ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ανάλυση και Μελέτη Γνωστών Αριθμητικών Συνόλων

Διπλωματική εργασία

του

Διγαλάκη Κωνσταντίνου

Επιβλέπων: Φελλούρης Ανάργυρος

Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ανάλυση και Μελέτη Γνωστών Αριθμητικών Συνόλων

Διπλωματική εργασία

του

Διγαλάκη Κωνσταντίνου

Επιβλέπων: Φελλούρης Ανάργυρος

Καθηγητής ΕΜΠ

Ανάργυρος Φελλούρης	Ψαρράκος Παναγιώτης	Στεφανέας Πέτρος
Καθηγητής ΕΜΠ	Καθηγητής ΕΜΠ	Επ. Καθηγητής

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018

…………………..........................

Διγαλάκης Κωνστανίνος

Διπλωματούχος Φυσικός Εφαρμογών ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

Ευχαριστίες

Για την ολοκλήρωση της εκπόνησης της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέπων Καθηγητή κ. Ανάργυρο Φελλούρη. Η συμβολή του ήταν καθοριστική, τόσο αναφορικά με την δυνατότητα που μου έδωσε να μελετήσω και να εμβαθύνω σε ένα πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο που επηρεάζει πολλαπλούς τομείς της επιστήμης, όσο και για τις πολύτιμες συμβουλές και την καθοδήγηση που μου παρείχε κατά την διάρκεια της μελέτης, της συγκέντρωσης των πληροφοριών και της εκπόνησης της εργασίας.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω την σύντροφό μου Βάσω Σαρικώστα, η υποστήριξη και η αρωγή της διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο στην ολοκλήρωσης της Εργασίας.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία γίνεται ανάλυση και μελέτη γνωστών αριθμητικών συνόλων ξεκινώντας από την εποχή του Πυθαγόρα φτάνοντας μέχρι τον Νοέμβριο του 2017. Στο πρώτο κεφάλαιο συμπεριλαμβάνεται η γέννηση της Θεωρίας Συνόλων από τον Georg Cantor με τις βασικές ιδιότητες. Επιπλέον γίνεται αναφορά και μελέτη του κλάδου της Θεωρίας Αριθμών και σπουδαίων ανοικτών προβλημάτων της. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των Πυθαγόρειων τριάδων και σε προβλήματα αριθμητικής που απασχόλησαν πολλούς μαθηματικούς της εποχής εκείνης καθώς και στους επόμενους αιώνες δίνοντας έμφαση στο «Τελεύταιο Θεώρημα του Fermat». Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται ανάλυση και μελέτη συγκεκριμένων μαθηματικών συνόλων όπως αριθμούς Bernoulli, υπερβατικούς αριθμούς, αριθμούς Fibonacci, αριθμούς Catalan και αριθμούς Stirling. Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το ανοικτό πρόβλημα των Δίδυμων Πρώτων, καθώς και κάποιες εφαρμογές και ένα παράδοξο.

Abstract

The objective of this Thesis is to study the origin of First Numbers and other numeric sets, starting off the era of Pythagoras and reaching as far as November 2017. In the first Chapter, the creation of the numeric set theory is studied, since Georg Cantor provided a definition, including with an extensive reference on First Numbers and important and famous open problems associated with the respective theory. The second chapter, we present the Pythagorian Triads, with algebraic problems associated with famous mathematicians of the time and over the centuries, emphasizing on Fermat's Last Theorem. In the third chapter, we analyse and study specific mathematical sets, such as Bernoulli numbers, Transcendental numbers, Fibonacci Numbers, Catalan Numbers and Stirling Numbers, underlining specific identities. In the final chapter, we present various applications of the above numeric sets, along with a numeric paradox.

Περιεχόμενα

Πίνακας Εικόνων

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

Από την αρχαιότητα οι μαθηματικοί εξέταζαν τα σύνολα αντικειμένων κάποιου είδους και οι στοιχειώδεις έννοιες της σύγχρονης θεωρίας συνόλων υπονοούνται σε πολλά κλασσικά κείμενα. Ο θεμελιωτής της Θεωρίας Συνόλων είναι ο Georg Cantor (1845-1918) ο οποίος από το 1874 με μια σειρά δημοσιεύσεων έθεσε τις βάσεις της θεωρίας συνόλων.

Σύμφωνα με τον Cantor ως σύνολο εννοούμε «Μια συλλογή αντικειμένων διακεκριμένων και πλήρως καθορισμένων που λαμβάνονται από τον κόσμο είτε της εμπειρίας μας είτε της σκέψης μας». Δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Έδωσε και τον ορισμό του κενού συνόλου $\emptyset$ ως το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Ο Cantor επίσης απέδειξε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των ακεραίων καθώς και ότι το ανοικτό διάστημα (0,1) δεν είναι αριθμήσιμο. Ιστορικά η απόδειξη αυτή ονομάστηκε διαγώνια μέθοδος του Cantor. Επίσης ανέπτυξε μια ολόκληρη υπερπεπερασμένη αριθμητική βασιζόμενος στην παρατήρηση του ότι όλα τα υπεραριθμίσιμα σύνολα δεν είναι ίδια. Η θεωρία Συνόλων του Cantor αντιμετωπίστηκε με δυσπιστία, με χαρακτηριστικό παράδειγμα την άποψη του Kronecker πως οι μέθοδοι της δεν είναι κατασκευαστικοί.

Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα άρχισαν να εμφανίζονται οι πρώτοι ένθερμοι υποστηρικτές της θεωρίας συνόλων και να βρίσκονται εφαρμογές στην Ανάλυση και τη Γεωμετρία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η άποψη του Hilbert ότι «κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor για μας». Ο R. Dedekind μελέτησε και αυτός τα απειροσύνολα προσπαθώντας να δώσει απάντηση στο ερώτημα ποια η διαφορά μεταξύ ενός συνεχούς γεωμετρικού μεγέθους, με το σύνολο των ρητών αριθμών. Ασχολήθηκε με τη θεμελίωση των φυσικών αριθμών και το 1888 επέλεξε πέντε αξιώματα τα οποία ο G. Peano τα εξέφρασε σε συμβολική γλώσσα και έγιναν γνωστά ως «Αξιώματα του Peano»:

- Υπάρχει ένας τουλάχιστον φυσικός αριθμός, το μηδέν 0.
- Κάθε φυσικός αριθμός n έχει έναν επόμενο φυσικό αριθμό που συμβολίζεται $n + 1$.
- Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που να έχει επόμενο το 0.

- Δεν υπάρχουν διαφορετικοί μεταξύ τους φυσικοί αριθμοί που έχουν τον ίδιο επόμενο.
- Αν ένα σύνολο αριθμών S περιέχει το 0 καθώς και τον επόμενο κάθε αριθμού που ανήκει στο S, τότε το σύνολο S συμπίπτει με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Το τελευταίο αξίωμα είναι γνωστό ως το αξίωμα της επαγωγής.

Κατά τη διάρκεια ορισμού της έννοιας του συνόλου και της Θεωρίας Συνόλων, οι μαθηματικοί προσέκρουσαν πάνω σε κάποια παράδοξα. Πολύ γνωστό το παράδοξο του Επιμενίδη (αρχαίος φιλόσοφος του $6^{ου}$ αιώνα π.Χ.) ο οποίος είπε «Όλοι οι κρητικοί είναι ψεύτες». Η δήλωση αποτελεί παράδοξο, διότι ο Επιμενίδης ήταν Κρητικός. Άλλο πολύ γνωστό παράδοξο είναι αυτό του Russell, ο οποίος θεώρησε το σύνολο P(x): {το x είναι σύνολο και δεν είναι στοιχείο x} οπότε ένα σύνολο x είναι στοιχείο του A: {x: P(x)} τότε και μόνο τότε δεν είναι στοιχείο του x. Συνεπώς, αν x = A τότε A στοιχείο του A τότε και μόνο τότε όταν A δεν είναι στοιχείο του A.

Τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων είναι δύο ειδών:

1) Τα λογικά παράδοξα , τα οποία προκύπτουν από την λανθασμένη χρήση της λογικής.
2) Τα σημασιολογικά παράδοξα τα οποία προκύπτουν από λανθασμένη χρήση της γλώσσας.

Το παράδοξο του Russell είναι λογικό παράδοξο. Το χαρακτηριστικότερο των σημασιολογικών παραδόξων είναι το παράδοξο του Berry:

Έστω ότι όλες οι λέξεις της ελληνικής γλώσσας παρατίθενται σε κάποιο λεξικό και έστω ότι T το σύνολο των φυσικών αριθμών που μπορούν να περιγραφούν σε λιγότερες από 20 λέξεις. Δεδομένου ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός λέξεων που μπορούν να περιγράψουν αυτούς τους φυσικούς, τότε το σύνολο T είναι πεπερασμένο. Επομένως «υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός αριθμός που δεν μπορεί να περιγραφεί σε λιγότερες από είκοσι λέξεις». Εξ' ορισμού αυτός ο αριθμός δεν ανήκει σε σύνολο T, όμως ήδη τον περιγράψαμε με δεκαπέντε λέξεις οπότε πρέπει να ανήκει στο σύνολο T, άρα καταλήγουμε σε αντίφαση.

Το πρόβλημα των παραδόξων αντιμετωπίστηκε με την αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας των συνόλων, δηλαδή κατασκευάστηκαν συστήματα από «θεμελιώδεις» ιδιότητες τις οποίες ονομάζουμε αξιώματα, την αλήθεια των οποίων δεχόμαστε και κατόπιν από τις ιδιότητες αυτές προκύπτει οποιαδήποτε άλλη ιδιότητα.

Ένα σύστημα αξιωμάτων για να είναι αποδεκτό πρέπει να έχει τις εξής ιδιότητες:

a) Να είναι πλήρες, δηλαδή να στηρίζει και να καλύπτει ολόκληρη τη θεωρία για την οποία έχουν δημιουργηθεί.
b) Να είναι ανεξάρτητο, δηλαδή κανένα αξίωμα να μην προκύπτει ως συνέπεια των άλλων αξιωμάτων.
c) Να είναι ελεύθερο αντιφάσεων, δηλαδή μια πρόταση και οι αρνήσεις της πρότασης αυτής δεν μπορεί να προκύπτουν από το σύστημα αξιωμάτων που έχουμε θεσπίσει για την ανάπτυξη της θεωρίας.

Ο Kurt Gödel με τα δύο θεωρήματα της -μη πληρότητας- απέδειξε ότι σε οποιοδήποτε λογικό οικοδόμημα, πρέπει να πάρουμε προτάσεις σαν αξιώματα, δηλαδή αναπόδεικτες. Το πρώτο θεώρημα δηλώνει ότι:

«Οποιαδήποτε παραχθείσα θεωρία που είναι ικανή να εκφράσει τη στοιχειώδη αριθμητική δεν μπορεί να είναι και συνεπής και πλήρης.»

Για κάθε συνεπή και αποτελεσματική παραχθείσα θεωρία που αποδεικνύει συγκεκριμένες αλήθειες βασικής αριθμητικής, υπάρχει μια αριθμητική δήλωση η οποία είναι αληθής, αλλά δεν μπορεί να αποδειχθεί από την θεωρία.

Το δεύτερο θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

«Για κάθε αποτελεσματική παραχθείσα θεωρία Θ που συμπεριλαμβάνει βασικές αριθμητικές αλήθειες και επίσης συγκεκριμένες αλήθειες για τη δυνατότητα τυπικής απόδειξης, η Θ συμπεριλαμβάνει δήλωση περί της ίδιας συνέπειας, αν και μόνο αν η Θ είναι ασυνεπής.»

Τα συμπεράσματα των θεωρημάτων του Gödel ισχύουν μόνο για τις τυπικές θεωρίες που ικανοποιούν τις απαραίτητες υποθέσεις. Δεν ικανοποιούν όλα τα αξιωματικά συστήματα αυτές τις υποθέσεις, ακόμα και όταν αυτά τα συστήματα έχουν μοντέλο που συμπεριλαμβάνουν τους φυσικούς αριθμούς ως υποσύνολο. Παραδείγματος χάριν η πρώτου βαθμού αξιωματικοποίηση της Ευκλείδειας γεωμετρίας δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Gödel διότι δεν είναι εκφραστική ώστε να ορίσει το σύνολο των φυσικών αριθμών και να αναπτύξει βασικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών.

Ο Zermelo αντικατέστησε τις εικασίες του Cantor με επτά αξιώματα:

1) **Αξίωμα επεκτασιμότητας:** Αν Α,Β σύνολα για τα οποία ισχύει ότι $A = B \Leftrightarrow \forall x \epsilon A \Leftrightarrow x \epsilon B$
2) **Αξίωμα του κενού συνόλου και ζεύγους:** Υπάρχει ένα σύνολο $\emptyset$ που δεν έχει κανένα στοιχείο και καλείται κενό το οποίο περιέχεται σε κάθε σύνολο. Για κάθε $x, y \epsilon A = \{x, y\}$ αν $t \epsilon A \Leftrightarrow t = x$ ή $t = y$
3) **Αξίωμα του διαχωρισμού:** Για κάθε σύνολο Α και κάθε μονομελή συνθήκη P υπάρχει σύνολο Β τέτοιο ώστε $x \in B \Leftrightarrow [x \in A \;\kappa\alpha\iota\; N(\chi)]^1$ δηλαδή $B = \{x \in A / \; N(x)\}$. Πρόκειται για περιορισμό της γενικής αρχής εγκλεισμού του Cantor με αποτέλεσμα το σύνολο όλων των συνόλων δεν είναι σύνολο.
4) **Αξίωμα Δυναμοσυνόλου:** Το σύνολο όλων των υποσυνόλων του συνόλου Α είναι σύνολο και καλείται δυναμοσύνολο του Α, συνήθως συμβολίζεται $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ όπου $P(A) = \{B: B \subseteq A\}$.
5) **Αξίωμα Ένωσης:** Για κάθε αντικείμενο Ε υπάρχει σύνολο Β με μέλη τα μέλη των μελών του Ε τέτοιο ώστε $B = \cup E$
6) **Αξίωμα Απείρου:** Υπάρχει σύνολο Ι που περιέχει το ø και το μονοσύνολο κάθε μέλους του, δηλαδή $\emptyset \in I \; \forall x \in I \Longrightarrow \{x\} \in I$ τότε προκύπτει ότι το σύνολο Ι είναι άπειρο. Ακόμα προκύπτει ότι αν $\emptyset \in I$ έπεται ότι $\{\emptyset\} \in I$, $\{\{\emptyset\}\} \in I$ κ.ο.κ. Η μοναδικότητα εξασφαλίζεται από το αξίωμα της επιλογής.
7) **Αξίωμα Επιλογής:** Το καρτεσιανό γινόμενο[1] μιας συλλογής μη κενών συνόλων είναι μη κενό.

Το έβδομο αξίωμα του Zermelo αμφισβητήθηκε από τους μαθηματικούς της εποχής, το αξίωμα αυτό είναι θεμελιώδες διότι στηρίζει τη δυνατότητα μετάβασης από το αριθμήσιμο στο μη-αριθμήσιμο.

1.1 Βασικά αριθμητικά σύνολα

Φυσικοί αριθμοί: Συμβολίζονται με $\mathbb{N}$, είναι το πρώτο σύνολο αριθμών που διδασκόμαστε, $\mathbb{N}$={0,1,2,.......} κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν προηγούμενο αριθμό κ έναν επόμενο εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο το 1. Δεν υπάρχει καθολική

---

[1] το σύνολο των διατεταγμένων ν-άδων που ορίζονται από το σύνολο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in A_i, i=1,2,\ldots \nu\}$

συμφωνία αν το 0 συμπεριλαμβάνεται στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Ιδιότητες των φυσικών αριθμών όπως η διαιρετότητα ,η κατανομή των πρώτων αριθμών μελετώνται στην Θεωρία Αριθμών, ενώ προβλήματα σχετικά με καταμέτρηση ή απαρίθμηση στην Συνδυαστική.

Ακέραιοι αριθμοί: Συμβολίζονται με $\mathbb{Z}$ και αποτελούνται από τους φυσικούς αριθμούς και τους αντίθετους τους. Κάθε ακέραιος αριθμός μπορεί να είναι είτε άρτιος είτε περιττός, Αν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2 είναι άρτιος διαφορετικά είναι περιττός.

Ρητοί αριθμοί: Συμβολίζονται με $\mathbb{Q}$, όπου $\mathbb{Q}=\{\frac{\kappa}{\lambda}$ με κ, $\lambda\in\mathbb{Z}$, $\lambda\neq 0\}$. Ακόμα, θα πρέπει οι αριθμοί κ, λ να έχουν Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη ακριβώς ίσο με την μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί κ, λ θα πρέπει να είναι μεταξύ τους πρώτοι.

*Άρρητοι αριθμοί :*Το συμπληρωματικό σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή όσοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφτούν σαν κλάσμα με όρους ακεραίους.

*Πρώτοι αριθμοί :*Οι φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας με την ιδιότητα οι μόνοι φυσικοί διαιρέτες του να είναι ο εαυτός του και η μονάδα. Το 2 είναι ο μοναδικός άρτιος πρώτος αριθμός, όλοι οι υπόλοιποι είναι περιττοί. Στα επόμενα κεφαλαία θα αναπτύξουμε εκτενώς την σπουδαιότητα των πρώτων αριθμών.

Πραγματικοί αριθμοί: Το σύνολο των ρητών και άρρητων αριθμών και συμβολίζονται με $\mathbb{R}$

Αλγεβρικοί αριθμοί: Το σύνολο των αριθμών που είναι ρίζες μιας μη μηδενικής πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές.

Μιγαδικοί αριθμοί: Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα φανταστικό στοιχείο i με την ιδιότητα $i^2 = -1$ ορίσαμε ένα διευρυμένο σύνολο το $\mathbb{C}$ υπερσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλα τα στοιχεία της μορφής $\alpha + \beta i$ όπου α, $\beta\in\mathbb{R}$.

Υπερβατικοί αριθμοί: Οι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί. Οι πιο γνωστοί είναι ο π και e.

Στα επόμενα κεφάλαια, θα γίνει αναφορά και παρουσίαση των πρώτων αριθμών, των υπερβατικών καθώς και εφαρμογές πολλές και διάφορα προβλήματα. Επίσης, θα γίνει εκτενής αναφορά σε λιγότερο γνωστά σύνολα αριθμών που παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον και πολλές εφαρμογές (αριθμοί Bernoulli, Υπερβατικοί Αριθμοί, Αριθμοί Catalan, Αριθμοι Stirling και Αριθμοί Fibonacci)

1.2 Θεωρία Αριθμών

Η Θεωρία Αριθμών είναι από τους πρώτους μαθηματικούς τομείς που απασχόλησαν και αναπτυχθήκαν κατά την αρχαιότητα. Ιδιαίτερα ο Πυθαγόρας, εισήγαγε με το ομώνυμο θεώρημα τις πυθαγόρειες τριάδες με τις οποίες θα ασχοληθούμε στη πορεία της εργασίας. Ως Θεωρία Αριθμών στα σύγχρονα μαθηματικά αναφερόμαστε στον κλάδο που μελετά τους Φυσικούς Αριθμούς και τις ιδιότητες τους, όπου κυρίαρχη θέση έχει το σύνολο των Πρώτων Αριθμών. Ως πρώτος αριθμός ορίζεται ο μη αρνητικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας που έχει μοναδικούς διαιρέτες την μονάδα και τον εαυτό του. Στα ΄΄Στοιχεία΄΄ του Ευκλείδη συναντάμε δύο από τα σημαντικότερα αποτελέσματα σχετικά με τους Πρώτους Αριθμούς:

1. Κάθε ακέραιος αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων.
2. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Ο κυριότερος σκοπός της Θεωρίας Αριθμών είναι η ανακάλυψη ενδιαφερόντων και αναπάντεχων σχέσεων μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών αριθμών και να αποδειχθεί ότι αυτές οι σχέσεις είναι αληθείς.

Κυρίαρχο ρόλο στη Θεωρία Αριθμών έχει η Ευκλείδεια Διαίρεση. Αν α, β φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε μπορούμε να βρούμε μοναδικούς φυσικούς π, υ τέτοιους ώστε:

$$\alpha = \pi \cdot \beta + \upsilon$$

Όπου $\pi \geq 0$ είναι το πηλίκο και $0 \leq \upsilon < \beta$ είναι το υπόλοιπο,ο α λέγεται διαιρετέος και ο β διαιρέτης. Αν $\upsilon = 0$ τότε ο β διαιρεί τον α . Στην ανάπτυξη της Θεωρίας

Αριθμών μεγάλο ρόλο παίζουν αρχές αξιωματικού χαρακτήρα, οι σημαντικότερες είναι:

- *Αρχή καλής διάταξης:* Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.
- *Αρχή μεγίστου:* Κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει μέγιστο στοιχείο.
- *Αρχή μαθηματικής επαγωγής:* Έστω μια πρόταση $P(n)$ η οποία εξαρτάται από τον $n \in \mathbb{N}$ για την οποία $P(1)$ αληθής , $\forall \kappa \in \mathbb{N}$ η πρόταση $P(\kappa)$ είναι αληθής, συνεπάγεται ότι η πρόταση $P(\kappa+1)$ είναι αληθής τότε η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 1. Θεμελιώδες Θεώρημα Αριθμητικής

Κάθε φυσικός μεγαλύτερος της μονάδας αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων κατά ένα και μοναδικό τρόπο.

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, αρχικά θα δείξουμε ότι κάθε φυσικός έχει μια πρώτη παραγοντοποίηση. Για n=2 είναι προφανές, υποθέτουμε ότι κάθε φυσικός m , $1 < m < \kappa$ έχει μία πρώτη παραγοντοποίηση, ο αριθμός k+1 θα είναι είτε πρώτος είτε σύνθετος. Αν είναι πρώτος τότε η παραγοντοποίηση του είναι ο ίδιος αριθμός. Αν είναι σύνθετος τότε θα έχουμε

$$\kappa + 1 = a \cdot b \text{ με } 1 < a < \kappa + 1 \text{ και } 1 < b < \kappa + 1$$

Αφού $1 < a < \kappa$ και $1 < b < \kappa$ από επαγωγική υπόθεση οι a, b έχουν μία πρώτη παραγοντοποίηση.

