ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗ»

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΚΥΛΙΝΔΡΩΝ ΣΕ ΚΑΝΑΛΙ

ΒΟΥΡΛΑΚΟΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

Αριθμός Μητρώου: 08115802

(mar08010@marine.aegean.gr)

Επιβλέπων: Ι. Κ. Χατζηγεωργίου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΦΟΙΤΗΤΗ

Αντώνιου Βουρλάκου

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΚΥΛΙΝΔΡΩΝ ΣΕ ΚΑΝΑΛΙ

Τριμελής Επιτροπή Επίβλεψης και Κρίσης της Εργασίας **Υπογραφές**

Ιωάννης Κ. Χατζηγεωργίου

Καθηγητής Ε.Μ.Π (Επιβλέπων)

Σπυρίδων Α. Μαυράκος

Καθηγητής Ε..Μ.Π

Κώστας Μπελιμπασάκης

Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π

Πίνακας περιεχομένων

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα Καθηγητή κύριο Ι.Χατζηγεωργίου, Καθηγητή της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π, για τη καθοδήγηση του, τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις που συντέλεσαν για τη διεκπεραίωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Περίληψη

Στη παρούσα εργασία μελετήθηκε το υδροδυναμικό πρόβλημα περίθλασης πρώτης τάξης για ελλειπτικούς κυλίνδρους σε κανάλι, που υπόκεινται στη δράση μονοχρωματικών κυματισμών και εδράζονται στον θαλάσσιο πυθμένα. Μέσω της επίλυσης της εξίσωσης Laplace σε ελλειπτικές συντεταγμένες εξήχθησαν τα δυναμικά ταχυτήτων που αφορούσαν την πρόσπτωση και περίθλαση των κυματισμών για τα ελλειπτικά σώματα, τα οποία αναπαραστάθηκαν από τις σειρές άρτιων και περιττών όρων των περιοδικών και ακτινικών συναρτήσεων Mathieu. Από τις προαναφερόμενες σειρές επιτεύχθηκε η εξαγωγή των υδροδυναμικών φορτίσεων και ροπών που ασκήθηκαν πάνω στους ελλειπτικούς κυλίνδρους. Η εύρεση των υδροδυναμικών φορτίσεων και ροπών πραγματοποιήθηκε για διαφορετικές αποστάσεις και γωνίες τοποθέτησης των ελλειπτικών κυλίνδρων. Δύο διατάξεις διερευνήθηκαν και αφορούσαν ένα ελλειπτικό κύλινδρο σε κανάλι για διαφορετικές θέσεις και γωνίες τοποθέτησης του κυλίνδρου, ενώ η δεύτερη διάταξη εμπεριείχε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους σε διαφορετικές αποστάσεις και γωνίες τοποθέτησης τους με σκοπό την καταγραφή των φαινομένων αλληλεπίδρασης σωμάτων-κύματος. Λόγω της γεωμετρίας των σωμάτων εφαρμόστηκε το προσθετικό θεώρημα για τις συναρτήσεις Mathieu σε όρους άρτιων και περιττών περιοδικών και ακτινικών εξισώσεων Mathieu. Η εξαγωγή των αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκε σε κώδικα προγραμματιστικού περιβάλλοντος Fortran που έχει αναπτυχθεί στον Τομέα Θαλάσσιων Κατασκευών από την Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π, με την δυνατότητα να υπολογίζει το γραμμικό υδροδυναμικό πρόβλημα περίθλασης για κυλινδρικά σώματα ελλειπτικής αλλά και κυκλικής διατομής.

Abstract

In the present thesis the first order hydrodynamic diffraction problem was studied for elliptical cylinders in channel, which subjected to the action of monochromatic waves and fixed on the bottom. By solving the Laplace equation in elliptic coordinates the velocity potentials involved the incident and diffraction of waves for elliptical bodies were exported and represented from the series of even and odd periodic and radial Mathieu functions. From this series, the hydrodynamic loads and moments exerted on the elliptical cylinders were obtained. The finding of hydrodynamic loads and moments was performed for different distances and positioning angles of elliptical cylinders. Two arrangements were investigated and concerned different positions and angles for one elliptical cylinder in channel, while the second arrangement contained two identical elliptical cylinders at different distances and positioning angles for the purpose of recording the wave-bodies interaction phenomena. Because of the elliptical cylinders geometry the additional theorem for Mathieu functions was applied in terms of even and odd periodic and radial Mathieu functions. The results were extracted in Fortran programming environment code developed by the Marine Construction Sector from the Department of Naval Architecture and Marine Engineering of N.T.U.A, with the ability to calculate the linear hydrodynamic diffraction problem for cylindrical bodies of elliptical but also circular cross section.

1. Εισαγωγή

Οι δυνάμεις διέγερσης που προκαλούνται, λόγω της πρόσπτωσης των θαλάσσιων κυματισμών αποτελούν την βασικότερη παράμετρο που πρέπει να ληφθεί υπόψη για την ασφαλή λειτουργία των θαλάσσιων κατασκευών, όπως είναι οι κυματοθραύστες, οι συσκευές ανάκτησης κυματικής ενέργειας και υπεράκτιες πλατφόρμες (Hirdaris et al., 2014). Η αποτελεσματική βελτιστοποίηση των κυματικών φορτίων σε μια κατασκευή στοχεύει στην μείωση του κόστους των υπεράκτιων κατασκευών (Ning et al., 2016), ενώ η ποσοτικοποίηση της υδροδυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών που απαρτίζουν μια συστοιχία κυλινδρικών κατασκευών αποτελεί σημαντικό θέμα στην μηχανική των ωκεανών. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές μπορεί να οδηγήσουν σε διαφορετικές υδροδυναμικές φορτίσεις και αναρριχήσεις του κυματισμού (wave run up) επάνω σε μια κατασκευή, από ότι θα λάμβαναν χωρίς την παρουσία τους για αυτό καθίσταται σημαντική η εξέταση των φαινομένων αλληλεπίδρασης (Williams & Li, 2000).

Το υδροδυναμικό πρόβλημα περίθλασης για κυλινδρικά σώματα που δεν έχουν κυκλική διατομή αντιμετωπίζονται κυρίως από αριθμητικά μοντέλα, τα οποία συνήθως εφαρμόζουν την μέθοδο των πλεγμάτων. Το βασικό μειονέκτημα της συγκεκριμένης μεθόδου εμφανίζεται στην απαίτηση αρκετού υπολογιστικού χρόνου, λόγω της βασικής προϋπόθεσης για ισχυρή πύκνωση του πλέγματος γύρω από το σώμα, με σκοπό την απαιτούμενη ακρίβεια που οδηγεί τις διαδικασίες σύγκλισης να απαιτούν αρκετό χρόνο. Ως εναλλακτική διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση της απαιτούμενης λύσης μέσω αναλυτικών μεθόδων στις περιπτώσεις όπου είναι εφικτό, το οποίο οδηγεί σε πιο ισχυρές, ακριβείς και ταχύτερες μεθοδολογίες επίλυσης. Η επίτευξη αυτής της μεθόδου παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες. Στο παρελθόν αρκετοί ερευνητές υιοθέτησαν την ημι-αναλυτική μέθοδο ως εργαλείο για την επίλυση του υδροδυναμικού προβλήματος αλληλεπίδρασης μεταξύ πολλών σωμάτων κυρίως για συστοιχία κατακόρυφων κυλίνδρων.

Συγκεκριμένα οι Kagemoto & Yue (1986) διερεύνησαν το υδροδυναμικό πρόβλημα αλληλεπίδρασης μεταξύ κατακόρυφων περιστρεφόμενων αξονοσυμμετρικών σωμάτων, αναπτύσσοντας μια αλγεβρική λύση με σχετική ακρίβεια και παράλληλα στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας μέσω μορφής πίνακα, οποίος συνδύασε την λύση των στοιχείων της μεθόδου που είχε αναπτυχθεί από τους Spring(1974) και Okhusu (1974), εξήγαν τις κυματικές δυνάμεις διεγέρσεις, υδροδυναμικές παραμέτρους και τις μέσες δυνάμεις σύρσης σε πλατφόρμες με τεταμένους τένοντες (Tension Leg Platforms) χρησιμοποιώντας τα υδροδυναμικά χαρακτηριστικά μόνο του ενός σώματος. Επιπλέον απέδωσαν την επίδραση του κυματικού συστήματος για ένα σώμα σε όρους σε σχέση με την επίδραση που είχαν όλα τα σώματα και διαμόρφωσαν ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων γρήγορης επίλυσης για όλα τα άγνωστα πλάτη των κυμάτων. Οι Mavrakos & Koumoutsakos (1987) επέκτειναν την διατύπωση της πολλαπλής σκέδασης στη λύση του προβλήματος περίθλασης γύρω από τους σχηματισμούς πολλών σωμάτων, που αποτελούνταν από ένα μη καθορισμένο/αυθαίρετο αριθμό κατακόρυφων περιστροφικών σωμάτων, οποιαδήποτε γεωμετρικής διάταξης αλλά και της γεωμετρίας του κάθε σώματος ξεχωριστά και εξήγαν με ακρίβεια μέσω της αναπαράστασης σειρών για τα δυναμικά ταχύτητας, συμπεριλαμβανομένων και των παροδικών κυματισμών, δηλαδή αυτών που τείνουν να εξαφανιστούν. Στη διεθνής επιστημονική βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί και διαφορετικοί μέθοδοι που έχουν χρησιμοποιηθεί και χρησιμοποιούνται για την επίλυση του υδροδυναμικού προβλήματος αλληλεπίδρασης μεταξύ πολλαπλών σωμάτων (Linton & Mclver, 2001;Newman, 2001; McIver,2002).

Η εφαρμογή ημι-αναλυτικών μεθόδων σε ελλειπτικούς κυλίνδρους εμπεριέχει αρκετές δυσκολίες, λόγω της πολύπλοκης γεωμετρίας τους. Οι προσπίπτοντες και περιθλασόμενοι κυματισμοί θα πρέπει να εκφραστούν με βάσει το ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων, ενώ από μαθηματικής άποψης θα πρέπει να αναπαρασταθούν από την ανάπτυξη σειρών των εξισώσεων Mathieu. Η ανάπτυξη σειρών από τις εξισώσεις Mathieu χρησιμοποιείται για σώματα που διακρίνονται από ελλειπτικές διατομές και εφαρμόζεται κυρίως στα πεδία του ηλεκτρομαγνητισμού (Sebak,1994; Nigsch,2007) και της οπτικής (Mao & Wu, 2008). Για το πρόβλημα της υδροδυναμικής περίθλασης σε ελλειπτικούς κυλίνδρους και ειδικά στην αναλυτική προσέγγιση του προβλήματος της περίθλασης των κυματισμών, σχεδόν σε όλες τις

παλαιότερες έρευνες η εστίαση γινόταν κυρίως σε μεμονωμένα σώματα και όχι σε διατάξεις συστοιχιών πολλών ελλειπτικών σωμάτων (Williams,1985a, 1985b;Williams & Darwiche, 1988, 1990; Zhang & Williams, 1990, 1996). Αντίθετα οι Chatjigeorgiou και Mavrakos (2009, 2010 a) χρησιμοποίησαν διάταξη μόνο από ελλειπτικούς κυλίνδρους με σκοπό την παραγωγή μιας αναλυτικής λύσης για το υδροδυναμικό πρόβλημα περίθλασης στις τρεις διαστάσεις. Η επίτευξη της συγκεκριμένης επίλυσης βασίστηκε στην ημι-αναλυτική διατύπωση των δυναμικών ταχύτητας σε ελλειπτικές συντεταγμένες και στην χρησιμοποίηση του προσθετικού θεωρήματος για τις συναρτήσεις Mathieu μετασχηματίζοντας τους ορισμένους όρους των συντεταγμένων ενός τοπικού ελλειπτικού συστήματος συντεταγμένων σε ένα αντίστοιχο παγκόσμιο ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων. Για τον λόγο αυτό επέκτειναν το προσθετικό θεώρημα που είχε αναπτυχθεί από τον Særmark (1959), με σκοπό την έκφραση του σε όρους των άρτιων και περιττών περιοδικών και ακτινικών συναρτήσεων Mathieu. Στη παρούσα εργασία για την διατύπωση της εξίσωσης Laplace που έχει ισχύ σε όλο το πεδίο ροής και πραγματοποιήθηκε η ανάλυση που αναφέρεται σε ιδανικό ρευστό, ασυμπίεστη και αστρόβιλη ροή, ενώ χρησιμοποιήθηκαν οι αναπαραστάσεις των σειρών για τις ακτινικές και περιοδικές συναρτήσεις Mathieu, λόγω του ελλειπτικού συστήματος συντεταγμένων. Οι συναρτήσεις Mathieu επειδή δεν χρησιμοποιούνται όσο οι συναρτήσεις Bessel για τη περίπτωση σωμάτων ελλειπτικής διατομής, έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη διαφοροποιήσεων στη επιστημονική βιβλιογραφία ως προς την παρουσίαση τους. Για να γίνει πιο κατανοητό υπάρχουν αρκετές αναφορές των συναρτήσεων Mathieu ως περιοδικές και ακτινικές συναρτήσεις Mathieu (Nigsch,2007;Meixner& Schäfke,1954; Særmark,1959) καθώς και ως άρτιες και περιττές περιοδικές και ακτινικές συναρτήσεις Mathieu (Moon& Spencer, 1971;McLachlan, 1947; Abramowitz & Stegun, 1970). Παρόλο των διαφορετικών αναφορών που περιγράφτηκε παραπάνω στην ονομασία των συναρτήσεων Mathieu η επικρατούσα ονομασία βασίζεται στην χρήση των όρων άρτιων και περιττών περιοδικών και ακτινικών συναρτήσεων Mathieu.

1.1. Περιγραφή Συνθηκών Περιβάλλοντος

Η αξιόπιστη σχεδίαση μιας θαλάσσιας εγκατάστασης, προϋποθέτει την γνώση των συνθηκών του περιβάλλοντος, στο οποίο πρόκειται να πραγματοποιηθεί η εγκατάσταση και η λειτουργία της εκάστοτε θαλάσσιας κατασκευής. Οι κύριοι παράγοντες που ασκούν φορτίσεις και επιδρούν άμεσα ή έμμεσα στη λειτουργικότητα μιας θαλάσσιας εγκατάστασης είναι οι εξής:

- άνεμος
- κύματα
- ρεύματα
- εδαφικές συνθήκες
- παλίρροιες
- πάγος
- χιόνι (στις περιπτώσεις που εμφανίζεται)
- σεισμικότητα της περιοχής εγκατάστασης (π.χ. η περιοχή του Πρίνου)

Οι χρονικές μεταβολές που παρουσιάζουν οι παραπάνω περιβαλλοντικοί παράγοντες συνήθως είναι μεγάλες και είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη στα πλαίσια της διαδικασίας σχεδίασης, καθώς απαιτούνται και στοιχεία για την κατάσταση λειτουργίας (operational condition) αλλά και για τις ακραίες καταστάσεις φόρτισης στη διάρκεια ζωή της κατασκευής (survival condition). Για τη πρώτη περίπτωση η εξαγωγή των στοιχείων επιτυγχάνεται μέσω μακροχρόνιων κατανομών των περιβαλλοντικών συνθηκών, οι οποίες εκτιμούν το ποσοστό του χρόνου στη διάρκεια του οποίου παρατηρείται υπέρβαση μιας καθορισμένης θαλάσσιας κατάστασης, η οποία έχει ως συνέπεια οι προκαλούμενες αποκρίσεις (κινήσεις, κλπ) να περιορίζουν τον χρόνο εκμετάλλευσης της κατασκευής. Στη δεύτερη περίπτωση, η εξαγωγή των ακραίων καταστάσεων πραγματοποιείται μέσω μακροχρόνιων κατανομών των θαλάσσιων κυματισμών, του ανέμου και των ρευμάτων με σκοπό τον προσδιορισμό των καταστάσεων θύελλας με περίοδο επανεμφάνισης (recurrence period) 50 ή 100 χρόνων.

1.2. Φορτίσεις Θαλάσσιων Κατασκευών

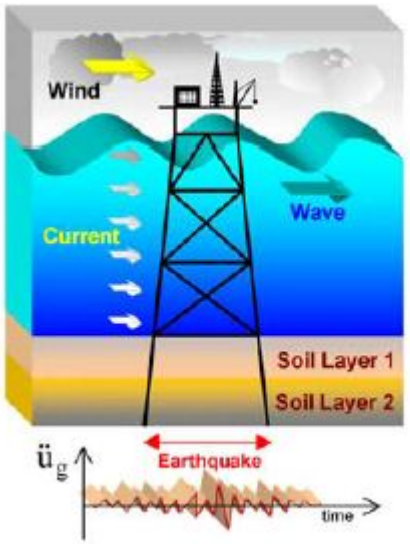
Εκτός από τις συνθήκες περιβάλλοντος που επικρατούν στη περιοχή εγκατάστασης και λειτουργίας μιας θαλάσσιας κατασκευής, σημαντική παράμετρος στη διαδικασία σχεδίασής της αποτελεί η εκτίμηση των φορτίων που ασκούνται πάνω της. Τα φορτία αυτά βάσει την προέλευση τους διακρίνονται σε δύο κύριες κατηγορίες:

(α) λειτουργικά φορτία (functional loads)

(β) φορτία λόγω της δράσης του περιβάλλοντος (environmental loads)

Στη κατηγορία των λειτουργικών φορτίων εντάσσονται τα φορτία που εμφανίζονται μόνο με την ύπαρξη της κατασκευής (βάρος εξοπλισμού, ίδιο βάρος, κλπ), καθώς και εκείνα που επάγονται επάνω της κατά την διάρκεια της λειτουργίας της, την εκπλήρωση της συγκεκριμένης αποστολής της (στατικά η δυναμικά φορτία κατά τη διάρκεια εκτέλεσης εργασιών ή της εξόρυξης πετρελαίου), ακόμα και φορτία που μπορούν να θεωρηθούν αντιδράσεις στη δράση των λειτουργικών φορτίων (π.χ. δύναμη άντωσης).

Η δεύτερη κατηγορία φορτίων, προκαλούνται λόγω της άμεσης (άνεμος, ρεύματα, κύματα, σεισμοί) ή της έμμεσης δράσης (δύναμη που αναπτύσσεται στα καλώδια της αγκύρωσης και από αυτά στην κατασκευή, δυνάμεις λόγω των κινήσεων της κατασκευής, φορτία στη θεμελίωση λόγω μεταβολής εδαφομηχανικών χαρακτηριστικών του πυθμένα, φορτία λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών, κ.α.) των συνθηκών του περιβάλλοντος στην κατασκευή. Η μελέτη των παραγόμενων φορτίων, λόγω της δράσης του περιβάλλοντος επάνω στην κατασκευή και συγκεκριμένα της άμεσης δράσης (άνεμος, ρεύματα, κύματα) αποτελούν το σημαντικότερο τμήμα της διαστατοποίησης μιας κατασκευής στο θαλάσσιο περιβάλλον.



Εικόνα 1.1 Φορτία σε θαλάσσια κατασκευή λόγω της άμεσης δράσης των περιβαλλοντικών συνθηκών.

1.2.1. Φορτία από άνεμο

Ο υπολογισμός των φορτίων λόγω της δράσης του ανέμου αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της διαδικασίας σχεδίασης, ειδικά όταν πρόκειται για διαστατοποίηση γραμμών ή συστημάτων αγκύρωσης ή ακόμα επί μέρους κατασκευαστικών στοιχείων της υπό εξέτασης εγκατάστασης. Για τη περίπτωση πλωτών ναυπηγημάτων (πλωτές θαλάσσιες κατασκευές, πλοία, κλπ), οι μολοβραχίονες επαναφοράς πρέπει να ελεγχθούν ως προς την επάρκεια τους σε σχέση με τις ροπές ανατροπής που δημιουργούνται από τον άνεμο. Για το σκοπό αυτό, ο υπολογισμός πραγματοποιείται με βάσει τις ακραίες τιμές της μέσης

ταχύτητας V, του αέρα (στατική θεώρηση), όπως αυτές καθορίζονται από τους διάφορους νηογνώμονες. Το μέσο στατικό φορτίο δίνεται από την εξής σχέση:

$$\boldsymbol{F = 0.5\, \rho\, V^2 C_D\, A} \qquad (\mathbf{1.1})$$

Όπου,

- ρ, η πυκνότητα του αέρα,
- V, μέση ταχύτητα του αέρα,
- C_D, ο συντελεστής αντίστασης,
- A, η προβεβλημένη επιφάνεια.

Εκτός των στατικών φορτίων ορισμένα είδη κατασκευών, όπως για παράδειγμα οι αγκυρωμένες πλωτές ημιβυθιζόμενες (semi-submersibles) και οι Tension Leg Platforms, είναι ευαίσθητες σε δυναμικά φορτία από τον άνεμο. Οπότε για τον αξιόπιστο προσδιορισμό της οριζόντιας μετατόπισης τους εκτός από τα φορτία από τα κύματα που αποτελούν τον κύριο παράγοντα φόρτισης, είναι απαραίτητη η γνώση του φάσματος του ανέμου στη περιοχή της εγκατάστασης καθώς και η υδροδυναμική απόσβεση, που αποτελεί έναν από τους κυριότερους παράγοντες δημιουργίας ανακριβειών στον προσδιορισμό του επαγόμενου πλάτους κίνησης.

1.2.2. Φορτία από θαλάσσιους κυματισμούς

Η κυριότερη κατηγορία φορτίων που επάγονται επάνω στην κατασκευή από τη άμεση δράση των στοιχείων του περιβάλλοντος (environmental loads) προκαλείται από τους θαλάσσιους κυματισμούς. Ο αξιόπιστος προσδιορισμός τους καθώς και η εύρεση της δυναμικής συμπεριφοράς της κατασκευής, θεωρούμενης ως ένα άκαμπτο σώμα αποτελούν το αντικείμενο της υδροδυναμικής ανάλυσης των πλωτών ή σταθερών θαλάσσιων εγκαταστάσεων. Το κυριότερο πρόβλημα όμως στη συγκεκριμένη κατάσταση αποτελεί η ποικιλία των γεωμετρικών μορφών, διαστάσεων και συνθηκών της περιοχής εγκατάστασης των κατασκευών που δεν επιτρέπουν μια ενιαία μεθοδολογική θεώρηση τους για την υδροδυναμική ανάλυση. Η σωστή εκτίμηση και ο υπολογισμός των φορτίων με το μικρότερο σφάλμα απόκλισης σε μια κατασκευή από το θαλάσσιο περιβάλλον εγκατάστασης και λειτουργίας ειδικά σε περίπτωση δυσμενών περιβαλλοντικών συνθηκών αποτελεί μείζον σημασίας πρόβλημα, όπως για παράδειγμα στη περιοχή της Βόρειας Θάλασσας, όπου στο 60% του χρόνου ζωής μιας θαλάσσιας εγκατάστασης, το σημαντικό ύψος κύματος (1/3 των υψηλότερων κυματισμών) υπερβαίνει τα 2m και η πιθανότερη τιμή του ύψους κύματος 100 χρόνων ανέρχεται σε 40 μέτρα. Τα φορτία που ασκούνται σε μια κατασκευή παρουσία θαλάσσιων κυματισμών οφείλονται σε:

(α) φαινόμενα αντίστασης (drag), λόγω αποκόλληση της ροής,

(β) αδρανειακά φαινόμενα (inertia), λόγω μεταβολής της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού που είναι συνυφασμένη με την επιτάχυνση της ροής,

(γ) φαινόμενα περίθλασης (diffraction) οφείλονται σε παραμόρφωση του πεδίου ροής, λόγω της παρουσίας του σώματος.

1.3. Προσδιορισμός παραγόντων που επιδρούν στο μηχανισμό δημιουργίας των δυνάμεων

Οι θαλάσσιες κατασκευές λόγω των περιβαλλοντικών συνθηκών της περιοχής εγκατάστασης και λειτουργίας της υπόκεινται σε ένα πλήθος υδροδυναμικών φορτίσεων, με κυριότερων αυτών τους θαλάσσιους κυματισμούς. Οι δυνάμεις που παράγονται λόγω των συγκεκριμένων συνθηκών προκαλούνται από διάφορους μηχανισμούς και διακρίνονται στους εξής τύπους:

- **Δυνάμεις Froude-Krylof:**

Αποτελούν τις δυνάμεις που ασκούνται στο νοητό περίγραμμα της κατασκευής από τους θαλάσσιους κυματισμούς, οι οποίες προσδιορίζονται μέσω της βασικής παραδοχής ότι η παρουσία του σώματος δεν παραμορφώνει το πεδίο ροής, δηλαδή το σώμα είναι σαν να μην υπάρχει. Ο υπολογισμός των δυνάμεων αυτών πραγματοποιείται, μέσω της απευθείας ολοκλήρωσης της πίεσης του πεδίου ροής του απλού αρμονικού κυματισμού στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος.

- **Δυνάμεις Περίθλασης (Diffraction Forces):**

Με την επιλογή της παρουσίας του σώματος και την παραμόρφωση (diffraction) που υφίσταται το πεδίο ροής λόγω αυτής και θεωρώντας το σώμα ακίνητο, τότε θα πρέπει στο δυναμικό της ροής του απλού αρμονικού κυματισμού να προστεθεί και ένα επιπλέον δυναμικό που οφείλεται ακριβώς στην παραμόρφωση, και ονομάζεται δυναμικό περίθλασης (diffraction). Οι δυνάμεις που βρίσκονται από το άθροισμα των δύο δυναμικών ονομάζονται δυνάμεις περίθλασης (diffraction forces).

- **Δυνάμεις Ακτινοβολίας (Radiation Forces):**

Με την πρόσθετη θεώρηση ότι η κατασκευή κινείται, συνεπάγεται η δημιουργία κυματισμών και κατ΄επέκταση ένα δυναμικό ροής που με τη σειρά του επάγει στο σώμα δυνάμεις. Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας το δυναμικό αυτό προστίθεται στα δύο προηγούμενα.

- **Δυνάμεις αντίδρασης:**

Οφείλονται στη συνεκτικότητα του πεδίου ροής και είναι ανάλογες με το τετράγωνο της ταχύτητας

- **Άλλες δυνάμεις:**

Όλες οι προηγούμενες περιπτώσεις δυνάμεων θεωρούν την ύπαρξη απλού αρμονικού κυματισμού. Στην πραγματικότητα όμως, οι θαλάσσιοι κυματισμοί είναι μη γραμμικά φαινόμενα και άρα και οι δυνάμεις που εμφανίζονται είναι μη γραμμικές. Υποδιαιρώντας τες, προκύπτουν οι δυνάμεις 1ης τάξης, σαν λύση του γραμμικού προβλήματος, 2ης και ανώτερης τάξης όταν λαμβάνονται υπόψη οι μη γραμμικοί όροι του προβλήματος.

Επειδή δεν μπορεί να υιοθετηθεί μια ενιαία υδροδυναμική ανάλυση, για τους λόγους που έχουν αναφερθεί παραπάνω, θα πρέπει να πραγματοποιηθεί μια υποδιαίρεση των κατασκευών σε κατηγορίες, ώστε να ακολουθηθεί μια ενιαία αντιμετώπιση για κάθε μια από αυτές. Η κατάταξή τους μπορεί να γίνει με κριτήριο το μέγεθος της κατασκευής σε σχέση με τα κυματικά χαρακτηριστικά. Στα πλαίσια της διαστατικής ανάλυσης, για τον προσδιορισμό των δυνάμεων, θεωρούμε κατακόρυφο, εδραζόμενο στον πυθμένα κύλινδρο. Με την υπόθεση της πρόσπτωσης αρμονικού κυματισμού σε κύλινδρο η δύναμη που ασκείται πάνω σε αυτόν εκφράζεται με μια συναρτησιακή σχέση που λαμβάνει υπόψη τα χαρακτηριστικά του αρμονικού κύματος και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κυλίνδρου, αλλά και τα αδρανειακά φαινόμενα καθώς και τα φαινόμενα τριβής και βαρύτητας.

Η συναρτησιακή σχέση που δίνει τη δύναμη που ασκείται σε κυλινδρικό σώμα:

$$\boldsymbol{F = f\,(D, d, \rho, g, H, \lambda, \mu)} \tag{1.2}$$

όπου D η διάμετρος του κυλίνδρου, d το βάθος νερού, ρ η πυκνότητα του νερού, gη επιτάχυνση της βαρύτητας, H το ύψος κύματος, λ το μήκος κύματος και μ η δυναμική συνεκτικότητα του ρευστού.

Με τη χρήση του θεωρήματος π της μηχανικής ομοιότητας η εξίσωση (1.2) εκφράζεται ως:

$$\boldsymbol{\frac{F}{\rho g \pi\, H(D^2/8)} = f\left(\frac{2\pi D}{\lambda}, \frac{d}{D}, \frac{H}{D}, \frac{\mu}{\rho\sqrt{gD^3}}\right)} \tag{1.3}$$

Επειδή $\nu=\mu/\rho$, όπου νη κινηματική συνεκτικότητα ο τρίτος όρος στο δεξιό μέλος της (1.3) θα μας δώσει τον λόγο του αριθμού *Froude*με τον αριθμό *Reynolds*:

$$\boldsymbol{\frac{\mu}{\rho\sqrt{gD^3}} = \frac{\nu}{\sqrt{gD^3}} = \frac{Fr}{Re}} \tag{1.4}$$

Ο αριθμός Froude προσδιορίζεται ως:

$$\boldsymbol{Fr = \frac{Αδρανειακές Δυνάμεις}{Δυνάμεις\ Βαρύτητας} = \frac{c}{\sqrt{gD}}} \tag{1.5}$$

Ο αριθμός Reynolds προσδιορίζεται ως*:*

$$\boldsymbol{Re = \frac{Αδρανειακές Δυνάμεις}{Δυνάμεις\ Τριβής} = \frac{cD}{\nu}} \tag{1.6}$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις (1.5) και (1.6) έχουμε:

$$\boldsymbol{\frac{Fr}{Re} = \frac{Δυνάμεις\ Τριβής}{Δυνάμεις Βαρύτητας} = \frac{\nu}{\sqrt{gD^3}}} \tag{1.7}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της ταχύτητας μετατόπισης c του απλού αρμονικού κύματος στην εξίσωση (1.5):

$$\boldsymbol{c = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh\,(kd)}} \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{Fr = \left[\frac{\sqrt{\frac{g}{k}\tanh\,(kd)}}{D\,g}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{kD}}\sqrt{\tanh(kd)}} \tag{1.9}$$

Για νερό απείρου βάθους, όπου $\tan h(kd) = 1$, ο αριθμός Froude είναι:

$$\boldsymbol{Fr = \frac{1}{\sqrt{kD}}} \tag{1.10}$$

Για ρηχό νερό, όπου $\tan h(kd) = kd$, ο αριθμός Froude είναι:

$$\boldsymbol{Fr = \sqrt{\frac{d}{D}}} \tag{1.11}$$

Για την εξίσωση (1.10) διακρίνουμε πως όσο η διάμετρος του σώματος *D* είναι μικρή σε σχέση με το μήκος κύματος *λ*, τα αδρανειακά φαινόμενα είναι σημαντικότερα έναντι των φαινομένων βαρύτητας, οπότε για μικρές τιμές του *kD* μπορούν να παραλειφθούν οι δυνάμεις περίθλασης, αντίθετα όταν το το *kD* είναι μεγάλο, τα φαινόμενα βαρύτητας είναι πιο σημαντικά από τα αδρανειακά φαινόμενα. Στην εξίσωση (1.11), τα φαινόμενα βαρύτητας έχουν μεγαλύτερη σημασία στις μεγάλες τιμές της διαμέτρου *D*, ή για μικρές τιμές του βάθους του νερού *d*, ανεξαρτήτως του μήκους κύματος *λ*. Οι οριακές τιμές των *D/λ* και *D/d* λαμβάνονται υπόψη τα φαινόμενα παραμόρφωσης της ροής, μέσω του προσδιορισμού του πεδίου της ροής μέσω της θεωρίας του δυναμικού.

Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές *u(z), T, d* για τη περιγραφή του απλού αρμονικού κυματισμού, τότε η συναρτησιακή σχέση για τη δύναμη είναι:

$$\boldsymbol{F = f(D, d, T, \bar{u}, \rho, \mu) \rightarrow \frac{F}{1/2\ \rho\, u^2 D\, d} = f\left(\frac{\overline{u\,T}}{D}, \frac{uD}{\mu/\rho}, \frac{d}{D}\right)} \qquad (1.12)$$

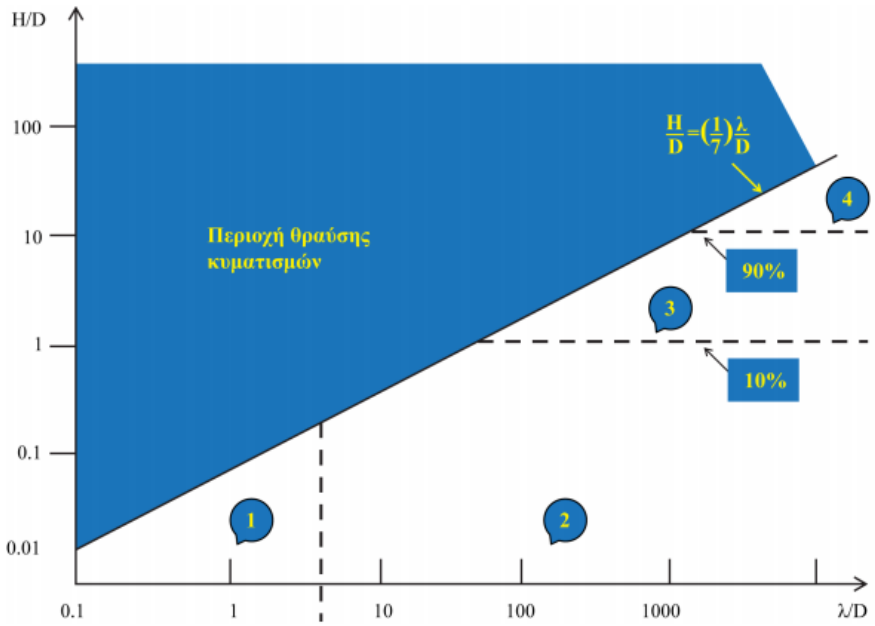
Ο λόγος $\overline{uT}/D =, N_{KC}$ο οποίος είναι αδιάστατος αριθμός και ονομάζεται σταθερά του *Keulegan-Carpenter*, ενώ ο λόγος $\rho\, uD/\mu = uD/v = Re$, αποτελεί τον αριθμό *Reynolds*, οπότε η εξίσωση 1.12 θα έχει την εξής μορφή:

$$\boldsymbol{\frac{F}{1/2\ \rho\, u^2 D\, d} = f\left(N_{KC}, Re, \frac{d}{D}\right)} \qquad (1.13)$$

Με την εισαγωγή του όρου της τραχύτητας του κυλίνδρου *k*, προκύπτει η συναρτησιακή σχέση για τους μη λείους κυλίνδρους:

$$\boldsymbol{\frac{F}{1/2\ \rho\, u^2 D\, d} = f\left(N_{KC}, Re, \frac{d}{D}, \frac{k}{D}\right)} \qquad (1.14)$$

Στην εικόνα 1.2 διακρίνεται η σχετική σημασία των διαφόρων τύπων δυνάμεων(αδρανειακών, βαρύτητας, αντίστασης) σε διάφορες περιοχές για την περίπτωση του κατακόρυφου κυλίνδρου. Για τιμές του *H/D>10*, το φορτίο που δέχεται μια κατασκευή οφείλεται κατά 90% στις δυνάμεις αντίστασης και το 10% σε αδρανειακές δυνάμεις, ενώ για *H/D<1* τα συγκεκριμένα ποσοστά αντιστρέφονται με το 10% να οφείλεται σε δυνάμεις αντίστασης ενώ το υπόλοιπο 90% τουλάχιστον είναι από αδρανειακές δυνάμεις.
Πάντως είναι πολύ δύσκολο να πούμε πότε για την κατασκευή οι δυνάμεις αντίστασης γίνονται καθοριστικές σε σχέση με τις αντίστοιχες αδρανειακές. Στο ίδιο σχήμα επίσης φαίνεται και το όριο του Michell- Havelock, το γνωστό *H/λ*=1/7 πέρα από το οποίο εμφανίζεται η θραύση κυματισμών για βαθύ νερό. Στο όριο λ/D<5 γίνεται ο διαχωρισμός των κατασκευών σε υδροδυναμικά ≪ογκώδεις≫ και ≪λεπτές≫, το οποίο αποτελεί και το όριο που τα φαινόμενα περίθλασης είναι σημαντικά.



Εικόνα 1.2 Περιοχή σχετικής σημασίας διαφόρων τύπων δυνάμεων που ασκούνται σε κυλινδρικά στοιχεία, σε άπειρο βάθος νερού, ως συνάρτηση του ύψους, Η, και του μήκους, λ, του κυματισμού (D: διάμετρος του κυλίνδρου). Περιοχή (1): καθοριστικά τα φαινόμενα περίθλασης. Περιοχή (2): καθοριστικές οι αδρανειακές δυνάμεις. Περιοχή (3): πεδίο εφαρμογής της εξίσωσης Morison. Περιοχή (4): καθοριστικές οι δυνάμεις αντίστασης.

1.4. Θαλάσσιοι Κυματισμοί

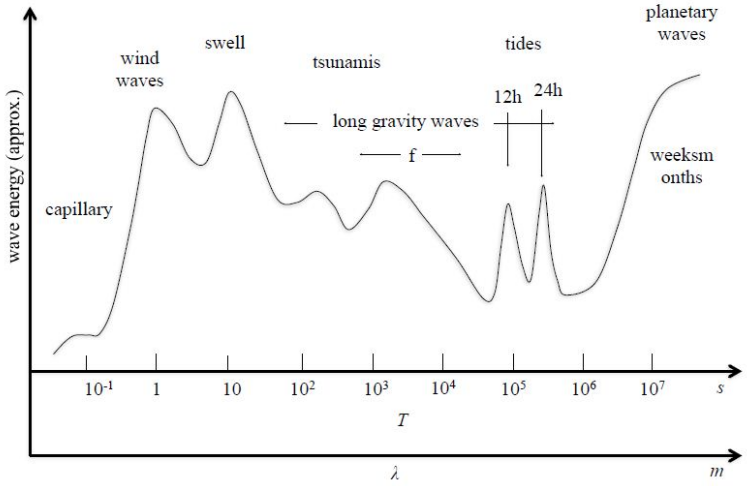
Η ταυτόχρονη δράση δυνάμεων απομακρύνσεως των σωματιδίων της θάλασσας από τη θέση ηρεμίας (γενεσιουργές δυνάμεις) και δυνάμεων επαναφοράς των σωματιδίων στις αρχικές τους θέσεις (δυνάμεις επαναφοράς), σε συνδυασμό με την μεγάλη κινητικότητα των σωματιδίων, προκαλεί κάτω από ορισμένες συνθήκες τη δημιουργία κινήσεων ταλαντώσεως στα σωματίδια. Η συνισταμένη διαταραχή της θαλάσσιας μάζας από τις ταλαντώσεις των σωματιδίων οδηγεί στο θαλάσσιο κυματισμό.

