



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ

ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

**ΟΥΔΕΤΕΡΕΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΕΣ ΜΕ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗ ΣΕ
ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΤΑΣΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τζαμαλή Ευαγγελία - Μυρτώ

Επιβλέπων: Γεωργιάδης Χαράλαμπος

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

**ΟΥΔΕΤΕΡΕΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΕΣ ΜΕ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗ ΣΕ
ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΤΑΣΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τζαμαλή Ευαγγελία – Μυρτώ (09516014)

Επιβλέπων: Γεωργιάδης Χαράλαμπος,

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Τριμελής Επιτροπή

Γεωργιάδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Καττής Μαρίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ζήσης Αθανάσιος, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	5
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	10
ΟΥΔΕΤΕΡΕΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΕΣ ΣΕ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ	10
2.1 Βασικές σχέσεις αντιεπίπεδης ελαστικότητας	10
2.2 Το ελαστικό σύστημα της κυλινδρικής ελλειπτικής ανομοιογένειας.....	13
2.3 Η ουδέτερη ελλειπτική ανομοιογένεια χωρίς μανδύα	15
2.4 Αριθμητική επαλήθευση αποτελεσμάτων με πεπερασμένα στοιχεία.....	22
2.5 Η ουδέτερη κυκλική ανομοιογένεια με μανδύα	26
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	34
ΟΥΔΕΤΕΡΕΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΕΣ ΣΕ ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ	34
3.1 Εξισώσεις συνεπίπεδης ελαστικότητας	34
3.2 Περιγραφή του προβλήματος	36
3.3 Προσδιορισμός των μιγαδικών δυναμικών	38
3.4 Αριθμητική επαλήθευση αποτελεσμάτων με πεπερασμένα στοιχεία.....	44
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	46
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	46
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως είναι γνωστό, η παρουσία μιας υλικής ή γεωμετρικής ατέλει σε ένα υπό ένταση ομογενές ελαστικό σώμα, όπως είναι, για παράδειγμα, μια κοιλότητα ή μια ανομοιογένεια, προκαλεί μια τοπική διαταραχή στο ελαστικό πεδίο στην γειτονιά της. Η ιδέα της εξάλειψης μιας τέτοιας διαταραχής, που προκαλείται από μια οπή σε ένα υπό ένταση ελαστικό δίσκο, κάνοντας κατάλληλες διευθετήσεις στο σύνορό της, έχει εισαχθεί για πρώτη φορά στην μηχανική από τον Mansfield (1953). Ο Mansfield έδειξε ότι το σύνορο της οπής μπορεί να οπλισθεί κατάλληλα, έτσι ώστε το ελαστικό πεδίο του διάτρητου ελαστικού δίσκου να είναι το ίδιο με αυτό που θα υπήρχε χωρίς την παρουσία της οπής. Μια τέτοια οπή ονομάστηκε "ουδέτερη" (neutral). Στη συνέχεια, η ιδέα αυτή επεκτάθηκε στην γενικότερη περίπτωση των ανομοιογενειών που βρίσκονται σε ένα υπό ένταση ελαστικό μέσο. Στην περίπτωση αυτή, η ουδετερότητα επιτυγχάνεται με την παρεμβολή ενός κατάλληλου ελαστικού ομογενούς στρώματος μεταξύ ανομοιογένειας και ελαστικού μέσου. Το στρώμα αυτό έχει κατάλληλο πάχος και κατάλληλες ελαστικές ιδιότητες και αποτελεί την επικάλυψη της ανομοιογένειας. Ο σχεδιασμός ουδέτερων οπών ή κοιλιοτήτων και ανομοιογενειών, σε δομικά στοιχεία, έχει προσελκύσει το ιδιαίτερο ενδιαφέρον πολλών ερευνητών, τόσο από πρακτική όσο και από θεωρητική σκοπιά (Hashin, 1962; Hashin and Strikman, 1963; Richards and Bjorkman, 1982; Budiansky et al., 1993; Senocak and Waas, 1995; Benveniste and Miloh, 1999; Benveniste and Chen, 2001; Milton and Serkov, 2001; Chen et al., 2002; Vasuden and Schiavone, 2005, μεταξύ των άλλων). Σε ανομοιογένειες, ουδετερότητα επιτυγχάνεται και με την εισαγωγή μιας

κατάλληλης ατελούς διεπιφανειακής σύνδεσης μεταξύ ανομοιογένειας και ελαστικού σώματος, όπως είναι οι διεπιφάνειες μεμβρανικού ή ελατηριακού τύπου (Ru, 1998; Benveniste and Miloh, 2001; Benveniste, 2006; Benveniste, 2007; Bertoldi et al., 2007). Σχετικά πρόσφατα, μια αντίστοιχη ιδέα της ουδετερότητας έχει εισαχθεί από τον Pendry και του συνεργάτες του στη θεωρία πεδίων, με τον μανδύα μη ορατότητας (Pendry et al., 2006). Ο μανδύας μη ορατότητας είναι μια συσκευή που έχει την ικανότητα να θωρακίζει ένα αντικείμενο από το πεδίο, χωρίς να διαταράσσει την διανομή του πεδίου στο εξωτερικό της. Ο σχεδιασμός ενός τέτοιου μανδύα αναπτύχθηκε αρχικά για ηλεκτρομαγνητικά πεδία και στηρίζεται στο γεγονός ότι η μορφή των εξισώσεων του Maxwell παραμένει αναλλοίωτη κάτω από ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων. Σε ένα πεδίο, η γεωμετρία του μανδύα μη ορατότητας προκύπτει από τον μετασχηματισμό μιας συμπαγούς περιοχής του αρχικού χώρου του πεδίου, της οποίας το εξωτερικό σύνορο αποτελεί το εξωτερικό σύνορο του μανδύα. Κατά τον μετασχηματισμό συντεταγμένων, το εξωτερικό σύνορο της περιοχής παραμένει σταθερό και αποτελεί το εξωτερικό σύνορο του μανδύα, ενώ ένα εσωτερικό σημείο της περιοχής, που συμπίπτει με το μηδέν, διαμορφώνει το εσωτερικό σύνορο του μανδύα. Έτσι, ο μανδύας μη ορατότητας αποτελεί τον μετασχηματισμό μιας περιοχής του αρχικού χώρου σε μια κλειστή κελυφωτή περιοχή. Στο μετασχηματισμένο χώρο του μανδύα, η αναλλοίωτη μορφή των εξισώσεων Maxwell παρέχει την έκφραση που πρέπει να έχουν οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες στο χώρο αυτό. Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούν τον μετασχηματισμό των ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων του αρχικού χώρου. Οι Pendry et al. (2006), θεωρώντας ένα συγκεκριμένο μετασχηματισμό συντεταγμένων, σχεδίασαν σφαιρικούς και κυλινδρικούς μανδύες μη ορατότητας, που μπορούν να κατευθύνουν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα γύρω από ενσωματωμένα σε αυτά αντικείμενα κάνοντας αυτά

μη ορατά από το πεδίο. Η θεωρία αυτή επαληθεύθηκε σχεδόν αμέσως μετά, κάνοντας χρήση της τεχνολογίας των μετα-υλικών (Zhou and Hu, 2006; Narayana and Sato, 2012; Lan et al., 2015). Η θεωρία μετασχηματισμού συντεταγμένων του Pendry και των συνεργατών του άνοιξε τον δρόμο για τον έλεγχο των ηλεκτρομαγνητικών και άλλων κυμάτων και την δημιουργία νέων τεχνητών υλικών με προδιαγεγραμμένες φυσικές ή μηχανικές ιδιότητες. Τα υλικά αυτά έχουν ονομασθεί μετα-υλικά (metamaterials). Η μέθοδος μετασχηματισμού είναι μια γενική μέθοδος και μπορεί να εφαρμοσθεί σχετικά απλά, για οποιαδήποτε γεωμετρική μορφή μανδύα. Όμως, η δημιουργία των μετα-υλικών, που για ένα δεδομένο σχήμα του μανδύα θα επιδεικνύουν συγκεκριμένες ιδιότητες, είναι μια δύσκολη υπόθεση. Η δημιουργία στο εργαστήριο μετα-υλικών αποτελεί σήμερα ένα ιδιαίτερο αντικείμενο πειραματικής έρευνας στην περιοχή.

Η μέθοδος μετασχηματισμού, που αναπτύχθηκε από τον Pendry και τους συνεργάτες του, μπορεί να εφαρμοσθεί για τον σχεδιασμό μανδύων μη ορατότητας σε οποιοδήποτε πεδίο, αρκεί οι εξισώσεις του πεδίου να παραμένουν αναλλοίωτες στην μορφή τους κατά τον μετασχηματισμό συντεταγμένων. Από τον Milton et al. (2006) έχει αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις της γραμμικής ελαστικότητας, μόνο σε ειδικές μορφές του μητρώου ελαστικών σταθερών C_{ijkl} παραμένουν αναλλοίωτες κατά τον μετασχηματισμό τους σε διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων. Αυτές οι περιπτώσεις αντιστοιχούν σε ορισμένες κλάσεις μετα-υλικών, που έχουν ονομασθεί penta-mode, κλπ. (Milton and Cherkaev, 1995). Εξάιρεση στην παραπάνω γενική περίπτωση αποτελούν οι εξισώσεις της αντισυμμετρικής ελαστικότητας, που έχουν την ίδια μορφή με αυτές της διδιάστατης θερμικής αγωγιμότητας, ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, κλπ. Έτσι, οι τεχνικές σχεδιασμού μετα-υλικών που έχουν αναπτυχθεί για την επίτευξη μη ορατότητας αντικειμένων σε ηλεκτρομαγνητικά ή θερμικά πεδία, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σχεδιασμό

ουδέτερων μανδυών σε ελαστικά και ελαστοδυναμικά πεδία. Τέτοιες προσπάθειες γίνονται πρόσφατα για τον σχεδιασμό μανδυών με κατάλληλα μετα-υλικά στο έδαφος για την αντισεισμική θωράκιση κτιρίων από σεισμικά κύματα (Brun et al., 2008; Norris and Shuvalov, 2010).

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τον σχεδιασμό ουδέτερων κυλινδρικών ανομοιογενειών με επικάλυψη, που βρίσκονται σε άπειρα ελαστικά μέσα υπό ένταση. Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο μελετάται ο σχεδιασμός μιας ουδέτερης κυλινδρικής ελλειπτικής ανομοιογένειας με επικάλυψη, που βρίσκεται σε ένα άπειρο ελαστικό μέσο υπό ένταση από αντιεπίπεδες ελαστικές τάσεις στο άπειρο σύνορό του. Η ύπαρξη κατάλληλης επικάλυψης, που καθιστά την ανομοιογένεια ουδέτερη, αναζητείται στην κλάση των κυλινδρικών κελυφών, των οποίων το εξωτερικό σύνορο είναι κυλινδρικές ελλειπτικές επιφάνειες, που είναι ομοεστιακές του κυλινδρικού ελλειπτικού συνόρου της ανομοιογένειας. Δείχνεται ότι, μια τέτοια επικάλυψη υπάρχει, μόνο, όταν οι σταθερές αντιεπίπεδες τάσεις, που εφαρμόζονται στο άπειρο σύνορο του ελαστικού μέσου, είναι παράλληλες στον έναν από τους δύο ημι-άξονες της ελλειπτικής διατομής της ανομοιογένειας και τα μέτρα διάτμησης των τριών υλικών ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες. Το συμπέρασμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί από τους Milton και Serkov (2001) για ουδέτερες οπές σε αντιεπίπεδα ελαστικά πεδία. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ένα ανάλογο πρόβλημα έχει μελετηθεί στην τρισδιάστατη μορφή του στα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, όπου η ανομοιογένεια έχει την μορφή ελλειψοειδούς και η επικάλυψη, την μορφή ομοεστιακού ελλειψοειδούς κελύφους (Kerker, 1975). Η γενίκευση των αποτελεσμάτων των Milton και Serkov (2001) σε ελαστικά εγκλωβίσματα, που έγινε σχετικά πρόσφατα από τους Jarczyk and Mityushev

(2012), εμπλέκει ολοκληρο-διαφορικές και μια ιδιαίτερη μορφή σύμμορφου μετασχηματισμού κατάλληλου για δίσκους, που αδυνατεί να προσεγγίσει την περίπτωση της ουδέτερης ελλειπτικής ανομοιογένειας. Συνεπώς, το πρόβλημα της ανομοιογένειας που εξετάζεται αποτελεί ένα ανοικτό θέμα προς έρευνα. Στο πρώτο κεφάλαιο, ένα δεύτερο θέμα που εξετάζεται είναι η δυνατότητα ανάπτυξης των αποτελεσμάτων του Pendry για την μη ορατότητα ανομοιογενειών σε ελαστικά πεδία ακολουθώντας γνωστές τεχνικές της ελαστικότητας. Στην κατεύθυνση αυτή, αναπτύχθηκε μια εναλλακτική προσέγγιση για τον σχεδιασμό ουδέτερων κυλινδρικών κυκλικών κοιλοτήτων ελαστικών μέσων, ενισχύοντας το σύνορό τους με κατάλληλο μετα-υλικό (metamaterial). Στην προτεινόμενη προσέγγιση, η ενίσχυση θεωρείται ότι είναι ένα κυλινδρικό κυκλικό κέλυφος, που είναι ομοκεντρικό του συνόρου της οπής, και αποτελείται από ένα ελαστικό ανομοιογενές υλικό με κυλινδρική ορθοτροπία. Ο προσδιορισμός της ενίσχυσης έγινε επιλύοντας ένα συνοριακό πρόβλημα της αντιεπίπεδης ελαστικότητας, του οποίου άγνωστες συναρτήσεις είναι το εφαπτομενικό και ακτινικό μέτρο διάτμησης του υλικού της επικάλυψης και η αντιεπίπεδη ελαστική μετατόπιση των σημείων της επικάλυψης.