Έστω ότι

$$\alpha = \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{p}_s$$
$$b = \mathrm{q}_1 \cdot \mathrm{q}_2 \cdot \ldots \cdot q_t$$

Όποτε $\kappa + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$ που σημαίνει ότι ο $\kappa+1$ έχει τους παραπάνω πρώτους παράγοντες. Επαγωγικά προκύπτει ότι κάθε φυσικός έχει μια πρώτη παραγοντοποίηση, μένει να δείξουμε ότι είναι μοναδική. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο πρώτες παραγοντοποιήσεις για τον $\kappa+1$:

$$\kappa + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m,$$

με $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$ και $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_m$ τότε ο q_1 διαιρεί τον $\kappa+1$ οπότε διαιρεί και $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$

Άρα για κάποιο i το q_1 διαιρεί το p_i,όμως p_i, q_1 πρώτοι άρα $q_1 = p_i$.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία έχουμε $p_1 = q_j$, ενώ συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι $p_1, p_2, \ldots p_s$, ταυτίζονται με κάποιους απ' τους $q_1, q_2, \ldots q_t$.

Επιπλέον έχουμε $1 = q_1 \cdot q_2 \ldots q_{t-s}$ όμως η ισότητα είναι αδύνατον να ισχύει αν $t > s$ άρα αναγκαστικά $t = s$.

1.2.1 Κατανομή πρώτων αριθμών

Στην υποενότητα αυτή θα αναφερθούμε στην κατανομή των πρώτων και στην εικασία του Bertrand.

Θεώρημα 2. Εικασία του Bertrand

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \neq 1$ υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε:

$$n < p < 2n$$

Σχόλιο: Για μικρές τιμές του n η εικασία του Bertrand επαληθεύεται εύκολα.

Αν $n = 2$ $p = 3$

Αν $n = 3$ $p = 5$

Αν $4 \leq n \leq 6$ $p = 7$

Αν $7 \leq n \leq 12$ $p = 13$

Ο Bertrand διατύπωσε τον ισχυρισμό του το 1845 και τον επαλήθευσε για φυσικούς αριθμούς μέχρι 3.000.000. Ο ισχυρισμός αποδείχτηκε το 1850 από τον Ρώσσο μαθηματικό P.L.Chebyshev με χρήση μεθόδων ανάλυσης, αργότερα δόθηκαν απλούστερες αποδείξεις από Erdos και Ramanujan και βελτιωμένες εκδοχές της εικασίας του Bertrand. Η εικασία αυτή μας δίνει ένα μέτρο της πυκνότητας των πρώτων αριθμών στο σύνολο των Φυσικών. Για την απόδειξη του Erdos που δημοσιεύτηκε το 1931 χρειάζεται να αναφέρουμε δύο λήμματα χωρίς απόδειξη.

Λήμμα 1. Έστω $n \geq 2$ φυσικός αριθμός και $p_1, p_2, \ldots, p_k$ όλοι οι πρώτοι αριθμοί που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n. Τότε:

$$\prod_{i=1}^{k} p_i \leq 4^n$$

Λήμμα 2. Έστω $n \geq 3$ φυσικός αριθμός και p πρώτος έτσι ώστε:

$$\frac{2n}{3} < p \leq n$$

Τότε:

$$p \text{ δεν διαίρει } \binom{2n}{n}$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι για $2 \leq n \leq 127$ το θεώρημα ισχύει διότι 3,5,7,13,23,43,83,131 πρώτοι αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$n < p < 2n.$$

Για $n \geq 128$ έστω ότι δεν υπάρχει πρώτος αριθμός p τέτοιος ώστε: $n < p < 2n$.

Έστω

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leq 2n} p^r$$

η πρωτογενής ανάλυση του αριθμού $\binom{2n}{n}$.

1) Επειδή, από την υπόθεσή μας, δεν υπάρχει κανένας πρώτος μεταξύ των n και 2n, έπεται ότι η πρωτογενής ανάλυση του $\binom{2n}{n}$ θα είναι της μορφής :

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \le n} p^r$$

2) Αν p είναι ένας πρώτος στην παραπάνω πρωτογενή ανάλυση, και ισχύει $\frac{2n}{3} < p \le n$ τότε από Λήμμα 2, θα έχουμε ο p δεν διαιρεί τον $\binom{2n}{n}$. Τότε η πρωτογενής ανάλυση του $\binom{2n}{n}$ θα είναι της μορφής

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \le \sqrt{2n}} p^r \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2n}{3}} p^r$$

3) Επειδή όμως αν p είναι ένας πρώτος, όπου $\sqrt{2n} < p \le \frac{2n}{3}$, έπεται ότι ο p είναι η μεγαλύτερη δύναμή του p η οποία διαιρεί τον $\binom{2n}{n}$. Επομένως για την πρωτογενή ανάλυση του $\binom{2n}{n}$ θα έχουμε

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \le \sqrt{2n}} p^r \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2n}{3}} p^r \le \prod_{p \le \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{p \le \frac{2n}{3}} p$$

4) Επειδή ο αριθμός των πρώτων $p \le \sqrt{2n}$ είναι μικρότερος από τον αριθμό των περιττών $\le \sqrt{2n}$, έπεται ότι θα έχουμε ότι αυτός ο αριθμός θα είναι μμικρότερος από $\frac{\sqrt{2n}}{2} - 1 = \sqrt{\frac{n}{2}} - 1$. Επομένως θα έχουμε :

$$\prod_{p \le \sqrt{2n}} 2n \le (2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}-1}$$

5) Από Λήμμα 1 ισχύει:

$$\prod_{p \le \frac{2n}{3}} p < 4^{\frac{2n}{3}}$$

6) Συνδυάζοντας τις σχέσεις 3), 4), και 5), θα έχουμε :

$$\binom{2n}{n} = (2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}-1} 4^{\frac{2n}{3}}$$

7) Επειδή ο αριθμός $\binom{2n}{n}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους 2n + 1 όρους στο διωνυμικό ανάπτυγμα $(1+i)^{2n}$, έπεται ότι

$$(2n+1)\binom{2n}{n} > (2n)\binom{2n}{n} > 2^{2n}$$

και άρα

$$\frac{2^{2n}}{2n} < \binom{2n}{n} < (2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}-1} 4^{\frac{2n}{3}}$$

και η τελευταία σχέση δίνει την σχέση

$$2^{\frac{2n}{3}} < (2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}}$$

8) Παίρνοντας λογαρίθμους στην τελευταία σχέση και διαιρώντας με $\frac{\sqrt{2n}}{6}$, θα έχουμε :

$$\sqrt{8n}\log 2 - 2\log(2n) < 0$$

9) Παραγωγίζοντας την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8x}\log 2 - 2\log(2x)$, θα έχουμε :

$$f'(n) = \frac{\sqrt{2n}\log 2 - 3}{n}$$

Επειδή $f(128) = 8\log 2 > 0$ και επειδή $f'(n) > 0$.

$\forall n \geq 128$, έπεται ότι η συνάρτηση $f(n)$ είναι αύξουσα

και επομένως θετική για $n \geq 128$:

$$f(n) = \sqrt{8n}\log 2 - 2\log(2n) > 0$$

10) Οι σχέσεις στο (8) και (9) μας οδηγούν σε αντίφαση.

Επομένως η υπόθεση ότι $n \geq 128$, και δεν υπάρχει πρώτος αριθμός p έτσι ώστε : $n < p < 2n$, μας οδήγησε σε άτοπο. ΄Αρα υπάρχει παντα ένας πρώτος αριθμός p έτσι ώστε: $n < p < 2n, \forall n \geq 1$.

Η συνάρτηση π(x **):**

Είναι η συνάρτηση που μετράει το πλήθος των πρώτων αριθμών οι οποίοι είναι μικρότεροι από δοθέντα πραγματικό αριθμό και ορίζεται ως εξής:

$$\pi: R \longrightarrow \pi(x) = \{p \in \frac{\mathbb{N}}{p} : \pi\rho\acute{\omega}\tau o\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ p \leq x\}$$

Η συνάρτηση π(x) είναι αύξουσα. Αν $x \leq 2$, τότε ισχύει π(x)=0, ενώ ισχύει και η ακόλουθη πρόταση την οποία αναφέρουμε χωρίς απόδειξη:

Για κάθε $x \geq 2$:

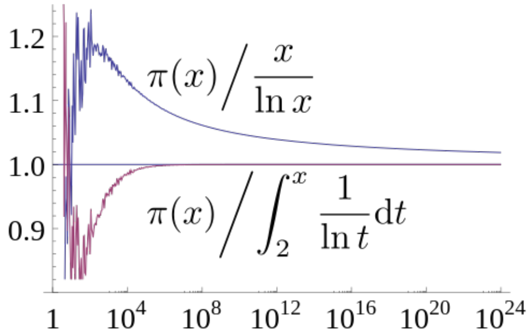
$$\pi(x) \geq \log_2(\log_2(x))$$

1.2.2 Θεωρήματα Πρώτων Αριθμών

Το θεώρημα πρώτων αριθμών, αναλύει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης $\pi(x)$ μεταξύ ακεραίων αριθμών:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\pi(x)\log x}{x}\right] = 1$$

Το θεώρημα αποδείχτηκε το 1896 από τους Jaque Hadamard και Charles Jean de Vallee-Poussin με αναλυτικές μεθόδους.



Εικόνα 1.1 Συμπεριφορά συνάρτησης Ζήτα για μεγάλες τιμές.

Από την εικασία του Bertrand προέκυψαν αρκετά θεωρήματα και πορίσματα ενδεικτικά θα αναφέρουμε κάποια.

Θεώρημα 3. (L. GREENFIELD KAI S.GREENFIELD 1998):

Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε το σύνολο A={1,2,..... $2n$ } μπορεί να διαμεριστεί σε n το πλήθος ζευγάρια αριθμών $\{a_1,b_1\}$, $\{a_2,b_2\}$, ... , $\{a_n,b_n\}$ έτσι ώστε ο αριθμός a_i+b_i να είναι πρώτος , $1 \leq i \leq n$

Θεώρημα 4.

Υπάρχουν σταθερές C, c > 0 τέτοιες ώστε $\forall x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$c\frac{\log x}{x} \leq \pi(x) \leq C\frac{\log x}{x}$$

Θεώρημα 5.

Κάθε φυσικός $n > 6$ *μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα διακεκριμένων πρώτων αριθμών.*

Θεώρημα 6. ***Εικασία του Legendre*** **(όπου παραμένει ως ανοικτό πρόβλημα)**

Για κάθε φυσικό αριθμό $n > 1$ *υπάρχει πάντα ένας πρώτος αριθμός* p *τέτοιος ώστε:*

$$n^2 < p < (n+1)^2$$

1.2.3 Η Εικασία του Göldbach

Ο Βρετανός μαθηματικός G.H Hardy, συνήθιζε να λέει: «Οποιοσδήποτε μπορεί να κάνει ερωτήσεις σχετικές με τους πρώτους αριθμούς που και ο πιο σοφός άνθρωπος, δεν μπορεί να απαντήσει...».

Ο Γερμανός μαθηματικός Christian Göldbach (1690-1764) το 1742 σε ένα γράμμα του προς τον σπουδαίο Ελβετό μαθηματικό Leonard Euler (1707-1783) του παρέθεσε την πεποίθησή του ότι κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα τριών πρώτων αριθμών. Θεωρούσε ότι ο αριθμός 1 είναι πρώτος, μια υπόθεση που εγκατέλειψε αργότερα. Στη συνέχεια διατύπωσε τη εικασία του ως εξής:

« κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του 5 μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα τριών πρώτων αριθμών».

Ο Euler του απάντησε πως η εικασία του προκύπτει από την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γράφει ως άθροισμα 2 πρώτων ακεραίων».

Η εικασία του Göldbach παραμένει ως ανοικτό πρόβλημα, έχει απασχολήσει πολλούς μαθηματικούς η απόδειξή της. Έχει γραφτεί ακόμα και μυθιστόρημα από τον Απόστολο Δοξιάδη «Ο Θείος Πέτρος και η εικασία του Göldbach», ενώ αξίζει να αναφερθεί πως όταν εκδόθηκε το μυθιστόρημα, δημιούργησε μεγάλο ενδιαφέρον γύρω από την απόδειξη της εικασίας του Göldbach, οδηγώντας τον εκδοτικό οίκο Faber and Faber να προσφέρει χρηματικό έπαθλο ύψους 1 εκατ. Δολαρίων σε όποιον καταφέρει να αποδείξει ή να διαψεύσει τη εικασία.

Η εικασία μέχρι το 2012, έχει επαληθευτεί για όλους τους αριθμούς μέχρι το $4x10^{18}$. Η λεγόμενη «ασθενής» εικασία του Göldbach ισχυρίζεται ότι κάθε περιττός ακέραιος μεγαλύτερος του 5 μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα 3 περιττών πρώτων αριθμών. Αν αποδειχτεί η «ισχυρή» εικασία τότε αυτόματα αποδεικνύεται η «ασθενής» η οποία προκύπτει ως άμεση συνέπεια της πρώτης. Η Γενικευμένη Υπόθεση του Riemann περιλαμβάνει την «ασθενή» εικασία του Göldbach. Αν κάποιος αποδείξει την «ασθενή» εικασία, τότε αποδεικνύοντας ότι αθροίζοντας 4 πρώτους, μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε άρτιο ακέραιο η απόδειξη της «ισχυρής» εικασίας γίνεται ευκολότερη.

Ο Ivan Vinogradov (1891-1983) το 1937 απέδειξε ότι κάθε περιττός ακέραιος αρκετά μεγάλος μπορεί να γραφεί ως άθροισμα 3 πρώτων.

Μία πολύ σημαντική σειρά για την θεωρία Αριθμών και ειδικότερα τους Πρώτους αριθμούς είναι η αρμονική σειρά:

$$\sum_{n=1}^{=+\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots$$

Η οποία ως γνωστόν συγκλίνει όταν $s > 1$ και αποκλίνει όταν $s \leq 1$. Ο Euler απέδειξε το 1740 ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathrm{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

όπου p_s ακολουθία πρώτων αριθμών. Βασισμένος σ αυτήν την ισότητα ο Euler απέδειξε

$$\sum_{p \in \mathrm{P}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots = \infty$$

Το 1859 ο Riemann σε μια πολύ σημαντική εργασία του επέκτεινε το σύνολο που παίρνει τιμές η μεταβλητή s από το σύνολο $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

με $s = \alpha + \beta i$

Αποδεικνύεται ότι η σειρά αυτή συγκλίνει σε μιγαδικό αριθμό αν Re(s)$>$ 1 και ορίζεται η συνάρτηση Ζήτα:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

με $s = \alpha + \beta i,$ α > 1

Δηλαδή η συνάρτηση ζ(s) ορίζεται μέσω της σειράς στο ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου δεξιά της κατακόρυφης ευθείας s = 1

Το 1900 ο Γερμανός μαθηματικός David Hilbert δημοσίευσε μια λίστα με 23 άλυτα προβλήματα τα οποία όπως υποστήριξε θα έπαιζαν μεγάλο ρόλο τον $20^{\text{ο}}$ αιώνα, 10 από αυτά τα παρουσίασε στο πανεπιστήμιο του Παρισιού στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών, η ολοκληρωμένη λίστα δημοσιεύτηκε το 1902. Το Ινστιτούτο Μαθηματικών Clay το 2000 ανακοίνωσε μια λίστα με 7 σπουδαία άλυτα μαθηματικά προβλήματα, το μοναδικό από την λίστα του Hilbert που παρέμενε άλυτο ήταν η ‘Υπόθεση του Riemann’. Για την επίλυση κάθε προβλήματος το Ινστιτούτο αποδίδει χρηματικό έπαθλο ύψους 1 εκατ. Δολαρίων. Ένα πρόβλημα από τα παραπάνω το οποίο έχει επιλυθεί, είναι η απόδειξη της εικασίας του Poincare.
Συγκεκριμένα, η εικασία υποδηλώνει ότι όλες οι συμπαγείς πολλαπλότητες διάστασης n=3 (ή περισσότερο), χωρίς όρια και απλά συνεκτικές είναι ομοιόμορφες σε μία σφαίρα διάστασης n. Μία απόδειξη της εικασίας αυτής, σχεδόν έναν αιώνα μετά την διατύπωσή της, εξέφρασε ο μαθηματικός Gregory Perelman, ο οποίος στηρίχθηκε πάνω στο πρόγραμμα του Richard Hamilton, χρησιμοποιώντας τη ροή Ricci, μια εγγενής γεωμετρική ροή στη θεωρία της Διαφορικής Γεωμετρίας. Η απόδειξη δημοσιεύθηκε το 2002 και βεβαιώθηκε από το Ινστιτούτο Clay τον Μάρτιο του 2010.

1.3 Υπόθεση Riemann

Όλες οι μη τετριμμένες ρίζες της συνάρτησης ζήτα του Riemann βρίσκονται στην κρίσιμη ευθεία

$$\sigma = R[s] = \frac{1}{2}$$

όπου το R[s] αντιπροσωπεύει το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού s.

Η απόδειξη της υπόθεσης Riemann είναι το πρόβλημα 8 στη λίστα του Hilbert. Η υπόθεση Riemann έχει επαληθευθεί υπολογιστικά για τις πρώτες 75.000.000 ρίζες από τον Αυστραλό Μαθηματικό και επιστήμων Πληροφορικής, Richard P. Brent.

Τόσο η συνάρτηση ζήτα του Riemann όσο και η Υπόθεση του Riemann έχουν αποτελέσει το αντικείμενο πολλών μελετών και γενικεύσεων. Υπάρχει μια σειρά από βιβλιογραφία σχετική με γενικεύσεις πάνω στην κλασσική συνάρτηση ζήτα, ωστόσο η πιο άμεση μορφή γενίκευσης αφορά τις L-συναρτήσεις του Dirichlet μαζί με την αντίστοιχη εκτεταμένη υπόθεση του Riemann. Θα αναφερθούμε απλώς στη Γενικευμένη υπόθεση του Riemann στις συναρτήσεις L του Dirichlet. Πιθανόν πρώτη φορά διατυπώθηκε το 1882 από τον Adolf Plitz. Ο Dirichlet όρισε τις συναρτήσεις L το 1837 ως εξής:

Μία συνάρτηση $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται Dirichlet character modulo q αν ικανοποιεί τα ακόλουθα κριτήρια

1) $x(n) \neq 0$ αν (n,q)=1
2) $x(n) = 0$ αν (n,q)>1
3) x περιοδική με περίοδο q, το οποίο σημαίνει ότι $x(n+q) = x(n)$ για κάθε n
4) x πολλαπλασιαστική το οποίο σημαίνει ότι $x(mn) = x(m) \cdot x(n)$.

Ο τετριμμένος χαρακτήρας είναι αυτός για τον οποίο ισχύει $\chi_0(n) = 1$ οποτεδήποτε (n,q)=1 τότε μπορεί να ορίσει της σειρές Dirichlet για $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Η εκτεταμένη υπόθεση του Riemann αποτελεί γενίκευση της Υπόθεσης Riemann και αναφέρεται στον ισχυρισμό ότι οι μη τετριμμένες ρίζες της Dirichlet συνάρτησής ζήτα κάθε αλγεβρικού αριθμητικού πεδίου βρίσκονται στη κρίσιμη γραμμή.

Η Υπόθεση του Riemann παίζει κομβικό ρόλο στην θεωρία Αριθμών γενικότερα, καθώς υπάρχει μια σειρά από θεωρήματα που για να αποδειχθούν, έχουν πάρει ως δεδομένο ότι η υπόθεση του Riemann ισχύει.

Αν λοιπόν αποδειχθεί η υπόθεση του Riemann, τότε ισχύουν και τα θεωρήματα αυτά. Αν αντίθετα, αποδειχτεί ότι δεν ισχύει η υπόθεση του Riemann, τα θεωρήματα αυτά καταρρέουν

Ο δεύτερος λόγος είναι οι γενικεύσεις: Υπάρχει μια σειρά από συναρτήσεις με την ίδια συμπεριφορά με την συνάρτηση ζήτα ζ(s). Αν λοιπόν η υπόθεση Riemann ότι οι ρίζες της συνάρτησης ακολουθούν μια συγκεκριμένη δομή αποδειχθεί, τότε θα μπορέσει να αποδειχθεί και για τις άλλες συναρτήσεις ότι παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά

1.3.1 Υπόθεση Lindelöf

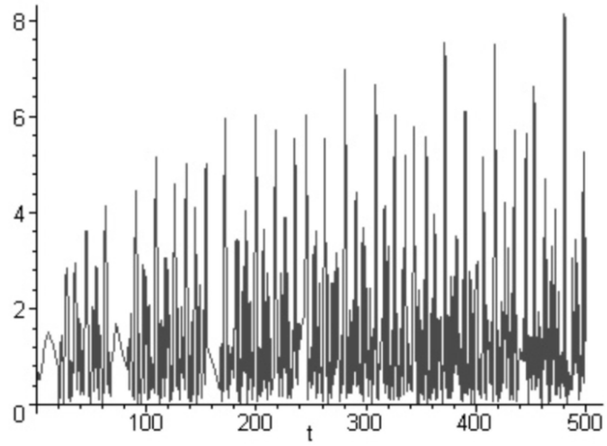
Το 1908, ο Φινλανδός Μαθηματικός Ernst Leonard Lindelöf μελέτησε τον ρυθμό με τον οποίο αναπτύσσεται η συνάρτηση ζήτα του Riemann, πάνω στην κρίσιμη γραμμή που αναφέρεται στην Υπόθεση του Riemann. Συγκεκριμένα το λήμμα του Lindelöf αναφέρει ότι για ε>0:

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(t^{\varepsilon}), \mu\varepsilon\ t \to \infty$$

ή εναλλακτικά, εκφράζοντας την ίδια σχέση:

$$\zeta(\sigma+it) = O(t^{\varepsilon}), \mu\varepsilon\ t \to \infty$$

Στις παραπάνω σχέσεις, η συνάρτηση O αναφέρεται στην μεγάλη σημειογραφία (Big O notation) του Landau και σημαίνει πως για κάθε συνάρτηση f = O(g), $|f| < C_g$ για κάθε θετική σταθερά C, πάνω στον κοινό τόπο των f και g. Στο παρακάτω διάγραμμα παρατηρούμε την συμπεριφορά της συνάρτησης ζήτα πάνω στην κρίσιμη γραμμή για τις τιμές του t μέχρι το 500:



Εικόνα 1.2 Συμπεριφορά συνάρτησης Ζήτα για μεγάλες τιμές.

Αυτό που έρχεται να παρατηρήσει το Λήμμα Lindelöf είναι ο ρυθμός που αναπτύσσεται η συνάρτηση.