Στο θαλάσσιο περιβάλλον, γενικότερα εξελίσσεται ένα πλήθος κυματικών φαινομένων, από τα οποία τα περισσότερα είναι συζευμένα μεταξύ τους. Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό το γεγονός πρέπει να αναφερθεί πως το θαλασσινό νερό είναι ένα ελαφρά συμπίεστο, ανομοιογενές και αγώγιμο υγρό, το οποίο εδράζεται πάνω σε ένα πολυστρωματοποιημένο (multilayered) παραμορφώσιμο στερεό πυθμένα (seabed) και περατούται σε μια ελεύθερη επιφάνεια (free surface), δια της οποίας δέχεται την ηλιακή ακτινοβολία και την επίδραση του υπερκείμενου πεδίου του ανέμου. Επίσης η μάζα του θαλάσσιου νερού βρίσκεται σε μια ελαφρά μαγνητισμένη, περιστρεφόμενη, περίπου σφαιρική μάζα (Γη), η οποία αλληλεπιδρά μέσω δυνάμεων βαρύτητας με άλλα ουράνια σώματα κυρίως με Σελήνη και τον Ήλιο (Αθανασούλης και Μπελιμπασάκης, 2007). Με τη χρήση φαινομενολογικών κριτηρίων, είναι εφικτή η διάκριση των κύριων θαλάσσιων κυματικών φαινομένων σε κατηγορίες (Phillips 1997, LeBlond and Mysak 1978):

- Επιφανειακά Κύματα (surface Waves)
- Εσωτερικά Κύματα (internal waves)
- Γυροσκοπικά Κύματα (inertial or gyroscopic waves)
- Πλανητικά Κύματα (planetary or Rossby waves)
- Παλίρροιες (tides)
- Ακουστικά Κύματα (acoustic waves), που διαδίδονται στο εσωτερικό της υδάτινης μάζας και είναι συζευμένα με ακουστικά και ελαστικά κύματα στον πυθμένα, καθώς και με κύματα της ελεύθερης επιφάνειας

Με τη αναλυτικότερη εξέταση των επιφανειακών θαλάσσιων κυματισμών, διακρίνουμε τις εξής κατηγορίες, ανάλογα με το αίτιο δημιουργίας τους (Αθανασούλης και Μπελιμπασάκης, 2007):

- Ανεμογενή Κύματα (wind waves), σε περιόδους T=1-20 secέως 25 sec,
- Σεισμογενή Κύματα (tsunamis), σε περιόδους T=5 min-2 h,
- Σωματογενή Κύματα, δηλαδή κύματα που παράγονται από τις κινήσεις επιπλεόντων ή βυθισμένων αντικειμένων (body-generated waves), ίδια περίπου περίοδο με ανεμογενή κύματα,
- Κύματα Επιφανειακής τάσης (capillary waves), υψίσυχνα κύματα (T=0.05-1 sec).



Εικόνα 1. 3 Φάσμα της κυματικής ενέργειας στους ωκεανούς σαν συνάρτηση της περιόδου, όπως διακρίνεται η περισσότερη ενέργεια συγκεντρώνεται στα ανεμογενή κύματα (Σοφιανός, 2017).

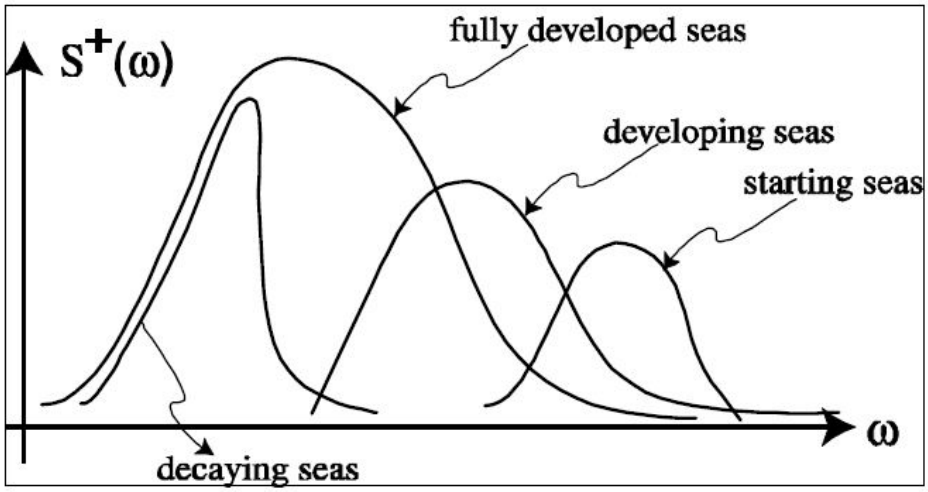
Οι ανεμογενείς κυματισμοί και τα σωματογενή κύματα παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στις εφαρμογές Θαλάσσιας Τεχνολογίας στην ανοικτή θάλασσα. Ένα από τα κυριότερα αίτια δυναμικής διέγερσης των πλοίων και εν γένει των θαλάσσιων κατασκευών αποτελούν οι ανεμογενείς θαλάσσιοι κυματισμοί. Τα κύματα ανέμου λόγω της φύσεως του αιτίου διέγερσης χαρακτηρίζονται από έντονη έλλειψη κανονικότητας, χωρικά και χρονικά. Η μορφή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, το πεδίο των ταχυτήτων και των πιέσεων και τα υπόλοιπα φυσικά μεγέθη τους που χαρακτηρίζουν το κυματικό πεδίο έχουν μη κανονικές μορφές, αυτό συνεπάγεται την χρήση πιθανοθεωρητικών (στοχαστικών) μεθόδων για τη διατύπωση, μελέτη και κατανόηση των σχετικών φυσικών φαινομένων. Οι δυνάμεις βαρύτητας αποτελούν τον πρωτεύων λόγο της φυσικής διάδοσης των συγκεκριμένων κυματισμών μακριά από την περιοχή διέγερσης που με την βοήθεια της ανάλυσης *Fourier* οι σύνθετες αυτές κυματομορφές μπορούν να αναλυθούν σε υπέρθεση αρμονικών μορφών που παρουσιάζουν χωρική και χρονική κανονικότητα. Λόγω ότι οι δυνάμεις βαρύτητας κυριαρχούν στους ανεμογενείς κυματισμούς στην βιβλιογραφία αναφέρονται ως επιφανειακοί κυματισμοί βαρύτητας. Οι ανεμογενείς κυματισμοί που παρατηρούνται σε μια συγκεκριμένη περιοχή, διακρίνονται σε:

- κυματισμούς ανέμου (wind waves) ή θάλασσες (seas), οι οποίοι αντιστοιχούν σε περιόδους από T=0.5 sec έως 15 sec,

- αποθάλασσες ή φουσκοθαλασσιές (sweels), οι οποίοι αντιστοιχούν σε περιόδους από 10 sec έως 30 sec.

Οι ανεμογενείς κυματισμοί με κριτήριο το στάδιο ανάπτυξης τους διακρίνονται σε:

- Αναπτυσσόμενους κυματισμούς (developing seas/waves)
- Πλήρως Ανεπτυγμένους (fully developed or fully arisen seas)
- Αποσβενυμένους κυματισμούς (decaying seas)



Εικόνα 1.4 Φάσμα των διάφορων σταδίων ανάπτυξης των ανεμογενών κυματισμών (Techet, 2005).

Κυματισμοί Ανέμου	Αποθάλασσες
ύψος κύματος (*H*)προς μήκος κύματος (*L*)- σχετικά μεγάλο	ύψος κύματος (*H*) προς μήκος κύματος (*L*)- σχετικά μικρό
στροβιλώδης ροή	ροή μη τυρβώδης και αστρόβιλη
διάδοση προς διάφορες κατευθύνσεις	σαφή κύρια κατεύθυνση διάδοσης
έντονα ανακατεμένοι	ομαλοί και λείοι
θραύση κυματισμών	δεν συμβαίνει συνήθως θραύση

Πίνακας 1.1 Κύρια χαρακτηριστικά και διαφορές των ανεμογενών κυματισμών και των αποθαλασσών.

1.4.1. Επιφανειακοί κυματισμοί βαρύτητας

Τα θαλάσσια κύματα που ενδιαφέρουν την ναυτική υδροδυναμική μεταδίδονται λόγω της δύναμης της βαρύτητας, τα οποία καλούνται και κύματα βαρύτητας. Τα κύματα βαρύτητας δημιουργούνται από την πνοή του ανέμου πάνω από την θάλασσα, και από την κίνηση των πλοίων επιφανείας, ή άλλων σωμάτων που κινούνται σε μικρό βάθος. Οι βασικές εξισώσεις που απαιτούνται για την μελέτη της κίνησης ασυμπίεστου ρευστού είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση συνέχειας, οι οποίες είναι οι εξής:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{t}} + (\vec{\boldsymbol{V}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\boldsymbol{F}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\rho}}\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\rho}}\Delta\vec{\boldsymbol{V}} \qquad (\mathbf{1.15})$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{V}} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{1.16})$$

Όπου για κάθε μεταβλητή έχουμε:

- V, το άνυσμα της ταχύτητας (u,v,w),
- p, η πίεση,
- μ. ο συντελεστής δυναμικής συνεκτικότητας,
- ρ, η πυκνότητα του ρευστού,
- F, οι εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις.

Θεωρώντας ρευστό απουσία συνεκτικότητας τότε οι εξισώσεις Navier-Stokes ανάγονται σε αυτές του Euler**,** επίσης αν η κίνησή του θεωρηθεί αστρόβιλη τότε υπάρχει δυναμικό ροής Φ τέτοιο ώστε:

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\Phi \tag{1.17}$$

Έπειτα η εξίσωση (1.17) μετασχηματίζεται στην εξίσωση Laplace:

$$\overrightarrow{\nabla^2}\Phi = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{1.18}$$

Μέσω της ολοκλήρωσης των εξισώσεων Euler προκύπτει η εξίσωση Bernoulli:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] + gz + \frac{p}{\rho} = const \tag{1.19}$$

Κινηματική Συνθήκη Πυθμένα:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{n} = 0 \tag{1.20}$$

Όπου $\vec{n}$ το κάθετο διάνυσμα στο θεωρούμενο σημείο του πυθμένα.

Κινηματική Συνθήκη Ελεύθερης Επιφάνειας:

Θεωρούμε πως η άγνωστη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας περιγράφεται από τη σχέση $z=\zeta(x,y,t)$, τότε:

$$\frac{D}{Dt} = (z - \zeta) = 0 \tag{1.21}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \tag{1.22}$$

Η εξίσωση (1.21) λόγω της (1.22) για $z=\zeta(x,y,t)$θα γίνει:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \tag{1.23}$$

Η φυσική έννοια της εξίσωσης (1.23) αφορά τη παραμονή των μορίων του ρευστού στην επιφάνεια σε όλη την διάρκεια της κίνησης της.

Δυναμική Συνθήκη Ελεύθερης Επιφάνειας:

Στη συγκεκριμένη συνθήκη αναπαριστάται μαθηματικά, το γεγονός πως η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια ισούται με την ατμοσφαιρική πίεση, επίσης για μη μόνιμη, αστρόβιλη ροή, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση Bernoulli δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|V|^2 + gz + \frac{P - P_A}{\rho} = A(t) \qquad (1.24)$$

Όπου P_A είναι μια σταθερά και συγκεκριμένα η ατμοσφαιρική πίεση και η $A(t)$είναι μια συνάρτηση χρόνου ίδια για όλο το πεδίο της ροής. Η δυναμική οριακή συνθήκη γράφεται για $P = P_A$:

$$\rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] + \rho g z = const \qquad (1.25)$$

Για $z=\zeta(x,y,t)$ και εκλέγοντας σταθερά για το δεξιό μέλος ίση με το μηδέν δίχως βλάβη της γενικότητας θα έχουμε:

$$\rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] + \rho g \zeta = 0 \qquad (1.26)$$

Παρατηρήσεις:

- Οι οριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια είναι μη γραμμικές.
- Είναι άγνωστο το όριο $z=\zeta(x,y,t)$ στο οποίο ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες.
- Το πρόβλημα δεν επιδέχεται κλειστή λύση.
- Πρέπει να ακολουθηθούν προσεγγιστικές μέθοδοι για τη γραμμικοποίηση των οριακών συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια.

1.4.2. Γραμμικοποίηση του προβλήματος κυματισμών βαρύτητας

Για την επίλυση ενός μη γραμμικού προβλήματος, εφαρμόζεται η Θεωρία Διαταραχών (Stokes,1925). Για την ανάπτυξη των μεγεθών σε σειρές διαταραχών θεωρούμε ως παράμετρο, ένα λόγο γεωμετρικών χαρακτηριστικών του κύματος τέτοιο ώστε να είναι πολύ μικρότερος του 1, όπως ο λόγος του ύψους κύματος H ως προς το διπλάσιο του μήκους κύματος $L(H/2L=\varepsilon \ll 1)$, έτσι ώστε οι εκφράσεις για το δυναμικό της ροής και για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας να έχουν την εξής μορφή:

$$\Phi(x,y,z,t) = \sum_{n=1} \varepsilon^n \Phi^{(n)}(x,y,z,t) \qquad (1.27)$$

$$\zeta(x,y,t) = \sum_{n=1} \varepsilon^n \zeta^{(n)}(x,y,t) \qquad (1.28)$$

- Όπου $\Phi^{(n)}$ και $\zeta^{(n)}$ οι n-οστοί όροι ανάπτυξης.

Για να αποφύγουμε την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στο άγνωστο όριο *z=ζ(x,y,t)*,αναπτύσσουμε τα δυναμικά και τις παραγώγους τους σε σειρές Taylor περί το *z=0*,θεωρώντας ότι η ανύψωση *ζ(x,y,t)*είναι μικρή σε σχέση με το μήκος κύματος, από τα οποία προκύπτει:

$$\boldsymbol{\Phi}|_{z=\zeta} = \boldsymbol{\Phi}|_{z=0} + \zeta \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial z}\right|_{z=0} + \frac{1}{2}\zeta^2 \left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \dots \tag{1.29}$$

Και οι παράγωγοί του:

$$\boldsymbol{\Phi}_x = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x}\right|_{z=\zeta} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x}\right|_{z=0} + \zeta \left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial x \partial z}\right|_{z=0} + \frac{1}{2}\zeta^2 \left.\frac{\partial^3 \boldsymbol{\Phi}}{\partial x \partial z^2}\right|_{z=0} + \dots \tag{1.30}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_y = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y}\right|_{z=\zeta} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y}\right|_{z=0} + \zeta \left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial y \partial z}\right|_{z=0} + \frac{1}{2}\zeta^2 \left.\frac{\partial^3 \boldsymbol{\Phi}}{\partial y \partial z^2}\right|_{z=0} + \dots \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_z = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial z}\right|_{z=\zeta} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial z}\right|_{z=0} + \zeta \left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \frac{1}{2}\zeta^2 \left.\frac{\partial^3 \boldsymbol{\Phi}}{\partial z^3}\right|_{z=0} + \dots \tag{1.32}$$

Κινηματική Συνθήκη Ελεύθερης Επιφάνειας για *z=0*:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial t}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial t} + \zeta^{(1)}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial y}\right) + 0\varepsilon^3 = 0 \tag{1.33}$$

Δυναμική Συνθήκη Ελεύθερης Επιφάνειας για *z=0*:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{(1)}}{\partial t} + g\zeta^{(1)}\right) + \varepsilon^2\left(g\zeta^{(2)} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{(2)}}{\partial t} + \zeta^{(1)}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}^{(1)}}{\partial t \partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{(1)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{(1)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{(1)}}{\partial z}\right)^2\right]\right) + 0\varepsilon^3 = 0 \tag{1.34}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις πρέπει να έχουν ισχύ για κάθε *ε* και όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων του *ε* να ισούνται με μηδέν, έτσι ώστε να προκύπτουν οι εξισώσεις της κινηματικής και δυναμικής *n* τάξης, που θα ικανοποιούν οι *n*-οστοί όροι της ανάπτυξης του δυναμικού στην ελεύθερη επιφάνεια.

Πρώτης Τάξης Πρόβλημα (*n*=1):

Η κινηματική και δυναμική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας για το πρωτοτάξιο πρόβλημα (*n*=1) και για *z=0* κατά σειρά θα είναι οι εξής:

$$\boldsymbol{\Phi}_z^{(1)} - \zeta_t^{(1)} = 0 \tag{1.35}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_t^{(2)} + g\zeta^{(2)} = 0 \tag{1.36}$$

Δεύτερης Τάξης Πρόβλημα (*n*=2):

Η κινηματική και δυναμική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας για το δευτεροτάξιο πρόβλημα (*n*=2) και για *z=0* κατά σειρά θα είναι οι εξής:

$$\boldsymbol{\Phi_z^{(2)} - \zeta_t^{(2)} = -\zeta^{(1)}\Phi_{zz}^{(1)} + \Phi_x^{(1)}\zeta_x^{(1)} + \Phi_y^{(1)}\zeta_y^{(1)}} \quad (\mathbf{1.37})$$

$$\boldsymbol{\Phi_t^{(2)} + g\zeta^{(2)} = -\zeta^{(1)}\Phi_{tz}^{(1)} - \frac{1}{2}\left((\Phi_{xx}^{(1)})^2 + (\Phi_{yy}^{(1)})^2 + (\Phi_{zz}^{(1)})^2\right)} \quad (\mathbf{1.38})$$

Νιοστής Τάξης Πρόβλημα:

Η κινηματική και δυναμική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας για το *n*τάξης πρόβλημα και για *z=0* κατά σειρά θα είναι οι εξής:

$$\boldsymbol{\Phi_z^{(n)} - \zeta_t^{(n)} = G^{n-1}} \quad (\mathbf{1.39})$$

$$\boldsymbol{\Phi_t^{(n)} + g\zeta^{(n)} = F^{n-1}} \quad (\mathbf{1.40})$$

- Όπου G^{n-1}, F^{n-1}είναι συνδυασμός των λύσεων 1^{ης} , 2^{ης} ,…, *n-1*τάξης.

Παρόλο που οι οριακές συνθήκες για την ελεύθερη επιφάνεια είναι μη γραμμικές, οι συναρτήσεις Φ^nπρέπει να ικανοποιούν και τις υπόλοιπες οριακές συνθήκες, αυτή της συνέχειας και αυτή του πυθμένα:

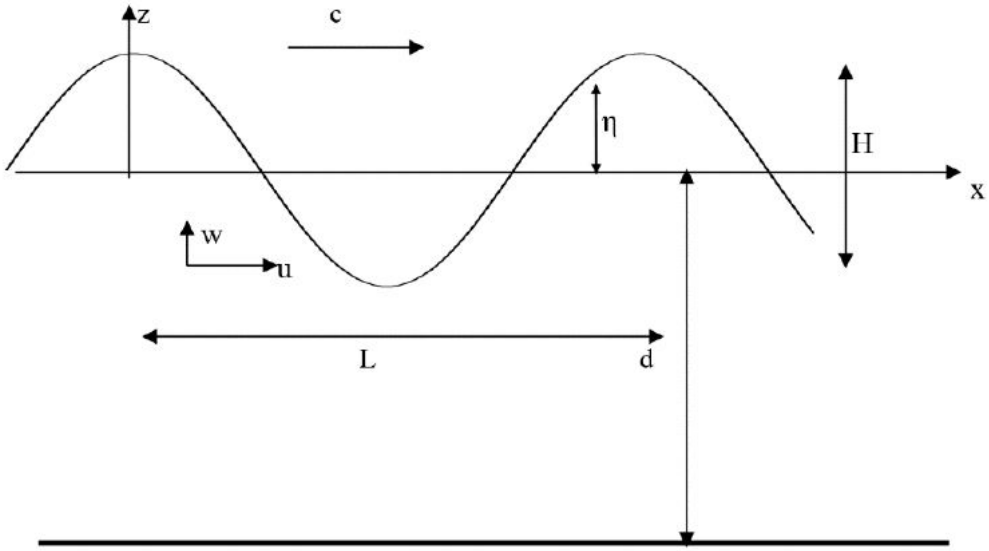
$$\boldsymbol{\Delta\Phi^{(n)} = 0 \text{ στο πεδίο της ροής}} \quad (\mathbf{1.41})$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial\Phi^{(n)}}{\partial\vec{n}} = \vec{\nabla}\Phi^{(n)} \cdot \vec{n} = 0 \text{ στο πυθμένα}} \quad (\mathbf{1.42})$$

1.4.3. Γραμμική Θεωρία Κυματισμών (Stokes 1^{ης} τάξης –Airy)

Τα διάφορα είδη των κυματισμών που υπάρχουν στον ωκεανό κατηγοριοποιούνται βάσει των κυρίαρχων δυνάμεων που τα διέπουν και τα δημιουργούν και βάσει των βασικών τους χαρακτηριστικών δηλαδή της περιόδου, του μήκους κύματος και του ύψους κύματος. Η γραμμική κυματική θεωρία (Airy,1845) είναι η απλούστερη και η πιο εφαρμοσμένη κυματική θεωρία και πραγματεύεται με κύματα πρώτης τάξης. Η θεωρία αυτή αναφέρεται στην προσεγγιστική λύση του συστήματος εξισώσεων, έτσι ώστε να περιγραφεί η κίνηση του νερού στη περίπτωση των κυματισμών.

Οι σχέσεις που περιγράφουν την εσωτερική κίνηση του νερού προέρχονται από τις λύσεις ενός συστήματος που περιέχει (α) τις εξισώσεις Navier-Stokes, που εξισορροπούν τις μεταβολές της ορμής του νερού με τις δυνάμεις που ασκούνται επάνω του και (β) την εξίσωση συνέχειας, που εξασφαλίζει την διατήρηση της μάζας. Οι εξισώσεις Navier-Stokes έχουν μόνον όρους που περιγράφουν τις ταχύτητες του νερού και τις τοπικές πιέσεις, λόγω του πολύ μικρού μεγέθους της τριβής. Οι βασικές παραδοχές που χρησιμοποιούνται αφορούν τέλειο ρευστό, αστρόβιλη ροή, μηδενική πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια, σταθερό πυθμένα, αδιαπέρατο και οριζόντιο (σταθερό βάθος), ενώ το ύψος του κύματος *H* είναι πολύ μικρότερο του βάθους *d* και του μήκους *L* (Καραμπάς, 2015). Η γραμμική θεωρία παρά την απλότητά της έχει δώσει χρήσιμες προσεγγίσεις των κινηματικών και δυναμικών ιδιοτήτων των επιφανειακών κυματισμών.



Εικόνα 1.5 Παρουσίαση των παραμέτρων του συστήματος γραμμικών κυματισμών (Σχήμα 2.1, Καραμπάς, 2015).

Ο απλός αρμονικός κυματισμός (κύματα Airy) προκύπτει σαν λύση του γραμμικοποιημένου προβλήματος 1ης τάξης που περιγράφεται από τις εξισώσεις (1.35), (1.36), (1.41) και (1.42) για n=1, δηλαδή με την απαλοιφή των αδρανειακών όρων δεύτερης τάξης (μη γραμμικοί όροι) (Μαυράκος, 1999). Στη γραμμική θεωρία οι κυματισμοί παρουσιάζουν ημιτονοειδή μορφή (μονοχρωματικός γραμμικός κυματισμός). Βάσει των παραδοχών που έχουν προαναφερθεί μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικής λύσης για το δυναμικό Φ και την ελεύθερη επιφάνεια ζ, μπορεί να αποδοθεί από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\boldsymbol{\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)}} \qquad (\mathbf{1.43})$$

$$\boldsymbol{\zeta = \varepsilon \zeta^{(1)}} \qquad (\mathbf{1.44})$$

$$\boldsymbol{\nabla^2 \Phi^{(1)} = 0 \ \gamma\iota\alpha \ \ z = -h} \qquad (\mathbf{1.45})$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \ \gamma\iota\alpha \ z = -h} \qquad (\mathbf{1.46})$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \ \gamma\iota\alpha \ z = 0} \qquad (\mathbf{1.47})$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} - g\zeta^{(1)} = 0 \ \gamma\iota\alpha \ z = 0} \qquad (\mathbf{1.48})$$

- Η εύρεση του δυναμικού της ταχύτητας Φ πραγματοποιείται μέσω της απαλοιφής του ζ από τις εξισώσεις (1.47) και (1.48), οπότε θα έχουμε:

$$\zeta^{(1)} = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial t} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2} \tag{1.49}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \tag{1.50}$$

- Είναι πια δυνατό και βολικό από εδώ και πέρα ο δείκτης 1 να παραλείπεται, αφού αναφερόμαστε μόνο στο πρωτοτάξιο δυναμικό της ταχύτητας. Η επόμενη θεώρηση περιλαμβάνει την αναπαράσταση του δυναμικού με ημιτονοειδή μορφή έχοντας σταθερή ταχύτητα μετάδοσης, έτσι ώστε να ικανοποιείται το πρόβλημα των οριακών συνθηκών, οπότε θα εκφράζεται ως:

$$\Phi(x,z,t) = F(z)\sin(kx - \omega t) \tag{1.51}$$

- Όπου *F(z)* είναι η άγνωστη συνάρτηση, *k* η άγνωστη παράμετρος και *ω*η κυκλική συχνότητα του κυματισμού, οπότε με την αντικατάσταση της (1.47) στην εξίσωση *Laplace* (1.45) θα έχουμε:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.52}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -k^2 F(z) sin(kx - \omega t) \tag{1.53}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} sin(kx - \omega t) \tag{1.54}$$

- Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1.53) και (1.54) θα προκύψει η εξής γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$-k^2 F(z) sin(kx - \omega t) + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} sin(kx - \omega t) = 0 \Rightarrow -k^2 F(z) + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} = 0 \tag{1.55}$$

- Η λύση της εξίσωσης (1.55) είναι η ακόλουθη:

$$F(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz} \tag{1.56}$$

- Με την σχέση του δυναμικού να εκφράζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\Phi(x,z,t) = \left(Ae^{-kz} + Be^{kz}\right) sin(kx - \omega t) \tag{1.57}$$

- Από την οριακή συνθήκη στον πυθμένα (1.46) και για *z=d* προκύπτει:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left(-kAe^{-kz} + kBe^{kz}\right) sin(kx - \omega t) = 0 \Rightarrow kAe^{-kd} + kBe^{kd} = 0 \Rightarrow$$

$$Ae^{kd} = Be^{-kd} \Rightarrow \frac{A}{B} = e^{-2kd} \qquad (1.58)$$

- Από τη μετασχηματισμένη οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια και για *z=0* προκύπτει:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)|_{z=0} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\omega^2\left(Ae^{-kz} + Be^{kz}\right) sin(kx - \omega t)$$

$$+g\left(-kAe^{-kz} + kBe^{kz}\right) sin(kx - \omega t) \qquad (1.59)$$

- Αν θέσουμε όπου *z=0*:

$$\frac{\omega^2}{kg} = \frac{B - A}{B + A} = \frac{1 - \frac{A}{B}}{1 + \frac{A}{B}} = \frac{1 - e^{-2kd}}{1 + e^{2kd}} = \frac{sinh\,(kd)}{cosh\,(kd)} \Rightarrow \omega^2 = kgtanh(kd) \qquad (1.60)$$

- Όπου *ω* είναι η εξίσωση διασποράς και συνδέει την κυκλική συχνότητα με την παράμετρο *k* (κυματαριθμός) που ορίζεται με *k=2π/L*και το βάθος *d*.

- Ορίζοντας τη φασική ταχύτητα (ταχύτητα προώθησης/διάδοσης) του κυματισμού (*c=L/T=ω/k*) και μέσω από την σχέση της διασποράς (1.60):

$$c = \frac{gT}{2\pi} tan\,h(kd) \qquad L = \frac{gT^2}{2\pi} tanh\,(kd) \qquad (1.61)$$

- Το δυναμικό ταχύτητας του κυματισμού γράφεται:

$$\Phi(x, z, t) = \left(Ae^{-kz} + Be^{kz}\right) si\,n(kx - \omega t) \Rightarrow$$

$$\Phi(x, z, t) = B\left(\frac{A}{B}e^{-kz} + e^{kz}\right) si\,n(kx - \omega t) \Rightarrow$$

$$\Phi(x, z, t) = B\left(e^{-2kz}e^{-kz} + e^{kz}\right) si\,n(kx - \omega t) \Rightarrow$$

$$\Phi(x, z, t) = 2Be^{-kd}\frac{1}{2}\left(e^{-k(z+d)} + e^{k(z+d)}\right) si\,n(kx - \omega t) \Rightarrow$$

$$\Phi(x, z, t) = 2Be^{-kd} cosh[k(z + d)] si\,n(kx - \omega t) \qquad (1.62)$$

- Αντιστοίχως η σχέση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας για *z=0*:

$$\zeta = \frac{2}{g}\omega Be^{-kd}\, cosh(kd)\, cos(kx - \omega t) \qquad (1.63)$$

- Από την εξίσωση της ανύψωσης μπορούμε να ορίσουμε το πλάτος του κυματισμού με:

$$\alpha = \frac{2}{g}\omega Be^{-kd}\, cosh(kd)$$

- Η τελική έκφραση της εξίσωσης του δυναμικού ταχύτητας του κύματος και της ανύψωσης της θαλάσσιας επιφάνειας με βάσει τις προηγούμενες εξισώσεις και με αντικατάσταση όπου *α=H/2*, όπου το *H* αποτελεί το ύψος του κυματισμού θα είναι οι εξής:

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{H}{2}\frac{g}{\omega}\frac{cosh\,[(k(z+d)]}{cosh(kd)}sin\,(kx-\omega t)} \qquad (1.64)$$

$$\boldsymbol{\zeta = \frac{H}{2}cos\,(kx-\omega t)} \qquad (1.65)$$

- Η οριζόντια και η κάθετη ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού *u* και *w* είναι εξ' ορισμού:

$$\boldsymbol{u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\omega H}{2}\frac{cosh[k(\,z+d)]}{sinh\,(kd)}cos(kx-\omega t)} \qquad (1.66)$$

$$\boldsymbol{w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\omega H}{2}\frac{sinh[k(\,z+d)]}{sinh\,(kd)}sin\,(kx-\omega t)} \qquad (1.67)$$

- Στην περίπτωση που η διεύθυνση προχώρησης του μετώπου κύματος και ο άξονας των *x* σχηματίζουν γωνία *θ* μεταξύ τους, τότε ο κυματισμός δεν θεωρείται πλέον δισδιάστατος, αλλά γίνεται:

$$\boldsymbol{\Phi(x,y,z;t) = \frac{H}{2}\frac{g}{\omega}\frac{cosh\,[(k(z+d)]}{cosh(kd)}sin\,[k(xcos\theta+ysin\theta)-\omega t]} \qquad (1.68)$$

$$\boldsymbol{\zeta(x,y;t) = \frac{H}{2}cos\,[k(xcos\theta+ysin\theta)-\omega t]} \qquad (1.69)$$

- Αναφέρουμε και τη μιγαδική παράσταση των μεγεθών *Φ* και *ζ* πρώτης τάξης που είναι πολύ συνηθισμένη σε προβλήματα ναυτικής υδροδυναμικής:

$$\boldsymbol{\Phi(x,y,z;t) = Re\left[-i\frac{H}{2}\frac{g}{\omega}\frac{cosh\,[(k(z+d)]}{cosh(kd)}e^{i(k(xcos\theta+ysin\theta)-\omega t)}\right]} \qquad (1.70)$$

$$\boldsymbol{\zeta(x;t) = Re\left[\frac{H}{2}e^{i(k(xcos\theta+ysin\theta)-\omega t)}\right]} \qquad (1.71)$$

2. Εξισώσεις Mathieu

Ο Èmile Lèonard Mathieu εξήγαγε πρώτος την εξίσωση Mathieu, ως διαχωριζόμενη λύση των εξισώσεων Laplace και Helmholtz σε ελλειπτικές συντεταγμένες (Mathieu, 1868). Οι λύσεις των εξισώσεων Mathieu είναι οι ομώνυμες συναρτήσεις. Το πρώτο βήμα για την εξαγωγή της εξίσωσης Mathieuαντιστοιχεί στην αναπαράσταση της εξίσωσης Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z), η οποία είναι η εξής:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{2.1}$$

Οι τομές των συντεταγμένων επιφανειών με επίπεδο z = σταθ, είναι συνεστιακές ελλείψεις και παραβολές. Οι εξισώσεις αυτών των οικογενειών είναι οι εξής:

$$\frac{x^2}{cosh^2u}+\frac{y^2}{sinh^2u}=c^2 \tag{2.2}$$

$$\frac{x^2}{cos^2v}-\frac{y^2}{sin^2v}=c^2 \tag{2.3}$$

Οι ημιάξονες της έλλειψης a,b δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$a=ccoshu \tag{2.4}$$

$$b=csinhu \tag{2.5}$$

$$u_0=tanh^{-1}(b/a) \tag{2.6}$$

Η μετατροπή της εξίσωσης Laplace από καρτεσιανές (x,y,z) σε ελλειπτικές συντεταγμένες (u,v,z) για $0\leq u<\infty$ και $0\leq v<2\pi$ επιτυγχάνεται, μέσω των παρακάτω ακόλουθων σχέσεων:

$$x=c\,coshu\,cosv \tag{2.7}$$

$$y=c\,sinhu\,sinv \tag{2.8}$$

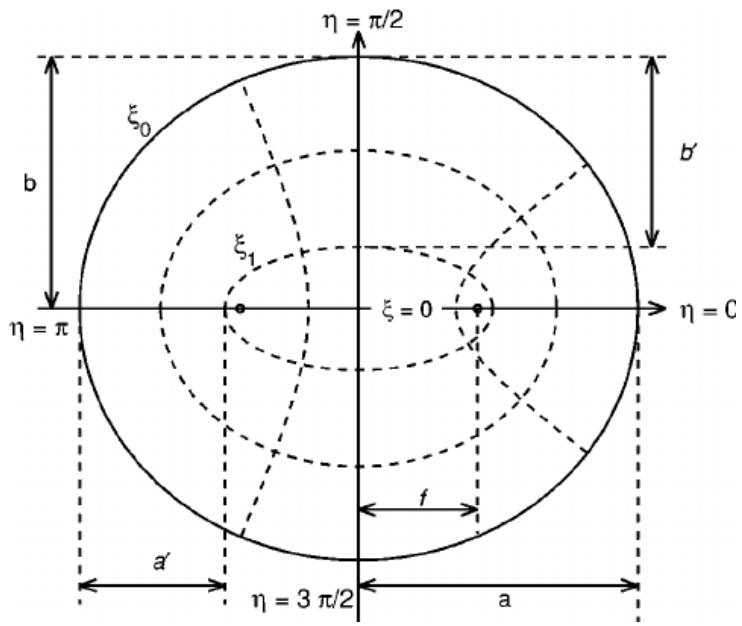
$$z=z \tag{2.9}$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=a\varepsilon \tag{2.10}$$

$$\frac{2}{c^2(cosh2u-cos2v)}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{2.11}$$

$$\varepsilon^2=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2 \tag{2.12}$$

όπου $\varphi(x,y,z)$ ή $\varphi(u,v,z)$ θεωρείται ως μια άγνωστη συνάρτηση, έστω το δυναμικό ταχυτήτων και με c συμβολίζεται το ήμισυ της απόστασης μεταξύ των εστιών του ελλειπτικού πεδίου, ενώ με ε συμβολίζεται η ελλειπτική εκκεντρότητα.



Εικόνα 2.1 Ελλειπτικές Κυλινδρικές Συντεταγμένες (Gutierrez-Vega et al., 2003; Figure 1).

Μέσω της εφαρμογής της Μεθόδου Χωρισμού των Μεταβλητών (Μ.Χ.Μ), υποθέτουμε λύση της μορφής:

$$\boldsymbol{\varphi(u,v,z) = F(u)G(v)Z(z)} \qquad (\mathbf{2.13})$$

Η οποία με την εισαγωγή της στην εξίσωση (1.6) μετατρέπεται στην παρακάτω μορφή:

$$\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{c^2(cosh2u - cos2v)}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{F(u)}}\frac{\boldsymbol{d^2F(u)}}{\boldsymbol{\partial u^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{G(u)}}\frac{\boldsymbol{d^2G(v)}}{\boldsymbol{\partial v^2}}\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{Z(z)}}\frac{\boldsymbol{d^2Z(z)}}{\boldsymbol{\partial z^2}} = \boldsymbol{-k^2} \qquad (\mathbf{2.14})$$

Για να ισχύει η ισότητα των συναρτήσεων που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητών, πρέπει να είναι ίσες με μια σταθερά χωρισμού (η οποία ορίστηκε ως $-k^2$).Το δεύτερο κομμάτι της εξίσωσης θα παράγει εκθετικές λύσεις, ενώ εξισώνοντας το αριστερό μέλος με την σταθερά χωρισμού, θα έχουμε:

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{F(u)}}\frac{\boldsymbol{d^2F(u)}}{\boldsymbol{\partial u^2}} + \boldsymbol{2qcosh2u}\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{G(u)}}\frac{\boldsymbol{d^2G(v)}}{\boldsymbol{\partial v^2}} + \boldsymbol{2qcos2v} \qquad (\mathbf{2.15})$$

- όπου $q = \left(\frac{ck}{2}\right)^2$ αναφέρεται ως παράμετρος $Mathieu$.

Η ισότητα συναρτήσεων ανεξάρτητων μεταξύ τους μεταβλητών που καταλήγουμε είναι ίσες με μια σταθερά έστω *α*, οπότε οι άγνωστες συναρτήσεις *F(u)* και *G(v)* θα υπολογίζονται ως λύσεις των εξισώσεων *Mathieu*:

$$\frac{\boldsymbol{d^2G(v)}}{\boldsymbol{\partial v^2}} + \boldsymbol{(a - 2qcos2v)G(v) = 0} \qquad (\mathbf{2.16})$$

$$\frac{\boldsymbol{d^2F(u)}}{\boldsymbol{\partial u^2}} + \boldsymbol{(a - 2qcosh2u)F(u) = 0} \qquad (\mathbf{2.17})$$

Η εξίσωση (2.16) καλείται ως περιοδική εξίσωση *Mathieu* ενώ η εξίσωση (2.17) ως ακτινική εξίσωση *Mathie*u. Οι λύσεις της περιοδικής εξίσωσης απαρτίζονται από τις περιοδικές συναρτήσεις $Mathieuce_m(v;q)$και$se_m(v;q)$, άρτιες και περιττές, αντίστοιχα, ενώ οι λύσεις της ακτινικής εξίσωσης είναι οι ομώνυμες συναρτήσεις *Mathieu* $Mc_m^{(j)}(u;q)$, $Ms_m^{(j)}(u;q)$, άρτιες και περιττές αντιστοίχως, όπου j=1,2,3,4 δηλώνει την τάξη της συνάρτησης.

