Ιδιοτιμές και Διακλαδώσεις για την p-Laplacian με αόριστο βάρος στον $\mathbb{R}^N$

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΡΩΞΑΝΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΣΤΑΥΡΑΚΑΚΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΑΘΗΝΑ, ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2011

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο στόχος αυτής της εργασίας είναι η μελέτη Ημιγραμμικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ) που περιγράφονται από την p-Laplacian στο κύριο μέρος, και μια συνάρτηση που δεν διατηρεί πρόσημο, σε μη φραγμένα χωρία (και συγκεκριμένα σε όλο τον $\mathbb{R}^N$). Η p-Laplacian εμφανίζεται σε προβλήματα Θεωρητικών Μαθηματικών όπως ημικανονικές ή ημισύμμορφες απεικονίσεις (βλ.[26] και αναφορές) καθώς και σε προβλήματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών όπως προβλήματα μελέτης μη Νευτώνειων υγρών, εξισώσεις αντίδρασης - διάχυσης, ροή διαμέσου πορώδων υλικών, μη γραμμική ελαστικότητα, γλασεολογία, κ.ά.
(Για $p = 2$ η 2-Laplacian είναι ο συνηθισμένος τελεστής του Laplace).
Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα

$$-div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u$$

σαν πρόβλημα ιδιοτιμών.Χρησιμοποιώντας μια γενίκευση (Θεωρία Ljusternik-Schnirelman) της Θεωρίας Ιδιοτιμών για τετραγωνικές μορφές του R.Courant, θα δείξουμε, στο Κεφάλαιο 2, ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία θετικών ιδιοτιμών, που δίνονται σαν κρίσιμα σημεία ενός κατάλληλου συναρτησιακού σε έναν ομοιόμορφα κυρτό χώρο Banach με βάρος. Στη συνέχεια, διερευνούμε ιδιότητες της πρώτης ιδιοτιμής και της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης.Στο Κεφάλαιο 3, βασιζόμενοι στα αποτελέσματα αυτά, μελετάμε το πρόβλημα διακλάδωσης που συμβαίνει στην πρώτη ιδιοτιμή για το " μη ομογενές " πρόβλημα. Το πρόβλημα ιδιοτιμών για την p-Laplacian σε *φραγμένα* χωρία έχει μελετηθεί εκτεταμμένα. Αναφέρουμε για παράδειγμα τις εργασίες των [6], [8] , [36] και [51] και τις αναφορές τους. Για προβλήματα ιδιοτιμών με αόριστο βάρος σε *φραγμένα* χωρία αναφέρουμε τις εργασίες [41], [28].Χρήσιμα αποτελέσματα και για την περίπτωση $p = 2$ μπορούν να αναζητηθούν στα [2] , [12].Για το πρόβλημα ιδιοτιμών σε *μη φραγμένα* χωρία αναφέρουμε στα [20],[29], [3],[26]. Το πρόβλημα γίνεται ενδιαφέρον γιατί σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν μη συμπαγείς τελεστές αλλά

και επειδή δεν ισχύουν τα κλασικά θεωρήματα εμφυτεύσεων που έχουμε σε κλασικούς χώρους Sobolev σε φραγμένα, αρκούντως λεία χωρία. Για το λόγο αυτό, όπως θα δούμε, καταφεύγουμε σε χώρους με βάρη οι οποίοι λύνουν πολλά από τα προβλήματα που προκύπτουν λόγω του μη φραγμένου χωρίου.
Μια σημαντική συνιστώσα στη μελέτη αυτών των προβλημάτων είναι σε ποιο χώρο γίνεται η μελέτη,καθώς αυτοί δεν είναι γνωστοί εκ των προτέρων. Έχουν δειχθεί αποτελέσματα στους κλασικούς χώρους Sobolev $W^{1,p}$, πχ [29] καθώς και σε χώρους Sobolev με βάρη, πχ [24]. Οι τελευταίοι θα είναι και το δικό μας συναρτησιακό πλαίσιο.Τους ορίζουμε σαν το κλείσιμο του $C_0^\infty(R^N)$ ως προς κατάλληλα επιλεγμένη νόρμα.
Για το πρόβλημα διακλάδωσης σε *φραγμένα* χωρία αναφέρουμε στα [9],[18],[19],[21]. Για *μη φραγμένα* χωρία αναφέρουμε στα [30],[31],[34],[35],[46],[55].Στις περισσότερες από τις τελευταίες αναφορές γίνεται χρήση μεταβολικών μεθόδων οι οποίες όμως δουλεύουν μόνο -εκ των πραγμάτων- $g(x) < 0, \lambda > 0$ και οι μέθοδοί τους αποτυγχάνουν αν η συνάρτηση $g(x)$ αλλάζει πρόσημο.

Σ' αυτήν την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε θεωρία τοπολογικού βαθμού και θα δείξουμε ότι -κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις ολοκληρωσιμότητας για τη συνάρτηση g - υπάρχουν *δύο* σημεία διακλάδωσης.Επιπλέον, θα μελετήσουμε την ομαλότητα και την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων και θα δώσουμε πληροφορίες για το πρόσημο των λύσεων στους κλάδους διακλάδωσης.
Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου αναφέρουμε κάποια απαραίτητα θεωρήματα και ορισμούς τα οποία θα χρησιμεύσουν στα προβλήματα που θα αντιμετωπίσουμε.

Θέλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή της ΣΕΜΦΕ Νικόλαο Σταυρακάκη για την καθοδήγησή του και τις χρήσιμες βιβλιογραφικές υποδείξεις του και γενικότερα για την πολύ καλή συνεργασία στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας.
Επίσης, να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον Καθηγητή Β. Παπανικολάου και τον Επίκουρο Καθηγητή Ν. Γιαννακάκη που δέχτηκαν να αποτελέσουν κριτές αυτής της εργασίας.
Αισθάνομαι επίσης την ανάγκη να ευχαριστήσω τους καθηγητές της ΣΕΜΦΕ, Ν. Γιαννακάκη, Σ.Καρανάσιο, Δ. Κραββαρίτη, Ν. Σταυρακάκη και Ι.Τσινιά για τη γενικότερη καθοδήγηση και συμπαράστασή τους τα τελευταία δύο χρόνια, την εμπιστοσύνη που έδειξαν στο πρόσωπό μου και τις γνώσεις που μου μετέδωσαν μέσα από τα μαθήματά τους, που αποτέλεσαν τον κύριο παράγοντα στον

καθορισμό των ερευνητικών μου ενδιαφέροντων και έβαλαν τις βάσεις για τις περαιτέρω σπουδές μου.

1.1 Χώροι Sobolev με βάρη

1.1.1 Κλασικοί χώροι Sobolev

Σε ό,τι ακολουθεί παρακάτω, θα θεωρήσουμε γνωστή τη θεωρία των κλασικών χώρων Sobolev (βλ. [1]).
Για λόγους γρήγορης αναφοράς θα δώσουμε μόνο κάποιους συμβολισμούς και ένα χρήσιμο αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιούμε επανειλημένως στη συνέχεια. Στα επόμενα με $p' = \frac{N}{N-p}$ θα συμβολίζουμε το συζυγή εκθέτη Sobolev ενώ με $p^* = \frac{Np}{N-p}$ τον κρίσιμο εκθέτη Sobolev.

Η ακόλουθη ανισότητα Sobolev θα χρησιμοποιείται συνέχεια στο υπόλοιπο κείμενο:

Ανισότητα Sobolev

$$(\int_{\mathbb{R}^N} \mid u(x) \mid^{p^*} dx)^{\frac{1}{p^*}} \leq c(\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla u(x) \mid^{p} dx)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

1.1.2 Χώροι Sobolev με βάρη

Οι χώροι αυτοί δεν είναι παρά μια μικρή τροποποίηση των κλασικών χώρων Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ αλλά οι ιδιότητές τους (κυρίως οι εμφυτεύσεις) είναι αρκετά πιο πολύπλοκες και λιγότερο εμφανείς. Στην υποενότητα αυτή θα αρκεστούμε στους βασικούς ορισμούς, και ό,τι άλλο χρειαζόμαστε στη συνέχεια θα το αναφέρουμε κατά περίπτωση. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [24] και [13].
Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $1 \leq p < \infty$. Έστω επίσης, w μια δεδομένη οικογένεια από *συναρτήσεις βάρους* $w_\alpha, \mid \alpha \mid\leq k$:

$$w = \{w_\alpha(x), x \in \Omega, \mid \alpha \mid\leq k\}.$$

Με

$$W^{k,p}(\Omega, w)$$

ορίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων $u \in L^p(\Omega, w_\theta)$ (θ είναι ο μηδενικός πολυδείκτης $\theta = (0, 0, ..., 0)$) για τις οποίες οι ασθενείς παράγωγοι $D^\alpha u, \mid \alpha \mid\leq k$ ανήκουν στον $L^p(\Omega, w_\alpha)$.

Οι χώροι Sobolev με βάρος $W^{k,p}(\Omega, w)$ είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα αν εφοδιαστούν με τη νόρμα

$$\| u \|_{k,p,w} = (\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^{\alpha} u \|_{p,w_{\alpha}}^{p})^{\frac{1}{p}}.$$

Ισχύει το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα

Θεώρημα 1.1.1 *Έστω $1 < p < \infty$ και ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις - βάρη w_{α} ικανοποιούν*

$$w_{\alpha}^{-\frac{1}{p-1}} \in L^{1}_{loc}(\Omega), | \alpha | \leq k.$$

Τότε, ο $W^{k,p}(\Omega, w)$ είναι ομοιόμορφα κυρτός (και άρα ανακλαστικός) χώρος Banach.
Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι

$$w_{\alpha} \in L^{1}_{loc}(\Omega), | \alpha | \leq k,$$

τότε ο $C_{0}^{\infty}(\Omega)$ είναι υποσύνολο του $W^{k,p}(\Omega, w)$ και μπορούμε να ορίσουμε το χώρο

$$W_{0}^{k,p}(\Omega, w)$$

ως το κλείσιμο του $C_{0}^{\infty}(\Omega)$ ως προς τη νόρμα $\| \cdot \|_{k,p,w}$.

1.2 Θεωρία Τοπολογικού Βαθμού για Μονότονους Τελεστές

Σ' αυτή την ενότητα θα δώσουμε κάποια χρήσιμα αποτελέσματα από τη θεωρία τοπολογικού βαθμού (topological degree theory) για γενικευμένους μονότονους τελεστές. Θα τα χρειαστούμε όταν θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της διακλάδωσης.
Η εισαγωγή της έννοιας του τοπολογικού βαθμού έγινε σαν προσπάθεια να γενικευτεί ο αριθμός περιστροφών μιας καμπύλης γύρω από σημείο, από τη Μιγαδική Ανάλυση. Συνδέεται στενά με τη Θεωρία Σταθερού Σημείου και μπορεί να αξιοποιηθεί για την εκτίμηση του πλήθους των λύσεων μιας εξίσωσης. Αν μπορούμε να βρούμε μια τετριμμένη λύση της εξίσωσης, με τη χρήση του Τοπολογικού Βαθμού ενδέχεται να μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει και δεύτερη, μη τετριμμένη λύση. Ανάλογα με το είδος των απεικονίσεων, ορίζονται και διαφορετικοί βαθμοί, πχ για απεικονίσεις μεταξύ χώρων Banach ορίζεται ο βαθμός του Brouwer στον $\mathbb{R}^N$, για συμπαγείς απεικονίσεις σε χώρους με νόρμα ο Leray-Schauder βαθμός, ο coincidence βαθμός, κ.ά. Έχει επίσης οριστεί βαθμός για συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Ορισμός 1.2.1 *Έστω X ένας ανακλαστικός χώρος Banach και X^* ο δυικός του. Ο τελεστής $T : X \to X^*$ λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη $a(X)$ (ή S_+) αν οι υποθέσεις $u_n \overset{w}{\to} u_0$ στο X και*

$$\lim_{n\to\infty} \sup < Tu_n, u_n - u_0 > \leq 0,$$

συνεπάγονται ότι $u_n \to u_0$ στο X.

Τότε (βλ. [24],[11],[48])έχουμε ότι η έννοια του τοπολογικού βαθμού μπορεί να οριστεί για μια κλάση απεικονίσεων από τον X στο X^*.
Συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.1 *Έστω $T : X \to X^*$ φραγμένος και ημισυνεχής[1] τελεστής που ικανοποιεί τη συνθήκη $a(X)$. Έστω $D \subset X$ ένα ανοιχτό,φραγμένο και μη κενό σύνολο με σύνορο ∂D τέτοιο ώστε $Tu \neq 0$, για $u \in \partial D$.
Τότε,υπάρχει ακέραιος $Deg[T; D, 0]$ (που ονομάζεται βαθμός της απεικόνισης T ως προς το σύνολο D και το 0), τέτοιος ώστε:*

---

[1] αν $u_n \to u$, τότε $Tu_n \overset{w}{\to} Tu$

1. *$Deg[T; D, 0] \neq 0$, συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα στοιχείο $u_0 \in D$ τέτοιο ώστε*
$$Tu_0 = 0$$

2. *Αν το σύνολο D είναι συμμετρικό ως προς το 0 και T είναι μια περιττή απεικόνιση τότε $Deg[T; D, 0]$ είναι περιττός*

3. *(Αναλλοίωτο με αναφορά στην Ομοτοπία)*
Έστω T_λ οικογένεια απεικονίσεων που εξαρτώνται συνεχώς από μια πραγματική παράμετρο $\lambda \in [0,1]$ και $T_\lambda u \neq 0$, για κάθε $u \in \partial D$ και $\lambda \in [0,1]$ (Η απεικόνιση $(\lambda, u) \mapsto T_\lambda u$ από $R \times X$ στον X^* καλείται μια προσδεκτή ομοτοπία (admissible homotopy) ως προς το σύνολο D και το 0).
Τότε το $Deg[T_\lambda; D, 0]$ είναι σταθερό ως προς το $\lambda \in [0,1]$ και έχουμε
$$Deg[T_0; D, 0] = Deg[T_1; D, 0]$$

Δε θα δώσουμε την απόδειξη εδώ (βλ.[7]) για την απόδειξη και την κατασκευή του τοπολογικού βαθμού).Να σημειώσουμε μόνο ότι η ιδέα είναι μια κατάλληλη προσέγγιση του T από τελεστές πεπερασμένης τάξης.

Σημείωση: Παρατηρούμε τις ομοιότητες με το $Leray - Schauder$ βαθμό.

Το επόμενο Λήμμα είναι άμεση συνέπεια του Ορισμού 1.2.1 και των ιδιοτήτων των συμπαγών τελεστών (που απεικονίζουν ασθενώς συγκλίνουσες ακολουθίες του X σε ισχυρώς συγκλίνουσες στο X^*).

Λήμμα 1.2.1 *Έστω ότι ο $T : X \to X^*$ τελεστής που ικανοποιεί τη συνθήκη $a(X)$ και ότι $K : X \to X^*$ ένας συμπαγής τελεστής.*
Τότε το άθροισμα $T + K : X \to X^*$ ικανοποιεί τη συνθήκη $a(X)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα μαζί με το (1) του προηγούμενου Θεωρήματος συνιστούν ένα ισχυρό αποδεικτικό εργαλείο για αποτελέσματα ύπαρξης λύσης.

Θεώρημα 1.2.2 *Έστω $T : X \to X^*$ ένας φραγμένος,ημισυνεχής τελεστής που ικανοποιεί τη συνθήκη $a(X)$,*
$0 \in \bar{D} \setminus \partial D, Tu \neq 0$ για $u \in \partial D$ (με D όπως στο προηγούμενο Θεώρημα) και έστω ότι για $u \in \partial D$ ισχύει $< Tu, u > \geq 0$.
Τότε,
$$Deg[T; D, 0] = 1$$

Ορισμός 1.2.2 *Έστω* $u_0 \in X$ *και* $T : X \to X^*$.
Αν $Tu_0 = 0$, *το* u_0 *καλείται κρίσιμο σημείο της απεικόνισης* T.*Ένα σημείο* u_0 *καλείται απομονωμένο κρίσιμο σημείο της* T *αν υπάρχει μπάλα* $B_r(u_0) = \{u \in X; \| u - u_0 \| < r\}$ *που δεν περιέχει άλλο κρίσιμο σημείο της* T *εκτός από το* u_0.
Αν $F : X \to R$ *ένα συναρτησιακό με Fréchet παράγωγο* $F' = T$, *τότε το (απομονωμένο) κρίσιμο σημείο* u_0 *της* T *καλείται (απομονωμένο) κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού* F.

Ορισμός 1.2.3 *Ο αριθμός*

$$\lim_{r \to 0} Deg[T; B_r(u_0), 0]$$

θα καλείται ο δείκτης του απομονωμένου κρίσιμου σημείου u_0 *της απεικόνισης* T *και θα συμβολίζεται με* $Ind(T, u_o)$.

Θεώρημα 1.2.3 *(Αθροιστική Ιδιότητα του τοπολογικού βαθμού)*
Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $T : X \to X^*$ *είναι φραγμένος,ημισυνεχής και ικανοποιεί τη συνθήκη* $a(X)$.
Έστω επίσης ότι ο τελεστής T *έχει μόνο απομονωμένα κρίσιμα σημεία στο* D *(το* D *όπως παραπάνω) και* $Tu \neq 0$ *για* $u \in \partial D$. *Τότε,υπάρχει πεπερασμένο μόνο πλήθος κρίσιμων σημείων* u_i *στο* $D, i = 1, ..., n$, *και ισχύει επίσης*

$$Deg[T; D, 0] = \sum_{i=1}^{n} Ind(T, u_i)$$

Θεώρημα 1.2.4 *Υποθέτουμε ότι το συναρτησιακό* $F : X \to R$ *έχει τοπικό ελάχιστο στο* $u_o \in X$ *και η Fréchet παράγωγος* $F' : X \to X^*$ *είναι φραγμένη,ημισυνεχής και ικανοποιεί τη συνθήκη* $a(X)$ *και έστω επιπλέον* u_0 *ένα απομονωμένο κρίσιμο σημείο της* F'.
Τότε,

$$Ind(F', u_0) = 1$$

1.3 Χρήσιμα τεχνικά αποτελέσματα

Σ' αυτή την ενότητα θα δώσουμε κάποια χρήσιμα αποτελέσματα στα οποία θα χρειαστεί να ανατρέξουμε στα επόμενα κεφάλαια. Για λόγους απλότητας, αυτό θα το κάνουμε για απλούστερες εξισώσεις που καλύπτουν όμως τις περιπτώσεις που μελετάμε. Να τονίσουμε εδώ ότι τα αποτελέσματα αυτά είναι αρκετά τεχνικά και οι αποδείξεις καθώς και η ακριβής σημασία των σταθερών που εμφανίζονται θα πρέπει να αναζητηθούν στην αρχική βιβλιογραφία.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = h(x,u) \tag{1.2}$$

σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (και πιθανά $\Omega = \mathbb{R}^N$), $p > 1$ και για τη συνάρτηση h ισχύουν :
$\triangleright$ $h \in CAR$ και για κάθε $M > 0$, υπάρχει μια σταθερά $c_M > 0$ τέτοια ώστε

$$|h(x,s)| \leq c_M |s|^{p-1}$$

για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$ και για όλα τα $s \in (-M,M)$.

Η συνάρτηση $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ θα καλείται ασθενής λύση της (1.2) στο Ω αν

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega h(x,u) v dx, \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Με $K = K(\rho)$ θα ορίζουμε τον κύβο με μήκος ακμής $\rho > 0$. Το επόμενο αποτέλεσμα έπεται από το πιο γενικό Θεώρημα 1.1 στην εργασία [54] του N.S.Trudinger.

Θεώρημα 1.3.1 *Έστω $u = u(x)$ μια ασθενής λύση της (1.2) στον κύβο $K = K(3\rho) \subset \Omega$ με $0 \leq u < M$ στον K. Τότε η ακόλουθη ανισότητα τύπου Harnack ισχύει :*

$$\max_{x\in K(3\rho)} u(x) \leq C \min_{x \in K(\rho)} u(x),$$

όπου $C = C(p,N,h,\rho,c_M)$ και τα κέντρα των $K(\rho)$ και $K(3\rho)$ συμπίπτουν.

Παρατήρηση 1.3.1 *Αν η ασθενής λύση $u \not\equiv 0$ της (1.2) ικανοποιεί κάποιο apriori L^∞ φράγμα, και $u \geq 0, \Omega$, τότε από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι η u είναι αυστηρά θετική στο Ω.*

Το επόμενο θεώρημα είναι συνέπεια του γενικότερου Θεωρήματος 1 στην εργασία [47] του J.Serrin.

Θεώρημα 1.3.2 *Με τις ίδιες με το προηγούμενο Θεώρημα υποθέσεις και για $1 < p < N$, έστω ότι η ασθενής λύση του (1.2) είναι φραγμένη στον $L^\infty(\Omega)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η $h(x,u) \in L^{\gamma_1}(\Omega)$, για κάποιο $\gamma_1 > \frac{N}{p}$. Τότε, για κάθε $x \in \Omega$ έχουμε ότι*

$$\| u \|_{L^\infty(B_1(x))} \leq (\| u \|_{L^{p^*}(B_2(x))} + \| h(x,u) \|_{L^{\gamma_1}(B_2(x))}),$$

όπου $c = c(p, N, \gamma_1) > 0$ και $B_1(x) \subset B_2(x) \subset \Omega$.

