



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ
ΠΡΟΕΝΤΕΤΑΜΕΝΩΝ ΤΑΙΝΙΩΤΩΝ ΣΤΕΓΩΝ**



**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΤΑΥΡΙΔΗΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ
ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ**

ΑΘΗΝΑ 2011

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	3
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή.....	4
Κεφάλαιο 2: Σχοινοειδείς φορείς	5
Κεφάλαιο 3: Τοξωτοί φορείς	8
Κεφάλαιο 4: Καλωδιωτοί φορείς	14
Κεφάλαιο 5: Η ακαμπτοποίηση του ανηρτημένου καλωδίου.....	17
Κεφάλαιο 6: Το πρόβλημα της ανηρτημένης δοκού.....	19
Κεφάλαιο 7: Το πρόβλημα του ταινιωτού συστήματος.....	27
Κεφάλαιο 8: Διαγράμματα σχεδιασμού.....	40
Κεφάλαιο 9: Αριθμητική εφαρμογή.....	53
Κεφάλαιο 10: Συμπεράσματα.....	54
Παράρτημα: Λογισμικό Fortran.....	56
Βιβλιογραφία.....	60

Πρόλογος

Η Στατική αποτελεί τη βάση της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού. Οι φορείς σχεδιάζονται με κριτήριο την διατήρηση της ακεραιότητας τους κατά την προβλεπόμενη διάρκεια ζωής τους, υπό το σύνολο των εξωτερικών δράσεων. Ανάλογα με τους σκοπούς που καλούνται να υπηρετούν οι κατασκευές, επιλέγεται η μορφή τους και τα χρησιμοποιούμενα υλικά. Η πληθώρα των επιλογών των δομικών φορέων είναι ανεξάντλητη και βασίζεται τόσο σε στατικά όσο και αισθητικά κριτήρια.

Κατά την διάρκεια του πενταετή κύκλου σπουδών στο Ε.Μ.Π δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στους γραμμικούς φορείς ενώ οι αναφορές σε άλλους τύπους φορέων όπως οι καμπύλοι φορείς ήταν περιορισμένες. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ουσιαστική κατανόηση της στατικής συμπεριφοράς καλωδιωτών και τοξοτών φορέων οι οποίοι έχουν ευρεία εφαρμογή σε έργα Πολιτικού Μηχανικού κυρίως μεγάλης κλίμακας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω προς τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Λ. Σταυρίδη ο οποίος τόσο κατά τη διάρκεια των σπουδών όσο και κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας συνέβαλε καθοριστικά στην καλλιέργεια της στατικής αντίληψής μου. Με την καθοδήγησή του και με την βοήθεια των συγγραμμάτων του η εξοικείωση με νέα προς εμένα κεφάλαια της Στατικής έγινε ευκολότερη και ουσιαστικότερη.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, για την συμπαράσταση και την υποστήριξη που μου προσφέρει πάντα, καθώς επίσης και την συμφοιτήτριά μου Χριστίνα για την πολύτιμη βοήθειά της κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Κωνσταντίνος Γεωργιάδης

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία αναλυτική μέθοδος για την άμεση ποσοτική εκτίμηση της όλης στατικής συμπεριφοράς ταινιωτών προεντεταμένων φορέων. Οι φορείς αυτοί αποτελούνται από καλώδια που σε όλο το μήκος τους επενδύονται με μια ταινία σκυροδέματος μικρού σχετικά πάχους το οποίο προεντείνεται δημιουργώντας ένα ανεστραμμένο τόξο. Η κατασκευαστική λύση των ταινιωτών προεντεταμένων φορέων έχει εφαρμοστεί τόσο για την κάλυψη μεγάλων χώρων με μορφή στεγών όσο και για την κατασκευή πεζογεφυρών.

Προκειμένου το πρόβλημα αυτό να γίνει καλύτερα αντιληπτό από τον αναγνώστη προηγείται η περιγραφή της στατικής συμπεριφοράς των σχοινοειδών φορέων. Πιο συγκεκριμένα, περιγράφεται η συμπεριφορά τοξοτών και καλωδιωτών φορέων, η ανάγκη ακαμπτοποίησης των ελεύθερα αναρτημένων καλωδίων καθώς και η κατασκευαστική διάταξη των ταινιωτών προεντεταμένων φορέων στην οποία οδηγούμαστε.

Η μαθηματική ανάλυση είναι βασισμένη σε μια αποκαθιστάμενη αναλογία μεταξύ της συμπεριφοράς του συστήματος καλωδίου-σκυροδέματος με την συμπεριφορά των κρεμαστών γεφυρών. Ακολουθώντας αυτή την αναλογία, η ανάλυση του ταινιωτού προεντεταμένου συστήματος επιτυγχάνεται με τη χρήση τριών αδιάστατων παραμέτρων και συγκεκριμένα τον λόγο του πάχους της ταινίας προς το μήκος του ανοίγματος (λόγος λεπτότητας α), τον λόγο της συνολικής διατομής των καλωδίων προς την ορθογωνική διατομή του φορέα (λόγος διατομών ρ) και τέλος τον λόγο του βέλους στο μέσο του παραβολικού τόξου προς το μήκος του ανοίγματος (λόγος χθαμαλότητας λ). Η συγκεκριμένη ανάλυση, βασισμένη σε μία αριθμητική διαδικασία, γίνεται με ένα απλό λογισμικό και επιτρέπει τον άμεσο καθορισμό της έντασης και της παραμόρφωσης του συστήματος λόγω ενός επιβεβλημένου κινητού φορτίου.

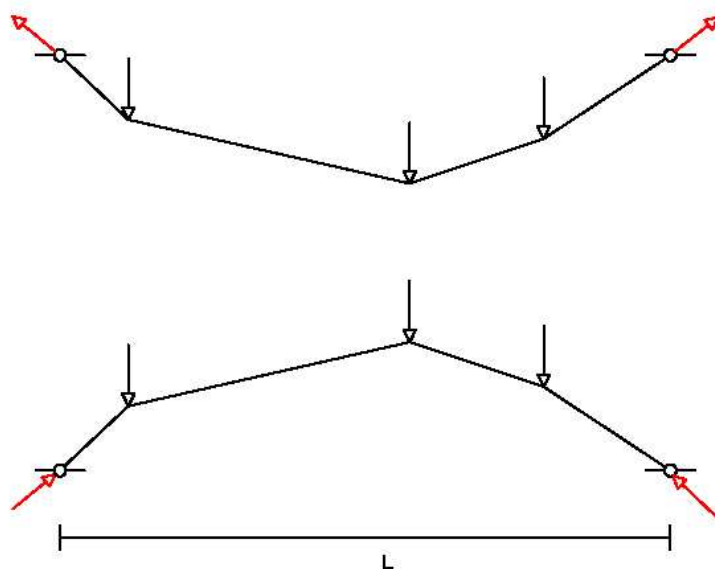
Οπωσδήποτε, η ανάπτυξη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση των φορέων, λόγω της ακρίβειας των αποτελεσμάτων και της ταχύτητας εκτέλεσης πολύπλοκων αναλύσεων περιόρισε τέτοιους τρόπους υπολογισμού που είναι βασισμένοι στη θεωρία παραμορφώσεων. Ωστόσο η μέθοδος της αριθμητικής διακριτοποίησης του φορέα αδυνατεί να καταδείξει από ποσοτικής και από ποιοτικής πλευράς τη σχετική επιρροή των διαφόρων παραμέτρων σχεδιασμού. Αντιθέτως, η συγκεκριμένη αναλυτική μέθοδος επιτρέπει μία παραμετρική μελέτη που καταλήγει σε χαρακτηριστικά διαγράμματα που δείχνουν την επιρροή των παραπάνω σχεδιαστικών παραμέτρων στην όλη στατική ένταση και συμπεριφορά, έτσι ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα στον προκαταρκτικό σχεδιασμό, δηλαδή την προμελέτη του έργου.

Κεφάλαιο 2

Σχοινοειδείς φορείς

Από την μηχανική γνωρίζουμε ότι η ανάπτυξη καμπτικών ροπών σε ένα φορέα προκαλεί τριγωνική γραμμική κατανομή των τάσεων καθ' ύψος της διατομής. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι δεν μπορεί να είναι εκμεταλλεύσιμη η εντατική ικανότητα όλων των ινών της διατομής, αφού η ελαστική ανάλυση σταματά μόλις οι ακραίες ίνες φτάσουν το όριο διαρροής του υλικού. Για αυτό το λόγο η κάμψη δεν είναι γενικά επιθυμητή στις κατασκευές. Αντίθετα υπό την ανάπτυξη μόνο αξονικής έντασης οι ίνες της διατομής εντείνονται ομοιόμορφα γεγονός που οδηγεί σε πλήρη εκμετάλλευση του υλικού του φορέα.

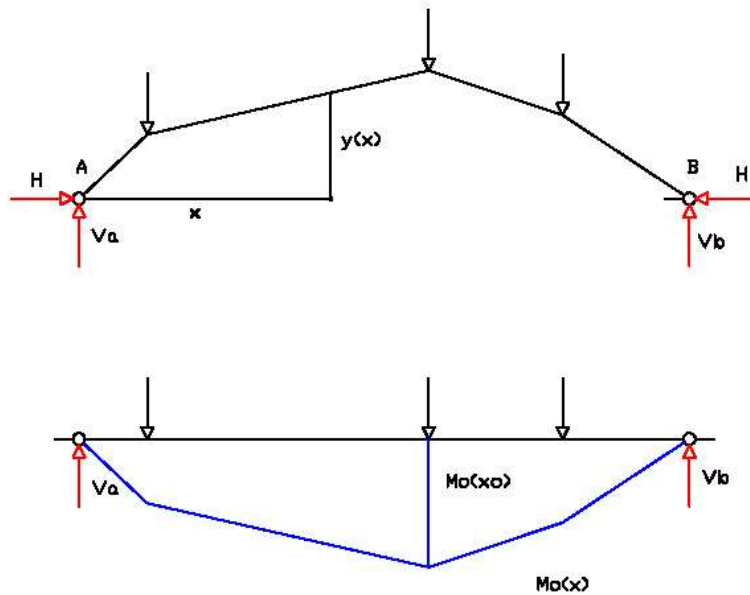
Το πρόβλημα που γεννάται όμως είναι ο καθορισμός της μορφής του φορέα ο οποίος θα στηρίζεται αρθρωτά σε δύο προκαθορισμένα σημεία με απόσταση L , ώστε για μία συγκεκριμένη φόρτιση να αναπτύσσει μόνο αξονική ένταση. Πρακτικά το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τη θεώρηση ενός απολύτως εύκαμπτου μέσου (όπως το σχοινί) το οποίο στηρίζεται στα δεδομένα σημεία και φορτίζεται με τυχαία φορτία. Η μορφή την οποία θα πάρει θα ικανοποιεί την παραπάνω προϋπόθεση δηλαδή την ανάπτυξη μόνο αξονικών εφελκυστικών δυνάμεων. Στην περίπτωση που το διατιθέμενο υλικό δεν αντέχει εφελκυσμό, θεωρείται η κατοπτρική στατική εικόνα που είναι απόλυτα ισοδύναμη με εκείνη του σχοινιού, με τη διαφορά ότι τα φορτία θα προκαλούν την ανάπτυξη μόνο αξονικών θλιπτικών δυνάμεων. Από αυτή την απλή σκέψη προκύπτουν οι λεγόμενοι σχοινοειδείς φορείς όπως τα τόξα και τα καλώδια που χρησιμοποιούνται ως κατασκευαστικές λύσεις σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών.



Σχήμα 2.1

Η αναζήτηση της γεωμετρικής μορφής ενός τέτοιου φορέα γίνεται απλούστερη με την παρατήρηση ότι οι κατακόρυφες συνιστώσες των αντιδράσεων θα ισούνται με τις αντιδράσεις της αντίστοιχης αμφιερέιστου δοκού. Άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι η καμπτική ροπή του φορέα σε ένα σημείο του με απόσταση $y(x)$ από την οριζόντια, θα ισούται με την καμπτική ροπή $M_0(x)$ της αμφιερέιστης δοκού μειωμένη κατά το μέγεθος $H \cdot y(x)$.

Έτσι θα είναι
$$M(x) = M_0(x) - H \cdot y(x)$$



Σχήμα 2.2

η συνοριακή συνθήκη $M(x) = 0$ οδηγεί στη σχέση

$$y(x) = \frac{M_0(x)}{H}$$

η οποία δηλώνει ότι η αναζητούμενη μορφή είναι ομοιόθετη προς το διάγραμμα των καμπτικών ροπών της αντίστοιχης αμφιερέιστης δοκού κατά τον συντελεστή $1/H$ ο οποίος αρχικά είναι άγνωστος. Ο καθορισμός του απαιτεί τον προσδιορισμό και ενός τρίτου σημείου από το οποίο θα διέρχεται ο φορέας. Το τρίτο αυτό σημείο μπορεί να είναι οποιοδήποτε όπως για παράδειγμα η κορυφή του σε οριζόντια απόσταση x_0 από το A οπότε, με συγκεκριμένο πλέον το $y_0(x_0)$ θα έχουμε

$$H = \frac{M_0(x_0)}{y_0(x_0)}$$

και άρα,

$$y(x) = \frac{y_0(x_0)}{M_0(x_0)} \cdot M_0(x)$$

Η καμπύλη αυτή ονομάζεται γραμμή πιέσεων και προκύπτει ανάλογα με τη φόρτιση. Για την παραλαβή συγκεντρωμένων φορτίων οδηγούμαστε σε πολυγωνικό διάγραμμα M_0 και άρα πολυγωνικό σχοινοειδή φορέα ενώ για την παραλαβή ομοιόμορφα κατανεμημένου κατακόρυφου φορτίου προκύπτει παραβολικό διάγραμμα ροπών και αντίστοιχη μορφή φορέα.

Πρέπει να τονισθεί ότι για την περίπτωση των **τοξοτών φορέων**, μία συγκεκριμένη γραμμή πιέσεων οδηγεί σε αποκλειστικά αξονική ένταση μόνο για τη φόρτιση που προκάλεσε το συγκεκριμένο διάγραμμα ροπών με βάση το οποίο μορφώθηκε ο φορέας. Οποιαδήποτε άλλη φόρτιση θα αναπτύξει κάμψη στο τόξο και έτσι αυτό θα πάψει να λειτουργεί ως σχοινοειδής φορέας. Πρέπει επίσης να επισημανθεί ότι δεν αρκεί η φόρτιση να είναι σύμφωνη με τη γραμμή πιέσεων αλλά και ο φορέας να μην αποκλίνει από τη σχοινοειδή μορφή. Οποιαδήποτε διαφοροποίηση της γεωμετρίας του τόξου από τη γραμμή πιέσεων π.χ. λόγω υποχώρησης κάποιας στηρίξεως υπό τα εξωτερικά φορτία οδηγεί σε κάμψη.

Αντίθετα στην περίπτωση των **καλωδιωτών φορέων** για διαφοροποίηση της φόρτισης από τη γραμμή πιέσεως, λόγω ελλείψεως καμπτικής στιβαρότητας του καλωδίου, θα σχηματιστεί μια νέα σχοινοειδής μορφή του φορέα με αποκλειστικά εφελκυστικές δυνάμεις. Η αυτόματη προσαρμογή του καλωδίου στη σχοινοειδή μορφή έχει σαν άμεση απόρροια την δραματική αλλαγή της γεωμετρίας του πράγμα που αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα των ελεύθερα αναρτημένων καλωδίων. Οι δύο αυτές οικογένειες σχοινοειδών μορφών είναι μεταξύ τους κατοπτρικές.

Στη συνέχεια γίνεται μία αναλυτικότερη περιγραφή της στατικής συμπεριφοράς τοξοτών και καλωδιωτών φορέων με ιδιαίτερη έμφαση στις δυνατότητες και τις αδυναμίες της λειτουργίας τους και το πως αυτές καθορίζουν την επιλογή της βέλτιστης κατασκευαστικής λύσης σε προβλήματα κάλυψης μεγάλων ανοιγμάτων (π.χ. γέφυρες, στέγαστρα κ.α.).

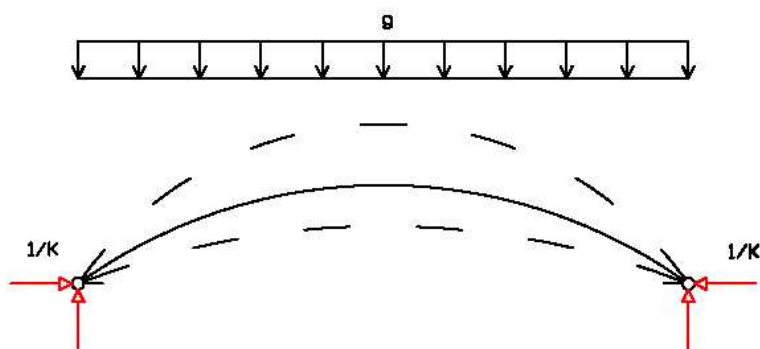
Κεφάλαιο 3

Τοξωτοί φορείς

Τα τόξα είναι σχοινοειδείς φορείς που αναλαμβάνουν τη μεταφορά κατακόρυφων φορτίων από το άνοιγμα στα άκρα τους μέσω αξονικών θλιπτικών δυνάμεων. Για να επιτευχθεί αυτό είναι απαραίτητο η κεντροβαρική γραμμή του τόξου να ακολουθεί επακριβώς τη γραμμή πίεσεως για τα φορτία αυτά. Υπάρχουν άπειρες γραμμές πίεσεως για μία δεδομένη κατακόρυφη φόρτιση g που όλες υπακούουν στην εξίσωση :

$$y(x) = k \cdot M_g^{\alpha\mu\phi}(x)$$

δηλαδή κάθε ομοιόθετο διάγραμμα προς το διάγραμμα ροπών της αμφιέριστης είναι και μία γραμμή πίεσεως. Η αντίστοιχη αναπτυσσόμενη οριζόντια συνιστώσα της αξονικής δύναμης στα άκρα της γραμμής πίεσεως ισούται με $1/k$. Άρα όσο ψηλότερο είναι ένα τόξο, δηλαδή όσο μεγαλύτερο k έχει, τόσο μικρότερη οριζόντια ώθηση παρουσιάζει



Σχήμα 3.1

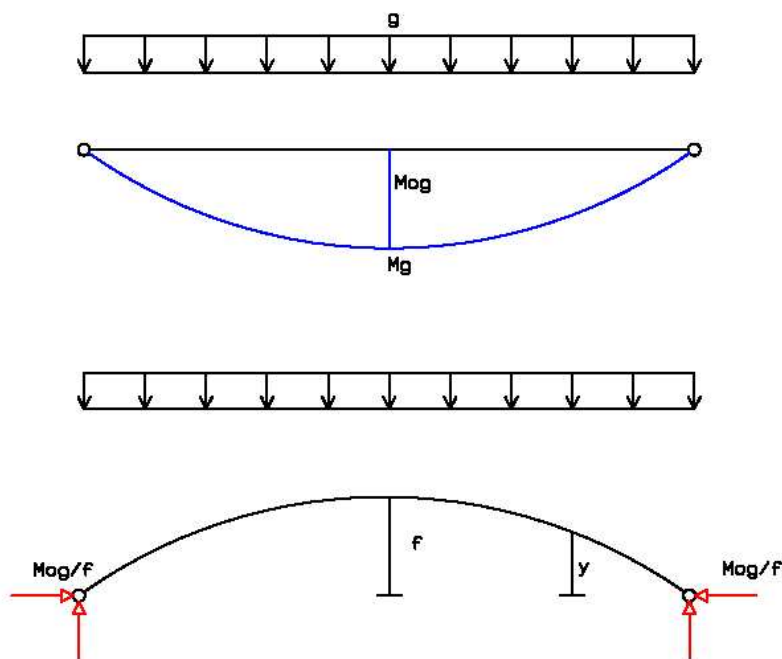
Για παράδειγμα σε τόξο με ύψος f θα έχουμε

$$k = \frac{f}{M_g^{\alpha\mu\phi} (L/2)}$$

και

$$H = \frac{M_g^{\alpha\mu\phi} (L/2)}{f}$$

Γενικά είναι σκόπιμο η μόρφωση ενός τόξου να ακολουθεί τη γραμμή πίεσεως για τα μόνιμα φορτία ώστε να περιορίζεται όσο γίνεται περισσότερο η κάμψη που αναπτύσσεται με την άσκηση επιπλέον κινητών φορτίων.



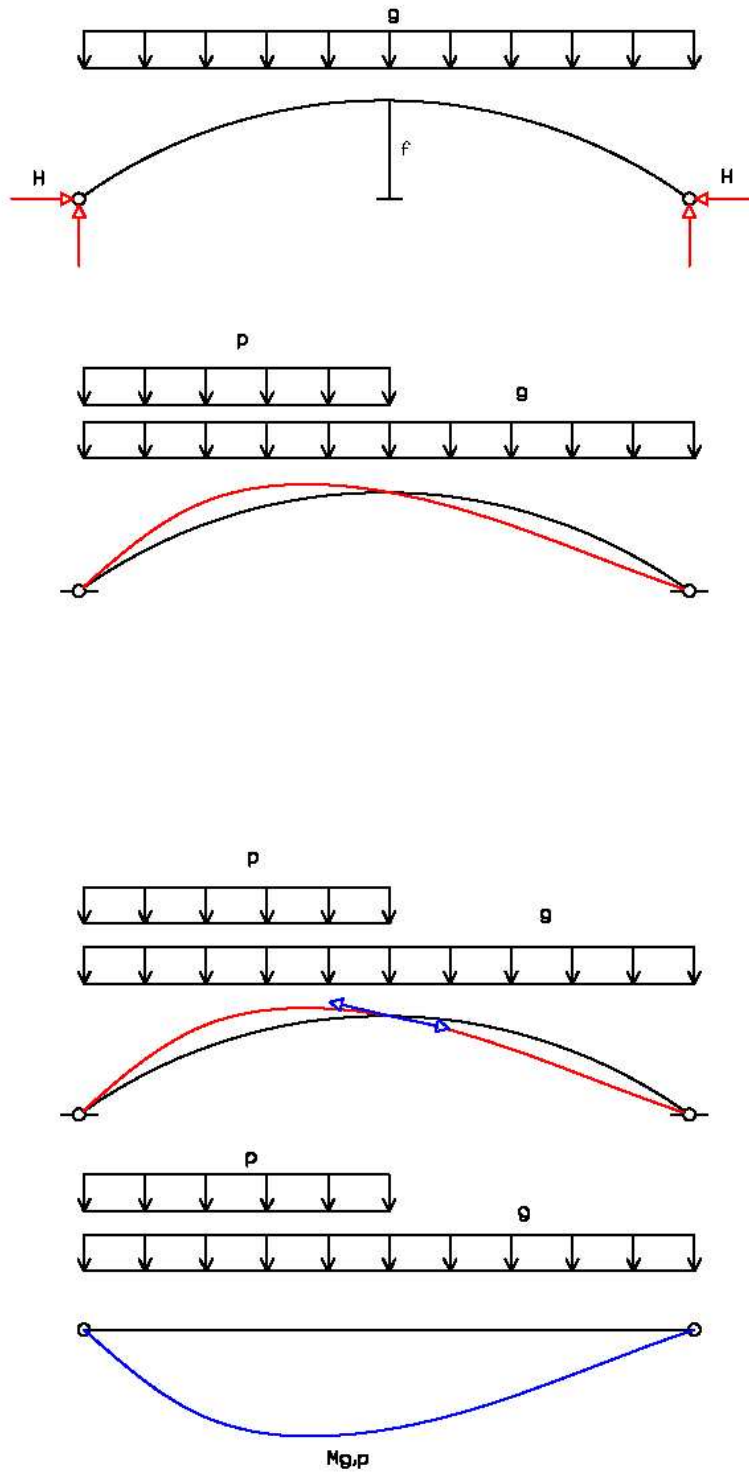
Σχήμα 3.2

Είναι κατανοητό ότι αν σε ένα τόξο που έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε η γεωμετρία του να συμπίπτει με τη γραμμή πίεσεως για τα μόνιμα φορτία g , ασκηθεί ένα επιπρόσθετο κινητό φορτίο p σε τυχαία διάταξη, η κεντροβαρική του γραμμή δεν θα συμπίπτει πλέον με τη γραμμή πίεσεως που αντιστοιχεί στην νέα φόρτιση $(p+g)$, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη κάμψης. Η νέα γραμμή πίεσεως ορίζεται ώστε να διέρχεται από ένα ενδιάμεσο σημείο του τόξου με μηδενική καμπτική ένταση.

