Εθνικο Μεστοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων
Τομεας Φυσικης

Διπλωματικη Εργασια

Lie άλγεβρες και The eightfold way

Σαλμάς Φαίδων

Επιβλέπων
Καθηγητής Κεχαγιάς Αλέξανδρος

National Technical University of Athens

School of Applied Mathematics and Physical Sciences
Department of Physics

Diploma Thesis

Lie algebras and The eightfold way

Salmas Faidon

Supervisor
Professor Kehagias Alex

Υπογραφές Εξεταστικής Επιτροπής

Κεχαγιάς Αλέξανδρος	Ήργες Νικόλαος	Τράκας Νικόλαος
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

Signatures of Examination Committee

Kehagias Alex	Irges Nikos	Tracas Nikos
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

Περίληψη

Θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η παρουσίαση βασικών εννοιών των Lie αλγεβρών και η εφαρμογή τους στην κατανόηση της δομής των αδρονίων μέσα από τη θεωρία the eightfold way. Η εργασία αυτή αποτελείται από τέσσερα επιμέρους κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες των Lie αλγεβρών και επιχειρείται μια αδρή ταξινόμησή τους σε αβελιανές, επιλύσιμες, μηδενοδύναμες, ημιαπλές και απλές. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται η δομή των ημιαπλών αλγεβρών και αναπτύσσονται τα κατάλληλα εργαλεία για την ταξινόμησή τους, η οποία περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο. Στο τρίτο κεφάλαιο αποδεικνύεται ότι η ταξινόμηση των ημιαπλών Lie αλγεβρών ανάγεται στην ταξινόμηση (μέσω των διαγραμμάτων Dynkin) των αντίστοιχών τους συστημάτων ριζών, τα οποία και περιγράφονται. Στο τελευταίο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία αναπαραστάσεων της απλής άλγεβρας $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, η οποία εφαρμόζεται στην περιγραφή και ταξινόμηση των κουάρκ u, d, s, και των παράγωγών τους μεσονίων και βαρυονίων. Τα παραρτήματα της εργασίας αφορούν στη σχέση των μιγαδικών με τις πραγματικές Lie άλγεβρες και στη χρήση των διαγραμμάτων Young στην κατασκευή των μη αναγωγήσιμων αναπαραστάσεων των αλγεβρών $\mathfrak{su}(N)$.

Ευχαριστίες

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου Αλέξανδρο Κεχαγιά για την εμπιστοσύνη του και την ευκαιρία που μου έδωσε να διερευνήσω τη μαθηματική ομορφιά που κρύβεται πίσω από τα επιχειρήματα της φυσικής. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή Νικόλαο Ήργες και τον καθηγητή Νικόλαο Τράκα για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή και την πολύτιμη διδακτική εμπειρία που είχα μαζί τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Επίσης ευχαριστίες οφείλω στους φίλους και συμφοιτητές μου Χριστόφορο Βλάχο, Πάνο Καλύβα, Μάνθο Μπουρνάζο, Κώστα Παλληκάρη και Σωτήρη Χασάπογλου για τη βοήθειά τους και τις χρήσιμες συμβουλές τους σχετικά με τη χρήση του LaTeX.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγικές έννοιες **3**

1.1 Βασικές έννοιες και παραδείγματα 3

1.2 Ιδεώδη και ομομορφισμοί 8

1.3 Μηδενοδύναμες και επιλύσιμες Lie άλγεβρες 19

2 Ημιαπλές Lie άλγεβρες **30**

2.1 Κριτήρια Cartan και μορφή Killing 30

2.2 Πλήρης αναγωγισιμότητα των αναπαραστάσεων 40

3 Ταξινόμηση των ημιαπλών αλγεβρών Lie **48**

3.1 Αναπαραστάσεις της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 48

3.2 Ανάλυση σε χώρους ριζών 52

3.3 Ταξινόμηση με διαγράμματα Dynkin 62

3.3.1 Αξιώματα συστημάτων ριζών 62

3.3.2 Απλές ρίζες και ομάδα Weyl 67

3.3.3 Ταξινόμηση 76

4 Μια εφαρμογή: The eighfold way **86**

4.1 Ιστορική αναδρομή 86

4.2 Αναπαραστάσεις της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 88

4.3 The eighfold way 97

Α′ Μιγαδοποίηση πραγματικών Lie αλγεβρών **104**

Β′ Πινακίδια Young και αναπαραστάσεις της $\mathfrak{su}(N)$ **106**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές έννοιες

Σε αυτό το κεφάλαιο επιχειρείται μια εισαγωγή στις βασικές έννοιες των Lie αλγεβρών. Ορίζονται οι Lie άλγεβρες καθώς και σημαντικές αλγεβρικές ' υποδομές ' τους, όπως αυτές των υποαλγεβρών και των ιδεωδών. Παρουσιάζονται οι κλασσικές Lie άλγεβρες και άλλες κατηγορίες τους (επιλύσιμες, μηδενοδύναμες, παραγωγίσεις). Ορίζονται και μελετώνται κάποια είδη μορφισμών της κατηγορίας των Lie αλγεβρών (ομομορφισμοί, εσωτερικοί αυτομορφισμοί, αναπαραστάσεις, ομομορφισμοί L-προτύπων). Αποδεικνύονται ¨κλασσικά' θεωρήματα της αφηρημένης άλγεβρας για την περίπτωση των Lie αλγεβρών αλλά και τα θεωρήματα των Lie και Engel . Σκοπός αυτού του κεφαλαίου, εν κατακλείδι, είναι να δοθούν οι βάσεις πάνω στις οποίες θα χτιστεί η θεωρία/ταξινόμηση των ημιαπλών αλγεβρών που θα ακολουθήσει στα επόμενα κεφάλαια.

1.1 Βασικές έννοιες και παραδείγματα

Εισαγωγικοί ορισμοί

Ορισμός 1.1.1. *Ένας διανυσματικός χώρος L πάνω από ένα σώμα $\mathbb{F}$ $(=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C})$, εφοδιασμένος με μία πράξη $[\cdot,\cdot]: L\times L\to L$ με $(x,y)\mapsto[x,y],\ \forall x,y\in L$ καλείται* ***άλγεβρα Lie****, αν:*

1. *Η $[\cdot,\cdot]$, που καλείται* ***μεταθέτης****, είναι $\mathbb{F}$-διγραμμική*

2. *$\forall x\in L,\ [x,x]=0$ και*

3. *Ικανοποιείται η* ***ταυτότητα Jacobi*** *, δηλαδή: $\forall x,y,z\in L,\ [x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$.*

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι οι απαιτήσεις 1. και 2. του παραπάνω ορισμού εγγυώνται την αντιμεταθετικότητα του μεταθέτη καθώς $\forall x, y \in L,\ [x+y, x+y] = 0 \Leftrightarrow [x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y] = 0 \Leftrightarrow [x,y] = -[y,x]$, ενώ σημαντική παρατήρηση είναι και το γεγονός ότι οι γραμμικοί τελεστές $\forall x \in L,\ [x,\cdot] : L \to L$ με $y \mapsto [x,y],\ \forall y \in L$ αποτελούν παραγωγίσεις καθώς η απαίτηση 3. είναι ο κανόνας Leibniz. Τέλος, σημειώνεται πως αν $\{e_1, ...e_n\}$ είναι μια βάση της L, τότε ο μεταθέτης προσδιορίζεται πλήρως από τις **σταθερές δομής** $c_{ij}^k \in \mathbb{F},\ \forall i,j,k = 1,2,..,n$ της άλγεβρας L, οι οποίες είναι οι συντεταγμένες, ως προς αυτή τη βάση, του διανύσματος που προκύπτει ως ο μεταθέτης δύο στοιχείων της βάσης αυτής, δηλαδή $[e_i, e_j] = {c_{ij}}^k e_k$. Έτσι έχουμε ότι

$$\forall x, y \in L,\ x = x^i e_i,\ y = y^j e_j,\ x^i, y^i \in \mathbb{F} \Rightarrow$$
$$z = [x,y] = x^i y^j [e_i, e_j] = x^i y^j {c_{ij}}^k e_k \equiv z^k e_k$$

Από τον ορισμό των σταθερών δομής και τα αξιώματα 2. και 3. μιας άλγεβρας Lie προκύπτουν οι εξής ιδιότητες:

1. ${c_{ii}}^k = 0 = {c_{ij}}^k + {c_{ji}}^k$
2. ${c_{ij}}^k {c_{kl}}^m + {c_{jl}}^k {c_{ki}}^m + {c_{li}}^k {c_{kj}}^m = 0$

Δυο άλγεβρες Lie L, L' λέμε ότι είναι **ομομορφικές** αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\phi : L \to L'$ τέτοια ώστε: $\forall x, y \in L,\ \phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ ενώ αν επιπλέον ο ϕ είναι γραμμικός ισομορφισμός τότε οι L, L' λέγονται **ισόμορφες**. Ένας γραμμικός υπόχωρος K μιας άλγεβρας Lie L ονομάζεται **υποάλγεβρα (Lie)** αν είναι κλειστός ως προς το μεταθέτη που επάγεται από την L.

Γραμμικές άλγεβρες Lie

Αν V ένας διανυσματικός χώρος n διαστάσεων πάνω από ένα σώμα $\mathbb{F}$, τότε το σύνολο $End(V) := \{\phi : V \to V : \phi$ γραμμικός$\}$ είναι μια n^2-διάστατη γραμμική άλγεβρα με πράξη πολλαπλασιασμού τη σύνθεση απεικονίσεων, μέσω της οποίας μπορεί να οριστεί ο γνώστος σε όλους μεταθέτης: $\forall x, y \in End(V)\ [x,y] := x \circ y - y \circ x$. Με αυτό τον τρόπο ο $End(V)$ γίνεται άλγεβρα Lie , αφού ικανοποιούνται και τα τρία αξιώματα του ορισμού 1.1, η οποία θα συμβολίζεται $\mathfrak{gl}(V)$ και θα καλείται **γενική γραμμική άλγεβρα**. Όταν επιλεγεί μία βάση για τον V, η $\mathfrak{gl}(V)$ μπορεί να ταυτοποιηθεί με το σύνολο των $n \times n$ πινάκων πάνω από το $\mathbb{F}$ που θα συμβολίζεται $\mathfrak{gl}(n, F)$. Αφού πραγματοποιηθεί η παραπάνω ταυτοποίηση επιλέγεται η συνήθης βάση για την $gl(V)$ που αποτελείται από τους πίνακες e_{ij} με στοιχεία το 1 στη θέση (i,j) και το 0 στις υπόλοιπες. Έτσι έχουμε

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il} \quad \text{και}$$
$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι σταθερές δομής της $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ δίνονται με ζεύγη δεικτών ως εξής: $c_{(ij)(kl)}^{mn} = \delta_i^m\delta_l^n\delta_{jk} - \delta_k^m\delta_j^n\delta_{li}$.

Κάθε υποάλγεβρα της $gl(V)$ λέγεται **γραμμική άλγεβρα Lie** . Κυριότεροι εκπρόσωποι των γραμμικών αλγεβρών Lie αποτελούν οι A_l, B_l, C_l, D_l για $l \geq 1$, οι οποίες αναφέρονται και ως **κλασικές άλγεβρες**, λόγω της σχέσης τους με τις κλασικές ομάδες Lie . Κάθε μία από αυτές τις άλγεβρες θα περιγραφεί αμέσως παρακάτω.

$\mathbf{A_l}$: Έστω $dimV = l+1$. Συμβολίζουμε $\mathfrak{sl}(V)$ ή $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{F})$ το υποσύνολο των ενδομορφισμών του V με μηδενικό ίχνος. Η $\mathfrak{sl}(V)$ είναι γραμμικός υπόχωρος της $\mathfrak{gl}(V)$ και είναι κλειστή ως προς το μεταθέτη καθώς $\forall x, y \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ Tr\{\lambda x + \mu y\} = \lambda Tr\{x\} + \mu Tr\{y\} = 0$ και $Tr\{[x,y]\} = Tr\{xy - yx\} = Tr\{xy\} - Tr\{yx\} = Tr\{xy\} - Tr\{xy\} = 0$, επομένως η $\mathfrak{sl}(V)$ είναι υποάλγεβρα της $\mathfrak{gl}(V)$ και ονομάζεται **ειδική γραμμική άλγεβρα**. Η συνήθης βάση της αποτελείται από τους $(l+1)^2 - (l+1)$ τω πλήθος πίνακες $e_{ij}, i \neq j$ της $\mathfrak{gl}(V)$ μαζί με τους l τω πλήθος πίνακες $h_i := e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ για $1 \leq i \leq l$. Επομένως η διάστασή της είναι $l + (l+1)^2 - (l+1) = l(l+2)$.

$\mathbf{C_l}$: Έστω $dimV = 2l$, με βάση την $\{v_1, \ldots, v_{2l}\}$. Τότε ορίζεται μια μη εκφυλισμένη αντισυμμετρική διγραμμική μορφή f στον V μέσω ενός πίνακα

$$s = \begin{pmatrix} 0_{l\times l} & I_l \\ -I_l & 0_{l\times l} \end{pmatrix}.$$

που ικανοποιεί τη σχέση $f(u,v) = -f(v,u), \forall u, v \in V$. Εδώ σημειώνεται πως η άρτια διάσταση του V είναι αναγκαία για την ύπαρξη μιας μη εκφυλισμένης αντισυμμετρικής διγραμμικής μορφής αφού $det(s) = det(s^\top) = det(-s) = (-1)^{dimV}det(s)$, επομένως αν $dimV = 2l+1$ για κάποιο ακέραιο l, τότε $det(s) = 0$ πού είναι άτοπο αφού s μη εκφυλισμένη. Έτσι συμβολίζουμε με $\mathfrak{sp}(V)$ ή $\mathfrak{sp}(2l,\mathbb{F})$ τη **συμπλεκτική άλγεβρα** που αποτελείται απο όλους τους ενδομορφισμούς x του V για τους οποίους ισχύει $f(x(u),v) = -f(v,x(u))$. Προφανώς η $\mathfrak{sp}(2l,\mathbb{F})$ είναι γραμμικός υπόχωρος της $\mathfrak{gl}(2l,\mathbb{F})$, ενώ είναι κλειστή ως προς το μεταθέτη αφού $\forall x, y \in \mathfrak{sp}(2l,\mathbb{F}), f([x,y](u),v) = f(xy(u),v) - f(yx(u),v) = f(u,yx(v)) - f(u,xy(v)) = -f(u,[x,y](v)), \forall u, v \in V$. Σε όρους πινάκων, η συνθήκη για να είναι ένας $x = \left(\begin{smallmatrix} m & n \\ p & q \end{smallmatrix}\right), m, n, p, q \in$

$\mathfrak{gl}(l,\mathbb{F})$, συμπλεκτικός είναι η $sx = -x^\top s$, δηλαδή $n^\top = n$, $p^\top = p$ και $m^\top = -q$ από την τελευταία εκ των οποίων προκύπτει ότι $Tr\{x\} = 0$ ή $\mathfrak{sp}(2l,\mathbb{F}) \subset \mathfrak{sl}(2l,\mathbb{F})$. Μια βάση για την $\mathfrak{sp}(2l,\mathbb{F})$ αποτελείται από τα $\frac{1}{2}l(l+1)$ τω πλήθος διανύσματα, $\frac{1}{1+\delta_{ij}}(e_{i,l+j} + e_{j,l+i})$, $1 \leq i < j \leq l$, που προκύπτουν από τη συμμετρία του n, τα $\frac{1}{2}l(l+1)$ τω πλήθος διανύσματα, $\frac{1}{1+\delta_{ij}}(e_{l+i,j} + e_{l+j,i})$, $1 \leq i < j \leq l$, που προκύπτουν από τη συμμετρία του p και τα l^2 τω πλήθος, $e_{ij} - e_{l+i,l+j}$, $1 \leq i,j \leq l$ που αντιστοιχούν στα m,q. Συνεπώς η διάσταση της $\mathfrak{sp}(2l,\mathbb{F})$ είναι $2\frac{1}{2}l(l+1) + l^2 = 2l^2 + l$.

$\mathbf{B_l}$: Έστω $dimV = 2l+1$, περιττή, και έστω f η μη εκφυλισμένη συμμετρική διαγραμμική μορφή στον V, που ορίζεται από τον πίνακα

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times l} & 0_{1\times l} \\ 0_{l\times 1} & 0_{l\times l} & I_l \\ 0_{l\times 1} & I_l & 0_{l\times l} \end{pmatrix}.$$

Η **ορθογώνια άλγεβρα** $\mathfrak{o}(V)$, ή $\mathfrak{o}(2l+1,\mathbb{F})$ είναι το σύνολο των ενδομορφισμών x του V που ικανοποιούν τη συνθήκη $f(x(u),v) = -f(v,x(u))$, $\forall v,u \in V$, όμοια με την περίπτωση της C_l. Αν διαμερίσουμε τον x, κατ΄ αντιστοιχία με τον s, ως

$$x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix},$$

τότε η συνθήκη $sx = -x^\top s$ συνεπάγεται τα ακόλουθα: $a = 0$, $c_1 = -b_2^\top$, $c_2 = -b_1^\top$, $q = -m^\top$, $n^\top = -n$, $p^\top = -p$. Έτσι αφενός βλέπουμε ότι $Tr\{x\} = 0$, και αφετέρου η διάσταση της $\mathfrak{o}(V)$ είναι $2l^2 + l$, αφού διανύσματα βάσης αποτελούν τα $2l$ τω πλήθος $e_{1,l+i+1} - e_{i+1,1}$ και $e_{1,i+1} - e_{l+i+1,1}$, $1 \leq i \leq l$, για την πρώτη γραμμή και στήλη, τα l^2 τω πλήθος $e_{i+1,j+1} - e_{l+i+1,l+j+1}$, $1 \leq i,j \leq l$ για τους m,q, τα $\frac{1}{2}l(l-1)$ σε πλήθος $e_{1+i,l+1+j} - e_{1+j,l+1+i}$, $1 \leq i < j \leq l$, για τον n και τα $\frac{1}{2}l(l-1)$ σε αριθμό $e_{l+1+i,1+j} - e_{l+1+j,1+i}$, $1 \leq i < j \leq l$, για τον p.

$\mathbf{D_l}$: Η D_l είναι η **ορθογώνια άλγεβρα** σε άρτιες διαστάσεις $dimV = 2l$, η κατασκευή της οποίας γίνεται θεωρώντας την μη εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή f με πίνακα:

$$s = \begin{pmatrix} 0_{l\times l} & I_l \\ I_l & 0_{l\times l} \end{pmatrix}.$$

Η συνθήκη που ικανοποιεί ένας $x \in End(V)$ για να ανήκει στην $\mathfrak{o}(V)$ ή $\mathfrak{o}(2l,\mathbb{F})$ είναι και πάλι η $f(x(u),v) = -f(v,x(u))$, $\forall v,u \in V$. Η διαμέριση του x είναι πανομοιότυπη με αυτή στην περίπτωση της C_l ενώ οι συνθήκες που προκύπτουν για τα m, n, p και q είναι ταυτόσημες με εκείνες της B_l. Έτσι η διάσταση της $\mathfrak{o}(2l, \mathbb{F})$ είναι $2l^2 + l - 2l = 2l^2 - l$ αφού απουσιάζουν η πρώτη γραμμή και στήλη της B_l.

Σημειώνεται πως οι συνθήκες ορισμού των παραπάνω αλγεβρών προκύπτουν από την παραγώγιση των συνθηκών που ισχύουν στις αντίστοιχες κλασσικές ομάδες Lie κατά την κατεύθυνση μιας τυχαίας μονοπαραμετρικής καμπύλης στο μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας.

Σημαντικά παραδείγματα γραμμικών αλγεβρών Lie αποτελούν επίσης το σύνολο $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : x \text{ άνω τριγωνικός}\}$, διάστασης $\frac{1}{2}n(n+1)$ το σύνολο $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : x \text{ αυστηρά άνω τριγωνικός}\}$, διάστασης $\frac{1}{2}n(n-1)$ και το σύνολο των **διαγώνιων πινάκων** $\mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$, διάστασης n.

Lie άλγεβρες και παραγωγίσεις

Κάποιες Lie άλγεβρες γραμμικών μετασχηματισμών προκύπτουν με φυσικό τρόπο σαν παραγωγίσεις $\mathbb{F}$-αλγεβρών. Γενικά, μια $\mathbb{F}$-**άλγεβρα** είναι ένας διανυσματικός χώρος $\mathfrak{U}$ πάνω από το σώμα $\mathbb{F}$ εφοδιασμένος με μία διγραμμική πράξη $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} : \ (a, b) \mapsto ab, \ \forall a, b \in \mathfrak{U}$, η οποία, εν γένη, δεν είναι προσεταιριστική. Στην περίπτωση που η $\mathfrak{U}$ είναι μια Lie άλγεβρα η παραπάνω πράξη συμβολίζεται με τον μεταθέτη έναντι της απλής παράθεσης δύο στοιχείων. Σε κάθε περίπτωση, όμως, το σύνολο $Der\mathfrak{U} := \{\delta \in End(\mathfrak{U}) : \delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b, \forall a, b \in \mathfrak{U}\}$, τα στοιχεία του οποίου καλούνται **παραγωγίσεις**, αποτελεί γραμμικό υπόχωρο του $End(\mathfrak{U})$, αφού $\forall \delta, \delta' \in Der\mathfrak{U}, \forall a, b \in \mathfrak{U}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$ έχουμε:

$$\begin{gathered}(\lambda\delta + \mu\delta')(ab) = \lambda\delta(ab) + \mu\delta'(ab) = \\ \lambda\delta(a)b + \mu\delta'(a)b + a\lambda\delta(b) + a\mu\delta'(b) = \\ (\lambda\delta + \mu\delta')(a)b + a(\lambda\delta + \mu\delta')(b),\end{gathered}$$

ενώ είναι και κλειστό ως προς το μεταθέτη της $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$ αφού $\forall \delta, \delta' \in Der\mathfrak{U}, \forall a, b \in \mathfrak{U}$ ισχύει:

$$\begin{gathered}[\delta, \delta'] = \delta\delta'(ab) + \delta\delta'(ab) = \\ \delta(\delta'(a))b + \delta(a)\delta'(b) + \delta'(a)\delta(b) + a\delta(\delta'(b)) \\ -\delta'(\delta(a))b - \delta(a)\delta'(b) - \delta'(a)\delta(b) - a\delta'(\delta(b)) \\ [\delta, \delta'](a)b + a[\delta, \delta'](b),\end{gathered}$$

επομένως το $Der\mathfrak{U}$ είναι υποάλγεβρα Lie της $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$.

Δεδομένου ότι μία Lie άλγεβρα L είναι μία $\mathbb{F}$-άλγεβρα, ορίζεται για αυτήν το σύνολο $DerL$. Κάποιες από τις παραγωγίσεις αυτού του συνόλου εμφανίζονται με φυσικό τρόπο, όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο υποκεφάλαιο, ως ακολούθως. Αν $x \in L$, τότε η $ad\ x : L \to L,\ y \mapsto ad\ x(y) := [x, y],\ \forall y \in L$ είναι ένας ενδομορφισμός της L που ικανοποιεί τον κανόνα Leibniz , λόγω της ταυτότητας Jacobi , δηλαδή $ad\ x \in DerL$. Παραγωγίσεις αυτής της μορφής καλούνται **εσωτερικές** και όπως θα δούμε στη συνέχεια αποτελούν ιδεώδες της $DerL$, ενώ όλες οι υπόλοιπες λέγονται **εξωτερικές**. Η συνάρτηση $ad : L \to DerL,\ x \mapsto ad(x) \equiv ad\ x,\ \forall x \in L$ καλείται **συζυγής αναπαράσταση** της L και θα διαδραματίσει αποφασιστικό ρόλο σε όσα ακολουθήσουν.

1.2 Ιδεώδη και ομομορφισμοί

Ιδεώδη

Ορισμός 1.2.1. *Μία υποάλγεβρα I μιας άλγεβρας Lie L καλείται* ***ιδεώδες*** *(ideal) της L αν $\forall x \in I, \forall y \in L, [x, y] \in I$ ή ισοδύναμα $[y, x] \in I$.*

Πρόταση 1.2.1. *Έστω Lie άλγεβρα L και I γραμμικός υπόχωρος της. Αν $[I, L] := span_{\mathbb{F}}\{[x, y] \in L : x \in I, y \in L\}$, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *το I είναι ιδεώδες της L*
2. *$[I, L] \subseteq I$*

Απόδειξη. (2. $\Rightarrow$ 1.) Έστω $x \in I,\ y \in L$. Τότε εξ' ορισμού $[x, y] \in [I, L]$, οπότε λόγω της 2. έχουμε ότι $[x, y] \in I$. Άρα το I είναι ιδεώδες της L.
(1. $\Rightarrow$ 2.) Έστω I ιδεώδες της L και έστω $v \in [I, L]$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N},\ n \leq dim[I, L],\ x_i \in I,\ y_i \in L,\ \lambda_i \in \mathbb{F}$, όπου $i = 1, 2, 3 \ldots n$, τέτοια ώστε: $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [x_i, y_i]$. Όμως για κάθε $i = 1, \ldots n,\ [x_i, y_i] \in I$ αφού I ιδεώδες, και, εφόσον I γραμμικός υπόχωρος της L, κάθε γραμμικός συνδυασμός τους, όπως το v, ανήκει επίσης στο I. Άρα $[I, L] \subseteq I$. $\square$

Προφανώς το $\{0\}$ και η L είναι με τετριμμένο τρόπο ιδεώδη της L και για αυτό το λόγο καλούνται **τετριμμένα ιδεώδη** της L. Ένα όχι τόσο τετριμμένο παράδειγμα ιδεώδους αποτελεί το **κέντρο** της L, $Z(L) := \{z \in L :$

$[z,x]=0,\ \forall x \in L\}$. Ένα επίσης σημαντικό παράδειγμα είναι η **παράγωγος άλγεβρα** (derived algerba) της L, $[L,L] := span_{\mathbb{F}}(\{[x,y] \in L : x \in L, y \in L\})$. Μία άλγεβρα Lie λέγεται **αβελιανή** αν $\forall x,y \in L,\ [x,y]=0$, επομένως αν $Z(L)=L$ ή $[L,L]=0$ τότε η L είναι αβελιανή.

Ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα ιδεώδους, που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, αποτελεί το σύνολο των εσωτερικών παραγωγίσεων μιας Lie άλγεβρας L εντός της $DerL$. Πράγματι, αν $\delta \in DerL$, $x \in L$ τότε $\forall y \in L,\ [\delta, adx](y) = \delta([x,y]) - [x,\delta(y)] = [\delta(x),y] + [x,\delta(y)] - [x,\delta(y)] = [\delta(x),y] = ad\delta(x)(y)$. Δηλαδή ο μεταθέτης κάθε εσωτερικής παραγώγισης με μία εξωτερική δίνει μία εσωτερική, συνεπώς οι εσωτερικές παραγωγίσεις μιας Lie άλγεβρας L είναι ιδεώδες της $DerL$.

Άν I,J είναι ιδεώδη μίας άλγεβρας Lie L τότε και τα $I+J := \{x+y \in L : x \in I, y \in J\}$, $[I,J] := span_{\mathbb{F}}(\{[x,y] \in L : x \in I, y \in J\})$ και $I \cap J$ είναι ιδεώδη της L, αφού, ως γνωστόν, αποτελούν γραμμικούς υπόχωρους της L, $[I+J,L] = [I,L]+[J,L] \subseteq I+J$ και $[[I,J],L] = [[I,L],J]+[I,[J,L]] \subseteq [I,J]+[I,J] = [I,J]$, ενώ ακόμα αφού ισχύει ότι $[I \cap J, L] \subset I$ και $[I \cap J, L] \subset J$, τότε θα ισχύει και ότι $[I \cap J, L] \subset I \cap J$.

Τα ιδεώδη παρέχουν ένα φυσικό τρόπο να μελετά κανείς τη δομή των Lie αλγεβρών. Αν μια Lie άλγεβρα L δεν είναι αβελιανή και δεν έχει μη τετριμμένα ιδεώδη τότε η L καλείται **απλή**. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι αβελιανές άλγεβρες είναι επιλύσιμες. Είναι, επομένως, αναγκαίο να διαχωριστούν οι απλές άλγεβρες, μέσω του ορισμού τους, από τις επιλύσιμες προκειμένου να είναι δυνατή η ανάλυση Levi που θα συζητηθεί σε επόμενο κεφάλαιο. Έτσι, για παράδειγμα, κάθε απλή άλγεβρα Lie L ισούται με την παράγωγη άλγεβρα της, αφού η τελευταία είναι ιδεώδες της L και η L εξ' ορισμού δεν είναι αβελιανή, ούτε περιέχει μη τετριμμένα ιδεώδη. Τέλος για μία απλή άλγεβρα L ισχύει $Z(L) = \{0\}$.

Στην περίπτωση που μία Lie άλγεβρα L δεν είναι απλή και δεδομένου ενός ιδεώδους της I, μπορεί να οριστεί μία σχέση ισοδυναμίας στην L ως εξής. Δύο στοιχεία $x,y \in L$ λέγονται **ισοδύναμα**, συμβολίζουμε $x \sim y$, εάν $x-y \in I$. Η ορισθείσα σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας αφού $x-x=0 \in I \Rightarrow x \sim x$(ανακλαστική ιδιότητα), $x \sim y \Rightarrow x-y \in I \Rightarrow y-x \in I \Rightarrow y \sim x$(συμμετρική ιδιότητα) και αν $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in I$ και $y \sim z \Leftrightarrow y-z \in I$ τότε $(x-y)+(y-z) = x-z \in I \Rightarrow x \sim z$(μεταβατική ιδότητα). Τα παραπάνω βεβαίως προκύπτουν απ'το ότι ένα ιδεώδες είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Με βάση την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας η Lie άλγεβρα L διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας ως ακολούθως. Έστω $x \in L$, τότε $x+I := \{z \in L : (x-z) \in I\}$. Εφόσον το I είναι ιδεώδες της L μπορούμε να ορίσουμε στο **σύνολο πηλίκο** L/I πράξεις που να το εφοδιάζουν με τη δομή μιας Lie άλγεβρας, μέσω της γραμμικής δομής και του μεταθέτη της L. Δηλαδή $\forall\lambda \in \mathbb{F},\ \forall x+I, y+I \in L/I,\ \lambda(x+I) := (\lambda x)+I,\ (x+I)+(y+I) := (x+y)+I$ και $[x+I, y+I] := [x,y]+I$. Από τη γραμμική άλγεβρα είναι γνωστό πως οι πρώτες δύο πράξεις είναι καλά ορισμένες, ενώ, για να είναι καλά ορισμένη και η τρίτη πράξη, αρκεί να δειχθεί ότι αν $x - x' = u \in I, y - y' = v \in I$, τότε $[x,y]+I = [x',y']+I$ ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
{[x,y]} - [x',y'] &\in I \Leftrightarrow \\
{[x'+u, y'+v]} - [x',y'] &\in I \Leftrightarrow \\
{[x',y']} + [u,y'] + [x',v] - [x',y'] &\in I \Leftrightarrow \\
{[u,y']} + [x',v] &\in I
\end{aligned}$$

που ισχύει αφού $u, v \in I$ οπότε και $[u,y'], [x',v] \in I$ άρα λόγω της γραμμικής δομής του I προκύπτει το ζητούμενο $[u,y'] + [x',v] \in I$. Κλείνοντας την κατασκευή της άλγεβρας πηλίκο, σημειώνεται ότι και τα τρία αξιώματα για μια άλγεβρα Lie ικανοποιούνται από το μεταθέτη που μόλις ορίσθηκε στην L/I, καθώς κληρονομούνται άμεσα από την L.

Πριν το τέλος της ενότητας περί ιδεωδών, πρέπει να αναφερθούν δύο σχετικές έννοιες, ο κεντροποιητής και ο κανονικοποιητής ενός υποχώρου μέσα στην άλγεβρα.

Ο **κανονικοποιητής** (normalizer ή idealizer) ενός υπόχωρου K στην L είναι το σύνολο $N_L(K) = \{x \in L : [x,K] \subseteq K\}$, όπου $[x,K] := \{[x,k] \in L : k \in K\}$. Ο κανονικοποιητής του K στην L είναι μία υποάλγεβρα της L αφού λόγω της γραμμικότητας του μεταθέτη και του ότι ο K είναι γραμμικός χώρος έχουμε πως ο μεταθέτης ενός γραμμικού συνδυασμού δύο στοιχείων $x, y \in N_L(K)$ με κάποιο στοιχείο $k \in K$ ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των μεταθετών του κάθε στοιχείου με το k, κι εφόσον τα $[x,k], [y,k]$ ανήκουν στο K, τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους θα ανήκει στο K, επομένως $\alpha x + \beta y \in K, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Ακόμη αν $x, y \in K$, τότε $\forall k \in K,\ [[x,y],k] = [[x,k],y] + [x,[y,k]]$ όμως $[x,k], [y,k] \in K$ άρα $[[x,k],y] + [x,[y,k]] \in K$ λόγω γραμμικότητας κι επομένως $[x,y] \in N_L(K)$. Σε πιό διαισθητικούς όρους, ο κανονικοποιητής του K στην L, είναι η μεγαλύτερη υποάλγεβρα της L η οποία περιέχει τον K ως ιδεώδες, στην περίπτωση που ο K είναι υποάλγεβρα της L. Στην περίπτωση που ο K δέν είναι υποάλγεβρα της L, τότε υπάρχει μεταθέτης κάποιων στοιχείων του που δεν ανήκει στον K οπότε κατ' ανάγκη $N_L(K) \subset K$. Τέλος, στην περίπτωση που $N_L(K) = K$, λέμε ότι ο K **αυτοκανονικοποιείται**.

Ο **κεντροποιητής** (centralizer)ενός υποσυνόλου K της L είναι το σύνολο $C_L(K) = \{x \in L : [x, K] = \{0\}\}$. Λόγω της ταυτότητας Jacobi ο κεντροποιητής αποτελεί υποάλγεβρα της L. Η έννοια του κεντροποιητή δίνει μια εναλλακτική περιγραφή του κέντρου $Z(L)$ μιας άλγεβρας Lie L, αφού $C_L(L) = Z(L)$.

Ομομορφισμοί

Σε αλγεβρικές θεωρίες πολύ σημαντικό ρόλο έχουν οι απεικονίσεις που διατηρούν δομές, μεταξύ αντικειμένων της θεωρίας. Σε πολλές περιπτώσεις, όπως και στη θεωρία των Lie αλγεβρών, αυτές οι απεικονίσεις ονομάζονται ομομορφισμοί και συνοδεύονται από τρία θεωρήματα. Ειδική περίπτωση τέτοιων απεικονίσεων αποτελούν οι αναπαραστάσεις.

Ορισμός 1.2.2. *Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $\phi : L \to L'$, όπου L, L' Lie άλγεβρες, ονομάζεται* ***ομομορφισμός*** *αν:*

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)], \ \forall x, y \in L.$$

Ο ϕ ονομάζεται μονομορφισμός, αν είναι '$1-1$' ή ισοδύναμα $\ker\phi = 0$. Αν ο ϕ είναι επί, ή ισοδύναμα $\mathrm{im}\phi = L'$, ονομάζεται επιμορφισμός, και αν ο ϕ είναι '$1-1$' και επί, τότε ονομάζεται ισομορφισμός.

Πρώτη σημαντική παρατήρηση είναι ότι ο πυρήνας, $\ker\phi$, ενός ομομορφισμού είναι ιδεώδες της L. Αυτό συμβαίνει διότι για κάθε $x \in \ker\phi$, $y \in L$ ισχύει ότι $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] = [0, \phi(y)] = 0$, οπότε $[x, y] \in \ker\phi$. Αντίστοιχα ισχύει ότι η $\mathrm{im}\phi$ είναι υποάλγεβρα της L', αφού για κάθε $\phi(x), \phi(y) \in \mathrm{im}\phi$ έχουμε ότι $[\phi(x), \phi(y)] = \phi([x, y]) \in \mathrm{im}\phi$.

Όπως και σε άλλες αλγεβρικές θεωρίες, υπάρχει μία φυσική σύνδεση μεταξύ ιδεωδών και ομομορφισμών. Σε κάθε ομομορφισμό $\phi : L \to L'$ αποδίδεται το ιδεώδες $\ker\phi$, ενώ σε κάθε ιδεώδες I αποδίδεται η **κανονική απεικόνιση** $\pi_I : L \to L/I$, $x \mapsto x + I$, η οποία είναι επιμορφισμός. Με βάση αυτά διατυπώνονται τα τρία θεωρήματα ισομορφισμών.

Θεώρημα 1.2.1. *(Πρώτο θεώρημα ισομορφισμών) Άν $\phi : L \to L'$, ομομορφισμός Lie αλγεβρών, τότε $L/\ker\phi \cong \mathrm{im}\phi$. Άν I ιδεώδες με $I \subseteq \ker\phi$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi : L/I \to L'$ τέτοιος ώστε το παρακάτω διάγραμμα να μετατίθεται:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_I"'] & L' \\ & L/I \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

δηλαδή $\psi \circ \pi = \phi$.

Απόδειξη. Έστω η απεικόνιση $\psi : L/\ker\phi \to \mathrm{im}\phi$, με $\psi(x + \ker\phi) = \phi(x)$. Η ψ είναι γραμμική, καθώς αν $x + \ker\phi, y + \ker\phi \in L/\ker\phi$, $(x + \ker\phi) + (y + \ker\phi) = (x + y) + \ker\phi$, οπότε για $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda x + \mu y + \ker\phi) &= \phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\phi(x) + \mu\phi(y) \\ &= \lambda\psi(x + \ker\phi) + \mu\psi(y + \ker\phi) \end{aligned}$$

Επίσης η ψ είναι καλώς ορσιμένη αφού αν $x - y = u \in \ker\phi$ τότε

$$\begin{aligned} \psi(x + \ker\phi) - \psi(y + \ker\phi) &= \phi(x) - \phi(y) \\ &= \phi(x - y) = \phi(u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

δεδομένου ότι $u \in \ker\phi$. Επίσης αν $x + \ker\phi, y + \ker\phi \in L$ τότε:

- $\psi([x + \ker\phi, y + \ker\phi]) = \psi([x, y] + \ker\phi) = \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] = [\psi(x + \ker\phi), \psi(y + \ker\phi)]$
- Άν $x' \in \mathrm{im}\phi$ τότε υπάρχει $x \in L$ τέτοιο ώστε $x' = \phi(x)$. Όμως $x + \ker\phi \in L/\ker\phi$, οπότε υπάρχει $x + \ker\phi \in L/\ker\phi$, τέτοιο ώστε $x' = \psi(x + \ker\phi)$.
- Άν $\psi(x + \ker\phi) = \psi(y + \ker\phi)$, τότε:

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi(y) &\Rightarrow \\ \phi(x) - \phi(y) = 0 &\Rightarrow \\ \phi(x - y) = 0 & \end{aligned}$$

  Άρα $x - y \in \ker\phi$.

Έτσι έχουμε ότι ο ψ είναι ομομορφισμός, "$1-1$" και επί άρα ισομορφισμός Lie αλγεβρών.

Έστω τώρα $\psi : L/I \to L'$ με $\psi(x+I) = \phi(x), \forall x+I \in L/I$. Προφανώς ο ψ είναι γραμμικός και $\psi([x+I, y+I]) = \psi([x,y]+I) = \phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)] = [\psi(x+I), \psi(y+I)], \forall x+I, y+I \in L/I$. Απομένει, οπότε, να δειχθεί πως ο ψ είναι καλά ορισμένος και ότι είναι μοναδικός. Έτσι αν $x - y \in I$ πρέπει $\psi(x+I) = \psi(y+I)$, ή ισοδύναμα:

$$\begin{gathered}\phi(x) = \phi(y) \Rightarrow \\ \phi(x) - \phi(y) = 0 \Rightarrow \\ \phi(x-y) = 0\end{gathered}$$

Δηλαδή πρέπει $x - y \in \ker\phi$, που ισχύει αφού $x - y \in I \subseteq \ker\phi$. Άν, τώρα, υπάρχει $\psi' : L/I \to L'$ με $\psi'(x+I) = \phi(x), \forall x+I \in L/I$ τότε $\psi'(x+I) = \phi(x) = \psi(x+I)$ για κάθε $x+I \in L/I$, άρα $\psi' = \psi$. Έτσι έχουμε ότι για κάθε $\phi : L \to L'$, ομομορφισμό, υπάρχει μοναδικός ομομορφιμσός $\psi : L/I \to L'$ τέτοιος ώστε $\psi \circ \pi_I = \phi$. $\square$

Θεώρημα 1.2.2. *(Δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών) Άν τα I καί J είναι ιδεώδη μιας Lie άλγεβρας L, τότε υπάρχει φυσικός ισομορφισμός μεταξύ των $(I+J/J)$ και $I/(I \cap J)$.*

Απόδειξη. Αρχικά πρέπει να τονιστεί ότι εφόσον το J και το $(I \cap J)$ είναι ιδεώδη της L, όπως έχει δειχθεί στην ενότητα 1.2.1, τότε θα είναι ιδεώδη και κάθε υποάλγεβρας της L, που τα περιέχει. Είναι, λοιπόν, επόμενο τα τα σύμπλοκα $(I+J)/J$ και $I/(I \cap J)$ να έχουν τη δομή Lie άλγεβρας. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση του προηγούμενου θεωρήματος δείχνοντας ότι υπάρχει επιμορφισμός Lie αλγεβρών $\phi : I \to (I+J)/J,\ x \mapsto \phi(x) = x + J,\ \forall x \in I$ με πυρήνα το $I \cap J$. Έστω $z \in I + J$. Τότε υπάρχουν $x \in I, y \in J$ τέτοια ώστε $z = x + y$. Επομένως αν $z + J \in (I+J)/J$, τότε $z + J = (x+y) + J = x + J = \phi(x)$, δηλαδή η ϕ είναι επί. Απομένει να δειχθεί ότι $\ker\phi = I \cap J$. Πράγματι αν $x \in I \cap J$ τότε:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x + J \\ &= 0 + J,\ \text{αφού } x \in I \cap J,\end{aligned}$$

δηλαδή $x \in \ker\phi$ κι επομένως $I \cap J \subseteq \ker\phi$. Ενώ αν $x \in \ker\phi$ τότε:

$$\begin{aligned} \phi(x) = 0 + J &\Leftrightarrow \\ x + J = 0 + J &\Leftrightarrow \\ x \in J&, \end{aligned}$$

δηλαδή $\ker\phi \subseteq I \cap J$. Έτσι έχουμε ότι $\ker\phi = I \cap J$ και ως εκ τούτου $(I + J/J) \cong I/(I \cap J)$. □

Θεώρημα 1.2.3. *(Τρίτο θεώρημα ισομορφισμών) Αν I, J ιδεώδη μιας Lie άλγεβρας L, με $I \subseteq J$ τότε το J/I είναι ιδεώδες του L/I και το σύμπλοκο $(L/I)/(J/I)$ είναι φυσικά ισόμορφο με το L/J.*

Απόδειξη. Με χρήση του κανονικού ομομορφισμού, π_I, που ορίσθηκε προηγουμένως, βλέπουμε ότι $[J/I, L/I] = [\pi_I(J), \pi_I(L)] = \pi_I([J, L]) \subseteq \pi_I(J) = J/I$.

