

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία
Δ.Π.Μ.Σ. Υπολογιστική Μηχανική

Αριθμητική προσομοίωση τριδιάστατης
αποκόλλησης σε ροή γύρω από πτέρυγα

Βασίλης Γιαννάτος

Αθήνα, Ιούνιος 2017

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ. Υπολογιστική Μηχανική

ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Τίτλος μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας:

Αριθμητική προσομοίωση τριδιάστατης
αποκόλλησης σε ροή γύρω από πτέρυγα

Φοιτητής:

Γιαννάτος Βασίλης

Επιβλέπων:

Βουτσινάς Σπυρίδων

Μέλη εξεταστικής επιτροπής:

Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής
Βουτσινάς Σπυρίδων	Μπούρης Δημήτριος	Ριζιώτης Βασίλειος

Αθήνα, Ιούνιος 2016

Περίληψη

Σε αποκολλημένες ροές γύρω από πτέρυγες ο όρος τριδιάστατη αποκόλληση αναφέρεται στην κατά το εκπέτασμα διακύμανση των χαρακτηριστικών της ροής. Το φαινόμενο μπορεί να εμφανιστεί ακόμα και σε ορθογωνικές πτέρυγες εκτεθειμένες σε ομοιόμορφο πεδίο ταχυτήτων γεγονός που το κάνει ιδιαίτερα ενδιαφέρον. Η τριδιάστατη αποκόλληση συνδέεται άμεσα με την έντονη χρονική και χωρική μεταβολή της θέσης αποκόλλησης και την ανάπτυξη stall cells - σωλήνων στροβιλότητας που εκκινούν κάθετα από την επιφάνεια της πτέρυγας όπου η ροή είναι αποκολλημένη. Το ενδιαφέρον των ερευνητών στρέφεται γύρω από τη προσομοίωση του φαινομένου και την κατανόηση του εσωτερικού του μηχανισμού.

Εδώ στοχεύουμε στην προσομοίωση του φαινομένου της τριδιάστατης αποκόλλησης χρησιμοποιώντας τον μη-συνεκτικό κώδικα GenUVP. Ο κώδικας GenUVP έχει τη δυνατότητα προσομοίωσης της αποκόλλησης με το μοντέλο του διπλού ομόρρου όχι όμως και τη δυνατότητα χρονικής μεταβολής των θέσεων αποκόλλησης. Από προηγούμενη εργασία με το ίδιο υπολογιστικό εργαλείο προέκυψε ότι οι αστάθειες του διπλού ομόρρου μπορούν να οδηγήσουν σε σχηματισμό δομών στροβιλότητας παρόμοιων με αυτών των stall cells. Η καμπύλη των θέσεων αποκόλλησης θα έπρεπε να παραμορφώνεται ταυτόχρονα με την ανάπτυξη αυτών των δομών στροβιλότητας.

Η παρούσα εργασία αφορά στην επέκταση του κώδικα GenUVP με την δυνατότητα χρονικής μεταβολής της καμπύλης αποκόλλησης. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκαν μια σειρά υπολογιστικών εργαλείων που αφορούν στην γένεση επιφανειακού πλέγματος, τον υπολογισμό του οριακού στρώματος και στην συνεργασία τους σε μια επαναληπτική διαδικασία για τη σύγκλιση των θέσεων αποκόλλησης σε κάθε χρονικό βήμα. Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό του οριακού στρώματος χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Rohlhausen. Εξαιτίας της χρήσης αυτής της μεθόδου η παραπάνω σύγκλιση δεν μπόρεσε να επιτευχθεί. Το γεγονός αυτό θα εξηγηθεί στο τέλος της εργασίας αφού παρουσιαστούν τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	iii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Φαινόμενα τριδιάστατης αποκόλλησης	1
2 Το υπολογιστικό εργαλείο GenUVP	9
2.1 Βασική θεωρία	9
2.1.1 Η διάσπαση Helmholtz	10
2.1.2 Το πρόβλημα του δυναμικού	10
2.1.3 Το πρόβλημα της δυναμικής της στροβιλότητας	10
2.1.4 Η δημιουργία νέας στροβιλότητας	11
2.2 Διαγράμματα ροής	11
2.2.1 Ο χάρτης του αλγορίθμου επίλυσης	11
2.2.2 Ο χάρτης των επεκτάσεων	13
3 Γενικές παρεμβάσεις	15
3.1 Γενικές παρατηρήσεις	15
3.2 Η μέθοδος αποκόλλησης στον GenUVP	15
3.3 Η συνθήκη Kutta	18
3.4 Η συνθήκη Kelvin	21
4 Γένεση αριθμητικού πλέγματος	23
4.1 Διατύπωση του προβλήματος	23
4.2 Τοποθέτηση κόμβων	24
4.3 Διακριτοποίησης της αεροτομής	26
4.4 Αριθμητική παραμετροποίηση μήκους τόξου	29
4.4.1 Διατύπωση του προβλήματος	29
4.4.2 Η προεπεξεργασία	29
4.4.3 Η χρήση της παραμετροποίησης	32

5	Υπολογισμοί οριακού στρώματος	33
5.1	Οι εξισώσεις του διδιάστατου μόνιμου οριακού στρώματος	33
5.2	Η μέθοδος Rohlfhausen	35
5.3	Η αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου	38
6	Επίλογος	41
6.1	Ανακεφαλαίωση	41
6.2	Συμπέρασμα	42
6.3	Προτάσεις	43
	Αναφορές	45

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

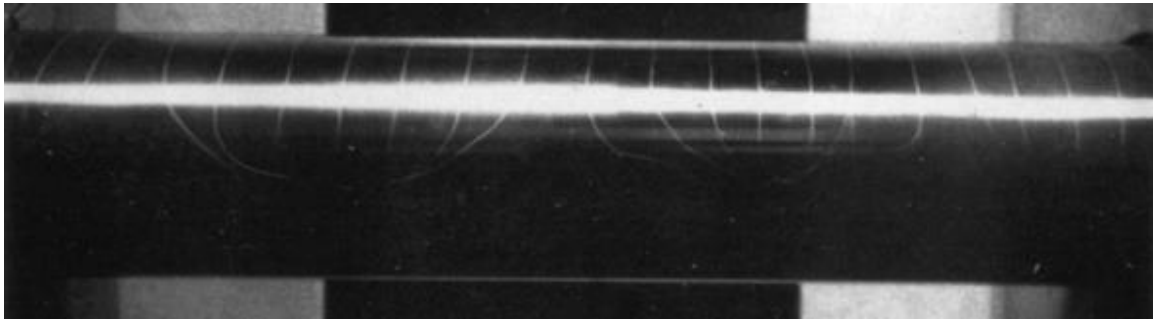
1.1 Φαινόμενα τριδιάστατης αποκόλλησης

Το βασικό φαινόμενο της αεροδυναμικής για το οποίο ενδιαφερόμαστε στην παρούσα εργασία είναι αυτό της τριδιάστατης αποκόλλησης. Ενώ στα υπόλοιπα κεφάλαια θα ασχοληθούμε κατά κύριο λόγο με τεχνικά υπολογιστικά θέματα που αφορούν στην ανάπτυξη του υπολογιστικού εργαλείου, εδώ θα παρουσιάσουμε το φαινόμενο καθαυτό.

Ο όρος τριδιάστατη αποκόλληση αναφέρεται στην κατά το εκπέτασμα διακύμανση των χαρακτηριστικών της αποκολλημένης ροής. Στη γενική περίπτωση όπου η πτέρυγα είναι μεταβαλλόμενης διατομής και η ροή ανομοιόμορφη, τα χαρακτηριστικά της αποκόλλησης αναμένεται να μεταβάλλονται κατά το εκπέτασμα. Το ενδιαφέρον βρίσκεται σε προβλήματα όπου τόσο το σώμα όσο και η εξωτερική ροή δεν μεταβάλλονται κατά το εκπέτασμα· το σώμα έχει σταθερή διατομή και η εξωτερική ροή είναι ομοιόμορφη. Τότε, υπό συνθήκες και ιδίως όταν εμφανίζεται αποκόλληση, η ροή εμφανίζει παραδόξως διακύμανση κατά το εκπέτασμα της πτέρυγας.

Τέτοιο πρόβλημα είναι το κυλινδρικό σώμα τυχαίας διατομής, εκτεθειμένο σε σταθερή ροή κάθετη στον άξονά του. Ενώ η ροή αναμένεται διδιάστατη, δηλαδή ίδια για κάθε διατομή κάθετη στον άξονα του σώματος, έχει παρατηρηθεί τόσο πειραματικά όσο και υπολογιστικά ότι για μεγάλα εκπετάσματα η ροή παίρνει τριδιάστατα χαρακτηριστικά. Αυτό το φαινόμενο έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον τόσο για την αναπαραγωγή του όσο και την κατανόηση των μηχανισμών που το δημιουργούν. Από τις πρώτες έρευνες που αποτύπωναν το φαινόμενο ήταν αυτή του Humphreys το 1960 [5] που διαπίστωσε ότι η ροή γύρω από κύλινδρο αποκτούσε τριδιάστατα χαρακτηριστικά αμέσως μετά τον κρίσιμο Re και την αποκόλληση της ροής (σχήμα 1.1).

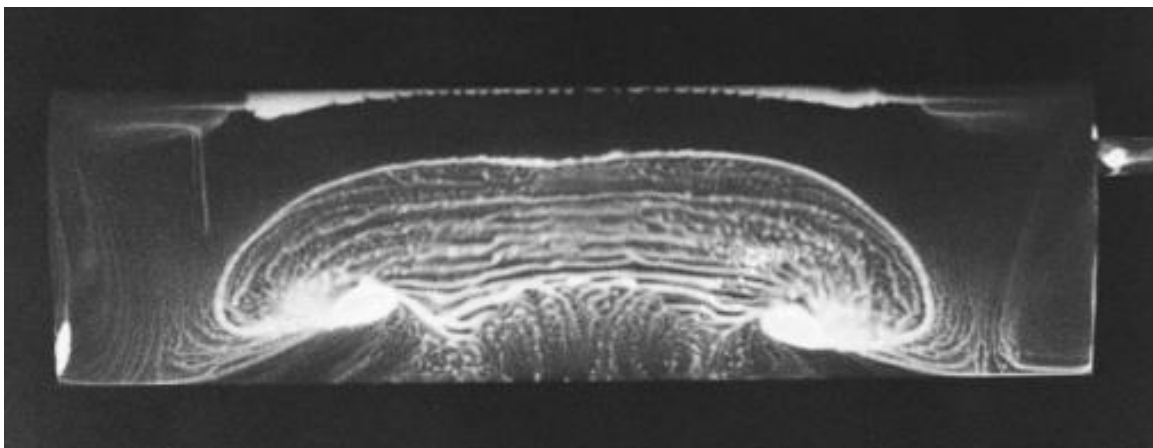
Ανάμεσα στα κυλινδρικά σώματα ξεχωριστής σημασίας είναι οι ορθογωνικές πτέρυγες λόγω του τεχνικού ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν στις εφαρμογές της αεροδυνα-



Σχήμα 1.1: Τριδιάστατη διακύμανση ροής γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής για κρίσιμο Re [Humphreys 1960]

μικής. Όπως σε κυλινδρικά σώματα κυκλικής και ορθογωνικής διατομής έτσι και στην περίπτωση ορθογωνικών πτερυγίων, υπό κάποιες συνθήκες οι ροές γίνονται τριδιάστατες.

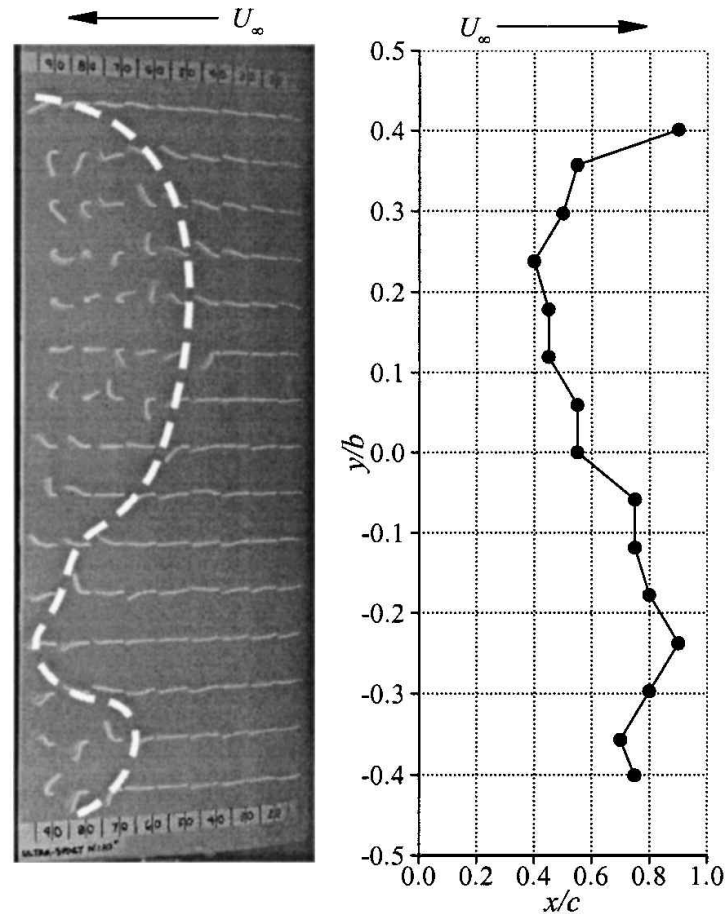
Συγκεκριμένα για τις αεροτομές, οι τριδιάστατες δομές που εμφανίζονται σε αποκολλημένες ροές ονομάζονται stall cells και έχουν τη χαρακτηριστική μορφή που απεικονίζεται στο σχήμα 1.2 (Winkerman 1980 [12]). Τα stall cells είναι τριδιάστατες δομές και αποτελούνται από δύο αντίθετα περιστρεφόμενες δίνες που ξεκινάνε από τη πλευρά υποπίεσης της πτέρυγας. Αυξάνοντας τη γωνία πρόσπτωσης η εμφάνισή τους ξεκινάει μετά την αποκόλληση της ροής με το ζευγάρι των δινών να συναντά την πτέρυγα ανάμεσα στη γραμμή αποκόλλησης και την ακμή εκφυγής.