Παρατήρηση 1.3.2 *Αν ισχύουν*

$$\lim_{|x|\to\infty} \| u \|_{L^{p^*}(B_2(x))} = 0, \lim_{|x|\to\infty} \| h(x,u) \|_{L^{\gamma_1}} (B_2(x)) = 0$$

Τότε από το Θεώρημα συνεπάγεται η απόσβεση της $u = u(x)$ καθώς $| x | \to \infty$.

Ακόμα, από το Θεώρημα 1 από την εργασία [53] έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα ομαλότητας

Θεώρημα 1.3.3 *Με τις προηγούμενες πάντα υποθέσεις και με την επιπλέον ότι η ασθενής λύση του (1.2) ικανοποιεί $u \in L^\infty$ ισχύει ότι η u ανήκει τοπικά στον $C^{1,\alpha}(\Omega)$ με $\alpha \in (0,1)$.*
Πιο συγκεκριμένα, για δοσμένα $x_0 \in \Omega$ και $B_{3r}(x_0) \subset \Omega$, υπάρχει $\alpha \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B_r(x_0)})$.

Το επόμενο γενικό Θεώρημα οφείλεται στον J.L.Lions [38] και είναι ένα αποτέλεσμα παρεμβολής.

Θεώρημα 1.3.4 *Έστω X, Y, Z χώροι Banach που ικανοποιούν τις εμφυτεύσεις*

$$Q \hookrightarrow\hookrightarrow Y \hookrightarrow Z.$$

Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει μια θετική σταθερά $c(\epsilon)$ τέτοια ώστε για κάθε $u \in X$,

$$\| u \|_Y \leq \epsilon \| u \|_X + c(\epsilon) \| u \|_Z .$$

Για να αποδείξουμε αργότερα ότι η κυρίαρχη ιδιοτιμή του προβλήματος $-\Delta_p u = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u$ είναι *απλή* θα χρησιμοποιήσουμε μια γενίκευση της ακόλουθης ταυτότητας του Picone :

$$\mid \nabla u \mid^2 + \frac{u^2}{v^2} \mid \nabla v \mid^2 - \frac{u}{v} \nabla u \nabla v = \mid \nabla u \mid^2 - \nabla (\frac{u^2}{v}) \nabla v \geq 0.$$

Η συγκεκριμένη ταυτότητα έχει αποδειχθεί πολύ χρήσιμη στην ποιοτική μελέτη ελλειπτικών εξισώσεων δεύτερης τάξης καθώς, εκτός του ότι δίνει τη δυνατότητα για ελάχιστα τεχνικές αποδείξεις, για την εφαρμογή της δε χρειάζεται να κάνουμε υποθέσεις ομαλότητας για τη συνάρτηση στο σύνορο του υπό μελέτη προβλήματος. Έτσι, η αντιμετώπιση για φραγμένα και μη φραγμένα χωρία είναι η ίδια. Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη γενίκευσή της για την p-Laplacian :

Θεώρημα 1.3.5 *(Γενικευμένη ταυτότητα Picone)*
Έστω $v > 0, u \geq 0$ διαφορίσιμες συναρτήσεις στο Ω (φραγμένο ή μη χωρίο του $\mathbb{R}^N$). Ορίζουμε τα παρακάτω

$$L(u,v) = \mid \nabla u \mid^p + (p-1) \frac{u^p}{v^p} \mid \nabla v \mid^p - p \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} \nabla u \mid \nabla v \mid^{p-2} \nabla v,$$

$$R(u,v) = \mid \nabla u \mid^p - v (\frac{u^p}{v^{p-1}}) \mid \nabla v \mid^{p-2} \nabla v.$$

Τότε, $L(u,v) = R(u,v) \geq 0$. Επιπλέον $L(u,v) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in \Omega$, αν και μόνο αν, $\nabla(\frac{u}{v}) = 0$ σχεδόν παντού στο Ω, δηλαδή όταν $u = kv$ για κάποια σταθερά k σε κάθε συνιστώσα του Ω (καθώς το χωρίο είναι αυθαίρετο, είναι πιθανό να μην είναι συνεκτικό)

Η απόδειξη μπορεί να αναζητηθεί στο [4].

Τέλος, για διευκόλυνση του αναγνώστη, να θυμίσουμε το γνωστό Θεώρημα *Egorov* από τη Θεωρία Ολοκλήρωσης (πχ βλ. [10])

Θεώρημα 1.3.6 *(Egorov)*
Υποθέτουμε ότι $\mu(\Omega) < \infty$. Έστω (f_n) μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων από το Ω στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο Ω (με $\|f_n(x)\| < \infty, \mid f(x) \mid < \infty$ σχεδόν παντού)
Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$,
υπάρχει ένα $A \subset \Omega$ μετρήσιμο, τέτοιο ώστε $\mu(\Omega \setminus A) < \epsilon$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A.

Κεφάλαιο 2

Πρόβλημα Ιδιοτιμών

2.1 Εισαγωγή

Σ′ αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$-div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u, x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.1}$$

Κύριος στόχος μας εδώ είναι να δείξουμε ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία ιδιοτιμών και ο χαρακτηρισμός της πρώτης ιδιοτιμής και της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης. Στην ενότητα (2.2), θα δώσουμε το κίνητρο που οδήγησε στη μέθοδο που θα ακολουθήσουμε εξετάζοντας το μεταβολικό χαρακτήρισμό ιδιοτιμών για τετραγωνικές μορφές. Στη συνέχεια, στην ενότητα (2.3), θα δώσουμε το γενικό πλαίσιο της μεταβολικής μας μεθόδου, όπως δίνεται από τη Θεωρία Ljusternik-Schnirelman. Στην ενότητα (2.4), θα εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο για το πρόβλημα μας και θα δείξουμε ότι όντως υπάρχει άπειρη ακολουθία ιδιοτιμών. Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου, θα αποδείξουμε κάποιες ιδιότητες της πρώτης ιδιοτιμής και της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης.

Να σημειώσουμε, ότι σε αυτή την εφαρμογή -όπως και σε πολλά άλλα προβλήματα της Μη Γραμμικής Ανάλυσης - η έννοια της κλασσικής λύσης δεν είναι κατάλληλη για την εφαρμογή πολλών μεθόδων. Για παράδειγμα, κάποια μειονεκτήματα είναι ότι

▷ οι χώροι των $H\ddot{o}lder$-συνεχών συναρτήσεων δεν είναι *ανακλαστικοί.* Όμως τότε δεν είμαστε σε θέση να δουλέψουμε με μεταβολικές μεθόδους, οι οποίες εξαρτώνται ισχυρά από την επιλογή ασθενώς συγκλινουσών ακολουθιών από φραγμένες (κάτι που συνήθως μας το εξασφαλίζει η ανακλαστικότητα)

▷ για να δείξουμε ότι ο τελεστής Nemytskii μεταξύ $H\ddot{o}lder$ χώρων ικανοποιεί κάποιες καλές ιδιότητες (πχ είναι συνεχής) θα απαιτούσε απαιτεί ιδιαίτερα αυστηρές συνθήκες για τη μη γραμμικότητα.

Έτσι, στο υπόλοιπο αυτής της εργασίας θα ορίσουμε κατάλληλα και θα εργαστούμε μόνο με *ασθενείς* λύσεις για το παραπάνω πρόβλημα.

2.2 Κίνητρο-Μεταβολικός Χαρακτηρισμός Ιδιοτιμών

Για να δώσουμε ένα κίνητρο για το τι θα κάνουμε στη συνέχεια, σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τη θεωρία ιδιοτιμών για τετραγωνικές μορφές, που αναπτύχθηκε από τον R.Courant.

Θα ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας το μεταβολικό (ή min-max) χαρακτηρισμό των ιδιοτιμών ενός συμπαγούς,αυτοσυζυγή τελεστή. Υποθέτουμε ότι ο H είναι είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.
Έστω $A \in \mathcal{L}_c(H)$ ένας αυτοσυζυγής τελεστής (δηλαδή ο A είναι γραμμικός, συζυγής και αυτοσυζυγής) και έστω $F(x) = (Ax, x), F : X \to R$ συναρτησιακό. Από το *Φασματικό Θεώρημα* γνωρίζουμε ότι το φάσμα του A αποτελείται από το πολύ αριθμήσιμο το πλήθος πραγματικές ιδιοτιμές $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ με μοναδικό οριακό σημείο το $\lambda = 0$. Επιπλέον η πολλαπλότητα των λ_k είναι ίση με

$$dim(A - \lambda_k id_H) < +\infty$$

και

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k)_H x_k, \tag{2.2}$$

όπου $\{x_k\}_{k\geq 1}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων και η λ_k επαναλαμβάνεται $dim(A - \lambda_k id_H)$ - φορές.

Οι ιδιοτιμές του A μπορούν να χαρακτηριστούν από min-max αρχές. Συγκεκριμένα, αν οι θετικές ιδιοτιμές λ_k^+ ταξινομηθούν σε φθίνουσα σειρά (με τις πολλαπλότητες να επαναλαμβάνονται), τότε

$$\lambda_k^+ = \sup_{S_m \in \mathcal{L}_c} \min_{x \in S_m} (Ax, x)_H. \tag{2.3}$$

Εδώ η S_m δηλώνει το σύνορο μια αυθαίρετης m-διάστατης μοναδιαίας μπάλας στον H,δηλαδή

$S_m := S \cap H_m, \quad S := \partial B_1(0) = x \in H :\| x \|_H = 1$ όπου H_m ένας αυθαίρετος m-διάστατος υπόχωρος του H και $\mathcal{L}_c$ είναι το σύνολο όλων των S_m με $m \geq k$.

Φυσικά, μπορούμε να δείξουμε τέτοιου είδους αποτελέσματα με ασθενέστερες υποθέσεις για τον A (όσο έχουμε την (2.2)), πχ [17], αλλά αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ότι παίρνουμε τις ιδιοτιμές κοιτώντας τα ακρότατα του συναρτησιακού F πάνω σε μια οικογένεια συνόλων του

$$M = \{x \in H : \Psi(x) = 0\},$$

όπου $\Psi(x) = |x|^2 - 1$. Οπότε, το πρόβλημα ιδιοτιμών για τον A είναι ουσιαστικά το πρόβλημα εύρεσης τέτοιων $\lambda \in R$ και $x \in M$ ώστε $F'(x) = \Psi'(x)$ ή, με άλλα λόγια, η εύρεση των ριζών (στο M) της παράστασης

$$F'(x) - \frac{(x, F'(x))}{(x, \Psi'(x))}\Psi'(x).$$

Ο στόχος μας είναι να βρούμε κρίσιμα σημεία για πιο γενικά συναρτησιακά F σε πιο γενικά σύνολα M, μελετώντας αριθμούς της μορφής

$$m_{\mathcal{F}} = \inf_{\mathcal{F}} \sup_{S} F(x)$$

όπου $\mathcal{F}$ είναι μια κατάλληλη οικογένεια υποσυνόλων του M και $x \in M$ τα κρίσιμα σημεία στα οποία αυτά οι αριθμοί επιτυγχάνονται.
Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνονται αποτελέσματα, πχ για ύπαρξη και πολλαπλότητα λύσεων, για μη γραμμικά προβλήματα ιδιοτιμών $F'(x) = \Psi'(x)$ με συναρτησιακά F, Ψ πιο γενικά από τα απλά τετραγωνικά που είδαμε νωρίτερα.

2.3 Θεωρία Ljusternik-Schnirelman

Σ' αυτή την ενότητα θα δώσουμε το βασικό αποτέλεσμα της Θεωρίας Ljusternik-Schnirelman και μόνο τους απαραίτητους ορισμούς για να το κατανοήσουμε. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [42],[43],[50],[17].

Στις αρχές της δεκαετίας του '30 οι Ljusternik and Schnirelman ανέπτυξαν μια θεωρία κρίσιμων σημείων για διαφορίσιμες συναρτήσεις πάνω σε πεπερασμένης - διάστασης πολλαπλότητες Riemann. Το βασικό εργαλείο για εντοπισμό σαγματικών σημείων είναι deformations της πολλαπλότητας κατά μήκος gradient γραμμών, δηλαδή ολοκληρωτικών γραμμών για ένα pseudogradient διανυσματικό πεδίο (όπως και στη θεωρία Morse).
Γενικεύσεις σε απειροδιάστατες πολλαπλότητες: O Schwartz γενικεύει τη θεωρία για απειροδιάστατες πολλαπλότητες Riemmanian πάνω σε χώρους Hilbert και αργότερα ο Palais για Finsler πολλαπλότητες σε γενικούς Banach χώρους. Στην εφαρμογή της γενικής απειροδιάστατης θεωρίας, δύο τεχνικές δυσκολίες παρουσιάζονται:

- τι υποθέσεις πρέπει να επιβάλλουμε στους τελεστές που εμπλέκονται ώστε να ισχύει η συνθήκη Palais-Smale και
- τι υποθέσεις ομαλότητας πρέπει να επιβάλουμε στη νόρμα του χώρου Banach (θέλουμε τοπικά Lipschitz παραγώγο για μοναδικότητα του pseudogradient)

Για να αντιμετωπίσει τέτοιου είδους δυσκολές ο Browder προτείνει μια μέθοδο προσέγγισης Galerking (δε χρησιμοποιεί καθόλου θεωρία απειροδιάστατων πολλαπλοτήτων) αλλά αναγκάζεται να περιοριστεί σε potential τελεστές για τους οποίους ισχύει μια συνθήκη του στυλ $\| < G(u), u > \| > 0, u \neq 0$

O Amann (1972) κάνει τις εξής βασικές παρατηρήσεις:

- οι πολλαπλότητες στη γενίκευση του Palais μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε ομοιομορφικά να τις προβάλλουμε στη μοναδιαία σφαίρα του V με την απεικόνιση ακτινικής προβολής. Αλλά σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε πώς να κατασκευάσουμε τροχιές που προσεγγίζουν τις gradient γραμμές χωρίς να χρειαστεί να ολοκληρώσουμε κάποια διαφορική εξίσωση. Συνεπώς η δομή Finsler που είχε υποθέσει ο Palais απλά δε χρειάζεται!
- η δυσκολία στην απόδειξη της ισχύος της συνθήκης Palais-Smale έγκειται στο εξής: μια ασθενώς συγκλίσουσα ακολουθία κανονικοποιημένων στοιχείων μπορεί να συγκλίνει στο μηδέν. Αλλά, παρατηρεί, μπορούμε από πριν να αποκλείσουμε αυτήν την πιθανότητα αν η ακολουθία $\{I(u_n)\}$ είναι φραγμένη μακριά από το μηδέν και αυτό μόνο τελικά αρκεί για την

απόδειξη της ύπαρξης άπειρων ιδιοζευγών! δεν δείχνουμε ¨ολικά' την ισχύ της Palais-Smale ′ μόνο για ακολουθίες αυτής της μορφής (πολύ ευκολότερο), άρα ασθενέστερες συνθήκες στους τελεστές (μάλιστα,έδειξε ότι είναι και αναγκαίες)

Στο πρόβλημά μας ακολουθούμε αυτές τις ιδέες. Τελικά, το μόνο που θα μείνει να δείξουμε είναι η ισχύς τηςPalais-Smale σε αυτή τη μορφή

Λόγω του ότι στο πρόβλημα μας η p-Laplacian είναι μη γραμμικός,μη αυτοσυζυγής τελεστής, δεν μπορούμε άμεσα να εφαρμόσουμε την προσέγγιση της προηγούμενης ενότητας για τον εντοπισμό των ιδιοτιμών.Μπορούμε όμως να γενικεύσουμε τη θεωρία της προηγούμενης ενότητας για πιο γενικά, αρκούντως λεία συναρτησιακά F βρίσκοντας "τοπολογικά" ανάλογα για τα σύνολα $S \cap H_m$ και τις οικογένειες $\{S \cap H_m : H_m \in \mathcal{L}_c\}$.
Αυτός είναι και ο στόχος της θεωρίας Ljusternik-Schnirelman ([39]) που μπορεί στη συνέχεια να εφαρμοστεί σε μη γραμμικά προβλήματα ιδιοτιμών. Ένα κρίσιμο σημείο σε αυτή την επέκταση είναι η εύρεση συγκεκριμένων μη τετριμμένων συναρτήσεων ξ που ορίζονται σε κατάλληλα κλειστά σύνολα του Banach χώρου X, που ονομάζονται *τοπολογικοί δείκτες*. Η κατασκευή τους ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας (στα επόμενα, από αυτά θα δούμε μόνο το γένος Krasnoselskii).
Για τα επόμενα θα χρειαστούμε τις έννοιες της Ljusternik-Schnirelman *κατηγορίας* και *γένους*.
Έστω λοιπόν, ένας τοπολογικός χώρος M. Ένα σύνολο A λέγεται *κατηγορίας*-k στον M (συμβολίζουμε $cat_M(A) = k$) αν μπορεί να καλυφθεί από k (αλλά όχι $k-1$ κλειστά σύνολα που είναι συσταλτά (contractible) σε ένα σημείο στο M. Αν τέτοιο k δεν υπάρχει, $cat_M(A) = +\infty$.
Έστω X ένας πραγματικός χώρος Banach και Σ η οικογένεια όλων των συμμετρικών υποσυνόλων του $X\backslash 0$ που είναι κλειστά στο X (το A είναι συμμετρικό αν $A = -A$).
Ένα μη κενό σύνολο A λέμε ότι είναι *γένους*-k (συμβολισμός $\gamma(A) = k$) αν k είναι ο μικρότερος ακέραιος με την ιδιότητα ότι υπάρχει μια περιττή συνεχής απεικόνιση από το A στο $R^k \setminus \{0\}$.
Αν δεν υπάρχει τέτοιος k, $\gamma(A) = +\infty$ και αν $A = \emptyset$, $\gamma(A) = 0$ (συχνά το συναντούμε και ως "γένος Krasnoselskii").
Η έννοια του γένους γενικεύει την έννοια της διάστασης ενός γραμμικού χώρου.

Πρόταση 2.3.1 *Αν X είναι ένας χώρος Banach και U μια φραγμένη συμμετρική περιοχή του 0_X, τότε $\gamma(\partial U) = dimX$.*

Ακολουθεί μια χρήσιμη ιδιότητα του γένους που θα αξιοποιήσουμε στη συνέχεια:

Πρόταση 2.3.2 *Αν X_0 είναι ένας υπόχωρος του Banach χώρου X συνδιάστασης k και αν $\gamma(A) > k$, τότε $A \cap X_0 \neq \emptyset$.*

Το βασικό θεώρημα που μας ενδιαφέρει είναι άμεση εφαρμογή της θεωρίας Ljusternik-Schnirelman και είναι αυτό που ακολουθεί τον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 2.3.1

1. *$S_k = \{A \in S : \gamma(A) \geq k\}$, όπου A όπως πριν (κλειστό,συμμετρικό, $\in X \setminus \{0\}$.*

2. *$c_k = \inf_{A \in S_k} \sup_{x \in A} \phi(x)$, αν $S_k \neq \emptyset$*

Θεώρημα 2.3.1 *Έστω X χώρος Banach, $S_k \neq \emptyset$ για κάθε $k \geq 1$, το συναρτησιακό $\phi \in C^1(X)$ είναι άρτιο, κάτω φραγμένο και ικανοποιεί τη συνθήκη Palais-Smale (PS).Τότε:*

1. *Το c_k είναι πεπερασμένο, επιτυγχάνεται και είναι κρίσιμο σημείο του φ.*

2. *Αν $c_k = c_{k+1} = c \leq +\infty$, τότε $card(K_c) = +\infty$, όπου K_c είναι το σύνολο των κρίσιμων σημείων στη στάθμη c, δηλαδή $K_c = \{x \in X : \phi'(x) = 0$ και $\phi(x) = c.\}$*

3. *Αν $c_k = c_{k+1} = ... = c_{k+m} = c \leq +\infty$, τηεν $\gamma(K_c) \geq m + 1$.*

4. *Αν $c_k = +\infty$ για κάποιο $k \geq 1$, τότε $\sup_K \phi(x) = +\infty$, όπου $K = \{x \in X : \phi'(x) = 0\}$.*

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στα [43],[50].

2.4 Ύπαρξη Ακολουθίας Ιδιοτιμών

Σ' αυτή την ενότητα, θα αποδείξουμε την ύπαρξη μιας άπειρης ακολουθίας ιδιοτιμών για το ακόλουθο μη γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$div(\mid \nabla u(x) \mid^{p-2} \nabla u(x)) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2}$$

$\lambda \in R, x \in \mathbb{R}^N$, $1 < p < N$ και $u \in V$, όπου V είναι ένας χώρος Banach που θα προσδιοριστεί στη συνέχεια. Το πρόβλημα γίνεται ιδιαιτέρως ενδιαφέρον γιατί εκτός από την άγνωστη παράμετρο λ, το μελετάμε σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^N$ -και αναφέραμε στην Εισαγωγή κάποια προβλήματα που αυτό προκαλεί- αλλά και το ότι επιτρέπουμε στη συνάρτηση g να αλλάζει πρόσημο. Στα επόμενα θα κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις για τη g:

- (g_1) $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$
- (g_2) $g^\pm = max(\pm g, 0)(\not\equiv 0)$ $(g^\pm \geq 0)$
- (g_3) υπάρχει $K > 0$ και $R' > 0$ έτσι ώστε $g(x) \leq -K, \mid x \mid \geq R'$
- (g_4) $g^+ \in L^\infty(R^N) \cap L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$

Παρατήρηση 2.4.1 *Η συνθήκη g_3 έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη μη φραγμένων χωρίων καθώς μας επιτρέπει τον ομοιόμορφο χειρισμό της συνάρτησης g έξω από μια αρκούντως μεγάλη μπάλα .*

Αυτό που μας ενδιαφέρει ουσιαστικά, είναι η μελέτη του προβλήματος ύπαρξης μη τετριμμένων, ασθενών λύσεων για το παραπάνω πρόβλημα, δηλαδή

Ορισμός 2.4.1 *Θα λέμε ότι (λ,u) $\in R \times V \setminus \{0\}$ είναι μη τετριμμένη ασθενής λύση του προβλήματος (2.1) αν*

$\int_{R^N} \mid \nabla u(x) \mid^{p-2} \nabla u(x) \nabla \phi(x) dx = \lambda \int_{R^N} g(x) \mid u(x) \mid^{p-2} u(x)\phi(x) dx,$

για κάθε $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

Σημείωση: από εδώ και πέρα θα παραλείπουμε για συντομία - όπου ευκόλως εννοούνται- τα ορίσματα στις συναρτήσεις μέσα στα ολοκλήρωματα, καθώς και τα άκρα των ολοκληρωμάτων (οπότε και θα εννοούμε ότι έχουμε πάρει το ολοκλήρωμα σε όλο τον $\mathbb{R}^N$).

