



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Μαθηματικών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.)

Απεικόνιση Γραφημάτων με Έμφαση στις Ιδιότητες Μονοπατιών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΡΓΥΡΟΣ Μ. ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

Επιβλέπων : Αντώνιος Συμβώνης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Μαθηματικών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.)

Απεικόνιση Γραφημάτων με Έμφαση στις Ιδιότητες Μονοπατιών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΡΓΥΡΟΣ Μ. ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

Επιβλέπων : Αντώνιος Συμβώνης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 15η Φεβρουαρίου 2018.

.....
Αντώνιος Συμβώνης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Νικόλαος Σ. Παπασύρου
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Δημήτριος Φωτάκης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018

.....
Ανάργυρος Μ. Οικονόμου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ανάργυρος Μ. Οικονόμου, 2018.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η μονότονη απεικόνιση ενός γραφήματος G , είναι μια ευθύγραμμη απεικόνιση του G έτσι ώστε κάθε ζευγάρι κορυφών να συνδέεται, μέσω ενός μονοπατιού που είναι μονότονο ως προς κάποια κατεύθυνση. Μια ευθύγραμμη απεικόνιση Γ ενός δένδρου T είναι κυρτή, αν αντικαταστήσουμε κάθε φύλλο με μια ημιευθεία, το επίπεδο διαμερίζεται σε μη-φραγμένα κυρτά πολύγωνα.

Τα δένδρα, σαν μια ειδική κατηγορία γραφημάτων, έχουν υπάρξει το επίκεντρο αρκετών άρθρων και πρόσφατα οι He και He [He17] περιέγραψαν πώς να παράγουμε μια μονότονη απεικόνιση ενός δένδρου με n κόμβους σε ένα πλέγμα μεγέθους $12n \times 12n$.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, παρουσιάζουμε έναν απλό αλγόριθμο ο οποίος κατασκευάζει για κάθε ριζωμένο δένδρο μια μονότονη απεικόνιση σε πλέγμα μεγέθους το πολύ $\lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor$. Επιπλέον, περιγράφουμε πώς να κατασκευάσουμε μια κυρτή απεικόνιση ενός δένδρου σε πλέγμα με μέγεθος το πολύ $n \times n$.

Δεν κάνουμε χρήση κάποιας τεχνικής βασισμένης στη θεωρία αριθμών, το οποίο αποτελεί ένα κοινό χαρακτηριστικό όλων των προηγούμενων προσεγγίσεων, αλλά κάνουμε χρήση μερικών απλών γεγονότων από τη γεωμετρία, τα οποία μπορούν να εκφραστούν πιο αναλυτικά.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, εξετάζουμε ένα διαφορετικό θέμα. Αρχικά, αποδεικνύουμε ένα φράγμα συγκέντρωσης για τον αριθμό των σημείων που κυριαρχούν απευθείας την αρχή των αξόνων στον d -διάστατο χώρο κάτω από μερικές συνθήκες "ανεξαρτησίας". Έπειτα συνεχίζουμε περιγράφοντας πώς να κατασκευάσουμε ένα συνεκτικό γράφημα δεδομένου ενός συνόλου σημείων στον d -διάστατο χώρο. Μετά, παρουσιάζουμε έναν απλό αλγόριθμο τοπικής δρομολόγησης, όπου η απόσταση που διανύεται είναι το πολύ \sqrt{d} φορές η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των ακραίων σημείων. Στο τέλος, συγκεντρωνόμαστε στην μέση ανάλυση των ιδιοτήτων του συνδετικού δικτύου.

Λέξεις κλειδιά

απεικόνιση γραφημάτων, υπολογιστική γεωμετρία, μονότονη απεικόνιση, κυρτή απεικόνιση, συνδετικό δίκτυο, τοπική δρομολόγηση.

Abstract

A monotone drawing of a graph G is a straight-line drawing of G such that every pair of vertices is connected by a path that is monotone with respect to some direction. A straight-line drawing Γ of a tree T is *convex*, if every edge to a leaf is substituted by a ray, the (unbounded) faces form convex regions.

Trees, as a special class of graphs, have been the focus of several papers and, recently, He and He [He17] showed how to produce a monotone drawing of an arbitrary n -vertex tree that is contained in a $12n \times 12n$ grid.

In this diploma thesis, we present a simple algorithm that constructs for each arbitrary rooted tree a monotone drawing on a grid of size at most $\lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor$. Moreover we describe how to construct a convex tree drawing in a grid of size at most $n \times n$.

We do not employ number theory techniques, a common characteristic of all previous approaches, but we rather utilize some simple facts from geometry that can be more analytically expressed.

In the last chapter we study a different subject; starting by proving a concentration bound on the number of points that direct dominate the origin in the d -space under certain "independent" assumptions, we then proceed to describe how to construct a spanning graph given a point set in the d -space. Then we present a simple local routing algorithm where the distance traversed by the algorithm is at most \sqrt{d} times the euclidean distance between the endpoints. Finally we concentrate on the average-case analysis of the properties of the spanning graph.

Key words

graph drawing, computational geometry, monotone drawing, convex drawing, spanner, local routing.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας, κ. Αντώνιο Συμβώνη που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με τόσα ενδιαφέροντα προβλήματα πάνω στην απεικόνιση γραφημάτων και την υπολογιστική γεωμετρία. Θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την παρακίνηση του, και για τις συμβουλές, τόσο πάνω στην διπλωματική εργασία όσο και για τα επόμενα βήματα μου. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής κ. Νικόλαο Παπασπύρου και κ. Δημήτριο Φωτάκη καθώς με την ευχάριστη διάθεσή τους και τα μαθήματα τους, εκίνησαν το ενδιαφέρον μου για την επιστήμη των υπολογιστών και τον προγραμματισμό.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου, που μου έκαναν τα φοιτητικά χρόνια εξαιρετικά ευχάριστα και αξέχαστα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αγάπη, στοργή και υπομονή που μου έδειξαν όλα αυτά τα χρόνια.

Αργύρης Οικονόμου,
Αθήνα, 15η Φεβρουαρίου 2018

Περιεχόμενα

Περίληψη	5
Abstract	7
Ευχαριστίες	9
Περιεχόμενα	11
Κατάλογος πινάκων	13
Κατάλογος σχημάτων	15
Κατάλογος αλγορίθμων	17
1. Εισαγωγή	19
1.1 Πρόλογος	19
1.2 Ορισμοί & Εισαγωγικά	19
1.2.1 Ειδικές Κατηγορίες Μονοπατιών	20
1.2.2 Ειδικές Κατηγορίες Απεικονίσεων με Έμφαση στις Ιδιότητες Μονοπατιών	20
1.3 Κίνητρα & Αποτελέσματα	23
1.3.1 Μονότονες Απεικονίσεις	23
1.3.2 Άπληστες Απεικονίσεις	24
1.3.3 Αυτό-Προσεγγιζόμενες & Αύξουσα Κατά Τόξο Απεικονίσεις	24
1.4 Οργάνωση Διπλωματικής	25
2. Απλή & Συμπαγής Μονότονη Απεικόνιση Δένδρων	27
2.1 Εισαγωγή	27
2.2 Ορισμοί & Εισαγωγικά	28
2.2.1 Ξένες Κατά Κλίση Απεικονίσεις Δένδρων	28
2.2.2 Τοποθέτηση Σημείων στο Πλέγμα	31
2.3 Υπόβαθρο για Μονότονη Απεικόνιση Δένδρων	34
2.3.1 Μονότονη Απεικόνιση Δένδρων σε Ένα Τεταρτημόριο σε Πλέγμα Μεγέθους $n \times n$	36
2.3.2 Μονότονη Απεικόνιση Δένδρων σε Δύο Τεταρτημόρια σε Πλέγμα Μεγέθους $n \times \frac{n}{2}$	39
2.4 Κυρτή Απεικόνιση Δένδρων	47
2.5 Μονότονη Απεικόνιση Δένδρων σε Πλέγμα Μεγέθους $\lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor$	48
2.6 Επίλογος & Ανοιχτά Προβλήματα	53
3. Πέρα Από Την Απευθείας Κυριαρχία: Μέση Ανάλυση Επίδοσης Τοπικής Δρομολόγησης	57
3.1 Εισαγωγή	57
3.2 Εισαγωγικά	59

3.3	Φράγμα Συγκέντρωσης για τον Αριθμό των Σημείων που Κυριαρχούν Απευθείας την Αρχή των Αξόνων	61
3.4	Φράγμα Συγκέντρωσης για τον Αριθμό Βημάτων	65
3.5	Συνοψίζοντας	69
	Βιβλιογραφία	71

Κατάλογος πινάκων

1.1	Κατηγορίες απεικονίσεων οι οποίες είναι μονότονες	23
1.2	Κατηγορίες γραφημάτων που έχουν μονότονη απεικόνιση	24
1.3	Κατηγορίες γραφημάτων που δέχονται μονότονη απεικόνιση που διατηρεί την ενσωμάτωση	24

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Μονότονο μονοπάτι	21
1.2	Ισχυρά μονότονο μονοπάτι	21
1.3	Φθίνον κατά απόσταση μονοπάτι	21
1.4	Αυτό-προσεγγιζόμενο μονοπάτι	21
1.5	Αύξον κατά τόξο μονοπάτι	21
1.6	Μονότονο κατά γωνία μονοπάτι	21
1.7	Σχέσεις μεταξύ των κατηγοριών των μονοπατιών. Οι ακμές δείχνουν το υπερσύνολό.	21
1.8	Ελαστικά κυρτή απεικόνιση γραφήματος	22
1.9	Αυστηρά κυρτή απεικόνιση δένδρου	22
1.10	Σχέσεις μεταξύ των κατηγοριών των απεικονίσεων. Οι ακμές δείχνουν το υπερσύνολό.	23
2.1	Γεωμετρική αναπαράσταση για το Λήμμα 2.	32
2.2	Σημεία, κλίσεις και κυκλικοί τομείς που χρησιμοποιήθηκαν για το Λήμμα 3.	32
2.3	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.1 για πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων (15 κόμβοι).	40
2.4	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.1 για πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων (13 κόμβοι).	40
2.5	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.1 για το πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων και μονοπάτι (29 κόμβοι).	40
2.6	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.1 για το πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων και μονοπάτι (25 κόμβοι).	40
2.7	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.1 για το δένδρο που χρησιμοποιήθηκε στο [He16, He17].	40
2.8	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.3 για πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων (15 κόμβοι).	47
2.9	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.3 για πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων (13 κόμβοι).	47
2.10	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.3 για το πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων και μονοπάτι (29 κόμβοι).	47
2.11	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.3 για το πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων και μονοπάτι (25 κόμβοι).	47
2.12	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.3 για το δένδρο που χρησιμοποιήθηκε στο [He16, He17].	47
2.13	Αναπαράσταση της πρώτης περίπτωσης για το Λήμμα 12.	48
2.14	Αναπαράσταση της δεύτερης περίπτωσης για το Λήμμα 12.	48
2.15	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.4 για πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων (15 κόμβοι).	49
2.16	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.4 για πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων (13 κόμβοι).	49
2.17	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.4 για το πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων και μονοπάτι (29 κόμβοι).	49
2.18	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.4 για το πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων και μονοπάτι (25 κόμβοι).	49
2.19	Παράδειγμα πως ο Αλγόριθμος 2.5 απεικονίζει το T_1 και το T_2	50
2.20	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων (15 κόμβοι).	54
2.21	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων (13 κόμβοι).	54
2.22	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για το πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων και μονοπάτι (29 κόμβοι).	54
2.23	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για το πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων και μονοπάτι (25 κόμβοι).	54

2.24	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για το δένδρο που χρησιμοποιήθηκε στο [He16, He17].	54
2.25	Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για μονοπάτι μήκους 8 (9 κόμβοι).	54
3.1	Παράδειγμα απευθείας κυριαρχίας σε όλες τις κατευθύνσεις στο επίπεδο.	58
3.2	Παράδειγμα του κατασκευασμένου γραφήματος από ένα τυχαίο σύνολο σημείων.	58
3.3	Άλλο παράδειγμα του κατασκευασμένου γραφήματος από ένα τυχαίο σύνολο σημείων.	58
3.4	Παράδειγμα του μονοπατιού από το p στο p' , όπως παράγεται από τον Αλγόριθμο 3.1.	66

Κατάλογος αλγορίθμων

2.1	Ισορροπημένη Μονότονη Απεικόνιση Δένδρου	36
2.2	Υπολογισμός ρίζας βαρύτητας	41
2.3	Μονότονη Απεικόνιση Δένδρου Χωρίς Ρίζα	43
2.4	Αλγόριθμος Κυρτής Απεικόνισης Δένδρου	48
2.5	Αλγόριθμος Μονότονης Απεικόνισης Δένδρου	51
3.1	Τοπική Δρομολόγηση	66

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Πρόλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, ασχολούμαστε, κυρίως, με θέματα που αφορούν την απεικόνιση γραφημάτων και την υπολογιστική γεωμετρία. Θα παρουσιάσουμε μια σύντομη περίληψη με θέματα που ασχολείται ο κάθε κλάδος, καθώς και μερικούς τομείς στους οποίους βρίσκουν εφαρμογές.

Η υπολογιστική γεωμετρία, είναι ο κλάδος της επιστήμης των υπολογιστών ο οποίος ασχολείται με την ανάλυση και σχεδίαση αλγορίθμων οι οποίοι μπορούν να περιγραφούν με βάση τη γεωμετρία. Η υπολογιστική γεωμετρία, βρίσκει πολλές εφαρμογές, κυρίως, στους τομείς της ρομποτικής, του γεωγραφικού συστήματος πληροφορίας, των γραφικών και πολλών άλλων.

Η απεικόνιση γραφημάτων, είναι ο κλάδος της επιστήμης των υπολογιστών ο οποίος ασχολείται με την αναπαράσταση δομικών σχέσεων μεταξύ αντικειμένων. Η απεικόνιση γραφημάτων βρίσκει εφαρμογές σε πολλούς τομείς της επιστήμης των υπολογιστών, όπως στις βάσεις δεδομένων, στη σχεδίαση VLSI και σε οποιοδήποτε τομέα απαιτείται οπτικοποίηση ενός συνόλου σχέσεων αντικειμένων (π.χ. χάρτης σταθμού του μετρό, γενεαλογικά δένδρα).

1.2 Ορισμοί & Εισαγωγικά

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε τους ορισμούς που θα χρειαστούμε.

Ένα απλό γράφημα είναι ένα διατεταγμένο ζευγάρι $G = (V, E)$ που αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων V και ένα σύνολο ακμών E μη-διατεταγμένων ζευγαριών στοιχείων του V . Περίπατος ονομάζεται μια ακολουθία $v_1 v_2 \dots v_k$ όταν $(v_i, v_{i+1}) \in E$ για $i = 1, \dots, k - 1$. Μονοπάτι ονομάζεται ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές. Περιήγηση ονομάζεται ένας περίπατος όταν η πρώτη κορυφή της ακολουθίας ταυτίζεται με την τελευταία $(v_1, v_2, \dots, v_k = v_1)$. Κύκλος ονομάζεται μια περιήγηση χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές, με εξαίρεση την πρώτη κορυφή της ακολουθίας. Ένα γράφημα είναι συνεκτικό αν για κάθε ζευγάρι u, v διαφορετικών κορυφών, υπάρχει μονοπάτι από το u στο v .

Δένδρο είναι ένα απλό και συνεκτικό γράφημα το οποίο δεν περιέχει κύκλους και συμβολίζεται συνήθως με T . Δάσος είναι ένα απλό και μη-συνεκτικό γράφημα το οποίο δεν περιέχει κύκλους. Κάθε κορυφή ενός δένδρου με βαθμό 1 λέγεται και φύλλο του δένδρου.

Μία απεικόνιση (drawing) Γ ενός γραφήματος G , είναι μια απεικόνιση της κάθε κορυφής σε ένα σημείο του χώρου και κάθε ακμής σε μία καμπύλη μεταξύ δύο κορυφών.

Μία ευθύγραμμη απεικόνιση (straight-line drawing) Γ ενός γραφήματος G , είναι μια απεικόνιση της κάθε κορυφής σε ένα σημείο του χώρου και κάθε ακμής σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο κορυφών. Ένα γεωμετρικό γράφημα (geometric graph), είναι ένα γράφημα G με μία Ευθύγραμμη Απεικόνιση Γ , όπου το βάρος της κάθε ακμής είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των άκρων της.

Μία επίπεδη απεικόνιση (planar drawing) Γ ενός γραφήματος G , είναι μια απεικόνιση του G όπου οι ακμές του δεν τέμνονται εκτός από τις άκρες τους. Ένα γράφημα G είναι επίπεδο (planar) αν έχει μια επίπεδη απεικόνιση. Ένα επίπεδο γράφημα Γ χωρίζει το επίπεδο σε τοπολογικά συνδεδεμένες περιοχές, τις όψεις (faces). Η μη-φραγμένη όψη ενός γραφήματος είναι η εξωτερική όψη (outer face).

Μια *εξωεπίπεδη απεικόνιση* (outerplanar drawing) Γ ενός γραφήματος G , είναι μια επίπεδη απεικόνιση του G όπου όλες οι κορυφές του βρίσκονται στην εξωτερική όψη. Μία όψη f ορίζεται ως η κυκλική λίστα των κορυφών και ακμών που συναντώνται, διασχίζοντας τα σύνορά της με ωρολογιακή φορά, αν η f είναι εσωτερική όψη, και με αντι-ωρολογιακή φορά, αν η f είναι η εξωτερική όψη. Μια *ενσωμάτωση* (embedding) ϕ ενός γραφήματος G είναι μια κλάση ισοδυναμίας των όψεων του G .

Μία *απεικόνιση που διατηρεί την ενσωμάτωση* (embedding-preserving drawing) Γ_ϕ ενός γραφήματος G είναι μια απεικόνιση η οποία έχει την συγκεκριμένη ενσωμάτωση ϕ .

Ορίζουμε ως \overrightarrow{ab} την ημιευθεία από το a στο b και ως $d(u, v)$ την Ευκλείδεια απόσταση δύο σημείων..

1.2.1 Ειδικές Κατηγορίες Μονοπατιών

Οι επόμενοι ορισμοί αφορούν γεωμετρικά γραφήματα.

Ένα μονοπάτι $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ είναι *μονότονο* (monotone), αν υπάρχει μια ευθεία l έτσι ώστε οι προβολές των κορυφών του P στην l , να εμφανίζονται στην l με την ίδια σειρά όπως στο P .

Ένα μονοπάτι $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ είναι *ισχυρά μονότονο* (strongly monotone), αν οι προβολές των κορυφών του P στην $\overrightarrow{p_0 p_n}$, εμφανίζονται στην $\overrightarrow{p_0 p_n}$ με την ίδια σειρά όπως στο P .

Ένα μονοπάτι $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ είναι *φθίνον κατά απόσταση* (distance decreasing), αν ισχύει $d(p_i, p_n) > d(p_{i+1}, p_n)$ για $i = 1, \dots, n - 1$.

Ένα μονοπάτι $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ είναι *αύξον κατά τόξο* (increasing-chord), αν για οποιοδήποτε σημεία a, b, c, d που τα διασχίζουμε με αυτήν την σειρά στο P , ισχύει πως $d(a, d) > d(b, c)$.

Ένα μονοπάτι $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ είναι *αυτό-προσεγγιζόμενο* (self-approaching), αν για οποιοδήποτε σημεία a, b, c που τα διασχίζουμε με αυτήν την σειρά στο P , ισχύει πως $d(a, c) > d(b, c)$.

Ένα μονοπάτι $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ είναι *β -μονότονο* (β -monotone), αν όλες οι ακμές (p_i, p_{i+1}) περιέχονται στην κυρτή περιοχή, που ορίζεται από δυο ημιευθείες με κλίσεις $\beta + 45^\circ$ και $\beta - 45^\circ$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(0, 0)$.

Ένα μονοπάτι $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ είναι *μονότονο κατά γωνία* (angle-monotone), αν υπάρχει αριθμός β έτσι ώστε να είναι β -monotone.

Ένα μονοπάτι $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ είναι *β -μονότονο με εύρος γ* (β -monotone with width γ) όπου $\gamma < 180^\circ$, αν όλες οι ακμές (p_i, p_{i+1}) περιέχονται στην κυρτή περιοχή, που ορίζεται από δυο ημιευθείες με κλίσεις $\beta + \frac{\gamma}{2}$ και $\beta - \frac{\gamma}{2}$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(0, 0)$.

Ένα μονοπάτι $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ είναι *γενικευμένο μονότονο κατά γωνία με εύρος γ* (generalized angle-monotone with width γ) όπου $\gamma < 180^\circ$, αν υπάρχει αριθμός β έτσι ώστε να είναι β -monotone with width γ .

Στα Σχήματα 1.1-1.6 στη σελίδα 21 υπάρχει ένα παράδειγμα μονοπατιού για κάθε κατηγορία. Στο Σχήμα 1.7 στη σελίδα 21 παρουσιάζουμε τις σχέσεις που επικρατούν ανάμεσα στις κατηγορίες μονοπατιών.

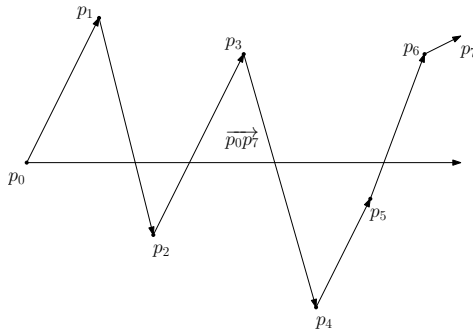
1.2.2 Ειδικές Κατηγορίες Απεικονίσεων με Έμφαση στις Ιδιότητες Μονοπατιών

Τώρα, θα περιγράψουμε μερικούς θεμελιώδεις τύπων απεικονίσεων.

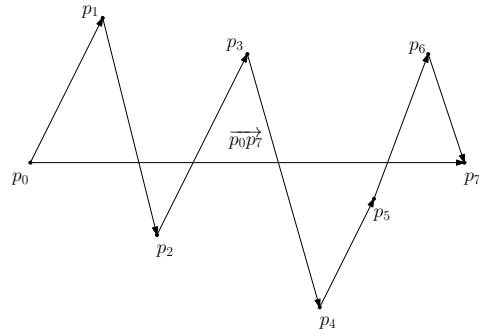
Μια ευθύγραμμη απεικόνιση Γ ενός γραφήματος G είναι *αυστηρά κυρτή / ελαστικά κυρτή* (strictly convex / non-strictly convex), αν όλες οι όψεις του, συμπεριλαμβανομένης και της εξωτερικής όψης, είναι αυστηρά / ελαστικά κυρτά πολύγωνα (τα αυστηρά κυρτά πολύγωνα έχουν τις εσωτερικές τους τις γωνίες μικρότερες από 180°)

Μια ευθύγραμμη απεικόνιση Γ , ενός δένδρου T , είναι *αυστηρά κυρτή* (strictly convex), αν κάθε μεγιστοτικό σύνολο παράλληλων ακμών αποτελεί ένα συνευθειακό μονοπάτι και αντικαθιστώντας κάθε φύλο από το u στο v με μια ημιευθεία από το u δια μέσου του v , χωρίζεται το επίπεδο σε μη-φραγμένα κυρτά πολύγωνα.

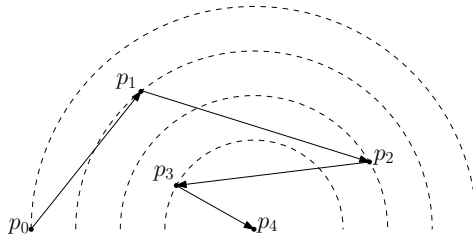
Μια απεικόνιση Γ , ενός γραφήματος G , είναι *μονότονη* (monotone), αν για κάθε δύο κορυφές u και v , υπάρχει κάποιο *μονότονο* μονοπάτι.



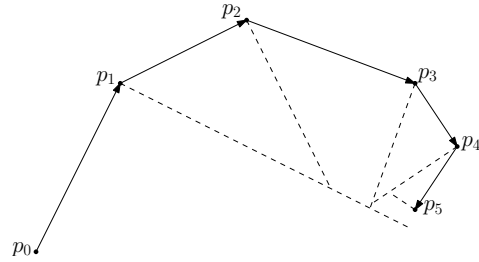
Σχήμα 1.1: Μονότονο μονοπάτι



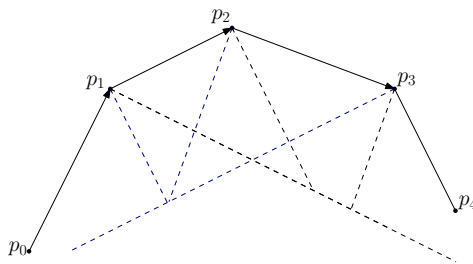
Σχήμα 1.2: Ισχυρά μονότονο μονοπάτι



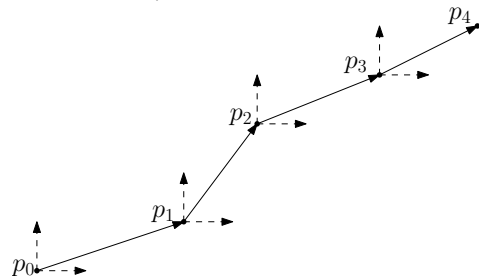
Σχήμα 1.3: Φθίνον κατά απόσταση μονοπάτι



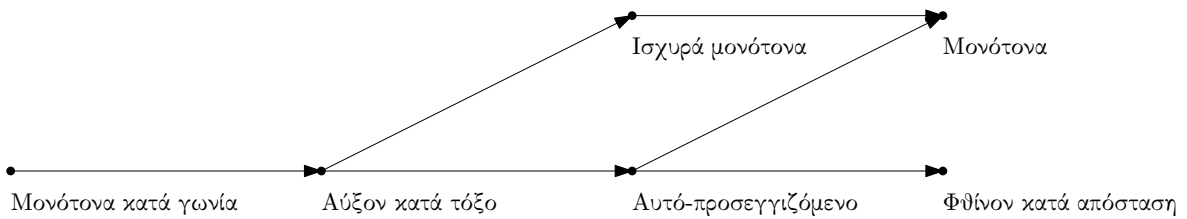
Σχήμα 1.4: Αυτό-προσεγγιζόμενο μονοπάτι



Σχήμα 1.5: Αύξον κατά τόξο μονοπάτι



Σχήμα 1.6: Μονότονο κατά γωνία μονοπάτι



Σχήμα 1.7: Σχέσεις μεταξύ των κατηγοριών των μονοπατιών. Οι ακμές δείχνουν το υπερσύνολο.

Μια απεικόνιση Γ , ενός γραφήματος G , είναι *ισχυρά μονότονη* (strongly monotone), αν για κάθε δύο κορυφές u και v , υπάρχει κάποιο *ισχυρά μονότονο* μονοπάτι.

Μια απεικόνιση Γ , ενός γραφήματος G , είναι *άπληστη* (greedy), αν για κάθε δύο κορυφές u και v , υπάρχει κάποιο *φθίνον κατά απόσταση* μονοπάτι.

Μια απεικόνιση Γ , ενός γραφήματος G , είναι *αυτό-προσεγγιζόμενη* (self-approaching), αν για κάθε δύο κορυφές u και v , υπάρχει κάποιο *αυτό-προσεγγιζόμενο* μονοπάτι.

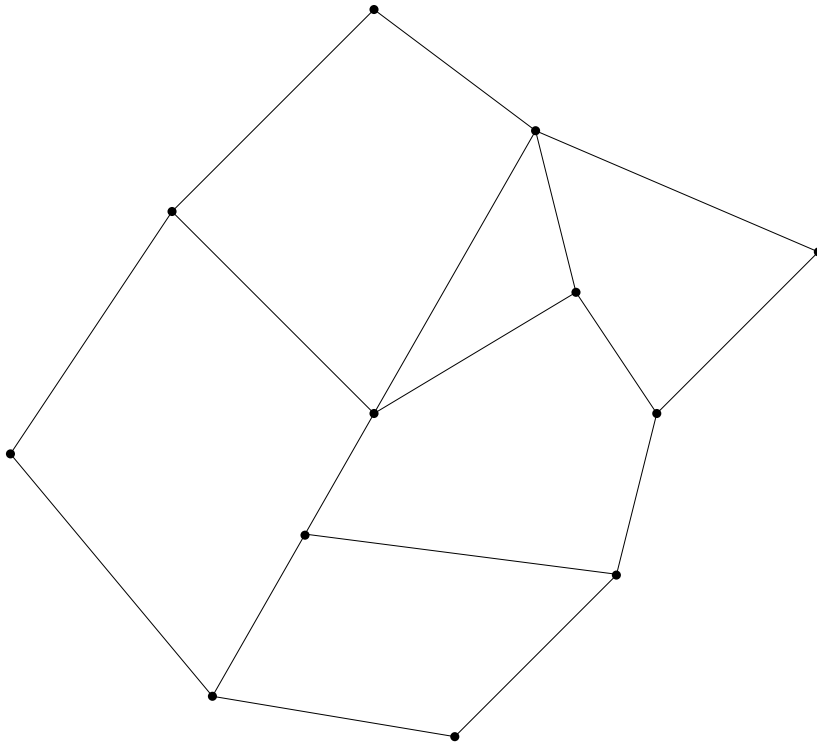
Μια απεικόνιση Γ , ενός γραφήματος G , είναι *αύξουσα κατά τόξο* (increasing-chord), αν για κάθε δύο κορυφές u και v , υπάρχει κάποιο *αύξον κατά τόξο* μονοπάτι.

