



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μητροειδή και Παραμετρική Πολυπλοκότητα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΦΙΟΡΑΒΑΝΤΕ ΦΟΙΒΟΥ

Επιβλέπων : Αριστείδης Παγουρτζής
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ
Αθήνα, Φεβρουάριος 2018



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

Μητροειδή και Παραμετρική Πολυπλοκότητα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΦΙΟΡΑΒΑΝΤΕ ΦΟΙΒΟΥ

Επιβλέπων : Αριστείδης Παγουρτζής
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 23^η Φεβρουαρίου 2018.

.....
Αριστείδης Παγουρτζής
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Αντώνιος Συμβώνης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ευστάθιος Ζάχος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018

.....

ΦΙΟΡΑΒΑΝΤΕΣ ΦΟΙΒΟΣ

Διπλωματούχος Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

© 2018 – All rights reserved



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

Copyright © –All rights reserved Φιοραβάντες Φοίβος .
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, καθ. Α. Παγουρτζή, για την πολύτιμη καθοδήγηση καθώς και για την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε. Επιπρόσθετα, ευχαριστώ ιδιαίτερος τους καθ. Α. Συμβώνη και Ε. Ζάχο για τις ανεκτίμητες γνώσεις που μου έχουν μεταδώσει καθώς και για την αστείρευτη πυγή έμπνευσης που αποτελούν.

Ευχαριστώ επίσης τους συμφοιτητές μου Θ. Τριομάτη, Ν. Μελισσινό, Α. Αντωνόπουλο και Α. Χαλκή για την συνεισφορά τους ώστε να ολοκληρωθεί με επιτυχία η παρούσα εργασία.

Τέλος ευχαριστώ όλους τους φίλους και συμφοιτητές που έχουν βρεθεί στο πλάι μου κατά τη διάρκεια της φοιτητικής μου ζωής καθώς και τους γονείς για την στήριξη που μου παρέχουν τόσα χρόνια.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση ενός σχετικά πρόσφατου και πολλά υποσχόμενου τομέα της υπολογιστικής θεωρίας πολυπλοκότητας, αυτού της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας. Παράλληλα παρουσιάζονται τα μητροειδή, μια αφηρημένη αλγεβρική δομή, η οποία αποτελεί κατά κάποιο τρόπο γενίκευση της έννοιας της γραμμικής ανεξαρτησίας ενός διανυσματικού χώρου. Η δομή των μητροειδών φαίνεται να είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με πολλά προβλήματα της επιστήμης των υπολογιστών· ενδεικτικά αναφέρουμε την άμεση σχέση που υπάρχει μεταξύ των μητροειδών και των άπληστων αλγορίθμων. Η μελέτη των μητροειδών, πέραν από το ενδιαφέρον που παρουσιάζει αυτή καθ' αυτή, έχει γεννήσει μια πληθώρα χρήσιμων εργαλείων. Θα κλείσουμε την εργασία παρουσιάζοντας έναν τυχαίοποιημένο πολυωνυμικό πυρήνα για το πρόβλημα Subset Feedback Vertex Set, στην κατασκευή του οποίου παίζουν καθοριστικό ρόλο κάποια από τα βασικότερα θεωρητικά αποτελέσματα των μητροειδών.

Abstract

In the work at hand we briefly present one of the most recent and many promising fields of computational complexity theory, that of Parameterized Complexity. Also, we study matroids, an abstract algebraic structure, which consists in a way of a generalization for the notion of linear independence in a vector space. The structure of matroids seems to be fairly well connected with a multitude of problems appearing in computer science; indicatively we mention the close relation between matroids and greedy algorithms. The study of matroids, apart from being interesting on its own, has yielded many useful tools. We close this work by presenting a randomized polynomial kernel for the problem Subset Feedback Vertex Set, in the construction of which we can see some of the most important results of matroid theory playing a vital role.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	15
1.1	Βασικά στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας	15
1.2	Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων	16
1.2.1	Βασικές έννοιες	16
1.2.2	Graph Minors	18
1.3	Υπολογιστική Πολυπλοκότητα	20
1.4	Στοιχεία Άλγεβρας	22
2	Parametrized Complexity	24
2.1	Παραμετρική Πολυπλοκότητα	24
2.2	Πυρήνας για το Vertex Cover	25
2.3	Το VC είναι ευπίλυτο σταθερής παραμέτρου (Fixed Parameter Tractable)	26
2.4	W-Ιεραρχία	27
3	Προβλήματα Πολύχρωμων Συνιστωσών	32
3.1	Μελέτη της παραμετρικής πολυπλοκότητας του προβλήματος MCC	33
3.1.1	Το MCC με είσοδο δέντρο είναι FPT	33
3.1.2	MCC με παράμετρο την απόσταση από ξένα μονοπάτια .	35
3.2	Μελέτη της παραμετρικής πολυπλοκότητας του προβλήματος METC	39
3.2.1	Πυρήνας για το METC	39
3.2.2	METC με παράμετρο την απόσταση από ξένα μονοπάτια .	43
4	Matroids	47
4.1	Matroids	47
4.1.1	Ορισμός	47
4.1.2	Βασικές κατηγορίες Matroid	48
4.1.3	Ορισμοί και ιδιότητες	49
4.1.4	Δυικό matroid	50
4.1.5	Matroid Minors	52
4.1.6	Partition Matroid	52
4.1.7	Gammoid	53
4.1.8	Αναπαράσταση Matroids	55

4.2	Πράξεις και Αναπαραστάσεις	58
4.2.1	Εφαρμογές του Θεωρήματος 4.3	61
4.3	Άπληστος αλγόριθμος	62
5	Πολυωνυμικός Πυρήνας για το Subset Feedback Vertex Set	65
5.1	Προκαταρκτικά:	66
5.2	Κατασκευή πολυωνυμικού Πυρήνα για παράμετρο $ S + k$	67
5.3	Μείωση του μεγέθους του S	72
6	Επίλογος	76
	Βιβλιογραφία	77

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικά στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Θα ξεκινήσουμε καλύπτοντας κάποια βασικά στοιχεία της Γραμμικής Άλγεβρας. Θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στις έννοιες της γραμμικής ανεξαρτησίας και της βάσης ενός διανυσματικού χώρου. Για μια πιο πλήρη περιγραφή των αντικειμένων αυτών ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στο [35]. Μια από τις βασικότερες έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας είναι αυτή της γραμμικής ανεξαρτησίας.

Ορισμός 1.1.1. Έστω διανυσματικός χώρος V , $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ και συντελεστές $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ώστε $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = 0$. Τότε:

- Αν $a_1, a_2, \dots, a_n = 0$ τα u_1, u_2, \dots, u_n ονομάζονται **γραμμικώς ανεξάρτητα**
- Αν $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : a_i \neq 0$ τα u_1, u_2, \dots, u_n ονομάζονται **γραμμικώς εξαρτημένα**.

Ένα $I \subseteq V$ ονομάζεται:

- **Γραμμικώς ανεξάρτητο** αν κάθε πεπερασμένο $u_1, u_2, \dots, u_n \in I$ είναι σύνολο από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.
- **Γραμμικώς εξαρτημένο** αν υπάρχει πεπερασμένο $u_1, u_2, \dots, u_n \in I$ από γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα.

Ορισμός 1.1.2. Έστω $S \subseteq V$ και $x \in S$. Λέμε ότι το x ανήκει στην **γραμμική θήκη** του S (συμβολισμός $x \in \langle S \rangle$) αν το x είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S . Δηλαδή:

$$x \in \langle S \rangle \Leftrightarrow \exists u_1, u_2, \dots, u_n \in S \text{ και } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ ώστε} \\ x = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n.$$

Οι δύο παραπάνω έννοιες είναι πολύ σημαντικές γιατί μας επιτρέπουν να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.1.3. Ένα σύνολο $B \subseteq V$ ονομάζεται **Βάση** του διανυσματικού χώρου V αν το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και $\langle B \rangle = V$. Ορίζουμε ως βαθμό του διανυσματικού χώρου V το $|B|$ (συμβολισμός $r(V)$).

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Κάθε υποσύνολο ανεξάρτητου παραμένει ανεξάρτητο.
2. Έστω I_1, I_2 με $|I_1| < |I_2|$ και $x \in I_2 \setminus I_1$. Τότε το $I_1 \cup \{x\}$ παραμένει ανεξάρτητο.
3. Αν $S \subseteq V$ πεπερασμένο, τότε τα μεγιστικά ανεξάρτητα υποσύνολα του S , έχουν όλα το ίδιο μέγεθος.
4. Έστω $S \subseteq V$ και $x \in V$. Τότε $x \in \langle S \rangle \Leftrightarrow r(S) = r(S \cup \{x\})$.
5. Ο βαθμός ενός $S \subseteq V$ ταυτίζεται με το μέγεθος του μικρότερου υποσυνόλου του S του οποίου η γραμμική θήκη περιέχει το S .
6. Έστω $I \subseteq V$. Το I είναι ανεξάρτητο $\Leftrightarrow \forall x \in I, x \notin \langle I \setminus \{x\} \rangle$.
7. Αν $I \subseteq V$ ανεξάρτητο, τότε $x \in \langle I \rangle \Leftrightarrow x \in I$ ή $I \cup \{x\}$ εξαρτημένο.

Με την έννοια μεγιστικά ανεξάρτητα υποσύνολα εννοούμε πως $\nexists x \in V \setminus S$ τέτοιο ώστε το $S \cup \{x\}$ να είναι ανεξάρτητο.

Ορισμός 1.1.4. (Ισοδύναμος ορισμός με τον 1.1.3) Ένα $B \subseteq V$ ονομάζεται **Βάση** αν είναι ένα μεγιστικό ανεξάρτητο υποσύνολο του V .

1.2 Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων

1.2.1 Βασικές έννοιες

Όπως και στα πλαίσια της Γραμμικής Άλγεβρας, έτσι και στα πλαίσια της Θεωρίας Γραφημάτων μπορούμε να ορίσουμε μια αντίστοιχη έννοια "ανεξαρτησίας" με τον εξής τρόπο:

Ορισμός 1.2.1. Έστω πεπερασμένο, μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$. Ένα σύνολο $S \subseteq E$ το ονομάζουμε **ανεξάρτητο** αν δεν περιέχει κύκλους. Διαφορετικά το ονομάζουμε **εξαρτημένο**.

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε αντίστοιχες έννοιες "βαθμού" και "θήκης" υποσυνόλων του E .

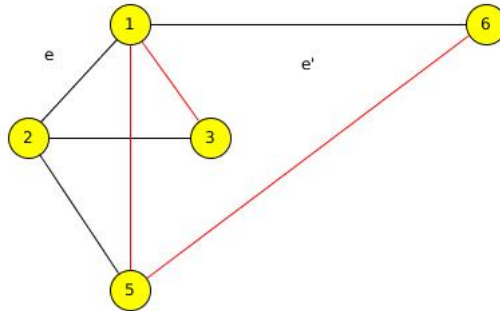
Ορισμός 1.2.2. Έστω σύνολο ακμών $S \subseteq E$. Ορίζουμε ως **βαθμό** του S (συμβολισμός $r(S)$) το μέγεθος ενός μεγιστικού ακυκλικού υποσυνόλου του S . Επίσης λέμε ότι μια ακμή $e \in E$ ανήκει στην **θήκη** του S αν \exists μονοπάτι στο S που να ενώνει τα άκρα της e .

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως αν $e \in S$, τότε η e ανήκει στην θήκη του S με τετριμμένο τρόπο. Η μη τετριμμένη περίπτωση είναι για $e \in E \setminus S$.

Παράδειγμα: Στο γράφημα (Σχήμα 1.1) θεωρούμε ως $S = \{(1,3), (1,5), (5,6)\}$. Η e δεν ανήκει στην θήκη του S , ενώ η e' ανήκει αφού το μονοπάτι $(1,5), (5,6)$ ανήκει στο S και ενώνει τα άκρα της.

Το εντυπωσιακό είναι ότι, δεδομένων των παραπάνω ορισμών, ισχύουν ανάλογες ιδιότητες με τις ιδιότητες που αναφέραμε για τους διανυσματικούς χώρους:

Σχήμα 1.1:



1. Κάθε υποσύνολο άκυκλου παραμένει άκυκλο.
2. Έστω $I_1, I_2 \subseteq E$ και τα δύο ανεξάρτητα με $|I_1| < |I_2|$. Τότε $\exists x \in I_2 \setminus I_1$ ώστε το $I_1 \cup \{x\}$ να παραμένει ανεξάρτητο.
3. Για $S \subseteq E$, τα μεγιστικά ανεξάρτητα υποσύνολα του S , έχουν όλα το ίδιο μέγεθος.
4. Έστω $S \subseteq E$ και $x \in E$. Τότε το x ανήκει στην θήκη του $S \Leftrightarrow r(S) = r(S \cup \{x\})$.
5. Ο βαθμός ενός $S \subseteq E$ ταυτίζεται με το μέγεθος του μικρότερου υποσυνόλου του S του οποίου η θήκη περιέχει το S .
6. Έστω $I \subseteq E$. Το I είναι ανεξάρτητο $\Leftrightarrow \forall x \in I, x \notin$ στην θήκη του $I \setminus \{x\}$.
7. Αν $I \subseteq E$ ανεξάρτητο, τότε $x \in$ στην θήκη του $I \Leftrightarrow x \in I$ ή $I \cup \{x\}$ εξαρτημένο.

Όπως είναι αναμενόμενο, θα ορίσουμε *βάση* ενός γραφήματος, όμοια με την αντίστοιχη της Γραμμικής Άλγεβρας.

Ορισμός 1.2.3. Έστω γράφημα $G(V,E)$. Λέμε ότι ένα $S \subseteq E$ είναι **βάση** του G , αν το S είναι ένα μεγιστικό ανεξάρτητο υποσύνολο του E . Ουσιαστικά κάθε διασυνδεδετικό δέντρο του G αποτελεί βάση του γραφήματος.

Ορισμός 1.2.4. Ορίζουμε ως **επίπεδο** γράφημα το ζευγάρι (V, E) , με V, E πεπερασμένα σύνολα τα οποία ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

1. $V \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. κάθε $e \in E$ είναι ένα τόξο μεταξύ δύο κορυφών.
3. για $u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$ με $\{u_1, v_1\} = e_1 \in E$ και $\{u_2, v_2\} = e_2 \in E$, αν $u_1 \neq u_2$ και $v_1 \neq v_2$ τότε $e_1 \neq e_2$.

4. το εσωτερικό κάθε ακμής δεν περιέχει κορυφή και σημεία άλλων ακμών.

Διαισθητικά, το γράφημα $G(V, E)$ είναι επίπεδο αν μπορεί να εμφυτευτεί στο επίπεδο. Δηλαδή αν μπορούμε να σχεδιάσουμε το G στο επίπεδο με τέτοιο τρόπο ώστε καμία ακμή του να μην τέμνεται με κάποια άλλη.

Ένα από τα πιο γνωστά αποτελέσματα σχετικά με τα επίπεδα γραφήματα είναι το ακόλουθο:

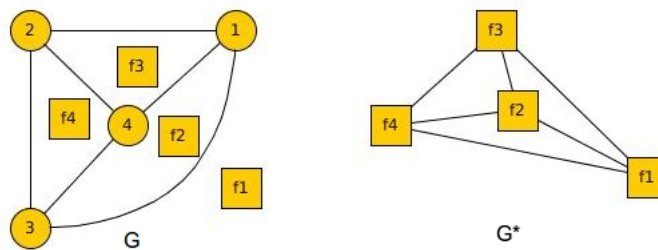
Θεώρημα 1.1. (Kuratowski) Ένα πεπερασμένο γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει ως υπογραφήματα το πλήρες γράφημα K_5 ή το πλήρες διμερές γράφημα $K_{3,3}$.

Μια πολύ βασική ιδιότητα των επίπεδων γραφημάτων είναι ότι για κάθε επίπεδο γράφημα G , το σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus G$ είναι ανοιχτό. Οι περιοχές του χώρου που καθορίζονται από αυτό το σύνολο καλούνται **όψεις** του G .

Ορισμός 1.2.5. Έστω το επίπεδο γράφημα $G(V, E)$ και το σύνολο $\{f_1, \dots, f_n\}$ των όψεων του G . Κατασκευάζουμε ένα καινούριο γράφημα $G^*(V^*, E^*)$ ως εξής: για κάθε όψη f_i του G ορίζουμε μια κορυφή v_i^* του G^* . Στη συνέχεια, ορίζουμε $E^* = \{e_{i,j}^* \mid \text{οι όψεις } f_i, f_j \text{ έχουν μια κοινή ακμή}\}$. Το γράφημα G^* ονομάζεται **δουικό** του G .

Η έννοια του δουικού ενός χώρου είναι αρκετά συνηθισμένη¹. Σημειώνουμε πως η ιδιότητα της δουικότητας είναι συμμετρική. Δηλαδή $(G^*)^* = G$.

Σχήμα 1.2:



Παράδειγμα: Έστω το γράφημα G του σχήματος 1.2. Το $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ αποτελεί το σύνολο όψεων του G . Είναι εύκολο να δούμε ότι το G^* είναι το δουικό γράφημα του G καθώς και ότι $(G^*)^* = G$.

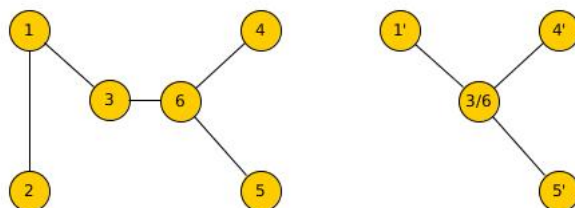
1.2.2 Graph Minors

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην πολύ σημαντική έννοια των minors ενός γραφήματος.

¹Για παράδειγμα αναφέρουμε τον δουικό ενός διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 1.2.6. Έστω γράφημα $G(V, E)$. Ένα γράφημα H , καλείται **minor** του G , αν το H μπορεί να προκύψει από το G με διαδοχικές πράξεις διαγραφής ακμών και κορυφών και συνένωσης κορυφών.

Σχήμα 1.3:



Παράδειγμα: Στα παραπάνω γραφήματα (Σχήμα 1.3), το δεύτερο γράφημα αποτελεί minor του πρώτου. Προκύπτει με διαγραφή της κορυφής 2 και συνένωση των κορυφών 3 και 6.

Η σημασία των minors ενός γραφήματος, έγκειται στο ότι αποτελούν μια από τις πλέον χρήσιμες δομές στα πλαίσια του χαρακτηρισμού μιας οικογένειας γραφημάτων μέσω κάποιων απαγορευμένων υποδομών. Γενικά, μια δομή G ανήκει σε μια οικογένεια \mathcal{F} αν και μόνο αν κάποια απαγορευμένη υποδομή δεν περιέχεται στην G . Ενδεικτικά αναφέρουμε το παρακάτω θεώρημα η απόδειξη του οποίου μπορεί να βρεθεί στο [26].

Θεώρημα 1.2. (Wagner) Ένα πεπερασμένο γράφημα G είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει τα K_5 και $K_{3,3}$ ως minors.

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω θεώρημα αποτελεί κατά κάποιο τρόπο γενίκευση του θεωρήματος 1.1.

Τέλος αναφέρουμε ίσως το πιο φημισμένο αποτέλεσμα της θεωρίας των minors γραφημάτων.

Θεώρημα 1.3. (Robertson-Seymour) Το σύνολο των πεπερασμένων γραφημάτων είναι ολικά διατεταγμένο από την σχέση minors \preceq . Δηλαδή \forall άπειρη οικογένεια $(G_n)_{n \in I}, \forall i, j \in I, G_i \preceq G_j$ ή $G_j \preceq G_i$.

Ισοδύναμα: Κάθε κλειστή ως προς τα minors οικογένεια γραφημάτων, μπορεί να χαρακτηριστεί από πεπερασμένο σύνολο απαγορευμένων minors.

Με τον όρο οικογένεια κλειστή ως προς τα minors, εννοούμε πως αν ένα γράφημα G ανήκει σε μια οικογένεια και $H \preceq G$, τότε και το H θα ανήκει στην ίδια οικογένεια. Για παράδειγμα, θεωρούμε το σύνολο των επίπεδων γραφημάτων. Θα δείξουμε πως αν G επίπεδο και $H \preceq G$, τότε το H θα είναι επίπεδο (και άρα η οικογένεια των επίπεδων γραφημάτων είναι κλειστή ως προς τα minors). Πράγματι, θεωρούμε $M = \{A | A \preceq G\}$ το σύνολο όλων των minors του $G \Rightarrow$ το H καθώς και όλα τα minors του H θα περιέχονται στο M . Έστω επίσης πως το H δεν είναι επίπεδο. Από το θεώρημα 1.2, το H θα έχει τουλάχιστον ένα από τα $K_5, K_{3,3}$ ως

minor. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πως το H έχει ως minor το K_5 . Τότε $K_5 \in M$. Αποπο διότι το G είναι επίπεδο. Συνεπώς, θα πρέπει και το H να είναι επίπεδο.

Είναι αξιοσημείωτο ότι η απόδειξη του θεωρήματος 1.3 αποτελεί μια σειρά από 20 papers (από το 1983 ως το 2004) και είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη πληθώρας καινούριων εργαλείων. Μια σύντομη περιγραφή της απόδειξης μπορεί να βρεθεί στο [6].

1.3 Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Στα πλαίσια της Υπολογιστικής Πολυπλοκότητας, θεωρούμε υπολογίσιμα προβλήματα και προσπαθούμε να δούμε αν αυτά λύνονται αποδοτικά ή όχι. Για το λόγο αυτό, εισάγουμε στα προβλήματά μας περιορισμούς στους υπολογιστικούς πόρους που έχουμε στη διάθεσή μας ώστε να τα υπολογίσουμε. Οι περιορισμοί αυτοί μπορούν να είναι ως προς τον χρόνο, την μνήμη κ.α. Η επίλυση ή μη των προβλημάτων με τους περιορισμούς που έχουμε θέσει στους υπολογιστικούς πόρους, οδηγεί στη δημιουργία ολόκληρων κλάσεων πολυπλοκότητας μέσα στις οποίες κατατάσσουμε τα προβλήματα που μελετάμε.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μονάχα με τις κλάσεις που ορίζονται θεωρώντας περιορισμό ως προς τον υπολογιστικό χρόνο που έχουμε στη διάθεσή μας². Επίσης το υπολογιστικό μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτό της Μηχανής Turing (Turing Machine ή TM). Για μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα των παραπάνω καλείστε να ανατρέξετε στα [33], [34] και [23].

Εστω Σ το αλφάβητο του προβλήματός μας. Διακρίνουμε την Ντετερμινιστική (DTM) από την Μη-ντετερμινιστική (NTM) μηχανή Turing:

- Ένα DTM πρόγραμμα M αποδέχεται ένα $x \in \Sigma^*$ αν και μόνο αν το M με είσοδο x τερματίζει σε κατάσταση αποδοχής.
- Ένα NTM πρόγραμμα M' αποδέχεται ένα $x \in \Sigma^*$ αν τουλάχιστον ένα από τα υπολογιστικά μονοπάτια του δέντρου υπολογισμού του M' με είσοδο x αποδέχεται.

Ορίζουμε την γλώσσα L_M που αναγνωρίζεται από το πρόγραμμα M ως

$$L_M = \{x \in \Sigma^* | M \text{ αποδέχεται το } x\}$$

Ορισμός 1.3.1. Ορίζουμε την κλάση P ως

$$P = \{L | \exists \text{ πολυωνυμικού χρόνου DTM πρόγραμμα } M \text{ για το οποίο } L = L_M\}$$

Ορισμός 1.3.2. Ορίζουμε την κλάση NP ως

$$NP = \{L | \exists \text{ πολυωνυμικού χρόνου NTM πρόγραμμα } M \text{ για το οποίο } L = L_M\}$$

²Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε τις κλάσεις PSPACE, NPSpace, L, NL και EXPSPACE οι οποίες χαρακτηρίζονται από περιορισμό στον επιπλέον χώρο μνήμης.

Είναι προφανές $P \subseteq NP$. Αυτό συμβαίνει διότι σε κάθε DTM μπορεί με τετριμμένο τρόπο να θεωρηθεί πως αποτελεί μια NTM με ένα μονάχα υπολογιστικό μονοπάτι. Εντούτοις, ένα από τα πιο σημαντικά και ακόμα άλυτα προβλήματα της επιστήμης των υπολογιστών, είναι αν $P \subsetneq NP$. Το πρόβλημα αυτό, γνωστό και ως P vs NP , αποτελεί ίσως το σημαντικότερο ανοικτό ερώτημα στην επιστήμη των υπολογιστών. Συνεπώς, αν στην προσπάθειά μας να λύσουμε ένα πρόβλημα βρούμε έναν μη-ντετερμινιστικό αλγόριθμο που να το λύνει, αυτό δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι το πρόβλημα δεν ανήκει στην P .

Η πλέον συνηθισμένη πρακτική όταν προσπαθούμε να κατηγοριοποιήσουμε ως προς την αποδοτικότητα ένα πρόβλημα που μελετάμε, είναι η χρήση της **πολυωνυμικής αναγωγής**. Η ιδέα είναι να συνδέσουμε μεταξύ τους προβλήματα με υπολογιστικά "εύκολο" τρόπο. Με τον όρο "εύκολο", ουσιαστικά αναφερόμαστε σε μετασχηματισμούς οι οποίοι μπορούν να γίνουν σε πολυωνυμικό χρόνο. Συγκεκριμένα, αν έχουμε μια πολυωνυμική αναγωγή από ένα πρόβλημα σε ένα άλλο, τότε κάθε αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το δεύτερο πρόβλημα μπορεί να μετασχηματιστεί σε αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το πρώτο. Τυπικά:

Ορισμός 1.3.3. (Αναγωγή κατά Karp) Έστω οι γλώσσες $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ και μια συνάρτηση $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ η οποία να υπολογίζεται από μια DTM σε πολυωνυμικό χρόνο. Θα λέμε ότι η L_1 ανάγεται (κατά Karp) στην L_2 (συμβολισμός $L_1 \leq_m^P L_2$) αν

$$\forall x \in \Sigma^*, x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

Ορισμός 1.3.4. (Hardness, Completeness).

- Θα λέμε ότι ένα πρόβλημα A είναι **C-δύσκολο (C-hard)** ως προς μια αναγωγή \leq αν $\forall B \in C, B \leq A$.
- Θα λέμε ότι ένα πρόβλημα A είναι **C-πλήρες (C-complete)** ως προς μια αναγωγή \leq αν το A είναι C-hard ως προς την \leq και $A \in C$.

Το παρακάτω θεώρημα είναι τελειώς αναμενόμενο. Μια απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [14].

Θεώρημα 1.4. Έστω L μια NP -πλήρης γλώσσα. Τότε $P = NP \Leftrightarrow L \in P$.

Αυτό που μας λείπει στην πραγματικότητα το παραπάνω θεώρημα, είναι πως αν δείξουμε πως ένα πρόβλημα που μελετάμε είναι NP -πλήρες, τότε είναι μάλλον μάταιο να προσπαθήσουμε να βρούμε ντετερμινιστική λύση πολυωνυμικού χρόνου, καθώς η ύπαρξη μιας τέτοιας λύσης θα σήμαινε πως $P = NP$, κάτι που μάλλον δεν ισχύει. Ουσιαστικά, αν δείξουμε πως ένα πρόβλημα είναι NP -δύσκολο, τότε θεωρούμε πως το πρόβλημα είναι "υπολογιστικά δύσκολο για κάθε πρακτικό σκοπό, αν και δεν μπορούμε να το αποδείξουμε"[21].

Η στρατηγική που θα ακολουθούμε για να δείξουμε πως ένα πρόβλημα απόφασης A είναι NP -πλήρες είναι η εξής:

1. Δείχνουμε ότι $A \in NP$
2. Επιλέγουμε κατάλληλο γνωστό NP -πλήρες πρόβλημα A'
3. Κατασκευάζουμε μετασχηματισμό f από το P' στο P
4. Δείχνουμε πως ο f είναι πολυωνυμικού χρόνου

Ενδεικτικά αναφέρουμε τα προβλήματα Satisfiability και Vertex Cover κάποια ως κάποια από τα πιο σημαντικά NP -complete προβλήματα. Για την πλήρη λίστα των 21 θεμελιωδών προβλημάτων, όπως αυτή πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Karp, ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στο [20].

1.4 Στοιχεία Άλγεβρας

Ορισμός 1.4.1. Ομάδα $\langle G, * \rangle$ είναι ένα σύνολο G , μαζί με μια διμελή πράξη $*$ στο G , τέτοια ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική.
2. Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο ώστε $e * x = x * e = x$ για κάθε $x \in G$. Το στοιχείο e λέγεται **ταυτοτικό ή ουδέτερο** στοιχείο για την $*$ στο G .
3. $\forall a \in G$, υπάρχει στοιχείο $a' \in G$ με την ιδιότητα $a' * a = a * a' = e$. Το στοιχείο a' λέγεται **αντίστροφο** του a ως προς την πράξη $*$.

