ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ: ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ RYSER

ΜΑΘΙΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ
Α.Μ. : 09101130

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΚΟΥΚΟΥΒΙΝΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ(Καθηγητής Ε.Μ.Π.)
ΣΤΕΦΑΝΕΑΣ ΠΕΤΡΟΣ
ΠΑΠΑΙΩΑΝΝΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ(Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.)
(επιβλέπων)

ΑΘΗΝΑ 2011

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες σε όσους συνέβαλαν στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας και συγκεκριμένα προς:

- Τον αναπληρωτή καθηγητή κ.Παπαϊωάννου Αλέξανδρο για τη δυνατότητα ανάληψης της διπλωματικής εργασίας , την συμβολή του και την αστείρευτη παροχή γνώσεων κατά τη διάρκεια όλων των ετών παραμονής μου στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
- Τους γονείς μου και όλους τους συμφοιτητές και φίλους για την συνολική τους συμπαράσταση

ΑΘΗΝΑ 2011

ΜΑΘΙΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή …………..…………………………………………………………………4

Κεφάλαιο 1^{ο} : ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ……………….….……......5

1.1 .ΟΡΙΣΜΟΣ……………………………………………………...…………5
1.2 .ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ....…………………………………………..…..6
1.3 .ΠΛΗΘΟΣ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ………………………………………8
1.4 .ΕΙΔΗ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ…………………….……………………...8

Κεφάλαιο 2^{ο} : ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ…………11

2.1 .ΟΡΙΣΜΟΣ………………………………...……………………….……11

2.2 .ΥΠΑΡΞΗ ΟΡΟΓΩΝΙΩΝ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ………….……..……11

2.3 .ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΤΑΞΗΣ κ ΚΑΙ BIB

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ…………………………………………………………….……12

2.4 .ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ

ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ……………………………………………….……18

2.5 .ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ……………………………………………………………..21

Κεφάλαιο 3^{ο} : ΘΕΩΡΗΜΑ RYSER……………………….…..………..28

3.1 .ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ……………………………...…….………………28

3.2 .ΘΕΩΡΗΜΑ RYSER……………………………………..……………..32

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ…………………………………...……………41

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το αντικείμενο της εν λόγω διπλωματικής εργασίας είναι η αναφορά διαφόρων θεωρημάτων για την ύπαρξη των ορθογώνιων Λατινικών τετραγώνων. Ακολουθεί μια ιστορική αναδρομή:

Το 1779 , ο L .Euler έθεσε έναν απλό μαθηματικό γρίφο ,λεγόμενο ως το ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ 36 ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΩΝ.36 αξιωματικοί επιλεγμένοι από έξι διαφορετικούς ιεραρχικούς βαθμούς και έξι διαφορετικών ταγμάτων στρατού(έναν από κάθε ιεραρχικό βαθμό από κάθε τάγμα)πρέπει να τοποθετηθούν σε ένα τετράγωνο έτσι ώστε σε κάθε οριζόντια και κάθετη γραμμή να υπάρξουν έξι αξιωματικοί από κάθε βαθμό και κάθε τάγμα. Καταγράφοντας μονάχα τους βαθμούς των αξιωματικών το τετράγωνο που αποκτάται είναι ένα Λατινικό τετράγωνο. Καταγράφοντας μόνο τα τάγματα είναι και πάλι ένα Λατινικό τετράγωνο . Αλλά τα δύο Λατινικά τετράγωνα όταν υπερτεθούν , τα ζευγάρια δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους , άρα δεν είναι ορθογώνια. Ο Euler κατάφερε να κατασκευάσει ζεύγη ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων για κάθε τάξη περιττού βαθμού και για κάθε τάξη διαιρέσιμη με το τέσσερα αλλά δεν κατάφερε να κατασκευάσει κανένα ζεύγος ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης 4κ+2 , κ≥0 όπου κ-ακέραιος. Προέβλεψε λοιπόν πως δεν υπάρχουν ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τέτοιας τάξης.

Το πρόβλημα αυτό απασχόλησε για πολλά χρόνια τους μαθηματικούς ώσπου το 1900 ο Tarry εξαντλώντας όλες τις δυνατές τοποθετήσεις απέδειξε ότι δεν υπάρχει λύση στο πρόβλημα και πως η εικασία του Euler είναι σωστή.

Πολύ αργότερα οι R.C.Bose , S.S.Shrikhande και E.T.Parker (1960) απέδειξαν ότι η εικασία του Euler ήταν λανθασμένη για όλες της τάξεις n της μορφής n=4k+2 εκτός από n=2 ή n=6παρέχοντας μια κατασκευαστική μέθοδο ζεύγους ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων για όλες αυτές τις τάξεις. Η απόδειξή τους ήταν μακροσκελής και εμπεριείχε έννοιες από τη θεωρία του πειραματικού σχεδιασμού (experimental design). Εντούτοις , υποκίνησε αδιαμφισβήτητα την περαιτέρω έρευνα στη δομή και τις ιδιότητες των Λατινικών τετραγώνων. Άλλο ένα κέντρο ήταν το αυξανόμενο ενδιαφέρον στη θεωρία του πεπερασμένου προβολικού επιπέδου (finite projective plane). Το πολύ γνωστό στον κόσμο , τελευταία Sudoku , είναι ένα ειδικό Λατινικό τετράγωνο.

<u>Κεφάλαιο 1^{ο} : Λατινικά Τετράγωνα</u>

1.1 .ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα Λατινικό τετράγωνο τάξης n είναι ένας πίνακας nxn με ακριβώς n διαφορετικά σύμβολα όπου κάθε σύμβολο εμφανίζεται μία φορά σε κάθε γραμμή και μία φορά σε κάθε στήλη.

Ένα παράδειγμα Λατινικού τετραγώνου τάξης 4 φαίνεται στο σχήμα 1.

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

Σχήμα 1

Ένας απλός τρόπος κατασκευής ενός Λατινικού τετραγώνου είναι η δημιουργία της πρώτης γραμμής τοποθετώντας τα σύμβολα σε τυχαία σειρά , και έπειτα η μετάθεση της πρώτης γραμμής προς τα δεξιά (ή τα αριστερά) κατά 1,2,…,n-1 θέσεις ώστε να δημιουργηθούν και οι υπόλοιπες n-1 γραμμές.

Ένα λατινικό τετράγωνο θα λέμε ότι είναι σε κανονική μορφή αν η πρώτη του γραμμή και στήλη είναι σε φυσική σειρά. Μπορούμε εύκολα να κανονικοποιήσουμε ένα Λατινικό τετράγωνο με αντιμεταθέσεις των γραμμών και των στηλών του. Για παράδειγμα το Λατινικό τετράγωνο του σχήματος 1 φαίνεται κανονικοποιημένο στο σχήμα 2 , αφού αντιμεταθέσαμε τη 2^{η} γραμμή με τη 4^{η}.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

Σχήμα 2

1.2 . ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ

Θεωρούμε το σύνολο S με τα n–στοιχεία 1,2,…, n . Ένα Λατινικό ορθογώνιο με στοιχεία 1,2,…,n είναι ένας rxn πίνακας

$$A=(a_{ij}) \quad , \quad i=1,2,\dots,r$$

$$j=1,2,\dots,n$$

με την απαίτηση κάθε γραμμή του A να είναι μια μετάθεση των στοιχείων του S και κάθε στήλη του A είναι μία r-μετάθεση των στοιχείων του S. Προφανώς , κάθε στήλη θα περιέχει διαφορετικά στοιχεία και ακόμη $r \leq n$.

Ένα Λατινικό ορθογώνιο είναι σε κανονική μορφή αν η πρώτη του γραμμή είναι η 1,2,…,n. Αν L(r,n) είναι το πλήθος των rxn Λατινικών ορθογωνίων και K(r,n) το πλήθος των Λατινικών ορθογωνίων σε κανονική μορφή τότε προφανώς L(r,n)=n!K(r,n).

- Τα 2xn ορθογώνια σε κανονική μορφή συμπίπτουν με τις αναδιατάξεις των n αντικειμένων κι έχουμε K(2,n)=D_n
- Επίσης οι αριθμοί U_n του προβλήματος των ζευγών του Lucas μετρούν τα 3xn Λατινικά ορθογώνια με δύο πρώτες γραμμές

$$\begin{pmatrix} 1,2,3,\dots,n \\ n,1,2,\dots,n-1 \end{pmatrix}$$

- Μία απλή αναφορά γίνεται στο ότι οι Erdos-Kaplansky(1946) βρήκαν τον παρακάτω ασυμπτωτικό τύπο:

  Αν $r<(logn)^{3/2}$ τότε $L(r,n)\sim n!^r\, e^{(-r/2)}$

  Και έκαναν την εικασία ότι ο τύπος ισχύει και για $r<n^{1/2}$, πράγμα το οποίο απέδειξε ο Yamamoto το 1951.

- Αν r=n το λατινικό ορθογώνιο ονομάζεται Λατινικό τετράγωνο τάξης n.

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα :

Αν έχουμε ένα rxn λατινικό ορθογώνιο τότε μπορούμε να το επεκτείνουμε σε ένα (r+1)xn Λατινικό ορθογώνιο και αν επαναλάβουμε τη διαδικασία σε ένα nxn Λατινικό τετράγωνο?