Μια απεικόνιση Γ , ενός γραφήματος G , είναι *μονότονη κατά γωνία* (angle-monotone), αν για κάθε δύο κορυφές u και v , υπάρχει κάποιο *μονότονο κατά γωνία* μονοπάτι.

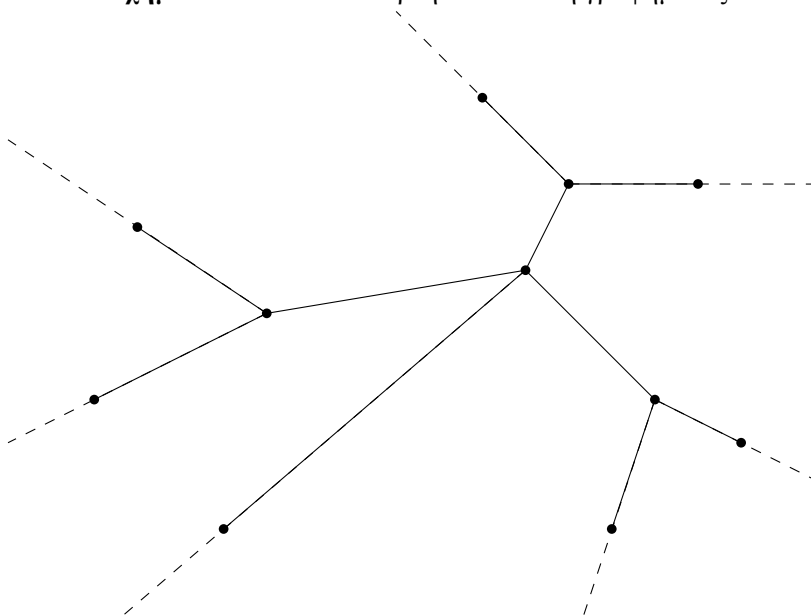
Μια απεικόνιση Γ , ενός γραφήματος G , είναι *γενικευμένο μονότονο κατά γωνία* (generalized angle

monotone), αν για κάθε δύο κορυφές u και v , υπάρχει κάποιο γενικευμένο μονότονο κατά γωνία μονοπάτι.

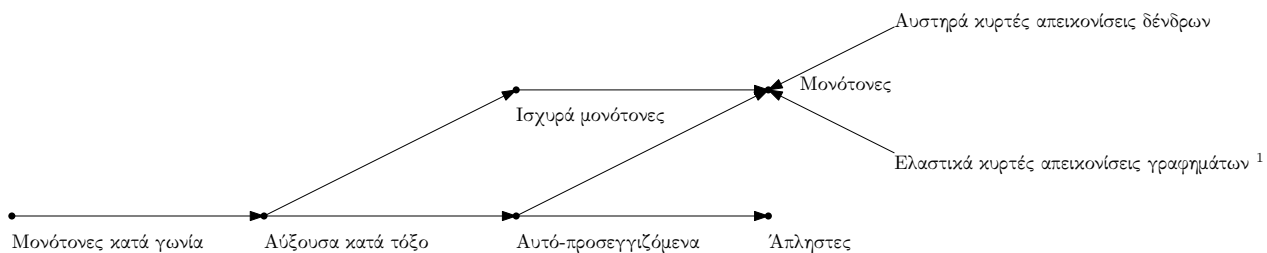
Στην σελίδα 22, έχουμε δύο παραδείγματα μερικών απεικονίσεων. Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 1.8 υπάρχει ένα παράδειγμα μιας ελαστικά κυρτής απεικόνιση ενός γραφήματος και στο Σχήμα 1.9 υπάρχει ένα παράδειγμα μιας αυστηρά κυρτής απεικόνισης ενός δένδρου. Στο Σχήμα 1.10 στην σελίδα 23 παρουσιάζουμε τις σχέσεις που επικρατούν ανάμεσα στις κατηγορίες απεικονίσεων.



Σχήμα 1.8: Ελαστικά κυρτή απεικόνιση γραφήματος



Σχήμα 1.9: Αυστηρά κυρτή απεικόνιση δένδρου



Σχήμα 1.10: Σχέσεις μεταξύ των κατηγοριών των απεικονίσεων. Οι ακμές δείχνουν το υπερέσυνολό.

Κατηγορία Απεικόνισης	Αναφορά
Αυστηρά Κυρτά Γραφήματα	[Ange12]
Ελαστικά Κυρτά Γραφήματα ¹	[Ange12]
Αυστηρά Κυρτά Δένδρα	[Ange12]

Πίνακας 1.1: Κατηγορίες απεικονίσεων οι οποίες είναι μονότονες

1.3 Κίνητρα & Αποτελέσματα

Μερικά από τα συνηθισμένα προβλήματα στην απεικόνιση γραφημάτων είναι τα εξής:

Πρόβλημα Αναγνώρισης. Δεδομένου μιας απεικόνισης Γ ενός γραφήματος G , ανήκει η απεικόνιση σε μια συγκεκριμένη κατηγορία; (π.χ. Είναι το γεωμετρικό γράφημα G μονότονο;).

Πρόβλημα Ενσωμάτωσης. Δεδομένου ενός γραφήματος G , μπορούμε να βρούμε μια απεικόνισή του ώστε να ανήκει σε μια συγκεκριμένη κατηγορία; (π.χ. Δέχεται το γράφημα G άπληστη ενσωμάτωση;). Ένα υπο-πρόβλημα αυτής της κατηγορίας είναι ποιες κλάσεις γραφημάτων δέχονται κάποια συγκεκριμένη απεικόνιση.

Πρόβλημα Κατασκευής. Δεδομένου ενός συνόλου από σημεία στο επίπεδο, πρέπει να κατασκευάσουμε ένα γεωμετρικό γράφημα με κάποιους περιορισμούς (π.χ. Δεδομένου ενός γραφήματος με κάποια ενσωμάτωση G_ϕ , μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μονότονη απεικόνιση που διατηρεί την ενσωμάτωση;).

1.3.1 Μονότονες Απεικονίσεις

Κίνητρα

Οι *μονότονες απεικονίσεις* προτάθηκαν από τους Angelini et al. σαν ένα νέο μέσο οπτικοποίησης γραφημάτων [Ange12]. Αυτή η μέθοδος παρακινείται και από πειράματα: παρατηρήθηκε πως η "γεωδαιτική τάση" (μονοπάτια που ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατεύθυνση) είναι σημαντική στην κατανόηση της δομής ενός γραφήματος [Huan09].

Υπάρχουσα Δουλειά

Κατηγορίες απεικονίσεων οι οποίες είναι μονότονες περιλαμβάνονται στον Πίνακα 1.1. Κατηγορίες γραφημάτων που έχουν μονότονη απεικόνιση περιλαμβάνονται στον Πίνακα 1.2. Κατηγορίες γραφημάτων που δέχονται μονότονη απεικόνιση που διατηρεί την ενσωμάτωση περιλαμβάνονται στον Πίνακα 1.3.

¹ Με την προϋπόθεση πως κάθε μεγιστοτικό σύνολο παράλληλων ακμών αποτελεί ένα συνευθειακό μονοπάτι

Κατηγορία Γραφημάτων	Μέγεθος Επιπέδου	Σημειώσεις	Αναφορά
Συνεκτικά Γραφήματα	$\lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor$	Απεικόνιση Δένδρου	[Oiko17a]
Επίπεδα Συνεκτικά Γραφήματα	$O(n^2) \times O(n)$	Η απεικόνιση είναι επίπεδη	[Hoss15]

Πίνακας 1.2: Κατηγορίες γραφημάτων που έχουν μονότονη απεικόνιση

Κατηγορία Γραφημάτων	Μέγεθος Επιπέδου	Σημειώσεις	Αναφορά
Επίπεδα Συνεκτικά Γραφήματα	$O(n^2) \times O(n)$	<i>Curve – Complexity</i> ≤ 2	[Ange15]
Εξωεπίπεδα Συνεκτικά Γραφήματα	$O(n^2) \times O(n)$	Ευθύγραμμη απεικόνιση	[Ange15]
Επίπεδα 2-συνεκτικά Γραφήματα	Εκθετικό ως προς το μέγεθος	Ευθύγραμμη απεικόνιση	[Ange15]

Πίνακας 1.3: Κατηγορίες γραφημάτων που δέχονται μονότονη απεικόνιση που διατηρεί την ενσωμάτωση

1.3.2 Άπληστες Απεικονίσεις

Κίνητρα

Οι *άπληστες απεικονίσεις* προτάθηκαν από τους Rao et al. σαν μια καινούργια μέθοδος δρομολόγησης [Rao03]. Η *άπληστη δρομολόγηση* είναι ένα πρωτόκολλο, όπου ο κάθε κόμβος προωθεί ένα πακέτο στον γείτονα του, ο οποίος είναι πιο κοντά από τον ίδιο στον τελικό προορισμό, ως προς μια μετρική συνάρτηση. Είναι φυσιολογικό να δοκιμάσουμε *άπληστη δρομολόγηση* σε εικονικές συντεταγμένες, όπως προτάθηκε τους Rao et al. [Rao03] αφού λαμβάνει υπόψιν της τις τοπολογικές ιδιότητες του γραφήματος.

Υπάρχουσα Δουλειά

Η επόμενη εικασία σχετικά με τις *άπληστες απεικονίσεις* προτάθηκε από τους Papadimitriou & Ratajczak:

Εικασία 1. [Para05] Κάθε επίπεδο και 3-συνεκτικό γράφημα διαθέτει *άπληστη απεικόνιση*.

Η εικασία αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Leighton & Moitra [Leig10] και Angelini et al [Ange10].

Ένα μειονέκτημα της απόδειξης είναι πως η απεικόνιση απαιτεί $O(n \cdot \log(n))$ bits στη χειρότερη περίπτωση, το οποίο παρακίνησε την μελέτη περιληπτικών ενσωματώσεων με την *άπληστη δρομολόγηση*. Οι Jun-Jie Wang και Xin He απέδειξαν πως κάθε 3-συνεκτικό επίπεδο γράφημα μπορεί να ενσωματωθεί με μόνο $O(\log(n))$ bits στη χειρότερη περίπτωση, σε μια κυρτή απεικόνιση. Στην απόδειξή τους εγκατέλειψαν την ευκλείδεια μετρική απόστασης.

1.3.3 Αυτό-Προσεγγιζόμενες & Αύξουσα Κατά Τόξο Απεικονίσεις

Κίνητρα

Παρότι που στις *άπληστες απεικονίσεις*, το να φτάνεις πιο κοντά στον προορισμό σου σε κάθε βήμα, είναι μια επιθυμητή ιδιότητα, αυτό δεν αληθεύει για τα ενδιάμεσα σημεία στα μονοπάτια. Λόγω αυτού, ένα φθίνον κατά απόσταση μονοπάτι μπορεί να έχει μη-φραγμένη διαστολή (dilation) (λόγω μήκους μονοπατιού προς λόγω ευκλείδειας απόστασης μεταξύ των άκρων). Παρακινήμενοι από αυτό, οι Alamdari et al. [Alam12] εισήγαγαν τις *αυτό-προσεγγιζόμενες / αύξουσα κατά τόξο απεικονίσεις* όπως περιγράφηκαν στην Υπό-Ενότητα 1.2.1, βασισμένοι στα έργα *Self-Approaching Curves* των Icking et

al. και *Curves with Increasing Chord* του Rote [Icki99, Rote94]. Τα αυτό-προσεγγιζόμενα και αύξον κατά τόξο μονοπάτια εγγυούνται μια μέγιστη διαστολή $5.333 / 2.094$ αντίστοιχα [Icki99, Rote94].

Υπάρχουσα Δουλειά

Πρέπει να τονίσουμε πως ένα μονοπάτι από το u στο v είναι αύξον κατά τόξο αν το μονοπάτι από το u στο v και το μονοπάτι από το v στο u είναι αυτό-προσεγγιζόμενο [Alam12].

Πρόβλημα Αναγνώρισης: Η αναγνώριση αν ένα μονοπάτι είναι αυτό-προσεγγιζόμενο / αύξον κατά τόξο μπορεί να γίνει αποδοτικά στις δύο και τρεις διαστάσεις [Alam12], αλλά να αποφανθούμε αν ένα αυτό-προσεγγιζόμενο / αύξον κατά τόξο μονοπάτι υπάρχει μεταξύ δυο κορυφών ενός γραφήματος είναι NP-hard [Alam12]. Επιπλέον μπορούμε να αποφανθούμε για τα μονότονα κατά γωνία μονοπάτια σε ένα γράφημα $G(V, E)$ σε $O(|V| \cdot |E|^2)$ χρόνο [Bon16].

Πρόβλημα Ενσωμάτωσης: Τα δένδρα τα οποία έχουν αυτό-προσεγγιζόμενη / αύξουσα κατά τόξο απεικόνιση έχουν περιγραφεί στο [Alam12].

Πρόβλημα Κατασκευής: Δεδομένου ενός συνόλου από σημεία P , ένα αύξον κατά τόξο επίπεδο γράφημα μπορεί να κατασκευαστεί με ένα υπερσύνολο σημείων P' όπου, $P \subseteq P'$ και $|P'| \in O(P)$ [Dehk15]. Στο ίδιο άρθρο, απέδειξαν πως κάθε για κάθε κυρτό σύνολο σημείων P , μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αύξον κατά τόξο γεωμετρικό γράφημα $G(P, S)$, όπου $|S| \in O(|P| \cdot \log |P|)$

1.4 Οργάνωση Διπλωματικής

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε τρεις αλγόριθμους για μονότονη απεικόνιση δένδρων και τους κατηγοριοποιούμε ανάλογα με το μέγεθος πλέγματος και τον αριθμό των τεταρτημορίων που χρησιμοποιούν. Οι αλγόριθμοι έχουν ήδη παρουσιαστεί στα [Oiko17b][Oiko17a]. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε έναν τρόπο κατασκευής ενός συνεκτικού γραφήματος με βάση ένα σύνολο σημείων. Επικεντρωνόμαστε στην μέση ανάλυση των ιδιοτήτων του γραφήματος και παρουσιάζουμε έναν απλό και φυσικό αλγόριθμο για τοπική δρομολόγηση.

Κεφάλαιο 2

Απλή & Συμπαγής Μονότονη Απεικόνιση Δένδρων

2.1 Εισαγωγή

Η μονότονη απεικόνιση γραφημάτων έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον των ερευνητών και αρκετά ενδιαφέροντα αποτελέσματα έχουν ανακαλυφθεί. Δεδομένου ενός επίπεδου γραφήματος G με δεδομένη ενσωμάτωση, μια επίπεδη μονότονη απεικόνιση του G μπορεί να κατασκευαστεί, αλλά με την εμφάνιση μερικών καμπυλών σε κάποιες ακμές (δηλαδή πλέον δεν είναι ευθύγραμμη απεικόνιση) [Ange15]. Όταν επιλέγουμε εμείς την ενσωμάτωση του γραφήματος, υπάρχει μια μονότονη απεικόνιση οποιουδήποτε επίπεδου γραφήματος χωρίς καμπύλες [Hoss15].

Ένας τρόπος για να βρούμε μια μονότονη απεικόνιση ενός γραφήματος είναι να βρούμε μια μονότονη απεικόνιση ενός συνεκτικού δένδρου της. Για αυτόν τον λόγο, το πρόβλημα εύρεσης μονότονης απεικόνισης ενός δένδρου έχει υπάρξει θέμα αρκετών πρόσφατων άρθρων, ξεκινώντας από την δουλειά των Angelini et al. [Ange12] οι οποίοι εισήγαγαν την ιδέα της μονότονης απεικόνισης γραφημάτων. Οι Carlson and Eppstein μελέτησαν τις κυρτές απεικονίσεις των δένδρων [Carl06]. Οι Angelini et al. [Ange12] περιέγραψαν δύο αλγόριθμους βασισμένοι σε ιδέες της θεωρίας αριθμών και πιο συγκεκριμένα των Stern-Brocot δένδρων [Ster58, Broc60], [Grah94, Sect. 4.5]. Ο πρώτος αλγόριθμος χρησιμοποιεί πλέγμα μεγέθους $O(n^{1.6}) \times O(n^{1.6})$ (BFS-based αλγόριθμος) ενώ ο δεύτερος αλγόριθμος χρησιμοποιεί πλέγμα μεγέθους $O(n) \times O(n^2)$ (DFS-based αλγόριθμος). Αργότερα, οι Kindermann et al. [Kind14] περιέγραψαν έναν αλγόριθμο βασισμένο στις ακολουθίες Farey ([Grah94, Sect. 4.5]) ο οποίος χρησιμοποιεί πλέγμα μεγέθους $O(n^{1.5}) \times O(n^{1.5})$, επιπλέον η απεικόνισή τους είναι κυρτή. Οι He και He [He15] περιέγραψαν έναν αλγόριθμο βασισμένο στις ακολουθίες Farey και μείωσαν το απαιτούμενο μέγεθος πλέγματος σε $O(n^{1.205}) \times O(n^{1.205})$, το οποίο ήταν το πρώτο αποτέλεσμα που χρησιμοποιούσε εμβαδόν απεικόνισης μικρότερο από $O(n^3)$. Πρόσφατα, οι He και He [He16] πρώτα μείωσαν το μέγεθος πλέγματος για μονότονη απεικόνιση δένδρου σε $O(n \cdot \log(n)) \times O(n \cdot \log(n))$ και, σε ένα επόμενο άρθρο, σε $O(n) \times O(n)$ [He17]. Η μονότονη απεικόνιση για δένδρα χρησιμοποιεί πλέγμα μεγέθους το πολύ $12n \times 12n$ το οποίο είναι ασυμπτωτικά βέλτιστο αφού υπάρχουν δένδρα το οποία χρειάζονται πλέγμα μεγέθους τουλάχιστον $\frac{n}{9} \times \frac{n}{9}$ [He17].

Η συνεισφορά μας: Περιγράφουμε έναν απλό αλγόριθμο ο οποίος δέχεται για είσοδο ένα δένδρο T με n κόμβους, και δίνει ως έξοδο μια μονότονη απεικόνιση του T σε ένα πλέγμα το πολύ $n \times n$ αν δεν έχουμε ορίσει ρίζα του δένδρου. Αν μπορούμε να ορίσουμε ρίζα του δένδρου, περιγράφουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος δίνει στην έξοδο του μια μονότονη απεικόνιση του T σε πλέγμα μεγέθους το πολύ $n \times \frac{n}{2}$. Στο τέλος, αν μπορούμε να αλλάξουμε την ενσωμάτωση και να διαλέξουμε την ρίζα του T , περιγράφουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος δίνει στην έξοδο του μια μονότονη απεικόνιση του T σε ένα πλέγμα μεγέθους $\lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor$. Μερικά από τα αποτελέσματα του κεφαλαίου παρουσιάστηκαν στο [Oiko17b].

Το συγκεκριμένο κεφάλαιο έχει την εξής οργάνωση: Στην Ενότητα 2.2 παρέχουμε μερικούς ορισμούς και κάποια από την υπάρχουσα δουλειά πάνω στο πρόβλημα της μονότονης απεικόνισης δένδρων. Στην Ενότητα 2.3 περιγράφουμε ένα υπόβαθρο που όλοι οι αλγόριθμοι μας χρησιμοποιούν. Στην Υπό-Ενότητα 2.3.1 περιγράφουμε τον αλγόριθμο που δίνει ως έξοδο $n \times n$ μονότονη απεικόνιση. Στην Υπό-Ενότητα 2.3.2 περιγράφουμε τον αλγόριθμο που δίνει ως έξοδο $n \times \frac{n}{2}$ μονότονη απεικόνιση. Στην Ενότητα 2.4 περιγράφουμε πως να τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο της Υπό-Ενότητας 2.3.1

για να έχουμε μια κυρτή απεικόνιση. Στην Ενότητα 2.5 περιγράφουμε τον αλγόριθμο που συνδυάζει και τους δύο αλγορίθμους των Υπό-Ενότητα 2.3.1 και Υπό-Ενότητα 2.3.2 και δίνει ως έξοδο $\lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor$ μονότονη απεικόνιση. Συνοψίζουμε στην Ενότητα 2.6.

2.2 Ορισμοί & Εισαγωγικά

Έστω Γ η απεικόνιση ενός γραφήματος G και (u, v) μια ακμή από τον κόμβο u στο κόμβο v στο G . Η κλίση της ακμής (u, v) , ορίζεται ως $slope(u, v)$, και είναι η γωνία που διαγράφεται από μια αντίωρολογιακή περιστροφή μιας οριζόντιας ημιευθείας η οποία ξεκινάει από το u και κατευθύνεται προς τις θετικές συντεταγμένες του άξονα- x , μέχρι να συμπίπτει με την ημιευθεία η οποία ξεκινάει από το u και διέρχεται από το v . Θεωρούμε τις γωνίες οι οποίες απέχουν πολλαπλάσιο του 2π ισοδύναμες. Παρατηρούμε πως $slope(u, v) = slope(v, u) - \pi$. Υπάρχουν μόνο επίπεδες μονότονες απεικονίσεις δένδρων, καθώς όπως αποδείχθηκε, από τους Angelini et al., οι μονότονες απεικονίσεις δένδρων είναι και επίπεδες [Ange12].

Έστω T δένδρο, με ρίζα τον κόμβο r . Ορίζουμε ως T_u το υπό-δένδρο του T με ρίζα τον κόμβο u . Ως T_v^u ορίζουμε το δένδρο που αποτελείται από την ακμή (u, v) και το T_v , όταν το v είναι παιδί του u . Ως $|T_u|$ ορίζουμε τον αριθμό των κόμβων του T_u . Στο υπόλοιπο κεφάλαιο, υποθέτουμε πως όλες οι ακμές του δένδρου απομακρύνονται από την ρίζα. Επιπλέον, ορίζουμε ως [statement] την συνάρτηση η οποία έχει τιμή 1 όταν το statement είναι αληθές, διαφορετικά έχει τιμή 0. Επίσης, παρουσιάζουμε δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα:

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \cdot \tan(b)} \quad (2.1)$$

$$\tan(a) > a, \text{ when } 0 < a < \frac{\pi}{2} \quad (2.2)$$

2.2.1 Ξένες Κατά Κλίση Απεικονίσεις Δένδρων

Οι Angelini et al. [Ange12] όρισαν την έννοια των ξένων κατά κλίσεων (slope-disjoint) απεικονίσεων δένδρων. Έστω Γ απεικόνιση ενός ριζωμένου δένδρου T . Η απεικόνιση Γ ονομάζεται ξένη κατά κλίση απεικόνιση του T αν ισχύουν οι επόμενες συνθήκες:

1. Για κάθε κόμβο $u \in T$, υπάρχουν δύο γωνίες $a_1(u)$ και $a_2(u)$, με $0 < a_1(u) < a_2(u) < \pi$ έτσι ώστε κάθε ακμή e η οποία ανήκει είτε ανήκει στο T_u είτε εισέρχεται στο u από τον πατέρα του, ισχύει πως $a_1(u) < slope(e) < a_2(u)$.
2. Για κάθε ζευγάρι κόμβων $u, v \in T$ όπου ο v είναι παιδί του u , ισχύει πως $a_1(u) < a_1(v) < a_2(v) < a_2(u)$.
3. Για κάθε ζευγάρι κόμβων v_1, v_2 οι οποίοι έχουν ίδιο πατέρα, ισχύει πως $a_1(v_1) < a_2(v_1) < a_1(v_2) < a_2(v_2)$ ή $a_1(v_2) < a_2(v_2) < a_1(v_1) < a_2(v_1)$.

Η ιδέα στην οποία βασίζεται ο ορισμός των ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων δένδρων είναι πως όλες οι ακμές στο υπό-δεντρό T_u όπως και οι ακμές που εισέρχονται στο u από τον πατέρα του έχουν κλίσεις οι οποίες είναι εντός του εύρους γωνίας (angle range) $\langle a_1(u), a_2(u) \rangle$ τα οποία έχουν ορισθεί για την γωνία u . Ως $\langle a_1(u), a_2(u) \rangle$ ορίζουμε το εύρος γωνίας του u όπου $a_1(u)$ και $a_2(u)$ είναι τα όρια της. Η κυρτή γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των ημιευθειών με κλίσεις $a_1(u)$ και $a_2(u)$ ορίζεται ως $\phi_u = a_2(u) - a_1(u)$ και αποκαλείται το μήκος του εύρους γωνίας (range length) του u .

Παρουσιάζουμε δύο αποτελέσματα των Angelini et al. [Ange12].

Θεώρημα 1 (Angelini et al.[Ange12]). Κάθε μονότονη απεικόνιση ενός δένδρου είναι και επίπεδη.

Θεώρημα 2 (Angelini et al.[Ange12]). Κάθε ξένη κατά κλίση απεικόνιση ενός δένδρου είναι μονότονη.

Για να απλοποιήσουμε την περιγραφή του αλγορίθμου μας, επεκτείνουμε τον ορισμό των ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων δένδρων επιτρέποντας τα εύρη γωνιών συγγενικών κόμβων (σχέση πατέρα-γιου ή κοινού πατέρα) να μοιράζονται το ίδιο όριο εύρους γωνίας.

Μια απεικόνιση Γ ενός ριζωμένου δένδρου T ονομάζεται *ελαστικά ξένη κατά κλίση* (non-strictly slope-disjoint) απεικόνιση αν ισχύουν οι εξής συνθήκες:

1. Για κάθε κόμβο $u \in T$, υπάρχουν δυο γωνίες $a_1(u)$ και $a_2(u)$, με $0 \leq a_1(u) < a_2(u) \leq \pi$ έτσι ώστε κάθε ακμή e η οποία ανήκει είτε ανήκει στο T_u είτε εισέρχεται στο u από τον πατέρα του, ισχύει πως $a_1(u) < slope(e) < a_2(u)$.
2. Για κάθε ζευγάρι κόμβων $u, v \in T$ όπου ο v είναι παιδί του u , ισχύει πως $a_1(u) \leq a_1(v) < a_2(v) \leq a_2(u)$.
3. Για κάθε ζευγάρι κόμβων v_1, v_2 οι οποίοι έχουν ίδιο πατέρα, ισχύει πως $a_1(v_1) < a_2(v_1) \leq a_1(v_2) < a_2(v_2)$ ή $a_1(v_2) < a_2(v_2) \leq a_1(v_1) < a_2(v_1)$.

Στον επεκταμένο μας ορισμό, επιτρέπουμε τα εύρη γωνιών συγγενικών κόμβων (σχέση πατέρα-γιου ή κοινού πατέρα) να μοιράζονται το ίδιο όριο εύρους γωνίας. Σημειώνουμε πως αντικαθιστώντας το “ \leq ” σύμβολο του ορισμού μας με το “ $<$ ” σύμβολο δίνει τον αρχικό ορισμό των Angelini et al. [Ang12] για τις ξένες κατά κλίση απεικονίσεις δένδρων.

Λήμμα 1. Κάθε ελαστική ξένη κατά κλίση απεικόνιση ενός δένδρου T είναι και ξένη κατά κλίση απεικόνιση.

Απόδειξη. Διαισθητικά, το θεώρημα ισχύει αφού πάντα μπορούμε να μεταβάλλουμε (με μια μικροποσότητα) τα εύρη γωνιών των κόμβων οι οποίοι μοιράζονται κάποιο όριο εύρους γωνίας, έτσι ώστε μετά την μεταβολή να μην υπάρχουν δύο κόμβοι του δένδρου με ίδιο όριο εύρους γωνίας. Σημειώνουμε πως η πραγματική απεικόνιση του δένδρου δεν αλλάζει. Μόνο τα εύρη γωνιών μεταβάλλονται.