3. Διατύπωση του Υδροδυναμικού Προβλήματος Πρώτης Τάξης (Πρόβλημα Περίθλασης)

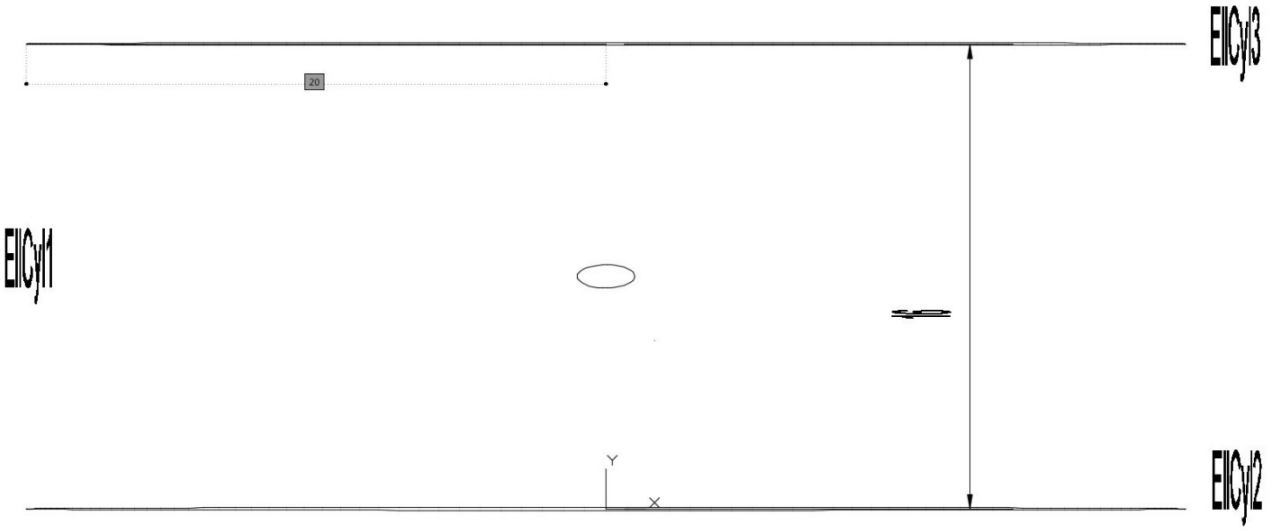
Στη παρούσα εργασία μελετήθηκαν οι υδροδυναμικές φορτίσεις και οι ροπές ελλειπτικών κυλίνδρων σε κανάλι, λόγω της δράσης απλού αρμονικού κυματισμού, ο οποίος διαδίδεται κατά τον θετικό άξονα x υπό γωνία μηδέν μοιρών. Οι κύλινδροι εδράζονται στο θαλάσσιο πυθμένα και είναι τοποθετημένοι παράλληλα μεταξύ τους σε κανάλι. Εξετάστηκαν δύο διαφορετικές παρατάξεις ελλειπτικών κυλίνδρων, οι οποίες περιλάμβαναν:

- 3 ελλειπτικούς κυλίνδρους, με τον ελλειπτικό κύλινδρο 1 (EllCyl1) να αποτελεί το κύριο υδροδυναμικό σώμα μελέτης, ενώ οι υπόλοιποι σχηματίζουν το κανάλι (EllCyl2 και EllCyl3).
- 4 ελλειπτικούς κυλίνδρους, με τους ελλειπτικούς κυλίνδρους 1 και 2 (EllCyl1,EllCyl2) να αποτελούν τα κύρια σώματα μελέτης, με σκοπό την εξέταση των φαινομένων αλληλεπίδρασης σωμάτων-κύματος και οι κύλινδροι 3 και 4 σχηματίζουν το κανάλι (EllCyl3 και EllCyl4).

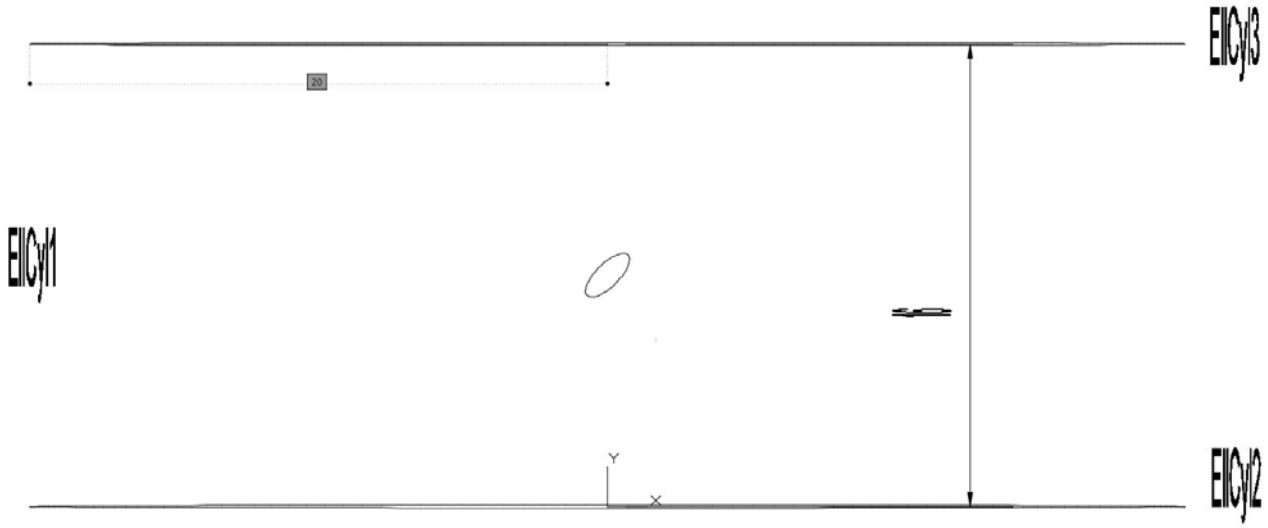
Η διερεύνηση του υδροδυναμικού προβλήματος περίθλασης στη πρώτη διάταξη πραγματοποιήθηκε για διαφορετικές θέσεις, καθώς και για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης του ελλειπτικού κυλίνδρου. Οι διαφορετικές θέσεις αφορούσαν μόνο τον άξονα y, καθώς ο κυματισμός στο κανάλι διαδίδεται μόνο υπό γωνία μηδέν μοιρών και κατά τον θετικό άξονα x. Σε όλες τις εξεταζόμενες θέσεις ο κύλινδρος τοποθετήθηκε και μελετήθηκε υπό διαφορετικές γωνίες (0°,45°,90°) με σκοπό την εξέταση της διακύμανσης του κυματικού πεδίου κατά την διάρκεια της πρόσπτωσης του κυματισμού στο σώμα, το οποίο επιτεύχθηκε μέσω της εξαγωγής των υδροδυναμικών φορτίσεων και ροπών στις διάφορες καταστάσεις.

Για τη δεύτερη παράταξη των ελλειπτικών κυλίνδρων σε κανάλι εξετάστηκαν διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ τους, με το πρώτο κύλινδρο να παραμένει σταθερός σε όλη την διάρκεια της ανάλυσης στην θέση (0,0), ενώ το δεύτερο σώμα επιλέχτηκε να είναι αυτό το οποίο θα μεταβάλλεται η θέση του κατά τον άξονα y. Επίσης επιλέχτηκε ο πρώτος κύλινδρος να τοποθετηθεί υπό διάφορες γωνίες (0°,45°,90°), ώστε να περιγραφεί το εύρος των συχνοτήτων που εμφανίζονται οι μέγιστες φορτίσεις και ροπές, λόγω της αλληλεπίδρασης των σωμάτων μεταξύ τους και της πρόσπτωσης των μονοχρωματικών κυματισμών, με σκοπό την καταγραφή των φαινόμενων περίθλασης-ανάκλασης σε διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ των δύο ελλειπτικών κυλίνδρων.

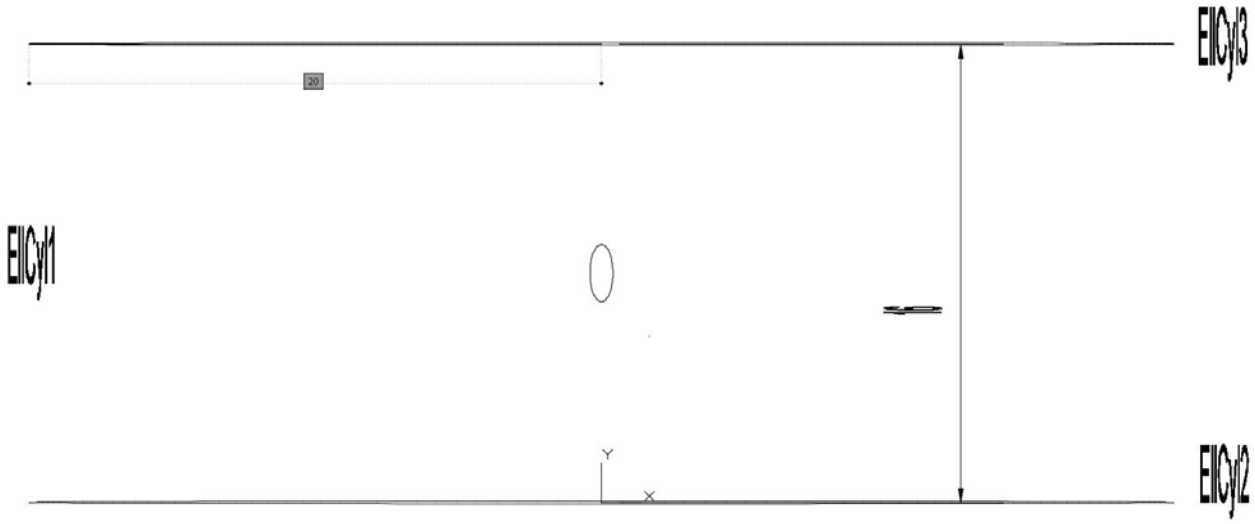
Οι υπολογισμοί για τις δυνάμεις και τις ροπές στα σώματα επιτεύχθηκαν για h/d=0.01. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των σωμάτων παρουσιάζονται στους Πίνακες 3.1 & 3.2. Οι βασικές παραμέτρους για τον υπολογισμό των δυνάμεων και των ροπών, αφορούσαν τον λόγο του μικρού ημιάξονα (b) με τον μεγάλο ημιάξονα (a) των 4 σωμάτων, της ακτίνας αυτών, των αποστάσεων μεταξύ των σωμάτων, τις διάφορες θέσεις τους (x,y), τη γωνία κατά την τοποθέτηση των σωμάτων, τη γωνία που σχηματίζουν τα σώματα μεταξύ τους, τον λόγο της απόστασης των σωμάτων από τον πυθμένα της θάλασσας με το βάθος νερού (h/d). Στον λόγο b/aγια τα σώματα που μελετήθηκαν μέσα στο κανάλι που δέχονται τον απλό αρμονικό κυματισμό και για τις δύο διατάξεις επιλέχτηκε η τιμή 0.4, έτσι ώστε τα κύρια σώματα μελέτης να αφορούν ελλειπτικούς κυλίνδρους, αντίθετα στα σώματα που αποτελούσαν το κανάλι επιλέχτηκε τιμή πολύ κοντά στο 0, έτσι ώστε μέσω της έντονης επιμήκυνσής τους να προσεγγίζονται ως ένα ευθύγραμμο τμήμα και να διαμορφώνουν ένα κανάλι. Η τιμή του h/d ήταν σταθερή και ίση με 0.01, ενώ διερευνήθηκαν και διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης των ελλειπτικών κυλίνδρων. Το βάθος νερού παραμένει σταθερό 1 m και το h ισούται με 0.01 m.



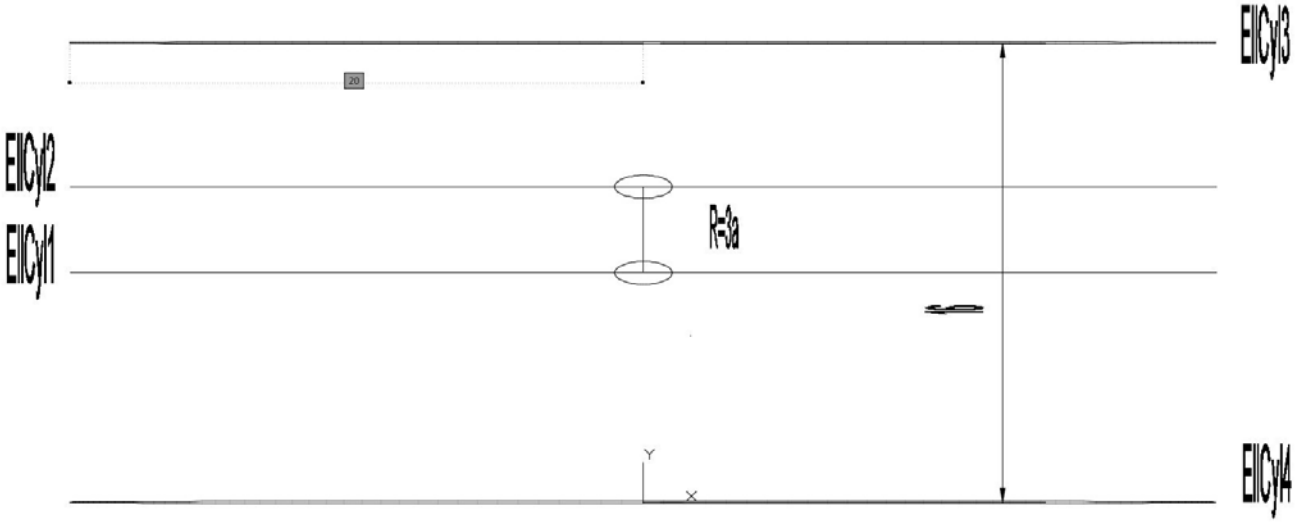
Εικόνα 3.1 Διάταξη ελλειπτικού κυλίνδρου (EllCy1) σε κανάλι για β=0°.



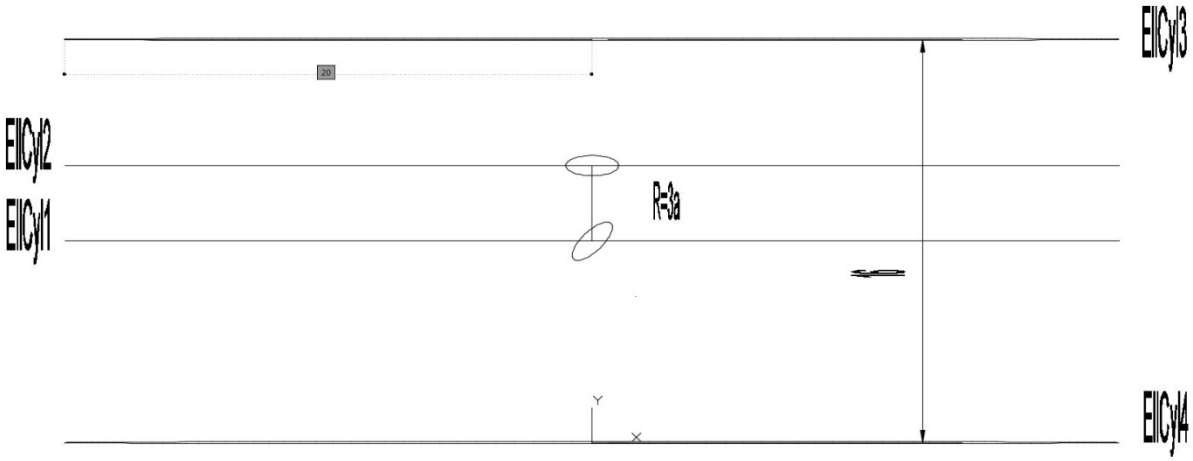
Εικόνα 3.2 Διάταξη ελλειπτικού κυλίνδρου (EllCy1) σε κανάλι για β=45°.



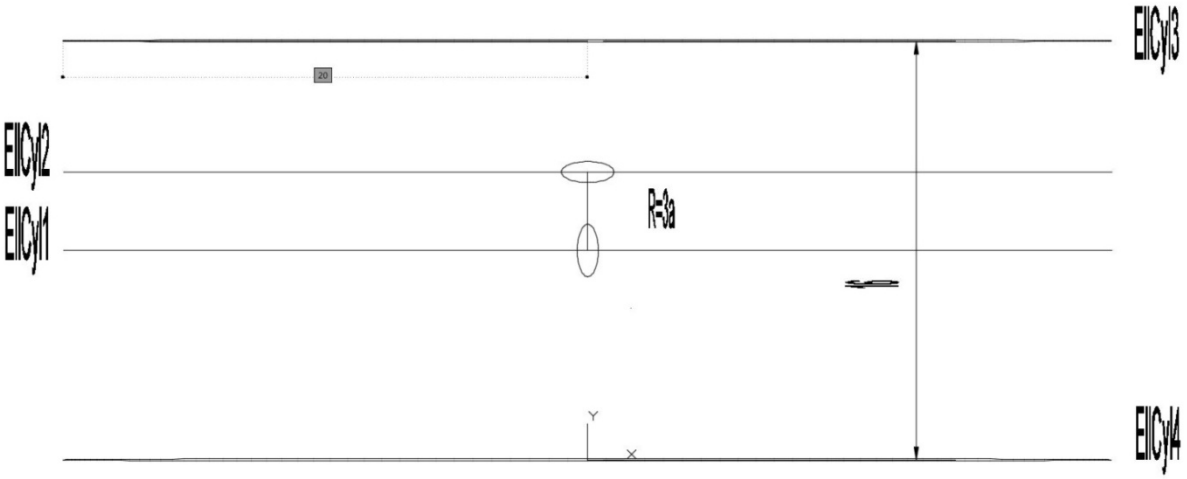
Εικόνα 3.3 Διάταξη ελλειπτικού κυλίνδρου (EllCy1) σε κανάλι για β=90°.



Εικόνα 3.4 Διάταξη δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων (EllCy1, EllCyl2) σε κανάλι για β=0° και μεταξύ τους απόσταση $R=3a$.



Εικόνα 3.5 Διάταξη δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων (EllCy1, EllCyl2) σε κανάλι για β=45° του ελλειπτικού κυλίνδρου 1 και μεταξύ τους απόσταση R=3a.



Εικόνα 3.6 Διάταξη δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων (EllCy1, EllCyl2) σε κανάλι για β=90° του ελλειπτικού κυλίνδρου 1 και μεταξύ τους απόσταση R=3a

Cylinders	$\boldsymbol{a_j/a_1}$	$\boldsymbol{b_j/a_j}$	$\boldsymbol{u_0}$
EllCyl1	1	0.4	0.4236
EllCyl2	20	0.0025	0.0025
EllCyl3	20	0.0025	0.0025

Πίνακας 3.1 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά των 3 ελλειπτικών κυλινδρικών σωμάτων.

Cylinders	$\boldsymbol{a_j/a_1}$	$\boldsymbol{b_j/a_j}$	$\boldsymbol{u_0}$
EllCyl1	1	0.4	0.4236
EllCyl2	1	0.4	0.4236
EllCyl3	20	0.0025	0.0025
EllCyl4	20	0.0025	0.0025

Πίνακας 3.2 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά των 4 ελλειπτικών κυλινδρικών σωμάτων.

Η διάδοση του κυματισμού στα σώματα επιλέχτηκε να γίνεται με πλάτος *H/2* (*H/2=A*) και κυκλική συχνότητα *ω*, κατά τον θετικό άξονα x υπό γωνία 0 μοιρών. Οι ελλειπτικοί κύλινδροι βρίσκονται σταθερά τοποθετημένα στο πυθμένα της θάλασσας, σε βάθος νερού h. Οι ημιάξονες των κυλίνδρων συμβολίζονται με a_j και b_j, όπου *j*=1,2,3,4 υποδηλώνει τον αριθμό του εκάστοτε κυλίνδρου. Λόγω της γεωμετρίας των σωμάτων για την περιγραφή της ροής χρησιμοποιήθηκαν ελλειπτικές κυλινδρικές συντεταγμένες (*u*,*v*,*z*), με το *u* να είναι σταθερό, το *v* παραμένει σταθερά ορθογώνιο που τέμνει τις οικογένειες των συνεστιακών ελλείψεων και υπερβολών αντίστοιχα και με άξονα *z* που είναι θετικός για διεύθυνση κατακόρυφα προς τα πάνω με την θέση του να είναι σταθερή στο θαλάσσιο πυθμένα. Ο μετασχηματισμός από ελλειπτικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες επιτεύχθηκε από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\boldsymbol{x = c\ coshu\ cosv} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{y = c\ sinhu\ sinv} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{z = z} \tag{3.3}$$

Η ροή γύρω από τα σώματα θεωρείται ασυμπίεστη, αστρόβιλη και μη συνεκτική, έτσι ώστε να μπορεί να περιγραφτεί από δυναμικό ταχύτητας *φ,* που αποτελεί τον άγνωστο του προβλήματος, ενώ δεν λαμβάνονται υπόψη κινήσεις υψηλότερης τάξης (πρωτοτάξιο πρόβλημα). Λόγω της παραπάνω θεώρησης είναι εφικτή η χρήση της γραμμικής θεωρίας δυναμικού, η οποία επιτρέπει την έκφραση της κίνησης του ρευστού από το δυναμικό ταχυτήτων πρώτης τάξης και δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\boldsymbol{\Phi(u,v,z;t) = Re\{\varphi(u,v,z)e^{-i\omega t}} \tag{3.4}$$

όπου *φ* είναι η μιγαδική έκφραση του δυναμικού, ενώ όπου *Re* υποδεικνύει το πραγματικό μέρος του δυναμικού.

Το δυναμικό ταχυτήτων πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace* παντού σε όλο το πεδίο του ρευστού, άρα:

$$\boldsymbol{\nabla^2\varphi = 0} \tag{3.5}$$

Η κινηματική συνθήκη στον πυθμένα είναι η εξής:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \tag{3.6}$$

Η γραμμικοποιημένη συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια είναι:

$$\left(-\frac{\omega^2}{g}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=h} = 0 \tag{3.7}$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Το δυναμικό ταχύτητας πρέπει επίσης να ικανοποιεί την κινηματική συνθήκη στην βρεχόμενη επιφάνεια όλων των σωμάτων:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{u=u_0} = 0, \quad \mu\varepsilon\ 0 \le z \le h \tag{3.8}$$

όπου u_0 είναι το ακτινικό όριο για κάθε σώμα σε σχέση με το εκάστοτε τοπικό ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων.

Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας το δυναμικό ταχυτήτων μπορεί να εκφραστεί ως υπέρθεση του δυναμικού πρόσπτωσης κυματισμούφ_I και του ολικού δυναμικού περίθλασης φ_D, το οποίο περιλαμβάνει τον διασκορπισμό των κυματισμών από όλα τα σώματα (λόγω της παρουσίας τους). Οπότε το συνολικό δυναμικό ταχυτήτων μπορεί να γραφτεί ως:

$$\varphi = \varphi_I + \varphi_D \tag{3.9}$$

Το συνολικό δυναμικό περίθλασης πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις (3.5-3.7) και την κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο, η οποία σε ελλειπτικές συντεταγμένες εκφράζεται ως:

$$\lim_{u\to\infty}(c\ cosh u)^{1/2}\left\{\frac{1}{c\ sinh u}\frac{\partial}{\partial u} - ik_0\right\}\varphi_D = 0 \tag{3.10}$$

όπου k_0, είναι ο αριθμός κύματος που δίνεται από την εξίσωση διασποράς:

$$\omega^2 = gk_0\tanh(k_0h) \tag{3.11}$$

3.1. Δυναμικό πρόσπτωσης κυματισμού

Το υδροδυναμικό πρόβλημα με το οποίο σχετίζεται η εν λόγω εργασία αφορά συστοιχία ελλειπτικών κυλινδρικών σωμάτων που είναι τοποθετημένοι παράλληλα μεταξύ τους και άλλους 2, οι οποίοι βρίσκονται σε σταθερή θέση για την δημιουργία ενός τεχνητού καναλιού (Πίνακας 3.3, 3.4). Για το λόγο αυτό είναι πιο ορθό το πρόβλημα να εκφραστεί με βάσει τις συντεταγμένες του ενός σώματος που είναι τοποθετημένο σε σταθερή θέση (EllCyl1). Έστω (x_j, y_j, z) είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες οποιοδήποτε σημείου στο πεδίο αναφοράς με βάσει το σταθερό σώμα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων για το σώμα j, τότε το δυναμικό του προσπίπτων κυματισμού θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\boldsymbol{\varphi_I = -\frac{ig}{\omega}\frac{H}{2}\frac{Z_0(z)}{Z_0(h)}\Lambda_j e^{ik_0(\,x_j\,cosa+y_j\,sina)}} \qquad (\mathbf{3.12})$$

όπου$Z_0(z)$ είναι η ορθοκανονική συνάρτηση στο διάστημα $[0,h]$ και ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{Z_0(z) = N_0^{-\frac{1}{2}}\,cosh(k_0 z)} \qquad (\mathbf{3.13})$$

$$\boldsymbol{N_0 = \frac{1}{2}\left[1+\frac{\sinh(k_0 h)}{2k_0 h}\right]} \qquad (\mathbf{3.14})$$

$$\boldsymbol{\Lambda_j = e^{ik_0(\,X_j cosa+Y_j sina)}} \qquad (\mathbf{3.15})$$

όπου X_j, Y_j αποτελούν τις καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου του σώματοςj(EllCyl1) με βάσει το παγκόσμιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Η έκφραση του δυναμικού του προσπίπτων κυματισμού σε όρους ελλειπτικού συστήματος συντεταγμένων βάσει του σώματος j είναι η εξής:

$$\boldsymbol{\varphi_I = -\frac{ig}{\omega}\frac{H}{2}\frac{Z_0(z)}{Z_0(h)}\Lambda_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} sgn(m) i^m M_m^{(1)}\left(u_j; q_j\right) me_m(v_j; q_j)\, me_m(a; q_j)} \qquad (\mathbf{3.16})$$

όπου $q_j = (k_0 a_j \varepsilon_j/2)^2$ η παράμετρος *Mathieu*, $me_m(v_j; q_j)$ η περιοδική εξίσωση Mathieu, $M_m^{(1)}(u_j; q_j)$ η ακτινική εξίσωση Mathieu πρώτης τάξης, a_j ο μεγάλος ημιάξονας και ε_j η εκκεντρότητα των ελλειπτικών κυλίνδρων j(όπου j=1,2,3,4 υποδεικνύει τον εκάστοτε ελλειπτικό κύλινδρο αναφοράς).

Η μετατροπή των απλών και τροποποιημένων εξισώσεων Mathieu σε άρτιες και περιττές περιοδικές εξισώσεις Mathieu αλλά και αντίστοιχα στις άρτιες και περιττές ακτινικές εξισώσεις Mathieu, επιτεύχθηκε μέσω των παρακάτω εξισώσεων, αξιοποιώντας την μέθοδο των Abramowitz και Stegun.

$$\boldsymbol{ce_m(v,q) = 2^{-\frac{1}{2}} me_m(v,q) \qquad (m = 0, 1, 2, \dots)} \qquad (\mathbf{3.17})$$

$$\boldsymbol{se_m(v,q) = i2^{-\frac{1}{2}} me_{-m}(v,q) \qquad (m = 1, 2, 3, \dots)} \qquad (\mathbf{3.18})$$

$$\boldsymbol{M_m^{(j)}(u;q) = Mc_m^{(j)}(u;q) \qquad (m = 0, 1, 2, \dots)} \qquad (\mathbf{3.19})$$

$$\boldsymbol{(-1)^m M_{-m}^{(j)}(u;q) = Ms_m^{(j)}(u;q) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)} \qquad (\mathbf{3.20})$$

Στις εξισώσεις 3.19 και 3.20 ο δείκτης j υποδεικνύει την τάξη των ακτινικών εξισώσεων Mathieu. Χρησιμοποιώντας και ενσωματώνοντας τις εξισώσεις 3.17 έως 3.20 στην εξίσωση (3.16) το δυναμικό πρόσπτωσης κυματισμού θα γίνει:

$$\boldsymbol{\varphi_I = -\frac{ig}{\omega}\frac{H}{2}\frac{Z_0(z)}{Z_0(h)}\Lambda_j\left\{\sum_{m=0}^{\infty} 2i^m Mc_m^{(1)}(u_j;q_j)ce_m(v_j;q_j)ce_m(a;q_j)\right.}$$

$$\boldsymbol{\left.+\sum_{m=1}^{\infty} 2i^m Ms_m^{(1)}(u_j;q_j)se_m(v_j;q_j)se_m(a;q_j)\right\}} \qquad (\mathbf{3.21})$$

Στην εξίσωση 3.21 παρουσιάζεται το κυματικό δυναμικό πρόσπτωσης με βάσει το τοπικό ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων του επιλεγμένου σώματος j. Εξαιτίας της συνθήκης που απαιτεί την ταχύτητα στην βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος j να είναι ίση με μηδέν, το συνολικό δυναμικό περίθλασης λόγω της σκέδασης των κυμάτων από όλα τα σώματα πρέπει να εκφράζεται σε σχέση με το ίδιο σύστημα συντεταγμένων και ιδιαίτερα σε σχέση με το τοπικό ελλειπτικό σύστημα του σώματος j. Η επίτευξη της συγκεκριμένης προαπαίτησης πραγματοποιήθηκε, μέσω της ανάλυσης που θα περιγραφτεί στο επόμενο εδάφιο.

3.2. Συνολικό δυναμικό περίθλασης

Το ολικό δυναμικό περίθλασης γύρω από τα ελλειπτικά κυλινδρικά σώματα j, πρέπει να περιέχει την συνισταμένη των δυναμικών περίθλασης που προκύπτουν κατά την διάρκεια της διασκόρπισης του προσπίπτων κυματισμού από όλα τα σώματα, τα οποία απαρτίζουν την παράταξη. Ως αποτέλεσμα αυτής της βασικής προϋπόθεσης προκύπτει ότι το συνολικό δυναμικό περίθλασης για τους ελλειπτικούς κυλίνδρους θα αναπαριστάται από την εξής εξίσωση:

$$\boldsymbol{\varphi_D = \sum_{j=1}^{N} \varphi_D^{(j)}} \qquad (\mathbf{3.22})$$

όπου N ο αριθμός των ελλειπτικών κυλίνδρων που χρησιμοποιήθηκαν για την εκάστοτε διάταξη μελέτης.

Το δυναμικό περίθλασης γύρω από κάθε ελλειπτικό κύλινδρο στην διάταξη των 3 και 4 σωμάτων συμβολίζεται με $\varphi_D^{(j)}$, το οποίο πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις 3.5-3.7 καθώς και την συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο (Εξίσωση 3.10). Η αναπαράσταση του δυναμικού περίθλασης σε ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων για κάθε ελλειπτικό κύλινδρο j μπορεί να εκφραστεί σε όρους των εξισώσεων *Mathieu* και των τροποποιημένων εξισώσεων *Mathieu* ως:

$$\boldsymbol{\frac{1}{h}\varphi_D^{(j)}(u_j,v_j,z) = -i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m^{(j)}\, M_m^{(3)}(u_j;q_j)\, me_m(v_j;q_j)} \qquad (\mathbf{3.23})$$

όπου$F_m^{(j)}$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές (άρτιοι και περιττοί), οι οποίοι ισχύουν όταν η συνοριακή συνθήκη της ταχύτητας στην βρεχόμενη επιφάνεια όλων των σωμάτων ισούται με μηδέν και $M_m^{(3)}(u_j;q_j)$, είναιη τροποποιημένη εξίσωση *Mathieu* τρίτης τάξης, η οποία ισούται με το άθροισμα των τροποποιημένων εξισώσεων πρώτης και δεύτερης τάξης *Mathieu* (συνήθως αναφέρονται και ως ακτινικές εξισώσεις *Mathieu*):

$$\boldsymbol{M_m^{(3)}(u_j;q_j)\, me_m = M_m^{(1)}(u_j;q_j) + iM_m^{(2)}(u_j;q_j)} \qquad (\mathbf{3.24})$$

Χρησιμοποιώντας και ενσωματώνοντας τις εξισώσεις (3.17)-(3.20) στην εξίσωση (3.23) και αντικαθιστώντας τους άγνωστους συντελεστές $F_m^{(j)}$ με $\tilde{A}_m^{(j)}$ και $\tilde{B}_m^{(j)}$το δυναμικό περίθλασης για κάθε ελλειπτικό κύλινδρο j θα ισούται με:

$$\frac{1}{h}\varphi_D^{(j)} = -i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{A}_m^{(j)}Mc_m^{(3)}(u_j;q_j)ce_m(v_j;q_j)\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{B}_m^{(j)}Ms_m^{(3)}(u_j;q_j)se_m(v_j;q_j)\right\} \tag{3.25}$$

Για ευκολία στους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε η εξής μορφή του δυναμικού περίθλασης:

$$\frac{1}{h}\varphi_D^{(j)} = -i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\left\{\sum_{m=0}^{\infty}i^m\tilde{A}_m^{(j)}Kc_m^{(j)}\,Mc_m^{(3)}(u_j;q_j)ce_m(v_j;q_j)\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}i^m\tilde{B}_m^{(j)}Ks_m^{(j)}Ms_m^{(3)}(u_j;q_j)se_m(v_j;q_j)\right\} \tag{3.26}$$

όπου $Kc_m^{(j)}$ και $Ks_m^{(j)}$ είναι βοηθητικοί όροι και δίνονται από τις εξής σχέσεις (Χατζηγεωργίου και Μαυράκος, 2010):

$$Kc_m^{(j)} = \frac{Mc_m^{(1)\prime}(u_{j0};q_{j0})}{Mc_m^{(3)\prime}(u_{j0};q_{j0})} \tag{3.27}$$

$$Ks_m^{(j)} = \frac{Ms_m^{(1)\prime}(u_{j0};q_{j0})}{Ms_m^{(3)\prime}(u_{j0};q_{j0})} \tag{3.28}$$

Οι παραπάνω σχέσεις δηλώνουν διαφοροποίηση σε σχέση με την μεταβλητή των συσχετισμένων εξισώσεων Mathieu, ενώ όπου u_{j0} είναι το ακτινικό όριο του σώματος *j* σε σχέση με το τοπικό ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων. Από την εξίσωση 3.22 και μέσω της υπέρθεσης του διασκορπιζόμενου κυματικού πεδίου γύρω από κάθε σώμα (Εξίσωση 3.26), προκύπτει ότι το συνολικό κυματικό πεδίο λόγω περίθλασης γύρω από όλα τα κυλινδρικά σώματα *j* μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\frac{1}{h}\varphi_D = -i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\sum_{m=0}^{\infty}i^m\tilde{A}_m^{(j)}Kc_m^{(j)}\,Mc_m^{(3)}(u_j;q_j)ce_m(v_j;q_j)$$

$$-i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\sum_{m=1}^{\infty}i^m\tilde{B}_m^{(j)}Ks_m^{(j)}\,Ms_m^{(3)}(u_j;q_j)se_m(v_j;q_j)$$

$$-i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\sum_{j\neq k}^{N}\sum_{m=0}^{\infty}i^m\tilde{A}_m^{(k)}Kc_m^{(k)}\,Mc_m^{(3)}(u_k;q_k)ce_m(v_k;q_k)$$

$$-i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\sum_{j\neq k}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}i^m\tilde{B}_m^{(k)}Ks_m^{(k)}\,Ms_m^{(3)}(u_k;q_k)se_m(v_k;q_k) \tag{3.29}$$

Η έκφραση του συνολικού δυναμικού περίθλασης πραγματοποιήθηκε όπως και στη περίπτωση του δυναμικού πρόσπτωσης με βάσει το τοπικό ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων του σώματος*j*. Μέσω αυτής της διαδικασίας τα παράγωγα των εξισώσεων Mathieu στους δύο τελευταίους όρους της εξίσωσης 3.29, θα εκφράζουν το δυναμικό περίθλασης του σώματος *k* σε σχέση με το αντίστοιχο τοπικό ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων του (u_k, v_k, z), το οποίο θα πρέπει να παραχθεί αναφορικά με το τοπικό ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων του σώματος *j*. Η έκφραση του δυναμικού περίθλασης του σώματος *k* με βάσει το τοπικό ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων του σώματος *j* πραγματοποιείται μέσω της χρήσης του προσθετικού θεωρήματος των εξισώσεων Mathieu.