Η απάντηση είναι ότι αυτό γίνεται πάντα ,πράγμα το οποίο προκύπτει σαν άμεση συνέπεια του θεωρήματος του γάμου του P.Hall.

ΘΕΩΡΗΜΑ P.Hall

Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει λύση το πρόβλημα του γάμου είναι κάθε σύνολο κ αγοριών να γνωρίζει (αθροιστικά) τουλάχιστον κ κορίτσια ($1 \leq k \leq m$) όπου m το πλήθος των αγοριών.

Το πρόβλημα του γάμου: Αν έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο αγοριών και κάθε αγόρι γνωρίζει ορισμένα κορίτσια ποιους περιορισμούς πρέπει να έχουμε ώστε να καταφέρουμε τα αγόρια να παντρευτούν όλα έτσι ώστε κάθε αγόρι να παντρευτεί γνωστό του κορίτσι?

Η κατασκευή αυτή μας δίνει ένα όχι καλό κάτω φράγμα για το πλήθος L_n των Λατινικών τετραγώνων τάξης n.

Υπάρχουν n! το πλήθος 1xn Λατινικά ορθογώνια. Το καθένα από αυτά μπορεί να επεκταθεί με τουλάχιστον (n-1)! τρόπους σε λατινικό ορθογώνιο 2xn. Άρα υπάρχουν τουλάχιστον n!(n-1)! Λατινικά ορθογώνια τάξης 2xn. Το επιχείρημα αυτό επαναλαμβάνεται και φτάνουμε στο ότι :

$$L_n \geq n!(n-1)! \ldots 1!$$

Αν συμβολίσουμε με l_n το πλήθος των Λατινικών τετραγώνων n τάξης με την πρώτη γραμμή και στήλη σε κανονική μορφή έχουμε :

$$l_n \geq (n-2)!(n-3)! \ldots 1!$$

1.3 .ΠΛΗΘΟΣ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Το πλήθος των Λατινικών τετραγώνων τάξης n είναι n!(n-1)! φορές το πλήθος των κανονικοποιημένων Λατινικών τετραγώνων. Ο παρακάτω πίνακας μας πληροφορεί για τον ακριβή αριθμό των Λατινικών τετραγώνων σε κανονική μορφή μέχρι και τάξης 10.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

n	Κανονικοποιημένα λατινικά τετράγωνα τάξης n	Λατινικά τετράγωνα τάξης n
1	1	1
2	1	2
3	1	12
4	4	576
5	56	161280
6	9408	812851200
7	16942080	61479419904000
8	535281401856	108776032459082956800
9	377597570964258816	5524751496156892842531225600
10	7580721483160132811489280	9982437658213039871725064756920320000

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το πλήθος των Λατινικών τετραγώνων σε κανονική μορφή αυξάνεται δραματικά όσο αυξάνεται η τάξη n.

1.4 .ΕΙΔΗ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Τα είδη των λατινικών τετραγώνων είναι τα εξής :

- **Διαγώνιο Λατινικό τετράγωνο**(diagonal Latin square) τάξης n είναι ένα λατινικό τετράγωνο στο οποίο κανένα σύμβολο δεν εμφανίζεται πάνω από μία φορά σε οποιαδήποτε από τις δύο κύριες διαγωνίους του.
- Δύο λατινικά τετράγωνα τάξης n ονομάζονται **ορθογώνια** (orthogonal Latin squares) εάν η υπέρθεσή τους αποτελείται από n^2 διαφορετικά ζεύγη συμβόλων ή παρόμοια εάν η υπέρθεσή τους περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς

συνδυασμούς των συμβόλων των δύο Λατινικών τετραγώνων.

- K>2 Λατινικά τετράγωνα τάξης n ονομάζονται **αμοιβαίως ορθογώνια** (mutually orthogonal Latin squares) εάν είναι ανά δύο ορθογώνια.
- **Ορθογώνιο Λατινικό τετράγωνο με τον εαυτό του** (self-orthogonal Latin square) είναι ένα Λατινικό τετράγωνο ορθογώνιο με τον ανάστροφό του.
- Ένα **διπλό ορθογώνιο Λατινικό τετράγωνο με τον εαυτό του** (double self-orthogonal Latin square)είναι ένα Λατινικό τετράγωνο ορθογώνιο με τον ανάστροφό του και με τον ανάστροφο του ανάστροφού του. Ένα διπλό ορθογώνιο Λατινικό τετράγωνο με τον εαυτό του είναι ταυτόχρονα και διαγώνιο Λατινικό τετράγωνο.
- **Τέλειο Λατινικό τετράγωνο** (perfect Latin square) τάξης n^2 ,είναι ένα διαγώνιο Λατινικό τετράγωνο τάξης n^2 οποίο κάθε σύμβολο εμφανίζεται μία φορά σε κάθε κύριο υποτετράγωνο.

Το υποτετράγωνο S_{ij} ενός λατινικού τετραγώνου τάξης n^2 ορίζεται ως ένα nxn τετράγωνο του οποίου το πάνω αριστερά κελί έχει συντεταγμένες (i,j).

Το κύριο υποτετράγωνο S_{ij} ορίζεται ως το υποτετράγωνο για το οποίο ισχύει i=0modn και j=0modn

Το πολύ γνωστό σε όλους Sudokuείναι ένα τέλειο Λατινικό τετράγωνο τάξης 9 ή σπανιότερα 16 στο οποίο όμως δεν είναι προϋπόθεση η μη εμφάνιση κανενός πάνω από μία φορά σε οποιαδήποτε από τις δύο κύριες διαγωνίους του.

Επίσης τα ορθογώνια λατινικά τετράγωνα ονομάζονται και **Ελληνο-Λατινικά** τετράγωνα(Graecolatin square). Έστω ότι έχουμε δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα . Αν χρησιμοποιήσουμε στο δεύτερο από αυτά τα μικρά γράμματα του Ελληνικού αλφάβητου και γράψουμε τα δύο τετράγωνα μαζί ,τότε αυτό που προκύπτει είναι το Ελληνο-λατινικό τετράγωνο.

Τα δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα είναι :

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

A	D	C	B
C	B	A	D
B	C	D	A
D	A	B	C

Δίνεται παρακάτω το Ελληνο-λατινικό τετράγωνο που σχηματίζεται από τα προηγούμενα λατινικά τετράγωνα τάξης 4 :

Aα	Bδ	Cγ	Dβ
Bγ	Aβ	Dα	Cδ
Cβ	Dγ	Aδ	Bα
Dδ	Cα	Bβ	Aγ

Αν το πρόβλημα του Euler αφορούσε 16 αξιωματικούς , 4 από κάθε εθνικότητα και από κάθε βαθμό , το παραπάνω Ελληνο-λατινικό τετράγωνο θα ήταν ο ζητούμενος σχηματισμός , όπου στα έθνη για παράδειγμα έχουμε αντιστοιχίσει τα λατινικά γράμματα και στους βαθμούς τα ελληνικά γράμματα.

Κεφάλαιο 2^o : Ορθογώνια Λατινικά Τετράγωνα

2.1 .ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Δύο Λατινικά τετράγωνα με τον ίδιο αριθμό γραμμάτων ,θα λέγονται (αμοιβαία) **ορθογώνια** (mutually orthogonal) ,αν στις θέσεις όπου στο πρώτο τετράγωνο είναι ένα συγκεκριμένο γράμμα , στο δεύτερο βρίσκονται όλα τα γράμματα.

Ένα παράδειγμα ορθογώνιων Λατινικών τετραγώνων τάξης 3 φαίνεται στο σχήμα 3.

L_1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

L_2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Υπέρθεση L_1 , L_2

(1,1)	(2,2)	(3,3)
(2,3)	(3,1)	(1,2)
(3,2)	(1,3)	(2,1)

Σχήμα 3.

2.2 .ΥΠΑΡΞΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

- **Τάξη 1 :** Το μοναδικό Λατινικό τετράγωνο τάξης 1 είναι ορθογώνιο με τον εαυτό του (self-orthogonal) αλλά δεν παρουσιάζει καμία πρακτική σημασία.
- **Τάξη 2 :** Ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 2 δεν υπάρχουν . Υπάρχουν

δύο Λατινικά τετράγωνα τάξης 2 το $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ και το $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ που όμως δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους διότι η υπέρθεσή τους δεν σχηματίζει τα (1,1) και (2,2).

- **Τάξη n** (όπου n–περιττός) : Υπάρχουν Λατινικά τετράγωνα περιττής τάξης και είναι γενικά εύκολο να κατασκευαστούν.
- **Τάξη 6 :** Όπως έγινε αναφορά και στην εισαγωγή , ο Euler από το 1779 προέβλεψε ότι δεν υπάρχουν Λατινικά τετράγωνα τάξης 6 και η εικασία του τεκμηριώθηκε το 1900 από τον G.Tarry.
- **Τάξη n** (όπου n-άρτιος και διάφορος του 2 και του 6) : Έχει αποδειχθεί η ύπαρξη Λατινικών τετραγώνων τέτοιας τάξης αλλά είναι και γενικά δύσκολη η κατασκευή τους.