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας μελετάται το πρόβλημα της ουδέτερης κυλινδρικής κυκλικής ανομοιογένειας με επικάλυψη, που βρίσκεται σε μια άπειρη ελαστική μήτρα, όταν η μήτρα καταπονείται με σταθερές συνεπίπεδες τάσεις στο άπειρο σύνορό της. Η ανάλυση του σχετικού ελαστικού προβλήματος που γίνεται αποκαλύπτει ότι, ουδετερότητα μιας κυλινδρικής κυκλικής ανομοιογένειας με επικάλυψη σταθερού πάχους, που βρίσκεται σε ένα άπειρο ελαστικό μέσο, μπορεί να επιτευχθεί μόνο για ισότροπη καταπόνηση του ελαστικού μέσου στο άπειρο και για συγκεκριμένες συνθήκες μεταξύ των ελαστικών σταθερών των υλικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΥΔΕΤΕΡΕΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΕΣ ΣΕ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

2.1 Βασικές σχέσεις αντισίπιδης ελαστικότητας

Αναφορικά με ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , η κατάσταση της αντισίπιδης ελαστικής παραμόρφωσης ενός στερεού σώματος ορίζεται ως η διδιάστατη εκείνη ελαστική παραμόρφωσή του στην οποία, η μη μηδενική συνιστώσα του διανύσματος μετατόπισης είναι η συνιστώσα u_3 , που είναι συνάρτηση των μεταβλητών x_1 και x_2 , δηλαδή $u_3 = u_3(x_1, x_2)$. Αν το στερεό σώμα είναι ορθότροπο, του οποίου οι άξονες ορθοτροπίας συμπίπτουν με τους άξονες x_1, x_2 του συστήματος συντεταγμένων, τότε οι μη μηδενικές συνιστώσες σ_{13} και σ_{23} του τανυστή των τάσεων συνδέονται με τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης ε_{13} και ε_{23} με τις σχέσεις

$$\sigma_{13} = 2\mu_1\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2\mu_2\varepsilon_{23}, \quad (2.1)$$

όπου

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \quad (2.2)$$

Στις σχέσεις αυτές, οι σταθερές μ_1, μ_2 είναι τα μέτρα διάτμησης του υλικού στις διευθύνσεις x_1, x_2 . Όταν οι μαζικές δυνάμεις του υλικού είναι απύσες, τότε η διαφορική εξίσωση ισορροπίας παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0. \quad (2.3)$$

Αν το υλικό είναι ισότροπο, με μέτρο διάτμησης $\mu (= \mu_1 = \mu_2)$, τότε η παραπάνω εξίσωση ανάγεται στην διαφορική εξίσωση του Laplace

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0, \quad (2.4)$$

που έχει ως άγνωστη συνάρτηση την αντεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση u_3 .

Έστω το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, x_3) που συνδέεται με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με τις σχέσεις $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, x_3 = x_3$. Ως προς το σύστημα αυτό, οι καρτεσιανές συνιστώσες των τάσεων σ_{13}, σ_{23} συνδέονται με τις πολικές συνιστώσες $\sigma_{r3}, \sigma_{\theta3}$ με την σχέση

$$\sigma_{r3} - i\sigma_{\theta3} = e^{i\theta} (\sigma_{13} - i\sigma_{23}). \quad (2.5)$$

Αν το στερεό σώμα είναι κυλινδρικά ορθότροπο σε σχέση με τους άξονες r, θ του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων, τότε οι καταστατικές σχέσεις και η εξίσωση ισορροπίας έχουν την μορφή

$$\sigma_{r3} = 2\mu_r \varepsilon_{r3}, \sigma_{\theta3} = 2\mu_\theta \varepsilon_{\theta3}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta3}}{r \partial \theta} = 0. \quad (2.7)$$

όπου μ_r, μ_θ είναι τα μέτρα διάτμησης ως προς τους άξονες r, θ , αντίστοιχα, και

$$\varepsilon_{r3} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta 3} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{r \partial \theta}. \quad (2.8)$$

Στην περίπτωση του ισότροπου υλικού, η λύση της διαφορικής εξίσωσης του Laplace μπορεί να εκφρασθεί σε όρους μιας ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης $F(z)$ με την σχέση

$$u_3 = F(z) + \overline{F(z)}, \quad (2.9)$$

όπου z είναι μια μιγαδική μεταβλητή συνδεδεμένη με τους άξονες x_1, x_2 του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, δηλαδή $z = x_1 + ix_2$ ($i^2 = -1$). Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι ο τασικός συνδυασμός $\sigma_{13} - i\sigma_{23}$ μπορεί να γραφτεί σε όρους της ολόμορφης συνάρτησης $F(z)$ στην μορφή

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2\mu F'(z). \quad (2.10)$$

Έστω τώρα μια κυλινδρική διεπιφάνεια S με άπειρο μήκος που διαχωρίζει δύο ελαστικά μέσα J και K με διαφορετικά μέτρα διάτμησης. Αν τα δύο μέσα είναι τέλεια συνδεδεμένα μεταξύ τους κατά μήκος της διεπιφάνειας S και βρίσκονται σε αντιεπίπεδη κατάσταση παραμόρφωσης, έχει δειχθεί ότι το μιγαδικό δυναμικό της μιας φάσης μπορεί να εκφρασθεί σε όρους του μιγαδικού δυναμικού της άλλης φάσης. Στην περίπτωση που η S είναι μια κυκλική διεπιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες στον άξονα x_3 που απέχουν απόσταση R από αυτόν, τότε τα μιγαδικά δυναμικά $F_J(z), F_K(z)$ συνδέονται με την σχέση

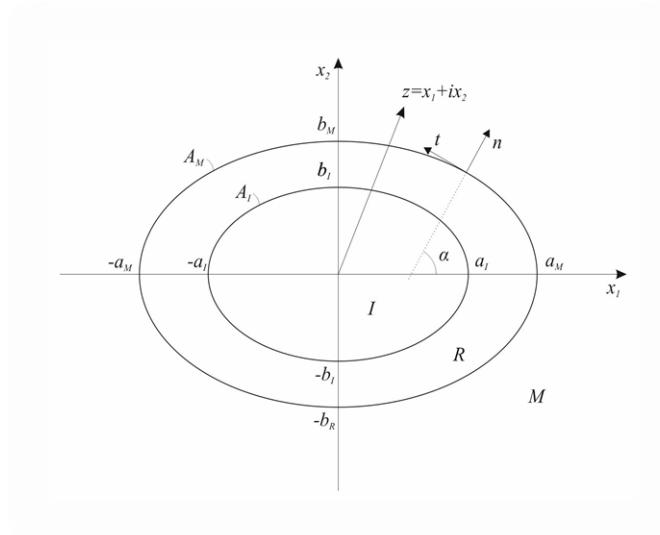
$$F_K(z) = \Gamma_{KJ} F_J(z) + \gamma_{KJ} \overline{F_J\left(\frac{R^2}{z}\right)}, \quad (2.11)$$

$$\Gamma_{KJ} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_J}{\mu_K} \right), \quad \gamma_{KJ} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_J}{\mu_K} \right). \quad (2.12)$$

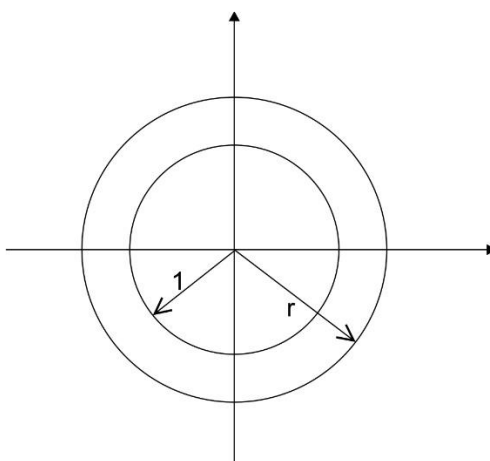
Στις παραπάνω σχέσεις, τα μ_J, μ_K είναι τα μέτρα διάτμησης των ελαστικών μέσων J, K , αντίστοιχα.

2.2 Το ελαστικό σύστημα της κυλινδρικής ελλειπτικής ανομοιογένειας

Στο Σχήμα 2.1 δείχνεται η τομή μιας άπειρης ελαστικής μήτρας, που περιέχει μια κυλινδρική ελλειπτική ανομοιογένεια με επικάλυψη, με ένα επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα της ανομοιογένειας. Στην παρακάτω ανάλυση, το επίπεδο αυτό θα είναι το επίπεδο αναφοράς και θα ταυτίζεται με το επίπεδο (x_1, x_2) ενός σταθερού καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) . Το καρτεσιανό αυτό σύστημα συντεταγμένων έχει τοποθετηθεί έτσι ώστε ο άξονας του x_3 να ταυτίζεται με τον άξονα της κυλινδρικής ανομοιογένειας και τα επίπεδα (x_2, x_3) και (x_1, x_3) , με τα επίπεδα συμμετρίας της κυλινδρικής ελλειπτικής ανομοιογένειας. Στο Σχήμα 2.1, το A_l δηλώνει το ίχνος της κυλινδρικής ελλειπτικής επιφάνειας στο επίπεδο αναφοράς, που είναι μια έλλειψη, της οποίας ο μικρός και ο μεγάλος ημι-άξονας έχουν μήκη a_l, b_l , αντίστοιχα. Το εξωτερικό σύνορο της επικάλυψης είναι, επίσης, μια κυλινδρική ελλειπτική επιφάνεια, με γενέτειρες παράλληλες στον άξονα x_3 . Στο Σχήμα 2.1(α), το A_M δηλώνει το ίχνος της έλλειψης του εξωτερικού κυλινδρικού συνόρου της επικάλυψης πάνω στο επίπεδο αναφοράς. Ο μεγάλος και μικρός ημι-άξονας της έλλειψης αυτής δηλώνονται με a_M, b_M , αντίστοιχα. Η επικάλυψη, η ανομοιογένεια και η μήτρα θεωρούνται ότι είναι από ομογενή, ισότροπα ελαστικά υλικά, που έχουν μεταξύ τους διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες. Τα τρία υλικά είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους κατά τέτοιον τρόπο, ώστε, στην αφόρτιστη κατάστασή τους, να είναι χωρίς τάσεις.



(α)



(β)

Σχήμα 2.1 Η κυλινδρική ελλειπτική ανομοιογένεια (α) στο φυσικό επίπεδο και β) στο μετασχηματισμένο επίπεδο.

Έστω τώρα ότι η μήτρα φορτίζεται με σταθερές τάσεις σ_{13}^{∞} , σ_{23}^{∞} στο εξωτερικό της σύνορο, που βρίσκεται στο άπειρο. Η φόρτιση αυτή προκαλεί μια αντιεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση στο σύστημα, της οποίας τα ελαστικά πεδία μπορούν να προσδιορισθούν από την επίλυση του σχετικού ελαστικού προβλήματος. Στην μήτρα, οι αναπτυσσόμενες

ελαστικές τάσεις συγκλίνουν στις σταθερές τάσεις σ_{13}^{∞} , σ_{23}^{∞} στο άπειρο σύνορό της, ενώ παρουσιάζουν μια έντονη διαταραχή γύρω από την επικάλυψη. Είναι προφανές ότι, αν οι ελαστικές ιδιότητες της ανομοιογένειας και της επικάλυψης γίνουν ίσες με αυτές της μήτρας, τότε οι διαταραχές αυτές εξαφανίζονται και οι τάσεις γίνονται παντού ίσες με σ_{13}^{∞} , σ_{23}^{∞} .

Αν μπορεί να βρεθεί μια κατάλληλη ελλειπτική επικάλυψη που να εξαλείφει τη διατάραξη των τάσεων στη μήτρα, τότε η επικάλυψη αυτή καθιστά την ανομοιογένεια *ουδέτερη* ως προς το ελαστικό πεδίο της μήτρας. Αν το ελαστικό πεδίο μέσα στην ανομοιογένεια δεν εξαλείφεται, τότε η επικάλυψη δεν 'θωρακίζει' την ανομοιογένεια ως προς το ελαστικό πεδίο. Στην περίπτωση αυτή, η επικάλυψη δεν αποτελεί *μανδύα* της ανομοιογένειας. Μια τέτοια επικάλυψη, καθιστά την ανομοιογένεια *ουδέτερη χωρίς μανδύα*. Αν, κατά την παραμόρφωση του συστήματος, το σύνορο της έλλειψης παραμένει αμετακίνητο, τότε η επικάλυψη καθιστά την ανομοιογένεια *ουδέτερη με μανδύα*.