3.3. Προσθετικό θεώρημα για τις εξισώσεις Mathieu

Ο Særmark το 1959 απέδειξε την ύπαρξη του προσθετικού θεωρήματος για τις εξισώσεις Mathieu επεκτείνοντας την μέθοδο που είχε δημοσιευτεί από τους Meixner και Schäfke (1954) σε όρους των συναρτήσεων Bessel. Για την ακρίβεια ο Særmark απέδειξε ότι το προσθετικό θεώρημα για τις εξισώσεις Mathieu μπορεί να περιγραφτεί μέσω της ακόλουθης σχέσης (βάσει της γεωμετρίας των σωμάτων που έχει επιλεχτεί στη συγκεκριμένη εργασία):

$$\boldsymbol{M_m^{(l)}(u_k;q_k)\, me_m(v_k;q_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{n,m}^{(l)}\; M_n^{(1)}(u_j;q_j) me_n(v_j;q_j)} \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{Q_{n,m}^{(l)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} d'_{n-p,p}\,(q_j) Z_{p-s}^{(l)}(j_0 R_{jk}) d_{s-m,m}(q_k) e^{i(s-p)\psi_{jk}} e^{-is(\beta_k-\beta_j)}} \tag{3.31}$$

$$\boldsymbol{Z_m^{(l)}(j_0 R_{jk}) = \begin{cases} J_m(j_0 R_{jk}), & l=1 \\ Y_m(j_0 R_{jk}), & l=2 \\ H_m^{(1)}(j_0 R_{jk}), & l=3 \\ H_m^{(2)}(j_0 R_{jk}), & l=4 \end{cases}} \tag{3.32}$$

όπου J_m, Y_m είναι οι εξισώσεις Bessel πρώτης και δεύτερης τάξης,$H_m^{(1)}$, $H_m^{(2)}$ είναι οι εξισώσεις Hankel πρώτης και δεύτερης τάξης αντίστοιχα,$d'_{n-p,p}(q), d_{s-m,m}(q)$ αποτελούν συντελεστές, οι οποίοι δίνονται ως μιγαδικές επεκτάσεις των συντελεστών C των περιοδικών εξισώσεων Mathieu (Meixner & Schäfke, 1954;Særmark 1959).

$$\boldsymbol{H_m^{(1)} = J_m + iY_m} \tag{3.33}$$

$$\boldsymbol{H_m^{(2)} = J_m - iY_m} \tag{3.34}$$

$$\boldsymbol{me_m(v;q) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{2s}^m(q) e^{i(m+2s)v}} \tag{3.35}$$

Σύμφωνα με τους Meixner και Schäfke (1954) έχουμε:

$$\boldsymbol{d_{2s,m}(q) = (-1)^s C_{2s}^m(q), \qquad d_{2s+1,m}(q) = 0} \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{d'_{2n,p}(q) = (-1)^n C_{-2n}^{p+2n}(q), \qquad d'_{2n+1,p}(q) = 0} \tag{3.37}$$

Επειδή το δυναμικό περίθλασης έχει εκφραστεί σε άρτιους και περιττούς όρους περιοδικών και ακτινικών εξισώσεων, κρίθηκε ως ορθό για υπολογιστικούς λόγους να πραγματοποιηθεί αντικατάσταση των όρων d και d' από τους συντελεστές A και B που σχετίζονται με τις άρτιες και περιοδικές εξισώσεις Mathieu. Έπειτα από μαθηματικούς υπολογισμούς οι συντελεστές d και d' της εξίσωσης 3.31 μπορούν να αποδοθούν ως:

$$\boldsymbol{d'_{n-p,p}(q) = 2^{-1/2}(-1)^{(n-p)/2} A_p^n(q) \qquad (n = 0,1,2,\dots)} \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{d'_{-n-p,p}(q) = -2^{-1/2}(-1)^{(-n-p)/2} B_p^n(q) \qquad (n = 1,2,3,\dots)} \tag{3.39}$$

$$\boldsymbol{d'_{2n,0}(q) = 2^{1/2}(-1)^n A_0^{2n}(q) p = 0} \tag{3.40}$$

$$\boldsymbol{d_{s-m,m}(q) = 2^{-\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{s-m}{2}} A_s^m(q) \quad (m = 0,1,2,\dots)} \tag{3.41}$$

$$\boldsymbol{d_{s+m,-m}(q) = -2^{-1/2}(-1)^{(s+m)/2} B_s^m(q) (m = 1,2,3,\dots)} \tag{3.42}$$

$$\boldsymbol{d_{-2m,2m}(q) = 2^{1/2}(-1)^{-m} A_0^{2m}(q) s = 0} \tag{3.43}$$

Με τον βασικό περιορισμό ότι το αποτέλεσμα των διαφορών *n-p* και *s-m* είναι και στις δύο περιπτώσεις άρτιο, σε κάθε άλλη περίπτωση οι συντελεστές *d* και *d* είναι ίσοι με μηδέν. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την μετατροπή των απλών και τροποποιημένων εξισώσεων Mathieu σε άρτιες και περιττές περιοδικές εξισώσεις Mathieu αλλά και αντίστοιχα στις άρτιες και περιττές ακτινικές εξισώσεις Mathieu (3.17-3.20) μπορούν να εισαχθούν στην Εξίσωση 3.30 και έπειτα στην εξίσωση που αναπαριστά το συνολικό δυναμικό περίθλασης (Εξίσωση 3.29), η οποία μετά από εκτενείς μαθηματικούς υπολογισμούς παίρνει την εξής μορφή:

$$\frac{1}{h}\varphi_D = -i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\sum_{m=0}^{\infty} i^m \tilde{A}_m^{(j)} Kc_m^{(j)}\, Mc_m^{(3)}(u_j;q_j)ce_m(v_j;q_j)$$

$$-i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\sum_{m=1}^{\infty} i^m \tilde{B}_m^{(j)} Ks_m^{(j)}\, Ms_m^{(3)}(u_j;q_j)se_m(v_j;q_j)$$

$$-i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\sum_{j\neq k}^{N}\sum_{m=0}^{\infty} i^m \tilde{A}_m^{(k)} Kc_m^{(k)}\left[\sum_{r=0}^{\infty} Q_{r,m}^{(3)}\, Mc_r^{(1)}(u_j;q_j)ce_r(v_j;q_j)\right.$$

$$\left.-i\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{-r} Q_{-r,m}^{(3)} Ms_r^{(1)}(u_j;q_j)se_r(v_j;q_j)\right] - i\omega\frac{H}{2}Z_0(z)\sum_{j\neq k}^{N}\sum_{m=1}^{\infty} i^m \tilde{B}_m^{(k)} Ks_m^{(k)}$$

$$\times\left[\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{m-r}\, Q_{-r,-m}^{(3)}\, Ms_r^{(1)}(u_j;q_j)se_r(v_j;q_j)\right.$$

$$\left.+i\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^m Q_{r,-m}^{(3)} Mc_r^{(1)}(u_j;q_j)ce_r(v_j;q_j)\right] \qquad (3.44)$$

Στην εξίσωση 3.44 παρουσιάζεται το συνολικό δυναμικό περίθλασης σε σχέση με το τοπικό ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων του σώματος j που έχει επιλεχτεί. Η μηδενική συνθήκη της ταχύτητας στην βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος j προϋποθέτει ότι:

$$\left(\frac{\partial\varphi_D}{\partial u_j}+\frac{\partial\varphi_I}{\partial u_j}\right) = 0, \quad \textit{στο σημείο} \quad u_j = u_{j0} \qquad (3.45)$$

Αρχικά πραγματοποιήθηκε η εισαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν το δυναμικό πρόσπτωσης των μονοχρωματικών κυματισμών στους ελλειπτικούς κυλίνδρους (Εξίσωση 3.21) και του συνολικού δυναμικού περίθλασης του κυματικού πεδίου λόγω της παρουσίας των σωμάτων (Εξίσωση 3.44) στην εξίσωση 3.45, έπειτα ακολούθησε ο διαχωρισμός των άρτιων και περιττών όρων και εξισώνοντας την ίδια τάξη των $ce_m(v_j;q_j)$και $se_m(v_j;q_j)$ σε άρτια και περιττά παράγωγα έτσι ώστε να προκύψουν οι εξής σχέσεις:

$$\tilde{A}_m^{(j)} + \sum_{j\neq k}^{N}\sum_{r=0}^{\infty} i^{r-m}\tilde{A}_r^{(k)} Kc_r^{(k)} Q_{m,r}^{(3)} + i\sum_{j\neq k}^{N}\sum_{r=1}^{\infty} i^{r-m}(-1)^r\, \tilde{B}_r^{(k)} \times Ks_r^{(k)} Q_{m,-r}^{(3)}$$

$$= -2\frac{g}{\omega^2 h}\frac{1}{Z_0(h)}\Lambda_j ce_m(a;q_j) \qquad (3.46)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{m}}^{(j)} - \boldsymbol{i}\sum_{\boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}}^{\infty}\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m}}(-\boldsymbol{1})^{-\boldsymbol{m}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{k})}\boldsymbol{K}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{k})}\boldsymbol{Q}_{-\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{3})} + \sum_{\boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{1}}^{\infty}\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m}}(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m}}\,\widetilde{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{k})}\boldsymbol{K}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{k})}\boldsymbol{Q}_{-\boldsymbol{m},-\boldsymbol{r}}^{(\boldsymbol{3})}$$

$$= -\boldsymbol{2}\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{h}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{h})}\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{se}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{j}}) \qquad (\boldsymbol{3.47})$$

Οι εξισώσεις 3.46 και 3.47 αποτελούν ένα άπειρο γραμμικό σύστημα και λόγω της δυσκολίας επίλυσης του πρέπει να γίνουν κάποιες βασικές θεωρήσεις για την απλούστευση του και της περικοπής του σε ένα πεπερασμένο σύνθετο γραμμικό σύστημα, έτσι ώστε να επιτευχθεί η λύση του σε μορφή πίνακα με ορισμένο αριθμό στοιχείων. Υποθέτοντας N τον αριθμό των σωμάτων στην εκάστοτε διάταξη, οι εν λόγω εξισώσεις μπορούν να περικοπούν, έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα σύνθετο γραμμικό σύστημα$(2\cdot(M+1)\cdot N)\times 1$ διαστάσεων σε όρους των άγνωστων συντελεστών $\tilde{A}_m^{(j)}$ και $\tilde{B}_m^{(j)}$, όπου M είναι ο αριθμός των συντελεστών που λαμβάνονται υπόψη για την επίλυση του συστήματος. Πρέπει να αναφερθεί ότι για την κατασκευή του συγκεκριμένου συστήματος, έχει οριστεί από την αρχή ότι ο συντελεστής $\tilde{B}_m^{(j)}$ καθώς και το δεύτερο μέρος της εξίσωση 3.47 θεωρούνται ως μηδενικοί όροι. Στη συνέχεια και μετά τον υπολογισμό των δύο συντελεστών το συνολικό δυναμικό ταχύτητας θα δίνεται από την άθροιση των δυναμικών ταχύτητας πρόσπτωσης και περίθλασης των κυμάτων, που έχουν προκύψει λόγω της παρουσίας των σωμάτων και θα εκφράζονται σε σχέση με το τοπικό ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων του σώματος j.Μέσω της χρήσης και ενσωμάτωσης των εξισώσεων 3.21 και 3.44 στις εξισώσεις 3.46 και 3.47 από την λύση που προέκυψε από την λύση του συστήματος που προαναφέρθηκε το συνολικό δυναμικό θα δίνεται από την εξής σχέση:

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{j}},\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{j}},\boldsymbol{z}) =$$

$$= -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{z})\left\{\sum_{\boldsymbol{m}=\boldsymbol{0}}^{\infty}\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{m}}\,\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m}}^{(\boldsymbol{j})}\boldsymbol{ce}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{j}};\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{j}})\left[\boldsymbol{K}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{m}}^{(\boldsymbol{j})}\boldsymbol{M}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{m}}^{(\boldsymbol{3})}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{j}};\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{j}}) - \boldsymbol{M}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{m}}^{(\boldsymbol{1})}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{j}};\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{j}})\right]\right.$$

$$\left. + \sum_{\boldsymbol{m}=\boldsymbol{1}}^{\infty}\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{m}}\widetilde{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{m}}^{(\boldsymbol{j})}\boldsymbol{se}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{j}};\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{j}})\left[\boldsymbol{K}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{m}}^{(\boldsymbol{j})}\boldsymbol{M}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{m}}^{(\boldsymbol{3})}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{j}};\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{j}}) - \boldsymbol{M}\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{m}}^{(\boldsymbol{1})}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{j}};\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{j}})\right]\right\} \qquad (\boldsymbol{3.48})$$

3.4. Μετατροπή του άπειρου γραμμικού συστήματος σε σύνθετο γραμμικό σύστημα των άρτιων και περιττών συντελεστών

Η κύρια δυσκολία της επίλυσης του συγκεκριμένου άπειρου γραμμικού συστήματος προκύπτει από την ταυτόχρονη παρουσία άρτιων και περιττών συντελεστών στις εξισώσεις. Η λύση του προϋποθέτει την απλοποίηση των εξισώσεων, οι οποίες μετά από την διαχώριση τους θα πρέπει να παρουσιαστούν από ένα απλό γραμμικό περικεκομμένο σύστημα, το οποίο θα έχει την εξής μορφή:

$$[\boldsymbol{C}]\{\boldsymbol{A}\} = \{\boldsymbol{F}\} \tag{3.49}$$

όπου, $[C]$ αποτελεί ένα τετραγωνικό πίνακα διαστάσεων $(2\cdot(M+1)\cdot N)\times(2\cdot(M+1)\cdot N)$, ενώ {A} και {F}είναι δύο σύνθετα διανύσματα διαστάσεων $(2\cdot(M+1)\cdot N)\times 1$.

Για να επιτευχθεί η διεργασία χρησιμοποιήθηκε μια ολοκληρωμένη αναπαράσταση των εξισώσεων 3.46 και 3.47. Αρχικά πραγματοποιήθηκε η αντικατάσταση των συντελεστών $\tilde{A}_m^{(j)}$ και $\tilde{B}_m^{(j)}$ από τους συντελεστές $\tilde{A}_{m1}^{(j)}$ και $\tilde{A}_{m2}^{(j)}$, με αποτέλεσμα οι εξισώσεις 3.46 και 3.47 να γράφονται ως :

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m1}}^{(\boldsymbol{j})} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{r=0}}^{\infty} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m,r,(1,1)}}^{(\boldsymbol{k}),(\boldsymbol{j})}\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{r1}}^{(\boldsymbol{k})} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{r=0}}^{\infty} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m,r,(1,2)}}^{(\boldsymbol{k}),(\boldsymbol{j})}\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{r2}}^{(\boldsymbol{k})} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{m1}}^{(\boldsymbol{j})} \tag{3.50}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{m2}}^{(\boldsymbol{j})} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{r=0}}^{\infty} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m,r,(2,1)}}^{(\boldsymbol{k}),(\boldsymbol{j})}\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{r1}}^{(\boldsymbol{k})} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{r=0}}^{\infty} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m,r,(2,2)}}^{(\boldsymbol{k}),(\boldsymbol{j})}\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{r2}}^{(\boldsymbol{k})} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{m2}}^{(\boldsymbol{j})} \tag{3.51}$$

όπου,

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{m1}}^{(\boldsymbol{j})} = -\boldsymbol{2}\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{\omega^2 h}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{Z_0(h)}}\boldsymbol{\Lambda_j ce_m(a;q_j)} \tag{3.52}$$

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{m2}}^{(\boldsymbol{j})} = -\boldsymbol{2}\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{\omega^2 h}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{Z_0(h)}}\boldsymbol{\Lambda_j se_m(a;q_j)\,(1-\delta_{0m})} \tag{3.53}$$

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m,r,(1,1)}}^{(\boldsymbol{k}),(\boldsymbol{j})} = \boldsymbol{(1-\delta_{kj})i^{r-m}Kc_r^{(k)}Q_{m,r}^{(3)}} \tag{3.54}$$

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m,r,(1,2)}}^{(\boldsymbol{k}),(\boldsymbol{j})} = \boldsymbol{(1-\delta_{kj})(1-\delta_{0r})i^{r-m+1}(-1)^r Ks_r^{(k)}Q_{m,-r}^{(3)}} \tag{3.55}$$

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m,r,(2,1)}}^{(\boldsymbol{k}),(\boldsymbol{j})} = \boldsymbol{-(1-\delta_{kj})i^{r-m+1}(-1)^{-m}Kc_r^{(k)}Q_{-m,r}^{(3)}} \tag{3.56}$$

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m,r,(2,2)}}^{(\boldsymbol{k}),(\boldsymbol{j})} = \boldsymbol{(1-\delta_{kj})(1-\delta_{0r})i^{r-m}(-1)^{r-m}Ks_r^{(k)}Q_{-m,-r}^{(3)}} \tag{3.57}$$

$$\boldsymbol{\delta_{kj}} = \begin{cases}\boldsymbol{1}, & \boldsymbol{k=j}\\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{k\neq j}\end{cases}\ \boldsymbol{\delta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\alpha\ \tau o\nu\ Kronecker} \tag{3.58}$$

Η εισαγωγή των όρων δ_{0m} και δ_{0r} στις εξισώσεις 3.53, 3.55 και 3.57, παρέχει ότι αυτοί οι όροι είναι επιλεγμένοι και ίσοι με το μηδέν και δεν υπολογίζονται κατά την αριθμητική επεξεργασία, καθώς δεν υπάρχουν οι όροι μηδενικής τάξης των περιττών εξισώσεων Mathieu. Μέσω της χρησιμοποίησης των εξισώσεων 3.52-3.58,στις εξισώσεις 3.52 και ,3.53 και της συνένωσης τους προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{r=0}}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p=1}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{\delta_{kj}\delta_{rm}\delta_{pl}}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{rp}}^{(\boldsymbol{k})} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{r=0}}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p=1}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m,r,(l,p)}}^{(\boldsymbol{k}),(\boldsymbol{j})}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{rp}}^{(\boldsymbol{k})} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{ml}}^{(\boldsymbol{j})} \tag{3.59}$$

Η εξίσωση 3.59 μπορεί να θεωρηθεί ως η διευρυμένη μορφή του πίνακα που παρουσιάστηκε στην εξίσωση 3.49. Ο τύπος μετασχηματισμού από την εξίσωση 3.59 →3.49, δηλαδή από $j, k = 1 \div N$, $r, m = 0 \div M$ και $p, l = 1 \div 2$ σε $1 \div (2 \cdot (M + 1) \cdot N)$ επιτεύχθηκε θέτοντας όπου $s = 2\cdot[(k-1)\cdot(M+1)+m]+l$ και $\mu = 2 \cdot [(j-1) \cdot (M + 1) + r] + p$ όπου s και μ δηλώνουν τα στοιχεία στις σειρές και τις στήλες του πίνακα $[C]$ και των διανυσμάτων $\{A\}$ και $\{F\}$ της εξίσωσης 3.49.

Η γενική έκφραση των εξισώσεων που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των υδροδυναμικών δυνάμεων κατά τους άξονες x και y και των ροπών στους άξονες x,y,z (ο υπολογισμός των ροπών πραγματοποιούνται γύρω από το σημείο $z_0 = h$) για τους ελλειπτικούς κυλίνδρους που βρίσκονται σε τεχνητά σχηματιζόμενο κανάλι είναι οι ακόλουθες:

$$\boldsymbol{F_x^{(j)} = -i\omega\rho b_j \int_0^h \int_0^{2\pi} \varphi(u_{jo}, v_j, z) \cos v_j \, dv_j \, dz} \qquad (\mathbf{3.60})$$

$$\boldsymbol{F_y^{(j)} = -i\omega\rho a_j \int_0^h \int_0^{2\pi} \varphi(u_{jo}, v_j, z) \sin v_j \, dv_j \, dz} \qquad (\mathbf{3.61})$$

$$\boldsymbol{M_x^{(j)} = -\frac{1}{2} i\omega\rho \, a_j \int_0^h \int_0^{2\pi} \varphi(u_{jo}, v_j, z) \, (z - z_0) \sin v_j \, dv_j \, dz} \qquad (\mathbf{3.62})$$

$$\boldsymbol{M_y^{(j)} = -\frac{1}{2} i\omega\rho b_j \int_0^h \int_0^{2\pi} \varphi(u_{jo}, v_j, z) \, (z - z_0) \cos v_j \, dv_j \, dz} \qquad (\mathbf{3.63})$$

$$\boldsymbol{M_z^{(j)} = -i\omega\rho \frac{c^2}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \varphi(u_{jo}, v_j, z) \, \sin 2v_j \, dv_j \, dz} \qquad (\mathbf{3.64})$$

4. Υδροδυναμικές Φορτίσεις και Ροπές για διαφορετικές θέσεις και γωνίες τοποθέτησης (beta) ελλειπτικού κυλίνδρου σε κανάλι

Στις ενότητες 4.1,4.2,4.3 παρουσιάζονται οι υδροδυναμικές φορτίσεις και ροπές για ελλειπτικό κύλινδρο σε κανάλι για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης του σώματος (0°,45°,90°) και σε 6 διαφορετικές θέσεις του κυλίνδρου κατά τον άξονα *y*. Στο σχήμα 4.1 παρουσιάζονται οι καμπύλες των αδιάστατων οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης κατά τον άξονα *x* σε σχέση με τις αδιάστατες τιμές του κυματαριθμού για ελλειπτικό κύλινδρο σε κανάλι με γωνία τοποθέτησης του υπό 0 μοίρες. Επιλέχτηκαν έξι διαφορετικές θέσεις του κυλίνδρου εντός του καναλιού κατά την διάρκεια της εύρεσης των υδροδυναμικών φορτίσεων. Στη τιμή του *ka*=0.1 σηματοδοτείται η έναρξη διάδοσης του θαλάσσιου κυματισμού στο κανάλι και της επαφής (πρόσπτωσης) του με το σώμα για όλες τις εξεταζόμενες θέσεις. Είναι διακριτό πως όλες οι καμπύλες του γραφήματος 4.1 εμφάνισαν παρά πολύ μικρές διαφορές, το οποίο υποδεικνύει πως η μετατόπιση του κυλίνδρου κατά *y* δεν επηρεάζει τα επίπεδα αλληλεπίδρασης του σώματος με τον κυματισμό κατά τον άξονα *x* στο μεγαλύτερο εύρος των κυματικών συχνοτήτων, αφού δεν παρατηρείται ούτε σημαντική μείωση αλλά ούτε και σημαντική αύξηση στις τιμές των δυνάμεων διέγερσης. Για τις δύο μακρινότερες θέσεις ((0,4), (0,5)) του ελλειπτικού κυλίνδρου καταγράφηκαν κάποιες διαφοροποιήσεις σε σύγκριση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις, και συγκεκριμένα για τιμές του *ka* από 0.1 έως 1.1, στις οποίες η φόρτιση που δέχτηκε το ελλειπτικό σώμα είναι κατά ένα μικρό ποσοστό ασθενέστερη σε σύγκριση με τις υπόλοιπες θέσεις. Για τιμές του *ka* μεγαλύτερες από 0.1 η οριζόντια δύναμη διέγερσης (surge) στον ελλειπτικό κύλινδρο ακολουθεί μια αυξητική τάση, με τις μέγιστες τιμές των δυνάμεων να εμφανίζονται στο εύρος για $0.981 \leq ka \leq 1.026$. Το αντίστοιχο εύρος των δυνάμεων βρέθηκε για τιμές του *Fx* από 1.089 έως 1.099. Στο συγκεκριμένο εύρος των τιμών του κυματαριθμού η αυξητική τάση των φορτίσεων υποδεικνύει και το χωρικό διάστημα κύριας δράσης του κυματισμού και συνεπώς και της αλληλεπίδρασης με το σώμα. Εκτός της θέσης του ελλειπτικού κυλίνδρου (0,4) παρατηρήθηκε η εμφάνιση των μέγιστων φορτίσεων για διαφορετικές τοποθετήσεις του σώματος σε ίδιες κυματικές συχνότητες, αναλυτικά στις θέσεις (0,0), (0,3), (0,5) η μέγιστη φόρτιση βρέθηκε ακριβώς στην ίδια κυματική συχνότητα (*ka*=0.981), όπως και για τις θέσεις (0,1), (0,2) που η μέγιστη τιμή της δύναμης βρέθηκε για *ka*=0.994. Για τιμές του $1.0 \leq ka \leq 1.1$ οι καμπύλες εμφανίζουν μια ομαλοποίηση και σταθεροποίηση στις τιμές των υδροδυναμικών φορτίσεων, ενώ για $ka > 1.1$ η δράση του απλού αρμονικού κυματισμού στα σώματα αρχίζει να εξασθενεί προοδευτικά με ανάλογο τρόπο όπως και καταγράφηκε η αύξηση τους για τιμές του *ka* από 0.1 έως τις τιμές που τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης του κυλίνδρου με τον κυματισμό ήταν ισχυρά.

Για την οριζόντια δύναμη διέγερσης κατά τον άξονα *y* η πρώτη σημαντική μεταβολή για τον ελλειπτικό κύλινδρο παρατηρήθηκε για *ka* =0.412 και στη θέση (0,2) με την τιμή της *Fy* να είναι ίση με 0.2508, ενώ για τις υπόλοιπες θέσεις η πρώτη σημαντική αύξηση της *Fy* καταγράφηκε σε παραπλήσιες τιμές του *ka*. Αναλυτικά για τη θέση (0,1) η πρώτη αύξηση εμφανίστηκε για *ka* =0.412 με *Fy*=0.155, για την θέση (0,3) για *ka* =0.3203 με *Fy*=0.1926, ενώ στη θέση (0,4) για *ka* =0.3937 με *Fy*=0.2007 και τέλος για (0,5) στη συχνότητα 0.4304 με την τιμή της δύναμης να ισούται με 0.1576. Όπως είναι διακριτό και από το γράφημα 4.2 με την αύξηση της τιμής του *ka* έχουμε και την ανάλογη αύξηση των τιμών της δύναμης, καθώς ένα σημαντικό γεγονός που καταγράφηκε αφορά στη εμφάνιση των μέγιστων τιμών διέγερσης για το σώμα σε διαφορετικές συχνότητες για κάθε περίπτωση, το οποίο υποδεικνύει:

- ✓ αρχικά πως με την αύξηση της απόστασης του κυλίνδρου από την αρχική ορισμένη θέση (0,0) έχει ως συνέπεια την ανάλογη αύξηση των τιμών διέγερσης.
- ✓ αλλά και την μετατόπιση των μέγιστων τιμών διέγερσης σε μεγαλύτερες τιμές του *ka* με την αύξηση της απόστασης.

Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται με συνέπεια στις θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου (0,3), (0,4), (0,5), ενώ ανάμεσα των μέγιστων τιμών στις θέσεις (0,4) και (0,5) εμφανίστηκε η μέγιστη τιμή για την θέση (0,2), ενώ για τη τοποθέτηση του σώματος στη θέση (0,1) καταγράφηκε σε κοντινή συχνότητα με τη θέση (0,4). Όπως έχει περιγραφτεί και αποτυπωθεί η θέση (0,4) εμφανίζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, αφού δέχεται την μεγαλύτερη φόρτιση το σώμα στον άξονα *y* σε σχέση με τις άλλες περιπτώσεις που

μελετήθηκαν αλλά όχι τόσο ως προς την μεγάλη διαφορά στην μέγιστη τιμή, αλλά προς τη καταγραφή της απότομης μεταβολής από την τιμή του *ka*=0.6139 με τη δύναμη να ισούται με 0.4204 και το τετραπλασιασμό σχεδόν της δύναμης στη κυματική συχνότητα 0.994. Για τη θέση (0,4) βλέπουμε τη παγίδευση της ενέργειας του κυματικού πεδίου στη κυματική συχνότητα με τιμή του *ka*=1.091 με *Fy*=0.4731, δηλαδή μείωση της τάξης του 71 % σε σχέση με την τιμή για *ka*=0.994. Στην θέση (0,1) η πρώτη καταγραφή σημαντικής φόρτισης έλαβε χώρα για *ka*=0.5956 με την *Fy*=0.539, έπειτα για *ka*=0.8158 έχουμε τη δεύτερη σημαντική τιμή φόρτισης με τη δύναμη να ισούται με 0.73, ενώ για *ka*=1.018 η δύναμη είναι ίση με τη μέγιστη τιμή που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης του με το κυματισμό με *Fy*=0.837. Για *ka*=1.183 η τιμή της *Fy* αρχίζει να φθίνει, λόγω της απόσβεσης και της μη επιρροής του κύματος στο σώμα με τη δύναμη να ισούται με 0.7981, για *ka*=1.422 η *Fy* βρέθηκε ίση με 0.2178, ενώ για *ka*=1.972 εμφανίστηκε μια μικρή αύξηση (*Fy*=0.4319) της τιμής σε σχέση με την υδροδυναμικές φορτίσεις που καταγράφηκαν στο εύρος των κυματικών συχνοτήτων για *ka* από 1.18 έως 1.64. Τέλος για $2 \leq ka \leq 3$ οι φορτίσεις είναι αρκετά ασθενείς, λόγω της εξασθένισης του κυματισμού και της δράσης που είχε στο σώμα.

Στη θέση (0,2) η πρώτη σημαντική φόρτιση στον ελλειπτικό κύλινδρο καταγράφηκε για τιμή του *ka*=0.6139 με *Fy*=0.4685, ενώ με την αύξηση της τιμής της κυματικής συχνότητας και συγκεκριμένα για *ka*=0.7791 παρατηρήθηκε μείωση της ανάλογης φόρτισης της τάξης του 38% (*Fy*=0.2913), ενώ για *ka*=1.036 η φόρτιση αυξάνεται με την τιμή της *Fy* να ισούται με 0.492. Για *ka*=1.201 η τιμή της δύναμης βρέθηκε ίση με 1.126 που αποτελεί και το σημείο της μέγιστης φόρτισης του σώματος στη συγκεκριμένη θέση. Έπειτα στη τιμή του *ka*=1.366 η δύναμη μειώνεται αισθητά και βρέθηκε ίση με 0.7075, για $ka>2$ οι υδροδυναμικές φορτίσεις έχουν εξασθενήσει σε σημαντικό βαθμό και σταθεροποιούνται σε δυνάμεις κοντά στην τιμή 0.1.

Για τη τρίτη κατά σειρά τοποθέτησης του κυλίνδρου (0,3) και της εξέτασης των υδροδυναμικών φορτίσεων κατά τον άξονα *y* παρατηρείται πως η πρώτη και παράλληλα ισχυρότερη φόρτιση (μέγιστη τιμή της *Fy*) εμφανίζεται για *ka*=0.7975 και ισούται με 1.164. Για *ka*=0.981 η τιμή της Fy ισούται με 0.6596, ενώ για *ka* =1.238 η τιμή της δύναμης αντιστοιχεί στη τιμή 0.5017, με την επόμενη σημαντική φόρτιση να πραγματοποιείται για *ka*=1.403 με την Fy=0.8357, ενώ για τιμή του *ka*=1.825 η δύναμη υπολογίστηκε στη τιμή 0.4081. Τέλος για *ka* >1.9 οι φορτίσεις δεν είναι σημαντικές και δεν επηρεάζουν το σώμα. Στη τελευταία εξεταζόμενη θέση για τον ελλειπτικό κύλινδρο (0,5) παρατηρήθηκε σε αντίθεση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις μια προοδευτική αύξηση των υδροδυναμικών φορτίσεων με την ανάλογη αύξηση της τιμής του *ka* και συγκεκριμένα στο εύρος των κυματικών συχνοτήτων από 0.1 έως 1.366, το οποίο αποδεικνύει και την μεγαλύτερη χωρικά επιρροή του κυματικού πεδίου, μέσω της ομαλής και σταδιακής αύξησης των υδροδυναμικών φορτίσεων στο προαναφερόμενο εύρος. Αναλυτικά για *ka*=0.8158 παρατηρείται η πρώτη σημαντική φόρτιση του σώματος με την τιμή της να είναι ίση με 0.4745, έπειτα για *ka*=1.22 έχουμε την αύξηση των επιπέδων φόρτισης του σώματος με την *Fy*=0.9884, ενώ για *ka*=1.366 καταγράφηκε η μέγιστη τιμή της *Fy* που ήταν ίση με 1.233. Για $1.37 \leq ka \leq 1.64$ έχουμε μια σημαντική μείωση της φόρτισης της τάξης του 83% (*Fy*=0.2066), πέρα του συγκεκριμένου σημείου παρατηρείται αύξηση των τιμών, ενώ για $ka \leq 1.77$ η *Fy* ισούται με 0.4618 με τη φόρτιση να εξασθενεί και να μην επηρεάζει το σώμα σε μεγαλύτερες συχνότητες από τη τιμή του *ka*=2.5 .

Ο υπολογισμός των ροπών για τους άξονες *x* και *y* αποτελεί συνέπεια και παράγωγο της επίδρασης των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης στους άξονες *y* και *x*, ενώ η ασκούμενη ροπή κατά τον άξονα *z* αποτελεί συνδυασμό και των δύο δυνάμεων. Οπότε ως ακολουθία αυτών η ποιοτική συμπεριφορά των καμπυλών των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης στους άξονες *x* και *y* θα είναι ίδια με των καμπυλών των ροπών στους άξονες *y* και *x*. Αρχικά στο σχήμα 4.3 απεικονίζονται οι παραγόμενες ροπές, λόγω της δράσης του κυματικού πεδίου σε ελλειπτικό κύλινδρο κατά τον άξονα *x* εντός καναλιού. Για τιμές του $0.1 \leq ka \leq 0.99$ παρατηρήθηκε μια σταδιακή αύξηση των ροπών με την ανάλογη αύξηση των τιμών του *ka*, μέχρις ότου καταγραφεί η μέγιστη τιμή της ροπής κατά τον άξονα *x* στη θέση (0,4) του κυλίνδρου (*Mx*=0.8877). Στη θέση (0,1) η πρώτη καταγραφή σημαντικής φόρτισης έλαβε χώρα για *ka* =0.5956 με την τιμή της ροπής να κυμαίνεται πλησίον της τιμής 0.3, ενώ για *ka*=0.7975 και στη θέση (0,3) η τιμή της ροπής

υπερδιπλασιάζεται (Mx=0.6109). Η μέγιστη τιμή της ροπής για τη πρώτη θέση του ελλειπτικού κυλίνδρου υπολογίστηκε ίση με 0.4512 και για ka=1.018. Στις θέσεις (0,2) και (0,5) οι μέγιστες τιμές των ροπών μετατοπίζονται σε υψηλότερες συχνότητες και συγκεκριμένα για τιμές $1.2 \leq ka \leq 1.37$ με τις αντίστοιχες μέγιστες ροπές να ισούνται με 0.6224 και 0.6972 αντίστοιχα. Για ka>1.5 σημαντική επίδραση έχει ο κυματισμός επάνω στον κύλινδρο στη θέση (0,4) με τη ροπή να καταγράφεται στην τιμή 0.5, ενώ στις θέσεις (0,2) και (0,5) οι τιμές των ροπών κυμαίνονται από $0.25 \leq Mx \leq 0.33$. Τέλος για τιμές του ka μεγαλύτερες από 2.2 οι ροπές κατά τον άξονα x δεν ξεπερνούν την τιμή 0.25, με συνέπεια από εκείνο το σημείο και έπειτα να σταθεροποιούνται στην τιμή 0.1 και να μειώνονται σταδιακά με την ανάλογη αύξηση της τιμής του ka. Για τις ροπές κατά τον άξονα y καταγράφηκαν μηδαμινές διαφορές στις ροπές για όλες τις εξεταζόμενες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου, ενώ οι μέγιστες τιμές τους παρουσιάστηκαν για ka>1.0. Για τιμές του ka μεγαλύτερες από 0.1 η ροπή κατά τον άξονα y (pitch) στον ελλειπτικό κύλινδρο ακολουθεί μια αυξητική τάση, ενώ το εύρος των κυματικών συχνοτήτων που περιλαμβάνουν τις μέγιστες ροπές ήταν για $1.073 \leq ka \leq 1.109$. Το αντίστοιχο εύρος των ροπών βρέθηκε για τιμές του My από 0.5912 έως 0.5942. Η δράση του κυματισμού στο κύλινδρο αρχίζει να εξασθενεί προοδευτικά για ka>1.2 με ανάλογο τρόπο, όπως και καταγράφηκε η αύξηση για τιμές του ka από 0.1 έως τις τιμές που τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης του κυλίνδρου με τον κυματισμό ήταν ισχυρά.

Στο Σχήμα 4.5, στο οποίο απεικονίζονται οι ροπές κατά τον άξονα z του ελλειπτικού κυλίνδρου, διακρίνεται πως με την αύξηση της απόστασης του σώματος από την αρχική θέση (0,0) έχουμε και την ανάλογη αύξηση των ροπών που ασκούνται επάνω στο σώμα. Γενικά οι τιμές των ροπών κατά τον άξονα z δεν υποδεικνύουν μεγάλη επιρροή του σώματος, αφού η μέγιστη ροπή για τη θέση (0,5) δεν πλησίασε καν την τιμή 0.1 (Mz=0.098) στη κυματική συχνότητα με τιμή ka=0.2652. Για τη θέση (0,4) η μέγιστη τιμή ροπής βρέθηκε για ka=0.2285 και ήταν ίση με 0.048, για τη θέση (0,3) η μέγιστη τιμή Mz=0.01553 και για ka=0.1. Για τις θέσεις (0,2) και (0,1) έχουμε τις μέγιστες τιμές των ροπών για ka=0.1 και βρέθηκαν ίσες με 0.007 και 0.003 αντίστοιχα. Επίσης σε όλες τις περιπτώσεις για τιμές του ka μεγαλύτερες από 1.5 οι τιμές των ροπών σχεδόν μηδενίζονται.

Στο Σχήμα 4.6 της ενότητας 4.2 απεικονίζονται γραφικά οι καμπύλες των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης κατά τον άξονα x συναρτήσει του κυματαριθμού για ελλειπτικό κύλινδρο σε κανάλι για τις ίδιες περιπτώσεις θέσεων όπως της ενότητας 4.1, αλλά με την κύρια διαφορά πως η τοποθέτηση του κυλίνδρου εντός του καναλιού πραγματοποιήθηκε υπό γωνία 45 μοιρών. Σε σύγκριση με την περίπτωση του ελλειπτικού κυλίνδρου με β=0°, η πρόσπτωση του κυματισμού με το σώμα δεν γίνεται με τον ίδιο ομαλό τρόπο, καθώς το σώμα είναι τοποθετημένο υπό κλίση και ως αρχική συνέπεια αποτελεί την επαφή/πρόσπτωση του κυματισμού σε μεγαλύτερη επιφάνεια του σώματος που οδηγεί σε απότομες κορυφές /υδροδυναμικές φορτίσεις, αλλά και στη διατήρηση της ενέργειας του κυματικού πεδίου για μεγαλύτερο εύρος των κυματικών συχνοτήτων σε όλες τις εξεταζόμενες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου στο κανάλι, λόγω των ισχυρότερων φαινομένων ανάκλασης και περίθλασης. Το φαινόμενο αυτό έλαβε χώρα για τιμές του ka από 0.412 έως 1.403. Η πρώτη σημαντική φόρτιση του σώματος λόγω της δράσης του κυματισμού εμφανίστηκε στις κυματικές συχνότητες για τιμές του ka=0.412, 0.4304 και αντιστοιχούσαν στις θέσεις (0,3) και (0,4) με τις ανάλογες τιμές των δυνάμεων να ισοδυναμούν με 0.8418 και 0.8044. Η επόμενη σημαντική φόρτιση του κυλίνδρου έλαβε χώρα στη κυματική συχνότητα για ka =0.6139, στην οποία καταγράφηκαν υψηλές τιμές των υδροδυναμικών δυνάμεων σε όλες τις επιλεγμένες θέσεις εμφανίζοντας τιμές κοντά στο 1. Για τιμές του ka από 0.6139 έως 0.65 παρατηρείται μια μείωση στα επίπεδα της φόρτισης, ενώ αντίθετα για τιμές $0.65 > ka \leq 0.8158$ παρατηρείται αύξηση της δύναμης που ασκείται στο σώμα και της μέγιστης υδροδυναμικής φόρτισης του σώματος για τις θέσεις (0,2), (0,3), (0,5) στη συγκεκριμένη συχνότητα. Στη κυματική συχνότητα με ka =1.018 παρατηρήθηκε η μέγιστη επίδραση του κύματος στο σώμα για τις θέσεις (0,0), (0,1), (0,4), με τις τιμές των δυνάμεων να είναι μεγαλύτερες του 1. Επίσης είναι αντιληπτό ότι τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης είναι ισχυρά ακόμα και με την αύξηση της απόστασης για ka>1.018 στη περίπτωση τοποθέτησης του σώματος στη θέση (0,5) σε αντίθεση με των υπολοίπων περιπτώσεων, που πέρα αυτού του σημείου οι φορτίσεις εμφάνισαν μεγαλύτερο ρυθμό μείωσης

με την αύξηση της κυματικής συχνότητας. Τέλος για ka >1.5 αρχίζει η μείωση δράσης του κυματισμού στον κύλινδρο και η ανάλογη μείωση στα επίπεδα των ασκούμενων δυνάμεων σε όλες τις περιπτώσεις.

Για τη περίπτωση των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης κατά τον άξονα y (Σχήμα 4.7) η πρώτη σημαντική φόρτιση που δέχτηκε το σώμα εμφανίστηκε για ka=0.3203 και ήταν ίση με 0.3951 και αντιστοιχούσε στη θέση (0,5) του ελλειπτικού κυλίνδρου. Για ka=0.412 παρατηρείται μέση αύξηση της φόρτισης (0.3951→0.57) σε σχέση με τη κυματική συχνότητα 0.3203 στις θέσεις (0,3) και (0,4). Στη κυματική συχνότητα για ka=0.6139 ο ελλειπτικός κύλινδρος παρουσίασε τα μέγιστα επίπεδα φόρτισής του για τρεις θέσεις, οι οποίες ήταν οι δύο πιο κοντινές θέσεις (0,0),(0,1) αλλά και η πιο μακρινή θέση τοποθέτησης του σώματος (0,5). Η θέση (0,0) αποτελεί και το σημείο μέγιστης φόρτισης του σώματος κατά την αλληλεπίδραση του με τον κυματισμό με την τιμή της Fy=1.142, ενώ για (0,1) και (0,5) τα αντίστοιχα επίπεδα φόρτισης αντιστοιχούσαν για τιμές Fy=0.681 και 0.8298. Στη κυματική συχνότητα για ka=0.8158 ο ελλειπτικός κύλινδρος παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της οριζόντιας δύναμης διέγερσης κατά y για τη θέση (0,2) με την αντίστοιχη τιμή να ισούται με 0.6161. Οι τιμές των δυνάμεων εμφανίζουν μια σταθερή τάση μείωσης για τιμές του ka από 1.018 έως 1.422, ενώ για συχνότητες μεγαλύτερες του 1.5 τα επίπεδα φόρτισης που δέχεται ο κύλινδρος είναι ασθενή με αποτέλεσμα οι τιμές των δυνάμεων να τείνουν προς το μηδέν. Η τοποθέτηση του ελλειπτικού κυλίνδρου για β=45° είχε ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση των μέγιστων υδροδυναμικών φορτίσεων κατά τον άξονα y σε χαμηλότερες κυματικές συχνότητες για όλες τις εξεταζόμενες θέσεις σε σχέση με την τοποθέτηση του κυλίνδρου με β=0°, αλλά και την μείωση των επιπέδων φόρτισης των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης κατά τον άξονα y.

