής εξωτερικής όψης \mathcal{F}_c , τότε τουλάχιστον μία κορυφή του C_s είναι γειτο-

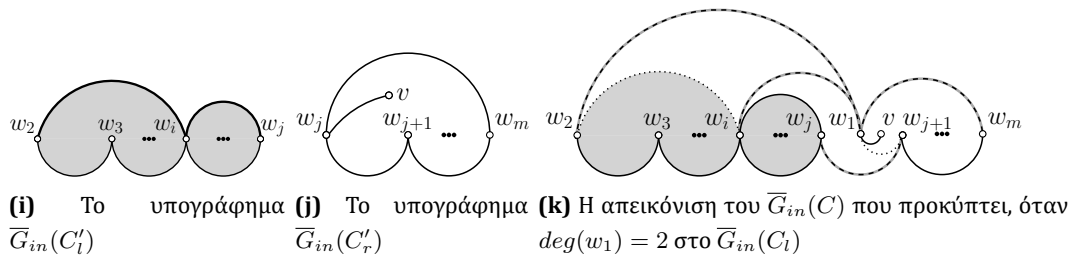
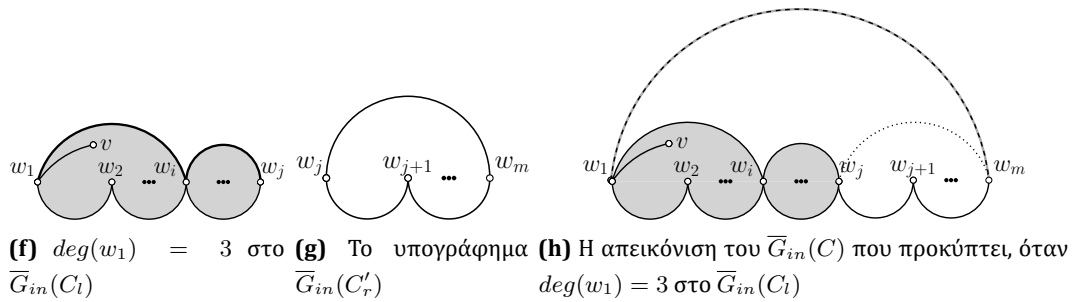
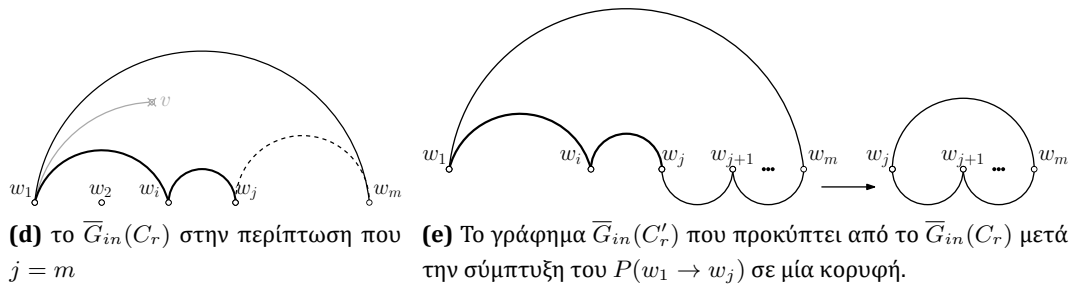
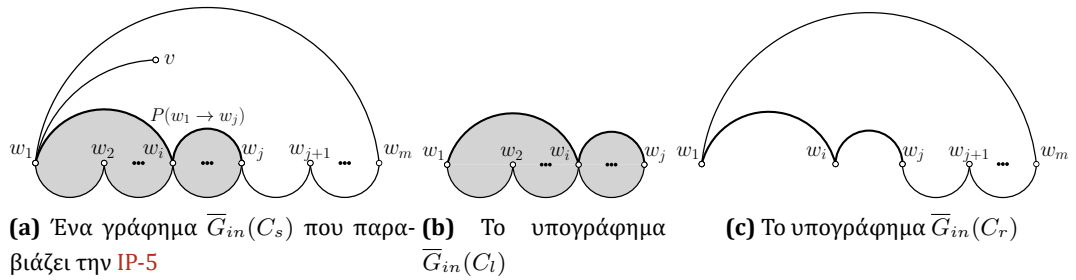
νική με το $G_{out}(C_s)$. Εάν ο C_s είναι εσωτερική κορυφή του δένδρου εφαπτόμενων της \mathcal{F}_c , τότε η αριστερότερη κορυφή του έχει δύο ακμές προς το $G_{out}(C_s)$. Συνεπώς, η IP-4 επίσης ισχύει.

Ωστόσο, η IP-5 δεν ισχύει απαραίτητα. Για να διαχειριστούμε την περίπτωση αυτή, έστω ένας απλός κύκλος C_s και, κάνοντας μερικώς κατάχρηση της ορολογίας που χρησιμοποιήσαμε μέχρι στιγμής, έστω w_1, \dots, w_m οι κορυφές του C_s από αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος της ℓ . Εάν η IP-5 παραβιάζεται, τότε $\deg(w_1) = 4$ στο $\overline{G}_{in}(C_s)$ και η w_1 είναι γειτονική ακριβώς με μία χορδή του C_s , έστω (w_1, w_i) , $i \in \{3, \dots, m-1\}$ (βλ. Εικόνα 12.7a). Έστω v ο άλλος γείτονας της w_1 στο $G_{in}(C_s)$. Προφανώς, $v \notin C_s$. Γενικά, η (w_1, w_i) ανήκει σε ένα μονοπάτι από χορδές που ξεκινάει από την w_1 . Έστω w_j , $j \geq i$, το πέρας του μονοπατιού αυτού, έστω $P(w_1 \rightarrow w_j)$. Ο περιορισμός στον βαθμό συνεπάγεται ότι το $P(w_1 \rightarrow w_j)$ είναι μοναδικό. Θα αναφερόμαστε σε αυτό το μονοπάτι ως το διαχωριστικό μονοπάτι χορδών του C_s , αφού χωρίζει το $\overline{G}_{in}(C_s)$ σε δύο υπογραφήματα (βλ. Εικόνες 12.7b-12.7c):

- το $\overline{G}_{in}(C_l)$ με εξωτερική όψη C_l που αποτελείται από τις ακμές $(w_1, w_2), (w_2, w_3), \dots, (w_{j-1}, w_j)$ και τις ακμές του $P(w_1 \rightarrow w_j)$ (τονισμένες με γκρι χρώμα στην Εικόνα 12.7a), και,
- το $\overline{G}_{in}(C_r)$ με εξωτερική όψη C_r που αποτελείται από τις ακμές $(w_j, w_{j+1}), \dots, (w_m, w_1)$ και τις ακμές του $P(w_1 \rightarrow w_j)$.

Παρακάτω, περιγράφουμε πώς μπορούμε αναδρομικά να απεικονίσουμε τα δύο υπο-στιγμιότυπα $\overline{G}_{in}(C_l)$ και $\overline{G}_{in}(C_r)$. Παρατηρούμε ότι εάν $i \neq j$, τότε ο C_l δεν είναι απλός κύκλος. Στην περίπτωση αυτή, ο C_l αποτελείται από ένα συγκεκριμένο πλήθος από μικρότερους απλούς υποκύκλους, για τους οποίους οι IP-4 και IP-5 ισχύουν (επομένως μπορούν να απεικονιστούν αναδρομικά), εκτός από τον πρώτο, ο οποίος απεικονίζεται αριστερότερα κατά μήκος της ℓ . Ας δούμε πρώτα το $\overline{G}_{in}(C_r)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $j = m$ (βλ. Εικόνα 12.7d). Στην περίπτωση αυτή, ο C_r σχηματίζεται από το μονοπάτι $P(w_1 \rightarrow w_m)$ και την ακμή (w_1, w_m) . Παρατηρούμε ότι η w_m είναι η δεξιότερη κορυφή του C_r και γειτονεύει με μία χορδή του C_s . Συνεπώς, ο βαθμός της w_m είναι δύο στο $\overline{G}_{in}(C_r)$. Εφόσον καμία από τις ακμές του μονοπατιού $P(w_1 \rightarrow w_m)$ δεν εμφωλεύεται από μία χορδή του C_r , έπεται ότι όλες οι κορυφές του C_r (εκτός ενδεχομένως από την w_1) έχουν βαθμό 2 στο $\overline{G}_{in}(C_r)$. Εάν ο βαθμός της w_1 είναι τρία στο $\overline{G}_{in}(C_r)$, τότε η ακμή (w_1, v) είναι γέφυρα: άτοπο ως προς την δυσυνεκτικότητα του γραφήματος G . Συνεπώς, $\overline{G}_{in}(C_r) \equiv C_r$. Άρα, εμφυτεύουμε το C_r όπως στην Εικόνα 12.7d, δηλαδή, στην άνω σελίδα. Τότε, κάθε υποκύκλος του C_l ικανοποιεί τις IP-4 και IP-5 (συμπεριλαμβανομένου του πρώτου, που



Εικόνα 12.7: Σε όλες τις εικόνες, το $P(w_1 \rightarrow w_j)$ απεικονίζεται με παχιές ακμές, οι διάστικτες ακμές αφαιρούνται και οι διακεκομμένες ακμές με γκρι σκίαση προστίθενται.

απεικονίζεται αριστερότερα κατά μήκος της ℓ) και μπορεί να εμφυτευθεί αναδρομικά. Η εμφύτευση του $\overline{G}_{in}(C_s)$ προκύπτει ενσωματώνοντας τις απεικονίσεις των υποκύκλων του C_l στην απεικόνιση του $\overline{G}_{in}(C_r)$. Παρατηρούμε ότι η συνδυαστική εμφύτευση διατηρείται.

Περίπτωση 2: $j < m$ (βλ. **Εικόνα 12.7c**). Στην περίπτωση αυτή όλες οι κορυφές του μονοπατιού $P(w_1 \rightarrow w_j)$ έχουν βαθμό 2 στο $\overline{G}_{in}(C_r)$, εκτός από τα άκρα του w_1

και w_j , που μπορεί να έχουν μέγιστο βαθμό 3. Τροποποιούμε το $\overline{G}_{in}(C_r)$ ως εξής (βλ. **Εικόνα 12.7e**): Συμπτύσσουμε το $P(w_1 \rightarrow w_j)$ σε μία μόνο κορυφή που ταυτίζουμε με την w_j . Έστω $\overline{G}_{in}(C'_r)$ το καινούριο υπογράφημα με εξωτερική όψη C'_r . Προφανώς, η **IP-5** ισχύει για το $\overline{G}_{in}(C'_r)$. Η **IP-4** επίσης ισχύει, καθώς η w_m είναι η δεξιότερη κορυφή του C'_r και $\deg(w_m) \leq 3$. Οπότε, το $\overline{G}_{in}(C'_r)$ μπορεί να απεικονιστεί αναδρομικά. Συνεχίζουμε διακρίνοντας δύο υποπεριπτώσεις ανάλογα με τον βαθμό της w_1 στο $\overline{G}_{in}(C_l)$:

Περίπτωση 2.a: $\deg(w_1) = 3$ στο $\overline{G}_{in}(C_l)$ (βλ. **Εικόνα 12.7f**). Στην περίπτωση αυτή, οι **IP-4** και **IP-5** ισχύουν για το $\overline{G}_{in}(C_l)$. Συνεπώς, μπορεί να απεικονιστεί αναδρομικά. Έχοντας απεικονίσει τα $\overline{G}_{in}(C_l)$ και $\overline{G}_{in}(C'_r)$, η απεικόνιση του $\overline{G}_{in}(C)$ μπορεί να προκύψει διαγράφοντας την ακμή (w_j, w_m) από το $\overline{G}_{in}(C'_r)$ και επαναφέροντας την ακμή (w_1, w_m) , όπως στην **Εικόνα 12.7h**. Εφόσον η w_1 δεν έχει γείτονες στο $G_{in}(C'_r)$, η συνδυαστική εμφύτευση διατηρείται.

Περίπτωση 2.b: $\deg(w_1) = 2$ in $\overline{G}_{in}(C_l)$ (βλ. **Εικόνα 12.7j**): Στην περίπτωση αυτή, ο βαθμός της w_1 είναι τρία στο $\overline{G}_{in}(C'_r)$. Πάλι, τροποποιούμε το $\overline{G}_{in}(C_l)$ ως εξής (βλ. **Εικόνα 12.7i**). Αφαιρούμε την w_1 και ενώνουμε την w_2 και την w_i με ακμή. Έστω $\overline{G}_{in}(C'_l)$ το νέο υπογράφημα με εξωτερική όψη C'_l . Παρατηρούμε ότι η **IP-5** μπορεί να μην ισχύει για το $\overline{G}_{in}(C'_l)$. Ωστόσο, το $\overline{G}_{in}(C'_l)$ έχει λιγότερες κορυφές από το $\overline{G}_{in}(C)$. Μπορούμε να επωφεληθούμε από αυτό εργαζόμενοι αναδρομικά, όπως κάναμε αρχικά με το $\overline{G}_{in}(C)$. Τελικά, κάποια στιγμή η **IP-5** θα πρέπει να ισχύει, διαφορετικά ένα γράφημα με το πολύ 3 κορυφές στην εξωτερική του όψη θα πρέπει να έχει μία χορδή, που είναι άτοπο. Έχοντας απεικονίσει το $\overline{G}_{in}(C'_l)$, παίρνουμε την απεικόνιση του $\overline{G}_{in}(C)$ ως εξής (βλ. **Εικόνα 12.7k**). Αφαιρούμε την ακμή (w_2, w_i) και συνδέουμε τους γείτονες της w_j στο $\overline{G}_{in}(C'_r)$ με το αντίγραφο της στο $\overline{G}_{in}(C'_l)$. Σημειώνουμε ότι δεν προκύπτουν τομές ακμών, καθώς τα δύο αντίγραφα της w_j στο $\overline{G}_{in}(C'_l)$ και το $\overline{G}_{in}(C'_r)$ είναι διαδοχικά κατά μήκος της ℓ . Για να ολοκληρώσουμε την απεικόνιση του $\overline{G}_{in}(C)$, απομένει να αντικαταστήσουμε το αντίγραφο της w_j στο $\overline{G}_{in}(C'_r)$ με την w_1 , και να προσθέσουμε τις ακμές (w_1, w_2) και (w_1, w_i) .

Για να ολοκληρώσουμε την περιγραφή του αλγορίθμου μας, απομένει να περιγράψουμε πώς ξεκινάει η αναδρομή. Για να το κάνουμε αυτό, χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα, που περιγράφει μία απλή ιδιότητα των επίπεδων απεικονίσεων γραφημάτων.

Λήμμα 12.10. Κάθε επίπεδο γράφημα G επιδέχεται επίπεδη απεικόνιση $\Gamma(G)$ με εξωτερική όψη που δεν έχει χορδές.

Απόδειξη. Έστω ότι μας δίνεται μία επίπεδη απεικόνιση $\Gamma'(G)$ του G , στην οποία ο κύκλος, έστω $C : u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow u_1$, που οριοθετεί την εξωτερική όψη περιέχει τουλάχιστον μία χορδή. Τότε τα άκρα οποιασδήποτε χορδής του C είναι ένα

διαχωριστικό ζεύγος κορυφών του G . Έστω (u_i, u_j) , $1 \leq i < j \leq k$, μία χορδή του C έτσι ώστε ο κύκλος $C' : u_i \rightarrow u_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow u_j \rightarrow u_i$ να μην περιέχει χορδές. Έστω επίσης G_1 και G_2 τα δύο υπογραφήματα του G με εξωτερικές όψεις $u_i \rightarrow u_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow u_{j-1} \rightarrow u_j \rightarrow u_i$ και $u_i \rightarrow u_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow u_{j+1} \rightarrow u_j \rightarrow u_i$ αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με f την όψη του G_1 που περιέχει την ακμή (u_i, u_j) . Εφόσον οι u_i και u_j αποτελούν ένα διαχωριστικό ζεύγος κορυφών του G , υπάρχει μία επίπεδη απεικόνιση $\Gamma(G)$ του G στην οποία το $G_2 - \{(u_i, u_j)\}$ απεικονίζεται στο εσωτερικό της f και η εξωτερική όψη του G οροθετείται από τον κύκλο C' που δεν περιέχει χορδές. \square

Είμαστε πλέον έτοιμοι να παρουσιάσουμε πώς ξεκινάει η αναδρομή. Αυτό επιτυγχάνεται προσδιορίζοντας μία απεικόνιση του G με εξωτερική όψη που δεν περιέχει χορδές, έστω $C_{out} : v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$, η οποία από το **Λήμμα 12.10** υπάρχει. Τότε τοποθετούμε τις v_1, \dots, v_k με αυτή τη διάταξη κατά μήκος της ℓ και σχεδιάζουμε τις ακμές του C_{out} όπως επιβάλλει η **IP-3**. Εάν υπάρχει κάποια κορυφή του C_{out} με βαθμό μικρότερο του τέσσερα, τότε επιλέγεται ως κορυφή v_k και όλες οι αναλλοίωτες ιδιότητες του αλγορίθμου μας ικανοποιούνται. Ωστόσο, στην περίπτωση που μια τέτοια κορυφή δεν υπάρχει, έπεται ότι ο βαθμός της v_k στο $\overline{G}_{in}(C_{out})$ ισούται με τέσσερα και συνεπώς η **IP-4** δεν ισχύει.

Για να αντιμετωπίσουμε την τελευταία περίπτωση, υποθέτουμε ότι έχουμε υπολογίσει τις δυσυνεκτικές-κορυφές του $G_{in}(C_{out})$. Έστω v_l (v_r , αντίστοιχα) ο αριστερός (δεξιός, αντίστοιχα) γείτονας της v_k στο $G_{in}(C_{out})$ και έστω c_r (c_l , αντίστοιχα) η δυσυνεκτική-κορυφή που η v_r (η v_l , αντίστοιχα) ανήκει (βλ. **Εικόνα 12.8a**). Σημειώνουμε ότι $c_r = c_l$ μπορεί να ισχύει. Εφόσον ο C_{out} δεν περιέχει χορδές, έπεται ότι και η v_l και η v_r δεν ανήκουν στον C_{out} . Θα επαυξηήσουμε το G , έτσι ώστε η **IP-4** να ισχύει στο επαυξημένο γράφημα G_{aug} . Δίνουμε επιγραμματικά την περιπτώσιολογία μας:

Περίπτωση 1: Η δυσυνεκτική-κορυφή c_r είναι γειτονική με μία κορυφή του C_{out} διαφορετική της v_k .

Περίπτωση 2: Η δυσυνεκτική-κορυφή c_r δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k . Στην περίπτωση αυτή, έχοντας ορίσει το G_{aug} , θεωρούμε δύο επιπλέον υποπεριπτώσεις:

Περίπτωση 2.a: Οι κορυφές v_l και v_r ανήκουν σε δύο διαφορετικές δυσυνεκτικές-κορυφές του G_{aug} .

Περίπτωση 2.b: Οι κορυφές v_l και v_r ανήκουν στην ίδια δυσυνεκτική-κορυφή του G_{aug} .

Εξετάζουμε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις λεπτομερώς.

Περίπτωση 1: Η δυσυνεκτική-κορυφή c_r είναι γειτονική με μία κορυφή του C_{out} διαφορετική της v_k : Έστω v_i , $i < k$, ο αριστερότερος γείτονας της c_r στον C_{out} . Επαυ-

ξάνουμε το γράφημα G όπως στην **Εικόνα 12.8b**, εισάγοντας τρεις κορυφές δεξιά της v_k . Έστω C_{aug} η εξωτερική όψη του επαυξημένου γραφήματος. Τώρα, παρατηρούμε ότι το G_{aug} ικανοποιεί την **IP-4** και μπορεί να απεικονιστεί αναδρομικά. Ισχυριζόμαστε ότι, στην απεικόνιση του G_{aug} , οι v_r και v_l βρίσκονται αριστερά της v_k , όπως στην **Εικόνα 12.8c**. Συμβολίζουμε με c_r^{aug} (c_l^{aug} , αντίστοιχα) την δυσυνεκτική-κορυφή που η v_r (η v_l , αντίστοιχα) ανήκει στο $G_{aug} - C_{aug}$. Σημειώνουμε ότι $c_r^{aug} = c_l^{aug}$ μπορεί να ισχύει. Η c_r^{aug} είναι γειτονική με την v_i μέσω μιας μαρκαρισμένης ακμής, εφόσον η v_i είναι ο αριστερότερος γείτονας της c_r . Αυτό συνεπάγεται ότι η c_r^{aug} τοποθετείται ακριβώς δίπλα από την v_i (οπότε, αριστερά της v_k). Τώρα, παρατηρούμε ότι η v_k είναι ο δεξιότερος γείτονας της c_l^{aug} . Οπότε, η c_l^{aug} τοποθετείται αριστερά της v_k , ακόμα και αν η ακμή (v_l, v_k) είναι μαρκαρισμένη, λόγω της χορδής (v_k, v_{k+2}) . Μεταξύ των v_k και v_{k+3} δεν υπάρχουν άλλες κορυφές του G_{aug} , εκτός από τις v_{k+1} και v_{k+2} , εφόσον η μόνη άγκυρα που θα μπορούσε να είναι μεταξύ των v_{k+2} και v_{k+3} είναι η c_r^{aug} , η οποία, ωστόσο, βρίσκεται αριστερά της v_k , και συνεπώς όλες οι κορυφές του $G_{aug} - C_{aug}$ βρίσκονται αριστερά της v_k . Εάν συμπτύξουμε τις v_k, v_{k+1}, v_{k+2} και v_{k+3} πίσω στην v_k , παίρνουμε μία έγκυρη απεικόνιση του G (βλ. **Εικόνα 12.8d**).

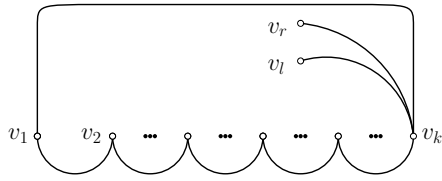
Περίπτωση 2: Η δυσυνεκτική-κορυφή c_r δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k : Στην περίπτωση αυτή, η c_r δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k . Ισχυριζόμαστε ότι μπορούμε να υποθέσουμε χ.β.τ.γ. ότι η c_l δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k . Για να το δούμε αυτό, ας θεωρήσουμε έναν καθρεπτισμό της ℓ ως προς τον y -άξονα (βλ. **Εικόνα 12.8e**). Η ωρολογιακή διάταξη των ακμών γύρω από κάθε κορυφή του G προφανώς έχει διατηρηθεί. Ωστόσο, η ακμή (v_k, v_l) ((v_k, v_r) , αντίστοιχα) γίνεται η δεξιά (αριστερή, αντίστοιχα) ακμή της κορυφής v_k . Εάν η c_l είναι γειτονική με μία κορυφή του C_{out} διαφορετική από την v_k , τότε η **Περίπτωση 1** εφαρμόζεται. Οπότε, μπορούμε να υποθέσουμε χ.β.τ.γ. ότι οι c_r και c_l δεν είναι γειτονικές με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k . Επαυξάνουμε το G όπως στην **Εικόνα 12.8f**, έτσι ώστε η **IP-4** να ισχύει. Έστω C_{aug} η εξωτερική όψη του επαυξημένου γραφήματος. Εφόσον η v_k δεν είναι κορυφή τομής στο G , η ακμή (v_k, v_{k+1}) δεν μπορεί να είναι γέφυρα στο G_{aug} . Οπότε, το G_{aug} μπορεί να απεικονιστεί αναδρομικά. Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

Περίπτωση 2.a: Οι κορυφές v_l και v_r ανήκουν σε δύο διαφορετικές δυσυνεκτικές-κορυφές του γραφήματος $G_{aug} - C_{aug}$, έστω c_l^{aug} και c_r^{aug} αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή, η v_{k+1} ανήκει σε μία άλλη δυσυνεκτική-κορυφή (που περιέχει μόνο την v_{k+1}) και είναι γειτονική με την v_k . Η c_r^{aug} και η c_l^{aug} είναι και οι δύο βοηθητικές. Εφόσον η v_{k+1} είναι γειτονική με μία κορυφή του C_{out} (δηλαδή με την κορυφή v_k), έπεται ότι η ακμή (v_k, v_{k+1}) είναι η μαρκαρισμένη ακμή της

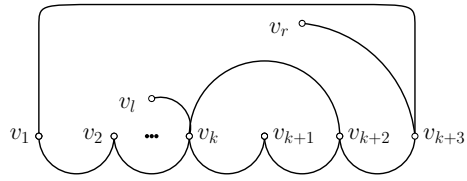
v_{k+1} , και η v_{k+1} έχει τοποθετηθεί ακριβώς αριστερά της v_k (βλ. **Εικόνα 12.8g**). Από την άλλη, η ακμή (v_k, v_{k+1}) απεικονίζεται στην κάτω σελίδα (μαρκαρισμένη ακμή), ενώ οι ακμές (v_l, v_{k+1}) και (v_r, v_{k+1}) απεικονίζονται στην άνω σελίδα. Εάν υπήρχε μία άγκυρα μεταξύ των v_{k+1} και v_k , θα ήταν γειτονική με την v_k , αντιβαίνοντας στο γεγονός ότι ο βαθμός της v_k στο G_{aug} είναι τρία. Οπότε, η δεξιότερη άγκυρα του $G_{aug} - C_{aug}$ είναι η v_{k+1} . Επεται ότι όλες οι κορυφές του $G_{aug} - C_{aug}$ βρίσκονται αριστερά της v_{k+1} , το οποίο συνεπάγεται ότι εάν συμπτύξουμε τις v_k και v_{k+1} πίσω στην v_k , τότε παίρνουμε μία έγκυρη απεικόνιση του G (βλ. **Εικόνα 12.8h**).

Περίπτωση 2.b: Οι κορυφές v_l και v_r ανήκουν στην ίδια δυσυνεκτική-κορυφή, έστω c , του G_{aug} . Στην περίπτωση αυτή, η v_{k+1} πρέπει να ανήκει στην c , επίσης. Επιπλέον, οι v_r, v_{k+1} και v_l εμφανίζονται με αυτή τη διάταξη σύμφωνα με την ωρολογιακή διαπέραση της εξωτερικής όψης C_c του c . Εφόσον η c περιέχει την v_{k+1} , η c είναι γειτονική με την κορυφή v_k του C_{out} . Οπότε, η c είναι γειτονική με μία μαρκαρισμένη ακμή, η οποία “καθορίζει” την τοποθέτηση των κορυφών του C_c στην ℓ . Έστω v' η κορυφή του C_c που είναι γειτονική με την μαρκαρισμένη ακμή του c . Εφόσον η c είναι γειτονική με την v_k , έπεται ότι $v' = v_{k+1}$ μπορεί να ισχύει (ωστόσο, $v' \notin \{v_r, v_l\}$ αφού οι v_r και v_l δεν είναι γειτονικές με κάποια κορυφή του C_{out}). Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις, ανάλογα με το αν $v' = v_{k+1}$ ή όχι:

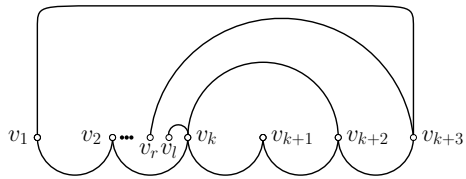
- (i) $v' = v_{k+1}$: Στην περίπτωση αυτή η ακμή (v_k, v_{k+1}) είναι η μαρκαρισμένη ακμή της c (βλ. **Εικόνα 12.8i**). Οπότε, η c είναι ακριβώς αριστερά της v_k , με την v_{k+1} να είναι η δεξιότερη κορυφή του C_c . Επιπλέον, μεταξύ των v_{k+1} και v_k δεν υπάρχουν κορυφές του G_{aug} , αφού ο βαθμός της v_k στο G_{aug} είναι τρία, δηλαδή, εάν υπήρχε μία άγκυρα μεταξύ των v_k και v_{k+1} , θα έπρεπε να είναι γειτονική με την v_k και τότε ο βαθμός της v_k θα γινόταν τέσσερα. Έτσι, η δεξιότερη άγκυρα του $G_{aug} - C_{aug}$ έχει την v_{k+1} ως δεξιότερη κορυφή. Αυτό συνεπάγεται ότι όλες οι κορυφές του $G_{aug} - C_{aug}$ βρίσκονται αριστερά της v_{k+1} . Οπότε, εάν συμπτύξουμε τις κορυφές v_k και v_{k+1} πίσω στην v_k , και σχεδιάσουμε την ακμή (v_l, v_k) στην κάτω σελίδα και την (v_r, v_k) στην άνω σελίδα, παίρνουμε μία έγκυρη απεικόνιση του G (βλ. **Εικόνα 12.8j**).
- (ii) $v' \neq v_{k+1}$: Ισχυριζόμαστε ότι οι v_r, v_{k+1} και v_l εμφανίζονται με αυτή τη διάταξη από αριστερά προς τα δεξιά στην ℓ . Έστω ότι, αντιθέτως, είτε οι v_l και v_{k+1} , ή, οι v_{k+1} και v_r , είναι η αριστερότερη και δεξιότερη κορυφή του C_c στην ℓ , αντίστοιχα. Το άτοπο προκύπτει από την κατασκευή, όπου η v' είναι είτε αριστερότερη είτε δεξιότερη του C_c , και, $v' \notin \{v_{k+1}, v_r, v_l\}$.



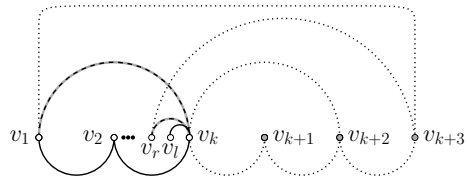
(a)



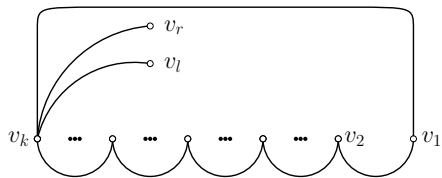
(b)



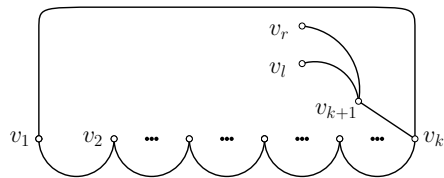
(c)



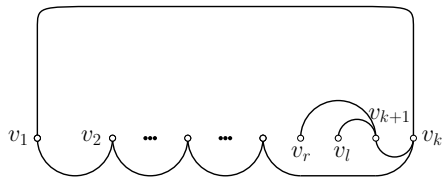
(d)



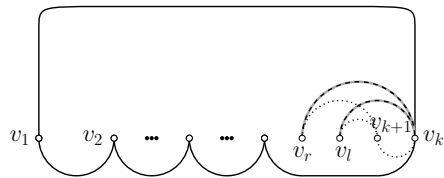
(e)



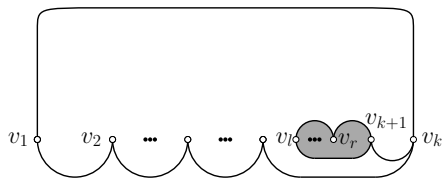
(f)



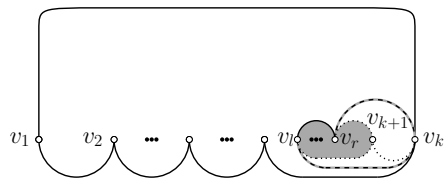
(g)



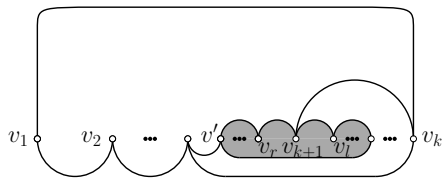
(h)



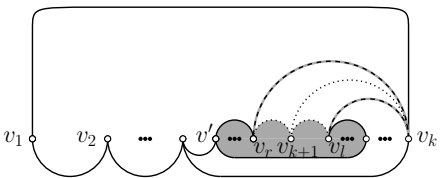
(i)



(j)



(k)



(l)

Εικόνα 12.8: Σε όλες τις εικόνες, οι διάστικτες ακμές αφαιρούνται και οι διακεκομμένες ακμές που τονίζονται με γκρι χρώμα προστίθενται: (a) Ένα στιγμιότυπο στο οποίο η IP-4 παραβιάζεται. (b) Το G_{aug} , όταν η c_r είναι γειτονική με μία κορυφή του C_{out} διαφορετική της v_k . (c) Η απεικόνιση του G_{aug} , όταν η c_r είναι γειτονική με μία κορυφή του C_{out} διαφορετική της v_k . (d) Μία έγκυρη απεικόνιση του G , όταν η c_r είναι γειτονική με μία κορυφή του C_{out} διαφορετική της v_k . (e) Καθρεφτισμός του G κατά τον y -άξονα, (f) Το G_{aug} όταν η c_r δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k . (g) Η απεικόνιση του G_{aug} , όταν: η c_r δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k , οι v_l και v_r ανήκουν σε διαφορετικές δυσυνεκτικές-κορυφές. (h) Μία έγκυρη απεικόνιση του G , όταν: η c_r δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k , οι v_l και v_r ανήκουν σε διαφορετικές δυσυνεκτικές-κορυφές. (i) Η απεικόνιση του G_{aug} , όταν: η c_r δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k , οι v_l και v_r ανήκουν στην ίδια δυσυνεκτική-κορυφή, η (v_k, v_{k+1}) είναι μαρκαρισμένη. (j) Μία έγκυρη απεικόνιση του G , όταν: η c_r δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k , οι v_l και v_r ανήκουν στην ίδια δυσυνεκτική-κορυφή, η (v_k, v_{k+1}) είναι μαρκαρισμένη. (k) Η απεικόνιση του G_{aug} , όταν: η c_r δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k , οι v_l και v_r ανήκουν στην ίδια δυσυνεκτική-κορυφή, η (v_k, v_{k+1}) δεν είναι μαρκαρισμένη. (l) Μία έγκυρη απεικόνιση του G , όταν: η c_r δεν είναι γειτονική με καμία άλλη κορυφή του C_{out} εκτός από την v_k , οι v_l και v_r ανήκουν στην ίδια δυσυνεκτική-κορυφή, η (v_k, v_{k+1}) δεν είναι μαρκαρισμένη.

Η τρέχουσα κατάσταση απεικονίζεται στην **Εικόνα 12.8k**. Εάν αφαιρέσουμε την v_{k+1} , και, απεικονίσουμε τις ακμές (v_l, v_k) και (v_r, v_k) στην άνω σελίδα, τότε παίρνουμε μία έγκυρη απεικόνιση του G (βλ. **Εικόνα 12.8l**).

Έχοντας περιγράψει πώς ξεκινάει η αναδρομή, είμαστε πλέον έτοιμοι να διατυπώσουμε το κεντρικό μας θεώρημα.

Θεώρημα 12.1. *Κάθε επίπεδο γράφημα μέγιστου βαθμού 4 με n κορυφές επιδέχεται εμφύτευση σε βιβλίο δύο σελίδων, η οποία μπορεί να κατασκευαστεί σε $O(n^2)$ χρόνο.*

Απόδειξη. Απομένει να αναλύσουμε την χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μας. Σε κάθε βήμα, ο αλγόριθμός μας εκτελεί μία σειρά από υπολογισμούς; τον υπολογισμό των δυσυνεκτικών συνιστωσών, την τοπολογική ταξινόμηση του G_{aux}^T , κατά πλάτος διερευνήσεις στα δένδρα εφαπτόμενων. Χρησιμοποιώντας συνηθισμένους αλγορίθμους από τη βιβλιογραφία όλοι αυτοί οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν σε $O(n)$ χρόνο, δίνοντας $O(n^2)$ συνολικό χρόνο. \square

13 Εμφύτευση σε Βιβλίο 1-Επίπεδων Γραφημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε εμφυτεύσεις σε βιβλίο των 1-επίπεδων γραφημάτων. Υπενθυμίζουμε ότι ένα γράφημα είναι 1-επίπεδο εάν μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο έτσι ώστε κάθε ακμή να τέμνεται το πολύ μία φορά. Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε ότι τα 1-επίπεδα γραφήματα έχουν φραγμένο πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο. Έστω $G = (V, E)$ ένα 1-επίπεδο γράφημα και $\Gamma(G)$ μία 1-επίπεδη απεικόνιση του G . Αρχικά, θεωρούμε την περίπτωση που η $\Gamma(G)$ δεν περιέχει τομές ακμών στην μη φραγμένη της όψη. Για να απλοποιήσουμε την παρουσίαση, επιπλέον υποθέτουμε ότι το G ικανοποιεί την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, δηλαδή, το G είναι εσωτερικά μεγιστικό 1-επίπεδο και στη $\Gamma(G)$ το εσωτερικό όλων των K_4 του **Λήμματος 11.3** δεν περιέχουν κορυφές και ακμές. Προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ιδιότητα αυτή, πρώτα μετατρέπουμε το G σε επίπεδο γράφημα αντικαθιστώντας κάθε τομή ακμών της $\Gamma(G)$ με τις αποκαλούμενες κορυφές τομής (crossing vertex). Το επιπεδοποιημένο γράφημα στη συνέχεια τριγωνοποιείται (μόνο στο εσωτερικό του), έτσι ώστε καμία καινούρια ακμή να μην προσπίπτει σε κορυφή τομής. Σημειώνουμε ότι ο τελευταίος περιορισμός μπορεί να οδηγήσει σε μη-απλό γράφημα (δηλαδή να περιέχει πολλαπλές ακμές), όπως θα δούμε στην **Ενότητα 13.2**. Ωστόσο, εάν θεωρήσουμε όλες τις κορυφές τομής ως πραγματικές τομές ακμών, τότε το προσαυξημένο γράφημα που προκύπτει ικανοποιεί την ιδιότητα της K_4 -κενότητας (με το κόστος των πολλαπλών ακμών).

Πρώτα, θεωρούμε την περίπτωση που το γράφημα G είναι απλό, εσωτερικά-μεγιστικό 1-επίπεδο, ικανοποιεί την ιδιότητα της K_4 -κενότητας και δεν περιέχει τομές στη μη φραγμένη του όψη (δηλαδή δεν δημιουργούνται πολλαπλές ακμές κατά την διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω). Αποδεικνύουμε ότι εάν υπάρχουν μόνο δύο επίπεδα, τότε ένα τέτοιο γράφημα μπαίνει σε 16 σελίδες. Διαφορετικά, 34 σελίδες αρκούν. Τέλος, δείχνουμε πώς να χειριστούμε τις πολλαπλές ακμές και τις τομές στη μη φραγμένη όψη της $\Gamma(G)$ χρησιμοποιώντας 5 επιπλέον σελίδες.

Έστω ότι το G είναι απλό και εσωτερικά-μεγιστικό 1-επίπεδο γράφημα, που ικανοποιεί την ιδιότητα της K_4 -κενότητας και δεν έχει τομές στην μη φραγμένη όψη του. Τότε, (i) οι κορυφές στην εξωτερική όψη του G είναι στο επίπεδο μηδέν, (ii) οι κορυφές που είναι σε απόσταση i από τις κορυφές επιπέδου μηδέν είναι στο επίπεδο i . Ακολουθώντας την ορολογία του Γιαννακάκη, οι ακμές που συνδέουν κορυφές ίδιου

(διαφορετικού, αντίστοιχα) επιπέδου λέγονται ισόπεδες (level) (συνδετικές (binding), αντίστοιχα) ακμές.

Εάν αφαιρέσουμε μία ακμή για κάθε ζεύγος τεμνόμενων ακμών, τότε προκύπτει ένα εσωτερικώς τριγωνοποιημένο ενεπίπεδο γράφημα (το οποίο αποκαλούμε υποκείμενη επίπεδη δομή). Για ένα ζεύγος τεμνόμενων συνδετικών ακμών ή για ένα ζεύγος τεμνόμενων ισόπεδων ακμών, επιλέγουμε αυθαίρετα ποια ακμή θα αφαιρέσουμε (σύντομα θα ρυθμίσουμε την επιλογή αυτή για δύο ειδικές περιπτώσεις). Ωστόσο, για ένα ζεύγος τεμνόμενων ακμών που αποτελείται από μία συνδετική και μία ισόπεδη ακμή, πάντα επιλέγουμε να αφαιρέσουμε την ισόπεδη ακμή. Αυτή η προσέγγιση μας επιτρέπει να ορίσουμε τις συστάδες, τους οδηγούς και τους κυρίαρχους των συστάδων όπως κάνει ο Γιαννακάκης (βλ. **Ενότητα 11.2.1** για περισσότερες λεπτομέρειες). Επίσης παρατηρούμε ότι εάν όλες οι ακμές που αφαιρέθηκαν προστεθούν ξανά στο γράφημα, τότε μία συνδετική ακμή δεν μπορεί να τέμνει μία συστάδα.

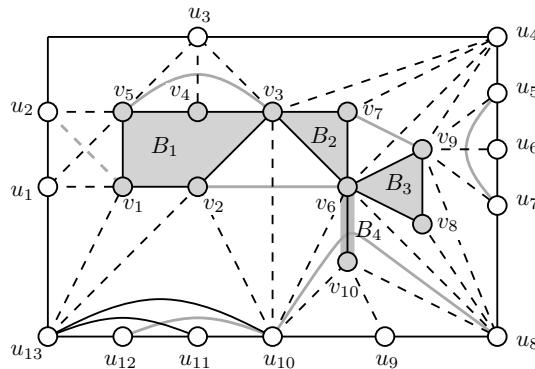
13.1 Η Περίπτωση Δύο-Επίπεδων

Αρχικά θεωρούμε την βασική περίπτωση όπου το δοθέν γράφημα αποτελείται από δύο επίπεδα L_0 και L_1 . Επίσης υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει ισόπεδη ακμή του L_1 η οποία από την συνδυαστική εμφύτευση να βρίσκεται εξολοκλήρου στο εσωτερικό μίας συστάδας του L_1 . Επιπλέον, το G είναι απλό, εσωτερικά μεγιστικό 1-επίπεδο, ικανοποιεί την ιδιότητα της K_4 -κενότητας και δεν περιέχει τομές στη μη φραγμένη του όψη. Συνεχίζουμε παίρνοντας μία εμφύτευση σε βιβλίο 3 σελίδων της υποκείμενης επίπεδης δομής G_P χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Γιαννακάκη (βλ. **Ενότητα 11.2.1**). Ισχυριζόμαστε ότι μπορούμε να εμφυτεύσουμε τις ακμές που αφαιρέθηκαν σύμφωνα με την γραμμική διάταξη που υπάγεται από την εμφύτευση σε βιβλίο του G_P χρησιμοποιώντας 13 επιπλέον σελίδες.

Καταρχήν θα εισάγουμε έναν σημαντικό ορισμό, χρήσιμο στην “εξάλειψη” πιθανών περιπτώσεων τομών ακμών. Λέμε ότι δύο ακμές e_1 και e_2 του G αποτελούν ένα ισχυρό ζεύγος εάν (i) βρίσκονται και οι δύο στην ίδια σελίδα, έστω p , και (ii) αν μία ακμή e , που βρίσκεται επίσης στη σελίδα p , τέμνεται με την e_i , τότε τέμνεται και με την e_j , όπου $i \neq j \in \{1, 2\}$. Έστω ότι η $e_1 \notin E(G_P)$ και η $e_2 \in E(G_P)$ αποτελούν ένα ισχυρό ζεύγος ακμών. Εάν η $e_3 \in E(G_P)$, τότε η e_3 δεν μπορεί να τέμνεται ούτε με την e_1 ούτε με την e_2 (από τον αλγόριθμο του Γιαννακάκη). Από την άλλη, εάν η $e_3 \notin E(G_P)$ και αποτελεί ένα ισχυρό ζεύγος με μία άλλη ακμή $e_4 \in E(G_P)$, τότε πάλι η e_3 δεν μπορεί να τέμνεται ούτε με την e_1 ούτε με την e_2 , καθώς σε διαφορετική περίπτωση, η e_4 θα δημιουργούσε κι αυτή τομή με την e_1 ή την e_2 , αντιβαίνοντας στην ορθότητα του αλγόριθμου του Γιαννακάκη εφόσον η $e_4 \in E(G_P)$.

Τώρα περιγράφουμε έξι τύπους τομών που δημιουργούνται όταν οι ακμές που

αφαιρέσαμε προστεθούν πάλι στο G (βλ. **Εικόνα 13.1**). Οι ισόπεδες ακμές του L_0 που δεν ανήκουν στο G_P λέγονται εξωτερικές τεμνόμενες χορδές. Τέτοιες χορδές μπορεί να δημιουργούν τομές με (i) άλλες χορδές του L_0 που ανήκουν στο G_P ή (ii) συνδετικές ακμές (μεταξύ των επιπέδων L_0 και L_1), ή, (iii) εκφυλισμένες συστάδες (οι λεγόμενες συστάδες-γέφυρες) του επιπέδου L_1 που είναι απλές ακμές.



Εικόνα 13.1: Οι ισόπεδες (συνδετικές) ακμές απεικονίζονται συνεχείς (διακεκομμένες). Η υποκείμενη επίπεδη δομή G_P απεικονίζεται με μαύρο χρώμα. Οι γκρι ακμές δεν ανήκουν στο G_P . Οι ακμές (u_5, u_7) , (u_8, u_{10}) και (u_{10}, u_{12}) είναι εξωτερικές τεμνόμενες χορδές που τέμνουν μία συνδετική ακμή, μία συστάδα-γέφυρα και μία χορδή του G_P , αντίστοιχα. Οι ακμές (v_3, v_5) , (v_7, v_9) και (v_2, v_6) είναι 2-βηματισμοί τεμνόμενων συνδετικών ακμών. Η ακμή (u_2, v_1) είναι έμπροσθεν ακμή.

Οι ισόπεδες ακμές του L_1 που δεν ανήκουν στο G_P λέγονται εσωτερικές τεμνόμενες χορδές ή απλά 2-βηματισμοί (εφόσον μπορούν να “παρακάμψουν” μόνο μία κορυφή κατά μήκος του συνόρου του δένδρου συστάδων). Ισχυριζόμαστε ότι οι 2-βηματισμοί δεν τέμνονται μεταξύ τους. Έστω αντιθέτως ότι η $e = (u, v)$ και η $e' = (u', v')$ είναι δύο 2-βηματισμοί που τέμνονται και έστω χ.β.τ.γ. ότι οι u, u', v και v' εμφανίζονται με αυτή τη σειρά κατά μήκος του συνόρου του δένδρου συστάδων του G_P . Εφόσον το G είναι μεγιστικό 1-επίπεδο, από το **Λήμμα 11.3** και την ιδιότητα της K_4 -κενότητας έπεται ότι η (u, v') ανήκει στο G_P . Όμως, αν υπάρχει αυτή η ακμή, τότε και οι δύο κορυφές u' και v δεν βρίσκονται πλέον στο σύνορο του δένδρου συστάδων του επιπέδου L_1 του G_P , κάτι το οποίο είναι άτοπο καθώς οι e και e' είναι και οι δύο ισόπεδες ακμές του L_1 . Συνεπώς, οι 2-βηματισμοί δημιουργούν τομές μόνο με συνδετικές ακμές. Αφού οι ισόπεδες ακμές διαφορετικών επιπέδων δεν μπορεί να τέμνονται μεταξύ τους, η μόνη κατηγορία τομών ακμών που δεν έχουμε εξετάσει ακόμα είναι αυτές μεταξύ συνδετικών ακμών.

Υπενθυμίζουμε ότι οι συνδετικές ακμές είναι δύο ειδών, έμπροσθεν και όπισθεν. Για ένα ζεύγος τεμνόμενων συνδετικών ακμών, έστω $e = (u_i, v_j)$ και $e' = (u_{i'}, v_{j'})$, όπου $u_i, u_{i'} \in L_0$ και $v_j, v_{j'} \in L_1$, αναφέραμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα

ποια θα ανήκει στο G_P . Εδώ ρυθμίζουμε την επιλογή αυτή. Η ακμή e ανήκει στο G_P αν και μόνο αν η κορυφή u_i έχει μικρότερο δείκτη από την $u_{i'}$ στο L_0 , δηλαδή $i < i'$. Συνεπώς, η e' είναι πάντα έμπροσθεν ακμή και δύο όπισθεν ακμές δεν τέμνονται.

Με παρόμοιο τρόπο, για ένα ζεύγος τεμνόμενων ισόπεδων ακμών του επιπέδου L_0 ρυθμίζουμε την αρχική επιλογή ως εξής. Εάν μία ισόπεδη ακμή προσπίπτει στην κορυφή $u_1 \in L_0$, τότε αναγκαστικά θα ανήκει στο G_P .

Από τα παραπάνω, έπεται ότι για ένα ζεύγος τεμνόμενων ακμών, έστω $e \in E(G_P)$ και $e' \notin E(G_P)$, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις τομών, καθέ μία από τις οποίες αναλύεται ξεχωριστά στα παρακάτω λήμματα (εκτός από την τελευταία που είναι πιο περίπλοκη).

- C.1 Η e' είναι εξωτερική τεμνόμενη χορδή και η e είναι χορδή του L_0 που ανήκει στο G_P .
- C.2 Η e' είναι εξωτερική τεμνόμενη χορδή και η e είναι συνδετική ακμή.
- C.3 Η e' είναι εξωτερική τεμνόμενη χορδή και η e είναι συστάδα-γέφυρα του L_1 .
- C.4 Η e' είναι έμπροσθεν ακμή και η e είναι έμπροσθεν ακμή.
- C.5 Η e' είναι έμπροσθεν ακμή και η e είναι όπισθεν ακμή.
- C.6 Η e' είναι 2-βηματισμός και η e είναι συνδετική ακμή.

Θεώρημα 13.1. Κάθε απλό εσωτερικά-μεγιστικό 1-επίπεδο γράφημα G με 2 επίπεδα, που ικανοποιεί την ιδιότητα της K_4 -κενότητας και δεν περιέχει τομές στη μη φραγμένη όψη του, επιδέχεται εμφύτευση σε βιβλίο με 16 σελίδες.

Απόδειξη. Η υποκείμενη επίπεδη δομή μπορεί να εμφυτευτεί σε τρεις σελίδες. Η περίπτωση C.1 απαιτεί μία επιπλέον σελίδα (από το [Λήμμα 13.2\(i\)](#)). Οι τεμνόμενες των περιπτώσεων C.2 και C.3 μπορούν να μπουν στις ίδιες σελίδες με την υποκείμενη επίπεδη δομή (βλ. [Λήμμα 13.2\(ii\)](#)). Η περίπτωση C.4 χρειάζεται δύο επιπλέον σελίδες από το [Λήμμα 13.3](#). Η περίπτωση C.5 απαιτεί τρεις επιπλέον σελίδες από το [Λήμμα 13.4](#). Τέλος, η περίπτωση C.6 απαιτεί επτά επιπλέον σελίδες από το [Λήμμα 13.5](#). Αθροίζοντας τα παραπάνω έχουμε συνολικά 16 σελίδες. \square

Ξεκινάμε εξατάζοντας την περίπτωση που η e' είναι μία εξωτερική τεμνόμενη χορδή του G .

Λήμμα 13.1. Έστω u_1, \dots, u_k οι κορυφές του επιπέδου L_0 σύμφωνα με την ωρολογιακή φορά κατά μήκος του συνόρου του. Έστω $c = (u_i, u_j)$ και $c' = (u_{i'}, u_{j'})$ δύο χορδές του L_0 , έτσι ώστε $i < i' < j < j'$. Τότε, ακριβώς μία από τις c και c' είναι εξωτερική τεμνόμενη χορδή.

Απόδειξη. Εφόσον οι $c = (u_i, u_j)$ και $c' = (u_{i'}, u_{j'})$ είναι χορδές του L_0 με $i < i' < j < j'$, οι χορδές c και c' τέμνονται στην 1-επίπεδη απεικόνιση $\Gamma(G)$ του G . Οπότε, μία από αυτές θα ανήκει στο G_P και η άλλη θα είναι εξωτερική τεμνόμενη χορδή. \square

Από το **Λήμμα 13.1**, οι εξωτερικές τεμνόμενες χορδές μπορούν να μπου σε μία σελίδα. Ωστόσο, προκειμένου να έχουμε μεγαλύτερη ευελιξία για την περίπτωση πολλών επιπέδων, επιλέγουμε να τοποθετήσουμε ορισμένες από αυτές σε μία καινούρια σελίδα (βλ. **Λήμμα 13.2**). Αποκαλούμε την σελίδα αυτή καθολική (universal), καθώς περιέχει εξωτερικές τεμνόμενες χορδές από όλα τα επίπεδα. Υπενθυμίζουμε ότι χρησιμοποιούμε τρεις σελίδες για το G_P : την p_1 (για τις ισόπεδες ακμές του L_0 και τις όπισθεν ακμές), την p_2 και την p_3 (για τις ισόπεδες ακμές του L_1 και τις έμπροσθεν ακμές).

Λήμμα 13.2 (Περιπτώσεις C.1 - C.3). Έστω $e = (u, v) \in E(G_P)$ και $e' = (u', v') \notin E(G_P)$ δύο ακμές του G που τέμνονται, όπου η e' είναι εξωτερική τεμνόμενη χορδή του L_0 .

- (i) Εάν η e είναι χορδή του L_0 , τότε η e' εμφυτεύεται σε μία καθολική σελίδα που συμβολίζεται με up_c (Περίπτωση C.1).
- (ii) Εάν η e είναι συνδετική ακμή ή συστάδα-γέφυρα του L_1 , τότε η e' εμφυτεύεται στη σελίδα p_1 , δηλαδή, στη σελίδα που χρησιμοποιείται για τις ισόπεδες ακμές του L_0 και τις όπισθεν ακμές του G_P (Περιπτώσεις C.2 και C.3).

Απόδειξη.

- (i) Εφόσον η e είναι χορδή του επιπέδου L_0 , η e βρίσκεται στη σελίδα p_1 (υπενθυμίζουμε ότι η $e \in E(G_P)$) και η e' εμφυτεύεται στην καθολική σελίδα up_c . Αφού η up_c περιέχει μόνο εξωτερικές τεμνόμενες χορδές του G , από το **Λήμμα 13.1** δεν τέμνονται μεταξύ τους.
- (ii) Εάν η e είναι συνδετική ακμή ή συστάδα-γέφυρα του επιπέδου L_1 , τότε η e' εμφυτεύεται στη σελίδα p_1 . Έστω ότι η e' δημιουργεί τομή με μία άλλη ακμή, έστω την e'' , που βρίσκεται στη σελίδα p_1 . Από το **Λήμμα 13.1**, η ακμή e'' δεν είναι εξωτερική τεμνόμενη χορδή, δηλαδή η e'' ανήκει στην υποκείμενη επίπεδη δομή G_P του G . Οπότε, η $e'' \in E(G_P)$ και είναι είτε: (a) ισόπεδη ακμή του επιπέδου L_0 ή (b) όπισθεν ακμή του G_P . Στην πρώτη περίπτωση, τα άκρα της e'' δεν μπορεί να είναι διαδοχικές κορυφές του επιπέδου L_0 , καθώς τότε δεν θα μπορούσε να υπάρξει τομή ακμών. Οπότε, η e'' πρέπει να είναι χορδή του επιπέδου L_0 . Ωστόσο, εάν η e' συμμετέχει σε μία τέτοια τομή ακμών, τότε η e' εμφυτεύεται στη σελίδα up_c , άτοπο. Στη δεύτερη περίπτωση, η e'' είναι όπισθεν ακμή του G_P . Οπότε, η ακμή e'' είναι εμφωλευμένη από μία ισόπεδη ακμή του επιπέδου L_0 που δεν είναι χορδή του L_0 , και επομένως, εάν η e' τέμνεται την e'' , τότε η e' πρέπει επίσης να τέμνει αυτή την ισόπεδη ακμή του επιπέδου L_0 , κάτι το οποίο δεν μπορεί να συμβεί.

□

Λήμμα 13.3 (Περίπτωση C.4). *Όλες οι έμπροσθεν ακμές που τέμνουν έμπροσθεν ακμές της υποκείμενης επίπεδης δομής μπορούν να εμφυτευθούν σε 2 καινούριες σελίδες.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για ένα ζεύγος τεμνόμενων έμπροσθεν ακμών, η επιλογή της ακμής που θα ανήκει στο G_P δεν επηρεάζει ούτε τον καθορισμό των συστάδων ούτε την επιλογή των κυρίαρχων και των οδηγών των συστάδων. Συνεπώς, δεν επηρεάζει ούτε την γραμμική διάταξη των κορυφών κατά μήκος της ράχης. Αυτό εξασφαλίζει ότι δύο νέες σελίδες αρκούν. \square

Συνεχίζουμε με την περίπτωση C.5, όπου η όπισθεν ακμή $e = (u, v) \in E(G_P)$ τέμνει την έμπροσθεν ακμή $e' = (u', v') \notin E(G_P)$. Έστω P η συστάδα που περιέχει την (v, v') και έστω v_0, \dots, v_t οι κορυφές της P σύμφωνα με την αντιωρολογιακή φορά που εμφανίζονται ξεκινώντας από την $v_0 = \ell(P)$. Εφόσον η e είναι όπισθεν, έπεται ότι $u = u_f(P)$. Από τον ορισμό του $u_f(P)$, η u βλέπει τις ακμές $(v_i, v_{i+1}), \dots, (v_{t-1}, v_t), (v_t, v_0)$ του P , για κάποιο $1 \leq i \leq t$. Οπότε οι ακμές $(u, v_0), (u, v_t), \dots, (u, v_i)$ υπάρχουν και είναι όπισθεν. Αυτό συνεπάγεται είτε ότι $v = v_i$ και $v' = v_{(i+1) \bmod t}$, είτε ότι $v = v_0$ και $v' = v_t$. Στην δεύτερη περίπτωση και εφόσον η u' βρίσκεται δεξιά της u πάνω στη ράχη, η P είναι συστάδα ρίζα. Και στις δύο περιπτώσεις η ακμή (u', v) είναι έμπροσθεν.

Λήμμα 13.4 (Περίπτωση C.5). *Έστω $e = (u, v)$ και $e' = (u', v')$ μία όπισθεν και μία έμπροσθεν ακμή του G που τέμνονται. Έστω v_0, \dots, v_t οι κορυφές της συστάδας P σύμφωνα με την αντιωρολογιακή φορά που εμφανίζονται ξεκινώντας από την $v_0 = \ell(P)$, όπου η P περιέχει την ακμή (v, v') . Τέλος, έστω i ο μικρότερος δείκτης έτσι ώστε η $u = u_f(P)$ να βλέπει τις $(v_i, v_{i+1}), \dots, (v_{t-1}, v_t), (v_t, v_0)$. Τότε, χρησιμοποιούμε τρεις νέες σελίδες p'_1, p'_2 και p'_3 ως εξής.*

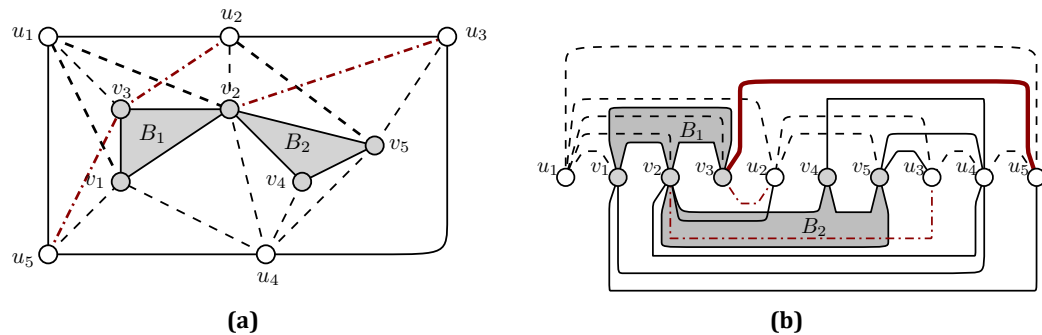
- (i) *Εάν $v = v_i$ και $v' = v_{(i+1) \bmod t}$, τότε η ακμή e' εμφυτεύεται σε μία καινούρια σελίδα p'_j αν και μόνο αν οι έμπροσθεν ακμές που προσπίπτουν στη συστάδα $B(v')$ βρίσκονται στη σελίδα $p_j, j = 2, 3$.*
- (ii) *Εάν $v = v_0$ και $v' = v_t$, τότε η ακμή e' εμφυτεύεται στην καινούρια σελίδα p'_1 .*

Απόδειξη.

- (i) Αποδεικνύουμε ότι αν οι έμπροσθεν ακμές που προσπίπτουν στη $B(v')$ βρίσκονται στην p_j , τότε η e' μπορεί επίσης να εμφυτευτεί στην p_j . Εάν αυτό ισχύει, το λήμμα έπεται, καθώς μπορούμε πάντα να χωρίσουμε μία σελίδα σε δύο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν $v = v_t$ (δηλαδή, αν $i = t$) ή αν $v = v_i$ με $i < t$.

Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι $v = v_t$ και $v' = v_0$ (βλ. τις ακμές $e = (u_2, v_5)$ και $e' = (u_3, v_2)$ στην **Εικόνα 13.2a**). Έστω $B = B(v)$ και $B' = B(v')$. Έπεται ότι

$B = P$ και B' είναι η συστάδα-γονέας της B . Χ.β.τ.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνορο της B' βρίσκεται στη σελίδα p_2 . Ισχυριζόμαστε ότι η e' μπορεί να εμφυτευθεί στη σελίδα p_3 (μαζί με τις έμπροσθεν ακμές της B'). Για να το αποδείξουμε, θα δείξουμε ότι οι $e' = (u', v_0)$ και (v_0, v_t) αποτελούν ένα ισχυρό ζεύγος. Καταρχήν, παρατηρούμε ότι η (v_0, v_t) βρίσκεται στη σελίδα p_3 . Πράγματι, η B' είναι στη σελίδα p_2 . Οπότε η B είναι στην p_3 και η (v_0, v_t) είναι ακμή της B . Από το **Λήμμα 11.9(iii)**, οι κορυφές v_1, v_2, \dots, v_t και u' εμφανίζονται με την ίδια διάταξη από αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος της ράχης, οπότε η (v_0, v_t) είναι εμφωλευμένη από την e' . Εάν οι v_t και u' είναι διαδοχικές κατά μήκος της ράχης, τότε οι e' και (v_0, v_t) προφανώς αποτελούν ένα ισχυρό ζεύγος. Διαφορετικά, η (u, u') είναι χορδή και από το **Λήμμα 11.10(iii)**, και πάλι οι e' και (v_0, v_t) αποτελούν ένα ισχυρό ζεύγος.



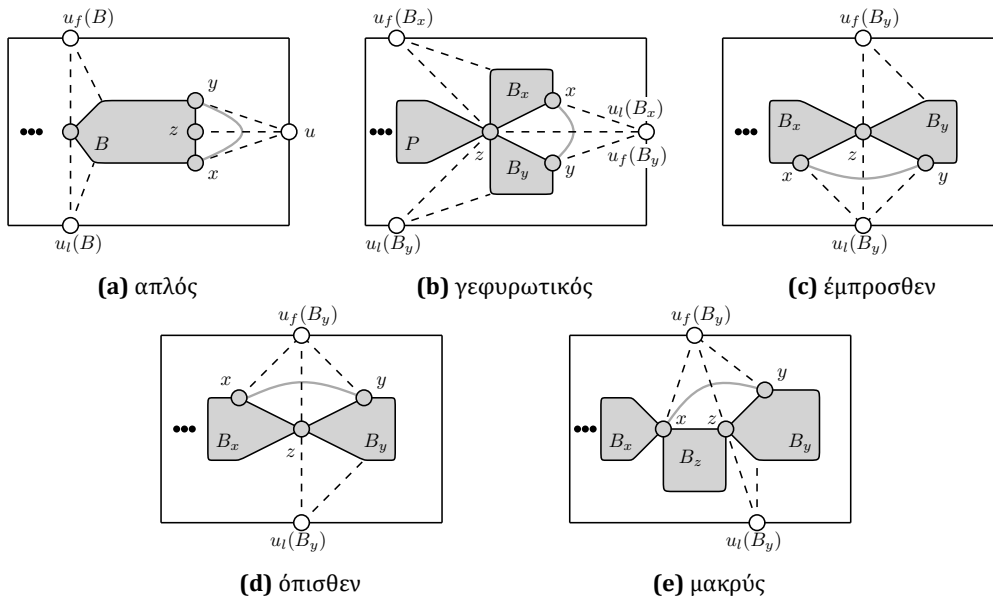
Εικόνα 13.2: (α) Οι κόκκινες ακμές υποδεικνύουν έμπροσθεν ακμές που τέμνονται. (β) Η γραμμική διάταξη και η αντιστοίχιση των ακμών στις σελίδες. Η παχιά ακμή εμφυτεύεται στην p'_1 . Οι αξονικές ακμές εμφυτεύονται στις p'_2 και p'_3 .

