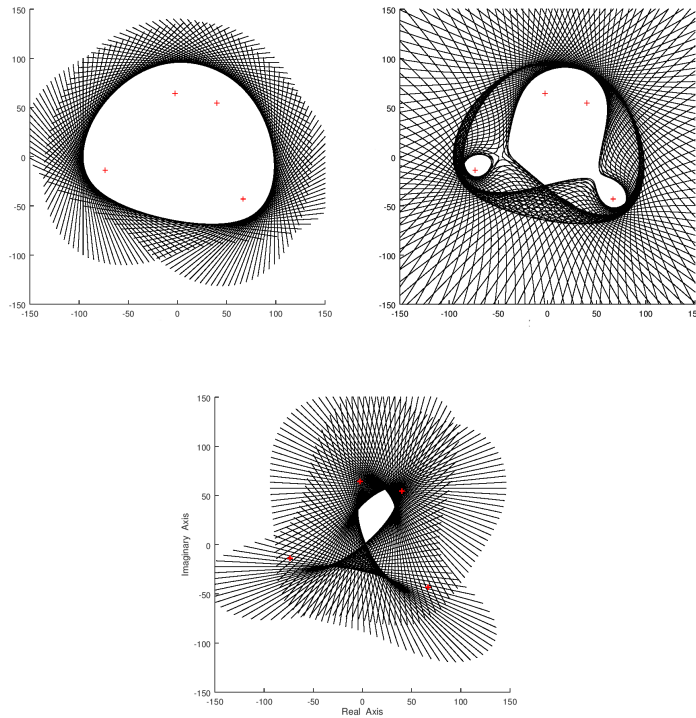




Μια Περιβάλλουσα για το Φάσμα Πίνακα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Καναβάρου Τριανταφυλλιά



Επιβλέπων: Παναγιώτης Ι. Ψαρράκος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2017



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μια Περιβάλλουσα για το Φάσμα Πίνακα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Καναβάρου Τριανταφυλλιά

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

.....
Ανάργυρος Φελλούρης Παναγιώτης Ψαρράκος Κωνσταντίνος Χρυσάφινος
Καθηγητής Ε.Μ.Π. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
(Επιβλέπων)

Αθήνα, Νοέμβριος 2017

.....
Καναβάρου Τριανταφυλλιά

Διπλωματούχος Μαθηματικός Εφαρμογών Ε.Μ.Π.

©2017 – All rights reserved

Copyright © 2017 –All rights reserved Καναβάρου Τριανταφυλλιά, Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου, Καθηγητή Παναγιώτη Ι. Ψαρράκο, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, καθώς για τη βοήθεια και την καθοδήγησή του κατά την εκπόνησή της.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τον Καθηγητή Ανάργυρο Φελλούρη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Κωνσταντίνο Χρυσάφινο για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Θοδωρή Μήτσικα για τη βοήθειά του στο \LaTeX .

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για τη στήριξη που μου παρείχε.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως στόχο την παρουσίαση της μεθοδολογίας για την εύρεση μιας καλύτερης, από αυτή που το αριθμητικό πεδίο προσφέρει, προσέγγισης του φάσματος. Ειδικότερα, εστιάζει στην παρουσίαση και μελέτη όλης της διαδικασίας εύρεσης αυτής της καλύτερης προσέγγισης, ξεκινώντας από το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο, και καταλήγοντας στη μελέτη σημαντικών ιδιοτήτων της. Έτσι, παρουσιάζεται η *Κύρια Ανισότητα Ιδιοτιμών*, ανισότητα που ικανοποιούν οι ιδιοτιμές όλων των τετραγωνικών πινάκων, η οποία χρησιμοποιείται για τον ορισμό της *Κυβικής Περιβάλλουσας*, χωρίου που περιέχεται στο αριθμητικό πεδίο, ενώ περιέχει το φάσμα και το αριθμητικό πεδίο δευτέρου βαθμού. Η περαιτέρω μελέτη και η θεωρητική θεμελίωση της Κυβικής Περιβάλλουσας η οποία παρουσιάζεται, αναδεικνύει ενδιαφέρουσες ιδιότητες που αφορούν στη γεωμετρία της, το σύνορό της και τον αριθμό των χωρίων από τα οποία αποτελείται.

Επιπλέον, εξετάζει και αξιολογεί τις υπολογιστικές μεθόδους από τις οποίες μπορεί να υπολογιστούν όλα τα παραπάνω και θέτει προβληματισμούς αναφορικά με τα λαμβανόμενα αποτελέσματα, οι οποίοι οδηγούν στις απαραίτητες αλλαγές του πηγαίου κώδικα. Όπως αποδεικνύεται και παρουσιάζεται και ποιοτικά, εν λόγω υπολογιστικές μέθοδοι μπορούν να προσφέρουν σε αρκετές περιπτώσεις πολύ καλύτερη προσέγγιση του φάσματος από αυτή που προσφέρει το αριθμητικό πεδίο, αντισταθμίζοντας έτσι το κόστος της επιπλέον υπολογιστικής δύναμης.

Λέξεις Κλειδιά: Αριθμητικό Πεδίο, Κυβική Περιβάλλουσα, Κέλυφος, Αριθμητικό Πεδίο Δευτέρου Βαθμού, Κυβικές Καμπύλες.

Abstract

This thesis presents the methodology of an improved –comparing to the localization results offered by the numerical range– localization technique for the spectrum of square complex matrices. Specifically, it focuses on the presentation and study of the above localization, originating from the theoretical background of numerical range and resulting the study of its properties. Therefore, presented is the *Main Eigenvalue Inequality*, an inequality that eigenvalues of all square complex matrices satisfy, which is used to define the *Envelope* of a matrix. The envelope is an infinite intersection of regions defined by cubic curves which is contained in the numerical range and contains the spectrum and the 2-rank numerical range. The study of its theoretical foundations reveals interesting properties concerning its geometry, its boundary and the number of its connected components.

Furthermore, the implementation of the numerical computation methods for rendering the above is evaluated, raising concerns about an unveiled problem, which is subsequently solved. As seen in the illustrative examples and the presented proofs, the envelope can yield a dramatic improvement over the numerical range in localizing the spectrum, compensating for the additional computational cost.

Keywords: Numerical Range, Envelope, Cubic Curve, 2-rank Numerical Range.

Κατάλογος σχημάτων	ix
Συμβολισμοί	xi
Εισαγωγή	1
Γενικά	1
Αντικείμενο Διπλωματικής	3
Διάρθρωση Διπλωματικής Εργασίας	4
1 Θεωρητικό Υπόβαθρο	5
1.1 Προαπαιτούμενα	5
1.2 Ορισμός του Αριθμητικού πεδίου	6
1.3 Βασικές Ιδιότητες του Αριθμητικού Πεδίου	7
1.4 Κυρτότητα του Αριθμητικού Πεδίου	13
1.5 Αριθμητική Ακτίνα Πίνακα	14
1.6 Προσέγγιση του Αριθμητικού Πεδίου	15
1.7 Σύνορο του Αριθμητικού Πεδίου	16
1.8 Πίνακες Jordan και Ομοιότητα	18
2 Ανισότητα Ιδιοτιμών και Προσέγγιση Φάσματος για Μιγαδικούς Πίνακες	21
2.1 Εισαγωγή	21
2.2 Προαπαιτούμενα και Συμβολισμοί	21
2.3 Η Ανισότητα Ιδιοτιμών	22
2.4 Εντοπισμός του Φάσματος	24
3 Η Περιβάλλουσα του Φάσματος	35
3.1 Εισαγωγή	35
3.2 Προαπαιτούμενα	35

3.3	Ιδιότητες του Κελύφους	38
3.4	Η Περιβάλλουσα του Φάσματος	40
3.5	Σύγκριση της $\mathcal{E}(A)$ και του $F(A)$	46
4	Η Γεωμετρία της Περιβάλλουσας του Πίνακα	51
4.1	Εισαγωγή	51
4.2	Αριθμητικά Πεδία Ανώτερου Βαθμού	52
4.3	Μία παρατήρηση επί της Περιβάλλουσας $\mathcal{E}(A)$	53
4.4	Κανονικοί Πίνακες και Ομοιότητα	57
4.4.1	Η Περιβάλλουσα των Κανονικών Πινάκων	57
4.4.2	Ομοιότητα	59
4.5	Τα Ιδιοδιανύσματα των Δεξιότερων Ιδιοτιμών	62
5	Αξιολόγηση των Αριθμητικών Μεθόδων	65
5.1	Πηγαίος Κώδικας και Συμβατότητα	65
5.2	Σύγκριση MATLAB και GNU Octave	67
	Βιβλιογραφία	73

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.1	Τα αριθμητικά πεδία $F(A)$, $F(5A)$ και $F(5A + (2 + 5i)I_2)$. . .	8
1.2	Τα αριθμητικά πεδία $F(A)$, $F(H(A))$ και $F(S(A))$	10
1.3	Τα αριθμητικά πεδία $F(A)$, $F(B)$ και $F(A \oplus B)$	12
1.4	Τα αριθμητικά πεδία $F(A)$, $F(B)$, $F(C)$ και $F(A \oplus B \oplus C)$. .	13
1.5	Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ και τα αριθμητικά πεδία ομοίων του A πινάκων.	20
α'	Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$	20
β'	Αριθμητικά πεδία ομοίων του A πινάκων.	20
2.1	$F(A)$ και $\Gamma(A)$ όταν $\Delta < 0$	27
2.2	Το κέλυφος πινάκων με $\Delta < 0$, $\Delta > 0$ και $\Delta = 0$	29
α'	Το $\Gamma(A)$, με $\Delta < 0$	29
β'	Το $\Gamma(B)$, με $\Delta < 0$	29
γ'	Το $\Gamma(C)$, με $\Delta = 0$	29
2.3	Τα κελύφη $\Gamma(A)$, $\Gamma(-A)$, $\Gamma(iA)$, $\Gamma(-iA)$	32
α'	Κοινό γράφημα των $\Gamma(A)$, $\Gamma(-A)$, $\Gamma(iA)$, $\Gamma(-iA)$ και $F(A)$	32
β'	Η προσέγγιση του φάσματος.	32
3.1	Το αριθμητικό πεδίο ενός 4×4 πίνακα Toeplitz.	37
α'	Το σύνορο του αριθμητικού πεδίου $F(A)$	37
β'	Περιβάλλουσα 120 εφαπτόμενων ευθειών.	37
3.2	Η προσέγγιση του φάσματος που ορίζεται από 60 κελύφη . . .	38
3.3	Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ και η κυβική περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$. .	42
α'	Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$	42
β'	Η κυβική περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$	42
3.4	Οι περιβάλλουσες, ενός 11×11 πίνακα Frank, καθώς και του ίδιου πίνακα μετά από στροφή.	46
α'	Η περιβάλλουσα του πίνακα Frank.	46

	β'	Η περιβάλλουσα του πίνακα μετά από στροφή.	46
3.5		Περιβάλλουσες πινάκων με ίδιο φάσμα.	49
	α'	Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$	49
	β'	Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(B)$	49
	γ'	Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(C)$	49
4.1		Το $F(A)$, η $\mathcal{E}(A)$ και το $\Lambda_2(A)$	56
	α'	Το $F(A)$	56
	β'	Η $\mathcal{E}(A)$	56
	γ'	Το $\Lambda_2(A)$	56
4.2		Οι περιβάλλουσες και αριθμητικά πεδία δευτέρου βαθμού των διαγώνιων πινάκων D_3 και D_4	59
	α'	Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(D_3)$ σχεδιασμένη μέσω 90 κελυφών.	59
	β'	Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(D_4)$ σχεδιασμένη μέσω 90 κελυφών.	59
	γ'	Το $\Lambda_2(D_3)$	59
	δ'	Το $\Lambda_2(D_4)$	59
4.3		Αριθμητικά πεδία και περιβάλλουσες όμοιων πινάκων.	62
	α'	Το αριθμητικό πεδίο 60 όμοιων πινάκων.	62
	β'	Οι περιβάλλουσες 60 όμοιων πινάκων.	62
5.1		Σχεδίαση της $\mathcal{E}(A)$ στο GNU Octave.	68
	α'	Σχεδίαση με 120 καμπύλες.	68
	β'	Σχεδίαση με 121 καμπύλες.	68
5.2		Αλλαγή της διαμέρισης στις στροφές $\Gamma(iA)$ και $\Gamma(-iA)$ στο GNU Octave.	69
	α'	Σχεδίαση με 120 βήματα.	69
	β'	Σχεδίαση με 480 βήματα.	69
5.3		Οι στροφές $\Gamma(iB)$ και $\Gamma(-iB)$ στο GNU Octave	70
5.4		Αποτελέσματα του GNU Octave μετά από τις αλλαγές του πη- γαίου κώδικα.	72
	α'	Τα κελύφη για τις στροφές $\Gamma(A)$, $\Gamma(-A)$, $\Gamma(-iA)$, και $\Gamma(iA)$	72
	β'	Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$, 120 κελύφη.	72

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m}$	Τα σύνολα των πραγματικών αριθμών, διανυσμάτων και $n \times m$ πινάκων, αντίστοιχα
$\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n \times m}$	Τα σύνολα των μιγαδικών αριθμών, διανυσμάτων και $n \times m$ πινάκων, αντίστοιχα
$\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$	Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός αριθμού $z \in \mathbb{C}$, αντίστοιχα
$\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \ \cdot\ _\infty$	Η 1-νόρμα, η 2-νόρμα και η ∞ -νόρμα διανυσμάτων, αντίστοιχα
$\ \circ\ _1, \ \circ\ _2, \ \circ\ _\infty$	Η 1-νόρμα, η 2-νόρμα και η ∞ -νόρμα πινάκων, αντίστοιχα
$\ \circ\ _F$	Η νόρμα Frobenius
$\bar{A}, A^T, A^*, A^{-1}$	Ο συζυγής, ο ανάστροφος, ο αναστροφοσυζυγής και ο αντίστροφος ενός πίνακα A , αντίστοιχα
$H(A), S(A)$	Το ερμιτιανό και το αντιερμιτιανό μέρος ενός τετραγωνικού πίνακα A , αντίστοιχα
$\operatorname{trace}(A)$	Το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα A
$\det(A)$	Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα A
$\operatorname{rank}(A)$	Ο βαθμός ενός πίνακα A
I_n	Ο μοναδιαίος (ταυτοτικός) πίνακας τάξης n
$\operatorname{Null}(A)$ ή $\operatorname{Kern}(A)$	Ο πυρήνας ενός πίνακα A
$\sigma(A)$	Το φάσμα ενός τετραγωνικού πίνακα A
$\rho(A)$	Η φασματική ακτίνα ενός τετραγωνικού πίνακα A
$F(A)$	Το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα A
$\operatorname{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$	Ο διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία a_1, a_2, \dots, a_k
$\operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$	Η γραμμική θήκη των διανυσμάτων x_1, x_2, \dots, x_k
$\operatorname{Co}(\Omega)$	Η κυρτή θήκη ενός συνόλου Ω
$\operatorname{Int}(\Omega)$	Το εσωτερικό ενός συνόλου Ω
$\partial\Omega$	Το σύνορο ενός συνόλου Ω
$\Delta(z, \rho)$	Ο κυκλικός δίσκος με κέντρο $z \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $\rho > 0$

Γενικά

Η Ανάλυση Πινάκων και οι συναφείς αριθμητικές μέθοδοι, καθώς και η μελέτη των ιδιοτήτων των πινάκων, προσφέρουν αναντικατάστατα εργαλεία επίλυσης των σύνθετων προβλημάτων που παρουσιάζονται σε πολλά επιστημονικά πεδία. Έτσι, η τεχνολογική και επιστημονική πρόοδος εγείρει την ανάγκη μελέτης και έρευνας που αφορά στις ιδιότητες των πινάκων, καθώς και στα χαρακτηριστικά τους μεγέθη και τις αντίστοιχες αριθμητικές μεθόδους υπολογισμού τους.

Η παρούσα διπλωματική, έχοντας ως αφετηρία τη θεωρητική μελέτη του αριθμητικού πεδίου, ελκυστικό ερευνητικό θέμα λόγω της πληθώρας των εφαρμογών του, παρουσιάζει τη μεθοδολογία βελτίωσης της προσέγγισης του φάσματος που το αριθμητικό πεδίο προσφέρει. Η βελτίωση αυτή βασίζεται στον ορισμό μιας ανισότητας που ικανοποιείται για όλες τις ιδιοτιμές τετραγωνικών πινάκων. Έχοντας ως βάση παρόμοιες μεθοδολογίες για την κατασκευή του αριθμητικού πεδίου, τα λαμβανόμενα για την ανισότητα αυτή αποτελέσματα, αξιοποιούνται και επεκτείνονται για να οριστεί η *Κυβική Περιβάλλουσα*. Όπως παρουσιάζεται, οι ιδιότητες της τελευταίας την καθιστούν μια ενδιαφέρουσα περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, η οποία μελετάται και συγκρίνεται με τα αριθμητικά πεδία πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Καθ' ότι η παρούσα διπλωματική τοποθετείται στις περιοχές της Εφαρμοσμένης Γραμμικής Άλγεβρας και της Ανάλυσης πινάκων, η θεωρητική αυτή θεμελίωση των παραπάνω, συμπληρώνεται με τις αντίστοιχες αριθμητικές μεθόδους υπολογισμού και την υλοποίησή τους σε υπολογιστικά πακέτα. Η συμ-

βατότητα και η σύγκριση των υπολογιστικών αυτών πακέτων, καθώς και η αξιολόγηση της υλοποίησης η οποία χρησιμοποιείται για τη σχεδίαση και την ανάλυση των παραδειγμάτων, οδηγεί σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

Αντικείμενο Διπλωματικής

Στην καθημερινή μας ζωή, πολλές από τις λύσεις που μας έχει προσφέρει η τεχνολογία βασίζονται στη χρήση πινάκων. Είναι από τα πιο σημαντικά εργαλεία επίλυσης προβλημάτων που προκύπτουν στην τεχνολογία, στη μηχανική, στην επιστήμη υπολογιστών, καθώς και στις φυσικές, βιολογικές, κοινωνικές και οικονομικές επιστήμες. Στα προαναφερθέντα επιστημονικά πεδία πολλές διαδικασίες αποτυπώνονται σε μαθηματική γλώσσα με τη χρήση πινάκων. Έτσι, η μελέτη των διαδικασιών αυτών έχει καταστεί δυνατή, καθώς ανάγεται σε μελέτη των πινάκων και των ιδιοτήτων τους. Ταυτόχρονα, νέες μεθοδολογίες και νέες τεχνικές επίλυσης έχουν προκύψει χάρη στη χρήση πινάκων.

Η ανάλυση πινάκων και οι συναφείς αριθμητικές μέθοδοι μπορούν να απλοποιήσουν σύνθετα προβλήματα και να προσφέρουν λύσεις σε προβλήματα που ήταν αδύνατο να επιλυθούν. Πολύ συχνά απαιτούνται πράξεις και εύρεση χαρακτηριστικών μεγεθών, όπως τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές, για πίνακες μεγάλου μεγέθους που προκύπτουν κατά τη μελέτη φαινομένων. Ο υπολογισμός των παραπάνω είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί σε σύντομο χρόνο χωρίς τη χρήση τεχνικών της ανάλυσης πινάκων και της αριθμητικής ανάλυσης. Η αξία της εύρεσης των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων έγκειται στο γεγονός ότι αυτά τα χαρακτηριστικά μεγέθη χρησιμοποιούνται σε ένα εύρος εφαρμογών όπως στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, στην κβαντομηχανική, στη γεωλογία, στη μηχανική, στη θεωρία γραφημάτων κ.ά.. Χαρακτηριστικά παραδείγματα νέων εφαρμογών είναι αλγόριθμοι που χρησιμοποιεί η Google και το Netflix (Page Rank Algorithm και Ratings Prediction αντίστοιχα), η ανάλυση κυρίων συνιστωσών (πολύ χρήσιμη σε ευρύ φάσμα εφαρμογών όπως ανάλυση δεδομένων και machine learning), η συμπίεση εικόνων και video.

Μια προσέγγιση του *φάσματος*, δηλαδή του συνόλου των ιδιοτιμών, αποτελεί το αριθμητικό πεδίο του πίνακα. Εκτός από ελκυστικό ερευνητικό θέμα, είναι και ένα αριθμητικό εργαλείο με πληθώρα εφαρμογών, από τη θεωρητική φυσική έως τους κβαντικούς υπολογιστές.

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η περαιτέρω βελτίωση – σε σχέση με το αριθμητικό πεδίο – της προσέγγισης του φάσματος. Για το σκοπό αυτό ορίζεται το *κέλυφος*, μια κυβική καμπύλη που προκύπτει μέσω μιας ανισότητας που ισχύει για όλες τις ιδιοτιμές των τετραγωνικών πινάκων. Το κέλυφος αποτελεί τη βάση του ορισμού της *περιβάλλουσας*, ενός χωρίου που περιέχει το φάσμα και περιέχεται στο αριθμητικό πεδίο. Συνεπώς η περιβάλλουσα, ως υποσύνολο του αριθμητικού πεδίου, αποτελεί καλύτερη προσέγγιση. Επιπλέον, εξετάζονται κάποιες από τις ιδιότητές της. Για τον σχεδιασμό των παραπάνω και την ποιοτική ανάλυση κάποιων χαρακτηριστικών τους, χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον της γλώσσας προγραμματισμού MATLAB, κα-

θώς και του λογισμικού ανοιχτού κώδικα GNU Octave. Η χρήση τους επιλέχθηκε λόγω του συνδυασμού της αποτελεσματικότητάς τους στις πράξεις πινάκων και της δυνατότητας υλοποίησης και σχεδίασης των παραπάνω.

Καθ' αυτόν τον τρόπο, το μεθοδολογικό μοντέλο που ακολουθήθηκε μπορεί να προσφέρει μια καλύτερη προσέγγιση του φάσματος σε σχέση με το αριθμητικό πεδίο, χωρίς να απαιτείται κατά πολύ μεγαλύτερη υπολογιστική δύναμη σε σχέση με αυτή που απαιτείται για τον υπολογισμό του αριθμητικού πεδίου.

Διάρθρωση Διπλωματικής Εργασίας

Η διπλωματική εργασία χωρίζεται στις παρακάτω θεματικές ενότητες:

- Στο Κεφάλαιο 1 τίθενται οι θεωρητικές βάσεις που αφορούν στο αντικείμενο της διπλωματικής.
- Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η Κύρια Ανισότητα Ιδιοτιμών και στη συνέχεια το *κέρυφος*, καμπύλη που προκύπτει από αυτή. Επιπλέον μελετώνται και αποδεικνύονται βασικές ιδιότητές τους.
- Ο ορισμός της *περιβάλλουσας*, χωρίου που περικλείει το φάσμα του πίνακα, και η σύγκριση ιδιοτήτων της περιβάλλουσας και του αριθμητικού πεδίου παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 3. Επιπροσθέτως, στο ίδιο κεφάλαιο εξετάζεται η περιβάλλουσα όμοιων πινάκων σε σχέση με την απόσταση από την κανονικότητα.
- Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζεται η μελέτη της γεωμετρίας της περιβάλλουσας, καθώς και της περιβάλλουσας κανονικών πινάκων. Επίσης γίνεται η σύγκριση μεταξύ της περιβάλλουσας και του αριθμητικού πεδίου δευτέρου βαθμού, όπου αποδεικνύεται ότι το τελευταίο περιέχεται στην περιβάλλουσα. Ακόμα, εξετάζονται τα ιδιοδιανύσματα των δεξιότερων ιδιοτιμών.
- Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 γίνεται η αξιολόγηση των σχημάτων που σχεδιάστηκαν, μέσω του MATLAB και του GNU Octave, για την ποιοτική εξέταση του αριθμητικού πεδίου πρώτου και δευτέρου βαθμού, του κέρυφους, της περιβάλλουσας, και των ιδιοτήτων τους. Επιπροσθέτως, παρατίθενται απαιτούμενες αλλαγές στον κώδικα ώστε να είναι δυνατός ο σχεδιασμός όλων των σχημάτων, καθώς και να είναι εκτελέσιμος από το MATLAB και το GNU Octave.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Το παρόν κεφάλαιο αφορά στις βασικές ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου. Οι ιδιότητες αυτές αποτελούν προαπαιτούμενη γνώση του αντικειμένου της διπλωματικής και συνεπώς και για τα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν. Σημειώνεται ότι οι γνώσεις γραμμικής άλγεβρας θεωρούνται γνωστές.

1.1 Προαπαιτούμενα

Λήμμα 1.1.1 (Schur). Έστω ένας τυχαίος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και ένας άνω τριγωνικός πίνακας $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A (λαμβάνοντας υπόψη και τις πολλαπλότητες), τέτοιοι ώστε

$$A = UTU^*$$

Ορισμός 1.1.2 (Συμπλήρωμα Schur). Έστω οι πίνακες A, B, C, D , οι οποίοι είναι $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$ και $q \times q$ πίνακες και ο D είναι αντιστρέψιμος. Έστω πίνακας M ως ακολούθως:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε ο M να είναι ένας $(p+q) \times (p+q)$ πίνακας.

Τότε το συμπλήρωμα Schur του υποπίνακα D του πίνακα M είναι ο $p \times p$ πίνακας

$$M/D := A - BD^{-1}C$$

ενώ το συμπλήρωμα Schur του υποπίνακα A του πίνακα M είναι ο $q \times q$ πίνακας

$$M/A := D - CA^{-1}B.$$

Αν ο A ή ο D είναι μη αντιστρέψιμοι, τότε οι αντίστροφοι των M/A και M/D μπορούν να αντικατασταθούν από ένα γενικευμένο αντίστροφο (ψευδοαντίστροφο¹), που καλείται γενικευμένο συμπλήρωμα Schur.

1.2 Ορισμός του Αριθμητικού πεδίου

Το αριθμητικό πεδίο (*numerical range, field of values*) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως το σύνολο

$$F(A) = \{x^*Ax \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

Τα αριθμητικά πεδία κάποιων απλών πινάκων είναι τα ακόλουθα:

1.

$$\begin{aligned} F(aI_n) &= \{x^*(aI_n)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \{a(x^*x) : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \{a\}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{[\bar{x}_1 \bar{x}_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\right\} \\ &= \{|x_1|^2 : 0 \leq |x_1|^2 \leq 1\}, \end{aligned}$$

δηλαδή το αριθμητικό πεδίο είναι το κλειστό (πραγματικό) διάστημα $[0, 1]$.

3.

$$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{[\bar{x}_1 \bar{x}_2] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\right\} \\ &= \{2x_2\bar{x}_1 : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\}, \end{aligned}$$

δηλαδή το αριθμητικό πεδίο ταυτίζεται με τον κλειστό μοναδιαίο (κυκλικό) δίσκο $\Delta(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

¹Ένας ψευδοαντίστροφος πίνακας ενός πίνακα είναι ένας πίνακας που έχει κάποια στοιχεία του αντιστρόφου πίνακα του A αλλά όχι απαραίτητα όλα. Δοθέντος ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και ενός πίνακα $A^g \in \mathbb{C}^{m \times n}$, ο A^g είναι ψευδοαντίστροφος του A αν ισχύει η συνθήκη

$$AA^gA = A.$$

Η αριθμητική ακτίνα (*numerical radius*) ενός τετραγωνικού πίνακα A ορίζεται ως

$$r(A) = \max\{|z| : z \in F(A)\}$$

Η $r(A)$ είναι διανυσματική νόρμα στους πίνακες αλλά δεν αποτελεί νόρμα πινάκων.