Ο καθορισμός των εφελκόμενων και των θλιβόμενων ινών από την κάμψη συνάγεται από την σχετική θέση της γραμμής πίεσεως ως προς το ξεταζόμενο, κάθε φορά, σημείο του φορέα. Το μέγεθος της ροπής που προκύπτει από τις θλιπτικές δυνάμεις της νέας γραμμής πίεσεως ως προς το θεωρούμενο σημείο του τόξου, εξαρτάται από την απόσταση της συνισταμένης θλιπτικής δύναμης από το κέντρο βάρους της διατομής. Γενικά η κάμψη δε είναι απαγορευτική ακόμα και σε υλικά που δεν έχουν αντοχή σε εφελκυσμό εφόσον η συνισταμένη θλιπτική δύναμη σε κάθε

σημείο ασκείται εντός του πυρήνα της διατομής, αναπτύσσοντας έτσι μόνο θλιπτικές τάσεις στη διατομή αυτή.

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτή αυτή η συμπεριφορά παρουσιάζεται ένα παράδειγμα τυπικού διαρθρωτού τόξου το οποίο φορτίζεται από ομοιόμορφο μόνιμο φορτίο g σε όλο το μήκος του και από κάποιο επιπρόσθετο κινητό φορτίο p .



Σχήμα 3.3

Γνωρίζουμε ότι οποιαδήποτε διαμόρφωση του τόξου ακολουθεί το διάγραμμα ροπών της αμφιέριστης, δηλαδή οποιαδήποτε παραβολή 2^{ου} βαθμού που περνά από τις στηρίξεις, αναπτύσσει υπό τα μόνιμα φορτία, μόνο αξονική θλιπτική ένταση ανεξάρτητα από τις συνθήκες στήριξης του φορέα. Με τον καθορισμό του ύψους του τόξου f , η εξίσωση της γραμμής πίεσεως, άρα και της κεντροβαρικής γραμμής του τόξου θα έχει τη μορφή:

$$y(x) = \frac{8 \cdot f}{q \cdot L^2} \cdot M_g(x)$$

ενώ η οριζόντια συνιστώσα της αντίδρασης θα είναι

$$H = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot f}$$

από την ισορροπία προκύπτει ότι την ίδια τιμή έχει και η συνισταμένη αξονική δύναμη στην κορυφή του τόξου.

Η διάταξη του κινητού φορτίου σε όλο το μήκος του τόξου, δεδομένου ότι η γεωμετρία του τόξου θα εξακολουθεί να συμπίπτει με τη γραμμή πίεσεως που αντιστοιχεί στη φόρτιση (g+p), αυξάνει μόνο την αξονική του ένταση χωρίς να προκαλεί καμία κάμψη. Η δυσμενέστερη διάταξη από πλευράς κάμψης είναι το κινητό φορτίο p να εκτίνεται στο μισό του ανοίγματος του φορέα. Για να διευκολυνθεί η επίλυση αναλύουμε τη φόρτιση αυτή σε μία συμμετρική (p/2) και σε μία αντισυμμετρική (p/2). Όπως είδαμε προηγουμένως η συμμετρική φόρτιση σε όλο το μήκος του φορέα απλά θα αυξήσει την αξονική θλίψη χωρίς να προκαλέσει κάμψη. Από την άλλη μεριά η αντισυμμετρική φόρτιση προκαλεί μηδενισμό της αξονικής έντασης στην κορυφή του τόξου και κατά συνέπεια μηδενισμό των οριζόντιων αξονικών συνιστωσών των αντιδράσεων στήριξης. Ταυτόχρονα η καμπτική ροπή και η κατακόρυφη μετατόπιση στο μέσο του τόξου είναι επίσης μηδενικές. Με αυτό τον τρόπο είναι δυνατή όπως γνωρίζουμε η θεώρηση του μισού φορέα με την κατάλληλη συνοριακή συνθήκη στο μέσον, δηλαδή κύλιση. Άρα η νέα γραμμή πίεσεως που αντιστοιχεί στη φόρτιση (p+g), που όπως αναφέρθηκε είναι αναγκαίο να περνά από τρία σημεία με μηδενική καμπτική ένταση, θα διέρχεται από τα άκρα και το μέσο του τόξου. Μπορεί να καθοριστεί έτσι το κατάλληλα πολλαπλασιασμένο διάγραμμα ροπών της αμφιέριστης ώστε η γραμμή πίεσεως να περνάει από τα τρία αυτά σημεία. Η νέα καμπύλη που προκύπτει από τη θεώρηση έχει τη μορφή:

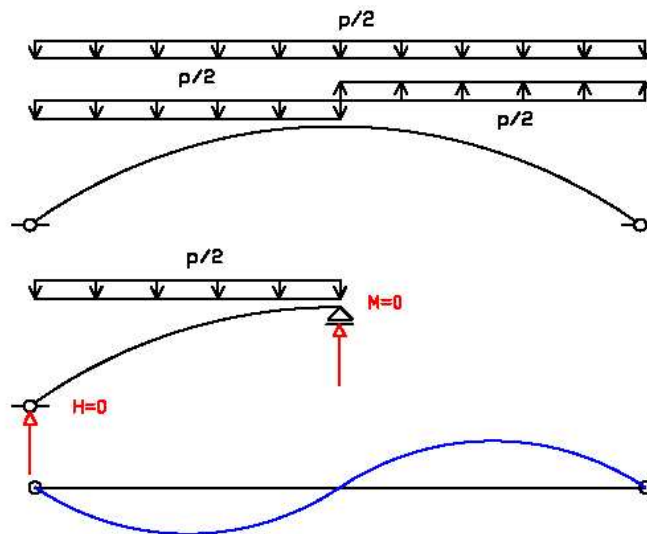
$$y'(x) = \frac{f}{M_{g+p}(L/2)} \cdot M_{g+p}(x)$$

Γίνεται έτσι ορατό, από την απόκλιση της αρχικής κεντροβαρικής γραμμής του τόξου από την νέα (σχήμα 3.3), ότι οι κάτω ίνες του αριστερού ημίσεως του τόξου εφελκύνονται ενώ οι κάτω ίνες του δεξιού ημίσεως θλίβονται. Από την απουσία οριζόντιων δυνάμεων στο μέσο και στα άκρα του τόξου για την αντισυμμετρική φόρτιση ($p/2$) συμπερένουμε ότι η μέγιστη καμπτική ροπή αναπτύσσεται στο τέταρτο του συνολικού μήκους L και ισούται με:

$$M_F = \frac{(p/2) \cdot (L/2)^2}{8} = \frac{p \cdot L^2}{64}$$

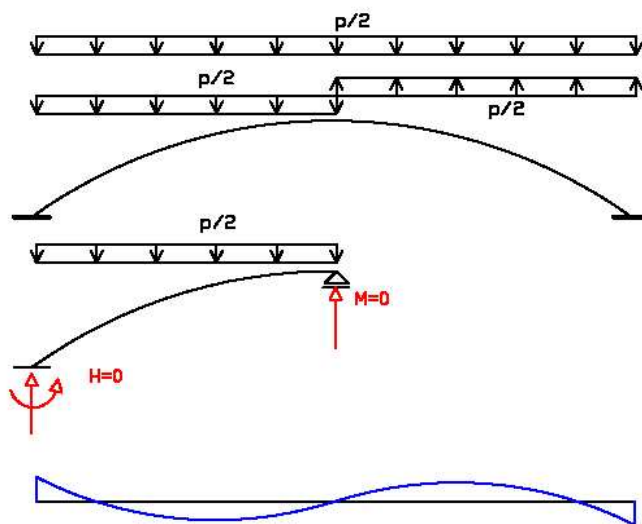
Η αντίστοιχη θλιπτική δύναμη στο σημείο αυτό είναι:

$$H = \frac{(g + p/2) \cdot L^2}{8 \cdot f}$$



Σχήμα 3.4

Στην περίπτωση του αμφίπακτου τόξου λόγω της αντισυμμετρικής φόρτισης αναπόφευκτα αναπτύσσονται καμπτικές ροπές στις στηρίξεις που προκαλούν εφελκυσμό στις αντίστοιχες άνω και κάτω ίνες. Η καμπτική ένταση που προκύπτει στη στήριξη διαφέρει ελάχιστα από αυτή της μονόπακτης δοκού και για τόξα με κατασκευαστικό ύψος περί το 1/10 κυμαίνεται σε τιμές περί το $0.97M_0 = 0.015pL^2$.



Σχήμα 3.5

Γενικά στα τόξα επιδιώκεται η ανάπτυξη μόνο θλιπτικών τάσεων ή τάσεων που δεν ξεπερνούν την εφελκυστική αντοχή του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένη η διατομή. Η επιδίωξη αυτή για ορθογωνική διατομή χωρίς εφελκυστική αντοχή καθορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{h}{6} \geq \frac{M}{H}$$

από την οποία με αντικατάσταση της δύναμης και της ροπής της δυσμενέστερης διατομής μπορεί να προκύψει το οριακό κινητό φορτίο ώστε στη διατομή να αναπτύσσονται μόνο θλιπτικές τάσεις.

Η παραπάνω ανάλυση της στατικής συμπεριφοράς του τυπικού τόξου έγινε με σκοπό την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς του ανεστραμμένου τόξου που αποτελεί το φέρον στοιχείο των ταινιωτών προεντεταμένων κατασκευών που εξετάζονται στη συνέχεια.

Κεφάλαιο 4

Καλωδιωτοί φορείς

Το καλώδιο αποτελεί γενικά το πιο αποτελεσματικό φέρον στοιχείο από πλευράς εκμεταλλεύσεως της διατιθέμενης αντοχής, εξαιτίας της αυτόματης προσαρμογής του στη σχοινοειδή μορφή για οποιαδήποτε διάταξη φορτίσεως. Όπως προαναφέρθηκε η ιδεώδης εκμετάλλευση του υλικού του φορέα γίνεται μόνο όταν οι ίνες των διατομών του εντείνονται ομοιόμορφα και αυτό σημαίνει ανάπτυξη μόνο αξονικής έντασης.

Το συστατικό στοιχείο των καλωδιωτών φορέων είναι τα χαλύβδινα καλώδια υψηλής αντοχής που παρουσιάζουν ιδιαίτερα ευνοϊκές φέρουσες ιδιότητες. Η υψηλή αντοχή των καλωδίων, επιτρέπει με μικρές διατομές την παραλαβή μεγάλων αξονικών δυνάμεων, υπό τους πλέον οικονομικούς όρους (τιμή/προσφερόμενη αντοχή). Τα καλώδια παρουσιάζουν μία σχεδόν απόλυτη ευκαμψία εξαιτίας του μεγάλου μήκους τους σε σχέση με τη διατομή τους. Για τον λόγο αυτό αδυνατούν να προσφέρουν αντίσταση τόσο σε καμπτικές ροπές όσο και σε θλιπτικές δυνάμεις αναπτύσσοντας μόνο εφελκυσμό και επιτρέποντας την παραλαβή μεγάλων φορτίων, δεδομένου ότι δεν υφίσταται ο κίνδυνος του λυγισμού.

Το ελεύθερα αναρτημένο καλώδιο με την άσκηση ομοιόμορφου μόνιμου φορτίου g παίρνει αυτόματα τη μορφή του διαγράμματος ροπών της απλής αμφοτέρωστες δοκού για το φορτίο αυτό. Με την οριστικοποίηση της εφαρμοζόμενης δύναμης τανύσεως P στα άκρα του καλωδίου σχηματίζεται ένα συγκεκριμένο βέλος f στο μέσο του το οποίο καθορίζει τη μορφή του. Άρα με την άσκηση του ίδιου βάρους του, το οποίο θεωρείται ομοιόμορφο σε όλο το μήκος του ανοίγματος, η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης αγκυρώσεως P στα άκρα του καλωδίου είναι $H_g = (g \cdot L^2)/(8 \cdot f)$ και η μορφή του υπακούει στην εξίσωση της καμπύλης $y(x) = M_g^{\alpha\mu\phi} / H_g$, που εδώ είναι παραβολή 2^{ου} βαθμού.

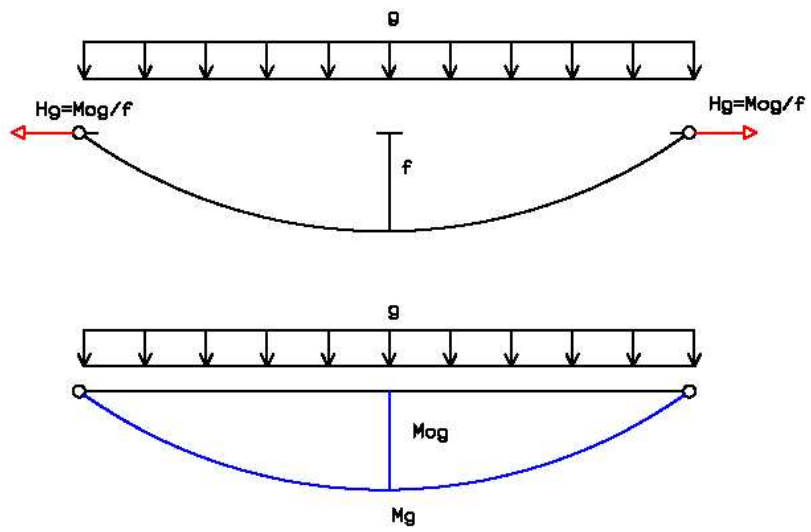
Με την άσκηση ενός επιπρόσθετου κινητού φορτίου p με περιορισμένο μήκος, στο καλώδιο προκαλείται επιπλέον παραμόρφωση n και επιπλέον οριζόντια συνιστώσα H_p στη δύναμη αγκυρώσεως αναγκάζοντας το να πάρει έτσι μια νέα σχοινοειδή μορφή. Η νέα γεωμετρία του καλωδίου προκύπτει από την επαλληλία των τεταγμένων που προκύπτουν από τις δύο φορτίσεις ($p + g$).

Έτσι έχουμε:

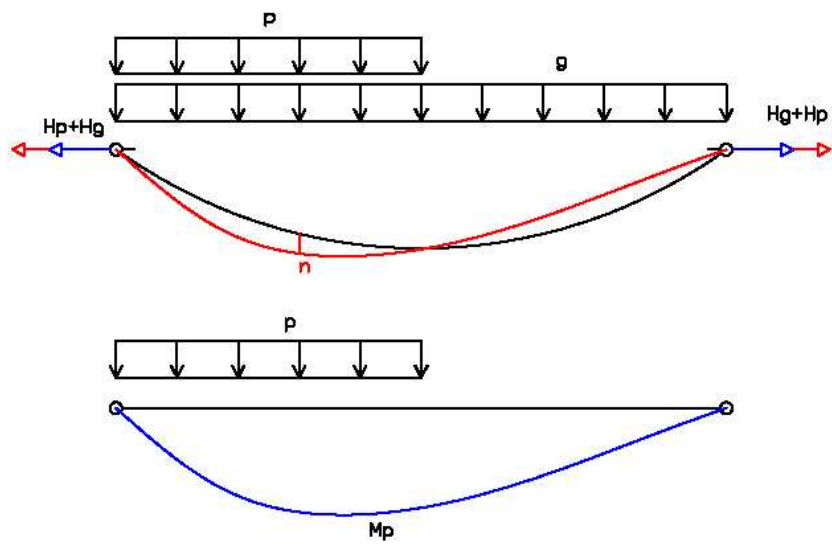
$$y + n = \frac{M_g^{\alpha\mu\phi} + M_p^{\alpha\mu\phi}}{H_g + H_p}$$

και βάσει της γνωστής σχέσης του y λαμβάνονται οι επί πλέον παραμορφώσεις n συναρτήσει της επιπλέον οριζόντιας δύναμης του καλωδίου

$$n = \frac{M_g^{\alpha\mu\phi} - H_p \cdot y}{H_g + H_p}$$



Σχήμα 4.1



Σχήμα 4.2

Για τον προσδιορισμό των δύο αυτών αγνώστων χρησιμοποιείται η σχέση που συνδέει την επιμήκυνση του καλωδίου με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του βάσει του νόμου του Hooke. Η σχέση αυτή είναι η καταστατική εξίσωση του καλωδίου που δίνεται με πολύ καλή προσέγγιση από τον ακόλουθο τύπο:

$$\frac{H_p}{A_c \cdot E_c} \cdot L_s = \frac{g}{H_p} \cdot \int_0^L n \, dx$$

όπου, για λόγους χθαμαλότητας του καλωδίου περί το 1/10, ισχύει ικανοποιητικά

$$L_s = L \cdot \left[1 + 8 \cdot \left(\frac{f}{L} \right)^2 \right]$$

Σημειώνεται πάντως ότι το μήκος L_s δεν αντιπροσωπεύει το μήκος του καλωδίου το οποίο δίνεται με πολύ καλή ακρίβεια από τη σχέση

$$L_c = L \cdot \left[1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{f}{L} \right)^2 \right]$$

Με την αντικατάσταση της σχέσης του n στην καταστατική εξίσωση του καλωδίου μπορεί να προσδιοριστεί η επιπλέον δύναμη H_p του καλωδίου και εν συνεχεία η επιπλέον παραμόρφωση n .

Γίνεται έτσι μια πρώτη προσέγγιση της συμπεριφοράς του ελεύθερα αναρτημένου καλωδίου υπό τη δράση μόνιμου και κινητού φορτίου με σκοπό την ευκολότερη κατανόηση της αλληλεπίδρασής του με την ταινία του σκυροδέματος όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

Κεφάλαιο 5

Η ακαμπτοποίηση του ανηρτημένου καλωδίου

Οι Καλωδιωτοί φορείς έχουν ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, αλλά διακρίνονται κυρίως για την οικονομική κάλυψη μεγάλων χώρων με μορφή στεγών και για την αποτελεσματικότητά τους ως βασικά φέροντα μέλη γεφυρών πολύ μεγάλων ανοιγμάτων. Προκύπτει όμως η ανάγκη περιορισμού της υπερβολικής παραμορφωσιμότητας λόγω των επιπρόσθετων κινητών φορτίων εξαιτίας της μεγάλης ευκαμψίας που παρουσιάζουν. Το πρόβλημα αυτό σχετίζεται άμεσα με τη στατική λειτουργία του καλωδίου προβάλλοντας έτσι την άμεση ανάγκη ακαμπτοποίησης του.

Η ακαμπτοποίηση των ελεύθερα ανηρτημένων καλωδίων μπορεί να γίνει είτε με την προσάρτηση μιας οριζόντιας δοκού που περιορίζει δραστικά την παραμορφωσιμότητα τους, χάρις στην κατάλληλα επιλεγμένη καμπτική της στιβαρότητα (διαμόρφωση που οδηγεί άμεσα στην κατασκευαστική λύση της κρεμαστής γέφυρας), είτε επενδύοντας τα σε όλο το μήκος τους με μια ταινία σκυροδέματος μικρού σχετικά πάχους και προεντείνοντάς την με κατάλληλη δύναμη, ώστε το ανεστραμμένο τόξο που προκύπτει με αυτό τον τρόπο, να τεθεί υπό μία θλιπτική τάση λόγω των δυνάμεων εκτροπής προς τα άνω.

Με αυτόν τον τρόπο, τα φορτία βαρύτητας που θα ασκηθούν στη συνέχεια, θα προκαλέσουν βέβαια στο ανεστραμμένο τόξο εφελκυστικές τάσεις, αυτές όμως θα υπερκαλυφθούν από τις θλιπτικές τάσεις που προϋπάρχουν σε αυτό λόγω προεντάσεως. Ταυτόχρονα, τα τυχόν επιπρόσθετα κινητά φορτία που εφαρμόζονται αργότερα, μπορούν να παραλαμβάνονται χωρίς υπερβολικές παραμορφώσεις, χάρις στην ενεργή καμπτική στιβαρότητα του τόξου που αποκτά μέσω της αναπτυσσόμενης θλιπτικής του έντασης.

Θεωρούμε ότι η διατομή της ταινίας σκυροδέματος είναι ορθογωνική με πλάτος b και ύψος d , ενώ η συνολική διατομή των καλωδίων που περιβάλλονται από αυτήν είναι A_p . Επίσης δεχόμαστε ότι αρχικά τα καλώδια δεν έχουν καμία πρόσφυση με το σκυροδέμα. Έτσι με τη σκυροδέτηση, το θεωρούμενο «ενοποιημένο καλώδιο» διατομής A_p παραλαμβάνει το σύνολο των φορτίων από το ίδιο βάρος του σκυροδέματος και των καλωδίων του φορέα g και προκειμένου να υπάρχει στο καλυπτόμενο άνοιγμα L το προδιαγεγραμμένο βέλος f η εφαρμοζόμενη στο καλώδιο δύναμη τανύσεως προκύπτει:

$$H_g = \frac{g \cdot L^2}{8 \cdot f}$$

Με την τάνυση του καλωδίου μετά την σκλήρυνση του σκυροδέματος με μία επί πλέον δύναμη προεντάσεως ίση με H_p το ανεστραμμένο τόξο διατομής $(b \cdot d)$ που προκύπτει θα δέχεται από το καλώδιο σε όλο το μήκος του ομοιόμορφο φορτίο εκτροπής u_v προς τα πάνω ίσο με:

$$u_v = \frac{H_u}{r}$$

Έτσι θα αναπτυχθεί ομοιόμορφη τάση θλίψεως σ_v που δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_v = \frac{u_v \cdot L^2}{8 \cdot f} \cdot \frac{1}{b \cdot f}$$

Για κάθε επιπλέον ασκούμενο καθολικό φορτίο p που εκτείνεται σε όλο το μήκος του ανοίγματος (δηλαδή κινητό ή περαιτέρω μόνιμο), εφόσον αυτό είναι μικρότερο από το u_v , το τόξο θα δέχεται συνολικό φορτίο προς τα πάνω ίσο με $(u_v - p)$, δηλαδή θα βρίσκεται πάντα υπό θλίψη χωρίς καμπτική λειτουργία. Ταυτόχρονα τα τυχόν φορτία υπό πίεσεως προς τα άνω λόγω ανέμου, παραλαμβάνονται κανονικά από την καθεαυτού λειτουργία του ως τυπικού τόξου.