2.3 Η ουδέτερη ελλειπτική ανομοιογένεια χωρίς μανδύα

Στη συνέχεια, θα διερευνηθεί αν υπάρχει εξωτερικό σύνορο της επικάλυψης της ανομοιογένειας του Σχήματος 2.1(α), που καθιστά την ανομοιογένεια *ουδέτερη χωρίς μανδύα*. Η αναζήτηση ενός τέτοιου συνόρου θα περιοριστεί στην κλάση των ελλειπτικών κυλινδρικών διεπιφανειών, των οποίων το ίχνος A_M , πάνω στο επίπεδο αναφοράς, είναι μια έλλειψη ομοεστιακή με την A_I . Προς το σκοπό αυτό, θεωρείται ο μετασχηματισμός

$$z = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad (2.13)$$

που μετασχηματίζει το μοναδιαίο κύκλο $|\zeta|=1$ ενός ζ - επιπέδου πάνω στην έλλειψη A_I του επιπέδου αναφοράς, που ταυτίζεται με το z επίπεδο. Με το μετασχηματισμό αυτό, τα εξωτερικά σημεία του μοναδιαίου κύκλου $|\zeta|=1$ αντιστοιχούν μονοσήμαντα στα εξωτερικά σημεία της έλλειψης A_I (Σχήμα 2.1(β)). Οι ημιάξονες a_I , b_I της έλλειψης A_I συνδέονται με τις παραμέτρους R_I και m του μετασχηματισμού (2.13) με τις σχέσεις

$$a_I = R_I(1+m), \quad b_I = R_I(1-m). \quad (2.14)$$

Έστω τώρα ο μοναδιαίος κύκλος $|\zeta|=r \geq 1$ του ζ -επιπέδου, ότι μετασχηματίζεται, μέσω της (2.13), στην έλλειψη A_I του z -επιπέδου. Εύκολα, μπορεί να αποδειχθεί ότι η έλλειψη A_M είναι ομοεστιακή με την έλλειψη A_I και ότι κάθε σημείο του κυκλικού δακτυλίου $1 < |\zeta| < r$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα στο πεδίο του z - επιπέδου, που βρίσκεται μεταξύ των ελλείψεων A_I και A_M και αντιπροσωπεύει την επικάλυψη. Το πεδίο αυτό θα δηλώνεται με R και το μέτρο διάτμησής του, με τη ελαστική σταθερά μ_R . Επιπρόσθετα, τα σημεία του δακτυλίου $\sqrt{m} < |\zeta| < 1$ αντιστοιχούν μονοσήμαντα στα εσωτερικά σημεία της έλλειψης A_I με εξαίρεση τα σημεία μιας ευθύγραμμης σχισμής που βρίσκεται μεταξύ των εστιών της έλλειψης $(-2\sqrt{m}, 0)$ και $(2\sqrt{m}, 0)$. Τα δύο σύνορα της σχισμής αντιστοιχούν στον κύκλο $|\zeta| = \sqrt{m}$ του ζ -επιπέδου.

Αν $f_M(\zeta)$, $f_R(\zeta)$, $f_I(\zeta)$ είναι τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας, της επικάλυψης και της ανομοιογένειας αντίστοιχα, τότε, τα αντιεπίπεδα ελαστικά πεδία στις τρεις αυτές φάσεις του συστήματος, παρέχονται με τις σχέσεις

$$\sigma_{13}^K - i\sigma_{23}^K = 2\mu_K \frac{f'_K(\zeta)}{m'(\zeta)}, \quad u_3^K = f_K(\zeta) + \overline{f_K(\zeta)}, \quad (2.15)$$

όπου σ_{13}^K , σ_{23}^K , είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες των διατμητικών τάσεων και u_3^K είναι η αντιεπίπεδη μετατόπιση. Στις σχέσεις αυτές, ο δείκτης K παίρνει τις τιμές M, R και I . Τα μ_K είναι τα μέτρα διάτμησης των τριών φάσεων. Αν στην διεπιφάνεια A_I ικανοποιούνται οι συνθήκες συνέχειας των τάσεων και μετατοπίσεων, τότε τα μιγαδικά δυναμικά της φάσης R , δηλαδή της επικάλυψης, μπορούν να εκφραστούν σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της μήτρας με την σχέση

$$f_R(\zeta) = \Gamma_{RM} f_M(\zeta) + \gamma_{RM} \overline{f_M\left(\frac{r^2}{\zeta}\right)}, \quad 1 \leq |\zeta| \leq r, \quad (2.16)$$

όπου

$$\Gamma_{RM} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_M}{\mu_R} \right), \quad \gamma_{RM} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_M}{\mu_R} \right). \quad (2.17)$$

Ομοίως, το μιγαδικό δυναμικό της ανομοιογένειας $f_I(\zeta)$ μπορεί να γραφεί σε όρους του μιγαδικού δυναμικού της επικάλυψης $f_R(\zeta)$ με τη σχέση

$$f_I(\zeta) = \Gamma_{IR} f_R(\zeta) + \gamma_{IR} \overline{f_R\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \quad \sqrt{m} \leq |\zeta| \leq 1, \quad (2.18)$$

όπου

$$\Gamma_{IR} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_R}{\mu_I} \right), \gamma_{IR} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_R}{\mu_I} \right). \quad (2.19)$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν μια τροποποιημένη μορφή των σχέσεων των διφασικών δυναμικών της αντιεπίπεδης ελαστικότητας, προκειμένου να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε τριφασικά συστήματα. Οι σχέσεις (2.16) και (2.18) έχουν αναπτυχθεί έτσι ώστε στα σύνορα A_I και A_M να εξασφαλίζεται η συνέχεια των τάσεων και των μετατοπίσεων.

Αν, με την εισαγωγή της επικάλυψης γύρω από την ανομοιογένεια, το ελαστικό πεδίο της μήτρας παραμένει αδιατάρακτο, τότε, οι τάσεις, σε κάθε σημείο της μήτρας, θα είναι σταθερές και ίσες με $\sigma_{13}^\infty, i\sigma_{23}^\infty$. Έστω $F_M(z)$ ότι είναι το μιγαδικό δυναμικό στο πεδίο M της μήτρας στο z -επίπεδο. Θα πρέπει να ισχύει

$$\sigma_{13}^\infty - i\sigma_{23}^\infty = 2\mu_M \overline{F'_M(z)}. \quad (2.20)$$

Από τη σχέση αυτή, με ολοκλήρωση προκύπτει

$$F_M(z) = \frac{\sigma_{13}^\infty - i\sigma_{23}^\infty}{2\mu_M} z, \quad (2.21)$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης έχει παραλειφθεί καθότι δεν συνεισφέρει στο τασικό πεδίο.

Στο μιγαδικό ζ -επίπεδο, το μιγαδικό δυναμικό της μήτρας γράφεται

$$f_M(\zeta) = F_M(m(\zeta)) = \Sigma^\infty R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad |\zeta| > r, \quad (2.22)$$

όπου έχει τεθεί

$$\Sigma^\infty = \frac{\sigma_{13}^\infty - i\sigma_{23}^\infty}{2\mu_M}. \quad (2.23)$$

Αν το μιγαδικό δυναμικό της μήτρας παρέχεται από τη σχέση (2.22), τότε το μιγαδικό δυναμικό της επικάλυψης μπορεί να βρεθεί από τη σχέση (2.16). Εισάγοντας την (2.22) στην (2.16) προκύπτει

$$f_R(\zeta) = R \left(\Gamma_{RM} \Sigma^\infty + \gamma_{RM} \bar{\Sigma}^\infty \frac{m}{r^2} \right) \zeta + R \left(m \Gamma_{RM} \Sigma^\infty + \gamma_{RM} \bar{\Sigma}^\infty r^2 \right) \frac{1}{\zeta}, \quad 1 \leq |\zeta| \leq r. \quad (2.24)$$

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση αυτή ορίζεται σε κάθε σημείο του κυκλικού δακτυλίου $1 \leq |\zeta| \leq r$. Στη συνέχεια, με βάση το μιγαδικό δυναμικό $f_R(z)$ που παρέχεται από τη σχέση (2.24), θα βρεθεί το μιγαδικό δυναμικό της ανομοιογένειας χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.18). Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.24) στη σχέση (2.18), βρίσκεται ότι

$$f_I(\zeta) = R \left[\left(\Gamma_{IR} \Gamma_{RM} + \gamma_{IR} \gamma_{RM} r^2 \right) \Sigma^\infty + \left(\Gamma_{IR} \gamma_{RM} \frac{m}{r^2} + \gamma_{IR} \Gamma_{RM} m \right) \bar{\Sigma}^\infty \right] \zeta + \left[\left(\Gamma_{IR} \Gamma_{RM} m + \gamma_{IR} \gamma_{RM} \frac{m}{r^2} \right) \Sigma^\infty + \left(\Gamma_{IR} \gamma_{RM} r^2 + \gamma_{IR} \Gamma_{RM} \right) \bar{\Sigma}^\infty \right] \frac{1}{\zeta}, \quad \sqrt{m} \leq \zeta \leq 1. \quad (2.25)$$

Όπως έχει προαναφερθεί, με τον μετασχηματισμό (2.13), τα δύο χείλη της ευθύγραμμης σχισμής, που βρίσκονται μεταξύ των σημείων $z_1 = -2\sqrt{m}$ και $z_2 = 2\sqrt{m}$ του άξονα x_1 , μετασχηματίζονται στον μοναδιαίο κύκλο $|\zeta| = \sqrt{m}$ του ζ -επιπέδου. Προκειμένου να εξασφαλισθεί η απαιτούμενη συνέχεια των ελαστικών πεδίων της ανομοιογένειας στη σχισμή αυτή, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη εξίσωση για το μιγαδικό δυναμικό $f_I(\zeta)$:

$$f_I(\sqrt{m}\sigma) = f_I(\sqrt{m}\bar{\sigma}), \quad (\sigma = e^{i\theta}). \quad (2.26)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.25), δείχνεται ότι η ικανοποίηση της σχέσης (2.26), εξασφαλίζεται όταν

$$\left[\left(\Gamma_{IR} \Gamma_{RM} + \gamma_{IR} \gamma_{RM} r^2 \right) \Sigma^\infty + \left(\Gamma_{IR} \gamma_{MR} \frac{m}{r^2} + m \gamma_{IR} \Gamma_{RM} \right) \bar{\Sigma}^\infty \right] m = \left[\left(m \Gamma_{IR} \Gamma_{RM} + \gamma_{IR} \gamma_{RM} \frac{m}{r^2} \right) \Sigma^\infty + \left(\Gamma_{IR} \gamma_{RM} r^2 + \gamma_{IR} \Gamma_{RM} \right) \bar{\Sigma}^\infty \right]. \quad (2.27)$$

Η σχέση (2.27) ισχύει όταν

$$\gamma_{RM} (m \gamma_{IR} - \Gamma_{IR}) r^4 + \gamma_{IR} \Gamma_{RM} (m^2 - 1) r^2 + m \gamma_{RM} (m \Gamma_{IR} - \gamma_{IR}) = 0, \quad (2.28)$$

ή

$$\gamma_{RM} (m \gamma_{IR} + \Gamma_{IR}) r^4 - \gamma_{IR} \Gamma_{RM} (m^2 - 1) r^2 - m \gamma_{RM} (m \Gamma_{IR} + m \gamma_{IR}) = 0. \quad (2.29)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι δι-τετράγωνα αλγεβρικές εξισώσεις της ακτίνας r του εξωτερικού συνόρου της επικάλυψης στο ζ -επίπεδο. Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν από το μηδενισμό του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της αριστερής πλευράς της εξίσωσης (2.27). Οι σχέσεις αυτές μπορούν να ξαναγραφτούν στη μορφή

$$r^2 = \frac{(\gamma_{IR} - m \Gamma_{IR}) (m \gamma_{RM} + \Gamma_{RM} r^2)}{(m \gamma_{IR} - \Gamma_{IR}) (\gamma_{RM} r^2 + m \Gamma_{RM})}, \quad (2.30)$$

ή

$$r^2 = \frac{(\gamma_{IR} + m \Gamma_{IR}) (m \gamma_{RM} - \Gamma_{RM} r^2)}{(m \gamma_{IR} + \Gamma_{IR}) (\gamma_{RM} r^2 - m \Gamma_{RM})}. \quad (2.31)$$

Για να είναι αποδεκτές οι λύσεις των αλγεβρικών αυτών εξισώσεων, θα πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη $r > 1$. Οι συνθήκες μεταξύ των ελαστικών παραμέτρων των τριών εμπλεκόμενων υλικών, που εξασφαλίζουν αποδεκτές λύσεις στις εξισώσεις αυτές, μπορούν να εξαχθούν εύκολα. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι, αν $m \neq 0$, οι δυο

παραπάνω εξισώσεις δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι, η ουδετερότητα της ελλειπτικής ανομοιογένειας μπορεί να επιτευχθεί, μόνο όταν η φόρτιση της μήτρας είναι είτε $\sigma_{13}^{\infty} \neq 0$ και $\sigma_{23}^{\infty} = 0$, είτε $\sigma_{13}^{\infty} = 0$ και $\sigma_{23}^{\infty} \neq 0$. Οι δύο παραπάνω σχέσεις ισχύουν ταυτόχρονα, μόνο όταν, $m = 0$, όταν δηλαδή, το σύνορο A_1 είναι περιφέρεια κύκλου. Στην περίπτωση αυτή, οι παραπάνω σχέσεις παίρνουν τη μορφή

$$r^2 = -\frac{\gamma_{IR}\Gamma_{RM}}{\Gamma_{IR}\gamma_{RM}}. \quad (2.32)$$

Η παραπάνω σχέση λόγω των (2.15) και (2.17) παίρνει τη μορφή

$$r^2 = \frac{(\mu_R - \mu_I)(\mu_R + \mu_M)}{(\mu_R + \mu_I)(\mu_R - \mu_M)}, \quad (2.33)$$

που είναι μια σχέση γνωστή στη βιβλιογραφία (Hashin and Shtrikman, 1963).