1.3 Βασικές Ιδιότητες του Αριθμητικού Πεδίου

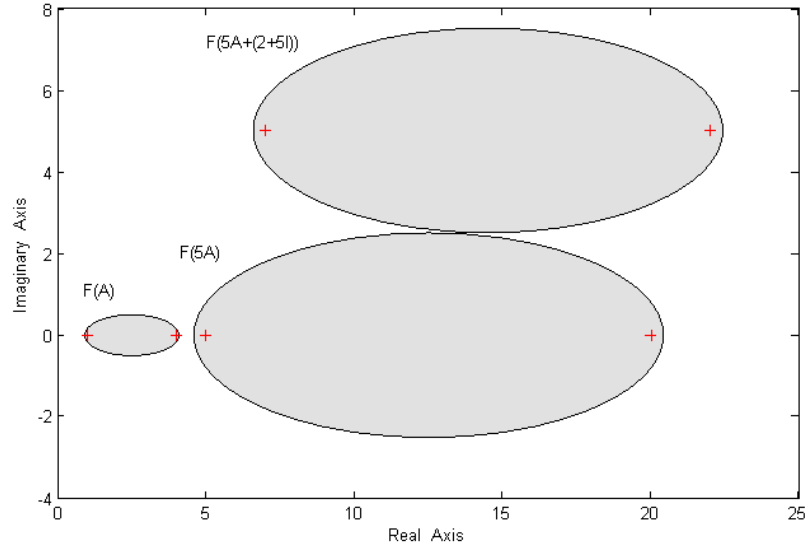
Το αριθμητικό πεδίο ενός $n \times n$ μιγαδικού πίνακα παρουσιάζει πολλές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Άλλες σχετίζονται με τη γεωμετρία του, ενώ άλλες με το γεγονός ότι το σύνολο αυτό είναι εικόνα μιας συνεχούς απεικόνισης από την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{C}^n στο μιγαδικό επίπεδο.

Πρόταση 1.3.1 (Συμπάγεια). Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, το $F(A)$ είναι ένα συμπαγές (δηλαδή, κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του \mathbb{C} .

Πρόταση 1.3.2. Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $a \in \mathbb{C}$, ισχύουν

$$F(A + aI_n) = F(A) + a \text{ και } F(aA) = aF(A).$$

Παράδειγμα 1.3.3. Έστω ο 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Το αριθμητικό του πεδίο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.1 είναι ελλειπτικός δίσκος με εστίες τις δύο ιδιοτιμές του, $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 4$. Το αριθμητικό πεδίο ενός 2×2 πίνακα είναι πάντα έλλειψη με εστίες τις ιδιοτιμές του (Θεώρημα 1.4.1). Στο ίδιο σχήμα δίνεται το αριθμητικό πεδίο του πίνακα $5A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$, καθώς και του πίνακα $5A + (2 + 5i)I_2 = \begin{bmatrix} 7 + 5i & 5 \\ 0 & 22 + 5i \end{bmatrix}$.



Σχήμα 1.1: Τα αριθμητικά πεδία $F(A)$, $F(5A)$ και $F(5A + (2 + 5i)I_2)$.

Πρόταση 1.3.4. Για έναν πίνακα $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει $F(A) = \{a\}$ αν και μόνο αν $A = aI_n$.

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A , μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = H(A) + S(A)$, όπου

$$H(A) = \frac{A + A^*}{2} \text{ και } S(A) = \frac{A - A^*}{2}$$

το ερμιτιανό μέρος και αντιερμιτιανό μέρος του πίνακα A αντίστοιχα. Οι πίνακες $H(A)$ και $-iS(A)$ είναι ερμιτιανοί. Για ένα μιγαδικό αριθμό, το φανταστικό και το πραγματικό του μέρος είναι οι προβολές του στον φανταστικό και στον πραγματικό άξονα, αντίστοιχα. Κατά ανάλογο τρόπο, το αριθμητικό πεδίο του ερμιτιανού και αντιερμιτιανού μέρους του A είναι οι προβολές του $F(A)$ στον πραγματικό και το φανταστικό άξονα, αντίστοιχα.

Πρόταση 1.3.5. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύουν

$$F(H(A)) = \text{Re}(F(A)) \text{ και } F(S(A)) = i \text{Im}(F(A)).$$

Πόρισμα 1.3.6. Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει $F(A) \subset \mathbb{R}$ αν και μόνο αν ο A είναι ερμιτιανός.

Πρόταση 1.3.7. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, το φάσμα του, $\sigma(A)$, περιέχεται στο αριθμητικό του πεδίο $F(A)$.

Από την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει άμεσα ότι οι ιδιοτιμές ενός θετικά ορισμένου πίνακα είναι θετικοί αριθμοί. Πράγματι, έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ θετικά ορι-

σμένος (δηλαδή $x^*Ax > 0$ για κάθε διάνυσμα $x \neq 0$) και (λ, x) ένα ιδιοζεύγος του. Τότε, αν $y = x/\|x\|$, έπεται ότι $\|y\|_2 = 1$ και $\lambda y^*y = y^*(\lambda y) = y^*Ay \geq 0$.

Πρόταση 1.3.8 (Υπο-προσθετικότητα). Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ισχύει

$$F(A + B) \subseteq F(A) + F(B).$$

Είναι γνωστό ότι ένας ορθομοναδιαίος μετασχηματισμός (δηλαδή, ένας μετασχηματισμός ισομετρίας) αφήνει αναλλοίωτη την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{C}^n . Επομένως, θα αφήνει αναλλοίωτο και το αριθμητικό πεδίο. Πράγματι, ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:

Πρόταση 1.3.9. Για κάθε $A, U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, με U ορθομοναδιαίο, ισχύει

$$F(U^*AU) = F(A).$$

Πρόταση 1.3.10 (Κανονικότητα). Για κάθε κανονικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει $F(A) = \text{Co}(\sigma(A))$, δηλαδή το αριθμητικό πεδίο κανονικού πίνακα είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του.

Πόρισμα 1.3.11. Αν ένας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ερμιτιανός, τότε το αριθμητικό πεδίο του, είναι το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα την ελάχιστη και μεγίστη ιδιοτιμή του A .

Παράδειγμα 1.3.12. Έστω ο άνω τριγωνικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 3i & -1 & 1 - 2i \\ 0 & 4 + 3i & 4 - 2i \\ 0 & 0 & 5 + 3i \end{bmatrix}$$

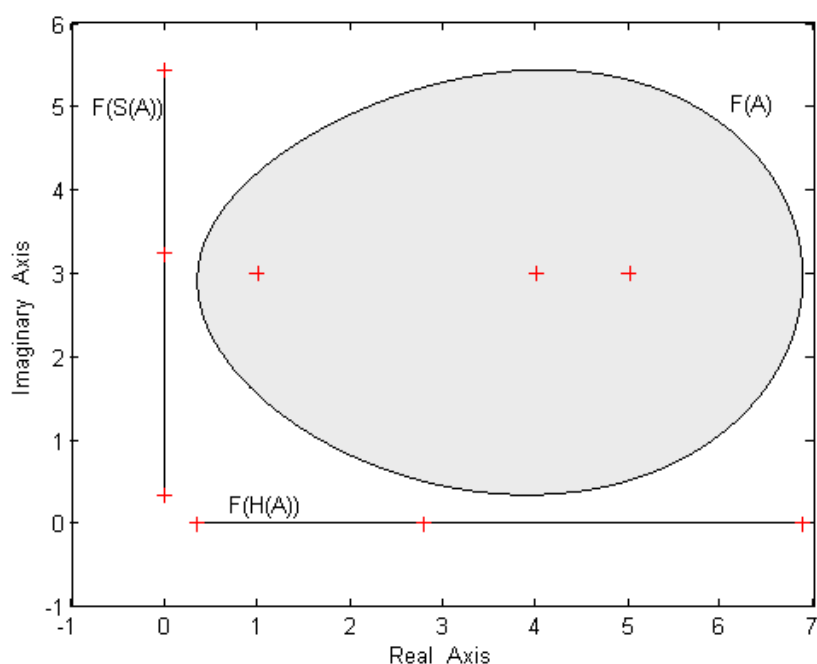
(γενικά, χωρίς βλάβη της γενικότητας, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν στα παραδείγματα τριγωνικοί πίνακες λόγω της τριγωνοποίησης κατά Schur και του αναλλοίωτου του αριθμητικού πεδίου στους ορθομοναδιαίους μετασχηματισμούς ομοιότητας). Στο Σχήμα 1.2, ο ωσειδής δίσκος είναι το $F(A)$. Το ερμιτιανό μέρος του A είναι

$$H(A) = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.5 - i \\ -0.5 & 4 & 2 - i \\ 0.5 + i & 2 + 1i & 5 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0.357$, $\lambda_2 = 2.780$ και $\lambda_3 = 6.866$. Το αντιερμιτιανό μέρος του πίνακα A ,

$$S(A) = \begin{bmatrix} 3i & -0.5 & 0.5 - i \\ 0.5 & 3i & 2 - i \\ -0.5 - i & -2 - i & 3i \end{bmatrix},$$

έχει ιδιοτιμές $\rho_1 = 0.342i$, $\rho_2 = 3.233i$ και $\rho_3 = 5.425i$. Το $F(H(A))$ είναι η προβολή του $F(A)$ στον πραγματικό άξονα, ενώ το πεδίο $F(S(A))$ είναι η προβολή του $F(A)$ στον φανταστικό άξονα, όπως άλλωστε υπαγορεύει και η Πρόταση 1.3.5. Ο $H(A)$ είναι ερμιτιανός πίνακας και το $F(H(A))$ είναι το κλειστό πραγματικό διάστημα με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του, όπως αναφέρθηκε στο Πρόγραμμα 1.3.11. Ο πίνακας $S(A)$, είναι αντερμιτιανός (άρα και κανονικός) με φανταστικές ιδιοτιμές, και από την Πρόταση 1.3.10, το αριθμητικό πεδίο $F(S(A))$ ταυτίζεται με την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών αυτών.



Σχήμα 1.2: Τα αριθμητικά πεδία $F(A)$, $F(H(A))$ και $F(S(A))$.

Πόρισμα 1.3.13. Ένας ερμιτιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

Πόρισμα 1.3.14. Ένας ερμιτιανός πίνακας H είναι θετικά ορισμένος ή θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν $F(H) \subset (0, +\infty)$ ή $[0, +\infty)$, αντίστοιχα.

Πόρισμα 1.3.15. Για τυχαίο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) Το πεδίο $F(A)$ ανήκει στο δεξιό ανοιχτό ημιεπίπεδο του \mathbb{C} αν και μόνο αν ο ερμιτιανός πίνακας $A + A^*$ είναι θετικά ορισμένος.
- (ii) Το πεδίο $F(A)$ ανήκει στο δεξιό κλειστό ημιεπίπεδο του \mathbb{C} αν και μόνο αν ο ερμιτιανός πίνακας $A + A^*$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Για την επόμενη ιδιότητα του αριθμητικού πεδίου χρησιμοποιείται το *ευθύ άθροισμα* πινάκων: Για $A \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ και $B \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$, ορίζεται ως ο $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$ πίνακας

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.3.16. Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ και $B \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$, ισχύει

$$F(A \oplus B) = \text{Co}(F(A) \cup F(B)).$$

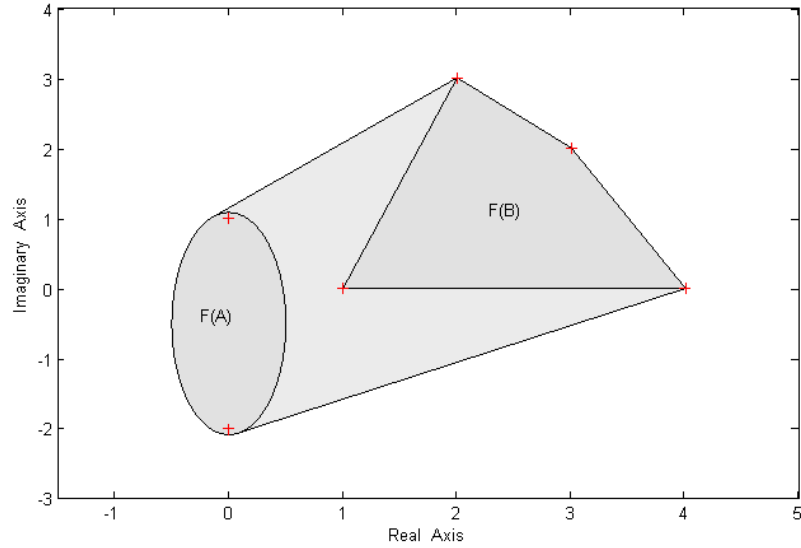
Πρόταση 1.3.17. Για κάθε κύριο υποπίνακα \hat{A} ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ισχύει $F(\hat{A}) \subseteq F(A)$.

Πρόταση 1.3.18. Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A .

(i) Αν ο A είναι πραγματικός, τότε το $F(A)$ είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(ii) Γενικά ισχύει ότι $F(A^*) = \overline{F(A)}$.

Παράδειγμα 1.3.19. Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}$ και $B = \text{diag}\{1, 3, 3 + 2i, 2 + 3i\}$. Τα αριθμητικά τους πεδία φαίνονται στο Σχήμα 1.3. Το πεδίο $F(A)$ είναι ελλειπτικός δίσκος με εστίες τις ιδιοτιμές του A , $\lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -2i$. Ο πίνακας B είναι κανονικός, αφού είναι διαγώνιος, κι επομένως το $F(B)$ είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.10. Έτσι, το $F(B)$ είναι το τετράπλευρο με κορυφές τις τέσσερις ιδιοτιμές του πίνακα B , $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 4$, $\rho_3 = 3 + 2i$ και $\rho_4 = 2 + 3i$. Το αριθμητικό πεδίο του πίνακα $F(A \oplus B)$ είναι η κυρτή θήκη των $F(A)$ και $F(B)$, όπως υπαγορεύεται και από την Πρόταση 1.3.16.

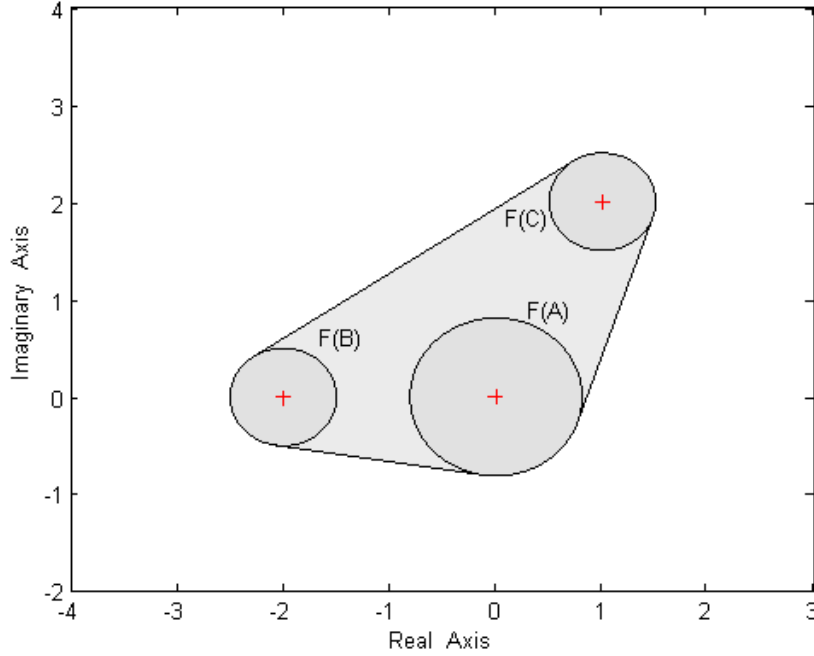


Σχήμα 1.3: Τα αριθμητικά πεδία $F(A)$, $F(B)$ και $F(A \oplus B)$.

Παράδειγμα 1.3.20. Έστω οι πίνακες Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ και } C = \begin{bmatrix} 1+2i & 1 \\ 0 & 1+2i \end{bmatrix}.$$

Τα σύνολα $F(A)$, $F(B)$ και $F(C)$ φαίνονται στο Σχήμα 1.4. Το $F(A)$ είναι κυκλικός δίσκος με κέντρο το 0 και ακτίνα $a = \cos(\frac{\pi}{5})$. Όπως θα δειχθεί και στη συνέχεια, το αριθμητικό πεδίο ενός $n \times n$ πίνακα Jordan είναι κυκλικός δίσκος με κέντρο την ιδιοτιμή του και ακτίνα $a = \cos(\frac{\pi}{n+1})$. Έτσι τα $F(B)$ και $F(C)$ είναι επίσης κυκλικοί δίσκοι με κέντρα τις ιδιοτιμές τους, 2 και $1+2i$, αντίστοιχα. Τα αριθμητικά πεδία $F(A)$ και $F(B)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών, επαληθεύοντας την Πρόταση 1.3.18. Το αριθμητικό πεδίο $F(A \oplus B \oplus C)$ είναι η κυρτή θήκη των $F(A)$, $F(B)$ και $F(C)$, όπως φαίνεται και στο σχήμα, γεγονός αναμενόμενο από την Πρόταση 1.3.16.



Σχήμα 1.4: Τα αριθμητικά πεδία $F(A)$, $F(B)$, $F(C)$ και $F(A \oplus B \oplus C)$.

1.4 Κυρτότητα του Αριθμητικού Πεδίου

Θεμελιώδης ιδιότητα του αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πινάκων είναι η κυρτότητα. Αρχικά θα εξεταστεί η περίπτωση των 2×2 πινάκων.

Θεώρημα 1.4.1 (Ελλειπτικό θεώρημα). Έστω $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ με ιδιοτιμές λ_1, λ_2 . Το αριθμητικό πεδίο του A είναι ένας κλειστός ελλειπτικός δίσκος με εστίες λ_1, λ_2 και μήκος μικρού άξονα ίσο με $\sqrt{\text{trace}(A^*A) - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2}$.

Η κυρτότητα του αριθμητικού πεδίου ενός 2×2 πίνακα προκύπτει από το γεγονός ότι αυτό είναι πάντα κλειστός ελλειπτικός δίσκος. Το επόμενο θεώρημα αφορά στην κυρτότητα του αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πινάκων οποιασδήποτε (πεπερασμένης) διάστασης.

Θεώρημα 1.4.2 (Toeplitz-Hausdorff). Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ είναι κυρτό.

Θεώρημα 1.4.3. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε το 0 δεν ανήκει στο $F(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi]$ τέτοιος ώστε ο ερμιτιανός πίνακας $H(e^{i\theta}A) = \frac{1}{2}(e^{i\theta}A + e^{-i\theta}A^*)$ να είναι θετικά ορισμένος.

Πόρισμα 1.4.4. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $0 \in \text{Int}(F(A))$ αν και μόνο αν για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$, ο $H(e^{i\theta}A)$ είναι αόριστος.
- (ii) $0 \in \partial F(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ τέτοιο ώστε ο πίνακας $H(e^{i\theta_0}A)$ να είναι μη αντιστρέψιμος και θετικά ημιορισμένος.
- (iii) $0 \notin F(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ τέτοιο ώστε ο πίνακας $H(e^{i\theta_0}A)$ να είναι θετικά ορισμένος.

1.5 Αριθμητική Ακτίνα Πίνακα

Η αριθμητική ακτίνα ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως $r(A) = \max\{|z| : z \in F(A)\}$. Παρατίθενται μερικές από τις βασικές ιδιότητές της.

Πρόταση 1.5.1. Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ισχύει $\frac{1}{2}\|A\|_2 \leq r(A) \leq \|A\|_2$.

Η αριθμητική ακτίνα είναι διανυσματική νόρμα (δηλαδή, χωρίς να ικανοποιεί την ιδιότητα της υπο-πολλαπλασιαστικότητας), αλλά δεν είναι νόρμα πινάκων.

Πρόταση 1.5.2. Η αριθμητική ακτίνα στο διανυσματικό χώρο των τετραγωνικών πινάκων είναι διανυσματική νόρμα.

Πρόταση 1.5.3. Η νόρμα $4r(\cdot)$ είναι νόρμα πινάκων στο $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Πρόταση 1.5.4. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με φασματική ακτίνα

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Τότε ισχύει $\rho(A) \leq r(A)$.

Η ακόλουθη ιδιότητα της αριθμητικής ακτίνας βρίσκει εφαρμογή στις επαναληπτικές αριθμητικές μεθόδους των πινάκων.

Πρόταση 1.5.5 (Ανισότητα δυνάμεων). Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $r(A^n) \leq r(A)^n$.

1.6 Προσέγγιση του Αριθμητικού Πεδίου

Γενικά, για ένα σημείο a του αριθμητικού πεδίου $F(A)$, δε μπορούν να υπολογιστούν τα μοναδιαία διανύσματα $x \in \mathbb{C}^n$ που ικανοποιούν τη σχέση $x^*Ax = a$. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό μόνο στην περίπτωση “ακραίων” συνοριακών σημείων.

Λήμμα 1.6.1. *Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $x_0 \in \mathbb{C}^n$ με $x_0^*x_0 = 1$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

$$(i) \operatorname{Re}(x_0^*Ax_0) = \max\{\operatorname{Re}(a) : a \in F(A)\},$$

$$(ii) x_0^*H(A)x_0 = \max\{b : b \in F(H(A))\},$$

$$(iii) H(A)x_0 = \lambda_{\max}(H(A))x_0,$$

όπου $\lambda_{\max}(H(A))$ είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του ερμιτιανού πίνακα $H(A)$.

Από το προηγούμενο λήμμα επαληθεύεται ότι

$$\max\{\operatorname{Re}(a) : a \in F(A)\} = \max\{h : h \in F(H(A))\} = \lambda_{\max}(H(A)).$$

Αυτό σημαίνει ότι το “δεξιότερο” σημείο του $F(A)$ έχει πραγματικό μέρος τη μέγιστη ιδιοτιμή του ερμιτιανού μέρους του πίνακα A , $\lambda_{\max}(H(A))$. Ουσιαστικά το λήμμα υποδηλώνει ότι αν υπολογισθεί η $\lambda_{\max}(H(A))$ και ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμά της, έστω x , το “δεξιότερο” συνοριακό σημείο του $F(A)$ είναι το x^*Ax . Επιπλέον, η ευθεία $\{\lambda_{\max}(H(A)) + it : t \in \mathbb{R}\}$ είναι εφαπτομένη του κυρτού συνόλου $F(A)$ σε αυτό το συνοριακό σημείο. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σχέση $e^{-i\theta}F(e^{i\theta}A) = F(A)$, είναι δυνατόν να προκύψουν όσα συνοριακά σημεία και όσες εφαπτόμενες ευθείες θέλουμε, στρέφοντας το $F(A)$ και κάνοντας τον απαιτούμενο υπολογισμό των ιδιοξενυγών. Για μία γωνία $\theta \in [0, 2\pi]$, ορίζεται $\lambda_\theta = \lambda_{\max}(H(e^{i\theta}A))$ και $x_\theta \in \mathbb{C}^n$ ένα αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα. Δηλαδή, $H(e^{i\theta}A)x_\theta = \lambda_\theta x_\theta$ με $x_\theta^*x_\theta = 1$. Συμβολίζεται ως l_θ η εφαπτομένη ευθεία $\{e^{-i\theta}(\lambda_\theta + it) : t \in \mathbb{R}\}$ ενώ το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την l_θ και περιέχει το πεδίο $F(A)$, συμβολίζεται με $H_\theta = e^{-i\theta}\{z : \operatorname{Re}(z) \leq \lambda_\theta\}$. Βάσει των παραπάνω, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.6.2. *Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$, ο μιγαδικός αριθμός $p_\theta = x_\theta^*Ax_\theta$ είναι ένα συνοριακό σημείο του $F(A)$. Η ευθεία l_θ είναι εφαπτομένη του $F(A)$ με $p_\theta \in l_\theta \cap F(A)$ και $F(A) \subset H_\theta$ για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Επειδή το $F(A)$ είναι κυρτό, γίνεται εποπτικά φανερό ότι κάθε συνοριακό σημείο του εμφανίζεται ως ένα p_θ και για κάθε $a \notin F(A)$ υπάρχει μία ευθεία

l_θ που αφήνει το $F(A)$ και το a σε διαφορετικά ημιεπίπεδα, δηλαδή $a \notin H_\theta$ ενώ $F(A) \in H_\theta$. Έτσι το αριθμητικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως άπειρη τομή κλειστών ημιεπιπέδων, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.6.3. Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

$$F(A) = \text{Co}(\{p_\theta \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}) = \bigcap_{0 \leq \theta \leq 2\pi} H_\theta.$$

Αφού δε γίνεται να υπολογιστούν άπειρα σημεία p_θ και άπειρες ευθείες l_θ , μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα διακριτό ανάλογο του τελευταίου θεωρήματος, επιλέγοντας μία διαμέριση του $[0, 2\pi]$, έστω

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}, \text{ όπου } 0 = \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_k = 2\pi.$$

Αν p_{θ_i} ($i = 1, 2, \dots, k$) είναι τα διαδοχικά συνοριακά σημεία του $F(A)$ και H_{θ_i} ($i = 1, 2, \dots, k$) είναι τα αντίστοιχα ημιεπίπεδα που ορίζονται από τις επαπτόμενες ευθείες l_{θ_i} ($i = 1, \dots, k$) του $F(A)$ στα σημεία p_{θ_i} , τότε ορίζεται το εγγεγραμμένο στο $F(A)$ πολύγωνο $F_{in}(A, \Theta) = \text{Co}(\{p_{\theta_1}, \dots, p_{\theta_k}\})$ και το περιγεγραμμένο στο $F(A)$ πολύγωνο $F_{out}(A, \Theta) = H_{\theta_1} \cap H_{\theta_2} \cap \dots \cap H_{\theta_k}$. Τα δύο αυτά σύνολα αποτελούν μία εσωτερική και μία εξωτερική προσέγγιση για το $F(A)$, αντίστοιχα, αφού είναι προφανές ότι για κάθε διαμέριση $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$, ισχύει

$$F_{in}(A, \Theta) \subset F(A) \subset F_{out}(A, \Theta).$$

1.7 Σύνоро του Αριθμητικού Πεδίου

Το αριθμητικό πεδίο ενός 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ είναι:

- ένα σημείο του επιπέδου αν και μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2$ και $b = 0$,
- το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα λ_1, λ_2 αν και μόνο αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και $b = 0$,
- ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα $|b|/2$ αν και μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2$,
- ένας ελλειπτικός δίσκος με εστίες τις λ_1, λ_2 αν και μόνο αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και $b \neq 0$.

Σε πίνακες μεγαλύτερης διάστασης συναντάται μία πολύ πιο πλούσια ποικιλία σχημάτων και μορφών για το αριθμητικό πεδίο τετραγωνικών πινάκων. Από

την Πρόταση 1.3.10, κάθε κυρτό πολύγωνο είναι το αριθμητικό πεδίο ενός κανονικού πίνακα του οποίου οι ιδιοτιμές είναι οι κορυφές του πολυγώνου αυτού. Έτσι κάθε φραγμένο και κυρτό σύνολο μπορεί να προσεγγιστεί από το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα του οποίου η διάσταση μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη.