Αφού το J/I είναι ιδεώδες του L/I, τότε ορίζεται το σύμπλοκο $(L/I)/(J/I)$. Για να ισχύει ότι $(L/I)/(J/I) \cong L/J$ αρκεί να βρεθεί ομομορφιμσός $\psi : L/I \to L/J$ με $\ker\psi = J/I$. Από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi : L/I \to L/J$ τέτοιος ώστε $\pi_J = \psi \circ \pi_I$ αφού $I \subseteq J$ και $\ker\pi_J = J$. Συνεπώς απομένει να δειχθεί ότι $\ker\psi = J/I$. Αν $x + I \in \ker\psi$, τότε:

$$\begin{aligned} \psi(x + I) = 0 \Rightarrow \psi \circ \pi_I(x) = 0 \Rightarrow \pi_J(x) = 0 \Rightarrow \\ x \in J \Rightarrow x + I \in J/I \Rightarrow \ker\psi \subseteq J/I \end{aligned}$$

Ενώ αν $x \in J \Leftrightarrow x + I \in J/I$ τότε:

$$\begin{aligned} \psi(x + I) = \psi \circ \pi_I(x) = \\ \pi_J(x) = 0, \text{ αφού } x \in J \end{aligned}$$

Άρα $x + I \in \ker\psi$, δηλαδή $J/I \subseteq \ker\psi$, κι επομένως $\ker\psi = J/I$. Έτσι από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε ότι $(L/I)/(J/I) \cong L/J$. □

Αναπαραστάσεις και Lie πρότυπα

Έχοντας εισάγει την έννοια του ομομορφισμού μπορούμε πλέον να ορίσουμε και την έννοια της αναπαράστασης μιας Lie άλγεβρας ως ακολούθως.

Ορισμός 1.2.3. *Έστω Lie άλγεβρα L και διανυσματικός χώρος V πάνω από το σώμα $\mathbb{F}$. Ένας ομομορφισμός $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ καλείται* ***αναπαράσταση*** *της L. Αν ο ρ είναι ισομορφισμός, τότε η αναπαράσταση ονομάζεται* ***πιστή****.*

Ένα χρήσιμο παράδειγμα αναπαράστασης αποτελεί η συζυγής αναπαράσταση $ad : L \to \mathfrak{gl}(L)$ μιας Lie άλγεβρας L, όπου $x \mapsto ad(x) = [x, \cdot]$. Η ad είναι προφανώς γραμμική ενώ διατηρεί και το μεταθέτη καθώς με χρήση της ταυτότητας Jacobi και για κάθε $x, y, z \in L$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
[ad\ x, ad\ y] &= ad\ x\ ad\ y(z) - ad\ y\ ad\ x(z) \\
&= ad\ x([y, z]) - ad\ y([x, z]) \\
&= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\
&= [x, [y, z]] + [[x, z], y] \\
&= [[x, y], z] \\
&= ad\ [x, y](z),
\end{aligned}$$

δηλαδή η ad είναι ομομορφισμός κι επομένως είναι και αναπαράσταση της L.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο πυρήνας της ad είναι το κέντρο $Z(L)$ της L, δηλαδή $Z(L) = \ker ad$. Στην περίπτωση, λοιπόν, που η L είναι απλή, έχουμε ότι $Z(L) = \{0\}$, που σημαίνει ότι η ad είναι μονομορφισμός, το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι κάθε απλή Lie άλγεβρα είναι ισόμορφη με μία γραμμική άλγεβρα.

Έστω V διανυσματικός χώρος, L Lie άλγεβρα και $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ αναπαράσταση της L. Αν $x \in L, v \in V$, ο συνήθης συμβολισμός για τον γραμμικό τελεστή που αντιστοιχεί στο x, μέσω της αναπαράστασης ρ, είναι $\rho(x)v$. Μπορεί όμως κανείς να χρησιμοποιήσει μια τελεία για να συμβολίσει την ίδια δράση, κάνοντας την ταύτιση $\rho(x) \equiv x\cdot$, ως $\rho(x)v = x \cdot v$. Ακόμη είναι σύνηθες η τελεία να παραλείπεται όταν δεν δημιουργείται σύγχυση από το συμβολισμό. Αυτή η στάση δίνει μία διαφορετική οπτική στις αναπαραστάσεις μιας Lie άλγεβρας που θα αναλυθεί παρακάτω.

Ορισμός 1.2.4. *Ένα* ***Lie πρότυπο*** *ή* ***L-πρότυπο*** *είναι μία τριάδα $(V, L, \cdot)$, όπου V διανυσματικός χώρος πάνω από κάποιο σώμα $\mathbb{F}$, L Lie άλγεβρα και $\cdot : L \times V \to V$ πράξη τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in L,\ \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ v, w \in V$ ισχύουν:*

1. $x \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha(x \cdot v) + \beta(x \cdot w)$
2. $(\alpha x + \beta y) \cdot v = \alpha(x \cdot v) + \beta(y \cdot v)$

3. $[x, y] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v$

Η διάσταση του V είναι η διάσταση του L-προτύπου.

Αν υπάρχει υπόχωρος W του V ο οποίος είναι **αναλλοίωτος** ή **σταθερός** κάτω από τη δράση της L, δηλαδή αν για $w \in W$ ισχύει ότι για κάθε $x \in L$ $xw \in W$, τότε ο W αποτελεί καθ΄ εαυτόν L-πρότυπο.

Ορισμός 1.2.5. *Ένα L-πρότυπο $(W, L, \cdot)$ λέγεται **L-υποπρότυπο** ενός L-προτύπου $(V, L, \cdot)$, αν W είναι αναλλοίωτος υπόχωρος του V κάτω από τη δράση της L.*

Προφανός κάθε L-πρότυπο $(V, L, \cdot)$ έχει ως υποπρότυπα τον μηδενικό διανυσματικό χώρο $\{0\}$ και τον εαυτό του V, τα οποία λέγονται **τετριμμένα**. Ένα L-πρότυπο V καλείται **αναγώγιμο** ή **αναγωγήσιμο** αν έχει μη τετριμμένα L-υποπρότυπα, ενώ αν έχει μόνο τα τετριμμένα λέγεται **μη αναγώγιμο** ή **μη αναγωγήσιμο**. Τέλος ένα L-πρότυπο V ονομάζεται **πλήρως αναγώγιμο** αν ο V είναι ευθύ άθροισμα μη αναγώγιμων L-υποπροτύπων του ή ισοδύναμα αν το ορθογώνιο συμπλήρωμά, $W^{\perp}$, κάθε L-υποπρότυπο του, W, είναι και αυτό L-υποπρότυπο.

Σημειώνεται πως το ευθύ άθροισμα L-προτύπων είναι ένα L-πρότυπο. Ακόμη θεωρούμε πως ο μονοδιάστατος διανυσματικός χώρος, V, στον οποίο δρά μια Lie άλγεβρα L είναι ένα L-πρότυπο. Η τελευταία δράση για ημιαπλές άλγεβρες είναι η τετριμμένη καθώς από την ιδιότητα 3. του ορισμού του προτύπου, δεδομένου ότι κάθε στοιχείο της L δρά ως βαθμωτός πολλαπλασιασμός, και αφού $[L, L] = L$ (όπως θα δούμε παρακάτω), έχουμε $xv = 0, \forall x \in L, v \in V$.

Άν ένα L-πρότυπο V είναι αναγωγήσιμο, δηλαδή περιέχει κάποιο L-υποπρότυπο W, τότε είναι δυνατή η κατασκευή ενός ¨μικρότερου' L-υποπροτύπου, που λέγεται **L-πρότυπο πηλίκο** και συμβολίζεται L/W.

Έστω V L-πρότυπο και W μη τετριμμένο L-υποπρότυπο του V. Ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο V ως εξής:

$$\forall u, v \in V, \; u \sim v \Leftrightarrow u - v \in W.$$

Αυτή η σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει τον V σε κλάσεις ισοδυναμίες που για $v \in V$ θα συμβολίζονται ως συνήθως $v + W$. Η κατασκευή της γραμμικής δομής στο χώρο πηλίκο V/W είναι η γνωστή από τη γραμμική άλγεβρα, ενώ μέσω της δράσης της L στον V μπορούμε να δώσουμε στον L/W τη δομή L-προτύπου ορίζοντας $x \cdot (v + W) := x \cdot v + W$. Η δράση της L στο V/W είναι καλά ορισμένη αφού αν $v - v' \in V$ τότε για κάθε $x \in L$ $xv + W =$

$x(v' + (v - v')) + W = xv' + x(v - v') + W = xv' + W$. Επίσης για κάθε $x, y \in L,\ v + W \in V/W\ [x, y](v + W) = [x, y]v + W = xyv - yxv + W = (xyv + W) - (yxv + W) = xy(v + W) - yx(v + W)$.

Η συνάρτηση $\Pi_W : V \to V/W,\ v \mapsto v + W,\ \forall v \in V$ είναι γραμμική και λέγεται **κανονική προβολή**. Αποτελεί δε παράδειγμα ομομορφισμού L-προτύπων (intertwining operator).

Αυτομορφισμοί

Ορισμός 1.2.6. *Ένας ισομορφισμός από μία Lie άλγεβρα L στον εαυτό της ονομάζεται* ***αυτομορφισμός*** *της L. Το σύνολο των αυτομορφισμών της L συμβολίζεται $Aut\ L$.*

Υπενθυμίζεται ότι οι αυτομορφισμοί ενός διανυσματικού χώρου V έχουν τη δομή ομάδας και μάλιστα της ομάδας $GL(V)$.

Διαφωτιστικά παραδείγματα προκύπτουν όταν η εν λόγω L είναι μία γραμμική Lie άλγεβρα δηλαδή $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$. Αν g ένας αντιστρέψιμος ενδομορφισμός του V, δηλαδή $g \in GL(V)$, με $gLg^{-1} = L$, [1] τότε η $\phi_g : L \to L,\ x \mapsto \phi_g(x) = gxg^{-1}$ είναι ένας αυτομορφισμός.

Έστω τώρα $x \in L$ με x $ad-$μηδενοδύναμο, δηλαδή ο $ad\ x$ είναι μηδενοδύναμος μετασχηματισμός της L($(ad\ x)^k = 0$, για κάποιο $k > 0$). Τότε μπορούμε, μέσω της συνήθους σειράς taylor, να ορίσουμε το $\exp(ad\ x) : L \to L$ ως $\exp(ad\ x) = \sum_{n=1}^{k-1}(ad\ x)^n/n!$, αφού δεν προκύπτουν προβλήματα ως προς τη σύγκλιση καθώς η σειρά περιορίζεται σε άθροισμα. Σε όσα θα ακολουθήσουν άμεσα αυτά που μας ενδιαφέρουν είναι ότι το $ad\ x$ είναι μηδενοδύναμο και ότι αποτελεί παραγώγιση της L, επομένως στοχεύοντας σε πιό γενικά συμπεράσματα θεωρούμε μία μηδενοδύναμη παραγώγιση δ της L.

Θεώρημα 1.2.4. *Άν $\delta : L \to L$ μία μηδενοδύναμη παραγώγιση μίας Lie άλγεβρας L, τότε $\exp(\delta) \in Aut\ L$.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί δυνάμεων της δ είναι ενδομορφισμοί της L. Επομένως αυτά που πρέπει να δειχθούν σε αυτή την απόδειξη είναι ότι $\exp(\delta)[x, y] = [\exp(\delta)x, \exp(\delta)y],\ \forall x, y \in L$ και ότι η $\exp(\delta)$ είναι ισομορφισμός ή ισοδύναμα ότι υπάρχει ο αντίστροφος της.

[1] από αλγεβρική σκοπιά αυτή η συνθήκη φαίνεται να μην έχει ουσία, από διαφορογεωμετρική σκοπιά, όμως, δείχνει πώς μια ομάδα Lie πρέπει να δρά στην αντίστοιχή της άλγεβρα (ή σε κάποια υποάλγεβρα) μέσω της $Ad\ g$.

Για να δείξουμε ότι διατηρεί τον μεταθέτη αποδεικνύουμε πρώτα με επαγωγή ότι $\delta^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} [\delta^m x, \delta^{n-m} y]$ ως ακολούθως.

Για $n = 1$ έχουμε $\delta([x,y]) = [\delta x, y] + [x, \delta y]$ που ισχύει. Έστω ότι ισχύει η υπόθεση για n. Τότε:

$$\begin{aligned}
\delta^{n+1}[x,y] &= \delta\delta^n[x,y] \\
&= \delta \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} [\delta^m x, \delta^{n-m} y] \\
&= \sum_{m=1}^{n+1} \binom{n}{m-1} [\delta^m x, \delta^{n+1-m} y] + \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n}{m} [\delta^m x, \delta^{n+1-m} y] \\
&= [\delta^{n+1} x, y] + \sum_{m=1}^{n} (\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}) [\delta^m x, \delta^{n+1-m} y] + [x, \delta^{n+1} y] \\
&= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} [\delta^m x, \delta^{n+1-m} y]
\end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει για $n+1$. Έτσι βλέπουμε ότι:

$$\frac{\delta^n}{n!} = \sum_{m=0}^{n} [\frac{\delta^m x}{m!}, \frac{\delta^{n-m} y}{(n-m)!}]$$

Θεωρώντας λοιπόν ότι η παραγώγιση είναι τάξης k, δηλαδή $\delta^k = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
[\exp(\delta)(x), \exp(\delta)(y)] &= \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} [\frac{\delta^n(x)}{n!}, \frac{\delta^m(y)}{m!}] \\
&= \sum_{n=0}^{2k-2} \sum_{m=0}^{n} [\frac{\delta^m(x)}{m!}, \frac{\delta^{n-m}(y)}{(n-m)!}] \\
&= \sum_{n=0}^{2k-2} \frac{\delta^n}{n!} [x,y] \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\delta^n}{n!} [x,y] \\
&= \exp(\delta)[x,y],
\end{aligned}$$

δηλαδή η $\exp(\delta)$ είναι ομομορφισμός Lie αλγεβρών. Θέτωντας

$$\xi = -\sum_{n=1}^{k-1} \delta^n = 1 - \exp(\delta)$$

έχουμε $\xi^k = 0$. Έτσι ο αντίστροφος είναι $\theta = \sum_{n=0}^{k-1} \xi^n$ αφού $\exp(\delta)\theta = \theta \exp(\delta)$ και:

$$\begin{aligned} \exp(\delta)\theta &= (1-\xi)\sum_{n=0}^{k-1} \xi^n \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \xi^n - \sum_{n=1}^{k-1} \xi^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Άρα η $\exp(\delta)$ είναι ισομορφισμός από την L στην L, οπότε $\exp(\delta) \in Aut\ L$. $\square$

Το σύνολο των αυτομορφισμών της μορφής $\exp(ad\ x)$, όπου x $ad-$μηδενοδύναμο, συμβολίζεται με $Int\ L$, τα στοιχεία του καλούνται **εσωτερικοί αυτομορφισμοί** της L και αποτελεί κανονική υποομάδα του $Aut\ L$. Πράγματι, αν $\phi \in Aut\ L, x \in L$ έχουμε ότι για κάθε $y \in L$, $\phi ad\ x \phi^{-1}(y) = \phi([x, \phi^{-1}(y)]) = [\phi(x), y] = ad\ \phi(x)(y)$. Συνεπώς:

$$\phi \exp(ad\ x)\phi^{-1} = \exp(ad\ \phi(x)) \in Int\ L\ .$$

1.3 Μηδενοδύναμες και επιλύσιμες Lie άλγεβρες

Έστω μια Lie άλγεβρα L. Μία φθίνουσα σειρά ιδεωδών της L είναι μία οικογένεια $\{L_i\}_{i \in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ ιδεωδών της με την ιδιότητα $L_{i+1} \subseteq L_i$. Τα παραδείγματα φθινουσών σειρών που θα μας απασχολήσουν στο παρόν κεφάλαιο είναι η **παράγουσα σειρά** για την οποία ισχύει $L^{(0)} = L$, $L^{(i+1)} = [L_i, L_i]$, για $i > 0$ και η **κατώτερη κεντρική σειρά** με $L^0 = L$ και $L^{i+1} = [L, L^i]$, για $i > 0$, όπου ο συμβολισμός αλλάζει ελαφρώς και στις δύο περιπτώσεις.

Μηδενοδύναμες Lie άλγεβρες

Ορισμός 1.3.1. *Έστω Lie άλγεβρα L. Η L θα καλείται* ***μηδενοδύναμη*** *τάξης n αν ο n είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός για τον οποίο τερματίζεται η κατώτερη κεντρική σειρά της L στο $\{0\}$, δηλαδή $L^n = \{0\}$.*

Βασικότερο παράδειγμα μηδενοδύναμης Lie άλγεβρας είναι η άλγεβρα $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ των αυστηρώς άνω τριγωνικών πινάκων. Ένα πιο τετριμμένο παράδειγμα μηδενοδύναμων αλγεβρών αποτελούν οι αβελιανές Lie άλγεβρες.

Πρόταση 1.3.1. *Έστω L Lie άλγεβρα:*

1. *Αν η L είναι μηδενοδύναμη τότε κάθε υποάλγεβρα της, K, και κάθε ομομορφική εικόνα της, $\phi(L)$, είναι μηδενοδύναμες.*

2. *Άν η $L/Z(L)$ είναι μηδενοδύναμη, τότε είναι και η L.*

3. *Άν η L είναι μηδενοδύναμη και $L \neq \{0\}$, τότε $Z(L) \neq \{0\}$.*

Απόδειξη. 1. Έστω K υποάλγεβρα της L και έστω $\phi : L \to L'$ ομομορφισμός. Επαγωγικά έχουμε ότι $K^n \subseteq L^n$, αφού $K \subseteq L$, και ότι $\phi(L^n) = \phi(L)^n$, καθώς $\phi([L, L]) = [\phi(L), \phi(L)]$ και $\phi([L, L^{n-1}]) = [\phi(L), \phi(L^{n-1})] = [\phi(L), \phi(L)^{n-1}]$. Επομένως αν $L^m = \{0\}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, τότε $K^m = \{0\}$ και $\phi(L)^m = \{0\}$.

2. Αν η $L/Z(L)$ είναι μηδενοδύναμη τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned}
(L/Z(L))^k = \{0 + Z(L)\} &\Rightarrow \\
L^k/Z(L) = \{0 + Z(L)\} &\Rightarrow \\
L^k \subseteq Z(L) &\Rightarrow \\
[L, L^k] \subseteq [L, Z(L)] &\Rightarrow \\
L^{k+1} = \{0\}&,
\end{aligned}$$

δηλαδή η L είναι μηδενοδύναμη.

3. Άν η L είναι μηδενοδύναμη τάξης $k+1$, τότε $L^k \neq \{0\}$ και $L^{k+1} = [L, L^k] = \{0\}$, δηλαδή $L^k \subseteq Z(L)$. Άρα $Z(L) \neq \{0\}$.

□

Το να είναι μία Lie άλγεβρα L μηδενοδύναμη τάξης n, μπορεί να αναδιατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής: Για κάθε $x_i, y \in L,\ i = 1, \ldots, n$ έχουμε ότι $ad\ x_1 ad\ x_2 \cdots ad\ x_n(y) = 0$. Είναι επόμενο, λοιπόν, ότι $(ad\ x)^n = 0,\ \forall x \in L$. Έτσι εξάγεται το συμπέρασμα ότι κάθε στοιχείο μίας μηδενοδύναμης Lie άλγεβρας είναι $ad-$μηδενοδύναμο. Το θεώρημα του Engel, που θα δούμε σε επόμενο υποκεφάλαιο, μας πληροφορεί ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν κάθε στοιχείο μίας άλγεβρας Lie L είναι $ad-$μηδενοδύναμο, τότε η L είναι μηδενοδύναμη. Προς αυτή την κατεύθυνση θα μας βοηθήσουν τα δύο λήμματα που ακολουθούν.

Λήμμα 1.3.1. *Έστω $x \in \mathfrak{gl}(V)$ ένας μηδενοδύναμος ενδομορφισμός. Τότε ο $ad\ x$ είναι επίσης μηδενοδύναμος.*

Απόδειξη. Μέσω του x μπορούμε να ορίσουμε δύο ενδομορφισμούς $\lambda_x, \rho_x \in End(\mathfrak{gl}(V))$ ως εξής: $\forall y \in \mathfrak{gl}(V) \lambda_x(y) = xy, \rho_x(y) = yx$. Παρατηρούμε ότι λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας στον $End(\mathfrak{gl}(V))$ έχουμε: $\lambda_x \rho_x(y) = x(yx) = (xy)x = \rho_x \lambda_x(y)$. Ακόμη επειδή ο x είναι μηδενοδύναμος, έστω τάξης n, έχουμε ότι $\rho_x^n = \lambda_x^n = 0$. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο $ad\ x$ είναι μηδενοδύναμος, το πολύ, τάξης $2n$, καθώς αν $m \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ έχουμε είτε $m \leq n$ είτε $2n - m \leq n$ και ως εκ τούτου:

$$
\begin{aligned}
(ad\ x)^{2n} &= (\lambda_x - \rho_x)^{2n} \\
&= \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} \lambda_x^m \rho_x^{2n-m} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Ένα σημαντικό σχόλιο σε αυτό το σημείο είναι ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, καθώς ο $I \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ είναι $ad-$μηδενοδύναμος αλλά όχι μηδενοδύναμος.

Λήμμα 1.3.2. *Έστω $V \neq \{0\}$ διανυσματικός χώρος και έστω $x \in End(V)$ μηδενοδύναμος τάξης n. Τότε υπάρχει $v \in V,\ v \neq 0$ τέτοιο ώστε $xv = 0$.*

Απόδειξη. Αφού x τάξης n έχουμε ότι $x^{n-1} \neq 0$ δηλαδή υπάρχει $w \in V,\ w \neq 0$ με $x^{n-1}w \neq 0$. Θέτωντας $v = x^{n-1}w$ έχουμε το ζητούμενο. Πράγματι $xv = xx^{n-1}w = x^n v = 0$. □

Επιλύσιμες Lie άλγεβρες

Ορισμός 1.3.2. *Έστω Lie άλγεβρα L. Η L θα καλείται* ***επιλύσιμη*** *τάξης n αν ο n είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο τερματίζεται η παράγουσα σειρά της L στο $\{0\}$, δηλαδή $L^{(n)} = \{0\}$.*

Χαρακτηριστικό παράδειγμα επιλύσιμων αλγεβρών αποτελούν οι γραμμικές άλγεβρες $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ των άνω τριγωνικών πινάκων. Τετριμμένο παράδειγμα αποτελούν και πάλι οι αβελιανές Lie άλγεβρες. Σε αυτό το σημείο σημειώνεται επίσης ότι η επιλυσιμότητα για μία Lie άλγεβρα είναι ασθενέστερη συνθήκη από αυτήν της ¨μηδενοδυναμίας' αφού $L^{(n)} \subseteq L^n, \forall n \in \mathbb{N}$, επομένως αν τερματίζεται η κατώτερη κεντρική σειρά τότε τερματίζεται και η παράγουσα.

Πρόταση 1.3.2. *Έστω Lie άλγεβρα L.*

1. *Αν η L είναι επιλύσιμη τότε κάθε υποάλγεβρα της, K, και κάθε ομομορφική εικόνα της, $\phi(L)$, είναι επιλύσιμη.*

2. *Άν I επιλύσιμο ιδεώδες τέτοιο ώστε L/I επιλύσιμη, τότε είναι και η L επιλύσιμη.*

3. *Άν I, J είναι επιλύσιμα ιδεώδη, τότε και το $I + J$ είναι επιλύσιμο ιδεώδες.*

Απόδειξη. 1. Έστω K υποάλγεβρα της L και έστω $\phi : L \to L'$ ομομορφισμός. Επαγωγικά έχουμε ότι $K^{(n)} \subseteq L^{(n)}$, αφού $K \subseteq L$, και ότι $\phi(L^{(n)}) = \phi(L)^{(n)}$, καθώς $\phi([L, L]) = [\phi(L), \phi(L)]$ και $\phi([L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]) = [\phi(L^{(n-1)}), \phi(L^{(n-1)})] = [\phi(L)^{(n-1)}, \phi(L)^{(n-1)}]$. Επομένως αν $L^{(m)} = \{0\}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, τότε $K^{(m)} = \{0\}$ και $\phi(L)^{(m)} = \{0\}$.

2. Αν η L/I είναι επιλύσιμη τάξης k και το I τάξης m, τότε:

$$\begin{aligned} (L/I)^{(k)} &= \{0 + I\} \Rightarrow \\ L^{(k)}/I &= \{0 + I\} \Rightarrow \\ L^{(k)} &\subseteq I \Rightarrow \\ L^{(k+m)} &\subseteq I^{(m)} \Rightarrow \\ L^{k+m} &= \{0\}, \end{aligned}$$

δηλαδή η L είναι επιλύσιμη.

3. Από το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών(1.2.2) έχουμε ότι το $(I+J)/J$ και το $I/(I\cap J)$ είναι ισόμορφα. Ως ομομορφική εικόνα του I το $I/(I\cap J)$ είναι επιλύσιμο επομένως είναι και το $(I+J)/J$. Έτσι από το μέρος 2. έχουμε ότι το $I+J$ είναι επιλύσιμο.

$\square$

Από το τρίτο κομμάτι της παραπάνω πρότασης αν L είναι μία Lie άλγεβρα τότε υπάρχει μεγιστικό επιλύσιμο ιδεώδες της, $RadL$, αφού το $\{0\}$ είναι επιλύσιμο ιδεώδες και για κάθε επιλύσιμο ιδεώδες I της L έχουμε ότι το $I+RadL$ είναι επιλύσιμο ιδεώδες. Οπότε αφού $RadL$ μεγιστικό, τότε κατάνάγκη $I+RadL=RadL$. Το $RadL$ ονομάζεται **ριζικό** της L.

Ορισμός 1.3.3. *Έστω Lie άλγεβρα L και έστω $RadL$ το ριζικό της. Αν $RadL=\{0\}$ τότε η L καλείται* ***ημιαπλή***.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό βλέπουμε ότι μια απλή άλγεβρα L είναι ημιαπλή καθώς εξ' ορισμού περιέχει μόνο το $\{0\}$ και την L ως ιδεώδη, οπότε εφόσον η L δεν είναι αβελιανή και το $[L,L]$ είναι ιδεώδες της, πρέπει $[L,L]=L$ που συνεπάγεται ότι δεν είναι επιλύσιμη άρα $RadL=\{0\}$. Παρατηρούμε επίσης ότι για τυχαία L η $L/RadL$ είναι ημιαπλή, αφού αν δεν ήταν τότε θα υπήρχε ιδεώδες $I/RadL$ επιλύσιμο, οπότε από το δεύτερο τμήμα της παραπάνω πρότασης θα είχαμε I επιλύσιμο ιδεώδες της L και $RadL\subset I$ που είναι άτοπο.

Το θεώρημα του Engel

Το θεώρημα του Engel για τις μηδενοδύναμες άλγεβρες Lie που αναφέρθηκε προηγουμένως, αποτελεί πόρισμα ενός άλλου που θα μπορούσε να ονομαστεί ¨θεώρημα του κοινού ιδιοδιανύσματος¨. Ένα αντίστοιχο θεώρημα ισχύει και για τις επιλύσιμες Lie άλγεβρες με την προσθήκη όμως μιας επιπλέον απαίτησης για το σώμα $\mathbb{F}$.

Θεώρημα 1.3.1. *(κοινού ιδιοδιανύσματος) Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και έστω L υποάλγεβρα της $\mathfrak{gl}(V)$. Αν η L αποτελείται από μηδενοδύναμους ενδομορφισμούς και $V\neq\{0\}$, τότε υπάρχει $v\in V,\ v\neq 0$ τέτοιο ώστε $L\cdot v=\{0\}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση ισχυρής επαγωγής στη διάσταση της L. Για $\dim L=0$ προφανώς ισχύει το συμπέρασμα, ενώ για $\dim L=1$ πάλι ισχύει από το λήμμα 1.3.2. Έστω λοιπόν $\dim L \geq 2$. Θεωρούμε γνήσια υποάλγεβρα, K, της L. Με βάση το λήμμα 1.3.1 η $ad\ K$ αποτελείται από μηδενοδύναμους ενδομορφισμούς της L. Επομένως η K δρά και στον διανυσματικό χώρο πηλίκο L/K, αφού η K είναι υποάλγεβρα της L και ως εκ τούτου είναι αναλλοίωτος υπόχωρος. Εφόσον $\dim K < \dim L$ η επαγωγική υπόθεση ισχύει για την K συνεπώς υπάρχει $x \in L,\ x \notin K$ τέτοιο ώστε $ad\ y(x+K) = 0+K, \forall y \in K$, δηλαδή $[y,x] \in K$. Αυτό σημαίνει πως η K περιέχεται γνησίως στον κανονικοποιητή της, δηλαδή $K \subset N_L(K)$.

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι η K είναι μεγιστική βλέπουμε ότι $N_L(K) = L$, οπότε η K είναι ιδεώδες της L. Αν $\dim L/K > 1$, τότε υπάρχει μονοδιάστατη υποάλγεβρα S/K της L/K της οποίας η προεικόνα $\Pi_K^{-1}(S/K) = S$ θα ήταν υποάλγεβρα της L με $\dim S > \dim K$ που είναι άτοπο αφού η K είναι μεγιστική. Συνεπώς η K είναι συνδιάστασης 1. Επομένως μπορούμε να γράψουμε $L = K + \mathbb{F}z$ για κάθε $z \in L \setminus K$.

Αν ορίσουμε $V_0 = \{v \in V : K \cdot v = \{0\}\}$, βλέπουμε ότι, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης (αφού $\dim K < \dim L$), $V_0 \neq \{0\}$. Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $k \in K,\ x \in L,\ v \in V_0$ έχουμε ότι $k(xv) = x(kv) + [k,x]v = 0 + 0 = 0$, δηλαδή ο V_0 είναι αναλλοίωτος κάτω από τη δράση της L. Άρα για κάθε $z \in L \setminus K$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης έχουμε ότι υπάρχει μη μηδενικό $v \in V_0$ τέτοιο ώστε $z \cdot v = 0$. Επομένως αφού $L = K + \mathbb{F}z$ έχουμε ότι $L \cdot v = \{0\}$. □

Θεώρημα 1.3.2. *(Engel) Έστω Lie άλγεβρα L. Η L είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν κάθε στοιχείο της είναι ad-μηδενοδύναμο.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε στην παράγραφο για τις μηδενοδύναμες Lie άλγεβρες, αν η L είναι μηδενοδύναμη τότε τα στοιχεία της είναι *ad*-μηδενοδύναμα. Επομένως απομένει να αποδείξουμε την άλλη κατεύθυνση.

Έστω L όλα τα στοιχεία της οποίας είναι *ad*-μηδενοδύναμα. Θα κάνουμε χρήση ισχυρής επαγωγής. Αν $\dim L = 0$ ή $\dim L = 1$ τότε η L είναι μηδενοδύναμη. Έστω $\dim L > 1$. Τότε η $ad\ L \subset \mathfrak{gl}(L)$ ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος κοινού ιδιοδιανύσματος 1.3.1. Άρα υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο $x \in L$ τέτοιο ώστε $[L,x] = \{0\}$, δηλαδή $Z(L) \neq \{0\}$. Επομένως η $L/Z(L)$ ορίζεται και αποτελείται από *ad*-μηδενοδύναμους μετασχηματισμούς. Επειδή $\dim L/Z(L) < \dim L$ ισχύει η επαγωγική υπόθεση συνεπώς η $L/Z(L)$ είναι μηδενοδύναμη. Έτσι έχουμε $Z(L)$, $L/Z(L)$ μηδενοδύναμες, άρα από το δεύτερο μέρος της πρότασης 1.3.1 έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 1.3.1. *Έστω $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ αναπαράσταση μίας μηδενοδύναμης Lie άλγεβρας L σε έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο V. Τότε υπάρχει βάση του V στην οποία όλοι οι γραμμικοί τελεστές $\rho(x)$, $\forall x \in L$ είναι αυστηρώς άνω τριγωνικοί πίνακες.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 1.3.1 ξέρουμε ότι κάθε ομομορφική εικόνα μίας μηδενοδύναμης Lie άλγεβρας είναι μηδενοδύναμη. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση ισχυρής επαγωγής στη διάσταση του V. Αν $\dim L = 1$ έχουμε ότι $\rho(x) = 0$ για κάθε $x \in L$ αφού $\rho(x)$ μηδενοδύναμος και διάστασης 1×1.

Έστω $\dim V > 1$. Τότε από το θεώρημα κοινού ιδιοδιανύσματος 1.3.1, έχουμε ότι υπάρχει μη μηδενικό $e_1 \in V$ τέτοιο ώστε $\rho(x)e_1 = 0$, $\forall x \in L$. Επομένως ο υπόχωρος $W = \mathbb{F}e_1$ είναι αναλλοίωτος κάτω από τη δράση της L και ως εκ τούτου ορίζεται το L-υποπρότυπο V/W. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης υπάρχει βάση $\{\tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_{\dim V}\}$ του V/W ώστε οι $\rho_{V/W}(x)$, $\forall x \in L$ να είναι αυστηρώς άνω τριγωνικοί. Αν $e_2 = \Pi_W^{-1}(\tilde{e}_2)$, ... , $e_{\dim V} = \Pi_W^{-1}(\tilde{e}_{\dim V})$ τυχαίες προεικόνες, τότε τα $\{e_1, e_2, \dots, e_{\dim V}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και σε αυτά ως βάση $\rho(L) \subseteq \mathfrak{n}(\dim V, \mathbb{F})$. □

Το θεώρημα του Lie

Η ουσία του θεωρήματος του Engel για τις μηδενοδύναμες Lie άλγεβρες ήταν το θεώρημα του κοινού ιδιοδιανύσματος 1.3.1 για μια Lie άλγεβρα που αποτελείται από μηδενοδύναμους ενδομορφισμούς. Το επόμενο θεώρημα κινείται στο ίδιο πλαίσιο, απαιτεί όμως από το σώμα $\mathbb{F}$ να είναι αλγεβρικά κλειστό, δηλαδή να περιέχει μία ρίζα για κάθε μη σταθερό πολυώνυμο. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι το σώμα $\mathbb{F}$ θα περιέχει όλες τις απαιτούμενες ιδιοτιμές κάθε γραμμικού μετασχηματισμού. Έτσι θεωρούμε πλέον ότι εργαζόμαστε στο σύνολο των μιγαδικών $\mathbb{C}$.

Πριν αποδείξουμε το θεώρημα κοινού ιδιοδιανύσματος για τις επιλύσιμες Lie άλγεβρες, θα χρειαστούμε ένα λήμμα που θα χρησιμοποιεί την έννοια του χώρου βάρους τον οποίο θα ορίσουμε αμέσως.

Ορισμός 1.3.4. *Έστω L Lie άλγεβρα, V διανυσματικός χώρος και $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ αναπαράσταση της L. Αν $\lambda \in L^*$ γραμμικό συναρτησοειδές στην L, όπου L^* ο δυικός χώρος της L, τότε ο* ***χώρος βάρους*** *της L ως προς το λ είναι :*

$$V_\lambda^L := \{v \in V : \rho(x)v = \lambda(x)v, \ \forall x \in L\}.$$

*Άν $V_\lambda^L \neq \{0\}$ τότε λέμε ότι το λ είναι **βάρος** της ρ και τα $v \in V_\lambda^L$ καλούνται **διανύσματα βάρους**.*

Λήμμα 1.3.3. *Έστω L Lie άλγεβρα πάνω από το $\mathbb{C}$, I γνήσιο ιδεώδες της L, V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ αναπαράσταση της L, $\rho_I : I \to \mathfrak{gl}(V)$ ο περιορισμός της ρ στο I και $\lambda \in I^*$. Άν $v \in V_\lambda^I = \{v \in V : \rho_I(x)v = \lambda(x)v,\ \forall x \in I\}$, τότε $\rho(x)v \in V_\lambda^I$ για κάθε $x \in L$.*

Απόδειξη. Αν το λ δεν είναι βάρος της ρ_I, τότε $V_\lambda^I = \{0\}$ οπότε και ισχύει το ζητούμενο. Έστω λ βάρος. Τότε αρκεί να δειχθεί ότι δεδομένου ενός $v \in V$ και για κάθε $x \in L,\ k \in I$:

$$\begin{aligned} \rho(k)\rho(x)v = \lambda(k)\rho(x)v \Leftrightarrow \\ \rho(x)\lambda(k)v + \rho([k,x])v = \lambda(k)\rho(x)v \Leftrightarrow \\ \lambda([k,y])v = 0 \end{aligned}$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι $\lambda([k,y]) = 0$. Για αυτό το λόγο θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία υπόχωρων του V, για δεδομένα $v \in V,\ x \in L$, ως ακολύθως. Θέτουμε $W_{-1} = \{0\},\ W_m = span\{v, \rho^2(x)v, \ldots, \rho^m(x)v\},\ m \geq 0$. Εφόσον ο V είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε κατ΄ ανάγκη θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m > n,\ W_m = W_n$. Επιλέγουμε το μικρότερο τέτοιο n. Οπότε $\rho(x)W_n = W_n$.

Τώρα θα δείξουμε με επαγωγη ότι για κάθε $m \geq 0,\ \rho(k)W_m \subseteq W_m$ και ότι $\rho(k)\rho^m(x)v - \lambda(k)\rho^m(x)v \in W_{m-1},\ \forall k \in I$. Για $m = 0$ έχουμε ότι $\rho^0(k)v = v \in W_0$ και $\rho(k)v - \lambda(k)v = 0 \in W_{-1}$ αφού $v \in V_\lambda^I$. Έστω ότι ισχύει το ζητούμενο για $m-1$. Τότε:

$$\begin{aligned} \rho(k)\rho^m(x)v - \lambda(k)\rho^m(x)v \in W_{m-1} \Leftrightarrow \\ \rho(x)\rho(k)\rho^{m-1}(x)v + \rho([k,x])\rho^{m-1}(x)v - \lambda(k)\rho^m(x)v \in W_{m-1} \end{aligned}$$

και αφού $[k,x] \in I$ και λόγω επαγωγικής υπόθεσης $\rho([k,x])\rho^{m-1}(x)v \in W_{m-1}$, το παραπάνω ισοδυναμεί με:

$$\rho(x)(\rho(k) - \lambda(x))\rho^{m-1}(x)v \in W_{m-1}$$

που ισχύει καθώς λόγω επαγωγικής υπόθεσης $(\rho(k) - \lambda(x))\rho^{m-1}(x)v \in W_{m-2}$.

Επομένως πλέον ξέρουμε ότι αν $k \in I$ τότε υπάρχουν $a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned}\rho(k)\rho^m(x)v - \lambda(k)\rho^m(x)v = a_1 v + \cdots + a_{m-1}\rho^{m-1}v \Leftrightarrow \\ \rho(k)\rho^m(x)v = a_1 v + \cdots + a_{m-1}\rho^{m-1}v + \lambda(k)\rho^m(x)v\end{aligned}$$

που δείχνει πως ο $\rho(k)$ όταν δρά στον W_n είναι άνω τριγωνικός, ως προς τη βάση $\{v, \rho^2(x)v, \dots, \rho^n(x)v\}$ και κάθε στοιχείο της διαγωνίου του είναι ίσο με $\lambda(k)$. Επειδή όμως $Tr\{\rho([k,x])\} = Tr\{[\rho(k), \rho(x)]\} = 0$ και εφόσον $[x,k] \in I$ έχουμε:

$$\begin{aligned}Tr\{\rho([k,x])\} = n\lambda([k,x]) \Leftrightarrow \\ \lambda([k,x]) = 0\end{aligned}$$

Έτσι δείξαμε ότι ο V_λ^I είναι αναλλοίωτος κάτω από τη δράση της L. □

Με βάση το παραπάνω λήμμα μπορούμε να περάσουμε στο θεώρημα του κοινού ιδιοδιανύσματος για τις επιλύσιμες Lie άλγεβρες. Για να ¨ελαφρυνθεί' ο συμβολισμός θα χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα των $L-$προτύπων.

Θεώρημα 1.3.3. *(κοινού ιδιοδιανύσματος) Έστω L επιλύσιμη Lie άλγεβρα και έστω V μη μηδενικό L-πρότυπο πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο V περιέχει κοινό ιδιοδιάνυσμα για όλα τα $x \in L$.*

Απόδειξη. Από το πρώτο μέρος του λήμματος 1.3.2 ξέρουμε ότι αν μία Lie άλγεβρα είναι επιλύσιμη τότε κάθε αναπαράστασή της θα είναι επιλύσιμη. Επομένως η γλώσσα των L-προτύπων είναι κατάλληλη.

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με ισχυρή επαγωγή στη διάσταση της L. Αν $\dim L = 0$, είναι τετριμμένο ότι θα ισχύει το συμπέρασμα. Για να το δείξουμε για $\dim L = m$ θα ακολουθηθούν τα εξής βήματα. Αρχικά θα βρούμε ένα ιδεώδες K συνδιάστασης 1 της L, για το οποίο μέσω της επαγωγής θα εντοπίσουμε ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα $v \in V_{\lambda'}^K$ για κάποιο $\lambda' \in K^*$. Ύστερα από το λήμμα 1.3.3 θα ξέρουμε ότι το $V_{\lambda'}^K$ είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της L και τέλος πάλι μέσω της επαγωγής θα δείξουμε για κάθε $z \in L \setminus K$ υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $v \in V_{\lambda'}^K$.