Αν επιπρόσθετα η πράξη $*$ είναι και αντιμεταθετική, τότε η ομάδα ονομάζεται **αβελιανή**.

Ορισμός 1.4.2. Ένας **δακτύλιος** $\langle R, +, \cdot \rangle$ είναι ένα σύνολο R με δύο διμελείς πράξεις $+$ και \cdot , τις οποίες αποκαλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, ορισμένες στο R έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. $\langle R, + \rangle$ είναι αβελιανή ομάδα.
2. Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός.
3. $\forall a, b, c \in R$, $a(b + c) = (ab) + (ac)$ και $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

Επιπλέον ένας δακτύλιος με πολλαπλασιαστικό ουδέτερο στοιχείο 1 , για το οποίο $1x = x1 = x \forall x \in R$, λέγεται **δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο**.

Ορισμός 1.4.3. Έστω R δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

- Ένα στοιχείο $u \in R$ λέγεται **μονάδα** του R αν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στο R .
- Αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι μονάδα, τότε ο R λέγεται **δακτύλιος διαίρεσης**.

- Ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης λέγεται **σώμα**.

Ορισμός 1.4.4. Αν για κάποιον δακτύλιο R υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $n \cdot a = 0$ για κάθε $a \in R$, τότε ο μικρότερος τέτοιος φυσικός λέγεται **χαρακτηριστική του δακτυλίου R** .

Θεώρημα 1.5. Έστω πεπερασμένο σώμα \mathcal{F} χαρακτηριστικής p (όπου p πρώτος αριθμός). Το σώμα \mathcal{F} περιέχει ακριβώς p^n στοιχεία, για κάποιον θετικό ακέραιο n .

Θεώρημα 1.6. Για κάθε δύναμη πρώτου p^n , υπάρχει ένα πεπερασμένο σώμα $GF(p^n)$ με p^n στοιχεία.

Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για περισσότερα στοιχεία πάνω στην αφηρημένη άλγεβρα καλείται να ανατρέξει στο [13].

Κεφάλαιο 2

Parametrized Complexity

2.1 Παραμετρική Πολυπλοκότητα

Στα πλαίσια της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας, όπως αυτή θεμελιώθηκε από τους Downey και Fellows στο [8], ταξινομούμε προβλήματα λαμβάνοντας υπόψιν επιπλέον παραμέτρους του προβλήματος πέραν του μήκους της εισόδου n . Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται κυρίως σε προβλήματα τα οποία δεν είναι πολυωνυμικού χρόνου ως προς το n . Θέλουμε να δείξουμε πως για κατάλληλη επιλογή μιας σταθερής παραμέτρου k , ο χρόνος εκτέλεσης μετατρέπεται σε πολυωνυμικό ως προς το n και μη-πολυωνυμικό ως προς το k (κάτι τέτοιο δεν είναι πάντα εφικτό). Για παράδειγμα, αν ο χρόνος εκτέλεσης ενός "κλασσικού" αλγορίθμου για το πρόβλημά μας είναι $\mathcal{O}(2^n)$, προσπαθούμε να φτιάξουμε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $\mathcal{O}(2^{kn})$. Ο σκοπός μας είναι να περιορίσουμε την μη-πολυωνυμική εξάρτηση σε μια σταθερά k , σημαντικά μικρότερη του n ώστε να πετύχουμε βελτίωση του χρόνου εκτέλεσης. Τυπικά:

Ορισμός 2.1.1. Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα περιγράφεται από μια τυπική γλώσσα $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$, Σ ένα πεπερασμένο αλφάβητο¹. Η δεύτερη συνιστώσα καλείται παράμετρος του προβλήματος. Ένα πρόβλημα \mathcal{L} λέμε ότι ανήκει στην κλάση των **Ευεπίλυτων Σταθερής Παραμέτρου** (*Fixed Parameter Tractable* ή *FPT*) αν μπορούμε να αποφανθούμε για το $(x, k) \in \mathcal{L}$ σε χρόνο $f(k)|x|^{\mathcal{O}(1)}$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε ότι ένα πρόβλημα ανήκει στην FPT με χρήση Πυρηνοποίησης: αντί να λύσουμε το πρόβλημα για το αρχικό στιγμιότυπο \mathcal{I} , προσπαθούμε να βρούμε τον "σκληρό πυρήνα" του προβλήματος. Ψάχνουμε ουσιαστικά ένα στιγμιότυπο \mathcal{I}' το οποίο είναι *ισοδύναμο* με το αρχικό αλλά με μέγεθος μικρότερο και φραγμένο από μια συνάρτηση της παραμέτρου. Με τον όρο *ισοδύναμο* εννοούμε πως αν βρούμε μια λύση του προβλήματος για το \mathcal{I}' , τότε μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να μετατρέψουμε την λύση αυτή σε λύση του αρχικού στιγμιότυπου. Τυπικά:

¹Γενικότερα $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}^*$, όπου χρησιμοποιούμε παραπάνω από μια παράμετρο.

Ορισμός 2.1.2. Έστω παραμετροποιημένο πρόβλημα $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$. Ορίζουμε ως **Πυρηνοποίηση (Kernelization)** του προβλήματος μια πολυωνυμικού χρόνου υπολογίσιμη απεικόνιση $K : \Sigma^* \times \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^* \times \mathbb{N}$ με $(x, k) \mapsto (x', k')$ ώστε $(x, k) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow (x', k') \in \mathcal{L}$ και $|x'|, k' \leq h(k)$, με h μια υπολογίσιμη συνάρτηση. Τα προβλήματα για τα οποία υπάρχει τέτοια απεικόνιση ονομάζονται **πυρηνοποιήσιμα**². Τέλος, αν η $h(k)$ είναι πολυωνυμικά φραγμένη, τότε η K καλείται **Πολυωνυμική Πυρηνοποίηση**.

Είναι προφανές πως η έννοια της πυρηνοποίησης είναι άμεσα συνδεδεμένη με την κλάση των FPT προβλημάτων. Το αξιοσημείωτο είναι πως αυτές οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 2.1. Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα \mathcal{L} ανήκει στην FPT αν και μόνο αν είναι πυρηνοποιήσιμο.

Απόδειξη. Ευθύ: Έστω (\mathcal{I}, k) στιγμιότυπο του \mathcal{L} , με $\mathcal{L} \in FPT \Rightarrow \exists$ αλγόριθμος \mathcal{A} ο οποίος αποφαινεται αν $(\mathcal{I}, k) \in \mathcal{L}$ σε χρόνο $f(k)|I|^c$, όπου f μια υπολογίσιμη συνάρτηση και c μια σταθερά. Για να βρούμε έναν πυρήνα του προβλήματος τρέχουμε τον \mathcal{A} με είσοδο (\mathcal{I}, k) για το πολύ $|I|^{c+1}$ βήματα. Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

1. Ο \mathcal{A} τερματίζει. Τότε, η έξοδος του \mathcal{A} θα είναι και έξοδος για το αρχικό πρόβλημα.
2. Ο \mathcal{A} δεν τερματίζει. Τότε, $f(k)|I|^c \geq |I|^{c+1} \Rightarrow f(k) \geq |I| \Rightarrow$ το $|I|$ είναι φραγμένο από μια υπολογίσιμη συνάρτηση του k και άρα έχουμε πυρήνα.

Αντίστροφο: Έστω (\mathcal{I}, k) στιγμιότυπο του \mathcal{L} και K μια πυρηνοποίηση του προβλήματος. Εκμεταλλευόμενοι την K , έχουμε ότι $(\mathcal{I}, k) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow (\mathcal{I}', k') \in \mathcal{L}$ και το $|\mathcal{I}'| \leq h(k)$. Ο χρόνο εκτέλεσης λοιπόν είναι $\mathcal{O}(h(k)) \Rightarrow \mathcal{L} \in FPT$ (με τετριμμένο τρόπο). \square

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε πως το Θεώρημα 2.1 μας προσφέρει ένα πολύ ενδιαφέρον γενικό θεωρητικό αποτέλεσμα. Ωστόσο, οι πυρήνες που προκύπτουν από τη χρήση του είναι συνήθως εκθετικού ή και χειρότερου μεγέθους. Αντιθέτως, με χρήση κατάλληλων κανόνων αναγωγής οι οποίοι να εκμεταλλεύονται να χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου προβλήματος που θέλουμε να λύσουμε, είναι συχνά εφικτό να κατασκευάσουμε πυρήνες τετραγωνικού ή ακόμα και πολυωνυμικού μεγέθους.

2.2 Πυρήνες για το Vertex Cover

Έστω γράφημα $G(V, E)$. Όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο, το πρόβλημα εύρεσης ενός καλύμματος κορυφών του G μεγέθους k , είναι NP-Complete.

²Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη πυρήνα δεν είναι δεδομένη.

Θα προσπαθήσουμε να εκμεταλλευτούμε κάποια χαρακτηριστικά του προβλήματος ώστε να γλιτώσουμε την εξαντλητική αναζήτηση της λύσης με σκοπό να καταλήξουμε σε έναν πυρήνα για το πρόβλημα.

Έστω λοιπόν στιγμιότυπο \mathcal{I} του προβλήματος $VC(G), k$. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1. Έστω κορυφή $v \in V$ με $deg(v) = 0$. Είναι προφανές ότι η $v \in VC(G)$.
2. Έστω κορυφή $v \in V$ με $deg(v) \geq k + 1$. Τότε η $v \in VC(G)$. Διαφορετικά, θα πρέπει να βάλουμε στο κάλυμμα τους $k + 1$ γείτονες της v και άρα το μέγεθος του καλύμματος θα είναι τουλάχιστον $k + 1$. Παρατηρούμε λοιπόν πως για να λύσουμε το $VC(G), k$, αρκεί να λύσουμε το $VC(G \setminus \{v\}), k - 1$ και να προσθέσουμε στο αποτέλεσμα την v . Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία μέχρι να φτάσουμε σε ένα γράφημα G' τέτοιο ώστε $\forall v \in G', deg(v) \leq k$.
3. Έστω κορυφές $v, u \in V$ και η ακμή $e(v, u)$ που τις συνδέει, με $deg(v) = 1$ και $deg(u) > 1$. Στο $VC(G)$ θα πρέπει σίγουρα να ανήκει τουλάχιστον μια από τις v, u (για να καλύπτεται η ακμή e). Είναι προφανές πως μας συμφέρει να βάλουμε την u στο $VC(G)$ αφού η κορυφή v καλύπτει μονάχα την ακμή e ενώ η u καλύπτει περισσότερες. Ομοίως με πριν, για να λύσουμε το $VC(G), k$, αρκεί να λύσουμε το $VC(G \setminus \{u\}), k - 1$ και να προσθέσουμε στο αποτέλεσμα την u . Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία μέχρι το γράφημά μας να μην περιέχει κορυφές βαθμού 1.

Ουσιαστικά, οι παραπάνω διαδικασίες αποτελούν αναγωγές του στιγμιότυπου \mathcal{I} σε ένα στιγμιότυπο \mathcal{I}' μικρότερου μεγέθους. Σε αυτό το σημείο μπορούμε εύκολα να δούμε πως κάθε ακμή v για την οποία δεν έχουμε ακόμα αποφανθεί αν ανήκει ή όχι στο VC, θα έχει $2 \leq deg(v) \leq k$. Σημειώνουμε επίσης πως αν $|V(G)| \geq k^2$, είναι αδύνατο να βρούμε $VC(G)$ μεγέθους k . Τελικά, στο γράφημα G' του στιγμιότυπου \mathcal{I}' , θα έχουμε $|V(G')| \leq k^2$ και για την εύρεση ενός καλύμματος κορυφών του G' μπορούμε να ελέγξουμε όλους του δυνατούς συνδυασμούς των στοιχείων του, οι οποίοι θα είναι $\binom{k^2}{k}$. Συνεπώς, το γράφημα G' του \mathcal{I}' αποτελεί έναν πυρήνα για το πρόβλημά μας.

2.3 Το VC είναι ευεπίλυτο σταθερής παραμέτρου (Fixed Parameter Tractable)

Μια απλή παρατήρηση μας οδηγεί σε ένα ακόμα καλύτερο αποτέλεσμα:

Λήμμα 2.1. Έστω γράφημα $G(V, E)$ και $e = (v, u), e \in E(G)$ μια ακμή του G . Τότε το G έχει κάλυμμα κορυφών μεγέθους το πολύ k αν και μόνο αν ένα τουλάχιστον από τα $G \setminus \{v\}$ και $G \setminus \{u\}$ έχει κάλυμμα κορυφών μεγέθους το πολύ $k - 1$.

Η απόδειξη του λήμματος είναι σχεδόν τετριμμένη. Ουσιαστικά, το παραπάνω λήμμα μας λέει πως για κάθε ακμή, εφόσον αυτή η ακμή θα πρέπει να καλύπτεται

από το κάλυμμα, θα πρέπει αναγκαστικά τουλάχιστον ένα από τα άκρα της ακμής να ανήκουν στο κάλυμμα. Χρησιμοποιώντας λοιπόν το λήμμα, κατασκευάζουμε τον παρακάτω αλγόριθμο.

Algorithm 2.3.1 FPTVC

Require: Graph $G(V, E)$ and integer $k \geq 0$

```
1: if  $E(G) = \emptyset$  then
2:   return True
3: else if  $E(G) \neq \emptyset$  and  $k = 0$  then
4:   return False
5: end if
6: chose an arbitrary  $e \in E$ , with  $e = (v, u)$ 
7: Run FPTVC with input  $G \setminus \{v\}$ ,  $k - 1$  and output a.
8: Run FPTVC with input  $G \setminus \{u\}$ ,  $k - 1$  and output b.
9: return  $a \vee b$ 
```

Ο παραπάνω αναδρομικός αλγόριθμος ελέγχει σε κάθε βήμα αν έχουν καλυφθεί όλες οι ακμές. Σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται. Αντιθέτως, αν δεν έχουν καλυφθεί όλες οι ακμές και το $k = 0$, απορρίπτει. Διαφορετικά, επιλέγει μια τυχαία ακμή $e(v, u)$ και τρέχει αναδρομικά για τα υπογραφήματα $G \setminus \{v\}$ και $G \setminus \{u\}$. Σε αυτό το σημείο εκμεταλλευόμαστε το λήμμα 2.1. Σε κάθε κλήση της αναδρομής το k μειώνεται κατά 1 και όταν το $k = 0$ αρκεί να ελέγξουμε αν παραμένει κάποια ακμή ακάλυπτη. Συνεπώς το δέντρο της αναδρομής θα έχει ύψος το πολύ k και θα πραγματοποιηθούν συνολικά το πολύ 2^k κλήσεις της αναδρομής. Με μια καλή υλοποίηση, η κάθε κλήση της αναδρομής χρειάζεται $\mathcal{O}(kn)$ (όπου n είναι ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος). Συνολικά ο αλγόριθμος θα ολοκληρωθεί σε $\mathcal{O}(2^k kn)$ χρόνο.

Δείξαμε λοιπόν ότι το πρόβλημα ύπαρξης καλύμματος κορυφών μεγέθους k ανήκει στην FPT³. Για να κατανοήσουμε πλήρως τη σημασία του παραπάνω αποτελέσματος, έστω γράφημα $G(V, E)$ με $|V| = 10^4$ για το οποίο θέλουμε να δούμε αν υπάρχει κάλυμμα κορυφών μεγέθους $k = 10$. Ο εξαντλητικός αλγόριθμος χρειάζεται χρόνο $\mathcal{O}(kn^{k+1}) \sim 10^{45}$ ενώ ο FPT αλγόριθμος χρειάζεται χρόνο $\mathcal{O}(2^k kn) \sim 10^5$. Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε τον FPT αλγόριθμο των Jianer Chen και Iyad A. Kanj[3], ο οποίος τρέχει σε χρόνο $\mathcal{O}(1.274^k kn)$.

2.4 W-Ιεραρχία

Θα κλείσουμε το παρών κεφάλαιο με μια συνοπτική παρουσίαση της θεωρίας που έχει αναπτυχθεί προκειμένου να κατηγοριοποιήσουμε τα προβλήματα που μελετάμε στα πλαίσια της παραμετρικής πολυπλοκότητας. Από αυτή την κατηγοριο-

³Με κατάλληλη υλοποίηση, ο αλγόριθμος 2.3 μπορεί επιπλέον να επιστρέψει ένα επιθυμητό κάλυμμα κορυφών.

ποίηση έχει προκύψει η επονομαζόμενη W-ιεραρχία. Για μια πλήρη περιγραφή της ιεραρχίας αυτής, ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στο [4].

Όπως είναι αναμενόμενο, υπάρχουν προβλήματα για τα οποία δεν έχουμε ακόμα βρει κάποιον FPT αλγόριθμο. Είναι απόλυτα φυσιολογικό λοιπόν το ερώτημα αν αυτά τα προβλήματα είναι εγγενώς δύσκολα, και άρα δεν ωφελεί να συνεχίσουμε την αναζήτησή μας. Ο τρόπος με τον οποίο επιλέγουμε να προσεγγίζουμε τέτοια φαινόμενα είναι τελείως ανάλογος με τον τρόπο προσέγγισης στα πλαίσια της κλασικής παραμετρικής πολυπλοκότητας. Ορίζουμε λοιπόν την έννοια της "παραμετρικής αναγωγής".

Ορισμός 2.4.1. Έστω $A, B \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ δυο παραμετροποιημένα προβλήματα. Μια **παραμετρική αναγωγή** από το A στο B είναι ένας αλγόριθμος ο οποίος δέχεται ως είσοδο ένα στιγμιότυπο (x, k) του A και επιστρέφει ως έξοδο ένα στιγμιότυπο (x', k') του B τέτοιο ώστε:

1. το (x, k) είναι στιγμιότυπο που οδηγεί σε αποδοχή για το πρόβλημα $A \Leftrightarrow$ το (x', k') οδηγεί σε αποδοχή για το πρόβλημα B .
2. $k' \leq g(k)$ για κάποια υπολογίσιμη συνάρτηση g .
3. ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $f(k)|x|^{O(1)}$ για κάποια υπολογίσιμη συνάρτηση f .

Θεώρημα 2.2. Έστω $A, B \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ δυο παραμετροποιημένα προβλήματα. Αν υπάρχει παραμετρική αναγωγή από το A στο B και το B είναι FPT, τότε και το A είναι FPT.

Απόδειξη. Έστω (x, k) στιγμιότυπο του προβλήματος A . Η παραμετρική αναγωγή μας δίνει ένα (x', y') στιγμιότυπο του προβλήματος B σε χρόνο $f(k)|x|^{c_1}$, όπου $k' \leq g(k)$. Επίσης, ο χρόνος εκτέλεσης της αναγωγής αποτελεί ένα άνω φράγμα για το μέγεθος του καινούριου στιγμιότυπου, οπότε $|x'| \leq f(k)|x|^{c_1}$. Έστω τώρα ότι το πρόβλημα B είναι FPT. Υπάρχει συνεπώς αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα B σε χρόνο $h(k)n^{c_2}$. Μπορούμε λοιπόν να αποφανθούμε αν το (x', k') είναι ένα στιγμιότυπο του B που αποδέχεται, και αντίστοιχα αν το (x, k) είναι ένα στιγμιότυπο του A που αποδέχεται, σε χρόνο το πολύ

$$h(k')|x'|^{c_2} \leq h(g(k))(f(k)|x|^{c_1})^{c_2}$$

Αν λάβουμε υπόψιν και τον χρόνο που απαιτείται για την παραμετρική αναγωγή, ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης για το πρόβλημα A θα είναι το πολύ $f'(k)|x|^{c_1 c_2}$, όπου $f'(k) = f(k) + h(g(k))f(k)^{c_2}$ είναι μια υπολογίσιμη συνάρτηση (ως πρόσθεση και σύνθεση υπολογίσιμων συναρτήσεων). Συνεπώς το πρόβλημα A είναι FPT. \square

Σημείωση: Ο ορισμός 2.4.1 είναι αρκετά όμοιος με τον ορισμό της κλασικής πολυωνυμικής αναγωγής. Η βασική διαφοροποίηση προκύπτει από την απαίτηση η νέα παράμετρος να είναι φραγμένη από μια συνάρτηση της αρχικής παραμέτρου. Από αυτή τη διαφοροποίηση έπεται πως μια απόδειξη ότι ένα πρόβλημα είναι NP-hard δεν μας παρέχει απαραίτητα κάποια παραμετρική αναγωγή για το πρόβλημα.

Ορισμός 2.4.2. Έστω γράφημα $G(V, E)$. Ορίζουμε ως ανεξάρτητο σύνολο V' ένα σύνολο κορυφών του G τέτοιο ώστε καμία ακμή του G να μην ενώνει δυο κορυφές του V' .

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Maximum independent set ή MIS:

Είσοδος: γράφημα $G(V, E)$.

Ερώτηση: βρες το μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο του G .

Ορισμός 2.4.3. Έστω γράφημα $G(V, E)$. Ένα σύνολο $D \subseteq V$ λέγεται **dominating set** αν $N[D] = V$.

Dominating Set:

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα G , ακέραιος k .

Ερώτηση: Υπάρχει dominating set μεγέθους το πολύ k ;

Σημειώνουμε ότι το MIS είναι ένα από τα πιο γνωστά NP-hard προβλήματα. Πράγματι, έστω γράφημα $G(V, E)$ με $|V| = n$. Είναι γνωστό ότι το G έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k αν και μόνο αν έχει κάλυμμα κορυφών μεγέθους $n - k$. Συνεπώς το στιγμιότυπο (G, k) οδηγεί σε αποδοχή του προβλήματος MIS αν και μόνο αν το στιγμιότυπο $(G, n - k)$ οδηγεί σε αποδοχή του προβλήματος Vertex Cover. Έχουμε λοιπόν μια πολυωνυμική αναγωγή από το MIS στο Vertex Cover. Αυτή η αναγωγή ωστόσο δεν είναι παραμετρική. Πράγματι, το k και το n δεν συνδέονται από κάποια σχέση και συνεπώς δεν μπορούμε να βρούμε συνάρτηση g τέτοια ώστε $n - k \leq g(k)$. Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο καθώς το πρόβλημα Vertex Set είναι FPT και μια παραμετρική αναγωγή από το MIS στο Vertex Cover θα σήμαινε ότι και το MIS είναι FPT (με χρήση του θεωρήματος 2.4.1), κάτι που όπως θα δούμε παρακάτω, δεν ισχύει.

Στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας πολυπλοκότητας, τα περισσότερα NP-hard προβλήματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Αυτή η ιδιότητα διατηρείται και στα NP-complete προβλήματα. Κάτι τέτοιο ωστόσο δεν φαίνεται να ισχύει για τα παραμετροποιημένα προβλήματα για τα οποία δεν έχουμε FPT αλγόριθμο. Για παράδειγμα, το πρόβλημα Independent Set μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα Domination Set, όμως δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει παραμετρική αναγωγή από το Domination Set στο Independent Set. Συνεπώς μπορούμε να πούμε πως υπάρχει ολόκληρη ιεραρχία για αυτά τα "δύσκολα" προβλήματα στα πλαίσια της οποίας το Domination Set και το Independent Set, για παράδειγμα, ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα. Προτού προχωρήσουμε σε μια παρουσίαση της δομής αυτής, χρειαζόμαστε κάποιους βασικούς ορισμούς.

Ορισμός 2.4.4. Ορίζουμε ως **Boolean circuit** ένα κατευθυνόμενο ακυκλικό γράφημα, οι κορυφές του οποίου είναι ονοματισμένες με τον εξής τρόπο:

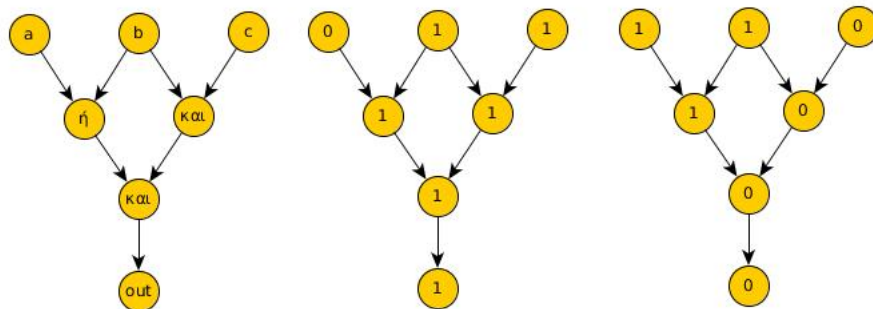
1. κάθε κόμβος με *indegree* 0 είναι ένας *input* κόμβος.

2. κάθε κόμβος με $indegree = 1$ είναι ένας negation κόμβος.
3. κάθε κόμβος με $indegree \geq 2$ είναι είτε ένας και-κόμβος, είτε ένας ή-κόμβος.

Επιπλέον, έχουμε ακριβώς έναν κόμβο με $outdegree = 0$ με την ονομασία *output* κόμβος. Θα θεωρούμε ότι ένα κόμβος είναι **μικρός** αν ο κόμβος αυτός έχει $indegree < 2$ ενώ ένας κόμβος με $indegree > 2$ θα θεωρείται **μεγάλος**. Ορίζουμε επίσης το **βάθος** του κυκλώματος να είναι το μέγιστο μήκος ενός μονοπατιού από έναν *input* κόμβο μέχρι τον *output* κόμβο. Τέλος ορίζουμε το **weight** του κυκλώματος να είναι το μέγιστο πλήθος των μεγάλων κόμβων ενός μονοπατιού από έναν *input* κόμβο μέχρι τον *output* κόμβο.

Θέτοντας τιμές 0 και 1 στους *input* κόμβους, καθορίζεται η τιμή του κάθε κόμβου με τον προφανή τρόπο. Αν μια ανάθεση τιμών στους *input* κόμβους είναι τέτοια ώστε η τιμή του *output* κόμβου να είναι 1, λέμε πως αυτή η ανάθεση **ικανοποιεί (satisfies)** το κύκλωμα. Για παράδειγμα, στο σχήμα 2.1 μπορούμε να δούμε ένα Boolean circuit καθώς και δυο διαφορετικές αναθέσεις, εκ των οποίων μονάχα η πρώτη ικανοποιεί το κύκλωμα. Είναι σχεδόν προφανές ότι το πρόβλημα απόφαν-

Σχήμα 2.1:



σης αν υπάρχει ικανοποιητική ανάθεση για ένα Boolean circuit, είναι NP-complete. Πράγματι, το πρόβλημα 3-SAT αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος αυτού. Για να ορίσουμε το αντίστοιχο παραμετροποιημένο πρόβλημα θα χρειαστούμε την έννοια του **βάρους μιας ανάθεσης** το οποίο ορίζεται ως το πλήθος των *input* κόμβων που λαμβάνουν την τιμή 1. Ορίζουμε λοιπόν το εξ πρόβλημα:

Weighted Circuit Satisfiability (WCS):

Είσοδος: Boolean circuit C , ακέραιος k .

Ερώτηση: Υπάρχει ανάθεση που να ικανοποιεί το C με βάρος ακριβώς k ;

Με μια πρώτη προσέγγιση, για σταθερό ακέραιο k , αρκεί να ελέγξουμε όλες τις δυνατές αναθέσεις βάρους k . Το πλήθος αυτών των αναθέσεων είναι $\mathcal{O}(n^k)$. Συνεπώς μπορούμε να λύσουμε το WCS σε πολυωνυμικό χρόνο για κάθε σταθερή τιμή της παραμέτρου k . Ωστόσο το πρόβλημα WCS δεν ανήκει στην FPT (έχουμε αναγωγή από το Dominating Set στο WCS).

Είμαστε πλέον έτοιμοι να δώσουμε τον ορισμό τη W-ιεραρχίας:

Ορισμός 2.4.5. (W-ιεραρχία). Για $t \geq 1$, ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα A ανήκει στην κλάση $W[t]$ αν υπάρχει παραμετρική αναγωγή από το A στο $WCD[C_{t,d}]$, για κάποιο $d \geq 1$.

Στον παραπάνω ορισμό, συμβολίσαμε με $C_{t,d}$ την κλάση των κυκλωμάτων με $\text{width} \leq t$ και βάρος $\leq d$. Επίσης, για C κλάση κυκλωμάτων, συμβολίζουμε με $WCD[C]$ τον περιορισμό του WCD για τον οποίο το κύκλωμα C της εισόδου ανήκει στην κλάση C .

Πρόταση 2.4.1. Το πρόβλημα *Independent Set* ανήκει στην $W[1]$ και μάλιστα είναι $W[1]$ -complete.

Πρόταση 2.4.2. Το πρόβλημα *Domination Set* ανήκει στην $W[2]$ και μάλιστα είναι $W[2]$ -complete.