Στην παράγραφο αυτή, βασικός στόχος είναι η παρουσίαση κάποιων στοιχείων για τη μορφή του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα, καθώς και τη σχέση του συνόρου του $F(A)$, $\partial F(A)$, με το φάσμα του A . Ένα $a \in \partial F(A)$ καλείται *γωνιακό σημείο* (*angular point, sharp point*) του $F(A)$ αν υπάρχουν γωνίες θ_1 και θ_2 με $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 2\pi$ και $\theta_1 - \theta_2 < \pi$, για τις οποίες $\operatorname{Re}(e^{i\theta}a) = \max\{\operatorname{Re}(b) : b \in F(e^{i\theta}A)\}$ για κάθε $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

Θεώρημα 1.7.1. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Αν $a \in \mathbb{C}$ είναι ένα γωνιακό σημείο του $F(A)$, τότε το a είναι ιδιοτιμή του A .

Πόρισμα 1.7.2. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Το πεδίο $F(A)$ έχει το πολύ n γωνιακά σημεία και είναι κυρτό πολύγωνο αν και μόνο αν $F(A) = \operatorname{Co}(\sigma(A))$.

Πρέπει να αναφερθεί ότι αν και κάθε γωνιακό σημείο του αριθμητικού πεδίου είναι ιδιοτιμή στο σύνολο του αριθμητικού πεδίου, το αντίστροφο δεν ισχύει.

Μια ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ καλείται *κανονική* αν η γεωμετρική της πολλαπλότητα ισούται με την αλγεβρική της πολλαπλότητα και κάθε ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στη λ είναι κάθετο σε κάθε ιδιοδιάνυσμα άλλης ιδιοτιμής. Ακολουθεί ένα θεώρημα που εξασφαλίζει τη κανονικότητα κάθε ιδιοτιμής που βρίσκεται στο σύνολο του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα.

Θεώρημα 1.7.3. Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $a \in \partial F(A) \cap \sigma(A)$, τότε η ιδιοτιμή a είναι κανονική ιδιοτιμή του πίνακα. Επιπλέον, αν m είναι η πολλαπλότητα της a , τότε ο A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα της μορφής $aI_m \oplus B$, όπου $B \in \mathbb{C}^{(n-m) \times (n-m)}$ και $a \notin \sigma(B)$.

Πόρισμα 1.7.4. Αν $n - 1$ ιδιοτιμές του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (συνυπολογίζοντας και τις αλγεβρικές πολλαπλότητες) ανήκουν στο σύνολο του $F(A)$, τότε ο πίνακας A είναι κανονικός.

Πόρισμα 1.7.5. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε $F(A) = \operatorname{Co}(\sigma(A))$, αν και μόνο αν ο A είναι κανονικός ή είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα της μορφής $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, όπου ο A_1 είναι κανονικός και $F(A_2) \subset F(A_1)$.

Πόρισμα 1.7.6. Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $n \leq 4$, τότε ο A είναι κανονικός αν και μόνο αν $F(A) = \operatorname{Co}(\sigma(A))$.

1.8 Πίνακες Jordan και Ομοιότητα

Η παράγραφος αυτή αφορά στα αριθμητικά πεδία των πινάκων Jordan, καθώς και στις σχέσεις που συνδέουν το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα με τα αριθμητικά πεδία των ομοίων του πινάκων. Αρχικά όμως, (ως σύνητομη υπενθύμιση) θα αναφερθεί ο τρόπος κατασκευής της κανονικής μορφής Jordan ενός τετραγωνικού πίνακα.

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και λ_0 μια ιδιοτιμή του. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ λέγεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης k του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 όταν ο k είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $(A - \lambda_0 I_n)^k = 0$, ενώ $(A - \lambda_0 I_n)^{k-1} \neq 0$. Από ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα x τάξης k , δημιουργείται μία αλυσίδα διανυσμάτων

$$x_k = x, x_{k-1} = (A - \lambda_0 I_n)x_k, x_{k-2} = (A - \lambda_0 I_n)^2 x_k, \dots, x_1 = (A - \lambda_0 I_n)^{k-1} x_k.$$

Έτσι κατασκευάστηκε μία αλυσίδα Jordan $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$, μήκους k , της οποίας τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Το x_1 είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Τα υπόλοιπα διανύσματα, x_2, x_3, \dots, x_k της αλυσίδας λέγονται γενικευμένα ιδιοδιανύσματα και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$Ax_r = x_{r-1} + \lambda_0 x_r, \quad r = 1, 2, \dots, k.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} A[x_1 x_2 \cdots x_k] &= [Ax_1 Ax_2 \cdots Ax_k] \\ &= [\lambda_0 x_1 \lambda_0 x_2 + x_1 \cdots \lambda_0 x_k + x_{k-1}] \\ &= [x_1 x_2 \cdots x_k] \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

όπου ο υποπίνακας $J_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι το *Jordan Block* της ιδιοτιμής λ_0 .

Ακολουθεί η διατύπωση του γνωστού θεωρήματος που αφορά στην παραγοντοποίηση Jordan των τετραγωνικών μιγαδικών πινάκων. Σημειώνεται ότι πίνακας Jordan ονομάζεται κάθε block-διαγώνιος πίνακας $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ που έχει διαγώνιους (τετραγωνικούς) υποπίνακες τους υποπίνακες Jordan (Jordan blocks) που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του A .

Θεώρημα 1.8.1. Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, υπάρχει αντιστρέψιμος $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $S^{-1}AS = J$, όπου $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι πίνακας Jordan που αντιστοιχεί στον A .

Θεώρημα 1.8.2. Αν J_k είναι το $k \times k$ Jordan block
$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$
 τότε ο αριθμητικό του πεδίο είναι $F(J_k) = \Delta\left(\lambda, \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right)$, δηλαδή ο κυκλικός δίσκος με κέντρο το λ και ακτίνα $\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)$.

Το θεώρημα αυτό, δείχνει τη μορφή που έχει το αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα Jordan. Έπεται η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ των αριθμητικών πεδίων όμοιων πινάκων. Για δύο όμοιους πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με αριθμητικά πεδία $F(A)$ και $F(B)$, είναι φανερό ότι ισχύει

$$\text{Co}(\sigma(A)) = \text{Co}(\sigma(B)) \subseteq F(A) \cap F(B)$$

λόγω της κυρτότητας του αριθμητικού πεδίου και του γεγονότος ότι το φάσμα περιέχεται σε αυτό. Γενικά τα αριθμητικά πεδία όμοιων πινάκων δεν παρουσιάζουν κάποια άλλη προφανή μεταξύ τους σχέση. Ωστόσο, από τον Givens (1952) έχει αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.8.3. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ισχύει

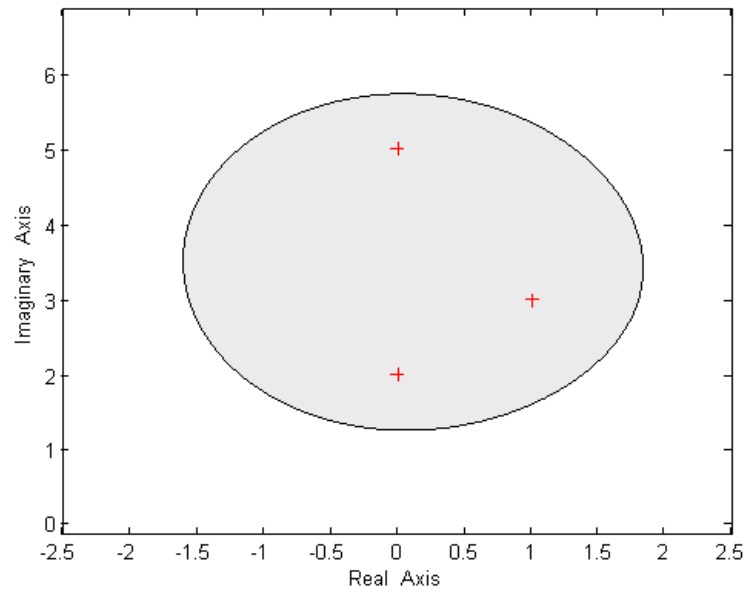
$$\bigcap_{\det(S) \neq 0} F(SAS^{-1}) = \text{Co}(\sigma(A)),$$

όπου η τομή περιλαμβάνει όλους τους αντιστρέψιμους πίνακες $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

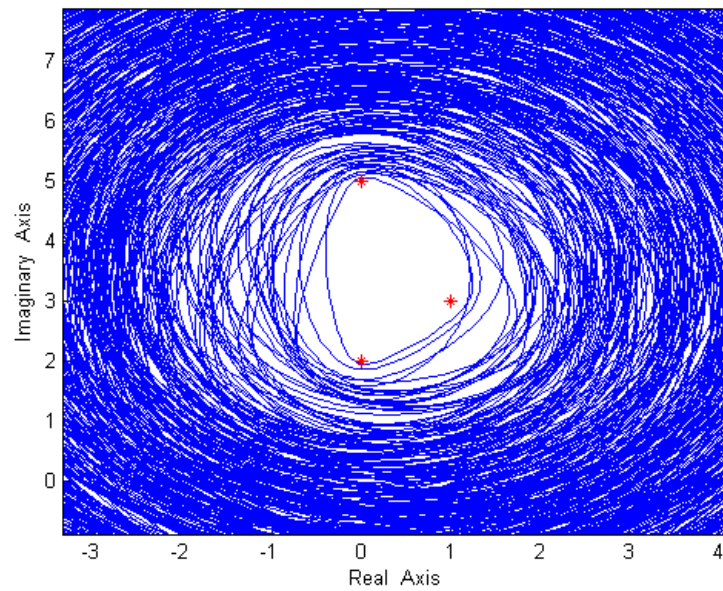
Παράδειγμα 1.8.4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 3i & -1 & 1 - 2i \\ 0 & 2i & 2 - i \\ 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

με φάσμα $\sigma(A) = \{1 + 3i, 2i, 5i\}$. Στο Σχήμα 1.5α', δίνεται το $F(A)$, ενώ με "+" σημειώνονται οι ιδιοτιμές του A (που ασφαλώς περιέχονται στο $F(A)$). Στο Σχήμα 1.5β', παρουσιάζονται τα αριθμητικά πεδία 600 (τυχαίων) όμοιων πινάκων του. Το Θεώρημα 1.8.3 επαληθεύεται, καθώς η τομή των αριθμητικών πεδίων των όμοιων του A πινάκων τείνει να ταυτιστεί με την κυρτή θήκη του φάσματος $\sigma(A) = \{1 + 3i, 2i, 5i\}$.



(α') Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$.



(β') Αριθμητικά πεδία ομοίων του A πινάκων.

Σχήμα 1.5: Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ και τα αριθμητικά πεδία ομοίων του A πινάκων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

2.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο, εξετάζονται μιγαδικοί πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geq 2$, ενώ παρουσιάζεται και αποδεικνύεται μια ανισότητα που ικανοποιεί το πραγματικό και φανταστικό μέρος της κάθε ιδιοτιμής του A . Η ανισότητα αυτή ορίζει ένα μη φραγμένο χωρίο στο μιγαδικό επίπεδο που περιέχει το φάσμα του A . Στη συνέχεια, εξετάζονται οι συνθήκες ώστε μια ιδιοτιμή να ανήκει στο σύνορο του χωρίου αυτού. Τέλος, παρουσιάζεται η εφαρμογή της ανισότητας αυτής σε στροφές της μορφής $e^{i\theta}A$, επιτρέποντας την καλύτερη προσέγγιση του φάσματος.

2.2 Προαπαιτούμενα και Συμβολισμοί

Προαπαιτούμενη γνώση αποτελεί η θεωρία του Κεφ. 1. Επιπλέον, θα οριστούν οι ποσότητες $v(A)$ και $u(A)$:

Ορισμός 2.2.1. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, και y_1 το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή δ_1 του ερμιτιανού μέρους του A , $H(A)$. Ορίζονται οι ποσότητες $v(A)$ και $u(A)$, ως εξής:

$$v(A) = \|S(A)y_1\|_2^2 \text{ και } u(A) = \text{Im}(y_1^* S(A)y_1). \quad (2.1)$$

Ας παρατηρηθεί ότι $u(A) = 0$ όταν ο πίνακας A είναι πραγματικός. Επίσης, όταν $v(A) = 0$, τότε το (δ_1, y_1) είναι ιδιοζεύγος για τον A αλλά και για τον A^* . Συνεπώς, η ποσότητα $v(A)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει το μέτρο του πόσο η δ_1 προσεγγίζει το να είναι κανονική ιδιοτιμή του A .

2.3 Η Ανισότητα Ιδιοτιμών

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και δ_1 η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του ερμιτιανού πίνακα $H(A)$. Όπως είναι γνωστό, όλες οι ιδιοτιμές του A , ανήκουν στο κλειστό ημιεπίπεδο $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq \delta_1\}$. Αντικαθιστώντας τη γραμμή $\operatorname{Re}(z) \leq \delta_1$ με μια κατάλληλη καμπύλη, είναι δυνατό να υπάρξει μια διαφορετική προσέγγιση του φάσματος $\sigma(A)$. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.1 (Κύρια ανισότητα ιδιοτιμών). Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και λ μια ιδιοτιμή του πίνακα A . Επιπλέον, έστω $\delta_1 \geq \delta_2$ οι δυο μεγαλύτερες ιδιοτιμές του ερμιτιανού μέρους του A . Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re}(\lambda) - \delta_2)(\operatorname{Im}(\lambda) - u(A))^2 \leq \\ (\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda))[v(A) - u(A)]^2 + (\operatorname{Re}(\lambda) - \delta_2)(\operatorname{Re}(\lambda) - \delta_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Απόδειξη. Έστω $y_1 \in \mathbb{C}^n$ το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του $H(A)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή δ_1 . Τότε, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, όπου η πρώτη στήλη του είναι η y_1 , έτσι ώστε $U^*H(A)U = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{bmatrix}$, όπου $H_1 = \operatorname{diag}\{\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n\}$, $\delta_j \in \sigma(H(A))$.

Επιπλέον, επειδή ο $U^*S(A)U$ είναι αντιερμιτιανός ισχύει

$$U^*S(A)U = \begin{bmatrix} ia & u^* \\ -u & S_1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

όπου $S_1 \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ είναι αντιερμιτιανός, $u \in \mathbb{C}^{n-1}$, και $a \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, όταν $\lambda \in \sigma(A)$,

$$U^*(A - \lambda I)U = \begin{bmatrix} \delta_1 + ia - \lambda & u^* \\ -u & H_1 + S_1 - \lambda I \end{bmatrix}$$

είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας. Σημειώνεται ότι από υπόθεση,

$$ia = y_1^*S(A)y_1, \text{ δηλαδή } a = u(A). \quad (2.4)$$

Σε αυτό το σημείο, εξετάζεται η περίπτωση όπου

$$\lambda \neq \delta_1 + ia = y_1^*(H(A) + S(A))y_1 = y_1^*Ay_1,$$

καθώς σε διαφορετική περίπτωση, η (2.2) ισχύει τετριμμένα και $\lambda = \delta_1 + i u(A)$ είναι κανονική ιδιοτιμή του A στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου $F(A)$. Τότε το συμπλήρωμα Schur των πρώτων μη μηδενικών στοιχείων της κάθε γραμμής του $U^*(A - \lambda I)U$ είναι

$$E = (H_1 + S_1 - \lambda I) + \frac{1}{\delta_1 + i a - \lambda} uu^*,$$

το οποίο είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας, αφού $A - \lambda I$ είναι μη αντιστρέψιμος [3, σελ. 21]. Τα ερμιτιανά και αντιερμιτιανά μέρη του E μπορούν να προκύψουν άμεσα:

$$H(E) = H_1 - \operatorname{Re}(\lambda)I + \frac{\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda)}{(\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda))^2 + (a - \operatorname{Im}(\lambda))^2} uu^*, \quad (2.5)$$

και

$$S(E) = S_1 - i \operatorname{Im}(\lambda)I + \frac{i(\operatorname{Im}(\lambda) - a)}{(\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda))^2 + (a - \operatorname{Im}(\lambda))^2} uu^*. \quad (2.6)$$

Αφού $0 \in \sigma(E) \subseteq F(E)$ και $F(H(E)) = \operatorname{Re}(F(E))$, έπεται ότι $0 \in F(H(E))$, και συνεπώς υπάρχει $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $x^* H(E)x = 0$, ήτοι

$$0 = x^* H_1 x - x^* x \operatorname{Re}(\lambda) + \frac{\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda)}{(\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda))^2 + (a - \operatorname{Im}(\lambda))^2} x^* uu^* x, \quad x^* x = 1. \quad (2.7)$$

Δεδομένου του ότι $F(H_1) = [\delta_n, \delta_2]$ και επίσης, $F(uu^*) = [0, u^*u]$ προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$x^* H_1 x \leq \delta_2 \quad \text{και} \quad x^* uu^* x \leq u^* u.$$

Συνεπώς, από την (2.7),

$$0 \leq \delta_2 - \operatorname{Re}(\lambda) + \frac{\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda)}{(\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda))^2 + (a - \operatorname{Im}(\lambda))^2} u^* u. \quad (2.8)$$

Συμβολίζοντας με e_1 το ορθομοναδιαίο διάνυσμα του \mathbb{C}^n , και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ορθομοναδιαίοι πίνακες διατηρούν την ευκλείδεια νόρμα, έπεται ότι

$$\begin{aligned} a^2 + u^* u &= \left\| \begin{bmatrix} i a \\ -u \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \left\| U \begin{bmatrix} i a & u^* \\ -u & S_1 \end{bmatrix} e_1 \right\|_2^2 \\ &= \left\| U \begin{bmatrix} i a & u^* \\ -u & S_1 \end{bmatrix} U^* U e_1 \right\|_2^2 = \|S(A)y_1\|_2^2 = v(A). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Από την εξίσωση (2.9) προκύπτει ότι

$$u^* u = v(A) - a^2. \quad (2.10)$$

Η απόδειξη της (2.2) προκύπτει άμεσα από τις (2.4), (2.8) και (2.10). \square

Πόρισμα 2.3.2. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $\delta_1 \geq \delta_2$, οι δυο μεγαλύτερες ιδιοτιμές του ερμιτιανού μέρους του A , $H(A)$. Εάν $4(v(A) - u(A)^2) < (\delta_1 - \delta_2)^2$, τότε για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$, με $\operatorname{Re}(\lambda) > \delta_2$, ισχύει ότι $\operatorname{Re}(\lambda) \notin (s, t)$, όπου

$$s = \frac{\delta_1 + \delta_2 - \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 - 4(v(A) - u(A)^2)}}{2},$$

$$t = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 - 4(v(A) - u(A)^2)}}{2}.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \sigma(A)$ τέτοιο ώστε $\delta_2 < \operatorname{Re}(\lambda) < \delta_1$. Τότε, από την (2.2),

$$(\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda)) \left(\frac{v(A) - u(A)^2}{\operatorname{Re}(\lambda) - \delta_2} + \operatorname{Re}(\lambda) - \delta_1 \right) \geq 0.$$

Από την παραπάνω ανισότητα και την υπόθεση $v(A) - u(A)^2 < (\delta_1 - \delta_2)^2/4$, προκύπτει το ζητούμενο,

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq \frac{\delta_1 + \delta_2 - \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 - 4(v(A) - u(A)^2)}}{2}$$

ή

$$\operatorname{Re}(\lambda) \geq \frac{\delta_1 + \delta_2 + \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 - 4(v(A) - u(A)^2)}}{2}.$$

□

2.4 Εντοπισμός του Φάσματος

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον ορισμό ενός μη φραγμένου χωρίου στο μιγαδικό επίπεδο που περιέχει το $\sigma(A)$. Για τον λόγο αυτό, ορίζεται η κυβική καμπύλη από τα σημεία $s + it \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την (2.2) ως ισότητα. Συμβολίζεται με $\Gamma(A)$ και ονομάζεται κέλφος του πίνακα A .

Για τον προσδιορισμό του κέλφους $\Gamma(A)$, τον σχεδιασμό του γραφήματός του, καθώς και για τη μελέτη της θέσης του συγκριτικά με τις ιδιοτιμές, είναι χρήσιμη η επαναδιατύπωση της εξίσωσης (2.2), διαχωρίζοντας το φανταστικό και το πραγματικό μέρος της λ .

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1, μπορεί να παρατηρηθεί ότι η (2.2) ισχύει τετριμμένα όταν $\operatorname{Re}(\lambda) = \delta_1$ ή $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \delta_2$. Συνεπώς αν θεωρηθεί ότι $\lambda \in \sigma(A)$ με $\delta_2 < \operatorname{Re}(\lambda) < \delta_1$, τότε από την (2.2) προκύπτει ότι

$$(\operatorname{Im} \lambda - u(A))^2 \leq (\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda)) \left(\frac{v(A) - u(A)^2}{\operatorname{Re}(\lambda) - \delta_2} + \operatorname{Re}(\lambda) - \delta_1 \right). \quad (2.11)$$

Βάσει της παραπάνω ανισότητας, ορίζεται το κέλυφος $\Gamma(A)$.

Ορισμός 2.4.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε, ορίζεται το κέλυφος $\Gamma(A)$ στο μιγαδικό επίπεδο, ως εξής:

$$\left\{ s+it \in \mathbb{C} : s, t \in \mathbb{R} \text{ και } (t-u(A))^2 = (\delta_1-s) \left(\frac{v(A) - u(A)^2}{s - \delta_2} + s - \delta_1 \right) \right\}.$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό και τους ορισμούς της εξίσωσης (2.1), από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει

$$|y_1^* S(A) y_1| \leq \|S(A) y_1\|_2 \|y_1\|_2.$$

Δεδομένου ότι $\|y_1\|_2 = 1$, προκύπτουν τα επόμενα:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}^2(y_1^* S(A) y_1) + \operatorname{Im}^2(y_1^* S(A) y_1) &= |y_1^* S(A) y_1|^2 \leq \|S(A) y_1\|_2^2 = v(A) \Rightarrow \\ \operatorname{Im}^2(y_1^* S(A) y_1) &\leq v(A) - \operatorname{Re}^2(y_1^* S(A) y_1) \leq v(A) \Rightarrow \\ u(A)^2 &\leq v(A). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Βάσει των προαναφερθέντων, μπορούν να γίνουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις που αφορούν στο κέλυφος $\Gamma(A)$.

1. Αν $\delta_1 = \delta_2$, το $\Gamma(A)$ ορίζεται από την εξίσωση

$$(t - u(A))^2 + (s - \delta_1)^2 = -v(A) + u(A)^2 = 0$$

και βάσει της (2.12), το $\Gamma(A)$ ορίζει μόνο ένα σημείο. Συνεπώς, θεωρείται ότι $\delta_1 > \delta_2$.

2. Η ευθεία $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \delta_2\}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του $\Gamma(A)$.
3. Το $\Gamma(A)$ είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = u(A)\}$, την οποία τέμνει στο δ_1 .
4. Το $\Gamma(A)$ μπορεί να τέμνει την ευθεία $\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = u(A)\}$ μέχρι και σε τρία ξεχωριστά σημεία. Συγκεκριμένα, το $\Gamma(A)$ για $t = u(A)$, και για $s \neq \delta_2$, ορίζεται ως εξής:

$$(\delta_1 - s)(s^2 - (\delta_1 + \delta_2)s + \delta_1\delta_2 + v(A) - u(A)^2) = 0. \quad (2.13)$$

Εξετάζοντας τη διακρίνουσα του $(s^2 - (\delta_1 + \delta_2)s + \delta_1\delta_2 + v(A) - u(A)^2)$, για την οποία ισχύει

$$\Delta = (\delta_1 - \delta_2)^2 - 4(v(A) - u(A)^2),$$

προκύπτουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- Εάν $\Delta < 0$, τότε η (2.13) έχει μόνο μια πραγματική ρίζα, την δ_1 . Συνεπώς, το $\Gamma(A)$ τέμνει την \mathcal{L} ακριβώς μια φορά, στο σημείο $(\delta_1, u(A))$ και το κέλυφος $\Gamma(A)$ είναι μια ανοιχτή καμπύλη (βλ. Παραδείγματα 2.4.2 και 2.4.3).

- Εάν $\Delta > 0$, τότε η (2.13) έχει τις ξεχωριστές ρίζες

$$s_1 = \frac{\delta_1 + \delta_2 - \sqrt{\Delta}}{2}, s_2 = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ και } \delta_1.$$

Σε αυτή την περίπτωση, το κέλυφος $\Gamma(A)$ αποτελείται από δυο κλάδους, ένας εκ των οποίων είναι μια απλή κλειστή καμπύλη Jordan¹ (βλ. τον πίνακα B στο Παράδειγμα 2.4.3). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα s_1 και s_2 ταυτίζονται με τα άκρα του διαστήματος (s, t) του Πορίσματος 2.3.2.

- Εάν $\Delta = 0$, τότε η (2.13) έχει μια διπλή ρίζα $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ και μια απλή ρίζα δ_1 . Σε αυτή την περίπτωση, το κέλυφος $\Gamma(A)$ είναι ένα φύλλο του Descartes² (βλ. τον πίνακα C στο Παράδειγμα 2.4.3).

5. Λόγω της (2.12) και δεδομένου ότι για τα σημεία $s + it \in \Gamma(A)$ ισχύει ότι

$$(\delta_1 - s) \left(\frac{v(A) - u(A)^2}{s - \delta_2} + s - \delta_1 \right) \geq 0,$$

το κέλυφος $\Gamma(A)$ βρίσκεται στην περιοχή $\{z \in \mathbb{C} : \delta_2 < \operatorname{Re} z \leq \delta_1\}$.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις και την ανισότητα (2.11), το κέλυφος $\Gamma(A)$ αποτελεί μια προσέγγιση για το φάσμα του A , γεγονός που δικαιολογείται από τα εξής:

- Αρχικά, λόγω των παρατηρήσεων (2) και (5), κάθε ιδιοτιμή λ του A με $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \delta_2$ βρίσκεται “αριστερά” του κελύφους $\Gamma(A)$.
- Όταν το $\Gamma(A)$ είναι μια απλή ανοιχτή καμπύλη, κάθε $\lambda \in \sigma(A)$ με $\delta_2 < \operatorname{Re}(\lambda) < \delta_1$ βρίσκεται σε μια περιοχή W , με σύνορο το κέλυφος $\Gamma(A)$, με την ακόλουθη ιδιότητα: Λόγω των παρατηρήσεων (2), (3) και (5), καθώς και λόγω της ανισότητας (2.11), για κάθε $w \in W$, $\operatorname{Re}(w) \leq \delta_1$ και $\operatorname{Re}(w) + it \in \Gamma(A)$ για κάποιο $t \geq 0$.

Ποιοτικά, όταν το κέλυφος $\Gamma(A)$ είναι μια απλή ανοιχτή καμπύλη ($\Delta < 0$), όλες οι ιδιοτιμές του A βρίσκονται “αριστερά” του $\Gamma(A)$.

¹Κλειστή καμπύλη Jordan: Είναι μια κλειστή συνεχής καμπύλη του επιπέδου που δεν τέμνει τον εαυτό της.

²Το φύλλο του Descartes είναι μια αλγεβρική καμπύλη η οποία προσδιορίζεται από την εξίσωση $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Διαγράφει ένα βρόχο στο πρώτο τεταρτημόριο με ένα διπλό σημείο. Η εξίσωση της ασύμπτωτης καμπύλης είναι $x + y + a = 0$, συνεπώς το φύλλο του Descartes είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία $y = x$. Μετά από αφηρικό μετασχηματισμό μπορεί να προκύψει καμπύλη συμμετρική ως προς την ευθεία $x = 0$, η οποία ονομάζεται και *τριχοτομούσα του Maclaurin*.

