

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ”

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΡΙΣΙΜΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Διπλωματική εργασία της **Κουγιούρη Ελένης**

Επιβλέπων : Γεώργιος Σμυρλής, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018

Εισαγωγή

Η *Θεωρία κρίσιμων σημείων* σχετίζεται με *μεταβολικά* προβλήματα συνοριακών τιμών, δηλ. με προβλήματα των οποίων οι λύσεις αποτελούν κρίσιμα σημεία κάποιου διαφορίσιμου συναρτησιακού πάνω από κατάλληλο χώρο Banach (συναρτησιακό ενέργειας). Το συναρτησιακό ενέργειας ενδέχεται να μην έχει ολικά ακρότατα (ακόμη κι αν είναι κάτω ή άνω φραγμένο), οπότε φυσιολογικά αναζητά κανείς κρίσιμα σημεία που είναι τοπικά ακρότατα ή σαγματικά. Μέχρι και τις αρχές του εικοστού αιώνα, οι μαθηματικοί μελετούσαν την ύπαρξη ολικών ελαχίστων για συναρτησιακά που είναι κάτω φραγμένα. Ο Birkhof (1917) πρώτος μελέτησε την ύπαρξη κρίσιμων σημείων για συναρτησιακά που δεν είναι κάτω φραγμένα, με χρήση μεθόδων τύπου min-max. Πιο συστηματικά εργάστηκαν προς αυτή την κατεύθυνση τη δεκαετία του '30 οι Ljusternik-Schnirelmann και Morse στην περίπτωση συναρτησιακών ορισμένων σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Τη δεκαετία του '60, οι θεωρίες των παραπάνω ερευνητών επεκτάθηκαν και στην άπειρη διάσταση από τους Palais και Smale. Σε αντιστάθμισμα της έλλειψης τοπικής συμπάγειας, οι Palais και Smale εισήγαγαν μια ιδιότητα συμπάγειας πάνω στο υπό μελέτη συναρτησιακό, γνωστή στη βιβλιογραφία ως *συνθήκη Palais-Smale*. Η ερευνητική τους δουλειά άνοιξε το δρόμο για τη μοντέρνα Θεωρία κρίσιμων σημείων της οποίας χαρακτηριστικό αποτέλεσμα είναι το *Θεώρημα Mountain Pass* που οφείλεται στους Ambrosetti-Rabinowitz (1973).

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια ανάδειξης μιας σειράς βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων της Θεωρίας κρίσιμων σημείων, καθώς κι επιλεγμένων εφαρμογών τους. Συνδυάζοντας παλαιότερα κλασικά αποτελέσματα της μη Γραμμικής Συναρτησιακής Ανάλυσης και της Τοπολογίας με νεότερα, όπως το *Θεώρημα Παραμόρφωσης* και το *Θεώρημα Mountain Pass*, μελετάμε μια ευρεία κλάση μη γραμμικών ελλειπτικών προβλημάτων με Dirichlet συνοριακές συνθήκες.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια προπαρασκευαστικά στοιχεία αναφορικά με τους χώρους Sobolev. Αρχικά υπενθυμίζονται ο ορισμοί των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα και των χώρων L^p . Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στο *Μεταβολικό Λήμμα (Variational Lemma)* και στην έννοια της γενικευμένης παραγώγου ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, με την παράθεση συγκεκριμένων παραδειγμάτων. Ακολούθως δίνονται οι ορισμοί των χώρων Sobolev $W^{1,p}$ και $W_0^{1,p}$ σε ανοικτά διαστήματα του \mathbb{R} και σε ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{R}^N ($N \geq 1$). Παρουσιάζεται η *ανισότητα Poincaré* και η απόδειξή της, καθώς και το βασικό *Θεώρημα ενσφήνωσης του Sobolev*. Τέλος, παρατίθενται ο ορισμός και οι βασικές ιδιότητες της *πρωταρχικής ιδιοτιμής* της Dirichlet αρνητικής p -λαπλασιανής, οι οποίες χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές του 4^{ου} κεφαλαίου.

Στην πρώτη παράγραφο του δευτέρου κεφαλαίου, δίνουμε τον ορισμό της Fréchet παραγώγου συναρτησιακών και τελεστών πάνω σε χώρους Banach και παραθέτουμε

με αποδείξεις βασικά αποτελέσματα του λογισμού συναρτησιακών κλάσης C^1 . Στη δεύτερη παράγραφο του ίδιου κεφαλαίου, αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες του τελεστή Nemytskii και υπολογίζουμε την Fréchet παράγωγο μιας κλάσης ολοκληρωτικών συναρτησιακών, που σχετίζονται με τη μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου 3, περιλαμβάνεται η Μεταβολική Αρχή του Ekeland με απόδειξη και πορίσματα αυτής και οι συνθήκες συμπάγειας *Palais–Smale* και *Cerami* για συναρτησιακά πάνω από χώρους Banach. Τα παραπάνω μας οδηγούν στο κατώφλι της Θεωρίας Κρίσιμων Σημείων. Συγκεκριμένα, στο τέλος της παραγράφου 3.1, καταλήγουμε σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα για τις συνέπειες των παραπάνω συνθηκών σε κάτω φραγμένα συναρτησιακά καθώς και για τη σχέση που συνδέει τις παραπάνω συνθήκες με την πιστικότητα. Στη δεύτερη παράγραφο του Κεφ.3, διατυπώνουμε το *Θεώρημα Παραμόρφωσης (Deformation Theorem)* και αποδεικνύουμε μια εκδοχή του για τοπικά Lipschitz συναρτησιακά ορισμένα σε χώρους Hilbert. Τέλος, παρουσιάζουμε το *Θεώρημα Mountain Pass* με την απόδειξή του.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, αποδεικνύεται η ύπαρξη μη τετριμμένων ασθενών λύσεων για μια ευρεία κλάση μη γραμμικών ελλειπτικών προβλημάτων με Dirichlet συνοριακές συνθήκες. Μελετάμε τις περιπτώσεις όπου το αντίστοιχο ενεργειακό συναρτησιακό είναι είτε *πιστικό (coercive)* είτε *αντιπιστικό (anti-coercive)*. Στη δεύτερη περίπτωση, τα προβλήματα που εξετάζονται είναι *υπερ-γραμμικά (super-linear problems)* και η διαταραχή του β' μέλους ικανοποιεί την κλασική συνθήκη *Ambrosetti-Rabinowitz*.

Η εργασία κλείνει με το Παράρτημα, στο οποίο παρουσιάζονται ορισμοί και θεωρήματα προς διευκόλυνση του αναγνώστη.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντά μου κ. Σμυρλή Γεώργιο (Επίκ. Καθηγητή Ε.Μ.Π.) και τα μέλη της Επιτροπής Β.Κανελλόπουλο (Αναπλ.Καθηγητή) και Ν.Γιαννακάκη (Αναπλ.Καθηγητή) για την προσεκτική μελέτη όλου του συγγράμματος και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους σε θέματα δομής και περιεχομένου. Ειδικότερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ.Σμυρλή για την επιλογή του θέματος το οποίο βρήκα εξαιρετικά ενδιαφέρον, καθώς και για όλη τη διάθεση συνεργασίας και κατανόησης που επέδειξε.

Εισαγωγή

Κεφάλαιο 1:Χώροι Sobolev- Πρώτη Ιδιοτιμή

1.1 Συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.....5
1.2 Οι χώροι $L^p(\Omega)$ και $L^\infty(\Omega)$6
1.3 Η έννοια της γενικευμένης παραγώγου.....8
1.4 Χώροι Sobolev $W^{1,p}(I), 1 \leq p \leq \infty, I \subseteq R$ ανοικτό διάστημα....12
1.5 Χώροι Sobolev $W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ 15
1.6 Χώροι Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty, \Omega \subseteq R^N$ 20
1.7 Η ανισότητα Poincaré.....21
1.8 Βασικό Θεώρημα Ενσφήνωσης του Sobolev.....24
1.9 1^η ιδιοτιμή της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$, $1 < p < \infty$ 24

Κεφάλαιο 2:Διαφορισιμότητα σε χώρους Banach

2.1 Διαφορισιμότητα σε χώρους Banach.....28
2.2 Τελεστής Nemytskii- Ολοκληρωτικά Συναρτησιακά.....38

Κεφάλαιο 3:Θεώρημα Παραμόρφωσης και Mountain Pass Theorem

3.1 Στοιχεία θεωρίας κρίσιμων σημείων.....45
3.2 Θεώρημα Παραμόρφωσης (Deformation Theorem)-μια ασθενής εκδοχή και Mountain Pass Theorem.....52

Κεφάλαιο 4:Εφαρμογές

4.1 Εφαρμογές.....59

Παράρτημα.....69

Βιβλιογραφία74

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΧΩΡΟΙ SOBOLEV-ΠΡΩΤΗ ΙΔΙΟΤΙΜΗ

1.1 Συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) ανοικτό. Με $|\cdot|$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue πάνω στο Ω . Ορίζουμε το σύνολο $C(\Omega)$:

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / u \text{ συνεχής}\}$$

και έστω $u \in C(\Omega)$. Φορέας της u είναι το σύνολο:

$$\text{supp}(u) = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\} \subset \bar{\Omega}.$$

Εν συνεχεία ορίζονται τα παρακάτω σύνολα:

$$C_c(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \text{supp}(u) \text{ συμπαγές υποσύνολο του } \Omega\},$$

$C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \text{όλες οι μερικές παράγωγοι της } u \text{ μέχρι } k \text{ τάξης για } 1 \leq k < \infty \text{ είναι συνεχείς}\},$

$$C_c^k(\Omega) = C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega), \quad k \geq 1.$$

Παράδειγμα 1.1.1

Έστω $\Omega = (-1, 1)$ και $0 < \varepsilon < 1$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $u(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right), & \text{για } |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Τότε $\text{supp}(u) = [-\varepsilon, \varepsilon]$ και $u \in C_c^\infty(-1, 1)$.

Πρόταση 1.1.2

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό. Είναι γνωστό ότι $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Θεωρούμε μία συνάρτηση $u \in C_c(\Omega)$ και τη συνάρτηση $\bar{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Τότε $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$.

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in \bar{\Omega}$.

Αν $x_0 \in \Omega$, $\bar{u}(x_0) = u(x_0)$ και άρα η \bar{u} είναι συνεχής στο x_0 .

Αν $x_0 \in \partial\Omega$, επιλέγουμε δ τέτοιο ώστε $0 < \delta < d(K, \partial\Omega)$, όπου $K = \text{supp}u$ και εξετάζουμε το σύνολο τιμών της $\bar{u}(x)$ για $x \in B(x_0, \delta) \cap \bar{\Omega}$.

Αν $x \in \partial\Omega$, $\bar{u}(x) = 0$.

Αν $x \in B(x_0, \delta) \cap \Omega$, τότε επειδή $\delta < d(K, \partial\Omega)$, έχουμε $x \notin K$ και άρα $\bar{u}(x) = 0$.

Συνεπώς $\bar{u}(x) = 0$ για $x \in B(x_0, \delta) \cap \bar{\Omega}$ και άρα η \bar{u} είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \bar{\Omega}$.

Άρα $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$. □

Ταυτίζουμε κάθε $u \in C_c(\Omega)$ με την επέκταση της \bar{u} στο $\bar{\Omega}$, η οποία μηδενίζεται στο $\partial\Omega$. Ισχύει επίσης ότι

$$\overline{C_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty} \subset C(\bar{\Omega}).$$

1.2 Οι χώροι $L^p(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό.

A) Οι χώροι $L^p(\Omega)$

Για $p \in [1, +\infty)$ ορίζεται ο χώρος $L^p(\Omega)$ ως εξής:

$$L^p(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ μετρήσιμη ώστε } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$$

με τη νόρμα:

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Ο $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach.

B) Ο χώρος $L^\infty(\Omega)$

Μία συνάρτηση $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **ουσιωδώς φραγμένη**, αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$, ώστε $|u(x)| \leq \alpha$, σχεδόν $\forall x \in \Omega$.

Ορίζεται ο χώρος:

$$L^\infty(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ μετρήσιμη, ουσιωδώς φραγμένη}\}$$

με τη νόρμα:

$$\|u\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 : \alpha \text{ ουσιώδες φράγμα της } u\}.$$

Ο $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

Πρόταση 1.2.1

Ισχύει $C_c(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$, για $1 \leq p \leq \infty$.

Απόδειξη

Εξετάζουμε την περίπτωση $1 \leq p < \infty$ (η περίπτωση $p = \infty$ είναι άμεση).

Έστω $u \in C_c(\Omega)$ και $K = \text{supp}u$. Είναι

$$\int_{\Omega} |u|^p \leq |K| \sup_{x \in K} |u(x)|^p < \infty.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή το K είναι συμπαγές και άρα $|K| < \infty$. \square

Σχόλιο:

Η προϋπόθεση να έχει η u συμπαγή φορέα μέσα στο Ω είναι απαραίτητη. Π.χ. αν $u(x) = \frac{1}{x}$ με $x \in (0,1)$, τότε u συνεχής στο $(0,1)$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ αποκλίνει. Άρα $u \notin L^1(\Omega)$.

Θεώρημα 1.2.2 (Lusin)

Αν $1 \leq p < \infty$, τότε ο χώρος $C_c(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ ως προς την L^p -νόρμα.

Το Θεώρημα 1 δεν ισχύει για $p = \infty$ (βλ. Παράδειγμα 2).

Θεώρημα 1.2.3

Αν $1 \leq p < \infty$, τότε ο χώρος $C_c^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ ως προς την L^p -νόρμα.

Παράδειγμα 2

Θα βρούμε συνάρτηση $u \in L^\infty(\Omega)$ που δεν ταυτίζεται σχεδόν παντού με μία συνεχή συνάρτηση, και άρα δεν ανήκει στο $\overline{C_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty}$.

Θεωρούμε το ανοικτό διάστημα $\Omega = (-1,1)$ και τη συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in (-1,0]. \end{cases}$$

Έστω ότι υπάρχει $g \in C(-1,1)$ έτσι ώστε

$$|E| = 0, \text{ όπου } E = \{x: u(x) \neq g(x)\}. \quad (1)$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$V = \{x \in (-1,1): g(x) \neq 0 \text{ και } g(x) \neq 1\}.$$

Επειδή η g είναι συνεχής, το σύνολο V είναι ανοικτό. Ισχύει

$$V \subset E \Rightarrow |V| = 0 \Rightarrow V = \emptyset.$$

Άρα

$$g((-1,1)) \subset \{0,1\} \Rightarrow g \equiv 0 \text{ ή } g \equiv 1 \text{ στο } (-1,1).$$

Όμως λόγω της (1) οι u και g είναι σχεδόν παντού ίσες. Συμπεραίνουμε ότι $u = 0$ ή $u = 1$ σχεδόν παντού, άτοπο, διότι η u λαμβάνει και τις δύο τιμές σε διαστήματα μη μηδενικού μέτρου.

1.2.4 Μεταβολικό Λήμμα

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ ανοικτό και u συνάρτηση Lebesgue ολοκληρώσιμη πάνω σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω , δηλαδή $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι:

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Τότε $u(x) = 0$ σχεδόν παντού.

1.3 Η έννοια της γενικευμένης παραγώγου

Αρχικά παραθέτουμε ένα κίνητρο για την αναζήτηση της γενικευμένης παραγώγου μιας συνάρτησης.

Αναζητούμε συνάρτηση u που να ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών, για μια δεδομένη $f \in C[0,1]$:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & , x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Έστω $u \in C^2([0,1])$ μία κλασική λύση του παραπάνω προβλήματος.

Τότε, για κάθε $\varphi \in C_c^1(0,1)$ (με $\varphi = \bar{\varphi}$ και άρα $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$) ισχύει:

$$\begin{aligned} -u''(x)\varphi(x) + u(x)\varphi(x) &= f(x)\varphi(x), \quad x \in [0,1] \\ \Rightarrow -\int_0^1 u''(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 u(x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx \end{aligned} \quad (2)$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση η (2) δίνει:

$$-[u'\varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 u(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx. \quad (3)$$

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται λόγω συμπαγούς φορέα της φ μέσα στο $(0,1)$ και άρα η (3) γίνεται:

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 u(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (4)$$

Μία συνάρτηση u με $u \in L^1([0,1])$ και $u' \in L^1([0,1])$ που ικανοποιεί την (4) ονομάζεται **ασθενής λύση** του παραπάνω προβλήματος συνοριακών τιμών.

Ορισμός 1.3.1

Έστω ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και $u \in L^1_{loc}(I)$, δηλαδή η u είναι ολοκληρώσιμη πάνω σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του I . Η συνάρτηση $g \in L^1_{loc}(I)$ ονομάζεται **γενικευμένη παράγωγος** της u , αν $\forall \varphi \in C_c^1(I)$ ισχύει:

$$\int_I u\varphi' = - \int_I g\varphi. \quad (5)$$

Πρόταση 1.3.2

Έστω $g_1, g_2 \in L^1_{loc}(I)$ που ικανοποιούν την (5). Τότε $g_1(x) = g_2(x)$ σχεδόν παντού στο I .

Απόδειξη

Από την υπόθεση, $\forall \varphi \in C_c^1(I)$ ισχύει:

$$\int_I u\varphi' = - \int_I g_1\varphi \quad (6)$$

και

$$\int_I u\varphi' = - \int_I g_2\varphi. \quad (7)$$

Αν αφαιρέσουμε τις (6), (7) κατά μέλη προκύπτει:

$$\int_I (g_1 - g_2)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \Rightarrow g_1 - g_2 = 0 \text{ σχεδόν παντού (Μεταβολικό Λήμμα).}$$

□

Άρα, εάν η $u \in L^1_{loc}(I)$ έχει γενικευμένη παράγωγο, τότε αυτή είναι μοναδική σχεδόν παντού και συμβολίζεται με u' .

Παράδειγμα 1.3.3

Έστω συνάρτηση u παραγωγίσιμη σε **κάθε** $x \in I$ με $u' \in L^1(I)$. Τότε η u' είναι και γενικευμένη παράγωγος της u .

Απόδειξη

Θεωρούμε διάστημα $I = (a, b)$ με $-\infty < a < b < \infty$ και συνάρτηση u παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in I$ με $u' \in L^1(I)$. Έστω $\varphi \in C_c^1(I)$. Τότε η συνάρτηση $u\varphi$ είναι παραγωγίσιμη, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ και λόγω του γενικευμένου Θεωρήματος του Διαφορικού Λογισμού ισχύει:

$$\int_a^b (u\varphi)' = (u\varphi)(b) - (u\varphi)(a) = 0 - 0 = 0.$$

Επομένως

$$\int_a^b (u'\varphi + u\varphi') = 0 \Rightarrow \int_a^b u\varphi' = - \int_a^b u'\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Συνεπώς η u' είναι γενικευμένη παράγωγος της u . □

Παράδειγμα 1.3.4

Έστω η συνάρτηση $u(x) = |x|$, ορισμένη στο διάστημα $I = (-1, 1)$. Τότε η γενικευμένη παράγωγος της u είναι η

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Απόδειξη

Έστω $\varphi \in C_c^1(-1, 1)$. Τότε $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ και

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^1 x\varphi'(x) - \int_{-1}^0 x\varphi'(x) = [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx - [x\varphi(x)]_{-1}^0 + \\ &\int_{-1}^0 \varphi(x)dx = - \int_0^1 \varphi(x)dx + \int_{-1}^0 \varphi(x)dx = - \int_0^1 g(x)\varphi(x)dx - \int_{-1}^0 g(x)\varphi(x)dx = \\ &- \int_{-1}^1 g(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.3.5

Η συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ -1, & x \in (-1, 0] \end{cases}$$

δεν έχει γενικευμένη παράγωγο.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η u έχει γενικευμένη παράγωγο $u' \in L_{loc}^1(-1, 1)$. Τότε για κάθε $\varphi \in C_c^1((-1, 1))$ ισχύει:

$$\int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)dx = - \int_{-1}^1 u'(x)\varphi(x) dx.$$

Έστω πραγματικός αριθμός $\varepsilon \in (0,1)$. Επιλέγουμε συνάρτηση $\varphi_\varepsilon \in C_c^1((-1,1))$ τέτοια ώστε να ισχύουν

$$\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \varphi_\varepsilon(x) \in [0,1], \quad \forall x \in [0,1] \quad \text{και} \quad \varphi_\varepsilon(0) = 1.$$

[Για την κατασκευή της φ_ε εργαζόμαστε κάνοντας χρήση ομαλοποίησης με συνέλιξη ως εξής: θεωρούμε τη συνάρτηση $J: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ με

$$J(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right), & |t| < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αποδεικνύεται ότι $J \in C^\infty(\mathbb{R})$, ενώ προφανώς $\text{supp}(J) = [-1, 1]$.