Σχήμα 1.2: stall cells σε ορθογωνική πτέρυγα [Winkelmann 1980]

Η διδιάστατη μοντελοποίηση προβλέπει σταθερή θέση αποκόλλησης κατά το εκπέτασμα. Με την εμφάνιση των stall cells όμως, η ροή αποκολλάται σε διαφορετικές θέσεις

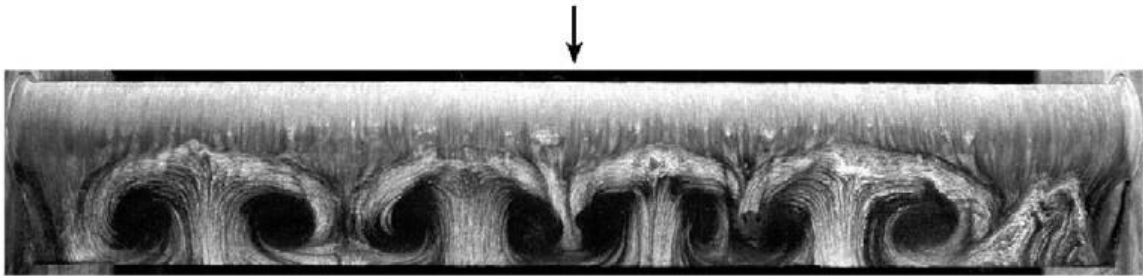
κατά το εκπέτασμα όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3 από τα πειράματα των Broeren και Bragg [1]. Το γεγονός αυτό αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως τριδιάστατη αποκόλληση και θεωρείται ταυτόσημο με την ύπαρξη των stall cells. Χαρακτηριστικό των πειραμάτων των Broeren και Bragg είναι το συμπέρασμα ότι οι χρονικά μέσες τιμές των ταχυτήτων προέκυψαν διδιάστατες πράγμα που δείχνει τον έντονα μη μόνιμο και ασταθή χαρακτήρα της τριδιάστατης αποκόλλησης.



Σχήμα 1.3: Τριδιάστατη διακύμανση της γραμμής αποκόλλησης. [Broeren & Bragg 2001]

Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των stall cells είναι η περιοδικότητα κατά το εκπέτασμα. Σύμφωνα με τα πειράματα του Schege 2001 [3] η πεπερασμένου εκπετάσματος πτέρυγα εμφανίζει (σχήμα 1.4) πάνω από ένα ζευγάρι stall cells αναλόγως του αριθμού Reynolds και της γωνίας πρόσπτωσης. Στην ίδια δημοσίευση, διατυπώνεται η υπόθεση ότι για δεδομένο Re και γωνία πρόσπτωσης, η χωρική περίοδος των stall cells πρέπει να τείνει σε σταθερή τιμή καθώς το εκπέτασμα τείνει στο άπειρο και να εξαρτάται μόνο από το

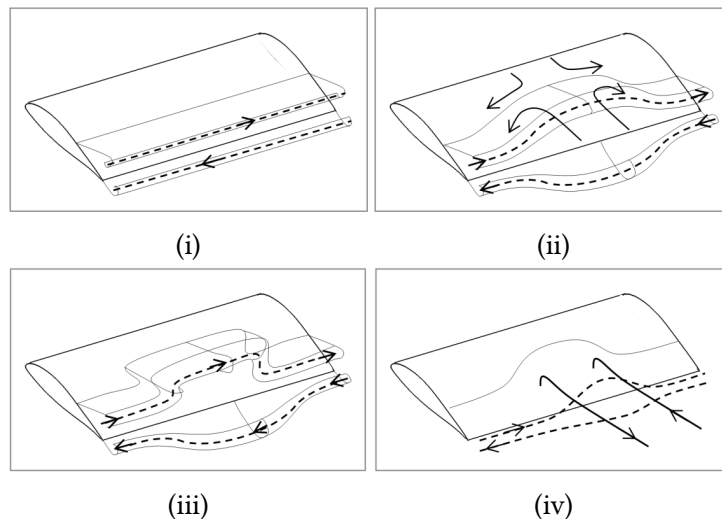
μήκος της χορδής.



Σχήμα 1.4: Περιοδική εμφάνιση stall cells [Schewd 2001]

Στο εργαστήριο αεροδυναμικής του Ε.Μ.Π. έχει πραγματοποιηθεί τόσο πειραματική όσο και υπολογιστική

Ο μηχανισμός ανάπτυξης των stall cells παραμένει άγνωστος. Στην πλειοψηφία της βιβλιογραφίας το φαινόμενο αποδίδεται στη δυναμική των φύλλων στροβιλότητας του ομόρρου. Στα πλαίσια πειραμάτων που έγιναν στο εργαστήριο αεροδυναμικής του Ε.Μ.Π. αλλά και υπολογιστικής προσομείωσης RANS με σκοπό τη μελέτη των stall cells από το Μαρίνο Μανωλέσο [7] προτάθηκε ένας μηχανισμός για την ανάπτυξή τους. Ο σχηματισμός των stall cells αποδίδεται σε διαταραχές των φύλλων στροβιλότητας του ομόρρου που οδηγούν το σύστημα σε αστάθεια τύπου Crow [10] και στην διαμόρφωση μιας τριδιάστατης γραμμής αποκόλλησης (σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5: Μηχανισμός σχηματισμού stall cells από τον Μανωλέσο

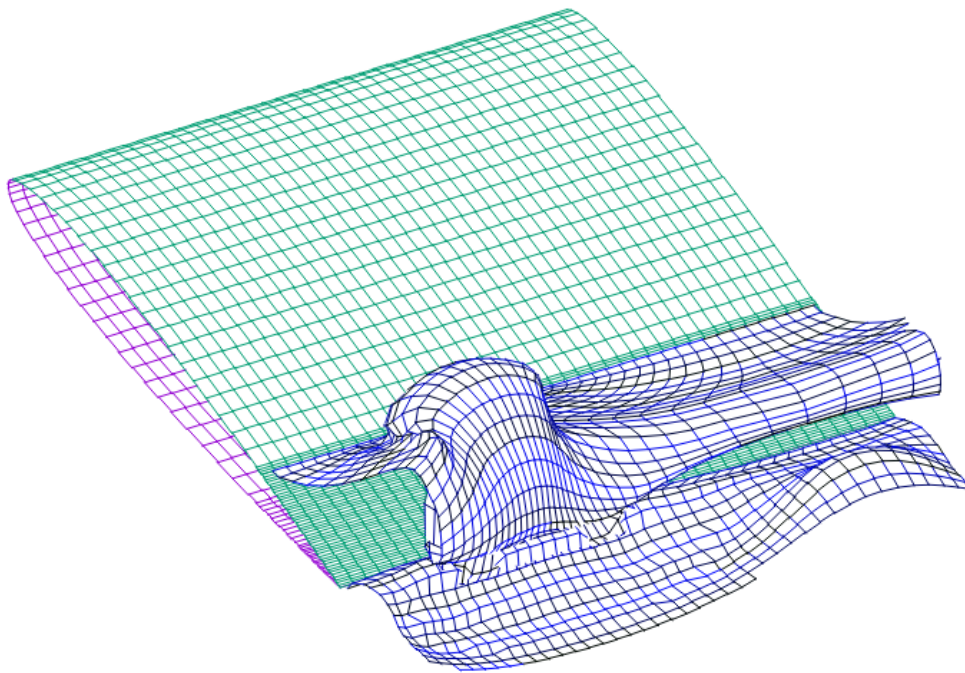
Η απόδοση του μηχανισμού σχηματισμού των stall cells στην ενίσχυση μιας διαταραχής από το σύστημα στροβιλότητας έχει σαν βάση τις γνωστές αστάθειες της στροβιλότητας. Δύο από τις πιο βασικές είναι η αστάθεια Kelvin-Helmholtz και η αστάθεια Crow. Γενικά για φύλλα στροβιλότητας αποδεικνύεται [2, 6] ότι μια περιοδική διέγερση απειροστού πλάτους οδηγεί το σύστημα στην αστάθεια Kelvin-Helmholtz. Η αστάθεια Crow [10] αφορά σε ένα ζευγάρι αντίθετα περιστρεφόμενων και παράλληλων δινοσωλήνων. Όπως και με την αστάθεια Kelvin-Helmholtz, μια διαταραχή κατά μήκος των δινοσωλήνων οδηγεί το σύστημα σε τριδιάστατη αστάθεια και εντέλει στην κατάρρευσή του. Τονίζεται ότι οι παραπάνω αστάθειες είναι ανεξάρτητες της συνεκτικότητας. Προκύπτουν από τη δυναμική της στροβιλότητας ενώ ο ρόλος της συνεκτικότητας είναι καθαρά αποσβεστικός.

Σε προηγούμενη εργασία του εργαστηρίου [13], επιχειρήθηκε η επιβεβαίωση του παραπάνω μηχανισμού για τον σχηματισμό των stall cells χρησιμοποιώντας των μη-συνεκτικό κώδικα GenUVP. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο του διπλού ομόρρου για την περιγραφή της αποκόλλημένης ροής και περιοδικές συνθήκες δείχτηκε ότι υπό συνθήκες είναι δυνατόν να αναπαραχθούν τριδιάστατες δομές στροβιλότητας σε ορθογωνική πτέρυγα (σχήμα 1.6).

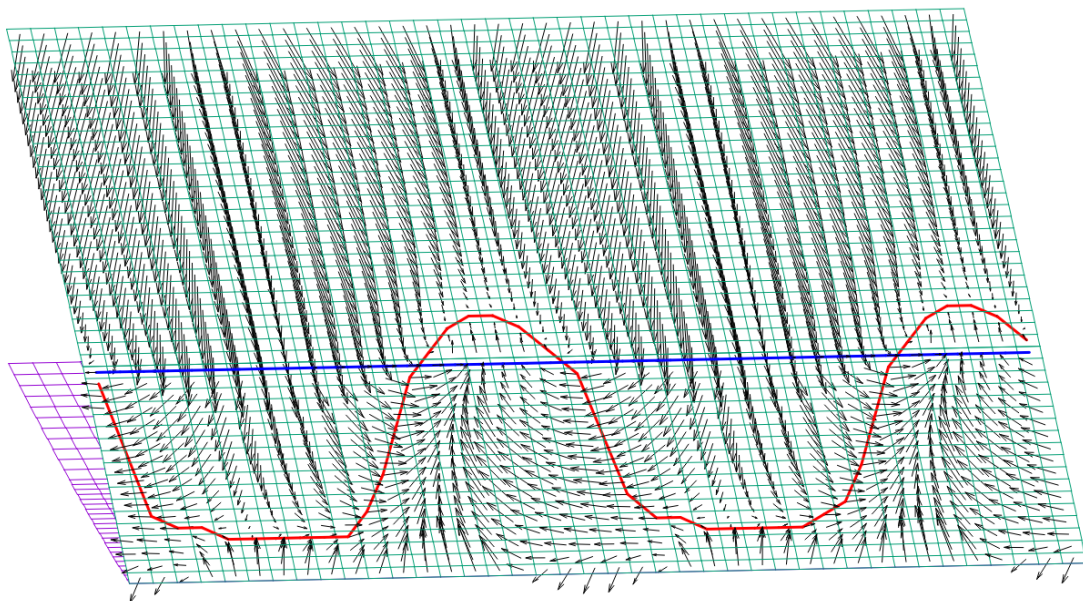
Στο σχήμα 1.7 παρουσιάζονται από μια άλλη προσομοίωση οι επαπτομενικές ταχύτητες στην πλευρά υποπίεσης. Παρατηρούνται δύο ζευγάρια αντίθετα περιστρεφόμενων δινών στην περιοχή της αποκόλλησης που αντιστοιχούν σε δύο stall cells στο μήκος μιας χωρικής περιόδου.

Πρέπει να τονιστεί ότι η καμπύλη της θέσης αποκόλλησης επιβλήθηκε αυθαίρετα και χωρίς δυνατότητα μεταβολής της κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Όπως γίνεται αντιληπτό, η στατικότητα της καμπύλης αποκόλλησης αποτελεί υπεραπλούστευση καθώς το φαινόμενο έχει έντονα μη-μόνιμο και τριδιάστατο χαρακτήρα. Παρά το γεγονός ότι παρατηρήθηκε η προβλεπόμενη αστάθεια της στροβιλότητας του ομόρρου και ο σχηματισμός stall cells, η τριδιάστατη αποκόλληση δεν μπορεί να αποτυπωθεί.

Η παρούσα εργασία αποτελεί φυσική συνέχεια της προηγούμενης και στόχο έχει την επέκταση των δυνατοτήτων του κώδικα GenUVP για την καλύτερη προσομοίωση του φαινομένου της τριδιάστατης αποκόλλησης. Για το σκοπό αυτό, ο κώδικας GenUVP εφοδιάζεται με δυνατότητα μεταβολής του επιφανειακού πλέγματος κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης ενώ εισάγεται μια μέθοδος για τον υπολογισμό των θέσεων αποκόλλησης. Η κατασκευή των εργαλείων για τη γένεση πλέγματος και τον υπολογισμό των θέσεων αποκόλλησης αποτελεί τον βασικό κορμό αυτής της εργασίας. Στα επόμενα κεφάλαια θα αναπτυχθούν οι λεπτομέρειες τόσο για την ανάπτυξη των παραπάνω εργαλείων όσο και για τις απαιτούμενες αλλαγές στην πυρήνα του κώδικα GenUVP.



Σχήμα 1.6: Στιγμιότυπο προσομείωσης αποκόλλησης με τον κώδικα GenUVP. Γωνία πρόσπτωσης $a = 30^\circ$, χωρική περίοδος $\lambda = 2c$, θέση αποκόλλησης $50\%c$: c το μήκος της χορδής



Σχήμα 1.7: Επιφανειακές ταχύτητες στην περιοχή αποκόλλησης. $a = 11^\circ$. Μπλε: η επιβαλλόμενη γραμμή αποκόλλησης. Κόκκινο: η καμπύλη ανακοπής

Κεφάλαιο 2

Το υπολογιστικό εργαλείο GenUVP

Ο κώδικας GenUVP (Generalized Unsteady Vortex Particle Method) αναπτύχθηκε στο εργαστήριο αεροδυναμικής του Ε.Μ.Π. και είναι ένα υπολογιστικό εργαλείο για την επίλυση μη μόνιμων ροών γύρω από σώματα. Κατατάσσεται στην κατηγορία των μεθόδων συνοριακών στοιχείων καθώς δεν απαιτείται η διακριτοποίηση του χώρου της ροής σε πλέγμα, όπως συμβαίνει με άλλες μεθόδους της υπολογιστικής ρευστομηχανικής, αλλά μόνο της επιφάνειας των στερεών σωμάτων. Επίσης χρησιμοποιείται η μέθοδος στοιχείων στροβιλότητας για τη διακριτοποίηση του ομόρρου των ανωστικών σωμάτων η οποία χρησιμοποιεί Lagrangian περιγραφή της ροής. Ένα από τα προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν με τον κώδικα GenUVP είναι και η ροή γύρω απο ανωστικό σώμα με ή χωρίς αποκόλληση. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα βασικά στοιχεία της θεωρίας πίσω από τον GenUVP και η υλοποίηση του διπλού ομόρρου για την προσομοίωση της αποκόλλησης. Τέλος, θα παρουσιαστεί το περίγραμμα των επεκτάσεων που απαιτούνται για το σκοπό της παρούσας εργασίας.