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε πως δεν είναι σίγουρο ότι η W-ιεραρχία είναι μια γνήσια ιεραρχία. Συγκεκριμένα, έχουμε ισχυρές ενδείξεις ότι $\forall t > 1, W[t] \neq W[t + 1]$. Κάτι τέτοιο όμως δεν έχει αποδειχθεί. Αν μπορούσαμε να το δείξουμε αυτό, θα είχαμε πως $P \neq NP$. Ο αναγνώστης που θα ήθελε να ασχοληθεί περισσότερο με το συγκεκριμένο ζήτημα καλείται να ανατρέξει στο [9].

Κεφάλαιο 3

Προβλήματα Πολύχρωμων Συνιστώσων

Στο παρών κεφάλαιο θα μελετήσουμε δύο βασικά προβλήματα: το πρόβλημα εύρεσης ελάχιστων πολύχρωμων συνιστώσων σε ένα γράφημα και το πρόβλημα εύρεσης πολύχρωμων συνιστώσων με μέγιστο αριθμό ακμών στο μεταβατικό κλείσιμο ενός γραφήματος. Τα προβλήματα αυτά βρίσκουν εφαρμογές σε αρκετούς τομείς, εκ των οποίων αναφέρουμε ενδεικτικά την βιοπληροφορική. Βασικός οδηγός για την μελέτη μας αποτελεί το [7]. Έστω σύνολο χρωμάτων $C = \{c_1, \dots, c_q\}$, γράφημα $G(V, E)$ και συνάρτηση χρωματισμού $c : V \rightarrow C$, η οποία αντιστοιχεί κάθε κορυφή του G σε ένα χρώμα από το C .

Ορισμός 3.0.1. Μια συνεκτική συνιστώσα $V' \subseteq V$ καλείται **πολύχρωμη** αν $\forall v_i, v_j \in V'$ με $i \neq j$ τότε $c(v_i) \neq c(v_j)$. Εναλλακτικά η V' είναι τέτοια ώστε η $c|_{V'}$ να είναι "1-1".

Ορισμός 3.0.2. Ορίζουμε το $G'(V, E')$ ως **μεταβατικό κλείσιμο (transitive closure)** του G , όπου $E' = E \cup \{(u, v) \in V \times V \mid \exists \text{ μονοπάτι που συνδέει την } u \text{ με την } v\}$.

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $tr(G)$ για να αναφερθούμε στο μεταβατικό κλείσιμο ενός γραφήματος G .

Σημειώνουμε πως αν το G έχει t συνεκτικές συνιστώσες με n_i κορυφές η κάθε μια, το $tr(G)$ θα έχει

$$|E'| = \sum_{i=1}^t \frac{n_i(n_i - 1)}{2}$$

Ορίζουμε τα εξής προβλήματα:

Minimum Multi-Cut σε δέντρα (M-CUT-T):

Είσοδος: δέντρο $T_M(V, E)$, σύνολο κορυφών $\mathcal{T} \subseteq V$ που καλούνται τερματικά, και σύνολο S_M από ζευγάρια τερματικών.

Ερώτηση: βρες το ελάχιστο σύνολο $E' \subseteq E$ ώστε $\forall (x, y) \in S_M$, το $T_M(V, E \setminus E')$ να μην περιέχει μονοπάτι μεταξύ των x και y .

Ελάχιστες πολύχρωμες συνιστώσες (Minimum Colorful Components ή MCC):

Είσοδος: γράφημα G και συνάρτηση χρωματισμού c .

Έξοδος: βρες ένα σύνολο $E' \subseteq E$ ώστε κάθε συνεκτική συνιστώσα στο $G' = (V, E \setminus E')$ να είναι πολύχρωμη και ο αριθμός k των συνεκτικών συνιστωσών του G' να είναι ο ελάχιστος δυνατός.

Μέγιστες ακμές σε μεταβατικό κλείσιμο (Maximum Edges in Transitive Closure ή METC):

Είσοδος: γράφημα G και συνάρτηση χρωματισμού c .

Έξοδος: βρες ένα σύνολο $E' \subseteq E$ ώστε κάθε συνεκτική συνιστώσα στο $G' = (V, E \setminus E')$ να είναι πολύχρωμη και ο αριθμός k των ακμών στο μεταβατικό κλείσιμο του G' να είναι ο μεγαλύτερος δυνατός.

Τελείως ανάλογα, μπορούμε να ορίσουμε τα παραμετροποιημένα MCC και MEC, με παράμετρο το αντίστοιχο k .

3.1 Μελέτη της παραμετρικής πολυπλοκότητας του προβλήματος MCC

3.1.1 Το MCC με είσοδο δέντρο είναι FPT

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε πως το παραμετροποιημένο MCC με είσοδο δέντρο δέχεται FPT αλγόριθμο. Η απόδειξη θα γίνει με αναγωγή του MCC στο M-CUT-T. Έστω $G_T (V, E)$, c στιγμιότυπο του παραμετροποιημένου MCC, όπου G_T χρωματισμένο δέντρο και c η συνάρτηση χρωματισμού. Ορίζουμε λοιπόν (T_M, S_M) στιγμιότυπο του M-CUT-T ως εξής: $T_M = G_T$ (χωρίς τα χρώματα) και $S_M = \{(x, y) \in V \mid c(x) = c(y)\}$. Θα δείξουμε ότι αυτά τα δύο στιγμιότυπα είναι ισοδύναμα. Δηλαδή ότι δεδομένης λύσης του ενός, μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να υπολογίσουμε λύση του άλλου. Αυτό που ουσιαστικά μας οδηγεί στην παραπάνω κατασκευή είναι η παρατήρηση ότι δυο πολύχρωμες συνεκτικές συνιστώσες αναγκαστικά θα καθορίζουν δυο σύνολα κορυφών χωρίς να υπάρχουν μονοπάτια που να συνδέουν κορυφές του ενός συνόλου με το άλλο. Σε αυτό το σημείο χρειαζόμαστε το εξής λήμμα:

Λήμμα 3.1. Έστω στιγμιότυπο G_T του MCC και το αντίστοιχο στιγμιότυπο (T_M, S_M) του M-CUT-T (η κατασκευή του οποίου περιγράφεται παραπάνω). Τότε:

1. Δεδομένης λύσης του MCC με $k + 1$ συνεκτικές συνιστώσες, μπορούμε να βρούμε σε πολυωνυμικό χρόνο λύση του M-CUT-T με k ακμές και
2. Δεδομένης λύσης του M-CUT-T με k ακμές, μπορούμε να βρούμε σε πολυωνυμικό χρόνο λύση του MCC με $k + 1$ συνεκτικές συνιστώσες.

Αυτό που μας λείπει ουσιαστικά το παραπάνω λήμμα είναι πως αν μπορούμε να λύσουμε το ένα από τα δυο προβλήματα, τότε μπορούμε να λύσουμε και το άλλο.

Απόδειξη. Αρχικά, έστω $E' \subseteq E$ λύση για το MCC με $|E'| = k$. Έστω επίσης ότι το $G' = (V, E \setminus E')$ αποτελείται από $k + 1$ συνεκτικές συνιστώσες. Τότε, αυτό ακριβώς το E' αποτελεί και λύση για το M-CUT-T πάνω στο (T_M, S_M) . Πράγματι, είναι σχετικά εύκολο να δούμε πως $\forall (x, y) \in S_M, c(y) = c(x)$ (εξ' ορισμού του S_M) και άρα οι x και y θα ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες μετά την διαγραφή των ακμών του E' .

Αντίστροφα, έστω λύση E' του M-CUT-T για το T_M, S_M , με $|E'| = k$. Τότε, με την αφαίρεση των ακμών του E' από το G_T σχηματίζονται $k + 1$ συνεκτικές συνιστώσες. Παρατηρούμε πως εφόσον το E' είναι λύση για το M-CUT-T, η διαγραφή των στοιχείων του θα χωρίσει όλα τα ζευγάρια x, y για τα οποία $c(x) = c(y)$ και συνεπώς οι συνεκτικές συνιστώσες που σχηματίζονται θα είναι πολύχρωμες. \square

Είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.1. *Έστω το πρόβλημα MCC με είσοδο το (G, c) όπου το G είναι δέντρο. Τότε το πρόβλημα λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}^*(1.554^k)^1$, όπου k είναι η φυσιολογική παράμετρος. Επίσης υπάρχει 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα.*

Απόδειξη. Η λύση του προβλήματος M-CUT-T σε $\mathcal{O}^*(1.554^k)$ χρόνο [19], σε συνδυασμό με την πολυωνυμική αναγωγή που περιγράψαμε και το λήμμα 3.1, μας παρέχουν λύση σε $\mathcal{O}^*(1.554^k)$ χρόνο και για το MCC.

Επιπρόσθετα, έστω στιγμιότυπο $I = (G_T)$ του προβλήματος M-CUT-T, $S(I)$ μια προσέγγιση της λύσης και $OPT(I)$ η βέλτιστη λύση για το I . Από το [15] έχουμε πως $S(I) \leq 2OPT(I)$. Έστω επίσης το αντίστοιχο στιγμιότυπο $I' = (T_M, S_M)$ του MCC και $S(I'), OPT(I')$ μια προσεγγιστική και η βέλτιστη λύση αντίστοιχα για το MCC (T_M, S_M) . Με χρήση του λήμματος 3.1 έχουμε:

$$\frac{S(I')}{OPT(I')} = \frac{S(I) + 1}{OPT(I) + 1} \leq \frac{2OPT(I) + 1}{OPT(I) + 1} \leq \frac{2OPT(I) + 2}{OPT(I) + 1} = \frac{2OPT(I')}{OPT(I')}.$$

Έπεται η ύπαρξη 2-προσεγγιστικού αλγορίθμου για το πρόβλημα. \square

Θεώρημα 3.2. *Έστω το πρόβλημα MCC με είσοδο το (G, c) όπου το G είναι δέντρο. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πυρήνα του προβλήματος μεγέθους $\mathcal{O}(k^3)$ σε πολυωνυμικό χρόνο, όπου k η φυσιολογική παράμετρος του προβλήματος.*

Απόδειξη. Έστω στιγμιότυπο $(G_T, k + 1)$ του MCC καθώς και το αντίστοιχο στιγμιότυπο (T_M, k) του M-CUT-T. Το [2] μας παρέχει έναν πυρήνα μεγέθους $\mathcal{O}(k^3)$ για το M-CUT-T. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο πυρήνας του M-CUT-T μπορεί να μετατραπεί αποδοτικά σε πυρήνα για το MCC. Η ύπαρξη πυρήνα μεγέθους $\mathcal{O}(k^3)$

¹Με τον συμβολισμό \mathcal{O}^* , πέραν των σταθερών, αγνοούμε και τους πολυωνυμικούς όρους. Τυπικά $f(n) = \mathcal{O}^*(g(n))$ αν υπάρχει κάποιο πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $f(n) \leq p(n)g(n)$ για αρκετά μεγάλο n .

για το M-CUT-T συνεπάγεται πως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο (T'_M, h) του M-CUT-T με $h \leq k$, τέτοιο ώστε το M-CUT-T πάνω στο T_M να έχει λύση μεγέθους k αν και μόνο αν το M-CUT-T πάνω στο T'_M έχει λύση μεγέθους h και το πλήθος των κορυφών του T'_M είναι φραγμένο από το $\mathcal{O}(k^3)$. Χρησιμοποιώντας για άλλη μια φορά την αναγωγή που περιγράψαμε παραπάνω, μπορούμε εύκολα να δούμε πως το στιγμιότυπο $(G_T, k + 1)$ του MCC θα έχει λύση αν και μόνο αν το αντίστοιχο στιγμιότυπο (T'_G, h) του M-CUT-T έχει λύση μεγέθους h , όπου το (T'_G, h) μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο, το $h \leq k + 1$ και το πλήθος των κορυφών του T'_G είναι φραγμένο από το $\mathcal{O}(k^3)$. Έπεται λοιπόν ο επιθυμητός πυρήνας² για το πρόβλημα MCC. \square

Συνοψίζοντας έχουμε πως τα θετικά αποτελέσματα για το πρόβλημα M-CUT-T μεταφέρονται τελείως φυσιολογικά στο MCC αν περιοριστούμε σε δέντρα.

3.1.2 MCC με παράμετρο την απόσταση από ξένα μονοπάτια

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το πρόβλημα MCC είναι NP-hard ακόμα και αν περιοριστούμε σε σχετικά "απλά" γραφήματα. Για να κατανοήσουμε καλύτερα το πρόβλημα μελετάμε την περίπτωση όπου το γράφημα της εισόδου είναι ένα μονοπάτι ή είναι σχετικά "κοντά" σε σύνολο από ξένα μονοπάτια.

Θεώρημα 3.3. *Το MCC με είσοδο το (G, c) λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(n^3)$ αν το γράφημα G αποτελείται από ένα μονοπάτι, όπου n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.*

Απόδειξη. Έστω πως το γράφημα $G(V, E)$, που δίνεται ως είσοδος στο πρόβλημα, είναι ένα μονοπάτι. Αρχικά ορίζουμε το διατεταγμένο σύνολο $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ και το χρησιμοποιούμε ώστε να ονοματίσουμε τις κορυφές του γραφήματος. Στη συνέχεια, ορίζουμε το διάλυσμα M , με $M[j] =$ τον ελάχιστο αριθμό πολύχρωμων συνιστώσων μιας λύσης του MCC πάνω στις κορυφές $\{v_1, \dots, v_j\}$ του γραφήματος. Ισχύει ότι

$$M[j] = \min_{0 \leq t < j} M[t] + 1$$

όπου t τέτοιο ώστε το $\{v_{t+1}, \dots, v_n\}$ να αποτελεί μια πολύχρωμη συνιστώσα.

Ο βασικός ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει μια λύση του MCC πάνω στο G η οποία είναι περιορισμένη στις κορυφές $\{v_1, \dots, v_j\}$ και αποτελείται από h πολύχρωμες συνιστώσες αν και μόνο αν $M[j] = h$. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού θα γίνει με επαγωγή ως προς το j .

Για το ευθύ, θέλουμε να δείξουμε πως αν υπάρχει λύση του MCC πάνω στις κορυφές $\{v_1, \dots, v_j\}$ η οποία να αποτελείται από h πολύχρωμες συνιστώσες, τότε $M[j] = h$.

Έχουμε:

- Για $j = 1$, $M[1] = 1$ και συνεπώς ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής.

²Πιο τυπικά, η διαδικασία που περιγράφουμε κατασκευάζει μια *bikernelization*.

- Υποθέτουμε πως η υπόθεση ισχύει για όλα τα $t < j$. Δηλαδή, $\forall t < j$, αν υπάρχει λύση πάνω στο $\{v_1, \dots, v_t\}$ με h πολύχρωμες συνιστώσες, τότε $M[t] = h$.
- Έστω ότι υπάρχει λύση πάνω στο $\{v_1, \dots, v_j\}$ με h' πολύχρωμες συνιστώσες. Τότε, $\exists t < j : M[j] = M[t] + 1$ και το $\{v_{t+1}, \dots, v_j\}$ αποτελεί μια πολύχρωμη συνιστώσα. Όμως, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $M[t] = h$ και $h = h' - 1$. Άρα $M[j] = h' - 1 + 1 = h'$.

Για το αντίστροφο, θέλουμε να δείξουμε πως $M[j] = h \Rightarrow$ υπάρχει λύση στις κορυφές $\{v_1, \dots, v_j\}$ η οποία αποτελείται από h πολύχρωμες συνιστώσες
Έχουμε:

- Για $j = 1$, $M[1] = 1$ και συνεπώς ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής.
- Υποθέτουμε πως η υπόθεση ισχύει για όλα τα $t < j$. Δηλαδή, $\forall t < j, M[t] = h \Rightarrow \exists$ λύση του MCC πάνω στο $\{v_1, \dots, v_t\}$ με h πολύχρωμες συνιστώσες.
- Έστω ότι για $j \geq t$, $M[j] = h' \Rightarrow \exists t < j : M[j] = M[t] + 1 \Rightarrow M[t] = h' - 1$ και από την επαγωγική υπόθεση έχουμε πως υπάρχει λύση για το MCC πάνω στο $\{v_1, \dots, v_t\}$ με $h' - 1$ πολύχρωμες συνιστώσες και άρα υπάρχει και λύση για το MCC πάνω στο $\{v_1, \dots, v_j\}$ η οποία να αποτελείται από h' πολύχρωμες συνιστώσες.

Είναι σχεδόν προφανές ότι το διάνυσμα $M[n]$ αποθηκεύει την την τιμή μιας βέλτιστης λύσης του MCC με είσοδο το μονοπάτι G . Όσον αφορά τον χρόνο υπολογισμού, το διάνυσμα $M[j]$ έχει n στοιχεία όταν γεμίσει πλήρως και κάθε στοιχείο χρειάζεται $\mathcal{O}(n^2)$ χρόνο ώστε να υπολογιστεί. Συνολικά λοιπόν ο χρόνος που απαιτείται είναι $\mathcal{O}(n^3)$. \square

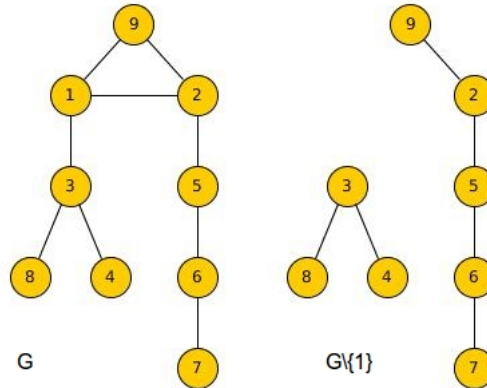
Συνεπώς έχουμε στα χέρια μας έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για το πρόβλημα MCC για την απλή περίπτωση όπου το γράφημα G τη εισόδου αποτελείται από ένα μονοπάτι. Ωστόσο, η συγκεκριμένη μορφή γραφημάτων είναι αρκετά τετριμμένη. Είναι φυσιολογικό να αναρωτηθεί κανείς τι συμβαίνει αν το γράφημα της εισόδου είναι πιο περίπλοκο. Για τον σκοπό αυτό θα εισάγουμε μια νέα παράμετρο, την απόσταση από ξένα μονοπάτια.

Ορισμός 3.1.1. Έστω γράφημα $G(V, E)$. Ορίζουμε ως **απόσταση από ξένα μονοπάτια** τον αριθμό n των ελάχιστων κορυφών που πρέπει να αφαιρέσουμε από το G ώστε να το γράφημα που θα προκύψει να αποτελείται από ξένα μεταξύ τους μονοπάτια.

Παράδειγμα: Έστω το γράφημα G του σχήματος 3.1. Παρατηρούμε πως το $G \setminus \{1\}$ αποτελείται από 2 ξένα μεταξύ τους μονοπάτια. Συνεπώς, η απόσταση του G από ξένα μονοπάτια είναι 1.

Θεώρημα 3.4. Το πρόβλημα MCC είναι NP-hard ακόμα και αν το γράφημα της εισόδου έχει απόσταση 1 από ξένα μονοπάτια.

Σχήμα 3.1:



Για την απόδειξη του παραπάνω, θα κατασκευάσουμε αναγωγή από το Min Vertex Cover (MVC) στο MCC με είσοδο δέντρο. Έστω λοιπόν ένα στιγμιότυπο $G(V, E)$ του MVC. Κατασκευάζουμε το αντίστοιχο στιγμιότυπο $G_C(V_C, E_C)$ του MCC ως εξής: αρχικά, ορίζουμε $|V|$ μονοπάτια, ένα για κάθε κορυφή του G . Το μονοπάτι P_i αποτελείται από μια κορυφή $v_{c,i}$, χρωματισμένη με το χρώμα c_i , και κορυφές $e_{c,i,j}$ για κάθε $\{v_i, v_j \in E\}$, χρωματισμένες με τα χρώματα c_{ij} . Σημειώνουμε ότι οι κορυφές $e_{c,i,j}$ εμφανίζονται με λεξικογραφική διάταξη. Επίσης, παρατηρούμε πως το χρώμα c_{ij} που εμφανίζεται στην j -οστή κορυφή του μονοπατιού P_i , ταυτίζεται με το χρώμα c_{ji} που εμφανίζεται στην i -οστή κορυφή του μονοπατιού P_j . Τέλος, ορίζουμε μια καινούρια κορυφή r , η οποία είναι χρωματισμένη με ένα καινούριο χρώμα το c_r και για κάθε μονοπάτι P_i , ενώνουμε την κορυφή c_i του μονοπατιού με κορυφή r . Σημειώνουμε ότι το γράφημα G_C που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο, θα έχει αναγκαστικά απόσταση 1 από ξένα μονοπάτια καθώς αρκεί να αφαιρέσουμε την κορυφή r ώστε να σχηματίσουμε $|V|$ το πλήθος ξένα μεταξύ τους μονοπάτια.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω κατασκευή, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο εξής:

Λήμμα 3.2. Έστω $G(V, E)$ ένα στιγμιότυπο του MVC και $G_C(V_C, E_C)$ το αντίστοιχο στιγμιότυπο του MCC. Τότε:

1. Δοσμένου καλύμματος κορυφών του G μεγέθους k , μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να βρούμε λύση του προβλήματος MCC πάνω στο στιγμιότυπο G_C η οποία να αποτελείται από $k + 1$ πολύχρωμες συνιστώσες.
2. Δοσμένης λύσης του MCC πάνω στο G_C με $k + 1$ πολύχρωμες συνιστώσες, μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να βρούμε ένα κάλυμμα του G μεγέθους k .

Απόδειξη. 1. Έστω κάλυμμα V' του G με $|V'| = k$. Μια λύση G'_C του MCC πάνω στο G_C καθορίζεται ως εξής: για κάθε κορυφή $v_i \in V'$, κόβουμε την ακμή $\{r, v_{c,i}\} \in E_C$ ώστε το μονοπάτι P_i να μετατραπεί σε μια συνεκτική

συνιστώσα αποσυνδεδεμένη από την ρίζα r . Σημειώνουμε ότι αρχικά το G_C αποτελείται από 1 συνεκτική συνιστώσα και για κάθε κορυφή του V' αυξάνουμε τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών που σχηματίζονται κατά 1. Συνεπώς, το G'_C θα αποτελείται από $k+1$ συνεκτικές συνιστώσες. Επιπλέον, αυτές οι συνεκτικές συνιστώσες θα είναι και πολύχρωμες. Πράγματι, τα μονοπάτια P_i είναι πολύχρωμα εκ κατασκευής, οπότε η μοναδική περίπτωση κάποια συνιστώσα να μην είναι πολύχρωμη, είναι να περιέχει τις κορυφές $e_{c,i,j}$ και $e_{c,j,i}$, το οποίο συνεπάγεται ότι τα μονοπάτια P_i και P_j συνδέονται με την ρίζα r . Άτοπο αφού το V' είναι κάλυμμα για το G και συνεπώς η ακμή $\{v_i, v_j\} \notin E$ (διαφορετικά θα έπρεπε να καλύπτεται και αυτή).

2. Έστω G'_C λύση του MCC πάνω στο G_C η οποία αποτελείται από $k+1$ συνεκτικές συνιστώσες. Αρχικά ορίζουμε τα μονοπάτια $P'_i = P_i \cup \{r\}$. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε την λύση G^*_C του MCC πάνω στο G_C η οποία αποτελείται από το πολύ $k+1$ συνεκτικές συνιστώσες ως εξής: για κάθε ακμή των P'_i που κόβεται ώστε να σχηματιστεί η λύση G'_C , κόβουμε από το G_C την ακμή $\{r, v_{c,i}\}$. Προφανώς, η G^*_C θα αποτελείται από το πολύ $k+1$ συνεκτικές συνιστώσες. Επιπλέον, αυτές οι συνεκτικές συνιστώσες θα είναι και πολύχρωμες. Ομοίως με πριν, τα μονοπάτια P_i είναι πολύχρωμα. Έστω λοιπόν η συνιστώσα T η οποία αποτελείται τα μονοπάτια P'_i και P'_j . Από τον τρόπο που έχουμε κατασκευάσει το G_C , θα πρέπει $\{v_i, v_j\} \in E$. Τότε όμως τόσο το P'_i όσο και το P'_j θα περιείχαν κορυφή χρωματισμένη με το ίδιο χρώμα c_{ij} , άτοπο διότι τότε η G'_C δεν θα ήταν λύση για το MCC πάνω στο G_C .

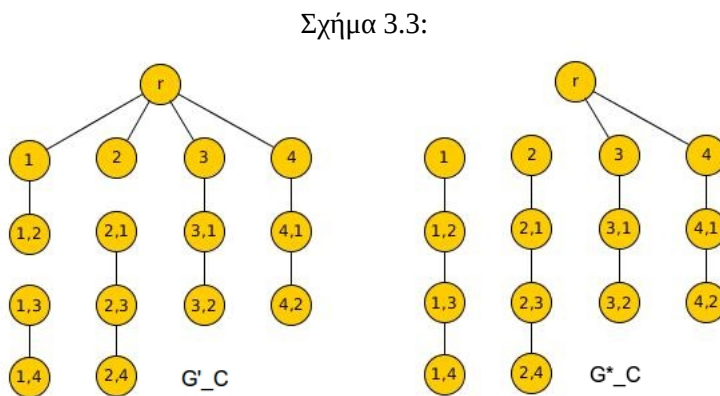
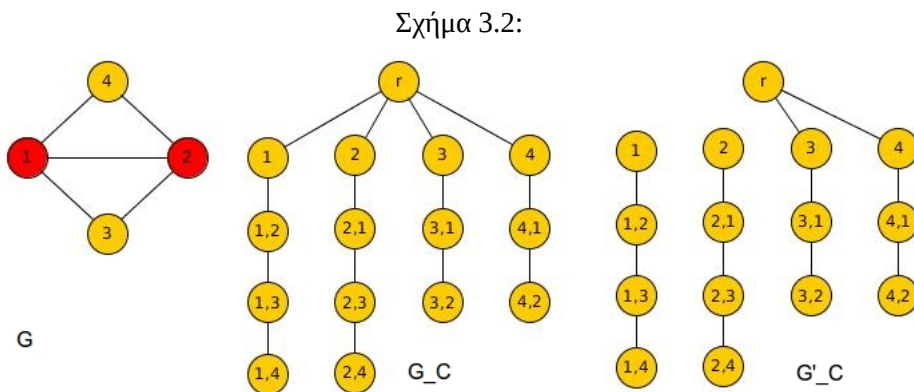
Έχοντας στα χέρια μας το G^*_C , ένα κάλυμμα μεγέθους k του G αποτελείται από τις κορυφές του G που αντιστοιχούν στις στις κορυφές του G^*_C που δεν συνδέονται με την ρίζα r .

□

Να σημειώσουμε εδώ ότι ο μετασχηματισμός της G'_C στην G^*_C είναι απαραίτητος διότι δεν υποθέτουμε πως η λύση G'_C είναι στην κατάλληλη μορφή. Στο παράδειγμα που ακολουθεί μπορούμε να δούμε μια τέτοια λύση G'_C η οποία πρέπει να μετασχηματιστεί ώστε να μπορέσει να μετατραπεί σε V' , κάλυμμα για το G .

Παράδειγμα: Στο σχήμα 3.2 βλέπουμε ένα γράφημα G και το αντίστοιχο G_C που κατασκευάζεται με τον τρόπο που περιγράψαμε. Τα ονόματα των κορυφών του G_C αναφέρονται στο χρώμα με το οποίο έχει χρωματιστεί η κάθε κορυφή. Ένα ελάχιστο κάλυμμα κορυφών για το G είναι το σύνολο $\{1, 2\}$, οπότε μια λύση G'_C του MCC στο αντίστοιχο στιγμιότυπο G_C προκύπτει αν από το G_C αφαιρέσουμε τις ακμές που συνδέουν την ρίζα r με τις κορυφές c_1 και c_2 . Επιπλέον, στο σχήμα 3.3 μπορούμε να δούμε μια λύση G'_C για το MCC πάνω στο G_C καθώς και τον μετασχηματισμό της στη λύση G^*_C η οποία μας παρέχει το επιθυμητό κάλυμμα για το G .

Για την απόδειξη του θεωρήματος 3.4, αρκεί να παρατηρήσουμε πως το γράφημα G_C που κατασκευάζουμε έχει απόσταση 1 από ξένα μονοπάτια. Το αποτέλε-



σφα έπεται φυσιολογικά από το λήμμα 3.2 και την $NP - hardness$ του προβλήματος MVC.