2.3 .ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΤΑΞΗΣ κ ΚΑΙ BIB ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ

Τα αμοιβαία ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα μπορούν πάντοτε να γραφούν σε κανονική μορφή χωρίς να διαταραχθεί η σχέση ορθογωνιότητας. Πράγματι αρκεί να μετονομάσουμε τα γράμματα του ενός με το άλλο , έτσι ώστε στην πρώτη γραμμή να είναι τα γράμματα με αλφαβητική σειρά. Π.χ. για να μετατρέψουμε σε κανονική μορφή τα αμοιβαία ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα που δίνονται παρακάτω κάνουμε στο πρώτο τον μετασχηματισμό :

C→A , D→B , A→C , B→D , E→E

Και στο δεύτερο μετασχηματισμό :

A→A , D→B , C→C , E→D , B→E

C	D	A	B	E		A	D	C	E	B
D	A	B	E	C		C	E	B	A	D
A	B	E	C	D		B	A	D	C	E
B	E	C	D	A		D	C	E	B	A
E	C	D	A	B		E	B	A	D	C

Τα μετασχηματισμένα τώρα σε κανονική μορφή ορθογώνια μεταξύ τους Λατινικά τετράγωνα είναι :

A	B	C	D	E
B	C	D	E	A
C	D	E	A	B
D	E	A	B	C
E	A	B	C	D

A	B	C	D	E
C	D	E	A	B
E	A	B	C	D
B	C	D	E	A
D	E	A	B	C

Το πρόβλημα των 36 αξιωματικών σχετίζεται με την ύπαρξη ορθογώνιων Λατινικών τετραγώνων . Αν υπήρχε λύση στο πρόβλημα και συμβολίσουμε τις εθνικότητες και τους βαθμούς των έξι αξιωματικών με γράμματα , τότε θα παίρναμε δύο Λατινικά τετράγωνα τάξης 6 ορθογώνια μεταξύ τους. Η μη ύπαρξη λύσης του προβλήματος των 36 αξιωματικών αποδεικνύει επομένως ότι δεν υπάρχουν ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 6. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα : «Πόσα Λατινικά τετράγωνα τάξης κ υπάρχουν , τέτοια ώστε ανά δύο να είναι αμοιβαία ορθογώνια ?»

Το παρακάτω θεώρημα σχετίζεται άμεσα με αυτό το ερώτημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Υπάρχουν το πολύ κ-1 ορθογώνια μεταξύ τους ανά δύο Λατινικά τετράγωνα τάξης κ.

Απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχουν κ διακεκριμένα ορθογώνια μεταξύ τους ανά δύο Λατινικά τετράγωνα τάξης κ , τα οποία συμβολίζονται L_1, L_2 ,…, L_k . Μετασχηματίζουμε πρώτα τα τετράγωνα (αν χρειάζεται) , έτσι ώστε να είναι σε κανονική μορφή και μετονομάζουμε τα γράμματα ώστε να αντιστοιχούν στους αριθμούς 1,2,3,…,κ .Έτσι σε καθένα από τα τετράγωνα στη θέση (1,j) θα υπάρχει ο αριθμός j . Τα κ τετράγωνα είναι ανά δύο ορθογώνια και στη θέση (1,1) έχουν τον αριθμό 1 . Άρα στη θέση (2,1) θα πρέπει να υπάρχει αριθμός διάφορος του 1 σε οποιοδήποτε από τα Λατινικά τετράγωνα , διότι αλλιώς θα υπήρχε το ίδιο σύμβολο στην πρώτη στήλη.

Θα δείξουμε τώρα ότι στη θέση (2,1) πρέπει να υπάρχουν διαφορετικά σύμβολα . Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι τα τετράγωνα L_m και L_n έχουν στη θέση (2,1) τον ίδιο αριθμό , έστω τον λ. Τα ίδια τετράγωνα όμως έχουν στη θέση (1,λ) τον αριθμό λ λόγω της τοποθέτησής τους. Επομένως σε δύο από τις θέσεις του τετραγώνου L_m στις οποίες υπάρχει το λ , στο άλλο L_n δε βρίσκονται διαφορετικά σύμβολα , όπως όφειλαν λόγω της ορθογωνιότητας .

Άρα όλα τα τετράγωνα έχουν στη θέση (2,1) διαφορετικά σύμβολα . Τα τετράγωνα όμως είναι σε πλήθος κ , ενώ τα διαθέσιμα σύμβολα είναι κ-1 (τα διάφορα του 1) . Από την αρχή της κατασκευής προκύπτει τώρα ότι θα υπάρχουν δύο τετράγωνα με το ίδιο σύμβολο στη θέση (2,1) , το οποίο είναι άτοπο όπως αποδείχθηκε πριν. Επομένως δεν υπάρχουν κ ανά δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης κ , άρα θα υπάρχουν μέχρι το πολύ κ-1 ,όπως διατυπώνεται στο θεώρημα 1 . ■

Όπως αναφέρθηκε υπάρχουν περιπτώσεις όπως για κ=2,6 που δεν υπάρχουν αμοιβαία ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα . Εύλογο είναι λοιπόν το ερώτημα σε ποιες περιπτώσεις ,(για ποια κ δηλαδή) μπορεί να κατασκευαστεί το μέγιστο πλήθος ορθογωνίων ανά δύο Λατινικών τετραγώνων που καθορίστηκε στο προηγούμενο θεώρημα . Οι BIB σχεδιασμοί δίνουν μία απάντηση σε αυτό το ερώτημα .

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Αν υπάρχει ο (κ^2,κ^2+k,k+1,k, 1) BIB σχεδιασμός , τότε υπάρχουν κ-1 ορθογώνια ανά δύο Λατινικά τετράγωνα και αντίστροφα .

Απόδειξη :

Για την απόδειξη του θεωρήματος , περιγράφουμε την κατασκευή των κ-1 ορθογωνίων ανά δύο Λατινικών τετραγώνων από τον BIB σχεδιασμό που δόθηκε στη διατύπωση του θεωρήματος.

Η ύπαρξη αυτού του σχεδιασμού , ισοδυναμεί με την ύπαρξη του πεπερασμένου αφφινικού ή ομοπαραλληλικού επιπέδου τάξης κ. Το επίπεδο αυτό έχει κ+1 δέσμες παραλλήλων γραμμών , κάθε μία από τις οποίες έχει από κ παράλληλες γραμμές . Επειδή κάθε γραμμή περιέχει ακριβώς κ σημεία , έχουμε ότι κ παράλληλες γραμμές κάθε δέσμης θα περιέχουν όλα τα κ^2 διαφορετικά σημεία του επιπέδου τάξης κ .

Θεωρούμε στην συνέχεια μία από τις δέσμες και αντιστοιχούμε το γράμμα A σε όλα τα σημεία της πρώτης γραμμής , το γράμμα B σε όλα τα σημεία της δεύτερης γραμμής , το C στα σημεία της τρίτης γραμμής κ . λ . π . έως το K στα σημεία της κ-τάξης γραμμής . Στην συνέχεια αντιστοιχούμε στα σημεία των άλλων δεσμών τα σημεία με τα γράμματα που καθορίστηκαν πριν . Με τον τρόπο αυτό από κάθε δέσμη θα σχηματισθεί ένα τετράγωνο με τα πρώτα κ γράμματα του Λατινικού αλφαβήτου . Από τα κ τετράγωνα που θα σχηματισθούν έτσι τα κ-1 θα είναι τα ζητούμενα ορθογώνια ανά δύο λατινικά τετράγωνα ενώ το ένα είτε θα ταυτίζεται με κάποιο από τα άλλα , είτε δε θα είναι καν Λατινικό τετράγωνο αφού θα έχει σε κάθε στήλη ακριβώς το ίδιο γράμμα . ■

Παράδειγμα 1

Θα εφαρμόσουμε την προηγούμενη κατασκευή στην περίπτωση κ=3 .

Λύση :

Θεωρούμε τον (9,12,4,3,1) BIB σχεδιασμό :

B_1 ={1,2,3}	B_5={2,5,8}	B_9={3,4,8}
B_2={4,5,6}	B_6={3,6,9}	B_{10}={1,6,8}
B_3={7,8,9}	B_7={1,5,9}	B_{11}={3,5,7}
B_4={1,4,7}	B_8={2,6,7}	B_{12}={2,4,9}

Οι παράμετροι του σχεδιασμού αυτού ταυτίζονται με τις παραμέτρους του αφφινικού επιπέδου τάξης 3 . Διαπιστώνεται εύκολα ότι οι δέσμες των παραλλήλων γραμμών του είναι :

1	2	3	1	4	7	1	5	9	1	6	8
4	5	6	2	5	8	2	6	7	3	5	7
7	8	9	3	6	9	3	4	8	2	4	9

Σύμφωνα με τα προηγούμενα στους αριθμούς 1,2,3,…,9 αντιστοιχούν με την σειρά τα γράμματα

A B C C A B B C A

Άρα οι παραπάνω δέσμες θα δώσουν αντίστοιχα τα τετράγωνα :

A	B	C		A	B	C
C	A	B		C	A	B
B	C	A		B	C	A

Η Τρίτη δέσμη δεν αντιστοιχεί σε Λατινικό τετράγωνο. ■

Τώρα θα ασχοληθούμε με την αντίστροφη κατασκευή , την κατασκευή δηλαδή ενός BIB σχεδιασμού από την ύπαρξη κ-1 ορθογώνιων Λατινικών τετραγώνων. Όπως προκύπτει από τα προηγούμενα ο σχεδιασμός θα περιέχει κ^2 σύμβολα που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι οι πρώτοι κ^2 φυσικοί αριθμοί . Σχηματίζουμε τα πρώτα κ μπλοκ του ζητούμενου σχεδιασμού , θεωρώντας ότι το πρώτο περιέχει τους πρώτους κ αριθμούς , το δεύτερο τους επόμενους κ . λ . π . Τα επόμενα κ μπλοκ σχηματίζονται ως εξής : Στο πρώτο θεωρούμε ότι είναι τα σύμβολα που αφήνουν υπόλοιπο 1 στη διαίρεση με το κ , στο δεύτερο όσα αφήνουν υπόλοιπο 2 , κ . ο . κ .