Στην περίπτωση που $v = v_i$ και $v' = v_{i+1}$ για κάποιο $i < t$ (αναφερόμαστε στις ακμές $e = (u_1, v_2)$ και $e' = (u_2, v_3)$ της **Εικόνας 13.2a**), έχουμε ότι $B = B' = P$. Έστω χ.β.τ.γ. ότι η P βρίσκεται στη σελίδα p_2 . Ισχυριζόμαστε ότι οι $e' = (u', v_{i+1})$ και (u', v_i) αποτελούν ένα ισχυρό ζεύγος. Από το **Λήμμα 11.3** και την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, η ακμή (u', v_i) υπάρχει και είναι έμπροσθεν. Άρα, βρίσκεται στη σελίδα p_3 . Εφόσον οι κορυφές v_i και v_{i+1} είναι διαδοχικές κατά μήκος της ράχης, οι ακμές e' και (u', v_i) αποτελούν ένα ισχυρό ζεύγος.

- (ii) Στην περίπτωση αυτή (αναφερόμαστε στις ακμές $e = (u_1, v_1)$ και $e' = (u_5, v_3)$ της **Εικόνας 13.2a**), η P είναι συστάδα-ρίζα. Έστω $e'_1 = (u'_1, v'_1)$ και $e'_2 = (u'_2, v'_2)$ δύο ακμές που έχουν αντιστοιχηθεί στην καινούρια σελίδα p'_1 . Εφόσον $P_1 = B(v'_1)$ και $P_2 = B(v'_2)$ είναι και οι δύο συστάδες-ρίζες, έπεται ότι οι P_1 και P_2 διαχωρίζονται από μία χορδή του L_0 . Οπότε, από το **Λήμμα 11.10**, η e'_1 δεν μπορεί να τέμνεται με την e'_2 .

□

Τέλος, θεωρούμε την περίπτωση C.6 όπου $e' = (x, y)$ είναι ένας 2-βηματισμός του επιπέδου L_1 και η $e = (u, z)$ είναι συνδετική ακμή του G_P , όπου $x, y, z \in L_1$ και $u \in L_0$. Έστω ότι οι x, z και y ανήκουν στις συστάδες B_x, B_z και B_y , αντίστοιχα, οι οποίες δεν είναι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους. Από το **Λήμμα 11.3** και την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, $x \rightarrow z \rightarrow y$ είναι ένα μονοπάτι στο L_1 . Οπότε οι B_x και B_y βρίσκονται μεταξύ τους σε απόσταση το πολύ δύο στο δένδρο συστάδων του G . Εάν οι x και y αντιστοιχούν στην ίδια συστάδα (δηλαδή, $B_x = B_z = B_y$), τότε η e λέγεται απλός 2-βηματισμός (βλ. **Εικόνα 13.3a**). Ας υποθέσουμε χ.β.τ.γ. ότι η B_x προηγείται της B_y στην προδιάταξης διαπέραση του δένδρου συστάδων του G . Τότε, υπάρχουν δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η B_x είναι πρόγονος της B_y στο δένδρο συστάδων. Εάν δεν ισχύει κάτι τέτοιο, τότε οι B_x και B_y έχουν την ίδια συστάδα-γονέα, έστω B_p . Στην περίπτωση αυτή, η e' λέγεται γεφυρωτικός 2-βηματισμός (βλ. **Εικόνα 13.3b**). Έστω τώρα ότι η B_x είναι πρόγονος της B_y . Τότε, το μονοπάτι $x \rightarrow z \rightarrow y$ περιέχει τον οδηγό της B_y , που είναι είτε η x είτε η z . Από το **Λήμμα 11.3** και την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, οι ακμές (u, x) (u, z) και (u, y) υπάρχουν στο G . Άρα, η u είναι είτε η $u_l(B_y)$ είτε η $u_f(B_y)$. Στην πρώτη υποπερίπτωση, η e' λέγεται έμπροσθεν 2-βηματισμός (βλ. **Εικόνα 13.3c**). Στην δεύτερη υποπερίπτωση, αφού η B_x είναι πρόγονος της B_y και οι δύο συστάδες είναι σε απόσταση το πολύ δύο μεταξύ τους, εάν η B_x είναι η συστάδα-γονέας της B_y , τότε η e' λέγεται όπισθεν 2-βηματισμός (βλ. **Εικόνα 13.3d**). Τέλος, αν η B_x είναι η συστάδα-παππούς της B_y , τότε η e' λέγεται μακρύς 2-βηματισμός (βλ. **Εικόνα 13.3e**).



Εικόνα 13.3: Διαφορετικοί τύποι 2-βηματισμών (με γκρι χρώμα).

Λήμμα 13.5 (Περίπτωση C.6). Όλοι οι τεμνόμενοι 2-βηματισμοί μπορούν να εμφυτευθούν σε επτά συνολικά σελίδες.

Απόδειξη. Από το **Λήμμα 13.6** οι απλοί 2-βηματισμοί μπορούν να εμφυτευθούν σε οποιαδήποτε σελίδα που περιέχει 2-βηματισμούς. Οι γεφυρωτικοί 2-βηματισμοί μπορούν να εμφυτευθούν σε δύο νέες σελίδες (βλ. **Λήμμα 13.8**). Οι εμπροσθεν 2-βηματισμοί μπορούν να εμφυτευθούν σε μία καινούρια σελίδα (βλ. **Λήμμα 13.11**). Τέλος, οι όπισθεν και οι μακρείς 2-βηματισμοί μπορούν να εμφυτευθούν σε δύο νέες σελίδες έκαστος (βλ. **Λήμμα 13.13** και **13.15**, αντίστοιχα). Αθροίζοντας τα παραπάνω παίρνουμε ένα σύνολο επτά σελίδων για όλους τους 2-βηματισμούς. \square

Ακολούθως, εξετάζουμε κάθε κατηγορία 2-βηματισμών ξεχωριστά.

Απλοί 2-βηματισμοί:

Λήμμα 13.6. Έστω ότι οι ακμές e και e' του G τέμνονται έτσι ώστε η e είναι μία συνδετική ακμή του G_P και η e' ένας απλός 2-βηματισμός του G . Τότε, εάν η e' εμφυτευθεί στην ίδια σελίδα με οποιονδήποτε άλλον 2-βηματισμό e'' , τότε η e' και η e'' δεν τέμνονται.

Απόδειξη. Έστω $e' = (x, y)$ όπου $x, y \in L_1$ και $e = (u, z)$, όπου η u είναι κορυφή του L_0 και η z κορυφή του L_1 . Από τον ορισμών των απλών 2-βηματισμών, οι κορυφές x, z και y ανήκουν στην ίδια συστάδα B . Τότε, για τον οδηγό $\ell(B)$ της B , ισχύει ότι $\ell(B) \notin \{x, z, y\}$. Από το **Λήμμα 11.9(iii)**, οι κορυφές x, z και y είναι διαδοχικές κατά μήκος της ράχης και εμφανίζονται με αυτή τη διάταξη από αριστερά προς τα δεξιά. Εάν η $e' = (x, y)$ έχει εμφυτευθεί σε μία σελίδα p_h και τέμνεται με έναν άλλο 2-βηματισμό e'' στην p_h , τότε η e'' έχει την z ως άκρο. Συνεπώς, οι e' και e'' θα τέμνονταν στην 1-επίπεδη εμφύτευση του G , άτοπο. \square

Γεφυρωτικοί 2-βηματισμοί: Υπενθυμίζουμε ότι, εξορισμού, εάν η $e' = (x, y)$ είναι ένας γεφυρωτικός 2-βηματισμός, τότε οι B_x και B_y είναι σε απόσταση δύο μεταξύ τους, και έχουν την ίδια συστάδα-γονέα B_P και κοινό οδηγό, έστω ℓ . Εφόσον ο ℓ είναι κορυφή-τομής του L_1 , που διαχωρίζει τις συστάδες B_x και B_y , κάθε $x - y$ μονοπάτι στο L_1 πρέπει να διέρχεται από τον ℓ . Συνεπώς, για το μονοπάτι $x \rightarrow z \rightarrow y$, έχουμε ότι $z = \ell$. Επίσης, από την υπόθεση ότι η B_x προηγείται της B_y κατά μήκος της ράχης και από το **Λήμμα 11.3** και την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, έπεται ότι $u = u_\ell(B_x) = u_f(B_y)$.

Λήμμα 13.7. Έστω B μία συστάδα του G με συστάδες-παιδιά B_1, B_2, \dots, B_s , όπου για κάθε $i < j$ όλες οι κορυφές της B_i εμφανίζονται πριν από όλες τις κορυφές της B_j κατά μήκος της ράχης. Τότε: (i) υπάρχει το πολύ ένας γεφυρωτικός 2-βηματισμός του G με ένα

άκρο στη B_1 , (ii) υπάρχουν το πολύ δύο γεφυρωτικοί 2-βηματισμοί του G με ένα άκρο στη B_i για $i = 2, \dots, s-1$ και (iii) υπάρχει το πολύ ένας γεφυρωτικός 2-βηματισμός του G με ένα άκρο στη B_s .

Απόδειξη. Εξορισμού, εάν η $e' = (x, y)$ είναι γεφυρωτικός 2-βηματισμός, τότε η B_x και η B_y έχουν την ίδια συστάδα-γονέα B_P και τον ίδιο οδηγό, έστω ℓ . Οπότε, αν η e' έχει ένα άκρο σε μία από τις συστάδες-παιδιά B_i της B , τότε το άλλο άκρο της είναι επίσης σε μία άλλη συστάδα-παιδί B_j της B ($i \neq j$). Από το **Λήμμα 11.9(ii)**, εάν $|j - i| > 1$, δηλαδή οι B_i και B_j δεν είναι διαδοχικές συστάδες-παιδιά της B , τότε η e' θα τεμνόταν με τις ακμές $(\ell, u_\ell(B_i)), (\ell, u_\ell(B_{i+1})), \dots, (\ell, u_\ell(B_{j-1}))$, δηλαδή, τουλάχιστον με δύο ακμές του G , αντιβαίνοντας στην 1-επιπεδότητα του G . Συνεπώς, $j = i - 1$ ή $j = i + 1$ και το λήμμα έπεται. \square

Λήμμα 13.8. Όλοι οι γεφυρωτικοί 2-βηματισμοί του G μπορούν να εμφυτευθούν σε δύο καινούριες σελίδες χωρίς τομές ακμών.

Απόδειξη. Έστω $e'_1 = (x_1, y_1)$ και $e'_2 = (x_2, y_2)$ δύο γεφυρωτικοί 2-βηματισμοί του G . Χ.β.τ.γ. έστω ότι οι x_1, x_2, y_1, y_2 εμφανίζονται με αυτή τη διάταξη κατά μήκος της ράχης από αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή οι ακμές e'_1 και e'_2 δεν μπορούν να εμφυτευθούν στην ίδια σελίδα. Εφόσον η x_2 εμφανίζεται μετά την κορυφή x_1 , από το **Λήμμα 11.8**, η x_2 είναι είτε μια κορυφή της B_{x_1} με μεγαλύτερο δείκτη από την x_1 , ή η συστάδα της B_{x_2} εμφανίζεται μετά την συστάδα B_{x_1} . Ομοίως, εφόσον η x_2 εμφανίζεται πριν από την y_1 στη ράχη, από το ίδιο λήμμα, η x_2 είναι είτε μια κορυφή της B_{y_1} με μικρότερο δείκτη από την y_1 , είτε η συστάδα της B_{x_2} εμφανίζεται πριν από τη συστάδα B_{y_1} . Από τον ορισμό των γεφυρωτικών 2-βηματισμών, οι B_{x_1} και B_{y_1} είναι διαδοχικές συστάδες-παιδιά μίας συστάδας B με τον ίδιο οδηγό. Συνεπώς, οι μόνες συστάδες που βρίσκονται μεταξύ των B_{x_1} και B_{y_1} πάνω στη ράχη είναι οι συστάδες-απόγονοι της B_{x_1} στο δένδρο συστάδων. Συνδυάζοντας τους παραπάνω περιορισμούς, διαχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις για τη B_{x_2} : (c.1) $B_{x_2} = B_{x_1}$ και η x_2 εμφανίζεται μετά την x_1 , (c.2) η B_{x_2} είναι απόγονος της B_{x_1} , και (c.3) $B_{x_2} = B_{y_1}$ και η x_2 εμφανίζεται πριν την y_1 .

Στην πρώτη και τρίτη περίπτωση, οι ακμές e'_1 και e'_2 είναι γεφυρωτικοί 2-βηματισμοί με ένα άκρο στην ίδια συστάδα. Στην δεύτερη περίπτωση, και πάλι εξορισμού, η B_{y_2} είναι επίσης συστάδα-απόγονος της B_{x_1} (εφόσον οι B_{x_2} και B_{y_2} έχουν την ίδια συστάδα-γονέα). Τότε, η B_{y_2} εμφανίζεται πριν τη B_{y_1} στη διάταξη των συστάδων, άτοπο. Οπότε, εάν δύο γεφυρωτικοί 2-βηματισμοί e'_1 και e'_2 δεν μπορούν να εμφυτευθούν στην ίδια σελίδα, τότε έχουν ένα άκρο στην ίδια συστάδα.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα βοηθητικό γράφημα στο οποίο οι κορυφές αντιστοιχούν στους γεφυρωτικούς 2-βηματισμούς του G και μία ακμή υπάρχει εάν οι γεφυρωτικοί 2-βηματισμοί που αντιστοιχούν στα άκρα της δεν μπορούν να εμφυτευθούν

στην ίδια σελίδα, δηλαδή εάν οι δύο γεφυρωτικοί 2-βηματισμοί έχουν ένα άκρο στην ίδια συστάδα στο G . Από το **Λήμμα 13.7**, έπεται ότι το βοηθητικό γράφημα αποτελείται από ξένα μεταξύ τους μονοπάτια και είναι επομένως διμερές. Εμφυτεύουμε τους γεφυρωτικούς 2-βηματισμούς που αντιστοιχούν σε κορυφές του πρώτου (δεύτερου, αντίστοιχα) συνόλου διαμέρισης στο βοηθητικό γράφημα, στην πρώτη (δεύτερη, αντίστοιχα) σελίδα από τις δύο διαθέσιμες σελίδες. Είναι προφανές ότι οι γεφυρωτικοί 2-βηματισμοί που βρίσκονται στην ίδια σελίδα δεν τέμνονται, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του λήμματος. \square

Έμπροσθεν 2-βηματισμοί: Υπενθυμίζουμε ότι, από τον ορισμό, εάν η $e' = (x, y)$ είναι έμπροσθεν 2-βηματισμός, τότε η B_x είναι πρόγονος της B_y και η κορυφή u είναι η $u_l(B_y)$. Επιπλέον, εφόσον $x \rightarrow z \rightarrow y$ είναι μονοπάτι του G και οι x, y ανήκουν σε διαφορετικές συστάδες, έπεται ότι ο δείκτης της y στην B_y ισούται είτε με 1 είτε με 2.

Λήμμα 13.9. Έστω v_1 και v_2 δύο κορυφές του L_1 έτσι ώστε η v_1 να εμφανίζεται πριν από την v_2 στην ράχη. Έστω v η τελευταία κοινή κορυφή των ίχνων $tr(v_1)$ και $tr(v_2)$. Τότε, όλες οι κορυφές του $tr(v_1)$ μετά την v προηγούνται των κορυφών του $tr(v_2)$ μετά την v .

Απόδειξη. Έστω $B_1 = B(v_1)$, $B_2 = B(v_2)$ και $B = B(v)$. Εφόσον η v είναι η τελευταία κοινή κορυφή του $tr(v_1)$ και του $tr(v_2)$, έπεται ότι η B είναι ο τελευταίος κοινός πρόγονος των B_1 και B_2 στο δένδρο συστάδων. Τότε, στη διάταξη των συστάδων, όλες οι συστάδες που βρίσκονται στο μονοπάτι που ορίζεται από την B προς την B_1 εμφανίζονται πριν από όλες τις συστάδες που βρίσκονται στο μονοπάτι από την B προς την B_2 . Συνεπώς, τα $tr(v_1)$ και $tr(v_2)$ ταυτίζονται μέχρι και την κορυφή v και οι κορυφές του $tr(v_1)$ μετά την v προηγούνται των κορυφών του $tr(v_2)$ μετά την v . \square

Λήμμα 13.10. Έστω $e' = (x, y)$ ένας έμπροσθεν 2-βηματισμός. Τότε, $tr(y) = tr(x) \rightarrow z \rightarrow y$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι οι x, z, y εμφανίζονται με αυτή την διάταξη από αριστερά προς τα δεξιά κατά μήκος της ράχης. Εφόσον η y είναι είτε η πρώτη είτε η δεύτερη κορυφή της B_y , έχουμε ότι: είτε $z = \ell(B_y)$ είτε η z είναι η πρώτη κορυφή της B_y αντίστοιχα. Και στις δύο περιπτώσεις, η επιθυμητή ιδιότητα ισχύει. \square

Λήμμα 13.11. Όλοι οι έμπροσθεν 2-βηματισμοί του G μπορούν να εμφυτευθούν σε μια νέα σελίδα χωρίς τομές ακμών.

Απόδειξη. Έστω $e'_1 = (x_1, y_1)$ και $e'_2 = (x_2, y_2)$ δύο έμπροσθεν 2-βηματισμοί του G . Χ.β.τ.γ. έστω ότι οι x_1, x_2, y_1, y_2 εμφανίζονται με αυτή τη διάταξη κατά μήκος της ράχης από αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή οι ακμές e'_1 και e'_2 δνε μπορούν να εμφυτευθούν στην ίδια σελίδα. Ας θεωρήσουμε τα ίχνη των y_1 και y_2 . Από το **Λήμμα 13.10**,

$tr(y_1) = tr(x_1) \rightarrow z_1 \rightarrow y_1$ και $tr(y_2) = tr(x_2) \rightarrow z_2 \rightarrow y_2$. Έστω v_x η τελευταία κοινή κορυφών των ιχνών $tr(x_1)$ και $tr(x_2)$, και έστω v_y η τελευταία κοινή κορυφή των ιχνών $tr(y_1)$ και $tr(y_2)$. Από το **Λήμμα 13.9**, εάν η v_x δεν είναι η x_1 , τότε και οι τρεις κορυφές x_1, z_1 και y_1 θα εμφανιστούν πριν από τις x_2, z_2 και y_2 (καθώς στην περίπτωση αυτή θα ίσχυε $v_x = v_y$), άτοπο. Οπότε, $v_x = x_1$ και $v_y \in \{x_1, z_1, y_1\}$. Ομοίως, έστω v η τελευταία κοινή κορυφή των ιχνών $tr(x_2)$ και $tr(y_1)$. Από το **Λήμμα 13.9**, εάν η v δεν είναι η x_2 , τότε και οι τρεις κορυφές x_2, z_2 και y_2 θα εμφανιστούν πριν από την y_1 (καθώς στην περίπτωση αυτή θα ίσχυε $v = v_y$), άτοπο. Συνεπώς, $v = x_2$ και $v_y \in \{x_2, z_2, y_2\}$. Από τα παραπάνω, έπεται ότι $v_y \in \{x_1, z_1, y_1\}$ και $v_y \in \{x_2, z_2, y_2\}$. Από την διάταξη των κορυφών κατά μήκος της ράχης, έπεται ότι $v_y \notin \{x_1, y_2\}$. Εάν $v_y = z_1$, τότε είναι και $v_y = x_2$ (διαφορετικά, αν $v_y = z_2$, η κορυφή x_2 θα ανήκε στο κοινό τμήμα των ιχνών, και αναπόφευκτα θα ίσχυε $x_2 = x_1$, άτοπο). Από την άλλη, αν $v_y = y_1$, τότε είναι $v_y = z_2$ και $z_1 = x_2$ (εφόσον είναι η μοναδική κορυφή πάνω στο ίχνος πριν από την v_y). Και στις δύο περιπτώσεις, η ιδιότητα της K_4 -κενότητας παραβιάζεται. \square

Όπισθεν 2-βηματισμοί: Εξορισμού, εάν η $e' = (x, y)$ είναι όπισθεν 2-βηματισμός, τότε η κορυφή $u = u_f(B_y)$ και η B_x είναι η συστάδα-γονέας της B_y και η y είναι είτε η τελευταία ή η προτελευταία κορυφή της B_y .

Λήμμα 13.12. Εάν $e' = (x_1, y_1)$ και $e'' = (x_2, y_2)$ είναι δύο όπισθεν 2-βηματισμοί, τότε $B_{y_1} \neq B_{y_2}$.

Απόδειξη. Για έναν όπισθεν 2-βηματισμό $e' = (x, y)$ λέμε ότι η τελευταία ακμή της B_y καλύπτεται από την ακμή e' . Από το **Λήμμα 11.3** και την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, η τελευταία ακμή της B_y μπορεί να καλύπτεται το πολύ από έναν όπισθεν 2-βηματισμό. Οπότε, για τις e'_1 και e'_2 ισχύει $B_{y_1} \neq B_{y_2}$. \square

Λήμμα 13.13. Όλοι οι όπισθεν 2-βηματισμοί του G μπορούν να εμφυτευθούν σε δύο καινούριες σελίδες χωρίς τομές ακμών.

Απόδειξη. Έστω $e'_1 = (x_1, y_1)$ και $e'_2 = (x_2, y_2)$ δύο όπισθεν 2-βηματισμοί του G . Από το **Λήμμα 13.12**, $B_{y_1} \neq B_{y_2}$. Χ.β.τ.γ. ας υποθέσουμε ότι οι x_1, x_2, y_1, y_2 εμφανίζονται με αυτή τη διάταξη κατά μήκος της ράχης από αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή οι ακμές e'_1 και e'_2 δεν μπορούν να εμφυτευθούν στην ίδια σελίδα. Εφόσον η x_2 εμφανίζεται πριν τη κορυφή x_1 , από το **Λήμμα 11.8**, η x_2 είναι είτε μία κορυφή της B_{x_1} με μεγαλύτερο δείκτη από τη x_1 , είτε η συστάδα της B_{x_2} εμφανίζεται μετά τη συστάδα B_{x_1} . Ομοίως, εφόσον η x_2 εμφανίζεται πριν από την y_1 πάνω στη ράχη, από το ίδιο λήμμα, η x_2 είναι είτε μια κορυφή της B_{y_1} με μικρότερο δείκτη από την y_1 , είτε η συστάδα

της B_{x_2} εμφανίζεται πριν από τη συστάδα B_{y_1} . Συνδυάζοντας τους παραπάνω περιορισμούς, διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για τη B_{x_2} : (c.1) $B_{x_2} = B_{x_1}$ και η x_2 εμφανίζεται μετά την x_1 , (c.2) η B_{x_2} είναι απόγονος της B_{x_1} και εμφανίζεται πριν τη B_{y_1} , και (c.3) $B_{x_2} = B_{y_1}$ και η x_2 εμφανίζεται πριν τη y_1 .

Στις πρώτες δύο περιπτώσεις, εφόσον η B_{y_2} είναι συστάδα-παιδί της B_{x_2} , η B_{y_2} θα εμφανιστεί πριν τη B_{y_1} και η y_2 θα είναι αριστερά της y_1 , άτοπο. Οπότε, εάν δύο όπισθεν 2-βηματισμοί e'_1 και e'_2 δεν μπορούν να εμφυτευθούν στην ίδια σελίδα, τότε $B_{x_2} = B_{y_1}$.

Λέμε ότι ένας όπισθεν 2-βηματισμός $e' = (x, y)$ χρεώνεται στη συστάδα B_x (δηλαδή στη συστάδα-γονέα). Τότε, στην περίπτωση που οι e'_1 και e'_2 δεν μπορούν να εμφυτευθούν στην ίδια σελίδα, έχουμε ότι έχουν χρεωθεί σε συστάδες διαδοχικών επιπέδων του δένδρου συστάδων. Συνεπώς, μπορούμε να εμφυτεύσουμε όπισθεν 2-βηματισμούς που έχουν χρεωθεί σε συστάδες περιττών επιπέδων σε μία από τις δύο νέες διαθέσιμες σελίδες, και εκείνους που έχουν χρεωθεί σε συστάδες άρτιων επιπέδων στην άλλη διαθέσιμη σελίδα. Είναι προφανές ότι οι όπισθεν 2-βηματισμοί της ίδιας σελίδας δεν τέμνονται, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του λήμματος. \square

Μακρείς 2-βηματισμοί: Εξορισμού, εάν η $e' = (x, y)$ είναι μακρύς 2-βηματισμός, τότε $u = u_f(B_y) = u_f(B_z)$, η B_y είναι η πρώτη συστάδα-παιδί της B_z και η B_z είναι συστάδα-παιδί της B_x .

Λήμμα 13.14. Έστω $e' = (x, y)$ ένας μακρύς 2-βηματισμός του G . Λέμε ότι η B_z είναι η μεσαία συστάδα της e' , και η B_y η τελική συστάδα της e' . Τότε, μία συστάδα B μπορεί να είναι μεσαία (τελική) συστάδα το πολύ ενός μακρύ 2-βηματισμού e' . Επίσης, η B δεν μπορεί να είναι μεσαία συστάδα ενός μακρύ 2-βηματισμού e' και τελική συστάδα ενός άλλου μακρύ 2-βηματισμού e'' ταυτόχρονα.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του **Λήμματος 13.12**. Λέμε ότι η τελευταία ακμή μίας συστάδας B καλύπτεται από έναν μακρύ 2-βηματισμός $e' = (x, y)$, εάν η B είναι η μεσαία ή η τελική συστάδα του e' . Από το **Λήμμα 11.3** και την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, η τελευταία ακμή της B μπορεί να καλύπτεται το πολύ από έναν μακρύ 2-βηματισμός, και το λήμμα έπεται. \square

Λήμμα 13.15. Όλοι οι μακρείς 2-βηματισμοί του G μπορούν να εμφυτευθούν σε δύο κανούριες σελίδες χωρίς τομές ακμών.

Απόδειξη. Έστω $e'_1 = (x_1, y_1)$ και $e'_2 = (x_2, y_2)$ δύο μακρείς 2-βηματισμοί του G . Χ.β.τ.γ. υποθέτουμε ότι οι x_1, x_2, y_1, y_2 εμφανίζονται με αυτή τη διάταξη κατά μήκος της ράχης από αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή οι ακμές e'_1 και e'_2 δεν μπορούν να εμφυτευθούν στην ίδια σελίδα. Εφόσον η x_2 εμφανίζεται μετά την κορυφή x_1 , από το **Λήμμα 11.8**,

έχουμε ότι η x_2 είναι είτε μία κορυφή της B_{x_1} με μεγαλύτερο δείκτη από την x_1 , είτε η συστάδα της B_{x_2} εμφανίζεται μετά τη συστάδα B_{x_1} . Ομοίως, εφόσον η x_2 εμφανίζεται πριν από την y_1 πάνω στη ράχη, από το ίδιο λήμμα, έχουμε ότι η x_2 είναι είτε μια κορυφή της B_{y_1} με μικρότερο δείκτη από την y_1 , είτε η συστάδα της B_{x_2} εμφανίζεται πριν από τη συστάδα B_{y_1} . Συνδυάζοντας τους παραπάνω περιορισμούς και το γεγονός ότι η B_{y_1} είναι η πρώτη συστάδα-παιδί της B_{z_1} , διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις για την B_{x_2} : (c.1) $B_{x_2} = B_{x_1}$ και η x_2 εμφανίζεται μετά την x_1 , (c.2) η B_{x_2} είναι απόγονος της B_{x_1} πριν τη B_{z_1} , (c.3) $B_{x_2} = B_{z_1}$, και (c.4) $B_{x_2} = B_{y_1}$ και η x_2 εμφανίζεται πριν την y_1 .

Στις πρώτες δύο περιπτώσεις, εφόσον η B_{y_2} είναι συστάδα-εγγόνι της B_{x_2} , η B_{y_2} θα εμφανιστεί πριν από τη B_{y_1} και η y_2 θα βρίσκεται αριστερά της y_1 , άτοπο. Συνεπώς, εάν δύο μακρείς 2-βηματισμοί e'_1 και e'_2 δεν μπορούν να εμφυτευθούν στην ίδια σελίδα, τότε $B_{x_2} = B_{y_1}$ ή $B_{x_2} = B_{z_1}$. Λέμε ότι ένας μακρὺς 2-βηματισμός e'_1 είναι άμεσα σε διένεξη με τον e'_2 εάν $B_{x_2} = B_{y_1}$ και έμμεσα σε διένεξη με τον e'_2 εάν $B_{x_2} = B_{z_1}$. Σημειώνουμε ότι το **Λήμμα 13.14** σε όρους αντιθέσεων λέει ότι ένας μακρὺς 2-βηματισμός δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άμεσα και έμμεσα σε διένεξη με άλλους 2-βηματισμούς. Παρακάτω, χρησιμοποιούμε επαγωγή στο πλήθος των συστάδων για να δείξουμε ότι δύο σελίδες είναι αρκετές.

Ξεκινάμε με τη συστάδα B_1 , τη συστάδα-ρίζα του δένδρου συστάδων. Οι μακρείς 2-βηματισμοί $e' = (x, y)$ με $B_x = B_1$ δεν είναι σε διένεξη μεταξύ τους και μπορούν επομένως να εμφυτευθούν στην ίδια σελίδα. Έστω ότι έχουμε τοποθετήσει όλους τους μακρείς 2-βηματισμούς $e' = (x, y)$ με $B_x \leq B_s$ σε δύο σελίδες, έστω p^1 και p^2 .

Έστω $e' = (x, y)$ με $B_x = B_{s+1}$ ένας μακρὺς 2-βηματισμός. Ισχυριζόμαστε ότι μπορεί να εμφυτευθεί σε μία από τις δύο σελίδες χωρίς να δημιουργούνται τομές ακμών. Έχουμε ότι η e' είναι άμεσα σε διένεξη με έναν μακρὺ 2-βηματισμό $e'_1 = (x_1, y_1)$, εάν $B_x = B_{y_1}$, και έμμεσα σε διένεξη με έναν μακρὺ 2-βηματισμό $e'_2 = (x_2, y_2)$, εάν $B_x = B_{z_2}$. Από το **Λήμμα 13.14**, ο e' δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άμεσα και έμμεσα σε διένεξη με άλλους μακρείς 2-βηματισμούς. Οπότε, έστω πρώτα ότι ο e' είναι μόνο άμεσα σε διένεξη με άλλους μακρείς 2-βηματισμούς του G . Όπως ήδη αναφέραμε, εάν ο e' είναι άμεσα σε διένεξη με τον $e'_1 = (x_1, y_1)$, τότε $B_x = B_{y_1}$. Τότε, η B_{z_1} είναι η συστάδα-γονέας της B_x και η B_{x_1} η συστάδα-παππούς της B_x . Αυτές οι συστάδες ορίζονται με μοναδικό τρόπο και ο e'_1 είναι ο μοναδικός μακρὺς 2-βηματισμός με τον οποίο ο e' είναι άμεσα σε διένεξη. Προφανώς, εάν ο e'_1 βρίσκεται στη σελίδα p^i , τότε ο e' μπορεί να εμφυτευθεί στην άλλη σελίδα p^j , όπου $i \neq j$. Στην περίπτωση όπου ο e' είναι μόνο έμμεσα σε διένεξη με άλλους μακρείς 2-βηματισμούς του G , έχουμε ότι εάν $e'_2 = (x_2, y_2)$ είναι μία τέτοια ακμή, τότε $B_x = B_{z_2}$. Από το **Λήμμα 13.14**, η B_x μπορεί να είναι μεσαία συστάδα το πολύ ενός μακρὺ 2-βηματισμού, δηλαδή, ο e'_2 είναι ο μόνος μακρὺς 2-βηματισμός με τον οποίο ο e' είναι σε έμμεση διένεξη. Οπότε, εάν ο e'_2 βρῖσκε-

τα στη σελίδα p^i , τότε ο e' μπορεί να εμφυτευθεί στην άλλη σελίδα p^j , όπου $i \neq j$. Από επαγωγή, έπεται ότι όλοι οι μακρείς 2-βηματισμοί του G μπορούν να εμφυτευθούν σε δύο νέες σελίδες. \square

13.2 Η Περίπτωση Πολλών Επιπέδων

Τώρα θεωρούμε την γενικότερη περίπτωση σύμφωνα με την οποία το δοθέν 1-επίπεδο γράφημα G αποτελείται από περισσότερα των δύο επίπεδων, έστω $L_0, L_1, \dots, L_\lambda, \lambda \geq 2$.

Λήμμα 13.16. *Κάθε απλό εσωτερικά-μεγιστικό 1-επίπεδο γράφημα G με $\lambda \geq 2$ επίπεδα, που ικανοποιεί την ιδιότητα της K_4 -κενότητας και δεν περιέχει τομές στη μη φραγμένη όψη του, επιδέχεται εμφύτευση σε βιβλίο με 34 σελίδες.*

Απόδειξη. Αρχικά εμφυτεύουμε σε 5 σελίδες την υποκείμενη επίπεδη δομή G_P του G χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Γιαννακάκη (βλ. **Ενότητα 11.2.1**). Αυτό συνεπάγεται ότι όλες οι κορυφές μίας συστάδας του επιπέδου i , εκτός ενδεχομένως από τον οδηγό της, βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του επιπέδου $i - 1, i = 1, \dots, \lambda$. Συνεπώς, για τις εξωτερικές τεμνόμενες χορδές που σχηματίζουν τομές με ισόπεδες ακμές του G_P (περίπτωση C.1), μία καθολική σελίδα (που συμβολίζεται με up_c στο **Λήμμα 13.2(i)**) επαρκεί, καθώς τέτοιες χορδές δεν προσπίπτουν σε οδηγούς συστάδων.

Στη συνέχεια, θεωρούμε τις εξωτερικές τεμνόμενες χορδές που σχηματίζουν τομές με συνδετικές ακμές ή συστάδες-γέφυρες του G (περιπτώσεις C.2 και C.3). Μία τέτοια χορδή $c_{i,j} = (v_i, v_j)$ μιας συστάδας B βρίσκεται στην ίδια σελίδα με το σύνορο και τις μη-τεμνόμενες χορδές της B . Το μονοπάτι $P[v_i \rightarrow v_j]$ που βρίσκεται στο σύνορο της B ενώνει τα άκρα της τεμνόμενης χορδής. Συνεπώς, εάν μία άλλη ακμή της ίδιας σελίδας τέμνεται με την $c_{i,j}$, τότε πρέπει επίσης να τέμνεται με μία ακμή της B , άτοπο. Οπότε, τέτοιες χορδές δεν απαιτούν επιπλέον σελίδες.

Για τις συνδετικές ακμές της περίπτωσης C.4, 5 σελίδες συνολικά επαρκούν (μία σελίδα για κάθε σελίδα του G_P). Για τις συνδετικές ακμές της περίπτωσης C.5, θα επιχειρηματολογήσουμε διαφορετικά. Εφόσον μία συνδετική ακμή μεταξύ των επιπέδων L_{i+2} και L_{i+1} δεν μπορεί να τέμνεται με μια συνδετική ακμή μεταξύ των επιπέδων L_{i-1} και $L_{i-2}, i = 2, \dots, \lambda - 2$, έπεται ότι οι συνδετικές ακμές που γεφυρώνουν ζεύγη επιπέδων σε απόσταση τουλάχιστον 3 είναι ανεξάρτητες. Έτσι, για τις συνδετικές ακμές της περίπτωσης C.5 χρειαζόμαστε συνολικά 9 σελίδες.

Ομοίως, όλες οι συστάδες του επιπέδου $i + 1$ που βρίσκονται στο εσωτερικό μιας συγκεκριμένης συστάδας του επιπέδου i βρίσκονται πάντα μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του επιπέδου $i - 1, i = 1, 2, \dots, \lambda - 1$. Συνεπώς, οι 2-βηματισμοί που απέχουν

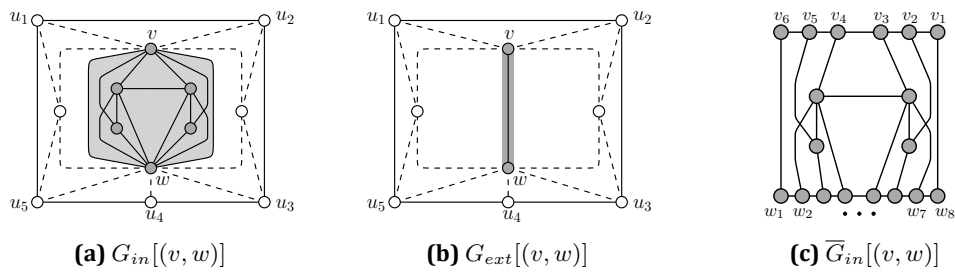
τουλάχιστον κατά δύο επίπεδα είναι ανεξάρτητοι, το οποίο συνεπάγεται ότι για τους 2-βηματισμούς χρειαζόμαστε συνολικά $2 * 7 = 14$ σελίδες (περίπτωση C.6). Αθροίζοντας, χρειαζόμαστε $5 + 1 + 5 + 9 + 14 = 34$ σελίδες για το G . \square

13.3 Πολλαπλές Ακμές

Στην αρχή του αλγορίθμου, εξηγήσαμε ότι, προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, χρειάζεται να επαυξήσουμε το δοθέν 1-επίπεδο γράφημα. Η διαδικασία αυτή, ωστόσο, μπορεί να δημιουργήσει πολλαπλές ακμές. Το θετικό είναι ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι πολλαπλές ακμές δεν τέμνονται. Πράγματι, εάν μία πολλαπλή ακμή περιέχει μία ακμή που δημιουργεί τομή, τότε η συγκεκριμένη ακμή μπορεί να αφαιρεθεί με ασφάλεια από το γράφημα, καθώς μπορεί να “αντικατασταθεί” από οποιαδήποτε άλλη αντίστοιχη ακμή που δεν τέμνεται.

Έστω (v, w) μία διπλή ακμή του G . Συμβολίζουμε με $G_{in}[(v, w)]$ το λεγόμενο εσωτερικό υπογράφημα του G ως προς την (v, w) το οποίο φράσσεται από τη διπλή ακμή (v, w) στην $\Gamma(G)$. Ως $G_{ext}[(v, w)]$ συμβολίζουμε το λεγόμενο εξωτερικό υπογράφημα του G ως προς την (v, w) που προκύπτει από το G αντικαθιστώντας το $G_{in}[(v, w)]$ με μία απλή ακμή (βλ. **Εικόνα 13.4**). Προφανώς, το $G_{ext}[(v, w)]$ παραμένει εσωτερικά-μεγιστικό 1-επίπεδο, ικανοποιεί την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, δεν περιέχει τομές στη μη φραγμένη όψη του και ταυτόχρονα περιέχει λιγότερες πολλαπλές ακμές από το G . Επομένως, μπορεί να εμφυτευθεί αναδρομικά. Η βάση της αναδρομής είναι ένα γράφημα που μπορεί να εμφυτευθεί χρησιμοποιώντας το **Λήμμα 13.16**.

Από την άλλη, δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το εσωτερικό υπογράφημα περιέχει λιγότερες πολλαπλές ακμές από το G . Σκοπός μας είναι να το τροποποιήσουμε κατάλληλα, έτσι ώστε να μειώσουμε το πλήθος των πολλαπλών ακμών του κατά ένα. Για να το επιτύχουμε, θα “αφαιρέσουμε” την πολλαπλή ακμή (v, w) που ορίζει το σύνορο του $G_{in}[(v, w)]$, ώστε να μπορέσουμε να το εμφυτεύσουμε αναδρομικά (και πάλι θέλουμε να εφαρμόσουμε το **Λήμμα 13.16** στη βάση της αναδρομής). Έστω $e_i(v)$ ($e_i(w)$, αντίστοιχα) η i -οστή ακμή που προσπίπτει στην κορυφή v (w , αντίστοιχα) σύμφωνα με την ωρολογιακή φορά, και μεταξύ των δύο ακμών που ορίζουν την διπλή ακμή (v, w) . Αντικαθιστούμε την κορυφή v (w , αντίστοιχα) με ένα μονοπάτι από $d(v)$ ($d(w)$, αντίστοιχα) κορυφές, έστω $v_1, v_2, \dots, v_{d(v)}$ ($w_1, w_2, \dots, w_{d(w)}$, αντίστοιχα), έτσι ώστε η κορυφή v_i (w_i , αντίστοιχα) να είναι το άκρο της ακμής $e_i(v)$ ($e_i(w)$, αντίστοιχα). Έστω $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ το γράφημα που προκύπτει. Εφόσον το $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ δεν έχει καινούριες τομές ακμών, μπορεί να επαυξηθεί σε εσωτερικά-μεγιστικό 1-επίπεδο γράφημα, που να ικανοποιεί την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, να μην έχει τομές στην μη φραγμένη όψη του και να έχει λιγότερες πολλαπλές ακμές από το $G_{in}[(v, w)]$. Συνεπώς, το $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ μπορεί να εμφυτευθεί αναδρομικά.



Εικόνα 13.4: Απεικόνιση της αποσύνθεσης στην περίπτωση πολλαπλών ακμών.

Τώρα θα περιγράψουμε πώς θα ενσωματώσουμε την εμφύτευση του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ στην εμφύτευση του $G_{ext}[(v, w)]$. Έστω ότι η (v, w) του $G_{ext}[(v, w)]$ βρίσκεται στην σελίδα p . Προφανώς, η p είναι μία από τις σελίδες που χρησιμοποιήθηκαν για την εμφύτευση της υποκείμενης επίπεδης δομής του $G_{ext}[(v, w)]$, εφόσον η (v, w) δεν συμμετέχει σε τομές ακμών στο $G_{ext}[(v, w)]$. Έστω ότι το σύνορο του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ είναι επίσης στη σελίδα p . Εφόσον η (v, w) υπάρχει στην εμφύτευση του $G_{ext}[(v, w)]$, αρκεί να ενσωματώσουμε στην εμφύτευση του $G_{ext}[(v, w)]$ μόνο το εσωτερικό του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$, που είναι το ίδιο με το εσωτερικό του $G_{in}[(v, w)]$. Έστω χ.β.τ.γ. ότι στην εμφύτευση του $G_{ext}[(v, w)]$ η v εμφανίζεται πριν την w . Τότε, τοποθετούμε το εσωτερικό υπογράφημα του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ δεξιά της v . Οι ακμές που συνδέουν το εσωτερικό του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ με την v (w , αντίστοιχα) τοποθετούνται στην σελίδα p (σε μία νέα σελίδα p' που είναι σε αντιστοιχία με την σελίδα p , αντίστοιχα). Με αυτό τον τρόπο, δημιουργούμε 5 καινούριες σελίδες.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι δεν δημιουργούνται καινούριες τομές ακμών. Εφόσον το σύνορο του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ είναι στη σελίδα p , όλες οι ακμές από την v προς το $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ γίνονται όπισθεν ακμές του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$. Έτσι, οι ακμές που ενώνουν την v με κορυφές στο εσωτερικό του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ δεν τέμνονται με άλλες ακμές στο εσωτερικό του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$. Εφόσον το $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ τοποθετείται δίπλα στην v , οι ακμές που προσπίπτουν στην v δεν τέμνουν ακμές του $G_{ext}[(v, w)]$ στη σελίδα p . Ομοίως, αποδεικνύεται ότι οι ακμές από την w προς το εσωτερικό του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ δεν τέμνουν άλλες ακμές στο εσωτερικό του $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ στη σελίδα p' . Απομένει να δείξουμε ότι οι ακμές που προσπίπτουν στην w δεν τέμνουν ακμές του $G_{ext}[(v, w)]$ στη σελίδα p' . Τέτοια τομή μπορεί μόνο να υφίσταται αν υπάρχει μια άλλη διπλή ακμή (v', w') επίσης της σελίδας p στο $G_{ext}[(v, w)]$. Έστω χ.β.τ.γ. ότι η v' βρίσκεται αριστερά της w' (υπενθυμίζουμε ότι η v είναι αριστερά της w). Αρχικά, ας θεωρήσουμε την περίπτωση που $v \neq v'$. Εάν δημιουργείται κάποια τομή λόγω των $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ και $\bar{G}_{in}[(v', w')]$, τότε οι (v, w) και (v', w') , που ανήκουν στην υποκείμενη επίπεδη δομή, πρέπει να τέμνονται. Εάν από την άλλη $v = v'$ (και χ.β.τ.γ. η w είναι αριστερά της w'), αρκεί να τοποθετήσουμε το $\bar{G}_{in}[(v, w)]$ πριν το $\bar{G}_{in}[(v', w')]$.

13.4 Τομές Ακμών στη μη Φραγμένη Όψη του Γραφήματος

Εάν υπάρχουν τομές πάνω στη μη φραγμένη όψη του G , τότε, όταν επαυξάνουμε το G προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ιδιότητα της K_4 -κενότητας, πρέπει επίσης να τριγωνοποιήσουμε τη μη φραγμένη όψη του επιπεδοποιημένου γραφήματος που προκύπτει, αντικαθιστώντας όλες τις τομές του G με κορυφές τομής (υπενθυμίζουμε το πρώτο βήμα του αλγορίθμου μας). Αυτή η διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε μία κατάσταση όπου η μη φραγμένη όψη είναι μία διπλή ακμή, έστω (v, w) . Στην περίπτωση αυτή, το $G_{ext}[(v, w)]$ αποτελείται από δύο κορυφές και μία μόνο ακμή μεταξύ τους. Για το $\overline{G}_{in}[(v, w)]$ δουλεύουμε όπως περιγράφαμε παραπάνω. Επομένως, είμαστε πλέον έτοιμοι να διατυπώσουμε το κεντρικό αποτέλεσμα του παρόντος κεφαλαίου.

Θεώρημα 13.2. *Κάθε 1-επίπεδο γράφημα επιδέχεται εμφύτευση σε βιβλίο με 39 σελίδες.*

14 AVD-Ολικός Χρωματισμός Γενικευμένων Halin Γραφημάτων με Μέγιστο Βαθμό 3

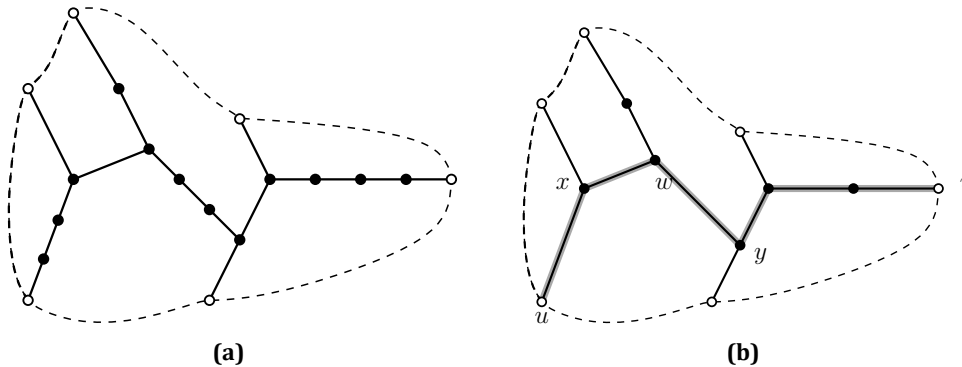
Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τον ολικό χρωματικό αριθμό με διαχωριζόμενες γειτονικές κορυφές των γενικευμένων Halin γραφημάτων με μέγιστο βαθμό 3. Οι Chen και Zhang [CZ08] έδειξαν ότι αν το G είναι γενικευμένο Halin γράφημα με $\Delta(G) \geq 6$ στο οποίο δεν υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές μέγιστου βαθμού, τότε ο AVD-ολικός χρωματικός του αριθμός ισούται με $\Delta(G) + 1$, και εάν το G έχει γειτονικές κορυφές μέγιστου βαθμού, για $\Delta(G) \geq 5$, ισχύει $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$. Τα ίδια φράγματα ισχύουν για επίπεδα γραφήματα με $\Delta(G) \geq 14$ [WH14]. Τα αποτελέσματα αυτά δεν περιλαμβάνουν τις περιπτώσεις γραφημάτων με μικρό μέγιστο βαθμό. Το κεντρικό θεώρημα του κεφαλαίου αυτού λέει ότι $\chi''_a(G) = \Delta(G) + 2$ για τα γενικευμένα Halin γραφήματα με $\Delta(G) = 3$. Αυτό επεκτείνει μερικώς και τα δύο προαναφερθέντα αποτελέσματα. Επίσης, αποτελεί ένα βήμα προς μία θετική απάντηση στο ερώτημα εάν 5 χρώματα αρκούν για τον AVD-ολικό χρωματισμό των γραφημάτων με $\Delta(G) = 3$ που τέθηκε από τον Hulgan [Hul09]. Υπενθυμίζουμε ότι εξ ορισμού ένα επίπεδο γράφημα G είναι γενικευμένο Halin γράφημα αν μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο χωρίς τεμνόμενες ακμές και έτσι ώστε: η εξωτερική όψη f_0 περιέχει μόνο κορυφές βαθμού 3 και, αφαιρώντας όλες τις ακμές της όψης f_0 , το υπογράφημα του G που προκύπτει είναι ένα δένδρο T , βλ. **Εικόνα 14.1a** για ένα παράδειγμα. Λέμε ότι το T είναι η ραχοκοκκαλιά (backbone) του G . Υπό την προϋπόθεση ότι το G έχει μέγιστο βαθμό 3 έπεται ότι η ραχοκοκκαλιά T του G έχει εσωτερικές κορυφές (δηλαδή κορυφές που δεν είναι φύλλα) βαθμού 2 ή 3. Το κεντρικό θεώρημα του κεφαλαίου αυτού είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 14.1. Έστω G ένα γενικευμένο Halin γράφημα με μέγιστο βαθμό 3. Τότε ο AVD-ολικός χρωματικός αριθμός του G ισούται με $\chi''_a(G) = 5$.

Σημειώνουμε ότι όλες οι κορυφές της f_0 έχουν βαθμό 3 και από το **Λήμμα 11.5** ισχύει $\chi''_a(G) \geq 5$. Συνεπώς το **Θεώρημα 14.1** είναι βέλτιστο.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα δένδρο T μέγιστου βαθμού 3. Κατασκευάζουμε ένα άλλο δένδρο T_C από το T ως εξής: Έστω $P = u_0, u_1, \dots, u_s, u_{s+1}$ ένα μονοπάτι στο T με μήκος $s + 1$, όπου $s \geq 2$, τέτοιο ώστε όλες οι κορυφές του P να έχουν βαθμό 2 εκτός από τα άκρα του u_0 και u_{s+1} που μπορεί να έχουν βαθμό 1 ή 3. Συμπτύσσουμε το P σε ένα συντομότερο μονοπάτι μήκους 1 ή 2 ανάλογα με τον αν το s είναι άρτιο ή περιττό. Συγκεκριμένα, αν $s \equiv 0 \pmod{2}$ αντικαθιστούμε το P με την ακμή (u_0, u_{s+1}) , και εάν

$s \equiv 1 \pmod{2}$ αντικαθιστούμε το P με το μονοπάτι $P_C = u_0, u', u_{s+1}$. Εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία σύμπτυξης για κάθε τέτοιο μονοπάτι P του T , και λέμε ότι το δένδρο T_C που προκύπτει είναι το συνεπτυγμένο δένδρο (contracted tree) του T (βλ. **Εικόνα 14.1b**). Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι το T_C που προκύπτει από το T είναι μοναδικό (ενώ μπορεί να συμβεί δύο διαφορετικά δένδρα T_1 και T_2 να έχουν το ίδιο συνεπτυγμένο δένδρο T_C), το T είναι υποδιαίρεση (subdivision) του T_C και το T_C έχει το ίδιο πλήθος φύλλων με το T και το ίδιο πλήθος κορυφών βαθμού 3. Επιπλέον, εάν υπάρχει μια κορυφή v με $d_{T_C}(v) = 2$, τότε και οι δύο γείτονες της v στο T_C έχουν βαθμό 1 ή 3. Εάν το T_C είναι το ίδιο δένδρο με το T λέμε ότι το T ικανοποιεί την ιδιότητα σύμπτυξης.

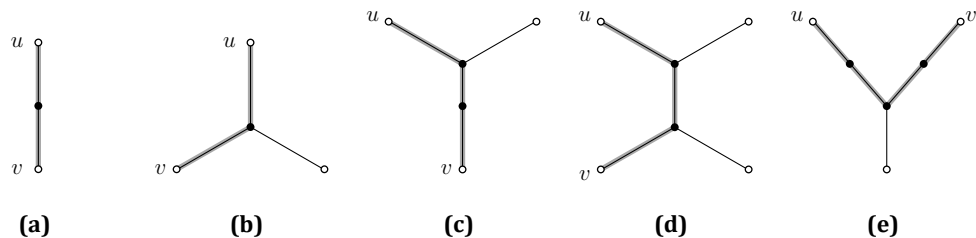


Εικόνα 14.1: (a) Ένα γενικευμένο Halin γράφημα G με $\Delta = 3$ και ραχοκοκκαλιά T που δεν ικανοποιεί την ιδιότητα σύμπτυξης. (b) Το G_C έχει ως ραχοκοκκαλιά το συνεπτυγμένο δένδρο T_C του T με διάμετρο $diam(T_C) = 6$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε το **Θεώρημα 14.1** πρώτα για δένδρα που ικανοποιούν την ιδιότητα σύμπτυξης και έπειτα να το επεκτείνουμε σε όλα τα δένδρα και συνεπώς σε όλα τα γενικευμένα Halin γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3. Έτσι, στο εξής θεωρούμε ότι το T είναι ένα δένδρο που ικανοποιεί την ιδιότητα σύμπτυξης και έστω G το γενικευμένο Halin γράφημα με $\Delta(G) = 3$ και το T ως ραχοκοκκαλιά. Για την απόδειξή μας θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο πλήθος των κορυφών του T . Η βάση της επαγωγής περιέχει τα γενικευμένα Halin γραφήματα των οποίων η ραχοκοκκαλιά έχει το πολύ έξι κορυφές, και αναλύονται στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Εάν το T έχει τρεις κορυφές, τότε το T είναι ισομορφικό με το μονοπάτι P_3 (βλ. **Εικόνα 14.2a**).
- Εάν το T έχει τέσσερις κορυφές, τότε το T είναι ισομορφικό με το αστέρι $K_{1,3}$ (βλ. **Εικόνα 14.2b**).
- Εάν το T έχει πέντε κορυφές, τότε το T είναι ισομορφικό με το δένδρο της **Εικόνας 14.2c**.

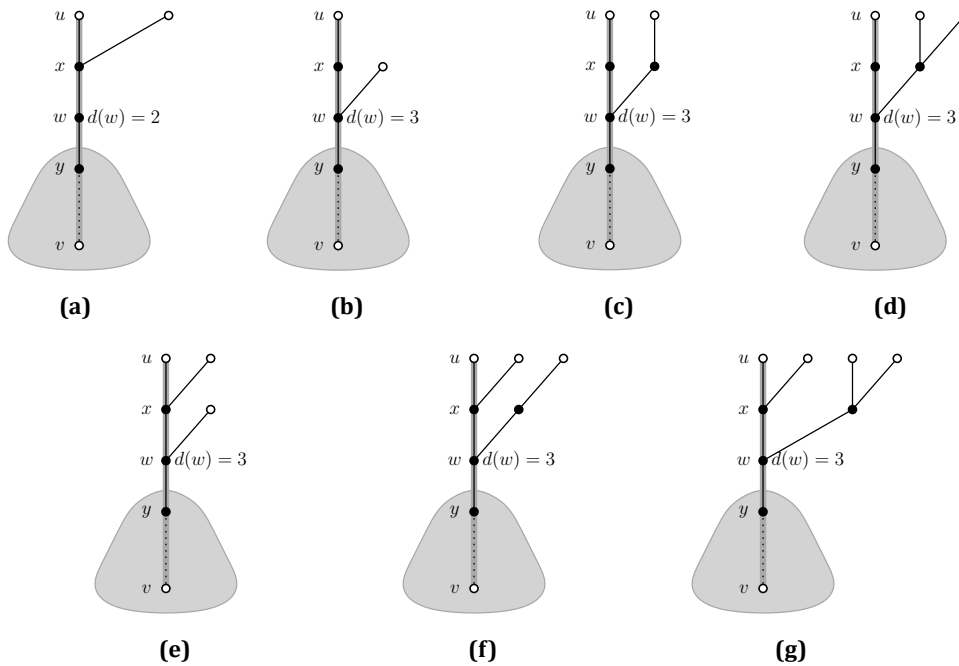
- Εάν το T έχει έξι κορυφές, τότε το T είναι ισομορφικό με το δένδρο της [Εικόνας 14.2d](#) ή της [Εικόνας 14.2e](#).



Εικόνα 14.2: Δένδρα που ικανοποιούν την ιδιότητα σύμπτυξης με (a) τρεις, (b) τέσσερις, (c) πέντε and (d)-(e) έξι κορυφές. Τα φύλλα του T απεικονίζονται ως άσπρες κορυφές και το μονοπάτι P_{uv} είναι τονισμένο με γκρι χρώμα.

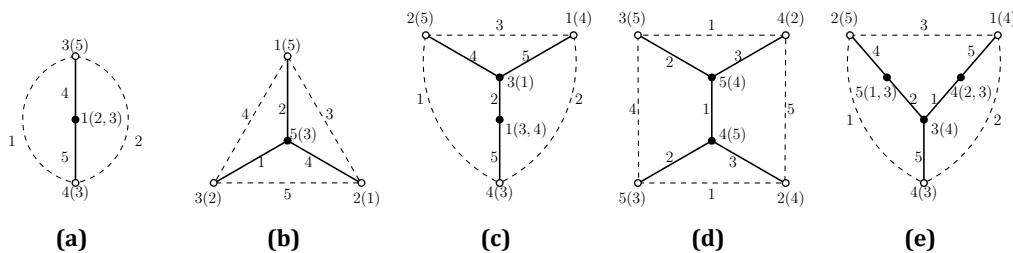
Σημειώνουμε ότι τα δένδρα των [Εικόνων 14.2a-14.2b](#) ([Εικόνων 14.2c-14.2d](#)) είναι τα μόνα δένδρα με $\Delta = 3$ που ικανοποιούν την ιδιότητα σύμπτυξης και έχουν διάμετρο 2 (3 αντίστοιχα). Έστω u και v δύο απόκεντρες κορυφές του T με $d(u, v) = \text{diam}(T) \geq 2$. Προφανώς η u και η v είναι φύλλα του T και το μονοπάτι P_{uv} που συνδέει τις u και v είναι μοναδικό. Για ένα δένδρο T που ικανοποιεί την ιδιότητα σύμπτυξης και έχει περισσότερες από 6 κορυφές, έστω u και v δύο απόκεντρες κορυφές του T , δηλαδή τέτοιες ώστε $d(u, v) = \text{diam}(T)$. Προφανώς η u και η v είναι φύλλα του T και το μονοπάτι P_{uv} που συνδέει τις u και v στο T είναι μοναδικό. Εάν το T έχει περισσότερες από 6 κορυφές, τότε έστω w η κορυφή του P_{uv} με $d(u, w) = 2$ και y η κορυφή του P_{uv} με $d(u, y) = 3$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η w έχει βαθμό 2 ή 3 στο T . Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή ισχύει $\text{diam}(T) \geq 4$. Συνεπώς, οι κορυφές u, w και y είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η w έχει βαθμό 2 ή 3 στο T .

- Εάν $d(w) = 2$, τότε από την ιδιότητα σύμπτυξης προκύπτει ότι ο βαθμός των γειτονικών κορυφών της w είναι είτε 1 είτε 3. Στην περίπτωσή αυτή που εξετάζουμε, ο βαθμός τους θα πρέπει να είναι πάντα 3 εφόσον η w έχει απόσταση 2 από την u , η οποία είναι φύλλο, και εφόσον το T έχει διάμετρο τουλάχιστον ίση με 4. Έστω x ο τρίτος γείτονας της w με $d(u, x) = 1$. Εφόσον η u είναι απόκεντρη κορυφή του T ο τρίτος γείτονας της x (που δεν περιέχεται στο P_{uv}) είναι ένα φύλλο του T (βλ. [Εικόνα 14.3a](#)).
- Εάν $d(w) = 3$ τότε έχουμε συνολικά 6 διαφορετικές περιπτώσεις που φαίνονται στις [Εικόνες 14.3b-14.3g](#). Ουσιαστικά, έχουμε όλα τα δένδρα με ρίζα, στα οποία η ρίζα w έχει δύο παιδιά, το ύψος του δένδρου είναι 2 και ο μέγιστος βαθμός είναι 3.



Εικόνα 14.3: Δένδρα που ικανοποιούν την ιδιότητα σύμπτυξης με $diam(T) \geq 4$ (a) $d(w) = 2$, και (b-g) $d(w) = 3$. Τα φύλλα του T απεικονίζονται ως άσπρες κορυφές και το μονοπάτι P_{uv} είναι τονισμένο με γκρι χρώμα.

Βάση της Επαγωγής: Η βάση της επαγωγής είναι τα γενικευμένα Halin γραφήματα των οποίων η ραχοκοκκαλιά έχει το πολύ 6 κορυφές. Στην **Εικόνα 14.4** βλέπουμε νόμιμους AVD-ολικούς χρωματισμούς για όλα τα γραφήματα με ραχοκοκκαλιά τα δένδρα της **Εικόνας 14.2** αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι όλα τα γραφήματα είναι απλά εκτός από το γράφημα της **Εικόνας 14.4b** που περιέχει μία παράλληλη ακμή. Το γράφημα αυτό χρειάζεται μόνο για το επαγωγικό βήμα όπως θα δούμε παρακάτω.



Εικόνα 14.4: AVD-ολικοί χρωματισμοί των γενικευμένων Halin γραφημάτων με ραχοκοκκαλιά τα δένδρα της **Εικόνας 14.2**.

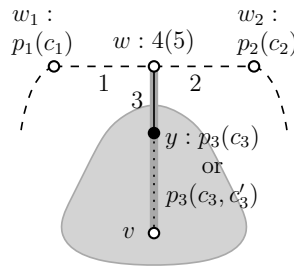
Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι για όλα τα γενικευμένα Halin γραφήματα G τα οποία (i) έχουν μέγιστο βαθμό 3, (ii) έχουν $n_0 > 6$ κορυφές και (iii) η ραχοκοκκαλιά

ικανοποιεί την ιδιότητα σύμπτυξης, ισχύει $\chi_a''(G) = 5$. Θα δείξουμε ότι αν η ραχοκοκκαλιά του G έχει $n > n_0$ κορυφές, $\Delta(G) = 3$ (και ικανοποιεί την ιδιότητα σύμπτυξης) τότε ο AVD-χρωματικός αριθμός ισούται και πάλι με 5. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το T έχει δύο απόκεντρες κορυφές u και v έτσι ώστε $d(u, v) \geq 4$ και το T είναι ένα από τα δένδρα της **Εικόνας 14.3**.

Η κεντρική ιδέα είναι ότι για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις, θα κλαδέψουμε το T σε ένα μικρότερο δένδρο T' το οποίο ικανοποιεί την επαγωγική υπόθεση. Συγκεκριμένα το T' προκύπτει από το T εάν αφαιρέσουμε το υποδένδρο με ρίζα την w που περιέχει την u (χωρίς, ωστόσο, να αφαιρέσουμε την κορυφή w , βλ. τα μέρη του T που απεικονίζονται με διακεκομμένες γραμμές στην **Εικόνα 14.3**). Τότε το T' περιέχει την κορυφή v (όχι όμως την u) και έχει την w ως φύλλο (υπενθυμίζουμε ότι η w είναι σε απόσταση 2 από την u στο T). Ως υποδένδρο του T , το T' ικανοποιεί την ιδιότητα σύμπτυξης και έχει $n' \geq n - 6$ κορυφές. Σημειώνουμε επίσης, ότι $n' \geq 3$ αφού $\text{diam}(T') \geq \text{diam}(T) - 2 \geq 2$. Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση, το γενικευμένο Halin γράφημα G' με ραχοκοκκαλιά το T' επιδέχεται AVD-ολικό χρωματισμό με 5 χρώματα.