3.2 Μελέτη της παραμετρικής πολυπλοκότητας του προβλήματος METC

3.2.1 Πυρήνας για το METC

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την κατασκευή πυρήνα για το πρόβλημα METC. Αρχικά θα επικεντρωθούμε στην γενική περίπτωση, όπου δεν θα θέσουμε περιορισμούς στην μορφή του γραφήματος της εισόδου. Συγκεκριμένα, θα κατασκευάσουμε έναν εκθετικό πυρήνα μεγέθους $\mathcal{O}(k^2 \sqrt{k} 2^{2k+1})$ για το πρόβλημα METC με την φυσική παράμετρο k . Στη συνέχεια θα δείξουμε πως ο ίδιος πυρήνας μετατρέπεται σε πολυωνυμικό (συγκεκριμένα τετραγωνικό) αν το γράφημα της εισόδου είναι δέντρο.

Έστω λοιπόν γράφημα G και c η συνάρτηση χρωματισμού. Αρχικά υπολογίζουμε ένα Depth-First-Search (DFS) $D(V, E_D, E_B)$ του G , όπου με E_D συμβολί-

ζουμε τις προς τα κάτω ακμές και με E_D τις backward ακμές. Το D θα αποτελείται από το δέντρο $D'(V, E_D)$ και $E_B = E \setminus E_D$. Το ακόλουθο είναι ένα γνωστό αποτέλεσμα για το σύνολο E_B .

Λήμμα 3.3. Έστω γράφημα G και το αντίστοιχο DFS $D(V, E_D, E_B)$. Έστω επίσης $\{u, v\} \in E_B$. Τότε υπάρχει μονοπάτι p στο $D'(V, E_D)$ το οποίο ξεκινάει από την ρίζα του D' και περιέχει τόσο την κορυφή u όσο και την v .

Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας κάποιες απλές περιπτώσεις για τις οποίες υπάρχει λύση του METC μεγέθους τουλάχιστον k . Ορίζουμε το σύνολο $V_A = \{v \in V \mid v \text{ είναι γονιός φύλλου στο } D'\}$.

Λήμμα 3.4. Αν υπάρχει ένα μονοπάτι στο D' από την ρίζα $r(D')$ σε κάποιο φύλλο του D' με μήκος τουλάχιστον $2k$, τότε υπάρχει λύση του METC μεγέθους τουλάχιστον k .

Απόδειξη. Έστω μονοπάτι μήκους τουλάχιστον $2k$. Είναι άμεσο ότι υπάρχει ταίριασμα στο D' το οποίο αποτελείται από τουλάχιστον k ακμές. Συνεπώς, υπάρχει ταίριασμα και στο G το οποίο να αποτελείται από τουλάχιστον k ακμές το οποίο αρκεί ώστε να προσδιορίσει μια λύση του METC μεγέθους τουλάχιστον k . \square

Λήμμα 3.5. Αν $|V_A| \geq k$, τότε υπάρχει λύση του METC μεγέθους τουλάχιστον k .

Απόδειξη. Έστω $v \in V_A$. Τότε, από τον ορισμό του V_A , \exists φύλλο $l \in D'(V)$ το οποίο να συνδέεται με την v . Έστω επίσης ότι οι v, l καθορίζουν μια πολύχρωμη συνιστώσα. Έπεται άμεσα ότι υπάρχουν τουλάχιστον k πολύχρωμες συνιστώσες στο D' . Αυτές οι συνιστώσες καθορίζουν τουλάχιστον k πολύχρωμες συνιστώσες και στο G . \square

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα φύλλα του D' και τον χρωματισμό τους. Συγκεκριμένα, για κάθε $v \in V_A$, ορίζουμε το σύνολο $C_x(v) = \{l \in D'(V) \mid \text{το } l \text{ είναι φύλλο με γονιό την } v \text{ και είναι χρωματισμένο από το χρώμα } c_x\}$.

Λήμμα 3.6. Έστω κορυφή $v \in V$. Αν υπάρχουν $\sqrt{2k}$ το πλήθος μη κενά σύνολα σύνολα $C_x(v)$ με διαφορετικά μεταξύ τους χρώματα, τότε υπάρχει λύση του METC μεγέθους τουλάχιστον k .

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν $\sqrt{2k}$ μη κενά σύνολα $C_x(v)$ για διαφορετικά χρώματα. Έχουμε δηλαδή τα σύνολα $\{C_1(v), \dots, C_{\sqrt{2k}}(v)\}$ σχετιζόμενα αντίστοιχα με τα διαφορετικά μεταξύ τους χρώματα $\{c_1, \dots, c_{\sqrt{2k}}\}$. Καθορίζουμε την πολύχρωμη συνιστώσα που αποτελείται από την v και μια κορυφή για κάθε σύνολο $C_x(v)$. Είναι προφανές ότι αυτή η συνιστώσα θα αποτελείται από τουλάχιστον $\sqrt{2k} + 1$ κορυφές και από την 3 έχουμε ότι:

$$\frac{(\sqrt{2k} + 1)(\sqrt{2k} + 1 - 1)}{2} = \frac{2k + \sqrt{2k}}{2} = k + \frac{\sqrt{2k}}{2} \geq k$$

και άρα το μεταβατικό κλείσιμο της συνιστώσας θα αποτελείται από τουλάχιστον k ακμές. \square

Έστω κορυφή $v \in V_A$ και ένα σύνολο $C_x(v)$. Έστω επίσης το σύνολο των κορυφών που συνδέονται με μια $u \in C_x(v)$ μέσω κάποιας backward edge. Ορίζουμε πιο τυπικά το παραπάνω σύνολο ως: $Adj(C_x(v)) = \{V'_A \subseteq V_A \mid \{u, w\} \in E, u \in V'_A, w \in C_x(v)\}$.

Λήμμα 3.7. Έστω γράφημα G και c μια συνάρτηση χρωματισμού. Έστω επίσης ότι οι συνθήκες του λήμματος 3.4 δεν ισχύουν. Τότε, το πλήθος των πιθανών υποσυνόλων των κορυφών που άπτονται σε μια κορυφή του $C_x(v)$ είναι το πολύ 2^{2k+1} .

Απόδειξη. Από τον τρόπο με τον οποίον τις κατασκευάσαμε, κάθε κορυφή $l \in C_x(v)$ συνδέεται με μια ακριβώς κορυφή στο D' . Ισχυριζόμαστε ότι κάθε $l \in C_x(v)$ συνδέεται με το πολύ $2k+1$ κορυφές στο D . Πράγματι, έστω ότι μια κορυφή l συνδέεται με περισσότερες από $2k+1$ κορυφές στο D . Τότε θα υπάρχει μονοπάτι από την ρίζα του D στην l το οποίο θα έχει $2k$ κορυφές, τέτοιες ώστε η l να συνδέεται με αυτές τις κορυφές μέσω backward edges. Συνεπώς, θα υπάρχει στο D' μονοπάτι από την ρίζα στην l μήκους τουλάχιστον $2k$ και άρα το λήμμα 3.4 ισχύει. Συνεπώς, κάθε κορυφή $l \in C_x(v)$ θα συνδέεται με το πολύ $2k+1$ κορυφές στο D και άρα το δυναμοσύνολο του συνόλου των κορυφών που συνδέονται με μια κορυφή του $C_x(v)$ θα έχει πληθυστικότητα το πολύ 2^{2k+1} . \square

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα, μπορούμε να ορίσουμε την εξής διάταξη για τις κορυφές κάθε $C_x(v)$: $C_{x,1}(v), \dots, C_{x,p}(v)$, όπου $p \leq 2^{2k+1}$, ανάλογα με το σύνολο των κορυφών που συνδέονται με το κάθε $C_{x,i}(v)$. Δηλαδή, δυο διαφορετικές $v_1, v_2 \in C_x(v)$ θα ανήκουν στο ίδιο $C_{x,i}(v)$ αν τα σύνολα των κορυφών με τις οποίες συνδέονται οι v_1, v_2 ταυτίζονται.

Έστω τώρα ότι δεν ισχύουν οι υποθέσεις για τα λήμματα 3.4, 3.5 και 3.6. Ορίζουμε τον εξής αλγόριθμο: για κάθε σύνολο $C_{x,i}(v)$, υπολογίζουμε το σύνολο $C'_{x,i}(v)$ επιλέγοντας το πολύ k στοιχεία του $C_{x,i}(v)$ και διαγράφοντας τα υπόλοιπα. Έστω G' το γράφημα που προκύπτει όταν έχει ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία. Ισχυριζόμαστε ότι το G' περιέχει το πολύ $\mathcal{O}(k^2 2^{2k+1})$ κορυφές. Πράγματι, παρατηρούμε ότι:

- Κάθε $C'_{x,i}(v)$ περιέχει το πολύ k στοιχεία.
- Σε κάθε κορυφή v αντιστοιχούν το πολύ 2^{2k+1} σύνολα $C'_{x,i}(v)$.
- Υπάρχουν το πολύ $\sqrt{2k}$ χρώματα c_x και το πολύ k κορυφές $v \in V_A$. Συνεπώς υπάρχουν το πολύ $\mathcal{O}(k\sqrt{k})$ σύνολα $C_x(v)$.

Από τα παραπάνω έχουμε πως το G' θα περιλαμβάνει το πολύ $\mathcal{O}(k^2 \sqrt{k} 2^{2k+1})$ κορυφές από τα σύνολα $C'_{x,i}(v)$.

Έστω τώρα οι κορυφές του G' που δεν περιέχονται σε κάποιο $C'_{x,i}(v)$. Αυτές οι κορυφές αντιστοιχούν σε εσωτερικές κορυφές του D' . Εφόσον έχουμε υποθέσει πως δεν ισχύουν οι υποθέσεις του λήμματος 3.4, το βάθος του δέντρου D' θα είναι το πολύ $2k$ και εφόσον $|V_A| < k$, θα υπάρχουν το πολύ k κορυφές που να συνδέονται με φύλλα. Άρα στο D' θα υπάρχουν το πολύ k μονοπάτια μήκους $2k$ από την

ρίζα σε γονείς φύλλων και άρα οι εσωτερικές κορυφές του D' θα είναι το πολύ $2k^2$. Τελικά οι κορυφές του G' δεν περιέχονται σε κάποιο $C'_{x,i}(v)$ θα είναι το πολύ $2k^2$.

Λήμμα 3.8. Υπάρχει συλλογή από ξένες πολύχρωμες συνιστώσες V_1, \dots, V_h μεγέθους τουλάχιστον 2 στο G αν και μόνο αν υπάρχει συλλογή από ξένες πολύχρωμες συνιστώσες V'_1, \dots, V'_h στο G' , με $|V_i| = |V'_i|$ για όλα τα $1 \leq i \leq h$.

Απόδειξη. Έστω συλλογή από ξένες πολύχρωμες συνιστώσες V_1, \dots, V_h μεγέθους τουλάχιστον 2 στο G . Παρατηρούμε ότι για κάθε ένα από τα V_i , το πολύ μια κορυφή μπορεί να ανήκει σε ένα από τα σύνολα $C_{x,i}(v)$ και αν $|C_{x,i}(v)| = t \leq k$, το πολύ t πολύχρωμες συνιστώσες στο V_1, \dots, V_h μπορούν να περιέχουν κάποιο στοιχείο του $C_{x,i}(v)$.

Για να φτιάξουμε τα κατάλληλα V'_i θα εργαστούμε ως εξής: διαμερίζουμε τις κορυφές κάθε $C'_{x,i}(v)$ αναθέτοντας μια κορυφή στο V'_j αν και μόνο αν το V_j περιέχει κάποια κορυφή του $C_{x,i}(v)$. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε μια διαμέριση των εσωτερικών κορυφών του D όπως αυτή ορίζεται από την συλλογή V_1, \dots, V_h . Δηλαδή αναθέτουμε μια κορυφή u στο V'_j αν και μόνο αν $u \in V_j$.

Με την κατασκευή αυτή έχουμε εξασφαλίσει ότι τα V'_1, \dots, V'_h είναι ξένα μεταξύ τους και ότι $|V_i| = |V'_i|$ για όλα τα $1 \leq i \leq h$. Επίσης, κάθε ένα από τα V'_i είναι πολύχρωμο καθώς τα V_i είναι πολύχρωμα και οι ακμές που προσθέσαμε στα V'_i έχουν τα ίδια χρώματα με τα αντίστοιχα V_i . Μένει να δείξουμε πως τα V'_i αποτελούν όντως συνεκτικές συνιστώσες. Αρχικά παρατηρούμε ότι λόγω της DFS, τα φύλλα του D δεν είναι γειτονικά και συνδέονται μονάχα με εσωτερικές κορυφές του D . Έστω τώρα $i \in [1, h]$. Τόσο η V_i όσο και η V'_i περιέχουν τον ίδιο αριθμό υποσυνόλων εσωτερικών κορυφών του D . Πράγματι, σε κάθε κορυφή $v_i \in V_i$ αντιστοιχεί μια κορυφή $v'_i \in V'_i$ η οποία είναι συνδεδεμένη με το ίδιο σύνολο κορυφών του D . Συνεπώς, το γεγονός ότι η V_i είναι συνεκτική συνιστώσα, μας εξασφαλίζει ότι και η V'_i θα είναι συνεκτική συνιστώσα. \square

Είμαστε έτοιμοι για το βασικό θεώρημα της παρούσας παραγράφου:

Θεώρημα 3.5. Υπάρχει πυρήνας μεγέθους $\mathcal{O}(k^2 \sqrt{k} 2^{2k+1})$ για το πρόβλημα METC.

Απόδειξη. Έστω το γράφημα G' όπως αυτό κατασκευάστηκε πιο πάνω. Λόγω των λημμάτων 3.4 και 3.5, το G' θα περιέχει το πολύ k^2 εσωτερικές κορυφές του D . Επίσης λόγω των λημμάτων 3.6 και 3.7, το G' θα περιέχει το πολύ $\mathcal{O}(k \sqrt{k} 2^{2k+1})$ σύνολα $C_{x,i}(v)$, το καθένα μεγέθους το πολύ k . Συνολικά λοιπόν, το G' θα περιέχει το πολύ $\mathcal{O}(k^2 \sqrt{k} 2^{2k+1})$ κορυφές. Τέλος, το λήμμα 3.8 μας εξασφαλίζει ότι κάθε λύση του METC με είσοδο ένα γράφημα G , μπορεί να υπολογιστεί ως λύση του METC με είσοδο το γράφημα G' . \square

Σημείωση: Ο πυρήνας που προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **εκθετικός** πυρήνας. Η ύπαρξη αυτού του πυρήνα είναι αρκετή ώστε να μας εξασφαλίσει ότι το πρόβλημα METC ανήκει στην FPT. Όπως είναι αναμενόμενο, ένας πολυωνυμικός πυρήνας θα ήταν προτιμότερος. Κάτι τέτοιο δεν είναι σίγουρο αν είναι εφικτό για την γενική περίπτωση. Ωστόσο, μπορούμε να κατασκευάσουμε

τετραγωνικό πυρήνα για την ειδική περίπτωση όπου το γράφημα G της εισόδου είναι δέντρο.

Θεώρημα 3.6. Υπάρχει πυρήνας μεγέθους $\mathcal{O}(k^2)$ για το πρόβλημα METC με είσοδο δέντρο.

Απόδειξη. Έστω το δέντρο $G_T(V, E)$ και c η συνάρτηση χρωματισμού του. Στο εξής θα συμβολίζουμε με $r(G)$ την ρίζα του G_T . Αρχικά παρατηρούμε ότι η δενδρική δομή του G_T δεν επηρεάζει καθόλου τα λήμματα 3.4, 3.5 και 3.6. Έστω φύλλο $u \in V$ και $v \in V$ ο γονιός του. Εφόσον το G_T είναι δέντρο, η u θα ανήκει σε μια συνεκτική συνιστώσα μεγέθους τουλάχιστον 2 μονάχα όταν η u και η v ανήκουν στην ίδια συνιστώσα. Επίσης, από τα φύλλα που έχουν το ίδιο χρώμα c_x και τον ίδιο γονέα u , μόνο ένα μπορεί να ανήκει σε πολύχρωμη συνιστώσα μεγέθους τουλάχιστον 2. Συνεπώς, για να φτιάξουμε το γράφημα G'_T θα εργαστούμε ως εξής: για κάθε $v \in V_A$, ορίζουμε ως $C_x(v)$ το σύνολο των φύλλων που είναι χρωματισμένα με το ίδιο χρώμα c_x και έχουν για γονιό την κορυφή v . Στην συνέχεια, $\forall v \in V_A$ αφαιρούμε από το $C_x(v)$ όλες τις κορυφές εκτός από μια. Ορίζουμε το δέντρο που προκύπτει ως G'_T .

Αυτό το G'_T είναι και ο επιθυμητός πυρήνας. Πράγματι, τελείως ανάλογα με το λήμμα 3.8, έχουμε πως υπάρχει συλλογή από ξένες πολύχρωμες συνιστώσες V_1, \dots, V_h μεγέθους τουλάχιστον 2 στο G_T αν και μόνο αν υπάρχει συλλογή από ξένες πολύχρωμες συνιστώσες V'_1, \dots, V'_h στο G'_T με $|V_i| = |V'_i|$ για όλα τα $1 \leq i \leq h$. Η απόδειξη αυτού είναι όμοια με την απόδειξη του λήμματος 3.8.

Τέλος, από τα λήμματα 3.4 και 3.5 το δέντρο G'_T θα περιέχει το πολύ k^2 εσωτερικές κορυφές. Επίσης, από το λήμμα 3.6 έχουμε ότι θα υπάρχουν το πολύ $\mathcal{O}(k\sqrt{k})$ σύνολα $C_{x,i}(v)$, το καθένα μεγέθους το πολύ 1. Συνολικά λοιπόν το G'_T θα έχει $\mathcal{O}(k^2)$ κορυφές. \square

3.2.2 METC με παράμετρο την απόσταση από ξένα μονοπάτια

Στην παρούσα παράγραφο θα δείξουμε πως το πρόβλημα METC είναι NP-hard ακόμα και αν περιοριστούμε σε γραφήματα με απόσταση 1 από ξένα μονοπάτια. Ο τρόπος μελέτης και τα αποτελέσματα είναι όμοια με την παράγραφο 3.1.2

Θεώρημα 3.7. Το METC με είσοδο το (G, c) λύνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(n^3)$ αν το γράφημα G αποτελείται από ένα μονοπάτι, όπου n ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος.

Απόδειξη. Έστω πως το γράφημα $G(V, E)$, που δίνεται ως είσοδος στο πρόβλημα, είναι ένα μονοπάτι. Όμοια με τον αντίστοιχο αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για το MCC με είσοδο μονοπάτι, ονοματίζουμε τις κορυφές του G με το διατεταγμένο σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\}$ και ορίζουμε το διάνυσμα M με $M[j] =$ τον ελάχιστο αριθμό πολύχρωμων συνιστωσών μιας λύσης του METC πάνω στις κορυφές $\{v_1, \dots, v_j\}$ του γραφήματος G . Ισχύει ότι για $j > 1$,

$$M[j] = \min_{0 \leq t < j} M[t] + \frac{(j-t-1)(j-t)}{2}$$

όπου t τέτοιο ώστε το $\{v_{t+1}, \dots, v_n\}$ να αποτελεί μια πολύχρωμη συνιστώσα.

Ο βασικός ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει μια λύση G' του METC πάνω στο γράφημα G η οποία είναι περιορισμένη στις κορυφές $\{v_1, \dots, v_j\}$ με $|tr(G')| = h$ ³ αν και μόνο αν $M[j] = h$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς το j .

Για το ευθύ, έστω ότι υπάρχει λύση G' του METC πάνω στις κορυφές $\{v_1, \dots, v_j\}$ με $|tr(G')| = h$. Αρκεί να δείξουμε ότι $M[j] = h$.

Έχουμε:

- Για $j = 2$, $M[2] = 1$.
- Υποθέτουμε πως η υπόθεση ισχύει για όλα τα $t < j$. Δηλαδή, $\forall t < j$, αν υπάρχει λύση G_t πάνω στο $\{v_1, \dots, v_t\}$ με $|cl(G_t)| = h$, τότε $M[t] = h$.
- Έστω τώρα λύση G_j πάνω στο $\{v_1, \dots, v_j\}$ με $|cl(G_j)| = h'$. Τότε, $\exists t < j : M[j] = M[t] + \frac{(j-t-1)(j-t)}{2}$. Σημειώνουμε ότι το $\{v_{t+1}, \dots, v_j\}$ αποτελεί μια συνεκτική συνιστώσα. Αυτό συνεπάγεται πως $tr(\{v_{t+1}, \dots, v_j\}) = \frac{(j-t)(j-t-1)}{2}$ (από τον τύπο 3). Οπότε $h' = h + \frac{(j-t)(j-t-1)}{2}$. Επίσης, το $M[t] = h$. Συνεπώς, $M[j] = M[t] + \frac{(j-t-1)(j-t)}{2} \Rightarrow M[j] = h'$.

Για το αντίστροφο, θέλουμε να δείξουμε πως αν $M[j] = h$, τότε υπάρχει λύση G' του METC πάνω στο $\{v_1, \dots, v_j\}$ με $|tr(G')| = h$.

Έχουμε:

- Για $j = 2$, $M[2] = 1$ και προφανώς ο ισχυρισμός είναι αληθής.
- Υποθέτουμε πως η υπόθεση ισχύει για όλα τα $t < j$. Δηλαδή, $\forall t < j$, $M[t] = h \Rightarrow$ λύση G_t του METC πάνω στο $\{v_1, \dots, v_t\}$ με $|tr(G_t)| = h$.
- Έστω ότι για $t \geq j$, $M[j] = h' \Rightarrow \exists t < j : M[j] = M[t] + \frac{(j-t-1)(j-t)}{2} \Rightarrow M[t] = h' - \frac{(j-t-1)(j-t)}{2}$ και από την επαγωγική υπόθεση έχουμε πως υπάρχει λύση G_t του METC πάνω στο $\{v_1, \dots, v_t\}$ με $|tr(G_t)| = h' - \frac{(j-t-1)(j-t)}{2}$ και άρα υπάρχει λύση G_j του METC πάνω στο $\{v_1, \dots, v_j\}$ με $|tr(G_j)| = h'$.

Ομοίως με τον αντίστοιχο αλγόριθμο για το MCC, βλέπουμε ότι το διάνυσμα $M[n]$ αποθηκεύει μια βέλτιστη λύση για το METC με είσοδο το G_P . Για τον χρόνο υπολογισμού, το $M[j]$ έχει n στοιχεία όταν γεμίσει, καθένα από τα οποία απαιτεί $\mathcal{O}(n^2)$ χρόνο για να υπολογιστεί. Ο συνολικός χρόνος υπολογισμού λοιπόν είναι $\mathcal{O}(n^3)$. \square

Ομοίως με το MCC, το πρόβλημα METC προκύπτει NP-hard ακόμα και για σχετικά απλές κατηγορίες γραφημάτων.

Θεώρημα 3.8. Το πρόβλημα METC είναι NP-hard ακόμα και αν το γράφημα της εισόδου έχει απόσταση 1 από ξένα μονοπάτια.

³Ο συμβολισμός $|tr(G)|$ αναφέρεται στο πλήθος των ακμών του μεταβατικού κλεισίματος του G

Για την απόδειξη του παραπάνω, θα κατασκευάσουμε αναγωγή από το πρόβλημα Μέγιστου Ανεξαρτήτου Συνόλου(MIS) στο METC με είσοδο δέντρο. Προτού ξεκινήσουμε, κρίνεται σκόπιμη μια σύντομη αναφορά στο πρόβλημα MIS.

Είμαστε έτοιμο να περιγράψουμε την αναγωγή. Έστω λοιπόν $G(V, E)$, στιγμιότυπο του MIS. Κατασκευάζουμε το αντίστοιχο στιγμιότυπο $G_C(V_C, E_C)$ του METC ως εξής: αρχικά, ορίζουμε $|V|$ μονοπάτια, ένα για κάθε κορυφή του G . Το μονοπάτι P_i αποτελείται από μια κορυφή $v_{c,i}$, χρωματισμένη με το χρώμα c_i , και κορυφές $e_{c,i,j}$ για κάθε $\{v_i, v_j \in E\}$, χρωματισμένες με τα χρώματα c_{ij} . Στη συνέχεια ακολουθεί ένα μονοπάτι $P_{A,i}$ ώστε συνολικά το P_i να αποτελείται από n^3 κορυφές, η κάθε μια χρωματισμένη με το διαφορετικό χρώμα $c_{a,i}$. Σημειώνουμε ότι οι κορυφές $e_{c,i,j}$ εμφανίζονται με λεξικογραφική διάταξη. Επίσης, παρατηρούμε πως το χρώμα c_{ij} που εμφανίζεται στην j -οστή κορυφή του μονοπατιού P_i , ταυτίζεται με το χρώμα c_{ji} που εμφανίζεται στην i -οστή κορυφή του μονοπατιού P_j . Αυτές οι κορυφές του G_C αντιστοιχούν σε κορυφές $v_i, v_j \in V$ του G τέτοιες ώστε $\{v_i, v_j\} \in E$. Τέλος, ορίζουμε μια καινούρια κορυφή r , η οποία είναι χρωματισμένη με ένα καινούριο χρώμα το c_r και για κάθε μονοπάτι P_i , ενώνουμε την κορυφή c_i του μονοπατιού με κορυφή r . Σημειώνουμε ότι το γράφημα G_C που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο, θα έχει αναγκαστικά απόσταση 1 από ξένα μονοπάτια καθώς αρκεί να αφαιρέσουμε την κορυφή r ώστε να σχηματίσουμε $|V|$ το πλήθος ξένα μεταξύ τους μονοπάτια.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω κατασκευή, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο εξής:

Λήμμα 3.9. Έστω $G(V, E)$ ένα στιγμιότυπο του MIS και $G_C(V_C, E_C)$ το αντίστοιχο στιγμιότυπο του METC. Τότε:

1. Δοσμένου ανεξαρτήτου συνόλου του G μεγέθους k , μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να βρούμε λύση του προβλήματος METC πάνω στο στιγμιότυπο G_C η οποία να έχει μεταβατικό κλείσιμο μεγέθους τουλάχιστον $\frac{kn^3(kn^3+1)}{2} + (n-k)\frac{n^3(n^3-1)}{2}$.
2. Δοσμένης λύσης του METC πάνω στο G_C με η οποία να έχει μεταβατικό κλείσιμο μεγέθους $\frac{kn^3(kn^3+1)}{2} + (n-k)\frac{n^3(n^3-1)}{2}$, μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να βρούμε ένα ανεξάρτητο σύνολο του G μεγέθους τουλάχιστον k .

Απόδειξη. 1. Έστω V' ανεξάρτητο σύνολο του G με $|V'| = k$. Μια λύση G'_C του METC πάνω στο G_C καθορίζεται ως εξής: για κάθε κορυφή $v_i \in V \setminus V'$, κόβουμε την ακμή $\{r, v_{c,i}\} \in E_C$ ώστε το μονοπάτι P_i να μετατραπεί σε μια συνεκτική συνιστώσα αποσυνδεδεμένη από την ρίζα r . Σημειώνουμε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα που σχηματίζεται είναι πολύχρωμη. Πράγματι, τα μονοπάτια P_i είναι πολύχρωμα εκ κατασκευής, οπότε η μοναδική περίπτωση κάποια συνιστώσα να μην είναι πολύχρωμη, είναι να περιέχει τις κορυφές $e_{c,i,j}$ και $e_{c,j,i}$, το οποίο συνεπάγεται ότι τα μονοπάτια P_i και P_j συνδέονται με την ρίζα r και ότι $\{v_i, v_j\} \in E$. Άτοπο αφού το V' είναι ανεξάρτητο

σύνολο του G και συνεπώς η ακμή $\{v_i, v_j\} \notin E$. Επίσης, η συνεκτική συνιστώσα που περιέχει την ρίζα r θα αποτελείται από $kn^3 + 1$ κορυφές και άρα το μεταβατικό της κλείσιμο θα έχει μέγεθος τουλάχιστον $\frac{kn^3(kn^3-1)}{2}$. Επίσης οι υπόλοιπες $n - k$ συνιστώσες αποτελούνται από $\frac{n^3(n^3-1)}{2}$ ακμές. Συνολικά λοιπόν, η λύση του METC που προκύπτει θα έχει μεταβατικό κλείσιμο μεγέθους τουλάχιστον $\frac{kn^3(kn^3+1)}{2} + (n - k)\frac{n^3(n^3-1)}{2}$.

2. Έστω G'_C λύση του METC πάνω στο G_C η οποία να έχει μεταβατικό κλείσιμο μεγέθους $\frac{kn^3(kn^3+1)}{2} + (n - k)\frac{n^3(n^3-1)}{2}$. Ορίζουμε τα μονοπάτια $P'_i = P_i \cup \{r\}$ και συμβολίζουμε με K_R την συνεκτική συνιστώσα που περιέχει την ρίζα r . Έστω λοιπόν τα μονοπάτια P'_i και P'_j του G_C που αντιστοιχούν στις κορυφές v_i, v_j με $\{v_i, v_j\} \in E$. Από την κατασκευή του G_C , υπάρχει ένα χρώμα c_{ij} το οποίο εμφανίζεται και στα δύο μονοπάτια. Συνεπώς, εφόσον η K_R είναι πολύχρωμη, μια ακμή των μονοπατιών P'_i, P'_j θα πρέπει να διαγραφεί. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε ένα ανεξάρτητο σύνολο V' του G ως $V' = \{v_i | v_i \in K_R\}$.