Πιο επίσημα, έστω Γ μια ελαστική ξένη κατά κλίση απεικόνιση ενός δένδρου T με ρίζα τον κόμβο r . Δείχνουμε πως να υπολογίσουμε για κάθε κόμβο u τα νέα εύρη γωνιών $\langle b_1(u), b_2(u) \rangle$ έτσι ώστε η καινούργια απεικόνιση του T με τα καινούργια εύρη γωνιών να είναι ξένη κατά κλίση.

Έστω $e(u)$ είναι η ακμή η οποία συνδέει τον πατέρα του u με τον u στο T , όπου $u \in T \setminus r$.

Χρησιμοποιούμε τους επόμενους ορισμούς:

$$\delta_1 = \min_{u \in T \setminus r} (slope(e(u)) - a_1(u))$$

$$\delta_2 = \min_{u \in T \setminus r} (a_2(u) - slope(e(u)))$$

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

Για κάθε κόμβο $u \in T \setminus r$ ισχύει πως:

$$slope(e) - a_1(u) \geq \delta \tag{2.3}$$

$$a_2(u) - slope(e) \geq \delta \tag{2.4}$$

Λόγω της Ιδιότητας-1 της ελαστικής ξένης κατά κλίσης απεικόνισης, έχουμε πως $\delta_1, \delta_2 > 0$ και έπεται $\delta > 0$. Προσθέτοντας τις δύο προηγούμενες ανισότητες έχουμε,

$$(2.3) + (2.4) \Rightarrow a_2(u) - a_1(u) \geq 2\delta \text{ όπου } u \in T \setminus r \tag{2.5}$$

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε πως για κάθε απόγονο v της ρίζας $r \in T$, ισχύει με επαγωγική χρήση της Ιδιότητας-2 των ελαστικών ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων,

$$a_1(r) \leq a_1(v) \tag{2.6}$$

$$a_2(r) \geq a_2(v) \tag{2.7}$$

Και επομένως αφαιρώντας (2.7) from (2.6) έχουμε,

$$(2.7) - (2.6) \Rightarrow a_2(r) - a_1(r) \geq a_2(v) - a_1(v) \stackrel{(2.5)}{\geq} 2\delta$$

Επομένως για κάθε κόμβο $u \in T$ ισχύει πως:

$$a_2(u) - a_1(u) \geq 2\delta \quad (2.8)$$

Έστω η ρίζα r του T ότι βρίσκεται στο επίπεδο-0, έστω u κόμβος στο επίπεδο- i , $i > 0$ και έστω h το ύψος του δένδρου T . Ορίζουμε τα εύρη γωνιών $\langle b_1(u), b_2(u) \rangle$ για κάθε κόμβο $u \in T$ ως εξής:

$$b_1(u) = \begin{cases} a_1(r) & \text{αν } u = r \\ a_1(u) + \delta \cdot \frac{i}{h+1} & \text{αν } u \neq r \end{cases} \quad b_2(u) = \begin{cases} a_2(r) & \text{αν } u = r \\ a_2(u) - \delta \cdot \frac{i}{h+1} & \text{αν } u \neq r \end{cases}$$

Πρώτα, αποδεικνύουμε πως οι νέες παράμετροι b_1, b_2 ικανοποιούν της Ιδιότητα-2 των ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων. Έστω u ένας κόμβος στο επίπεδο- i ο οποίος ανήκει στο T και v το παιδί του. Λόγω της Ιδιότητας-2 των ελαστικών ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων, ισχύει πως:

$$\begin{aligned} a_1(u) \leq a_1(v) &\Rightarrow a_1(u) + \delta \cdot \frac{i}{h+1} < a_1(v) + \delta \cdot \frac{i+1}{h+1} \\ &\Leftrightarrow b_1(u) < b_1(v) \end{aligned}$$

Όμοια, έχουμε πως $b_2(v) < b_2(u)$. Επιπλέον έχουμε,

$$\begin{aligned} b_2(v) - b_1(v) &= a_2(v) - \delta \cdot \frac{i+1}{h+1} - \left(a_1(v) + \delta \cdot \frac{i+1}{h+1} \right) \\ &= (a_2(v) - a_1(v)) - 2\delta \cdot \frac{i+1}{h+1} \\ &\stackrel{(2.8)}{\geq} 2\delta - 2\delta \cdot \frac{i+1}{h+1} \\ &= 2\delta \cdot \left(1 - \frac{i+1}{h+1} \right) \\ &= 2\delta \cdot \frac{h-i}{h+1} \\ &> 0 \\ &\Rightarrow b_2(v) > b_1(v) \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή ο κόμβος u έχει τουλάχιστον ένα παιδί το οποίο σημαίνει πως ο κόμβος u είναι στο επίπεδο- i έτσι ώστε $i < h$. Οπότε η Ιδιότητα-2 ισχύει.

Έπειτα, δείχνουμε πως οι καινούργιες παράμετροι b_1, b_2 ικανοποιούν την Ιδιότητα-3 των ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων. Έστω v_1 , και v_2 δύο κόμβοι στο επίπεδο- i με τον ίδιο πατέρα. Από την Ιδιότητα-3 των ελαστικών ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων έχουμε πως $a_1(v_1) < a_2(v_1) \leq a_1(v_2) < a_2(v_2)$ ή $a_1(v_2) < a_2(v_2) \leq a_1(v_1) < a_2(v_1)$. Οι δύο περιπτώσεις είναι συμμετρικές, οπότε θα αποδείξουμε πως $b_1(v_1) < b_2(v_1) < b_1(v_2) < b_2(v_2)$ όταν $a_1(v_1) < a_2(v_1) \leq a_1(v_2) < a_2(v_2)$. Στην απόδειξη της Ιδιότητας-2 δείξαμε πως $b_1(v_1) < b_2(v_1)$ και $b_1(v_2) < b_2(v_2)$ οπότε μένει να αποδείξουμε πως $b_2(v_1) < b_1(v_2)$. Έχουμε πως

$$\begin{aligned} a_2(v_1) \leq a_1(v_2) &\Rightarrow a_2(v_1) - \delta \cdot \frac{i}{h+1} < a_1(v_2) + \delta \cdot \frac{i}{h+1} \\ &\Leftrightarrow b_2(v_1) < b_1(v_2) \end{aligned}$$

Τώρα, μας μένει να αποδείξουμε την Ιδιότητα-1 των ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων. Οι παράμετροι a_1 και a_2 ικανοποιούν την Ιδιότητα-1 των ελαστικών ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων, για κάθε κορυφή u στο επίπεδο- i και για κάθε ακμή e η οποία ανήκει στο T_u είτε εισέρχεται στο u

από τον πατέρα του, ισχύει πως (2.3). Από τον ορισμό των b_1 , έχουμε πως $b_1(u) = a_1(u) + \delta \cdot \frac{i}{h+1}$ το οποίο σημαίνει πως,

$$a_1(u) = b_1(u) - \delta \cdot \frac{i}{h+1} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} (2.3) &\stackrel{(2.9)}{\Leftrightarrow} \text{slope}(e) - \left(b_1(u) - \delta \cdot \frac{i}{h+1} \right) \geq \delta \\ &\Leftrightarrow \text{slope}(e) - b_1(u) \geq \delta \cdot \left(1 - \frac{i}{h+1} \right) \\ &\Leftrightarrow \text{slope}(e) - b_1(u) \geq \delta \cdot \left(\frac{h+1-i}{h+1} \right) \\ &\Rightarrow \text{slope}(e) - b_1(u) > 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή $\delta > 0$ και ο κόμβος u είναι στο επίπεδο- i και αφού $i \leq h$, έπεται πως $i < h+1$.

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε πως $b_2(u) - \text{slope}(e) > 0$ και συνοψίζοντας ισχύει πως $b_1(u) < \text{slope}(e) < b_2(u)$. Οπότε η Ιδιότητα-1 των ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων ικανοποιείται. \square

Θεώρημα 3. Κάθε ελαστική ξένη κατά κλίση απεικόνιση ενός δένδρου είναι μονότονη και επίπεδη.

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 1 κάθε ελαστική ξένη κατά κλίση απεικόνιση ενός δένδρου T είναι ξένη κατά κλίση και από το Θεώρημα 1 και το Θεώρημα 2 είναι μονότονο και επίπεδο. \square

2.2.2 Τοποθέτηση Σημείων στο Πλέγμα

Με βάση την γεωμετρία, αποδεικνύουμε πως είναι πάντα εφικτό να εντοπίσουμε σημεία σε ένα πλέγμα τα οποία ικανοποιούν μερικές ιδιότητες με βάση την τοποθεσία τους.

Λήμμα 2. Έστω δύο γωνίες θ_1, θ_2 όπου $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \frac{\pi}{4}$ και έστω $d = \left\lceil \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \right\rceil$. Τότε, για την ακμή e η οποία συνδέει την αρχή του πλέγματος $(0, 0)$ στο σημείο $p = (d, \lfloor \tan(\theta_1) \cdot d + 1 \rfloor)$ ισχύει πως $\theta_1 < \text{slope}(e) < \theta_2$.

Απόδειξη. Έστω l_1 και l_2 οι ημιευθείες από την αρχή του πλέγματος με κλίσεις θ_1 και θ_2 αντίστοιχα. Έστω a και b τα σημεία τομής των l_1 και l_2 με την ευθεία $x = d$ αντίστοιχα. Αποδεικνύουμε πως $|ab| > 1$, οπότε ένα σημείο του πλέγματος πρέπει να κείται μεταξύ των a και b , αφού η x -συντεταγμένη είναι ακέραια και το ευθύγραμμο τμήμα ab είναι παράλληλο στο y -άξονα όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.

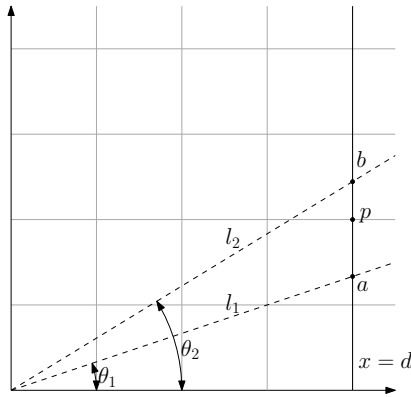
Λόγω της (2.1), ισχύει πως $\tan(a) - \tan(b) = \tan(a - b) \cdot (1 + \tan(a)\tan(b))$ και επομένως, για $0 \leq a, b \leq \frac{\pi}{2}$ ισχύει πως:

$$\tan(a) - \tan(b) > \tan(a - b), \text{ όταν } 0 \leq a, b \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.10)$$

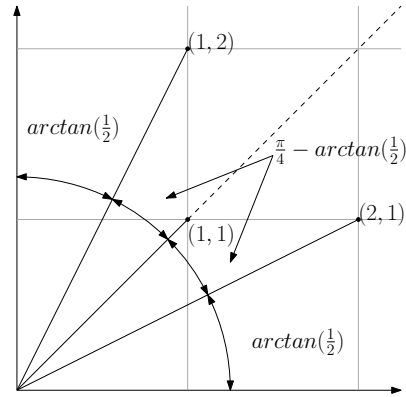
Οι συντεταγμένες του σημείου a είναι $(d, \tan(\theta_1) \cdot d)$ και οι συντεταγμένες του σημείου b είναι $(d, \tan(\theta_2) \cdot d)$. Οπότε,

$$\begin{aligned} |ab| &= \tan(\theta_2) \cdot d - \tan(\theta_1) \cdot d \\ &= (\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1)) \cdot d \\ &\stackrel{(2.10)}{>} \tan(\theta_2 - \theta_1) \cdot d \\ &\stackrel{(2.2)}{\geq} (\theta_2 - \theta_1) \cdot d \\ &= (\theta_2 - \theta_1) \cdot \left\lceil \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \right\rceil \\ &\geq (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Δεδομένου πως $|ab| > 1$, το σημείο του πλέγματος $p = (d, \lfloor \tan(\theta_1) \cdot d + 1 \rfloor)$ κείται μέσα στον κυκλικό τομέα που ορίζεται από τις ημιευθείες l_1 και l_2 και αποδεικνύει το λήμμα. \square



Σχήμα 2.1: Γεωμετρική αναπαράσταση για το Λήμμα 2.



Σχήμα 2.2: Σημεία, κλίσεις και κυκλικοί τομείς που χρησιμοποιήθηκαν για το Λήμμα 3.

Λήμμα 3. Έστω γωνίες θ_1, θ_2 όπου $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ και έστω $d = \left\lceil \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \right\rceil$. Τότε, ένα σημείο του πλέγματος p , για το οποίο η ακμή e η οποία συνδέει την αρχή του πλέγματος $(0, 0)$ στο p , ικανοποιεί την σχέση $\theta_1 < \text{slope}(e) < \theta_2$, μπορεί να εντοπιστεί ως εξής:

$$\theta_2 - \theta_1 > \frac{\pi}{4} \quad : \quad p = (1, 1)$$

$$\frac{\pi}{4} \geq \theta_2 - \theta_1 > \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \quad : \quad \begin{cases} p = (1, 2) & \text{αν } \theta_1 \geq \frac{\pi}{4} \\ p = (1, 1) & \text{αν } \frac{\pi}{4} > \theta_1 \geq \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ p = (2, 1) & \text{αν } \arctan\left(\frac{1}{2}\right) > \theta_1 \end{cases}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \geq \theta_2 - \theta_1 \quad : \quad \begin{cases} p = (d, \lfloor \tan(\theta_1) \cdot d + 1 \rfloor) & \text{αν } \frac{\pi}{4} \geq \theta_2 > \theta_1 \geq 0 \\ p = (1, 1) & \text{αν } \theta_2 > \frac{\pi}{4} > \theta_1 \\ p = (\lfloor \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) \cdot d + 1 \rfloor, d) & \text{αν } \theta_2 > \theta_1 \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Επιπλέον, αν $p = (x, y)$ είναι το σημείο που ψάχνουμε, τότε ισχύει πως:

$$\max(x, y) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο Σχήμα 2.2 για τα σημεία, τις κλίσεις και τους κυκλικούς τομείς σχετικά με το Λήμμα 3. Για κάθε περίπτωση, αποδεικνύουμε πως τα σημεία που εντοπίζουμε στην διατύπωση του λήμματος, ικανοποιούν τις συνθήκες “κλίσης” (“ $\theta_1 < \text{slope}(e) < \theta_2$ ”) και “μήκους” (“ $\max(x, y) < \dots$ ”).

Περίπτωση-1: $\theta_2 - \theta_1 > \frac{\pi}{4}$. Το σημείο $(1, 1)$ εντοπίζεται από το λήμμα. Σε αυτήν την περίπτωση, η ακμή e από την αρχή $(0, 0)$ στο $(1, 1)$ έχει κλίση $\frac{\pi}{4}$. Για τη συνθήκη “κλίσης”, επειδή $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ και $\theta_2 - \theta_1 > \frac{\pi}{4}$, αρκεί να δείξουμε πως $\theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2$ το οποίο έπεται $\theta_1 < \text{slope}(e) < \theta_2$. Αν $\theta_1 > \frac{\pi}{4}$ έχουμε πως,

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 > \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow \theta_2 > \theta_1 + \frac{\pi}{4} \\ &> \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Μια καθαρή αντίφαση. Οπότε, $\theta_1 < \frac{\pi}{4}$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε πως $\theta_2 > \frac{\pi}{4}$.

Για τη συνθήκη “μήκους”, πρέπει να δείξουμε πως,

$$\max(1, 1) = 1 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

Αυτό είναι αληθές αφού,

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \theta_2 - \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \geq \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \geq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Περίπτωση-2: $\frac{\pi}{4} \geq \theta_2 - \theta_1 > \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. Πρώτα αποδεικνύουμε τη συνθήκη “κλίσης”.

Για την περίπτωση όπου $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) > \theta_1$, το σημείο που εντοπίζεται από το λήμμα είναι το $(2, 1)$. Σημειώνουμε πως η κλίση της ακμής e από την αρχή $(0, 0)$ στο $(2, 1)$ είναι $\text{slope}(e) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. Τότε από υπόθεση:

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 > \arctan\left(\frac{1}{2}\right) &\Leftrightarrow \theta_2 > \theta_1 + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\geq \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Έπεται πως $\theta_1 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \theta_2 \Rightarrow \theta_1 < \text{slope}(e) < \theta_2$.

Για την περίπτωση που $\frac{\pi}{4} > \theta_1 \geq \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, το σημείο που εντοπίζεται από το λήμμα είναι το $(1, 1)$. Σημειώνουμε πως η κλίση e από την αρχή $(0, 0)$ στο $(1, 1)$ είναι $\text{slope}(e) = \frac{\pi}{4}$. Σημειώνουμε επίσης πως $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{\pi}{8}$ και από υπόθεση:

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 > \arctan\left(\frac{1}{2}\right) &\Leftrightarrow \theta_2 > \theta_1 + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\geq \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ &> 2 \cdot \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Έπεται πως $\theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 \Rightarrow \theta_1 < \text{slope}(e) < \theta_2$.

Για την περίπτωση που $\theta_1 \geq \frac{\pi}{4}$ το σημείο που εντοπίζεται από το λήμμα είναι το $(1, 2)$. Σημειώνουμε πως η κλίση της ακμής e από την αρχή $(0, 0)$ στο $(1, 2)$ είναι $\text{slope}(e) = \arctan(2)$. Θέλουμε να αποδείξουμε πως $\theta_1 < \arctan(2) < \theta_2$. Αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αν λάβουμε υπόψιν μας πως $\arctan(2) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ όπως και ότι $2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{\pi}{4}$.

Για τη συνθήκη “μήκους”, αρκεί να δείξουμε πως:

$$\max(\max(2, 1), \max(1, 1), \max(1, 2)) = 2 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

Το οποίο είναι αληθές αφού,

$$\begin{aligned}\theta_2 - \theta_1 &\leq \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} &\geq \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} &\geq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2\end{aligned}$$

Περίπτωση-3: $\arctan(\frac{1}{2}) \geq \theta_2 - \theta_1$. Πρώτα αποδεικνύουμε τη συνθήκη “κλίσης”. Στην περίπτωση που $\frac{\pi}{4} \geq \theta_2 > \theta_1 \geq 0$, από το Λήμμα 2, το σημείο που εντοπίζεται ικανοποιεί τη συνθήκη “κλίσης”. Το ίδιο ισχύει στη συμμετρική περίπτωση όπου $\theta_2 > \theta_1 \geq \frac{\pi}{4}$. Στην περίπτωση που $\theta_2 > \frac{\pi}{4} > \theta_1$ η συνθήκη “κλίσης” ισχύει τετριμμένα αφού η ακμή που συνδέει την αρχή $(0, 0)$ στο $(1, 1)$ έχει κλίση $\frac{\pi}{4}$.

Για τη συνθήκη “μήκους”, παρατηρούμε πως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει πως,

$$\begin{aligned}\max(x, y) \leq d &= \left\lceil \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \right\rceil \\ &< \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} + 1\end{aligned}$$

Αλλά επιπλέον έχουμε πως:

$$\frac{1}{x} + 1 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x}, \text{ where } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} - 1 \quad (2.11)$$

Και αφού $\theta_2 - \theta_1 \leq \arctan(\frac{1}{2}) < \frac{\pi}{2} - 1$ συμπεραίνουμε πως,

$$\max(x, y) < \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} + 1 \stackrel{(2.11)}{<} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

Το λήμμα τώρα θεωρείται αποδεδειγμένο. □

2.3 Υπόβαθρο για Μονότονη Απεικόνιση Δένδρων

Ο αλγόριθμος απεικόνισης δένδρων παράγει μια ελαστική ξένη κατά κλίση απεικόνιση δένδρου, η οποία από το Θεώρημα 3 είναι μονότονη. Για να είμαστε σε θέση να περιγράψουμε μια ελαστική ξένη κατά κλίση απεικόνιση ενός δένδρου, χρειάζεται να αντιστοιχίσουμε κάθε κόμβο u του δένδρου σε ένα σημείο του πλέγματος, όπως και να του ορίσουμε δύο γωνίες $a_1(u)$, $a_2(u)$ όπου $a_2(u) > a_1(u)$. Για κάθε κόμβο του δένδρου, το σημείο που του αντιστοιχούμε στο πλέγμα και οι δύο γωνίες πρέπει να είναι έτσι ορισμένες ώστε να ικανοποιούνται και οι 3 ιδιότητες των ελαστικών ξένων κατά κλίσεων απεικονίσεων.

Η βασική ιδέα του αλγορίθμου μας είναι να χωρίσουμε, όσο πιο ισορροπημένα μπορούμε, τα εύρη γωνιών $\langle a_1(u), a_2(u) \rangle$ της κορυφής u στα παιδιά της βασιζόμενοι στο μέγεθος του υπό-δένδρου με ρίζα τα παιδιά του. Η επόμενη στρατηγική αποτελεί μια επίσημη διατύπωση αυτής της ιδέας.

Στρατηγική 1. Έστω u μια κορυφή η οποία δεν είναι φύλλο ενός δένδρου T με n κορυφές όπου έχουμε ήδη ορίσει τιμές για τα $a_1(u)$ και $a_2(u)$, όπου $a_1(u) < a_2(u)$. Έστω v_1, v_2, \dots, v_m , $m \geq 1$ τα παιδιά του u .

Αναθέτουμε εύρη γωνιών στα παιδιά του u με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned}
a_1(v_i) &= \begin{cases} a_1(u) & \text{αν } i = 1 \\ a_2(v_{i-1}) & \text{αν } 1 < i \leq m \end{cases} \\
a_2(v_i) &= a_1(v_i) + (a_2(u) - a_1(u)) \cdot \frac{|T_{v_i}|}{|T_u| - 1}, \quad 1 \leq i \leq m
\end{aligned}$$

Φαίνεται πως η Στρατηγική 1 ικανοποιεί την Ιδιότητα-2 και Ιδιότητα-3 της ελαστικά ξένη κατά κλίσης απεικόνισης. Το επόμενο λήμμα το αποδεικνύει.

Λήμμα 4. Έστω u κόμβος ενός ριζωμένου δένδρου T , όπου έχουμε ορίσει ήδη τιμές για τα $a_1(u)$ και $a_2(u)$, όπου $a_1(u) < a_2(u)$. Έστω v_1, v_2, \dots, v_m , $m \geq 1$, τα παιδιά του u στο T . Αν αναθέσουμε τιμές για τα εύρη γωνιών των παιδιών του u σύμφωνα με την Στρατηγική 1, τότε ικανοποιείται η Ιδιότητα-2 και η Ιδιότητα-3 της ελαστικά ξένης κατά κλίσης απεικόνισης.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την Ιδιότητα-3, χρειάζεται να δείξουμε πως για κάθε k, l , $1 \leq k < l \leq m$, ισχύει: $a_1(v_k) < a_2(v_k) \leq a_1(v_l) < a_2(v_l)$. Για κάθε j , $1 \leq j \leq m$, έχουμε πως,

$$\begin{aligned}
a_2(v_j) &= a_1(v_j) + (a_2(u) - a_1(u)) \cdot \frac{|T_{v_j}|}{|T_u| - 1} \\
&> a_1(v_j)
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει από την υπόθεση πως $a_2(u) - a_1(u) > 0$ και επειδή το μέγεθος του ριζωμένου δένδρου είναι πάντα θετικό. Επομένως,

$$\begin{aligned}
a_1(v_1) &< a_2(v_1) \\
&= a_1(v_2) \\
&< a_2(v_2) \\
&= a_1(v_3) \\
&\vdots \\
&< a_2(v_{m-1}) \\
&= a_1(v_m) \\
&< a_2(v_m)
\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε k, l , $1 \leq k < l \leq m$, ισχύει πως $a_1(v_k) < a_2(v_k) \leq a_1(v_l) < a_2(v_l)$ και η Ιδιότητα-3 ικανοποιείται.

Για να αποδείξουμε την Ιδιότητα-2, αφού έχουμε αποδείξει πως $a_1(v_1) < a_2(v_1) \leq a_1(v_2) < \dots < a_2(v_{m-1}) \leq a_1(v_m) < a_2(v_m)$, αρκεί να δείξουμε πως $a_1(u) \leq a_1(v_1)$ και $a_2(v_m) \leq a_2(u)$. Το πρώτο κομμάτι ισχύει τετριμμένα αφού $a_1(v_1) = a_1(u)$ εξ ορισμού. Το δεύτερο κομμάτι, χρησιμοποιώντας επικολλημένα την ανάθεση για τα a_1 και a_2

$$a_2(v_m) = a_1(v_1) + (a_2(u) - a_1(u)) \frac{\sum_{i=1}^m |T_{v_i}|}{|T_u| - 1}$$

Αφού το μέγεθος του υπό-δένδρου με ρίζα το u , είναι το άθροισμα των μεγεθών των υπό-δένδρων με ρίζα τα παιδιά του u αυξημένα με την ρίζα u , ισχύει πως $|T_u| = \sum_{i=1}^m |T_{v_i}| + 1$. Έπεται πως $a_2(v_m) = a_2(u)$ και η Ιδιότητα-2 ικανοποιείται. \square

Παρατήρηση 1. Αν ο κόμβος u έχει μόνο ένα παιδί, έστω v_1 , τότε σύμφωνα με την Στρατηγική 1 αναθέτουμε $a_1(v_1) = a_1(u)$ και $a_2(v_1) = a_2(u)$, το οποίο σημαίνει πως το παιδί “κληρονομεί” το εύρος γωνίας του πατέρα.

2.3.1 Μονότονη Απεικόνιση Δένδρων σε Ένα Τεταρτημόριο σε Πλέγμα Μεγέθους

$n \times n$

Ο αλγόριθμος 2.1 περιγράφει τον αλγόριθμο μας για μονότονη απεικόνιση δένδρων. Περιέχει τρία βήματα: Διαδικασία ΑνάθεσηΓωνίας η οποία αναθέτει εύρη γωνιών στους κόμβους του δένδρου σύμφωνα με την Στρατηγική 1, Διαδικασία ΑπεικόνισηΚόμβων η οποία αναθέτει κάθε κόμβο του δένδρου σε ένα σημείο του πλέγματος σύμφωνα με το Λήμμα 3 και Διαδικασία ΙσοροπημένηΜονότονηΑπεικόνισηΔένδρου η οποία απεικονίζει τη ρίζα στο σημείο του πλέγματος $(0, 0)$ με εύρος γωνίας $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ και ξεκινάει την διαδικασία απεικόνισης του δένδρου. Χρησιμοποιούμε την μεταβλητή ελέγχου "Κυρτότητα", η οποία όταν είναι αληθής παράγει μια σχεδόν κυρτή απεικόνιση ενός δένδρου. Στην Ενότητα 2.4 περιγράφουμε πως, εκμεταλλευόμεστε την σχεδόν κυρτή απεικόνιση του Αλγορίθμου 2.1, παράγουμε τελικά μια κυρτή απεικόνιση.

Αλγόριθμος 2.1: Ισοροπημένη Μονότονη Απεικόνιση Δένδρου

- 1: **Διαδικασία** ΙσοροπημένηΜονότονηΑπεικόνισηΔένδρου
 - 2: Είσοδος: Ένα δένδρο T με n κόμβους με ρίζα την κορυφή r .
 - 3: Έξοδος: Μια μονότονη απεικόνιση του T σε πλέγμα μεγέθους το πολύ $n \times n$.
 - 4: $a_1(r) \leftarrow 0, a_2(r) \leftarrow \frac{\pi}{2}$
 - 5: ΑνάθεσηΓωνίας($r, a_1(r), a_2(r)$)
 - 6: Απεικόνισε το r στο $(0, 0)$
 - 7: ΑπεικόνισηΚόμβων(r)
 - 8:
 - 9: **Διαδικασία** ΑνάθεσηΓωνίας(u, a_1, a_2)
 - 10: Είσοδος: Κόμβος u και τα όρια του εύρους γωνίας $\langle a_1, a_2 \rangle$ που έχουν ανατεθεί στο u .
 - 11: Δράση: Αναθέτει εύρη γωνιών στους κόμβους του T_u .
 - 12: **για** κάθε παιδί v_i του u :
 - 13: Ανάθεσε $a_1(v_i), a_2(v_i)$ όπως περιγράφηκε στην Στρατηγική 1.
 - 14: ΑνάθεσηΓωνίας($v_i, a_1(v_i), a_2(v_i)$)
 - 15:
 - 16: **Διαδικασία** ΑπεικόνισηΚόμβων(u)
 - 17: Είσοδος: Μια κορυφή u η οποία έχει ήδη απεικονιστεί και έχουν ανατεθεί εύρη γωνιών για όλους τους κόμβους του T_u .
 - 18: Δράση: Απεικονίζει τους κόμβους του T_u .
 - 19: **για** κάθε παιδί v_i του u :
 - 20: Εύρεση ενός έγκυρου ζεύγους (x, y) όπως περιγράψαμε στο Λήμμα 3 όπου $\theta_1 \leftarrow a_1(u)$ και $\theta_2 \leftarrow a_2(u)$
 - 21: Έστω (u_x, u_y) οι συντεταγμένες του u και e η ακμή που συνδέει τον πατέρα του u στο u
 - 22: **Αν** $a_1(v_i) \leq \text{slope}(e) \leq a_2(v_i)$ και Κυρτότητα == Αληθής:
 - 23: Απεικόνισε το v_i στο $(u_x + x', u_y + y')$
 - 24: **Αλλιώς:**
 - 25: Απεικόνισε το v_i στο $(u_x + x, u_y + y)$
 - 26: ΑπεικόνισηΚόμβων(v_i)
-

Παρατήρηση 2. Έστω κορυφή u στο $T \setminus r$ με εύρος γωνίας $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$, το διάνυσμα $e = (x, y)$ που συνδέει τον πατέρα του u στο u από τον Αλγόριθμο 2.1, ισχύει πως:

$$\max(x, y) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

Απόδειξη. Αν επιλέξουμε την σχεδόν κυρτή απεικόνιση, η ακμή e είναι είτε από τον παππού του u στον πατέρα του u , ή ένα νέο έγκυρο ζεύγος επιλέγεται από το Λήμμα 3. Αν δεν επιλέγουμε να έχουμε μια σχεδόν κυρτή απεικόνιση, ένα έγκυρο ζεύγος ανατίθεται από το Λήμμα 3.