Για το πρώτο βήμα έχουμε ότι αφού η L είναι επιλύσιμη τότε $[L,L] \subset L$, καθότι σε άλλη περίπτωση κάθε όρος της παράγουσας σειράς θα ήταν ίσος με L. Εφόσον λοιπόν πολύ εύκολα δείχνεται ότι η $L/[L,L]$ είναι αβελιανή, έχουμε ότι κάθε υπόχωρός της αυτομάτως είναι και ιδεώδες. Επιλέγοντας ένα ιδεώδες $K/[L,L]$ συνδιάστασης 1 στην $L/[L,L]$ βρίσκουμε ένα ιδεώδες $K = \pi^{-1}_{[L,L]}(K/[L,L])$ συνδιάστασης 1 στην L. Επομένως λόγω της επαγωγικής υπόθεσης υπάρχει μη μηδενικό $v \in V$ τέτοιο ώστε για κάθε $k \in K$, $kv = \lambda'(k)v$ για κάποιο $\lambda' \in K^*$. Δηλαδή $V^K_{\lambda'} \neq \{0\}$.

Με βάση το λήμμα 1.3.3 έχουμε ότι $LV^K_{\lambda'} \subseteq V^K_{\lambda'}$. Επομένως για κάθε $z \in L \setminus K$ έχουμε $L = K + \mathbb{C}z$ και $zV^K_{\lambda'} \subseteq V^K_{\lambda'}$. Άρα μπορούμε να βρούμε ιδιοδιάνυσμα $v \in V^K_{\lambda'}$ του z με ιδιοτιμή μ, είτε επειδή το $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικά κλειστό, είτε λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Έτσι αν επεκτείνουμε το λ' σε $\lambda(k + az) = \lambda'(k) + a\mu z$ τότε έχουμε ότι υπάρχει κοινό ιδιοδιάνυσμα, το v, για όλα τα $x \in L$. Δηλαδή $V^L_{\lambda} \neq \{0\}$. □

Ένα ενδιαφέρον σχόλιο πριν το θεώρημα του Lie είναι ότι όλες οι μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις μιας επιλύσιμης Lie άλγεβρας είναι μονοδιάστατες. Πράγματι, αν προς απαγωγή σε άτοπο V μη αναγωγήσιμο L-πρότυπο, $\dim V > 1$, τότε από το θεώρημα κοινού ιδιοδιανύσματος έχουμε ότι υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$, τέτοιο ώστε $xv \in \mathbb{F}v$ για κάθε $x \in L$. Δηλαδή ο $\mathbb{F}v$ είναι υποπρότυπο του V, που είναι άτοπο, καθώς V μη αναγωγήσιμο και $\dim V > 1$.

Θεώρημα 1.3.4. *(Lie) Έστω L επιλύσιμη Lie υποάλγεβρα της $\mathfrak{gl}(V)$, με $\dim V = n < \infty$. Τότε υπάρχει βάση του V ως προς την οποία τα στοιχεία της L είναι άνω τριγωνικοί πίνακες, δηλαδή $L \subset \mathfrak{t}(n)$.*

Απόδειξη. Έστω $v_1 \in V$ κοινό ιδιοδιάνυσμα όλων των στοιχείων της L, δηλαδή για κάθε $x \in L$, $xv_1 = \lambda_1(x)v_1$. Ορίζουμε $Q_1 = V/span\{v_1\}$. Προφανώς το Q_1 είναι L-πρότυπο πηλίκο. Επομένως πάλι από το θεώρημα κοινού ιδιοδιανύσματος υπάρχει σύμπλοκο $v_2 + span\{v_1\} \equiv v_2 mod\{v_1\}$ ώστε για κάθε $x \in L$, $xv_2 mod\{v_1\} = \lambda_2(x)v_2 mod\{v_1\}$. Έτσι ορίζουμε με αντίστοιχο τρόπο το Q_2 και συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία προκύπτει μία ακολουθία συμπλόκων $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$. Από αυτά τα σύμπλοκα μπορούμε να επιλέξουμε έναν εκπρόσωπο από την κλάση ισοδυναμίας, μαζί με το v_1, φτιάχνοντας μία βάση $v_1, \ldots, v_n$ για την οποία θα ισχύει $xv_i = \lambda_i(x)v_i + \sum_{j=1}^{i} c^j v_j$ για κάθε $x \in L$. Αυτό σημαίνει πως όλα τα στοιχεία της L θα αναπαρίστανται ως άνω τριγωνικοί πίνακες. □

Με βάση το επιχείρημα της παραπάνω απόδειξης βλέπουμε ότι αν L επιλύσιμη Lie άλγεβρα και $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ αναπαράσταση, τότε αφενός $\phi(L)$ επιλύσιμη και αφετέρου υπάρχει μία ακολουθία υπόχωρων V_i του V αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της L, όπου $V_i \subset V_{i+1}$ και ο V_i είναι συνδιάστασης ένα στον

V_{i+1}. Αν λοιπόν θεωρήσουμε τη συζυγή αναπαράσταση θα έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία ιδεωδών L_i εντός της L, όπου κάθε ιδεώδες θα είναι συνδιάστασης ένα στο επόμενό του, με $\dim L_i = i$. Έτσι μπορούμε να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.3.3. *Έστω L επιλύσιμη Lie άλγεβρα. Τότε η $[L, L]$ είναι μηδενοδύναμη.*

Απόδειξη. Έστω μία ακολουθία ιδεωδών της L όπως ορίσθηκε παραπάνω. Θεωρούμε μία βάση της L $\{x_1, \ldots, x_n\}$, τέτοια ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n = \dim L$, να ισχύει $span\{x_1, \ldots, x_i\} = L_i$. Τότε θα έχουμε ότι οι πίνακες της $ad\ L$ θα ανήκουν στην $\mathfrak{t}(n)$ κι επομένως οι πίνακες της $[ad\ L, ad\ L] = ad\ [L, L]$ θα ανήκουν στην $\mathfrak{n}(n)$, δηλαδή θα είναι αυστηρώς άνω τριγωνικοί. Συνεπώς τα στοιχεία της $ad\ [L, L]$ θα είναι μηδενοδύναμοι πίνακες και ως εκ τούτου τα στοιχεία της $[L, L]$ θα είναι $ad|_{[L,L]}$-μηδενοδύναμα. Έτσι από το θεώρημα του Engel θα έχουμε ότι η $[L, L]$ είναι μηδενοδύναμη. $\square$

Κεφάλαιο 2

Ημιαπλές Lie άλγεβρες

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγονται τα εργαλεία της ανάλυσης Jordan-Chevalley και της μορφής Killing . Με αυτά ως εργαλεία διατυπώνονται δύο κριτήρια για την ημιαπλότητα και την επιλυσιμότητα μίας άλγεβρας Lie , γνωστά και ως κριτήρια Cartan . Ακόμη αποδεικνύεται πως μία ημιαπλή Lie άλγεβρα γράφεται ως ευθύ άθροισμα των απλών ιδεωδών της. Στη συνέχεια μελετώνται κατασκευές νέων αναπαραστάσεων, διατυπώνεται το λήμμα του Schur . Τέλος, ορίζεται η αφηρημένη ανάλυση Jordan , αποδεικνύεται ότι όλες οι παραγωγίσεις μίας ημιαπλής Lie άλγεβρας είναι εσωτερικές, διατυπώνεται το θεώρημα του Weyl για την πλήρη αναγωγησιμότητα των αναπαραστάσεων μίας ημιαπλής Lie άλγεβρας και καταλήγουμε στην διατήρηση της ανάλυσης Jordan στις αναπαραστάσεις.

2.1 Κριτήρια Cartan και μορφή Killing

Ανάλυση Jordan-Chevalley

Σε αυτή την ενότητα θα εισαχθεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση που θα ακολουθήσει. Το εργαλείο αυτό προέρχεται από τη γραμμική άλγεβρα και πιο συγκεκριμένα από την κανονική μορφή Jordan ενός ενδομορφισμού ενός διανυσματικού χώρου. Κάποιες αποδείξεις θα αποφευχθούν καθώς ανάγονται σε ζητήματα θεωρίας δακτυλίων κάτι που περισσότερο αποκλίνει παρά προσθέτει στην ουσία της θεωρίας των αλγεβρών Lie .

Είναι γνωστό από τη γραμμική άλγεβρα ότι η κανονική μορφή Jordan υπάρχει πάντα για έναν ενδομορφισμό ενός διανυσματικού χώρου πάνω από ένα σώμα $\mathbb{F}$ αν και μόνο αν το σώμα είναι αλγεβρικά κλειστό. Η απαίτηση αυτή ισχύει στην περίπτωση μας αφού έχουμε περιοριστεί στο $\mathbb{C}$. Είναι επίσης γνωστό ότι η ανάλυση Jordan δεν είναι μοναδική.

Γνωρίζουμε λοιπόν ότι αν V μιγαδικός διανυσματικός χώρος και αν $x \in End\ V$, τότε υπάρχει βάση του V στην οποία ο πίνακας του x έχει block-διαγώνια μορφή όπου κάθε block του έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Εφοσόν ο διαγώνιος πίνακας $diag(\alpha, \dots, \alpha)$ μετατίθεται με τον μηδενοδύναμο που έχει άσσους ακριβώς πάνω από τη διαγώνιο και παντού αλλού μηδενικά, ο x είναι το άθροισμα ενός διαγώνιου πίνακα κι ενός μηδενοδύναμου που μετατίθενται. Με βάση αυτή την παρατήρηση θα ορίσουμε μια ειδική περίπτωση της ανάλυσης Jordan αφού επεξεργαστούμε, όμως, πρώτα την έννοια του ημιαπλού ενδομορφισμού (στο $\mathbb{C}$).

Εν γένει ένας ενδομορφισμός θα λέγεται **ημιαπλός** αν είναι διαγωνιοποιήσιμος. Επισημαίνεται πως δύο ημιαπλοί ενδομορφισμοί που μετατίθενται διαγωνιοποιούνται ταυτόχρονα, κι ως εκ τούτου το άθροισμα και η διαφορά τους είναι ημιαπλοί. Αν, ακόμη, ένας υπόχωρος W του V είναι αναλλοίωτος κάτω από τη δράση ενός ημιαπλού ενδομορφισμού $x \in End\ V$ τότε προφανώς και ο περιορισμός του x στον W είναι ημιαπλός.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω V μιγαδικός διανυσματικός πεπερασμένης διάστασης και $x \in End\ V$.*

1. *Υπάρχουν μοναδικά $x_s, x_n \in End\ V$ τέτοια ώστε $x = x_s + x_n$, $[x_s, x_n] = 0$ με x_s ημιαπλό και x_n μηδενοδύναμο.*

2. *Υπάρχουν πολυώνυμα $p, q \in \mathbb{C}[End\ V]$ χωρίς σταθερό όρο τέτοια ώστε $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Επιπροσθέτως οι x_s, x_n μετατίθενται με κάθε ενδομορφισμό που μετατίθεται με το x.*

3. *Αν $A \subset B \subset V$ υπόχωροι και ο x στέλνει τον B στον A τότε οι x_s, x_n στέλνουν επίσης τον B στον A.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του πρώτου τμήματος του 2. βασίζεται ως επί το πλείστον στη θεωρία δακτυλίων και για αυτό το λόγο θα παραλειφθεί[1]. Δεδομένου ότι υπάρχουν τα δύο πολυώνυμα p, q, τότε $[x_s, x_n] = [p(x), q(x)] = 0$, αφού δεν υπάρχει σταθερός όρος κι όλες οι δυνάμεις του x μετατίθενται. Ετσι θα μετατίθενται και τα p, q. Για τον ίδιο λόγο τα πολυώνυμα θα μετατίθενται και με κάθε ενδομορφισμό που μετατίθεται με τον x. Ενώ αν ο x σταθεροποιεί κάποιον υπόχωρο τότε και τα $x_s,\ x_n$ θα τον σταθεροποιούν, κάτι που εμέσως αποδεικνύει και το 3.

Έτσι απομένει να δειχθεί η μοναδικότητα των $x_s,\ x_n$. Έστω $x = s + n$ μία άλλη τέτοια ανάλυση του x. Τότε θα πρέπει $x_s - s = n - x_n$. Εφόσον το άθροισμα μηδενοδύναμων είναι μηδενοδύναμος, το άθροισμα ημιαπλών είναι ημιαπλός ενδομορφισμός και αφού ο μοναδικός ημιαπλός και ταυτόχρονα μηδενοδύναμος ενδομορφισμός είναι ο μηδενικός έχουμε ότι $x_s = s$ και $x_n = n$. □

Η ανάλυση $x = x_s + x_n$ ονομάζεται **ανάλυση Jordan-Chevalley** του x και τα $x_s,\ x_n$ ονομάζονται **ημιαπλό κομμάτι** και **μηδενοδύναμο κομμάτι** αντίστοιχα.

Για να δούμε ένα παράδειγμα χρήσης της ανάλυσης Jordan-Chevalley στρεφόμαστε στην $\mathfrak{gl}(V)$ για κάποιον πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο V. Όπως δείξαμε στο λήμμα 1.3.1 αν $x \in \mathfrak{gl}(V)$ μηδενοδύναμος τότε και $ad\ x$ μηδενοδύναμος, ενώ όπως θα δείξουμε τώρα αν x ημιαπλός (διαγωνιοποιήσιμος) τότε και $ad\ x$ ημιαπλός. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την ταύτιση (ισομορφισμό) $End(V) \cong V^* \otimes V$. Αν, λοιπόν, $e_i,\ i = 1, \ldots \dim V$ η βάση των ιδιοδιανυσμάτων του x με ιδιοτιμές α_i, τότε e_i^* η δυική της βάση. Θα ισχύει ότι $e_i^*(x(e_j)) = \alpha_j e_i^*(e_j) = \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_i e_i^*(e_j)$, επομένως βλεπουμε ότι $e_i^* \circ x = \alpha_i e_i$. Τέλος αν $e_{ij} = e_j^* \otimes e_i$ η αντίστοιχη βάση της $\mathfrak{gl}(V)$, τότε $ad\ x(e_{ij}) = x \circ e_j^* \otimes e_i - e_j^* \otimes e_i \circ x = e_j^* \otimes x(e_i) - (e_j^* \circ x) \otimes e_i = \alpha_i e_i^* \otimes e_i - \alpha_j e_i^* \otimes e_i = (\alpha_i - \alpha_j) e_{ij}$. Το τελευταίο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι αν x ημιαπλός τότε και $ad\ x$ ημιαπλός.

Λήμμα 2.1.1. *Έστω $x \in End\ V$ $(\dim V < \infty)$ και $x = x_s + x_n$ η ανάλυση Jordan του x. Τότε $ad\ x = ad\ x_s + ad\ x_n$ είναι η ανάλυση Jordan του $ad\ x$.*

Απόδειξη. Απο τη συζήτηση της προηγούμενης παραγράφου ξέρουμε ότι οι $ad\, x_s,\ ad\, x_n$ είναι αντίστοιχα ημιαπλός και μηδενοδύναμος. Ακόμη $[ad\, x_s, ad\, x_n] = ad\ [x_s, x_n] = 0$. Άρα από το πρώτο τμήμα της πρότασης 2.1.1 έχουμε το ζητούμενο. □

[1] Για την πλήρη απόδειξη βλ. [6] και [8]

Στη συνέχεια θα δούμε μια μικρή γενίκευση σε όλες τις παραγωγίσεις μιας $\mathbb{C}$-άλγεβρας.

Λήμμα 2.1.2. *Έστω $\mathfrak{U}$ $\mathbb{C}$-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης. Τότε η $Der\mathfrak{U}$ περιέχει τα ημιαπλά και τα μηδενοδύναμα κομμάτια όλων των στοιχείων της.*

Απόδειξη. Έστω $\delta \in Der\mathfrak{U}$ και $\sigma, \nu \in End\mathfrak{U}$ το ημιαπλό και το μηδενοδύναμο κομμάτι της δ αντίστοιχα. Λόγω γραμμικότητας της $Der\mathfrak{U}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\sigma \in Der\mathfrak{U}$. Στόχος μας, λοιπόν είναι να δειχθεί ότι $\sigma(xy) = \sigma(x)y + x\sigma(y)$ για κάθε $x, y \in \mathfrak{U}$.

Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$. Θέτουμε $\mathfrak{U}_\alpha = \{x \in \mathfrak{U} | \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ (\delta - \alpha)^k x = 0\}$. Τότε η $\mathfrak{U}$ είναι το ευθύ άθροισμα των $\mathfrak{U}_\alpha$ για τα οποία το α αποτελεί ιδιοτιμή του σ. Άρα η σ δρά σε αυτά τα $\mathfrak{U}_\alpha$ πολλαπλασιαστικά. Για δύο τυχαία τέτοια $\alpha, \ \beta \in \mathbb{C}$ βλέπουμε ότι $\mathfrak{U}_\alpha \mathfrak{U}_\beta \subset$ χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$(\delta - (\alpha + \beta))^n (xy) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((\delta - \alpha)^n x)((\delta - \beta)^{n-k} y), \ \forall x, y \in \mathfrak{U}$$

που αποδεικνύεται πολύ εύκολα με επαγωγή στο n. Έστω, λοιπόν, $x \in \mathfrak{U}_\alpha, \ y \in \mathfrak{U}_\beta$. Τότε $\sigma(xy) = (\alpha + \beta)xy$ αφού $xy \in \mathfrak{U}_{\alpha+\beta}$. Ακόμη $\sigma(x)y + x\sigma(y) = (\alpha + \beta)xy$ Έτσι, λόγω του ευθέως αθροίσματος $\mathfrak{U} = \bigoplus_\alpha \mathfrak{U}_\alpha$, βλέπουμε ότι $\sigma(xy) = \sigma(x)y + x\sigma(y)$, δηλαδή η σ είναι παραγώγιση. □

Η μορφή Killing μιας Lie άλγεβρας

Ορισμός 2.1.1. *Έστω Lie άλγεβρα L, V διανυσματικός χώρος και $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ αναπαράσταση. Ορίζουμε ως μορφή Killing της ρ τη συμμετρική διγραμική μορφή $\beta_V : L \times L \to \mathbb{C}, \ \beta_V(x, y) = Tr\{\rho(x) \circ \rho(y)\}$.*

Πρόταση 2.1.2. *Η μορφή Killing μιας Lie άλγεβρας είναι ¨προσεταιριστική' ή ¨αναλλοίωτη' υπο την εξής έννοια:*

$$\beta_V([x, y], z) = \beta_V([x, [y, z]])$$

για κάθε $x, y, z \in L$.

Απόδειξη. Έστω $x, y, z \in L$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\beta_V(([x,y],z)) &= Tr\{\rho([x,y])\rho(z)\} \\
&= Tr\{[\rho(x),\rho(y)]\rho(z)\} \\
&= Tr\{\rho(x)\ \rho(y)\ \rho(z)\} - Tr\{\rho(y)\ \rho(x)\ \rho(z)\} \\
&= Tr\{\rho(x)\ \rho(y)\ \rho(z)\} - Tr\{\rho(x)\ \rho(z)\ \rho(y)\} \\
&= Tr\{\rho(x)\ [\rho(y),\ \rho(z)]\} \\
&= Tr\{\rho(x)\ \rho([y,z])\} \\
&= \beta_V(x,[y,z])
\end{aligned}$$

□

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε ως Killing μορφή της L την $k(x,y) := \beta_L(x,y) = Tr\{ad\ x\ ad\ y\}$ για κάθε $x, y \in L$.

Άν επιλέξει κανείς μία βάση $\{e_1, \ldots, e_{\dim L}\}$ για την L, τότε έχουμε ότι $(ad\ e_i)(e_j) = c_{ij}^k e_k = (ad\ e_i)_j^k e_k$. Επομένως $k(e_i, e_j) = c_{ik}^m c_{jm}^k$ με σύμβαση άθροισης σε επαναλαμβανόμενους άνω κάτω δείκτες.

Λήμμα 2.1.3. *Έστω I ιδεώδες μιας Lie άλγεβρας L. Η μορφή Killing k_I του I ως αυτόνομη Lie άλγεβρα, ταυτίζεται με τον περιορισμό της μορφής Killing, k, της L στο $I \times I$, $k|_{I\times I}$.*

Απόδειξη. Στην περίπτωση που $I = L$ ή $I = 0$ το συμπέρασμα ισχύει. Έστω $0 < \dim I = M < \dim L = N$. Έστω $\{e_1, \ldots, e_N\}$ μια βάση της L τέτοια ώστε $\{e_1, \ldots, e_M\}$ βάση του I. Τότε αφού $[I, J] \subseteq I$ οι σταθερές δομής c_{ij}^k της L θα είναι μηδενικές για $k > M$. Έτσι για $1 \leq i, j \leq M$:

$$\begin{aligned}
k|_{I\times I}(e_i,e_j) &= k(e_i,e_j) \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} c_{il}^k c_{jk}^l \\
&= \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} c_{il}^k c_{jk}^l \\
&= Tr\{ad\ e_i ad\ e_j\} \\
&= k_I(e_i,e_j)
\end{aligned}$$

□

Γενικά μια συμμετρική διγραμμική μορφή $\beta : L \times L \to \mathbb{F}$ καλείται **μη εκφυλισμένη** αν το **ριζικό** της, $S := \{x \in L | \beta(x,y) = 0,\ \forall y \in L\}$, είναι το $\{0\}$. Για τη μορφή Killing κάθε αναπαράστασης έχουμε ότι το S είναι ένα ιδεώδες της L. Πράγματι αν $s \in S, x, y \in L$, τότε $\beta_V([s,x],y) = \beta_V(s,[x,y]) = 0$, δηλαδή $[s,x] \in S$.

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε πως η μορφή Killing θα αποτελέσει ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο. Η ανάπτυξη των επόμενων δύο κριτηρίων για το πότε μία άλγεβρα είναι ημιαπλή και για το πότε είναι επιλύσιμη σε άλλη περίπτωση θα ήταν αδύνατη. Ακόμη, μέσω της μορφής Killing θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται οι απλές και οι ημιαπλές Lie άλγεβρες.

Τα κριτήρια του Cartan

Γνωρίζουμε ότι αν μία Lie άλγεβρα L είναι επιλύσιμη τότε από το θεώρημα του Lie η $ad\ L$ μπορεί να πάρει τη μορφή άνω τριγωνικών πινάκων. Επιπροσθέτως, αφού $ad\ [L,L] = [ad\ L, ad\ L]$, ξέρουμε ότι η $[L,L]$ δρά στην L, μέσω αυστηρώς άνω τριγωνικών πινάκων. Επομένως αν $x \in [L,L],\ y \in L$ τότε η $ad\ x \circ ad\ y$ έχει μορφή αυστηρώς άνω τριγωνικού πίνακα κι ως εκ τούτου $Tr\{ad\ x \circ ad\ y\} = 0$, δηλαδή $k(x,y) = 0$ ή $[L,L] \subseteq S$. Ο Cartan χρησιμοποίησε αυτό το γεγονός για να χαρακτηρίσει τις επιλύσιμες Lie άλγεβρες.

Πρόταση 2.1.3. *(Κριτήριο Cartan για επιλύσιμες Lie άλγεβρες) Η Lie άλγεβρα L είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν $k(L,[L,L]) = \{0\}$.*

Η μία κατεύθυνση του θεωρήματος έχει δειχθεί στην προηγούμενη παράγραφο. Για την άλλη κατεύθυνση θα δείξουμε κάτι, που αν και φαινομενικά ασθενέστερο είναι αρκούντως ισχυρό.

Θεώρημα 2.1.1. *(Cartan) Έστω V μιγαδικός διανυσματικός χώρος και L υποάλγεβρα της $\mathfrak{gl}(V)$. Αν $Tr\{x \circ y\} = 0,\ \forall x, y \in L$ τότε η L είναι επιλύσιμη.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η L είναι επιλύσιμη αρκεί να δείξουμε ότι η $[L,L]$ είναι μηδενοδύναμη, αφού $L^{(n)} \subseteq [L,L]^{n-1}$. Για να δείξουμε ότι η $[L,L]$ είναι μηδενοδύναμη αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο της είναι μηδενοδύναμο, αφού τότε θα είναι και ad-μηδενοδύναμο και από το θεώρημα του Engel θα έχουμε το ζητούμενο.

Έστω λοιπόν $x \in [L,L]$ και έστω x_s, x_n η ανάλυση του κατά Jordan . Έστω ότι $x_s = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, όπου $n = \dim V$. Τότε αν δείξουμε ότι

$\lambda_i = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ θα έχουμε ότι ο x είναι μηδενοδύναμος. Αυτό που θα επιδιώξουμε είναι να δείξουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = 0,$$

που ισοδυναμεί με το $Tr\{\bar{x}_s \circ x\} = 0$, όπου $\bar{x}_s = diag(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n)$ και η γραμμή πάνω από το σύμβολο υποδηλώνει μιγαδικό συζυγή.

Εφόσον $x \in [L, L]$ τότε θα υπάρχουν $y_i, z_i \in L,\ i = 1 \ldots, \dim[L, L] \equiv m$ τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{m} [y_i, z_i]$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{i=1}^{m} Tr\{\bar{x}_s[y_i, z_i]\} = \sum_{i=1}^{m} [\bar{x}_s, y_i] z_i = 0$. Αν λοιπόν δείξουμε ότι $[\bar{x}_s, y_i] \in L$, τότε λόγω της υπόθεσης του θεωρήματος θα έχουμε ότι $Tr\{[\bar{x}_s, y_i] z_i\} = 0$.

Σημαντική παρατήρηση αποτελεί ότι ο x_s γράφεται ως πολυώνυμο του $x \in L$ κι επομένως από το λήμμα 2.1.2 ο $ad\ x_s$ γράφεται ως πολυώνυμο του $ad\ x$. Έτσι η συνθήκη $[\bar{x}_s, y] \in L$ μεταφράζεται ως $ad\ \bar{x}_s(y) \in L$. Η τελευταία θα ισχύει αν δείξουμε ότι ο $ad\ \bar{x}_s$ είναι πολυώνυμο του $ad\ x$, $p(ad\ x)$, αφού γνωρίζουμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και για κάθε $y \in L$, $(ad\ x)^N(y) \in L$, δηλαδή $p(ad\ x)(y) \in L$. Καταλήγουμε λοιπόν στο να δείξουμε ότι ο $ad\ \bar{x}_s$ θα πρέπει να γράφεται ως πολυώνυμο του $ad\ x_s$, αφού τότε θα γράφεται και ως πολυώνυμο του $ad\ x$.

Έχουμε λοιπόν ότι $[ad\ \bar{x}_s, ad\ x_s] = ad\ [\bar{x}_s, x] = 0$ που σημαίνει, ως γνωστόν από τη γραμμική άλγεβρα, ότι ο $ad\ \bar{x}_s$ θα γράφεται ως πολυώνυμο του $ad\ x_s$. Έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την άλλη κατεύθυνση της πρότασης 2.1.3. Ακόμη μπορούμε αποδείξουμε και το κριτήριο Cartan για ημιαπλές Lie άλγεβρες.

Απόδειξη. (λήμματος 2.1.3) Απομένει να αποδείξουμε ότι αν $k(x, y) = 0$ για κάθε $x \in L,\ y \in [L, L]$, τότε η L είναι επιλύσιμη. Επειδή η ad είναι αναπαράσταση της L, δηλαδή $ad\ L \subseteq \mathfrak{gl}(L)$, και $k(y, y') = Tr\{ad\ y \circ ad\ y'\} = 0\ \forall y, y' \in [L, L]$, από το θεώρημα Cartan 2.1.1, έχουμε ότι η $ad\ [L, L]$ είναι επιλύσιμη. Εφόσον η $ad\ [L, L]$ είναι επιλύσιμη, τότε προφανώς θα είναι και η $ad\ L$. Αφού $\ker ad\ = Z(L)$ είναι επιλύσιμο ιδεώδες τς L και $L/Z(L) \cong ad\ L$, από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών, τότε από την πρόταση 1.3.2 έχουμε ότι η L είναι επιλύσιμη. □

Όπως έχει ήδη αναφερθεί μία Lie άλγεβρα είναι ημιαπλή αν $RadL = \{0\}$. Αυτό ισοδυναμεί με τη μη ύπαρξη αβελιανού ιδεώδους εντός της L. Πράγματι αν I αβελιανό ιδεώδες της L, τότε ως αβελιανό είναι και επιλύσιμο, συνεπώς περιέχεται στο $RadL$, άρα $I \subseteq RadL = \{0\}$. Αντιστρόφος αν η L δεν περιέχει αβελιανό ιδεώδες τότε κατάνάγκη $RadL = \{0\}$, αφού ο τελευταίος μη μηδενικός όρος στην παράγουσα σειρά του $RadL$ είναι ένα αβελιανό ιδεώδες της L.

Θεώρημα 2.1.2. *(Κριτήριο Cartan για ημιαπλές Lie άλγεβρες). Έστω L Lie άλγεβρα. Η L είναι ημιαπλή αν και μόνο αν η Killing μορφή της, k, είναι μη εκφυλισμένη ($S = \{0\}$).*

Απόδειξη. Έστω L ημιαπλή ($RadL = 0$). Έστω S το ριζικό της μορφής killing. Τότε από τον ορισμό του S έχουμε ότι $Tr\{ad\ x\ ad\ y\} = 0$ για κάθε $x \in S,\ y \in L$, άρα και για $y \in [S, S]$. Έτσι από το κριτήριο του Cartan 2.1.3 έχουμε ότι η S είναι επιλύσιμη. Όμως όπως έχει επισημανθεί προηγουμένως η S είναι ιδεώδες της L. Άρα $S \subseteq RadL = \{0\}$.

Άντιστρόφος, έστω $S = \{0\}$. Όπως είδαμε και παραπάνω, αρκεί να δείξουμε ότι η L δεν έχει αβελιανά ιδεώδη, ή ακόμα καλύτερα ότι για όλα τα αβελιανά ιδεώδη I της L ισχύει $I \subseteq S$. Έστω $x \in I,\ y \in L$. Τότε ισχύει ότι $ad\ x\ ad\ y : L \to L \to I$ κι επομένως $(ad\ x\ ad\ y)^2 = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $ad\ x\ ad\ y$ μηδενοδύναμος και όπως συζητήθηκε στην αρχή του υποκεφαλαίου $Tr\{ad\ x\ ad\ y\} = 0$ δηλαδή $x \in S$. Άρα έχουμε ότι $I \subseteq S = \{0\}$ που είναι το ζητούμενο. □

Απλά ιδεώδη μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας

Πριν την ανάλυση μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας σε απλά ιδεώδη πρέπει να διασαφιστεί η έννοια του ευθέως αθροίσματος ιδεωδών.

Μια Lie άλγεβρα είναι ευθύ άθροισμα ιδεωδών της $I_1, \ldots, I_m$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, αν

$$L = \bigoplus_{i=1}^{m} I_i$$

δηλαδή ευθύ άθροισμα υπόχωρων. Αυτή η συνθήκη επιβάλλει ότι $[I_i, I_j] = \{0\}$ αν $i \neq j$. Δηλαδή η L μπορεί να ειδωθεί ως προερχόμενη από τις Lie άλγεβρες $I_1, \ldots, I_m$, ορίζοντας το μεταθέτη Lie κατά συντεταγμένη.

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω L ημιαπλή. Τότε υπάρχουν ιδεώδη της L, $L_1, \ldots, L_m$, για $m \in \mathbb{N}$, απλά ως αυτόνομες Lie άλγεβρες, και τέτοια ώστε $L = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$. Ακόμη κάθε απλό ιδεώδες, I, της L ταυτίζεται με κάποιο από τα L_i.*

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι αν I ιδεώδες της L, τότε $L = I \oplus I^\perp$, όπου $I^\perp := \{x \in L | \ k(x,y) = 0, \ \forall y \in L\}$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in I, \ y \in I^\perp, \ z \in L$, τότε $k(x,[y,z]) = -k([x,z],y) = 0$, άρα $I^\perp$ ιδεώδες της L. Επίσης $I \cap I^\perp$ ιδεώδες της L και αφού $[I \cap I^\perp, I \cap I^\perp] \subseteq I^\perp$ έχουμε ότι $k(I \cap I^\perp, [I \cap I^\perp, I \cap I^\perp]) = \{0\}$. Άρα από το κριτήριο Cartan για επιλύσιμες Lie άλγεβρες, 2.1.3 έχουμε ότι $I \cap I^\perp$ επιλύσιμο ιδεώδες της L και αφού L ημιαπλή $I \cap I^\perp = \{0\}$. Έτσι έχουμε ότι $\dim L = \dim I + \dim I^\perp$ και συνεπώς $L = I \oplus I^\perp$.

Έχοντας στη διάθεσή μας το παραπάνω αποτέλεσμα, θα δείξουμε, με ισχυρή επαγωγή στη διάσταση της L, ότι η L είναι ευθύ άθροισμα απλών ιδεωδών. Έστω $\dim L = 2$. Τότε δεν υπάρχει γνήσιο ιδεώδες της καθώς αν υπήρχε θα ήταν η μονοδιάστατη υποάλγεβρα που είναι αβελιανή. Άρα η L είναι απλή και ισχύει και το ζητούμενο.

Έστω $\dim L > 2$ και έστω I το μικρότερο μη μηδενικό ιδεώδες της L. Από την πρώτη παράγραφο έχουμε ότι $L = I \oplus I^\perp$. Επειδή για κάθε ιδεώδες, J, του I θα ίσχυε $[J, I^\perp] \subseteq [I, I^\perp] = \{0\}$ βλέπουμε ότι το J θα ήταν και ιδεώδες της L που απαγορεύεται λόγω της ελαχιστότητας του I. Άρα I απλό ιδεώδες. Με δεδομένο ότι $\dim I < \dim L$ έχουμε ότι $\dim I^\perp < \dim L$, επομένως λόγω της επαγωγικής υπόθεσης το $I^\perp$ είναι ευθύ άθροισμα απλών ιδεωδών του. Λόγω της προηγούμενης επιχειρηματολογίας αυτά τα απλά ιδεώδη του $I^\perp$ θα είναι και ιδεώδη της L, επομένως έχουμε το ζητούμενο.

Έστω τώρα απλό ιδεώδες, I, της L. Λόγω της απλότητας του I, έχουμε $I = [I,I] \subseteq [I,L] \subseteq I$, δηλαδή $[I,L] = I$. Όμως $[I,L] = \bigoplus_{i=1}^m [I, L_i]$, για τα m τω πλήθος απλά ιδεώδη, L_i που αποδείχθηκε ότι υπάρχουν προηγουμένως. Επειδή το I δεν μπορεί να περιέχεται γνησίως σε κανένα από τα L_i, αλλά ούτε κάποιο L_i μπορεί να περιέχει γνησίως το I, καθώς σε άλλη περίπτωση θα αποτελούσαν το ένα γνήσιο ιδεώδες του άλλου, θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό $n = 1, \dots, m$ τέτοιο ώστε $I = L_i$ και για κάθε $i \neq n$ $I \cap L_i = \{0\}$. Έτσι αποδείξαμε τη μονάδικότητα των L_i ως απλά ιδεώδη της L. $\square$

Γενικά ισχύει και ότι αν μια Lie άλγεβρα L είναι ευθύ άθροισμα απλών ιδεωδών της τότε είναι ημιαπλή. Ο ισχυρισμός αυτός αποδεικνύεται με επαγωγή στον αριθμό των απλών ιδεωδών. Αν η L αποτελείται από ένα απλό ιδεώδες τότε $RadL = \{0\}$ λόγω της απλότητας. Αν ο αριθμός των απλών ιδεωδών είναι τυχαίος έχουμε ότι για κάποιο L_i ισχύει ότι $RadL \cap L_i \subset L_i$. Τότε $[[RadL, L_i], L_i] \subseteq [RadL \cap L_i, L_i] \subseteq RadL \cap L_i$, δηλαδή $[RadL, L_i]$ γνήσιο ιδεώδες του L_i, ή $RadL \cap L_i = \{0\}$ καθώς L_i απλό. Άρα έχουμε ότι το $RadL \cap L_i$ ταυτίζεται με κάποιο L_i ή είναι μηδεν καθώς σε άλλη περίπτωση το $RadL \cap L_i$ θα ήταν γνήσιο ιδεώδες του L_i που όμως είναι άτοπο καθώς L_i

απλό. Ισχύει ότι $\dim Rad\ L < \dim L$ γιατί αν $RadL = L$ τότε κάθε ιδεώδες του θα ήταν επιλύσιμο. Επομένως το $RadL$ είναι ημιαπλό λόγω της επαγωγικής υπόθεσης και άρα $Rad\ L = \{0\}$.

Πόρισμα 2.1.1. *Έστω L ημιαπλή. Τότε $L = [L, L]$ και κάθε ιδεώδες και ομομορφική εικόνα της είναι ημιαπλές Lie άλγεβρες. Επιπροσθέτως κάθε ιδεώδες της L είναι ευθύ άθροισμα κάποιων απλών ιδεωδών της L.*

Απόδειξη. Ως προς τον πρώτο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι:

$$[L, L] = \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{m}[L_i, L_j] = \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{m}\delta_{ij}L_i = \bigoplus_{i=1}^{m}L_i = L,$$

όπου L_i είναι τα μοναδικά απλά ιδεώδη της L.

Εν συνεχεία βλέπουμε ότι αν I ιδεώδες της L, τότε κάθε ιδεώδες του I θα είναι και ιδεώδες της L, όπως αποδείχθηκε προηγουμένως. Άρα αν το $Rad\ I$ υπήρχε, τότε η L θα είχε μη τετριμμένο επιλύσιμο ιδεώδες, που είναι άτοπο αφού η L είναι ημιαπλή. Συνεπώς κάθε ιδεώδες της L είναι ημιαπλό.

Με βάση τα προηγούμενα ξέρουμε ότι κάθε ιδεώδες I της L γράφεται ως ευθύ άθροισμα κάποιων ιδεωδών της L, έστω των $L_1, \ldots, L_k$ χωρίς βλάβη της γενικότητας. Αν η L έχει διάσταση 2 τότε το μόνο απλό ιδεώδες της είναι ο εαυτός της. Έτσι L/L μηδενικής διάστασης συνεπώς ημιαπλό. Με επαγωγή στη διάσταση της L έχουμε ότι αν $L = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$ για $m > k$ τότε $L/I = (\bigoplus_{i=1}^{m-k} L_i/I) \oplus I/I$. Δηλαδή από την επαγωγική υπόθεση ως άθροισμα απλών ιδεωδών L_i/I. Έτσι η L/I είναι ημιαπλή.

Τέλος από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε ότι κάθε ομομορφική εικόνα της L είναι ημιαπλή. □

Εσωτερικές παραγωγίσεις και αφηρημένη ανάλυση Jordan-Chevalley

Το ότι η μορφή Killing μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας είναι μη εκφυλισμένη έχει περαιτέρω συνέπειες. Αυτή που ακολουθεί βασίζεται στο ότι για κάθε Lie άλγεβρα L η $ad\ L$ είναι ιδεώδες της $Der\ L$.

Θεώρημα 2.1.4. *Αν L ημιαπλή Lie άλγεβρα, τότε κάθε παραγώγιση της είναι εσωτερική, δηλαδή $ad\ L = Der\ L$*

Απόδειξη. Εφόσον η L είναι ημιαπλή, τότε $Z(L) = 0$. Επομένως η L είναι ισόμορφη με την $ad\ L$ ως Lie άλγεβρες. Αν θέσουμε $D = Der\ L,\ M = ad\ L$, τότε το M και το $M^{\perp}$ είναι ιδεώδη της D. Από το λήμμα 2.1.3 και το θεώρημα Cartan 2.1.2 έχουμε ότι ο περιορισμός στο M της μορφής Killing της D είναι μη εκφυλισμένος. Οπότε έχουμε ότι $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ κι ως εκ τούτου $[M, M^{\perp}] = \{0\}$. Έτσι για κάθε $\delta \in M^{\perp},\ x \in L$ έχουμε ότι $[\delta, x] = ad\ \delta(x) = 0$ και λόγω του ισομορφισμού μεταξύ των L και $Der\ L$ ισχύει ότι $\delta(x) = 0$ για κάθε $x \in L$. Δηλαδή $\delta = 0$ που σημαίνει ότι $M^{\perp} = \{0\}$. Συνεπώς $ad\ L = Der\ L$. □

Το προηγούμενο θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εισάγουμε την αφηρημένη ανάλυση Jordan-Chevalley μιας τυχαίας ημιαπλής Lie άλγεβρας L. Από το λήμμα 2.1.2 ξέρουμε ότι η $DerL$ περιέχει το ημιαπλό και το μηδενοδύναμο κομμάτι κάθε στοιχείου της. Επομένως λόγω του ισομορφισμού των L και $ad\ L$, και της ταύτισης του $DerL$ με την $ad\ L$ μπορούμε να βρούμε για κάθε $x \in L$ μοναδικά στοιχεία $s, n \in L$ τέτοια ώστε $ad\ x = ad\ s + ad\ n$ να είναι η συνήθης ανάλυση Jordan-Chevalley του $ad\ x$. Έτσι ορίζουμε ως αφηρημένη ανάλυση Jordan την ανάλυση του x ως: $x = s + n$.

2.2 Πλήρης αναγωγισιμότητα των αναπαραστάσεων

Κατασκευή νέων προτύπων από παλιά και λήμμα του Schur

Κάποια προαπαιτούμενα είναι αναγκαία πρωτού δούμε τι έχει να προσφέρει η θεωρία αναπαραστάσεων στην ανάλυση της δομής των Lie αλγεβρών. Δεδομένης μιας αναπαράστασης $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ η προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα που προκύπτει ως $\phi(L) \subset EndV$ παρέχει τα εργαλεία για την απόδειξη του λήμματος του Schur που είναι γνωστό και στη θεωρία αναπαραστάσεων ομάδων.

Λήμμα 2.2.1. *(Schur) Έστω $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση. Αν $A : V \to V$ τέτοιος ώστε $\phi(x) \circ A = A \circ \phi(x)$ για κάθε $x \in L$, τότε $A = \lambda I$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Επειδή θεωρούμε μιγαδικές αναπαραστάσεις ξέρουμε ότι ο A έχει πλήρες σύστημα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων. Έστω λοιπόν μια ιδιοτιμή λ του A και v το αντίστοιχο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα. Τότε

$$(A - \lambda I)xv = x(A - \lambda I)v = 0$$

για κάθε $x \in L$. Άρα ο γενικευμένος λ-ιδιόχωρος, V_λ^L, του V είναι αναλλοίωτος. Από την μη αναγωγησιμότητα του V και από το γεγονός ότι $\ker\{A-\lambda I\} \neq \{0\}$ έχουμε ότι $V_\lambda^L = V$. Επομένως για κάθε $v \in V_\lambda^L = V$ έχουμε ότι $(A-\lambda I)v = 0$, δηλαδή $(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow A = \lambda I$. $\square$

Επιστρέφοντας στη συζήτηση περί L-προτύπων μπορούμε να δούμε ότι εν γένει η Lie άλγεβρα L αποτελεί L πρότυπο μέσω της ad . Ένα υποπρότυπό της θα αποτελούσε ιδεώδες, επομένως στην περίπτωση που η L είναι απλή τότε αυτή θα είναι μη αναγωγήσιμο L-πρότυπο, ενώ αν είναι ημιαπλή τότε είναι πλήρως αναγωγήσιμη.