Μένει να δείξουμε πως η K_R περιέχει τουλάχιστον k μονοπάτια P_i . Έστω ότι η K_R περιέχει h μονοπάτια P_i , με $h < k$. Τότε, η K_R θα περιέχει το πολύ $hn^3 + n^2 + 1$ κορυφές και άρα το μεταβατικό κλείσιμο της K_R θα αποτελείται από το πολύ

$$A = \frac{(hn^3 + n^2)(hn^3 + n^2 + 1)}{2} + (n - h)\frac{n^3(n^3 - 1)}{2}$$

ακμές. Όμως

$$h^2n^6 + 2hn^5 + n^4 + hn^3 + n^2 + n - h \leq h^2n^6 + hn^3 + n - h < k^2n^6 + kn^3 + n - k$$

(δεδομένου ότι $h, n, k > 0$) και άρα $A < \frac{kn^3(kn^3+1)}{2} + (n - k)\frac{n^3(n^3-1)}{2}$ το οποίο είναι άτοπο.

Έχοντας στα χέρια μας το G_C^* , ένα κάλυμμα μεγέθους k του G αποτελείται από τις κορυφές του G που αντιστοιχούν στις στις κορυφές του G_C^* που δεν συνδέονται με την ρίζα r .

□

Για την απόδειξη του θεωρήματος 3.8, αρκεί να παρατηρήσουμε πως το γράφημα G_C που κατασκευάζουμε έχει απόσταση 1 από ξένα μονοπάτια. Το αποτέλεσμα έπεται φυσιολογικά από το λήμμα 3.9 και την $NP - hardness$ του προβλήματος MVC.

Κεφάλαιο 4

Matroids

4.1 Matroids

4.1.1 Ορισμός

Μια από τις πιο συνήθεις πρακτικές των μαθηματικών είναι η αναγνώριση μοτίβων που εμφανίζονται σε, φαινομενικά τουλάχιστον, ανόμοιους τομείς, με σκοπό την δημιουργία μιας αφαιρετικής δομής. Αυτές οι δομές συνήθως παρέχουν νέα πλαίσια μέσα στα οποία μπορούν να αναπτυχθούν καινούριες θεωρίες και χρήσιμα εργαλεία.

Η θεωρία των Matroids πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Hassler Whitney (1935) [30] και αποτελεί έναν συνδυαστικό κρίκο ανάμεσα σε αρκετούς τομείς των μαθηματικών, μεταξύ των οποίων η Θεωρία Γραφημάτων και η Γραμμική Άλγεβρα. Επιπρόσθετα, εμφανίζουν μεγάλο ενδιαφέρον οι εφαρμογές της δομής αυτής στα πλαίσια της επιστήμης των υπολογιστών [17].

Ορισμός 4.1.1. Ως *Matroid* M ορίζουμε μια διάδα (E, \mathcal{I}) , όπου το E είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $\mathcal{I} \subseteq Pow(E)$ μια μη κενή συλλογή υποσυνόλων του E . Το E καλείται *θεμελιώδες σύνολο (ground set)* και το \mathcal{I} καλείται *συλλογή ανεξαρτήτων συνόλων (independent sets)*. Για την \mathcal{I} ισχύουν τα εξής αξιώματα:

- A1. Κάθε υποσύνολο ανεξάρτητου συνόλου, παραμένει ανεξάρτητο.
- A2. Έστω $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ με $|I_1| < |I_2|$. Τότε $\exists x \in I_2 \setminus I_1$ ώστε το $I_1 \cup \{x\}$ να παραμένει ανεξάρτητο.
- A3. Για $S \subseteq E$, τα μεγιστικά ανεξάρτητα υποσύνολα του S , έχουν όλα το ίδιο μέγεθος.

Τέλος θεωρούμε πως το $\{\emptyset\}$ είναι ανεξάρτητο. Συνεπώς $\mathcal{I} \neq \emptyset$.

Πρόταση 4.1.1. Τα A2 και A3 είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε πως $A2 \Rightarrow A3$. Έστω λοιπόν ότι έχουμε $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$. Έστω επίσης ότι τα I_1, I_2 είναι και μεγιστικά και ότι δεν είναι ίσοπληθικά. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πως $|I_1| < |I_2|$. Τότε θα $\exists x \in I_2 \setminus I_1$ ώστε το $I_1 \cup \{x\}$ να παραμένει ανεξάρτητο. Όμως το I_1 είναι μεγιστικό ανεξάρτητο. Άρα δεν μπορούμε να βρούμε στοιχείο η προσθήκη του οποίου να μην το καθιστά εξαρτημένο. Άτοπο.

Συνεπώς $|I_1| = |I_2|$.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε πως $A3 \Rightarrow A2$. Έστω λοιπόν $I_1, I_2 \subseteq \mathcal{I}$. Θετούμε ως $S = I_1 \cup I_2$ με $|I_1| < |I_2|$. Τότε το I_1 δεν μπορεί να είναι μεγιστικό ανεξάρτητο γιατί είναι μικρότερου μεγέθους από το I_2 και από το $A3$, έχουμε πως όλα τα μεγιστικά ανεξάρτητα είναι ίσοπληθικά. Συνεπώς, μπορώ να βρώ ένα στοιχείο $x \in S \setminus I_1$ ώστε το $I_1 \cup \{x\}$ να είναι ανεξάρτητο υποσύνολο του S . Όμως έτσι όπως ορίσαμε το S , $S \setminus I_1 = I_2$. \square

4.1.2 Βασικές κατηγορίες Matroid

Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα που έχει ο ορισμός 4.1.1, είναι ότι ο μόνος περιορισμός που έχουμε για το θεμελιώδες σύνολο E είναι να είναι πεπερασμένο¹. Το γεγονός αυτό καθιστά τα Matroids αρκετά *ευέλικτα*. Ανάλογα με την φύση και το πλαίσιο του προβλήματος που θέλουμε να αντιμετωπίσουμε, μπορούμε να ορίσουμε το κατάλληλο Matroid.

Ακολουθούν κάποιες βασικές κατηγορίες Matroid:

1. Έστω διανυσματικός χώρος V πεπερασμένης διάστασης και E πεπερασμένο υποσύνολο αυτού. Ορίζουμε ως **vector matroid** το matroid με θεμελιώδες σύνολο το E και \mathcal{I} την συλλογή των υποσυνόλων του E που είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον V .
2. Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$. Ορίζουμε ως **graphic matroid** το matroid με θεμελιώδες σύνολο το E και \mathcal{I} την συλλογή όλων των $S \subseteq E$ όπου S ακυκλικό.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα παραπάνω είναι όντως matroids καθώς αποτελούν τις γενικεύσεις πάνω στις οποίες δομήθηκε η θεωρία. Μια κατασκευή που δεν είναι τόσο άμεσο από τον ορισμό ότι φτιάχνει matroids είναι η ακόλουθη:

Έστω σύνολο E με $|E| = n$ και $k \in \mathbb{N}$, με $k < n$. Ορίζουμε $U_{k,n} = (E, \mathcal{I})$ όπου \mathcal{I} αποτελείται από όλα τα $S \subseteq E$ για τα οποία $|S| \leq k$.

Πρόταση 4.1.2. Το $U_{k,n}$ είναι matroid και ονομάζεται **uniform matroid**.

Απόδειξη. Για να δείξουμε πως το $U_{k,n}$ είναι matroid αρκεί να ελέγξουμε αν ισχύουν τα αξιώματα $A1$ και $A2$.

¹Ο ορισμός επεκτείνεται και σε άπειρα θεμελιώδη σύνολα, η μελέτη των οποίων είναι αρκετά πιο σύνθετη και εμφανίζει κάποια προβλήματα. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι κάποιες βασικές έννοιες, όπως το *δικό* ενός Matroid, φαίνεται να μην γενικεύονται ικανοποιητικά.

Για το A1: Έστω $S_1, S_2 \subseteq E$ με $S_2 \subseteq S_1$ και S_1 ανεξάρτητο. Αρκεί να δείξουμε πως και το S_2 θα είναι ανεξάρτητο. Έχουμε $S_1 \in \mathcal{I} \Rightarrow |S_1| \leq k$ και $S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow |S_2| \leq |S_1| \leq k$. Άρα $|S_2| \leq k \Rightarrow S_2 \in \mathcal{I}$.

Για το A2: Έστω $S_1, S_2 \in \mathcal{I}$ με $|S_1| < |S_2|$. Αρκεί να βρούμε ένα $x \in S_2 \setminus S_1$ ώστε $S_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Έχουμε $|S_1| \leq k$ και $|S_2| \leq k$ και $|S_1| < |S_2| \Rightarrow |S_1| < k$. Άρα $\forall x \in S_2 \setminus S_1, |S_1 \cup \{x\}| < k + 1 \Rightarrow |S_1 \cup \{x\}| \leq k \Rightarrow S_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. \square

4.1.3 Ορισμοί και ιδιότητες

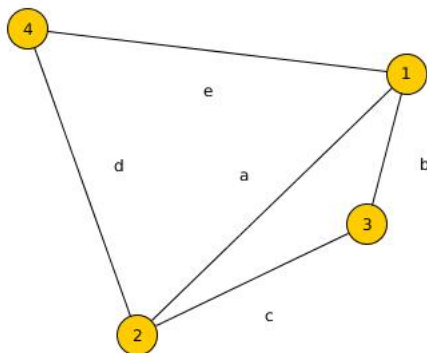
Ορισμός 4.1.2. Έστω *matroid* $M(E, \mathcal{I})$.

1. Ένα σύνολο $S \subseteq E$ ονομάζεται **εξαρτημένο** \Leftrightarrow δεν είναι ανεξάρτητο.
2. Ένα σύνολο $B \subseteq E$ ονομάζεται **βάση** του M αν είναι μεγιστικό ανεξάρτητο.
3. Ένα σύνολο $C \subseteq E$ ονομάζεται **κύκλωμα** του M αν είναι ελαχιστικό εξαρτημένο.

Όπως είναι αναμενόμενο, ορίζουμε ως **βαθμό** του M (συμβολισμός $r(M)$) το $|B|$ όπου B μια οποιαδήποτε βάση του *matroid*.

Παράδειγμα: Θα ορίσουμε το *graphic matroid* $M(E, \mathcal{I})$ που αντιστοιχεί στο

Σχήμα 4.1:



γράφημα (Σχήμα 4.1). Θεωρούμε ως θεμελιώδες σύνολο $E = \{a, b, c, d, e\}$ και $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \dots, \{a, b\}, \{a, c\}, \dots, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \dots\}$, προσέχοντας να μην συμπεριλάβουμε στο \mathcal{I} στοιχεία όπως το $\{a, b, c\}$ τα οποία αποτελούν κύκλους του γραφήματος. Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε υποσύνολο των ακμών του γραφήματος με 4 στοιχεία που να μην σχηματίζουν κύκλο. Συνεπώς, ο βαθμός του M είναι 3. Ως βάση του M μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε στοιχείο του \mathcal{I} με 3 στοιχεία (πχ το $\{d, a, b\}$) ενώ κύκλωμα οποιοδήποτε στοιχείο του $\text{Pow}(E)$ με 3 στοιχεία τα οποία να σχηματίζουν απλό κύκλο (πχ το $\{a, b, c\}$). Αξίζει να σημειώσουμε την *συμμετρία* του 4.1.2: αν πάρουμε ένα διασυνδεδετικό δέντρο του γραφήματος και προσθέσουμε μια καινούρια ακμή προκύπτει απλός

κύκλος ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που προκύπτει κύκλωμα αν σε μια βάση του matroid προσθέσουμε ένα καινούριο στοιχείο από το E .

Σημείωση: Σε κάθε matroid μπορούμε να βρούμε βάση. Αυτό είναι κάπως αναμενόμενο εφόσον οι βάσεις προκύπτουν από τα ανεξάρτητα σύνολα που είναι απαραίτητη έννοια στην θεωρία μας. Το ίδιο όμως δεν ισχύει και για τα κυκλώματα. Για παράδειγμα έστω το uniform matroid $U_{k,n}$. Είναι σχετικά εύκολο να δει κανείς πως οι βάσεις του $U_{k,n}$ είναι τα $B \subseteq E$ με $|B| = k$ και τα κυκλώματα είναι τα $C \subseteq Pow(E)$ με $|C| = k + 1$. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση όπου $k = n$ δεν μπορούμε να φτιάξουμε στοιχείο με $k + 1$ στοιχεία (γιατί δεν διαθέτουμε τόσα στοιχεία), οπότε το $U_{n,n}$ δεν έχει κυκλώματα.

Τέλος, θα ορίσουμε την πολύ σημαντική έννοια της αναπαράστασης ενός matroid.

Ορισμός 4.1.3. Έστω matroid $M(E, \mathcal{I})$ και V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα \mathcal{F} . Ορίζουμε ως **αναπαράσταση** του M μια συνάρτηση $f : E \rightarrow V$ τέτοια ώστε: $\forall A \subset E, A \in \mathcal{I} \Leftrightarrow f(A)$ γραμμικώς ανεξάρτητο. Στην περίπτωση όπου υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση, λέμε ότι το M είναι **αναπαριστώμενο** πάνω στο \mathcal{F} . Τέλος λέμε ότι ένα matroid είναι **regular** αν είναι αναπαριστώμενο πάνω σε κάθε σώμα.

4.1.4 Δυικό matroid

Μια πολύ σημαντική έννοια στην θεωρία των matroids είναι αυτή της δυικότητας. Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο αν σκεφτεί κανείς την στενή σχέση που έχουν τα matroids με τους διανυσματικούς χώρους, στην μελέτη των οποίων η δυικότητα είναι κομβικής σημασίας.

Ορισμός 4.1.4. Έστω matroid $M(E, \mathcal{I})$. Ορίζουμε το **δυικό matroid** του M (συμβολισμός M^*) ως ένα matroid πάνω στο ίδιο θεμελιώδες σύνολο E , οι βάσεις του οποίου είναι τα συμπληρώματα των βάσεων του M . Δηλαδή, αν B είναι μια βάση του M , τότε το $B^* = E \setminus B$ θα αποτελεί μια βάση για το M^* .

Ο παραπάνω ορισμός, αν και διαισθητικά απτός, δεν μας παρέχει φαινομενικά τουλάχιστον καμία εγγύηση ότι το M^* είναι όντως matroid. Για να το δείξουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε έναν εναλλακτικό ορισμό των matroids ο οποίος ορίζει τα matroids μέσω των βάσεών τους.

Ορισμός 4.1.5. Ορίζουμε ένα matroid ως ένα σύνολο E και $\mathcal{B} \subseteq Pow(E)$ μια μη κενή συλλογή υποσυνόλων του E που ονομάζεται συλλογή βάσεων. Για το \mathcal{B} ισχύουν τα εξής:

B1. Καμία βάση δεν περιέχεται σε κάποια άλλη βάση.

B2. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, τότε $\forall x \in B_1 \setminus B_2, \exists y \in B_2 \setminus B_1$ τέτοιο ώστε $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον ορισμό 4.1.1. Ορίζουμε ως **ανεξάρτητο** σύνολο κάθε σύνολο που περιέχεται

σε κάποιο $B \in \mathcal{B}$. Έστω σύνολο $B \in \mathcal{B}$ και $A \subseteq B$. Τότε το A θα είναι ανεξάρτητο και προφανώς $\forall S \subseteq A, S \subseteq B$ και άρα S ανεξάρτητο. Οπότε το A1. ισχύει.

Στη συνέχεια, έστω $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ με $|B_1| < |B_2|$. Τότε, χρησιμοποιώντας το B2., $\forall x \in B_1 \setminus B_2$ μπορούμε να βρούμε στοιχείο $y \in B_2 \setminus B_1$ ώστε $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = B_1^{(1)} \in \mathcal{B}$. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να βρούμε ένα $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $B_1^{(n)} \subseteq B$, με $B \subseteq B_2$ (η ύπαρξη αυτών εξασφαλίζεται επειδή το B_1 έχει λιγότερα στοιχεία από το B_2). Συνεπώς βρήκαμε μια βάση η οποία περιέχεται μέσα σε μια άλλη βάση, άτοπο λόγω του B1.. Δείξαμε λοιπόν ότι:

B3. Όλες οι βάσεις του M^* θα έχουν το ίδιο μέγεθος,

το οποίο είναι ισοδύναμο με το A3. και το A2. και μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί του B2..

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε πως υπάρχει μια πληθώρα διαφορετικών ισοδύναμων ορισμών των matroids [25]. Η ύπαρξη αυτών των ορισμών, οι οποίοι δεν είναι πάντα προφανές ότι είναι ισοδύναμοι, γέννησε τον όρο *κρυπτομορφισμός (cryptomorphism)*. Αυτή ακριβώς η ποικιλομορφία των ορισμών μας βοηθάει να αναγνωρίζουμε matroids καθώς η πιστοποίηση ότι μια δομή είναι matroid, μπορεί να είναι σχεδόν τετριμμένη με την χρήση ενός ορισμού αλλά πολύ δύσκολη με την χρήση κάποιου άλλου, ανάλογα με το πλαίσιο του προβλήματος.

Συγκεκριμένα, η απόδειξη ότι το αντικείμενο που ορίσαμε στον ορισμό 4.1.4 είναι όντως matroid είναι αρκετά απλή με την χρήση του ορισμού 4.1.5. Πράγματι, έστω δύο τυχαίες βάσεις B_1^*, B_2^* του $M^* \Rightarrow \exists B_1, B_2$ βάσεις του M τέτοιες ώστε $B_1^* = E \setminus B_1$ και $B_2^* = E \setminus B_2$ και εφόσον οι B_1, B_2 είναι βάσεις ενός matroid, από το B1. έχουμε ότι καμία από τις δύο δεν περιέχεται στην άλλη, ιδιότητα που μεταφέρεται και στις B_1^*, B_2^* . Άρα το B1. ισχύει για το M^* . Στη συνέχεια, έστω ότι $|B_1^*| > |B_2^*|$. Τότε $|B_2| > |B_1|$, άτοπο. Συνεπώς, όλες οι βάσεις του M^* θα έχουν το ίδιο μέγεθος. Από τα παραπάνω έπεται πως το M^* είναι όντως matroid. Τέλος, προκύπτει σχεδόν άμεσα από τον 4.1.4 ότι

$$(M^*)^* = M$$

το οποίο είναι πλήρως αναμενόμενο αν αναλογιστεί κανείς τον ορισμό και τις ιδιότητες του δυικού ενός διανυσματικού χώρου. Ακολουθούν κάποια βασικά παραδείγματα δυικών matroids:

- Έστω γράφημα $G(V, E)$ και $G^*(V^*, E^*)$ το δυικό του. Ορίζουμε το graphic matroid $M(E, \mathcal{I})$ πάνω στο G . Εξ' ορισμού, κάθε βάση του M αποτελεί ένα διασυνδεδετικό δέντρο για το G . Ομοίως, ορίζουμε το graphic matroid $M^*(E^*, \mathcal{I}^*)$ πάνω στο G^* . Είναι άμεσο πως το M^* είναι δυικό Matroid του M .
- Έστω uniform matroid $U_{k,n}$ πάνω στο σύνολο E . Οι βάσεις του U είναι τα υποσύνολα του E μεγέθους ακριβώς k . Άρα, οι βάσεις του $U_{k,n}^*$ θα είναι τα υποσύνολα του E μεγέθους $n - k$. Συνεπώς $U_{k,n}^* = U_{n-k,n}$.

4.1.5 Matroid Minors

Ορισμός 4.1.6. Έστω matroid $M(E, \mathcal{I})$. Ένα matroid $N(M', \mathcal{I}')$ καλείται **minor** του M , αν το N προκύπτει από το M με διαδοχικές πράξεις περιορισμών (restrictions) και συνενώσεων (contractions).

Για το matroid $M(E, \mathcal{I})$, οι πράξεις περιορισμού και συνένωσης ορίζονται ως εξής:

Περιορισμός: Έστω $S \subseteq E$. Ο περιορισμός $M \setminus S$ είναι ένα matroid πάνω στο S με ανεξάρτητα σύνολα τα ανεξάρτητα σύνολα του M που περιέχονται στο S .

Συνένωση: Έστω $T \subseteq E$. Η συνένωση M/T είναι ένα matroid πάνω στο $E - T$ με συλλογή ανεξαρτήτων \mathcal{I}' τέτοια ώστε $\mathcal{I}' \cup T \subseteq \mathcal{I}$.

Σημείωση: Ο ορισμός 4.1.6 των minors ενός matroid, είναι κατά κάποιον τρόπο επέκταση του ορισμού 1.2.6 των minors ενός γραφήματος. Συνεπώς είναι φυσιολογικό να αναμένουμε αποτελέσματα όμοια με το Θεώρημα 1.3. Εντούτοις, οι μόνες οικογένειες matroid για τις οποίες μπορούμε έχουμε περιγραφή μέσω απαγορευμένων minors είναι τα:

1. regular matroids
2. graphic matroids
3. binary matroids

Πιο γενικά έχει γίνει η παρακάτω υπόθεση:

Υπόθεση. (Rota): Για κάθε πεπερασμένο σώμα \mathcal{F} , η οικογένεια από matroids που μπορεί να αναπαρασταθεί πάνω στο \mathcal{F} , μπορεί να περιγραφεί από πεπερασμένο αριθμό απαγορευμένων minors.

Πρόσφατα, οι J. Geelen, B. Gerards και G. Whittle δημοσίευσαν το [16] στο οποίο παρέχουν ένα πρώτο προσχέδιο μιας απόδειξης για την παραπάνω υπόθεση. Ωστόσο μια πλήρης απόδειξη δεν έχει δημοσιευτεί ακόμα.

4.1.6 Partition Matroid

Μια σημαντική κατηγορία matroids είναι η εξής:

Ορισμός 4.1.7. Έστω συλλογή $B_i = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ ξένων ανά δύο συνόλων (δηλαδή $B_i \cap B_j = \emptyset$ για $i \neq j$), και $d_i \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq d_i \leq |B_i|$. Ορίζουμε ως **Partition Matroid** το $\mathcal{P}(B, \mathcal{I})$, όπου $B = \cup_{i=1}^n B_i$ το θεμελιώδες σύνολο και $\mathcal{I} = \{I \subseteq B \mid \forall i, |I \cap B_i| \leq d_i\}$ η συλλογή ανεξαρτήτων. Τα B_i ονομάζονται **blocks** του matroid. Τέλος, αν $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$ το matroid ονομάζεται **transversal**.

Παρατηρούμε ότι το B ορίζεται από την ένωση n ξένων ανά δύο συνόλων. Ουσιαστικά έχουμε ορίσει ένα matroid πάνω σε μια διαμέριση ενός συνόλου. Επίσης, για την κατασκευή των ανεξάρτητων συνόλων, επιλέγουμε από κάθε block n_i στοιχεία, όπου $|n_i| \leq d_i \leq |B_i|$. Είναι σχεδόν προφανές πως κάθε partition

matroid μπορεί να εκφραστεί ως το ευθύ άθροισμα από uniform matroids, ένα για κάθε block.

Εφαρμογή: Έστω διμερές γράφημα $G(U, V, E)$ όπου $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ και $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. Ορίζουμε $B_i = \{e \in E \mid \text{η ακμή } e \text{ έχει ένα άκρο στη } u_i\}$, $B = \cup B_i$, $B'_i = \{e \in E \mid \text{η ακμή } e \text{ έχει ένα άκρο στη } v_i\}$, $B' = \cup B'_i$. Στη συνέχεια ορίζουμε ως $\mathcal{B} = B \cup B'$. Τέλος, ορίζουμε τα partition matroids $\mathcal{P}_1(\mathcal{B}, \mathcal{I}_1)$ και $\mathcal{P}_2(\mathcal{B}, \mathcal{I}_2)$, όπου $\mathcal{I}_1 = \{I \subseteq B \mid I \cap B_i \leq 1, \text{ για } 1 \leq i \leq n\}$ και $\mathcal{I}_2 = \{I \subseteq B' \mid I \cap B'_i \leq 1, \text{ για } 1 \leq i \leq m\}$. Είναι προφανές πως $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ (δηλαδή το μέγιστο κοινό ανεξάρτητο σύνολο) αποτελεί ένα μέγιστο ταίριασμα για του G .

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι εύρεσης της τομής δυο matroids [22].

4.1.7 Gammoid

Ακολουθεί η μελέτη μιας κατηγορίας matroids που είναι άμεσα άμεσα συνδεδεμένη με τα transversal matroids.

Ορισμός 4.1.8. Έστω κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και $S \subseteq V$. Θα λέμε ότι ένα $T \subseteq V$ είναι **συνδεδεμένο** στο S αν $\exists |T|$ ξένα ως προς τις κορυφές μονοπάτια από το S στο T . Επίσης, για σύνολο $U \subseteq V$, μπορούμε να ορίσουμε το $\mathcal{G}(U, \mathcal{I})$, όπου το \mathcal{I} αποτελείται από όλα τα $T \subseteq U$ που είναι συνδεδεμένα στο S .

Το $\mathcal{G}(U, \mathcal{I})$ είναι matroid και ονομάζεται **Gammoid**. Επιπλέον, αν $U = V$, το $\mathcal{G}(U, \mathcal{I})$ ονομάζεται **Strict Gammoid**. Σημειώνουμε πως δεν είναι καθόλου τετριμμένο πως ένα gammoid είναι όντως matroid. Ειδικότερα, για να το δείξουμε αυτό, θα χρειαστεί να δείξουμε ότι τα gammoids ταυτίζονται με τα transversal matroids. Πιο συγκεκριμένα προκύπτει πως το δυικό ενός transversal matroid είναι gammoid.

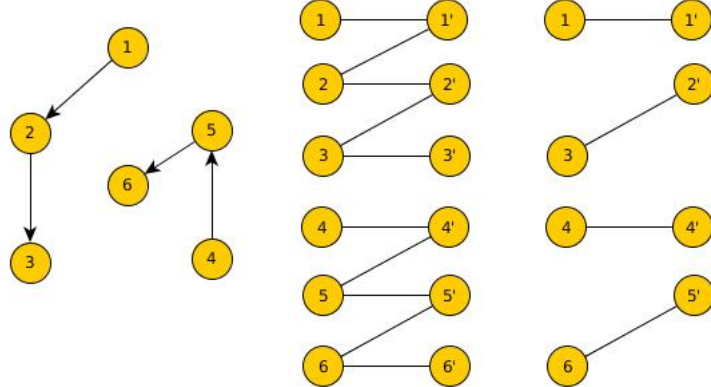
Αρχικά κατασκευάζουμε ένα διμερές γράφημα $G'(V, V', E')$ από το $G(V, E)$ ως εξής: $\forall v \in V$ φτιάχνουμε το αντίστοιχο $v' \in V'$ και $E' = \{vv' \mid v \in V\} \cup \{vu' \mid (u, v) \in E\}$. Στην ουσία αυτό που κάνουμε για να φτιάξουμε τις ακμές του G' είναι αρχικά να ενώσουμε κάθε κορυφή του V με την αντίστοιχη κορυφή του V' και στην συνέχεια να συνδέσουμε κάθε κορυφή $v \in V$ με την $u' \in V'$ αν στο αρχικό γράφημα υπάρχει κατευθυνόμενη ακμή από την u στην v . Ο στόχος αυτής της κατασκευής είναι να φτιάξουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα χωρίς να χάσουμε πληροφορία σχετικά με το ποια σύνολα κορυφών είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους στο αρχικό γράφημα. Αυτό εξασφαλίζεται με το εξής λήμμα:

Λήμμα 4.1. Έστω $S, T \subseteq V$. Τότε το S είναι συνδεδεμένο με το T στο G αν και μόνο αν υπάρχει ταίριασμα μεταξύ του $V \setminus S$ και του $V' \setminus T'$ στο G' .

Η απόδειξη του λήμματος είναι αρκετά τεχνική και παραλείπεται (ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [25]). Προτού συνεχίσουμε, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί ένα παράδειγμα εφαρμογής του λήμματος.

Παράδειγμα: Στο σχήμα 4.2 μπορούμε να δούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και το αντίστοιχο διμερές $G'(V, V', E')$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $S = \{2, 5\}$ είναι συνδεδεμένο με το $T = \{3, 6\}$. Σύμφωνα με το λήμμα λοιπόν, θα

Σχήμα 4.2:



πρέπει να υπάρχει ταίριασμα στο G' αν αφαιρέσουμε από το V το S και από το V' το T' , το οποίο ισχύει.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1. Έστω $G(V, E)$ κατευθυνόμενο γράφημα, $B_0 \subseteq V$. Τότε το $M(V, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{I} = \{B \subseteq V \mid B \text{ συνδεδεμένο με το } B_0\}$, είναι το δυικό ενός transversal matroid. Αντίστροφα, έστω matroid $M(V, \mathcal{I})$ και μια βάση B_0 αυτού. Αν το M είναι δυικό ενός transversal matroid, τότε υπάρχει κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ τέτοιο ώστε $\mathcal{I} = \{B \subseteq V \mid B \text{ συνδεδεμένο με το } B_0\}$.