Στη συνέχεια θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ και

$$J_\varepsilon(t) = \frac{1}{\delta \int_{-1}^1 J(z) dz} J\left(\frac{t}{\delta}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Τότε, $J_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp}(J_\varepsilon) = [-\delta, \delta] \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ και $\int_{-\delta}^{\delta} J_\varepsilon(t) dt = 1$.

Τέλος, θέτουμε

$$\varphi_\varepsilon(x) = [J_\varepsilon * X_{(-\delta, \delta)}](x) = \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(t) X_{(-\delta, \delta)}(x-t) dt = \int_{x-\delta}^{x+\delta} J_\varepsilon(t) dt, \quad x \in (-1,1).$$

Είναι $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(-1,1)$,

$$\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset \text{supp}(J_\varepsilon) + \text{supp}X_{(-\delta, \delta)} \subset (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \varphi_\varepsilon(0) = \int_{-\delta}^{\delta} J_\varepsilon(t) dt = 1$$

και $\forall x \in (-1,1)$,

$$0 \leq \varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(t) X_{(-\delta, \delta)}(x-t) dt \leq \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Είναι

$$\int_{-1}^1 u(x)\varphi_\varepsilon'(x)dx = - \int_{-1}^1 u'(x)\varphi_\varepsilon(x) dx.$$

Άρα

$$- \int_{-1}^0 \varphi_\varepsilon'(x) dx + \int_0^1 \varphi_\varepsilon'(x) dx = - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\varphi_\varepsilon(x) dx$$

$$\Rightarrow -\varphi_\varepsilon(0) + \varphi_\varepsilon(-1) + \varphi_\varepsilon(1) - \varphi_\varepsilon(0) = - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x) \varphi_\varepsilon(x) dx.$$

Αλλά $\varphi_\varepsilon(-1) = \varphi_\varepsilon(1) = 0$. Επομένως

$$2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x) \varphi_\varepsilon(x) dx = \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x) \varphi_\varepsilon(x) dx \right| \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u'(x)| |\varphi_\varepsilon(x)| dx \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u'(x)| dx.$$

Επειδή η u' είναι ολοκληρώσιμη, το τελευταίο ολοκλήρωμα τείνει στο 0 καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$. Άρα καταλήξαμε σε άτοπο. \square

Ορισμός 1.3.6

Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) με στοιχεία $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Η u έχει γενικευμένη μερική παράγωγο ως προς τη μεταβλητή x_j , $1 \leq j \leq N$, αν υπάρχει συνάρτηση $g_j \in L^1_{loc}(\Omega)$, έτσι ώστε $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ισχύει

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} g_j(x) \varphi(x) dx.$$

Συμβολίζουμε: $g_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Η g_j , αν υπάρχει, είναι μοναδική σχεδόν παντού λόγω του Μεταβολικού Λήμματος.

1.4 Χώροι Sobolev $W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$ και $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα

Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(I)$ ορίζεται ως εξής:

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) : \text{η } u \text{ έχει γενικευμένη παράγωγο } u' \in L^p(I)\}.$$

Για $p = 2$, θέτουμε $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.

Ο χώρος $W^{1,p}(I)$ για $1 \leq p < \infty$ εφοδιάζεται με τη νόρμα:

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p.$$

Εναλλακτικά εφοδιάζεται με την ισοδύναμη νόρμα:

$$\|u\|_{1,p} = (\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p)^{1/p}.$$

Ο χώρος $W^{1,\infty}$ για $p = \infty$ εφοδιάζεται με τη νόρμα:

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty.$$

Ο χώρος $W^{1,2}(I) = H(I)$ είναι χώρος Hilbert και εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}, \text{ με } u, v \in H^1.$$

Η αντίστοιχη νόρμα του H^1 είναι η

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2)^{1/2}.$$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικές βασικές ιδιότητες των χώρων $W^{1,p}(I)$.

α) Ο $W^{1,p}(I)$ είναι χώρος Banach για $1 \leq p \leq \infty$.

Απόδειξη

Έστω (u_n) ακολουθία Cauchy στον $W^{1,p}(I)$. Τότε, οι (u_n) και (u'_n) είναι ακολουθίες Cauchy στον L^p . Άρα υπάρχουν συναρτήσεις $u, g \in L^p$ τέτοιες ώστε $u_n \rightarrow u$ και $u'_n \rightarrow g$ στον L^p .

Επιλέγουμε $\varphi \in C_c^1(I)$. Είναι:

$$\int_I u_n \varphi' = - \int_I u'_n \varphi. \quad (8)$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \left| \int_I u_n \varphi' - \int_I u \varphi' \right| &\leq \int_I |u_n - u| |\varphi'| = \int_{\text{supp} \varphi'} |u_n - u| |\varphi'| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \\ &\leq \|u_n - u\|_p \left(\int_{\text{supp} \varphi'} |\varphi'|^q \right)^{1/q} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

είναι

$$\int_I u_n \varphi' \rightarrow \int_I u \varphi'. \quad (9)$$

Ομοίως

$$\int_I u_n' \varphi \rightarrow \int_I g \varphi. \quad (10)$$

Οι (8), (9) και (10) δίνουν:

$$\int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Άρα $g = u'$ οπότε $u \in W^{1,p}(I)$ και $\|u_n - u\|_{1,p} \rightarrow 0$.

□

β) Ο $W^{1,p}(I)$ είναι ανακλαστικός για $1 < p < \infty$.

Απόδειξη

Ο χώρος γινομένου $E = L^p(I) \times L^p(I)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|(u, v)\| = (\|u\|_p^p + \|v\|_p^p)^{1/p}$$

είναι ανακλαστικός. Ο τελεστής $T : W^{1,p}(I) \rightarrow E$ που ορίζεται με $T(u) = (u, u')$ είναι ισομετρία από το χώρο Banach $W^{1,p}(I)$ στον E . Άρα ο $T(W^{1,p}(I))$ είναι κλειστός υπόχωρος του E , οπότε ο $T(W^{1,p}(I))$ είναι ανακλαστικός και συνεπώς ο $W^{1,p}(I)$ είναι ανακλαστικός.

□

γ) Ο $W^{1,p}(I)$ είναι διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$.

Απόδειξη

Ο χώρος γινομένου $E = L^p(I) \times L^p(I)$ είναι διαχωρίσιμος. Άρα ο $T(W^{1,p})$ είναι διαχωρίσιμος και συνεπώς ο $W^{1,p}$ είναι διαχωρίσιμος.

□

Θεώρημα 1.4 Έστω συνάρτηση $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε, υπάρχει συνάρτηση $\tilde{u} \in C(\bar{I})$

τέτοια ώστε

$u = \tilde{u}$, σχεδόν παντού.

Το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει σε ανώτερη διάσταση.

1.5 Χώροι Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Σε ό,τι ακολουθεί, με $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^N}$ συμβολίζουμε το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στο χώρο \mathbb{R}^N ($N \geq 1$).

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό σύνολο και $1 \leq p \leq \infty$. Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως εξής:

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \eta \ u \ \acute{\epsilon}\chi\eta\ \gamma\epsilon\eta\iota\kappa\epsilon\upsilon\mu\acute{\epsilon}\nu\epsilon\varsigma \ \mu\epsilon\pi\iota\kappa\acute{\epsilon}\varsigma \ \pi\alpha\pi\alpha\gamma\acute{\omega}\gamma\omicron\upsilon\varsigma \ \frac{\partial u}{\partial x_j}, \ 1 \leq j \leq N, \ \text{που ανήκουν στον } L^p(\Omega)\}$.

Ισοδύναμα ορίζεται ως εξής:

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \ \mu\epsilon \ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ i = 1, 2, \dots, N\}$.

Ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι γραμμικός χώρος. Για $p = 2$, γράφουμε $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Για $u \in W^{1,p}(\Omega)$ γράφουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \ \text{και} \ \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{gradu}.$$

Έστω $1 \leq p < \infty$ και $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Ο $W^{1,p}(\Omega)$ εφοδιάζεται με τη νόρμα:

$$\|u\|_{1,p} = (\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{1/p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Ειδικότερα, ο χώρος $H^1(\Omega)$ εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v \rangle_{1,2} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx, \quad u, v \in H^1(\Omega)$$

και με την αντίστοιχη νόρμα

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Για $p = \infty$, ο $W^{1,p}(\Omega)$ εφοδιάζεται με τη νόρμα

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{\infty} + \|\nabla u\|_{\infty}.$$

Πρόταση 1.5.1

Ο $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ είναι χώρος Banach, διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$ και ανακλαστικός για $1 < p < \infty$. Ειδικότερα, ο $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$ είναι χώρος Hilbert.

Ακολουθως δίνεται ο ορισμός του λείου συνόρου, ή του συνόρου κλάσης C^1 .

Ορισμός 1.5.6

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό. Το σύνολο $\partial\Omega$ του Ω είναι κλάσης C^1 , εάν τοπικά και ως προς κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, το $\partial\Omega$ είναι το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης $\varphi: \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$. Επιπλέον απαιτείται το Ω να κείται «προς τη μία πλευρά» του $\partial\Omega$. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το σύνολο $\Omega = B(0,2) \setminus \partial B(0,1)$, το σύνολο του $\partial\Omega$ δεν είναι λείο διότι το Ω κείται «και προς τις δύο πλευρές» του $\partial\Omega$.

Ένας αυστηρότερος ορισμός του λείου συνόρου δίνεται ακολούθως:

Το $\partial\Omega$ ονομάζεται κλάσης C^1 , αν για κάθε $z \in \partial\Omega$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $V_z, W_z \subseteq \mathbb{R}^N$ με $z \in V_z$, $h_z: V_z \rightarrow W_z$ αμφιδιαφόριση και $\eta_z \in C^1(\mathbb{R}^{N-1})$ ώστε

$$h_z(V_z \cap \partial\Omega) = \{(y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N: y_N = \eta_z(y_1, y_2, \dots, y_{N-1})\} \cap W_z$$

και

$$h_z(V_z \cap \Omega) = \{(y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N: y_N > \eta_z(y_1, y_2, \dots, y_{N-1})\} \cap W_z.$$

Πρόταση 1.5.7

Αν $u \in C^1(\Omega)$, $\partial_i u \in L^p(\Omega)$, $0 \leq i \leq N$ και το $\partial\Omega$ είναι κλάσης C^1 , τότε $u \in W^{1,p}(\Omega)$ και οι γενικευμένες παράγωγοι ταυτίζονται με τις κλασικές μερικές παραγώγους.

Απόδειξη

Για $1 \leq i \leq N$ και $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, από τον τύπο απόκλισης προκύπτει ότι

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi = - \int_\Omega (\partial_i u) \varphi + \int_{\partial\Omega} u \varphi \nu_i d\sigma = - \int_\Omega (\partial_i u) \varphi,$$

όπου $\nu = (\nu_i)_{i=1}^N$ το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου στο $\partial\Omega$ και $d\sigma$ το επιφανειακό μέτρο Hausdorff πάνω στο $\partial\Omega$. \square

Ειδικότερα, αν το Ω είναι φραγμένο, τότε $C^1(\bar{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Πράγματι, αν $u \in C^1(\bar{\Omega})$, τότε για $i = 1, \dots, N$, $u \in C(\bar{\Omega})$, $\partial_i u \in C(\bar{\Omega})$ και $C(\bar{\Omega}) \subset L^p(\Omega)$. Άρα $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Παρατήρηση για τη σύγκλιση σε χώρους Sobolev

Ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\alpha) u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^p}} u \Leftrightarrow [\|u_n - u\|_p \rightarrow 0 \text{ και } \|\nabla u_n - \nabla u\|_p \rightarrow 0]$$

$$\beta) u_n \xrightarrow{w} u \text{ στον } W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{w} u \text{ στον } L^p(\Omega) \text{ και } \nabla u_n \xrightarrow{w} \nabla u \text{ στον } L^p(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Σχόλιο

Εάν το Ω είναι διάστασης μεγαλύτερης από 1, οι συναρτήσεις των χώρων Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ εν γένει δεν ταυτίζονται σ.π. με συνεχείς συναρτήσεις. Αυτό επιβεβαιώνεται από το παρακάτω :

Παράδειγμα 1.5.8

Έστω $\gamma \in (0,1)$ και το σύνολο $\Omega = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^\gamma}, & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η u δεν ταυτίζεται σχεδόν παντού με καμμία συνεχή συνάρτηση στο Ω .

Ισχύει

$$u|_{\Omega \setminus \{0\}} \in C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$$

και για $x \in \Omega \setminus \{0\}$ και $\forall i = 1, 2, \dots, N$,

$$\partial_i u(x) = -\gamma \frac{x_i}{|x|^{\gamma+2}}.$$

Θέτουμε

$$g_i(x) = \begin{cases} \partial_i u(x), & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Για $N > 1 + \gamma$, θα δείξουμε ότι η g_i είναι γενικευμένη μερική παράγωγος της u στο Ω .

Θεωρούμε το σύνολο

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon < |x| < 1\}$$

και το σύνορό του

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B(0, \varepsilon),$$

όπου $\partial B(0, \varepsilon) = \{x: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 = \varepsilon^2\}$.

Έστω $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (επομένως $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$). Από τον τύπο της απόκλισης προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u \partial_i \varphi = - \int_{\Omega_\varepsilon} \partial_i u \varphi + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u \varphi v_i d\sigma, \quad (11)$$

όπου $v = (v_i)_{i=1}^N$ το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου στο $\partial\Omega_\varepsilon$ και $d\sigma$ το επιφανειακό μέτρο Hausdorff πάνω στο $\partial\Omega_\varepsilon$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u \varphi v_i d\sigma \right| &= \left| \int_{\partial B(0, \varepsilon)} u \varphi v_i d\sigma + \int_{\partial\Omega} u \varphi v_i d\sigma \right| \leq \int_{\partial B(0, \varepsilon)} |u| |\varphi| |v_i| d\sigma \leq \\ &\int_{\partial B(0, \varepsilon)} |u| |\varphi| d\sigma \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{\varepsilon^\gamma} \sigma_N \varepsilon^{N-1} \leq \|\varphi\|_\infty \sigma_N \varepsilon^{N-1-\gamma} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+, N > 1 + \gamma} 0. \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση, $\sigma_N \varepsilon^{N-1}$ είναι το μέτρο Hausdorff του $\partial B(0, \varepsilon)$, όπου σ_N η επιφάνεια της μοναδιαίας N -μπάλας.

Παρατηρούμε ότι

$$X_{\Omega_\varepsilon}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} X_{\Omega \setminus \{0\}}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

[Πράγματι, αν $x \in \Omega \setminus \{0\}$, τότε $\forall \varepsilon \in (0, |x|)$ είναι

$$X_{\Omega_\varepsilon}(x) = 1 = X_{\Omega \setminus \{0\}}(x).$$

Αν $x = 0$, τότε

$$X_{\Omega_\varepsilon}(x) = 0 = X_{\Omega \setminus \{0\}}(x).]$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue προκύπτει ότι:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u \partial_i \varphi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \setminus \{0\}} u \partial_i \varphi = \int_{\Omega} u \partial_i \varphi$$

και

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \partial_i u \varphi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \setminus \{0\}} \partial_i u \varphi = \int_{\Omega} g_i \varphi.$$

Επομένως η (11) δίνει

$$\int_{\Omega} u \partial_i \varphi = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad N > 1 + \gamma, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Για κατάλληλο p , ισχύει $g_i \in L^p(\Omega)$. Πράγματι

$$\int_{\Omega} |g_i|^p = \gamma \int_{\Omega} \left(\frac{|x_i|}{|x|^{\gamma+2}} \right)^p \leq \gamma \int_{\Omega} \frac{dx}{|x|^{p(\gamma+2)}}. \quad (12)$$

Εξετάζοντας την ειδική περίπτωση για $N = 2$ και θέτοντας $r = |x|$, $x_1 = r \cos \varphi$ και $x_2 = r \sin \varphi$, το β' μέλος της (12) γίνεται

$$\gamma \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\varphi}{r^{p(\gamma+1)}} = 2\pi\gamma \int_0^1 \frac{dr}{r^{p(\gamma+1)-1}} < \infty,$$

για

$$p(\gamma+1) - 1 < 1 \Leftrightarrow p(\gamma+1) < 2 \Leftrightarrow p < \frac{2}{\gamma+1}.$$

Γενικά, το β' μέλος της (12) γράφεται

$$\gamma \sigma_N \int_0^1 \frac{r^{N-1} dr}{r^{p(\gamma+1)}} = \gamma \sigma_N \int_0^1 \frac{dr}{r^{p(\gamma+1)-N+1}} < \infty,$$

για $p(\gamma+1) < N \Leftrightarrow p < \frac{N}{\gamma+1}$.

Συνοψίζοντας, αν $1 < p < \frac{N}{\gamma+1}$, τότε $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus C(\Omega)$.

□

1.6 Ο χώρος Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$.

Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως η κλειστότητα του χώρου $C_c^1(\Omega)$ στον χώρο $W^{1,p}(\Omega)$. Δηλαδή,

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος $C_c^\infty(\Omega)$ είναι επίσης πυκνός στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Άρα ισοδύναμα:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Δηλαδή, για μία συνάρτηση u που ανήκει στον $W^{1,p}(\Omega)$ ισχύει:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \exists (u_n) \subseteq C_c^\infty(\Omega) : u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{1,p}} u.$$

Ο $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $W^{1,p}(\Omega)$. Εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_{1,p}$ είναι χώρος Banach, διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$ και ανακλαστικός για $1 < p < \infty$.

Για $p = 2$, ο $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v \rangle_{1,2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx.$$

Με δεδομένο ότι μία συνάρτηση $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται σχεδόν παντού, οι συναρτήσεις του $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι χονδρικά συναρτήσεις που μηδενίζονται στο σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$ (βλ. και Θ.4 παρακάτω).

Σχόλιο

Όταν $\Omega = \mathbb{R}^N$, αποδεικνύεται ότι $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Όταν το Ω είναι γνήσιο υποσύνολο του \mathbb{R}^N , οι χώροι $W_0^{1,p}(\Omega)$ και $W^{1,p}(\Omega)$ δεν ταυτίζονται εν γένει.

Παράδειγμα 1.6.1

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, φραγμένο με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^1 . Επιλέγουμε $\xi = (\xi_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ με $|\xi| = 1$. Θέτουμε

$$u(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \xi_i x_i\right).$$

Τότε, $u \in C^\infty(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$ και $\Delta u = u$. Από τον τύπο του Green,

$$\int_{\Omega} (\Delta u)\varphi = - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} u\varphi + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\langle u, \varphi \rangle_{1,2} = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow u \notin W_0^{1,p}(\Omega).$$

Θεώρημα 1.6.2

Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^1 . Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ με $1 \leq p < \infty$.