Δεδομένων τώρα κάποιων προτύπων μπορούμε να κατασκευάσουμε κάποια άλλα. Πρώτη περίπτωση που έχει ήδη αναφερθεί είναι το ευθύ άθροισμα δυο L-προτύπων $V,\ W$ για το οποίο η δράση ορίζεται για κάθε $x \in L,\ v \in V,\ w \in W,\ x(v,w) := (xv, xw)$. Προφανώς και τα τρία αξιώματα του L-προτύπου επαληθεύονται σε αυτή την περίπτωση όπως ισχύει και για την επόμενη περίπτωση. Έστω V, L-πρότυπο. Ο δυικός, V^*, του V γίνεται L-πρότυπο, που ονομάζεται **δυικό L-πρότυπο** ή **δυική αναπαράσταση**, αν ορίσουμε για $f \in V^*, v \in V,\ x \in L\ \ (xf)(v) := -f(xv)$. Επειδή το τρίτο αξίωμα δεν είναι τόσο προφανές θα το δείξουμε. Για κάθε $x, y \in L$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
([x,y]f)(v) &= -f([x,y]v) \\
&= -f(xyv - yxv) \\
&= -f(xyv) + f(yxv) \\
&= (xf)(yv) - (yf)(xv) \\
&= -(yxf)(v) + (xyf)(v) \\
&= ((xy - yx)f)(v)
\end{aligned}$$

Αν τα V, W είναι L-πρότυπα και το $V \otimes W$ το τανυστικό γινόμενό τους, τότε η δράση της L ορίζεται για $v \otimes w \in V \otimes W$ ως $x(v \otimes w) := xv \otimes w + v \otimes xw$, που καθόλου τυχαία μοιάζει με παραγώγιση της σχέσης $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$ που ισχύει για τις ομάδες. Και σε αυτή την περίπτωση τα δύο πρώτα αξιώματα είναι προφανή ενώ το τρίτο ισχύει αφού για $x, y \in L$:

$$\begin{aligned}xy(v \otimes w) - yx(v \otimes w) =& x(yv \otimes w + v \otimes yw) - y(xv \otimes w + v \otimes xw)\\=& xyv \otimes w + yv \otimes xw + xv \otimes yw + v \otimes xyw\\&- yxv \otimes w - xv \otimes yw - yv \otimes xw - v \otimes yxw\\=& xyv \otimes w - yxv \otimes w + v \otimes xyw - v \otimes yxw\\=& [x, y]v \otimes w + v \otimes [x, y]w\\=& [x, y](v \otimes w)\end{aligned}$$

Η τελευταία κατασκευή αποτελεί συνδυασμό των προηγούμενων και γενίκευση . Θα στηριχτούμε στο γεγονός ότι ο $V^* \otimes W$ είναι ισόμορφος με τον $Hom(V, W) = \{\phi : V \to W| \ \phi \text{ γραμμικός}\}$ για V, W διανυσματικούς χώρους. Αν, λοιπόν, τα V, W είναι L-πρότυπα τότε και ο $Hom(V, W)$ γίνεται L-πρότυπο με τις δράσεις που ορίσαμε παραπάνω. Δηλαδή για κάθε $x \in L, \ v \in V, \ \phi \in Hom(V, W)$ ορίζουμε $(x\phi)(v) := x\phi(v) - \phi(xv)$.

Το στοιχείο Casimir μιας αναπαράστασης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Cartan για να αποδείξουμε ότι η μορφή Killing μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας L είναι μη εκφυλισμένη. Θα δούμε ότι η μορφή Killing κάθε αναπαράστασής της είναι επίσης μη εκφυλισμένη. Πράγματι αν $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ αναπαράσταση τότε το ριζικό S της β_V είναι ιδεώδες της L. Από το θεώρημα Cartan 2.1.1 έχουμε ότι η $\phi(S)$ είναι επιλύσιμη και αν η αναπαράσταση είναι πιστή, τότε και το S είναι επιλύσιμο. Επομένως στην περίπτωση των πιστών αναπαραστάσεων, που θα περιοριστούμε στο εξής, θα έχουμε ότι $S = \{0\}$.

Έστω, λοιπόν, L ημιαπλή, $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ πιστή αναπαράσταση και β_V η μη εκφυλισμένη μορφή Killing της. Αν $\{x_1, \ldots, x_n\}$ βάση της L, τότε υπάρχει η μοναδικά προσδιορισμένη δυική βάση $\{y_1, \ldots, y_n\}$ της L, ως προς την μορφή β_V, για την οποία ισχύει $\beta_V(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. Έτσι για κάθε $x \in L$ έχουμε ότι $[x, x_i] = \sum_j a_{ij}x_j$ και $[x, y_i] = \sum_j b_{ij}y_j$. Όμως από την ¨προσεταιριστικότητα¨ της μορφής Killing έχουμε ότι $a_{ik} = \sum_j a_{ij}\beta_V(x_j, y_k) = \beta_V([x, x_i], y_k) = -\beta_V(x_i, [x, y_k]) = -\sum_j b_{kj}\beta_V(x_i, y_j) = -b_{ij}$.

Έστω, λοιπόν, πιστή αναπαράσταση $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$. Ορίζουμε

$$c_\phi(\beta_V) := \sum_i \phi(x_i)\phi(y_i) \in End\ V,$$

όπου $\{x_i\}, \{y_j\}$ δυικές βάσεις της L. Με βάση αυτό τον ορισμό υπολογίζουμε για τυχαίο $x \in L$,

$$\begin{aligned}
[\phi(x), c_\phi(\beta)] =& \sum_i [\phi(x), \phi(x_i)\phi(y_i)] \\
=& \sum_i [\phi(x), \phi(x_i)]\phi(y_i) + \sum_i \phi(x_i)[\phi(x), \phi(y_i)] \\
=& \sum_{i,j} a_{ij}\phi(x_j)\phi(y_i) + \sum_{i,j} b_{ji}\phi(x_i)\phi(y_j) \\
=& \sum_{i,j} (a_{ij} + b_{ji})\phi(x_j)\phi(y_i) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Κοινώς ο $c_\phi(\beta)$ είναι ένας ενδομορφισμός του V που μετατίθεται με κάθε στοιχείο της $\phi(L)$.

Συνδέοντας όλα τα παραπάνω, αν έχουμε μια πιστή αναπαράσταση ϕ της ημιαπλής L, μια βάση της $\{x_i\}$ και μορφή Killing της αναπαράστασης β_V, τότε συμβολίζουμε c_ϕ το $c_\phi(\beta)$ και το ορίζουμε ως το **στοιχείο Casimir της αναπαράστασης** ϕ. Για το ίχνος του έχουμε ότι

$$Tr\{c_\phi\} = \sum_i Tr\{\phi(x_i)\phi(y_i)\} = \sum_i \beta_V(x_i, y_i) = \dim L.$$

Στην περίπτωση που η ϕ είναι μη αναγωγήσιμη τότε από το λήμμα του Schur έχουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή στον V. Άρα $\lambda Tr\{I\} = \dim L \Rightarrow \lambda = \dim L / \dim V$.

Όταν η ϕ δεν είναι πιστή χρειαζεται μια μικρή τροποποίηση στα παραπάνω. Επειδή ο $\ker \phi$ είναι ιδεώδες της L, δηλαδή ευθύ άθροισμα απλών ιδεωδών της L θέτουμε L' να είναι το ευθύ άθροισμα των υπόλοιπων απλών ιδεωδών της L. Τότε ο περιορισμός της ϕ στην L' είναι πιστή αναπαράσταση της L', οπότε χρησιμοποιούμε την προηούμενη κατασκευή του στοιχείου Casimir της αναπαράστασης (χρησιμοποιώντας δυικές βάσεις της L'). Το στοιχείο που προκύπτει λέγεται στοιχείο Casimir και της L αφού μετατίθεται με την $\phi(L) = \phi(L')$.

Γενικά θα θεωρούμε ότι ασχολούμαστε με πιστές αναπαραστάσεις μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας, γεγονός που αντιστοιχεί στη μελέτη των τυχαίων αναπαραστάσεων κάποιων ημιαπλών ιδεωδών μιας ημιαπλής άλγεβρας. Στην περίπτωση, βέβαια, που έχουμε στη διάθεσή μας μια απλή άλγεβρα L, μόνο το μονοδιάστατο L-πρότυπο, μεταξύ των μη αναγωγήσιμων, δεν αποτελεί πιστή αναπαράσταση.

Το θεώρημα Weyl

Όπως έχουμε δεί ήδη, η μοναδική μονοδιάστατη αναπαράσταση μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας είναι η τετριμμένη. Το γεγονός αυτό μαζί με το αποτέλεσμα του παρακάτω λήμματος θα χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε το θεώρημα του Weyl , δηλαδή ότι κάθε αναπαράσταση μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας είναι πλήρως αναγωγήσιμη. Θα δώσουμε μία αλγεβρική απόδειξη σε αντίθεση με την αναλυτική απόδείξη που έδωσε ο ίδιος ο Weyl με ολοκλήρωση πάνω στην συνεκτική συνιστώσα της συμπαγούς ομάδας, η άλγεβρα της οποίας μιγαδοποιείται πάντα σε μία ημιαπλή Lie άλγεβρα.

Λήμμα 2.2.2. *Έστω $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ αναπαράσταση της ημιαπλής Lie άλγεβρας L. Τότε $\phi(L) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$.*

Απόδειξη. Επειδή $[L, L] = L$ έχουμε ότι $\phi(L) = \phi([L, L]) = [\phi(L), \phi(L)]$. Άρα για κάθε $z \in L$ υπάρχουν $x, y \in L$ τέτοια ώστε $x = [y, z]$ και $Tr\{\phi(x)\} = Tr\{[\phi(y), \phi(z)]\} = 0$. Άρα $\phi(L) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$ □

Θεώρημα 2.2.1. *(Weyl) Έστω $\phi : L \to gl(V)$ αναπαράσταση της ημιαπλής Lie άλγεβρας L. Τότε η ϕ είναι πλήρως αναγωγήσιμη.*

Απόδειξη. Μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση που η ϕ είναι πιστή, αφού σε άλλη περίπτωση ο $\ker \phi$ είναι ιδεώδες και συνεπώς μπορούμε να μελετήσουμε τη μειωμένη άλγεβρα L', στην οποία αναφερθήκαμε στο υποκεφάλαιο για το στοιχείο Casimir . Τότε η $\phi(L')$ θα ήταν πιστή. Η συνέχεια της απόδειξης θα γίνει σε τρία βήματα/περιπτώσεις.

Βήμα 1 <u>Περίπτωση μη αναγωγήσιμου υποπροτύπου συνδιάστασης 1.</u> Έστω $W \subset V$ αναλλοίωτος κάτω από τη δράση της ϕ. Εφόσον η αναπαράσταση είναι πιστή, ορίζεται το στοιχείο Casimir , c_ϕ, που δρά πολλαπλασιαστικά στον W, αφού είναι μη αναγωγήσιμος. Επειδή ο V/W είναι L-πρότυπο, από το προηγούμενο λήμμα ξέρουμε ότι η δράση της L, μέσω της ϕ είναι τετριμμένη. Επομένως και η δράση του c_ϕ στον V/W είναι ο πολλαπλασιασμός με το 0. Έτσι βλέπουμε πως ο πυρήνας του Casimir έχει τετριμμένη τομή με τον W. Τέλος επειδή ο c_ϕ μετατίθεται με την $\phi(L)$ έχουμε ότι $\ker c_\phi$ είναι το τετριμμένο υποπρότυπο του V. Άρα $V = W \oplus \ker c_\phi$.

Βήμα 2 <u>Περίπτωση τυχαίου υποπροτύπου συνδιάστασης 1.</u> Θα δείξουμε με ισχυρή επαγωγή στη διάσταση του V ότι αν υπάρχει υποπρότυπο συνδιάστασης 1, τότε ο V είναι πλήρως αναγωγήσιμος. Έστω $\dim V = 1$. Τότε προφανώς είναι πλήρως αναγωγήσιμος, αφού είναι μη αναγωγίσημος. Έστω $\dim V > 1$ και έστω $W \subset V$ υποπρότυπο συνδιάστασης 1. Τότε υπάρχει μη αναγωγήσιμο υποπρότυπο $W_1 \subset W$ που μπορούμε να υποθέσουμε μεγιστικό (μεγαλύτερο). Τότε το W/W_1 είναι μη αναγωγήσιμο, συνδιάστασης 1, υποπρότυπο του V/W_1. Έτσι από το πρώτο βήμα ξέρουμε ότι $V/W_1 = W/W_1 \oplus V_1/W_1$.

Λόγω της παραπάνω κατασκευής ξέρουμε πως το W_1 είναι υποπρότυπο συνδιάστασης 1 και του V_1. Επομένως λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, αφού $\dim V_1 < \dim V$, το V_1 είναι πλήρως αναγωγήσιμο, δηλαδή $V_1 = W_1 \oplus \mathbb{C}z$ για κάποιο $z \in V_1 \setminus W_1$.

Εφόσον ο W_1 είναι υπόχωρος του W και ο W/W_1 είναι υποπρότυπο του V/W_1 ξέρουμε ότι W υποπρότυπο του V. Άρα, αφού $V = W \oplus W_1 \oplus \mathbb{C}z = W \oplus \mathbb{C}z$, έχουμε το ζητούμενο.

Βήμα 3 Γενική περίπτωση. Έστω $W \subset V$ υποπρότυπο, $\mathcal{V} \subset Hom(V, W)$ το σύνολο όλων των $F : V \to W$, που ο περιορισμός τους στον W δρά πολλαπλασιαστικά στον W και έστω $\mathcal{W}$ ο υπόχωρος του $\mathcal{V}$ που δρά ως πολλαπλασιασμός με το 0 στον W. Τα $\mathcal{V}$, εφοδιάζονται με τη δομή L-υποπροτύπου του $Hom(V, W)$, καθώς αν $F \in \mathcal{V}$, $x \in L$ και $w \in W$, έχουμε $(xF)(w) = xF(w) - F(xw) = F(xw) - F(xw) = 0$. Επειδή κάθε στοιχείο της L στέλνει τον $\mathcal{V}$ στον $\mathcal{W}$ έχουμε ότι και ο $\mathcal{W}$ είναι υποπρότυπο του $\mathcal{V}$.

Επειδή ο $\mathcal{W}$ είναι συνδιάστασης 1 στον $\mathcal{V}$, από το προηγούμενο βήμα, έχουμε ότι υπάρχει ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\mathcal{W}$ στον $\mathcal{V}$ που είναι υποπρότυπο και παράγεται από κάποιον $F_1 \in Hom(V, W)$. Στο υποπρότυπο αυτό η L, ως ημιαπλή, έχει τετριμμένη δράση. Αυτό σημαίνει ότι για $x \in L$, $v \in V$ έχουμε $0 = xF_1(v) - F_1(xv) \Rightarrow xF_1(v) = F_1(xv)$. Αυτό σημαίνει με τη σειρά του ότι ο $F_1 : V \to W$ είναι ομομορφισμός L-προτύπων, συνεπώς ο πυρήνας του είναι υποπρότυπο του V. Μάλιστα ο $\ker \phi$ είναι ορθογώνιος στον W, αφού $F_1 \notin \mathcal{W}$ άρα δεν μηδενίζει κανένα στοιχείο του W. Έτσι $V = W + \ker \phi$. □

Διατήρηση της ανάλυσης Jordan-Chevalley

Το θεώρημα του Weyl είναι θεμελιώδες για τη θεωρία αναπαραστάσεων μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας L. Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα δούμε μια άμεση εφαρμογή του θεωρήματος. Θα δείξουμε ότι η αφηρημένη ανάλυση Jordan-Chevalley είναι συμβατή με τη συνήθη ανάλυση Jordan-Chevalley των στοιχείων μίας αναπαράστασης.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ μια ημιαπλή γραμμική Lie άλγεβρα, ($\dim V < \infty$). Τότε η L περιέχει το μηδενοδύναμο και το ημιαπλό κομμάτι,* *στην $\mathfrak{gl}(V)$, κάθε στοιχείου της.*

Απόδειξη. Έστω $x \in L$ με ανάλυση Jordan $x = x_s + x_n$ στην $\mathfrak{gl}(V)$. Θα δείξουμε πρώτα ότι τα $x_s, x_n \in \mathfrak{gl}(V)$ ανήκουν στον κανονικοποιητή της L στην $\mathfrak{gl}(V)$, $N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) = N$. Πράγματι, αφού η L είναι κλειστή ως προς το μεταθέτη έχουμε ότι $ad\ x(L) = ad\ _{\mathfrak{gl}(V)}x(L) \subseteq L$, έτσι από το θεώρημα 2.1.1, έχουμε ότι $ad\ x_s(L) \subseteq L$ και $ad\ x_n(L) \subseteq L$. Άρα $x_s, x_n \in N$. Δυστυχώς επειδή τα στοιχεία της $\mathfrak{gl}(V)$, που αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό με βαθμωτό στον V, ανήκουν στον N αλλά δεν ανήκουν στην L ($L \subseteq \mathfrak{sl}(V)$ από το λήμμα 2.2.2), πρέπει να βρούμε ότι τα x_s, x_n ανήκουν σε μικρότερη υποάλγεβρα της $\mathfrak{gl}(V)$, που θα ταυτίσουμε με την L.

Αν $W \subset V$ L-υποπρότυπο, ορίζουμε $L_W := \{y \in \mathfrak{gl}(V) | y(W) \subseteq W$ και $Tr\{y|_W\} = 0\}$. Προφανώς έχουμε $\mathfrak{sl}(V) = L_V$ και, για κάθε W L-υποπρότυπο, $L \subseteq L_W$. Επομένως η $L' := (\bigcap_W L_W) \cap N$ είναι υποάλγεβρα στην οποία περιέχεται η L ως ιδεώδες, αφού $L' \subset N$, ενώ δεν ανήκουν οι βαθμωτοί πολλαπλασιασμοί. Ακόμη, τα x_s, x_n ανήκουν σε κάθε L_W, από το λήμμα 2.1.1, επομένως ανήκουν και στην L'.

Απομένει, λοιπόν, να δείξουμε ότι $L = L'$ για το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Weyl . Δεδομένου ότι η L' είναι πεπερασμένης διάστασης L-πρότυπο, καθώς η L δρά μέσω της ad τότε από το θεώρημα του Weyl έχουμε ότι $L' = L \oplus M$, όπου M είναι L-υποπρότυπο. Επειδή $ad\ L(M) \subseteq M$ και L ιδεώδες της L' τότε η δράση της L στο M είναι η τετριμμένη. Άρα για κάθε $y \in M$, $[L, y] = 0$. Επίσης από το θεώρημα του Weyl έχουμε ότι η L' θα γράφεται ως ευθύ άθροισμα μη αναγωγήσιμων L-υποπροτύπων της. Αν λοιπόν W μη αναγωγήσιμο υποπρότυπο, τότε για κάθε $y \in M$, $[L, y|_W] = 0$, οπότε από το λήμμα του Schur έχουμε ότι ο $y|_W$ είναι πολλαπλάσιο της μονάδας. Όμως ο y ανήκει στην L', οπότε $Tr\{y|_W\} = 0$. Άρα $y|_W = 0$ για κάθε W μη αναγωγήσιμο και αφού ο V είναι πλήρως αναγωγήσιμος συμπεραίνουμε ότι για κάθε $y \in M,\ y = 0$. Άρα $L = L'$.

□

Με βάση τα παραπάνω βλέπουμε ότι η αφηρημένη και η συνήθης ανάλυση Jordan ταυτίζονται σε μία ημιαπλή γραμμική Lie άλγεβρα. Το γεγονός αυτό μας εγγυώνται η μοναδικότητα της ανάλυσης Jordan-Chevalley και η πιστότητα (1-1) της ad. Στη συνέχεια θα δούμε πως σχετίζεται μια αφηρημένη Lie άλγεβρα με τις αναπαραστάσεις της, ως προς την ανάλυση Jordan και αυτό το σχόλιο θα μας βοηθήσει προς αυτή την κατεύθυνση.

Πόρισμα 2.2.1. *Έστω L ημιαπλή Lie άλγεβρα και $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση. Αν η αφηρημένη ανάλυση Jordan του $x \in L$ είναι $x = s + n$, τότε $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ είναι η συνήθης ανάλυση Jordan του $\phi(x)$.*

Απόδειξη. Έστω $x = s + n$ η αφηρημένη ανάλυση Jordan του $x \in L$. Από τον ορισμό του $s \in L$ έχουμε ότι το $ad\ s$ είναι ημιαπλό, συνεπώς έχει πλήρες σύστημα ιδιοδιανυσμάτων που παράγουν την L. Αυτό μας δείχνει πως και τα ιδιοδιανύσματα του $ad\ \phi(s)$ παράγουν την $\phi(L)$. Έτσι ο $ad\ \phi(s)$ είναι ημιαπλός. ομοίως είναι και ο $ad\ \phi(n)$ μηδενοδύναμος. Εφόσον $[ad\ \phi(s), ad\ \phi(n)] = ad\ [\phi(s), \phi(n)] = ad\ \phi([s, n]) = ad\ \phi(0) = 0$, έχουμε ότι $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ είναι η αφηρημένη ανάλυση Jordan του $\phi(x)$. Από το προηγούμενο σχόλιο, η αφηρημένη και η συνήθης ανάλυση Jordan ταυτίζονται για μια γραμμική Lie άλγεβρα όπως η $\phi(L)$, επομένως έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 3

Ταξινόμηση των ημιαπλών αλγεβρών Lie

3.1 Αναπαραστάσεις της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε ότι όλα τα πρότυπα είναι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών. Ακόμη η L θα συμβολίζει την $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, της οποίας η βάση θα είναι η ακόλουθη:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Με βάση τα παραπάνω οι σχέσεις μετάθεσεις της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ είναι: $[h,e] = 2e,\ [h,f] = -2f,\ [e,f] = h$.

Βάρη και μέγιστα διανύσματα

Έστω V τυχαίο L-πρότυπο. Επειδή ο h είναι ημιαπλός, τότε από το λήμμα 2.2.1 έχουμε ότι σε κατάλληλη βάση δρά ως διαγώνιος τελεστής στον V, οπότε προκύπτει η ανάλυση του V σε ιδιόχωρους του h, $V_\lambda = \{v \in V | hv = \lambda v\}$, για $\lambda \in \mathbb{C}(\equiv span_{\mathbb{C}}\{h\}^*)$. Σύμφωνα με τον ορισμό του βάρους και του χώρου βάρους που έχουμε δώσει σε προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε ότι, αν ο $V_\lambda \neq \{0\}$, τότε το λ καλείται βάρος του h στον V και ο V_λ ονομάζεται χώρος βάρους.

Λήμμα 3.1.1. *Αν $v \in V_\lambda$, τότε $ev \in V_{\lambda+2}$ και $fv \in V_{\lambda-2}$.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν $v \in V_\lambda$, τότε:

$$\begin{aligned} hev &= ehv + [h,e]v = (\lambda)ev + ev = (\lambda+2)ev \\ hfv &= fhv + [h,f]v = (\lambda)fv - fv = (\lambda-2)fv, \end{aligned}$$

δηλαδή $ev \in V_{\lambda+2}$ και $fv \in V_{\lambda-2}$. □

Αξίζει να σημειωθεί πως από το λήμμα 2.2.1 έχουμε ότι οι e, f θα είναι μηδενοδύναμοι τελεστές, όμως αυτό προκύπτει και από το προηγούμενο λήμμα ως εξής. Επειδή ο V είναι πεπερασμένης διάστασης και $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$, θα υπάρχει κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $V_\lambda \neq \{0\}$ και $V_{\lambda+2} = \{0\}$. Δηλαδή υπάρχει διάνυσμα $v \in V$ που ¨μηδενίζεται ' από τον e. Κάθε τέτοιο διάνυσμα θα ονομάζεται **μέγιστο διάνυσμα** βάρους λ. Αντίστοιχα ισχύουν και για τον f.

Ταξινόμηση των μη αναγωγήσιμων L-προτύπων

Λήμμα 3.1.2. *Έστω V μη αναγωγήσιμο L-πρότυπο, και $v_0 \in V_\lambda$ μέγιστο διάνυσμα. Θέτουμε $v_{-1} = 0$ και $v_n = (\frac{1}{n!})f^n v_0,\ n \geq 0$. Τότε:*

1. $hv_n = (\lambda - 2n)v_n$
2. $fv_n = (n+1)v_{n+1}$
3. $ev_n = (\lambda - n + 1)v_{n-1}$

Απόδειξη. Η πρώτη ιδιότητα προκύπτει με επανάλλαμβανόμενη εφαρμογή του προηγούμενου λήμματος και αποδεικνύεται με επαγωγή. Η δεύτερη αποδεικνύεται άμεσα με χρήση του ορισμού του v_n. Τέλος θα δείξουμε την τρίτη ιδιότητα με επαγωγή και χρήση των 1 και 2. Εφόσον το v_0 είναι μέγιστο διάνυσμα θα έχουμε ότι $ev = 0 = v_{-1}$, δηλαδή το ζητούμενο ισχύει για $n = 0$. Έστω ότι ισχύει για $n > 0$. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} nev_n =& efv_{n-1} \\ =& [e,f]v_{n-1} + fev_{n-1} \\ =& hv_{n-1} + f(\lambda - n + 2)v_{n-2} \\ =& (\lambda - 2(n-1))v_{n-1} + (n-1)(\lambda - n + 2)v_{n-1} \\ =& n(\lambda - n + 1)v_{n-1} \end{aligned}$$

Επομένως $ev_n = (\lambda - n + 1)v_{n-1}$ □

Από την 1. βλέπουμε ότι τα v_n είναι ιδιοδιανύσματα του h. Εφόσον λοιπόν ο h είναι ημιαπλός, τότε τα μη μηδενικά ιδιοδιανύσματά του θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς παράγουν έναν πεπερασμένης διάστασης γραμμικό χώρο W, καθώς $\dim W \leq \dim V < \infty$, ο οποίος μάλιστα είναι L-πρότυπο. Δεδομένου ότι ο V είναι μη αναγωγήσιμος πρέπει $W = V$. Αν λοιπόν τώρα θεωρήσουμε ως βάση τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα του h, τότε οι πίνακες των ενδομορφισμών που αναπαριστούν τη δράση του h θα είναι διαγώνιοι, του e θα είναι άνω τριγωνικοί μηδενοδύναμοι και του f κάτω τριγωνικοί μηδενοδύναμοι.

Μια εξίσου χρήσιμη παρατήρηση είναι πως αν v_m είναι το τελευταίο μη μηδενικό από τα v_n, δηλαδή $v_{m+1} = 0$, τότε από την 3. έχουμε ότι $ev_{m+1} = (\lambda - m)v_m$. Επειδή το v_m είναι μη μηδενικό, βλέπουμε ότι $\lambda = m$. Από το γεγονός ότι $\dim W = \dim V$, έχουμε τη σχέση $m = \lambda = \dim V - 1$ για το βάρος του μέγιστου ιδιοδιανύσματος, δηλαδή το βάρος αυτό είναι ένας μη μηδενικός φυσικός αριθμός. Ονομάζουμε, λοιπόν, αυτό το βάρος το **μέγιστο βάρος** του V.

Η τελευταία ουσιαστική παρατήρηση είναι ότι εφόσον ο W παράγεται από τα v_n που έχουν βάρος $(m - 2n)$, τότε βλέπουμε ότι κάθε V_{m-2n} είναι μονοδιάστατος. Ένα ακόμη επιχείρημα υπέρ αυτού του γεγονότος είναι ότι η δομή του V προσδιορίζει μοναδικά το μέγιστο βάρος $\lambda = \dim V - 1$ καθώς και το μέγιστο διάνυσμα (αγνοώντας μη μηδενικά βαθμωτά πολλαπλάσια). Συνοψίζοντας λοιπόν αυτές τις παρατηρήσεις έχουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω V μη αναγωγήσιμο L-πρότυπο, για $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Τότε:*

1. *Σχετικά με τον h, ο V είναι ευθύ άθροισμα των χώρων βάρους $V_\mu = V_\mu^{span_{\mathbb{C}}\{h\}}$, για $\mu = m,\ m-2,\ m-4, \ldots,\ -m$, όπου $m + 1 = \dim V$ και $\dim V_\mu = 1$ για κάθε μ βάρος*

2. *Ο V έχει, αγνοώντας μη μηδενικά βαθμωτά πολλαπλάσια, ένα μοναδικό μέγιστο διάνυσμα του οποίου το (μέγιστο) βάρος ισούται με m.*

3. *Για κάθε διάσταση $m \geq 0$, υπάρχει μοναδική κλάση ισόμορφων L-προτύπων V.*

Πόρισμα 3.1.1. *Έστω V πεπερασμένης διάστασης L-πρότυπο, για $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Τότε οι ιδιοτιμές του h είναι όλες ακέραιοι και κάθε μία προκύπτει ίσο αριθμό φορών με την αντίθετή της. Ακόμη σε κάθε ανάλυση του V σε ευθύ άθροισμα μη αναγωγήσιμων υποπροτύπων, ο αριθμός των προσθεταίων ισούται με $\dim V_0 + \dim V_1$.*

Απόδειξη. Αν $V = 0$, το λήμμα ισχύει τετριμμένα. Σε άλλη περίπτωση, από το θεώρημα του Weyl , ο V είναι ευθύ άθροισμα μη αναγωγήσιμων υποπροτύπων. Επειδή, με βάση το παραπάνω θεώρημα, το πρώτο συμπέρασμα του λήμματος ισχύει σε κάθε μη αναγωγήσιμο προσθεταίο, τότε θα ισχύει και στον V. Για το δεύτερο συμπέρασμα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αφού τα βάρη σε κάθε μη αναγωγήσιμο υποπρότυπο έχουν διαφορά 2, τότε για τις άρτιες διαστάσεις των υποπροτύπων θα είναι όλα περιττά και για τις περιττές, άρτια. Επειδή κάθε χώρος βάρους ενός υποπροτύπου είναι μονοδιάστατος, από το προηγούμενο θεώρημα, τότε θα έχουμε ότι ο αριθμός των προσθεταίων περιττής διάστασης θα είναι ίσος με $\dim V_0$ και ο αριθμός αυτών άρτιας διάστασης θα είναι $\dim V_1$. Στο σύνολο, λοιπόν, θα έχουμε $\dim V_0 + \dim V_1$ τω πλήθος προσθεταίους. $\square$

Η κατασκευή των διανυσμάτων βάρους που έγινε στο παραπάνω λήμμα μας δείχνει πως για οποιοδήποτε $m \geq 0$, έχουμε μοναδικό μη αναγωγήσιμο L-πρότυπο διάστασης $m+1$. Το πρότυπο αυτό θα έχει ως βάση τα $\{v_n\}_{n=0}^{m}$ και θα συμβολίζεται με $V(m)$.

Η παραπάνω ανάλυση θα πρέπει να είναι κάτι παραπάνω από οικεία για έναν φυσικό. Αυτό συμβαίνει διότι όλη η παραπάνω ανάλυση συνδέεται με την αλγεβρική θεωρία του spin και της στροφορμής στην κβαντομηχανική, αλλά και με τη θεωρία του isospin του Heisenberg , με την εξής απλή αντικατάσταση. Αν $m+1$ η διάσταση ενός μη αναγωγήσιμου $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-προτύπου, τότε θέτοντας $m = 2j$, ανακτούμε αυτούσια την ανάλυση των μη αναγωγήσιμων αναπαραστάσεων της $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$ άλγεβρας η οποία πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών ταυτίζεται με την $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Επειδή όμως οι ομάδες Lie που προκύπτουν στη φυσική (και τη διαφορική γεωμετρία) είναι πολλές φορές πραγματικές λείες πολλαπλότητες, η $SU(2,\mathbb{R})$ και η $\mathfrak{su}(2,\mathbb{R})$ διακρίνονται από την $SL(2,\mathbb{R})$ και την $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ως διαφορετικές πραγματικές μορφές της $SL(2,\mathbb{C})$ και της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ αντίστοιχα. Η παραπάνω διάκριση δεν έχει κάποιο κόστος ως προς τη θεωρία αναπαραστάσεων της $\mathfrak{su}(2,\mathbb{R})$ καθώς οι μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις της και οι αναπαραστάσεις της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ είναι σε 1-1 αντιστοιχία, αφού η $SU(2,\mathbb{R})$ είναι απλά συνεκτική και συμπαγής[1], και ισχύει και στις δύο περιπτώσεις το θεώρημα του Weyl .

[1]Στην αντιστοίχιση Lie αλγεβρών σε ομάδες Lie αναφέρεται το θεώρημα Baker-Campbell-Hausdorff. Για περισσότερα βλ. [5] και [11]

3.2 Ανάλυση σε χώρους ριζών

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη δομή μίας μη μηδενικής ημιαπλής Lie άλγεβρας, L, μέσω της συζυγούς αναπαράστασης. Κύρια επιχειρήματα θα είναι η ταύτιση της αφηρημένης με την συνήθη ανάλυση Jordan , η διατήρησή της σε κάθε αναπαράσταση, καθώς επίσης θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ που προηγήθηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Η μορφή Killing θα είναι ένα από τα βασικά μας εργαλεία.

Μεγιστικές τοροειδής υποάλγεβρες

Αν η L αποτελούνταν εξ ολοκλήρου από μηδενοδύναμα στοιχεία, ad-μηδενοδύναμα δηλαδή, τότε από το θεώρημα του Engel θα ήταν μηδενοδύναμη. Δηλαδή το κέντρο της L δε θα ήταν μηδενικό κι ως εκ τούτου η L δε θα ήταν ημιαπλή. Εφόσον, λοιπόν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει στοιχείο $x \in L$, του οποίου το ημιαπλό, κατά την αφηρημένη ανάλυση Jordan , κομμάτι, $x_s \in L$, είναι μη μηδενικό. Αυτό μας δείχνει πως υπάρχει μη μηδενική υποάλγεβρα, το $span_{\mathbb{C}}\{x \in L | x \text{ ημιαπλό }\}$, που αποτελείται μόνο από ημιαπλά στοιχεία. Κάθε τέτοια υποάλγεβρα καλείται **τοροειδής**.

Λήμμα 3.2.1. *Κάθε τοροειδής υποάλγεβρα $T \subseteq L$ είναι αβελιανή.*

Απόδειξη. Έστω τοροειδής υποάλγεβρα T. Αρκεί να δείξουμε ότι $ad_T\ x \equiv ad\ x|_T = 0$ για κάθε μη μηδενικό $x \in T$. Επειδή ο $ad\ x$ είναι επίσης ημιαπλός, δηλαδή διαγωνοποιείται, αρκεί να δειχθεί ότι κάθε ιδιοτιμή του $ad_T\ x$ είναι μηδενική. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει μη μηδενική ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ για κάποιο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα $y \in T$, δηλαδή $ad_T\ x(y) = \lambda y$. Τότε θα έχουμε πως $ad_T\ y(x) = -\lambda y$ και συνεπώς ότι $ad_T\ y(ad_T\ y(x)) = 0$. Επειδή ο y είναι ημιαπλός μπορούμε να γράψουμε τον x σαν γραμμικό συνδιασμό των ιδιοδιανυσμάτων y_i του $ad_T\ y$, δηλαδή $x = \sum_i x^i y_i$. Τότε $ad_T\ y(ad_T\ y(x)) = \sum_i x^i \lambda_i ad_T\ y(y_i) = \sum_i x^i \lambda_i^2 y_i = 0$, δηλαδή, λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας, ισχύει ότι $x^i = 0$ ή $\lambda_i = 0$ για κάθε i. Άρα έχουμε ότι $-\lambda y = ad\ y(x) = \sum_i x^i \lambda_i y_i = 0$ που είναι άτοπο αφού τα $\lambda,\ y$ είναι μη μηδενικά. Άρα $ad_T\ x = 0$ για κάθε $x \in T$. □

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε μια **μεγιστική τοροειδή υποάλγεβρα**, H, της L. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί το σύνολο όλων των διαγώνιων πινάκων της $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Επειδή η H είναι αβελιανή, αφενός η H δεν ταυτίζεται με την L, διότι αλλιώς η L θα ήταν αβελιανή, και αφετέρου το σύνολο $ad\ H$ αποτελείται από μετατιθέμενους ημιαπλούς ενδομορφισμούς της L. Συνεπώς όλα τα στοιχεία του $ad\ H$ είναι ταυτοχρόνως διαγωνιοποιήσιμα. Επομένως η L μπορεί να γραφεί σαν ευθύ άθροισμα υπόχωρων της μορφής $L_\alpha := \{x \in L | ad\ h(x) = \alpha(h)x,\ \forall h \in L\}$, για $\alpha \in H^*$. Προφανώς, κάθε τέτοιος μη μηδενικός χώρος, για $\alpha \neq 0$, είναι ένας χώρος βάρους για τη συζυγή αναπαράσταση. Αυτή η ειδική περίπτωση χώρου βάρους καλείται **χώρος ρίζας** ενώ το αντίστοιχο $0 \neq \alpha \in H^*$ καλείται **ρίζα** της L ως προς την H. Το σύνολο όλων των ριζών συμβολίζεται με Φ.

Ο L_0 εξ ορισμού ταυτίζεται με τον κεντροποιητή της H στην L, $C_L(H)$, και αφού η H είναι αβελιανή έχουμε την εξής σχέση εγκλεισμού: $H \subseteq C_L(H)$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε την **ανάλυση σε χώρους ριζών** ή **ανάλυση Cartan .** Σκοπός μας, λοιπόν, είναι να δείξουμε αρχικά ότι $H = C_L(H)$, ύστερα να περιγράψουμε το σύνολο, Φ, των ριζών και τέλος να δείξουμε ότι το Φ χαρακτηρίζει πλήρως την L. Προς αυτή την κατεύθυνση παρουσιάζεται η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.2.1. *Για κάθε $\alpha,\ \beta \in H^*$, έχουμε $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$. Αν $x \in L_\alpha$ με $\alpha \neq 0$, τότε ο $ad\ x$ είναι μηδενοδύναμος. Αν $\alpha,\ \beta \in H^*$ με $\alpha + \beta \neq 0$ τότε ο L_α είναι ορθογώνιος στον L_β, ως προς τη μορφή Killing της L.*

Απόδειξη. Έστω $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_\beta \in L_\beta$. Τότε για κάθε $h \in H$, έχουμε $ad\,h([x_\alpha, x_\beta]) = [ad\ h(x_\alpha), x_\beta] + [x_\alpha, ad\ h(x_\beta)] = (\alpha(h) + \beta(h))[x_\alpha, x_\beta] \in L_{\alpha+\beta}$. Ως προς το δεύτερο ισχυρισμό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $x \in L_\alpha$ τότε $(ad\ x)^n : L_\beta \to L_{\beta+n\alpha}$ για κάθε $\beta \in H^*$. Λόγω του ότι η L είναι πεπερασμένης διάστασης έχουμε ότι θα υπάρχει $n(\beta) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $(ad\ x)^{n(\beta)} = 0$. Έτσι αν $N = \max\{n(\beta) | \beta \in H^*\}$ τότε $(ad\ x)^N = 0$. Τέλος από την προσεταιριστικότητα της μορφής Killing έχουμε για κάθε $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_\beta \in L_\beta$, με $\alpha + \beta \neq 0$, ότι $0 = k([h, x_\alpha], x_\beta) + k(x_\alpha, [h, x_\beta]) = (\alpha(h) + \beta(h))k(x_\alpha, x_\beta)$ για κάθε $h \in H$. Άρα ο L_α είναι ορθογώνιος στον L_β, ως προς τη μορφή Killing της L. □

Πόρισμα 3.2.1. *Ο περιορισμός της μορφής Killing της L στην $L_0 = C_L(H)$ είναι μη εκφυλισμένος.*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η L_0 είναι ορθογώνια σε κάθε L_α, για $\alpha \neq 0$. Αν λοιπόν υπάρχει $z \in L$ τέτοιο ώστε $k(z, L_0) = 0$, τότε θα πρέπει $k(z, L) = 0$, που συνεπάγεται ότι $z = 0$, αφού γνωρίζουμε πως η μορφή Killing της L είναι μη εκφυλισμένη. □

Ο κεντροποιητής της H

Σε αυτό το σημείο θα χρειαστούμε ένα λήμμα από την γραμμική άλγεβρα για ναδείξουμε ότι κάθε μεγιστική τοροειδής υποάλγεβρα ταυτίζεται με τον κεντροποιητή της.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω $x, y \in EndV$, V πεπερασμένης διάστασης, με $xy = yx$ και y μηδενοδύναμο. Τότε $Tr\{xy\} = 0$.*

Απόδειξη. Όπως γνωρίζουμε από το θεώρημα του Engel , για κάθε μηδενοδύναμο ενδομορφισμό ενός διανυσματικού χώρου υπάρχει μία βάση στην οποία αυτός είναι αυστηρά άνω τριγωνικός. Επειδή το ίχνος ενός αυστηρά άνω τριγωνικού πίνακα είναι 0, αρκεί να δείξουμε πως ο xy είναι μηδενοδύναμος. Πράγματι αν $y^n = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε $(xy)^n = x^n y^n = x^n 0 = 0$, καθώς οι δύο ενδομορφισμοί μετατίθενται. □

Πρόταση 3.2.2. *Έστω H μεγιστική τοροειδής υποάλγεβρα της L. Τότε $H = C_L(H)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε έξι βήματα, όπου για συντομία θα συμβολίζουμε $C \equiv C_L(H)$.

1. <u>Ο C περιέχει το ημιαπλό και μηδενοδύναμο κομμάτι κάθε στοιχείου του.</u> Έχουμε ότι κάθε στοιχείο $x \in C$ προσδιορίζεται από το ότι $ad\ x : H \to \{0\}$. Με βάση το θεώρημα 2.1.1 έχουμε ότι οι $(ad\ x)_s$ και $(ad\ x)_n$ επίσης απεικονίζουν την H στο $\{0\}$. Επομένως αν $(ad\ x)_s = ad\ x_s$, $(ad\ x)_n = ad\ x_n$, που ισχύει από την διατήρηση της ανάλυσης Jordan στις αναπαραστάσεις (θεώρημα 2.2.1), τότε $x_s, x_n \in C$.