Απόδειξη. Ευθύ: Έστω $G(V, E)$ κατευθυνόμενο γράφημα. Κατασκευάζουμε το αντίστοιχο διμερές $G'(V, V', E')$ (όπως προηγουμένως). Τότε, από το λήμμα 4.1, το B είναι ένα μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{I} \Leftrightarrow V \setminus B$ είναι συνδεδεμένο με το $V' \setminus B'_0$ στο G' . Έστω τώρα G'_1 το υπογράφημα του G' που προκύπτει με την διαγραφή των κορυφών του B'_0 . Τότε, το $V \setminus B$ είναι συνδεδεμένο με το $V' \setminus B'_0$ στο $G'_1 \Leftrightarrow B$ είναι μεγιστικό στοιχείο του \mathcal{I} . Όμως τα υποσύνολα του V για τα οποία υπάρχει ταίριασμα με το $V' \setminus B'_0$ είναι ακριβώς οι βάσεις ενός transversal matroid N πάνω στο σύνολο V . Συνεπώς, τα συμπληρώματα των βάσεων του N είναι τα μεγιστικά στοιχεία του \mathcal{I} και άρα το \mathcal{I} είναι η οικογένεια των ανεξαρτήτων συνόλων του N^* (με N^* συμβολίζουμε το δυικό matroid του N).

Αντίστροφο: Έστω τώρα N τυχών transversal matroid με θεμελιώδες σύνολο το V και $V \setminus B$ μια βάση αυτού. Εφαρμόζοντας μια διαδικασία κατά κάποιο τρόπο αντίστροφη της εφαρμογής στην παράγραφο 4.1.6, μπορούμε να κατασκευάσουμε διμερές γράφημα της μορφής του G' . Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε το ζητούμενο $G(V, E)$ ως το αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα του G' και χρησιμοποιώντας το λήμμα 4.1 εξασφαλίζεται ότι τα $B \subseteq V$ που είναι συνδεδεμένα με το B_0 στο G είναι ακριβώς το \mathcal{I} του matroid M , το οποίο είναι το δυικό του N . \square

Από το παραπάνω θεώρημα έπεται φυσιολογικά η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1.3. Ένα matroid είναι *strict gammoid* αν και μόνο αν είναι δυικό ενός *transversal matroid*.

4.1.8 Αναπαράσταση Matroids

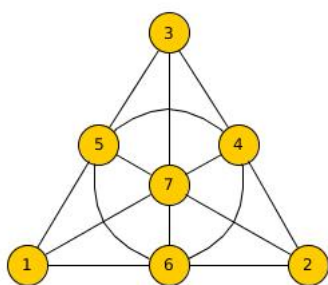
Γενικά, με χρήση μόνο του ορισμού, δεν είναι εύκολο να αποφανθούμε αν ένα matroid είναι *regular* καθώς θα πρέπει να ελέγξουμε αν μπορεί να αναπαρασταθεί πάνω σε όλα τα σώματα. Αντιθέτως, αν μπορούμε να δείξουμε ότι ένα matroid δεν είναι αναπαριστώμενο πάνω σε ένα συγκεκριμένο σώμα, μπορούμε να συμπεράνουμε πως το matroid αυτό δεν είναι *regular*. Εντούτοις, έχουμε στην διάθεσή μας το παρακάτω θεώρημα, το οποίο μας παρέχει έναν πεπερασμένο αριθμό από απαγορευμένα minors, ο αποκλεισμός των οποίων καθιστά ένα matroid *regular*.

Θεώρημα 4.2. Ένα matroid είναι *regular* αν και μόνο αν δεν περιέχει ένα από τα παρακάτω matroid ως minor:

1. $U_{4,2}$
2. *Fano Plane*
3. Το δυικό matroid του *Fano Plane*

Το θεώρημα 4.2 έπεται από την δουλειά του Tutte, η ανάλυση της οποίας ξεπερνάει τον στόχο της παρούσας εργασίας. Ο αναγνώστης που θα ήθελε να δει περισσότερες λεπτομέρειες καλείται να ανατρέξει στα [28] και [29]. Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε τον ορισμό του *Fano Plane*.

Σχήμα 4.3:



Ορισμός 4.1.9. Έστω το πεπερασμένο προβολικό επίπεδο τάξης 2, γνωστό και ως *Fano Plane*, αποτελούμενο από 7 σημεία και 7 γραμμές, ώστε κάθε 2 γραμμές να τέμνονται σε ένα σημείο και ανάμεσα σε δύο σημεία να περνάει μόνο μια γραμμή. Ορίζουμε το *Fano matroid* $F(E, \mathcal{I})$ ως εξής: το E αποτελείται από τα σημεία 7 σημεία του *Fano Plane* και $\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid \text{τα σημεία του } I \text{ δεν αποτελούν γραμμή}\}$.

Μια σχηματική απεικόνιση του παραπάνω φαίνεται στο σχήμα 4.3. Μερικά ανεξάρτητα σύνολα είναι τα $\{1, 2, 7\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχει υποσύνολο του E με περισσότερα από 3 στοιχεία που να μην περιέχει κάποια γραμμή. Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι το Fano Plane είναι αναπαριστώμενο πάνω στο σώμα 2 στοιχείων και μια αναπαράστασή του είναι η

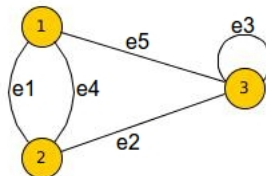
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Έστω graphic matroid $M(E, \mathcal{I})$ με $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ και $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_5\}, \{e_2, e_4\}, \{e_2, e_5\}, \{e_4, e_5\}\}$. Το αντίστοιχο γράφημα του M είναι το Σχήμα 4.4. Παρατηρούμε πως οι γραμμικές ανεξάρτητες στήλες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

είναι ακριβώς τα στοιχεία του \mathcal{I} . Συνεπώς, ο A αποτελεί μια αναπαράσταση του M πάνω στο σώμα τριών στοιχείων.

Σχήμα 4.4:



Πρόταση 4.1.4. Κάθε graphic matroid είναι αναπαριστώμενο σε κάθε σώμα.

Απόδειξη. Έστω γράφημα $G(V, E)$. Φτιάχνουμε το κατευθυνόμενο γράφημα $D(G)$ επιλέγοντας τυχαία κατεύθυνση σε κάθε ακμή. Στη συνέχεια ορίζουμε τον πίνακα

$$A_{D(G)} = [a_{ij}] \text{ με } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν από την κορυφή } i \text{ ξεκινάει η ακμή } j \\ -1 & \text{αν η ακμή } j \text{ καταλήγει στην κορυφή } i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι αν το j είναι self-loop, θεωρούμε $a_{ij} = 0, \forall i$.

Έστω τώρα τυχόν σώμα \mathcal{F} . Συμβολίζουμε με $A'_{D(G)}$ τον πίνακα που προκύπτει από τον $A_{D(G)}$ εφαρμόζοντας σε κάθε είσοδο του $A_{D(G)}$ την πράξη modulo p , όπου p η χαρακτηριστική του σώματος \mathcal{F} . Παρατηρούμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός αφήνει τον $A_{D(G)}$ αμετάβλητο $\forall p > 2$. Στην περίπτωση όπου $p = 2$ κάθε αρνητικό στοιχείο του πίνακα θα αλλάξει πρόσημο.

Αρκεί πλέον να δείξουμε πως ο πίνακας $A'_{D(G)}$ αποτελεί αναπαράσταση του $M(G)$ πάνω στο σώμα \mathcal{F} . Αρχικά θα δείξουμε πως τυχόν κύκλωμα του (G) είναι εξαρτημένο στο $M[A'_{D(G)}]$. Έστω λοιπόν C , ένας κύκλος του G . Αν το C είναι ένα loop e , τότε η αντίστοιχη στήλη του $A_{D(G)}$ είναι 0 και άρα κάθε σύνολο διανυσμάτων που περιέχει αυτή τη στήλη είναι εξαρτημένο. Επίσης το C θα αντιστοιχεί σε ένα κύκλωμα του matroid $M[A'_{D(G)}]$. Έστω τώρα ότι το C δεν είναι loop και ότι αποτελείται από τις ακμές e_1, \dots, e_k (σε κυκλική διάταξη). Έστω επίσης τα διανύσματα $\vec{v}(e_1), \dots, \vec{v}(e_k)$, τα οποία αποτελούν τις αντίστοιχες στήλες του $A'_{D(G)}$. Διαπερνάμε τον κύκλο C ξεκινώντας από την ακμή e_1 και $\forall j$ θέτουμε το a_j να είναι 1 ή -1 ανάλογα με το αν η διαπέραση συμφωνεί ή διαφωνεί με την κατεύθυνση της ακής e_j . Με αυτόν τον τρόπο έχουμε φτιάξει τα διανύσματα $a_1\vec{v}(e_1), \dots, a_k\vec{v}(e_k)$ τα οποία αποτελούν έναν επαναπροσανατολισμό του C στον οποίο κάθε μονοπάτι είναι προσανατολισμένο σύμφωνα με την κατεύθυνση της διαπέρασης. Είναι άμεσο ότι στον καινούριο προσανατολισμό του C , κάθε κορυφή του C είναι κεφαλή ακριβώς μιας ακμής και ουρά ακριβώς μιας ακμής. Συνεπώς

$$\sum_{j=1}^k a_j \vec{v}(e_j) = \vec{0}$$

και άρα ο C αποτελεί κύκλωμα του $M[A'_{D(G)}]$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως τυχόν κύκλωμα του matroid $M[A'_{D(G)}]$ είναι εξαρτημένο στο $M(G)$. Έστω λοιπόν f_1, \dots, f_m ένα κύκλωμα του $M[A'_{D(G)}]$. Αν $m = 1$, τότε το f_1 αντιστοιχεί αναγκαστικά σε loop του G και άρα το $\{f_1\}$ αποτελεί κύκλωμα του $M(G)$. Έστω τώρα ότι $m > 1$. Τότε, για τις στήλες $\vec{v}(f_1), \dots, \vec{v}(f_m)$ του $A'_{D(G)}$, θα υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ του \mathcal{F} τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \vec{v}(f_i) = \vec{0}$$

Άρα, κάθε γραμμή του πίνακα $[\vec{v}(f_1), \dots, \vec{v}(f_m)]$ που περιέχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο, θα περιέχει τουλάχιστον δύο τέτοια στοιχεία. Ας θυμηθούμε εδώ ότι οι γραμμές του πίνακα αντιστοιχούν σε κορυφές του G . Άρα στο γράφημα G_1 που καθορίζεται από το $\{f_1, \dots, f_m\}$, κάθε κορυφή θα έχει βαθμό τουλάχιστον δύο και άρα το G_1 θα πρέπει να περιέχει έναν κύκλο. Συνεπώς το $\{f_1, \dots, f_m\}$ θα περιέχει ένα κύκλωμα του $M(G)$. \square

Η έννοια της αναπαράστασης είναι καίριας σημασίας στην μελέτη των matroids καθώς μας βοηθάει να εκφράσουμε την αφηρημένη ανεξαρτησία ενός matroid συναρτήσει της πιο απτής γραμμικής ανεξαρτησίας ενός διανυσματικού χώρου. Εντούτοις δεν είναι πάντα προφανές αν ένα matroid μπορεί να αναπαρασταθεί ή όχι. Το παρακάτω αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα "μικρού" matroid που δεν είναι αναπαρασιτώμενο.

Ορισμός 4.1.10. Θα ορίσουμε το **Vamos matroid**, V_8 ως εξής: θεωρούμε θεμελιώδες σύνολο $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ και συλλογή ανεξαρτητών $\mathcal{I} =$ το κενό,

όλα τα $I \subseteq V$ με $|I| < 4$ και όλα τα $|I| = 4$ εκτός από τα: $\{A,B,C,D\}$, $\{A,B,E,Z\}$, $\{D,C,E,Z\}$, $\{A,B,G,H\}$ και $\{C,D,G,H\}$.

Σημειώνουμε ότι το V_8 είναι από τα "μικρότερα" matroids που δεν είναι αναπαρασιτώμενο.

4.2 Πράξεις και Αναπαραστάσεις

Κάθε αναπαράσταση ενός matroid είναι αλγεβρικό αντικείμενο. Το γεγονός αυτό, καθιστά την διαχείριση ενός matroid μέσω μιας αναπαράστασής του πιο προσιτή. Παρουσιάζουμε μια σειρά χρήσιμων πράξεων που μπορούμε να κάνουμε σε ένα matroid, καθώς και διαδικασίες που μας παρέχουν τρόπους να βρούμε μια αναπαράσταση του νέου matroid που σχηματίζεται. Ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στο [24] για τις πλήρεις αποδείξεις των προτάσεων που ακολουθούν.

Στις προτάσεις που ακολουθούν, θεωρούμε matroid $M(E, \mathcal{I})$ και A αναπαράσταση αυτού πάνω σε ένα σώμα \mathcal{F} .

Πρόταση 4.2.1. Έστω $\text{rank}(M) = r$. Μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να κατασκευάσουμε A' του M πάνω στο \mathcal{F} , όπου ο A' να έχει r γραμμές.

Ορισμός 4.2.1. Έστω matroids $M_1(E_1, \mathcal{I}_1)$, $M_2(E_2, \mathcal{I}_2)$. Έστω επίσης ότι $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Ορίζουμε το matroid $M'(E', \mathcal{I}')$ ως $M' = M_1 \oplus M_2$, όπου $E' = E_1 \cup E_2$ και $\mathcal{I}' = \{S \subseteq E' \mid S \cap E_1 \in \mathcal{I}_1 \text{ και } S \cap E_2 \in \mathcal{I}_2\}$.

Πρόταση 4.2.2. Έστω A_1, A_2, \dots, A_k αναπαραστάσεις των M_1, M_2, \dots, M_k πάνω στο \mathcal{F} . Μπορούμε να βρούμε μια αναπαράσταση A του $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$ σε πολυωνυμικό χρόνο κατασκευάζοντας τον A ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

Πρόταση 4.2.3. Έστω M partition matroid. Μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να κατασκευάσουμε αναπαράσταση A του M πάνω στο \mathbb{R} .

Πρόταση 4.2.4. Μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να κατασκευάσουμε A' αναπαράσταση του M^* (το M^* είναι το δυικό matroid του M).

Πρόταση 4.2.5. Έστω $X \subseteq E$. Οι αναπαραστάσεις των $M \setminus X$ και M/X κατασκευάζονται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Πρόταση 4.2.6. Έστω M το matroid που ορίζεται από γράφημα $G(V, E)$. Μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να κατασκευάσουμε αναπαράσταση A του M πάνω στο σώμα δύο στοιχείων.

Σημείωση: Τα παραπάνω αποτελέσματα μας παρέχουν αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου. Δυστυχώς, πολλές από τις πράξεις που χρησιμοποιούμε μεταξύ matroids μας αναγκάζουν να ανατρέξουμε σε μεθόδους που μας παρέχουν αναπαράσταση του αποτελέσματος με χρήση πιθανοτικών αλγορίθμων πολυωνυμικού χρόνου. Το βασικό λήμμα που εκμεταλλευόμαστε είναι το εξής:

Λήμμα 4.2. (Zippel- Schwartz)[32]: Έστω $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού d με στοιχεία από ένα σώμα \mathcal{F} και έστω $S \subseteq \mathcal{F}$ με $|S| = N$. Αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε x_i μια τυχαία τιμή από το S (με ομοιόμορφη πιθανότητα), τότε $Pr(p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0) \leq d/N$.

Για να λάβουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα από το παραπάνω λήμμα, προτιμούμε να το εφαρμόζουμε πάνω σε "μεγάλα" σώματα, ώστε το d/N να είναι μικρό. Χρειαζόμαστε λοιπόν έναν τρόπο να μετατρέπουμε αναπαραστάσεις πάνω σε τυχών "μικρά" σώματα, σε αναπαραστάσεις πάνω σε μεγαλύτερα.

Πρόταση 4.2.7. Έστω σώμα \mathcal{F} και A αναπαράσταση του M πάνω στο \mathcal{F} . Τότε, $\forall N$ έχουμε πιθανοτικό αλγόριθμο που κατασκευάζει αναπαράσταση A' του M πάνω σε σώμα \mathcal{F}' με $N \leq |\mathcal{F}'|$, ο οποίος τρέχει σε χρόνο $(\|A\| \log N)^{\mathcal{O}(1)}$.

Πρόταση 4.2.8. Έστω $\mathcal{F} = \mathbb{R}$. Μπορούμε σε τυχαίοποιημένο πολυωνυμικό χρόνο να κατασκευάσουμε μια αναπαράσταση A' του M πάνω σε πεπερασμένο σώμα \mathcal{F}' .

Ορισμός 4.2.2. Ορίζουμε το matroid $M'(E, \mathcal{I}')$ ως **k-truncation** του M , όπου ένα $S \subseteq E \in \mathcal{I}' \Leftrightarrow |S| \leq k$ και $S \subseteq \mathcal{I}$.

Πρόταση 4.2.9. Για F πεπερασμένο και k θετικό ακέραιο, μπορούμε να κατασκευάσουμε αναπαράσταση A' του k -truncation του M σε τυχαίοποιημένο πολυωνυμικό χρόνο.

Πρόταση 4.2.10. Έστω διμερές γράφημα $G(A, B; E)$ και M το transversal matroid που αντιστοιχεί στο G . Μπορούμε να κατασκευάσουμε αναπαράσταση A του M σε τυχαίοποιημένο πολυωνυμικό χρόνο.

Ορισμός 4.2.3. Έστω matroid $M(E, \mathcal{I})$ και οικογένεια $S \subseteq Pow(E)$. Θα λέμε ότι μια υποοικογένεια $S^* \subseteq S$ είναι **r-αντιπρόσωπος** της S αν ισχύει το ακόλουθο: $\forall Y \subseteq E$ με $|Y| \leq r$, αν $\exists X \in S$ με $X \cap Y = \emptyset$ και $X \cup Y \in \mathcal{I}$, τότε $\exists X^* \in S^*$ με $X^* \cap Y = \emptyset$ και $X^* \cup Y \in \mathcal{I}$.

Ουσιαστικά, αν κάποιο ανεξάρτητο σύνολο S μπορεί να επεκταθεί σε μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο με την προσθήκη r καινούριων στοιχείων, τότε \exists σύνολο στο S^* που μπορεί να επεκταθεί από τα ίδια r στοιχεία. Επίσης σημειώνουμε πως αν S^* είναι 0-αντιπρόσωπος, τότε $S^* \neq \emptyset$ αν $S \neq \emptyset$.

Λήμμα 4.3. Έστω M αναπαριστώμενο matroid με $rank(M) = r + s$ και $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ οικογένεια ανεξάρτητων συνόλων ώστε $|S_i| = s$. Αν $|\mathcal{S}| > \binom{r+s}{s}$, $\exists S \in \mathcal{S}$ ώστε $S \setminus S$ να είναι r -αντιπρόσωπος του \mathcal{S} . Επιπλέον, δεδομένης αναπαράστασης A του M , το S βρήσκεται σε χρόνο $f(r, s)(\|A\|m)^{\mathcal{O}(1)}$.

Θεώρημα 4.3. Έστω $M(E, \mathcal{I})$ αναπαριστώμενο matroid, όπου το E είναι διαμερισμένο σε σύνολα μεγέθους l . Δεδομένης αναπαράστασης A του M , μπορούμε σε $f(k, l) \|A\|^{O(1)}$ τυχαιοποιημένο χρόνο να αποφανθούμε αν υπάρχει $B \in \mathcal{I}$ το οποίο να είναι η ένωση k συνόλων της διαμέρισης.

Απόδειξη. Έστω B_i τα σύνολα της διαμέρισης του E . Αρχικά, για να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 4.3, θα μας φανεί πολύ χρήσιμο να έχουμε μια αναπαράσταση του M τα στοιχεία της οποίας θα είναι διανύσματα μεγέθους kl . Από την Πρόταση 4.2.9, μπορούμε να φτιάξουμε $M'(E, \mathcal{I}')$ kl -truncation του M σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το $\|A\|$. Έστω λοιπόν το $M'(E, \mathcal{I}')$ kl -truncation του $M \Rightarrow \forall S \subseteq E, S \in \mathcal{I}' \Leftrightarrow |S| \leq kl$ και $S \in \mathcal{I}$.

Σημείωση: $\forall B_i, |B_i| = l$. Άρα, με το $|S| \leq kl$ ουσιαστικά λέμε ότι το $|S|$ είναι το πολύ k το πλήθος τέτοια B_i . Άρα, η χρήση του A' στη θέση του A δεν θα επηρεάσει το αποτέλεσμα. Στη συνέχεια ορίζουμε τα εξής:

$$\text{Για } i = 1 : \mathcal{I}'_1 = \mathcal{I}|_{B_1}$$

$$\text{Για } i = 2 : \mathcal{I}'_2 = \mathcal{I}|_{B_1 \cup B_2}$$

.

.

.

$$\text{Για } i = k : \mathcal{I}'_k = \mathcal{I}|_{B_1 \cup \dots \cup B_k}$$

και ως $\mathcal{S}_i = \{\mathcal{I}'_1, \dots, \mathcal{I}'_i\}$. Πλέον, αρκεί να δούμε αν $\mathcal{S}_k = \emptyset$ ή όχι. Πράγματι, αν $\mathcal{S}_k = \emptyset \Rightarrow \mathcal{I}'_1 = \dots = \mathcal{I}'_k = \emptyset$ και άρα το ζητούμενο B δεν υπάρχει. Αντιθέτως, αν $\mathcal{S}_k \neq \emptyset$ τότε κάποιο ή κάποια από τα $\mathcal{I}'_i \neq \emptyset$ και μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο B . Σε αυτό το σημείο θα εκμεταλλευτούμε του Γ -αντιπρόσωπους και ειδικά την ιδιότητα ότι αν ένα \mathcal{S}^* είναι 0-αντιπρόσωπος του \mathcal{S} , τότε $\mathcal{S}^* \neq \emptyset$ αν $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Κατασκευάζουμε λοιπόν τα εξής:

$\forall i = 1, \dots, k$, φτιάχνουμε τα $\mathcal{S}_i^* \subseteq \mathcal{S}_i$ με \mathcal{S}_i^* να είναι $(k-i)l$ -αντιπρόσωπος του \mathcal{S}_i . Η επιλογή του $(k-i)l$ γίνεται ώστε στο $i = k$ να έχουμε έναν 0-αντιπρόσωπο. Πλέον το πρόβλημα έχει μεταφερθεί στο αν $\mathcal{S}_k^* = \emptyset$ ή όχι. Η κατασκευή του \mathcal{S}_k^* θα γίνει επαγωγικά:

- Θέτουμε $\mathcal{S}_1^* := \mathcal{S}_1$ (κάπως τετριμμένο καθώς κάθε σύνολο μπορεί να θεωρηθεί αντιπρόσωπος του εαυτού του).
- Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει όλα τα \mathcal{S}_i^* .
- Για να κατασκευάσουμε το \mathcal{S}_{i+1}^* , αρχικά αριθμούμε όλα τα $S \in \mathcal{S}_i^*$ και όλα τα σύνολα B της διαμέρισης. Αν $S \cap B = \emptyset$ και $S \cup B \in \mathcal{I}'$, τότε τοποθετούμε το $S \cup B$ στο \mathcal{S}_{i+1}^* (ουσιαστικά τα ελέγχουμε όλα ένα προς ένα).

Ισχυρισμός: αν \mathcal{S}_i^* είναι $(k-i)l$ -αντιπρόσωπος του \mathcal{S}_i , τότε αυτό ακριβώς το \mathcal{S}_{i+1}^* που κατασκευάζουμε με τον παραπάνω τρόπο είναι $(k-i-1)l$ -αντιπρόσωπος του \mathcal{S}_{i+1} . Πράγματι, έστω $X \in \mathcal{S}_{i+1}^*$ και Y με $|Y| = (k-i-1)l$ ώστε $X \cap Y = \emptyset$ και $X \cup Y$ ανεξάρτητο. Εξ' ορισμού, $X = \mathcal{I}'|_{B_1 \cup \dots \cup B_{i+1}}$. Έστω λοιπόν $B = \mathcal{I}'|_{B_n}$

² Δηλαδή τα ανεξάρτητα του \mathcal{I}' που προκύπτουν με την χρήση στοιχείων μόνο από το B_1 .

για κάποιο $1 \leq n \leq i + 1$, $X_0 = X \setminus B$ και $Y_0 = Y \cap B$. Μπορούμε να βρούμε $X_0^* \in \mathcal{S}_i^*$ με $X_0^* \cap Y = \emptyset$ και $X_0^* \cup Y_0$ ανεξάρτητο (ακριβώς διότι τα \mathcal{S}_i^* είναι $(k-i)l$ -αντιπρόσωποι των \mathcal{S}_i). Συνεπώς, το $X^* := X_0^* \cup B$ μπορεί να τοποθετηθεί στο \mathcal{S}_{i+1}^* και να το επεκτείνει.

Στη συνέχεια παρατηρούμε το εξής για το \mathcal{S}_i^* : αν $|\mathcal{S}_i^*| > \binom{il+(k-i)l}{il} = \binom{kl}{il}$, τότε από το Λήμμα 4.3, μπορούμε να βρούμε στοιχείο του \mathcal{S}_i^* που αν το διώξουμε, το \mathcal{S}_i^* να είναι $(k-i-1)l$ -αντιπρόσωπος του \mathcal{S}_i . Άρα $|\mathcal{S}_i^*| \leq \binom{kl}{il}$, το οποίο αποτελεί ένα φράγμα για το \mathcal{S}_i^* . Επίσης, στην κατασκευή του \mathcal{S}_{i+1}^* , οι έλεγχοι που κάνουμε είναι πολυωνυμικού χρόνου ως προς το $\|A\|$ για κάθε S μέλος του \mathcal{S}_i^* . Άρα ο συνολικός χρόνος που μας χρειάζεται είναι $f(k, l)\|A\|^{O(1)}$.

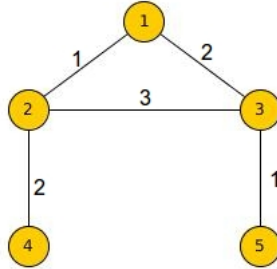
Τέλος, σημειώνουμε πως ο αλγόριθμος είναι κατασκευαστικός: όλα τα μέλη του \mathcal{S}_k^* αποτελούν λύσεις του προβλήματός μας. □

4.2.1 Εφαρμογές του Θεωρήματος 4.3

Εστω matroids $M_1(E, \mathcal{I}_1), \dots, M_l(E, \mathcal{I}_l)$ και οικογένεια $\mathcal{I} = \{A \mid A \in \cap \mathcal{I}_i\}$. Γενικά, το $M(E, \mathcal{I})$ δεν είναι πάντοτε matroid.

Παράδειγμα: Εστω το γράφημα $G(V, E)$ του σχήματος 4.5 (οι αριθμοί στις

Σχήμα 4.5:



ακμές του γραφήματος αντιστοιχούν σε χρώματα). Ορίζουμε $E_1 = \{e \in E \mid e \text{ έχει χρώμα } 1\}$, $E_2 = \{e \in E \mid e \text{ έχει χρώμα } 2\}$, $E_3 = \{e \in E \mid e \text{ έχει χρώμα } 3\}$. Προφανώς, $E = \cup E_i$ και για $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$. Συνεπώς τα E_1, E_2, E_3 αποτελούν μια διαμέριση του E . Μπορούμε να ορίσουμε τα εξής: $M_1(E, \mathcal{I}_1)$ και $M_2(E, \mathcal{I}_2)$, όπου το E αποτελείται από τις ακμές του γραφήματος, $\mathcal{I}_1 = \{S \subseteq E \mid S \text{ ακυκλικό}\}$, $\mathcal{I}_2 = \{S \subseteq E \mid \forall i, |E \cap E_i| \leq 1\}$. Παρατηρούμε ότι το M_1 είναι το graphic matroid που αντιστοιχεί στο γράφημα G και το M_2 είναι ένα transversal matroid (εκμεταλλευόμενοι την διαμέριση που ορίσαμε). Τέλος, ορίζουμε το $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$. Το (E, \mathcal{I}) δεν είναι matroid.