2.1 Βασική θεωρία

Στον κώδικα γίνονται οι βασικές παραδοχές ότι η ροή είναι ασυμπίεση, μη-συνεκτική και αστρόβιλη σε όλο το πεδίο ροής με εξαίρεση τον ομόρρο των ανωστικών σωμάτων. Τα φύλλα στροβιλότητας του ομόρρου παράγονται σταδιακά σε κάθε χρονικό βήμα από τη ακμή εκφυγής και τη γραμμή αποκόλλησης και αποτελούν το χωρίο στήριξης D_ω της στροβιλότητας.

2.1.1 Η διάσπαση Helmholtz

Σύμφωνα με το θεώρημα διάσπασης του Helmholtz [4] το πεδίο ταχύτητας \mathbf{u} αναλύεται σε ένα αστρόβιλο \mathbf{u}_e , ένα σωληνοειδές \mathbf{u}_ω και ένα σωληνοειδές και αστρόβιλο πεδίο ταχυτήτων \mathbf{U}_∞ :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_\omega \implies \\ &= \mathbf{U}_\infty + \nabla\Phi + \mathbf{u}_\omega\end{aligned}\quad (2.1)$$

όπου Φ το δυναμικό της στρόβιλης ταχύτας \mathbf{u}_e .

Στην παραπάνω εξίσωση η ταχύτητα της αδιατάραχτης ροής \mathbf{U}_∞ αντιστοιχεί στην εξωτερικά επιβαλλόμενη ταχύτητα που είναι δεδομένη. Η \mathbf{u}_ω είναι η ταχύτητα που επάγει ο ομόρρους και που υπολογίζεται από το νόμο Biot-Savart:

$$\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}) = \int_{D_\omega} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \wedge \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dD_\omega(\mathbf{x}') \quad (2.2)$$

όπου $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ το πεδίο της στροβιλότητας.

2.1.2 Το πρόβλημα του δυναμικού

Η ταχύτητα $\mathbf{u}_e = \nabla\Phi$ αντιστοιχεί στην διαταραχή της ροής λόγω της παρουσίας της πτέρυγας. Η υπόθεση του ασυμπίεστου της ροής οδηγεί στην εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.3)$$

με συνοριακές συνθήκες τη συνθήκη μη-εισχώρησης:

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_\omega - \mathbf{U}_b) \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \partial D = S \quad (2.4)$$

και τη συνθήκη μηδενισμού της ταχύτητας της διαταραχής στο άπειρο:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla\Phi = 0 \quad (2.5)$$

όπου \mathbf{U}_b η ταχύτητα του σώματος.

2.1.3 Το πρόβλημα της δυναμικής της στροβιλότητας

Σύμφωνα με τους νόμους του Helmholtz [9] τα σημεία του πεδίου ροής που φέρουν στροβιλότητα είναι υλικά σημεία, δηλαδή ακολουθούν την κίνηση του μέσου. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν ένα υλικό σημείο $\boldsymbol{\xi}$ είναι σημείο του ομόρρου κάποια χρονική

στιγμή t_0 , θα συνεχίσει να είναι σημείο του ομόρρου σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή t . Η θέση ενός τέτοιου σημείου σε χωρικές συντεταγμένες είναι:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad \mathbf{x} \in D_\omega \quad (2.6)$$

όπου $\boldsymbol{\xi}$ η ταυτότητα του υλικού σημείου. Η ταχύτητα ενός τέτοιου σημείου είναι αυτή της μέσης ροής οπότε η εξίσωση κίνησής του είναι:

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_\omega \quad (2.7)$$

Με ολοκλήρωση της (2.7) περιγράφεται η θέση του ομόρρου δηλαδή του συνόλου D_ω συναρτήσει του χρόνου. Η χρονική εξέλιξη της στροβιλότητας περιγράφεται από τη εξίσωση δυναμικής της στροβιλότητας για μη-συνεκτικό ρευστό:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.8)$$

2.1.4 Η δημιουργία νέας στροβιλότητας

Σύμφωνα πάλι με τους νόμους του Helmholtz [9] ένα ασυμπιεστο και αρχικά αστρόβιλο πεδίο παραμένει αστρόβιλο εφόσον οι ασκούμενες δυνάμεις είναι συντηρητικές. Η πρόταση αυτή επιβεβαιώνεται και από την παραπάνω έκφραση της δυναμικής της στροβιλότητας για μη-συνεκτικό ρευστό. Ο μοναδικός μηχανισμός για την εισαγωγή στροβιλότητας στο αρχικά αστρόβιλο πεδίο ροής είναι η διάχυση της ορμής που προκύπτει από τα συνεκτικά οριακά στρώματα που περιβάλλουν τα στερεά σύνορα [4].

Στον μη-συνεκτικό κώδικα GenUVP η εισαγωγή της στροβιλότητας γίνεται με επιβολή ειδικών συνθηκών στην ακμή εκφυγής και τη θέση αποκόλλησης. Οι συνθήκες αυτές είναι η συνθήκη Kutta και η συνθήκη Kelvin και ρυθμίζουν την έκλυση της στροβιλότητας και την ανάπτυξη κυκλοφορίας στις αεροτομές [11].

2.2 Διαγράμματα ροής

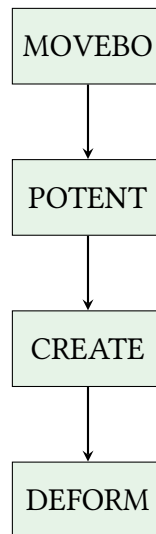
2.2.1 Ο χάρτης του αλγορίθμου επίλυσης

Όπως είναι φανερό από την εξίσωση (2.1) οι άγνωστες συνιστώσες της ταχύτητας είναι η \mathbf{u}_e και η \mathbf{u}_ω . Η ταχύτητα \mathbf{u}_e είναι η κλίση του δυναμικού Φ της εξίσωσης Laplace (2.3) με συνοριακές συνθήκες τις εξισώσεις (2.4) και (2.5). Σημειώνεται ότι η συνοριακή συνθήκη μη-εισχώρησης εξαρτάται από την άγνωστη ταχύτητα \mathbf{u}_ω . Όπως προκύπτει από νόμο Biot-Savart (2.2), η ταχύτητα \mathbf{u}_ω καθορίζεται πλήρως από το πεδίο στροβιλότητας $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$. Για τον υπολογισμό του πεδίου στροβιλότητας απαιτείται η επίλυση των

εξισώσεων μεταφοράς (2.7) και δυναμικής (2.8). Οι εξισώσεις αυτές είναι επίσης εξαρτημένες από το άγνωστο πεδίο ταχύτητα.

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω οι εξισώσεις είναι πεπλεγμένες. Όμως ο διαχωρισμός των προβλημάτων όπως παρουσιάστηκε παραπάνω μας επιτρέπει να τα λύσουμε ανεξάρτητα. Για δεδομένη κατανομή στροβιλότητας η ταχύτητα u_ω είναι γνωστή και το πρόβλημα του δυναμικού των εξισώσεων (2.3), (2.4) και (2.5) μπορεί να λυθεί. Αντίστοιχα, δεδομένης της ταχύτητας u_e η κίνηση και η παραμόρφωση της στροβιλότητας μπορεί να λυθεί από τις εξισώσεις (2.7) και (2.8).

Έδω πρέπει να σημειωθεί ότι ο προσδιορισμός της εκλυόμενης στροβιλότητας ενσωματώνεται στην επίλυση του προβλήματος του δυναμικού. Ο κοντινός ομόρρους, δηλαδή η στροβιλότητα που εκλύεται στο τρέχον χρονικό βήμα, αναπαριστάται με μια επιφανειακή κατανομή στροβιλότητας σε επαφή με τις θέσεις έκλυσης του σώματος. Στην περίπτωση του διπλού ομόρρου η έκλυση γίνεται από την ακμή εκφυγής και τη θέση αποκόλλησης και έχουμε δύο επιφάνειες σε επαφή με τις αντίστοιχες θέσεις. Η συσχέτιση του μήκους του κοντινού ομόρρου και της κατανομής της επιφανειακής του στροβιλότητας με το πρόβλημα δυναμικού γίνεται μέσω των συνθηκών Kutta και Kelvin. Μετά την επίλυση του δυναμικού τα νέα υλικά στοιχεία στροβιλότητας προκύπτουν με ολοκλήρωση της στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου [16].



Σχήμα 2.1

Σχήμα 2.2: Διάγραμμα ροής ενός χρονικού βήματος του κώδικα GenUVP

Η διαδικασία επίλυσης σε κάθε χρονικό βήμα παρουσιάζεται στο διάγραμμα ροής του σχήματος 2.2 και έχει ως εξής: Υπολογίζεται η θέση και η ταχύτητα του σώμα-

τος λόγω της προδιαγεγραμμένης κίνησής του (διαδικασία MOVEBO). Η κατανομή της στροβιλότητας είναι γνωστή οπότε μπορεί να προσδιοριστεί το δυναμικό (διαδικασία POTENT). Αφού λυθεί το πρόβλημα του δυναμικού ακολουθούν οι υπολογισμοί για τη θέση και ένταση του πεδίου στροβιλότητας. Συγκεκριμένα, δημιουργούνται τα νέα στοιχεία στροβιλότητας του τρέχοντος χρονικού βήματος ολοκληρώνοντας τη στροβιλότητα του κοντινού ομόρρου (διαδικασία CREATE). Στη συνέχεια το σύνολο των στοιχείων στροβιλότητας μετατοπίζεται υλικά ενώ επανακαθορίζεται το διάνυμα της στροβιλότητάς τους μέσω της εξίσωσης δυναμικής της στροβιλότητας για να προκύψει η κατανομή της στροβιλότητας του επόμενου χρονικού βήματος (διαδικασία DEFORM).

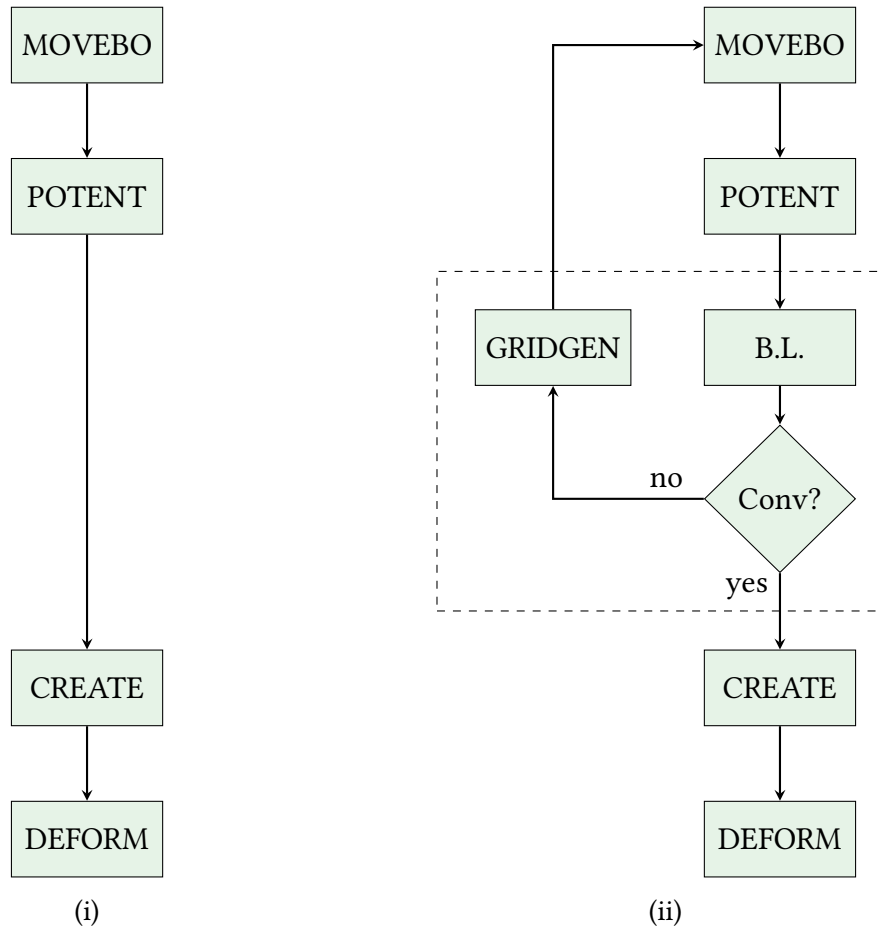
2.2.2 Ο χάρτης των επεκτάσεων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η αποκόλληση μοντελοποιείται με ένα δεύτερο φύλλο στροβιλότητας. Στην τρέχουσα έκδοση του GenUVP η θέση της αποκόλλησης επιβάλλεται εξωτερικά δεν αλλάζει κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Εδώ στοχεύουμε στη δυνατότητα η θέση αυτή να υπολογίζεται με έναν εσωτερικό υπολογισμό του οριακού στρώματος σε κάθε χρονικό βήμα και στην μεταβολή του πλέγματος που συνεπάγεται η αλλαγή της.

Η θέση της αποκόλλησης προσδιορίζεται από το σημείο μετάβασης του οριακού στρώματος. Εδώ χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Pohlhausen για την ολοκλήρωση των εξισώσεων του οριακού στρώματος. Δεδομένα εισόδου της μεθόδου είναι οι εφαπτομενικές ταχύτητες κάθε λωρίδας όπως προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος δυναμικού. Προϋπόθεση είναι η παραδοχή ότι το πάχος του οριακού στρώματος είναι μικρό οπότε η εφαπτομενικές ταχύτητες του μη-συνεκτικού κώδικα ταυτίζονται με τις εξωτερικές ταχύτητες του οριακού στρώματος.