Η υπόθεση του Lindelöf είναι ισοδύναμη με την πεποίθηση ότι για $\sigma \in (1/2, 1)$ ο αριθμός των ριζών της $\zeta(s)$ που βρίσκονται στην περιοχή

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma, \mathrm{T} < \mathrm{I}m(s) < T+1 \text{ είναι της τάξης } O(lnT)$$

Ορισμός: $\mu(s) = \inf\{a \in \Re / \zeta(\sigma + it) = O(|t|^a)\}$

Όπου $\mu(s) = 0$ για $\sigma > 1$ ενώ $\mu(s) = \frac{1}{2} - \sigma$ για $\sigma < 1$

Πρόταση: Η υπόθεση του Lindelöf ισχύει αν και μόνο αν

$$\mathrm{N}(\sigma, \mathrm{T}+1) - \mathrm{N}(\sigma, \mathrm{T}) = o(\log \mathrm{T}) \quad , \sigma > \frac{1}{2}$$

Όπου $N(\sigma,T)$ είναι το πλήθος των ριζών ρ της συνάρτησης ζ(s) με $\sigma \leq \mathrm{Re}(\rho) \leq 1$ και $0 \leq \mathrm{Im}(\rho) \leq T$

Η πιο πρόσφατη απόδειξη της υπόθεσης του Lindelöf δόθηκε από τον Έλληνα μαθηματικό Αθανάσιο Φωκά τον Νοέμβριο του 2017, την οποία θα περιγράψουμε. Η υπόθεση του Riemann συνεπάγεται την υπόθεση του Lindelöf και αντιστρόφως συνεπάγεται ότι λίγες ρίζες δεν την ακολουθούν. Το 1969 οι Halasz και Turan απέδειξαν ότι αν ισχύει η υπόθεση του Lindelöf τότε

$$\mathrm{N}(\sigma, \mathrm{T}) = \mathrm{O}(\mathrm{T}^{\varepsilon}) \quad , \frac{3}{4} + \delta \leq \sigma < 1 \quad \mathrm{T} \to \infty$$

Για ε, δ θετικά και αυθαιρέτως μικρά. Η καλύτερη εκτίμηση για την αύξηση των ριζών της ζ(s) καθώς $t \to \infty$

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \frac{(2\pi)^s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^{1-s}} + \mathrm{O}\left(x^{-\sigma} + |t|^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1}\right) \quad xy = \frac{t}{2\pi}$$

$0 < \sigma < 1 \;\; t \to \infty$

Όπου Γ(s) η συνάρτηση Γάμα και s μιγαδικός αριθμός. Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι πως το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα των όρων υψηλότερων τάξεων της ζ(s) αντί να είναι περίπλοκο μπορεί να υπολογιστεί ρητώς. Ο Siegel το 1966 στο κλασσικό του έργο παρουσίασε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα όλων των τάξεων στην περίπτωση $x = y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$.

Για την απόδειξη ο Α. Φωκάς εισήγαγε την συνάρτηση ζ(s) στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$\frac{t}{\pi}\oint_{-\infty}^{+\infty} \Re\left\{\frac{\Gamma(it - i\tau t)}{\Gamma(\sigma + it)}\Gamma(\sigma + i\tau t)\right\}|\zeta(\sigma + i\tau t)|d\tau + \mathcal{G}(\sigma, t) = 0 \qquad (*)$$

για $0 < \sigma < 1, \;\; t > 0.$

Όπου η πρωτεύουσα τιμή του ολοκληρώματος ορίζεται για τ = 1 και η συνάρτηση

$$\mathcal{G}(\sigma, t) = \begin{cases} \zeta(2\sigma) + \left(\frac{\Gamma(1-\bar{s})}{\Gamma(s)} + \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(\bar{s})}\right)\Gamma(2\sigma - 1)\zeta(2\sigma - 1) + \frac{2(\sigma - 1)\zeta(2\sigma - 1)}{(\sigma - 1)^2 + t^2}, & \sigma \neq \frac{1}{2} \\ \Re\left\{\Psi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right\} + 2\gamma - \ln 2\pi + \frac{2}{1 + 4t^2}, & \sigma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Από την παραπάνω φόρμουλα και η Ψ είναι η δίγαμμα συνάρτηση

$$\Psi(z) = \frac{\frac{d}{dz}\Gamma(z)}{\Gamma(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

και γ η σταθερά του Euler.

Η παραγώγιση της (*) βασίζεται στην φόρμουλα Plemelj. Το κυριότερο επίτευγμα της εργασίας του Α. Φωκά είναι ο υπολογισμός των μεγάλων t ασυμπτωτικά της εξίσωσης (*) όπου σημειώνεται ότι ο όρος

$$\Gamma(it - i\tau \cdot t)\Gamma(it + i\tau \cdot t)\Gamma(\sigma + it) \;\;, \; -\infty < \tau < \infty$$

διασπάται εκθετικά για μεγάλα t, εκτός και αν τ είναι στο εσωτερικό

$$-t^{\delta_1-1} \le \tau \le 1+t^{\delta_4-1},$$

με δ_1, δ_4 επαρκώς μικρές θετικές σταθερές, επομένως η εξίσωση (*) μετατρέπεται στην απλούστερη εξίσωση

$$\frac{t}{\pi}\oint_{-t^{\delta_1-1}}^{1+t^{\delta_4-1}} \Re\left\{\frac{\Gamma(it-i\tau t)}{\Gamma(\sigma+it)}\Gamma(\sigma+i\tau t)\right\}|\zeta(\sigma+i\tau t)|^2 d\tau + \mathcal{G}(\sigma,t) + O\left(e^{-\pi t^{\delta_{14}}}\right)$$
$$= 0 \qquad\qquad 0<\sigma<1, \qquad t\to\infty \qquad (1)$$

με $\delta_{14}=\min(\delta_1,\delta_4)$.

Για τον υπολογισμό του μεγάλου t ασυμπτωτικά ο A. Φωκάς χώρισε το διάστημα $[-t^{\delta_1-1}, 1+t^{\delta_4-1}]$ σε 4 υποδιαστήματα:

$$L_1=[-t^{\delta_1-1},t^{-1}], L_2=[t^{-1},t^{\delta_2-1}], L_3=[t^{\delta_2-1},1-t^{\delta_3-1}], L_4=[1-t^{\delta_3-1},1+t^{\delta_4-1}],$$

με δ_2,δ_3 επαρκώς μικρές θετικές σταθερές.
Επομένως η ασυμπτωτική εκτίμηση της (1) καταλήγει στο ευκολότερο πρόβλημα της ανάλυσης των τεσσάρων ολοκληρωμάτων

$$I_j(\sigma,t) = \frac{t}{\pi}\oint_{L_j} \Re\left\{\frac{\Gamma(it-i\tau t)}{\Gamma(\sigma+it)}\Gamma(\sigma+i\tau t)\right\}|\zeta(\sigma+i\tau t)|^2 d\tau \qquad (2)$$

όπου $\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2,\mathrm{I}_3,\mathrm{I}_4$ εξαρτώνται αντίστοιχα από $\delta_1,\delta_2,(\delta_2,\delta_3),(\delta_3,\delta_4)$
$0<\sigma<1, t>0, \{L_j\}_1^4$ ορίστηκαν παραπάνω και η πρωτεύουσα τιμή του ολοκληρώματος χρειάζεται μόνο για το I_4. Έπειτα παρατήρησε ότι τα $\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2$ είναι ‘’μικρά’’ και έδωσε ακριβείς προσεγγίσεις.

$$I_1(\sigma,t,\delta_1) = \mathrm{O}(\frac{t^{\delta_1(\sigma+\frac{3}{2})}}{t^{\sigma}}),\ t \to \infty .$$

$$I_2(\frac{1}{2},t,\delta_2) = \mathrm{O}(t^{-\frac{1}{2}+\delta_2} \ln t),\ \ \sigma = \frac{1}{2},\ \ t \to \infty ,$$

$$I_2(\sigma,t,\delta_2) = \begin{cases} O\left(t^{-\sigma+(\sigma+\frac{1}{2})\delta_2}\zeta(2\sigma)\right), & \frac{1}{2} < \sigma < 1, \quad t \to \infty, \\ O\left(t^{-\sigma+2(1-\sigma)\delta_2}\zeta(2-2\sigma)\right), & 0 < \sigma < \frac{1}{2}, \quad t \to \infty. \end{cases}$$

ενώ για $\mathrm{I}_3, \mathrm{I}_4$ κατέληξε στην εξής εξίσωση

$$I_3 + I_4 = \begin{cases} O(1), & \dfrac{1}{2} < \sigma < 1, \\ O(\ln t), & \sigma = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad t \to \infty.$$

Η εκτίμηση των κορυφαίων ασυμπτωτικών του ολοκληρώματος I_3 περιλαμβάνει τον υπολογισμό της συνεισφοράς των στάσιμων σημείων που υποδηλώνονται από το I_s και την συνεισφορά από την περιοχή κοντά στο σημείο $1-t^{\delta_3-1}$ η οποία δίνεται από το I_B

$$I_s \sim 2\Re \left\{ \sum_{m_1 \in M} \sum_{m_2 \in M} \frac{1}{m_1^s (m_1 + m_2)^{\bar{s}}} \right\}, \qquad 0 < \sigma < 1, \qquad t \to \infty$$

όπου το σύνολο Μ ορίζεται από

$$M = \{m_1 \in \mathbb{N}^+,\ m_2 \in \mathbb{N}^+,\ 1 \le m_1 \le [T],\ \ 1 \le m_2 \le [T],$$

$$\frac{1}{t^{1-\delta_2}-1} < \frac{m_2}{m_1} < t^{1-\delta_3} - 1,\ \ t > 0,\ T = \frac{t}{2\pi}\}$$

ενώ το I_B δίνεται από τον τύπο

$$I_B(\sigma,t,\delta_3) \sim t^{-\frac{\delta_3}{2}} e^{-it^{\delta_3}} t^{i(\delta_3-1)t^{\delta_3}} \times \sum_{m_1 \in \mathrm{N}} \sum_{m_2 \in \mathrm{N}} \frac{1}{m_1^{s-it^{\delta_3}}} \cdot \frac{1}{m_2^{\bar{s}+it^{\delta_3}}} \cdot \frac{1}{\ln[\frac{m_2}{m_1}(t^{1-\delta_3}-1)]},$$

ενώ το σύνολο Ν ορίζεται από

$$\mathrm{N} = \{m_1 \in \mathrm{N}^+, m_2 \in \mathrm{N}^+,\ \ 1 \le m_1 \le [T],\ 1 \le m_2 \le [T],$$

$$\frac{m_2}{m_1} > \frac{1}{t^{1-\delta_3}-1}(1+\frac{1}{c(t)}), c(0) = o(t^{\frac{\delta_3}{2}}),\ \ t>0,\ T=\frac{t}{2\pi}\},$$

άρα

$$I_4 \sim -\sum_{m_1=1}^{[T]}\sum_{m_2=1}^{[T]}\frac{1}{m_1^{s}m_2^{\bar{s}}}, \quad 0<\sigma<1,\ \ t\to\infty.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποίησε ύστερα κάποια θεωρήματα για την συνάρτηση ζήτα.

Θεώρημα 7.

Η συνάρτηση ζήτα ζ(s) του Riemann ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση

$$\frac{t}{\pi}\oint_{-\infty}^{+\infty}\Re\left\{\frac{\Gamma(it-i\tau t)}{\Gamma(\sigma+it)}\Gamma(\sigma+i\tau t)\right\}|\zeta(\sigma+i\tau t)|d\tau+\ \mathcal{G}(\sigma,t)=0\ \ 0<\sigma<1,\ \ t>0$$

Θεώρημα 8.

Έστω $0<\sigma<1, t>0$, *έστω τα ολοκληρώματα* $\mathrm{I}_3(\sigma,t,\delta_2,\delta_3)$ *και* $\mathrm{I}_4(\sigma,t,\delta_3,\delta_4)$ *ορίζονται από την (2) με* $j=3, j=4$ *η συνάρτηση ζήτα ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση*

$$I_3(\sigma,t,\delta_2,\delta_3)+I_4(\sigma,t,\delta_3,\delta_4)+\ln t+2\gamma-\ln 2\pi+O\left(t^{\delta_2-\frac{1}{2}}\ln t\right),$$
$$+O\left(e^{-\pi t^{\delta_{14}}}\right)+O\left(\frac{t^{\delta_1(\sigma+\frac{3}{2})}}{t^{\sigma}}\right)+O\left(\frac{1}{t^2}\right)=0, \qquad \sigma=\frac{1}{2}, \quad t\to\infty.$$

Στη συνέχεια έδωσε εκτίμηση για I_3, I_4

$$I_3(\sigma,t,\delta_2,\delta_3)\sim\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\Re\left\{e^{-\frac{i\pi}{4}}\sum_{m_1=1}^{[T]}\sum_{m_2=1}^{[T]}m_1^{-\sigma}m_2^{-\sigma}J\left(\sigma,t,\delta_2,\delta_3,\frac{m_2}{m_1}\right)\right\},$$
$$0<\sigma<1, \qquad t\to\infty,$$

όπου

$$J(\sigma,t,\delta_2,\delta_3,\lambda)=\int_{t^{\delta_2-1}}^{1-t^{\delta_3-1}}G(\sigma,\tau)e^{itF(\tau,\lambda)}d\tau,$$

με

$$G(\sigma,\tau) = (1-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{\sigma-\frac{1}{2}}, \quad F(\tau,\lambda) = (1-\tau)\ln(1-\tau) + \tau\ln\tau + \tau\ln\lambda.$$

$$I_4 \sim -\sum_{m_1=1}^{[T]}\sum_{m_2=1}^{[T]} \frac{1}{m_1^s m_2^{\bar{s}}}, \quad T = \frac{t}{2\pi}, \quad 0<\sigma<1, \quad t\to\infty.$$

Ακολούθησε ανάλυση των διπλών αθροισμάτων σε σχέση με τα στάσιμα σημεία των I_3, I_4

Λήμμα 3. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f(u,v), g(u,v)$

$$f(u,v) = \sum_{m_1=1}^{N}\sum_{m_2=1}^{N}\frac{1}{m_1^{\,u}}\frac{1}{(m_1+m_2)^v}$$

$$g(u,v) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=N+1}^{N+m}\frac{1}{m^u n^v}$$

όπου N τυχαίος πεπερασμένος θετικός ακέραιος και u,v μιγαδικοί αριθμοί. Οι $f(u,v), g(u,v)$ ικανοποιούν την ισότητα:

$$f(u,v) + f(v,u) + \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m^{u+v}} = (\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m^u})(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^v}) + g(u,v) + g(v,u).$$

τέλος για την απόδειξη της υπόθεσης για $\delta_3 > 0$ όρισε $\mathrm{I_B}$

$$I_B(\sigma,t,\delta_3) = \frac{t}{\pi}\oint_{1-t^{\delta_3-1}}^{\infty e^{i\varphi}} \Re\left\{\frac{\Gamma(it-i\tau t)}{\Gamma(\sigma+it)}\Gamma(\sigma+i\tau t)\right\}|\zeta(\sigma+i\tau t)|^2 d\tau$$

με $0<\phi<\arctan(\frac{\pi}{|\ln\lambda|})$ και $\frac{1}{t^{1-\delta_3}-1} < \lambda < t^{1-\delta_2}-1$

$$I_B\left(\frac{1}{2},t,\delta_3\right) - I_B\left(\frac{1}{2},t,\tilde{\delta}_3\right) = \tilde{I}_B\left(t,\delta_3,\tilde{\delta}_3\right)$$

όπου

$$\tilde{I}_B(\sigma,\delta_3,\tilde{\delta}_3) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\oint_{1-\frac{t^{\delta_3}}{\tau}}^{1-\frac{t^{\tilde{\delta}_3}}{\tau}} (1-\tau)^{\frac{-1}{2}}\,\Re\left\{\frac{\Gamma(it-i\tau t)}{\Gamma(\sigma+it)}\Gamma(\sigma+i\tau t)\right\}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\tau t\right)\right|^2 d\tau$$

έθεσε $\tau = 1-t^{\delta_3-1}+t^{\delta_3-1}\rho$ και βρήκε

$$\overline{I_B} = \sqrt{\frac{2t^{\delta_3}}{\pi}}\int_0^{1-\frac{t^{\overline{\delta_3}}}{t^{\delta_3}}}(1-\rho)^{-\frac{1}{2}}\cos(\Phi(t,\rho))\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it-it^{\delta_3}+it^{\delta_3}\rho\right|^2 d\rho \quad (3)$$

με

$$\Phi(t,\rho)=\frac{\pi}{4}+t^{\delta_3}(1-\rho)[(1-\delta_3)\ln t-\ln(1-\rho)]-(t-t^{\delta_3}+t^{\delta_3}\rho)\ln\left(1-\frac{t^{\delta_3}}{t}+\frac{t^{\delta_3}}{t}\rho\right).$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο παραπάνω ολοκλήρωμα (3), βρήκε

$$I_B\left(\frac{1}{2},t,\delta_3\right)-I_B\left(\frac{1}{2},t,\tilde{\delta}_3\right)$$

$$=\left|1-t^{\tilde{\delta}_3-\delta_3}\right|\sqrt{\frac{2t^{\delta_3}}{\pi}}(1-\rho_*)^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\Phi(t,\rho_*)\right)\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it-it^{\delta_3}+it^{\delta_3}\rho_*\right)\right|^2,$$

όπου $0<|\rho_*|<\left|1-t^{\overline{\delta_3}-\delta_3}\right|$

Επισημαίνουμε

$$\Phi(t,\rho)=(\rho-1)(1-\delta_3)t^{\delta_3}[\ln t+\mathrm{O}(1)],\quad t\to\infty \quad (4)$$

επομένως η cosΦ έχει άπειρες ρίζες αλλά μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση Φ(t,ρ) στη μορφή

$$\Phi(t,\rho)=\frac{\pi}{\rho}-n(t)\pi+\phi(t,\rho) \ (5)$$

όπου

$$n(t)=[1-\frac{\Phi(t,\rho)}{\pi}]\in\mathbb{N}^{+},\quad \phi(t,\rho)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

Η εξίσωση (5) υποδηλώνει ότι $\cos\Phi(t,\rho)=(-1)^{n(t)}\sin\phi(t,\rho)\backslash$

επομένως ισχύει $\cos\Phi(t,\rho)=0 \Leftrightarrow \phi(t,\rho)=0$

Επίσης $|\phi(t,\rho)|>\frac{1}{\ln t}$, Το οποίο υποδηλώνει $|\sin\phi(t,\rho)|>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\ln t}$. Επομένως

$$|\cos\Phi(t,\rho)|>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\ln t}$$

Στη συνέχεια απέδειξε μαζί με τους συνεργάτες του το ακόλουθο Λήμμα το οποίο προσδιορίζει ένα βολικό διάστημα ολοκλήρωσης για το (3)

Λήμμα 4. Για κάθε t>0 που ικανοποιεί την συνθήκη $|\phi(t,0)|>\frac{1}{\ln t}$ *(6) και για δοσμένο* δ_3 *μπορούμε να επιλέξουμε* $\overline{\delta_3}>0$ *τέτοιο ώστε* $|\delta_3-\overline{\delta_3}|=\frac{\pi}{4(1-\delta_3)}\cdot\frac{1}{t^{\delta_3}(\ln t)^2}$

Τότε $|\cos\Phi(t,\rho)|>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\ln t}$ ικανοποιείται για κάθε ρ το οποίο για $\delta_3>\overline{\delta_3}$ το οποίο ανήκει στο διάστημα $L^{+}=(0,1-t^{\overline{\delta_3}-\delta_3})$ ενώ για $\delta_3<\overline{\delta_3}$ ανήκει στο διάστημα

$$L^{-}=(1-t^{\overline{\delta_3}-\delta_3},0)$$

οπότε χρησιμοποίησε την (6) στην (5) για να αποδείξει την ισχύ του Λήμματος 2 για κάθε t>0 εκτός από το σύνολο που περιέχει τα σημεία της θετικής πραγματικής γραμμής για την οποία η συνάρτηση $\frac{\Phi(t,0)}{\pi}-\frac{1}{2}$ βρίσκεται αυθαίρετα κοντά σ έναν ακέραιο, δηλαδή τα σημεία για τα οποία η ακόλουθη συνθήκη είναι έγκυρη $\left|\frac{\Phi(t,0)}{\pi}-n-\frac{1}{2}\right|=\mathrm{O}(\frac{1}{\ln t})$ $n\in\mathbb{Z}$. Με χρήση της επισήμανσής (4) έπεται ότι το σύνολο αυτό ορίζεται από $\left|\frac{t^{\delta_3}\ln t}{\pi}-n-\frac{1}{2}\right|=\mathrm{O}(\frac{1}{\ln t})$. Οπότε αποδείχτηκε η εγκυρότητα του Λήμματος 2 για κάθε t>0 εξαιρώντας εκείνα τα t για τα οποία για κάθε διάστημα μήκους π στην εμβέλεια της συνάρτησης Φ δίνει διάστημα μήκους $O(\frac{1}{\ln t})$ με κέντρο το σημείο $(n+\frac{1}{2})\pi$ στο οποίο ισχύει $\cos\Phi = O(\frac{1}{\ln t})$ καθώς $t \to \infty$ τα εξαιρούμενα διαστήματα εκφυλίζονται σ αυτά που περιέχουν τα κεντρικά σημεία.

Μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Μέσης τιμής είτε στο L^{+} είτε στο L^{-} για το ολοκλήρωμα $\overline{\mathrm{I_B}}$ όποτε προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\left|\zeta(\frac{1}{2}+it-it^{\delta_3}(1-\rho_*)\right|^2 = O(t^{\delta_3}(\ln t)^2 \frac{1}{|\cos\Phi(t,\rho_*)|}), \quad \rho_* \in L^{\pm}. \ (7)$$

$$\left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it-it^{\delta_3}(1-\rho_*)\right|^2 = O\left(t^{\delta_3}(lnt)^2 \frac{1}{|cos\Phi(t,\rho_*)|}\right), \ \ \rho_* \in L^{\mp} \ (7)$$

Η παραγώγιση της (7) παρέχει την απόδειξη της του ανάλογου προβλήματος της υπόθεσης του Lindelöf για μικρή μεταβολή της $|\zeta(s)|^2$.

Κεφάλαιο 2.

2.1 Πυθαγόρειες τριάδες

Από την εποχή του Πυθαγόρα και το πυθαγόρειο θεώρημα οι τριάδες αριθμών οι οποίες ικανοποιούν το πυθαγόρειο θεώρημα λέγονται πυθαγόρειες τριάδες. Η πιο γνωστή από αυτές είναι η τριάδα των αριθμών 3, 4, 5 καθώς $3^2 + 4^2 = 5^2$. Παρατηρείται ότι αν α, β, γ μια πυθαγόρεια τριάδα και μ θετικός ακέραιος τότε $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$ αποτελεί μια νέα πυθαγόρεια τριάδα αφού $(\mu\alpha)^2 + (\mu\beta)^2 = (\mu\gamma)^2$. Έτσι λοιπόν κάθε πυθαγόρεια τριάδα μας δίνει άπειρη ακολουθία καινούργιων τριάδων. Οπότε η αρχική τριάδα ονομάζεται βασική και οι υπόλοιπες παραγόμενες π.χ. σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος η 3, 4, 5 είναι μια βασική τριάδα και η 6, 8, 10 αποτελεί μια παραγόμενη τριάδα πυθαγόρειων αριθμών της πρώτης.