Για τα υπόλοιπα μπλοκ χρησιμοποιούμε τα δοσμένα Λατινικά τετράγωνα . Πράγματι επιθέτοντας κάθε ένα από τα ορθογώνια ανά δύο Λατινικά τετράγωνα στο τετράγωνο που σχηματίζουν τα κ πρώτα μπλοκ που ήδη έχουμε σχηματίσει ορίζουμε τα μπλοκ θεωρώντας ότι περιέχουν εκείνα τα σύμβολα που αντιστοιχούν στο ίδιο γράμμα .

Η κατασκευή φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα :

Παράδειγμα 2

Θα εφαρμόσουμε την προηγούμενη κατασκευή για κ=4 αυτή τη φορά . Θα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή τα τρία αμοιβαία ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 4 :

A	B	C	D		A	D	C	B		A	C	D	B
B	A	D	C		C	B	A	D		B	D	C	A
C	D	A	B		B	C	D	A		C	A	B	D
D	C	B	A		D	A	B	C		D	B	A	C

Σχηματίζουμε πρώτα τα 8 μπλοκ του σχεδιασμού όπως γράψαμε προηγουμένως :

B_1 : 1 2 3 4 B_5 : 1 5 9 13

B_2 : 5 6 7 8 B_6 : 2 6 10 14

B_3 : 9 10 11 12 B_7 : 3 7 11 15

B_4 : 13 14 15 16 B_8 : 4 8 12 16

Επιθέτοντας τώρα το τετράγωνο των 16 αριθμών που σχηματίζουν τα πρώτα τέσσερα μπλοκ στο πρώτο από τα τρία Λατινικά τετράγωνα , σχηματίζονται άλλα τέσσερα μπλοκ του σχεδιασμού . Πράγματι παρατηρούμε ότι στις θέσεις που υπάρχουν τα A στο Λατινικό τετράγωνο υπάρχουν οι αριθμοί 1 , 6 , 11 , 16 . Αυτοί θεωρούνται ότι συνιστούν το B_9 .

Όμοια στις θέσεις των B υπάρχουν οι αριθμοί 2 , 5 , 12 , 15 οι οποίοι συνιστούν το B_{10} κ . λ . π . Επαναλαμβάνουμε το ίδιο και για τα άλλα δύο μπλοκ και τελικά έχουμε :

B_9 : 1	6	11	16		B_{13} : 1	7	12	14		B_{17} : 1	8	10	15
B_{10} : 2	5	12	15		B_{14} : 4	6	9	15		B_{18} : 4	5	11	14
B_{11} : 3	8	9	14		B_{15} : 3	5	10	16		B_{19} : 2	7	9	16
B_{12} : 4	7	10	13		B_{16} : 2	8	11	13		B_{20} : 3	6	12	13

Σημειώνουμε ότι θα βρίσκαμε τον ίδιο σχεδιασμό αν επιθέταμε τα Λατινικά τετράγωνα στο τετράγωνο που σχηματίζουν τα μπλοκ B_5 , B_6 , B_7 , B_8 . ■

Η προηγούμενη μέθοδος κατασκευής BIB σχεδιασμών με τη βοήθεια Λατινικών τετραγώνων οφείλεται στον Yates . Γι’ αυτό πολλές φορές αναφερόμαστε στους σχεδιασμούς αυτούς ως σχεδιασμούς του Yates .

2.4 .ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

- **Ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα**

Τα Λατινικά τετράγωνα μπορούν εύκολα να παραστήσουν ένα ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα με 2n ομάδες σε 2n-1 γύρους . Πράγματι ορίζουμε τον 2n x 2n πίνακα A=(a_{ij}) ως εξής :

$$a_{ii}=2n \quad , \quad a_{ij}=k \qquad i\neq j$$

όπου η ομάδα i και η ομάδα j θα παίξουν μεταξύ τους την ημέρα κ (στον γύρο κ) .

Αφού κάθε ομάδα δίνει έναν αγώνα σε κάθε γύρο έπεται ότι κάθε γραμμή (και στήλη) του Α θα περιέχει όλους τους ακέραιους 1,2,…,2n ακριβώς μία φορά , άρα ο Α είναι ένα Λατινικό τετράγωνο .

Το ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα με 2n=8 ομάδες :

Ημέρα 1 :	∞ 1 ,	27 ,	36 ,	45
2 :	∞ 2 ,	31 ,	47 ,	56
3 :	∞ 3 ,	42 ,	51 ,	67
4 :	∞ 4 ,	53 ,	62 ,	71
5 :	∞ 5 ,	64 ,	73 ,	12
6 :	∞ 6 ,	75 ,	14 ,	23
7 :	∞ 7 ,	16 ,	25 ,	34

παρίστανται από το Λατινικό τετράγωνο :

8	5	2	6	3	7	4	1
5	8	6	3	7	4	1	2
2	6	8	7	4	1	5	3
6	3	7	8	1	5	2	4
3	7	4	1	8	2	6	5
7	4	1	5	2	8	3	6
4	1	5	2	6	3	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8

όπου θέσαμε 8 αντί για ∞ . Παρατηρούμε ότι η διαγώνιος είναι σταθερά ίση με 8 και $a_{ij}=a_{ji}$ για κάθε ζεύγος i , j , δηλαδή έχουμε συμμετρία ως προς τη διαγώνιο . Αλλά και αντίστροφα , κάθε συμμετρικό Λατινικό τετράγωνο τάξης 2n με σταθερή κύρια διαγώνιο μπορεί να δώσει ένα επιλύσιμο ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα για 2n ομάδες σε 2n-1 γύρους .

Γεωμετρικά οι αγώνες κάθε γύρου παριστάνονται από ένα κανονικό n-1-γωνο(τις n-1 ομάδες) , όπου στο κέντρο του θέτουμε την n-στη ομάδα (την ∞)

·**1**

7· - - - - - - - - - - - - - - - - - ·2

·∞

6· - - - - - - - - - - - - - - - - - ·3

5· - - - - - - - - ·4

Οι αγώνες του $1^{ου}$ γύρου είναι οι ∞1 και οι «κάθετες» χορδές τη διεύθυνση αυτή των 27 , 36 , 45 . Το ίδιο ισχύει και για τους άλλους γύρους .

Το ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα με 2n ομάδες (σε 2n-1 γύρους) είναι ένας επιλύσιμος (2n , 2 , 1) σχεδιασμός και μπορεί να χωριστεί σε 2n-1 κλάσεις (τους γύρους) όπου οι ομάδες παίζουν όλες ανά δύο μία μόνο φορά μεταξύ τους .

<u>Εφαρμογή Λατινικών τετραγώνων με ιστορικό ενδιαφέρον</u>

Ο Palluel το 1778 χρησιμοποίησε το Λατινικό τετράγωνο :

A	B	C	D
D	A	B	C
C	D	A	B
B	C	D	A

Ένα πρόβατο από την κάθε ράτσα είχε κάποια δίαιτα από 4 διαφορετικές δίαιτες . Αν οι γραμμές αντιστοιχούν σε ράτσες και οι στήλες σε δίαιτες τότε το τετράγωνο μας δείχνει πώς να επιλέξουμε 4 πρόβατα για σφάξιμο σε 4 διαφορετικές μέρες A , B , C , D όπου κάθε μέρα θα σφάξουμε 4 πρόβατα όλα διαφορετικής ράτσας και διαφορετικής δίαιτας .

2.5 .ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.1

Έστω A_1 , A_2 , … , A_t ένα σύνολο t το πλήθος ορθογώνιων Λατινικών τετραγώνων τάξης n≥3 . Τότε t≤n-1 .

Απόδειξη :

Έστω A_1 , A_2 , … , A_t ένα σύνολο ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης n.

Γράφουμε και τα t το πλήθος Λατινικά τετράγωνα σε κανονική μορφή , δηλαδή όλα θα έχουν σαν πρώτη γραμμή την 1,2,…,n . Η μετάθεση αυτή δεν επηρεάζει σε τίποτα την αμοιβαία ορθογωνιότητα των τετραγώνων . Ας θεωρήσουμε τώρα το στοιχείο στη θέση (2,1) των t τετραγώνων . Κανένα από τα t αυτά στοιχεία δε μπορεί να είναι ο αριθμός 1 διότι τότε η υπέρθεση θα μας έδινε δύο φορές το ζεύγος (1,1) . Επίσης δύο απ’ αυτά τα στοιχεία δε μπορούν να συμπίπτουν για τον ίδιο λόγο . Άρα θα έχουμε

n-1 το πολύ αμοιβαία ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα . ■

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι το φράγμα του θεωρήματος 2.5.1 μπορεί να επιτευχθεί όταν το n είναι δύναμη πρώτου αριθμού .