Όπως είναι προφανές οι συνθήκες του οριακού στρώματος είναι εξαρτημένες από το εξωτερικό πεδίο. Αντίστροφα, η εξωτερική ροή εξαρτάται από τη θέση αποκόλλησης. Διαφορετική θέση αποκόλλησης συνεπάγεται διαφορετική γεωμετρία του προβλήματος δυναμικού. Για το λόγω αυτό σε κάθε χρονικό βήμα η θέση της αποκόλλησης προσεγγίζεται επαναληπτικά όπως φαίνεται στο διάγραμμα ροής (ii) του σχήματος 2.3. Μετά την επίλυση του δυναμικού (διαδικασία POTENT) ακολουθεί για κάθε λωρίδα η επίλυση του οριακού στρώματος (διαδικασία B.L.) απ' όπου επιστρέφεται η θέση της αποκόλλησης. Αν η νέα θέση απέχει σημαντικά από την παλιά κατασκευάζεται νέο πλέγμα (διαδικασία GRIDGEN) και επαναλαμβάνεται η επίλυση του δυναμικού. Διαφορετικά συνεχίζουμε με τους υπολογισμούς στροβιλότητας για να περάσουμε στο επόμενο χρονικό βήμα.

Από το διάγραμμα ροής του νέου κώδικα γίνεται σαφές ότι οι διαδικασίες γένεσης πλέγματος (GRIDGEN) και επίλυσης του οριακού στρώματος (B.L.) είναι νέα εργαλεία που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Τα εργαλεία αυτά θα παρουν-



Σχήμα 2.3: Συγκριτικά διαγράμματα ροής ενός χρονικού βήματος πριν (i) και μετά (ii) τις προσθήκες.

σιαστούν αναλυτικά σε επόμενα κεφάλαια. Σημειώνεται ότι η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος δυναμικού (POTENT) που αποτελεί μέρος του πυρήνα του κώδικα GenUVP δεν είναι σχεδιασμένη για να υποστηρίξει μεταβαλλόμενο πλέγμα. Οι αλλαγές που απαιτούνται στον ήδη υπάρχοντα κώδικα αναλύονται στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Γενικές παρεμβάσεις

Όπως αναφέρθηκε, ο κώδικας στον οποίο χτίζει αυτή η εργασία δεν υποστηρίζει μεταβλητότητα στο επιφανειακό πλέγμα. Ως εκ τούτου, εκτός από τις προσθήκες που αφορούν στην λύση του οριακού στρώματος και τη γένεση πλέγματος, απαιτούνται αλλαγές και στον πυρήνα του ήδη υπάρχοντος κώδικα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι αλλαγές αυτές δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση σε αυτές με το μεγαλύτερο θεωρητικό ενδιαφέρον.

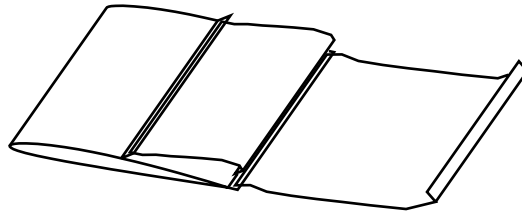
3.1 Γενικές παρατηρήσεις

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τη μεταβολή της θέσης αποκόλλησης είναι στην ουσία μετακίνηση κόμβων. Αυτό σημαίνει ότι η συνδεσμολογία των επιφανειών των σωμάτων και του ομόρρου δεν αλλάζει και η έκλυση της στροβιλότητας γίνεται από τους ίδιους κόμβους σε όλα τα χρονικά βήματα. Επίσης, κάθε επιφανειακό στοιχείο, είτε του σώματος είτε του ομόρρου, είναι πάντα συνδεδεμένο με τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας. Το μόνο που αλλάζει είναι η θέση των κόμβων και οφείλεται στην μετακίνηση των συνοριακών κόμβων της αποκόλλησης. Όλα τα παραπάνω μας επιτρέπουν να διατηρήσουμε τον κώδικα ως έχει και να εστιάσουμε στις συνέπειες που έχει η παραμόρφωση της γεωμετρίας, κυρίως στον τρόπο εφαρμογής των συνθηκών Kutta και Kelvin.

Πρίν προχωρήσουμε, κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια συνοπτική περιγραφή του κώδικα GenUVP για επίλυση αποκολλημένων ροών.

3.2 Η μέθοδος αποκόλλησης στον GenUVP

Γενικά η έκλυση στροβιλότητας στο πρόβλημα μη-συνεκτικής ροής οφείλεται στην ύπαρξη μη μηδενικής κυκλοφορίας που με τη σειρά της οφείλεται σε μια ασυνέχεια

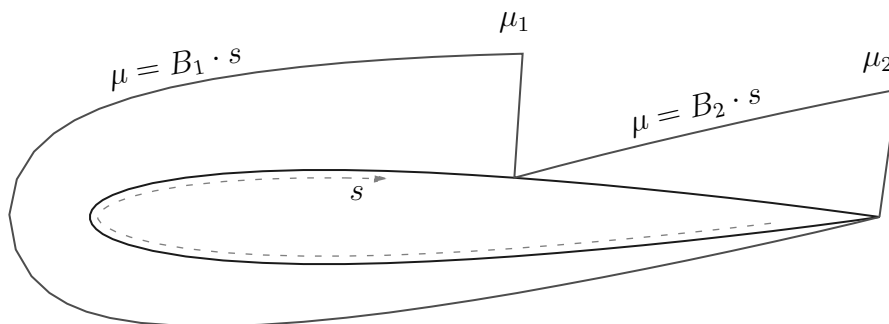


Σχήμα 3.1: Το μοντέλο διπλού ομόρρου για την αναπαράσταση της αποκόλλησης

του δυναμικού της ροής. Στη απλή περίπτωση ανωστικού σώματος με πάχος το δυναμικό πάνω στην πτέρυγα μεταβάλλεται συνεχώς κατά μήκος της αεροτομής ξεκινώντας με μία αυθαίρετη τιμή στην κάτω πλευρά της ακμής εκφυγής και καταλήγοντας στην πάνω πλευρά στην ίδια θέση αλλά με μια άλλη τιμή. Αυτή η ασυνέχεια του δυναμικού στην ακμή εκφυγής μεταφέρεται ως στροβιλότητα του ομόρρου σε επόμενους χρόνους. Σημειώνεται ότι το δυναμικό πάνω σε μία υπολογιστική λωρίδα της πτέρυγας είναι αποτέλεσμα άθροισης επιφανειακών κατανομών πηγών που συνδέονται με τη συνθήκη μη-εισχώρησης και μιας επιφανειακής κατανομής διπόλων που μεταβάλλεται γραμμικά κατά το μήκος τόξου της αεροτομής της λωρίδας [8],[16]. Η έκλυση της στροβιλότητας σε κάθε χρονικό βήμα γίνεται μέσω μιας επιφανειακής κατανομής διπόλων κοντινού ομόρρου η οποία μεταβάλλεται επίσης γραμμικά. Θεωρώντας μηδενική τιμή διπόλου στην κάτω πλευρά της ακμής εκφυγής η κατανομή διπόλων στην πάνω σε κάθε λωρίδα καθορίζεται πλήρως από την τιμή του διπόλου στην πάνω πλευρά της ακμής εκφυγής μ . Η κατανομή διπόλων στον κοντινό ομόρρου καθορίζεται από τις τιμές των διπόλων μ_{emis} και μ_w στα δύο άκρα του. Θέτοντας $\mu = \mu_{emis}$ στην κοινή πλευρά έχουμε τελικά μόνο δύο αγνώστους ανά λωρίδα οι οποίοι συνδέονται με τις εξισώσεις των συνθηκών Kutta και Kelvin. Έτσι κλείνει το σύστημα εξισώσεων για το πρόβλημα δυναμικού μετά τη λύση του οποίου ακολουθεί η αντικατάσταση του τρέχοντος κοντινού ομόρρου με νέα στοιχεία στροβιλότητας και η μετακίνηση και παραμόρφωση του συνόλου της στροβιλότητας που έχει εκλυθεί.

Στην περίπτωση αποκόλλημένης ροής γύρω από πτέρυγα υπάρχει έκλυση στροβιλότητας και από τη θέση της αποκόλλησης με ασυνέχεια δυναμικού στη θέση αυτή. Τώρα κάθε αεροτομή χωρίζεται σε δύο τμήματα· ένα τμήμα από την κάτω πλευρά της ακμής εκφυγής μέχρι τη θέση της αποκόλλησης και ένα από τη θέση της αποκόλλησης μέχρι την πάνω πλευρά της ακμής εκφυγής. Κάθε ένα από αυτά έχει γραμμική κατανομή διπόλων ξεκινώντας από μηδενική τιμή. Σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση του απλού ομόρρου όπου είχαμε δύο αγνώστους ανά λωρίδα, εδώ έχουμε τέσσερις: τις ακραίες τιμές των γραμμικών κατανομών διπόλων μ_1 και μ_2 και τις τιμές των διπόλων του κοντινού ομόρρου στην ελεύθερη πλευρά τους μ_{w1} και μ_{w2} . Για το κλείσιμο του προβλήματος απαιτούνται τέσσερις εξισώσεις επιπλέον των συνθηκών μη-εισχώρησης.

Οι συνθήκες Kutta και Kelvin συμπληρώνουν δύο μόνο από τις απαιτούμενες εξισώσεις και δεν μπορούν να εφαρμοστούν περισσότερες φορές καθώς κάθε μία από αυτές αφορά σε ολόκληρη την αεροτομή της λωρίδας. Η τρίτη εξίσωση είναι η επιβολή σημείου ανακοπής αμέσως μετά την θέση της αποκόλλησης και έχει ως φυσικό νόημα την αντιστροφή της ροής του οριακού στρώματος. Η τελευταία εξίσωση είναι η ιδιότητα της επιφανειακής κατανομής της στροβιλότητας να ισούται με την ασυνέχεια της εφαπτομενικής της ταχύτητας. Η εξίσωση αυτή εφαρμόζεται μόνο στον κοντινό ομόρρο της αποκόλλησης.



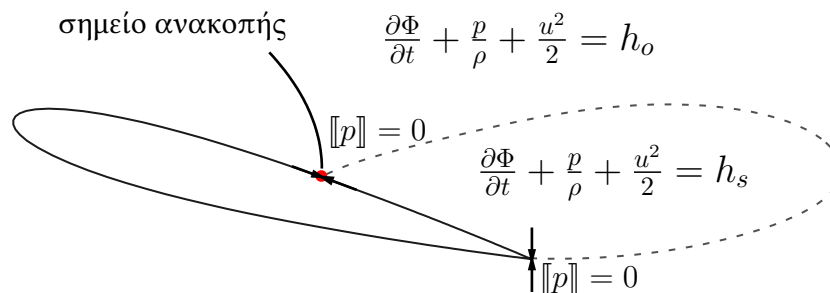
Σχήμα 3.2: Οι κατανομές διπόλων σε μια αριθμητική λωρίδα της πτέρυγας στην περίπτωση αποκόλλησης

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν αναλυτικά οι συνθήκες Kutta και Kelvin αφού απο-

τελούν τα τμήματα του αρχικού κώδικα με τις σημαντικότερες αλλαγές.

3.3 Η συνθήκη Kutta

Όπως προκύπτει από του νόμους του Helmholtz η στροβιλότητα δημιουργείται από τη δράση συνεκτικών δυνάμεων [4]. Μια μη συνεκτική ροή προβλέπει τη ροή γύρω από την ακμή εκφυγής με αποτέλεσμα τον απειρισμό της ταχύτητας. Αντίθετα, όταν υπάρχει έστω και αμελητέα συνεκτικότητα η ροή δεν γυρνάει από την ακμή εκφυγής αλλά εκλύεται στροβιλότητα κατάντι της πτέρυγας με αποτέλεσμα την ανάπτυξη κυκλοφορίας στην αεροτομή. Η εφαρμογή της συνθήκης Kutta σκοπεύει να περιγράψει την έκλυση της στροβιλότητας όταν η ροή έχει υποτεθεί μη-συνεκτική όπως στον κώδικα GenUVP.



Σχήμα 3.3: Εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli στη συνθήκη Kutta

Η έκφραση της συνθήκης Kutta που χρησιμοποιούμε εδώ είναι η επιβολή μηδενικής ασυνέχειας πίεσης στις θέσεις έκλυσης της στροβιλότητας. Στην περίπτωση απλού ομόρρου ο υπολογισμός γίνεται εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli στις δύο πλευρές της ακμής εκφυγής. Στην περίπτωση του διπλού ομόρρου όμως πρέπει να γίνει ένας επιπλέον υπολογισμός στην θέση της αποκόλλησης ενώ η σταθερές Bernoulli έχουν διαφορετικές τιμές εκατέρωθεν των ασυνεχειών. Αυτό μπορεί να φανεί μέσω της εξίσωσης της ορμής:

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} \quad (3.1)$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης βρίσκεται σε αστρόβιλη περιοχή. Συμβολίζοντας με S την θέση της αποκόλλησης, T την ακμή εκφυγής και με up και lo την πάνω και κάτω πλευρά μιας θέσης αντίστοιχα έχουμε τις εκφράσεις της εξίσωσης Bernoulli για τις δύο περιοχές της ροής:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right]_{Tlo} &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right]_{Sup} \\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right]_{Slo} &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right]_{Tup} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και θέτωντας την ασυνέχεια της πίεση ίση με μηδέν στην ακμή εκφυγής και στη θέση αποκόλλησης έχουμε:

$$\left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \right] \right]_T + \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \right] \right]_S = 0 \quad (3.3)$$

όπου με $\llbracket \cdot \rrbracket$ συμβολίζεται η ασυνέχεια του μεγέθους.

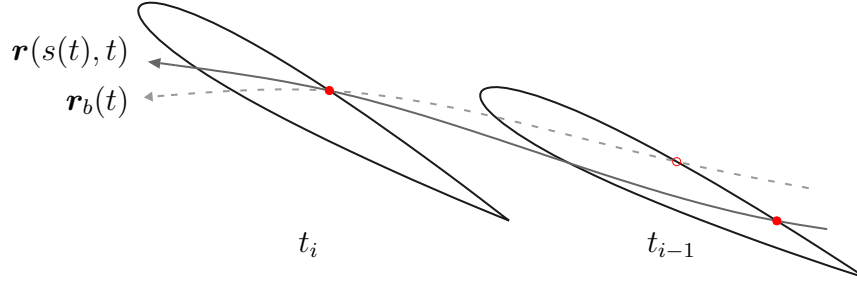
Η εξίσωση (3.3) περιγράφει την μορφή της συνθήκης Kutta με μηδενικές ασυνέχειες στην πίεση όχι όμως και η μορφή που χρησιμοποιείται στον κώδικα. Η χρονική παράγωγος του δυναμικού Φ είναι Eulerian ενώ στον κώδικα το δυναμικό υπολογίζεται στο τοπικό σύστημα της πτέρυγας. Συνεπώς στην περίπτωση κινούμενου σώματος η τιμή της Eulerian παραγώγου δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα. Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι η τροχιά ενός σταθερού σημείου πάνω στην πτέρυγα το δυναμικό του είναι $\Phi(\mathbf{r}(t), t)$. Χρονική παράγωγος του δυναμικού όπως μετράται από το σημείο αυτό είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r_p} \frac{dr_p}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ &= \nabla \Phi \cdot \mathbf{U}_b + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_b + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου \mathbf{U}_b η ταχύτητα του σημείου υπολογισμού λόγω της κίνησης του σώματος.