Χ.β.τ.γ. υποθέτουμε ότι ο χρωματισμός που παίρνουμε είναι αυτός που φαίνεται στην **Εικόνα 14.5**, όπου w_1 και w_2 είναι οι δύο γείτονες της w στην εξωτερική όψη f'_0 του G' . Σημειώνουμε ότι μπορεί να είναι $w_1 = w_2$, αλλά μόνο στην περίπτωση που το G' είναι το γράφημα της **Εικόνας 14.4b**. Εχουμε ότι οι ακμές (w, w_1) , (w, w_2) και (w, y) έχουν χρώμα 1, 2 και 3 αντίστοιχα, ενώ η κορυφή w έχει χρώμα 4. Τότε το μόνο χρώμα που δεν ανήκει στο χρωματικό σύνολο της w είναι το χρώμα 5. Για λόγους απλότητας, εάν μία κορυφή βαθμού 3, έχει χρώμα p και c είναι το μόνο χρώμα που δεν περιέχεται στο χρωματικό της σύνολο, λέμε ότι ο χρωματισμός της κορυφής είναι $p(c)$. Ομοίως, εάν μια κορυφή βαθμού 2 έχει χρώμα p και c_1, c_2 είναι τα δύο χρώματα που δεν ανήκουν στο χρωματικό της σύνολο, λέμε ότι ο χρωματισμός της κορυφής είναι $p(c_1, c_2)$. Σύμφωνα με τον συμβολισμό αυτό, οι κορυφές w_1 και w_2 έχουν χρωματισμό $p_1(c_1)$ και $p_2(c_2)$, ενώ η κορυφή y έχει χρωματισμό $p_3(c_3)$ εάν ο βαθμός της είναι 3 ή έχει χρωματισμό $p_3(c_3, c'_3)$ εάν είναι κορυφή βαθμού 2. Από τον ορισμό των AVD-ολικών χρωματισμών έπεται ότι $p_1, p_2, p_3 \neq 4$ και $c_1, c_2 \neq 5$. Εάν η y έχει βαθμό 3 με χρωματισμό $p_3(c_3)$ τότε επιπλέον ισχύει $c_3 \neq 5$. Από τον χρωματισμό του G' θα κατασκευάσουμε έναν νόμιμο AVD-ολικό χρωματισμό του G , εξετάζοντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις που φαίνονται στην **Εικόνα 14.3**. Ωστόσο, πρώτου συνεχίσουμε, κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Έστω z μία κορυφή βαθμού 2 με ακμές $e_1 = (z, z_1)$ και $e_2 = (z, z_2)$, όπου z_1 και z_2 έχουν βαθμό 3 από την ιδιότητα σύμπτυξης. Έστω ότι η ακμή e_1 έχει χρώμα p'_1 , η e_2 χρώμα p'_2 , η κορυφή z_1 έχει χρωματισμό $p_1(c_1)$ και η κορυφή z_2 χρωματισμό $p_2(c_2)$ (όπου $p'_i \neq p_i, c_i$ για $i = 1, 2$). Συνεπώς υπάρχουν τρία διαθέσιμα χρώματα για την



Εικόνα 14.5: AVD-ολικός χρωματισμός του G' με ραχοκοκκαλιά T' , όπου T' είναι το κλαδεμένο υποδένδρο του T στο οποίο η w είναι φύλλο.

κορυφή z και τουλάχιστον ένα από αυτά είναι διαφορετικό από τα p_1 και p_2 . Τότε το χρωματικό σύνολο της z αποτελείται από τρία χρώματα και σίγουρα διαφέρει από τα χρωματικά σύνολα των δύο γειτόνων της z_1 και z_2 εφόσον περιέχουν 4 χρώματα. Αυτό συνεπάγεται ότι προκειμένου να πάρουμε έναν νόμιμο AVD-ολικό χρωματισμό του G αρκεί να χρωματίσουμε όλες τις μη χρωματισμένες ακμές και τις κορυφές βαθμού 3.

- Έστω z_1 και z_2 δύο γειτονικές κορυφές βαθμού 3. Έστω επίσης ότι όλες οι ακμές που προσπίπτουν στις z_1 και z_2 έχουν ήδη χρωματιστεί. Τότε υπάρχουν δύο χρώματα διαθέσιμα για την z_1 , έστω $\{p_1, p'_1\}$ και δύο χρώματα για την z_2 , έστω $\{p_2, p'_2\}$. Τότε η z_i ($i = 1, 2$) μπορεί να πάρει το χρωματισμό $p_i(p'_i)$ ή $p'_i(p_i)$. Εάν τα δύο σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $\{p_1, p'_1\} \cap \{p_2, p'_2\} = \emptyset$, τότε ο χρωματισμός του z_1 δεν εξαρτάται από τον χρωματισμό του z_2 υπό την έννοια ότι κάθε επιλογή είναι νόμιμη και διαχωρίζει τις δύο κορυφές.

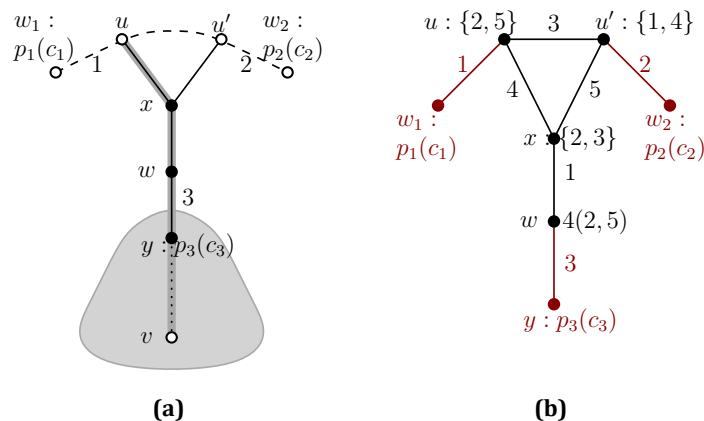
Έστω τώρα ότι το T είναι το δένδρο της **Εικόνας 14.3a**. Εφόσον η w έχει βαθμό 2 στο T , η κορυφή y έχει βαθμό 3 από την ιδιότητα σύμπτυξης και χρωματισμό $p_3(c_3)$. Ο χρωματισμός του G' επάγει έναν μερικό χρωματισμό του G (αναφερόμαστε στην **Εικόνα 14.6a**). Απομένει να τον επεκτείνουμε σε έναν AVD-ολικό χρωματισμό του G χρωματίζοντας κατάλληλα τα υπόλοιπα στοιχεία του G .

Χρωματίζουμε τις ακμές (u, u') , (u, x) , (u', x) και (x, w) με χρώματα 3, 4, 5 και 1 αντίστοιχα, και στην κορυφή w δίνουμε χρωματισμό 4(2, 5). Για την κορυφή u τα μόνα διαθέσιμα χρώματα είναι $\{2, 5\}$, για την κορυφή x τα χρώματα $\{2, 3\}$ και για την κορυφή u' τα χρώματα $\{1, 4\}$ (βλ. **Εικόνα 14.6b**). Σημειώνουμε ότι $\{1, 4\} \cap \{2, 5\} = \emptyset$ και $\{1, 4\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$, το οποίο σημαίνει ότι ο χρωματισμός της u' είναι ανεξάρτητος από τον χρωματισμό των γειτονικών της u και x . Συνεπώς, ξεκινώντας από την κορυφή u' υπάρχουν δύο πιθανοί χρωματισμοί 4(1) και 1(4). Εφόσον $p_2 \neq 4$, η u' δεν μπορεί να πάρει το χρωματισμό 4(1) αν και μόνο αν $c_2 = 1$. Όμως στην περίπτωση αυτή μπορούμε να επιλέξουμε το δεύτερο χρωματισμό 1(4), εφόσον $p_2 \neq c_2 = 1$ και $c_2 \neq 4$. Οπότε η u' χρωματίζεται πάντα. Τώρα για τις δύο άλλες κορυφές, υπάρχουν

δύο πιθανοί χρωματισμοί:

$$\begin{cases} u : 2(5) & \text{και} & x : 3(2) \\ u : 5(2) & \text{και} & x : 2(5) \end{cases}$$

Εξετάζοντας την κορυφή u , ο χρωματισμός $2(5)$ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αν και μόνο αν $p_1 = 2$ (εφόσον $c_1 \neq 5$). Ομως στην περίπτωση αυτή, ο δεύτερος χρωματισμός $5(2)$ είναι νόμιμος. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση ο χρωματισμός μπορεί να επεκταθεί σε ένα νόμιμο AVD-ολικό χρωματισμό του G .

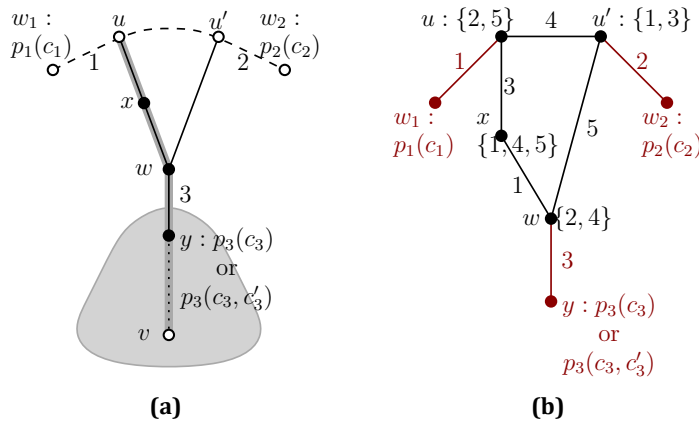


Εικόνα 14.6: Το G είναι το γενικευμένο Halin γράφημα με ραχοκοκκαλιά T , όπου το T είναι το δένδρο της **Εικόνας 14.3a**. (a) Ο μερικός χρωματισμός του G που προκύπτει από τον AVD-ολικό χρωματισμό του G' (b) Επέκταση του χρωματισμού του (a). Τα στοιχεία με κόκκινο χρώμα έχουν χρωματιστεί σύμφωνα με το G' , τα διαθέσιμα χρώματα για τις κορυφές εμφανίζονται μέσα σε αγκύλες.

Έστω τώρα ότι το T είναι το δένδρο της **Εικόνας 14.3b**. Στην **Εικόνα 14.7a** βλέπουμε τον μερικό χρωματισμό του G που επάγεται από τον χρωματισμό του G' .

Χρωματίζουμε τις ακμές (u, u') , (u, x) , (u', w) και (x, w) με χρώμα 4, 3, 5 και 1 αντίστοιχα. Για την κορυφή u τα μόνα διαθέσιμα χρώματα είναι $\{2, 5\}$, για την κορυφή u' τα χρώματα $\{1, 3\}$, για την κορυφή w τα χρώματα $\{2, 4\}$ και για την κορυφή x τα χρώματα $\{1, 4, 5\}$ (βλ. **Εικόνα 14.7b**). Εάν θεωρήσουμε μόνο τις κορυφές βαθμού 3, ο χρωματισμός της u εξαρτάται μόνο από το χρωματισμό της w_1 , ο χρωματισμός της u' από τον χρωματισμό της w_2 και ο χρωματισμός της w από τον χρωματισμό της y (λόγω του ότι τα σύνολα διαθέσιμων χρωμάτων στις αχρωμάτιστες γειτονικές κορυφές είναι ξένα μεταξύ τους). Συνεπώς, για την κορυφή u υπάρχουν δύο πιθανοί χρωματισμοί $2(5)$ και $5(2)$. Εφόσον $c_1 \neq 5$, η u δεν μπορεί να χρωματιστεί ως $2(5)$ αν και μόνο αν $p_1 = 2$. Όμως στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο χρωματισμό $5(2)$. Άρα, η u χρωματίζεται πάντα. Το ίδιο ισχύει για τις κορυφές u' , και w εάν η y έχει $d(y) = 3$. Ωστόσο, αν η y έχει βαθμό 2 με χρωματισμό $p_3(c_3, c'_3)$, τότε η w μπορεί πάντα να χρωματιστεί ως $4(2)$, αφού $p_3 \neq 4$ και οι δύο κορυφές έχουν διαφορετικό

βαθμό και συνεπώς διαφορετικά χρωματικά σύνολα. Η μόνη κορυφή που παραμένει αχρωμάτιστη είναι η x . Αφού η x έχει βαθμό 2 μπορεί πάντα να χρωματιστεί νόμιμα. Σε κάθε περίπτωση ο χρωματισμός επεκτείνεται σε έναν νόμιμο AVD-ολικό χρωματισμό του G .



Εικόνα 14.7: Το G είναι το γενικευμένο Halin γράφημα με ραχοκοκκαλιά T , όπου το T είναι το δένδρο της **Εικόνας 14.3b**. (a) Ο μερικός χρωματισμός του G που προκύπτει από τον AVD-ολικό χρωματισμό του G' (b) Επέκταση του χρωματισμού του (a).

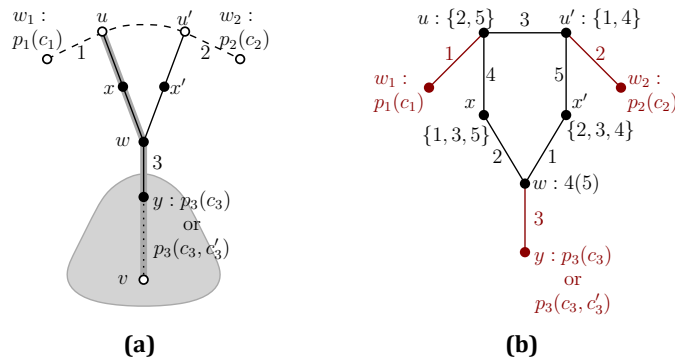
Εάν το T είναι το δένδρο της **Εικόνας 14.3c** τότε ο μερικός χρωματισμός του G που επάγεται από τον χρωματισμό του G' είναι όπως φαίνεται στην **Εικόνα 14.8a**.

Χρωματίζουμε όλες τις αχρωμάτιστες ακμές και την κορυφή w όπως φαίνεται στην **Εικόνα 14.8b**. Θεωρώντας μόνο τις κορυφές βαθμού 3, ο χρωματισμός της u εξαρτάται μόνο από τον χρωματισμό της w_1 και ο χρωματισμός της u' από τον χρωματισμό της w_2 . Έτσι, για την κορυφή u υπάρχουν δύο δυνατοί χρωματισμοί 4(2) και 2(4). Εφόσον $p_1 \neq 4$, η u δεν μπορεί να χρωματιστεί ως 4(2) αν και μόνο αν $c_1 = 2$. Όμως στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο χρωματισμό 2(4). Οπότε η u χρωματίζεται πάντα. Το ίδιο ισχύει για την κορυφή u' . Οι μόνες κορυφές που παραμένουν αχρωμάτιστες είναι οι κορυφές x και x' βαθμού 2. Γνωρίζουμε όμως ότι μπορούν πάντα να χρωματιστούν δίνοντας έναν νόμιμο AVD-ολικό χρωματισμό του G .

Για την επόμενη περίπτωση, έστω ότι το T είναι το δένδρο της **Εικόνας 14.3d** με αντίστοιχο μερικό χρωματισμό του G όπως στην **Εικόνα 14.9a**.

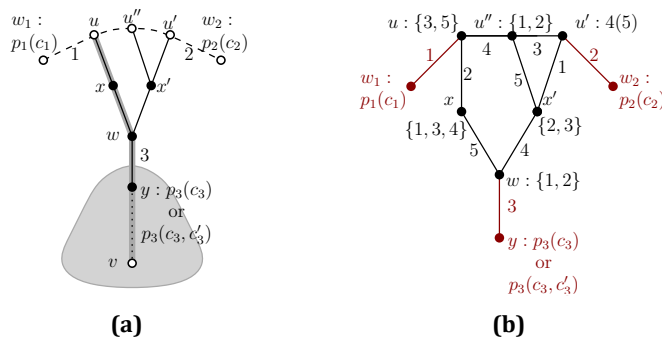
Χρωματίζουμε όλες τις αχρωμάτιστες ακμές και την κορυφή u' όπως φαίνεται στην **Εικόνα 14.9b**. Θεωρώντας μόνο τις κορυφές βαθμού 3, ο χρωματισμός της u εξαρτάται μόνο από τον χρωματισμό της w_1 και συνεπώς μπορούμε πάντα να βρούμε έναν νόμιμο χρωματισμό για την u . Για τις υπόλοιπες κορυφές βαθμού 3 έχουμε δύο δυνατούς χρωματισμούς :

$$\begin{cases} w : 1(2), & x'2(3) & \text{και} & u'' : 1(2) \\ w : 2(1), & x'3(2) & \text{και} & u'' : 2(1) \end{cases}$$



Εικόνα 14.8: Το G είναι το γενικευμένο Halin γράφημα με ραχοκοκκαλιά T , όπου το T είναι το δένδρο της **Εικόνας 14.3c**. (a) Ο μερικός χρωματισμός του G που προκύπτει από τον AVD-ολικό χρωματισμό του G' (b) Επέκταση του χρωματισμού του (a).

Εφόσον ο χρωματισμός της w μπορεί να καθοριστεί από τον χρωματισμό της y , ο χρωματισμός της x' και της u'' επίσης καθορίζεται. Ωστόσο, ο χρωματισμός της x' είναι ανεξάρτητος από τον χρωματισμό του τρίτου της γείτονα w_2 και ο χρωματισμός της u'' είναι επίσης ανεξάρτητος από τον χρωματισμό της w_2 και της u . Τέλος, η κορυφή x έχει βαθμό 2, οπότε μπορεί πάντα να χρωματιστεί δίνοντας έναν νόμιμο AVD-ολικό χρωματισμό του G .



Εικόνα 14.9: Το G είναι το γενικευμένο Halin γράφημα με ραχοκοκκαλιά T , όπου το T είναι το δένδρο της **Εικόνας 14.3d**. (a) Ο μερικός χρωματισμός του G που προκύπτει από τον AVD-ολικό χρωματισμό του G' (b) Επέκταση του χρωματισμού του (a).

Συνεχίζουμε με το T να είναι το δένδρο της **Εικόνας 14.3e**. Στην **Εικόνα 14.10a** βλέπουμε τον αντίστοιχο μερικό χρωματισμό του G .

Στις **Εικόνες 14.10b** και **14.10c** βλέπουμε δύο χρωματισμούς του G , όπου η κορυφή u έχει χρωματισμό 4(5) (υπενθυμίζουμε ότι $p_1 \neq 4$ και $c_1 \neq 5$):

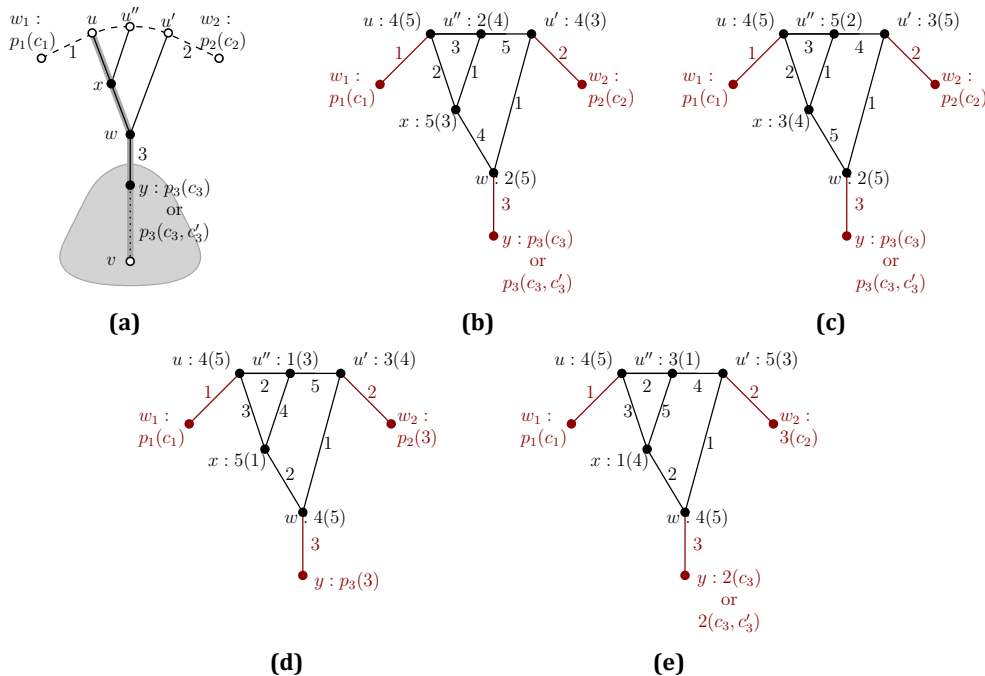
$$\begin{cases} u' : 4(3) & \text{και} & w : 2(5) \\ u' : 3(5) & \text{και} & w : 4(2) \end{cases}$$

Έστω ότι κανένας από τους παραπάνω χρωματισμούς δεν είναι νόμιμος, δηλαδή η u'

δεν διαχωρίζεται από την w_2 και/ή η w δεν διαχωρίζεται από την y . Θεωρούμε δύο υποπεριπτώσεις ανάλογα με το εάν το c_2 ισούται με 3 ή όχι.

- $c_2 = 3$: Στην περίπτωση αυτή ο πρώτος χρωματισμός δεν μπορεί να εφαρμοστεί καθώς η u' θα είχε το ίδιο χρωματικό σύνολο με την w_2 . Εάν, από την άλλη, χρησιμοποιήσουμε το χρωματισμό 3(5) για την u' , διαχωρίζεται από την w_2 εφόσον $p_2 \neq 3 = c_2$ και $c_2 \neq 5$. Υποθέτοντας ότι ούτε ο δεύτερος χρωματισμός δεν είναι νόμιμος, έπεται ότι η w δεν διαχωρίζεται από την y . Για την y ισχύει $p_3 \neq 4$, άρα η y είναι κορυφή βαθμού τρία με $c_3 = 2$.
- $c_2 \neq 3$: Στην περίπτωση αυτή ο πρώτος χρωματισμός διαχωρίζει την u' από την w_2 (αφού $p_2 \neq 4$), οπότε η w δεν διαχωρίζεται από την y . Αυτό μπορεί μόνο να συμβεί εάν $p_3 = 2$. Τότε όμως, ο δεύτερος χρωματισμός διαχωρίζει την w από την y . Συνεπώς η u' δεν μπορεί να χρωματιστεί ως 3(5) και είναι $p_2 = 3$.

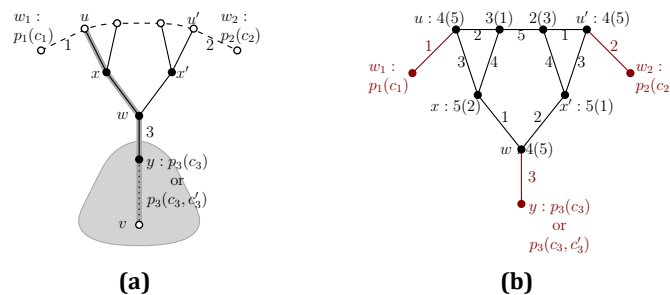
Από τα παραπάνω έπεται ότι οι δύο χρωματισμοί δεν είναι νόμιμοι αν (i) $c_2 = 3$ και η y είναι κορυφή βαθμού 3 με $c_3 = 2$, ή (ii) $p_2 = 3$ και $p_3 = 2$. Για την πρώτη περίπτωση, χρησιμοποιούμε τον χρωματισμό της **Εικόνας 14.10d** και για τη δεύτερη περίπτωση, το χρωματισμό της **Εικόνας 14.10e**. Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να πάρουμε έναν νόμιμο AVD-ολικό χρωματισμό του G .



Εικόνα 14.10: Το G είναι το γενικευμένο Halin γράφημα με ραχοκοκκαλιά T , όπου το T είναι το δένδρο της **Εικόνας 14.3e**. (a) Ο μερικός χρωματισμός του G που προκύπτει από τον AVD-ολικό χρωματισμό του G' (b-e) Επέκταση του χρωματισμού του (a).

Η περίπτωση που το T είναι το δένδρο της [Εικόνα 14.3f](#) είναι συμμετρικό με την περίπτωση της [Εικόνας 14.3d](#) και παραλείπεται. Τέλος, έστω ότι το T είναι το δένδρο της [Εικόνας 14.3g](#) με αντίστοιχο μερικό χρωματισμό του G όπως στην [Εικόνα 14.11a](#).

Στην [Εικόνα 14.11b](#) βλέπουμε έναν χρωματισμό του G όπου οι κορυφές u, u' και w έχουν χρωματισμό 4(5). Αυτός είναι προφανώς ένας νόμιμος AVD-ολικός χρωματισμός του G .



Εικόνα 14.11: Το G είναι το γενικευμένο Halin γράφημα με ραχοκοκκαλιά T , όπου το T είναι το δένδρο της [Εικόνας 5.3g](#). (a) Ο μερικός χρωματισμός του G που προκύπτει από τον AVD-ολικό χρωματισμό του G' (b) Επέκταση του χρωματισμού του (a).

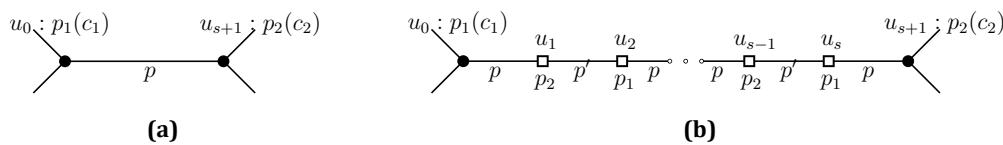
Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε αποδείξει το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 14.1. Έστω G ένα γενικευμένο Halin γράφημα με μέγιστο βαθμό 3 και ραχοκοκκαλιά T που ικανοποιεί την ιδιότητα σύμπτυξης. Τότε για τον AVD-ολικό χρωματικό αριθμό του G ισχύει $\chi''_a(G) = 5$.

Απομένει να επεκτείνουμε το [Λήμμα 14.1](#) σε γενικευμένα Halin γραφήματα G με ραχοκοκκαλιά T που δεν ικανοποιεί την ιδιότητα σύμπτυξης. Έστω T_C το συνεπτυγμένο δένδρο του T και G_C το γενικευμένο Halin γράφημα με ραχοκοκκαλιά T_C . Έστω $P = u_0, u_1, \dots, u_s, u_{s+1}$ ένα μονοπάτι του T με μήκος $s + 1$, όπου $s \geq 2$, τέτοιο ώστε όλες οι κορυφές του P να έχουν βαθμό 2 εκτός από τα άκρα του u_0 και u_{s+1} που μπορεί να έχουν βαθμό 1 ή 3. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν το s είναι άρτιο ή περιττό.

- $s \equiv 0 \pmod{2}$: στο T_C το P έχει συμπυχθεί σε μία μόνο ακμή (u_0, u_{s+1}) όπου οι κορυφές u_0 και u_{s+1} έχουν βαθμό 3 στο G_C . Έστω ότι υπάρχει ένας AVD-ολικός χρωματισμός του G_C με 5 χρώματα. Έστω p το χρώμα της ακμής (u_0, u_{s+1}) , $p_1(c_1)$ ο χρωματισμός της u_0 και $p_2(c_2)$ ο χρωματισμός της u_{s+1} , όπου $p \neq p_1, p_2, c_1, c_2$ (αναφερόμαστε στην [Εικόνα 14.12a](#)). Έστω p' ένα χρώμα διάφορο των p, p_1 και p_2 (το p' πάντα υπάρχει). Τότε αντικαθιστούμε την ακμή (u_0, u_{s+1}) με το μονοπάτι P χωρίς να τροποποιήσουμε τους χρωματισμούς των άκρων του: οι ακμές (u_0, u_1) και (u_s, u_{s+1}) έχουν χρώμα p . Χρωματίζουμε την κορυφή u_i με χρώμα p_1 αν το i είναι άρτιο και με χρώμα p_2 διαφορετικά για, $1 \leq i \leq s$. Για τις ακμές, χρωματίζουμε

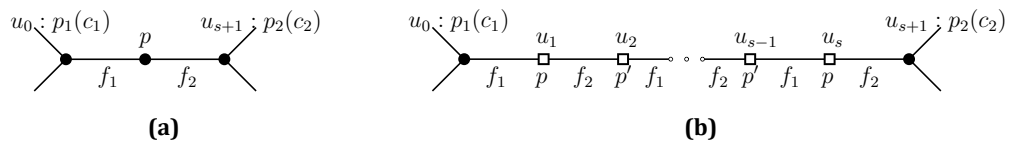
την (u_i, u_{i+1}) με το χρώμα p εάν το i είναι περιττό και με το χρώμα p' διαφορετικά, για $1 \leq i \leq s - 1$ (σημειώνουμε ότι η (u_{s-1}, u_s) έχει χρώμα p' , διαφορετικό από το χρώμα της (u_s, u_{s+1})). Ας θεωρήσουμε δύο γειτονικές κορυφές βαθμού 2 στο P . Οι ακμές τους έχουν χρώματα p και p' . Μία από τις δύο κορυφές έχει χρώμα p_1 και περιέχει το p_2 στο χρωματικό της σύνολο, ενώ η άλλη κορυφή έχει χρώμα p_2 και περιέχει το p_1 στο χρωματικό της σύνολο. Συνεπώς διαχωρίζονται. Οι κορυφές u_0 και u_{s+1} διαχωρίζονται επίσης από τις u_1 και u_s αντίστοιχα: η u_1 έχει χρώμα p_2 και η u_s χρώμα p_1 αφού το s είναι άρτιο. Επίσης έχουν διαφορετικούς βαθμούς και συνεπώς διαφορετικά χρωματικά σύνολα.



Εικόνα 14.12: Το μονοπάτι P έχει $s + 2$ κορυφές στο T με $s \equiv 0(mod2)$: (a) Χρωματισμός της ακμής (u_0, u_{s+1}) στο G_C , (b) Χρωματισμός του P στο G .

– $s \equiv 1(mod2)$: στο T_C το P έχει συμπτυχθεί στο μονοπάτι $P_C = u_0, u', u_{s+1}$, όπου η κορυφή u' έχει βαθμό 2 στο G_C και οι κορυφές u_0 και u_{s+1} έχουν βαθμό 3. Έστω ότι υπάρχει ένας AVD-ολικός χρωματισμός του G_C με 5 χρώματα. Έστω p το χρώμα της κορυφής u' , f_1 το χρώμα της ακμής (u_0, u') , f_2 το χρώμα της (u', u_{s+1}) , $p_1(c_1)$ ο χρωματισμός της κορυφής u_0 και $p_2(c_2)$ ο χρωματισμός της κορυφής u_{s+1} (αναφερόμαστε στην **Εικόνα 14.13a**). Έστω p' ένα χρώμα διάφορο των p, f_1 και f_2 (το p' πάντα υπάρχει). Τότε αντικαθιστούμε το μονοπάτι $P_C = u_0, u', u_{s+1}$ με το P χωρίς να τροποποιήσουμε τους χρωματισμούς των άκρων του: οι ακμές (u_0, u_1) και (u_s, u_{s+1}) έχουν χρώμα f_1 και f_2 αντίστοιχα. Χρωματίζουμε την κορυφή u_i με χρώμα p εάν το i είναι περιττό και με χρώμα p' διαφορετικά για, $1 \leq i \leq s$. Για τις ακμές, χρωματίζουμε την (u_i, u_{i+1}) με χρώμα f_1 εάν το i είναι άρτιο και με χρώμα f_2 διαφορετικά, για $1 \leq i \leq s - 1$ (σημειώνουμε ότι η (u_{s-1}, u_s) παίρνει χρώμα f_1 , που είναι διαφορετικό από το χρώμα της (u_s, u_{s+1})). Ας θεωρήσουμε δύο γειτονικές κορυφές βαθμού 2 στο P . Οι ακμές τους έχουν χρώματα f_1 και f_2 . Μία από τις δύο κορυφές έχει χρώμα p και περιέχει το p' στο χρωματικό της σύνολο, ενώ η άλλη κορυφή έχει χρώμα p' και περιέχει το p στο χρωματικό της σύνολο. Συνεπώς διαχωρίζονται. Οι κορυφές u_0 και u_{s+1} διαχωρίζονται επίσης από τις u_1 και u_s αντίστοιχα: η u_1 και η u_s έχουν χρώμα p αφού το s είναι περιττό. Επίσης έχουν διαφορετικούς βαθμούς και συνεπώς διαφορετικά χρωματικά σύνολα.

Τώρα μπορούμε ξεκινώντας από το T_C να επεκτείνουμε όλα τα συνεπτυγμένα μονοπάτια ένα προς ένα σύμφωνα με τους παραπάνω δύο κανόνες. Σε κάθε βήμα ένα νέο γενικευμένο Halin γράφημα κατασκευάζεται μαζί με ένα AVD-ολικό χρωματισμό με 5



Εικόνα 14.13: Το μονοπάτι P έχει $s + 2$ κορυφές στο T με $s \equiv 1 \pmod{2}$: (a) Χρωματισμός του μονοπατιού (u_0, u', u_{s+1}) στο G_C , (b) Χρωματισμός του P στο G .

χρώματα. Έχοντας επεκτείνει όλα τα μονοπάτια, το γράφημα που παίρνουμε είναι το G και συνεπώς το **Θεώρημα 14.1** ισχύει.

15 AVD-Ολικός Χρωματισμός 4-Κανονικών Γραφημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τον ολικό χρωματικό αριθμό με διαχωριζόμενες γειτονικές κορυφές των απλών 4-κανονικών γραφημάτων. Αποδεικνύουμε ότι 7 χρώματα επαρκούν για έναν AVD-ολικό χρωματισμό ενός 4-κανονικού γραφήματος, και συνεπώς ενισχύουμε την **Εικασία 11.1**. Θεωρούμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το εάν υπάρχει κύκλος Χάμιλτον στο αρχικό γράφημα ή όχι. Ουσιαστικά δεν είναι απαραίτητο να μελετήσουμε ξεχωριστά την περίπτωση των χαμιλτονιανών 4-κανονικών γραφημάτων, ωστόσο απλοποιεί την αλγοριθμική διαδικασία και βοηθά στην καλύτερη κατανόηση της γενικότερης περίπτωσης των μη-χαμιλτονιανών 4-κανονικών γραφημάτων.

15.1 Χαμιλτονιανά 4-Κανονικά Γραφήματα

Στην ενότητα αυτό αποδεικνύουμε ότι η **Εικασία 11.1** ισχύει για τα απλά χαμιλτονιανά 4-κανονικά γραφήματα. Ειδικότερα, αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 15.1. Έστω G ένα χαμιλτονιανό 4-κανονικό γράφημα με n κορυφές. Τότε $\chi_a''(G) \leq 7$.

Ο παρακάτω αλγόριθμος κατασκευάζει έναν AVD-ολικό χρωματισμό του G με 7 χρώματα:

Βήμα 1: παραγοντοποίηση του G

Έστω $G = HC \cup C$ όπου HC και C είναι η παραγοντοποίηση του G σε δύο 2-παράγοντες (HC είναι ο κύκλος Χάμιλτον του G). Για λόγους ευκολίας, θα αναφερόμαστε στον HC ως ο μπλε Χάμιλτον κύκλος, και στο C ως ο κόκκινος 2-παράγοντας του G . Έστω $C = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, $k \geq 1$. Διατάσσουμε τους κύκλους του C έτσι ώστε οι κύκλοι περιττής τάξης να εμφανίζονται πρώτα. Γράφουμε $C = C_{odd} \cup C_{even}$, όπου $C_{odd} = \{C_1^{odd}, \dots, C_{k_{odd}}^{odd}\}$ και $C_{even} = \{C_1^{even}, \dots, C_{k_{even}}^{even}\}$ είναι οι κύκλοι του C με περιττή και άρτια τάξη αντίστοιχα.

Βήμα 2: καθορισμός του πρόσημου των περιττών κύκλων

Για κάθε κύκλο $C_i^{odd} \in C_{odd}$ ορίζουμε το πρόσημό του $sign(C_i^{odd})$ ως εξής:

- Εάν $k_{odd} = |C_{odd}|$ είναι άρτιο, τότε $sign(C_i^{odd}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \equiv 1(mod 2) \\ -1 & \text{αν } i \equiv 0(mod 2) \end{cases}$, και
- εάν k_{odd} είναι περιττό τότε $sign(C_i^{odd}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \equiv 1(mod 2) \text{ ή } i = 2 \\ -1 & \text{αν } i \equiv 0(mod 2) \text{ και } i \neq 2 \end{cases}$

Μπορούμε να δούμε ότι αν το k_{odd} είναι άρτιο τότε το πλήθος των θετικών και αρνητικών προσήμων είναι ίσα, αλλά εάν το k_{odd} είναι περιττό, υπάρχουν τρία περισσότερα θετικά πρόσημα από ότι αρνητικά. Η μόνη περίπτωση που δεν ισχύει αυτό είναι για $k_{odd} = 1$, το οποίο εξετάζουμε ξεχωριστά ως ειδική περίπτωση.

Βήμα 3: επιλογή των αντιπροσώπων του C_{odd}

Το **Πόρισμα 11.1** εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός συνόλου $R = \{u_1, \dots, u_{k_{odd}}\}$ αντιπροσώπων του C_{odd} ώστε $u_i \in C_i^{odd}$ για κάθε $1 \leq i \leq k_{odd}$, και οι κορυφές του R να μην είναι διαδοχικές κατά μήκος του HC του G .

Βήμα 4: χρωματισμός του C_{even}

Στο βήμα αυτό αντιστοιχούμε τα χρώματα $\{1, 2, 3, 4\}$ σε όλες τις κορυφές και τις ακμές των άρτιων κύκλων C_j^{even} , για $1 \leq j \leq k_{even}$. Έστω n_j η τάξη του C_j^{even} όπου $C_j^{even} = (w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^{n_j}, w_j^1)$. Κατευθύνουμε τις ακμές $(w_j^1, w_j^2), (w_j^2, w_j^3), \dots, (w_j^{n_j}, w_j^1)$ του C_j^{even} ως $(\overrightarrow{w_j^1, w_j^2}), (\overrightarrow{w_j^2, w_j^3}), \dots, (\overrightarrow{w_j^{n_j}, w_j^1})$. Γενικά κάθε κορυφή θα έχει μία εισερχόμενη και μία εξερχόμενη ακμή. Με $\vec{e}(v)$ θα συμβολίζουμε την έξω-ακμή της κορυφής v . Χρωματίζουμε τις κορυφές με χρώματα 1 και 2:

$$c(w_j^s) = \begin{cases} 1 & \text{αν } s \equiv 1(mod 2) \\ 2 & \text{αν } s \equiv 0(mod 2) \end{cases}, s = 1, 2, \dots, n_j$$

και τις κατευθυνόμενες ακμές με χρώματα 3 και 4:

$$c(\vec{e}(w_j^s)) = \begin{cases} 3 & \text{αν } c(w_j^s) = 1 \\ 4 & \text{αν } c(w_j^s) = 2 \end{cases}, s = 1, 2, \dots, n_j$$

Ο χρωματισμός φαίνεται στην **Εικόνα 15.1a**, όπου οι κόκκινες ακμές απεικονίζονται διακεκομμένες. Σημειώνουμε ότι για κάθε κορυφή w_j^s τα χρώματα που αντιστοιχούν στην w_j^s και την έξω-ακμή της $\vec{e}(w_j^s)$ είναι και τα δύο άρτια ή περιττά. Αυτό θα μας επιτρέψει παρακάτω να εναλλάξουμε τα χρώματα της w_j^s και της $\vec{e}(w_j^s)$ έτσι ώστε το $C(w_j^s)$ και το $C(w_j^{s+1})$ να έχουν το ίδιο πλήθος άρτιων και περιττών στοιχείων με πριν.

Βήμα 5: χρωματισμός του C_{odd}

Έστω $C_i^{odd} = (u_i, w_i^1, w_i^2, \dots, w_i^{n_i}, u_i)$ όπου $n_i + 1$ είναι η τάξη του C_i^{odd} και u_i ο αντιπρόσωπος του C_i^{odd} . Αυτό το βήμα είναι παρόμοιο με το **Βήμα 4**, αλλά η κατεύθυνση των ακμών εξαρτάται από το πρόσημο $sign(C_i^{odd})$ που ορίστηκε στο **Βήμα 2**. Κατευθύνουμε τις ακμές $(u_i, w_i^1), (w_i^1, w_i^2), \dots, (w_i^{n_i}, u_i)$ του C_i^{odd} ως:

$$\begin{cases} \overrightarrow{(u_i, w_i^{n_i}), (w_i^{n_i}, w_i^{n_i-1}), \dots, (w_i^1, u_i)} & \text{αν } sign(C_i^{odd}) = 1 \\ \overrightarrow{(u_i, w_i^1), (w_i^1, w_i^2), \dots, (w_i^{n_i}, u_i)} & \text{αν } sign(C_i^{odd}) = -1 \end{cases}$$

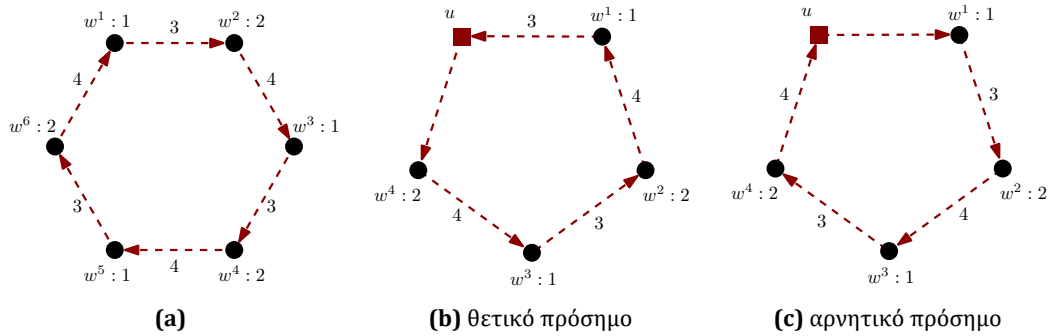
Χρωματίζουμε τις κορυφές με χρώματα 1 και 2:

$$c(w_i^s) = \begin{cases} 1 & \text{αν } s \equiv 1(mod 2) \\ 2 & \text{αν } s \equiv 0(mod 2) \end{cases}, s = 1, 2, \dots, n_i$$

και τις κατευθυνόμενες ακμές με χρώματα 3 και 4 (βλ. **Εικόνες 15.1b-15.1c**, όπου οι κόκκινοι αντιπρόσωποι απεικονίζονται ως κόκκινα τετράγωνα):

$$c(\vec{e}(w_i^s)) = \begin{cases} 3 & \text{αν } c(w_i^s) = 1 \\ 4 & \text{αν } c(w_i^s) = 2 \end{cases}, s = 1, 2, \dots, n_i.$$

Σημειώνουμε ότι τα μόνα στοιχεία που δεν έχουν χρώμα είναι οι αντιπρόσωποι u_i και οι έξω-ακμές τους $\vec{e}(u_i)$, για $1 \leq i \leq k_{odd}$. Επιπλέον για κάθε άλλη κορυφή w_i^s τα χρώματα που έχουν δοθεί στην w_i^s και την έξω-ακμή της $\vec{e}(w_i^s)$ είναι και τα δύο άρτια ή περιττά.



Εικόνα 15.1: (a) Χρωματισμός κόκκινου κύκλου με άρτια τάξη. (b)-(c) Χρωματισμός κόκκινου κύκλου με περιττή τάξη.

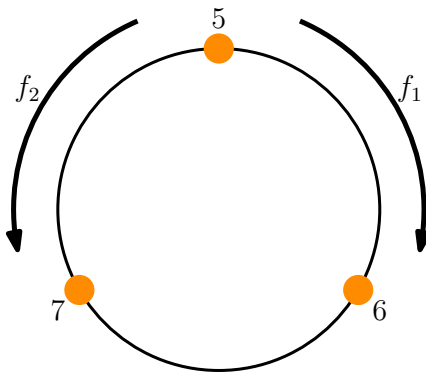
Βήμα 6: χρωματισμός των ακμών του HC

Έστω $HC = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ ο κύκλος Χάμιλτον του G , όπου $v_1 = u_1$ αν $C_{odd} \neq \emptyset$ (αν $C = C_{even}$, η v_1 μπορεί να είναι οποιαδήποτε κορυφή με $c(v_1) = 1$). Θα χρωματίσουμε τις ακμές του HC με τα χρώματα $\{5, 6, 7\}$. Έστω

$$S(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{αν } c(v_i) = 1 \text{ ή } v_i = u_j \in C_j^{odd} \text{ με } sign(C_j^{odd}) = 1 \\ 2 & \text{αν } c(v_i) = 2 \text{ ή } v_i = u_j \in C_j^{odd} \text{ με } sign(C_j^{odd}) = -1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση S μετατρέπει τον κύκλο Χάμιλτον σε μια ακολουθία από '1' και '2' μήκους n . Ας θεωρήσουμε τους αριθμούς (5, 6, 7) πάνω σε έναν κύκλο όπως στην **Εικόνα 15.2** και έστω $f_1(t)$ το επόμενο στοιχείο του t σύμφωνα με την ωρολογιακή φορά του κύκλου (π.χ. $f_1(5) = 6$), και $f_2(t)$ το επόμενο στοιχείο του t σύμφωνα με την αντιωρολογιακή φορά του κύκλου (π.χ. $f_2(5) = 7$). Επιλέγουμε αυθαίρετα το χρώμα της ακμής (v_1, v_2) , έστω $c(v_1, v_2) = 5$. Χρωματίζουμε την ακμή (v_i, v_{i+1}) για $i = 2, 3, \dots, n$, όπου $v_{n+1} = v_1$ ως εξής:

$$c(v_i, v_{i+1}) = f_{S(v_i)}(c(v_{i-1}, v_i))$$



Εικόνα 15.2: Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 .

Ισχυρισμός 1: Έχοντας χρωματίσει τις ακμές του HC , η τελευταία ακμή (v_n, v_1) έχει χρώμα $c(v_n, v_1) = 7$.

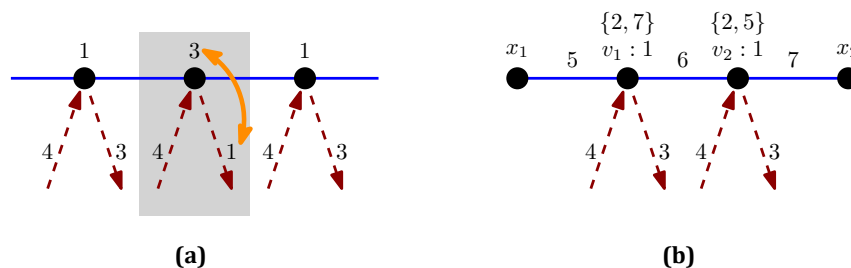
Απόδειξη. Πράγματι αν θέλουμε να βρούμε το χρώμα της ακμής (v_n, v_1) έχουμε ότι $c(v_n, v_1) = f_{S(v_n)}(c(v_{n-1}, v_n))$. Ομοίως $c(v_n, v_1) = f_{S(v_n)}(f_{S(v_{n-1})}(c(v_{n-2}, v_{n-1})))$ και τελικά

$$c(v_n, v_1) = f_{S(v_n)} \circ f_{S(v_{n-1})} \circ \dots \circ f_{S(v_2)}(c(v_1, v_2)).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το δεξί μέλος περιέχει το $f_{S(v_r)}$ για όλες τις κορυφές v_r εκτός από την v_1 . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν υπάρχει άρτιο ή περιττό πλήθος κύκλων στο \mathcal{C}_{odd} (όπως στο **Βήμα 2**). Αν $k_{odd} = |\mathcal{C}_{odd}|$ είναι άρτιο τότε το πλήθος των '1' στην ακολουθία της συνάρτησης S ισούται με το πλήθος των '2'. Έτσι η f_2 εφαρμόζεται μία φορά παραπάνω από την f_1 όταν υπολογίζουμε το $c(v_n, v_1)$ (αφού $sign(C_1^{odd}) = 1$). Από τον ορισμό των f_1 και f_2 έχουμε ότι $c(v_n, v_1) = f_2(c(v_1, v_2)) = f_2(5) = 7$. Αν $k_{odd} = |\mathcal{C}_{odd}|$ είναι περιττό τότε το πλήθος των '1' στην ακολουθία της συνάρτησης S ισούται με το πλήθος των '2' συν τρία. Έτσι η f_1 εφαρμόζεται δύο φορές παραπάνω από την f_2 όταν υπολογίζουμε το $c(v_n, v_1)$. Συνεπώς $c(v_n, v_1) = f_1 \circ f_1(c(v_1, v_2)) = f_2(c(v_1, v_2)) = 7$ όπως ισχυριστήκαμε. \square

Βήμα 7: τροποποίηση διαδοχικών κορυφών στο HC με το ίδιο χρώμα

Στο προηγούμενο βήμα είδαμε τις κορυφές του HC ως μια ακολουθία από '1' και '2'. Τροποποιούμε την ακολουθία κρατώντας μόνο το ψηφίο των χρωματισμένων κορυφών και αλλάζοντας το ψηφίο των αντιπροσώπων $\{u_1, u_2, \dots, u_{k_{\text{odd}}}\}$ σε '*'. Εάν έχουμε μια υπακολουθία από τουλάχιστον δύο ίδια ψηφία, έστω '1', αυτό σημαίνει ότι στον HC υπάρχουν γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα, το οποίο απαγορεύεται σε έναν AVD-ολικό χρωματισμό του G . Για κάθε μέγιστη τέτοια υπακολουθία (δηλαδή για μια υπακολουθία από '1' όπου τα ψηφία ακριβώς πριν και μετά να είναι '2' ή '*', ή για μια υπακολουθία από '2' όπου τα ψηφία ακριβώς πριν και μετά να είναι '1' ή '*'), επιλέγουμε κάθε δεύτερο στοιχείο της υπακολουθίας και ανταλλάσσουμε το χρώμα της κορυφής με το χρώμα της έξω-ακμής της (που ορίστηκε στο **Βήμα 4** και **Βήμα 5**). Για παράδειγμα στην **Εικόνα 15.3a**, βλέπουμε ένα τροποποιημένο μονοπάτι από τρεις διαδοχικές κορυφές με αρχικό χρώμα 1, όπου οι μπλε ακμές (δηλαδή οι ακμές του HC) έχουν απεικονιστεί ως συνεχείς γραμμές. Σημειώνουμε ότι τώρα η υπακολουθία αποτελείται από εναλλασσόμενα '1' και '3' (ή '2' και '4') και δεν υπάρχει ζευγάρι διαδοχικών ψηφίων που να είναι ίδια κατά μήκος της τροποποιημένης υπακολουθίας.



Εικόνα 15.3: (a) Η ανταλλαγή των χρωμάτων που περιγράφεται στο **Βήμα 7**. (b) Τα χρωματικά σύνολα διαδοχικών κορυφών με το ίδιο χρώμα κορυφής κατά μήκος του HC .

Βήμα 8: χρωματισμός των στοιχείων u_i και $\vec{e}(u_i)$

Τα μοναδικά στοιχεία που δεν έχουν χρωματιστεί είναι οι κορυφές u_i και οι έξω-ακμές τους $\vec{e}(u_i)$, για $1 \leq i \leq k_{\text{odd}}$. Έστω (w_i^s, u_i) η έξω-ακμή της u_i , όπου $s = 1$ ή n_i . Στην $\vec{e}(u_i)$ αντιστοιχούμε $c(\vec{e}(u_i)) = c(w_i^s)$, και το $c(u_i)$ είναι το μόνο χρώμα από το σύνολο $\{5, 6, 7\}$ που δεν χρησιμοποιήθηκε στο **Βήμα 6** για το χρωματισμό των προσκείμενων ακμών της u_i στον HC . Σημειώνουμε ότι οι μόνες κορυφές που έχουν και τα τρία χρώματα $\{5, 6, 7\}$ στο χρωματικό τους σύνολο είναι οι αντιπρόσωποι u_i .

Τώρα που όλα τα στοιχεία του G έχουν χρωματιστεί μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω:

Ισχυρισμός 2: Ο παραπάνω αλγόριθμος παράγει έναν AVD-ολικό χρωματισμό του G με 7 χρώματα.

Απόδειξη. Καταρχήν δείχνουμε ότι ο χρωματισμός c είναι ορθός ολικός χρωματισμός του G , δηλαδή ότι γειτονικά στοιχεία δεν έχουν το ίδιο χρώμα. Αυτό είναι προφανές για μια κορυφή και μία προσκείμενη σ' αυτήν ακμή, ή για δύο ακμές που προσπίπτουν στην ίδια κορυφή, ακόμα και μετά την εναλλαγή των χρωμάτων στο **Βήμα 7**. Επίσης, γειτονικές κορυφές ίδιου χρώματος θα μπορούσαν μόνο να βρίσκονται κατά μήκος του HC , όμως ακριβώς αυτές οι περιπτώσεις εξαλείφθηκαν στο **Βήμα 7**. Προκειμένου να έχουμε έναν AVD-ολικό χρωματισμό πρέπει να δείξουμε ότι γειτονικές κορυφές έχουν διαφορετικά χρωματικά σύνολα. Εξορισμού τα χρωματικά σύνολα περιέχουν 5 στοιχεία από το σύνολο $\{1, 2, \dots, 7\}$. Οι αντιπρόσωποι $\{u_1, \dots, u_{k_{\text{odd}}}\}$ είναι οι μόνες κορυφές με $\{5, 6, 7\} \subset C(u_i)$. Εφόσον δεν είναι γειτονικές κατά μήκος του HC (από το **Πόρισμα 11.1**) και ανήκουν σε διαφορετικούς κύκλους του C , δεν είναι γειτονικές στο G . Συνεπώς τα χρωματικά τους σύνολα είναι διαφορετικά από εκείνα των γειτονικών τους κορυφών. Τα χρωματικά σύνολα των υπολοίπων κορυφών περιέχουν ακριβώς τρία στοιχεία από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$ και δύο στοιχεία από το σύνολο $\{5, 6, 7\}$. Διακρίνουμε δύο τύπους κορυφών: η κορυφή v έχει τύπο (1) αν $\{1, 3\} \subset C(v)$, και η v έχει τύπο (2) αν $\{2, 4\} \subset C(v)$. Ουσιαστικά η v είναι τύπου (1) (ή τύπου (2)) εάν η v είχε χρώμα $c(v) = 1$ (ή $c(v) = 2$ αντίστοιχα) στο **Βήμα 4** και το **Βήμα 5**. Προφανώς δύο γειτονικές κορυφές διαφορετικού τύπου έχουν διαφορετικά χρωματικά σύνολα. Πρέπει να ελέγξουμε γειτονικές κορυφές ίδιου τύπου, έστω τις v_1 και v_2 . Σημειώνουμε ότι μπορεί να είναι γειτονικές μόνο στον HC (βλ. **Εικόνα 15.3b**). Έστω x_1 και x_2 ο άλλος γείτονας της v_1 και της v_2 αντίστοιχα στον HC . Χ.β.τ.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι v_1, v_2 είναι τύπου (1), και ότι η ακμή (x_1, v_1) χρωματίστηκε πρώτη στο **Βήμα 6** με χρώμα $c(x_1, v_1) = c_1$. Τότε $c(v_1, v_2) = f_1(c_1)$ και $c(v_2, x_2) = f_1 \circ f_1(c_1)$. Από τον ορισμό της f_1 έχουμε ότι $\{c_1, f_1(c_1), f_1 \circ f_1(c_1)\} = \{5, 6, 7\}$ που συνεπάγεται ότι τα $C(v_1)$ και $C(v_2)$ δεν γίνεται να περιέχουν τα ίδια στοιχεία του $\{5, 6, 7\}$, δηλαδή $C(v_1) \neq C(v_2)$. Το ίδιο ισχύει για δύο γειτονικές κορυφές τύπου (2) αποδεικνύοντας ότι ο παραπάνω αλγόριθμος πράγματι παράγει έναν AVD-ολικό χρωματισμό του G . \square

Ειδική περίπτωση: $k_{\text{odd}} = 1$

Στο **Βήμα 2** υποθέσαμε ότι το σύνολο C^{odd} έχει $k_{\text{odd}} \neq 1$ κύκλους, αφήνοντας την περίπτωση $k_{\text{odd}} = 1$ ως ειδική περίπτωση. Εάν $k_{\text{odd}} = 1$ το γράφημα G πρέπει να έχει περιττή τάξη. Έστω ότι $n \geq 7$ είναι περιττό (για $n = 5$, $G = K_5$ και είναι γνωστό από το [ZCL⁺05] ότι $\chi_a''(K_5) = 7$), και έστω u_1 ο αντιπρόσωπος του C_1^{odd} . Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο από το **Βήμα 1** έως το **Βήμα 5**. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει μία κορυφή w με χρώμα $c(w) = 2$ (που δόθηκε στο **Βήμα 4** ή το **Βήμα 5**) που δεν είναι γειτονική με την u_1 . Πράγματι αν δεν ισχύει αυτό τότε η u_1 είναι γειτονική με όλες τις κορυφές w με χρώμα $c(w) = 2$. Όμως στο **Βήμα 4** και το **Βήμα 5** το πλήθος των κορυφών με χρώμα 1 ισούται με το πλήθος των κορυφών με χρώμα 2. Επίσης η u_1 έχει έναν γείτονα με

χρώμα 1 στον κύκλο C_1^{odd} . Συνεπώς υπάρχουν ακριβώς τρεις κορυφές w με χρώμα 2 και το $n = 7$. Ανταλλάσσουμε τα χρώματα 1 και 2 καθώς και τα 3 και 4. Τώρα η u_1 έχει μόνο έναν γείτονα με χρώμα 2 και υπάρχει κορυφή w με χρώμα 2 που δεν είναι γειτονική με την u_1 . Έτσι η κορυφή w που ισχυριστήκαμε πάντα υπάρχει και συνεχίζουμε αφαιρώντας το χρώμα της.

Στην ακολουθία που παράγεται στο **Βήμα 6**, χειριζόμαστε την w ως αντιπρόσωπο ενός κύκλου με θετικό πρόσημο. Ο αλγόριθμος συνεχίζεται και στο **Βήμα 8**, δεν χρωματίζουμε την έξω-ακμή της w εφόσον έχει ήδη χρώμα. Ο **Ισχυρισμός 1** ισχύει καθώς το πλήθος των '1' στην ακολουθία του **Βήματος 6** ισούται με το πλήθος των '2' συν τρία. Το ίδιο και ο **Ισχυρισμός 2**, εφόσον οι κορυφές u_1 και w είναι οι μόνες κορυφές με χρωματικό σύνολο C που περιέχει και τα τρία χρώματα $\{5, 6, 7\}$ και δεν είναι γειτονικές στο G .

15.2 Μη-Χαμιλτονιανά 4-Κανονικά Γραφήματα

Είμαστε πλέον έτοιμοι να εξετάσουμε την περίπτωση των μη-χαμιλτονιανών 4-κανονικών γραφημάτων. Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 15.2. Έστω G ένα 4-κανονικό γράφημα με n κορυφές που δεν είναι χαμιλτονιανό. Τότε $\chi_a''(G) \leq 7$.

Ο παρακάτω αλγόριθμος κατασκευάζει έναν AVD-ολικό χρωματισμό του G με 7 χρώματα:

Σκοπός μας είναι να διαμερίσουμε τις κορυφές του G σε έξι τύπους χρωματικών συνόλων. Λέμε ότι η κορυφή v είναι τύπου

$$(1) \quad \text{αν } C(v) = \{1, 3, c_1, c_2, c_3\}, \text{ όπου } c_1 \in \{2, 4\}, \{c_2, c_3\} \subseteq \{5, 6, 7\}, \\ \text{και } c(v) \in \{1, 3\}$$

$$(2) \quad \text{αν } C(v) = \{2, 4, c_1, c_2, c_3\}, \text{ όπου } c_1 \in \{1, 3\}, \{c_2, c_3\} \subseteq \{5, 6, 7\}, \\ \text{και } c(v) \in \{2, 4\}$$

$$(1, 4) \quad \text{αν } C(v) = \{1, 2, 3, 4, c_1\}, \text{ όπου } c_1 \in \{5, 6, 7\} \text{ και } c(v) \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(u^{odd}) \quad \text{αν } C(v) = \{1, 3, 5, 6, 7\} \text{ και } c(v) \in \{5, 6, 7\}$$

$$(u^{even}) \quad \text{αν } C(v) = \{2, 4, 5, 6, 7\} \text{ και } c(v) \in \{5, 6, 7\}$$

$$(u^*) \quad \text{αν } C(v) = \{c_1, c_2, 5, 6, 7\}, \text{ όπου } c_1 \in \{1, 3\}, c_2 \in \{2, 4\}, \\ \text{και } c(v) \in \{5, 6, 7\}$$

Επίσης λέμε ότι η κορυφή v έχει τύπο (12) εάν η v είναι τύπου (1) ή (2), και έχει τύπο (u) εάν η v είναι τύπου (u^{odd}) , (u^{even}) ή (u^*) .

Βήμα 1: παραγοντοποίηση του G

Έστω $G = C^1 \cup C^2$ όπου C^1 και C^2 είναι δύο ξένοι μεταξύ τους 2-παράγοντες του G . Για συντομία θα αναφερόμαστε στα C^1 και C^2 ως οι κόκκινοι και μπλε 2-παράγοντες

και θα γράφουμε C^{red} και C^{blue} . Έστω $C^{red} = \{C_1^{red}, C_2^{red}, \dots, C_{k_{red}}^{red}\}$, και $C^{blue} = \{C_1^{blue}, C_2^{blue}, \dots, C_{k_{blue}}^{blue}\}$, με $k_{red}, k_{blue} \geq 2$. Λέμε ότι ένας κύκλος είναι κόκκινος ή μπλε εάν ανήκει στο C^{red} ή το C^{blue} αντίστοιχα.

Βήμα 2: επιλογή κόκκινων αντιπροσώπων

Για κάθε μπλε κύκλο του C^{blue} επιλέγουμε αυθαίρετα μία ακμή και την αφαιρούμε, μετατρέποντας τους μπλε κύκλους σε μπλε μονοπάτια. Ενώνουμε τα μπλε μονοπάτια σε έναν μπλε κύκλο Χάμιλτον με προσωρινές ακμές. Από το **Πόρισμα 11.2** υπάρχει ένα σύνολο από κόκκινους αντιπρόσωπους R^{red} τέτοιο ώστε $R^{red} = \{u_1^{red}, \dots, u_{k_{red}}^{red}\}$ και $u_i^{red} \in C_i^{red}$, $i = 1, \dots, k_{red}$. Οι κόκκινοι αντιπρόσωποι δεν είναι διαδοχικοί κατά μήκος του μπλε Χάμιλτον κύκλου (αλλά μπορεί να υπάρχουν γειτονικοί κόκκινοι αντιπρόσωποι από μία ακμή που αφαιρέσαμε).

Βήμα 3: προσωρινός χρωματισμός των κορυφών σύμφωνα με τους κόκκινους κύκλους

Αυτό το βήμα είναι παρόμοιο με το **Βήμα 4** και το **Βήμα 5** της προηγούμενης ενότητας. Πρώτα ορίζουμε το πρόσημο των κόκκινων κύκλων. Εφόσον μπορεί να υπάρχουν μόνο ζεύγη γειτονικών κόκκινων αντιπροσώπων, το υπογράφημα που επάγουν είναι διμερές. Συνεπώς μπορούμε να αναθέσουμε θετικά και αρνητικά πρόσημα στους κόκκινους αντιπρόσωπους, έτσι ώστε γειτονικοί αντιπρόσωποι να έχουν διαφορετικό πρόσημο. Θα αναφερόμαστε στο πρόσημο ενός κόκκινου κύκλου εννοώντας το πρόσημο του κόκκινου αντιπροσώπου του. Έστω $n_i + 1$ η τάξη του C_i^{red} και $C_i^{red} = (u_i^{red}, w_i^1, \dots, w_i^{n_i}, u_i^{red})$, όπου $u_i^{red} = w_i^0$ είναι ο κόκκινος αντιπρόσωπος του C_i^{red} .