Στην απόδειξη θεωρούμε γνωστό ότι ένα πεπερασμένο σώμα p^a όπου p πρώτος και a φυσικός . Αλλά και αντίστροφα για κάθε πρώτο p και φυσικό a υπάρχει ένα μόνο σώμα με p^a στοιχεία το ονομαζόμενο σώμα Galois GF (p^a) . Για a=1 το σώμα αυτό συμπίπτει με το Z_p . Τούτο είναι ένα από τα ελάχιστα που δημοσίευσε ο μεγάλος μαθηματικός E.Galois (1811-1832) εν ζωή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.2

Αν n≥3 και n=p^a (όπου p πρώτος και a φυσικός) τότε υπάρχει ένα σύνολο n-1 ορθογώνιων Λατινικών τετραγώνων τάξης n .

Απόδειξη :

Θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο A_1 , A_2 , … , A_n με n=p^a αμοιβαία ορθογώνιων Λατινικών τετραγώνων .

Έστω το σώμα Galois με p^a στοιχεία , οπότε GF(p^a)={b_1 , b_2 , … , b_n} με n=p^a και έστω '+' και '·' οι δύο πράξεις του σώματος , b_n το ουδέτερο στοιχείο της δεύτερης πράξης (το πολλαπλασιαστικό ουδέτερο στοιχείο) και b της πρώτης .

Θα μπορούσαμε επίσης να θέσουμε b_1=1 , b_n=0 . Κατασκευάζουμε ένα σύνολο A_1,A_2 , … , A_{n-1} nxn τετραγώνων με στοιχεία που να δίνονται από τις n-1 το πλήθος σχέσεις :

$$a_{ij}{}^{(e)}=b_e \cdot b_i + b_j \qquad \text{i , j =1,2,…,n-1,n}$$

$$\text{e=1,2,…,n-1}$$

- Καθένα από τα n-1 τετράγωνα είναι ένα Λατινικό τετράγωνο . Πράγματι ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο ίσα στοιχεία στην i-τάξης γραμμή του A_e , δηλαδή ότι

$$a_{ij}{}^{(e)}=a_{ik}{}^{(e)} \qquad \text{για κάποια j και k .}$$

Αλλά τότε $b_e \cdot b_i + b_j = b_e \cdot b_i + b_k$

Δηλαδή έχουμε b_j=b_k και j=k .

Ομοίως αν το A_e έχει δύο ίσα στοιχεία σε κάποια στήλη , δηλαδή

$a_{ji}{}^{(e)}$=$a_{ki}{}^{(e)}$ για κάποια j και k .Αλλά τότε $b_e \cdot b_j$+b_i=$b_e \cdot b_k$+b_i

Οπότε έχουμε : $b_e \cdot b_j$ = $b_e \cdot b_k$

κι επειδή το στοιχείο $b_e \neq b_n$ (διότι e=1,2,…,n-1) το σώμα θα περιέχει το αντίστροφο του b_e οπότε πολλαπλασιάζοντας με αυτό έχουμε $b_j = b_k$ άρα πάλι j=k .

- Τα n-1 Λατινικά τετράγωνα A_1 , A_2 , … , A_{n-1} είναι και ορθογώνια .

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι κατά την υπέρθεση των A_e και A_f με e≠f είχαμε :

$$(a_{ij}{}^{(e)} , a_{ij}{}^{(f)}) = (a_{ke}{}^{(e)} , a_{ke}{}^{(f)})$$

Δηλαδή $a_{ij}{}^{(e)}$=$a_{ke}{}^{(e)}$ και $a_{ij}{}^{(f)}$=$a_{ke}{}^{(f)}$

Οπότε έχουμε : $b_e \cdot b_i + b_j = b_e \cdot b_k + b_e$ (1)

και

$b_f \cdot b_i + b_j = b_f \cdot b_k + b_e$ (2)

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) (όπου υπενθυμίζουμε ότι η αφαίρεση είναι η πρόσθεση του προσθετικού αντίστροφου στοιχείου) έχουμε :

$$(b_e - b_f) \cdot b_i = (b_e - b_f) \cdot b_k$$

Αλλά αφού $b_e \neq b_f$ έχουμε $b_e - b_f \neq b_n$ το σώμα θα περιέχει το αντίστροφο του $b_e - b_f$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με αυτό έχουμε :

$$b_i = b_k \quad \Leftrightarrow \quad i=k .$$

Η σχέση (1) γίνεται : $b_e \cdot b_i + b_j = b_e \cdot b_i + b_e$

οπότε έχουμε : $b_j = b_e \Leftrightarrow$ j = e .

Άρα καταλήγουμε στο ότι το σύνολο A_1, A_2 , … , A_{n-1} με n=p^a που κατασκευάσαμε είναι πράγματι ένα σύνολο αμοιβαία ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων . ■

Όταν τώρα ο αριθμός n δεν είναι δύναμη πρώτου αποτελεί ένα πρόβλημα το οποίο είναι ακόμη ανοιχτό , αλλά το επόμενο θεώρημα δίνει ένα κάτω φράγμα για το πλήθος των Λατινικών τετραγώνων σ' ένα ορθογώνιο σύνολο .

Το παράδειγμα που ακολουθεί αποτελεί την κατασκευή στην οποία στηρίζεται η απόδειξη του θεωρήματος 2.5.3 που θα ακολουθήσει .

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 3 (τα μόνα δύο από το θεώρημα 2.5.2)

και :

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 4 (δύο από τα 3 από το θεώρημα 2.5.1) . Το τρίτο είναι :

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον 4x4 πίνακα $(a_{11}^1\ , B_1\ )$ με στοιχεία διατεταγμένα ζεύγη :

$$(a_{11}^1\ , B_1\ ) = \begin{pmatrix} (a_{11}^1, b_{11}^1) & (a_{11}^1, b_{12}^1) & (a_{11}^1, b_{13}^1) & (a_{11}^1, b_{14}^1 \\ (a_{11}^1, b_{21}^1) & (a_{11}^1, b_{22}^1) & (a_{11}^1, b_{23}^1) & (a_{11}^1, b_{24}^1) \\ (a_{11}^1, b_{31}^1) & (a_{11}^1, b_{32}^1) & (a_{11}^1, b_{33}^1) & (a_{11}^1, b_{34}^1) \\ (a_{11}^1, b_{41}^1) & (a_{11}^1, b_{42}^1) & (a_{11}^1, b_{43}^1) & (a_{11}^1, b_{44}^1) \end{pmatrix}$$

Άρα στο παράδειγμά μας έχουμε :

$$(a_{11}^1\ , B_1\ ) = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (1,2) & (1,1) & (1,4) & (1,3) \\ (1,3) & (1,4) & (1,1) & (1,2) \\ (1,4) & (1,3) & (1,2) & (1,2) \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τώρα τον 12x12 πίνακα C_1 που αποτελείται από 9 μπλοκ :

$$C_1 = \begin{pmatrix} (a_{11}^1\ , B_1\ ) & (a_{12}^1, B_1) & (a_{13}^1, B_1) \\ (a_{21}^1, B_1) & (a_{22}^1, B_1) & (a_{23}^1, B_1) \\ (a_{31}^1, B_1) & (a_{32}^1, B_1) & (a_{33}^1, B_1) \end{pmatrix}$$

Ενώ χρησιμοποιώντας στη δεύτερη θέση των ζευγών τον πίνακα B_2 μπορούμε να κατασκευάσουμε τον 12x12 πίνακα C_2 .

Έτσι κατασκευάζουμε δύο 12x12 πίνακες , οι οποίοι μάλιστα από το θεώρημα 2.5.3 αποτελούν ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 12 από δύο από τα τρία ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 4 . Παρατηρούμε ότι το θεώρημα 2.5.2 δεν εξυπηρετεί διότι ο αριθμός 12 δεν είναι δύναμη πρώτου . Βέβαια ο αριθμός 2 απέχει πολύ από τον n-1=12-1=11 . $\blacksquare$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.3

Αν υπάρχει ένα σύνολο r ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης n_1 και ένα σύνολο πάλι r ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης n_2 , τότε υπάρχει ένα σύνολο r ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης $n_1 \cdot n_2$.

Απόδειξη :

Έστω A_1 , A_2 , A_3 , … , A_r ένα σύνολο r ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης n_1 και B_1 , B_2 , B_3 , … , B_r ένα σύνολο r ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης n_2 . Κατασκευάζουμε ένα σύνολο r τετραγώνων C_1 , C_2 , … , C_r τάξης $n_1 \cdot n_2$:

$$C_e = \begin{pmatrix} (a_{11}^e, B_e) & (a_{12}^e, B_e) & \dots & (a_{1n_1}^e, B_e) \\ (a_{21}^e, B_e) & (a_{22}^e, B_e) & \dots & (a_{2n_1}^e, B_e) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{n_11}^e, B_e) & (a_{n_12}^e, B_e) & \dots & (a_{n_1n_1}^e, B_e) \end{pmatrix}$$

όπου e=1,2,…,r και (a_{ij}^e , B_e) ένας n_2 x n_2 πίνακας διατεταγμένων ζευγών όπου στην τομή της κ γραμμής του και της 1ης στήλης του είναι το ζεύγος (a_{ij}^e , b_{kl}^e) για

k=1,2,…, n_2 και l=1,2,…, n_2 .