2. <u>Κάθε ημιαπλό στοιχείο του C ανήκει στην H.</u> Πράγματι αν x ημιαπλό στοιχείο του κεντροποιητή, τότε η $H + \mathbb{C}x$ είναι τοροειδής, αφού το άθροισμα ημιαπλών είναι ημιαπλό στοιχείο. Από τη μεγιστικότητα της H έχουμε ότι $H + \mathbb{C}x = H$, συνεπώς $x \in H$.

3. <u>Ο περιορισμός της μορφής Killing στην H είναι μη εκφυλισμένος.</u> Έστω $h \in H$, ώστε $k(h, H) = \{0\}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $h = 0$. Έστω $x \in C$. Τότε αυτό γράφεται ως $x = x_s + x_n$ με $x_s \in H$ λόγω του δεύτερου βήματος. Τότε έχουμε ότι $k(h, x) = k(h, x_s) + k(h, x_n) = k(h, x_n)$. Επειδή, όμως, το x_n είναι μηδενοδύναμο στοιχείο του κεντροποιητή της H, ξέρουμε ότι $[ad\ h, ad\ x_n] = 0$, επομένως από το προηγούμενο λήμμα

$k(h,x_n) = Tr\{ad\ h\ ad\ x_n\} = 0$. Συνεπώς δείξαμε ότι αν $k(h,H) = 0$, τότε $k(h,C) = 0$. Επειδή λοιπόν ο περιορισμός της k στον C είναι μη εκφυλισμένος τότε $h = 0$. Συνεπώς ο περιορισμός της k στην H είναι μη εκφυλισμένος.

4. Ο C είναι μηδενοδύναμη Lie άλγεβρα. Έστω $x \in C$ ημιαπλό. Τότε από το βήμα 2 $x \in H$, συνεπώς το $ad_C\ x = 0$, δηλαδή είναι μηδενοδύναμο. Ακόμη αν $x \in C$ μηδενοδύναμο τότε και $ad\,x$ μηδενοδύναμο. Επειδή κάθε στοιχείο του C είναι ad-μηδενοδύναμο ως άθροισμα ad-μηδενοδύναμων στοιχείων, τότε από το θεώρημα του Engel έχουμε ότι C μηδενοδύναμη Lie άλγεβρα.

5. Η C είναι αβελιανή. Αρχικά έχουμε ότι $[C,H] = \{0\}$, συνεπώς $\{0\} = k([C,H],C) = k(H,[C,C])$. Επειδή από το βήμα 3 ο περιορισμός της μορφής Killing στην H είναι μη εκφυλισμένος, πρέπει $H \cap [C,C] = \{0\}$. Έστω λοιπόν, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $[C,C] \neq \{0\}$. Τότε επειδή C μηδενοδύναμη, πρέπει $M \equiv Z(C) \cap [C,C] \neq \{0\}$. Αν $0 \neq z \in M$, τότε αυτό δεν είναι ημιαπλό, αφού αν ήταν θα είχαμε $z \in H$, ενώ $H \cap [C,C] = \{0\}$. Επομένως το μηδενοδύναμο κομμάτι του, $n \in C$, θα είναι μη μηδενικό. Επειδή $ad\ z : C \to \{0\}$, τότε από την πρόταση 2.1.1 $ad\ n : C \to \{0\}$. Αυτό σημαίνει ότι $n \in Z(C)$. Τότε όμως θα είχαμε από το προηγούμενο λήμμα ότι $k(n,C) = \{0\}$, που είναι άτοπο αφού ο περιορισμός της k στην C είναι μη εκφυλισμένος. Άρα C αβελιανή.

6. $C = H$ Έστω ότι $C \neq H$. Τότε υπάρχει μη μηδενικό μηδενοδύναμο στοιχείο $c \in C$ τέτοιο ώστε $[ad\ c, ad\ x] = 0$ για κάθε $x \in C$, καθώς C αβελιανή. Με βάση το προηγούμενο λήμμα όμως $k(c,x) = 0$, για κάθε $x \in C$ που σημαίνει ότι $c = 0$ αφού ο περιορισμός της μορφής Killing στην C είναι μη εκφυλισμένος. Άτοπο. Άρα $H = C$.

$\square$

Με βάση τα παραπάνω βλέπουμε ότι ο περιορισμός της μορφής Killing της H στην L είναι μη εκφυλισμένος. Αυτό μας επιτρέπει να ταυτοποιήσουμε την H με την H^* με τον εξής τρόπο: Σε κάθε $\phi \in H^*$ αντιστοιχίζουμε το μοναδικό $t_\phi \in H$ για το οποίο $\phi(h) = k(t_\phi, h)$, $\forall h \in H$. Επομένως το σύνολο των ριζών Φ αντιστοιχίζεται στο $\{t_\alpha | \alpha \in \Phi\}$.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι μία μεγιστική τοροειδής υποάλγεβρα H αυτοκανονικοποιείται. Πράγματι αν υπήρχε $x \in N_L(H) \setminus H$, τότε για κάθε $h \in H$ θα είχαμε $ad\ h(x) = \alpha(h)x$ κι επομένως είτε $\alpha(h) = 0,\ \forall h \in H$ που είναι άτοπο καθώς $x \in C_L(H) = H$, είτε $x \in H$ λόγω του ότι $x \in N_L(H)$ που είναι επίσης άτοπο. Ακόμη η H είναι αβελιανή συνεπώς είναι και μηδενοδύναμη. Αυτές οι δύο συνθήκες μας δείχνουν ότι κάθε μεγιστική τοροειδής υποάλγεβρα μίας ημιαπλής Lie άλγεβρας είναι μία υποάλγεβρα Cartan . Οι υποάλγεβρες Cartan μίας ημιαπλής Lie άλγεβρας είναι μηδενοδύναμες υποάλγεβρες που αυτοκανονικοποιούνται. Στην περίπτωση που δεν αναφερόμαστε σε ημιαπλή Lie άλγεβρα τότε οι δύο έννοιες διαφέρουν.

Ορθογωνιότητα των ριζών

Όπως είδαμε στις προηγούμενες δύο προτάσεις αυτού του υποκεφαλαίου έχουμε ότι $k(L_\alpha, L_\beta) = 0$ για $\alpha,\ \beta \in H^*$ με $\alpha + \beta \neq 0$, συνεπώς και ότι $k(H, L_\alpha) = 0$ για κάθε $\alpha \neq 0$ ενώ αν $\alpha = 0$ ο περιορισμός της k στην H είναι μη εκφυλισμένος. Χρησιμοποιώντας αυτά θα δούμε νέες πληροφορίες για την ανάλυση σε χώρους ριζών.

Πρόταση 3.2.3. *1. Ο Φ παράγει την H^*.*

2. *Άν $\alpha \in \Phi$, τότε $-\alpha \in \Phi$*

3. *$k(L_\alpha, L_\beta) = 0$ για $\alpha,\ \beta \in H^*$ με $\alpha + \beta \neq 0$*

4. *Έστω $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha,\ y \in L_\beta$. Τότε $[x, y] = k(x, y)t_\alpha$*

5. *Άν $\alpha \in \Phi$, τότε ο $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ είναι μονοδιάστατος, με βάση το t_α.*

6. *Για κάθε μη μηδενική ρίζα $\alpha \in \Phi$, ισχύει $\alpha(t_\alpha) = k(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.*

7. *Άν $\alpha \in \Phi$ και $e_\alpha \in L_\alpha$ μη μηδενικό, τότε υπάρχει μη μηδενικό $f_\alpha \in L_{-\alpha}$ τέτοιο ώστε η $S_\alpha = span_{\mathbb{C}}\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}$, όπου $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha]$, να είναι μια υποάλγεβρα της L ισόμορφη με την $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.*

8. *Αν $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{k(t_\alpha, t_\alpha)}$, τότε $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.*

Απόδειξη. 1. Αν, προς απαγωγή σε άτοπο, $span_{\mathbb{C}}\Phi \subset H^*$, τότε θα υπήρχε μη μηδενικό στοιχείο $h \in H$ για το οποίο θα ίσχυε ότι $\forall \alpha \in \Phi,\ h \in \ker \alpha$ ή ισοδύναμα $\alpha(h) = 0$ για κάθε $\alpha \in \Phi$. Όμως τότε θα είχαμε ότι $[h, L_\alpha] = \{0\}$ για κάθε $\alpha \in \Phi$, δηλαδή $[h, L] = \{0\}$ ή $h \in Z(L)$. Συνεπώς $ad\ h = 0$ κι επομένως $k(h, L) = \{0\}$ που είναι άτοπο αφού η k είναι μη εκφυλισμένη, ενώ $h \neq 0$.

2. Έστω (μη μηδενικό) $\alpha \in \Phi$ με $-\alpha \notin \Phi$. Τότε $L_{-\alpha} = 0$ και από την πρόταση 3.2.1 για κάθε $\beta \in \Phi$, $k(L_\alpha, L_\beta) = \{0\}$ που είναι άτοπο αφού η k είναι μη εκφυλισμένη.

3. Από την πρόταση 3.2.1 έχουμε ότι $[x,y] \in L_{\alpha-\alpha} = H$. Εφόσον $k(x,y)t_\alpha \in H$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $h \in H$ έχουμε $k(h, [x,y] - k(x,y)t_\alpha) = 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} k(h,[x,y]-k(x,y)t_\alpha) &= k(h,[x,y]) - k(x,y)k(h,t_\alpha) \\ &= k([h,x],y) - k(x,y)k(h,t_\alpha) \\ &= \alpha(h)k(x,y) - k(x,y)k(h,t_\alpha) \\ &= k(t_\alpha,h)k(x,y) - k(x,y)k(h,t_\alpha) \\ &= 0, \end{aligned}$$

   οπότε έχουμε το ζητούμενο.

4. Από το προηγούμενο βήμα γνωρίζουμε ότι αν $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \neq \{0\}$, τότε ο $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ είναι μονοδιάστατος με βάση το t_α. Θα δείξουμε τώρα πως $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \neq 0$. Έστω μη μηδενικό $x \in L_\alpha$. Αν ισχύει ότι $k(x, L_{-\alpha}) = \{0\}$ τότε, όπως και στην απόδειξη για το 2., θα είχαμε $k(x, L) = 0$ που είναι άτοπο αφού η k είναι μη εκφυλισμένη. Επομένως για κάθε $x \in L_\alpha$ υπάρχει μη μηδενικό $y \in L_{-\alpha}$ τέτοιο ώστε $k(x,y) \neq 0$. Συνεπώς $[x,y] = k(x,y)t_\alpha \neq 0$, άρα ο $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ είναι μη μηδενικός.

5. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $\alpha(t_\alpha) = 0$. Τότε αφού $t_\alpha \in H$ και για κάθε $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ έχουμε $[t_\alpha, x] = \alpha(t_\alpha)x = 0$ και $[t_\alpha, y] = -\alpha(t_\alpha)y = 0$. Στηριζόμενοι στο 3. και το 4. μπορούμε να βρούμε x, y τέτοια ώστε $k(x,y) = 1$. Τότε $[x,y] = t_\alpha$. Έτσι έχουμε φτιάξει μία υποάλγεβρα $S = span_{\mathbb{C}\{x,y,t_\alpha\}}$ που είναι επιλύσιμη και επειδή η ad_L είναι ισομορφισμός, τότε και η $ad_L\ S$ είναι επιλύσιμη και ισόμορφη με την S. Από το θεώρημα του Lie ξέρουμε ότι η $ad\ [S,S]$ είναι μηδενοδύναμη και επειδή $t_\alpha \in [S,S]$, λόγω του 3., ο $ad_L t_\alpha$ είναι μηδενοδύναμος και ημιαπλός. Αυτό κατ΄ ανάγκη σημαίνει πως $ad_L\ t_\alpha = 0$, δηλαδή $t_\alpha \in Z(L) = \{0\}$ που είναι άτοπο.

6. Δεδομένου του $e_\alpha \in L_\alpha$ και με βάση το 4. και το 5., μπορούμε να βρούμε $f_\alpha \in L_{-\alpha}$ τέτοιο ώστε $k(e_\alpha, f_\alpha) = \frac{2}{k(t_\alpha,t_\alpha)}$. Έτσι παρατηρούμε ότι $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha] = \frac{2t_\alpha}{k(t_\alpha,t_\alpha)}$. Ακόμη έχουμε ότι $[h_\alpha, e_\alpha] = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha$.

Ομοίως $[h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha$. Έχουμε λοιπόν τις μεταθετικές σχέσεις της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

7. Από τον ορισμό του t_α έχουμε ότι για κάθε $h \in H$, $k(t_{-\alpha}, h) = -\alpha(h) = -k(t_\alpha, h)$. Αφού, λοιπόν η k είναι μη εκφυλισμένη, τότε $t_\alpha = -t_{-\alpha}$. Συνεπώς $-h_{-\alpha} = \frac{-2t_{-\alpha}}{k(t_{-\alpha},t_{-\alpha})} = \frac{2t_\alpha}{k(t_\alpha,t_\alpha)} = h_\alpha$

□

Ακεραιότητα και Ρητότητα

Προηγουμένως είδαμε πως σε κάθε ζεύγος ριζών $\alpha, -\alpha \in \Phi$ αντιστοιχεί μια υποάλγεβρα S_α ισόμορφη με την $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Επειδή έχουμε μια πλήρη περιγραφή των S_α-προτύπων κι έχοντας στην κατοχή μας το θεώρημα του Weyl, μπορούμε να δούμε κάποια ακόμα ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τις ρίζες μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας.

Πρόταση 3.2.4. *1. Αν $\alpha \in \Phi$, τότε αν $c\alpha \in \Phi$ τότε $c \in \{1, -1\}$ και* $\dim L_\alpha = 1$.

2. Άν $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \in \Phi$ τότε $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

Απόδειξη. 1. Έστω ο χώρος $M = H \bigoplus_{c\in\mathbb{C}} L_{c\alpha}$. O M αποτελεί S_α-υποπρότυπο υπό τη δράση της S_α μέσω της συζυγούς αναπαράστασης της L. Γνωρίζοντας ότι $[h_\alpha, e_\alpha] = \alpha(h_\alpha)e_\alpha = 2e_\alpha$ ταυτοποιούμε $\alpha(h_\alpha) = 2$. Τότε βλέπουμε ότι για κάθε $x \in L_{c\alpha}$ ισχύει $[h(\alpha), x] = c\alpha(h_\alpha)x = 2cx$. Εφόσον λοιπόν τα βάρη της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ είναι όλα ακέραιοι, έχουμε ότι οι δυνατές τιμές των c είναι τα ακέραια πολλαπλάσια του $\frac{1}{2}$. Έστω, λοιπόν $c = \frac{1}{2}n,\ n \in \mathbb{Z}$. Θα ξεχωρίσουμε δύο περιπτώσεις, για n άρτιο και περιττό. Στην πρώτη περίπτωση ορίζουμε

$$V = \mathbb{C}f_\alpha \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus L_\alpha \oplus L_{2\alpha} \oplus \cdots \oplus L_{N\alpha},$$

όπου N ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $N\alpha$ ρίζα. O V είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της L κάτω από τη δράση της $ad\ S_\alpha$. O $ad\ h_\alpha$ είναι διαγώνιος σε αυτό τον υπόχωρο ενώ $ad\ h_\alpha = ad\ [e_\alpha, f_\alpha] = [ad\ e_\alpha, ad\ f_\alpha]$. Επομένως έχουμε αφενός $Tr|_V\{ad\ h_\alpha\} = 0$, ως μεταθέτης, αφετέρου

$$\begin{aligned} Tr|_V\{ad\ h_\alpha\} = &- \alpha(h_\alpha) + 0 + \alpha(h_\alpha)\dim L_\alpha \\ &+ 2\alpha(h_\alpha)\dim L_{2\alpha} + \cdots + N\alpha(h_\alpha)\dim L_{N\alpha} \\ =&\alpha(h_\alpha)(-1 + \sum_{n=1}^{N} n \dim L_{n\alpha}). \end{aligned}$$

Επομένως πρέπει να ισχύει $-1+\sum_{n=1}^{N} n \dim L_{n\alpha} = 0$. Η μόνη επιτρεπτή εκδοχή του παραπάνω είναι αν $\dim L_\alpha = 1$ και $\dim L_{n\alpha} = 0,\ 2 \leq n \leq N$. εναλλάσωντας το α με το $-\alpha$ στον ορισμό του V προκύπτει όμοια ότι $\dim L_{-\alpha} = 1$ και $\dim L_{-n\alpha} = 0,\ 2 \leq n \leq N$. Από τα παραπάνω έχουμε λοιπόν την ειδική περίπτωση το διπλάσιο μιας ρίζας δεν είναι ρίζα.

Στην περίπτωση που το n είναι περιττός ξέρουμε ότι το $\frac{1}{2}\alpha$ δεν είναι ρίζα αφού αν ήταν τότε δε θα ήταν ρίζα το α. Με παρόμοια επιχειρήματα με παραπάνω καταλήγουμε ότι το $n\alpha$ δεν είναι ρίζα, άρα $n = \{+1, -1\}$.

2. Από προηγούμενη υποενότητα γνωρίζουμε ότι $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$. Ακόμη από το 1. γνωρίζουμε ότι $\dim L_{\alpha+\beta} = 1$. Άρα είτε $\dim[L_\alpha, L_\beta] = 0$ ή $\dim[L_\alpha, L_\beta] = 1$. Έστω ότι $\dim[L_\alpha, L_\beta] = 0$. Τότε $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ που σημαίνει ότι e_β είναι μέγιστο διάνυσμα βάρους για κάποια μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση της S_α. Τότε έχουμε ότι $ad\ h_\alpha(e_\beta) = \beta(h_\alpha)e_\beta$, δηλαδή το μέγιστο βάρος είναι β. Όμως τότε θα είχαμε ότι $\alpha+\beta = 2+\beta = 0 \notin \Phi$ που είναι άτοπο. Άρα $\dim[L_\alpha, L_\beta] = 1$, οπότε $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

$\square$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να δούμε τι συμβαίνει όταν δρουν μέσω της ad οι $e_\alpha,\ f_\alpha$ στο e_β, για $\alpha,\ \beta \neq \pm\alpha$ ρίζες. Έτσι αποκτούμε δύο αλυσίδες, μια για την κάθε δράση, την $e_\beta, e_{\beta+\alpha}, \ldots, e_{\beta+q\alpha}$ και την $e_\beta, e_{\beta-\alpha}, \ldots, e_{\beta-p\alpha}$, μετά από τη διαγραφή των μηδενικών όρων βέβαια. Έτσι αποκτούμε μία αλυσίδα ριζών, την

$$\beta - p\alpha, \ldots, \beta-\alpha, \beta, \beta+\alpha, \ldots, \beta+q\alpha.$$

Η παραπάνω αλυσίδα καλείται **α-αλυσίδα μέσω του** β. Για αυτού του είδους τις αλυσίδες έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.2.5. *Έστω μιγαδική ημιαπλή Lie άλγεβρα L, $\alpha,\ \beta \in \Phi$ γραμμικά ανεξάρτητες ρίζες και $M := \{t \in \mathbb{Z} | \beta + t\alpha \in \Phi\}$. Τότε*

1. *Το M είναι ένα κλειστό διάστημα ακεραίων $[-p, q]$, δηλαδή $M = [-p, q] \cap \mathbb{Z}$, όπου $p, q \in \mathbb{N}$. Ακόμη $p - q = \beta(h_\alpha)$ άρα και $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$*

2. *Το $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha$ είναι ρίζα.*

Απόδειξη. 1. Έστω $V = \bigoplus_{t\in M} L_{\beta+t\alpha}$. Προφανώς ο V είναι S_α-πρότυπο μέσω της ad . Με βάση το θεώρημα του $Weyl$, 2.2.1, ξέρουμε ότι ο V θα είναι ευθύ άθροισμα μη αναγωγήσιμων S_α-υποπροτύπων. Έτσι έχουμε:

$$V = \bigoplus_{k,i_k} U^{(k,i_k)},$$

όπου το k αναφέρεται στα $(k+1)$-διάστατα $S_\alpha-$υποπρότυπα, ενώ το i_k στο πόσες φορές αυτά προκύπτουν στο ευθύ άθροισμα. Θα δείξουμε ότι μόνο ένα S_α-υποπρότυπο υπάρχει δηλαδή ο V είναι μη αναγωγήσιμος. Αρχικά έχουμε τον εξής ' διαχωρισμό¨:

$$V = \left(\bigoplus_{k \text{ άρτιο}, i_k} U^{(k,i_k)} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k \text{ περιττό}, i_k} U^{(k,i_k)} \right).$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε k άρτιο, μπορούμε να βρούμε μέγιστο διάνυσμα βάρους $x_{\beta+s\alpha}^{(k,i_k)} \in U^{(k,i_k)}$, για κάποιο s ακέραιο, τέτοιο ώστε $ad\, h_\alpha(x_{\beta+s\alpha}^{(k,i_k)}) = (\beta(h_\alpha)+2s)x_{\beta+s\alpha}^{(k,i_k)} = 0$. Επειδή όμως, από την προηγούμενη πρόταση, οι χώροι ριζών είναι μονοδιάστατοι τότε υπάρχει μοναδικό τέτοιο $x_{\beta+s\alpha}$ σε όλη την άλγεβρα, επομένως έχουμε ότι μόνο ένα $U^{(k,i_k)}$, με k άρτιο, υπάρχει στο ευθύ άθροισμα. Αντίστοιχα για k περιττό υπάρχει μοναδικό μέγιστο διάνυσμα με βάρος 1. Επομένως το ευθύ άθροισμα περιέχει δύο όρους έναν για άρτιο κι έναν για περιττό k. Εν συνεχεία θα δούμε ότι περιέχει μόνο ένα εκ των δύο.

Έστω ότι περιέχει και τους δύο χώρους. Τότε θα υπάρχουν $x_{\beta+i\alpha}, x_{\beta+j\beta} \in V$, τέτοια ώστε $ad\ h_\alpha(x_{\beta+i\alpha}) = \beta(h_\alpha+2i) = 0$ και $ad\ h_\alpha(x_{\beta+j\alpha}) = \beta(h_\alpha+2j) = 1$, με $i,j \in \mathbb{Z}$. Τότε $2(j-i) = 1$ το οποίο έιναι άτοπο, αφού $i,j \in \mathbb{Z}$. Επομένως ξέρουμε ότι ο V είναι μη αναγωγήσιμος. Εφόσον με συνεχή δράση στο e_β των e_α, f_α κατασκευάσαμε την α-αλυσίδα μέσω του β και επειδή η L είναι πεπερασμένης διάστασης, ξέρουμε ότι όλα τα $e_{\beta+i\alpha}$, για $-p \leq i \leq q$, παράγουν ένα μη αναγωγήσιμο S_α-υποπρότυπο, ενώ τα $\beta+i\alpha$ δεν είναι ρίζες, για i εκτός του διαστήματος $[-p,q]$. Κάθε τέτοιο υποπρότυπο χαρακτηρίζεται από έναν θετικό ακέραιο k. Επομένως το μέγιστο και ελάχιστο βάρος είναι k και $-k$ αντίστοιχα. Καθώς τα παραπάνω διανύσματα είναι ιδιοδιανύσματα του $ad\, h_\alpha$ έχουμε ότι: $\beta(h_\alpha)+2q = k$ και $\beta(h_\alpha)-2p = -k$. Με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε ότι $\beta(h_\alpha) = p-q \in \mathbb{Z}$ και με πρόσθεση έχουμε $p+q = k$, επομένως όλα τα $\beta+i\alpha,\ i \in [-p,q]$ είναι ρίζες.

2. Εφόσον $p, q \geq 0$ έχουμε ότι $-p \leq q-p \leq q$, δηλαδή $p-q \in [-p, q] \subset \mathbb{Z}$. Επομένως $q-p \in M$, κι επομένως το $\beta + (q-p)\alpha = \beta + \beta(h_\alpha)\alpha$ είναι στοιχείο της α-αλυσίδας μέσω του β.

□

Σημαντική παρατήρηση σε αυτό το σημείο είναι ότι όλες οι σταθεθερές δομής της μορφής $\beta(h_\alpha)$ είναι ακέραιοι $\alpha, \beta \in \Phi$. Αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται **ακέραιοι του Cartan** . Ακόμη αφού $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$ όταν τα $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta$ είναι ρίζες, γνωρίζουμε ότι κάθε ημιαπλή Lie άλγεβρα L παράγεται (ως Lie άλγεβρα, δηλαδή μέσω του μεταθέτη) από τους χώρους ριζών της.

Έχουμε λοιπόν μια ημιαπλή μιγαδική Lie άλγεβρα L, H μια μεγιστική τοροειδή υποάλγεβρά της, $\Phi \subset H^*$, το σύνολο ριζών της ως προς την H και $L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha\right)$ την ανάλυση σε χώρους ριζών. Εφόσον ο περιορισμός της k στην H είναι μη εκφυλισμένος, μπορούμε να μεταφέρουμε τη μορφή Killing στην H^* ορίζωντας $(\gamma, \delta) := k(t_\gamma, t_\delta)$ για κάθε $\gamma,\ \delta \in H^*$.

Ακόμη γνωρίζουμε ότι ο Φ παράγει την H^*, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε μία βάση της H^* αποτελούμενη εξολοκλήρου από ρίζες, έστω τις $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \Phi$. Τότε κάθε ρίζα $\beta \in \Phi$ θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός ριζών, $\beta = \sum_{i=1}^{l} c_i\alpha_i$ με $c_i \in \mathbb{C}$. Αυτό που θα δούμε τώρα είναι πως τελικά $c_i \in \mathbb{Q}$. Για το σκοπό αυτό θα επιστρατεύσουμε τα εργαλεία της βασικής γραμμικής άλγεβρας.

Για κάθε $1 \leq j \leq l$ έχουμε ότι $(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{l} c_i(\alpha_i, \alpha_j)$. Πολλαπλασιάζοντας με $\frac{2}{(\alpha_j,\alpha_j)}$ έχουμε $\beta(h_{\alpha_j}) = \sum_{i=1}^{l} c_i\alpha_i(h_{\alpha_j})$, από τον ορισμό των h_α. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $\beta(h_{\alpha_j}), \alpha_i(h_{\alpha_j}) \in \mathbb{Z}$, συνεπώς έχουμε ένα σύστημα l εξισώσεων με l αγνώστους και με συντελεστές ακεραίους του Cartan. Επειδη τα α_i είναι βάση της H^* κι επειδή η $k|_H$ είναι μη εκφυλισμένη (άρα και η $(\cdot,\cdot)$), έχουμε ότι ο πίνακας $\alpha_i(h_{\alpha_j})$ είναι αντιστρέψιμος. Επομένως μπορούμε πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο να βρούμε τα c_i, τα οποία θα είναι ρητά εφόσον καμία από τις εμπλεκόμενς πράξεις δεν μας επιτρέπει να ξεφύγουμε από το $\mathbb{Q}$.

Έχουμε έμμεσα δείξει, λοιπόν, πως $\dim span_{\mathbb{Q}}\Phi = l = \dim_{\mathbb{C}} H^*$. Θέτωντας $E_{\mathbb{Q}} = span_{\mathbb{Q}}\Phi$ έχουμε ένα ακόμη ενδιαφέρον αποτέλεσμα: ο περιορισμός της $(\cdot,\cdot)$ στον $E_{\mathbb{Q}}$ είναι θετικά ορισμένος. Αυτό έχει ως συνέπεια, λόγω της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς, ότι η $(\cdot,\cdot)$ είναι θετικά ορισμένη και στο $E := span_{\mathbb{R}}\Phi$. Έστω λοιπόν $\lambda, \mu \in \Phi$. Τότε $(\lambda, \mu) = k(t_\lambda, t_\mu) = Tr\{ad\ t_\lambda ad\ t_\mu\}$. Για να υπολογίσουμε αυτό το ίχνος θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση σε χώρους ριζών της άλγεβρας, $L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha\right)$. Αν $h \in H$, τότε $ad\ t_\lambda ad\ t_\mu(h) = [t_\lambda, [t_\mu, h]] = 0$, ενώ αν $x \in L_\alpha$, τότε

$ad\ t_\lambda ad\ t_\mu(x) = [t_\lambda, [t_\mu, x]] = (\alpha, \mu)(\alpha, \lambda)x$. Επομένως ο τελεστής $ad\ t_\lambda ad\ t_\mu$ είναι διαγώνιος ως προς κάποια βάση διανυσμάτων ριζών κι επιπλέον επειδή κάθε χώρος ρίζας είναι μονοδιάστατος $(\lambda, \mu) = Tr\{ad\, t_\lambda ad\, t_\mu\} = \sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha, \lambda)(\alpha, \mu)$. Επομένως $(\mu, \mu) = \sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha, \mu)^2 \geq 0$ και $\frac{2}{(\mu,\mu)} = \sum \frac{2(\alpha,\mu)^2}{(\mu,\mu)^2} = \sum(\alpha(h_\mu))^2$, δηλαδή άθροισμα ακεραίων Cartan . Άρα η $(\cdot, \cdot)$, περιορισμένη στον $E_{\mathbb{Q}}$, είναι κλειστή στους ρητούς και το (μ, μ) είναι θετικό, ως άθροισμα τετραγώνων ακεραίων, εκτός αν $\mu = 0$, δηλαδή η $(\cdot, \cdot)$ είναι θετικά ορισμένη.

Έχοντας τα παραπάνω αποτελέσματα βλέπουμε ότι ο χώρος E ευκλείδιος, το Φ περιέχει μία βάση του E και $\dim_{\mathbb{R}} E = l$. Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα αυτού του υποκεφαλαίου έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω μιγαδική ημιαπλή Lie άλγεβρα L, H μια μεγιστική τοροειδής υποάλγεβρα, Φ το αντίστοιχο σύνολο ριζών και E το πραγματικό ανάπτυγμα του Φ. τότε*

1. *Το Φ παράγει τον E και $0 \notin \Phi$.*
2. *Αν $\alpha \in \Phi$, τότε $-\alpha \in \Phi$ και κανένα άλλο πολλαπλάσιο του α δεν είναι ρίζα.*
3. *Αν $\alpha,\ \beta \in \Phi$, τότε $\beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$.*
4. *Αν $\alpha,\ \beta \in \Phi$, τότε $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.*

Το παραπάνω θεώρημα μας πληροφορεί ότι το Φ είναι ένα **σύστημα ριζών** στον πραγματικό ευκλείδιο χώρο E. Τέτοια συστήματα θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Ως τώρα έχουμε πετύχει μια αντιστοιχία $(L, H) \mapsto (\Phi, E)$. Σκοπός μας στο επόμενο υποκεφάλαιο θα είναι να ταξινομήσουμε τα δυνατά συστήματα ριζών, ενώ θα λάβουμε ως δεδομένο ότι η παραπάνω αντιστοιχία είναι 1-1.

3.3 Ταξινόμηση με διαγράμματα Dynkin

3.3.1 Αξιώματα συστημάτων ριζών

Σε όλη την έκταση αυτού του υποκεφαλαίου θα ασχοληθούμε με ευκλείδιους χώρους E, δηλαδή πεπερασμένης διάστασης διανυσματικούς χώρους πάνω από το σώμα $\mathbb{R}$, εφοδιασμένους με μία θετικά ορισμένη συμμετρική διαγραμμική μορφή $(\cdot, \cdot)$, δηλαδή με ένα εσωτερικό γινόμενο.

Ανακλάσεις σε ευκλείδιο χώρο

Γεωμετρικά μία ανάκλαση στον E είναι μία αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση που αφήνει αναλλοίωτο κάθε σημείο κάποιου υπερεπιπέδου, δηλαδή κάποιου χώρου συνδιάστασης 1, και στέλνει κάθε κάθετο στο υπερεπίπεδο διάνυσμα στο αντίθετό του.

Προφανώς μία ανάκλαση διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο στο χώρο, δηλαδή αποτελεί ορθογώνιο μετασχηματισμό. Ακόμη κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\alpha \in E$ προσδιορίζει μονοσήμαντα ένα **υπερεπίπεδο ανάκλασης** $P_\alpha := \{\beta \in E | (\beta, \alpha) = 0\}$. Εδώ παρατηρούμε ότι η αντιστοιχία υπερεπιπέδων ανάκλασης και διανυσμάτων δεν είναι 1-1, αφού $P_\alpha = P_{c\alpha}$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Δεδομένου ενός κάθετου διανύσματος α σε ένα υπερεπίπεδο ανάκλασης P_α, ο τύπος για την ανάκλαση οποιουδήποτε άλλου διανύσματος β στο P_α είναι κάτι παραπάνω από διαισθητικά προφανής και δίνεται ως $\sigma_\alpha(\beta) := \beta - < \beta, \alpha > \alpha$, όπου $\frac{1}{2} < \beta, \alpha >= \frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ η προβολή του β στην κατεύθυνση του α. Έδώ σημειώνεται πως το $< \cdot, \cdot >$ είναι γραμμικό μόνο ως προς το πρώτο (αριστερό) όρισμα. Για πεπερασμένα σύνολα διανυσμάτων δίνεται, χωρίς απόδειξη, το παρακάτω λήμμα ως προς τις ανακλάσεις.

Λήμμα 3.3.1. *Έστω Φ πεπερασμένο σύνολο που παράγει γραμμικά τον E και είναι αναλλοίωτο κάτω από όλες τις ανακλάσεις του σ_α, $\alpha \in \Phi$. Αν κάποιο $\sigma \in GL(E)$ αφήνει το Φ και κάθε σημείο ενός υπερεπιπέδου, $P \subset E$, αναλλοίωτο και στέλνει κάποιο μη μηδενικό $\alpha \in \Phi$ στο αντίθετό του, τότε $\sigma = \sigma_\alpha$ και $P = P_\alpha$.*

Συστήματα ριζών

Ορισμός 3.3.1. *Ένα υποσύνολο Φ ενός ευκλείδιου χώρου E ονομάζεται **σύστημα ριζών** στον E αν ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:*

1. *Το Φ είναι πεπερασμένο, παράγει γραμμικά τον E και δεν περιέχει το 0.*

2. *Αν $\alpha \in \Phi$, τότε τα μόνα πολλαπλάσια του α που ανήκουν στο Φ είναι τα $\pm\alpha$.*

3. *Αν $\alpha \in \Phi$, τότε η ανάκλαση σ_α αφήνει το Φ αναλλοίωτο.*

4. *Αν $\alpha, \beta \in \Phi$, τότε $< \beta, \alpha > \in \mathbb{Z}$.*

Πολλές φορές στη βιβλιογραφία τα συστήματα ριζών ορίζονται χωρίς το δεύτερο αξίωμα και αυτά που το ικανοποιούν ονομάζονται μειωμένα συστήματα ριζών. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με μειωμένα συστήματα ριζών τα οποία θα αποκαλούμε απλώς συστήματα ριζών.

Μια αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι πως η αντικατάσταση του εσωτερικού γινομένου από κάποιο θετικό πολλαπλάσιό του δεν θα επιρρέαζε τα αξιώματα καθώς στα τελευταία εμπλέκονται μόνο λόγοι εσωτερικών γινομένων.

Έστω λοιπόν ένα σύστημα ριζών Φ του E. Συμβολίζουμε με $\mathcal{W}$ την υποομάδα της $GL(E) = Aut\ E$ που παράγεται από τις ανακλάσεις του Φ, $\sigma_\alpha,\ \alpha \in \Phi$. Εφόσον το Φ είναι πεπερασμένο, παράγει τον E και από το αξίωμα τρία η $\mathcal{W}$ μεταθέτει τα στοιχεία του Φ, τότε, από το θεώρημα του Cayley στη θεωρία πεπερασμένων ομάδων, η $\mathcal{W}$ είναι υποομάδα της S_Φ και άρα είναι πεπερασμένη. Η $\mathcal{W}$ καλείται **ομάδα Weyl** του Φ και είναι τεράστιας σημασίας για τη συνέχεια. Ακολούθως θα δούμε ένα λήμμα για τη σχέση μεταξύ ορισμένων αυτομορφισμών του E και της $\mathcal{W}$.

Λήμμα 3.3.2. *Έστω Φ σύστημα ριζών του E, με ομάδα Weyl $\mathcal{W}$. Άν $\sigma \in GL(E)$ τέτοιο ώστε $\sigma\Phi = \Phi$, τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Phi$, $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ και $<\beta, \alpha> = <\sigma(\beta), \sigma(\alpha)>$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο λήμμα για το μετασχηματισμό $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$. Αρχικά έχουμε ότι $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma\sigma_\alpha(\beta)$ που ανήκει στο Φ λόγω της υπόθεσης και του ότι $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$. Ακόμη $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - <\beta, \alpha> \sigma(\alpha)$ οπότε λόγω αυτού και του ότι σ ισομορφισμός, έχουμε ότι ο $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ αφήνει το Φ αναλλοίωτο. Τέλος ξέρουμε ότι $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\alpha)) = -\sigma(\alpha)$ και ότι για κάθε $\beta \in P_\alpha$, $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - <\beta, \alpha> \sigma(\alpha)\sigma(\beta) - 0\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$. Άρα από το προηγούμενο λήμμα $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$. Τέλος για κάθε $\beta \in \Phi$ έχουμε:

$$\begin{gathered}\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta)) \Leftrightarrow \\ \sigma(\beta) - <\beta, \alpha> \sigma(\alpha) = \sigma(\beta) - <\sigma(\beta), \sigma(\alpha)> \sigma(\alpha) \Leftrightarrow \\ <\beta, \alpha> = <\sigma(\beta), \sigma(\alpha)>\end{gathered}$$

□

Υπάρχει μία φυσική έννοια ισομορφισμού μεταξύ δύο συστημάτων ριζών Φ, Φ' στους E, E' αντίστοιχα.

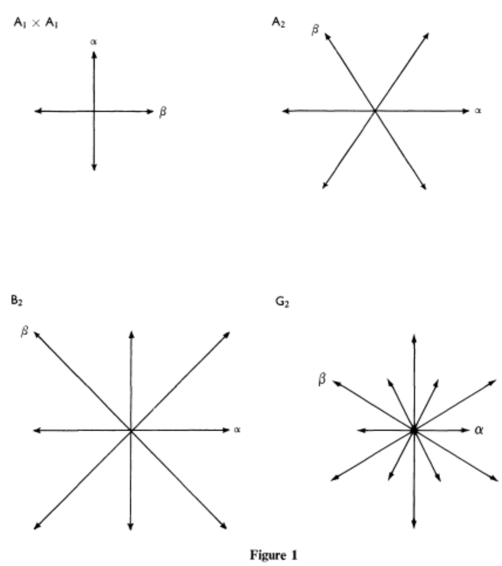
Ορισμός 3.3.2. *Θα ονομάζουμε τα* (Φ, E) *και* (Φ', E') *ισόμορφα αν υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών χώρων* $\tau : E \to E'$ *τέτοιος ώστε* $\tau(\Phi) = \Phi'$ *και* $<\alpha, \beta> = <\tau(\alpha), \tau(\beta)>$ *για κάθε* $\alpha, \beta \in \Phi$.

Προφανώς λόγω της τελευταίας ισότητας του ορισμού έχουμε ότι $\tau(\sigma_\alpha(\beta)) = \sigma_{\tau(\alpha)}(\tau(\beta))$. Επομένως, ένας ισομορφισμός συστημάτων ριζών, τ επάγει κι έναν ισομορφισμό ομάδων Weyl, $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$, με τον συνήθη τρόπο: $\sigma \mapsto \tau\sigma\tau^{-1}$. Υπό το πρίσμα του παραπάνω λήμματος έχουμε ότι ένας αυτομορφισμός του Φ ταυτίζεται με έναν αυτομορφισμό του E που αφήνει το Φ αναλλοίωτο. Τέλος έχουμε ότι η ομάδα Weyl του Φ είναι μία κανονική υποομάδα του $Aut\Phi$.

Απλά παραδείγματα

Θα ονομάζουμε **βαθμό** του Φ, και κατέπέκταση και της ημιαπλής Lie άλγεβρας της οποίας το Φ είναι σύστημα ριζών, τον αριθμό $l = \dim E = \dim_{\mathbb{C}} H^*$. Όταν $l \leq 2$ μπορούμε να σχεδιάσουμε το Φ στο επίπεδο. Στην περίπτωση που $l = 1$ έχουμε μία δυνατότητα, την $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$ που συμβολίζεται ως A_1. Προφανώς αυτό αποτελεί σύστημα ριζών με ομάδα Weyl τάξης 2, ενώ αποτελεί το σύστημα ριζών της $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Για $l = 2$ έχουμε περισσότερα ενδεχόμενα, για την ακρίβεια τέσσερα. Αυτά συμβολίζονται με $A_1 \times A_1,\ A_2,\ B_2,\ G_2$.



Σχήμα 3.1: Συστήματα ριζών σε δύο διαστάσεις

$<\alpha,\beta>$	$<\beta,\alpha>$	θ	$\frac{\|\|\beta\|\|^2}{\|\|\alpha\|\|^2}$
0	0	$\pi/2$	αδιευκρίνιστο
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Πίνακας 3.1: Οι δυνατές γωνίες μεταξύ δύο ριζών.

Ζεύγη ριζών

Το γεγονός ότι $<\alpha,\beta>\in\mathbb{Z}$, για κάθε $\alpha,\beta\in\Phi$, (αξίωμα 4.) περιορίζει τις δυνατές γωνίες μεταξύ δύο ριζών. Πράγματι αν $\alpha,\beta\in E$, τότε $(\alpha,\beta)=||\alpha||||\beta||\cos\theta$, επομένως $<\alpha,\beta>=2\frac{||\beta||}{||\alpha||}\cos\theta$ και $<\alpha,\beta><\beta,\alpha>=4\cos^2\theta\in\mathbb{Z}^+$. Επειδή, λοιπόν τα $<\alpha,\beta>$, $<\beta,\alpha>$ είναι ομόσημα και $0\leq\cos^2\theta\leq 1$ έχουμε τον πίνακα 3.1.

Από τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να εξάγουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω α, $\beta\in\Phi$ γραμμικά ανεξάρτητες. Αν $(\alpha,\beta)>0$, δηλαδή η γωνία μεταξύ τους είναι οξεία, τότε $\alpha-\beta\in\Phi$.*

Εδώ παρατηρούμε ότι αν όπου β θέσουμε $-\beta$ τότε έχουμε ότι αν $(\alpha,\beta)<0$, δηλαδή η γωνία μεταξύ των δύο ριζών είναι αμβλεία, τότε $\alpha+\beta\in\Phi$.