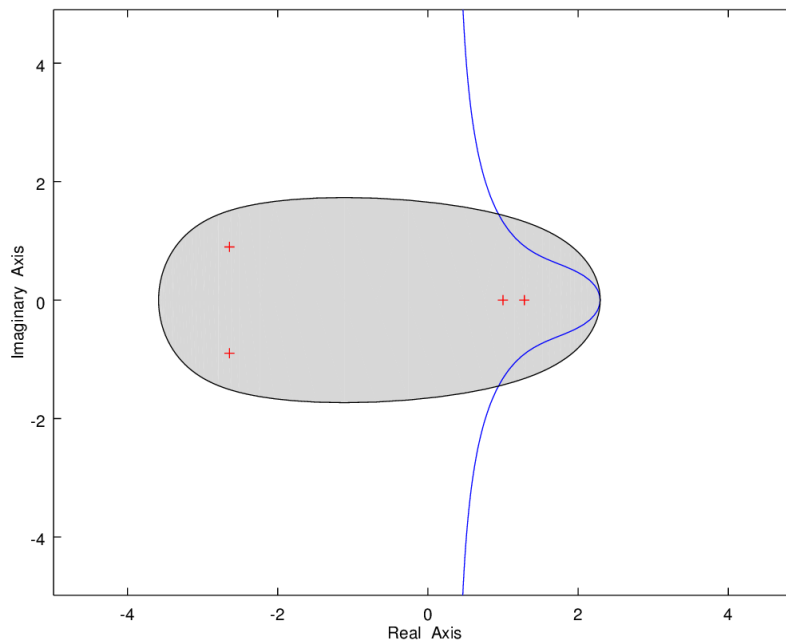
- Τέλος, όταν το $\Gamma(A)$ δεν είναι απλή ανοιχτή καμπύλη ($\Delta \geq 0$), κάποιες ιδιοτιμές λ με $\delta_2 < \text{Re}(\lambda) < \delta_1$ μπορούν να βρισκονται “δεξιάτερα” του σημείου s_2 σε περιοχές που έχουν δημιουργηθεί από το $\Gamma(A)$ και ικανοποιούν την (2.11). Όταν $\Delta > 0$, λόγω του Πορίσματος 2.3.2, δεν υπάρχει ιδιοτιμή με πραγματικό μέρος στο διάστημα (s_1, s_2) .

Παράδειγμα 2.4.2. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο $v(A) = 1.7051$, $u(A) = 0$, $\delta_1 = 2.2944$ και $\delta_2 = 0.3536$.

Εδώ, $\Delta < 0$ και επομένως το κέλυφος $\Gamma(A)$ είναι μια απλή ανοιχτή καμπύλη. Ο πίνακας A είναι πραγματικός και το $\Gamma(A)$ είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = u(A) = 0\}$. Το $\Gamma(A)$ φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Οι ιδιοτιμές του A είναι σημειωμένες με το σύμβολο $+$, ενώ το αριθμητικό πεδίο είναι η σκιασμένη περιοχή.



Σχήμα 2.1: Το αριθμητικό πεδίο του πίνακα A , καθώς και το κέλυφος $\Gamma(A)$ όταν $\Delta < 0$.

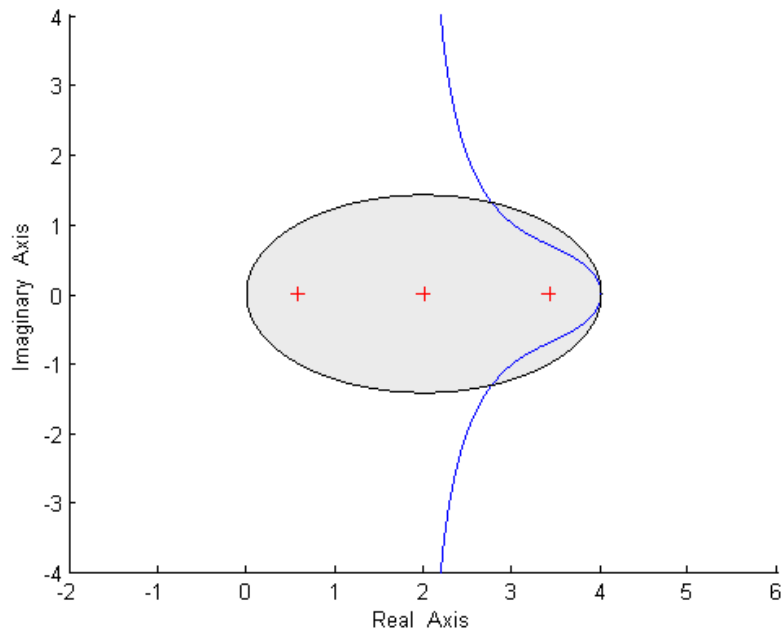
Παράδειγμα 2.4.3. Έστω οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2(1 + \sqrt{2}) & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

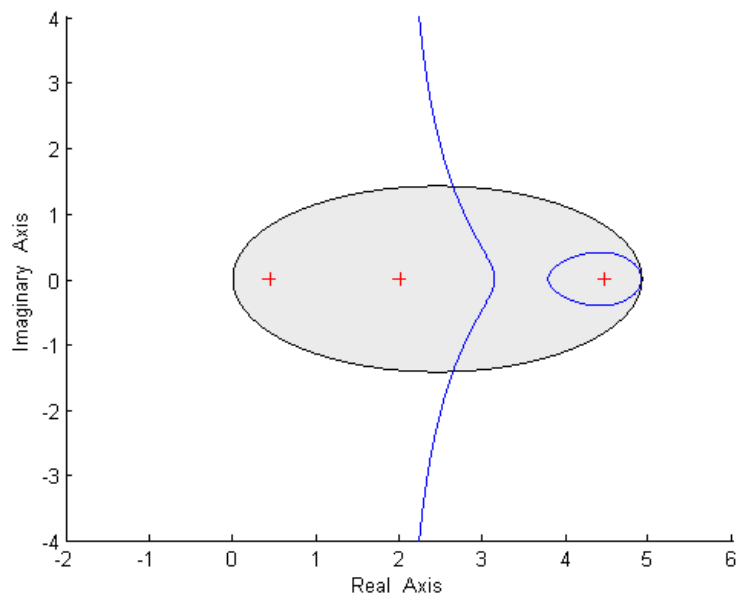
Για τον πίνακα A ισχύει $v(A) = 2$, $u(A) = 0$, $\delta_1 = 4$ και $\delta_2 = 2$, συνεπώς $\Delta < 0$ και το κέλυφος $\Gamma(A)$ είναι μια απλή ανοικτή καμπύλη (Σχήμα 2.2α').

Για τον πίνακα B , προκύπτει $v(B) = 2$, $u(B) = 0$, $\delta_1 = 5$ και $\delta_2 = 2$ και άρα $\Delta > 0$. Το κέλυφος $\Gamma(B)$ αποτελείται από δυο κλάδους, ένας εκ των οποίων είναι μια απλή κλειστή καμπύλη *Jordan*. Η κλειστή καμπύλη περιβάλλει την δεξιότερη ιδιοτιμή, ενώ όλες οι άλλες ιδιοτιμές βρίσκονται αριστερά του άλλου κλάδου (Σχήμα 2.2β').

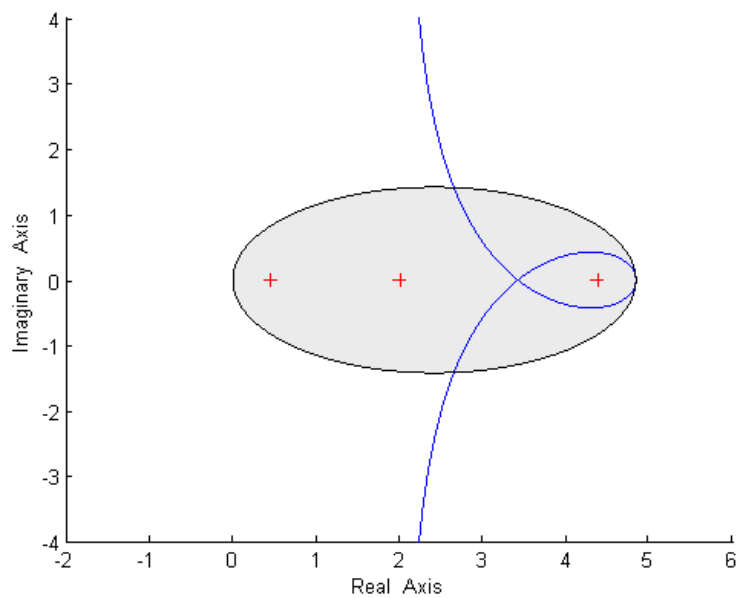
Για τον πίνακα C , ισχύει $v(C) = 2$, $u(C) = 0$, $\delta_1 = 2(1 + \sqrt{2})$ και $\delta_2 = 2$ και συνεπώς $\Delta = 0$. Το κέλυφος $\Gamma(C)$ τέμνει τον εαυτό του σε ένα σημείο, ενώ σχηματίζεται ένα φύλλο του *Descartes*. Όλες οι υπόλοιπες ιδιοτιμές βρίσκονται αριστερά του $\Gamma(C)$ (Σχήμα 2.2γ').



(α') Το $\Gamma(A)$, όπου $\Delta < 0$. Τέμνει την ευθεία $\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = u(A)\}$ ακριβώς μια φορά, στο σημείο $(\delta_1, u(A))$.



(β') Το $\Gamma(B)$, με $\Delta < 0$. Ένας κλάδος του είναι μια απλή κλειστή καμπύλη.



(γ') Το $\Gamma(C)$, με $\Delta = 0$. Σχηματίζεται ένα φύλλο του Descartes.

Σχήμα 2.2: Το κέλυφος των τριών πινάκων, $\Gamma(A)$, $\Gamma(B)$ και $\Gamma(C)$, με $\Delta < 0$, $\Delta > 0$ και $\Delta = 0$ αντίστοιχα.

Σημειωτέον, ότι όταν ο A είναι κανονικός, λόγω ορισμού και του γεγονότος ότι τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα συμπίπτουν, έχει ως συνέπεια ότι υπάρχει $\lambda \in \sigma(A)$, με $\operatorname{Re}(\lambda) = \delta_1$ και $v(A) = \operatorname{Im}^2(\lambda)$, $u(A) = \operatorname{Im}(\lambda)$. Ειδικά, αν $\operatorname{Im}(\lambda) = 0$ (για παράδειγμα όταν ο A είναι ερμιτιανός), τότε $\delta_1 \in \sigma(A)$, δηλαδή μια ιδιοτιμή του A ανήκει στο $\Gamma(A)$.

Ο επόμενος στόχος είναι η εύρεση ιδιοτιμών στο $\Gamma(A)$. Γι' αυτό το σκοπό, ορίζεται ο κύκλος με κέντρο το $a \in \mathbb{C}$, με ακτίνα $r \geq 0$, ως εξής:

$$C(a, r) = \{s + it : s, t \in \mathbb{R} \text{ και } (s - \operatorname{Re}(a))^2 + (y - \operatorname{Im}(a))^2\}$$

Θεώρημα 2.4.4. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και λ μια ιδιοτιμή A έτσι ώστε $\lambda \in \Gamma(A)$. Ακόμα, έστω $\delta_1 > \delta_2$ οι δυο μεγαλύτερες ιδιοτιμές του ερμιτιανού μέρους του A . Τότε, είτε λ είναι πραγματική ρίζα της εξίσωσης

$$\lambda^3 - (2\delta_1 + \delta_2)\lambda^2 + (\delta_1^2 + 2\delta_1\delta_2 + v(A))\lambda + u(A)^2(\delta_1 - \delta_2) - \delta_1(v(A) + \delta_1\delta_2) = 0,$$

είτε $\eta \lambda = x + iy \notin C(\delta_1, u(A))$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} 2x^3 - (5\delta_1 + \delta_2)x^2 + [2\delta_1\delta_2 + 4\delta_1^2 + 2y^2 + 2u(A)y]x - (\delta_1 + \delta_2)y^2 - 2\delta_1u(A)y \\ = (\delta_1 - \delta_2)u(A)^2 + \delta_1^2(\delta_1 + \delta_2). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda \neq \delta_1$ μια ιδιοτιμή του A , με $\operatorname{Re}(\lambda) \neq \delta_2$, και $u, E, H(E), S(E)$ όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1. Η ισότητα στην εξίσωση 2.2, δηλαδή

$$(\operatorname{Im}(\lambda) - u(A))^2 = (\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda)) \left(\frac{v(A) - u(A)^2}{\operatorname{Re}(\lambda) - \delta_2} + \operatorname{Re}(\lambda) - \delta_1 \right)$$

ισχύει αν και μόνο αν

$$\operatorname{Re}(\lambda) - \delta_2 = \frac{(\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda))u^*u}{(\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda))^2 + (\operatorname{Im}(\lambda) - u(A))^2}. \quad (2.14)$$

Σε αυτή την περίπτωση, η ιδιοτιμή $0 \in \sigma(H(E))$ είναι απλή και αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα u που εμφανίζεται στην εξίσωση (2.3). Επιπλέον, ο πίνακας E είναι μη αντιστρέψιμος και $0 \in \partial F(E)$ διότι $\operatorname{Re}(F(E)) = F(H(E))$. Συνεπώς, το 0 πρέπει να είναι κανονική ιδιοτιμή του E και κάθε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ανήκει στο $\operatorname{Kern}(H(E)) \cap \operatorname{Kern}(S(E)) = \operatorname{span}\{u\}$. Ως εκ τούτου, το u είναι ιδιοδιάνυσμα του $S(E)$ στην εξίσωση 2.6 και αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0 , οπότε

$$\frac{u^*S_1u}{u^*u} = i \operatorname{Im}(\lambda) - \frac{i(\operatorname{Im}(\lambda) - u(A))}{(\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda))^2 + (\operatorname{Im}(\lambda) - u(A))^2} u^*u. \quad (2.15)$$

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα για τη $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$, προκύπτει

$$\frac{u^*S_1u}{u^*u} = i \operatorname{Im} \bar{\lambda} - \frac{i(\operatorname{Im} \bar{\lambda} - u(A))}{(\delta_1 - \operatorname{Re}(\lambda))^2 + (\operatorname{Im} \bar{\lambda} - u(A))^2} u^*u. \quad (2.16)$$

Θέτοντας $\lambda = x + iy$, σε συνδυασμό με τις (2.15) και (2.16), προκύπτει ότι

$$2y = \frac{2y[(x - \delta_1)^2 + y^2 - u(A)^2]}{[(\delta_1 - x)^2 + (y - u(A))^2][(\delta_1 - x)^2 + (y + u(A))^2]} u^* u. \quad (2.17)$$

Από την εξίσωση (2.17) προκύπτουν οι δυο ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $y = \text{Im}(\lambda) = 0$, όπου αφού $\lambda \in \Gamma(A)$, ισχύει ότι

$$u(A)^2 = (\delta_1 - \lambda) \left(\frac{v(A) - u(A)^2}{\lambda - \delta_2} + \lambda - \delta_1 \right).$$

Ισοδύναμα, το λ ταυτίζεται με την (τριπλή) πραγματική ρίζα του

$$\lambda^3 - (2\delta_1 + \delta_2)\lambda^2 + [\delta_1^2 + 2\delta_1\delta_2 + v(A)]\lambda - \delta_1^2\delta_2 - \delta_2u(A)^2 - \delta_1(v(A) - u(A)^2) = 0,$$

είτε,

(β) $y \neq 0$ και συνεπώς $(x - \delta_1)^2 + y^2 \neq u(A)^2$. Σε αυτή την περίπτωση η (2.17) μπορεί να γραφεί

$$\frac{(x - \delta_1)^2 + (y + u(A))^2}{(x - \delta_1)^2 + y^2 - u(A)^2} = \frac{u^* u}{(\delta_1 - x)^2 + (y - u(A))^2}$$

και λόγω της (2.14), έπεται ότι

$$x - \delta_2 = \frac{(\delta_1 - x)[(x - \delta_1)^2 + (y + u(A))^2]}{(x - \delta_1)^2 + y^2 - u(A)^2},$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

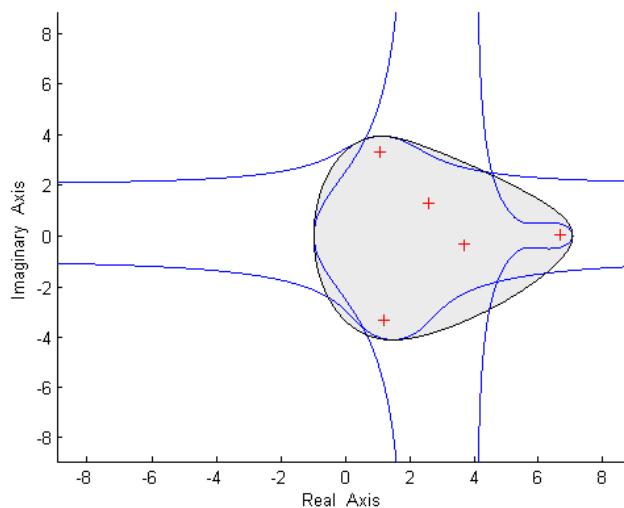
□

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν παραπάνω, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε στροφές ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ώστε να υπάρξει καλύτερη προσέγγιση του φάσματος. Για παράδειγμα, μπορούν να θεωρηθούν τα τρία επιπλέον κελύφη, $\Gamma(-A)$, $\Gamma(iA)$ και $\Gamma(-iA)$. Η περιοχή που προκύπτει από τα κελύφη αυτά, η οποία περιέχει το φάσμα, φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

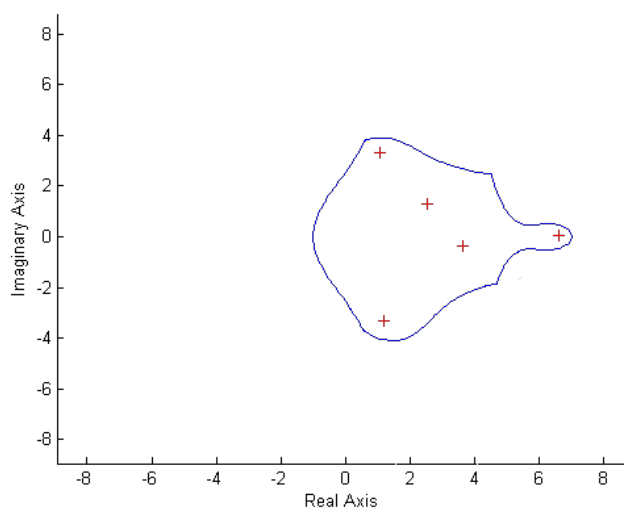
Παράδειγμα 2.4.5. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2+i & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 3-i \\ 0 & 1 & 0 & -3-i & 5 \end{bmatrix}.$$

Στο Σχήμα 2.3α', το αριθμητικό πεδίο και τα κελύφη $\Gamma(A)$, $\Gamma(-A)$, $\Gamma(iA)$ και $\Gamma(-iA)$ έχουν σχεδιαστεί στο ίδιο διάγραμμα, ενώ στο Σχήμα 2.3β' διακρίνεται η προσέγγιση του φάσματος από αυτά τα κελύφη. Οι ιδιοτιμές του A έχουν σημειωθεί με το σύμβολο "+".



(α') Κοινό γράφημα των $\Gamma(A)$, $\Gamma(-A)$, $\Gamma(iA)$, $\Gamma(-iA)$ και $F(A)$.



(β') Η προσέγγιση του φάσματος που ορίζεται από τα κελύφη $\Gamma(A)$, $\Gamma(-A)$, $\Gamma(iA)$, $\Gamma(-iA)$ και $F(A)$.

Σχήμα 2.3: Το αριθμητικό πεδίο του πίνακα A και τα κελύφη $\Gamma(A)$, $\Gamma(-A)$, $\Gamma(iA)$, $\Gamma(-iA)$.

Η παραπάνω διαδικασία αποτελεί τη βάση του ορισμού της περιβάλλουσας, δηλαδή ενός χωρίου που περιβάλλει το φάσμα, που θα μελετηθεί στα επόμενα κεφάλαια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ ΤΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

3.1 Εισαγωγή

Το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι άνω φραγμένο από τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή, έστω $\delta_1(A)$, του ερμιτιανού μέρους του A . Συνεπώς, το φάσμα του A περιέχεται στην τομή όλων των ημιεπιπέδων της μορφής $\{e^{-i\theta}(s + it) : s, t \in \mathbb{R}, \text{ με } s \leq \delta_1(e^{i\theta}A)\}, \theta \in [0, 2\pi]$. Επίσης, η άπειρη τομή όλων των ημιεπιπέδων ταυτίζεται με το αριθμητικό πεδίο του A , το $F(A)$.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται πως μπορεί να βελτιωθεί η παραπάνω προσέγγιση του φάσματος. Η χρησιμοποιούμενη μεθοδολογία είναι η αντικατάσταση της άπειρης τομής των προαναφερθέντων ημιεπιπέδων, με μια άπειρη τομή χωρίων του μιγαδικού επίπεδου, που ορίζονται από κυβικές καμπύλες. Αυτές οι καμπύλες, προκύπτουν από την κύρια ανισότητα ιδιοτιμών, που αναφέρθηκε στο Κεφ. 2. Το αποτέλεσμα είναι μια προσέγγιση για το φάσμα του A που περιέχεται στο αριθμητικό πεδίο $F(A)$, και το χωρίο αυτό μπορεί, ποιοτικά, να είναι αρκετά μικρό. Θα αναφέρεται ως *κυβική περιβάλλουσα* (ή, εν συντομία, *περιβάλλουσα*) του A . Θα παρουσιαστούν οι βασικές ιδιότητές της και θα γίνει και η σύγκριση με το αριθμητικό πεδίο $F(A)$.

3.2 Προαπαιτούμενα

Όπως αναφέρθηκε στην Παράγραφο 1.6, είναι δυνατή η προσέγγιση του αριθμητικού πεδίου, ως άπειρη τομή κλειστών ημιεπιπέδων. Ο αλγόριθμος της

προσέγγισης του αριθμητικού πεδίου βασίζεται στον υπολογισμό και τη σχεδίαση των συννοριακών σημείων. Συγκεκριμένα, για κάθε γωνία $\theta \in [0, 2\pi]$, υπολογίζεται η μεγαλύτερη ιδιοτιμή $\delta_1(e^{i\theta}A)$ και ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $y_1(\theta)$ που αντιστοιχεί στην $\delta_1(e^{i\theta}A)$. Τότε το σημείο $z_\theta = y_1(\theta)^*Ay_1(\theta)$ βρίσκεται στο σύνορο του $F(A)$, το οποίο συμβολίζεται με $\partial F(A)$, και η ευθεία

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\theta &= \{e^{-i\theta}(\delta_1(e^{i\theta}A) + it) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t \sin \theta + \delta_1(e^{i\theta}A) \cos \theta + i(t \cos \theta - \delta_1(e^{i\theta}A) \sin \theta) : t \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

εφάπτεται στο $F(A)$ στο σημείο z_θ . Επιπροσθέτως, η ευθεία \mathcal{L}_θ χωρίζει το μιγαδικό επίπεδο στο κλειστό ημιεπίπεδο

$$\mathcal{H}_{in}(e^{i\theta}A) = \{e^{-i\theta}(s + it) : s, t \in \mathbb{R}, \text{ με } s \leq \delta_1(e^{i\theta}A)\},$$

που περιέχει το $F(A)$, και το ανοιχτό ημιεπίπεδο

$$\mathcal{H}_{out}(e^{i\theta}A) = \{e^{-i\theta}(s + it) : s, t \in \mathbb{R}, \text{ με } s > \delta_1(e^{i\theta}A)\}.$$

Έτσι, το $F(A)$ μπορεί να γραφεί ως άπειρη τομή κλειστών ημιεπιπέδων, ως εξής:

$$F(A) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} \mathcal{H}_{in}(e^{i\theta}A). \quad (3.1)$$

Ειδικότερα, το $F(A)$ μπορεί να προσεγγιστεί σχεδιάζοντας τις εφαπτόμενες \mathcal{L}_{θ_j} , $j = 1, 2, \dots, k$, για μια διαμέριση $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{k-1} < \theta_k = 2\pi$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Το γεγονός αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

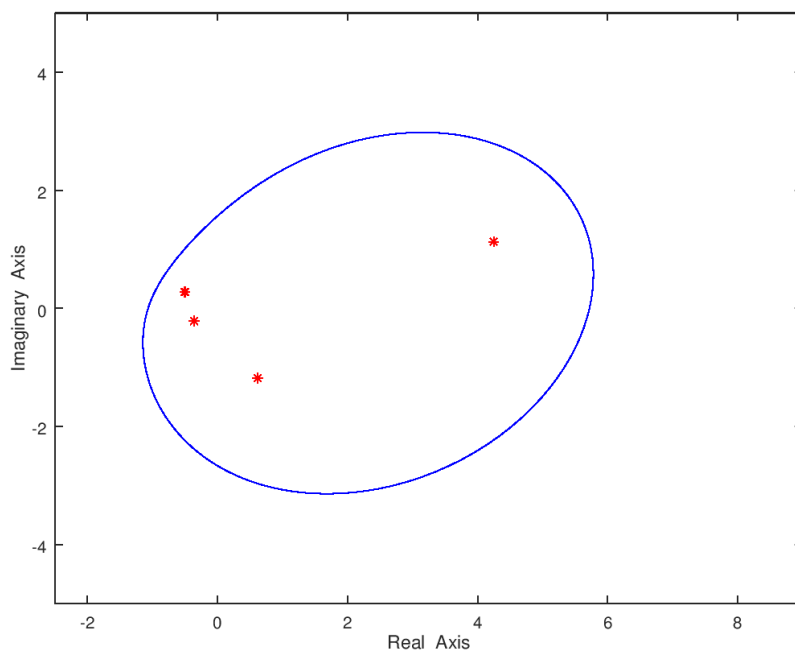
Παράδειγμα 3.2.1. Έστω ο μιγαδικός πίνακας Toeplitz¹

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & i \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

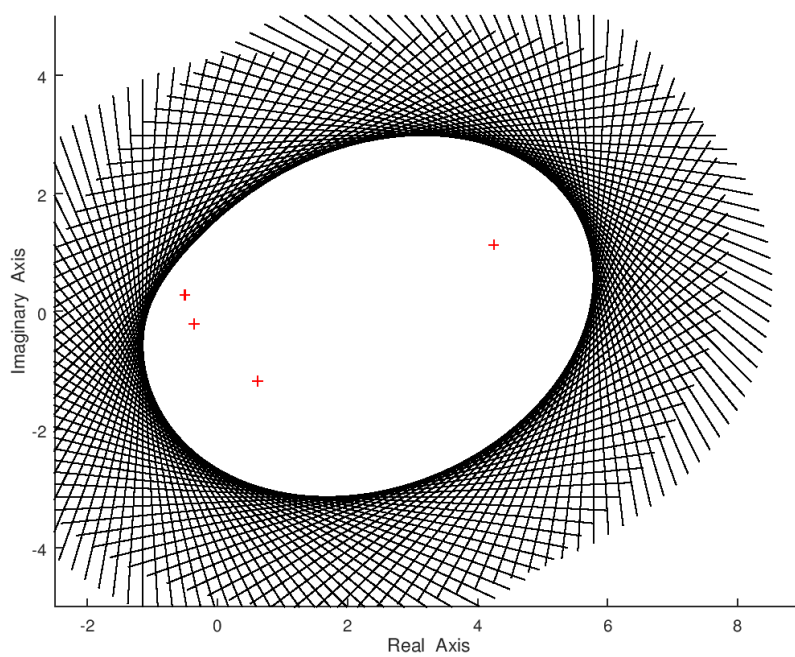
Το σύνορο του αριθμητικού πεδίου $F(A)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1α'. Στο Σχήμα 3.1β', το $F(A)$ σχεδιάζεται ως μια περιβάλλουσα 120 εφαπτόμενων ευθειών. Οι ιδιοτιμές είναι σημειωμένες με στο σύμβολο "+".