Στην πρώτη περίπτωση, η ακμή $e = (x, y)$ ανατίθεται σε έναν πρόγονο του u σύμφωνα με το Λήμμα 3. Έστω κορυφή v με εύρος γωνίας $< \theta'_1, \theta'_2 >$ ο απόγονος του u που του ανατέθηκε, αφού το μήκος εύρους γωνίας του v είναι τουλάχιστον όσο το εύρος γωνίας του u , ισχύει πως:

$$\max(x, y) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta'_2 - \theta'_1} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

Στην δεύτερη περίπτωση, η ανισότητα ικανοποιείται από το Λήμμα 3.

Και στις δύο περιπτώσεις, η Ιδιότητα-1 της ελαστικά ξένης κατά κλίσης απεικόνισης δένδρου ικανοποιείται. \square

Λήμμα 5. Η απεικόνιση που παράγεται από τον Αλγόριθμο 2.1 είναι μονότονη και επίπεδη.

Απόδειξη. Η ανάθεση για τα εύρη γωνιών μέσω της Στρατηγικής 1 ικανοποιεί την Ιδιότητα-2 και Ιδιότητα-3 της ελαστικά ξένης κατά κλίσης απεικόνισης όπως αποδείξαμε στο Λήμμα 4. Επιπλέον, η ανάθεση των κόμβων σε σημεία του πλέγματος ικανοποιεί την Ιδιότητα-1 της ελαστικά ξένης κατά κλίσης απεικόνισης όπως αποδείχθηκε στην Παρατήρηση 2. Επομένως, η απεικόνιση που παράγεται από τον Αλγόριθμο 2.1 είναι ελαστικά ξένη κατά κλίση και λόγω από το Θεώρημα 3 μονότονη και επίπεδη. \square

Τώρα, μας μένει να βρούμε ένα φράγμα για το μέγεθος του πλέγματος που χρησιμοποιείται από τον Αλγόριθμο 2.1. Η απόδειξή μας χρησιμοποιεί επαγωγή στον αριθμό των κόμβων του δένδρου που έχουν περισσότερα από ένα παιδιά.

Λήμμα 6. Έστω ριζωμένο δένδρο T και $u \in T$ ένας κόμβος στο T . Θεωρούμε $\phi_u = a_2(u) - a_1(u)$ όπως αναθέεται από τον Αλγόριθμο 2.1. Τότε το μήκος του πλέγματος που παράγεται από τον Αλγόριθμο 2.1 για την απεικόνιση του υπό-δένδρου T_u φράζεται από:

$$(|T_u| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_u}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στον αριθμό των κόμβων που έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά. Έστω i ο αριθμός των κόμβων στο T_u με τουλάχιστον δύο παιδιά.

Επαγωγική Βάση ($i=0$): Σε αυτήν την περίπτωση, το T_u είναι ένα μονοπάτι και από την Παρατήρηση 1, ο Αλγόριθμος 2.1 αναθέτει σε κάθε κόμβο το ίδιο εύρος γωνίας. Από αυτήν την παρατήρηση, για κάθε κόμβο $v \in T_u$, ισχύει πως $a_2(v) - a_1(v) = a_2(u) - a_1(u) = \phi_u$, επομένως από την Παρατήρηση 2 κάθε ακμή επεκτείνει το πλέγμα μας το πολύ:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_u}$$

Αφού το δένδρο μας έχει $|T_u|$ κόμβους, επεκτείνουμε το πλέγμα μας $|T_u| - 1$ φορές, επομένως το μήκος του πλέγματος που απαιτείται για την απεικόνιση είναι το πολύ:

$$(|T_u| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_u}$$

Η επαγωγική βάση έχει πλέον διευθετηθεί.

Επαγωγικό Βήμα: Υποθέτουμε πως, κάθε υπό-δένδρο ριζωμένο σε κόμβο με το πολύ i κόμβους να έχουν τουλάχιστον δυο παιδιά, η υπόθεση ισχύει. Αποδεικνύουμε πως, για κάθε υπό-δένδρο ριζωμένο σε κόμβο u με $i + 1$ κόμβους με τουλάχιστον δυο παιδιά, η υπόθεση ισχύει. Πρώτα,

αποδεικνύουμε πως η μόνη περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι όταν το υπό-δένδρο είναι ριζωμένο σε κόμβο με τουλάχιστον δύο παιδιά. Υποθέτουμε πως το T_u είναι η ένωση ενός μονοπατιού που ξεκινάει από το u τελειώνει στο v όπου ο κάθε κόμβος έχει ακριβώς ένα παιδί εκτός από τον v και του υπό-δένδρου T_v . Από υπόθεση, ο αριθμός των κόμβων στο T_v που έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά είναι $i + 1$ αφού όλοι οι κόμβοι στο μονοπάτι από το u στο v έχουν ακριβώς ένα παιδί. Αν η υπόθεση ισχύει για το v , από την Παρατήρηση 1 έχουμε πως $a_2(v) = a_2(u)$ και $a_1(v) = a_1(u)$, τότε

$$\phi_v = a_2(v) - a_1(v) = a_2(u) - a_1(u) = \phi_u \quad (2.12)$$

Το μέγεθος πλέγματος που απαιτείται για το T_v είναι,

$$(|T_v| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_v} \stackrel{(2.12)}{=} (|T_v| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_u}$$

Επιπλέον το μέγεθος πλέγματος που απαιτείται για το μονοπάτι από το u στο v , που περιέχει $|T_u| - |T_v|$ κόμβους είναι,

$$(|T_u| - |T_v|) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_u}$$

Επομένως το συνολικό μήκος του πλέγματος είναι το πολύ:

$$(|T_v| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_u}$$

Οπότε είναι αρκετό να αποδείξουμε μόνο την περίπτωση στην οποία η ρίζα του υπό-δένδρου είναι τουλάχιστον δύο παιδιά.

Έστω u κόμβος στο T έτσι ώστε ο u έχει τουλάχιστον δύο παιδιά και το T_u έχει $i + 1$ κόμβους με τουλάχιστον δύο παιδιά. Έστω v_1, v_2, \dots, v_m τα παιδιά του u , σημειώνουμε πως το μεγαλύτερο πλέγμα που χρησιμοποιείται σε οποιοδήποτε από τα $T_{v_j}^u, 1 \leq j \leq m$ ¹, καθορίζει το μέγεθος πλέγματος που απαιτείται από την απεικόνιση του T_u αφού τα υπό-δένδρα ριζωμένα σε παιδιά του u απεικονίζονται εσωτερικά σε μη-επικαλυπτόμενους (αλλά πιθανός εφαπτόμενους) κυκλικούς τομείς. Η παραπάνω πρόταση ισχύει επειδή όλα τα πλέγματα που χρησιμοποιούνται για τα υπό-δένδρα, έχουν το ίδιο αρχικό σημείο (u) και όλοι οι κυκλικοί τομείς κείτονται στο πρώτο τεταρτημόριο αφού ο Αλγόριθμος 2.1 αναθέτει στη ρίζα εύρος γωνίας $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Επομένως, το μέγεθος του πλέγματος που απαιτείται για να απεικονίσουμε το T_u είναι το μέγιστο μέγεθος πλέγματος που απαιτείται για να ζωγραφίσουμε οποιοδήποτε $T_{v_j}^u$. Για κάθε κόμβο v_j , αφού ο κόμβος u έχει τουλάχιστον δύο παιδιά, ισχύει πως ο αριθμός των κόμβων στο T_{v_j} με τουλάχιστον δύο παιδιά είναι το πολύ i , επομένως η επαγωγική υπόθεση ισχύει. Επομένως η υπόθεση ισχύει για το T_{v_j} το οποίο απεικονίζεται σε πλέγμα με μήκος φραγμένο από,

$$(|T_{v_j}| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_{v_j}}$$

Η ακμή που συνδέει το u στο v_j , από την Παρατήρηση 2 απαιτεί πλέγμα που φράζεται από,

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_{v_j}}$$

¹ Υπενθυμίζουμε πως με T_v^u ορίζουμε το δένδρο που αποτελείται από την ακμή (u, v) και το T_v , όταν το v είναι παιδί του u

Επομένως το συνολικό μήκος πλέγματος που απαιτείται φράζεται από:

$$|T_{v_j}| \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_{v_j}}$$

Παρατηρώντας πώς,

$$\phi_{v_j} = \frac{|T_{v_j}|}{|T_u| - 1} \cdot \phi_u \text{ (Από την Στρατηγική 1)} \quad (2.13)$$

Το συνολικό πλέγμα που απαιτείται μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως:

$$\begin{aligned} |T_{v_j}| \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_{v_j}} &\stackrel{(2.13)}{=} |T_{v_j}| \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\frac{|T_{v_j}|}{|T_u| - 1} \cdot \phi_u} \\ &= (|T_u| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\phi_u} \end{aligned}$$

Επομένως η πρόταση ισχύει για το επαγωγικό βήμα. Η απόδειξη του λήμματος τώρα είναι πλήρης. □

Θεώρημα 4. Δεδομένου ενός ριζωμένου δένδρου T με n κόμβους, ο Αλγόριθμος 2.1 παράγει μια μονότονη απεικόνιση χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα μεγέθους το πολύ $n \times n$.

Απόδειξη. Το γεγονός πως η απεικόνιση είναι μονότονη ισχύει άμεσα από το Λήμμα 5. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 6, με τη ρίζα, όπου ισχύει $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ και $\theta_1 = 0$, έχουμε ότι στη χειρότερη περίπτωση η απεικόνιση του T χρειάζεται μήκος πλέγματος το πολύ:

$$(n - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = n - 1$$

Οπότε το απαιτούμενο πλέγμα έχει το πολύ μέγεθος $n \times n$. □

Στα Σχήματα 2.3-2.7 στην Σελίδα 40 παρουσιάζουμε κάποιες απεικονίσεις που παράγονται από τον Αλγόριθμο 2.1.

2.3.2 Μονότονη Απεικόνιση Δένδρων σε Δύο Τεταρτημόρια σε Πλέγμα Μεγέθους $n \times \frac{n}{2}$

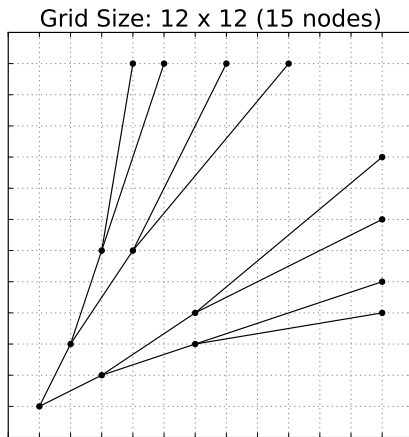
Τώρα, παρουσιάζουμε την περίπτωση στην οποία δεν έχει οριστεί ρίζα στο δένδρο που μας δίνεται ως είσοδος. Η δυνατότητα να επιλέξουμε τη ρίζα, μας βοηθάει να μειώσουμε το απαιτούμενο πλέγμα σε $n \times \frac{n}{2}$. Για να το καταφέρουμε αυτό, θα κάνουμε χρήση δύο τεταρτημορίων.

Ξεκινάμε περιγράφοντας ποιον κόμβο θα χρησιμοποιήσουμε ως ρίζα για το δένδρο μας. Μια επιθυμητή ιδιότητα για τη ρίζα που θα ορίσουμε, με βάση την φύση του αλγορίθμου μας είναι τα παιδιά της να έχουν όσο πιο πολύ ισορροπημένο αριθμό κόμβων στα υπό-δεντρά τους γίνεται.

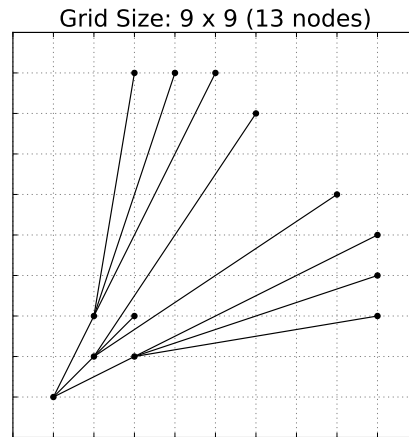
Έστω T αν δένδρο χωρίς ορισμένη ρίζα. Έστω $u \in T$ ένας κόμβος έτσι ώστε, αν ριζώσουμε το T στο u , τότε για κάθε παιδί v του u , για το μέγεθος του υπό-δένδρου T_v ισχύει $|T_v| \leq \frac{n}{2}$. Τότε ο κόμβος u λέγεται *ρίζα βαρύτητας* του T . Επομένως αν ένα δένδρο T με n κόμβους είναι ριζωμένο σε μια *ρίζα βαρύτητας* r , τότε δεν υπάρχει κόμβος $u \in T \setminus r$ έτσι ώστε $|T_u| > \frac{n}{2}$. Επιπλέον αν $n \geq 3$, τότε ο r έχει τουλάχιστον δύο παιδιά.

Τώρα αποδεικνύουμε πως κάθε δένδρο έχει μια ρίζα βαρύτητας.

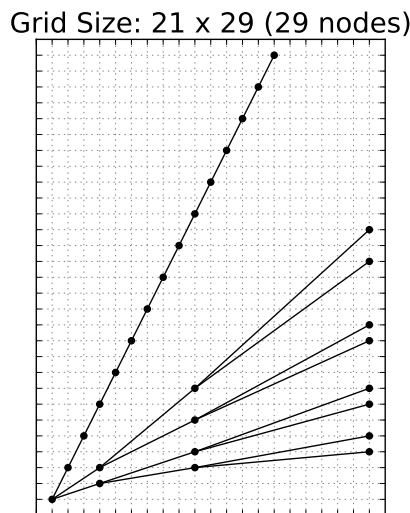
Λήμμα 7. Έστω T δένδρο με n κόμβους στο οποίο δεν έχει οριστεί ρίζα. Ο Αλγόριθμος 2.2 πάντα τερματίζει.



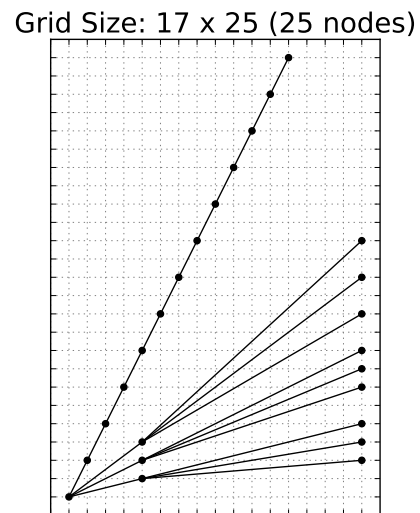
Σχήμα 2.3: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.1 για πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων (15 κόμβοι).



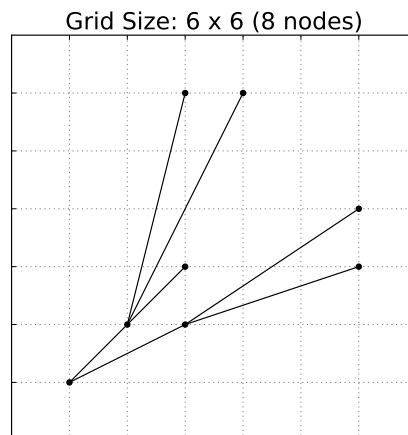
Σχήμα 2.4: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.1 για πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων (13 κόμβοι).



Σχήμα 2.5: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.1 για το πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων και μονοπάτι (29 κόμβοι).



Σχήμα 2.6: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.1 για το πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων και μονοπάτι (25 κόμβοι).



Σχήμα 2.7: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.1 για το δένδρο που χρησιμοποιήθηκε στο [He16, He17].

Αλγόριθμος 2.2: Υπολογισμός ρίζας βαρύτητας

Διαδικασία Εντοπισμός Ρίζας Βαρύτητας (T)

Είσοδος: Ένα δένδρο T χωρίς ρίζα.

Έξοδος: Μια ρίζα βαρύτητας r του T .

$r \leftarrow$ Τυχαίος κόμβος $u \in T$

Ενώ το r δεν είναι ρίζα βαρύτητας :

$r \leftarrow$ τον κόμβο συνδεδεμένο στο r με το μέγιστο μέγεθος συνεκτικής συνιστώσας χωρίς τον r .

Απόδειξη. Σε κάθε επανάληψη, ο Αλγόριθμος 2.2 πλησιάζει πιο κοντά στο να βρει μια ρίζα βαρύτητας. Έστω $u \in T$, ορίζουμε ως $V(u)$ να είναι το μέγιστο μέγεθος ενός συνδεδεμένου υπό-γραφήματος του T , το οποίο δεν περιέχει το u . Παρατηρούμε πως ο κόμβος u είναι ρίζα βαρύτητας αν $V(u) \leq \frac{n}{2}$. Σε κάθε επανάληψη, η τιμή του V μειώνεται μέχρι να εντοπίσουμε μια ρίζα βαρύτητας. Αν ο u δεν είναι ρίζα βαρύτητας, τότε ο κόμβος r συνδεδεμένος στο u με μέγιστο μέγεθος συνδεδεμένου υπό-γραφήματος έχει τουλάχιστον $\frac{n+1}{2}$ μέγεθος. Ο κόμβος r επιλέγεται για την επόμενη επανάληψη, αποδεικνύουμε πως $V(r) < V(u)$. Αφού το μέγιστο συνδεδεμένο υπό-γράφημα που περιέχει το u αλλά όχι το r έχει μέγεθος το πολύ $n - \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} < V(u)$, και για κάθε άλλο μεγιστοτικό υπό-γράφημα που δεν περιέχει το r είναι λιγότερο από $V(u)$, η υπόθεση είναι αληθής.

Τώρα είναι προφανές πως η τιμή του V μειώνεται με κάθε επανάληψη μέχρι να επιλεγεί μια ρίζα βαρύτητας. \square

Ριζώνοντας ένα δένδρο σε μια *ρίζα βαρύτητας*, μας παρέχει ένα άνω φράγμα για το μέγεθος κάθε μήκους εύρους γωνίας ενός δένδρου ριζωμένου σε ένα παιδί της ρίζας. Η επόμενη παρατήρηση επισημοποιεί αυτήν την πρόταση.

Παρατήρηση 3. Έστω δένδρο T με n κορυφές ριζωμένο σε μια ρίζα βαρύτητας r . Έστω $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$ το εύρος γωνίας του r . Η Στρατηγική 1 αναθέτει σε κάθε κόμβο $u \in T \setminus r$ μήκος εύρους γωνίας το πολύ $\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n-1}$.

Απόδειξη. Έστω δένδρο T με n κόμβους ριζωμένο σε μια ρίζα βαρύτητας r . Αφού το T είναι ριζωμένο σε μι ρίζα βαρύτητας, αν το n είναι άρτιο τότε για κάθε κόμβο $u \in T \setminus r$, ισχύει πως $|T_u| \leq \frac{n}{2}$. Επιπλέον αν το n είναι περιττό τότε για κάθε κόμβο $u \in T \setminus r$, ισχύει πως $|T_u| \leq \frac{n-1}{2}$ αφού το μήκος ενός υπό-δένδρου πρέπει να είναι ακέραιος. Τα φράγματα για την περίπτωση που το n είναι περιττό ή άρτιο μπορεί να συνομεισθεί ως: $|T_u| \leq \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{2}$. Η Στρατηγική 1 αναθέτει στο u :

$$\begin{aligned} a_2(u) - a_1(u) &= (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{|T_u|}{n-1} \\ &\leq (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{\frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{2}}{n-1} \\ &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n-1} \end{aligned}$$

\square

Παρατήρηση 4. Έστω δένδρο T ριζωμένο σε μια ρίζα βαρύτητας r , αν υποθέσουμε ότι το T περιέχει περισσότερους από δύο κόμβους, η ρίζα έχει τουλάχιστον δύο παιδιά.

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε πως το r έχει μόνο ένα γείτονα τον v , τότε $|T_v| = |T| - 1 > \frac{|T|}{2}$, μια αντιπαράθεση αφού υποθέσαμε ότι ο r είναι ρίζα βαρύτητας. \square

Θα χρησιμοποιήσουμε την Στρατηγική 1 για την ανάθεση γωνιών, αλλά θα αναθέσουμε στη ρίζα βαρύτητας του δένδρου T με εύρος γωνία $\langle 0, \pi \rangle$. Τώρα παρουσιάζουμε μια επέκταση για το Λήμμα 3

² Υπενθυμίζουμε πως το [statement] είναι ίσο με 1 αν το statement είναι αληθές, διαφορετικά είναι 0.

για να καλύψουμε την περίπτωση όπου έχουμε αναθέσει σε ένα κόμβο εύρος γωνίας $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$ όπου $\theta_2 > \frac{\pi}{2}$.

Λήμμα 8. Θεωρούμε τις γωνίες β_1, β_2 όπου $0 \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \pi$. Τότε, το σημείο του πλέγματος p έτσι ώστε η ακμή e που συνδέει την αρχή του πλέγματος $(0, 0)$ στο p ικανοποιεί την σχέση $\beta_1 < \text{slope}(e) < \beta_2$, μπορεί να εντοπιστεί ως εξής:

$$p = \begin{cases} (0, 1) & \text{αν } \beta_1 < \frac{\pi}{2} < \beta_2 \\ (x, y) & \text{αν } \beta_2 \leq \frac{\pi}{2}, \text{ όπου } (x, y) \text{ είναι ένα έγκυρο ζεύγος σύμφωνα με το Λήμμα 3} \\ & \text{όπου } \theta_1 \leftarrow \beta_1 \text{ και } \theta_2 \leftarrow \beta_2 \\ (-x, y) & \text{αν } \beta_1 \geq \frac{\pi}{2}, \text{ όπου } (x, y) \text{ είναι ένα έγκυρο ζεύγος σύμφωνα με το Λήμμα 3} \\ & \text{όπου } \theta_1 \leftarrow \pi - \beta_2 \text{ και } \theta_2 \leftarrow \pi - \beta_1 \end{cases}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το λήμμα παίρνοντας περιπτώσεις για την τιμή του β_1 και του β_2 .

Περίπτωση-1: $\beta_1 < \frac{\pi}{2} < \beta_2$. Είναι προφανές πως $\beta_1 < \frac{\pi}{2} < \beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 < \text{slope}(e) < \beta_2$.

Περίπτωση-2: $\beta_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Από το Λήμμα 3 ισχύει πως $\theta_1 < \text{slope}(e) < \theta_2 \Leftrightarrow \beta_1 < \text{slope}(e) < \beta_2$.

Περίπτωση-3: $\beta_1 \geq \frac{\pi}{2}$. Έστω e' η ακμή που συνδέει την αρχή του πλέγματος στο (x, y) . Πρέπει να σημειώσουμε πως η κλίση της e είναι $\text{slope}(e) = \pi - \text{slope}(e')$. Απο το Λήμμα 3 ισχύει πως:

$$\begin{aligned} \theta_1 &< \text{slope}(e') < \theta_2 \\ \Leftrightarrow \pi - \beta_2 &< \text{slope}(e') < \pi - \beta_1 \\ \Leftrightarrow \beta_1 &< \pi - \text{slope}(e') < \beta_2 \\ \Leftrightarrow \beta_1 &< \text{slope}(e) < \beta_2 \end{aligned}$$

Το λήμμα έχει πλέον αποδειχθεί. □

Ο Αλγόριθμος 2.3 περιγράφει την περίπτωση όπου στο δένδρο που θέλουμε να απεικονίσουμε δεν του έχει ήδη οριστεί ρίζα. Αποτελείται από τρία στάδια: Διαδικασία Ανάθεση Γωνίας (ίδια με τον Αλγόριθμο 2.1) η οποία αναθέτει εύρη γωνιών στους κόμβους του δένδρου σύμφωνα με την Στρατηγική 1, Διαδικασία Επεκταμένη Απεικόνιση Κόμβων η οποία αναθέτει σε κάθε κόμβο του δένδρου ένα σημείο του πλέγματος σύμφωνα με το Λήμμα 8 και Διαδικασία Μονότονη Απεικόνιση Δένδρου-Χωρίς Ρίζα η οποία αναθέτει ένα κόμβο ως ρίζα και το απεικονίζει στο σημείο $(0, 0)$ με εύρος γωνίας $\langle 0, \pi \rangle$ και ξεκινάει τη διαδικασία απεικόνισης δένδρου.

Η επόμενη παρατήρηση μας βοηθάει να καταλάβουμε την σύνδεση μεταξύ του Αλγόριθμου 2.3 και του Αλγόριθμου 2.1.

Παρατήρηση 5. Έστω κόμβος u με εύρος γωνίας $\langle a_1(u), a_2(u) \rangle$, ο Αλγόριθμος 2.3 απεικονίζει το T_u με τον εξής τρόπο:

- αν $a_2(u) \leq \frac{\pi}{2}$: Ο Αλγόριθμος 2.3 απεικονίζει το T_u με τον ίδιο τρόπο με τον Αλγόριθμο 2.1 στο πρώτο τεταρτημόριο.
- αν $a_1(u) \geq \frac{\pi}{2}$: Ο Αλγόριθμος 2.3 απεικονίζει το T_u στο δεύτερο τεταρτημόριο ως την ανάκλαση στον άξονα $y'y$ της απεικόνισης που παράγει ο Αλγόριθμος 2.1 για το T_u αν αντιστρέψουμε την σειρά των παιδιών κάθε κόμβου $v \in T_u$.
- αν $a_1(u) < \frac{\pi}{2} < a_2(u)$: Ο Αλγόριθμος 2.3 απεικονίζει το u στο άξονα $y'y$. Αφού σε όλα τα παιδιά τους έχουν ανατεθεί μη-επικαλυπτόμενοι κυκλικοί τομείς, το πολύ ένα παιδί περιέχει την γωνία $\frac{\pi}{2}$ στο εσωτερικό του εύρους γωνίας της και σύμφωνα με τις δύο προηγούμενες παρατηρήσεις, τα άλλα παιδιά απεικονίζονται στο πρώτο ή στο δεύτερο τεταρτημόριο.