Αντικαθιστώντας στην (3.3) έχουμε την τελική έκφραση της εξίσωσης για τη συνθήκη Kutta που χρησιμοποιείται στον κώδικα:

$$\left[\left[\frac{d\Phi}{dt} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_b + \frac{u^2}{2} \right] \right]_T + \left[\left[\frac{d\Phi}{dt} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_b + \frac{u^2}{2} \right] \right]_S = 0 \quad (3.5)$$



Σχήμα 3.4: Οι θέσεις αποκόλλησης σε δύο διαδοχικούς χρόνους. Η τροχιά του σημείου αποκόλλησης $\mathbf{r}(s(t), t)$ σημειώνεται με συνεχή και του σταθερού σημείου πάνω στην πτέρυγα $\mathbf{r}_b(t)$ με διακεκομμένη γκρι γραμμή. Σε κάθε χρονικό βήμα η θέση της αποκόλλησης σημειώνεται με γεμάτη κόκκινη τελεία.

Στην περίπτωση όπου η θέση της αποκόλλησης είναι μεταβαλλόμενη το διάνυσμα θέσης της προσδιορίζεται από μια συνάρτηση $\mathbf{r}(s(t), t)$ όπου $s(t)$ το μήκος τόξου της αποκόλλησης σαν συνάρτηση του χρόνου. Τώρα η (3.4) ξαναγράφεται:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial\Phi}{\partial r_p} \frac{dr_p}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial\Phi}{\partial r_p} \left(\frac{dr_p}{ds} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial r_p}{\partial t} \right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \\
 &= \mathbf{u} \cdot \left(\boldsymbol{\tau} \frac{ds}{dt} + \mathbf{U}_b \right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

όπου $\boldsymbol{\tau}$ το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα της αεροτομής.

Αντικαθιστώντας στη (3.3) έχουμε την τελική έκφραση της εξίσωσης για τη συνθήκη Kutta που θα χρησιμοποιηθεί για την περίπτωση μεταβαλλόμενης θέσης αποκόλλησης.

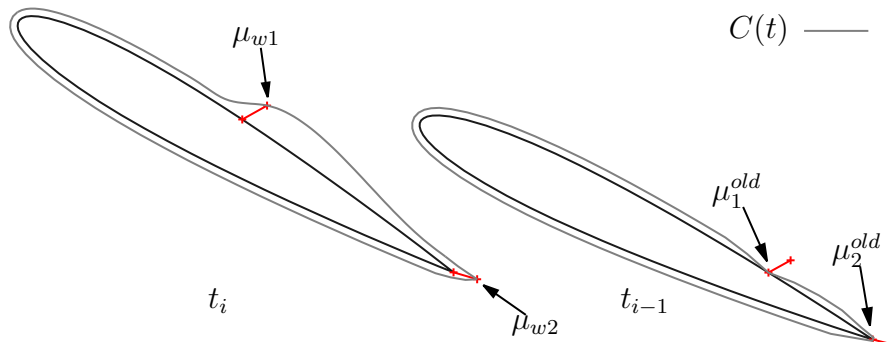
$$\left[\frac{d\Phi}{dt} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_b + \frac{u^2}{2} \right]_T + \left[\frac{d\Phi}{dt} - \mathbf{u} \cdot \left(\boldsymbol{\tau} \frac{ds}{dt} + \mathbf{U}_b \right) + \frac{u^2}{2} \right]_S = 0 \tag{3.7}$$

3.4 Η συνθήκη Kelvin

Όπως αναφέρθηκε οι ασυνέχειες του δυναμικού πάνω στην πτέρυγα μεταφέρονται στο εσωτερικό της ροής ως εκλυόμενη στροβιλότητα. Το γεγονός αυτό διατυπώνεται μέσω του θεωρήματος Kelvin σύμφωνα με το οποίο σε μη-συνεκτικές ροές η κυκλοφορία Γ κατά μήκος μιας κλειστής υλικής καμπύλης C μένει σταθερή. Η καμπύλη C που επιλέγεται είναι κλειστή περιφέρεια της αεροτομής. Στο διάστημα ενός χρονικού βήματος η C συνεχίζει να περικλείει την αεροτομή αλλά έχει παραμορφωθεί ώστε να διέρχεται από τις ελεύθερες πλευρές του κοντινού ομόρρου.

Σε κάθε χρονική στιγμή η κυκλοφορία γύρω από την C είναι το άθροισμα των ασυνεχειών του δυναμικού που συναντώνται ολοκληρώνοντας κατά μήκος της. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω το θεώρημα Kelvin γράφεται:

$$\mu_1^{old} + \mu_2^{old} = \mu_{w1} + \mu_{w2} \quad (3.8)$$



Σχήμα 3.5: Οι θέσεις αποκόλλησης και η υλική καμπύλη $C(t)$ σε δύο διαδοχικούς χρόνους. Σε κάθε χρονικό βήμα σημειώνονται οι τιμές των διπόλων που εμπλέκονται στη συνθήκη Kelvin.

Στο κώδικα GenUVP οι κατανομές των διπόλων είναι γραμμικές και καθορίζονται πλήρως από τις αντίστοιχες σταθερές αναλογίας B ώστε $\mu = B \cdot L$ με το μήκος L να μετράει το μήκος τόξου της αεροτομής. Οι σταθερές αυτές είναι και οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος. Στην περίπτωση της έκλυσης διπλού ομόρρου κάθε λωρίδα σχετίζεται

με τις τέσσερις σταθερές B_1 , B_2 , B_{w1} και B_{w2} . Η τελική έκφραση της συνθήκης Kelvin που χρησιμοποιείται στον κώδικα γράφεται εισάγοντας τους παραπάνω βαθμούς ελευθερίας με τα αντίστοιχα μήκη στην εξίσωση (3.8):

$$B_1^{old} L_1 + B_2^{old} L_2 = B_{w1} L_{w1} + B_{w2} L_{w2} \quad (3.9)$$

Όταν οι θέσεις έκλυσης της στροβιλότητας δεν είναι σταθερές η παραπάνω εξίσωση δεν μας δίνει το σωστό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, όταν η θέση της αποκόλλησης μετατοπίζεται το μήκος L_1 που σχετίζεται με αυτή γενικά διαφέρει ανάμεσα σε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές οπότε το γινόμενο $B_1^{old} L_1$ δεν επιστρέφει την τιμή μ_1^{old} . Το ίδιο ισχύει και για το γινόμενο $B_2^{old} L_2$. Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι η αποθήκευση σε κάθε χρονικό βήμα της τρέχουσας τιμής του διπόλου στις θέσεις έκλυσης $\mu_1 = B_1 L_1$ και $\mu_2 = B_2 L_2$. Στο επόμενο χρονικό βήμα θα χρησιμοποιηθούν αυτές οι τιμές που θα αντιστοιχούν στα μ_1^{old} και μ_2^{old} . Τελικά η εξίσωση της συνθήκης Kelvin γράφεται:

$$\mu_1^{old} + \mu_2^{old} = B_{w1} L_{w1} + B_{w2} L_{w2} \quad (3.10)$$

Κεφάλαιο 4

Γένεση αριθμητικού πλέγματος

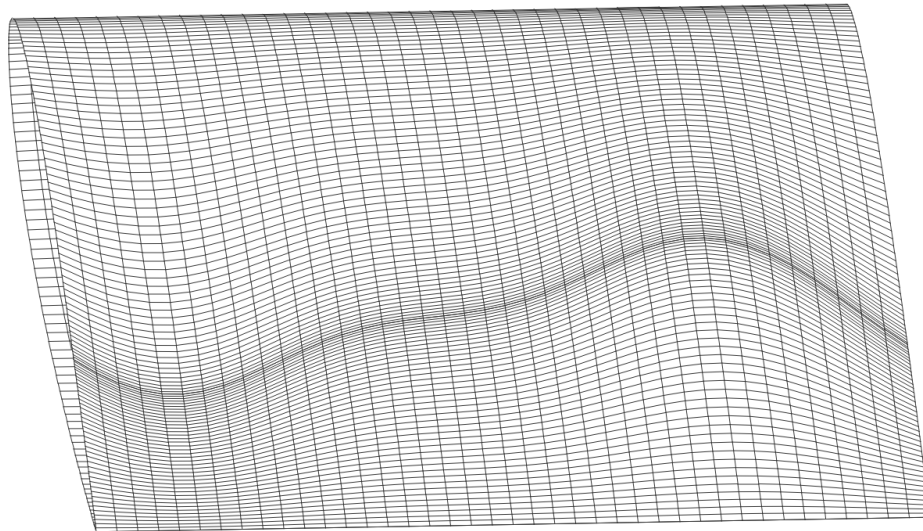
4.1 Διατύπωση του προβλήματος

Όπως έχει ήδη αναφερθεί ο κώδικας GenUVP χρησιμοποιεί δομημένο επιφανειακό πλέγμα για την διακριτοποίηση της πτέρυγας και την επίλυση του προβλήματος δυναμικού. Στην περίπτωση προσομοίωσης αποκολλημένης ροής γίνεται χρήση του μοντέλου διπλού ομόρρου όπου εκτός από την ακμή εκφυγής το δυναμικό έχει ασυνέχεια και στη καμπύλη αποκόλλησης. Η καμπύλη αυτή πρέπει να είναι πλεγματική γραμμή και το το αριθμητικό πλέγμα πυκνωμένο στην περιοχή της.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας αναπτύχθηκε υπολογιστικό εργαλείο γένεσης επιφανειακού πλέγματος για τις ανάγκες προσομοίωσης της τριδιάστατης αποκόλλησης. Δεδομένα εισόδου του εργαλείου είναι η γεωμετρία της επιφάνειας της πτέρυγας και η καμπύλη αποκόλλησης. Επιστρέφονται τα διανύσματα θέσης των κόμβων του νέου πλέγματος στις τοπικές συντεταγμένες.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι σε αυτή την φάση δεν επιθυμούμε το παραγόμενο πλέγμα να έχει στρεβλωμένες λωρίδες. Στην περίπτωση αυτή, θεωρητικά ο κώδικας GenUVP δεν έχει πρόβλημα αλλά επειδή η ανάπτυξη των δυνατοτήτων για προσομοίωση τριδιάστατης αποκόλλησης βρίσκεται σε αρχικό στάδιο επιλέχθηκε η παραμόρφωση του πλέγματος να γίνεται μόνο κατά τη χορδική συντεταγμένη. Έτσι οι πλεγματικές γραμμές που χωρίζουν τις λωρίδες παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια μιας προσομοίωσης. Η επιλογή αυτή απλοποιεί το πρόβλημα της γένεσης επιφανειακού πλέγματος και το ανάγει σε πρόβλημα μιας διάστασης.

Η γεωμετρική περιγραφή της επιφάνειας γίνεται προσδιορίζοντας τις κατά το εκπέτασμα θέσεις των σταθερών πλεγματικών γραμμών - αεροτομών - και την παραμετροποίηση μήκους τόξου κάθε μιας από αυτές. Η παραμετροποίηση μήκους τόξου τυχαίας καμπύλης γίνεται χρησιμοποιώντας πρωτότυπο εργαλείο που αναπτύχθηκε στα πλαί-



Σχήμα 4.1: Γένεση επιφανειακού πλέγματος για τυχαία καμπύλη αποκόλλησης. Η καμπύλη αποκόλλησης είναι πλεγματική γραμμή με πύκνωση του πλέγματος στην περιοχή της. Οι πλεγματικές γραμμές που διαχωρίζουν τις λωρίδες δεν παραμορφώνονται.

σια της εργασίας και περιγράφεται στο τέλος του κεφαλαίου. Εδώ το εργαλείο αυτό χρησιμοποιείται σαν black-box για τη παραμετροποίηση μήκους τόξου των αεροτομών.

Σε αντίθεση με άλλες μεθόδους γένεσης επιφανειακού πλέγματος εδώ η διακριτοποίηση κάθε αεροτομής είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες. Η συσχέτισή τους προκύπτει μόνο εξωτερικά, μέσω της καμπύλης αποκόλλησης η οποία είναι συνεχής λόγω της συνέχειας του πεδίου ροής. Το παραγόμενο επιφανειακό πλέγμα είναι στην ουσία η ένωση όλων των ανεξάρτητα διακριτοποιημένων αεροτομών.

Τονίζεται ότι υπάρχει η δυνατότητα εισαγωγής του πλήθους των κόμβων για τον καθορισμό της ποιότητας της διακριτοποίησης. Η διαδικασία αυτή γίνεται στην αρχή κάθε προσομοίωσης. Στην συνέχεια και καθώς η καμπύλη αποκόλλησης παραμορφώνεται δεν εισάγονται ούτε αφαιρούνται κόμβοι· το πλέγμα απλά παραμορφώνεται ενώ το πλήθος των κόμβων παραμένει σταθερό. Αυτή η επιλογή έγινε ώστε να απλοποιηθούν οι παρεμβάσεις στον υπάρχοντα κώδικα.