Κατά την φόρτιση του σώματος οι ροπές που προέκυψαν κατά τον άξονα x (Σχήμα 4.8) εμφάνισαν μικρότερες τιμές σε σχέση με αυτές του ελλειπτικού κυλίνδρου με β=0° (Σχήμα 4.5). Αναλυτικά η επίδραση του κυματισμού με τον κύλινδρο καταγράφεται σε μικρότερο εύρος των κυματικών συχνοτήτων και η εξασθένιση των παραγώγων μεγεθών τους, όπως είναι οι ροπές λαμβάνει χώρα με μεγαλύτερο ρυθμό σε σχέση με ότι περιγράφηκε προηγουμένως για τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 4.1. Τα μέγιστα φορτία στον κύλινδρο, λόγω της πρόσπτωσης στους άξονες y και x για τις δυνάμεις διέγερσης και ροπές αντίστοιχα καταγράφονται για τιμές του ka=0.6139, ενώ στη περίπτωση για β=0° εμφανίζονται στη κυματική συχνότητα για ka=0.9994. Οι τιμές των ροπών για β=45° βρέθηκαν σε ένα εύρος για 0.2876≤Mx≤0.5881, με το αντίστοιχο εύρος των συχνοτήτων να είναι για 0.412≤ka≤0.8158. Η μέγιστη τιμή της ροπής εμφανίστηκε στη θέση (0,1), ενώ για 1.2≤ka≤1.5 σημαντική επίδραση δέχεται ο κύλινδρος μόνο στην θέση (0,5). Με το πέρας της συγκεκριμένης συχνότητας σε όλες τις θέσεις οι τιμές των ροπών είναι σημαντικά μειωμένες και εξασθενούν με την αύξηση της τιμής του ka. Εκτός της εμφάνισης των μέγιστων φορτίσεων σε διαφορετικές συχνότητες, η αλλαγή της γωνίας τοποθέτησης του κυλίνδρου έχει ως αποτέλεσμα και την εμφάνιση τους σε διαφορετικές θέσεις, αφού στο Σχήμα 4.5 η μέγιστη ροπή εμφανίστηκε στη θέση (0,4). Οι καμπύλες των ροπών κατά τον άξονα y στο Σχήμα 4.9 εμφάνισαν πολύ μικρές διαφορές στις τιμές τους σε όλες τις εξεταζόμενες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου και σε όλο το εύρος των κυματικών συχνοτήτων με τις μέγιστες τιμές τους να παρουσιάζονται για 0.8158≤ka≤1.22. Το αντίστοιχο εύρος των ροπών βρέθηκε για τιμές του My από 0.6113 έως 0.6525. Στο Σχήμα 4.10 απεικονίζονται οι ροπές κατά τον άξονα z του ελλειπτικού κυλίνδρου για β=45° και διακρίνεται πως με την αύξηση της απόστασης του σώματος από την αρχική θέση (0,0) έχουμε και την ανάλογη αύξηση των ροπών που ασκούνται επάνω στο σώμα. Οι ροπές κατά τον άξονα z δεν εμφανίζουν μεγάλες τιμές συνεπώς και μεγάλη επιρροή επάνω στον κύλινδρο, αφού η μέγιστη τιμή της ροπής για τη θέση (0,5) δεν ξεπέρασε την τιμή 0.2 (Mz=0.1736) για τιμή του ka=0.3203. Στη θέση (0,4) η μέγιστη τιμή ροπής καταγράφηκε για ka =0.1184 και ήταν ίση με 0.079, για τη θέση (0,3) η μέγιστη τιμή Mz=0.062 και για ka=0.1, ενώ για (0,2) η ροπή ήταν ίση με 0.033 και ka=0.1367. Τέλος στις θέσεις (0,0) και (0,1) οι μέγιστες τιμές των ροπών βρέθηκαν για τιμές του ka>1.0 και ήταν ίσες με 0.0026.

Στην ενότητα 4.3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των υδροδυναμικών φορτίσεων και ροπών του ελλειπτικού κυλίνδρου σε κανάλι με β=90°. Σε αντίθεση με τη περίπτωση τοποθέτησης του κυλίνδρου με β=45° οι τιμές των υδροδυναμικών φορτίσεων στον άξονα x εμφανίζονται μειωμένες με χαρακτηριστικό παράδειγμα να αποτελεί η θέση (0,5) σε σχέση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις για τιμές του ka έως 0.8,

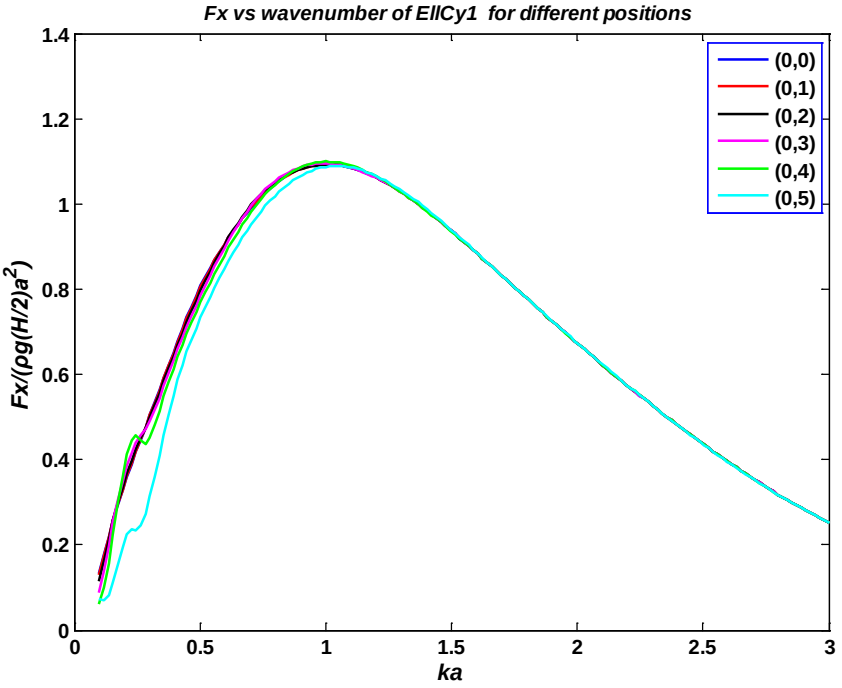
γεγονός που παρουσιάζεται αποκλειστικά για β=90°. Στη τιμή του ka=0.6139 τα επίπεδα φόρτισης του κυλίνδρου στη θέση (0,5) αντιστοιχούν στη τιμή 0.55, ενώ στις υπόλοιπες θέσεις οι τιμές των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης κατά τον άξονα x κυμαίνονται από 0.76 έως 0.84. Οι μέγιστες φορτίσεις όλων των θέσεων περισσότερο προσεγγίζουν τις τιμές που εμφανίστηκαν για β=0° με μια μικρή μετατόπιση σε μεγαλύτερες κυματικές συχνότητες εξαιρούμενης της θέσης (0,2). Οι μέγιστες τιμές φόρτισης βρέθηκαν για τιμές 1.088≤Fx≤1.112, με το αντίστοιχο εύρος των κυματικών συχνοτήτων να αντιστοιχεί για 0.9443≤ka≤1.073. Η μέγιστη φόρτιση του σώματος λόγω της πρόσπτωσης και περίθλασης του κυματισμού στις θέσεις (0,0) και (0,3) καταγράφηκε για ka =1.073, στις θέσεις (0,1), (0,4) και (0,5) για ka=1.054, ενώ για τη θέση (0,2) η μέγιστη φόρτιση αντιστοιχούσε στη κυματική συχνότητα για ka=0.9443. Για τη θέση (0,0) του ελλειπτικού κυλίνδρου με β=90° έχουμε μείωση της οριζόντιας δύναμης κατά 6% (Fx=1.17→1.096) σε σύγκριση με τη περίπτωση του σώματος με β=45° και ταυτόσημη τιμή για β=0° (Fx=1.095→1.096). Στη θέση (0,1) υπήρξε μείωση της δύναμης κατά 3% σε σχέση με την τιμή που υπολογίστηκε για β=45°, ενώ σε σύγκριση με την αντίστοιχη τιμή για β=0° είχαμε σχεδόν μηδαμινή αύξηση των επιπέδων φόρτισης (Fx=1.094→1.134→1.1). Κατά τη τοποθέτηση του κυλίνδρου υπό 45 μοίρες οι μέγιστες τιμές φόρτισης μετατοπίζονται σε μικρό βαθμό σε χαμηλότερες κυματικές συχνότητες σε σχέση με τη περίπτωση για β=0° για τις θέσεις (0,3), (0,4) και (0,5), ενώ στη περίπτωση των 90 μοιρών οι μέγιστες φορτίσεις μετατοπίζονται με μικρή διαφορά σε μεγαλύτερες τιμές του ka. Στη θέση (0,4) παρατηρήθηκε η μεγαλύτερη μείωση της οριζόντιας δύναμης διέγερσης σε σχέση με τη περίπτωση του σώματος με β=45° (Fx=1.21→1.11). Για ka>1.5 οι καμπύλες για όλες τις περιπτώσεις θέσεων ομαλοποιούνται και ακολουθούν μια συνεχή τάση μείωσης στα επίπεδα φόρτισης τους κατά τον άξονα x για τη περίπτωση του ελλειπτικού κυλίνδρου με β=90°.

Στο σχήμα 4.12 απεικονίζονται οι δυνάμεις διέγερσης κατά τον άξονα y που καταγράφηκαν σε ελλειπτικό κύλινδρο με β=90°. Είναι εμφανές πως με την μετατόπιση του σώματος κατά y έχει ως συνέπεια την ανάλογη αύξηση των δυνάμεων. Σε σύγκριση με τις προηγούμενες περιπτώσεις που έχουν σχολιαστεί στις παραπάνω ενότητες, τα επίπεδα των φορτίσεων εμφανίζονται σε μεγάλο βαθμό μειωμένα, το οποίο αποδεικνύει πως η τοποθέτηση του κυλίνδρου υπό γωνία 90° έχει ως αποτέλεσμα την ασθενή φόρτιση του στον άξονα y για τις θέσεις που εξετάστηκαν και την ασθενή φόρτιση του σε μικρές τιμές του ka. Για να γίνει κατανοητό τα επίπεδα φόρτισης κατά τον άξονα y για τη θέση (0,1) μειώθηκαν κατά 96 % και 95% σε σχέση με τις περιπτώσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου με β=0° και 45° αντίστοιχα. Το εύρος των κυματικών συχνοτήτων που εμφανίστηκαν οι υψηλότερες τιμές διέγερσης για β=90° βρέθηκε για 0.1367≤ka≤0.1734, με τις μέγιστες τιμές των δυνάμεων να καταγράφονται για 0.03≤Fx≤0.3858. Η θέση (0,5) εμφάνισε τις υψηλότερες τιμές σε σχέση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις και συγκεκριμένα για ka=0.1551 η δύναμη αντιστοιχούσε στη τιμή 0.3858, ενώ για ka =0.3019 η τιμή της ήταν ίση με 0.2393. Επίσης η θέση (0,4) εμφάνισε παραπλήσιες τιμές σε σχέση με τη θέση (0,5) του κυλίνδρου με τη μέγιστη τιμή της να καταγράφεται για ka=0.1367 και τη δύναμη να ισούται με 0.1796. Για τιμές του ka >0.6 οι δυνάμεις για όλες τις θέσεις τείνουν να πάρουν μηδενικές τιμές με τη επίδραση τους να είναι αμελητέα επάνω στο σώμα.

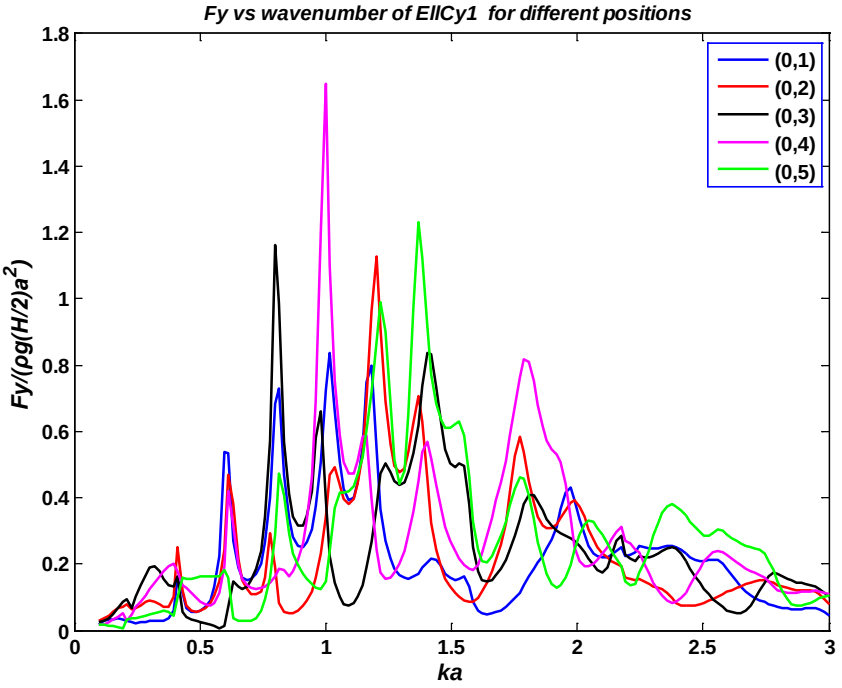
Στο σχήμα στο οποίο απεικονίζονται οι ροπές κατά τον άξονα x του ελλειπτικού κυλίνδρου, διακρίνεται πως με την αύξηση της θέσης του σώματος κατά y συνεπάγεται η αύξηση των ροπών που ασκούνται επάνω στον κύλινδρο, καθώς και η εμφάνιση των μέγιστων τιμών σε μικρές κυματικές συχνότητες. Οι τιμές των ροπών κατά τον άξονα x δεν υποδεικνύουν μεγάλη επιρροή του σώματος αφού η μέγιστη ροπή για τη θέση (0,5) βρέθηκε στη τιμή 0.1933 για τιμή του ka=0.1551. Για τη θέση (0,4) η μέγιστη τιμή ροπής βρέθηκε για ka=0.1367 και ήταν ίση με 0.089, για τη θέση (0,3) η μέγιστη τιμή Mx=0.044 και για ka=0.1551, για (0,2),(0,1) και (0,0) έχουμε τις μέγιστες τιμές των ροπών για ka =0.1734 και βρέθηκαν ίσες με 0.025,0.017 και 0.015 αντίστοιχα. Σε όλες τις περιπτώσεις για τιμές του ka μεγαλύτερες από 0.6 οι τιμές των ροπών σχεδόν μηδενίζονται. Οι ροπές κατά τον άξονα y είναι σαφώς ισχυρότερες των ροπών του άξονα x με τις μέγιστες τιμές για όλες τις θέσεις να εμφανίζονται στη κυματική συχνότητα για ka=1.073, εκτός της θέσης (0,0) που βρέθηκε για ka=1.091. Μέχρι την τιμή του ka =0.8158 ο κύλινδρος στη θέση (0,5) εμφάνισε τις μικρότερες τιμές ροπών σε σύγκριση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις, με τις ροπές να

διακυμαίνονται από 0.04 έως 0.32 στο συγκεκριμένο διάστημα. Σε σύγκριση με τις περιπτώσεις για β=0° και 45° οι τιμές των ροπών στον άξονα y δεν παρουσίασαν μεγάλες διακυμάνσεις, εκτός της θέσης (0,5). Ένα κοινό χαρακτηριστικό που παρατηρείται για όλες τις γωνίες τοποθέτησης του σώματος αλλά και σε σχεδόν όλες τις θέσεις, αποτελεί η εμφάνιση των μέγιστων ροπών κατά τον άξονα y σε κυματικές συχνότητες μεγαλύτερες του 1. Οι μέγιστες τιμές των ροπών για β=90° καταγράφηκαν σε ένα εύρος τιμών για $0.5906 \leq My \leq 0.6037$. Τέλος σε τιμές του ka>1.5 οι καμπύλες για όλες τις περιπτώσεις θέσεων ομαλοποιούνται και ακολουθούν μια συνεχή τάση μείωσης στις τιμές των ροπών. Στο σχήμα 4.15 που απεικονίζονται οι ροπές κατά τον άξονα z του ελλειπτικού κυλίνδρου παρατηρείται και στη περίπτωση για β=90° πως με την αύξηση της απόστασης του σώματος από την αρχική θέση (0,0) έχουμε και την ανάλογη αύξηση των ροπών που ασκούνται επάνω στο σώμα, με τις ροπές στις θέσεις (0,4) και (0,5) να είναι ισχυρότερες σε μεγάλο βαθμό από τις υπόλοιπες θέσεις (κατά μέσο όρο οι τιμές Mz =0.04). Η μέγιστη ροπή στη θέση (0,5) ήταν ίση με 0.4766 στη κυματική συχνότητα με τιμή ka=0.1551. Για τη θέση (0,4) η μέγιστη τιμή ροπής βρέθηκε για ka=0.1 και ήταν ίση με 0.2376, για τη θέση (0,3) η μέγιστη τιμή Mz=0.098 και για ka =0.21, για (0,2) η μέγιστη τιμή της ροπής βρέθηκε για ka =0.1184 και ήταν ίση με 0.034, ενώ στις θέσεις (0,1) και (0,0) έχουμε τις μέγιστες τιμές των ροπών για ka =0.412 και βρέθηκαν ίσες με 0.022 και 0.021 αντίστοιχα. Σε όλες τις περιπτώσεις για τιμές του ka μεγαλύτερες από 1.5 οι τιμές των ροπών σχεδόν μηδενίζονται. Σε σύγκριση με τη περίπτωση του κυλίνδρου για β=45° καταγράφηκαν υψηλότερες τιμές των ροπών κατά τον άξονα z στις θέσεις (0,4) και (0,5), αλλά στη περίπτωση του ελλειπτικού κυλίνδρου για β=0° εμφανιστήκαν οι υψηλότερες τιμές για όλες τις θέσεις του σώματος.

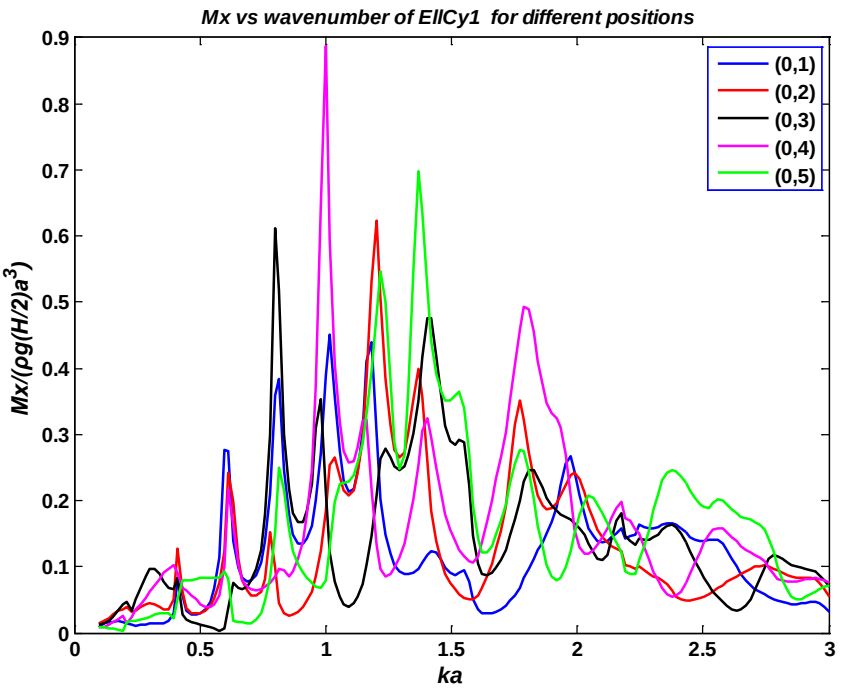
4.1. Γωνία τοποθέτησης κυλίνδρου υπό 0 μοίρες



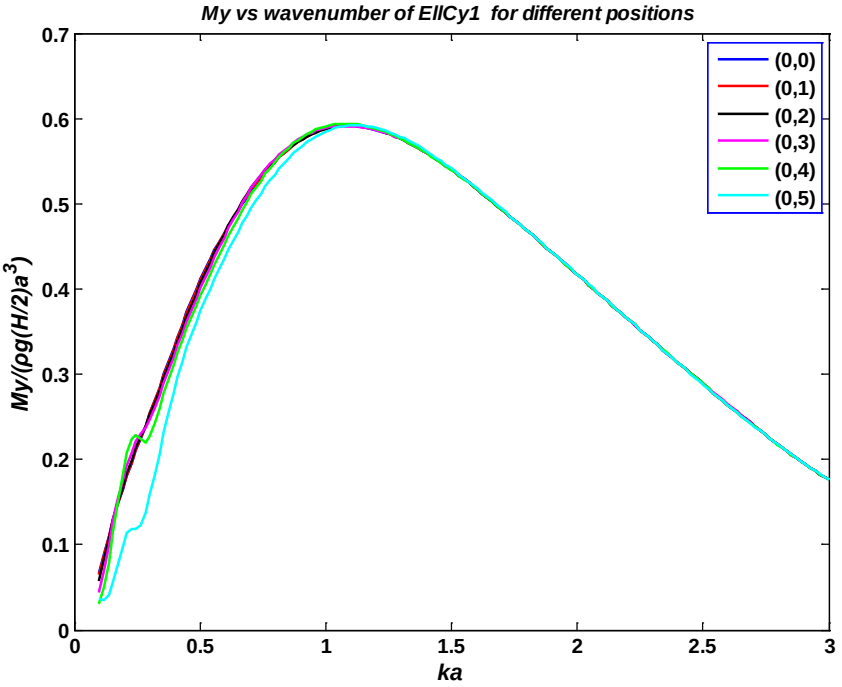
Σχήμα 4.1 Δυνάμεις διέγερσης (surge) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 0 μοίρες. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.



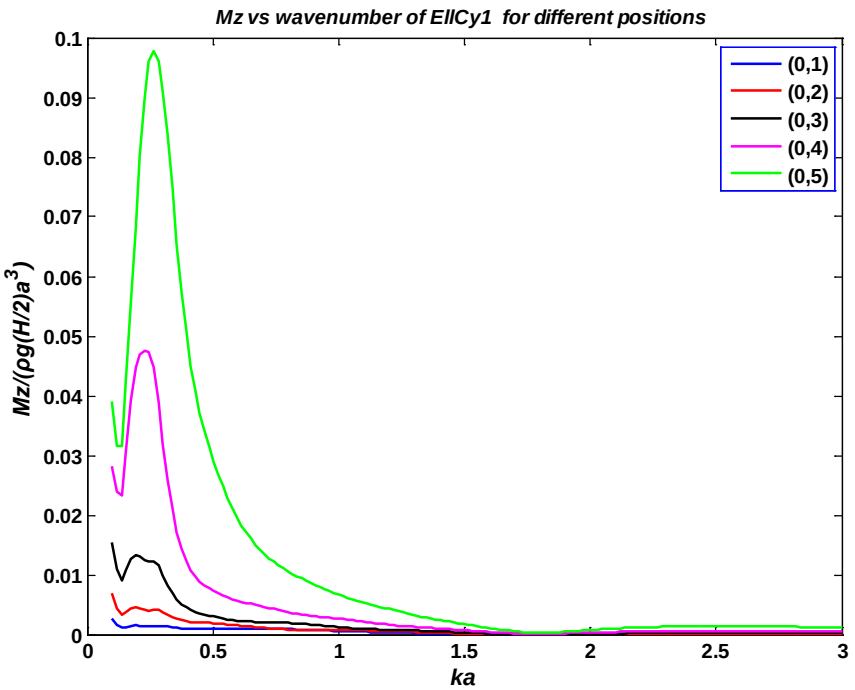
Σχήμα 4.2 Δυνάμεις διέγερσης (sway) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 0 μοίρες. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.



Σχήμα 4.3 Ροπές κατά τον άξονα x (roll) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 0 μοίρες. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.

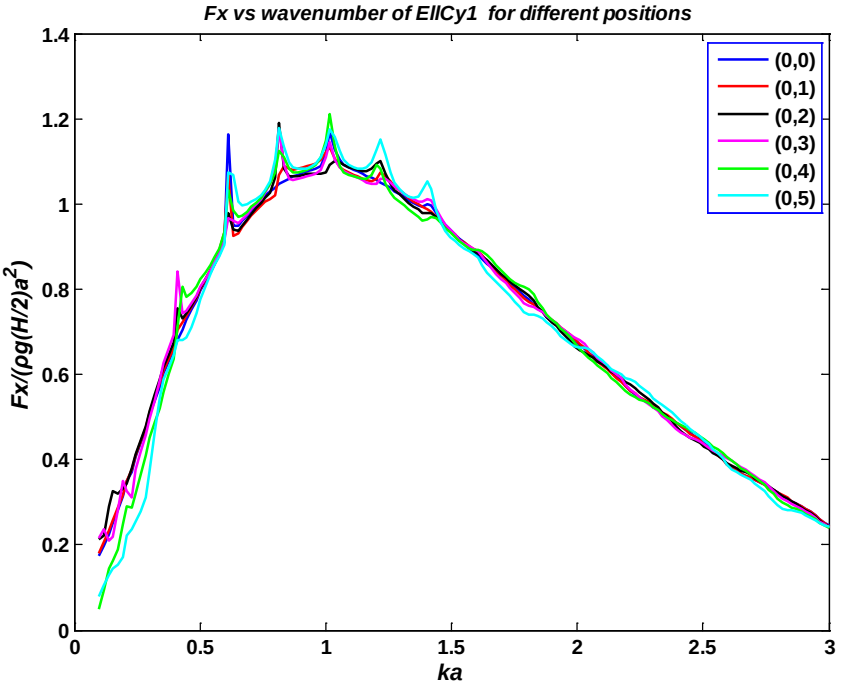


Σχήμα 4.4 Ροπές κατά τον άξονα y (pitch) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 0 μοίρες. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.

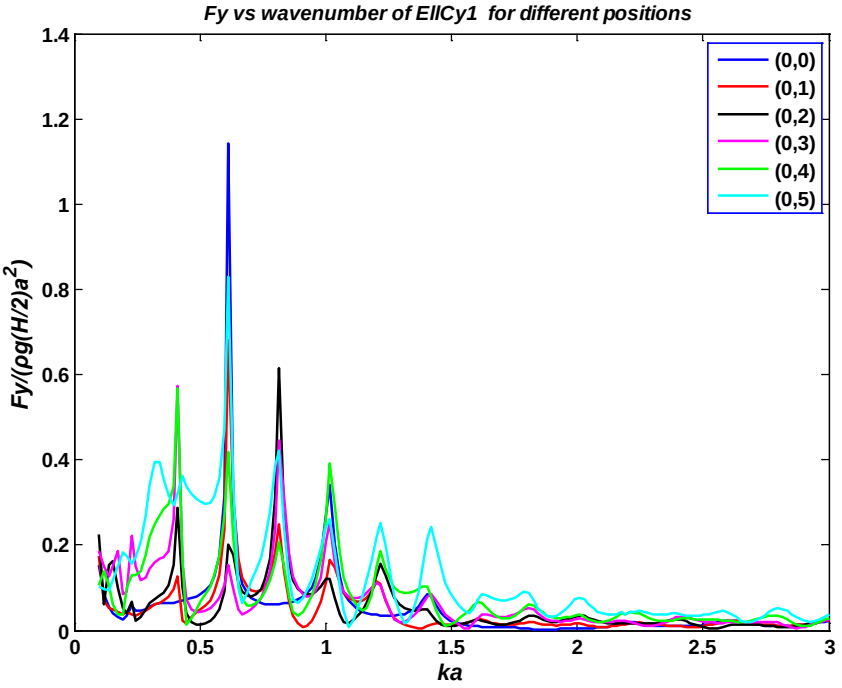


Σχήμα 4.5 Ροπές κατά τον άξονα z (yaw) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 0 μοίρες. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν

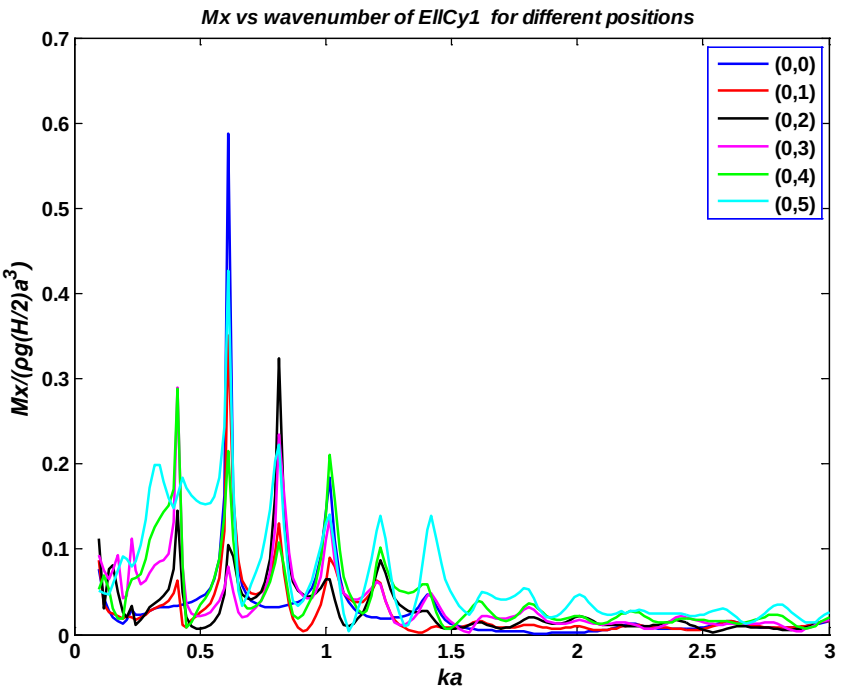
4.2. Γωνία τοποθέτησης κυλίνδρου υπό 45 μοίρες



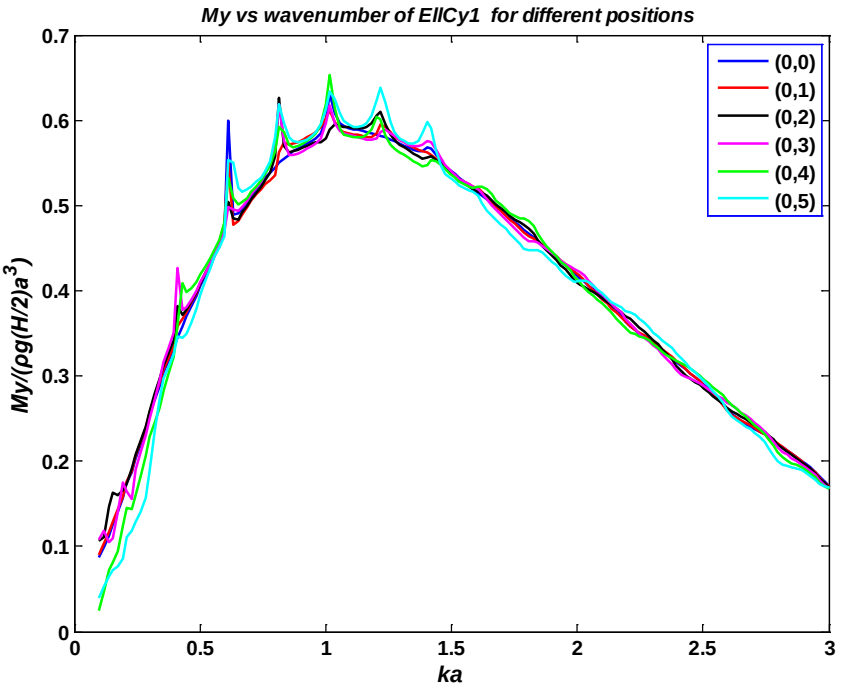
Σχήμα 4.6 Δυνάμεις διέγερσης (surge) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 45 μοίρες. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.



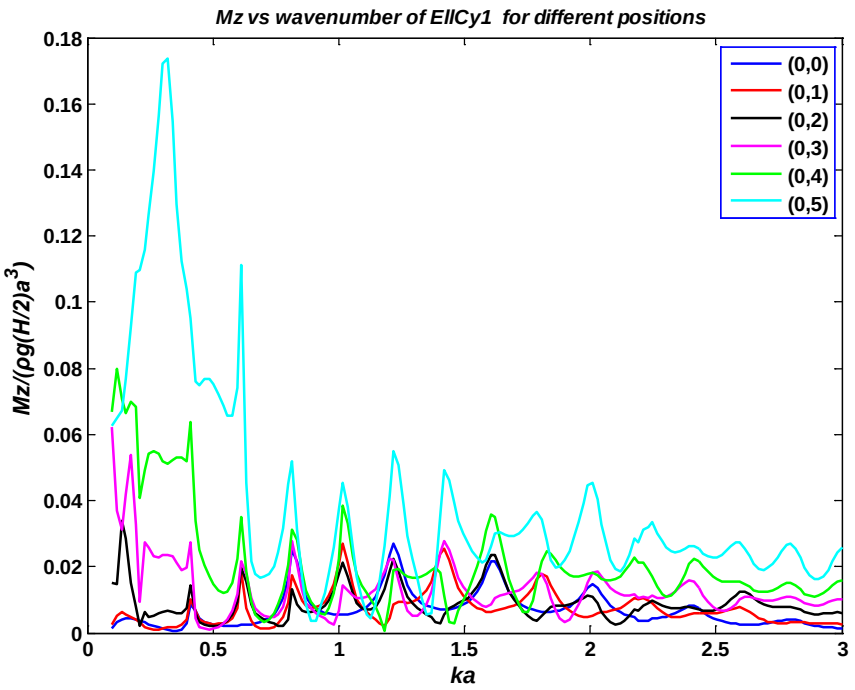
Σχήμα 4.7 Δυνάμεις διέγερσης (sway) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 45 μοίρες. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.



Σχήμα 4.8 Ροπές κατά τον άξονα x (roll) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 45 μοίρες. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.

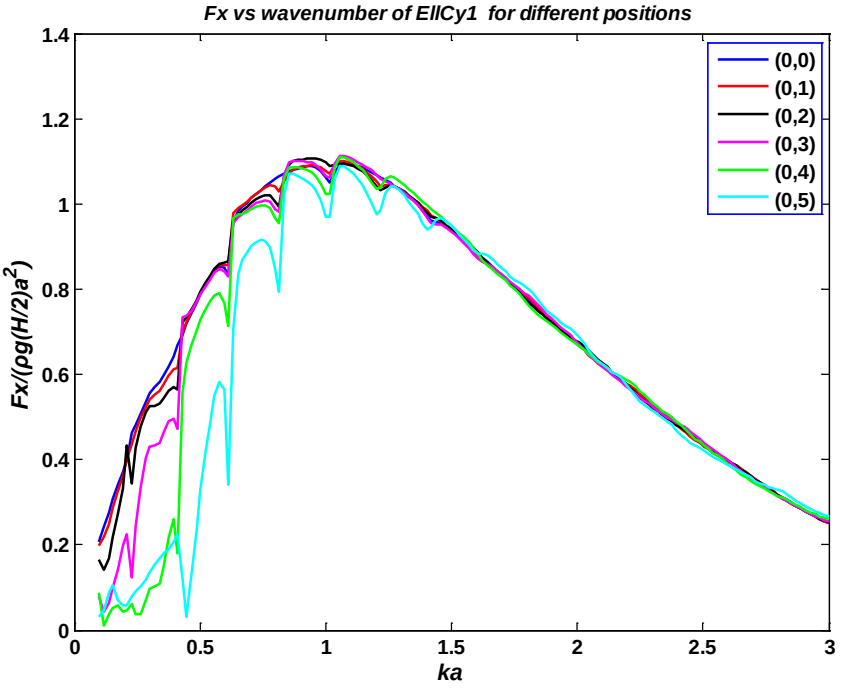


Σχήμα 4.9 Ροπές κατά τον άξονα y (pitch) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 45 μοίρες. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.

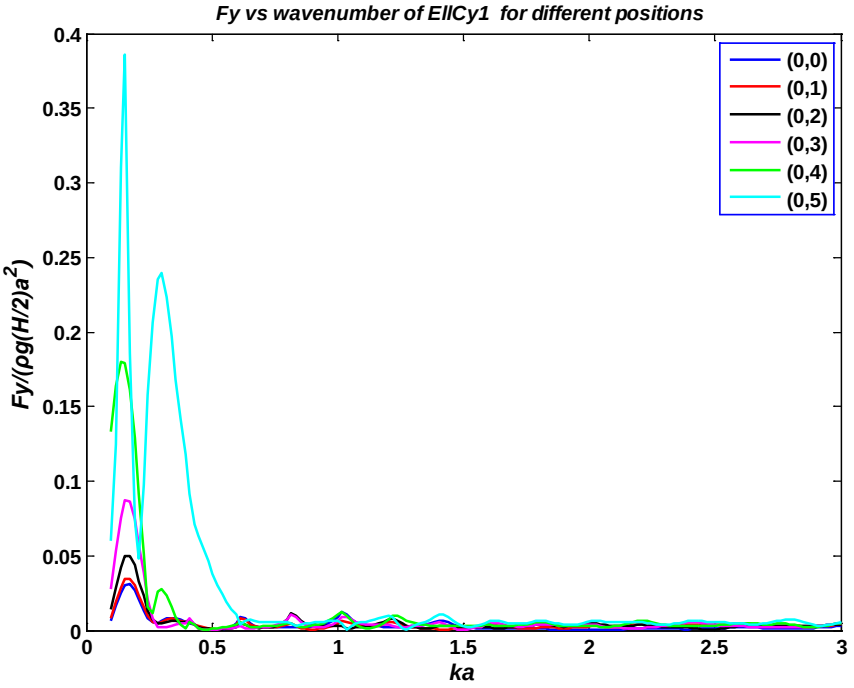


Σχήμα 4.10 Ροπές κατά τον άξονα z (yaw) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 45 μοίρες. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.

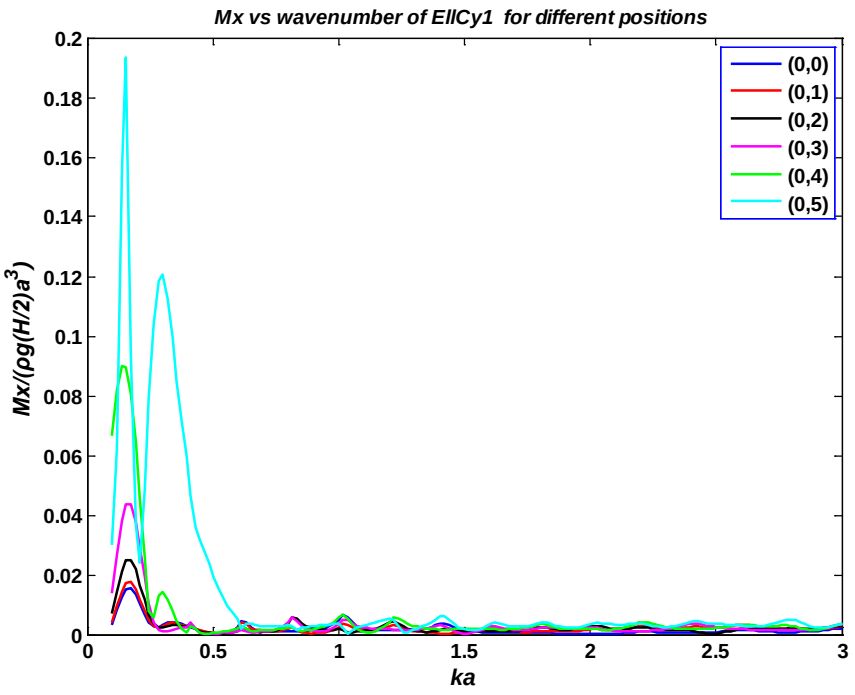
4.3. Γωνία τοποθέτησης κυλίνδρου υπό 90 μοίρες



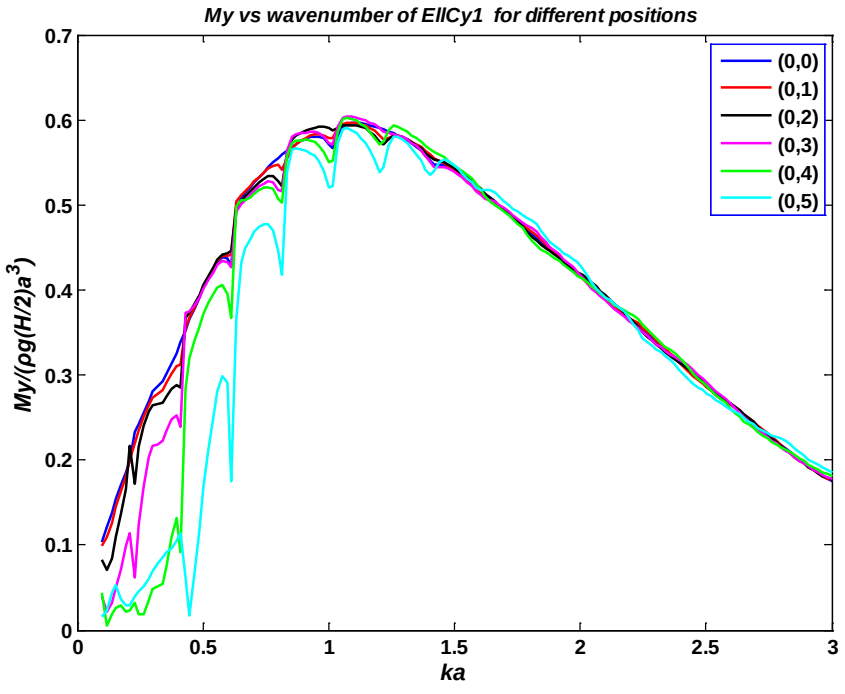
Σχήμα 4.11 Δυνάμεις διέγερσης (surge) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 90 μοίρες. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.