Έστω ότι ο C_i^{red} είναι άρτιος κύκλος. Κατευθύνουμε τις ακμές $(u_i^{red}, w_i^1), (w_i^1, w_i^2), \dots, (w_i^{n_i}, u_i^{red})$ του C_i^{red} ως $\overrightarrow{(u_i^{red}, w_i^1)}, \overrightarrow{(w_i^1, w_i^2)}, \dots, \overrightarrow{(w_i^{n_i}, u_i^{red})}$. Χρωματίζουμε τις κορυφές με χρώματα 1 και 2:

$$c(w_i^s) = \begin{cases} 1 & \text{αν } s \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2 & \text{αν } s \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}, s = 0, 1, 2, \dots, n_i$$

Τέλος μαρκάρουμε τον κόκκινο αντιπρόσωπο u_i^{red} εάν το πρόσημο του C_i^{red} είναι αρνητικό. Ο χρωματισμός φαίνεται στην **Εικόνα 15.4a**.

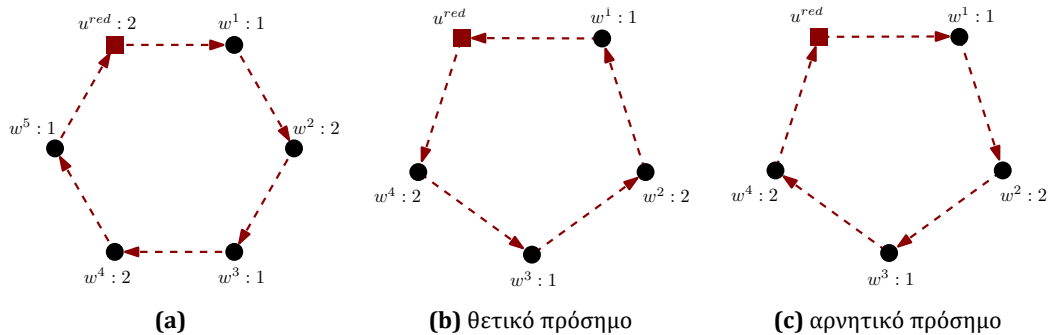
Τώρα έστω ότι ο C_i^{red} είναι περιττός κύκλος τάξης $n_i + 1$. Κατευθύνουμε τις ακμές $(u_i^{red}, w_i^1), (w_i^1, w_i^2), \dots, (w_i^{n_i}, u_i^{red})$ του C_i^{red} ως:

$$\begin{cases} \overrightarrow{(u_i^{red}, w_i^{n_i}), (w_i^{n_i}, w_i^{n_i-1}), \dots, (w_i^1, u_i^{red})} & \text{αν } \text{sign}(C_i^{red}) = 1 \\ \overrightarrow{(u_i^{red}, w_i^1), (w_i^1, w_i^2), \dots, (w_i^{n_i}, u_i^{red})} & \text{αν } \text{sign}(C_i^{red}) = -1 \end{cases}$$

Χρωματίζουμε τις κορυφές με χρώματα 1 και 2 (βλ. **Εικόνες 15.4b-15.4c**):

$$c(w_i^s) = \begin{cases} 1 & \text{αν } s \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2 & \text{αν } s \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}, s = 1, 2, \dots, n_i.$$

Σημειώνουμε ότι οι μόνες κορυφές που δεν έχουν χρωματιστεί είναι οι αντιπρόσωποι των κόκκινων κύκλων.

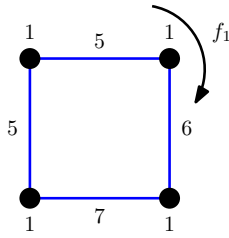


Εικόνα 15.4: (a) Προσωρινός χρωματισμός των κορυφών ενός κόκκινου κύκλου άρτιας τάξης. (b)-(c) Προσωρινός χρωματισμός των κορυφών ενός κόκκινου κύκλου περιττής τάξης.

Βήμα 4: διαχωρισμός των μπλε κύκλων

Εάν προσπαθήσουμε να χρωματίσουμε τους μπλε κύκλους χρησιμοποιώντας τα χρώματα $\{5, 6, 7\}$, διαπιστώνουμε ότι η προσέγγιση του Βήματος 6 της Ενότητας 15.1 δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Για παράδειγμα, εάν το μήκος ενός μπλε κύκλου είναι ισούπόλοιπο $1 \pmod{3}$, και κάθε κορυφή έχει το ίδιο προσωρινό χρώμα, τότε θα υπάρχουν δύο διαδοχικές μπλε ακμές με το ίδιο χρώμα στο $\{5, 6, 7\}$ (βλ. Εικόνα 15.5). Ωστόσο, εάν ένας μπλε κύκλος έχει τουλάχιστον κάποιο συγκεκριμένο πλήθος από κορυφές τύπου (u) (υπενθυμίζουμε ότι οι κορυφές τύπου (u) έχουν χρώμα από το $\{5, 6, 7\}$), τότε μπορεί πάντα να χρωματιστεί ώστε δύο γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά υποσύνολα του $\{5, 6, 7\}$ στα χρωματικά τους σύνολα. Στην Εικόνα 15.6 βλέπουμε την ύπαρξη έγκυρων χρωματισμών για μπλε κύκλους, στην περίπτωση που περιέχουν το απαιτούμενο πλήθος κόκκινων αντιπροσώπων ανάλογα με το ισούπόλοιπο του μήκους τους $(\pmod{3})$ (οι ακμές των μπλε κύκλων απεικονίζονται με συνεχείς ευθείες). Σημειώνουμε ότι στους χρωματισμούς αυτούς, εάν υπάρχει κάποιος άλλος κόκκινος αντιπρόσωπος (που δεν είναι γειτονικός με τους αντιπρόσωπους που ήδη απεικονίζονται στην Εικόνα 15.6), τότε μπορεί να πάρει το μοναδικό χρώμα από το $\{5, 6, 7\}$ που δεν έχει χρησιμοποιηθεί για τις προσπίπτουσες ακμές του. Το πρόβλημα είναι ότι δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε κάθε μπλε κύκλος να έχει το απαιτούμενο πλήθος κορυφών τύπου (u) , δηλαδή κόκκινων αντιπροσώπων.

Θέλουμε κάθε μπλε κύκλος να έχει ένα συγκεκριμένο πλήθος αντιπροσώπων ανάλογα με το ισούπόλοιπο του μήκους του $(\pmod{3})$. Έτσι στο Βήμα 5 θα επιλέξουμε κάποιες επιπλέον κορυφές, διαφορετικές από τους κόκκινους αντιπροσώπους, που θα αποκαλούμε μπλε αντιπρόσωπους, ώστε να το επιτύχουμε. Έχοντας επιλέξει τους κόκκινους αντιπροσώπους διαχωρίζουμε τους μπλε κύκλους σε δύο σύνολα $\mathcal{C}^{blue} = \mathcal{C}^{blue}_{good} \cup$



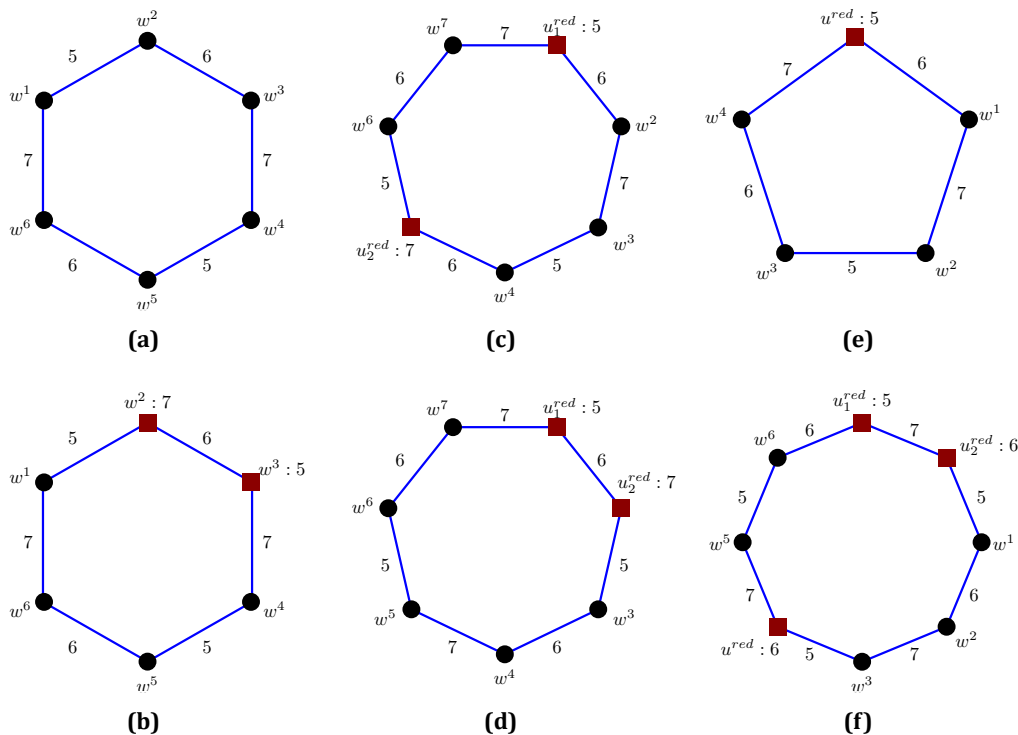
Εικόνα 15.5: Ο χρωματισμός ενός μπλε κύκλου δεν είναι πάντα άμεσος.

C_{bad}^{blue} . Το σύνολο C_{good}^{blue} αποτελείται από τους μπλε κύκλους που περιέχουν το απαραίτητο πλήθος αντιπροσώπων, και το C_{bad}^{blue} αποτελείται από τους μπλε κύκλους όπου χρειάζονται μπλε αντιπρόσωποι. Έστω $C^{blue} \in C^{blue}$ ένας μπλε κύκλος. Εάν ο C^{blue} έχει δύο μη γειτονικούς κόκκινους αντιπροσώπους, τότε $C^{blue} \in C_{good}^{blue}$. Εάν ο C^{blue} έχει ακριβώς δύο κόκκινους αντιπροσώπους που είναι γειτονικοί, τότε $C^{blue} \in C_{good}^{blue}$ εκτός αν το μήκος του C^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $2(mod 3)$. Εάν ο C^{blue} έχει έναν κόκκινο αντιπρόσωπο, τότε $C^{blue} \in C_{good}^{blue}$, εκτός αν το μήκος του C^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $1(mod 3)$. Εάν ο C^{blue} δεν περιέχει κόκκινους αντιπροσώπους, τότε $C^{blue} \in C_{good}^{blue}$, αν και μόνο αν το μήκος του C^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $0(mod 3)$, με μία μόνο εξαίρεση: αν ένας μπλε κύκλος C^{blue} έχει μήκος ισοϋπόλοιπο με $3(mod 6)$, χωρίς κόκκινους αντιπροσώπους και κάθε κορυφή έχει το ίδιο προσωρινό χρώμα, τότε $C^{blue} \in C_{bad}^{blue}$.

Βήμα 5: επιλογή των μπλε αντιπροσώπων

Θέλουμε να επιλέξουμε μπλε αντιπρόσωπους για τους κακούς μπλε κύκλους C_{bad}^{blue} ως εξής:

- Εάν ο $C^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ έχει μήκος ισοϋπόλοιπο με $2(mod 3)$ με δύο γειτονικούς κόκκινους αντιπρόσωπους χρειαζόμαστε έναν επιπλέον μπλε αντιπρόσωπο (δηλαδή διαφορετικό από τους κόκκινους αντιπροσώπους).
- Εάν ο $C^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ έχει μήκος ισοϋπόλοιπο με $2(mod 3)$ χωρίς κανέναν κόκκινο αντιπρόσωπο χρειαζόμαστε έναν επιπλέον μπλε αντιπρόσωπο.
- Εάν ο $C^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ έχει μήκος ισοϋπόλοιπο με $1(mod 3)$ με έναν κόκκινο αντιπρόσωπο χρειαζόμαστε έναν επιπλέον μπλε αντιπρόσωπο.
- Εάν ο $C^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ έχει μήκος ισοϋπόλοιπο με $1(mod 3)$ χωρίς κανέναν κόκκινο αντιπρόσωπο χρειαζόμαστε δύο επιπλέον μπλε αντιπροσώπους.
- Εάν ο $C^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ έχει μήκος ισοϋπόλοιπο με $3(mod 6)$ χωρίς κανέναν κόκκινο αντιπρόσωπο και κάθε κορυφή έχει το ίδιο προσωρινό χρώμα από το **Βήμα 3** χρειαζόμαστε έναν επιπλέον μπλε αντιπρόσωπο.



Εικόνα 15.6: Έγκυροι χρωματισμοί για έναν μπλε κύκλο με μήκος ισουπόλοιπο με: (a)-(b) $0 \pmod{3}$, (c)-(d) $1 \pmod{3}$ και (e)-(f) $2 \pmod{3}$.

Σκοπός μας είναι να τροποποιήσουμε τους μπλε κύκλους έτσι ώστε να εφαρμόσουμε το **Πόρισμα 11.2** με έναν κόκκινο Χάμιλτον κύκλο. Στην πραγματικότητα, θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι οι μπλε αντιπρόσωποι αποτελούν έναν σύνολο ανεξάρτητων κορυφών στο G . Επίσης, θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι δεν είναι γειτονικοί με κόκκινους αντιπρόσωπους κατά μήκος ενός μπλε κύκλου. Ωστόσο, αυτές οι απαιτήσεις δεν μπορεί να ικανοποιούνται πάντα. Ας θεωρήσουμε έναν μπλε C_4 με έναν κόκκινο αντιπρόσωπο. Για το **Πόρισμα 11.2** χρειαζόμαστε μια τριάδα από υποψήφιες κορυφές για κάθε μπλε αντιπρόσωπο. Στην περίπτωση αυτή, δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι ο μπλε αντιπρόσωπος δεν θα είναι γειτονικός με τον κόκκινο αντιπρόσωπο του C_4 . Περιπτώσεις σαν κι αυτή θα εξεταστούν ξεχωριστά.

- Έστω ότι για τον $C_j^{blue} \in \mathcal{C}_{bad}^{blue}$ χρειαζόμαστε έναν μπλε αντιπρόσωπο.
 - Εάν ο C_j^{blue} έχει δύο κόκκινους αντιπρόσωπους, τότε ο C_j^{blue} έχει μήκος ισουπόλοιπο με $2 \pmod{3}$. Έστω $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \dots, w_j^t, u_{i_1}^{red})$ με $t \equiv 0 \pmod{3}$, $t \geq 9$. Θεωρούμε το $C_j^* = \{w_j^2, w_j^5, w_j^8, \dots, w_j^{t-1}\}$, δηλαδή το C_j^* περιέχει μόνο τις κορυφές w_j^s για $s \equiv 2 \pmod{3}$ (το σύνολο C_j^* είναι το τροποποιημένο σύνολο που αναφέραμε προηγουμένως, το οποίο χρειαζόμαστε για να εφαρμόσουμε το **Πόρισμα 11.2**). Οι περιπτώσεις $t = 3, 6$ θα εξεταστούν ξεχωριστά.

- Εάν ο C_j^{blue} έχει έναν κόκκινο αντιπρόσωπο, τότε το μήκος του είναι ισούπόλοιπο με $1(mod3)$. Έστω $C_j^{blue} = (u_i^{red}, w_j^1, \dots, w_j^t, u_i^{red})$ με $t \equiv 0(mod3)$. Για $t \geq 6$, θεωρούμε το $C_j^* = \{w_j^2, \dots, w_j^{t-1}\}$. Η περίπτωση $t = 3$ θα εξεταστεί ξεχωριστά.
- Εάν ο C_j^{blue} δεν έχει κανένα κόκκινο αντιπρόσωπο τότε ο C_j^{blue} έχει μήκος ισούπόλοιπο με $2(mod3)$ ή $3(mod6)$, και θεωρούμε το $C_j^* = V(C_j^{blue})$.
- Έστω τώρα ότι για τον $C_j^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ χρειαζόμαστε δύο μπλε αντιπροσώπους. Στην περίπτωση αυτή το μήκος του C_j^{blue} είναι ισούπόλοιπο με $1(mod3)$ και ο C_j^{blue} δεν έχει κόκκινο αντιπρόσωπο. Έστω $C_j^{blue} = (w_j^1, \dots, w_j^t, w_j^1)$ με $t \equiv 1(mod3)$. Εάν $t \geq 10$, θεωρούμε δύο σύνολα, ένα για κάθε μπλε αντιπρόσωπο που χρειαζόμαστε: $C_j^* = \{w_j^1, w_j^2, w_j^3\}$ και $C_j^{*'} = \{w_j^5, w_j^6, w_j^7\}$. Ο λόγος που παίρνουμε μόνο ένα τμήμα του μπλε κύκλου είναι ότι δεν θέλουμε οι μπλε αντιπρόσωποι να είναι γειτονικοί κατά μήκος του μπλε κύκλου ούτε με μπλε ούτε με κόκκινο αντιπρόσωπο. Εάν $t = 4, 7$ θεωρούμε το $C_j^* = V(C_j^{blue})$. Σημειώνουμε ότι, για τις δύο αυτές περιπτώσεις, μπορούμε να επιλέξουμε ακριβώς έναν από τους δύο μπλε αντιπροσώπους που χρειάζονται, έτσι θα εξεταστούν χωριστά για την επιλογή του δεύτερου μπλε αντιπρόσωπου.

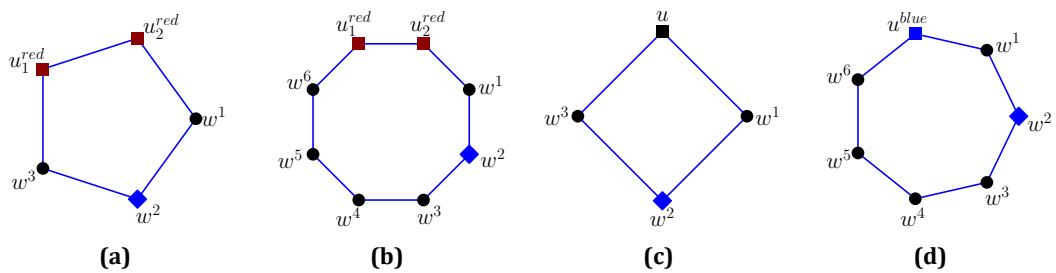
Τέλος παίρνουμε ένα σύνολο που περιέχει όλες τις κορυφές που δεν ανήκουν στα σύνολα C^* ή $C^{*'}$, το οποίο συμβολίζουμε με \tilde{C}^* . Σημειώνουμε ότι το \tilde{C}^* περιέχει κόκκινους αντιπροσώπους και τις γειτονικές τους κορυφές στους μπλε κύκλους. Επίσης, δεν μας ενδιαφέρει ο μπλε αντιπρόσωπος του \tilde{C}^* που δίνεται από το **Πόρισμα 11.2**.

Τώρα πρέπει να μετατρέψουμε τους κόκκινους κύκλους σε Χάμιλτον κύκλο. Για κάθε κόκκινο κύκλο C_i^{red} επιλέγουμε μια ακμή που προσπίπτει στον κόκκινο αντιπρόσωπό του u_i^{red} . Αφαιρούμε αυτές τις ακμές και δημιουργούμε έναν κόκκινο Χάμιλτον κύκλο (όπως κάναμε στο **Βήμα 2** για τον μπλε Χάμιλτον κύκλο). Από το **Πόρισμα 11.2** μπορούμε να επιλέξουμε αντιπροσώπους για κάθε σύνολο C^* ή $C^{*'}$, έτσι ώστε να μην είναι διαδοχικοί στον κόκκινο Χάμιλτον κύκλο. Σημειώνουμε ότι δεν υπάρχουν γειτονικοί μπλε αντιπρόσωποι σε καμία από τις ακμές που αφαιρέσαμε, καθώς στην περίπτωση αυτή ένας από αυτούς θα ήταν αντιπρόσωπος του \tilde{C}^* , τον οποίο αγνοούμε. Έτσι οι μπλε αντιπρόσωποι είναι ανεξάρτητες κορυφές και ένας μπλε αντιπρόσωπος μπορεί μόνο να είναι γειτονικός με έναν κόκκινο αντιπρόσωπο σε έναν κόκκινο κύκλο.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, μπορεί να μην έχουμε πάρει όλους τους μπλε αντιπροσώπους που χρειαζόμαστε. Συγκεκριμένα, χρειαζόμαστε ακόμα έναν μπλε αντιπρόσωπο για τους εξής μπλε κύκλους: μπλε C_5 με δύο γειτονικούς κόκκινους αντιπροσώπους, μπλε C_8 με δύο γειτονικούς κόκκινους αντιπροσώπους, μπλε C_4 με έναν αντιπρόσωπο (κόκκινο ή μπλε), και μπλε C_7 με έναν μπλε αντιπρόσωπο. Στις περιπτώσεις αυτές θα “αναγκάσουμε” κάποιες κορυφές ως επιπλέον μπλε αντιπροσώπους και θα

τους αποκαλούμε βεβιασμένους (μπλε) αντιπροσώπους \tilde{u} . Οι τέσσερις περιπτώσεις φαίνονται στην **Εικόνα 15.7**, όπου οι μπλε αντιπρόσωποι απεικονίζονται ως μπλε τετράγωνα και οι βεβιασμένοι αντιπρόσωποι απεικονίζονται ως ρόμβοι. Συγκεκριμένα,

- Εάν ο C_j^{blue} έχει δύο κόκκινους αντιπροσώπους και $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, w_j^2, w_j^3, u_{i_1}^{red})$ (δηλαδή $t = 3$), παίρνουμε $\tilde{u} = w_j^2$ (βλ. **Εικόνα 15.7a**)
- Εάν ο C_j^{blue} έχει δύο κόκκινους αντιπροσώπους και $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^6, u_{i_1}^{red})$ (δηλαδή $t = 6$), παίρνουμε $\tilde{u} = w_j^2$ (βλ. **Εικόνα 15.7b**)
- Εάν ο $C_i^{blue} = (u_i^{red}, w_j^1, w_j^2, w_j^3, u_i^{red})$ έχει έναν κόκκινο αντιπρόσωπο ($t = 3$), τότε παίρνουμε $\tilde{u} = w_j^2$ (βλ. **Εικόνα 15.7c**)
- Εάν ο $C_j^{blue} = (w_j^1, \dots, w_j^t, w_j^1)$ έχει μήκος ισούπόλοιπο με $1(mod3)$ με $t = 4, 7$ και χωρίς κόκκινο αντιπρόσωπο, από το **Πόρισμα 11.2** υπάρχει ένας μπλε αντιπρόσωπος, έστω u^{blue} . Αν $C_j^{blue} = (u^{blue}, w_j^1, w_j^2, w_j^3, u^{blue})$, παίρνουμε $\tilde{u} = w_j^2$ και αν $C_j^{blue} = (u^{blue}, w_j^1, \dots, w_j^6, u^{blue})$, παίρνουμε $\tilde{u} = w_j^2$ (βλ. **Εικόνες 15.7c-15.7d**).



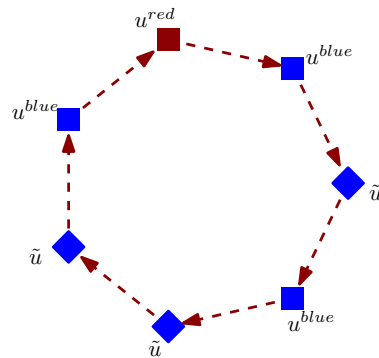
Εικόνα 15.7: (a)-(d) Επιλογή των βεβιασμένων αντιπροσώπων.

Στο εξής, θα αναφερόμαστε στις κορυφές που δεν είναι αντιπρόσωποι ως απλές κορυφές, και στους μη βεβιασμένους μπλε αντιπροσώπους ως απλοί μπλε αντιπρόσωποι, ενώ ο όρος μπλε αντιπρόσωποι θα συμπεριλαμβάνει απλούς και βεβιασμένους αντιπροσώπους.

Σημειώνουμε ότι έχουμε επιλέξει όλους τους μπλε αντιπρόσωπους που χρειαζόμαστε με τέτοιο τρόπο ώστε ένας μπλε αντιπρόσωπος να μην είναι γειτονικός με άλλο αντιπρόσωπο σε μπλε κύκλο. Ωστόσο, σε έναν κόκκινο κύκλο όλες οι κορυφές μπορεί να είναι αντιπρόσωποι όπως φαίνεται στην **Εικόνα 15.8**. Και πάλι, για κάθε ζεύγος γειτονικών μπλε αντιπροσώπων, τουλάχιστον ένας από αυτούς είναι βεβιασμένος.

Βήμα 6: μαρκάρισμα μερικών απλών κορυφών

Αυτό το βήμα είναι παρόμοιο με το **Βήμα 7** της προηγούμενης ενότητας. Μπορούμε να θεωρήσουμε τις κορυφές ενός μπλε κύκλου ως μία ακολουθία όπου το ψηφίο κάθε απλής κορυφής είναι το προσωρινό χρώμα της κορυφής και το ψηφίο κάθε αντιπρόσωπου είναι ένας αστερίσκος '*'. Εάν έχουμε μια υπακολουθία από τουλάχιστον δύο



Εικόνα 15.8: Ένας κόκκινος κύκλος όπου κάθε κορυφή είναι αντιπρόσωπος.

ίδια ψηφία, έστω $'1'$, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα, το οποίο απαγορεύεται σε έναν AVD-ολικό χρωματισμό του G . Για κάθε μέγιστη τέτοια υπακολουθία (δηλαδή μια υπακολουθία από $'1'$ τέτοια ώστε τα ψηφία ακριβώς πριν και μετά την υπακολουθία να είναι $'2'$ ή $'*'$, ή μια υπακολουθία από $'2'$ όπου τα ψηφία ακριβώς πριν και μετά την υπακολουθία να είναι $'1'$ ή $'*'$), επιλέγουμε κάθε δεύτερο στοιχείο της υπακολουθίας και μαρκάρουμε την κορυφή. Ειδικότερα, έστω ότι έχουμε έναν μπλε κύκλο C^{blue} , στον οποίο όλες οι κορυφές έχουν το ίδιο προσωρινό χρώμα και ο C^{blue} δεν έχει αντιπρόσωπο. Τότε, το μήκος του C^{blue} είναι ισοπλόιο με $0 \pmod{6}$ και ο C^{blue} είναι ένας άρτιος κύκλος. Από μία κορυφή του C^{blue} μπορούμε να επιλέξουμε κάθε δεύτερη κορυφή του κύκλου και να τη μαρκάρουμε. Οι μαρκαρισμένες κορυφές θα ανταλλάξουν το χρώμα τους με το χρώμα της έξω-ακμής τους στο επόμενο βήμα. Οι μόνες άλλες κορυφές που έχουν μαρκαριστεί μέχρι στιγμής είναι οι κόκκινοι αντιπρόσωποι που αντιστοιχούν σε κόκκινους κύκλους με άρτια τάξη και αρνητικό πρόσημο (όπως είδαμε στο **Βήμα 3**).

Βήμα 7: χρωματισμός των κόκκινων κύκλων

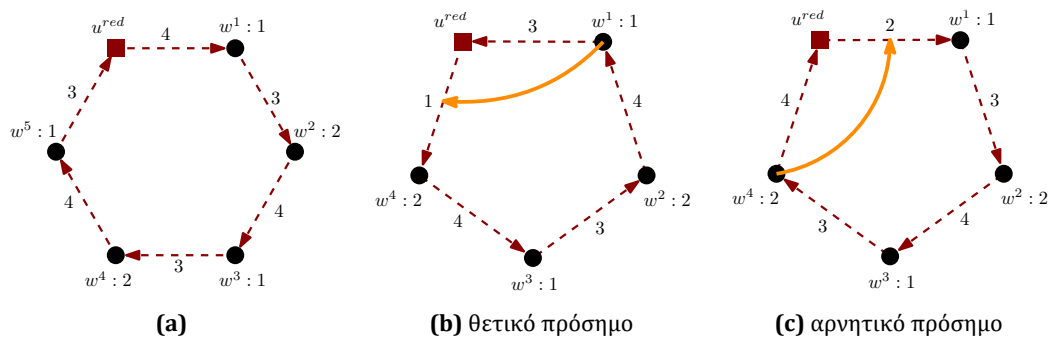
Στο βήμα αυτό αντιστοιχούμε τα χρώματα $\{1, 2, 3, 4\}$ σε όλες τις ακμές και τις απλές κορυφές των κόκκινων κύκλων. Έστω $n_i + 1$ η τάξη ενός κόκκινου κύκλου C_i^{red} , όπου $C_i^{red} = (u_i^{red}, w_i^1, \dots, w_i^{n_i}, u_i^{red})$ και u_i^{red} είναι ο κόκκινος αντιπρόσωπος του C_i^{red} . Υπάρχουν γενικά δύο περιπτώσεις: ο C_i^{red} περιέχει τουλάχιστον μία απλή κορυφή ή ο C_i^{red} είναι ένας κύκλος από αντιπροσώπους, δηλαδή κάθε κορυφή του είναι αντιπρόσωπος (όπως στην **Εικόνα 15.8**). Στο **Βήμα 3** κατευθύνουμε τις κόκκινες ακμές και χρωμάτισαμε προσωρινά όλες τις κορυφές των κόκκινων κύκλων εκτός από τους κόκκινους αντιπρόσωπους των περιττών κύκλων. Επίσης στο **Βήμα 3** και το **Βήμα 6** μαρκάραμε ορισμένες κορυφές.

Για κάθε κορυφή v με προσωρινό χρώμα $c(v)$, έστω $\overrightarrow{vv'}$ η κόκκινη έξω-ακμή της.

Χρωματίζουμε

$$c(\overrightarrow{vv'}) = \begin{cases} 3 & \text{αν } c(v) = 1 \\ 4 & \text{αν } c(v) = 2 \end{cases}$$

Ο χρωματισμός φαίνεται στην **Εικόνα 15.9**. Για κάθε μαρκαρισμένη κορυφή ανταλλάσσουμε το χρώμα της κορυφής με το χρώμα της έξω-ακμής της. Με αυτή τη διαδικασία, απλές κορυφές που είναι γειτονικές σε έναν μπλε κύκλο έχουν διαφορετικό χρώμα. Οι μόνες κορυφές χωρίς προσωρινό χρώμα είναι οι αντιπρόσωποι των κόκκινων κύκλων περιττής τάξης. Έτσι, οι μόνες κόκκινες ακμές που δεν έχουν χρωματιστεί είναι οι έξω-ακμές τους. Έστω u_i^{red} ένας τέτοιος κόκκινος αντιπρόσωπος (δηλαδή αντιπρόσωπος ενός κόκκινου κύκλου περιττής τάξης) με έξω-ακμή $\vec{e}(u_i^{red}) = (u_i^{red}, w_i^s)$, και έστω $\vec{e}(w_i^{s'}) = (w_i^{s'}, u_i^{red})$ η έσω-ακμή του. Χρωματίζουμε $c(\vec{e}(u_i^{red})) = c(w_i^{s'})$. Σημειώνουμε ότι αν η u_i^{red} έχει θετικό πρόσημο, τότε οι προσπίπτουσες κόκκινες ακμές της έχουν χρώματα 1 και 3, και αν έχει αρνητικό πρόσημο, τότε οι προσπίπτουσες κόκκινες ακμές της έχουν χρώματα 2 και 4.



Εικόνα 15.9: (a) Χρωματισμός ενός κόκκινου κύκλου άρτιας τάξης. (b)-(c) Χρωματισμός ενός κόκκινου κύκλου περιττής τάξης.

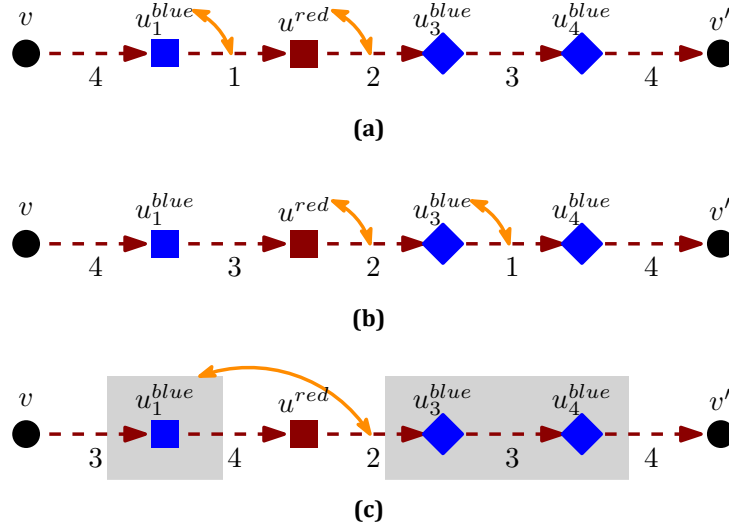
Πριν συνεχίσουμε πρέπει να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις. Οι απλές κορυφές είναι τύπου (12): τύπου (1) αν το προσωρινό χρώμα που ανατέθηκε στο **Βήμα 3** ήταν 1, και τύπου (2) αν το προσωρινό χρώμα ήταν 2. Οι κόκκινοι αντιπρόσωποι των περιττών κόκκινων κύκλων είναι τύπου (u^{odd}) ή (u^{even}), αν ο κύκλος τους έχει θετικό ή αρνητικό πρόσημο αντίστοιχα. Οι κόκκινοι αντιπρόσωποι των άρτιων κόκκινων κύκλων, ειδικότερα, είναι τύπου (u^*): το χρωματικό σύνολο ενός τέτοιου αντιπροσώπου περιέχει τα υποσύνολα $\{4, 1\}$ ή $\{4, 3\}$ του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ (οι αντιπρόσωποι έχουν μόνο δύο χρώματα από το $\{1, 2, 3, 4\}$ στο χρωματικό τους σύνολο) αν έχει θετικό πρόσημο, και τα υποσύνολα $\{2, 1\}$ ή $\{2, 3\}$ αν έχει αρνητικό πρόσημο (δηλαδή είχε μαρκαριστεί στο **Βήμα 3**). Σημειώνουμε ότι αν υπάρχουν δύο γειτονικοί (κατά μήκος ενός μπλε κύκλου) κόκκινοι αντιπρόσωποι άρτιων κόκκινων κύκλων, τα χρώματα που δόθηκαν στις κόκκινες ακμές τους δεν μπορεί να είναι ίδια, καθώς έχουν διαφορετικά

πρόσημα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει ένα μέγιστο μονοπάτι από γειτονικούς αντιπροσώπους κατά μήκος ενός κόκκινου κύκλου. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που το μονοπάτι δεν περιέχει τον κόκκινο αντιπρόσωπο, δηλαδή έχουμε το μονοπάτι $v, u_1^{blue}, u_2^{blue}, \dots, u_s^{blue}, v'$, όπου οι κορυφές v, v' είναι απλές κορυφές. Έστω $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Μαρκάρουμε τις κορυφές u_t^{blue} για κάθε $t \equiv i, i + 1 \pmod{4}$, και ανταλλάσσουμε το προσωρινό χρώμα των μαρκαρισμένων μπλε αντιπροσώπων με το χρώμα των κόκκινων έξω-ακμών τους. Προφανώς υπάρχουν τέσσερις δυνατοί χρωματισμοί για το μονοπάτι, ανάλογα με την τιμή του i . Αν η κορυφή v δεν ήταν μαρκαρισμένη στο **Βήμα 6**, τότε κρατάμε έναν από τους χρωματισμούς για $i = 1$ or 2 , και αν η v ήταν μαρκαρισμένη, τότε κρατάμε έναν από τους χρωματισμούς για $i = 0$ ή 3 .

Αν το μονοπάτι αυτό περιέχει τον κόκκινο αντιπρόσωπο του κόκκινου κύκλου, τότε το μονοπάτι μπορεί να γραφεί ως $v, u_1^{blue}, u_2^{blue}, \dots, u_{s'-1}^{blue}, u^{red}, u_{s'+1}^{blue}, \dots, u_s^{blue}, v'$ (όπου οι v, v' είναι απλές κορυφές). Έστω ότι ο κόκκινος κύκλος είναι άρτιας τάξης. Η προηγούμενη μέθοδος περιγράφει δύο διαφορετικούς έγκυρους χρωματισμούς για το μονοπάτι, χωρίς όμως να λαμβάνει υπόψιν το πρόσημο της u^{red} . Αν ο κόκκινος αντιπρόσωπος είναι μαρκαρισμένος (μη μαρκαρισμένος) από την προηγούμενη μέθοδο, ο u^{red} θα περιέχει το χρώμα 2 (χρώμα 4 αντίστοιχα) στο χρωματικό του σύνολο. Υπενθυμίζουμε ότι θέλουμε το χρώμα 2 στο χρωματικό σύνολο ενός κόκκινου αντιπρόσωπου που έχει αρνητικό πρόσημο και το χρώμα 4 στο χρωματικό σύνολο ενός κόκκινου αντιπρόσωπου που έχει θετικό πρόσημο. Συνεπώς, η παρακάτω περίπτωση μπορεί να συμβεί: η u^{red} έχει θετικό (αρνητικό) πρόσημο και είναι μαρκαρισμένη (μη μαρκαρισμένη αντίστοιχα) και στους δύο έγκυρους χρωματισμούς του μονοπατιού. Για παράδειγμα, στις **Εικόνες 15.10a-15.10b**, βλέπουμε τους δύο έγκυρους χρωματισμούς στην περίπτωση που η κορυφή v δεν μαρκαρίστηκε στο **Βήμα 3** και $s' \equiv 2 \pmod{4}$ (σημειώνουμε ότι η u^{red} είναι μαρκαρισμένη και στους δύο χρωματισμούς). Ωστόσο, το χρωματικό σύνολο τη κορυφής u^{red} είναι διαφορετικό στους δύο έγκυρους χρωματισμούς (εφόσον η προηγούμενη κορυφή της $u_{s'-1}^{blue}$ στο μονοπάτι είναι μαρκαρισμένη μόνο σε έναν από τους δύο χρωματισμούς). Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει επιλογή στον χρωματισμό των μονοπατιών που εξετάζουμε, έτσι ώστε δύο γειτονικοί κόκκινοι αντιπρόσωποι σε έναν μπλε κύκλο να έχουν διαφορετικό χρωματικό σύνολο. Εάν η u^{red} είναι αντιπρόσωπος ενός περιττού κόκκινου κύκλου, πρώτα χρωματίζουμε το μονοπάτι $u_1^{blue}, \dots, u_{s'-1}^{blue}$ με την παραπάνω μέθοδο και ανάλογα με το αν η v είναι μαρκαρισμένη. Τότε, αν η ακμή $(u_{s'-1}^{blue}, u^{red})$ έχει χρώμα 1 ή 2, χρωματίζουμε το μονοπάτι $u_{s'+1}^{blue}, \dots, u_s^{blue}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο και θεωρώντας την u^{red} ως μη μαρκαρισμένη κορυφή (διαφορετικά, δηλαδή αν η ακμή $(u_{s'-1}^{blue}, u^{red})$ έχει χρώμα 3 ή 4, θεωρούμε την u^{red} ως μαρκαρισμένη κορυφή), βλ. **Εικόνα 15.10c**. Έχοντας χρωματίσει τα δύο μονοπάτια, χρωματίζουμε την ακμή

$\overrightarrow{(u^{red}, u_{s'+1}^{blue})}$ με $c(\overrightarrow{(u^{red}, u_{s'+1}^{blue})}) = c(u_{s'-1}^{blue})$. Σημειώνουμε ότι όλοι οι μπλε αντιπρόσωποι είναι τύπου (u^*) και δύο γειτονικοί αντιπρόσωποι έχουν διαφορετικά χρωματικά σύνολα.



Εικόνα 15.10: Χρωματισμός ενός μονοπατιού από διαδοχικούς αντιπροσώπους: (a)-(b) σε έναν άρτιο κόκκινο κύκλο (ο κόκκινος αντιπρόσωπος περιέχεται στο μονοπάτι), και (c) σε έναν περιττό κόκκινο κύκλο.

Η μόνη περίπτωση που απομένει είναι όλες οι κορυφές του κόκκινου κύκλου C_j^{red} να είναι αντιπρόσωποι. Οπότε έστω $C_j^{red} = (u_j^{red}, u_1^{blue}, \dots, u_{n_j}^{blue}, u_j^{red})$, με κατευθυνόμενες ακμές $\overrightarrow{(u_j^{red}, u_1^{blue})}, \overrightarrow{(u_1^{blue}, u_2^{blue})}, \dots, \overrightarrow{(u_{n_j}^{blue}, u_j^{red})}$. Θεωρούμε τέσσερις υποπεριπτώσεις ανάλογα με την τιμή του n_j ισοϋπόλοιπο με $3(mod 4)$.

- Εάν $n_j \equiv 3(mod 4)$, τότε ο C_j^{red} είναι ένας άρτιος κύκλος. Αν ο κόκκινος αντιπρόσωπος u_j^{red} έχει θετικό πρόσημο, χρωματίζουμε τις κατευθυνόμενες ακμές ως εξής:

$$c(\overrightarrow{(u_s^{blue}, u_{s+1}^{blue})}) = \begin{cases} 3 & \text{αν } s \equiv 1(mod 4) \\ 2 & \text{αν } s \equiv 2(mod 4) \\ 1 & \text{αν } s \equiv 3(mod 4) \\ 4 & \text{αν } s \equiv 0(mod 4) \end{cases}, \text{ for } s = 0, 1, \dots, n_j,$$

όπου $u_j^{red} = u_0^{blue} = u_{n_j+1}^{blue}$. Σημειώνουμε ότι οι προσκείμενες ακμές του u_j^{red} παίρνουν τα χρώματα $\{4, 1\}$ (βλ. **Εικόνα 15.11a**). Αν ο κόκκινος αντιπρόσωπος u_j^{red} έχει αρνητικό πρόσημο ανταλλάσσουμε τα χρώματα 2 και 4 του προηγούμενου χρωματισμού, και οι προσκείμενες ακμές του u_j^{red} παίρνουν τα χρώματα $\{2, 1\}$. Όλες οι κορυφές είναι τύπου (u^*) .

- Εάν $n_j \equiv 2(\text{mod}4)$, τότε ο C_j^{red} είναι ένας περιττός κύκλος. Αν ο u_j^{red} έχει θετικό πρόσημο χρωματίζουμε τις κατευθυνόμενες ακμές ως εξής (βλ. **Εικόνα 15.11b**):

$$\overrightarrow{c(u_s^{\text{blue}}, u_{s+1}^{\text{blue}})} = \begin{cases} 1 & \text{αν } s \equiv 0(\text{mod}4) \\ 2 & \text{αν } s \equiv 1(\text{mod}4) \\ 3 & \text{αν } s \equiv 2(\text{mod}4) \\ 4 & \text{αν } s \equiv 3(\text{mod}4) \end{cases}, \text{ for } s = 0, 1, \dots, n_j,$$

όπου $u_j^{\text{red}} = u_0^{\text{blue}} = u_{n_j+1}^{\text{blue}}$. Αν ο u_j^{red} έχει αρνητικό πρόσημο ανταλλάσσουμε τα χρώματα 1 και 3 με τα 2 και 4 αντίστοιχα. Όλοι οι μπλε αντιπρόσωποι είναι τύπου (u^*). Ο κόκκινος αντιπρόσωπος είναι τύπου (u^{odd}) ή (u^{even}) αν έχει θετικό ή αρνητικό πρόσημο αντίστοιχα.

- Εάν $n_j \equiv 1(\text{mod}4)$, τότε ο C_j^{red} είναι ένας άρτιος κύκλος. Αν ο κόκκινος αντιπρόσωπος u_j^{red} έχει θετικό πρόσημο χρωματίζουμε τις κατευθυνόμενες ακμές ως εξής:

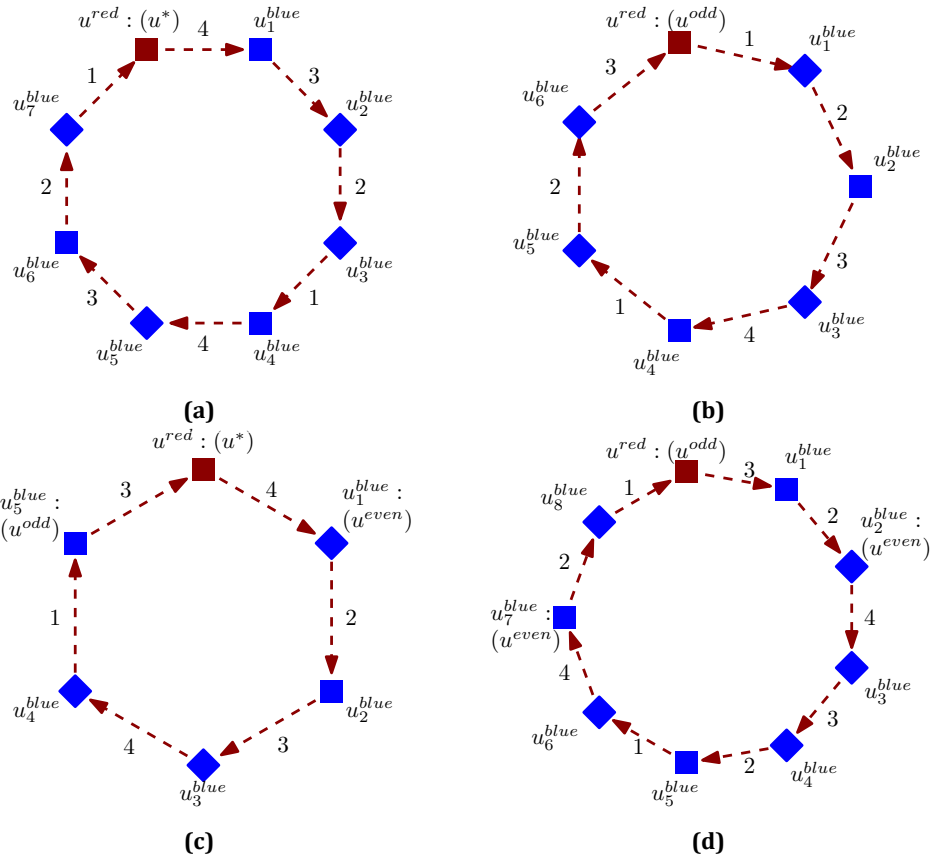
$$\overrightarrow{c(u_s^{\text{blue}}, u_{s+1}^{\text{blue}})} = \begin{cases} 2 & \text{αν } s \equiv 1(\text{mod}4) \\ 3 & \text{αν } s \equiv 2(\text{mod}4) \\ 4 & \text{αν } s \equiv 3(\text{mod}4) \\ 1 & \text{αν } s \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}, \text{ for } s = 1, \dots, n_j - 1,$$

και $\overrightarrow{c(u_{n_j}^{\text{blue}}, u_j^{\text{red}})} = 3$, $\overrightarrow{c(u_j^{\text{red}}, u_1^{\text{blue}})} = 4$ (βλ. **Εικόνα 15.11c**). Η κορυφή u_1^{blue} είναι τύπου (u^{even}), η $u_{n_j}^{\text{blue}}$ τύπου (u^{odd}) και όλες οι άλλες κορυφές είναι τύπου (u^*). Σημειώνουμε ότι οι προσκείμενες ακμές του u_j^{red} παίρνουν τα χρώματα $\{4, 3\}$. Αν ο κόκκινος αντιπρόσωπος u_j^{red} έχει αρνητικό πρόσημο ανταλλάσσουμε τα χρώματα 2 και 4 του προηγούμενου χρωματισμού, και οι προσκείμενες ακμές του u_j^{red} παίρνουν τα χρώματα $\{2, 3\}$.

- Εάν $n_j \equiv 0(\text{mod}4)$, $n_j \neq 4$, τότε ο C_j^{red} είναι ένας περιττός κύκλος. Αν ο u_j^{red} έχει θετικό πρόσημο χρωματίζουμε τις κατευθυνόμενες ακμές ως εξής:

$$\overrightarrow{c(u_s^{\text{blue}}, u_{s+1}^{\text{blue}})} = \begin{cases} 1 & \text{αν } s \equiv 1(\text{mod}4) \\ 4 & \text{αν } s \equiv 2(\text{mod}4) \\ 3 & \text{αν } s \equiv 3(\text{mod}4) \\ 2 & \text{αν } s \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}, \text{ for } s = 2, \dots, n_j - 2,$$

και $\overrightarrow{c(u_{n_j-1}^{\text{blue}}, u_{n_j}^{\text{blue}})} = 2$, $\overrightarrow{c(u_{n_j}^{\text{blue}}, u_j^{\text{red}})} = 1$, $\overrightarrow{c(u_j^{\text{red}}, u_1^{\text{blue}})} = 3$, $\overrightarrow{c(u_1^{\text{blue}}, u_2^{\text{blue}})} = 2$ (βλ. **Εικόνα 15.11d**). Αν ο u_j^{red} έχει αρνητικό πρόσημο ανταλλάσσουμε τα χρώματα 1 και 3 με τα 2 και 4 αντίστοιχα. Αν ο κόκκινος αντιπρόσωπος έχει θετικό (ή αρνητικό) πρόσημο, ο κόκκινος αντιπρόσωπος είναι τύπου (u^{odd}) (ή (u^{even}) αντίστοιχα), οι κορυφές $u_2^{\text{blue}}, u_{n_j-1}^{\text{blue}}$ είναι τύπου (u^{even}) (ή (u^{odd}) αντίστοιχα), και όλες οι άλλες κορυφές είναι τύπου (u^*).



Εικόνα 15.11: Χρωματισμός ενός κόκκινου κύκλου με $n_j + 1$ κορυφές, όπου κάθε κορυφή είναι αντιπρόσωπος: (a) $n_j \equiv 3 \pmod{4}$, (b) $n_j \equiv 2 \pmod{4}$, (c) $n_j \equiv 1 \pmod{4}$, (d) $n_j \equiv 0 \pmod{4}$.

Τέλος, έστω ότι $n_j = 4$, δηλαδή $C_j^{red} = C_5 = (u_j^{red}, u_1^{blue}, u_2^{blue}, u_3^{blue}, u_4^{blue}, u_j^{red})$. Εάν δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε τον παραπάνω χρωματισμό, τότε οι κορυφές u_2^{blue} και u_3^{blue} θα έχουν το ίδιο χρωματικό σύνολο. Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο βεβιασμένοι μπλε αντιπρόσωποι. Θέλουμε να επιλέξουμε έναν από τους δύο ώστε να γίνει τύπου (1, 4) καθώς και έναν από τους γείτονές του στον μπλε κύκλο που ανήκει να είναι τύπου (1, 4), έτσι ώστε να μην υπάρχουν γειτονικές κορυφές τύπου (1, 4) σε έναν κόκκινο κύκλο. Η ύπαρξη μιας κορυφής τύπου (1, 4), θα μας επιτρέψει να βρούμε έναν κατάλληλο χρωματισμό για τον κόκκινο C_5 .

Ισχυρισμός 1: Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε τις κορυφές τύπου (1, 4) έτσι ώστε ανά δύο να μην είναι γειτονικές κατά μήκος ενός κόκκινου κύκλου.

Απόδειξη. Για κάθε κόκκινο κύκλο $C_j^{red} = C_5$ με όλες τις κορυφές να είναι αντιπρόσωποι, θέλουμε να επιλέξουμε έναν βεβιασμένο αντιπρόσωπο \tilde{u}^{blue} του C_j^{red} και έναν γείτονά του \tilde{u}^{blue} στον μπλε κύκλο που ανήκει, έστω τον $v(\tilde{u}^{blue})$, να είναι τύπου (1, 4). Εφόσον οι C_5 κύκλοι που εξετάζουμε είναι διαφορετικοί δεν μπορεί να υπάρχει κόκ-

κινη ακμή που να προσπίπτει σε δύο από τους επιλεγμένους βεβιασμένους αντιπροσώπους \tilde{u}^{blue} . Επιπλέον σε έναν μπλε κύκλο, ένας βεβιασμένος αντιπρόσωπος \tilde{u} έχει μόνο γείτονες που δεν είναι αντιπρόσωποι, έτσι ο $v(\tilde{u})$ δεν μπορεί να ανήκει σε κανένα από τους C_5 κύκλους που εξετάζουμε, δηλαδή δεν υπάρχει κόκκινη ακμή που να συνδέει μια κορυφή \tilde{u} σε μία άλλη κορυφή $v(\tilde{u}')$. Συνεπώς μόνο οι κορυφές $v(\tilde{u}^{blue})$ μπορεί να είναι γειτονικές κατά μήκος ενός κόκκινου κύκλου. Για κάθε κόκκινο C_5 που εξετάζουμε υπάρχουν τουλάχιστον δύο βεβιασμένοι αντιπρόσωποι \tilde{u}^{blue} που μπορούμε να επιλέξουμε, και για κάθε βεβιασμένο αντιπρόσωπο δύο γείτονες $v(\tilde{u}^{blue})$. Εφόσον κάθε μπλε κύκλος έχει το πολύ έναν βεβιασμένο αντιπρόσωπο όλες οι γειτονικές κορυφές $v(\tilde{u}^{blue})$ για όλους τους βεβιασμένους αντιπροσώπους \tilde{u}^{blue} είναι διαφορετικές και δεν είναι γειτονικές ανά δύο σε μπλε κύκλο. Άρα για κάθε κόκκινο κύκλο C_5 που εξετάζουμε υπάρχουν τέσσερις επιλογές για την κορυφή $v(\tilde{u}^{blue})$. Σημειώνουμε ότι η κορυφή $v(\tilde{u}^{blue})$ δεν μπορεί να είναι αντιπρόσωπος από τον ορισμό των βεβιασμένων αντιπροσώπων. Ας θεωρήσουμε το υπογράφημα H που επάγεται από τις κορυφές $v(\tilde{u}^{blue})$. Είναι προφανές ότι υπάρχουν μόνο κόκκινες ακμές μεταξύ τους. Επιπλέον, δεν μπορεί να υπάρχει κόκκινος κύκλος, εφόσον κάθε κόκκινος κύκλος έχει έναν κόκκινο αντιπρόσωπο. Προσθέτουμε αυθαίρετα ακμές στο H ώστε να δημιουργήσουμε έναν κόκκινο Χάμιλτον κύκλο και θεωρούμε κάθε 4-άδα των $v(\tilde{u}^{blue})$. Εφαρμόζοντας το **Πόρισμα 11.2** εξασφαλίζουμε ότι υπάρχουν αντιπρόσωποι των 4-άδων που δεν είναι γειτονικοί κατά μήκος του Χάμιλτον κύκλου. Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε μια κορυφή $v(\tilde{u}^{blue})$ για κάθε C_5 που εξετάζουμε, έτσι ώστε οι κορυφές $v(\tilde{u}^{blue})$ να μην είναι γειτονικές σε κόκκινο κύκλο του G . \square

Χ.β.τ.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κορυφή u_1^{blue} ή η u_2^{blue} είναι τύπου $(1, 4)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το χρώμα του γείτονα της u_1^{blue} (ή της u_2^{blue} αντίστοιχα), έστω τον $v(u^{blue})$ που είναι τύπου $(1, 4)$.

- Εάν $c(v(u^{blue})) = 1$ ή 3 και ο κόκκινος αντιπρόσωπος u_j^{red} έχει θετικό πρόσημο, χρωματίζουμε τις ακμές του C_j^{red} ως εξής:

$$\begin{cases} c(u_j^{red}, u_1^{blue}) = 3 \\ c(u_1^{blue}, u_2^{blue}) = 1 \\ c(u_2^{blue}, u_3^{blue}) = 3 \\ c(u_3^{blue}, u_4^{blue}) = 2 \\ c(u_4^{blue}, u_j^{red}) = 4. \end{cases}$$

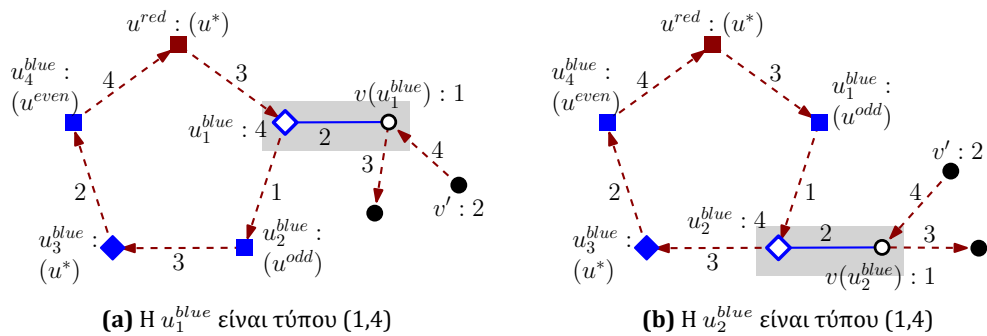
Σημειώνουμε ότι οι προσπίπτουσες ακμές του u_j^{red} έχουν χρώματα $\{4, 3\}$. Αν ο κόκκινος αντιπρόσωπος u_j^{red} έχει αρνητικό πρόσημο ανταλλάσσουμε τα χρώματα 2 και 4 του παραπάνω χρωματισμού και οι προσπίπτουσες ακμές του u_j^{red} έχουν χρώματα $\{2, 3\}$.

- Εάν $c(v(u^{blue})) = 2$ ή 4 και ο κόκκινος αντιπρόσωπος u_j^{red} έχει θετικό πρόσημο, χρωματίζουμε τις ακμές του C_j^{red} ως εξής:

$$\begin{cases} c(u_j^{red}, u_1^{blue}) = 4 \\ c(u_1^{blue}, u_2^{blue}) = 2 \\ c(u_2^{blue}, u_3^{blue}) = 4 \\ c(u_3^{blue}, u_4^{blue}) = 1 \\ c(u_4^{blue}, u_j^{red}) = 3. \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι οι προσπίπτουσες ακμές του u_j^{red} έχουν χρώματα $\{4, 3\}$. Αν ο κόκκινος αντιπρόσωπος u_j^{red} έχει αρνητικό πρόσημο ανταλλάσσουμε τα χρώματα 2 και 4 του παραπάνω χρωματισμού και οι προσπίπτουσες ακμές του u_j^{red} έχουν χρώματα $\{2, 3\}$.

Τα μόνα στοιχεία που παίρνουν χρώμα από το $\{1, 2, 3, 4\}$ και δεν έχουν ακόμα χρωματιστεί είναι οι βεβιασμένοι αντιπρόσωποι τύπου $(1, 4)$. Έστω \tilde{u}^{blue} ένας βεβιασμένος αντιπρόσωπος τύπου $(1, 4)$ και $v(\tilde{u}^{blue})$ ο γείτονάς του που είναι επίσης τύπου $(1, 4)$. Επίσης έστω $\vec{e}(v') = (v', v(\tilde{u}^{blue}))$ η κόκκινη έσω-ακμή του $v(\tilde{u}^{blue})$. Αναθέτουμε $c(\tilde{u}^{blue}) = c(\vec{e}(v'))$ και χρωματίζουμε τη μπλε ακμή $(\tilde{u}^{blue}, v(\tilde{u}^{blue}))$ με το μοναδικό χρώμα του $\{1, 2, 3, 4\}$ που δεν έχει χρησιμοποιηθεί από τις κορυφές \tilde{u}^{blue} και $v(\tilde{u}^{blue})$ και τις κόκκινες ακμές τους. Στην **Εικόνα 15.12** βλέπουμε τον χρωματισμό που περιγράψαμε στην περίπτωση που $c(v(\tilde{u}^{blue})) = 1$, όπου οι κορυφές τύπου $(1, 4)$ απεικονίζονται ως άσπρες (επιπλέον αναγράφεται ο τύπος των κορυφών).



Εικόνα 15.12: Χρωματισμός ενός κόκκινου C_5 χωρίς απλές κορυφές.

Αλλάζουμε το προσωρινό χρώμα κάθε απλής κορυφής που δεν είναι τύπου $(1, 4)$ σε μόνιμο χρώμα. Μέχρι στιγμής έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο τα χρώματα $\{1, 2, 3, 4\}$ και τα στοιχεία που έχουμε χρωματίσει είναι: απλές κορυφές, κορυφές τύπου $(1, 4)$, όλες τις κόκκινες ακμές και τις μπλε ακμές που συνδέουν γειτονικές κορυφές τύπου $(1, 4)$. Γενικά κάθε απλή κορυφή είναι τύπου $(1, 2)$ και οι αντιπρόσωποι είναι τύπου (u) , εκτός από τις κορυφές που έχουν τύπο $(1, 4)$. Προφανώς γειτονικές κορυφές διαφο-

ρετικού τύπου έχουν διαφορετικά χρωματικά σύνολα. Ας θεωρήσουμε δύο γειτονικές κορυφές τύπου (12). Εάν συνδέονται με μια κόκκινη ακμή τότε μία από αυτές έχει τύπο (1) και η άλλη τύπο (2), που συνεπάγεται διαφορετικά χρωματικά σύνολα και διαφορετικά χρώματα κορυφών. Εάν συνδέονται με μια μπλε ακμή τότε από το **Βήμα 6** έχουν διαφορετικό χρώμα κορυφής. Για δύο γειτονικές κορυφές τύπου (u) σε έναν κόκκινο κύκλο, ο χρωματισμός που περιγράφεται στο **Βήμα 7** εξασφαλίζει ότι θα έχουν διαφορετικά χρωματικά σύνολα. Σε έναν μπλε κύκλο, μπορεί μόνο να είναι γειτονικοί κόκκινοι αντιπρόσωποι τύπου (u). Στην περίπτωση αυτή έχουν διαφορετικά πρόσημα και διαφορετικά χρωματικά σύνολα. Τέλος, δύο γειτονικές κορυφές τύπου (1, 4) έχουν διαφορετικό χρώμα κορυφής.

Υπάρχει μόνο μία περίπτωση όπου γειτονικές κορυφές μπορεί ακόμα να έχουν το ίδιο χρώμα: ένας βεβιασμένος αντιπρόσωπος τύπου (1, 4) και ο γείτονας του κατά μήκος του μπλε κύκλου και ο οποίος είναι τύπου (12). Η περίπτωση αυτή θα εξεταστεί λεπτομερώς στο **Βήμα 11**.

Βήμα 8: χρωματισμός των μπλε κύκλων του C_{good}^{blue}

Χωρίζουμε τους μπλε κύκλους σε τρεις κατηγορίες, τους μπλε κύκλους του C_{good}^{blue} που περιέχουν μόνο κόκκινους αντιπρόσωπους ή καθόλου αντιπρόσωπους, τους μπλε κύκλους του C_{bad}^{blue} με απλούς μπλε αντιπρόσωπους και τους κύκλους του C_{bad}^{blue} που περιέχουν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο. Ο χρωματισμός των μπλε κύκλων θα γίνει σε δύο διαφορετικά βήματα. Στο βήμα αυτό θα χρωματίσουμε την πρώτη κατηγορία (βλ. **Εικόνα 15.6**) και τις άλλες δύο κατηγορίες στο **Βήμα 10**. Έτσι, έχουμε συνολικά τρεις περιπτώσεις, μία για κάθε κατηγορία μπλε κύκλων. Ας θεωρήσουμε τους αριθμούς (5, 6, 7) σε έναν κύκλο όπως στην **Εικόνα 15.2** και έστω $f_1(t)$ το επόμενο στοιχείο του t κινούμενοι σύμφωνα με την ωρολογιακή φορά πάνω στον κύκλο, και $f_2(t)$ το επόμενο στοιχείο του t κινούμενοι σύμφωνα με την αντιωρολογιακή φορά πάνω στον κύκλο, όπως στο **Βήμα 6** της **Ενότητας 15.1**.

Περίπτωση Α. $C_j^{blue} \in C_{good}^{blue}$

Στην περίπτωση αυτή ξέρουμε ότι ο C_j^{blue} μπορεί να περιέχει μόνο κόκκινους αντιπρόσωπους.