Απόδειξη. Εφόσον η $(\cdot,\cdot)$ είναι θετικά ορισμένη έχουμε ότι $(\alpha,\beta)>0\Leftrightarrow <\alpha,\beta>>0$. Χωρίζουμε σε δύο περιπτώσεις. Άν $<\alpha,\beta>=1$ έχουμε ότι $\sigma_\beta(\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$ από το αξίωμα 3. του Φ. Αν $<\alpha,\beta>\neq 1$, τότε $<\beta,\alpha>=1$, επομένως $\sigma_\alpha(\beta)=\beta-\alpha\in\Phi$ αντίστοιχα. Όμως τότε έχουμε ότι $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$ πάλι λόγω του τρίτου αξιώματος. Έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Γνωρίζουμε ήδη ότι η α-αλυσίδα μέσω του β είναι 'άδιάσπαστη", δηλαδή ότι υπάρχει διάστημα ακεραίων $[-p,q]$, τέτοιο ώστε $\beta+n\alpha\in\Phi$, για κάθε $n\in[-p,q]$. Το γεγονός αυτό είναι ουσιαστικά συνέπεια του παραπάνω λήμματος. Ακόμη εφόσον η σ_α προσθέτει ή αφαιρεί ένα πολλαπλάσιο του α σε οποιοδήποτε στοιχείο της αλυσίδας έχουμε ότι η α-αλυσίδα μέσω του β είναι αναλλοίωτη κάτω από ανακλάσεις της παραπάνω μορφής. Τελευταία παρατήρηση αποτελεί ότι η σ_α αντιστρέφει την αλυσίδα. Δηλαδή ισχυριζόμαστε ότι $\sigma_\alpha(\beta - p\alpha) = \beta + q\alpha$. Πράγματι σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε ότι $\beta + (p - <\beta, \alpha>)\alpha \neq \beta + q\alpha$ και λόγω του αξιώματος 2. θα έπρεπε $p - <\beta, \alpha> < q \Rightarrow -p > -q - <\beta, \alpha>$, όμως τότε $\Phi \ni \sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - (q + <\beta, \alpha>)\alpha$ που είναι άτοπο αφού $-q - <\beta, \alpha> \notin [-p, q]$. Έτσι έχουμε ότι $p - <\beta, \alpha> = q \Rightarrow p - q = <\beta, \alpha>$. Συνεπώς, από τον παραπάνω πίνακα, έχουμε ότι κάθε αλυσίδα ριζών έχει μήκος το πολύ 4.

3.3.2 Απλές ρίζες και ομάδα Weyl

Βάσεις και Weyl Chambers

Ορισμός 3.3.3. *Έστω Φ σύστημα ριζών στον ευκλείδιο χώρο E. Ένα $\Delta \subset \Phi$ ονομάζεται* ***βάση*** *του Φ, αν το Δ είναι βάση του E και κάθε $\beta \in \Phi$ γράφεται ως $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, όπου όλα τα k_α είναι είτε μόνο μη αρνητικοί είτε μόνο μη θετικοί ακέραιοι. Τα στοιχεία του Δ ονομάζονται* ***απλές*** *ρίζες.*

Λόγω της πρώτης απαίτησης έχουμε ότι αφενός ο πληθάριθμος του Δ ισούται με $l = \dim E$ και αφετέρου η έκφραση του β, ως γραμμικός συνδυασμός απλών ριζών, είναι μοναδική. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε το **ύψος** του β ως προς το Δ με τον εξής τρόπο: $ht(\beta) := \Sigma_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$. Αν κάθε k_α είναι μη αρνητικό τότε καλούμε το β **θετική** ρίζα, ενώ αν είναι μη θετικό ονομάζουμε το β **αρνητική** ρίζα και συμβολίζουμε αντίστοιχα $\beta \succ 0$ και $\beta \prec 0$. Ακόμη οι αρνητικές ρίζες αποτελούν το Φ^-, οι θετικές το Φ^+, ενώ $-\Phi^+ = \Phi^-$. Μέσω της Δ και του " $\prec$ " μπορούμε να ορίσουμε μια μερική διάταξη στον E ως εξής. Για κάθε $\lambda, \mu \in E$ ορίζουμε $\mu \prec \lambda$ αν και μόνο αν $\lambda - \mu$ είναι άθροισμα θετικών ριζών ή 0.

Λήμμα 3.3.4. *Έστω $\alpha, \beta \in \Delta,\ \alpha \neq \beta$. Τότε $(\alpha, \beta) \leq 0$ και $\alpha - \beta \notin \Phi$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $(\alpha, \beta) > 0$. Τότε ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του λήμματος 3.3.3, αφού $\alpha \neq \pm\beta$. Επομένως $\alpha - \beta \in \Phi$. Όμως $\alpha, \beta \in \Delta$ συνεπώς το $\alpha - \beta$ δεν μπορεί να είναι ρίζα αφού γράφεται σαν συνδιασμός με αρνητκούς και θετικούς ακέραιους συντελεστές. Επομένως $\alpha - \beta \notin \Phi$ και $(\alpha, \beta) \leq 0$. □

Ως τώρα τίποτα δεν μπορεί να εγγυηθεί την ύπαρξη βάσης ενός συστήματος ριζών. Θα δούμε ότι κάθε σύστημα ριζών έχει βάση παρουσιάζοντας τη μέθοδο κατασκευής όλων των δυνατών βάσεων.

Αρχικά, ορίζουμε για κάθε $\gamma \in E$, $\Phi^+(\gamma) := \{\alpha \in \Phi | (\alpha, \gamma) > 0\}$. Επειδή η Φ (άρα και η $\Phi^+(\gamma)$) είναι πεπερασμένη γνωρίζουμε ότι $\bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha \subsetneq E$, επομένως μπορούμε να ορίσουμε το $\gamma \in E$ ως **κανονικό (regular)** αν $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi}$, ενώ αν $\gamma \notin E \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$, τότε το ονομάζουμε **ιδιάζον (singular)**. Προφανώς στην περίπτωση που το γ είναι κανονικό τότε $\Phi^+(\gamma) \cup \Phi^-(\gamma) = \Phi$. Δεδομένου ενός $\gamma \in E$ ορίζουμε ως **διασπάσιμο** το $\alpha \in \Phi$, αν υπάρχουν $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $\alpha = \beta_1 + \beta_2$, ενώ σε άλλη περίπτωση το α θα καλείται **μη διασπάσιμο**. Τέλος για κανονικό $\gamma \in E$ ορίζουμε το σύνολο $\Delta(\gamma) := \{\alpha \in \Phi^+(\gamma) \ |\alpha \text{ μη διασπάσιμο}\}$.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω Φ σύστημα ριζών στον E και $\gamma \in E$ κανονικό. Τότε το $\Delta(\gamma)$ είναι βάση για το Φ και για κάθε Δ βάση του Φ υπάρχει κάποιο $\gamma' \in E$ κανονικό τέτοιο ώστε $\Delta = \Delta(\gamma')$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε 5 βήματα.

1. $\forall \beta \in \Phi^+(\gamma)\ \exists \mathfrak{n}_i \in \mathbb{Z}^+,\ \beta_i \in \Delta(\gamma)$ τέτοια ώστε $\beta = \sum_i n_i \beta_i$. Σε αντίθετη περίπτωση υπάρχει $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ με (γ, α) ελάχιστο. Προφανώς $\alpha \notin \Delta(\gamma)$ διότι αλλιώς θα είχαμε άτοπο. Επομένως υπάρχουν $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ τέτοια ώστε $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ και $(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2)$. Λόγω του ότι (γ, α) ελάχιστο και $(\gamma, \beta_1), (\gamma, \beta_2) > 0$ πρέπει τα β_1, β_2 να γράφονται ως $\mathbb{Z}^+$-γραμμικοί συνδιασμοί στοιχείων του $\Delta(\gamma)$ αλλιώς, αφού είναι μικρότερα του (γ, α), θα παραβιαζόταν η ελαχιστότητα. Επομένως έχουμε άτοπο αφού εν τέλει το $\gamma = \beta_1 + \beta_2$ γράφεται ως $\mathbb{Z}^+$-γραμμικός συνδιασμός στοιχείων του $\Delta(\gamma)$.

2. Αν $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ διάφορα, τότε $(\alpha, \beta) \leq 0$. Έστω ότι $(\alpha, \beta) > 0$. Τότε $\alpha - \beta \in \Phi$ και συνεπώς είτε $\alpha - \beta \in \Phi^+$ είτε $\beta - \alpha \in \Phi^+$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $\alpha - \beta \in \Phi^+$. Τότε $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ δηλαδή α διασπάσιμο που είναι άτοπο.

3. Το $\Delta(\gamma)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω $\sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} r_\alpha \alpha = 0$ με $r_\alpha \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $r_\alpha = p_\alpha$ αν $r_\alpha \geq 0$ και $r_\alpha = -n_\alpha$ αν $r_\alpha < 0$. Τότε $\sum p_\alpha \alpha = \sum n_\alpha \alpha$. Οπότε

$$||\sum p_\alpha \alpha||^2 = (\sum p_\alpha \alpha, \sum n_\beta \beta) = \sum_{\alpha,\ \beta} n_\beta p_\alpha (\alpha, \beta) \leq 0,$$

δηλαδή $\sum p_\alpha \alpha = 0 \Rightarrow \sum p_\alpha (\alpha, \gamma) = 0 \Rightarrow p_\alpha = 0$, αφού $(\alpha, \gamma) > 0$ από το βήμα 2.. Ομοίως $n_\alpha = 0$.

4. Το $\Delta(\gamma)$ είναι βάση του Φ. Εφόσον το γ είναι κανονικό έχουμε ότι $\Phi^+(\gamma) \cup \Phi^-(\gamma) = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma) = \Phi$, επομένως κάθε στοιχείο του Φ γράφεται είτε ως μη αρνητικός, είτε ως μή θετικός ακέραιος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Δ_γ, λόγω του βήματος 1.. Με βάση αυτό ξέρουμε ότι $span_{\mathbb{R}}\Delta_\gamma = E$, οπότε αφού το Δ_γ είναι γραμμικά ανεξάρτητο έχουμε ότι Δ_γ βάση του E.

5. Αν Δ βάση του Φ, τότε $\Delta = \Delta(\gamma')$, για κανονικό $\gamma' \in E$. Έστω Δ βάση του Φ. Ορίζουμε για κάθε $\alpha \in \Delta$, $H_\alpha := \{\lambda \in E | \gamma = c_\alpha \alpha + \sum_{\beta \in \Delta \setminus \alpha} c_\beta \beta,\ c_\alpha > 0\}$. Προφανώς $\bigcap_\alpha H_\alpha \neq \emptyset$ και $\bigcap_\alpha H_\alpha \neq \{0\}$. Επομένως για κάθε $\gamma \in \bigcap_\alpha H_\alpha$ έχουμε $\Delta = \Delta(\gamma)$.

$\square$

Με βάση το παραπάνω θεώρημα βλέπουμε ότι κάθε σύστημα ριζών έχει μία βάση. Μπορούμε τώρα να εισάγουμε κάποιες νέες έννοιες. Επειδή τα υπερεπίπεδα P_α, $\alpha \in \Phi$ διαμερίζουν τον E σε πεπερασμένες το πλήθος περιοχές, ορίζουμε ως (ανοικτό) **θάλαμο Weyl (Weyl chamber)** κάθε συνεκτική συνιστώσα του $E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$. Προφανώς κάθε κανονικό $\gamma \in E$ βρίσκεται σε ακριβώς ένα θάλαμο Weyl , που θα τον συμβολίζουμε $\mathfrak{C}(\gamma)$. Ακόμη έχουμε ότι αν $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$, όπου γ, γ' κανονικά, τότε $= \Phi^+(\gamma')$ και $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει μια φυσική 1-1 αντιστοιχία μεταξύ βάσεων και θαλάμων Weyl . Γράφουμε λοιπόν $\mathfrak{C}(\Delta) = \mathfrak{C}(\gamma)$ αν $\Delta = \Delta(\gamma)$ και ονομάζουμε αυτό το θάλαμο **θεμελιώδη θάλαμο Weyl ως προς τη βάση** Δ. Τέλος ο $\mathfrak{C}(\Delta)$ είναι το ανοιχτό κυρτό σύνολο που αποτελείται από όλα τα $\gamma \in E$ για τα οποία $(\gamma, \alpha) > 0,\ \forall \alpha \in \Delta$.

Η ομάδα Weyl στέλνει ένα θάλαμο Weyl σε κάποιον άλλο θάλαμο Weyl αφού για $\sigma \in \mathcal{W}$, $\gamma \in E$ κανονικό έχουμε $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$ (ακριβής απόδειξη θα δωθεί στη συνέχεια). Ακόμη πολύ εύκολα προκύπτει ότι η $\mathcal{W}$ μεταθέτει τις βάσεις του Φ αφού αν Δ βάση τότε και η $\sigma(\Delta)$ είναι επίσης βάση ή $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$ δεδομένου ότι $(\sigma(\gamma), \sigma(\alpha)) = (\gamma, \alpha)$. Προφανώς εδώ βλέπουμε τη συμβατότητα των δύο αυτών δράσεων της $\mathcal{W}$ με την αντιστοιχία μεταξύ θαλάμων Weyl και βάσεων.

Λήμματα για τις απλές ρίζες

Στη συνέχεια θα δούμε κάποια χρήσιμα λήμματα για τη συμπεριφορά των απλών ριζών δεδομένης μίας βάσης Δ του Φ.

Λήμμα 3.3.5. *Άν $\alpha \in \Phi$ θετική και όχι απλή ρίζα, τότε υπάρχει $\beta \in \Delta$, τέτοιο ώστε $\alpha - \beta \in \Phi$. Ακόμη για αυτό το $\beta \in \Phi$ έχουμε ότι $\alpha - \beta$ θετική.*

Απόδειξη. Άν $(\alpha, \beta) \leq 0$, για κάθε $\beta \in \Delta$ τότε με το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του 3. του προηγούμενου θεωρήματος θα είχαμε ότι $\Delta \cup \{\alpha\}$ γραμμικά ανεξάρτητο που είναι άτοπο αφού Δ βάση. Επομένως υπάρχει $\beta \in \Delta$ τέτοιο ώστε $(\alpha, \beta) > 0$. Είναι επόμενο λοιπόν ότι $\alpha - \beta \in \Phi$. Επειδή α θετική και όχι απλή θα έχουμε ότι $\sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ με τουλάχιστον δύο εκ των $k_\gamma > 0$. Έτσι το ανάπτυγμα σε $\gamma \in \Delta$ του $\alpha - \beta$ θα έχει τουλάχιστον έναν θετικό συντελεστή k_γ επομένως θα είναι όλοι οι συντελεστές μη αρνητικοί ακέραιοι. □

Προφανές επακόλουθο (με επαγωγή στο $ht(\beta)$) είναι ότι κάθε $\beta \in \Phi^+$ γράφεται ως άθροισμα, όχι απαραίτητα διακεκριμένων, απλών ριζών.

Λήμμα 3.3.6. *Έστω $\alpha \in \Delta$. Η $\sigma_\alpha \in \mathcal{W}$ μεταθέτει όλες τις θετικές ρίζες εκτός του α.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$, τότε $\sigma_\alpha \beta$ θετική και διάφορη του α. Έστω λοιπόν $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$. Τότε $\beta = \sum_{\gamma \in \Phi} k_\gamma \gamma$, όπου υπάρχει $k_{\gamma'} > 0$, $\gamma' \neq \alpha$. Τότε αφού $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - < \beta, \alpha > \alpha$, θα έχουμε ότι ο μόνος συντελεστής του $\sigma_\alpha(\beta)$ που διαφέρει εκείνους του β θα είναι αυτός του α που θα γίνεται $k_\alpha - < \gamma, \alpha >$. Εφόσον λοιπόν σ_α αντιστρέψιμος και $k_{\gamma'} > 0$ καταλήγουμε ότι $\sigma_\alpha \beta$ θετική ρίζα. Ακόμη αφού $\sigma_\alpha(-\alpha) = \alpha$ και σ_α 1-1 ξέρουμε ότι $\sigma_\alpha(\beta) \neq \alpha$. □

Προφανώς από το παραπάνω λήμμα βλέπουμε ότι αν ορίσουμε $\delta := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$, τότε $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$.

Λήμμα 3.3.7. *Έστω $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta$, όχι απαραίτητα διάφορες απλές ρίζες. Θέτουμε $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$. Άν $\sigma_1 \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t) \prec 0$, τότε υπάρχει $1 \leq s < t$ τέτοιο ώστε $\sigma_1 \cdots \sigma_t = \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1} \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}$.*

Απόδειξη. Έστω $\beta_{t-1} = \alpha_t$ και $\beta_i = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$, $0 \leq i \leq t-2$. Επειδή $\beta_0 \prec 0$ και $\beta_{t-1} \succ 0$ υπάρχει μικρότερος φυσικός s, τέτοιος ώστε $\beta_s \succ 0$. Τότε $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$. Επομένως από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $\beta_s = \alpha_s$, αφού αλλιώς θα έπρεπε $\sigma_s(\beta_s) \succ 0$. Ακόμη έχουμε ότι $\sigma_t = (\sigma_t)^{-1}$, ενώ για κάθε $\sigma \in \mathcal{W}$ και για κάθε $\alpha \in \Phi$ ισχύει ότι $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \sigma_{\alpha_s} = \sigma_{\beta_s}\\ &= \sigma_{\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1}(\alpha_t)}\\ &= (\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1})\sigma_{\alpha_t}(\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1})^{-1} \Leftrightarrow\\ \sigma_s\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1}\sigma_{\alpha_t} &= \sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1},\end{aligned}$$

απ΄όπου το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. □

Κρατώντας τον ίδιο συμβολισμό, ένα ενδιαφέρον πόρισμα του τελευταίου λήμματος είναι ότι αν για το $\sigma \in \mathcal{W}$ η μικρότερη έκφραση σαν γινόμενο ανακλάσεων από απλές ρίζες δίνεται ως $\sigma_1\cdots\sigma_t$, τότε $\sigma(\alpha_t) = \sigma_1\cdots\sigma_t(\alpha_t) \prec 0$. Πράγματι σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε $0 \succ \sigma_1\cdots\sigma_t\sigma_t(\alpha_t) = \sigma_1\cdots\sigma_{t-1}(\alpha_t)$, οπότε λόγω του λήμματος θα είχαμε ότι η έκφραση δεν είναι η μικρότερη που είναι άτοπο.

Ομάδα Weyl

Τώρα έχουμε τα εφόδια για να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{W}$ μεταθέτει με απλά μεταβατικό τρόπο τις βάσεις του Φ, (ή ισοδύναμα τους θαλάμους Weyl), αλλά και ότι παράγεται από τις απλές ανακλάσεις ως προς κάποια βάση Δ, δηλαδή παράγεται από τα σ_α για τα οποία $\alpha \in \Delta$.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω Δ βάση του συστήματος ριζών Φ.*

1. *Η $\mathcal{W}$ δρα μεταβατικά στους θαλάμους Weyl , δηλαδή για κάθε κανονικό $\gamma \in E$, υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ για κάθε $\alpha \in \Delta$.*

2. *Η $\mathcal{W}$ δρα μεταβατικά στις βάσεις του Φ, δηλαδή για κάθε Δ' βάση του Φ υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $\sigma(\Delta') = \Delta$.*

3. *Αν $\alpha \in \Phi$ υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}$ ώστε $\sigma(\alpha) \in \Delta$.*

4. *Η $\mathcal{W}$ παράγεται από τις απλές ανακλάσεις σ_α με $\alpha \in \Delta$.*

5. *Η δράση της $\mathcal{W}$ στις βάσεις είναι απλά μεταβατική, δηλαδή αν $\sigma(\Delta) = \Delta$, για κάποιο $\sigma \in \mathcal{W}$, τότε $\sigma = 1$.*

Επειδή η δράση είναι απλά μεταβατική στις ρίζες λόγω του 3. μπορούμε να ονομάσουμε την $\alpha \in \Phi$, ως (μοναδική) **συζυγή** της $\beta \in \Phi$ κάτω από τη δράση της $\mathcal{W}$, αν $\sigma(\alpha) = \beta$. Η λέξη ¨συζυγής' προκύπτει γιατί για να περάσουμε από την ανάκλαση σ_α στην σ_β κάνουμε ένα μετασχηματισμό συζυγίας: $\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{W}'$ η υποομάδα του $\mathcal{W}$ που παράγεται από τις απλές ανακλάσεις. Θα δείξουμε ότι τα 1. έως 3. ισχύουν για την $\mathcal{W}'$ και έπειτα θα τα χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε το 4..

1. Έστω γ κανονικό. Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Phi^+}\beta$ και επειδή $\mathcal{W}'$ πεπερασμένο, μπορούμε να επιλέξουμε $\sigma \in \mathcal{W}'$ ώστε $(\sigma(\gamma), \delta)$ μέγιστο. Αν επιλέξουμε τυχαίο $\alpha \in \Delta$ τότε $\sigma_\alpha\sigma \in \mathcal{W}'$ και $(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha\sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha\delta) = (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$. Έχουμε δηλαδή ότι $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \Delta$. Επειδή γ κανονικό πρέπει $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \Delta$, συνεπώς η $\mathcal{W}'$ στέλνει τον θάλαμο Weyl $\mathfrak{C}(\gamma)$ στον $\mathfrak{C}(\Delta)$.

2. Επειδή η $\mathcal{W}'$ αποτελείται από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, ξέρουμε ότι κάθε στοιχείο της θα στέλνει μία βάση του E σε κάποια άλλη. Επίσης επειδή $(\sigma(\gamma), \sigma(\alpha)) = (\gamma, \alpha)$ για κάθε γ κανονικό και $\alpha \in \Delta$ ξέρουμε ότι οι συντεταγμένες του γ ως προς την Δ (που είναι θετικές για $\gamma \in \mathfrak{C}(\Delta)$) είναι οι συντεταγμένες του $\sigma(\gamma)$ ως προς την $\sigma(\Delta)$. Άρα η $\sigma(\Delta)$ είναι επίσης βάση, και λόγω του 1. η $\mathcal{W}'$ δρά μεταβατικά στις βάσεις καθώς έτσι δρά στους θαλάμους Weyl .

3. Δεδομένου του 2. αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ρίζα α υπάρχει μία βάση στην οποία η α θα ανήκει. Επειδή οι μόνες ανάλογες ρίζες του α είναι οι $\pm\alpha$ ξέρουμε ότι για κάθε $\beta \neq \pm\alpha$ τα υπερεπίπεδα P_β δεν ταυτίζονται με το P_α. Έτσι για κάθε $\beta \neq \pm\alpha$ μπορούμε να επιλέξουμε $\gamma \in P_\alpha,\ \gamma \notin P_\beta$. Επιλέγουμε τότε ένα γ' ¨πολύ κοντά' στο γ ώστε $(\gamma', \alpha) = \epsilon > 0$ και $|(\gamma', \beta)| > \epsilon$ για κάθε $\beta \neq \pm\alpha$. Τότε αν το α ήταν διασπάσιμο θα υπήρχαν $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma')$ ώστε $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ και $\epsilon = (\gamma', \alpha) = (\gamma', \beta_1) + (\gamma', \beta_2) > 2\epsilon$ που είναι άτοπο. Άρα το α είναι μη διασπάσιμο κι επομένως είναι στοιχείο κάποιας βάσης.

4. Για να δείξουμε ότι $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανάκλαση που παράγει την $\mathcal{W}$, δηλαδή ότι κάθε σ_α με $\alpha \in \Phi$, ανήκει στην $\mathcal{W}'$. Αν, λοιπόν, Δ βάση, τότε από το 3. γνωρίζουμε ότι για κάθε ρίζα $\alpha \in \Phi$

υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}'$ ώστε $\beta = \sigma(\alpha) \in \Delta$ και $\sigma_\beta \in \mathcal{W}'$. Τότε $\alpha = \sigma^{-1}(\beta)$ και λόγω της κλειστότητας του $\mathcal{W}'$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_{\sigma^{-1}(\beta)} \\ &= \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in \mathcal{W}' \end{aligned}$$

5. Έστω $\sigma \in \mathcal{W}$ με $\sigma(\Delta) = \Delta$ και $\sigma \neq 1$. Τότε από το 4. το σ γράφεται ως σύνθεση απλών ανακλάσεων, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε να το γράψουμε με τον ελάχιστο αριθμό απλών ανακλάσεων. Επειδή το σ δεν είναι 1, τότε ο ελάχιστος αυτός αριθμός ανακλάσεων θα είναι τουλάχιστον ένα. Όπως όμως είδαμε στην τελευταία παράγραφο της προηγούμενης υποενότητας θα έπρεπε $\sigma(\alpha) \prec 0$ για κάθε $\alpha \in \Delta$ που είναι άτοπο αφού $\sigma(\Delta)$ βάση.

□

Όταν ένα στοιχείο $\sigma \in \mathcal{W}$ γράφεται ως $\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$, όπου $\sigma_{\alpha_i} \in \Delta$ και t ελάχιστο ονομάζουμε την έκφραση **ανηγμένη** και ορίζουμε ώς **μήκος** του σ ως προς τη βάση Δ τον αριθμό $l(\sigma) := t$. Από αυτό τον ορισμό έχουμε ότι $l(1) = 0$. Μπορούμε όμως να χαρακτηρίσουμε το μήκος μίας τέτοιας έκφρασης και με άλλον ένα τρόπο. Ονομάζουμε $n(\sigma)$ τον αριθμό των θετικών (ως προς τη Δ) ριζών, α, για τις οποίες ισχύει $\sigma(\alpha) \prec 0$.

Λήμμα 3.3.8. *Για κάθε $\sigma \in \mathcal{W}$ ισχύει ότι $l(\sigma) = n(\sigma)$.*

Απόδειξη. Έστω $\sigma \in \mathcal{W}$. Θα προχωρήσουμε με ισχυρή επαγωγή στο $l(\sigma)$. Άν $l(\sigma) = 0$ τότε $\sigma = 1$ συνεπώς $n(\sigma) = 0$. Έστω ότι $l(\tau) = n(\tau)$, για κάθε τ με $l(\tau) < l(\sigma)$. Έστω λοιπόν η ανηγμένη μορφή $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$. Αφενός, από τα πορίσματα της τελευταίας παραγράφου της προηγούμενης υποενότητας έχουμε ότι $\sigma(\alpha_t) \prec 0$. Ακόμη επειδή $\sigma_{\alpha_y}(\alpha_t) \succ 0$, αλλά κι επειδή από το λήμμα 3.3.6 η σ_{α_t} μεταθέτει τις απλές ρίζες εκτός του α_t, έχουμε ότι $n(\sigma\sigma_{\alpha_t}) = n(\sigma) - 1$. αφετέρου, για το $l(\sigma\sigma_{\alpha_t})$ βλέπουμε ότι εφόσον $\sigma\sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}\sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_{t-1}}$, θα ισχύει ότι$l(\sigma\sigma_{\alpha_t}) = l(\sigma) - 1$. Έτσι λόγω της επαγωγικής υπόθεσης $l(\sigma\sigma_{\alpha_t}) = n(\sigma\sigma_{\alpha_t}) \Leftrightarrow l(\sigma) = n(\sigma)$. □

Μη αναγωγήσιμα συστήματα ριζών

Ορισμός 3.3.4. *Έστω Φ σύστημα ριζών στον ευκλίδιο χώρο E. Αν το Φ αποτελεί ένωση δύο γνήσιων υποσυνόλων του, $\Phi_1, \Phi_2 \subset \Phi$, τέτοιων ώστε κάθε ρίζα του ενός να είναι ορθογώνια σε κάθε ρίζα του άλλου, δηλαδή $(\Phi_1, \Phi_2) = \{0\}$, τότε το Φ καλείται* ***αναγωγήσιμο****. Αλλιώς καλείται* ***μη αναγωγήσιμο****.*

Παραδείγματα μη αναγωγήσιμων συστημάτων ριζών αποτελούν τα A_1, A_2, B_2, G_2, ενώ αναγωγήσιμο σύστημα αποτελεί το $A_1 \times A_1$.

Πρόταση 3.3.1. *Έστω Φ σύστημα ριζών και έστω Δ βάση του Φ. Άν υπάρχουν $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta$, με $(\Delta_1, \Delta_2) = \{0\}$, τότε και μόνο τότε το Φ είναι αναγωγήσιμο.*

Απόδειξη. Για τη μία κατεύθυνση (¨και μόνο τότε¨), έστω ότι Φ αναγωγήσιμο και $\Phi_1, \Phi_2 \subset \Phi$ ώστε $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Άν $\Delta \cap \Phi_i \neq \emptyset$ τότε έχουμε την επιθυμητή διαμέριση του Δ. Αν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\Delta \cap \Phi_2 \emptyset$ τότε $\Delta \subset \Phi_1$, κι επειδή $span\Phi_1 = span\Delta = E$ τότε τα Φ_1, Φ_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα κι επομένως $(\Phi_1, \Phi_2) \neq \{0\}$ που είναι άτοπο.

Για την άλλη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το Φ είναι μη αναγωγήσιμο. Λόγω του 3. του θεωρήματος 3.3.2 ξέρουμε ότι κάθε ρίζα είναι συζυγής μίας απλής ρίζας. Συνεπώς μπορούμε να θέσουμε ως Φ_i το σύνολο των ριζών που είναι συζυγείς με κάποια απλή ρίζα του Δ_i. Λόγω του ότι η δράση της $\mathcal{W}$ είναι απλά μεταβατική στις βάσεις ξέρουμε ότι $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ και $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$. Ακόμη για $\alpha \in \Delta_1,\ \beta \in \Delta_2$ έχουμε $(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow < \alpha, \beta >= 0$ και $< \beta, \alpha >= 0$. Επομένως $\sigma_\alpha \sigma_\beta = 0$, και αφού το $\mathcal{W}_i$ παράγεται από τα στοιχεία του Δ_i έχουμε ότι $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$ (ευθύ γινόμενο ομάδων). Ακόμη έχουμε ότι για κάθε $\beta \in \Delta_i, \alpha \in \Delta_j, \imath \neq j$ έχουμε ότι $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha$. Αν λοιπόν $\sigma \in \mathcal{W}$ γραμμένο στην ανηγμένη του μορφή, τότε $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1$, με $\sigma_i \in \mathcal{W}_i$. Έτσι έχουμε ότι για κάθε $\alpha \in \mathcal{W}_1, \beta \in \mathcal{W}_2$ υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}$, τέτοιο ώστε $\sigma(\alpha) = \sigma_1(\alpha) \in \Delta_1$ και $\sigma(\beta) = \sigma_2(\beta) \in \Delta_2$, με συνέπεια $(\alpha, \beta) = (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\beta)) = 0$. Άρα $(\Phi_1, \Phi_2) = \{0\}$ και Φ αναγωγήσιμο. $\square$

Λήμμα 3.3.9. *Έστω Φ μη αναγωγήσιμο σύστημα ριζών με βάση Δ. Τότε ως προς τη μερική διάταξη '$\prec$¨, υπάρχει μοναδική μέγιστη ρίζα $\beta \in \Phi$. Επίσης αν $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, τότε $k_\alpha > 0$ για κάθε $\alpha \in \Delta$ και $ht(\beta) > ht(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in \Phi$.*

Απόδειξη. Επειδή το Φ είναι πεπερασμένο σύνολο υπάρχει μεγιστικό $\beta \in \Phi$, και επειδή για τις απλές ρίζες, $\alpha \in \Delta$, έχουμε $ht(\alpha) = 1$, έχουμε $\beta \succ 0$ και $ht(\beta) > 0$. Έστω $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha > 0\}$ και $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta | k_{\alpha=0}\}$. Προφανώς $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ είναι μία διαμέριση του Δ.

Θα δείξουμε, αρχικά, ότι το β συγκρίνεται με κάθε $\gamma \in \Phi$. Έστω ότι $\Delta_2 \neq \emptyset$. Τότε από το λήμμα 3.3.4. $(\alpha, \beta) \leq 0$, για κάθε $\alpha \in \Delta_2$. Ακόμη επειδή το Δ είναι μή αναγωγήσιμο τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $(\beta, \alpha) < 0$. Επομένως από το λήμμα 3.3.3. έχουμε ότι $\beta + \alpha \in \Phi$ που όμως είναι άτοπο αφού τότε $\beta+\alpha \succ \beta$ ενώ β μεγιστικό. Άρα $\Delta_2 = \emptyset$. Το παραπάνω επιχείρημα δείχνει ακόμη ότι $(\beta, \alpha) \geq$ και ότι $k_\alpha > 0$ για κάθε $\alpha \in \Delta$. Έστω τώρα ότι $\beta' \in \Phi$ άλλο μεγιστικό στοιχείο. Τότε λόγω των παραπάνω και αυτό είναι συγκρίσιμο με κάθε στοιχείο του Φ, επομένως είτε $\beta \succ \beta'$ που είναι άτοπο, είτε $\beta' \succ \beta$ που είναι επίσης άτοπο, ή $\beta = \beta'$. □

Λήμμα 3.3.10. *Έστω μη αναγωγήσιμο σύστημα ριζών Φ στον ευκλείδειο χώρο E. Τότε δράση της ομάδας Weyl του Φ, $\mathcal{W}$, στον E είναι μή αναγωγήσιμη. Ακόμη η γραμμική θήκη της $\mathcal{W}-$τροχιάς κάθε ρίζας $\alpha \in \Phi$ είναι ο E, δηλαδή για κάθε $\alpha \in \Phi$ ισχύει $span\{\sigma\alpha | \sigma \in \mathcal{W}\} = E$.*

Απόδειξη. Προφανώς η γραμμική θήκη της $\mathcal{W}-$τροχιάς μιας ρίζας είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος του E, επομένως ο δεύτερος ισχυρισμός είναι συνέπεια του πρώτου. Ως προς τον πρώτο ισχυρισμό, θέτουμε ως E' έναν τυχαίο μή μηδενικό $\mathcal{W}-$αναλλοίωτο υπόχωρο του E. Ως γνωστόν από τη θεωρία αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων, θα έχουμε ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα, E'', του E' θα είναι επίσης $\mathcal{W}-$αναλλοίωτο. Λόγω της $\mathcal{W}-$αναλλοιώτητας έχουμε ότι $\sigma_\alpha(E') = E'$ που σημαίνει είτε ότι $\alpha \in E'$ είτε ότι $E' \subseteq P_\alpha$. Επομένως αν $\alpha \notin E'$, τότε $(\alpha, E') = \{0\}$, δηλαδή $\alpha \in E''$. Αυτή η διαδικασία διαμερίζει το Φ σε δύο ορθογώνια υποσύνολα, κι επειδή το Φ είναι μή αναγωγήσιμο ένα εκ των δύο, έστω το E', πρέπει να είναι κενό. Επειδή λοιπόν το Φ παράγει τον E και έχοντας υποθέσει ότι $E' \neq \emptyset$ συμπαιρένουμε ότι $E' = E$. □

Λήμμα 3.3.11. *Έστω Φ μή αναγωγήσιμο σύστημα ριζών στον ευκλείδειο E. Τότε προκύπτουν το πολύ δύο μήκη ριζών στο Φ και οι ρίζες ίδιου μήκους είναι $\mathcal{W}-$συζυγείς.*

Απόδειξη. Έστω $\alpha, \beta \in \Phi$ τυχαίες. Λόγω του προηγούμενου λήμματος έχουμε ότι $span\{\sigma\alpha | \sigma \in \mathcal{W}\} = E$, επομένως υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $(\sigma(\alpha), \beta) \neq 0$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $(\alpha, \beta) \neq 0$, αφού τα στοιχεία της ομάδας Weyl είναι διατηρούν τα μήκη. Τότε από τον πίνακα 3.1 γνωρίζουμε ότι οι δυνατοί λόγοι των τετραγώνων των μηκών των ριζών α, β είναι $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3$. Αν υπάρχει ένα μήκος λοιπόν, τότε αυτό θα είναι το 1, ενώ αν υπάρχουν δύο θα είναι ένα εκ των δύο ζευγών $\frac{1}{2}, 2$ ή $\frac{1}{3}, 3$. Στην περίπτωση όμως που υπάρχουν περισσότερα των δύο μήκη τότε θα υπήρχαν δύο ρίζες με λόγω τετραγώνων μηκών ίσο με $\frac{3}{2}$ που είναι αδύνατο.

Έστω τώρα ότι $||\alpha|| = ||\beta||$. Αντίστοιχα με παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $(\alpha, \beta) \neq 0$. Επίσης θεωρούμε ότι $\alpha \neq \beta$ αφού αλλιώς ισχύει το ζητούμενο. Επειδή λοιπόν οι δύο αυτές ρίζες έχουν το ίδιο μήκος έχουμε ότι

$< \alpha, \beta >=< \beta, \alpha >= \pm 1$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει στοιχείο $\sigma \in \mathcal{W}$ ώστε $\sigma(\beta) = \alpha$ και θα το δείξουμε άμεσα:

- Αν $< \beta, \alpha >= -1$, τότε για $\sigma = \sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha \sigma_\beta$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\sigma(\beta) &= \sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta) \\
&= \sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha(-\beta) \\
&= -\sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta + \alpha) \\
&= -\sigma_\alpha(-\beta + \alpha + \beta) \\
&= -\sigma_\alpha(\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

- Αν $< \beta, \alpha >= 1$, τότε για $\sigma = \sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\sigma(\beta) &= \sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha(\beta) \\
&= \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - \alpha) \\
&= \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) \\
&= \sigma_\alpha(-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

□

Σε ένα μή αναγωγήσιμο σύστημα ριζών με δύο μήκη ριζών μπορούμε να μιλάμε για ¨κοντές' και για ¨μακριές' ρίζες, ενώ είναι διαισθητικά προφανές ότι η μέγιστη ρίζα $\beta \in \Phi$ θα έχει ¨μεγάλο μήκος¨. Ακόμη σε ένα μη αναγωγήσιμο σύστημα ριζών, όπου προκύπτει μόνο ένα μήκος, όλες οι ρίζες θα είναι κατά σύμβαση ¨μακριές¨.

3.3.3 Ταξινόμηση

Ο πίνακας Cartan

Ορισμός 3.3.5. *Έστω Φ σύστημα ριζών τάξης l με ομάδα Weyl $\mathcal{W}$ και βάση Δ. Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ μία διάταξη των απλών ριζών. Ο πίνακας με στοιχεία $< \alpha_i, \alpha_j >$ ονομάζεται* ***πίνακας Cartan*** *και τα στοιχεία του ονομάζονται* ***ακέραιοι Cartan*** .

Παραδείγματα πινάκων Cartan για τα συστήματα ριζών τάξης 2 δίνονται παρακάτω:

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\; A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\; G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ένας πίνακας Cartan ενός συστήματος ριζών, Φ, εξαρτάται από τη διάταξη της βάσης Δ. Αυτή η εξάρτηση δεν έχει ιδιαίτερες συνέπειες στη μελέτη των συστημάτων ριζών. Το ενδιαφέρον και ουσιαστικό στοιχείο των πινάκων Cartan είναι ότι πως δεν εξαρτώνται από την επιλογή της βάσης. Αυτό οφείλεται στη μεταβατική δράση της ομάδας Weyl στις βάσεις και στο ότι το ¨γινόμενο' $< \cdot, \cdot >$ είναι αναλλοίωτο κάτω από αυτή τη δράση. Ακόμη γνωρίζουμε ότι ο πίνακας Cartan δεν είναι ιδιάζον καθώς τα α_i είναι βάση του E.

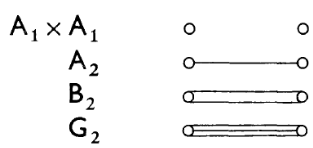
Πρόταση 3.3.2. *Έστω συστήματα ριζών $\Phi \subset E$ και $\Phi' \subset E'$, με βάσεις $\Delta = \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ και $\Delta' = \alpha'_1, \ldots, \alpha'_l$ αντίστοιχα. Αν $< \alpha_i, \alpha_j > = < \alpha'_i, \alpha'_j >$ για κάθε $1 \leq i, j \leq l$, τότε ο ισομορφισμός (συνόλων) $f : \Delta \to \Delta'$, όπου $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$, επεκτείνεται μοναδικά σε ένα γραμμικό ισομορφισμό $f : E \mapsto E'$ για τον οποίο ισχύει $f(\Phi) = \Phi'$ και $< f(\alpha), f(\beta) > = < \alpha, \beta >$, για κάθε $\alpha, \beta \in \Phi$. Ακόμη ένας πίνακας Cartan προσδιορίζει μοναδικά μία κλάση ισόμορφων μεταξύ τους συστημάτων ριζών.*

Απόδειξη. Τα σύνολα Δ, Δ' αποτελούν βάσεις των E, E' αντίστοιχα, επομένως υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, $f : E \to E'$, τέτοιος ώστε $f(\alpha_i) = \alpha'_i$. Επειδή η f είναι ισομορφισμός μεταξύ των Δ, Δ' και κάθε $\beta \in \Phi$ (και $\beta' \in \Phi'$) γράφεται με μοναδικό τρόπο ως μη αρνητικός ή μη θετικός ακέραιος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Δ (αντίστοιχα του Δ'), δηλαδή $\beta = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$ (αντίστοιχα $\beta' = \sum_{i=1}^{l} k'_i \alpha'_i$), τότε $f(\beta) = f(\sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^{l} k_i f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha'_i$. Επομένως αν $\beta' = f(\beta)$, τότε $k_i = k'_i$ δηλαδή f ¨1-1' και επί. Ακόμη λόγω της διγραμμικότητας του $(\cdot, \cdot)$ θα έχουμε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \Phi$, $(f(\alpha), f(\beta)) = (\alpha, \beta) \Rightarrow < f(\alpha), f(\beta) > = < \alpha, \beta >$. Συνεπώς ισχύει ότι $\sigma_{f(\alpha)}(f(\beta)) = f(\beta) - < f(\beta), f(\alpha) > f(\alpha) = f(\beta) - < \beta, \alpha > f(\alpha) = f(\beta - < \beta, \alpha > \alpha) = f(\sigma_\alpha(\beta))$. □

Η παραπάνω πρόταση δείχνει ότι είναι καταρχήν δυνατό να προσδιορίσουμε το σύστημα ριζών Φ αν γνωρίζουμε όλους τους ακέραιους Cartan . Μπορούμε μάλιστα να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο για να βρούμε όλες τις ρίζες (ή και μόνο τις απλές) μέσω αλυσίδων ριζών. Ξεκινάμε με τις ρίζες ύψους 1. Για κάθε ζεύγος διαφορετικών απλών ριζών α_i, α_j (δηλαδή ύψους 1), γνωρίζουμε ότι το $\alpha_i - \alpha_j$ δεν είναι ρίζα, συνεπώς το p στην α_j-αλυσίδα μέσω του α_i είναι μηδέν, δηλαδή $< \alpha_i, \alpha_j >= p - q = -q$. Μπορούμε στη συνέχεια να βρούμε όλες τις ρίζες, α, ύψους 2 (εάν αυτές υπάρχουν) και να υπολογίσουμε τους ακέραιους Cartan $< \alpha, \alpha_j >$. Για αυτές τις ρίζες ύψους 2 μπορούμε να υπολογίσουμε τον ακέραιο p της α_j-αλυσίδας μέσω του α, καθώς από κάθε τέτοια ρίζα το α_j μπορεί να αφαιρεθεί το πολύ μία φορά, διότι αλλιώς το $\alpha - 2\alpha_j$ θα έπρεπε να είναι ρίζα και ως εκ τούτου θα είχαμε μία ρίζα που δε γράφεται ούτε ως μη αρνητικός ούτε ως μη θετικός ακέραιος συνδιασμός των απλών ριζών που είναι άτοπο. Κατα συνέπεια υπολογίζεται και ο ακέραιος q για την κάθε παραπάνω αλυσίδα. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία και σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων (αφού το Φ είναι πεπερασμένο) αποκτούμε όλες τις ρίζες. Ακόμη επειδή υπάρχουν μόνο δύο διαφορετικά ύψοι ριζών σε κάθε σύστημα ριζών η διαδικασία απλουστέυεται αφού μετά τις ρίζες ύψους 1 μόνο άλλη μία περίπτωση υπάρχει που τη χειριζόμαστε αντίστοιχα με την περίπτωση ύψους 2 που μόλις περιγράφηκε.