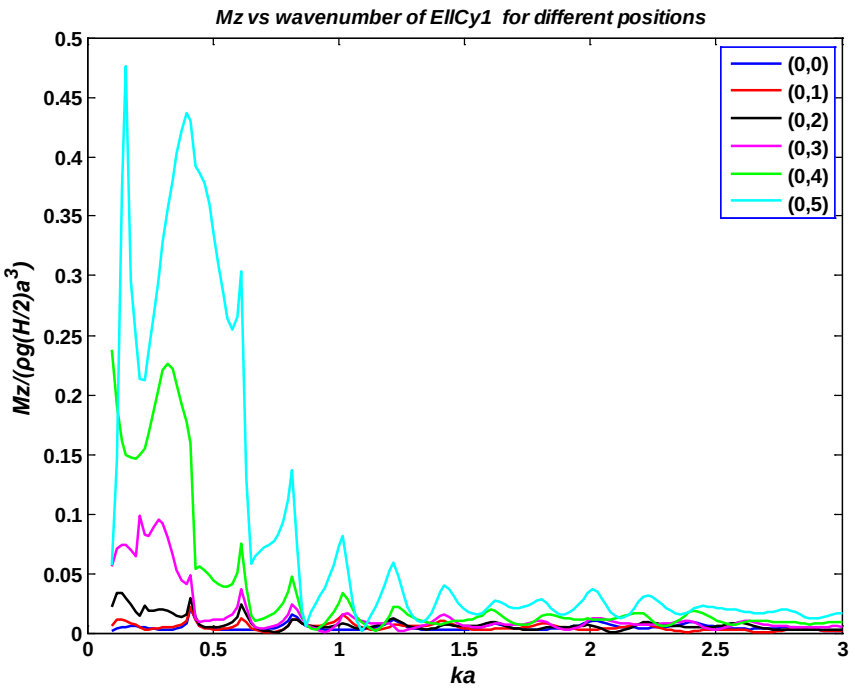
Σχήμα 4.12 Δυνάμεις διέγερσης (sway) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 90 μοίρες. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.



Σχήμα 4.13 Ροπές κατά τον άξονα x (roll) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 90 μοίρες. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.



Σχήμα 4.14 Ροπές κατά τον άξονα y (pitch) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 90 μοίρες. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.



Σχήμα 4.15 Ροπές κατά τον άξονα z (yaw) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε ελλειπτικό κύλινδρο για διάφορες θέσεις (0,y). Η γωνία τοποθέτησης (beta) του ελλειπτικού κυλίνδρου ισούται με 90 μοίρες. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος αναφέρονται οι διάφορες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου που εξετάστηκαν.

5. Υδροδυναμικές Φορτίσεις και Ροπές για διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων σε κανάλι

Στο παρών κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης και των ροπών που προκύπτουν λόγω της πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους (ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά) που βρίσκονται σε κανάλι και εδράζονται στο θαλάσσιο πυθμένα. Ερευνήθηκαν τέσσερις περιπτώσεις αποστάσεων μεταξύ των δύο κύριων σωμάτων μελέτης, για να εξεταστεί η επίδραση του φαινομένου της περίθλασης με την αύξηση/ μείωση της απόστασης των δύο κυλίνδρων κατά τον άξονα y. Οι αποστάσεις των κυλίνδρων που μελετήθηκαν ήταν για $R=\alpha,2a,3a,4a$, οι οποίες επιλέχτηκαν για την εξέταση της σημασίας των φαινόμενων αλληλεπίδρασης κύματος-ελλειπτικών κυλίνδρων σε διάφορες θέσεις. Για τη καλύτερη περιγραφή των φαινομένων αλληλεπίδρασης σωμάτων-κύματος εξετάστηκαν διάφορες γωνίες τοποθέτησης (0°,45°,90°) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου με σκοπό την αποτύπωση της μεταβολής των επιπέδων της φόρτισης των δύο ελλειπτικών κυλίνδρων σε διαφορετικές αποστάσεις. Ο πρώτος ελλειπτικός κύλινδρος (EllCyl1) ήταν σταθερός σε όλη την διάρκεια των υπολογισμών στην θέση (0,0).

Στη ενότητα 5.1 απεικονίζεται η μεταβολή της οριζόντιας δύναμης διέγερσης κατά τον άξονα x συναρτήσει των κυματικών συχνοτήτων για διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων σε κανάλι. Στη περίπτωση της τοποθέτησης των σωμάτων για β=0° και $R=a$ παρατηρήθηκε πως οι καμπύλες των δύο σωμάτων ακολουθούν την ίδια συμπεριφορά σε όλο το εύρος των κυματικών συχνοτήτων, με αποτέλεσμα την καταγραφή των ίδιων ποσών φόρτισης για τα σώματα και την απουσία των φαινομένων περίθλασης στη προκειμένη περίπτωση. Για τιμές του ka μεγαλύτερες από 0.1 η οριζόντια δύναμη διέγερσης (surge) στους ελλειπτικούς κυλίνδρους ακολουθεί μια αυξητική τάση, με την μέγιστη τιμή της Fx να εμφανίζεται για ka=0.8892. Στις κυματικές συχνότητες για ka> 0.8892 οι δύο καμπύλες εμφανίζουν μια ομαλοποίηση και σταθεροποίηση στις τιμές των υδροδυναμικών φορτίσεων, ενώ για ka>1.0 η δράση του απλού αρμονικού κυματισμού στα σώματα αρχίζει να εξασθενεί με αποτέλεσμα οι τιμές της Fx να είναι σημαντικά μειωμένες. Με την αλλαγή του β σε 45° για τον πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο στην ίδια απόσταση διακρίνεται αύξηση της φόρτισης κατά 20% (Fx=1.304→1.625), ενώ για το δεύτερο κύλινδρο καταγράφηκε μείωση της αντίστοιχης τιμής περίπου κατά 1% (Fx=1.302→1.290). Και για τους δύο κυλίνδρους η αλλαγή του β οδήγησε στη μετατόπιση των μέγιστων φορτίσεων σε μεγαλύτερες κυματικές συχνότητες (ka=1.183). Ένα κύριο χαρακτηριστικό στη προκειμένη περίπτωση είναι η εμφάνιση των απότομων κορυφών στον πρώτο κύλινδρο και της εμφάνισης των συνεχόμενων φορτίων πρόσπτωσης για ένα σημαντικό εύρος κυματικών συχνοτήτων, που οφείλεται στην αλλαγή του β, αλλά και στη τοποθέτηση του σώματος στη θέση (0,0) (παράλληλα στον άξονα διάδοσης του κυματισμού), με συνέπεια ο δεύτερος κύλινδρος να προστατεύεται από τον πρώτο και να επηρεάζεται σε μικρότερο βαθμό από το κυματικό πεδίο. Η αυξητική τάση στα επίπεδα φόρτισης του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου σηματοδοτείται για ka =0.5956 με την τιμή της δύναμης να ισοδυναμεί με 1.025, έπειτα στη κυματική συχνότητα με τιμή ka= 0.8158 καταγράφεται αύξηση της δύναμης κατά 22.3% (Fx=1.025→1.319), ενώ για ka =1.183 όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω εμφανίζεται η μέγιστη υδροδυναμική φόρτιση και για τους δύο κυλίνδρους, με το πρώτο σώμα να δέχεται 1.26 φορές μεγαλύτερη δύναμη σε σχέση με το δεύτερο. Στη συχνότητα με τιμή του ka =1.55 οι δυνάμεις που ασκούνται και στους δύο κυλίνδρους είναι εξισορροπημένες και κοντά στην τιμή 1.2, ενώ για τιμές του ka>1.55 τα επίπεδα φόρτισης φθίνουν σταδιακά και στα δύο σώματα, λόγω της μειωμένης δράσης του κυματισμού επάνω στους κυλίνδρους, με συνέπεια σε μεγάλες τιμές των συχνοτήτων (ka >2.7) η δύναμη να καταγράφει τιμές στο 0.2. Για β=90° του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου οι τιμές των οριζόντιων δυνάμεων κατά τον άξονα x παρουσιάζονται μειωμένες σε σχέση με τη περίπτωση τοποθέτησης του πρώτου σώματος υπό γωνία 45 μοιρών. Για ka=1.183 που αποτελεί το σημείο μέγιστης φόρτισης του πρώτου σώματος η τιμή της δύναμης βρέθηκε ίση με 1.333, ενώ για το δεύτερο σώμα η αντίστοιχη τιμή ήταν ίση με 1.11 και έλαβε χώρα για ka=1.073. Οι συγκεκριμένες τιμές αποτυπώνουν μείωση της τάξης κατά 18% και 14% για τα δύο σώματα κατά σειρά σε σύγκριση με τις μέγιστες φορτίσεις που καταγράφηκαν για β=45°. Σε σύγκριση με τις τιμές των δυνάμεων που υπολογίστηκαν για β=0° και στους δύο κυλίνδρους η εμφάνιση των υψηλότερων φορτίσεων

πραγματοποιήθηκε σε μεγαλύτερες συχνότητες (*EllCyl1*:0.8892→1.183, *EllCyl2*:0.8892→1.073). Για *ka*=0.5956 η οριζόντια δύναμη διέγερσης που δέχτηκαν τα σώματα εμφάνισε τιμές πλησίον του 0.8, ενώ στις κυματικές συχνότητες για τιμές του *ka*=0.8158, 1.073 και 1.183 τα επίπεδα φόρτισης παρουσιάστηκαν αυξημένα με τις τιμές των οριζόντιων δυνάμεων να ξεπερνούν τις τιμές 1.1 και 1.3. Στις κυματικές συχνότητες για *ka*>1.59 η δράση του κυματισμού στα σώματα αρχίζει να εξασθενεί με αποτέλεσμα οι τιμές της *Fx* να μειώνονται προοδευτικά με την ανάλογη αύξηση της τιμής του *ka*.

Με την αύξηση της απόστασης μεταξύ των δύο ελλειπτικών κυλίνδρων για *R*=2*a* τα επίπεδα των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης στον άξονα *x* που διακρίνονται από το σχήμα 5.2 παρουσίασαν μείωση στα επίπεδα φόρτισης για όλες τις περιπτώσεις εκτός της τοποθέτησης του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου με *β*=90°, που είχε ως αποτέλεσμα μια μικρή αύξηση της μέγιστης τιμής της δύναμης για τον δεύτερο κύλινδρο κατά 2.8% σε σχέση με αυτά που έχουν σχολιαστεί παραπάνω. Αναλυτικά από τα αποτελέσματα των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης στη συγκεκριμένη διάταξη των ελλειπτικών κυλίνδρων προκύπτει ότι η αύξηση της τιμής του *β* για το πρώτο σώμα οδηγεί σε ανάλογη αύξηση των υδροδυναμικών φορτίσεων και στους δύο κυλίνδρους, με σαφώς μεγαλύτερη επιρροή να καταγράφεται για το πρώτο σώμα. Σε αντίθεση με τη περίπτωση για *R*=*a* κατά τη τοποθέτηση των σωμάτων με *β*=0° παρουσιάζονται σε σημαντικό βαθμό τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης για χαμηλές κυματικές συχνότητες (*ka*=0.2101) για τη περίπτωση του δεύτερου κυλίνδρου, που τα επίπεδα φόρτισης του είναι σχεδόν διπλάσια από αυτά του πρώτου σώματος (*Fx*=0.551). Το συγκριμένο φαινόμενο παύει να έχει ισχύ για τιμές του *ka*>0.25. Οι μέγιστες τιμές των δυνάμεων για *β*=0° εμφανίστηκαν σε σχεδόν ίδιες κυματικές συχνότητες (*ka*=0.9076) με της απόστασης των κυλίνδρων με *R*=*a* (*ka*=0.8892) και οι αντίστοιχες τιμές για τους δύο κυλίνδρους κατά σειρά ήταν ίσες με 1.084 και 1.1. Για 0.25≤*ka*≤ 0.75 τα επίπεδα φόρτισης του πρώτου κυλίνδρου είναι ισχυρότερα σε σχέση με του δεύτερου κυλίνδρου, ενώ για 0.75≤*ka*≤ 0.98 η φόρτιση του δεύτερου σώματος είναι ισχυρότερη, το οποίο υποδεικνύει και την ισχύ των φαινομένων αλληλεπίδρασης και της επίδρασης του κυματικού πεδίου στο συγκεκριμένο σημείο με το δεύτερο σώμα να μην "προστατεύεται" πλέον από τον πρώτο κύλινδρο. Για *ka* >0.99 οι καμπύλες των δυνάμεων και για τα δύο σώματα ταυτίζονται και εμφανίζουν μείωση με την ανάλογη αύξηση των τιμών του *ka*, ενώ τα φαινόμενα περίθλασης-ανάκλασης δεν λαμβάνουν χώρα στις μεγαλύτερες συχνότητες, λόγω της φθίνουσας δράσης του κυματισμού στα σώματα.

Για *β*=45° του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και *β*=0° του δεύτερου ελλειπτικού κυλίνδρου η σημαντική αλληλεπίδραση του πρώτου κυλίνδρου με τον κυματισμό (οι απότομες κορυφές του σχήματος είναι αποτέλεσμα έντονης φόρτισης) παρουσιάστηκαν σε λιγότερες και διαφορετικές τιμές του *ka* σε σύγκριση με την πρώτη επιλεγμένη απόσταση (*R*=*a*) μεταξύ των κυλίνδρων. Η πρώτη σημαντική μεταβολή παρατηρείται για *ka*=0.6139 με την δύναμη στο πρώτο σώμα να ισούται με 1.145, έπειτα για *ka* =0.7792 η δύναμη ξεπερνάει την τιμή 1.2, ενώ για *ka* =0.9994 καταγράφηκε η μέγιστη τιμή της δύναμης και για τους δύο κυλίνδρους, με τις τιμές τους να είναι ίσες με 1.263 και 1.142. Οι δυνάμεις διέγερσης στους ελλειπτικούς κυλίνδρους εμφανίζουν τιμές *Fx*≤1 σε κυματικές συχνότητες μεγαλύτερες της τιμής 1. Κατά τη τοποθέτηση του ενός ελλειπτικού κυλίνδρου υπό 90 μοίρες, διακρίνεται η μείωση της εμφάνισης των ισχυρών φορτίσεων για μεγάλο εύρος κυματικών συχνοτήτων στους κυλίνδρους και κυρίως στο πρώτο σώμα. Ο πρώτος κύλινδρος κατέγραψε την μέγιστη τιμή υδροδυναμικής του φόρτισης για *ka* =0.7791 και η τιμή της *Fx*=1.261, ενώ για *ka* =1.036 η *Fx*=1.141 για τον δεύτερο κύλινδρο. Στο εύρος των κυματικών συχνοτήτων για *ka* από 0.99 έως 1.4 οι φορτίσεις των δύο κυλίνδρων για τη συγκεκριμένη διάταξη είναι ισχυρότερες σε σχέση με τις δύο διατάξεις που εξετάστηκαν και σχολιάστηκαν προηγουμένως. Εκτός μιας μικρής αύξησης που καταγράφηκε στη τιμή του *ka* =1.77, οι τιμές των δυνάμεων μειώνονται αισθητά (*ka* >2.2) και τείνουν να μηδενιστούν όπως συμβαίνει και για τις περιπτώσεις του πρώτου σώματος με *β*=0° και *β*=45°.

Με την επιλογή της απόστασης μεταξύ των δύο σωμάτων για R=3a και R=4a, οι τιμές των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης δεν εμφάνισαν σημαντικές διαφορές μεταξύ τους. Αρχικά για την απόσταση μεταξύ των δύο ελλειπτικών κυλίνδρων με R=3a, η πρώτη σημαντική μεταβολή παρατηρείται για β=90° και αντιστοιχούσε στο πρώτο σώμα και στη τιμή του ka =0.2101, με τη δύναμη Fx να είναι σχεδόν διπλάσια σε σχέση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις και ίση με 0.5544 (Σχήμα 5.3). Η συγκεκριμένη συμπεριφορά καταγράφηκε και για R=2a και στη τοποθέτηση των σωμάτων με β=0° και αποτελεί το σημείο, κατά το οποίο παρουσιάστηκαν σε σημαντικό βαθμό τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης για τη περίπτωση του δεύτερου κυλίνδρου στη τιμή του ka=0.2101 που τα επίπεδα φόρτισης του ήταν σχεδόν διπλάσια από αυτά του πρώτου σώματος (Fx=0.551). Σε σχεδόν ίδια κυματική συχνότητα (ka =0.1918) για τη τοποθέτηση των κυλίνδρων με R=4a η δύναμη διέγερσης του πρώτου σώματος με β=90° κατέγραψε παρόμοια τιμή φόρτισης (Fx=0.5343), με κύρια διαφορά πως η αύξηση της απόστασης των σωμάτων ισχυροποιεί τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης σε χαμηλές τιμές των συχνοτήτων για όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις που αντιστοιχούν στον δεύτερο ελλειπτικό κύλινδρο (Σχήμα 5.4). Η εμφάνιση αυτών των φαινομένων για τη περίπτωση του δεύτερου κυλίνδρου και της απόστασης από το πρώτο σώμα με 4a και για όλες τις τιμές του β βρέθηκε στη τιμή του ka =0.23 με τις τιμές των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης να ισούνται κατά μέσο όρο με 0.44. Η αύξηση της απόστασης από R=3a→4a μεταξύ των δύο σωμάτων στη περίπτωση του πρώτου σώματος με β=45° έχει ως αποτέλεσμα την μετατόπιση της μέγιστης φόρτισης σε μεγαλύτερες κυματικές συχνότητες (ka=0.6139→1.018), διαφορά που δεν εντοπίζεται σε μεγάλο βαθμό στον δεύτερο ελλειπτικό κύλινδρο (ka=0.9443→1.036). Οι μέγιστες δυνάμεις για τα σώματα με β=45° και R=3a αντιστοιχούσαν στις τιμές 1.178 και 1.052, αντίστοιχα για R=4a στις τιμές 1.146 και 1.070. Για β=0° των δύο κυλίνδρων και για τις δύο αποστάσεις των σωμάτων η καταγραφή των μέγιστων δυνάμεων βρέθηκε στην τιμή 1.1 και σε τιμές του 0.96≤ ka ≤1.05. Επίσης και στη περίπτωση του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου με β=90° οι μέγιστες τιμές των δυνάμεων διέγερσης των σωμάτων υπολογίστηκαν σε τιμές ίσες περίπου με 1.1, με την αύξηση της απόστασης R να επιφέρει και τη μετατόπιση των συγκεκριμένων μεγίστων σε μεγαλύτερες τιμές του ka.

Στη ενότητα 5.2 απεικονίζεται η μεταβολή της οριζόντιας δύναμης διέγερσης κατά τον άξονα y συναρτήσει των κυματικών συχνοτήτων σε διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων σε κανάλι. Στη μικρότερη απόσταση (R=a) μεταξύ των δύο κυλίνδρων του σχήματος 5.5 η μέγιστη τιμή της οριζόντιας δύναμης διέγερσης (sway) καταγράφηκε στη διάταξη των σωμάτων με β=0°. Για τον πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο η μέγιστη φόρτιση παρουσιάστηκε στη τιμή του ka=1.385, ενώ για τον άλλο κύλινδρο η αντίστοιχη μέγιστη φόρτιση εμφανίστηκε στη κυματική συχνότητα με τιμή του ka=1.201. Η μέγιστη φόρτιση του πρώτου σώματος υπολογίστηκε στη τιμή 4.682, ενώ του δεύτερου σώματος στην τιμή 3.923. Για τη περίπτωση τοποθέτησης του ελλειπτικού κυλίνδρου 1 (EllCyl1) με β=45° τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης είναι πιο ισχυρά σε σύγκριση με τη περίπτωση του πρώτου σώματος με β=0°, το οποίο αποδεικνύεται και από τις υψηλότερες τιμές του δεύτερου σώματος σε σχεδόν όλο το κυματικό εύρος των συχνοτήτων (0.6139≤ka≤1.55, 2.21≤ka≤2.95). Οι τιμές των υδροδυναμικών φορτίσεων του δεύτερου σώματος στο προαναφερθέν εύρος συχνοτήτων κυμαίνονται από 1.19 έως 3.216 με τις αντίστοιχες συχνότητες σε αυτές τις φορτίσεις να αντιστοιχούν σε τιμές του ka ίσες με 0.6139 και 1.183. Τα αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης επάνω στο δεύτερο σώμα για β=0° σε τιμές του ka >1.53 φθίνουν με γρήγορο ρυθμό έπειτα από την εμφάνιση τους, το οποίο αποτελεί και το μοναδικό εύρος που οι δυνάμεις διέγερσης του δεύτερου σώματος είναι υψηλότερες σε σχέση με του πρώτου. Επίσης πρέπει να σημειωθεί, ότι σε μικρές αποστάσεις των σωμάτων τα φαινόμενα περίθλασης και ανάκλασης του κυματισμού, λόγω της πρόσπτωσης στα σώματα δεν λαμβάνει χώρα σε σημαντικό εύρος κυματικών συχνοτήτων για όλες τις διατάξεις των σωμάτων κατά τον άξονα y, φαινόμενο που είναι πιο ισχυρό με την αύξηση της απόστασης μεταξύ των κυλίνδρων και συνεπώς εξισορροπεί τη δράση του κυματικού πεδίου σε όλες τις διατάξεις των σωμάτων, ενώ παράλληλα διευκολύνει τη συνεχή μεταφορά των φορτίων πρόσπτωσης και στα δύο σώματα για μεγαλύτερο εύρος τιμών του ka εντός του καναλιού. Με την επιλογή τιμής του β=90° για το πρώτο κύλινδρο οι τιμές των δυνάμεων που εμφανίζουν σε όλο το πεδίο των κυματικών συχνοτήτων στα δύο σώματα είναι σαφώς πολύ μικρότερες με τις προηγούμενες διατάξεις που αναφέρθηκαν παραπάνω. Οι δυνάμεις διέγερσης του πρώτου σώματος κατέγραψαν σε σχεδόν όλο το

κυματικό εύρος των συχνοτήτων τιμές μικρότερες του 0.5, αντίθετα στο δεύτερο κύλινδρο εμφανίστηκαν τιμές των δυνάμεων μεγαλύτερες του 1, με την μέγιστη τιμή φόρτισης να ισούται με 1.693 και να αντιστοιχεί για ka = 1.183.

Για την απόσταση R=2a μεταξύ των σωμάτων στο σχήμα 5.6 η μέγιστη φόρτιση υπολογίστηκε για το δεύτερο ελλειπτικό κύλινδρο της διάταξης με β=0° και για τα δύο σώματα. Σε σχέση με τη διάταξη των κυλίνδρων στη μικρότερη απόσταση, η εμφάνιση αυτής της μέγιστης φόρτισης μετατοπίστηκε σε χαμηλότερη κυματική συχνότητα (ka=1.201→0.412), με την τιμή της δύναμης να ισούται με 4.216. Η ίδια ακριβώς συμπεριφορά εμφανίστηκε και στο πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο (ka=1.385→0.9627) με την δύναμη να είναι ίση με 2.836. Έπειτα της ισχυρής φόρτισης που δέχεται το δεύτερο σώμα, δηλαδή για ka>0.412 οι τιμές των δυνάμεων παρουσιάζουν μείωση της τάξης του 63.4% στη συχνότητα 0.6139 και 70% για ka=1.0. Σε συχνότητες μεγαλύτερες του 1 οι οριζόντιες δυνάμεις διέγερσης του δεύτερου ελλειπτικού κυλίνδρου καταγράφουν τιμές Fy<1, ενώ για ka>2.58 οι δυνάμεις παρουσίασαν σημαντική τάση μείωσης, με αποτέλεσμα το σώμα να δέχεται χαμηλές υδροδυναμικές φορτίσεις. Το συγκεκριμένο φαινόμενο καταγράφηκε και στη περίπτωση του πρώτου σώματος με την αρχική τάση μείωσης στα επίπεδα των υδροδυναμικών φορτίσεων να εμφανίζονται για ka >0.9627 με τις τιμές των δυνάμεων να παρουσιάζουν μείωση κατά 61.1% και 70.7% στις συχνότητες 1.311 και 1.752. Επιπλέον για ka>2.58 οι δυνάμεις παρουσίασαν σημαντική τάση μείωσης, με πανομοιότυπο τρόπο με του δεύτερου κυλίνδρου. Για β=45° του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου η μέγιστη τιμή της υδροδυναμικής φόρτισης διακρίνεται στο δεύτερο σώμα και στη κυματική συχνότητα με τιμή του ka =0.7791, με τη δύναμη να ίση με 2.985, ενώ ο πρώτος κύλινδρος παρουσίασε την μέγιστη φόρτιση του για ka =1.018, με τη δύναμη να ισούται με 1.297. Για ka>1.24 οι δυνάμεις που ασκήθηκαν στο πρώτο κύλινδρο εμφάνισαν τιμές μικρότερες του 0.5, ενώ στο δεύτερο κύλινδρο το γεγονός αυτό έλαβε χώρα για τιμές του ka>1.9. Όπως και για R=a η επιλογή τιμής του β=90° για το πρώτο κύλινδρο είχε ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μικρών τιμών στις δυνάμεις που ασκήθηκαν επάνω στα δύο σώματα σε σύγκριση με τις υπόλοιπες διατάξεις. Στο πρώτο σώμα οι δυνάμεις διέγερσης παρουσίασαν σε σχεδόν όλο το κυματικό εύρος των συχνοτήτων τιμές μικρότερες του 0.5, αντίθετα στο δεύτερο κύλινδρο εμφανίστηκαν τιμές των δυνάμεων μεγαλύτερες του 2, με την μέγιστη τιμή φόρτισης να ισούται με 2.597 και να αντιστοιχεί για ka = 0.7791.

Η αύξηση της απόστασης των ελλειπτικών κυλίνδρων σε 3a κατά τον άξονα y εντός του καναλιού οδήγησε σε σημαντική μείωση των επιπέδων των υδροδυναμικών φορτίσεων για τα σώματα, λόγω της ίσης κατανομής των φορτίων και στους δύο κυλίνδρους, φαινόμενο που παρατηρήθηκε σε σχεδόν όλες τις διατάξεις που εξετάστηκαν, δηλαδή για τις διαφορετικές τιμές του β (0°,45°,90°) που επιλέχτηκαν για τον πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο. Η μοναδική περίπτωση που παρουσιάστηκαν μικρές τιμές φόρτισης εμφανίστηκε στο πρώτο σώμα για β=90° με τις δυνάμεις διέγερσης να εμφανίζουν τιμές λίγο υψηλότερες από 0.2, ενώ η μέγιστη τιμή φόρτισης απαντάται στη κυματική συχνότητα ka=1.422 και ήταν ίση με 0.4552. Αντίθετα στην ίδια διάταξη ο δεύτερος ελλειπτικός κύλινδρος εμφάνισε την μεγαλύτερη δύναμη διέγερσης για όλες τις περιπτώσεις που αναλύθηκαν με την τιμή της φόρτισης να βρίσκεται για ka=0.981 και να ισούται με 1.732. Ανάλογα επίπεδα φόρτισης διακρίνονται και στη διάταξη των σωμάτων με β=0°, με τους δύο κυλίνδρους να καταγράφουν τιμές υψηλότερες του 1 ($FyCy1$=1.625, $FyCyl2$=1.583), με κύρια διαφορά πως η μέγιστη διέγερση ασκείται σε χαμηλές κυματικές συχνότητες για το πρώτο κύλινδρο (ka=0.5956), ενώ ο δεύτερος κύλινδρος δέχεται τα συγκεκριμένα φορτία σε πολύ μεγαλύτερες κυματικές συχνότητες (ka=1.568). Για β=45° παρατηρήθηκε μια σχετική μείωση στα επίπεδα φόρτισης των κυλίνδρων σε σύγκριση με β=0°, με τους δύο κυλίνδρους να καταγράφουν μέγιστες τιμές δυνάμεων ίσες με 1.311 και 0.9685 με τις κυματικές συχνότητες των σωμάτων να βρίσκονται για ka=0.6139 και 1.403. Ως συμπέρασμα που μπορεί να προκύψει στη τοποθέτηση των σωμάτων σε απόσταση R=3a είναι ότι για τιμές του β=0°,45° του πρώτου κυλίνδρου παρατηρήθηκε η εμφάνιση των μέγιστων φορτίσεων για τον δεύτερο κύλινδρο σε υψηλές τιμές του ka και σε χαμηλές τιμές του για τη περίπτωση του πρώτου κυλίνδρου, καθώς και την μείωση των φορτίσεων με την ανάλογη αύξηση της γωνίας τοποθέτησης του πρώτου σώματος. Για τιμές του β=90° το συγκεκριμένο φαινόμενο δεν επαναλαμβάνεται καθώς το πρώτο σώμα είναι τοποθετημένο κάθετα στον άξονα διάδοσης του κυματισμού με αποτέλεσμα τα φορτία, λόγω της

αλληλεπίδρασης πρώτου σώματος-κύματος να μεταφέρονται και να μετατοπίζονται στο δεύτερο σώμα, το οποίο δικαιολογεί και την υψηλή τιμή διέγερσης για ka=0.981. Επίσης διακρίνεται πως η ισχυρότερη επίδραση του κυματικού πεδίου για μεγάλο εύρος κυματικών συχνοτήτων στο πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο καταγράφηκε για τη περίπτωση τοποθέτησης των σωμάτων με β=0° και για τιμές του 0.5956≤ ka ≤1.73.

Είναι αντιληπτό πως τα φαινόμενα περίθλασης είναι σημαντικής σημασίας για τις υδροδυναμικές φορτίσεις των ελλειπτικών κυλίνδρων και σε μεγάλες μεταξύ τους αποστάσεις. Στη μεγαλύτερη απόσταση (R=4a) μεταξύ των σωμάτων που εξετάστηκε, παρατηρήθηκε η εμφάνιση των μέγιστων υδροδυναμικών φορτίσεων του δεύτερου ελλειπτικού κυλίνδρου για όλες τις τιμές του β στη κυματική συχνότητα κοντά στη τιμή του 1. Για β=0° η μέγιστη δύναμη διέγερσης του δεύτερου κυλίνδρου εμφανίστηκε για ka=0.9627 στη τιμή 1.841, ενώ για β=45° και 90° οι μέγιστες δυνάμεις διέγερσης του δεύτερου σώματος καταγράφηκαν για ka=0.9994, με τις αντίστοιχες μέγιστες τιμές να είναι ίσες με 2.176 και 1.671. Για ka=0.9627 και β=0° παρουσιάστηκαν οι μέγιστες φορτίσεις και των δύο ελλειπτικών κυλίνδρων, με τις τιμές τους να εμφανίζουν πολύ μικρές διαφορές ($FyCy1$=1.993, $FyCyl2$=1.841). Στη περίπτωση του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου με β=45° η μέγιστη τιμη διέγερσης κατά τον άξονα y υπολογίστηκε για ka=0.6139 και ήταν ίση με 1.504, ενώ για β=90° η αντίστοιχη μέγιστη φόρτιση εμφανίστηκε σαφώς μειωμένη στη τιμή Fy= 0.3516 με ka=1.807. Για τιμές του 0.1≤ka≤0.82 οι δυνάμεις διέγερσης που ασκούνται στο πρώτο κύλινδρο είναι υψηλότερες, αντίθετα για τιμές του ka>1.55 οι φορτίσεις που δέχτηκε ο δεύτερος ελλειπτικός κύλινδρος για όλες τις τιμές β, είναι σημαντικά πιο ισχυρές σε σύγκριση με του πρώτου σώματος. Τέλος για ka>2.7 οι δυνάμεις διέγερσης των ελλειπτικών κυλίνδρων παρουσιάζουν μειωτική τάση και προοδευτικά τείνουν προς το μηδέν με την αύξηση των τιμών του ka.

Στη ενότητα 5.3 απεικονίζονται τα διαγράμματα των παραγόμενων ροπών κατά τον άξονα x (roll) συναρτήσει των κυματικών συχνοτήτων σε διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων σε κανάλι. Για τη μικρότερη απόσταση (R=a) μεταξύ των δύο κυλίνδρων του σχήματος 5.9 η μέγιστη τιμή της ροπής στον άξονα x καταγράφηκε στη διάταξη των σωμάτων με β=0°. Στο πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο η μέγιστη ροπή παρουσιάστηκε στη τιμή του ka=1.385, ενώ για τον άλλο κύλινδρο η αντίστοιχη μέγιστη τιμή εμφανίστηκε στη κυματική συχνότητα με τιμή του ka=1.532. Η μέγιστη ροπή του πρώτου σώματος υπολογίστηκε στη τιμή 2.655, ενώ του δεύτερου σώματος στην τιμή 2.184. Στη περίπτωση τοποθέτησης του ελλειπτικού κυλίνδρου 1 (EllCyl1) με β=45° τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης είναι πιο ισχυρά σε σύγκριση με τη περίπτωση του πρώτου σώματος με β=0°, το οποίο αποδεικνύεται και από τις υψηλότερες τιμές του δεύτερου σώματος σε σχεδόν όλο το κυματικό εύρος των συχνοτήτων (0.6139≤ka≤1.55, 2.21≤ka≤2.95), με αποτέλεσμα να αποτυπώνεται αυτή η επιρροή και στις τιμές των ροπών. Οι τιμές του δεύτερου σώματος στο προαναφερθέν εύρος συχνοτήτων κυμαίνονται από 0.61 έως 1.77 με τις αντίστοιχες συχνότητες να εμφανίζονται σε τιμές του ka ίσες με 0.6139 και 1.183. Για β=90° στο πρώτο κύλινδρο οι τιμές των ροπών στα δύο σώματα για όλο το πεδίο των κυματικών συχνοτήτων είναι σαφώς πολύ μικρότερες με τις προηγούμενες διατάξεις που αναφέρθηκαν παραπάνω. Οι ροπές του πρώτου κυλίνδρου κατέγραψαν σε σχεδόν όλο το κυματικό εύρος των συχνοτήτων τιμές μικρότερες του 0.2, αντίθετα στο δεύτερο κύλινδρο εμφανίστηκαν τιμές των δυνάμεων μεγαλύτερες του 0.5, με την μέγιστη ροπή να ισούται με 0.93 και να αντιστοιχεί για ka = 1.183.

Για R=2a μεταξύ των σωμάτων στο σχήμα 5.10 η μέγιστη τιμή ροπής εμφανίζεται για το δεύτερο ελλειπτικό κύλινδρο της διάταξης με β=0°. Σε σύγκριση με τη διάταξη των κυλίνδρων στη μικρότερη απόσταση, η εμφάνιση αυτής της μέγιστης ροπής μετατοπίστηκε σε χαμηλότερη κυματική συχνότητα (ka=1.532→0.963), με την τιμή της ροπής να ισούται με 2.137. Η ίδια ακριβώς συμπεριφορά εμφανίστηκε και στο πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο (ka=1.385→0.9627) με την δύναμη να είναι ίση με 1.518. Για β=45° του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου η μέγιστη τιμή της ροπής διακρίνεται στο δεύτερο σώμα και στη κυματική συχνότητα με τιμή του ka =0.7791, με τη ροπή να ίση με 1.564, ενώ ο πρώτος κύλινδρος παρουσίασε την μέγιστη τιμή του για ka=1.018, με τη ροπή να ισούται με 0.6994. Για ka>1.24 οι ροπές που ασκήθηκαν στο πρώτο κύλινδρο εμφάνισαν τιμές μικρότερες του 0.3, ενώ στο δεύτερο κύλινδρο το γεγονός αυτό έλαβε χώρα για τιμές του ka>1.9. Οι μικρότερες τιμές στις ροπές που ασκήθηκαν επάνω στα δύο σώματα σε σύγκριση με τις υπόλοιπες διατάξεις εμφανίστηκαν για β=90°. Στο πρώτο κύλινδρο οι

ροπές παρουσίασαν σε σχεδόν όλο το κυματικό εύρος των συχνοτήτων τιμές μικρότερες του 0.3, αντίθετα στο δεύτερο κύλινδρο εμφανίστηκαν τιμές μεγαλύτερες του 1, με την μέγιστη τιμή να ισούται με 1.360 και να αντιστοιχεί για ka = 0.7791.

Με την αύξηση της απόστασης των ελλειπτικών κυλίνδρων σε $3a$ κατά τον άξονα y εντός του καναλιού παρουσιάστηκε σημαντική μείωση των επιπέδων των παραγόμενων ροπών για τα σώματα, λόγω της ίσης κατανομής των φορτίων και στους δύο κυλίνδρους, φαινόμενο που παρατηρήθηκε σε σχεδόν όλες τις διατάξεις που εξετάστηκαν. Για β=90° παρουσιάστηκαν οι μικρότερες τιμές ροπών, με τον πρώτο κύλινδρο να καταγραφεί τιμές λίγο υψηλότερες από 0.1, ενώ η μέγιστη τιμή ροπής απαντάται στη κυματική συχνότητα ka=1.422 και ήταν ίση με 0.2595, αντίθετα στη ίδια διάταξη ο δεύτερος ελλειπτικός κύλινδρος εμφάνισε την μεγαλύτερη ροπή για όλες τις περιπτώσεις για ka=0.981 και να ισούται με 0.9292. Αντίστοιχες τιμές ροπών διακρίνονται και στη διάταξη των σωμάτων με β=0°, με τους δύο κυλίνδρους να καταγράφουν τιμές υψηλότερες του 0.5 ($FyCy1$=0.8359, $FyCyl2$=0.9217), με κύρια διαφορά πως η μέγιστη ροπή ασκείται σε χαμηλές κυματικές συχνότητες για το πρώτο κύλινδρο (ka=0.5956), ενώ στο δεύτερο κύλινδρο σε μεγαλύτερες κυματικές συχνότητες (ka=1.568). Για β=45° παρατηρήθηκε μια σχετική μείωση των ροπών σε σύγκριση με β=0°, με τους δύο κυλίνδρους να καταγράφουν μέγιστες τιμές ίσες με 0.6755 και 0.5506 με τις κυματικές συχνότητες των σωμάτων να βρίσκονται για ka=0.6139 και 1.403. Η επίδραση του κυματικού πεδίου στο πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο εμφανίζεται ισχυρή σε μεγάλο εύρος κυματικών συχνοτήτων για 0.5956≤ ka ≤1.73 και β=0°.