Εδώ θα μελετήσουμε το παραπάνω πρόβλημα σαν πρόβλημα ιδιοτιμών χρησιμοποιώντας μεταβολικές μεθόδους και τη θεωρία Ljusternik-Schnirelman.

Ορίζουμε τη συνάρτηση βάρους $\omega(x) = \frac{1}{(1+|x|)^p}, x \in \mathbb{R}^N$ και την

$$w(x) = max\{g^-(x), \omega(x)\} > 0, x \in \mathbb{R}^N$$

Σημείωση: Η συνάρτηση $\omega(x)$ είναι ακριβώς η συνάρτηση βάρους στην ακόλουθη ανισότητα Hardy :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{| u |^p}{(1+ | x |)^p} dx \leq (\frac{p}{N-p})^p \int_{\mathbb{R}^N} | \nabla u |^p \, dx$$

(βλ. [24])

Ορίζουμε το χώρο V σαν το κλείσιμο του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ως προς τη νόρμα $\| \cdot \|_V$, όπου $\| u \|_V = (\int_{\mathbb{R}^N} | \nabla u |^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} w(x) \mid u \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}$. Με αυτή την επιλογή αποδεικνύεται ότι ο V είναι ομοιόμορφα κυρτός (άρα και ανακλαστικός) και διαχωρίσιμος χώρος Banach. Θα συμβολίζουμε με V^* το δυϊκό του χώρο και με $(\cdot, \cdot)_V$ τη δυϊκότητα V, V^*.

Ορίζουμε τα παρακάτω σύνολα:

$G^+ = \{u \in V(\mathbb{R}^N) : p\Psi(u) := \int g \mid u \mid^p dx = 1\}$

και

$\Gamma_k = \{A \subset G^+ : A$ συμμετρικό, συμπαγές με $\gamma(A) = k\}$, όπου γ το γένος του Krasnoselskii.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.4.1 *Έστω $1 < p < N$. Υποθέτουμε*

$$g^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/p}(\mathbb{R}^N), g^+ \not\equiv 0.$$

Τότε το (2.1) έχει μια ακολουθία λύσεων (λ_k, u_k) με $\int g \mid u \mid^p = 1$,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_k$$

$\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

Σημείωση : εδώ επιτρέπουμε και την περίπτωση $g^- \equiv 0$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η μέθοδος μας θα εντοπίσει τις λύσεις σαν κρίσιμα σημεία ενός κατάλληλα ορισμένου συναρτησιακού I μέσα σε συγκεκριμένα σύνολα (εδώ στο G^+).

Ορίζουμε λοιπόν το συναρτησιακό I στο χώρο V ως εξής:

$$I(u)=\frac{1}{p}\int\mid\nabla u\mid^p dx=\frac{1}{p}\parallel\nabla u\parallel^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Παρατηρούμε άμεσα ότι το I είναι άρτιο και ότι τα κρίσιμα σημεία του στο G^+ είναι όντως ασθενείς λύσεις του (2.1) για κατάλληλους πολλαπλασιαστές Lagrange.
Επίσης άμεσο είναι το γεγονός ότι είναι καλά ορισμένο στον V :

$$I(u)=\frac{1}{p}\parallel\nabla u\parallel^p_p=\frac{1}{p}\{\parallel u\parallel^p_V-\int w\mid u\mid^p dx\}\leq\frac{1}{p}\parallel u\parallel^p_V<+\infty$$

.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα, θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία Ljusternik-Schnirelman.

Απόδειξη 2.4.1 *Σύμφωνα με τα παραπάνω, για να εφαρμόσουμε άμεσα το αποτέλεσμα της θεωρίας Ljusternik-Schnirelman, μένει να δείξουμε ότι το I :*

1. *είναι κάτω φραγμένο στο G^+*

   Πράγματι, $I(u)=\frac{1}{p}\int\mid\nabla u\mid^p dx=\frac{1}{p}\{\parallel u\parallel^p_V-\int w\mid u\mid^p dx\}$.
   Διακρίνουμε τώρα τις εξής δύο περιπτώσεις:

   (α΄) $g^-(x)>\omega(x)$ *: τότε*

   $$I(u)=\frac{1}{p}\{\parallel u\parallel^p_V-\int g^-\mid u\mid^p dx\}\overset{g\geq g^-}{\geq}\frac{1}{p}\{\parallel u\parallel^p_V-\int g\mid u\mid^p dx\}=$$

   $\overset{u\in G^+}{=}\frac{1}{p}\{\parallel u\parallel^p_V-1\}=$ *σταθερό*

   (β΄) $\omega(x)\geq g^-(x)$ *:τότε*

   $$I(u)=\frac{1}{p}\{\parallel u\parallel^p_V-\int\frac{1}{(1+\mid x\mid)^p}\mid u\mid^p dx\}\geq-\frac{1}{p}\int\mid u\mid^p dx\geq-\frac{1}{p}\int\mid u\mid^{p^*}\geq$$

   $$\geq-\frac{c}{p}\parallel\nabla u\parallel^p_p dx,$$

   άρα κάτω φραγμένο
   (χρησιμοποιήσαμε ότι $u\in V$ και την ανισότητα (1.1)).

Άρα, όντως το I είναι κάτω φραγμένο στο G^+.

2. *ικανοποιεί τη συνθήκη (PS) στο G^+,*
   δηλαδή για $\{u_n\}_n \subseteq G^+$ αν $I(u_n)$ είναι φραγμένο και $I'(u_n) - a_n \Psi'(u_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, τότε η $\{u_n\}_n$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. (σημ.: $a_n = \frac{<I'(u_n),u_n>}{<\Psi'(u_n),u_n>} = \int \mid \nabla u_n \mid^p dx$ και φραγμένο).

   Πράγματι, έστω $\{u_n\} \in G^+$ μια τέτοια υπακολουθία. Έχουμε (από ανισότητα Hölder):

$$\int g^+ \mid u_n \mid^p dx \leq \parallel g^+ \parallel_{N/p} (\int \mid u_n \mid^{p\frac{N}{N-p}} dx)^{\frac{N-p}{N}} =$$

$$= \parallel g^+ \parallel_{N/p} (\int \mid u_n \mid^{p^*\frac{N}{N-p}} dx)^{\frac{N-p}{N}} = \parallel g^+ \parallel_{N/p} (\int \mid u_n \mid^{p^*\frac{N}{N-p}} dx)^{\frac{1}{p^*}} \leq$$

$$\leq c \parallel g^+ \parallel_{N/p} \parallel \nabla u \parallel_p^p$$

   (το τελευταίο βήμα είναι από την ανισότητα (1.1)).

   Όμως, από υπόθεση, $I(u_n)$ είναι φραγμένο και άρα $\parallel \nabla u \parallel_p^p$ φραγμένο ′ συνεπώς,

$$\int g^+ \mid u_n \mid^p dx \tag{2.4}$$

   είναι φραγμένο.
   Αλλά τότε $\int g^- \mid u_n \mid^p dx = \int g^+ \mid u_n \mid^p dx - 1$, άρα φραγμένο.
   Επειδή $\parallel u_n \parallel_V = \int \mid \nabla u_n \mid^p dx + \int max\{g^-(x), \omega(x)\} \mid u_n \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}$, διακρίνουμε ξανά τις εξής δύο περιπτώσεις:

   (α′) *$g^-(x) > \omega(x), x \in \mathbb{R}^N$:*
   Τότε $\parallel u_n \parallel_V = \int \mid \nabla u_n \mid^p dx + \int g^- \mid u_n \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}$ = φραγμένο (από τη 2.4)

   (β′) *$\omega(x) \geq g^-(x), x \in \mathbb{R}^N$:*
   Τότε

$$\parallel u_n \parallel_V = \int \mid \nabla u_n \mid^p dx + \int \frac{1}{(1+ \mid x \mid)^p} \mid u_n \mid^p dx.$$

Όμως, από την ανισότητα Hardy :

$$\int \frac{| u_n |^p}{(1+ | x |)^p} dx \leq (\frac{p}{N-p})^p \| \nabla u_n \|_p^p,$$

άρα (επειδή $I(u_n)$ φραγμένη)

η $\| u_n \|_V$ είναι φραγμένη.

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η $\{u_n\}_n$ είναι φραγμένη στον V.

Η $\{u_n\}_n$ είναι φραγμένη στον V, ο οποίος όμως είναι ανακλαστικός χώρος Banach. Άρα θα υπάρχει υπακολουθία $\{u_{n_k}\}_{k\in N}$ (που για συντομία θα συμβολίσουμε πάλι με $\{u_n\}_n$) και $u_0 \in V$ ώστε $u_n \xrightarrow{w} u_0$, στον V και επίσης σε κάθε φραγμένο χωρίο Ω ισχύει

$$\int_\Omega g \mid u_0 \mid^p dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g \mid u_n \mid^p dx. \tag{2.5}$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $u_0 \not\equiv 0$. Πράγματι, αν $u_0 \equiv 0$, τότε σε κάθε φραγμένο χωρίο Ω από τη (2.1) έχουμε $\int_W g^+ \mid u_n \mid^p \to 0$.
Έστω $\tilde{\Omega}$ ένα φραγμένο χωρίο ώστε για αρκετά μεγάλα n,

$$c\cdot \| g^+ \|_{N/p,\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}} \cdot \| \nabla u_n \|_p^p < \frac{1}{4},$$

για δεδομένο c. Επιπλέον, μπορούμε να επιλέξουμε n αρκετά μεγάλο ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^+ \mid u_n \mid^p = \int_{\tilde{\Omega}} g^+ \mid u_n \mid^p + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\tilde{\Omega}} g^+ \mid u_n \mid^p \leq$$

$$\leq \int_{\tilde{\Omega}} g^+ \mid u_n \mid^p + c\cdot \| g^+ \|_{N/p,R^N\setminus\tilde{\Omega}} \cdot \| \nabla u_n \|_p^p < \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, $\int g^- \mid u_n \mid^p = \int g^+ \mid u_n \mid^p -1 < -\frac{1}{2}$, άτοπο (γιατί το ολοκλήρωμα είναι θετικό). Άρα $u_0 \not\equiv 0$. Από τις υποθέσεις για την ακολουθία (PS) έχουμε ότι για κάθε $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int \mid \nabla u_n \mid^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi dx = a_n \int g \mid u_n \mid^{p-2} u_n \phi dx + o(1). \tag{2.6}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (2.6) γραμμένες για n και m και επιλέγοντας $\phi = u_n - u_m$ (από διαγώνια επιχειρήματα αν είναι απαραίτητο) παίρνουμε:

$$\int (\mid \nabla u_n(x) \mid^{p-2} \nabla u_n - \mid \nabla u_m(x) \mid^{p-2} \nabla u_m)\nabla(u_n - u_m)dx \leq$$

$$\leq \int g(a_n \mid u_n \mid^{p-2} u_n - a_m \mid u_m \mid^{p-2} u_m)(u_n - u_m)dx + o(1) =$$

$$= \int_{\Omega} g a_n(\mid u_n \mid^{p-2} u_n - \mid u_m \mid^{p-2} u_m)(u_n - u_m)dx +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} g a_n(\mid u_n \mid^{p-2} u_n - \mid u_m \mid^{p-2} u_m)(u_n - u_m)dx +$$

$$+(a_n - a_m) \int_{\mathbb{R}^N} g(\mid u_m \mid^{p-2} u_m(u_n - u_m)dx + o(1)$$

(όπου προσθαφαιρέσαμε $\int_{\mathbb{R}^N} g a_n(\mid u_m \mid^{p-2} u_m(u_n - u_m)dx$ και Ω αυθαίρετο φραγμένο χωρίο)
Παρατηρούμε ότι από την ανισότητα Hölder και τη μονοτονία της συνάρτησης $\mid t \mid^{p-2} t$ έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} g a_n(\mid u_n \mid^{p-2} u_n - \mid u_m \mid^{p-2} u_m)(u_n - u_m)dx \leq$$

$$\overset{g \leq g^+}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} g^+ a_n(\mid u_n \mid^{p-2} u_n - \mid u_m \mid^{p-2} u_m)(u_n - u_m)dx \leq$$

$$\leq c \cdot a_n \parallel g^+ \parallel_{N/p, \mathbb{R}^N \setminus \Omega} (\parallel \nabla u_n \parallel_p^p + \parallel \nabla u_m \parallel_p^p)$$

το οποίο τείνει στο 0 *καθώς* $\Omega \to R^N$ *(ανεξαρτήτως από τα* m, n*).*
Επίσης για κάθε φραγμένο Ω*, το*

$$\int_\Omega g a_n(| u_n |^{p-2} u_n - | u_m |^{p-2} u_m)(u_n - u_m)dx \to 0$$

καθώς η (ή μια υπακολουθία της) u_n *συγκλίνει στο* u_0 *στον* $L^p(\Omega)$.

Επιπλέον από την ανισότητα Hölder προκύπτει ότι $\int g(| u_m |^{p-2} u_m(u_n - u_m)dx$ *είναι φραγμένο, οπότε επιλέγοντας μια υπακολουθία της* a_n *ώστε* $a_n - a_m \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$, *προκύπτει ότι το δεξί μέλος της (2.6) τείνει στο 0 για* $n, m \to \infty$.
Τώρα, για το αριστερό μέλος:
έχουμε την αλγεβρική ανισότητα

$$| a - b |^p \leq c \cdot \{| a |^{p-2} a - | b |^{p-2} b) \cdot (a - b)\}^{s/2} \cdot (| a |^p + | b |^p)^{1-s/2},$$

όπου $s = p$*,αν* $p \in (1, 2)$ *και* $s = 2$ *αν* $p \geq 2$.

Από αυτό έχουμε ότι

$$| \nabla u_n - \nabla u_m |^p \leq c \cdot \{| \nabla u_n |^{p-2} \nabla u_n - | \nabla u_m |^{p-2} \nabla u_m) \cdot \nabla(u_n - u_m)\}^{s/2} \cdot$$

$$\cdot (| \nabla u_n |^p + | \nabla u_m |^p)^{1-s/2}.$$

Ολοκληρώντας τώρα και εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε ότι

$$\int | \nabla u_n - \nabla u_m |^p \leq c \cdot \{\int (| \nabla u_n |^{p-2} \nabla u_n - | \nabla u_m |^{p-2} \nabla u_m) \cdot \nabla(u_n - u_m)\}^{s/2} \cdot$$

$$\cdot (\int | \nabla u_n |^p + \int | \nabla u_m |^p)^{1-s/2}.$$

Αλλά το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το αριστερό μέλος της (2.6) και τείνει στο 0, ενώ ο δεύτερος παράγοντας είναι φραγμένος.

Άρα $\nabla u_n \to \nabla u_0$ *στον* $L^p(\mathbb{R}^N)$. *Επίσης από την προηγούμενη, χρησιμοποιώντας την αρχική εξίσωση με* $\phi := u_{n,0}$ *παίρνουμε άμεσα ότι* $\int g_i \mid u_n \mid^p dx = \int g_i \mid u_0 \mid^p dx, i = 1, 2$ *(αντίστοιχα για* $g^{\pm}$*).*

Όμως διακρίνοντας πάλι τις γνωστές περιπτώσεις για τη $\| u \|_V$ *έχουμε :*

(α') $g^-(x) > \omega(x)$ *:*
$\| u_n \|_V = \| \nabla u_n \|_p^p + \int g^- \mid u_n \mid^p dx \longrightarrow \| u_0 \|_V$

(β') $\omega(x) \geq g^-(x)$ *:*
$\| u_n \|_V = \| \nabla u_n \|_p^p + \int (1+ \mid x \mid)^p \mid u_n \mid^p dx \longrightarrow \| u_0 \|_V$ *και με χρήση της ανισότητας Hardy παίρνουμε πάλι ότι*

$$\| u_n \|_V \to \| u_0 \|_V .$$

Άρα[1] $u_n \to u_0, V$ *και η απόδειξη ολοκληρώθηκε (αφού δείξαμε ότι η* $\{u_n\}_{(PS)}$ *έχει συγκλίνουσα υπακολουθία).*

Μένει να δείξουμε ότι $\lambda_k \to +\infty$.

Αφού ο V *είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει ένα διορθογώνιο σύστημα* $(e_m, e_n^*)_{m,n\in N}$ *έτσι ώστε* $e_m \in V, e_n^* \in V^*$. *Τα* e_m *είναι γραμμικώς πυκνά(linearly dense) στο* V *και τα* e_n^* *είναι πλήρη*[2] *για το* V*.Να σημειώσουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε τα* $(e_m)_{m\in N}$ *ώστε να είναι μια βάση Schauder για τον* V *(η οποία υπάρχει, (βλ. παρ.4.9.4, [51]) και στη συνέχεια να βρούμε διορθογώνια συναρτησιακά* e_n^*.
Ορίζουμε $V_m = span\{e_1, ..., e_m\}, V_m^{\perp} = \overline{span\{e_{m+1}, e_{m+2}, ...\}}$
Από την Πρόταση 2.2.2 έχουμε ότι $A \cap V_{j-1}^{\perp} \neq \emptyset$ *για κάθε* $A \in \Gamma_j$.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι

$$\mu_j := \inf_{A\in\Gamma_j} \sup_{A\cap V_{j-1}^{\perp}} pI(u) \to \infty,$$

καθώς $j \to \infty$.
Πράγματι, αν δεν ισχύει, τότε για μεγάλα j *, υπάρχει ένα* $u_j \in V_{j-1}^{\perp}$ *με* $\int g \mid$

[1] με χρήση της ιδιότητας Kadec-Klee : αν $u_n \overset{w}{\to} u_0$ και $\| u_n \|_V \to \| u_0 \|_V$ στον ανακλαστικό χώρο Banach V, τότε $u_n \to u_0, V$

[2] $span\{e_n^*\}$ είναι πυκνό στον V([37])

$u_j \,|^p = 1$ *τέτοιο ώστε* $\mu_j \leq pI(u) \leq M$ *για κάποιο* M *ανεξάρτητο από το* j.
Έτσι,
$\int \,|\, \nabla u_j \,|^p \, dx (= pI(u_j))$ *είναι φραγμένο. Αλλά από την επιλογή του* $V_{j-1}^{\perp}$ *έχουμε ότι* $u_j \xrightarrow{w} 0, V$ *το οποίο όμως είναι άτοπο, αφού* $\int g \,|\, u_j \,|^p = 1$.
Συνεπώς, αφού $\lambda_j \geq \mu_j$, *έχουμε το ζητούμενο.* $\diamondsuit$

2.5 Ιδιότητες Κυρίαρχης Ιδιοτιμής - αντίστοιχης Ιδιοσυνάρτησης

Θεώρημα 2.5.1 *Το πρόβλημα ιδιοτιμών*

$$-div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u, x \in \mathbb{R}^N$$

έχει το ζευγάρι (λ_1, u_1) *από μια κυρίαρχη ιδιοτιμή* λ_1 *και την αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση* u_1, *με :*

1. $\lambda_1 > 0$

2. $0 < u_1 \in V \cap L^\infty(R^N)$

3. *η* λ_1 *είναι απλή*

4. *η* u_1 *φθίνει ομοιόμορφα καθώς* $\mid x \mid \to \infty$.

Σημείωση : Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη αυτού του θεωρήματος, να παρατηρήσουμε ότι αν υποθέσουμε $g^- \not\equiv 0$ *και* $g^\pm \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$, *από συμμετρία έχουμε για το πρόβλημα*

$$-div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u, x \in \mathbb{R}^N$$

ότι υπάρχει επίσης άλλο ένα κυρίαρχο ιδιοζεύγος (λ_1^*, u_1^*) *με* $\lambda_1^* < 0$, *και* $0 < u_1^* \in V$ *με τις ίδιες ιδιότητες που θα αποδείξουμε για το ζεύγος* (λ_1, u_1). *Αυτός είναι και ο λόγος που χρησιμοποιούμε τον όρο κυρίαρχη αντί ελάχιστη ιδιοτιμή. Εμείς θα επικεντρωθούμε στις ιδιότητες της* λ_1, *και οι αντίστοιχες ιδιότητες της* λ_1^* *προκύπτουν αντίστοιχα.*

Απόδειξη 2.5.1 *Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη κάνοντας πρώτα δύο χρήσιμες παρατηρήσεις.*
Πρώτα, για $v_n \overset{w}{\to} v_1, V$ *έχουμε ότι*
για κάθε $K > 0$, *από την ανισότητα Hölder :*

$$\int_{|x|\geq K} g^+ \mid v_n \mid^p dx \leq (\int_{midx|\geq K} (g^+)^{\frac{N}{p}} dx)^{\frac{p}{N}} \cdot (int_{|x|\geq K} \mid v_n \mid^{p^*})^{\frac{p}{p^*}} \to 0$$

για $K \to \infty$ (αφού $\| v_n \|_V$ φραγμένη) .
Επίσης, για το φραγμένο σύνολο $| x |< K$), από την ανισότητα (1.1) έχουμε ότι

$$\int_{|x|<K} g^+ \mid v_n \mid^p dx \to \int_{|x|<K} g^+ \mid v_1 \mid^p dx$$

Συνδυάζοντας αυτά τα δύο αποτελέσματα έχουμε τελικά ότι για $v_n \overset{w}{\to} v_1, V$,

$$\int_{R^N} g^+ \mid v_n \mid^p dx \to \int_{R^N} g^+ \mid v_1 \mid^p dx$$

Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι οι απεικονίσεις

$$u \mapsto \int_{R^N} \mid \nabla u \mid^p dx, u \mapsto \int_{R^N} g^- \mid u \mid^p dx.$$

είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχή συναρτησιακά στο V. Αυτό είναι αποτέλεσμα της κυρτότητας και της συνέχειας της νόρμας.
Ορίζουμε, κατά τα γνωστά από τα προηγούμενα,

$$\lambda_1 := \inf \int_{R^N} \mid \nabla v \mid^p dx : v \in V, \int_{R^N} g^+ \mid v \mid^p dx = 1. \tag{2.7}$$

Η έκφραση (2.7) θα αναφέρεται σαν ο μεταβολικός χαρακτηρισμός της λ_1.