Ισχύει το ακόλουθο:

$$u = 0 \text{ στο } \Gamma = \partial\Omega \Leftrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

1.7 Η ανισότητα Poincaré

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) ανοικτό, φραγμένο και $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$, η οποία εξαρτάται μόνο από τα Ω και p , τέτοια ώστε:

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την ανισότητα αρχικά στην περίπτωση που το Ω είναι ανοικτό τετράγωνο, δηλαδή $\Omega = (-a, a)^N$, με $a > 0$ και $N \geq 1$.

- Για $N = 1$, $\Omega = (-a, a)$. Θεωρώ συνάρτηση $u \in C_c^\infty(-a, a)$. Για κάθε $x \in (-a, a)$ ισχύει:

$$u(x) - u(-a) = \int_{-a}^x u'(t) dt.$$

Επειδή $u \in C_c^\infty(-a, a)$, $u(-a) = 0$. Άρα

$$|u(x)| = \left| \int_{-a}^x u'(t) dt \right| \leq \int_{-a}^x |u'(t)| dt \stackrel{(x < a)}{\leq} \int_{-a}^a |u'(t)| dt = \int_{-a}^a |u'(t)| \cdot 1 dt \leq \\ \leq \left(\int_{-a}^a |u'(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{-a}^a 1^q dt \right)^{1/q} = \|u'\|_p (2a)^{1/q} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Άρα

$$|u(x)|^p \leq 2a^{p/q} \|u'\|_p^p \Rightarrow \int_{-a}^a |u(x)|^p dx \leq (2a)^{p/q+1} \|u'\|_p^p = (2a)^p \|u'\|_p^p \\ \Leftrightarrow \|u\|_p \leq 2a \|u'\|_p, \quad \forall u \in C_c^\infty(-a, a).$$

- Για $N = 2$, $\Omega = (-a, a) \times (-a, a)$. Έστω $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε $\forall (x_1, x_2) \in \Omega$ ισχύει:

$$u(x_1, x_2) - u(-a, x_2) = u(x_1, x_2) = \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow |u(x_1, x_2)| \leq \int_{-a}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right| dt = \int_{-a}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right| \cdot 1 dt \leq \\ \leq \left(\int_{-a}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{-a}^{x_1} 1^q dt \right)^{1/q} = \\ = \left(\int_{-a}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right|^p dt \right)^{1/p} \cdot (x_1 + a)^{1/q} \Rightarrow \\ \Rightarrow |u(x_1, x_2)|^p \leq \int_{-a}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right|^p dt (2a)^{p/q} \leq \int_{-a}^a \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right|^p dt (2a)^{p/q}.$$

Με ολοκλήρωση ως προς x_1 προκύπτει:

$$\int_{-a}^{x_1} |u(x_1, x_2)|^p dx_1 \leq (2a)^{p/q+1} \int_{-a}^a \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right|^p dt = (2a)^p \int_{-a}^a \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right|^p dt. \quad (13)$$

Εν συνεχεία με ολοκλήρωση ως προς x_2 η (13) δίνει:

$$\int_{\Omega} |u|^p dx_1 dx_2 \leq (2a)^p \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2) \right|^p \leq (2a)^p \|\nabla u\|_p^p \Rightarrow \|u\|_p \leq 2a \|\nabla u\|_p.$$

- Για $N \geq 2$, $\Omega = (-a, a)^N$.

Τα στοιχεία του Ω είναι της μορφής (x_1, x') , $|x_1| < a$, $x' \in (-a, a)^{N-1}$.

Για κάθε ζεύγος $(x_1, x') \in \Omega$, το $(-a, x') \in \partial\Omega \Rightarrow u(-a, x') = 0$. Επομένως

$$\begin{aligned}
u(x_1, x') &= u(x_1, x') - u(-a, x') = \int_{-a}^{x_1} \partial_1 u(t, x') dt \Rightarrow |u(x_1, x')| \leq \\
& \left(\int_{-a}^{x_1} |\partial_1 u(t, x')|^p dt \right)^{1/p} \cdot (x_1 + a)^{1/q} \leq \left(\int_{-a}^a |\partial_1 u(t, x')|^p dt \right)^{1/p} \cdot (2a)^{1/q} \Rightarrow |u(x_1, x')|^p \leq \\
& \left(\int_{-a}^a |\partial_1 u(t, x')|^p dt \right) \cdot (2a)^{p/q}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Ολοκληρώνοντας την (14) ως προς x_1 προκύπτει:

$$\int_{-a}^a |u(x_1, x')|^p dx_1 \leq \int_{-a}^a |\partial_1 u(t, x')|^p dt \cdot (2a)^{p/q+1} = (2a)^p \int_{-a}^a |\partial_1 u(t, x')|^p dt.$$

Εν συνεχεία ολοκληρώνοντας ως προς x' έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u(x)|^p dx &\leq (2a)^p \int_{(-a, a)^{N-1}} \left(\int_{-a}^a |\partial_1 u(t, x')|^p dt \right) dx' = (2a)^p \int_{\Omega} |\partial_1 u(x)|^p dx \leq \\
& (2a)^p \|\nabla u\|_p^p \Rightarrow \|u\|_p \leq 2a \|\nabla u\|_p \\
& , \quad \forall u \in C_c^\infty((-a, a)^N).
\end{aligned}$$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ τυχαίο ανοικτό, φραγμένο σύνολο και $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Επιλέγουμε ανοικτό τετράγωνο $T = (-\alpha, \alpha)^N$, με $\alpha > 0$, ώστε $\bar{\Omega} \subset T$. Θεωρούμε τη φυσιολογική επέκταση

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}.$$

Αποδεικνύεται ότι $\bar{u} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ και

$$\nabla \bar{u}(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Τότε,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \int_T |\bar{u}(x)|^p dx \leq (2\alpha)^p \int_T |\nabla \bar{u}(x)|^p dx = (2\alpha)^p \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \Rightarrow \|u\|_p \leq (2\alpha) \|\nabla u\|_p$$

Η διάσταση του τετραγώνου εξαρτάται από το $\text{diam}\Omega$.

Λόγω πυκνότητας του $C_c^\infty(\Omega)$ στον $W_0^{1,p}(\Omega)$, περνώντας σε όρια συμπεραίνουμε ότι σε οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$ και για κάθε συνάρτηση $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ισχύει η ανισότητα Poincaré.

□

Ως συνέπεια της ανισότητας Poincaré προκύπτει ότι $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p \right)^{1/p} \leq (C^p + 1)^{1/p} \|\nabla u\|_p \tag{15}$$

Ταυτόχρονα, από τον ορισμό της $\|u\|_{1,p}$,

$$\|u\|_{1,p} \geq \|\nabla u\|_p. \quad (16)$$

Οι (15) και (16) δείχνουν ότι οι νόρμες $\|u\|_{1,p}$ και $\|\nabla u\|_p$ είναι ισοδύναμες στον $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ειδικότερα, αν $p = 2$, ένα ισοδύναμο εσωτερικό γινόμενο στον $W_0^{1,2}(\Omega)$ είναι το εξής:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx.$$

1.8 Βασικό Θεώρημα Ενσφήνωσης του Sobolev

Έστω σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, φραγμένο με σύνορο κλάσεως C^1 . Τότε ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ ενσφηνώνεται στο χώρο $L^r(\Omega)$

- Συνεχώς, αν $1 < r \leq p^*$, όπου:

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{αν } N > p \\ +\infty, & \text{αν } N \leq p \end{cases}$$

- Συμπαγώς, αν $1 < r < p^*$.

Ειδικότερα, ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ ενσφηνώνεται στο χώρο $L^p(\Omega)$ συμπαγώς.

Με τον ίδιο τρόπο ενσφηνώνεται ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ στο χώρο $L^r(\Omega)$, όμως στην περίπτωση αυτή δεν απαιτείται ομαλότητα στο σύνορο του Ω .

1.9 1^η ιδιοτιμή της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$, $1 < p < \infty$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) ανοικτό, φραγμένο σύνολο με σύνορο κλάσης C^1 .

Θεωρούμε το διαφορικό τελεστή p -Λαπλασιανή

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Ορισμός 1.9.1

Ένας πραγματικός αριθμός λ λέγεται **ιδιοτιμή της $-\Delta_p$ με Dirichlet συνοριακές συνθήκες**, ή **ιδιοτιμή της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$** , αν το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = \lambda |u(x)|^{p-2} u(x), & \text{σ.π. στο } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

έχει μία τουλάχιστον ασθενή λύση $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ με $u \neq 0$.

Εάν λ ιδιοτιμή της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$ και $u \neq 0$ μία ασθενής λύση του παραπάνω προβλήματος, τότε η u λέγεται **λ -ιδιοσυνάρτηση** της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$.

Σχόλιο 1.9.2

Εάν λ ιδιοτιμή και u λ -ιδιοσυνάρτηση της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$, τότε $\forall h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ισχύει:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} (\nabla u(x), \nabla h(x)) dx = \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) h(x) dx.$$

Ειδικότερα, αν θέσουμε $h = u$, παίρνουμε

$$\|\nabla u\|_p^p = \lambda \|u\|_p^p \Rightarrow \lambda = \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p}. \quad (17)$$

Άρα οι ιδιοτιμές της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$ περιέχονται στο σύνολο

$$\left\{ \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p} : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\} \subseteq (0, +\infty).$$

Ενδιαφερόμαστε για τη μικρότερη ιδιοτιμή. Με βάση το προηγούμενο σχόλιο, φυσιολογικά εισάγουμε τον αριθμό

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p} : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\} = \inf \{ \|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_p = 1 \}. \quad (18)$$

Λόγω της ανισότητας Poincaré, ισχύει $\lambda_1 > 0$.

Πρόταση 1.9.3

Στην (18), το **infimum** είναι ελάχιστο.

Απόδειξη

Επιλέγουμε ακολουθία $(u_n) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε $\|\nabla u_n\|_p^p \rightarrow \lambda_1, \|u_n\|_p^p = 1, n \geq 1$. Τότε, η (u_n) είναι φραγμένη στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Επειδή ο $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι ανακλαστικός, περνώντας σε υπακολουθίες και αξιοποιώντας το θεώρημα του Sobolev περί συμπαγούς ενσφήνωσης του $W_0^{1,p}(\Omega)$ στον $L^p(\Omega)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$u_n \xrightarrow{w} u, \text{ στον } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ και } u_n \rightarrow u, \text{ στον } L^p(\Omega).$$

Τότε

$$\|u\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_p = 1$$

και

$$\lambda_1 = \|\nabla u\|_p^p \leq \liminf \|\nabla u_n\|_p^p \leq \limsup \|\nabla u_n\|_p^p = \lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \|\nabla u\|_p^p, \|u\|_p = 1.$$

Συνεπώς

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p} : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\} = \min \{ \|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_p = 1 \}.$$

□

Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται **πηλίκιο του Rayleigh**.

Πρόταση 1.9.4

α) Το λ_1 είναι η μικρότερη ιδιοτιμή της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$.

β) Εάν $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$w \text{ } \lambda_1\text{-ιδιοσυνάρτηση} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{\|\nabla w\|_p^p}{\|w\|_p^p}.$$

Απόδειξη

α) Έστω λ_1 ιδιοτιμή και w λ_1 -ιδιοσυνάρτηση. Τότε, σύμφωνα και με την Πρόταση 1,

$$\lambda = \frac{\|\nabla w\|_p^p}{\|w\|_p^p} \geq \lambda_1.$$

Θα δείξουμε ότι το λ_1 είναι ιδιοτιμή. Πράγματι, θέτουμε

$$\varphi(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{\lambda_1}{p} \|u\|_p^p, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(19)

Επιλέγουμε $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}$ ώστε

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla u_0\|_p^p}{\|u_0\|_p^p}.$$

Τότε $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ισχύει

$$\varphi(u) \geq 0 = \varphi(u_0).$$

Άρα, το u_0 είναι σημείο ολικού ελαχίστου του φ , οπότε $\varphi'(u_0) = 0$.

Μετά από παραγωγή της (19) και αντικατάσταση (βλ. Παράρτημα, § 4, συνέπεια (β) Πρότασης 3) προκύπτει:

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2} (\nabla u_0, \nabla h) = \lambda \int_{\Omega} |u_0|^{p-2} u_0 h, \quad \forall h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Άρα η u_0 είναι λ_1 -ιδιοσυνάρτηση.

β) Έστω w λ_1 -ιδιοσυνάρτηση. Λόγω της (17), ισχύει

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla w\|_p^p}{\|w\|_p^p}.$$

Αντίστροφα, έστω $w \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}$ ώστε $\frac{\|\nabla w\|_p^p}{\|w\|_p^p} = \lambda_1$. Θεωρούμε πάλι το συναρτησιακό $\varphi(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{\lambda_1}{p} \|u\|_p^p$ και εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του (α) για να καταλήξουμε στο ότι η w είναι λ_1 -ιδιοσυνάρτηση.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.1

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ BANACH

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

- Τα στοιχεία του R^N , $N \geq 1$, θα συμβολίζονται με $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$.
- Για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq R^N$, θα συμβολίζουμε με $|E|$ το μέτρο Lebesgue του E .
- Με $(\cdot; \cdot)_{R^N}$, $\|\cdot\|$ θα συμβολίζεται το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και η συνήθης νόρμα, αντιστοίχως, του R^N .
- Έστω X ένας χώρος Banach και X^* ο δυικός του. Αν $u \in X$, $u^* \in X^*$ τότε γράφουμε $\langle u^*, u \rangle$ αντί για $u^*(u)$.
- Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό και $u_0 \in U$. Για “μικρό” $\|h\|$, (για παράδειγμα $\|h\| < d(u_0, X \setminus U)$) τότε και $u_0 + h \in U$.

1. Fréchet διαφορίσιμες συναρτήσεις (ορισμοί, βασικές ιδιότητες & παραδείγματα).

Αρχικά, θα υπενθυμίσουμε βασικούς ορισμούς και προτάσεις για τη διαφορισιμότητα του κλασικού λογισμού.

Έστω $U \subseteq R^N$ ($N \geq 1$), ανοικτό. Μια συνάρτηση $\phi: U \rightarrow R$ καλείται **διαφορίσιμη** σε ένα σημείο $u_0 \in U$, αν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(u_0), \quad 1 \leq j \leq N \text{ υπάρχουν}$$

και

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|\phi(u_0 + h) - \phi(u_0) - (\nabla \phi(u_0), h)_{R^N}|}{|h|} = 0,$$

όπου
$$\nabla \phi(u_0) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(u_0), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(u_0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_N}(u_0) \right)$$

είναι η κλίση (gradient) της ϕ στο u_0 .

Σημείωση 1: Αν η $\phi : U \rightarrow R$ είναι διαφορίσιμη στο $u_0 \in U$, τότε η απεικόνιση

$$h \mapsto (\nabla \phi(u_0), h)_{R^N}$$

είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό του R^N το οποίο καλείται **Fréchet παράγωγος** της ϕ στο u_0 και συμβολίζεται με $\phi'(u_0)$. Τότε μπορούμε να γράφουμε

$$\langle \phi'(u_0), h \rangle = (\nabla \phi(u_0), h)_{R^N}, \quad h \in R^N.$$

Η παραπάνω έννοια της διαφορισιμότητας μπορεί να επεκταθεί και για συναρτησιακά που είναι ορισμένα σε χώρους Hilbert.

Ορισμός 1: Έστω H ένας χώρος Hilbert εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο (\cdot, \cdot) και με την αντίστοιχη νόρμα $\|\cdot\|$. Ας υποθέσουμε ότι το $U \subseteq H$ είναι ανοικτό και $u_0 \in U$. Ένα συναρτησιακό $\phi : U \rightarrow R$ λέγεται **Fréchet διαφορίσιμο** στο u_0 , αν υπάρχει διάνυσμα $\nabla \phi(u_0) \in H$:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\phi(u_0 + h) - \phi(u_0) - (\nabla \phi(u_0), h)_{R^N}|}{\|h\|} = 0.$$

Σημείωση 2: Αν η $\phi : U \rightarrow R$ είναι Fréchet διαφορίσιμη στο u_0 , τότε το διάνυσμα $\nabla \phi(u_0)$ είναι μοναδικά ορισμένο (δες Σημείωση 3 παρακάτω) και καλείται *κλίση* της ϕ στο u_0 . Ακόμα, η απεικόνιση

$$h \mapsto (\nabla \phi(u_0), h)$$

είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό του H το οποίο καλείται **Fréchet παράγωγος** της ϕ στο u_0 και συμβολίζεται με $\phi'(u_0)$. Τότε μπορούμε να γράφουμε

$$\langle \phi'(u_0), h \rangle = (\nabla \phi(u_0), h), \quad h \in H$$

και

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\phi(u_0 + h) - \phi(u_0) - \langle \phi'(u_0), h \rangle|}{\|h\|} = 0.$$

Η προηγούμενη σημείωση οδηγεί στην επόμενη επέκταση του Ορισμού 1 στη περίπτωση που έχουμε χώρους Banach:

Ορισμός 2: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach, $U \subseteq X$ ανοικτό και $u_0 \in U$.

Ένα συναρτησιακό $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **Fréchet διαφορίσιμο** στο u_0 , αν υπάρχει $\phi'(u_0) \in X^*$:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\phi(u_0 + h) - \phi(u_0) - \langle \phi'(u_0), h \rangle|}{\|h\|} = 0. \quad (1)$$

Το φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $\phi'(u_0)$ καλείται **Fréchet παράγωγος** του ϕ στο u_0 .

Τέλος, θα επεκτείνουμε την έννοια της διαφορισιμότητας σε συναρτήσεις ανάμεσα σε δύο χώρους Banach:

Ορισμός 3: Έστω X, Y δύο χώροι Banach, $U \subseteq X$ ανοικτό και $u_0 \in U$.

Ένα συναρτησιακό $\phi : U \rightarrow Y$ λέγεται **Fréchet διαφορίσιμο** στο u_0 , αν υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $\phi'(u_0) : X \rightarrow Y$:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\phi(u_0 + h) - \phi(u_0) - \phi'(u_0)(h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (2)$$

Ο φραγμένος γραμμικός τελεστής $\phi'(u_0)$ καλείται **Fréchet παράγωγος** του ϕ στο u_0 .

Σημείωση 3: Ο φραγμένος γραμμικός τελεστής $\phi'(u_0)$ είναι μοναδικά ορισμένος. Πράγματι, υποθέτουμε ότι $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\phi(u_0 + h) - \phi(u_0) - A(h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) έχουμε $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|B(h)\|}{\|h\|} = 0$, όπου $B = A - \phi'(u_0)$.

Θα δείξουμε ότι $B = 0$.

Έστω $u \in X$ με $\|u\| = 1$. Θέτουμε $h_n = \frac{1}{n}u$, $n = 1, 2, \dots$

Ακόμα, $\|h_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ και έτσι $\|B(u)\| = \frac{\|B(h_n)\|}{\|h_n\|} \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Σημείωση 4: Έστω ένα συναρτησιακό $\phi : U \rightarrow Y$ Fréchet διαφορίσιμο στο u_0 . Τότε για “μικρό” $\|h\|$, έχουμε

$$\phi(u_0 + h) - \phi(u_0) = \phi'(u_0)(h) + w(h) \quad \text{με} \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (4)$$

Σημείωση 5: Έστω X ένας χώρος Banach, I ένα ανοικτό διάστημα του R και $\gamma : I \rightarrow X$ μια συνεχής συνάρτηση (Μια τέτοια συνάρτηση καλείται καμπύλη στον X).