Στη μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των σωμάτων με R=4a, παρατηρήθηκε η εμφάνιση των μέγιστων ροπών του δεύτερου ελλειπτικού κυλίνδρου για όλες τις τιμές του β στη κυματική συχνότητα κοντά στη τιμή του 1. Για β=0° η μέγιστη ροπή του δεύτερου κυλίνδρου εμφανίστηκε για ka=0.9627 στη τιμή 0.9858, ενώ για β=45° και 90° οι μέγιστες ροπές καταγράφηκαν για ka=0.9994, με τις αντίστοιχες τιμές να είναι ίσες με 1.170 και 0.898. Στη κυματική συχνότητα 0.9627 και για β=0° παρουσιάστηκαν οι μέγιστες ροπές και των δύο ελλειπτικών κυλίνδρων, με τις τιμές να εμφανίζουν πολύ μικρές διαφορές ($MxCy1$=1.07, $MxCyl2$=0.986). Στη περίπτωση του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου με β=45° η μέγιστη τιμή ροπής κατά τον άξονα x υπολογίστηκε για ka=0.6139 και ήταν ίση με 0.7749, ενώ για β=90° η αντίστοιχη τιμή εμφανίστηκε σαφώς μειωμένη και ίση με 0.2119 για ka=1.807. Στις τιμές 0.1≤ka≤0.82 οι ροπές που ασκούνται στο πρώτο κύλινδρο είναι υψηλότερες, αντίθετα για τιμές του ka>1.55 οι ροπές του δεύτερου ελλειπτικού κυλίνδρου κατέγραψαν μεγαλύτερες τιμές σε σύγκριση με του πρώτου κυλίνδρου για όλες τις εξεταζόμενες τιμές β. Σε συχνότητες μεγαλύτερες του 2.7 οι ροπές των ελλειπτικών κυλίνδρων εμφάνισαν σημαντική μείωση με τις τιμές τους να τείνουν προς το μηδέν με την αύξηση των τιμών του ka.

Στη ενότητα 5.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ροπών κατά τον άξονα y (pitch) συναρτήσει των κυματικών συχνοτήτων για διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων σε κανάλι. Οι καμπύλες των δύο σωμάτων για R=a και β=0° ακολουθούν την ίδια συμπεριφορά σε όλο το εύρος των κυματικών συχνοτήτων, με συνέπεια τη καταγραφή ίδιων τιμών στις παραγόμενες ροπές των σωμάτων. Για τιμές του ka>0.1 η ροπή στους ελλειπτικούς κυλίνδρους ακολουθεί μια αυξητική τάση, με την μέγιστη τιμή να εμφανίζεται για ka=0.9259. Σε κυματικές συχνότητες με ka> 0.9259 οι καμπύλες των κυλίνδρων παρουσιάζουν ομαλοποίηση και σταθεροποίηση στις τιμές των ροπών, ενώ για ka> 1.0 η δράση του κυματισμού στα σώματα αρχίζει να εξασθενεί με αποτέλεσμα οι τιμές της My να μειώνονται σημαντικά. Στη τιμή του β=45° διακρίνεται αύξηση της μέγιστης ροπής κατά 22% (My=0.6937→0.8955) στο πρώτο κύλινδρο σε σχέση με την μέγιστη τιμή ροπής για β=0°, ενώ για το δεύτερο κύλινδρο καταγράφηκε μείωση της αντίστοιχης τιμής περίπου κατά 2.7% (My=0.6923→0.7111). Και στους δύο κυλίνδρους η αλλαγή του β οδήγησε στη μετατόπιση των μέγιστων ροπών σε μεγαλύτερες κυματικές συχνότητες (ka=1.183). Για ka =1.55 οι ροπές στους δύο κυλίνδρους είναι εξισορροπημένες και κοντά στην τιμή 0.6, ενώ για τιμές του ka>1.55 φθίνουν σταδιακά και στα δύο σώματα, λόγω της μειωμένης δράσης του κυματισμού επάνω στους κυλίνδρους, με αποτέλεσμα στις μεγάλες τιμές των συχνοτήτων (ka >2.7) η ροπή να καταγράφει τιμές στο 0.17. Για β=90° οι ροπές κατά τον άξονα y εμφανίζονται μειωμένες σε σχέση με τη περίπτωση τοποθέτησης του πρώτου σώματος υπό γωνία 45 μοιρών. Για ka=1.183 που

αποτελεί το σημείο μέγιστης φόρτισης του πρώτου σώματος η ροπή βρέθηκε ίση με 0.7349, ενώ για το δεύτερο σώμα η αντίστοιχη τιμή ήταν ίση με 0.6072 και έλαβε χώρα για ka=1.458.

Με την αύξηση της απόστασης σε R=2a τα επίπεδα των ροπών στον άξονα y που διακρίνονται από το σχήμα 5.14 παρουσίασαν μείωση για όλες τις περιπτώσεις εκτός της τοποθέτησης του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου με β=90°, που είχε ως αποτέλεσμα μια μικρή αύξηση της μέγιστης τιμής της ροπής. Η αύξηση της τιμής του β για το πρώτο σώμα οδηγεί σε ανάλογη αύξηση των ροπών και στους δύο κυλίνδρους, με σαφώς μεγαλύτερη επιρροή να καταγράφεται στο πρώτο σώμα. Οι μέγιστες τιμές των ροπών για τους ελλειπτικούς κυλίνδρους με β=0° εμφανίστηκαν στις κυματικές συχνότητες ka=0.9810 και 0.9443 και οι αντίστοιχες τιμές ήταν ίσες με 0.5799 και 0.5851. Για β=45° η πρώτη σημαντική μεταβολή παρατηρείται για ka=0.6139 με την ροπή στο πρώτο σώμα να ισούται με 0.59, έπειτα για ka =0.7792 η ροπή ξεπερνάει την τιμή 0.6, ενώ για ka =0.9994 καταγράφηκε η μέγιστη τιμή της ροπής και για τους δύο κυλίνδρους, με τις τιμές τους να είναι ίσες με 0.6793 και 0.6144. Οι ροπές στους ελλειπτικούς κυλίνδρους εμφανίζουν τιμές μικρότερες του 0.5 για ka>1. Για β=90° η μέγιστη ροπή στο πρώτο κύλινδρο καταγράφηκε στη συχνότητα με τιμή ka =0.7791 και ήταν ίση με 0.6610, ενώ ο δεύτερος κύλινδρος εμφάνισε την μέγιστη τιμή του για ka =1.054 και ισοδυναμούσε με 0.6186. Για τιμές του ka από 0.99 έως 1.4 οι ροπές των δύο κυλίνδρων για τη συγκεκριμένη διάταξη είναι ισχυρότερες σε σχέση με τις δύο διατάξεις που σχολιάστηκαν παραπάνω. Οι ροπές μειώνονται αισθητά για ka >2.2 και τείνουν να μηδενιστούν σε όλες τις τιμές του β.

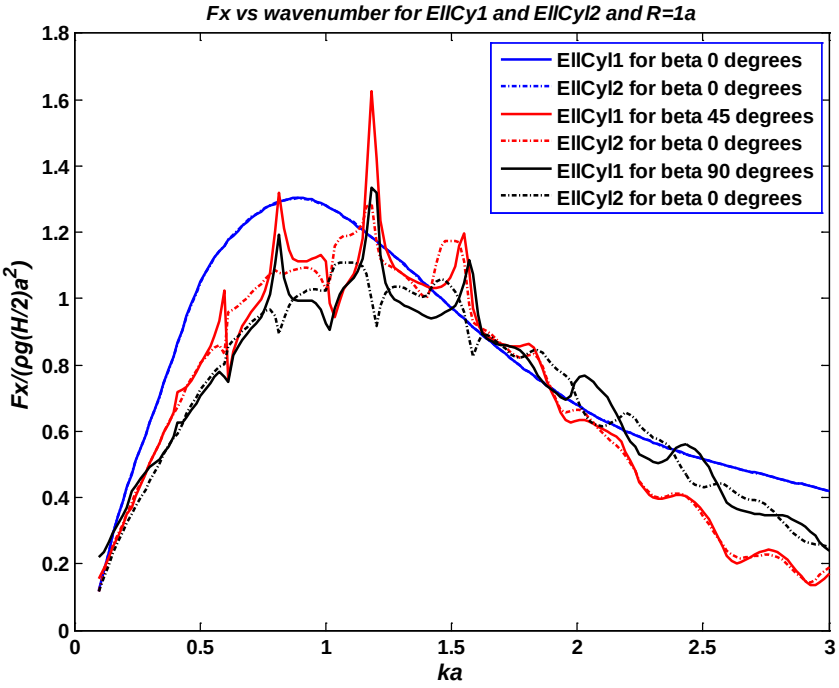
Κατά την απόσταση μεταξύ των δύο ελλειπτικών κυλίνδρων με R=3a, η πρώτη σημαντική μεταβολή παρατηρείται για β=90° και αντιστοιχούσε στο πρώτο σώμα και στη τιμή του ka =0.2101, με τη ροπή να είναι σχεδόν διπλάσια σε σχέση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις και ίση με 0.2782 (Σχήμα 5.16). Στη απόσταση μεταξύ των κυλίνδρων ίση με R=4a και σε σχεδόν ίδια κυματική συχνότητα (ka =0.1918) η ροπή του πρώτου σώματος για β=90° κατέγραψε παρόμοια τιμή (0.268). Η αύξηση της απόστασης από R=3a→4a μεταξύ των δύο σωμάτων στη περίπτωση του πρώτου σώματος με β=45° έχει ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση της μέγιστης ροπής σε μεγαλύτερες κυματικές συχνότητες (ka=0.6139→1.018), διαφορά που δεν παρουσιάζεται σε μεγάλο βαθμό στο δεύτερο ελλειπτικό κύλινδρο (ka=0.9627→1.220). Οι μέγιστες ροπές για τα σώματα με β=45° και R=3a αντιστοιχούσαν στις τιμές 0.6067 και 0.563, ενώ για R=4a στις τιμές 0.6179 και 0.5838. Για β=0° των δύο κυλίνδρων και στις δύο αποστάσεις των σωμάτων η καταγραφή των μέγιστων ροπών βρέθηκε στη τιμή 0.57 για ka =1.1. Τέλος για β=90° οι μέγιστες ροπές των σωμάτων εμφάνισαν τιμές στο 0.59 σε κυματικές συχνότητες κοντά στη τιμή 1.

Τα αποτελέσματα των ροπών κατά τον άξονα z (yaw) συναρτήσει των κυματικών συχνοτήτων για διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων σε κανάλι αποδίδονται σχηματικά στη ενότητα 5.5. Για απόσταση R=a παρατηρήθηκε πως η σταδιακή αύξηση της τιμής του β επιφέρει την αντίστοιχη αύξηση των ροπών που ασκούνται στο πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο, με τις μεγαλύτερες τιμές να καταγράφονται για β=90°, ενώ για το δεύτερο κύλινδρο η αύξηση των ροπών καταγράφηκε μόνο για β=45° (Σχήμα 5.17). Για β=90° οι τιμές των ροπών του δεύτερου σώματος συγκριτικά με τις δύο άλλες περιπτώσεις δεν εμφανίζουν σημαντικές μεταβολές. Αρχικά για β=0° οι ροπές και για τους δύο ελλειπτικούς κυλίνδρους υπολογίστηκαν στις ίδιες ακριβώς τιμές, με τις καμπύλες των δύο σωμάτων να μην παρουσιάζουν διαφοροποιήσεις μεταξύ τους και με τις μέγιστες ροπές τους να βρίσκονται στην τιμή 0.2968 και στη κυματική συχνότητα για ka=2.559. Από ka 0.1 έως 0.6 οι τιμές των ροπών για τους κυλίνδρους με β=0° αυξάνονται, ενώ στο εύρος των συχνοτήτων από 0.6 έως 1.4 εμφάνισαν συνεχή μείωση και με το πέρας αυτού του σημείου επαναλαμβάνεται η συνεχόμενη αύξηση των ροπών, μέχρις ότου να καταγραφεί η μέγιστη τιμή ροπής και για τα δύο σώματα (ka=2.559). Με την αύξηση της γωνίας τοποθέτησης του πρώτου κυλίνδρου σε β=45° οι ροπές κατά τον άξονα z που ασκήθηκαν στον δεύτερο κύλινδρο ήταν ισχυρότερες από του πρώτου κυλίνδρου για σημαντικό εύρος τιμών των κυματικών συχνοτήτων και συγκεκριμένα για 0.18≤ka≤1.6, με τη μέγιστη ροπή να αντιστοιχεί στη τιμή 0.4385 και στη συχνότητα 1.183.

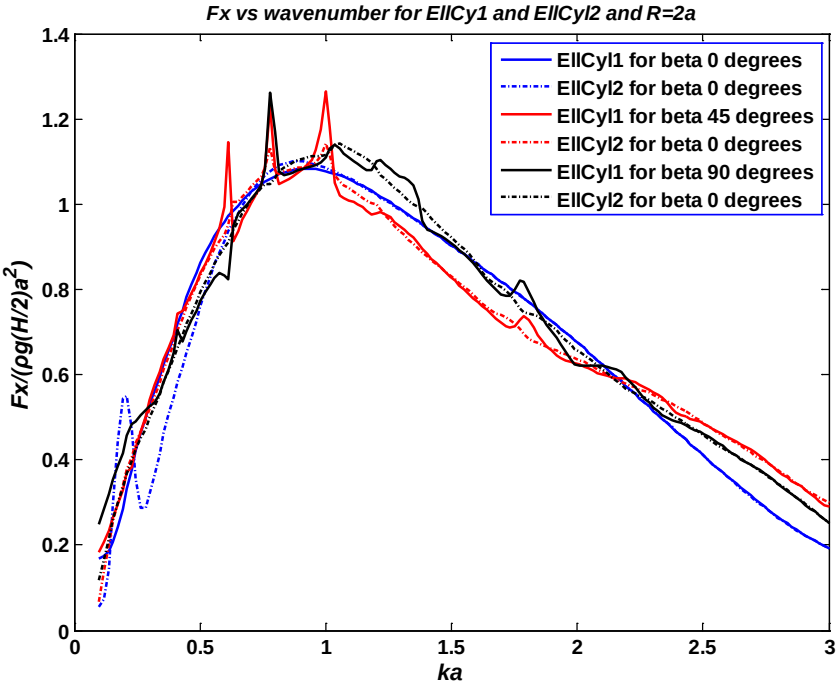
Ο πρώτος κύλινδρος εμφάνισε την μέγιστη ροπή του εντός του συγκεκριμένου εύρους συχνοτήτων για ka=1.550 και ήταν ίση με 0.3282. Οι ροπές του πρώτου σώματος γίνονται ισχυρότερες από το δεύτερο σώμα για συχνότητες μεγαλύτερες του 1.9. Για β=90° υπολογίστηκαν οι υψηλότερες τιμές των ροπών για το πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο, σε αντίθεση με την καταγραφή μικρών τιμών για το δεύτερο ελλειπτικό κύλινδρο. Η μέγιστη ροπή για το πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο υπολογίστηκε στη τιμή 0.5505 για ka=1.201, ενώ για το δεύτερο κύλινδρο η μέγιστη ροπή αντιστοιχούσε στη τιμή 0.1853 και για ka=1.55.

Για απόσταση R=2a οι τιμές των ροπών στους κυλίνδρους δεν ξεπερνάνε την τιμή 0.15 εκτός της περίπτωσης του δεύτερου ελλειπτικού κυλίνδρου με β=0°, που στο εύρος των κυματικών συχνοτήτων για ka από 0.1 έως 0.24 οι ροπές εμφανίζουν τιμές υψηλότερες του 0.45 (Σχήμα 5.18). Η μέγιστη τιμή ροπής του υπολογίστηκε για ka=0.1734 και ήταν ίση με 0.4662. Ο πρώτος ελλειπτικός κύλινδρος για β=0° κατέγραψε μέγιστη ροπή στη συχνότητα 2.853 και αντιστοιχούσε στη τιμή 0.07. Για β=45° οι ροπές για το πρώτο σώμα παρουσίασαν τιμές υψηλότερες του 0.1 για τιμές του ka>1.5, και το δεύτερο σώμα για συχνότητες μεγαλύτερες του 1.7, ενώ για τιμές του ka>2.5 τα επίπεδα ροπών μειώνονται σταδιακά και για τους δύο κυλίνδρους. Για β=90° οι ροπές του πρώτου κυλίνδρου σε σχεδόν όλο το εύρος των συχνοτήτων ήταν μεγαλύτερες σε σύγκριση με το δεύτερο κύλινδρο εμφανίζοντας παράλληλα αυξομειώσεις με την ανάλογη αύξηση τιμών του ka και καταγράφοντας μέγιστη ροπή για ka=0.7791 με τιμή ίση με 0.11, ενώ ο δεύτερος κύλινδρος παρουσίασε στο μεγαλύτερο εύρος των κυματικών συχνοτήτων τιμές μικρότερες από 0.05. Στις αποστάσεις R=3a και 4a και για όλες τις τιμές του β οι ροπές που ασκήθηκαν επάνω στους ελλειπτικούς κυλίνδρους εμφανίζουν αμελητέα επίδραση με τις ροπές να μην ξεπερνάνε σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά να μην ξεπερνούν την τιμή 0.07 (Σχήμα 5.19,5.20). Μόνο για β=45° και στους δύο ελλειπτικούς κυλίνδρους τα επίπεδα των ροπών προσεγγίζουν την τιμή 0.07, με το αντίστοιχο εύρος των κυματικών συχνοτήτων να εμφανίζεται για τιμές του 1.5≤ka≤2.4.

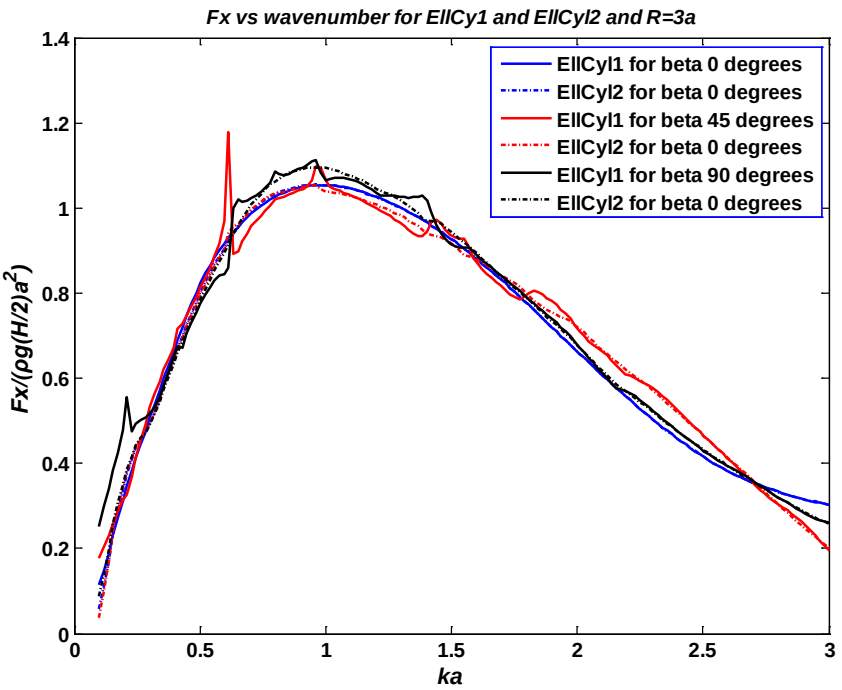
5.1. Δυνάμεις Διέγερσης κατά τον άξονα x



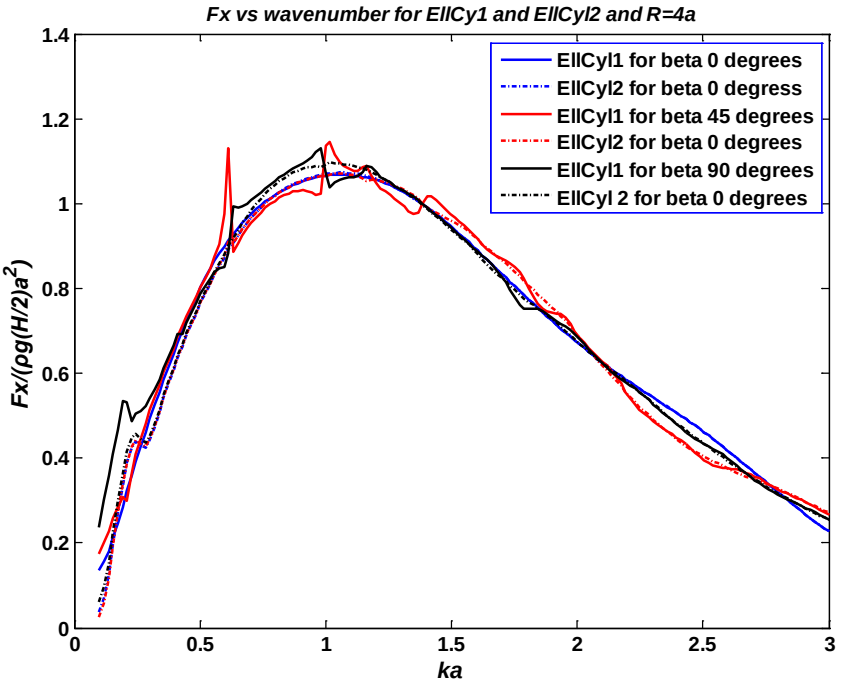
Σχήμα 5.1 Δυνάμεις διέγερσης (surge) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με α. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.



Σχήμα 5.2 Δυνάμεις διέγερσης (surge) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 2α. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

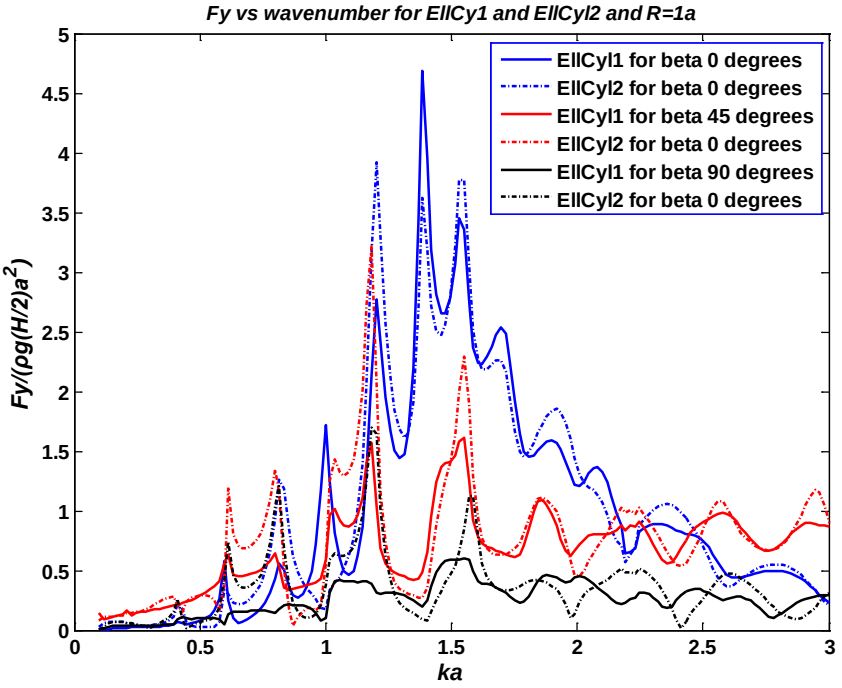


Σχήμα 5.3 Δυνάμεις διέγερσης (surge) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 3α. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

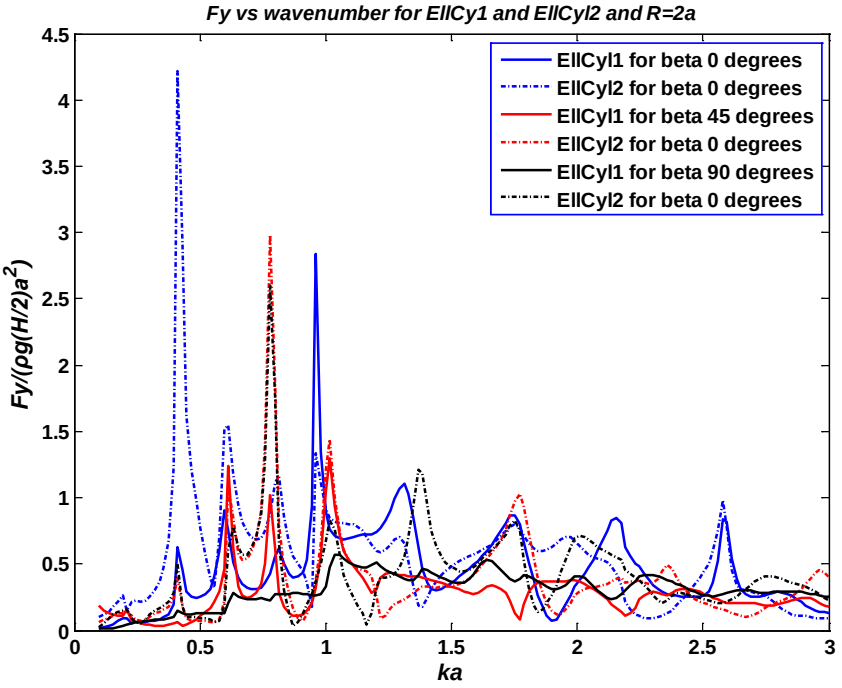


Σχήμα 5.4 Δυνάμεις διέγερσης (surge) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 4α. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

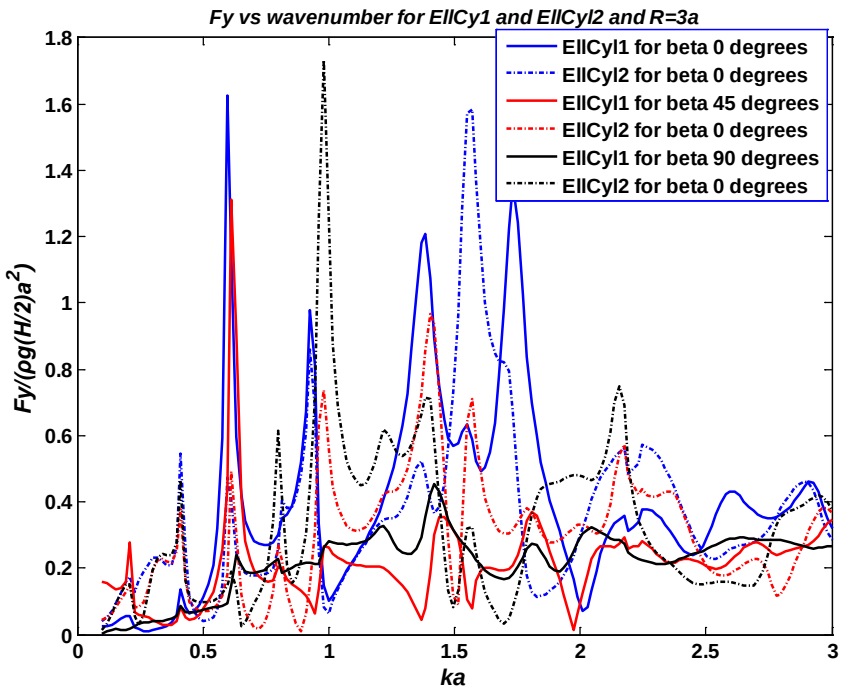
5.2. Δυνάμεις Διέγερσης κατά τον άξονα y



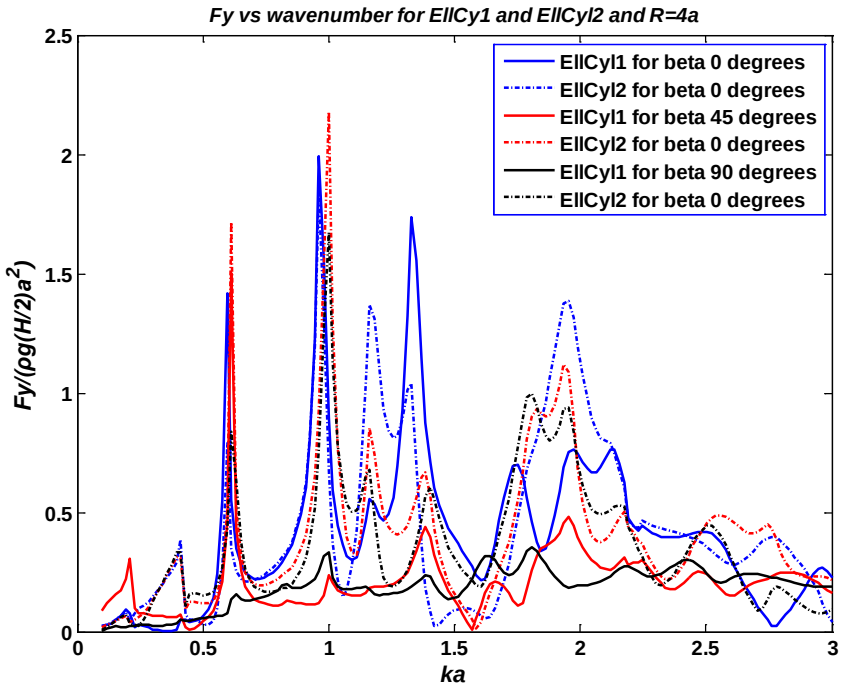
Σχήμα 5.5 Δυνάμεις διέγερσης (sway) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με α. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.



Σχήμα 5.6 Δυνάμεις διέγερσης (sway) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 2α. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

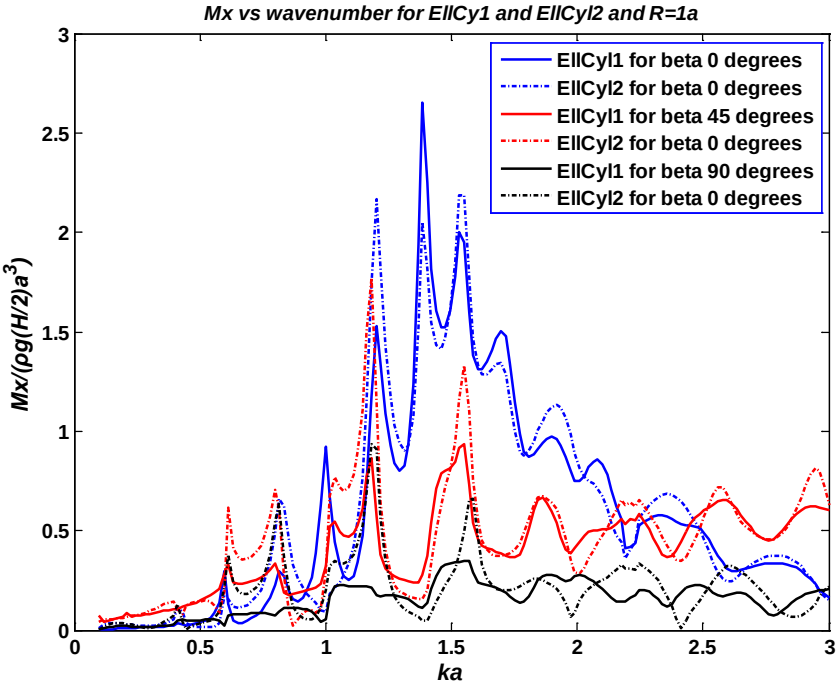


Σχήμα 5.7 Δυνάμεις διέγερσης (sway) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 3α. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

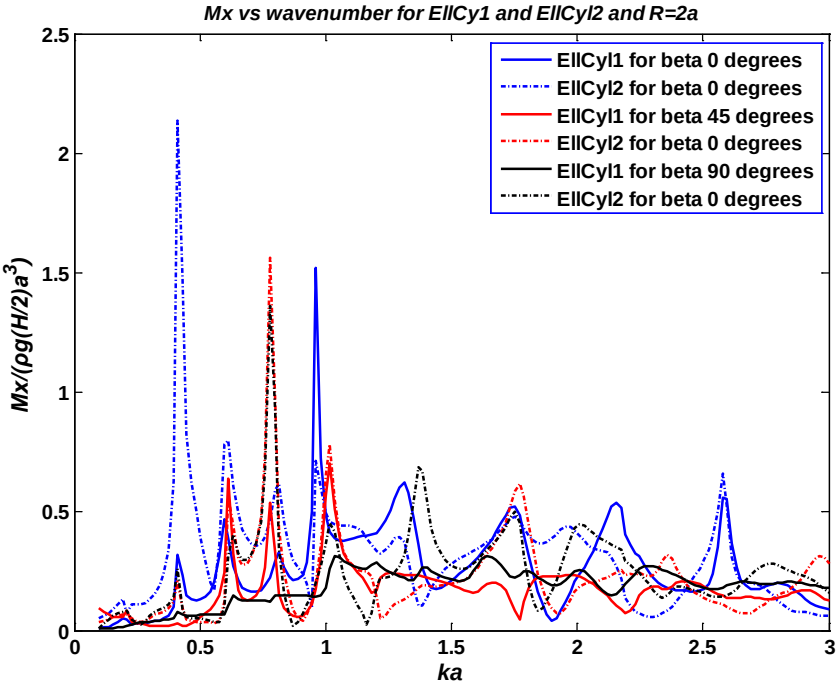


Σχήμα 5.8 Δυνάμεις διέγερσης (sway) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 4α. Οι τιμές των δυνάμεων και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

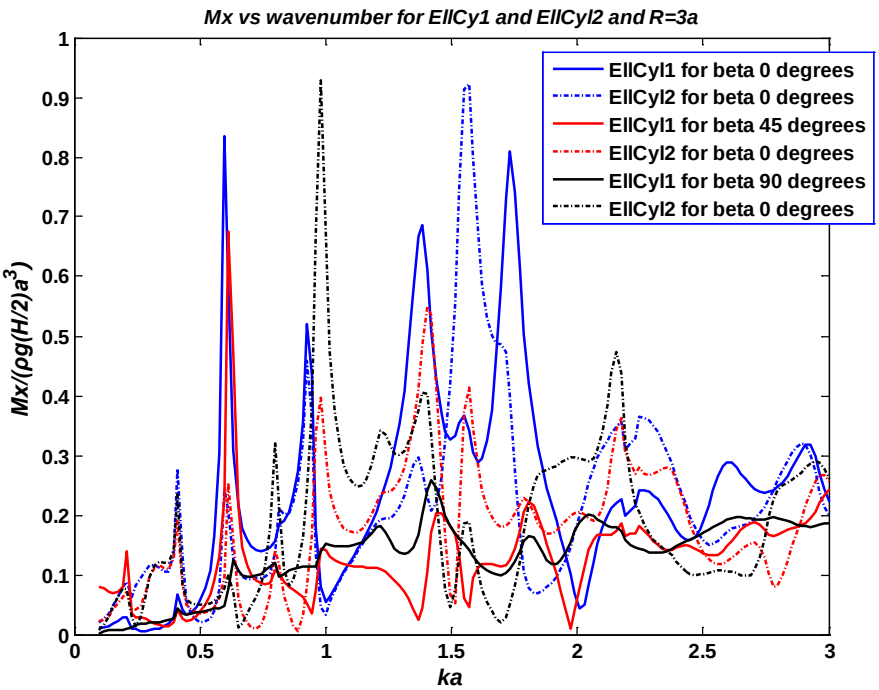
5.3. Ροπές κατά τον άξονα x



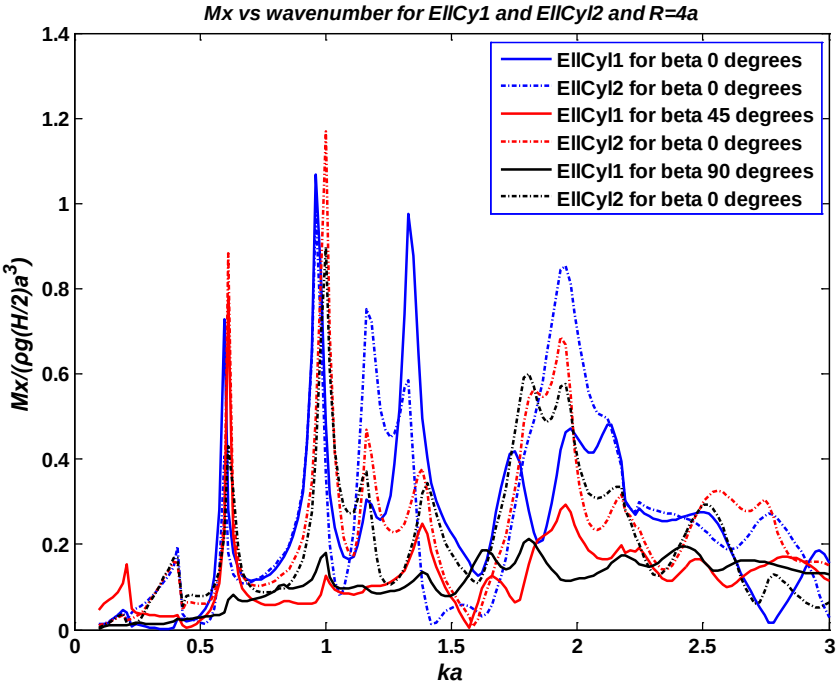
Σχήμα 5.9 Ροπές κατά τον άξονα x (roll) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.