¹Ένας πίνακας Toeplitz έχει σταθερές διαγώνιους (όλα τα στοιχεία μιας διαγώνιου έχουν την ίδια τιμή). Για έναν τέτοιο πίνακα A , ισχύει $A_{i,j} = a_{i-j}$, δηλαδή έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$



(α') Το σύνορο του αριθμητικού πεδίου $F(A)$.

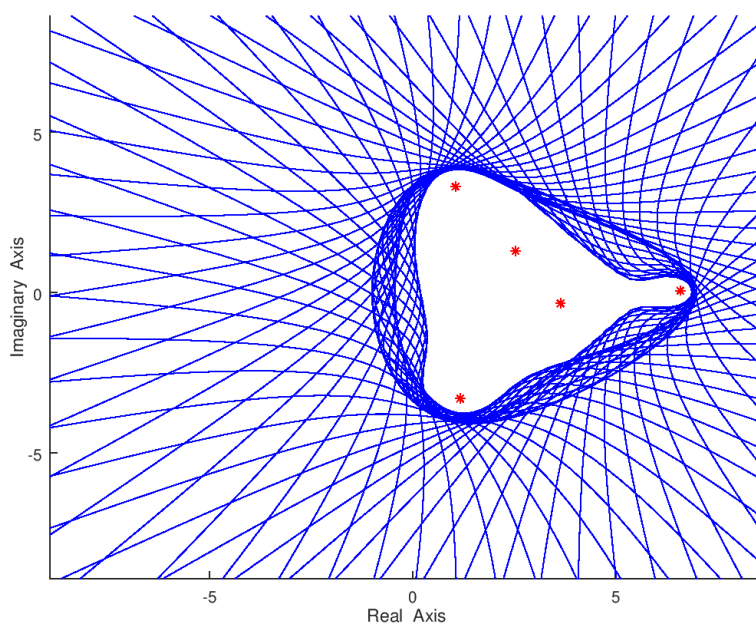


(β') Μια περιβάλλουσα 120 εφαπτόμενων ευθειών της μορφής $\mathcal{L}_\theta = \{e^{-i\theta}(\delta_1(e^{i\theta}A) + it) : t \in \mathbb{R}\}$.

Σχήμα 3.1: Το αριθμητικό πεδίο ενός 4×4 πίνακα Toeplitz.

Στη συνέχεια, στόχος είναι η αντικατάσταση των εφαπτόμενων ευθειών με τα αντίστοιχα κελύφη, εισάγοντας έτσι μια περιβάλλουσα που περιέχει το φάσμα και περιέχεται στο αριθμητικό πεδίο, προσέγγιση που αναφέρθηκε και στην Παράγραφο 2.4.

Εξετάζοντας το Παράδειγμα 2.4.5, η εκ νέου σχεδίαση της προσέγγισης του φάσματος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2+i & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 3-i \\ 0 & 1 & 0 & -3-i & 5 \end{bmatrix}$ αντικαθιστώντας τις εφαπτόμενες ευθείες με 60 κελύφη, έχει ως αποτέλεσμα το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.2: Η προσέγγιση του φάσματος που ορίζεται από 60 κελύφη της μορφής $e^{-i\theta}\Gamma(e^{i\theta}A)$

3.3 Ιδιότητες του Κελύφους

Στο Κεφάλαιο 2 αναφέρθηκε η Κύρια Ανισότητα Ιδιοτιμών (Θεώρημα 2.3.1, καθώς και δόθηκε ο ορισμός του κελύφους (Ορισμός 2.4.1).

Υπενθυμίζεται ότι το κελύφος είναι μια αλγεβρική καμπύλη στο $s, t \in \mathbb{R}$, η οποία χωρίζει το μιγαδικό επίπεδο στις περιοχές

$$\Gamma_{in}(A) = \{s + it : s, t \in \mathbb{R}, (\delta_2(A) - s)[(\delta_1(A) - s)^2 + (u(A) - t)^2] + (\delta_1(A) - s)(v(A) - u(A)^2) \geq 0\}.$$

και

$$\Gamma_{out}(A) = \{s + it : s, t \in \mathbb{R}, (\delta_2(A) - s)[(\delta_1(A) - s)^2 + (u(A) - t)^2] + (\delta_1(A) - s)(v(A) - u(A)^2) < 0\}.$$

Κυβικές καμπύλες αυτής της μορφής έχουν μελετηθεί εκτενώς. Ως αναφορά, προτείνεται το [6]. Παρακάτω, αναλύονται μερικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κελύφους $\Gamma(A)$.

Από το Θεώρημα 2.3.1 είναι φανερό ότι $\sigma(A) \subset \Gamma_{in}(A)$. Επίσης, εάν ισχύει $s > \delta_1(A)$ ή $s < \delta_2(A)$, τότε η $s + it (t \in \mathbb{R})$ δε μπορεί να ικανοποιεί τον ορισμό της $\Gamma(A)$. Συνεπώς, η καμπύλη $\Gamma(A)$ βρίσκεται στο χωρίο $\{z \in \mathbb{C} : \delta_2(A) \leq \operatorname{Re}(z) \leq \delta_1(A)\}$, που σχηματίζουν οι κατακόρυφες ευθείες που ορίζονται από τις $\delta_1(A)$ και $\delta_2(A)$. Είναι επίσης προφανές ότι (για $s, t \in \mathbb{R}$) ισχύει

$$s + it \in \Gamma(A) \text{ αν και μόνο αν } s + i(2u(A) - t) \in \Gamma(A),$$

και

$$s \rightarrow \delta_2(A), \text{ όταν } t \rightarrow \pm\infty.$$

Έτσι, η καμπύλη $\Gamma(A)$ είναι συμμετρική ως προς την οριζόντια ευθεία

$$\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = u(A)\},$$

την οποία τέμνει στο σημείο $\delta_1(A) + iu(A)$, και είναι ασύμπτωτη στην κατακόρυφη ευθεία $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \delta_2(A)\}$. Σημειώνεται ότι το σημείο $\delta_1(A) + iu(A)$ είναι το δεξιότερο σημείο του αριθμητικού πεδίου $F(A)$.

Από το Λήμμα 1.6.1, προκύπτει ότι αν $\partial F(A)$ έχει ένα ευθύγραμμο τμήμα στην κατακόρυφη $\mathcal{L}_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \delta_1(A)\}$, τότε $\delta_1(A) = \delta_2(A)$, η καμπύλη $\Gamma(A)$ ταυτίζεται με την ευθεία \mathcal{L}_0 και η περιοχή $\Gamma_{in}(A)$ ταυτίζεται με το ημιεπίπεδο $\mathcal{H}_{in}(A)$.

Όταν ισχύει $\delta_1(A) > \delta_2(A)$, είναι φανερό ότι το $\delta_1(A) + iu(A)$ είναι το μοναδικό δεξιότερο σημείο του κελύφους $\Gamma(A)$, δηλαδή το μόνο σημείο της καμπύλης με πραγματικό μέρος ίσο με $\delta_1(A)$. Επιπροσθέτως, η κατακόρυφη \mathcal{L}_0 είναι εφαπτόμενη του $\Gamma(A)$ στο σημείο $\delta_1(A) + iu(A)$. Συνεπώς, η \mathcal{L}_0 είναι κοινή εφαπτομένη του κελύφους $\Gamma(A)$ και του αριθμητικού πεδίου $F(A)$, στο σημείο $\delta_1(A) + iu(A)$.

Θεώρημα 3.3.1. Έστω $\delta_1(A)$ απλή ιδιοτιμή του $H(A)$ και $\Delta > 0$, δηλαδή η $\Gamma(A)$ έχει δυο ξεχωριστούς κλάδους (βλ. Παράγραφο 2.4). Τότε, ακριβώς μια ιδιοτιμή του A , η οποία είναι απλή, βρίσκεται εντός του κλειστού κλάδου του κελύφους $\Gamma(A)$.

Απόδειξη. Ο μετασχηματισμός Levinger [5, 7] του A είναι:

$$L(A, r) = (1 - r)A + rA^* = H(A) + (1 - 2r)S(A), \quad r \in [0, 1/2].$$

Τότε, $v(L(A, r)) = (1 - 2r)^2 v(A)$ και $u(L(A, r)) = (1 - 2r)u(A)$ και συνεπώς $v(L(A, r)) - u(L(A, r))^2 = (1 - 2r)^2 (v(A) - u(A)^2)$. Επιπλέον, όλοι οι πίνακες $L(A, r)$, $r \in [0, 1/2]$, έχουν ερμιτιανό μέρος ίσο με $H(A)$ που σημαίνει ότι $\delta_1(L(A, r))$ και $\delta_2(L(A, r))$ είναι σταθερές, ως συναρτήσεις του r . Συνεπώς, για κάθε $r \in [0, 1/2]$, η καμπύλη $\Gamma(L(A, r))$ αποτελείται από δυο ξεχωριστούς κλάδους, έναν μη φραγμένο ανοιχτό κλάδο, και από έναν φραγμένο κλειστό κλάδο (βλ. Παράγραφο 2.4).

Αφού η $\delta_1(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του $H(A)$, το σημείο $\delta_1(A) + i u(A)$ είναι το μοναδικό δεξιότερο σημείο του αριθμητικού πεδίου $F(A)$. Λόγω της ιδιότητας της συνέχειας των ιδιοτιμών, υπάρχει ένα $r_1 \in [0, 1/2]$ τέτοιο ώστε η δεξιότερη ιδιοτιμή του $L(A, r)$, ως συνάρτηση του $r \in [r_1, 1/2]$, έστω $\lambda(r)$, είναι απλή και σχηματίζει μια συνεχή καμπύλη στο \mathbb{C} με άκρα τα σημεία $\lambda(r)$ και $\lambda(1/2) = \delta_1(A)$. Από τα παραπάνω, και το γεγονός ότι η θετική ποσότητα $v(L(A, r)) - u(L(A, r))^2$ μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρή για $r \rightarrow 1/2$, προκύπτει ότι για κάποιο $r_2 \in [r_1, 1/2]$ αρκετά κοντά στο $1/2$, η καμπύλη $\Gamma(L(A, r))$ έχει δυο κλάδους και η απλή ιδιοτιμή $\lambda(r)$ του $L(A, r_2)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή του $L(A, r_2)$ που βρίσκεται εντός του κλειστού κλάδου της $\Gamma(L(A, r_2))$.

Έστω $r \in [0, r_2]$ με $r \rightarrow 0$. Αφού η $\Gamma(L(A, r))$, $r \in [0, r_2]$ συνεχίζει να αποτελείται από δυο κλάδους, η συνέχεια των ιδιοτιμών συνεπάγεται ότι ακριβώς μια απλή ιδιοτιμή του $L(A, r)$ βρίσκεται εντός του χωρίου που ορίζει ο κλειστός κλάδος της $\Gamma(L(A, r))$ □

3.4 Η Περιβάλλουσα του Φάσματος

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείχθηκε ότι το φάσμα ενός $n \times n$ μιγαδικού πίνακα A περιέχεται στο μη φραγμένο χωρίο στο μιγαδικό επίπεδο, που ορίζεται από το $\Gamma(A)$. Το γεγονός αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις στροφές $e^{i\theta} A$, $\theta \in [0, 2\pi]$, με σκοπό τον ορισμό ενός χωρίου στο \mathbb{C} , που θα περιέχει το φάσμα του A . Πράγματι, για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$, ισχύει

$$\sigma(A) = e^{-i\theta} \sigma(e^{i\theta} A) \subseteq e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A) \subseteq \mathcal{H}(e^{i\theta} A) \quad (3.2)$$

Στη συνέχεια, ορίζεται η *κυβική περιβάλλουσα* (ή, απλά, *περιβάλλουσα*)

$$\mathcal{E}(A) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A).$$

Τότε, οι εξισώσεις (3.1) και (3.2) δίνουν το επόμενο.

Θεώρημα 3.4.1. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει ότι

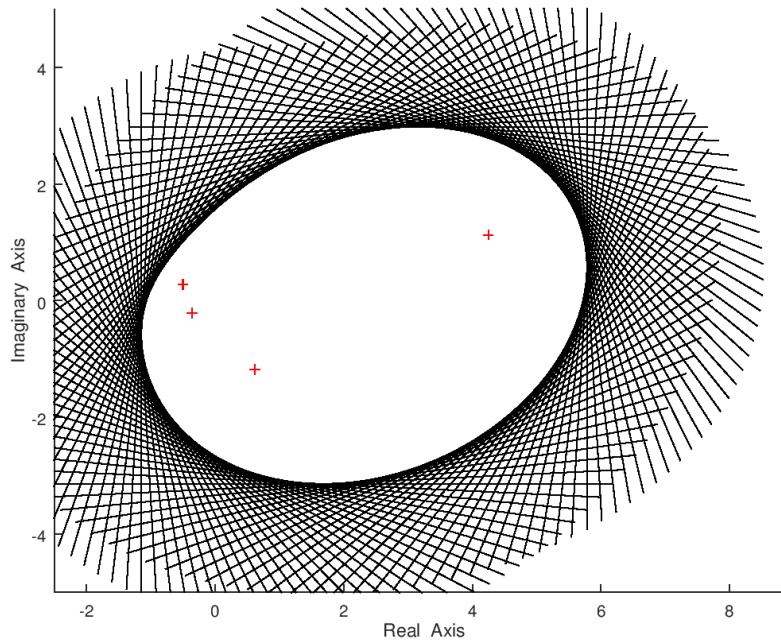
$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{E}(A) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A) \subseteq \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \mathcal{H}_{in}(e^{i\theta} A) = F(A).$$

Παράδειγμα 3.4.2. Έστω ο μιγαδικός 4×4 πίνακας Toeplitz του Παραδείγμα-

τος 3.2.1, δηλαδή $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & i \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Το αριθμητικό πεδίο του A σχεδιάζεται

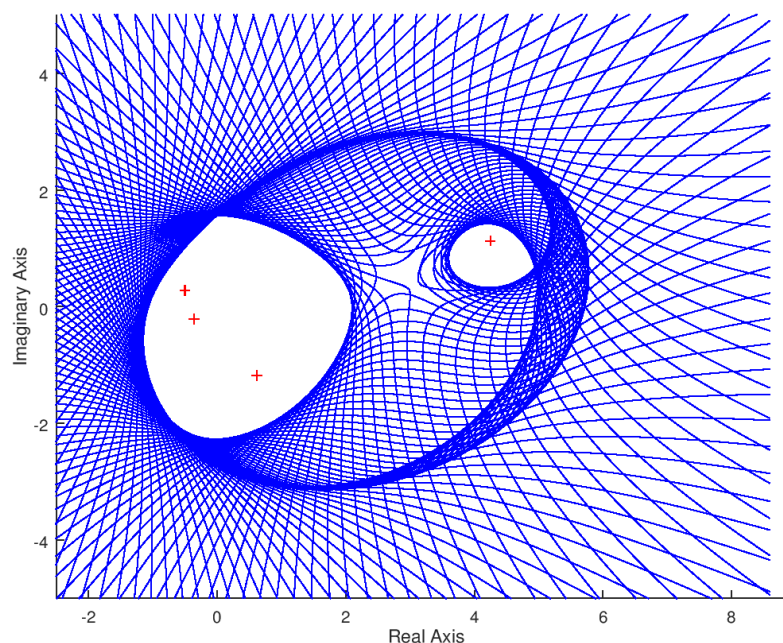
ως μια περιβάλλουσα που ορίζεται από 120 εφαπτόμενες ευθείες (Σχήμα 3.3α'). Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ φαίνεται στο Σχήμα 3.3β', αποτέλεσμα της σχεδίασης 121 καμπυλών² της μορφής $e^{-i\theta} \Gamma(e^{i\theta} A)$. Φαίνεται ότι η κυβική περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ αποτελείται από δυο συνεκτικά χωρία και είναι μια σημαντική βελτίωση για την προσέγγιση του φάσματος σε σύγκριση με το αριθμητικό πεδίο $F(A)$.

Αξιίζει να σημειωθεί ότι το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ διαφαίνεται σε όλα τα σχήματα των περιβαλλουσών που σχεδιάστηκαν.



(α') Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ όπως προκύπτει από 120 εφαπτόμενες ευθείες της μορφής $\mathcal{L}_\theta = \{e^{-i\theta}(\delta_1(e^{i\theta} A) + it) : t \in \mathbb{R}\}$.

²Η επιλογή του αριθμού των επαναλήψεων εξηγείται στο Κεφάλαιο 5.



(β') Η κυβική περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$.

Σχήμα 3.3: Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ και η κυβική περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$.

Στη συνέχεια, θα μελετηθούν ιδιότητες της περιβάλλουσας $\mathcal{E}(A)$. Αρχικά, η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ είναι συμπαγές σύνολο, ως κλειστό υποσύνολο του αριθμητικού πεδίου $F(A)$ που είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{C} . Δεν είναι απαραίτητα κυρτό ή συνεκτικό σύνολο, αλλά ικανοποιεί μερικές από τις βασικές ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου $F(A)$, αλλά και του $\sigma(A)$.

Πρόταση 3.4.3. Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύουν τα επόμενα:

$$(i) \Gamma(A^T) = \Gamma(A) \text{ και } \mathcal{E}(A^T) = \mathcal{E}(A)$$

$$(ii) \Gamma(A^*) = \Gamma(\bar{A}) = \overline{\Gamma(A)} \text{ και } \mathcal{E}(A^*) = \mathcal{E}(\bar{A}) = \overline{\mathcal{E}(A)}.$$

Απόδειξη. (i) Αφού $A^T = H(A)^T + S(A)^T$, ισχύει ότι $\delta_1(A^T) = \delta_1(A)$, $\delta_2(A^T) = \delta_2(A)$ και \bar{y}_1 είναι το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του $H(A)^T$ που αντιστοιχεί στην $\delta_1(A^T)$. Έπεται ότι $v(A^T) = v(A)$ και $u(A^T) = u(A)$, συνεπώς, $\Gamma(A^T) = \Gamma(A)$.

Για την περιβάλλουσα του A^T , ισχύει

$$\mathcal{E}(A^T) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A^T) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} \Gamma_{in}((e^{i\theta} A)^T) = \mathcal{E}(A).$$

(ii) Αφού $A^* = H(A)^* + S(A)^* = H(A) - S(A)$, είναι προφανές ότι $\delta_1(A^*) = \delta_1(A)$, $\delta_2(A^*) = \delta_2(A)$, $v(A^*) = v(A)$ και $u(A^*) = -u(A)$. Συνεπώς, $\Gamma(A^*) = \overline{\Gamma(A)}$.

Για την περιβάλλουσα του A^* , ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(A^*) &= \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A^*) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{i\theta} \Gamma_{in}((e^{i\theta} A)^*) \\ &= \overline{\bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A)} = \mathcal{E}(A).\end{aligned}$$

Τέλος, $\Gamma(\overline{A}) = \Gamma((A^*)^T) = \Gamma(A^*) = \overline{\Gamma(A)}$ και $\mathcal{E}(\overline{A}) = \mathcal{E}((A^*)^T) = \mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A)$. \square

Πόρισμα 3.4.4. Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε το κέλυφος $\Gamma(A)$ και η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι το κέλυφος $\Gamma(A)$ και περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ είναι αναλλοίωτα ως προς την ορθομοναδιαία ομοιότητα.

Πρόταση 3.4.5. Για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\Gamma(U^*AU) = \Gamma(A)$ και $\mathcal{E}(U^*AU) = \mathcal{E}(A)$.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί η πρώτη σχέση. Ας παρατηρηθεί ότι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του $H(U^*AU)$ είναι η $\delta_1(U^*AU) = \delta_1(A)$, και U^*y_1 το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα. Συνεπώς,

$$v(U^*AU) = \|(U^*S(A)U)(U^*y_1)\|_2^2 = \|(U^*(S(A)y_1))\|_2^2 = v(A)$$

και

$$u(U^*AU) = \text{Im}((U^*y_1)^*U^*S(A)U(U^*y_1)) = \text{Im}(y_1^*UU^*S(A)UU^*y_1) = u(A).$$

Αφού η δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του $H(U^*AU)$ είναι η $\delta_2(U^*AU) = \delta_2(A)$, η απόδειξη ολοκληρώνεται άμεσα από τον ορισμό του $\Gamma(U^*AU)$. \square

Πρόταση 3.4.6. Για κάθε $b \in \mathbb{C}$, $\Gamma(A + bI_n) = \Gamma(A) + b$ και $\mathcal{E}(A + bI_n) = \mathcal{E}(A) + b$.

Απόδειξη. Έστω $b = s_b + it_b$ ($s_b, t_b \in \mathbb{R}$) και $B = A + bI_n$. Το ερμιτιανό και αντιερμιτιανό μέρος του B είναι $H(B) = H(A) + s_bI_n$ και $S(B) = S(A) + it_bI_n$ αντίστοιχα. Άμεσα προκύπτει ότι $\delta_1(B) = \delta_1(A) + s_b$, $\delta_2(B) = \delta_2(A) + s_b$, $u(B) = u(A) + t_b$ και $v(B) = v(A) + 2t_bu(A) + t_b^2$. Συνεπώς,

$$v(B) - u(B)^2 = v(A) + 2t_bu(A) + t_b^2 - (u(A)^2 + 2t_bu(A) + t_b^2)$$

$$= v(A) - u(A)^2$$

και $\Gamma(B) = \{s + it : s, t \in \mathbb{R} \text{ με } s - s_b + i(t - t_b) \in \Gamma(A)\} = \Gamma(A) + \{b\}$.
Επιπροσθέτως,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(B) &= \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} B) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} (A + bI)) \\ &= \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} (\Gamma_{in}(e^{i\theta} A) + e^{i\theta} b) = b + \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A), \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Πρόταση 3.4.7. Για κάθε πραγματικό $r > 0$ και $a \in \mathbb{C}$, ισχύει $\Gamma(rA) = r\Gamma(A)$ και $\mathcal{E}(aA) = a\mathcal{E}(A)$.

Απόδειξη. Έστω $r > 0$ πραγματικός αριθμός. Τότε $\delta_1(rA) = r\delta_1(A)$, $\delta_2(rA) = r\delta_2(A)$, $u(rA) = r^2u(A)$ και $v(rA) = r^2v(A)$. Άρα ισχύει $v(rA) - u(rA) = r^2(v(A) - u(A))$ και

$$\Gamma(rA) = \{s + it : s, t \in \mathbb{R}, \text{ με } \frac{s}{r} + i\frac{t}{r} \in \Gamma(A)\} = r\Gamma(A).$$

Για την περιβάλλουσα του A , ισχύει

$$\mathcal{E}(rA) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} rA) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} r \Gamma_{in}(e^{i\theta} A) = r\mathcal{E}(A).$$

Επίσης, για κάθε $\phi \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(e^{i\phi} A) &= \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i(\theta+\phi)} A) \\ &= \bigcap_{\theta+\phi \in [0, 2\pi]} e^{i\phi} (e^{-i(\theta+\phi)} \Gamma_{in}(e^{i(\theta+\phi)} A)) \\ &= e^{i\phi} \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A) = e^{i\phi} \mathcal{E}(A), \end{aligned}$$

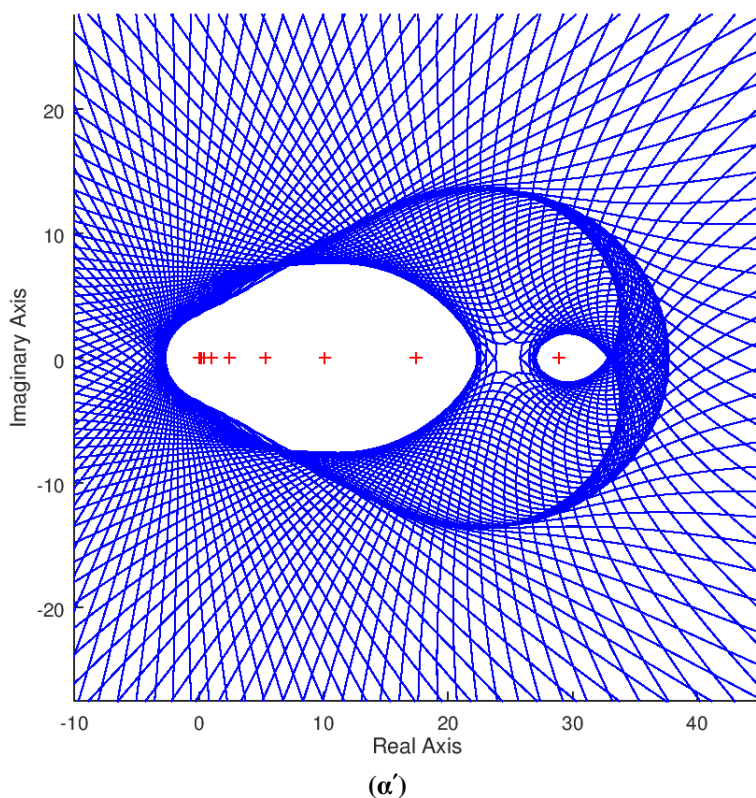
και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

Παράδειγμα 3.4.8. Έστω ο 11×11 πραγματικός πίνακας *Frank*³ A (ο οποίος μπορεί να δημιουργηθεί με την εντολή `gallery('frank', 11)` από το *Matlab* ή

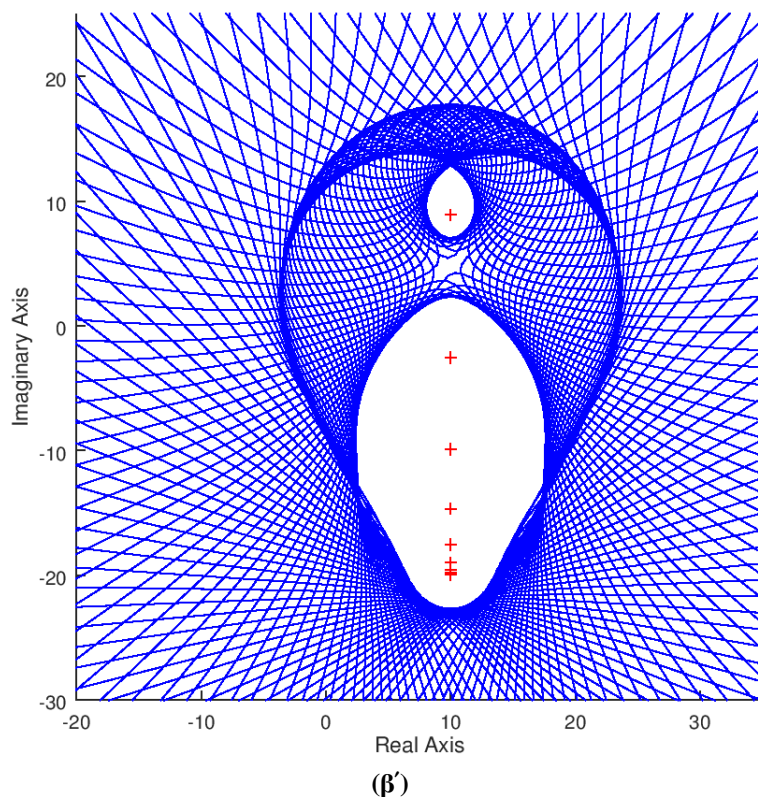
³Ο άνω Hessenberg πίνακας $F_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που ορίζεται ως:

$$F_n := \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 0 & n-2 & n-2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

το GNU Octave). Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ φαίνεται στο Σχήμα 3.4α'. Διακρίνεται ότι η $\mathcal{E}(A)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των πραγματικών, σύμφωνα με το Πρόσμημα 3.4.4. Στο Σχήμα 3.4β' φαίνεται η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(iA + (10 - 20i)I_{11}) = i\mathcal{E}(A) + 10 - 20i$, που επιβεβαιώνει τις Προτάσεις 3.4.6 και 3.4.7.