Υπενθυμίζουμε ότι η γ λέγεται διαφορίσιμη με την κλασική έννοια σε ένα σημείο $t_0 \in I$, αν

$$\text{το} \quad \left\| \cdot \right\| - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)] \quad \text{υπάρχει στον} \quad X.$$

Σε αυτή την περίπτωση, το παραπάνω όριο καλείται κλασική παράγωγος της γ στο $t_0 \in I$ και συμβολίζεται με $\dot{\gamma}(t_0)$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι μια καμπύλη $\gamma : I \rightarrow X$ είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $t_0 \in I$ αν και μόνο αν είναι διαφορίσιμη στο $t_0 \in I$ με την κλασική έννοια. Τότε,

$$\gamma'(t_0)(h) = h\dot{\gamma}(t_0), \quad \forall h \in R.$$

Ας σημειωθεί ότι τυπικά το $\gamma'(t_0)$ διαφέρει από το $\dot{\gamma}(t_0)$ καθώς εξ' ορισμού το $\gamma'(t_0)$ είναι μια φραγμένη γραμμική συνάρτηση από το R στον X , ενώ το $\dot{\gamma}(t_0)$ είναι ένα διάνυσμα στον X .

Συγκεκριμένα, ισχύει $\gamma'(t_0)(1) = \dot{\gamma}(t_0)$.

Πρόταση 5: Έστω X, Y δύο χώροι Banach, το $U \subseteq X$ ανοικτό, $u_0 \in U$ και $\phi : U \rightarrow Y$ Fréchet διαφορίσιμη στο u_0 .

Τότε η ϕ είναι συνεχής στο u_0 .

Απόδειξη: Για “μικρό” $\|h\|$, η (4) δίνει

$$\begin{aligned} \|\phi(u_0 + h) - \phi(u_0)\| &\leq \|\phi'(u_0)(h)\| + \|w(h)\| \\ &\leq \|\phi'(u_0)\| \cdot \|h\| + \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} \cdot \|h\| \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□

Πρόταση 5 [Κανόνας της αλυσίδας]: Έστω X, Y, Z χώροι Banach, $U \subseteq X, V \subseteq Y$ ανοικτά σύνολα και συναρτήσεις $\phi : U \rightarrow Y, \psi : V \rightarrow Z$ με $\phi(U) \subseteq V$. Αν η ϕ είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $u_0 \in U$ και η ψ είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $\phi(u_0) \in V$, τότε η σύνθεση $\psi \circ \phi$ είναι επίσης Fréchet διαφορίσιμη στο u_0 με

$$(\psi \circ \phi)'(u_0) = \psi'(\phi(u_0)) \circ \phi'(u_0).$$

Απόδειξη: Αφού η ϕ είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $u_0 \in U$, για “μικρό” $\|h\|$ μπορούμε να γράφουμε

$$\phi(u_0 + h) - \phi(u_0) = \phi'(u_0)(h) + w(h) = y(h), \quad (5)$$

με
$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (6)$$

και
$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|y(h)\| = 0 \quad (7)$$

Αφού η ψ είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $\phi(u_0)$, από την (7), για “μικρό” $\|h\|$ μπορούμε να γράφουμε

$$\psi(\phi(u_o) + y(h)) - \psi(\phi(u_o)) = \psi'(\phi(u_o))[y(h)] + w_1(h),$$

$$\text{ή} \quad \psi(\phi(u_o + h)) - \psi(\phi(u_o)) = \psi'(\phi(u_o))[y(h)] + w_1(h), \quad (8)$$

$$\text{με} \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|w_1(h)\|}{\|y(h)\|} = 0. \quad (9)$$

Τότε, από τις σχέσεις (5) και (8), για “μικρό” $\|h\|$ έχουμε:

$$\psi(\phi(u_o + h)) - \psi(\phi(u_o)) = \psi'(\phi(u_o))[\phi'(u_o)(h)] + w_2(h), \quad (10)$$

$$\text{όπου} \quad w_2(h) = \psi'(\phi(u_o))[w(h)] + w_1(h).$$

Ομως τότε,

$$\begin{aligned} \frac{\|w_2(h)\|}{\|h\|} &\leq \|\psi'(\phi(u_o))\| \cdot \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|w_1(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \|\psi'(\phi(u_o))\| \cdot \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|w_1(h)\|}{\|y(h)\|} \cdot \frac{\|y(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \|\psi'(\phi(u_o))\| \cdot \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|w_1(h)\|}{\|y(h)\|} \cdot \left[\|\phi'(u_o)\| + \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} \right] \end{aligned}$$

(δες (5)).

Εξ αιτίας των (6), (9), το δεξί μέλος της τελευταίας ανισότητας τείνει στο 0 καθώς $\|h\| \rightarrow 0$. Αυτό, σε συνδυασμό με τη σχέση (10), αποδεικνύουν την Πρόταση 5. \square

Πρόταση 6: Έστω $(H, (\cdot, \cdot))$ ένας χώρος Hilbert και $\alpha : H \times H \rightarrow R$ μια διγραμμική, συμμετρική και συνεχή απεικόνιση. Τότε το συναρτησιακό

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \alpha(u, u), \quad u \in H$$

είναι Fréchet διαφορίσιμο σε κάθε σημείο του H με

$$\langle \phi'(u), h \rangle = \alpha(u, h), \quad \text{για κάθε } u, h \in H.$$

Απόδειξη: Για κάθε $u, h \in H$,

$$\phi(u+h) - \phi(u) = \frac{1}{2} [\alpha(u+h, u+h) - \alpha(u, u)] = \frac{1}{2} \alpha(h, h) + \alpha(u, h)$$

[η $\alpha : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διγραμμική, συμμετρική].

Επιπλέον, αφού η α είναι συνεχής, $\exists C > 0$:

$$|\alpha(u, v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

Τότε για κάθε $u, v \in H$, με $h \neq 0$,

$$\frac{|\phi(u+h) - \phi(u) - \alpha(u, h)|}{\|h\|} = \frac{|\alpha(h, h)|}{2\|h\|} \leq \frac{C}{2} \|h\| \rightarrow 0 \text{ καθώς } \|h\| \rightarrow 0.$$

□

Πόρισμα 7: Έστω $(H, (\cdot, \cdot))$ ένας χώρος Hilbert. Τότε το συναρτησιακό

$$\phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2}, \quad u \in H$$

είναι Fréchet διαφορίσιμο σε κάθε σημείο του H με

$$\langle \phi'(u), h \rangle = (u, h), \text{ για κάθε } u, h \in H.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

i. Άμεσα από τον ορισμό 3 προκύπτει ότι κάθε φραγμένη γραμμική συνάρτηση ϕ μεταξύ δύο χώρων Banach X, Y είναι Fréchet διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του X και $\phi'(u) = \phi, \forall u \in X$.

ii. Έστω $H = L^2(\Omega)$, όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ ανοικτό. Τότε το

$$\text{συναρτησιακό } \phi(u) = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(z)|^2 dz, \quad u \in H,$$

είναι Fréchet διαφορίσιμο σε κάθε σημείο του H με

$$\langle \phi'(u), h \rangle = \int_{\Omega} u(z)h(z) dz, \text{ για κάθε } u, h \in H.$$

Αυτό έπεται από το πόρισμα 7.

iii. Έστω $H = W_0^{1,2}(\Omega)$ ή $W^{1,2}(\Omega)$, όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) ανοικτό.
Τότε το συναρτησιακό

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(z)|^2 dz, \quad u \in H,$$

είναι Fréchet διαφορίσιμο σε κάθε σημείο του H με

$$\langle \phi'(u), h \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u(z), \nabla h(z))_{\mathbb{R}^N} dz, \quad \text{για κάθε } u, h \in H.$$

Πράγματι, ορίζουμε τη διγραμμική συμμετρική μορφή $\alpha : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\alpha(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u(z), \nabla v(z))_{\mathbb{R}^N} dz \quad \text{για κάθε } u, v \in H.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz έπεται ότι η α είναι καλά ορισμένη και συνεχής, επομένως μπορεί να εφαρμοστεί η Πρόταση 6.

iv. Έστω $(H, (\cdot, \cdot))$ ένας χώρος Hilbert. Τότε, το συναρτησιακό

$$\phi(u) = \|u\|, \quad u \in H$$

είναι Fréchet διαφορίσιμο σε κάθε σημείο του $H \setminus \{0\}$ με

$$\langle \phi'(u), h \rangle = \frac{(u, h)}{\|u\|}, \quad \text{για κάθε } u, h \in H \text{ με } u \neq 0.$$

Πράγματι, $\phi = \gamma \circ \psi$, όπου

$$\gamma : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad \gamma(t) = \sqrt{t}, \quad \psi : H \rightarrow [0, +\infty), \quad \psi(u) = \|u\|^2$$

$$\text{και } \dot{\gamma}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t > 0, \quad \langle \psi'(u), h \rangle = 2(u, h) \quad \text{για κάθε } u, h \in H.$$

Τώρα, από τον κανόνα της αλυσίδας (Πρόταση 5) για $u \in H \setminus \{0\}, h \in H$,

$$\phi'(u)(h) = \gamma'(\psi(u))[\psi'(u)(h)] = \frac{1}{2\sqrt{\|u\|^2}} 2(u, h) = \frac{(u, h)}{\|u\|}$$

[δες και Σημείωση 5].

v. Έστω $(H, (\cdot, \cdot))$ ένας χώρος Hilbert και $p > 1$. Τότε το συναρτησιακό

$$\phi_p(u) = \|u\|^p, \quad u \in H$$

είναι Fréchet διαφορίσιμο σε κάθε σημείο του H με

$$\langle \phi'_p(u), h \rangle = \begin{cases} p\|u\|^{p-2}(u, h), & \alpha\nu \ u \neq 0 \\ 0 & , \quad \alpha\nu \ u = 0 \end{cases}, \quad \forall h \in H.$$

Πράγματι, $\phi_p = \gamma_p \circ \psi$, όπου

$$\gamma_p : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad \gamma_p(t) = t^{p/2}, \quad \psi : H \rightarrow [0, +\infty), \quad \psi(u) = \|u\|^2$$

και

$$\text{και } \dot{\gamma}_p(t) = \frac{p}{2}t^{p/2-1}, \quad t > 0, \quad \langle \psi'(u), h \rangle = 2(u, h) \quad \text{για κάθε } u, h \in H.$$

Τώρα, από τον κανόνα της αλυσίδας (Πρόταση 5) για $u \in H \setminus \{0\}, h \in H$,

$$\phi'_p(u)(h) = \gamma'_p(\psi(u))[\psi'(u)(h)] = \frac{p}{2}(\|u\|^2)^{p/2-1} 2(u, h) = p\|u\|^{p-2}(u, h)$$

[δες και Σημείωση 5].

Επίσης,

$$\frac{|\phi_p(h) - \phi_p(0)|}{\|h\|} = \|h\|^{p-1} \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } \|h\| \rightarrow 0.$$

Ορισμός 8: Έστω X ένας χώρος Banach και $U \subseteq X$ ένα ανοικτό. Ένα συναρτησιακό $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **κλάσης C^1** , αν είναι **Fréchet διαφορίσιμο** σε κάθε σημείο του U και η απεικόνιση $U \ni u \rightarrow \phi'(u) \in X^*$ είναι συνεχής.

Η κλάση όλων των C^1 -συναρτήσεων στο U , συμβολίζεται με $C^1(U)$.

Πρόταση 9 (Θεώρημα Μέσης Τιμής): Έστω X ένας χώρος Banach, $U \subseteq X$ ανοικτό και κυρτό σύνολο και $\phi \in C^1(U)$.

Τότε, για κάθε $u_0, u_1 \in U$ έχουμε τον τύπο

$$\phi(u_1) - \phi(u_0) = \int_0^1 \langle \phi'((1-t)u_0 + tu_1), u_1 - u_0 \rangle dt.$$

Απόδειξη: Έστω $u_0, u_1 \in U$. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα u_0, u_1 , δηλαδή την καμπύλη $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ που ορίζεται ως

$$\gamma(t) = (1-t)u_0 + tu_1, \quad t \in [0, 1].$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\dot{\gamma}(t) = u_1 - u_0$, για κάθε $t \in [0,1]$ και άρα,
 $\gamma'(t)(h) = h(u_1 - u_0)$, για κάθε $t \in [0,1]$, $h \in R$ [δες και Σημείωση 5].
 Τώρα θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi = \phi \circ \gamma : [0,1] \rightarrow R$. Από τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$, $h \in R$,

$$\psi'(t)(h) = \phi'(\gamma(t))[\gamma'(t)(h)] = h\langle \phi'(\gamma(t)), u_1 - u_0 \rangle,$$

το οποίο σημαίνει [δες Σημείωση 5] ότι για κάθε $t \in [0,1]$,

$$\dot{\psi}(t) = \langle \phi'(\gamma(t)), u_1 - u_0 \rangle.$$

Αλλά αφού $\phi \in C^1(U)$, τότε και $\psi \in C^1([0,1])$, οπότε

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \dot{\psi}(t) dt,$$

απ'όπου άμεσα προκύπτει το ζητούμενο. □

Πόρισμα 10: Έστω X ένας χώρος Banach, $U \subseteq X$ ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο και $\phi \in C^1(U)$ με $\phi'(u) = 0, \forall u \in U$. Τότε η ϕ είναι σταθερή.

Απόδειξη: Έστω $u_0 \in U$ σταθερό. Θέτουμε

$$W = \{u \in U : \phi(u) = \phi(u_0)\}.$$

Προφανώς το W είναι κλειστό με την σχετική τοπολογία του U .

Αρκεί να δείξουμε ότι το W είναι και ανοικτό, διότι τότε, λόγω της συνεκτικότητας του U , θα προκύψει $W = U$.

Προς τούτο, επιλέγουμε ένα $u_1 \in W$ και $r > 0$ με $B(u_1, r) \subseteq U$.

Αφού $\phi' = 0$ στο ανοικτό κυρτό σύνολο $B(u_1, r)$, από την Πρόταση 9 έχουμε ότι $\phi(u) = \phi(u_1), \forall u \in B(u_1, r)$.

Αλλά $\phi(u_1) = \phi(u_0)$ άρα, $\phi(u) = \phi(u_0), \forall u \in B(u_1, r)$.

Έτσι, $B(u_1, r) \subseteq W$ κι άρα το W είναι ανοικτό. □

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.2

Τελεστής Nemytskii - Ολοκληρωτικά Συναρτησιακά

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), ανοικτό και φραγμένο σύνολο και μια συνεχής συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την αυξητική συνθήκη:

$$(H): |f(t)| \leq c_1 |t|^{p-1} + c_2 \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}, \text{ όπου } p > 1 \text{ και } c_1, c_2$$

θετικές σταθερές.

Εφεξής, με q θα συμβολίζουμε το συζυγή εκθέτη του $p > 1$, δηλαδή

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}, \quad q > 1.$$

Πρόταση 11: Υπό τη συνθήκη (H), υπάρχουν $c_1', c_2' > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(t)|^q \leq c_1' |t|^p + c_2', \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Άρα, για κάθε $u \in L^p(\Omega)$, η συνάρτηση $f \circ u = f(u(\cdot))$ ανήκει στον $L^q(\Omega)$.

Απόδειξη: Η κυρτότητα της απεικόνισης $[0, +\infty) \ni t \mapsto t^q$ συνεπάγεται ότι

$$|t+s|^q \leq 2^{q-1} (|t|^q + |s|^q), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Η υπόθεση (H) σε συνδυασμό με τη σχέση (11) δίνει

$$|f(t)|^q \leq 2^{q-1} [c_1^q |t|^{q(p-1)} + c_2^q] = 2^{q-1} c_1^q |t|^p + 2^{q-1} c_2^q, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Τότε θέτουμε $c_1' = 2^{q-1} c_1^q, c_2' = 2^{q-1} c_2^q$. □

Ορισμός 12: Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την (H).

Ο τελεστής Nemytskii της f είναι ο τελεστής $N_f : L^p(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))^*$ με

$$\langle N_f(u), h \rangle = \int_{\Omega} f(u(z))h(z)dz \quad u, h \in L^p(\Omega).$$

Ας σημειώσουμε ότι αν η f ικανοποιεί την (H), τότε ο τελεστής N_f είναι καλά ορισμένος (Πρόταση 11 και ανισότητα Hölder).

Πρόταση 13: Υπό τη συνθήκη (H), ο τελεστής Nemytskii N_f είναι συνεχής και φραγμένος, δηλαδή απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα.

Απόδειξη: Από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\|N_f(u) - N_f(v)\|_* \leq \|f(u(\cdot)) - f(v(\cdot))\|_q \quad \forall u, v \in L^p(\Omega) \quad (12)$$

και

$$\|N_f(u)\|_* \leq \|f(u(\cdot))\|_q \quad \forall u \in L^p(\Omega). \quad (13)$$

Αρχικά, θα δείξουμε τη συνέχεια:

Έστω ακολουθία $\{u_n\}_{n \geq 1} \subseteq L^p(\Omega)$ τέτοια ώστε $u_n \rightarrow u$ στον $L^p(\Omega)$.

Περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$u_n(z) \rightarrow u(z) \text{ σχεδόν παντού (σ.π.) στο } \Omega \quad (14)$$

και ότι για κάποια $w \in L^p(\Omega)_+$,

$$|u_n(z)| \leq w(z), \quad |u(z)| \leq w(z), \quad \forall n \geq 1 \text{ και σχεδόν για όλα τα } z \in \Omega. \quad (15)$$

Από την (14) προκύπτει ότι σχεδόν για όλα τα $z \in \Omega$,

$$|f(u_n(z)) - f(u(z))|^q \rightarrow 0, \quad \text{για } n \rightarrow +\infty$$

(η f είναι συνεχής).

Ακόμα, για κάθε $n \geq 1$ και σχεδόν για όλα τα $z \in \Omega$, έχουμε

$$\begin{aligned} |f(u_n(z)) - f(u(z))|^q &\leq 2^{q-1} [|f(u_n(z))|^q + |f(u(z))|^q] \\ &\leq 2^{q-1} [c_1 |u_n(z)|^p + c_2 + c_1 |u(z)|^p + c_2] \\ &\leq 2^q (c_1 w(z)^p + c_2) = \tilde{w}(z), \quad \tilde{w} \in L^1_+(\Omega) \end{aligned}$$

(βλ. (15)).

Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue απ'όπου προκύπτει

$$\int_{\Omega} |f(u_n(z)) - f(u(z))|^q dz \rightarrow 0, \quad \text{για } n \rightarrow +\infty.$$

Η τελευταία σύγκλιση, σε συνδυασμό με τη σχέση (12) δίνει

$$\|N_f(u_n) - N_f(u)\|_* \rightarrow 0, \quad \text{για } n \rightarrow +\infty.$$

Έτσι, ο N_f είναι συνεχής.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο N_f είναι φραγμένος.

Έστω $r > 0$ σταθερό. Τότε για κάθε u στον $L^p(\Omega)$ με $\|u\|_p \leq r$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(u(z))|^q dz &\leq c_1' \int_{\Omega} |u(z)|^p dz + c_2' |\Omega| \quad \text{σχεδόν για όλα τα } z \in \Omega \\ &\leq c_1' r^p + c_2' |\Omega| = M_r. \end{aligned}$$

Τώρα η σχέση (13) συνεπάγεται

$$\sup_{\|u\|_p \leq r} \|N_f(u)\|_* \leq M_r^{1/q} < \infty,$$

δηλαδή ο N_f είναι φραγμένος. □

Η έννοια του τελεστή Nemytskii μπορεί να επεκταθεί και στις διανυσματικές συναρτήσεις.