Όταν $\mu_I = 0$, η ανομοιογένεια εκφυλίζεται σε οπή. Στην ειδική αυτή περίπτωση, οι αλγεβρικές εξισώσεις (2.28) και (2.29) ανάγονται στη μορφή

$$\gamma_{RM}r^4 + \Gamma_{RM}(m-1)r^2 - m\gamma_{RM} = 0, \quad (2.34a)$$

ή

$$\gamma_{RM}r^4 - \Gamma_{RM}(m+1)r^2 + m\gamma_{RM} = 0. \quad (2.34b)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.15), οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να τεθούν στη μορφή

$$r^4 + \frac{(m-1)}{\Gamma}r^2 - m = 0, \quad (2.35a)$$

ή

$$r^4 - \frac{(m+1)}{\Gamma} r^2 + m = 0, \quad (2.35b)$$

όπου έχει τεθεί

$$\Gamma = \frac{\gamma_{RM}}{\Gamma_{RM}} = \frac{\mu_R - \mu_M}{\mu_R + \mu_M}. \quad (2.36)$$

Εύκολα προκύπτει ότι η εξίσωση (2.35a) έχει αποδεκτή λύση, όταν

$$0 < \Gamma < \frac{1-m}{2}. \quad (2.37)$$

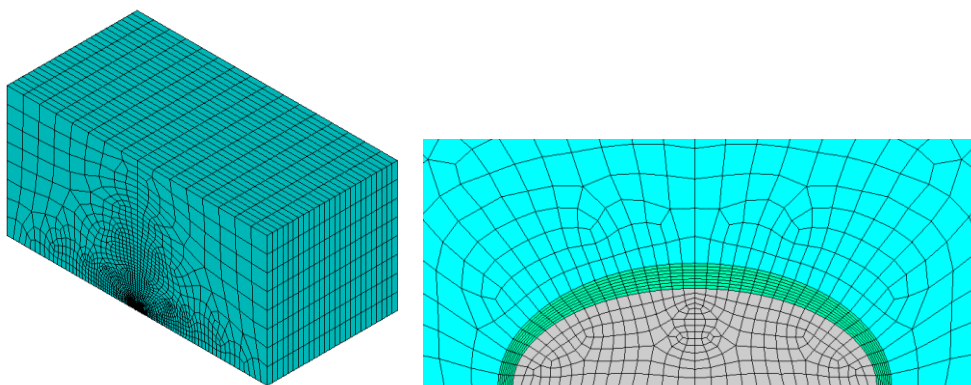
Η αποδεκτή λύση της εξίσωσης αυτής έχει τη μορφή

$$r^2 = \frac{1-m}{2\Gamma} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1-m)^2}{\Gamma^2} + 4m}. \quad (2.38)$$

Όμοιες σχέσεις προκύπτουν από τη διερεύνηση της διτετράγωνης εξίσωσης (2.35b).

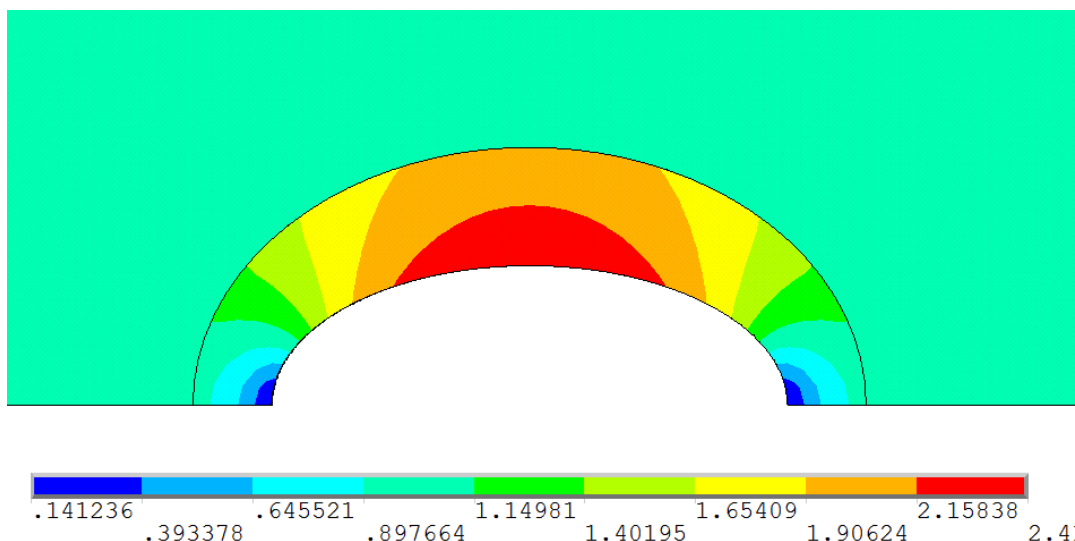
2.4 Αριθμητική επαλήθευση αποτελεσμάτων με πεπερασμένα στοιχεία

Τα αποτελέσματα, που προέκυψαν παραπάνω, επαληθεύονται στη συνέχεια με τρία αριθμητικά παραδείγματα χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ANSYS. Για τα παραδείγματα αυτά, αναπτύχθηκε το τρισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων που δείχνεται στο Σχήμα 2.2.



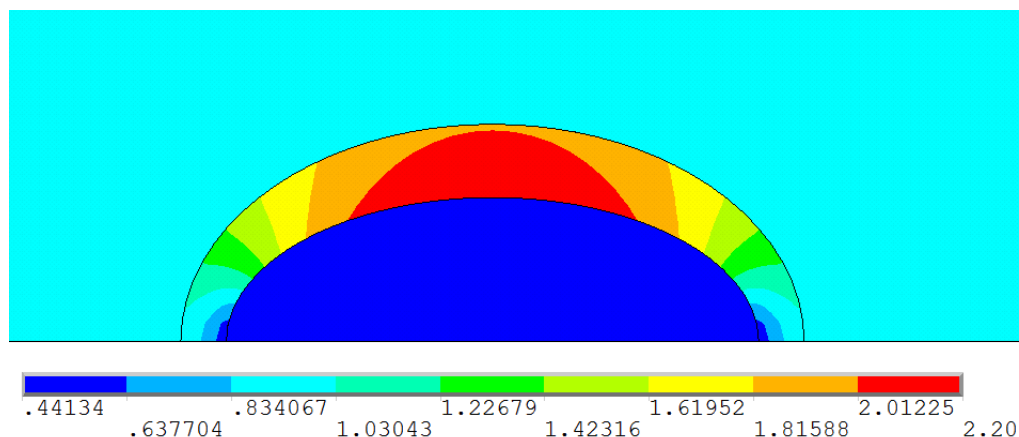
Σχήμα 2.2 Το αντιεπίπεδο μοντέλο της ελλειπτικής ανομοιογένειας και λεπτομέρεια καννάβου.

Σαν πρώτο αριθμητικό παράδειγμα (Παράδειγμα 1) θεωρήθηκε μια κυλινδρική ελλειπτική κοιλότητα, της οποίας το ελλειπτικό σύνορο ορίζεται με τις παραμέτρους $R = 100$ mm, και $m = 0.3$ του σύμμορφου μετασχηματισμού (2.13). Από τις σχέσεις (2.14) υπολογίζεται ο μεγάλος και μικρός ημι-άξονας της έλλειψης στις τιμές $a_l = 130$ mm και $b_l = 70$ mm. Για τιμές των μέτρων διάτμησης των τριών υλικών $\mu_l = 0$, $\mu_R = 100000$ MPa και $\mu_M = 50000$ MPa, από τις σχετικές σχέσεις προκύπτει $r = 1.4947$. Για την τιμή αυτή του λόγου των ακτινών, υπολογίζονται οι ημιάξονες της έλλειψης, που αντιστοιχεί στην εξωτερική επιφάνεια της επικάλυψης στις τιμές $a_M = 169.554$ mm και $b_M = 129.4$ mm. Με βάση τα στοιχεία αυτά, σχεδιάστηκε η επικάλυψη της κυλινδρικής ελλειπτικής κοιλότητας που δείχνεται στο Σχήμα 2.3. Στο σχήμα αυτό απεικονίζεται χρωματικά η εντατική κατάσταση στην μήτρα και στην επικάλυψη, όταν η φόρτιση της μήτρας στο άπειρο είναι $\sigma_{13}^\infty = 1$ MPa. Από το σχήμα αυτό γίνεται φανερό ότι, για τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν, οι τάσεις στην μήτρα παραμένουν αδιατάρακτες και είναι παντού ίσες με $\sigma_{13} = 1$ MPa.



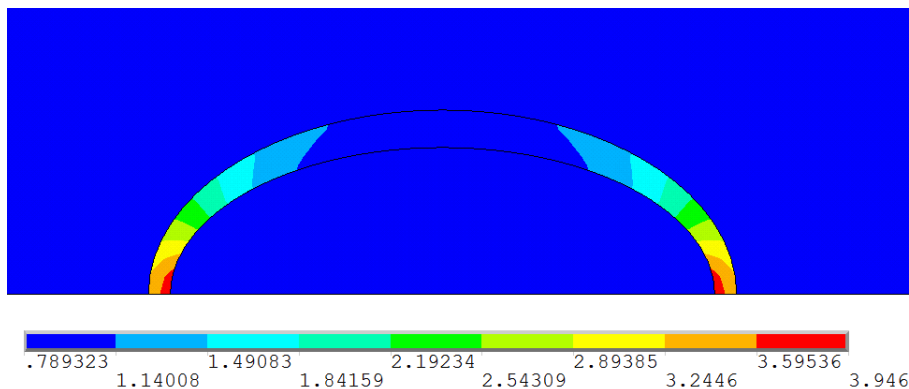
Σχήμα 2.3. Κατανομή τάσεων σ_{13} για το Παράδειγμα 1.

Σαν δεύτερο αριθμητικό παράδειγμα (Παράδειγμα 2) θεωρήθηκε μια κυλινδρική ελλειπτική ανομοιογένεια, της οποίας το ελλειπτικό σύνορο έχει τα ίδια δεδομένα με την ελλειπτική κοιλότητα του Παραδείγματος 1. Για τιμές των μέτρων διάτμησης $\mu_I = 20000$ MPa, $\mu_R = 100000$ MPa και $\mu_M = 50000$ MPa, προκύπτει $r = 1.2892$. Για την τιμή αυτή του λόγου των ακτινών, υπολογίζονται οι ημι-άξονες της έλλειψης, που αντιστοιχεί στην εξωτερική επιφάνεια της επικάλυψης στις τιμές $a_M = 152.1902$ mm και $b_M = 105.6498$ mm. Με βάση τα στοιχεία αυτά, σχεδιάστηκε η επικάλυψη της κυλινδρικής ελλειπτικής ανομοιογένειας, που αντιστοιχεί σε φόρτιση $\sigma_{13}^\infty = 1$ MPa και δείχνεται στο Σχήμα 2.4. Στο σχήμα αυτό απεικονίζεται χρωματικά η εντατική κατάσταση, που αναπτύσσεται στην μήτρα και στην επικάλυψη. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που απεικονίζονται στο σχήμα αυτό επαληθεύουν την αδιατάρακτη εντατική κατάσταση της μήτρας.



Σχήμα 2.4 Κατανομή τάσεων σ_{13} για το Παράδειγμα 2.

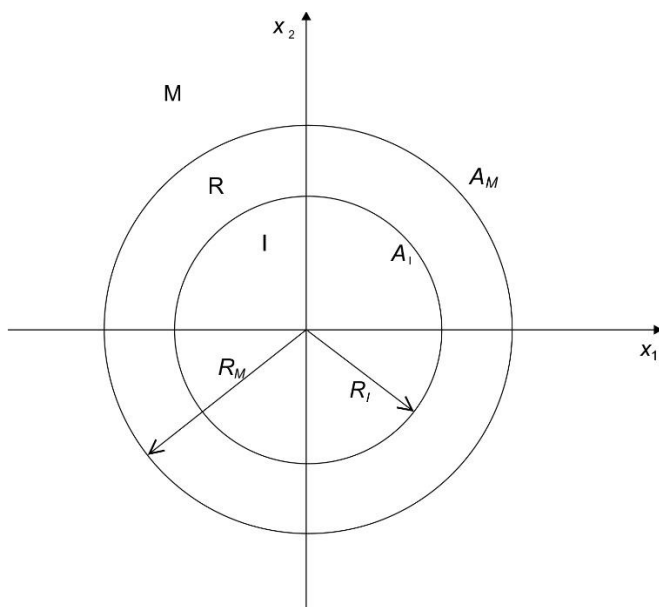
Σαν τρίτο αριθμητικό παράδειγμα (Παράδειγμα 3) θεωρήθηκε η κυλινδρική ελλειπτική ανομοιογένεια του Παραδείγματος 2 με μέτρα διάτμησης υλικών $\mu_l = 20000$ MPa , $\mu_R = 100000$ MPa και $\mu_M = 30000$ MPa . Για τα στοιχεία αυτά, υπολογίστηκαν ο λόγος των ακτινών $r = 1.1414$ και οι ημι-άξονες της έλλειψης $a_M = 140.4238$ mm , $b_M = 87.8565$ mm . Η ουδέτερη αυτή ανομοιογένεια αντιστοιχεί σε φόρτιση $\sigma_{23}^\infty = 1$ MPa και τα αποτελέσματα δείχνονται στο Σχήμα 2.5. Τα αποτελέσματα του παρακάτω σχήματος επιβεβαιώνουν την αδιατάρακτη εντατική κατάσταση της μήτρας.



Σχήμα 2.5 Κατανομή τάσεων σ_{23} για το Παράδειγμα 3.