ονομάζεται και πίνακας Frank. Χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον W. L. Frank για τον έλεγχο και την αξιολόγηση ρουτινών και μεθόδων υπολογισμού των ιδιοτιμών και της ορίζουσας, καθώς έχει την ιδιότητα $\det(F_n) = 1$.



Σχήμα 3.4: Οι περιβάλλουσες, ενός 11×11 πίνακα Frank, καθώς και του ίδιου πίνακα μετά από στροφή.

3.5 Σύγκριση της $\mathcal{E}(A)$ και του $F(A)$

Θα μελετηθεί η $\mathcal{E}(A)$, σε σύγκριση με το $F(A)$, και θα γίνουν παρατηρήσεις που αφορούν στην προσέγγιση του φάσματος του A . Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς των προηγούμενων παραγράφων, ο υπολογισμός των $\Gamma(e^{i\theta}A)$, όπου $\theta \in [0, 2\pi]$, απαιτεί επιπλέον υπολογιστική δύναμη, καθώς πρέπει να υπολογιστεί το $\delta_2(A)$, καθώς και τα $v(A)$ και $u(A)$, που εξαρτώνται από το y_1 . Όμως, είναι φανερό από τα Παραδείγματα 3.4.2 και 3.4.8 ότι η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ αποτελεί μεγάλη βελτίωση συγκριτικά με το $F(A)$ στην προσέγγιση των ιδιοτιμών του A . Στα επόμενα, θα διερευνηθεί πότε η βελτίωση αυτή είναι αναμενόμενη ή όχι. Όπως θα αποδειχθεί, η γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα.

Υπενθυμίζεται ότι μια ιδιοτιμή λ_0 του A καλείται *κανονική* αν η γεωμετρική της πολλαπλότητα ισούται με την αλγεβρική της πολλαπλότητα και κάθε ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην λ_0 είναι κάθετο σε κάθε κάθε ιδιο-

διάνυσμα άλλης ιδιοτιμής. Από το Θεώρημα 1.7.3, κάθε ιδιοτιμή του A που βρίσκεται στο σύνορο του $F(A)$, είναι κανονική ιδιοτιμή του A . Ακόμη, τα γωνιακά σημεία του $\partial F(A)$ είναι ιδιοτιμές του A (Θεώρημα 1.7.1).

Αν $\delta_1(A) + i u(A)$ είναι ιδιοτιμή του A , τότε είναι προφανές ότι $\delta_1(A) + i u(A)$ είναι μια κανονική ιδιοτιμή στο σύνορο του A , $\partial F(A)$, και $i u(A)$ είναι ιδιοτιμή του $S(A)$. Ακόμη, οι ιδιοτιμές $\delta_1(A) + i u(A)$, $\delta_1(A)$ και $i u(A)$ του A , $H(A)$ και $S(A)$ αντίστοιχα, έχουν τους ίδιους ιδιοχώρους. Εάν επιπλέον η $\delta_1(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του $H(A)$, τότε $v(A) - u(A)^2 = 0$, και το κέλυφος $\Gamma(A)$ είναι η ένωση του σημείου $\delta_1(A) + i u(A)$ και της κατακόρυφης ευθείας $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \delta_2(A)\}$. Διαφορετικά, δηλαδή όταν $\delta_1(A) + i u(A)$ είναι μια κανονική ιδιοτιμή του A στο σύνορο $\partial F(A)$ και $\delta_1(A)$ είναι μια πολλαπλή ιδιοτιμή του $H(A)$, τότε, όπως έχει ήδη αναφερθεί, το κέλυφος $\Gamma(A)$ είναι η κατακόρυφη ευθεία $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \delta_1(A)\}$, και $\Gamma_{in}(A)$ ταυτίζεται με το ημιεπίπεδο $\mathcal{H}_{in}(A)$. Συνέπεια των παραπάνω είναι το ακόλουθο.

Πρόταση 3.5.1. Έστω λ_0 μια απλή ιδιοτιμή του A στο σύνορο του $F(A)$. Αν λ_0 δε βρίσκεται σε ευθύγραμμο τμήμα του $\partial F(A)$, ή βρίσκεται σε μη διαφορίσιμο σημείο του $\partial F(A)$, τότε λ_0 είναι μεμονωμένο σημείο της περιβάλλουσας $\mathcal{E}(A)$.

Απόδειξη. Έστω ότι λ_0 δε βρίσκεται σε ευθύγραμμο τμήμα του $\partial F(A)$, ή βρίσκεται σε μη διαφορίσιμο σημείο του $\partial F(A)$. Τότε από την Πρόταση 1.3.2 και το Λήμμα 1.6.1 (P₆), υπάρχει $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ τέτοιο ώστε $e^{i\theta_0} \lambda_0$ να είναι το μοναδικό δεξιότερο σημείο του αριθμητικού πεδίου $F(e^{i\theta_0} A) = e^{i\theta_0} F(A)$. Τότε, $e^{i\theta_0} \lambda_0$ είναι απλή κανονική ιδιοτιμή του $e^{i\theta_0} A$. Συνεπώς, $\delta_1(e^{i\theta_0} A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του ερμιτιανού πίνακα $H(e^{i\theta_0} A)$, και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

Έστω $\lambda_0 \in \sigma(A)$ η οποία είναι σχεδόν κανονική και επίσης βρίσκεται σχετικά μακριά από τις υπόλοιπες ιδιοτιμές του $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Συνέπεια της ιδιότητας της συνέχειας και της Πρότασης 3.5.1, είναι ότι η περιβάλλουσα μπορεί να έχει συνεκτικό χωρίο \mathcal{G}_0 τέτοιο ώστε $\mathcal{G}_0 \cap \sigma(A) = \{\lambda_0\}$. Μπορούν να κατασκευαστούν παραδείγματα έτσι ώστε η $\mathcal{E}(A)$ να έχει n συνεκτικά χωρία. Στην παρούσα στιγμή είναι αδύνατο να βρεθεί ένα άνω ή κάτω φράγμα για τον αριθμό των συνεκτικών χωρίων της $\mathcal{E}(A)$, καθώς και ο αριθμός των ιδιοτιμών που βρίσκονται εντός του κάθε χωρίου. Διερεύνηση αυτού του προβλήματος γίνεται στο Κεφάλαιο 4.

Παράδειγμα 3.5.2. Οι 5×5 τριγωνικοί μιγαδικοί πίνακες

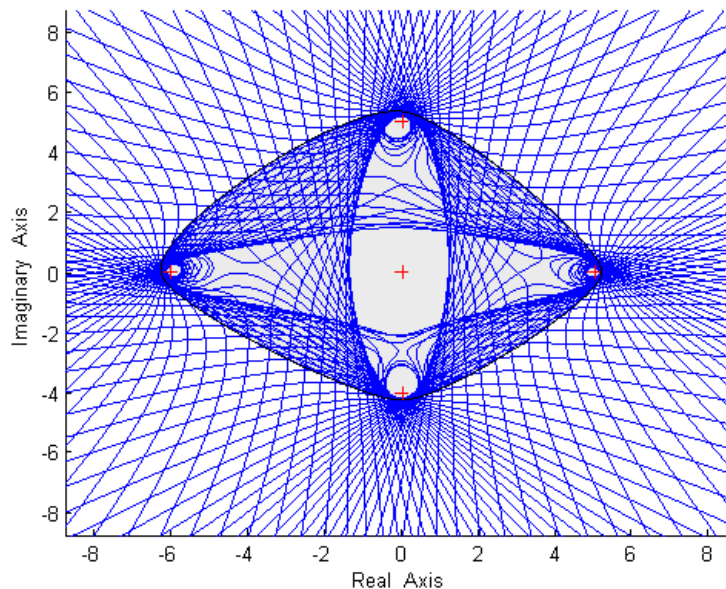
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & -i & i \\ 0 & -6 & 1 & -1 & -2i \\ 0 & 0 & -4i & i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 & -i & i \\ 0 & -6 & 1 & -1 & -4i \\ 0 & 0 & -4i & i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

$$\text{και } C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & -i & i \\ 0 & -6 & 2 & -5 & -4i \\ 0 & 0 & -4i & -3 & 4i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix},$$

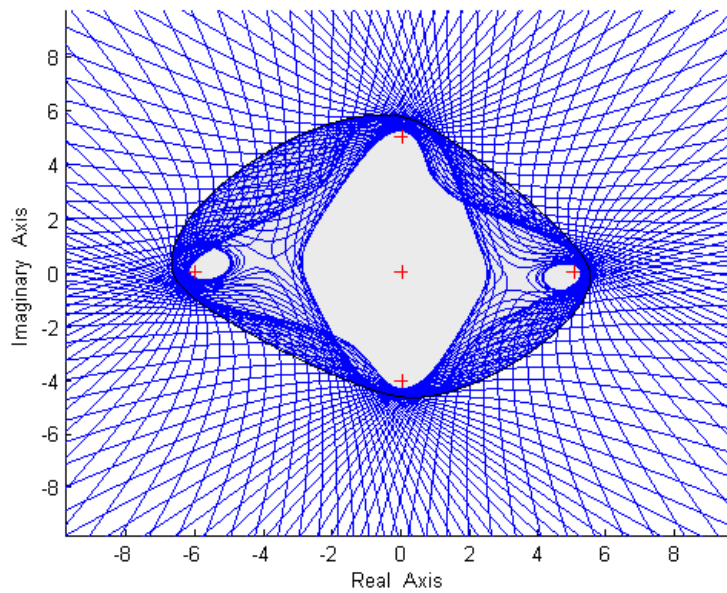
έχουν το ίδιο φάσμα. Έστω D , ο 5×5 διαγώνιος πίνακας του οποίου η διαγώνιος είναι κοινή με την κοινή διαγώνιο των πινάκων A , B και C , και έστω ότι με $\|\cdot\|_F$ συμβολίζεται η Frobenius νόρμα. Τότε,

$$\frac{\|A - D\|_F}{\|A\|_F} = 0.3362, \quad \frac{\|B - D\|_F}{\|B\|_F} = 0.4944 \quad \text{και} \quad \frac{\|C - D\|_F}{\|C\|_F} = 0.7122,$$

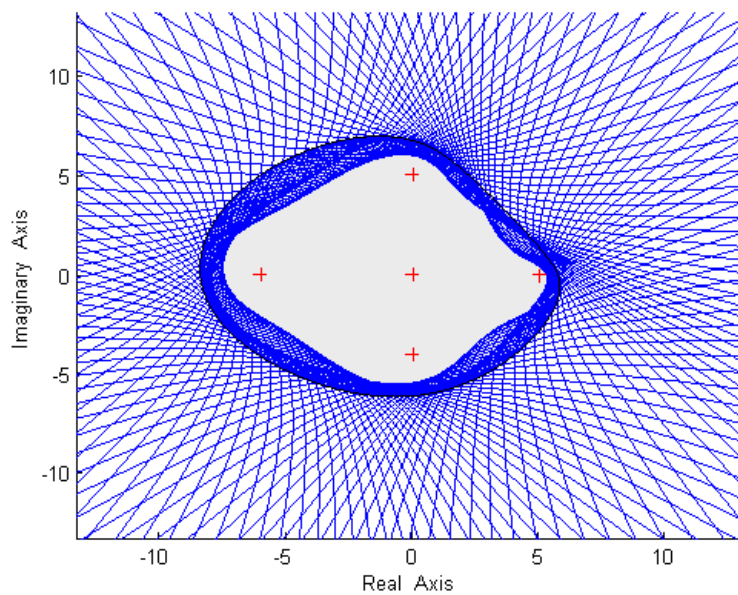
που μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύουν τη σχετική απόσταση των A , B και C από την κανονικότητα. Στο Σχήμα 3.5 φαίνονται οι περιβάλλουσες $\mathcal{E}(A)$, $\mathcal{E}(B)$ και $\mathcal{E}(C)$ αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι όσο μικρότερη είναι η παραπάνω απόσταση, τόσο αυξάνει ο αριθμός των συνεκτικών χωρίων. Η περιβάλλουσα του πίνακα A (σχήμα 3.5α') αποτελείται από πέντε συνεκτικά χωρία, καθένα εκ των οποίων περιέχει ακριβώς μια ιδιοτιμή, και η $\mathcal{E}(A)$ αποτελεί μια μεγάλη βελτίωση σε σύγκριση με το $F(A)$ όσον αφορά στην προσέγγιση του φάσματος. Στην περίπτωση του πίνακα C (σχήμα 3.5γ'), η $\mathcal{E}(C)$ είναι οριακά μικρότερο χωρίο σε σχέση με το αριθμητικό πεδίο, ενώ ο πίνακας B και η $\mathcal{E}(B)$ (σχήμα 3.5β'), αντιπροσωπεύουν μια ενδιάμεση κατάσταση.



(α') Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$.



(β') Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(B)$.



(γ') Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(C)$.

Σχήμα 3.5: Οι περιβάλλουσες τριών πινάκων με ίδιο φάσμα αλλά διαφορετικές αποστάσεις από την κανονικότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

4.1 Εισαγωγή

Η περιβάλλουσα ενός μιγαδικού τετραγωνικού πίνακα, η οποία συμβολίζεται με $\mathcal{E}(A)$ και είναι ένα χωρίο που περιέχει τις ιδιοτιμές του, περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 3. Η περιβάλλουσα αποτελεί έναν θεωρητικό, υπολογιστικό και ποιοτικό τρόπο για την προσέγγιση του φάσματος του A .

Η σύλληψη και ο ορισμός της περιβάλλουσας βασίζεται στην ανισότητα που αναφέρθηκε και αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 2, ανισότητα που ικανοποιούν τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της κάθε ιδιοτιμής. Η ανισότητα αυτή επιτρέπει την αντικατάσταση του ημιεπιπέδου αριστερά της μεγαλύτερης ιδιοτιμής του ερμιτιανού μέρους του A , με μια μικρότερη περιοχή που περιέχει το φάσμα του A . Συνεπώς, περιστρέφοντας τον πίνακα A ως προς (όλες) τις γωνίες $[0, 2\pi)$, η περιβάλλουσα προκύπτει να είναι μια περιοχή που περιέχει τις ιδιοτιμές και περιέχεται στο αριθμητικό πεδίο, $F(A)$. Αναλυτικός ορισμός της $\mathcal{E}(A)$ δόθηκε στο Κεφάλαιο 3.

Η κατασκευή της $\mathcal{E}(A)$ είναι παρόμοια με τη διαδικασία εύρεσης του $F(A)$, απαιτώντας τη γνώση της πρώτης αλλά και της δεύτερης μεγαλύτερης ιδιοτιμής του ερμιτιανού μέρους του $e^{i\theta}A$ για γωνίες στο $[0, 2\pi)$.

Η περιβάλλουσα έχει ιδιότητες παρόμοιες με το $F(A)$, για παράδειγμα είναι συμπαγής, είναι αναλλοίωτη ως προς την ορθομοναδιαία ομοιότητα, και είναι ομογενής. Δεν είναι όμως απαραίτητα κυρτό ή συνεκτικό σύνολο.

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση επιπλέον ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών της $\mathcal{E}(A)$, όπως η γεωμετρία της, το σύνορό της, ο αριθμός των χωρίων και των ιδιοτιμών που περιέχει. Συγκεκριμένα, μελετώνται περιπτώσεις κανονικών πινάκων και ιδιοτιμών και πραγματοποιείται η σύγκριση με το αριθμητικό πεδίο πρώτου και δευτέρου βαθμού.

4.2 Αριθμητικά Πεδία Ανώτερου Βαθμού

Για $1 \leq k \leq n - 1$, το αριθμητικό πεδίο k -βαθμού (k-rank numerical range) ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως

$$\Lambda_k(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : PAP = \mu P \text{ για κάποια } P \in \mathcal{P}_k\}$$

όπου \mathcal{P}_k είναι το σύνολο των ορθογωνίων προβολών P του \mathbb{C}^n επί οποιουδήποτε k -διάστατου υποχώρου \mathcal{K} του \mathbb{C}^n . Ισοδύναμα,

$$\Lambda_k = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : X^*AX = \mu I_k \text{ για κάποιο } X \in \mathbb{C}^{n \times k} \text{ έτσι ώστε } X^*X = I_k \right\}$$

Το αριθμητικό πεδίο k -βαθμού αποτελεί μια γενίκευση του αριθμητικού πεδίου, αφού το $\Lambda_1(A)$ ταυτίζεται με το $F(A)$:

$$\Lambda_1 \equiv F(A) = \{x^*Ax \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

Εισήχθη ως έννοια το 2006 και προσέλκυσε την επιστημονική κοινότητα λόγω του ρόλου του στη θεωρία της κβαντικής πληροφορικής. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται στην κατασκευή κβαντικών κωδίκων διόρθωσης σφαλμάτων για κβαντικά κανάλια με θόρυβο [10]. Το σύνολο $\Lambda_k(A)$ είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου. Επίσης, ισχύει

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \left\{ e^{-i\theta}(s + it) : s, t \in \mathbb{R} \text{ με } s \leq \delta_k(e^{i\theta}A) \right\}. \quad (4.1)$$

Επιπλέον, το $\Lambda_k(A)$ είναι αναλλοίωτο ως προς την ορθομοναδιαία ομοιότητα και ικανοποιεί τη σχέση εγκλεισμού $\Lambda_{n-1}(A) \subseteq \Lambda_{n-2}(A) \subseteq \dots \subseteq \Lambda_2(A) \subseteq \Lambda_1(A) = F(A)$. Για $k \geq 2$, το $\Lambda_k(A)$ δεν περιέχει απαραίτητα όλες τις ιδιοτιμές του A και μπορεί να είναι και κενό σύνολο. Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το σύνολο $\Lambda_k(A)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ να είναι μη κενό είναι να ισχύει $n \geq 3k - 2$.

Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός με (όχι απαραίτητα απλές) ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, τότε ισχύει

$$\Lambda_k(A) = \bigcap_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k+1} \leq n} \text{Co} \{ \lambda_{j_1} \lambda_{j_2}, \dots, \lambda_{j_{n-k+1}} \}, \quad (4.2)$$

όπου με Co συμβολίζεται η κυρτή θήκη του συνόλου. Υπάρχουν αποτελεσματικές τεχνικές για τον υπολογισμό του $\Lambda_k(A)$ για έναν κανονικό πίνακα A , από ημιεπίπεδα ορισμένα από τις ιδιοτιμές αντί της εξίσωσης (4.2).

4.3 Μία παρατήρηση επί της Περιβάλλουσας $\mathcal{E}(A)$

Στο Κεφάλαιο 3, λόγω του ότι για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$ ισχύει

$$\sigma(A) = e^{-i\theta} \sigma(e^{i\theta} A) \subseteq e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A) \subseteq \mathcal{H}_{in}(A, \theta), \quad (4.3)$$

η κυβική περιβάλλουσα του A , ορίστηκε ως το σύνολο

$$\mathcal{E}(A) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A). \quad (4.4)$$

Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{E}(A)$ περιέχεται στο (κυρτό) αριθμητικό πεδίο $F(A) = \Lambda_1(A)$ και ότι περιέχει το (κυρτό) αριθμητικό πεδίο δεύτερου βαθμού $\Lambda_2(A)$, καθώς και το φάσμα $\sigma(A)$. (Υπενθυμίζεται ότι το $\Lambda_2(A)$ δεν περιέχει απαραίτητα το $\sigma(A)$.)

Θεώρημα 4.3.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε τα επόμενα ισχύουν:

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{E}(A) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A) \subseteq \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \mathcal{H}_{in}(A, \theta) = F(A) \quad (4.5)$$

και

$$\begin{aligned} \Lambda_2(A) &= \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \left\{ e^{-i\theta} (s + it) : s, t \in \mathbb{R} \text{ με } s \leq \delta_2(e^{i\theta} A) \right\} \\ &\subseteq \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} A) = \mathcal{E}(A). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η εξίσωση (4.5) προκύπτει από τις εξισώσεις (3.1), (4.3) και (4.4). Οι υπόλοιπες εξισώσεις προκύπτουν άμεσα από τις εξισώσεις (4.1) και (4.4). \square

Στη συνέχεια, θα δειχθεί ότι η περιβάλλουσα, όντας η τομή χωρίων του μιγαδικού επιπέδου, μπορεί να προσεγγιστεί με αυθαίρετη ακρίβεια μέσω πεπερασμένων τομών, γεγονός που αποτελεί το θεμέλιο της μεθόδου σχεδιασμού της.

Υπενθυμίζεται ότι για δυο συμπαγή υποσύνολα Ω_1 και Ω_2 ενός μετρικού χώρου (\mathcal{X}, ρ) , η απόσταση Hausdorff των Ω_1 και Ω_2 ορίζεται ως εξής:

$$d_H(\Omega_1, \Omega_2) = \max \left\{ \max_{x_1 \in \Omega_1} \min_{x_2 \in \Omega_2} \rho(x_1, x_2), \max_{x_2 \in \Omega_2} \min_{x_1 \in \Omega_1} \rho(x_1, x_2) \right\}.$$

Για κάθε $x_0 \in \mathcal{X}$ και $\delta > 0$, ορίζεται η ανοικτή μπάλα $\mathcal{B}(x_0, \delta) = \{x \in \mathcal{X} : \rho(x_0, x) < \delta\}$.

Λήμμα 4.3.2. Έστω $\{\mathcal{G}_a : a \in \mathcal{A}\}$ η άπειρη οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του \mathbb{C}^n , τέτοια ώστε το σύνολο $\mathcal{F} = \bigcap_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{G}_a$ να είναι μη κενό και συμπαγές. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε

$$d_H \left(\mathcal{F}, \bigcap_{j=1}^k \mathcal{G}_{a_j} \right) \leq \varepsilon.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού \mathcal{F} συμπαγές, υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, τέτοιο ώστε $\mathcal{F} + \mathcal{B}(0, \varepsilon)$ να βρίσκεται στο εσωτερικό του Ω . Τότε το σύνολο $\Omega \setminus (\mathcal{F} + \mathcal{B}(0, \varepsilon))$ είναι συμπαγές και βρίσκεται εντός της ένωσης $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} (\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{G}_a)$. Συνεπώς, λόγω της συμπαγείας, υπάρχουν $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε

$$\Omega \setminus (\mathcal{F} + \mathcal{B}(0, \varepsilon)) \subseteq \bigcup_{j=1}^k (\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{G}_{a_j}).$$

Έπεται ότι

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcap_{j=1}^k \mathcal{G}_{a_j} \subseteq \mathcal{F} + \mathcal{B}(0, \varepsilon),$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη □

Το παραπάνω λήμμα οδηγεί ευθέως στην επιθυμητή προσέγγιση, αποτελεσμα που μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να ισχύει για το αριθμητικό πεδίο καθώς και για το αριθμητικό πεδίο k -βαθμού.

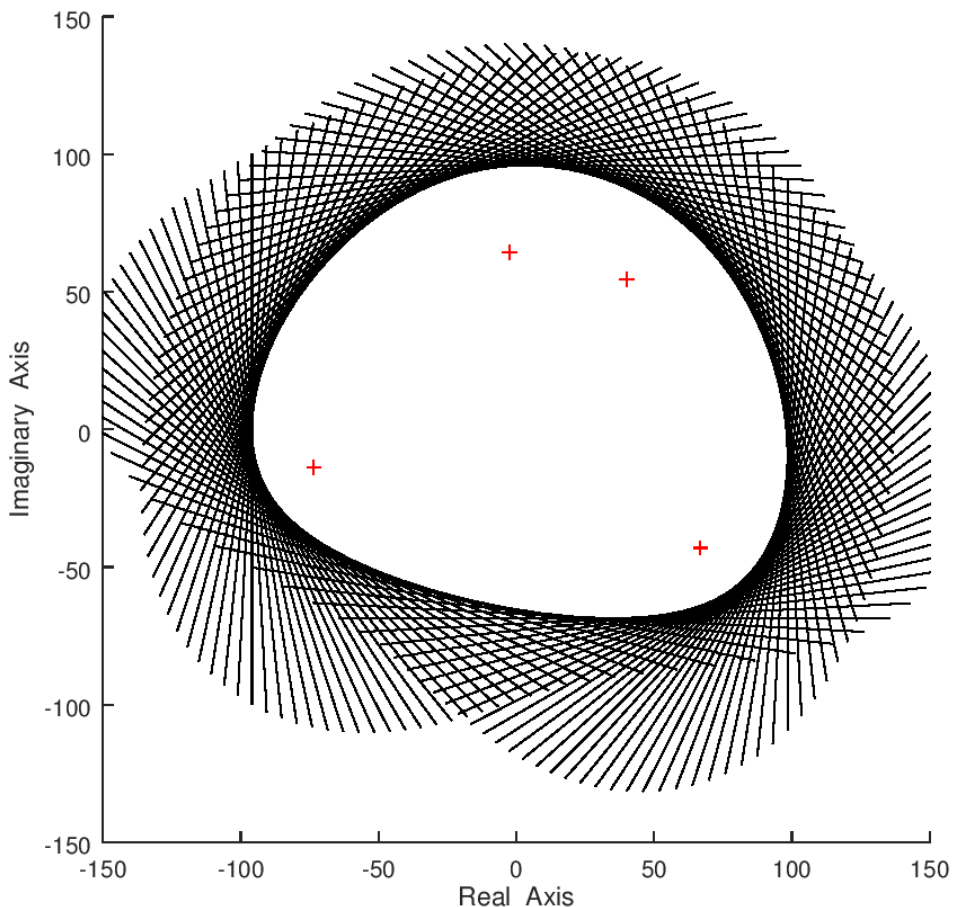
Πόρισμα 4.3.3. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k \in [0, 2\pi)$ τέτοια ώστε

$$d_H \left(\mathcal{E}(A), \bigcap_{j=1}^k e^{-i\theta_j} \Gamma_{in}(e^{i\theta_j} A) \right) \leq \varepsilon.$$

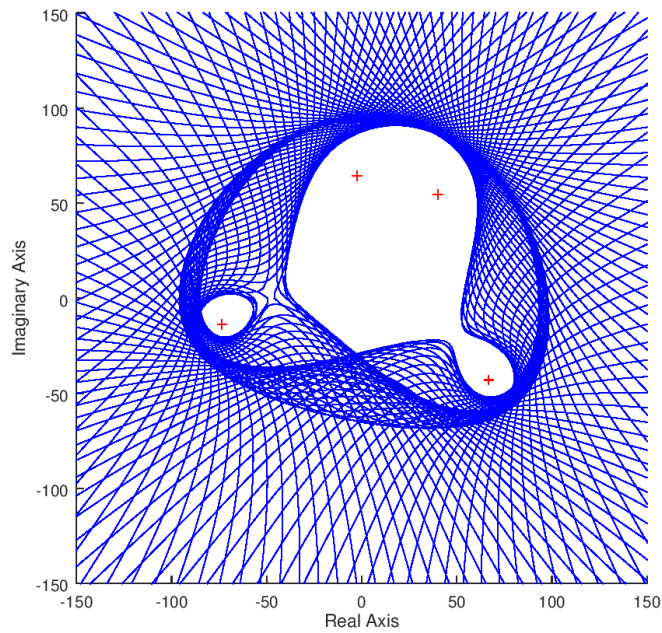
Παράδειγμα 4.3.4. Έστω ο μιγαδικός 4×4 πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 14 + 19i & -4 - i & -55 - 13i & -32 + 13i \\ 27 + 2i & 14 - 25i & 64 & 72 \\ 54 + i & 47 - 3i & 14 + 44i & -32 - 42i \\ 76 & 73 & 4 - 2i & -11 + 24i \end{bmatrix}.$$

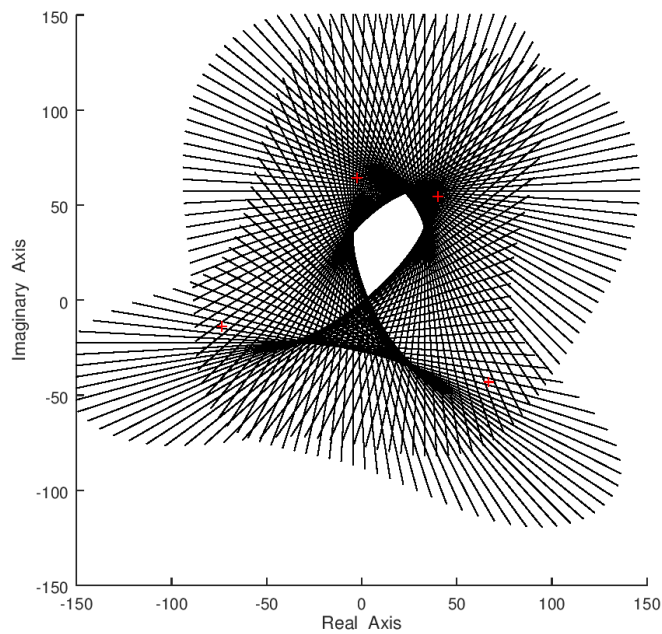
Το αριθμητικό πεδίο σχεδιάζεται ως η τομή 120 κλειστών ημιεπιπέδων στο Σχήμα 4.1α'. Στο Σχήμα 4.1β' η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ σχηματίζεται από τη σχεδίαση 120 καμπυλών της μορφής $e^{-i\theta}\Gamma(e^{i\theta}A)$. Στο Σχήμα 4.1γ' φαίνεται το αριθμητικό πεδίο δευτέρου βαθμού $\Lambda_2(A)$, που σχεδιάστηκε από 120 ευθείες εφαρμόζοντας την εξίσωση (4.1) και δεν περιέχει καμία ιδιοτιμή του A . Στα τρία σχήματα οι ιδιοτιμές σημειώνονται με "+". Παρατηρείται ότι η κυβική περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ αποτελείται από δυο συνεκτικά χωρία, και αποτελεί πολύ καλύτερη προσέγγιση του φάσματος $\sigma(A)$ σε σύγκριση με το αριθμητικό πεδίο $F(A)$, ενώ περιέχει το $\Lambda_2(A)$. Τέλος, ως παρατηρηθεί ότι κατά τη σχεδίαση της, σκιαγραφείται το αριθμητικό πεδίο.