Θα δείξουμε πρώτα ότι η λ_1 είναι η κυρίαρχη ιδιοτιμή του προβλήματος

$$-div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u.$$

Προφανώς $\lambda_1 \geq 0$. Έστω τώρα $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ η ελαχιστοποιητική (minimizing) ακολουθία για τη λ_1, δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}^N} g \mid v_n \mid^p dx = 1, \int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla v_n \mid^p dx = \lambda_1 + \delta_n \tag{2.8}$$

με $\delta_n \to 0^+, n \to \infty$. Από τον ορισμό της νόρμας $\| \cdot \|_V$, παίρνοντας περιπτώσεις για το $w(x)$ κατά τα γνωστά, και με χρήση της ανισότητας Hardy και την παραπάνω (2.8) έπεται ότι η $\| v_n \|_V$ είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει υπακολουθία (θα τη συμβολίζουμε κι αυτή με v_n) που συγκλίνει ασθενώς στον V, έστω σε

κάποιο $u_1 \in V$.
Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις και τη (2.7) έπονται

$$\int_{\mathbb{R}^N} | \nabla u_1 |^p \, dx = \lambda_1$$

(αφού είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής και άρα πιάνει το infimum) και

$$\int_{\mathbb{R}^N} g \, | u_1 |^p \, dx \geq 1.$$

Όμως, η αυστηρή ανισότητα στην παραπάνω αποκλείεται λόγω του μεταβολικού χαρακτηρισμού του λ. Επιπλέον, αν u είναι μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στη λ_1, τότε και η $| u |$ είναι επίσης αντίστοιχη ιδιοσυνάρτησή της οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_1 \geq 0$ σχεδόν παντού στο Ω.
Από αυτό το γεγονός, το μεταβολικό χαρακτηρισμό της λ_1 και την $\int_{\mathbb{R}^N} | \nabla u_1 |^p \, dx = \lambda_1$ (που δείξαμε νωρίτερα) έπεται ότι $u_1 \not\equiv 0, \lambda_1 > 0$ και u_1 είναι η ιδιοσυνάρτηση του

$$\int | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int g(x) \, | u |^{p-2} \, u v dx$$

που αντιστοιχεί στην κυρίαρχη ιδιοτιμή λ_1, δηλαδή

$$\int | \nabla u_1 |^{p-2} \nabla u_1 \nabla v dx = \lambda_1 \int g(x) \, | u_1 |^{p-2} \, u_1 v dx,$$

για κάθε $v \in V$.
Θα δείξουμε τώρα ότι η $u_1 \in V \cap L^\infty$. Επιλέγουμε $v = v_M^{\kappa p+1} (\kappa > 0)$ σαν συνάρτηση δοκιμής στην παραπάνω, όπου $v_M = min\{u_1(x), M\}$ με την ίδια διαδικασία όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1 της παρούσας εργασίας (ή την απόδειξη του Λήμματος 3.2 στο [24]) από την επαγωγή προκύπτει ότι $\| u_1 \|_{r_n} \leq c \| u_1 \|_{p^*}$. Αφήνοντας το $r_n \to \infty$ παίρνουμε

$$\| u_1 \|_\infty \leq c \, \| u_1 \|_{p^*} .$$

Άμεσα τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι $u_1 > 0$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα τύπου Harnack (Θεώρημα 1.3.1).
Πράγματι, έστω ότι το ζητούμενο δεν ισχύει. Αφού η u_1 είναι μη αρνητική και μη τετριμμένη, θα πρέπει να υπάρχει σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $u(x_0) = 0$ και $u(x) > 0$ για x αυθαίρετα κοντά στο x_0. Όμως αυτό αντιβαίνει στο Θεώρημα (1.3.1) και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Για να δείξουμε ότι η λ_1 είναι απλή, θα χρησιμοποιήσουμε τη γενικευμένη ταυτότητα Picone (βλ.Θεώρημα 1.3.5).

Συγκεκριμένα, θα δείξουμε το ακόλουθο : Υποθέτουμε ότι η $v \in C^1$ *ικανοποιεί* $-\Delta_p v \geq \lambda g v^{p-1}$ *και* $v > 0, x \in \Omega$ *για κάποιο* $\lambda > 0$. *Τότε, για* $u \geq 0, u \in V$ *έχουμε*

$$\int_\Omega \mid \nabla u \mid^p dx \geq \lambda \int_\Omega g \mid u \mid^p dx, \lambda \leq \lambda_1^+. \tag{2.9}$$

Η ισότητα στην παραπάνω ισχύει, αν και μόνο αν, $\lambda = \lambda_1^+, u = kv, v = cu_1$, *για κάθε συνιστώσα του* Ω *αν δεν είναι συνεκτικό, για κάποιες σταθερές* k, c*(πάντα* u_1 *η αντίστοιχη κυρίαρχη ιδιοσυνάρτηση). Αν το* Ω *είναι συνεκτικό, η κυρίαρχη ιδιοτιμή είναι απλή.*

Πράγματι,

έστω $\Omega_0 \subset \Omega$ *συμπαγώς. Επιλέγουμε* $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0$. *Τότε, έχουμε*

$$0 \leq \int_{\Omega_0} L(\phi, v)dx \leq \int_\Omega L(\phi, v)dx = \int_\Omega R(\phi, v)dx = \int_\Omega \mid \nabla \phi \mid^p dx -$$
$$- \int_\Omega \nabla(\frac{\phi^p}{v^{p-1}}) \mid \nabla v \mid^{p-2} \nabla v dx =$$
$$= \int_\Omega \mid \nabla \phi \mid^p dx + \int_\Omega (\frac{\phi^p}{v^{p-1}})\Delta_p v dx \leq \int_\Omega \mid \nabla \phi \mid^p dx - \lambda \int_\Omega g\phi^p dx$$

Η συνάρτηση $\frac{\phi^p}{v^{p-1}}$ *είναι αποδεκτή σαν συνάρτηση δοκιμής (*$\phi \in C_0^\infty$ *ανεξάρτητα από το μέγεθος ή το σχήμα του* $\partial\Omega$. *Αφήνοντας τώρα* $\phi \to u, V$ *παίρνουμε τη (2.9).*
Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάποιο $0 \leq u_0 \in V$
$\int_\Omega \mid \nabla u_0 \mid^p dx = \lambda \int_\Omega g \mid u_0 \mid^p dx$.
Από τη συνέχεια των $\int_\Omega \mid \nabla \phi \mid^p dx, \int_\Omega g\phi^p dx$ *συμπεραίνουμε από την παραπάνω ότι* $\int_{\Omega_0} L(u_0, v)dx = 0$, *άρα* $u_0 = kv, \Omega$ *για κάποια σταθερά* k. *Αφού όμως το* Ω_0 *είναι αυθαίρετο, συμπεραίνουμε ότι* $u_0 = kv$, *σε κάθε συνιστώσα του* Ω. *Αν το* Ω *είναι συνεκτικό, τότε αν η* u_0 *είναι μη τετριμένη, συνεπάγεται ότι* $k > 0$ *και άρα* $v \in V$ *και* $u_0 > 0$.
Τέλος, δείχνουμε ότι αν το Ω *είναι συνεκτικό, έχουμε και ότι* $v = cu_1$.
Πράγματι, η (2.9) συνεπάγεται (επιλέγοντας $u = u_1$*) ότι* $\lambda_1^+ \geq \lambda$. *Αφού* $v \in v$ *μπορούμε να επαναλάβουμε τα προηγούμενα επιχείρηματα με* v *στη θέση του* u *και* u_1 *στη θέση του* v.
Καταλήξαμε ότι $v = ku_1$ *και άρα έπεται ότι η* λ_1^+ *είναι απλή. Τέλος,*

Μένει να δείξουμε την απόσβεση της $u_1(x)$ *καθώς* $\mid x \mid \to \infty$.
Παρατηρούμε ότι το $\gamma_1 > \frac{N}{p}$ *μπορεί να επιλεχθεί αυθαίρετα στην εκτίμηση*

$$\| u_1 \|_{L^\infty(B_1(x))} \leq c(\| u_1 \|_{L^{p^*}(B_2(x))} + \| g \mid u_1 \mid^{p-2} u_1 \|_{L^{\gamma_1}(B_2(x))})$$

λόγω των υποθέσεων για τη g και το ομοιόμορφο φράγμα στο οποίο καταλήξαμε στην απόδειξη του 2. Τότε, από το θεώρημα και την Παρατήρηση 1.3.2 , αφήνοντας $\mid x \mid \to \infty$, έπεται το ζητούμενο.

Λήμμα 2.5.1 *(i) Κάθε ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή $0 < \lambda_0 \neq \lambda_1^+$ αλλάζει πρόσημο στον $\mathbb{R}^N$.*
(ii) Η κυρίαρχη ιδιοτιμή $\lambda_1^+ > 0$ είναι απομονωμένη.

Απόδειξη 2.5.2 *(i) Υποθέτουμε καταρχάς ότι η $u_0 > 0$ είναι η ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στη λ_0 του (2.1) με $0 < \lambda_0 \neq \lambda_1^+$. Τότε $\lambda_0 > \lambda_1^+$, από το μεταβολικό χαρακτηρισμό της κυρίαρχης ιδιοτιμής $\lambda_1^+ > 0$. Τότε από τη (2.1)*

$$0 \geq (\lambda_0 - \lambda_1^+) \int g(u_0^p - u_1^{+p}) dx.$$

Κανονικοποιώντας τη u_0 ώστε το τελευταίο ολοκλήρωμα να είναι αρνητικό φτάνουμε σε άτοπο. Άρα η u_0 πρέπει να να αλλάζει πρόσημο.

(ii) Έστω (λ_0, u_0) όπως στο (i) και ότι η λ_0 ανήκει σε κάποια γειτονιά της λ_1.
Ορίζουμε $\Omega_0^- = \{x \in \mathbb{R}^N : u_0(x) < 0\}$.
Τότε από τη (2.1) ($\lambda = \lambda_0$ και $u = u_0$) παίρνουμε ότι

$$\int \mid \nabla u_0^- \mid^p dx + \lambda_0 \int g^- \mid u_0^- \mid^p dx = \lambda_0 \int g^+ \mid u_0^- \mid^p dx.$$

Από τις ανισότητες Hardy και Hölder, τον ορισμό της νόρμας του V και την υπόθεση για τη g^+ έπεται ότι

$$c \parallel u_0^- \parallel_V^p \leq (\int_{\Omega_0^-} g^{+N/p} dx)^p / N \parallel u_0^- \parallel_{L^{p*}(\mathbb{R}^N)}^p .$$

Συνεπώς, από την ανισότητα Sobolev έπεται ότι

$$(\int_{\Omega_0^-} g^{+N/p} dx)^p / N \geq C_2 > 0.$$

(ανεξάρτητα από τα λ_0, u_0).
Από την τελευταία, παίρνοντας $K_0 > 0$ αρκετά μεγάλο έχουμε

$$\mu(\Omega_0^- \cap B_K(0)) \geq c_3,$$

για κάθε $K \geq K_0$ *(με τη* c_3 *πάλι ανεξάρτητη από τα* λ_0, u_0*).*
Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει μια ακολουθία ιδιοτιμών (λ_n, u_n) *της (2.1) με* $\lambda_n \to \lambda_1^+$. *Τότε* $\lambda_n > \lambda_1^+$ *και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι* $\| u_n \|_V = 1$ *και (φραγμένη)* $u_n \xrightarrow{w} \tilde{u}, V$ *για κάποιο* $\tilde{u} \in V$.
Από την ασθενή σύγκλιση και το ότι η λ_1^+ *είναι απλή έπεται από τη (2.1) ότι είτε* $\tilde{u} = u_1^+$ *ή* $\tilde{u} = -u_1^+$
Υποθέτουμε επιπλέον $u_n \xrightarrow{w} u_1^+ > 0, V$. *Πάλι από τη (2.1) έχουμε ότι*

$$\int (\mid \nabla u_n \mid^{p-2} \nabla u_n - \mid \nabla u_m \mid^{p-2} \nabla u_m)(\nabla u_n - \nabla u_m) dx =$$

$$= \int \lambda_n g(x) \mid u_n \mid^{p-2} u_n - \mid u_m \mid^{p-2} u_m)(u_n - u_m) dx +$$

$$+(\lambda_n - \lambda_m) \int g(x) \mid u_n \mid^{p-2} u_n - \mid u_m \mid^{p-2} u_m)(u_n - u_m) dx.$$

Από αυτό παίρνουμε

$$\int (\mid \nabla u_n \mid^{p-2} \nabla u_n - \mid \nabla u_m \mid^{p-2} \nabla u_m)(\nabla u_n - \nabla u_m) dx \leq$$

$$\leq \int_{|x| \leq K} \lambda_n g^+ (\mid u_n \mid^{p-2} u_n - \mid u_m \mid^{p-2} u_m)(u_n - u_m) dx +$$

$$+ \int_{|x| > K} \lambda_n g^+ (\mid u_n \mid^{p-2} u_n - \mid u_m \mid^{p-2} u_m)(u_n - u_m) dx +$$

$$c \mid \lambda_n - \lambda_m \mid (\| u_n \|_V^p + \| u_m \|_V^p) \to 0.$$

Όμως, παρατηρούμε ότι για κάθε $w, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *ισχύει ότι*

$$\int (\mid w \mid^{p-2} w - \mid v \mid^{p-2} v)(w - v) dx = \int (\mid w \mid^p + \mid v \mid^p - \mid w \mid^{p-2} wv - \mid v \mid^{p-2} vw) dx \geq$$

$$\int (\mid w \mid^p + \mid v \mid^p) dx - (\int \mid w \mid^p dx)^{1/p'} \cdot (\int \mid v \mid^p dx)^{1/p} - (\int \mid w \mid^p dx)^{1/p} \cdot (\int \mid v \mid^p dx)^{1/p'} =$$

$$= [(\int \mid w \mid^p dx)^{p-1/p} - (\int \mid v \mid^p dx)^{p-1/p}] \cdot [(\int \mid w \mid^p dx)^{1/p} - (\int \mid v \mid^p dx)^{1/p}] \geq 0.$$

Από την προηγούμενη και την παρατήρηση που κάναμε στην αρχή της απόδειξης, έπεται άμεσα ότι $\int \mid \nabla u_n \mid^p dx \to \int \mid \nabla u_1^+ \mid^p dx$ *άρα και* $\nabla u_n \to \nabla u_1^+$ *ισχυρώς στον* $L^p(\mathbb{R}^N)$.
Από τη (2.1) και την ανισότητα $Hardy$ *έχουμε* $u_n \to u_1^+$ *ισχυρώς στον* $L^p(w, \mathbb{R}^N)$ *και άρα από την ιδιότητα* $Kadec - Klee$

$$u_n \to u_1^+,$$

ισχυρώς στον V.
Σταθεροποιούμε $K \geq K_0$. *Τότε, έχουμε* $u_n \to u_1^+$ *ισχυρώς και στον* $W^{1,p}(B_K(0))$.
Οπότε από το Θεώρημα του Egorov (Θ. 1.3.6), η $u_n \to u_1^+$ *ομοιόμορφα στην* $B_K(0)$, *εκτός από σύνολα αυθαίρετου μικρού μέτρου.*
Αυτό όμως αντίκειται στην

$$\mu(\Omega_0^- \cap B_K(0)) \geq c,$$

οπότε η λ_1^+ *είναι απομονωμένη και το Λήμμα έχει αποδειχθεί.* $\diamondsuit$

2.6 Σχετικά Αποτελέσματα - Προτάσεις για Περαιτέρω Μελέτη

Σε αυτή την ενότητα, θα δώσουμε βιβλιογραφία για κάποια συγγενικά προβλήματα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον και θα κλείσουμε αναφέροντας ένα ανοιχτό πρόβλημα που αφορά στην ακολουθία Ljusternik-Schnirelman.

Στην εργασία ([44]) γίνεται μελέτη του προβλήματος

$$-div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u, \lim_{|x| \to +\infty} = 0.$$

Αποδεικνύεται πρώτα ότι ο χώρος με βάρος V_g *είναι τελικά ανεξάρτητος από το βάρος* g *και η μελέτη μεταφέρεται στους κλασικούς χώρους Sobolev* $W^{1,p}(R^N)$.
Με χρήση της υπόθεσης $(H)^*$: *υπάρχει* $R > 0$ *ώστε* $g(x) < 0$ *για* $\mid x \mid > R$, *αποδεικνύεται με χρήση της θεωρίας Ljusternik-Schnirelman η ύπαρξη μιας άπειρης ακολουθίας ιδιοτιμών. Στη συνέχεια η μελέτη επικεντρώνεται στις ιδιότητες της κυρίαρχης ιδιοτιμής και της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης κατά τα γνωστά.*
Με χρήση της ταυτότητας του Picone αποδεικνύεται ότι η πρώτη ιδιοτιμή είναι απλή, και στη συνέχεια ότι είναι και απομονωμένη, και δίνονται αποτελέσματα ομαλότητας και απόσβεσης της λύσης.

Το πρόβλημα

$$-div(a(x) \mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda f(x,u), \mathbb{R}^N$$

$$u > 0, \mathbb{R}^N, lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$$

με $1 < p < N, \lambda > 0$ *και συναρτήσεις* $a = a(x), f = f(x,s)$ *που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες :*

1. (a) $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *και υπάρχει σταθερά* $a_0 > 0$ *τέτοια ώστε*

   $$a(x) \geq a_0$$

   σχεδόν για όλα τα $x \in \mathbb{R}^N$
2. $(f1)$ $f(x,s) : \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \to [0, \infty), f \in CAR$
3. $(f2)$ *υπάρχουν ένα ανοιχτό σύνολο* Ω *στο* $\mathbb{R}^N$ *και σταθερά* $\delta_0 > 0$ *τέτοια ώστε* $f(x, \delta_0) > 0$ *σχεδόν για όλα τα* $x \in \Omega$.

4. $(f3)$ *υπάρχουν μια μη αρνητική συνάρτηση* $\rho = \rho(x)$ *και σταθερά* $\delta, 0 < \delta < \infty$ *τέτοια ώστε*
$$0 \le f(x,s) < \rho(x)s^{\gamma}$$
για σχεδόν όλα τα $x \in \mathbb{R}^N$ *και για κάθε* $s \in [0,+\infty)$, *όπου* $p < \gamma + 1 < p^* = \frac{Np}{N-p}$ *και* $\rho \in L^{\gamma_1)}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\gamma_1+\delta)}(\mathbb{R}^N)$, *όπου* $\gamma_1 = \frac{p^*}{p^*-(\gamma+1)} = \frac{Np}{Np-(\gamma+1)(N-p)}$.

μελετήθηκε στο [20] από τον Drabek και επίσης από τους Allegretto-Huang στο [3].
Ενώ οι δεύτεροι δούλεψαν στον ίδιο χώρο V *με της παρούσας εργασίας, ο πρώτος δούλεψε στον ομογενή χώρο Sobolev*

$$X = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) :| \nabla u |\in L^p(\mathbb{R}^N)$$

εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\| u \|_X = (\int_{\mathbb{R}^N} a(x) \mid \nabla \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

που τον καθιστά ομοιόμορφα κυρτό χώρο Banach.

Παρατήρηση 2.6.1 *Με την υπόθεση ότι η* $a(x)$ *είναι* $C^1(\mathbb{R}^N)$ *μπορούμε να δείξουμε ότι η ασθενής λύση* u *είναι θετική και μάλιστα* $u \in C^{1,\alpha}(B_R(0))$ *για κάθε* $R > 0$ *και* $\alpha \in (0,1)$. *(βλ.[20])*

Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα είναι το τι γίνεται στην περίπτωση $p \ge N$.