2.5 Η ουδέτερη κυκλική ανομοιογένεια με μανδύα

Στο Σχήμα 2.6 δείχνεται η τομή μιας άπειρης ελαστικής μήτρας, που περιέχει μια κυλινδρική κυκλική κοιλότητα με επικάλυψη, με ένα επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα της κοιλότητας. Στην παρακάτω ανάλυση, το επίπεδο αυτό θα είναι το επίπεδο αναφοράς και θα ταυτίζεται με το επίπεδο $x_3 = 0$, ενός σταθερού καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) . Το καρτεσιανό αυτό σύστημα συντεταγμένων έχει τοποθετηθεί έτσι ώστε ο άξονας x_3 να ταυτίζεται με τον άξονα της κυλινδρικής κυκλικής κοιλότητας.



Σχήμα 2.6 Η κυλινδρική κυκλική ανομοιογένεια με μανδύα.

Στο Σχήμα 2.6, το A_M δηλώνει το ίχνος του εσωτερικού κυλινδρικού κυκλικού συνόρου στο επίπεδο αναφοράς, που είναι ένας κύκλος ακτίνας R_M , ενώ το A_I , το ίχνος του

συνόρου της επικάλυψης της κοιλότητας, που είναι ένας κύκλος ακτίνας R_l . Η μήτρα με την επικάλυψη θεωρείται ότι βρίσκεται σε κατάσταση αντιεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης, που προέρχεται από σταθερές αντιεπίπεδες τάσεις $\sigma_{13}^\infty, \sigma_{23}^\infty$, που εφαρμόζονται στο άπειρο σύνορό της. Στη συνέχεια, θα υποτεθεί ότι η μήτρα είναι από ομογενές και ελαστικά ισότροπο υλικό, ενώ η επικάλυψη, από ανομοιογενές ελαστικό υλικό με κυλινδρική ορθοτροπία. Στη συνέχεια, αυτό που διερευνάται είναι, αν υπάρχουν κατάλληλες συναρτήσεις του μέτρου διάτμησης της επικάλυψης στις διευθύνσεις της κυλινδρικής της ορθοτροπίας, δηλαδή στην ακτινική και στην εφαπτομενική διεύθυνση, που καθιστούν την κυλινδρική κυκλική κοιλότητα ουδέτερη.

Αναφορικά με το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, x_3) του Σχήματος 2.6, έστω $u_3^M, \sigma_{3r}^M, \sigma_{3\theta}^M$ ότι είναι τα αντιεπίπεδα ελαστικά πεδία της μήτρας, που αντιστοιχούν στην αδιατάρακτη κατάστασή της. Οι συνιστώσες αυτές συνδέονται με τις αντίστοιχες καρτεσιανές συνιστώσες με τις σχέσεις

$$\sigma_{r3}^M = \sigma_{13}^\infty \cos \theta + \sigma_{23}^\infty \sin \theta, \quad \sigma_{\theta 3}^M = -\sigma_{13}^\infty \sin \theta + \sigma_{23}^\infty \cos \theta \quad (2.39)$$

$$u_3^M = \frac{r}{\mu^M} (\sigma_{13}^\infty \cos \theta + \sigma_{23}^\infty \sin \theta) \quad (2.40)$$

Οι σχέσεις (2.39) προκύπτουν από την σχέση $(\sigma_{r3} - i\sigma_{\theta 3})^M = e^{i\theta} (\sigma_{13}^\infty - i\sigma_{23}^\infty)$, ενώ η σχέση (2.40), από την ολοκλήρωση των παρακάτω καταστατικών σχέσεων της αντιεπίπεδης ελαστικότητας

$$\sigma_{r3}^M = \mu_r^M \frac{\partial u_3^M}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta 3}^M = \mu_\theta^M \frac{\partial u_3^M}{r \partial \theta}, \quad (2.41)$$

Κατά την ολοκλήρωση των παραπάνω σχέσεων, η σταθερά ολοκλήρωσης, που αντιπροσωπεύει μετατόπιση απολύτως στερεού σώματος, έχει ληφθεί ίση με το μηδέν. Εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι οι εκφράσεις των τάσεων, που παρέχονται από τις σχέσεις (2.39), ικανοποιούν την παρακάτω διαφορική εξίσωση ισορροπίας στην μήτρα

$$\frac{\partial(r\sigma_{r3}^M)}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_{\theta 3}^M)}{\partial \theta} = 0. \quad (2.42)$$

Αν u_3^R , σ_{r3}^R , $\sigma_{\theta 3}^R$ είναι τα αντεπίπεδα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στην επικάλυψη, τότε αυτά θα πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω καταστατικές σχέσεις

$$\sigma_{r3}^R = \mu_r^R \frac{\partial u_3^R}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta 3}^R = \mu_\theta^R \frac{\partial u_3^R}{r \partial \theta}, \quad (2.43)$$

όπου $\mu_r^R = \mu_r^R(r)$ και $\mu_\theta^R = \mu_\theta^R(r)$ είναι οι άγνωστες συναρτήσεις του μέτρου διάτμησης της επικάλυψης στην ακτινική και εφαπτομενική κατεύθυνση, αντίστοιχα. Επίσης, οι τάσεις θα πρέπει να ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση ισορροπίας στην επικάλυψη

$$\frac{\partial(r\sigma_{r3}^R)}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_{\theta 3}^R)}{\partial \theta} = 0. \quad (2.44)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.43) στην διαφορική εξίσωση (2.44), προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_r^R \frac{\partial u_3^R}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_\theta^R \frac{\partial u_3^R}{r \partial \theta} \right) = 0. \quad (2.45)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι ο προσδιορισμός των ελαστικών πεδίων της επικάλυψης έχει αναχθεί στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (2.45), που εμπλέκει τρεις άγνωστες συναρτήσεις, που είναι οι $\mu_r^R(r)$, $\mu_\theta^R(r)$ και u_3^R . Οι συναρτήσεις αυτές θα πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες στα σύνορα της επικάλυψης

$$\sigma_{r3}^R = \sigma_{r3}^M, \quad u_3^R = u_3^M, \quad \text{όταν } r = R_M, \quad (2.46)$$

$$\sigma_{r3}^R = 0, \quad u_3^R = 0, \quad \text{όταν } r = R_I. \quad (2.47)$$

Οι συνθήκες της σχέσης (2.46) εκφράζουν την απαιτούμενη συνέχεια των τάσεων και των μετατοπίσεων στο εξωτερικό σύνορο της επικάλυψης. Η πρώτη συνθήκη της εξίσωσης (2.47) εκφράζει τη συνοριακή συνθήκη των τάσεων στο εξωτερικό σύνορο της επικάλυψης, ενώ η δεύτερη συνθήκη, την απαίτηση μηδενισμού της μετατόπισης στο εσωτερικό σύνορό της. Με βάση τη σχέση (2.44), οι παραπάνω συνθήκες μπορούν να εκφραστούν σε όρους των αγνώστων συναρτήσεων $\mu_r^R(r)$, $\mu_\theta^R(r)$, u_3^R , στην παρακάτω μορφή

$$\mu_r^R \frac{\partial u_3^R}{\partial r} = \mu_M \frac{\partial u_3^M}{\partial r}, \quad u_3^R = u_3^M, \quad \text{όταν } r = R_M \quad (2.48)$$

$$\mu_r^R \frac{\partial u_3^R}{\partial r} = 0, \quad u_3^R = 0, \quad \text{όταν } r = R_I. \quad (2.49)$$

Από την σχέση (2.45) προκύπτει ότι διατίθεται μια διαφορική εξίσωση και ζητούνται να προσδιοριστούν τρεις άγνωστες συναρτήσεις. Για τον προσδιορισμό των τριών αυτών συναρτήσεων, η u_3^R θα επιλεγθεί στην παρακάτω μορφή

$$u_3^R = (c_1 r + c_2) (\sigma_{13}^\infty \cos \theta + \sigma_{23}^\infty \sin \theta). \quad (2.50)$$

Από την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης $u_3^R = u_3^M$ στο σύνορο $r = R_M$, και της συνοριακής συνθήκης $u_3^R = 0$ στο σύνορο $r = R_I$, προκύπτουν οι σχέσεις

$$c_1 R_M + c_2 = \frac{R_M}{\mu_M}, \quad (2.51)$$

$$c_1 R_I + c_2 = 0, \quad (2.52)$$

από όπου

$$c_1 = -\frac{R_M}{\mu_M (R_I - R_M)}, \quad c_2 = -\frac{R_M R_I}{\mu_M (R_I - R_M)}. \quad (2.53)$$

Συνεπώς, η αντιεπίπεδη ελαστική μετατόπιση στην επικάλυψη έχει τη μορφή

$$u_3^R(r, \theta) = \frac{R_M (r - R_I)}{\mu_M (R_M - R_I)} (\sigma_{13}^\infty \cos \theta + \sigma_{23}^\infty \sin \theta). \quad (2.54)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (2.54) στη διαφορική εξίσωση (2.45) και στις συνοριακές συνθήκες των τάσεων (2.48) και (2.49), προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \mu_r^R) = \frac{\mu_\theta^R (r - R_I)}{r}, \quad (2.55)$$

$$\mu_r^R (R_M) = \mu_M \frac{R_M - R_I}{R_M}, \quad \mu_r^R (R_I) = 0. \quad (2.56)$$

Στη συνέχεια θα γίνει ο προσδιορισμός των συναρτήσεων $\mu_r^R(r)$ και $\mu_\theta^R(r)$. Αν η συνάρτηση $\mu_r^R(r)$ επιλεγθεί στη μορφή

$$\mu_r^R(r) = \mu_M \frac{r - R_I}{r}, \quad (2.57)$$

τότε οι συνοριακές συνθήκες (2.56) ικανοποιούνται αυτόματα. Αντικαθιστώντας στην συνέχεια την (2.57) στην (2.55) προκύπτει η συνάρτηση $\mu_\theta^R(r)$ στην μορφή

$$\mu_\theta^R = \mu_M \frac{r}{r - R_I} \quad (2.58)$$

Οι συναρτήσεις (2.57) και (2.58) συμπίπτουν με αυτές που έχουν εξαχθεί από τον Pendry et al. (2006) με τη μέθοδο μετασχηματισμού συντεταγμένων. Οι τάσεις που αναπτύσσονται στην επικάλυψη υπολογίζονται με τη χρήση των σχέσεων (2.40), (2.57) και (2.58) στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}\sigma_{r3}^R(r, \theta) &= \frac{R_M}{R_M - R_I} \frac{r - R_I}{r} \sigma_{r3}^\infty, \\ \sigma_{\theta 3}^R(r, \theta) &= \frac{R_M}{R_M - R_I} \sigma_{\theta 3}^\infty,\end{aligned}\tag{2.59}$$

όπου

$$\begin{aligned}\sigma_{r3}^\infty &= \sigma_{13}^\infty \cos \theta + \sigma_{23}^\infty \sin \theta, \\ \sigma_{\theta 3}^\infty &= -\sigma_{13}^\infty \sin \theta + \sigma_{23}^\infty \cos \theta.\end{aligned}\tag{2.60}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την παραπάνω τεχνική, θα προσδιοριστούν τα κατάλληλα μέτρα διάτμησης της επικάλυψης, που καθιστούν την ανομοιογένεια ουδέτερη, χωρίς όμως η επικάλυψη να είναι μανδύας. Στην περίπτωση αυτή, τα ελαστικά πεδία της επικάλυψης ικανοποιούν τις συνθήκες συνέχειας των τάσεων και μετατοπίσεων στο εξωτερικό της σύνορο και την συνθήκη μηδενισμού της ακτινικής τάσης στο εσωτερικό της σύνορο. Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση u_3^R έχει τη μορφή

$$u_3^R(r, \theta) = \left(c_1 r + \frac{c_2}{r} \right) (\sigma_{13}^\infty \cos \theta + \sigma_{23}^\infty \sin \theta),\tag{2.61}$$

από την συνοριακή συνθήκη $u_3^R = u_3^M$ στο σύνορο $r = R_M$ και από την συνθήκη

$$\mu_r^R \frac{\partial u_3^R}{\partial r} = 0 \text{ στο σύνορο } r = R_I, \text{ προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις}$$

$$c_1 R_M + \frac{c_2}{R_M} = \frac{R_M}{\mu_M}, \quad \text{όταν } r = R_M,\tag{2.62}$$

$$c_1 - \frac{c_2}{R_I^2} = 0, \quad \text{όταν } r = R_I. \quad (2.63)$$

Από το παραπάνω σύστημα βρίσκεται ότι

$$c_1 = \frac{R_M^2}{\mu_M (R_I^2 + R_M^2)}, \quad (2.64)$$

$$c_2 = \frac{R_I^2 R_M^2}{\mu_M (R_I^2 + R_M^2)}. \quad (2.65)$$

Συνεπώς η u_3^R έχει τη μορφή

$$u_3^R(r, \theta) = \frac{R_M^2}{\mu_M (R_I^2 + R_M^2)} r \left(1 + \frac{R_I^2}{r^2} \right) (\sigma_{13}^\infty \cos \theta + \sigma_{23}^\infty \sin \theta) \quad (2.66)$$

Αντικαθιστώντας την (2.66) στην εξίσωση ισορροπίας (2.45) προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_r^R \frac{r^2 - R_I^2}{r} \right) = \mu_\theta^R(r) \frac{r^2 + R_I^2}{r^2}, \quad (2.67)$$

Πάνω στο σύνορο $r = R_M$, θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη (2.48). Η συνθήκη αυτή