Έστω $\bar{f} : R^N \rightarrow R^N$ ($N \geq 1$) μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την εξής αυξητική συνθήκη:

$(\bar{H}) : |\bar{f}(\xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1} + c_2$ για κάθε $\xi \in R^N$, όπου $p > 1$ και c_1, c_2 θετικές σταθερές.

Η παρακάτω πρόταση είναι παρόμοια με την Πρόταση 11 (παραλείπουμε την απόδειξη):

Πρόταση 14: Υπό τη συνθήκη (\bar{H}) , υπάρχουν $c_1', c_2' > 0$ τέτοια ώστε

$$|\bar{f}(\xi)|^q \leq c_1' |\xi|^p + c_2', \quad \text{για κάθε } \xi \in R^N$$

Άρα, για κάθε $\bar{u} \in L^p(\Omega, R^N)$, η συνάρτηση $\bar{f} \circ \bar{u} = \bar{f}(\bar{u}(\cdot))$ βρίσκεται στον $L^q(\Omega, R^N)$.

Ορισμός 15: Έστω $\bar{f} : R^N \rightarrow R^N$ ($N \geq 1$) μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την (\bar{H}) . Ο τελεστής Nemytskii της \bar{f} είναι ο τελεστής

$$N_{\bar{f}} : L^p(\Omega, R^N) \rightarrow (L^q(\Omega, R^N))^*$$

που ορίζεται ως

$$\langle N_{\bar{f}}(\bar{u}), \bar{h} \rangle = \int_{\Omega} (\bar{f}(\bar{u}(z)), \bar{h}(z))_{R^N} dz \quad \bar{u}, \bar{h} \in L^p(\Omega, R^N).$$

Ας σημειώσουμε ότι αν η \bar{f} ικανοποιεί την (\bar{H}) , τότε ο $N_{\bar{f}}$ είναι καλά ορισμένος (Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 14 και τις ανισότητες Cauchy-Schwarz & Hölder).

Η παρακάτω πρόταση είναι παρόμοια με την Πρόταση 13 (παραλείπουμε την απόδειξη):

Πρόταση 16: Υπό τη συνθήκη (\bar{H}) , ο τελεστής Nemytskii $N_{\bar{f}}$ είναι συνεχής και φραγμένος, δηλαδή απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα.

Τώρα θα υπολογίσουμε την Fréchet παράγωγο μιας κλάσης ολοκληρωτικών συναρτησιακών που σχετίζονται με τη μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Πρόταση 17: Έστω $F \in C^1(R^N)$ με $\nabla F = \bar{f} : R^N \rightarrow R^N$ που ικανοποιεί την (\bar{H}) . Τότε το συναρτησιακό

$$\phi(\bar{u}) = \int_{\Omega} F(\bar{u}(z)) dz, \quad \bar{u} \in L^p(\Omega, R^N)$$

είναι κλάσης C^1 στον $L^p(\Omega, R^N)$ με $\phi' = N_{\nabla F}$, δηλαδή

$$\langle \phi'(\bar{u}), \bar{h} \rangle = \int_{\Omega} (\nabla F(\bar{u}(z)), \bar{h}(z))_{R^N} dz \quad \forall \bar{u}, \bar{h} \in L^p(\Omega, R^N).$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (πρόταση 9), έχουμε ότι $\forall \xi, \eta \in R^N$

$$F(\xi) - F(\eta) = \int_0^1 (\nabla F(\eta + t(\xi - \eta)), \xi - \eta)_{R^N} dt. \quad (16)$$

Ειδικότερα, $\forall \xi \in R^N$,

$$F(\xi) = \int_0^1 (\nabla F(t\xi), \xi)_{R^N} dt + F(0),$$

άρα,

$$|F(\xi)| \leq \int_0^1 (c_1 t^{p-1} |\xi|^{p-1} + c_2) |\xi| dt + |F(0)|$$

$$= \frac{c_1}{p} |\xi|^p + c_2 |\xi| + |F(0)|.$$

Έπεται ότι, $\forall \bar{u} \in L^p(\Omega, R^N)$ ισχύει $F(\bar{u}(\cdot)) \in L^p(\Omega, R^N)$ και συνεπώς το συναρτησιακό ϕ είναι καλά ορισμένο.

Τώρα, έστω $\bar{u}_0, \bar{h} \in L^p(\Omega, R^N)$. Από την σχέση (16) έχουμε

$$\phi(\bar{u}_0 + \bar{h}) - \phi(\bar{u}_0) = \int_{\Omega} \left[\int_0^1 (\nabla F(\bar{u}_0(z) + t\bar{h}(z)), \bar{h}(z)) dt \right] dz.$$

$$\text{Τότε, } \phi(\bar{u}_0 + \bar{h}) - \phi(\bar{u}_0) - \langle N_{\nabla F}(\bar{u}_0), \bar{h} \rangle = \int_{\Omega} \left[\int_0^1 G(z, t) dt \right] dz, \quad (17)$$

όπου

$$G(z, t) = (\nabla F(\bar{u}_0(z) + t\bar{h}(z)) - \nabla F(\bar{u}_0(z)), \bar{h}(z))_{R^N}, \quad z \in \Omega, t \in [0, 1].$$

Ισχυριζόμαστε ότι η G ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Fubini-Tonneli (Brezis[1], p. (79)).

Πράγματι, για κάθε $t \in [0, 1]$,

$$\int_{\Omega} |G(z, t)| dz \leq \|\nabla F(\bar{u}_0(\cdot) + t\bar{h}(\cdot)) - \nabla F(\bar{u}_0(\cdot))\|_q \cdot \|\bar{h}\|_p < \infty$$

$$\text{και η απεικόνιση } [0, 1] \ni t \mapsto \int_{\Omega} G(z, t) dx = \langle N_{\nabla F}(\bar{u}_0 + t\bar{h}) - N_{\nabla F}(\bar{u}_0), \bar{h} \rangle$$

είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη. [Υπενθυμίζουμε ότι $\nabla F = \bar{f} : R^N \rightarrow R^N$ ικανοποιεί την (\bar{H}) , επομένως ικανοποιεί και τα συμπεράσματα των Προτάσεων 14 και 16].

Τώρα, η (17) δίνει

$$\phi(\bar{u}_0 + \bar{h}) - \phi(\bar{u}_0) - \langle N_{\nabla F}(\bar{u}_0), \bar{h} \rangle = \int_0^1 \langle N_{\nabla F}(\bar{u}_0 + t\bar{h}) - N_{\nabla F}(\bar{u}_0), \bar{h} \rangle dt$$

η οποία συνεπάγεται ότι

$$\frac{|\phi(\bar{u}_0 + \bar{h}) - \phi(\bar{u}_0) - \langle N_{\nabla F}(\bar{u}_0), \bar{h} \rangle|}{\|\bar{h}\|_p} \leq \int_0^1 S_{\bar{h}}(t) dt, \quad (18)$$

$$\text{όπου } S_{\bar{h}}(t) = \|N_{\nabla F}(\bar{u}_0 + t\bar{h}) - N_{\nabla F}(\bar{u}_0)\|_*, \quad t \in [0, 1].$$

Από την Πρόταση 16, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\|\bar{h}\|_p \rightarrow 0} S_{\bar{h}}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

και ότι

$$\sup \{ S_{\bar{h}}(t) : \|\bar{h}\|_p \leq 1, t \in [0, 1] \} < \infty.$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, έπεται ότι

$$\lim_{\|\bar{h}\|_p \rightarrow 0} \int_0^1 S_{\bar{h}}(t) dt = 0.$$

Άρα, από την (18) προκύπτει το ζητούμενο. \square

Πόρισμα 18: Έστω $f : R \rightarrow R$ συνεχής που ικανοποιεί την υπόθεση (H).
Θέτουμε

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad t \in R.$$

Τότε το συναρτησιακό $\phi : L^p(\Omega) \rightarrow R$ που ορίζεται ως

$$\phi(u) = \int_{\Omega} F(u(z)) dz, \quad u \in L^p(\Omega)$$

είναι κλάσης C^1 στον $L^p(\Omega)$ με $\phi' = N_f$, δηλαδή,

$$\langle \phi'(u), h \rangle = \int_{\Omega} f(u(z)) h(z) dz, \quad \forall u, h \in L^p(\Omega).$$

Πόρισμα 19: Το συναρτησιακό $j_N : L^p(\Omega, R^N) \rightarrow R^N$, $j_N(\bar{u}) = \frac{1}{p} \|\bar{u}\|_p^p$

είναι κλάσης C^1 με

$$\langle j'_N(\bar{u}), \bar{h} \rangle = \int_{\Omega} |\bar{u}(z)|^{p-2} (\bar{u}(z), \bar{h}(z))_{R^N} dz, \quad \forall \bar{u}, \bar{h} \in L^p(\Omega, R^N).$$

Ειδικότερα, το συναρτησιακό

$$j : L^p(\Omega) \rightarrow R \quad j(u) = \frac{1}{p} \|u\|_p^p$$

είναι κλάσης C^1 με

$$\langle j'(u), h \rangle = \int_{\Omega} |u(z)|^{p-2} u(z) h(z) dz \quad \forall u, h \in L^p(\Omega).$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $F : R^N \rightarrow R$, $F(\xi) = \frac{|\xi|^p}{p}$, $\xi \in R^N$. Τότε

$F \in C^1(R^N)$ με $\nabla F(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi$, $\xi \in R^N$ (δες Παράδειγμα (v)).

Προφανώς, το ∇F ικανοποιεί την υπόθεση (\bar{H}) κι έτσι εφαρμόζεται η Πρόταση 17.

□

Πόρισμα 20: Το συναρτησιακό

$$J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p$$

είναι κλάσης C^1 με

$$\langle J'(u), h \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u(z)|^{p-2} (\nabla u(z), \nabla h(z))_{\mathbb{R}^N} dz, \quad \forall u, h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Απόδειξη: Έχουμε $J = j_N \circ L$, όπου $L : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ με $L(u) = \nabla u$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Να σημειωθεί ότι ο L είναι γραμμικός και φραγμένος κι έτσι $L'(u) = L$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Τώρα, από τον κανόνα της αλυσίδας (Πρόταση 5) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle J'(u), h \rangle &= \langle j'_N(L(u)), L'(u)(h) \rangle = \langle j'_N(\nabla u), \nabla h \rangle \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u(z)|^{p-2} (\nabla u(z), \nabla h(z))_{\mathbb{R}^N} dz \end{aligned}$$

$\forall u, h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (βλ. Πρόταση 19).

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΡΙΣΙΜΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

Θεώρημα 3.1.1 (Μεταβολική Αρχή του Ekeland)

Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ μια κάτω ημισυνεχής και κάτω φραγμένη, με $\phi \neq +\infty$. Τότε, για $\varepsilon > 0$ και $u \in X$ τέτοιο ώστε $\phi(u) \leq \inf_X \phi + \varepsilon$ και $\lambda > 0$, μπορούμε να βρούμε $v \in X$ τέτοιο ώστε

$$\phi(v) \leq \phi(u), \quad d(u, v) \leq \lambda$$

και

$$\phi(v) \leq \phi(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, y) \quad \text{για κάθε } y \in X.$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\lambda = 1$ (εναλλακτικά θεωρούμε μια ισοδύναμη μετρική $d_\lambda = \frac{1}{\lambda} d$).

Εισάγουμε τη σχέση " \leq " στον X όπου

$$y \leq x \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \phi(y) + \varepsilon d(x, y) \leq \phi(x). \quad (1)$$

Προφανώς η " \leq " είναι σχέση μερικής διάταξης στον X (διότι είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική).

Με επαγωγή, κατασκευάζουμε μια ακολουθία $\{u_n\}_{n \geq 0} \subset X$ ως εξής:

Έστω $u_0 = u$ και υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί οι όροι u_0, u_1, \dots, u_n .

Αν $L_n = \{h \in X : h \leq u_n\}$, επιλέγουμε $u_{n+1} \in L_n$ τέτοιο ώστε

$$\phi(u_{n+1}) \leq \inf_{L_n} \phi + \frac{1}{n+1}. \quad (2)$$

Η κάτω ημισυνέχεια της ϕ συνεπάγεται ότι τα σύνολα L_n είναι κλειστά. Επιπλέον, $L_{n+1} \subset L_n$ (αφού $u_{n+1} \leq u_n$).

Ισχυρισμός 1: $\text{diam } L_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Έστω $h \in L_{n+1}$. Τότε $h \leq u_{n+1} \leq u_n$ και άρα από τις (1) και (2) έχουμε

$$\varepsilon d(u_{n+1}, h) \leq \phi(u_{n+1}) - \phi(h) \leq \inf_{L_n} \phi + \frac{1}{n+1} - \phi(h) \leq \frac{1}{n+1}$$

Άρα, $\text{diam} L_{n+1} \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)} \rightarrow 0$ για $n \rightarrow \infty$.

Εφόσον ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος, από το θεώρημα τομής του Cantor και τον Ισχυρισμό 1 έχουμε $\bigcap_{n \geq 0} L_n = \{v\}$ για κάποιο $v \in X$.

Ειδικότερα, $v \in L_0$, οπότε $v \leq u_0 = u$ κι άρα

$$\phi(v) \leq \phi(u) - \varepsilon d(u, v) \leq \phi(u) \quad [\text{δες (3.1.1)}].$$

Επίσης, $d(u, v) \leq \frac{1}{\varepsilon}(\phi(u) - \phi(v)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\inf_x \phi + \varepsilon - \inf_x \phi \right) = 1$.

Το v είναι ελαχιστικό (minimal) για την διάταξη \leq .

Πράγματι, αν $z \leq v$, τότε $z \leq u_n$ για κάθε $n \geq 0$ κι έτσι $z \in \bigcap_{n \geq 0} L_n = \{v\}$,

συνεπώς $z = v$. Επομένως, $\phi(v) \leq \phi(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, y)$ για κάθε

$y \in X$. [Πράγματι αν $y \in X$ με $y \neq v$, τότε δεν ισχύει η (1).].

Σημείωση 3.1.2 Από το θεώρημα 3.1.1, οι σχέσεις “ $d(u, v) \leq \lambda$ ” και

“ $\phi(v) \leq \phi(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, y)$ για κάθε $y \in X$ ” είναι συμπληρωματικές, με

την εξής έννοια:

- Αν το $\lambda > 0$ είναι “μεγάλο”, τότε η ανισότητα $d(u, v) \leq \lambda$ παρέχει μικρή πληροφορία για το πού βρίσκεται το v , ενώ η ανισότητα

“ $\phi(v) \leq \phi(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, y)$ για κάθε $y \in X$ ” γίνεται πιο ακριβής με το v να

τείνει να γίνει ολικό ελάχιστο της ϕ , αφού

η διαταραχή $\frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, \cdot)$ είναι πολύ “μικρή”.

- Η κατάσταση αυτή αντιστρέφεται αν το $\lambda > 0$ είναι “μικρό”.

Δύο σημαντικές ειδικές περιπτώσεις είναι όταν το $\lambda = 1$ (τότε αδιαφορούμε για τα όρια μεταβολής του v) και όταν το $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ (όπου τότε παίρνουμε πληροφορίες και από τις δύο ανισότητες).

Παρακάτω παραθέτουμε και τις δύο αυτές περιπτώσεις σαν πορίσματα του θεωρήματος 3.1.1.

Η ανισότητα “ $\phi(v) \leq \phi(y) + \varepsilon \cdot d(v, y)$ για κάθε $y \in X$ ” έχει ιδιαίτερη σημασία όταν η ϕ είναι διαφορίσιμη σε έναν χώρο Banach. Αυτό θα δειχθεί παρακάτω, στα Πορίσματα 3.1.5 και 3.1.6.

Πόρισμα 3.1.3 Αν (X, d) και $\phi : X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ είναι όπως στο θεώρημα 3.1.1, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $v_\varepsilon \in X$ τέτοιο ώστε $\phi(v_\varepsilon) \leq \inf_X \phi + \varepsilon$ και $\phi(v_\varepsilon) \leq \phi(y) + \varepsilon d(v_\varepsilon, y)$ για κάθε $y \in X$.

Πόρισμα 3.1.4 Αν (X, d) και $\phi : X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ όπως στο θεώρημα 3.1.1 και $\varepsilon > 0$ και $u_\varepsilon \in X$ που ικανοποιεί

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \phi + \varepsilon,$$

τότε μπορούμε να βρούμε $v_\varepsilon \in X$, τέτοιο ώστε

$$\phi(v_\varepsilon) \leq \phi(u_\varepsilon), d(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq \sqrt{\varepsilon} \text{ και } \phi(v_\varepsilon) \leq \phi(y) + \sqrt{\varepsilon} d(v_\varepsilon, y)$$

για κάθε $y \in X$.

Πόρισμα 3.1.5 Αν X χώρος Banach και $\phi : X \rightarrow R$, κάτω φραγμένη και Frechet διαφορίσιμη, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $v_\varepsilon \in X$ τέτοιο ώστε

$$\phi(v_\varepsilon) \leq \inf_X \phi + \varepsilon \text{ και } \|\phi'(v_\varepsilon)\| \leq \varepsilon.$$

Πόρισμα 3.1.6 Αν X και ϕ όπως στο πόρισμα 3.1.5 και $\varepsilon > 0$ και $u_\varepsilon \in X$ με $\phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \phi + \varepsilon$, τότε υπάρχει $v_\varepsilon \in X$, τέτοιο ώστε

$$\phi(v_\varepsilon) \leq \phi(u_\varepsilon), \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon} \text{ και } \|\phi'(v_\varepsilon)\| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Σημείωση 3.1.7 Το προηγούμενο πόρισμα εγγυάται την ύπαρξη ελαχιστοποιητικής ακολουθίας $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ με $\phi'(x_n) \rightarrow 0$ στον X^* .

Αυτό οδηγεί στην παρακάτω συνθήκη συμπάγειας για συναρτήσεις $\phi \in C^1(X, R)$ που μας οδηγεί στο κατώφλι της Θεωρίας Κρίσιμων Σημείων.

Ορισμός 3.1.8 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach και $\phi \in C^1(X, R)$.

- a) Η ϕ ικανοποιεί τη **συνθήκη Palais–Smale σε επίπεδο $c \in R$** (συνθήκη (PS)_c) αν κάθε ακολουθία $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ με $\phi(x_n) \rightarrow c$ στο R και $\phi'(x_n) \rightarrow 0$ στον X^* έχει ισχυρά συγκλίνουσα υπακολουθία.

Λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη Palais–Smale (PS) αν ικανοποιεί τη συνθήκη Palais–Smale σε κάθε επίπεδο $c \in R$.

b) Η ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη Cerami σε επίπεδο $c \in R$ (συνθήκη $(C)_c$), αν κάθε ακολουθία $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ με $\phi(x_n) \rightarrow c$ στο R και $(1 + \|x_n\|)\phi'(x_n) \rightarrow 0$ στον X^* έχει ισχυρά συγκλίνουσα υπακολουθία.

Λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη Cerami (συνθήκη (C)) αν ικανοποιεί τη συνθήκη Cerami σε κάθε επίπεδο $c \in R$.

Σημείωση 3.1.9 Η συνθήκη $(C)_c$ είναι ασθενέστερη της συνθήκης $(PS)_c$.

Η επόμενη επέκταση του θεωρήματος 3.1.1 ταιριάζει στην συνθήκη (C).

Θεώρημα 3.1.10 Έστω $\xi : R_+ \rightarrow R_+$ μια συνεχής, αύξουσα συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \xi(s)} ds = +\infty.$$

Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος, $x_0 \in X$ και μια κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $\phi : X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ που είναι κάτω φραγμένη με $\phi \neq +\infty$.