Για την παραγωγή βασικών τριάδων ασχολήθηκαν πολλοί μαθηματικοί. Η πλέον γνωστή μέθοδος παραγωγής είναι η εξής: Αν γράψουμε την σειρά των τετραγώνων αριθμών 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225,... και σχηματίσουμε τις διαφορές ανά δύο διαδοχικά τετράγωνα τότε προκύπτει μια σειρά περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31… , από τους περιττούς αριθμούς της τελευταίας σειράς εντοπίζουμε αυτούς που είναι τέλεια τετράγωνα όπως 9, 25, 49, 81, 121 κλπ. Χρησιμοποιώντας την μαθηματική σχέση $(\nu + 1)^2 - \nu^2 = 2\nu + 1$ όπου ο αριθμός $2\nu + 1$ είναι ο περιττός αριθμός που είναι τέλειο τετράγωνο άρα αν $2\nu + 1 = 9 \Rightarrow \nu = 4$ και $9 = 3^2$ άρα προκύπτει η τριάδα 3, 4, 5. Ακολούθως αν $2\nu + 1 = 25 \Rightarrow \nu = 12$ δηλαδή $25 = 5^2$συνεπώς η τριάδα που προκύπτει είναι η 5, 12, 13. Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε τις τριάδες (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61).

Όλες οι τριάδες που προκύπτουν από αυτήν την μέθοδο είναι αναγκαστικά βασικές τριάδες με την ιδιότητα ότι οι δύο από τους τρείς αριθμούς είναι διαδοχικοί. Η παραπάνω μέθοδος μας δίνει άπειρες βασικές τριάδες άλλα όχι όλες όσες είναι δυνατές πχ δεν δίνει την τριάδα (8, 15, 17). Τίθεται το ερώτημα για το πως είναι δυνατό να βρεθούν παραπάνω βασικές τριάδες χωρίς να παρουσιάζουν κατ' ανάγκην την ιδιότητα που αναφέρθηκε προηγουμένως. Επιστρέφουμε λοιπόν στην πρώτη σειρά που αναφέραμε στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο αυτής των τετραγώνων. Στη συνέχεια σχηματίζουμε διαφορές τετραγώνων αυτή την φορά κάθε αριθμού της πρώτης σειράς με τον μεθεπόμενο του, έτσι προκύπτει η σειρά: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32,... η οποία παρατηρούμε ότι είναι πολλαπλάσια του 4. Απομονώνοντας τα τέλεια τετράγωνα αυτής της σειράς όπως 16, 36, 64,.. μαζί με τους δύο διαγώνιους τους στην προηγούμενη σειρά σχηματίζεται μια τριάδα αριθμών της οποίας οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών αυτών αποτελούν μια πυθαγόρεια τριάδα.

0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68

Στο παραπάνω σχήμα με κόκκινο είναι οι τριάδες που προκύπτουν με την μέδοθο που αναλύθηκε. Άρα προκύπτει πχ η πρώτη τριάδα που είναι η (9, 16, 25) από την οποία παίρνουμε την πυθαγόρεια τριάδα (3, 4, 5). Από την επόμενη κοκκινισμένη τριάδα προκύπτει η πυθαγόρεια (6, 8, 10) η οποία παρατηρείται πως είναι παραγόμενη της πρώτης. Συνεπώς με την δεύτερη αυτή μέθοδο, δεν προκύπτουν αποκλειστικά βασικές τριάδες, αλλά και με αυτήν την μέθοδο ενώ παίρνουμε άπειρες πυθαγόρειες τριάδες δεν μπορούμε να συμπληρώσουμε το σύνολο όλων των πυθαγόρειων τριάδων πχ δεν προκύπτει η (9, 12, 15) καθώς με αυτήν την μέθοδο η ιδιότητα που παρουσιάζουν οι πυθαγόρειες τριάδες που προκύπτουν είναι πως οι 2 από τους τρείς αριθμούς διαφέρουν κατά 2 μονάδες.

Από τους αρχαίους χρόνους πολλοί άνθρωποι έχουν κάνει μεγάλες προσπάθειες για να ανακαλύψουν μαθηματικούς τύπους με τους οποίους δημιουργούνται πυθαγόρειες τριάδες. Ένα μέρος από τις προσπάθειες αυτές είναι:

Πυθαγόρας (6ος αιώνας π.χ) γνώριζε ότι οι αριθμοί $\left(\frac{\mu^2+1}{2}, \frac{\mu^2-1}{2}, \mu\right)$ όπου μ περιττός μ = 3, 5, 7...

Πλάτωνας (5ος αιώνας π.χ) μεταγενέστερος του Πυθαγόρα γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής $\left(\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + 1, \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - 1, \mu\right)$ όπου μ άρτιος μ= 4, 6, 8...

Διόφαντος (3ος αιώνας μ.χ) στηριζόμενος σε μια ταυτότητα που γνώριζε από τον Ευκλείδη έδωσε μια γενικότερη λύση. Ανακάλυψε ότι οι αριθμοί της μορφής $(\lambda^2 + \mu^2, \lambda^2 - \mu^2, 2\lambda\mu)$ όπου λ,μ θετικοί ακέραιοι άνισοι μεταξύ τους.

Οι πυθαγόρειες τριάδες συνδέονται με σημεία του μοναδιαίου κύκλου, καθώς εάν ισχύει $\alpha^2 + b^2 = c^2$ τότε $(\alpha/c)^2 + (b/c)^2 = 1$. Οπότε προκύπτει το σημέιο του μοναδιαίου κύκλου με συντεταγμένες το σημείο $(\alpha/b\,,\alpha/c)$.

2.1.1 Διόφαντος

Ο αρχαίος Έλληνας Μαθηματικός Διόφαντος, αποτέλεσε τον πατέρα της Θεωρίας Αριθμών και μία από τις πρώτες και μεγαλύτερες μαθηματικές ιδιοφυΐες στην Αρχαία Ιστορία. Ιστορικά στοιχεία αποδίδουν την ζωή του μεταξύ του 1ου και του 3ου αι. μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια, ωστόσο δεν υπάρχουν ακριβείς ενδείξεις για την προσωπική του ζωή. Αν και προγενέστεροι μαθηματικοί είχαν ασχοληθεί εκτενώς με την εισαγωγή και την μελέτη της Άλγεβρας, ο Διόφαντος κατάφερε να την αναπτύξει και να την εξελίξει τόσο πολύ, που επάξια του αποδίδεται ο τίτλος του «Πατέρα» της Άλγεβρας.

Κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμα της επιστημονικής προσέγγισης του Διόφαντου, αποτελεί η μεθοδολογία που ανέπτυξε κατά την μελέτη της Θεωρίας Αριθμών στην αντιμετώπιση και επίλυση προβλημάτων αυξημένης πολυπλοκότητας, που περιλαμβάνουν απροσδιόριστες εξισώσεις πολλαπλών λύσεων. Παράλληλα, θεωρείται ο πρόδρομος του μαθηματικού συμβολισμού, καθώς είναι ο πρώτος μαθηματικός που εισήγαγε στις μελέτες του σύμβολα και άγνωστες μεταβλητές.

ρ	**Έννοια**	**Συμβολισμός**	**Έννοια**
Δύναμη	Δεύτερη δύναμη	Κύβος	Τρίτη δύναμη
Δυναμοδύναμη	Τέταρτη δύναμη	Κυβοκύβος	Έκτη δύναμη
Αριθμιστόν	$1/\chi$	Διναμοστόν	$1/\chi^2$
Κυβοστόν	$1/\chi^3$	Κυβοκυβοστόν	$1/\chi^6$

Τρία μεγάλα μαθηματικά πονήματα αποδίδονται στον Διόφαντο: Τα αριθμητικά, οι Πολυγωνικοί Αριθμοί και τα Πορίσματα. Από αυτά, διασώζονται μόνο μεμονωμένα μέρη, όπως 6 από τα 13 βιβλία των Αριθμητικών, 1 μέρος από τους Πολυγωνικούς, ενώ το 2009 εκδόθηκε για πρώτη φορά από τον Έλληνα Μαθηματικό Ευάγγελο Σπανδάγο το σύγγραμμα «Περί Πολυγώνων Αριθμών» με απόδοση στη Νεοελληνική.

Τα Αριθμητικά είναι μία μεγάλη και πρωτοποριακή για την εποχή της εργασία. Αποτελεί μία ενδελεχή και εις βάθος ανάλυση της Θεωρίας Αριθμών αναδεικνύοντας την ευφυΐα και την ευχέρεια του Διόφαντου γύρω από το αντικείμενο. Το σύγγραμμα αυτό, είναι το αρχαιότερο σύγγραμμα στον τομέα της Άλγεβρας, που διασώζεται σήμερα.

Το μέρος της Αριθμητικής που έχει σωθεί ασχολείται με την επίλυση 130 περίπου προβλημάτων μεγάλης ποικιλίας, που οδηγούν σε εξισώσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού, και λύνεται επίσης μια πολύ ειδική κυβική εξίσωση. Το πρώτο βιβλίο περιέχει εξισώσεις με έναν άγνωστο, ενώ τα άλλα βιβλία ασχολούνται με απροσδιόριστες εξισώσεις δεύτερου βαθμού με δύο και τρεις αγνώστους. Είναι εντυπωσιακή η απουσία γενικών μεθόδων και η επινόηση έξυπνων μαθηματικών τεχνασμάτων που σχεδιάζονται για τις ανάγκες κάθε συγκεκριμένου προβλήματος. Ο Διόφαντος δεχόταν μόνο θετικές και ρητές λύσεις και στις περισσότερες περιπτώσεις ήταν ικανοποιημένος όταν έβρισκε μια λύση σε ένα πρόβλημα, έστω κι αν αυτό δεχόταν κι άλλες λύσεις.

Υπάρχουν μερικά αρκετά δύσκολα θεωρήματα που διατυπώνονται στα Αριθμητικά. Από την μελέτη των πολυωνύμων και την επίλυση εξισώσεων γνωρίζουμε ότι ήταν γνώστης των αρνητικών και των μιγαδικών αριθμών τους οποίους ονομάτιζε «αδυνάτους» και «ατόπους» αντίστοιχα. Γνώριζε την επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού της μορφής $αx^2 = βx+γ$, χρησιμοποιώντας τον τύπο $x = \frac{\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 + \alpha\gamma}}{\alpha}$

Ένα άλλο χαρακτηριστικό πρόβλημα που περιλαμβάνεται στο βιβλίο 1 των Αριθμητικών του Διόφαντου, είναι το ακόλουθο:

Πρόβλημα: «Δοθέντος αριθμού να διαιρεθεί σε δυο άλλους που έχουν δοθείσα διαφορά».

Λύση:: Έστω ότι ο δοθείς αριθμός είναι το 100, η δε διαφορά το 40. Ας τεθεί χ ο μικρότερος, τότε ο μεγαλύτερος είναι χ+40 άρα οι δύο μαζί είναι 2x+40.

Δόθηκε όμως ότι $100 = 2x + 40$

Από ομοίων όμοια, αφαιρώ από το 100 το 40 και από το 2x+40 το 40.

Μένουν 2χ ίσοι με 60

Άρα ο καθένας ίσος με 30

Έρχομαι στις υποστάσεις. Άρα ο μικρότερος είναι ίσος με 30 και ο μεγαλύτερος ίσος με 70.

Η απόδειξη είναι φανερή.

2.2 Το τελευταίο θεώρημα του Fermat

Στο περιθώριο των Αριθμητικών του Διόφαντου ο Fermat διατύπωσε ένα θεώρημα που άφησε αναπόδεικτο λόγω ΄΄έλλειψης χώρου΄΄το 1637 και αποδείχτηκε το 1994 από τον Andrew Wiles.

Εικασία: Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x , y ,z που ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^n + y^n = z^n \text{ με } n > 2$$

Παρά την απλή διατύπωση της εικασίας αυτής παρέμεινε αναπόδεικτη για περισσότερα από 350 χρόνια, για την απόδειξη της ο Andrew Wiles χρησιμοποίησε πληθώρα σύγχρονων και δύσκολων μαθηματικών εργαλείων και τεχνικών. Η απόδειξη της εικασίας δεν σημαίνει ότι θα μας οδηγήσει σε πολλά μαθηματικά συμπεράσματα μεγάλου ενδιαφέροντος, παρόλα αυτά η αναζήτηση της απόδειξης έχει συνεισφέρει στην ανάπτυξη μαθηματικών γνώσεων μεγάλου ενδιαφέροντος. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι ο Wiles προσέγγισε το πρόβλημα ξεκινώντας να αποδείξει μία άλλη πρόταση, την εικασία των Taniyama-Shimura από την οποία το Θεώρημα του Fermat προκύπτει ως πόρισμα.

Η εικασία των Taniyama-Shimura είναι βαθύτερη και ενδεχομένως πιο σημαντική από το ίδιο το τελευταίο θεώρημα του Fermat, καθώς ανήκει στον τομέα της Αλγεβρικής Γεωμετρίας. Τα βασικά αντικείμενα μελέτης είναι οι αλγεβρικές πολλαπλότητες οι οποίες είναι γεωμετρικές αποδείξεις των λύσεων συστημάτων πολυωνυμικών εξισώσεων, όπως αλγεβρικές επίπεδες καμπύλες, ελλειπτικές καμπύλες και καμπύλες τετάρτου βαθμού όπως λημνίσκοι.

Ο Fermat μελέτησε το αντίτυπο των Αριθμητικών του Διόφαντου και έγραψε πολλά σχόλια στο περιθώριο του αντιτύπου που διέθετε, το σχόλιο που μας ενδιαφέρει αναφέρεται στο Πρόβλημα 8 του Βιβλίου 2 όπου ο Διόφαντος θέτει το εξής ερώτημα : « Δοθέντος ενός τέλειου τετραγώνου, να το αναλύσετε ως άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων »

Η σημείωση του Fermat μεταφρασμένη από τα λατινικά αναφέρει: « Είναι αδύνατον να αναλύσουμε έναν κύβο σε δύο τέλειους κύβους ή γενικά κάθε δύναμη μεγαλύτερη της δευτέρας σε δύο δυνάμεις ίδιου βαθμού. Έχω ανακαλύψει μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη, αλλά το περιθώριο αυτό είναι πολύ στενό για να τη χωρέσει». Αξίζει να αναφερθεί ότι δεν ήταν το τελευταίο του θεώρημα καθώς έζησε μέχρι το 1865 συνεισφέροντας πολλά ακόμη στην επιστήμη των μαθηματικών. Η ονομασία «τελευταίο» εμφανίστηκε τον 18ο ή 19ο αιώνα, όπου μάλλον στόχευε στην αναγνώριση του θεωρήματος ως της τελευταίας πρότασης του Fermat που θα παρέμενε είτε αναπόδεικτη είτε χωρίς αντιπαράδειγμα. Πιθανότατα ο Fermat νόμισε πως είχε καταλήξει σε μια απόδειξη στην οποία ανακάλυψε αργότερα κάποια ατέλεια. Σε μεταγενέστερες επιστολές σε συναδέλφους του παρέπεμψε σε αποδείξεις των ειδικών περιπτώσεων για n=3 και n=4 , αλλά την απόδειξη δεν την μνημόνευσε ποτέ ξανά. Στην περίπτωση όπου n=4 ο Fermat έδειξε ότι η εξίσωση $a^4 + b^4 = c^2$ δεν επιδέχεται ακέραιες λύσεις χρησιμοποιώντας την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, καθώς δοθείσης μιας λύσης δημιουργείται μια μικρότερη της. Η εφαρμογή της ίδιας ακολουθίας πράξεων στη νέα λύση έχει ως αποτέλεσμα μία ακόμα μικρότερη λύση. Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί απεριόριστα δημιουργώντας μία απειροσειρά από ολοένα και μικρότερες λύσεις, κάτι που είναι αδύνατο στο σύνολο των θετικών ακεραίων το οποίο διαθέτει ένα καλώς ορισμένο κάτω φράγμα την μονάδα. Η περίπτωση n=3 μελετήθηκε από τον Leonard Euler τον 18ο αιώνα με παρόμοια μέθοδο. Με την πάροδο των χρόνων δόθηκαν και άλλες αποδείξεις για ειδικές περιπτώσεις , γύρω στο 1820 οι Legendre και Dirichlet έδωσαν αποδείξεις για n=5 , για n=7 ο Gabriel Lame ενώ για n=14 ο Dirichlet. Σημαντική πρόοδος διατυπώθηκε το 1847 από τον Γερμανό Ernst E. Kummer ο οποίος απέδειξε ότι το θεώρημα αληθεύει για άπειρο πλήθος εκθετών, για όλες τις τιμές του n που διαιρούνται από «κανονικούς» πρώτους αριθμούς.

Κανονικοί πρώτοι αριθμοί (regular prime numbers) αποτελούν μια ειδική κατηγορία πρώτων αριθμών τους οποίους όρισε ο ίδιος και αποτελούν ένα υποσύνολο των πρώτων αριθμών. Για τους πρώτους αριθμούς μικρότερους του 100, οι μόνοι μη-κανονικοί είναι το 37, 59 και 67. Ωστόσο ο Kummer βρήκε τρόπο να αποδείξει το θεώρημα και για αυτές τις ειδικές τιμές, οπότε τελικά, κατάφερε πρώτος να αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Fermat για όλες τις αριθμητικές τιμές n<100.

2.3 Αριθμοί Bernoulli

Οι αριθμοί Bernoulli ανακαλύφθηκαν από τον Jacob Bernoulli (1654 -1705), προσπαθώντας να γενικεύσει τον υπολογισμό του παρακάτω αθροίσματος:

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k = \int_0^n B_k(x)dx$$

Η παραπάνω σχέση βασίζεται στις γνωστές ταυτότητες:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2.3.1 Πολυώνυμο Bernoulli

Το πολυώνυμο Bernoulli $B_n(x)$ που συναντήσαμε στον ορισμό, είναι εκείνο το πολυώνυμο που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $B_0(x) = 1$
2. $B'_n(x) = B_{n-1}(x)$
3. $\int_0^1 B_n(x)dx = 0 \, , n \geq 1$

Το πολυώνυμο Bernoulli δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k}, \qquad b_k\!: Bernoulli$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα πολυώνυμα Bernoulli είναι μοναδικά, χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα υπολογισμού. Οι πρώτοι τρείς πολυωνυμικοί αριθμοί Bernoulli είναι:

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$$

Από τα παραπάνω, μπορούμε να καταλήξουμε σε μία σειρά από ιδιότητες των αριθμών Bernoulli

Ιδιότητα: $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$

Απόδειξη

για n=1 η παραπάνω πρόταση είναι αληθής. Έστω ότι ισχύει και για n:

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \Longrightarrow$$

$$\int B_n(1-x)\,dx = \int (-1)^n B_n(x)\,dx \Longrightarrow$$

$$-B_{n+1}(1-x) = (-1)^n B_{n+1}(x) + C \Rightarrow$$

$$-\int_0^1 B_{n+1}(1+x)dx = (-1)^n \int_0^1 (B_{n+1}(x) + C)dx$$

Ωστόσο παραπάνω, έχουμε ορίσει ως κομμάτι του ορισμού ότι $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$0 = 0 + C \Longrightarrow C = 0$$

Άρα:

$$-B_{n+1}(1-x) = (-1)^n B_{n+1}(x)$$

$$\Longrightarrow B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(x)$$

$$\Longrightarrow B_m(1-x) = (-1)^m B_m(x)$$

(θέτοντας n+1=m, οπότε η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε συντελεστή)

Ιδιότητα: $B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1)$, *για n≥1*

Απόδειξη

$$0 = \int_0^1 B_n(x)dx = \int_0^1 B'_{n+1}(x)dx = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$$

Εφόσον λοιπόν έχουμε ορίσει το αρχικό άθροισμα, τα πολύώνυμα Bernoulli και τις ιδιότητές τους, μπορούμε με καλύτερη ακρίβεια να ορίσουμε τους ίδιους τους αριθμούς Bernoulli.

Ορισμός: **Οι αριθμοί Bernoulli** είναι ένα σύνολο αριθμών το οποίο δημιουργείται φράσσοντας τα ανάλογα πολυώνυμα Bernoulli με x=0. Πρόκειται για ρητούς αριθμού που ικανοποιούν την σχέση:

$$B_n(0) = \frac{B_n}{n!}$$

Η ακολουθία $\{B_n\}_{n\geq 0}$ των αριθμών Bernoulli ορίζεται από τη δυναμοσειρά Taylor:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της παραπάνω σχέσης με $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ και εξισώσουμε τους συντελεστές του x στα δύο μέλη, παίρνουμε την αναδρομική σχέση:

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0,\ B_0 = 1$$

Η σχέση αυτή ορίζει την ακολουθία $\{B_n\}$, π.χ. βρίσκουμε

$$B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

$$B_3 = 0$$

Θεώρημα Για δεδομένους n αριθμούς Bernoulli να αποδείξετε ισχύει η παρακάτω εξίσωση:

$$B_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

Απόδειξη Έστω ότι η παραπάνω σχέση αληθεύει για n Αριθμούς Bernoulli. Από την παραπάνω ιδιότητα που αποδείξαμε:

$$B_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \Rightarrow \int B_n(x) dx = \frac{1}{n!} \int \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}\, dx$$

$$\Rightarrow B_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k x^{n-k+1}}{n-k+1} + C$$

Παρομοίως με παραπάνω, από την ιδιότητα 3 βρίσκουμε ότι C=0. Οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$B_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{n+1}\binom{n}{k}\frac{B_k x^{n-k+1}}{n-k+1}$$

$$= \frac{1}{n!\,(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k)!\,(n+1-k)}B_k x^{n-k+1} \Rightarrow$$

$$B_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)}B_k x^{n-k+1}$$

Πάλι με αναγωγή του n+1=m, αποδείξαμε ότι ισχύει για κάθε n.