Απόδειξη. Έστω πως το (E, \mathcal{I}) είναι matroid. Θεωρούμε τα $S_1, S_2 \in \mathcal{I}$ με $S_1 = \{(1, 2), (1, 3)\}$ και $S_2 = \{(2, 3), (2, 4), (3, 5)\}$. Παρατηρούμε πως $|S_1| \leq |S_2|$. Από την ιδιότητα A2. των matroids, θα πρέπει να υπάρχει $e \in S_2 \setminus S_1$ ώστε $S_1 \cup$

$\{e\} \in \mathcal{I}$. Τέτοια ακμή όμως δεν υπάρχει καθώς αν $e = (2, 4)$ ή $(3, 5)$, τότε $S_1 \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_2 \Rightarrow S_1 \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ και αν $e = (2, 3)$, τότε $S_1 \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1 \Rightarrow S_1 \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$. Άτοπο. \square

Το πρόβλημα απόφασης αν το $M(E, \mathcal{I})$ σχηματίζει matroid ή όχι είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο για $l = 2$ αλλά NP-Complete για $l > 2$. Με το παρακάτω θεώρημα δείχνουμε ότι το πρόβλημα είναι randomized FPT για πεπερασμένο αριθμό αναπαριστώμενων matroids.

Θεώρημα 4.4. Έστω matroids $M_1(E, \mathcal{I}_1), \dots, M_l(E, \mathcal{I}_l)$, καθώς και A_1, \dots, A_l οι αναπαραστάσεις αυτών πάνω στο σώμα \mathcal{F} . Μπορούμε σε $f(k, l)(\sum_{i=1}^l \|A_i\|)^{\mathcal{O}(1)}$ τυχαιοποιημένο χρόνο αν αποφανθούμε αν υπάρχει σύνολο $S \subseteq E$ με $|S| = k$ και $\forall i, S \in \mathcal{I}_i$.

Θεώρημα 4.5. Έστω $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ οικογένεια υποσυνόλων του E με $|S_i| \leq l$. Τότε υπάρχει $f(k, l)n^{\mathcal{O}(1)}$ πιθανοτικός αλγόριθμος που αποφαινεται αν μπορούμε να επιλέξουμε k ζευγάρια από το \mathcal{S} ξένα ανά δύο μεταξύ τους.

Ορισμός 4.2.4. Ορίζουμε το πρόβλημα *Feedback edge set* με διανύσματα βαρών ως εξής:

Είσοδος: Γράφημα $G(V, E)$, διάνυσμα $x_e \in [0, 1, \dots, m]^l \forall e \in E$, διάνυσμα $\mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+^l$ και ακέραιος k .

Ερώτηση: Βρες ένα *feedback edge set* X με $|X| \leq k$ και $\sum_{e \in X} \leq \mathcal{C}$.

Το παραπάνω πρόβλημα είναι NP-Complete. Εντούτοις μπορούμε να δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 4.6. Το πρόβλημα *Feedback edge set* με διανύσματα βαρών μπορεί να λυθεί σε $f(k, l, m)n^{\mathcal{O}(1)}$ όπου τα (k, l, m) θεωρούνται παράμετροι του προβλήματος.

Θεώρημα 4.7. Έστω κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και $S \subseteq V$. Μπορούμε να βρούμε μια αναπαράσταση του matroid $M(V, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{I} = \{T \subseteq V \mid T \text{ συνδεδεμένο με το } S\}$, με πιθανοτικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου.

Απόδειξη. Η απόδειξη έπεται άμεσα από την κατασκευή του διμερούς γραφήματος που αντιστοιχεί στο G (όπως αυτή έγινε στο 4.1.8) και την χρήση των προτάσεων 4.2.10 και 4.2.4. \square

4.3 Άπληστος αλγόριθμος

Ένα από τα βασικά κίνητρα ανάπτυξης της θεωρίας των matroids, αποτελεί η στενή σχέση που φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των matroids και των άπληστων αλγορίθμων. Ένας από τους πλέον χαρακτηριστικούς άπληστους αλγορίθμους είναι ο αλγόριθμος του Kruskal για εύρεση μέγιστου διασυνδεδετικού δέντρου ενός γραφήματος. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε έναν αντίστοιχο αλγόριθμο στα πλαίσια των matroids. Ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Έστω matroid $M(E, \mathcal{I})$ και συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathbb{N}$, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο του θεμελιώδους συνόλου έναν φυσικό αριθμό³. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε μια βάση B του matroid τέτοια ώστε το

$$w(B) = \sum_{x \in B} w(x)$$

να είναι το ελάχιστο δυνατό. Ο αλγόριθμος είναι ο εξής:

Matroid Kruskal

1. Αρχικοποίηση: Ορίζουμε σύνολο $I = \emptyset$.
 2. Ταξινόμηση τα στοιχεία του E ανάλογα με το βάρος του.
 3. Για κάθε στοιχείο x του E , αν $(I \cup \{x\}) \in \mathcal{I}$, $I = I \cup \{x\}$.
-

Απόδειξη. Για την ορθότητα του παραπάνω αλγορίθμου, αρκεί να δείξουμε πως ο αλγόριθμος κατασκευάζει όντως μια βάση και πως αυτή η βάση είναι "βέλτιστη". Αρχικά παρατηρούμε πως σε κάθε επανάληψη, το I θα είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο, αφού στο 3. του αλγορίθμου προσθέτουμε στο I στοιχεία $x \in E$ τα οποία το διατηρούν ανεξάρτητο. Επίσης, εφόσον μέχρι το τέλος του αλγορίθμου θα έχουμε προσθέσει στο I όλα τα στοιχεία του E που δεν καθιστούν το I εξαρτημένο, είμαστε σίγουροι πως δεν μπορούμε να βρούμε κάποιο άλλο στοιχείο y ώστε $I \cup \{y\} \in \mathcal{I}$. Άρα το είναι ανεξάρτητο και μεγιστικό. Συνεπώς το αποτελεί όντως μια βάση του matroid M .

Μένει να δείξουμε πως σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου το $I \subseteq B$ με B μια βέλτιστη βάση. Αυτό θα το δείξουμε με επαγωγή ως προς το μέγεθος του I . Πράγματι:

1. Για $I = \emptyset$, το I θα είναι ανεξάρτητο και προφανώς θα περιέχεται σε κάθε βέλτιστη βάση.
2. Έστω ότι για $|I| = n$, $I \subseteq B$ και $w(B) < w(B'), \forall B' \neq B$.
3. Έστω x_0 το στοιχείο που επιλέγει ο αλγόριθμος να προσθέσει στην $n + 1$ επανάληψη. Θα δείξουμε πως $I \cup \{x_0\}$ είναι υποσύνολο μια βέλτιστης βάσης. Αν $I \cup \{x_0\} \subseteq B$ έχουμε τελειώσει. Έστω ότι $I \cup \{x_0\} \not\subseteq B \Rightarrow I \cup \{x_0\} \subseteq B'$ (αφού με τον τρόπο που επιλέγει ο αλγόριθμος το x_0 είμαστε σίγουροι πως το $I \cup \{x_0\}$ θα είναι και πάλι ανεξάρτητο) όπου B' μια άλλη βάση του matroid. Θα δείξουμε πως η B' θα πρέπει να είναι βέλτιστη.

Ισχυρισμός: (Ιδιότητα ανταλλαγής στοιχείων βάσεων) Έστω B_1, B_2 δυο βάσεις ενός matroid. Τότε $\forall x \in B_1 \setminus B_2, \exists y \in B_2 \setminus B_1$ ώστε το $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ να είναι και πάλι βάση του matroid. Πράγματι, $B_1, B_2 \subseteq \mathcal{I}$ και μεγιστικά. Επίσης, $\forall x \in B_1 \setminus B_2, |B_1 \setminus \{x\}| < |B_2|$. Άρα, από ιδιότητα 2, $\exists y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$ ώστε $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ να είναι ανεξάρτητο. Όμως $|(B_1 \setminus \{x\}) \cup$

³Ο αλγόριθμος γενικεύεται φυσιολογικά και για $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

$|\{y\}| = |B_1|$ και B_1 μεγιστικό. Άρα το $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ είναι βάση του matroid.

Άρα, από τον ισχυρισμό έχουμε ότι $\forall x \in B' \setminus B, \exists y \in B \setminus B'$ τέτοιο ώστε το $B'' = (B' \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ να είναι βάση. Άρα, για $x = x_0$, λόγω του τρόπου με τον οποίο επιλέγεται το x_0 από τον αλγόριθμο, $w(y) > w(x_0) \Rightarrow w(B') < w(B'') \Rightarrow B'$ βέλτιστη. Συνεπώς $I \cup \{x_0\} \subseteq B$.

□

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι, όπως είναι αναμενόμενο, η παραπάνω απόδειξη είναι σχεδόν ίδια με την απόδειξη του αλγορίθμου του Kruskal για εύρεση ελάχιστου διασυνδεδετικού δέντρου. Η αξία της έγκειται στην *κομψότητα* του επαγωγικού βήματος, το οποίο εξασφαλίζεται με τη χρήση της ιδιότητας ανταλλαγής στοιχείων βάσεων, σε αντίθεση με την πιο κοπιαστική διαδικασία της γενικευμένης επαγωγής που απαιτείται για την απόδειξη του Kruskal σε γραφήματα.

Τέλος αναφέρουμε ένα θεαματικό αποτέλεσμα των Rado και Edmonds[10]:

Θεώρημα 4.8. *Αν ένας άπληστος αλγόριθμος λειτουργεί για κάθε πιθανό σύνολο βαρών, τότε τα εφικτά σύνολα είναι ακριβώς τα ανεξάρτητα σύνολα ενός matroid.*

Κεφάλαιο 5

Πολυωνυμικός Πυρήνας για το Subset Feedback Vertex Set

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα Subset Feedback Vertex Set, το οποίο αποτελεί μια γενίκευση του πιο κλασσικού Feedback Vertex Set. Πιο συγκεκριμένα, βασιζόμενοι στο [18], θα παρουσιάσουμε έναν πιθανοτικό πολυωνυμικό πυρήνα ως προς την φυσική παράμετρο του προβλήματος. Η δουλειά των Hols και Kratsch έγινε με αφορμή ένα ανοιχτό ερώτημα που έθεσαν οι Cygan et al. στο [5], μέσα στο οποίο αποδεικνύουν ότι το SFVS είναι FPT. Είναι αξιοσημείωτη η χρήση των matroids στην κατασκευή του εν λόγω πυρήνα. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας τα βασικά προβλήματα που θα διαχειριστούμε.

Feedback Vertex Set (FVS):

Είσοδος: γράφημα $G(V, E)$ και ακέραιος k .

Παράμετρος: k .

Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $T \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|T| \leq k$ και το $G[V \setminus T]$ να μην περιέχει κανένα κύκλο;;

Subset Feedback Vertex Set (SFVS):

Είσοδος: γράφημα $G(V, E)$, ένα σύνολο $S \subseteq V$ και ακέραιος k .

Παράμετρος: k .

Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $T \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|T| \leq k$ και κανένας απλός κύκλος του $G[V \setminus T]$ να μην περιέχει κορυφή του S ;

Να σημειώσουμε ότι αν στο πρόβλημα SFVS θέσουμε $S = V$ προκύπτει το πρόβλημα FVS. Συνεπώς το SFVS αποτελεί γενίκευση του FVS.

Edge Subset Feedback Vertex Set (E-SFVS):

Είσοδος: γράφημα $G(V, E)$, ένα σύνολο $S \subseteq E$ και ακέραιος k .

Παράμετρος: k .

Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $T \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|T| \leq k$ και κανένας απλός κύκλος του $G[V \setminus T]$ να μην περιέχει ακμή του S ;

Τα προβλήματα SFVS και E-SFVS είναι ισοδύναμα. Πράγματι, έστω $\mathcal{I} = (G, S, k)$ στιγμιότυπο του SFVS. Ορίζουμε το αντίστοιχο στιγμιότυπο του E-SFVS ως $\mathcal{I}' = (G, S', k)$ με $S' = \{(uv) \mid u \in S \text{ ή } v \in S\}$, όπου με (uv) συμβολίζουμε μια ακμή που έχει για άκρα της τις κορυφές u και v . Έστω επίσης ότι έχουμε απάντηση για το \mathcal{I} . Αν η απάντηση είναι θετική, τότε κανένας απλός κύκλος του $G[V \setminus T]$ δεν θα περιέχει κορυφή του $S \Rightarrow$ κανένας απλός κύκλος του $G[V \setminus T]$ δεν θα περιέχει ακμή του S' . Ομοίως αν η απάντηση είναι αρνητική.

Αντίστροφα, έστω $\mathcal{I} = (G, S, k)$ στιγμιότυπο του E-SFVS. Ορίζουμε το αντίστοιχο στιγμιότυπο του SFVS ως $\mathcal{I}' = (G', S', k)$ όπου για να φτιάξουμε το G' αρκεί να αντικαταστήσουμε κάθε ακμή $(uv) \in S$ με ένα μονοπάτι (u, x_{uv}, v) μήκους 2 (ουσιαστικά προσθέτουμε μια κορυφή στην "μέση" κάθε ακμής του S) και $S' = \{x_e \mid e \in S\}$ (το σύνολο των κορυφών που προσθέσαμε προηγουμένως). Είναι προφανές ότι λύση για το \mathcal{I} μετατρέπεται σε λύση για το \mathcal{I}' . Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε πως και οι δύο αναγωγές γίνονται σε πολυωνυμικό χρόνο και δεν επηρεάζουν την παράμετρο k .

Υπόθεση. Υπόθεση Εκθετικού Χρόνου[31]: Για κάθε σταθερό $k \geq 3$, το k -satisfiability δεν έχει αλγόριθμο υποεκθετικού χρόνου.

Αν ισχύει η παραπάνω, τότε προφανώς $P \neq NP$. Ωστόσο η υπόθεση 5 είναι κατά κάποιο τρόπο ισχυρότερη: μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε ότι πολλά υπολογιστικά προβλήματα είναι ισοδύναμα: αν ένα από τα προβλήματα που μελετάμε έχει αλγόριθμο υποεκθετικού χρόνου, τότε έχουν όλα. Επίσης, η παραπάνω υπόθεση μας εξασφαλίζει πως είναι αδύνατο να βρεθεί αλγόριθμος με υποεκθετική εξάρτηση ως προς το k για το SFVS, καθώς το SFVS γενικεύει το Vertex Cover (το οποίο είναι NP-complete).

5.1 Προκαταρκτικά:

Έστω γράφημα $G(V, E)$. Θα δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς:

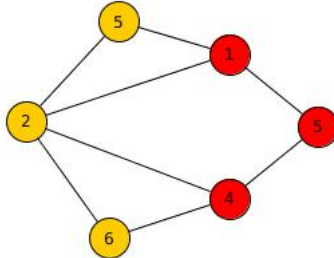
Ορισμός 5.1.1. Για $A \subseteq V$, ορίζουμε ως **A-μονοπάτι** ένα μονοπάτι με endpoints στο A και εσωτερικές κορυφές που να μην ανήκουν στο A .

Θεώρημα 5.1. (Gallai). Έστω $A \subseteq V$ και $k \in \mathbb{N}$. Αν ο μέγιστος αριθμός από ξένα (ως προς τις κορυφές) A-μονοπάτια είναι $< k + 1$, τότε $\exists B \subseteq V$ με $|B| \leq 2k$ που συναντιέται με όλα τα A-μονοπάτια.

Παράδειγμα: Στο γράφημα του σχήματος 5.1 με $A = \{1, 4, 5\}$, κάποια δυνατά A-μονοπάτια είναι τα εξής:

1. $\{(1, 5)\}$

Σχήμα 5.1:



2. $\{(5, 4)\}$
3. $\{(1, 2), (2, 4)\}$
4. $\{(1, 2), (2, 6), (6, 4)\}$

Παρατηρούμε ότι ο μέγιστος αριθμός από ξένα μεταξύ τους A -μονοπάτια είναι 1. Συνεπώς, από το θεώρημα 5.1 για $k = 1$, ξέρουμε ότι υπάρχει σύνολο B , με $|B| \leq 2$ που να τέμνει όλα τα A -μονοπάτια. Ενδεικτικά $B = \{2, 5\}$ ή $B = \{1, 4\}$.

Ορισμός 5.1.2. Έστω (G, S, k) στιγμιότυπο του E -SFVS .

- Ένας κύκλος C καλείται **S -κύκλος** αν τουλάχιστον μια ακμή του S ανήκει στο C .
- Έστω $x \in V$. Ένα σύνολο $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ από S -κύκλους που περιέχουν το x καλείται **x -λουλούδι τάξης t** , αν τα $C_i \setminus \{x\}$ είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους.
- Ένα $B \subseteq V \setminus \{x\}$ μεγέθους t καλείται **x -blocker μεγέθους t** αν κάθε S -κύκλος που περνάει από το x , περιέχει επίσης μια τουλάχιστον κορυφή του B .

5.2 Κατασκευή πολυωνυμικού Πυρήνα για παράμετρο $|S| + k$

Πριν αναλύσουμε τις λύσεις του E -SFVS κρίνεται αναγκαίο να εισάγουμε κάποιους συμβολισμούς. Έστω λοιπόν $\mathcal{I} = (G, S, k)$ στιγμιότυπο που αποδέχεται για το παραμετροποιημένο E -SFVS με παράμετρο $|S| + k$. Θα λέμε ότι μια λύση X για το \mathcal{I} είναι **κυρίαρχη** αν είναι ελάχιστου μεγέθους και περιέχει ένα μεγιστικό πλήθος κορυφών από το T ανάμεσα σε λύσεις ελαχίστου μεγέθους, όπου T ορίζεται ως $T := V(S)$. Το T ονομάζεται σύνολο τερματικών και ουσιαστικά αποτελείται από τα endpoints των ακμών στο S . Για να βρούμε μια κυρίαρχη λύση X , βρίσκουμε όλες τις λύσεις του προβλήματος και από αυτές επιλέγουμε τις λύσεις με το μικρότερο μέγεθος. Προφανώς, οι επιλεγμένες λύσεις θα έχουν το ίδιο μέγεθος. Στην συνέχεια επιλέγουμε, από αυτές ακριβώς τις "ελάχιστες" λύσεις, επιλέγουμε εκείνες που είναι μεγιστικές ως προς το T .

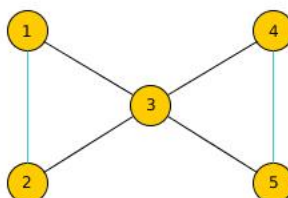
Παρατηρούμε ότι το $X \cap T$ αντιστοιχεί στα endpoints των ακμών στο S που διαγράφουμε. Ορίζουμε $S_0 = \{e \in S \mid e \cap X = \emptyset\}$ (οι κορυφές του S που δεν μπαίνουν στην κυρίαρχη λύση) και $X_0 = X \setminus T$. Τότε για $\{x, y\} \in S_0$, οι κορυφές του X_0 μπλοκάρουν όλα τα $x-y$ μονοπάτια εκτός από αυτά που αποτελούνται από μια απλή ακμή που συνδέει το x με το y . Θα δείξουμε ότι το X είναι συνδεδεμένο με το T .

Λήμμα 5.1. Έστω X μια κυρίαρχη λύση για το \mathcal{I} και $x \in X_0$. Τότε, στο $G \setminus S \exists |X| + 2$ μονοπάτια από το T στο X τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους εκτός από 3 μονοπάτια που καταλήγουν στο x . Επιπλέον, τα μονοπάτια μπορούν να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus X \setminus S$ να τέμνεται από το πολύ ένα μονοπάτι.

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποια παραδείγματα προκειμένου να γίνουν πιο κατανοητές η έννοια της κυρίαρχης λύσης και η σημασία του παραπάνω λήμματος.

Παράδειγμα: Έστω $G(V, E)$ το γράφημα του σχήματος 5.2, $S = \{(1, 2), (4, 5)\}$ και $T = \{1, 2, 4, 5\}$. Κάποιες λύσεις του E-SFVS πάνω σε αυτό το γράφημα είναι οι $X_1 = \{1, 5\}$, $X_2 = \{1, 4\}$, $X_3 = \{2, 4\}$, $X_4 = \{2, 5\}$ και $X_5 = \{3\}$. Προφανώς, η μικρότερη σε μέγεθος λύση είναι η X_5 η οποία αποτελεί κυρίαρχη λύση για το πρόβλημα.

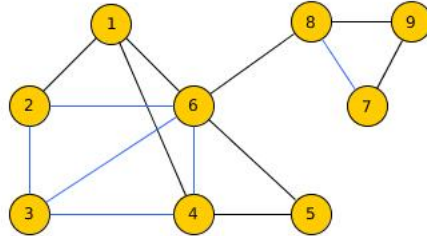
Σχήμα 5.2:



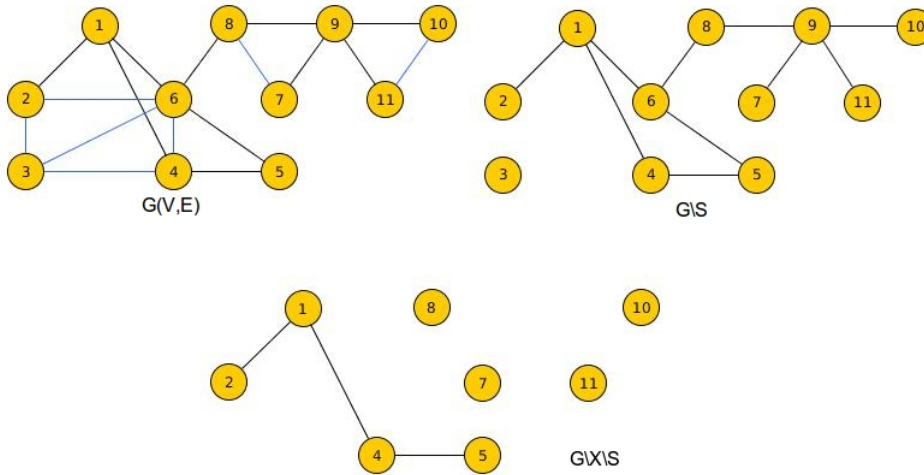
Παράδειγμα: Έστω $G(V, E)$ το γράφημα του σχήματος 5.3, $S = \{(2, 3), (3, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (7, 8)\}$ και $T = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. Δυο ελάχιστες λύσεις του E-SFVS πάνω σε αυτό το γράφημα είναι οι $Y = \{3, 6, 9\}$ και $X = \{3, 6, 8\}$. Από τις λύσεις αυτές, μονάχα η X είναι κυρίαρχη, καθώς περιέχει μεγιστικό πλήθος στοιχείων από το T .

Παράδειγμα: Για να εφαρμόσουμε το λήμμα 5.1, έστω $G(V, E)$ το γράφημα του σχήματος 5.4, $S = \{(2, 3), (3, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (7, 8), (11, 10)\}$ και $T = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$. Μια κυρίαρχη λύση του E-SFVS πάνω σε αυτό το γράφημα είναι η $X = \{3, 6, 9\}$. Σύμφωνα με το λήμμα 5.1, για $x \in X \setminus T$ (εδώ $x = 9$), για το γράφημα $G \setminus S$ θα πρέπει να υπάρχουν $|X| + 2$ (εδώ $3 + 2 = 5$) μονοπάτια από το T στο X , όλα ξένα μεταξύ τους εκτός από τρία μονοπάτια που τελειώνουν στο x . Τα μονοπάτια είναι τα εξής: $\{7, 9\}$, $\{8, 9\}$, $\{10, 9\}$, $\{11, 9\}$, $\{2, 1, 6\}$. Τέλος, παρατηρούμε πως κάθε συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus X \setminus S$ τέμνεται με ένα ακριβώς από τα παραπάνω μονοπάτια.

Σχήμα 5.3:



Σχήμα 5.4:



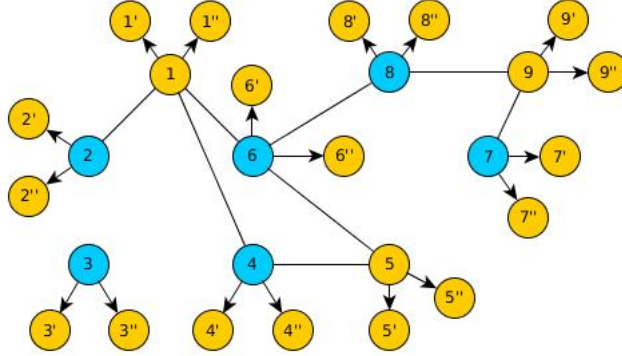
Η απόδειξη του λήμματος 5.1 δεν είναι καθόλου τετριμμένη. Βασίζεται στην χρήση του θεωρήματος του Hall και του παρακάτω λήμματος. Προτού προχωρήσουμε θα χρειαστούμε κάποιους ορισμούς. Έστω K μια συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus X \setminus S$. Θα λέμε ότι η K είναι **ενδιαφέρουσα** αν $T \cap V(K) \neq \emptyset$. Επίσης, λέμε ότι ένα $x \in X_0$ **βλέπει** την K αν υπάρχει $e \in E$ και $v \in K$ ώστε η e να ενώνει την x με την v . Γενικεύοντας, λέμε ότι ένα $Y \subseteq X_0$ βλέπει την K αν μια τουλάχιστον κορυφή της Y βλέπει την K .

Λήμμα 5.2. Έστω X μια κυρίαρχη λύση για το πρόβλημα E -SFVS. Τότε, κάθε μη κενό $Y \subseteq X_0$, βλέπει τουλάχιστον $|Y| + 2$ ενδιαφέρουσες συνιστώσες του $G \setminus X \setminus S$.

Θεώρημα 5.2. (Hall) Έστω διμερές γράφημα $G(U, V, E)$. Τότε, υπάρχει ένα ταίριασμα που καλύπτει όλο το U αν και μόνο αν $\forall W \subseteq U, |W| \leq |N_G(W)|$ (όπου με $N_G(W)$ συμβολίζουμε τους γείτονες του W).

Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 5.1 για να κατασκευάσουμε το gammoid $M = M_1 \oplus M_2$ όπου τα M_1, M_2 ορίζονται ως εξής:

Σχήμα 5.5:



- Για το M_1 : ορίζουμε αρχικά το γράφημα $G_1(V_1, E_1)$ να είναι το $G \setminus S$ με την προσθήκη δύο "sink only copies" v', v'' σε κάθε κορυφή $v \in V_1$. Μια v' είναι "sink only copy" της v αν η v συνδέεται με την v' με κατευθυνόμενη ακμή από την v στην v' . Σημειώνουμε πως οι v', v'' μπορούν να βρίσκονται μόνο στο τέλος των μονοπατιών που σχηματίζονται και συνεπώς η προσθήκη τους δεν αλλοιώνει το αποτέλεσμα. Ορίζουμε λοιπόν το gammoid $M_1(V_1, \mathcal{I}_1)$ πάνω στο G_1 με $V_1 = \{v, v', v'' | v \in V\}$ και $\mathcal{I}_1 = \{I \subseteq V_1 | I \text{ είναι συνδεδεμένο στο } T\}$, όπου $T = V(S)$. Παρατηρούμε πως το μεγαλύτερο I που μπορεί να είναι συνδεδεμένο στο T , θα έχει $|I| = |T|$ και άρα $rank(M_1) = |T|$.
- Για το M_2 : ορίζουμε αρχικά το γράφημα $G_2 = K_{k,n}(S_2, \hat{V}, E_2)$ όπου $\hat{V} = \{\hat{v} | v \in V\}$ και το E_2 αποτελείται από όλες τις κατευθυνόμενες ακμές που συνδέουν τις κορυφές του S_2 με τις κορυφές του \hat{V} . Ορίζουμε λοιπόν το gammoid $M_2(\hat{V}, \mathcal{I}_2)$, όπου $\mathcal{I}_2 = \{I \in \hat{V} | I \text{ είναι συνδεδεμένο στο } S_2\}$. Τέλος, ομοίως με πριν, προκύπτει πως $rank(M_2) = |S_2| = k$.

Έχοντας λοιπόν στα χέρια μας τα M_1, M_2 , μπορούμε να φτιάξουμε το matroid $M = M_1 \oplus M_2$. Επίσης, από το Θεώρημα 4.7, μπορούμε να βρούμε A_1, A_2 αναπαραστάσεις των M_1, M_2 με πιθανοτικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου. Στη συνέχεια, από την Πρόταση 4.2.1, μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να μετασχηματίσουμε την A_1 ώστε να έχει $|T|$ γραμμές και την A_2 ώστε να έχει k γραμμές. Τέλος, από την Πρόταση 4.2.2, έχουμε τον πίνακα $diag(A_1, A_2)$ να αποτελεί μια αναπαράσταση του gammoid M (και άρα $rank(M) = |T| + k$) με μεγάλη πιθανότητα, για την κατασκευή της οποίας χρειαστήκαμε συνολικά πολυωνυμικό χρόνο.