Γραφήματα Coxeter και διαγράμματα Dynkin

Άν τα α, β είναι διαφορετικές θετικές ρίζες, τότε γνωρίζουμε ότι $< \alpha, \beta >< \beta, \alpha >= 0, 1, 2, 3$. Ορίζουμε, λοιπόν, το **γράφημα Coxeter** του συστήματος ριζών Φ, με βάση την Δ, ως το γράφημα που έχει l τω πλήθος κορυφές και η $i-$οστή κορυφή συνδέεται με την $j-$οστή με $n_{ij} =< \alpha_i, \alpha_j >< \alpha_j, \alpha_i >$ τω πλήθος ακμές.



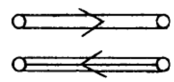
Σχήμα 3.2: Διαγράμματα Coxeter για τα συστήματα ριζών τάξης $l = 2$.

Το γράφημα Coxeter προσδιορίζει τους αριθμούς $< \alpha_i, \alpha_j >$ στην περίπτωση που όλες οι ρίζες έχουν το ίδιο μήκος καθώς τότε $< \alpha_i, \alpha_j >=< \alpha_j, \alpha_i >$. Στην περίπτωση που προκύπτουν ρίζες με διαφορετικά μήκη το γράφημα αποτυγχάνει να αποτυπώσει ποιά εκ των δύο ενός ζεύγους κορυφών αντιστοιχεί στην μικρότερη και ποιά στη μεγαλύτερη ρίζα. Προφανώς αυτές οι περιπτώσεις προκύπτουν μόνο όταν $n_{i,j} = 2, 3$.

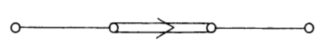
Όταν προκύπτει διπλή ή τριπλή ακμή στο διάγραμμα Coxeter ενός συστήματος ριζών Φ, μπορούμε να προσθέσουμε ένα βέλος (που παραπέμπει στο σύνηθες σύμβολο της διάταξης) με κατεύθυνση προς τη μικρότερη ρίζα. Αυτή η επιπλέον πληροφορία μας επιτρέπει να ανακτήσουμε πλήρως τον πίνακα Cartan και κατ΄ επέκταση τους ακέραιους Cartan , ενώ το διάγραμμα που προκύπτει μετά από αυτή τη διαδικασία ονομάζεται **διάγραμμα Dynkin**.

Παραδείγματα αποτελούν τα διαγράμματα Dynkin των συστημάτων B_2, G_2 που απεικονίζονται παρακάτω:

B_2
G_2



Καλύτερο παράδειγμα αποτελεί το διάγραμμα του συστήματος F_4:



απ΄όπου προκύπτει άμεσα ο πίνακας Cartan $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Συνεκτικά και μη συνεκτικά διαγράμματα

Όπως συζυτήθηκε προηγουμένως ένα σύστημα ριζών Φ, με ομάδα Weyl $\mathcal{W}$, είναι μη αναγωγήσιμο αν και μόνο αν το Φ (και αντίστοιχα κάθε βάση του Δ) δεν διαμερίζεται σε δύο ορθογώνια μεταξύ τους γνήσια υποσύνολα. Είναι προφανές λοιπόν ότι ένα σύστημα ριζών είναι μη αναγωγήσιμο αν και μόνο αν το αντίστοιχο του διάγραμμα Dynkin είναι συνεκτικό (δρομοσυνεκτικό). Έν γένει λοιπόν σε κάθε διάγραμμα υπάρχει κάποιος αριθμός, r, συνεκτικών συνιστωσών. Τότε θα έχουμε τη διαμέριση $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$ της βάσης σε ανα δύο ορθογώνια υποσύνολα. Άν θέσουμε $E_i = span_{\mathbb{R}}\Delta_i$, τότε προφανώς

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

καθώς επίσης θα ισχύει και ότι για κάθε $i = 1, \dots r$ το $(span_{\mathbb{Z}}\Delta_i) \cap \Phi$ αποτελεί σύστημα ριζών στον E_i, με αντίστοιχη ομάδα Weyl την $\mathcal{W}_i$. Η $\mathcal{W}_i$ αποτελεί τον περιορισμό στον E_i της υποομάδας της $\mathcal{W}$ που παράγεται από τα σ_α για $\alpha \in \Delta_i$. Παρατηρούμε ακόμη πως κάθε E_i είναι $\mathcal{W}-$αναλλοίωτο, αφού αν $\alpha \notin \Delta_i$, τότε για κάθε $\mu \in E_i$ έχουμε $\sigma_\alpha(\mu) = \mu - < \mu, \alpha > \alpha = \mu$, ενώ προφανώς αν $\alpha \in \Delta_i$, τότε $\sigma_\alpha(\mu) \in E_i$. Για να ολοκληρωθεί η ανάλυση περί μη αναγωγήσιμων συστημάτων ριζών, αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 3.3.12. *Έστω $E' \subset E$, υπόχωρος. Αν μία ανάκλαση σ_α αφήνει τον E' αναλλοίωτο, τότε είτε $\alpha \in E'$ ή $E' \subset P_\alpha$.*

Απόδειξη. Αρχικά αν $E' \subset P_\alpha$, τότε για κάθε $\mu \in E'$ έχουμε $\sigma_\alpha(\mu) = \mu$. Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι αν $E' \not\subset P_\alpha$ τότε $\alpha \in E'$. Έστω $\lambda \in E' \setminus P_\alpha$. Τότε $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - < \lambda, \alpha > \alpha \in E'$. Επειδή $\lambda \notin P_\alpha$ έχουμε ότι $< \lambda, \alpha > \neq 0$. Συνεπώς $\alpha \in E'$. □

Από το παραπάνω λήμμα βλέπουμε ότι αν $E = E_1 \cup \cdots \cup E_r$, τότε για κάθε $\alpha \in \Phi$ υπάρχει μοναδικό $i = 1, \ldots, r$ τέτοιο ώστε $\alpha \in E_i \cap \Phi = \Phi_i$. Έχουμε δηλαδή ότι $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_r$, όπου αυτή η ανάλυση είναι μοναδική.

Το θεώρημα ταξινόμησης

Επειδή η στόχευση μας είναι στις ημιαπλές Lie άλγεβρες θα δείξουμε την επόμενη πρόταση που διαφωτίζει τη σχέση μετξύ μη αναγωγήσιμων συστημάτων ριζών και των αντίστοιχών τους Lie αλγεβρών.

Πρόταση 3.3.3. *Έστω L απλή Lie άλγεβρα, H μία μεγιστική τοροειδής υποάλγεβρά της και Φ το αντίστοιχο σύστημα ριζών της. Τότε το Φ είναι μη αναγωγήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το Φ είναι αναγωγήσιμο. Τότε έχουμε $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ με $(\Phi_1, \Phi_2) = \{0\}$. Αν $\alpha \in \Phi_1, \beta \in \Phi_2$, τότε $(\alpha + \beta, \alpha) \neq 0$ και $(\alpha + \beta, \beta) \neq 0$. Επομένως $\alpha + \beta \notin \Phi_1$ και $\alpha + \beta \notin \Phi_2$, δηλαδή $\alpha + \beta \notin \Phi$. Συνεπώς $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta} = \{0\}$.

Αν $K \subset L$ η υποάλγεβρα της L που παράγεται από τα $L_\alpha(\alpha \in \Phi_1)$ με $\alpha \in \Phi_1$, τότε η υποάλγεβρα M που παράγεται από τα $L_\beta(\beta \in \Phi_2)$ περιέχεται στον κεντροποιητή, $C_L(K)$, της K και ομοίως $K \subset C_L(M)$. Εφόσον $Z(L) = 0$, λόγω της απλότητας της L, γνωρίζουμε ότι η K είναι γνήσια μή τετριμμένη υποάλγεβρα της L, διότι αλλιώς θα είχαμε είτε ότι $C_L(M) = L$ ή $C_L(K) = L$. Όμως έχουμε ότι $N_L(K) = L$, συνεπώς η K είναι μή τετριμμένο ιδεώδες της L που είναι άτοπο αφού η L είναι απλή. □

Έστω τώρα μία τυχαία ημιαπλή Lie άλγεβρα L. Αυτή γράφεται ως ευθύ άθροισμα των απλών ιδεωδών της, L_i, $i = 1, \ldots, r$. Αν η H είναι μία μεγιστική τοροειδής υποάλγεβρα της L, τότε προφανώς $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_r$, όπου $H_i = H \cap L_i$, κι επίσης η H_i είναι τοροειδής υποάλγεβρα της L_i. Ακόμη η H_i είναι μεγιστική τοροειδής υποάλγεβρα της L_i, αφού κάθε τοροειδής υποάλγεβρα της L_i μεγαλύτερη της H_i θα ήταν τοροειδής και στην L, και μαζί με τις υπόλοιπες H_j θα παρήγαγαν μία, μεγαλύτερη από την H, τοροειδή υποάλγεβρα της L που είναι άτοπο.

Έστω τώρα Φ_i το σύστημα ριζών της L_i, ως προς την H_i, στον ευκλείδειο E_i. Θα δείξουμε ότι για τα παραπάνω Φ_i ισχύει $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_r$, όπου Φ το σύστημα ριζών της L, ως προς την H. Κάθε $\alpha \in \Phi_i$ αποτελεί ένα γραμμικό συναρτησοειδές στην H, με $\alpha(H_j) = \{0\}$, $j \neq i$. Τότε η α είναι ρίζα της L ως προς την H, με $L_\alpha \subset L_i$. Αντιστρόφος, αν $\alpha \in \Phi$, τότε υπάρχει H_i, τέτοιο ώστε $[H_i, L_\alpha] \neq \{0\}$, αφού σε άλλη περίπτωση θα είχαμε $[H, L_\alpha] = 0 \Rightarrow L_\alpha \subset C_L(H)$ που είναι άτοπο καθώς $C_L(H) = H$. Συνεπώς $L_\alpha \subset L_i$, δηλαδή η $\alpha|_{H_i}$ είναι ρίζα της L_i ως προς την H_i. Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.3.1. *Έστω L ημιαπλή Lie άλγεβρα, με μεγιστική τοροειδή υποάλγεβρα H και σύστημα ριζών Φ. Αν $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ η ανάλυση της L σε απλά ιδεώδη, τότε για κάθε $i = 1, \ldots, r$ η $H_i = H \cap L_i$ είναι μεγιστική τοροειδής υποάλγεβρα του L_i και το αντίστοιχο μη αναγωγήσιμο σύστημα ριζών Φ_i είναι υποσύστημα ριζών του Φ, τέτοιο ώστε $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_r$.*

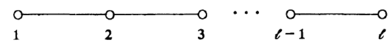
Από το παραπάνω πόρισμα βλέπουμε ότι το πρόβλημα ταξινόμησης των ημιαπλών Lie αλγεβρών μέσω των συστημάτων ριζών τους ανάγεται στο πρόβλημα της ταξινόμησης απλών Lie αλγεβρών μέσω των μη αναγωγήσιμων συστημάτων ριζών τους.

Η παραπάνω συζύτηση περί δείχνει πως η ταξινόμηση των μη αναγωγήσιμων συστημάτων ριζών, ή ισοδύναμα συνεκτικών διαγραμμάτων Dynkin είναι αρκετή για να επιτύχουμε την πλήρη ταξινόμηση των συστημάτων ριζών και κατ΄ επέκταση των ημιαπλών Lie αλγεβρών.

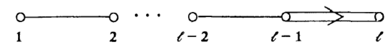
Δίνουμε, λοιπόν, το θεώρημα ταξινόμησης, όπου σημειώνεται και σε ποιές απλές μιγαδικές Lie άλγεβρες αντιστοιχεί το κάθε διάγραμμα. Η απόδειξη[2] αυτού του θεωρήματος βασίζεται στην ταξινόμηση πρώτα των διαγραμμάτων Coxeter κι ύστερα των διαγραμάτων Dynkin.

Θεώρημα 3.3.3. *Αν το Φ είναι μη αναγωγήσιμο σύστημα ριζών τάξης l, τότε το Dynkin διάγραμμά του είναι ένα από τα ακόλουθα:*

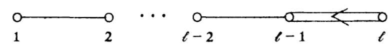
[2] Για την απόδειξη βλ. [6] και [4]

A_ℓ ($\ell \geq 1$): 

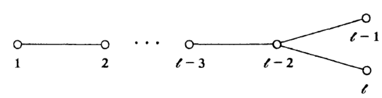
που αντιστοιχεί στην οικογένεια κλασσικών απλών αλγεβρών $\mathfrak{sl}(l+1)$,

B_ℓ ($\ell \geq 2$): 

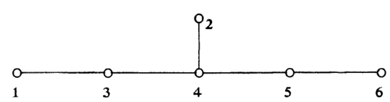
που αντιστοιχεί στην οικογένεια των κλασσικών απλών αλγεβρών $\mathfrak{o}(2l+1)$,

C_ℓ ($\ell \geq 3$): 

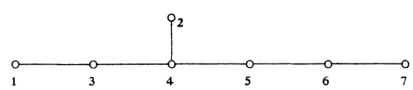
που αντιστοιχεί στην οικογένεια κλασσικών απλών αλγεβρών $\mathfrak{sp}(2l)$,

D_ℓ ($\ell \geq 4$): 

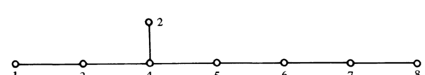
που αντιστοιχεί στην οικογένεια κλασσικών απλών αλγεβρών $\mathfrak{o}(2l)$,

E_6: 

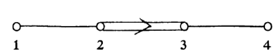
που αντιστοιχεί στην εξαιρετική απλή άλγεβρα $\mathbf{E}_6$,

E_7: 

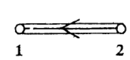
που αντιστοιχεί στην εξαιρετική απλή άλγεβρα $\mathbf{E}_7$,

E_8: 

που αντιστοιχεί στην εξαιρετική απλή άλγεβρα $\mathbf{E}_8$,

F_4: 

που αντιστοιχεί στην εξαιρετική απλή άλγεβρα $\mathbf{F}_4$,

G_2: 

που αντιστοιχεί στην εξαιρετική απλή άλγεβρα $\mathbf{G}_2$.

Παρατηρώντας αυτό το αποτέλεσμα βλέπουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις, εκτός των B_l, C_l, μπορούμε να εξάγουμε το διάγραμμα Dynkin από το γράφημα Coxeter. Οι B_l, C_l προκύπτουν από το ίδιο γράφημ Coxeter, αλλά διαφέρουν ως προς τον αριθμό των μακρύτερων απλών ριζών. Ακριβέστερα ο αριθμός των μακρυών απλών ριζών της B_l είναι ο αριθμός των ' κοντίτερων ' απλών ριζών της C_l και αντιστρόφος.

Ως προς την παραπάνω αρίθμηση των απλών ριζών (κορυφών) δίνονται παρακάτω οι αντίστοιχοι πίνακες Cartan. Ακόμη ανακατασκευάζοντας τα συστήματα ριζών από τους πίνακες Cartan προκύπτει το παρακάτω θεώρημα[3]:

Θεώρημα 3.3.4. *Κάθε* $(\mathbf{A}-\mathbf{G})$ *διάγραμμα Dynkin (ή πίνακας Cartan) αντιστοιχίζεται σε ένα σύστημα ριζών με το ίδιο διάγραμμα.*

[3] Για την πλήρη απόδειξη παραπέμπουμε στο [6]

$$
\mathbf{A}_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{B}_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{C}_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{D}_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

Πίνακας 3.2: Όλοι οι δυνατοί πίνακες Cartan των κλασσικών αλγεβρών.

$$\mathbf{E}_6 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_7 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_8 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_4 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Πίνακας 3.3: Οι πίνακες Cartan των εξαιρετικών αλγεβρών.

Κεφάλαιο 4

Μια εφαρμογή: The eighfold way

4.1 Ιστορική αναδρομή

Όταν παρατηρήθηκε ότι πρωτόνια και νετρόνια συγκρατούνται μαζί στον πυρήνα τέθηκε ως αξίωμα ότι δρούν μεταξύ τους άλλες δυνάμεις εκτός από τις ηλεκτρομαγνητικές. Πρόκειται για τις καλούμενες ' ισχυρές' δυνάμεις. Σε πολύ μικρές αποστάσεις υπερέχουν των ηλεκτρομαγνητικών κατά αρκετές τάξεις μεγέθους. Πράγματι, οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις θα οδηγούσαν σε αποχωρισμό των πρωτονίων μεταξύ τους εντός των πυρήνων. Το 1932 ο Heisenberg έθεσε ως αξίωμα ότι το πρωτόνιο και το νετρόνιο αποτελούν δύο καταστάσεις του ίδιου σωματιδίου που ονομάζεται νουκλεόνιο.

Αφού οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις είναι ανεξάρτητες του φορτίου, θα πρέπει να είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς μεταξύ γραμμικών συνδυασμών των δύο καταστάσεων του νουκλεονίου, $|p>, |n>$. Το πρωτόνιο και το νετρόνιο αποτελούν διπλή κατάσταση σωματιδίου, δηλαδή μία οικογένεια σωματιδίων που μπορούν να μετασχηματιστούν το ένα στο άλλο με τις δράσεις της ομάδας συμμετρίας. Ο Heisenberg θεώρησε ως ομάδα συμμετρίας την $SU(2)$ και πρότεινε ότι οι καταστάσεις $|p>, |n>$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(2)$. Σε αναλογία με τη θεωρία του σπιν του ηλεκτρονίου, με την οποία η θεωρία του Heisenberg είναι μαθηματικά ισοδύναμη, η ομάδα αυτή ονομάζεται ομάδα του ισοτοπικού σπίν ή ισοσπίν.

Έχουμε ότι $I_3|p>=\frac{1}{2}|p>, I_3|n>=-\frac{1}{2}|n>$. Το ηλεκτρικό φορτίο δίνεται από την ιδιοτιμή του τελεστή $Q=I_3+\frac{1}{2}I^2$, όπου $I^2=I_1^2+I_2^2+I_3^2$ το συνολικό ισοσπιν. Παίρνοντας ως δεδομένο ότι οι I_3, I^2 μετατίθενται με τη χαμιλτονιανή των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, τότε σε οποιαδήποτε αλληλεπίδραση υπεισέρχεται μόνο η ισχυρή δύναμη, το ολικό ισοτοπικό σπιν και η τρίτη του προβολή διατηρούνται. Αφού διατηρείται το I_3 το ίδιο ισχύει και για το συνολικό φορτίο Q. Το πρωτόνιο και το νετρόνιο είναι σωματίδια που ανήκουν στην οικογένεια των βαρυονίων. Σε κάθε βαρυόνιο αντιστοιχεί ένας κβαντικός αριθμός ο B. Το πρωτόνιο και το νετρόνιο έχουνε αριθμό βαρυονίων $B = +1$, και τα αντισωματίδιά τους έχουν αριθμό βαρυονίων $B = -1$. Υπάρχουν και άλλα σωματίδια που συμμετέχουν στην ισχυρή αλληλεπίδραση, που ονομάζονται μεσόνια, με αριθμό βαρυονίων $B = 0$. Για παράδειγμα, τα πιόνια π^+, π^0, π^- έχουν αριθμό βαρυονίων $B = 0$ και ηλεκτρικά φορτία $Q = 1, 0, -1$ αντίστοιχα. Για τα νουκλεόνια και πιόνια το συνολικό φορτίο, το ισοτοπικό σπιν και ο αριθμός βαρυονίων σχετίζονται ως εξής: $Q = I_3 + \frac{1}{2}B$.

Όλα αυτά τα μεγέθη-ηλεκτρικό φορτίο, ισοτοπικό σπιν, αριθμός βαρυονίων, καθώς επίσης και η τετραορμή- διατηρούνται στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Όταν όμως ερευνήθηκαν με τη βοήθεια επιταχυντών οι ιδιότητες σωματιδίων που αλληλεπιδρούν ισχυρά, διαπιστώθηκε πως παρά το γεγονός ότι μερικές από αυτές τις αλληλεπιδράσεις ικανοποιούσαν όλους αυτούς τους νόμους διατήρησης, αυτές δεν παρατηρούνταν. Οι επόμενες αντιδράσεις ικανοποιούν τους παραπάνω νόμους διατήρησης αλλά δεν παρατηρούνται:

$$\begin{aligned}
&K^- + p \to K^- + p + K^0 \\
&K^- + p \to p + \pi^- \\
&K^- + p \to \Lambda^0 + K^0
\end{aligned}$$

Για να εξηγήσουν αυτή την παράξενη συμπεριφορά οι Gell-Mann και Nishijima έθεσαν ως αξίωμα την ύπαρξη μίας επιπλέον ποσότητας που πρέπει να διατηρείται σε κάθε ισχυρή αλληλεπίδραση, την οποία ονόμασαν **παραξενιά (strangeness).** Η σχετική παραξενιά των σωματιδίων μπορεί να προσδιοριστεί από τη συμπεριφορά τους σε αντιδράσεις παραγωγής και εκπομπής. Συμβατικά θεωρούμε ότι το πρωτόνιο και το νετρόνιο έχουν μηδενική παραξενιά. Οι παρακάτω πίνακες κατατάσσουν βαρυόνια και μεσόνια σύμφωνα με την τιμή του ισοτοπικού σπιν και της παραξενιάς.

Κατόπιν ορίσθηκε μια καινούρια ποσότητα που ονομάστηκε **υπερφορτίο** και συμβολίζεται με Y. Η σχέση της με τις άλλες ποσότητες είναι $Y = B + S$. Η σχέση που συνδέει πλέον το ισοτοπικό σπιν, το ηλεκτρικό φορτίο και τον αριθμό βαρυονίων είναι η $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$. Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως τύπος των Gell-Mann και Nishijima.

$S \backslash I_3$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
1		K^0		K^+	
0	π^-		π^0, η^0		π^+
-1		K^-		$\bar{K}^0$	

(α′) Μεσόνια.

$S \backslash I_3$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0		n		p	
-1	Σ^-		Σ^0, Λ		Σ^+
-2		Ξ^-		Ξ^0	

(β′) Βαρυόνια.

Σχήμα 4.1: Η κατάταξη αδρονίων με βάση το ισοσπίν και το υπερφορτίο.

Έτσι το αρχικό αξίωμα του Heisenberg για την $SU(2)$ ως ομάδα συμμετρίας των ισχυρών αλληλεπιδράσεων δεν ήταν ικανό να εξηγήσει τις παρατηρούμενες οι μή παρατηρούμενες αλληλεπιδράσεις. Ο επιπλέον κβαντικός αριθμός Y προτείνει την ανάγκη διεύρυνσης της ομάδας.

Η θεωρία που διαδέχθηκε αυτή του Heisenberg ονομάζεται $SU(3)$ γεύσης. Σε αυτήν τα οκτώ βαρυόνια και οκτώ μεσόνια του σχήματος 4.1 αποτελούν δύο σύνολα μίας οκταδιάστατης πολλαπλέτας η οποία μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη συζυγή αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(3)$ που θα συζητηθεί στη συνέχεια. Η διδιάστατη υποάλγεβρα Cartan δίνει δύο ποσότητες που μπορούν να παρατηρηθούν ταυτόχρονα, το ισοσπιν και το υπερφορτίο. Κάθε διάνυσμα της συζυγούς αναπαράστασης αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο, ενώ το ισοτοπικό σπιν και το υπερφορτίο του σωματιδίου δίνονται από τις ιδιοτιμές των αντίστοιχων τελεστών I_3 και Y.

4.2 Αναπαραστάσεις της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Σε αυτή την ενότητα θα διερευνήσουμε κάποιες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ που αποτελεί τη μιγαδοποίηση της $\mathfrak{su}(3, \mathbb{R})$. Θα δούμε ότι μία μη αναγωγήσιμη πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ μπορεί να ταξινομηθεί με βάση το μέγιστο βάρος της. Η $\mathfrak{su}(3, \mathbb{C})$ και κάθε άλγεβρα $\mathfrak{su}(n, \mathbb{C})$ αποτελεί την άλγεβρα της ομάδας Lie $SU(3)$ και $SU(N)$ αντίστοιχα. Τα στοιχεία της $SU(N)$ είναι οι μοναδιακοί πίνακες που διατηρούν τον όγκο ενός μιγαδικού διανυσματικού χώρου διάστασης n, δηλαδή έχουν ορίζουσα 1. Η διάσταση της ομάδας $SU(N)$, ως πραγματική πολλαπλότητα είναι $n^2 - 1$, ενώ τοπολογικά είναι συμπαγής και απλά συνεκτική. Οι αναπαραστάσεις, επομένως, της $SU(3)$ είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τις αναπαραστάσεις της $\mathfrak{su}(3)$ που μέσω της μιγαδικής γραμμικότητας μπορούν να επεκταθούν σε αναπαραστάσεις της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Βάρη και ρίζες

Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη βάση για την $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
e_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
f_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι το $S_{\alpha_1} = span\{h_1, e_1, f_1\}$ και το $S_{\alpha_2} = span\{h_2, e_2, f_2\}$ είναι υποάλγεβρες της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ κάθε μία εκ των οποίων είναι ισόμορφη με την $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Έχουμε δηλαδή τις παρακάτω μεταθετικές σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
[h_1, e_1] = 2e_1,\ [h_1, f_1] = -2f_1,\ [e_1, f_1] = h_1 \\
[h_2, e_2] = 2e_2,\ [h_2, f_2] = -2f_2,\ [e_2, f_2] = h_2
\end{aligned}
$$

Κάποιες από τις υπόλοιπες σχέσεις μετάθεσης (και οι πορηγούμενες) δίνονται ως:

$$
\begin{aligned}
&[h_1, h_2] = 0, \\
\\
&[h_1, e_1] = 2e_1,\ [h_1, f_1] = -2f_1, \\
&[h_2, e_1] = -e_1,\ [h_2, f_1] = f_1, \\
\\
&[h_1, e_2] = -e_2,\ [h_1, f_2] = f_2, \\
&[h_2, e_2] = 2e_2,\ [h_2, f_2] = -2f_2, \\
\\
&[h_1, e_3] = e_3,\ [h_1, f_3] = -f_3, \\
&[h_2, e_3] = e_3,\ [h_2, f_3] = -f_3,
\end{aligned}
$$

απ΄όπου βλέπουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ως υποάλγεβρα Cartan ή μεγιστική τοροειδή υποάλγεβρα την $H = span_{\mathbb{C}}\{h_1, h_2\}$ και ότι οι ρίζες της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, εκφρασμένες ως προς τη δυική βάση της $\{h_1, h_2\}$, είναι $\{\pm(2,-1), \pm(-1,2), \pm(1,1)\}$ που αποτελούν το σύστημα ριζών A_2. Τα αντίστοιχα διανύσματα βάρους είναι τα $\{e_1, f_2, e_2, f_2, e_3, f_3\}$ και θα θεωρήσουμε ως απλές ρίζες τις $\alpha_1 = (2,-1),\ \alpha_2 = (-1,2)$.

Οι εναπομένουσες μεταθετικές σχέσεις είναι οι:

$$
\begin{aligned}
&[e_1, f_1] = h_1,\\
&[e_2, f_2] = h_2,\\
&[e_3, f_3] = h_1 + h_2,\\
\\
&[e_1, e_2] = e_3,\ [f_1, f_2] = -f_3,\\
&[e_1, f_2] = 0,\ [f_1, e_2] = 0,\\
\\
&[e_1, e_3] = 0,\ [f_1, f_3] = 0,\\
&[e_2, e_3] = 0,\ [f_2, f_3] = 0,\\
\\
&[e_2, f_3] = f_1,\ [e_3, f_2] = e_1,\\
&[e_1, f_3] = -f_2,\ [e_3, f_1] = -e_2,
\end{aligned}
$$

Θα μελετήσουμε πεπερασμένης διάστασης μιγαδικές αναπαραστάσεις. Το κύριο μας μέλημα θα είναι η ταυτόχρονη διαγωνοποίηση των στοιχείων της βάσης της $\rho(H)$, που δεν φαίνεται αδύνατο, καθώς τα στοιχεία της μετατίθενται για κάθε ρ αναπαράσταση. Ακόμη δεδομένης μίας αναπαράστασης (ρ, V), θα ονομάζουμε βάρη της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ τα στοιχεία $\lambda \in H^*$ για τα οποία υπάρχει μη μηδενικό $v \in V$, τέτοιο ώστε $\rho(h)v = \lambda(h)v$ για κάθε $h \in H$. Για $\lambda \in H^*$ βάρος, θα λέμε τα σύνολα V_λ^H χώρους βάρους, σε αντιστοιχία με τον ορισμό που δόθηκε στο πρώτο κεφάλαιο και στην ανάλυση της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ και τα στοιχεία του V_λ^H θα λέγονται διανύσματα βάρους.

Τα βάρη στην ουσία αποτελούν ταυτόχρονα ιδιοδιανύσματα του $\rho(h_1)$ και του $\rho(h_2)$. Είναι προφανές ότι ισόμορφες αναπαραστάσεις έχουν τα ίδια διανύσματα βάρη, ενώ για αυτά ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.2.1. *Κάθε αναπαράσταση (ρ, V) της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ έχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα βάρους.*

Απόδειξη. Εφόσον το σώμα των μιγαδικών αριθμών είναι αλγεβρικά κλειστό είναι βέβαιο ότι ο χώρος $W = \{v \in V | \exists m_1 \in \mathbb{C},\ m_1 \neq 0\ : \rho(h_1)v = m_1 v\}$ είναι μη κενός και μη μηδενικός. Επίσης επειδή $[\rho(h_1), \rho(h_2)] = 0$ ξέρουμε ότι ο W είναι αναλλοίωτος κάτω από τη δράση του $\rho(h_2)$, και επειδή το $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικά κλειστό ξέρουμε ότι υπάρχουν $m_2 \in \mathbb{C}$ και $w \in W$ τέτοια ώστε $\rho(h_2) = m_2 w$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αν θέσουμε $\lambda = (m_1, m_2) \in H^*$, εκφρασμένο ως προς τη δυική βάση $\{\alpha_i \in H^* | \alpha_i(h_j) = \delta_{ij}\}$ της H^*, έχουμε ότι το λ είναι ένα βάρος. □

Όπως είδαμε προηγουμένως, οι υποάλγεβρες S_{α_1}, S_{α_2} είναι ισόμορφες με την $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Αν, επομένως, περιορίσουμε μία αναπαράσταση (ρ, V) της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ στην S_{α_1} ή την S_{α_2}, τότε θα έχουμε μία αναπαράσταση της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Έτσι καταλήγουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω (ρ, V) αναπαράσταση της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ και έστω $\mu = (m_1, m_2)$ βάρος. Τότε τα m_1, m_2 είναι ακέραιοι.*

Απόδειξη. Προφανώς το $(\rho|_{S_{\alpha_1}}, V)$ είναι αναπαράσταση της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Ακόμη το m_1 είναι βάρος της αναπαράστασης αυτής επομένως είναι ακέραιος. Ομοίως το m_2 είναι ακέραιος ως βάρος της S_{α_2}. □

Δεδομένου ενός βάρους μ μιας αναπαράστασης (ρ, V) της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, έχουμε ότι αν x_α ριζικό διάνυσμα, α ρίζα και $v \in V$ αντίστοιχο διάνυσμα βάρους, τότε $\rho(h)\rho(x_\alpha)v = \rho(x_\alpha)\mu(h)v + \rho([h, \rho(x_\alpha)])v = (\mu(h) + \alpha(h))\rho(x_\alpha)v,\ \forall h \in H$. Δηλαδή είτε $\rho(x_\alpha)v = 0$ ή το $\mu + \alpha$ είναι επίσης βάρος και το $\rho(x_\alpha)v$ είναι αντίστοιχο διάνυσμα βάρους.

Αν έχουμε μία αναπαράσταση με ένα βάρος $\mu = (m_1, m_2)$, τότε αν ' εφαρμόσουμε ' τα $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$ αποκτούμε νέα βάρη της μορφής $\mu + \alpha$, όπου $\alpha \in \Phi$. Επειδή ο V είναι πεπερασμένης διάστασης ξέρουμε ότι μόνο κάποια από τα $\mu + \alpha$, πεπερασμένα τω πλήθος μάλιστα, θα είναι βάρη. Σε αντιστοιχία με την ανάλυση των αναπαραστάσεων της $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ θα απομονώσουμε κάποιο ' μέγιστο ' διάνυσμα βάρους με σκοπό την αντίστοιχη ανάλυση για την $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε χρησιμοποιώντας τη μερική διάταξη '$\prec$', που ορίσθηκε στο υποκεφάλαιο 3.3.2 αφού μπορούμε να περιοριστούμε στον πραγματικό υπόχωρο της H^* δεδομένου ότι $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Θα έχουμε δηλαδή, ως προς την $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ότι αν μ_1, μ_2 βάρη και $\mu_1 - \mu_2 = b\alpha_1 + c\alpha$, τότε $\mu_1 \succ \mu_2 \Leftrightarrow\ a, b \geq 0$. Μπορούμε, τώρα, να ορίσουμε το μέγιστο διάνυσμα βάρους για μία αναπαράσταση ως εξής:

Ορισμός 4.2.1. *Έστω ρ αναπαράσταση της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Ένα βάρος λ για την ρ είναι ένα* ***μέγιστο βάρος*** *αν για κάθε βάρος μ ισχύει $\lambda \succ \mu$.*

Το θεώρημα του μέγιστου βάρους

Θα διατυπώσουμε το θεώρημα του μέγιστου διανύσματος και η απόδειξη θα δοθεί με μία σειρά προτάσεων μεσολαβούμενων από κάποια λήμματα.

Θεώρημα 4.2.1. *(Μέγιστου βάρους)*

1. *Κάθε μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση της* $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ *είναι το ευθύ άθροισμα των χώρων βάρους της.*

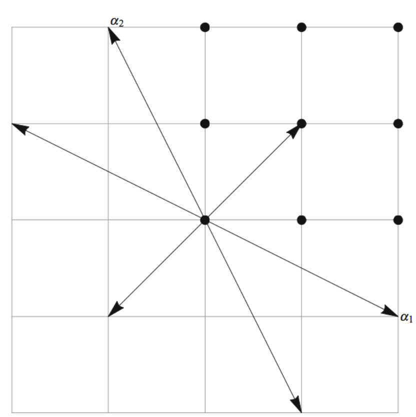
2. *Κάθε μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της* $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ *έχει μοναδικό μέγιστο βάρος.*

3. *Δύο μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις της* $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ *με το ίδιο μέγιστο βάρος είναι ισόμορφες.*

4. *Το μέγιστο βάρος* μ *μιας μη αναγωγήσιμης αναπαράστασης πρέπει να είναι της μορφής* $\mu = (m_1, m_2)$*, όπου* m_1, m_2 *μη αρνητικοί ακέραιοι.*

5. *Για κάθε ζεύγος μη αρνητικών ακεραίων* (m_1, m_2) *υπάρχει μία μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση της* $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ *με μέγιστο βάρος το* (m_1, m_2)*.*

Ορισμός 4.2.2. *Έστω* $\mu = (m_1, m_2) \in H^* \cong \mathbb{C}^2$*. Το* μ *θα λέγεται* ***κυρίαρχο*** *ή* ***δεσπόζον*** *αν* $m_1, m_2 \in \mathbb{R}^+$*, ενώ θα λέγεται* ***ακέραιο στοιχείο*** *αν* $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$*.*



Σχήμα 4.2: Οι ρίζες (βέλη) και τα κυρίαρχα ακέραια στοιχεία (τελείες) ως προς τη δυική βάση.

Όπως φαίνεται στο θεώρημα 4.2.1 το μέγιστο βάρος είναι ένα κυρίαρχο ακέραιο στοιχείο. Στο σχήμα 4.1 βλέπουμε μία απεικόνιση των κυρίαρχων α-κέραιων στοιχείων μαζί με τις ρίζες.[1]

Η παρακάτω πρόταση είναι ανάλογη της ανάλυσης μίας ημιαπλής Lie άλγεβρας σε χώρους ριζών και μπορεί κάλλιστα να αποδειχθεί από την διατήρηση της ανάλυσης Jordan στις αναπαραστάσεις. Παραταύτα δίνεται μία διαφορετική απόδειξη για λόγους διαύγειας.

Πρόταση 4.2.3. *Σε κάθε μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση (ρ, V) της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, οι τελεστές $\rho(h_1), \rho(h_2)$ διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα, δηλαδή ο V είναι ευθύ άθροισμα των χώρων βάρους του.*

Απόδειξη. Έστω W το ευθύ άθροισμα όλων των χώρων βάρους του V. Τότε $W \neq \{0\}$ καθώς γνωρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα βάρους. Ακόμη αν μ βάρος και x_α διάνυσμα ρίζας, τότε είτε $\mu + \alpha$ βάρος είτε ο $\rho(x_\alpha)$ στέλνει τον W στο $\{0\}$. Κατά συνέπεια σε κάθε περίπτωση ο W θα είναι αναλλοίωτος κάτω από τη δράση των $e_i, f_i,\ i = 1, 2, 3$ και εφόσον η αναπαράσταση είναι μή αναγωγήσιμη θα έχουμε $W = V$. Άρα οι $\rho(h_1), \rho(h_2)$ διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα και ο V είναι ευθύ άθροισμα των χώρων βάρους του. Έτσι αποδεικνύεται και το 1. του θεωρήματος μέγιστου βάρους. □

Ορισμός 4.2.3. *Μία τυχαία αναπαράσταση (ρ, V) της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ καλείται* ***μέγιστου βάρους κυκλική αναπαράσταση με βάρος*** *$\mu = (m_1, m_2)$ αν υπάρχει μη μηδενικό $v \in V$ ώστε:*

1. *το v είναι διάνυσμα βάρους με βάρος μ.*
2. *$\rho(e_i)v = 0$ για $i = 1, 2, 3$.*
3. *Ο μικρότερος αναλλοίωτος υπόχωρος του V που περιέχει το v είναι ο ίδιος ο V.*

Πρόταση 4.2.4. *Έστω (ρ, V) μέγιστου βάρους κυκλική αναπαράσταση της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ με βάρος μ. Τότε:*

1. *Το μ είναι μέγιστο βάρος της ρ.*
2. *Ο χώρος βάρους που αντιστοιχεί στο μ είναι μονοδιάστατος.*

[1] Εδώ η ' ασυμμετρία ' του σχήματος οφείλεται στο ότι έχουμε απεικονίσει έναν πραγματκό υπόχωρο της H^* ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και όχι ως προς το επαγόμενο από τη μορφή Killing .

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης θα χρειαστούμε ένα γενικό λήμμα για τις Lie άλγεβρες.

Λήμμα 4.2.1. *(Αναδιάταξης) Έστω Lie άλγεβρα L, ρ αναπαράσταση της L και $\{x_1, \dots, x_m\}$ διατεταγμένη βάση της L. Τότε κάθε έκφραση της μορφής $\rho(x_{i_1})\rho(x_{i_2})\cdots\rho(x_{i_N})$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της μορφής $\rho(x_m)^{k_m}\rho(x_{m-1})^{k_{m-1}}\cdots\rho(x_1)^{k_1}$, όπου $k_1, \dots, k_m$ μη αρνητικοί ακέραιοι και $k_1 + k_2 + \cdots + k_m \leq N$.*

Απόδειξη. Θα προχωρήσουμε με επαγωγή στο N και θα χρησιμοποιήσουμε το εξής γεγονός. Αν $x_i, x_j \in L$ στοιχεία της βάσης, τότε

$$\rho(x_i)\rho(x_j) = \rho(x_j)\rho(x_i) + \rho([x_i, x_j]) = \rho(x_j)\rho(x_i) + c_{ij}^k\rho(x_k), \ (*)$$

με χρήση της σύμβασης άθροισης άνω κάτω δεικτών. Για $N = 1$ το λήμμα ισχύει τετριμμένα. Έστω ότι ισχύει για ένα γινόμενο N παραγόντων. Θεωρούμε ένα γινόμενο $N+1$ παραγόντων. Λόγω της επαγωγής θα έχουμε ότι οι τελευταίοι N παράγοντες στο γινόμενο είναι στην επιθυμητή μορφή, δηλαδή έχουμε ένα άθροισμα εκφράσεων της μορφής:

$$\rho(x_j)\rho(x_m)^{k_m}\rho(x_{m-1})^{k_{m-1}}\cdots\rho(x_1)^{k_1},$$

όπου $k_1 + \cdots + k_N = N$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ένας τυχίος όρος σε αυτό το άθροισμα έρχεται στη μορφή που θέλουμε. Μεταθέτωντας τον πρώτο όρο $\rho(x_j)$, όσες φορές χρειαστεί ώστε να φτάσει στη σωστή θέση, προκύπτει ένα άθροισμα γινομένων N όρων, λόγω του μεταθέτη που προκύπτει από την $(*)$ όποτε λόγω της επαγωγικής υπόθεσης ισχύει το ζητούμενο. Προκύπτει ακόμη ένα γινόμενο $N+1$ όρων που είναι στη μορφή που θέλουμε καθώς ο $\rho(x_j)$ είναι στη σωστή θέση. □

Συνεχίζουμε τώρα με την απόδειξη της πρότασης 4.1.4..