ικανοποιείται όταν

$$\mu_r^R(R_M) = \mu_M \frac{R_I^2 + R_M^2}{R_M^2 - R_I^2}. \quad (2.68)$$

Έτσι, αν επιλεγθεί

$$\mu_r^R(r) = \mu_M \frac{R_I^2 + R_M^2}{R_M^2 - R_I^2}, \quad (2.69)$$

τότε από τη σχέση (2.67) προκύπτει ότι

$$\mu_r^R(r) = \mu_\theta^R(r) = \mu_M \frac{R_I^2 + R_M^2}{R_M^2 - R_I^2}. \quad (2.70)$$

Συνεπώς, με βάση τις σχέσεις (2.43) προκύπτουν τα παρακάτω τασικά πεδία στην επικάλυψη

$$\sigma_{r3}^R(r, \theta) = \frac{R_M^2}{R_M^2 - R_I^2} \left(1 - \frac{R_I^2}{r^2} \right) (\sigma_{13}^\infty \cos \theta + \sigma_{23}^\infty \sin \theta) \quad (2.71)$$

$$\sigma_{\theta 3}^R(r, \theta) = -\frac{R_M^2}{R_M^2 - R_I^2} \left(1 - \frac{R_I^2}{r^2} \right) (-\sigma_{13}^\infty \sin \theta + \sigma_{23}^\infty \cos \theta) \quad (2.72)$$

Τα πεδία αυτά συμφωνούν με αυτά που έχουν εξαχθεί προηγουμένως με την κλασσική προσέγγιση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΟΥΔΕΤΕΡΕΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΕΣ ΣΕ ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

3.1 Εξισώσεις συνεπίπεδης ελαστικότητας

Στα πλαίσια της γραμμικής ισότροπης ελαστικότητας και αναφορικά με ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η κατάσταση της συνεπίπεδης παραμόρφωσης ενός στερεού σώματος ορίζεται ως η διδιάστατη εκείνη παραμόρφωση στην οποία, οι μη μηδενικές συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης είναι οι u_1, u_2 που είναι ανεξάρτητες της μεταβλητής x_3 . Τα ελαστικά πεδία της συνεπίπεδης κατάστασης μπορούν να εκφραστούν σε όρους δυο μιγαδικών ολόμορφων συναρτήσεων $\varphi(z), \psi(z)$ με τις παρακάτω σχέσεις (Mushkelisvili, 1953):

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad (3.1)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} = (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - 2i\sigma_{r\theta})e^{2i\theta} = 2[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}], \quad (3.2)$$

$$2\mu(u_1 + iu_2) = 2\mu(u_r + iu_\theta)e^{i\theta} = [\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}]. \quad (3.3)$$

Στις σχέσεις αυτές, το μ είναι το μέτρο διάτμησης, $\kappa = 3 - 4\nu$, όπου το ν δηλώνει το λόγο του Poisson, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες των τάσεων αναφορικά με το καρτεσιανό σύστημα (x_1, x_2, x_3) και $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$, οι πολικές συνιστώσες ως προς το

κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, x_3) για το οποίο $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $x_3 = x_3$. Η μιγαδική μεταβλητή z είναι συνδεδεμένη με τους άξονες x_1, x_2 του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων ($z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$, $i^2 = -1$).

Έστω μια κυλινδρική διεπιφάνεια S με άπειρο μήκος που διαχωρίζει δύο ελαστικά μέσα J και K με διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες. Αν τα δύο μέσα είναι τέλεια συνδεδεμένα κατά μήκος της διεπιφάνειας και βρίσκονται σε συνεπίπεδη παραμόρφωση, έχει δειχθεί ότι τα μιγαδικά δυναμικά της μιας φάσης μπορεί να εκφραστούν σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της άλλης φάσης (Kattis and Meguid, 1995). Αν η S είναι μια κυλινδρική κυκλική διεπιφάνεια, της οποίας οι γενέτειρες είναι παράλληλες στον άξονα x_3 του καρτεσιανού συστήματος και απέχουν απόσταση R από αυτόν, τότε τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_J(z), \psi_J(z)$ και $\varphi_K(z), \psi_K(z)$ των μέσων J και K αντίστοιχα, συνδέονται με τις σχέσεις

$$\varphi_K(z) = (1 + L_{JK})\varphi_J(z) - P_{JK} \left[z\bar{\varphi}'_J \left(\frac{R^2}{z} \right) + \bar{\psi}_J \left(\frac{R^2}{z} \right) \right], \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \psi_K(z) = & (1 + P_{JK})\psi_J(z) + (P_{JK} - L_{JK}) \frac{R^2}{z} \varphi'_J(z) - L_{JK} \bar{\varphi}_J \left(\frac{R^2}{z} \right) \\ & + P_{JK} \frac{R^2}{z} \frac{d}{dz} \left[z\bar{\varphi}'_J \left(\frac{R^2}{z} \right) + \bar{\psi}_J \left(\frac{R^2}{z} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

όπου

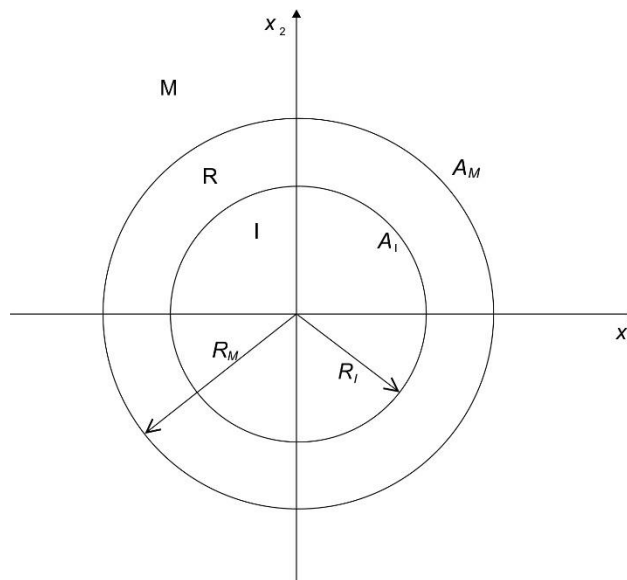
$$L_{JK} = \frac{S_J - S_K + 2(A_J - A_K)}{2(S_K + A_K)}, \quad P_{JK} = \frac{S_J - S_K}{2(S_K + A_K)}, \quad (3.6)$$

είναι δύο αδιάστατες σταθερές που εμπλέκουν τα μέτρα της επιφανειακής και διατμητικής ενδοτικότητας A_J, S_J και A_K, S_K της φάσης J, K αντίστοιχα. Τα μέτρα αυτά έχουν οριστεί από τους Dundurs and Markenscoff (1993) με τις σχέσεις

$$A_J = \frac{\kappa_J - 1}{2\mu_J}, S_J = \frac{1}{\mu_J}, A_K = \frac{\kappa_K - 1}{2\mu_K}, S_K = \frac{1}{\mu_K}. \quad (3.7)$$

3.2 Περιγραφή του προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό θα διερευνηθεί η ουδετερότητα μια κυλινδρικής κυκλικής ελαστικής ανομοιογένειας με επικάλυψη, η οποία έχει άπειρο μήκος και είναι ένθετη σε μια άπειρη ελαστική μήτρα, αναφορικά με ένα ομοιόμορφο τασικό πεδίο της μήτρας. Το ελαστικό σύστημα ανομοιογένειας - μήτρας που εξετάζεται δείχνεται στο Σχήμα 3.1. Σε σχέση με ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , του οποίου ο άξονας x_3 συμπίπτει με τον άξονα της ανομοιογένειας, το ομοιόμορφο τασικό πεδίο της μήτρας περιγράφεται με τις τάσεις $\sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty$.



Σχήμα 3.1 Η γεωμετρία της κυλινδρικής κυκλικής ανομοιογένειας με επικάλυψη.

Αναφορικά με το αυτό το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η ανομοιογένεια καταλαμβάνει το πεδίο $I = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 \leq R_I^2\}$ και η επικάλυψη, το πεδίο $R = \{(x_1, x_2, x_3) / R_I^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq R_M^2\}$. Για τον προσδιορισμό των τάσεων και των μετατοπίσεων στη φάση K του συστήματος, όπου $K = I, R$, ή M , θα προσδιορισθεί το ζεύγος $\varphi_K(z), \psi_K(z)$ των μιγαδικών δυναμικών της φάσης αυτής χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.4) και (3.5). Έτσι, η επίλυση του ελαστικού προβλήματος της ουδέτερης ανομοιογένειας ανάγεται στον προσδιορισμό των μιγαδικών δυναμικών $\varphi_K(z), \psi_K(z)$ των τριών φάσεων του συστήματος, τα οποία πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω απαιτήσεις:

- (i) να είναι παντού ορισμένα σε κάθε σημείο των πεδίων που αναφέρονται,
- (ii) οι ελαστικές τάσεις που παράγονται από τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας $\varphi_M(z), \psi_M(z)$ να είναι σταθερές και ίσες με $\sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty$ και
- (iii) τα ελαστικά πεδία που παράγονται από τα μιγαδικά δυναμικά, να ικανοποιούν τις συνθήκες συνέχειας των τάσεων και των μετατοπίσεων στις διεπιφάνειες ανομοιογένειας - επικάλυψης και επικάλυψης - μήτρας.

Η δεύτερη απαίτηση καθιστά την ανομοιογένεια ουδέτερη, με την έννοια ότι η παρουσία της δεν διαταράσσει το ελαστικό πεδίο της μήτρας. Ο προσδιορισμός των μιγαδικών δυναμικών του παραπάνω ελαστικού συστήματος, τα οποία ικανοποιούν τις παραπάνω απαιτήσεις γίνεται αμέσως παρακάτω.

3.3 Προσδιορισμός των μιγαδικών δυναμικών

Για τις φάσεις M και R του ελαστικού συστήματος, που συνδέονται κατά μήκος της κυλινδρικής κυκλικής διεπιφάνειας με την ακτίνα R_M , οι σχέσεις (3.4) και (3.5) έχουν την μορφή

$$\varphi_R(z) = (1 + L_{MR})\varphi_M(z) - P_{MR} \left[z\bar{\varphi}'_M \left(\frac{R_M^2}{z} \right) + \bar{\psi}_M \left(\frac{R_M^2}{z} \right) \right], \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \psi_R(z) = & (1 + P_{MR})\psi_M(z) + (P_{MR} - L_{MR}) \frac{R_M^2}{z} \varphi'_M(z) - L_{MR} \bar{\varphi}_M \left(\frac{R_M^2}{z} \right) \\ & + P_{MR} \frac{R_M^2}{z} \frac{d}{dz} \left[z\bar{\varphi}'_M \left(\frac{R_M^2}{z} \right) + \bar{\psi}_M \left(\frac{R_M^2}{z} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

όπου

$$L_{MR} = \frac{S_M - S_R + 2(A_M - A_R)}{2(S_R + A_R)}, \quad P_{MR} = \frac{S_M - S_R}{2(S_R + A_R)}. \quad (3.10)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, οι σταθερές A_M , A_R και S_M , S_R δηλώνουν τα μέτρα της επιφανειακής και διατμητικής ενδοτικότητας, αντίστοιχα, των φάσεων R και M και ορίζονται από τις σχέσεις

$$A_M = \frac{\kappa_M - 1}{2\mu_M}, \quad A_R = \frac{\kappa_R - 1}{2\mu_R}, \quad S_M = \frac{1}{\mu_M}, \quad S_R = \frac{1}{\mu_R}. \quad (3.11)$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη (iii) που διατυπώθηκε στην προηγούμενη ενότητα, αν η ανομοιογένεια είναι ουδέτερη, τότε οι τάσεις στη μήτρα είναι σταθερές και ίσες με σ_{11}^∞ , σ_{22}^∞ , σ_{12}^∞ . Τα μιγαδικά δυναμικά, που παράγουν τις τάσεις αυτές στη μήτρα εύκολα, μπορεί να δειχθεί ότι έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}\varphi_M(z) &= T^\infty z, \\ \psi_M(z) &= S^\infty z,\end{aligned}\tag{3.12}$$

όπου

$$T^\infty = \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty}{4} \quad \text{και} \quad S^\infty = \frac{\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty}{2} - i\sigma_{12}^\infty.\tag{3.13}$$

Αν τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας είναι γνωστά, τα μιγαδικά δυναμικά της επικάλυψης μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.8) και (3.9). Αντικαθιστώντας την σχέση (3.12) στις παραπάνω σχέσεις, βρίσκονται τα μιγαδικά δυναμικά της επικάλυψης στη μορφή

$$\varphi_R(z) = (1 + L_{MR} - P_{MP})T^\infty z - P_{MR}\bar{S}^\infty \frac{R_M^2}{z},\tag{3.14}$$

$$\psi_R(z) = (1 + P_{MR})S^\infty z + 2(P_{MR} - L_{MR})T^\infty \frac{R_M^2}{z} - P_{MR}\bar{S}^\infty \frac{R_M^4}{z^3}.\tag{3.15}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_R(z)$, $\psi_R(z)$ της επικάλυψης στις σχέσεις (3.4) και (3.5), προκύπτουν τα μιγαδικά δυναμικά της ανομοιογένειας στη μορφή

$$\varphi_I(z) = (1 + L_{RI})\varphi_R(z) - P_{RI} \left[z\bar{\varphi}'_R \left(\frac{R_I^2}{z} \right) + \bar{\psi}_R \left(\frac{R_I^2}{z} \right) \right],\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\psi_I(z) &= (1 + P_{RI})\psi_R(z) - L_{RI}\bar{\varphi}_R \left(\frac{R_I^2}{z} \right) + (P_{RI} - L_{RI})\frac{R_I^2}{z}\varphi'_R(z) \\ &\quad + P_{RI}\frac{R_I^2}{z}\frac{d}{dz} \left[z\bar{\varphi}'_R \left(\frac{R_I^2}{z} \right) + \bar{\psi}_R \left(\frac{R_I^2}{z} \right) \right],\end{aligned}\tag{3.17}$$