4.2 Τοποθέτηση κόμβων

Δίνεται η ακριβής έκφραση της παραμετροποιημένης καμπύλης $r(s)$ όπου s το μήκος τόξου. Η τοποθέτηση N κόμβων ανάμεσα στο διάστημα ανάμεσα στις θέσεις $s = l_1$ και $s = l_2$ ισοδυναμεί με μια νέα παραμετροποίηση με την νέα παράμετρο $\xi = \xi(s)$

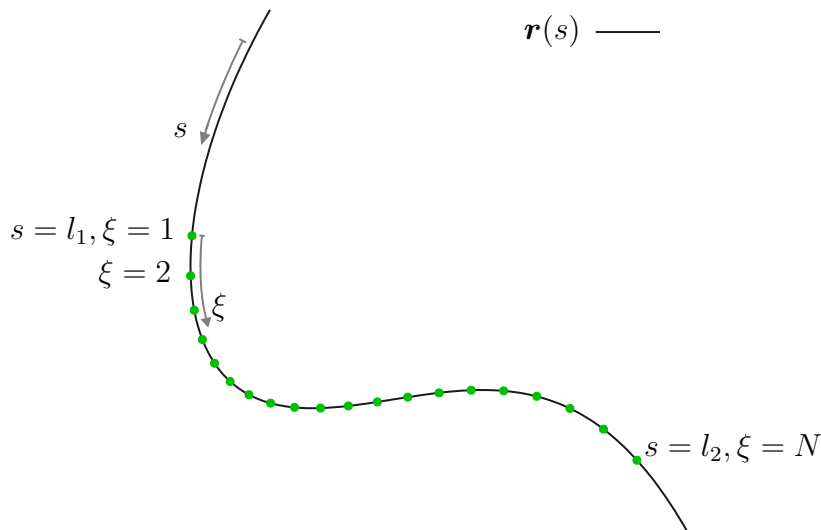
να παίρνει ακέραιες τιμές πάνω στους κόμβους και να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}\xi(l_1) &= 1 \\ \xi(l_2) &= N\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\xi(s)$ είναι προφανώς 1-1 αφού τόσο η ξ όσο και η s είναι έγκυρες παραμετροποιήσεις της ίδιας καμπύλης. Άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $s(\xi)$. Το σύνολο:

$$\{s(\xi) : \xi \in \{1, 2, \dots, N\}\} \quad (4.1)$$

είναι τα μήκη τόξου των N κόμβων με $s(1) = l_1$ και $s(N) = l_2$. Γνώση μιας σχέσης $s(\xi)$ που να ικανοποιεί τα παραπάνω μας επιτρέπει τον προσδιορισμό μέσω της $r(s)$ των συντεταγμένων των κόμβων.



Σχήμα 4.2: Τοποθέτηση κόμβων πάνω σε δεδομένη καμπύλη και χρήση της παραμέτρου ξ .

Η απαίτηση πύκνωσης των κόμβων στην περιοχή των $s(1)$ και $s(N)$ εκφράζεται μέσω της παραγώγου $ds/d\xi$ στις θέσεις αυτές. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε πεπερασμένες διαφορές πρώτης τάξης ακρίβειας για την διακριτοποίηση της παραγώγου βλέπουμε ότι:

$$\left. \frac{ds}{d\xi} \right|_{\xi=1} \simeq s(2) - s(1) = d_1 \quad (4.2)$$

Άρα η παράγωγος $ds/d\xi|_{\xi=1}$ εκφράζει την απόσταση των κόμβων στη θέση $s = s(1) = l_1$. Ομοίως και για την παράγωγο στη θέση $s = s(N) = l_2$.

Ανακεφαλαιώνοντας, η συνάρτηση $s(\xi)$ πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} s(1) &= l_1 \\ s(N) &= l_2 \\ s'(1) &= d_1 \\ s'(N) &= d_2 \end{aligned}$$

Η πιο απλή έκφραση που μπορεί να έχει η συνάρτηση $s(\xi)$ είναι πολωνυμική τρίτου βαθμού:

$$s(\xi) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 \quad (4.3)$$

Οι παραπάνω συνοριακές συνθήκες οδηγούν στο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ n^3 & n^2 & n & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3n^2 & 2n & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

η επίλυση του οποίου επιστρέφει την έκφραση της $s(\xi)$. Τώρα μπορούν να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των N κόμβων χρησιμοποιώντας την $r(s)$.

4.3 Διακριτοποίησης της αεροτομής

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πως διακριτοποιείται ένα διάστημα της καμπύλης με πύκνωση των κόμβων στα άκρα του. Εδώ θα δούμε πώς εφαρμόζεται η προηγούμενη διαδικασία για την διακριτοποίηση ολόκληρης της αεροτομής.

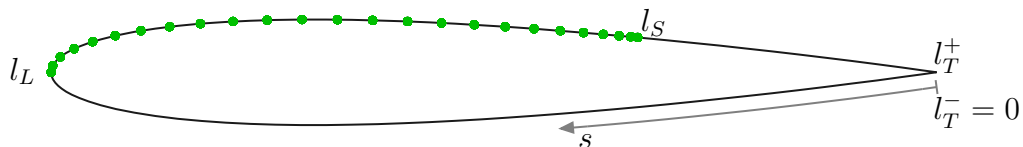
Για την εξοικονόμηση υπολογιστικών πόρων χρησιμοποιείται ο ελάχιστος αριθμός κόμβων που απαιτείται για την σωστή επίλυση του προβλήματος. Για να μπορέσουμε να ελαχιστοποιήσουμε τον αριθμό των κόμβων απαιτείται κατάλληλη πύκνωση του πλέγματος σε περιοχές με μεγάλες μεταβολές της λύσης. Στην περίπτωση ροής γύρω από πτέρυγα οι περιοχές αυτές βρίσκονται γύρω από την ακμή πρόσπτωσης και την ακμή εκφυγής. Στην περίπτωση αποκολλημένης ροής απαιτείται επιπλέον πύκνωση στην περιοχή της θέσης αποκόλλησης.

Διαδικασία διακριτοποίησης της αεροτομής γίνεται σε τρία στάδια που αντιστοιχούν στα τρία διαστήματα με πύκνωση στα άκρα τους. Στα παρακάτω θα χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθοι συμβολισμοί:

- l_T^- η αφετηρία μέτρησης των μηκών στην κάτω πλευρά της ακμής εκφυγής
- l_L το μήκος τόξου της ακμής πρόσπτωσης,
- l_S το μήκος τόξου της θέσης αποκόλλησης και
- l_T^+ συνολικό μήκος τόξου της αεροτομής μέχρι το πάνω μέρος της ακμής εκφυγής.

Τα τρία διαστήματα στα οποία εφαρμόζεται η προηγούμενη μέθοδος διακριτοποίησης είναι τα εξής:

- Το κάτω μέρος της αεροτομής μέχρις την ακμή πρόσπτωσης $[l_T^-, l_L]$ με N_{TL} κόμβους
- Το πάνω μέρος της αεροτομής από την ακμή πρόσπτωσης μέχρι τη θέση της αποκόλλησης $[l_L, l_S]$ με N_{LS} κόμβους
- Το πάνω μέρος της αεροτομής από τη θέση της αποκόλλησης μέχρι την ακμής εκφυγής $[l_S, l_T^+]$ με N_{LT} κόμβους



Σχήμα 4.3: Τοποθέτηση N_{LS} κόμβων στο διάστημα $[l_L, l_S]$.

Για την διακριτοποίηση καθενός από τα παραπάνω διαστήματα απαιτείται ο προσδιορισμός των αποστάσεων των κόμβων στα άκρα τους που συμβολίζονται κατ'αντιστοιχία με τα μήκη ως εξής:

- d_T η απόσταση των κόμβων στην ακμή εκφυγής
- d_L η απόσταση των κόμβων στην ακμή πρόσπτωσης,
- d_S η απόσταση των κόμβων στη θέση αποκόλλησης.

Η εφαρμογή των συνθηκών για κάθε τμήμα έχει ως εξής:

Τμήμα TL

$$\begin{aligned} s(1) &= l_T^- \\ s(N_{TL}) &= l_L \\ s'(1) &= d_T \\ s'(N_{TL}) &= d_L \end{aligned}$$

Τμήμα LS

$$\begin{aligned} s(1) &= l_L^- \\ s(N_{LS}) &= l_S \\ s'(1) &= d_L \\ s'(N_{LS}) &= d_S \end{aligned}$$

Τμήμα ST

$$\begin{aligned} s(1) &= l_S \\ s(N_{ST}) &= l_T^+ \\ s'(1) &= d_S \\ s'(N_{ST}) &= d_T \end{aligned}$$

Αφού υπολογιστούν οι θέσεις των κόμβων κάθε τμήματος ως προς το μήκος τόξου χρησιμοποιείται η παραμετροποίηση μήκους τόξου της αεροτομής $r(s)$ για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων των κόμβων. Σημειώνεται ότι μόνο δύο από τις τρεις συντεταγμένες κάθε κόμβου επιστρέφεται με την παραπάνω διαδικασία. Η τρίτη προκύπτει από την θέση κατά το εκπέτασμα της κάθε αεροτομής.

4.4 Αριθμητική παραμετροποίηση μήκους τόξου

4.4.1 Διατύπωση του προβλήματος

Έστω ότι έχουμε μια διακριτοποιημένη εκδοχή μιας καμπύλης του επιπέδου, δηλαδή ένα σύνολο σημείων για την περιγραφή της. Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε μια μέθοδος για την αριθμητική παραμετροποίηση της καμπύλης ως προς το μήκος τόξου της. Το τελικό προϊόν της μεθόδου είναι μια συνάρτηση

$$R(s) \tag{4.5}$$

όπου R το διάνυσμα θέσης πάνω στην καμπύλη και s το μήκος τόξου.

Η μέθοδος βασίζεται στη χρήση παρεμβολών με κυβικές B-Splines. Η παραμετροποίηση μήκους τόξου είναι μέρος μιας ευρύτερης βιβλιοθήκης B-splines που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της εργασίας.

Η μέθοδος παρεμβολής με κυβικές B-Splines χρησιμοποιεί ένα σύνολο πολυωνυμικών συναρτήσεων τρίτου βαθμού σαν βάση για την περιγραφή της καμπύλης. Η παρεμβολή είναι ο γραμμικός συνδιασμός της βάσης ώστε η καμπύλη να περνάει από τα δεδομένα σημεία [15],[14]. Αν έχουμε $N + 1$ δεδομένα -στο εξής τα δεδομένα θα ονομάζονται κόμβοι- η καμπύλη χωρίζεται σε N διαστήματα. Η παράμετρος u που χρησιμοποιείται στα B-splines παίρνει τιμές στο σύνολο $[0, N]$ και ακέραιες τιμές πάνω στους κόμβους. Είναι προφανές ότι η παράμετρος αυτή δεν μπορεί να εκφράσει το μήκος τόξου καθώς οι κόμβοι μπορεί να έχουν διαφορετική πυκνότητα κατά μήκος της καμπύλης. Αν όμως οι κόμβοι είναι ισομοιρασμένοι τότε η παράμετρος u είναι μια γραμμική σχέση της παραμέτρου μήκους s .

Αφού γίνει μια απαραίτητη προεπεξεργασία των δεδομένων οι υπολογισμοί που υλοποιούν τη συνάρτηση (4.5) έχουν πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(1)$. Η μέθοδος που αναπτύχθηκε βασίζεται στην παραπάνω ειδική περίπτωση. Χρησιμοποιείται μια αρχική παρεμβολή για τον διαμερισμό της καμπύλης σε ίσα διαστήματα μήκους και στη συνέχεια οι νέοι κόμβοι χρησιμοποιούνται για την τελική παρεμβολή. Για τη χρήση της τελικής παρεμβολής αρκεί η γραμμική σχέση των παραμέτρων s και u .

4.4.2 Η προεπεξεργασία

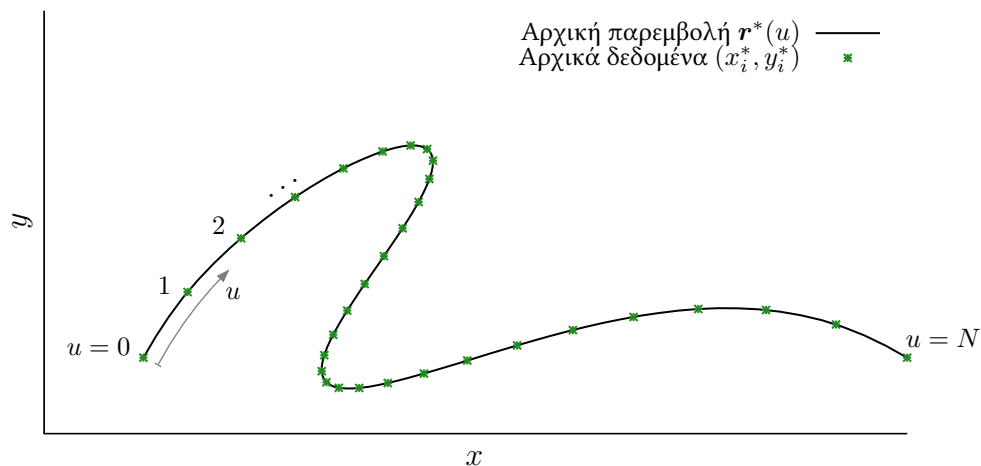
1ο βήμα Έχουμε στη διάθεσή μας τις συντεταγμένες των κόμβων $\{(x_0^*, y_0^*), (x_1^*, y_1^*), \dots, (x_N^*, y_N^*)\}$ όπου N το πλήθος των αρχικών διαστημάτων. Υπολογίζεται η παρεμβολή με B-splines για τους κόμβους αυτούς οπότε προκύπτει η αρχική παραμετροποίηση $r^*(u)$. (Σχήμα 4.4)

2ο βήμα Υπολογίζεται με τη μέθοδο ολοκλήρωσης Simpson το μήκος κάθε επιμέρους διαστήματος της αρχικής παρεμβολής και το συνολικό μήκος s_t της καμπύλης. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας έχουμε το μήκος τόξου κάθε κόμβου της αρχικής παρεμβολής $\{s_0^* = 0, s_1^*, s_2^*, \dots, s_N^* = s_t\}$.