Παράδειγμα: Έστω $G(V, E)$ το γράφημα του σχήματος 5.3. Στο σχήμα 5.5 βλέπουμε το $G_1(V_1, E_1)$. Όπως ορίσαμε το gammoid $M_1(V_1, \mathcal{I}_1)$, το \mathcal{I}_1 θα αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του V_1 τα οποία είναι συνδεδεμένα με το $T = V(S)$. Εδώ, $T = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ και μια ενδεικτική βάση του M_1 είναι η $B = \{1, 2'', 3', 6'', 8', 9''\}$. Παρατηρούμε πως είναι αδύνατον να βρούμε $A \subseteq V_1$ με $A \in \mathcal{I}_1$ και $|A| > |B|$. Πράγματι, αν αφαιρέσουμε από το γράφημα G_1 τα ξένα

μεταξύ του μονοπάτια που καθιστούν το B συνδεδεμένο με το T , αυτό που μένει είναι το σύνολο $\{v', v'' | v \in V\}$, το οποίο δεν περιέχει καθόλου ακμές και άρα δεν μπορούμε να βρούμε καινούριο μονοπάτι από το A στο T . Όπως αναμέναμε λοιπόν, $rank(M_1) = |T| = 6$.

Για να καταλάβουμε λίγο καλύτερα την δομή του $M = M_1 \oplus M_2$, αρκεί να θυμηθούμε τον ορισμό 4.2.1 για το ευθύ άθροισμα δυο matroids. Εδώ, το M θα έχει για θεμελιώδες σύνολο το $E = V_1 \cup \hat{V}$ και οικογένεια ανεξαρτήτων την $\mathcal{I} = \{I \subseteq E | T \cap V_1 \in \mathcal{I}_1 \text{ και } I \cap \hat{V} \in \mathcal{I}_2\}$. Δηλαδή, το \mathcal{I} θα περιέχει στοιχεία της μορφής $\{v', v'', \hat{v}\}$, με $\{v', v''\}$ να είναι συνδεδεμένο στο T και $\{\hat{v}\}$ να είναι συνδεδεμένο στο S_2 . Ο βασικός λόγος για τον οποίο ορίσαμε το παραπάνω gammoid, είναι να εκμεταλλευτούμε το λήμμα 4.3. Έστω λοιπόν $\mathcal{T} = \{\{v', v'', \hat{v}\} | v \in V\}$. Εφαρμόζοντας το λήμμα 4.3 πάνω στο M , μπορούμε να βρούμε ένα \mathcal{T}' με $|\mathcal{T}'| \in \mathcal{O}((|T| + k)^3) = \mathcal{O}(|S|^3)$.

Έτσι δείξαμε ότι:

Λήμμα 5.3. Έστω X μια κυρίαρχη λύση για το στιγμιότυπο (G, S, k) και $T = V(S)$. Τότε, $\forall x \in X_0$ ($X_0 = X \setminus T$), \exists ανεξάρτητο σύνολο $I \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I} =$ τα ανεξάρτητα του M) με $|I| \leq |T| + k - 3$ τέτοιο ώστε το $\{x', x'', \hat{x}\}$ να επεκτείνει μοναδικά το I .

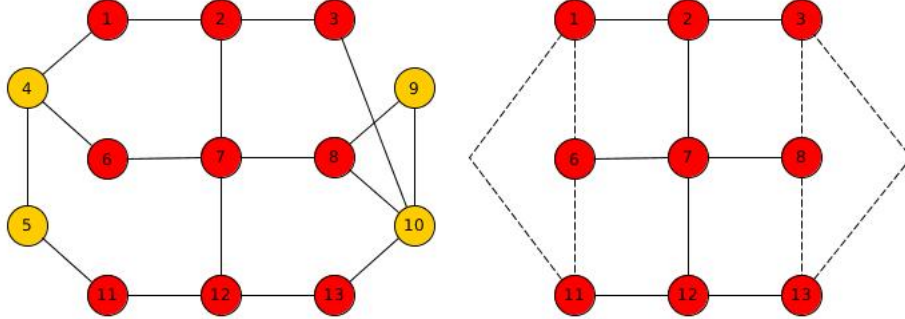
Από το παραπάνω λήμμα έπεται τελείως φυσιολογικά πως $\forall x \in V \setminus T$, με το x να ανήκει σε κάποια κυρίαρχη λύση, το $\{x', x'', \hat{x}\}$ θα ανήκει σε κάθε $(|T| + k - 3)$ -αντιπρόσωπο του matroid. Έστω λοιπόν \mathcal{T}' ένας τέτοιος αντιπρόσωπος και $V(\mathcal{T}') = \{v \in V | \{v', v'', \hat{v}\} \in \mathcal{T}'\}$. Τότε $X_0 \subseteq V(\mathcal{T}')$ για κάθε κυρίαρχη λύση X , και συνεπώς κάθε κυρίαρχη λύση $X \in (V(\mathcal{T}') \cup T)$.

Ουσιαστικά, έχουμε δείξει πως αν υπάρχει λύση για το (G, S, k) , τότε υπάρχει και λύση η οποία να περιέχεται εξ ολοκλήρου στο $W := V(\mathcal{T}') \cup T$. Γνωρίζοντας αυτό, μπορούμε να περιορίσουμε την αναζήτηση των κορυφών που θα σχηματίζουν το T της λύσης μας σε αυτό ακριβώς το W . Έτσι θα θεωρήσουμε πως δεν μπορούμε να διαγράψουμε κορυφή από το $V \setminus W$. Τεχνικά, αυτό θα το πετύχουμε χρησιμοποιώντας την εξής πράξη:

Ορισμός 5.2.1. Έστω γράφημα $G(V, E)$ και $W \subseteq V$. Ορίζουμε το **graph torso**(G, W) να είναι το γράφημα $G'(W, E')$ όπου οι κορυφές $a, b \in W$ ενώνονται με ακμή $e' \in E'$ αν $\exists e \in E$ που να τις ενώνει στο G ή αν υπάρχει μονοπάτι στο G που να ενώνει την a με την b με τις εσωτερικές κορυφές του μονοπατιού να μην ανήκουν στο W .

Παράδειγμα: Έστω $G(V, E)$ που αντιστοιχεί στο πρώτο γράφημα του σχήματος 5.6 και $W = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 13\}$. Ένας εύκολος τρόπος να κατασκευάσουμε το $G' = torso(G, W)$ ο εξής: αρχικά κατασκευάζουμε το σύνολο κορυφών του G' , το οποίο δεν είναι άλλο από το $V(W)$. Στην συνέχεια, αρκεί να προσθέσουμε στο G' ακμές μεταξύ κορυφών οι οποίες άπτονται σε συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus W$. Με τον παραπάνω τρόπο προκύπτει το G' που αντιστοιχεί στο δεύτερο γράφημα του σχήματος 5.6.

Σχήμα 5.6:



Λήμμα 5.4. Έστω ένα στιγμιότυπο (G, S, k) του E-SFVS και (G', S, k) το αντίστοιχο στιγμιότυπο για $G' = \text{torso}(G, W)$. Τότε, το (G', S, k) έχει λύση \Leftrightarrow το (G, S, k) έχει λύση.

Πρόταση 5.2.1. Έστω $M = M_1 \oplus M_2$ το gamtoïd που ορίσαμε παραπάνω και $\mathcal{T} = \{I_1, I_2, \dots, I_t\}$ η συλλογή ανεξαρτητών του M . Έστω επίσης A , η αναπαράσταση του M , με $A = \text{diag}(A_1, A_2)$. Αν $|\mathcal{T}| > \binom{|T|}{2} \cdot \binom{k}{1}$, τότε $\exists I \in \mathcal{T}: \mathcal{T} \setminus \{I\}$ να είναι $(|T| + k - 3)$ -αντιπρόσωπος του \mathcal{T} .

Από την παραπάνω πρόταση, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\binom{|T|}{2} \cdot \binom{k}{1} \in \mathcal{O}(|S|^2 k)$, προκύπτει πιθανοτικός πολυωνυμικός πυρήνας για το E-SFVS παραμετροποιημένο από το $(|S|, k)$, ο οποίος αποτελείται από $\mathcal{O}(|S|^2 k)$ κορυφές.

5.3 Μείωση του μεγέθους του S

Η δουλειά που έχουμε κάνει μέχρι στιγμής μας εξασφαλίζει πυρήνα για το πρόβλημα E-SFVS λαμβάνοντας για παράμετρο το $(|S|, k)$. Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν μπορούμε να βρούμε πυρήνα για το πρόβλημα χρησιμοποιώντας παράμετρο μιας διάστασης. Για να το πετύχουμε αυτό, αρκεί να μετασχηματίσουμε το S κατάλληλα ώστε να μπορέσουμε να φράξουμε το μέγεθός του από το k . Έτσι θα έχουμε φτιάξει έναν πυρήνα για το E-SFVS με παράμετρο μόνο το k .

Έστω (G, S, k) στιγμιότυπο του E-SFVS. Αρχικά, με κάποιους απλούς μετασχηματισμούς του γραφήματος εξασφαλίζουμε πως μπορούμε πάντα να βρούμε μια λύση του προβλήματος μεγέθους το πολύ k , η οποία να μην περιέχει καμία κορυφή από το $V(S)$ (αν υπάρχει τέτοια λύση). Σε αυτό το σημείο θεωρούμε Z μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος με προσεγγιστικό παράγοντα 8. Οι Even et al. δείχνουν στο [11] την ύπαρξη μια τέτοιας λύσης για το SFVS. Υπενθυμίζουμε πως τα SFVS και E-SFVS είναι ισοδύναμα και άρα η προσεγγιστική λύση για το SFVS μπορεί να μετασχηματιστεί σε λύση για το E-SFVS.

Τέλος, μπορούμε να θεωρήσουμε πως $k < |Z| \leq 8k$, καθώς αν $|Z| > 8k$ τότε είναι μάταιο να ψάχνουμε λύση με το πολύ k στοιχεία και άρα σταματάμε, ενώ αν $|Z| \leq k$ τότε αυτή ακριβώς η Z αποτελεί και λύση για το πρόβλημά μας.

Μελετώντας το πρόβλημα E-SFVS, παρατηρούμε σχετικά εύκολα ότι υπάρχουν ζευγάρια κορυφών $\{x, y\}$ τέτοια ώστε κάθε πιθανή λύση μεγέθους το πολύ k να πρέπει αναγκαστικά να περιέχει μια από τις δύο κορυφές. Για παράδειγμα, στο γράφημα $G(V, E)$ του σχήματος 5.4, μια λύση του E-SFVS με $k = 3$ είναι το σύνολο $\{3, 6, 9\}$. Παρατηρούμε πως η κορυφή $\{3\}$ μπορεί κάλλιστα να αντικατασταθεί από τις κορυφές $\{2\}$ ή $\{4\}$. Το ίδιο όμως δεν ισχύει και για το ζευγάρι $\{6, 9\}$ οι οποίες θα πρέπει υποχρεωτικά να ανήκουν σε κάθε λύση μεγέθους 3. Τέτοια ζευγάρια καλούνται **pair-constraints** και με \mathcal{P} θα συμβολίσουμε το σύνολο των pair-constraints που έχουμε εντοπίσει. Για λόγους συνέπειας θεωρούμε πως το \mathcal{P} είναι σύνολο ακμών. Σημειώνουμε ότι τα στοιχεία του $V(S)$ δεν θα περιέχονται στο \mathcal{P} καθώς από τον παραπάνω μετασχηματισμό έχουμε εξασφαλίσει πως αν υπάρχει λύση, τότε μπορούμε να βρούμε λύση Z τέτοια ώστε $Z \cap V(S) = \emptyset$.

Η χρησιμότητα του \mathcal{P} έγκειται στο ότι μας παρέχει έναν τρόπο να εντοπίσουμε ακμές του S που μπορούμε να διαγράψουμε με ασφάλεια και άρα να μειώσουμε το μέγεθος του S χωρίς να επηρεαστεί η λύση. Έχοντας αυτό κατά νου, ορίζουμε την εξής γενίκευση του E-SFVS:

Pair-Constrained Edge Subset Feedback Vertex Set (PCE-SFVS):

Είσοδος: γράφημα $G(V, E)$, ένα σύνολο $S \subseteq E$, ένα σύνολο \mathcal{P} από pair-constraints και ακέραιος k .

Παράμετρος: k .

Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $X \subseteq V$ με $|X| \leq k$ τέτοιο ώστε $G \setminus X$ να μην περιέχει κανέναν S -κύκλο και \forall pair-constraint $\{x, y\} \in \mathcal{P}$ να έχουμε $x \in X$ ή $y \in X$;

Είναι προφανές πως ένα στιγμιότυπο (G, S, k) του E-SFVS είναι ισοδύναμο με το αντίστοιχο στιγμιότυπο (G, S, \emptyset, k) του PCE-SFVS.

Ορισμός 5.3.1. Έστω (G, S, \mathcal{P}, k) στιγμιότυπο του PCE-SFVS. Μια ακμή $e \in S$ θα καλείται **ασυσχέτιστη (irrelevant)**, αν $X \subseteq V(G)$ είναι λύση για το $(G, S, \mathcal{P}, k) \Leftrightarrow X$ είναι λύση για το $(G, S \setminus \{e\}, \mathcal{P}, k)$.

Ο σκοπός μας είναι να εντοπίσουμε αρκετές ασυσχέτιστες ακμές, η διαγραφή των οποίων θα μειώσει το μέγεθος του S χωρίς να επηρεάσει το αποτέλεσμα. Σημειώνουμε πως αν e, e' δυο διαφορετικές ασυσχέτιστες ακμές για το (G, S, \mathcal{P}, k) , τότε δεν είναι απαραίτητο η e' να είναι ασυσχέτιστη και για το $(G, S \setminus \{e\}, \mathcal{P}, k)$. Ακολουθεί μια σειρά από κανόνες αναγωγής που μας οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Η σειρά με την οποία παρουσιάζουμε τους κανόνες είναι σημαντική, καθώς θα εφαρμόζουμε πάντοτε τον κανόνα με τον μικρότερο αριθμό που μπορούμε να εφαρμόσουμε.

Έστω (G, S, \emptyset, k) στιγμιότυπο για το PCE-SFVS και Z μια προσέγγιση της λύσης όπως αυτή θεωρήθηκε παραπάνω. Θυμίζουμε πως $k < |Z| \leq 8k$ και $Z \cap V(S) = \emptyset$.

Κανόνας 1. Αν $k < 0$ ή $k = 0$ και υπάρχει S -κύκλος, τότε μείωσε το (G, S, \mathcal{P}, k) σε κάποιο τετριμμένο ψευδές στιγμιότυπο.

Κανόνας 2. Διέγραψε όλες τις γέφυρες και όλες τις συνεκτικές συνιστώσες που δεν περιέχουν ακμή του S .

Με τον όρο **γέφυρα** αναφερόμαστε σε ακμές $e \in S$ τέτοιες ώστε το $S \setminus \{e\}$ να έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το S .

Κανόνας 3. Αν η ακμή $e \in S$ είναι γέφυρα του $(V, E \setminus (S \setminus \{e\}))$, τότε μείωσε το S σε $S' = S \setminus \{e\}$.

Ο λόγος που είμαστε σίγουροι πως οι γέφυρες είναι ασφαλείς ακμές ώστε να διαγραφούνε, είναι ότι καμία γέφυρα δεν μπορεί να συμμετέχει σε κάποιον κύκλο.

Κανόνας 4. Αν μια κορυφή $v \in V(\mathcal{P})$ περιέχεται σε τουλάχιστον $k + 1$ pair-constraints του \mathcal{P} , τότε μειώνουμε το G σε $G' = G \setminus \{v\}$ και $k' = k - 1$.

Κανόνας 5. Αν $|\mathcal{P}| > k^2$, τότε μείωσε το (G, S, \mathcal{P}, k) σε κάποιο τετριμμένο ψευδές στιγμιότυπο.

Κανόνας 6. Αν υπάρχει $z \in Z$ που να σχηματίζει z -λουλούδι τάξης $k + 1$ στο G , τότε μειώνουμε το G σε $G' = G \setminus \{z\}$ και $k' = k - 1$.

Κανόνας 7. Αν τουλάχιστον $k + 2$ ακμές του βλέπουν ένα ζευγάρι $\{x, y\}$ διαφορετικών κορυφών του Z , τότε προσθέτουμε το $\{x, y\}$ στο \mathcal{P} .

Κανόνας 8. Αν υπάρχει ακμή $e \in M$ τέτοια ώστε η e να μην βλέπει καμία $z \in Z$ και για κάθε ζευγάρι $\{x, y\}$ που βλέπει η e ισχύει ότι $\{x, y\} \in \mathcal{P}$, τότε διαγράφουμε την e_S από το S και την e από το M .

Κανόνας 9. Αν τουλάχιστον $k + 2$ ακμές $\{I_1, J_1\}, \dots, \{I_l, J_l\}$ με $l \geq k + 2$, $I_i \in \mathbf{I}$, $J_i \in L$ για $1 \leq i \leq l$ βλέπουν ένα ζευγάρι $\{x, y\}$ διαφορετικών κορυφών, έτσι ώστε $x \in Z \cup B$ να άπτεται του I_i και $y \in Z$ να άπτεται του J_i για όλα τα $i \in \{1, \dots, l\}$, τότε προσθέτουμε το $\{x, y\}$ στο \mathcal{P} .

Κανόνας 10. Αν υπάρχει ακμή $e = \{I, J\}$ με $I \in \mathbf{I}$ και $J \in L$ ώστε η e να μην βλέπει καμία κορυφή $z \in Z$ και για κάθε ζευγάρι $\{x, y\}$ που βλέπει η e ισχύει ότι $\{x, y\} \in \mathcal{P}$, τότε διαγράφουμε την e_S από το S , διαγράφουμε την J από το L και αντικαθιστούμε την I με την $I \cup J$ στο \mathbf{I} .

Σημειώνουμε πως αν δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κανέναν κανόνα από τους παραπάνω, τότε $|M| \in \mathcal{O}(k^3)$ και $|L| \in \mathcal{O}(k^4)$ και συνεπώς $|S| \in \mathcal{O}(k^4)$.

Αυτό που έχουμε καταφέρει μέχρι στιγμής είναι να φράξουμε το πλήθος των ακμών του S για τυχόν στιγμιότυπο του $PCE-SFVS$. Όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω, ένα στιγμιότυπο (G, S, k) του E-SFVS είναι ισοδύναμο με το αντίστοιχο στιγμιότυπο (G, S, \emptyset, k) του PCE-SFVS. Συνεπώς, το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να βρούμε ένα στιγμιότυπο του E-SFVS που να είναι ισοδύναμο με το στιγμιότυπο (G, S, \mathcal{P}, k) του PCE-SFVS, το οποίο να έχει το πολύ $\mathcal{O}(k^4)S$ -ακμές.

Πράγματι, έστω ένα pair-constraint $\{x, y\} \in \mathcal{P}$. Παρατηρούμε αρχικά ότι αν μεταξύ των x και y υπάρχουν δύο ακμές εκ των οποίων τουλάχιστον μια να ανήκει στο S , τότε κάθε λύση θα πρέπει να περιέχει το x ή το y καθώς το xy αποτελεί έναν S-κύκλο. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε ένα G' από το G ως εξής: $\forall x, y$ με $\{x, y\} \in \mathcal{P}$, αν στο G δεν υπάρχει ακμή που να συνδέει το x με το y , προσθέτουμε μια τέτοια ακμή. Επίσης, κατασκευάζουμε το $S' = S \cup \mathcal{P}$ και προσθέτουμε μια ακμή μεταξύ των x και y η οποία να ανήκει στο S' . Αυτό το στιγμιότυπο (G', S', k) του E-SFVS είναι ισοδύναμο με το στιγμιότυπο (G, S, \mathcal{P}, k) του PCE-SFVS. Επίσης, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποιον από τους κανόνες 4 ή 5 στο (G, S, \mathcal{P}, k) και άρα $|\mathcal{P}| \leq k^2$. Συνεπώς, μετά το πέρας της αναγωγής, έχουμε πως $|S| + |\mathcal{P}| \in \mathcal{O}(k^2)$. Τελικά, αν χρησιμοποιήσουμε και τον πυρήνα μεγέθους $\mathcal{O}(|S|^2 k)$ που φτιάξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, προκύπτει ο επιθυμητός πολυωνυμικός πυρήνας μεγέθους $\mathcal{O}(k^9)$ για το πρόβλημα E-SFVS με παράμετρο το k .

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

Κλείνοντας θα αναφερθούμε σε κάποια ενδιαφέροντα ανοιχτά ερωτήματα καθώς και τομείς οι οποίοι φαίνονται αρκετά καρποφόροι ώστε να τους θεωρούμε άξιους μελέτης.

Το βασικότερο αποτέλεσμα που αναλύσαμε στην παρούσα εργασία είναι η κατασκευή πιθανοτικού πολυωνυμικού πυρήνα για το πρόβλημα SFVS. Ένα βασικό ανοικτό ερώτημα είναι αν μπορούμε να αποφύγουμε με κάποιον τρόπο την τυχαιότητα στην κατασκευή αυτού του πυρήνα. Η τυχαιότητα προέρχεται από την χρήση των matroids και συγκεκριμένα από το Θεώρημα 4.7, το οποίο μας παρέχει μια πιθανή αναπαράσταση για ένα gammoid. Σημειώνουμε ότι το λάθος είναι "one-sided". Πράγματι, αν ο πιθανοτικός αλγόριθμος μας επιστρέψει μια πιθανή αναπαράσταση για το gammoid, είναι εύκολο και αποδοτικό να ελέγξουμε αν αυτή η αναπαράσταση αντιστοιχεί όντως στο gammoid. Θα ήταν συνεπώς πολύ ενδιαφέρον ένα αποτέλεσμα το οποίο θα απέφευγε την τυχαιότητα που προκύπτει από τα matroids.

Μια άλλη κατεύθυνση που θα είχε μεγάλο ενδιαφέρον, είναι η μελέτη της παραμετρικής πολυπλοκότητας των προβλημάτων που παρουσιάσαμε ως προς κάποια άλλη παράμετρο πέραν της φυσικής. Κάποιες υποψήφιες παράμετροι είναι το tree-width και το vertex cover number[12]. Οφείλουμε ωστόσο να σημειώσουμε πως η χρήση μιας, διαισθητικά τουλάχιστον, "πιο ισχυρής" παραμέτρου, δεν εξασφαλίζει την βελτίωση των αποτελεσμάτων.

Όσον αφορά τα matroids, ένας τομέας που δεν έχει αναπτυχθεί πολύ είναι η μελέτη της παραμετρικής πολυπλοκότητας των μετρητικών προβλημάτων. Ο M. Snook έδειξε στο [27] ότι το μετρητικό πρόβλημα εύρεσης του πλήθους των βάσεων ενός matroid αναπαριστώμενου πάνω σε ένα σώμα \mathcal{F} είναι $\#P$ -complete. Πολύ πρόσφατα, οι C. Brand και M. Roth απέδειξαν στο [1] ότι το πρόβλημα αυτό είναι FPT (με παράμετρο το rank του matroid) αν δίνεται μια γραμμική αναπαράσταση του matroid πάνω σε ένα πεπερασμένο σώμα \mathcal{F} .

Βιβλιογραφία

- [1] C. Brand and M. Roth. Parameterized counting of trees, forests and matroid bases. *CoRR*, abs/1611.01823, 2016.
- [2] J. Chen, J. Fan, I. A. Kanj, Y. Liu, and F. Zhang. Multicut in trees viewed through the eyes of vertex cover. *J. Comput. Syst. Sci.*, 78(5):1637–1650, 2012.
- [3] J. Chen, I. A. Kanj, and G. Xia. Improved parameterized upper bounds for vertex cover. In *Mathematical Foundations of Computer Science 2006, 31st International Symposium, MFCS 2006, Stará Lesná, Slovakia, August 28-September 1, 2006, Proceedings*, pages 238–249, 2006.
- [4] M. Cygan, F. V. Fomin, L. Kowalik, D. Lokshantov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, and S. Saurabh. *Parameterized Algorithms*. Springer, 2015.
- [5] M. Cygan, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, and J. O. Wojtaszczyk. Subset feedback vertex set is fixed-parameter tractable. In *Automata, Languages and Programming - 38th International Colloquium, ICALP 2011, Zurich, Switzerland, July 4-8, 2011, Proceedings, Part I*, pages 449–461, 2011.
- [6] R. Diestel. *Graph Theory, 2nd Edition*. Springer, 2000.
- [7] R. Dondi and F. Sikora. Parameterized complexity and approximation issues for the colorful components problems. *CoRR*, abs/1605.03071, 2016.
- [8] R. G. Downey and M. R. Fellows. *Parameterized Complexity*. Monographs in Computer Science. Springer, 1999.
- [9] R. G. Downey, M. R. Fellows, and K. W. Regan. Parameterized circuit complexity and the W hierarchy. *Theor. Comput. Sci.*, 191(1-2):97–115, 1998.
- [10] J. Edmonds. Matroids and the greedy algorithm. *Mathematical Programming*, 1(1):127–136, 1971.
- [11] G. Even, J. Naor, and L. Zosin. An 8-approximation algorithm for the subset feedback vertex set problem. *SIAM J. Comput.*, 30(4):1231–1252, 2000.

- [12] J. Fiala, P. A. Golovach, and J. Kratochvíl. Parameterized complexity of coloring problems: Treewidth versus vertex cover. *Theor. Comput. Sci.*, 412(23):2513–2523, 2011.
- [13] J. B. Fraleigh. *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2010.
- [14] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
- [15] N. Garg, V. V. Vazirani, and M. Yannakakis. Primal-dual approximation algorithms for integral flow and multicut in trees, with applications to matching and set cover. In *Automata, Languages and Programming, 20nd International Colloquium, ICALP93, Lund, Sweden, July 5-9, 1993, Proceedings*, pages 64–75, 1993.
- [16] J. Geelen, B. Gerards, and G. Whittle. Solving rota’s conjecture. *American Journal of Mathematics*, 61(7):736–743, 2014.
- [17] L. Gourvès, J. Monnot, and A. Pagourtzis. The lazy matroid problem. In *Theoretical Computer Science - 8th IFIP TC 1/WG 2.2 International Conference, TCS 2014, Rome, Italy, September 1-3, 2014. Proceedings*, pages 66–77, 2014.
- [18] E. C. Hols and S. Kratsch. A randomized polynomial kernel for subset feedback vertex set. In *33rd Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2016, February 17-20, 2016, Orléans, France*, pages 43:1–43:14, 2016.
- [19] I. A. Kanj, G. Lin, T. Liu, W. Tong, G. Xia, J. Xu, B. Yang, F. Zhang, P. Zhang, and B. Zhu. Improved parameterized and exact algorithms for cut problems on trees. *Theor. Comput. Sci.*, 607:455–470, 2015.
- [20] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *50 Years of Integer Programming 1958-2008 - From the Early Years to the State-of-the-Art*, pages 219–241. 2010.
- [21] J. Kleinberg and É. Tardos. *Σχεδίαση αλγορίθμων*. Κλειδάριθμος, 2008.
- [22] E. L. Lawler. Matroid intersection algorithms. *Math. Program.*, 9(1):31–56, 1975.
- [23] H. R. Lewis and X. X. Παπαδημητρίου. *Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού*. Κριτική Επιστημονική Βιβλιοθήκη, 2005.
- [24] D. Marx. A parameterized view on matroid optimization problems. *Theor. Comput. Sci.*, 410(44):4471–4479, 2009.
- [25] J. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, 1992.

- [26] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XX. wagner’s conjecture. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 92(2):325–357, 2004.
- [27] M. Snook. Counting bases of representable matroids. *Electr. J. Comb.*, 19(4):P41, 2012.
- [28] W. T. Tutte. A homotopy theorem for matroids, i. *American Mathematical Society*, 88(1):144–160, 1958.
- [29] W. T. Tutte. A homotopy theorem for matroids, ii. *American Mathematical Society*, 88(1):161–174, 1958.
- [30] H. Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics*, 57(3):509–533, 1935.
- [31] G. J. Woeginger. Exact algorithms for np-hard problems: A survey. In *Combinatorial Optimization - Eureka, You Shrink!, Papers Dedicated to Jack Edmonds, 5th International Workshop, Aussois, France, March 5-9, 2001, Revised Papers*, pages 185–208, 2001.
- [32] R. Zippel. Probabilistic algorithms for sparse polynomials. In *Symbolic and Algebraic Computation, EUROSAM ’79, An International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Marseille, France, June 1979, Proceedings*, pages 216–226, 1979.
- [33] E. Ζάχος. *Υπολογισιμότητα και Πολυπλοκότητα*. 2015.
- [34] E. Ζάχος, Α. Παγουρτζής, and T. Souliou. *Θεμελίωση επιστήμης υπολογιστών*. Κάλλιπτος, Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015.
- [35] Α. Φελούρης. *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, 2nd Edition*. Συμμεών, 2009.