2.3.2 Ιδιότητες Bernoulli

Ως σύνολο αριθμών, οι αριθμοί Bernoulli μοιράζονται μεταξύ τους ένα κοινό σύνολο ιδιοτήτων που ισχύουν για όλους. Παρακάτω αναφέρουμε ορισμένες μαζί με τις αποδείξεις τους:

Ιδιότητα 1: Για όλους τους αριθμούς Bernoulli, ισχύει ότι:

$$B_{2n+1}(1) = 0, n \geq 1$$

Απόδειξη:

Νωρίτερα αποδείξαμε ότι: $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!}$

Θέτοντας λοιπόν για x=0, έχουμε:

$$0 = 2\big(B_{2n+1}(0)\big) \Longrightarrow \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} = \big(B_{2n+1}(0)\big) = 0$$

$$\Longrightarrow B_{2n+1} = 0$$

Ιδιότητα 2: Οι αριθμοί Bernoulli B_{2n+2}και B_{2n} έχουν πάντα αντίθετα πρόσημα για n≥1

Απόδειξη:

Από ιδιότητα που αποδείξαμε νωρίτερα, έχουμε ότι:

$$B_{2n+2}(1-x) = (-1)^{2n+2}B_{2n+2}(x) = B_{2n+2}(x)$$

Με χρήση του κανόνα αλυσίδας, και γνωρίζοντας ότι $B_{2n+1} = 0$, η παράγωγος του παραπάνω μας δίνει:

$$-B_{2n}(1) = (-1)^{2n+2}B_{2n+2}(0) \Longrightarrow$$

$$B_{2n}(1) = -(-1)^{2n+2}B_{2n}(0) = -B_{2n}(0)$$

2.3.3 Υπολογισμός των τιμών της συνάρτησης ζήτα του Riemann με χρήση των αριθμών Bernoulli

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην συνάρτηση ζήτα του Riemann και στον τρόπο που έχει διατυπωθεί η υπόθεση Riemann, με όλες τις ρίζες της συνάρτησης Riemann να βρίσκονται πάνω στην ευθεία σ=1/2.

Μελέτες έχουν δείξει ότι οι δύο αυτές σημαντικές αριθμητικές ποσότητες συνδέονται, με τους αριθμούς Bernoulli να αποδεικνύονται εξαιρετικά χρήσιμοι στον υπολογισμό των λύσεων της συνάρτησης ζήτα. Για να αναπτύξουμε τον συσχετισμό μεταξύ των δύο, θα πρέπει πρώτα να γίνει μια αναφορά στην ανάλυση σειρών Fourier.

Σειρές Fourier

Μέσα από την μέθοδο αυτή, ο Joseph Fourier ανέπτυξε μια μέθοδο εκτίμησης μιας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας μια σειρά από άπειρους όρους sin και cos:

Θεώρημα Δεδομένης μιας συνάρτησης f(x) με περίοδο T, θα προσδιορίσουμε το ανάπτυγμα Fourier σε μία σειρά τέτοια ώστε:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi\chi}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right),$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx$$

στο διάστημα $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει μια σειρά από χρησιμες ιδιότητες

Θεώρημα 9.

Για έναν δεδομένο θετικό ακέραιο αριθμό k, να αποδείξετε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\zeta(2\kappa) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$$

Απόδειξη: Ξεκινάμε υπολογίζοντας το ανάπτυγμα Fourier για την $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Για $f(x) = x$, περιττή συνάρτηση με $f(-x) = -f(-x)$ ο συντελεστής Fourier είναι $a_0 = \frac{1}{2}$.

ακόμα:

$$b_n = 4\int_0^{1/2} x \cdot \sin\,(2n\pi x) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

οπότε στο εν λόγω διάστημα:

$$x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(2\pi n x) + \frac{1}{2}$$

Προβάλλοντας την παραπάνω σχέση στο διάστημα [0,1]

$$x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(2\pi n(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

Στο ίδιο διάστημα λοιπόν:

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(2\pi n(x - \frac{1}{2}\right)$$

Από την αναδρομική ιδιότητα των αριθμών Bernoulli που αποδείξαμε νωρίτερα $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ και χρησιμοποιώντας το κεντρικό θεώρημα Ολοκλήρωσης:

$$\int_0^x B_1(x)dx = B_2(x) - B_2(0)$$

$$= 2(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi n)^2} \cos\left(2\pi n\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi n)^2} \cos(-\pi n)$$

$$\Rightarrow B_2(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+!}}{(2n\pi)^2} \cos\,(2\pi n\,(x - \frac{1}{2})).$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση δύο φορές ακόμα

$$B_4(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+!}}{(2n\pi)^2} \cos\,(2\pi n\,(x - \frac{1}{2}))$$

Από την παραπάνω διαπίστωση συμπεραίνουμε ότι γενικά, ισχύει ότι:

$$B_{2k}(x) = -2(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+!}}{(2n\pi)^{2k}}\cos\,(2\pi n\,(x-\frac{1}{2}))$$

Για x=0, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$B_{2k}(0) = \frac{B_{2k}}{(2k)!} = 2(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi n)^{2k}}\cos(-n\pi) = 2(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi n)^{2\kappa}}$$

$$\Rightarrow (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = \zeta(2k).$$

Θεώρημα 10.

Οι άρτιοι αριθμοί Bernoulli δεν φράσσονται, ή ισοδύναμα: $\lim_{k\to\infty} B_{2k} = \infty$

Απόδειξη: Η ανισότητα ακολουθεί το $1 \leq \zeta(2k)$ για κάθε θετικό k επειδή η ζ(2k) ξεκινάει με 1 στη σειρά και ακολουθείται από θετικούς όρους. Έτσι από την σχέση που μόλις αποδείξαμε:

$$1 \leq \frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!} \Longrightarrow \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \leq B_{2k}$$

Γνωρίζοντας την παραπάνω ποσότητα, προχωράμε στον υπολογισμό των τιμών της συνάρτησης ζήτα:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = (-1)^{1+1}\frac{(2\pi)^2 B_2}{2(2)!} = \pi^2 B_2$$

Έχοντας αναφέρει όμως νωρίτερα ότι το $B_2 = \frac{1}{6}$, λαμβάνουμε:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Έτσι, μέσω της παραπάνω σχέσης και γνωρίζοντας τους αντίστοιχους αριθμούς Bernoulli, είναι αρκετά εύκολο να βρούμε τις ρίζες της συνάρτησης ζήτα του Riemann.

Κεφάλαιο 3. Σύνολα Αριθμών

3.1 Αριθμοί Fibonacci

Ένα από τα πιο γνωστά αριθμητικά σύνολα που έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης αλλά και φιλοσοφικής αναζήτησης γύρω από τον ρόλο που διαδραματίζουν στην ίδια την δομή της ύλης και τις αναλογίες στην κατασκευή του σύμπαντος, είναι οι αριθμοί Fibonacci.

Το όνομά τους προέρχεται από τον Ιταλό μαθηματικό Leonardo Fibonacci (1175-1250) ο οποίος από πολλούς έχει χαρακτηριστεί ως ο πιο ταλαντούχος μαθηματικός της εποχής του Μεσαίωνα. Το πιο χαρακτηριστικό του σύγγραμμα, το βιβλίο Liber Abbaci αποτέλεσε την πιο απλοποιημένη μορφή χρήσης του αραβικού αριθμητικού συστήματος, αποτελώντας εν τέλει τον κατευθυντήριο γνώμονα για τους νέους Ευρωπαίους μαθηματικούς ώστε να αρχίσουν να χρησιμοποιούν και τελικά να υιοθετήσουν πλήρως, το αριθμητικό αυτό σύστημα.

Για να περιγράψουμε τους αριθμούς Fibonacci, θα πρέπει πρώτα να αναφερθούμε στην ακολουθία Fibonacci, την μαθηματική σχέση που συνδέει όλους τους αριθμούς μεταξύ τους και περιγράφει την βασική τους ιδιότητα:

Ορισμός: Οι αριθμοί Fibonacci είναι το σύνολο των αριθμών που αποτελούν το άθροισμα των δύο προηγούμενων αριθμών στην ακολουθία:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Αφορμή για να καταλήξει ο Fibonacci σε αυτή τη διαπίστωση, στάθηκε η μελέτη του περίφημου προβλήματος με τα κουνέλια, τον τρόπο δηλαδή με τον οποίο αναπαράγονται τα κουνέλια ξεκινώντας από ένα ζευγάρι.

3.1.1 Το πρόβλημα αναπαραγωγής κουνελιών

Έστω ένα ενήλικο ζευγάρι κουνελιών, το οποίο κάθε μήνα γεννά ένα νέο ζευγάρι από ενήλικα κουνέλια. Τα νεογέννητα χρειάζονται 1 μήνα για να ενηλικιωθούν, οπότε και εκείνα με την σειρά τους τον επόμενο μήνα γεννούν ένα νέο ζευγάρι. Πόσα ζευγάρια κουνέλια θα έχουν γεννηθεί στον n-οστό μήνα;

Λύση: Ορίζουμε ως F_n το πλήθος των ζευγαριών στον n-οστό μήνα. Έστω ότι $n \geq 2$. Τα ζευγάρια που θα υπάρχουν στον n-οστό μήνα, είναι όσα υπήρχαν στον n-1 μήνα, προσαυξημένα με αυτά που γεννήθηκαν στον n-οστό μήνα. Επειδή όμως τα νεογέννητα χρειάζονται 1 μήνα για να ενηλικιωθούν, τα ενήλικα ζευγάρια του n-1 μήνα είναι ίδια με τα ενήλικα ζευγάρια του n-2 μήνα.

Οπότε:

$$F_{n-2} = F_{n-1} - F_n \Longrightarrow F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \gamma\iota\alpha\ n \geq 2$$

Επαλήθευση:

n=2

Στην αρχή του πρώτου μήνα υπήρχε 1 ζευγάρι, άρα F_1=1, δηλαδή n=2. Αυτό σημαίνει ότι F_0=0. Οπότε:

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1$$

Άρα στο τέλος του πρώτου $2^{ου}$ μήνα, το πλήθος των ενήλικών ζευγαριών παραμένει 1.

n=3

Στο τέλος του $3^{ου}$ μήνα έχει ενηλικιωθεί και το $2^{ο}$ ζευγάρι, άρα F_{n-1}=1 και από την προηγούμενη σχέση γνωρίζουμε ότι F_{n-2}=1. Οπότε με εφαρμογή του τύπου:

$$F_3 = F_1 + F_2 = 2$$

n=4

Το αρχικό ζευγάρι έχει γεννήσει ένα ακόμα νεογέννητο ζευγάρι, ενώ το πρόσφατα ενηλικιωμένο ζευγάρι γέννησε το πρώτο του νεογέννητο ζευγάρι. Αρά:

$$F_4 = F_3 + F_2 = 3$$

n=5

$$F_5 = F_4 + F_3 = 5$$

Από τα παραπάνω εύκολα παρατηρούμε λοιπόν, ότι η λύση του προβλήματος αποτελείται από αναδρομικό τύπο ο οποίος μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε με ακρίβεια τα ενήλικα ζευγάρια που θα προκύψουν σε οποιονδήποτε n-οστό μήνα, αθροίζοντας τους δύο προηγούμενους όρους της ακολουθίας:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \ n \geq 0, \ \ F_0 = 0, \ F_1 = 1$$

Με βάση την παραπάνω αναδρομική ακολουθία, προκύπτει ότι οι πρώτοι 10 αριθμοί Fibonacci είναι οι ακόλουθοι:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Στην μέχρι στιγμής μελέτη μας, η όποια προσέγγιση του προβλήματος εμπλέκει την χρήση των n-1 και n-2 παραγόντων, λόγω της αναδρομικής φύσης του ορισμού. Είναι εύλογο λοιπόν να αναρωτηθεί κανείς, αν υπάρχει τρόπος να εκφραστεί ο εκάστοτε αριθμός F_n μόνο ως συνάρτηση του αριθμού n. για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε μια γεννήτρια αριθμών Fibonacci η οποία ορίζεται ως:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n$$

σχέση 1

Η παραπάνω γεννήτρια αριθμών F_n προκύπτει εφόσον πολλαπλασιάσουμε την αναδρομική σχέση του ορισμού της ακολουθίας με τον παράγοντα t^n, και αθροίζοντας για όλα τα $n \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n\, t^n = t \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}\, t^{n-1} + \; t^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}\, t^{n-2}$$

Παρατηρούμε ότι:

- το πρώτο μέρος της εξίσωσης είναι η ίδια η γεννήτρια αριθμών για n=2 (χωρίς δηλαδή τους όρους F_0 και F_1)
- το δεύτερο μέρος της εξίσωσης αποτελείται πάλι από δύο γεννήτριες, αν πραγματοποιήσουμε αλλαγή μεταβλητής k=n-1 για την πρώτη και m=n-2 για την δεύτερη.

Με τις παραπάνω ενέργειες, η σχέση μεταβάλλεται ως ακολούθως:

$$F(t) - \; 0 - t = t \cdot [F(t) - 0] + t^2 \cdot F(t)$$

Λύνοντας ως προς t:

$$F(t) = \frac{t}{1 - t - t^2}$$

Όπου ο παρονομαστής είναι ένα πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού, του οποίου οι ρίζες είναι:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \;\; και\, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Αντικαθιστώντας τις ρίζες του παρονομαστή στην εξίσωση της γεννήτριας που έχουμε καταλήξει παραπάνω, έχοντας μάλιστα μετατρέψει τον παρονομαστή σε ανάπτυγμα τετραγώνων, έχουμε:

$$F(t) = \frac{t}{(1-\lambda_1 t)(1-\lambda_2 t)} = \frac{t}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1\, t} - \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2\, t}\right) =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1 \cdot \sum_{\iota=0}^{\infty} (\,\lambda_1 t)^{\iota} - \lambda_2 \cdot \sum_{\iota=0}^{\infty} (\,\lambda_2 t)^{\iota}\right) = \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{\iota+1} - \lambda_2^{\iota+1}}{\sqrt{5}} \cdot t^{i+1}$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις έχουν ίσο το πρώτο μέρος, οπότε εξισώνοντάς το παίρνουμε:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot [\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n]$$

όπου n=0,1,2,….

αν ορίσουμε την ποσότητα $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot [(\varphi)^n - (-\varphi^{-1})^n]$$

η οποία αποτελεί τον γενικό τύπο της ακολουθίας Fibonacci χωρίς αναδρομική διάσταση, συναρτήσει μόνο του n.

Η ποσότητα φ οονομάζεται λόγος της χρυσής τομής.

3.1.2 Λόγος της χρυσής τομής Φ

Ένα ενδιαφέρον στοιχείο για την χρυσή τομή φ, είναι ο ίδιος ο συμβολισμός της. Ονομάσθηκε φ από το αρχικό γράμμα του ονόματος του Αρχαίου Αρχιτέκτονα Φειδία, του μηχανικού που εμπνεύστηκε, σχεδίασε και κατασκεύασε τον Παρθενώνα, προς τιμή της Θεάς Αθηνάς στην Ακρόπολη των Αθηνών κατά τον Χρυσό Αιώνα (5ος αι. π.Χ.)

Ο λόγος που χρησιμοποιήθηκε το όνομα του Φειδία είναι επειδή έπειτα από προσεκτική μελέτη, ανακαλύφθηκε ότι τα στοιχεία που συνθέτουν την πρόσοψη του κτιρίου (αποστάσεις μεταξύ των κιόνων, πλάτος του αετώματος, κ.α.) ακολουθούν την αναλογία της χρυσής τομής.

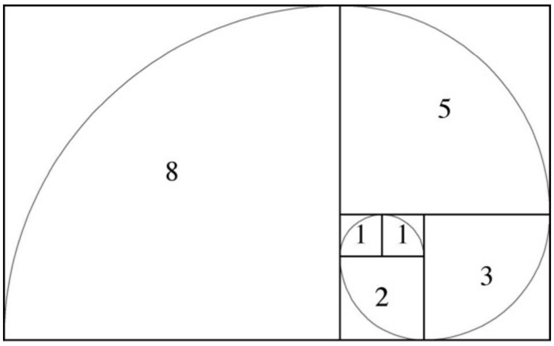
Ωστόσο το κτίριο του Παρθενώνα δεν είναι το μοναδικό σημείο που συναντούμε αναλογίες που τηρούνται σύμφωνα με τον αριθμό φ. Υπάρχουν αναρίθμητα παραδείγματα κυρίως στην φύση, όπου φυτά, έντομα και μικροοργανισμοί αναπτύσσονται και εξελίσσονται διατηρώντας τις αναλογίες τους σταθερές γύρω από τον αριθμό φ. Μια απλή εξήγηση για αυτό είναι το γεγονός ότι η φύση προσπαθεί πάντα να βρει τον βέλτιστο τρόπο να δημιουργήσει νέες δομές της ύλης, δηλαδή καταναλώνοντας την λιγότερη δυνατή ενέργεια και καταβάλλοντας την μικρότερη δυνατή προσπάθεια να καταλήξει στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Η στρατηγική αυτή, οδηγεί σε συνεχόμενες προσεγγίσεις του αριθμού φ σε κάθε μετάβαση από την μία κατάσταση, στην επόμενή της.

Μαθηματικά, το παραπάνω αποτυπώνεται πολύ πιο ξεκάθαρα μέσα από την μελέτη του ορίου της ακολουθίας Fibonacci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(\lambda_1^n-\lambda_2^n)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_1 \ - \lambda_2 \ \cdot 0}{1-0} = \lambda_1$$

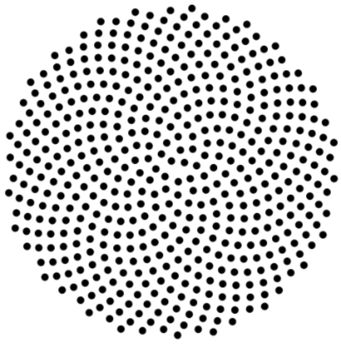
$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi = 1{,}61805\ldots$$

Αυτό ουσιαστικά σημαίνει, ότι αν τοποθετήσουμε σε σειρά τεταρτοκύκλια με ακτίνα τους αριθμούς Fibonacci, θα προκύψει μια σπειροειδής μορφή η οποία κατ’ αναλογία, το πηλίκο του κάθε αριθμό προς τον προηγούμενό του θα συγκλίνει όλο και περισσότερο προς τον παραπάνω αριθμό.



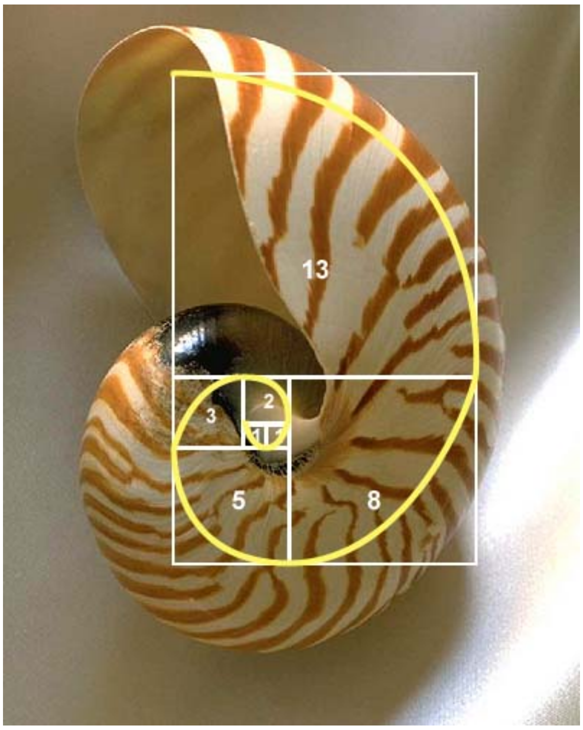
Εικόνα 3.1

Η δομή αυτή είναι και η ιδανική για την φύση ώστε να αναπτύξει με τον βέλτιστο τρόπο νέους οργανισμούς τόσο χλωρίδας, όσο και πανίδας. Χαρακτηριστική εφαρμογή της παραπάνω αποτελούν τα ηλιοτρόπια. Ο τρόπος με τον οποίο είναι δομημένοι οι σπόροι στον πυρήνα του λουλουδιού ακολουθεί την λογική της δομής Fibonacci, έτσι ώστε να επιτρέπεται στα κάθε φύλλο του λουλουδιού η μέγιστη έκθεση στις ακτίνες του ηλίου.



Εικόνα 3.2

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό των θαλασσινών, τα οποία κατασκευάζουν μόνα τους το κέλυφός τους. Επειδή χωρίς κέλυφος οι οργανισμοί αυτοί βρίσκονται εκτεθειμένοι σε κινδύνους, στόχος τους είναι να κατασκευάσουν με τον πιο αποτελεσματικό και ταυτόχρονα γρήγορο τρόπο που έχουν στην διάθεσή τους, ένα κέλυφος που θα τους παρέχει ασφάλεια. Το αποτέλεσμα είναι πέραν πάσης αμφισβήτησης μια απόλυτη αποτύπωση στον τρισδιάστατο χώρο της ακολουθίας των αριθμών Fibonacci



Εικόνα 3.3

3.1.3 Ακολουθία Fibonacci και Πυθαγόρειες Τριάδες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετήσαμε σε βάθος τις Πυθαγόρειες Τριάδες. Αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι πως υπάρχει μία πολύ ενδιαφέρουσα σύνδεση μεταξύ των Πυθαγόρειων Τριάδων και των αριθμών Fibonacci. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι η τριάδα (αδ), (2βγ), ($\beta^2 + \gamma^2$) που δημιουργείται από τέσσερις διαδοχικούς όρους α,β,γ,δ της ακολουθίας Fibonacci, είναι μια Πυθαγόρεια τριάδα.

Απόδειξη: Έστω x, y δύο διαδοχικοί αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci. Οι επόμενοι 2 διαδοχικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν με την μορφή x+y και y+x+y = x+2y αντίστοιχα. Δηλαδή:

A=x

B=y

Γ=x+y

Δ=x+2y

Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι: $(Α\Delta)^2 + (2Β\Gamma)^2 = (Β^2+\Gamma^2)$. Δηλαδή:

$$[x(x+2y)]^2 + [2y(x+y)]^2 = [y^2 + (x+y)^2] \Longrightarrow$$
$$(x^2+2xy)^2 + (2xy+2y^2)^2 = [y^2+(x+y)^2]^2 \Longrightarrow$$
$$x^4 + 4x^3 + 8x^2y^2 + 8xy^3 + 4y^4 = (2y^2 + x^2 + 2xy^2)^2 \Rightarrow$$
$$x^4 + 4yx^3 + 8y^2x^2 + 8xy^3 + 4y^4 = x^4 + 4yx^3 + 8y^2x^2 + 8xy^3 + 4y^4$$

Οπότε και απεδείχθη, καθώς καταλήξαμε σε μία σχέση που τα δύο μέρη τις εξίσωσης είναι ίσα μεταξύ τους.

3.2 Υπερβατικοί Αριθμοί

Στην παρούσα ενότητα θα αναφερθούμε στους υπερβατικούς αριθμούς, οι οποίοι ονομάστηκαν έτσι από τον Euler διότι ΄΄Υπερβαίνουν την δύναμη των αλγεβρικών μεθόδων΄΄. Υπενθυμίζουμε ότι αλγεβρικοί ονομάζονται οι πραγματικοί αριθμοί που μπορούν να εκφραστούν ως ρίζες μίας αλγεβρικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Υπερβατικοί λέγονται οι μη αλγεβρικοί αριθμοί. Το σύνολο των υπερβατικών αριθμών είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των Άρρητων αριθμών, Ο G.Cantor το 1874 απέδειξε ότι οι υπερβατικοί είναι άπειροι αριθμοί καθώς το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο ενώ το σύνολο των πραγματικών είναι υπεραριθμήσιμο οπότε αφού οι αλγεβρικοί μαζί με τους υπερβατικούς συνιστούν τους πραγματικούς αριθμούς έπεται ότι οι υπερβατικοί αριθμοί αποτελούν υπεραριθμήσιμο σύνολο. Ο πρώτος αριθμός που αποδείχτηκε υπερβατικός ήταν ο e από τον Hermite το 1873 παρότι δεν είχε κατασκευαστεί γι αυτόν το σκοπό.