Περίπτωση Α.Ι. Το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $0 \pmod{3}$

Έστω $C_j^{blue} = (w_j^1, \dots, w_j^{n_j}, w_j^1)$ όπου $n_j \equiv 0 \pmod{3}$. Χρωματίζουμε αυθαίρετα την ακμή (w_j^1, w_j^2) με χρώμα $c((w_j^1, w_j^2)) = c_1$. Τότε, για $i = 2, \dots, n_j$ χρωματίζουμε

$$c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)), \text{ όπου } w_j^{n_j+1} = w_j^1$$

Προφανώς $f_1(c(w_j^{n_j}, w_j^1)) = c(w_j^1, w_j^2)$ και δύο γειτονικές κορυφές έχουν διαφορετικά χρώματα στις προσκείμενες μπλε ακμές τους. Για κάθε κόκκινο αντι-

πρόσωπο u^{red} στον C_j^{blue} , βάζουμε ως $c(u^{red})$ το μοναδικό χρώμα από το σύνολο $\{5, 6, 7\}$ που δεν έχει αντιστοιχηθεί στις προσκείμενες ακμές του (βλ. **Εικόνες 15.6a-15.6b**).

Περίπτωση A.II. Το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $1(mod3)$

Από το **Βήμα 4** ο C_j^{blue} έχει τουλάχιστον δύο κόκκινους αντιπρόσωπους, έστω $u_{i_1}^{red}$ και $u_{i_2}^{red}$. Έστω ότι οι δύο κόκκινοι αντιπρόσωποι δεν είναι γειτονικοί, δηλαδή $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, w_j^2, \dots, u_{i_2}^{red}, \dots, w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})$ όπου $n_j \equiv 1(mod3)$, $w_j^1 = u_{i_1}^{red}$ και $w_j^s = u_{i_2}^{red}$ (βλ. **Εικόνα 15.6c**). Χρωματίζουμε αυθαίρετα την κορυφή $u_{i_1}^{red}$ με χρώμα $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$. Χρωματίζουμε την ακμή $(u_{i_1}^{red}, w_j^2)$ με $c(u_{i_1}^{red}, w_j^2) = f_1(c_1)$ και για $i = 2, \dots, n_j$ χρωματίζουμε

$$\begin{cases} c(w_j^s) &= f_1(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^i)) \quad \text{αν } i = s \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) \quad \text{αν } i \neq 1, s \end{cases}, \text{ όπου } w_j^{n_j+1} = w_j^1 = u_{i_1}^{red}$$

Εάν ο C_j^{blue} έχει δύο γειτονικούς κόκκινους αντιπρόσωπους, τότε $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^3, \dots, w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})$ όπου $n_j \equiv 1(mod3)$, $w_j^1 = u_{i_1}^{red}$ και $w_j^2 = u_{i_2}^{red}$ (βλ. **Εικόνα 15.6d**). Έστω $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ και $c(u_{i_2}^{red}) = c_2$, ένας αυθαίρετος χρωματισμός των κόκκινων αντιπροσώπων με $c_2 = f_2(c_1)$. Χρωματίζουμε την ακμή $(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red})$ ως $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_1(c_1)$ και την ακμή $(u_{i_2}^{red}, w_j^3)$ ως $c(u_{i_2}^{red}, w_j^3) = f_1(c_2)$. Για $i = 3, \dots, n_j$ χρωματίζουμε

$$c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)), \text{ όπου } w_j^{n_j+1} = w_j^1 = u_{i_1}^{red}$$

Προφανώς $f_1(c(w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})) = c_1$ και δύο γειτονικές απλές κορυφές έχουν διαφορετικά χρώματα στις προσκείμενες μπλε ακμές τους. Για κάθε άλλο κόκκινο αντιπρόσωπο u^{red} του C_j^{blue} , βάζουμε στον u^{red} το μοναδικό χρώμα από το σύνολο $\{5, 6, 7\}$ που δεν έχει δοθεί στις προσκείμενες ακμές του.

Περίπτωση A.III. Το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $2(mod3)$

Από το **Βήμα 4** ο C_j^{blue} έχει τουλάχιστον έναν κόκκινο αντιπρόσωπο, έστω u^{red} και κανένα ζεύγος γειτονικών κόκκινων αντιπροσώπων, ή ένα ζεύγος γειτονικών αντιπροσώπων και τουλάχιστον έναν ακόμα κόκκινο αντιπρόσωπο.

– Στην πρώτη περίπτωση έστω $C_j^{blue} = (u^{red}, w_j^1, \dots, w_j^{n_j}, u^{red})$, όπου $n_j + 1 \equiv 2(mod3)$ (βλ. **Εικόνα 15.6e**). Έστω $c(u^{red}) = c_1$ ένα αυθαίρετο χρώμα. Χρωματίζουμε $c(u^{red}, w_j^1) = f_1(c_1)$ και για $i = 1, 2, \dots, n_j$:

$$c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)), \text{ όπου } w_j^{n_j+1} = w_j^0 = u^{red}$$

Για κάθε άλλο κόκκινο αντιπρόσωπο u^{red} του C_j^{blue} αναθέτουμε ως $c(u^{red})$ το μοναδικό χρώμα του συνόλου $\{5, 6, 7\}$ που δεν έχει ανατεθεί τις προσκείμενες ακμές του.

– Εάν ο C_j^{blue} περιέχει ένα ζεύγος από γειτονικούς κόκκινους αντιπρόσωπους, τότε ο $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \dots, u_{i_1}^{red}, \dots, w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})$, όπου $u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}$ και $u_{i_1}^{red} = w_j^s$ είναι οι κόκκινοι αντιπρόσωποι (βλ. **Εικόνα 15.6f**). Έστω λοιπόν $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ και $c(u_{i_2}^{red}) = c_2$ ένας αυθαίρετος χρωματισμός των γειτονικών κόκκινων αντιπρόσωπων με $c_2 = f_1(c_1)$. Χρωματίζουμε την ακμή $(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red})$ ως $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1)$ και την ακμή $(u_{i_2}^{red}, w_j^1)$ ως $c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_2)$. Για $i = 1, \dots, n_j$ χρωματίζουμε

$$\begin{cases} c(w_j^s) &= f_1(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^i)) & \text{αν } i = s \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{αν } i \neq s \end{cases}$$

όπου $w_j^{n_j+1} = u_{i_1}^{red}$ και $w_j^0 = u_{i_2}^{red}$.

Προφανώς $f_2(c(w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})) = c_1$ και δύο γειτονικές κορυφές (διαφορετικές από τον $u_{i_1}^{red}$) έχουν διαφορετικά χρώματα στις προσκείμενες ακμές τους. Για κάθε άλλο κόκκινο αντιπρόσωπο u^{red} του C_j^{blue} αναθέτουμε $c(u^{red})$ το μοναδικό χρώμα του συνόλου $\{5, 6, 7\}$ που δεν έχει ανατεθεί στις προσκείμενες ακμές του.

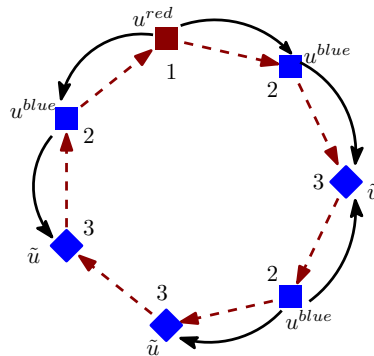
Βήμα 9: διάταξη των μπλε κύκλων

Υπενθυμίζουμε ότι ο σκοπός των μπλε αντιπρόσωπων ήταν να εξασφαλίσουν ότι υπάρχει ένας έγκυρος χρωματισμός των μπλε κύκλων. Ωστόσο, οι μπλε αντιπρόσωποι δεν είναι απαραίτητα ανεξάρτητοι (μπορεί να είναι γειτονικοί με κόκκινους ή μπλε αντιπρόσωπους κατά μήκος ενός κόκκινου κύκλου). Σκοπός μας είναι να ορίσουμε μια διάταξη των μπλε κύκλων, βάση των τριών κατηγοριών που ορίστηκαν στο προηγούμενο βήμα (τους μπλε κύκλους του C_{good}^{blue} που περιέχουν μόνο κόκκινους αντιπρόσωπους ή καθόλου αντιπρόσωπους, τους μπλε κύκλους τους C_{bad}^{blue} χωρίς βεβιασμένους μπλε αντιπρόσωπους και τους κύκλους του C_{bad}^{blue} με έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο). Ο λόγος για αυτό είναι ότι υπάρχουν μόνο ζεύγη γειτονικών κόκκινων αντιπρόσωπων, οι απλοί μπλε αντιπρόσωποι μπορεί να είναι γειτονικοί το πολύ με έναν κόκκινο αντιπρόσωπο, ενώ οι βεβιασμένοι αντιπρόσωποι μπορεί να είναι γειτονικοί το πολύ με δύο άλλους αντιπρόσωπους (κόκκινους, μπλε ή βεβιασμένους). Οπότε σκοπός μας είναι να χρωματίσουμε πρώτα όλους τους κόκκινους αντιπρόσωπους (ορισμένοι έχουν ήδη χρωματιστεί στο **Βήμα 8**), έπειτα τους απλούς μπλε αντιπρόσωπους και τελικά τους βεβιασμένους αντιπρόσωπους (βλ. **Εικόνα 15.13**). Πάλι, η παραπάνω διάταξη των μπλε κύκλων μπορεί να μην σέβεται την επιθυμητή διάταξη των αντιπρόσωπων, εφόσον υπάρχουν μπλε κύκλοι στην τελευταία κατηγορία του C_{bad}^{blue} που περιέχουν και κόκκινο και βεβιασμένο αντιπρόσωπο. Προκειμένου να αποφύγουμε το πρόβλημα αυτό επιλέγουμε μία αρχική κορυφή ή ένα ζεύγος από αρχικές κορυφές για

κάθε μπλε κύκλο. Σκοπός μας είναι να χρωματίσουμε όλες τις αρχικές κορυφές, έτσι ώστε όταν χρωματίσουμε τους μπλε κύκλους στην προτεινόμενη διάταξη, η διάταξη των αντιπροσώπων να ισχύει επίσης. Συγκεκριμένα, έστω C^{blue} ένας μπλε κύκλος.

- Εάν ο C^{blue} έχει χρωματιστεί στο **Βήμα 8**, τότε όλοι οι κόκκινοι αντιπρόσωποι που περιέχει έχουν χρωματιστεί (σημειώνουμε ότι $C^{blue} \in \mathcal{C}^{blue}_{good}$).
- Εάν ο C^{blue} έχει έναν κόκκινο αντιπρόσωπο, τον επιλέγουμε ως αρχική κορυφή.
- Εάν ο C^{blue} έχει έναν ζεύγος γειτονικών κόκκινων αντιπρόσωπων, τους επιλέγουμε και τους δύο ως αρχικές κορυφές.
- Εάν ο C^{blue} δεν έχει κόκκινους αντιπρόσωπους, επιλέγουμε έναν από τους απλούς μπλε αντιπρόσωπους ως αρχική κορυφή (υπάρχει τουλάχιστον ένας απλός μπλε αντιπρόσωπος).

Θεωρούμε το επαγόμενο υπογράφημα του G με σύνολο κορυφών το σύνολο των χρωματισμένων κόκκινων αντιπρόσωπων και το σύνολο των αρχικών κορυφών, ως ένα βοηθητικό γράφημα H' . Τότε το βοηθητικό γράφημα H' περιέχει ανεξάρτητες κορυφές και μονοπάτια το πολύ τεσσάρων κορυφών. Μερικές κορυφές του H' έχουν ήδη χρωματιστεί με χρώμα 5, 6 ή 7. Μπορούμε εύκολα να επεκτείνουμε τον μερικό αυτό χρωματισμό σε έναν ορθό χρωματισμό όλων των κορυφών του H' αντιστοιχώντας κατάλληλα τα 5, 6, 7 πρώτα στους (μη χρωματισμένους με 5, 6, 7) κόκκινους αντιπρόσωπους.



Εικόνα 15.13: Επιθυμητή διάταξη των αντιπροσώπων. Τα συνεχή βέλη δείχνουν πώς ο χρωματισμός ενός αντιπροσώπου περιορίζεται από την διάταξη: Ένας αντιπρόσωπος δεν μπορεί να έχει το ίδιο χρώμα με έναν γείτονα που έχει ήδη χρωματιστεί.

Έχοντας χρωματίσει τις αρχικές κορυφές των μπλε κύκλων, όλοι οι κόκκινοι αντιπρόσωποι έχουν χρωματιστεί καθώς και μερικοί μπλε αντιπρόσωποι. Τότε, εάν χρωματίσουμε τις υπόλοιπες δύο κατηγορίες μπλε κύκλων βάση της προτεινόμενης διάταξης, έπεται ότι όλοι οι απλοί μπλε αντιπρόσωποι θα χρωματιστούν πριν από τους βεβιασμένους αντιπρόσωπους.

Βήμα 10: χρωματισμός των μπλε κύκλων

Στο βήμα αυτό θα χρωματίσουμε τις δύο τελευταίες κατηγορίες μπλε κύκλων (δηλαδή τους μπλε κύκλους του C_{bad}^{blue}): τους μπλε κύκλους με τουλάχιστον έναν απλό μπλε αντιπρόσωπο και τους μπλε κύκλους με έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο.

Περίπτωση B. $C_j^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ χωρίς βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο

Στην περίπτωση αυτή ξέρουμε ότι ο C_j^{blue} έχει τουλάχιστον έναν (απλό) μπλε αντιπρόσωπο, έστω u^{blue} . Αν ο C_j^{blue} έχει συνολικά τουλάχιστον δύο αντιπροσώπους, τον u_{i_1} και τον $u_{i_2}^{blue}$ (ο u_{i_1} είναι είτε μπλε είτε κόκκινος), ισχυριζόμαστε ότι, δοθέντος του χρώματος του u_{i_1} , υπάρχουν δύο χρωματισμοί έτσι ώστε ο $u_{i_2}^{blue}$ να παίρνει διαφορετικό χρώμα. Αυτό συνεπάγεται ότι όταν χρωματίσουμε έναν μπλε κύκλο από την **Περίπτωση B**, αυτός ο μπλε αντιπρόσωπος μπορεί πάντα να έχει διαφορετικό χρώμα από τις γειτονικούς του χρωματισμένους αντιπροσώπους σε έναν κόκκινο κύκλο (εφόσον ένας απλός μπλε αντιπρόσωπος μπορεί να έχει μόνο έναν γειτονικό αντιπρόσωπο που έχει ήδη χρωματιστεί).

Περίπτωση B.I. Το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $3(mod 6)$ και ο C_j^{blue} δεν έχει βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο

Στην περίπτωση αυτή, ο C_j^{blue} έχει μόνο έναν μπλε αντιπρόσωπο που είναι η αρχική του κορυφή. Ο χρωματισμός του C_j^{blue} είναι ο ίδιος όπως στην **Περίπτωση A.I**, όπου w_j^1 είναι ο μπλε αντιπρόσωπος και $c(w_j^1, w_j^2) = f_2(c(w_j^1))$.

Περίπτωση B.II. Το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $1(mod 3)$ και ο C_j^{blue} δεν έχει βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο

Από το **Βήμα 5** έχουμε ότι ο C_j^{blue} έχει ακριβώς δύο αντιπροσώπους, έστω u_{i_1} και $u_{i_2}^{blue}$, όπου ο u_{i_1} είναι η αρχική κορυφή του και μπορεί κόκκινος ή μπλε αντιπρόσωπος. Έστω $C_j^{blue} = (u_{i_1}, w_j^2, \dots, u_{i_2}^{blue}, \dots, w_j^{n_j}, u_{i_1})$ όπου $n_j \equiv 1(mod 3)$, $w_j^1 = u_{i_1}$ και $w_j^s = u_{i_2}^{blue}$, με $1 < s < n_j$. Έστω $c(u_{i_1}) = c_1$. Ακολουθούμε τη διαδικασία χρωματισμού από την **Περίπτωση A.II**, δηλαδή χρωματίζουμε την ακμή (u_{i_1}, w_j^2) ως $c(u_{i_1}, w_j^2) = f_1(c_1)$ και για $i = 2, \dots, n_j$ χρωματίζουμε

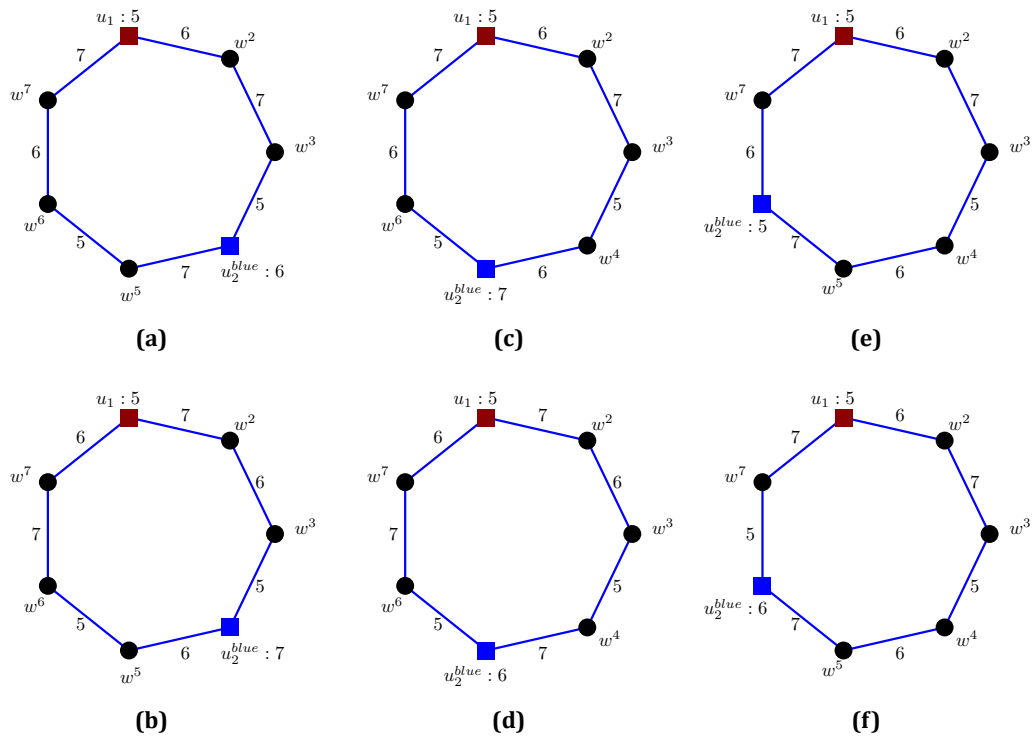
$$\begin{cases} c(w_j^s) &= f_1(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^i)) & \text{αν } i = s \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) &= f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{αν } i \neq 1, s \end{cases}$$

Ο χρωματισμός φαίνεται στις **Εικόνες 15.14a, 15.14c, 15.14e** για διαφορετικές τιμές του $s(mod 3)$. Σκοπός μας όμως είναι να βρούμε κι άλλον χρωματισμό έτσι ώστε ο $u_{i_2}^{blue}$ να παίρνει διαφορετικό χρώμα. Ουσιαστικά θα τροποποιήσουμε τον παραπάνω χρωματισμό. Έχουμε ότι $c(u_{i_1}) = c_1$, $c(u_{i_1}, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$ και $c(w_j^{n_j}, u_{i_1}) = f_2(c_1) = c_3$, όπου τα χρώματα $\{c_1, c_2, c_3\}$ είναι όλα διαφορετικά. Εάν $c(u_{i_2}^{blue}) \neq c_1$ τότε ανταλλάσσουμε τα χρώματα c_2 και c_3 (ισοδύναμα

εφαρμόζουμε την f_2 αντί για την f_1 στον παραπάνω χρωματισμό και την f_1 αντί για την f_2) και η κορυφή $u_{i_2}^{blue}$ μπορεί να πάρει χρώμα c_2 ή c_3 χωρίς να αλλάξει το χρώμα του u_{i_1} (βλ. **Εικόνες 15.14b,15.14d**). Εάν $c(u_{i_2}^{blue}) = c_1$ (το οποίο μπορεί μόνο να συμβεί αν $s \equiv 0(mod3)$), τότε τροποποιούμε τον παραπάνω χρωματισμό ως εξής:

$$\begin{cases} c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{αν } 2 \leq i \leq s-1 \\ c(w_j^s) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_2(c(w_j^i)) & \text{if } i = s \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_2(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{αν } s+1 \leq i \leq n_j \end{cases}, \text{όπου } w_j^s = u_{i_2}^{blue}$$

Ουσιαστικά ανταλλάσσουμε τα χρώματα c_1 και c_2 μόνο κατά μήκος του μονοπατιού $(u_{i_2}^{blue}, \dots, w_j^{n_j})$. Έτσι η κορυφή $u_{i_2}^{blue}$ μπορεί να πάρει χρώμα c_1 ή c_2 χωρίς να αλλάξει το χρώμα του u_{i_1} (βλ. **Εικόνα 15.14f**).



Εικόνα 15.14: Χρωματισμός μπλε κύκλων από την **Περίπτωση B.II** για: (a)-(b) $s \equiv 1(mod3)$, (c)-(d) $s \equiv 2(mod3)$, (e)-(f) $s \equiv 0(mod3)$.

Περίπτωση B.III. Το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $2(mod3)$ και ο C_j^{blue} δεν έχει βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο

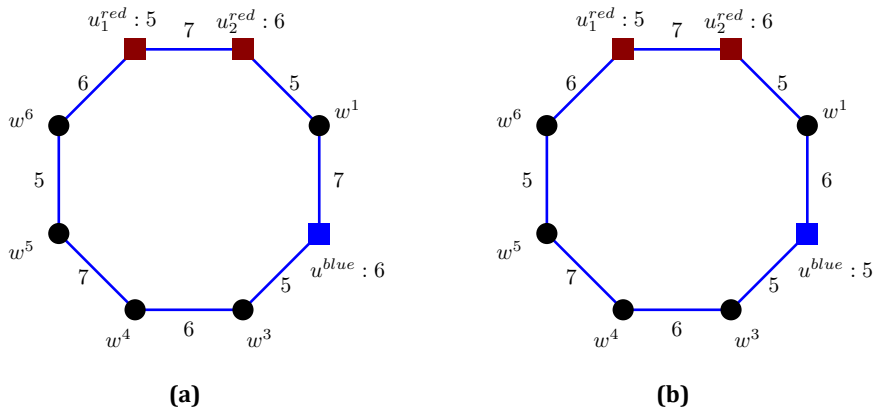
Από το **Βήμα 4** ο C_j^{blue} έχει μόνο έναν μπλε αντιπρόσωπο ή δύο κόκκινους γειτονικούς αντιπροσώπους και έναν μπλε.

- Εάν ο C_j^{blue} έχει μόνο έναν μπλε αντιπρόσωπο, έστω u^{blue} , τότε ο u^{blue} είναι η αρχική κορυφή, και χρωματίζουμε τις ακμές του C_j^{blue} όπως στην **Περίπτωση A.III**. (όπου ο u^{blue} έχει τον ρόλο του u^{red} στην **Περίπτωση A.III**).
- Έστω τώρα ότι ο C_j^{blue} περιέχει δύο γειτονικούς κόκκινους αντιπροσώπους, έστω $u_{i_1}^{red}$ και $u_{i_2}^{red}$ και έναν μπλε, έστω u^{blue} . Τότε ο $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \dots, u^{blue}, \dots, w_j^{n_j}, u_{i_1}^{red})$, όπου $n_j + 2 \equiv 2(mod3)$ και $u^{blue} = w_j^s$. Σημειώνουμε ότι δεν μπορεί να είναι $s \equiv 0(mod3)$ ή $s \equiv 1(mod3)$ εφόσον αυτές οι κορυφές ανήκαν στο \tilde{C}^* από το **Βήμα 5**. Οι γειτονικοί κόκκινοι αντιπρόσωποι $u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}$ είναι οι αρχικές κορυφές του μπλε κύκλου. Έστω $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ και $c(u_{i_2}^{red}) = c_2$. Χ.β.τ.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c_2 = f_1(c_1)$. Χρωματίζουμε την ακμή $(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red})$ ως $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1)$ και την ακμή $(u_{i_2}^{red}, w_j^1)$ ως $c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_2)$. Έχουμε τον παρακάτω χρωματισμό:

$$\begin{cases} c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_2(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{αν } 1 \leq i \leq s-1 \\ c(w_j^s) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^i)) & \text{if } i = s \\ c(w_j^i, w_j^{i+1}) = f_1(c(w_j^{i-1}, w_j^i)) & \text{αν } s+1 \leq i \leq n_j \end{cases}$$

όπου $w_j^0 = u_{i_2}^{red}$ και $w_j^{n_j+1} = u_{i_1}^{red}$.

Προφανώς $c(w_j^s) = c_2$. Στην **Εικόνα 15.15a** φαίνεται ο χρωματισμός για $s \equiv 2(mod3)$. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να πάρουμε έναν δεύτερο χρωματισμό όπου ο μπλε αντιπρόσωπος να έχει διαφορετικό χρώμα τροποποιώντας τον χρωματισμό της **Εικόνας 15.15a**: ανταλλάσσουμε τα χρώματα c_2 και c_3 στο μονοπάτι $(w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^s)$, και χρωματίζουμε $c(w_j^s) = c_3$ (βλ. **Εικόνα 15.15b**).



Εικόνα 15.15: Χρωματισμός μπλε κύκλων από την **Περίπτωση B.III**.

Περίπτωση C. $C_j^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ με έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο

Στην περίπτωση αυτή γνωρίζουμε ότι ο C_j^{blue} είναι είτε ένας C_5 με δύο γειτονικούς κόκκινους αντιπρόσωπους ως αρχικές κορυφές και έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο \tilde{u}^{blue} , ή ο C_j^{blue} είναι ένας C_8 με δύο γειτονικούς κόκκινους αντιπρόσωπους ως αρχικές κορυφές και έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο \tilde{u}^{blue} , ή ο C_j^{blue} είναι ένας C_4 με έναν αντιπρόσωπο (κόκκινο ή απλό μπλε) ως αρχική κορυφή και έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο \tilde{u}^{blue} , ή ο C_j^{blue} είναι ένας C_7 με έναν μπλε αντιπρόσωπο ως αρχική κορυφή και έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο \tilde{u}^{blue} . Και στις τέσσερις περιπτώσεις, δεδομένου ενός αυθαίρετου χρώματος για τις αρχικές κορυφές, σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν τρεις χρωματισμοί τέτοιοι ώστε ο \tilde{u}^{blue} να έχει διαφορετικό χρώμα, δηλαδή ο \tilde{u}^{blue} να μπορεί να πάρει και τα τρία χρώματα του συνόλου $\{5, 6, 7\}$. Αυτό συνεπάγεται ότι όταν χρωματίζουμε έναν μπλε κύκλο από την **Περίπτωση C**, ο βεβιασμένος μπλε αντιπρόσωπος μπορεί πάντα να έχει διαφορετικό χρώμα από τους γειτονικούς του χρωματισμένους αντιπρόσωπους σε έναν κόκκινο κύκλο (εφόσον ένας βεβιασμένος μπλε αντιπρόσωπος μπορεί να έχει το πολύ δύο γειτονικούς αντιπρόσωπους που έχουν ήδη χρωματιστεί). Σημειώνουμε ότι από το **Βήμα 4** το μήκος του $C_j^{blue} \in C_{bad}^{blue}$ δεν μπορεί να είναι ισοπόλοιπο με $0 \pmod{3}$.

Περίπτωση C.I. Το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοπόλοιπο με $1 \pmod{3}$ και ο C_j^{blue} έχει έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο \tilde{u}^{blue} που δεν είναι τύπου $(1, 4)$

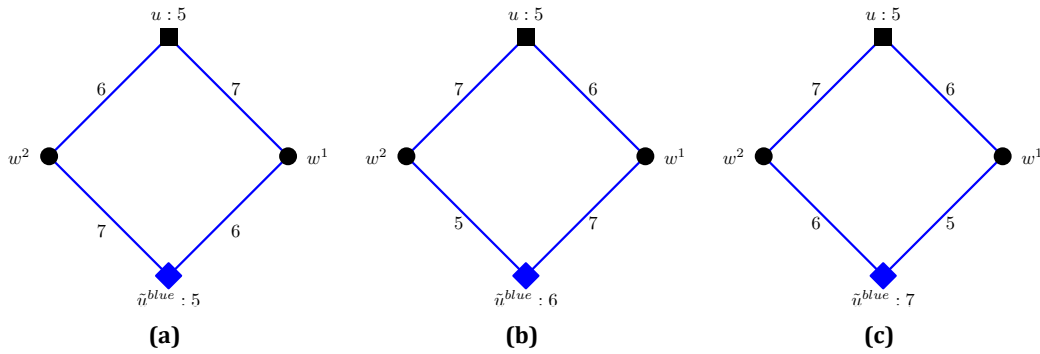
Εάν το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοπόλοιπο με $1 \pmod{3}$ και υπάρχει ένας βεβιασμένος μπλε αντιπρόσωπος \tilde{u}^{blue} , τότε ο $C_j^{blue} = C_4$ ή C_7 .

– Έστω $C_j^{blue} = C_4 = (u, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, u)$, όπου ο u είναι είτε ένας κόκκινος είτε ένας μπλε αντιπρόσωπος. Η κορυφή u είναι η αρχική κορυφή του C_4 με χρώμα $c(u) = c_1$. Χρωματίζουμε $c(u, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$ και $c(w_j^2, u) = f_2(c_1) = c_3$. Για τα υπόλοιπα στοιχεία έχουμε τους παρακάτω τρεις πιθανούς χρωματισμούς:

$$\begin{cases} c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_2 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_2 \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι η κορυφή \tilde{u}^{blue} μπορεί να πάρει και τα τρία χρώματα από το $\{5, 6, 7\}$ χωρίς να αλλάξουμε το χρώμα της u (βλ. **Εικόνα 15.16**).

– Ομοίως, έστω $C_j^{blue} = C_7 = (u^{blue}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, \dots, w_j^5, u^{blue})$, με αρχική κορυφή u^{blue} χρωματισμένη ως $c(u^{blue}) = c_1$ (υπενθυμίζουμε ότι αν ένας μπλε C_7 κύκλος έχει βεβιασμένο αντιπρόσωπο, τότε η αρχική του κορυφή είναι ένας απλός μπλε αντιπρόσωπος). Χρωματίζουμε $c(u^{blue}, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(w_j^5, u^{blue}) = f_2(c_1) = c_3$ και έχουμε τους παρακάτω τρεις πιθανούς



Εικόνα 15.16: (a)-(c) Χρωματισμός μπλε κύκλων από την Περίπτωση C.I: C_4 .

χρωματισμούς:

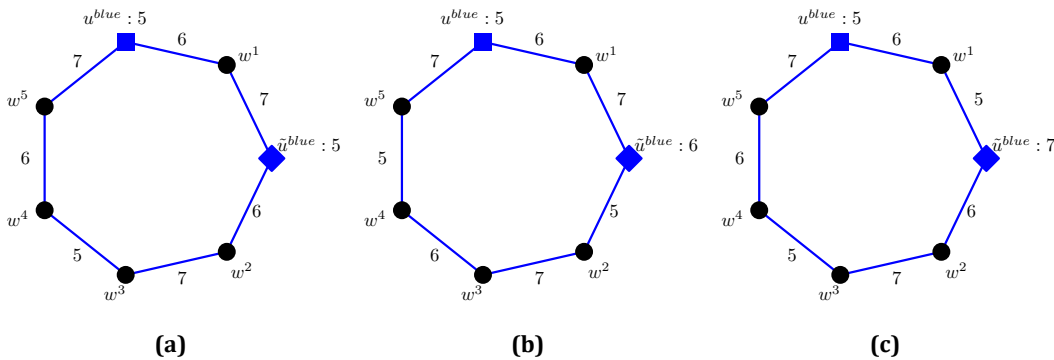
$$\begin{cases} c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_2 & c(w_j^2, w_j^3) = c_3 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 & c(w_j^2, w_j^3) = c_3 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_2 & c(w_j^2, w_j^3) = c_3 \end{cases}$$

και για τις υπόλοιπες ακμές

$$c(w_j^s, w_j^{s+1}) = \begin{cases} f_1(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \\ f_1(c(w_j^{s-1}, w_j^s)) \end{cases} \text{ για } s = 3, 4, \text{ αντίστοιχα}$$

Είναι προφανές ότι οι κορυφές w_j^s και w_j^{s+1} έχουν διαφορετικά χρώματα στις μπλε ακμές τους για $s = 2, 3, 4$, και η κορυφή \tilde{u}^{blue} μπορεί να πάρει και τα τρία χρώματα από το $\{5, 6, 7\}$ χωρίς να αλλάξει το χρώμα της u^{blue} (βλ.

Εικόνα 15.17).



Εικόνα 15.17: (a)-(c) Χρωματισμός μπλε κύκλων από την Περίπτωση C.I: C_7 .

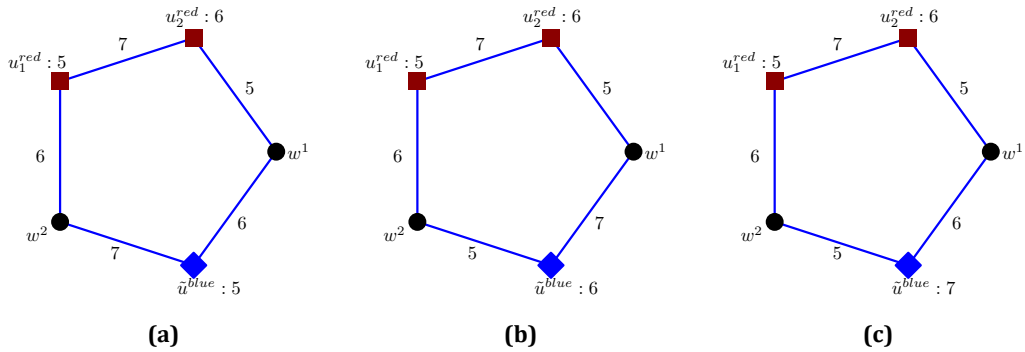
Περίπτωση C.II. Το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $2 \pmod{3}$ ακαι ο C_j^{blue} έχει έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο \tilde{u}^{blue} που δεν είναι τύπου $(1, 4)$

Στην περίπτωση αυτή από το **Βήμα 5** έχουμε ότι ο $C_j^{blue} = C_5$ ή C_8 με δύο κόκκινους αντιπροσώπους, έστω $u_{i_1}^{red}$ και $u_{i_2}^{red}$, και έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο \tilde{u}^{blue} .

–Εάν ο C_j^{blue} έχει 5 κορυφές, τότε ο $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, u_{i_1}^{red})$, όπου οι κόκκινοι αντιπρόσωποι $u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}$ είναι οι αρχικές κορυφές. Έστω ότι $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ και $c(u_{i_2}^{red}) = f_1(c_1) = c_2$. Τότε χρωματίζουμε $c(w_j^2, u_{i_1}^{red}) = f_1(c_1) = c_2$, $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1) = c_3$ και $c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_2) = c_1$. Για τα υπόλοιπα στοιχεία έχουμε τους παρακάτω πιθανούς χρωματισμούς:

$$\begin{cases} c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_3 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι η κορυφή \tilde{u}^{blue} μπορεί να πάρει όλα τα χρώματα από το $\{5, 6, 7\}$ χωρίς να αλλάξει το χρώμα του $u_{i_1}^{red}$ ή του $u_{i_2}^{red}$ (βλ. **Εικόνα 15.18**).

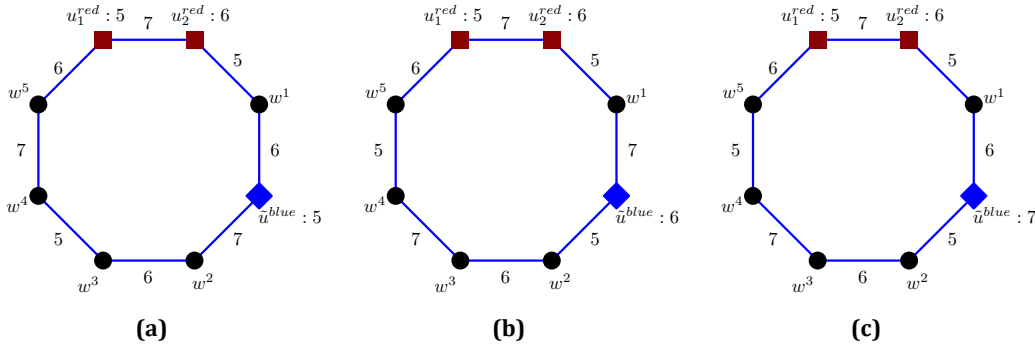


Εικόνα 15.18: (a)-(c) Χρωματισμός μπλε κύκλων από την **Περίπτωση C.II:** C_5 .

–Εάν ο C_j^{blue} έχει 8 κορυφές, τότε ο $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, \dots, w_j^5, u_{i_1}^{red})$, όπου οι κόκκινοι αντιπρόσωποι $u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}$ είναι οι αρχικές κορυφές. Έστω $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ και $c(u_{i_2}^{red}) = f_1(c_1) = c_2$. Τότε χρωματίζουμε $c(w_j^5, u_{i_1}^{red}) = f_1(c_1) = c_2$, $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1) = c_3$ και $c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_2) = c_1$. Για τα υπόλοιπα στοιχεία έχουμε τους παρακάτω πιθανούς χρωματισμούς:

$$\begin{cases} c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_1 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_3 & \\ & c(w_j^2, w_j^3) = c_2 & c(w_j^3, w_j^4) = c_1 & c(w_j^4, w_j^5) = c_3 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 & \\ & c(w_j^2, w_j^3) = c_2 & c(w_j^3, w_j^4) = c_3 & c(w_j^4, w_j^5) = c_1 \\ c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_2 & c(\tilde{u}^{blue}) = c_3 & c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1 & \\ & c(w_j^2, w_j^3) = c_2 & c(w_j^3, w_j^4) = c_3 & c(w_j^4, w_j^5) = c_1 \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι η κορυφή \tilde{u}^{blue} μπορεί να πάρει όλα τα χρώματα από το $\{5, 6, 7\}$ χωρίς να αλλάξει το χρώμα του $u_{i_1}^{red}$ ή του $u_{i_2}^{red}$ (βλ. **Εικόνα 15.19**)).



Εικόνα 15.19: (a)-(c) Χρωματισμός μπλε κύκλων από την **Περίπτωση C.II:** C_8 .

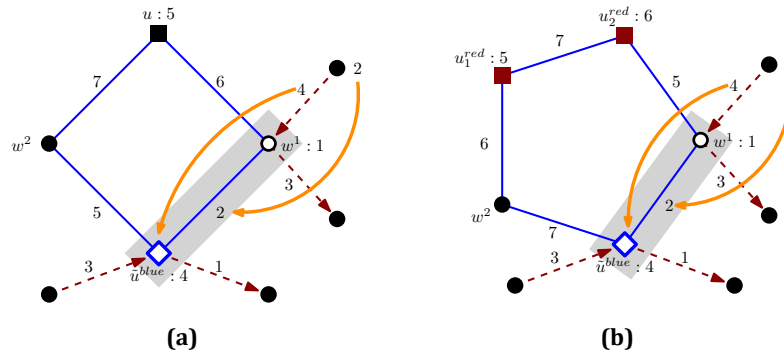
Στις τελευταίες δύο υποπεριπτώσεις στρέφουμε την προσοχή μας σε μπλε κύκλους με έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο που είναι τύπου $(1, 4)$. Υπενθυμίζουμε ότι μία τέτοια κορυφή ανήκει σε έναν κόκκινο C_5 όπου κάθε άλλη κορυφή είναι αντιπρόσωπος. Επίσης, στον μπλε κύκλο που ανήκει ο βεβιασμένος μπλε αντιπρόσωπος, ακριβώς ένας από τους γείτονές του είναι επίσης τύπου $(1, 4)$. Κάθε ζεύγος από κορυφές τύπου $(1, 4)$ έχει διαφορετικό χρωματικό σύνολο από τις άλλες γειτονικές του κορυφές. Επιπλέον έχουν διαφορετικό χρώμα κορυφής μεταξύ τους και η ακμή που τις ενώνει έχει χρώμα από το $\{1, 2, 3, 4\}$. Συνεπώς, απομένει να εξασφαλίσουμε ότι θα έχουν και διαφορετικό χρωματικό σύνολο.

Περίπτωση C.III. Το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $1 \pmod{3}$ και ο C_j^{blue} έχει έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο \tilde{u}^{blue} που είναι τύπου $(1, 4)$

–Όπως και στην **Περίπτωση C.I**, έστω $C_j^{blue} = C_4 = (u, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, u)$. Χ.β.τ.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο \tilde{u}^{blue} και ο w_j^1 είναι οι κορυφές τύπου $(1, 4)$ που επιλέχθηκαν στο **Βήμα 7**. Η ακμή $(\tilde{u}^{blue}, w_j^1)$ έχει πάρει χρώμα από το $\{1, 2, 3, 4\}$ στο **Βήμα 7**, οπότε αυτές οι κορυφές θα διαχωριστούν από το χρώμα των άλλων προσκείμενων ακμών τους κατά μήκος του μπλε κύκλου. Πρέπει μόνο να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει ένας χρωματισμός όπου οι ακμές (u, w_j^1) και $(\tilde{u}^{blue}, w_j^2)$ παίρνουν διαφορετικό μεταξύ τους χρώμα από το $\{5, 6, 7\}$. Εφόσον η u είναι η αρχική κορυφή, έστω $c(u) = c_1$. Τότε χρωματίζουμε $c(u, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(w_j^2, u) = f_2(c_1) = c_3$ και $c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1$ (βλ. **Εικόνα 15.20a**).

–Ομοίως, έστω $C_j^{blue} = C_7 = (u^{blue}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, \dots, w_j^5, u^{blue})$, όπου η αρχική κορυφή u^{blue} έχει χρωματιστεί ως $c(u^{blue}) = c_1$.

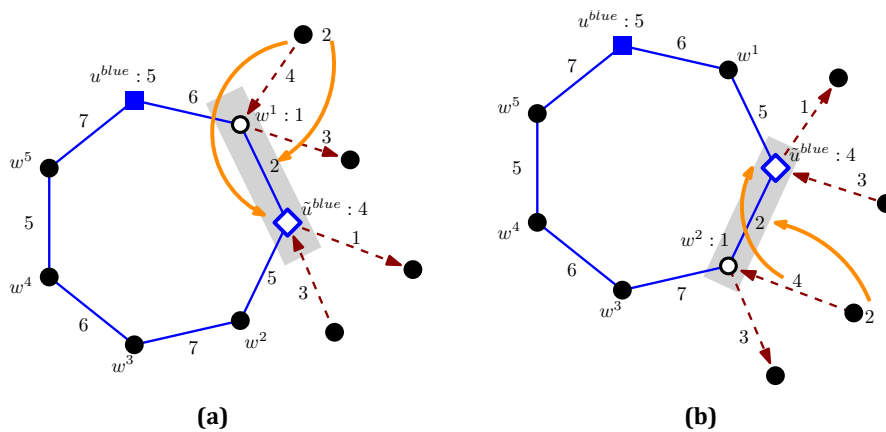
Εάν οι \tilde{u}^{blue} και w_j^1 είναι οι κορυφές τύπου $(1, 4)$ που επιλέχθηκαν στο **Βήμα 7** θέλουμε οι ακμές (u^{blue}, w_j^1) και $(\tilde{u}^{blue}, w_j^2)$ να έχουν διαφορετικό χρώμα.



Εικόνα 15.20: (a) Χρωματισμός μπλε κύκλων από την Περίπτωση C.III: C_4 . (b) Χρωματισμός μπλε κύκλων από την Περίπτωση C.IV: C_5 .

Τότε χρωματίζουμε $c(u^{blue}, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(w_j^5, u^{blue}) = f_2(c_1) = c_3$, $c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_1$, $c(w_j^2, w_j^3) = c_3$ και $c(w_j^s, w_j^{s+1}) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s))$ για $s = 3, 4$ (βλ. **Εικόνα 15.21a**).

Εάν οι \tilde{u}^{blue} και w_j^2 είναι οι κορυφές τύπου (1, 4) που επιλέχτηκαν στο **Βήμα 7** θέλουμε οι ακμές $(w_j^1, \tilde{u}^{blue})$ και (w_j^2, w_j^3) να έχουν διαφορετικά χρώματα. Χρωματίζουμε $c(u^{blue}, w_j^1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_1$, $c(w_j^5, u^{blue}) = f_2(c_1) = c_3$, $c(w_j^2, w_j^3) = c_3$ και $c(w_j^s, w_j^{s+1}) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s))$ για $s = 3, 4$ (βλ. **Εικόνα 15.21b**).



Εικόνα 15.21: (a)-(b) Χρωματισμός μπλε κύκλων από την Περίπτωση C.III: C_7 .

Περίπτωση C.IV. Το μήκος του C_j^{blue} είναι ισοϋπόλοιπο με $2 \pmod{3}$ και ο C_j^{blue} έχει έναν βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο \tilde{u}^{blue} που είναι τύπου (1, 4)

Όπως και στην **Περίπτωση C.II** έχουμε ότι ο C_j^{blue} έχει είτε 5 είτε 8 κορυφές.

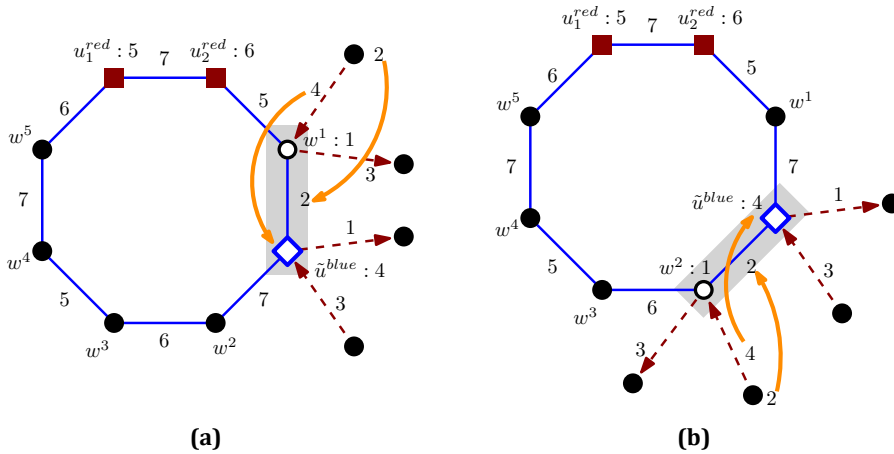
– Έστω $C_j^{blue} = C_5 = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, u_{i_1}^{red})$. Χ.β.τ.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι \tilde{u}^{blue} και w_j^1 είναι οι κορυφές τύπου (1, 4) που επιλέχτηκαν στο **Βήμα 7**. Θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει ένας χρωματισμός

όπου οι ακμές $(u_{i_2}^{red}, w_j^1)$ και $(\tilde{u}^{blue}, w_j^2)$ έχουν διαφορετικό χρώμα μεταξύ τους από το $\{5, 6, 7\}$. Για τις αρχικές κορυφές $u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}$ έστω $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ και $c(u_{i_2}^{red}) = c_2$. Χ.β.τ.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c_2 = f_1(c_1)$. Χρωματίζουμε $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1) = c_3, c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_1(c_3) = c_1, c(w_j^2, u_{i_1}^{red}) = f_1(c_1) = c_2$, και $c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_3$ (βλ. **Εικόνα 15.20b**).

– Εάν ο C_j^{blue} έχει 8 κορυφές, τότε ο $C_j^{blue} = (u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}, w_j^1, \tilde{u}^{blue}, w_j^2, \dots, w_j^5, u_{i_1}^{red})$. Έστω $c(u_{i_1}^{red}) = c_1$ και $c(u_{i_2}^{red}) = c_2$, όπου μπορούμε να υποθέσουμε χ.β.τ.γ. ότι $c_2 = f_1(c_1)$.

Εάν οι \tilde{u}^{blue} και w_j^1 είναι οι δύο κορυφές τύπου $(1, 4)$, επιδιώκουμε οι ακμές $(u_{i_2}^{red}, w_j^1)$ και $(\tilde{u}^{blue}, w_j^2)$ να έχουν διαφορετικά χρώματα. Χρωματίζουμε $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1) = c_3, c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_2) = c_1, c(w_j^5, u_{i_1}^{red}) = f_1(c_1) = c_2, c(\tilde{u}^{blue}, w_j^2) = c_3, c(w_j^2, w_j^3) = c_2$ και $c(w_j^s, w_j^{s+1}) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s))$ για $s = 3, 4$ (βλ. **Εικόνα 15.22a**).

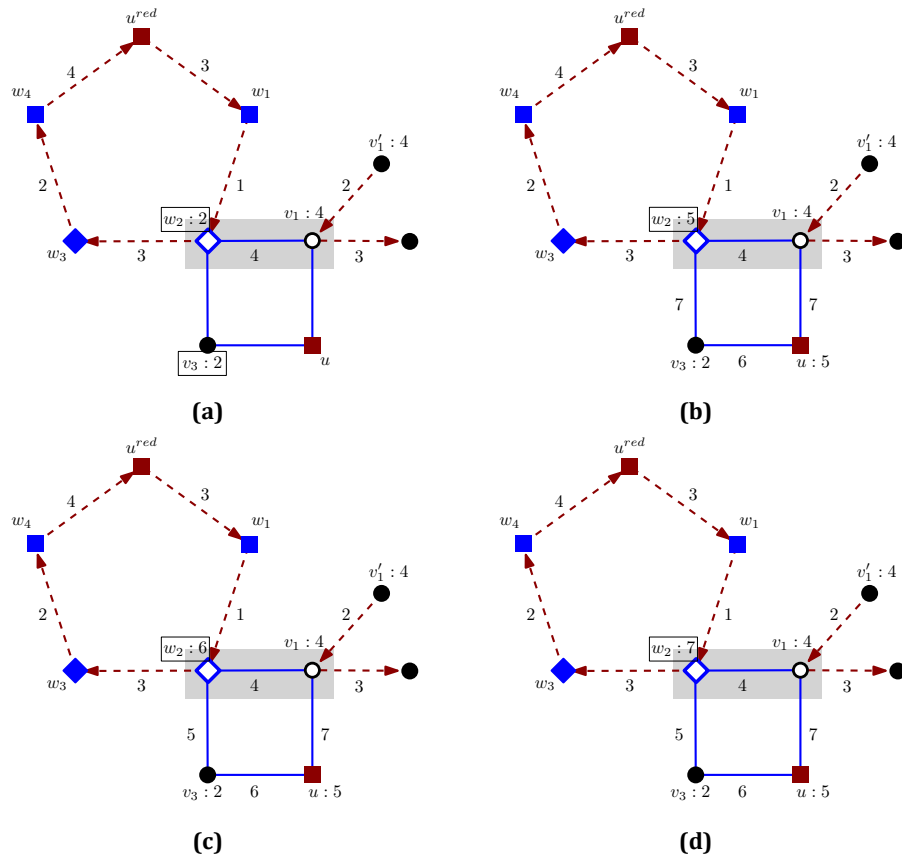
Εάν οι \tilde{u}^{blue} και w_j^2 είναι οι δύο κορυφές τύπου $(1, 4)$, επιδιώκουμε οι ακμές $(w_j^1, \tilde{u}^{blue})$ και (w_j^2, w_j^3) να έχουν διαφορετικά χρώματα. Χρωματίζουμε $c(u_{i_1}^{red}, u_{i_2}^{red}) = f_2(c_1) = c_3, c(u_{i_2}^{red}, w_j^1) = f_2(c_2) = c_1, c(w_j^5, u_{i_1}^{red}) = f_1(c_1) = c_2, c(w_j^1, \tilde{u}^{blue}) = c_3, c(w_j^2, w_j^3) = c_2$ και $c(w_j^s, w_j^{s+1}) = f_2(c(w_j^{s-1}, w_j^s))$ για $s = 3, 4$ (βλ. **Εικόνα 15.22b**).



Εικόνα 15.22: (a)-(b) Χρωματισμός μπλε κύκλων από την Περίπτωση C.IV: C_8 .

Βήμα 11: γειτονικές κορυφές τύπου (1,4) και (12) με το ίδιο χρώμα κορυφής

Υπενθυμίζουμε ότι κατά μήκος ενός μπλε κύκλου, ένας βεβιασμένος αντιπρόσωπος τύπου $(1, 4)$ έχει έναν γείτονα τύπου $(1, 4)$ και έναν τύπου (12) . Στο τέλος του **Βήματος 7** σημειώσαμε ότι ο βεβιασμένος αντιπρόσωπος και ο τύπου (12) γείτονάς του μπορεί να έχουν το ίδιο χρώμα κορυφής. Μία τέτοια περίπτωση φαίνεται στην **Εικόνα 15.23a**:



Εικόνα 15.23: Περίπτωση του Βήματος 11.

Έχουμε έναν κόκκινο $C_5 = (u^{red}, w_1, w_2, w_3, w_4, u^{red})$, όπου η κορυφή w_2 είναι τύπου $(1, 4)$. Ο μπλε κύκλος που ανήκει η w_2 έχει 4 κορυφές, $C^{blue} = \{u, v_1, w_2, v_3, u\}$ με αρχική κορυφή την u . Η κορυφή v_1 είναι τύπου $(1, 4)$ με χρώμα 1, και κόκκινη έσω-ακμή $\vec{e}(v_1') = (v_1', v_1)$. Ο χρωματισμός του κόκκινου C_5 καθορίζεται από το χρώμα της κορυφής v_1' . Στην **Εικόνα 15.23a** η κορυφή v_1' έχει ανταλλάξει το χρώμα της με το χρώμα της κόκκινης έξω-ακμής της, επομένως η w_2 έχει χρώμα 2, το ίδιο με το χρώμα της κορυφής v_3 . Στην περίπτωση αυτή, αλλάζουμε το χρώμα της κορυφής w_2 να ανήκει στο $\{5, 6, 7\}$ (βλ. **Εικόνα 15.23b**). Με αυτή την αλλαγή, η κορυφή w_2 έχει χρωματικό σύνολο τύπου (1) και χρώμα κορυφής τύπου (u) . Στην πραγματικότητα ο τύπος της w_2 δεν είναι κανένας από τους έξι τύπους κορυφών που ορίστηκαν στην αρχή της ενότητας. Εφόσον αυτός ο νέος τύπος εμφανίζεται μόνο ως ειδική περίπτωση και μπορούμε να το διαχειριστούμε με τοπικές αλλαγές του χρωματισμού, δεν ορίζουμε καινούριο τύπο για αυτές τις κορυφές. Το χρωματικό σύνολο της w_2 είναι διαφορετικό από τα χρωματικά σύνολα των γειτόνων της: η v_1 είναι τυπου $(1, 4)$, η v_3 τύπου (2) , η w_1 τύπου (u^{odd}) και η w_3 τύπου (u^*) . Ωστόσο, εφόσον η κορυφή w_2 μπορεί να πάρει οποιοδήποτε χρώμα από το $\{5, 6, 7\}$ μπορούμε να έχουμε έναν χρωματισμό του C_4

έτσι ώστε το χρώμα της w_2 να είναι διαφορετικό από τα χρώματα των w_1 και w_3 . Στις **Εικόνες 15.23b-15.23d**, βλέπουμε ότι η w_2 μπορεί να έχει κάθε χρώμα από το $\{5, 6, 7\}$ χωρίς να αλλάξει το χρώμα της αρχικής κορυφή του μπλε C_4 (η αρχική κορυφή u έχει χρώμα 5 στην **Εικόνα 15.23**).

Από τα παραπάνω, είναι προφανές ότι πρέπει να επιτρέψουμε στον βεβιασμένο μπλε αντιπρόσωπο του C^{blue} να πάρει οποιοδήποτε χρώμα από το $\{5, 6, 7\}$. Το ίδιο μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε παρόμοια περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε έναν κόκκινο $C_5 = (u^{red}, w_1, w_2, w_3, w_4, u^{red})$, όπου η κορυφή w_2 είναι τύπου $(1, 4)$ και έχει το ίδιο χρώμα κορυφής με τον τύπου (12) γείτονά της κατά μήκος του μπλε κύκλου που ανήκει. Ο μπλε κύκλος C^{blue} όπου ανήκει η w_2 έχει μήκος 4, 5, 7 ή 8. Η περίπτωση που ο C^{blue} έχει 4 κορυφές περιγράφηκε προηγουμένως, αφήνοντας τρεις επιπλέον περιπτώσεις.

- Εάν το μήκος του μπλε κύκλου είναι 5 τότε $C^{blue} = (u_1^{red}, u_2^{red}, v_1, w_2, v_3, u_1^{red})$, και χ.β.τ.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι η v_1 είναι επίσης τύπου $(1, 4)$. Έστω $c(u_1^{red}) = c_1$ και $c(u_2^{red}) = f_1(c_1) = c_2$. Τότε, χρωματίζουμε $c(v_3, u_1^{red}) = f_1(c_1) = c_2$, $c(u_1^{red}, u_2^{red}) = f_2(c_1) = c_3$ και $c(u_2^{red}, v_1) = f_2(c_2) = c_1$. Για τα υπόλοιπα στοιχεία έχουμε τους παρακάτω δυνατούς χρωματισμούς:

$$\begin{cases} c(w_2) = c_1 & c(w_2, v_3) = c_3 \\ c(w_2) = c_2 & c(w_2, v_3) = c_1 \\ c(w_2) = c_3 & c(w_2, v_3) = c_1 \end{cases}$$

- Εάν το μήκος του μπλε κύκλου είναι 7 τότε $C^{blue} = (u^{blue}, v_1, w_2, v_3, \dots, v_6, u^{blue})$, με την αρχική κορυφή u^{blue} χρωματισμένη ως $c(u^{blue}) = c_1$. Εδώ, η κορυφή v_1 ή η v_3 μπορεί να είναι ο γείτονας της w_2 κατά μήκος του μπλε κύκλου που είναι τύπου $(1, 4)$. Αν οι w_2 και v_1 είναι οι κορυφές τύπου $(1, 4)$ που επιλέχτηκαν στο **Βήμα 7** χρωματίζουμε $c(u^{blue}, v_1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(v_6, u^{blue}) = f_2(c_1) = c_3$ και έχουμε τους παρακάτω τρεις πιθανούς χρωματισμούς:

$$\begin{cases} c(w_2) = c_1 & c(w_2, v_3) = c_2 & c(v_3, v_4) = c_3 \\ c(w_2) = c_2 & c(w_2, v_3) = c_1 & c(v_3, v_4) = c_3 \\ c(w_2) = c_3 & c(w_2, v_3) = c_2 & c(v_3, v_4) = c_3 \end{cases}$$

και για τις υπόλοιπες ακμές

$$c(v_s, v_{s+1}) = \begin{cases} f_1(c(v_{s-1}, v_s)) \\ f_2(c(v_{s-1}, v_s)) \\ f_1(c(v_{s-1}, v_s)) \end{cases} \text{ για } s = 4, 5$$

Αν οι w_2 και v_3 είναι οι κορυφές τύπου $(1, 4)$ που επιλέχτηκαν στο **Βήμα 7** χρωματίζουμε $c(u^{blue}, v_1) = f_1(c_1) = c_2$, $c(v_6, u^{blue}) = f_2(c_1) = c_3$, $c(v_3, v_4) = c_3$,

$c(v_s, v_{s+1}) = f_1(c(v_{s-1}, v_s))$ για $s = 4, 5$, και έχουμε τους παρακάτω τρεις πιθανούς χρωματισμούς για τα υπόλοιπα στοιχεία:

$$\begin{cases} c(v_1, w_2) = c_3 & c(w_2) = c_1 \\ c(v_1, w_2) = c_3 & c(w_2) = c_2 \\ c(v_1, w_2) = c_1 & c(w_2) = c_3 \end{cases}$$

- Εάν ο C_j^{blue} έχει 8 κορυφές, τότε $C^{blue} = (u_1^{red}, u_2^{red}, v_1, w_2, v_3, \dots, v_6, u_1^{red})$, όπου οι κόκκινοι αντιπρόσωποι u_1^{red}, u_2^{red} είναι οι αρχικές κορυφές. Έστω ότι $c(u_1^{red}) = c_1$ και $c(u_2^{red}) = f_1(c_1) = c_2$. Εδώ η κορυφή v_1 ή η v_3 μπορεί να είναι ο γείτονας της w_2 κατά μήκος του μπλε κύκλου που είναι τύπου $(1, 4)$. Αν οι w_2 και v_1 είναι οι κορυφές τύπου $(1, 4)$ που επιλέχτηκαν στο **Βήμα 7** χρωματίζουμε $c(v_6, u_1^{red}) = f_1(c_1) = c_2$, $c(u_1^{red}, u_2^{red}) = f_2(c_1) = c_3$, $c(u_2^{red}, v_1) = f_2(c_2) = c_1$ και έχουμε τους παρακάτω τρεις πιθανούς χρωματισμούς:

$$\begin{cases} c(w_2) = c_1 & c(w_2, v_3) = c_3 & c(v_3, v_4) = c_2 \\ c(w_2) = c_2 & c(w_2, v_3) = c_3 & c(v_3, v_4) = c_2 \\ c(w_2) = c_3 & c(w_2, v_3) = c_1 & c(v_3, v_4) = c_2 \end{cases}$$

και για τις υπόλοιπες ακμές

$$c(v_s, v_{s+1}) = \begin{cases} f_2(c(v_{s-1}, v_s)) \\ f_2(c(v_{s-1}, v_s)) & \text{for } s = 4, 5 \\ f_1(c(v_{s-1}, v_s)) \end{cases}$$

Αν οι w_2 και v_3 είναι οι κορυφές τύπου $(1, 4)$ που επιλέχτηκαν στο **Βήμα 7** χρωματίζουμε $c(v_6, u_1^{red}) = f_1(c_1) = c_2$, $c(u_1^{red}, u_2^{red}) = f_2(c_1) = c_3$, $c(u_2^{red}, v_1) = f_2(c_2) = c_1$, $c(v_3, v_4) = c_2$ και $c(v_s, v_{s+1}) = f_1(c(v_{s-1}, v_s))$ για $s = 4, 5$. Για τα υπόλοιπα στοιχεία έχουμε τους παρακάτω πιθανούς χρωματισμούς:

$$\begin{cases} c(v_1, w_2) = c_3 & c(w_2) = c_1 \\ c(v_1, w_2) = c_3 & c(w_2) = c_2 \\ c(v_1, w_2) = c_2 & c(w_2) = c_3 \end{cases}$$

Σε όλους τους παραπάνω χρωματισμούς, έχουμε ότι η κορυφή w_2 μπορεί να πάρει κάθε χρώμα του συνόλου $\{5, 6, 7\}$, έτσι ώστε το χρώμα της w_2 να είναι διαφορετικό από το χρώμα της κορυφής w_1 και της w_3 κατά μήκος του κόκκινου C_5 .

Τώρα που όλα τα στοιχεία του G έχουν χρωματιστεί, πρέπει να δείξουμε το ακόλουθο:

Ισχυρισμός 2: Ο παραπάνω αλγόριθμος παράγει έναν AVD-ολικό χρωματισμό του G με 7 χρώματα.

Απόδειξη. Προηγουμένως (στο **Βήμα 7**), έχοντας χρησιμοποιήσει τα χρώματα του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$, είδαμε ότι υπήρχαν διαφορετικά χρώματα κορυφών και διαφορετικά χρωματικά σύνολα για ορισμένες γειτονικές κορυφές. Συνεπώς, προκειμένου να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι η χρήση των χρωμάτων $\{5, 6, 7\}$ εξασφαλίζει τα εξής: γειτονικές απλές κορυφές σε έναν μπλε κύκλο έχουν διαφορετικό χρωματικό σύνολο. Αυτό ισχύει, όπως επισημάνθηκε στο **Βήμα 8** και το **Βήμα 10**. Επίσης, γειτονικές κορυφές τύπου $(1, 4)$ έχουν διαφορετικά χρωματικά σύνολα. Αυτό εξασφαλίζεται στο **Βήμα 10: Περίπτωση C.III-C.IV**, ενώ το **Βήμα 11** επιλύει περιπτώσεις όπου μια κορυφή τύπου $(1, 4)$ έχει το ίδιο χρώμα με μία γειτονική της κορυφή. Τέλος, γειτονικοί αντιπρόσωποι έχουν διαφορετικό χρώμα. Αυτό εξασφαλίζεται από την διάταξη των μπλε κύκλων και τον αρχικό χρωματισμό των αρχικών κορυφών. Επομένως, δείξαμε ότι όλα τα γειτονικά στοιχεία του G έχουν διαφορετικό χρώμα μεταξύ τους και κάθε δύο γειτονικές κορυφές έχουν διαφορετικά χρωματικά σύνολα, ικανοποιώντας τον ορισμό του AVD-ολικού χρωματισμού. \square

Μέρος Β: Απεικόνιση Γραφημάτων

16 Αναπαραστάσεις με Κύκλους Απλών 4-Κανονικών Επίπεδων Γραφημάτων

Το κεφάλαιο αυτό σχετίζεται με την εικασία του Lovász ότι κάθε συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα G επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων (αναφερόμαστε στην [Εικασία 11.2](#)). Αρχικά, παρουσιάζουμε αυστηρά άνω και κάτω φράγματα στο πλήθος των κύκλων που χρειάζονται για μια πραγματοποίηση οποιουδήποτε απλού 4-κανονικού επίπεδου γραφήματος. Επιπλέον, απαντάμε θετικά την εικασία του Lovász, εάν το G είναι 3-συνεκτικό, και παρουσιάζουμε μία άπειρη οικογένεια από απλά συνεκτικά 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα που δεν είναι 3-συνεκτικά (δηλαδή, είναι είτε απλά συνεκτικά είτε δισυνεκτικά) και δεν επιδέχονται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων.