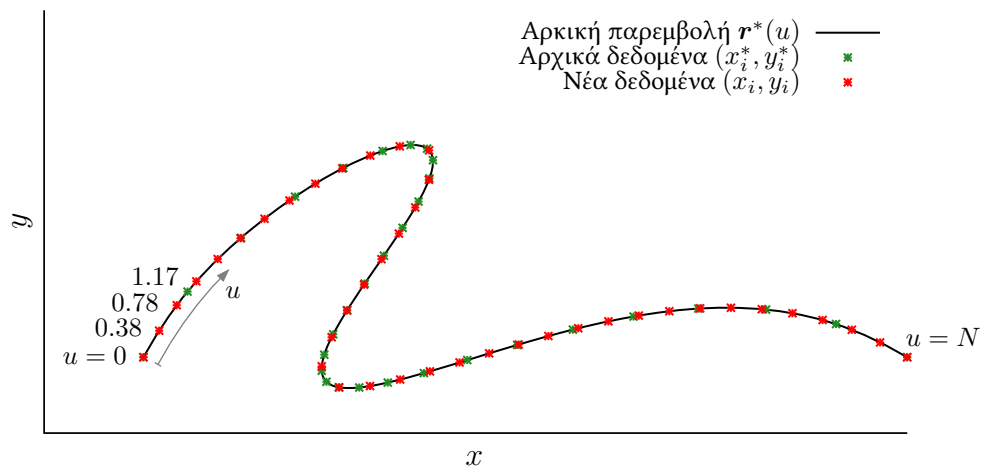
3ο βήμα Αναζητούνται $M + 1$ σημεία ώστε η καμπύλη να διαμερίζεται σε M διαστήματα μήκους s_t/M . Ο i κόμβος της νέας διαμέρισης έχει μήκος $s_i = i \cdot \Delta s$ όπου $\Delta s = s_t/M$. Επειδή είναι γνωστά τα μήκη s^* των κόμβων της αρχικής διαμέρισης μπορεί να προσδιοριστεί το διάστημα j της αρχικής διαμέρισης στο οποίο ανήκει το νέος κόμβος i . Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διχοτόμησης και την μέθοδο Simpson για τον προσδιορισμό του μήκους $s^*(u)$ προσδιορίζεται η τιμή της παραμέτρου u_i εντός του διαστήματος $[i, i + 1]$ για την οποία $s^*(u_i) = s_i$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τον προσδιορισμό των παραμέτρων $\{0 = u_0, u_1, \dots, u_M = N\}$. (Σχήμα 4.5)

4ο βήμα Χρησιμοποιείται η αρχική παραμετροποίηση $r^*(u)$ για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων των νέων κόμβων $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_M, y_M)\}$. (Σχήμα 4.5)

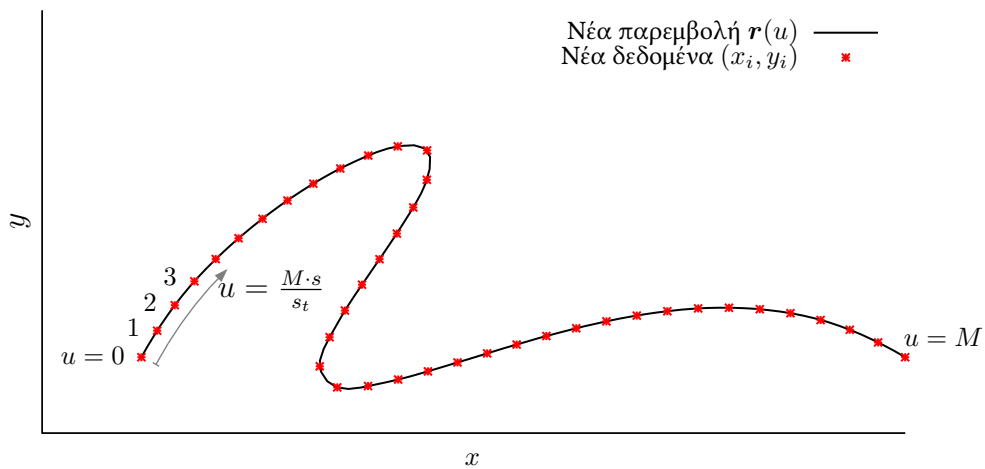
5ο βήμαξ Υπολογίζεται η παρεμβολή με B-splines για τους νέους κόμβους $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_M, y_M)\}$ οπότε προκύπτει η τελική παραμετροποίηση $r(u)$. (Σχήμα 4.6)



Σχήμα 4.4: Η αρχική παρεμβολή $r^*(u)$ προκύπτει από $N = 30$ σημεία που δεν ισαπέχουν. Στο σχήμα σημειώνονται οι τιμές της παραμέτρου u των αρχικών σημείων στην αρχική παρεμβολή-παραμετροποίηση.



Σχήμα 4.5: Προσδιορίζονται M -εδώ $M = 40$ - ισαπέχοντα σημεία μέσω της αρχικής παρεμβολής. Στο σχήμα σημειώνονται οι τιμές της παραμέτρου u των νέων σημείων στην αρχική παρεμβολή-παραμετροποίηση.



Σχήμα 4.6: Η τελική παραμετροποίηση $\mathbf{r}(u)$ προκύπτει από τα M ισαπέχοντα σημεία. Στο σχήμα σημειώνονται οι τιμές της παραμέτρου u των νέων σημείων στην τελική παρεμβολή-παραμετροποίηση. Η συνάρτηση $\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}\left(\frac{M \cdot s}{s_t}\right)$ είναι η ζητούμενη παραμετροποίηση ως προς το μήκος τόξου s .

4.4.3 Η χρήση της παραμετροποίησης

Ζητείται ο υπολογισμός της θέσης ενός σημείου πάνω στην παραμετροποιημένη καμπύλη δεδομένου του μήκους τόξου του s . Το μήκος τόξου s και η παράμετρος u συνδέονται μέσω της γραμμική σχέσης $u = M \cdot s / s_t$. Το διάνυσμα $\mathbf{r}(M \cdot s / s_t)$ είναι η ζητούμενη θέση πάνω στην καμπύλη και υπολογίζεται με πολυκλοκότητα $\mathcal{O}(1)$.

Κεφάλαιο 5

Υπολογισμοί οριακού στρώματος

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσεται η μέθοδος που εφαρμόστηκε για τον προσδιορισμό της θέσης αποκόλλησης σε κάθε λωρίδα της πτέρυγας. Ξεκινώντας από τη στοιχειώδη θεωρία θα οδηγηθούμε στις εξισώσεις οριακού στρώματος και στη συνέχεια θα αναλυθεί η μέθοδος Rohlfhausen [17] για τη επίλυση του οριακού στρώματος. Τέλος θα περιγραφεί η αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

5.1 Οι εξισώσεις του διδιάστατου μόνιμου οριακού στρώματος

Η εξίσωση συνέχειας διδιάστατης ροής είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

Στο εσωτερικό του οριακού στρώματος κοντά στο τοίχωμα οι χωρικές κλίσεις της κάθετης ταχύτητας v μπορούν να αμεληθούν. Με την υπόθεση της μονιμότητας οι εξισώσεις ορμής γράφονται στην παρακάτω μορφή.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.2)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5.3)$$

Από την παραπάνω εξίσωση της κατεύθυνσης y προκύπτει ότι η πίεση εξαρτάται μόνο από το εξωτερικό πεδίο ταχύτητας $U(x)$ το οποίο είναι συνάρτηση μόνο της μίας

εφαπτομενικής θέσης x . Αν η εξωτερική ροή υποτεθεί αστρόβιλη τότε μέσω της εξίσωσης Bernoulli έχουμε:

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = H \implies -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U \frac{dU}{dx} \quad (5.4)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ορμής προκύπτει η έκφρασή της για την περίπτωση μόνιμου, διδιάστατου οριακού στρώματος.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (5.6)$$

όπου τέθηκε

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.7)$$

Η εξίσωση ορμής μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + U \frac{dU}{dx} \\ &= u \frac{\partial}{\partial x} (U - u) + v \frac{\partial}{\partial x} (U - u) + (U - u) \frac{dU}{dx} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Η εξίσωση συνέχειας γράφεται:

$$(U - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (U - u) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.9)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την (5.8) από την (5.9) παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} [u(U - u)] + (U - u) \frac{dU}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} [v(U - u)] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (5.10)$$

Αν ολοκληρωθεί η παραπάνω εξίσωση ως προς y από 0 έως ∞ παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty [u(U - u)] dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\infty (U - u) dy + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} [v(U - u)] dy = -\frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούνται οι ορισμοί για δύο βασικά μεγέθη στο οριακό στρώμα· το πάχος μετατόπισης δ_1 και το πάχος ορμής δ_2 . Ως πάχος μετατόπισης ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (5.11)$$

Ως πάχος ορμής ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (5.12)$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(U^2 \delta_2) + U \frac{dU}{dx} \delta_1 &= \frac{\tau_w}{\rho} \implies \\ U^2 \frac{d\delta_2}{dx} + (2\delta_2 + \delta_1)U \frac{dU}{dx} &= \frac{\tau_w}{\rho} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Η παραπάνω έκφραση της εξίσωσης της ορμής εφαρμόζεται στη μέθοδο Pohlhausen.

5.2 Η μέθοδος Pohlhausen

Στη μέθοδο Pohlhausen το προφίλ της ταχύτητας του οριακού στρώματος καθορίζεται από μία παράμετρο:

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx} \quad (5.14)$$

Υποθέτουμε ότι η κατανομή της ταχύτητας μέσα στο οριακό στρώμα είναι το πολυώνυμο

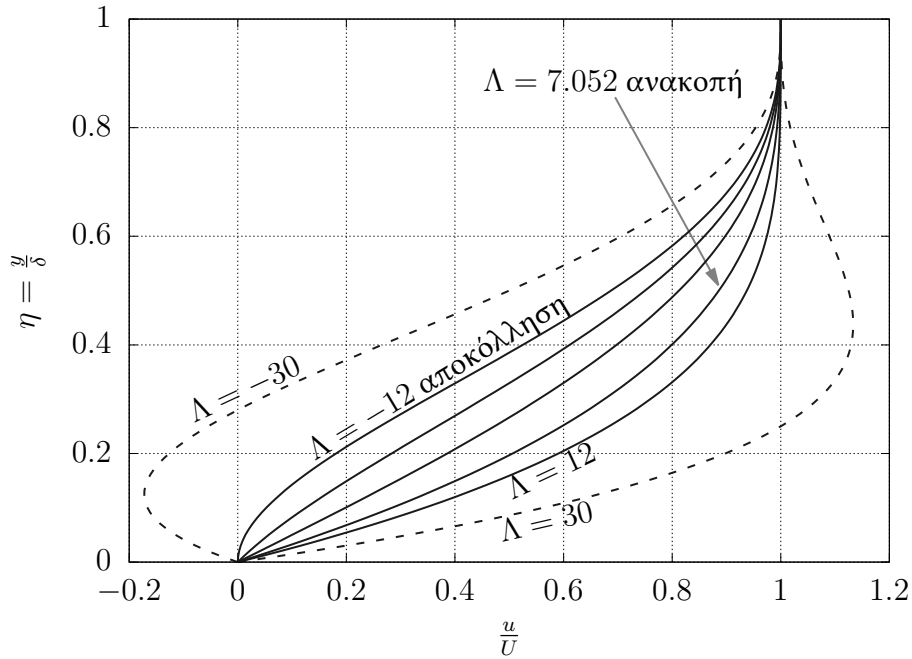
$$\begin{aligned} \frac{u}{U} &= a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 \\ \eta &= \frac{y}{\delta} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} u &= 0, & y &= 0 \\ v &= 0, & y &= 0 \\ u &= U, & y &= \delta \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, & y &= \delta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & y &= \delta \end{aligned}$$

προκύπτουν οι τιμές των παραμέτρων του πολυωνύμου ως προς την παράμετρο Λ :

$$a = 2 + \Lambda/6, \quad b = -\Lambda/2, \quad c = -2 + \Lambda/2, \quad d = 1 - \Lambda/6$$



Σχήμα 5.1: Αδιάστατο προφίλ ταχυτήτων για διάφορες τιμές της παραμέτρου Λ

Από τις σχέσεις ορισμού του πάχους μετατόπισης, του πάχους ορμής και της διατμητικής τάσης στο σύνορο έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta \left(\frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120} \right) \\ \delta_2 &= \delta \frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right) \\ \tau_w &= \mu \frac{U}{\delta} \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right)\end{aligned}\quad (5.16)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (5.13) με $\delta_2/\nu U$ η εξίσωση της ορμής γίνεται:

$$\frac{U}{\nu} \delta_2 \delta_2' + \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \frac{U' \delta_2^2}{\nu} = \frac{\tau_w \delta_2}{\mu U}\quad (5.17)$$

Εισάγωντας τη νέα μεταβλητή

$$K = \frac{\delta_2^2 U'}{\nu}$$

έχουμε

$$\frac{1}{2} U \frac{d}{dx} \left(\frac{K}{U'} \right) + \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) K = \frac{\tau_w \delta_2}{\mu U}\quad (5.18)$$

Η μεταβλητή K συνδέεται με την παράμετρο Λ μέσω της σχέσης:

$$K(\Lambda) = \left(\frac{\delta_2}{\delta}\right)^2 \frac{\delta^2 U'}{\nu} = \Lambda \left[\frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right) \right]^2 \quad (5.19)$$

Οι τιμές της K αναμένονται στο διάστημα $K([-12, 12])$ όπου έχει νόημα η παράμετρος Λ . Η συνάρτηση $K(\Lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$\Lambda \in \left[-\frac{444}{25}, 12\right] = [-17.76, 12] \subset [-12, 12].$$

επομένως η $K(\Lambda)$ είναι αντιστρέψιμη.

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (5.17) προκύπτουν τα άλλα μεγέθη της εξίσωσης (5.18):

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}}{\frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right)} = f_1(\Lambda) \quad (5.20)$$

και

$$\frac{\tau_w \delta_2}{\mu U} = \left(\frac{\tau_w \delta}{\mu U}\right) \left(\frac{\delta_2}{\delta}\right) = \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right) \frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right) = f_2(\Lambda) \quad (5.21)$$

Τώρα η διαφορική εξίσωση (5.18) μπορεί να γραφεί στην τελική μορφή:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{K}{U'} \right) = \frac{F(\Lambda)}{U} = \frac{F(K^{-1}(K))}{U} \quad (5.22)$$

όπου

$$\begin{aligned} F(\Lambda) &= 2f_2(\Lambda) - 2[2 + f_1(\Lambda)]K(\Lambda) \\ &= 2 \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right) \left[2 - \frac{116}{315}\Lambda + \left(\frac{2}{945} + \frac{1}{120} \right) \Lambda^2 + \frac{2}{9072} \Lambda^3 \right] \end{aligned} \quad (5.23)$$

Η οριακή συνθήκη για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (5.22) προκύπτει μέσω του κανόνα L'Hospital. Συγκεκριμένα, η διαφορική έχει ισχύ από το σημείο ανακοπής στη θέση $x = 0$ μέχρι την αναστροφή του οριακού στρώματος όπου $\Lambda = -12$.

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{K}{U'} \right) \right|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(\Lambda)}{U} \quad (5.24)$$

Στο $x = 0$ έχουμε $U = 0$ και για να είναι φραγμένη η τιμή του ορίου πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(\Lambda) = 0 \quad (5.25)$$

πράγμα που ισχύει όταν $\Lambda = 7.052 \implies$

$$K = 0.0770, \quad x = 0 \quad (5.26)$$

Η μέθοδος Pohlhausen συνίσταται στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (5.22) με αρχική συνθήκη (5.26) και δεδομένη την κατανομή των επιφανειακών ταχυτήτων $U(x)$.