Βαθμός d ενός αλγεβρικού αριθμού a ορίζεται το $\min\{d_1, d_2, d_3, \ldots\}$ όπου d_1, d_2, d_3, οι βαθμοί των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές στα οποία ο a μπορεί να είναι ρίζα.

Ακολουθεί το θεώρημα μέσω του οποίου ο Liouville κατασκέυασε τον πρώτο υπερβατικό αριθμό.

Θεώρημα 11.

Αν α αλγεβρικός αριθμός βαθμού d > 1 τότε υπάρχει θετικός ακέραιος M= M(α) με την ιδιότητα $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{M_q^d}$ για οποιοσδήποτε ακεραίους p , q (q > 0)

Απόδειξη*:*

Αρχικά παρατηρούμε ότι α άρρητος, καθώς αν ήταν ρητός θα ήταν αλγεβρικός πρώτου βαθμού. Αφού α αλγεβρικός είναι ρίζα ενός πολυώνυμου

$$f(x) = b_0x^d + b_1x^{d-1} + \cdots + b_d$$

με ακέραιους συντελεστές.

Έστω f΄(x) η παράγωγος της f(x) τότε υπάρχει θετικός ακέραιος M τέτοιος ώστε $f'(x) < M$ για κάθε x∈(α-1, α+1). Αν $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1$ τότε προφανώς ισχύει. Έστω ότι $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq 1$ από Θεώρημα Μέσης τιμής έχουμε ότι για κάποιο c∈(α-1,α+1) ισχύει το εξής:

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|f(a) - f(\frac{p}{q})\right| = |f'(c)| \left|a - \frac{p}{q}\right|$$

Άρα:

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| < M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

Οπότε:

$$\left|q^d f\left(\frac{p}{q}\right)\right| < Mq^d \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

Το $\frac{p}{q}$ δεν μπορεί να είναι ρίζα του πολυωνύμου συνεπώς $\left|q^d f\left(\frac{p}{q}\right)\right|$θετικός ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Άρα αποδείξαμε ότι: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{M_q^d}$.

Το παραπάνω θεώρημα επέτρεψε στον Liouville να κατασκευάσει τον πρώτο υπερβατικό αριθμό ξ, ο οποίος ορίζεται ώς:

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

όπου ο ξ είναι ένας αριθμός μικρότερος της μονάδας ο οποίος έχει παντού μηδενικά έκτος από τις θέσεις n! (1 ,2 , 6 , 24 , 120 ,…).

Πρόταση: Ο ξ είναι υπερβατικός αριθμός

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της ατόπου απαγωγής, έστω N ένας αυθαίρετος φυσικός αριθμός, για n>N, θα ορίσουμε

$$\xi_n = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \cdots + \frac{1}{10^{n!}} = \frac{p(n)}{10^{n!}} = \frac{p(n)}{q(n)}$$

όπου

$$p(n) = 10^{n!-1!} + 10^{n!-2!} + \cdots + 10^{n!-k!} + \cdots + 10^{n!-(n-1)!} + 1$$

$$q(n) = 10^{n!}$$

Αρα:

$$|\,\xi - \xi_n| = 10^{-(n+1)!} + 10^{-(n+2)!} + \cdots \Longrightarrow$$

$$\left|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}\right| = 10^{-(n+1)} \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-(n+j+1)!+(n+1)!}$$

Όμως για τους συντελεστές ισχύει:

$$(n+1)! \cdot [(n+2)(n+3)] \cdot \ldots \cdot (n+j+1) - 1] > (n+1)!\,(n+j) \Rightarrow$$

$$(n+1)! \cdot [(n+2)(n+3)] \cdot \ldots \cdot (n+j+1) - 1] > j$$

Άρα

$$10^{(n+j+1)!-(n-1)!} > 10^{j} > 2^{j} \text{ για κάθε } j \in \mathbb{N}$$

Οπότε αντίστοιχα συμπεραίνουμε:

$$\sum_{j=0}^{\infty} 10^{(n+j+1)!-(n-1)!} > \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}$$

Συνεπώς $\left|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}\right| < 2 \cdot 10^{-(n+1)!}(n+1)$, άρα $\left|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}\right| < q(n)^{-N}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Έστω ότι ξ αλγεβρικός αριθμός βαθμού k<N τότε από το παραπάνω θεώρημα γνωρίζουμε ότι υπάρχει M=M(ξ) $\in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $\left|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}\right| < \frac{1}{Mq(n)^k}$, για κάθε n$\in\mathbb{N}$ άρα

$$\frac{2}{q(n)^k} > \frac{1}{Mq(n)^k}$$

για κάθε n$\in\mathbb{N}$

Δηλαδή υπάρχει M$\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $\frac{(10^{N-\kappa})^{n!}}{2}$, για κάθε n$\in\mathbb{N}$ με N-k≥1 αφού N,k $\in\mathbb{N}$ και N>k, πράγμα που είναι άτοπο.

Αυτό σημαίνει ότι ο ξ δεν μπορεί να είναι αλγεβρικός αριθμός βαθμού μικροτερου του N, όμως το N είναι αυθαίρετο, οπότε τα παραπάνω ισχύουν για κάθε N$\in\mathbb{N}$ κάτι που σημαίνει ότι ο ξ δεν μπορεί να είναι αλγεβρικός αριθμό οποιουδήποτε βαθμού άρα είναι υπερβατικός.

3.2.1 Αριθμοί Liouville

Ορισμός: Ένας άρρητος αριθμός ξ λέγεται αριθμός Liouville αν για κάθε n$\in\mathbb{N}$ υπάρχουν ακέραιοι p ,q q>1 τέτοιοι ώστε $\left|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}\right| < \frac{1}{q^n}$

Πρόταση: Κάθε αριθμός Liouville είναι υπερβατικός

***Απόδειξη**:*

Αν ξ αριθμός Liouville και αλγεβρικός βαθμού n. Από το παραπάνω θεώρημα υπάρχει ακέραιος M τέτοιος ώστε $\left|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}\right| < \frac{1}{Mq(n)^k}$

Για κάθε ακέραιο p, q , q>1. Διαλέγω k$\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $2^k \geq 2^n$M. Αφού ξ είναι και αριθμός Liouville υπάρχουν ακέραιοι p ,q q>1

$\left|\xi - \frac{p(n)}{q(n)}\right| < \frac{1}{q^n}$ Άρα ισχύει ότι $\frac{1}{q^n} > \frac{1}{Mq^n}$

συνεπώς $M > q^{k-n} \geq 2^{k-n} \geq M$ πράγμα που είναι άτοπο.

Θεώρημα 12. (LINDEMANN 1882)

Ο πραγματικός αριθμός π είναι υπερβατικός.

***Απόδειξη**:* Αρχικά υποθέτουμε ότι π αλγεβρικός και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού π αλγεβρικός και i αλγεβρικός έπεται και iπ αλγεβρικός όποτε είναι ρίζα ενός μη μηδενικού πολυωνύμου $d_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$ του οποίου τις ρίζες συμβολίζουμε $w_1, w_2 \ldots w_n$. Είναι $e^{w_1}+1 = e^{i\pi}+1$ οπότε

$$(e^{w_1}+1)(e^{w_2}+1)\cdots(e^{w_n}+1)=0 \quad (1)$$

Αναπτύσσοντας την (1) έχουμε:

$$1 + \sum_{i=1}^{2^n-1} e^{a_i} = 0 \ (2)$$

όπου α_i είναι οι παρακάτω αριθμοί

$$w_1, w_2, \ldots w_n,\ w_1+w_2,\ w_1+w_3, \ldots, w_1+w_2+w_3+\ldots\ldots+w_n$$

με κάποια σειρά.

Θεωρούμε το πολυώνυμο $d^*(x)$ που έχει ως ρίζες τα α_i όπου $i=1,\ldots,2^n-1$. Οι συντελεστές του $d^*(x)$ είναι συμμετρικά πολυώνυμα των $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$, άρα συμμετρικά πολυώνυμα των $w_1, w_2, \ldots, w_n$ και επομένως πολυώνυμα των συντελεστών του $d_1(x)$ που είναι ρητοί αριθμοί.

Αν κάποιος όρος από τους α_i είναι μηδέν διαιρούμε το $d^*(x)$ με κατάλληλη δύναμη του x γιατί το $d^*(x)$ Δεν θα έχει σταθερό όρο και πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο ακέραιο για να διώξουμε τους παρονομαστές των συντελεστών, παίρνουμε ένα πολυώνυμο $d(x)$ με ακέραιους συντελεστές και ρίζες όλους τους μη μηδενικούς εκθέτες $b_1, b_2, \ldots, b_n$ της (2), η οποία γίνεται:

$$e^{b_1} + e^{b_2} + \cdots + e^{b_n} + e^0 + e^0 + \cdots + e^0 = 0 \Rightarrow$$
$$e^{b_1} + e^{b_2} + \cdots + e^{b_n} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Έστω $d(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \cdots + c_1 x + c_0$με $c_0 \neq 0$ αφού το d(x) δεν έχει ρίζα το μηδέν. Έστω p ένας πρώτος αριθμός τον όποιο θα επιλέξουμε παρακάτω. Ορίζουμε:

$$f(x) = \frac{c_r^s x^{p-1} d(x)^n}{(p-1)!}, s = r(p-1) \quad (4)$$

Επίσης ορίζουμε την

$$g(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(s+p+r+1)}(x) \; (5)$$

Παρατηρούμε ότι $f^{(s+p+r)}(x) = 0$ διότι το πολυώνυμο είναι βαθμού $rp + p - 1$, ενώ $s + p + r = rp + r$. Εύκολα υπολογίζουμε ότι $\frac{d}{dy}e^{-y}f(y)$ οπότε για οποιοδήποτε σταθερό x έχουμε:

$$e^{-x}g(x) - g(0) = -\int_0^x e^{-y}f(y)dy$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση όπου y=tx, έχουμε

$$e^{-x}g(x) - g(0) = -\int_0^1 e^{-(1-t)x}f(tx)dt$$

Υποθέτοντας ότι το x στη παραπάνω σχέση παίρνει διαδοχικά τις τιμες $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Αθροίζοντας κατά μέρη και χρησιμοποιώντας την σχέση 3, λαμβάνουμε:

$$\sum_{j=1}^{r} g(b_j) + kg(0) = -\sum_{j=1}^{r} b_j \int_0^1 e^{(1-t)b} f(tb_j)dt \quad (6)$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι για έναν πολύ μεγάλο πρώτο αριθμό p, το πρώτο μέλος της σχέσης (6) είναι μη μηδενικός ακέραιος. Για να το κάνουμε αυτό, θα δείξουμε πρώτα ότι $\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(b_j) = 0$ για οποιοδήποτε t≥0.

Αυτό ισχύει όταν t<p, διότι κάθε προσθετέος αριθμός του αθροίσματος είναι ίσος με μηδέν.

Για t≥p, κάθε παράγωγος $f^{(t)}(b_j)$ έχει παράγοντα p, διότι πρέπει να παραγωγίσουμε το d(x) τουλάχιστον p φορές για να λάβουμε έναν μηδενικό όρο. Για οποιοδήποτε δηλαδή t≥p, ο όρος $\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(b_j)$ είναι συμμετρικό πολυώνυμο b_j βαθμού μικρότερου ή ίσου του s^2. Από την παρατήρηση αυτή τελικά προκύπτει ότι τελικά θα είναι βαθμού μικρότερου ή ίσου του s των συντελεστών $\frac{c_i}{c_r}$ ο συντελεστής C_r^sστον ορισμό της f απαλείφει τις δυνάμεις του C_r που εμφανίζονται στους παρονομαστές. Οπότε τελικά το άθροισμα προκύπτει ακέραιος αριθμός. Άρα, για $t \geq p$ έχουμε με χρήση της γενικής ταυτότητας του Leibniz:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(b_j) = p \cdot n_i$$

Όπου n_t ακέραιος. Έτσι:

$$\sum_{j=1}^{r} g(b_j) = \sum_{j=1}^{r} f(b_j) + f'^{(b_j)} + \cdots + f^{(s+p+r-1)}(b_j) =$$
$$= p \cdot n_0 + p \cdot n_1 + \cdots + p \cdot n_{s+p+r-1} = n \cdot p$$

Για το g(0) με χρήση πάλι της γενική ταυτότητας του Leibniz έχουμε:

$$f^{(t)}(0) = \begin{cases} 0, \alpha\nu\ t \leq p-2 \\ c_r^8 \cdot c_0^p, \alpha\nu\ t = p-1 \\ \mu_t \cdot p, \alpha\nu\ t \geq p, \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda o\ \mu_t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Άρα $g(0) = c_s^r \cdot c_0^p + \mu \cdot p$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$.

Οπότε το πρώτο μέλος της (6) γίνεται $\lambda \cdot p + k \cdot c_s^r \cdot c_0^p$με $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Έχουμε $k \neq 0, c_r \neq 0, c_0 \neq 0$ και διαλέγουμε $p > \max(k, |c_r|, |c_0|)$, οπότε το πρώτο μέλος της (6) είναι ακέραιος που δεν διαιρείται με p και επομένως διάφορος του 0 και μεγαλύτερος ή ίσος του 1.

Εξετάζουμε το δεύτερο μέλος της (6) . Έχουμε λοιπόν

$$\left|f(\lambda \cdot b_j)\right| \leq \frac{\left|c_r^s \cdot m(j)^p\right|}{\left|b_j\right| \cdot (p-1)!}$$

Όπου $m(j)^p = \left|b_j\right| \cdot sup_{0 \leq \lambda \leq 1}\left|d(\lambda b_j)\right|$, επομένως

$$\left|-\sum_{j=1}^{r} b_j \int_0^1 e^{(1-t)b_j} f(tb_j) dt\right| \leq \sum_{j=1}^{r} \frac{\left|c_r^s m(j)^p \cdot B\right|}{(p-1)!} \xrightarrow{p \to \infty} 0$$

Όπου B θετικό άνω φράγμα του $\left|max \int_0^1 e^{(1-\lambda)b_j} d\lambda\right|$

Άτοπο.

3.2.2 Ο αριθμός e

Είναι μία σημαντική μαθηματική σταθερά την οποία εισήγαγε ο Euler στο έργο του «Introductio in analysin infinitorum» το 1748 και τον ορίζει ως βάση των φυσικών ή υπερβολικών λογαρίθμων και τον αναπτύσσει σαν σειρά

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots.$$

Το 1840 ο Liouville δημοσίευσε την εργασία με τίτλο «Το άρρητο του αριθμού e», στην οποία όμως δεν αποδεικνύει ότι είναι άρρητος, αλλά ότι δεν είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha e + \frac{b}{e} = c$ με a,b,c ακεραίους. Στη συνέχεια, έθεσε το ερώτημα αν ο e είναι ρίζα μιας συγκεκριμένης εξίσωσης με συντελεστές ακεραίους. Αυτή ήταν η πρώτης φορά που τέθηκε το ζήτημα της υπερβατικότητας του e. Το 1843 ο ίδιος ο Liouville έδωσε αρνητική απάντηση στο ζήτημα που έθεσε χρησιμοποιώντας Σειρές κλασμάτων. Το 1873 ο Γάλλος μαθηματικός Charles Hermite απέδειξε την υπερβατικότητας του e.

3.2.3 Μέθοδος Hermite

Για πολυωνυμική συνάρτηση f και μιγαδικό αριθμό t παρατηρούμε ότι:

$$\int_0^t e^{-u} f(u)du = \left[-e^{-u} f(u)\right]_0^t + \int_0^t e^{-u} f'(u)du$$

Αν θέσουμε $I(t,f) := \int_0^t e^{t-u} f(u)du$ βλέπουμε ότι

$$I(t,f) = e^t f(0) - f(t) + I(t,f')$$

Αν f πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού m προκύπτει:

$$\mathrm{I}(t,f) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) \qquad (1)$$

Έστω τώρα το πολυώνυμο F το οποίο προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τους συντελεστές του f με τις απόλυτες τιμές αυτών τότε από τον ορισμό του $I(t,f)$ βλέπουμε ότι:

$$I(t,f) = e^t \sum_{j=o}^{m} f^{(t)}(0) - \sum_{j=o}^{m} f^{(j)}(t) \quad (2)$$

Υποθέτοντας ότι e αλγεβρικός αριθμός βαθμού n τότε ισχύει:

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \cdots + a_1 e + a_0 = 0$$

για κάποιους ακέραιους a_i και $a_0, a_n \neq 0$

Θεωρούμε τον συνδυασμό $J = \sum_{k=0}^{n} a_k I(k,f)$ με $f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \ldots (x-n)^p$, Όπου με $p > |a_0|$ ένας μεγάλος πρώτος αριθμός. Χρησιμοποιώντας την (3) βλέπουμε ότι

$$J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k) \quad όπου\ m = (n+1)p - 1$$

Αφού η f έχει ρίζες τάξης p στα 1,2,....,n και μία ρίζα τάξης p-1 στο 0 έχουμε ότι το άθροισμα ξεκινά από $j = p-1$ έχουμε:

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np} n!^p$$

Άρα αν $n < p$ τότε το $f^{(p-1)}(0)$ διαιρείται από το $(p-1)!$ αλλά όχι από το p. Αν $j \geq p$ βλέπουμε ότι $f^{(j)}(0)$ καιι $f^{(j)}(k)$ διαιρούνται από p! Για $1 \leq k \leq n$. Ως εκ τούτου καταλήγουμε ότι ο J είναι μη μηδενικός ακέραιος που διαιρείται από το $(p-1)!$συνεπώς

$$(p-1)! \le J$$

Από την (2) έχουμε

$$|J| \le \sum_{k=0}^{n} |a_n| \cdot e^k \cdot F(k)k \le A \cdot n \cdot e^n (2n)!^p$$

Όπου A μέγιστη τιμή των απολύτων τιμών των a_k. Η παρατήρηση $e^p \ge \frac{p^{p-1}}{(p-1)!}$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι:

$$p^{p-1}e^{-p} \le (p-1)! \le |J| \le Ane^n(2n)!^p$$

όπου για σημαντικά μεγάλο p καταλήγουμε σε αντίθεση.

Θεώρημα 13. Θεώρημα Lindemann

Αν ο αριθμός e ικανοποιεί μία εξίσωση της μορφής $C_0 + C_1 e^k + C_2 e^\lambda + \cdots = 0$ *τότε δεν μπορούν όλοι οι συντελεστές και οι εκθέτες της εξίσωσης να είναι ταυτόχρονα αλγεβρικοί*

Συμπεράσματα πάνω στους αλγεβρικούς αριθμούς

1. Αν $y + (-1)e^x = 0$ από το θεώρημα 2 του Lindemann τα y και x δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα αλγεβρικοί αριθμοί, δηλαδή για $x \neq 0$ αλγεβρικό αριθμό ο e^x είναι υπερβατικός αριθμός.
2. Από την ισότητα $e^2 - (\pi + e)e + \pi e = 0$ και το θεώρημα 2 του Lindemann προκύπτει ότι οι αριθμοί π+e και πe δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα αλγεβρικοί, παρόλα αυτά δεν γνωρίζουμε ποιος εκ των δύο είναι υπερβατικός.
3. Με την υπερβατικότητα του π κατέστην το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου αδύνατο.
4. Το 1900 στο συνέδριο του Παρισιού ο Hilbert έθεσε το 7ο πρόβλημα στο οποίο αν ο αριθμός a^b όπου α αλγεβρικός αριθμός διάφορος του 0 και του 1 και b άρρητος ή αλγεβρικό μιγαδικός (π.χ $2^{\sqrt{2}}$ ή i^{-2i}) είναι υπερβατικός ή όχι. Το οποίο

απάντησαν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον οι Gelfond και Schneider το 1934 δίνοντας την απάντηση ότι ο α^b με τις παραπάνω προϋποθέσεις είναι υπερβατικός.

Κλείνοντας να αναφέρουμε ότι για να αποφανθούμε αν ένας αριθμός είναι υπερβατικός παραμένει μία δύσκολη διαδικασία. Ο e^{π} είναι υπερβατικός καθώς ισχύει $e^{\pi} = e^{i\pi(-i)} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{(-i)} = (-1)^{-i}$

Τέλος ένας άλλος υπερβατικός αριθμός είναι ο 0,1234567891011....
ο δεκαδικός αριθμός με ψηφία την ακολουθία των φυσικών αριθμών. (το απέδειξε ο Mahler.)

3.3 Αριθμοί Catalan

Οι αριθμοί Catalan αποδίδονται στον Βέλγο μαθηματικό Eugene C. Catalan, ο οποίος ανακάλυψε την ύπαρξη τους το 1838 μελετώντας ακολουθίες παρενθέσεων. Ωστόσο, αν και η ανακάλυψη αυτή αποδίδεται σε αυτόν μιας και εκείνος μελέτησε σε μεγαλύτερο βάθος την φύση και τις ιδιότητές τους, δεν ήταν ο πρώτος που τους συνάντησε κατά την διάρκεια της ακαδημαϊκής του καριέρας.

Ο πρώτος μαθηματικός που ήρθε σε επαφή με τους αριθμούς Catalan ήταν ο Leonard Eüler κατά την μελέτη του προβλήματος του τριγωνισμού κυρτών πολυγώνων. Ο Eüler, ενώ κατάφερε να περιγράψει με μαθηματικούς όρους τον παραπάνω ορισμό, δεν μπορούσε να καταλήξει σε μαθηματική απόδειξη, ζητώντας μέσω επιστολής βοήθεια από τον Goldbach.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εφαρμογές, αυτός που τελικώς κατάφερε να περιγράψει τους αριθμούς Catalan με μία απλή μαθηματική σχέση, είναι ο Eugene Catalan. Οι αριθμοί Catalan C_n δίνονται ως μία μορφή διωνυμικού συντελεστή, σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό:

$$C_n = \frac{(2\mathrm{n})!}{(\mathrm{n}+1)!\,(\mathrm{n})!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}, \qquad \acute{o}\pi o \upsilon\ n \geq 0$$

Ουσιαστικά, πρόκειται για μία ειδική μορφή διωνυμικού συντελεστή με συγκεκριμένες ιδιότητες. Ορισμένοι από τους Αριθμούς Catalan που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση είναι οι: 1, 2 5, 14, 42, 132, 429, 1430,…

Ορισμός: Έστω n,k μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}$ ορίζεται ώς:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Όπου n!=1 ·2 ·3 ·…·n και 0!=1.