16.1 Φράγματα στο Πλήθος των Κύκλων για μία Αναπαράσταση με Κύκλους ενός Απλού 4-Κανονικού Επίπεδου Γραφήματος

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε άνω και κάτω φράγματα στο πλήθος των κύκλων που χρειάζονται για μία πραγματοποίηση ενός απλού συνεκτικού 4-κανονικού επίπεδου γραφήματος ως ένα σύστημα κύκλων. Επίσης αποδεικνύουμε ότι αυτά τα φράγματα είναι αυστηρά, δηλαδή υπάρχουν απείρως πολλά συνεκτικά 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα που επιδέχονται πραγματοποιήσεις ως σύστημα κύκλων και χρησιμοποιούν το πλήθος κύκλων που δίνεται από τα δύο φράγματα.

Λήμμα 16.1. Έστω G ένα απλό συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα με n κορυφές. Τότε το πλήθος των κύκλων, έστω $c[G]$, που συμμετέχουν σε μία πραγματοποίηση του G ως σύστημα κύκλων, εάν υπάρχει, ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα:

$$(1 + \sqrt{1 + 4n})/2 \leq c[G] \leq 2n/3.$$

Απόδειξη. Γενικά, υπάρχουν ορισμένοι περιορισμοί όσον αφορά το πλήθος των κύκλων που συμμετέχουν σε μία πραγματοποίηση ενός γραφήματος ως ένα σύστημα κύκλων:

- Δύο κύκλοι μπορεί να έχουν το πολύ δύο κοινές κορυφές: Δύο σημεία τομής εάν τέμνονται, ένα σημείο επαφής εάν εφάπτονται, ή κανένα εάν είναι διαχωρισμένοι.
- Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις κορυφές σε κάθε κύκλο, εφόσον θεωρούμε μόνο απλά γραφήματα.
- Κάθε κορυφή ανήκει ακριβώς σε δύο κύκλους, εφόσον κάθε κορυφή έχει βαθμό 4.

Από τις τελευταίες δύο ιδιότητες, έπεται ότι σε κάθε πραγματοποίηση του G ως ένα σύστημα κύκλων, το πλήθος των κορυφών του G που ορίζονται από όλους τους κύκλους είναι τουλάχιστον $3c[G]/2$, το οποίο συνεπάγεται άμεσα το επιθυμητό άνω φράγμα, δηλαδή $c[G] \leq 2n/3$. Από την άλλη, εάν κάθε ζεύγος κύκλων ορίζει ακριβώς δύο κορυφές (δηλαδή κάθε ζεύγος κύκλων τέμνονται), η αντίστοιχη πραγματοποίηση του G έχει το μικρότερο πλήθος κύκλων. Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή συνολικά $c[G](c[G] - 1)/2$ ζεύγη κορυφών ορίζουν το πολύ $c[G](c[G] - 1)$ κορυφές. Οπότε, έπεται ότι $n \leq c[G](c[G] - 1)$ ή ισοδύναμα ότι $(1 + \sqrt{1 + 4n})/2 \leq c[G]$. \square

Παρακάτω, δείχνουμε ότι τα φράγματα του **Λήμματος 16.1** είναι αυστηρά.

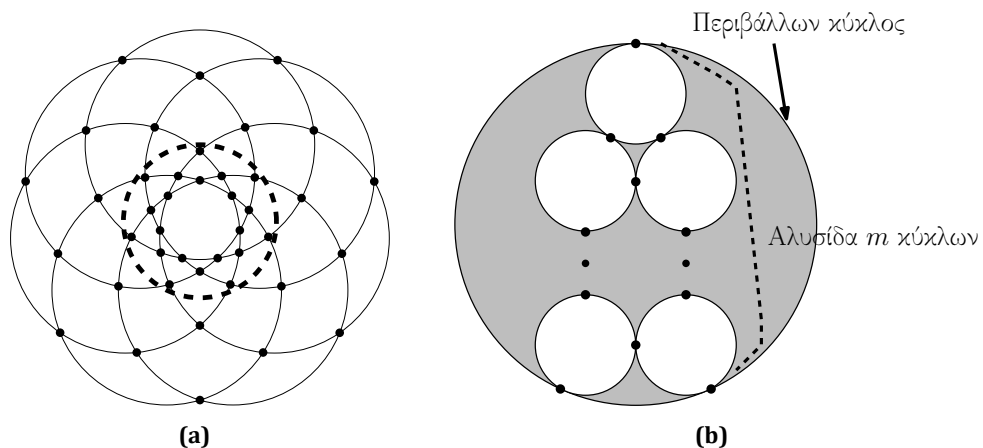
Λήμμα 16.2. Υπάρχουν απείρως πολλά συνεκτικά 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα με n κορυφές που επιδέχονται πραγματοποίηση ως σύστημα $(1 + \sqrt{1 + 4n})/2$ και $2n/3$ κύκλων.

Απόδειξη. Προκειμένου να αποδείξουμε το λήμμα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν δύο οικογένειες γραφημάτων που επιδέχονται πραγματοποιήσεις ως σύστημα κύκλων, στις οποίες (a) κάθε ζεύγος κύκλων τέμνονται και (b) κάθε κύκλος έχει ακριβώς τρεις κορυφές.

- (a) Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο από κύκλους που δεν ταυτίζονται, όλοι με την ίδια ακτίνα και όλοι να περιέχουν το ίδιο εσωτερικό σημείο. Πιο τυπικά, έστω $c \geq 3$ ένας αυθαίρετος ακέραιος. Έστω επίσης C ένας βοηθητικός γεωμετρικός κύκλος ακτίνας $R > 0$ (αναφερόμαστε στον διακεκομμένο κύκλο της **Εικόνας 16.1a**). Σχεδιάζουμε c κύκλους ίδιας ακτίνας $r > 0$ με κέντρο τις κορυφές ενός κανονικού c -γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο C , έτσι ώστε $r > R$ (βλ. **Εικόνα 16.1a**). Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι κάθε ζεύγος κύκλων τέμνονται, εφόσον τα κέντρα τους βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη του $2r$. Επίσης, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα το r , έτσι ώστε να μην υπάρχουν τρεις κύκλοι που να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Εφόσον το c είναι αυθαίρετα επιλεγμένο, η οικογένεια γραφημάτων που προκύπτει από τις αναπαραστάσεις κύκλων που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του ακεραίου c , $c \geq 3$, έχει προφανώς την ιδιότητα ότι τα μέλη της επιδέχονται πραγματοποιήσεις στις οποίες κάθε ζεύγος κύκλων τέμνονται.

(b) Προκειμένου να δείξουμε ότι υπάρχουν απείρως πολλά γραφήματα που επιδέχονται πραγματοποιήσεις ως σύστημα κύκλων, στις οποίες κάθε κύκλος έχει ακριβώς τρεις κορυφές, ακολουθούμε παρόμοια προσέγγιση με την προηγούμενη περίπτωση (αναφερόμαστε στην [Εικόνα 16.1b](#)). Έστω $m > 2$ ένας περιττός ακέραιος αριθμός. Σχεδιάζουμε μια “αλυσίδα από κύκλους” που αποτελείται από m κύκλους με την ίδια ακτίνα, οι οποίοι εφάπτονται μεταξύ τους και επιπλέον εφάπτονται στο εσωτερικό ενός “περιβάλλοντα κύκλου”, όπως φαίνεται στην [Εικόνα 16.1b](#). Η κατασκευή εξασφαλίζει ότι κάθε κύκλος έχει ακριβώς τρεις κορυφές. Οπότε, η κλάση των γραφημάτων που προκύπτει από τις αναπαραστάσεις κύκλων που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του $m > 2$, έχει προφανώς την ιδιότητα ότι τα μέλη της επιδέχονται πραγματοποιήσεις στις οποίες κάθε κύκλος έχει ακριβώς τρεις κορυφές.

□



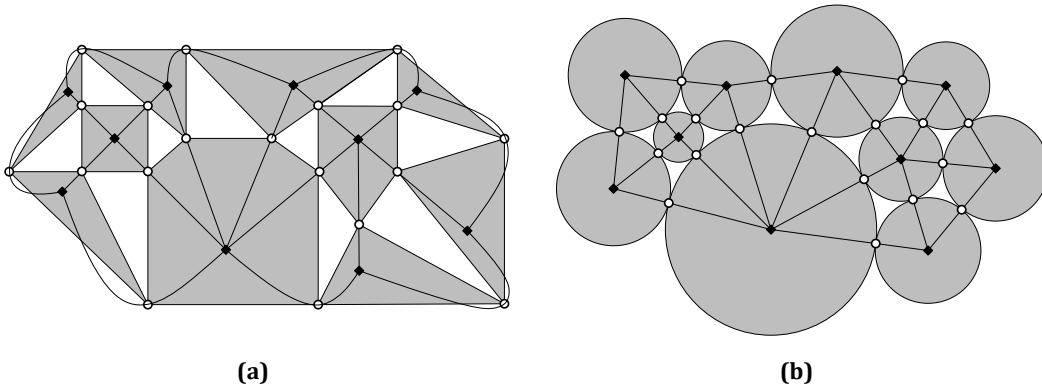
Εικόνα 16.1: Αναπαραστάσεις κύκλων στις οποίες (a) Κάθε ζεύγος κύκλων τέμνονται και (b) Κάθε κύκλος έχει ακριβώς τρεις κορυφές.

16.2 Η Περίπτωση 3-Συνεκτικών 4-Κανονικών Επίπεδων Γραφημάτων

Αποδεικνύουμε ότι ένα 3-συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα επιδέχεται μία πραγματοποίηση ως ένα σύστημα εφαπτόμενων κύκλων. Η αφετηρία μας είναι το θεώρημα συσκευασίας κύκλων ([Θεώρημα 11.1](#)). Θα χρησιμοποιήσουμε το [Θεώρημα 11.1](#) σε ένα βοηθητικό γράφημα που μπορεί να κατασκευαστεί από ένα οποιοδήποτε 3-συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα.

Έστω G ένα 4-κανονικό επίπεδο γράφημα εμφυτευμένο στο επίπεδο. Εφόσον το G είναι προφανώς γράφημα Euler, από το [Λήμμα 11.2](#) το δυικό του γράφημα G^* εί-

να διμερές. Συνεπώς, μπορούμε να χρωματίσουμε τις όψεις του G χρησιμοποιώντας δύο χρώματα, έστω γκρι και άσπρο, έτσι ώστε οποιοσδήποτε δύο γειτονικές όψεις να έχουν διαφορετικό χρώμα. Για πρακτικούς λόγους, υποθέτουμε ότι η εξωτερική όψη του G είναι πάντα χρωματισμένη άσπρη. Θα κατασκευάσουμε ένα νέο γράφημα $IL(G)$ ως εξής. Σχετίζουμε μία κορυφή του $IL(G)$ με κάθε γκρι όψη του G . Ενώνουμε δύο κορυφές του $IL(G)$ με ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες όψεις του G έχουν τουλάχιστον μία κοινή κορυφή (αναφερόμαστε στο γράφημα μαύρου χρώματος της **Εικόνας 16.2a**).



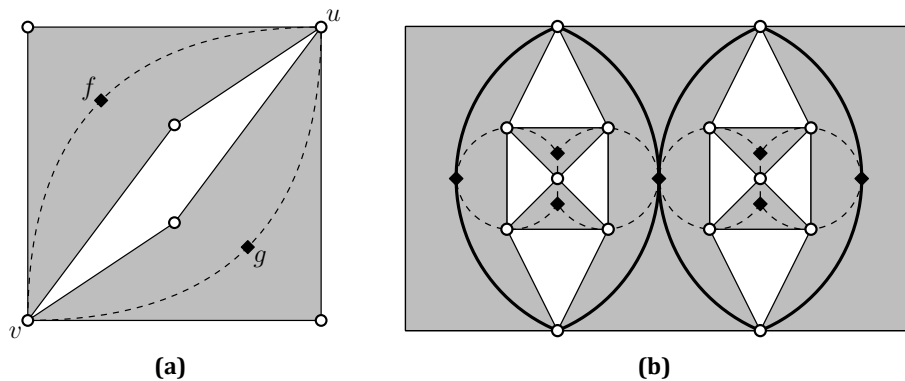
Εικόνα 16.2: (a) Κατασκευή του γραφήματος $IL(G)$. (b) Πραγματοποίηση του G ως σύστημα κύκλων.

Λήμμα 16.3. *Εάν το G είναι 3-συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα, τότε το $IL(G)$ είναι απλό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το G είναι 3-συνεκτικό και έστω ότι, αντιθέτως, το $IL(G)$ δεν είναι απλό. Χ.β.τ.γ., υποθέτουμε επιπλέον ότι το $IL(G)$ περιέχει μία πολλαπλή ακμή, έστω μία διπλή ακμή μεταξύ των f και g , όπου τα $f, g \in V(IL(G))$ (βλ. **Εικόνα 16.3a**). Η περίπτωση που το $IL(G)$ περιέχει βρόγχους αντιμετωπίζεται παρόμοια. Από τον ορισμό, οι f και g αντιστοιχούν σε γκρι όψεις του G που έχουν ακριβώς δύο κοινές κορυφές, έστω $u, v \in V(G)$. Τότε, οι u, f, v και g ορίζουν μία διαχωριστική απλή κλειστή καμπύλη που τέμνεται με το G ακριβώς σε δύο κορυφές (δηλαδή τις κορυφές u και v , όπως στην **Εικόνα 16.3a**). Παρατηρούμε ότι εφόσον το G είναι απλό υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή του G που βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης αυτής και μία στο εξωτερικό της. Οπότε, το G δεν είναι 3-συνεκτικό, άτοπο. \square

Είμαστε πλέον έτοιμοι να διατυπώσουμε το κεντρικό θεώρημα της ενότητας αυτής.

Θεώρημα 16.1. *Κάθε 3-συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα εφαπτόμενων κύκλων.*



Εικόνα 16.3: (a) Οι κορυφές u , f , v και g ορίζουν μία διαχωριστική απλή κλειστή καμπύλη. (b) Εάν το G είναι δισυνεκτικό, τότε το $IL(G)$ δεν είναι απαραίτητα απλό (βλ. τις παχιές ακμές).

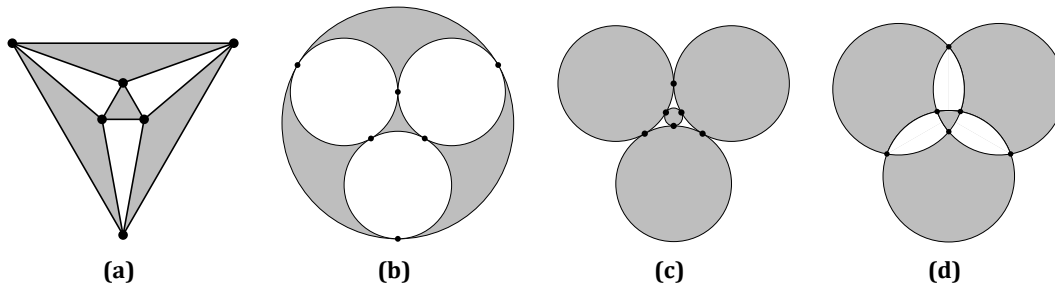
Απόδειξη. Από το **Λήμμα 16.3**, το $IL(G)$ είναι απλό. Οπότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε το **Θεώρημα 11.1** σ' αυτό. Τότε προκύπτει μία απεικόνιση στην οποία κάθε γκρι όψη του G αντιστοιχεί σε έναν κύκλο και δύο κύκλοι εφάπτονται αν και μόνο αν οι αντίστοιχες όψεις είναι γειτονικές (βλ. **Εικόνα 16.2b**). Από την κατασκευή του $IL(G)$ προκύπτει ότι οι κορυφές του G είναι τα σημεία που εφάπτονται οι κύκλοι. Επίσης, κάθε κύκλος περιέχει ως τόξα όλες τις ακμές της γκρι όψης στην οποία αντιστοιχεί. Εφόσον οι γκρι όψεις περιέχουν όλες τις ακμές του γραφήματος, έπεται ότι η απεικόνιση που κατασκευάστηκε είναι πράγματι ένα σύστημα εφαπτόμενων κύκλων για το G . \square

16.3 Η Περίπτωση Συνεκτικών 4-Κανονικών Επίπεδων Γραφημάτων

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε μία άπειρη οικογένεια συνεκτικών 4-κανονικών επίπεδων γραφημάτων που δεν επιδέχονται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων. Η βάση της κατασκευαστικής μας απόδειξης είναι το οκτάεδρο G_{oct} (βλ. **Εικόνα 16.4a**), το οποίο είναι ένα 3-συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα και επομένως από το **Θεώρημα 16.1**, επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα εφαπτόμενων κύκλων. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που το G δεν είναι 3-συνεκτικό, το $IL(G)$ δεν είναι απαραίτητα απλό (ένα παράδειγμα δίνεται στην **Εικόνα 16.3b**). Συνεπώς, το **Θεώρημα 11.1** δεν μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας.

ΑΣ υποθέσουμε τώρα ότι ένα γράφημα G επιδέχεται μία πραγματοποίηση, έστω R , ως ένα σύστημα κύκλων. Γενικά, η R δεν ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο, καθώς μπορούμε να κατασκευάσουμε απείρως πολλές πραγματοποιήσεις του G ως ένα σύστημα κύκλων βασιζόμενοι στην R , για παράδειγμα, αλλάζοντας την κλίμακα της R ή μετακινώντας την R πάνω στο επίπεδο. Με την ίδια λογική, εάν διαταράξουμε ελα-

φρά τις ακτίνες των κύκλων ή ακόμα και τα κέντρα των κύκλων της πραγματοποίησης του οκτάεδρου γραφήματος που φαίνεται στην **Εικόνα 16.4d**, τότε μπορούμε να πάρουμε μία νέα πραγματοποίηση του οκτάεδρου (και πάλι ως ένα σύστημα τριών κύκλων που τέμνονται ανά δύο μεταξύ τους), η οποία λίγο πολύ θα είναι “ισοδύναμη” με την πραγματοποίηση της **Εικόνας 16.4d**. Το ίδιο ουσιαστικά ισχύει, εάν αλλάξουμε την τριάδα των κορυφών που οριοθετούν την εξωτερική του όψη (καθώς το οκτάεδρο είναι συμμετρικό). Διαισθητικά, δύο πραγματοποιήσεις R και R' του G είναι ισοδύναμες εάν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από τις όψεις της R στις όψεις της R' , η οποία απεικονίζει κάθε όψη της R σε μία όψη της R' του ίδιου σχήματος, όπου το σχήμα μίας όψης καθορίζεται από την κυρτότητα των τόξων που την αποτελούν, δηλαδή εάν είναι κυρτά ή κοίλα ως προς το εσωτερικό της όψης.



Εικόνα 16.4: (a) Μία απεικόνιση του οκτάεδρου G_{oct} με ευθείες γραμμές. (b)-(d) Μη-ισοδύναμες πραγματοποιήσεις του G_{oct} ως σύστημα κύκλων.

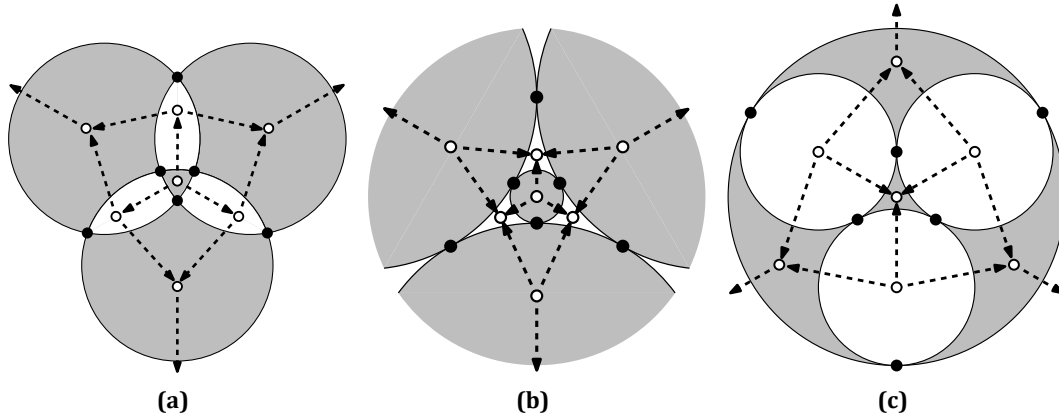
Τυπικά, δοθείσας μίας πραγματοποίησης R του G ως ένα σύστημα κύκλων, πρώτα εξωμαλύνουμε το G διαλύοντας τις κορυφές βαθμού δύο, και έπειτα κατασκευάζουμε το δυικό γράφημα, έστω G_R^* , και κατευθύνουμε τις ακμές του ως εξής: Για μία ακμή $e \in E(G)$ στο σύνορο δύο όψεων f_e και f'_e της R , η ακμή $(f_e, f'_e) \in E(G_R^*)$ κατευθύνεται από την f_e προς την f'_e αν και μόνο αν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα πάνω στο τόξο της R που αντιστοιχεί στην e δεν βρίσκεται εξολοκλήρου στην όψη f'_e . Διαφορετικά, η (f_e, f'_e) κατευθύνεται από την f'_e προς την f_e . Σημειώνουμε ότι για κάθε κύκλο της R , έστω c , μία όψη του G βρίσκεται είτε στο εσωτερικό του c είτε στο εξωτερικό του. Τότε, κατευθύνοντας την ακμή $(f_e, f'_e) \in E(G_R^*)$ από την f_e προς την f'_e συνεπάγεται ότι η f_e βρίσκεται στο εσωτερικό του c και η f'_e στο εξωτερικό του, όπου c είναι ένας κύκλος της R και η e είναι ένα τόξο-τμήμα του c . Λέμε ότι δύο πραγματοποιήσεις R και R' του G είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν τα G_R^* και $G_{R'}^*$ είναι ισομορφικά, δηλαδή, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $g : V(G_R^*) \rightarrow V(G_{R'}^*)$ τέτοια ώστε $(\overrightarrow{v, v'}) \in E(G_R^*)$ αν και μόνο αν $(\overrightarrow{g(v), g(v')}) \in E(G_{R'}^*)$. Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω ορισμό οι κορυφές βαθμού δύο δεν επηρεάζουν ούτε το σύνολο των κύκλων που συμμετέχουν στην πραγματοποίηση ούτε την σχετική τους θέση. Για τον λόγο αυτό παραλείπονται. Το παρακάτω λήμμα περιγράφει όλες τις μη-ισοδύναμες πραγματοποιήσεις του G_{oct}

ως ένα σύστημα κύκλων.

Λήμμα 16.4. *Το οκτάεδρο έχει ακριβώς τρεις μη-ισοδύναμες πραγματοποιήσεις ως ένα σύστημα κύκλων, οι οποίες απεικονίζονται στις [Εικόνες 16.4b-16.4d](#).*

Απόδειξη. Το [Λήμμα 16.1](#) υποδηλώνει ότι κάθε πραγματοποίηση του οκταέδρου G_{oct} ως ένα σύστημα κύκλων αποτελείται είτε από τρεις είτε από τέσσερις κύκλους. Εύκολα προκύπτει ότι στην πρώτη περίπτωση οι τρεις κύκλοι τέμνονται ανά δύο, ενώ στην δεύτερη περίπτωση οι τέσσερις κύκλοι εφάπτονται ανά δύο. Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση τριών κύκλων που τέμνονται ανά δύο (βλ. [Εικόνα 16.4d](#), στην οποία υπάρχουν έξι κορυφές βαθμού τέσσερα και κάθε όψη είναι ένα τρίγωνο). Εφόσον το G_{oct} είναι το μόνο πλήρως-τριγωνοποιημένο 4-κανονικό επίπεδο γράφημα με έξι κορυφές, τότε έχουμε πράγματι μία πραγματοποίηση του G_{oct} ως ένα σύστημα κύκλων. Υπάρχει ακριβώς μία όψη του G_{oct} που ανήκει στο εσωτερικό και των τριών κύκλων. Έπεται ότι στο G_{oct}^* η αντίστοιχη κορυφή έχει έξω-βαθμό τρία (αναφερόμαστε στην εσωτερικότερη κορυφή της [Εικόνας 16.5a](#)). Επίσης, για κάθε ζεύγος κύκλων, υπάρχει ακριβώς μία όψη που ανήκει στο εσωτερικό και των δύο κύκλων και στο εξωτερικό του τρίτου κύκλου. Οι αντίστοιχες κορυφές του G_{oct}^* έχουν έξω-βαθμό δύο και έσω-βαθμό ένα (αναφερόμαστε στις κορυφές που βρίσκονται σε απόσταση ένα από την εσωτερικότερη κορυφή της [Εικόνας 16.5a](#)). Για κάθε κύκλο, υπάρχει ακριβώς μία όψη που ανήκει στο εσωτερικό του και στο εξωτερικό των άλλων δύο κύκλων. Οι αντίστοιχες κορυφές του G_{oct}^* έχουν έξω-βαθμό ένα και έσω-βαθμό δύο (αναφερόμαστε στις κορυφές που βρίσκονται σε απόσταση δύο από την εσωτερικότερη κορυφή της [Εικόνας 16.5a](#)). Τέλος, η κορυφή που αντιστοιχεί στην εξωτερική όψη έχει έσω-βαθμό τρία. Από τα παραπάνω, έπεται ότι το κατευθυνόμενο δυικό γράφημα G_{oct}^* που αντιστοιχεί σε μία πραγματοποίηση του G_{oct} ως ένα σύστημα τριών κύκλων που τέμνονται ανά δύο είναι ισομορφικό με αυτό της [Εικόνας 16.5a](#), όπου η κορυφή που αντιστοιχεί στην εξωτερική όψη παραλείπεται.

Στην περίπτωση τεσσάρων εφάπτόμενων κύκλων, από το [Λήμμα 16.1](#) έπεται ότι κάθε κύκλος έχει ακριβώς τρεις κορυφές. Εφόσον οι κορυφές καθορίζονται από τα σημεία επαφής και δύο κύκλοι μπορούν να έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο, έπεται ότι ένας κύκλος εφάπτεται και με τους τρεις άλλους κύκλους της πραγματοποίησης. Έστω c_1, \dots, c_4 οι τέσσερις κύκλοι. Αν ο c_2 βρίσκεται στο εσωτερικό του c_1 , τότε ο c_3 και ο c_4 βρίσκονται επίσης στο εσωτερικό του c_1 (αφού εφάπτονται με τον c_2). Αυτό συνεπάγεται ότι είτε όλοι οι κύκλοι έχουν κενό εσωτερικό ή ένας κύκλος περιέχει και τους τρεις άλλους κύκλους στο εσωτερικό του (βλ. [Εικόνες 16.4c](#) και [16.4b](#), αντίστοιχα, στις οποίες ορίζονται έξι κορυφές βαθμού τέσσερα και κάθε όψη είναι τρίγωνο). Αφού το G_{oct} είναι το μοναδικό πλήρως-τριγωνοποιημένο 4-κανονικό επίπεδο γράφημα με έξι κορυφές, αυτές είναι πράγματι πραγματοποιήσεις του G_{oct} ως σύστημα κύκλων. Για την περίπτωση που όλοι οι κύκλοι έχουν κενό εσωτερικό, οι



Εικόνα 16.5: Απεικόνιση των κατευθυνόμενων δικών γραφημάτων (διακεκομμένες ακμές) του G_{oct} που αντιστοιχούν στις τρεις μη-ισοδύναμες πραγματοποιήσεις του οκτάεδρου G_{oct} ως σύστημα κύκλων.

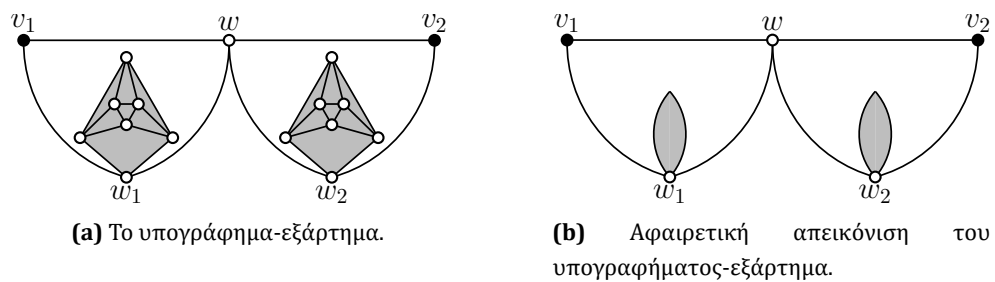
κύκλοι c_1 έως c_4 είναι όψεις του G_{oct} και οι αντίστοιχες κορυφές του G_{oct}^* έχουν έξω-βαθμό τρία (αναφερόμαστε στην εσωτερικότερη κορυφή της **Εικόνας 16.5b** και στις κορυφές σε απόσταση δύο από αυτήν). Όλες οι άλλες όψεις του G_{oct} βρίσκονται στο εξωτερικό όλων των κύκλων και έχουν επομένως έσω-βαθμό τρία και έξω-βαθμό μηδέν (αναφερόμαστε στις κορυφές σε απόσταση ένα από την εσωτερικότερη κορυφή της **Εικόνας 16.5b**, όπου η κορυφή της εξωτερικής όψης εμπίπτει στην κατηγορία αυτή). Συνεπώς, το κατευθυνόμενο δικό γράφημα G_{oct}^* που αντιστοιχεί σε μία πραγματοποίηση του G_{oct} ως τέσσερις εφαπτόμενοι κύκλοι με κενό εσωτερικό είναι ισομορφικό με το γράφημα που δίνεται στην **Εικόνα 16.5b**, όπου η κορυφή που αντιστοιχεί στην εξωτερική όψη παραλείπεται.

Έστω τώρα ότι ένας κύκλος, έστω ο κύκλος c_1 , περιέχει στο εσωτερικό του και τους τρεις άλλους κύκλους. Τότε, οι κύκλοι c_2, c_3 και c_4 είναι όψεις του G_{oct} και οι αντίστοιχες κορυφές του G_{oct}^* έχουν έξω-βαθμό τρία (αναφερόμαστε στις κορυφές σε απόσταση ένα από την εσωτερικότερη κορυφή της **Εικόνας 16.5c**). Υπάρχει ακριβώς μία όψη που οριοθετείται από τους c_2, c_3 και c_4 (στο εσωτερικό του c_1) που αντιστοιχεί σε μία κορυφή του G_{oct}^* με έσω-βαθμό τρία (αναφερόμαστε στην εσωτερικότερη κορυφή της **Εικόνας 16.5c**). Τρεις διακεκριμένες όψεις έχουν από μία ακμή κοινή με τον c_1 και βρίσκονται στο εσωτερικό του, και αντιστοιχούν σε τρεις κορυφές του G_{oct}^* με έσω-βαθμό δύο και έξω-βαθμό ένα (αναφερόμαστε στις κορυφές σε απόσταση δύο από την εσωτερικότερη κορυφή της **Εικόνας 16.5c**). Η εξωτερική όψη αντιστοιχεί σε μία κορυφή με έσω-βαθμό τρία. Παρόμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις, το κατευθυνόμενο δικό γράφημα G_{oct}^* που αντιστοιχεί σε μία πραγματοποίηση του G_{oct} ως τέσσερις εφαπτόμενοι κύκλοι όπου ένας κύκλος περιέχει στο εσωτερικό του και τους τρεις άλλους κύκλους, είναι ισομορφικό με το γράφημα που δίνεται στην **Εικόνα 16.5c**,

όπου η κορυφή που αντιστοιχεί στην εξωτερική όψη παραλείπεται.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι τρεις πραγματοποιήσεις που περιγράφηκαν δεν είναι ισοδύναμες: Στην πραγματοποίηση της **Εικόνας 16.5a** υπάρχει μόνο μία κορυφή με έξω-βαθμό τρία, ενώ στην πραγματοποίηση της **Εικόνας 16.5b** υπάρχουν τέσσερις κορυφές με έξω-βαθμό τρία, και στην πραγματοποίηση της **Εικόνας 16.5c** υπάρχουν τρεις. Εφόσον οι ακολουθίες βαθμών των τριών δυικών γραφημάτων είναι διαφορετικές, τα γραφήματα δεν είναι ισομορφικά.

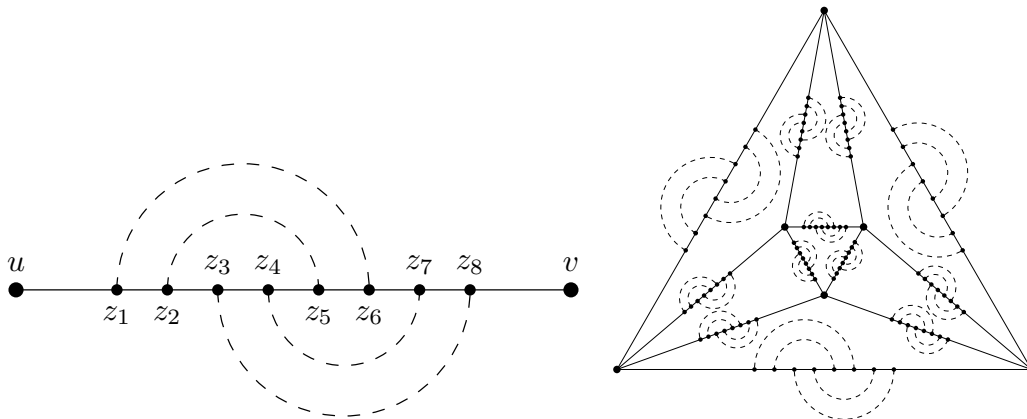
Κάθε πραγματοποίηση του οκταέδρου ως ένα σύστημα κύκλων θα χρησιμοποιεί είτε τρεις κύκλους που τέμνονται ανά δύο, είτε τέσσερις εφαπτόμενους κύκλους. Εφόσον αποδείξαμε ότι το κατευθυνόμενο δυικό γράφημα στην πρώτη περίπτωση είναι ισομορφικό με το γράφημα της **Εικόνας 16.5a**, ενώ στην δεύτερη περίπτωση ισομορφικό είτε με το γράφημα της **Εικόνας 16.5b** είτε με το γράφημα της **Εικόνας 16.5c**, έπεται ότι θα είναι πάντα ισομορφικό με ένα από τα κατευθυνόμενα γραφήματα της **Εικόνας 16.5**, δίνοντας συνολικά τρεις μη-ισοδύναμες πραγματοποιήσεις του G_{oct} ως ένα σύστημα κύκλων. \square



Εικόνα 16.6: Απεικονίσεις του υπογραφήματος-εξάρτημα.

Αρχικά, θα παρουσιάσουμε ένα συγκεκριμένο συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα που δεν επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων. Το γράφημα αυτό θα κατασκευαστεί με βάση το G_{oct} , το οποίο θα προσαυξήσουμε “προσαρτώντας” καταλλήλως ένα συγκεκριμένο υπογράφημα-εξάρτημα στις ακμές του, κατασκευάζοντας ένα γράφημα, έστω G_{oct}^{aug} , το οποίο περιέχει κορυφές τομής και διαχωριστικά ζεύγη κορυφών (σημειώνουμε ότι κάθε συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα δεν περιέχει γέφυρες [Wes01, pp.34]). Το υπογράφημα-εξάρτημα απεικονίζεται στην **Εικόνα 16.6a**. Παρατηρούμε ότι περιέχει ακριβώς δύο κορυφές βαθμού δύο, τις v_1 και v_2 , οι οποίες είναι τα άκρα του. Τώρα αντικαθιστούμε κάθε ακμή $e = (u, v)$ του G_{oct} με ένα μονοπάτι που αποτελείται από 8 εσωτερικές κορυφές. Προφανώς, το γράφημα, έστω G_{oct}^{sub} , που δημιουργείται με τον τρόπο αυτό είναι υποδιαίρεση του G_{oct} . Έστω $u \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_8 \rightarrow v$ το μονοπάτι που αντικαθιστά την ακμή (u, v) . Προσαρτάμε τέσσερα αντίγραφα του υπογραφήματος-εξάρτημα με τις κορυφές z_1, \dots, z_8 ως άκρα τους: το πρώτο υπογράφημα-εξάρτημα συνδέει τις κορυφές z_1 και z_6 , το δεύ-

τερο συνδέει τις z_2 και z_5 , το τρίτο συνδέει τις z_3 και z_8 και το τελευταίο συνδέει τις z_4 και z_7 (βλ. **Εικόνα 16.7a**, στην οποία τα υπογραφήματα-εξάρτημα απεικονίζονται με διακεκομμένες καμπύλες που ενώνουν τα δύο άκρα, ενώ στην **Εικόνα 16.7b** φαίνεται το γράφημα G_{oct}^{aug} που προκύπτει).



(a) Προσάρτηση των υπογραφήματων-εξάρτημα στην $e = (u, v)$.

(b) Το επαυξημένο γράφημα G_{oct}^{aug} που προκύπτει.

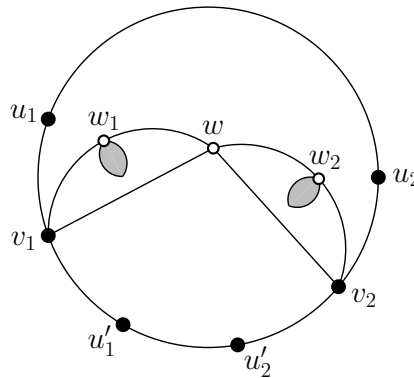
Εικόνα 16.7: Κάθε διακεκομμένη ακμή αντιστοιχεί σε ένα υπογράφημα-εξάρτημα της **Εικόνας 16.6**.

Ο σκελετός του υπογραφήματος-εξάρτημα αποτελείται από τις κορυφές v_1, v_2, w_1, w_2 και w (βλ. **Εικόνα 16.6**) και τις ακμές (v_i, w) , (w_i, w) και (v_i, w_i) , $i = 1, 2$. Εάν αφαιρέσουμε τις ακμές του σκελετού, το γράφημα που απομένει αποτελείται από τρεις απομονωμένες κορυφές (τις v_1, v_2 και w) και δύο ξένα μεταξύ τους γραφήματα που είναι υποδιαιρέσεις του οκταέδρου (αναφερόμαστε στα γραφήματα με γκρι επισκίαση της **Εικόνας 16.6a**). Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε ορισμένες ιδιότητες των υπογραφήματων-εξάρτημα. Αυτές οι ιδιότητες ουσιαστικά δεν προκύπτουν από την δομή των υπογραφήματων-εξάρτημα. Στην πραγματικότητα, κάθε γράφημα στο οποίο κάθε κορυφή έχει βαθμό τέσσερα εκτός απρό ακριβώς μία κορυφή βαθμού 2 στην εξωτερική όψη, μπορεί να αντικαταστήσει το εσωτερικό των υπογραφήματων-εξάρτημα εξασφαλίζοντας τις ίδες ιδιότητες. Η γενική περίπτωση φαίνεται στην **Εικόνα 16.6b**, όπου τα υπογραφήματα έχουν απεικονιστεί ως βρόγχοι στις κορυφές w_1 και w_2 . Για απλότητα, θα αναφερόμαστε στα υπογραφήματα αυτά ως υπογραφήματα-βρόγχος.

Λήμμα 16.5. Έστω G ένα 4-κανονικό επίπεδο γράφημα που περιέχει τουλάχιστον ένα αντίγραφο του υπογραφήματος-εξάρτημα. Έστω ότι υπάρχει μία πραγματοποίηση του G ως ένα σύστημα κύκλων. Τότε, ο σκελετός κάθε υπογραφήματος-εξάρτημα στην πραγματοποίηση αυτή αποτελείται από δύο κύκλους C_1 και C_2 που εφάπτονται σε ένα σημείο w , όπου ο κύκλος C_i περιέχει τις κορυφές $\{v_i, w_i, w\}$ και τα κυκλικά τόξα που πραγματο-

ποιούν τις ακμές (v_i, w_i) , (w_i, w) , και (v_i, w) , για $i = 1, 2$.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει μία πραγματοποίηση του G ως ένα σύστημα κύκλων και ας θεωρήσουμε ένα αντίγραφο του υπογραφήματος-εξάρτημα στην πραγματοποίηση αυτή. Εφόσον κάθε κορυφή ορίζεται από ακριβώς δύο κύκλους και η w_i είναι κορυφή τομής, έπεται ότι ένας από τους δύο κύκλους που ορίζουν την w_i περιέχει κορυφές που ανήκουν μόνο στο υπογράφημα-βρόγχος του, $i = 1, 2$. Συνεπώς, οι ακμές (v_i, w_i) και (w_i, w) ανήκουν στον ίδιο κύκλο, $i = 1, 2$. Έστω C_i ο κύκλος που περιέχει τις (v_i, w_i) και (w_i, w) και C'_i ο κύκλος που περιέχει την (v_i, w) , $i = 1, 2$. Ισχυριζόμαστε ότι $C_i = C'_i$, $i = 1, 2$. Παρατηρούμε ότι αν ισχύει ο ισχυρισμός τότε το λήμμα έπεται. Έστω λοιπόν, ότι αντιθέτως, $C_1 \neq C'_1$. Εφόσον η κορυφή w ορίζεται ακριβώς από δύο κύκλους, έχουμε ότι $\{C_1, C'_1\} = \{C_2, C'_2\}$, το οποίο επίσης συνεπάγεται ότι $C_2 \neq C'_2$. Τότε, οι C_1 και C'_1 έχουν τουλάχιστον τρία κοινά σημεία, συγκεκριμένα τις κορυφές v_1 , v_2 και w , από το οποίο έχουμε ότι $C_1 = C'_1$, άτοπο. \square



Εικόνα 16.8: Ο σχηματισμός που εξετάζεται στην απόδειξη του **Λήμματος 16.6**.

Λήμμα 16.6. Έστω G ένα 4-κανονικό επίπεδο γράφημα και G^{sub} μία υποδιαίρεση του G . Έστω v_1 και v_2 δύο κορυφές υποδιαίρεσης του G^{sub} , δηλαδή οι v_1 και v_2 είναι κορυφές βαθμού 2. Προσαρτάμε ένα υπογράφημα-εξάρτημα, έτσι ώστε οι v_1 και v_2 να είναι τα άκρα του, και έτσι ώστε το γράφημα που προκύπτει να είναι επίπεδο. Τότε, σε οποιαδήποτε πραγματοποίηση του γραφήματος που προκύπτει ως ένα σύστημα κύκλων, η πραγματοποίηση του υπογραφήματος-εξάρτημα και η πραγματοποίηση του G^{sub} είναι ανεξάρτητες, δηλαδή, κάθε κύκλος περιέχει ακμές που ανήκουν αποκλειστικά είτε στο υπογράφημα-εξάρτημα είτε στο G^{sub} .

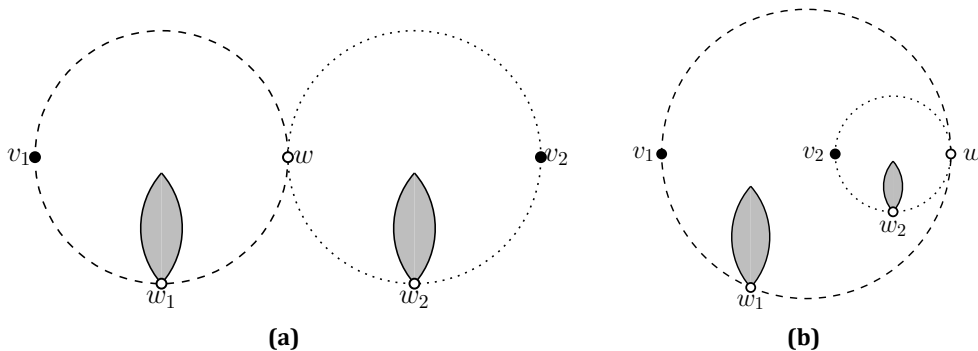
Απόδειξη. Αναφερόμαστε στην **Εικόνα 16.8**. Εφόσον το γράφημα που προκύπτει είναι επίπεδο, οι v_1 και v_2 βρίσκονται στο σύνορο μιας όψης του G^{sub} . Από το **Λήμμα 16.5**, έπεται ότι οι ακμές (v_i, w_i) , (v_i, w) και (w_i, w) ανήκουν στον ίδιο κύκλο, έστω C_i , $i = 1, 2$. Έστω u_j, u'_j οι δύο γείτονες της κορυφής v_j στο G^{sub} , $j = 1, 2$ (Σημειώνουμε ότι

$u'_1 = v_2$ και $u'_2 = v_1$ μπορεί να ισχύουν). Εφόσον κάθε κορυφή ανήκει ακριβώς σε δύο κύκλους, έπεται ότι οι ακμές (u_j, v_j) και (v_j, u'_j) ανήκουν σε έναν κύκλο διαφορετικό από τους C_1 και C_2 . Οπότε, εάν αφαιρέσουμε τους C_1 και C_2 και τους κύκλους που απεικονίζουν τα υπογραφήματα-βρόγχος του υπογραφήματος-εξάρτημα, παίρνουμε μία πραγματοποίηση του υπόλοιπου γραφήματος (δηλαδή του γραφήματος G^{sub}), ως ένα σύστημα κύκλων. \square

Από τα παραπάνω, έπεται ότι σε οποιαδήποτε πραγματοποίηση του G_{oct}^{aug} ως ένα σύστημα κύκλων η πραγματοποίηση κάθε υπογραφήματος-εξάρτημα και η πραγματοποίηση του G_{oct}^{sub} είναι ανεξάρτητες. Αυτό συνοψίζεται στο παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 16.1. Σε κάθε πραγματοποίηση του G_{oct}^{aug} ως ένα σύστημα κύκλων, η πραγματοποίηση κάθε υπογραφήματος-εξάρτημα και η πραγματοποίηση του G_{oct}^{sub} είναι ανεξάρτητες.

Το Πόρισμα 16.1 είναι το κλειδί της απόδειξής μας. Συνεπάγεται ότι η πραγματοποίηση του G_{oct}^{sub} που προκύπτει από μία πραγματοποίηση του G_{oct}^{aug} αφαιρώντας όλες τις κορυφές των υπογραφήματος-εξάρτημα εκτός από τα άκρα τους θα είναι ισοδύναμη με μία από τις πραγματοποιήσεις του G_{oct} που απεικονίζονται στις **Εικόνες 16.4b-16.4d** (υπενθυμίζουμε ότι ο ορισμός δύο ισοδύναμων πραγματοποιήσεων αγνοεί τις κορυφές βαθμού 2).



Εικόνα 16.9: Μη-ισοδύναμες πραγματοποιήσεις του υπογραφήματος-εξάρτημα ως σύστημα κύκλων: (a) Οι δύο κύκλοι που αντιπροσωπεύουν το σκελετό έχουν μη κοινό εσωτερικό, και (b) Ο ένας κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου.

Σε κάθε επίπεδη εμφύτευση του G_{oct} , υπάρχει πάντα μία τριγωνική όψη που δεν έχει κοινές κορυφές ή ακμές με την εξωτερική όψη. Οπότε, τα υπογραφήματα-εξάρτημα που προσαρτώνται στις ακμές αυτής της τριγωνικής όψης πρέπει να πραγματοποιηθούν όπως στην **Εικόνα 16.9a** (βασικά μία πραγματοποίηση όπως αυτή της **Εικόνας 16.9b** είναι μόνο εφικτή εάν το υπογράφημα-εξάρτημα έχει προσαρτηθεί στην εξωτερική όψη). Οπότε, υπάρχουν συνολικά έξι προσαρτημένα υπογραφήματα-εξάρτημα

ρτημα κατά μήκος των ακμών αυτής της τριγωνικής όψης, το καθένα με μία πραγματοποίηση όπως αυτή που φαίνεται στην **Εικόνα 16.9a**.

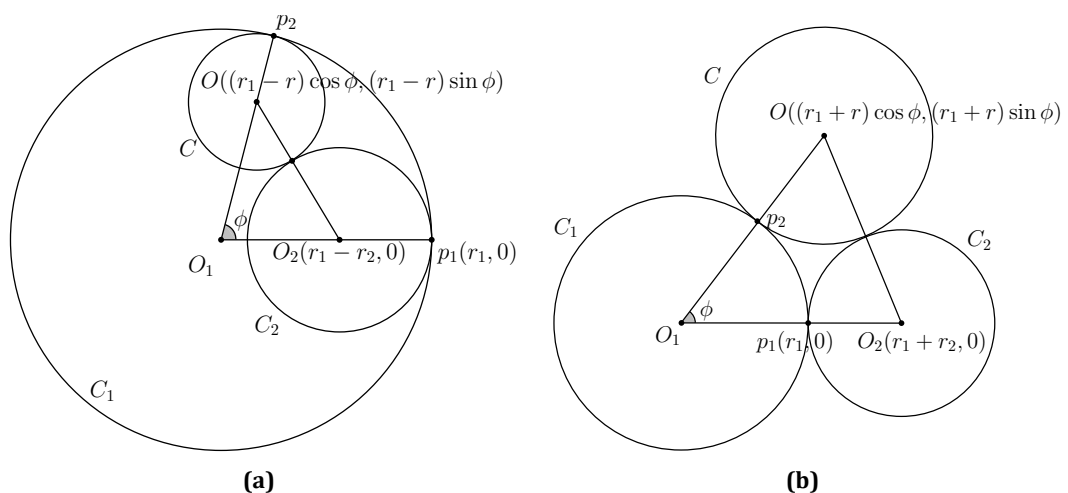
Παρακάτω, παραθέτουμε δύο χρήσιμα γεωμετρικά αποτελέσματα σχετικά με εφαπτόμενους κύκλους. Συμβολίζουμε με $C(O, r)$ έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα r .

Λήμμα 16.7. Έστω $C_1(O_1, r_1)$ και $C_2(O_2, r_2)$ δύο κύκλοι, έτσι ώστε ο C_1 να εφάπτεται με τον C_2 στο σημείο p_1 και ο C_2 να βρίσκεται εξολοκλήρου στο εσωτερικό του C_1 . Έστω $C(O, r)$ ένας άλλος κύκλος που εφάπτεται με τον C_1 στο σημείο p_2 ($p_2 \neq p_1$), εφάπτεται στον C_2 και βρίσκεται στο εσωτερικό του C_1 (βλ. **Εικόνα 16.10a**). Εάν ϕ είναι η γωνία $\widehat{p_1 O_1 p_2}$, τότε η ακτίνα r του C είναι αύξουσα συνάρτηση του ϕ , $\phi \in (0, \pi]$.

Απόδειξη. Χ.β.τ.γ., υποθέτουμε ότι το O_1 ταυτίζεται με την αρχή του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και το σημείο p_1 βρίσκεται πάνω στον x-άξονα, δηλαδή είναι το σημείο $(r_1, 0)$. Τότε, το κέντρο του κύκλου C_2 βρίσκεται στο σημείο $(r_1 - r_2, 0)$, ενώ το κέντρο του κύκλου C στο σημείο $((r_1 - r) \cos \phi, (r_1 - r) \sin \phi)$, όπως φαίνεται στην **Εικόνα 16.10a**. Εφόσον οι C_2 και C εφάπτονται, η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους, δηλαδή:

$$\begin{aligned} & [(r_1 - r) \cos \phi - (r_1 - r_2)]^2 + [(r_1 - r) \sin \phi]^2 = (r_2 + r)^2 \\ \Rightarrow & (r_1 - r_2)^2 + (r_1 - r)^2 - 2(r_1 - r_2)(r_1 - r) \cos \phi = (r_2 + r)^2 \\ \Rightarrow & (r_1 + r_2)(r_1 - r) - 2r_1 r_2 - (r_1 - r_2)(r_1 - r) \cos \phi = 0 \\ \Rightarrow & r = r_1 - \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2 - (r_1 - r_2) \cos \phi} \end{aligned}$$

Από την παραπάνω εξίσωση, όταν το ϕ αυξάνει στο διάστημα $(0, \pi]$, το $\cos \phi$ μειώνεται και το r αυξάνει. Οπότε ο κύκλος C έχει μέγιστη ακτίνα για γωνία $\phi = \pi$. \square



Εικόνα 16.10: (a) Η κατάσταση που εξετάζεται στο **Λήμμα 16.7**. (b) Η κατάσταση που εξετάζεται στο **Λήμμα 16.8**.

Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει εάν οι κύκλοι C και C_2 βρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου C_1 .

Λήμμα 16.8. Έστω $C_1(O_1, r_1)$ και $C_2(O_2, r_2)$ δύο κύκλοι, έτσι ώστε ο C_1 να εφάπτεται με τον C_2 στο σημείο p_1 και ο C_1 να βρίσκεται εξολοκλήρου στο εξωτερικό του C_2 . Έστω $C(O, r)$ ένας άλλος κύκλος που εφάπτεται με τον C_1 στο σημείο p_2 ($p_2 \neq p_1$), εφάπτεται με τον C_2 και βρίσκεται στο εξωτερικό του C_1 (βλ. **Εικόνα 16.10b**). Εάν ϕ είναι η γωνία $\widehat{p_1 O_1 p_2}$, τότε η ακτίνα r του C είναι αύξουσα συνάρτηση του ϕ , $\phi \in (0, \arccos(\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2})]$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του **Λήμματος 16.8** είναι παρόμοια με την απόδειξη του **Λήμματος 16.7**. Οπότε, παραλείπουμε τις λεπτομέρειες. Απλώς αναφέρουμε την αντίστοιχη συνάρτηση για την ακτίνα r , που είναι η ακόλουθη:

$$r = \frac{2r_1 r_2}{r_2 - r_1 + (r_2 + r_1) \cos \phi} - r_1$$

Σημειώνουμε ότι ο κύκλος C δεν υπάρχει πάντα. Για παράδειγμα, στην **Εικόνα 16.10b**, όταν το $\phi = \pi/2$ και $r_1 > r_2$. Ειδικότερα, για δοθείσες ακτίνες r_1 και r_2 , η γωνία ϕ φράσσεται από πάνω από την τιμή $\arccos(\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2})$, που αντιστοιχεί στην γωνία της ακρότατης περίπτωσης που ο κύκλος C έχει άπειρη ακτίνα και είναι επομένως ταυτόσημος με την κοινή εφαπτόμενη των κύκλων C_1 και C_2 . \square

Λήμμα 16.9. Έστω ένας κύκλος $C(O, r)$ και ένα κυκλικό τόξο \widehat{AB} του C με $\widehat{AOB} = \phi < \pi$. Έστω $C_1(O_1, r_1)$ και $C_2(O_2, r_2)$ δύο εφαπτόμενοι κύκλοι, που εφάπτονται και οι δύο με τον C στα σημεία A και B αντίστοιχα (βλ. **Εικόνα 16.11**). Έστω $C'_1(O'_1, r'_1)$ και $C'_2(O'_2, r'_2)$ ένα άλλο τέτοιο ζευγάρι εφαπτόμενων κύκλων που εφάπτονται και οι δύο με τον C στα σημεία A' και B' αντίστοιχα (όπου τα A' και B' βρίσκονται στο κυκλικό τόξο μεταξύ των A και B), έτσι ώστε τα δύο ζεύγη κύκλων να μην έχουν σημεία τομής ούτε σημεία επαφής. Υποθέτοντας ότι οι C_i και C'_i , $i = 1, 2$ βρίσκονται όλοι στο εσωτερικό του C ή όλοι στο εξωτερικό του C και τα σημεία $A, A', B',$ και B εμφανίζονται με αυτή τη σειρά στο κυκλικό τόξο μεταξύ των A και B , τότε:

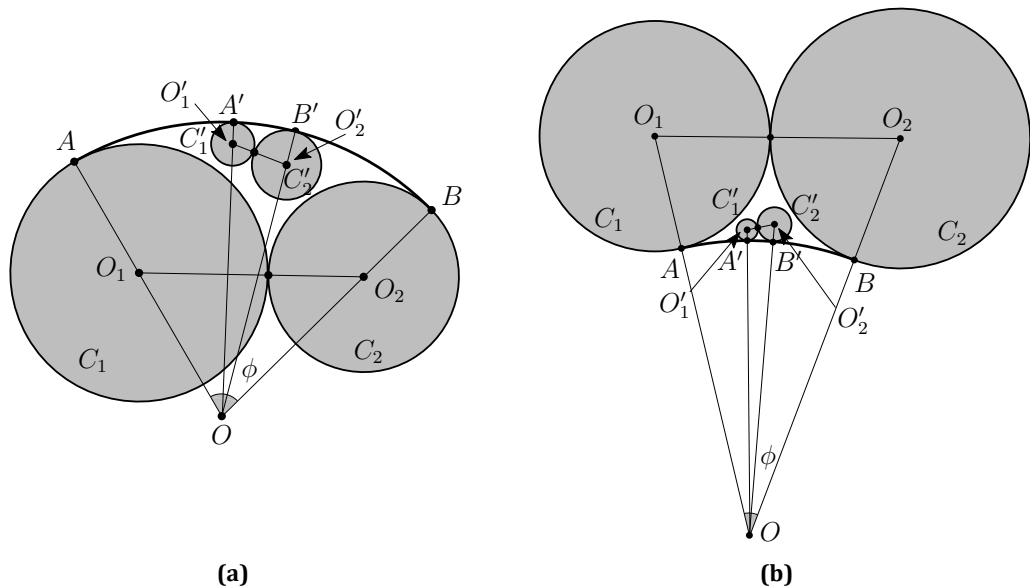
$$|\widehat{A'B'}| < |\widehat{AA'}| \text{ και } |\widehat{A'B'}| < |\widehat{B'B}|.$$

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε τον κύκλο C_1 . Υπάρχουν δύο κύκλοι C''_i για $i = 1, 2$ με ακτίνες r''_i , που είναι και οι δύο εφαπτόμενοι στον C_1 και επιπλέον εφάπτονται με τον C στα σημεία A' και B' αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι για $i = 1, 2$ ο κύκλος C''_i περιέχει τον κύκλο C'_i , οπότε $r''_i \geq r'_i$. Έχουμε ότι $\widehat{AOA'} < \widehat{AOB'} < \widehat{AOB}$, συνεπώς, από τα **Λήμματα 16.7** και **16.8**, είναι $r'_i \leq r''_i < r_2$ για $i = 1, 2$. Παρόμοια, ξεκινώντας από τον κύκλο C_2 έχουμε ότι $r'_i \leq r''_i < r_1$ για $i = 1, 2$. Τώρα, για τον κύκλο C'_1 ισχύει

ότι $r'_2 < r_1$ και $\widehat{AOA'}, \widehat{A'OB'} < \pi$. Τότε από τα Λήμματα 16.7 και 16.8 έπεται ότι $\widehat{A'OB'} < \widehat{AOA'}$. Παρόμοια συμπεραίνουμε ότι $\widehat{A'OB'} < \widehat{B'OB}$. Τελικά, έχουμε ότι:

$$|\widehat{A'B'}| < |\widehat{AA'}| \text{ και } |\widehat{A'B'}| < |\widehat{B'B}|.$$

□



Εικόνα 16.11: Οι περιπτώσεις που εξετάζονται στο Λήμμα 16.9.

Σημειώνουμε ότι το Λήμμα 16.9 ισχύει ανεξάρτητα από το αν οι τέσσερις κύκλοι βρίσκονται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του κύκλου C . Έστω $e = (u, v)$ μία ακμή της εσωτερικότερης όψης του οκταέδρου G_{oct} , όπως φαίνεται στην Εικόνα 16.7b. Έστω ότι σε μία πραγματοποίηση του οκταέδρου ως ένα σύστημα κύκλων, η e απεικονίζεται ως ένα τόξο ενός κύκλου $C(O, r)$, με $\widehat{uOv} = \phi < \pi$. Το παρακάτω λήμμα αποδεικνύει ότι αυτή η υπόθεση οδηγεί σε άτοπο ως προς την ύπαρξη μιας πραγματοποίησης του γραφήματος G_{oct}^{aug} ως ένα σύστημα κύκλων.

Λήμμα 16.10. Έστω ένας κύκλος $C(O, r)$ και έστω ότι η ακμή $e = (u, v) \in E(G_{oct})$ απεικονίζεται ως ένα κυκλικό τόξο \widehat{uv} του C έτσι ώστε $\widehat{uOv} = \phi < \pi$. Εάν προσαρτήσουμε δύο ζεύγη υπογραφημάτων-εξάρτημα κατά μήκος της e , όπως φαίνεται στην Εικόνα 16.7a, τότε το υπογράφημα του G_{oct}^{aug} δεν επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 16.5 έχουμε ότι κάθε υπογράφημα-εξάρτημα απεικονίζεται ως ένα ζεύγος εφαπτόμενων κύκλων που εφάπτονται επίσης με το κθκικό τόξο \widehat{uv} στα σημεία z_i, z_j . Επιπλέον, οι δύο εφαπτόμενοι κύκλοι έχουν μη κοινό εσωτερικό εφρό-

σον δεν βρίσκονται στην εξωτερική όψη του G_{oct}^{aug} , όπως στην **Εικόνα 16.9a**. Εφαρμόζοντας το **Λήμμα 16.9** για το ζεύγος των υπογραφημάτων-εξάρτημα με άκρα τα z_1, z_6 και z_2, z_5 , προκύπτει:

$$\widehat{z_2 z_5} < \widehat{z_1 z_2} \text{ και } \widehat{z_2 z_5} < \widehat{z_5 z_6}$$

Ομοίως, για το ζεύγος των υπογραφημάτων-εξάρτημα με άκρα z_3, z_8 και z_4, z_7 , έχουμε:

$$\widehat{z_4 z_7} < \widehat{z_3 z_4} \text{ και } \widehat{z_4 z_7} < \widehat{z_7 z_8}$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες αυτές και το γεγονός ότι $\widehat{z_i z_j} \leq \widehat{z_{i'} z_{j'}}$ για $i' \leq i \leq j \leq j'$, έχουμε ότι:

$$\widehat{z_4 z_7} < \widehat{z_3 z_4} \leq \widehat{z_2 z_5} < \widehat{z_5 z_6} \leq \widehat{z_4 z_7}$$

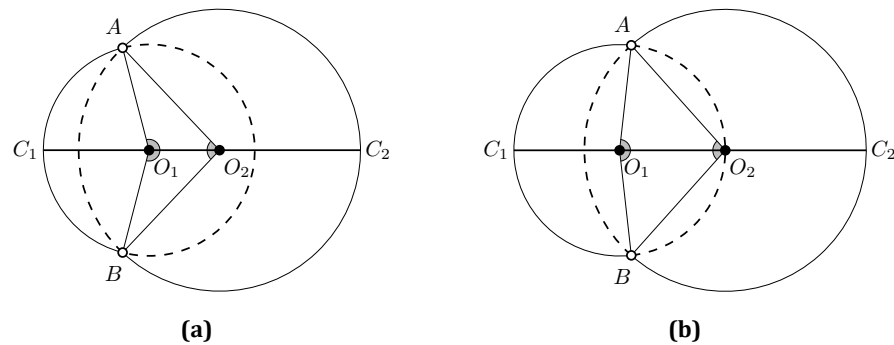
δηλαδή $\widehat{z_4 z_7} < \widehat{z_4 z_7}$, άτοπο. □

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε την απόδειξη ότι το γράφημα G_{oct}^{aug} δεν επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων, αρκεί να δείξουμε ότι σε οποιαδήποτε πραγματοποίηση του G_{oct} (και συνεπώς του G_{oct}^{sub}), τουλάχιστον μία ακμή της εσωτερικότερης όψης ικανοποιεί τις υποθέσεις του **Λήμματος 16.10**.