Απόδειξη. Έστω (ρ, V) κυκλική αναπαράσταση μέγιστου βάρους με βάρος μ και έστω ένα αντίστοιχο διάνυσμα βάρους v. Θεωρούμε τον υπόχωρο W του V που παράγεται από στοιχεία της μορφής $w = \rho(f_{j_1})\rho(f_{j_2})\dots\rho(f_{j_N})$ όπου $j_l = 1, 2, 3$ και $N \geq 0$. Προφανώς ο W είναι μη μηδενικός καθώς για $N = 0$ έχουμε ότι $v \in W$. Θα δείξουμε ότι ο W είναι $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})-$αναλλοίωτος. Αν δράσουμε με ένα διάνυσμα από τη βάση της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, θα λάβουμε, από το προηγούμενο λήμμα αναδιάταξης, ένα γραμμικό συνδυασμό στοιχείων στα οποία τα

$\rho(f_i)$ θα βρίσκονται αριστερά, στη μέση θα έχουμε τα $\rho(h_i)$ και δεξιά (δρούν πρώτα στο v) τα $\rho(e_i)$. Επειδή έχουμε ότι $\rho(e_i)v = 0$ και ότι $\rho(h_i)v = \mu(h_i)v$ καταλήγουμε σε έναν γραμμικό συνδυασμό στοιχείων του W, συνεπώς ο W είναι αναλλοίωτος και $W = V$. Ακόμη επειδή f_1, f_2, f_3 είναι ριζικά διανύσματα και αντιστοιχούν στις ρίζες $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2$, αλλά επίσης επειδή γνωρίζουμε ότι όλα τα υπόλοιπα βάρη θα είναι της μορφής $\mu + \alpha$ καταλήγουμε στο ότι μόνο τα πολλαπλάσια του v θα είναι διανύσματα του βάρους μ και ότι το μ είναι μέγιστο βάρος. $\square$

Πρόταση 4.2.5. *Κάθε μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ είναι μία κυκλική αναπαράσταση μέγιστου βάρους με μοναδικό μέγιστο βάρος μ.*

Απόδειξη. Τα βάρη μίας αναπαράστασης V είναι πεπερασμένα σε πλήθος αφού αντιστοιχούν σε υπόχωρους του χώρου αναπαράστασης που είναι πεπερασμένης διάστασης. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα μέγιστο βάρος, έστω το μ. Τότε θα έχουμε για κάθε $i = 1, 2, 3$, ότι $\rho(e_i)v = 0$, ενώ επειδή η ρ μη αναγωγήσιμη ο V είναι ο μικρότερος χώρος στον ανήκει το v. Συνεπώς η αναπαράσταση είναι κυκλική αναπαράσταση μέγιστου βάρους. $\square$

Πρόταση 4.2.6. *Έστω (ρ, V) κυκλική αναπαράσταση μέγιστου βάρους της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Τότε η (ρ, V) είναι μη αναγωγήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω (ρ, V) η εν λόγω αναπαράσταση με μέγιστο βάρος μ και έστω $v \in V$ ένα αντίστοιχο διάνυσμα βάρους. Η $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ είναι ημιαπλή, οπότε από το θεώρημα του Weyl έχουμε ότι η ρ είναι πλήρως αναγωγήσιμη κι επομένως $V = \bigoplus_j V_j$, όπου V_j μη αναγωγήσιμα υποπρότυπα. Ακόμη κάθε V_j είναι ευθύ άθροισμα των χώρων βάρους του. Είναι άμεσο λοιπόν ότι θα υπάρχει κάποιο i, τέτοιο ώστε $v \in V_i$. Ακόμη επειδή ο χώρος βάρους του μ, από την προηγούμενη πρόταση, είναι μονοδιάστατος το i θα είναι μοναδικό και ως εκ τούτου $V_i = V$. Άρα η (ρ, V) είναι μη αναγωγήσιμη. $\square$

Πρόταση 4.2.7. *Δύο μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ με το ίδιο μέγιστο βάρος είναι ισόμορφες.*

Απόδειξη. Έστω (π, V) και (ρ, W) μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις με το ίδιο μέγιστο μέγιστο βάρος μ και έστω $v \in V,\ w \in W$ αντίστοιχα διανύσματα μέγιστου βάρους. Έστω, ακόμα, η αναπαράσταση $V \oplus W$ και έστω U ο μικρότερος αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει το (v, w). Τότε προφανώς η U είναι κυκλική αναπαράσταση μέγιστου βάρους δηλαδή μή αναγωγήσιμη. Έστω οι προβολές P_1, P_2 των V, W αντίστοιχα, δηλαδή $P_1(v, w) = v,\ P_2(v, w) = w$. Οι P_1, P_2 είναι ομομορφισμοί αναπαραστάσεων(intetrwinning operators) επομένως οι περιορισμοί τους $P_1|_U, P_2|_U$ είναι μορφισμοί μη αναγωγήσιμων αναπαραστάσεων επομένως είναι ισομορφισμοί αναπαραστάσεων. Για την ακρίβεια έχουμε $V \cong U$ και $W \cong U$, δηλαδή $V \cong W$. □

Πρόταση 4.2.8. *Άν (ρ, V) μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ με μέγιστο βάρος $\mu = (m_1, m_2)$, τότε τα m_1, m_2 είναι μη αρνητικοί ακέραιοι.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ήδη ότι οι m_1, m_2 είναι ακέραιοι αφού ο καθένας τους αποτελεί βάρος μίας εκ των δύο $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ υποαλγεβρών. Ακόμη επειδή $\rho(e_1)v = 0$ και $\rho(e_2)v = 0$, όπου v το διάνυσμα βάρους μ. Έχουμε δηλαδή ότι οι m_1, m_2 είναι τα μέγιστα βάρη των δύο $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ υποαναπαραστάσεων κι επομένως είναι μη αρνητικοί. □

Πρόταση 4.2.9. *Άν m_1, m_2 μη αρνητικοί ακέραιοι, τότε υπάρχει μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ με μέγιστο βάρος το $\mu = (m_1, m_2)$.*

Απόδειξη. Επειδή η τετριμμένη αναπαράσταση είναι μη αναγωγήσιμη με μέγιστο βάρος $(0, 0)$ αρκεί να κατασκευάσουμε αναπαραστάσεις όπου ένα εκ των m_1, m_2 είναι μη μηδενικό. Αρχικά κατασκευάζουμε δύο μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις με μέγιστα βάρη $(1, 0)$ και $(0, 1)$ οι οποίες ονομάζονται **θεμελιώδεις αναπαραστάσεις**.

Η συνήθης αναπαράσταση, ρ, της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, που συμβολίζεται ως $\mathbf{3}$, είναι αυτή για την οποία $V = \mathbb{C}^3$ και οι πίνακες της αναπαράστασης είναι οι πίνακες που δόθηκαν στην αρχή. Είναι προφανές ότι αυτή είναι μη αναγωγίσιμη και έχει ως βάρη τα $(1, 0),\ (-1, 1),\ (0, -1)$ με αντίστοιχα διανύσματα βάρους v_1, v_2, v_2 τη συνήθη βάση του $\mathbb{C}^3$.

Η δυική αναπαράσταση, π, της συνήθους συμβολίζεται με $\bar{\mathbf{3}}$ και δίνεται ως $\pi(x) = -\rho(x)^\top$ για κάθε $x \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Επειδή κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφος με τον δυικό του, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ρ, π δρούν στον ίδιο χώρο $V = \mathbb{C}^3$. Έτσι τα βάρη της π είναι τα $(-1, 0), (1, -1), (0, 1)$ με αντίστοιχα διανύσματα βάρους τα $w_3 = v_1,\ w_2 = v_2,\ w_1 = v_3$ και μέγιστο βάρος το $(0, 1)$. Σημαντικό στοιχείο είναι ότι αυτές οι δύο αναπαραστάσεις δεν είναι ισόμορφες αφού έχουν διαφορετικό μέγιστο βάρος.

Με βάση αυτές τις δύο αναπαραστάσεις μπορούμε να ορίσουμε την π_{m_1, m_2} ως εκείνη που δρά στο τανυστικό γινόμενο

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_1) \otimes (V_2 \otimes \cdots \otimes V_2),$$

όπου ο V_1 εμφανίζεται m_1 φορές και στον οποίο δρά η συνήθης αναπαράσταση, ενώ ο V_2 εμφανίζεται m_2 φορές και σε αυτόν δρά η δυική. Έτσι το διάνυσμα $v_{m_1,m_2} = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_1) \otimes (w_1 \otimes \ldots w_1)$ είναι ένα διάνυσμα με βάρος (m_1, m_2) για το οποίο ισχύει $\pi_{m_1,m_2}(e_j) v_{m_1,m_2} = 0,\ j = 1, 2, 3$. Θεωρώντας τον μικρότερο μη αναγωγήσιμο υπόχωρο U που περιέχει το v_{m_1,m_2}, ο οποίος υπάρχει αφού η αναπαράσταση είναι πλήρως αναγωγήσιμη, έχουμε την ζητούμενη αναπαράσταση που είναι η $\pi_{m_1,m_2}|_U$. $\square$

Σε αυτό το σημείο δίνουμε χωρίς απόδειξη[2] ένα θεώρημα για τη διάσταση της μη αναγωγήσιμης αναπαράστασης με μέγιστο βάρος (m_1, m_2).

Θεώρημα 4.2.2. *Η διάσταση της μη αναγωγήσιμης αναπαράστασης μϵ μέγιστο βάρος (m_1, m_2) δίνϵται από τη σχέση*

$$\frac{1}{2}(m_1 + 1)(m_2 + 2)(m_1 + m_2 + 2).$$

4.3 The eighfold way

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα συζητηθεί η θεωρία των Gell-Mann και Ne'eman, επονομαζόμενη και ως the eightfold way. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα του μοντέλου των quarks παρόλο που το the eightfold way προηγήθηκε. Θα θεωρήσουμε ως θεμελιώδης οντότητες, δηλαδή ως τα στοιχειώδη σωμάτια που αλληλεπιδρούν μέσω της ισχυρής αλληλεπίδρασης, τα quarks.

Στοιχεία για την $\mathfrak{su}(3)$

Τα quark θα μελετηθούν υπό το πρίσμα της εσωτερικής συμμετρίας της ισχυρής αλληλεπίδρασης η οποία είναι αυτή της ομάδας Lie $SU(3)$ των τρισδιάστατων μοναδιακών πινάκων με ορίζουσα 1 (στην πρώτη θεμελιώδη αναπαράσταση). Για το λόγο αυτό θα επιστρατευθούν τα μέσα της θεωρίας αναπαραστάσεων αλγεβρών Lie .[3] Πιο συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποενότητας για τις αναπαραστάσεις της $\mathfrak{su}(3)$, καθώς αυτές είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τις αναπαραστάσεις της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Προφανώς η διάσταση της $\mathfrak{su}(3, \mathbb{R})$ είναι $3^2 - 1 = 8$.

[2]Για την απόδειξη βλ. [6] και [5].

[3]Μία άλγεβρα Lie αποτελεί το σύνολο των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων (εφοδιασμένο με τον μεταθέτη Lie) της αντίστοιχης ομάδας Lie , G, και είναι ισόμορφο ως άλγεβρα με τον εφαπτόμενο χώρο στη μονάδα T_eG. Για περεταίρω βλ. [1] [9].

Για την παραγματική Lie άλγεβρα $\mathfrak{su}(3,\mathbb{R})$ επιλέγουμε ως βάση (γεννήτορες) το μισό των $\lambda-$πινάκων του Gell-Mann που είναι ερμιτιανοί πίνακες με μηδενικό ίχνος. Οι $\lambda-$πίνακες δίνονται παρακάτω:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Με βάση αυτή την επιλογή έχουμε ότι $Tr\{\lambda_i\lambda_j\} = 2\delta_{ij}$. Θεωρούμε ακόμη ότι για τις σταθερές δομής ισχύει $[\frac{1}{2}\lambda_a, \frac{1}{2}\lambda_b] = i{f_{ab}}^c\frac{1}{2}\lambda_c$, απ΄ όπου προκύπτει ότι ${f_{ab}}^c = \frac{1}{4i}Tr\{[\lambda_a,\lambda_b]\lambda_c\}$, δηλαδή είναι πραγματικό και πλήρως αντισυμμετρικό. Ακόμη, ξεφεύγωντας από την οπτική των *Lie* αλγεβρών έχουμε ότι κάθε αντιμεταθέτης $\{\lambda_a,\lambda_b\} = \lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a$ είναι ερμιτιανός, επομένος θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γεννητόρων της $\mathfrak{su}(3)$ και του 3×3 μοναδιαίου πίνακα, δηλαδή $\{\lambda_a,\lambda_b\} = c_{ab}I + {d_{ab}}^i\lambda_i$. Υπολογίζοντας το ίχνος της παραπάνω σχέσης έχουμε $c_{ab} = \frac{4}{3}\delta_{ab}$, ενώ υπολογίζοντας το ίχνος αφού έχουμε πρώτα πολλαπλασιάσει με λ_c έχουμε ${d_{ab}}^c = \frac{1}{4}Tr\{\{\lambda_a,\lambda_b\}\lambda_c\}$.

Το μοντέλο των quark και η $SU(3)$ συμμετρία γεύσης.

Το είδος σωματιδίων που θα μελετηθεί είναι τα αδρόνια. Αυτά διακρίνονται σε μεσόνια και βαρυόνια. Η θεμελιώδης παραδοχή του μοντέλου των quarks είναι ότι τα μεσόνια είναι δέσμιες καταστάσεις ζευγών quark-antiquark και ότι τα βαρυόνια είναι καταστάσεις τριών quarks . Σχηματικά έχουμε ότι τα μεσόνια είναι της μορφής $q\bar{q}$ και τα βαρυόνια είναι qqq. Αυτά τα παραπάνω αδρόνια είναι ιδιοκαταστάσεις του χαμιλτονιανού τελεστή της ισχυρής αλληλεπίδρασης $\mathcal{H}_{st}$. Δε θα χρειαστεί βέβαια να λύσουμε την εξίσωση ιδιοτιμών αυτού του τελεστή.

Θεωρούμε λοιπόν πως υπάρχουν quark τριών γεύσεων μόνο τα u, d, s και κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

1. Οι ισχυρές δυνάμεις δρούν με τον ίδιο τρόπο σε όλες τις γεύσεις.

2. Οι μάζες των τριών κουάρκ είναι ίσες ($m_u = m_d = m_s$).

Έτσι ο χαμιλτονιανός τελεστής της ισχυρής αλληλεπίδρασης είναι τότε αναλλοίωτος κάτω από τυχαίους μετασχηματισμούς της $SU(3)$. Ακριβέστερα ο χώρος Hilbert του μοντέλου των κουάρκ αποτελείται καταστάσεις ενός, δύο, τριών κουάρκ/αντικουάρκ και συνδυασμών τους, γραμμικών και ¨τανυστικών¨. Ένας μετασχηματισμός, U, της $SU(3)$ δρά ως $|q_i' >= U_{ji}|q_j >$ στον υπόχωρο των καταστάσεων ενός κουάρκ, όπου U_{ij} πίνακας στην πρώτη θεμελιώδη αναπαράσταση και $q_1 = u, q_2 = d, q_3 = s$. Η αντίστοιχη δράση στον υπόχωρο των καταστάσεων δύο κουάρκ είναι $|q_i' > |q_j' >= U_{ki}U_{lj}|q_k > |q_l >$. Ακόμη η δράση στον χώρο των καταστάσεων ενός αντικουάρκ είναι η $|\bar{q}_i' >= U_{ji}^*|\bar{q}_j >$, όπου U^* ο μιγαδικός συζυγής του U που προκύπτει από τη δυική αναπαράσταση επειδή $(U^{-1})^\top = (U^\dagger)^\top = U^*$. Υπό τις παραπάνω υποθέσεις έχουμε λοιπόν ότι $[\mathcal{H}_{st}, U] = 0$ και $[\mathcal{H}_{st}, \lambda_a] = 0$, έτσι υπάρχουν 8 κβαντικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στους 8 γεννήτορες. Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε σε ποιά φυσικά μεγέθη αυτοί οι αριθμοί αντιστοιχούν.

Από τη δομή των $\lambda-$πινάκων βλέπουμε ότι οι $\frac{1}{2}\lambda_1, \frac{1}{2}\lambda_2, \frac{1}{2}\lambda_3$ είναι βάση μίας $\mathfrak{su}(2)$ υποάλγεβρας, την οποία αντιστοιχούμε στο ισοσπίν του Heisenberg θέτωντας $I_i := \frac{1}{2}\lambda_i$. Ακόμη μπορούμε να ορίσουμε ως υπερφορτίο το $Y := \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$. Καθώς $[Y, I_i] = 0,\ i = 1, 2, 3$, βλέπουμε ότι σχηματίζεται μία $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$ υποάλγεβρα εντός της $\mathfrak{su}(3)$, που αντιστοιχεί σε μία $SU(2) \otimes U(1)$ υποομάδα της $SU(3)$. Επειδή τα $\lambda_3,\ \lambda_8$ μετατίθενται κι επειδή η $\mathfrak{su}(3)$ έχει τάξη 2, θεωρούμε τα $\frac{1}{2}\lambda_3, \frac{1}{2}\lambda_8$ ως τη βάση της υποάλγεβρας Cartan .

Επειδή μας ενδιαφέρουν οι προαναφερθέντες κβαντικοί αριθμοί θα χρησιμοποιήσουμε διαγράμματα βάρους. Θεωρούμε ως $x-$άξονα τον χώρο που παράγεται από το δυικό αντίστοιχο του I_3 και ως $y-$άξονα εκείνον που παράγεται από το δυικό του Y, με κατάλληλη κανονικοποιήση των μηκών που απεικονίζονται. Για την πρώτη θεμελιώδη αναπαράσταση έχουμε ένα τριγωνικό διάγραμμα βάρους, ενώ για τη δεύτερη έχουμε το ίδιο ανεστραμένο τρίγωνο, όπως βλέπουμε και στο σχήμα 4.2, αφού τα βάρη των δύο αναπαραστάσεων είναι αντίθετα.

Θα βρούμε τώρα τις μη αναγωγήσιμες αναπραστάσεις που συναποτελούν το χώρο των καταστάσεων ζευγών κουάρκ-αντικουάρκ, δηλαδή των μεσονίων. Η δράση της $SU(3)$ είναι η ακόλουθη: $|q_i' > |\bar{q}_j' >= U_{li}U_{mj}^*|q_l > |\bar{q}_m >$. Μία αναλλοίωτη κατάσταση, που προκύπτει απλά παρατηρώντας την παραπάνω δράση, είναι η $|1 >:= \frac{1}{\sqrt{3}}|q_i > |\bar{q}_i >$ (με σύμβαση άθροισης). Για αυτήν ισχύει

(α′) Διάγραμμα βάρους της **3**. (β′) Διάγραμμα βάρους της $\bar{\mathbf{3}}$.

Σχήμα 4.3: Τα κουάρκ u, d, s και τα αντικουάρκ $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$.

ότι:

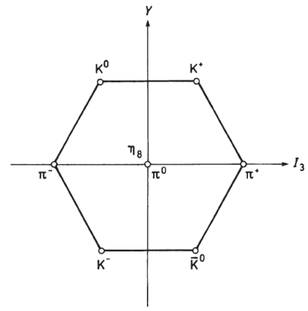
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3}}|q_i' > |\bar{q}_i' > &= U_{li}U^*_{mi}\frac{1}{\sqrt{3}}|q_l > |\bar{q}_m > \\
&= U_{li}(U^\dagger)_{im}\frac{1}{\sqrt{3}}|q_l > |\bar{q}_m > \\
&= \delta_{lm}\frac{1}{\sqrt{3}}|q_l > |\bar{q}_m > \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}|q_i > |\bar{q}_i > .
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα του Weyl ξέρουμε ότι ο υπόλοιπος χώρος Hilbert (το ορθογώνιο συμπλήρωμα του γραμμικού αναπτύγματος της $|1>$) θα είναι επίσης υποαναπαράσταση. Θα δούμε ότι είναι μη αναγωγήσιμη. Έστω $|C >= C_{i,j}|q_i > |\bar{q}_j >$ τυχαίο στοιχείο σε αυτό τον χώρο. Τότε θα ισχύει ότι $< 1|C >= 0$ ή ισοδύναμα ότι $\frac{1}{\sqrt{3}}C_{jk} < q_i|q_j >< \bar{q}_i|\bar{q}_k >= C_{ii} = 0$. Αν κάνουμε ένα μετασχηματισμό της $SU(3)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
|C' > &= C_{ij}U_{li}U^*_{mj}|q_l > |\bar{q}_m > \\
&= C_{ij}U_{li}(U^\dagger)_{jm}|q_l > |\bar{q}_m > \\
&= (UCU^\dagger)_{lm}|q_l > |\bar{q}_m > .
\end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι αυτή η δράση αντιστοιχεί στη συζυγή δράση της $SU(3)$, επομένως η αναπαράσταση της άλγεβρας $\mathfrak{su}(3)$ είναι η ad.[4] Έχουμε λοιπόν την ανάλυση της αναπαράστασης $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ σε μη αναγωγήσιμες ως εξής: $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$. Με βάση τις υποθέσεις αυτού του μοντέλου βλέπουμε ότι έχουμε ακριβή συμμετρία $SU(3)$-γεύσης, ότι όλα τα αδρόνια μπορούν να ταξινομηθούν με βάση τις μή αναγωγήσιμες αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{su}(3)$ αλλά και ότι όλα

[4]Για τη σχέση της συζυγούς δράσης της ομάδας και της άλγεβρας βλέπε [1] και [9].



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα βάρους της **8**.

τα σωματίδια μίας $\mathfrak{su}(3)$ πολλαπλέτας έχουν την ίδια μάζα (από το λήμμα του Schur αφού ο τελεστής της χαμιλτονιανής μετατίθεται με όλους τους τελεστές της $\mathfrak{su}(3)$ σε κάθε αναπαράσταση).

Από το παρακάτω διάγραμμα βάρους και επειδή οι κβαντικοί αριθμοί του υπερφορτίου και του σπίν είναι αθροιστικοί μπορούμε να βρούμε το περιεχόμενο των οκτώ ελαφρών μεσονίων σε κουάρκ. Ακόμη συμπληρώνεται και η singlet που αντιστοιχεί στο πιο βαρύ μεσόνιο η_1 ή η'.

$$\begin{aligned}
\pi^+ &\sim u\bar{d} \\
\pi^0 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\
\pi^- &\sim d\bar{u} \\
K^+ &\sim u\bar{s} \\
K^0 &\sim d\bar{s} \\
\bar{K}^0 &\sim s\bar{d} \\
K^- &\sim s\bar{u} \\
\eta_8 &\sim \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\
\eta_1 &\sim \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})
\end{aligned}$$

Στρέφωντας τώρα την προσοχή μας στα βαρυόνια, βλέπουμε ότι πρέπει να μελετήσουμε τον χώρο καταστάσεων τριών κουάρκ που είναι 27 διάστατος. Τα διανύσματα βάσης αυτού του χώρου είναι για $i, j, k = 1, 2, 3$ τα $|q_i > |q_j > |q_k >$. Με βάση τα όσα συζυτήθηκαν στην ενότητα 4.2 αυτή η αναπαράσταση αυτή αντιστοιχεί στην αναπαράσταση της $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ με μέγιστο βάρος $(3, 0)$. Επο-

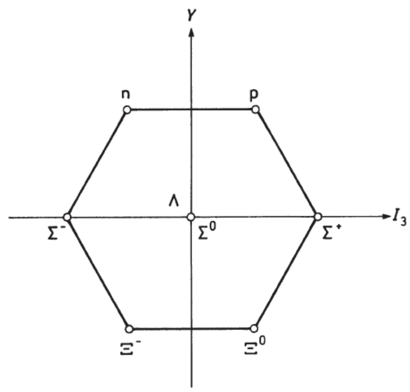
$\mathfrak{su}(3)$ αναπαράσταση	I	I_3	Ψ	σωματίδια
$\mathbf{1}$	0	0	0	η'
$\mathbf{8}$	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	1	K^+, K^0
$\mathbf{8}$	1	$1, 0, -1$	0	π^+, π^0, π^-
$\mathbf{8}$	0	0	0	η
$\mathbf{8}$	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	-1	$\bar{K}^0, K^-$

Πίνακας 4.1: Το ισοσπιν και το υπερφορτίο των μεσονίων στην αντίστοιχη αναπαράσταση

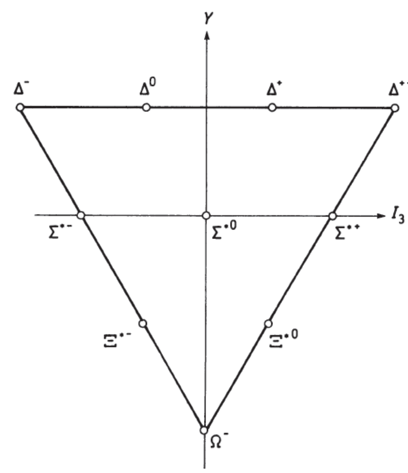
μένως μία μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση, που από το θεώρημα 4.2.2 αναμένεται να προκύψει, είναι αυτή με διάσταση $\frac{1}{2}(3+1)(0+1)(3+0+2) = 10$. Θα προχωρήσουμε όμως ταξινομώντας πρώτα τις καταστάσεις δύο κουάρκ $|q_i > |q_j >$. Λόγω της σχετικά χαμηλής διάστασης πολύ εύκολα μπορεί να δεί κανείς ότι δύο μή αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις προκύπτουν, ο χώρος των συμμετρικών τανυστών(κυματοσυναρτήσεων) και ο χώρος των αντισυμμετρικών τανυστών που παράγονται από τα $|q_i > |q_j > +|q_j > |q_i >$ και τα $\epsilon_{ijk}|q_i > |q_j >$ αντίστοιχα. Ο χώρος των συμμετρικών τανυστών αντιστοιχεί στην $\mathbf{6}$, ενώ ο χώρος των αντισυμμετρικών κυμματοσυναρτήσεων αντιστοιχεί στην $\bar{\mathbf{3}}$. Έχουμε λοιπόν την αναγωγή: $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$.

Προσθέτωντας και το τρίτο κουάρκ τώρα έχουμε: $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3} = (\bar{\mathbf{3}}\oplus\mathbf{6})\otimes\mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}}\otimes\mathbf{3}\oplus\mathbf{6}\otimes\mathbf{3}$. Για την $\bar{\mathbf{3}}\otimes\mathbf{3}$ γνωρίζουμε ήδη ότι ανάγεται ως εξής: $\bar{\mathbf{3}}\otimes\mathbf{3} = \mathbf{1}\oplus\mathbf{8}$, δηλαδή προκύπτει η συζυγής και μία μονοδιάστατη. Ως πρός το δεύτερο όρο, $\mathbf{6}\otimes\mathbf{3}$ μπορούμε αρχικά να δούμε πως σε αυτό τον χώρο θα βρίσκονται οι πλήρως συμμετρικές καταστάσεις οι οποίες είναι $\frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = 10$ τω πλήθος. Ακόμη, με χρήση των πινακιδίων Young, δηλαδή ακολουθώντας πιστά τον αλγόριθμο που παρουσιάζεται στο παράρτημα 2, βλέπουμε ότι η μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση, που προκύπτει από τον εναπομείναντα υπόχωρο του $\mathbf{6}\otimes\mathbf{3}$, είναι η συζυγής $\mathbf{8}$. Έτσι η αναγωγή που προκύπτει είναι η $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3} = \mathbf{10}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{1}$.

Από τα παραπάνω συνάγουμε ότι τα βαρυόνια σε αυτό το μοντέλο προκύπτουν είτε ως *singlets*, είτε ως οκτέτες(*octets*) είτε ως δεκαπλέτες (*decuplets*) της $\mathfrak{su}(3)$. Τα βαρυόνια που παρατηρούνται ενσωματώνονται σε αυτό το μοντέλο όπως φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα βάρους όπου απεικονίζονται τα ελαφρύτερα $\frac{1}{2}^+$ και $\frac{3}{2}^+$ βαρυόνια.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα βάρους της **8** με τα $\frac{1}{2}^+$-βαρυόνια.



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα βάρους της **10** με τα $\frac{3}{2}^+$-βαρυόνια.

Παράρτημα Α΄

Μιγαδοποίηση πραγματικών Lie αλγεβρών

Δεδομένης μίας πραγματικής Lie άλγεβρας L είναι χρήσιμο να θέλει να περάσει κανείς σε μία συσχετισμένη Lie άλγεβρα την $(L)_{\mathbb{C}} \equiv L_{\mathbb{C}}$ που ονομάζεται μιγαδοποίηση της L.

Ορισμός Α΄.0.1. *Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος.* ***Μιγαδοποίηση****, $V_{\mathbb{C}}$, του V είναι ο χώρος όλων των γραμμικών συνδυασμών της μορφής $v + iu$, όπου $v, u \in V$, αν ορίσουμε $i(v + iu) := -u + iv$.*

Προφανώς ο παραπάνω χώρος είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος με $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$. Ακόμη παρατηρούμε ότι ο V είναι ένας πραγματικός υπόχωρος του $V_{\mathbb{C}}$.

Πρόταση Α΄.0.1. *Έστω L πραγματική Lie άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και έστω $L_{\mathbb{C}}$ η μιγαδοποίησή της. Τότε ο μεταθέτης, "$[\cdot,\cdot]$", της L επεκτείνεται μοναδικά στον $[\![\cdot,\cdot]\!]$, ώστε $(L_{\mathbb{C}}, [\![\cdot,\cdot]\!])$ μιγαδική Lie άλγεβρα. Η $L_{\mathbb{C}}$ τότε λέγεται μιγαδοποιήση της L.*

Πρόταση Α΄.0.2. *Έστω $L \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ πραγματική Lie άλγεβρα και για κάθε μη μηδενικό $x \in L$, $ix \notin L$. Τότε η αφηρημένη μιγαδοποίηση της L που εισάγαμε προηγουμένως είναι ισόμορφη με το σύνολο των πινάκων της $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ που γράφονται στη μορφή $x + iy$ με $x, y \in L$.*

Με βάση τα παραπάνω έχουμε την παρακάτω αντιστοίχιση.

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \tag{Α$'$.1}$$

$$\mathfrak{u}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \tag{Α$'$.2}$$

$$\mathfrak{su}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \tag{Α$'$.3}$$

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \tag{Α$'$.4}$$

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \tag{Α$'$.5}$$

$$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) \tag{Α$'$.6}$$

Παράρτημα Β΄

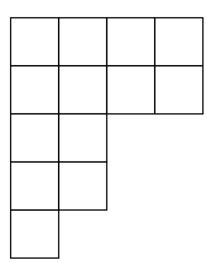
Πινακίδια **Young** και αναπαραστάσεις της $\mathfrak{su}(N)$

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζονται (χωρίς αποδείξεις) οι απαραίτητοι κανόνες για την κατασκευή μη αναγωγήσιμων αναπαραστάσεων των αλγεβρών $\mathfrak{su}(n)$ ($\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$). Στο τέλος του παραρτήματος δίνονται παραδείγματα από την $\mathfrak{su}(3)$ ($\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$) τα οποία χρησιμοποιούνται και για την περιγραφή των αδρονίων στο μοντέλο "the eightfold way".

1. Η μιγαδική πολλαπλέτα (multiplet) που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(N)$, με συντεταγμένες $\psi_i, i = 1, \ldots N$ αναπαρίσταται με ένα κουτί ως εξής:

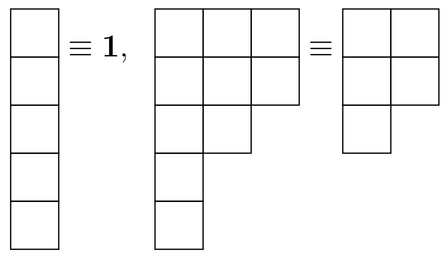
$$\psi_i \equiv \square \equiv \mathbf{N}$$

2. Ένα διάγραμμα Young είναι μία επιστίβαξη κουτιών όπως το παραπάνω, όπου άπο αριστερά προς τα δεξιά (και από πάνω προς τα κάτω) κάθε στήλη (αντίστοιχα γραμμή) έχει μεγαλύτερο ή ίσο αριθμό κουτιών από την επόμενη. Ένα παράδειγμα είναι το παρακάτω:



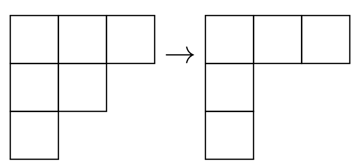
3. Καμία στήλη δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από N κουτιά.

4. Η στήλη με N κουτιά αντιστοιχεί στην τετριμμένη αναπαράσταση της άλγεβρας και αν αυτή προκύπτει σε κάποιο διάγραμμα με περισσότερες από μία στήλες τότε αυτή διαγράφεται. Για παράδειγμα στην $\mathfrak{su}(5)$ έχουμε:



5. Κάθε διάγραμμα Young που σέβεται τους παραπάνω κανόνες αντιστοιχεί σε μία μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(N)$ και αντιστρόφως.

6. Η μιγαδική συζυγής (δυική), $\bar{\mathbf{M}}$ μίας δεδομένης αναπαράστασης, $\mathbf{M}$, αναπαρίσταται από ένα διάγραμμα που προκύπτει από το διάγραμμα της $\mathbf{M}$, αν αντικαταστήσουμε οποιαδήποτε στήλη μήκους k με μια στήλη μήκους $N-k$. Παραδείγματος χάριν στην $\mathfrak{su}(4)$:



   Από τον παραπάνω κανόνα προκύπτει άμεσα ότι η θεμελιώδης αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(2)$ ταυτίζεται με τη μιγαδική συζυγή της, όπως και η συζυγής αναπαράσταση, $\mathbf{8}$, της $\mathfrak{su}(3)$ γεγονός που θα εξακριβωθεί παρακάτω. Ένα πιό γενικό συμπέρασμα που προκύπτει από αυτόν τον κανόνα είναι ότι για κάθε N η συζυγής αναπαράσταση της θεμελιώδους αντιστοιχίζεται σε μία στήλη με $N-1$ κουτιά.

7. Η διάσταση, d, μίας μη αναγωγήσιμης αναπαράστασης μπορεί να βρεθεί από το αντίστοιχο της διάγραμμα Young , σχηματίζοντας το εξής κλάσμα $d = \frac{p}{q}$, όπου

   - ο αριθμός p βρίσκεται ως το γινόμενο των αριθμών που προκύπτουν αν τοποθετήσουμε τον αριθμό N στην ¨κύρια διαγώνιο’ που ξεκινά από το πρώτο (πάνω αριστερά) κουτί, τον αριθμό $N+i$ στα κουτιά που βρίσκονται άνω της διαγωνίου και σε οριζόντια απόσταση i κουτιών από αυτήν, και τον αριθμό $N-i$ στα κουτιά που βρίσκονται κάτω της διαγωνίου και σε κάθετη απόσταση i κουτιών από αυτήν. Παραδείγματος χάριν:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline N-1 & N & N+1 & N+2 \\ \hline N-2 & N-1 & N & \\ \cline{1-3} \end{array} \Rightarrow p = N^3(N+1)^2(N+2)^2(N+3)(N-1)^2(N-2)$$

- ο αριθμός q προκύπτει από τα γινόμενα των αριθμών *hook* στα κουτάκια, οι οποίοι προκύπτουν ως εξής: σε κάθε κουτί του διαγράμματος τοποθετούμε τον αριθμό που προκύπτει ως το άθροισμα του αριθμού των κουτιών που βρίσκονται δεξιά του, του αριθμού των κουτιών που βρίσκονται από κάτω του συν ένα, δηλαδή σχηματίζουμε έναν ¨γάντζο' και μετράμε πόσα κουτιά καλύπτονται από αυτόν. Για παράδειγμα :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 2 & \\ \cline{1-2} 3 & 1 & \\ \cline{1-2} 1 & & \\ \cline{1-1} \end{array} \Rightarrow q = 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

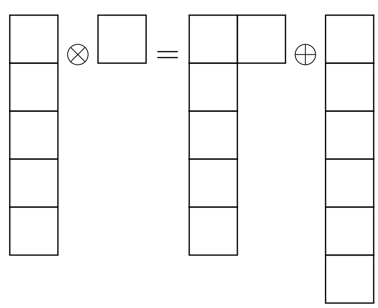
8. Κάθε μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(N)$ κατασκευάζεται από τη θεμελιώδη. Το ευθύ (τανυστικό) γινόμενο μη αναγωγήσιμων αναπαραστάσεων μπορεί να αναλυθεί σε ευθύ άθροισμα μη αναγωγήσιμων αναπαραστάσεων με βάση τους παρακάτω κανόνες:

   - Γράφουμε το ευθύ γινόμενο των διαγραμμάτων που αντιστοιχούν στις αρχικές δύο μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις. Σε κάθε κουτί της πρώτης γραμμής του δεύτερου διαγράμματος τοποθετούμε τον δείκτη a, στην δεύτερη τον δείκτη b και όμοια συνεχίζουμε μέχρι να συμπληρωθεί το διάγραμμα. Για παράδειγμα:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \cline{1-1} & \\ \cline{1-1} \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline b & b & \\ \cline{1-2} c & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

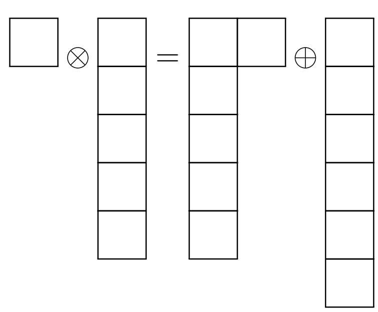
- Μετακινούμε ένα-ένα τα κουτάκια από το δεξί διάγραμμα στο αριστερό, ξεκινώντας από τα δεξιά και με τη σειρά $a, b, c, \ldots$ σχηματίζοντας ένα ευθύ άθροισμα από τόσα διαγράμματα Young όσα μπορούν να κατασκευαστούν από την παραπάνω διαδικασία. Το παραπάνω ευθύ άθροισμα πολλαπλασιάζεται τανυστικά με το εναπομένον διάγραμμα Young . Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτού του βήματος με περιορισμό κάθε γράμμα να εμφανίζεται σε μία στήλη μόνο μία φορά.
- Δύο ίδια διαγράμματα με διαφορετική κατανομή των δεικτών $a, b, \ldots$ παραμένουν ως έχουν στο ευθύ άθροισμα. Αν δύο ίδια διαγράμματα έχουν την ίδια κατανομή δεικτών, τότε μόνο ένα παραμένει στο ευθύ άθροισμα.
- Τέλος, κινούμενοι από δεξιά προς αριστερά πρέπει να συναντούμε τουλάχιστον τόσα a όσα και b, τόσα b όσα και c κ.ο.κ.

9. Η συζυγής αναπαράσταση είναι η μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση με διάσταση αυτήν της άλγεβρας $(N^2 - 1)$, ενώ προκύπτει ως το τανυστικό γινόμενο της θεμελιώδους με τη συζυγή της. Μπορούμε λοιπόν να δούμε εύκολα ότι $\mathbf{N} \otimes \bar{\mathbf{N}} \cong \bar{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{N}$. Για παράδειγμα στην $\mathfrak{su}(6)$:



$= (\mathbf{5}^2 - \mathbf{1}) \oplus \mathbf{1}$

και



$= (\mathbf{5}^2 - \mathbf{1}) \oplus \mathbf{1}$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να παρουσιάσουμε τρία σημαντικά παραδείγματα που αφορούν σε αναπαραστάσεις της $\mathfrak{su}(3)$ και είναι εξαιρετικής σημασίας για το eightfold way.

$$\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \ydiagram{1,1} \otimes \ydiagram{1} = \ydiagram{1,1,1} \oplus \ydiagram{2,1} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} = \ydiagram{1,1} \oplus \ydiagram{2} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = (\bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}) \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} \oplus \mathbf{6} \otimes \mathbf{3} =$$

$$\ydiagram{1,1} \otimes \ydiagram{1} \oplus \ydiagram{2} \otimes \ydiagram{1} =$$

$$\ydiagram{1,1,1} \oplus \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{3} =$$

$$\mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$$

Βιβλιογραφία

[1] Αρβανιτογεώργος Ανδρέας, *Γεωμετρία Πολλαπλοτήτων. Πολλαπλότητες Riemann και ομάδες Lie* , Αθήνα 2015,
http://hdl.handle.net/11419/146

[2] Ferrera Giancarlo, Introduction to Young Tableau, Dipartimento di Fisica, Universita di Milano,
pcteserver.mi.infin.it/∼ferrera/

[3] Fulton William, Harris Joe, *Representation theory. A First Course*, Readings in Mathematics, v. 129, New York 2004.

[4] Georgi Howard, *Lie Algebras In Particle Physics: From Isospin To Unified Theories*, Frontiers in Physics, Book 54, Westview 1999.

[5] Hall Brian C., *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, v. 222, Switzerland 2015.

[6] Humphreys James, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, v. 9, New York 1972.

[7] Kac Viktor, MIT MATHEMATICS, Introduction to Lie Algebras (Fall 2010),
math.mit.edu/classes/18.745/index.html

[8] de Kerf E.A., Bäuerle G.G.A., *Lie Algebras, Part 1: Finite and Infinte Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics*, Studies in Mathematical Physics, North Holland 1990.

[9] Lee John M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, v. 218, New York 2003

[10] Nachtmann Otto, *Elementary Particle Physics: Concepts and Phenomena*, Theoretical and Mathematical Physics, Berlin 1990.

[11] Sattinger D.H., Weaver O.L., *Ομάδες και Άλγεβρες Lie με εφαρμογές στη Φυσική, Γεωμετρία και Μηχανική*, Αθήνα 1992.

[12] Weber Brian, Math 650: Algebras, University of Pennsylvania, Fall 2012,
https://www.math.upenn.edu/∼brweber/Courses/2012/Math650/Math650.html