Γι αυτή την περίπτωση αναφέρουμε τον αναγνώστη στα [29],[3]. Υποθέτοντας την ισχύ της συνθήκης $(H)^*$, *στο [29] αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει θετική λύση του προβλήματος ιδιοτιμών στον* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *για* $\lambda > 0$.
Συνεχίζοντας τη μελέτη αυτής της περίπτωσης, στο [3], οι συγγραφείς υποθέτουν (χωρίζοντας τη g *σε θετικό κι αρνητικό μέρος* g^+, g^- *αντίστοιχα):* $g^+ \not\equiv 0, g^+ \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$ *και υπάρχει* $\epsilon > 0$ *ώστε* $g^- \ge \epsilon > 0$, *όπου ο ακέραιος* $N_0 > p$. *Με αυτές τις υποθέσεις, αποδεικνύουν ότι τα Θεωρήματα 2.4.1 και 2.5.1 ισχύουν (ύπαρξη άπειρης ακολουθίας ιδιοτιμών, πρώτη ιδιοτιμή μοναδική και απλή, αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση θετική) στο χώρο V.*

Παρατήρηση 2.6.2 *: Με την υπόθεση ότι* $g^- \ge \epsilon > 0$, *αποδεικνύεται στην ίδια δημοσίευση ότι δεν υπάρχει η* $\lambda_1^* < 0$.

Τέλος, να σημειώσουμε ότι δεν είναι ακόμα γνωστό (σε αντίθεση με την περίπτωση της Laplacian) αν η ακολουθία των κρίσιμων σημείων που παράγεται με την εφαρμογή της Θεωρίας Ljusternik-Schnirelman εξαντλεί τις ιδιοτιμές του τελεστή.

Κεφάλαιο 3

Πρόβλημα Διακλάδωσης

Σ' αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε το ακόλουθο πρόβλημα σε όλο τον $\mathbb{R}^N$*:*

$$-div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u + f(\lambda, x, u) \tag{3.1}$$

$p > 1, \lambda \in \mathbb{R}$, *επιτρέποντας στις* g, f *να αλλάζουν πρόσημο. Μας ενδιαφέρει κυρίως η ύπαρξη θετικών λύσεων για το πρόβλημα (3.1) για κάποια* λ. *Όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο το πρόβλημα ιδιοτιμών*

$$-div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u$$

έχει θετική ιδιοτιμή λ_1 *με αντίστοιχη θετική ιδιοσυνάρτηση* u_1. *Συνεπώς, μπορούμε να μελετήσουμε το πρόβλημα διακλάδωσης όταν το* λ *είναι κοντά στο* λ_1.
Χρησιμοποιώντας θεωρία Τοπολογικού Βαθμού, θα δείξουμε ότι η λ_1 *είναι σημείο διακλάδωσης για το (3.1). Μάλιστα, κάτω από κάποιες υποθέσεις για τη* g *(τις ίδιες με το προηγούμενο κεφάλαιο), δείχνουμε ότι υπάρχουν δύο σημεία διακλάδωσης.*
Επιπλέον, κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις, μελετάμε την ομαλότητα και την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων και παρέχουμε πληροφορίες για το πρόσημο των λύσεων στους κλάδους διακλάδωσης.
Το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής:
Μετά από μια σύντομη απαραίτητη εισαγωγή στην οποία εξηγούμε τη φύση του προβλήματος μας, στην ενότητα (3.2) θα εισάγουμε τις υποθέσεις με τις οποίες θα δουλέψουμε και θα αποδείξουμε κάποια τεχνικά προκαταρκτικά αποτελέσματα. Στην επόμενη ενότητα, θα δείξουμε ότι ο τοπολογικός βαθμός είναι καλά ορισμένος για τους τελεστές μας. Στην ενότητα (3.4) αποδεικνύουμε το θεώρημα διακλάδωσης δείχνοντας ότι ο τοπολογικός βαθμός "κάνει άλμα" όταν το λ *περάσει από το* λ_1. *Στην ενότητα (3.5) , θα δώσουμε αποτελέσματα ομαλότητας και*

απόσβεσης της λύσης καθώς και πληροφορίες για το πρόσημό τους πάνω στους κλάδους διακλάδωσης. Τέλος, θα κλείσουμε με δύο παραδείγματα που εκθέτουν τα αποτελέσματά μας.

3.1 Εισαγωγή: το πρόβλημα της Θεωρίας Διακλάδωσης

Σ' αυτή τη σύντομη εισαγωγική ενότητα θα εξηγήσουμε τη φύση του προβλήματος της μελέτης της διακλάδωσης. Το φαινόμενα διακλάδωσης εμφανίζονται σε πολλές πτυχές της Μαθηματικής Φυσικής και η κατανόηση τους έχει τόσο πρακτική (πχ μελέτη ευστάθειας) όσο και θεωρητική σημασία. Στα επόμενα, θα αναφερόμαστε στη θεωρία διακλάδωσης από απλή ιδιοτιμή (όπως δείξαμε ότι ισχύει και για το πρόβλημά μας). Έστω λοιπόν, δύο πραγματικοί χώροι Banach, E *και* Y, Ω *ένα ανοιχτό υποσύνολο του* E *και* $G : \Omega \to Y$ *μια συνεχής απεικόνιση. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια απλή καμπύλη* C *στο* Ω, *που δίνεται ως* $C = \{w(t) : t \in I\}$, I *διάστημα, τέτοια ώστε* $G(w) = 0, w \in C$.
Αν υπάρχει αριθμός $\tau \in I$ *ώστε κάθε γειτονιά του* $w(\tau)$ *περιέχει ρίζες της* G *που δεν ανήκουν στη* C, *τότε το* $w(\tau)$ *ονομάζεται σημείο διακλάδωσης για την εξίσωση* $G(w) = 0$ *ως προς την καμπύλη* C.
Σε πολλές περιπτώσεις ο E *είναι της μορφής* $\mathbb{R} \times V$, *όπου* V *ένας πραγματικός χώρος Banach, και* $C = \{(\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}, 0 \in V\}$.
Το βασικό πρόβλημα της θεωρίας διακλάδωσης, συνίσταται στην εύρεση των σημείων διακλάδωσης για $G = 0$ *(με αναφορά στη* C*) και στη μελέτη της δομής του συνόλου* $G^{-1}\{0\}$ *κοντά σ' αυτά τα σημεία. Για την ειδική περίπτωση που* $E = \mathbb{R} \times V$, *είναι εύκολο να δειχθεί ότι αν* $G_x(\lambda, 0)$, *η Frèchet παράγωγος της απεικόνισης* $x \to G(\lambda, x)$ *στο σημείο* $(\lambda, 0)$, *είναι ισομορφισμός από τον* V *στον* Y, *τότε το* $(\lambda, 0)$ *δεν είναι σημείο διακλάδωσης. Αν επιβάλουμε επιπλέον περιορισμούς, πχ* $Y = V$,

$$G(\lambda, x) = Bx - \lambda x + H(x) + R(\lambda, x),$$

με B *γραμμικό,* H *ομογενή κάποιας τάξης και* R *ένα μικρό υπόλοιπο, τότε η*

$$G_x(\lambda_0, 0) = B - \lambda_0 \cdot I$$

έχει απλή ιδιοτιμή το 0 , το σύνολο τιμών του τελεστή $B - \lambda_0 \cdot I$ *είναι συνδιάστασης 1 και με κάποια υπόθεση που αποκλείει εκφυλισμένες περιπτώσεις, είναι γνωστό (βλ. [15] και αναφορές) ότι το* $(\lambda_0, 0)$ *είναι σημείο διακλάδωσης και εκτός από την καμπύλη* C, *οι ρίζες της* G *κοντά στο* $(\lambda_0, 0)$ *αποτελούν και από μια συνεχή καμπύλη που διέρχεται από το* $(\lambda_0, 0)$.
Το επόμενο βήμα είναι να αναρωτηθούμε αν αυτή καμπύλη μπορεί να επεκταθεί και αν υπάρχουν και επιπλέον (ονομάζονται " δευτερογενείς ") διακλαδώσεις ως προς αυτή.
Μάλιστα, υπό κάποιες συνθήκες συμπάγειας για τη G, *αυτά τα φαινόμενα διακλάδωσης είναι υπό κάποια έννοια καθολικά και όχι μόνο τοπικά, βλ.[45]*

Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [33],[15],[45],[5],[32],[14],[40] και [56].

Να σημειώσουμε μόνο, ότι σε αντίθεση με αυτά τα κλασικά αποτέλεσματα, στο πρόβλημά μας η G δεν έχει αυτή την "καλή" μορφή λόγω της φύσης του τελεστή της $p-Laplacian$, ότι δουλεύουμε σε όλο τον $\mathbb{R}^N$ και λόγω του ότι η συνάρτηση $g(x)$ που εμφανίζεται δε διατηρεί σταθερό πρόσημο.

3.2 Προκαταρκτικά αποτελέσματα

Διατηρώντας τους ίδιους συμβολισμούς με το προηγούμενο κεφάλαιο, κρατώντας τις υποθέσεις για το g και συνεχίζοντας τη μελέτη στον ίδιο χώρο V, θα προσθέσουμε επιπλέον υποθέσεις γι αυτή την ενότητα που αναφέρονται στη συνάρτηση f. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε τα ακόλουθα:

1. $(f1)$ *Η f είναι συνάρτηση Καραθεοδωρή, δηλαδή $f(\cdot, x, \cdot)$ είναι συνεχής για σχεδόν όλα τα $x \in \mathbb{R}^N$ και $f(\lambda, \cdot, u)$ είναι μετρήσιμη για κάθε $(\lambda, u) \in R^2$,*
2. $(f2)$ $\mid f(\lambda, x, u) \mid \leq c(\lambda)(\sigma(x) + \rho(x) \mid u \mid^{\gamma}$ *για σχεδόν όλα τα $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in R$, όπου $c(\lambda)$ είναι μη αρνητική και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι φραγμένη σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, $p-1 < \gamma < p^*-1, 0 \leq \rho(x) \in L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^N)$ με $\gamma_1 = p^*/(p^* - (\gamma+1)), 0 \leq \sigma(x) \in L^{N/p}(w^{N/p}, \mathbb{R}^N)$, όπου $L^{N/p}(w^{N/p}, \mathbb{R}^N)$ είναι ο $L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ με το βάρος $w^{N/p}(x)$ και ισχύει ένα από τα παρακάτω:*
   (α΄) $\sigma(x) \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N), (p^*)' = Np/(Np - (N - p))$ *ή*
   (β΄) $\sigma(x) \in L^{p'}(w^{1/(1-p)}, \mathbb{R}^N)$
3. $(f3)$ *Το επόμενο όριο υπάρχει:*

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(\lambda, x, u)}{w(x) \mid u \mid^{p-2} u} = 0,$$

ομοιόμορφα για σχεδόν όλα τα $x \in \mathbb{R}^N$ και λ σε ένα φραγμένο διάστημα.

Κατά τα γνωστά έχουμε την ασθενή διατύπωση του (3.1):

$$\int \mid \nabla u(x) \mid^{p-2} \nabla u(x) \nabla \phi(x) dx = \lambda \int g(x) \mid u(x) \mid^{p-2} u(x) \phi(x) dx + \int f(\lambda, x, u) \phi dx$$

Ορίζουμε τους ακόλουθους τελεστές $J, G, F(\lambda, \cdot) : V \to V^*$ ως εξής : για $u, \phi \in V$,

$$(J(u), \phi)_V = \int \mid \nabla u(x) \mid^{p-2} \nabla u(x) \nabla \phi(x) dx,$$

$$(G(u), \phi)_V = \int g(x) \mid u(x) \mid^{p-2} u(x) \phi(x) dx,$$

$$(F(\lambda,u),\phi)_V = \int f(\lambda,x,u)\phi dx.$$

Κάποιες φορές θα χρειαστεί να χωρίσουμε τον τελεστή G ως εξής : $G = G_1 - G_2$, όπου

$$(G_i(u),\phi)_V = \int g_i(x) \mid u(x) \mid^{p-2} u(x)\phi(x)dx, i = 1, 2$$

(τα i αντιστοιχούν κατά τα γνωστά στα $g^{\pm}$)

Ορισμός 3.2.1 *Θα λέμε ότι το ζεύγος (λ, u) είναι ασθενής λύση του προβλήματος (3.1), αν*

$$J(u) - \lambda G(u) - F_\lambda(u) = 0, V^*.$$

Στα Λήμματα που ακολουθούν, αποδεικνύουμε κάποιες ιδιότητες γι αυτούς τους τελεστές, τις οποίες θα χρειαστούμε αργότερα.

Λήμμα 3.2.1 *Οι τελεστές J, G, F είναι καλά ορισμένοι, ο J είναι συνεχής και ο F ικανοποιεί :*

$$\lim_{\|u\|_V \to 0} \frac{\| F(\lambda,u) \|_V^*}{\| u \|_V^{p-1}} = 0,$$

ομοιόμορφα για λ σε ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη 3.2.1 *1. Η συνέχεια του J είναι άμεση συνέπεια της συνέχειας του τελεστή Nemytskii*[1] *από τον $L^p(\mathbb{R}^N)$ στον $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$*

2. Με χρήση της ανισότητας Hölder παίρνουμε[2]*:*

$$\mid (J(u),\phi)_V \mid = \mid \int \mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u \nabla \phi dx \mid \leq (\int \mid \nabla u \mid^p)^{1/p'} (\int \mid \nabla u \mid^p)^{1/p} < \infty.$$

Άρα ο J είναι καλά ορισμένος.

---

[1] βλ. [24]

[2] $p' = p/p - 1$

3. *Έχουμε :*

$$| (G(u),\phi)_V |=| \int g^{1/p'} | u |^{p-2} u g^{1/p}\phi dx |$$

(απλά, γράψαμε $1 = 1/p' + 1/p$*) και πάλι από την ανισότητα Hölder :*

$$| (G(u),\phi)_V |\leq (\int | g || u |^p)^{1/p'}(\int | g || \phi |^p)^{1/p}.$$

Από τον ορισμό της νόρμας του V *και ότι* $u \in V$, *έχουμε ότι*

$$\int g^- | u |^p\, dx < \infty.$$

Επίσης, από την ανισότητα Hölder, τη $(g4)$, *και την ανισότητα (1.1), έχουμε*

$$\int g^+ | u |^p\, dx \leq (\int (g^+)^N/p dx)^{p/N} \cdot (\int | u |^{p^*} dx)^p/p^* < \infty.$$

Άρα ο G *είναι καλά ορισμένος.*

4. *Για τον* F *έχουμε:*

$$| (F(u),\phi),\phi)_V |=| \int f(\lambda,x,u)\phi dx | \overset{(f2)}{\leq} c(\lambda)(\int \sigma | \phi | dx + \int \rho | u |^{\gamma} | \phi | dx).$$

Πάλι από την $(f2)$ *έχουμε ένα από τα παρακάτω :*

(α΄) είτε

$$\int \sigma | \phi | dx \leq (\int \sigma^{(p^*)'} dx)^{1/(p^*)'}(\int | \phi |^{p^*} dx)^{1/p^*} < \infty$$

(β΄) είτε

$$\int \sigma | \phi | dx \leq (\int w^{1/(1-p)}\sigma^{p'} dx)^{1/p'}(\int w | \phi |^p dx)^{1/p} < \infty$$

και

$$\int \rho | u |^{\gamma} | \phi | dx \leq (\int | \phi |^{p^*} dx)^{\gamma/p^*} \cdot (\int \rho^{p^*/(p^*-\gamma)} | \phi |^{p^*/(p^*-\gamma)})^{(p^*-\gamma)/p^*} \leq$$

$$\overset{H\ddot{o}lder}{\leq} c_1(\int \mid u \mid^{p^*} dx)^{\gamma/p^*} \cdot (\int \mid \phi \mid^{p^*} dx)^{1/p^*} \cdot (\int \rho^{\gamma_1})^{1/\gamma_1} \leq$$

$$\leq \parallel \phi \parallel_V \cdot \parallel u \parallel_V^{\gamma} < \infty \tag{3.2}$$

και άρα ο F είναι καλά ορισμένος.

5. *Εξορισμού*

$$\lim_{\|u\|_V \to 0} \frac{\parallel F(\lambda,u) \parallel_V^*}{\parallel u \parallel_V^{p-1}} = \lim_{\|u\|_V \to 0} \sup_{\|\phi\|_V \leq 1} \frac{1}{\parallel u \parallel_V^{p-1}} \mid \int f(\lambda,x,u)\phi \mid \leq$$

$$\leq \lim_{\|u\|_V \to 0} sup_{\|\phi\|_V \leq 1} \int \frac{\mid f(\lambda,x,u) \mid}{w \mid u \mid^{p-1}} \mid \tilde{u} \mid^{p-1} \mid \phi \mid w dx, \tag{3.3}$$

όπου $\tilde{u} = u / \parallel u \parallel_V$ (σημ.: πολλαπλασιάσαμε και διαιρέσαμε με την ίδια παράσταση στην τελευταία ανίσωση) .
Στη συνέχεια, θα εκτιμήσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα.
Κατάρχάς, ορίζουμε για $\delta > 0$,

$$\Omega_\delta(u) = \{x \in \mathbb{R}^N : w(x) \mid u(x) \mid^{p-1} \geq \delta\}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\mu(\Omega_\delta(u)) \to 0$, καθώς $\parallel u \parallel_V \to 0$ (όπου $\mu(\cdot)$ το μέτρο Lebesque). Έστω για άτοπο ότι $\mu(\Omega_\delta(u)) \geq c > 0$.
Έστω $\Omega_K = \Omega_\delta(u) \cap B_K(0), K > 0$. Άρα για αρκούντως μεγάλο K, $\mu(\Omega_K) \geq \frac{1}{2}c_3$. Συνεπώς από τον ορισμό του Ω_K

$$0 < \delta \cdot \mu(\Omega_K) \leq \int_{\Omega_K} w \mid u \mid^{p-1} dx \overset{H\ddot{o}lder}{\leq} (\int_{\Omega_K} w \mid u \mid^p dx)^{1/p'} \cdot (\int_{\Omega_K} w(x)dx)^{1/p} \leq$$

$$\overset{\|u\|_V}{\leq} (\int_{\Omega_K} w(x)dx)^{1/p} \cdot \parallel u \parallel_V^{p-1} \leq c\mu(\Omega_K)^{1/p} \cdot \parallel u \parallel_V^{p-1} .$$

Οπότε,

$$0 < \delta(\frac{c_3}{2})^{1/p'} < \delta\mu(\Omega_K)^{1/p'} \leq c \parallel u \parallel_V^{p-1},$$

άτοπο.

Τώρα για κάθε δεδομένο $\varepsilon > 0$, *από την* $(f3)$, *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε*

$$\frac{\mid f(\lambda, x, u) \mid}{w \mid u \mid^{p-1}} \leq \varepsilon,$$

ομοιόμορφα για $w \mid u \mid^{p-1} < \delta$.
Χωρίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα της (3.3) σε ολοκληρώματα πάνω στα $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\delta(u)$ *και* $\Omega_\delta(u)$ *αντίστοιχα.*
Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\delta(u)} \frac{\mid f(\lambda, x, u) \mid}{w \mid u \mid^{p-1}} \mid \tilde{u} \mid^{p-1} \mid \phi \mid w dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\delta(u)} \mid \tilde{u} \mid^{p-1} \mid \phi \mid w dx \overset{(*)}{\leq} c\varepsilon$$

($(*)$ από την ανισότητα Hölder και τον ορισμό της νόρμας $\| \cdot \|_V$ *για* $u, \phi \in V$ *έχουμε ότι:*

$$\int \mid \tilde{u} \mid^{p-1} \mid \phi \mid w dx \leq (\int w \mid \tilde{u} \mid^p dx)^{1/p'} \cdot (\int w \mid \phi \mid^p dx)^{1/p} < \infty.)$$

Από την $(f2)$, *για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε:*

$$\int_{\Omega_\delta(u)} \frac{\mid f(\lambda, x, u) \mid}{w \mid u \mid^{p-1}} \mid \tilde{u} \mid^{p-1} \mid \phi \mid w dx \leq \int_{\Omega_\delta(u)} \frac{c(\lambda)\sigma(x)}{w \mid u \mid^{p-1}} \mid \tilde{u} \mid^{p-1} \mid \phi \mid w dx +$$

$$+ \frac{c(\lambda)}{\| u \|_V^{p-1}} \int_{\Omega_\delta(u)} \rho(x) \mid u \mid^\gamma \mid \phi \mid dx := c(\lambda)(I_1 + I_2).$$

Για τα I_1, I_2 *παρατηρούμε τα εξής :*

$$I_1 \leq \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_\delta(u)} \sigma(x) w(x) \mid \tilde{u} \mid^{p-1} \mid \phi \mid dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta} (\int_{\Omega_\delta(u)} \mid \tilde{u} \mid^{p^*})^{(p-1)/p^*} \cdot (\int_{\Omega_\delta(u)} (\sigma(x) w(x) \mid \phi \mid)^{p^*/(p^*-(p-1))} dx)^{(p^*-(p-1))/p^*} \leq$$

$$\overset{Hölder}{\leq} \frac{1}{\delta} (\int_{\Omega_\delta(u)} \mid \tilde{u} \mid^{p^*})^{(p-1)/p^*} \cdot (\int_{\Omega_\delta(u)} (\sigma(x) w(x))^{p^*/(p^*-p)} dx)^{(p^*-p)/p^*} \cdot (\int_{\Omega_\delta} \mid \phi \mid^{p^*} dx)^{1/p^*} \leq$$

$$\leq c_6 (\int_{\Omega_\delta(u)} (\sigma(x) w(x))^{N/p})^{p/N} \parallel \tilde{u} \parallel_V^{p-1} \parallel \phi \parallel_V \to 0,$$

αφού $\mu(\Omega_\delta(u)) \to 0$ *και* $\sigma \in L^{N/p}(w^{N/p}, \mathbb{R}^N)$. *Από την (3.2) συνεπάγεται:*

$$I_2 \leq c \parallel u \parallel_V^{\gamma - p + 1} \parallel \phi \parallel_V \to 0$$

και το λήμμα έχει αποδειχθεί. $\diamondsuit$

Λήμμα 3.2.2 *1. Ο τελεστής* G_2 *είναι συνεχής.*

2. Οι τελεστές G_1 *και* F *είναι συμπαγείς.*

Απόδειξη 3.2.2 *1. Η συνέχεια του* G_2 *έπεται άμεσα από τη συνέχεια του τελεστή Nemytskii από το χώρο* $L^p(w, \mathbb{R}^N)$ *στον* $L^{p'}(w, \mathbb{R}^N)$ *(με βάρη).*

2. (α΄) Για τη συμπάγεια του G_1 *:*

Ισχυρισμός : για κάθε $\varepsilon > 0$ *και* $\phi \in V$ *υπάρχει* $K > 0$*, τέτοια ώστε*

$$\sup_{\|v\|_V \leq 1} \int_{|x|>K} g^+ \mid \phi \mid^{p-1} \mid v \mid dx \leq \varepsilon \parallel \phi \parallel_V^{p-1} .$$

Πράγματι, από την ανισότητα Hölder,

$$\sup_{\|v\|_V \leq 1} \int_{|x|>K} g^+ \mid \phi \mid^{p-1} \mid v \mid dx \leq$$

$$\leq \sup_{\|v\|_V \leq 1} (\int_{|x|>K} g^+ \mid \phi \mid^p dx)^{1/p'} \cdot (\int_{|x|>K} g^+ \mid v \mid^p dx)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sup_{\|v\|_V \leq 1} (\int_{|x|>K} g^{+N} / p dx)^{(p-1)/N} \cdot (\int_{|x|>K} \mid \phi \mid^{p^*} dx)^{(p-1)/p^*} \cdot$$

$$\cdot (\int_{|x|>K} g^{+N} / p dx)^{1/N} \cdot (\int_{|x|>K} \mid \phi \mid^{p^*} dx)^{1/p^*} \leq$$

$$\leq c \sup_{\|v\|_V \leq 1} (\int_{|x|>K} g^{+N}/pdx)^{p/N} \cdot (\int_{|x|>K} | \phi |^{p^*} dx)^{1/p^*} \| v \|_V \leq$$

$$\leq \varepsilon \| \phi \|_V^{p-1} .$$

καθώς $g^+ \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$.

Ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί.

Υποθέτουμε τώρα ότι $u_n \xrightarrow{w} u_0$ *στον* V. *Έχουμε :*

$$\| G_1(u_n) - G_1(u_0) \|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} | (G_1(u_n) - G_1(u_0), v)_V | =$$

$$= \sup_{\|v\|_V \leq 1} | \int g^+(x)(| u_n |^{p-2} u_n - | u_0 |^{p-2} u_0)vdx | \leq$$

$$\leq \sup_{\|v\|_V \leq 1} | \int_{|x|\leq K} g^+(x)(| u_n |^{p-2} u_n - | u_0 |^{p-2} u_0)vdx | +$$

$$+ \sup_{\|v\|_V \leq 1} | \int_{|x|>K} g^+(x)(| u_n |^{p-2} u_n - | u_0 |^{p-2} u_0)vdx | .$$

Από την παραπάνω εκτίμηση, και τον ισχυρισμό (και την ιδιότητα $| \int \cdot | \leq \int | \cdot |$*) έπεται ότι* $G_1(u_n) \to G_1(u_0)$ *ισχυρά στον* V^*, *άρα ο* G_1 *είναι συμπαγής. Πράγματι, για κάθε* $\varepsilon > 0$, *μπορούμε να επιλέξουμε τέτοιο* $K > 0$ *ώστε το ολοκλήρωμα πάνω στο σύνολο* $| x | > K$ *να είναι μικρότερο από* $\frac{\varepsilon}{2}$ *για όλα τα* n, *και γι αυτό το συγκεκριμένο* K, *από την ισχυρή σύγκλιση* $u_n \to u_0$ *στον* L^p *(από τη συμπαγή εμφύτευση του* V *στον* L^p, *για φραγμένο χωρίο), το ολοκλήρωμα πάνω στο σύνολο* $| x | \leq K$ *είναι μικρότερο από* $\frac{\varepsilon}{2}$ *για μεγάλα* n.

(β′) Για τη συμπάγεια του F *:*
Έστω πάλι $u_n \xrightarrow{w} u_0$ *στον* V. *Έχουμε :*

$$\| F(\lambda, u_n) - F(\lambda, u_0) \|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} | (F(\lambda, u_n) - F(\lambda, u_0), v)_V | =$$

$$= \sup_{\|v\|_V \leq 1} | \int (f(\lambda, x, u_n) - f(\lambda, x, u_0))vdx \leq$$

$$\leq \sup_{\|v\|_V \leq 1} | \int_{|x| \leq K} (f(\lambda, x, u_n) - f(\lambda, x, u_0))vdx | +$$

$$+ \sup_{\|v\|_V \leq 1} | \int_{|x| > K} (f(\lambda, x, u_n) - f(\lambda, x, u_0))vdx | .$$

Από τη συνέχεια του τελεστή Nemytskii $F : L^p \to L^{p'}$ *έχουμε άμεσα ότι το ολοκλήρωμα πάνω στο σύνολο* $| \ x \ | \leq K$ *τείνει στο 0 για* $n \to \infty$.
Για το ολοκλήρωμα πάνω στο $| \ x \ | > K$ *έχουμε από την* $(f2)$

$$\sup_{\|v\|_V \leq 1} | \int_{|x|>K} | f(\lambda, x, \phi)v | \leq (\int c(\lambda)\sigma | v | dx + \int c(\lambda)\rho | \phi |^{\gamma} vdx.$$

Για τον πρώτο όρο έχουμε ότι είναι $\leq c(\int_{|x|>K} \sigma^{(p^*)'} dx)^{1/(p^*)'}$ *ή* $\leq c(\int_{|x|>K} w^{1/(1-p)} \sigma^{p'} dx)^{1/p'}$
και για το δεύτερο ότι είναι

$$\leq c(\int_{|x|>K} | \phi |^{p^*} dx)^{\gamma/p^*} \cdot (\int_{|x|>K} | v |^{p^*} dx)^{1/p^*} \cdot (\int_{|x|>K} \rho^{\gamma_1})^{1/\gamma_1},$$

(όπως στην απόδειξη του (4) του Λήμματος (3.1.1).
Τώρα, όπως και στην απόδειξη του ισχυρισμού του Λήμματος (3.1.2,2a), έχουμε μια ανισότητα από την οποία άμεσα επάγεται ότι και το ολοκλήρωμα πάνω στο σύνολο $| \ x \ | > K$ *τείνει στο 0. Άρα ο* F *είναι συμπαγής.*

3.3 Τοπολογικός Βαθμός

Ορίζουμε $A_\lambda := J - \lambda G - F(\lambda, \cdot)$. *Σ' αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι ο τοπολογικός βαθμός όντως ορίζεται για τον τελεστή* A_λ. *Από τα Λήμματα (3.1.1),(3.1.2) και (1.2.1) βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε μόνο το ακόλουθο Λήμμα :*

Λήμμα 3.3.1 *Ο τελεστής* $J + \lambda G_2 : V \to V^*$ *ικανοποιεί τη συνθήκη* $a(V)$ *για* $\lambda > 0$.

Απόδειξη 3.3.1 *Υποθέτουμε ότι* $u_n \xrightarrow{w} u_0$ *στον* V *και*

$$\limsup_{n\to\infty} (J(u_n) + \lambda G_2(u_n), u_n - u_0)_V \leq 0.$$

Τότε, έχουμε

$$0 \geq \limsup_{n\to\infty} ((J(u_n) - J(u_0), u_n - u_0)_V + \lambda(G_2(u_n) - G_2(u_0), u_n - u_0)_V) =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \{ \int (\mid \nabla u_n \mid^{p-2} \nabla u_n - \mid \nabla u_0 \mid^{p-2} \nabla u_0)(\nabla u_n - \nabla u_0) dx +$$

$$+\lambda \int g^-(\mid u_n \mid^{p-2} u_n - \mid u_0 \mid^{p-2} u_0)(u_n - u_0) dx \}. \tag{3.4}$$

Από την (3.2) και την

$$\int (\mid \nabla u_n \mid \nabla u_n - \mid \nabla u_m \mid \nabla u_m) \nabla u_n - \nabla u_m) dx$$

(βλ.Απόδειξη Λήμματος 2.5.1) έχουμε ότι

$$\int \mid \nabla u_n \mid^p dx \to \int \mid \nabla u_0 \mid^p dx, \int g^-(x) \mid u_n \mid^p \to \int g^-(x) \mid u_0 \mid^p .$$

Από την ανισότητα Hardy έχουμε ότι

$$\int \frac{\mid u_n - u_0 \mid^p}{(1 + \mid x \mid)^p} dx \leq (\frac{p}{N-p})^p \int \mid \nabla u_n - \nabla u_0 \mid^p dx \to 0$$

και άρα από την ιδιότητα Kadec-Klee έχουμε ότι $u_n \to u_0$ *στον* V. $\diamondsuit$

Από το Λήμμα αυτό τώρα, έχουμε ότι ο $Deg[J - \lambda G - F(\lambda, \cdot); D, 0]$ *είναι καλά ορισμένος για κάθε* $\lambda > 0$
(το D *είναι, κατά τα γνωστά, φραγμένο ανοιχτό υποσύνολο του* V *τέτοιο ώστε* $A_\lambda(u) \neq 0$*, για κάθε* $u \in \partial D$*).*

Παρατήρηση 3.3.1 *Αν* $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$*, τότε κατά την απόδειξη του Λήμματος 3.1.2 (για τη συμπάγεια του* G_1*) προκύπτει ότι και ο* G *είναι συμπαγής, τότε, ο τοπολογικός βαθμός μπορεί να οριστεί και για* $\lambda \leq 0$*.*

3.4 Διακλάδωση από τη λ_1

Έστω $E = \mathbb{R} \times V$ εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\| (\lambda, u) \|_E = (| \lambda |^2 + \| u \|_V^2)^{1/2}, (\lambda, u) \in E. \tag{3.5}$$

Θα λέμε ότι το

$C = \{ (\lambda, u) \in E : (\lambda, u)$ λύνει το (3.1), $u \neq 0\}$ (3.6)

είναι ένα συνεχές μη τετριμμένων λύσεων του (3.1) αν είναι συνεκτικό σύνολο στον E ως προς την τοπολογία που ορίζει η νόρμα (3.5).

Θα λέμε ότι το $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ είναι σημείο διακλάδωσης του (3.1) (υπό την έννοια του Rabinowitz) αν υπάρχει ένα συνεχές μη τετριμμένων λύσεων C του (3.1) τέτοιο ώστε $(\lambda, 0) \in \bar{C}$ και είτε

[ι.]το C είναι μη φραγμένο στο E είτε
υπάρχει μια ιδιοτιμή $\hat{\lambda} \neq \lambda_0$ ώστε $(\hat{\lambda}, 0) \in \bar{C}$.

1. **Θεώρημα 3.4.1** *Έστω $1 < p < N$. Με τις υποθέσεις $(f1) - (f3)$ και για $g^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/p}(\mathbb{R}^N), g^+ \not\equiv 0$*
Τότε, η κυρίαρχη ιδιοτιμή $\lambda_1^+ > 0$ του προβλήματος

$$-\Delta_p(| \nabla u |^{p-2} \nabla u) = \lambda g \mid u \mid^{p-2} u, x \in \mathbb{R}^N, \int g \mid u \mid^p dx > 0$$

είναι σημείο διακλάδωσης για το (3.1).

Για την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω Λήμμα από το [45].

Λήμμα 3.4.1 *Έστω $\mathcal{F}$ το κλείσιμο του συνόλου των μη τετριμμένων λύσεων του (3.1) και $r(A)$ το σύνολο των ιδιοτιμών. Αν το λ_0 δεν είναι σημείο διακλάδωσης, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό, φραγμένο σύνολο $\mathcal{O} \subset E$ τέτοιο ώστε $(\lambda_0, 0) \in \mathcal{O}, \partial\mathcal{O} \cap \mathcal{F} =$ και το $\mathcal{O}$ δεν περιέχει άλλες τετριμμένες λύσεις εκτός από αυτές στη B_ϵ, όπου $0 < \epsilon < \epsilon_0$, και ϵ_0 η απόσταση του λ_0 από το $r(A) - \lambda_0$.*

(Η απόδειξη παραλείπεται.)

Απόδειξη 3.4.1 *Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί σε τρία βήματα.*
Έστω ο τελεστής $\tilde{A}_\lambda(u) = J(u) - \lambda G(u)$. *Από το μεταβολικό χαρακτηρισμό της* λ_1^+ *έχουμε ότι για* $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ *και* $u \in V$ *(με* $\| u \|_V \neq 0$*),*

$$(\tilde{A}_\lambda(u), u)_V > 0.$$

Τότε, ο τοπολογικός βαθμός

$$Deg[\tilde{A}_\lambda; B_r(0), 0]$$

είναι καλά ορισμένος για κάθε $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ *και κάθε μπάλα* $B_r(0) \subset V$.
Με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2.2 έπεται ότι

$$Deg[\tilde{A}_\lambda; B_r(0), 0] = 1, \lambda \in (0, \lambda_1^+).$$

Σύμφωνα με το Λήμμα (2.5.1), υπάρχει ένα $\delta > 0$ *ώστε το διάστημα* $(\lambda_1^+, \lambda_1^+ + \delta)$ *να μην περιέχει καμιά ιδιοτιμή του προβλήματος (3.1), συνεπώς ο τοπολογικός βαθμός είναι καλά ορισμένος και για* $\lambda \in (\lambda_1^+, \lambda_1^+ + \delta)$.
Σ' αυτό το βήμα θα υπολογίσουμε το ίχνος $Ind(\tilde{A}_\lambda, 0)$ *για* $\lambda \in (\lambda_1^+, \lambda_1^+ + \delta)$.
Σταθεροποιούμε ένα $K > 0$ *και ορίζουμε μια συνάρτηση* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ως εξής*

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq K \\ \frac{2\delta}{\lambda_1^+} & t \geq 3K \end{cases}$$

Η $\psi(t)$ *είναι θετική και κυρτή στο* $(K, 3K)$.
Ορίζουμε τώρα το συναρτησιακό

$$\Psi_\lambda(u) = \frac{1}{p}(J(u), u)_V - \frac{\lambda}{p}(G(u), u)_V + \psi(\frac{1}{p}(J(u), u)_V).$$

Το Ψ_λ *είναι συνεχώς Fréchet διαφορίσιμο και το κρίσιμο σημείο του* $u_0 \in V$ *(δηλ.,*$\Psi_\lambda'(u_0)) = 0$ *αντιστοιχεί στη λύση της εξίσωσης*

$$J(u_0) - \frac{\lambda}{1 + \psi'(\frac{1}{p}(J(u_0), u_0)_V)} G(u_0) = 0.$$

Όμως, καθώς $\lambda \in (\lambda_1^+, \lambda_1^+ + \delta)$, *τα μόνα μη τετριμμένα κρίσιμα σημεία του* Ψ_λ' *συμβαίνουν όταν*

$$\psi'(\frac{1}{p}(J(u_0), u_0)_V) = \frac{\lambda}{\lambda_1^+} - 1,$$

και άρα πρέπει

$$\frac{1}{p}(J(u_0),u_0)_V \in (K,3K).$$

(από τον ορισμό της $\psi(t)$). Σ' αυτή την περίπτωση είτε $u_0=-u_1^+$ είτε $u_0=u_1^+$, όπου $u_1^+>0$ είναι η κυρίαρχη ιδιοσυνάρτηση.
Άρα, για $\lambda\in(\lambda_1^+,\lambda_1^++\delta)$ η Ψ_λ' έχει ακριβώς τρία απομονωμένα κρίσιμα σημεία, $-u_1^+,0,u_1^+$.
Το συναρτησιακό Ψ_λ είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές. Πράγματι, έστω $u_n\overset{w}{\to}u_0,V$. Τότε

$$(G_1(u_n),u_n)_V \to (G_1(u_0),u_0)_V$$

(λόγω της συμπάγειας του G_1 από το Λήμμα (3.1.2)) και

$$\liminf_{n\to\infty}((\frac{1}{p}(J(u_n),u_n)_V+\frac{\lambda}{p}(G_2(u_n),u_n)_V+\psi(\frac{1}{p}(J(u_n),u_n)_V))\geq$$

$$\geq \frac{1}{p}(J(u_0),u_0)_V+\frac{\lambda}{p}(G_2(u_0),u_0)_V+\psi(\frac{1}{p}(J(u_0),u_0)_V)$$

καθώς η ψ είναι μη φθίνουσα και την ασθενή κάτω ημισυνέχεια των νορμών του L^p και V
(δηλ. $\liminf \| u_n \|_V \geq \| u_0 \|_V$,$\liminf \| \nabla u_n \|_{L^p(R^N)} \geq \| \nabla u_0 \|_{L^p(R^N)}$)

Οπότε, τελικά

$$\liminf_{n\to\infty}\Psi_\lambda(u_n)\geq\Psi_\lambda(u_0).$$

Το Ψ_λ είναι επίσης πιεστικό, δηλαδή

$$\lim_{\|u\|_V\to\infty}\Psi_\lambda(u)=\infty.$$

Για να το δούμε αυτό, εξετάζουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις για $\| u \|_V\to\infty$:
(i) $(J(u),u)_V$ είναι φραγμένο. Σε αυτή την περίπτωση, όπως κάναμε και στο Λήμμα 3.1.1, από την ανισότητα (1.1) και άρα ο $(G_1(u),u)_V$ είναι επίσης φραγμένος αλλά ο $(G_2(u),u)_V\to\infty$ οπότε προφανώς $\Psi_\lambda(u)\to\infty$.
(ii) $(J(u),u)_V\to\infty$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\Psi_\lambda(u) = \frac{1}{p}(J(u),u)_V - \frac{\lambda_1^+}{p}(G(u),u)_V + \frac{\lambda_1^+ - \lambda}{p}(G(u),u)_V + \psi(\frac{1}{p}(J(u),u)_V) \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_1^+ - \lambda}{p}(G(u),u)_V + \psi(\frac{1}{p}(J(u),u)_V)$$

(γιατί από το μεταβολικό χαρακτηρισμό του λ_1^+ είναι

$$\frac{1}{p}(J(u),u)_V - \frac{\lambda_1^+}{p}(G(u),u)_V \geq 0).$$

Άρα (ξανά από το μεταβολικό χαρακτηρισμό :)

$$\Psi_\lambda(u) \geq \frac{\lambda_1^+ - \lambda}{p\lambda_1^+}(J(u),u)_V + \psi(\frac{1}{p}(J(u),u)_V) \geq$$

$$\geq -\frac{\delta}{p\lambda_1^+}(J(u),u)_V + \frac{2\delta}{\lambda_1^+}[\frac{1}{p}(J(u),u)_V - 2K] \overset{\|u\|_V \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$$

(από τον ορισμό του $\psi(t)$).
Το Ψ_λ είναι άρτιο συνεπώς το ελάχιστο επιτυγχάνεται σε δύο σημεία, $-u_1^+, u_1^+$.
Το 0 είναι προφανώς ένα απομονωμένο κρίσιμο σημείο, τύπου σάγματος.
Άρα από το Θεώρημα 1.2.4 έχουμε ότι

$$Ind(\Psi_\lambda', -u_1^+) = Ind(\Psi_\lambda', u_1^+) = 1. \tag{3.7}$$

Ταυτόχρονα, για $\| u \|_V = \kappa, \kappa > 0$ αρκούντως μεγάλο, έχουμε ότι
$(\Psi_\lambda'(u), u)_V > 0)$.
Όπως και για την πιεστικότητα, για την απόδειξη θα θεωρήσουμε τις ίδιες δύο περιπτώσεις :
Για την περίπτωση (i) όπως πριν, είναι άμεσο ότι $\Psi_\lambda'(u), u)_V \to \infty$.
Για την περίπτωση (ii), πάλι από το μεταβολικό χαρακτηρισμό του λ_1^+ και τον ορισμό του $\psi(t)$ έχουμε ότι

$$\Psi_\lambda'(u), u)_V = (J(u),u)_V - \lambda(G(u),u)_V + \psi'(\frac{1}{p}(J(u),u)_V)((J(u),u)_V) =$$

$$(J(u),u)_V - \lambda_1^+(G(u),u)_V +$$

$$+\psi'(\frac{1}{p}(J(u),u)_V)[(J(u),u)_V) - \frac{\lambda_1^+ - \lambda}{\psi'(\frac{1}{p}(J(u),u)_V)}(G(u),u)_V] \geq$$

$$\geq \frac{2\delta}{\lambda_1^+}[(J(u),u)_V) - 2K] \cdot [(J(u),u)_V) - \frac{\lambda_1^+}{2}]G(u),u)_V \to \infty$$

(για $\| u \|_V \to \infty$).
Οπότε από το Θεώρημα 1.2.1 έπεται ότι

$$Deg[\Psi'_\lambda; B_\kappa(0), 0] = 1. \tag{3.8}$$

Επιλέγουμε κ αρκετά μεγάλο ώστε $\pm u_1^+ \in B_\kappa(0)$.
Τώρα, από την προσθετικότητα του τοπολογικού βαθμού (βλ.Κεφ.1, Θεωρ. 1.2.3) και τις (3.7),(3.8) έχουμε ότι

$$Ind(\Psi'_\lambda, 0) = -1$$

Επιπλέον, από τον ορισμό του ψ έχουμε ότι

$$Deg[\tilde{A}_\lambda; B_r(0), 0] = Ind(\Psi'_\lambda, 0), \tag{3.9}$$

για r αρκετά μικρό.
Από τις (3.8),(3.9) και ότι $Deg[\tilde{A}_\lambda; B_r(0), 0] = 1, \lambda \in (0, \lambda_1^+)$ (που είδαμε ν-ωρίτερα) προκύπτει ότι

$$Ind(\tilde{A}_\lambda, 0) = 1, \lambda \in (0, \lambda_1^+),$$
$$Ind(\tilde{A}_\lambda, 0) = -1, \lambda \in (\lambda_1^+, \lambda_1^+ + \delta) \tag{3.10}$$

Από το αναλλοίωτο της ομοτοπίας για τον τοπολογικό βαθμό (βλ.Κεφ.1, Θεωρ. 1.2.1), έπεται ότι για r αρκετά μικρό,

$$Deg[A_\lambda; B_r(0), 0] = Deg[\tilde{A}_\lambda; B_r(0), 0]$$

για $\lambda \in (0, \lambda_1^+ + \delta)$. Άρα, από την (3.10) είναι

$$Ind(A_\lambda, 0) = 1, \lambda \in (0, \lambda_1^+),$$

$$Ind(A_\lambda, 0) = -1, \lambda \in (\lambda_1^+, \lambda_1^+ + \delta).$$

Για άτοπο, έστω ότι το λ_1^+ δεν είναι σημείο διακλάδωσης.
Τότε, από το Λήμμα 3.3.1, υπάρχουν τέτοια $\mathcal{O}$ και δ όπως στο Λήμμα, ώστε

$$\mathcal{O}_\lambda = \{u \in V : (\lambda, u) \in \mathcal{O}\}$$

για $0 <\mid \lambda - \lambda_1^+ \mid \leq \delta$ και $(\lambda, 0)$ απομονωμένη λύση του (3.1).
Συνεπώς, υπάρχει $\rho(\lambda) > 0$ τέτοιο ώστε η $(\lambda, 0)$ να είναι η μοναδική λύση του (3.1) στο $\{\lambda\} \times \bar{B}_\rho(\lambda$.
Έστω

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda_1^+ + \delta), & \lambda \geq \lambda_1^+ + \delta \\ \rho(\lambda_1^+ - \delta), & \lambda \leq \lambda_1^+ - \delta \end{cases}$$

Επιλέγοντας το $\rho(\lambda_1^+ \pm \delta)$ κατάλληλα μικρό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για $\mid \lambda - \lambda_1^+ \mid \geq \delta$,

$$\bar{B}_{\rho(\lambda)} \cap \mathcal{O} = \emptyset.$$

Για $\lambda \neq \lambda_1^+$, δεν υπάρχουν λύσεις του (3.1) στο $\{\lambda\} \times \partial(\mathcal{O}_\lambda - \bar{B}_{\rho(\lambda)})$ και άρα ο τοπολογικός βαθμός $Deg[A_\lambda, \mathcal{O}_\lambda - \bar{B}_{\rho(\lambda)}]$ είναι καλά ορισμένος.