Βεβαίως η θεώρηση αυτή είναι απλοποιητική, για τον λόγο ότι το καλώδιο και το σκυροδέμα αποτελούν ένα σύστημα που παραλαμβάνει από κοινού τα όποια επί πλέον φορτία, οπότε τίθεται άμεσα το πρόβλημα του καθορισμού της κατανομής της προκαλούμενης έντασης ανάμεσα στο καλώδιο και στην ταινία του σκυροδέματος. Το πρόβλημα αυτό γίνεται εντονότερο όταν το κινητό φορτίο δεν εκτείνεται σε όλο το μήκος αλλά μόνο μέχρι το μέσον του ανοίγματος, διάταξη που γενικά προκύπτει σαν δυσμενέστερη. Τότε για την εκτίμηση της καμπτικής έντασης του τόξου θα πρέπει απαραίτητα να εξεταστεί η συνδυασμένη λειτουργία του με το καλώδιο.

Σχετικά τώρα με την ανάλυση του συστήματος, θα πρέπει οπωσδήποτε να ληφθεί κατάλληλα υπόψιν η γεωμετρική μη γραμμικότητα της συμπεριφοράς που απορρέει από την αλληλεπίδραση της ταινίας του σκυροδέματος με το ίδιο το καλώδιο. Θέματα που υπεισέρχονται επίσης στην ανάλυση της συμπεριφοράς και που θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν στο σχεδιασμό, είναι η επιρροή του ερπυσμού λόγω υψηλών θλιπτικών τάσεων του σκυροδέματος καθώς και ενδεχόμενες ταλαντώσεις.

Κεφάλαιο 6

Το πρόβλημα της ανηρτημένης δοκού

Όπως έγινε αντιληπτό λόγω της μεγάλης ευκαμψίας του το μεμονωμένο καλώδιο είναι από μόνο του λειτουργικά άχρηστο για τη γεφύρωση ενός ανοίγματος. Η κατασκευαστική λύση της κρεμαστής γέφυρας αφενός εξυπηρετεί την διέλευση των οχημάτων και αφετέρου παρέχει την κατάλληλη καμπτική στιβαρότητα στο σύστημα για τον περιορισμό των παραμορφώσεων. Η ανάρτηση του καταστρώματος γίνεται μέσω κατακόρυφων εφελκόμενων στοιχείων (αναρτήρων) σε μικρές αποστάσεις, κατά μήκος των δύο ελευθέρων διαμήκων παρειών. Το κατάστρωμα λόγω του πολύ μεγάλου μήκους του σε σχέση με το πλάτος του μπορεί να θεωρηθεί σαν μια ιδιαίτερα εύκαμπτη δοκός. Η σχετική ευκαμψία καλωδίου και δοκού σε σύγκριση με τη μεγάλη στιβαρότητα που εμφανίζουν οι αναρτήρες στο επίπεδο τους μας επιτρέπει να τους θεωρούμε πρακτικά απαραμόρφωτους στο επίπεδο αυτό. Άμεση συνέπεια της θεώρησης αυτής είναι η κοινή παραμόρφωση καλωδίου και δοκού σύμφωνα με το συμβιβαστό των παραμορφώσεων. Η τάση H_g του καλωδίου ρυθμίζεται με βάση το επιθυμητό βέλος f έτσι ώστε με την άσκηση του συνολικού μόνιμου φορτίου g (συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου βάρους του καλωδίου), το κατάστρωμα να βρίσκεται σε απόλυτη οριζόντια επιπεδότητα. Η δύναμη τάνυσεως δίνεται από τη σχέση:

$$H_g = \frac{g \cdot L^2}{8 \cdot f}$$

Εξαιτίας της οριζόντιας επιπεδότητας του καταστρώματος υπό τη δράση των μόνιμων φορτίων και δεδομένου των μικρών αποστάσεων μεταξύ των αναρτήρων η θεωρούμενη δοκός δεν αναπτύσσει αρχικά καμία καμπτική ένταση. Με την επιβολή όμως ενός επί πλέον κινητού φορτίου p πάνω στην δοκό το καλώδιο τείνει να παραμορφωθεί. Όπως εξηγήθηκε η επί πλέον παραμόρφωση n του καλωδίου θα αναπτύσσεται ακριβώς η ίδια και στη δοκό.

Ο σχεδιασμός της δοκού έγκειται στη διαστασιολόγηση έτσι ώστε με την υφιστάμενη ακαμψία της αφενός να περιορίζει την παραμόρφωση του καλωδίου λόγω της επιβολής επιπλέον κινητών φορτίων p και αφετέρου να είναι σε θέση να παραλάβει την κάμψη που αναπτύσσεται.

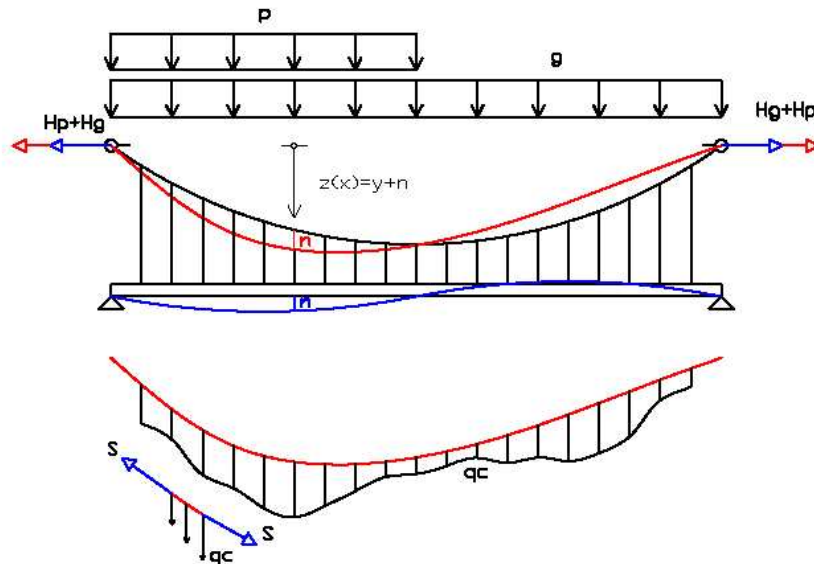
Όπως γίνεται κατανοητό, με την δράση ενός επιπλέον κινητού φορτίου p παρατηρείται πέρα από την καμπτική ένταση της δοκού και αύξηση της οριζόντιας συνιστώσας του καλωδίου H_p . Για είναι δυνατός ο καθορισμός των εν λόγω μεγεθών είναι αναγκαίο να ληφθεί υπόψη η θεωρία Πας τάξεως, δηλαδή της θεώρησης της παραμορφωμένης γεωμετρίας του συστήματος.

Η δοκός ισορροπεί υπό τα εξής φορτία

- Ίδιο βάρος g (μόνιμα φορτία), ασκούμενο προς τα κάτω
- Κινητό φορτίο p ασκούμενο σε συγκεκριμένο μήκος, προς τα κάτω
- Δράσεις $q_c(x)$ των εφελκόμενων αναρτήρων, προς τα πάνω

Τα φορτία g και p μπορούν να θεωρούνται ομοιόμορφα, αντίθετα το φορτίο $q_c(x)$ μεταβάλλεται κατά το μήκος της δοκού. Αυτό άγεται από το γεγονός ότι με την επιβολή του επιπρόσθετου κινητού φορτίου p στη δοκό το καλώδιο υποχρεώνεται μέσω των αναρτήρων να παραμορφωθεί κατακόρυφα όσο και η δοκός και

δεδομένου ότι οι αναρτήσεις δεν εντείνονται ομοιόμορφα, το καλώδιο θα δεχθεί εκ μέρους τους ανομοιόμορφες δυνάμεις, που το οδηγούν σε μία νέα σχοινοειδή μορφή διαφορετική της παραβολικής. Οι ίδιες δυνάμεις προφανώς ασκούνται με αντίθετη φορά και στη δοκό και αποτελούν ακριβώς τις δράσεις $q_c(x)$.



Σχήμα 6.1

Με την υπόθεση ότι οι αποστάσεις μεταξύ των αναρτήρων είναι αρκετά μικρές σε σχέση με το συνολικό άνοιγμα δικαιολογείται η θεώρηση του $q_c(x)$ ως κατανεμημένου φορτίου επί της δοκού. Αν μετά την άσκηση του κινητού φορτίου η νέα γεωμετρία του προφίλ του καλωδίου δίνεται από τη συνάρτηση $z(x)$ και η νέα οριζόντια συνιστώσα της αξονικής δύναμης του καλωδίου είναι H από την κατακόρυφη ισορροπία στοιχειώδους τμήματος του καλωδίου προκύπτει:

$$q_c(x) = -\frac{d^2z}{dx^2} \cdot H$$

Στην σχέση αυτή ο όρος $q_c(x)$ παριστάνει την ασκούμενη δύναμη στο καλώδιο προς τα κάτω, ενώ ο όρος $-d^2z/dx^2$ παριστάνει την καμπυλότητα $1/r$ του καλωδίου και αποτελεί έναν θετικό αριθμό. Ισχύει δηλαδή γενικά $q = H \cdot (1/r)$ όπως επιβεβαιώνεται και από όλες τις μέχρι τώρα εκφράσεις της σχοινοειδούς συμπεριφοράς. Στην προκειμένη περίπτωση η νέα σχοινοειδής μορφή του καλωδίου και η τελική οριζόντια συνιστώσα της αξονικής δύναμης του καλωδίου δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$z(x) = y(x) + \eta(x) \quad \text{και} \quad H = H_g + H_p$$

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω, το συνολικό φορτίο $q_c(x)$ υπό το οποίο και ισορροπεί η δοκός, θεωρούμενο ως θετικό προς τα κάτω, είναι:

$$q(x) = -q_c(x) + g + p$$

Από τη γνωστή σχέση ισορροπίας $d^2M/dx^2 = -q(x)$ συνδέεται το φορτίο αυτό με την καμπτική ένταση M της δοκού. Με βάση την καταστατική σχέση που διέπει την κάμψη της δοκού $M(x) = EI \cdot (1/r)$ η οποία σύμφωνα με τα προηγούμενα τροποποιείται σε $M(x) = -EI \cdot (dn^2/dx^2)$ προκύπτει τελικά:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -EI \cdot \frac{dn^4}{dx^4}$$

Και συνεπώς:

$$EI \cdot \frac{dn^4}{dx^4} = q(x)$$

Το φορτίο $q(x)$ μετά από αντικατάσταση της παραπάνω έκφρασης του $q_c(x)$ γράφεται:

$$q(x) = \left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2n}{dx^2} \right) \cdot (H_g + H_p) + g + p$$

και τελικά:

$$q(x) = \frac{dn^2}{dx^2} \cdot (H_g + H_p) + H_p \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + p$$

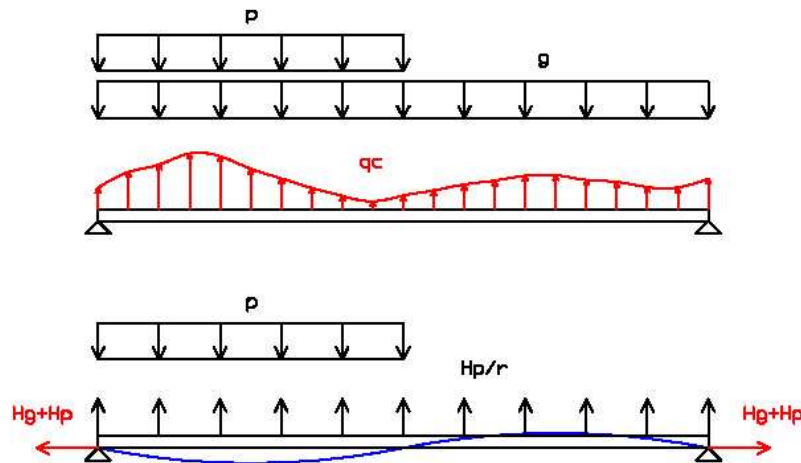
Η καμπυλότητα του καλωδίου υπό τα μόνιμα φορτία όπως γνωρίζουμε δίνεται από τη σχέση $1/r = 8 \cdot f/L^2$. Άρα δεδομένου ότι ο όρος d^2y/dx^2 ισούται με την αρνητική καμπυλότητα του καλωδίου η διαφορική εξίσωση της ανηρτημένης δοκού του καταστώματος παίρνει την τελική της μορφή

$$EI \cdot \frac{d^4n}{dx^4} - \frac{d^2n}{dx^2} \cdot (H_g + H_p) = p - \frac{H_p}{r}$$

Παρατηρείται ότι η τελική μορφή της διαφορικής εξίσωσης της αναρτημένης δοκού είναι ίδια με την διαφορική εξίσωση μιας αμφιέρειστης δοκού που υποβάλλεται σε εγκάρσιο φορτίο με ταυτόχρονη παρουσία εφελκυστικών δυνάμεων P καθ' όλο το καμπυλωμένο μήκος της, σύμφωνα με τη θεωρία Πας τάξεως, που είναι:

$$EI \cdot \frac{dw^4}{dx^4} - P \cdot \frac{dw^2}{dx^2} = p(x)$$

Από αυτή τη σημαντική παρατήρηση οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η βασική διαφορική εξίσωση της ανηρτημένης δοκού μπορεί να αναγνωριστεί σαν η διαφορική εξίσωση μιας πλασματικής αμφιέρειστης δοκού που υποβάλλεται σε ένα εγκάρσιο φορτίο $(p - H_p/r)$ καθώς και σε ένα αξονικό φορτίο $(H_g + H_p)$.



Σχήμα 6.2

Με βάση αυτή την αναλογία το $n(x)$ μπορεί να προσδιοριστεί ικανοποιητικά από τη σχέση

$$n = W_1 \cdot \frac{1}{1 + \xi}$$

όπου το W_1 εκφράζει την ελαστική γραμμή της απλής αμφιέρειστης με το εγκάρσιο φορτίο $(p - H_p/r)$ και το ξ ισούται με

$$\xi = (H_g + H_p)/P_{cr}$$

όπου $P_{cr} = \pi^2 \cdot EI/L^2$ είναι το φορτίο λυγισμού της δοκού.

Είναι κατανοητό ότι για την επιβολή ενός κινητού φορτίου p με συγκεκριμένο μέγεθος και έκταση πάνω στην ανηρτημένη δοκό, η αναπτυσσόμενη δύναμη H_p στο καλώδιο επιβάλλεται να είναι τέτοια ώστε η ελαστική γραμμή $n(x)$ που θα προκύψει από την επίλυση της πλασματικής εφελκυσμένης δοκού, να ικανοποιεί και την καταστατική εξίσωση της παραμόρφωσης του καλωδίου δηλαδή

$$\frac{H_p}{A_c \cdot E_c} \cdot L_s = \frac{g}{H_g} \cdot \int_0^L n \, dx$$

Είναι σκόπιμο να αναφερθεί ότι η ακριβής μορφή της καταστατικής εξίσωσης του καλωδίου είναι

$$\frac{H_p}{A_c \cdot E_c} \cdot L_s = \frac{g}{H_g} \cdot \int_0^L n \, dx - \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{d^2 n}{dx^2} \cdot n \, dx$$

η παράλειψη όμως του δευτέρου ολοκληρώματος στο δεξιό μέλος έχει διαπιστωθεί ότι για μεγάλα ανοίγματα δεν επηρεάζει την ακρίβεια των υπολογισμών. Εν προκειμένω για την περίπτωση της κρεμαστής γέφυρας όπου ο λόγος χθαμαλότητας λ κυμαίνεται μεταξύ 1/8 και 1/12 το μήκος L_s δίνεται με πολύ καλή προσέγγιση από την έκφραση

$$L_s = L \cdot \left[\frac{1}{\cos^3 a} + 8 \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{\cos a} \right]$$

Όπου a είναι η κλίση της χορδής του καλωδίου, που για την εξεταζόμενη περίπτωση είναι μηδέν. Δηλαδή προκύπτει

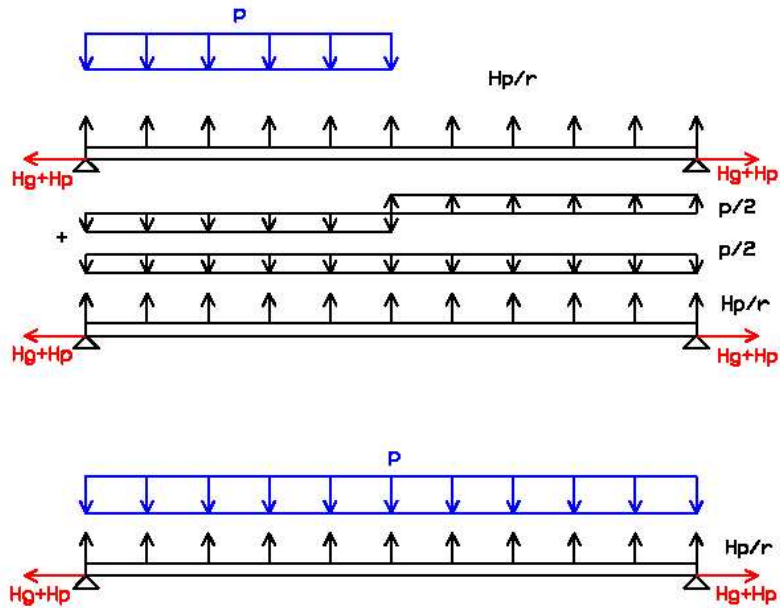
$$L_s = L \cdot [1 + 8 \cdot \lambda^2]$$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως το μήκος L_s δεν εκφράζει το μήκος του καλωδίου L_c , το οποίο δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση

$$L_c = L \cdot \left[1 + \frac{8}{3} \cdot \lambda^2 \right]$$

Σύμφωνα την συνήθη πρακτική για τις ανάγκες της προδιαστασιολόγησης, εξετάζονται δύο περιπτώσεις για την επιβολή του κινητού φορτίου p . Η πρώτη περίπτωση είναι το κινητό φορτίο να ασκείται στο ακραίο ήμισυ της δοκού, διάταξη που αποσκοπεί στον καθορισμό της μέγιστης παραμόρφωσης n του καλωδίου και της δοκού και κατά συνέπεια στη μέγιστη καμπτική της ένταση. Η δεύτερη περίπτωση είναι το κινητό φορτίο να ασκείται σε όλο το μήκος της δοκού, διάταξη που οδηγεί στον καθορισμό της μέγιστης δύναμης του καλωδίου.

Στην πρώτη περίπτωση η φόρτιση p είναι ισοδύναμη με τη δράση ενός συμμετρικού φορτίου ($p/2$) πάνω σε όλο το μήκος του ανοίγματος, και ενός αντισυμμετρικού φορτίου ($p/2$). Η ελαστική γραμμή $n(x)$ της πλασματικής εφελκυσόμενης δοκού μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει από την επαλληλία της ελαστικής γραμμής n_{sym} λόγω συμμετρικής φόρτισης ($p/2 - H_p/r$) σε όλο το μήκος και της ελαστικής γραμμής n_{ant} λόγω της αντισυμμετρικής φόρτισης ($p/2$). Πρέπει να σημειωθεί ότι εφόσον το αξονικό φορτίο διατηρείται σταθερό στα επιμέρους συστήματα ισχύει η επαλληλία κατά την θεωρία Πας τάξεως.



Σχήμα 6.3

Σύμφωνα με τα παραπάνω η καταστατική εξίσωση του καλωδίου γράφεται

$$\frac{H_p}{A_c \cdot E_c} \cdot L_s = \frac{g}{H_g} \cdot \left(\int_0^L n_{sym} dx + \int_0^L n_{ant} dx \right)$$

Δεδομένου ότι το n_{ant} είναι αντισυμμετρική συνάρτηση είναι

$$\int_0^L n_{ant} dx = 0$$

Άρα

$$\frac{H_p}{A_c \cdot E_c} \cdot L_s = \frac{g}{H_g} \cdot \int_0^L n_{sym} dx$$

Προφανώς η σχέση ισχύει και για τη δεύτερη περίπτωση όπου το κινητό φορτίο p εκτείνεται σε όλο άνοιγμα. Η αντίστοιχη φόρτιση της πλασματικής ισοδύναμης δοκού είναι $(p - H_p/r)$ σε όλο το μήκος της.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα το n_{sym} μπορεί να προσδιοριστεί με πολύ καλή ακρίβεια από τη σχέση

$$n_{sym} = W_1 \cdot \frac{1}{1 + \xi}$$

Όπου το W_1 παριστάνει την ελαστική γραμμή της απλής αμφιέριστης δοκού κάτω από το εγκάρσιο φορτίο $(p^* - H_p/r)$ με το p^* να ισούται με $p/2$ για την φόρτιση του ενός ημίσεως του ανοίγματος είτε με p για την φόρτιση ολόκληρου του ανοίγματος.