(α') Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$.



(β') Η $\mathcal{E}(A)$.



(γ') Το αριθμητικό πεδίο δευτέρου βαθμού $\Lambda_2(A)$.

Σχήμα 4.1: Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$, η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ και το αριθμητικό πεδίο δευτέρου βαθμού $\Lambda_2(A)$.

4.4 Κανονικοί Πίνακες και Ομοιότητα

Έστω $\sigma(A) = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ το φάσμα του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($n \geq 2$), όπου οι πολλαπλές ιδιοτιμές (εάν υπάρχουν) βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις. Ορίζεται ο διαγώνιος πίνακας $D(A) = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Μια ιδιοτιμή k_j του A καλείται *ακραία* αν k_j είναι κορυφή της κυρτής θήκης του $\sigma(A)$, που συμβολίζεται με $Co(\sigma(A))$.

4.4.1 Η Περιβάλλουσα των Κανονικών Πινάκων

Έστω A κανονικός πίνακας. Τότε, το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ ταυτίζεται με την κυρτή θήκη του $\sigma(A)$ (Πρόταση 1.3.10). Αν $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k$ είναι απλές ακραίες ιδιοτιμές του A , τότε από την Πρόταση 3.5.1 ισχύει ότι $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k$ είναι μεμονωμένα σημεία της κυβικής περιβάλλουσας $\mathcal{E}(A)$. Αφού A είναι κανονικός, από την Πρόταση 3.4.5, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορεί να υποθεθεί ότι ο A είναι διαγώνιος. Τότε, για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$, ο $e^{i\theta}A$ είναι επίσης διαγώνιος, και $\delta_1(e^{i\theta}A) + i u(e^{i\theta}A)$, $\delta_1(e^{i\theta}A)$ και $i u(e^{i\theta}A)$ είναι ιδιοτιμές των $e^{i\theta}A$, $H(e^{i\theta}A)$ και $S(e^{i\theta}A)$ αντίστοιχα, έχοντας τον ίδιο ιδιοχώρο. Εάν πλέον $\delta_1(e^{i\theta}A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του $H(e^{i\theta}A)$, τότε $v(e^{i\theta}A) - u(e^{i\theta}A)^2 = 0$, και το κέλυφος $\Gamma(e^{i\theta}A)$ είναι η ένωση του σημείου $\delta_1(e^{i\theta}A) + i u(e^{i\theta}A)$ και της κάθετης ευθείας $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \delta_2(e^{i\theta}A)\}$. Διαφορετικά, δηλαδή όταν ο A είναι κανονικός πίνακας και $\delta_1(e^{i\theta}A)$ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του $H(e^{i\theta}A)$, τότε το $\Gamma(e^{i\theta}A)$ είναι η κάθετη ευθεία $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \delta_1(e^{i\theta}A)\}$ και το $\Gamma_{in}(e^{i\theta}A)$ ταυτίζεται με το κλειστό ημιεπίπεδο $\mathcal{H}_{in}(e^{i\theta}A, 0)$ (δηλαδή το $e^{-i\theta}\Gamma_{in}(e^{i\theta}A)$ ταυτίζεται με το $\mathcal{H}_{in}(A, \theta)$). Τότε, από την εξίσωση (4.1), ισχύει

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(A) \setminus \{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k\} &= \left(\bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta}A) \right) \setminus \{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k\} \\ &= \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \{e^{-i\theta}(s + it) : s, t \in \mathbb{R} \text{ με } s \leq \delta_2(e^{i\theta}A)\} \\ &= \Lambda_2(A), \end{aligned}$$

όπου η $\Lambda_2(A)$ έχει οριστεί από την εξίσωση (4.2). Στο [2], αποδεικνύεται ότι αν ο κανονικός πίνακας A έχει m διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε το $\Lambda_2(A)$ μπορεί να είναι ή το κενό σύνολο, ή μονοσύνολο ή ένα ευθύγραμμο τμήμα, ή ένα μη εκφυλισμένο κυρτό πολύγωνο με το πολύ m κορυφές (οι κορυφές δεν είναι απαραίτητο να είναι ιδιοτιμές του A), και προτείνονται αποτελεσματικοί τρόποι για τη δημιουργία του.

Τα παραπάνω οδηγούν στο εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 4.4.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας κανονικός πίνακας και $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k$ είναι οι απλές ακραίες ιδιοτιμές του A . Τότε, $\Lambda_2(A) \cap \{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k\} = \emptyset$ και

$$\mathcal{E}(A) = \Lambda_2(A) \cup \{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k\}.$$

Πόρισμα 4.4.2. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ κανονικός πίνακας.

(i) Αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι απλές και ακραίες, τότε $\Lambda_2(A) \cap \sigma(A) = \emptyset$ και

$$\mathcal{E}(A) = \Lambda_2(A) \cup \sigma(A).$$

(ii) Αν όλες οι ακραίες ιδιοτιμές του A είναι πολλαπλές, τότε ισχύει $\mathcal{E}(A) = \Lambda_2(A) = \text{con}\nu\{\sigma(A)\} = F(A)$. Συγκεκριμένα, για κάθε $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{E}(aI_n) = \Lambda_2(aI_n) = F(aI_n) = \{a\}$.

(iii) Αν $n = 2$ ή $n = 3$, τότε $\mathcal{E}(A) = \sigma(A)$.

(iv) Έστω $n = 4$, και έστω ότι όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ακραίες. Τότε, αν όλες οι ιδιοτιμές είναι απλές, ισχύει $\mathcal{E}(A) \setminus \Lambda_2(A) = \sigma(A)$ (βλ. (i)) και το $\Lambda_2(A)$ είναι μονοσύνολο. Αν ακριβώς μία από τις ιδιοτιμές είναι διπλή, τότε το $\Lambda_2(A)$ ταυτίζεται με αυτή τη διπλή ιδιοτιμή και $\mathcal{E}(A) = \sigma(A)$.

Πόρισμα 4.4.3. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ερμιτιανός πίνακας (δηλαδή $A = H(A)$), με ιδιοτιμές $\delta_1(A) \geq \delta_2(A) \geq \dots \geq \delta_n(A)$. Τότε

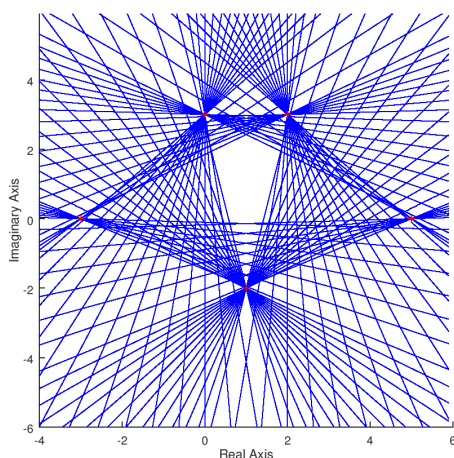
$$\mathcal{E}(A) = \{\delta_n(A)\} \cup [\delta_{n-1}(A), \delta_2(A)] \cup \{\delta_1(A)\} \subseteq [\delta_n(A), \delta_1(A)] = F(A).$$

Παράδειγμα 4.4.4. Έστω οι διαγώνιοι πίνακες

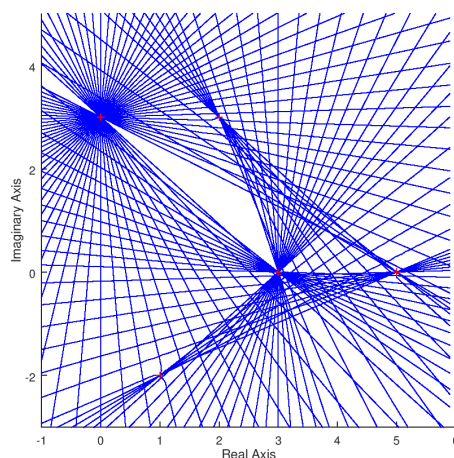
$$D_1 = \text{diag}\{1, 2, 3, 4\}, \quad D_2 = \text{diag}\{1, 1, 2, 3, 4\},$$

$$D_3 = \text{diag}\{3i, 5, 2 + 3i, 1 - 2i, -3\} \quad \text{και} \quad D_4 = \text{diag}\{3i, 3i, 5, 2 + 3i, 1 - 2i, 3\}.$$

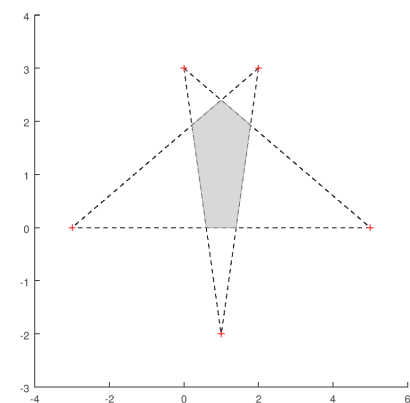
Οι περιβάλλουσες του D_1 και του D_2 είναι $\mathcal{E}(D_1) = \Lambda_2(D_1) \cup \{1, 4\} = [2, 3] \cup \{1, 4\}$ και $\mathcal{E}(D_2) = \Lambda_2(D_2) \cup \{4\} = [1, 3] \cup \{4\}$, και επιβεβαιώνουν το Πόρισμα 4.4.3. Οι περιβάλλουσες του D_3 και του D_4 απεικονίζονται στα Σχήματα 4.2α' και 4.2β' όπου οι ιδιοτιμές σημειώνονται με +. Στα Σχήματα 4.2γ' και 4.2δ' απεικονίζονται τα $\Lambda_2(D_3)$ και $\Lambda_2(D_4)$, ενώ οι διακεκομμένες γραμμές είναι βοηθητικές. Από τα σχήματα, οι περιβάλλουσες $\mathcal{E}(D_3)$ και $\mathcal{E}(D_4)$, καθώς και τα $\Lambda_2(D_3)$ και $\Lambda_2(D_4)$ επιβεβαιώνουν το Θεώρημα 4.4.1. Συγκεκριμένα, η $\mathcal{E}(D_3)$ δείχνει την περίπτωση (i) του Πορίσματος 4.4.2. Επίσης, ο αριθμός $3i$ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του D_4 (σημειώνεται με "*" στο Σχήμα 4.2δ') και συνεπώς δεν εγείρεται πλευρά από την ιδιοτιμή $1 - 2i \in \sigma(D_4)$.



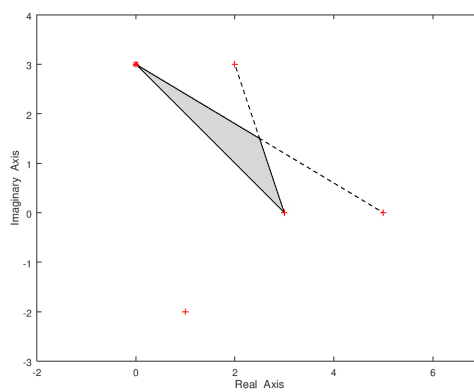
(α) Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(D_3)$ σχεδιασμένη μέσω 90 κελυφών.



(β) Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(D_4)$ σχεδιασμένη μέσω 90 κελυφών.



(γ) Το $\Lambda_2(D_3)$.



(δ) Το $\Lambda_2(D_4)$.

Σχήμα 4.2: Οι περιβάλλουσες και αριθμητικά πεδία δευτέρου βαθμού των διαγώνιων πινάκων D_3 και D_4 .

4.4.2 Ομοιότητα

Κάθε πίνακας Jordan J_A είναι όμοιος με κάθε διδιαγώνιο πίνακα $J_{A,a}$, που προκύπτει με αντικατάσταση των άσων της υπερδιαγωνίου με ένα $a > 0$ οσοδήποτε μικρό. Για παράδειγμα, για τον $k \times k$ υποπίνακα Jordan (Jordan block) που αντιστοιχεί σε ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ και για κάθε $a \in \mathbb{C}$, ισχύει

$$\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^{-2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & a & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Η συνέχεια του αριθμητικού πεδίου ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ βάσει των στοιχείων του, έχει ως αποτέλεσμα το παρακάτω

$$\bigcap \{F(R^{-1}AR) : R \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(R) \neq 0\} = \text{conv}\{\sigma(A)\}. \quad (4.6)$$

Ανάλογο αποτέλεσμα προκύπτει και για την περιβάλλουσα.

Θεώρημα 4.4.5. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει

$$\bigcap \{\Gamma_{in}(R^{-1}AR) : R \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(R) \neq 0\} \subseteq \Gamma_{in}(D(A)), \quad (4.7)$$

και

$$\bigcap \{\mathcal{E}(R^{-1}AR) : R \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(R) \neq 0\} \subseteq \mathcal{E}(D(A)). \quad (4.8)$$

Απόδειξη. Αν A είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $R^{-1}AR = D(A)$, και η απόδειξη είναι άμεση.

Αν A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε από τον ορισμό της περιβάλλουσας, ισχύει

$$\begin{aligned} & \bigcap \{\mathcal{E}(R^{-1}AR) : R \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(R) \neq 0\} \\ &= \bigcap \left\{ e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} R^{-1}AR) : R \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(R) \neq 0, \theta \in [0, 2\pi) \right\} \\ &= \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \bigcap \left\{ e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} R^{-1}AR) : R \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(R) \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

και

$$\mathcal{E}(D(A)) = \bigcap \left\{ e^{-i\theta} \Gamma_{in}(e^{i\theta} D(A)) : \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Πλέον, μπορεί να αποδειχθεί η πρώτη σχέση του θεωρήματος. Συγκεκριμένα, έστω $\mu \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_{in}(D(A))$, και θα αποδειχθεί ότι $\mu \notin \Gamma_{in}(R^{-1}AR)$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Αν $\delta_1(D(A))$ είναι απλή ιδιοτιμή του $H(D(A))$, τότε το μ βρίσκεται δεξιότερα της κατακόρυφης $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \delta_2(D(A))\}$, όπου $\delta_2(D(A))$ ταυτίζεται με το πραγματικό μέρος της της δεύτερης από τα δεξιά ιδιοτιμής του $D(A)$ και του A . Ακόμα, το μ είναι διαφορετικό από τη $\delta_1(D(A)) + iu(D(A))$ (δηλαδή τη δεξιότερη ιδιοτιμή του $D(A)$ και του A). Όπως προαναφέρθηκε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει αντιστρέψιμος $R_\varepsilon \in \mathbb{C}^{n \times n}$, τέτοιος ώστε $R_\varepsilon^{-1}AR_\varepsilon$

είναι διαγώνιος πίνακας, και τα μέτρα των στοιχείων της υπερδιαγωνίου είναι μικρότερα ή ίσα του ε . Η συνέχεια των ιδιοτιμών, των ιδιοδιανυσμάτων και των μέτρων, ως συναρτήσεις των τιμών των στοιχείων του πίνακα, συνεπάγεται ότι για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$, οι ποσότητες $v(R_\varepsilon^{-1}AR_\varepsilon) - u(R_\varepsilon^{-1}AR_\varepsilon)^2$ και $|\delta_2(R_\varepsilon^{-1}AR_\varepsilon) - \delta_2(D(A))|$ μπορούν να είναι οσοδήποτε μικρές. Συνεπώς, το κέλυφος $\Gamma(R_\varepsilon^{-1}AR)$ μπορεί να υποθεθεί ότι είναι μη συνεκτικό, με τον μη φραγμένο κλάδο οσοδήποτε κοντά στην κατακόρυφη $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \delta_2(D(A))\}$, και τον κλειστό φραγμένο κλάδο οσοδήποτε κοντά στο μονοσύνολο $\{\delta_1(D(A)) + iu(D(A))\}$. Άρα υπάρχει αντιστρέψιμος $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ έτσι ώστε $\mu \notin \Gamma_{in}(R^{-1}AR)$.

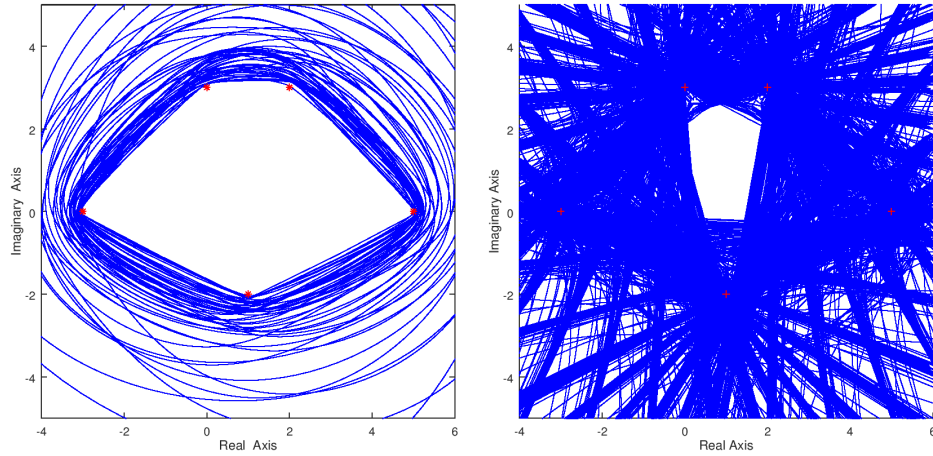
Αν $\delta_1(D(A))$ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του $H(D(A))$, τότε το μ βρίσκεται δεξιά της κατακόρυφης $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \delta_1(D(A))\}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέχειας όπως παραπάνω, προκύπτει ότι για κατάλληλο αντιστρέψιμο $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$, οι πραγματικοί αριθμοί $\delta_1(D(A))$, $\delta_1(H(R^{-1}AR))$ και $\delta_2(H(R^{-1}AR))$ μπορούν να είναι οσοδήποτε κοντά. Συνεπώς, το $\Gamma(R^{-1}AR)$ μπορεί να είναι οσοδήποτε κοντά στο $\Gamma(D(A)) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \delta_1(D(A))\}$, και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. \square

Η εξίσωση (4.8) του παραπάνω θεωρήματος και η ισότητα (4.6) οδηγούν στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.4.6. Αν $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k$ είναι απλές ακραίες ιδιοτιμές του $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, τότε

$$\begin{aligned} \sigma(A) &\subseteq \cap \{ \mathcal{E}(R^{-1}AR) : R \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(R) \neq 0 \} \\ &\subseteq \mathcal{E}(D(A)) = \Lambda_2(D(A)) \cup \{ \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k \} \\ &\subseteq \operatorname{conv}\{\sigma(A)\} = \cap \{ F(R^{-1}AR) : R \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(R) \neq 0 \} \\ &\subseteq F(A). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.4.7. Έστω ο διαγώνιος πίνακας $D_3 = \operatorname{diag}\{3i, 5, 2 + 3i, 1 - 2i, -3\}$ του Παραδείγματος 4.4.4 όπου η περιβάλλουσά του, $\mathcal{E}(D_3)$, απεικονίζεται στο Σχήμα 4.2α'. Στο σχήμα 4.3, απεικονίζονται τα αριθμητικά πεδία (αριστερά) και οι περιβάλλουσες (δεξιά) 60 τυχαίων όμοιων με τον D_3 πινάκων. Η μη σκιασμένη περιοχή του Σχήματος 4.3α' αποτελεί μια προσέγγιση της κυρτής θήκης του $\sigma(D_3)$ (οι ιδιοτιμές σημειώνονται με "*"), επιβεβαιώνοντας την εξίσωση 4.6. Η μη σκιασμένη περιοχή του Σχήματος 4.3β' είναι μια προσέγγιση του πολυγώνου $\Lambda_2(D_3)$ επιβεβαιώνοντας το Πόρισμα 4.4.6. Όπως είναι αναμενόμενο, αφού όλες οι ιδιοτιμές είναι ακραίες, δε διακρίνονται στο Σχήμα 4.3β'.



(α') Το αριθμητικό πεδίο 60 όμοιων πινάκων.

(β') Οι περιβάλλουσες 60 όμοιων πινάκων.

Σχήμα 4.3: Αριθμητικά πεδία και περιβάλλουσες όμοιων πινάκων.

Παρατήρηση 4.4.8. Μπορεί εύκολα να κατασκευαστεί ένας μη κανονικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ έτσι ώστε το κέλυφος $\Gamma(A)$ να αποτελείται από δυο κλάδους, και $\delta_2(A)$ να είναι ιδιοτιμή του $H(A)$, με αλγεβρική πολυπλοκότητα $n - 1$. Τότε, $\delta_2(A) < \delta_1(A)$, και τουλάχιστο δυο ιδιοτιμές του A βρίσκονται στο εσωτερικό του αριθμητικού πεδίου $F(A)$ [4, Θεώρημα 1.6.6] και έχουν πραγματικά μέρη εντός του ανοιχτού διαστήματος $(\delta_2(A), \delta_1(A))$. Συνεπώς, το πραγματικό μέρος τουλάχιστο μιας ιδιοτιμής του A βρίσκεται στο διάστημα $(\delta_2(A), (\delta_1(A) + \delta_2(A) - \sqrt{\Delta})/2]$, και έπεται ότι $\delta_2(D(A)) > \delta_2(A)$. Επομένως, ισχύει ότι $\Gamma_{in}(D(A)) \not\subseteq \Gamma_{in}(A)$, και προκύπτει ως συμπέρασμα ότι στην εξίσωση (4.7) δεν ισχύει πάντα η ισότητα. Αντίστοιχα, δεν είναι γνωστό αν η εξίσωση (4.8) που αφορά στην περιβάλλουσα ισχύει πάντα ως ισότητα.

4.5 Τα Ιδιοδιανύσματα των Δεξιότερων Ιδιοτιμών

Η πιο “ενδιαφέρουσα”, ίσως, περίπτωση είναι όταν το κέλυφος $\Gamma(A)$ αποτελείται από δυο κλάδους. Τότε, ο κλειστός κλάδος πρέπει να περιέχει μια απλή ιδιοτιμή λ_1 του πίνακα A , και επομένως, η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$ έχει ένα συνεκτικό χωρίο που περιέχει την λ_1 . Σε αυτή την παράγραφο, διερευνάται η σχέση (γωνία) μεταξύ των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στη λ_1 και της δεξιότερης ιδιοτιμής του ερμιτιανού μέρους.

Για κάθε δυο διανύσματα $x, y \in \mathbb{C}^n$, ορίζεται το (πραγματικό) συνημίτονο

της γωνίας τους από τη σχέση

$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{|y^* x|}{\|x\|_2 \|y\|_2}.$$

Σημειώνεται ότι αυτός ο ορισμός αγνοεί την κατεύθυνση των διανυσμάτων και περιγράφει την (οξεία) γωνία μεταξύ των μονοδιάστατων υποχώρων $\text{span}\{x\}$ και $\text{span}\{y\}$.

Έστω τώρα ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με τη διακρίνουσα $\Delta = (\delta_1(A) - \delta_2(A))^2 - 4(v(A) - u(A)^2)$ θετική. Από το Θεώρημα 3.3.1, το κέλυφος $\Gamma(A)$ έχει έναν κλειστό κλάδο και ακριβώς μια ιδιοτιμή του A , η οποία είναι απλή, βρίσκεται εντός ή επί του κλειστού αυτού κλάδου του $\Gamma(A)$.

Θεώρημα 4.5.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ έτσι ώστε $\Delta > 0$, και έστω $\delta_1(A)$ μια απλή ιδιοτιμή του $H(A)$, με το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $y_1 \in \mathbb{C}^n$. Έστω ακόμη ότι λ_1 είναι μια απλή ιδιοτιμή του A που βρίσκεται εντός ή επί του κλειστού κλάδου του $\Gamma(A)$ (δηλαδή, λ_1 είναι η δεξιότερη ιδιοτιμή του A), και ας υποθεθεί ότι $\text{Re}(\lambda_1) \neq \delta_1(A)$. Τότε για κάθε μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $x_1 \in \mathbb{C}^n$ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 ,

$$\cos(\widehat{x_1, y_1}) \geq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(\delta_1(A) - \delta_2(A))^2 - 4(v(A) - u(A)^2)}}{2(\delta_1(A) - \delta_2(A))}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Απόδειξη. Έστω $x_1 \in \mathbb{C}^n$ ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στο $\lambda_1 \in \sigma(A)$. Το διάνυσμα αυτό μπορεί να γραφεί στη μορφή $x_1 = \hat{y}_1 + v_1$, όπου $\hat{y}_1 \in \text{span}\{y_1\}$ (δηλαδή, \hat{y}_1 είναι ιδιοδιάνυσμα του $H(A)$ που αντιστοιχεί στο $\delta_1(A)$) και v_1 βρίσκεται στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\text{span}\{y_1\}$, $\text{span}\{y_1\}^\perp$. Αφού x_1 είναι μοναδιαίο, ισχύει

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x_1^* A x_1 \\ &= (\hat{y}_1 + v_1)^* H(A) (\hat{y}_1 + v_1) + x_1^* K(A) x_1 \\ &= v_1^* H(A) v_1 + \delta_1(A) \|\hat{y}_1\|_2^2 + x_1^* K(A) x_1, \end{aligned}$$

όπου $\delta_n(A)(1 - \|\hat{y}_1\|_2^2) \leq v_1^* H(A) v_1 \leq \delta_2(A)(1 - \|\hat{y}_1\|_2^2)$.