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η ακόλουθη :
Θα δείξουμε ότι $Deg[A_\lambda, \mathcal{O}_\lambda - \bar{B}_{\rho(\lambda)}] = 0, \lambda \neq \lambda_1^+$.
Θα δείξουμε ότι για κάθε λ κοντά στο λ_1^+, (αλλά πάντα $\lambda \neq \lambda_1^+$) $Deg[A_\lambda, \mathcal{O}_\lambda - \bar{B}_{\rho(\lambda)}] \neq 0$ που όμως αντίκειται στο A, άρα δεν υπάρχει τέτοιο $\mathcal{O}$ άρα το λ_1^+ είναι σημείο διακλάδωσης.
Θα διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\lambda > \lambda_1^+$ και $\lambda < \lambda_1^+$. Θα αποδείξουμε το A για την πρώτη περίπτωση και η δεύτερη έπεται ανάλογα.
Επιλέγουμε λοιπόν $\lambda^* > \lambda$ τόσο μεγάλο ώστε ($\nu, u \in \mathcal{O}$ συνεπάγεται ότι $\nu < \lambda^*$).
Έστω $\rho = \inf\{\rho(\theta) : \lambda \leq \theta \leq \lambda^*\} > 0$.

Τότε,

1. *το $U = \mathcal{O} - [\lambda, \lambda^*]$ είναι ένα ανοιχτό, φραγμένο σύνολο στον $\hat{E} = [\lambda, \lambda^*] \times E$ και*

2. $A(\theta,\lambda) \neq 0, (\theta,\lambda) \in \partial U$
Τότε, από το αναλλοίωτο της ομοτοπίας για τον τοπολογικό βαθμό έπεται ότι

$$Deg[A(\theta), \mathcal{O}_\theta - \bar{B}_\rho] = c, \theta \in [\lambda, \lambda^*] \tag{3.11}$$

Αλλά $\mathcal{O}_{\lambda^*} - \bar{B}_\rho = \emptyset$, *οπότε*

$$Deg[A(\lambda^*), \mathcal{O}_{\lambda^*} - \bar{B}_\rho] = 0 \tag{3.12}$$

και άρα από τις (3.11) και (3.12) παίρνουμε ότι

$$Deg[A(\lambda), \mathcal{O}_\lambda - \bar{B}_\rho] = 0 \tag{3.13}$$

Από την (3.13), την προσθετικότητα του τοπολογικού βαθμού και το ότι ο $A(\lambda)$ δεν έχει ρίζες στο $\{\lambda\} \times (B_\rho - \bar{B}_{\rho(\lambda)})$
παίρνουμε τελικά ότι

$$Deg[A(\lambda), \mathcal{O}_\lambda - \bar{B}_{\rho(\lambda)}] = 0, \lambda > \lambda_1^+.$$

Πάλι από το αναλλοίωτο της ομοτοπίας για τον τοπολογικό βαθμό έχουμε ότι

$$Deg[A(\lambda), \mathcal{O}_\lambda] \equiv c, \mid \lambda - \lambda_1^+ \mid < \epsilon \tag{3.14}$$

Έστω $\lambda_1^+ - \epsilon < \underline{\lambda} < \lambda_1^+ < \bar{\lambda} < \lambda_1^+ + \epsilon$. *Από την προσθετικότητα του τοπολογικού βαθμού και το ότι η $(\lambda, 0)$ είναι απομονωμένο μηδενικό του $A(\lambda)$:*

$$Deg[A(\lambda), \mathcal{O}_\lambda] = Ind[A(\lambda), (\lambda, 0)] + Deg[A(\lambda), \mathcal{O}_\lambda - \bar{B}_\rho(\lambda)]$$

$$Deg[A(\bar{\lambda}), \mathcal{O}_{\bar{\lambda}}] = Ind[A(\bar{\lambda}), (\bar{\lambda}, 0)] + Deg[A(\bar{\lambda}), \mathcal{O}_{\bar{\lambda}} - \bar{B}_\rho(\bar{\lambda})] \tag{3.15}$$

Από το A και τις (3.15) παίρνουμε :

$$Deg[A(\lambda), \mathcal{O}_\lambda] = Ind[A(\lambda), (\lambda, 0)]$$

$$Deg[A(\bar{\lambda}), \mathcal{O}_{\bar{\lambda}}] = Ind[A(\bar{\lambda}), (\bar{\lambda}, 0)].$$

Από την (3.14) τότε :

$$Ind[A(\lambda),(\lambda,0)] = Ind[A(\bar{\lambda}),(\bar{\lambda},0)]$$

Αλλά από τον υπολογισμό του Βήματος 2 :

$$Ind[A(\lambda),(\lambda,0)] = -Ind[A(\bar{\lambda}),(\bar{\lambda},0)] \neq 0$$

άρα καταλήξαμε σε άτοπο, και άρα το λ_1^+ είναι σημείο διακλάδωσης για το (3.1).

Θεώρημα 3.4.2 *Με τις υποθέσεις $(f1)-(f3), g \in L^\infty(R^N) \cap L^{N/p}(R^N)$, $g^\pm \not\equiv 0$, το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει.*
Επιπλέον, η λ_1^- του προβλήματος

$$-div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda g \mid u \mid^{p-2} u, R^N, \int g \mid u \mid^p dx < 0$$

είναι σημείο διακλάδωσης για το (3.1).

Απόδειξη 3.4.2 *Με αυτές τις υποθέσεις, ο τελεστής G_2 είναι κι αυτός συμπαγής.Οπότε με την αντικατάσταση $g \to -g$ στο (3.1), εφαρμόζεται άμεσα το Θεώρημα 3.3.1.*

Παρατήρηση 3.4.1 *Υποθέτωντας*

$$lim_{u\to 0}\frac{f(\lambda,x,u)}{w(x) \mid u \mid^{p-2} u} = 0,$$

μπορούμε να μιλήσουμε για διακλάδωση από το άπειρο.Πράγματι, έστω $v = u\cdot \parallel u \parallel_V^{-p/(p-1)}$. Τότε $u = v\cdot \parallel v \parallel_V^{-p}$. Πολλαπλασιάζοντας την (3.1) με $\parallel u \parallel_V^{-p}$ παίρνουμε

$$-\Delta_p v = \lambda g(x) \mid v \mid^{p-2} v + \parallel v \parallel_V^{-p/(p-1)} f(\lambda, x, \parallel v \parallel_V^{-p} v). \tag{3.16}$$

Όμως

$$\frac{\parallel v \parallel_V^{-p/(p-1)} f(\lambda,x,\parallel v \parallel_V^{-p} v)}{w(x) \mid v \mid^{p-2} v} = \frac{f(\lambda,x,u)}{w(x) \mid u \mid^{p-2} u} \overset{v\to 0}{\to} 0$$

Συνεπώς, η $(f3)$ ικανοποιείται για την (3.11).
Ορίζουμε τώρα ένα νέο τελεστή $\hat{A}_\lambda$ ως εξής :

$$\hat{A}_\lambda(v) = \frac{A_\lambda(u)}{\parallel u \parallel_V^p} = J(v) - \lambda G(v) - \parallel v \parallel_V^{p/(p-1)} F(\lambda, \parallel v \parallel_V^{-p} v).$$

Παρατηρούμε ότι η απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 μπορεί άμεσα να εφαρμοστεί και για αυτή την περίπτωση και άρα το $(\lambda_1^+, 0)$ *είναι σημείο διακλάδωσης για το πρόβλημα που αντιστοιχεί στον* $\hat{A}_\lambda$. *Επομένως το* (λ_1^+, ∞) *είναι όντως σημείο διακλάδωσης για το (3.1).*

3.5 Ιδιότητες της λύσης

Για μια ολοκληρωμένη εικόνα του αποτελέσματος διακλάδωσης, σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε την ομαλότητα και την απόσβεση της λύσης και θα δώσουμε πληροφορίες για το πρόσημο της λύσης πάνω στους κλάδους της διακλάδωσης. Εδώ αντί για την υπόθεση $(f2)$ θα υποθέσουμε την
$(f2)'$ *Υπάρχει μια μη αρνητική $\tilde{\rho}(x) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε*

$$| f(\lambda, x, u) | \leq c(\lambda)\tilde{\rho}(x) | u |^{\gamma_1}$$

για κάθε $\lambda, u \in \mathbb{R}$ και σχεδόν για όλα τα $x \in \mathbb{R}^N$.
Τότε, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα :

Θεώρημα 3.5.1 *Έστω $1 < p < N$ και ότι ισχύουν οι γνωστές υποθέσεις (τώρα με την $(f2)'$).Τότε για κάθε ασθενή λύση του (3.1) με $\lambda \geq 0$ έχουμε :*

1. *$u \in L^r(\mathbb{R}^N), p^* \leq r \leq \infty$,*
2. *η $u(x)$ φθίνει ομοιόμορφα καθώς $| x | \to \infty$. Επιπλέον,*
3. *για κάθε $K > 0, u \in C^{1,\alpha}$ για κάποιο $\alpha = \alpha(K) \in (0,1)$*

Απόδειξη 3.5.1 *Έστω u μια ασθενής λύση του (3.1). Για $u^+(x) = max\{u(x), 0\}$ και $M > 0$, ορίζουμε*

$$v_M(x) = min\{u^+(x), M\}$$

.
Επιλέγουμε $\phi = v_M^{\kappa p+1}, \kappa > 0$ σαν συνάρτηση δοκιμής στην ασθενή διατύπωση του (3.1) :

$$(\kappa p + 1)\int v_M^{\kappa p} | \nabla v_M |^p \, dx + \lambda \int g^-(x) | u^+ |^{p-2} u^+ v_M^{\kappa p+1} dx =$$

$$\lambda \int g^+(x) | u^+ |^{p-2} u^+ v_M^{\kappa p+1} dx + \int f(\lambda, x, u^+) u^+ v_M^{\kappa p+1} dx \qquad (3.17)$$

Για το αριστερό μέλος της (3.12) έχουμε (από την 1.1)

$$(\kappa p + 1)\int v_M^{\kappa p} | \nabla v_M |^p \, dx = \frac{\kappa p + 1^p}{\kappa + 1} \int | \nabla (v_M)^{\kappa+1} |^p \, dx \geq$$

$$\geq \frac{\kappa p + 1^p}{\kappa + 1} (\int v_M^{(\kappa+1)p^*} dx)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Για το δεξί μέλος, από $q \in (p,p^*)$, τη (g_1) και λόγω $\frac{N}{p} < \frac{q}{q-p}$, μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής :

$$\lambda\cdot\Big(\int g^{+\frac{q}{q-p}}dx\Big)^{\frac{q-p}{p}}\cdot c(\lambda)\Big(\int \tilde{\rho}(x)^{\gamma_1+\delta}dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_1+\delta}}\cdot\Big(\int u^{+}(x)^{p^*}dx\Big)^{\frac{q-p(\gamma_1+\delta)'}{q(\gamma_1+\delta)'}}\cdot\Big(\int u^{+}(x)^{(\kappa+1)q}dx\Big)^{\frac{p}{q}}$$

Από την (1.1), την $(f_2)'$ προκύπτει ότι η παραπάνω παράσταση είναι πεπερασμένη και υπάρχει μια σταθερά $c = c(\lambda) > 0$ τέτοια ώστε

$$\| u_M \|_{(\kappa+1)p^*} \leq \Big(\frac{\kappa+1}{(\kappa p+1)^{\frac{1}{p}}}\Big)^{\frac{1}{\kappa+1}} \| u^+ \|_{(\kappa+1)q} .$$

Επαγωγικά, με $\kappa_n + 1 = \frac{{p_s^*}^n}{q}$ (βλ.σελ 115, [24]) καταλήγουμε ότι

$$\| u_M \|_{(\kappa_n+1)p^*} \leq c \| u \|_{p^*} \tag{3.18}$$

και για $\kappa_n \to \infty$ από την (1.1) και την ασθενή σύγκλιση $u_n \xrightarrow{w} u, X$ (άρα φραγμένη στον X) έπεται ότι

$$\| u \|_{r_n} \leq C$$

για $r_n = (\kappa_n + 1)p^* \to \infty$, με κάποιο $C > 0$.

Θα δειξουμε πρώτα ότι $u_M \in L^\infty$.Πράγματι, έστω ότι $\| u_M \|_\infty > c \| u_M \|_{p^*}$. Τότε, υπάρχει ένα $\eta > 0$ και σύνολο (A) θετικού μέτρου στον $\mathbb{R}^N$ ώστε $u_M(x) \geq c \| u_M \|_{p^*} + \eta$, για $x \in (A)$. Τότε έπεται ότι

$$\lim \inf_{r_n\to\infty}\Big(\int | u_M |^{r_n} dx\Big)^{\frac{1}{r_n}} \geq \lim \inf_{r_n\to\infty}\Big(\int_{(A)} | u_M |^{r_n} dx\Big)^{\frac{1}{r_n}} \geq$$

$$\geq \lim \inf_{r_n\to\infty}(c \| u_M \|_{p^*} + \eta) \mid (A) \mid^{\frac{1}{r_n}} = c \| u_M \|_{p^*} + \eta$$

που αντιφάσκει με την (3.13). Άρα

$$\| u_M \|_\infty \leq c \| u_M \|_{p^*} \ (< \infty)$$

οπότε

$$u_M \in L^\infty. \tag{3.19}$$

Τελικά, από τις (3.13, 3.14) παίρνουμε ότι $u_M \in L^r(\mathbb{R}^N), p^* \leq r \leq \infty$ *και έχουμε ένα ομοιόμορφο όριο για τις αντίστοιχες νόρμες (ανεξάρτητο του* r*). Και άρα* $u^+ \in L^r(\mathbb{R}^N), p^* \leq r \leq \infty$ *(βλ.ορισμό του* u_M*) και με την ίδια διαδικασία έχουμε ότι και το* $u^- \in L^r(R^N)$.
Τέλος, άμεσα από τα Θεωρήματα 1.3.2 και 1.3.3 έχουμε τον ισχυρισμό για την απόσβεση της u *όταν* $| x | \to \infty$ *και την ομαλότητα αντίστοιχα.*

Έστω τώρα $\phi^* \in V^*$ *σταθεροποιημένο και*

$$(\phi^*, u_1^+)_V = 1,$$

και για $\tau \in (0,1)$ *ορίζουμε τα σύνολα*

$$K_\tau^+ = \{(\lambda, u) \in E : (\phi^*, u_1^+)_V > \tau \parallel u \parallel_V\},$$

$$K_\tau^- = \{(\lambda, u) \in E : (\phi^*, u_1^+)_V < -\tau \parallel u \parallel_V\}.$$

Οι $K_\tau^\pm$ *είναι κώνοι με κορυφή στο 0 που περιέχουν τα* $(\lambda, u_1), (\lambda, -u_1)$ *αντίστοιχα, και* τ *είναι ένα μέτρο του " ανοίγματος " αυτών των κώνων.*
Επιπλέον, έστω $B_\eta(\lambda_1^+, 0)$ *η μπάλα στο* E *με κέντρο το σημείο* $(\lambda_1^+, 0)$ *και ακτίνα* η.

Θεώρημα 3.5.2 *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.4.1, έστω επιπλέον* $\delta > 0$ *ώστε η*

$$J(u) = \lambda_1^+ G(u) + F(\lambda_1^+, u)$$

να μην έχει μη μηδενική λύση $u \in V, 0 < \parallel u \parallel_V < \delta$. *Τότε υπάρχουν μεγιστικά (υπό την έννοια του εγκλεισμού) συνεκτικά σύνολα* C^+, C^- *του* $\{ (\lambda, u) \in E :$ *λύνει το (3.1) ασθενώς, με* $u \neq 0 \}$ *που περιέχουν το* $(\lambda_1^+, 0)$ *στο κλείσιμό τους,*

$$C^\pm \cap B_\eta(\lambda_1 +, 0) \subset K_\tau^\pm \tag{3.20}$$

$(\eta = \eta(\tau) \to 0,$ *για* $\tau \to 1)$, *και ώστε* $C^\pm$ *είναι μη φραγμένα στο* E.
Επιπλέον,$\lambda > \lambda_1^+$ *για κάθε* $(\lambda, u) \in C^\pm$ *και* $u > 0, (\lambda, u) \in C^+$ *και*
$u < 0, (\lambda, u) \in C^-$.

Θεώρημα 3.5.3 *Από το Θεώρημα 2 στο [16] παίρνουμε την ύπαρξη μεγιστικών συνεκτικών συνόλων* $C^{\pm}$ *του*
$\{\ (\lambda, u) \in E : \text{λύνει το (3.1) ασθενώς},\ u \neq 0\ \}$ *που περιέχουν το* $(\lambda_1^+, 0)$ *στο κλείσιμό τους, που ικανοποιούν την (3.15) και είτε είναι μη φραγμένα στο* E *ή περιέχουν στο κλείσιμό τους ένα κοινό σημείο του* E *διαφορετικό από το* $(\lambda_1^+, 0) \in E$. *Θα δείξουμε τώρα ότι το τελευταίο δεν μπορεί να ισχύει.*
(Να σημειώσουμε ότι $\lambda > \lambda_1^+$ *για κάθε* $(\lambda, u) \in C^{\pm}$ *από το γεγονός ότι* $J(u) = \lambda_1^+ G(u) + F(\lambda_1^+, u)$ *έχει μη μηδενική λύση για* $\lambda = \lambda_1$.*)*

Απόδειξη 3.5.2 *Έστω* $(\lambda_n, u_n) \in C^+$ *μια ακολουθία τέτοια ώστε* $\lambda_n \to \lambda_1$ *και* $\| u_n \|_V \to 0, \| u_n \|_V \neq 0$.
Ορίζοντας $\tilde{u} = \frac{u_n}{\|u_n\|_V}$, *λόγω του ότι η* λ_1 *είναι απλή και τις* $(f2)', (f3)$ *μπορούμε να υποθέσουμε ότι* $\tilde{u_n} \stackrel{w}{\to} u_1, V$.
Από το Λήμμα 3.1.1 και χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα όπως στην απόδειξη του Λήμματος (2.5.1) έπεται ότι $\tilde{u_n} \to u_1$.
Τώρα, θα δείξουμε ότι $u_n > 0$ *για αρκούντως μεγάλο* n.
Ορίζουμε $\Omega_n^- = \{x \in \mathbb{R}^N : u_n < 0\}$. *Τότε από την*

$$\int | \nabla u_n^- |^p\, dx + \lambda_n \int g^- \mid u_n^- |^p\, dx = \lambda_n \int g^+ \mid u_n^- |^p\, dx - \int f(\lambda_n, x, u_n) u_n^- dx$$

και από τις ανισότητες $Hardy, Sobolev$ *και* $H\ddot{o}lder$, *και τις υποθέσεις για τη* g *και την* $(f2)'$, *έπεται ότι*

$$C_1 \leq C_2 \Big(\int_{\Omega_n{}^-} g^{+\frac{N}{p}} dx\Big)^{\frac{p}{N}} + C_3 \Big(\int_{\Omega_n{}^-} \tilde{\rho}^{\gamma_1} dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_1}} \| u_n^- \|_X^{\gamma+1-p}.$$

Αλλά για $\| u_n \|_X \to 0, g^+ \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N), \tilde{\rho} \in L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^N)$ *και από το ότι οι σταθερές στην προηγούμενη είναι ανεξάρτητες από το* u_n *έχουμε ότι για* $K_0 > 0$ *αρκετά μεγάλο*

$$\mu(\Omega_n^- \cap B_K(0)) \geq c$$

για κάθε $K > K_0$, *όπου και η τελευταία σταθερά είναι ανεξάρτητη από τα* λ_n, u_n.
Χρησιμοποιώντας (ξανά από το Λήμμα 2.5.1) το ίδιο επιχείρημα που βασίζεται στο Θεώρημα του Egorov (Θεωρ. 1.3.6), έπεται ότι $\tilde{u_n}$ *(και άρα η* u_n *) είναι μη αρνητική στον* $\mathbb{R}^N$ *για* n *αρκετά μεγάλο. Συνεπώς* $u \geq 0$ *για κάθε* $(\lambda, u) \in C^+ \cap B_\eta(\lambda_1, 0)$ *για αρκετά μικρό* η.
Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχει $(\lambda^*, v^*) \in C^+$ *τέτοιο ώστε* $v^* \not\equiv 0$, *έχουμε ότι* $v^* \geq 0$ *και* $v^*(x_0) = 0$ *για κάποιο* $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Όμως, αυτό αντίκειται στην ανισότητα Harnack (Θεωρ. 1.3.1) . Οπότε $u > 0$ *για κάθε* $(\lambda, u) \in C^+$ *αφού το* C^+ *είναι συνεκτικό στον* E.
Ομοίως $u < 0, \lambda > \lambda - 1$, *για κάθε* $(\lambda, u) \in C^-$.
Αυτό αποκλείει τη δεύτερη πιθανότητα και άρα οι κλάδοι $C^\pm$ *θα είναι μη φραγμένοι στον* E.