Λήμμα 16.11. Σε οποιαδήποτε πραγματοποίηση του οκταέδρου ως ένα σύστημα κύκλων, τουλάχιστον μία ακμή, έστω $e = (u, v)$, της εσωτερικότερης όψης απεικονίζεται ως ένα κυκλικό τόξο ενός κύκλου $C(O, r)$ έτσι ώστε $\widehat{uOv} = \phi < \pi$.

Απόδειξη. Από το **Λήμμα 16.4**, αρκεί να δείξουμε ότι το λήμμα ισχύει για τις τρεις μη ισοδύναμες πραγματοποιήσεις που απεικονίζονται στην **Εικόνα 16.4**. Για τις πρώτες δύο πραγματοποιήσεις της **Εικόνας 16.4**, το αποτέλεσμα είναι σχεδόν προφανές. Συγκεκριμένα, έστω $C_1(O_1, r_1)$, $C_2(O_2, r_2)$ και $C_3(O_3, r_3)$ οι κύκλοι (με άσπρο χρώμα στην **Εικόνα 16.4b**) που οριοθετούν την εσωτερικότερη όψη (αναφερόμαστε στην εσωτερικότερη όψη γκρι χρώματος στην **Εικόνα 16.4b**) της πρώτης πραγματοποίησης. Τα τρία σημεία της όψης αυτής βρίσκονται στις ακμές του τριγώνου που ορίζεται από τα σημεία O_1, O_2 και O_3 , εφόσον οι κύκλοι C_1, C_2 και C_3 εφάπτονται ανά δύο μεταξύ τους. Τότε, τουλάχιστον μία από τις γωνίες του τριγώνου είναι μικρότερη από π , όπως και θέλαμε. Στην δεύτερη πραγματοποίηση, η εσωτερικότερη όψη είναι ένας κύκλος (αναφερόμαστε στον εσωτερικότερο γκρι χρώματος κύκλο στην **Εικόνα 16.4c**) με τρία διακεκριμένα σημεία στο σύνορο του. Τετριμμένα, τουλάχιστον ένα από τα κυκλικά τόξα που ορίζονται από αυτά τα σημεία αντιστοιχεί σε γωνία μικρότερη από π .

Τώρα στρέφουμε την προσοχή μας στην πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου η πραγματοποίηση του οκταέδρου ως ένα σύστημα κύκλων δίνεται από τρεις κύκλους



Εικόνα 16.12: Καταστάσεις που εξετάζονται στο **Λήμμα 16.11**.

που τέμνονται ανά δύο μεταξύ τους (αναφερόμαστε στην **Εικόνα 16.4d**). Αρχικά, ας θεωρήσουμε δύο κύκλους $C_1(O_1, r_1)$ και $C_2(O_2, r_2)$ που τέμνονται στα σημεία A και B και έστω ότι χ.β.τ.γ. τα κέντρα τους βρίσκονται κατά μήκος του x -άξονα, έτσι ώστε το O_1 να βρίσκεται αριστερά του O_2 (βλ. **Εικόνα 16.12**). Μας ενδιαφέρει η γωνία που αντιστοιχεί στα δύο κυκλικά τόξα του C_1 και του C_2 που “οριοθετούν” τα κοινά σημεία των δύο κύκλων (αναφερόμαστε στα διακεκομμένα κυκλικά τόξα με άκρα τα A και B στην **Εικόνα 16.12**). Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι τα $\widehat{AO_1B}$ και $\widehat{AO_2B}$ δεν μπορεί να είναι και τα δύο μεγαλύτερα από π . Ας θεωρήσουμε τώρα δύο από τους τεμνόμενους κύκλους της πραγματοποίησης του οκταέδρου της **Εικόνας 16.4d**. Από τα παραπάνω, έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα δύο κυκλικά τόξα που “οριοθετούν” τα κοινά τους σημεία, αντιστοιχεί σε γωνία που είναι μικρότερη από π . Εφόσον η εσωτερικότερη όψη περικλείεται από τα δύο κυκλικά τόξα, έπεται ότι τουλάχιστον μία ακμή της εσωτερικότερης όψης έχει την επιθυμητή ιδιότητα. \square

Θεώρημα 16.2. Υπάρχει ένα συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα που δεν επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων.

Απόδειξη. Το **Λήμμα 16.11** δηλώνει ότι σε οποιαδήποτε πραγματοποίηση το οκταέδρου ως ένα σύστημα κύκλων, τουλάχιστον μία ακμή της εσωτερικότερης όψης απεικονίζεται ως ένα κυκλικό τόξο γωνίας μικρότερης από π . Οπότε, από το **Λήμμα 16.10** έπεται ότι το G_{oct}^{aug} δεν επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων. \square

Θεώρημα 16.3. Υπάρχει μια άπειρη οικογένεια συνεκτικών 4-κανονικών επίπεδων γραφημάτων που δεν επιδέχονται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι προκειμένου να κατασκευάσουμε το G_{oct}^{aug} , κάθε ακμή του οκταέδρου είχε προσαυξηθεί με δύο ζεύγη από υπογραφήματα-εξάρτημα. Ωστόσο, το **Θεώρημα 16.2** τετριμμένα ισχύει εάν περισσότερα από δύο ζεύγη υπογραφημάτων-εξάρτημα προσαρτώνται σε κάθε ακμή του G_{oct} , ορίζοντας συνεπώς μία άπειρη οικο-

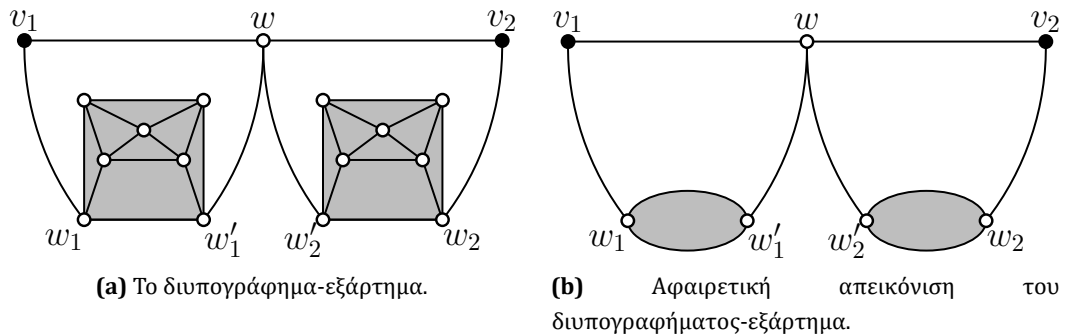
γένεια από συνεκτικά 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα που δεν επιδέχονται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων. Μία εναλλακτική (και πιο ενδιαφέρουσα) οικογένεια τέτοιων γραφημάτων μπορεί να προκύψει αντικαθιστώντας το οκτάεδρο του υπογραφήματος-βρόγχος από κάθε υπογράφημα-εξάρτημα με οποιοδήποτε 4-κανονικό επίπεδο γράφημα, στο οποίο μία από τις ακμές στην εξωτερική όψη του αντικαθίσταται από ένα μονοπάτι μήκους δύο και η επιπλέον κορυφή που προκύπτει από την διαδικασία αυτή ταυτίζεται με τις κορυφές w_1 και/ή w_2 του υπογραφήματος-εξάρτημα (αναφερόμαστε στην **Εικόνα 16.6**). \square

16.4 Η Περίπτωση Δισυνεκτικών 4-Κανονικών Επίπεδων Γραφημάτων

Στην ενότητα αυτή, εξετάζουμε την περίπτωση δισυνεκτικών 4-κανονικών επίπεδων γραφημάτων. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν απείρως πολλά δισυνεκτικά 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα που δεν επιδέχονται πραγματοποίηση ως σύστημα κύκλων. Για να το επιτύχουμε, ακολουθούμε μία παρόμοια προσέγγιση με αυτή που παρουσιάστηκε στην **Ενότητα 16.3**. Υπενθυμίζουμε ότι το γράφημα G_{oct}^{aug} που κατασκευάσαμε στην **Ενότητα 16.3** δεν ήταν δισυνεκτικό, καθώς κάθε υπογράφημα-εξάρτημα ορίζει δύο κορυφές-τομής. Ουσιαστικά, όλες οι κορυφές-τομής του G_{oct}^{aug} ανήκουν στα υπογραφήματα-εξάρτημα. Συνεπώς, για την περίπτωση των δισυνεκτικών 4-κανονικών επίπεδων γραφημάτων, θα κατασκευάσουμε ένα νέο υπογράφημα-εξάρτημα, το οποίο θα αποκαλούμε διυπογράφημα-εξάρτημα, το οποίο δεν περιέχει κορυφές-τομής και ταυτόχρονα έχει τις ίδες ιδιότητες με αυτές που περιγράφηκαν στην **Ενότητα 16.3** (συγκεκριμένα τις ιδιότητες που συνεπάγεται το **Λήμμα 16.5**).

Το διυπογράφημα-εξάρτημα απεικονίζεται στην **Εικόνα 16.13a**. Και πάλι, περιέχει ακριβώς δύο κορυφές βαθμού δύο, τις v_1 και v_2 , οι οποίες είναι τα άκρα του. Εντούτοις, ο σκελετός του τώρα αποτελείται από επτά κορυφές (δηλαδή, τις v_i, w_i, w'_i και $w, i = 1, 2$). Εάν αφαιρέσουμε τις ακμές του σκελετού εκτός από τις ακμές $(w_i, w'_i), i = 1, 2$, το γράφημα που απομένει αποτελείται από τρεις απομονωμένες κορυφές και δύο ξένα μεταξύ τους δισυνεκτικά υπογραφήματα, τα οποία αποκαλούμε ως διυπογραφήματα-βρόγχος (αναφερόμαστε στα γραφήματα με γκρι σκίαση της **Εικόνας 16.13a**). Οι ιδιότητες του διυπογραφήματος-εξάρτημα είναι και πάλι ανεξάρτητες από τα διυπογραφήματα-βρόγχος, δηλαδή, οποιοδήποτε απλό δισυνεκτικό επίπεδο γράφημα που ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη βαθμών μπορεί να τα αντικαταστήσει: όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 4 εκτός από ακριβώς δύο κορυφές στην εξωτερική όψη που είναι βαθμού 3. Η γενική περίπτωση φαίνεται στην **Εικόνα 16.13b**, όπου τα υπογραφήματα απεικονίζονται ως “δι-βρόγχοι” στις κορυφές w_i και $w'_i, i = 1, 2$.

Έχοντας προσδιορίσει το διυπογράφημα-εξάρτημα, μπορούμε να προσαυξήσουμε



Εικόνα 16.13: Απεικονίσεις του νέου υπογραφήματος-εξάρτημα.

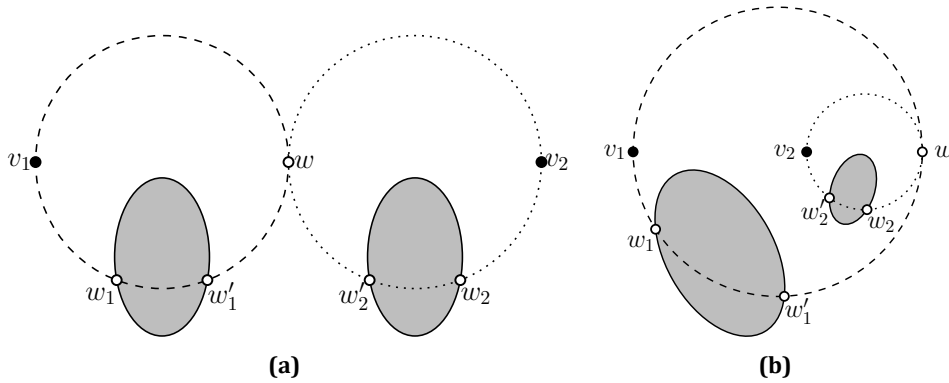
το οκτάεδρο παρόμοια με την Ενότητα 16.3. Τότε θα προκύψει ένα δισυνεκτικό γράφημα, που συμβολίζουμε με BG_{oct}^{aug} . Τώρα, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το ανάλογο του Λήμματος 16.5.

Λήμμα 16.12. Έστω G ένα 4-κανονικό επίπεδο γράφημα που περιέχει τουλάχιστον ένα αντίγραφο του διπογραφήματος-εξάρτημα. Έστω ότι υπάρχει πραγματοποίηση του G ως ένα σύστημα κύκλων. Τότε, ο σκελετός κάθε διπογραφήματος-εξάρτημα στην πραγματοποίηση αυτή αποτελείται από δύο κύκλους C_1 και C_2 που εφάπτονται στο σημείο w , όπου ο κύκλος C_i περιέχει τις κορυφές $\{v_i, w_i, w'_i, w\}$ και τα κυκλικά τόξα που απεικονίζουν τις ακμές (v_i, w_i) , (w'_i, w) και (v_i, w) , για $i = 1, 2$.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει πραγματοποίηση του G ως ένα σύστημα κύκλων και ας θεωρήσουμε ένα αντίγραφο του διπογραφήματος-εξάρτημα στην πραγματοποίηση αυτή. Σημειώνουμε ότι οι ακμές (v_i, w_i) και (w'_i, w) ανήκουν στον ίδιο κύκλο, $i = 1, 2$ (διαφορετικά, ένας από τους κύκλους θα περιείχε την κορυφή w_i δύο φορές και ο άλλος κύκλος θα περιείχε την κορυφή w'_i δύο φορές, $i = 1, 2$, το οποίο δεν είναι εφικτό εφόσον κάθε κορυφή ανήκει ακριβώς σε δύο διαφορετικούς κύκλους). Έστω C_i ο κύκλος που περιέχει τις (v_i, w_i) και (w'_i, w) και C'_i ο κύκλος που περιέχει την (v_i, w) , $i = 1, 2$. Ισχυριζόμαστε ότι $C_i = C'_i, i = 1, 2$. Έστω ότι, αντιθέτως, ισχύει $C_1 \neq C'_1$. Εφόσον η κορυφή w ορίζεται από ακριβώς δύο κύκλους, έχουμε ότι $\{C_1, C'_1\} = \{C_2, C'_2\}$, το οποίο συνεπάγεται ότι και $C_2 \neq C'_2$. Τότε, οι C_1 και C'_1 έχουν τουλάχιστον τρία κοινά σημεία, συγκεκριμένα τις κορυφές v_1, v_2 και w , από το οποίο προκύπτει ότι $C_1 = C'_1$, άτοπο. \square

Στην Εικόνα 16.14 βλέπουμε δύο μη-ισοδύναμες πραγματοποιήσεις. Σημειώνουμε ότι οι πραγματοποιήσεις αυτές ουσιαστικά εξαρτώνται από την σχετική θέση των δύο εφαπτόμενων κύκλων C_1 και C_2 στην επίπεδη εμφύτευση του G . Συγκεκριμένα, στην Εικόνα 16.14a οι δύο κύκλοι C_1 και C_2 περιέχουν μόνο τα διπογραφήματα-βρόγχος στο εσωτερικό τους, ενώ στην Εικόνα 16.14b ο C_1 αποτελεί την εξωτερική όψη και συνεπώς περιέχει ολόκληρο το γράφημα. Αυτό συνεπάγεται ότι σε κάθε πραγματοποίη-

ηση του BG_{oct}^{aug} ως ένα σύστημα κύκλων, όλα τα διυπογραφήματα-εξάρτημα απεικονίζονται όπως στην **Εικόνα 16.14a** εκτός από το πολύ ένα διυπογράφημα-εξάρτημα εάν ένας από τους δύο κύκλους του είναι η εξωτερική όψη του BG_{oct}^{aug} . Οπότε, μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να αποδείξουμε το ανάλογο του **Πορίσματος 16.1**.



Εικόνα 16.14: Μη-ισοδύναμες πραγματοποιήσεις του διυπογραφήματος-εξάρτημα ως σύστημα κύκλων: (a) Οι δύο κύκλοι που απεικονίζουν τον σκελετό έχουν μη κοινό εσωτερικό, και (b) Ο ένας κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου.

Πόρισμα 16.2. Σε κάθε πραγματοποίηση του BG_{oct}^{aug} ως ένα σύστημα κύκλων, η πραγματοποίηση κάθε διυπογραφήματος-εξάρτημα και η πραγματοποίηση του G_{oct}^{sub} είναι ανεξάρτητες.

Το **Λήμμα 16.12** και το **Πόρισμα 16.2** μας επιτρέπουν να αποδείξουμε ένα ανάλογο λήμμα με το **Λήμμα 16.10** (όπου τα διυπογραφήματα-εξάρτημα χρησιμοποιούνται αντί για τα υπογραφήματα-εξάρτημα). Αυτό το αποτέλεσμα, σε συνδυασμό με το **Λήμμα 16.11**, μας επιτρέπει να δώσουμε το ανάλογο του **Θεωρήματος 16.2**.

Θεώρημα 16.4. Υπάρχει ένα δισυνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα που δεν επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων.

Τέλος, προκειμένου να αποδείξουμε ότι υπάρχουν απείρως πολλά δισυνεκτικά 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα που δεν επιδέχονται πραγματοποίηση ως σύστημα κύκλων, μπορούμε να προσαρτήσουμε περισσότερα από δύο ζεύγη διυπογραφήματων-εξάρτημα σε κάθε ακμή του G_{oct} , ή να αντικαταστήσουμε τα διυπογραφήματα-βρόγχοις με οποιοδήποτε δισυνεκτικό επίπεδο γράφημα (στο οποίο κάθε κορυφή είναι βαθμού 4 εκτός από ακριβώς δύο κορυφές στην εξωτερική όψη που έχουν βαθμό 3), το οποίο μας οδηγεί στο παρακάτω συμπέρασμα.

Θεώρημα 16.5. Υπάρχει μία άπειρη οικογένεια δισυνεκτικών 4-κανονικών επίπεδων γραφημάτων που δεν επιδέχονται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων.

17 Άριστες Ομαλές Απεικονίσεις

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνοτροπίες. Περιγράφουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε επίπεδες άριστες ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις για επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3. Επιπλέον, αποδεικνύουμε ότι τα επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 4 επιδέχονται άριστες ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις εάν επιτρέψουμε τομές ακμών στην απεικόνισή μας. Προκειμένου να απεικονίσουμε γραφήματα μεγαλύτερου βαθμού, χρησιμοποιούμε το μοντέλο Kandinsky: κάθε γράφημα επιδέχεται μη επίπεδη απεικόνιση άριστης πολυπλοκότητας ακμής, όμως δεν επιδέχονται όλα τα γραφήματα επίπεδη απεικόνιση.

Τέλος, μελετάμε διαφορετικές τεχνοτροπίες άριστων ορθογώνιων απεικονίσεων που συναντώνται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία. Εισάγουμε κλάσεις γραφημάτων που επιδέχονται απεικονίσεις συγκεκριμένης τεχνοτροπίας, και μελετάμε σχέσεις μεταξύ τους.

17.1 Επίπεδες Άριστες Ομαλές Ορθογώνιες Απεικονίσεις Επίπεδων Γραφημάτων με Μέγιστο Βαθμό 3

Στην ενότητα αυτή, επεκτείνουμε τον αλγόριθμο των Bekos et al. [BKKS13], ο οποίος βασίζεται σε κανονική διάταξη, και συνεπώς, περιορίζεται σε τρισυνεκτικά επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 3. Θα δείξουμε ότι κάθε επίπεδο γράφημα με μέγιστο βαθμό 3 επιδέχεται απεικόνιση με άριστη πολυπλοκότητα ακμής. Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό βελτιώνει επίσης ένα γνωστό αποτέλεσμα των Alam et al. [ABK⁺14], οι οποίοι έδειξαν πρόσφατα ότι κάθε επίπεδο γράφημα με μέγιστο βαθμό 3 επιδέχεται ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με πολυπλοκότητα ακμής δύο. Ακολουθώντας συνηθισμένες πρακτικές, προχωρούμε ως εξής. Εξετάζουμε κάθε δισυνεκτική συνιστώσα ανεξάρτητα και την αναλύουμε χρησιμοποιώντας SPQR-δένδρα (για μια σύντομη εισαγωγή στα SPQR-δένδρα, βλ. Ενότητα 11.2.2). Τότε χρησιμοποιούμε μία αναδρομική διαδικασία απεικόνισης βασιζόμενοι στο SPQR-δένδρο που χρησιμοποιεί τον αρχικό αλγόριθμο για τις τρισυνεκτικές συνιστώσες.

Εφόσον τα SPQR-δένδρα ορίζονται μόνο για δισυνεκτικά γραφήματα, ξεκινάμε ανα-

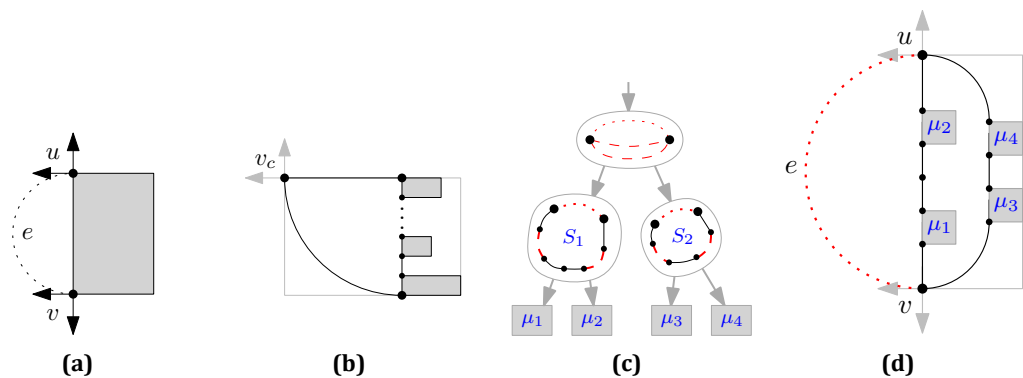
λύοντας το συνεκτικό γράφημα στις δυσυνεκτικές του συνιστώσες. Κυρίως ακολουθούμε τη δουλειά του Kant [Kan93] σχετικά με ορθογώνιες απεικονίσεις επίπεδων γραφημάτων με μέγιστο βαθμό 3. Δείχνει ότι μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε δυσυνεκτική συνιστώσα ανεξάρτητα και να τις ενώσουμε αργότερα χρησιμοποιώντας μία δενδρική τεχνική απεικόνισης. Η κύρια παρατήρηση είναι ότι κάθε κορυφή τομής ανήκει τουλάχιστον σε μία και το πολύ σε τρεις συνιστώσες-γέφυρες. Μία συνιστώσα-γέφυρα (ή απλά γέφυρα) είναι μία δυσυνεκτική συνιστώσα που αποτελείται μόνο από μία ακμή που ενώνει δύο κορυφές τομής. Οι γέφυρες αυτές αποτελούν ακμές στην δενδρική απεικόνιση. Αυτή η προσέγγιση δημιουργεί μία απεικόνιση χωρίς να δημιουργούνται επιπλέον σημεία καμπής, δηλαδή, οι γέφυρες είναι ευθύγραμμα τμήματα στην τελική απεικόνιση. Εφόσον κάθε ακμή χωρίς σημεία καμπής έχει άριστη πολυπλοκότητα ακμής, μπορούμε να επικεντρωθούμε σε δυσυνεκτικά επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 3. Ωστόσο, χωρίς να μπορούμε σε λεπτομέρειες, η μέθοδος μπορεί να απαιτήσει να τοποθετήσουμε κάποια συγκεκριμένη κορυφή τομής στην άνω αριστερή γωνία της παραγόμενης απεικόνισης. Κρατάμε τον περιορισμό αυτό υπόψη και θα επανέρθουμε σ' αυτόν έχοντας κατασκευάσει την απεικόνιση.

Στο επόμενο βήμα, αναλύουμε κάθε δυσυνεκτική συνιστώσα που δεν είναι γέφυρα στις τρισυνεκτικές συνιστώσες της. Και πάλι δανειζόμαστε τα βασικά βήματα από τον Kant [Kan93] ο οποίος χρησιμοποιεί SPQR-δένδρα. Παρόμοια με τις δικές μας συνθήκες, ο κύριος αλγόριθμός του απαιτεί τρισυνεκτικότητα, επομένως μπορεί να εφαρμοστεί στους R-κόμβους. Απομένει να εξετάσουμε τους P- και S-κόμβους και να εξασφαλίσουμε ότι ο κύριος αλγόριθμος μπορεί να χειριστεί τις εικονικές ακμές. Μία παρόμοια τεχνική χρησιμοποιείται από τον Eppstein [Epp13] για Lombardi απεικονίσεις επίπεδων γραφημάτων με μέγιστο βαθμό 3. Ο Eppstein εργάζεται ως εξής: Πρώτα, όλες οι κορυφές βαθμού δύο διαλύονται δίνοντας ένα 3-κανονικό πολυγράφημα. Η κατασκευή του SPQR-δένδρου δίνει μία ανάλυση σε τρισυνεκτικές συνιστώσες. Ο Eppstein εκμεταλλεύεται τις ειδικές ιδιότητες των SPQR-δένδρων στα 3-κανονικά γραφήματα. Παρόμοια με τις γέφυρες στην περίπτωση δυσυνεκτικότητας, ο περιορισμός στον βαθμό του δοθέντος γραφήματος παρέχει αρκετή ελευθερία για να ενωθούν τα υπογραφήματα μαζί. Ωστόσο, το Λήμμα 1 από το [Epp13] απαιτεί το γράφημα να είναι 3-κανονικό και όχι απλά επίπεδο με μέγιστο βαθμό 3. Ενώ η διάλυση των κορυφών βαθμού δύο απλοποιεί τη μέθοδο, απαιτείται η διαδικασία αυτή να μπορεί να αντιστραφεί αργότερα. Στην δική μας περίπτωση αυτό δεν είναι προφανές. Οπότε, διατηρούμε τις κορυφές βαθμού δύο όπως κάνει ο Kant [Kan93]. Το αρνητικό σημείο είναι δεν μπορούμε παρά να διατυπώσουμε κάποια ελαστικότερη εκδοχή του λήμματος που χρησιμοποιείται από τον Eppstein. Εντούτοις, θα είναι αρκετό για το σκοπό μας.

Λήμμα 17.1. *Σε ένα SPQR-δένδρο ενός δυσυνεκτικού επίπεδου γραφήματος με μέγιστο βαθμό 3, ο σκελετός ενός P-κόμβου είναι μία συστάδα τριών παράλληλων ακμών, ο σκε-*

λετός ενός R-κόμβου είναι ένα τρισυνεκτικό 3-κανονικό επίπεδο γράφημα, και κάθε ακμή στο δένδρο έχει ακριβώς έναν S-κόμβο ως ένα άκρο. Στον σκελετό ενός S-κόμβου κανένα ζεύγος εικονικών ακμών δεν έχουν κοινό άκρο, δηλαδή οι εικονικές ακμές διαχωρίζονται τουλάχιστον από μία πραγματική ακμή.

Απόδειξη. Δίνουμε μόνο επιγραμματικά την απόδειξη, καθώς παρόμοια επιχειρήματα μπορούν να βρεθούν στο [Kan93]. Εξορισμού, οι P-κόμβοι έχουν τουλάχιστον τρεις παράλληλες ακμές. Κάθε σκελετός ενός P-κόμβου με περισσότερες ακμές παραβιάζει τον περιορισμό στο βαθμό. Οι σκελετοί των R-κόμβων είναι εξορισμού τρισυνεκτικοί ενώ ταυτόχρονα σέβονται τον περιορισμό στο βαθμό και την επιπεδότητα. Και οι P-κόμβοι και οι R-κόμβοι συνεισφέρουν έκαστος τουλάχιστον δύο στους βαθμούς των κορυφών του διαχωριστικού ζεύγους. Οπότε, οι P- και R-κόμβοι δεν μπορεί να έχουν κοινή κορυφή χωρίς να υπάρχει κορυφή βαθμού τουλάχιστον τέσσερα. Συνεπώς, δεν μπορεί να είναι γειτονικοί στο δένδρο, ούτε να μοιράζονται κάποια κοινή κορυφή στον κύκλο ενός S-κόμβου. □



Εικόνα 17.1: (a) Το βασικό σχήμα που χρησιμοποιείται για τους σκελετούς. (b) Τοποθετώντας την v_c στην άνω αριστερή γωνία στην ρίζου του SPQR-δένδρου. (c) Ένας P-κόμβος με δύο S-κόμβους παιδιά S_1, S_2 και (d) Η αντίστοιχη απεικόνιση με δύο αλυσίδες που σχηματίζονται από τους μ_1, μ_2 και μ_3, μ_4 , αντίστοιχα.

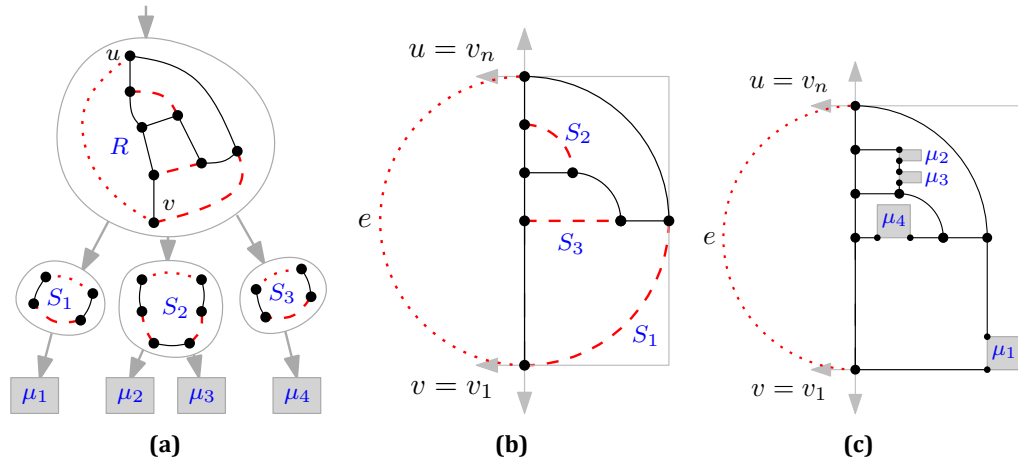
Το κρίσιμο σημείο του λήμματος όσον αφορά την δική μας προσέγγιση είναι ότι μας εξασφαλίζει την ύπαρξη επιπλέον ακμών για να ενωθούν τα υπογραφήματα των P- και R-κόμβων μαζί. Για να εξασφαλίσουμε ότι η απεικόνιση αυτών των υπογραφημάτων ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη δομή, ορίζουμε ένα βασικό απεικονιστικό τετράγωνο. Όπως και στο [Kan93], χρησιμοποιούμε το σχήμα που φαίνεται στην **Εικόνα 17.1a**. Το απεικονιστικό τετράγωνο έχει δύο ελεύθερες θύρες στην άνω και κάτω αριστερή γωνία, όπου βρίσκονται οι κορυφές του αντίστοιχου διαχωριστικού ζεύγους (u, v) . Εξασφαλίζουμε ότι οι P- και R-κόμβοι μπορούν να απεικονιστούν με τον τρόπο αυτό χρησιμοποιώντας μόνο ένα κυκλικό τόξο ή ένα ευθύγραμμο τμήμα για κάθε ακμή.

Αντί να απεικονίσουμε τους S-κόμβους άμεσα, θα τους θεωρούμε ανεπιφύλακτα απεικονισμένους όταν απεικονίζουμε τους P- και R-κόμβους.

Πρωτού να δείξουμε πώς θα προκύψει η απεικόνιση, εστιάζουμε στον επιπλέον περιορισμό που αναφέραμε προηγουμένως. Η απεικόνιση των δισυνεκτικών συνιστώσων μπορεί να απαιτεί να τοποθετηθεί μία συγκεκριμένη κορυφή τομής v_c στην άνω αριστερή γωνία. Κάθε κορυφή τομής σε μία δισυνεκτική συνιστώσα, που δεν είναι γέφυρα, έχει βαθμό δύο, συνεπώς, μπορεί μόνο να εμφανίζεται στο σκελετό ενός S-κόμβου, όπου είναι γειτονική με δύο πραγματικές ακμές. Θεωρούμε ως ρίζα του SPQR-δένδρου αυτόν τον μοναδικό S-κόμβο που περιέχει την v_c και τον απεικονίζουμε με συγκεκριμένο τρόπο έτσι ώστε η v_c να βρίσκεται την άνω αριστερή γωνία (βλ. **Εικόνα 17.1b**). Στην περίπτωση που το δοθέν γράφημα είναι δισυνεκτικό, ως ρίζα του δένδρου θεωρούμε κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο S-κόμβο, επιλέγουμε μία από τις πραγματικές ακμές του και την απεικονίζουμε ως ημικύκλιο. Το υπόλοιπο του κύκλου απεικονίζεται κατά μήκος μίας κατακόρυφης γραμμής. Σημειώνουμε ότι εάν το SPQR-δένδρο δεν περιέχει καθόλου S-κόμβους, τότε αποτελείται από έναν μοναδικό R-κόμβο, συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας τον αλγόριθμο για τα τρισυνεκτικά γραφήματα των Bekos et al. [BKKS13].

Το ενριζωμένο SPQR-δένδρο επάγει μία ιεραρχία στις εικονικές ακμές. Στον σκελετό κάθε κόμβου μ (εκτός από τη ρίζα) υπάρχει μία μοναδική εικονική ακμή που αντιπροσωπεύει τον κόμβο γονέα. Αναφερόμαστε στην ακμή αυτή ως η ακμή αναφοράς του μ και στα άκρα της ως οι πόλοι του μ . Ας υποθέσουμε ότι αφαιρούμε την ακμή αναφοράς από τον σκελετό ενός S-κόμβου. Το αποτέλεσμα είναι ένα απλό μονοπάτι που αποτελείται από εικονικές και πραγματικές ακμές. Εφόσον η ακμή αναφοράς είναι εικονική, αυτή η αλυσίδα ξεκινάει και τελειώνει με πραγματικές ακμές. Επιπλέον, κάθε εικονική ακμή αντιπροσωπεύει είτε έναν P-κόμβο είτε έναν R-κόμβο. Δείχνουμε ακολούθως ότι μπορούμε να εισάγουμε τις αλυσίδες αυτές στους σκελετούς των P- και R-κόμβων και να τους απεικονίσουμε με άριστη πολυπλοκότητα ακμής. Σημειώνουμε ότι μία αλυσίδα μπορεί να περιέχει κορυφές βαθμού δύο, μερικές εκ των οποίων μπορεί να είναι κορυφές τομής που απαιτούν επιπλέον χώρο για να ενωθούν με μία γέφυρα.

Όταν απεικονίζουμε τον σκελετό ενός P-κόμβου μ με πόλους (u, v) , αρκεί να ασχοληθούμε με τις δύο αλυσίδες που επάγονται από τα δύο παιδιά του μ . Η μία αλυσίδα απεικονίζεται απευθείας στην κατακόρυφη ευθεία από την u στην v , ενώ η άλλη είναι παράλληλη στην πρώτη και συνδέεται με κυκλικά τόξα με τις u και v (βλ. **Εικόνα 17.1d**). Σημειώνουμε ότι ακόμα και στην περίπτωση μιας πραγματικής ακμής ή μόνο μίας κορυφής βαθμού δύο, η προσέγγιση αυτή μπορεί και πάλι να εφαρμοστεί. Προφανώς, η απεικόνιση έχει άριστη πολυπλοκότητα ακμής και σέβεται το βασικό σχήμα του απεικονιστικού τετραγώνου.



Εικόνα 17.2: (a) Ένας R-κόμβος με τρία παιδιά S-κόμβους S_1, S_2, S_3 . Οι πραγματικές, οι εικονικές και οι ακμές αναφοράς απεικονίζονται συνεχείς, διακεκομμένες και διάστικτες. (b) Αρχική απεικόνιση του σκελετού και (c) μετά την επέκταση των αλυσίδων των S_1, S_2 και S_3 .

Απομένει να απεικονίσουμε τους R-κόμβους χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Bekos et al. [BKKS13] και να τον τροποποιήσουμε έτσι ώστε να μπορεί να χειριστεί τις εικονικές ακμές. Ένα παράδειγμα ενός R-κόμβου με τρία παιδιά δίνεται στην **Εικόνα 17.2a**. Προχωράμε σε δύο βήματα: Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο των Bekos et al. για να πάρουμε μία απεικόνιση για τον σκελετό του R-κόμβου. Στη συνέχεια εισάγουμε τις αλυσίδες των παιδιών στην απεικόνιση. Ωστόσο, η απεικόνιση πρέπει να ταιριάζει με τη δομή του απεικονιστικού τετραγώνου. Συνεπώς, οι πόλοι (u, v) πρέπει να τοποθετηθούν στην άνω και κάτω αριστερή γωνία της απεικόνισης. Ο αλγόριθμος των Bekos et al. [BKKS13] χρησιμοποιεί μια αριστερότερη κανονική διάταξη για την απεικόνιση οποιουδήποτε τρισυνεκτικού επίπεδου γραφήματος με μέγιστο βαθμό 3 με την ιδιότητα ότι η ακμή (v_n, v_1) είναι πάντοτε ένα ημικυκλικό τόξο και οι v_n και v_1 έχουν την ίδια x-συντεταγμένη. Επιπλέον, η προσέγγισή τους εξασφαλίζει ότι καμία κορυφή δεν βρίσκεται αριστερά των v_1 και v_n , αντίστοιχα. Οι τρεις κορυφές v_n, v_1, v_2 δίνονται ως μέρος της εισόδου όταν υπολογίζεται η κανονική διάταξη. Αξιοποιούμε την ιδιότητα αυτή επιλέγοντας $v_n = u$ και $v_1 = v$ ώστε να πάρουμε την σωστή τοποθέτηση των u και v (βλ. **Εικόνα 17.2b**). Στο δεύτερο βήμα, επεκτείνουμε κάθε εικονική ακμή εισάγοντας τις αντίστοιχες αλυσίδες. Παρόμοια με την περίπτωση του R-κόμβου, για κάθε αλυσίδα έχουμε δύο πραγματικές ακμές διαθέσιμες για να εμφυτεύσουμε την υπόλοιπη αλυσίδα. Εφόσον το αποτέλεσμα του αλγορίθμου των Bekos et al. [BKKS13] έχει άριστη πολυπλοκότητα ακμής, πρέπει να χειριστούμε δύο περιπτώσεις: η εικονική ακμή απεικονίζεται ως ευθύγραμμο τμήμα ή ως τεταρτοκύκλιο. Η επέκταση του ευθύγραμμου τμήματος είναι προφανής, απλά τοποθετώντας την αλυσίδα πάνω στην ευθεία. Όταν αντικαθιστούμε ένα κυκλικό τόξο χρησιμοποιούμε την

ελεύθερη αριστερή (ή πάνω) θύρα της πάνω κορυφής της αλυσίδας καθώς και την ελεύθερη κάτω (ή αριστερή αντίστοιχα) θύρα της κάτω κορυφής της αλυσίδας, και τη συνδέουμε με οριζόντια και κατακόρυφη (ή κατακόρυφη και οριζόντια αντίστοιχα) ακμή. Στην **Εικόνα 17.2b** φαίνεται ένα παράδειγμα, όπου η εικονική ακμή που απεικονίζει τον S_2 έχει απεικονιστεί ως κυκλικό τόξο. Στην **Εικόνα 17.2c** αντικαθίσταται από τους μ_2, μ_3 χωρίς να χρησιμοποιούνται κυκλικά τόξα και οι δύο πραγματικές ακμές στην αρχή και το τέλος της αλυσίδας απεικονίζονται με οριζόντιο και κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα. Το αποτέλεσμα σέβεται το απεικονιστικό σχήμα και έχει άριστη πολυπλοκότητα ακμής.

Έχουμε δείξει ότι οι P-κόμβοι, οι R-κόμβοι και οι S-κόμβοι στην ρίζα του SPQR-δένδρου μπορούν να απεικονιστούν με άριστη πολυπλοκότητα ακμής. Επιπλέον, οι αλυσίδες που επάγονται από τους S-κόμβους απεικονίζονται σε μία ευθεία (εκτός από τις πραγματικές ακμές στην αρχή και το τέλος). Είμαστε έτοιμοι να περιγράψουμε τον αλγόριθμο και να διατυπώσουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της ενότητας αυτής.

Θεώρημα 17.1. *Κάθε επίπεδο γράφημα με μέγιστο βαθμό 3 επιδέχεται μία επίπεδη απεικόνιση με άριστη πολυπλοκότητα ακμής.*

Απόδειξη. Αναλύουμε το γράφημα στις δισυνεκτικές του συνιστώσες όπως περιγράφεται στο [Kan93] προκειμένου να πάρουμε μία ιεραρχία στις κορυφές τομής. Για κάθε συνιστώσα κατασκευάζουμε το SPQR-δένδρο και το ενριζώνουμε όπως περιγράψαμε. Διασχίζουμε το SPQR-δένδρο από κάτω-προς-τα-πάνω. Εφόσον οι S-κόμβοι απεικονίζονται έμμεσα από τους γονείς τους (P- και R-κόμβους), τους παραλείπουμε. Αντ' αυτού, όταν επισκεπτόμαστε έναν P- ή R-κόμβο, παίρνουμε ένα σύνολο από αλυσίδες, όπου κάθε εικονική ακμή αντιστοιχεί σε ένα υπογράφημα το οποίο έχει ήδη απεικονιστεί. Το σχήμα των απεικονίσεων αυτών ταιριάζει με το σχήμα του βασικού απεικονιστικού τετραγώνου. Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε αλυσίδα απεικονίζεται σε μία ευθεία, μπορούμε εύκολα να τα μεγεθύνουμε έτσι ώστε να ταιριάζουν στην απεικόνιση του τρέχοντος σκελετού. Σημειώνουμε ότι η αλλαγή στο μέγεθος χρειάζεται μόνο για τους R-κόμβους. Έτσι παίρνουμε μία απεικόνιση για όλο το υπογράφημα που επάγεται από τον τρέχον κόμβο. Η αναδρομή σταματά στον S-κόμβο που είναι ρίζα του δένδρου. Το αποτέλεσμα είναι μια απεικόνιση της δισυνεκτικής συνιστώσας με άριστη πολυπλοκότητα ακμής. Επιπλέον, η προκαθορισμένη κορυφή τομής που απαιτείται από τη μέθοδο του Kant για να ενωθούν οι δισυνεκτικές συνιστώσες βρίσκεται στην άνω αριστερή γωνία. Συνεπώς, ενώνουμε τις δισυνεκτικές συνιστώσες με γέφυρες χρησιμοποιώντας κατακόρυφες ή οριζόντιες ευθείες. \square

17.2 Μη-Επίπεδες Άριστες Ομαλές Ορθογώνιες Απεικονίσεις

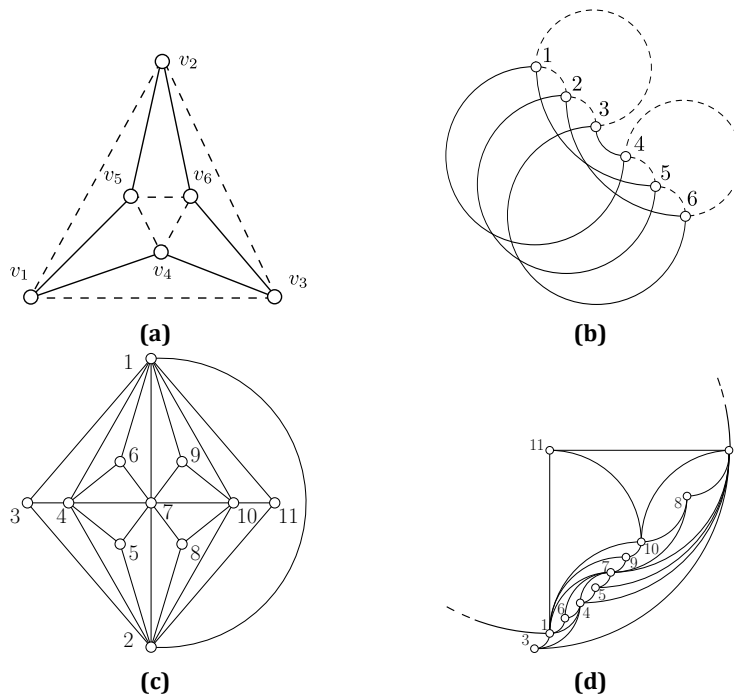
Στην ενότητα αυτή, εξετάζουμε άριστες ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις, που δεν είναι απαραίτητα επίπεδες. Σημειώνουμε ότι αν και τομές ακμών επιτρέπονται, δύο ακμές που προσπίπτουν σε μία κορυφή δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουν την ίδια θύρα της κορυφής. Η κύρια δυσκολία είναι να αντιστοιχηθούν οι ακμές στις θύρες έτσι ώστε να τηρούνται οι περιορισμοί θύρας. Αποδεικνύουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 17.2. *Κάθε γράφημα με μέγιστο βαθμό 4 επιδέχεται μία (όχι απαραίτητα επίπεδη) απεικόνιση με άριστη πολυπλοκότητα ακμής.*

Απόδειξη. Έστω $G = (V, E)$ ένα δοθέν γράφημα μέγιστου βαθμού 4. Πρώτα, κατασκευάζουμε ένα νέο γράφημα $G' = (V, E')$ από το G έτσι ώστε το G' να είναι 4-κανονικό. Το νέο γράφημα G' είναι υπεργράφημα του G με το ίδιο σύνολο κορυφών, οπότε $E' \supseteq E$. Εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε το G' ξεκινώντας από το G και επιλέγοντας κάθε φορά ένα ζεύγος κορυφών με βαθμό μικρότερο του 4 και προσθέτοντας μία ακμή μεταξύ τους. Σημειώνουμε ότι το G' μπορεί να έχει βρόγχους και πολλαπλές ακμές.

Για να πάρουμε μια απεικόνιση με άριστη πολυπλοκότητα ακμής, επιλέγουμε μία αυθαίρετη διάταξη των κορυφών $v_1, v_2, \dots, v_{|V|}$. Απεικονίζουμε τις κορυφές σε μία διαγώνια ευθεία, όπου κάθε κορυφή v_i για $1 \leq i \leq |V|$ έχει συντεταγμένες (i, i) . Οι ακμές απεικονίζονται ως τεταρτοκύκλια και κυκλικά τόξα 3 τετάρτων (βλ. **Εικόνα 17.3b**). Σκοπός τώρα είναι να αντιστοιχίσουμε τις ακμές στις θύρες των κορυφών έτσι ώστε κάθε θύρα μιας κορυφής να χρησιμοποιείται μόνο μία φορά.

Όπως έδειξε ο Petersen [Pet91], οι ακμές οποιουδήποτε γραφήματος βαθμού Δ μπορούν να καλυφθούν από $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$ σύνολα κύκλων, όπου οι κύκλοι κάθε συνόλου δεν έχουν κοινές ακμές, και τέτοια σύνολα μπορούν να βρεθούν σε πολυωνυμικό χρόνο. Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα αυτό για το γράφημα G' ώστε να πάρουμε 2 σύνολα από κύκλους C_1 και C_2 . Οι ακμές του C_1 χρησιμοποιούν τη Δυτική και Νότια θύρα των κορυφών, ενώ οι ακμές του C_2 χρησιμοποιούν την Ανατολική και Βόρεια θύρα (βλ. **Εικόνα 17.3b**). Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο $u_1, \dots, u_k, u_{k+1} = u_1$ με $u_i \in V$ από το C_1 . Απεικονίζουμε τον κύκλο έτσι ώστε η ακμή (u_i, u_{i+1}) να χρησιμοποιεί την Δυτική θύρα της u_i και την Νότια θύρα του u_{i+1} για κάθε $1 \leq i \leq k$. Συμμετρικά, απεικονίζουμε τους κύκλους του C_2 . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε θύρα χρησιμοποιείται μόνο μία φορά καθώς κάθε κορυφή καλύπτεται ακριβώς από έναν κύκλο του C_1 και ακριβώς από έναν κύκλο του C_2 . Μία απεικόνιση του G προκύπτει από την απεικόνιση του G' αφαιρώντας τις ακμές του $E' \setminus E$. \square



Εικόνα 17.3: (a-b) Το οκτάεδρο: (a) αναλυμένο σε 2 σύνολα κύκλων: C_1 (συνεχείς) και C_2 (διακεκομμένοι), (b) απεικονισμένο με άριστη πολυπλοκότητα ακμής. (c-d) Το γράφημα των Goldner-Harary απεικονισμένο (c) με ευθείες γραμμές και (d) με άριστη πολυπλοκότητα ακμής χρησιμοποιώντας το μοντέλο Kandinsky.

17.3 Άριστες Ομαλές Ορθογώνιες Kandinsky Απεικονίσεις

Οι Bekos et al. [BKKS13] έδειξαν ότι κάθε επίπεδο γράφημα επιδέχεται ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με πολυπλοκότητα ακμής δύο με το μοντέλο Kandinsky. Ο αλγόριθμος τους βασίζεται κυρίως σε τεχνικές που προκύπτουν από εμφυτεύσεις γραφημάτων σε βιβλίο. Στις απεικονίσεις που δίνουν οι κορυφές του γραφήματος πάντοτε βρίσκονται σε μία οριζόντια ευθεία έτσι ώστε κάθε ακμή που έχει ομαλή πολυπλοκότητα ακμής δύο να αποτελείται από δύο ημικύκλια, και να τέμνουν την ευθεία στο σημείο καμπής. Σημειώνουμε ότι αυτή η προσέγγιση είναι περιοριστική ως προς την απεικόνιση. Για να δούμε αυτό, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το γράφημα των Goldner-Harary, το οποίο είναι το μικρότερο μη χαμιλτονιανό μεγιστικό επίπεδο γράφημα, έχει πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο τρία (βλ. **Εικόνα 17.3c**). Συνεπώς, σύμφωνα με τον αλγόριθμο των Bekos et al. [BKKS13], επιδέχεται ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με πολυπλοκότητα ακμής δύο. Εάν χαλαρώσουμε τον περιορισμό οι κορυφές να βρίσκονται σε μία οριζόντια ευθεία, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μία άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση (βλ. **Εικόνα 17.3d**). Συνεπώς, ένα ερώτημα που προκύπτει με φυσικό τρόπο, είναι εάν οποιοδήποτε επίπεδο γράφημα επιδέχεται άριστη ομαλή ορθογώνια

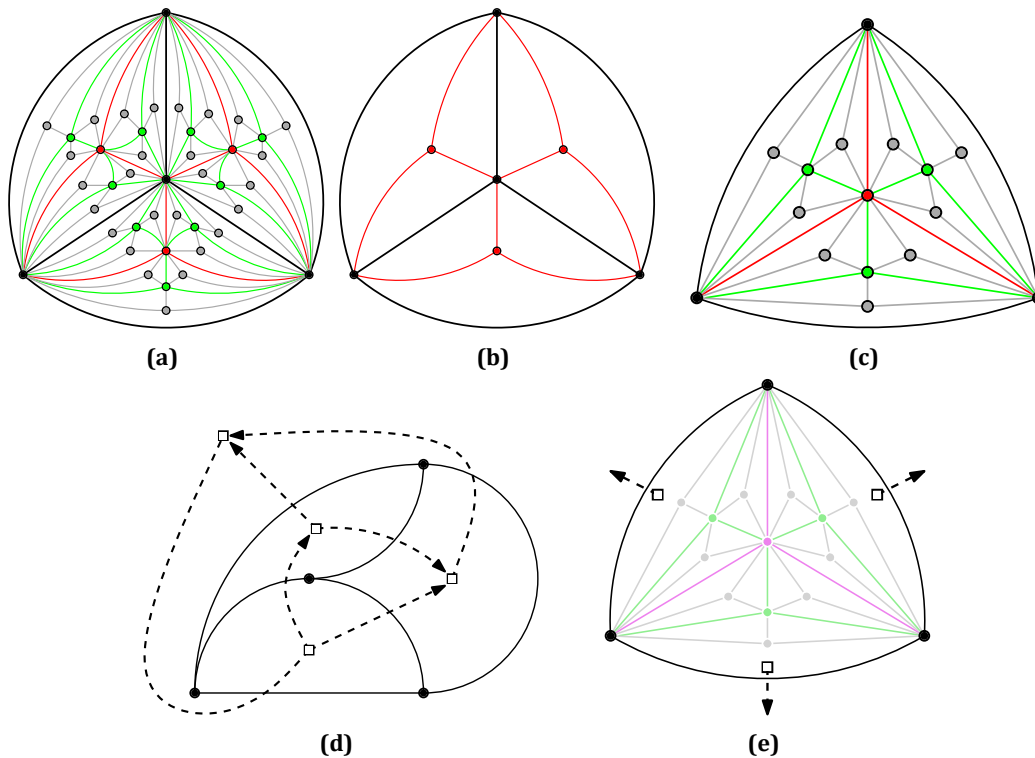
απεικόνιση με το μοντέλο Kandinsky. Στο υπόλοιπο της ενότητας αυτής, απαντάμε αρνητικά την ερώτηση.

Δείχνουμε ότι το γράφημα της **Εικόνας 17.4a**, το οποίο συμβολίζουμε με G_K , δεν επιδέχεται άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με το μοντέλο Kandinsky. Το γράφημα κατασκευάζεται από το K_4 αστερώνοντας όλες τις εσωτερικές όψεις, δηλαδή, προσθέτουμε μία επιπλέον κορυφή σε κάθε εσωτερική όψη και την ενώνουμε με κάθε κορυφή της όψης (βλ. **Εικόνα 17.4b**). Προκειμένου να πάρουμε το G_K , η διαδικασία αστερώσεως επαναλαμβάνεται δύο φορές. Από κατασκευής, το G_K περιέχει τρία ισόμορφα μεταξύ τους υπογράφηματα με μη κοινό εσωτερικό, που αντιστοιχούν στις τρεις εσωτερικές όψεις του αρχικού K_4 . Το υπογράφημα αυτό απεικονίζεται στην **Εικόνα 17.4c** και το συμβολίζουμε με G_T . Μπορούμε να βρούμε μία χρήσιμη ιδιότητα όλων των δυνατών ομαλών ορθογώνιων απεικονίσεων του G_T με άριστη πολυπλοκότητα ακμής με το μοντέλο Kandinsky. Προς την κατεύθυνση αυτή, εισάγουμε πρώτα μερική ορολογία.

Έστω ότι ένα γράφημα G επιδέχεται ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με άριστη πολυπλοκότητα ακμής με το μοντέλο Kandinsky, και ας εξετάσουμε το εμφυτευμένο δυικό του γράφημα G^* . Έστω f_1 και f_2 δύο γειτονικές όψεις του G με κοινή ακμή (v_1, v_2) . Εάν η (v_1, v_2) απεικονίζεται ως ένα κυκλικό τόξο, κατευθύνουμε την (f_1, f_2) στο G^* από την f_1 προς την f_2 εάν και μόνο εάν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα πάνω στο κυκλικό τόξο (v_1, v_2) δεν βρίσκεται εξολοκλήρου στο εσωτερικό της όψης f_2 . Τονίζουμε ότι η (f_1, f_2) παραμένει μη κατευθυνόμενη εάν η (v_1, v_2) απεικονίζεται ως ευθύγραμμο τμήμα. Το μικτό δυικό γράφημα που προκύπτει G^* εξαρτάται μόνο από την απεικόνιση του G (βλ. **Εικόνα 17.4d**). Το μικτό δυικό γράφημα G_T^* έχει την παρακάτω ιδιότητα.

Λήμμα 17.2. *Η κορυφή του G_T^* που αντιστοιχεί στην εξωτερική όψη του G_T έχει έσωβαθμό 3. Ισοδύναμα, το G_T^* έχει τρεις κατευθυνόμενες ακμές με κατεύθυνση από το εσωτερικό του G_T στο εξωτερικό του (βλ. **Εικόνα 17.4e**).*

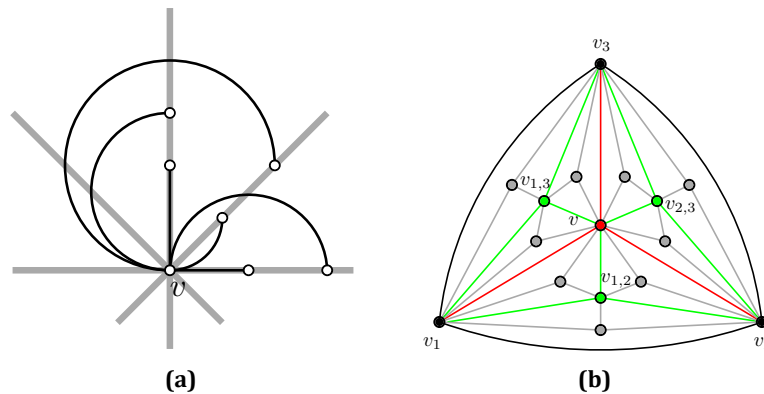
Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το G_T είναι ένα επίπεδο τριγωνοποιημένο γράφημα. Συνεπώς, προτού συνεχίσουμε, θα εξετάσουμε τις πιθανές απεικονίσεις με άριστη πολυπλοκότητα ακμής μία τριγωνικής όψης με το μοντέλο Kandinsky. Έστω δύο γειτονικές κορυφές v_1 και v_2 σε μία ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με άριστη πολυπλοκότητα ακμής. Τότε, οι v_1 και v_2 είναι είτε οριζόντια, είτε κατακόρυφα, είτε διαγώνια ευθυγραμμισμένες. Εάν οι v_1 και v_2 είναι οριζόντια (κατακόρυφα, αντίστοιχα) ευθυγραμμισμένες, τότε η ακμή (v_1, v_2) απεικονίζεται ως ευθύγραμμο τμήμα ή ως ένα ημικύκλιο. Εάν είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένες, η ακμή (v_1, v_2) απεικονίζεται ως ένα τεταρτοκύκλιο ή ένα κυκλικό τόξο 3 τετάρτων (βλ. **Εικόνα 17.5a**). Για να διευκολύνουμε την ανάγνωση, συμβολίζουμε με $\ell(v_1, v_2)$ την ευθεία που ορίζεται από τις v_1 και v_2 . Εάν θέλουμε να



Εικόνα 17.4: (a) Το γράφημα G_K δεν επιδέχεται άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με το μοντέλο Kandinsky. (b) Το K_4 (μαύρες κορυφές και ακμές) στο οποίο κάθε εσωτερική έχει αστερωθεί (κόκκινες κορυφές και ακμές). (c) Το γράφημα G_T είναι υπογράφημα του G_K . (d) Το μικτό δυικό γράφημα που προκύπτει από μία συγκεκριμένη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση του K_4 με άριστη πολυπλοκότητα ακμής υπό το μοντέλο Kandinsky. (e) Το G_T^* έχει τρεις κατευθυνόμενες ακμές με κατεύθυνση από το εσωτερικό του G_T προς το εξωτερικό του. Οι κορυφές του δυικού γραφήματος απεικονίζονται ως τετράγωνα, ενώ οι ακμές του δυικού είναι διακεκομμένες.

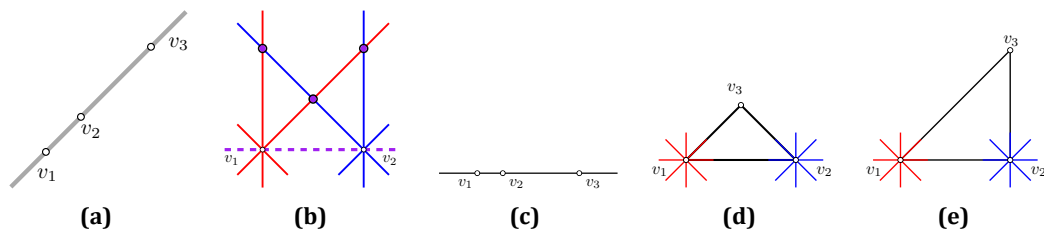
τονίσουμε ότι είναι οριζόντια (κατακόρυφη ή διαγώνια) ευθεία, γράφουμε $hl(v_1, v_2)$ ($vl(v_1, v_2)$ ή $dl(v_1, v_2)$), αντίστοιχα).

Έστω τώρα ένα τρίγωνο $T = \{v_1, v_2, v_3\}$. Στην **Εικόνα 17.6** μπορούμε να δούμε όλες τις πιθανές θέσεις των κορυφών v_1, v_2 και v_3 στο επίπεδο. Συγκεκριμένα, εάν και οι τρεις κορυφές είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένες, τότε χ.β.τ.γ. έχουμε την περίπτωση της **Εικόνας 17.6a**. Διαφορετικά, τουλάχιστον δύο κορυφές του T είναι οριζόντια ή κατακόρυφα ευθυγραμμισμένες. Έστω ότι χ.β.τ.γ. οι v_1 και v_2 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες. Η κορυφή v_3 πρέπει να ευθυγραμμίζεται κατάλληλα και με τις δύο κορυφές v_1 και v_2 (βλ. **Εικόνα 17.6b**). Συνεπώς, είτε και οι τρεις κορυφές είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες (**Εικόνα 17.6c**), ή η v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 (**Εικόνα 17.6d**), ή η v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένη με μία από τις v_1 και v_2 , έστω με την v_1 , και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την άλλη κορυφή, δηλαδή



Εικόνα 17.5: (a) Όλοι οι γείτονες της κορυφής v βρίσκονται πάνω στους τέσσερις γκρι άξονες, ενώ όλες οι ακμές που προσπίπτουν στην v απεικονίζονται ως ευθύγραμμα τμήματα ή τόξα κύκλων. (b) Το γράφημα G_T είναι υπογράφημα του G_K

την v_2 (βλ. **Εικόνα 17.6e**).



Εικόνα 17.6: Τοποθέτηση των κορυφών ενός τριγώνου $T = \{v_1, v_2, v_3\}$. (a) Οι v_1, v_2 και v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένες. (b) Οι v_1 και v_2 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες. Το μωβ χρώμα υποδεικνύει τις επιτρεπόμενες θέσεις για την v_3 . (c) Οι v_1, v_2 και v_3 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες. (d) Οι v_1 και v_2 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες, η v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 . (e) Οι v_1 και v_2 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες, η v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v_1 και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_2 .