Όσοι είναι οικείοι με την συνδυαστική γνωρίζουν ότι ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}$ εκφράζει τον αριθμό των συνδυασμών (χωρίς διάταξη) n συγκεκριμένων αντικειμένων σε k-άδες. Παραδείγματος χάρη, μπορούμε να διαμορφώσουμε. Για παράδειγμα, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε $\binom{5}{4}$= διαφορετικούς συνδυασμούς ντυσίματος με 4 είδη ένδυσης.

3.3.1 Τριγωνοποίηση κυρτού Πολυγώνου n πλευρών

Πρόβλημα: *Βρείτε τον αριθμό των Τρόπων (Wn) με τους οποίους είναι εφικτό ένα κυρτό πολύγωνο (n= αριθμός των πλευρών) μπορεί να χωριστεί σε επιμέρους τρίγωνα, χρησιμοποιώντας διαγώνιες τομές που δεν τέμνονται μεταξύ τους.*

Μελετώντας επι σειρά ετών το παραπάνω πρόβλημα, ο Euler κατάφερε να αποδείξει ότι ισχύει η σχέση:

$$W_n = \frac{2\ \cdot\ 6\ \cdot 10 \ldots (4n-10)}{(n-1)!}, n \geq 3$$

Πρόκειται για μία σχέση που επαληθεύεται πλήρως για τα βασικά γεωμετρικά πολύγωνα. Δηλαδή:

Τρίγωνο (n=3)

$$W_3 = \frac{(4 \cdot 3 - 10)}{(3-1)!} = \frac{2}{2} = 1$$

Τετράγωνο (n=4)

$$W_4 = \frac{2 \cdot (4 \cdot 4 - 10)}{(4-1)!} = \frac{12}{6} = 2$$

Πεντάγωνο (n=5)

$$W_5 = \frac{2 \cdot 6 \cdot (4 \cdot 5 - 10)}{(5-1)!} = \frac{120}{24} = 5$$

Στην πράξη, τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα του μαθηματικού τύπου αποδεικνύουν ότι υπάρχει ακριβώς 1 τρόπος να τριγωνοποιηθεί ένα τρίγωνο, ακριβώς 2 τρόπους να τριγωνοποιηθεί ένα τετράγωνο και ακριβώς 5 τρόπους να τριγωνοποιηθεί ένα πεντάγωνο.

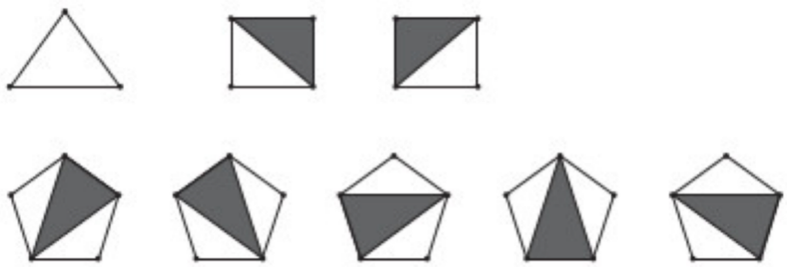


Figure 3.1

Οι αριθμοί W_3=1, W_4=2 και W_5=5 είναι οι 3 πρώτοι αριθμοί Catalan.

Για να προσαρμόσουμε τους παραπάνω τύπους προκειμένου η σχέση να ισχύει και για n ≥ 1, απλώς θέτουμε όπου n = k-3. Έτσι, η σχέση γίνεται:

$$W_{k+3} = \frac{2 \cdot 6 \cdot (4k+2)}{(k+2)!}$$

Οπότε, ορίζοντας $C_n = W_{k+3}$, έχουμε:

$$C_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n-2)}{(n+1)!} =$$

$$\frac{4n-2}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n-6)}{n!} = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$$

Κατά συνέπεια, μέσω του παραπάνω τύπου μπορούμε να ορίσουμε οτν αναδρομικό τύπο C_n:

$C_0=1$

$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$

Για πολύ μεγάλα n, μπορούμε να προσεγγίσουμε τους αριθμούς Catalan χρησιμοποιώντας μια παραγοντική αποτύπωση από τον Stirling: $n \approx \binom{n}{e}^n \sqrt{2\pi n}$, οπότε η σχέση γίνεται:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{\left(\frac{2n}{e}^{2n} \sqrt{2\pi 2n}\right)}{\binom{n}{e}^{2n} 2\pi n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

Άρα, για πολύ μεγάλα n, προκύπτει ότι:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 4$$

Οπότε δηλαδή: $C_{n+1} = 4C_n$.

3.3.2 Το πρόβλημα των παρενθέσεων

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, το πρόβλημα αυτό αποτέλεσε την αφορμή βάσει της οποίας ο Eugen Catalan κατέληξε στην μαθηματική σχέση της περιγραφής του αριθμητικού συνόλου.

Πρόβλημα: *Βρείτε τον αριθμό των P_n καλά ορισμένων ακολουθιών ζευγών παρενθέσεων (αριστερή και δεξιά) που μπορούν να σχηματιστούν από n ζεύγη, όταν n≥ 0*

Λύση. Στον παρακάτω πίνακα, περιλαμβάνονται όλοι οι σωστοί συνδυασμοί για $0 \leq n \leq 3$ και τις αντίστοιχες τιμές P_n όπου $\lambda=\{\varnothing\}$.

Έστω A το σύνολο των καλά ορισμένων ακολουθιών που αποτελούνται από n ζευγάρια παρενθέσεων. Το A μπορεί να οριστεί αναδρομικά:

$\lambda \in A$ και $\alpha,\beta \in A$, τότε $(\alpha), \alpha,\beta \in A$ όπου α,β συμβολίζει την αλληλουχία των συμβόλων α, β.

n	Σωστές εκφράσεις παρενθέσεων	P_n
0	λ	1
1	()	1
2	() () (())	2
3	()()() (()()) (())() ()(()) ((()))	5

Με την παρακάτω διαδικασία, θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα (παρατηρώντας μάλιστα και τη συμπεριφορά των αριθμών) ότι $C_n = P_n$. Συγκεκριμένα:

$P_0 = 1 = P_1$

Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$. Έστω $0 \leq x \leq n-1$. Τα πρώτα x ζεύγη μπορούν να συνδυαστούν κατά P_x σωστούς τρόπους και τα υπόλοιπα n- x -1 ζεύγη κατά P_{n-x-1} σωστούς τρόπους. Βάσει του κανόνα του πολλαπλασιασμού, τα δύο αυτά γεγονότα δύναται να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα κατά $P_x \cdot P_{n-x-1}$ σωστούς τρόπους. Η παραπάνω σχέση θα πρέπει να ισχύει $\exists x \in A$, από τον κανόνα του αθροίσματος ισχύει ότι:

$$P_n = \sum_{x=0}^{n-1} P_x P_{n-x-1}$$

Με άλλα λόγια, η P_n ικανοποιεί την ίδια συνθήκη με την C_n, οπότε $P_n = C_n$.

3.3.3 Το πρόβλημα της κάλπης

Το πρόβλημα της κάλπης αποτελεί ένα από τα χαρακτηριστικότερα προβλήματα συνδυαστικής στο οποίο υπάρχουν έντονα τα χαρακτηριστικά των αριθμών Catalan. Πρόκειται για ένα πρόβλημα που μελέτησε ο Μαθηματικός Joseph Louis Francois Bertrand το 1887. Ωστόσο αυτό που πολλοί δεν γνωρίζουν είναι ότι ο πρώτος ορισμός του προβλήματος αποδόθηκε από τον ίδιο τον Catalan το 1839.

Στον ορισμό του, ο Bertrand όρισε ως την πιθανότητα $P_{m,n}$ σε μία ψηφοφορία με δύο υποψηφίους και (m+n) ψηφοφόρους, ο νικητής της ψηφοφορίας θα πρέπει να συγκεντρώσει m ψήφους για να κερδίσει έναντι του άλλου ο οποίος θα συγκεντρώσει n ψήφους. Η σχέση που περιγράφει την πιθανότητα αυτή είναι:

$$P_{n.m} = \frac{m-n}{m+n}$$

αποδεικνύεται ότι η λύση του προβλήματος αυτού είναι: $\frac{n-km}{n+m}\binom{n+m}{n}$. Επί παραδείγματι, για τους πρώτους αριθμούς Catalan:

- Αν n + m = 2= 2s, τότε s=1 οπότε ο μοναδικό συνδυασμός που μπορεί να προκύψει είναι και οι δύο ψήφοι να δοθούν στον έναν υποψήφιο, άρα C_1=1.
- Αν n + m = 4= 2s, τότε s=2 τότε με το ίδιο σκεπτικό υπάρχουν δύο εφικτοί συνδυασμοί άρα C_2=2.
- Αν n + m = 6= 2s, τότε s=3 τότε με το ίδιο σκεπτικό υπάρχουν πέντε εφικτοί συνδυασμοί άρα C_3=5.

Τα τρίγωνα Pascal

Τα τρίγωνα Pascal είναι ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου με χρήση των ιδιοτήτων των αριθμών Catalan, απλοποιείται αρκετά η μελέτη ενός προβλήματος. Τα τρίγωνα Pascal είναι στην ουσία, μια τριγωνική συστοιχία από διωνυμικούς συντελεστές, όπου κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο γειτονικών του αριθμών στην ακριβώς από πάνω γραμμή του:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Χρησιμοποιώντας τον αρχικό τύπο: $C_n = \frac{1}{1+n}\binom{2n}{n}$ μπορούμε με ακρίβεια να προσδιορίσουμε τον αριθμό Catalan που προκύπτει από το τρίγωνο του Pascal, αν διαιρέσουμε καθέναν από τους μεσαίους αριθμούς του τριγώνου με τον μισό αριθμό της σειράς που βρίσκεται ($1^{η}$, $2^{η}$. $3^{η}$. κλπ) προσαυξημένο κατά ένα.

3.4 Αριθμοί Stirling

Ένας από τους θεμελιωτές της θεωρίας των πεπερασμένων διαφορών είναι ο Jacob Stirling ,ο οποίος στο βιβλίο του "Methodus Differentialis'' Λονδίνο1730 , εισήγαγε και μελέτησε έκτος των άλλων και τους γνωστούς αριθμούς Stirling . οί αριθμοί αυτοί συνδέουν τις δυνάμεις μιας μεταβλητής με τα παραγοντικά αυτής και αντίστροφα . Επειδή στο λογισμό των πεπερασμένων διαφορών τα παραγοντικά έχουν την ίδια εξέχουσα θέση που έχουν οι δυνάμεις στον απειροστικό λογισμό οι αριθμοί αυτοί αποτελούν ένα μέρος της γέφυρας που συνδέει τους δύο αυτούς λογισμούς . Οι αριθμοί αυτοί έχουν ακόμα πολλές εφαρμογές στη συνδυαστική , τη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική .

Οι αριθμοί Stirling οφείλουν το όνομά τους στο Δανό Μαθηματικό N. Nielsen (Nielsen, 1906). Ο Nielsen τους ονόμασε έτσι προς τιμήν του διάσημου Σκωτσέζου Μαθηματικού James Stirling (Stirlingshire 1692 – Edinburgh 1770), που ήταν ο πρώτος που τους εισήγαγε στο έργο του «Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum» το έτος 1730 (Chisholm, 1911).

James Stirling, (γεννημένος το 1692, στο Garden του Stirling της Σκωτίας— απεβίωσε στις 5 Δεκεμβρίου 1770 στο Εδιμβούργο), Σκωτσέζος μαθηματικός ο οποίος βοήθησε σημαντικά στην εξέλιξη της θεωρίας των άπειρων σειρών και του απειροστικού λογισμού.

Ο James Stirling είχε μεγάλη συμβολή στην εξέλιξη των Μαθηματικών μελετώντας διάφορα πεδία όπως οι σειρές, οι διαφορικές εξισώσεις, η Συνδυαστική. Υπήρξε πρωτοπόρος στη θεωρία των γεννητριών συναρτήσεων (Cohen, 1978), ασχολήθηκε με την ταχύτητα σύγκλισης σειρών καθώς και με επίπεδες καμπύλες τρίτου βαθμού επεκτείνοντας τα αποτελέσματα του Isaac Newton (Tweddle, 1992), έλυσε το πρόβλημα των ορθογωνίων τροχιών το 1716 (Tweedie, 1922) που είχε τεθεί από τον Gottfried Wilhelm von Leibniz και με το οποίο είχαν ασχοληθεί επίσης ο Leonard Euler, ο Johann Bernoulli, και ο Nicolaus Bernoulli. Εκτός από τα Μαθηματικά, ασχολήθηκε επίσης με Μηχανική, Οπτική, Υδροδυναμική και Αστρονομία, τα οποία δίδαξε στην Ακαδημία William Watt στο Λονδίνο.

Αριθμοί Stirling Α είδους :

Ο αριθμός Stirling s(n, m) α’ είδους είναι ο συντελεστής του x^m στην
$(x)_n = x(x-1)\ldots(x-n+1)$, ή αλλιώς μπορούμε να τους γράψουμε με τη μοφρή:

$$(x)_n = \sum_{m=0}^{n} s(\mathrm{n}\,, m) x^m$$

Οι αριθμοί α είδους $s(n,m)$ μετρούν το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων σε m μη διατεταγμένους κύκλους και ικανοποιούν την αναδρομική σχέση :

$$s(n+1,m) = s(n,m-1) - ns(n,m)$$

Η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Stirling α’ είδους είναι:

$$\sum_{m=0}^{n} s(\mathrm{n}\,, m) x^m = (-1)^n n! \binom{n-x-1}{n}$$

Αριθμοί stirling α'είδους , s(n,m).

n \ m	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	2	3	1	
4	0	6	11	6	1

Θεώρημα Να αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες των αριθμών Stirling Α είδους:

1) $s(n,0) = 0$

2) $s(n,n) = 1$

3) $s(n,1) = (n-1)!$

4) $s(n,n-1) = \binom{n}{2}$

5) $s(n,m) = (n-1)s(n-1,m) + s(n-1,m-1)$

Απόδειξη

1) Ισχύει προφανώς αφού το γινόμενο $x(x-1) \dots (x-n+1)$ δεν έχει σταθερό όρο.

2) Αφού στο γινόμενο $x(x-1) \dots (x-n+1)$ ο συντελεστής του x^n είναι 1, ισχύει $s(n,n) = 1$.

3) Ο συντελεστής s(n,1) του x προκύπτει αν από το αρχικό γινόμενο επιλέξουμε το x από τον πρώτο παράγοντα και τους σταθερούς όρους από τους υπόλοιπους n-1 παράγοντες, δηλαδή:

$$\pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) = \pm (n-1)!$$

Άρα,

$$s(n,1) = (n-1)!$$

4) Ο συντελεστής $s(n,n-1)$ του όρου x^{n-1} προκύπτει αν επιλέγουμε κάθε φορά το σταθερό όρο από έναν μόνο παράγοντα, δηλαδή είναι το άθροισμα των n-1 γινομένων:

α) από τα n-1 πρώτα γινόμενα παίρνω το x κι από το τελευταίο το σταθερό όρο, δηλαδή

$$(n-1)x^{n-1}$$

β) από όλα τα γινόμενα παίρνω το x εκτός από το προτελευταίο από το οποίο παίρνω το σταθερό όρο, δηλαδή $(n-2)x^{n-1}$ κ.ο.κ. Προσθέτοντάς τα έχουμε:

$$[(-1)+(-2)+\cdots+(-n+1)]x^n-1=-\frac{(n-1)n}{2}x^n-1$$
$$=-\binom{n}{2}x^{n-1}$$

Άρα $(n,n-1)=\binom{n}{2}$

5) Ισχύει η σχέση:

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)=$$
$$s(n-1,n-1)x^{n-1}-s(n-1,n-2)x^{n-2}+s(n-1,n-3)x^{n-3}-\cdots$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(x-n+1)$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)(x-n+1)=$$
$$=s(n-1,n-1)x^n-(n-1)s(n-1,n-1)x^{n-1}+s(n-1,n-2)x^{n-1}$$
$$+(n-1)s(n-1,n-2)x^{n-2}+s(n-1,n-3)x^{n-2}$$
$$-(n-1)s(n-1,n-3)x^{n-3}$$

η οποία σε συνδυασμό με τη σχέση

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)=$$
$$=s(n,n)x^n-s(n,n-1)x^{n-1}+s(n,n-2)x^{n-2}-\cdots$$

και την ισότητα $s(n,n)=s(n-1,n-1)=1$ δίνει τη ζητούμενη αναδρομική σχέση.

Οι αριθμοί Stirling α' είδους σύμφωνα με την αναδρομική σχέση του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει τρίγωνο παρόμοιο του Pascal:

Γραμμή 1					$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$					
Γραμμή 2				$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$				
Γραμμή 3			$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$			
Γραμμή 4		$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$		
Γραμμή 5	$\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$	

Παράδειγμα υπολογισμού αριθμού stirling

Στην συνέχεια, θα υπολογίσουμε τον αριθμό $\binom{4}{2}$. η διαδικασία είναι η εξής :

$$x^4 = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

ο αριθμός $\binom{4}{2}$ Είναι τώρα συντελεστής στο x^4 αρα συνεπάγουμε ότι $\binom{4}{2}$= 11. Για τη σχέση με τους αριθμους stirling α είδους θα έχουμε:

$$\begin{aligned} S(4,2) &= -3S(3,2) + S(3,1) \\ &= -3[-2S(2,2) + S(2,1)] - 2S(2,1) + S(2,0) \\ &= 6S(2,2) - 5S(2,1) + 0 \\ &= 6[-S(1,2) + S(1,1)] - 5[-S(1,1) + S(1,0)] \\ &= -6S(1,2) + 11S(1,1) - 0 \\ &= -6[0 + S(0,1)] + 11[0 + S(0,0)] = 11 \end{aligned}$$

Οι αριθμοί stirling α είδους εμφανίζονται επίσης στις παρακάτω σχέσεις:

1. $s(n,2) = (n-1)!\,H_{n-1}$, όπου η H_{n-1} είναι ο (n-1)-όστος αρμονικός αριθμός,
2. $\sum_{\kappa=0}^{n} (-1)^{n-\kappa} s(\mathrm{n}\,,\kappa)x^{\kappa} = x^n$
3. $\sum_{n\geq 0}^{n} s(\mathrm{n}\,,j)S(\mathrm{n}\,,\kappa) = \delta_{\mathrm{jk}}$

Ενδεικτικά αποδεικνύουμε την 1 σχέση για τους αριθμούς α' είδους. Για να υπολογίσουμε το s(n, 2) διαιρούμε με το (n-1)! παίρνουμε

$$\frac{s(n,2)}{(n-1)!} = \frac{(n-2)!\,)}{(n-1)!} + \frac{(n-1)s(n-1,2)}{(n-1)!} = \frac{s(n-1,2)}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)}$$

με επανάληψη καταλήγουμε,

$$\frac{s(n,2)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{(n-2)} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = H_{n-1}$$

Πολλαπλασιάζοντας $(n-1)!$ Ολοκληρώνουμε την απόδειξη .

Αριθμοί Stirling Β είδους

Οι αριθμοί β' είδους $S(m,n)$ υπολογίζουν με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε m διακεκριμένα αντικείμενα σε ακριβώς n μη διακεκριμένες θέσεις ώστε καμία θέση να μην είναι άδεια. Ισοδύναμα, οι αριθμοί Stirling β' είδους $S(m,n)$ υπολογίζουν με πόσους τρόπους μπορούμε να διαμερίσουμε ένα σύνολο m στοιχείων σε n μη κενά υποσύνολα

Μια **διαμέριση** ενός συνόλου Α είναι μια οικογένεια Α=$\{A_i$, i∈ I$\}$ μη κενών και ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Α, δηλαδή:

Α= $U_{i\in I}A_i$ και 2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ Αν i$\neq j$

Το Ι είναι το σύνολο των δεικτών και τα υποσύνολα A_i είναι τα μέρη της διαμέρισης. Και ικανοποιουν τον τύπο

$$S(m, n) = S(m-1, n-1) + nS(m-1, n)$$

Με χρήση του παραπάνω τύπου υπολογίζουμε τον πίνακα για τους αριθμούς S(m ,n)

Αριθμοί Stirling β’ είδους : S(m,n).

m \ n	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	3	1	
4	0	1	7	6	1

Οι αριθμοί β είδους δίνονται επίσης από τη σχέση

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i} x^n (n-i)^m$$

Η οποία είναι συνέπεια της αρχής Εγκλεισμού-αποκλεισμού στον αριθμό των επί συναρτήσεων από {1, 2, . . . , m} σε {1, 2, . . . , n}.

Θεώρημα : Έστω S (m ,n) το σύνολο των διαμερίσεων ενός m-συνόλου Α σε n μέρη, όπου 1≤ n ≤ m . Ισχύουν τα εξής:

1. $S(m,1) = 1$
2. $S(m,m) = 1$
3. $S(m,0) = 0$
4. $S(m,2) = 2^{m-1}$
5. $S(m,m-1) = \binom{m}{2}$
6. $S(m,n) = S(m-1,n-1) + n \cdot S(m-1,n), \quad 2 \leq n \leq m-1$

Απόδειξη:

1) Τα m στοιχεία του συνόλου Α μπορούν να διαμεριστούν σε 1 υποσύνολο κατά μοναδικό τρόπο, άρα, S (m , 1)= 1

2) Τα m στοιχεία του συνόλου Α μπορούν να διαμεριστούν σε m υποσύνολα κατά μοναδικό τρόπο, άρα, S (m , m)= 1

3) Δεν είναι δυνατό τα m στοιχεία να διαμεριστούν σε 0 υποσύνολα, άρα, S (m , 0)= 0

4) Έστω m-σύνολο A=$\{a_1,a_2 ,\ldots,a_m\}$ το οποίο θέλουμε να διαμερίσουμε σε δύο υποσύνολα. Αν P(A) το δυναμοσύνολο του A, γνωρίζουμε ότι ο πληθάριθμός του είναι |P(A)| = 2^m κι ότι το πλήθος των υποσυνόλων του A που περιέχουν το α1 είναι 2^{m-1}-1. Θεωρούμε A1 υποσύνολο του A που περιέχει το α1 και το αντιστοιχίζουμε με το συμπλήρωμά του ως προς A. Καταφέραμε έτσι να διαμερίσουμε το σύνολο A σε δύο μη κενά υποσύνολα. Η μόνη περίπτωση που δε μπορεί να γίνει αυτή η διαμέριση είναι όταν αντιστοιχίσουμε το ίδιο το σύνολο A με το $\emptyset$, γιατί δεν επιτρέπεται να έχουμε κενό υποσύνολο. Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$S(m, m-1) = 2^{m-1}$$

5) Προφανώς, θα έχουμε m-2 σύνολα με ένα στοιχείο και ένα σύνολο με δύο στοιχεία. Δηλαδή, ψάχνουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα 2-σύνολο από το αρχικό m-σύνολο:

$$S(m, m-1) = \binom{m}{2}$$

6) Έστω το στοιχείο a_n που ανήκει στο m-σύνολο A. Για κάθε διαμέριση του A ισχύει αποκλειστικά ένα από τα παρακάτω:

- το a_n είναι μέρος της διαμέρισης
- το a_n ανήκει σε κάποιο μέρος της διαμέρισης που περιέχει κι άλλα στοιχεία του A

Για την πρώτη περίπτωση, αν αφαιρέσουμε το μονοσύνολο $\{a_n\}$, προκύπτει μια διαμέριση του (m-1)-συνόλου A\$\{a_n\}$ σε n-1 μέρη που γίνεται με S (m-1 ,n-1) τρόπους. Αντίστροφα, αν a_n ∈B και σε κάθε διαμέριση του (m-1)-συνόλου B σε n-1 μέρη επαναφέρουμε το μονοσύνολο $\{a_n\}$, θα έχουμε μια διαμέριση του m-συνόλου B $\{a_n\}$ σε n μέρη. Άρα, η αντιστοιχία είναι 1-1.