Η ελαστική γραμμή W_1 μιάς απλής δοκού σύμφωνα με το θεώρημα του Mohr, ταυτίζεται με το διάγραμμα των καμπτικών της ροπών όταν αυτή φορτισθεί με (M_1^0/EI) , όπου το διάγραμμα ροπών M_1^0 για την περίπτωση της αμφιέριστης δοκού είναι παραβολικό με μέγιστη τιμή $(p^* - H_p/r) \cdot L^2/8$. Έτσι προκύπτει :

$$W_1(x) = \frac{(p^* - H_p/r) \cdot L^4}{24 \cdot EI} \cdot \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

Αντικαθιστώντας στην καταστατική εξίσωση, προκύπτει η παρακάτω αλγεβρική εξίσωση ως προς τον άγνωστο H_p :

$$\frac{H_p}{A_c \cdot E_c} \cdot L_s = \frac{g}{H_g} \cdot \left[\frac{(p^* - H_p/r) \cdot L^5}{120 \cdot EI} \frac{1}{1 + \frac{H_g + H_p}{P_{cr}}} \right]$$

Εισάγονται εδώ οι ακόλουθες αδιάστατες παράμετροι

$$G = \frac{H_g \cdot L^2}{EI}, \quad \gamma = \frac{p^*}{g}, \quad \varepsilon = \frac{H_g}{A_c \cdot E_c}$$

Καθώς και η άγνωστη παράμετρος του προβλήματος:

$$Z = \frac{H_p}{H_g}$$

Η παράμετρος ευκαμψίας G παριστάνει το λόγο του βέλους της αμφιέριστης δοκού λόγω μόνιμου φορτίου προς την κρέμαση του βέλους, πολλαπλασιασμένο με τον παράγοντα $(48/5)$, ενώ η παράμετρος ε παριστάνει την ανηγμένη μήκυνση του καλωδίου στο χαμηλότερο σημείο του υπό το μόνιμο φορτίο g . Με βάση τα παραπάνω προκύπτει:

$$Z^2 + \left(\frac{\pi^2}{G} + \omega + 1 \right) \cdot Z - \gamma \cdot \omega = 0$$

Όπου

$$\omega = \frac{8 \cdot \pi^2}{15 \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{1/\lambda^2 + 8}$$

έτσι το Z μπορεί άμεσα να προσδιοριστεί από την έκφραση:

$$Z = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \rho}$$

όπου

$$\zeta = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi^2}{G} + \omega + 1\right)$$

και

$$\rho = \gamma \cdot \omega$$

Προσδιορίζοντας την Z είναι δυνατός ο υπολογισμός της επιπλέον δύναμης του καλωδίου H_p λόγω του κινητού φορτίου καθώς και της συνολικής μέγιστης ροπής και παραμόρφωσης που αναπτύσσονται στο φορέα. Γνωρίζοντας ότι η παραμόρφωση $n(x)$ μιας απλής δοκού λόγω εγκάρσιου και αξονικού φορτίου q και H αντίστοιχα δίνεται από τη σχέση:

$$n(x) = \frac{q}{H} \cdot \left[\frac{\cosh\left(k \cdot \frac{L}{2} - k \cdot x\right)}{k^2 \cdot \cosh\left(k \cdot \frac{L}{2}\right)} - \frac{1}{k^2} + \frac{x \cdot (L - x)}{2} \right]$$

όπου

$$k = \sqrt{\frac{H}{EI}}$$

Και λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση:

$$M = -EI \cdot \frac{dn^2}{dx^2}$$

Προκύπτει

$$M_{max} = \left\{ \frac{8 \cdot (\gamma - Z)}{D^2} \cdot \left[\frac{\cosh(D/4)}{\cosh(D/2)} - 1 \right] + \frac{8 \cdot \gamma}{D^2} \cdot \left[\frac{1}{\cosh(D/4)} - 1 \right] \right\} M_w^0$$

όπου

$$M_w^0 = \frac{w \cdot L^2}{8}$$

και

$$\frac{\eta_{max}}{L} = \frac{8 \cdot \lambda \cdot (\gamma - Z)}{(Z + 1) \cdot D^2} \cdot \left[\frac{\cosh(D/4)}{\cosh(D/2)} + \frac{3 \cdot D^2}{32} - 1 \right] + \frac{8 \cdot \lambda \cdot \gamma}{(Z + 1) \cdot D^2} \cdot \left[\frac{1}{\cosh(D/4)} + \frac{D^2}{32} - 1 \right]$$

Η μαθηματική προσέγγιση της παραπάνω διάταξης αποτελεί τη βάση για την ανάλυση του ακαμπτοποιημένου καλωδίου. Το πρόβλημα αυτό έχει ήδη μελετηθεί και προγραμματιστεί, αλλά η αναφορά του ήταν αναγκαία για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος των προεντεταμένων ταινιωτών φορέων λόγω της αναλογίας στη συμπεριφορά τους όπως διατυπώνεται παρακάτω.

Κεφάλαιο 7

Το πρόβλημα του ταινιωτού προεντεταμένου συστήματος

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο το σύστημα των ταινιωτών προεντεταμένων φορέων έχει εφαρμοστεί κυρίως για την κατασκευή πεζογεφυρών και τη στέγαση μεγάλων επιφανειών. Στην πρώτη εφαρμογή για λειτουργικούς λόγους (για να είναι βαθιά η γέφυρα από πεζούς), τίθεται αυτόματα ο περιορισμός μέγιστης κλίσεως γύρω στο 8% πράγμα που σημαίνει τον περιορισμό του λόγου χθαμαλότητας σε τιμές περί το 1/50. Αντίθετα στην κατασκευή στεγών υπάρχει δυνατότητα διακύμανσης του λόγου χθαμαλότητας λ σε ένα πολύ μεγαλύτερο εύρος φτάνοντας τιμές περί το 1/8.

Για την εκτίμηση της εντατικής κατάστασης του ανεστραμμένου τόξου σκυροδέματος και του εντεταγμένου σε αυτό καλωδίου εξαιτίας ενός επιπρόσθετου κινητού φορτίου είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψιν η συνδυασμένη λειτουργία καλωδίου και τόξου. Η παρατήρηση ότι η παραμόρφωση καλωδίου και τόξου επιβάλλεται να είναι κοινή, από το συμβιβαστό των παραμορφώσεων, και εξαρτάται τόσο από την αξονική στιβαρότητα του καλωδίου όσο και από την καμπτική στιβαρότητα του τόξου, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το σύστημα είναι ανάλογο του συστήματος της ανηρτημένης δοκού. Με βάση αυτή την παρατήρηση και υποθέτοντας ότι μεταξύ καλωδίου και περιβάλλοντος σκυροδέματος δεν υπάρχει πρόσφυση ή διάταξη της κρεμαστής γέφυρας μπορεί να χρησιμοποιηθεί σα μοντέλο για την ανάλυση του εξεταζόμενου συστήματος.

Το προφίλ του καλωδίου θεωρείται παραβολικό και διαμορφώνεται από το προκαθορισμένο βέλος f στο μέσο του ανοίγματος ορίζοντας έτσι το λόγο χθαμαλότητας

$$\lambda = \frac{f}{L} \quad (1)$$

και την καμπυλότητα του καλωδίου

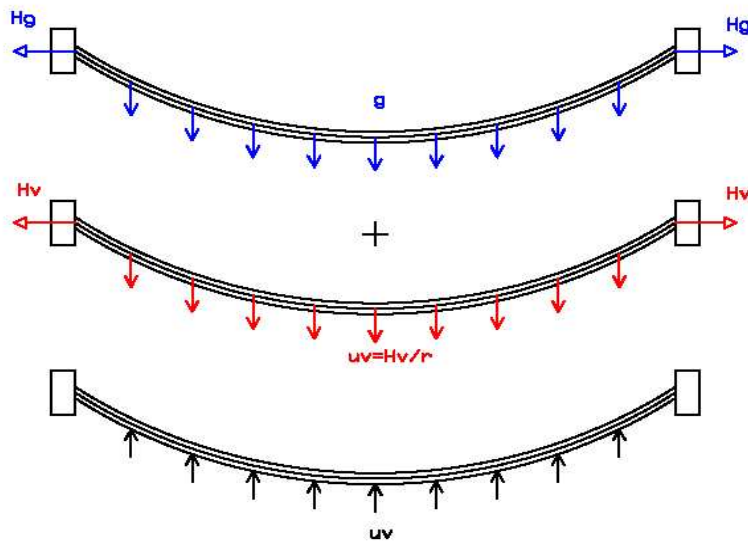
$$\frac{1}{r} = \frac{8\lambda}{L} \quad (2)$$

Σημαντική διαφορά σε σχέση με την κρεμαστή γέφυρα είναι ότι η κρέμαση διατηρείται, εκτός από το ίδιο βάρος της ταινίας του σκυροδέματος και του καλωδίου που προκαλεί αρχική δύναμη στο καλώδιο H_g , και από το επιπρόσθετο ομοιόμορφο φορτίο u_v που ασκείται στο καλώδιο προς τα κάτω και προκαλείται από την επιπλέον επιβαλλόμενη δύναμη προέντασης H_v

$$u_v = \frac{H_v}{r} \quad (3)$$

Επομένως στο πλασματικό σύστημα αναρτήσεως μπορεί να θεωρηθεί ότι το αρχικά ασκούμενο μόνιμο φορτίο στη δοκό ακαμψίας είναι:

$$w = g + u_v \quad (4)$$



Σχήμα 7.1

Η καμπτική στιβαρότητα του τόξου προέρχεται από τη θλιπτική κατάσταση στην οποία επιβάλλεται λόγω του προς τα πάνω ασκούμενου φορτίου u_v (αντιφορτίου) εξαιτίας της προέντασης. Αυτή η καμπτική στιβαρότητα εκφράζεται με την ποσότητα (EI) και είναι αντίστοιχη της καμπτικής στιβαρότητας που προσφέρει η δοκός ακαμψίας στο σύστημα της κρεμαστής γέφυρας με ίδια διατομή. Στην προκειμένη περίπτωση η διατομή θεωρείται ορθογωνική $(b \cdot t)$, όπου b παριστάνει το μοναδιαίο πλάτος και t το πάχος της ταινίας του σκυροδέματος.

Υποθέτοντας ότι το προφίλ του καλωδίου έχει μια αρχική γεωμετρία η οποία περιγράφεται από μια συνάρτηση $y(x)$, με την άσκηση κινητού φορτίου σε περιορισμένο μήκος (ώστε η φόρτιση να μην είναι σύμφωνη με τη γραμμή πιέσεων) η αρχική γεωμετρία αλλάζει. Το καλώδιο παραμορφώνεται μαζί με τη δοκό κατά $n(x)$, αυξάνοντας ταυτόχρονα την αξονική του δύναμη κατά H_p . Η νέα γεωμετρία του καλωδίου περιγράφεται από την έκφραση:

$$z(x) = y(x) + n(x) \quad (5)$$

Η κατακόρυφη ισορροπία ενός στοιχειώδους τμήματος του καλωδίου, κατ'αντιστοιχία με την αναρτημένη δοκό, απαιτεί την παρουσία μιας κατανεμημένης δύναμης με φορά προς τα κάτω ίσης με:

$$q_c(x) = -\frac{d^2z}{dx^2} \cdot (H_w + H_p) \quad (6)$$

όπου H_p η πρόσθετη δύναμη λόγω του κινητού φορτίου και H_w η συνολική αρχική δύναμη του καλωδίου λόγω του μόνιμου φορτίου w , δηλαδή

$$H_w = H_g + H_v = \frac{w \cdot L}{8 \cdot \lambda} \quad (7)$$

Συνεπώς το συνολικό φορτίο που θα ασκείται στη δοκό θα είναι

$$q(x) = -q_c(x) + w + p \quad (8)$$

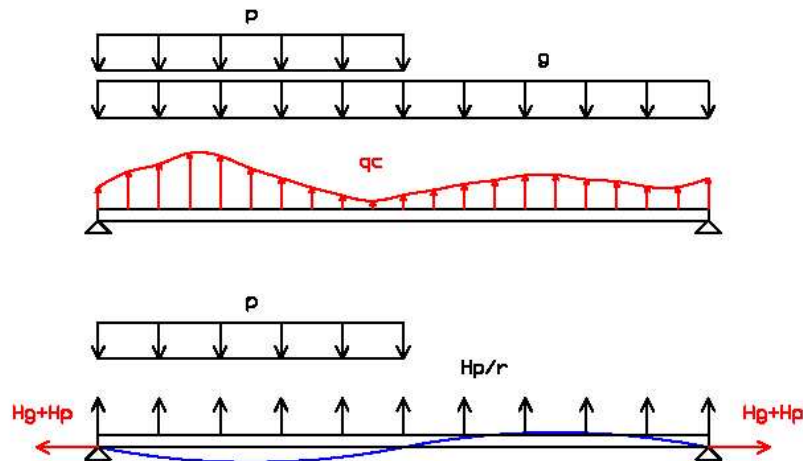
Η παραμόρφωση της δοκού $n(x)$ υπακούει στην κλασσική εξίσωση

$$EI \cdot \frac{dn^4}{dx^4} = q(x) \quad (9)$$

η οποία από τις σχέσεις (4,5,6) και με τη θεώρηση ότι ο όρος (d^2y/dx^2) είναι η αρνητική καμπυλότητα του καλωδίου υπό το φορτίο w , γράφεται

$$EI \cdot \frac{dn^4}{dx^4} - \frac{d^2n}{dx^2} \cdot (H_w + H_p) = p - \frac{H_p}{r} \quad (10)$$

Γίνεται έτσι ορατό ότι η εξίσωση αυτή αποτελεί την κλασσική διαφορική εξίσωση των κρεμαστών γεφυρών κάτω από μόνιμο φορτίο w , και όπως δείχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορεί να θεωρηθεί σαν η εξίσωση μιας απλής αμφιέριστης δοκού με εγκάρσιο φορτίο $(p - H_p/r)$ υποκείμενη σε ένα αξονικό εφελκυστικό φορτίο $(H_w + H_p)$ σύμφωνα με τη θεωρία Πας τάξης.



Σχήμα 7.2

Η αύξηση της δύναμης H_p του καλωδίου όπως δείχθηκε προηγουμένως συνδέεται με πολύ καλή προσέγγιση με την επιπρόσθετη δύναμη του καλωδίου μέσω της σχέσης

$$\frac{H_p}{A_c E_c} \cdot L \cdot (1 + 8 \cdot L^2) = \frac{1}{r} \cdot \int_0^L n \, dx \quad (11)$$

Η υποχρέωση της παραμόρφωσης της εφελκόμενης δοκού σύμφωνα με την εξίσωση (10) να ικανοποιεί την καταστατική εξίσωση του καλωδίου οδηγεί στον προσδιορισμό της άγνωστης ποσότητας H_p .

Σημειώνεται εδώ ότι η παραμόρφωση $n(x)$ μιας απλής αμφιέριστης δοκού με εγκάρσιο φορτίο q και αξονική εφελκυστική δύναμη H , δίνεται σύμφωνα με τη θεωρία Πας από την έκφραση

$$n(x) = \frac{q}{H} \cdot \left[\frac{\cosh(k \cdot \frac{L}{2} - k \cdot x)}{k^2 \cdot \cosh(k \cdot \frac{L}{2})} - \frac{1}{k^2} + \frac{x \cdot (L - x)}{2} \right] \quad (12)$$

Ενώ στην περίπτωση που παρουσιάζεται μία συγκεντρωμένη ροπή M στο αριστερό ή στο δεξιό άκρο της δοκού έχουμε αντίστοιχα :

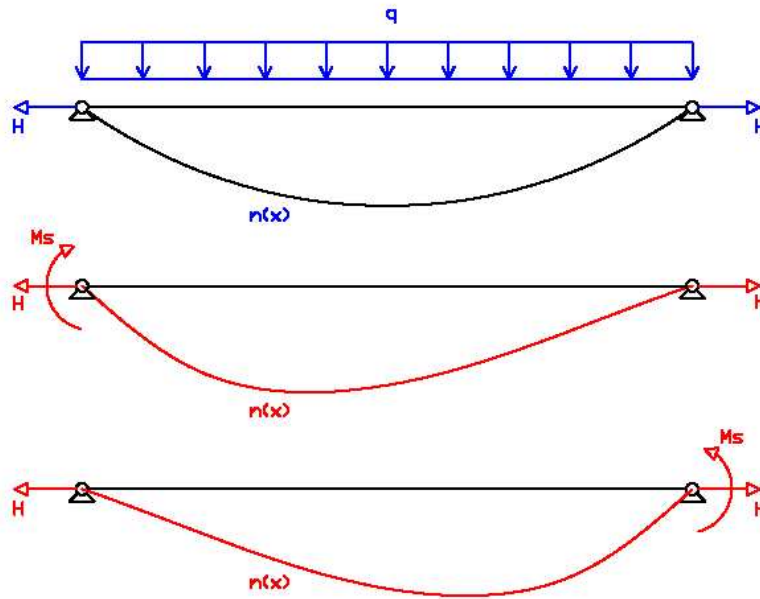
$$n(x) = \frac{M}{H} \cdot \left[\frac{L - x}{L} - \frac{\sinh(k \cdot L - k \cdot x)}{\sinh(k \cdot L)} \right]$$

ή (13)

$$n(x) = \frac{M}{H} \cdot \left[\frac{x}{L} - \frac{\sinh(k \cdot x)}{\sinh(k \cdot L)} \right]$$

όπου

$$k = \sqrt{\frac{H}{EI}} \quad (14)$$



Σχήμα 7.3

Γενικά τέτοιου είδους ταινιωτοί φορείς μπορεί να κατασκευάζονται είτε αρθρωτοί είτε πακτωμένοι στα άκρα τους ανάλογα με το σκοπό που εξυπηρετούν. Αντίστοιχα λοιπόν με τις ισχύουσες συνοριακές συνθήκες του ταινιωτού τόξου προκύπτει και η ισοδύναμη δοκός ακαμψίας (αμφιέρειστη ή αμφίπακτη). Αναφέρεται πάντως ότι προτιμάται οι ταινιωτές γέφυρες να κατασκευάζονται με πακτωμένα άκρα ενώ οι ταινιωτές στεγάσεις με αρθρωτά. Στην παρούσα μελέτη εξετάζονται και οι δύο περιπτώσεις στήριξης με σκοπό την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων. Όπως και στην αναρτημένη δοκό η ένταση και η παραμόρφωση του συστήματος διέπεται από τις ακόλουθες αδιάστατες παραμέτρους

$$G = \frac{H_w \cdot L^2}{EI} \quad , \quad \gamma = \frac{p}{w} \quad , \quad \varepsilon = \frac{H_w}{A_c \cdot E_c} \quad (15)$$

ενώ σαν άγνωστη παράμετρος του προβλήματος εισάγεται η

$$Z = \frac{H_p}{H_w} \quad (16)$$

Όπου στις παραπάνω εκφράσεις H_w είναι η δύναμη του καλωδίου λόγω του μόνιμου φορτίου w .

Αμφιαρθρωτή δοκός ακαμψίας

Η αμφιέρειστη δοκός ακαμψίας εξετάζεται πρώτα δεδομένου ότι αποτελεί τη βάση για την αριθμητική επίλυση και της αμφίπακτης δοκού. Από την αντικατάσταση της ακριβούς έκφρασης της παραμόρφωσης $n(x)$ όπως αυτή προκύπτει από την εξίσωση (12) στο σύστημα εξισώσεων (10) και (11) οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$Z \cdot \varepsilon \cdot (1 + 8 \cdot \lambda^2) = 64 \cdot \lambda^2 \frac{\gamma - Z}{Z + 1} \cdot \left[\frac{2 \cdot \sinh(D/2)}{D^3 \cdot \cosh(D/2)} - \frac{1}{D^2} + \frac{1}{12} \right] \quad (17)$$

όπου

$$D = \sqrt{G \cdot (Z + 1)} \quad (18)$$

Η εξίσωση αυτή δεν είναι άμεσα επιλύσιμη, αλλά μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων. Παρόλα αυτά ακολουθείται η ίδια διαδικασία με την κρεμαστή γέφυρα όπου η άγνωστη παράμετρος Z προσδιορίζεται με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια από την ακόλουθη αλγεβρική εξίσωση

$$Z^2 + \left(\frac{\pi^2}{G} + \omega + 1 \right) \cdot Z - \gamma \cdot \omega = 0 \quad (19)$$

όπου

$$\omega = \frac{8 \cdot \pi^2}{15 \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{1/\lambda^2 + 8} \quad (20)$$

Τώρα το Z μπορεί να προσδιοριστεί άμεσα από την έκφραση

$$Z = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \rho} \quad (21)$$

με

$$\zeta = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\pi^2}{G} + \omega + 1 \right) \quad (22)$$

και

$$\rho = \gamma \cdot \omega \quad (23)$$

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι η τιμή του Z που προκύπτει με αυτό τον τρόπο διαπιστώνεται ότι διαφέρει από την ακριβή λύση της εξίσωσης (17) λιγότερο από 0,1%, πράγμα που καθιστά την λύση απόλυτα ικανοποιητική.

Έχει ήδη αναφερθεί ότι για τον υπολογισμό των μέγιστων τιμών της έντασης λαμβάνονται υπόψιν δύο διατάξεις του κινητού φορτίου

1. Για τον προσδιορισμό της μέγιστης δύναμης του καλωδίου το κινητό φορτίο εκτείνεται σε όλο το μήκος της δοκού.
2. Για τον προσδιορισμό της μέγιστης καμπτικής ροπής του ανοίγματος M_{max} και για τη μέγιστη παραμόρφωση η_{max} , το κινητό φορτίο p εκτείνεται στο ακραίο ήμισυ του κεντρικού ανοίγματος.

Οι ποσότητες M_{max} και η_{max} αναφέρονται περίπου στο τέταρτο του ανοίγματος και μπορούν να καθοριστούν άμεσα από την εξίσωση (12), βάσει εκείνης της τιμής του Z που προκύπτει από την εξίσωση (19) λαμβάνοντας υπόψιν την μισή τιμή της παραμέτρου γ . Έτσι χωρίζοντας τη φόρτιση σε ένα συμμετρικό και ένα αντισυμμετρικό τμήμα όπως αναλυτικά εξηγήθηκε προηγουμένως, παρατηρούμε ότι η αντισυμμετρική φόρτιση δεν αναπτύσσει επιπρόσθετη δύναμη στο καλώδιο και συνεπώς η δοκός συμπεριφέρεται σαν αμφιέρειστη με μισό άνοιγμα και μισό φορτίο. Επαλληλίζοντας τώρα τα αντίστοιχα μεγέθη στο τέταρτο του ανοίγματος της πλήρους δοκού και στο μέσο της δοκού με το μισό μήκος ανοίγματος βάσει της εξίσωσης (12) και λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση

$$M = -EI \cdot \frac{dn^2}{dx^2} \quad (24)$$

προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις που δίνουν τη μέγιστη καμπτική ένταση και τη μέγιστη παραμόρφωση στο τέταρτο του ανοίγματος συναρτήσει των εισηγμένων αδιάστατων παραμέτρων.

$$M_{max} = \left\{ \frac{8 \cdot (\gamma - Z)}{D^2} \cdot \left[\frac{\cosh(D/4)}{\cosh(D/2)} - 1 \right] + \frac{8 \cdot \gamma}{D^2} \cdot \left[\frac{1}{\cosh(D/4)} - 1 \right] \right\} M_w^0 \quad (25)$$

όπου

$$M_w^0 = \frac{w \cdot L^2}{8} \quad (26)$$

και

$$\frac{\eta_{max}}{L} = \frac{8 \cdot \lambda \cdot (\gamma - Z)}{(Z + 1) \cdot D^2} \cdot \left[\frac{\cosh(D/4)}{\cosh(D/2)} + \frac{3 \cdot D^2}{32} - 1 \right] + \frac{8 \cdot \lambda \cdot \gamma}{(Z + 1) \cdot D^2} \cdot \left[\frac{1}{\cosh(D/4)} + \frac{D^2}{32} - 1 \right] \quad (27)$$

Δοκός ακαμψίας με πακτωμένα άκρα

Σύμφωνα με τις σχέσεις που προκύπτουν για την παραμόρφωση της δοκού με δύο ίσες ροπές M_s στα άκρα η οποία υποβάλλεται σε ένα διάμηκες φορτίο H και σε ένα εγκάρσιο φορτίο q έχουμε

$$\eta(x) = \frac{q}{H} \cdot \left[\frac{\cosh(k \cdot \frac{L}{2} - k \cdot x)}{k^2 \cdot \cosh(k \cdot \frac{L}{2})} - \frac{1}{k^2} + \frac{X \cdot (L - x)}{2} \right] + \frac{M_s}{H} \cdot \left[1 - \frac{\cosh(k \cdot \frac{L}{2} - k \cdot x)}{\cosh(k \cdot \frac{L}{2})} \right] \quad (28)$$

Στην προκειμένη περίπτωση οι καμπτικές ροπές M_s καθορίζονται από τις συνθήκες πακτώσεως (dn/dx) = 0. Λαμβάνοντας επίσης τις τιμές του αξονικού και του εγκάρσιου φορτίου, όπως αυτές προέκυψαν προηγουμένως, δηλαδή $H = (H_w + H_p)$ και $q = (p - H_p/r)$, μέσω των εξισώσεων (15) και (16) καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση της ροπής και της παραμόρφωσης

$$M_s = w \cdot L^2 \cdot \frac{\gamma - Z}{D^2} \cdot \left[1 - \frac{D}{2 \cdot \tanh(D/2)} \right] \quad (29)$$

και

$$\eta(x) = \frac{8\lambda L}{D^2} \cdot \frac{\gamma - Z}{Z + 1} \left\{ \frac{\cosh(\frac{D}{2} - D \cdot \frac{x}{L})}{\cosh(D/2)} - 1 + \frac{D^2}{L^2} \cdot \frac{x \cdot (L - x)}{2} + \left[1 - \frac{D}{2 \cdot \tanh(D/2)} \right] \cdot \left[1 - \frac{\cosh(\frac{D}{2} - D \cdot \frac{x}{L})}{\cosh(D/2)} \right] \right\} \quad (30)$$

Με την αντικατάσταση της παραπάνω έκφρασης του $n(x)$ στην καταστατική εξίσωση του καλωδίου προκύπτει η παρακάτω εξίσωση για τον καθορισμό της άγνωστης παραμέτρου Z

$$\frac{1}{8} \cdot Z \cdot \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{1}{8 \cdot \lambda^2} \right) \cdot \frac{Z + 1}{\gamma - Z} = \frac{1}{D^2} - \frac{1}{2 \cdot D \cdot \tanh(D/2)} + \frac{1}{12} \quad (31)$$

Όπως γίνεται ορατό η παραπάνω εξίσωση δεν είναι άμεσα επιλύσιμη. Λόγω της αδυναμίας προσεγγίσεως του προβλήματος με βάσει την απλοποιητική διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωση του αμφιαρθρωτού συστήματος, ακολουθείται η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων για την εύρεση της ακριβούς λύσης του προβλήματος. Η διαδικασία επιταχύνεται αρκετά αν σαν τιμή εκκινήσεως Z_0 ληφθεί εκείνη που προκύπτει από την προηγούμενη περίπτωση της αμφιαρθρωτής σύμφωνα με τη εξίσωση (19). Η τιμή της λύσεως Z από την εξίσωση (31) είναι πάντοτε μικρότερη από την τιμή Z_0 και η διαφορά τους δεν ξεπερνά το 8%.