Παρατήρηση 3.5.1 *Για* $1 < p < N$, *αν ισχύουν οι* $(f1), (f2)', (f3)$ *και* $g^\pm \not\equiv 0, g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$ *παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα και για* $\lambda_1^* < 0$.

Παράδειγμα 3.5.1 *Έστω η εξίσωση*

$$-div(\mid \nabla u \mid^p \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u - c(\lambda)\tilde{\rho}(x) \mid u \mid^{\gamma-1} u, x \in \mathbb{R}^N,$$

η g *ικανοποιεί τις* $(g2), (g4)$ *και* $\gamma, \tilde{\rho}(x) > 0$ *όπως στη συνθήκη* $(f2)'$ *και* $c(\lambda) > 0$ *είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο* $\mathbb{R}$.
Τότε, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.4.1 ικανοποιούνται. Πράγματι, από το μεταβολικό χαρακτηρισμό της λ_1 *έχουμε ότι*

$$\int \mid \nabla u \mid^p dx - \lambda \int g \mid u \mid^p dx > 0$$

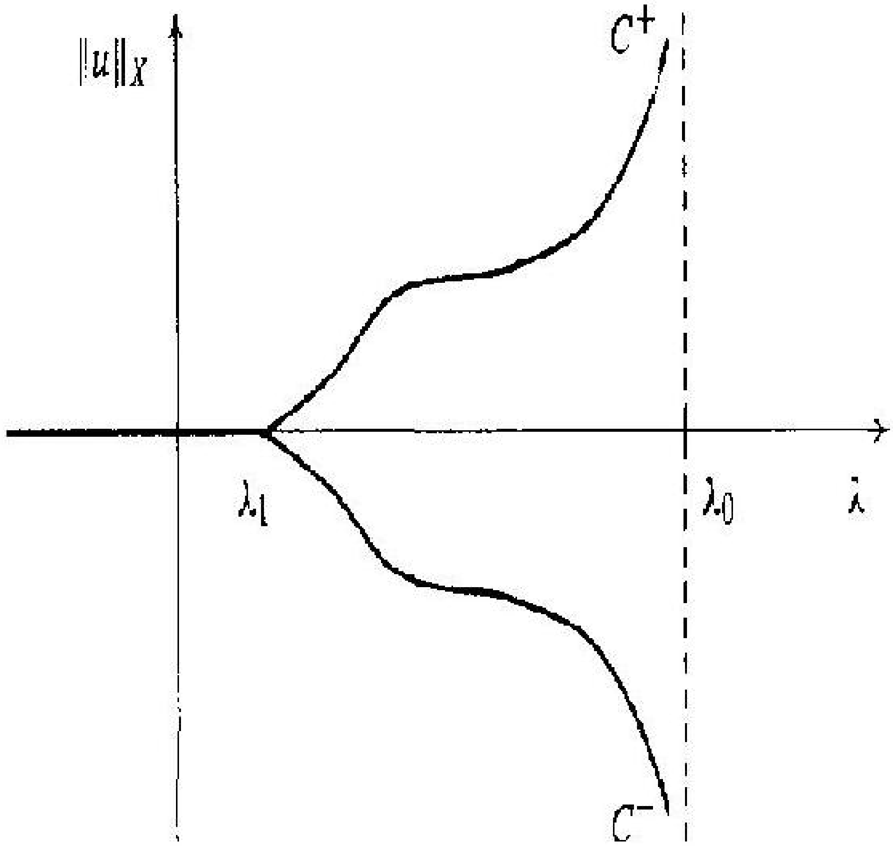
και

$$\int f(\lambda, x, u) u dx = -c(\lambda) \int \tilde{\rho} \mid u \mid^{\gamma+1} dx < 0,$$

για κάθε $\lambda \in [\lambda_1 - \delta, \lambda_1)$ *και* $u \in V$ *με* $u \not\equiv 0$ *και κάποιο* $\delta > 0$.
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $(\lambda, u) \in C^+$ *αν και μόνο αν* $(\lambda, -u) \in C^-$ *(συμμετρικοί κλάδοι)*
Έστω ότι $c(\lambda_0) = 0$ *σε κάποιο σημείο* $\lambda_0 > \lambda_1$. *Τότε, από το Θεώρημα 3.4.1, το σύνολο* C^+*(και το ίδιο και το* C^-*) εκρήγνυνται (στον άξονα* $\| u \|_V$*,βλ.σχήμα).*
Άρα, αφού η

$$-div(\mid \nabla u \mid^p \nabla u) = \lambda_0 g(x) \mid u \mid^{p-2} u$$

δεν μπορεί να έχει θετική λύση στον R^N *(αφού η ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή* $\lambda_0 > \lambda_1$ *αλλάζει πρόσημο, όπως έχουμε δείξει), η παράμετρος* λ *δεν μπορεί να περάσει την τιμή* λ_0 *και συνεπώς η* $\| u \|_V$ *είναι μη φραγμένη κατά μήκος των κλάδων* $C^\pm$.



Παράδειγμα 3.5.2 *Έστω*

$$g(x) = \sin(| x |)(1+ | x |)^{-\alpha}, f(x,u) = (1+ | x |)^{-a} | u |^{b-2} u,$$

όπου

$$1 < p < N, \alpha > p, p < b < \frac{Np}{N-p}, a > \frac{N-(N-p)b}{p}.$$

Τότε το πρόβλημα

$$-div(| \nabla u |^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) | u |^{p-2} u + f(x,u), x \in \mathbb{R}^N \tag{3.21}$$

έχει δύο θετικούς κλάδους λύσεων που περιλαμβάνουν στο κλείσιμό τους τα $(\lambda_1^+, 0), (\lambda_1^-, 0)$ *αντίστοιχα, όπου* $\lambda_1^+ > 0$, $\lambda_1^- < 0$ *και* $\lambda_1^\pm$ *είναι η κυρίαρχη ιδιοτιμή του προβλήματος ιδιοτιμών*

$$-div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u, x \in \mathbb{R}^N$$

με $\int (\pm g) \mid u \mid^p dx > 0$.
Επιπλέον, κάθε λύση u του (3.21) ανήκει στον $L^q(\mathbb{R}^N)$,
$\frac{Np}{N-p} \leq q \leq \infty$ *και το u εξασθενεί ομοιόμορφα καθώς το* $\mid x \mid \to \infty$.

3.6 Σχετικά Αποτελέσματα - Προτάσεις για Περαιτέρω Μελέτη

Για το πρόβλημα της διακλάδωσης, στο [24] μελετάται το ίδιο πρόβλημα με τον όρο $a(x)$ στο κύριο μέρος της ΜΔΕ, ο οποίος ικανοποιεί τις υποθέσεις (a) της ενότητας 2.6 και αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση η κυρίαρχη ιδιοτιμή λ_1^+ είναι ολικό σημείο διακλάδωσης για το πρόβλημα ιδιοτιμών. Με τις επιπλέον υποθέσεις $g^{\pm} \not\equiv 0, g^- \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$, δείχνεται ότι και το $\lambda_1^* < 0$ είναι ολικό σημείο διακλάδωσης. Στην ίδια εργασία, πάλι με την υπόθεση ότι υπάρχει $\epsilon > 0 : g^- \geq \epsilon > 0$, δείχνεται ότι τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν και για $p \geq N$. Σε αυτή την περίπτωση, η λύση $u(x)$ ανήκει στον $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ για $p > N$, και για την περίπτωση $p = N$, προκύπτει από την εμφύτευση Sobolev, ότι η λύση $u(x)$ ανήκει στον $L^r(\mathbb{R}^N), r \geq N$.
Παρόμοια αποτελέσματα, στους ομογενείς χώρους Sobolev
$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in (L^p(\mathbb{R}^N))^N$, δίνονται στην εργασία [26], όπου παρουσιάζεται η πρώτη ολοκληρωμένη απόδειξη για την απλότητα της πρώτης ιδιοτιμής, χωρίς τη χρήση της ταυτότητας του Picone. Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα για την εξίσωση, οι συγγραφείς αποδεικνύουν τα ανάλογα και για συστήματα της μορφής:

$$-\Delta_p u = \lambda a(x) \mid u \mid^{p-2} u + \lambda b(x) \mid u \mid^{\alpha-1} u \mid v \mid^{\beta+1}$$

$$-\Delta_q u = \lambda b(x) \mid u \mid^{\alpha+1} \mid v \mid^{\beta-1} v + \lambda d(x) \mid v \mid^{q-2} v,$$
$$u, v > 0, \lim_{|x| \to +\infty} u(x) = \lim_{|x| \to +\infty} v(x) = 0.$$

Στην εργασία [22] των Drabek-Huang γίνεται μελέτη της ακόλουθης διαταραγμένης εκδοχής του γνωστού προβλήματος. Συγκεκριμένα, οι συγγραφείς μελετούν το πρόβλημα διακλάδωσης για την

$$-div(a(x,u) \mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u) = \lambda g(x) \mid u \mid^{p-2} u + f(\lambda, x, u), x \in \mathbb{R}^N.$$

Να σημειώσουμε ότι αυτή η περίπτωση που μελετήθηκε, λόγω της μορφής της συνάρτησης $a(x,u)$, επιτρέπει και περιπτώσεις με εκφυλισμούς και ιδιάζοντα σημεία, και φυσικά έχει επιπλέον δυσκολίες. Τελικά, αποδεικνύονται τα παρακάτω αποτελέσματα στο χώρο X που ορίζεται ως το κλείσιμο του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

ως προς τη νόρμα

$$\parallel u \parallel_X = (\int_{\mathbb{R}^N} \upsilon(x) \mid \nabla u \mid^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega(x) \mid u \mid^p dx)^{\frac{1}{p}},$$

όπου $\upsilon(x) = \frac{1}{1+|x|)^{\beta}}, \omega(x) = \frac{1}{1+|x|)^{\alpha}}$. *Αποδεικνύεται ότι :*

1. *Το πρόβλημα έχει ένα ζεύγος* (λ_1, u_1) *από μια κυρίαρχη ιδιοτιμή και την αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση, με* $\lambda_1 > 0, 0 < u_1 \in X \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.
2. *Η* λ_1 *είναι μοναδική και απλή. Με κάποιες υποθέσεις για το* g^- *αποδεικνύουν ένα ανάλογο αποτέλεσμα και για* $\lambda_1^* < 0$.
3. *Κάθε ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή* $\lambda_0 : 0 < \lambda_0 \neq \lambda_1$, *αλλάζει πρόσημο στον* $\mathbb{R}^N$. *(Ομοίως και για* $0 > \lambda_0 \neq \lambda_1^*$.*)*
4. *Η κυρίαρχη ιδιοτιμή* $\lambda_1 > 0$ *(*$\lambda_1^* < 0$*) είναι απομονωμένη.*
5. *Η κυρίαρχη ιδιοτιμή* $\lambda_1 > 0$ *είναι ένα τοπικό σημείο διακλάδωσης. (ανάλογο αποτέλεσμα και για τη* $\lambda_1^* < 0$*)*
6. *Υποθέτωντας ότι* $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^{N+1})$, *οι λύσεις πάνω στους κλάδους διακλάδωσης που ανήκουν σε αρκούντως μικρές γειτονιές του* $(\lambda_1, 0) \in E$ *διατηρούν πρόσημο στον* $\mathbb{R}^N$. *Επιπλέον,κάθε τέτοια λύση ικανοποιεί* $u \in C^{1,\alpha}$ *για κάθε* $K > 0$, *με κάποιο* $\alpha = \alpha(K) \in (0, 1)$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον επίσης, παρουσιάζει το ερώτημα αν μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για το πρόβλημα

$$-\Delta_p u(x) = \lambda g(x) f(u)$$

με $f(u)$ *όσο το δυνατόν πιο γενική συνάρτηση.*

Βιβλιογραφία

[1] *R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press 1975*

[2] *W.Allegretto, Principal eigenvalues for indefinite-weight elliptic problems in $\mathbb{R}^N$, Proc.Amer.Math. Soc. 116 (1992),701-706*

[3] *W.Allegretto, Y.X. Huang, Eigenvalues of the indefinite p-Laplacian in weighted $\mathbb{R}^N$ spaces,Funkcial.Ekvac 38 (1995),233-242*

[4] *W.Allegretto, Y.X. Huang, A Picone's Identity for the p-Laplacian and Applications,Nonlinear Analysis 32 (1998),819-830*

[5] *A.Ambrosetti, A.Malchiodi, Perturbations Methods and Semilinear Elliptic Problems,Birkhauser,2006*

[6] *A.Anane, Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids.C.R.Acad.Sci.Paris 305 I(1987) 725-728*

[7] *J.Appell, P.D. Zabrejko,Nonlinear Superposition Operators,Cambridge University Press,cambridge 1990*

[8] *J.P.G.Azorezo, I.P.Alonso, Existence and uniqueness for the p-Laplacian: nonlinear eigenvalues,Comm. PDE 12 (1987) 1389-1430*

[9] *P.A.Binding, Y.X. Huang, Bifurcation for eigencurves of the p-Laplacian, Diff.Int.Eq. 8 (1995),415-428*

[10] *H.Brezis Συναρτησιακή Ανάλυση : Θεωρία κι Εφαρμογές,Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ,Αθήνα 1997*

[11] *F.E. Browder, Nonlinear Elliptic boundary value problems and the generalized topological degree,Bull.Amer.Math.Soc. 76 (1970),999-1005*

[12] *K.J.Brown, C.Cosner, J. Fleckinger, Principal Eigenvalues for problems with indefinite weight functions on $\mathbb{R}^N$, Proc.Amer.Math. Soc. 109 (1990), 147-156*

[13] *K.J.Brown, B.Opic, Embeddings of weighted Sobolev spaces into spaces of continuous functions,Proc.Roy.Soc.London Ser.A 439 (1992),279-296*

[14] *B.Buffoni, J.Toland, Analytic Theory of Global Bifurcations,Princeton Series,2003*

[15] *M.G.Crandall, P.H.Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, J.Funct.Analysis 8,(1971) 321-340*

[16] *E.N.Dancer, On the structure of the solutions of nonlinear eigenvalue problems, Indiana Univ. Math.J 23 (1974),1069-1076*

[17] *K.Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag 1985*

[18] *M.A.Del Pino, R.Manasevich, Global Bifurcation from the eigenvalues of the p-Laplacian, J.Diff.Eq. 92 (1991),226-251*

[19] *P.Drabek, On the global bifurcation for a class of degenerate equations Ann. Mat.Pura Appl. 159 (1991),1-16*

[20] *P.Drabek, Nonlinear Eigenvalue Problems for the p-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$*, Math. Nach. 173 (1995)*

[21] *P.Drabek, Solvability and Bifurcations of Nonlinear Equations, Pitman Research Notes in Math.,264 Longman, Harlow,(1992)*

[22] *P.Drabek, Y.X.Huang, Perturbed p-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$ *: bifurcation from the principal eigenvalue, J. Math. Anal. Appl. 204 (1996),582-608*

[23] *P.Drabek, Y.X.Huang, Bifurcation Problems for the p-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$*, Trans. Amer.Math.Soc. 349 (1997), 171-188*

[24] *P.Drabek, A.Kufner, F.Nikolosi, Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 5, Berlin 1997*

[25] *P.Drabek, J.Milota, Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations, Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbucher*

[26] *J.Fleckinger, R.Manasevich, N.M.Stavrakakis, F. de Thelin, Principal Eigenvalues for Some Quasilinear Ellptic systems on* $\mathbb{R}^N$*, Adv. Diff. Eq., 2 (1997) 981-1003*

[27] *S.Fu k, A.Kufner, Nonlinear Differential Equations,Elsevier,Amsterdam 1980*

[28] *Y.X. Huang, On Eigenvalue problems of the p-Laplacian with Neumann boundary conditions, Proc.Ameri.Math. Soc. 109 (1990), 177-184*

[29] *Y.X.Huang, Eigenvalues of the p-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$ *with indefinite weight,Comment.Math. Univ.Carolinae 36,3 (1995) 519-527*

[30] *Y.Kabeya, Existence Theorems for quasilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$*, Funkc.Ekvac.35 (1992), 603-616*

[31] *Y.Kabeya, On some quasilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents, Funkc.Ekvac. 36 (1993),385-404*

[32] *H.Kielhofer, Bifurcation Theory: an introduction with applications to PDEs, Springer, 2004*

[33] *M.A.Krasnoselskii, Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Oxford,Pergamon Press,1964*

[34] *I.A.Kuzin, On multiple solvability of some elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$*, Soviet Math.Dokl. 44 (1992),700-704*

[35] *G.Li, S. Yan, Eigenvalue problem for quasilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$*, Comm. Part. Diff. Eq. 14 (1989),1291-1314*

[36] *P.Lindquist, On the equation* $div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u + \lambda \mid u \mid^{p-2} u = 0$*, Proc. Amer.Math.Soc.109 (1990),157-164*

[37] *P.Lindestrauss, L.Tzafriri Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag, Berlin 1977*

[38] *J.-L.Lions, Équations differentiells operationelles et problémes aux limites,Springer-Verlag,Berlin 1961*

[39] *L.Ljusternik, L.Schnirelmann, Méthodes topologiques dans les problmes variationels, Hermann,Paris 1934*

[40] *T.Ma, S.Wang, Bifurcation Theory and Applications,World Scientific,2005*

[41] *M.Otani,T. Teshima, On the first eigenvalue of some quasilinear elliptic equation, Proc. Japan Acad.Ser.A 64 (1988),8-10*

[42] *N.S.Papageorgiou, L.Gasinski, Nonlinear Analysis (Mathematical Analysis and Applications),Volume 9,2005*

[43] *N.S.Papageorgiou, S.Th.Kyritsi-Yiallourou, Handbook of Applied Analysis (Advances in Mechanics and Mathematics) 19,Springer 2009*

[44] *M.Poulou, N.M. Stavrakakis, Eigenvalue problem for a quasilinear elliptic Equation on* $\mathbb{R}^N$*,Int.J,Math.Math.Sc. 2005:18, (2005) 2871-2882*

[45] *P.H. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, J.Funct. Analysis 7 (1971)*

[46] *I.Schindler, Quasilinear elliptic boundary-value problems on unbounded cylinders and a related mountain pass lemma, Arch.Rat.Mech.Anal. 120 (1992),1037-1045*

[47] *J.Serrin, Local Behaviour of Solutions of Quasilinear Equations, Acta Math.,111 (1964) 247-302*

[48] *I.V.Skrypnik, Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems, Teubner, Leipzig 1986*

[49] *N.M. Stavrakakis, Global Bifurcation Results for a Semilinear Elliptic Equation on* $\mathbb{R}^N$ *: the Fredholm case, J.Diff.Eq. 142(1),(1998),97-122*

[50] *M.Struwe,Variational Methods,Springer-Verlang,Berlin 1990*

[51] *A.Szulkin,Ljusternik-Schnirelmann theory on* C^1 *manifolds,Ann.Inst. Henri-Poincaré,Anal.Nonl.5 (1988) 119-139*

[52] *P.Tolksdorf, On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points,Comm.PDE 8 (1983) 773-817*

[53] *P.Tolksdorf, Regularity for a more general class of a general class of quasilinear equations,J.Diff.Eq. Equations 51 (1984),126-150*

[54] *N.Trudinger, On Harnack-type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations,Comm.Pure Appl.Math.20 (1967), 721-747*

[55] *L.S. Yu, Nonlinear p-Laplacian problems on unbounded domains, Proc. Amer. Math.Soc. 115 (1992),1037-1045*

[56] *E.Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed Point Theorems,Springer Verlag New York 1986,Ch.15*