Αλγόριθμος 2.3: Μονότονη Απεικόνιση Δένδρου Χωρίς Ρίζα

- 1: **Διαδικασία** Μονότονη Απεικόνιση Δένδρου Χωρίς Ρίζα
 - 2: Είσοδος: Ένα δένδρο T χωρίς ρίζα με n κόμβους.
 - 3: Έξοδος: Μια μονότονη απεικόνιση του T σε πλέγμα μεγέθους το πολύ $n \times \frac{1}{2}n$.
 - 4: $r \leftarrow$ Εντοπισμός Ρίζας Βαρύτητας(T) (Εντοπίζει μια ρίζα βαρύτητας σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.2)
 - 5: $a_1(r) \leftarrow 0, a_2(r) \leftarrow \pi$
 - 6: Ανάθεση Γωνίας($r, a_1(r), a_2(r)$)
 - 7: Draw r at $(0, 0)$
 - 8: Επεκταμένη Απεικόνιση Κόμβων(r)
 - 9:
 - 10: **Διαδικασία** Ανάθεση Γωνίας(u, a_1, a_2)
 - 11: Είσοδος: Κόμβος u και τα όρια του εύρους γωνίας $\langle a_1, a_2 \rangle$ που έχουν ανατεθεί στο u .
 - 12: Δράση: Αναθέτει εύρη γωνιών στους κόμβους του T_u .
 - 13: **για** κάθε παιδί v_i του u :
 - 14: Ανάθεσε $a_1(v_i), a_2(v_i)$ όπως περιγράφηκε στην Στρατηγική 1.
 - 15: Ανάθεση Γωνίας($v_i, a_1(v_i), a_2(v_i)$)
 - 16:
 - 17: **Διαδικασία** Επεκταμένη Απεικόνιση Κόμβων(u)
 - 18: Είσοδος: Μια κορυφή u η οποία έχει ήδη απεικονιστεί και έχουν ανατεθεί εύρη γωνιών για όλους τους κόμβους T_u .
 - 19: Δράση: Απεικονίζει τους κόμβους του T_u .
 - 20: **για** κάθε παιδί v_i του u :
 - 21: Εύρεση ενός έγκυρου ζεύγους (x, y) όπως περιγράψαμε στο Λήμμα 8 όπου $\beta_1 \leftarrow a_1(u)$ και $\beta_2 \leftarrow a_2(u)$
 - 22: Αν το u έχει απεικονιστεί στο (u_x, u_y) , τότε απεικονίζουμε το v_i στο $(u_x + x, u_y + y)$
 - 23: Επεκταμένη Απεικόνιση Κόμβων(v_i)
-

Αν συνδυάσουμε την Παρατήρηση 3 με το Λήμμα 8, μπορούμε να αποκτήσουμε ένα άνω φράγμα για το μήκος κάθε ακμής που παράγεται από τον Αλγόριθμο 2.3.

Λήμμα 9. Έστω δένδρο T με n κόμβους ριζωμένα σε μια ρίζα βαρύτητας r . Έστω u κόμβος στο $T \setminus r$ με εύρος γωνίας $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$ και το διάνυσμα $e = (x, y)$ που συνδέει τον πατέρα του u στο u σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.3, ισχύει πως:

$$\max(|x|, y) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n - 1}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 8 η y -συντεταγμένη είναι πάντα θετική αλλά το πρόσημο της x -συντεταγμένης εξαρτάται από το εύρος γωνίας του u όπως σημειώσαμε στην Παρατήρηση 5.

Αν $\theta_1 < \frac{\pi}{2} < \theta_2$: Το διάνυσμα που συνδέει το u στον πατέρα του είναι το $e = (0, 1)$, επομένως $\max(|x|, y) = 1$. Από την Παρατήρηση 3, αφού το u έχει πατέρα, το u δεν μπορεί να είναι η ρίζα του δένδρου και επομένως το u έχει το πολύ μήκος εύρους γωνίας $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n - 1}$, επομένως:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n - 1} \geq \theta_2 - \theta_1 \\ \Rightarrow & \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \geq 1 \\ \Rightarrow & \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \geq \max(x, y) \end{aligned}$$

Διαφορετικά: Οι άλλες δύο περιπτώσεις όπου $\theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ή $\theta_1 \geq \frac{\pi}{2}$, παρατηρώντας πως $\frac{n - [n \text{ is odd}]}{n-1} \geq 1$, το Λήμμα 8 χρησιμοποιεί το Λήμμα 3 και το φράγμα ισχύει.

Το λήμμα τώρα έχει αποδειχθεί. \square

Λήμμα 10. Η απεικόνιση του παράγεται από τον Αλγόριθμο 2.3 είναι μονότονη και επίπεδη.

Απόδειξη. Η Στρατηγική 1 που αναθέτει εύρη γωνιών, ικανοποιεί την Ιδιότητα-2 και Ιδιότητα-3 της ελαστικής ξένης κατά κλίση απεικόνισης όπως αποδείξαμε στο Λήμμα 4. Επιπλέον, η ανάθεση κόμβων σε σημεία του πλέγματος ικανοποιεί την Ιδιότητα-1 της ελαστικής ξένης κατά κλίση απεικόνισης όπως αποδείξαμε στο Λήμμα 8. Επομένως, η απεικόνιση που παράγεται από τον Αλγόριθμο 2.3 είναι ελαστικά ξένη κατά κλίση και από το Θεώρημα 3, είναι μονότονη και επίπεδη. \square

Αρκεί να αποδείξουμε ένα φράγμα για το μέγεθος πλέγματος που χρησιμοποιείται από τον Αλγόριθμο 2.3. Η απόδειξή μας, βασίζεται σε επαγωγή στον αριθμό των κόμβων του δένδρου με περισσότερα από ένα παιδιά.

Λήμμα 11. Έστω δένδρο T με n κόμβους ριζωμένο σε μια ρίζα βαρύτητας r και G η απεικόνιση που παράγεται από τον Αλγόριθμο 2.3. Κάθε κόμβος u με εύρος γωνίας $\langle a_1(u), a_2(u) \rangle$, ο Αλγόριθμος 2.3 απεικονίζει το u στον άξονα $y'y$. Έστω G_u^R (αντίστοιχα G_u^L) η απεικόνιση του υπό-δένδρου T_u που κείται στο πρώτο (τεταρτημόριο συμπεριλαμβανομένου του άξονα $y'y$ (αντίστοιχα στο δεύτερο τεταρτημόριο συμπεριλαμβανομένου και του άξονα $y'y$)). Το G_u^R και το G_u^L απεικονίζονται σε πλέγματα με μήκος το πολύ:

$$(|T_u| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_u}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς τον αριθμό των κόμβων που έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά, όμοια με την απόδειξη από το Λήμμα 6 αλλά αντί να χρησιμοποιήσουμε το φράγμα για το μέγεθος από το Λήμμα 3, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 9. Έστω i ο αριθμός των κόμβων στο T_u που έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά.

Επαγωγική Βάση ($i=0$): Στην περίπτωση που το T_u είναι ένα μονοπάτι, από την Παρατήρηση 1, ο Αλγόριθμος 2.3 αναθέτει σε κάθε κόμβο το ίδιο εύρος γωνίας. Αφού $a_1(u) < \frac{\pi}{2} < a_2(u)$, για κάθε κόμβο $v \in T_u$ το διάνυσμα που συνδέει το v στον πατέρα του είναι το $e = (0, 1)$. Επομένως ο Αλγόριθμος 2.3 απεικονίζει το T_u στον άξονα $y'y$ και έχει μήκος $|T_u| - 1$. Επομένως το G_u^R και το G_u^L αποτελείται από ένα μονοπάτι στον άξονα $y'y$ με μήκος $|T_u| - 1$.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3, αφού ο Αλγόριθμος 2.3 αναθέτει στη ρίζα βαρύτητας με εύρος γωνίας $\langle 0, \pi \rangle$ και σύμφωνα με την Παρατήρηση 4 αν ο κόμβος u δεν είναι ρίζα, τότε έχει μήκος εύρους γωνίας το πολύ $a_2(u) - a_1(u) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n-1} \Rightarrow 1 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n-1} \cdot \frac{1}{a_2(u) - a_1(u)}$ και επομένως το μήκος του πλέγματος που απαιτείται για το G_u^R και το G_u^L είναι:

$$\begin{aligned} & (|T_u| - 1) \\ & \leq (|T_u| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [n \text{ είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{a_2(u) - a_1(u)} \end{aligned}$$

Η επαγωγική βάση έχει πλέον διευθετηθεί.

Επαγωγικό Βήμα: Αποδεικνύουμε το φράγμα για το μήκος του πλέγματος για το G_u^R επειδή η απόδειξη για το G_u^L είναι συμμετρική.

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι η μόνη περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι όταν ο u έχει περισσότερα τουλάχιστον δύο παιδιά. Αν ο u έχει μόνο ένα παιδί το v τότε από την Παρατήρηση 1, ο v περιλαμβάνει το $\frac{\pi}{2}$ στο εύρος γωνίας του, επομένως το διάνυσμα που συνδέει το u στο v είναι το

$e = (0, 1)$. Αν υποθέσουμε πως η επαγωγική υπόθεση ισχύει για το v , τότε το μήκος του πλέγματος του G_u^R φράζεται από το μήκος του πλέγματος του G_v^R και το μήκος του διανύσματος που συνδέει το u στο v . Επομένως το μήκος του πλέγματος του G_u^R φράζεται από:

$$\begin{aligned} & (|T_v| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_v} + 1 \\ & = (|T_u| - 2) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_u} + 1 \end{aligned}$$

Επιπλέον από την Παρατήρηση 3, αφού ο Αλγόριθμος 2.3 αναθέτει στη ρίζα βαρύτητας εύρος γωνίας $\langle 0, \pi \rangle$ και από την Παρατήρηση 4 ο κόμβος u δεν είναι ρίζα, έχει το πολύ μήκος εύρους γωνίας $a_2(u) - a_1(u) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττός}]}{n - 1} \Rightarrow 1 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττός}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{a_2(u) - a_1(u)}$ και επομένως το μήκος του πλέγματος είναι:

$$\begin{aligned} & (|T_u| - 2) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_u} + 1 \\ & \leq (|T_u| - 2) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_u} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_u} \\ & = (|T_u| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_u} \end{aligned}$$

Επομένως η μόνη περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι όταν ο u έχει τουλάχιστον δύο παιδιά.

Έστω u κόμβος στο T με τουλάχιστον δύο παιδιά και το υπό-δένδρο T_u έχει $i + 1$ κόμβους με τουλάχιστον δύο παιδιά. Έστω v_1, v_2, \dots, v_m τα παιδιά του u στα οποία η απεικόνιση του T_{v_j} κείται στο πρώτο τεταρτημόριο συμπεριλαμβανομένου και του άξονα $y'y$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 5 το εύρος γωνίας για κάθε v_j πρέπει να είναι της μορφής $\langle a_1(v_j), a_2(v_j) \rangle$ όπου $a_2(v_j) \leq \frac{\pi}{2}$ or $a_1(v_j) < \frac{\pi}{2} < a_2(v_j)$. Σημειώνουμε πως το μεγαλύτερο πλέγμα στο πρώτο τεταρτημόριο που χρησιμοποιεί οποιοδήποτε από τα $T_{v_j}^u, 1 \leq j \leq m$,³ προσδιορίζει το μέγεθος του πλέγματος που χρησιμοποιεί η απεικόνιση του T_u στο πρώτο τεταρτημόριο αφού τα υπό-δένδρα ριζωμένα σε παιδιά του u απεικονίζονται εσωτερικά σε μη-επικαλυπτόμενους (αλλά πιθανός επαπτόμενους) κυκλικούς τομείς. Η παραπάνω πρόταση ισχύει επειδή όλα τα πλέγματα που χρησιμοποιούνται για τα υπό-δένδρα έχουν το ίδιο αρχικό σημείο (u) και μας ενδιαφέρουν μόνο κυκλικοί τομείς, οι οποίοι κείτονται μερικώς στο πρώτο τεταρτημόριο συμπεριλαμβανομένου και του άξονα $y'y$. Επομένως, το μέγεθος πλέγματος που απαιτείται για να απεικονίσουμε το T_u είναι το μέγιστο από τα πλέγματα που απαιτούνται για να απεικονίσουμε οποιοδήποτε από τα $T_{v_j}^u$. Για κάθε κόμβο v_j με εύρος γωνίας $\langle a_1(v_j), a_2(v_j) \rangle$, αν $a_2(v_j) \leq \frac{\pi}{2}$, παρατηρώντας πως $\frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \geq 1$ τότε η πρόταση ισχύει από το Λήμμα 6. Για τον κόμβο v_j (υπάρχει το πολύ ένας τέτοιος κόμβος) όπου $a_1(v_j) < \frac{\pi}{2} < a_2(v_j)$, ο αριθμός των κόμβων στο T_{v_j} με τουλάχιστον δύο παιδιά είναι το πολύ i , επομένως η επαγωγική υπόθεση ισχύει για το $G_{v_j}^R$. Επομένως, η υπόθεση ισχύει για το πρώτο τεταρτημόριο για οποιοδήποτε T_{v_j} , το οποίο απεικονίζεται με μήκος πλέγματος που φράζεται από,

$$(|T_{v_j}| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττή}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_{v_j}}$$

Η ακμή που συνδέει το u στο v_j , σύμφωνα με το Λήμμα 8 απαιτεί ένα πλέγμα με μέγεθος το πολύ,

³ Υπενθυμίζουμε πως με T_v^u ορίζουμε το δένδρο που αποτελείται από την ακμή (u, v) και το T_v , όταν το v είναι παιδί του u

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_{v_j}}$$

Επομένως το συνολικό πλέγμα έχει μήκος το που φράζεται το πολύ από:

$$|T_{v_j}| \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_{v_j}}$$

Παρατηρώντας πως,

$$\phi_{v_j} = \frac{|T_{v_j}|}{|T_u| - 1} \cdot \phi_u \quad (\text{Από την Στρατηγική 1}) \quad (2.14)$$

Το συνολικό πλέγμα που απαιτείται μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως:

$$\begin{aligned} |T_{v_j}| \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_{v_j}} &\stackrel{(2.14)}{=} |T_{v_j}| \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\frac{|T_{v_j}|}{|T_u| - 1} \cdot \phi_u} \\ &= (|T_u| - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\phi_u} \end{aligned}$$

Επομένως η πρόταση ισχύει για το επαγωγικό βήμα. Η απόδειξη του λήμματος τώρα είναι πλήρης. □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να κλείσουμε αυτήν την υπό-ενότητα.

Θεώρημα 5. Έστω ένα μη-ριζωμένο δένδρο T με n κόμβους, ο Αλγόριθμος 2.3 παράγει μια μονότονη απεικόνιση σε πλέγμα μεγέθους το πολύ:

$$\begin{aligned} n \times \frac{n + 1}{2} & \quad \text{όταν το } n \text{ είναι περιττό} \\ n + 1 \times \frac{n}{2} + 1 & \quad \text{όταν το } n \text{ είναι άρτιο} \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η ιδιότητα της μονότονης απεικόνισης είναι άμεση από το Λήμμα 10. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 11 με ρίζα βαρύτητας τον κόμβο r , όπου ο Αλγόριθμος 2.3 αναθέτει $a_2(r) = \pi$ και $a_1(r) = 0$, έχουμε πως στην χειρότερη περίπτωση η απεικόνιση του T αποτελείται από το G_r^R στο πρώτο τεταρτημόριο και το G_r^L στο δεύτερο τεταρτημόριο, και το καθένα χρησιμοποιεί πλέγμα το πολύ:

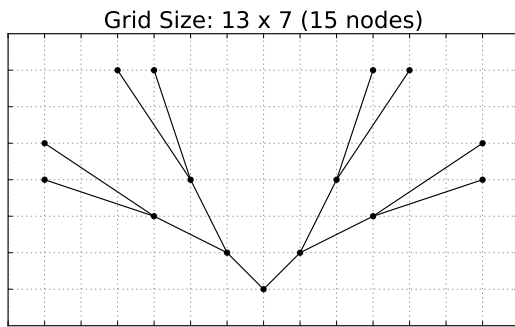
$$(n - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{n - 1} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{n - [\text{n είναι περιττό}]}{2}$$

Το συνολικό πλάτος του πλέγματος που απεικονίζει ο Αλγόριθμος 2.3 το T είναι το άθροισμα από τα πλάτη του G_r^R και του G_r^L . Το συνολικό ύψος του πλέγματος που απεικονίζει ο Αλγόριθμος 2.3 το T είναι το μέγιστο ύψος μεταξύ του G_r^R και του G_r^L . Επομένως, το συνολικό μέγεθος του πλέγματος που χρησιμοποιεί ο Αλγόριθμος 2.3 φράζεται από:

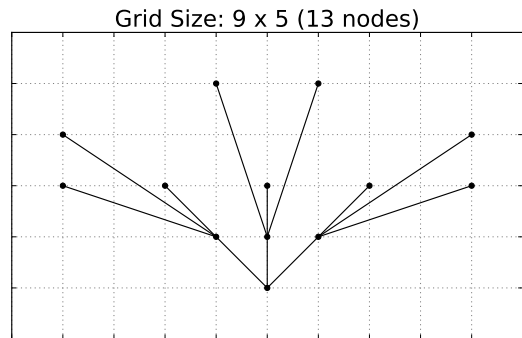
$$n + 1 - [\text{n είναι άρτιος}] \times \frac{n - [\text{n είναι άρτιος}]}{2} + 1$$

Επομένως όταν το n είναι περιττός, το μέγεθος του πλέγματος φράζεται από το $n \times \frac{n+1}{2}$ και όταν το n είναι άρτιος το μέγεθος πλέγματος φράζεται από το $n + 1 \times \frac{n}{2} + 1$. □

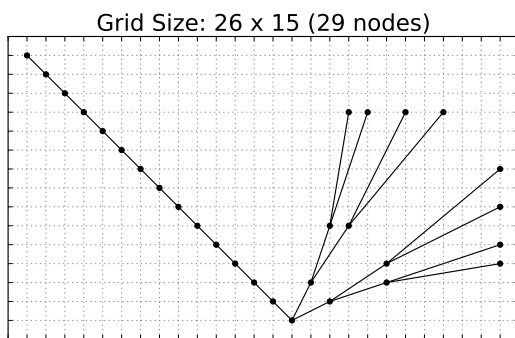
Στα Σχήματα 2.8-2.12 στην Σελίδα 47 παρουσιάζουμε μερικές απεικονίσεις που παράγονται από τον Αλγόριθμο 2.3.



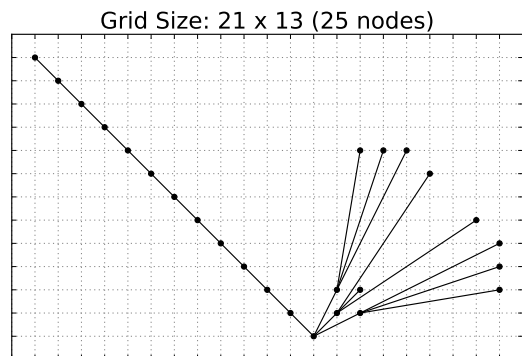
Σχήμα 2.8: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.3 για πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων (15 κόμβοι).



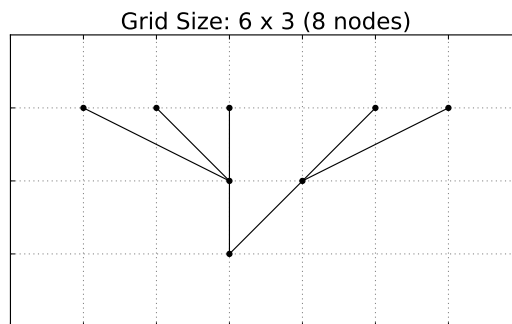
Σχήμα 2.9: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.3 για πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων (13 κόμβοι).



Σχήμα 2.10: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.3 για το πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων και μονοπάτι (29 κόμβοι).



Σχήμα 2.11: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.3 για το πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων και μονοπάτι (25 κόμβοι).



Σχήμα 2.12: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.3 για το δένδρο που χρησιμοποιήθηκε στο [He16, He17].

2.4 Κυρτή Απεικόνιση Δένδρων

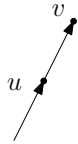
Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε πώς να εκμεταλλευτούμε τον Αλγόριθμο 2.1 για να παράγουμε μια κυρτή απεικόνιση δένδρου.

Αποδεικνύουμε ένα σημαντικό λήμμα και κάνουμε μια παρατήρηση που μας βοηθάει να αποδείξουμε πως η απεικόνιση είναι κυρτή.

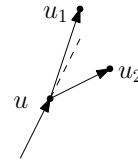
Λήμμα 12. Έστω η απεικόνιση Γ που παράγεται από τον Αλγόριθμο 2.1 για ένα δένδρο T όταν η μεταβλητή κυρτότητας είναι αληθής. Έστω κόμβος u στο T εκτός από την ρίζα, τότε για οποιοδήποτε δύο διαδοχικές ακμές του u , η γωνία μεταξύ τους είναι το πολύ π .

Αλγόριθμος 2.4: Αλγόριθμος Κυρτής Απεικόνισης Δένδρου

- 1: **Διαδικασία** Κυρτή Απεικόνιση Δένδρου(T)
 - 2: Είσοδος: Ένα δένδρο T με n κόμβους.
 - 3: Έξοδος: Μια κυρτή απεικόνιση του T σε πλέγμα μεγέθους το πολύ $n \times n$.
 - 4: Αναθέτουμε ως ρίζα του T έναν κόμβο με βαθμό 1
 - 5: Αλγόριθμος 2.1(T)
-



Σχήμα 2.13: Αναπαράσταση της πρώτης περίπτωσης για το Λήμμα 12.



Σχήμα 2.14: Αναπαράσταση της δεύτερης περίπτωσης για το Λήμμα 12.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το λήμμα λαμβάνοντας δύο περιπτώσεις, αναλόγως αν υπάρχει παιδί του u στο οποίο η ακμή που το συνδέει με το u , έχει την ίδια κλίση με την ακμή που συνδέει τον πατέρα του u στον u . Σημειώνουμε πως αυτό εξαρτάται αναλόγως με το αν η κλίση που συνδέει τον πατέρα του u στο u , κείται εντός του εύρους γωνίας ενός παιδιού του u ή βρίσκεται στο όριο του εύρους γωνίας.

Στην πρώτη περίπτωση, το λήμμα ισχύει. Στην δεύτερη περίπτωση, η κλίση της ακμής από τον πατέρα του u στον u πρέπει να βρίσκεται στο όριο του εύρους γωνίας δύο παιδιών του u . Αναπαριστούμε και τις δύο περιπτώσεις στα Σχήματα 2.13, 2.14 και παρατηρούμε πως και στις δύο περιπτώσεις το λήμμα ικανοποιείται \square

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το τελικό θεώρημα.

Θεώρημα 6. Έστω δένδρο T με n κορυφές, η απεικόνιση που παράγεται από τον Αλγόριθμο 2.4 για τον T είναι κυρτή, επίπεδη, μονότονη και περιέχεται σε πλέγμα μεγέθους το πολύ $n \times n$.

Απόδειξη. Η επιπεδότητα και η μονοτοπία της απεικόνισης, είναι άμεση συνέπεια από το Λήμμα 5.

Η απεικόνιση περιέχεται σε πλέγμα μεγέθους το πολύ $n \times n$ από το Θεώρημα 4.

Τώρα αποδεικνύουμε την κυρτότητα της απεικόνισης. Επειδή έχουμε αναθέσει ως ρίζα, κόμβο με βαθμό 1, από το Λήμμα 12 έχουμε πως αν αντικαταστήσουμε κάθε φύλλο με μια ημιευθεία, τότε οι μη-φραγμένες όψεις διαμερίζουν το επίπεδο σε μη-φραγμένα κυρτά πολύγωνα. \square

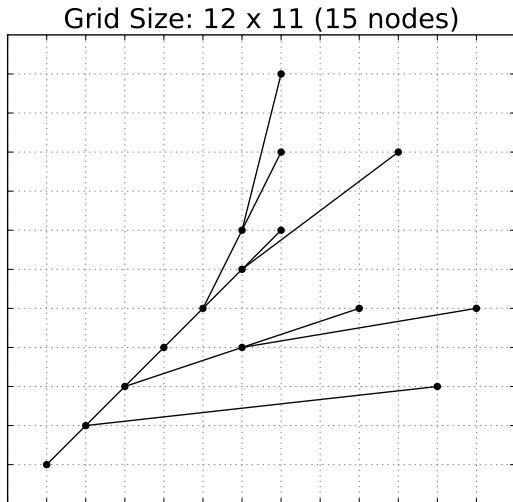
Στα Σχήματα 2.15-2.18 στην Σελίδα 49 παρουσιάζουμε μερικές απεικονίσεις που παράγονται από τον Αλγόριθμο 2.4.

2.5 Μονότονη Απεικόνιση Δένδρων σε Πλέγμα Μεγέθους

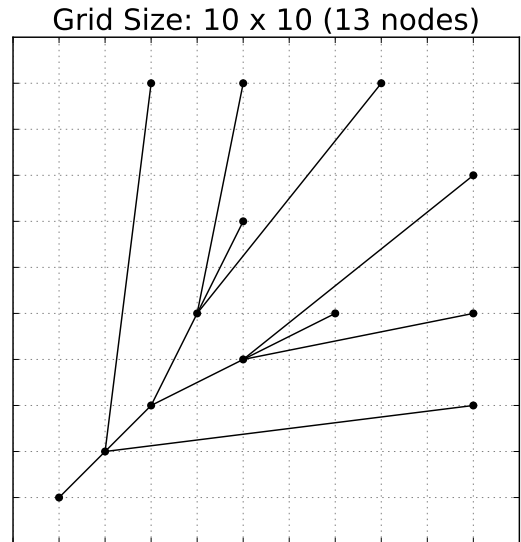
$$\left\lfloor \frac{3}{4}(n+1) \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{3}{4}(n+1) \right\rfloor$$

Τώρα είμαστε σε θέση να περιγράψουμε τον Αλγόριθμο 2.5, ο οποίος συνδυάζει τον Αλγόριθμο 2.1 και τον Αλγόριθμο 2.3. Η βασική διαίσθηση του αλγόριθμου είναι ότι αρχικά βρίσκουμε μια ρίζα βαρύτητας, και μετά προσπαθούμε να μοιράσουμε τα παιδιά της ρίζας σε δύο γκρουπ όσο πιο ισοζυγισμένα γίνεται, και τα απεικονίζουμε σε δύο ανεξάρτητες περιοχές.

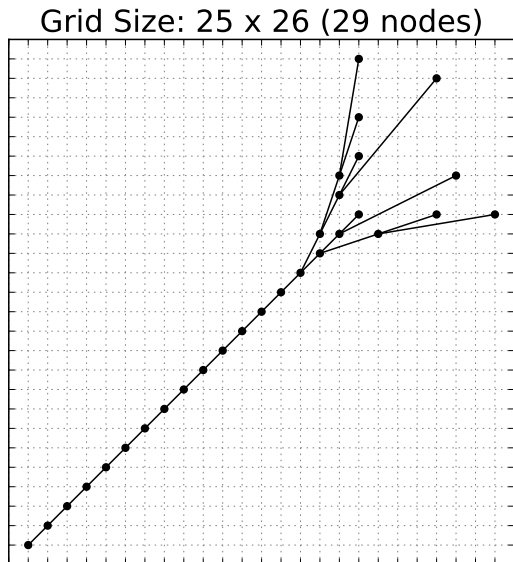
Λήμμα 13. Έστω δένδρο T με n κορυφές ριζωμένο σε μία ρίζα βαρύτητας r , μπορούμε να βρούμε δύο συνεκτικές συνιστώσες οι οποίες περιέχουν όλους τους κόμβους του T και έχουν μόνο την r ως κοινή κορυφή. Επιπλέον, το μέγεθος κάθε συνεκτικής συνιστώσας φράζεται από το $\frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3}$.



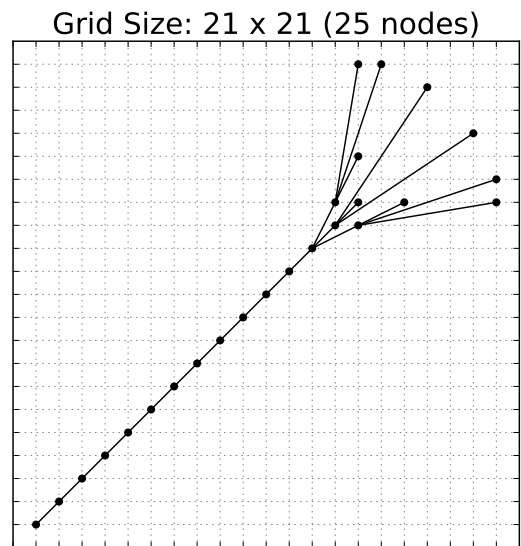
Σχήμα 2.15: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.4 για πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων (15 κόμβοι).



Σχήμα 2.16: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.4 για πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων (13 κόμβοι).



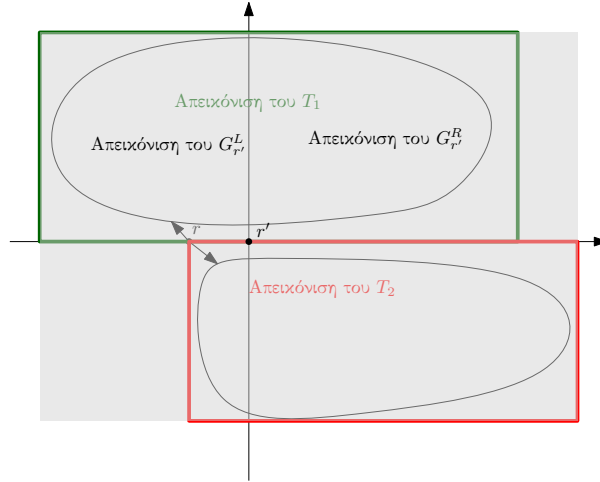
Σχήμα 2.17: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.4 για το πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων και μονοπάτι (29 κόμβοι).