Από την αντικατάσταση του Z , όπως αυτό υπολογίζεται από την παραπάνω διαδικασία, στη σχέση (29) προσδιορίζεται η τιμή της καμπτικής ροπής στο πακτωμένο άκρο της δοκού η οποία προκαλεί εφελκυσμό των άνω ινών. Αντίστοιχα η καμπτική ροπή στο μέσο του ανοίγματος με βάση τη σχέση

$$M = -EI \cdot \frac{dn^2}{dx^2}$$

προσδιορίζεται από την εξίσωση

$$M_{span} = w \cdot L^2 \cdot \frac{\gamma - Z}{D^2} \cdot \left[1 - \frac{D}{2 \cdot \sinh(D/2)} \right] \quad (32)$$

και η αντίστοιχη παραμόρφωση με βάση την εξίσωση (26) προκύπτει

$$\frac{\eta_{(x=L/2)}}{L} = 8 \cdot \lambda \cdot \frac{\gamma - Z}{Z + 1} \cdot \left\{ \frac{2}{D^2} + \frac{1}{2 \cdot D \cdot \tanh\left(\frac{D}{2}\right)} \cdot \left[\frac{1}{\cosh\left(\frac{D}{2}\right)} - 1 \right] + \frac{1}{8} \right\} \quad (33)$$

Από την συμπεριφορά των τόξων γνωρίζουμε ότι τα παραβολικά τόξα δεν αναπτύσσουν καμία κάμψη όταν υποβάλλονται σε ομοιόμορφη εγκάρσια φόρτιση δεδομένου ότι η μορφή τους θα εξακολουθεί να συμπίπτει με τη γραμμή πίεσης της φόρτισης αυτής. Με τη θεώρηση λοιπόν ότι το ανεστραμμένο τόξο έχει παραβολική μορφή, και με την υπόθεση ότι δεν παρεκκλίνει αισθητά από τη μορφή αυτή υπό τη δράση των φορτίων, συμπεραίνουμε ότι τα ομοιόμορφα σε όλο το μήκος φορτία (μόνιμα ή κινητά) καθώς και τα αντιφορτία u , λόγω προέντασης δεν προκαλούν ροπές στα πακτωμένα άκρα. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι δεν ισχύει το ίδιο και στα κυκλικά τόξα τα οποία αναπτύσσουν ροπές, και σε ορισμένες περιπτώσεις σημαντικές, στα άκρα τους υπό την δράση ομοιόμορφου εγκάρσιου φορτίου. Για το λόγο αυτό πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί ώστε η υπολογιστική θεώρηση να μην αποκλίνει, όσο αυτό είναι δυνατό, από την κατασκευαστική πραγματικότητα.

Παράμετροι σχεδιασμού και εκτίμηση της εντάσεως

Αναφέρθηκε ήδη ότι η μελέτη του προβλήματος γίνεται με τη βοήθεια των ακόλουθων σχεδιαστικών παραμέτρων:

- Τον λόγο λεπτότητας α δηλαδή τον λόγο του πάχους της ταινίας του σκυροδέματος προς το μήκος του ανοίγματος που δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{t}{L} \quad (34)$$

- Τον λόγο των διατομών ρ δηλαδή τον λόγο της συνολικής διατομής των καλωδίων προς την ορθογωνική διατομή μοναδιαίου πλάτους της ταινίας του σκυροδέματος που δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{A_c}{b \cdot t} \quad (35)$$

- Τον λόγο χθαμαλότητας λ δηλαδή τον λόγο του βέλους στο μέσο του παραβολικού τόξου προς το μήκος του ανοίγματος που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{f}{L} \quad (36)$$

Επίσης σημειώνεται ότι το κινητό φορτίο για την περίπτωση αυτή λαμβάνεται ίσο με:

$$p = 1,5kN/m^2 \quad (37)$$

Τώρα λοιπόν με τη βοήθεια των παραπάνω σχεδιαστικών παραμέτρων το πλασματικό φορτίο w καθώς και το φορτίο εκτροπής u_v εκφράζονται με τη βοήθεια των σχέσεων

$$w = g + u_v = \alpha \cdot \lambda \cdot \rho \cdot \sigma_{p0} \quad (38)$$

$$u_v - g = \alpha \cdot \lambda \cdot \rho \cdot \sigma_{p0} - \gamma_c \cdot L \cdot \alpha \quad (39)$$

Όπου γ_c είναι το ίδιο βάρος του σκυροδέματος ($\gamma_c = 25kN/m^3$) και σ_{p0} είναι η εφαρμοζόμενη τάση στο καλώδιο κατά τη διαδικασία της προέντασης. Αντίστοιχα εκφράζονται και οι δυνάμεις

$$H_w = \alpha \cdot \rho \cdot \sigma_{p0} \cdot L \quad (40)$$

$$H_v = \left(\sigma_{p0} \cdot \rho - \frac{\gamma_c \cdot L}{8 \cdot \lambda} \right) \cdot \alpha \cdot L \quad (41)$$

Προκύπτουν έτσι οι τρεις αδιάστατες παράμετροι των σχέσεων (15) με τη μορφή των σχέσεων:

$$G = \frac{12}{E_c \cdot \alpha^2} \cdot \sigma_{p0} \cdot \rho \quad , \quad \gamma = \frac{p}{8 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot \sigma_{p0}} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\sigma_{p0}}{E_0} \quad (42)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τόσο οι καμπτικές ροπές και οι θλιπτικές δυνάμεις του σκυροδέματος όσο και η συνολική δύναμη του καλωδίου μπορούν να υπολογιστούν επί τη βάσει των τριών αυτών αδιάστατων παραμέτρων. Έτσι έχουμε:

Αμφιαρθρωτό

$$M_{max} = \left\{ \frac{8 \cdot (\gamma - Z)}{D^2} \cdot \left[\frac{\cosh(D/4)}{\cosh(D/2)} - 1 \right] + \frac{8 \cdot \gamma}{D^2} \cdot \left[\frac{1}{\cosh(D/4)} - 1 \right] \right\} M_w^0$$

$$\frac{\eta_{max}}{L} = \frac{8\lambda(\gamma - Z)}{(Z + 1) \cdot D^2} \left[\frac{\cosh(D/4)}{\cosh(D/2)} + \frac{3 \cdot D^2}{32} - 1 \right] + \frac{8\lambda\gamma}{(Z + 1) \cdot D^2} \cdot \left[\frac{1}{\cosh(D/4)} + \frac{D^2}{32} - 1 \right]$$

όπως αποδείχθηκε προηγουμένως από τις σχέσεις (25) και (27).

Επίσης η ενεργός θλιπτική δύναμη ανά μονάδα πλάτους N_{c-hing} προκύπτει από τη δύναμη εκτροπής u_v και το κινητό φορτίο p ως:

$$N_{c-hing} = \frac{(u_v - p) \cdot L}{8 \cdot \lambda} \quad (43)$$

Τέλος η συνολική δύναμη του καλωδίου H_{hing} του αρθρωτού τόξου γράφεται

$$H_{hing} = (1 + Z_{hing}) \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \sigma_{p0} \cdot L \quad (44)$$

όπου Z_{hing} υπολογίζεται από την προηγούμενη διαδικασία για την αμφιαρθρωτή δοκό με το κινητό φορτίο να εκτίνεται σε όλο το άνοιγμα.

Αμφίπακτο

$$M_{span} = w \cdot L^2 \cdot \frac{\gamma - Z}{D^2} \cdot \left[1 - \frac{D}{2 \cdot \sinh(D/2)} \right] \quad (32)$$

$$\frac{\eta_{(x=L/2)}}{L} = 8 \cdot \lambda \cdot \frac{\gamma - Z}{Z + 1} \cdot \left\{ \frac{2}{D^2} + \frac{1}{2 \cdot D \cdot \tanh\left(\frac{D}{2}\right)} \cdot \left[\frac{1}{\cosh\left(\frac{D}{2}\right)} - 1 \right] + \frac{1}{8} \right\} \quad (33)$$

$$M_s = w \cdot L^2 \cdot \frac{\gamma - Z}{D^2} \cdot \left[1 - \frac{D}{2 \cdot \tanh(D/2)} \right] \quad (29)$$

Επίσης η ενεργός θλιπτική δύναμη ανά μονάδα πλάτους N_{c-fix} για το πακτωμένο τόξο εκφράζεται ως

$$N_{c-fix} = N_{arch} - N_z \quad (45)$$

όπου N_{arch} παριστάνει τη θλιπτική δύναμη λόγω των πιέσεων εκτροπής u_v πάνω στο τόξο, και γράφεται:

$$N_{arch} = \frac{u_v \cdot L}{8 \cdot \lambda} \quad (46)$$

και N_z παριστάνει την εφελκυστική δύναμη που τίνει να επιβάλει το κινητό φορτίο στο ανεστραμμένο τόξο, συμπεριλαμβανομένων και των δράσεων των καμπτικών ροπών M_s και M_{span} , και είναι:

$$N_z = \frac{p \cdot L}{8 \cdot \lambda} + \frac{M_s - M_{span}}{\lambda \cdot L} \quad (47)$$

Τέλος η συνολική δύναμη που αναλαμβάνεται από το καλώδιο του πακτωμένου τόξου γράφεται

$$H_{fix} = (1 + Z_{fix}) \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \sigma_{p0} \cdot L \quad (48)$$

με την παράμετρο Z_{fix} να αντιστοιχεί στην τιμή του Z που προκύπτει με την προηγούμενη διαδικασία για πακτωμένη δοκό και κινητό φορτίο εκτεινόμενο σε όλο το μήκος της.

Έτσι λοιπόν προκειμένου να διαστασιολογήσουμε την ορθογωνική διατομή μοναδιαίου πλάτους της ταινιωτής κατασκευής για την περίπτωση της των αρθρωτών στηρίξεων χρησιμοποιούμε το συνδυασμό ροπής και θλιπτικής δύναμης (M_{max}, N_{c-hing}) γιά τα (L/4) του ανοίγματος που είναι ο δυσμενέστερος. Από την άλλη για την διαστασιολόγηση του αμφίπακτου τόξου μοναδιαίου πλάτους είναι αναγκαίο να ληφθεί υπόψιν ο συνδυασμός ροπής και αξονικής τόσο στο μέσο του ανοίγματος όσο και στις στηρίξεις. Για τις στηρίξεις του τόξου λαμβάνεται ο συνδυασμός (M_s, N_{c-fix}), ενώ για το μέσο του ανοίγματος επιλέγεται ως δυσμενέστερος ο συνδυασμός (M_{max}, N_{c-fix}), όπου M_{max} η ροπή του αμφιαρθρωτού τόξου για λόγους ασφαλείας σε περίπτωση πλαστικοποίησης των στηρίξεων. Από τις σχέσεις για το αμφιαρθρωτό και το αμφίπακτο τόξο αντίστοιχα, προκύπτει το εμβαδό της απαιτούμενης διατομής του χάλυβα προεντάσεως για την ανάληψη της συνολικής δύναμης του καλωδίου. Με βάση την απαίτηση αυτή επιλέγεται η διατομή και ο αριθμός των τενόντων που θα τοποθετηθούν τελικά στο μοναδιαίο πλάτος της ταινίας σκυροδέματος, μέσα από ένα προεπιλεγμένο σύστημα προέντασης και σύμφωνα με τους ισχύοντες κανονισμούς.

Υπενθυμίζεται ότι η παρούσα εργασία είναι στα πλαίσια της προδιαστασιολόγησης και για τον λόγο αυτό η παράλειψη της συνάφειας μεταξύ χάλυβα και περιβάλλοντος σκυροδέματος δεν αποτελεί πρόβλημα, αφού έτσι κι αλλιώς είναι παραδοχή προς την πλευρά της ασφαλείας.

Η παραπάνω μαθηματική διαδικασία έχει προγραμματιστεί με σκοπό την άμεση εξαγωγή των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια Η/Υ. Το πρόγραμμα έχει γραφεί σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN και παρατίθεται στη συνέχεια. Για την καλύτερη εποπτεία της υπολογιστικής διαδικασίας παρουσιάζονται τα ακόλουθα βήματα που είναι άμεσα εκτελέσιμα από τον Η/Υ:

- Εισαγωγή μήκους ανοίγματος L , λόγου λεπτότητας α , λόγου διατομών ρ , λόγου χθαμαλότητας λ και πρόσθετου μόνιμου φορτίου.
- Καθορισμός w και u_v από τις εξισώσεις (38) και (39) αντίστοιχα
- Καθορισμός των αδιάστατων παραμέτρων από τις εξισώσεις (42)

Αμφιαρθρωτό

- Καθορισμός του Z_{hing} από την εξίσωση (19)
- Καθορισμός του M_{max} από την εξίσωση (25), βάσει του Z_{hing}
- Καθορισμός του N_{c-hing} από την εξίσωση (43)
- Καθορισμός του H_{hing} από την εξίσωση (44)

Αμφίπακτο

- Καθορισμός του Z_{fix} από την εξίσωση (31)
- Καθορισμός του M_s και του M_{span} από την εξίσωση (29) και (32), βάσει του Z_{fix}
- Καθορισμός του N_{c-fix} από την εξίσωση (45)
- Καθορισμός του H_{fix} από την εξίσωση (48)

Σημειώνεται πάντως ότι οι παραπάνω ανάλυση γίνεται για συγκεκριμένη ποιότητα χάλυβα και σκυροδέματος που εισάγονται σαν σταθερές και υπάρχει δυνατότητα να διαφοροποιηθούν μόνο κατά τη διαδικασία του προγραμματισμού. Επίσης θεωρήθηκε ότι κατά την προένταση τα καλώδια τανύθηκαν στο 60% της τάσης διαρροής.

Κεφάλαιο 8

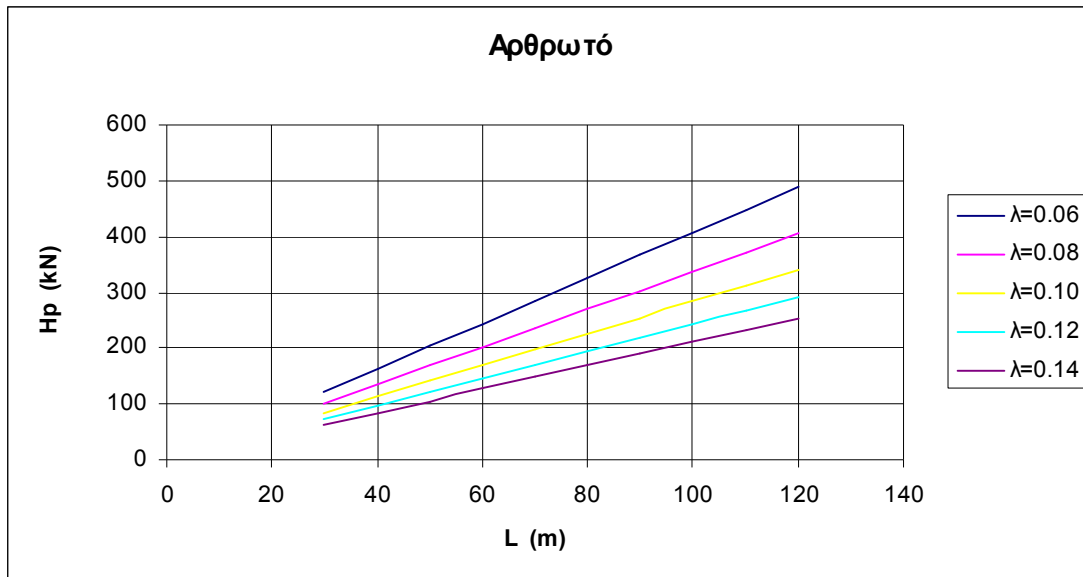
Διαγράμματα σχεδιασμού

Το ανωτέρω λογισμικό δίνει τη δυνατότητα μιας παραμετρικής μελέτης του προβλήματος, τόσο του αμφίπακτου όσο και του αμφιαρθρωτού τόξου. Πιο συγκεκριμένα δείχνει την επιρροή των τριών παραμέτρων σχεδιασμού (λ , ρ , α) στην ένταση και την παραμόρφωση του συστήματος συναρτήσει του μήκους του ανοίγματος. Η διακύμανση των τιμών των παραμέτρων είναι:

- $\lambda = 0.06 \sim 0.14$
- $\rho = 0.010 \sim 0.025$
- $\alpha = 0.002 \sim 0.005$

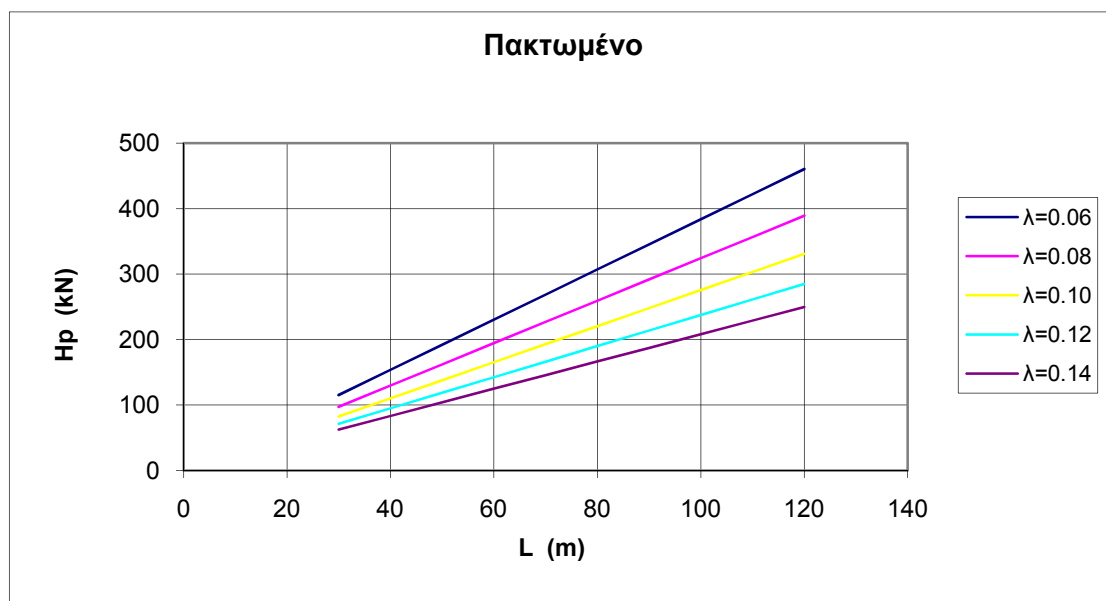
Για μήκος ανοίγματος από 30m έως 120m και σταθεροποιώντας κάθε φορά τις δύο από τις τρεις παραμέτρους σε μια μέση τιμή, υπό την δράση ενός επιπλέον κινητού φορτίου $p = 1,5kN/m^2$ προέκυψαν τα ακόλουθα διαγράμματα που προσφέρουν μια εποπτική θεώρηση του προβλήματος.

Αρχικά κρατώντας σταθερά τον λόγο λεπτότητας $\alpha=0.004$ και τον λόγο διατομών $\rho=0.020$ και μεταβάλλοντας τον λόγο χθαμαλότητας λ από 0.06 έως 0.14 προκύπτουν τα ακόλουθα διαγράμματα.