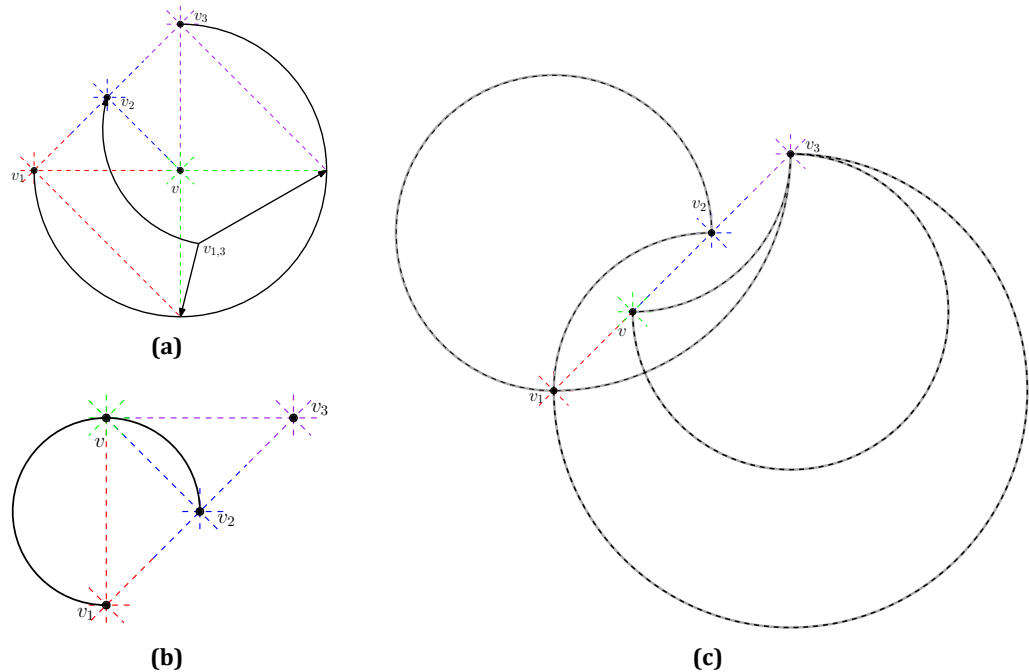
Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε τις ιδιότητες μιας ομαλής ορθογώνιας απεικόνισης του G_T με άριστη πολυπλοκότητα ακμής με το μοντέλο Kandinsky. Έστω $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ η εξωτερική όψη του G_T και v ο κοινός γείτονας των v_1, v_2 και v_3 που βρίσκεται στο εσωτερικό του T (βλ. **Εικόνα 17.5b**). Επίσης, γράφουμε $v_{i,j}$ για τον κοινό γείτονα των κορυφών v, v_i και $v_j, 1 \leq i < j \leq 3$, και συμβολίζουμε με $T_{i,j}$ το τρίγωνο με κορυφές v_i, v_j και $v, 1 \leq i < j \leq 3$. Εφόσον το T είναι τρίγωνο, οι κορυφές του τοποθετούνται όπως στην **Εικόνα 17.6**. Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

Περίπτωση Α. Οι κορυφές v_1, v_2 και v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένες όπως στην βλ. **Εικόνα 17.6a**. Υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι η ακμή (v_1, v_3) απεικονίζεται δεξιά της $dl(v_1, v_3)$. Από τον περιορισμό των ευθυγραμμίσεων, η v τοποθετείται είτε (i) οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v_1 , κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_3 και

διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v_2 , είτε (ii) κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_1 , οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v_3 και διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v_2 , είτε (iii) διαγώνια ευθυγραμμισμένη και με τις τρεις κορυφές του T . Η πρώτη περίπτωση φαίνεται στην **Εικόνα 17.7a**. Στην περίπτωση αυτή, εφόσον η v βρίσκεται στο εσωτερικό του T , η ακμή (v_1, v_3) απεικονίζεται ως ένα κυκλικό τόξο $\mathbb{3}$ τετάρτων δεξιά της $dl(v_1, v_3)$. Τότε, οι περιορισμοί των ευθυγραμμίσεων για την κορυφή $v_{1,3}$ επιβάλλουν ότι θα τοποθετηθεί είτε πάνω στην ακμή (v_1, v_3) είτε πάνω στην κορυφή v_2 . Συνεπώς, η περίπτωση αυτή απορρίπτεται. Στο δεύτερο σενάριο, όπου η v είναι κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_1 , οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v_3 και διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v_2 , έχουμε την περίπτωση της **Εικόνας 17.7b**. Η ακμή (v_1, v_2) (ή η (v_2, v_3)) δεν μπορεί να απεικονιστεί ως ένα κυκλικό τόξο $\mathbb{3}$ τετάρτων αριστερά της $dl(v_1, v_3)$, διαφορετικά η v θα βρισκόταν πάνω στην ακμή (v_1, v_2) ((v_2, v_3) , αντίστοιχα). Σε κάθε άλλη περίπτωση, η κορυφή v θα τοποθετηθεί έξω από το T , το οποίο δεν επιτρέπεται. Συνεπώς, η v τοποθετείται κατά μήκος της $dl(v_1, v_3)$ και μεταξύ των κορυφών v_1 και v_3 . Υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι η v βρίσκεται μεταξύ των v_1 και v_2 . Τότε, η ακμή (v_3, v) απεικονίζεται δεξιά της $dl(v_1, v_3)$ και η (v_1, v_2) αριστερά της $dl(v_1, v_3)$ (βλ. **Εικόνα 17.7c**).

Το παραπάνω επιχείρημα, όσον αφορά την τοποθέτηση της κορυφής v , μπορεί να γενικευθεί: Έστω ότι έχουμε ένα K_4 γράφημα, όπου κάθε εσωτερική όψη είναι αστερωμένη. Εάν οι κορυφές της εξωτερικής όψης του K_4 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένες, τότε η εσωτερική κορυφή του K_4 είναι επίσης διαγώνια ευθυγραμμισμένη με τις κορυφές της εξωτερικής όψης. Τώρα, κάθε υπογράφημα $T_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq 3$, είναι ένα K_4 με κορυφές v_i, v_j και v στην εξωτερική όψη, εσωτερική κορυφή $v_{i,j}$, και κάθε εσωτερική όψη είναι αστερωμένη. Εφόσον όλες οι κορυφές v_1, v_2, v_3 και v είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένες κατά μήκος της $dl(v_1, v_3)$, τότε το ίδιο ισχύει και για τις κορυφές $v_{1,2}, v_{1,3}$ και $v_{2,3}$ (βλ. **Εικόνα 17.8a**). Τότε, η κορυφή $v_{1,3}$ βρίσκεται μεταξύ των κορυφών v_1 και v , και η ακμή (v_1, v) απεικονίζεται αριστερά της $dl(v_1, v_3)$. Ομοίως, η κορυφή $v_{1,2}$ βρίσκεται μεταξύ των κορυφών v και v_2 , και η ακμή (v_2, v) απεικονίζεται δεξιά της $dl(v_1, v_3)$. Τέλος, η κορυφή $v_{2,3}$ βρίσκεται μεταξύ των κορυφών v_2 και v_3 , και η ακμή (v_2, v_3) απεικονίζεται αριστερά της $dl(v_1, v_3)$. Σημειώνουμε ότι η ακμή (v_1, v_3) απεικονίζεται ως τεταρτοκύκλιο ή κυκλικό τόξο $\mathbb{3}$ τετάρτων δεξιά της $dl(v_1, v_3)$, και οι ακμές (v_1, v_2) και (v_2, v_3) απεικονίζονται αριστερά της $dl(v_1, v_3)$, όπου το πολύ μία από αυτές μπορεί να απεικονιστεί ως κυκλικό τόξο $\mathbb{3}$ τετάρτων.

Περίπτωση Β. Οι κορυφές v_1, v_2 και v_3 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες όπως στην βλ. **Εικόνα 17.6c**. Μπορούμε να υποθέσουμε χ.β.τ.γ. ότι η ακμή (v_1, v_3) απεικονίζεται ως ημικόκλιο κάτω από την $hl(v_1, v_3)$. Εφόσον η v είναι γειτονική με τις v_1, v_2

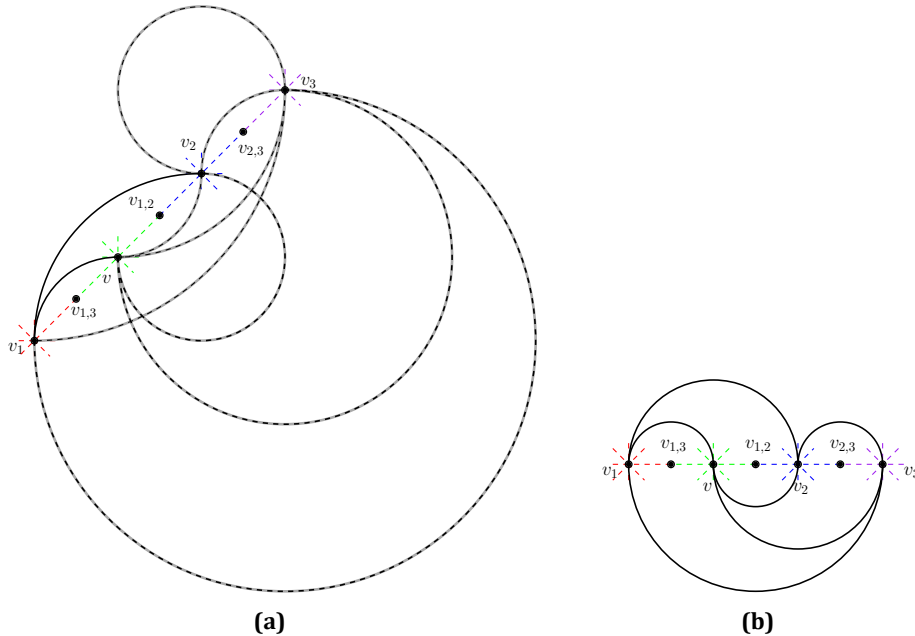


Εικόνα 17.7: (a)-(b) Η απεικόνιση του T δεν είναι εφικτή όταν οι κορυφές v_1 , v_2 και v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένες και η v δεν βρίσκεται πάνω στην $dl(v_1, v_3)$. (c) Οι κορυφές v_1 , v_2 , v_3 και v βρίσκονται πάνω στην $dl(v_1, v_3)$. Οι ακμές με γκρι σκιά αντιστοιχούν σε διαφορετικές απεικονίσεις.

και v_3 , και η v βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου T , από τους περιορισμούς των ευθυγραμμίσεων, η v μπορεί να βρίσκεται μόνο κατά μήκος της $hl(v_1, v_3)$ και μεταξύ των κορυφών v_1 και v_3 . Έστω χ.β.τ.γ. ότι η v βρίσκεται μεταξύ των κορυφών v_1 και v_2 (βλ. **Εικόνα 17.8b**). Τότε η ακμή (v_1, v_2) απεικονίζεται ως ημικύκλιο πάνω από την $hl(v_1, v_3)$ και η ακμή (v_3, v) απεικονίζεται ως ημικύκλιο κάτω από την $hl(v_1, v_3)$.

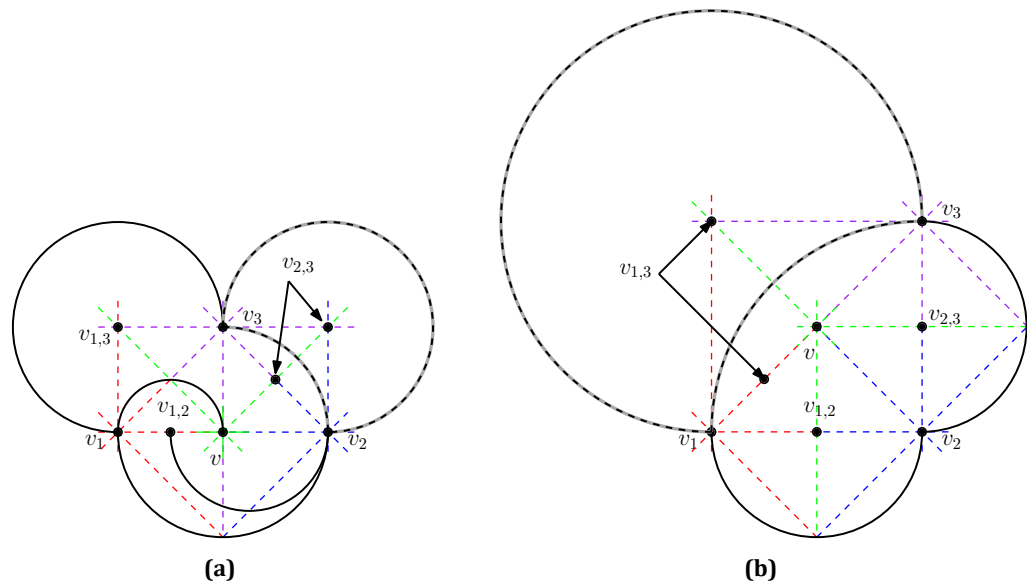
Το παραπάνω επιχείρημα μπορεί να γενικευθεί: Έστω ότι έχουμε ένα K_4 γράφημα, όπου οι κορυφές της εξωτερικής όψης του K_4 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες. Τότε η εσωτερική κορυφή του K_4 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένη με τις υπόλοιπες κορυφές και βρίσκεται μεταξύ δύο κορυφών της εξωτερικής όψης. Τότε, για την κορυφή $v_{1,3}$, η οποία είναι γειτονική με όλες τις κορυφές του $T_{1,3}$, έχουμε ότι η $v_{1,3}$ πρέπει να βρίσκεται πάνω στην $hl(v_1, v_3)$ και μεταξύ των κορυφών v_1 και v_3 . Εφόσον η $v_{1,3}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του $T_{1,3}$, η $v_{1,3}$ μπορεί μόνο να βρίσκεται μεταξύ των v_1 και v . Τότε η ακμή (v_1, v) απεικονίζεται ως ημικύκλιο πάνω από την $hl(v_1, v_3)$. Ομοίως, η $v_{1,2}$ βρίσκεται κατά μήκος της $hl(v_1, v_3)$ και μεταξύ των v και v_2 , ενώ η ακμή (v_2, v) απεικονίζεται ως ημικύκλιο κάτω από την $hl(v_1, v_3)$. Τέλος, η $v_{2,3}$ βρίσκεται πάνω στην $hl(v_1, v_3)$ και μεταξύ των v_2 και v_3 , και η ακμή (v_2, v_3)

απεικονίζεται ως ημικόκλιο πάνω από την $hl(v_1, v_3)$. Σημειώνουμε ότι η (v_1, v_3) απεικονίζεται κάτω από την $hl(v_1, v_3)$, ενώ οι (v_1, v_2) και (v_2, v_3) απεικονίζονται πάνω από την $hl(v_1, v_3)$.



Εικόνα 17.8: (a) Απεικόνιση του T όταν οι κορυφές v_1, v_2 και v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένες. Οι ακμές με γκρι σκιά αντιστοιχούν σε διαφορετικές απεικονίσεις. (b) Απεικόνιση του T όταν οι κορυφές v_1, v_2 και v_3 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες.

Περίπτωση C. Οι κορυφές v_1 και v_2 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες, η v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 όπως στην βλ. **Εικόνα 17.6d**. Από τους περιορισμούς των ευθυγραμμίσεων, υπάρχουν δύο πιθανές θέσεις για την κορυφή v : (i) οριζόντια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 , και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_3 , ή, (ii) διαγώνια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 , και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_3 . Εφόσον καμία από τις δύο τοποθετήσεις δεν είναι πάνω από την $hl(v_1, v_2)$, και η v βρίσκεται στο εσωτερικό του T , η ακμή (v_1, v_2) απεικονίζεται ως ένα ημικόκλιο κάτω από την $hl(v_1, v_2)$. Η περίπτωση απεικονίζεται στην **Εικόνα 17.9a**. Τότε, η v βρίσκεται είτε κατά μήκος της $hl(v_1, v_2)$ είτε πάνω στην ακμή (v_1, v_2) . Προφανώς, η δεύτερη επιλογή απορρίπτεται και η v είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 , και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_3 . Τώρα, η κορυφή $v_{1,2}$ είναι γειτονική με τις κορυφές v_1, v_2 και v , και βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου $T_{1,2} = \{v, v_1, v_2\}$. Από τους περιορισμούς των ευθυγραμμίσεων, η $v_{1,2}$ είναι είτε (i) οριζόντια ευθυγραμμισμένη και με τις τρεις κορυφές του $T_{1,2}$, είτε (ii) διαγώνια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 , και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v . Η δεύτερη επιλογή απορρίπτεται εφόσον η $v_{1,2}$



Εικόνα 17.9: (a) Απεικόνιση του T όταν οι κορυφές v_1 και v_2 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες, η v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 . (b) Απεικόνιση του T όταν οι κορυφές v_1 και v_2 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες, η v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v_1 και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_2 . Οι ακμές με γκρι σκιά αντιστοιχούν σε διαφορετικές απεικονίσεις.

θα βρισκόταν πάνω στην ακμή (v_1, v_2) . Οπότε, η $v_{1,2}$ τοποθετείται κατά μήκος της $hl(v_1, v_2)$ και μεταξύ των κορυφών v_1 και v_2 . Έστω ότι χ.β.τ.γ. η $v_{1,2}$ βρίσκεται μεταξύ των κορυφών v_1 και v όπως φαίνεται στην **Εικόνα 17.9a**. Τότε η ακμή (v_1, v) απεικονίζεται ως ένα ημικύκλιο πάνω από την $hl(v_1, v_2)$, και η $(v_2, v_{1,2})$ απεικονίζεται ως ένα ημικύκλιο κάτω από την $hl(v_1, v_2)$. Τότε, για την κορυφή $v_{1,3}$, η οποία είναι γειτονική με τις κορυφές v_1, v_3 και v , υπάρχουν δύο δυνατές θέσεις: (i) κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_1 , οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v_3 και διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v , ή, (ii) διαγώνια ευθυγραμμισμένη και με τις τρεις κορυφές του $T_{1,3}$. Η δεύτερη επιλογή απορρίπτεται, διαφορετικά η $v_{1,3}$ θα βρισκόταν πάνω στην ακμή (v_1, v) . Τότε, η $v_{1,3}$ είναι κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_1 , οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v_3 και διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v . Η τοποθέτηση αυτή αναγκάζει την ακμή (v_1, v_3) να απεικονιστεί ως ένα κυκλικό τόξο 3 τετάρτων αριστερά της $dl(v_1, v_3)$. Όπως και στην περίπτωση της $v_{1,3}$, υπάρχουν δύο πιθανές θέσεις για την κορυφή $v_{2,3}$: (i) κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_2 , οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v_3 και διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v , ή, (ii) διαγώνια ευθυγραμμισμένη και με τις τρεις κορυφές του $T_{2,3}$. Στην πρώτη περίπτωση η ακμή (v_2, v_3) απεικονίζεται ως ένα κυκλικό τόξο 3 τετάρτων δεξιά της $dl(v_2, v_3)$, και στη δεύτερη περίπτωση απεικονίζεται ως ένα τεταρτοκύκλιο ή ένα κυκλικό τόξο 3 τετάρτων δεξιά της $dl(v_2, v_3)$. Σημειώνουμε

ότι η ακμή (v_1, v_2) απεικονίζεται κάτω από την $h\ell(v_1, v_2)$, η (v_1, v_3) απεικονίζεται αριστερά της $d\ell(v_1, v_3)$, και η (v_2, v_3) απεικονίζεται δεξιά της $d\ell(v_2, v_3)$.

Περίπτωση D. Οι κορυφές v_1 και v_2 είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένες, η v_3 είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v_1 και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_2 όπως στην **Εικόνα 17.6e**. Από τους περιορισμούς των ευθυγραμμίσεων, υπάρχουν δύο πιθανές θέσεις για την κορυφή v : (i) κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_1 , διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v_2 , και οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v_3 , ή, (ii) διαγώνια ευθυγραμμισμένη και με τις τρεις κορυφές του T . Η πρώτη επιλογή απορρίπτεται, διαφορετικά η κορυφή $v_{1,3}$ δεν μπορεί να βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου $T_{1,3}$. Οπότε, η v είναι διαγώνια ευθυγραμμισμένη και με τις τρεις κορυφές του T (βλ. **Εικόνα 17.9b**). Τώρα, η κορυφή $v_{1,2}$ είναι γειτονική με τις κορυφές v_1, v_2 και v , και βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου $T_{1,2} = \{v, v_1, v_2\}$. Από τους περιορισμούς των ευθυγραμμίσεων, η $v_{1,2}$ είναι είτε (i) οριζόντια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 , και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v , είτε, (ii) διαγώνια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 , και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v . Εφόσον καμία από τις δύο επιλογές δεν είναι πάνω από την $h\ell(v_1, v_2)$, και η $v_{1,2}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του $T_{1,2}$, η ακμή (v_1, v_2) απεικονίζεται ως ένα ημικύκλιο κάτω από την $h\ell(v_1, v_2)$. Τότε, η $v_{1,2}$ βρίσκεται είτε κατά μήκος της $h\ell(v_1, v_2)$ είτε πάνω στην ακμή (v_1, v_2) . Προφανώς, η δεύτερη επιλογή απορρίπτεται, και η $v_{1,2}$ είναι οριζόντια ευθυγραμμισμένη με τις v_1 και v_2 , και κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v . Ομοίως, για την κορυφή $v_{2,3}$ υπάρχουν δύο πιθανές θέσεις: (i) κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με τις v_2 και v_3 , και οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v , ή, (ii) διαγώνια ευθυγραμμισμένη με τις v_2 και v_3 , και οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v . Εφόσον καμία από τις δύο θέσεις δεν είναι αριστερά της $v\ell(v_2, v_3)$, και η $v_{2,3}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του $T_{2,3}$, η ακμή (v_2, v_3) απεικονίζεται ως ένα ημικύκλιο αριστερά της $v\ell(v_2, v_3)$. Τότε η $v_{2,3}$ βρίσκεται είτε κατά μήκος της $v\ell(v_2, v_3)$ είτε πάνω στην ακμή (v_2, v_3) . Προφανώς, η δεύτερη επιλογή απορρίπτεται, και η $v_{2,3}$ είναι κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με τις v_2 και v_3 , και οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v . Τέλος, για την κορυφή $v_{1,3}$, η οποία είναι γειτονική με τις κορυφές v_1, v_3 και v , υπάρχουν δύο πιθανές θέσεις: (i) κατακόρυφα ευθυγραμμισμένη με την v_1 , οριζόντια ευθυγραμμισμένη με την v_3 και διαγώνια ευθυγραμμισμένη με την v , ή, (ii) διαγώνια ευθυγραμμισμένη και με τις τρεις κορυφές του $T_{1,3}$. Στην πρώτη περίπτωση η ακμή (v_1, v_3) απεικονίζεται ως ένα κυκλικό τόξο \mathcal{C} τετάρτων αριστερά της $d\ell(v_1, v_3)$, και στην δεύτερη περίπτωση απεικονίζεται ως ένα τεταρτοκύκλιο ή ένα κυκλικό τόξο \mathcal{C} τετάρτων αριστερά της $d\ell(v_1, v_3)$. Σημειώνουμε ότι η ακμή (v_1, v_2) απεικονίζεται κάτω από την $h\ell(v_1, v_2)$, η (v_1, v_3) απεικονίζεται αριστερά της $d\ell(v_1, v_3)$, και η (v_2, v_3) απεικονίζεται δεξιά της $v\ell(v_2, v_3)$.

□

Τώρα δίνουμε το κεντρικό μας θεώρημα.

Θεώρημα 17.3. *Υπάρχει μία άπειρη οικογένεια επίπεδων γραφημάτων που δεν επιδέχονται επίπεδη άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με το μοντέλο Kandinsky.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει μία ομαλή ορθογώνια απεικόνιση του oG_K με άριστη πολυπλοκότητα ακμής με το μοντέλο Kandinsky, και έστω G_K^* το δυικό γράφημα. Εφόσον το G_K περιέχει τρία αντίγραφα του G_T χωρίς κοινό εσωτερικό, σε κάθε επίπεδη εμφύτευση του G_K υπάρχουν δύο αντίγραφα του G_T με μία κοινή ακμή στην εξωτερική τους όψη. Έστω G_T^1 και G_T^2 τα δύο αντίγραφα του G_T που μοιράζονται μία ακμή, και έστω f_1 (και f_2) η εσωτερική όψη του G_T^1 (G_T^2 , αντίστοιχα), που περιέχει την κοινή ακμή. Από την απεικόνιση του G_T^1 και το **Λήμμα 17.2**, προκύπτει η κατευθυνόμενη ακμή (f_1, f_2) . Από την άλλη, από την απεικόνιση του G_T^2 , προκύπτει η κατευθυνόμενη ακμή (f_2, f_1) , που αντιβαίνει στον ορισμό του μικτού δυικού γραφήματος G_K^* . Συνεπώς, το G_K δεν επιδέχεται άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με το μοντέλο Kandinsky.

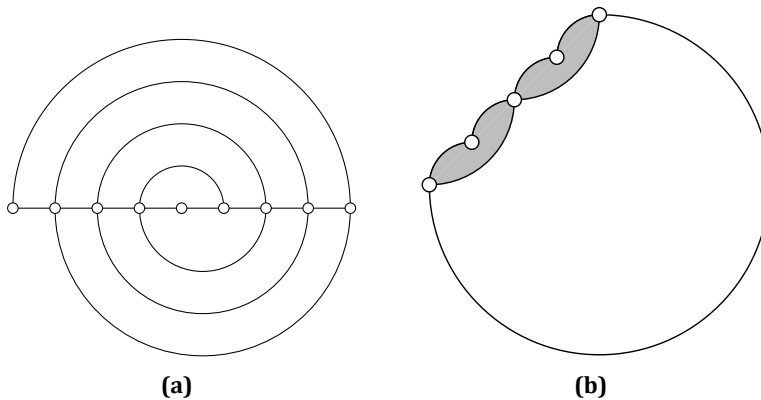
Τώρα είναι εύκολο να κατασκευάσουμε μία άπειρη οικογένεια επίπεδων γραφημάτων που δεν επιδέχονται άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση. Για να το επιτύχουμε, σε κάθε επίπεδο γράφημα που περιέχει ένα τρίγωνο T , αντικαθιστούμε το εσωτερικό του T με ένα αντίγραφο του G_K . Προφανώς, το γράφημα που προκύπτει δεν επιδέχεται άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση με το μοντέλο Kandinsky. \square

17.4 Κλάσεις Γραφημάτων Με Άριστη Πολυπλοκότητα Ακμής

Στην ενότητα αυτή, μελετάμε το πρόβλημα ομαλών ορθογώνιων απεικονίσεων από διαφορετική οπτική γωνία. Αρχικά, θεωρούμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας το μοντέλο Kandinsky. Έστω $kHLS_1$ ($kDLS_1$, αντίστοιχα) η οικογένεια γραφημάτων που περιέχει όλα τα γραφήματα που επιδέχονται άριστες ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις με το μοντέλο Kandinsky στην περίπτωση που όλες οι κορυφές περιορίζονται σε μία οριζόντια (διαγώνια, αντίστοιχα) ευθεία. Έστω επίσης kGS_1 η γενικότερη οικογένεια γραφημάτων που περιέχει όλα τα γραφήματα που επιδέχονται ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις με άριστη πολυπλοκότητα ακμής με το μοντέλο Kandinsky (δηλαδή, δεν υπάρχει περιορισμός στην τοποθέτηση των κορυφών). Προφανώς, $kHLS_1, kDLS_1 \subseteq kGS_1$. Εφόσον το γράφημα των Goldner-Harary δεν ανήκει ούτε στην $kHLS_1$ ούτε στην $kDLS_1$ (βλ. **Ενότητα 17.3**), έπεται ότι $kHLS_1, kDLS_1 \subset kGS_1$. Επιπλέον, εύκολα διαπιστώνουμε ότι $kHLS_1 = kDLS_1$ εφόσον η $kHLS_1$ και η $kDLS_1$ ταυτίζονται με την οικογένεια γραφημάτων που επιδέχονται εμφύτευση σε βιβλίο δύο σελίδων. Εν κατα-

κλειδί, το **Θεώρημα 17.3** μας δίνει την παρακάτω σχέση: $kHLS_1 = kDLS_1 \subset kGS_1 \subset \{G : G \text{ είναι επίπεδο}\}$.

Θεωρούμε τώρα το ίδιο πρόβλημα, υποθέτοντας ότι δεν επιτρέπεται δύο οποιοσδήποτε ακμές να χρησιμοποιούν την ίδια θύρα μιας κορυφής. Παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση, συμβολίζουμε με HLS_1 και DLS_1 τις οικογένειες γραφημάτων που περιέχουν όλα τα επίπεδα γράφημα με μέγιστο βαθμό 4 που επιδέχονται άριστες ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις στην περίπτωση που, όλες οι κορυφές περιορίζονται σε μία οριζόντια και σε μία διαγώνια ευθεία αντίστοιχα. Η GS_1 συμβολίζει την γενικότερη οικογένεια γραφημάτων που περιέχει όλα τα επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 4 που επιδέχονται άριστες ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις με άριστη πολυπλοκότητα ακμής (δηλαδή, δεν υπάρχει περιορισμός στην τοποθέτηση των κορυφών). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το K_4 (και κατά συνέπεια οποιοδήποτε επίπεδο γράφημα με μέγιστο βαθμό 4 που περιέχει το K_4 ως υπογράφημα) δεν ανήκει ούτε στην HLS_1 ούτε στην DLS_1 , το οποίο συνεπάγεται ότι $HLS_1, DLS_1 \subset GS_1$. Υπενθυμίζουμε ότι υποθέτουμε πως δεν επιτρέπουμε σε οποιοσδήποτε δύο ακμές να χρησιμοποιούν την ίδια θύρα μιας κορυφής. Από την άλλη, στην **Εικόνα 17.10a** (**17.10b**, αντίστοιχα) βλέ-



Εικόνα 17.10: Γραφήματα που ανήκουν στο (a) $HLS_1 \setminus DLS_1$, (b) $DLS_1 \setminus HLS_1$.

πουμε ένα γράφημα το οποίο ανήκει στην HLS_1 (DLS_1 , αντίστοιχα) αλλά όχι στην DLS_1 (HLS_1 , αντίστοιχα). Πράγματι, εάν περιορίσουμε τις κορυφές του γραφήματος της **Εικόνας 17.10a** σε μία διαγώνια ευθεία, τότε όλες οι ακμές που απεικονίζονται ως ημικύκλια στην **Εικόνα 17.10a** θα πρέπει να απεικονιστούν ως κυκλικά τόξα 3 τετάρτων, ενώ οι υπόλοιπες ακμές ως τεταρτοκύκλια, το οποίο αναπόφευκτα απαιτεί χρήση κοινής θύρας. Παρόμοια, εάν περιορίσουμε τις κορυφές του γραφήματος της **Εικόνας 17.10b** σε μία οριζόντια ευθεία, τότε ένα από τα δύο γκρι σκιασμένα τρίγωνα του γραφήματος αυτού θα πρέπει να απεικονιστεί στην άνω σελίδα και το άλλο στην κάτω σελίδα, το οποίο συνεπάγεται ότι η ακμή που ενώνει τις εξωτερικότερες κορυφές του γραφήματος της **Εικόνας 17.10b** δεν μπορεί να απεικονιστεί ως ημικύκλιο (είτε στην

άνω είτε στην κάτω σελίδα) χωρίς να χρησιμοποιεί κάποια κατειλημμένη θύρα. Σημειώνουμε ότι και τα δύο σύνολα $HLS_1 \setminus DLS_1$ και $DLS_1 \setminus HLS_1$ περιέχουν άπειρα στο πλήθος επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 4, για παράδειγμα, οποιοδήποτε επίπεδο γράφημα με μέγιστο βαθμό 4 που περιέχει το γράφημα της [Εικόνας 17.10a](#) ([17.10b](#), αντίστοιχα) ως υπογράφημα ανήκει στο $HLS_1 \setminus DLS_1$ ($DLS_1 \setminus HLS_1$, αντίστοιχα). Συνεπώς, $HLS_1 \neq DLS_1$. Εφόσον το οκτάεδρο δεν ανήκει στην GS_1 [[BKKS13](#)], έχουμε το ακόλουθο: $HLS_1, DLS_1 \subset GS_1 \subset \{G : G \text{ είναι επίπεδο με } \Delta(G) = 4\}$.

18 Συμπεράσματα

18.1 Εμφυτεύσεις σε Βιβλίο

Στο **Κεφάλαιο 12** δείξαμε ότι κάθε επίπεδο γράφημα με μέγιστο βαθμό 4 είναι υποχαμιλτονιανό και συνεπώς εμφυτεύεται σε βιβλίο 2 σελίδων, και στο **Κεφάλαιο 13** δείξαμε ότι τα 1-επίπεδα γράφημα έχουν σταθερό πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο. Ορισμένα ανοιχτά προβλήματα που προκύπτουν είναι τα παρακάτω:

- Μπορεί το **Θεώρημα 12.1** να επεκταθεί σε επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 5, δηλαδή είναι τα επίπεδα γραφήματα με μέγιστο βαθμό 5 υποχαμιλτονιανά;
- Μπορεί το πάχος εμφύτευσης των 1-επίπεδων γραφημάτων να μειωθεί περεταίρω, για παράδειγμα, να γίνει μικρότερο του 20;
- Η ίδια ερώτηση έχει σημασία ακόμα και για βέλτιστα 1-επίπεδα γραφήματα, δηλαδή γραφήματα με n κορυφές και ακριβώς $4n - 8$ ακμές.
- Υπάρχουν οικογένειες 1-επίπεδων γραφημάτων που απαιτούν συγκεκριμένο πλήθος σελίδων (για παράδειγμα ≥ 4 ή ≥ 5);
- Μπορούμε με παρόμοια επιχειρήματα να δείξουμε ότι τα k -επίπεδα γραφήματα έχουν φραγμένο πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο; Ή πιο συγκεκριμένα, υπάρχει κάποια γραμμική συνάρτηση $f(k)$ έτσι ώστε τα k -επίπεδα γραφήματα να μπαίνουν σε $f(k)$ σελίδες;
- Υπάρχουν άλλες οικογένειες γραφημάτων που δεν είναι κλειστές ως προς ελάσσονα αλλά έχουν φραγμένο πάχος εμφύτευσης σε βιβλίο;
- Φυσικά η πιο ενδιαφέρουσα και συναρπαστική ερώτηση σχετικά με εμφυτεύσεις σε βιβλίο των επίπεδων γραφημάτων είναι εάν το άνω φράγμα των 4 σελίδων του Γιαννακάκη [Yan89] είναι αυστηρό, δηλαδή μπορούν όλα τα επίπεδα γραφήματα να εμφυτευθούν σε 3 σελίδες, ή υπάρχουν επίπεδα γραφήματα που απαιτούν 4 σελίδες;

18.2 Ολικοί Χρωματισμοί με Διαχωριζόμενες Γειτονικές Κορυφές

Στο [Κεφάλαιο 15](#) δείξαμε ότι η εικασία των AVD-ολικών χρωματισμών ισχύει για 4-κανονικά γραφήματα. Στο [Κεφάλαιο 14](#) μπορέσαμε να δείξουμε ότι για τα γενικευμένα Halin γραφήματα με μέγιστο βαθμό 3 συνολικά 5 χρώματα αρκούν, δηλαδή στην περίπτωση αυτή το άνω φράγμα της εικασίας δεν είναι αυστηρό. Αυτό εγείρει τα παρακάτω ερωτήματα:

- Είναι το φράγμα της εικασίας των AVD-ολικών χρωματισμών αυστηρό για τα επίπεδα γραφήματα με μικρό μέγιστο βαθμό (δηλαδή ≤ 13);
- Είναι το φράγμα των 6 χρωμάτων αυστηρό για τα γραφήματα μέγιστου βαθμού 3 ή ισχύει ότι 5 χρώματα πάντα επαρκούν;
- Είναι το φράγμα της εικασίας των AVD-ολικών χρωματισμών αυστηρό για k -κανονικά γραφήματα όπου το k είναι περιττός αριθμός;
- Αληθεύει ότι εάν η εικασία των AVD-ολικών χρωματισμών ισχύει για τα k -κανονικά γραφήματα τότε ισχύει και για οποιοδήποτε γράφημα μέγιστου βαθμού k ;

18.3 Απεικονίσεις με Κύκλους

Στο [Κεφάλαιο 16](#) δείξαμε ότι κάθε 3-συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα εφαπτόμενων κύκλων. Επίσης δείξαμε ότι υπάρχουν 4-κανονικά επίπεδα γραφήματα που δεν είναι 3-συνεκτικά (δηλαδή, είναι είτε συνεκτικά είτε δισυνεκτικά) και δεν επιδέχονται πραγματοποίηση ως σύστημα κύκλων. Ωστόσο, η εργασία μας εγείρει ορισμένα ανοιχτά προβλήματα. Ακολουθως, παραθέτουμε ορισμένα από αυτά:

- Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αντίστοιχου προβλήματος απόφασης, δηλαδή, εάν ένα δοθέν συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων;
- Ποιο είναι το μικρότερο συνεκτικό 4-κανονικό επίπεδο γράφημα που δεν επιδέχεται πραγματοποίηση ως ένα σύστημα κύκλων; Τα γραφήματα που κατασκευάσαμε έχουν περισσότερες από 100 κορυφές.
- Το οκτάεδρο επιδέχεται μη-ισοδύναμες πραγματοποιήσεις ως σύστημα κύκλων, όπου το πλήθος των κύκλων που συμμετέχουν στις αντίστοιχες πραγματοποιήσεις διαφέρει. Γενικά, ένα 4-κανονικό επίπεδο γράφημα με n κορυφές χρειάζεται τουλάχιστον $(1 + \sqrt{1 + 4n})/2$ και το πολύ $2n/3$ κύκλους προκειμένου να πραγματοποιηθεί ως ένα σύστημα κύκλων, όπως δείξαμε στην [Ενότητα 16.1](#). Οπότε, ποιο

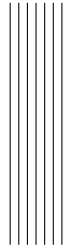
είναι το εύρος στο πλήθος των κύκλων που χρειάζονται προκειμένου να πραγματοποιήσουμε ένα δοθέν (3-συνεκτικό) 4-κανονικό επίπεδο γράφημα ως ένα σύστημα κύκλων;

- Στα πλαίσια της απεικόνισης γραφημάτων ως συστήματα κύκλων, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί η οικογένεια των Euler επίπεδων γραφημάτων. Προφανώς, ορισμένες κορυφές θα ορίζονται ως τομή περισσότερων από δύο κύκλους.

18.4 Άριστες Ορθογώνιες Απεικονίσεις

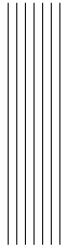
Στο **Κεφάλαιο 17** παρουσιάσαμε ορισμένα καινούρια αποτελέσματα για ομαλές ορθογώνιες απεικονίσεις. Ωστόσο, η εργασία μας αφήνει ορισμένα αναπάντητα προβλήματα:

- Το πλέον ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η αναγνώριση των επίπεδων γραφημάτων με μέγιστο βαθμό 4 που επιδέχονται άριστη ομαλή ορθογώνια απεικόνιση.
- Το ίδιο ερώτημα μπορεί να τεθεί για επίπεδα γράφηματα χρησιμοποιώντας το μοντέλο Kandinsky, δηλαδή, ανήκει ένα επίπεδο γράφημα στην κλάση kGS_1 ; Σημειώνουμε ότι τα αντίστοιχα προβλήματα απόφασης εάν ένα δοθέν γράφημα ανήκει είτε στην $kHLS_1$ είτε στην $kDLS_1$ είναι NP-δύσκολα εφόσον είναι ισοδύναμα με το πρόβλημα απόφασης εάν ένα γράφημα επιδέχεται εμφύτευση σε βιβλίο δύο σελίδων.
- Ο αλγόριθμος που δίνει το **Θεώρημα 17.2** δεν λαμβάνει υπόψιν του τις τομές ακμών που πιθανώς προκύπτουν. Συνεπώς, η ελαχιστοποίηση των τομών είναι επίσης σημαντική.
- Είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ένα καθολικό σύνολο σημείων έτσι ώστε κάθε επίπεδο γράφημα με μέγιστο βαθμό 4 να μπορεί να εμφυτευθεί στα σημεία του συνόλου αυτού με άριστη πολυπλοκότητα ακμής;



Publications of the Author

- **Two-Page Book Embeddings of 4-Planar Graphs**
joint with Micheal A. Bekos and Martin Gronemann
Algorithmica, Available Online, 2015.
- **On a conjecture of Lovász on circle-representations of simple 4-regular planar graphs**
joint with Michael A. Bekos
Journal of Computational Geometry, Volume 6, Issue 1, pp. 1-20, 2015.
- **1-Planar Graphs have Constant Book Thickness**
joint with Michael A. Bekos, Till Bruckdorfer and Michael Kaufmann
In N. Bansal and I. Finocchi editors, Proc. of 23rd European Symposium on Algorithms (ESA 2015), LNCS 9294, pp. 130-141, 2015.
- **On the AVDTC of 4-regular graphs**
joint with Alexandros Papaioannou
Discrete Mathematics, Volume 330, pp. 20-40, 2014.
- **Two-Page Book Embeddings of 4-Planar Graphs**
joint with Michael A. Bekos and Martin Gronemann
In N. Portier and E. W. Mayr editors, Proc. of 31st Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS2014), LIPIcs, pp. 137-148, 2014.
- **Perfect Smooth Orthogonal Drawings**
joint with Michael A. Bekos, Martin Gronemann and Sergey Pupyrev
In N. G. Bourbakis and G. A. Tsihrintzis and M. Virvou editors, Proc. of 5th International Conference on Information, Intelligence, Systems and Applications (IISA 2014), IEEE, pp. 76-81, 2014.
- **Circle-Representations of Simple 4-Regular Planar Graphs**
joint with Michael A. Bekos
In W. Didimo and M. Patrignani editors, Proc. of 20th International Symposium on Graph Drawing (GD2012), LNCS 7704, pp. 138-149, 2012.



Bibliography

- [ABK13] Md. J. Alam, F. J. Brandenburg, and S. G. Kobourov. Straight-line grid drawings of 3-connected 1-planar graphs. In S. Wismath and A. Wolff, editors, *Graph Drawing*, volume 8242 of LNCS, pages 83–94. Springer, 2013.
- [ABK⁺14] Md. J. Alam, M. A. Bekos, M. Kaufmann, P. Kindermann, S. G. Kobourov, and A. Wolff. Smooth orthogonal drawings of planar graphs. In A. Pardo and A. Viola, editors, *LATIN*, volume 8392 of LNCS, pages 144–155. Springer, 2014.
- [ADBDB13] P. Angelini, M. Di Bartolomeo, and G. Di Battista. Implementing a partitioned 2-page book embedding testing algorithm. In W. Didimo and M. Patrignani, editors, *Graph Drawing*, volume 7704 of LNCS, pages 79–89. Springer, 2013.
- [AEG⁺14] Md. J. Alam, D. Eppstein, M. T. Goodrich, S. G. Kobourov, and S. Pupyrev. Balanced circle packings for planar graphs. In C. Duncan and A. Symvonis, editors, *Graph Drawing*, volume 8871 of LNCS, pages 125–136. Springer, 2014.
- [And70a] E. M. Andreev. On convex polyhedra in Lobačevskiĭ spaces. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 10(3):413–440, 1970.
- [And70b] E. M. Andreev. On convex polyhedra of finite volume in Lobačevskiĭ space. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 12(2):255–259, 1970.
- [ARSV12] O. Aichholzer, G. Rote, A. Schulz, and B. Vogtenhuber. Pointed drawings of planar graphs. *Computational Geometry*, 45(9):482–494, 2012.
- [BBDG⁺07] M. Badent, C. Binucci, E. Di Giacomo, W. Didimo, S. Felsner, F. Giordano, J. Kratochvíl, P. Palladino, M. Patrignani, and F. Trotta. Homothetic triangle contact representations of planar graphs. In *CCCG*, pages 233–236, 2007.
- [BBKR15] M. A. Bekos, T. Bruckdorfer, M. Kaufmann, and C. N. Raftopoulou. 1-planar graphs have constant book thickness. In N. Bansal and I. Finocchi, editors, *ESA*, volume 9294 of LNCS, pages 130–141. Springer, 2015.

- [BBS02] P. N. Balister, B. Bollobás, and R. H. Schelp. Vertex distinguishing colorings of graphs with $\Delta(G)=2$. *Discrete Mathematics*, 252(1):17–29, 2002.
- [BDG93] H. J. Broersma, A. J. W. Duijvestijn, and F. Göbel. Generating all 3-connected 4-regular planar graphs from the octahedron graph. *Journal of Graph Theory*, 17(5):613–620, 1993.
- [BE01] M. Bern and D. Eppstein. Optimal Möbius transformations for information visualization and meshing. In F. Dehne, J.-R. Sack, and R. Tamassia, editors, WADS, volume 2125 of LNCS, pages 14–25. Springer, 2001.
- [BGLS07] P. N. Balister, E. Györi, J. Lehel, and R. H. Schelp. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21(1):237–250, 2007.
- [BGPR14] M. A. Bekos, M. Gronemann, S. Pupyrev, and C. N. Raftopoulou. Perfect smooth orthogonal drawings. In N. G. Bourbakis, G. A. Tsihrintzis, and M. Virvou, editors, IISA, pages 76–81. IEEE, 2014.
- [BGR14] M. A. Bekos, M. Gronemann, and C. N. Raftopoulou. Two-page book embeddings of 4-planar graphs. In E. W. Mayr and N. Portier, editors, STACS, volume 25 of LIPIcs, pages 137–148. Schloss Dagstuhl, 2014.
- [BGR15] M. A. Bekos, M. Gronemann, and C. N. Raftopoulou. Two-page book embeddings of 4-planar graphs. *Algorithmica*, 2015. Available online.
- [BHLW99] C. Bazgan, A. Harkat-Benhamdine, H. Li, and M. Woźniak. On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 75(2):288–301, 1999.
- [BHLW01] C. Bazgan, A. Harkat-Benhamdine, H. Li, and M. Woźniak. A note on the vertex-distinguishing proper coloring of graphs with large minimum degree. *Discrete Mathematics*, 236(1):37–42, 2001.
- [BK79] F. Bernhart and P. C. Kainen. The book thickness of a graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(3):320–331, 1979.
- [BK98a] T. Biedl and G. Kant. A better heuristic for orthogonal graph drawings. *Computational Geometry*, 9(3):159–180, 1998.
- [BK98b] H. Brey and D. G. Kirkpatrick. Unit disk graph recognition is NP-hard. *Computational Geometry*, 9(1):3–24, 1998.

- [BKKS13] M. A. Bekos, M. Kaufmann, S. G. Kobourov, and A. Symvonis. Smooth orthogonal layouts. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 17(5):575–595, 2013.
- [BKLS04] P. N. Balister, A. V. Kostochka, H. Li, and R. H. Schelp. Balanced edge colorings. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 90(1):3–20, 2004.
- [BKT12] J.-L. Baril, H. Kheddouci, and O. Togni. Vertex distinguishing edge- and total-colorings of cartesian and other product graphs. *Ars Combinatoria*, 107:109–127, 2012.
- [BM76] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press LTD, New York, 1976.
- [Bol98] B. Bollobás. *Modern Graph Theory*, volume 184 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.
- [BR12] M. A. Bekos and C. N. Raftopoulou. Circle-representations of simple 4-regular planar graphs. In W. Didimo and M. Patrignani, editors, *Graph Drawing*, volume 7704 of LNCS, pages 138–149. Springer, 2012.
- [BR15] M. A. Bekos and C. N. Raftopoulou. On a conjecture of Lovász on circle-representations of simple 4-regular planar graphs. *Journal of Computational Geometry*, 6(1):1–20, 2015.
- [BRS03] P. N. Balister, O. M. Riordan, and R. H. Schelp. Vertex-distinguishing edge colorings of graphs. *Journal of Graph Theory*, 42(2):95–109, 2003.
- [BS84] J. F. Buss and P. W. Shor. On the pagenumber of planar graphs. In *STOC*, pages 98–100. ACM, 1984.
- [BS97] A. C. Burriss and R. H. Schelp. Vertex-distinguishing proper edge-colorings. *Journal of Graph Theory*, 26(2):73–82, 1997.
- [CCG⁺12] R. Chernobelskiy, K. I. Cunningham, M. T. Goodrich, S. G. Kobourov, and L. Trott. Force-directed Lombardi-style graph drawing. In M. van Kreveld and B. Speckmann, editors, *Graph Drawing*, volume 7034 of LNCS, pages 320–331. Springer, 2012.
- [CG09] M. Chen and X. Guo. Adjacent vertex-distinguishing edge and total chromatic numbers of hypercubes. *Information Processing Letters*, 109(12):599–602, 2009.

- [Che03] C. Chen. Any maximal planar graph with only one separating triangle is hamiltonian. *Journal of Combinatorial Optimization*, 7(1):79–86, 2003.
- [Che04] X. Chen. Adjacent-vertex-distinguishing total chromatic numbers on $K_{2n+1} - E(P_3)$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(1):19–27, 2004.
- [Che08] X. Chen. On the adjacent vertex distinguishing total coloring numbers of graphs with $\Delta = 3$. *Discrete Mathematics*, 308(17):4003–4007, 2008.
- [ČHS96] J. Černý, M. Horňák, and R. Soták. Observability of a graph. *Mathematica Slovaca*, 46(1):21–31, 1996.
- [CJ12] T. Coker and K. Johannson. The adjacent vertex distinguishing total chromatic number. *Discrete Mathematics*, 312(17):2741–2750, 2012.
- [CLR87] F. R. K. Chung, F. T. Leighton, and A. L. Rosenberg. Embedding graphs in books: A layout problem with applications to VLSI design. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 8(1):33–58, 1987.
- [CLZ10] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang. *Graphs & Digraphs*. CRC Press, 2010.
- [CM13] S. Cabello and B. Mohar. Adding one edge to planar graphs makes crossing number and 1-planarity hard. *SIAM Journal on Computing*, 42(5):1803–1829, 2013.
- [CN89] N. Chiba and T. Nishizeki. The hamiltonian cycle problem is linear-time solvable for 4-connected planar graphs. *Journal of Algorithms*, 10(2):187–211, 1989.
- [CS03] C. R. Collins and K. Stephenson. A circle packing algorithm. *Computational Geometry*, 25(3):233–256, 2003.
- [CZ06] X. Chen and Z. Zhang. Adjacent-vertex-distinguishing total chromatic number on 2-connected outerplane graph with $\Delta(G) \leq 4$. *Journal of Lanzhou University (Natural Science)*, 42(6):96–102, 2006.
- [CZ08] X. Chen and Z. Zhang. AVDTC numbers of generalized Halin graphs with maximum degree at least 6. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)*, 24(1):55–58, 2008.
- [CZS05] X. Chen, Z. Zhang, and Y. Sun. Adjacent vertex distinguishing total chromatic numbers on mono-cycle graphs and the square of cycles. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 18(4):481–491, 2005.

- [CZYZ05] X. Chen, Z. Zhang, J. Yan, and G. Zhang. Adjacent-vertex-distinguishing total chromatic numbers on Mycielski's graphs of several kinds of particular graphs. *Journal of Lanzhou University (Natural Science)*, 41(2):117–122, 2005.
- [DBLV93] G. Di Battista, G. Liotta, and F. Vargiu. Spirality of orthogonal representations and optimal drawings of series-parallel graphs and 3-planar graphs (extended abstract). In F. Dehne, J.-R. Sack, N. Santoro, and S. Whitesides, editors, *WADS*, volume 709 of *LNCS*, pages 151–162. Springer, 1993.
- [DBT89] G. Di Battista and R. Tamassia. Incremental planarity testing. In *FOCS*, pages 436–441. IEEE, 1989.
- [DBT96] G. Di Battista and R. Tamassia. On-line planarity testing. *SIAM Journal on Computing*, 25(5):956–997, 1996.
- [DEG⁺12a] C. A. Duncan, D. Eppstein, M. T. Goodrich, S. G. Kobourov, and M. Löffler. Planar and poly-arc Lombardi drawings. In M. van Kreveld and B. Speckmann, editors, *Graph Drawing*, volume 7034 of *LNCS*, pages 308–319. Springer, 2012.
- [DEG⁺12b] C. A. Duncan, D. Eppstein, M. T. Goodrich, S. G. Kobourov, and M. Nöllenburg. Lombardi drawings of graphs. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 16(1):85–108, 2012.
- [DEG⁺13] C. A. Duncan, D. Eppstein, M. T. Goodrich, S. G. Kobourov, and Nöllenburg M. Drawing trees with perfect angular resolution and polynomial area. *Discrete & Computational Geometry*, 49(2):157–182, 2013.
- [dFdMR94] H. de Fraysseix, P. O. de Mendez, and P. Rosenstiehl. On triangle contact graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 3(2):233–246, 1994.
- [DGH⁺12] C. A. Duncan, E. R. Gansner, Y. F. Hu, M. Kaufmann, and S. G. Kobourov. Optimal polygonal representation of planar graphs. *Algorithmica*, 63(3):672–691, 2012.
- [dKPS14] E. de Klerk, D. V. Pasechnik, and G. Salazar. Book drawings of complete bipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 167:80–93, 2014.
- [dV89] Y. C. de Verdière. Empilements de cercles: Convergence d'une méthode de point fixe. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, 6:23–31, 1989.
- [dV91] Y. C. de Verdière. Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Inventiones mathematicae*, 104(1):655–669, 1991.

- [DW04] V. Dujmovic and D. R. Wood. On linear layouts of graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 6(2):339–358, 2004.
- [DW07] V. Dujmovic and D. R. Wood. Graph treewidth and geometric thickness parameters. *Discrete & Computational Geometry*, 37(4):641–670, 2007.
- [EHL⁺13] D. Eppstein, D. Holten, M. Löffler, M. Nöllenburg, B. Speckmann, and K. Verbeek. Strict confluent drawing. In S. Wismath and A. Wolff, editors, *Graph Drawing*, volume 8242 of LNCS, pages 352–363. Springer, 2013.
- [Epp13] D. Eppstein. Planar Lombardi drawings for subcubic graphs. In W. Didimo and M. Patrignani, editors, *Graph Drawing*, volume 7704 of LNCS, pages 126–137. Springer, 2013.
- [ERS70] P. Erdős, A. Rényi, and V. T. Sós. *Combinatorial theory and its applications*. János Bolyai Mathematical Society, 1970.
- [FK96] U. Fößmeier and M. Kaufmann. Drawing high degree graphs with low bend numbers. In F. J. Brandenburg, editor, *Graph Drawing*, volume 1027 of LNCS, pages 254–266. Springer, 1996.
- [FS92] H. Fleischner and M. Stiebitz. A solution to a colouring problem of P. Erdős. *Discrete Mathematics*, 101(1–3):39–48, 1992.
- [FW91] M. Formann and F. Wagner. The VLSI layout problem in various embedding models. In R. H. Möhring, editor, *WG*, volume 484 of LNCS, pages 130–139. Springer, 1991.
- [GB07] A. Grigoriev and H. L. Bodlaender. Algorithms for graphs embeddable with few crossings per edge. *Algorithmica*, 49(1):1–11, 2007.
- [GH01] J. L. Ganley and L. S. Heath. The pagenumber of k -trees is $O(k)$. *Discrete Applied Mathematics*, 109(3):215–221, 2001.
- [GJMP80] M. R. Garey, D. S. Johnson, G. L. Miller, and C. H. Papadimitriou. The complexity of coloring circular arcs and chords. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 1(2):216–227, 1980.
- [GLP12] D. Gonçalves, B. Lévéque, and A. Pinlou. Triangle contact representations and duality. *Discrete & Computational Geometry*, 48(1):239–254, 2012.
- [GT01] A. Garg and R. Tamassia. On the computational complexity of upward and rectilinear planarity testing. *SIAM Journal on Computing*, 31(2):601–625, 2001.

- [Hea84] L. S. Heath. Embedding planar graphs in seven pages. In SFCS, pages 74–83. IEEE, 1984.
- [Hea85] L. S. Heath. Algorithms for Embedding Graphs in Books. PhD thesis, The University of North Carolina, Chapel Hill, 1985.
- [HEH09] W. Huang, P. Eades, and S.-H. Hong. A graph reading behavior: Geodesic-path tendency. In P. Eades, T. Ertl, and H.-W. Shen, editors, PacificVis, pages 137–144. IEEE, 2009.
- [Hel07] G. Helden. Each maximal planar graph with exactly two separating triangles is Hamiltonian. *Discrete Applied Mathematics*, 155(14):1833–1836, 2007.
- [Hli96] P. Hliněný. Contact graphs of curves. In F. J. Brandenburg, editor, *Graph Drawing*, volume 1027 of LNCS, pages 312–323. Springer, 1996.
- [Hli98] P. Hliněný. Classes and recognition of curve contact graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 74(1):87–103, 1998.
- [HN09] S.-H. Hong and H. Nagamochi. Two-page book embedding and clustered graph planarity. Technical report, Number 2009-004, Department of Applied Mathematics & Physics, Kyoto University, 2009.
- [HS97] T. Hasunuma and Y. Shibata. Embedding de Bruijn, Kautz and shuffle-exchange networks in books. *Discrete Applied Mathematics*, 78(1–3):103–116, 1997.
- [HS99] C. Haslinger and P. F. Stadler. RNA structures with pseudo-knots: Graph-theoretical, combinatorial, and statistical properties. *Bulletin of Mathematical Biology*, 61(3):437–467, 1999.
- [HT73] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan. Dividing a graph into triconnected components. *SIAM Journal on Computing*, 2(3):135–158, 1973.
- [Hul09] J. D. Hulgan. Concise proofs for adjacent vertex-distinguishing total colorings. *Discrete Mathematics*, 309(8):2548–2550, 2009.
- [Hul10] J. D. Hulgan. Graph colorings with constraints. PhD thesis, The University of Memphis, 2010.
- [HWY12] D. Huang, W. Wang, and C. Yan. A note on the adjacent vertex distinguishing total chromatic number of graphs. *Discrete Mathematics*, 312(24):3544–3546, 2012.

- [Ist88] S. Istrail. An algorithm for embedding planar graphs in six pages. *Iasi University Annals, Mathematics-Computer Science*, 34(4):329–341, 1988.
- [Kan92] G. Kant. Drawing planar graphs using the lmc-ordering. In *FOCS*, pages 101–110. IEEE, 1992.
- [Kan93] G. Kant. Algorithms for Drawing Planar Graphs. PhD thesis, Department of Computer Science, University of Utrecht, Netherlands, 1993.
- [KM13] V. P. Korzhik and B. Mohar. Minimal obstructions for 1-immersions and hardness of 1-planarity testing. *Journal of Graph Theory*, 72(1):30–71, 2013.
- [KO07] P. C. Kainen and S. B. Overbay. Extension of a theorem of Whitney. *Applied Mathematics Letters*, 20(7):835–837, 2007.
- [Koe36] P. Koebe. Kontaktprobleme der konformen Abbildung. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 88:141–164, 1936.
- [KPP13] B. Keszegh, J. Pach, and D. Pálvölgyi. Drawing planar graphs of bounded degree with few slopes. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27(2):1171–1183, 2013.
- [KvL84] M. R. Kramer and J. van Leeuwen. The complexity of wire-routing and finding minimum area layouts for arbitrary VLSI circuits. *Advances in computing research*, 2:129–146, 1984.
- [Leh81] J. Lehel. Generating all 4-regular planar graphs from the graph of the octahedron. *Journal of Graph Theory*, 5(4):423–426, 1981.
- [Lei80] C. E. Leiserson. Area-efficient graph layouts (for VLSI). In *FOCS*, pages 270–281. IEEE, 1980.
- [Lei84] F. T. Leighton. New lower bound techniques for VLSI. *Mathematical systems theory*, 17(1):47–70, 1984.
- [LH03] M. Lombardi and R. C. Hobbs. Mark Lombardi: Global Networks. *Independent Curators*, 2003.
- [LN13] M. Löffler and M. Nöllenburg. Planar Lombardi drawings of outerpaths. In W. Didimo and M. Patrignani, editors, *Graph Drawing*, volume 7704 of LNCS, pages 561–562. Springer, 2013.

- [LWZW06] J. Li, W. Wang, Z. Zhang, and Z. Wang. Adjacent vertex-distinguishing total coloring on square, cube, biquadratic of pathes. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 29(1):7–13, 2006.
- [Mal94a] S. M. Malitz. Genus g graphs have pagenumber $O(\sqrt{g})$. *Journal of Algorithms*, 17(1):85–109, 1994.
- [Mal94b] S. M. Malitz. Graphs with E edges have pagenumber $O(\sqrt{E})$. *Journal of Algorithms*, 17(1):71–84, 1994.
- [Man79] P. Manca. Generating all planar graphs regular of degree four. *Journal of Graph Theory*, 3(4):357–364, 1979.
- [ML37] S. Mac Lane. A structural characterization of planar combinatorial graphs. *Duke Mathematical Journal*, 3(3):460–472, 1937.
- [Moh93] B. Mohar. A polynomial time circle packing algorithm. *Discrete Mathematics*, 117(1):257–263, 1993.
- [Moh99] B. Mohar. Drawing graphs in the hyperbolic plane. In J. Kratochvíl, editor, *Graph Drawing*, volume 1731 of LNCS, pages 127–136. Springer, 1999.
- [MP94] S. M. Malitz and A. Papakostas. On the angular resolution of planar graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7(2):172–183, 1994.
- [NdM12] J. Nešetřil and P. O. de Mendez. *Sparsity: Graphs, Structures, and Algorithms*, volume 28 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer, 2012.
- [Oll73] L. T. Ollmann. On the book thicknesses of various graphs. In SEICCGTC, volume 8 of *Congressus Numerantium*, page 459. Utilitas Mathematica Publishing Inc., 1973.
- [Ove07] S. B. Overbay. Graphs with small book thickness. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 19(2):121–130, 2007.
- [Pet91] J. Petersen. Die theorie der regulären graphen. *Acta Mathematica*, 15(1):193–220, 1891.
- [PR14] A. Papaioannou and C. N. Raftopoulou. On the AVDTTC of 4-regular graphs. *Discrete Mathematics*, 330:20–40, 2014.
- [Rot12] G. Rote. Realizing planar graphs as convex polytopes. In M. van Kreveld and B. Speckmann, editors, *Graph Drawing*, volume 7034 of LNCS, pages 238–241. Springer, 2012.

- [Sac93] H. Sachs. Elementary proof of the cycle-plus-triangles theorem. In D. Miklós, B. T. Sós, and T. Szönyi, editors, *Combinatorics, Paul Erdős is eighty*, volume 1, pages 347–359. János Bolyai Mathematical Society, 1993.
- [Sac94] H. Sachs. Coin graphs, polyhedra, and conformal mapping. *Discrete Mathematics*, 134(1):133–138, 1994.
- [San97] D. P. Sanders. On paths in planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 24(4):341–345, 1997.
- [Sch95] M. Schäffter. Drawing graphs on rectangular grids. *Discrete Applied Mathematics*, 63(1):75–89, 1995.
- [Sto84] J. A. Storer. On minimal-node-cost planar embeddings. *Networks*, 14(2):181–212, 1984.
- [Tam87] R. Tamassia. On embedding a graph in the grid with the minimum number of bends. *SIAM Journal on Computing*, 16(3):421–444, 1987.
- [Tho83] C. Thomassen. A theorem on paths in planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 7(2):169–176, 1983.
- [TM79] W. P. Thurston and J. W. Milnor. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University, Princeton, 1979.
- [TT87] R. Tamassia and I. G. Tollis. Efficient embedding of planar graphs in linear time. In *ISCAS*, pages 495–498. IEEE, 1987.
- [TT89] R. Tamassia and I. G. Tollis. Planar grid embedding in linear time. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 36(9):1230–1234, 1989.
- [TTV91] R. Tamassia, I. G. Tollis, and J. S. Vitter. Lower bounds for planar orthogonal drawings of graphs. *Information Processing Letters*, 39(1):35–40, 1991.
- [Tut56] W. T. Tutte. A theorem on planar graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 82(1):99–116, 1956.
- [Ung88] W. Unger. On the k -colouring of circle-graphs. In R. Cori and M. Wirsing, editors, *STACS*, volume 294 of LNCS, pages 61–72. Springer, 1988.
- [Ung92] W. Unger. The complexity of colouring circle graphs (extended abstract). In A. Finkel and M. Jantzen, editors, *STACS*, volume 577 of LNCS, pages 389–400. Springer, 1992.

- [Val81] L. G. Valiant. Universality considerations in VLSI circuits. *IEEE Transactions on Computers*, 30(2):135–140, 1981.
- [Wan07] H. Wang. On the adjacent vertex-distinguishing total chromatic numbers of the graphs with $\Delta(G) = 3$. *Journal of Combinatorial Optimization*, 14(1):87–109, 2007.
- [Wes01] D. B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2001.
- [WH14] W. Wang and D. Huang. The adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 27(2):379–396, 2014.
- [Whi31] H. Whitney. A theorem on graphs. *Annals of Mathematics*, 32(2):378–390, 1931.
- [Wig82] A. Wigderson. The complexity of the hamiltonian circuit problem for maximal planar graphs. Technical report, Number 298, Department of EECS, Princeton University, USA, 1982.
- [WW08] W. Wang and Y. Wang. Adjacent vertex distinguishing total coloring of graphs with lower average degree. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 12(4):967–979, 2008.
- [WW10] Y. Wang and W. Wang. Adjacent vertex distinguishing total colorings of outerplanar graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 19(2):123–133, 2010.
- [Yan89] M. Yannakakis. Embedding planar graphs in four pages. *Journal of Computer and System Sciences*, 38(1):36–67, 1989.
- [ZCL⁺05] Z. Zhang, X. Chen, J. Li, B. Yao, X. Lu, and J. Wang. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs. *Science in China Series A: Mathematics*, 48(3):289–299, 2005.
- [ZLW02] Z. Zhang, L. Liu, and J. Wang. Adjacent strong edge coloring of graphs. *Applied Mathematics Letters*, 15(5):623–626, 2002.