- Οι πίνακες C_e=1,2,…,r είναι Λατινικά τετράγωνα διότι από την κατασκευή τους οποιαδήποτε δύο στοιχεία στην ίδια γραμμή ή στήλη διαφέρουν είτε στην πρώτη είτε στη δεύτερη συντεταγμένη .
- Θα δείξουμε ότι τα r το πλήθος Λατινικά τετράγωνα C_e αποτελούν ορθογώνιο σύνολο .

Πράγματι αν για τα Λατινικά τετράγωνα C_e και C_f είχαμε :

$$(a_{ij}^e , b_{kl}^e) = (a_{pq}^e, b_{st}^e)$$

και

$$(a_{ij}^f , b_{kl}^f) = (a_{pq}^f , b_{st}^f)$$

τότε η πρώτη εξίσωση δίνει $a_{ij}^e = a_{pq}^e$ και $b_{kl}^e = b_{st}^e$

και η δεύτερη εξίσωση δίνει a_{ij}^{f} = a_{pq}^{f} και b_{kl}^{f} = b_{st}^{f}

αλλά επειδή τα A_e και A_f είναι ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα έχουμε i=p και j=q ενώ επειδή τα B_e και B_f είναι ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα k=s και l=t. ■

Πόρισμα :

Έστω n = $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ η ανάλυση σε πρώτους παράγοντες του τυχόντος θετικού ακέραιου n (όπου p_i διαφορετικοί πρώτοι και a_i φυσικοί) . Έστω r το ελάχιστο των κ παραστάσεων ($p_1^{a_1}$ -1) , ($p_2^{a_2}$ -1) , … , ($p_k^{a_k}$ -1) . Τότε υπάρχουν r το πλήθος ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης n .

Απόδειξη :

Από το θεώρημα 2.5.2 θα υπάρχει ένα σύνολο $p_1^{a_1}$ -1 ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης $p_1^{a_1}$, ένα σύνολο $p_2^{a_2}$ -1 ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης $p_2^{a_2}$, … , κι ένα σύνολο $p_k^{a_k}$ -1 ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης $p_k^{a_k}$.

Ας πάρουμε r το πλήθος από τα ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα του καθενός από τα κ σύνολα . Αν το r είναι το ελάχιστο μία τέτοια εκλογή επιτυγχάνεται και για τα κ σύνολα . Αλλά τότε από το θεώρημα 2.5.3 έχουμε ένα σύνολο r ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης n . ■

Αν στην ανάλυση του n έχουμε ότι ο εκθέτης του παράγοντα 2 είναι 0 ή ≥2 τότε r≥2 και από το πόρισμα που προαναφέραμε θα έχουμε την ύπαρξη δύο ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης n .

Αν όμως ο εκθέτης του 2 είναι 1 τότε r=1 και το θεώρημα δε βγάζει συμπέρασμα. Δηλαδή αν n≠2mod4 (n:6,10,14,…) τότε έχουμε μία από τις γνωστότερες εικασίες της Συνδυαστικής κι ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματά της .

Υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 6 ? Η ερώτηση πρωτοτέθηκε από τον Euler με τη μορφή του περίφημου προβλήματος των 36 αξιωματικών . Καθένα από τα έξι διαφορετικά συντάγματα έστω τα a , b , c , d , e , f έχει έξι αξιωματικούς διαφορετικών βαθμών έστω 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 . Είναι δυνατόν οι 36 αυτοί αξιωματικοί να τοποθετηθούν σε έναν 6x6 σχηματισμό έτσι ώστε η κάθε γραμμή και η κάθε στήλη του σχηματισμού να περιέχει έναν μόνο αξιωματικό από κάθε βαθμό και από κάθε σύνταγμα (σύμφωνα με την παράδοση η ίδια η Μεγάλη Αικατερίνη ,στην αυλή της οποίας ζούσε ο Euler ,του ζήτησε τον σχηματισμό αυτό) . Αν ο καθένας από τους 36 αξιωματικούς περιγράφεται από το ζεύγος (αριθμός , γράμμα) όπου η πρώτη συντεταγμένη περιγράφει το βαθμό του και η δεύτερη το σύνταγμά του , τότε το πρόβλημα του Euler ανάγεται στο να κατασκευάσουμε ένα ζεύγος ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης 6 .

Ο Euler το 1782 έκανε την εικασία ότι δεν υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 6 , αλλά και ότι δεν υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης n=2mod4 .

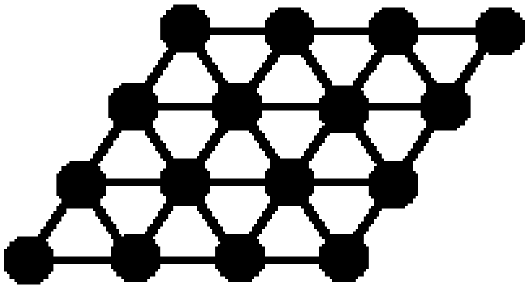
Το δεύτερο μέρος της εικασίας έχει να κάνει με την απόδειξη των Bose , Shrikhande και Parker το 1960 που θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο , οι οποίοι απέδειξαν ότι ισχύει το αντίθετο από ότι αναμενόταν και από ότι απέδειξε ο Tarry στην ειδική περίπτωση n=6 .

Κεφάλαιο $3^{ο}$:Θεώρημα Ryser

3.1 .ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

3.1.1 Sharadchandra Shrikhande Shankar

Ο Sharadchandra Shrikhande Shamar (γεννημένος στις 19 Οκτωβρίου του 1917) είναι ένας Ινδός μαθηματικός με αναγνωρισμένα επιτεύγματα στη συνδυαστική . Είναι ξεχωριστός για το έργο του , όπου ανακάλυψε μαζί με RC Bose και T.Parker ότι για n=2mod4 και n>6 υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης n . Αυτό όμως έδωσε αρνητική απάντηση στην περίφημη εικασία που πραγματοποιήθηκε από τον Leonhard Euler το 1782 ότι δεν υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης n=2mod4 . Η ειδικότητά του ήταν στην συνδυαστική και στους στατιστικούς σχεδιασμούς . Το γράφημα του Shrikhande χρησιμοποιείται στους στατιστικούς σχεδιασμούς και είναι το παρακάτω :



Γράφημα Shrikhande

Ο Shrikhande πήρε το διδακτορικό του το 1950 από το πανεπιστήμιο της Βόρειας Καρολίνας στο Τσάπελ Χιλ , υπό τη διεύθυνση του RC Bose . Δίδαξε σε διάφορα πανεπιστήμια των ΗΠΑ και της Ινδίας . Ήταν καθηγητής των μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Bonaras Hindu και ιδρυτής του τμήματος των μαθηματικών του Πανεπιστημίου της Βομβάης έως ότου αποσύρθηκε το 1978 . Ο γιος του είναι καθηγητής της συνδυαστικής στο Central Michigan University .

3.1.2 Ernest Tilden Parker

Ο Ernest Tilden Parker είναι επίτιμος καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Οχάιο. Όπως και ο Shrikhande έτσι και ο Parker είναι γνωστός για την ανακάλυψη πως υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τάξης n=2mod4 , το οποίο διέψευσε την εικασία του Euler από το 1782 . Είναι επίσης γνωστός (με KB Reid) για τη διάψευση της εικασίας σχετικά με τα πρωταθλήματα από τους Erdos και Moser . Ο Parker έλαβε το διδακτορικό του για το έργο του «On Quadruply Transitive Groups» στο Ohio State University το 1957 . Επιβλέπων του ήταν ο Marshall Hall,Jr .

3.1.3 Raj Chandra Bose

RC Bose

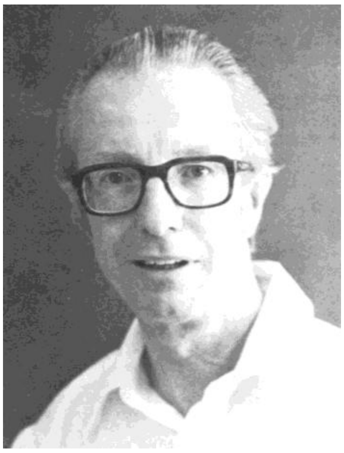
Ο Raj Chandra Bose (19 Ιουνίου 1901 – 31 Οκτωβρίου 1987) ήταν Ινδός μαθηματικός και είναι γνωστός για τη δουλειά του στη θεωρία σχεδιασμών και στη θεωρία των κωδικών διόρθωσης σφαλμάτων όπου οι κώδικες BCH έχουν εν μέρει το όνομά του .