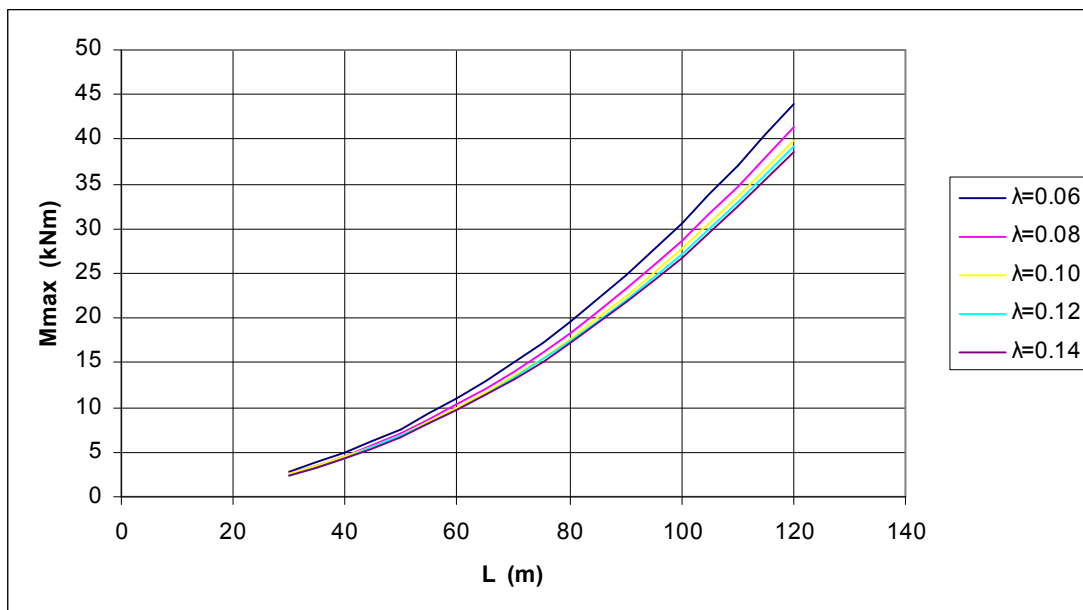
Διάγραμμα 1. Αξονική δύναμη καλωδίου ($\alpha=0.004$, $\rho=0.020$)

Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται η επιρροή του λόγου χθαμαλότητας στην αξονική δύναμη του καλωδίου συναρτήσει του ανοίγματος. Για συγκεκριμένο λόγο χθαμαλότητας λ η αξονική ένταση του καλωδίου μεταβάλλεται γραμμικά με το μήκος του ανοίγματος. Παρατηρείται επίσης ότι όσο ο λόγος λ αυξάνεται, δηλαδή το τόξο γίνεται πιο καμπύλο, η εφελκυστική δύναμη που καλείται να παραλάβει το ενοποιημένο καλώδιο εξαιτίας του κινητού φορτίου μειώνεται. Η μείωση αυτή γίνεται ιδιαίτερα αισθητή σε μεγαλύτερα ανοίγματα.



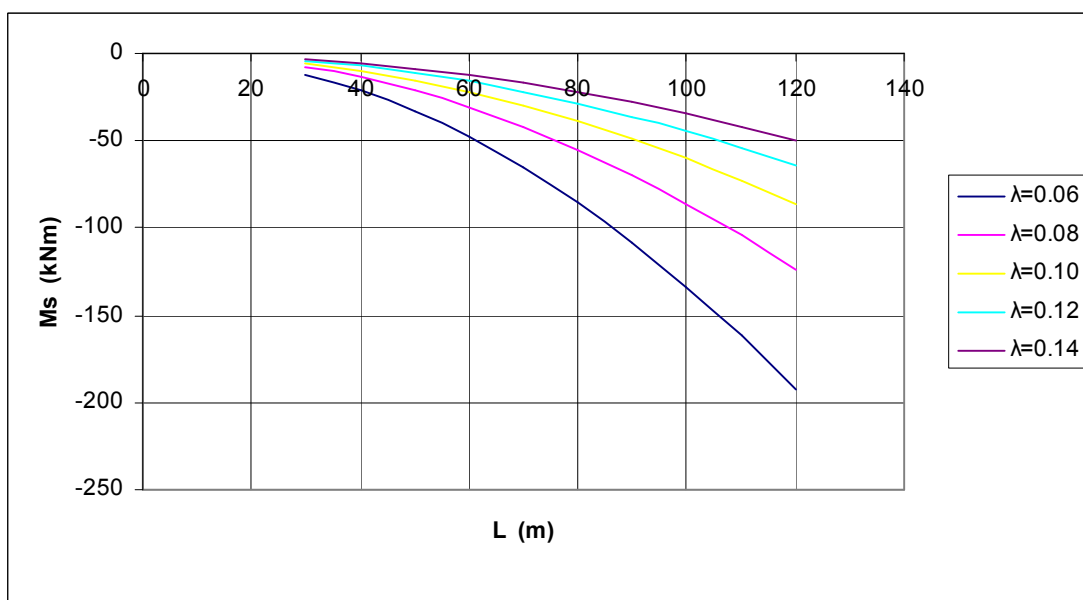
Διάγραμμα 2. Αξονική δύναμη καλωδίου ($\alpha=0.004$, $\rho=0.020$)

Η περίπτωση του αμφίπακτου φορέα ελάχιστα διαφέρει από τον αμφιαρθρωτό όσον αφορά την αξονική ένταση του καλωδίου.



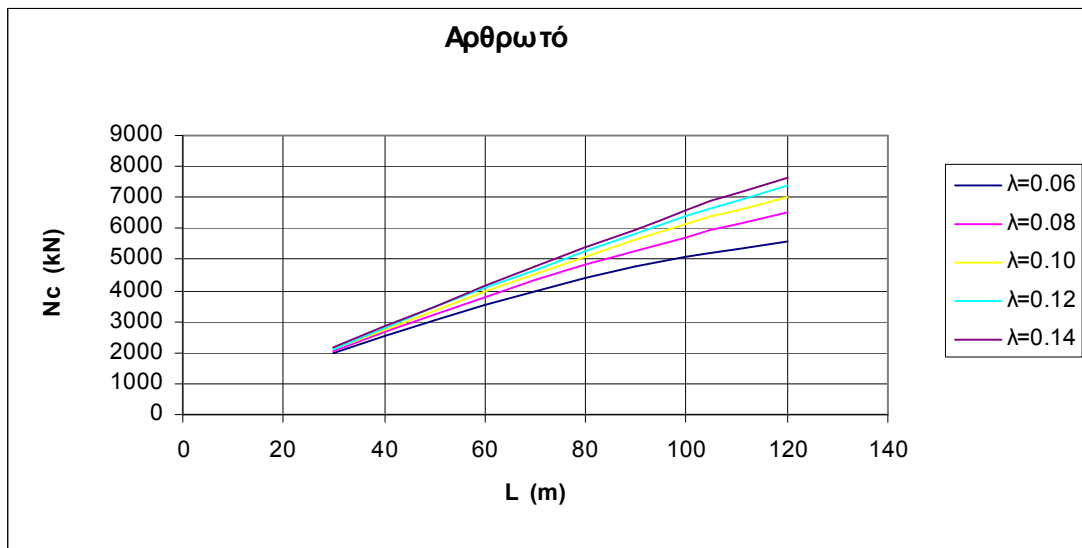
Διάγραμμα 3. Μέγιστη Καμπτική ροπή ανοίγματος ($\alpha=0.004$, $\rho=0.020$)

Εδώ παρουσιάζεται η μεταβολή της μέγιστης ροπής του ανοίγματος στην περίπτωση του αμφιαρθρωτού τόξου συναρτήσει του μήκους του ανοίγματος για διάφορες τιμές του λόγου λ . Η μεταβολή αυτή είναι μη γραμμική και δεν επηρεάζεται ιδιαίτερα από τον λόγο χθαμαλότητας λ ειδικά σε μικρότερα ανοίγματα.

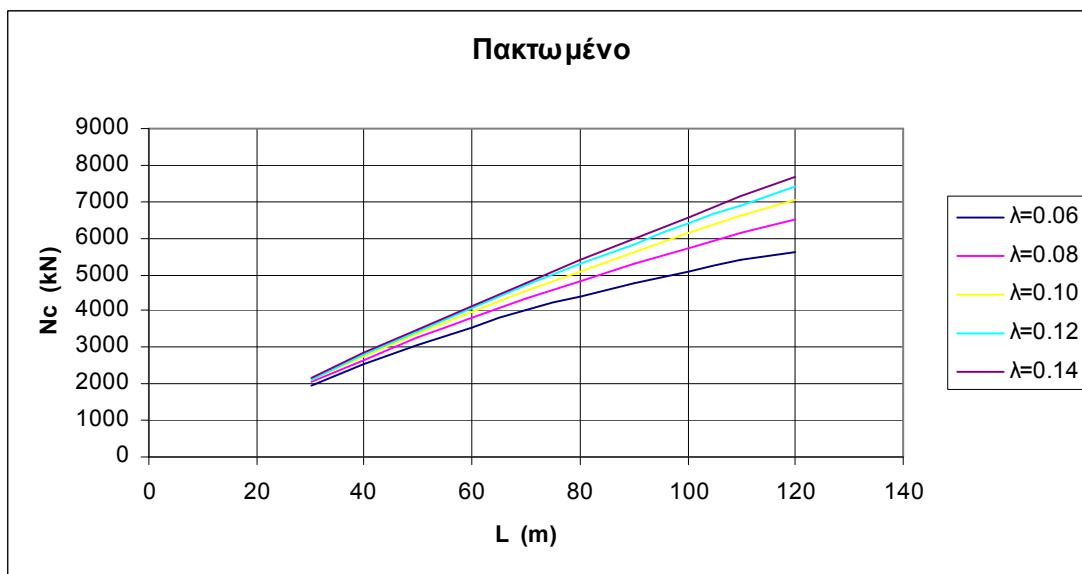


Διάγραμμα 4. Καμπτική ροπή πακτώσεως ($\alpha=0.004$, $\rho=0.020$)

Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται η μεγάλη επιρροή του λόγου χθαμαλότητας στη ροπή στηρίξεως καθώς αυξάνεται το μήκος του ανοίγματος. Αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι για μήκος ανοίγματος 120m η ροπή που αναπτύσσεται για $\lambda=0.14$ είναι τέσσερις φορές μικρότερη από αυτή που προκύπτει για $\lambda=0.06$.

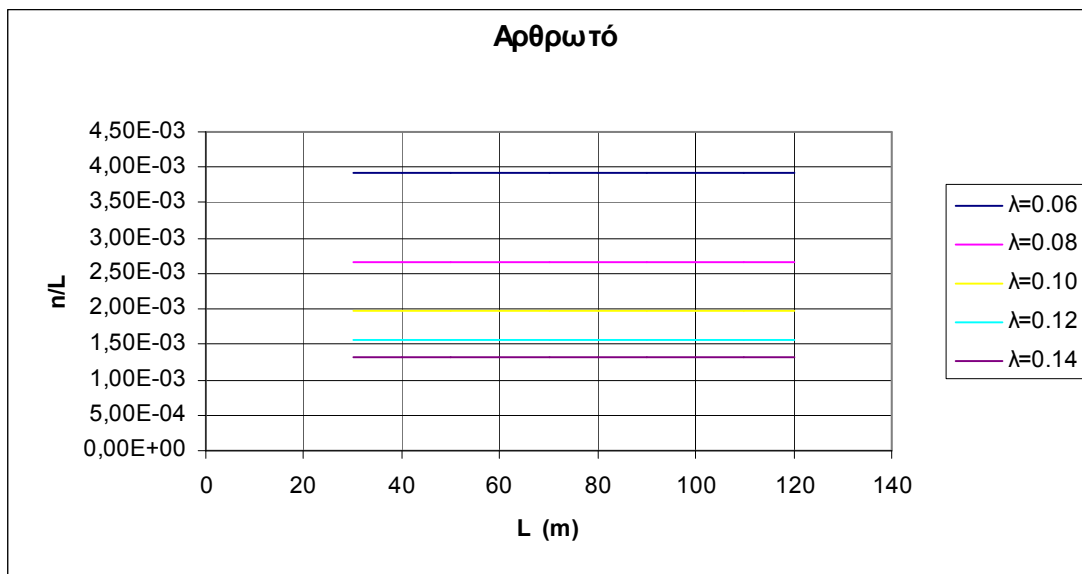


Διάγραμμα 5. Αξονική δύναμη τόξου ($\alpha=0.004$, $\rho=0.020$)

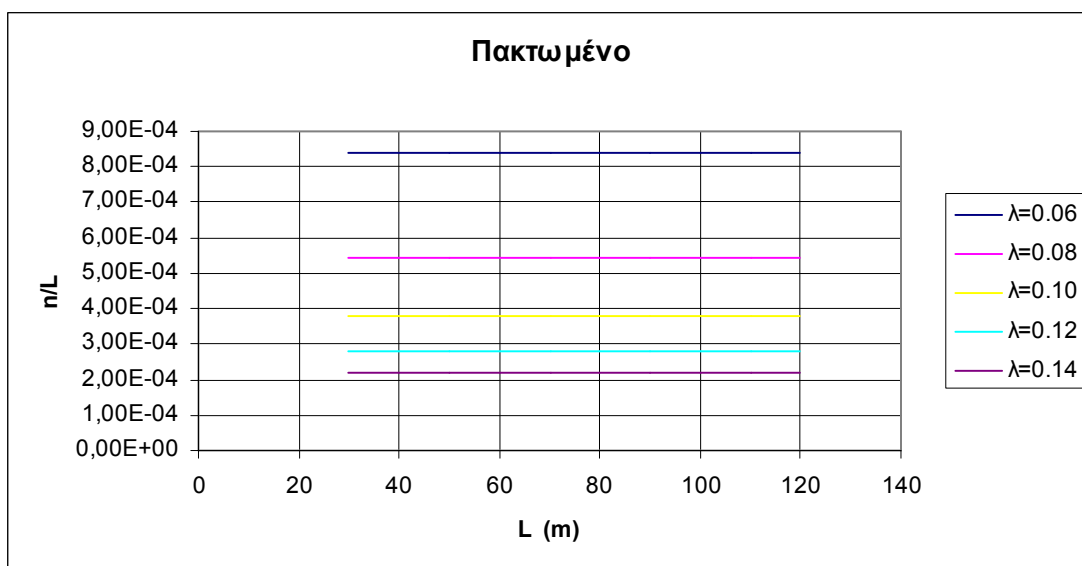


Διάγραμμα 6. Αξονική δύναμη τόξου ($\alpha=0.004$, $\rho=0.020$)

Η αξονική δύναμη του τόξου έχει πρακτικά ίδια μεταβολή συναρτήσει του ανοίγματος τόσο στο αμφίπακτο όσο και στο αμφιαρθρωτό τόξο. Με την αύξηση της καμπυλότητας του φορέα, το τόξο καλείται να παραλάβει μεγαλύτερη αξονική ένταση για το ίδιο άνοιγμα. Το φαινόμενο αυτό γίνεται εντονότερο σε μεγαλύτερα ανοίγματα. Σημειώνεται χαρακτηριστικά ότι για μήκος ανοίγματος 120m μία μικρή μεταβολή του λόγου χθαμαλότητας από την τιμή $\lambda=0.06$ στην $\lambda=0.08$ επιφέρει αύξηση της αξονικής δύναμης που καλείται να παραλάβει το σκυρόδεμα περί τα 1000kN.



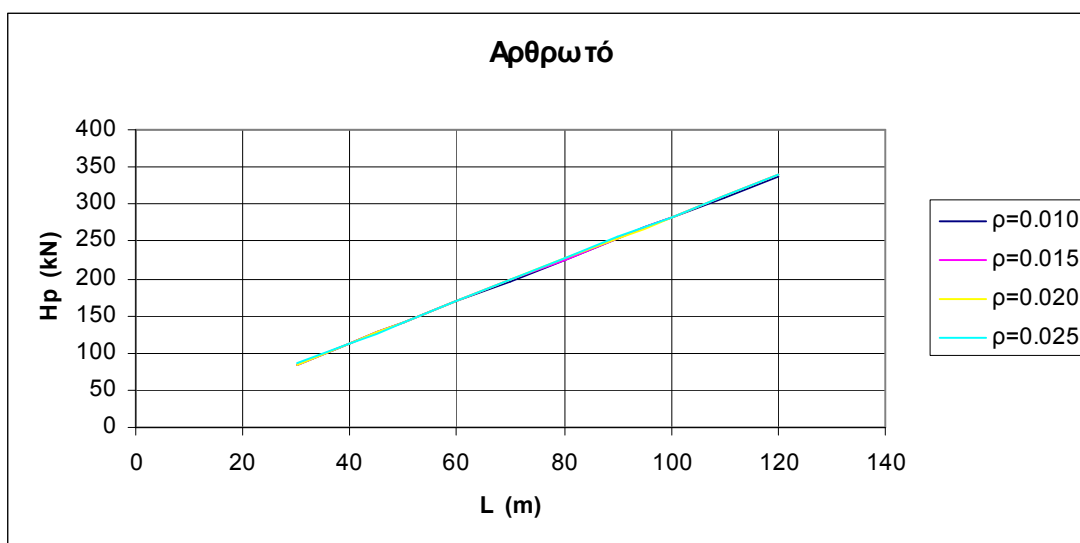
Διάγραμμα 7. Μέγιστο ανηγμένο βέλος ($\alpha=0.004$, $\rho=0.020$)



Διάγραμμα 8. Μέγιστο ανηγμένο βέλος ($\alpha=0.004$, $\rho=0.020$)

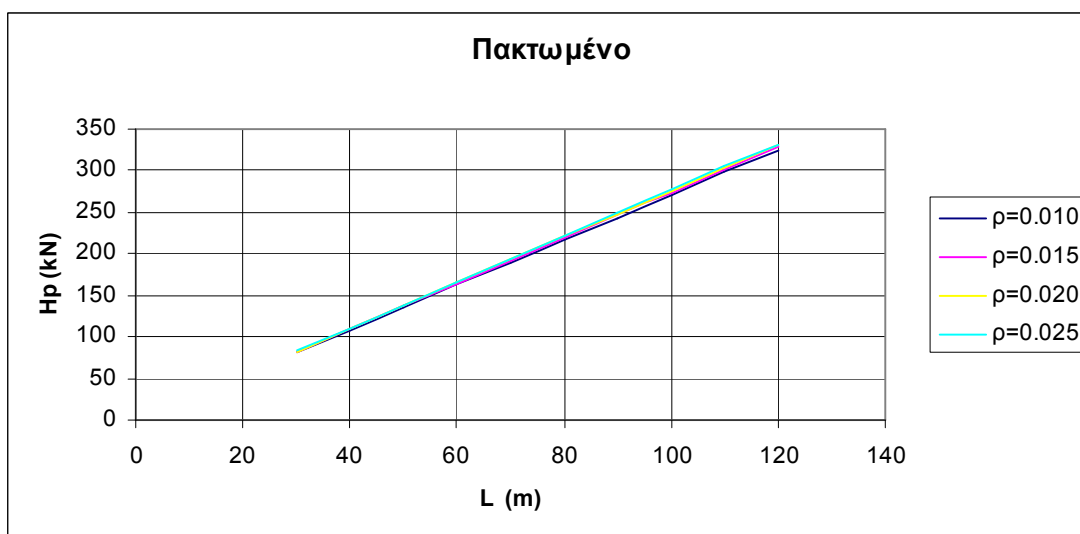
Τέλος φαίνεται ότι το μέγιστο ανηγμένο βέλος και στις δύο περιπτώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητο από το μήκος του ανοίγματος. Με την αύξηση του λόγου χθαμαλότητας παρατηρείται σημαντική μείωση του μέγιστου ανοιγμένου βέλους. Καθώς αυξάνεται η καμπυλότητα του τόξου η μείωση αυτή γίνεται λιγότερο σημαντική. Σημειώνεται τέλος ότι το μέγιστο ανηγμένο βέλος στην περίπτωση του αμφιαρθρωτού τόξου είναι κατά μία τάξη μεγαλύτερο από ότι στο αμφίπακτο για το ίδιο λόγο χθαμαλότητας λ .

Κρατώντας σταθερά το λόγο χθαμαλότητας $\lambda=0.10$ και το λόγο λεπτότητας $\alpha=0.004$ και μεταβάλλοντας το ρ από 0.001 έως 0.025 προκύπτουν τα ακόλουθα διαγράμματα.



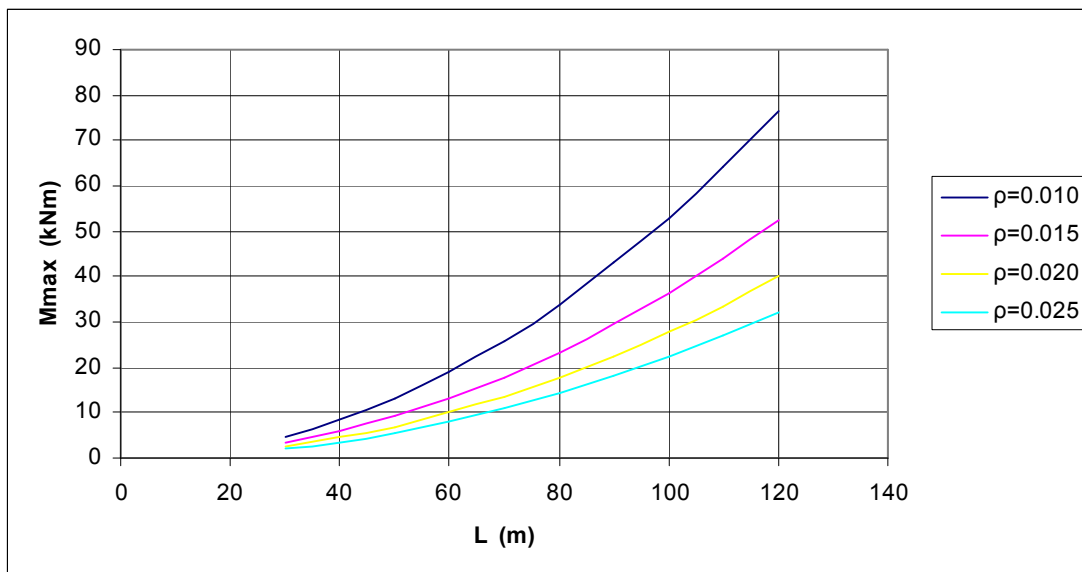
Διάγραμμα 9. Αξονική δύναμη καλωδίου ($\alpha=0.004$, $\lambda=0.10$)

Στο διάγραμμα φαίνεται ότι η αξονική δύναμη του καλωδίου είναι γραμμικά ανάλογη με το μήκος του ανοίγματος και ανεξάρτητη από το λόγο των διατομών.



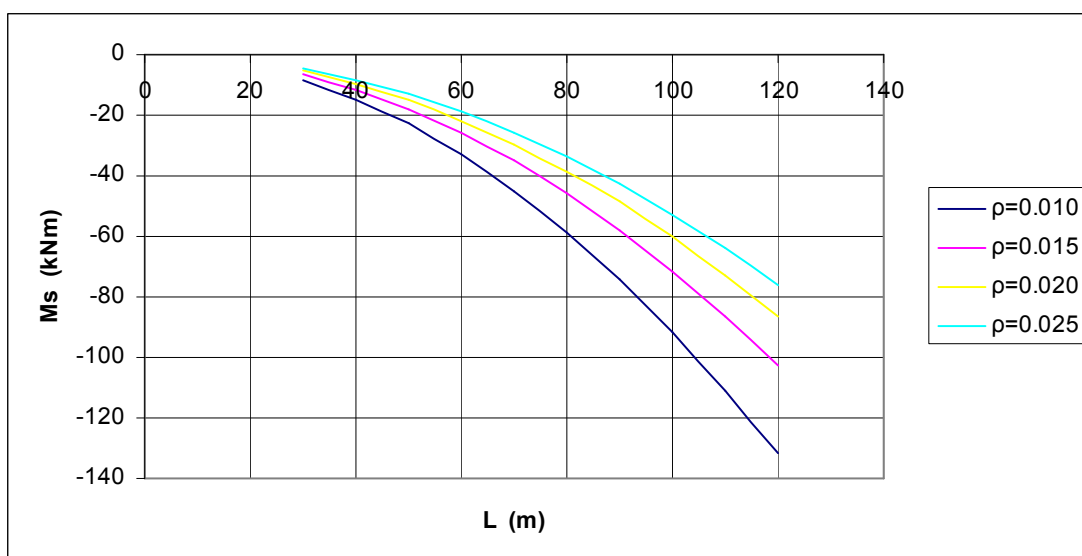
Διάγραμμα 10. Αξονική δύναμη καλωδίου ($\alpha=0.004$, $\lambda=0.10$)

Το διάγραμμα του πακτωμένου πρακτικά ταυτίζεται με αυτό του αρθρωτού άρα επιβεβαιώνεται και εδώ ότι η αξονική ένταση του καλωδίου δεν εξαρτάται από τις συνθήκες στήριξης.