Αν $\varepsilon > 0$ και $u \in X$ που ικανοποιεί

$$\phi(u) \leq \inf_X \phi + \varepsilon$$

και $\lambda > 0$, θέτουμε $r_0 = d(x_0, u)$ και σταθεροποιούμε $\bar{r} > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_{r_0}^{r_0 + \bar{r}} \frac{1}{1 + \xi(s)} ds \geq \lambda.$$

Τότε, υπάρχει $v \in X$ τέτοιο ώστε $\phi(v) \leq \phi(u)$, $d(v, x_0) \leq r_0 + \bar{r}$ και

$$\phi(v) \leq \phi(y) + \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + \xi(d(x_0, v)))} d(v, y), \forall y \in X. \quad (3)$$

Σημείωση 3.1.11 Αν $\xi = 0$, $x_0 = u$ και $\bar{r} = \lambda$, τότε το θεώρημα 3.1.10 ταυτίζεται με το θεώρημα 3.1.1.

Πόρισμα 3.1.12 Έστω $\xi : R_+ \rightarrow R_+$ μια συνεχής, αύξουσα συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \xi(s)} ds = +\infty.$$

Έστω X χώρος Banach και $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ κάτω φραγμένη Fréchet διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $\varepsilon > 0$ και $u \in X$ με

$$\phi(u) \leq \inf_X \phi + \varepsilon$$

και $\lambda > 0$ και $\bar{r} > 0$, με

$$\int_0^{\bar{r}} \frac{1}{1 + \xi(s)} ds \geq \lambda,$$

τότε υπάρχει $v \in X$ τέτοιο ώστε $\phi(v) \leq \phi(u)$, $\|v - u\| \leq \bar{r}$ και

$$\|\phi'(v)\| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + \xi(\|v\|))}.$$

Πόρισμα 3.1.13 Αν ξ, ϕ και X όπως στο πόρισμα 3.1.12, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $v_\varepsilon \in X$ τέτοιο ώστε

$$\phi(v_\varepsilon) \leq \inf_X \phi + \varepsilon \quad \text{και} \quad \|\phi'(v_\varepsilon)\| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \xi(\|v_\varepsilon\|)}.$$

Πόρισμα 3.1.14 Αν ξ, ϕ και X όπως στο πόρισμα 3.1.12, τότε η ϕ έχει μια ελαχιστοποιητική ακολουθία $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ με $(1 + \xi(\|x_n\|))\phi'(x_n) \rightarrow 0$ στον X^* .

Συνδυάζοντας αυτό το πόρισμα με τη συνθήκη $(C)_c$ για $c = \inf_X \phi$ προκύπτει το παρακάτω.

Πόρισμα 3.1.15 Αν ο X είναι χώρος Banach και $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ κάτω φραγμένη που ικανοποιεί τη συνθήκη $(C)_c$ για $c = \inf_X \phi$, τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\phi(x) = \inf_X \phi.$$

Απόδειξη: Εξαιτίας του πορίσματος 3.1.14 (με $\xi(r) = r$), υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ με $\phi(x_n) \rightarrow c = \inf_X \phi$ και $(1 + \|x_n\|)\phi'(x_n) \rightarrow 0$ στον X^* .

Αφού η ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη $(C)_c$, περνώντας σε μια υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n \rightarrow x$ στον X . Τότε $\phi(x) = \inf_X \phi$.

□

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια ενδιαφέρουσα σχέση ανάμεσα στη συνθήκη (C)_c και την πιεστικότητα της ϕ .

Πρόταση 3.1.16 Αν ο X είναι χώρος Banach και η $\phi \in C^1(X)$ είναι κάτω φραγμένη και ικανοποιεί την συνθήκη (C), τότε η ϕ είναι πιεστική, δηλαδή $\phi(x) \rightarrow +\infty$ καθώς $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι η ϕ δεν είναι πιεστική. Τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ και ακολουθία $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset X$ τέτοια ώστε

$$\phi(u_n) \leq c + \frac{1}{n} \text{ και } \|u_n\| \geq 2(e^n - 1). \quad (4)$$

Εφαρμόζοντας το πόρισμα 3.1.12 με

$$\xi(r) = r, \varepsilon = c + \frac{1}{n} - \inf_X \phi, \lambda = n, \bar{r} = e^n - 1$$

και παίρνουμε μια ακολουθία $\{v_n\}_{n \geq 1} \subset X$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \phi(v_n) \leq \phi(u_n), \|v_n - u_n\| \leq e^n - 1 \text{ και} \\ \|\phi'(v_n)\| \leq \frac{c + \frac{1}{n} - \inf_X \phi}{n(1 + \|v_n\|)}, \forall n \geq 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (4) και (5),

$$\|v_n\| \geq \|u_n\| - \|v_n - u_n\| \geq e^n - 1$$

το οποίο δίνει $\|v_n\| \rightarrow +\infty$, ενώ $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \phi(v_n) \leq c$ και

$(1 + \|v_n\|)\phi'(v_n) \rightarrow 0$ στον X^* . Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι η ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη (C). \square

Το παραπάνω αποτέλεσμα οδηγεί στην ακόλουθη σύγκριση των δύο συνθηκών συμπαγείας του ορισμού 3.1.8.

Πρόταση 3.1.17: Αν X είναι χώρος Banach και $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ κάτω φραγμένη, τότε οι συνθήκες (PS) και (C) είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η συνθήκη (C) έπεται τη συνθήκη (PS) (σημείωση 3.1.9).

Έστω ακολουθία $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ με $\{\phi(x_n)\}$ φραγμένη και $\phi'(x_n) \rightarrow 0$ στον X^* .

Τότε εξαιτίας της πρότασης 3.1.16, η $\{x_n\}_{n \geq 1}$ είναι φραγμένη και άρα

$$(1 + \|x_n\|)\phi'(x_n) \rightarrow 0 \text{ στον } X^*.$$

Αφού η ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη (C), υπάρχει ισχυρά συγκλίνουσα υπακολουθία της $\{x_n\}_{n \geq 1}$. Έτσι, η ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη (PS).

□

Τέλος, θα αναφέρουμε μια συνέπεια της συνθήκης (PS) για συναρτησιακά που είναι κάτω φραγμένα.

Πρόταση 3.1.18: Αν X είναι χώρος Banach και $\phi \in C^1(X, R)$ είναι κάτω φραγμένη που ικανοποιεί τη συνθήκη (PS) για $c = \inf_X \phi$, τότε κάθε ελαχιστοποιητική ακολουθία $\{u_n\}_{n \geq 1}$ της ϕ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, της οποίας το όριο είναι σημείο ολικού ελαχίστου της ϕ .

Απόδειξη: Περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\phi(u_n) \leq \inf_X \phi + \frac{1}{n^2}$$

για κάθε $n \geq 1$. Από το πόρισμα 3.1.6, υπάρχει ακολουθία $\{v_n\}_{n \geq 1} \subset X$ με $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(v_n) = \inf_X \phi$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi'(v_n)\| = 0$ και

$$\|u_n - v_n\| \leq \frac{1}{n} \text{ για κάθε } n \geq 1. \quad (6)$$

Εφόσον η ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη (PS)_c, η ακολουθία $\{v_n\}_{n \geq 1}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{v_{n_k}\}_{k \geq 1}$. Τότε, όμως, η τρίτη ανισότητα της σχέσης (6) συνεπάγεται ότι η $\{u_{n_k}\}$ συγκλίνει. Από τη συνέχεια της ϕ , έπεται ότι το όριό της είναι σημείο ολικού ελαχίστου της ϕ .

□

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.2

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ-ΑΣΘΕΝΗΣ

ΕΚΔΟΧΗ (DEFORMATION THEOREM) ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ

MOUNTAIN PASS

Ορισμός 3.2.1

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $U \subset X$ ένα μη κενό ανοικτό σύνολο.

Μια απεικόνιση $F : U \rightarrow Y$ ονομάζεται **Lipschitz** αν και μόνο αν $\exists M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|F(u) - F(v)\| \leq M \|u - v\| \quad \forall u, v \in U.$$

Αν η $F : U \rightarrow Y$ είναι Lipschitz, ο αριθμός

$$\text{Lip}(F, U) = \sup \left\{ \frac{\|F(u) - F(v)\|}{\|u - v\|}, u, v \in U, u \neq v \right\} < \infty$$

λέγεται **σταθερά Lipschitz** της F επί του συνόλου U .

Ορισμός 3.2.2 Μια απεικόνιση $F : U \rightarrow Y$ ονομάζεται **τοπικά Lipschitz** αν και μόνο αν $\forall u_o \in U \exists r > 0 : B[u_o, r] \subset U$ και η F είναι Lipschitz στη μπάλα $B[u_o, r]$.

Πρόταση 3.2.3 Έστω $F : U \rightarrow Y, g : U \rightarrow R$ δύο τοπικά Lipschitz απεικονίσεις. Τότε

i. Η $g \cdot F$ είναι τοπικά Lipschitz

ii. Αν $g \neq 0$ τότε η $\frac{1}{g} \cdot F$ είναι τοπικά Lipschitz πάνω στο ανοικτό σύνολο $U_o = \{u / g(u) \neq 0\}$.

Απόδειξη

i. Έστω $u_o \in U$. Επιλέγουμε $r_1, r_2 > 0$ ώστε οι F, g να είναι Lipschitz στις μπάλες $B[u_o, r_1], B[u_o, r_2] \subset U$ με σταθερές Lipschitz M_1, M_2 αντίστοιχα. Θέτουμε $M = \max(M_1, M_2)$ και $r = \min(r_1, r_2)$.

Για κάθε $u, v \in B[u_o, r]$,

$$\begin{aligned} \|g(u)F(u) - g(v)F(v)\| &\leq |g(u)| \|F(u) - F(v)\| + |g(u) - g(v)| \|F(v)\| \\ &\leq M(|g(u)| + \|F(v)\|) \cdot \|u - v\| \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} |g(u)| &\leq |g(u) - g(u_o)| + |g(u_o)| \leq M\|u - u_o\| + |g(u_o)| \leq Mr + |g(u_o)|, \\ \|F(v)\| &\leq Mr + \|F(v_o)\|. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $u, v \in B[u_o, r]$,

$$\|g(u)F(u) - g(v)F(v)\| \leq M(2Mr + |g(u_o)| + \|F(v_o)\|)\|u - v\|.$$

ii. Έστω $u_o \in U$. Επιλέγουμε $r > 0$ ώστε $B[u_o, r] \subset U_o$ και η g να είναι Lipschitz στη μπάλα $B[u_o, r]$. Θέτουμε $M = Lip(g|_{B[u_o, r]})$,

$r_1 = \frac{1}{2}|g(u_o)| > 0$. Επιλέγουμε $0 < R < \min\left(\frac{r_1}{M}, r\right)$. Τότε, για κάθε

$u \in B[u_o, R]$,

$$|g(u)| \geq |g(u_o)| - |g(u) - g(u_o)| \geq 2r_1 - M\|u - u_o\| \geq r_1$$

κι επομένως για κάθε $u \in B[u_o, R]$,

$$\left| \frac{1}{g(u)} - \frac{1}{g(v)} \right| = \frac{|g(u) - g(v)|}{|g(u)| \cdot |g(v)|} \leq \frac{M}{r_1^2} \|u - v\|.$$

Άρα η $\frac{1}{g}$ είναι τοπικά Lipschitz στο U_o . Από το (i) η $\frac{1}{g} \cdot F$ είναι τοπικά

Lipschitz στο U_o . □

Πρόταση 3.2.4 Έστω $A \subset X$. Τότε, η απεικόνιση

$$x \in X \mapsto d(x, A) = \inf \{\|x - a\| : a \in A\}$$
 είναι Lipschitz.

[Η απόδειξη βασίζεται στην τριγωνική ανισότητα].

Αν A κλειστό σύνολο, τότε $A = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

Θεώρημα 3.2.5 (Cauchy- Lipschitz-Picard)

Έστω U ένα ανοικτό μη κενό σύνολο σε ένα χώρο Banach X και $x_o \in U$, $t_o \in R$. Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(t_o) = x_o \end{cases} \quad \text{με } F : U \rightarrow X \text{ τοπικά Lipschitz}$$

έχει μοναδική τοπική C^1 - λύση $u = u(x_o, t_o, \cdot)$ ορισμένη σε κάποιο μεγιστικό ανοικτό διάστημα $J = J(x_o, t_o) \subseteq R$ που περιέχει το t_o .

Υποθέτουμε ακόμα ότι, το $u(J)$ περιέχεται σ'ένα κλειστό υποσύνολο του U και ότι $\exists c_1, c_2 > 0$:

$$\|F(u)\| \leq c_1 \|u\| + c_2, \quad \forall u \in U.$$

Τότε η u ορίζεται παντού, δηλαδή $J = R$.

Λήμμα 3.2.6 Έστω $\phi \in C^1(X)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη Palais-Smale. Αν το $c \in R$ δεν είναι κρίσιμη τιμή της ϕ , τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε

$$\inf \{ \|\phi'(u)\| : |\phi(u) - c| \leq \delta \} > 0.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι $\exists \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\forall \delta \in (0, \varepsilon)$,

$$\inf \{ \|\phi'(u)\| : |\phi(u) - c| \leq \delta \} = 0.$$

Για κάθε $n \geq 1$ υπάρχει ακολουθία $\{u_n\}_{n \geq 1} \in X$ με

$$\|\phi'(u_n)\| < \frac{1}{n}, \quad |\phi(u_n) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Τότε $\phi(u_n) \rightarrow c$, $\|\phi'(u_n)\| \rightarrow 0 \stackrel{\phi(PS)}{\Rightarrow} u_n \rightarrow u$ (περνώντας σε υπακολουθίες)
 $\Rightarrow c = \phi(u), \phi'(u) = 0$ ΑΤΟΠΟ.

□

Ορισμός 3.2.7 Έστω $\phi \in C^1(X)$ και $c \in R$. Τότε το σύνολο

$$\phi^c = \{u \in X : \phi(u) \leq c\}$$

καλείται **sublevel** σύνολο του ϕ στο c .

Ορισμός 3.2.8 Έστω $(H, (\cdot, \cdot))$ ένας χώρος Hilbert και $\phi \in C^1(H)$.

Για κάθε $u \in H$, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, $\exists!$ διάνυσμα $\nabla \phi(u) \in H$ τέτοιο ώστε $\forall h \in H$,

$$\langle \phi'(u), h \rangle = (\nabla \phi(u), h), \quad \|\nabla \phi(u)\| = \|\phi'(u)\|.$$

Το διάνυσμα $\nabla \phi(u)$ ονομάζεται **κλίση** του ϕ στο u .

Θεώρημα 3.2.9 (Θ.Παραμόρφωσης-Ασθενής εκδοχή) Έστω $\phi \in C^1(X)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (PS) και $c \in \mathbb{R}$ που δεν είναι κρίσιμη τιμή της ϕ . Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists \delta \in (0, \varepsilon)$ και $\eta : X \rightarrow X$ συνεχής έτσι ώστε

$$\eta(\phi^{c+\delta}) \subseteq \phi^{c-\delta} \quad \text{και} \quad \eta(u) = u, \quad \forall u \in \phi^{c-2\delta}.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει στην ειδική περίπτωση όπου $X = H$ ένας χώρος Hilbert και η απεικόνιση $u \mapsto \nabla \phi(u)$ είναι τοπικά Lipschitz.

Έστω $\varepsilon > 0$. Εξαιτίας του Λήμματος 3.2.6. $\exists \delta \in (0, \varepsilon)$:

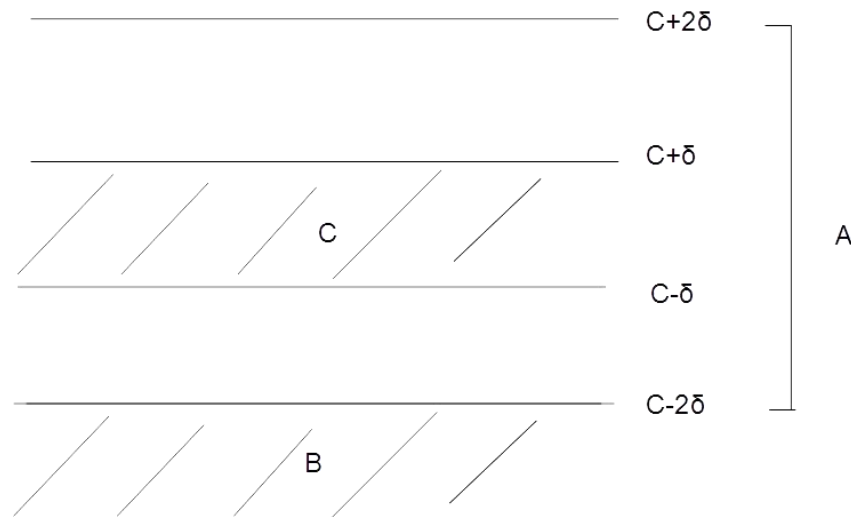
$$\inf_A \|\nabla \phi(u)\| = m > 0 \quad A = \{u \in X : |\phi(u) - c| \leq 2\delta\}.$$

Θέτουμε $B = \{u \in H : \phi(u) \leq c - 2\delta\}$, $C = \{u \in H : |\phi(u) - c| \leq \delta\}$.

Τότε τα B,C είναι κλειστά και $B \cap C = \emptyset$.

Ορίζουμε $\xi : H \rightarrow \mathbb{R}$ με $\xi(u) = \frac{d(u, B)}{d(u, B) + d(u, C)}$.

Τότε η ξ είναι καλά ορισμένη και τοπικά Lipschitz [δες Προτάσεις 3.2.3, 3.2.4]



[Σημ. ότι $\forall u \in H, d(u, B) + d(u, C) > 0$].

Επιπλέον, $0 \leq \xi \leq 1$ και $\xi|_B = 0$, $\xi|_C = 1$.

Θέτουμε, $F : H \rightarrow H$ με

$$F(u) = \begin{cases} -\xi(u) \frac{\nabla \phi(u)}{\|\nabla \phi(u)\|^2} & , u \in A \\ 0 & , u \in H \setminus A. \end{cases}$$

Από τις προτάσεις 3.2.3, 3.2.4, η F είναι τοπικά Lipschitz και $\forall u \in H$,

$$\|F(u)\| \leq \frac{1}{m}, \quad (\nabla \phi(u), F(u)) = \begin{cases} -\xi(u), u \in A \\ 0, u \notin A \end{cases} \leq 0.$$

Ειδικότερα,

$$\blacksquare \quad \forall u \in C, (\nabla \phi(u), F(u)) = -1, F(u) = -\frac{\nabla \phi(u)}{\|\nabla \phi(u)\|^2},$$

αφού $\xi|_C = 1$.

$$\blacksquare \quad \forall u \in B, F(u) = 0 \text{ αφού } \xi|_B = 0.$$

Τώρα, από το θεώρημα 3.2.5(C-L-P) έπεται ότι $\forall x \in H$,
 $\exists! u(x, \cdot) \in C^1([0, +\infty), H)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} \dot{u}(x, t) = F(u(x, t)), t \geq 0 \\ u(x, 0) = x \end{cases}.$$

Επιπλέον, $\forall t \geq 0$, η απεικόνιση $x \mapsto u(x, t)$ είναι συνεχής.

$$\text{Έχουμε, } \frac{d}{dt} [\phi(u(x, t))] = (\nabla \phi(u(x, t)), F(u(x, t))) \leq 0, \quad \forall x \in H, t \geq 0$$

Αρα, $\forall x \in H$, η συνάρτηση $t \in [0, +\infty) \mapsto \phi(u(x, t))$ είναι φθίνουσα.