Επίσης είναι γνωστός για τη δουλειά του μαζί με τους SS Shrikhande και T.Parker για την ανακάλυψη ότι υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης n=2mod4 που απέδειξε αρνητικά την εικασία του Euler .

Ο Bose γεννήθηκε στο Hoshangabad της Ινδίας και ήταν ο πρώτος από τα πέντε αδέρφια του . Έχασε νωρίς τους γονείς του και σε πολύ δύσκολες συνθήκες συνέχισε να μελετά μέχρι που ήρθε πρώτος στις εξετάσεις στα μαθηματικά στο πανεπιστήμιο της Καλκούτας .Βρήκε δουλειά ως λέκτορας στο Κολλέγιο Asutosh στην Καλκούτα και κατάφερε να δημοσιεύσει ορισμένες εργασίες για τη διαφορική γεωμετρία των κυρτών καμπυλών .

Ο Bose στην ακαδημαϊκή του ζωή είχε πλήρη απασχόληση στο Ινδικό Στατιστικό Ινστιτούτο , και το 1940 πήγε στο πανεπιστήμιο της Καλκούτας , όπου το 1945 έγινε επικεφαλής του τμήματος της Στατιστικής .

3.1.4 Herbert John Ryser



Herbert John Ryser

Ο Herbert John Ryser (28 Ιουλίου 1923 , Milwaukee , Wisconsin – 12 Ιουλίου 1985 , Pasadena , California) ήταν καθηγητής των μαθηματικών και θεωρείται ως ένα από τις σημαντικότερες μορφές στην Συνδυαστική στον 20^{ο} αιώνα .

Ο Ryser γεννήθηκε στην οικογένεια του Fred και Edna (Huels) Ryser . Έλαβε το BA (1945) ,MA (1947) και Ph.D (1948) από το πανεπιστήμιο του Wisconsin .Η διατριβή του διδακτορικού του «Ορθολογικοί Διανυσματικοί Χώροι» εποπτευόταν από τους CJ Everett και Cyrus C.MacDuffee . Μετά το διδακτορικό του , πέρασε ένα έτος στο Princeton στο Institute for Advanced Study και στην συνέχεια πήγε στο Ohio State University .Το 1962 πήρε καθηγεσία στο Syracuse University και το 1967 μετακόμισε στο Caltech .

Ο Ryser συνέβαλε στη θεωρία των συνδυαστικών σχεδιασμών , στα πεπερασμένα συστήματα , στις λειτουργίες συνδυαστικής και σε πολλά άλλα θέματα στην Συνδυαστική . Για πολλά χρόνια υπηρέτησε ως συντάκτης των περιοδικών της Συνδυαστικής ,της Γραμμικής Άλγεβρας και της Άλγεβρας .

3.2 .ΘΕΩΡΗΜΑ RYSER

Οι διάσημοι μαθηματικοί Bose , Shrikhande και Parker απέδειξαν ότι :

« Για n=2mod4 και n>6 υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης n».

Η απόδειξη αυτή είναι πολύ μακροσκελής και πολύπλοκη γι' αυτό θα δώσουμε μία απλή κατασκευή στην ειδική περίπτωση n=10mod12 , η οποία οφείλεται στον H.J.Ryser . Πριν από αυτό θα αποδείξουμε το παρακάτω λήμμα .

Λήμμα

Για n≥3 και t≥2 ένα σύνολο t ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης n ισοδυναμεί με έναν n^2 x t+2 πίνακα :

(A_{ij}) i=1,2,…, n^2

j=1,2,…,t+2

όπου a_{ij} ϵ {1,2,…,n} και οι γραμμές κάθε n^2 x 2 υποπίνακα του A είναι τα n^2 διατεταγμένα ζεύγη του συνόλου {1,2,…,n} .

Απόδειξη :

Έστω ο πίνακας A . Μεταθέτουμε τις γραμμές του έτσι ώστε τα στοιχεία των δύο πρώτων στηλών να είναι τα ζεύγη (1,1) , (1,2) , … , (1,n) , … , (n,1) , (n,2) , … , (n,n). Αυτό είναι δυνατό αφού έχουμε n^2 γραμμές , όσες και τα ζεύγη .

Ακολούθως για e=3,4,…,t+2 ορίζουμε έναν nxn πίνακα A_e ως εξής :

Η πρώτη γραμμή του A_e συμπληρώνει τα πρώτα n στοιχεία της στήλης e του πίνακα A , η δεύτερη γραμμή του A_e συμπληρώνει τα στοιχεία της στήλης e του A από τη γραμμή n+1 ως τη γραμμή 2n κ . ο . κ . ως την τελευταία γραμμή του A_e η οποία συμπληρώνει τα τελευταία n στοιχεία της στήλης e του A .

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11}^e & a_{12}^e & a_{1n}^e \\ a_{n1}^e & a_{n2}^e & a_{nn}^e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_{11}^e \\ a_{12}^e \\ \vdots \\ a_{1n}^e \\ a_{21}^e \\ \vdots \\ a_{2n}^e \\ \vdots \\ a_{n1}^e \\ \vdots \\ a_{nn}^e \end{matrix}$$

Αλλά τότε οι στήλες A_3 , A_4 , A_5 , … , A_{t+2} αποτελούν ένα σύνολο t ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης n . Η στήλη 1 του A μας εξασφαλίζει ότι οι πίνακες A_e δεν έχουν δύο ίσα στοιχεία σε κάποια γραμμή , ενώ η στήλη 2 μας εξασφαλίζει ότι οι πίνακες A_e δεν έχουν δύο ίσα στοιχεία σε κάποια στήλη .

Επίσης για e≠f τα Λατινικά τετράγωνα A_e και A_f είναι ορθογώνια από την κατασκευή των στηλών e και f του A . Η αντίστροφη πρόταση αποδεικνύεται επίσης με το ίδιο επιχείρημα . ■

Σύμφωνα με τα προηγούμενα ακολουθεί το παράδειγμα :

<u>Παράδειγμα</u>

Δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 3 μας δίνουν τον 9x4 πίνακα A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Τρία ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 4 μας δίνουν τον 16x5 πίνακα A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ RYSER

«Έστω n=10mod12 . Τότε υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης n». Παρατηρούμε λοιπόν ότι το Θ.Ryser δίνει τις τιμές n = 10,22,34,46,… τιμές οι οποίες περιλαμβάνονται στο θεώρημα των Bose , Shrikhande , Parker . Γι’ αυτό λοιπόν και αποτελεί μία ειδική περίπτωση αυτού του θεωρήματος .

Απόδειξη :

Έστω ότι ο ακέραιος m είναι τέτοιος ώστε να υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης m . Για i=0,1,…,2m ορίζουμε το διάνυσμα :

A_i = (i,i,…,i)

B_i = (i+1,i+2,…,i+m)

C_i = (i-1,i-2,…,i-m)

Το καθένα από τα διανύσματα αυτά έχει m το πλήθος συντεταγμένες και οι συντεταγμένες είναι ακέραιοι κατά μέτρο 2m+1 .

Σχηματίζουμε τα έξι διανύσματα για κάθε i με στοιχεία τις διαφορές των ομωνύμων συντεταγμένων των τριών διανυσμάτων πάντα mod2m+1 , δηλαδή :

D = A_i - B_i = (2m,2m-1,…,m+1) με m συντεταγμένες

D_1 = B_i - A_i = (1 , 2 , … , m) με m συντεταγμένες

E = A_i - C_i = (1 , 2 , … , m) με m συντεταγμένες

E_1 = C_i - A_i = (2m,2m-1,…,m+1) με m συντεταγμένες

F = B_i - C_i = (2 , 4 , … , 2m) με m συντεταγμένες

F_1 = C_i - B_i = (2m-1,2m-3,…,1) με m συντεταγμένες

Τώρα κατασκευάζουμε από αυτά τα έξι διανύσματα για κάθε i τα τρία διανύσματα με m(2m+1) συντεταγμένες :

A = (A_0 , A_1 , … , A_{2m}) = (0 , 0 , … , 0 , 1 , 1 , … , 1 , … , 2m , 2m , … , 2m)

B = (B_0 , B_1 , … , B_{2m}) = (1 , 2 , … , m , 2 , 3 , … , m+1 , … , 0 , 1 , … , m-1)

C = (C_0 , C_1 , … , C_{2m}) = (2m , 2m-1 , … , m+1 , … , 2m-1 , 2m-2 , … , m)

Μετά σχηματίζουμε τα έξι διανύσματα με συντεταγμένες τις διαφορές mod2m+1 ,δηλαδή έχουμε:

A – B = (D , D , … , D)   με m(2m+1) συντεταγμένες

B – A = (D_1 , D_1 , … , D_1)   με m(2m+1) συντεταγμένες

A – C = (E , E , … , E)   με m(2m+1) συντεταγμένες

C – A = (E_1 , E_1 , … , E_1)   με m(2m+1) συντεταγμένες

B – C = (F , F , … , F)   με m(2m+1) συντεταγμένες

C – B = (F_1 , F_1 , … , F_1)   με m(2m+1) συντεταγμένες

Έστω τώρα X = (x_1 , x_2 , … , x_m) μία μετάθεση των m στοιχείων {x_1 , x_2 , … , x_m} . Κατασκευάζουμε το διάνυσμα Y = (X , X , … , X) όπου οι συντεταγμένες

του είναι 2m+1 φορές η μετάθεση X , δηλαδή το διάνυσμα Y έχει συνολικά m(2m+1) συντεταγμένες όπως και τα A , B , C μόνο που τα στοιχεία του Y ανήκουν στο σύνολο { x_1 , x_2 , … , x_m } .