5.3 Η αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου

Για την αριθμητική ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (5.22) εφαρμόστηκε η implicit μέθοδος backward-Euler. Αρχικά εφαρμόστηκε η explicit forward-Euler αλλά στην εφαρμογή παρουσίαζε προβλήματα ευστάθειας και απορρίφθηκε. Για τον υπολογισμό της παραγώγου χρησιμοποιήθηκε σχήμα πεπερασμένων διαφορών πρώτης τάξης. Η διακριτοποιημένη μορφή της διαφορικής γράφεται:

$$\frac{K_i}{U'_i} - \frac{K_{i-1}}{U'_{i-1}} = \Delta x \frac{F(K^{-1}(K_i))}{U_i} \quad (5.27)$$

Τα K_i και Λ_i είναι ισοδύναμα λόγω της 1-1 συνάρτησης $K(\Lambda)$. Δεδομένης της τιμής Λ_i το K_i προκύπτει με απλή εφαρμογή της (5.19). Αντίστροφα, δεδομένης της τιμής του K_i το Λ_i προκύπτει επιλύοντας την εξίσωση

$$K_i = K(\Lambda_i)$$

με τη μέθοδο Newton-Raphson.

Η εξίσωση (5.27) είναι πεπλεγμένη. Για τον υπολογισμό του K στη θέση i απαιτείται η επίλυση της μη-γραμμικής εξίσωσης:

$$f(K_i) = \frac{K_i}{U'_i} - \frac{K_{i-1}}{U'_{i-1}} - \Delta x \frac{F(K^{-1}(K_i))}{U_i} = 0 \quad (5.28)$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιείται πάλι η μέθοδος Newton-Raphson η οποία οδηγεί στη επαναληπτική σχέση:

$$K_i^{(n)} = K_i^{(n-1)} - \frac{f(K_i^{(n-1)})}{f'(K_i^{(n-1)})} \quad (5.29)$$

όπου ο εκθέτης n μετράει το βήμα ανανέωσης του αγνώστου στην επαναληπτική διαδικασία και η f' είναι η παράγωγος της f ως προς τον άγνωστο K_i . Για τον υπολογισμό της f' απαιτείται η γνώση της παραγώγου:

$$\frac{dF}{dK} \quad (5.30)$$

η οποία προκύπτει μέσω του κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{dF}{dK} = \frac{dF}{d\Lambda} \frac{d\Lambda}{dK} = \frac{dF}{d\Lambda} / \frac{dK}{d\Lambda} \quad (5.31)$$

Στην παρούσα εργασία η επίλυση του οριακού στρώματος γίνεται για τον υπολογισμό της θέσης αποκόλλησης. Επομένως εδώ δεν θα γίνει περαιτέρω ανάλυση για τον υπολογισμό των υπόλοιπων χαρακτηριστικών του οριακού στρώματος. Δεδομένα εισόδου στον παραπάνω αλγόριθμο είναι μόνο οι εφαπτομενικές ταχύτητες και οι κλίσεις του κατά το μήκος τόξου. Επιστρέφεται το μήκος τόξου στο οποίο έχουμε έναρξη αποκόλλησης. Αυτό σημαίνει ότι η ολοκλήρωση της διαφορικής γίνεται από το σημείο ανακοπής έως το σημείο όπου η παράμετρος Λ πάρει την οριακή τιμή -12 οπότε η διαδικασία τερματίζεται.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

6.1 Ανακεφαλαίωση

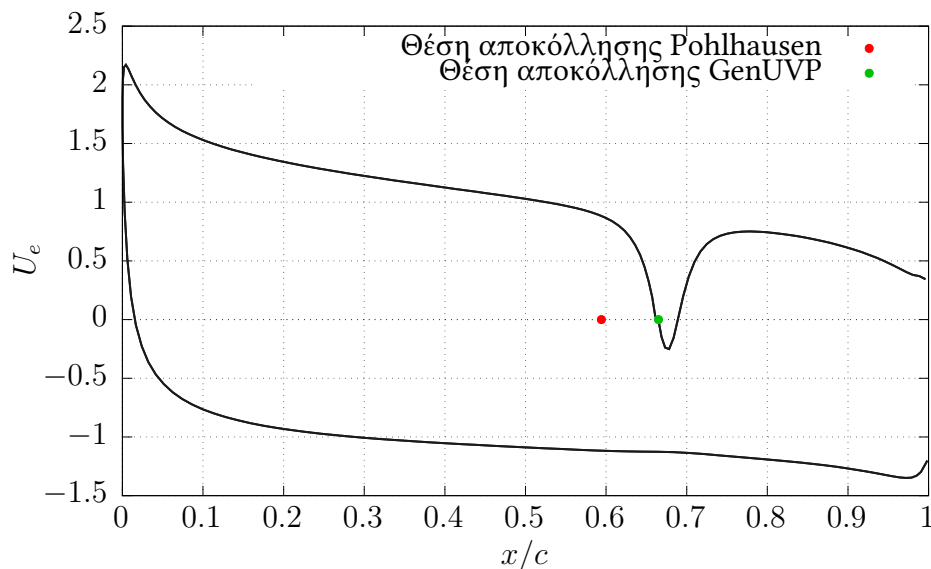
Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η περαιτέρω ανάπτυξη του υπολογιστικού εργαλείου GenUVP για την προσομοίωση του φαινομένου της τριδιάστατης αποκόλλησης σε ροή γύρω από πτέρυγα. Για το σκοπό ο κώδικας εφοδιάστηκε με τη δυνατότητα μεταβολής του πλέγματος ανάμεσα στα χρονικά βήματα έτσι ώστε προσαρμόζεται στην χρονικά και χωρικά μεταβαλλόμενη καμπύλη αποκόλλησης. Επίσης αναπτύχθηκε μια μέθοδος για τον υπολογισμό και σύγκλιση της καμπύλης αποκόλλησης.

Για τη μεταβολή του πλέγματος απαιτήθηκαν συγκεκριμένες αλλαγές στον κυρίως κώδικα GenUVP καθώς αυτός έχει αναπτυχθεί χωρίς υποστήριξη για τη δυνατότητα αυτή. Επιπλέον αναπτύχθηκε εργαλείο γένεσης επιφανειακού πλέγματος. Για την ακριβή περιγραφή της γεωμετρίας της πτέρυγας που απαιτείται στην γένεση επιφανειακού πλέγματος χρησιμοποιήθηκε ένα εργαλείο παραμετροποίησης καμπύλων ως προς το μήκος τόξου που βασίζεται στην παρεμβολή με B-splines. Στα πλαίσια της εργασίας αναπτύχθηκε βιβλιοθήκη B-splines μέρος της οποίας είναι και το εργαλείο παραμετροποίησης μήκους τόξου.

Για τον υπολογισμό της καμπύλης αποκόλλησης ολοκληρώθηκαν οι εξισώσεις οριακού στρώματος με τη μέθοδο Rohlhausen. Βασικές παραδοχές της μεθόδου είναι ότι η ροή είναι μόνιμη και διδιάστατη ενώ έχει αναπτυχθεί για οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη πλάκα. Οι παραδοχές αυτές είναι υπεραπλουστευτικές καθώς οι ροές που προσομοιώνουμε δεν είναι ούτε μόνιμες ούτε διδιάστατες και επιπλέον η επιφάνειες έχουν καμπυλότητα. Παρ' όλα αυτά η μέθοδος προτιμήθηκε λόγω της απλότητάς της σαν εισαγωγικό εργαλείο υπολογισμού των θέσεων αποκόλλησης.

6.2 Συμπέρασμα

Η μεταβολή του αριθμητικού πλέγματος και η μέθοδος ολοκλήρωσης του οριακού στρώματος συνεργάζονται σε μια επαναληπτική διαδικασία για τη σύγκλιση της καμπύλης αποκόλλησης σε κάθε χρονικό βήμα. Η διαδικασία αυτή δεν ήταν δυνατό να συγκλίνει με τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της θέσης αποκόλλησης. Δεδομένης της εκτίμησης της θέσης αποκόλλησης σε μία επανάληξη η μέθοδος Pohlhausen προβλέπει πάντα την αποκόλληση αρκετά πιο μπροστά προς το χείλος πρόσπτωσης χωρίς να υπάρχει σύγκλιση σε κάποια θέση. Είναι δηλαδή αδύνατο η θέση έκλυσης του ομόρρου αποκόλλησης να ταυτιστεί με την θέση αποκόλλησης που προβλέπει η μέθοδος Pohlhausen.



Σχήμα 6.1: Εφαπτομενικές ταχύτητες μιας λωρίδας όπως προκύπτουν από τον κώδικα GenUVP. Η μέθοδος Pohlhausen προβλέπει την αποκόλληση μπροστά από την αντίστοιχη θέση του GenUVP.

Η αποτυχία της σύγκλισης δεν οφείλεται στις υπεραπλουστεύσεις που γίνονται στη μέθοδο Pohlhausen αλλά στην επίδραση των συνθηκών που χρησιμοποιούνται στον κώδικα GenUVP για την προσομοίωση του διπλού ομόρρου. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα εστιάζεται στο πεδίο ταχυτήτων που προκύπτει με την επιβολή σημείου ανακοπής στη θέση αποκόλλησης. Όπως προκύπτει από την τελική διαφορική εξίσωση της μεθόδου Pohlhausen ο ρυθμός μεταβολής της παραμέτρου του οριακού στρώματος γίνεται άπειρος για ένα σημείο ανακοπής πέραν του αρχικού. Οι εφαπτομενικές ταχύτητες κάθε λωρίδας που είναι δεδομένα εισόδου στη μέθοδο Pohlhausen περιέχουν, λόγω της επιβαλ-

λόμενης συνθήκης, ένα τέτοιο σημείο ανακοπής στη θέση αποκόλλησης. Ως εκ τούτου, η μέθοδος πάντα θα υπολογίζει τη θέση αποκόλλησης πιο μπροστά από την τρέχουσα εκτίμηση.

Σημειώνεται ότι παρά την αδυναμία προσδιορισμού της θέσης αποκόλλησης με τον εσωτερικό υπολογισμό που αναπτύχθηκε, η δυνατότητα μεταβολής του πλέγματος είναι πλήρως λειτουργική και αποτελεί το βασικό προϊόν αυτής της εργασίας.

6.3 Προτάσεις

Όπως δείχτηκε πιο πάνω το πρόβλημα στη σύγκλιση της θέσης αποκόλλησης οφείλεται στην ασυμβατότητα του πεδίου επιφανειακών ταχυτήτων που επιστρέφει ο κώδικας GenUVP με τη μέθοδο Pohlhausen. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας διαφορετική μέθοδο για τον υπολογισμό της αποκόλλησης, συμβατή με τον GenUVP. Επίσης θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ήδη αναπτυγμένο λογισμικό όπως οι κώδικες XFOIL και FOIL2W. Οι κώδικες αυτοί λύνουν το διδιάστατο πρόβλημα και έχουν τη δυνατότητα πρόβλεψης της αποκόλλησης. Σε κάθε περίπτωση απαιτείται αλλαγή της διεργασίας B.L. του διαγράμματος ροής των αλλαγών.

Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της αποκόλλησης θα μπορούσε να κάνει χρήση της δυνατότητας μεταβολής του πλέγματος που αναπτύχθηκε εδώ. Εφόσον όμως υπάρχει η δυνατότητα σύγκλισης της θέσης αποκόλλησης πρέπει να αναπτυχθεί πιο εξελιγμένο εργαλείο γένεσης επιφανειακού πλέγματος. Ένα τέτοιο εργαλείο θα μπορεί να χειρίζεται πιο πολύπλοκες γεωμετρίες και να παράγει εφόσον το επιθυμούμε στρεβλωμένες λωρίδες για την ακόμα ακριβέστερη προσομοίωση της τριδιάστατης αποκόλλησης.

Αναφορές

- [1] Bragg B.M Broeren P.A. “Spanwise Variation in the Unsteady Stalling Flowfields of Two-Dimensional Airfoil Models”. Στο: *AIAA Journal* (2001).
- [2] Birkhoff G. *Hydrodynamic Instability*. American Mathematical Soc., 1962.
- [3] Schewe G. “Reynolds-number effects in flow around more-or-less bluff bodies”. Στο: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* (2001).
- [4] Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [5] Humphreys J.S. “On a circular cylinder in a steady wind at transition Reynolds numbers”. Στο: *Journal of Fluid Mechanics* (1960).
- [6] Lifshitz E.M. Landau L.D. *Fluid Mechanics*. Institute of Physical Problems, U.S.S.R. Academy of Sciences, 1959.
- [7] Manolesos M. “Experimental and computational study of three-dimensional separation and its control using passive vortex generators”. Διδακτορική διατρ. NTUA, School of Mechanical Engineering, Fluids Sector, 2013.
- [8] *Manual of GenUVP7*. 2011.
- [9] Saffman P.G. *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, 1992.
- [10] Crow S.C. “Stability Theory for a Pair of Trailing Vortices”. Στο: *AIAA Journal* (1970).
- [11] Voutsinas S.G. “Vortex methods in aeronautics: how to make things work”. Στο: *International Journal of Computational Fluid Dynamics* (2006).
- [12] Barlow J.B. Winkelmann A.E. “Flowfield Model for a Rectangular Planform Wing beyond Stall”. Στο: *AIAA Journal* (1980).
- [13] Β. Γιαννάτος, “Αριθμητική διερεύνηση τριδιαστάτων, περιοδικών δομών σε αποκολλημένες ροές γύρω από πτέρυγα”. Πτυχιακή Διπλωματική Εργασία. NTUA, School of Mechanical Engineering, Fluids Sector, 2015.

- [14] Κ.Χ.Γιαννάκογλου. *Παρεμβολή μέσω Splines*. 2013. URL: <http://velos0.ltt.mech.ntua.gr/kgianna/analysis/distr/splines.pdf>.
- [15] Γ.Μπεργελές Κ.Χ.Γιαννάκογλου Ι.Αναγνωστόπουλος. *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. 2003.
- [16] Χασαπογιάννης Ι. Πέτρος. “Ανάλυση Συμπεριφοράς Αξονικού Δρομέα σε Μόνιμες και Μεταβατικές Καταστάσεις Λειτουργίας”. Διδακτορική διατρ. NTUA, School of Mechanical Engineering, Fluids Sector, 2005.
- [17] Τσαγγάρης Σωκράτης. *Μηχανική των Ρευστών*. Συμεών, 2005.