Ορίζουμε $\eta : H \rightarrow H$ με $\eta(x) = u(x, 2\delta), x \in H$.

Τότε, η η είναι συνεχής απεικόνιση.

■ Θα δείξουμε ότι $\eta(\phi^{c+\delta}) \subseteq \phi^{c-\delta}$.

Έστω $x \in \phi^{c+\delta}$. Αντιθέτως, υποθέτουμε ότι $\phi(u(x, 2\delta)) > c - \delta$.

Τότε $\forall s \in [0, 2\delta]$,

$$\begin{aligned} c + \delta \geq \phi(x) = \phi(u(x, 0)) &\geq \phi(u(x, s)) \geq \\ &\geq \phi(u(x, 2\delta)) > c - \delta. \end{aligned}$$

Άρα $\forall s \in [0, 2\delta]$, $u(x, s) \in C$, οπότε

$$\begin{aligned} \phi(u(x, 2\delta)) - \phi(u(x, 0)) &= \int_0^{2\delta} (\nabla \phi(u(x, s)), F(u(x, s))) ds = -2\delta \\ \Rightarrow \phi(u(x, 2\delta)) = \phi(x) - 2\delta &\leq c + \delta - 2\delta = c - \delta, \text{ ΑΤΟΠΟ.} \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.2.10 (Mountain Pass Theorem)

Έστω $\phi \in C^1(X)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (PS) και $r > 0$,

$u_0, u_1 \in X$ τέτοια ώστε

$$\|u_0 - u_1\| > r, \max\{\phi(u_0), \phi(u_1)\} < \inf_{\|u_0 - u_1\|=r} \phi(u) = m_r.$$

Θέτουμε $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = u_1\}$,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \phi(\gamma(t)).$$

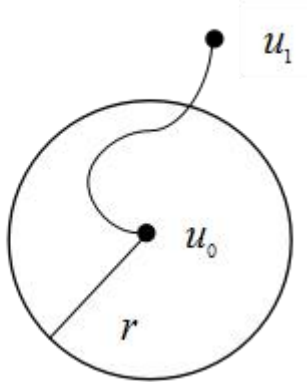
Τότε, $c \geq m_r$ και υπάρχει $\tilde{u} \in X$ τέτοιο ώστε

$$\phi'(\tilde{u}) = 0, \phi(\tilde{u}) = c.$$

[Έτσι, $\tilde{u} \neq u_0$, $\tilde{u} \neq u_1$].

Απόδειξη: Έστω $\gamma \in \Gamma$. Τότε το $\gamma([0,1])$ είναι συνεκτικό και τέμνει τα ανοικτά ξένα σύνολα $B(u_0, r)$ και $H \setminus B(u_0, r)$ στα u_0, u_1 αντίστοιχα. Επομένως,

$$\gamma([0,1]) \cap \partial B(u_0, r) \neq \emptyset.$$



Άρα, υπάρχει $u \in \gamma([0,1]) : \|u - u_0\| = r$

$$\Rightarrow \max_{t \in [0,1]} \phi(\gamma(t)) \geq \phi(u) \geq m_r \Rightarrow c \geq m_r$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το c δεν είναι κρίσιμη τιμή της ϕ .

Επιλέγουμε $0 < \varepsilon < m_r - \max\{\phi(u_0), \phi(u_1)\}$.

Από το Θεώρημα Παραμόρφωσης (Θ.3.2.10), $\exists \delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\eta \in C(X, X)$

με $\eta(\phi^{c+\delta}) \subseteq \phi^{c-\delta}$ και $\eta(u) = u, \forall u \in \phi^{c-2\delta}$.

Τώρα επιλέγουμε $\gamma \in \Gamma$ τέτοιο ώστε $\max_{\gamma} \phi < c + \delta$.

Τότε, για κάθε $t \in [0,1]$, $\gamma(t) \in \phi^{c+\delta}$.

Θέτουμε $\tilde{\gamma}(t) = \eta(\gamma(t)), \forall t \in [0,1]$. Τότε,

$$\tilde{\gamma} \in C([0,1], X), \tilde{\gamma}(0) = \eta(\gamma(0)) = \eta(u_0) = u_0,$$

$$\tilde{\gamma}(1) = \eta(\gamma(1)) = \eta(u_1) = u_1.$$

Σημ. ότι $\max\{\phi(u_0), \phi(u_1)\} < m_r - \varepsilon \leq c - \varepsilon < c - 2\delta$

$$\Rightarrow u_0, u_1 \in \phi^{c-2\delta} \Rightarrow \eta(u_0) = u_0, \eta(u_1) = u_1.$$

Άρα, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Αλλά για κάθε $t \in [0,1]$ $\tilde{\gamma}(t) \in \phi^{c-\delta}$ άρα

$$c \leq \max_{\tilde{\gamma}} \phi \leq c - \delta.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^1 και $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τύπου Καραθεοδωρή, δηλαδή $\forall t \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $z \mapsto f(z, t)$ είναι μετρήσιμη και σχεδόν για κάθε $z \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto f(z, t)$ είναι συνεχής. Υποθέτουμε ότι $f(z, 0) = 0$ σχεδόν παντού(σ.π.) και επιπλέον:

$$\underline{H(i)}: \quad |f(z, t)| \leq c_1 |t|^{r-1} + c_2 \quad z \in \Omega, t \in \mathbb{R} \text{ με}$$

$$c_1, c_2 > 0, 1 < r < p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & N > p \\ +\infty, & N \leq p \end{cases}, \quad 1 < p < \infty.$$

Αναζητούμε μη τετριμμένες **ασθενείς** λύσεις στο παρακάτω Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών(ΠΣΤ):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p u(z) = f(z, u(z)) \quad \text{σ.π. στο } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right\} \quad (\mathbf{P})$$

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ λέγεται **ασθενής λύση** του προβλήματος **(P)**, αν

$$\int_{\Omega} |\nabla u(z)|^{p-2} \cdot (\nabla u(z), \nabla h(z))_{\mathbb{R}^N} dz = \int_{\Omega} f(z, u(z)) h(z) dz, \quad \forall h \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

[Προφανώς, η μηδενική συνάρτηση είναι τετριμμένη λύση του **(P)**].

Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση όπου το αντίστοιχο ενεργειακό συναρτησιακό ϕ είναι πιεστικό, δηλαδή, $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \phi(u) = +\infty$.

Θεώρημα 4.1 Επιπλέον της $H(i)$, υποθέτουμε τα εξής:

$\underline{H(ii)}$:

$$\limsup_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{pF(z, t)}{|t|^p} < \lambda_1 = \text{πρώτης τάξης ιδιοτιμή της } -\Delta_p$$

ομοιόμορφα στα $z \in \Omega$, όπου $F(z, t) = \int_0^t f(z, s) ds, t \in R$.

H(iii): $\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{pF(z, t)}{t^p} > \lambda_1$ ομοιόμορφα στα $z \in \Omega$.

Τότε το **(P)** έχει τουλάχιστον μια ασθενή λύση $u \neq 0$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το συναρτησιακό ενέργειας $\phi : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow R$ με

$$\phi(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \int_{\Omega} F(z, u(z)) dz.$$

Τότε, $\phi \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ και τα κρίσιμα σημεία του ϕ είναι οι ασθενείς λύσεις του **(P)**. Αυτό προκύπτει χρησιμοποιώντας το πόρισμα 20 του κεφ.2, καθώς και μια επέκταση του πορ. 18 του κεφ.2 που καλύπτει την περίπτωση που η f εξαρτάται και από το $z \in \Omega$.

Ισχυρισμός 1: Το ϕ είναι w-l.s.c, δηλαδή $\forall (u_n) \subset X = W_0^{1,p}(\Omega)$ με $u_n \xrightarrow{w} u$ ισχύει $\phi(u) \leq \liminf_n \phi(u_n)$.

Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι η $\|u\| = \|\nabla u\|_p$ είναι νόρμα στον X . Στη συνέχεια θεωρούμε ακολουθία $(u_n) \subset X$ τέτοια ώστε $u_n \xrightarrow{w} u$ στον X .

Επιλέγουμε $u^* \in X^*$ με $\|u^*\| = 1, u^*(u) = \|u\|$ (θεώρημα Hahn-Banach).

Έχουμε, $u^*(u_n) \leq \|u_n\|, n \geq 1$, επομένως

$$\liminf_n \|u_n\| \geq \liminf_n u^*(u_n) = u^*(u) = \|u\|.$$

Άρα το συναρτησιακό $u \mapsto \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p$ είναι w-l.s.c.

Αρκεί να δείξουμε ότι το συναρτησιακό $u \mapsto \int_{\Omega} F(z, u(z)) dz$ είναι ισχυρά συνεχές. Προς τούτο, επιλέγουμε $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ τέτοια ώστε $u_n \xrightarrow{w} u$ στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Από τη συμπάγεια της ενσφήνωσης $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ έπεται ότι $u_n \rightarrow u$ ισχυρά στον $L^r(\Omega)$. Περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάποια $h \in L^r_+(\Omega)$,

$$\sup_n |u_n(z)| \leq h(z), \quad u_n(z) \rightarrow u(z) \text{ σ.π. στο } \Omega.$$

Η $H(i)$ δίνει ότι για κάθε $n \geq 1$ και σχεδόν για όλα τα $z \in \Omega$, έχουμε

$$|F(z, u_n(z))| \leq \frac{c_1}{r} |u_n(z)|^r + c_2 |u_n(z)| \leq \frac{c_1}{r} h(z)^r + c_2 h(z).$$

Ακόμα, $F(z, u_n(z)) \rightarrow F(z, u(z))$ σ.π. στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Τέλος, από το θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue,

$$\lim_n \int_{\Omega} F(z, u_n(z)) dz = \int_{\Omega} F(z, u(z)) dz .$$

Ισχυρισμός 2: Το ϕ είναι πιεστικό.

Πράγματι, επιλέγουμε ένα μ τέτοιο ώστε $\limsup_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{pF(z,t)}{|t|^p} < \mu < \lambda_1$.

Τότε υπάρχει $M > 0$: $\forall |t| > M$,

$$F(z,t) < \mu \frac{|t|^p}{p}, \text{ για σχεδόν όλα τα } z \in \Omega. \quad (1)$$

Τώρα, από την $H(i)$, έπεται ότι για $|t| \leq M$,

$$|F(z,t)| \leq \frac{c_1 |t|^r}{r} + c_2 |t| \leq \frac{c_1 M^r}{r} + c_2 M = c_M.$$

Έτσι, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $F(z,t) < \mu \frac{|t|^p}{p} + c_M$. (2)

Επομένως, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) και το πηλίκο του Rayleigh (βλ. Κεφ.1, σχέση (18)), έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi(u) &\stackrel{(2)}{\geq} \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{\mu}{p} \|u\|_p^p - c_M |\Omega| \\ &\stackrel{Rayleigh}{\geq} \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{\mu}{\lambda_1 p} \|\nabla u\|_p^p - c_M |\Omega| \\ &= \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right) - c_M |\Omega| \xrightarrow{\|\nabla u\|_p^p \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα Weierstrass (βλ. Παράρτημα), υπάρχει $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$\phi(u_0) = \min \{ \phi(u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \}.$$

Προφανώς, $\phi'(u_0) = 0 \Rightarrow u_0$ ασθενής λύση του **(P)**.

Ισχυρισμός 3: $u \neq 0$.

Πράγματι, επιλέγουμε $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{pF(z,t)}{t^p} > \theta > \lambda_1$.

Τότε $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(z,t) > \theta \frac{t^p}{p}$, $\forall t \in (0, \delta)$, σ.π. στο Ω . (3)

Έστω $\hat{u}_1 \in C^1(\overline{\Omega})$ μια λ_1 -ιδιοσυνάρτηση της $-\Delta_p$ (βλ. [2], Prop.9.47, p.250) με $\|\hat{u}_1\|_p = 1$.

Επιλέγουμε ένα μικρό $t > 0$ με $t\|\hat{u}_1\|_\infty < \delta$.

Τότε,

$$\begin{aligned} \phi(t\hat{u}_1) &= \frac{t^p}{p} \|\nabla \hat{u}_1\|_p^p - \int_{\Omega} F(z, t\hat{u}_1(z)) dz = \\ &= \lambda_1 \frac{t^p}{p} - \int_{\Omega} F(z, t\hat{u}_1(z)) dz \stackrel{(3)}{\leq} \\ &\leq \lambda_1 \frac{t^p}{p} - \frac{\theta}{p} t^p = \frac{\lambda_1 - \theta}{p} t^p < 0 \end{aligned}$$

άρα $\phi(u_0) \leq \phi(t\hat{u}_1) < 0 = \phi(0) \Rightarrow u_0 \neq 0$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Οι παρακάτω συναρτήσεις $f(z,t) = f(t)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις $H(i)$, $H(ii)$, $H(iii)$.

i. $f(t) = a|t|^{p-2}t + b|t|^{q-2}t$, $a, b > 0$, $0 < a < \lambda_1$, $1 < q < p$.

ii. $f(t) = \begin{cases} a|t|^{p-2}t - b|t|^{q-2}t, & |t| \geq 1 \\ a|t|^{q-2}t - b|t|^{p-2}t, & |t| < 1 \end{cases}$
 $a, b > 0$, $0 < a < \lambda_1$, $1 < q < p$.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε προβλήματα για τα οποία το συναρτησιακό ενέργειας ϕ δεν είναι πιεστικό. Ειδικότερα θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου το ϕ είναι *anti-coercive*, δηλαδή: $\exists e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ με $\phi(te) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$.

Το Θεώρημα Mountain Pass είναι πολύ χρήσιμο προς αυτή την κατεύθυνση.

Ορισμός 4.2 : Έστω X ένας χώρος Banach και $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό.

Λέμε ότι το ϕ έχει την γεωμετρία του Mountain Pass Theorem (GMPT) κοντά στο $u_0 \in X$ αν και μόνο αν $\exists u_1 \in X$ και $\rho > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|u_0 - u_1\| > \rho, \quad \max\{\phi(u_0), \phi(u_1)\} < \inf_{\|u-u_0\|=\rho} \phi(u).$$

Πρόταση 4.3 : Υπό την $H(i)$, υποθέτουμε ακόμα ότι $p < r$ και

$$\underline{H'(ii)}: \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{pF(z,t)}{|t|^p} < \lambda_1, \quad \text{ομοιόμορφα για όλα σχεδόν τα } z \in \Omega.$$

$$\underline{H'(iii)}: \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{pF(z,t)}{t^p} > \lambda_1, \quad \text{ομοιόμορφα για όλα σχεδόν τα } z \in \Omega.$$

Τότε, το συναρτησιακό ενέργειας έχει τη GMPT κοντά στο 0. Ειδικότερα, το ϕ είναι *anti-coercive*.

Απόδειξη:

Έστω $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ με

$$\phi(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \int_{\Omega} F(z, u(z)) dz, \quad F(z, t) = \int_0^t f(z, s) ds.$$

Από την $\underline{H'(ii)}$, θα υπάρχει $\theta > 0$, τέτοιο ώστε

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{pF(z,t)}{|t|^p} < \theta < \lambda_1.$$

Τότε $\exists \delta > 0 : |t| < \delta \Rightarrow F(z,t) \leq \frac{\theta |t|^p}{p}$ για όλα σχεδόν τα $z \in \Omega$.

Για $|t| \geq \delta$, από την $H(i)$ έχουμε

$$|F(z, t)| \leq \frac{c_1 |t|^r}{r} + c_2 |t| = \frac{c_1 |t|^r}{r} + c_2 \delta \frac{|t|}{\delta} \leq \frac{c_1 |t|^r}{r} + c_2 \delta \left(\frac{|t|}{\delta} \right)^r = c_3 |t|^r \quad \text{σ.π.}$$

στο Ω , για κάποιο $c_3 > 0$.

$$\text{Συνοψίζοντας, έχουμε } F(z, t) \leq \frac{\theta}{p} |t|^p + c_3 |t|^r, \quad t \in R, \text{ σ.π. στο } \Omega. \quad (4)$$

Τώρα, για κάθε $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \phi(u) &\geq \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{\theta}{p} \|u\|_p^p - c_3 \|u\|_r^r \\ &\stackrel{\text{Rayleigh}}{\geq} \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{\theta}{\lambda_1 p} \|\nabla u\|_p^p - c_3 \|u\|_r^r \\ &= \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p \left(1 - \frac{\theta}{\lambda_1} \right) - c_3 \|u\|_r^r. \end{aligned}$$

Αλλά $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ με συνεχή ενσφήνωση άρα υπάρχει $c'_3 > 0$ ώστε

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad c_3 \|u\|_r^r \leq c'_3 \|\nabla u\|_p^r.$$

Επομένως, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \phi(u) &\geq \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\theta}{\lambda_1} \right) \|\nabla u\|_p^p - c'_3 \|\nabla u\|_p^r \\ &= \|\nabla u\|_p^p \left(c_4 - c'_3 \|\nabla u\|_p^{r-p} \right), \end{aligned}$$

για κάποιο $c_4 > 0$. (σημ. ότι $\lambda_1 > \theta$).

Επιλέγουμε $\rho > 0$ τέτοιο ώστε $\rho^{r-p} < \frac{c_4}{c'_3}$ (σημ. ότι $r > p$).

$$\text{Για } \|\nabla u\|_p = \rho, \quad \phi(u) \geq \rho^p (c_4 - c'_3 \rho^{r-p}) > 0$$

$$\Rightarrow \inf_{\|\nabla u\|_p = \rho} \phi(u) > 0 = \phi(0) \quad (5)$$

Ισχυρισμός: Το ϕ είναι anti-coercive.

Πράγματι, επιλέγουμε $\mu > 0$ τέτοιο ώστε $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{pF(z,t)}{t^p} > \mu > \lambda_1$.

Τότε $\exists M > 0: t > M \Rightarrow F(z,t) > \frac{\mu}{p} t^p$.

Επιπλέον,

$$0 \leq t \leq M \Rightarrow |F(z,t)| \stackrel{H(i)}{\leq} \frac{c_1 t^r}{r} + c_2 t = \frac{c_1 M^r}{r} + c_2 M = c_M.$$

$$\text{Επομένως, } F(z,t) > \frac{\mu}{p} t^p - c'_M, \forall t \geq 0 \quad (6)$$

$$\text{όπου } c'_M > \frac{\mu}{p} M^p + c_M.$$

Έστω $\hat{u}_1 \in C^1(\bar{\Omega})$ μια λ_1 -ιδιοσυνάρτηση της $-\Delta_p$ με $\hat{u}_1 > 0$ στο Ω

(βλ. [2], Prop.9.47, p.250) και $\|\hat{u}_1\|_p = 1$. Τότε για κάθε $t > 0$,

$$\phi(t\hat{u}_1) = \frac{t^p}{p} \|\nabla \hat{u}_1\|_p^p - \int_{\Omega} F(z, t\hat{u}_1(z)) dz \leq \frac{\lambda_1}{p} t^p - \frac{\mu}{p} t^p + c'_M |\Omega| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty.$$

(Σημ. ότι $\lambda_1 < \mu$.)

Άρα, το ϕ είναι anti-coercive.

Τώρα, μπορούμε να επιλέξουμε $t > \frac{\rho}{\|\nabla \hat{u}_1\|_p}$ με $\phi(t\hat{u}_1) < 0$.