Από τα A , B , C και Y κατασκευάζουμε τον πίνακα G με 4 γραμμές και 4m(2m+1) στήλες που έχει τη μορφή :

$$G = \begin{pmatrix} A & B & C & Y \\ B & A & Y & C \\ C & Y & A & B \\ Y & C & B & A \end{pmatrix}$$

Έστω G_1 ένας 2 x 4m(2m+1) υποπίνακας του G . O G_1 θα περιέχει υποχρεωτικά σαν υποπίνακα κάποιον από τους :

$$\begin{pmatrix} A & Y \\ Y & A \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} B & Y \\ Y & B \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C & Y \\ Y & C \end{pmatrix}$$

- τον πρώτο αν επιλέξουμε ο G_1 να έχει π.χ. την $1^η$ και την $4^η$ γραμμή του G .
- το δεύτερο αν επιλέξουμε ο G_1 να έχει π.χ. την $1^η$ και την $3^η$ γραμμή του G .
- τον τρίτο αν επιλέξουμε ο G_1 να έχει π.χ. την $1^η$ και τη $2^η$ γραμμή του G .

Εφόσον ο G_1 περιέχει τον υποπίνακα $\begin{pmatrix} A & Y \\ Y & A \end{pmatrix}$ θα περιέχει και τις στήλες :

$\begin{pmatrix} i \\ x_j \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} x_j \\ i \end{pmatrix}$ με i = 0,1,…,2m(mod2m+1)

j = 1,2,…,m

Αλλά επίσης ο G_1 περιέχει μαζί με τον $\begin{pmatrix} A & Y \\ Y & A \end{pmatrix}$ και τον υποπίνακα $\begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$, μαζί με τον $\begin{pmatrix} B & Y \\ Y & B \end{pmatrix}$ τον $\begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix}$ και μαζί με τον $\begin{pmatrix} C & Y \\ Y & C \end{pmatrix}$ τον $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι αν i≠k τότε το i-k (mod2m+1) είναι συντεταγμένη του D ή του D_1. Επίσης του E ή του E_1 και του F ή του F_1 .

Αν για παράδειγμα η διαφορά i-k (mod2m+1) είναι μία συντεταγμένη του D τότε η διαφορά i-k (mod2m+1) εμφανίζεται 2m+1 φορές στο διάνυσμα A–B που αποτελείται από 2m+1 φορές το D . Αλλά οι θέσεις της διαφοράς i-k (mod2m+1) στο A-B είναι τέτοιες ώστε ο πίνακας G_1 περιέχει μία στήλη της μορφής $\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}$.

Το ίδιο επιχείρημα ισχύει αν η διαφορά i-k (mod2m+1) είναι μία συντεταγμένη του D_1 , E κ.ο.κ. Άρα ο πίνακας G_1 περιέχει μία στήλη της μορφής $\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}$ για όλα τα ζεύγη i≠k με i,k=0,1,…,2m (mod2m+1) .

Στην αρχή της απόδειξης όμως θεωρήσαμε ότι ο ακέραιος m είναι τέτοιος ώστε να υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης m . Θεωρώ τον πίνακα τάξης 4xm^2 με στοιχεία τα x_1 , x_2 , … , x_m τέτοιο ώστε ο ανάστροφος του H΄ να ικανοποιεί το λήμμα που αναφέραμε προηγουμένως .

Τώρα κατασκευάζουμε τον πίνακα Z που έχει τη μορφή :

$$G = \begin{pmatrix} & & 0,1,\dots,2m \\ & & 0,1,\dots,2m \\ G & H & 0,1,\dots,2m \\ & & 0,1,\dots,2m \end{pmatrix}$$

O G είναι τάξης 4x4m(2m+1)

O H είναι τάξης 4xm^2

προσθέσαμε και τις 4 γραμμές 0,1,…,2m άρα ο Z έχει 4 γραμμές και 4x4m(2m+1)+ m^2+2m+1 = $(3m+1)^2$ στήλες .

Θεωρούμε τώρα τις στήλες ενός 2x$(3m+1)^3$ υποπίνακα του Z οι οποίες :

1. **1.** Θα ανήκουν στο κομμάτι του Z που ανήκει στο G άρα θα είναι της μορφής όπως είδαμε πριν :

i. $\binom{i}{x_j}$ και $\binom{x_j}{i}$ με i = 0,1,…,2m(mod2m+1)

j = 1,2,…,m

ii. $\binom{i}{k}$ με i≠k και i,k=0,1,…,2m (mod2m+1)

2. Θα ανήκουν στο κομμάτι του Z που ανήκει στο H άρα θα είναι της μορφής :

$\binom{x_i}{x_j}$ i , j ϵ 1,2,…,m.

3. Θα ανήκουν στο τρίτο κομμάτι του Z άρα θα είναι της μορφής :

$\binom{i}{i}$ με i = 0,1,…,2m.

Τα στοιχεία του Z [και του 2x$(3m+1)^2$ υποπίνακά του] θα είναι της μορφής 0,1,…,2m και x_1 , x_2 , … , x_m .

Άρα κάθε 2x$(3m+1)^2$ υποπίνακας του Z αποτελείται από στοιχεία της μορφής 0,1,…,2m και x_1 , x_2 , … , x_m άρα συνολικά 3m+1 στοιχεία και περιέχει και τα $(3m+1)^2$ δυνατά διατεταγμένα ζεύγη από το (3m+1) σύνολο {0,1,…,2m, x_1 , x_2 , … , x_m} . Ο ανάστροφος πίνακας Z΄ του Z δηλαδή ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου λήμματος για t=2 και n=3m+1 . Άρα θα υπάρχουν δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης n=3m+1 που θα τα διαβάσουμε από τις δύο τελευταίες στήλες του ανάστροφου Z΄ του πίνακα Z .(Μία στήλη μας δίνει ένα Λατινικό τετράγωνο). Αν πάρουμε m=3(mod4) θα έχουμε n=10(mod12) . ■

Παράδειγμα

Για m=3 η παραπάνω κατασκευή μας δίνει τα εξής δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα τάξης 10 . Η κατασκευή που οδηγεί σε πίνακα Z΄ τάξης 100x4 στις δύο τελευταίες στήλες του οποίου θα διαβάσουμε τα δύο ορθογώνια Λατινικά τετράγωνα A και B προφανώς απαιτεί χρήση υπολογιστή .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 4 & x_3 & x_2 & x_1 & 1 & 2 & 3 \\ x_1 & 1 & 0 & 6 & 5 & x_3 & x_2 & 2 & 3 & 4 \\ x_2 & x_1 & 2 & 1 & 0 & 6 & x_3 & 3 & 4 & 5 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & x_3 & x_2 & x_1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & x_3 & x_2 & x_1 & 5 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & x_3 & x_2 & x_1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & x_2 & x_3 & x_1 \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 1 & x_1 & x_2 & x_3 & 2 & 4 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & x_1 & x_2 & x_3 & 3 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & x_1 & x_2 & x_3 & 5 & 0 & 2 \\ x_3 & 5 & 0 & 2 & 4 & x_1 & x_2 & 6 & 1 & 3 \\ x_2 & x_3 & 6 & 1 & 3 & 5 & x_1 & 0 & 2 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & x_3 & x_1 & x_2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο πίνακες δεν είναι ο ένας ανάστροφος του άλλου . Ο κάτω δεξιά 2x2 υποπίνακας καταστρέφει την συμμετρία .

Ακόμη δεν έχει κατασκευαστεί ένα σύνολο 3 ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης 10 . Αν συμβολίσουμε με N(n) το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος ορθογωνίων Λατινικών τετραγώνων τάξης n ισχύει :

$$N(n) \geq 3 \quad \text{για κάθε} \quad n \neq 2,3,6 \text{ και } 10$$

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. **Cameron P.J. , Hirschfeld , J.W.P and Hughes , D.R. (editors) , (1981) .**

   Finite geometries and designs . Cambridge University Press , Cambridge .

2. **Hall , M. Jr. , (1986) .** Combinatorial theory , second edition . J. Wiley and Sons , New York .

3. **Hughes , D.R. and Piper , F.C. (1985).** Design theory . Cambridge University Press , Cambridge.

4. **Lam , C. , Thiel , L. and Swiercz , S , (1989) .** The non-existence of a finite projective plane of order 10 . Canad. J. Math. 41 , 1117 – 1123.

5. **Ryser , H.J. (1963) .** Combinatorial Mathematics .The Carus Mathematical Monographs , N. 14, The Mathematical Association of America , Rahway , New Jersey .

6. **Street , A.P. and Street, D.J. , (1987).** Combinatorics of experimental design. Oxford University Press , New York.

7. **Κουκουβίνος – Παπαϊωάννου .** Θεωρία Σχεδιασμών

8. **Brendan D. Mckay , Ian M. Wanless .** On the number of Latin squares