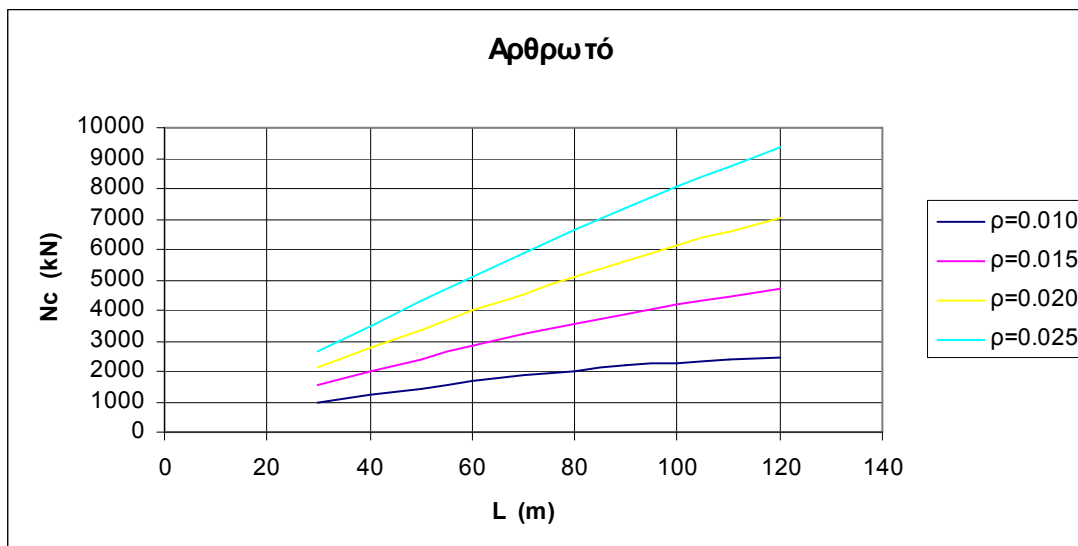
Διάγραμμα 11. Μέγιστη Καμπτική ροπή ανοίγματος ($\alpha=0.004$, $\lambda=0.10$)

Η μέγιστη ροπή του ανοίγματος αυξάνεται μη γραμμικά με την αύξηση του μήκους του ανοίγματος. Καθώς το εμβαδό του χάλυβα αυξάνεται, δηλαδή ο λόγος ρ μεγαλώνει, η ροπή που καλείται να παραλάβει το σκυρόδεμα μικραίνει. Παρατηρείται ότι ο λόγος των διατομών επηρεάζει περισσότερο τη ροπή αυτή όσο το άνοιγμα γίνεται μεγαλύτερο.

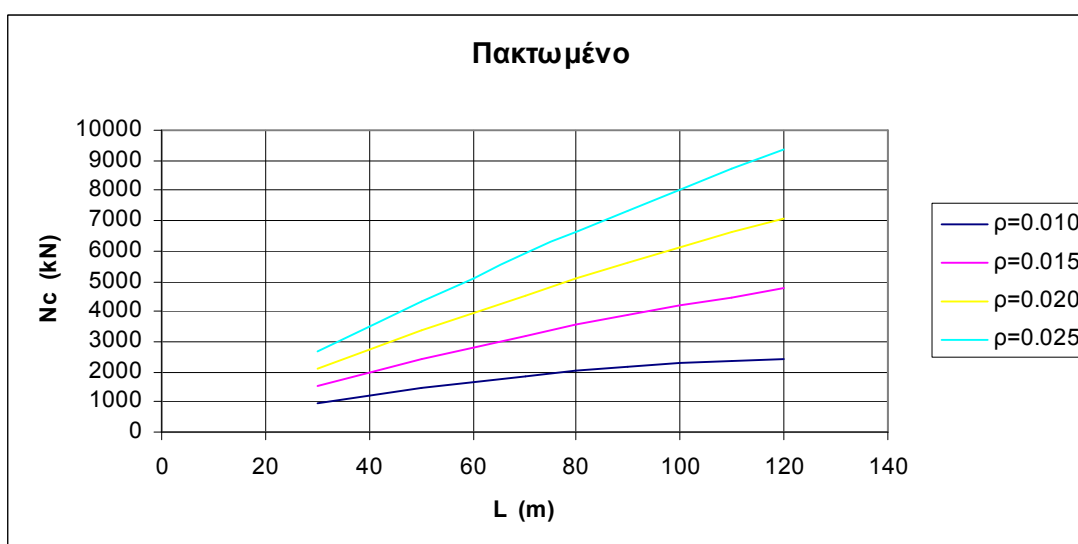


Διάγραμμα 12. Καμπτική ροπή πακτώσεως ($\alpha=0.004$, $\lambda=0.10$)

Αντίστοιχη συμπεριφορά παρατηρείται και στη στήριξη του αμφίπακτου τόξου. Για μεγαλύτερο λόγο διατομών η ροπή που αναπτύσσεται στη στήριξη είναι μικρότερη και ιδιαίτερα όταν το μήκος του ανοίγματος αυξάνεται.

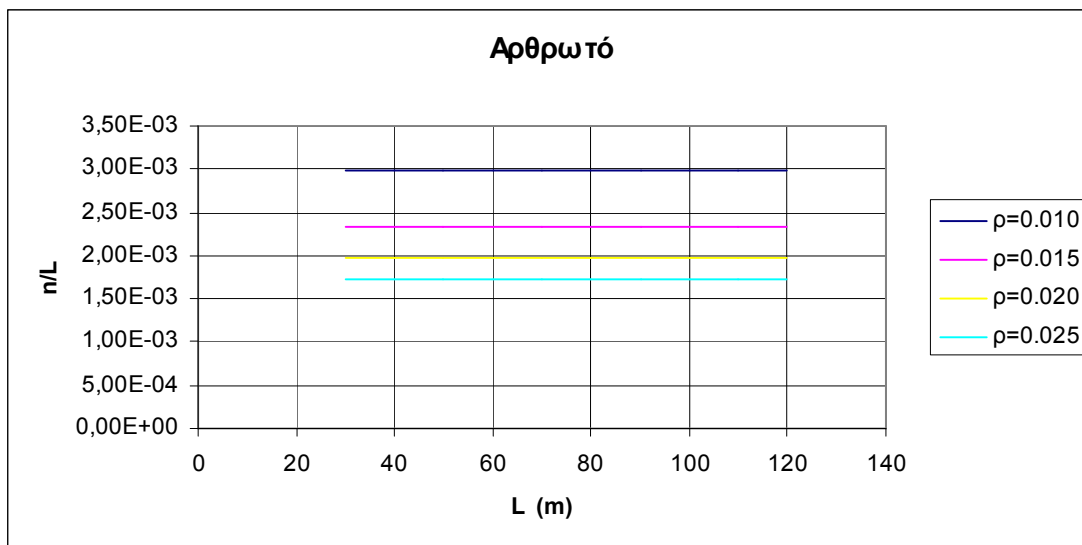


Διάγραμμα 13. Αξονική δύναμη τόξου ($\alpha=0.004$, $\lambda=0.10$)

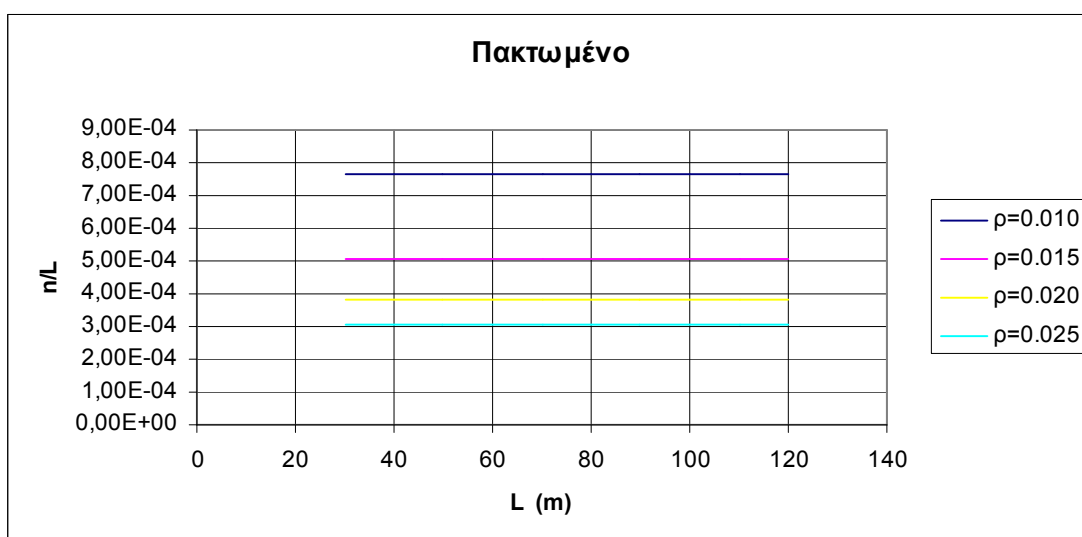


Διάγραμμα 14. Αξονική δύναμη τόξου ($\alpha=0.004$, $\lambda=0.10$)

Όπως και προηγουμένως, φαίνεται ότι η αξονική δύναμη του τόξου είναι γραμμικώς αυξανόμενη με το μήκος του ανοίγματος. Παρατηρείται όμως η μεγάλη επιρροή του λόγου ρ στην αξονική δύναμη που απαιτείται να παραληφθεί από το σκυρόδεμα. Όσο το εμβαδό των καλωδίων σε σχέση με την διατομή του σκυροδέματος αυξάνεται τόσο μεγαλύτερη αξονική δύναμη καλείται να παραλάβει η διατομή. Η μεταβολή της αξονικής δύναμης του τόξου είναι ανεξάρτητη των συνοριακών συνθηκών.



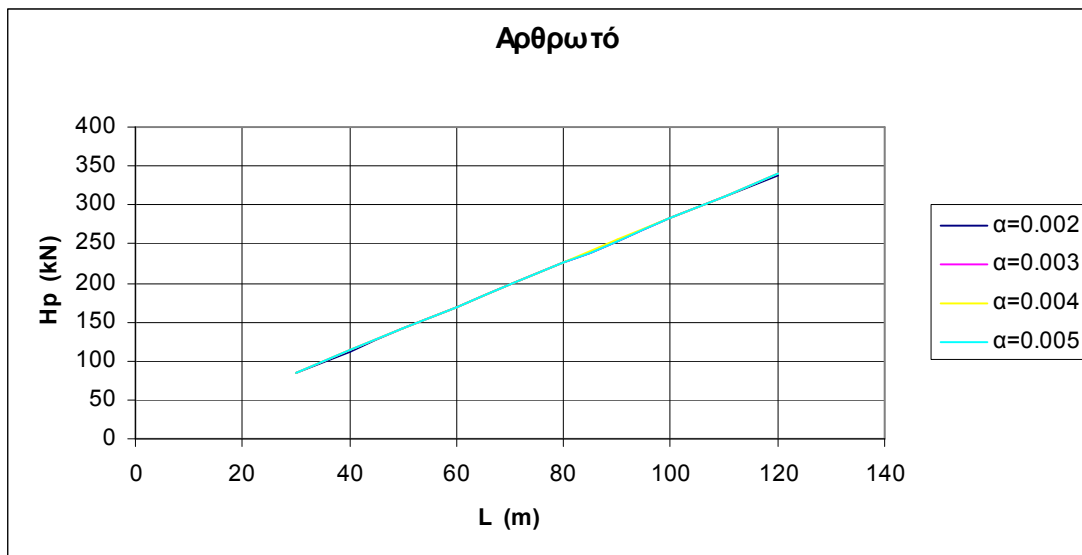
Διάγραμμα 15. Μέγιστο ανηγμένο βέλος ($\alpha=0.004$, $\lambda=0.10$)



Διάγραμμα 16. Μέγιστο ανηγμένο βέλος ($\alpha=0.004$, $\lambda=0.10$)

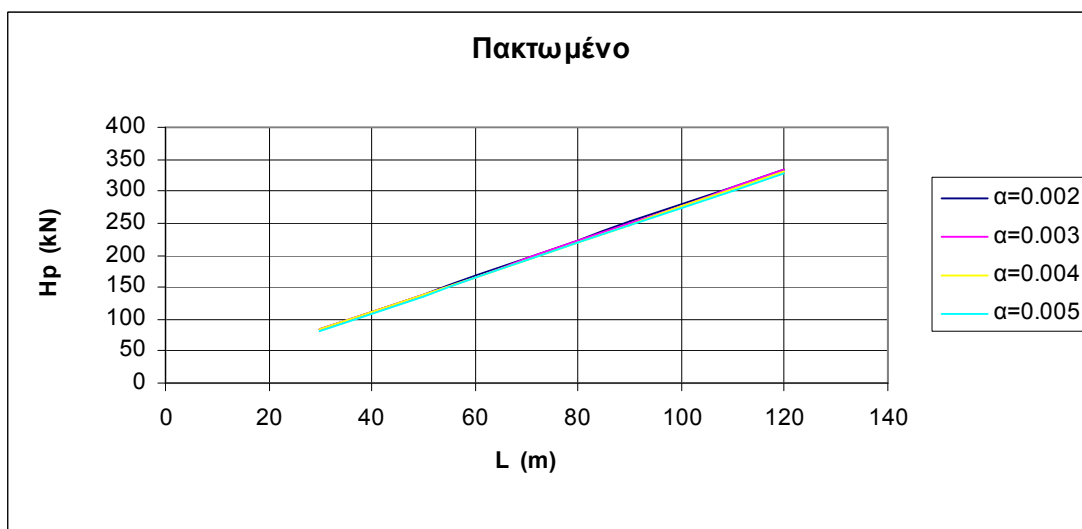
Όπως διαπιστώθηκε και προηγουμένως το μέγιστο ανηγμένο βέλος είναι ανεξάρτητο από το μήκος του ανοίγματος. Σημαντική είναι όμως η μείωση του βέλους με την αύξηση του λόγου διατομών ρ . Τέλος αναφέρεται ότι για κοινό λόγο ρ το αρθρωτό τόξο σημειώνει παραμορφώσεις κατά μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερες από ότι το πακτωμένο.

Ολοκληρώνοντας την παραμετρική μελέτη διατηρούμε σταθερό το λόγο χθαμαλότητας $\lambda=0.10$ και τον λόγο διατομών $\rho=0.020$ και μεταβάλλουμε τον λόγο λεπτότητας α από 0.002 έως 0.005. Τα διαγράμματα που προκύπτουν είναι τα ακόλουθα.

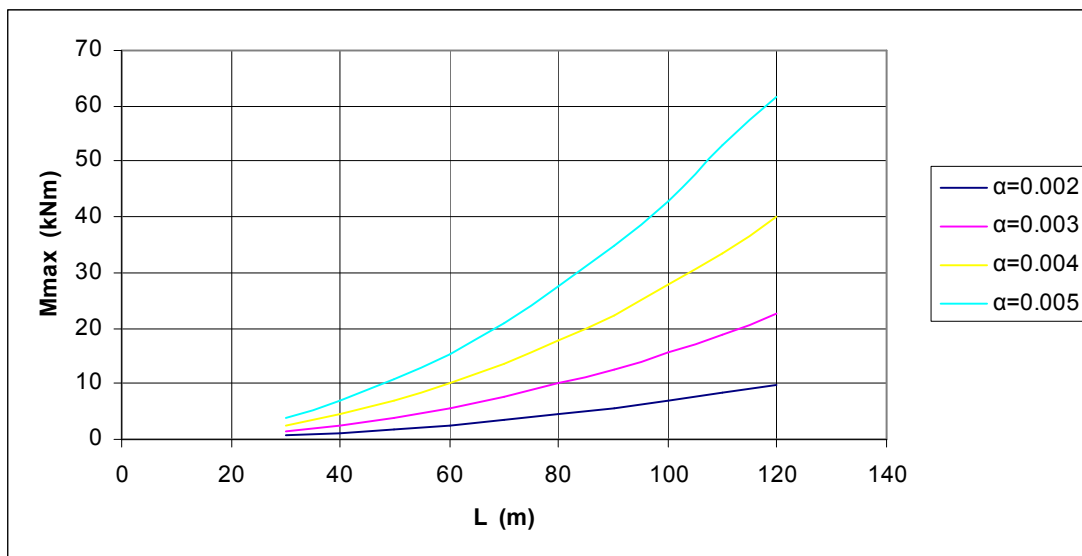


Διάγραμμα 17. Αξονική δύναμη καλωδίου ($\rho=0.020$, $\lambda=0.10$)

Διαπιστώνεται ότι η αξονική δύναμη του καλωδίου είναι ανεξάρτητη και από τον λόγο λεπτότητας. Ταυτόχρονα επιβεβαιώνεται ότι και εδώ αυξάνεται γραμμικά με το μήκος του ανοίγματος και δεν εξαρτάται από τις συνθήκες στήριξης.

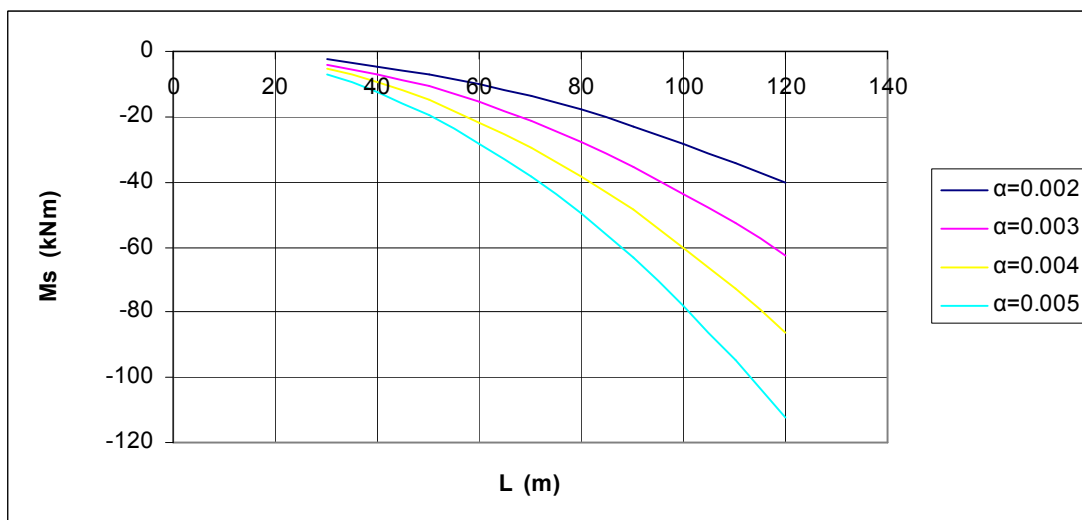


Διάγραμμα 18. Αξονική δύναμη καλωδίου ($\rho=0.020$, $\lambda=0.10$)



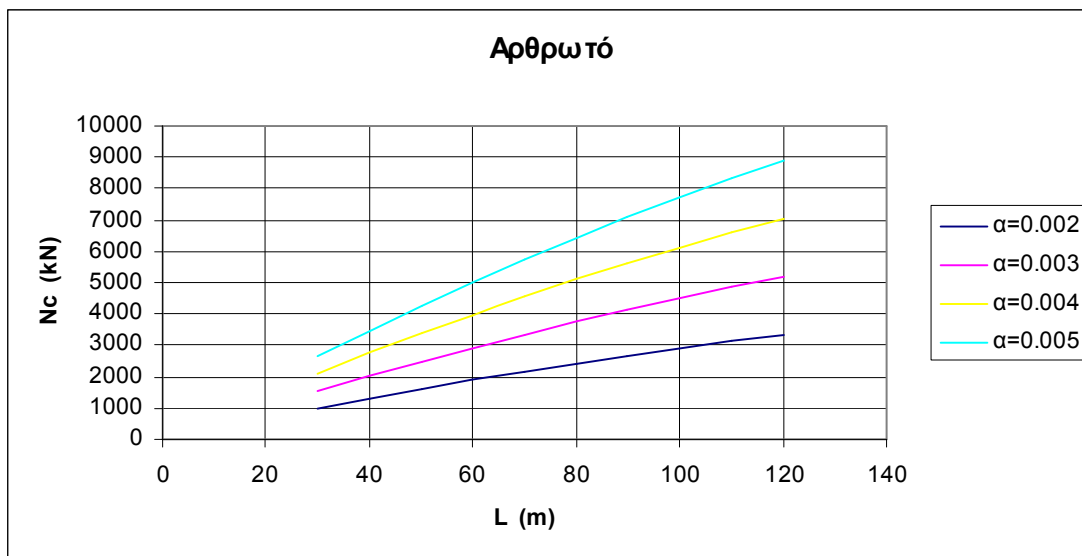
Διάγραμμα 19. Μέγιστη Καμπτική ροπή ανοίγματος ($\rho=0.020$, $\lambda=0.10$)

Καθώς το πάχος της διατομής προς το αντίστοιχο μήκος του ανοίγματος αυξάνεται η διατομή καλείται να παραλάβει μεγαλύτερη ροπή. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για το ίδιο άνοιγμα (π.χ. 100m) διπλάσιο πάχος διατομής αντιστοιχεί σε τέσσερις φορές μεγαλύτερη ροπή.