Τότε η (5) συνεπάγεται

$$\inf_{\|\nabla u\|_p = \rho} \phi(u) > 0 = \phi(0) > \phi(t\hat{u}_1) \quad \text{και} \quad \|\nabla(t\hat{u}_1)\|_p > \rho.$$

Επομένως η ϕ έχει τη GMPT κοντά στο 0. □

Σημείωση: Υπό τις υποθέσεις $H(i)$, $H'(ii)$, $H'(iii)$ και αν το συναρτησιακό ενέργειας ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη (PS), μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Mountain Pass, το οποίο οδηγεί στην ύπαρξη ενός κρίσιμου σημείου \hat{u} του ϕ με

$$\phi(\hat{u}) \geq \inf_{\|\nabla u\|_p = \rho} \phi(u) > 0 = \phi(0).$$

Προφανώς τότε, η \hat{u} είναι μια μη τετριμμένη ασθενής λύση του **(P)**.

Μια ικανή συνθήκη που μας εξασφαλίζει ότι το ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη Palais-Smale(PS) είναι η συνθήκη **Ambrosetti-Rabinowitz (AR)**:
 $\exists \mu > p$ και $M > 0 : tf(z,t) \geq \mu F(z,t), \forall |t| \geq M$
ομοιόμορφα για όλα σχεδόν τα $z \in \Omega$.

(συνθήκη AR) $\Rightarrow \exists c_o > 0 :$

$$F(z,t) \geq c_o t^\mu, \frac{f(z,t)}{t^{p-1}} \geq c_o t^{\mu-p}, \forall t \geq M \text{ ομοιόμορφα στο } \Omega.$$

$$\text{Ειδικότερα, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(z,t)}{t^{p-1}} = +\infty \quad (\mu > p).$$

Μια τέτοια $f(z,t)$ καλείται $(p-1)$ superlinear στο $+\infty$.

Ας παρατηρήσουμε ότι όταν ισχύει η συνθήκη (AR), τότε $\frac{f(z,t)}{t^{p-1}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$,
πιο “γρήγορα” από το $\ln t$.

Θεώρημα 4.4 (superlinear πρόβλημα)

Επιπλέον της $H(i)$, υποθέτουμε ακόμα ότι $p < r$ και

$$H'(ii): \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{pF(z,t)}{|t|^p} < \lambda_1, \text{ ομοιόμορφα για όλα σχεδόν τα } z \in \Omega.$$

$$H''(iii): (\text{συνθήκη AR}) \exists \mu > p, M > 0 : tf(z,t) \geq \mu F(z,t), \\ \forall |t| \geq M \text{ ομοιόμορφα για όλα σχεδόν τα } z \in \Omega.$$

Τότε το ΠΣΤ (P) έχει τουλάχιστον μια μη τετριμμένη ασθενή λύση.

(Σημ. ότι $H''(iii) \Rightarrow H'(iii)$).

Απόδειξη: Από την πρόταση 4.3 και τη σχετική σημείωση, αρκεί να δείξουμε ότι το ενεργειακό συναρτησιακό ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη (PS).

Προς τούτο, έστω $\{u_n\} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ τέτοια ώστε $\sup_n |\phi(u_n)| < \infty$ με

$$\|\phi'(u_n)\|_* \rightarrow 0.$$

Τότε υπάρχει $c_1 > 0$ και $(\varepsilon_n) \subseteq (0,1), (\varepsilon_n) \downarrow 0^+$ έτσι ώστε

$$\frac{1}{p} \|\nabla u_n\|_p^p \leq \int_{\Omega} F(z, u_n(z)) dz + c_1, \quad \forall n \geq 1, \quad (7)$$

$$\left| \langle Au_n, h \rangle - \int_{\Omega} f(z, u_n(z)) h(z) dz \right| \leq \varepsilon_n \|h\|_{1,p}, \quad \forall n \geq 1, h \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (8)$$

όπου

$$\langle Au, h \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u(z)|^{p-2} \cdot (\nabla u(z), \nabla h(z))_{R^N} dz, \quad u, h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Για " h " = u_n , η (8) δίνει

$$-\|\nabla u_n\|_p^p + \int_{\Omega} f(z, u_n(z)) u_n(z) dz \leq \varepsilon_n \|u_n\|_{1,p}, \quad n \geq 1, \quad \text{ενώ η (7) δίνει}$$

$$\|\nabla u_n\|_p^p - p \int_{\Omega} F(z, u_n(z)) dz \leq pc_1.$$

Προσθέτοντας τις δυο ανισότητες έχουμε

$$\int_{\Omega} [f(z, u_n(z)) u_n(z) - pF(z, u_n(z))] dz \leq pc_1 + \varepsilon_n \|u_n\|_{1,p}, \quad \forall n \geq 1. \quad (9)$$

Για $|t| \geq M$, $tf(z, t) - pF(z, t) \geq (\mu - p)F(z, t)$ και

για $|t| < M$, $|tf(z, t)| \leq c_1 |t|^r + c_2 |t| \leq c_1 M^r + c_2 M = C$,

$$|F(z, t)| \leq c_1 \frac{|t|^r}{r} + c_2 |t| \leq c_1 \frac{M^r}{r} + c_2 M \leq C,$$

Άρα, για κάθε $t \in R$, $tf(z, t) - pF(z, t) \geq (\mu - p)F(z, t) - 2C$

$$\stackrel{(9)}{\Rightarrow} (\mu - p) \int_{\Omega} F(z, u_n(z)) dz \leq \underbrace{pc_1 + 2C}_{c_3} + \varepsilon_n \|u_n\|_{1,p}, \quad \forall n \geq 1$$

$$\stackrel{\mu > p}{\Rightarrow} \int_{\Omega} F(z, u_n(z)) dz \leq \frac{1}{(\mu - p)} (c_3 + \varepsilon_n \|u_n\|_{1,p})$$

$$\stackrel{(7)}{\Rightarrow}_{0 < \varepsilon_n < 1} \|\nabla u_n\|_p^p \leq \text{const.} (1 + \|u_n\|_{1,p})$$

$$\stackrel{p > 1}{\Rightarrow} \sup_n \|\nabla u_n\|_p < \infty.$$

Περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{στον } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Αλλά τότε $\langle \phi'(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$. Επειδή όμως ο τελεστής ϕ' είναι τύπου $(S)_+$ (βλ. Παράρτημα, Πρ.6), παίρνουμε ότι $u_n \rightarrow u$ (ισχυρά) στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$f(z, t) = \theta |t|^{p-2} + \beta |t|^{r-2} t, \quad 0 < \theta < \lambda_1, \beta > 0, \quad p < r < p^*.$$

Έχουμε, $F(z, t) = \frac{\theta |t|^p}{p} + \frac{\beta}{r} |t|^r$.

Επιλέγουμε $\mu \in (p, r)$. Τότε

$$\begin{aligned} tf(z, t) - \mu F(z, t) &= \theta |t|^p + \beta |t|^r - \frac{\mu \theta |t|^p}{p} - \frac{\mu \beta |t|^r}{r} \\ &= \frac{\theta |t|^p}{p} (p - \mu) + \frac{\beta |t|^r}{r} (r - \mu) \xrightarrow[(p < \mu < r)]{|t| \rightarrow \infty} + \infty \end{aligned}$$

Άρα, η f ικανοποιεί τη συνθήκη (AR) $H'(ii)$.

Επιπλέον,

$$\frac{pF(z, t)}{|t|^p} = \theta + \frac{p\beta}{r} |t|^{r-p} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \theta < \lambda_1 \quad \text{άρα πληρούται η } H'(ii).$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ Weierstrass

Έστω X ανακλαστικός χώρος Banach και $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

- ϕ πιεστικό, δηλαδή $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \phi(u) = +\infty$
- ϕ w-l.s.c., δηλαδή $\forall (u_n) \subset X$ με $u_n \xrightarrow{w} u$ ισχύει $\phi(u) \leq \liminf_n \phi(u_n)$.

Τότε το ϕ έχει ολικό ελάχιστο.

Απόδειξη: Θέτουμε $m = \inf \{\phi(u) : u \in X\} \in [-\infty, +\infty)$.

Επιλέγουμε ακολουθία $(u_n) \subset X$ με $\phi(u_n) \rightarrow m$.

Ισχυρισμός: $\sup_n \|u_n\| < \infty$. Πράγματι, **αν όχι**, περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|u_n\| \rightarrow \infty$. Αλλά επειδή ϕ πιεστικό, $\phi(u_n) \rightarrow +\infty \Rightarrow m = +\infty$ **ΑΤΟΠΟ**.

Επειδή τώρα ο X ανακλαστικός, υπάρχει υπακολουθία

$$(u_{k_n}) \text{ και } u_o \in X : u_{k_n} \xrightarrow{w} u_o$$

$$\stackrel{\phi \text{ w-l.s.c.}}{\Rightarrow} \phi(u_o) \leq \liminf_n \phi(u_{k_n}) = m \leq \phi(u_o)$$

$$\Rightarrow m = \phi(u_o)$$

□

ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΟΝΟΤΟΝΟΥ ΤΥΠΟΥ

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $A : X \rightarrow X^*$.

Ο τελεστής A λέγεται

- **Μονότονος**, αν $\forall u, v \in X, \langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$.
- **Ψευδομονότονος**, αν $\forall (u_n) \subseteq X$ με $u_n \xrightarrow{w} u \in X, \limsup_n \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$,
ισχύει

$$Au_n \xrightarrow{w} Au, \quad \langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle.$$

- **Τύπου** $(S)_+$, αν $\forall (u_n) \subseteq X$ με $u_n \xrightarrow{w} u \in X$, $\limsup_n \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$, ισχύει $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$ (ισχυρά) στον X .
- **Ισχυρά συνεχής**, αν $\forall (u_n) \subseteq X$ με $u_n \xrightarrow{w} u \in X$, ισχύει $\|Au_n - Au\|_{X^*} \rightarrow 0$ δηλαδή $Au_n \rightarrow Au$ ισχυρά στον X^* .

Πρόταση 1: Εάν X ανακλαστικός και $A: X \rightarrow X^*$ μονότονος, συνεχής και φραγμένος (δηλαδή απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του X^*), τότε ο A ψευδομονότονος.

Απόδειξη: Έστω $(u_n) \subseteq X$ με $u_n \xrightarrow{w} u \in X$, $\limsup_n \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$ (1)

Επειδή A φραγμένος, η $\{Au_n\}$ φραγμένη ακολουθία στον X^* . Αλλά αφού X ανακλαστικός τότε και X^* ανακλαστικός, άρα περνώντας σε υπακολουθίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $u^* \in X^*$ ώστε $Au_n \xrightarrow{w} u^*$ στον X^* .

(2)

Λόγω μονοτονίας του A , έχουμε

$$\langle Aw, u_n - w \rangle \leq \langle Au_n, u_n - w \rangle = \langle Au_n, u_n - u \rangle + \langle Au_n, u - w \rangle, \forall n \geq 1, \quad \forall w \in X \quad (3)$$

Η σχέση (3), λόγω των (1), (2) και για $n \rightarrow \infty$ δίνει

$$\langle Aw, u - w \rangle \leq \langle u^*, u - w \rangle, \forall u \in X \quad (4)$$

Για κάθε $v \in X, \forall t > 0$, θέτουμε στην (4) όπου $w_t = u - tv$ και έχουμε $\langle Aw_t, v \rangle \leq \langle u^*, v \rangle, \forall v \in X$.

Για $t \rightarrow 0$ και λόγω της συνέχειας του A , παίρνουμε

$$\langle Au, v \rangle \leq \langle u^*, v \rangle, \forall v \in X.$$

Θέτοντας $-v$ στη θέση του v παίρνουμε

$$\langle Au, v \rangle = \langle u^*, v \rangle, \forall v \in X \Rightarrow$$

$$u^* = Au$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} Au_n \xrightarrow{w} Au \quad (5)$$

Η (3) για $w = u$ δίνει

$$\begin{aligned} \langle Au, u_n - u \rangle &\leq \langle Au_n, u_n - u \rangle \\ &= \langle Au_n, u_n \rangle - \langle Au_n, u \rangle, \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Οπότε για $n \rightarrow \infty$ και λόγω των (1) και (5) παίρνουμε

$$0 \leq \liminf_n (\langle Au_n, u_n \rangle - \langle Au_n, u \rangle) = \liminf_n (\langle Au_n, u_n \rangle - \langle Au, u \rangle)$$

Δηλαδή $\langle Au, u \rangle \leq \liminf_n \langle Au_n, u_n \rangle.$ (6)

Ταυτόχρονα, $\forall n \geq 1$

$$\langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle Au_n, u_n - u \rangle + \langle Au_n, u \rangle$$

$$\stackrel{(1),(5)}{\Rightarrow} \limsup_n \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle Au, u \rangle$$
 (7)

Οι (6) και (7) δίνουν $\langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$ (8)

Οι (5) και (8) ολοκληρώνουν την απόδειξη. □

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, φραγμένο με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^1 .

Θεωρούμε τον τελεστή $-\Delta_p = A_p : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow [W^{1,p}(\Omega)]^*$, $1 < p < \infty$

με

$$\langle A_p u, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u(z)|^{p-2} \cdot (\nabla u(z), \nabla v(z))_{\mathbb{R}^n} dz \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$
 (9)

Πρόταση 2: Ο A_p που δίνεται από τη σχέση (9) είναι μονότονος.

Απόδειξη: Έστω $\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle A_p u, v \rangle| &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u(z)|^p dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla v(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\nabla u\|_p^{p-1} \cdot \|\nabla v\|_p. \end{aligned}$$

Όμοια, $|\langle A_p v, u \rangle| \leq \|\nabla v\|_p^{p-1} \cdot \|\nabla u\|_p.$

$$\begin{aligned} \langle A_p u - A_p v, u - v \rangle &= \langle A_p u, u \rangle + \langle A_p v, v \rangle - \langle A_p u, v \rangle - \langle A_p v, u \rangle = \\ &= \|\nabla u\|_p^p + \|\nabla v\|_p^p - \langle A_p u, v \rangle - \langle A_p v, u \rangle \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} &\geq \|\nabla u\|_p^p + \|\nabla v\|_p^p - \|\nabla u\|_p^{p-1} \cdot \|\nabla v\|_p - \|\nabla v\|_p^{p-1} \cdot \|\nabla u\|_p = \\ &\Rightarrow \langle A_p u - A_p v, u - v \rangle \geq \left(\|\nabla u\|_p^{p-1} - \|\nabla v\|_p^{p-1} \right) \cdot \left(\|\nabla u\|_p - \|\nabla v\|_p \right) \geq 0 \end{aligned}$$

επειδή η συνάρτηση $t \mapsto t^{p-1}$ είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$. □

Πρόταση 3: Ο τελεστής A_p που δίνεται από την (9) είναι ψευδομονότονος.

Απόδειξη: Λόγω των προτάσεων (1), (2) αρκεί να δείξω ότι ο A_p είναι συνεχής και φραγμένος.

Θεωρούμε η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(t) = |t|^{p-2}t$ και τον τελεστή Nemytskii

$$N_g : L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow [L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*$$

$$\text{με } \langle N_g(\bar{u}), \bar{h} \rangle = \int_{\Omega} |\bar{u}(z)|^{p-2} (\bar{u}(z), \bar{h}(z))_{\mathbb{R}^n} dz$$

Γνωρίζουμε ότι ο τελεστής N_g είναι γραμμικός και φραγμένος.

Θεωρούμε επιπλέον τον τελεστή $e : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\text{με } e(u) = \nabla u$$

Ο e είναι γραμμική ισομετρία.

Θεωρούμε και τον δυϊκό τελεστή $e^* : [L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)]^* \rightarrow [W^{1,p}(\Omega)]^*$.

Ο e^* είναι γραμμικός και φραγμένος.

Τότε,

$$A_p = e^* \circ N_g \circ e$$

Και συνεπώς ο A_p είναι φραγμένος, συνεχής κι άρα ψευδομονότονος. \square

Πρόταση 4: Ο A_p είναι τύπου $(S)_+$.

Απόδειξη: Έστω $(u_n) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ με $u_n \xrightarrow{w} u$, $\limsup_n \langle A_p u_n, u_n - u \rangle \leq 0$.

Λόγω της πρότασης (3), έχουμε

$$\langle A_p u_n, u_n \rangle \rightarrow \langle A_p u, u \rangle$$

ή

$$\|\nabla u_n\|_p^p \rightarrow \|\nabla u\|_p^p \quad (10)$$

Αλλά, $\nabla u_n \xrightarrow{w} \nabla u$ μέσα στον ομοιόμορφα κυρτό χώρο Banach $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, οπότε λόγω της (10) παίρνουμε

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_p \rightarrow 0 \quad (11)$$

Ταυτόχρονα, $\|u_n - u\|_p \rightarrow 0$, λόγω της συμπαγούς ενσφήνωσης $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, οπότε λόγω της (11) παίρνουμε $\|u_n - u\|_{1,p} \rightarrow 0$. \square

Πρόταση 5: Έστω X χώρος Banach και $A, B : X \rightarrow X^*$ τελεστές. Αν ο A είναι τύπου $(S)_+$ και ο B είναι ισχυρά συνεχής, τότε ο $A+B$ είναι τύπου $(S)_+$.

Απόδειξη: Έστω $(u_n) \subseteq X$ με $u_n \xrightarrow{w} u$, $\limsup_n \langle Au_n + Bu_n, u_n - u \rangle \leq 0$.

Επειδή ο B ισχυρά συνεχής, έχουμε $Bu_n \xrightarrow{\|\cdot\|_*} Bu$ και άρα

$$\langle Bu_n, u_n - u \rangle \rightarrow 0$$

Συνεπώς, $\limsup_n \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$ κι αφού A είναι τύπου $(S)_+$ παίρνουμε, $u_n \rightarrow u$ ισχυρά στον X . □

Πρόταση 6: Έστω $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τύπου Καραθεοδωρή με

$$|f(z, t)| \leq c(1 + |t|^{r-1}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \text{ σ.π. στο } \Omega, \text{ όπου } c \text{ θετική σταθερά και}$$

$$1 \leq r < p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & N > p \\ \infty, & N \leq p \end{cases}$$

Θεωρούμε τον τελεστή

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow [W^{1,p}(\Omega)]^*$$

με $\langle Tu, v \rangle = \langle A_p u, v \rangle - \int_{\Omega} f(u(z))v(z) dz$.

Τότε, ο T είναι τύπου $(S)_+$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον τελεστή

$$B : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow [W^{1,p}(\Omega)]^*$$

με $\langle Bu, v \rangle = \langle A_p u, v \rangle - \int_{\Omega} f(u(z))v(z) dz, \quad \forall u, v \in W^{1,p}(\Omega)$

Τότε, $T = A_p - B$, οπότε λόγω των προτάσεων (4), (5) αρκεί να δείξω ότι ο B είναι ισχυρά συνεχής.

Παρατηρούμε ότι

$$B = i^* \circ N_f \circ i$$

όπου :

- $i : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega), \quad i(u) = u$
- $N_f : L^r(\Omega) \rightarrow [L^r(\Omega)]^*$, ο τελεστής Nemytskii που αντιστοιχεί στην f .

Γνωρίζουμε ότι ο i είναι ισχυρά συνεχής γραμμικός τελεστής, λόγω της συμπαγούς ενσφήνωσης $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ ($1 \leq r < p^*$)

Το ίδιο θα ισχύει και για τον δυϊκό τελεστή

$$i^* : [L^r(\Omega)]^* \rightarrow [W^{1,p}(\Omega)]^*.$$

Επιπλέον, ο N_f είναι συνεχής. Άρα ο B είναι ισχυρά συνεχής. □

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Haïm Brezis , *Συναρτησιακή ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π. (1997).
2. Dumitru Motreanu, Viorica Venera Motreanu, Nikolaos Papageorgiou, *Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems*, Springer (2014).