Σχήμα 2.18: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.4 για το πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων και μονοπάτι (25 κόμβοι).

Απόδειξη. Αφού το T είναι ριζωμένο σε μια *ρίζα βαρύτητας*, τότε το μέγεθος κάθε υπό-δένδρου ριζωμένο σε παιδί του r φράζεται από το $\frac{n}{2}$. Έστω m το μέγιστο μέγεθος υπό-δένδρου ριζωμένο σε παιδί του r , όπου $m \leq \frac{n}{2}$. Το αποδεικνύουμε παίρνοντας περιπτώσεις για την τιμή του m .

Αν $\frac{n-1}{3} \leq m \leq \frac{n}{2}$: Ένας τρόπος να δημιουργήσουμε τις συνεκτικές συνιστώσες είναι το πρώτο γκρουπ να περιέχει μόνο το υπό-δένδρο ριζωμένο στο παιδί του r με μέγεθος m . Το άλλο γκρουπ αποτελείται από τα υπόλοιπα υπό-δένδρα ριζωμένα σε παιδιά του r και έχουν συνολικό μέγεθος $n - 1 - m$. Αφού $\frac{n-1}{3} \leq m \leq \frac{n}{2} \Leftrightarrow \frac{n}{2} - 1 \leq n - 1 - m \leq \frac{2 \cdot n - 2}{3}$, αν προσθέσουμε τη ρίζα βαρύτητας και στα δύο γκρουπ, τότε το μέγεθος κάθε γκρουπ φράζεται από $\frac{2 \cdot n + 1}{3}$, επομένως αυτή η περίπτωση αποδείχθηκε.



Σχήμα 2.19: Παράδειγμα πως ο Αλγόριθμος 2.5 απεικονίζει το T_1 και το T_2 .

Αν $m < \frac{n-1}{3}$: Σε αυτήν την περίπτωση, σχηματίζουμε κάθε γκρουπ με την εξής στρατηγική: ελέγχουμε κάθε παιδί του r σε αύξουσα σειρά μεγέθους υπό-δένδρου αν το ριζώναμε σε αυτό και το τοποθετούμε στο γκρουπ με το μικρότερο μέγεθος. Στο τέλος, η διαφορά μεταξύ των δύο γκρουπ είναι, το πολύ, το μέγεθος του μεγαλύτερου υπό-δένδρου, δηλαδή m . Επομένως, στην περίπτωση που έχουμε μοιράσει τα παιδιά του r , εκτός από το μεγαλύτερο, ομοιόμορφα στα δύο γκρουπ, και μετά τοποθετούμε το μεγαλύτερο υπό-δένδρο μεγέθους m , το μέγεθος του μεγαλύτερου γκρουπ φράζεται από $\frac{n-1-m}{2} + m = \frac{n+m-1}{2} < \frac{2 \cdot n-2}{3}$. Όταν προσθέτουμε τη ρίζα βαρύτητας και στα δύο γκρουπ, τότε το μέγεθος του μεγαλύτερου γκρουπ είναι το πολύ $\frac{2 \cdot n+1}{3}$. Επομένως, και αυτή η περίπτωση αποδείχθηκε

Το λήμμα τώρα έχει αποδειχθεί. □

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε την ιδέα που βασίζεται ο Αλγόριθμος 2.5. Έστω T το δένδρο στην είσοδο μας με ρίζα βαρύτητας r . Πρώτα βρίσκουμε τα γκρουπ σύμφωνα με το Λήμμα 13, έστω T_1 και T_2 τα δύο γκρουπ όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πως $|T_1| \geq |T_2|$. Απεικονίζουμε το δένδρο σε δύο βήματα, Βήμα 1: Απεικονίζουμε το T_1 σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.3, αλλά τοποθετούμε το μονοπάτι από τη ρίζα του T_1 μέχρι το r πάνω στον άξονα $x'x$ με την κατάλληλη αλλαγή στην ενσωμάτωση του δένδρου. Βήμα 2: Απεικονίζουμε το T_2 σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.1. Τότε συνδυάζουμε τις απεικονίσεις από το Βήμα 1 με την ανάκλαση στον άξονα $x'x$ της απεικόνισης που παράγεται από το Βήμα 2. Ο τρόπος που συνδυάζουμε τις απεικονίσεις από το Βήμα 1 και το Βήμα 2 παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.19. Η απεικόνιση που παράγεται είναι μονότονη και το μέγεθος του πλέγματος φράζεται από $\lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor$.

Η επόμενη στρατηγική αλλάζει την ενσωμάτωση του T_1 και τοποθετεί το μονοπάτι από τη ρίζα βαρύτητας του T_1 μέχρι το r πάνω στον άξονα $x'x$ στην αριστερή πλευρά.

Στρατηγική 2. Στο δένδρο T_1 τοποθετούμε κάθε κόμβο στο μονοπάτι από τη ρίζα βαρύτητας του T_1 μέχρι το r ως το τελευταίο παιδί του πατέρα του. Με αυτόν τον τρόπο, η Στρατηγική 1 αναθέτει κάθε κόμβο μεταξύ της ρίζας βαρύτητας και του r εύρος γωνίας στην μορφή (θ_1, π) . Επιπλέον κάθε ακμή στο μονοπάτι από τη ρίζα βαρύτητας του T_1 μέχρι το r κείται στον άξονα x και πιο συγκεκριμένα, το διάνυσμα που συνδέει κάποιον κόμβο u που ανήκει στο μονοπάτι με τον πατέρα του, είναι το $e = (-1, 0)$.

Παρατήρηση 6. Κάνουμε δύο παρατηρήσεις, πρώτα πως κάθε ακμή e που συνδέει έναν κόμβο u με τον πατέρα του με κλίση $\text{slope}(e) = \pi$ παραμένει μέσα στο εύρος γωνίας του u αλλά αγγίζει στα όρια του. Δεύτερον, το μήκος κάθε τέτοιας ακμή είναι 1 και είναι μικρότερο δυνατόν μήκος.

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, μπορούμε να δούμε πως αφού το Λήμμα 11 ενδιαφέρεται μόνο αν η ακμή e είναι εντός του εύρους γωνίας του u (να είναι εφαπτόμενο στο όριο δεν είναι παραβίαση αυτής της συνθήκης) και να έχει φραγμένο μήκος. Επομένως το Λήμμα 11 εξακολουθεί να ισχύει και επομένως το Θεώρημα 5 είναι έγκυρο.

Αλγόριθμος 2.5: Αλγόριθμος Μονότονης Απεικόνισης Δένδρου

- 1: Διαδικασία Μονότονη Απεικόνιση Δένδρου
 - 2: Είσοδος: Μή-ριζωμένο δένδρο T με n κόμβους.
 - 3: Έξοδος: Μια μονότονη απεικόνιση του T σε πλέγμα μεγέθους το πολύ $n \times \frac{1}{2}n$.
 - 4: Δημιούργησε τα γκρουπ T_1 και T_2 σύμφωνα με το Λήμμα 13 όπου υποθέτουμε πως $|T_2| \geq |T_1|$.
 - 5: Απεικόνισε το T_1 σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.3 με τις τροποποιήσεις της Στρατηγικής 2.
 - 6: Απεικόνισε την ανάκλαση πάνω στον άξονα x του T_2 σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.1.
-

Θεώρημα 7. Δεδομένου ενός δένδρου T με n κόμβους, ο Αλγόριθμος 2.5 απεικονίζει το δένδρο σε ένα πλέγμα μεγέθους με μήκος το πολύ $\lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4}(n+1) \rfloor$.

Απόδειξη. Από τις τροποποιήσεις στην απεικόνιση του T_1 από την Στρατηγική 2, ο κόμβος r κείται στο δεύτερο τεταρτημόριο αν υποθέσουμε ότι η ρίζα βαρύτητας του T_1 βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Επιπλέον το T_2 απεικονίζεται στο τέταρτο τεταρτημόριο αν υποθέσουμε ότι ο r βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Στην χειρότερη περίπτωση το μέγεθος του πλέγματος για την συνολική απεικόνιση, είναι όταν η ρίζα βαρύτητας του T_1 ταυτίζεται με τον r . Σε αυτήν την περίπτωση, το ύψος του πλέγματος που απαιτείται είναι το πολύ το άθροισμα του ύψους κάθε από τα δύο δένδρα και του πλάτους του πλέγματος που χρησιμοποιείται είναι κατά πόσο το πλάτος του T_2 εξέχει του T_1 στον άξονα x . Έστω r' η ρίζα βαρύτητας του T_1 , σύμφωνα με την Παρατήρηση 6, το μήκος του πλέγματος του $G_{r'}^R$ στο πρώτο τεταρτημόριο και του $G_{r'}^L$ στο δεύτερο τεταρτημόριο είναι $\frac{|T_1|}{2}$ ενώ στο τέταρτο τεταρτημόριο σύμφωνα με το Λήμμα 6 είναι $|T_2| - 1$. Επομένως το συνολικό πλάτος πλέγματος είναι $\max(|T_1|, \frac{|T_1|}{2} + |T_2| - 1)$ και το συνολικό ύψος πλέγματος είναι $\frac{|T_1|}{2} + |T_2| - 1$. Αποδεικνύουμε το λήμμα παίρνοντας περιπτώσεις αν $\frac{|T_1|}{2} > |T_2| - 1$:

Αν $\frac{|T_1|}{2} > |T_2| - 1$: Σε αυτήν την περίπτωση είναι προφανές ότι η μεγαλύτερη πλευρά του πλέγματος είναι το πλάτος με τιμή $|T_1|$.

Πρώτα παρατηρούμε πως,

$$|T_1| + |T_2| = n + 1 \text{ (Μετράμε τη ρίζα βαρύτητας δύο φορές)} \quad (2.15)$$

Αφού υποθέσαμε πως:

$$\begin{aligned} & \frac{|T_1|}{2} > |T_2| - 1 \\ \Rightarrow & \frac{|T_1| + |T_2|}{2} > \frac{3}{2} \cdot |T_2| - 1 \\ (2.15) \Rightarrow & \frac{n + 1}{2} > \frac{3}{2} \cdot |T_2| - 1 \\ \Rightarrow & \frac{1}{3} \cdot n + 1 > |T_2| \end{aligned}$$

Επιπλέον αφού,

$$\begin{aligned} |T_2| &= n + 1 - |T_1| \\ &\stackrel{(13)}{\geq} n + 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3} \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \cdot n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως $\frac{n}{3} + \frac{2}{3} \leq |T_2| < \frac{n}{3} + 1 \Rightarrow n + 2 \leq 3 \cdot |T_2| < n + 3$. Επειδή $3 \cdot |T_2|$ είναι ακέραιος, ο μόνος έγκυρος ακέραιος που ικανοποιεί αυτές τις ανισότητες είναι $3 \cdot |T_2| = n + 2 \Rightarrow |T_2| = \frac{n}{3} + \frac{2}{3}$. Άρα $|T_1| = n + 1 - (\frac{1}{3} \cdot n + \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3}$.

Επομένως το πλέγμα που απαιτείται φράζεται από:

$$\frac{2}{3} \cdot n + \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \cdot n + \frac{4}{3}$$

Το οποίο για οποιοδήποτε $n \geq 7$ είναι μικρότερο από:

$$\frac{3}{4} \cdot n + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \cdot n + \frac{3}{4}$$

Τώρα αντιμετωπίζουμε την περίπτωση όταν $n < 7$.

Σημειώνουμε πως ένας ακόμα περιορισμός που πρέπει να ικανοποιηθεί είναι πως το $|T_2|$ πρέπει να είναι ακέραιος, επομένως το n πρέπει να έχει την μορφή $n = 3 \cdot k + 1$, όπου k είναι φυσικός αριθμός. Για $n < 7$, η μόνη έγκυρη περίπτωση που χρειάζεται να διερευνήσουμε είναι $n = 1$ ή $n = 4$.

Στην περίπτωση που $n = 1$, το μέγεθος πλέγματος είναι τετριμμένα 1×1 το οποίο είναι ίσο με $\lfloor \frac{3}{4} \cdot 2 \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4} \cdot 2 \rfloor = 1 \times 1$, επομένως αυτή η περίπτωση επιβεβαιώθηκε.

Στην περίπτωση που $n = 4$, παρατηρούμε πως τα δένδρα με τέσσερις κόμβους μπορούν να χωρισθούν σε δύο κατηγορίες, τα δένδρα με δύο φίλα ή τρία φίλα. Και οι δύο κατηγορίες έχουν μοναδική τοπολογία η οποία μπορεί να απεικονισθεί σε πλέγμα μεγέθους 3×3 το οποίο είναι ίσο με $\lfloor \frac{3}{4} \cdot 5 \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4} \cdot 5 \rfloor = 3 \times 3$.

Επομένως η πρόταση ισχύει.

Av $\frac{|T_1|}{2} \leq |T_2| - 1$: Το μήκος του πλέγματος που χρειάζεται είναι:

$$\begin{aligned} & \frac{|T_1|}{2} + |T_2| - 1 \\ &= \frac{|T_1| + |T_2|}{2} + \frac{|T_2|}{2} - 1 \\ & \stackrel{(2.15)}{=} \frac{n+1}{2} + \frac{|T_2|}{2} - 1 \\ & \stackrel{|T_2| \leq |T_1|}{\leq} \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{4} - 1 \\ &= \frac{3n-1}{4} \end{aligned}$$

Επομένως το μέγεθος πλέγματος που απαιτείται είναι,

$$\frac{3}{4} \cdot n + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \cdot n + \frac{3}{4}$$

Αφού το φράγμα για το μέγεθος πλέγματος πρέπει να είναι ακέραιος, το πάτωμα του φράγματος φράζει το μέγεθος πλέγματος. Επομένως το μέγεθος πλέγματος είναι:

$$\left\lceil \frac{3}{4} \cdot (n+1) \right\rceil \times \left\lceil \frac{3}{4} \cdot (n+1) \right\rceil$$

□

Θεώρημα 8. Η απεικόνιση που παράγεται από τον Αλγόριθμο 2.5 είναι επίπεδη και μονότονη.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το λήμμα, πρώτα αποδεικνύουμε πως για κάθε ζεύγος κόμβων στο T_1 ή στο T_2 , υπάρχει μονότονη μονοπάτι και μετά αποδεικνύουμε πως για κάθε κόμβο στο T_1 και στο T_2 , υπάρχει μονότονο μονοπάτι.

Έστω u, v οι κόμβοι που θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει μονότονο μονοπάτι μεταξύ τους.

Αν $u \in T_2$ και $v \in T_2$: Ο ισχυρισμός αποδεικνύεται άμεσα από το Λήμμα 5.

Αν $u \in T_1$ και $v \in T_1$: Η μόνη παραβίαση από το Λήμμα 5, είναι πως για κάθε κόμβο u που βρίσκεται στο μονοπάτι από τη ρίζα βαρύτητας μέχρι το r , η ακμή e που συνδέει το u στον πατέρα του έχει κλίση $slope(e) = \pi$. Αυτό παραβιάζει την Ιδιότητα-1 της non-strictly slope disjoint απεικόνισης, αφού από την Στρατηγική 2 έχουμε πως $a_2(u) = \pi$ και $slope(e) = a_2(u) = \pi$. Επομένως για μερικούς κόμβους u με εύρος γωνίας στην μορφή $\langle a_1(u), a_2(u) \rangle$, η ακμή e που συνδέει το u στον πατέρα του, ισχύει πως $a_1(u) < slope(e) \leq a_2(u)$.

Μπορούμε να περιστρέψουμε ωρολογιακά κάθε ακμή κατά μια γωνία $\epsilon > 0$. Για κάθε ακμή e , αν ορίσουμε $slope(e)$ την κλίση της ακμής e στην αρχική απεικόνιση και $slope'(e)$ την κλίση της ακμής e στην νέα περιστραμμένη απεικόνιση, ισχύει πως $slope'(e) = slope(e) - \epsilon$.

Για κάθε κόμβο u με εύρος γωνίας της μορφής $\langle a_1(u), a_2(u) \rangle$, κάθε ακμή e που συνδέει το u στον πατέρα της, αφού το $\epsilon > 0$ είναι αμελητέο, ισχύει πως:

$$\begin{aligned} a_1(u) &< slope(e) \leq a_2(u) \\ \Rightarrow a_1(u) - \epsilon &< slope'(e) \leq a_2(u) - \epsilon \\ \Rightarrow a_1(u) &< slope'(e) < a_2(u) \end{aligned}$$

Αφού όλες οι ιδιότητες των non-strictly slope disjoint απεικονίσεων ικανοποιούνται και από το Θεώρημα 3 η πρόταση ισχύει.

Αν $u \in T_1$ και $v \in T_2$: Σημειώνουμε πως σε κάθε δένδρο, το μονοπάτι μεταξύ δύο κόμβων είναι μοναδικό και είναι η σύνδεση του μονοπατιού από το u στο r και από το r στο v . Αν υποθέσουμε πως το r είναι στο κέντρο, οι ακμές μεταξύ του u και του r κείτονται στο δεύτερο τεταρτημόριο, ενώ οι ακμές μεταξύ του r και του v κείτονται στα πρώτα δύο τεταρτημόρια με την εξαίρεση των ακμών στο μονοπάτι από το r μέχρι τη ρίζα βαρύτητας, οι οποίες κείτονται στον άξονα x . Το μονοπάτι είναι μονότονο ως προς μια ευθεία με κλίση $\frac{\pi}{2} + \epsilon$ όπου $\epsilon > 0$. Αυτό ισχύει αφού όλες οι ακμές μεταξύ των u και του v κείτονται στο δεύτερο τεταρτημόριο και μπορούν να διασχιστούν. Επίσης οι ακμές στο πρώτο τεταρτημόριο μπορούν να προσπελαστούν αφού το ϵ είναι αμελητέο και δεν υπάρχει ακμή στον άξονα x .

Αφού αποδείξαμε ότι η απεικόνιση του T είναι μονότονη, σύμφωνα με το Θεώρημα 1 είναι και επίπεδο.

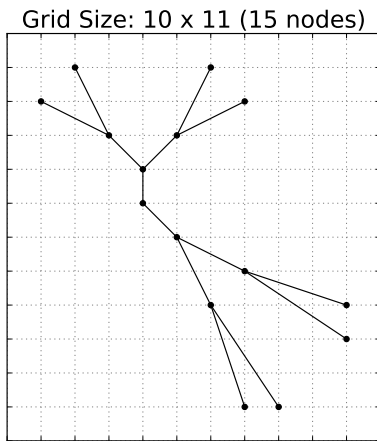
Το λήμμα τώρα έχει αποδειχθεί. □

Στα Σχήματα 2.20-2.24 στην Σελίδα 54 παρουσιάζουμε μερικές απεικονίσεις που παράγονται από τον Αλγόριθμο 2.3.

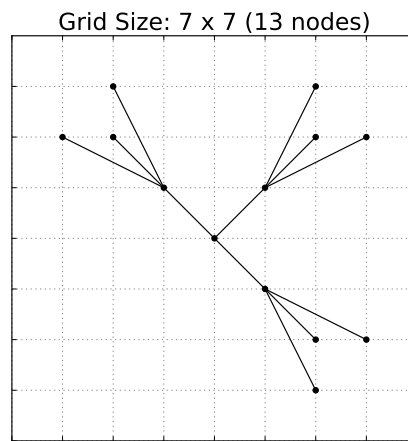
2.6 Επίλογος & Ανοιχτά Προβλήματα

Δείξαμε πως να παράγουμε μια μονότονη απεικόνιση ενός δένδρου με n κόμβους σε πλέγμα με μέγεθος το πολύ $n \times n$ στην περίπτωση που μας έχει δοθεί η ρίζα και σε $\lfloor \frac{3}{4} \cdot (n+1) \rfloor \times \lfloor \frac{3}{4} \cdot (n+1) \rfloor$ στην περίπτωση που μπορούμε να διαλέξουμε εμείς τη ρίζα και να αλλάξουμε την ενσωμάτωση. Τα επόμενα προβλήματα πάνω σε μονότονα δένδρα έχουν ενδιαφέρον να μελετηθούν:

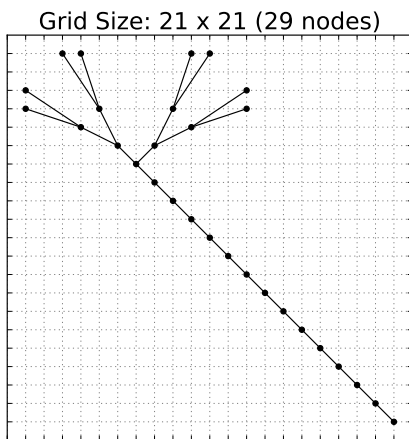
1. Οι He και He [He17] περιέγραψαν ένα δένδρο που χρειαζόταν για την μονότονη απεικόνισή του μέγεθος πλέγματος τουλάχιστον $\frac{n}{9} \times \frac{n}{9}$. Υπάρχει δένδρο που απαιτεί μεγαλύτερο πλέγμα;



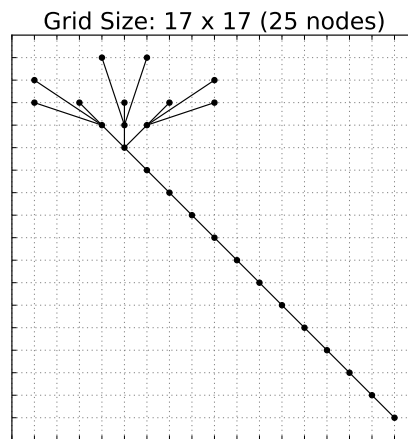
Σχήμα 2.20: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων (15 κόμβοι).



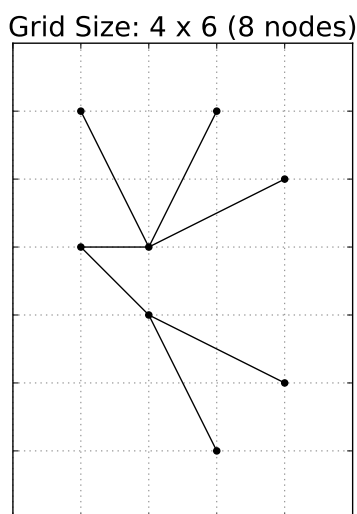
Σχήμα 2.21: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων (13 κόμβοι).



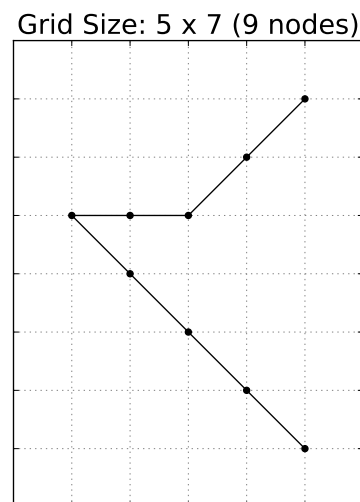
Σχήμα 2.22: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για το πλήρες δυαδικό δένδρο 3-επιπέδων και μονοπάτι (29 κόμβοι).



Σχήμα 2.23: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για το πλήρες τριαδικό δένδρο 2-επιπέδων και μονοπάτι (25 κόμβοι).



Σχήμα 2.24: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για το δένδρο που χρησιμοποιήθηκε στο [He16, He17].



Σχήμα 2.25: Η έξοδος του Αλγόριθμου 2.5 για μονοπάτι μήκους 8 (9 κόμβοι).

2. Η γωνιακή ανάλυση της απεικόνισης που παράγεται δεν έχει μελετηθεί. Υπάρχει κάποιος συμβιβασμός μεταξύ της γωνιακής ανάλυσης και του μεγέθους του πλέγματος της μονότονης απεικόνισης;

Κεφάλαιο 3

Πέρα Από Την Απευθείας Κυριαρχία: Μέση Ανάλυση Επίδοσης Τοπικής Δρομολόγησης

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, καλύπτουμε ένα ενδιαφέρον πρόβλημα της υπολογιστικής γεωμετρίας, δεδομένου ενός συνόλου σημείων P στο R^d όπου το βάρος μιας ακμής μεταξύ δύο σημείων είναι η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ τους, πώς να κατασκευάσουμε ένα συνεκτικό γράφημα που συνδέει όλα τα σημεία του P έτσι ώστε να μπορούμε να βρούμε μια διαδρομή από ένα κόμβο σε οποιοδήποτε άλλο μόνο με τοπικές πληροφορίες σε κάθε ενδιάμεσο κόμβο.

Η τοπική δρομολόγηση θα πρέπει να γίνεται με φυσικό τρόπο έτσι ώστε να μπορούμε να έχουμε έναν μικρό συνεκτικό παράγοντα (spanning factor) (ο μέγιστος λόγος μεταξύ του μήκους του μονοπατιού που και της ευκλείδειας απόστασης μεταξύ των άκρων του).

Μια επιθυμητή ιδιότητα για το κατασκευασμένο δίκτυο $G(V, E)$ είναι να έχει έναν μικρό βαθμό $\Delta(G)$ (μέγιστος βαθμός των κορυφών του) και αριθμό βημάτων $hop(G)$ (hop count) (μέγιστος αριθμός βημάτων (hops) μεταξύ δύο κορυφών στο γράφημα). Η πρώτη ιδιότητα μας εγγυάται πως κάθε κόμβος χρειάζεται να αποθηκεύει ένα μικρό τμήμα των γειτόνων του στην μνήμη του και η δεύτερη ιδιότητα μας εγγυάται πως κατά την διάρκεια της δρομολόγησης ενός πακέτου, δεν θα αφιερώσει πολύ χρόνο στην διαδικασία προώθησης. Οι Giannopoulos et. al. [Gian10] απέδειξαν πως το να υπολογίσουμε ένα συνεκτικό γράφημα με ελάχιστο συνεκτικό παράγοντα με βάση ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο, φράζοντας τον αριθμό των ακμών, είναι NP-δύσκολο πρόβλημα.

Ανακαλούμε μερικούς ορισμούς από τον Klein [Klei86] αφού ένα μεγάλο ποσοστό της ανάλυσής μας αναφέρεται σε αυτές:

Ορισμός 1. Δεδομένου δύο σημείων $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ και $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$ στο R^d , λέμε πως το a κυριαρχεί (dominates) b , ($a \succeq b$) αν $a_i \geq b_i$ για όλα τα $1 \leq i \leq d$ και $a \neq b$.

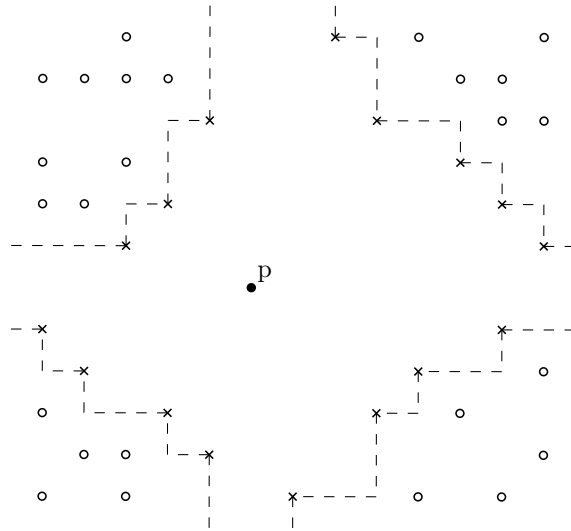
Ορισμός 2. Δεδομένου ενός συνόλου σημείων P στο R^d και δύο σημείων a και b στο P , λέμε πως το a κυριαρχεί απευθείας το (directly dominates) b με βάση το P ($a \succ b$) αν $a \succeq b$ και δεν υπάρχει σημείο $c \in (P - \{a, b\})$ έτσι ώστε $a \succeq c \succeq b$.

Επεκτείνουμε τον Ορισμό 1 και τον Ορισμό 2 έτσι ώστε να καλύπτουν κάθε ένα από τα 2^d υπερμόρια (orthants).

Ορισμός 3. Δεδομένου δύο σημείων $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ και $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$ στο R^d , λέμε πως το a κυριαρχεί (dominates) το b στην $c = c_1 c_2 \dots c_d$ κατεύθυνση όπου $c_i = \{0, 1\}$, ($a \succeq_c b$) αν για κάθε $1 \leq i \leq d$ ισχύει πως:

$$a_i \begin{cases} \geq b_i & \text{αν } c_i = 1 \\ \leq b_i & \text{αν } c_i = 0 \end{cases}$$

Ορισμός 4. Δεδομένου ενός συνόλου σημείων P στο R^d και δύο σημείων u και v στο P , λέμε πως το a κυριαρχεί απευθείας το (directly dominates) b με βάση το P στην $c = c_1 c_2 \dots c_d$ κατεύθυνση όπου $c_i = \{0, 1\}$, ($a \succ_c b$) αν $x \succeq_c y$ και δεν υπάρχει σημείο $a \in (P - \{x, y\})$ έτσι ώστε $x \succeq_c a \succeq_c y$.