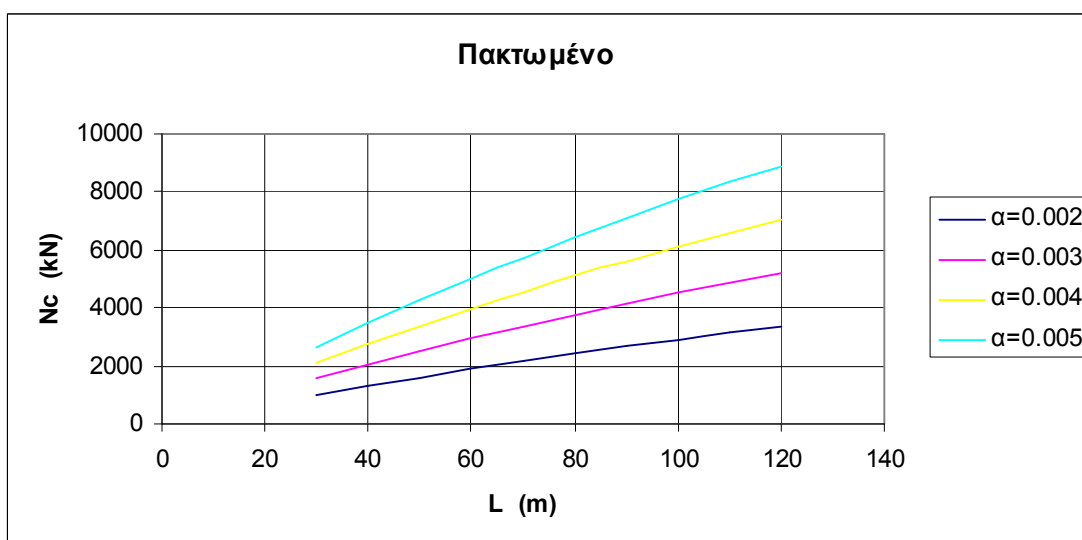


Διάγραμμα 20. Καμπτική ροπή πακτώσεως ($\rho=0.020$, $\lambda=0.10$)

Αντίστοιχα η καμπτική ροπή που αναπτύσσεται στη στήριξη του πακτωμένου τόξου αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο λόγος λεπτότητας. Γενικά οι ροπές στις στηρίξεις εφελκύνουν τις πάνω ίνες του ανεστραμμένου τόξου.



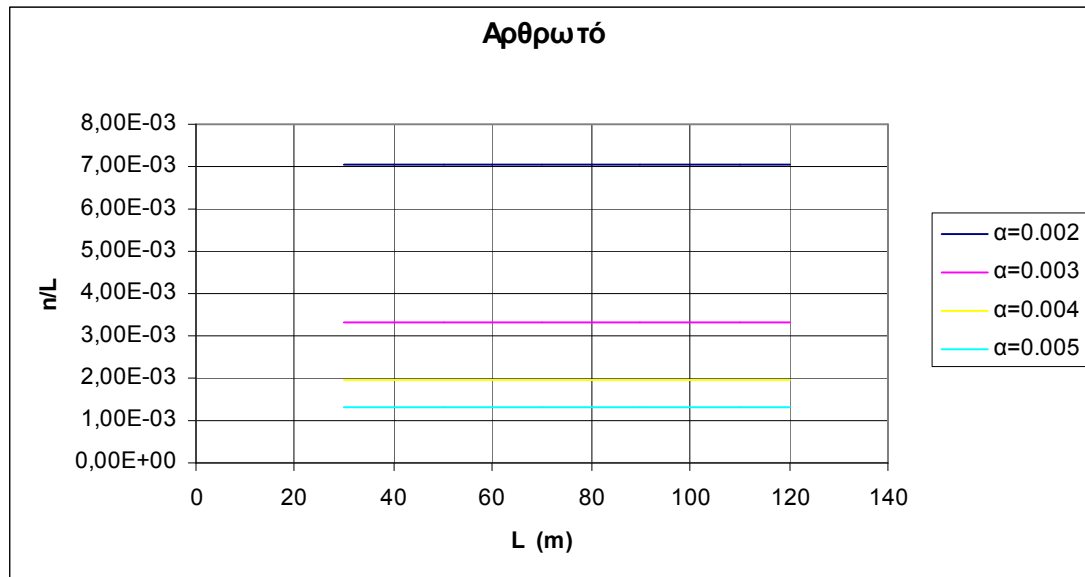
Διάγραμμα 21. Αξονική δύναμη τόξου ($\rho=0.020$, $\lambda=0.10$)



Διάγραμμα 22. Αξονική δύναμη τόξου ($\rho=0.020$, $\lambda=0.10$)

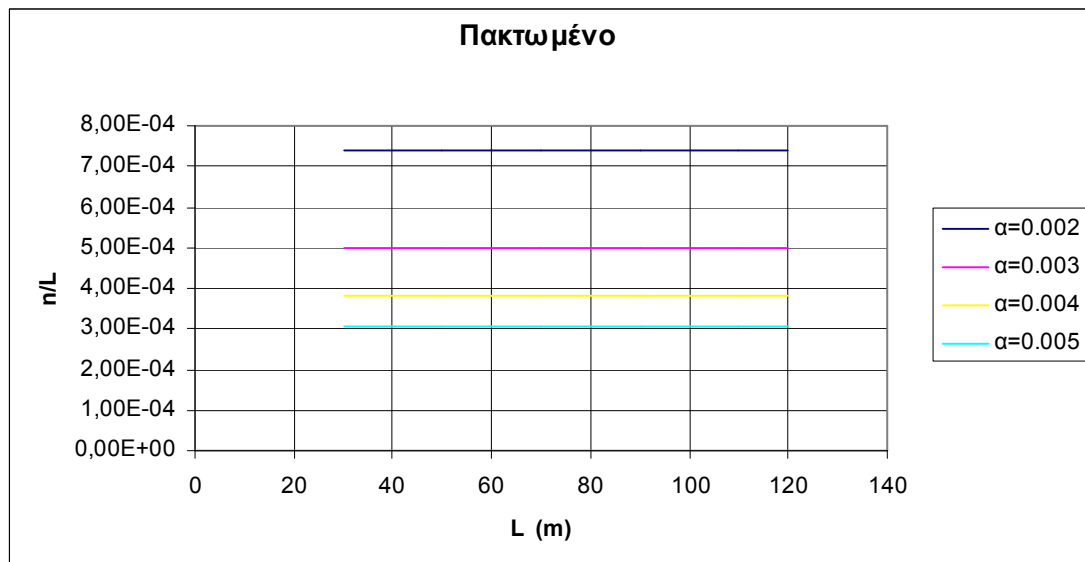
Από τα διαγράμματα αυτά διαπιστώνεται ότι ο λόγος λεπτότητας επηρεάζει την αξονική δύναμη που απαιτείται να αναληφθεί από το τόξο. Όσο το πάχος της διατομής αυξάνεται σε σχέση με το άνοιγμα τόσο μεγαλύτερη είναι η αξονική δύναμη του φορέα. Πρακτικά για διπλάσιο πάχος διατομής απαιτείται να παραληφθεί διπλάσια αξονική δύναμη.

Τέλος παρουσιάζεται η επιρροή του λόγου λεπτότητας α στη μέγιστη ανηγμένη παραμόρφωση του φορέα.



Διάγραμμα 23. Μέγιστο ανηγμένο βέλος ($\rho=0.020$, $\lambda=0.10$)

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι με την αύξηση του πάχους της διατομής σε σχέση με το άνοιγμα η μέγιστη παραμόρφωση του φορέα μειώνεται σημαντικά.



Διάγραμμα 24. Μέγιστο ανηγμένο βέλος ($\rho=0.020$, $\lambda=0.10$)

Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται και στο πακτωμένο τόξο, με τις παραμορφώσεις να κυμαίνονται σε μία τάξη μεγέθους μικρότερα επίπεδα. Και εδώ φαίνεται ότι οι μέγιστη ανοιγμένη παραμόρφωση είναι ανεξάρτητη από το άνοιγμα.

Κεφάλαιο 9

Αριθμητική εφαρμογή

Για την κάλυψη ανοίγματος $80m$ σχεδιάζεται ταινιωτός φορέας πάχους $20cm$ και κρέμαση στο μέσον του ανοίγματος $8m$. Επίσης σύμφωνα με το σύστημα προέντασης BBRV επιλέγεται προεντεταμένος χάλυβας συνολικής διατομής $4235mm^2$ με κατάλληλη διάταξη. Έτσι προκύπτουν οι σχεδιαστικές παράμετροι $\lambda = 0.10$, $\alpha = 0.0025$ και $\rho = 0.02118$. Υπό την δράση του μόνιμου φορτίου λόγω ίδιου βάρους και του επιπλέον κινητού φορτίου λόγω χιονιού $p = 1.5kN/m$ αναπτύσσεται η ακόλουθη εντατική κατάσταση. Αρχικά στο καλώδιο αναπτύσσεται δύναμη $H_w = 4066.56kN$ ενώ υπό την δράση του κινητού φορτίου αυξάνεται κατά $H_p = 223.3kN$ καταλήγοντας σε μία συνολική δύναμη καλωδίου $H_{ολ} = 4292.86kN$. Η αντίστοιχη αναπτυσόμενη τάση των καλωδίων είναι $\sigma = 1013.662 MPa$. Όσον αφορά στο τόξο σκυροδέματος αυτό αναπτύσσει μέγιστη καμπτική ροπή ανοίγματος $M_{max} = 6.53kNm$ και αντίστοιχη θλιπτική αξονική δύναμη $N_c = 3316.56kN$. Για τον συνδιασμό αυτό δύναμης και ροπής ισχύει $M/N \leq h/6$ άρα δεν αναπτύσσονται εφελκυστικές τάσεις στη διατομή οπότε τοποθετείται ο ελάχιστος χαλαρός κατασκευαστικός οπλισμός σύμφωνα με τον κανονισμό. Ο ανωτέρω σχεδιασμός είναι αποδεκτός αφού δεν οδηγεί σε αστοχία, ωστόσο δεν αποτελεί την βέλτιστη επιλογή για την κάλυψη του ανοίγματος. Για την επιλογή του οικονομικότερου σχεδιασμού είναι αναγκαία μια διαδικασία βελτιστοποίησης που θα αξιοποιεί στο μέγιστο τις αντοχές των υλικών.

Κεφάλαιο 10

Συμπεράσματα

Από τις ανωτέρω παρατηρήσεις μπορούν εύκολα να εξαχθούν τα ακόλουθα συμπεράσματα για τα εντατικά μεγέθη καλωδίου και τόξου καθώς και για την παραμόρφωση του συστήματος.

Αξονική δύναμη καλωδίου H_p

Η επιπρόσθετη αξονική δύναμη που αναπτύσσει το καλώδιο εξαιτίας του επιπλέον κινητού φορτίου αυξάνεται γραμμικά με την αύξηση του μήκους του ανοίγματος. Επίσης είναι ανεξάρτητη των συνοριακών συνθηκών, του λόγου λεπτότητας α και του λόγου των διατομών ρ . Τέλος επηρεάζεται από τον λόγο χθαμαλότητας λ . Με την αύξηση της καμπυλότητας του ανεστραμμένου τόξου η αξονική δύναμη του καλωδίου λόγω του επιπλέον κινητού φορτίου μικραίνει.

Ροπή στηρίξεως αμφίπακτου τόξου M_s

Η ροπή που αναπτύσσεται στο πακτωμένο άκρο του τόξου εξαιτίας του κινητού φορτίου αυξάνεται παραβολικά με την αύξηση του ανοίγματος. Επίσης αυξάνεται με την αύξηση του λόγου λεπτότητας α . Τέλος από τα διαγράμματα φαίνεται ότι με την αύξηση της καμπυλότητας και του ποσοστού των τενόντων στην διατομή (δηλαδή του ρ), η ροπή στηρίξεως μειώνεται.

Ροπή ανοίγματος αμφιαρθρωτού τόξου M_{max}

Η ροπή που αναπτύσσεται στο άνοιγμα και συγκεκριμένα στα $(L/4)$ που όπως δείχθηκε είναι η δυσμενέστερη θέση, υπό την δράση του κινητού φορτίου, αυξάνεται παραβολικά με την αύξηση του ανοίγματος. Επίσης αυξάνεται με την αύξηση του λόγου λεπτότητας α . Από τα διαγράμματα διαπιστώνεται ότι δεν παρουσιάζει μεγάλη ευαισθησία στην μεταβολή του λόγου χθαμαλότητας. Τέλος φαίνεται ότι με την αύξηση του λόγου των διατομών ρ η μέγιστη ροπή που αναπτύσσεται στο άνοιγμα μειώνεται.

Αξονική δύναμη τόξου N_c

Η συνολική αξονική δύναμη που ασκείται στο τόξο είναι γραμμικά αυξανόμενη με την αύξηση του μήκους του ανοίγματος. Ταυτόχρονα παρατηρείται μια δραματική αύξηση της θλιπτικής αυτής δύναμης του τόξου με την αύξηση των παραμέτρων α και ρ , ενώ λιγότερο ευαίσθητη φαίνεται να είναι στην αύξηση της παραμέτρου λ . Τέλος διαπιστώνεται ότι είναι ανεξάρτητη από τις συνθήκες στήριξης του τόξου.

Μέγιστη ανηγμένη παραμόρφωση (n/L)

Η μέγιστη ανηγμένη παραμόρφωση εξαιτίας ενός επιπλέον κινητού φορτίου είναι ανεξάρτητη από το μήκος του ανοίγματος. Γενικά μειώνεται με την αύξηση και των τριών παραμέτρων σχεδιασμού α , ρ , λ . Φαίνεται τέλος ότι οι συνθήκες στήριξης αποτελούν ένα σημαντικό παράγοντα σχεδιασμού αφού οι παραμορφώσεις στο αμφιαρθρωτό τόξο είναι κατά τάξη μεγέθους μεγαλύτερες από ότι στο αμφίπακτο.

Μέσω των ανωτέρω συμπερασμάτων γίνεται δυνατή η ουσιαστική κατανόηση και η ποιοτική αντίληψη της επιρροής των παραμέτρων σχεδιασμού στην όλη στατική συμπεριφορά του φορέα. Για την κάλυψη ενός δεδομένου ανοίγματος ο σχεδιασμός του φορέα γίνεται ευκολότερος γνωρίζοντας πώς οι λόγοι λ , ρ και α καθορίζουν την ένταση και την παραμόρφωση του φορέα. Μια διαδικασία βελτιστοποίησης των τριών αυτών παραμέτρων θα οδηγούσε στο σχεδιασμό του συστήματος καλωδίου-τόξου υπό τους πλέον οικονομικούς όρους για δεδομένες ποιότητες χάλυβα και σκυροδέματος. Εν προκειμένω η μελέτη περιορίστηκε στην γενικότερη εκτίμηση της συμπεριφοράς του συστήματος, όμως αποτελεί τη βάση για την διαδικασία βελτιστοποίησης των σχεδιαστικών παραμέτρων η οποία προτείνεται να γίνει στο μέλλον.

Παράρτημα

Λογισμικό Fortran

```
PROGRAM RIBBONPAR00
C  RATIO OF CABLE SAG (CL)
C  MAIN SPAN (XL)
C  THINNESS RATIO (DL)
C  LIVE LOAD (PL)
C  SPECIFIC WEIGHT OF CONCRETE (GC)
C  WORKING PRESTRESSING STEEL STRESS (SP0)
C  RATIO OF PRESTRESSING STEEL AREA (RO)
C  MODULUS OF ELASTICITY OF RIBBON (EC)
C  MODULUS OF ELASTICITY OF CABLE (E0)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
PI=4.0*DATAN(1.D+0)
C  OPEN (2,FILE='RIBBONPARF')

1  WRITE (*,*) ' Span length (m) ?'
   READ (*,*) XL
   WRITE (*,*) ' Slenderness ratio ?'
   READ (*,*) DL
   WRITE (*,*) ' Prestressing steel ratio ?'
   READ (*,*) RO
   WRITE (*,*) ' Additional dead load (kN/m2) ?'
   READ (*,*) ADD
   WRITE(*,*) ' Curvature ratio?'
   READ(*,*) B

   GC=25.0
   EC=30000000.0
   E0=200000000.0
   SP0=960000.0
C
   PL=1.5+ADD
C  B=B0*(1.0-BC*FC*(1.0+3.0/(16.0*B0**2))/EC)
   GL=8.0*B*DL*RO*SP0
   GLV=GL-GC*XL*DL
   HG=GL*XL/(8.0*B)
   HV=XL*DL*(SP0*RO-GC*XL/(8.0*B))
   G=12.0*SP0*RO/(EC*DL**2)
   Q=PL/GL
   RR=SP0/E0
FIXED01=0
SPAN01=0
```



```

COMPRES01=(GLV*XL**2/8.0-1.50*FIXED01)/(B*XL)
C  SUSPENSION BEAM PROCESS
BK=8.*PI**2/(15.*RR*(1./B**2+8.))
SBK=1./(8.*B**2)+1.0
C  ESTIMATION OF CABLE FORCE
A=(PI**2/G+BK+1.)/2.
  C=Q*BK
  Z0=-A+DSQRT(A**2+C)
C  WRITE (2,*) '  Z0 =',Z0
C
C  CENTRALLY LOADED-FIXED
CALL SOLVE (Z0,G,Q,RR,SBK,B,Z)
C
SK=DSQRT((Z+1.0)*G)
RECON=Z*(Z+1.)*RR*SBK/(8.0*(Q-Z))
  1-1.0/SK**2+1.0/(2.0*SK*DTANH(SK/2.))-1.0/12.0
C
HP=HG*Z
  HPol=(1+Z)*HG
DMOMPL=GL*XL**2*(Q-Z)*(1.0-SK/(2.0*DTANH(SK/2.0)))/SK**2
DMSPANPL=GL*XL**2*(Q-Z)*(1.0-SK/(2.0*DSINH(SK/2.0)))/SK**2
C
DMSUPRIB=DMOMPL+FIXED01
DMSPANRIB=DMSPANPL+SPAN01
C
TENSPL=(PL*XL**2/8.0+DMOMPL-DMSPANPL)/(B*XL)
  COMPPL=COMPRES01-TENSPL
C
C
C  WRITE (2,*) '  Initial rise/span =', B0
C  WRITE (2,*) '  Final rise/span =', B
  WRITE (*,*) ' '
C  WRITE (2,*) '  XL =', XL
C  WRITE (2,*) '  ALPHA =', DL
  WRITE (*,*) '    Hp =',HP
  WRITE (*,*) '    Hpol=',HPol
C  WRITE (2,*) '  RO =', RO
C  WRITE (2,*) '  PL =', PL
C  WRITE (2,*) '  HV =', HV
C  WRITE (2,*) '  HP =', HP
C  WRITE (2,*) '  G =', G
C  WRITE (2,*) '  Q =', Q
C  WRITE (2,*) '  EPSILON =', RR
C  WRITE (2,*) '  D =', SK
C  WRITE (2,*) '  FIXED01 =',FIXED01
C  WRITE (2,*) '  FIXED02 =',FIXED02
C  WRITE (2,*) '  M support-susp =', DMOMPL
C  WRITE (2,*) '  M span-susp =', DMSPANPL
  WRITE (*,*) 'Ms =',DMOMPL
  WRITE (*,*) 'Mfix =',FIXED01

```

```

WRITE (*,*) ' M support =', DMSUPRIB
C   WRITE (2,*) ' M span-ribbon =', DMSPANRIB
WRITE (*,*) ' Compression-fix =',COMPPL
DLHTA=8.0*B*((Q-Z)/(Z+1))*(1/(2.0*SK*DTANH(SK/2.0)))*
1(1/DCOSH(SK/2.0)-1.0)+1.0/8.0)
C   DHTAL2=(Q-Z0)*8.*B/(SK0**2*(Z+1))*(1/DCOSH(SK0/2.)-1.0+SK0**2/8.)
WRITE (*,*) ' HTA/XL-fixed = ',DLHTA
C   WRITE (*,*) ' HTA/XL-hing= ',DHTAL2
C
C   RIBBON HINGED
C
C   Q=Q/2.
C   NEW ESTIMATION OF CABLE FORCE
A=(PI**2/G+BK+1.)/2.
C   C=Q*BK
Z=-A+DSQRT(A**2+C)
C   MAXIMUM SPAN BENDING MOMENT (HALF LOADED BEAM)

C   DIMENSIONLESS MOMENT EVALUATION
DSK=DSQRT(G*(Z+1.))
DMDL1=-((8.*(Q-Z))/(G*(Z+1.)))*(DCOSH(DSK/4.)/DCOSH(DSK/2.)-1.)
DMDL2=-((8.*Q)/(G*(Z+1.)))*(1./DCOSH(DSK/4.)-1.)
DMTOT=DMDL1+DMDL2
GMOM0=GL*XL**2/8.0
SPANMAXMOM=DMTOT*GMOM0
COMPHING=(GLV-PL)*XL/(8.0*B)
COMPHINGRATIO=COMPHING/(HG-HV)
DMSPANRATIO=(8.0*SPANMAXMOM)/(PL*XL**2)
HP0=Z0*HG
HP0ol=(Z0+1)*HG
WRITE (*,*) ' Hp-hing =',HP0
WRITE (*,*) ' Hp-hingol=',HP0ol
WRITE (*,*) ' maxMspan =',SPANMAXMOM
WRITE (*,*) ' Compression-hing =',COMPHING
C   DIMENSIONLESS MAXIMUM DEFLECTION
DHDL1=(8.*B*(Q-Z)/((Z+1.)*DSK**2))*(DCOSH(DSK/4.)/DCOSH(DSK/2.)
1-1.+3.*DSK**2/32.)
DHDL2=(8.*B*Q/((Z+1.)*DSK**2))*(1./DCOSH(DSK/4.)-1.+DSK**2/32.)
DHMAX=DHDL1+DHDL2
WRITE (*,*) ' HTA/XL-max-hinged ',DHMAX
WRITE (*,*) ' '
C
C   GO TO 1
STOP
END
C
C   SUBROUTINE SOLVE (Z0,G,Q,RR,SBK,B,Z)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DO 40 K=1,100

```

```

      Z1=Z0-(K/100.)*Z0
      Z2=Z0-((K+1)/100.)*Z0
      SK1=DSQRT((Z1+1.0)*G)
      SK2=DSQRT((Z2+1.0)*G)
C
      RECON1=Z1*(Z1+1.)*RR*SBK/(8.0*(Q-Z1))
           1-1.0/SK1**2+1.0/(2.0*SK1*DTANH(SK1/2.))-1.0/12.0
      RECON2=Z2*(Z2+1.)*RR*SBK/(8.0*(Q-Z2))
           1-1.0/SK2**2+1.0/(2.0*SK2*DTANH(SK2/2.))-1.0/12.0
C
      POINT=RECON1*RECON2
      IF (POINT) 50,50,40
40  CONTINUE
50  AAA=DABS(RECON1)*DABS(Z1-Z2)/(DABS(RECON1)+DABS(RECON2))
      Z=Z1-AAA
      RETURN
      END

```

Βιβλιογραφία

- [1] Σταυρίδης Λ. (2006) “Στατική Των Δομικών Φορέων-Μέρος Α ”
- [2] Stavridis L.T. (2008) “ A simplified analysis of the behavior of suspension bridges under live load ”, Structural Engineering and Mechanics
- [3] Stavridis L.T. (2009) “Evaluation of static response in stress-ribbon concrete pedestrian bridges”, Structural Engineering and Mechanics
- [4] Hirschfeld K. (1975) “ Εφαρμοσμένη Στατική-Τόμος Β”
- [5] Timoshenko S. (1956) “ Strength of materials-Part II”
- [6] Βαρδουλάκης Ι. (2004) “ Τεχνική Μηχανική Ι ”
- [7] Τάσιος Θ.Π.-Γιαννόπουλος Π.Ι.-Τρέζος Κ.Γ.-Τσουκαντάς Σ.Γ. (1995)
“ Προεντεταμένο Σκυρόδεμα”