Είναι προφανές ότι $\text{Re}(\lambda_1) = v_1^* H(A) v_1 + \delta_1(A) \|\hat{y}_1\|_2^2$ (για παράδειγμα βλ. [4]), και επομένως,

$$\delta_n(A)(1 - \|\hat{y}_1\|_2^2) + \delta_1(A) \|\hat{y}_1\|_2^2 \leq \text{Re}(\lambda_1) \leq \delta_2(A)(1 - \|\hat{y}_1\|_2^2) + \delta_1(A) \|\hat{y}_1\|_2^2.$$

Υπενθυμίζεται ότι αφού $\Delta > 0$, ισχύει

$$\frac{\delta_1(A) + \delta_2(A) + \sqrt{\Delta}}{2} \leq \text{Re}(\lambda_1) \leq \delta_1(A).$$

Συνεπώς,

$$\frac{\delta_1(A) + \delta_2(A) + \sqrt{\Delta}}{2} \leq \delta_2(A)(1 - \|\hat{y}_1\|_2^2) + \delta_1(A)\|\hat{y}_1\|_2^2,$$

ή ισοδύναμα,

$$\sqrt{(\delta_1(A) - \delta_2(A))^2 - 4(v(A) - u(A)^2)} \leq (\delta_1(A) - \delta_2(A))(2\|\hat{y}_1\|_2^2 - 1).$$

Επομένως,

$$\|\hat{y}_1\|_2 \geq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(\delta_1(A) - \delta_2(A))^2 - 4(v(A) - u(A)^2)}}{2(\delta_1(A) - \delta_2(A))}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αν παρατηρηθεί ότι $\|\hat{y}_1\|_2 = |y_1^* x_1| = \cos(\widehat{x_1, y_1})$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τα συμπεράσματα που εξήχθησαν κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής, και αφορούν στη χρήση αριθμητικών μεθόδων για τη σχεδίαση του αριθμητικού πεδίου πρώτου και δευτέρου βαθμού, του κελύφους και της περιβάλλουσας.

5.1 Πηγαίος Κώδικας και Συμβατότητα

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τη σχεδίαση όλων των σχημάτων, βασίζεται σε συναρτήσεις MATLAB που αφορούν στο αριθμητικό πεδίο¹, το κελύφος² και την περιβάλλουσα². Η πρώτη συνάρτηση είναι βασισμένη σε αλγόριθμο που προτάθηκε στο [4].

Μερικές από τις αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν στον πηγαίο κώδικα των προαναφερθέντων συναρτήσεων, περιλαμβάνουν (ακολουθείται το πρότυπο `.diff` αρχείων):

- Συμβατότητα μεταξύ MATLAB και GNU Octave επιτυγχάνεται με την αλλαγή:

```
1 --- envelope.m timestamp
2 +++ envelope_comp.m timestamp
3 @@ -5,10 +5,10 @@
```

¹<http://www.math.ntua.gr/~ppsarr/nr.m>

²<http://www.math.ntua.gr/~ppsarr/envelope.m>

```

4 %
5 % Authors: Panayiotis Psarrakos and Michael Tsatsomeros.
6
7 - figure, tic, hold on % The command tic-toc computes the execution
   time.
8 - M=moviein(t);
9 - for j=1:t, cshell(A,m,(2*pi/t)*(j-1)), M(:,j)=getframe; end
10 - sp(A), hold off, toc, xlabel('Real Axis'), ylabel('Imaginary Axis')
11 + tic, hold on % The command tic-toc computes the execution time.
12 + M=moviein(t);
13 + for j=1:t, cshell(A,m,(2*pi/t)*(j-1)); end%, M(:,j)=getframe; end
14 + sp(A), hold on, toc, xlabel('Real Axis'), ylabel('Imaginary Axis');
15

```

καθώς η ρουτίνα `getframe` δεν είναι υλοποιημένη στο GNU Octave.

- Για τον σχεδιασμό των κελυφών, χρησιμοποιήθηκε η προαναφερθείσα συνάρτηση `envelope(A,t,m)`, αφού ορίστηκε $t = 1$.
- Στα Σχήματα 3.1β' και 4.1α' σχεδιάστηκαν οι εφαπτόμενες στο αριθμητικό πεδίο ευθείες:

```

1 --- nr.m timestamp
2 +++ nr_tang.m timestamp
3 @@ -38,6 +38,13 @@
4     [s,w] = sort(real(diag(D)));
5     x=X(:,w(n)); % eigenvector of the maximum
   eigenvalue of A2
6     f(k)=x'*A*x/(x'*x); % boundary point of W(A)
7 + x1=real(f(k));
8 + y1=imag(f(k));
9 + x2=x1.+sin((k-1)./nv.*2.*pi).*1;
10 + y2=y1.+cos((k-1)./nv.*2.*pi).*1;
11 + x3=x1.-sin((k-1)./nv.*2.*pi).*1;
12 + y3=y1.-cos((k-1)./nv.*2.*pi).*1;
13 + line([x3 x2],[y3 y2]);
14 end % for
15
16 toc

```

- Το αριθμητικό πεδίο δευτέρου βαθμού του Σχήματος 4.1γ' σχεδιάστηκε βάσει της σχέσης 4.1, υλοποιούμενη από την εξής αλλαγή του πηγαίου κώδικα:

```

1 --- nr_tang.m timestamp
2 +++ 2_nr_tang.m timestamp
3 @@ -36,7 +36,7 @@
4     A2=(A1+A1')/2; % the hermitian part of the rotation A1
5     [X,D]=eig(A2); % eigenvectors and eigenvalues of A2
6     [s,w] = sort(real(diag(D)));
7 - x=X(:,w(n)); % eigenvector of the maximum
   eigenvalue of A2
8 + x=X(:,w(n-1)); % eigenvector of the second largest
   eigenvalue of A2
9     f(k)=x'*A*x/(x'*x); % boundary point of W(A)

```

```

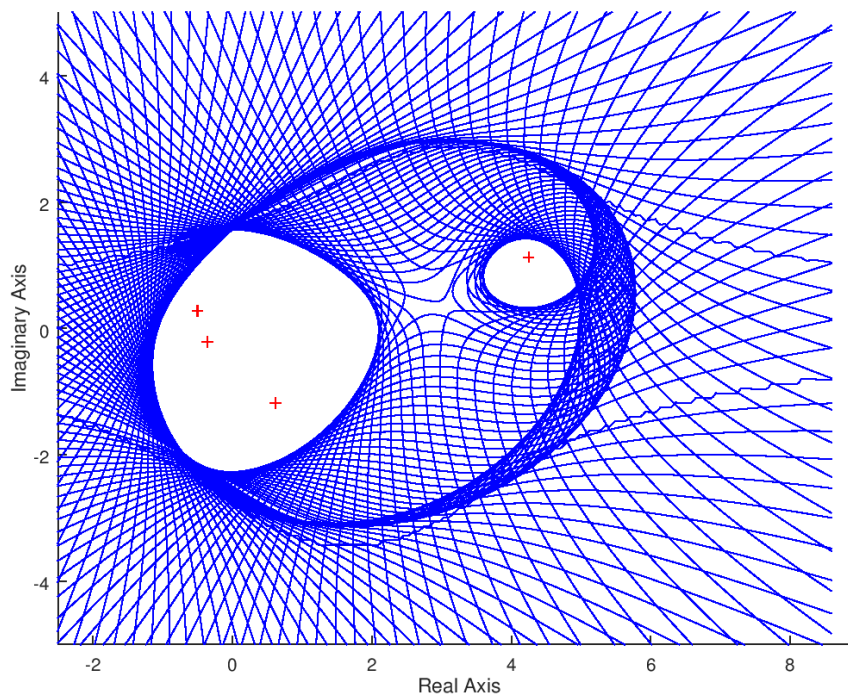
10 x1=real(f(k));
11 y1=imag(f(k));

```

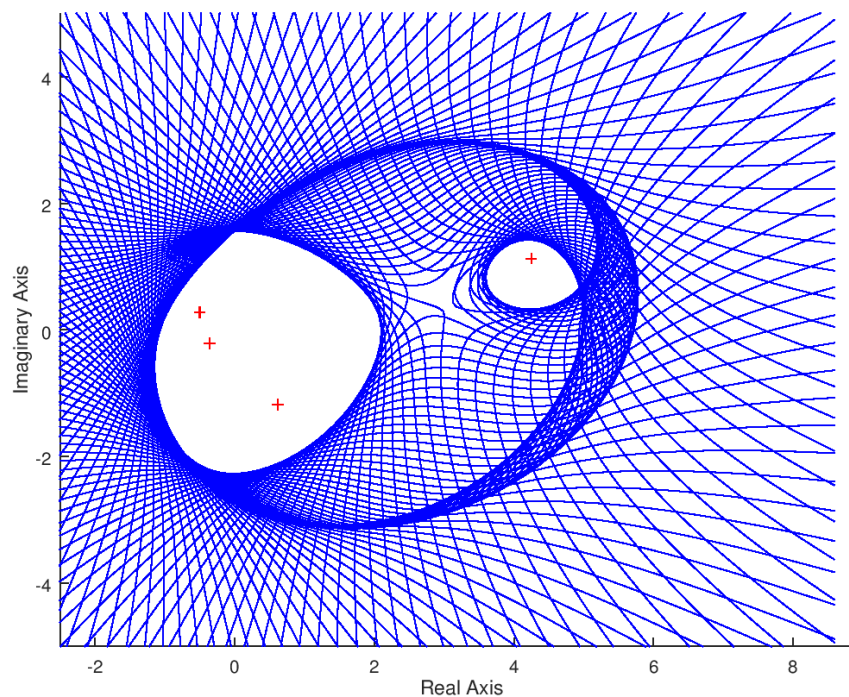
5.2 Σύγκριση MATLAB και GNU Octave

Ενδιαφέρον έχει η σύγκριση των λογισμικών που χρησιμοποιήθηκαν (GNU Octave και MATLAB). Και τα δύο αποδείχθηκαν κατάλληλα για τον σχεδιασμό του αριθμητικού πεδίου, του κελύφους $\Gamma(A)$ και της περιβάλλουσας $\mathcal{E}(A)$. Το MATLAB εκτέλεσε τους υπολογισμούς σε πολύ μικρότερο χρόνο από το GNU Octave.

Τα αποτελέσματα του GNU Octave για τον σχεδιασμό της περιβάλλουσας $\mathcal{E}(A)$ είναι αξιοπρόσεκτα, καθώς υπήρξαν εσφαλμένα αποτελέσματα για κάποιες στροφές σε κάποιους πίνακες. Για παράδειγμα, η σχεδίαση της περιβάλλουσας του πίνακα Toeplitz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & i \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ του Παραδείγματος 3.4.2 με 120 καμπύλες της μορφής $e^{-i\theta}\Gamma(e^{i\theta}A)$ είναι λανθασμένη, ενώ όταν χρησιμοποιηθούν 121 καμπύλες το πρόβλημα δεν συναντάται, όπως φαίνεται στα Σχήματα 5.1α', 5.1β'.



(α') Σχεδίαση με 120 καμπύλες.

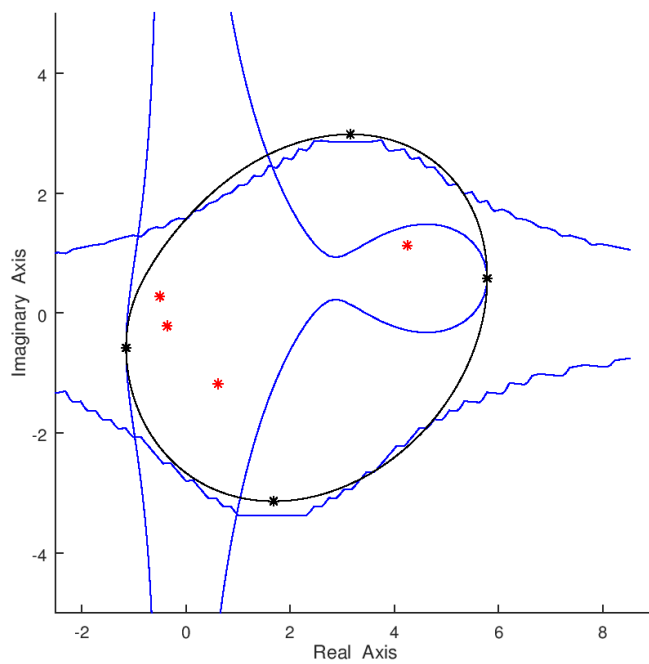


(β') Σχεδίαση με 121 καμπύλες.

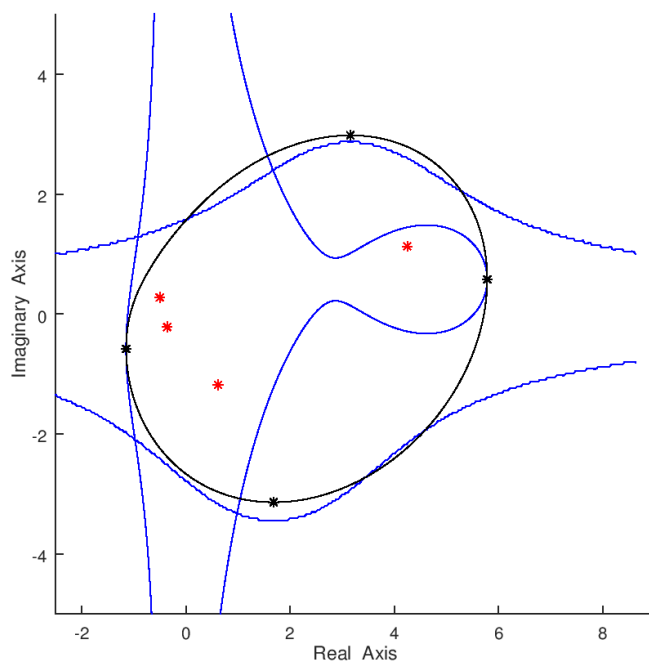
Σχήμα 5.1: Σχεδίαση της $\mathcal{E}(A)$ στο GNU Octave.

Το πρόβλημα αυτό εντοπίζεται στις στροφές $\Gamma(iA)$ και $\Gamma(-iA)$ και μόνο. Στα παρακάτω σχήματα, σχεδιάζονται τέσσερα κελύφη του πίνακα A , εκ των οποίων τα δύο προκύπτουν από τις προαναφερθείσες στροφές. Φαίνεται ότι ικανοποιητικά αποτελέσματα δε μπορούν να ληφθούν μόνο με την αλλαγή της διαμέρισης κατά τον υπολογισμό του κελύφους. Για διαμέριση με 120 βήματα τα αποτελέσματα είναι λανθασμένα (Σχήμα 5.2α'). Με 480 βήματα το πρόβλημα καλύπτεται αισθητικά, αλλά εξακολουθεί να υπάρχει. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.2β', τα κελύφη $\Gamma(iA)$ και $\Gamma(-iA)$, και το αριθμητικού πεδίο $F(A)$ (σχεδιασμένο με μαύρο χρώμα), δεν έχουν κοινές εφαπτόμενες στα αντίστοιχα σημεία $e^{-i\theta}(\delta_1(e^{i\theta}A) + iu(e^{i\theta}A))$ (σημειωμένα με '*' χρώματος μαύρου), ενώ ο υπολογισμός γίνεται ασύμφορος (χρόνος σχεδίασης 109.12 s έναντι 7.04 s). Η σχεδίαση των σημείων της μορφής $e^{-i\theta}(\delta_1(e^{i\theta}A) + iu(e^{i\theta}A))$, γίνεται με την προσθήκη της παρακάτω γραμμής κώδικα, στη γραμμή 46 του αρχείου `envelope.m`:

```
46 plot(real(exp(-i*theta)*(d1+i*u)), imag(exp(-i*theta)*(d1+i*u)), 'k*');
```



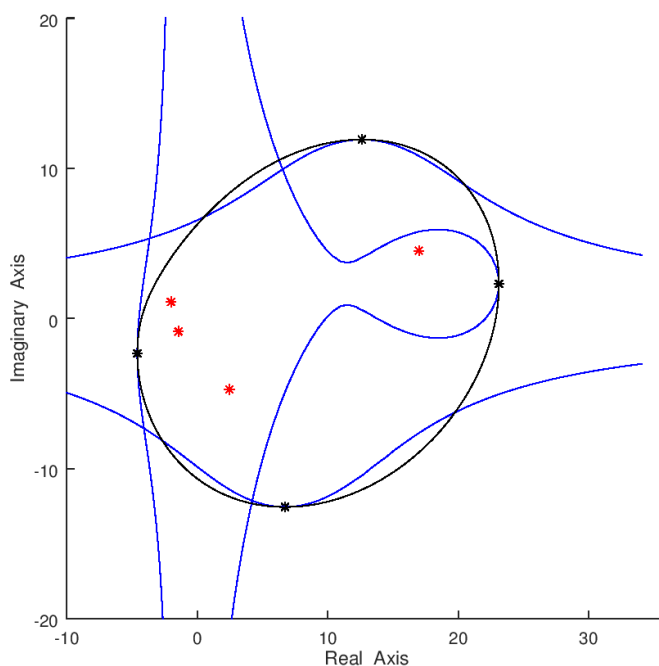
(α') Σχεδίαση με 120 βήματα.



(β') Σχεδίαση με 480 βήματα.

Σχήμα 5.2: Αλλαγή της διαμέρισης στις στροφές $\Gamma(iA)$ και $\Gamma(-iA)$ στο GNU Octave.

Ενδιαφέρον έχει πως επηρεάζει η 2-νόρμα του πίνακα τα αποτελέσματα. Έστω ο πίνακας $B = 4A$, με $\|B\|_2 = 28.886$, ενώ $\|A\|_2 = 7.2215$. Το αριθμητικό του πεδίο και οι αντίστοιχες στροφές του κελύφους φαίνονται στο Σχήμα 5.3. Η σχεδίαση πραγματοποιήθηκε με διαμέριση 120 βημάτων και το πρόβλημα δεν συναντάται.



Σχήμα 5.3: Οι στροφές $\Gamma(iB)$ και $\Gamma(-iB)$ στο GNU Octave .

Μετά από περαιτέρω διερεύνηση, το πρόβλημα εντοπίστηκε στη συνάρτηση `contour(...)`. Για την αποσφαλμάτωση, δοκιμάστηκε αρχικά η αλλαγή του ορίσμάτος της σε `contour(X, Y, real(exp(-i*theta)*Z'), [0 0], 'b')` η οποία έχει ως αποτέλεσμα να μη σχεδιάζονται οι στροφές $\Gamma(iA)$ και $\Gamma(-iA)$ στο GNU Octave. Παρόμοιο πρόβλημα παρουσιάστηκε και με την αλλαγή σε `contour(X, Y, imag(exp(-i*theta)*Z'), [0 0], 'b')`, η οποία έχει ως αποτέλεσμα να μη σχεδιάζονται οι στροφές $\Gamma(A)$ και $\Gamma(-A)$. Επίσης, λάθος αποτελέσματα λήφθηκαν και με την αλλαγή του τρίτου ορίσματος της συνάρτησης `contour()` σε `real(exp(-1i*theta)*Z')+imag(exp(-1i*theta)*Z')`, αυτή τη φορά στις στροφές με γωνίες $\pi/4$ και $5\pi/4$. Έτσι, αφού όλοι οι συνδυασμοί δίνουν λανθασμένα αποτελέσματα, αποφασίστηκε η εισαγωγή συνθηκών για τις δυο προβληματικές στροφές. Το επιπλέον κόστος της υπολογιστικής δύναμης είναι ελάχιστο, καθώς εκτελείται επιπλέον μόνο μια σύγκριση ανά σχεδιαζόμενο κέλυφος. Συνεπώς όλες οι απαιτούμενες αλλαγές στον πηγαίο κώδικα που εξασφαλίζουν την πλήρη συμβατότητα μεταξύ MATLAB και GNU Octave είναι οι εξής (περιλαμβάνεται ως σχόλιο και ο κώδικας για τη σχεδίαση

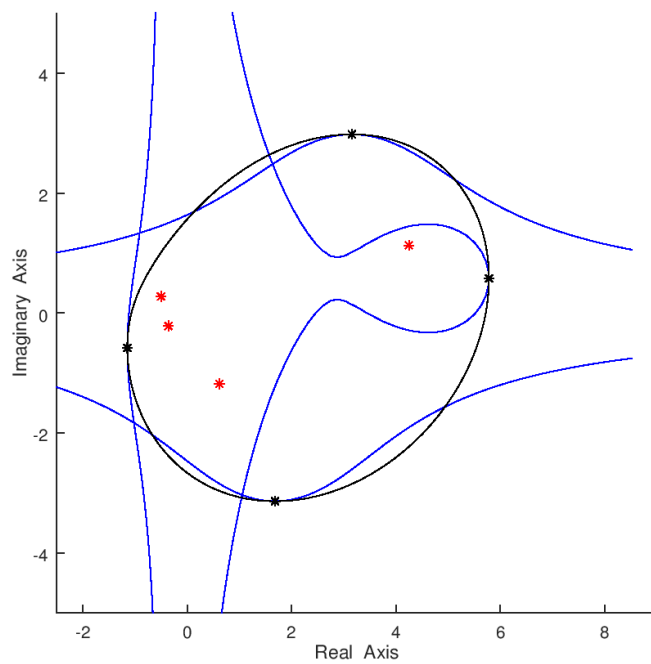
των σημείων της μορφής $e^{-i\theta}(\delta_1(e^{i\theta}A) + iu(e^{i\theta}A))$:

```

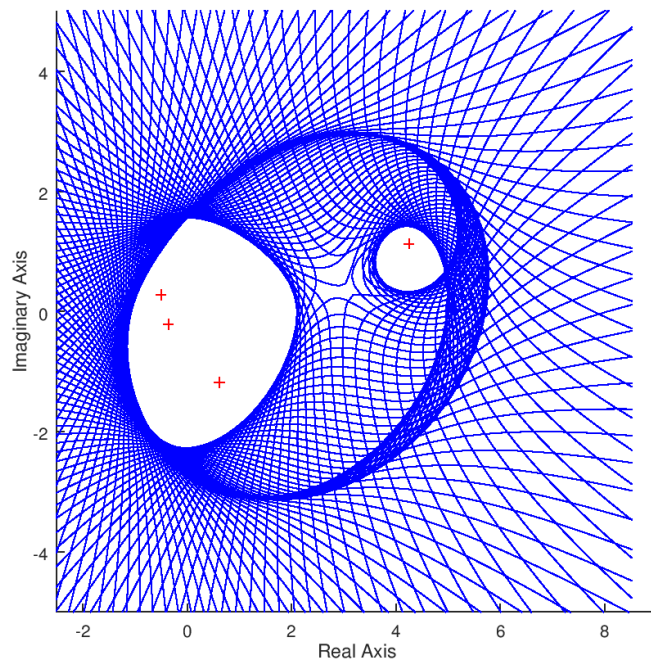
1 --- envelope.m timestamp
2 +++ envelope_octave.m timestamp
3 @@ -6,8 +6,8 @@
4 % Authors: Panayiotis Psarrakos and Michael Tsatsomeros.
5
6 figure, tic, hold on % The command tic-toc computes the execution time.
7 - M=moviein(t);
8 - for j=1:t, cshell(A,m,(2*pi/t)*(j-1)), M(:,j)=getframe; end
9 + %M=moviein(t);
10 + for j=1:t, cshell(A,m,(2*pi/t)*(j-1)), end %M(:,j)=getframe; end
11 sp(A), hold off, toc, xlabel('Real Axis'), ylabel('Imaginary Axis')
12
13 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
14 @@ -42,8 +42,12 @@
15 Z(I,J)=(d2-xxx)*((d1-xxx)^2+(u-yyy)^2)+(d1-xxx)*(v-u^2);
16 end, end
17 % Plot the shell (cubic curve).
18 - contour(X,Y,exp(-i*theta)*Z',[0 0], 'b')
19 -
20 + if(theta ~= pi/2) && (theta ~= 3*pi/2)
21 + contour(X,Y,real(exp(-i*theta)*Z'),[0 0], 'b');
22 + else
23 + contour(X,Y,imag(exp(-i*theta)*Z'),[0 0], 'b');
24 + end
25 +%plot(real(exp(-i*theta)*(d1+i*u)),imag(exp(-i*theta)*(d1+i*u)), 'k*');
26 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
27 function sp(A)
28 % The function 'sp(A)' plots the eigenvalues of a square

```

Φαίνεται ότι μετά από τις απαιτούμενες αλλαγές, το GNU Octave είναι ικανό να σχεδιάσει χωρίς το πρόβλημα όλους τους πίνακες. Ελέγχθηκε η σχεδίαση όλων των παραδειγμάτων που παρατέθηκαν στην παρούσα διπλωματική, ενώ στα Σχήματα 5.4α' και 5.4β', φαίνεται η σχεδίαση τεσσάρων κελυφών του πίνακα A , καθώς και η σχεδίαση της περιβάλλουσας μέσω 120 κελυφών μετά τις αλλαγές στον πηγαίο κώδικα, αντίστοιχα.



(α') Τα κελύφη για τις στροφές $\Gamma(A)$, $\Gamma(-A)$, $\Gamma(-iA)$, και $\Gamma(iA)$.



(β') Η περιβάλλουσα $\mathcal{E}(A)$, 120 κελύφη.

Σχήμα 5.4: Αποτελέσματα του GNU Octave μετά από τις αλλαγές του πηγαίου κώδικα.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Maria Adam and Michael J. Tsatsomeros. An eigenvalue inequality and spectrum localization for complex matrices. *Electron. J. Linear Algebra*, 15:239–250, 2006.
- [2] Hwa-Long Gau, Chi-Kwong Li, Yiu-Tung Poon, and Nung-Sing Sze. Higher rank numerical ranges of normal matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 32(1):23–43, 2011.
- [3] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [4] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. Topics in matrix analysis. *Cambridge University Press, Cambridge*, 37:39, 1991.
- [5] BW Levinger. An inequality for nonnegative matrices. In *Notices of the American Mathematical Society*, volume 17, page 260, 1970.
- [6] James S Milne. *Elliptic curves*. BookSurge, 2006.
- [7] Panayiotis J. Psarrakos and Michael J. Tsatsomeros. Bounds for levinger’s function of nonnegative almost skew-symmetric matrices. *Linear algebra and its applications*, 416(2-3):759–772, 2006.
- [8] Panayiotis J. Psarrakos and Michael J. Tsatsomeros. An envelope for the spectrum of a matrix. *Central European Journal of Mathematics*, 10(1):292–302, 2012.
- [9] Panayiotis J. Psarrakos and Michael J. Tsatsomeros. On the geometry of the envelope of a matrix. *Applied Mathematics and Computation*, 244:132–141, 2014.
- [10] Αικατερίνη Αρετάκη. *Ανωτέρου Βαθμού Αριθμητικά Πεδία μη Αρνητικών Πινάκων και Πολυωνυμικών Πινάκων*. PhD thesis, 2011.

- [11] Παναγιώτης Ι. Ψαρράκος. *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων*. Τομέας Μαθηματικών, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, 2015.