Σχήμα 3.1: Παράδειγμα απευθείας κυριαρχίας σε όλες τις κατευθύνσεις στο επίπεδο.

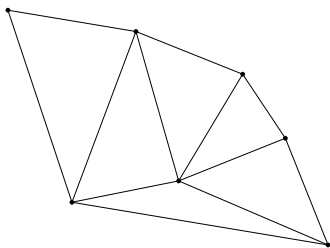
Παρατηρούμε πως κάθε διακριτό c αντιστοιχεί σε διακριτό υπερμόριο. Επιπλέον ισχύουν οι επόμενες ταυτότητες:

$$a \succ b \Leftrightarrow a \succ_{11\dots 1} b$$

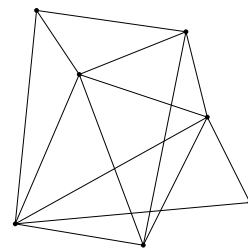
$$a \succeq b \Leftrightarrow a \succeq_{11\dots 1} b$$

Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα της γενικευμένης κυριαρχίας στο επίπεδο. Με "x" σημειώνουμε τα σημεία που κυριαρχούν απευθείας το p σε κάποια κατεύθυνση και με "o" σημειώνουμε τα σημεία που δεν κυριαρχούν απευθείας το p .

Τώρα είμαστε έτοιμοι να κάνουμε μια αφηρημένη περιγραφή πως να κατασκευάσουμε το συνεκτικό γράφημα. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος μας ακολουθεί έναν φυσικό τρόπο κατασκευής του γραφήματος. Στο συνεκτικό δίκτυο με κόμβους τα σημεία του συνόλου P , προσθέτουμε μια ακμή μεταξύ δύο κορυφών $u, v \in P$ αν υπάρχει κάποια κατεύθυνση c έτσι ώστε $u \succeq_c v$ ή $v \succeq_c u$ με βάση το P . Αποδεικνύουμε πως ο τρόπος που κατασκευάζουμε το γράφημα μαζί με το αλγόριθμο τοπικής δρομολόγησης, εγγυάται ένα συνεκτικό παράγοντα το πολύ \sqrt{d} στο R^d . Επιπλέον αποδεικνύουμε πως κάτω από κάποιες ελαστικές υποθέσεις "ανεξαρτησίας" για τα σημεία P , ένα αρκετά χαμηλό $\Delta(G)$ και $hop(G)$ μπορεί να εγγυηθεί με πολύ μεγάλη πιθανότητα. Στα Σχήματα 3.2, 3.3 παρουσιάζουμε δύο παραδείγματα του κατασκευασμένου γραφήματος στο επίπεδο.



Σχήμα 3.2: Παράδειγμα του κατασκευασμένου γραφήματος από ένα τυχαίο σύνολο σημείων.



Σχήμα 3.3: Άλλο παράδειγμα του κατασκευασμένου γραφήματος από ένα τυχαίο σύνολο σημείων.

Σε αυτό το κεφάλαιο, ασχολούμαστε με την μέση-ανάλυση του $\Delta(G)$, $hop(G)$ και τον συνεκτικό παράγοντα; και όχι με τον αλγόριθμο για να βρίσκουμε αποδοτικά τις ακμές του γραφήματος. Αρκετά άρθρα έχουν ασχοληθεί με αποδοτικούς αλγορίθμους για τον εντοπισμό ζευγαριών σημείων

που κυριαρχεί απευθείας το ένα το άλλο στο δισδιάστατο και τρισδιάστατο χώρο ([Kung75], [Bent78], [Over88], [Guti89], [Berg92], [Mast17]) και μπορούν εύκολα να επεκταθούν για να καλύψουν την περίπτωση της απευθείας κυριαρχίας κάτω από κάποια κατεύθυνση στον δισδιάστατο και τρισδιάστατο χώρο αντίστοιχα.

Οι Bentley et. al. [Bent78] και ο Buchta [Buch89] απέδειξαν πως ο μέσος αριθμός των μεγίστων σε ένα σύνολο διανυσμάτων στο R^d είναι $O\left((\ln(n))^{d-1}\right)$, σημειώνουμε πως ο μέσος αριθμός των μεγίστων σε ένα σύνολο διανυσμάτων στο R^d είναι ο ίδιο με τον μέσο αριθμό των σημείων που κυριαρχούν απευθείας ένα άλλο σημείο σε κάποια κατεύθυνση. Ο Klein απέδειξε πως ο μέσος αριθμός των ζευγαριών σημείων που κυριαρχούνται απευθείας σε ένα σύνολο n σημείων που κατανέμονται στο R^d ανεξάρτητα σύμφωνα με την ομοιόμορφη κατανομή, είναι ασυμπτωτικά ίση με $O\left(\frac{n \cdot \log^{d-1}(n)}{(d-1)!}\right)$ [Klei86].

3.2 Εισαγωγικά

Παρουσιάζουμε μερικές ανισότητες που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Αρχικά, παρουσιάζουμε την ανισότητα του Markov. Έστω X μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή, τότε για κάθε μη-αρνητικό α :

$$Pr[X \geq \alpha] \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

Επιπλέον θα χρησιμοποιήσουμε τα φράγματα Chernoff. Έστω $X = \sum_{i=1}^n X_i$, όπου X_1, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, τότε αν $\mu = E[X]$, για κάθε μη-αρνητικό δ :

$$Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{2+\delta}} \text{ για κάθε } \delta > 0$$

$$Pr[X \leq (1 - \delta)\mu] \leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{2}} \text{ για κάθε } 0 < \delta < 1$$

Μια σημαντική ανισότητα που θα χρησιμοποιούμε κατά την διάρκεια αυτού του κεφαλαίου είναι η ανισότητα του Φράγματος-Ένωσης (Union-Bound), η οποία ορίζει πως για κάθε πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο γεγονότων, η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα να συμβεί είναι το πολύ ίση με το άθροισμα των μεμονωμένων γεγονότων:

$$Pr\left[\bigcup_i A_i\right] \leq \sum_i Pr[A_i]$$

Η τελευταία ανισότητα βασισμένη στην θεωρία πιθανοτήτων είναι οι κανόνες του De Morgan. Δεδομένου δύο γεγονότων A και B , ισχύουν τα εξής:

$$Pr[A \cup B] = 1 - Pr[\neg A \cap \neg B]$$

$$Pr[A \cap B] = 1 - Pr[\neg A \cup \neg B]$$

Μια άλλη ανισότητα που θα βασιστούμε, είναι η Ανισότητα Cauchy-Schwarz η οποία για οποιαδήποτε δύο διανύσματα $u = \langle u_1, u_2, \dots, u_d \rangle$ και $v = \langle v_1, v_2, \dots, v_d \rangle$, φράζει:

$$\sum_{i=1}^d u_i v_i \leq \sqrt{\sum_{j=1}^d |u_j|^2 \sum_{k=1}^d |u_k|^2}$$

Άλλη σημαντική ανισότητα είναι η Ανισότητα Αριθμητικού Μέσου - Γεωμετρικού Μέσου (Ανισότητα AM-ΓΜ) που αποδείχτηκε από τον Cauchy. Για κάθε σειρά μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών x_1, x_2, \dots, x_d , ισχύει η επόμενη ανισότητα:

$$\sqrt[d]{\prod_{i=1}^d x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^d x_i}{d} \Leftrightarrow \prod_{i=1}^d x_i \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^d x_i}{d}\right)^d$$

Η τελευταία ανισότητα που χρησιμοποιούμε είναι η εξής:

$$H_n - 1 < \ln(n) < H_n \quad (3.1)$$

Θα παρουσιάσουμε μια σύντομη απόδειξη για την (3.1).

Απόδειξη. Έστω $f(x) = \frac{1}{x}$, αφού η $f(x)$ είναι φθίνουσα, ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n f(i) &< \int_1^n f(x)dx < \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \\ \Rightarrow H_n - 1 &< \ln(n) < H_{n-1} < H_n \end{aligned}$$

□

Όταν χρησιμοποιούμε τις τέσσερις πρώτες ανισότητες, τις αποκαλούμε με το όνομά τους. Την τελευταία ανισότητα την αποκαλούμε με τον αριθμό της, αφού όσο γνωρίζουμε δεν έχει κάποια ονομασία.

Εδώ θα δώσουμε μερικές συμβολισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Με H_n ορίζουμε το άθροισμα των πρώτων n όρων της αρμονικής σειράς. Έστω P ένα αυθαίρετο διατεταγμένο σύνολο, με P^π ορίζουμε τα σημεία του P αναδιατεταγμένα μέσω του π και με P_k^π ορίζουμε τα πρώτα k σημεία του P^π . Για δύο οποιοδήποτε σημεία u, v στο R^d , μέσω $d(u, v)$ ορίζουμε την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων u και v στο R^d .

Τώρα αποδεικνύουμε πως ένα μονοπάτι στο οποίο κάθε επόμενος κόμβος κυριαρχεί τον προηγούμενο, διασχίζει το πολύ \sqrt{d} φορές την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των άκρων του.

Θεώρημα 9. Έστω $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ σημεία στο R^d έτσι ώστε $p_{i+1} \succeq p_i$ για κάθε $1 \leq i < n$. Τότε $\sum_{i=1}^{n-1} d(p_i, p_{i+1}) \leq \sqrt{d} \cdot d(p_1, p_n)$.

Απόδειξη. Έστω $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ και $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$ δύο σημεία έτσι ώστε $b \succeq a$. Αρχικά σημειώνουμε πως:

$$d(a, b) = \sqrt{\sum_{j=1}^d (b_j - a_j)^2} \leq \sum_{j=1}^d |b_j - a_j| = \sum_{j=1}^d (b_j - a_j) \quad (3.2)$$

Η απόδειξη είναι άμεση αν τετραγωνίσουμε και τις δύο μεριές τις ανισότητας και αφού υποθέσαμε πως $b \succeq a$, έχουμε πως $b_j \geq a_j$ το οποίο έπεται πως $|b_j - a_j| = b_j - a_j$.

Αν υποθέσουμε πως για κάθε σημείο $p_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,d})$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} d(p_i, p_{i+1}) &\stackrel{(3.2)}{\leq} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^d (a_{i+1,j} - a_{i,j}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1,j} - a_{i,j}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1,j} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^d (a_{n,j} - a_{1,j}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Τώρα προσπαθούμε να φράξουμε τον όρο $\sum_{j=1}^d (a_{n,j} - a_{1,j})$. Από την ανισότητα Cauchy-Swartz, για κάθε σειρά $u = \langle u_1, \dots, u_d \rangle$ και $v = \langle v_1, v_2, \dots, v_d \rangle$ με d όρους έχουμε πως:

$$\sum_{i=1}^d u_i v_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^d u_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^d v_i^2 \right)}$$

Αν θέσουμε $u_i = a_{n,i} - a_{1,i}$ και $v_i = 1$, τότε έχουμε:

$$\sum_{i=1}^d (a_{n,i} - a_{1,i}) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^d (a_{n,i} - a_{1,i})^2\right) \cdot d} = \sqrt{d} \cdot d(p_n, p_1) \quad (3.4)$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (3.3) και (3.4) καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$(3.3) \stackrel{(3.4)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n-1} d(p_i, p_{i+1}) \leq \sqrt{d} \cdot d(p_n, p_1)$$

□

3.3 Φράγμα Συγκέντρωσης για τον Αριθμό των Σημείων που Κυριαρχούν Απευθείας την Αρχή των Αξόνων

Σε αυτό το κεφάλαιο στρέφουμε την προσοχή μας για να βρούμε ιδιότητες για την κατανομή του μεγέθους του υποσυνόλου ενός συνόλου σημείων P τα οποία κυριαρχούν απευθείας την αρχή των αξόνων με βάση το P . Κάτω από κάποιες υποθέσεις "ανεξαρτησίας", ο αριθμός των μεγίστων σε ένα σύνολο διανυσμάτων και το μέγεθος του μέγιστου υποσυνόλου το οποίο κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων, μοιράζονται την ίδια κατανομή. Μια διαίσθηση πίσω από αυτήν την ιδέα είναι πως ο αριθμός των μεγίστων σε ένα σύνολο διανυσμάτων είναι το μέγιστο υποσύνολο το οποίο κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων στην $1 \dots 1$ κατεύθυνση. Επεκτείνουμε τα αποτελέσματα των Bentley et. al. [Bent78] και του Buchta [Buch89] οι οποίοι απέδειξαν πως ο μέσος αριθμός των μεγίστων στο R^d κάτω από κάποιες συνθήκες "ανεξαρτησίας" είναι $O(\log^{d-1}(n))$.

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε την απόδειξη για το φράγμα των αριθμών των σημείων που κυριαρχούν απευθείας την αρχή των αξόνων. Η διαίσθηση στην απόδειξη είναι πως μπορούμε να φράξουμε με πολύ μεγάλη πιθανότητα, την πιθανότητα ένα σημείο το οποίο κατανέμεται "ανεξάρτητα" να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων με βάση τα ήδη υπάρχον σημεία.

Λήμμα 14. Έστω σύνολο P με m σημεία στο R^d έτσι ώστε όλα τα σημεία στο P κυριαρχούν την αρχή των αξόνων και έστω $n \geq m$. Αν τα σημεία στο P κατανέμονται ανεξάρτητα και κάθε συντεταγμένη κατανέμεται ανεξάρτητα στο R^d και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, τότε για κάθε διάνυσμα $(i_1, i_2, \dots, i_{d-1})$ με μη-αρνητικούς όρους, με πιθανότητα το πολύ $\frac{1}{n^k}$, δεν υπάρχει σημείο $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ στο P έτσι ώστε

$$p_j \leq 2^{-i_j} \quad \text{αν } 1 \leq j < d$$

$$p_d \leq \min\left(1, k \cdot 2^i \frac{\ln(n)}{m}\right) \text{ διαφορετικά}$$

όπου $i = \sum_{j=1}^d i_j$.

Απόδειξη. Η πιθανότητα ένα σημείο στο R^d όπου κάθε του συντεταγμένη του κατανέμεται ανεξάρτητα και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, να μην κείται στην απαγορευμένη περιοχή είναι $\prod_{j=1}^d \frac{1}{2^{i_j}} \cdot \min\left(1, k \cdot 2^i \frac{\ln(n)}{m}\right) \leq k \frac{\ln(n)}{m}$. Παρατηρώντας πως:

$$1 - x \leq e^{-x} \quad (3.5)$$

Επειδή όλα τα m σημεία κατανέμονται ανεξάρτητα, η πιθανότητα κανένα από τα m σημεία να κείται στην απαγορευμένη περιοχή είναι:

$$\begin{aligned}
\left(1 - k \cdot \frac{\ln(n)}{m}\right)^{m(3.5)} &\leq e^{-k \cdot \frac{\ln(n)}{m} \cdot m} \\
&= e^{-k \cdot \ln(n)} \\
&= \frac{1}{n^k}
\end{aligned}$$

□

Με την βοήθεια από το Λήμμα 14, μπορούμε να φράξουμε την πιθανότητα πως συγκεκριμένοι υποχώροι περιέχουν τουλάχιστον ένα σημείο. Το επόμενο λήμμα φράζει την πιθανότητα ένα σημείο να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων.

Λήμμα 15. Έστω σύνολο P με m σημεία στο R^d έτσι ώστε όλα τα σημεία στο P να κυριαρχούν την αρχή των αξόνων και έστω $n \geq m$. Αν τα σημεία στο P κατανέμονται ανεξάρτητα και κάθε συντεταγμένη κατανέμεται ανεξάρτητα στο R^d και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο στο $(0, 1)$, τότε με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \frac{[\log_2(m)]^{d-1}}{n^k}$, ένα νέο σημείο p στο R^d όπου κάθε συντεταγμένη κατανέμεται ανεξάρτητα και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο στο $(0, 1)$, έχει πιθανότητα το πολύ $\frac{d}{m} + \frac{k \ln(n)}{m} + \frac{k \ln^d(n)}{m}$ να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων με βάση το P .

Απόδειξη. Η απόδειξη χωρίζεται σε δύο μέρη, στο πρώτο μέρος με βοήθεια από το Λήμμα 14 αποδεικνύουμε πως με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \frac{[\log_2(m)]^{d-1}}{n^k}$, υπάρχουν $[\log_2(m)]^{d-1}$ σημεία σε συγκεκριμένους υποχώρους. Στο δεύτερο μέρος δεδομένου της ύπαρξης αυτών των σημείων, η πιθανότητα ενός νέου σημείου να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων είναι το πολύ $\frac{d}{m} + \frac{k \ln(n)}{m} + \frac{k \ln^d(n)}{m}$.

Ορίζουμε ως $A(i_1, i_2, \dots, i_{d-1})$ το γεγονός πως τουλάχιστον ένα σημείο $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ που ανήκει στο P να κείται στον υποχώρο:

$$\begin{aligned}
p_j &\leq 2^{-i_j} && \text{αν } 1 \leq j < d \\
p_d &\leq \min\left(1, k \cdot 2^i \frac{\ln(n)}{m}\right) && \text{διαφορετικά}
\end{aligned}$$

όπου $i = \sum_{k=1}^d i_k$. Σημειώνουμε πως το Λήμμα 14 μεταφράζεται ως $Pr[\neg A(i_1, i_2, \dots, i_{d-1})] \leq \frac{1}{n^k}$. Θέτοντας $i_j = 1, 2, \dots, [\log_2(m)]$ για κάθε $1 \leq j \leq d-1$, θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα τουλάχιστον ένα σημείο στο P να κείται σε κάθε έναν από τους $[\log_2(m)]^{d-1}$ υποχώρους $\left(Pr\left[\bigcap_{i_1, i_2, \dots, i_{d-1}} A(i_1, i_2, \dots, i_{d-1})\right]\right)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Φράγματος-Ένωσης έχουμε πως:

$$Pr\left[\bigcup_{i_1, \dots, i_{d-1}} \neg A(i_1, \dots, i_{d-1})\right] \leq \frac{[\log_2(m)]^{d-1}}{n^k}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα De-Morgan Rule, έχουμε πως:

$$\begin{aligned}
Pr\left[\bigcap_{i_1, \dots, i_{d-1}} A(i_1, \dots, i_{d-1})\right] &= 1 - Pr\left[\bigcup_{i_1, \dots, i_{d-1}} \neg A(i_1, \dots, i_{d-1})\right] \\
&\geq 1 - \frac{[\log_2(m)]^{d-1}}{n^k}
\end{aligned}$$

Επομένως με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \frac{[\log_2(m)]^{d-1}}{n^k}$, υπάρχει ένα σημείο σε κάθε έναν από τους $[\log_2(m)]^{d-1}$ υποχώρους. Σημειώνουμε πως η "χειρότερη" περίπτωση με την έννοια της κυριαρχίας

για ένα σημείο $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ σε κάθε υποχώρο είναι όταν:

$$p_j = 2^{-i_j} \quad \text{if } 1 \leq j < d$$

$$p_d = \min \left(1, k \cdot 2^i \frac{\ln(n)}{m} \right) \quad \text{otherwise}$$

Αυτό είναι αληθές επειδή για οποιοδήποτε άλλο σημείο u σε αυτόν τον υποχώρο και ένα τυχαίο σημείο v , έχουμε πως αν $v \succ p \Rightarrow v \succ u$, η αντίθετη κατεύθυνση δεν είναι πάντα αληθής.

Από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε στα $\lceil \log_2(m) \rceil^{d-1}$ σημεία ως τα "διαλεγμένα" σημεία. Η πιθανότητα ένα νέο σημείο να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων είναι τουλάχιστον η πιθανότητα το νέο σημείο να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων με βάση τα "διαλεγμένα" σημεία με την πιθανότητα να υπάρχουν. Προκειμένου το νέο σημείο u να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων στην δεύτερη περίπτωση, πρέπει κανένα από τα "επιλεγμένα" σημεία να μην το κυριαρχεί. Η ελάχιστη τιμή για κάθε μία από τις $d - 1$ συντεταγμένες των "επιλεγμένων" σημείων είναι $2^{-\lceil \log_2(m) \rceil} \leq 2^{-\log_2(m)} = \frac{1}{m}$. Επομένως αν τουλάχιστον μία από τις πρώτες $d - 1$ συντεταγμένες του u είναι μικρότερη από $\frac{1}{m}$, τότε u κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Φράγματος-Ενωσης στην πιθανότητα τουλάχιστον μια από τις πρώτες $d - 1$ συντεταγμένες είναι μικρότερη από $\frac{1}{m}$ είναι το πολύ $\frac{d-1}{m} < \frac{d}{m}$, αφού κάθε μία από τις συντεταγμένες του κατανέμεται ανεξάρτητα και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$.

Αν υποθέσουμε πως κάθε μία από τις πρώτες $d - 1$ συντεταγμένες του u είναι μεγαλύτερη από $\frac{1}{m}$, τότε τουλάχιστον ένα από τα "επιλεγμένα" σημεία κυριαρχεί το u στις πρώτες $d - 1$ συντεταγμένες. Σημειώνουμε πως ανάμεσα στα "επιλεγμένα" σημεία που κυριαρχούν το u , αυτό με τις μεγαλύτερες τιμές σε κάθε από τις $d - 1$ συντεταγμένες είναι πιο πιθανό να κυριαρχεί το u . Αυτό είναι αλήθεια επειδή η τελευταία συντεταγμένη του u πρέπει να είναι μεγαλύτερη από $\min \left(1, k \cdot 2^i \frac{\ln(n)}{m} \right)$, το οποίο είναι μέγιστο με την μεγιστοτική τιμή του $(i_1, i_2, \dots, i_{d-1})$. Κάθε ένα από τα "επιλεγμένα" σημεία με δείκτες (i_1, i_2, \dots, i_d) κυριαρχούν μεγιστοτικά τα σημεία στο R^{d-1} σε κάθε συντεταγμένη από το 2^{-i_k} μέχρι το $2^{-(i_k-1)}$, επομένως η πιθανότητα κάποιο από τα "επιλεγμένα" να κυριαρχούν μεγιστοτικά το u στις πρώτες $d - 1$ συντεταγμένες είναι:

$$\prod_{k=1}^d \left(2^{-(i_k-1)} - 2^{-i_k} \right) = \prod_{k=1}^d \left(2^{-i_k+1} - 2^{-i_k} \right)$$

$$= \prod_{k=1}^d 2^{-i_k}$$

$$= 2^{-i} \quad (3.6)$$

όπου $i = \sum_{j=1}^d i_j$. Επιπλέον, η πιθανότητα το u να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων, το οποίο σημαίνει να μην κυριαρχείται από κανένα από τα "επιλεγμένα" σημεία, είναι η πιθανότητα να κυριαρχείται από κάποιο από τα "επιλεγμένα" σημεία με μεγιστοτικούς δείκτες και έχει την τελευταία συντεταγμένη μικρότερη. Επομένως η πιθανότητα το u να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων, όταν κυριαρχείται στο R^{d-1} από ένα από τα "επιλεγμένα" σημεία είναι:

$$(3.6) \Rightarrow 2^{-i} \cdot \min \left(1, k \cdot 2^i \frac{\ln(n)}{m} \right) \leq 2^{-i} \cdot k \cdot 2^i \frac{\ln(n)}{m}$$

$$= k \cdot \frac{\ln(n)}{m} \quad (3.7)$$

Με βάση τα "επιλεγμένα" σημεία, η πιθανότητα ένα νέο σημείο να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων είναι είτε όταν τουλάχιστον μια από τις πρώτες $d - 1$ συντεταγμένες είναι μικρότερη από $\frac{1}{m}$ ή για κάθε ένα από τα "επιλεγμένα" σημεία στον υποχώρο που το κυριαρχεί μεγιστοτικά, να έχει μικρότερη την τελευταία συντεταγμένη. Η πιθανότητα ένα νέο σημείο να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων και να κυριαρχείται μεγιστοτικά από ένα από τα "επιλεγμένα" σημεία, σύμφωνα

με την σχέση (3.7) είναι $k \cdot \frac{\ln(n)}{m}$. Επομένως μέσω του κανόνα Φράγματος-Ένωσης η πιθανότητα το u να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων είναι το πολύ:

$$\frac{d}{m} + \lceil \log_2(m) \rceil^{d-1} \cdot k \cdot \frac{\ln(n)}{m} \leq \frac{d}{m} + \frac{k \ln(n)}{m} + \frac{k \ln^d(n)}{m}$$

με πιθανότητα $\frac{\lceil \log_2(m) \rceil^{d-1}}{n^k}$. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε πως με πολύ μεγάλη πιθανότητα, μπορούμε να φράξουμε τον αριθμό των σημείων που κυριαρχούν απευθείας την αρχή των αξόνων σε ένα σύνολο P με κάποιες υποθέσεις "ανεξαρτησίας".

Λήμμα 16. Έστω σύνολο P με n σημεία στο R^d έτσι ώστε κάθε σημείο στο P κυριαρχεί την αρχή των αξόνων $p = (0, 0, \dots, 0)$ και έστω $A = |\{a : a \in P \text{ και } a \succ p\}|$. Αν τα σημεία στο P κατανέμονται ανεξάρτητα και κάθε συντεταγμένη κατανέμεται ανεξάρτητα στο R^d , τότε:

$$Pr \left[A \geq 3 \cdot \left((d-1) \cdot (\ln(n) + 1) + 3k \cdot \ln^d(n) \right) \right] \leq \frac{\lceil \log_2(n) \rceil^{d-1}}{n^{k-1}} + \frac{1}{n^{2(d-1)}}$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε την αναδιάταξη π των σημείων του P , έτσι ώστε να έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά με βάση την πρώτη τους συντεταγμένη, σημειώνουμε πως $P_n^\pi = P^\pi$.

Έστω $P^\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, επειδή τα σημεία στο P^π ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά με βάση την πρώτη τους συντεταγμένη, για κάθε δύο σημεία $p_i = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ και $p_j = (b_1, b_2, \dots, b_d)$ έτσι ώστε $i < j$, ισχύει πως $a_1 < b_1$ το οποίο σημαίνει πως το p_j δεν μπορεί να κυριαρχεί το p_i . Επομένως η πιθανότητα το p_i να κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων στο R^d , είναι το p_i να μην κυριαρχείται από κάποιο σημείο στο P_{i-1}^π .

Έστω B_i η τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε $B_i = 1$ αν το p_i κυριαρχεί απευθείας την αρχή των αξόνων με βάση την νέα διάταξη, διαφορετικά $B_i = 0$, παρατηρούμε πως $A = \sum_{i=1}^n B_i$. Επειδή έχουμε υποθέσει πως τα σημεία στο P κατανέμονται ανεξάρτητα και κάθε τους συντεταγμένη κατανέμεται ανεξάρτητα, έχουμε πως το p_i πρέπει να μην κυριαρχείται στις πρώτες $d-1$ συντεταγμένες από κάποιο σημείο στο P_{i-1}^π . Σύμφωνα με το Λήμμα 15 έχουμε πως:

$$Pr \left[B_i \geq \frac{d-1}{i} + k \cdot \frac{\ln(n)}{i} + k \cdot \frac{\ln^{d-1}(n)}{i} \right] \leq \frac{\lceil \log_2(i) \rceil^{d-1}}{n^k}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Φράγματος-Ένωσης έχουμε πως:

$$Pr \left[\bigcup_{i=1, \dots, n} B_i \geq \frac{d-1}{i} + k \cdot \frac{\ln(n)}{i} + k \cdot \frac{\ln^{d-1}(n)}{i} \right] \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lceil \log_2(i) \rceil^{d-1}}{n^k} \leq \frac{\lceil \log_2(n) \rceil^{d-1}}{n^{k-1}}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του De-Morgan έχουμε πως:

$$\begin{aligned} & Pr \left[\bigcap_{i=1, \dots, n} B_i \leq \frac{d-1}{i} + k \cdot \frac{\ln(n)}{i} + k \cdot \frac{\ln^{d-1}(n)}{i} \right] \\ &= 1 - Pr \left[\bigcup_{i=1, \dots, n} B_i \geq \frac{d-1}{i} + k \cdot \frac{\ln(n)}{i} + k \cdot \frac{\ln^{d-1}(n)}{i} \right] \\ &\geq 1 - \frac{\lceil \log_2(n) \rceil^{d-1}}{n^{k-1}} \end{aligned}$$

Επομένως με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \frac{[\log_2(n)]^{d-1}}{n^{k-1}}$, έχουμε πως $B_i \leq \frac{d-1}{i} + k \cdot \frac{\ln(n)}{i} + k \cdot \frac{\ln^{d-1}(n)}{i}$. Έστω τυχαία μεταβλητή C η οποία είναι το άθροισμα n ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli C_i , όπου $C_i = \frac{d-1}{i} + k \cdot \frac{\ln^{d-1}(n)}{i} + k \cdot \frac{\ln^{d-1}(n)}{i}$. Επομένως με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \frac{[\log_2(n)]^{d-1}}{n^{k-1}}$, έχουμε πως $Pr[C_i = 1] \geq Pr[B_i = 1]$ το οποίο σημαίνει πως $Pr[C > A] \geq 1 - \frac{[\log_2(n)]^{d-1}}{n^{k-1}}$.