Σχήμα 5.10 Ροπές κατά τον άξονα x (roll) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 2α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

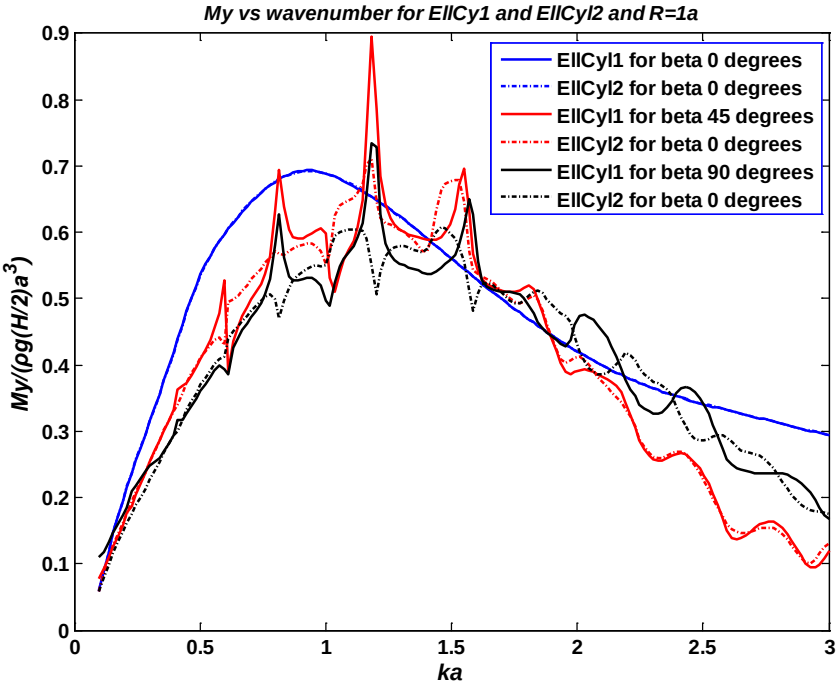


Σχήμα 5.11 Ροπές κατά τον άξονα y (pitch) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 3α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

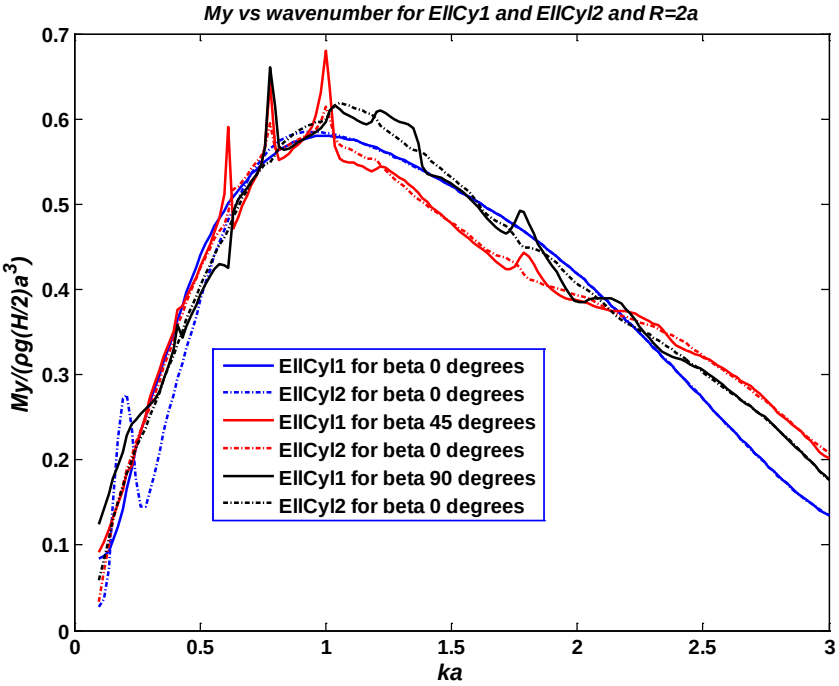


Σχήμα 5.12 Ροπές κατά τον άξονα y (pitch) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 4α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

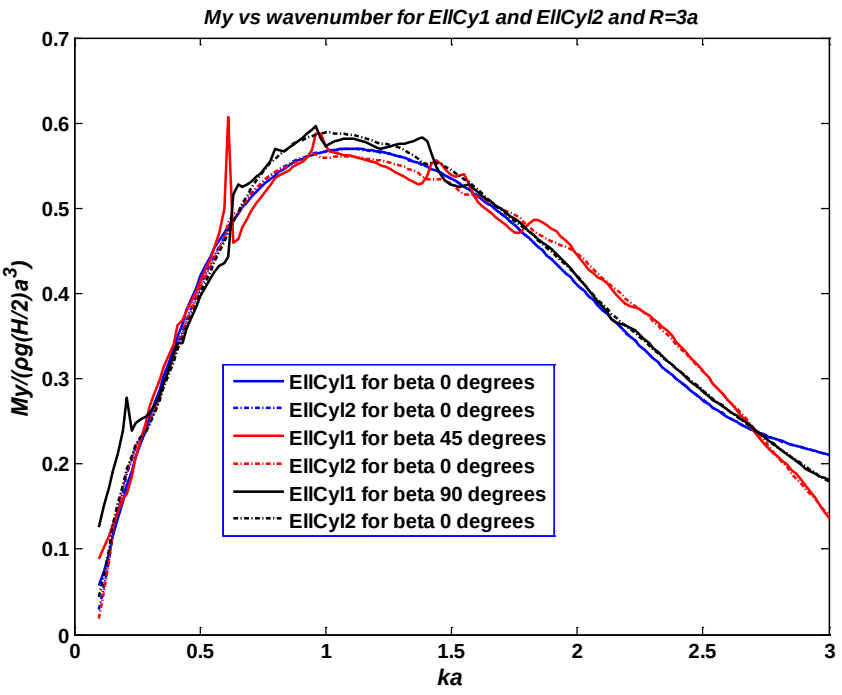
5.4. Ροπές κατά τον άξονα y



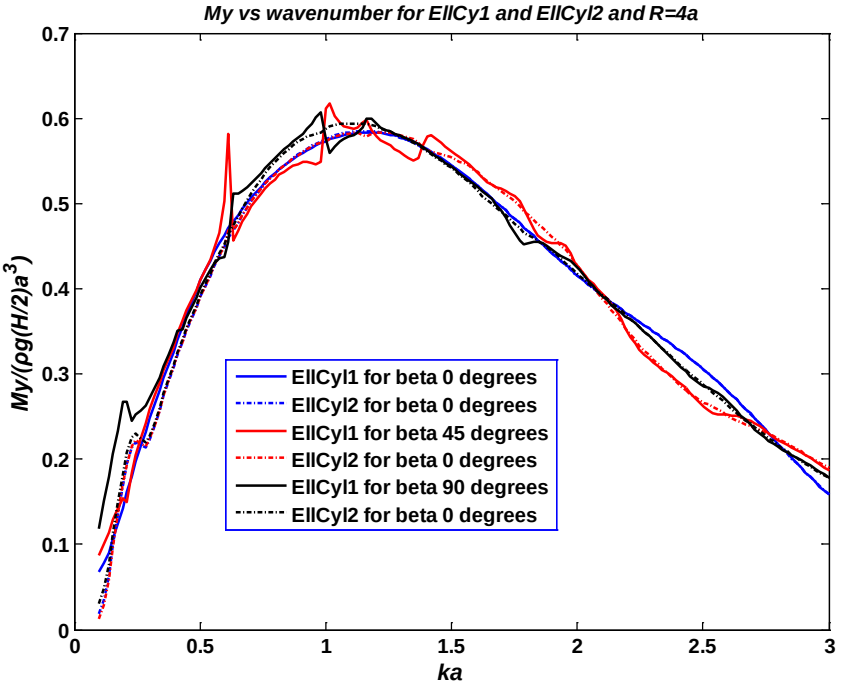
Σχήμα 5.13 Ροπές κατά τον άξονα y (pitch) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.



Σχήμα 5.14 Ροπές κατά τον άξονα y (pitch) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 2α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

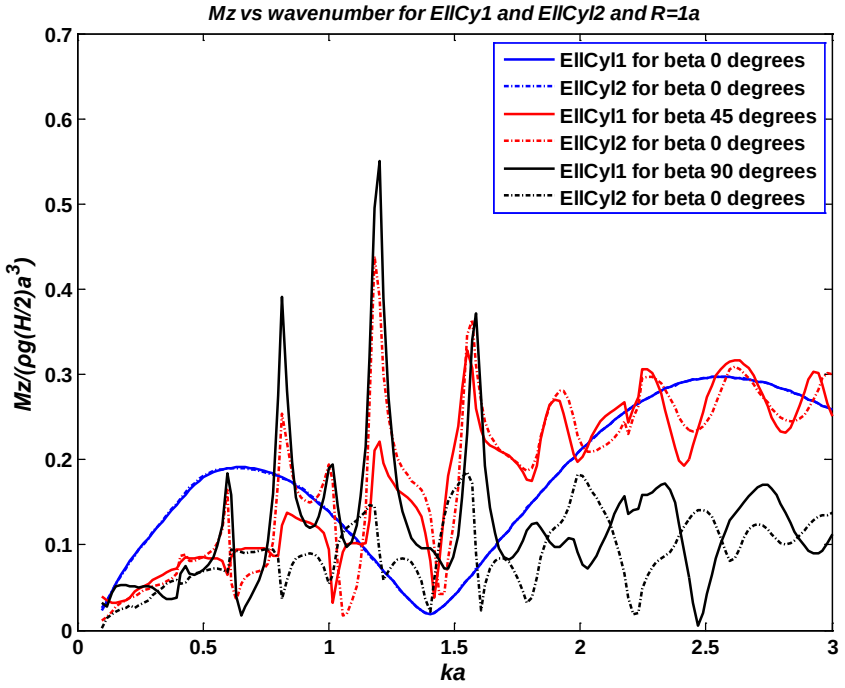


Σχήμα 5.15 Ροπές κατά τον άξονα y (pitch) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 3α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

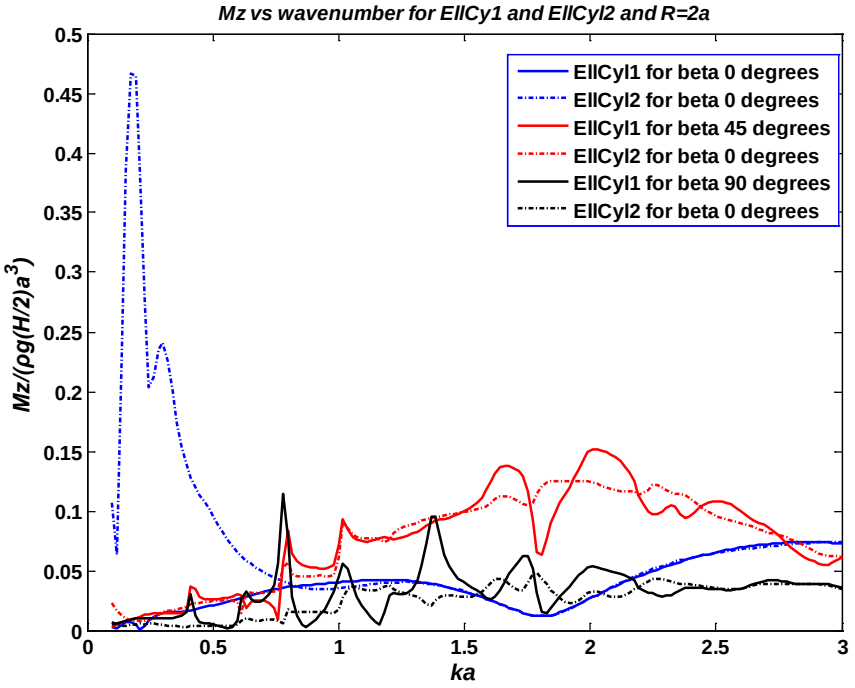


Σχήμα 5.16 Ροπές κατά τον άξονα y (pitch) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 4α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

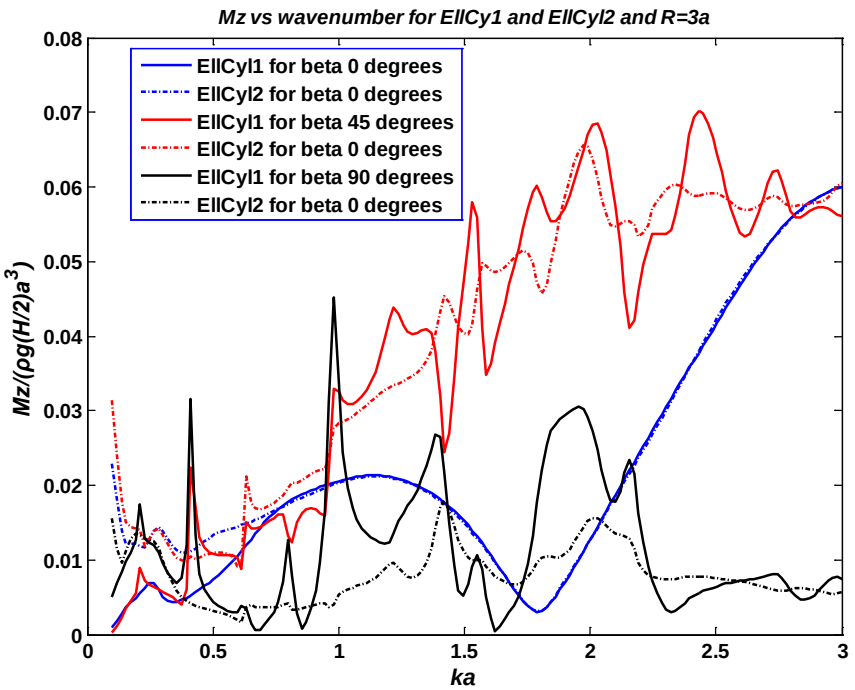
5.5. Ροπές κατά τον άξονα z



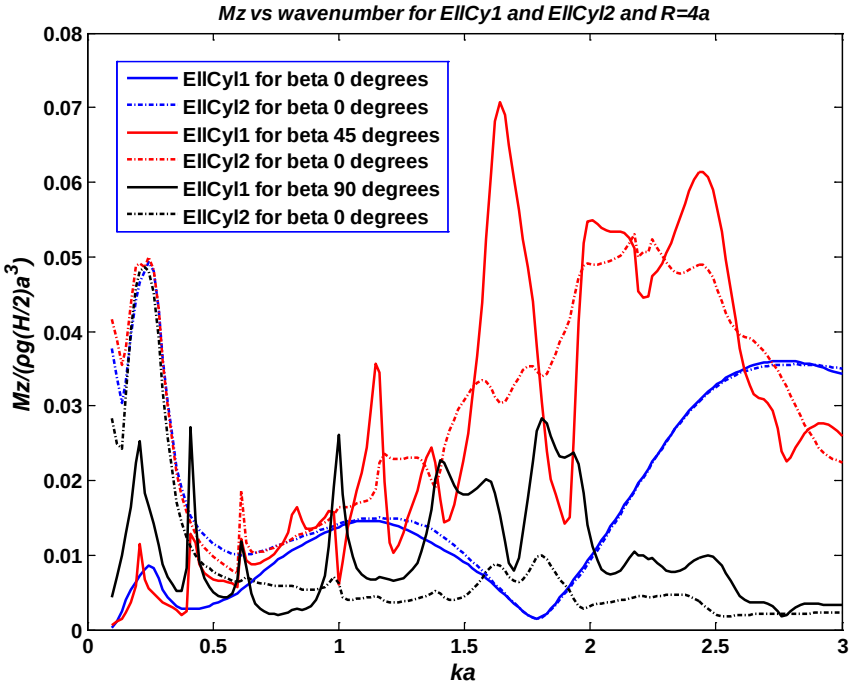
Σχήμα 5.17 Ροπές κατά τον άξονα z (yaw) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.



Σχήμα 5.18 Ροπές κατά τον άξονα z (yaw) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 2α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.



Σχήμα 5.19 Ροπές κατά τον άξονα z (yaw) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 3α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.



Σχήμα 5.20 Ροπές κατά τον άξονα z (yaw) συναρτήσει του κυματικού αριθμού λόγω πρόσπτωσης απλού αρμονικού κυματισμού σε δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους για διαφορετικές γωνίες τοποθέτησης (beta) του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου και μεταξύ τους απόσταση ίση με 4α. Οι τιμές των ροπών και του κυματικού αριθμού είναι αδιάστατες, ενώ στην λεζάντα του γραφήματος οι ελλειπτικοί κύλινδροι 1 και 2 αναφέρονται ως EllCy1 και EllCyl2.

Συμπεράσματα

Η εξαγωγή των υδροδυναμικών φορτίσεων και ροπών για ελλειπτικούς κυλίνδρους σε κανάλι επιτεύχθηκε, μέσω της εφαρμογής ημι-αναλυτικής μεθόδου που έχει αναπτυχθεί από τους Chathijeorgiou & Mavrakos (2010). Μέσω της συγκεκριμένης μεθόδου επιλύθηκε το υδροδυναμικό πρόβλημα περίθλασης πρώτης τάξης για διάταξη ελλειπτικού κυλίνδρου σε κανάλι, αλλά και για δύο πανομοιότυπους ελλειπτικούς κυλίνδρους σε κανάλι για διαφορετικές μεταξύ τους αποστάσεις. Εξαιτίας της τάξης του συγκεκριμένου προβλήματος χρησιμοποιήθηκε η γραμμική θεωρία δυναμικού, ενώ λόγω της γεωμετρίας των σωμάτων το υδροδυναμικό πρόβλημα εκφράστηκε σε ελλειπτικές συντεταγμένες. Τα δυναμικά ταχυτήτων για τη πρόσπτωση, αλλά και τη περίθλαση του κυματισμού από τα σώματα εκφράστηκαν σε όρους των συναρτήσεων Mathieu, οι οποίοι αποτελούν λύση της εξίσωσης Laplace σε ελλειπικές συντεταγμένες. Τα δυναμικά περίθλασης κατά τη διάρκεια της σκέδασης των κυματισμών από όλα τα σώματα υπολογίστηκαν και εκφράστηκαν σε σχέση με το τοπικό ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων του επιλεγμένου σώματος αναφοράς. Επιπλέον εφαρμόστηκε και το προσθετικό θεώρημα των συναρτήσεων Mathieu και εκφράστηκε σε όρους των άρτιων και περιττών περιοδικών και ακτινικών συναρτήσεων Mathieu. Το πρόβλημα της υδροδυναμικής περίθλασης των ελλειπτικών κυλίνδρων σε κανάλι, εξετάστηκε για τοποθέτηση ενός ελλειπτικού κυλίνδρου σε διαφορετικές τιμές β (0°,45°,90°) και θέσεις κατά τον άξονα y, καθώς και για τη περίπτωση δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων σε διαφορετικές αποστάσεις R (a,2a,3a,4a) μεταξύ τους, αλλά και για διαφορετικές τιμές β (0°,45°,90°) του ελλειπτικού κυλίνδρου που βρισκόταν σε σταθερή θέση. Στις δύο διατάξεις εξήχθησαν τα μεγέθη των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης στους άξονες x,y (Fx,Fy) και των ροπών στους άξονες x,y,z (Mx,My,Mz) σε αδιάσταση μορφή για τους ελλειπτικούς κυλίνδρους και παρουσιάστηκαν σχηματικά συναρτήσει του αδιάστατου γινομένου του κυματαριθμού (k) με τον μεγάλο ημιάξονα (a) του ελλειπτικού κυλίνδρου αναφοράς.

Οι αδιάστατες τιμές των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης (surge) του ελλειπτικού κυλίνδρου σε κανάλι με τιμή του β=0° παρουσίασαν μικρές διαφοροποιήσεις μόνο στις θέσεις (0,4) και (0,5) του σώματος, το οποίο υποδεικνύει ότι η μετατόπιση του κυλίνδρου κατά y δεν επηρεάζει τα επίπεδα αλληλεπίδρασης του με τον κυματισμό κατά τον άξονα x στο μεγαλύτερο εύρος των κυματικών συχνοτήτων. Για τη περίπτωση του ελλειπτικού κυλίνδρου με β=45°, η πρόσπτωση του κυματισμού με το σώμα δεν γίνεται με τον ίδιο ομαλό τρόπο, καθώς το σώμα είναι τοποθετημένο υπό κλίση με αποτέλεσμα η επαφή/πρόσπτωση του κυματισμού να πραγματοποιείται σε μεγαλύτερη επιφάνεια του σώματος και να οδηγεί σε απότομες κορυφές/υδροδυναμικές φορτίσεις, αλλά και στη διατήρηση της ενέργειας του κυματικού πεδίου για μεγαλύτερο εύρος των κυματικών συχνοτήτων σε όλες τις εξεταζόμενες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου στο κανάλι, ,με το φαινόμενο να λαμβάνει χώρα για τιμές του ka από 0.412 έως 1.403. Επίσης τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης εμφανίστηκαν ισχυρά στη περίπτωση τοποθέτησης του σώματος στη θέση (0,5) για τιμές του ka>1.018. Για β=90° οι τιμές των υδροδυναμικών φορτίσεων εμφανίστηκαν μειωμένες σε σύγκριση με του ελλειπτικού κυλίνδρου για β=45° που σχολιάστηκαν παραπάνω, ενώ οι μέγιστες φορτίσεις όλων των θέσεων προσέγγισαν τις τιμές που εμφανίστηκαν για β=0° με μια μικρή μετατόπιση σε μεγαλύτερες κυματικές συχνότητες εξαιρούμενης της θέσης (0,2).

Στις αδιάστατες οριζόντιες δυνάμεις διέγερσης (sway) του ελλειπτικού κυλίνδρου σε κανάλι οι μεγαλύτερες φορτίσεις καταγράφηκαν για β=0° και 45°, ενώ για β=90° εμφανίστηκαν πολύ μικρές τιμές δυνάμεων για όλες τις περιπτώσεις θέσεων. Για β=0° παρατηρήθηκε πως η αύξηση της απόστασης του κυλίνδρου από την αρχική ορισμένη θέση (0,0) είχε ως συνέπεια την ανάλογη αύξηση των τιμών διέγερσης, ενώ η μετατόπιση των μέγιστων τιμών διέγερσης πραγματοποιείται σε μεγαλύτερες τιμές του ka με την αύξηση της απόστασης. Η τοποθέτηση του ελλειπτικού κυλίνδρου για β=45° είχε ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση των μέγιστων υδροδυναμικών φορτίσεων κατά τον άξονα y σε χαμηλότερες κυματικές συχνότητες για όλες τις εξεταζόμενες θέσεις σε σχέση με την τοποθέτηση του κυλίνδρου με β=0°, αλλά και την μείωση των επιπέδων φόρτισης των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης κατά τον άξονα y, με την μέγιστη υδροδυναμική φόρτιση καταγράφηκε στη θέση (0,0) με Fy=1.1. Σε σύγκριση με τις προηγούμενες

περιπτώσεις τα επίπεδα των φορτίσεων για β=90° εμφανίστηκαν σε μεγάλο βαθμό μειωμένα στις θέσεις που εξετάστηκαν, ενώ καταγράφηκε και η ασθενή φόρτιση του σώματος σε μικρές τιμές του *ka*.

Η μέγιστη τιμή της ροπής κατά τον άξονα *x* (roll) στον ελλειπτικό κύλινδρο για β=0° εμφανίστηκε στη θέση (0,4), ενώ η σταδιακή μείωση των ροπών για όλες τις θέσεις καταγράφηκε για *ka*>2.2. Για β=45° οι ροπές που προέκυψαν κατά τον άξονα *x* εμφάνισαν μικρότερες τιμές σε σχέση με αυτές του ελλειπτικού κυλίνδρου με β=0°, με την επίδραση του κυματισμού στον κύλινδρο να καταγράφεται σε μικρότερο εύρος κυματικών συχνοτήτων, ενώ η μέγιστη τιμή της ροπής εμφανίστηκε στη θέση (0,0). Οι τιμές των ροπών για β=90° εκτός των θέσεων (0,4) και (0,5) προσέγγιζαν τιμές στο 0, ενώ σε όλες τις θέσεις για τιμές του *ka* μεγαλύτερες από 0.6 οι τιμές των ροπών σχεδόν μηδενίζονται. Για τις ροπές κατά τον άξονα *y* καταγράφηκαν μηδαμινές διαφορές για όλες τις εξεταζόμενες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου, ενώ οι μέγιστες τιμές τους παρουσιάστηκαν για *ka*>1.0. Στις ροπές κατά τον άξονα *y* (pitch) σε όλες τις θέσεις του κυλίνδρου, αλλά και των τιμών β η εμφάνιση των μέγιστων ροπών πραγματοποιήθηκε σε κυματικές συχνότητες μεγαλύτερες του 1. Για β=45° οι ροπές παρουσίασαν πολύ μικρές διαφορές στις τιμές τους σε όλες τις εξεταζόμενες θέσεις του ελλειπτικού κυλίνδρου και σε όλο το εύρος των κυματικών συχνοτήτων. Σε σύγκριση με τις περιπτώσεις για β=0° και 45° οι τιμές των ροπών στον άξονα *y* για β=90° δεν παρουσίασαν μεγάλες διακυμάνσεις, εκτός της θέσης (0,5). Οι θέσεις, στις οποίες οι ροπές κατά τον άξονα *z* (yaw) εμφάνισαν επίδραση στον κύλινδρο για όλες τις τιμές του β ήταν οι θέσεις (0,4) και (0,5), ενώ σε όλες τις περιπτώσεις για τιμές του *ka* μεγαλύτερες από 1.5 οι τιμές των ροπών σχεδόν μηδενίζονται, με τις μεγαλύτερες τιμές σε αυτές τις θέσεις να εμφανίζονται στη περίπτωση του κυλίνδρου με β=0°.

Για τη διάταξη των δύο πανομοιότυπων ελλειπτικών κυλίνδρων σε κανάλι οι δυνάμεις διέγερσης (surge) για β=0° και *R*=*a* παρουσίασαν ίδια ποσά φόρτισης σε όλο το εύρος των κυματικών συχνοτήτων, ενώ με την αύξηση της τιμής β σε 45° για τον πρώτο κύλινδρο είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση της φόρτισής του κατά 20%, με το δεύτερο κύλινδρο να καταγράφει μείωση της αντίστοιχης τιμής περίπου κατά 1%, ενώ η αλλαγή του β οδήγησε στη μετατόπιση των μέγιστων φορτίσεων σε μεγαλύτερες κυματικές συχνότητες. Η έντονη φόρτιση που δέχτηκε ο πρώτος κύλινδρος είχε ως συνέπεια ο δεύτερος κύλινδρος να προστατεύεται και να επηρεάζεται σε μικρότερο βαθμό από το κυματικό πεδίο. Για β=90° του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου οι τιμές των οριζόντιων δυνάμεων κατά τον άξονα *x* παρουσιάζονται μειωμένες, ενώ σε σύγκριση με β=0° η εμφάνιση των υψηλότερων φορτίσεων μετατοπίστηκε σε μεγαλύτερες συχνότητες. Για *R*=2*a* τα επίπεδα των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης στον άξονα *x* παρουσίασαν μείωση για όλες τις περιπτώσεις εκτός της τοποθέτησης του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου με β=90°, που είχε ως αποτέλεσμα μια μικρή αύξηση της μέγιστης τιμής της δύναμης για τον δεύτερο κύλινδρο κατά 2.8%. Τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης παρουσιάστηκαν σε σημαντικό βαθμό με τη τοποθέτηση του πρώτου κυλίνδρου για β=0° σε χαμηλές κυματικές συχνότητες (*ka*=0.2101) για τη περίπτωση του δεύτερου κυλίνδρου. Κατά τη τοποθέτηση του πρώτου σώματος υπό 90 μοίρες, διακρίνεται η μείωση της εμφάνισης των ισχυρών φορτίσεων για μεγάλο εύρος κυματικών συχνοτήτων στους κυλίνδρους και κυρίως στο πρώτο σώμα. Οι τιμές των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης δεν εμφάνισαν σημαντικές διαφορές στις αποστάσεις των δύο σωμάτων για *R*=3*a* και *R*=4*a*. Τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης για τη περίπτωση του δεύτερου κυλίνδρου εμφανίστηκαν και στη απόσταση των σωμάτων με *R*=3*a* στη συχνότητα *ka* =0.2101, με τη τιμή του β να ισούται με μηδέν, ενώ η εμφάνιση των συγκεκριμένων φαινομένων εμφανίστηκε στη απόσταση 4*a* σε όλες τις τιμές του β και αντιστοιχούσαν για *ka* =0.23. Η αύξηση της απόστασης από *R*=3*a*→4*a* μεταξύ των σωμάτων για β=45°, είχε ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση της μέγιστης φόρτισης σε μεγαλύτερες κυματικές συχνότητες (*ka*=0.6139→1.018).

Η μέγιστη τιμή των δυνάμεων διέγερσης (sway) για τους δύο ελλειπτικούς κυλίνδρους στη μικρότερη απόσταση (*R*=*a*) καταγράφηκε στη διάταξη των σωμάτων με β=0°. Στη περίπτωση τοποθέτησης του ελλειπτικού κυλίνδρου 1 (EllCyl1) με β=45° τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης είναι πιο ισχυρά σε σύγκριση με τη περίπτωση του πρώτου σώματος με β=0°, το οποίο αποδεικνύεται και από τις υψηλότερες τιμές του δεύτερου σώματος σε σχεδόν όλο το κυματικό εύρος των συχνοτήτων (0.6139≤*ka*≤1.55, 2.21≤*ka*≤2.95). Το μοναδικό σημείο, στο οποίο οι δυνάμεις διέγερσης του δεύτερου σώματος είναι υψηλότερες σε σχέση με του πρώτου και εμφανίστηκε στη συχνότητα για *ka* >1.53 και στην επιλογή της τιμής β=0°. Με την

επιλογή τιμής του β=90° για το πρώτο κύλινδρο οι τιμές των δυνάμεων που εμφανίζουν σε όλο το πεδίο των κυματικών συχνοτήτων στα δύο σώματα είναι σαφώς πολύ μικρότερες από τις προηγούμενες περιπτώσεις. Για την απόσταση R=2a παρατηρήθηκε για β=90°, η εμφάνιση μικρών τιμών στις δυνάμεις που ασκήθηκαν επάνω στα δύο σώματα σε σύγκριση με τις υπόλοιπες διατάξεις. Η αύξηση της απόστασης των ελλειπτικών κυλίνδρων σε 3a κατά τον άξονα y εντός του καναλιού οδήγησε σε σημαντική μείωση των επιπέδων των υδροδυναμικών φορτίσεων για τα σώματα, λόγω της ίσης κατανομής των φορτίων και στους δύο κυλίνδρους, φαινόμενο που παρατηρήθηκε σε σχεδόν όλες τις διατάξεις που εξετάστηκαν, δηλαδή για τις διαφορετικές τιμές του β (0°,45°,90°) που επιλέχτηκαν για τον πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο. Για β=45° παρατηρήθηκε μια σχετική μείωση στα επίπεδα φόρτισης των κυλίνδρων σε σύγκριση με β=0°. Από τη τοποθέτηση των σωμάτων σε απόσταση R=3a σε τιμές του β=0°,45° του πρώτου κυλίνδρου παρατηρήθηκε η εμφάνιση των μέγιστων φορτίσεων για τον δεύτερο κύλινδρο σε υψηλές τιμές του ka και σε χαμηλές τιμές του ka για τη περίπτωση του πρώτου κυλίνδρου, καθώς η μείωση των φορτίσεων με την ανάλογη αύξηση της γωνίας τοποθέτησης του πρώτου σώματος. Για τη μεγαλύτερη απόσταση (R=4a) μεταξύ των σωμάτων που εξετάστηκε, παρατηρήθηκε η εμφάνιση των μέγιστων υδροδυναμικών φορτίσεων του δεύτερου ελλειπτικού κυλίνδρου για όλες τις τιμές του β στη κυματική συχνότητα κοντά στη τιμή του 1, καθώς στις τιμές $0.1 \leq ka \leq 0.82$ οι δυνάμεις διέγερσης που ασκούνται στο πρώτο κύλινδρο είναι υψηλότερες, αντίθετα για τιμές του ka>1.55 οι φορτίσεις που δέχτηκε ο δεύτερος ελλειπτικός κύλινδρος για όλες τις τιμές β, είναι σημαντικά πιο ισχυρές σε σύγκριση με του πρώτου σώματος.

Για τη μικρότερη απόσταση (R=a) μεταξύ των δύο κυλίνδρων η μέγιστη τιμή της ροπής στον άξονα x (roll) καταγράφηκε στη διάταξη των σωμάτων με β=0°, ενώ οι μικρότερες τιμές ροπών και στα δύο σώματα υπολογίστηκαν για β=90°. Σε απόσταση R=2a των σωμάτων η μέγιστη τιμή ροπής υπολογίστηκε για το δεύτερο ελλειπτικό κύλινδρο της διάταξης με β=0°, ενώ σε σύγκριση με τη διάταξη των κυλίνδρων με τη μικρότερη απόσταση, η μέγιστη ροπή μετατοπίστηκε σε χαμηλότερη κυματική συχνότητα (ka=1.532→0.963). Η αύξηση της απόστασης των ελλειπτικών κυλίνδρων σε 3a κατά τον άξονα y εντός του καναλιού είχε ως αποτέλεσμα σημαντική μείωση των επιπέδων των παραγόμενων ροπών για τα σώματα, λόγω της ίσης κατανομής των φορτίων και στους δύο κυλίνδρους, ενώ για R=4a η εμφάνιση των μέγιστων ροπών του δεύτερου ελλειπτικού κυλίνδρου για όλες τις τιμές του β βρέθηκαν στη κυματική συχνότητα κοντά στη τιμή του 1.

Στα αποτελέσματα των ροπών κατά τον άξονα y (pitch) για R=a και β=0° καταγράφηκαν ίδιες τιμές στις παραγόμενες ροπές των σωμάτων σε όλο το εύρος των κυματικών συχνοτήτων, ενώ η επιλογή της τιμής του β=45° είχε ως συνέπεια την αύξηση της μέγιστης ροπής κατά 22% (My=0.6937→0.8955) στο πρώτο κύλινδρο σε σχέση με την μέγιστη τιμή ροπής για β=0°, ενώ για το δεύτερο κύλινδρο καταγράφηκε μείωση της αντίστοιχης τιμής περίπου κατά 2.7% (My=0.6923→0.7111). Για β=90° οι ροπές κατά τον άξονα y εμφανίζονται μειωμένες σε σχέση με τη περίπτωση τοποθέτησης του πρώτου κυλίνδρου υπό γωνία 45 μοιρών. Στη απόσταση R=2a τα επίπεδα των ροπών στον άξονα y παρουσίασαν μείωση για όλες τις περιπτώσεις εκτός της τοποθέτησης του πρώτου ελλειπτικού κυλίνδρου με β=90°, που είχε ως αποτέλεσμα μια μικρή αύξηση της μέγιστης τιμής της ροπής, παράλληλα η αύξηση της τιμής του β για το πρώτο σώμα οδηγεί σε ανάλογη αύξηση των ροπών και στους δύο κυλίνδρους, με σαφώς μεγαλύτερη επιρροή να καταγράφεται στο πρώτο σώμα Οι ροπές μειώνονται αισθητά για ka >2.2 και τείνουν να μηδενιστούν σε όλες τις τιμές του. Τέλος για β=90° οι μέγιστες ροπές των σωμάτων εμφανίστηκαν σε κυματικές συχνότητες κοντά στη τιμή 1.

Οι τιμές των ροπών κατά τον άξονα z (yaw) αυξάνονται στο πρώτο ελλειπτικό κύλινδρο στη απόσταση R=a με τη σταδιακή αύξηση της τιμής του β, με τις μεγαλύτερες τιμές να καταγράφονται για β=90° και να αφορούν τον πρώτο κύλινδρο κυρίως, ενώ για το δεύτερο κύλινδρο η αύξηση των ροπών καταγράφηκε μόνο για β=45°. Η αύξηση της απόστασης είχε ως αποτέλεσμα την καταγραφή μικρότερων ροπών για τους κυλίνδρους, το οποίο είναι διακριτό στις αποστάσεις R=3a και 4a που για όλες τις τιμές του β οι ροπές που ασκήθηκαν επάνω στους ελλειπτικούς κυλίνδρους εμφάνισαν αμελητέα επίδραση.

Βιβλιογραφία

Abramowitz M, Stegun IA.Handbook of mathematical functions.New York: Dover Publications Inc.; 1970.

Chakrabarti, SK. Hydrodynamics of Offshore Structures, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

Chatjigeorgiou IK, Mavrakos SA. Hydrodynamic diffraction by multiple elliptical cylinders. In: Proc 14th int. workshop on water waves and floating bodies. Zelonogorsk (Russia); 2009. p. 38_41.

Chatjigeorgiou, I.K., Mavrakos, S.A., 2010a. An analytical approach for the solution of the hydrodynamic diffraction by arrays of elliptical cylinders. Applied Ocean Research 32, 242–251.

Gutiérrez-Vega, J. C., Rodríguez-Dagnino, R. M., Meneses-Nava, M. A. & Chávez-Cerda, S. *Mathieu functions, a visual approach*. *Am. J. Phys.* 71, 233 (2003).

Kagemoto H, Yue DKP. Interactions among multiple three-dimensional bodiesin water waves: An exact algebraic method. Journal of Fluid Mechanics 1986; 166:189_209.

Le Blond, PH, Mysak LA. Waves in the Ocean, 602 pp, Elsevier, 1978.

Linton CM, Evans DV. Interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders. Journal of Fluid Mechanics 1990;215:549_69.

Linton CM, McIver P. Handbook of mathematical techniques for wave/structure interactions.CRC Press; 2001.

Mao S-C, Wu Z-S. Scattering by an infinite homogeneous anisotropic elliptic cylinder in terms of Mathieu functions and Fourier series. Journal of OpticalSociety of America A 2008;25:2925_31.

Mathieu, É. "Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique." *J. math. pure appl.* **13**, 137-203, 1868.

Mavrakos SA, Koumoutsakos P. Hydrodynamic interaction among verticalaxisymmetric bodies restrained in waves. Applied Ocean Research 1987;9: 128_40.

Mavrakos SA, Bardis L. Hydrodynamic characteristics of large offshore units. In: Proc 3rd imaem int congress on marine technology. Greece (Athens); 1984. p. 505_13.

McLachlan NW. Theory and applications of Mathieu functions. New York: Dover Publications; 1947.

McIver P. Wave interaction with arrays of structures. Applied Ocean Research 2002;24:121_6.

Meixner J, Schäfke FW. Mathieuschefunktionen und sphäroidfunktionen. Berlin: Springer; 1954.

Moon P, Spencer DE. Field theory handbook. Berlin: Springer-Verlag; 1971.

Newman JN. Wave effects on multiple bodies. In: Hydrodynamics in ship and ocean engineering. Research institute for applied mechanics. Japan: Kyushu University; 2001. p. 3_26.

Nigsch M. Numerical studies of time-independent and time-dependent scattering by several elliptical cylinders. Journal of Computational and Applied Mathematics 2007;204:231_41.

Ning DZ, Zhao XL, Teng B, Johanning L.Wave diffraction from a truncated cylinder with an upper porous sidewall and an inner column, Ocean Engineering, 130, pp. 471-481, 2017.

Phillips, O. M., The Dynamics of Upper Ocean, 336 pp., Cambridge Univ. Press, New York, 1997.

Særmark KA. A note on addition theorems for Mathieu functions. ZeitschriftfürangewandteMathematik und Physik 1959;10:426_8.

Sebak A-R. Electromagnetic scattering by two parallel dielectric elliptic cylinders. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 1994;42:1521_7.

SE Hirdaris, W Bai, Daniele Dessi, Ayşen Ergin, X Gu, OA Hermundstad, R Huijsmans, K Iijima, Ulrik Dam Nielsen, J Parunov, N Fonseca, Apostolos Papanikolaou, K Argyriadis, Atila Incecik., 2014a. Loads for use in the design of ships and offshore structures, Ocean Engineering 78 (1), pp. 131-174.

Spring BH, Monkmeyer PL. Interaction of plane waves with vertical cylinders.In: Proc, 14th int. conf. on coastal engineering, 107. 1974. p. 1828_49.

Techet AH. Design Principles for Ocean Vehicles, Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, 2005.

https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-22-design-principles-for-ocean-vehicles-13-42-spring 2005/readings/r8_wavespectra.pdf.

Williams AN. Wave forces on an elliptic cylinder. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering Division 1985;111:433_49.

Williams AN. Wave diffraction by elliptical breakwaters in shallow water. Ocean Engineering 1985;12:25_43.

Williams AN, Darwiche MK. Three dimensional wave scattering by elliptical breakwaters. Ocean Engineering 1988;15:103_18.

Αθανασούλης Γ., Μπελιμπασάκης Κ., (2007). Κυματικά φαινόμενα στο θαλάσσιο περιβάλλον, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Ε.Μ.Π., Αθήνα.

Μαυράκος, Σ.Α., (1999). Μελέτη και σχεδίαση πλωτών κατασκευών, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Ε.Μ.Π., Αθήνα.

Μαυράκος, Σ.Α., (2012). Συνθήκες περιβάλλοντος και φορτίσεις θαλάσσιων κατασκευών, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Ε.Μ.Π., Αθήνα.

Σοφιανός Σ., (2017). Σημειώσεις Μαθήματος Φυσική Ωκεανογραφία, Τμήμα Φυσικής, Ε.Κ.Π.Α.

Χατζηγεωρίου Ι.Κ., (2015). Δυναμική των αγωγών μεταφοράς ρευστών, εφαρμογές στο θαλάσσιο περιβάλλον, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, Κάλλιπος, Ε.Μ.Π, Αθήνα.
https://repository.kallipos.gr/pdfviewer/web/viewer.html?file=/bitstream/11419/505/7/00_master_document-KOY.pdf