όπου

$$L_{RI} = \frac{S_R - S_I + 2(A_R - A_I)}{2(S_I + A_I)}, \quad P_{RI} = \frac{S_R - S_I}{2(S_I + A_I)}, \quad (3.18)$$

και

$$A_R = \frac{\kappa_R - 1}{2\mu_R}, \quad A_I = \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I}, \quad S_R = \frac{1}{\mu_R}, \quad S_I = \frac{1}{\mu_I}. \quad (3.19)$$

Οι σχέσεις (3.16) και (3.17) αποτελούν την εξειδίκευση των γενικών σχέσεων (3.4) και (3.5) για τις φάσεις R και I του συστήματος του Σχήματος 3.1. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.14) και (3.15) στις σχέσεις (3.16) και (3.17), προκύπτουν τα μιγαδικά δυναμικά της φάσης I στη μορφή

$$\begin{aligned} \varphi_I(z) = & \left[(1 + L_{RI} - P_{RI})(1 + L_{MR} - P_{MR}) - 2P_{RI}(P_{MR} - L_{MR}) \frac{R_M^2}{R_I^2} \right] T^\infty z \\ & - \left[P_{MR}(1 + L_{RI})R_M^2 + P_{RI}(1 + P_{RM})R_I^2 \right] \frac{\bar{S}^\infty}{z} \\ & - \left[P_{RI}P_{RM} \frac{R_M^2}{R_I^2} \left(1 - \frac{R_M^2}{R_I^2} \right) \right] S^\infty z^3, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \psi_I(z) = & \left[(1 + P_{RI})(1 + P_{MR}) + L_{RI}P_{MR} \frac{R_M^2}{R_I^2} + 3P_{RI}P_{MR} \frac{R_M^2}{R_I^2} \left(1 - \frac{R_M^2}{R_I^2} \right) \right] S^\infty z \\ & + \left[2(P_{MR} - L_{MR})(2P_{RI} + 1)R_M^2 + 2(1 + L_{MR} - P_{MR})(P_{RI} - L_{RI})R_I^2 \right] \frac{T^\infty}{z} \\ & - \left[P_{MR}(1 + P_{RI})R_M^4 - P_{MR}(P_{RI} - L_{RI})R_M^2R_I^2 + P_{RI}(1 + P_{MR})R_I^4 \right] \frac{\bar{S}^\infty}{z^3}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Στην γενική περίπτωση που $S^\infty \neq 0$ και $T^\infty \neq 0$, οι σχέσεις (3.20) και (3.21) δείχνουν ότι τα μιγαδικά δυναμικά της ανομοιογένειας παρουσιάζουν στο σημείο $z=0$ ιδιόμορφη συμπεριφορά, δηλαδή παράγουν τάσεις που απειρίζονται. Για να απαλειφθεί η

ανεπιθύμητη αυτή ιδιομορφία των μιγαδικών δυναμικών $\varphi_I(z)$, $\psi_I(z)$ στο σημείο $z = 0$, θα πρέπει ταυτόχρονα να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$P_{MR}(1+L_{RI})R_M^2 + P_{RI}(1+P_{MR})R_I^2 = 0, \quad (3.22)$$

$$P_{MR}(1+P_{RI})R_M^4 - P_{MR}(P_{RI}-L_{RI})R_M^2R_I^2 + P_{RI}(1+P_{MR})R_I^4 = 0, \quad (3.23)$$

$$2(P_{MR}-L_{MR})(2P_{RI}+1)R_M^2 + 2(P_{RI}-L_{RI})(1+L_{MR}-P_{MR})R_I^2 = 0, \quad (3.24)$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (3.22) με R_I^2 και αφαιρώντας την από την (3.23), προκύπτει

$$P_{MR}(1+P_{RI})R_M^4 - P_{MR}(1+P_{RI})R_M^2R_I^2 = 0, \quad (3.25)$$

από όπου $R_M = R_I$. Αυτό σημαίνει ότι για να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις (3.22), (3.23) και (3.24) θα πρέπει η επικάλυψη να εξαφανίζεται. Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν να γίνει απαλοιφή της ιδιομορφίας στη θέση $z = 0$, όταν ταυτόχρονα ισχύουν οι σχέσεις $S^\infty \neq 0$ και $T^\infty \neq 0$. Έστω τώρα ότι $S^\infty \neq 0$ και $T^\infty = 0$. Στην περίπτωση αυτή, η ιδιομορφία απαλείφεται όταν ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις (3.22) και (3.23). Όπως δείχθηκε παραπάνω, από τις σχέσεις αυτές προκύπτει $R_M = R_I$. Συνεπώς, ούτε στην περίπτωση αυτή μπορεί να επιτευχθεί η απαλοιφή της ανεπιθύμητης ιδιομορφίας. Έστω τώρα ότι $S^\infty = 0$ και $T^\infty \neq 0$. Παίρνοντας υπόψη τη σχέση (3.13), η συνθήκη αυτή ισοδυναμεί με $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty$ και $\sigma_{12}^\infty = 0$, δηλαδή με μια ισότροπη εντατική κατάσταση της μήτρας. Για την περίπτωση αυτή, η ουδετερότητα εξασφαλίζεται, όταν ισχύει η σχέση (3.24). Από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$\frac{R_I^2}{R_M^2} = -\frac{(P_{MR}-L_{MR})(2P_{RI}+1)}{(1+L_{MR}-P_{MR})(P_{RI}-L_{RI})}, \quad (3.26)$$

η οποία, συναρτήσει των σχέσεων (3.11) και (3.19), γράφεται

$$\frac{R_I^2}{R_M^2} = \frac{A_M - A_R}{A_M + S_R} \frac{A_I + S_R}{A_I - A_R}. \quad (3.27)$$

Η παραπάνω σχέση παρέχει τον λόγο των ακτίνων του κυκλικού συνόρου της επικάλυψης, για τον οποίο επιτυγχάνεται ουδετερότητα, όταν η φόρτιση της μήτρας είναι ισότροπη. Όμως, για να γίνει αποδεκτός ο λόγος αυτός, θα πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω σχέση

$$0 < \frac{R_I}{R_M} < 1. \quad (3.28)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.27), με στοιχειώδη άλγεβρα, προκύπτει ότι η συνθήκη αυτή εξασφαλίζεται, όταν ισχύει η μια από τις παρακάτω σχέσεις

$$A_R > \max \{A_M, A_I\} \text{ και } A_I < A_M, \quad (3.29)$$

$$A_R < \min \{A_M, A_I\} \text{ και } A_I > A_M. \quad (3.30)$$

Όταν $A_I \rightarrow \infty$, ο πυρήνας I εκφυλίζεται σε κοιλότητα και η σχέση (3.27) γράφεται

$$\frac{R_I^2}{R_M^2} = \frac{A_M - A_R}{A_M + S_R}, \quad (3.31)$$

που είναι αποδεκτή όταν ισχύει η συνθήκη $A_M > A_R$.

Συνεπώς, για την ουδέτερη ανομοιογένεια της συνεπίπεδης ελαστικότητας, τα μιγαδικά δυναμικά των τριών φάσεων του συστήματος προέκυψαν στη μορφή

$$\varphi_M(z) = T^\infty z, \quad \psi_M(z) = 0, \quad (3.32)$$

$$\varphi_R(z) = \frac{S_R + A_M}{S_R + A_R} T^\infty z, \quad \psi_R(z) = 2 \frac{A_R - A_M}{S_R + A_R} \frac{R_M^2}{z} T^\infty, \quad (3.33)$$

$$\varphi_I(z) = \frac{S_R + A_M}{S_R + A_I} T^\infty z, \quad \psi_I(z) = 0 \quad (3.34)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.1) - (3.3) προκύπτουν τα παρακάτω ελαστικά πεδία

$$\sigma_{rr}^M = \sigma_{\theta\theta}^M = P^\infty, \quad (3.35)$$

$$u_r^M = A_M \frac{P^\infty}{2} r, \quad (3.36)$$

για τη μήτρα,

$$\sigma_{rr}^R = \left[\frac{S_R + A_M}{S_R + A_R} + \frac{A_R - A_M}{S_R + A_R} \frac{R_M^2}{r^2} \right] P^\infty, \quad (3.37)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^R = \left[\frac{S_R + A_M}{S_R + A_R} - \frac{A_R - A_M}{S_R + A_R} \frac{R_M^2}{r^2} \right] P^\infty, \quad (3.38)$$

$$u_r^R = \left[A_R \frac{S_R + A_M}{S_R + A_R} - S_R \frac{A_R - A_M}{S_R + A_R} \frac{R_M^2}{r^2} \right] r \frac{P^\infty}{2}, \quad (3.39)$$

για την επικάλυψη,

$$\sigma_{rr}^I = \sigma_{\theta\theta}^I = \left[\frac{S_R + A_M}{S_R + A_I} \right] P^\infty, \quad (3.40)$$

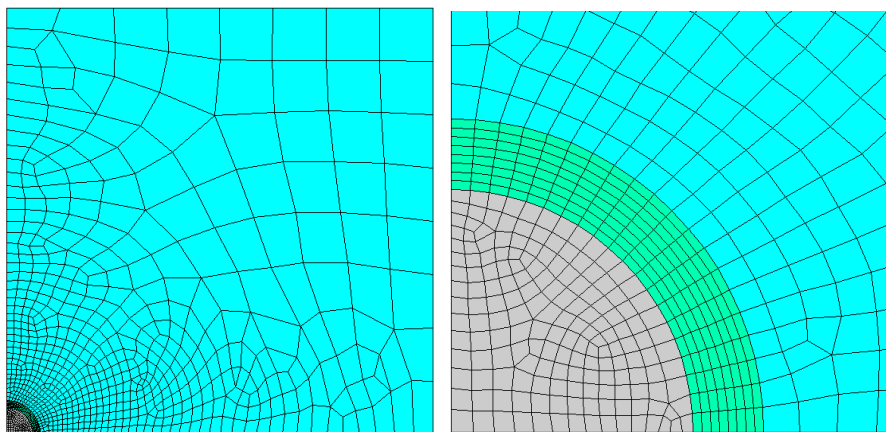
$$u_r^I = \left[A_I \frac{S_R + A_M}{S_R + A_I} \right] r \frac{P^\infty}{2}, \quad (3.41)$$

για την ανομοιογένεια, όπου

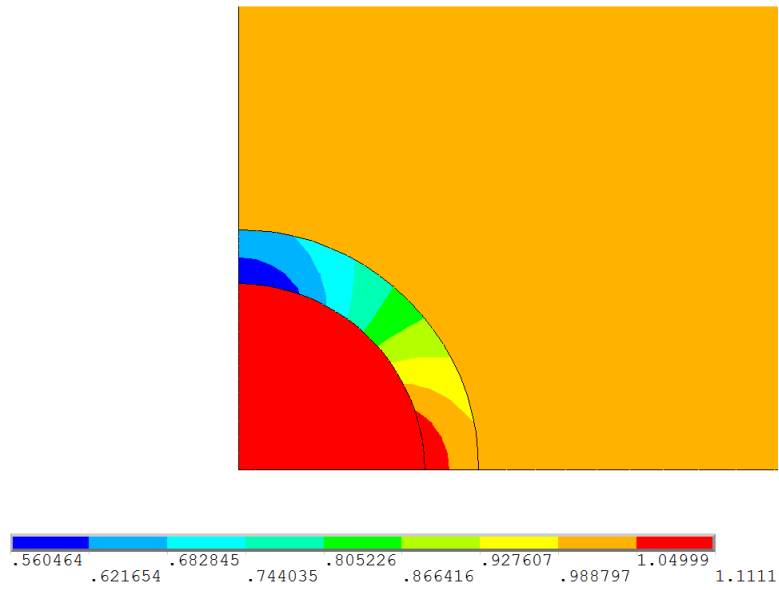
$$P^\infty = 2T^\infty = \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty}{2} \quad (3.42)$$

3.4 Αριθμητική επαλήθευση αποτελεσμάτων με πεπερασμένα στοιχεία

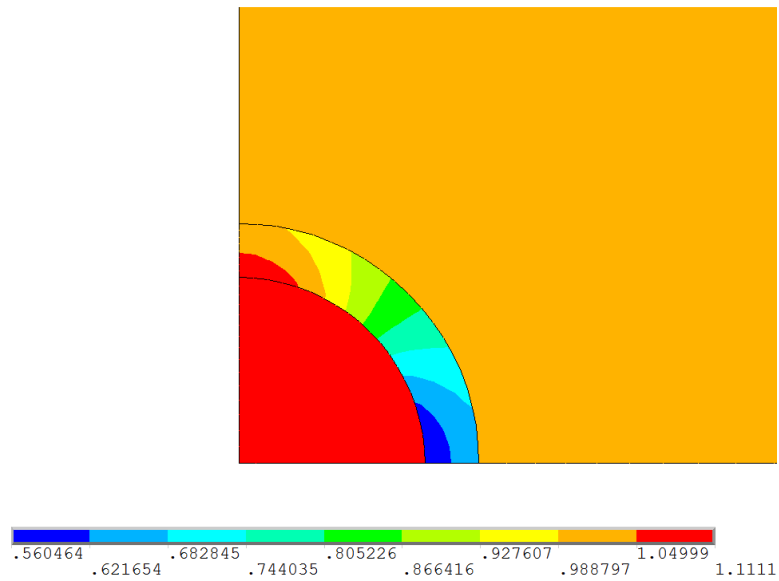
Στη συνέχεια, τα αποτελέσματα που προέκυψαν στο κεφάλαιο αυτό επαληθεύονται με αριθμητικά παραδείγματα χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ANSYS. Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε δείχνεται στο Σχήμα 3.2. Λόγω συμμετρίας, μοντελοποιήθηκε το $\frac{1}{4}$ της γεωμετρίας του ελαστικού συστήματος και εφαρμόστηκαν τάσεις $\sigma_{11}^{\infty} = 1 \text{ MPa}$ και $\sigma_{22}^{\infty} = 1 \text{ MPa}$ στις εξωτερικές επιφάνειες του μοντέλου, ενώ επιβλήθηκαν συνοριακές συνθήκες συμμετρίας στους κόμβους του. Στους υπολογισμούς, χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές $R_I = 61.968 \text{ mm}$ και $R_M = 80 \text{ mm}$, για τις ακτίνες της επικάλυψης, που υπολογίσθηκαν από την σχέση (2.37), θέτοντας $\mu_I = 200000 \text{ MPa}$, $\mu_R = 50000 \text{ MPa}$, $\mu_M = 100000 \text{ MPa}$ και $\nu_I = \nu_R = \nu_M = 0.25$. Η κατανομή των τάσεων εμφανίζεται στα Σχήματα 3.3 και 3.4.