Επιπλέον, σημειώνουμε πως $E[C_i] = \min\left(1, \frac{d-1}{i} + k \cdot \frac{\ln(n)}{i} + k \cdot \frac{\ln^{d-1}(n)}{i}\right)$. Μπορούμε να υποθέσουμε πως $E[C_i] = \frac{d-1}{i} + k \cdot \frac{\ln(n)}{i} + k \cdot \frac{\ln^{d-1}(n)}{i}$ (αν $E[C_i] > 1$ τότε μπορούμε να υποθέσουμε πως η τυχαία μεταβλητή είναι το άθροισμα $\lceil E[C_i] \rceil$ ανεξάρτητων τυχαίων δοκιμών Bernoulli όπου η αναμενόμενη τιμή για τις πρώτες $\lfloor E[C_i] \rfloor$ μεταβλητές, είναι 1 και για την τελευταία είναι $E[C_i] - \lfloor E[C_i] \rfloor$). Μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα για την μέση τιμή:

$$\begin{aligned}
E[C] &= \sum_{i=1}^n E[C_i] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{d-1}{i} + k \cdot \frac{\ln(n)}{i} + k \cdot \frac{\ln^{d-1}(n)}{i} \\
&= (d-1) \cdot H_n + k \cdot \ln(n) \cdot H_n + k \cdot \ln^{d-1}(n) \cdot H_n \\
&\stackrel{(3.1)}{\leq} (d-1) \cdot (\ln(n) + 1) + k \cdot (\ln(n) + \ln^2(n) + \ln^{d-1}(n) + \ln^d(n)) \\
&\stackrel{2 \leq \ln(n)}{\leq} (d-1) \cdot (\ln(n) + 1) + 3k \cdot \ln^d(n)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Επιπλέον θα χρειαστούμε ένα κάτω φράγμα για την μέση τιμή:

$$\begin{aligned}
E[C] &= \sum_{i=1}^n E[C_i] \\
&= (d-1) \cdot H_n + k \cdot \ln(n) \cdot H_n + k \cdot \ln^{d-1}(n) \cdot H_n \\
&\stackrel{(3.1)}{\geq} \ln(n) \cdot ((d-1) + k \cdot \ln(n) + k \cdot \ln^{d-1}(n)) \\
&\geq \ln(n) \cdot (d-1)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Εφαρμόζοντας το φράγμα Chernoff με $\mu = (d-1) \cdot H_n + k \cdot \ln(n) \cdot H_n + k \cdot \ln^{d-1}(n) \cdot H_n$ και $\delta = 2$, έχουμε πως:

$$\begin{aligned}
Pr[A \geq (1+\delta)(d-1) \cdot \ln(n) + k \cdot \ln^2(n) + k \cdot \ln^d(n)] &\leq e^{-2 \frac{\delta^2}{2+\delta} \mu} \\
\Rightarrow Pr[A \geq 3((d-1) \cdot \ln^2(n) + k \cdot \ln(n) + k \cdot \ln^d(n))] &= e^{-2 \frac{4}{4} \mu} \\
&\leq e^{-2 \ln(n) \cdot ((d-1) + k \cdot \ln^{d-1}(n))} \\
&= n^{-2((d-1) + k \cdot \ln^{d-1}(n))} \\
&\leq n^{-2(d-1)}
\end{aligned}$$

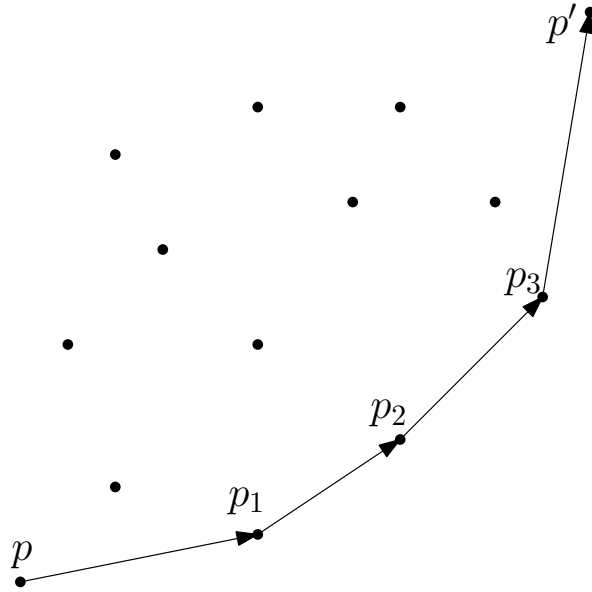
Εφαρμόζοντας τον κανόνα Φράγματος-Ένωσης το λήμμα τώρα αποδείχθηκε. Σημειώνουμε πως αν το σύνολο P περιέχει $k < n$ σημεία, η ίδια ανισότητα ισχύει. \square

3.4 Φράγμα Συγκέντρωσης για τον Αριθμό Βημάτων

Τώρα θα εξερευνήσουμε το μέγιστο αριθμό βημάτων του γραφήματος μας. Για να καταφέρουμε να έχουμε μικρό αριθμό βημάτων στο γράφημα, χρησιμοποιούμε τον Αλγόριθμο 3.1.

Στο Σχήμα 3.4 παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα ενός μονοπατιού από το p στο p' όπως παράγεται από τον Αλγόριθμο 3.1.

Πρώτα αποδεικνύουμε ένα λήμμα το οποίο αποτελεί θεμέλιο στην απόδειξή μας.



Σχήμα 3.4: Παράδειγμα του μονοπατιού από το p στο p' , όπως παράγεται από τον Αλγόριθμο 3.1.

Αλγόριθμος 3.1: Τοπική Δρομολόγηση

Διαδικασία Τοπική Δρομολόγηση (T)

Είσοδος: Τρέχον κόμβος: p , Τελικός κόμβος προορισμού $p' = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in R^d$ και λίστα κόμβων L τους οποίους κυριαρχεί απευθείας ο p .

Έξοδος: Επόμενος κόμβος u .

για κάθε κόμβο $v = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in L$:

 Ανάθεσε τον κόμβο u στον κόμβο στην L με ελάχιστο a_d έτσι ώστε $p' \succeq p$

Λήμμα 17. Για ένα σημείο $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ στο R^d , αν a_1, a_2, \dots, a_d κατανέμονται ανεξάρτητα και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, τότε $Pr \left[\prod_{j=1}^d 1 - u_j \leq \frac{1}{2^d} \right] \geq \frac{1}{2}$.

Απόδειξη. Για κάθε σημείο $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ έτσι ώστε $\sum_{j=1}^d u_j \leq \frac{d}{2}$, για το σημείο $u' = (1 - u_1, 1 - u_2, \dots, 1 - u_d)$ ισχύει πως $\sum_{j=1}^d 1 - u_j \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$. Επιπλέον, για οποιοδήποτε σημείο $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ έτσι ώστε $\sum_{j=1}^d u_j \geq \frac{d}{2} \Rightarrow \sum_{j=1}^d 1 - u_j \leq \frac{d}{2}$, τότε από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε πως:

$$\prod_{j=1}^d 1 - u_j \leq \left(\frac{\sum_{j=1}^d 1 - u_j}{d} \right)^d \leq \left(\frac{\frac{d}{2}}{d} \right)^d = \frac{1}{2^d}$$

Επομένως, για ένα τυχαίο σημείο $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ έτσι ώστε τα u_1, u_2, \dots, u_d κατανέμονται ανεξάρτητα και ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, ισχύει το εξής:

$$Pr \left[\prod_{j=1}^d 1 - u_j \leq \frac{1}{2^d} \right] \geq \frac{1}{2}$$

□

Λήμμα 18. Έστω τυχαία μεταβλητή A ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $B(n, p)$, τότε $Pr [A \leq \max(2np, 1)] > \frac{1}{2}$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Μαρκον λαμβάνοντας περιπτώσεις ανάλογα με το αν $np > 1$.

Αν $np \leq 1$: Από την ανισότητα Markov έχουμε πως:

$$Pr [B(n, p) \geq 2] \leq \frac{E [B(n, p)]}{2} = \frac{np}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Το οποίο σημαίνει πως:

$$Pr [B(n, p) \leq 1] = Pr [B(n, p) < 2] = 1 - Pr [B(n, p) \geq 2] \geq \frac{1}{2}$$

Αν $np > 1$: Από την ανισότητα Markov έχουμε πως:

$$\begin{aligned} Pr [B(n, p) > 2 \cdot E [B(n, p)]] &< Pr [B(n, p) \geq 2 \cdot E [B(n, p)]] \\ &\leq \frac{E [B(n, p)]}{2 \cdot E [B(n, p)]} \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Το οποίο σημαίνει πως:

$$\begin{aligned} Pr [B(n, p) \leq 2 \cdot np] &= Pr [B(n, p) \leq 2 \cdot E [B(n, p)]] \\ &= 1 - Pr [B(n, p) > 2 \cdot E [B(n, p)]] \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, με πιθανότητα τουλάχιστον $\frac{1}{2}$ έχουμε πως $B(n, p) \leq \max(2np, 1)$. \square

Το επόμενο λήμμα είναι πολύ χρήσιμο επειδή μας βοηθάει να φράξουμε τον αριθμό των εκτιμώμενων σημείων που κυριαρχούν το επόμενο σημείο που προωθούμε.

Λήμμα 19. Έστω σύνολο P με n σημεία και δύο σημεία p και p' στο R^d έτσι ώστε για οποιοδήποτε σημείο $a \in P$ ισχύει πως $a \succeq p$ και $p' \succeq a$. Έστω u ο κόμβος εξόδου από τον Αλγόριθμο 3.1 και $A = \{a : a \in P \text{ και } a \succeq u\}$. Αν τα σημεία στο P κατανέμονται ανεξάρτητα και κάθε συντεταγμένη τους ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, τότε:

$$Pr \left[|A| \leq \max \left(\frac{n}{2^{d-1}}, 1 \right) \right] \geq \frac{1}{4}$$

Απόδειξη. Έστω $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ το σημείο που επιλέχτηκε από τον Αλγόριθμο 3.1. Αφού έχουμε υποθέσει πως τα σημεία στο P κατανέμονται ανεξάρτητα και κάθε τους συντεταγμένη κατανέμεται ανεξάρτητα και κανένα άλλο σημείο $v \in P$ έτσι ώστε $p \succeq v$ μπορεί να κυριαρχηθεί από το u επειδή το u έχει την ελάχιστη τελευταία συντεταγμένη, υποθέτουμε πως u_1, u_2, \dots, u_{d-1} κατανέμονται ανεξάρτητα και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$.

Σημειώνουμε πως $\prod_{j=1}^{d-1} 1 - u_j$ είναι η πιθανότητα ένα σημείο $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ στο P εκτός από το u να κυριαρχεί το u . Αυτό είναι αληθές επειδή από τον τρόπο που επιλέγεται το u , ισχύει πως $v_d > u_d$ και $Pr [v \succeq u] = Pr [v_j > u_j, \text{ για } d-1 \geq j \geq 1] = \prod_{j=1}^{d-1} 1 - u_j$ αφού κάθε συντεταγμένη κατανέμεται ανεξάρτητα και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$. Επομένως από το Λήμμα 17 έχουμε πως $Pr [Pr [v \succeq u] \leq \frac{1}{2^d}] \geq \frac{1}{2}$ για κάθε σημείο v στο P εκτός από το u .

Δεδομένου πως $Pr [v \succeq u] \leq \frac{1}{2^d}$ για κάθε σημείο στο P εκτός του u , και επειδή τα σημεία στο P κατανέμονται ανεξάρτητα, ο αριθμός των σημείων που κυριαρχούν το u ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(n-1, \frac{1}{2^d})$. Από το Λήμμα 18 έχουμε πως:

$$Pr \left[B \left(n-1, \frac{1}{2^d} \right) \leq \max \left(\frac{n}{2^{d-1}}, 1 \right) \right] \geq \frac{1}{2}$$

Επειδή όλες οι συντεταγμένες του u εκτός από την τελευταία κατανομονται ανεξάρτητα, οι πιθανότητες:

$$Pr [v \succeq u] \leq \frac{1}{2^d} \text{ για κάθε σημείο στο } P \text{ εκτός από το } u$$

$$Pr \left[B \left(n-1, \frac{1}{2^d} \right) \leq \max \left(\frac{n}{2^{d-1}}, 1 \right) \right]$$

είναι ανεξάρτητες, τότε $Pr [|A| \leq \max \left(\frac{n}{2^{d-1}}, 1 \right)] \geq \frac{1}{4}$ το οποίο γίνεται όταν και τα δύο συμβάντα συμβαίνουν. \square

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε πως με πολύ μεγάλη πιθανότητα, μπορούμε να φράξουμε τον αριθμό των βημάτων που πραγματοποιούνται από τον Αλγόριθμο 3.1.

Λήμμα 20. Έστω σύνολο P με n σημεία και σημεία p, p' στο R^d έτσι ώστε για κάθε σημείο $a \in P$ ισχύει πως $a \succeq p$ και $p' \succeq a$. Έστω $A = \{p, p_1, p_2, \dots, p_k, p'\}$ οι κόμβοι που ο Αλγόριθμος 3.1 εξάγει μέχρι να φτάσει τον προορισμό του, τον κόμβο p' . Αν τα σημεία στο P κατανομονται ανεξάρτητα και κάθε τους συντεταγμένη κατανέμεται ανεξάρτητα στο R^d , τότε:

$$Pr [|A| \geq 24 \cdot \lceil \log_2(n) \rceil] \leq \frac{1}{n^3}$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε πως σε κάθε βήμα i , το $p_i = (0, 0, \dots, 0)$ και $p' = (1, 1, \dots, 1)$ και για κάθε σημείο $u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in P$, το u_j ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$. Αυτό είναι αληθές αφού υποθέσαμε πως τα σημεία στο P κατανομονται ανεξάρτητα και κάθε συντεταγμένη κατανέμεται ανεξάρτητα στο R^d , τότε το μόνο πράγμα που έχει σημασία για τον αλγόριθμο είναι σειρά της κάθε συντεταγμένης, το οποίο είναι ανεξάρτητο από την κατανομή που ακολουθεί, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε πως ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$ αφού όλες οι κατανομές έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης μιας συγκεκριμένης διάταξης.

Αρχικά σημειώνουμε πως το πολύ $\left\lceil \frac{\log_2(n)}{d-1} \right\rceil$ σημεία στο A έτσι ώστε τα σημεία που παραμένουν να κυριαρχούν μειώνονται με γεωμετρικό λόγο $\frac{1}{2^{d-1}}$. Από το Λήμμα 19 έχουμε πως η πιθανότητα να βρούμε ένα τέτοιο σημείο είναι τουλάχιστον $\frac{1}{4}$ και ανεξάρτητα. Από αυτήν την παρατήρηση σημειώνουμε πως $Pr [A < k] \geq Pr \left[NB \left(\left\lceil \frac{\log_2(n)}{d-1} \right\rceil, \frac{1}{4} \right) < k \right]$ όπου $NB(r, p)$ είναι η αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους r και p .

Η μέση τιμή των αριθμό των βημάτων που χρειάζονται είναι

$$E \left[NB \left(\left\lceil \frac{\log_2(n)}{d-1} \right\rceil, \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{1}{4} \cdot \left\lceil \frac{\log_2(n)}{d-1} \right\rceil \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \left\lceil \frac{\log_2(n)}{d-1} \right\rceil \cdot \frac{1}{3}$$

Πρώτα από όλα σημειώνουμε πως αφού $d \geq 2$ έχουμε πως:

$$Pr \left[NB \left(\left\lceil \frac{\log_2(n)}{d-1} \right\rceil, \frac{1}{4} \right) > k \right] < Pr \left[NB \left(\lceil \log_2(n) \rceil, \frac{1}{4} \right) > k \right]$$

Επιπλέον παρατηρούμε πως $Pr [NB(a, p) \geq n] = Pr [B(n, p) < a]$, το οποίο σημαίνει πως:

$$Pr \left[NB \left(\lceil \log_2(n) \rceil, \frac{1}{4} \right) > k \right] = Pr \left[B \left(k, \frac{1}{4} \right) < \lceil \log_2(n) \rceil \right]$$

Αν θέσουμε $k = 4c \lceil \log_2(n) \rceil$ όπου c μια θετική σταθερά, έχουμε πως $E \left[B \left(k, \frac{1}{4} \right) \right] = c \lceil \log_2(n) \rceil$. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε πως θέτοντας $c = 6$ και $\delta = \frac{5}{6}$ έχουμε πως:

$$c(1 - \delta) = 1 \tag{3.10}$$

$$\log_2(e) \cdot \frac{c\delta^2}{2} > 3 \tag{3.11}$$

Επιπλέον από το φράγμα Chernoff έχουμε πως:

$$\begin{aligned} Pr [B(k, n) < (1 - \delta) c \lceil \log_2(n) \rceil] &< \frac{1}{e^{c \log_2(n) \cdot \frac{\delta^2}{2}}} \\ &= \frac{1}{n^{\log_2(e) \cdot \frac{c\delta^2}{2}}} \\ (3.10), (3.11) \quad \Rightarrow \quad Pr [B(k, n) < \lceil \log_2(n) \rceil] &< \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

Επομένως όταν $k = 24 \cdot \lceil \log_2(n) \rceil$ έχουμε πως:

$$\begin{aligned} Pr \left[NB \left(\lceil \log_2(n) \rceil, \frac{1}{4} \right) \geq 24 \cdot \lceil \log_2(n) \rceil \right] &= Pr [B(24 \cdot \lceil \log_2(n) \rceil, n) < \lceil \log_2(n) \rceil] \\ &\leq \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

□

3.5 Συνοψίζοντας

Μέχρι στιγμή έχουμε ασχοληθεί μόνο με σημεία που κυριαρχούν απευθείας την αρχή των αξόνων (κυριαρχούν απευθείας στην $00 \dots 0$ κατεύθυνση) και ο αλγόριθμος δρομολόγησης αναφέρεται όταν ο προορισμός κυριαρχεί την πηγή (κυριαρχεί στην $00 \dots 0$ κατεύθυνση). Οι υπόλοιπες $2^d - 1$ κατευθύνσεις είναι συμμετρικές με την $00 \dots 0$ κατεύθυνση αν σκεφτούμε το σύμβολο " \leq " και τον αντικαταστήσουμε με το " \geq ", το οποίο ουσιαστικά αντιστρέφει την σειρά. Επομένως η ανάλυση που κάναμε στην $00 \dots 0$ κατεύθυνση εφαρμόζεται σε όλες τις κατευθύνσεις.

Θεώρημα 10. Έστω σύνολο P με n σημεία στο R^d . Έστω $G(P, E)$ ένα γράφημα όπου

$$E = \{(u, v) : \exists c \text{ έτσι ώστε } u \succ_c v \text{ ή } v \succ_c u\}$$

Τότε για $k > 2$ ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} Pr [h(G) \geq 24 \cdot \lceil \log_2(n) \rceil] &\leq \frac{1}{n} \\ Pr \left[\Delta(G) \geq 3 \cdot 2^d \left((d-1) \cdot (\ln(n) + 1) + 3k \cdot \ln^d(n) \right) \right] &\leq \frac{2^d \cdot \lceil \log_2(n) \rceil^{d-1}}{n^{k-2}} + \frac{2^d}{n^{2(d-1)-1}} \end{aligned}$$

Απόδειξη. Το φράγμα για το $h(G)$ αποδεικνύεται αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Φράγματος-Ένωσης με τα $\binom{n}{2}$ ζευγάρια, όπου το καθένα έχει πιθανότητα το πολύ $\frac{1}{n^3}$ να συμβεί, σύμφωνα με το Λήμμα 20.

Το φράγμα για το $\Delta(G)$ αποδεικνύεται αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Φράγματος-Ένωσης αθροίζοντας για κάθε μια από τις 2^d κατευθύνσεις, και για κάθε μια από τις n κορυφές με πιθανότητα το πολύ:

$$Pr \left[A \geq 3 \cdot \left((d-1) \cdot (\ln(n) + 1) + 3k \cdot \ln^d(n) \right) \right] \leq \frac{\lceil \log_2(n) \rceil^{d-1}}{n^{k-1}} + \frac{1}{n^3}$$

σύμφωνα με το Λήμμα 16.

□

Βιβλιογραφία

- [Alam12] Soroush Alamdari, Timothy M. Chan, Elyot Grant, Anna Lubiw and Vinayak Pathak, “Self-approaching Graphs”, in *Graph Drawing - 20th International Symposium, GD 2012, Redmond, WA, USA, September 19-21, 2012, Revised Selected Papers*, pp. 260–271, 2012.
- [Ange10] Patrizio Angelini, Fabrizio Frati and Luca Grilli, “An Algorithm to Construct Greedy Drawings of Triangulations”, *Journal of Graph Algorithms and Applications*, vol. 14, no. 1, pp. 19–51, 2010.
- [Ange12] Patrizio Angelini, Enrico Colasante, Giuseppe Di Battista, Fabrizio Frati and Maurizio Patrignani, “Monotone Drawings of Graphs”, *Journal of Graph Algorithms and Applications*, vol. 16, no. 1, pp. 5–35, 2012.
- [Ange15] Patrizio Angelini, Walter Didimo, Stephen Kobourov, Tamara Mchedlidze, Vincenzo Roselli, Antonios Symvonis and Stephen Wismath, “Monotone Drawings of Graphs with Fixed Embedding”, *Algorithmica*, vol. 71, no. 2, pp. 233–257, 2015.
- [Bent78] Jon Louis Bentley, H. T. Kung, Mario Schkolnick and Clark D. Thompson, “On the Average Number of Maxima in a Set of Vectors and Applications”, *Journal of the ACM*, vol. 25, no. 4, pp. 536–543, 1978.
- [Berg92] Mark de Berg, Svante Carlsson and Mark H. Overmars, “A General Approach to Dominance in the Plane”, *Journal of Algorithms*, vol. 13, no. 2, pp. 274–296, 1992.
- [Boni16] Nicolas Bonichon, Prosenjit Bose, Paz Carmi, Irina Kostitsyna, Anna Lubiw and Sander Verdonschot, “Gabriel Triangulations and Angle-Monotone Graphs: Local Routing and Recognition”, in *Graph Drawing and Network Visualization - 24th International Symposium, GD 2016, Athens, Greece, September 19-21, 2016, Revised Selected Papers*, pp. 519–531, 2016.
- [Broc60] A. Brocot, “Calcul des rouages par approximation, nouvelle methode”, *Revue Chronometrique*, vol. 6, pp. 186–194, 1860.
- [Buch89] Christian Buchta, “On the Average Number of Maxima in a Set of Vectors”, *Information Processing Letters*, vol. 33, no. 2, pp. 63–65, 1989.
- [Carl06] Josiah Carlson and David Eppstein, “Trees with Convex Faces and Optimal Angles”, in *Graph Drawing, 14th International Symposium, GD 2006, Karlsruhe, Germany, September 18-20, 2006. Revised Papers*, pp. 77–88, 2006.
- [Dehk15] Hooman Reisi Dehkordi, Fabrizio Frati and Joachim Gudmundsson, “Increasing-Chord Graphs On Point Sets”, *Journal of Graph Algorithms and Applications*, vol. 19, no. 2, pp. 761–778, 2015.
- [Gian10] Panos Giannopoulos, Rolf Klein, Christian Knauer, Martin Kutz and Dániel Marx, “Computing Geometric Minimum-Dilation Graphs is NP-Hard”, *International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 20, no. 2, pp. 147–173, 2010.

- [Grah94] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2nd edition, 1994.
- [Guti89] Ralf Hartmut Güting, Otto Nurmi and Thomas Ottmann, “Fast Algorithms for Direct Enclosures and Direct Dominances”, *Journal of Algorithms*, vol. 10, no. 2, pp. 170–186, 1989.
- [He15] Xin He and Dayu He, “Compact Monotone Drawing of Trees”, in *Computing and Combinatorics - 21st International Conference, COCOON 2015, Beijing, China, August 4-6, 2015, Proceedings*, pp. 457–468, 2015.
- [He16] Dayu He and Xin He, “Nearly optimal monotone drawing of trees”, *Theoretical Computer Science*, vol. 654, pp. 26–32, 2016.
- [He17] Dayu He and Xin He, “Optimal Monotone Drawings of Trees”, *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 31, no. 3, pp. 1867–1877, 2017.
- [Hoss15] Md. Iqbal Hossain and Md. Saidur Rahman, “Good spanning trees in graph drawing”, *Theoretical Computer Science*, vol. 607, pp. 149–165, 2015.
- [Huan09] Weidong Huang, Peter Eades and Seok-Hee Hong, “A graph reading behavior: Geodesic-path tendency”, in *IEEE Pacific Visualization Symposium PacificVis 2009, Beijing, China, April 20-23, 2009*, pp. 137–144, 2009.
- [Icki99] Christian Icking, Rolf Klein and Elmar Langetepe, “Self-Approaching Curves”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 125, no. 3, pp. 441–453, 1999.
- [Kind14] Philipp Kindermann, André Schulz, Joachim Spoerhase and Alexander Wolff, “On Monotone Drawings of Trees”, in *Graph Drawing - 22nd International Symposium, GD 2014, Würzburg, Germany, September 24-26, 2014, Revised Selected Papers*, pp. 488–500, 2014.
- [Klei86] Rolf Klein, “Direct dominance of points”, *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 19, pp. 225–244, 1986.
- [Kung75] H. T. Kung, Fabrizio Luccio and Franco P. Preparata, “On Finding the Maxima of a Set of Vectors”, *Journal of the ACM*, vol. 22, no. 4, pp. 469–476, 1975.
- [Leig10] Tom Leighton and Ankur Moitra, “Some Results on Greedy Embeddings in Metric Spaces”, *Discrete & Computational Geometry*, vol. 44, no. 3, pp. 686–705, 2010.
- [Mast17] Konstantinos Mastakas and Antonios Symvonis, “Rooted Uniform Monotone Minimum Spanning Trees”, in Dimitris Fotakis, Aris Pagourtzis and Vangelis Th. Paschos, editors, *Algorithms and Complexity - 10th International Conference, CIAC 2017, Athens, Greece, May 24-26, 2017, Proceedings*, vol. 10236 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 405–417, 2017.
- [Oiko17a] Anargyros Oikonomou and Antonios Symvonis, “Simple Compact Monotone Tree Drawings”, *CoRR*, vol. abs/1708.09653, 2017.
- [Oiko17b] Anargyros Oikonomou and Antonios Symvonis, “Simple Compact Monotone Tree Drawings”, in Fabrizio Frati and Kwan-Liu Ma, editors, *Graph Drawing and Network Visualization - 25th International Symposium, GD 2017, Boston, MA, USA, September 25-27, 2017, Revised Selected Papers*, vol. 10692 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 326–333, Springer, 2017.

- [Over88] Mark H. Overmars and Derick Wood, “On Rectangular Visibility”, *Journal of Algorithms*, vol. 9, no. 3, pp. 372–390, 1988.
- [Papa05] Christos H. Papadimitriou and David Ratajczak, “On a conjecture related to geometric routing”, *Theoretical Computer Science*, vol. 344, no. 1, pp. 3–14, 2005.
- [Rao03] Ananth Rao, Christos H. Papadimitriou, Scott Shenker and Ion Stoica, “Geographic routing without location information”, in *Proceedings of the Ninth Annual International Conference on Mobile Computing and Networking, MOBICOM 2003, 2003, San Diego, CA, USA, September 14-19, 2003*, pp. 96–108, 2003.
- [Rote94] Günter Rote, “Curves with increasing chords”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 115, no. 1, pp. 1–12, 1994.
- [Ster58] M.A. Stern, “Ueber eine zahlentheoretische funktion”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 55, pp. 193–220, 1858.