Για τη δεύτερη περίπτωση, θεωρούμε μια διαμέριση του m-συνόλου A σε n μέρη A_1, $A_2,\ldots,A_n$ και αντιστοιχούμε το ζεύγος (i, A_0) για το οποίο ισχύει $a_m \in A_i$ και A_0 μια διαμέριση του (m-1)-συνόλου A\$\{a_m\}$ σε n-1 μη κενά μέρη $A_1, A_2,\ldots, A_i \setminus \{a_m\},\ldots,A_n$.

Για κάθε $i \in (1, 2, \ldots, n)$ υπάρχουν n δυνατές τιμές και S(m-1,n) δυνατές διαμερίσεις A_0, άρα, υπάρχουν nS(m-1,n) δυνατά ζεύγη (i, A_0). Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε ένα ζεύγος της μορφής (i, A_0), μπορούμε να επαναφέρουμε το $a_m \neq A\setminus\{a_m\}$ στο μέρος $A_i\setminus\{a_m\}$ και προκύπτει μια διαμέριση του m-συνόλου A σε n μέρη. Άρα, η αντιστοιχία είναι 1-1.

Δεδομένου ότι κάθε διαμέριση είναι είτε της μορφής 1 είτε της 2, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του αθροίσματος και έχουμε, τελικά:

$$S(m,n) = S(m-1,n-1) + n \cdot S(m-1,n)$$

Οι αριθμοί Stirling β’ είδους μπορούν να τοποθετηθούν και αυτοί σε ένα τρίγωνο περίπου όπως αυτό του Pascal:

Γραμμή 1					${1 \brace 1}$				
Γραμμή 2				${2 \brace 1}$		${2 \brace 2}$			
Γραμμή 3			${3 \brace 1}$		${3 \brace 2}$		${3 \brace 3}$		
Γραμμή 4		${4 \brace 1}$		${4 \brace 2}$		${4 \brace 3}$		${4 \brace 4}$	
Γραμμή 5	${5 \brace 1}$		${5 \brace 2}$		${5 \brace 3}$		${5 \brace 4}$		${5 \brace 5}$

Σχέσεις μεταξύ αριθμών stirling α’ και β’ είδους .

Οι εξισώσεις που αφορούν τους αριθμούς α’ και β’ είδους μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε το “falling factorial” [$(x)_n$ = x(x-1) … (x – (n-1))]του x στη βάση των δυνάμεων του χ και αντίστροφα. Έτσι εάν πάρουμε τις πρώτες k στήλες και τις πρώτες k σειρές για οποιοδήποτε k στους πίνακες των δύο ειδών αριθμών(πίνακες 1 και 2) , οι πίνακες που προκύπτουν είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου . δηλαδή :

$$\sum_{m=0}^{\min(m,n)} s(\mathrm{m}\,,k)S(\mathrm{k}\,,n) = \delta_{\mathrm{mn}}$$

και

$$\sum_{m=0}^{\min(m,n)} S(\mathrm{m}\,,k)s(\mathrm{k}\,,n) = \delta_{\mathrm{mn}}$$

Όπου το δ_{mn} είναι το δέλτα του Chroneker του όποιου η τιμή είναι 1 εάν m=n και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση .

$$S(m,n) = S(m-1,n-1) + n \cdot S(m-1,n)$$

Κεφάλαιο 4. Ανοικτά Προβλήματα – Εφαρμογές

4.1 Εικασία Δίδυμων Πρώτων

Ορισμός: Δίδυμοι πρώτοι ονομάζονται οι πρώτοι αριθμοί που η διαφορά τους ισούται με 2.

Το 1849 ο de Polignac διατύπωσε την περίφημη γενική εικασία ότι για φυσικό αριθμό k υπάρχουν άπειρα ζευγάρια πρώτων αριθμών p, p' τέτοια ώστε $p - p' = 2k$

Η περίπτωση $k = 1$ είναι η περίφημη **Εικασία των Δίδυμων Πρώτων**.

Τα πρώτα ζεύγη είναι $\{3,5\},\{5,7\},\{11,13\},\{17,19\},\{37,39\}$ όσο οι αριθμοί μεγαλώνουν τα ζεύγη των Δίδυμων Πρώτων γίνονται σπανιότερα. Η πρώτη πρόταση πάνω στους Δίδυμους Πρώτους δόθηκε το 1915 από τον Νορβηγό μαθηματικό Viggo Brun ο οποίος απέδειξε ότι το άθροισμα των αντίστροφων των δίδυμων πρώτων συγκλίνει, ήταν η πρώτη απόδειξη με χρήση του κόσκινου του Brun.

$$B = (\frac{1}{3}+\frac{1}{5}) + (\frac{1}{5}+\frac{1}{7}) + (\frac{1}{11}+\frac{1}{13}) + (\frac{1}{17}+\frac{1}{19}) + ...$$

Όπου B η σταθερά του Brun $(B \approx 1.90216058310\,4)$

Το 1940 ο Paul Erdos έδειξε ότι υπάρχει σταθερά $c < 1$ και άπειροι πρώτοι αριθμοί p, p' όπου p' ο επόμενος πρώτος μετά τον p οι οποίοι ικανοποιούν την:

$p - p' < c \ln p$. Το 1986 ο Helmut Maier έδειξε ότι μπορούσε να επιτευχθεί σταθερά $c < 0.25$. Το 2003 οι Daniel Goldston και Cem Yildirim το απέδειξαν για κάθε $c > 0$
Το 1966 ο Κινέζος μαθηματικός Chen Jingrun χρησιμοποιώντας την τεχνική του κόσκινου του Brun απέδειξε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί p τέτοιοι ώστε ο $p+2$ είναι είτε πρώτος είτε γινόμενο δύο πρώτων. Το σημαντικότερο βήμα προς την επίλυση της εικασίας των Δίδυμων Πρώτων έγινε το 2013 απο τον Yitang Zhang με το έργο "Bounded gaps between primes'' απέδειξε ότι η διαφορά δύο διαδοχικών πρώτων αριθμών είναι μικρότερη απο 7×10^7.

ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΕΛΕΙΟΣ ΠΕΡΙΤΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ;

Ορισμός: Τέλειος ονομάζεται ο θετικός ακέραιος ο οποίος ισούται με το άθροισμα των διαρέτων του έκτος του εαυτού του. Παραδείγματος χάριν το 6 είναι τέλειος αριθμός καθώς ισχύει $6 = 1+2+3$.

Το 1638 ο Γάλλος μαθηματικός και φιλόσοφος Rene Descartes έστειλε γράμμα στον Marin Mersenne υποστηρίζοντας πως από την μορφή του Ευκλειδη για τους τέλειους αριθμούς. Στο βιβλίο 9 των στοιχείων του Ευκλείδη ο Ευκλείδης κατασκεύασε μία μέθοδο δημιουργίας τέλειων αριθμών. Αν $2^p - 1$ είναι πρώτος όταν ο p πρώτος τότε ο $2^{p-1}(2^p - 1)$ είναι τέλειος αριθμός. Επιπλέον αναρωτήθηκε εάν υπάρχει περιττός τέλειος αριθμός. Η εικασία έχει ελεγχθεί υπολογιστικά για περιττούς αριθμούς μέχρι 10^{300} χωρίς να βρεθεί κάποιος τέλειος αριθμός.

4.2 Τα 4 προβλήματα του Landau

Το 1912 στο διεθνές συνέδριο μαθηματικών ο Edmund Landau στην ομιλία του αναφέρθηκε σε 4 ανοικτά προβλήματα αναφορικά με τους πρώτους αριθμούς, τα οποία χαρακτήρισε ως άκρως δύσκολα ως προς την επίλυση τους με τα τωρινά μαθηματικά εργαλεία. (Μέχρι και σήμερα παραμένουν αναπόδεικτα)

1) Εικασία Goldbach
2) Εικασία Δίδυμων Πρώτων

3) Εικασία Legendre

4) Υπάρχουν άπειροι πρώτοι p τέτοιοι ώστε $p-1$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

Έχει γίνει αναφορά στα 2 πρώτα προβλήματα της λίστας οπότε θα μιλήσουμε για τα άλλα δύο.

Εικασία του Legendre

Για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει πρώτος αριθμός p τέτοιος ώστε $n^2 < p < (n+1)^2$

Αν η εικασία είναι αληθής τότε η διαφορά μεταξύ οποιουδήποτε πρώτου p και του αμέσως μεγαλύτερου πρώτου θα είναι της τάξης $O(\sqrt{p})$. Βέβαια η αλήθεια της εικασίας δεν παρέχει λύση στην υπόθεση του Riemann παρ' όλαυτα ενισχύει τις επιπτώσεις της ορθότητας της. Οι Baker, Harman και Pintz απέδειξαν ότι υπάρχει πρώτος στο διάστημα $[x, x+O(x^{21/40})]$. Η εικασία έχει ελεγχθεί για 4×10^{18}. Έχει αποδειχθεί ότι για άπειρα πολλά $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$[\frac{1}{2}(\frac{(n+1)^2}{2\log(n+1)} - \frac{n^2}{2\log n}) - \frac{\log n^2}{\log(\log n)}] \le \pi((n+1)^2) - \pi(n^2)$$

Εικασία

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής n^2+1

Μέχρι σήμερα παραμένει ανοικτό πρόβλημα, έχει αποδειχθεί ότι υπάρχουν άπειροι πολλοί αριθμοί της μορφής n^2+1 που είναι γινόμενο δύο πρώτων αριθμών. Ο Ankeny απέδειξε ότι με την ισχύ της εκτεταμένης υπόθεσης Riemann για συναρτήσεις L υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής x^2+y^2 με $y = O(\log x)$

4.3 Το παράδοξο της Έκπληξης Γενεθλίων – Αριθμοί Bernoulli

Μια έκπληξη γενεθλίων ορίζεται με τον εξής τρόπο: Έστω *k* τυχαία δείγματα από έναν δειγματικό χώρο n, τότε τουλάχιστον δύο από αυτά είναι πανομοιότυπα. Θα αποδείξουμε ότι οι αριθμοί Bernoulli μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιοριστεί με ακρίβεια η πιθανότητα να εμφανιστεί μια έκπληξη γενεθλίων.

Ο όρος «έκπληξη γενεθλίων» (Birthday Surprise) προέρχεται από μια απλοποιημένη μορφή του προβλήματος η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Πρόβλημα: Έστω μια σχολική τάξη με k μαθητές. Να υπολογιστεί η πιθανότητα τουλάχιστον δύο μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα (άρα n=365).

Λύση: Είναι σαφές πως ο αναμενόμενος αριθμός των συμπτώσεων σε ένα δείγμα k ενός χώρου n είναι:

$$\binom{k}{2}\frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n}$$

Πράγματι, για κάθε i και j στο διάστημα {1…k}, έστω X_{ij} μια τυχαία μεταβλητλη που λαμβάνει την τιμή 1 όταν i=j και την τιμή 0 αν i≠j. Τότε, ο αναμενόμενος αριθμός των συμπτώσεων διαμορφώνεται ως:

$$E(\sum\nolimits_{i\neq j} X_{ij}) = \sum\nolimits_{i\neq j} E(X_{ij}) = \sum\nolimits_{i\neq j} \frac{1}{n} = \binom{k}{2}\frac{1}{n}$$

Η παραπάνω διαδικασία έχει πολλαπλές εφαρμογές σε αυτόματα συστήματα τα οποία παράγουν τυχαίες τιμές, οι οποίες αποδίδονται σε χρήστες (π.χ.: προσωρινούς κωδικούς εισαγωγής). Σε τέτοια συστήματα, πρέπει να ελαχιστοποιείται η πιθανότητα να αποδοθεί η ίδια τιμή σε δύο ή παραπάνω χρήστες, δηλαδή να συμβαίνει μια κακή έκπληξη.

Περίπτωση Α

Όταν k και n είναι σχετικά μικρές τιμές, τότε αρκεί ένας απλός αλγεβρικός υπολογισμός για να καταλήξουμε στην πιθανότητα β_n^k. Η πιθανότητα δίνεται υπολογίζοντας τη σχέση:

$$\pi_n^k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

και στη συνέχεια καταλήγοντας: $\beta_n^k = 1 - \pi_n^k$. Για παράδειγμα, μπορούμε κατευθείαν να διαπιστώσουμε ότι $\beta_{365}^{23} > \frac{1}{2}$, άρα σε μία τάξη 23 μαθητών, η πιθανότητα δύο μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα είναι μικρότερη του $\frac{1}{2}$.

Ωστόσο, τα δεδομένα διαφέρουν όταν τα k και n είναι αρκετά μεγάλα. Σε εφαρμογές που σχετίζονται με κρυπτογραφία, το k μπορεί να είναι στην τάξη μεγέθους του τρισεκατομμυρίου. Σε τέτοια περίπτωση, χρησιμοποιούμε για τους υπολογισμούς μας την λογαριθμική προσέγγιση:

$$\ln(\pi_n^k) = \sum_{i=1}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

Δεδομένου ότι κάθε i είναι μικρότερο από το n, για να προσεγγίσουμε με ακρίβεια την ποσότητα μέσα στον λογάριθμο, χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Talyor:

$$\ln(1 - x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}, |x| < 1$$

οπότε εφαρμόζοντάς τις δύο σχέσεις καταλήγουμε ότι:

$$-\ln(\pi_n^k) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i/n)^m}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn^m} \sum_{i=1}^{k-1} i^{\,m}$$

Οι συντελεστές $p(k-1,m) \coloneqq \sum_{i=1}^{k-1} i^m$ διαδραματίζει κομβικό ρόλο στην εκτίμηση της πιθανότητας γενεθλίων.

Οι αριθμοί Bernoulli εμφανίζονται στον συντελεστή αυτό, διευκολύνοντας τον υπολογισμό των πιθανοτήτων. Με χρήση των αριθμών Bernoulli ο παραπάνω συντελεστής διαμορφώνεται ως εξής:

$$p(k,m) = \frac{(k+B)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1}$$

Όπου Β ο ανάλογος αριθμός Bernoulli. Οπότε:

$$p(k,3) = \frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{4}k^2$$
$$p(k,4) = \frac{1}{5}k^5 + \frac{1}{2}k^4 + \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{30}k$$
$$p(k,5) = \frac{1}{6}k^6 + \frac{1}{2}k^5 + \frac{5}{12}k^4 - \frac{1}{12}k^2$$

Πρόβλημα: Υπολογίστε την πιθανότητα μιας έκπληξης γενεθλίων β_n^k σε ένα δείγμα k ενός χώρου n, με δεδομένου ότι $l_N(k,n)$ και $u_N(k,n)$ να αποτελούν το κατώτερο και το ανώτερο όριο της παραπάνω σχέσης.

Λύση:

$$-\sum_{m=1}^{M-1} \frac{(-l_N(k,n))^m}{m!} < \beta_n^k < -\sum_{m=1}^{M} \frac{(-u_N(k,n))^m}{m!}$$

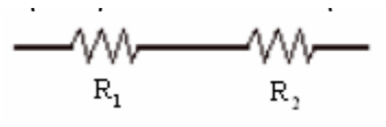
Όποτε για παράδειγμα, για Μ=1 λαμβάνουμε:

$$\frac{(k-1)k}{2n} - \frac{(k-1)^2k^2}{4n^2} < \beta_n^k < \frac{(k-1)k}{2n} + \frac{(k-{}^1\!/_2)^3}{6n^2(1-\frac{k-{}^1\!/_2}{n})}$$

4.4 Οι αριθμοί Fibonacci στην κατασκευή ηλεκτρονικών κυκλωμάτων

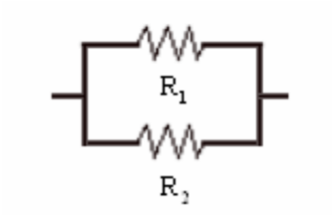
Ως γνωστόν υπάρχουν δύο τρόποι να συνδεθούν μεταξύ τους δύο ηλεκτρικές αντιστάσεις: Σε σειρά και παράλληλα. Για τον καθένα από τους παραπάνω διαφορετικούς τρόπους σύνδεσης των αντιστάσεων ενός κυκλώματος, υπάρχει και αντίστοιχος τρόπος υπολογισμού της τιμής της συνολικής αντίστασης:

Σε σειρά:



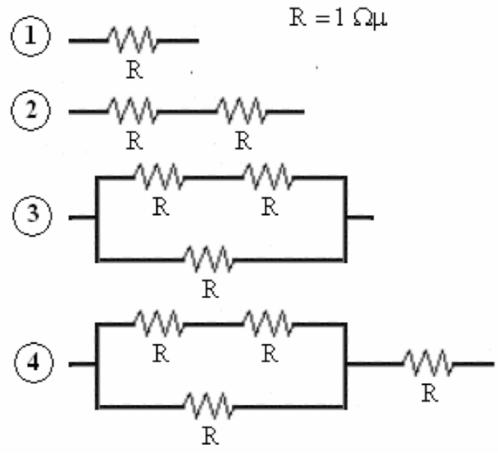
$R_{ολ} = R_1 + R_2$

Παράλληλα:



$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Διαπιστώνεται λοιπόν το εξής πρόβλημα: Έστω μια ακολουθία κυκλωμάτων με αντιστάσεις. Όλες οι αντιστάσεις μεμονωμένα έχουν τιμή 1Ω. Ξεκινώντας από την $1^η$ αντίσταση, σε κάθε επόμενο όρο (κύκλωμα) συνδέουμε μια ακόμα αντίσταση σε σειρά και μία παράλληλα, εναλλάξ. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούμε μία ακολουθία η οποία αποτυπώνεται σχηματικά παρακάτω:



Αν $R_{i,ολ}$ είναι η συνολική αντίσταση i του κυκλώματος, τότε προκύπτει ότι:

$$R_{1,ολ} = 1Ω$$
$$R_{2,ολ} = R_1 + R_2 = 2Ω$$
$$\frac{1}{R_{3,ολ}} = \frac{1}{R_{2,ολ}} + \frac{1}{R} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow R_{3,ολ} = \frac{2}{3}Ω$$
$$R_{4,ολ} = R_{3,ολ} + R = \frac{5}{3}Ω$$
$$\frac{1}{R_{5,ολ}} = \frac{1}{R_{4,ολ}} + \frac{1}{R} = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5} \Rightarrow R_{5,ολ} = \frac{5}{8}Ω$$
$$R_{6,ολ} = R_{5,ολ} + R = \frac{13}{8}Ω$$

Με τα μέχρι τώρα αποτελέσματα, αν προσπαθήσουμε να ανάγουμε το άθροισμα των τιμών των αντιστάσεών για πλήθος n συνδεδεμένων αντιστάσεων με τον τρόπο που αναφέραμε παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι προκύπτει μια διαφοροποίηση στην τιμή, για άρτιο ή περιττό αριθμό συνδεδεμένων αντιστάσεων.

Αν ο αριθμός των αντιστάσεων είναι άρτιος, τότε η συνολική αντίσταση δίνεται από την σχέση:

$$R_{n,ολ} = \frac{R_n}{R_{n-1}}Ω$$

Ενώ αν ο αριθμός των αντιστάσεων είναι περιττός, τότε η συνολική αντίσταση δίνεται από την σχέση:

$$R_{n,ολ} = \frac{R_{n-1}}{R_n} Ω$$

Οι αριθμητικές τιμές που λαμβάνει η συνολική αντίσταση $R_{ολ}$ όσο αυξάνεται το n, αυξάνονται κατ' αναλογία των αριθμών Fibonacci ως πηλίκο των n-οστών και (n-1)-οστών αριθμών Fibonacci.

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική, μπορούμε να αποδείξουμε ότι την ίδια λογική ακολουθούν σε ανάλογο πρόβλημα, οι μέθοδοι υπολογισμού της χωρητικότητας C του πυκνωτή.

Βιβλιογραφία

[1] Κυριακόπουλος Αντώνης, *Θεωρία Συνόλων & αποδείξεις στα μαθηματικά*, Αφοι Παπαδημητροπούλου, 1973

[2] Ν. Μαρμαρίδης & Α. Μπεληγιάννης, *Θεωρία Αριθμών,* Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 2013

[3] Enrico Bombieri, *Problems of the millennium: The Riemann Hypothesis*, University of Milan, 1998

[4] Αθανάσιος Φωκάς, *A formal proof of Lidelöf's Hypothesis*, dept of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, 2017

[5] Mathew R. Watkin*, Lindelöf Hypothesis*, University of Kent, Canterbury School of Mathematics, 2002

[6] Keith Conrad, *Pythagorian triples*, University of Connecticut, Dept. of Mathematics, 2005

[7] Alison Berke, *An Introduction to The Twin Prime Conjecture*, University of Standford, 2006

[8] Thomas Koshy, *Catalan Numbers with applications*, Oxford University, 2009

[9] James B. Silva, *Bernoulli numbers and their Applications,* Massachusetts Institute of Technology, 1999

[10] R.C Johnson, *Matrix methods for Fibonacci and related sequences,* University of Durham, 2009

[11] Νικόλαος Δ. Κατσίπης, *Η Υπερβατικότητα του Πραγματικού αριθμού π, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα μαθηματικών*

[12] Αντώνιος Αντωνίου, *Οι αριθμοί π και e και το σύνολο των υπερβατικών αριθμών,* ΕΚΠΑ, τμήμα Φυσικής, τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής, 2011

[13] Χρήστος Κονταράτος, Υπερβατικοί Αριθμοί και Θεώρημα του Liouville, Πανεπιστήμιο Κρήτης, τμήμα Μαθηματικών, 2014

[14] J. Engbers, D. Galvin, C. Smyth, *Restricted Stirling and Lah numbers and their inverses,* University of North Carolina, 2016