Σχήμα 3.2 Ο κάρναβος πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 3.3 Κατανομή τάσεων σ_{11} .



Σχήμα 3.4 Κατανομή τάσεων σ_{22} .

Τα αποτελέσματα των σχημάτων αυτών δείχνουν ότι και οι δύο ορθές τάσεις είναι σταθερές στη μήτρα, επιβεβαιώνοντας το αποτέλεσμα που προέκυψε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, μελετήθηκε το πρόβλημα της ουδέτερης κυλινδρικής ελλειπτικής ανομοιογένειας με επικάλυψη, που βρίσκεται σε ένα άπειρο ελαστικό μέσο που καταπονείται από αντιεπίπεδες σταθερές τάσεις στο άπειρο σύνορό του. Η ελαστική ανάλυση έγινε με την μέθοδο των διφασικών δυναμικών της αντιεπίπεδης ελαστικότητας, σε συνδυασμό με την τεχνική του σύμμορφου μετασχηματισμού. Η ύπαρξη επικάλυψης, που καθιστά την ανομοιογένεια ουδέτερη, αναζητήθηκε στην κλάση των κυλινδρικών κελυφών, των οποίων το εξωτερικό σύνορο είναι κυλινδρικές ελλειπτικές επιφάνειες, που είναι ομοεστιακές του κυλινδρικού ελλειπτικού συνόρου της ανομοιογένειας. Τα κυλινδρικά αυτά κελύφη, θεωρήθηκε ότι αποτελούνται από ομογενή και ισότροπα ελαστικά υλικά, με διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες από αυτές των υλικών της ανομοιογένειας και του ελαστικού μέσου. Δείχθηκε ότι, μια τέτοια επικάλυψη υπάρχει, μόνο, όταν οι σταθερές αντιεπίπεδες τάσεις, που εφαρμόζονται στο άπειρο σύνορο του ελαστικού μέσου, είναι παράλληλες στον έναν από τους δύο ημι-άξονες της ελλειπτικής διατομής της ανομοιογένειας και τα μέτρα διάτμησης των τριών υλικών ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες. Το συμπέρασμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί από τους Milton και Serkov (2001) για ουδέτερες οπές σε αντιεπίπεδα ελαστικά πεδία. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, η γενίκευση των αποτελεσμάτων των Milton και Serkov, που έγινε αργότερα από τους Jarczyk and Mityushev (2012) για ελαστικά εγκλωβίσματα, εμπλέκει ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις

και μια ιδιαίτερη μορφή σύμμορφου μετασχηματισμού κατάλληλου για δίσκους, που αδυνατεί να προσεγγίσει την περίπτωση της ουδέτερης ελλειπτικής ανομοιογένειας. Τα παραπάνω γενικά αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν με τον σχεδιασμό δυο συγκεκριμένων ουδέτερων κυλινδρικών ελλειπτικών ανομοιογενειών και μιας ουδέτερης κυλινδρικής ελλειπτικής κοιλότητας χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ANSYS.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, αναπτύχθηκε μια εναλλακτική προσέγγιση από αυτή του Pendry και των συνεργατών του για τον σχεδιασμό ουδέτερων κυλινδρικών κυκλικών κοιλότητων ελαστικών μέσων, ενισχύοντας το σύνορό τους με κατάλληλο μετα-υλικό (metamaterial). Στην προτεινόμενη προσέγγιση, η ενίσχυση θεωρείται ότι είναι ένα κυλινδρικό κυκλικό κέλυφος, που είναι ομοκεντρικό του συνόρου της οπής, και αποτελείται από ένα ελαστικό ανομοιογενές υλικό με κυλινδρική ορθοτροπία. Ο προσδιορισμός της ενίσχυσης έγινε επιλύοντας ένα συνοριακό πρόβλημα της αντιεπίπεδης ελαστικότητας, του οποίου άγνωστες συναρτήσεις είναι το εφαπτομενικό και ακτινικό μέτρο διάτμησης του υλικού της επικάλυψης και η αντιεπίπεδη ελαστική μετατόπιση των σημείων της επικάλυψης. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αυτού είναι η συνέχεια των ακτινικών τάσεων, των μετατοπίσεων και των ακτινικών μέτρων διάτμησης του υλικού στο εσωτερικό και εξωτερικό σύνορο της επικάλυψης. Δείχθηκε ότι το συνοριακό αυτό πρόβλημα επιδέχεται πολλαπλές αποδεκτές λύσεις, που αντιστοιχούν σε μια ποικιλία διαφορετικών επιλογών του μετα-υλικού της ενίσχυσης. Δείχθηκε επίσης, ότι η λύση των Pendry και των συνεργατών του, που έχει εξαχθεί για το αντίστοιχο πρόβλημα με την μέθοδο μετασχηματισμού συντεταγμένων, προκύπτει από μια συγκεκριμένη επιλογή της συνάρτησης του ακτινικού μέτρου διάτμησης και από την απαίτηση μηδενισμού της αντιεπίπεδης μετατόπισης στο εσωτερικό σύνορο της

επικάλυψης. Ο μηδενισμός της ακτινικής διατμητικής δύναμης στο εσωτερικό σύνορο της επικάλυψης είναι επακόλουθο του μηδενισμού του ακτινικού μέτρου διάτμησης στο σύνορο αυτό. Επίσης, δείχθηκε ότι η επίτευξη ουδετερότητας της κυλινδρικής κυκλικής κοιλότητας, με ενίσχυση συμβατικών υλικών, έτσι όπως διερευνήθηκε στο κεφάλαιο 1 της εργασίας, αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη επιλογή της συνάρτησης του ακτινικού μέτρου διάτμησης απαιτώντας ταυτόχρονα τον μηδενισμό της ακτινικής παραγώγου της αντεπίπεδης μετατόπισης στο εσωτερικό σύνορο της επικάλυψης. Η τελευταία απαίτηση είναι ισοδύναμη με την συνοριακή συνθήκη μηδενισμού των ακτινικών τάσεων στο σύνορο αυτό, που όμως δεν καθιστά την επικάλυψη ως μανδύα της ανομοιογένειας σύμφωνα με την ορολογία του Penderg.

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας, μελετήθηκε το πρόβλημα της ουδέτερης κυλινδρικής κυκλικής ανομοιογένειας με επικάλυψη, που βρίσκεται σε μια άπειρη ελαστική μήτρα, όταν η μήτρα καταπονείται με σταθερές συνεπίπεδες τάσεις στο άπειρο σύνορό της. Η ανάλυση του σχετικού ελαστικού προβλήματος, που έγινε με την μέθοδο των διφασικών μιγαδικών δυναμικών, αποκάλυψε ότι, ουδετερότητα μιας κυλινδρικής κυκλικής ανομοιογένειας με επικάλυψη σταθερού πάχους, που βρίσκεται σε ένα άπειρο ελαστικό μέσο, μπορεί να επιτευχθεί μόνο για ισότροπη καταπόνηση του ελαστικού μέσου στο άπειρο και για συγκεκριμένες συνθήκες μεταξύ των ελαστικών σταθερών των υλικών. Οι συνθήκες αυτές έχουν εκφραστεί σε όρους των μέτρων επιφανειακής και διατμητικής ενδοτικότητας των εμπλεκόμενων υλικών. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώθηκε αριθμητικά με τον σχεδιασμό μιας κυλινδρικής κυκλικής κοιλότητας με ενίσχυση, χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ANSYS.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Benveniste, Y., Miloh, T. (1999) ‘Neutral inhomogeneities in conduction phenomena’, *J. Mech. Phys. Solids* 4, 197–208.

Benveniste, Y., Chen, T. (2001) ‘On the Saint-Venant torsion of composite bars with imperfect interfaces’, *Proc. R. Soc. Lond A* 457, 231–255.

Benveniste, Y., Miloh, T. (2001) ‘Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity’, *Mech. Mater.* 33, 309–323.

Benveniste, Y. (2006) ‘A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media’, *J. Mech. Phys. Solids* 54, 708–734.

Benveniste, Y. (2007) ‘Corrigendum to: A general interface model for a three-dimensional curved anisotropic interphase between two anisotropic media’, *J. Mech. Phys. Solids* 55, 666–667.

Bertoldi, K., Bigoni, D., Drugan, W.J. (2007) ‘Structural interfaces in linear elasticity. Part I: Nonlocality and gradient approximations’, *J. Mech. Phys. Solids* 55, 1–34.

Brun, M., Guenneau, S., Movchan, B. (2009) ‘Achieving control of in-plane elastic waves’, *App. Phys. Lett* 94, 061903.

Budiansky, B., Hutchinson, J.W., Evans, A.G. (1993) ‘On neutral holes in tailored sheets’ *J. Appl. Mech.* 60, 1056–1058.

Chen, T., Benveniste, Y., Chuang, P.C. (2002) ‘Exact solutions in torsion of composite bars: thickly coated neutral inhomogeneities and composite cylinder assemblages’, *Proc. R. Soc. Lond. A* 458, 1719–1759.

- Dundurs, J., Markenscoff, X. (1993) ‘Invariance of stresses under a change in elastic compliances’, *Proc. R. Soc. Lond. A* 443, 289-300.
- Hashin, Z. (1962) ‘The elastic moduli of heterogeneous materials’, *J. Appl. Mech.* 29, 143–150.
- Hashin, Z., Shtrikman, S. (1963) ‘A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials’, *J. Appl. Phys.* 33, 3125–3131.
- Jarczyk P., Mityushev, V. (2012) ‘Neutral coated inclusions of finite conductivity’, *Proc. R. Soc. A.* 468, 954-970.
- Kattis, M.A., Meguid, S.A. (1995) ‘Two phase potentials for the treatment of an elastic inclusion in plane thermoelasticity’, *J. Appl. Mech.* 62(1), 7-12.
- Kerker, M. (1975) ‘Invisible bodies’ *J. Opt. Soc. Am.* 65, 376-379.
- Lan, C., Yang, Y., Geng, Z., Li, B., Zhou, J. (2015) ‘Electrostatic field invisibility cloak’, *Scientific Reports* 5, 16416.
- Mansfield, E.H. (1953) ‘Neutral holes in plane sheet—reinforced holes which are equivalent to the uncut sheet’, *Q. J. Mech. Appl. Math.* 6, 370–378.
- Milton, G.W., Cherkaev, A.V. (1995) ‘Which elasticity tensors are realizable?’, *ASME J. Eng. Mater. Technol.* 117, 483-493.
- Milton, G.W., Serkov, S.K. (2001) ‘Neutral coated inclusions in conductivity and anti-plane elasticity’, *Proc. R. Soc. Lond. A* 457, 1973–1997.
- Milton, G.W., Briane, M., Willis, J.R. (2006) ‘On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form’, *New J. Phys.* 8, 248.
- Milton, G.W., Nicorovici, N.A. (2006) ‘On the cloaking effects associated with anomalous localized resonance’, *Proc. R. Soc. Lond. A* 462, 3027–3059.

- Muskhelishvili, N. (1953) *Some basic problems in the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff, Groninger.
- Narayana, S., Sato, Y. (2012) ‘Heat flux manipulation with engineered thermal materials’, *Phys. Rev. Lett.* 108, 214303.
- Pendry, J.B., Schurig, D., Smith, D.R. (2006) ‘Controlling electromagnetic waves’, *Science* 312, 1780–1782.
- Richards, R. Jr., Bjorkman, G.S. Jr. (1982) ‘Neutral holes—theory and design’, *J. Eng. Mech. Div.* 108, 945–960.
- Ru, C.Q. (1998) ‘Interface design of neutral elastic inclusions’, *Int. J. Solids Struct.* 35, 557–572.
- Senocak, E., Waas, A. (1995) ‘Neutral cutouts in laminated plates’, *Mech. Compos. Mater. Struct.* 2, 71–89.
- Vasudevan, M., Schiavone, P. (2005) ‘Design of neutral inhomogeneities in the case of non-uniform loading’, *Int. J. Eng. Sci.* 43, 1081–1091.
- Zhou, X., Hu, G. (2006) ‘Design for electromagnetic wave transparency with metamaterials’, *Phys. Rev. E.* 74 ,026607.